بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FGM تحت فشار با روابط کرنش- جابه‌جایی غیرخطی بر اساس FSDT

دانشجو:

محمد حسین سوهانی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد

شهریور ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (6)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد حسین سوهانی رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FGM تحت فشار با روابط کرنش جابه‌جایی غیرخطی بر اساس FSDT

که در تاریخ ۱۳۹۳/۰۶/۲۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

۱۸/۸۳

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸/۸۳) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

1ـ عالی (20 ـ 19) 2ـ بسیار خوب (18/99 ـ 18)

3ـ خوب (17/99 ـ16) 4ـ قابل قبول (15/99 ـ 14)

5- نمره کمتر از 14 غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
1ـ استادراهنما	دکتر مهدی قنّاد کهتوئی	استادیار	
2ـ استاد مشاور			
3ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مجید محمدی	استادیار	
4ـ استاد ممتحن	دکتر حمیدرضا ایپک‌چی	دانشیار	
5 ـ استاد ممتحن	دکتر امیر جلالی	استادیار	

رئیس دانشکده : امضاء

دانشکده مکانیک

دانشگاه صنعتی شاهرود

﴿أَلَیسَ اللهُ بِکافٍ عَبدَهُ﴾

قرآن کریم، س۳۹، آ۳۶

اثر حاضر را - اگر ارزشی باشد -

با افتخار و عشق پیشکش می‌کنم به خداوندگاران مهر و مهربانی،

به پدر و مادرم،

به پاس قطره‌ای از جرعه جرعه‌ی شراب بخشش و بخشایشی که نوشاندند؛

و شرنگ رنج و اندوهی که نوشیدند.

تشکر و قدردانی

پس از سپاس و ستایش بی‌کران پروردگار یکتا، درود بر پیامبر خاتم (ص) و خاندان پاکش (ع) و دعا برای تعجیل در فرج امام عصر (عج)؛

بر خود واجب می‌دانم که بیش و پیش از همه، از پدر و مادر عزیزتر از جانم، که بزرگ‌ترین لطف و نعمت الهی در زندگی من بوده و هستند، به‌سبب حمایت‌ها و کمک‌های بی‌دریغ مادّی و معنوی‌شان خالصانه و صمیمانه سپاس‌گزاری نمایم. از درگاه خداوند متعال برایشان طلب آمرزش، سلامتی و طول عمر دارم.

همچنین، از استاد ارجمند و معلم بزرگوار خویش، که به‌حق تجسم کامل معنای معلم هستند، جناب آقای دکتر مهدی قنّاد، برای هدایت این پایان‌نامه و به‌خاطر تمام آن‌چه به من آموختند، قدردانی می‌نمایم.

نیز، از خواهر دلبندم، سرکار خانم مهندس فاطمه سوهانی، به‌خاطر هم‌فکری‌ها، هم‌زبانی‌ها و هم‌دلی‌های صمیمانه‌اش تشکر می‌کنم. بی‌شک بدون حضور او این پژوهش چنین آغاز و انجامی نمی‌داشت.

در پایان، از همکاری‌ها و کمک‌های جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپک‌چی، جناب آقای دکتر امیر جلالی، جناب آقای مهندس مسعود بابایی، جناب آقای مهندس حامد قارونی، جناب آقای مهندس محمد پرهیزکار یعقوبی و نیز همه‌ی دوستان و استادانی که ذکر نام تک‌تک آن‌ها مقدور و میسر نیست، متشکرم و از درگاه خداوند برای تمام این عزیزان بهروزی و کامیابی روزافزون و حسن عاقبت خواستارم.

امیدوارم این پایان‌نامه بخشی هرچند ناچیز از زحمات و همراهی‌های خانواده، استادان و دوستان عزیزم را جبران کرده باشد.

محمد حسین سوهانی

هفتم شهریور ماه ۱۳۹۳

تعهد نامه

اینجانب محمد حسین سوهانی دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته ی مهندسی مکانیک، گرایش طراحی کاربردی، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان‌نامه تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم FGM تحت فشار با روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی بر اساس FSDT، تحت راهنمائی دکتر مهدی قناد متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

در پژوهش حاضر، معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار، در حالت تعادل استاتیکی، با فرض برقراری روابط کرنش- جابه‌جایی (سینماتیک) غیرخطی (تانسور کرنش گرین-لاگرانژ) بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول استخراج شده است. فرض تقارن محوری کامل در مسأله برقرار و ضخامت استوانه ثابت است. پوسته از مادّه‌ی همسانگرد و ناهمگن تابعی با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای ضخامت ساخته شده است و رفتار مادّه به صورت الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. نسبت پواسون در سرتاسر پوسته ثابت فرض شده است که یک فرض متداول در تحلیل مواد ناهمگن تابعی است. استوانه دوسرگیردار بوده و تحت فشارهای داخلی و خارجی یکنواخت، مستقل از زمان و پایستار (نادنبالگر) قرار دارد.

معادلات حاکم بر پوسته، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی کوپل‌شده، از مرتبه‌ی دو و با ضرایب ثابت هستند. این معادلات به کمک اصل کار مجازی استخراج شده و به کمک تئوری اغتشاشات (روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته) حل شده است. حل تحلیلی معادلات تا مرتبه‌ی دو انجام شده است. همچنین مدل‌سازی پارامتری المان محدود مسأله به کمک زبان طراحی پارامتری انسیس نیز انجام گرفته است. با توجه به نتایج حاصل از تحلیل، تأثیر تغییرات پارامترهای هندسی، بارگذاری، جنس و ناهمگنی بر پاسخ غیرخطی بررسی شده است. نتایج حاصل از تحلیل، با نتایج به‌دست آمده از روش المان محدود مقایسه و اعتبارسنجی شده است.

کلیدواژگان: پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، روابط سینماتیک غیرخطی، روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نمادها

$[A_1], [A_2], [A_3]$	ماتریس‌های اصلاح‌شده‌ی ضرایب
$[\bar{A}_1], [\bar{A}_2], [\bar{A}_3]$	ماتریس‌های ضرایب
$[A_1]_{ij}, [A_2]_{ij}, [A_3]_{ij}$	درایه‌های ماتریس‌های اصلاح‌شده‌ی ضرایب
$[\bar{A}_1]_{ij}, [\bar{A}_2]_{ij}, [\bar{A}_3]_{ij}$	درایه‌های ماتریس‌های ضرایب
$\mathbf{b}$	بارهای حجمی
$\mathbf{C}$	تانسور راست کوشی-گرین
$C_i, C_i^l, C_i^r, C_{ij}$	ثابت‌های حل
$D_\eta, D_\eta^2, D_\xi, D_\xi^2$	مشتقات مرتبه‌ی یک و دو نسبت به متغیرهای کشیده‌شده
$\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z, \hat{\mathbf{e}}_\theta$	بردارهای جهت
$\mathbf{E}$	تانسور کرنش گرین-لاگرانژ
$E(r), E(z)$	مدول الاستیسیته در پوسته‌ی ناهمگن تابعی
E_i	مدول الاستیسیته در شعاع داخلی
E_{ij}	درایه‌های تانسور کرنش گرین
$\mathbf{f}_i$	نیروهای متمرکز
$\{f_i\}$	شبه‌بردارهای بارگذاری در بسط خارجی
$\{f_i^l\}, \{f_i^r\}$	شبه‌بردارهای بارگذاری در بسط‌های داخلی
$\mathbf{F}$	گرادیان تغییر شکل
$\{F\}, \{\bar{F}\}$	شبه‌بردارهای بارگذاری مرتبه‌ی صفر
F_{ij}	درایه‌های گرادیان تغییر شکل
$\mathbf{g}_i$	بردار پایه‌ی همگرد در پیکربندی جاری

$\mathbf{g}^i$	بردار پایه‌ی پادگرد در پیکربندی جاری
$\mathbf{G}_i$	بردار پایه‌ی همگرد در پیکربندی اولیه
$\mathbf{G}^i$	بردار پایه‌ی پادگرد در پیکربندی اولیه
g_{ij}, G_{ij}	ضرایب سنجه
h	ضخامت پوسته
$\hat{\mathbf{i}}_j, \hat{\mathbf{i}}^j$	بردارهای جهت در دستگاه مختصات کارتزین
$\mathbf{I}$	تانسور همانی
$I(p, q)$	انتگرال‌گیری روی ضخامت پوسته
$I^*(p, q)$	انتگرال‌گیری بی‌بعد روی ضخامت پوسته
$k_x, k_\theta, k_{xy}, k_{x\theta}$	تغییرات انحنای پوسته
L	طول پوسته
$L_i, \bar{L}_i$	عملگرهای دیفرانسیلی در بسط خارجی
$L_i^l, L_i^r, \bar{L}_i^l, \bar{L}_i^r$	عملگرهای دیفرانسیلی در بسط‌های داخلی
$M_x, M_z, M_\theta, \bar{M}_\theta$	منتجه‌های تنش مرتبه یک
n	ثابت ناهمگنی
$N_x, N_z, N_\theta, \bar{N}_\theta$	منتجه‌های تنش مرتبه صفر
$\mathbf{p}$	بارهای سطحی
p_i	فشار داخلی
p_i^*	فشار داخلی بی‌بعد
p_o	فشار خارجی
p_o^*	فشار خارجی بی‌بعد
$P_{-۱}, P_۰, P_۱, P_۲, P_۳$	ضرایب رابطه‌ی تجربی وابستگی خواص مواد به دما
$P(r, T), P(x_g, T)$	خواص ماده‌ی ناهمگن تابعی
$P_i(T), P_f(T)$	خواص لایه‌های بیرونی ماده‌ی ناهمگن تابعی

q^i	مختصه‌ی دستگاه خمیده‌خط
$Q_x, Q_z, Q_\theta, \bar{Q}_\theta$	منتجه‌های تنش مرتبه دو
r	مختصه‌ی شعاعی
r_i	شعاع داخلی
r_i^*	شعاع داخلی بی‌بعد
r_o	شعاع خارجی
R	شعاع میانگین
R^*	شعاع میانگین بی‌بعد
R_x, R_y	شعاع‌های انحنای پوسته در دو راستای عمود بر هم
S_i	مساحت دیواره‌ی داخلی پوسته
S_o	مساحت دیواره‌ی خارجی پوسته
T	دما
$\mathbf{u}$	بردار جابه‌جایی
$u(x)$	تابع جابه‌جایی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول
$u_i(x^*)$	توابع بسط مستقیم خارجی میدان جابه‌جایی
$u_i^l(\eta), u_i^r(\xi)$	توابع بسط‌های مستقیم داخلی میدان جابه‌جایی
$u^*(x^*;\epsilon)$	تابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط خارجی
$u^*(\eta;\epsilon), u^*(\xi;\epsilon)$	توابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط‌های داخلی
$u(x,\theta)$	جابه‌جایی محوری سطح میانی پوسته‌ی استوانه‌ای
$u_i(x,\theta)$	جابه‌جایی نقطه‌ای دلخواه از پوسته‌ی استوانه‌ای
U	انرژی کرنشی
U^*	چگالی انرژی کرنشی
U_i	مؤلفه‌ی همگرد بردار جابه‌جایی
U^i	مؤلفه‌ی پادگرد بردار جابه‌جایی

U_r, U_x, U_z, U_θ	مؤلفه‌های فیزیکی جابه‌جایی
U_x^o, U_z^o	مؤلفه‌های جابه‌جایی در نقاط دور از مرز
U_x^*, U_z^*	مؤلفه‌های بی‌بعد جابه‌جایی
$\overset{*}{U}_i, \overset{*}{U}^i$	مؤلفات فیزیکی جابه‌جایی
$v(x,\theta)$	جابه‌جایی محیطی سطح میانی پوسته‌ی استوانه‌ای
$v_i^l(\eta), v_i^r(\xi)$	توابع جابه‌جایی اصلاح‌شده
V	حجم پوسته
$\{V_i\}$	بردارهای ویژه
$V_f(x_g)$	کسر حجمی
$w(x)$	تابع جابه‌جایی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول
$w_i(x^*)$	توابع بسط مستقیم خارجی میدان جابه‌جایی
$w_i^l(\eta), w_i^r(\xi)$	توابع بسط‌های مستقیم داخلی میدان جابه‌جایی
$w^*(x^*;\epsilon)$	تابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط خارجی
$w^*(\eta;\epsilon), w^*(\xi;\epsilon)$	توابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط‌های داخلی
$w(x,\theta)$	خیز شعاعی سطح میانی پوسته استوانه‌ای
$w_\circ(x,\theta)$	نقص هندسی اولیه‌ی پوسته
W	کار بارگذاری خارجی
W_i	کار ناشی از فشار داخلی (کار بر واحد سطح)
W_i^*	کار ناشی از فشار داخلی (بی‌بعد)
W_o	کار ناشی از فشار خارجی (کار بر واحد سطح)
W_o^*	کار ناشی از فشار خارجی (بی‌بعد)
x	مختصه‌ی طولی
x^*	مختصه‌ی طولی بی‌بعد
x_g	مختصه‌ی طولی یا زاویه‌ای در جهت گرادیان خواص

$(x_g)_i$	مختصه‌ی طولی یا زاویه‌ای در ابتدای گرادیان خواص
$(x_g)_f$	مختصه‌ی طولی یا زاویه‌ای در انتهای گرادیان خواص
$\mathbf{X}$	بردار موقعیت در پیکربندی اولیه
X^j	مؤلفه‌های بردار $\mathbf{X}$
y	مختصه‌ی عرضی
$\{y_i(\eta)\}, \{y_i(\xi)\}$	شبه‌بردار اصلاح‌شده‌ی جابه‌جایی در بسط‌های داخلی
$\{\bar{y}_i(x^*)\}$	شبه‌بردار جابه‌جایی در بسط خارجی
$\{\bar{y}_i(\eta)\}, \{\bar{y}_i(\xi)\}$	شبه‌بردار جابه‌جایی در بسط‌های داخلی
$\{\bar{y}_i(\eta)\}^o, \{\bar{y}_i(\xi)\}^o$	بخش‌های مشترک حل خارجی با حل‌های داخلی
z	مختصه‌ی ضخامت
z^*	مختصه‌ی ضخامت بی‌بعد
$\gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \gamma_{x\theta}, \gamma_{z\theta}$	کرنش‌های برشی
$\gamma_{x\theta,\circ}$	کرنش برشی صفحه‌ی میانی
Γ_{ij}^k	نماد کریستوفل نوع دوم
$\varepsilon_r, \varepsilon_x, \varepsilon_z, \varepsilon_\theta$	کرنش‌های نرمال
$\varepsilon_{x,\circ}, \varepsilon_{\theta,\circ}$	کرنش‌های نرمال صفحه‌ی میانی پوسته
ϵ	پارامتر اغتشاش
η	مقیاس کشیده‌شده در نزدیکی مرز چپ
θ	مختصه‌ی محیطی
$\Theta(x,\theta)$	تابع استفاده شده در تئوری غیرخطی نووژیلوف
κ	ضریب تصحیح برشی
λ	تابعی از نسبت پواسون
λ_i	مقادیر ویژه
μ	تابعی از نسبت پواسون و ضریب تصحیح برشی

ν	نسبت پواسون
ξ	مقیاس کشیده‌شده در نزدیکی مرز راست
$\sigma_x, \sigma_z, \sigma_\theta$	تنش‌های نرمال
σ^{ij}	مؤلفات فیزیکی تانسور تنش دوم کیرشهف-پیولا
τ_{xz}, τ_{yz}	تنش‌های برشی
$\phi(x)$	تابع جابه‌جایی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول
$\phi_i(x^*)$	توابع بسط مستقیم خارجی میدان جابه‌جایی
$\phi_i^l(\eta), \phi_i^r(\xi)$	توابع بسط‌های مستقیم داخلی میدان جابه‌جایی
$\phi^*(x^*; \epsilon)$	تابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط خارجی
$\phi^*(\eta; \epsilon), \phi^*(\xi; \epsilon)$	توابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط‌های داخلی
$\phi_۱(z, \theta, \psi)$	تابع استفاده شده در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی
$\phi_۲(z, \theta, \psi)$	تابع استفاده شده در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی
$\chi(x, \theta)$	تابع استفاده شده در تئوری غیرخطی نووژیلوف
ψ	مختصه‌ی زاویه‌ای در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی
$\psi(x)$	تابع جابه‌جایی در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول
$\psi_i(x^*)$	توابع بسط مستقیم خارجی میدان جابه‌جایی
$\psi_i^l(\eta), \psi_i^r(\xi)$	توابع بسط‌های مستقیم داخلی میدان جابه‌جایی
$\psi^*(x^*; \epsilon)$	تابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط خارجی
$\psi^*(\eta; \epsilon), \psi^*(\xi; \epsilon)$	توابع جابه‌جایی بی‌بعد در بسط‌های داخلی
$\Psi(x, \theta)$	تابع استفاده شده در تئوری غیرخطی نووژیلوف

فصل ۱

مقدمات و مرور مقالات

۱-۱ پیشگفتار

پس از پیشرفت سریع روش‌های عددی در دهه‌های اخیر، توجه محققان در زمینه‌ی مکانیک به‌طور روزافزون بر افزایش دقت در فرمول‌بندی مسائل متمرکز شده است. امروزه دیگر مسأله، تبدیل مدل‌های تئوری موجود به کدهای عددی نیست، بلکه هدف افزایش دقت مدل‌های موجود در زمینه‌های مختلف (مدل‌سازی مواد، تحلیل کرنش‌های بزرگ، مکانیک ضربه، بهینه‌سازی سازه‌های غیرخطی و ...) به منظور دستیابی به «شبیه‌سازی دقیق‌تر واقعیت» خصوصاً در مسائل غیرخطی است[۱].

سیستم‌های خطی بیش از آن که یک قاعده در طبیعت به شمار روند، یک استثنا هستند و محدود کردن مطالعات به سیستم‌های خطی عمدتاً به خاطر محدودیت در دانش ریاضی است. هر چند مسائل خطی تا حد زیادی نیازهای مهندسی را مرتفع می‌سازند، اما مواجهه با مسائل غیرخطی جدید از یک طرف و پیشرفت دانش در جهت حل معادلات غیرخطی از طرف دیگر، سبب شده تا دستیابی به حل‌های تحلیلی برای مسائل غیرخطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار گردد.

در این فصل ابتدا در مورد مفاهیم بنیادین پژوهش حاضر، شامل پوسته‌ها و طبقه‌بندی‌های آن، مروری بر تئوری‌های غیرخطی تحلیل پوسته‌ها، مواد ناهمگن و شیوه‌ی مدل‌سازی ریاضی آن‌ها و نهایتاً تئوری اغتشاشات[1] مطالبی بیان می‌شود. سپس سایر پژوهش‌های انجام گرفته‌ی مرتبط، مختصراً مرور می‌گردد.

۲-۱ پوسته‌ها

در مهندسی مکانیک با توجه به هندسه و بارگذاری، اجزای سازه‌ای به سه گروه کلی تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها تقسیم می‌شوند. تیرها سازه‌هایی هستند که یک بعد آن‌ها (بعد محوری) نسبت به دو بعد دیگر به مراتب بزرگ‌تر است و قادرند بارگذاری‌های خمشی، محوری، پیچشی و برش عرضی را تحمل کنند. سازه‌هایی مانند کابل‌ها، رشته‌ها، اجزای خرپا و ستون‌ها حالت‌های خاص تیر به شمار می‌روند.

ورق‌ها سازه‌هایی مسطح هستند که یک بعد آن‌ها (بعد ضخامت) نسبت به دو بعد دیگر کوچک باشد. معمولاً انتظار است ورق‌ها بتوانند انواع بارگذاری خمشی، محوری، پیچشی، برش عرضی و برش درون صفحه‌ای را تحمل کنند. غشاها حالت خاصی از ورق‌ها هستند که به دلیل ضخامت ناچیز تنها قادرند بارهای درون صفحه‌ای شامل کشش و برش را تحمل نمایند.

پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها نسبت به شعاع انحنا و ابعاد طولی کوچک است. در

1. Perturbation Theory

واقع پوسته‌ها عمومی‌ترین نوع سازه‌ها در مهندسی به شمار می‌روند و دارای دامنه‌ی کاربرد گسترده‌ای در صنایع مختلف هستند. مثلاً در ساخت مخازن نگه‌داری و انتقال سیال، فضاپیماها، موشک‌ها، رآکتورهای اتمی، سقف‌های غیرمسطح و ... از پوسته‌ها استفاده می‌شود.

۱-۲-۱ تقسیم‌بندی هندسی پوسته‌ها

از نظر هندسه می‌توان پوسته‌ها را به چند شکل تقسیم‌بندی کرد. از یک دیدگاه پوسته‌ها به دو گروه پوسته‌های حاصل از دوران[۲] و حاصل از انتقال[۳] تقسیم می‌شوند. پوسته‌های حاصل از دوران پوسته‌هایی هستند که از دوران کامل و یا جزئی یک منحنی یا سطح مولد حول یک محور دوران پدید می‌آیند. در مقابل پوسته‌های حاصل از انتقال، از انتقال مستقیم‌الخط و یا منحنی‌الخط منحنی یا سطح مولد بر روی یک مسیر مشخص حاصل می‌شود. با توجه به این دیدگاه می‌توان ورق‌ها را زیرمجموعه‌ی پوسته‌ها دانست.

پوسته‌ها را می توان با توجه به ضخامت به دو گروه نازک و ضخیم نیز دسته‌بندی کرد. مبنای این تقسیم‌بندی نسبت ضخامت به شعاع انحناست. در مراجع گوناگون مقادیر متفاوتی برای این نسبت معرفی شده است که معروف‌ترین آن‌ها نسبت $\frac{۱}{۲۰}$ است.

به طور خاص برای پوسته‌های استوانه‌ای یک تقسیم‌بندی هندسی دیگر نیز وجود دارد. اگر نسبت شعاع استوانه به طول آن بزرگ باشد، استوانه کوتاه نامیده می‌شود؛ و اگر این نسبت کوچک باشد استوانه بلند است.

۱-۲-۲ تقسیم‌بندی مادّی پوسته‌ها

از دیدگاه مادّی، پوسته‌ها، مانند تمام سازه‌ها، همگن[۴] و یا ناهمگن[۵] هستند. پوسته‌های همگن پوسته‌هایی هستند که خواص مکانیکی آن‌ها در تمام نقاط ثابت باشد. در مقابل پوسته‌های ناهمگن دارای خواصی هستند که تابع موقعیت نقاط است. اگر تغییرات خواص مکانیکی نقاط پوسته را بتوان به کمک یک تابع ریاضی بیان کرد، به پوسته FGM[۶] گفته می‌شود. معادل فارسی FGM، مواد ناهمگن تابعی است.

همچنین، پوسته‌ها می‌توانند همسانگرد و یا ناهمسانگرد باشند. خواص در پوسته‌های ناهمسانگرد وابسته به جهت هستند. مهم‌ترین گروه از مواد ناهمسانگرد که بیش‌ترین حجم مطالعات را به خود اختصاص داده‌اند، مواد ارتوتروپیک[۷] هستند. در این مواد خواص مکانیکی در یک جهت نسبت به دو جهت دیگر متفاوت است.

2. Shells of Revolution
3. Shells of Translation
4. Homogeneous
5. Heterogeneous
6. Functionally-Graded Materials
7. Orthotropic Materials

مواد مرکب سنتی و آلیاژهای نوردشده مثال‌هایی از این دسته به‌شمار می‌رود.

۱-۳ تئوری‌های غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای [۲]

در این قسمت تئوری‌های غیرخطی معروف که درباره‌ی پوسته‌های استوانه‌ای وجود دارند، معرفی می‌گردد. تفاوت عمده‌ی این تئوری‌ها در لحاظ کردن اثرات ضخامت پوسته و نیز بزرگ یا کوچک در نظر گرفتن جابه‌جایی در راستاهای مماسی است. در این قسمت تئوری‌های دانل[۸]، فلوگه-لور-بیرن[۹]، نووژیلوف[۱۰]، سندرز-کویتر[۱۱] و تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی[۱۲] مختصراً معرفی می‌شود.

۱-۳-۱ تئوری غیرخطی دانل

یک پوسته‌ی استوانه‌ای با شعاع میانگین R، ضخامت h و طول L مفروض است (شکل ۱-۱). تئوری دانل برای تغییر شکل‌های بزرگ w (در جهت شعاعی) یک پوسته‌ی استوانه‌ای ارائه شده است. در این تئوری، فرضیات زیر برقرارند.

۱. پوسته نازک است؛ $h \ll R, L$.

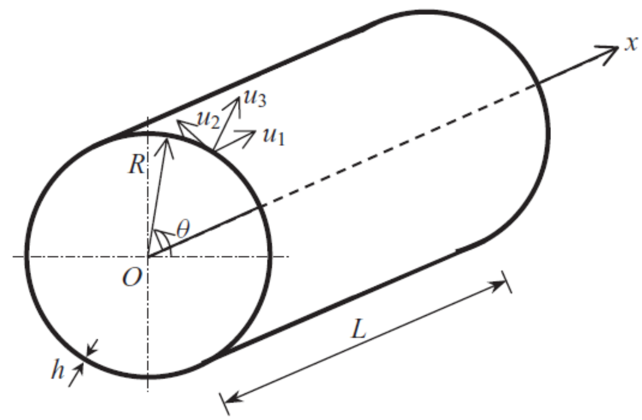
۲. مرتبه‌ی بزرگی خیز w با مرتبه‌ی بزرگی ضخامت h برابر است؛ بنابراین با توجه به فرض اول، خیز نسبت به ابعاد R و L کوچک است؛ یعنی، $w \ll R, L$.

۳. شیب در هر نقطه کوچک است؛ $|\partial w/\partial x| \ll 1$ و $|\partial w/(R\partial\theta)| \ll 1$.

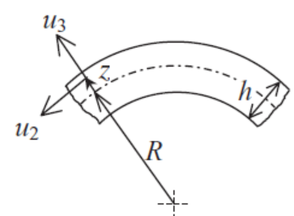
۴. تمام مؤلفه‌های کرنش کوچک هستند، بنابراین الاستیسیته‌ی خطی معتبر است.

۵. فرضیات لوو-کیرشهف[۱۳] برقرار است؛ یعنی، تنش‌ها در جهت عمود بر رویه‌ی میانی پوسته قابل صرف‌نظر هستند و کرنش‌ها به‌صورت خطی با ضخامت تغییر می‌کنند. این فرضیات تقریب‌های خوبی برای پوسته‌های نازک هستند. هر چند، در حضور بارهای خارجی عمود بر سطح پوسته، تنش‌ها در جهت نرمال نیز به وجود می‌آیند، حتی اگر اندازه‌ی آن‌ها (به جز در همسایگی بارهای متمرکز) از سایر تنش‌ها کوچک‌تر باشد.

8. Donnel's Nonlinear Theory
9. The Flügge-Lur'e-Byrne Nonlinear Shell Theory
10. The Novozholov Nonlinear Shell Theory
11. The Sanders-Koiter Nonlinear Shell Theory
12. Nonlinear First-order Shear Deformation Theory
13. Love-Kirchhoff Hypotheses



(الف)



(ب)

شکل ۱-۱: پوسته‌ی استوانه‌ای. (الف) ابعاد و جابه‌جایی‌ها. (ب) نمای بزرگ‌شده‌ی سطح مقطع پوسته.[۲]

۶. جابه‌جایی‌های مماسی u و v بسیار کوچک هستند و در روابط کرنش-جابه‌جایی تنها جملات غیرخطی شامل w دیده می‌شود. از سایر جملات غیرخطی صرف‌نظر می‌شود.

جابه‌جایی نقطه‌ای دلخواه از پوسته در جهات محوری، محیطی و شعاعی به ترتیب با $u_۱$، $u_۲$ و $u_۳$ نشان داده می‌شود، که u، v و w جابه‌جایی نقطه‌ای روی رویه‌ی میانی پوسته است[۱۴] (شکل ۱-۱). $u_۳$ و w به سمت بیرون مثبت فرض می‌شوند. با توجه به فرض شماره‌ی ۵، میدان جابه‌جایی زیر برای پوسته در نظر گرفته می‌شود.

$$u_۱ = u(x,\theta) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \qquad \text{(۱-۱الف)}$$

$$u_۲ = v(x,\theta) - \frac{z}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}, \qquad \text{(۱-۱ب)}$$

$$u_۳ = w(x,\theta). \qquad \text{(۱-۱پ)}$$

۱۴. رویه (سطح) میانی از قرار دادن $z = ۰$ در میدان جابه‌جایی به‌دست می‌آید که z مختصه‌ی ضخامت نقطه است.

با در نظر گرفتن معادلات سینماتیک غیرخطی، مؤلفه‌های کرنش به شکل زیر محاسبه می‌شوند.[15]

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,\circ} + zk_x, \tag{۱-۲الف}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta,\circ} + zk_\theta, \tag{۱-۲ب}$$

$$\gamma_{x\theta} = \gamma_{x\theta,\circ} + zk_{x\theta}. \tag{۱-۲پ}$$

اگر پوسته نازک فرض شود، یعنی از z در برابر R چشم‌پوشی شود، کرنش‌های رویه‌ی میانی و تغییرات انحنا از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{x,\circ} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{۲}, \tag{۱-۳الف}$$

$$\varepsilon_{\theta,\circ} = \frac{۱}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^{۲}, \tag{۱-۳ب}$$

$$\gamma_{x\theta,\circ} = \frac{۱}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{۱}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta}, \tag{۱-۳پ}$$

$$k_x = -\frac{\partial^{۲} w}{\partial x^{۲}}, \tag{۱-۳ت}$$

$$k_\theta = -\frac{۱}{R^{۲}}\frac{\partial^{۲} w}{\partial \theta^{۲}}, \tag{۱-۳ث}$$

$$k_{x\theta} = -\frac{۲}{R}\frac{\partial^{۲} w}{\partial x \partial \theta}. \tag{۱-۳ج}$$

از روابط اخیر می‌توان برای تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای کامل و یا پانل‌های استوانه‌ای (پوسته‌های ناقص) استفاده کرد.

نقص هندسی

نقص‌های هندسی اولیه برای پوسته‌های استوانه‌ای متناظر با تنش صفر اولیه با جابه‌جایی شعاعی $w_\circ$ نشان داده می‌شود؛ نقص هندسی اولیه‌ی درون‌صفحه‌ای نادیده گرفته می‌شود. بنابراین (۱-۱پ) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود.

$$u_{۳} = w(x,\theta) + w_\circ(x,\theta). \tag{۱-۴}$$

۱۵. روند استخراج معادلات سینماتیک غیرخطی (تانسور کرنش گرین) در دستگاه مختصات استوانه‌ای در صفحه‌ی ۲۷ توضیح داده شده است.

با جایگذاری (۱-۴) در روابط سینماتیک غیرخطی و صرف‌نظر از جملاتی که تنها تابع $w_\circ$ هستند (چرا که متناظر با حالت اولیه و تنش صفر هستند)، معادلات زیر جای معادلات (۱-۳الف) تا (۱-۳پ) را می‌گیرند.

$$\varepsilon_{x,\circ} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^۲ + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_\circ}{\partial x}, \tag{۱-۵الف}$$

$$\varepsilon_{\theta,\circ} = \frac{۱}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{R}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^۲ + \frac{۱}{R^۲}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_\circ}{\partial \theta}, \tag{۱-۵ب}$$

$$\gamma_{x\theta,\circ} = \frac{۱}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{۱}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{۱}{R}\frac{\partial w_\circ}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{۱}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_\circ}{\partial \theta}. \tag{۱-۵پ}$$

معادلات (۱-۳ت) تا (۱-۳ج) در حضور نقص هندسی اولیه بدون تغییر باقی می‌ماند.

۱-۳-۲ تئوری فلوگه-لور-بیرن

در این تئوری از فرض نازکی پوسته صرف‌نظر می‌شود. همچنین فرض ۶ تئوری دانل نیز معتبر نخواهد بود. بنابراین میدان جابه‌جایی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_۱ = u - z\frac{\partial(w+w_\circ)}{\partial x}, \tag{۱-۶الف}$$

$$u_۲ = v - \frac{z}{R}\left(\frac{\partial(w+w_\circ)}{\partial \theta} - v\right), \tag{۱-۶ب}$$

$$u_۳ = w + w_\circ. \tag{۱-۶پ}$$

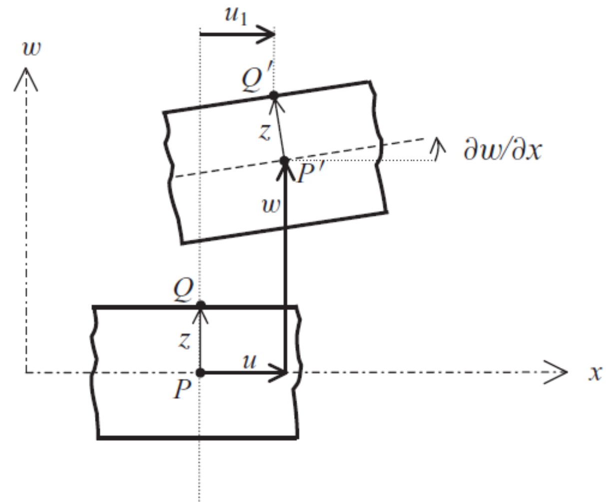
میدان جابه‌جایی اخیر به راحتی با توجه به شکل ۱-۲ توجیه می‌گردد.

در این تئوری از ضخامت در برابر شعاع و طول چشم‌پوشی نمی‌شود و برای در نظر گرفتن اثرات ضخامت از تقریب‌های زیر استفاده می‌شود.

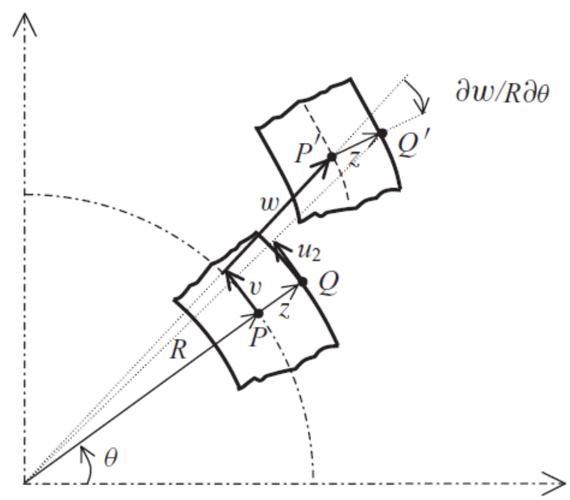
$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{R+z} = \frac{۱}{R}\left[۱ - \frac{z}{R} + O(z/R)^۲\right], \tag{۱-۷الف}$$

$$\frac{۱}{r^۲} = \frac{۱}{(R+z)^۲} = \frac{۱}{R^۲}\left[۱ - \frac{۲z}{R} + O(z/R)^۲\right], \tag{۱-۷ب}$$

که $O(z/R)^۲$ عددی کوچک هم‌مرتبه با $(z/R)^۲$ است که از آن صرف‌نظر می‌شود. با در نظر گرفتن این دو تقریب، کرنش‌ها و انحناها نسبت به تئوری دانل به شکل زیر تغییر می‌کنند.



(الف)



(ب)

شکل ۱-۲: جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواه P و نقطه‌ی Q واقع بر سطح میانی. (الف) مقطع طولی. (ب) مقطع عرضی.[۲]

$$\varepsilon_{x,\circ} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{۱}{۲}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^{۲}\right] + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_{\circ}}{\partial x}, \tag{۱-۸الف}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta,\circ} = {} & \frac{۱}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{۱}{۲R^{۲}}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)^{۲} + \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)^{۲}\right] \\ & + \frac{۱}{R^{۲}}\left[\frac{\partial w_{\circ}}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + w_{\circ}\left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\right],\end{aligned} \tag{۱-۸ب}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{x\theta,0} =& \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)\right.\\ &\left. + \frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}w_0\right],\end{aligned} \tag{۱-۸پ}$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2} - \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial (x\partial \theta} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2, \tag{۱-۸ت}$$

$$\begin{aligned}k_\theta =& -\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{R^2} - \frac{w+w_0}{R^3}\left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right) - \frac{w}{R^3}\left(w_0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}\right)\\ &- \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial \theta}\right) - \frac{1}{R^3}\frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2},\end{aligned} \tag{۱-۸ث}$$

$$\begin{aligned}k_{x\theta} =& -\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \theta} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial \theta}\right)\\ &+ \frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}\right) - \frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial \theta}\left(w + \frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\\ &- \frac{w_0}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial \theta} - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}.\end{aligned} \tag{۱-۸ج}$$

روابط فوق با صرف‌نظر از جملات مرتبه بالای z به دست می‌آید.

۱-۳-۳ تئوری غیرخطی نووژیلوف

بر اساس تئوری غیرخطی پوسته‌ی نووژیلوف (۱۹۵۳)، میدان جابه‌جایی به شکل پیچیده‌تر زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u_1 = u + z\Theta, \tag{۱-۹الف}$$

$$u_2 = v + z\Psi, \tag{۱-۹ب}$$

$$u_3 = w + w_0 + z\chi, \tag{۱-۹پ}$$

که

$$\Theta = -\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\left(1 + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R}\right) + \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta} - v\right)\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{w_0}{R}, \tag{۱-۱۰الف}$$

$$\Psi = -\frac{1}{R}\left(\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta} - v\right)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{۱-۱۰ب}$$

$$\chi \cong \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w+w_0}{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w + w_0\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{۱-۱۰پ}$$

نووژیلوف روابط (۱-۹) و (۱-۱۰) را با فرض این که تارهای مستقیم و عمود بر سطح میانی پوسته پس از تغییر شکل همچنان مستقیم و عمود بر سطح میانی باقی می مانند و دچار درازش[16] نمی‌شوند، به دست آورد. این فرض جای بخش دوم در فرض شماره ۵ تئوری دانل (تغییرات خطی کرنش‌ها در راستای ضخامت) را می‌گیرد. همچنین فرض ۶ نیز برقرار نیست.

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۱-۹) و (۱-۱۰) در روابط سینماتیک غیرخطی، عبارت‌های زیر برای تغییرات انحنای پوسته به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
k_x = &-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\left(-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial\theta}\right)+\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\
&+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}\left(-v+\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\\
&-\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2}\left(\frac{w}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{w_0}{R}.
\end{aligned}$$
(۱-۱۱الف)

$$\begin{aligned}
k_\theta = &-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{w+w_0}{R}\left(\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{2}{R}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&-\frac{w}{R^3}\frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial\theta}\right)\\
&+\frac{1}{R^2}\frac{\partial v}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+3\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}\right)+\frac{1}{R^3}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta}-v\right)\\
&+\frac{1}{R^3}\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}-v\right)-\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R^3}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}\\
&+\frac{1}{R}\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial\theta}
\end{aligned}$$
(۱-۱۱ب)

$$\begin{aligned}
k_{x\theta} = &-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}-\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}\right)\\
&+\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{v}{R^2}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}+\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\right)\\
&+\frac{1}{R^2}\frac{\partial (w+w_0)}{\partial \theta}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_0}{\partial x}\\
&+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{w+w_0}{R}+\frac{2}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}-\frac{1}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial \theta^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\
&+\frac{\partial (w+w_0)}{\partial x}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial\theta}+\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)\\
&-\frac{2}{R}\frac{\partial^2 (w+w_0)}{\partial x\partial\theta}\left(\frac{w}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{2w_0}{R^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial\theta}.
\end{aligned}$$
(۱-۱۱پ)

16. Elongation

در تئوری نووژیلوف، روابط کرنش-جابه‌جایی رویه‌ی میانی پوسته با روابط تئوری فلوگه-لور-بیرن مطابقت دارد. بنابراین تنها تفاوت ایجاد شده ناشی از استفاده از این روابط پیچیده، تغییر در انحناها و پیچش است.

۱-۳-۴ تئوری غیرخطی سندرز-کویتر

سندرز در سال ۱۹۶۳ تئوری بهبود یافته‌ی غیرخطی پوسته را در شکل تانسوری ارائه داد؛ تقریباً هم‌زمان با او، همین معادلات توسط کویتر در سال ۱۹۶۶ نیز به دست آمد، که منجر به معادلات سندرز-کویتر گردید. این معادلات با در نظر گرفتن فرضیات مشابه با تئوری‌های قبل به منظور یافتن عبارت‌های ریاضی منطبق با مکانیک پوسته و نیز نگه داشتن جملات هم‌مرتبه به دست آمدند و برای تغییر شکل‌های محدود با کرنش کوچک و دوران‌های کوچک مناسب هستند؛ بنابراین فرض شماره ۶ تئوری دانل برقرار نخواهد بود. همچنین از برش های عرضی چشم‌پوشی می‌گردد. کرنش‌های رویه‌ی میانی و نیز تغییرات انحناها از روابط زیر به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial x}, \tag{۱-۱۲الف}$$

$$\varepsilon_{\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2R^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{R^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right), \tag{۱-۱۲ب}$$

$$\gamma_{x\theta,0} = \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial w_0}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial \theta}, \tag{۱-۱۲پ}$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \tag{۱-۱۲ت}$$

$$k_\theta = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right), \tag{۱-۱۲ث}$$

$$k_{x\theta} = -\frac{2}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{2R}\left(3\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right). \tag{۱-۱۲ج}$$

تغییرات انحنا و پیچش با توجه به تئوری غیرخطی سندرز-کویتر، خطی هستند.

۱-۳-۵ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول غیرخطی پوسته‌ها نخستین بار توسط ردی و چاندراشخارا[17] در سال ۱۹۸۵ معرفی شد. از پنج متغیر وابسته، سه جابه‌جایی u، v و w و دو دوران ϕ_1 و ϕ_2 برای توصیف تغییر شکل پوسته استفاده می‌شود. این تئوری را می‌توان نسخه‌ی جدار ضخیم تئوری سندرز برای جملات خطی و تئوری غیرخطی دانل برای جملات غیرخطی دانست.

در این بخش این تئوری برای یک پوسته‌ی با انحنا در دو راستای x و y معرفی می‌گردد. در استخراج

17. Reddy and Chandrashekhara

معادلات این بخش فرض بر این است که انحناها در تمام نقاط ثابت باشند.
فرضیات این تئوری عبارتند از: (۱) ضخامت پوسته در مقایسه با شعاع‌های انحنای اصلی کوچک است، بنابراین این تئوری تنها برای پوسته‌های نسبتاً ضخیم مناسب است. (۲) تنش نرمال عرضی σ_z قابل چشم‌پوشی است. در حالت کلی، می‌توان نشان داد که σ_z در مقایسه با τ_{xz} و τ_{yz}، به جز در نزدیکی لبه‌های پوسته، کوچک است. بنابراین، این تئوری تقریب خوبی از رفتار پوسته‌های نسبتاً ضخیم به شمار می‌رود. (۳) خطوط عمود بر رویه‌ی میانی پوسته پس از تغییر شکل همچنان مستقیم باقی می‌مانند، اما لزوماً عمود بر رویه‌ی میانی نیستند. یعنی فرض لوو-کیرشهف در این تئوری برقرار نیست.
میدان جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواهی از پوسته به کمک روابط زیر توصیف می‌شود.

$$u_1 = (1 + z/R_x)u + z\phi_1, \tag{۱-۱۳الف}$$

$$u_2 = (1 + z/R_y)v + z\phi_2, \tag{۱-۱۳ب}$$

$$u_3 = w + w_0. \tag{۱-۱۳پ}$$

می‌توان با اضافه کردن جملات مشابه به میدان برداری فوق، به تئوری‌های مراتب بالاتر (بر حسب z) نیز دست یافت.
از آن‌جا که کرنش‌های برشی عرضی کوچک فرض شده‌اند، با صرف‌نظر از جملات غیرخطی معادلات سینماتیک زیر برای برش عرضی به دست می‌آید.

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{1}{R_x(1 + z/R_x)}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \psi} - u_1\right), \tag{۱-۱۴الف}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{1}{R_y(1 + z/R_y)}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} - u_2\right). \tag{۱-۱۴ب}$$

در روابط فوق، ψ و θ مختصات زاویه‌ای هستند. با صرف‌نظر از جملات شامل z/R_x و z/R_y روابط کرنش-جابه‌جایی زیر برای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به دست می‌آید.

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x,0} + zk_x, \tag{۱-۱۵الف}$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y,0} + zk_y, \tag{۱-۱۵ب}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy,0} + zk_{xy}, \tag{۱-۱۵پ}$$

$$\gamma_{xz} = \gamma_{xz,0}, \tag{۱-۱۵ت}$$

$$\gamma_{yz} = \gamma_{yz,0}, \tag{۱-۱۵ث}$$

که

$$\varepsilon_{x,\circ} = \frac{۱}{R_x}\left(\frac{\partial u}{\partial \psi} + w\right) + \frac{۱}{۲R_x^۲}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\right)^۲ + \frac{۱}{R_x^۲}\frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial w_\circ}{\partial \psi}, \tag{۱-۱۶الف}$$

$$\varepsilon_{y,\circ} = \frac{۱}{R_y}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{۱}{۲R_y^۲}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^۲ + \frac{۱}{R_y^۲}\frac{\partial w}{\partial \theta}\frac{\partial w_\circ}{\partial \theta}, \tag{۱-۱۶ب}$$

$$\gamma_{xy,\circ} = \frac{۱}{R_y}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{۱}{R_x}\frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{۱}{R_xR_y}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w_\circ}{\partial \psi}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \psi}\frac{\partial w_\circ}{\partial \theta}\right), \tag{۱-۱۶پ}$$

$$\gamma_{xz,\circ} = \phi_۱ + \frac{۱}{R_x}\left(\frac{\partial w}{\partial \psi} - u\right), \tag{۱-۱۶ت}$$

$$\gamma_{yz,\circ} = \phi_۲ + \frac{۱}{R_y}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right), \tag{۱-۱۶ث}$$

$$k_x = \frac{۱}{R_x}\frac{\partial \phi_۱}{\partial \psi}, \tag{۱-۱۶ج}$$

$$k_y = \frac{۱}{R_y}\frac{\partial \phi_۲}{\partial \theta}, \tag{۱-۱۶چ}$$

$$k_{xy} = \frac{۱}{R_y}\frac{\partial \phi_۱}{\partial \theta} + \frac{۱}{R_x}\frac{\partial \phi_۲}{\partial \psi} + \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{R_y} - \frac{۱}{R_x}\right)\left(\frac{۱}{R_x}\frac{\partial v}{\partial \psi} - \frac{۱}{R_y}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right). \tag{۱-۱۶ح}$$

با توجه به معادلات بالا، توزیع کرنش برشی عرضی در ضخامت ثابت است که منجر به تنش برشی ثابت می‌شود. سطوح بالایی و پایینی پوسته به وضوح برشی را تحمل نمی‌کنند؛ بنابراین نتیجه تنها یک تقریب اولیه است. توزیع واقعی تنش برشی در ضخامت شبیه به سهمی است و در سطوح بالا و پایین دارای مقدار صفر است. به همین دلیل، برای ملاحظات تعادل، ضروری است که یک ضریب تصحیح برش عرضی در معادلات وارد شود تا تنش‌ها بیش از آن چه که هستند، محاسبه نشوند.

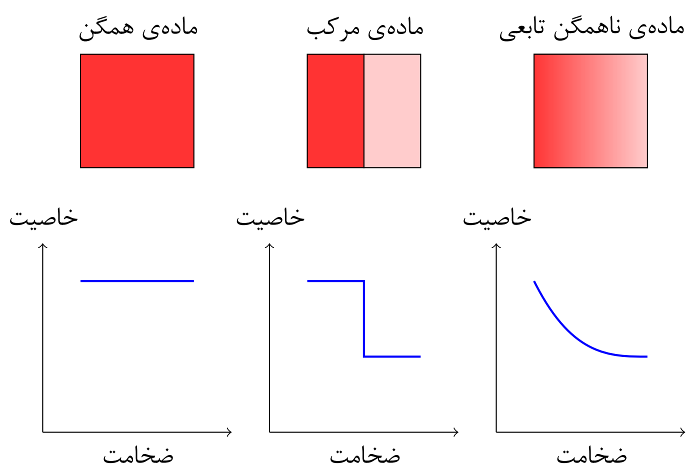
در پژوهش حاضر، هر چند برای تقریب میدان جابه‌جایی از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است، اما از فرض مربوط به کوچکی ضخامت پوسته و نیز فرض کوچکی تنش‌های عرضی (نرمال و برشی) استفاده نشده است. همچنین، با توجه به تقارن محوری موجود در مسأله از جابه‌جایی محیطی و مشتق نسبت به مؤلفه‌ی محیطی مختصات صرف‌نظر می‌شود.

۱-۴ مواد ناهمگن تابعی

۱-۴-۱ مقدمه

مواد مرکب، با دارا بودن نسبت استحکام به وزن و سفتی به وزن بالا، تا کنون در کاربردهای مهندسی مختلف با موفقیت به کار گرفته شده اند. اما مواد مرکب سنتی قادر به تحمل دماهای بالا نیستند. فلزات نیز سالیان طولانی به خاطر استحکام و شکل‌پذیری بالای خود مورد استفاده قرار گرفته‌اند؛ اما آن‌ها نیز در دماهای بالا

استحکام خود را از دست می‌دهند. سرامیک‌ها در برابر گرما مقاومت خوبی از خود نشان می دهند، ولی استفاده از آن‌ها به خاطر شکل‌پذیری پایین تحت‌الشعاع قرار می‌گیرد.
در دهه‌های اخیر گروهی از مواد مرکب تحت عنوان FGM توجه زیادی را به خود جلب کرده‌اند. یک ماده‌ی FG نوعی ماده‌ی مرکب است که از فازهای مختلفی از مواد (معمولاً فلز و سرامیک) تشکیل شده است. با تغییر تدریجی نسبت حجمی مواد تشکیل‌دهنده، خواص ماده‌ی FG تغییرات پیوسته و نرمی را تجربه می‌کنند که منجر به از بین رفتن مشکلات مربوط به سطوح مشترک دو ماده و تمرکز تنش می‌گردد. در این نوع از مواد مجموعه‌ای از خواص فلزات مانند استحکام و شکل‌پذیری و سرامیک‌ها مانند مقاومت حرارتی بالا توأماً قابل حصول هستند [۳]. شکل ۱-۳، به صورت شماتیک تفاوت بین ماده‌ی همگن، ماده‌ی مرکب و ماده‌ی ناهمگن تابعی را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۳: تفاوت تغییر در خواص بین مواد همگن، مرکب و ناهمگن تابعی.

۱-۴-۲ تاریخچه

مفهوم اولیه‌ی مواد ناهمگن تابعی توسط نینو و همکاران در سال ۱۹۸۴ در سازمان هوافضای ژاپن مطرح گردید و از سال ۱۹۸۶ مطالعات امکان‌سنجی تولید آن در این کشور شروع شد. مرحله‌ی اول پروژه‌ی ملی «فناوری گسترش مواد ناهمگن تابعی» طی سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۸۹ در ژاپن انجام شد. در این پروژه سه گروه ساخت، پردازش و ارزیابی حضور داشتند. نظریه‌ی پیشنهادی تولید یک ماده‌ی جدید بود که با استفاده از سرامیک‌ها با مقاومت حرارتی بالا و تحمل گرادیان حرارتی مناسب و فلزات با مقاومت مکانیکی بالا و ضریب هدایت حرارتی مناسب، به گونه‌ای که تغییرات تدریجی ماده از سرامیک به فلز انجام پذیرد تا شرایط دمایی لایه‌ی بیرونی دماغه‌ی شاتل فضایی و نیز شرایط مکانیکی و جوشکاری لایه‌ی درونی شاتل ارضا شود.

پس از دستیابی به هدف پروژه که ساخت و آماده‌سازی قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۱ تا ۱۰ میلی‌متر که قادر به تحمل دماهایی در حدود ۲۰۰۰ کلوین و اختلاف دمایی در حدود ۱۰۰۰ کلوین بودند، دانشمندان ژاپنی، نتایج پژوهش خود را در اولین سمپوزیوم جهانی در ۱۹۹۰ در اختیار همگان قرار دادند.
مرحله‌ی دوم پژوهش ملی ژاپن در ۹۱-۱۹۹۰ انجام شد که منجر به ساخت ورق مربعی به ابعاد ۳۰۰ میلی‌متر برای استفاده در قسمت پایینی دماغه‌ی سفینه‌ی فضایی و یک نیم‌کره به قطر ۵۰ میلی‌متر برای استفاده در نوک مخروطی دماغه‌ی سفینه شد. دومین سمپوزیوم مواد ناهمگن تابعی در ۱۹۹۲ برگزار شد و پس از آن، مطالعات بر روی مواد FG و به ویژه سازه‌هایی از این جنس فراگیر شد.
تا کنون منابع مختلفی در مورد جنبه‌های مختلف مواد FG نگاشته و منتشر شده است. بر اساس آن‌ها می‌توان نتیجه گرفت که نخستین تحقیقات بر روی این مواد بیش‌تر بر روی تحلیل تنش حرارتی و مکانیک شکست متمرکز بوده است. اما بعدها جنبه‌های دیگری مانند خمش، کمانش، ارتعاشات و پایداری انواع سازه‌ها مانند ورق‌ها و پوسته‌ها نیز مورد توجه قرار گرفت.

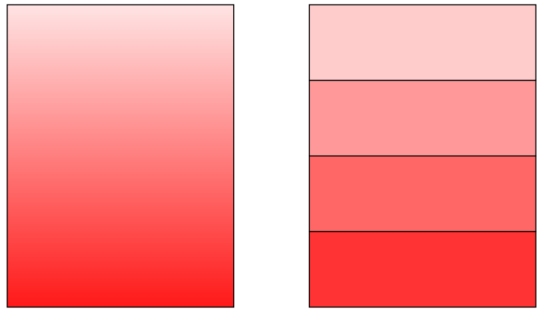
۱-۴-۳ مدل‌سازی ریاضی مواد ناهمگن تابعی

مواد FG زیادی با دو فاز مختلف از مواد همگن و با خواص مختلف ساخته می‌شود. معمولاً توصیف دقیقی از ریزساختار این مواد، به جز احتمالاً اطلاعاتی در مورد توزیع درصد حجمی در دسترس نیست.
چون درصد حجمی هر فاز تدریجاً در جهت گرادیان خواص تغییر می‌کند، خواص مؤثر FGMها نیز در این راستا متغیر است. عمدتاً دو راه برای مدل کردن مواد ناهمگن تابعی وجود دارد: مدل‌سازی نیمه‌همگن و مدل تغییر پیوسته (شکل ۱-۴). در روش اول فرض می‌شود درصد حجمی تغییرات ناپیوسته‌ای دارد و ماده‌ی FG به صورت لایه‌لایه است که در هر لایه درصد حجمی مواد تشکیل‌دهنده ثابت است. در پژوهش حاضر مدل‌سازی عددی با این روش صورت گرفته است.
در روش دوم، توزیع پیوسته‌ی خواص با توابع ریاضی مدل می‌شود. سه مدل مهم ریاضی که برای توزیع خواص در نظر گرفته می شوند عبارتند از: (الف) توزیع توانی، (ب) توزیع نمایی و (پ) توزیع کسر حجمی.

(الف) توزیع توانی

از این توزیع در مختصات قطبی (استوانه‌ای) استفاده می‌شود. در این روش توزیع، فرض می‌شود خواص به نسبت شعاعی r/r_i وابسته باشد.

$$P(r,T) = P_i(T)\left(\frac{r}{r_i}\right)^n . \tag{۱-۱۷}$$



شکل ۱-۴: مدل تحلیلی یک لایه‌ی FGM. (الف) مدل نیمه‌همگن، (ب) مدل تغییر پیوسته.

در معادله‌ی (۱-۱۷)، P خاصیت مکانیکی یا حرارتی مورد نظر است و P_i مقدار این خاصیت را در شعاع داخلی r_i نشان می دهد. همچنین، T بیانگر دماست و نشان می دهد که خواص مواد مستقل از دما نیستند. عدد بی بعد n ثابت ناهمگنی است و مشخص‌کننده‌ی شکل توزیع خاصیت است.

(ب) توزیع نمایی

در این توزیع، وابستگی خواص به موقعیت به کمک تابع نمایی توصیف می‌شود. این شکل از توزیع نیز تنها در مختصات قطبی کاربرد دارد.

$$P(r,T) = P_i(T)\exp\left(n\left(\frac{r}{r_i}-1\right)\right). \tag{۱-۱۸}$$

(پ) توزیع کسر حجمی

در این روش توزیع خواص به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$P(x_g,T) = \big(P_f(T)-P_i(T)\big)V_f(x_g)+P_i(T). \tag{۱-۱۹}$$

بر خلاف دو روش قبل، در این روش خاصیت ماده در هر نقطه به دو ماده وابسته است: یکی در ابتدای گرادیان خواص (P_i) و دیگری در انتهای آن (P_f). در معادله‌ی ، V_f کسر حجمی است و به شکل زیر تعریف می شود.

$$V_f(x_g) = \left(\frac{x_g-(x_g)_i}{(x_g)_f-(x_g)_i}\right)^n. \tag{۱-۲۰}$$

در روابط بالا، x_g مختصه‌ی طولی یا زاویه‌ای در جهت گرادیان خواص است. $(x_g)_i$ موقعیت در ابتدای گرادیان و $(x_g)_f$ موقعیت در انتهای گرادیان است.

۱-۴-۴ وابستگی خواص مواد به دما

در حالت کلی خواص مکانیکی و دمایی مواد با تغییرات دما تغییر می‌کنند. این وابستگی را می توان به شکل یک تابع غیرخطی مدل کرد.

$$P(T) = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3). \qquad (۱-۲۱)$$

در این رابطه ضرایب P_k $(k = -1, 0, 1, 2, 3)$ به صورت تجربی به دست می‌آید. در جداول ۱-۱ تا ۱-۴، ضرایب خواص مکانیکی و حرارتی (شامل مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی، رسانایی گرمایی و نسبت پواسون) برای پنج ماده‌ی نمونه آورده شده است [۳].

جدول ۱-۱: مدول الاستیسیته بر حسب Pa

ماده	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
زیرکون	۲۴۴٫۲۷e+۹	۰	−۱٫۳۷۱e−۳	۱٫۲۱۴e−۶	−۳٫۶۸۱e−۱۰
اکسید آلومینیوم	۳۴۹٫۵۵e+۹	۰	−۳٫۸۵۳e−۴	۴٫۰۲۷e−۷	−۱٫۶۷e−۱۰
سیلیکون نیترید	۳۴۸٫۴۳e+۹	۰	−۳٫۰۷۰e−۴	۲٫۱۶۰e−۷	−۸٫۹۴۶e−۱۱
Ti-6Al-4V	۱۲۲٫۵۰e+۹	۰	−۴٫۵۸۶e−۴	۰	۰
فولاد زنگ‌نزن	۲۰۱٫۰۴e+۹	۰	۳٫۰۷۹e−۴	−۶٫۵۳۴e−۷	۰

جدول ۱-۲: ضریب انبساط حرارتی بر حسب K^{-1}

ماده	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
زیرکون	۱۲٫۷۶۶e−۶	۰	−۱٫۴۹۱e−۳	۱٫۰۰۶e−۵	−۶٫۷۷۸e−۱۱
اکسید آلومینیوم	۶٫۸۲۶۹e−۶	۰	۱٫۸۳۸e−۴	۰	۰
سیلیکون نیترید	۵٫۸۷۲۳e−۶	۰	۹٫۰۹۵e−۴	۰	۰
Ti-6Al-4V	۷٫۵۷۸۸e−۶	۰	۶٫۶۳۸e−۴	−۳٫۱۴۷e−۶	۰
فولاد زنگ‌نزن	۱۲٫۳۳۰e−۶	۰	۸٫۰۸۶e−۴	۰	۰

جدول ۱-۳: رسانایی گرمایی بر حسب WmK^{-1}

ماده	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
زیرکون	۱٫۷۰۰۰	۰	۱٫۲۷۶e−۳	۶٫۶۴۸e−۸	۰
اکسید آلومینیوم	−۱۴٫۰۸۷	−۱۱۲۳٫۶	−۶٫۲۲۷e−۳	۰	۰
سیلیکون نیترید	۱۳٫۷۲۳	۰	−۱٫۰۳۲e−۳	۵٫۴۶۶e−۷	−۷٫۸۷e−۱۱
Ti-6Al-4V	۱٫۰۰۰۰	۰	۱٫۷۰۴e−۵۲	۰	۰
فولاد زنگ‌نزن	۱۵٫۳۷۹	۰	−۱٫۲۶۴e−۳	۲٫۰۹۲e−۶	−۷٫۲۲۳e−۱۰

جدول ۱-۴: نسبت پواسون

ماده	P_0	P_{-1}	P_1	P_2	P_3
زیرکون	۰/۲۸۸۲	۰	۱/۱۳۳e−۴	۰	۰
اکسید آلومینیوم	۰/۲۶۰۰	۰	۰	۰	۰
سیلیکون نیترید	۰/۲۴۰۰	۰	۰	۰	۰
Ti-6Al-4V	۰/۲۸۸۴	۰	۱/۱۲۱e−۴	۰	۰
فولاد زنگ‌نزن	۰/۳۲۶۲	۰	−۲/۰۰۲e−۴	۳/۷۹۷e−۷	۰

۱-۵ تقریب‌های تحلیلی

۱-۵-۱ مقدمه

در جهان واقعی، بسیاری از مسائل (در ریاضیات کاربردی، فیزیک و علوم مهندسی) دارای حلی با یک فرمول ساده، دقیق و صریح نیستند. برخی از آن‌ها دارای پاسخ‌های پیچیده‌ای هستند که از آن‌ها اطلاع زیادی در دسترس نیست. برای مثال:

(الف) فرمول استرلینگ[18] را در نظر بگیرید.

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\mathrm{e}^n n^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \qquad (۱-۲۲)$$

در عبارت فوق، $\sim$ به معنای هم‌مرتبه بودن در بزرگی و $O(1/n)$ عبارتی هم‌مرتبه با $1/n$ است. توجه کنید که اگر $n \to \infty$ آن‌گاه $n!$ به قدری سریع رشد می‌کند که هیچ ایده‌ای برای محاسبه‌ی دقیق آن وجود ندارد. اما رابطه‌ی (۱-۲۲) تقریب بسیار خوبی از $n!$ به شمار می رود.

(ب) در جبر هیچ حل صریحی برای معادلات جبری با درجه‌ی $n \geq 5$ در حالت کلی وجود ندارد.

(پ) بیش‌تر مسائل در تئوری معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولی یا با مشتق جزئی حل دقیق ندارند.

و مثال‌های زیاد دیگر.

در عمل، اغلب یک حل تقریبی برای چنین مسائلی کافی است. بنابراین راه‌های رسیدن به این تقریب‌ها مهم هستند. برای حل تقریبی مسائل دو راه عمده وجود دارد: تقریب‌های عددی و تقریب‌های تحلیلی. تقریب‌های تحلیلی همواره دارای خطایی قابل درک[19] و قابل کنترل[20] هستند. عبارت «حل تقریبی تحلیلی» به این معنی است که یک فرمول تحلیلی از یک حل تقریبی می‌توان یافت که اختلاف یا خطای آن با مقدار دقیق قابل اندازه‌گیری دقیق است.

18. Stirling Formula
19. Understandable
20. Controllable

۱-۵-۲ تحلیل مجانبی

تحلیل مجانبی[21] ابزاری قدرتمند برای یافتن تقریب‌های تحلیلی مسائل پیچیده است. در سال ۱۸۸۶، پوانکاره و استیلتیس در مقالاتی جداگانه بسط‌های مجانبی[22] را پایه‌گذاری کردند. بعدها در ۱۹۰۵، پرانتل مقاله‌ای درباره‌ی حرکت یک سیال در اطراف یک جسم نوشت. در مورد حرکت یک ایرفویل در هوا، این مسأله به کمک معادلات ناویر-استوکس با عدد رینولدز بالا توصیف می‌شود. حل این مسأله سبب به وجود آمدن روش اغتشاشات تکین گردید.

بر اساس تئوری اغتشاشات، حل یک مسأله به صورت چند جمله‌ی نخست یک بسط مجانبی یا بسط اغتشاشی بیان می‌شود. موضوعات مهم در تحلیل مجانبی عبارتند از: روش اغتشاشات[23]، روش بسط‌های چندگانه[24]، تقریب WKBJ[25]، روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته[26]، بسط مجانبی انتگرال‌ها[27] و ... . در این پژوهش یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی به کمک بسط مجانبی تطبیق‌یافته حل شده است.

۱-۵-۳ بسط مجانبی تطبیق‌یافته

روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته برای حل مسائل لایه مرزی[28] مناسب است. مسائل لایه مرزی مسائلی هستند که در آن‌ها اغتشاش در ناحیه‌ای کوچک (باریک[29]) اثر کرده و تغییرات متغیرهای وابسته در آن بسیار سریع است. در این دسته از مسائل، پارامتر کوچکی در بالاترین مرتبه‌ی مشتق ضرب می‌شود. به عبارت دیگر با صفر کردن پارامتر کوچک، مرتبه‌ی معادلات کاهش می‌یابد. این نواحی باریک به مرزهای حوزه‌ی مورد بررسی مرتبط می‌شوند. از این رو، این دسته مسائل به نام‌های مسائل لایه مرزی در مکانیک سیالات و مسائل لبه‌ای[30] در مکانیک جامدات شناخته می‌شوند. در نواحی مذکور، تغییرات سریع را نمی‌توان با متغیر مستقل کُنْد[31] بیان کرد، اما به کمک مقیاس سریع (بزرگ‌شده یا کشیده‌شده[32]) این کار امکان‌پذیر است.

توضیحات بیش‌تر در مورد روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته در پیوست الف آورده شده است.

21. Asymptotic Analysis
22. Asymptotic Expansions
23. Perturbation Method
24. Multiple-scales Method
25. Wentzel, Kramers, Brillouin and Jeffreys
26. Matched Asymptotic Expansions
27. Asymptotic Expansion of Integrals
28. Boundary Layer Problems
29. Narrow Region
30. Edge Layer
31. Slow
32. Magnified or Stretched Scale

۱-۶ مروری بر مقالات

نخستین بار لامه در سال ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی[۳۳] حل دقیق استوانه‌ی جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت و ساخته شده از ماده‌ی همگن و همسانگرد را تحت فشار یکنواخت ارائه کرد [۴].

الیور و انات [۵] در سال ۱۹۸۶، با استفاده از روش لاگرانژی کامل، رفتار غیرخطی هندسی پوسته‌های با تقارن محوری را با روش اجزای محدود بررسی نمودند.

کامبسکور و گاسیک [۶] در سال ۲۰۰۱، اثرات نقص در ضخامت را بر کمانش غیرخطی پوسته های استوانه‌ای تحت فشار یکنواخت خارجی بررسی کردند. آن‌ها با استفاده از المان COMI به مطالعه‌ی پارامتری پرداختند که به آن‌ها اجازه می داد تا هر گونه نقص نامتقارن محوری در ضخامت را بتوانند مورد مطالعه قرار دهند. فرض مهم در پژوهش آن‌ها این است که پوسته‌ی بدون نقص با مد فوریه‌ی m کمانش می‌کند و نقص اولیه‌ی ضخامت از مد فوریه‌ی ۱، m و یا $2m$ است. آن‌ها قبلاً نشان داده بودند که نقص ضخامت از نوع ۱ و $2m$ بحرانی‌ترین نوع نقص به شمار می‌رود. آن‌ها نشان دادند که پیش‌کمانش غیرخطی بر فشار کمانش تأثیر زیادی ندارد. سپس کوپلینگ نقص ضخامت با نقص هندسی را در نظر گرفتند و نشان دادند که نقص هندسی و نقص ضخامت در محدوده‌ی غیرخطی به طور قابل‌ملاحظه‌ای بار کمانش را کاهش می‌دهند. آن‌ها در نهایت نشان دادند که اگر تنها از شعاع خارجی برای وارد کردن نقص استفاده شود، بسته به این که نقص مورد نظر از نوع ضخامت، هندسی و یا ترکیبی از هر دو باشد، بارهای کمانش متنوعی برای مسأله به دست می‌آید.

بالا و القاعدی [۷] در سال ۲۰۰۲، فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی یک المان پوسته‌ی چهار گره‌ای ایزوپارامتریک را بر اساس میدان جابه‌جایی مرتبه سه بر روی ضخامت انجام دادند.

آرسینیگا و ردی[۸] در سال ۲۰۰۷، فرمول‌بندی المان محدود غیرخطی پوسته‌ها را در مختصات خمیده‌خط به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای مواد ناهمگن بر اساس حساب تانسوری توسعه دادند. آن‌ها از توابع میانیابی لاگرانژی مرتبه بالا برای تقریب میدان‌ها استفاده کردند تا از قفل‌شدگی غشایی، برشی و ضخامت جلوگیری شود. در نهایت نتایج حاصل از تحلیل بر اساس این المان را برای چند مطالعه‌ی موردی بیان کرده‌اند.

در سال ۲۰۰۹، توتونچو و تمل [۹] جابه‌جایی‌ها و تنش‌های متقارن محوری را در استوانه‌ها، دیسک‌ها و

33. Plane Elasticity Theory

کره‌های FGM تحت فشار یکنواخت داخلی به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و روش توابع تکمیلی[۳۴] تعیین کردند. آن‌ها فرض کردند خواص ماده مانند مدول الاستیسیته و نسبت پواسون در جهت شعاعی بر حسب تابعی دلخواه تغییر کند. این فرضیات منجر به یک مسأله‌ی مقدار مرزی دو نقطه‌ای با معادلات دیفرانسیل حاکم با ضریب متغیر می‌شود. آن‌ها به کمک روش توابع تکمیلی مسأله مقدار مرزی را به مسأله‌ی مقدار اولیه تبدیل و سپس با روش عددی رانج-کوتای مرتبه پنج[۳۵] حل کردند.

در سال ۲۰۰۹ سرفراز خباز و همکاران [۱۰] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و سوم خیز بزرگ و تنش در جهت ضخامت ورق‌های FGM را محاسبه کردند. آن‌ها درباره‌ی تأثیر ضخامت و ثابت ناهمگنی n (توان در توزیع توانی خواص در جهت ضخامت) بر پاسخ‌ها بحث کردند.

در سال ۱۳۸۹ قناد و رحیمی [۱۱] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد FG را در حالت کلی استخراج کردند و سپس تنش‌های شعاعی و محیطی و نیز جابه‌جایی شعاعی استوانه را به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط معادله‌ی مشخصه با در نظر گرفتن سه شرط مرزی تنش-صفحه‌ای، کرنش-صفحه‌ای و استوانه‌ی بسته ارائه نمودند. آن‌ها فرض کردند استوانه همگن و همسانگرد باشد و توزیع خواص را به صورت توانی در نظر گرفتند.

آن‌ها در همان سال [۱۲] بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر استوانه‌ی جدار ضخیم FGM را در حالت کلی استخراج و سپس جابه‌جایی شعاعی و تنش بیشینه را برای استوانه با دو سر بسته و مقید (کرنش-صفحه‌ای) به صورت تحلیلی به دست آوردند و با نتایج حل PET مقایسه کردند.

قنّاد و زمانی‌نژاد در سال ۲۰۱۰ [۱۳] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول معادلات حاکم بر استوانه‌ی جدار ضخیم همگن و همسانگرد را برای شرایط مرزی مختلف ارائه و حل کردند.

در سال ۲۰۱۰، شریعت و همکاران [۱۴] تحلیل ترموالاستیسیته، ارتعاشات و انتشار موج تنش غیرخطی پوسته‌های جدار نازک استوانه‌ای FGM با خواص وابسته به دما را ارائه دادند. آن‌ها از فرمول‌بندی المان محدود هرمیتی مرتبه سه[۳۶] استفاده کردند تا پیوستگی جابه‌جایی و تنش نرمال شعاعی تضمین گردد، دقت افزایش یابد و از به وجود آمدن منبع مجازی موج در مرز مشترک المان‌ها جلوگیری شود. همچنین انتشار، بازتاب و تداخل امواج تنش ناشی از بارهای مکانیکی ضربه‌ای را در محیط دمایی مطالعه نمودند. تغییرات زمانی دما، جابه‌جایی و تنش ناشی از بارهای دینامیکی را با حل معادلات حاکم به شدت غیرخطی به کمک یک روش انتگرال‌گیری زمانی تکراری و تکنیک‌های فرارهایش و فرورهایش تعیین کردند. تأثیرات ثابت

34. Complementary Functions Method
35. The Fifth-order Runge-Kutta Method (RK5)
36. Third-order Hermitian Finite Element Formulation

ناهمگنی، ابعاد و وابستگی خواص به دما را بررسی نمودند. نتایج کار آن‌ها، تأثیر به‌سزای وابستگی خواص به دما را بر توزیع تنش گذرا، انتشار موج الاستیک و پدیده‌ی بازتاب نشان می‌دهد.

در سال ۱۳۹۰، رضایی پژند و اعرابی [۱۵] به تحلیل غیرخطی پوسته‌های با تقارن محوری چند لایه با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا پرداختند. آن‌ها از دو گونه تابع تغییر شکل مرتبه‌ی بالا برای تقریب بهتر کرنش برشی در راستای ضخامت بهره جستند. ایشان برای به دست آوردن پاسخ دقیق‌تر، دو درجه‌ی آزادی به جزء یک‌بعدی پوسته‌ی دگرگون افزودند و رابطه‌سازی لاگرانژی به‌همراه فرایند نیوتون-رافسون را به‌کار گرفتند.

در سال ۲۰۱۲ قنّاد و قارونی [۱۶]، تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها را برای پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ناهمگن با توزیع توانی خواص در راستای ضخامت، به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به دست آوردند. آن‌ها از روابط سینماتیک خطی استفاده کردند و نتایج کار خود را با نتایج حاصل از تئوری‌های الاستیسیته‌ی مستوی و تغییر شکل برشی مرتبه اول و روش المان محدود مقایسه کردند.

در سال ۲۰۱۳ استروزی و پلیکانو [۱۷] ارتعاشات غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک را بررسی کردند. آن‌ها از تئوری سندرز-کویتر برای مدل‌سازی ارتعاشات غیرخطی با دامنه‌ی محدود استفاده کردند و تغییر شکل پوسته را بر حسب جملات طولی، محیطی و شعاعی توصیف نمودند. شرایط مرزی در این پژوهش به صورت ساده، گیردار و آزاد در نظر گرفته شد. آن‌ها میدان جابه‌جایی را در جهت طولی بر حسب چندجمله‌ای‌های متعامد چبی‌شف و در جهت شعاعی بر حسب توابع هارمونیک، بسط دوگانه دادند.

تونگ [۱۸] در سال ۲۰۱۴، یک راه تحلیلی را برای پایداری پوسته‌های کروی نازک و ورق‌های دایروی گیردار FGM بر بستر الاستیک، تحت فشار یکنواخت خارجی و در معرض تغییرات دمایی محیط ارائه کرد. وی فرض کرد خواص مواد به دما وابسته بوده و در راستای ضخامت با تابع توانی ساده بر حسب کسر حجمی مواد سازنده، توزیع شده است. فرمول‌بندی‌های او برای پوسته‌های کروی نازک متقارن محوری بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با در نظر گرفتن غیرخطی هندسی، نقص هندسی اولیه و بستر الاستیک از نوع Pasternak هستند. او فرض کرد حل‌های تقریبی مرزهای گیردار ثابت را ارضا کند و از روش گلرکین برای استخراج عبارت‌های بارهای کمانش و منحنی‌های بار-خیز برای پوسته‌های کروی کم‌عمق FGM استفاده شده است. در حالت خاص این عبارت‌ها روابط متناظر با ورق‌های دایره‌ای FGM را ارائه می‌دهند. تونگ یک الگوریتم تکراری برای یافتن دمای کمانش و منحنی‌های بار-خیز پس‌کمانش برای ورق‌های دایروی FGM تحت بارگذاری حرارتی نوشته است. در نهایت او تأثیرات پارامترهای مربوط به مواد، هندسه، و بستر و نیز نقص هندسی و وابستگی خواص به دما بر پاسخ غیرخطی پوسته‌های کروی نازک و ورق‌های دایروی FGM

تحلیل و با جزئیات بحث کرده است.

در سال ۲۰۱۴ زنکور و عباس [۱۹] مسألهی ترموالاستیسیتهی عمومی با یک زمان رهایش را برای استوانهی بی‌نهایت بلند و توخالی با خواص فیزیکی وابسته به دما بررسی کردند. آن‌ها سطوح داخلی و خارجی استوانه را بدون تنش در نظر گرفتند. سطح داخلی تحت خوردگی با زمان و دما قرار دارد؛ در حالی که سطح بیرونی در دمای مرجع ثابت نگه داشته شده است. آن‌ها یک مدل المان محدود را برای حل معادلات حاکم که معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، کوپل‌شده و غیرخطی هستند، توسعه دادند؛ پاسخ عددی جابه‌جایی، دما و تنش را به دست آوردند و اثرات وابستگی و عدم وابستگی خواص به دما را بررسی کردند.

دوک و همکاران [۲۰] در سال ۲۰۱۴، بر اساس تئوری کلاسیک پوسته‌ها با احتساب غیرخطی هندسی، نقص هندسی اولیه و بستر الاستیک از نوع Pasternak، پاسخ غیرخطی متقارن محوری پوسته‌های کم‌عمق کروی FGM تحت بار مکانیکی-حرارتی و شرایط مرزی گوناگون بررسی کردند. نتایج پژوهش آن‌ها با استفاده از روش بابناف-گلرکین[۳۷] و تابع تنش، تأثیرات بستر الاستیک، فشار خارجی، دما، مادّه و خصوصیات هندسی بر کمانش و پس‌کمانش غیرخطی پوسته‌ها را نشان می‌دهد. در نهایت آن‌ها برخی از نتایج کار خود را با نتایج نویسندگان دیگر مقایسه کردند.

مشاهده می‌شود که اکثر پژوهش‌ها در زمینه‌ی مسائل خطی انجام شده است. در مورد پژوهش‌های مرتبط با مسائل غیرخطی، عمدتاً از روش المان محدود و تقریب‌های عددی برای حل مسأله استفاده می‌شود و تقریب‌های تحلیلی در حل این مسائل بسیار کم‌تر مورد توجه بوده است. در پژوهش حاضر، پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم FGM تحت فشارهای یکنواخت داخلی و خارجی در حالت متقارن محوری، با روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی در حالت الاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته حل می‌شود.

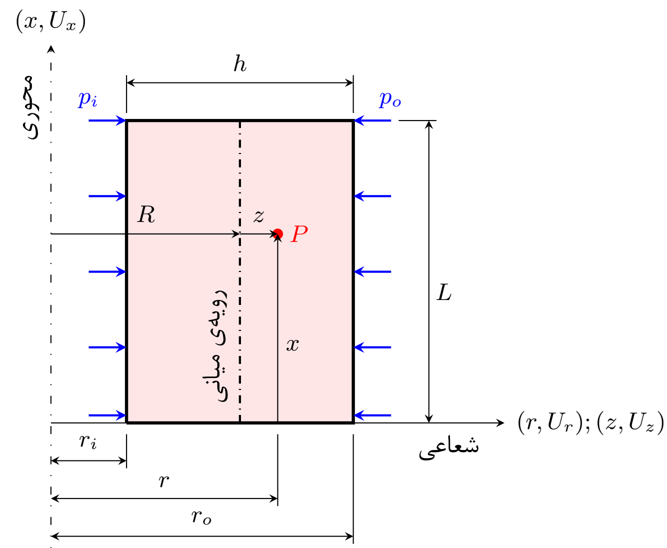
37. Bubnof-Galerkin Method

فصل ۲

استخراج معادلات

۲-۱ تعریف مسأله

در این پژوهش، هدف، تحلیل الاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم تحت فشار در حالت تعادل استاتیکی، با فرض برقراری روابط کرنش-جابه‌جایی غیرخطی است. در استخراج کلی معادلات، از روابط ساختاری الاستیک خطی (قانون هوک [1]) استفاده شده است و جنس پوسته‌ها به صورت ناهمگن و همسانگرد فرض می‌شود. استوانه در شعاع‌های داخلی و خارجی خود فشارهای یکنواخت، مستقل از زمان و نادنبالگر [2] را تحمل می‌کند. ضخامت h استوانه ثابت در نظر گرفته می‌شود. از آن‌جا که هندسه، جنس، ناهمگنی، بارگذاری و شرایط مرزی بر روی استوانه نسبت به محور مرکزی آن متقارن است، مسأله در حالت تقارن محوری کامل بررسی می‌گردد. شکل ۲-۱ برش طولی استوانه‌ی مورد بررسی را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱: شماتیک مسأله

با توجه به موقعیت و جابه‌جایی نقطه‌ی دلخواه P در شکل ۲-۱ روابط هندسی زیر صادقند.

$$r = R + z \quad \rightarrow \quad r_i = R - \frac{h}{۲}, \quad r_o = R + \frac{h}{۲}, \tag{۲-۱الف}$$

$$U_r = U_z. \tag{۲-۱ب}$$

محدوده‌ی تغییرات کمیت‌های مستقل $r_i \leq r \leq r_o$، $۰ \leq x \leq L$ و $۰ \leq \theta \leq ۲\pi$ هندسه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای را تعریف می‌کند.

1. Hook's Law
2. Non-follower

۲-۲ روابط سینماتیک غیرخطی

تانسور کرنش گرین-لاگرانژ[3]، $\mathbf{E}$، در دستگاه مختصات خمیده‌خط عمومی با رابطه‌ی زیر تعریف می‌شود[۱].[4]

$$\mathbf{E} = E_{ij}\mathbf{G}^i \circ \mathbf{G}^j = \frac{۱}{۲}(\mathbf{C} - \mathbf{I}). \tag{۲-۲}$$

در رابطه‌ی فوق، $(\ ) \circ (\ )$ بیانگر ضرب دیادیک[5] دو بردار است. همچنین، $\mathbf{G}^i$ بردار پایه‌ی پادگرد[6] در پیکربندی اولیه، $\mathbf{C} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$ تانسور راست کوشی-گرین[7]، $\mathbf{I}$ تانسور همانی[8] و $\mathbf{F}$ گرادیان تغییر شکل[9] است:

$$\mathbf{I} = \mathbf{G}_i \circ \mathbf{G}^i, \tag{۲-۳الف}$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}_i \circ \mathbf{G}^i. \tag{۲-۳ب}$$

در روابط اخیر $\mathbf{G}_i$ و $\mathbf{g}_i$ به ترتیب بردارهای پایه‌ی هم‌گرد[10] در پیکربندی اولیه و نهایی جسم است.
تانسور کرنش گرین-لاگرانژ در حقیقت تغییرات در توان دوم طول بردار مادّی $\mathrm{d}\mathbf{X}$ در پیکربندی اولیه را نشان می‌دهد که $\mathbf{X}$ بردار موقعیت است. به عبارت دیگر، $\mathbf{E}$ ناظر را قادر می‌سازد تا تغییرات طول را با توجه به مختصات اولیه محاسبه نماید. بنابراین می‌توان $\mathbf{E}$ را «تانسور کرنش مادّی»[11] نیز نام نهاد.
به همین ترتیب، تانسور کرنش $\mathbf{E}$ با درایه‌های هم‌گرد E_{ij} که نسبت به پیکربندی پیش از تغییر شکل تعریف می‌شوند، استفاده می‌شود. با جایگذاری (۲-۳الف) و (۲-۳ب) در (۲-۲) تانسور $\mathbf{E}$ بر حسب بردارهای پایه و ضرایب سنجه[12] $G_{ij} = \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j$ محاسبه می‌شود.

$$\mathbf{E} = E_{ij}\mathbf{G}^i \circ \mathbf{G}^j = \frac{۱}{۲}\left[(\mathbf{G}^i \circ \mathbf{g}_i)(\mathbf{g}_j \circ \mathbf{G}^j) - G_{ij}(\mathbf{G}^i \circ \mathbf{G}^j)\right] \tag{۲-۴}$$

می‌توان نشان داد که

$$\mathbf{g}_i = \mathbf{G}_i + \mathbf{u}_{,i} = (G_{ji} + U_j|_i)\mathbf{G}^j = F_{ji}\mathbf{G}^j, \tag{۲-۵}$$

3. Green-Lagrange Strain Tensor
۴. در سرتاسر متن این پایان‌نامه، کمیت‌های عددی با حروف نازک و مایل (italic) و بردارها و تانسورها به صورت صاف و توپر (bold) نمایش داده می‌شوند.
5. Dyadic Product
6. Contravariant Base Vector
7. Right Cauchy-Green Tensor
8. Identity Tensor
9. Deformation Gradient
10. Covariant Base Vectors
11. Material Strain Tensor
12. Metric Factors

که در آن $\mathbf{u} = U^i\mathbf{G}_i = U_i\mathbf{G}^i$ میدان برداری جابه‌جایی است. بنابراین مؤلفه‌های هم‌گرد تانسور کرنش گرین به شکل زیر قابل محاسبه‌اند.

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{۱}{۲}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) = \frac{۱}{۲}(g_{ij} - G_{ij}) \\ &= \frac{۱}{۲}(\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{G}_j \cdot \mathbf{u}_{,i} + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}) = \frac{۱}{۲}(U_i|_j + U_j|_i + U_k|_i U^k|_j). \end{aligned} \tag{۲-۶}$$

در روابط اخیر، $(\ )_{,i}$ به معنی مشتق جزئی و $(\ )|_i$ به معنی مشتق هم‌گرد است.

۲-۳ محاسبه‌ی کرنش‌ها

با توجه به تعریف، مشتق هم‌گرد مؤلفه‌های هم‌گرد و پادگرد یک بردار به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$U_i|_j = U_{i,j} - U_k\Gamma^k_{ij}, \tag{۲-۷الف}$$

$$U^i|_j = U^i{}_{,j} + U^k\Gamma^i_{kj}. \tag{۲-۷ب}$$

Γ^k_{ij} نماد کریستوفل نوع دوم[۱۳] بوده و معیاری برای تغییرات بردارهای پایه است.

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji} = \mathbf{G}_{i,j} \cdot \mathbf{G}^k = \mathbf{G}_{j,i} \cdot \mathbf{G}^k. \tag{۲-۸}$$

در رابطه‌ی اخیر، $(\ ) \cdot (\ )$ نشان‌دهنده‌ی ضرب داخلی (نقطه‌ای، عددی)[۱۴] دو بردار است. بردارهای پایه‌ی هم‌گرد و پادگرد با توجه به مشتقات زیر محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{G}_i = \mathbf{X}_{,i} = \frac{\partial X^j}{\partial q^i}\hat{\mathbf{i}}_j, \qquad \mathbf{G}^i = \frac{\partial q^i}{\partial X^j}\hat{\mathbf{i}}^j, \tag{۲-۹}$$

که در آن $\hat{\mathbf{i}}_j = \hat{\mathbf{i}}^j$ بردار پایه (و یکه) در دستگاه مختصات کارتزین و q^i مختصه‌های مربوط به دستگاه خمیده‌خط هستند. در مختصات استوانه‌ای اندیس‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب جهات شعاعی (و همچنین ضخامت)، محیطی و محوری را نشان می‌دهند؛ بنابراین:

$$q^۱ = r, \qquad q^۲ = \theta, \qquad q^۳ = x,$$

$$\mathbf{G}_۱ = \mathbf{G}^۱ = \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_z, \tag{۲-۱۰الف}$$

$$\mathbf{G}_۲ = r\hat{\mathbf{e}}_\theta, \qquad \mathbf{G}^۲ = \frac{\hat{\mathbf{e}}_\theta}{r}, \tag{۲-۱۰ب}$$

$$\mathbf{G}_۳ = \mathbf{G}^۳ = \hat{\mathbf{e}}_x, \tag{۲-۱۰پ}$$

13. Christoffel Symbol of the Second Kind
14. Inner (Dot, Scalar) Product

که $\hat{\mathbf{e}}$ها بردارهای یکه (جهت) هستند.

با توجه به روابط (۲-۸) و (۲-۱۰)، مقادیر نماد کریستوفل نوع دوم در دستگاه مختصات استوانه‌ای به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{cases} \Gamma^{\theta}_{r\theta} = \Gamma^{\theta}_{\theta r} = ۱/r, \\ \Gamma^{r}_{\theta\theta} = -r, \\ \Gamma^{k}_{ij} = ۰, \qquad \text{سایر اندیس‌ها.} \end{cases} \tag{۲-۱۱}$$

از طرفی رابطه‌ی بین مؤلفه‌های هم‌گرد و پادگرد و مؤلفه‌های فیزیکی[15] به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$\overset{*}{U}_i = U_i|\mathbf{g}_i|, \tag{۲-۱۲الف}$$

$$\overset{*}{U}^i = U^i|\mathbf{g}^i|. \tag{۲-۱۲ب}$$

در روابط اخیر عمل جمع روی اندیس i صورت نمی‌گیرد. در دستگاه مختصات استوانه‌ای رابطه‌ی بین مؤلفه‌های ریاضی و مؤلفه‌های فیزیکی به شکل زیر است.

$$U_۱ = U^۱ = U_r = U_z, \tag{۲-۱۳الف}$$

$$U_۲ = rU_\theta, \qquad U^۲ = \frac{U_\theta}{r}, \tag{۲-۱۳ب}$$

$$U_۳ = U^۳ = U_x. \tag{۲-۱۳پ}$$

با توجه به معادلات (۲-۶)، (۲-۷)، (۲-۱۱) و (۲-۱۳) و با توجه به تقارن محوری مسأله ($U_\theta = ۰$ و $\frac{\partial(\,)}{\partial\theta} = ۰$)، روابط سینماتیک غیرخطی به شرح زیر به دست می‌آید.

$$\varepsilon_z = E_{rr} = U_{z,z} + \frac{۱}{۲}\left(U^۲_{z,z} + U^۲_{x,z}\right), \tag{۲-۱۴الف}$$

$$\varepsilon_\theta = E_{\theta\theta} = \frac{U_z}{R+z} + \frac{U_z^۲}{۲(R+z)^۲}, \tag{۲-۱۴ب}$$

$$\varepsilon_x = E_{xx} = U_{x,x} + \frac{۱}{۲}\left(U^۲_{x,x} + U^۲_{z,x}\right), \tag{۲-۱۴پ}$$

$$\gamma_{xz} = ۲E_{rx} = U_{z,x} + U_{x,z} + U_{z,z}U_{z,x} + U_{x,z}U_{x,x}, \tag{۲-۱۴ت}$$

$$\gamma_{x\theta} = ۲E_{x\theta} = ۰, \quad \gamma_{z\theta} = ۲E_{r\theta} = ۰.$$

در روابط بالا، $(\,)_{,x} = \frac{\partial(\,)}{\partial x}$ و $(\,)_{,z} = \frac{\partial(\,)}{\partial z}$، مشتقات جزئی هستند.

با توجه به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تقارن محوری، میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته

15. Physical Components

می‌شود.

$$\begin{cases} U_x = u(x) + \phi(x)z \\ U_\theta = \circ \\ U_z = w(x) + \psi(x)z \end{cases} \tag{۲-۱۵}$$

با قرار دادن میدان جابه‌جایی (۲-۱۵) در معادلات سینماتیک غیرخطی (۲-۱۴)، کرنش‌ها بر حسب توابع u، ϕ، w و ψ و مشتقات آن‌ها به دست می‌آید.

$$\varepsilon_z = \psi + \frac{\psi^۲}{۲} + \frac{\phi^۲}{۲} \tag{۲-۱۶الف}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{w+\psi z}{R+z} + \frac{(w+\psi z)^۲}{۲(R+z)^۲} \tag{۲-۱۶ب}$$

$$\varepsilon_x = u' + \frac{u'^۲}{۲} + \frac{w'^۲}{۲} + (\phi' + u'\phi' + w'\psi')z + \left(\frac{\phi'^۲}{۲} + \frac{\psi'^۲}{۲}\right) z^۲ \tag{۲-۱۶پ}$$

$$\gamma_{xz} = \phi + u'\phi + w' + w'\psi + (\psi' + \psi\psi' + \phi\phi')z \tag{۲-۱۶ت}$$

در روابط بالا $\frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}x} = (\,)'$ است. ملاحظه می‌شود که در حالت کلی، کرنش‌ها نسبت به متغیر مستقل z و توابع u، ϕ، w و ψ خطی نیستند.

۲-۴ اصل کار مجازی

بر طبق این اصل یک جسم شکل‌پذیر زمانی در حالت تعادل است که کار مجازی نیروهای داخلی (انرژی کرنشی) با کار مجازی بارگذاری خارجی ناشی از جابه‌جایی مجازی برابر باشد. ضمناً جابه‌جایی‌های مجازی می‌بایست از نظر سینماتیکی مجاز باشند؛ یعنی، معادلات سینماتیک را ارضا کنند و با شرایط مرزی سازگار باشند [۲۱].

۲-۴-۱ انرژی کرنشی

انرژی کرنشی[16] کار انجام شده توسط نیروهای داخلی است که به طور تدریجی از صفر تا مقدار نهایی خود افزایش می‌یابند.

$$U = \iiint\limits_V U^* \,\mathrm{d}V, \tag{۲-۱۷}$$

که در آن

$$U^* = \int_\circ^{\varepsilon_{ij}} \sigma^{ij}\,\mathrm{d}\varepsilon_{ij} \tag{۲-۱۸}$$

16. Starin Energy

چگالی (شدت حجمی) انرژی کرنشی است. در رابطه‌ی اخیر، σ^{ij} مؤلفه‌های فیزیکی تانسور تنش دوم کیرشهف-پیولا[۱۷] هستند و عمل جمع روی اندیس‌های تکراری i و j انجام می‌شود. می‌توان نشان داد که برای مواد الاستیک خطی، تغییرات[۱۸] انرژی کرنشی از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta U = \iiint\limits_V \delta U^* \,\mathrm{d}V = \iiint\limits_V \sigma^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\,\mathrm{d}V. \tag{۲-۱۹}$$

با توجه به سیستم مختصات استوانه‌ای و حالت تقارن محوری مسأله، المان حجم به صورت حلقه‌ای در نظر گرفته می‌شود.

$$\mathrm{d}V = ۲\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}x = ۲\pi(R+z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x. \tag{۲-۲۰}$$

با جایگذاری (۲-۲۰) در (۲-۱۹)، تغییرات انرژی کرنشی پوسته‌ی استوانه‌ای محاسبه می‌شود.

$$\delta U = ۲\pi R\int_{۰}^{L}\int_{-h/۲}^{+h/۲}\sigma^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}\left(۱+\frac{z}{R}\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \tag{۲-۲۱}$$

با توجه به معادلات (۲-۱۶) و با استفاده از اصول حساب تغییرات[۱۹]، می‌توان تغییرات کرنش‌ها را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\delta\varepsilon_z = \delta\left[\psi+\frac{\psi^۲}{۲}+\frac{\phi^۲}{۲}\right] = \delta\psi+\psi\,\delta\psi+\phi\,\delta\phi, \tag{۲-۲۲الف}$$

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_\theta &= \delta\left[\frac{w+\psi z}{R+z}+\frac{(w+\psi z)^۲}{۲(R+z)^۲}\right]\\ &= \frac{۱}{R+z}(\,\delta w+z\,\delta\psi)+\frac{۱}{(R+z)^۲}((w+\psi z)(\,\delta w+z\,\delta\psi)),\end{aligned} \tag{۲-۲۲ب}$$

$$\begin{aligned}\delta\varepsilon_x &= \delta\left[u'+\frac{u'^۲}{۲}+\frac{w'^۲}{۲}+(\phi'+u'\phi'+w'\psi')z+\left(\frac{\phi'^۲}{۲}+\frac{\psi'^۲}{۲}\right)z^۲\right]\\ &= \delta u'+u'\,\delta u'+w'\,\delta w'+(\,\delta\phi'+u'\,\delta\phi'+\phi'\,\delta u'+w'\,\delta\psi'+\psi'\,\delta w')z\\ &+(\phi'\,\delta\phi'+\psi'\,\delta\psi')z^۲,\end{aligned} \tag{۲-۲۲پ}$$

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{xz} &= \delta[\phi+u'\phi+w'+w'\psi+(\psi'+\psi\psi'+\phi\phi')z]\\ &= \delta\phi+u'\,\delta\phi+\phi\,\delta u'+\,\delta w'+w'\,\delta\psi+\psi\,\delta w'\\ &+(\,\delta\psi'+\psi\,\delta\psi'+\psi'\,\delta\psi+\phi\,\delta\phi'+\phi'\,\delta\phi)z.\end{aligned} \tag{۲-۲۲ت}$$

17. The Second Kirchhoff-Piola Stress Tensor
18. Variations
19. Variational Calculus

برای ساده‌سازی روند محاسبه‌ی انرژی کرنشی، منتجه‌های تنش[20] به این صورت تعریف می‌شوند.

$$\left\{N_z \quad M_z \quad Q_z\right\}^{\mathrm{T}} = \int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_z \left\{۱ \quad z \quad z^{۲}\right\}^{\mathrm{T}} \left(۱+\frac{z}{R}\right) \mathrm{d}z, \tag{۲-۲۳الف}$$

$$\left\{N_\theta \quad M_\theta \quad Q_\theta\right\}^{\mathrm{T}} = \int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_\theta \left\{۱ \quad z \quad z^{۲}\right\}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}z, \tag{۲-۲۳ب}$$

$$\left\{\bar{N}_\theta \quad \bar{M}_\theta \quad \bar{Q}_\theta\right\}^{\mathrm{T}} = \int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_\theta \left\{۱ \quad z \quad z^{۲}\right\}^{\mathrm{T}} \left(\frac{R}{R+z}\right) \mathrm{d}z, \tag{۲-۲۳پ}$$

$$\left\{N_x \quad M_x \quad Q_x\right\}^{\mathrm{T}} = \int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_x \left\{۱ \quad z \quad z^{۲}\right\}^{\mathrm{T}} \left(۱+\frac{z}{R}\right) \mathrm{d}z, \tag{۲-۲۳ت}$$

$$\left\{N_{xz} \quad M_{xz} \quad Q_{xz}\right\}^{\mathrm{T}} = \int_{-h/۲}^{+h/۲} \tau_{xz} \left\{۱ \quad z \quad z^{۲}\right\}^{\mathrm{T}} \left(۱+\frac{z}{R}\right) \mathrm{d}z, \tag{۲-۲۳ث}$$

که σ_z، σ_θ، σ_x و τ_{xz} مؤلفه‌های فیزیکی غیرصفر تانسور تنش دوم کیرشهف-پیولا هستند. در این قسمت هر کدام از جملات $\sigma^{ij}\,\delta\varepsilon_{ij}$ به طور جداگانه محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} R\int_{۰}^{L}\int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_z\,\delta\varepsilon_z \left(۱+\frac{z}{R}\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x &= R\int_{۰}^{L} N_z((۱+\psi)\,\delta\psi + \phi\,\delta\phi)\,\mathrm{d}x \\ &= R\int_{۰}^{L} \begin{Bmatrix} ۰ \\ N_z\phi \\ ۰ \\ N_z(۱+\psi) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta\phi \\ \delta w \\ \delta\psi \end{Bmatrix} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{۲-۲۴الف}$$

$$\begin{aligned} R\int_{۰}^{L}\int_{-h/۲}^{+h/۲} & \sigma_\theta\,\delta\varepsilon_\theta \left(۱+\frac{z}{R}\right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{L} (N_\theta\,\delta w + M_\theta\,\delta\psi)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{۱}{R}\int_{۰}^{L} [(\bar{N}_\theta w + \bar{M}_\theta\psi)\,\delta w + (\bar{M}_\theta w + \bar{Q}_\theta\psi)\,\delta\psi]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{۰}^{L} \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ N_\theta + \frac{۱}{R}(\bar{N}_\theta w + \bar{M}_\theta\psi) \\ M_\theta + \frac{۱}{R}(\bar{M}_\theta w + \bar{Q}_\theta\psi) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta\phi \\ \delta w \\ \delta\psi \end{Bmatrix} \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{۲-۲۴ب}$$

20. Stress Resultatns

$$
\begin{aligned}
R\int_{\circ}^{L}\int_{-h/۲}^{+h/۲}&\sigma_x\,\delta\varepsilon_x\left(۱+\frac{z}{R}\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\\
&=R\int_{\circ}^{L}(N_x((۱+u')\,\delta u'+w'\,\delta w')\\
&+M_x(\phi'\,\delta u'+(۱+u')\,\delta\phi'+\psi'\,\delta w'+w'\,\delta\psi')+Q_x(\phi'\,\delta\phi'+\psi'\,\delta\psi'))\,\mathrm{d}x\\
&=R\left(\begin{Bmatrix}N_x(۱+u')+M_x\phi'\\ M_x(۱+u')+Q_x\phi'\\ N_xw'+M_x\psi'\\ M_xw'+Q_x\psi'\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}\delta u\\ \delta\phi\\ \delta w\\ \delta\psi\end{Bmatrix}\right)_{x=\circ,L}\\
&-R\int_{\circ}^{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{Bmatrix}N_x(۱+u')+M_x\phi'\\ M_x(۱+u')+Q_x\phi'\\ N_xw'+M_x\psi'\\ M_xw'+Q_x\psi'\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}\delta u\\ \delta\phi\\ \delta w\\ \delta\psi\end{Bmatrix}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{۲-۲۴پ}
$$

$$
\begin{aligned}
R\int_{\circ}^{L}\int_{-h/۲}^{+h/۲}&\tau_z\,\delta\gamma_{xz}\left(۱+\frac{z}{R}\right)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=R\int_{\circ}^{L}[N_{xz}(\phi\,\delta u'+(۱+u')\,\delta\phi\\
&+(۱+\psi)\,\delta w'+w'\,\delta\psi)+M_{xz}(\phi'\,\delta\phi+\phi\,\delta\phi'+\psi'\,\delta\psi+(۱+\psi)\,\delta\psi')]\,\mathrm{d}x\\
&=R\left(\begin{Bmatrix}N_{xz}\phi\\ M_{xz}\phi\\ N_{xz}(۱+\psi)\\ M_{xz}(۱+\psi)\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{Bmatrix}\delta u\\ \delta\phi\\ \delta w\\ \delta\psi\end{Bmatrix}\right)_{x=\circ,L}\\
&+R\int_{\circ}^{L}\left(\begin{Bmatrix}\circ\\ N_{xz}(۱+u')+M_{xz}\phi'\\ \circ\\ N_{xz}w'+M_{xz}\psi'\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{Bmatrix}N_{xz}\phi\\ M_{xz}\phi\\ N_{xz}(۱+\psi)\\ M_{xz}(۱+\psi)\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\right)\begin{Bmatrix}\delta u\\ \delta\phi\\ \delta w\\ \delta\psi\end{Bmatrix}\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{۲-۲۴ت}
$$

۲-۴-۲ کار مجازی بارگذاری خارجی

کار مجازی بارهای خارجی، ناشی از بارهای حجمی $\mathbf{b}$ (با بعد نیرو بر واحد حجم)، بارهای سطحی $\mathbf{p}$ (با بعد نیرو بر واحد سطح) و نیروهای متمرکز $\mathbf{f}_i$ (با بعد نیرو) است؛ بنابراین،

$$
\delta W=\iiint\limits_V\mathbf{b}\cdot\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}V+\iint\limits_S\mathbf{p}\cdot\,\delta\mathbf{u}\,\mathrm{d}S+\sum_i\mathbf{f}_i\cdot\,\delta\mathbf{u},
\tag{۲-۲۵}
$$

که S سطح محصورکننده‌ی جسم است. در مسأله‌ی حاضر از نیروهای حجمی چشم‌پوشی شده است؛ پس: $\mathbf{b} = \{۰\}$. در ضمن، هیچ نیروی متمرکز فعالی نیز در مسأله وجود ندارد. از میان بارهای سطحی، تنها فشار داخلی و خارجی فعال هستند؛ یعنی می توانند با جابه‌جایی نقطه‌ی اثرشان در امتداد خود، کار انجام دهند. کار مجازی ناشی از فشارهای یکنواخت داخلی p_i و خارجی p_o به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$\delta W = \iint\limits_{S_i} p_i\, \delta U_z\big|_{r=r_i} \mathrm{d}S_i - \iint\limits_{S_o} p_o\, \delta U_z\big|_{r=r_o} \mathrm{d}S_o, \tag{۲-۲۶}$$

که S_i دیواره‌ی داخلی پوسته و S_o دیواره‌ی خارجی آن است.

$$\mathrm{d}S_i = ۲\pi r_i\, \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}S_o = ۲\pi r_o\, \mathrm{d}x. \tag{۲-۲۷}$$

بنابراین می‌توان نوشت،

$$\delta W = \int_۰^L ۲\pi p_i r_i \left(\delta w - \frac{h}{۲}\,\delta\psi\right) \mathrm{d}x - \int_۰^L ۲\pi p_o r_o \left(\delta w + \frac{h}{۲}\,\delta\psi\right) \mathrm{d}x, \tag{۲-۲۸}$$

یا

$$\delta W = ۲\pi \int_۰^L \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ W_i - W_o \\ -\frac{h}{۲}(W_i + W_o) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \delta u \\ \delta\phi \\ \delta w \\ \delta\psi \end{Bmatrix} \mathrm{d}x, \tag{۲-۲۹}$$

که در آن

$$W_i = p_i r_i = p_i\left(R - \frac{h}{۲}\right), \qquad W_o = p_o r_o = p_o\left(R + \frac{h}{۲}\right). \tag{۲-۳۰}$$

۲-۵ معادلات حاکم

با توجه به اصل کار مجازی، $\delta U = \delta W$، چهار معادله‌ی حاکم مسأله به‌دست می‌آید.

$$-R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N_x(۱+u') + M_x\phi' + N_{xz}\phi) = ۰ \tag{۲-۳۱الف}$$

$$R(N_z\phi + N_{xz}(۱+u') + M_{xz}\phi') - R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(M_x(۱+u') + Q_x\phi' + M_{xz}\phi) = ۰ \tag{۲-۳۱ب}$$

$$N_\theta + \frac{۱}{R}(\bar{N}_\theta w + \bar{M}_\theta\psi) - R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(N_x w' + M_x\psi' + N_{xz}(۱+\psi)) = W_i - W_o \tag{۲-۳۱پ}$$

$$\begin{aligned} M_\theta &+ \frac{۱}{R}(\bar{M}_\theta w + \bar{Q}_\theta\psi) + R(N_z(۱+\psi) + N_{xz}w' + M_{xz}\psi') \\ &- R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(M_x w' + Q_x\psi' + M_{xz}(۱+\psi)) = -\frac{h}{۲}(W_i + W_o) \end{aligned} \tag{۲-۳۱ت}$$

معادلات فوق را می‌توان به شکل زیر مرتب کرد.

$$
\begin{aligned}
&-R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{Bmatrix}N_x\\M_x\end{Bmatrix}+R\begin{Bmatrix}\circ\\N_{xz}\end{Bmatrix}\\
&\quad-R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\begin{bmatrix}N_x & M_x\\M_x & Q_x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u'\\\phi'\end{Bmatrix}\right)+R\begin{bmatrix}\circ & \circ\\N_{xz} & M_{xz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u'\\\phi'\end{Bmatrix}\\
&\quad-R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\begin{bmatrix}\circ & N_{xz}\\\circ & M_{xz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\\phi\end{Bmatrix}\right)+R\begin{bmatrix}\circ & \circ\\\circ & N_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\\phi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\circ\\\circ\end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۲-۳۲الف}
$$

$$
\begin{aligned}
&-R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{Bmatrix}N_{xz}\\M_{xz}\end{Bmatrix}+R\begin{Bmatrix}\circ\\N_z\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}N_\theta\\M_\theta\end{Bmatrix}\\
&\quad-R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\begin{bmatrix}N_x & M_x\\M_x & Q_x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w'\\\psi'\end{Bmatrix}\right)+R\begin{bmatrix}\circ & \circ\\N_{xz} & M_{xz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w'\\\psi'\end{Bmatrix}\\
&\quad-R\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\begin{bmatrix}\circ & N_{xz}\\\circ & M_{xz}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w\\\psi\end{Bmatrix}\right)+R\begin{bmatrix}\circ & \circ\\\circ & N_z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w\\\psi\end{Bmatrix}+\frac{۱}{R}\begin{bmatrix}\bar{N}_\theta & \bar{M}_\theta\\\bar{M}_\theta & \bar{Q}_\theta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w\\\psi\end{Bmatrix}\\
&\quad=\begin{Bmatrix}W_i-W_o\\-\frac{h}{۲}(W_i+W_o)\end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{۲-۳۲ب}
$$

می‌توان با محاسبه‌ی منتجه‌های تنش، معادلات حاکم را بر حسب مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی بازنویسی کرد. به این منظور، فرض می‌شود مدول الاستیک در جهت شعاعی به‌صورت نمایی تغییر کند؛ یعنی،

$$E(r)=E_i\left(\frac{r}{r_i}\right)^n. \tag{۲-۳۳}$$

در رابطه‌ی (۲-۳۳)، E_i مدول الاستیسیته در شعاع داخلی و n ثابت بی‌بعد ناهمگنی است. با جایگذاری (۲-۱الف) در (۲-۳۳) می توان مدول الاستیسیته را بر حسب مختصه‌ی z بیان کرد.

$$E(z)=E_i\left(\frac{۲(R+z)}{۲R-h}\right)^n. \tag{۲-۳۴}$$

همچنین چون اثر تغییرات نسبت پواسون در پاسخ عملاً صفر است، فرض می شود این نسبت برابر با مقدار ثابت $\nu=۰/۳$ باشد.

از طرفی، قانون هوک معادلات تنش-کرنش را تعریف می‌کند.

$$\sigma_i=\lambda E(z)[(۱-\nu)\varepsilon_i+\nu(\varepsilon_j+\varepsilon_k)],\qquad i\neq j\neq k,\qquad \lambda=\frac{۱}{(۱+\nu)(۱-۲\nu)}, \tag{۲-۳۵الف}$$

$$\tau_{xz}=\mu\lambda E(z)\gamma_{xz},\qquad \mu=\frac{\kappa(۱-۲\nu)}{۲},\qquad \text{که:}\quad \kappa=\frac{۵}{۶}. \tag{۲-۳۵ب}$$

باید توجه داشت که λ در اینجا ثابت لامه نیست و κ ضریب تصحیح برشی است. در منابع مختلف مقادیر ۵/۶ و $۱۲/\pi^{۲}$ برای این ضریب پیشنهاد شده است که اختلاف بسیار اندکی با هم دارند. در پژوهش حاضر از $\kappa = ۵/۶$ استفاده شده است.

در مسأله‌ی حاضر، با توجه به به‌کارگیری تئوری تغییر شکل برشی، مشتقات بر حسب مختصه‌ی محوری و ضرایب ثابت، حاصل انتگرال‌گیری در راستای شعاعی (ضخامت) هستند. بنابراین، انتگرال روی ضخامت I به شکل زیر تعریف می‌شود.

$$I(p,q) = \int_{-h/۲}^{+h/۲} z^{p}(R+z)^{q}\,\mathrm{d}z. \tag{۳۶-۲}$$

در حالت کلی انتگرال $I(p,q)$، تابع مشخصه‌های هندسی R و h و نیز ثابت ناهمگنی n است.

اکنون منتجه‌های تنش بر حسب توابع جابه‌جایی و مشتقات آن‌ها محاسبه می‌شوند.

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ M_x \\ Q_x \end{Bmatrix} &= \int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_x \begin{Bmatrix} ۱ \\ z \\ z^{۲} \end{Bmatrix} \left(۱+\frac{z}{R}\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_{-h/۲}^{+h/۲} (\lambda E(z)[(۱-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_\theta+\varepsilon_z)]) \begin{Bmatrix} ۱ \\ z \\ z^{۲} \end{Bmatrix} \left(۱+\frac{z}{R}\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{\lambda E_i}{R r_i^{n}} \left[(۱-\nu)\begin{Bmatrix} I(۰,n+۱) \\ I(۱,n+۱) \\ I(۲,n+۱) \end{Bmatrix} \left[u' + \frac{u'^{۲}}{۲} + \frac{w'^{۲}}{۲}\right] \right. \\
&+ (۱-\nu)\begin{Bmatrix} I(۱,n+۱) \\ I(۲,n+۱) \\ I(۳,n+۱) \end{Bmatrix} [\phi' + u'\phi' + w'\psi'] \\
&+ (۱-\nu)\begin{Bmatrix} I(۲,n+۱) \\ I(۳,n+۱) \\ I(۴,n+۱) \end{Bmatrix} \left[\frac{\phi'^{۲}}{۲} + \frac{\psi'^{۲}}{۲}\right] + \nu \begin{Bmatrix} I(۰,n+۱)+I(۱,n) \\ I(۱,n+۱)+I(۲,n) \\ I(۲,n+۱)+I(۳,n) \end{Bmatrix} \psi \\
&+ \nu \begin{Bmatrix} I(۰,n+۱)+I(۲,n-۱) \\ I(۱,n+۱)+I(۳,n-۱) \\ I(۲,n+۱)+I(۴,n-۱) \end{Bmatrix} \frac{\psi^{۲}}{۲} + \nu \begin{Bmatrix} I(۰,n+۱) \\ I(۱,n+۱) \\ I(۲,n+۱) \end{Bmatrix} \frac{\phi^{۲}}{۲} \\
&\left. +\nu \begin{Bmatrix} I(۰,n) \\ I(۱,n) \\ I(۲,n) \end{Bmatrix} w + \nu \begin{Bmatrix} I(۰,n-۱) \\ I(۱,n-۱) \\ I(۲,n-۱) \end{Bmatrix} \frac{w^{۲}}{۲} + \nu \begin{Bmatrix} I(۱,n-۱) \\ I(۲,n-۱) \\ I(۳,n-۱) \end{Bmatrix} w\psi \right]
\end{aligned} \tag{۳۷-۲}$$

$$
\begin{aligned}
N_z &= \int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_z \left(۱ + \frac{z}{R}\right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{-h/۲}^{+h/۲} (\lambda E(z)[(۱-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_\theta)]) \left(۱ + \frac{z}{R}\right) \mathrm{d}z \\
&= \frac{\lambda E_i}{R r_i^n} \left[\nu I(\circ, n+۱) \left[u' + \frac{u'^۲}{۲} + \frac{w'^۲}{۲}\right]\right. \\
&+ \nu I(۱, n+۱) \left[\phi' + u'\phi' + w'\psi'\right] \\
&+ \nu I(۲, n+۱) \left[\frac{\phi'^۲}{۲} + \frac{\psi'^۲}{۲}\right] + ((۱-\nu) I(\circ, n+۱) + \nu I(۱, n))\psi \\
&+ ((۱-\nu) I(\circ, n+۱) + \nu I(۲, n-۱))\frac{\psi^۲}{۲} + (۱-\nu) I(\circ, n+۱)\frac{\phi^۲}{۲} \\
&\left. + \nu I(\circ, n) w + \nu I(\circ, n-۱)\frac{w^۲}{۲} + \nu I(۱, n-۱) w\psi \right]
\end{aligned}
\tag{۲-۳۸}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_\theta \\ M_\theta \end{Bmatrix} &= \int_{-h/۲}^{+h/۲} \sigma_\theta \begin{Bmatrix} ۱ \\ z \end{Bmatrix} \mathrm{d}z \\
&= \int_{-h/۲}^{+h/۲} (\lambda E(z)[(۱-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)]) \begin{Bmatrix} ۱ \\ z \end{Bmatrix} \mathrm{d}z \\
&= \frac{\lambda E_i}{r_i^n} \left[\nu \begin{Bmatrix} I(\circ, n) \\ I(۱, n) \end{Bmatrix} \left[u' + \frac{u'^۲}{۲} + \frac{w'^۲}{۲}\right]\right. \\
&+ \nu \begin{Bmatrix} I(۱, n) \\ I(۲, n) \end{Bmatrix} \left[\phi' + u'\phi' + w'\psi'\right] \\
&+ \nu \begin{Bmatrix} I(۲, n) \\ I(۳, n) \end{Bmatrix} \left[\frac{\phi'^۲}{۲} + \frac{\psi'^۲}{۲}\right] + \begin{Bmatrix} \nu I(\circ, n) + (۱-\nu) I(۱, n-۱) \\ \nu I(۱, n) + (۱-\nu) I(۲, n-۱) \end{Bmatrix} \psi \\
&+ \begin{Bmatrix} \nu I(\circ, n) + (۱-\nu) I(۲, n-۲) \\ \nu I(۱, n) + (۱-\nu) I(۳, n-۲) \end{Bmatrix} \frac{\psi^۲}{۲} + \nu \begin{Bmatrix} I(\circ, n) \\ I(۱, n) \end{Bmatrix} \frac{\phi^۲}{۲} \\
&+ (۱-\nu) \begin{Bmatrix} I(\circ, n-۱) \\ I(۱, n-۱) \end{Bmatrix} w + (۱-\nu) \begin{Bmatrix} I(\circ, n-۲) \\ I(۱, n-۲) \end{Bmatrix} \frac{w^۲}{۲} \\
&\left. + (۱-\nu) \begin{Bmatrix} I(۱, n-۲) \\ I(۲, n-۲) \end{Bmatrix} w\psi \right]
\end{aligned}
\tag{۲-۳۹}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \bar{N}_\theta \\ \bar{M}_\theta \\ \bar{Q}_\theta \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \frac{R}{R+z}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{-h/2}^{+h/2} \left(\lambda E(z)[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu(\varepsilon_x+\varepsilon_z)]\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \frac{R}{R+z}\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{R\lambda E_i}{r_i^n} \left[\nu \begin{Bmatrix} I(0,n-1) \\ I(1,n-1) \\ I(2,n-1) \end{Bmatrix} \left[u' + \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} \right] \right. \\
&+ \nu \begin{Bmatrix} I(1,n-1) \\ I(2,n-1) \\ I(3,n-1) \end{Bmatrix} [\phi' + u'\phi' + w'\psi'] + \nu \begin{Bmatrix} I(2,n-1) \\ I(3,n-1) \\ I(4,n-1) \end{Bmatrix} \left[\frac{\phi'^2}{2} + \frac{\psi'^2}{2} \right] \\
&+ \begin{Bmatrix} \nu I(0,n-1) + (1-\nu) I(1,n-2) \\ \nu I(1,n-1) + (1-\nu) I(2,n-2) \\ \nu I(2,n-1) + (1-\nu) I(3,n-2) \end{Bmatrix} \psi \\
&+ \begin{Bmatrix} \nu I(0,n-1) + (1-\nu) I(2,n-3) \\ \nu I(1,n-1) + (1-\nu) I(3,n-3) \\ \nu I^2_{n-1} + (1-\nu) I^4_{n-3} \end{Bmatrix} \frac{\psi^2}{2} + \nu \begin{Bmatrix} I^0_{n-1} \\ I^1_{n-1} \\ I^2_{n-1} \end{Bmatrix} \frac{\phi^2}{2} \\
&+ (1-\nu) \begin{Bmatrix} I(0,n-2) \\ I(1,n-2) \\ I(2,n-2) \end{Bmatrix} w + (1-\nu) \begin{Bmatrix} I(0,n-3) \\ I(1,n-3) \\ I(2,n-3) \end{Bmatrix} \frac{w^2}{2} \\
&\left. +(1-\nu) \begin{Bmatrix} I(1,n-3) \\ I(2,n-3) \\ I(3,n-3) \end{Bmatrix} w\psi \right]
\end{aligned}
\tag{۲-۴۰}
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_{xz} \\ M_{xz} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xz} \left(1+\frac{z}{R}\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \mathrm{d}z \\
&= \int_{-h/2}^{+h/2} \mu\lambda E(z)\gamma_{xz} \left(1+\frac{z}{R}\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \mathrm{d}z \\
&= \frac{\mu\lambda E_i}{R r_i^n} \left[\begin{Bmatrix} I(0,n+1) \\ I(1,n+1) \end{Bmatrix} (\phi + u'\phi + w' + w'\psi) \right. \\
&\left. + \begin{Bmatrix} I(1,n+1) \\ I(2,n+1) \end{Bmatrix} (\psi' + \psi\psi' + \phi\phi') \right]
\end{aligned}
\tag{۲-۴۱}
$$

با جایگذاری منتجه‌های تنش (۲-۳۷) تا (۲-۴۱) در معادلات حاکم (۲-۳۲)، می‌توان این معادلات را بر حسب u، φ، w و ψ و مشتقات آن‌ها به دست آورد. ضرایب ثابت این معادلات تابع نسبت پواسون ν، شعاع میانگین R، ضخامت h و ثابت ناهمگنی n هستند.

$$\begin{aligned}
&\nu I(0,n)w' + \nu\left[I(0,n+1) + I(1,n)\right]\psi' + (1-\nu)\,I(0,n+1)u'' + (1-\nu)\,I(1,n+1)\phi'' \\
&\quad + 3(1-\nu)\left[I(0,n+1)u'u'' + I(1,n+1)(u'\phi')' + I(2,n+1)\phi'\phi''\right] + \nu I(0,n-1)ww' \\
&\quad + \nu I(1,n-1)(w\psi)' + (2\mu+\nu)\,I(0,n+1)\phi\phi' + \nu[I(0,n+1) + I(2,n-1)]\psi\psi' \\
&\quad + (1-\nu)\left[I(0,n+1)w'w'' + I(1,n+1)(w'\psi')' + I(2,n+1)\psi'\psi''\right] + \nu I(0,n)u'w' \\
&\quad + \nu[I(0,n+1) + I(1,n)]u'\psi' + [\mu I(0,n+1) + \nu I(1,n)]\phi'w' + [(\mu+\nu)\,I(1,n+1) \\
&\quad + \nu I(2,n)]\phi'\psi' + \nu[I(0,n)w + (I(1,n) + I(0,n+1)]\psi)u'' + \mu[I(0,n+1)w'' \\
&\quad + I(1,n+1)\psi'']\phi + \nu[I(1,n)w + (I(2,n) + I(1,n+1)]\psi)\phi'' \\
&\quad + \frac{\nu+2\mu}{2}\left[I(0,n+1)u''\phi^2 + I(1,n+1)\phi''\phi^2\right] + (\nu+2\mu)\Big[I(0,n+1)u'\phi' \\
&\quad + I(1,n+1)\phi'^2\Big]\phi + \frac{3(1-\nu)}{2}\Big[I(0,n+1)u'^2u'' + I(1,n+1)(u'^2\phi')' \\
&\quad + I(2,n+1)(u'\phi'^2)' + I(3,n+1)\phi'^2\phi''\Big] + \mu[I(0,n+1)w' + I(1,n+1)\psi']\phi\psi' \\
&\quad + \nu[I(0,n-1)u'ww' + I(1,n-1)(u'(w\psi)' + \phi'ww')] + \nu I(2,n-1)\phi'w\psi' \\
&\quad + \nu[I(0,n+1) + I(2,n-1)]u'\psi\psi' + [\mu I(0,n+1) + \nu I(2,n-1)]\phi'w'\psi \\
&\quad + [(\mu+\nu)\,I(1,n+1) + \nu I(3,n-1)]\phi'\psi\psi'\frac{\nu}{2}I(0,n-1)u''w^2 \\
&\quad + \frac{\nu}{2}\Big([I(0,n+1) + I(2,n-1)]u'' + [I(1,n+1) + I(3,n-1)]\phi''\Big)\psi^2 \\
&\quad + \mu[I(0,n+1)w'' + I(1,n+1)\psi'']\phi\psi + \frac{1-\nu}{2}I(0,n+1)u'w'^2 \\
&\quad + \frac{1-\nu}{2}\Big(I(1,n+1)\Big[2u'w'\psi' + \phi'w'^2\Big] + I(2,n+1)\Big[2\phi'w'\psi' + u'\psi'^2\Big]\Big) \\
&\quad + \frac{\nu}{2}I(1,n-1)(2u''w\psi + \phi''w^2) + \frac{1-\nu}{2}I(3,n+1)\phi\psi'^2 = 0,
\end{aligned}$$

(۲-۴۲الف)

$$\begin{aligned}
&-\mu I(0,n+1)\phi + [-\mu I(0,n+1) + \nu I(1,n)]w' + [(\nu-\mu)\,I(1,n+1) + \nu I(2,n)]\psi' \\
&\quad + (1-\nu)[I(1,n+1)u'' + I(2,n+1)\phi''] - (2\mu+\nu)I(0,n+1)u'\phi \\
&\quad + 3(1-\nu)[I(1,n+1)u'u'' + I(2,n+1)(u'\phi')' + I(3,n+1)\phi'\phi'']
\end{aligned}$$

(ادامه در صفحه‌ی بعد)

$$
\begin{aligned}
&+ \nu I(1, n-1) w w' + \nu I(2, n-1) w \psi' + [-\mu I(0, n+1) + \nu I(2, n-1)] w' \psi \\
&+ [(\nu - \mu)\, I(1, n+1) + \nu I(3, n-1)] \psi \psi' + (1-\nu)[I(1, n+1) w' w'' \\
&+ I(2, n+1)(w'\psi')' + I(3, n+1)\psi'\psi''] - [\nu I(1, n) + (1-\nu)\, I(0, n+1)] \phi \psi \\
&- \nu I(0, n) \phi w + [-\mu I(0, n+1) + \nu I(1, n)] u' w' + \nu [I(2, n+1) + I(3, n)] \phi' \psi' \\
&+ [(\nu - \mu)\, I(1, n+1) + \nu I(2, n)] u' \psi' + \nu I(2, n) \phi' w' + \nu [I(2, n) + I(1, n+1)] u'' \psi \\
&+ \nu I(1, n) u'' w + \nu I(2, n) \phi'' w + \nu [I(3, n) + I(2, n+1)] \phi'' \psi - \frac{1-\nu}{2} I(0, n+1) \phi^3 \\
&+ \frac{\nu + 2\mu}{2} [I(0, n+1)(u'' \phi^2 - u'^2 \phi) + I(2, n+1)(\phi^2 \phi'' + \phi'^2 \phi)] \\
&+ \frac{3}{2}(1-\nu) \Big[I(1, n+1) u'^2 u'' + I(2, n+1)(u'^2 \phi')' + I(3, n+1)(\phi'^2 u')' \\
&+ I(4, n+1) \phi'^2 \phi'' \Big] + \mu [I(1, n+1) w'' + I(2, n+1) \psi''] \phi - \frac{1}{2} [\nu I(0, n-1) \phi w^2 \\
&+ 2\nu I(1, n-1) \phi w \psi] - \frac{1}{2} [(1-\nu)\, I(0, n+1) + \nu I(2, n-1)] \phi \psi^2 \\
&- \frac{\nu}{2} I(0, n+1) \phi w'^2 + (\mu - \nu) I(1, n+1) \phi w' \psi' + \frac{\mu - 2\nu}{2} I(2, n+1) \phi \psi'^2 \\
&+ \frac{\nu}{2} I(1, n-1) u'' w^2 + \frac{\nu}{2} I(2, n-1)(2 u'' w \psi + \phi'' w^2) + \nu I(3, n-1) \phi'' w \psi \\
&+ \frac{\nu}{2} [I(3, n-1) + I(1, n+1)] u'' \psi^2 + \frac{\nu}{2} [I(4, n-1) + I(2, n+1)] \phi'' \psi^2 \\
&+ \mu [I(1, n+1) w'' + I(2, n+1) \psi''] \phi \psi + \frac{1-\nu}{2} \Big[I(1, n+1)(u' w'^2)' \\
&+ I(2, n+1)(2 u' w' \psi' + \phi' w'^2)' + I(3, n+1)(u' \psi'^2 + 2 \phi' w' \psi')' \\
&+ I(4, n+1)(\phi' \psi'^2)' \Big] = 0,
\end{aligned}
\tag{\text{۲-۴۲ب}}
$$

$$
\begin{aligned}
&- (1-\nu)\, I(0, n-1) w - [\nu I(0, n) + (1-\nu)\, I(1, n-1)] \psi - \nu I(0, n) u' \\
&- [\nu I(1, n) - \mu I(0, n+1)] \phi' + \mu I(0, n+1) w'' + \mu I(1, n+1) \psi'' \\
&- \frac{\nu}{2} I(0, n) \left(u'^2 + \phi^2 \right) + [-\nu I(1, n) + \mu I(0, n+1)] u' \phi' + \mu [I(0, n+1) w'' \\
&- \left[\frac{\nu}{2} I(2, n) - \mu I(1, n+1) \right] \phi'^2 + I(1, n+1) \psi''] \phi - \frac{3}{2}(1-\nu)\, I(0, n-2) w^2 \\
&- [3(1-\nu) I(1, n-2) + \nu I(0, n-1)] w \psi + [\nu I(1, n) + (2\mu + \nu)\, I(0, n+1)] w' \psi' \\
&+ \frac{\nu}{2} I(0, n) w'^2 - \left[\frac{3}{2}(1-\nu)\, I(2, n-2) + \nu I(1, n-1) + \frac{\nu}{2} I(0, n) \right] \psi^2 \\
&+ \left[\frac{\nu}{2} I(2, n) + (2\mu + \nu)\, I(1, n+1) \right] \psi'^2 + \nu [I(0, n) w'' + I(1, n) \psi''] w
\end{aligned}
$$

(ادامه در صفحه‌ی بعد)

$$
\begin{aligned}
&+[\nu I(۱,n)+(۲\mu+\nu)\,I(۰,n+۱)]w''\psi+[\nu I(۲,n)+(۲\mu+\nu)\,I(۱,n+۱)]\psi\psi''\\
&+\mu I(۰,n+۱)\phi\psi'-\nu[I(۰,n-۱)u'w+I(۱,n-۱)(u'\psi+\phi'w)]-[\nu I(۲,n-۱)\\
&-\mu I(۰,n+۱)]\phi'\psi+(۱-\nu)[I(۰,n+۱)(u'w')'+I(۱,n+۱)(u'\psi'+\phi'w')'\\
&+I(۲,n+۱)(\phi'\psi')']-\frac{۱-\nu}{۲}I(۰,n-۳)w^{۳}-\frac{۳}{۲}(۱-\nu)\,I(۱,n-۳)w^{۲}\psi\\
&+\frac{۱}{۲}[\nu I(۰,n-۱)-۳(۱-\nu)\,I(۲,n-۳)]w\psi^{۲}+\frac{۱}{۲}[\nu I(۱,n-۱)\\
&-(۱-\nu)\,I(۳,n-۳)]\psi^{۳}+\frac{\nu}{۲}I(۰,n-۱)ww'^{۲}+\nu I(۱,n-۱)ww'\psi'\\
&+\frac{\nu}{۲}I(۱,n-۱)w'^{۲}\psi+\frac{\nu}{۲}I(۲,n-۱)\psi'^{۲}w+[(۲\mu+\nu)\,I(۰,n+۱)\\
&+\nu I(۲,n-۱)]w'\psi\psi'+[(۲\mu+\nu)\,I(۱,n+۱)+\frac{\nu}{۲}I(۳,n-۱)]\psi\psi'^{۲}\\
&-\frac{\nu}{۲}[I(۰,n-۱)w''+I(۱,n-۱)\psi'']w^{۲}-\nu I(۱,n-۱)ww''\psi-\nu I(۲,n-۱)w\psi\psi''\\
&-\frac{۱}{۲}[(۲\mu+\nu)\,I(۰,n+۱)+\nu I(۲,n-۱)]w''\psi^{۲}-\frac{۱}{۲}[(۲\mu+\nu)\,I(۱,n+۱)\\
&+\nu I(۳,n-۱)]\psi^{۲}\psi''+\frac{۳}{۲}(۱-\nu)[I(۰,n+۱)w''+I(۱,n+۱)\psi'']w'^{۲}\\
&+۳(۱-\nu)[I(۱,n+۱)w''+I(۲,n+۱)\psi'']w'\psi'+\frac{۳}{۲}(۱-\nu)[I(۲,n+۱)w''\\
&+I(۳,n+۱)\psi'']\psi'^{۲}-\nu I(۱,n-۱)u'\phi'w-\frac{\nu}{۲}I(۲,n-۱)\phi'^{۲}w-\frac{\nu}{۲}[I(۰,n-۱)w\\
&+I(۱,n-۱)\psi]\left(u'^{۲}+\phi^{۲}\right)+[\mu I(۰,n+۱)-\nu I(۲,n-۱)]u'\phi'\psi\\
&+[\mu I(۱,n+۱)-\frac{\nu}{۲}I(۳,n-۱)]\phi'^{۲}\psi+\mu I(۰,n+۱)u'\phi\psi'+\nu I(۰,n+۱)\phi\phi'w'\\
&+(\mu+\nu)\,I(۱,n+۱)\phi\phi'\psi+\frac{\nu}{۲}[I(۰,n+۱)w''+I(۱,n+۱)\psi'']\phi^{۲}\\
&+\mu[I(۰,n+۱)u''+I(۱,n+۱)\phi'']\phi\psi+\frac{۱-\nu}{۲}\Big[I(۰,n+۱)(u'^{۲}w')'\\
&+I(۱,n+۱)(u'^{۲}\psi')'\Big]+(۱-\nu)\,[I(۱,n+۱)(u'\phi'w')'+I(۲,n+۱)(u'\phi'\psi')']\\
&+\frac{۱-\nu}{۲}\left[I(۲,n+۱)(\phi'^{۲}w')'+I(۳,n+۱)(\phi'^{۲}\psi')'\right]=-W_i+W_o,
\end{aligned}
\tag{پ۲-۴۲}
$$

$$
\begin{aligned}
&-[\nu I(۰,n)+(۱-\nu)\,I(۱,n-۱)]w-[۲\nu I(۱,n)+(۱-\nu)(I(۲,n-۱)+I(۰,n+۱))]\psi\\
&-\nu[I(۱,n)+I(۰,n+۱)]u'+[-\nu I(۲,n)+(\mu-\nu)\,I(۱,n+۱)]\phi'\\
&+\mu[I(۱,n+۱)w''+I(۲,n+۱)\psi'']-\frac{۱}{۲}[(۱-\nu)\,I(۰,n+۱)+\nu I(۱,n)]\phi^{۲}\\
&-\frac{\nu}{۲}[I(۱,n)+I(۰,n+۱)]u'^{۲}-[\nu I(۲,n)-(\mu-\nu)\,I(۱,n+۱)]\,u'\phi'
\end{aligned}
$$

(ادامه در صفحه‌ی بعد)

$$
\begin{aligned}
&- \left[\frac{\nu}{۲} I(۳,n) - \frac{۲\mu-\nu}{۲} I(۲,n+۱)\right] \phi'^{۲} + \mu[I(۱,n+۱)u'' + I(۲,n+۱)\phi'']\phi \\
&- \left[\frac{۳}{۲}(۱-\nu)\, I(۱,n-۲) + \frac{\nu}{۲} I(\circ,n-۱)\right] w^{۲} - [۳(۱-\nu)\, I(۲,n-۲) + ۲\nu I(۱,n-۱) \\
&+ \nu I(\circ,n)]\, w\psi + \left[\frac{\nu}{۲} I(۱,n) - \frac{۲\mu+\nu}{۲} I(\circ,n+۱)\right] w'^{۲} + \nu I(۲,n) w'\psi' \\
&- \frac{۳}{۲}\left[(۱-\nu)\, I(۳,n-۲) + \nu I(۲,n-۱) + \nu I(۱,n) + (۱-\nu)\, I(\circ,n+۱)\right] \psi^{۲} \\
&+ \left[\frac{\nu}{۲} I(۳,n) + \frac{۲\mu+\nu}{۲} I(۲,n+۱)\right] \psi'^{۲} + \nu[I(۱,n)w'' + I(۲,n)\psi'']w \\
&+ [\nu I(۲,n) + (۲\mu+\nu)\, I(۱,n+۱)]w''\psi + [\nu I(۳,n) + (۲\mu+\nu)\, I(۲,n+۱)]\psi\psi'' \\
&- \mu I(\circ,n+۱)\phi w' - \nu[I(۱,n-۱)u'w + I(۲,n-۱)(u'\psi + \phi' w)] \\
&- [\nu I(۳,n-۱) - (\mu-\nu)\, I(۱,n+۱)]\phi'\psi + (۱-\nu)[I(۱,n+۱)(u'w')' \\
&+ I(۲,n+۱)(u'\psi' + \phi' w')' + I(۳,n+۱)(\phi'\psi')'] - \frac{۱-\nu}{۲} I(۱,n-۳)w^{۳} \\
&- \frac{۱}{۲}[\nu I(\circ,n-۱) + ۳(۱-\nu)\, I(۲,n-۳)]w^{۲}\psi - \frac{۱}{۲}[\nu I(۱,n-۱) \\
&+ ۳(۱-\nu)\, I(۳,n-۳)]w\psi^{۲} - \frac{۱-\nu}{۲}[I(\circ,n+۱) + I(۴,n-۳)]\psi^{۳} + \frac{\nu}{۲} I(۱,n-۱)ww'^{۲} \\
&+ \nu I(۲,n-۱)ww'\psi' + \nu I(۳,n-۱)\left[\frac{w\psi'^{۲}}{۲} + w'\psi\psi'\right] - [(۲\mu+\nu)\, I(\circ,n+۱) \\
&- \nu I(۲,n-۱)]w'^{۲}\psi + [(۲\mu+\nu)\, I(۲,n+۱) + \nu I(۴,n-۱)]\psi\psi'^{۲} \\
&- \frac{\nu}{۲}[I(۱,n-۱)w'' + I(۲,n-۱)\psi'']w^{۲} - \nu I(۲,n-۱)ww''\psi - \frac{۱}{۲}[(۲\mu+\nu)\, I(۱,n+۱) \\
&+ \nu I(۳,n-۱)]w''\psi^{۲} - \nu I(۳,n-۱)w\psi\psi'' - \frac{۱}{۲}[(۲\mu+\nu)\, I(۲,n+۱) \\
&+ \nu I(۴,n-۱)]\psi^{۲}\psi'' + \frac{۳}{۲}(۱-\nu)[I(۱,n+۱)w'' + I(۲,n+۱)\psi'']w'^{۲} \\
&+ ۳(۱-\nu)[I(۲,n+۱)w'' + I(۳,n+۱)\psi'']w'\psi' + \frac{۳}{۲}(۱-\nu)[I(۳,n+۱)w'' \\
&+ I(۴,n+۱)\psi'']\psi'^{۲} - \frac{\nu}{۲} I(۱,n-۱)\phi^{۲} w - \frac{۱}{۲}[\nu I(۲,n-۱) + (۱-\nu)\, I(\circ,n+۱)]\phi^{۲}\psi \\
&- \frac{\nu}{۲} I(۱,n-۱)u'^{۲} w - \frac{\nu}{۲}[I(\circ,n+۱) + I(۲,n-۱)]u'^{۲}\psi - \nu I(۲,n-۱)u'\phi' w \\
&+ [(\mu-\nu)\, I(۱,n+۱) - \nu I(۳,n-۱)]u'\phi'\psi - \frac{\nu}{۲} I(۳,n-۱)\phi'^{۲} w \\
&+ \frac{۱}{۲}[(۲\mu-\nu)I(۲,n+۱) - \nu I(۴,n-۱)]\phi'^{۲}\psi - \mu I(\circ,n+۱)u'\phi w' \\
&- (\mu-\nu)\, I(۱,n+۱)\phi\phi' w' + \nu I(۲,n+۱)\phi\phi'\psi' + \frac{\nu}{۲}[I(۱,n+۱)w''
\end{aligned}
$$

(ادامه در صفحه‌ی بعد)

$$
\begin{aligned}
&+ I(۲, n+۱)\psi'']\phi^{۲} + \mu[I(۱, n+۱)u'' + I(۲, n+۱)\phi'']\phi\psi \\
&+ \frac{۱-\nu}{۲}\left[I(۱, n+۱)(u'^{۲}w')' + I(۲, n+۱)(u'^{۲}\psi')'\right] \\
&+ (۱-\nu)\left[I(۲, n+۱)(u'\phi'w')' + I(۳, n+۱)(u'\phi'\psi')'\right] \\
&+ \frac{۱-\nu}{۲}\left[I(۳, n+۱)(\phi'^{۲}w')' + I(۴, n+۱)(\phi'^{۲}\psi')'\right] = \frac{h}{۲}(W_i + W_o). \qquad \text{(۲-۴۲ت)}
\end{aligned}
$$

۲-۶ جمع‌بندی

در این فصل، معادلات حاکم بر پوسته‌ی مورد بررسی با استفاده از اصل کار مجازی استخراج گردید. معادلات حاصل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی ناهمگن، از مرتبه‌ی دو و با ضرایب ثابت هستند. ملاحظه می‌شود که حجم معادلات با در نظر گرفتن جملات غیرخطی معادلات سینماتیک، به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.

در فصل آتی، این دستگاه معادلات به کمک روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته حل می‌شود.

فصل ۳

حل تحلیلی

۳-۱ مقدمه

در فصل قبل مشاهده شد که با در نظر گرفتن جملات غیرخطی معادلات سینماتیک، بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمگن تحت فشار، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی ناهمگن کوپل‌شده با ضرایب ثابت است. در این فصل به حل این معادلات به کمک روش بسط تطبیق‌یافته‌ی مجانبی پرداخته شده است.
چون برای حل معادلات از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود، لازم است ابتدا معادلات بی‌بعد شوند. پس از بی‌بعدسازی معادلات، حل خارجی و سپس حل در نواحی مرزی به طور جداگانه به‌دست می‌آید. در نهایت، با تطبیق دادن حل‌های داخلی و خارجی و نیز اعمال شرایط مرزی، پاسخ کلی به‌دست می‌آید.

۳-۲ بی‌بعدسازی معادلات

در فرمول‌بندی ریاضی مسأله، چهار متغیر وابسته‌ی u، ϕ، w و ψ و یک متغیر مستقل x وجود دارد. برای بی‌بعدسازی معادلات، پارامترهای بی‌بعد زیر پیشنهاد می‌شوند.

$$x^* = \frac{x}{L}, \qquad R^* = \frac{R}{h}, \qquad r_i^* = \frac{r_i}{h} = \frac{۲R^* - ۱}{۲}, \qquad \epsilon = \frac{h}{L}, \tag{۳-۱الف}$$

$$u^*(x^*) = \frac{u(x)}{h}, \qquad \phi^*(x^*) = \phi(x), \qquad w^*(x^*) = \frac{w(x)}{h}, \qquad \psi^*(x^*) = \psi(x), \tag{۳-۱ب}$$

$$p_i^* = \frac{p_i r_i^{*n}}{\lambda E_i \epsilon}, \qquad p_o^* = \frac{p_o r_i^{*n}}{\lambda E_i \epsilon}. \tag{۳-۱پ}$$

در معالات بالا، x^* طول بی‌بعد، R^* شعاع میانگین بی‌بعد و r_i^* شعاع داخلی بی‌بعد است. همچنین، ϵ پارامتر کوچک اغتشاشی است. p_i^* و p_o^* نیز بارگذاری فشاری داخلی و خارجی بی‌بعد هستند.
مشتقات مرتبه‌ی یک و دو بر حسب x^* به صورت زیر هستند.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \frac{۱}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^*}, \\ \frac{\mathrm{d}^۲}{\mathrm{d}x^۲} &= \frac{۱}{L^۲}\frac{\mathrm{d}^۲}{\mathrm{d}x^{*۲}}. \end{aligned} \tag{۳-۲}$$

برای محاسبه‌ی مجهولات مسأله، بسط مستقیم[1]، به صورت چندجمله‌ای بر حسب ϵ در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}
u^*(x^*;\epsilon) &= \epsilon\Big(u_۱(x^*) + \epsilon u_۲(x^*) + \epsilon^۲ u_۳(x^*) + \cdots\Big),\\
\phi^*(x^*;\epsilon) &= \epsilon\Big(\phi_۱(x^*) + \epsilon \phi_۲(x^*) + \epsilon^۲ \phi_۳(x^*) + \cdots\Big),\\
w^*(x^*;\epsilon) &= \epsilon\Big(w_۱(x^*) + \epsilon w_۲(x^*) + \epsilon^۲ w_۳(x^*) + \cdots\Big),\\
\psi^*(x^*;\epsilon) &= \epsilon\Big(\psi_۱(x^*) + \epsilon \psi_۲(x^*) + \epsilon^۲ \psi_۳(x^*) + \cdots\Big).
\end{aligned} \tag{۳-۳}$$

متغیر ϵ در بیرون پرانتز در سمت راست معادلات (۳-۳) و نیز متغیر ϵ در مخرج معادلات (۳-۱پ) به صورت تعمدی[2] وارد شده است.

با جایگذاری معادلات (۳-۱) و (۳-۳) در معادلات حاکم (۲-۴۲) و مرتب سازی بر حسب توان‌های ϵ، شکل کلی معادلات به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\epsilon L_۱\{\bar{y}_۱(x^*)\} + \epsilon^۲\left[\bar{L}_۲\{\bar{y}_۱(x^*)\} + L_۲\{\bar{y}_۲(x^*)\}\right]\\
&\quad + \epsilon^۳\left[\bar{L}_۳\Big(\{\bar{y}_۱(x^*)\},\{\bar{y}_۲(x^*)\}\Big) + L_۳\{\bar{y}_۳(x^*)\}\right] + \cdots\\
&\quad = \epsilon\{f_۱\} + \epsilon^۲\{f_۲\} + \epsilon^۳\{f_۳\} + \cdots\,,
\end{aligned} \tag{۴-۳}$$

که L_i و $\bar{L}_i$ عملگرهای دیفرانسیلی[3] و $\{f_i\}$ معرف بارگذاری و عامل ناهمگنی معادلات دیفرانسیل هستند. به عبارت‌های $\bar{L}_i(\{\bar{y}_۱(x^*)\},\{\bar{y}_۲(x^*)\},\ldots,\{\bar{y}_{i-۱}(x^*)\})$ جملات پیرو[4] و به عبارت‌های $L_i\{\bar{y}_i(x^*)\}$ جملات پیشرو[5] گفته می‌شود. $\{\bar{y}_i(x^*)\}$ها شبه‌بردارهای جابه‌جایی هستند و به شکل زیر تعریف می‌شوند.

$$\{\bar{y}_i(x^*)\} = \Big\{u_i(x^*) \quad \phi_i(x^*) \quad w_i(x^*) \quad \psi_i(x^*)\Big\}^{\mathrm{T}}. \tag{۵-۳}$$

به دلیل ثابت بودن بارگذاری، تمام $\{f_i\}$ها به جز $\{f_۱\}$ برابر با صفر هستند.

$$\{f_۱\} = \{\bar{F}\} = \Big\{\circ \quad \circ \quad -W_i^* + W_o^* \quad \tfrac{۱}{۲}(W_i^* + W_o^*)\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{۶-۳}$$

که $W_i^* = p_i^*\left(R^* - \frac{۱}{۲}\right)$ و $W_o^* = p_o^*\left(R^* + \frac{۱}{۲}\right)$.

در پایان این بخش، به این نکته اشاره می‌شود که عملگرهای $\bar{L}_i$ در حالت کلی عملگرهای دیفرانسیلی غیرخطی هستند و L_i عملگرهای خطی و از مرتبه‌ی صفر (عملگر جبری) بوده و با هم برابرند؛ یعنی،

$$L_۱ = L_۲ = L_۳ = \cdots = \text{ثابت}. \tag{۷-۳}$$

1. Straight Forward Expansion
2. Bookkeeping
3. Differential Operators
4. Follower Terms
5. Leading Terms

۳-۳ حل خارجی

ایده‌ی اصلی روش اغتشاشات این است که پارامتر اغتشاش ϵ به قدری کوچک است که ضرایب توان‌های مختلف آن از نظر بزرگی هم‌مرتبه نیستند. بنابراین، شرط لازم برای برقراری تساوی (۳-۴) این است که ضرایب ϵ^i با هم برابر باشند.

$$O(\epsilon^1): \qquad L_1\{\bar{y}_1(x^*)\} = \{f_1\}, \tag{۳-۸}$$

$$O(\epsilon^2): \qquad L_2\{\bar{y}_2(x^*)\} = -\bar{L}_2\{\bar{y}_1(x^*)\}, \tag{۳-۹}$$

$$\vdots$$

چون L_i ثابت است، پس حل خارجی تنها شامل حل دستگاه‌های معادلات جبری می‌شود.

$$\{\bar{y}_1(x^*)\} = L_1^{-1}\{f_1\}, \tag{۳-۱۰}$$

$$\{\bar{y}_2(x^*)\} = -L_2^{-1}\left[\bar{L}_2\{\bar{y}_1(x^*)\}\right]. \tag{۳-۱۱}$$

$$\vdots$$

شکل نهایی پاسخ در حل خارجی به شکل زیر خواهد بود.

$$u_i = C_{i1}x^* + C_{i2}, \tag{۳-۱۲الف}$$

$$\phi_i = 0, \tag{۳-۱۲ب}$$

$$w_i = C_{i3}, \tag{۳-۱۲پ}$$

$$\psi_i = C_{i4}. \tag{۳-۱۲ت}$$

در روابط فوق، C_{ij}ها ثابت هستند که $i = 1, 2, \cdots$ مرتبه‌ی حل را نشان می‌دهد و $j = 1, 2, 3, 4$ است. با توجه به روابط (۲-۱۵)، (۳-۱ب)، (۳-۳) و (۳-۱۲)، شکل نهایی میدان جابه‌جایی در نقاط دور از مرز بازنویسی می‌شود.

$$U_x^o = C_1x + C_2, \tag{۳-۱۳الف}$$

$$U_z^o = C_3z + C_4, \tag{۳-۱۳ب}$$

که

$$C_۱ = h(\epsilon C_{۱۱} + \epsilon^۲ C_{۲۱} + \epsilon^۳ C_{۳۱} + \cdots), \tag{۳-۱۴الف}$$

$$C_۲ = h(\epsilon C_{۱۲} + \epsilon^۲ C_{۲۲} + \epsilon^۳ C_{۳۲} + \cdots), \tag{۳-۱۴ب}$$

$$C_۳ = h(\epsilon C_{۱۳} + \epsilon^۲ C_{۲۳} + \epsilon^۳ C_{۳۳} + \cdots), \tag{۳-۱۴پ}$$

$$C_۴ = \epsilon C_{۱۴} + \epsilon^۲ C_{۲۴} + \epsilon^۳ C_{۳۴} + \cdots . \tag{۳-۱۴ت}$$

بالانویس o در روابط اخیر نشان‌دهنده‌ی حل خارجی است.

با توجه به این که حل های خارجی در حالت کلی شرط‌های مرزی مسأله را ارضا نمی‌کنند، می‌توان نتیجه گرفت که در $x^* = ۰$ و $x^* = ۱$ لایه‌های مرزی وجود دارد. اصطلاحاً به مرز در نزدیکی $x^* = ۰$ مرز چپ و در نزدیکی $x^* = ۱$ مرز راست گفته می‌شود.

۳-۴ حل داخلی در مرز چپ

برای مشاهده‌ی اثرات مرز چپ در پاسخ، از مقیاس کشیده‌شده‌ی $\eta = x^*/\epsilon = x/h$ استفاده می‌شود. با این تعریف، مشتقات نسبت به η در معادلات باعث ایجاد پارامتر کوچک ϵ می‌شوند.

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta} = \epsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^*}, \\ &\frac{\mathrm{d}^۲}{\mathrm{d}\eta^۲} = \epsilon^۲ \frac{\mathrm{d}^۲}{\mathrm{d}x^{*۲}}. \end{aligned} \tag{۳-۱۵}$$

اکنون بسط مستقیم مجهولات نسبت به η در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u^*(\eta;\epsilon) &= \epsilon\Big(u^l_۱(\eta) + \epsilon u^l_۲(\eta) + \epsilon^۲ u^l_۳(\eta) + \cdots\Big), \\ \phi^*(\eta;\epsilon) &= \epsilon\Big(\phi^l_۱(\eta) + \epsilon \phi^l_۲(\eta) + \epsilon^۲ \phi^l_۳(\eta) + \cdots\Big), \\ w^*(\eta;\epsilon) &= \epsilon\Big(w^l_۱(\eta) + \epsilon w^l_۲(\eta) + \epsilon^۲ w^l_۳(\eta) + \cdots\Big), \\ \psi^*(\eta;\epsilon) &= \epsilon\Big(\psi^l_۱(\eta) + \epsilon \psi^l_۲(\eta) + \epsilon^۲ \psi^l_۳(\eta) + \cdots\Big). \end{aligned} \tag{۳-۱۶}$$

بالانویس l نشان‌دهنده‌ی مرز چپ است. با جایگذاری بسط (۳-۱۶) در معادلات حاکم (۲-۴۲)، شکل کلی معادلات به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\epsilon L^l_۱\{\bar{y}_۱(\eta)\} + \epsilon^۲\left[\bar{L}^l_۲\{\bar{y}_۱(\eta)\} + L^l_۲\{\bar{y}_۲(\eta)\}\right] \\ &\qquad + \epsilon^۳\left[\bar{L}^l_۳\Big(\{\bar{y}_۱(\eta)\},\{\bar{y}_۲(\eta)\}\Big) + L^l_۳\{\bar{y}_۳(\eta)\}\right] + \cdots \\ &\qquad = \epsilon\{f^l_۱\} + \epsilon^۲\{f^l_۲\} + \epsilon^۳\{f^l_۳\} + \cdots . \end{aligned} \tag{۳-۱۷}$$

L_i^l و $\bar{L}_i^l$ عملگرهای دیفرانسیلی متناظر با معادلات در مرز چپ بر حسب متغیر سریع η هستند. برای اندیس‌های مختلف i، L_i^lها با هم برابرند و طبق رابطه‌ی زیر تعریف می‌شوند.

$$L_1^l = L_2^l = L_3^l = \cdots = [\bar{A}_1]D_\eta^2 + [\bar{A}_2]D_\eta + [\bar{A}_3], \qquad D_\eta = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}, \quad D_\eta^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\eta^2}. \quad (۳\text{-}۱۸)$$

ماتریس‌های $[\bar{A}_1]$ و $[\bar{A}_3]$ متقارن و ماتریس $[\bar{A}_2]$ پادمتقارن هستند. درایه‌های آن‌ها عبارتند از:

$$[\bar{A}_1]_{ij} = [\bar{A}_1]_{ji} = \begin{cases} (1-\nu)\, I^*(0, n+1), & i = j = 1, \\ (1-\nu)\, I^*(1, n+1), & i = 1, j = 2, \\ (1-\nu)\, I^*(2, n+1), & i = j = 2, \\ \mu I^*(0, n+1), & i = j = 3, \\ \mu I^*(1, n+1), & i = 3, j = 4, \\ \mu I^*(2, n+1), & i = j = 4, \\ 0, & \text{سایر مؤلفه‌ها}. \end{cases} \quad (۳\text{-}۱۹\text{الف})$$

$$[\bar{A}_2]_{ij} = -[\bar{A}_2]_{ji} = \begin{cases} \nu I^*(0, n), & i = 1, j = 3, \\ \nu(I^*(0, n+1) + I^*(1, n)), & i = 1, j = 4, \\ -\mu I^*(0, n+1) + \nu I^*(1, n), & i = 2, j = 3, \\ (\nu - \mu)\, I^*(1, n+1) + \nu I^*(2, n), & i = 2, j = 4, \\ 0, & \text{سایر مؤلفه‌ها}. \end{cases} \quad (۳\text{-}۱۹\text{ب})$$

$$[\bar{A}_3]_{ij} = [\bar{A}_3]_{ji} = \begin{cases} -\mu I^*(0, n+1), & i = j = 2, \\ -(1-\nu)\, I^*(0, n-1), & i = j = 3, \\ -\nu I^*(0, n) - (1-\nu)\, I^*(1, n-1), & i = 3, j = 4, \\ -2\nu I^*(1, n) \\ \quad -(1-\nu)(I^*(2, n-1) + I^*(0, n+1)), & i = j = 4, \\ 0, & \text{سایر مؤلفه‌ها}. \end{cases} \quad (۳\text{-}۱۹\text{پ})$$

در روابط فوق، $I^*(p,q)$ انتگرال‌گیری بدون بعد بر روی ضخامت پوسته است.

$$I^*(p,q) = \frac{I(p,q)}{h^{p+q+1}} = \int_{-1/2}^{+1/2} z^{*p}(R + z^*)^q \,\mathrm{d}z^*, \quad z^* = \frac{z}{h}. \quad (۳\text{-}۲۰)$$

همچنین برای تمام i ها $\{f_i\} = \{f_i^l\}$. برای یافتن حل داخلی در مرز چپ می‌بایست معادلات زیر حل شوند.

$$O(\epsilon^{۱}): \qquad L_{۱}^l\{\bar{y}_{۱}(\eta)\} = \{\bar{F}\}, \tag{۳-۲۱}$$

$$O(\epsilon^{۲}): \qquad L_{۲}^l\{\bar{y}_{۲}(\eta)\} = -\bar{L}_{۲}^l\{\bar{y}_{۱}(\eta)\}, \tag{۳-۲۲}$$

۳-۴-۱ حل مرتبه یک

معادله‌ی مرتبه یک (۳-۲۱) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نسبت به η با ضرایب ثابت است. این معادله دارای یک حل خصوصی و یک حل عمومی است که حل کلی مجموع این دو حل است. چون ناهمگنی معادله، ثابت است، حل خصوصی به شکل $\{\bar{y}_{۱}^p\} = [\bar{A}_{۳}]^{-۱}\{\bar{F}\}$ خواهد بود. اما ماتریس ضرایب $[\bar{A}_{۳}]$ به علت داشتن یک سطر و ستون صفر، معکوس‌پذیر نیست. به منظور رفع این مشکل از تغییر متغیر $v_{۱}^l(\eta) = \int u_{۱}^l(\eta)\,\mathrm{d}\eta - C_{۷}$ استفاده می‌شود. همچنین از معادله‌ی نخست در دستگاه معادلات (۳-۲۱) انتگرال‌گیری می‌شود. در نتیجه، شکل اصلاح‌شده‌ی معادله‌ی (۳-۲۱) به صورت زیر است.

$$\Big([A_{۱}]D_\eta^{۲} + [A_{۲}]D_\eta + [A_{۳}]\Big)\{y_{۱}(\eta)\} = \{F\}, \tag{۳-۲۳}$$

که

$$[A_{۱}]_{ij} = \begin{cases} (۱-\nu)\, I^*(۲, n+۱), & i=j=۲, \\ \mu I^*(۰, n+۱), & i=j=۳, \\ \mu I^*(۱, n+۱), & i=۳, j=۴, \ \text{یا}\ i=۴, j=۳, \\ \mu I^*(۲, n+۱), & i=j=۴, \\ ۰, & \text{سایر مؤلفه‌ها.} \end{cases} \tag{۳-۲۴الف}$$

$$[A_{۲}]_{ij} = \begin{cases} (۱-\nu)\, I^*(۱, n+۱), & i=۱, j=۲, \ \text{یا}\ i=۲, j=۱, \\ -\mu I^*(۰, n+۱) + \nu I^*(۱, n), & i=۲, j=۳, \\ \mu I^*(۰, n+۱) - \nu I^*(۱, n), & i=۳, j=۲, \\ (\nu-\mu)\, I^*(۱, n+۱) + \nu I^*(۲, n), & i=۲, j=۴, \\ (\mu-\nu)\, I^*(۱, n+۱) - \nu I^*(۲, n), & i=۴, j=۲, \\ ۰, & \text{سایر مؤلفه‌ها.} \end{cases} \tag{۳-۲۴ب}$$

$$[A_3]_{ij}=\begin{cases}(1-\nu)\,I^*(0,n+1), & i=j=1,\\ \nu I^*(0,n), & i=1, j=3,\\ \nu(I^*(0,n+1)+I^*(1,n)), & i=1, j=4,\\ -\mu I^*(0,n+1), & i=j=2,\\ -\nu I^*(0,n), & i=3, j=1,\\ -(1-\nu)\,I^*(0,n-1), & i=j=3,\\ -\nu I^*(0,n)-(1-\nu)\,I^*(1,n-1), & i=3, j=4,\\ & \text{یا } i=4, j=3,\\ -\nu(I^*(0,n+1)I^*(1,n)), & i=4, j=1,\\ -2\nu I^*(1,n) & \\ \quad -(1-\nu)(I^*(2,n-1)+I^*(0,n+1)), & i=j=4,\\ 0, & \text{سایر مؤلفه‌ها.}\end{cases} \tag{۳-۲۴پ}$$

$$\{F\}=\Big\{C_0 \quad 0 \quad -W_i^*+W_o^* \quad \tfrac{1}{2}(W_i^*+W_o^*)\Big\}^{\mathrm{T}}, \tag{۳-۲۴ت}$$

$$\{y_1(\eta)\}=\Big\{v_1^l(\eta) \quad \phi_1^l(\eta) \quad w_1^l(\eta) \quad \psi_1^l(\eta)\Big\}^{\mathrm{T}}. \tag{۳-۲۴ث}$$

C_0 در معاله‌ی (۳-۲۴ت) ثابت انتگرال‌گیری از معادله‌ی اول است. اکنون، جواب خصوصی به شکل $\{y_1^p\}=$ $[A_3]^{-1}\{F\}$ خواهد بود.

برای به دست آوردن جواب عمومی (همگن)، $\{y_1^g(\eta)\}=\{V\}\mathrm{e}^{\lambda\eta}$ در شکل همگن معادله‌ی (۳-۲۳) جایگذاری می‌شود.

$$\Big([A_1]\lambda^2+[A_2]\lambda+[A_3]\Big)\{V\}\mathrm{e}^{\lambda\eta}=\{0\}. \tag{۳-۲۵}$$

در حالت کلی $\mathrm{e}^{\lambda\eta}\neq 0$؛ پس،

$$\Big([A_1]\lambda^2+[A_2]\lambda+[A_3]\Big)\{V\}=\{0\}. \tag{۳-۲۶}$$

معادله‌ی (۳-۲۶) معرف یک مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی غیرخطی[6] است. شرط لازم برای جواب داشتن آن صفر شدن دترمینان ماتریس ضرایب است.

$$\det\Big([A_1]\lambda^2+[A_2]\lambda+[A_3]\Big)=0. \tag{۳-۲۷}$$

6. Nonlinear Eigen Value Problem

به (۳-۲۷) معادله‌ی مشخصه[7] و به ریشه‌های آن مقادیر ویژه[8] λ_i گفته می‌شود. با قرار دادن هر کدام از مقادیر ویژه‌ی λ_i در معادله‌ی (۳-۲۶) یک بردار ویژه‌ی[9] $\{V_i\}$ به دست می‌آید. مقادیر و بردارهای ویژه‌ی مسأله‌ی مورد بررسی، مختلط هستند. در نهایت، جواب عمومی مسأله به شکل زیر قابل نوشتن است.

$$\{y_1^g(\eta)\} = \sum_{i=1}^{6} C_i^l \{V_i\} \mathrm{e}^{\lambda_i \eta}, \tag{۳-۲۸}$$

که C_i^lها ثابت هستند. جواب کلی برابر جمع جواب عمومی و خصوصی خواهد بود.

$$\{y_1(\eta)\} = \{y_1^p\} + \{y_1^g(\eta)\}. \tag{۳-۲۹}$$

سپس، با کمک رابطه‌ی $u_1^l(\eta) = \mathrm{d}v_1^l(\eta)/\mathrm{d}\eta$ می‌توان $\{\bar{y}_1(\eta)\}$ را یافت. پاسخ نهایی مرتبه صفر شامل هشت ثابت $C_i^l, i = 0, 1, \cdots, 7$ است.

۳-۴-۲ حل مرتبه دو

پس از آن که حل مرتبه یک به دست آمد، با جایگذاری آن در (۳-۲۲) معادلات مرتبه دو به صورت یک دستگاه معادلات معمولی خطی با ضرایب ثابت و با ناهمگنی متغیر به دست می آید. چون $L_1^l = L_2^l$، حل همگن معادلات مرتبه دو دقیقاً مانند حل همگن معادلات مرتبه یک است. اما از آن‌جا که $\bar{L}_2^l$ یک عملگر دیفرانسیلی غیرخطی است، در سمت راست معادلات مرتبه دو جملاتی مانند $\mathrm{e}^{\lambda\eta}$ و $\mathrm{e}^{2\lambda\eta}$ ظاهر می‌شود. برای حل این معادله از روش ضرایب نامعین[10] استفاده می‌شود. بنابراین، حل خصوصی معادلات مرتبه دو نسبت به معادلات مرتبه یک بسیار طولانی‌تر خواهد شد.

۳-۵ حل داخلی در مرز راست

برای مشاهده‌ی اغتشاش در پاسخ در نزدیکی مرز راست، از متغیر سریع $\xi = (x^* - 1)/\epsilon = (x - L)/h$ استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}
u^*(\xi;\epsilon) &= \epsilon\Big(u_1^r(\xi) + \epsilon u_2^r(\xi) + \epsilon^2 u_3^r(\xi) + \cdots\Big),\\
\phi^*(\xi;\epsilon) &= \epsilon\Big(\phi_1^r(\xi) + \epsilon \phi_2^r(\xi) + \epsilon^2 \phi_3^r(\xi) + \cdots\Big),\\
w^*(\xi;\epsilon) &= \epsilon\Big(w_1^r(\xi) + \epsilon w_2^r(\xi) + \epsilon^2 w_3^r(\xi) + \cdots\Big),\\
\psi^*(\xi;\epsilon) &= \epsilon\Big(\psi_1^r(\xi) + \epsilon \psi_2^r(\xi) + \epsilon^2 \psi_3^r(\xi) + \cdots\Big).
\end{aligned} \tag{۳-۳۰}$$

7. Characteristic Equation
8. Eigen Values
9. Eigen Vector
10. Method of Undetermined Coefficients

بالانویس r نشان‌دهنده‌ی حل در مرز راست است. با قرار دادن بسط‌های فوق در معادلات حاکم بی‌بعد شده، معادلات حاکم بر لایه‌ی مرزی راست به دست می‌آیند. این معادلات و حل آن‌ها دقیقاً شبیه به معادلات و حل‌های متناظر در لایه‌ی مرزی چپ هستند.

$$\begin{aligned}\epsilon L_1^r\{\bar{y}_1(\xi)\} &+ \epsilon^2\left[\bar{L}_2^r\{\bar{y}_1(\xi)\} + L_2^r\{\bar{y}_2(\xi)\}\right]\\ &+ \epsilon^3\left[\bar{L}_3^r\Big(\{\bar{y}_1(\xi)\},\{\bar{y}_2(\xi)\}\Big) + L_3^r\{\bar{y}_3(\xi)\}\right] + \cdots\\ &= \epsilon\{f_1^r\} + \epsilon^2\{f_2^r\} + \epsilon^3\{f_3^r\} + \cdots .\end{aligned} \tag{۳-۳۱}$$

در روابط فوق به ازای تمام اندیس‌های i، $L_i^r \cong L_i^l$ و $\bar{L}_i^r \cong \bar{L}_i^l$؛ با این تفاوت که به جای D_η باید از D_ξ و به جای D_η^2 از D_ξ^2 استفاده شود.

$$D_\xi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}, \quad D_\xi^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}. \tag{۳-۳۲}$$

همچنین، $\{f_i^r\} = \{f_i\}$.

در نتیجه حل مرتبه صفر در لایه‌ی مرزی راست به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\{y_1(\xi)\} = \{y_1^p\} + \{y_1^g(\xi)\} = [A_3]^{-1}\{F\} + \sum_{i=1}^{6} C_i^r\{V_i\}\mathrm{e}^{\lambda_i\xi}. \tag{۳-۳۳}$$

به طور مشابه، با کمک رابطه‌ی $u_1^r(\xi) = \mathrm{d}v_1^r(\xi)/\mathrm{d}\xi$ می‌توان $\{\bar{y}_1(\xi)\}$ را یافت. پاسخ نهایی مرتبه صفر در مرز راست نیز شامل هشت ثابت $C_i^r, i = 0, 1, \cdots, 7$ است.

روند حل مرتبه‌ی یک در مرز راست نیز مشابه با حل در مرز چپ است.

۳-۶ محاسبه‌ی ثابت‌ها

پس از انجام مراحل حل، که در بخش قبل توضیح داده شد، نوبت به محاسبه‌ی ثوابت حل می‌رسد. این ثوابت به کمک شرایط مرزی و شروط انطباق به دست می‌آیند.

در این بخش، استوانه‌ای دوسرگیردار برای مطالعه‌ی موردی انتخاب می‌شود. شرایط مرزی عبارتند از:

$$U_x\Big|_{\substack{\forall z\\ x=0,L}} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} u\Big|_{x=0,L} = 0 \quad \rightarrow \quad u^l_i\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \eta=0}} = 0, \quad u^r_i\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \xi=0}} = 0, \\ \phi\Big|_{x=0,L} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi^l_i\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \eta=0}} = 0, \quad \phi^r_i\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \xi=0}} = 0, \end{cases} \qquad (۳۴-۳)$$

$$U_z\Big|_{\substack{\forall z\\ x=0,L}} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} w\Big|_{x=0,L} = 0 \quad \rightarrow \quad w^l_i\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \eta=0}} = 0, \quad w^r_i\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \xi=0}} = 0, \\ \psi\Big|_{x=0,L} = 0 \quad \rightarrow \quad \psi^l_i\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \eta=0}} = 0, \quad \psi^l_r\Big|_{\substack{i=1,2,\ldots\\ \xi=0}} = 0. \end{cases} \qquad (۳۵-۳)$$

شروط انطباق به کمک قاعده‌ی انطباق ون‌دایک[11] قابل محاسبه‌اند. این قاعده در پیوست الف توضیح داده شده است.

با اعمال همزمان شروط انطباق و شرایط مرزی، ثابت‌های حل به‌دست می‌آید.

۳-۷ بسط یکنواخت

تا اینجا، حل به‌صورت سه بسط مجزا، یک بسط خارجی $\{\bar{y}(x^*)\}$ و دو بسط داخلی چپ $\{\bar{y}(\eta)\}$ و راست $\{\bar{y}(\xi)\}$، به‌دست آمده است. تقریب نهایی به عنوان حل تقریبی-تحلیلی از جمع کردن بسط‌های مذکور و سپس کم کردن بخش‌های هم‌پوشانی[12] به‌دست می‌آید.

$$\{\bar{y}(x)\} = \{\bar{y}(x^*)\} + \{\bar{y}(\eta)\} + \{\bar{y}(\xi)\} - \{\bar{y}(\eta)\}^o - \{\bar{y}(\xi)\}^o, \qquad (۳۶-۳)$$

که $\{\bar{y}(\eta)\}^o$ و $\{\bar{y}(\xi)\}^o$ بخش‌های مشترک حل خارجی با هر کدام از حل‌های داخلی است.

پس از محاسبه‌ی میدان جابه‌جایی، می توان به کمک روابط سینماتیک (۲-۱۶)، کرنش‌ها و سپس به کمک قانون هوک (۲-۳۵)، تنش‌ها را نیز محاسبه نمود.

11. Van Dyke's Rule for Matching
12. Overlap

فصل ۴

نتایج

۴-۱ مقدمه

در فصل‌های قبل، روند استخراج و حل تحلیلی معادلات حاکم بر مسأله‌ی مورد بررسی، معرفی شد. در این فصل، ابتدا در یک مطالعه‌ی موردی، توزیع تنش و جابه‌جایی در پوسته نشان داده شده است و سپس اثرات تغییر در پارامترهای هندسی، ناهمگنی، جنس و بارگذاری بر حل غیرخطی بررسی شده و با نتایج حاصل از مدل‌سازی المان محدود مقایسه می‌شود.

۴-۲ مطالعه‌ی موردی: توزیع جابه‌جایی و تنش

در این بخش، نتایج حاصل از حل تحلیلی، شامل توزیع جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها در پوسته، در قالب یک مطالعه‌ی موردی ارائه گردیده است. در نمودارهای رسم شده در این بخش، منظور از جابه‌جایی‌های بی‌بعد U_x^* و U_z^*، حاصل تقسیم مؤلفه‌های جابه‌جایی U_x و U_z بر ضخامت h است؛ یعنی،

$$U_x^* = \frac{U_x}{h} = u^* + z^*\phi, \tag{۴-۱}$$

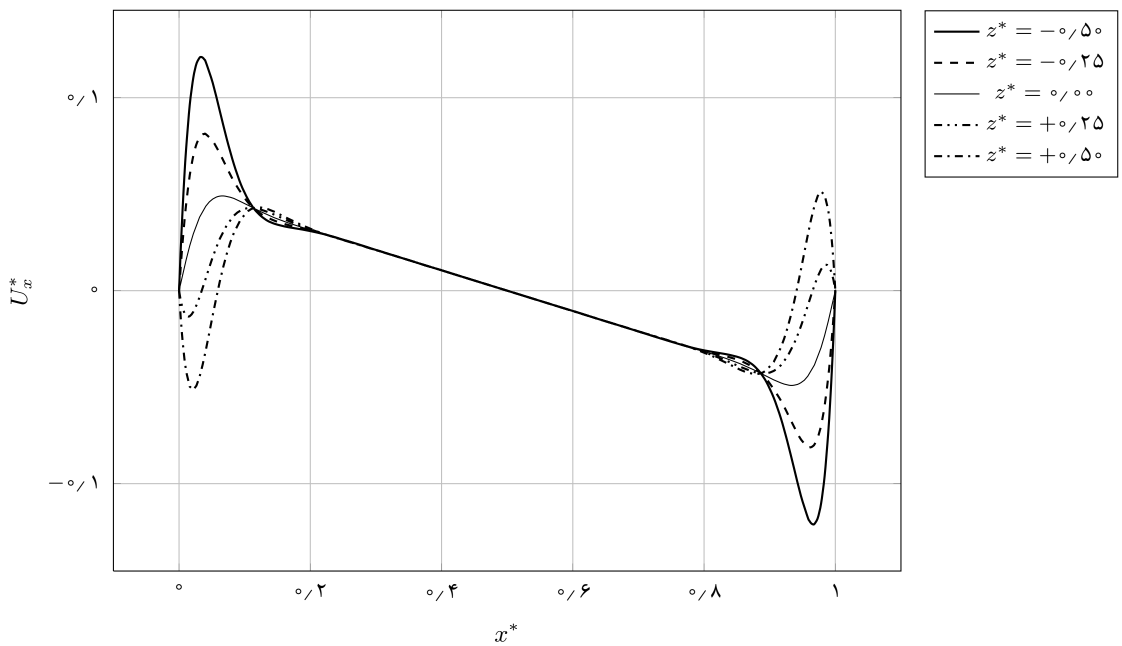
$$U_z^* = \frac{U_z}{h} = w^* + z^*\psi. \tag{۴-۲}$$

همچنین، تنش‌ها در نمودارهای مربوطه، با تقسیم بر فشار داخلی، بی‌بعد شده‌اند. مشخصات پوسته و خواص مکانیکی آن در جدول ۴-۱ آورده شده است.

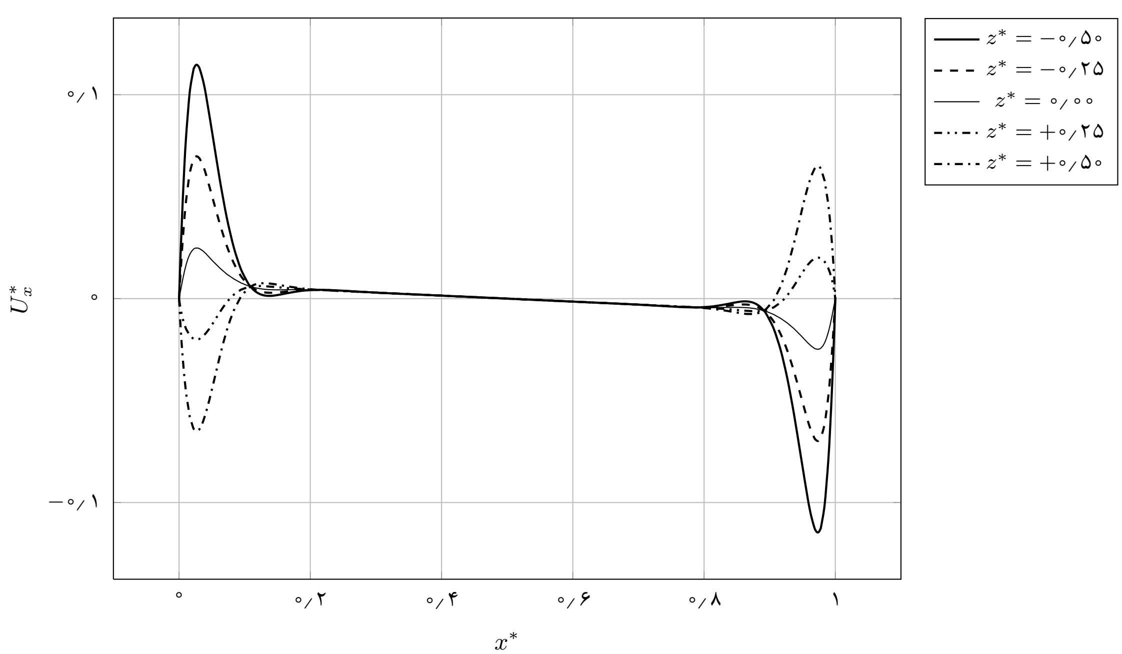
جدول ۴-۱: مقدار کمیت‌های مختلف در مطالعه‌ی موردی

کمیت	مقدار	کمیت	مقدار
r_i	۴۷ mm	r_o	۵۳ mm
L	۴۰۰ mm	n	۰
p_i	۸ MPa	p_o	۰
E_i	۰/۷ GPa	ν	۰/۳

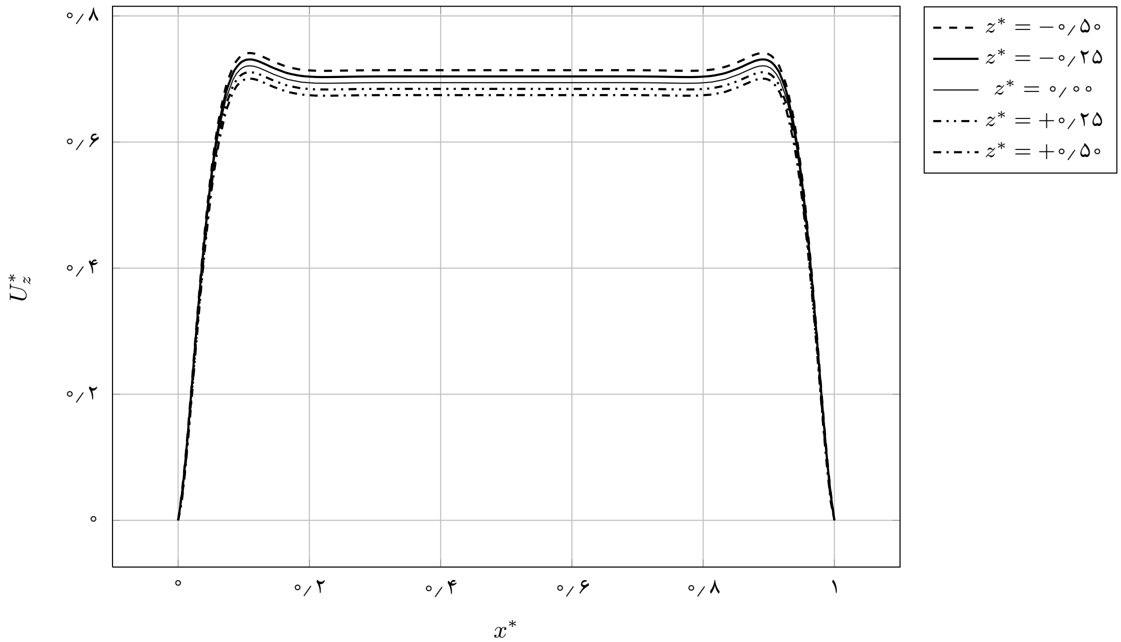
در شکل‌های ۴-۱ تا ۴-۱۲، توزیع میدان جابه‌جایی و میدان تنش در لایه‌های مختلف ضخامت پوسته بر حسب حل‌های مرتبه یک و مرتبه دو با روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته رسم شده است.



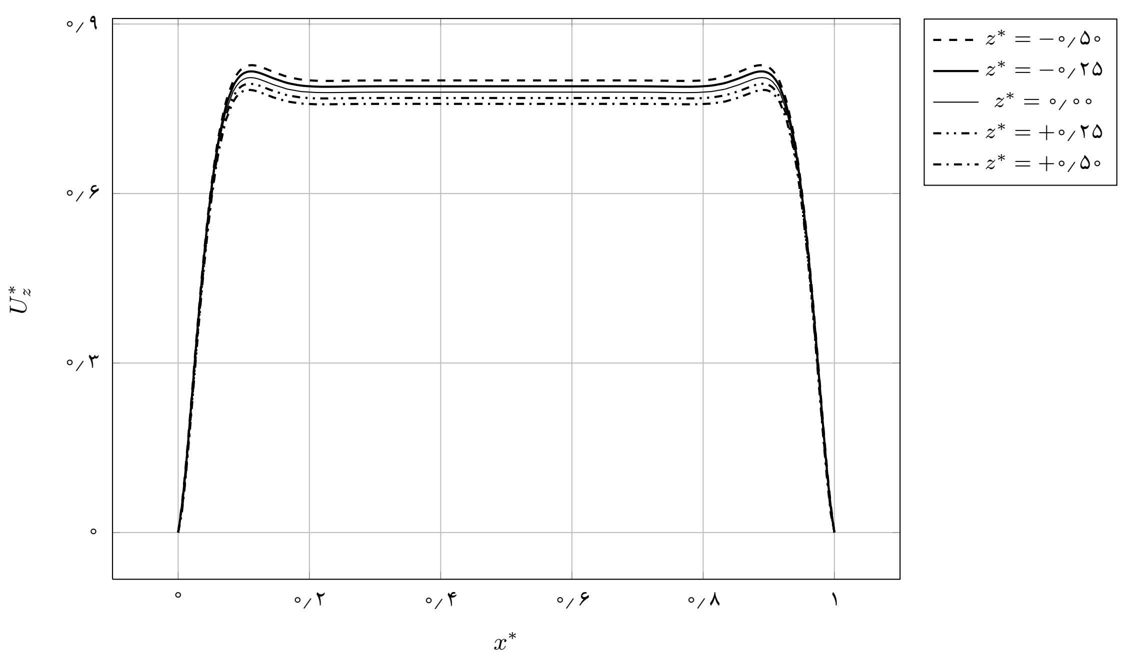
شکل ۴-۱: توزیع جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



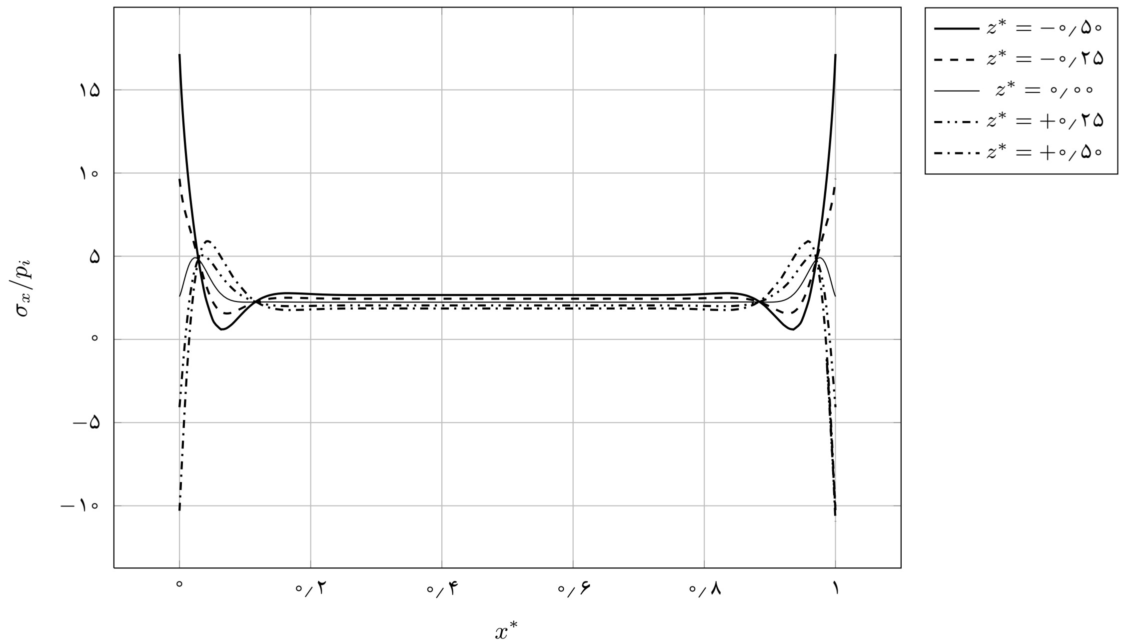
شکل ۴-۲: توزیع جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو



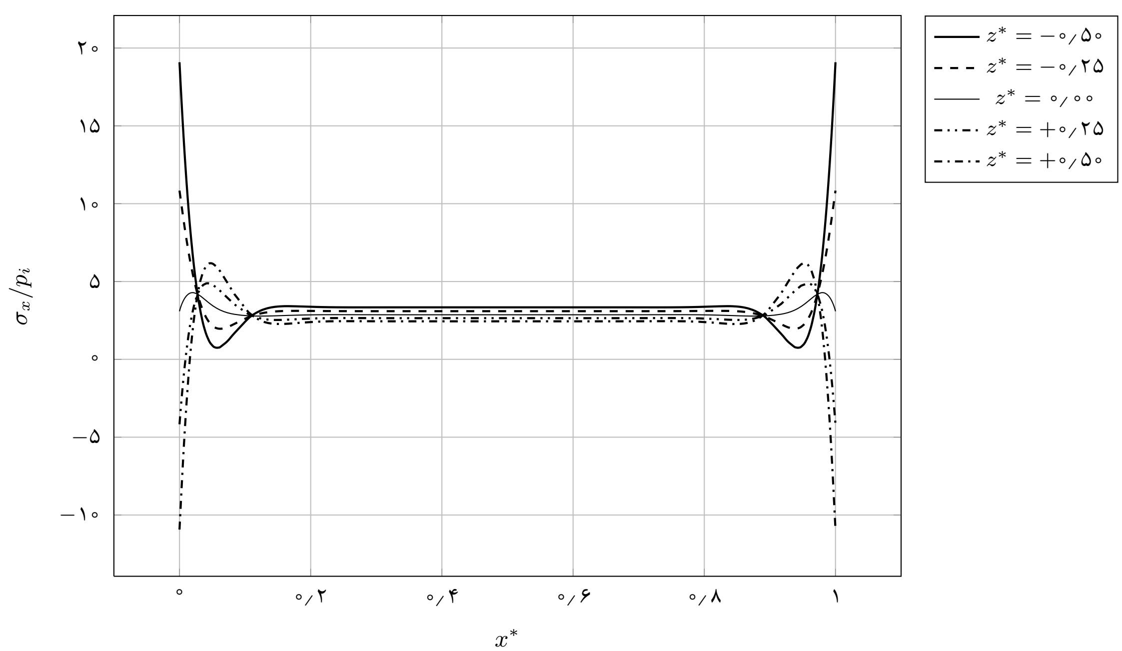
شکل ۴-۳: توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



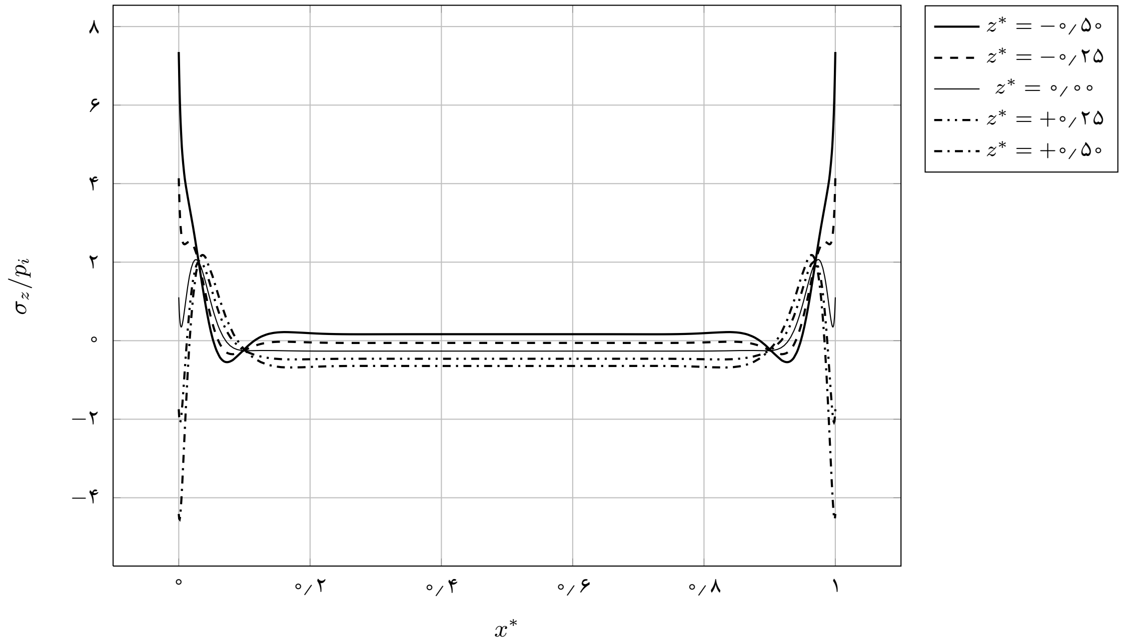
شکل ۴-۴: توزیع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو



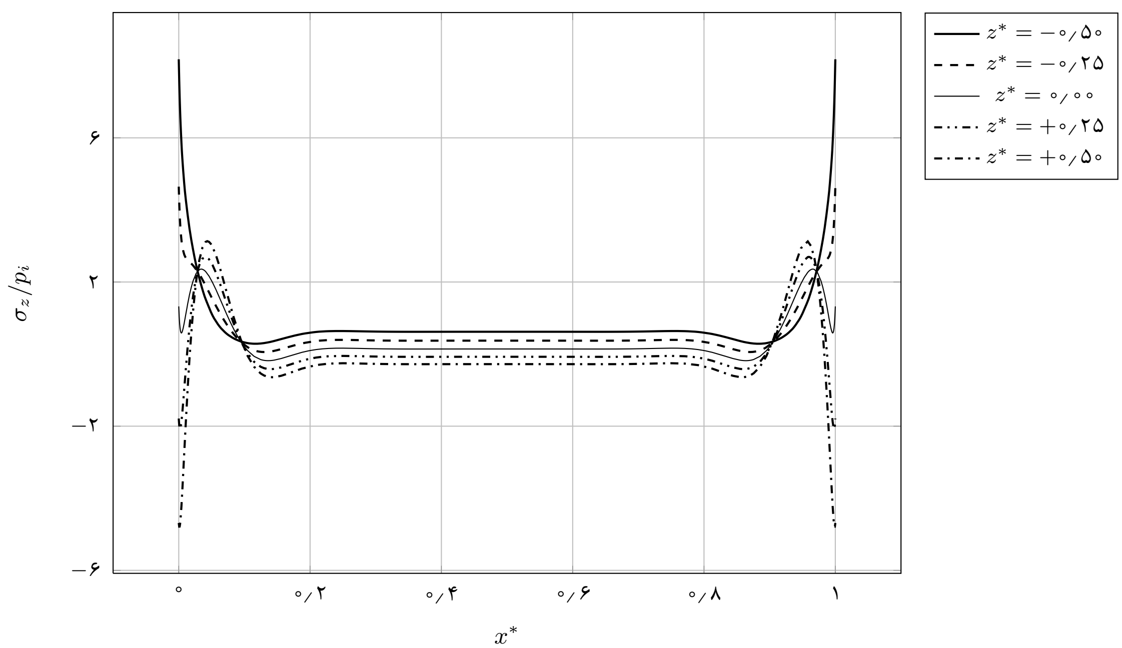
شکل ۴-۵: توزیع تنش نرمال محوری بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



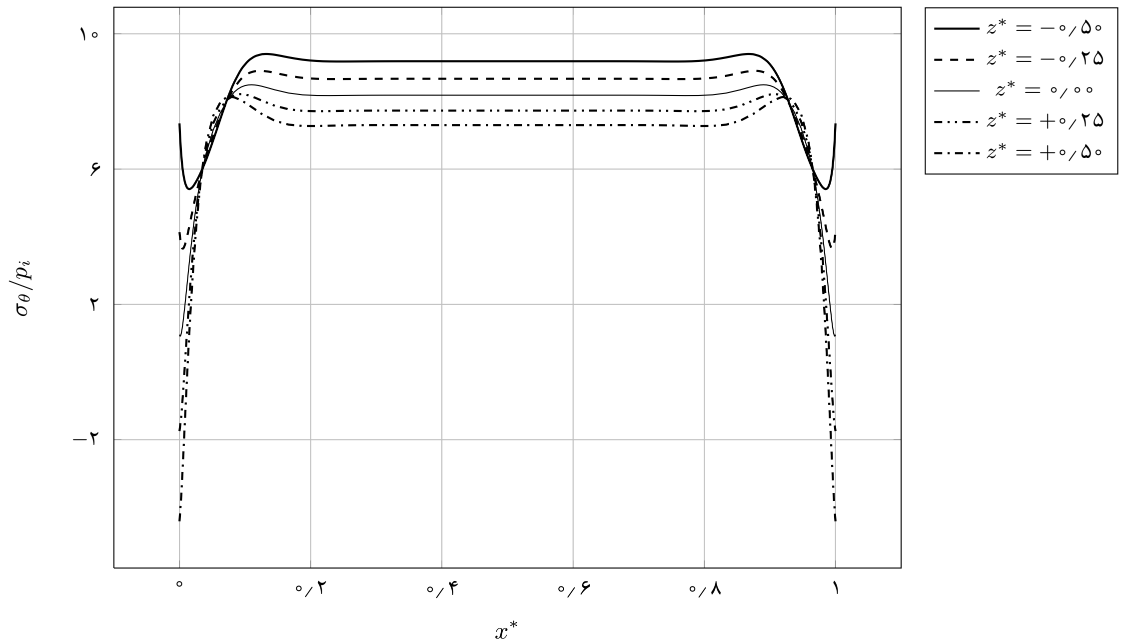
شکل ۴-۶: توزیع تنش نرمال محوری بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو



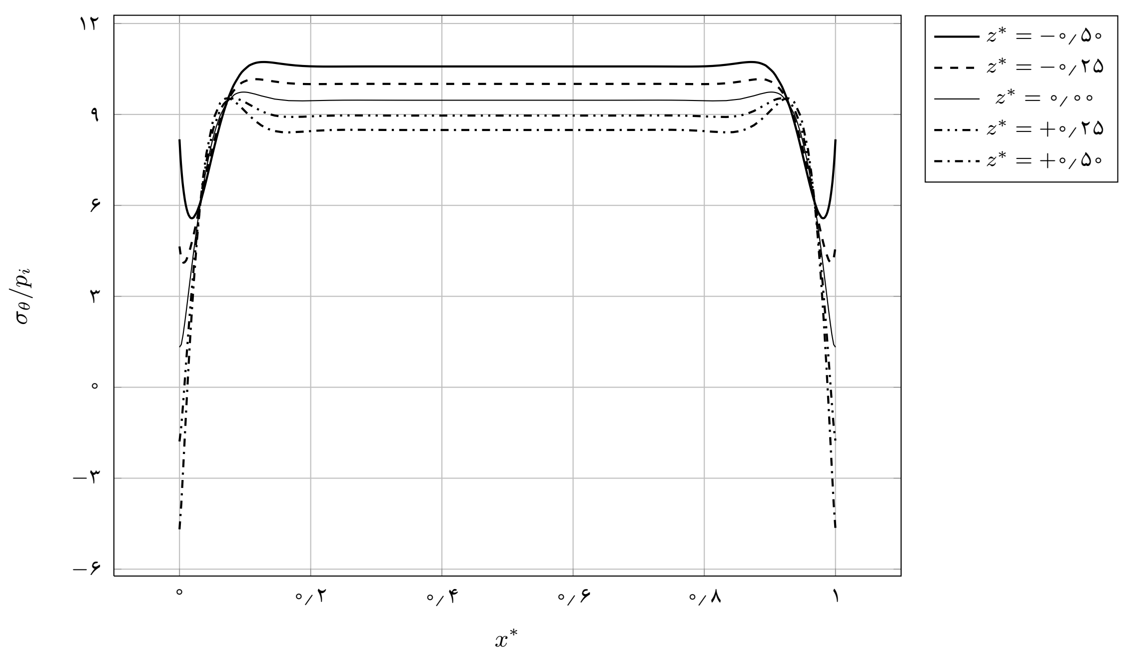
شکل ۴-۷: توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



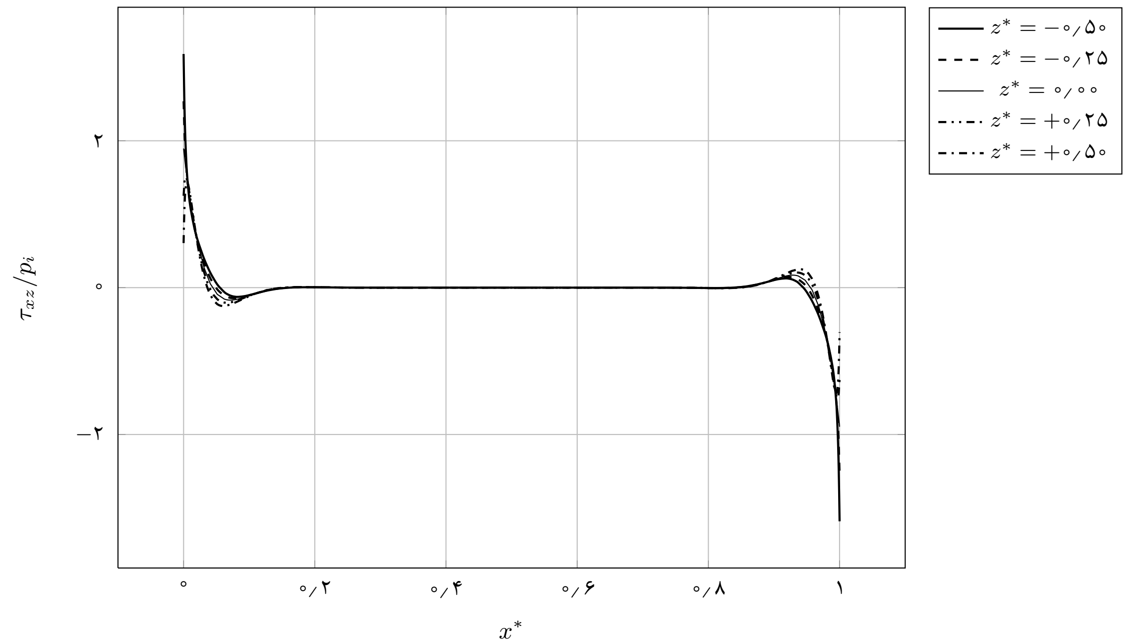
شکل ۴-۸: توزیع تنش نرمال شعاعی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو



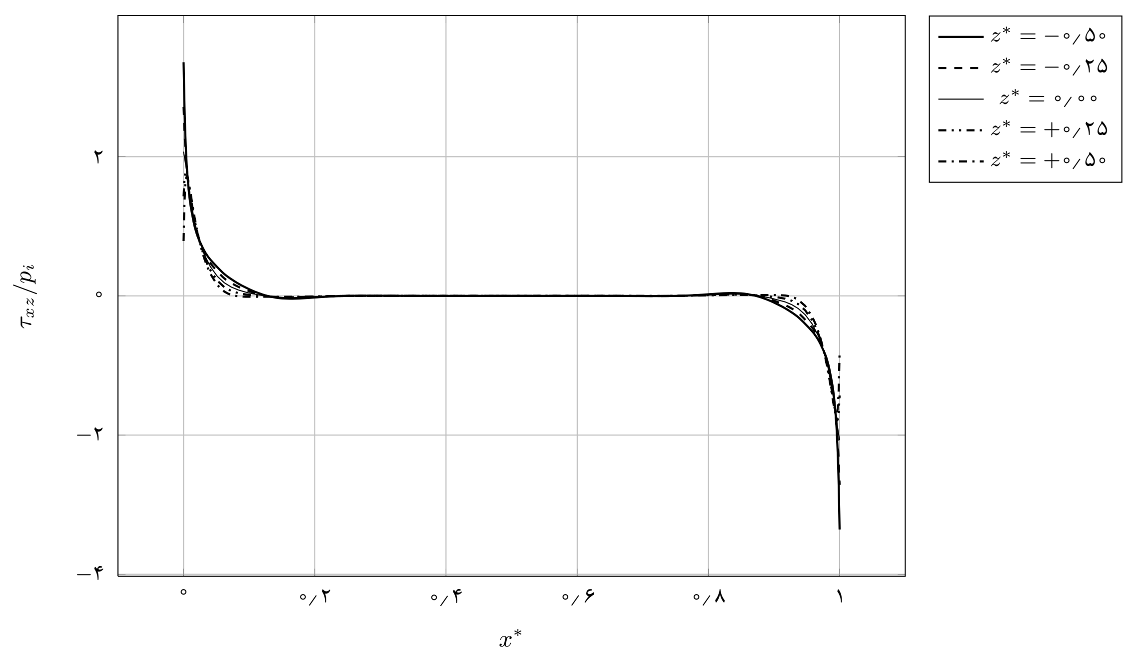
شکل ۴-۹: توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



شکل ۴-۱۰: توزیع تنش نرمال محیطی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو



شکل ۴-۱۱: توزیع تنش برشی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



شکل ۴-۱۲: توزیع تنش برشی بی‌بعدشده‌ی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو

۴-۳ پارامترهای مؤثر بر رفتار غیرخطی

در این قسمت، به مطالعه‌ی تأثیرات پارامترهای هندسی، بارگذاری، جنس و ناهمگنی بر رفتار غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای پرداخته شده است. برای بررسی جنبه‌های مختلف رفتار غیرخطی، نمودار جابه‌جایی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته بر حسب مختصه‌ی محوری بی‌بعد رسم شده است.

۴-۳-۱ تغییرات طول

برای ارزیابی اثر تغییرات طول استوانه بر حل غیرخطی، جابه‌جایی سطح میانی پوسته برای چهار مقدار $\epsilon = ۰/۰۰۶, ۰/۰۱۲, ۰/۰۲۴, ۰/۰۴۸$ رسم شده است. در ضخامت ثابت، $\epsilon = h/L$ معیاری از بلندی استوانه است؛ هر چه ϵ بیش‌تر باشد، استوانه کوتاه‌تر است. برای تمام نمودارهای این بخش، $R^* = ۸/۳۳$، $n = ۰$، $\nu = ۰/۳$، $p_i/E_i = ۰/۰۱۱۴$ و فشار خارجی صفر در نظر گرفته شده است. شکل‌های ۴-۱۳ تا ۴-۲۰ مربوط به این بخش هستند.

تغییر در طول استوانه سبب تغییر در محدوده‌ی اعتبار حل‌های داخلی و خارجی می‌گردد. جدول ۴-۲ با توجه به شکل‌های این بخش استخراج شده است. در این جدول، ϵ نشان‌دهنده‌ی میزان بلندی استوانه است و x^*_{inner} مرز حل خارجی و حل داخلی چپ را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که در استوانه‌های کوتاه‌تر، حل داخلی سهم بیش‌تری از کل محدوده‌ی حل را به خود اختصاص می‌دهد.

جدول ۴-۲: محدوده‌ی حل داخلی

ϵ	۰/۰۰۶	۰/۰۱۲	۰/۰۲۴	۰/۰۴۸
x^*_{inner}	۰/۰۶	۰/۱۶	۰/۲۸	۰/۴۲
درصد	۱۲	۳۲	۵۶	۸۴

۴-۳-۲ تغییرات ضخامت

به منظور مشاهده‌ی اثر تغییرات ضخامت بر میدان جابه‌جایی، جابه‌جایی سطح میانی پوسته برای چهار مقدار $R^* = ۲/۵, ۵/۰, ۱۰, ۲۰$ آورده شده است. تغییر دادن ضخامت سبب تغییر در پارامتر بی‌بعد ϵ نیز می‌گردد. برای مقادیر ذکر شده برای R^*، ϵ به‌ترتیب مقادیر $\epsilon = ۰/۰۵, ۰/۰۲۵, ۰/۰۱۲۵, ۰/۰۰۶۲۵$ را دارد. R^* معیاری از ضخامت پوسته به شمار می رود؛ هرچه این عدد بیش‌تر باشد، استوانه نازک‌تر است. ثابت ناهمگنی، بار و جنس مانند قبل است. شکل‌های ۴-۲۱ تا ۴-۲۸ مربوط به این بخش هستند.

جدول ۴-۳ جابه‌جایی شعاعی نقطه‌ی واقع در $x^* = ۰/۵$ و $z^* = ۰/۰$ را به ازای ضخامت‌های مختلف نشان می‌دهد. ملاحظه می‌گردد که برای پوسته های نازک‌تر اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی و همچنین

اختلاف حل‌های غیرخطی عددی و تحلیلی افزایش می‌یابد. به عبارت دیگر، نازک‌تر شدن پوسته سبب بروز رفتار غیرخطی در آن می‌گردد.

جدول ۴-۳: مقادیر جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی نقطه‌ی میانی پوسته

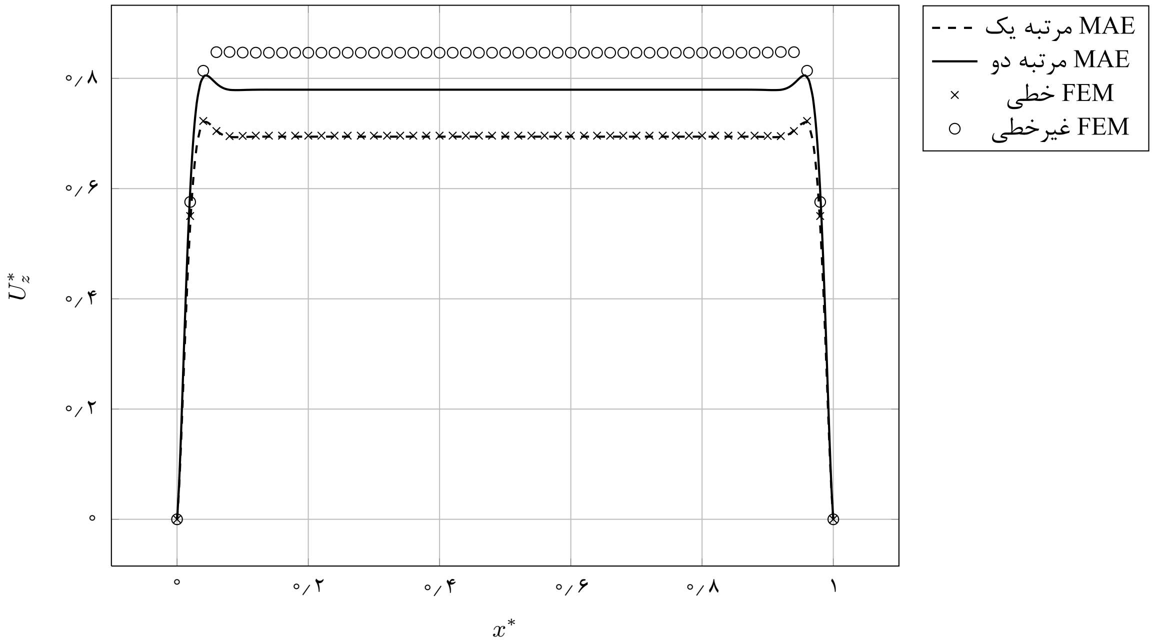
R^*	۲/۵	۵/۰	۱۰	۲۰
MAE مرتبه صفر	۵/۴۴e−۲	۲/۴۲e−۱	۱/۰۱	۴/۱۰
MAE مرتبه یک	۵/۶۲e−۲	۲/۵۹e−۱	۱/۱۶	۵/۳۴
FEM خطی	۵/۵۱e−۲	۲/۴۴e−۱	۱/۰۱	۴/۱۱
FEM غیرخطی	۵/۸۳e−۲	۲/۷۲e−۱	۱/۲۸	۷/۸۵

۴-۳-۳ بارگذاری و جنس

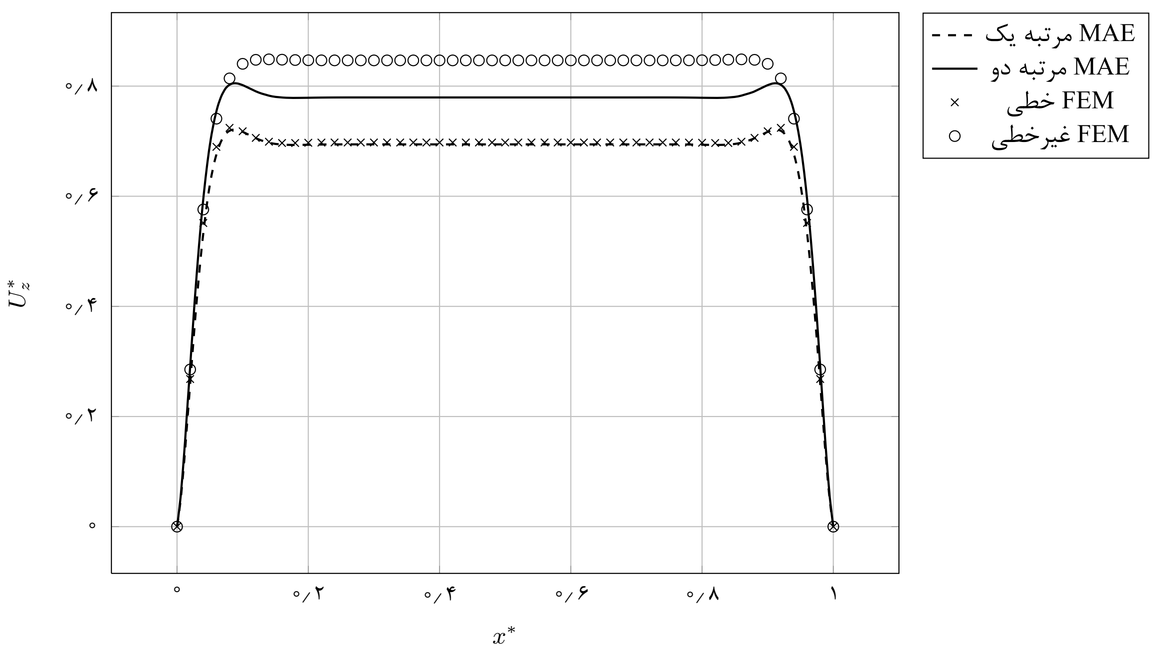
در شکل‌های ۴-۲۹ تا ۴-۳۴، اثرات تغییر نسبت بار به مدول الاستیسیته بر رفتار غیرخطی پوسته نشان داده شده است. با توجه به این شکل‌ها می‌توان نتیجه گرفت که رفتار پوسته‌های بسیار سفت (مانند پوسته‌های فولادی) کاملاً خطی است. بنابراین در کاربردهای صنعتی و در فشارهای کاری متعارف چشم‌پوشی از رفتار غیرخطی سازه، خطای بسیار کمی را ایجاد می‌کند؛ به‌شرط آن که پوسته نازک نباشد.
در نمودارهای این بخش، $R^* = ۸/۳۳$، $\epsilon = ۰/۰۱۵$، $n = ۰$ و $\nu = ۰/۳$ است. نمودارها برای مقادیر مختلف $p_i/E_i = ۰/۰۱۱۵, ۰/۰۲۳۰, ۰/۰۴۶۱, ۰/۰۹۲۳$ رسم شده‌اند.

۴-۳-۴ ناهمگنی

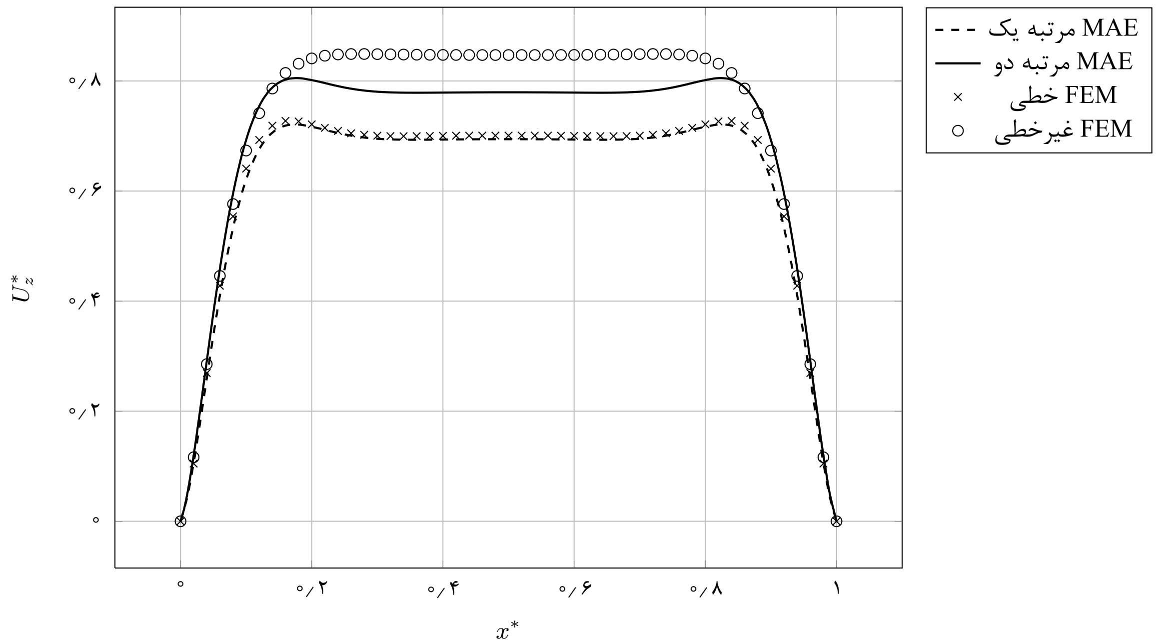
در این قسمت، اثر تغییرات ثابت ناهمگنی بر پاسخ غیرخطی نشان داده شده است. با توجه به نمودارهای این بخش می‌توان نتیجه گرفت که ثابت‌های ناهمگنی منفی سبب سفت‌تر شدن و در نتیجه کوچک‌تر شدن اندازه‌ی بردار جابه‌جایی نقاط روی سطح میانی می‌شوند. با استدلال مشابه می‌توان دلیل بزرگ‌تر بودن جابه‌جایی در ثابت های ناهمگنی مثبت را توجیه نمود.
در ضمن، تغییر در ثابت ناهمگنی اثری بر رفتار غیرخطی سازه ندارد. شکل‌های ۴-۳۵ تا ۴-۳۸ مربوط به این بخش هستند. در مورد نسبت بار به مدول الاستیسیته‌ی زیاد، منحنی مربوط به حل عددی غیرخطی، به‌خاطر اعوجاج بیش از حد المان‌ها، آورده نشده است.



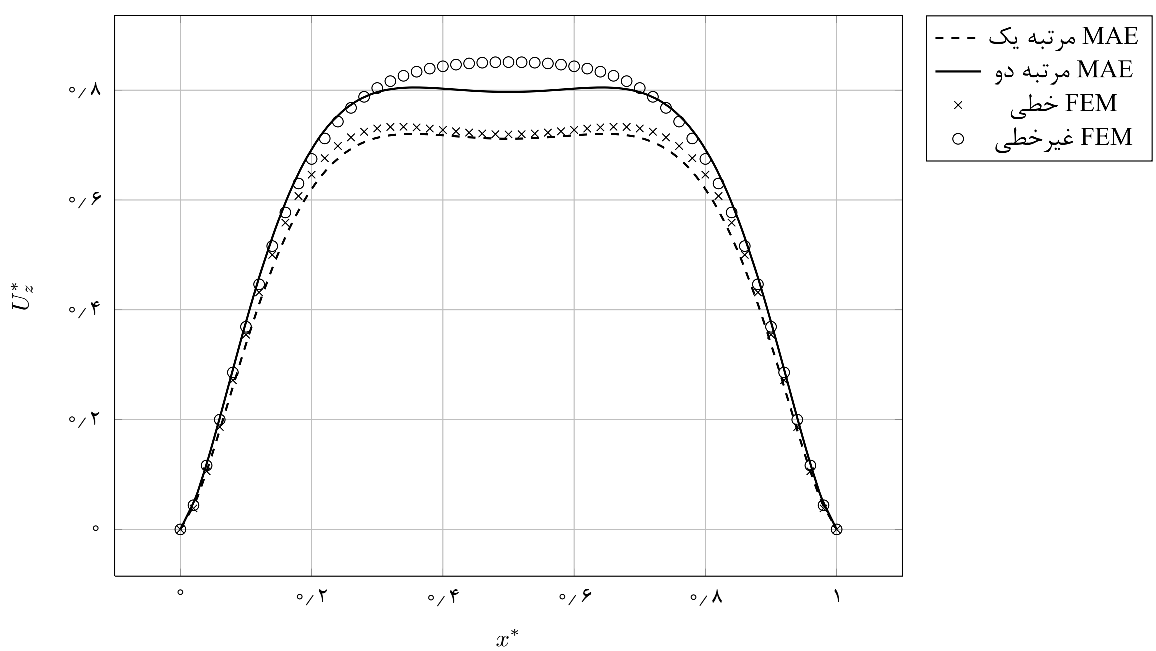
شکل ۴-۱۳: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon = ۰٫۰۰۶$



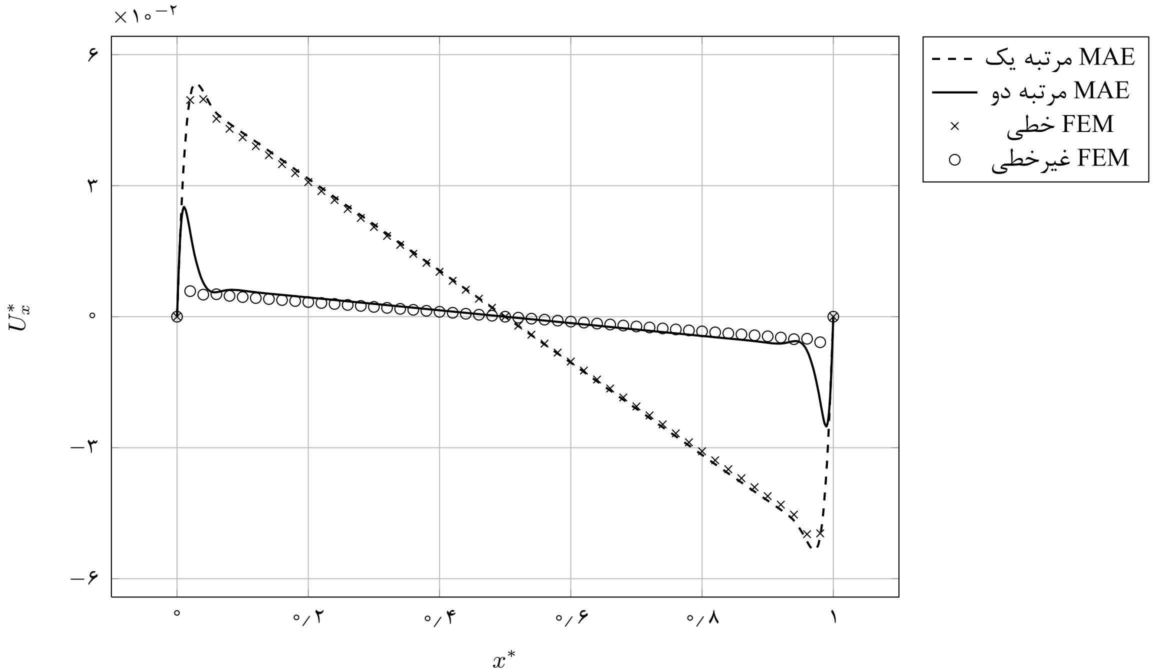
شکل ۴-۱۴: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon = ۰٫۰۱۲$



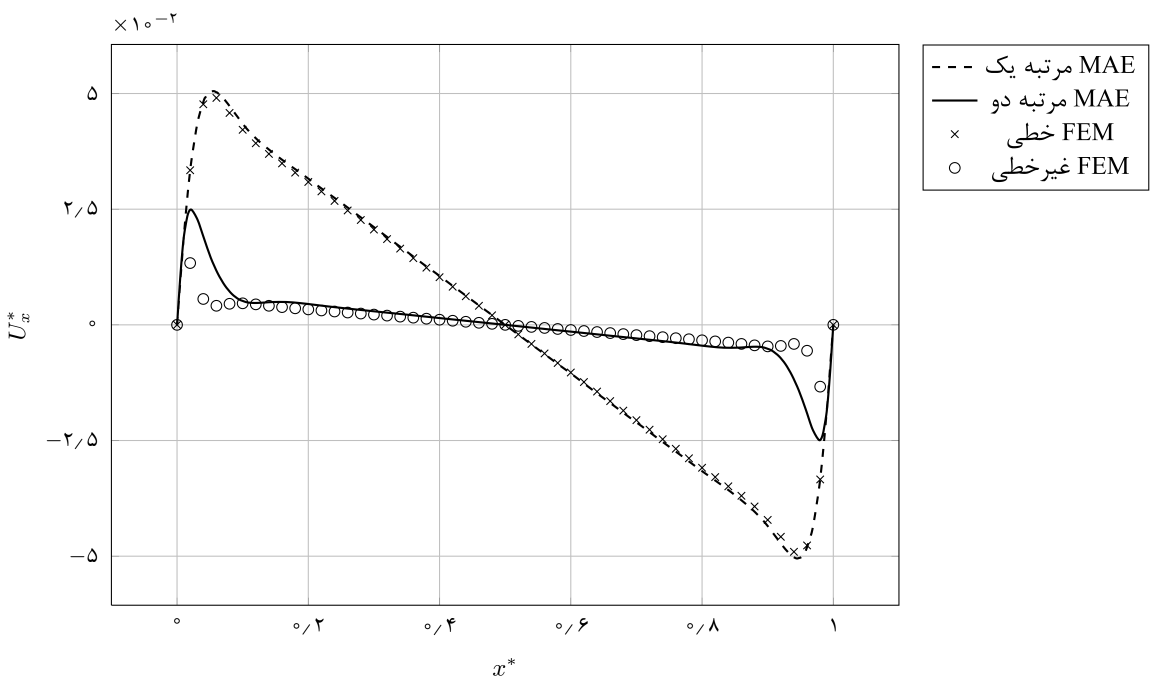
شکل ۴-۱۵: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon =$ ۰/۰۲۴



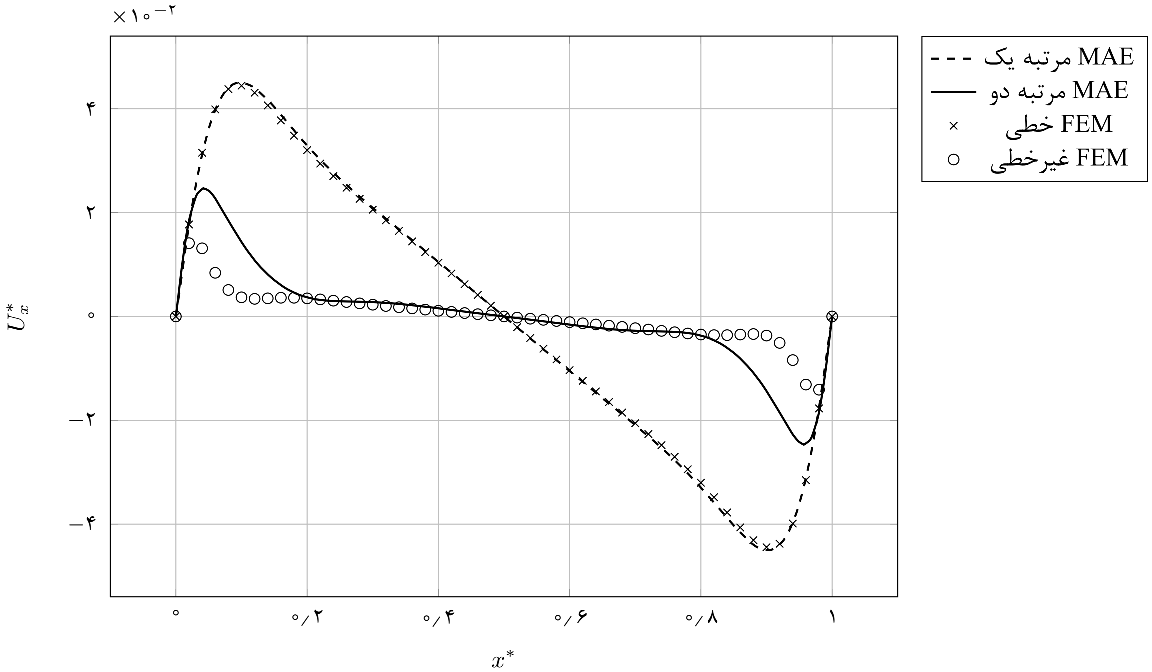
شکل ۴-۱۶: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon =$ ۰/۰۴۸



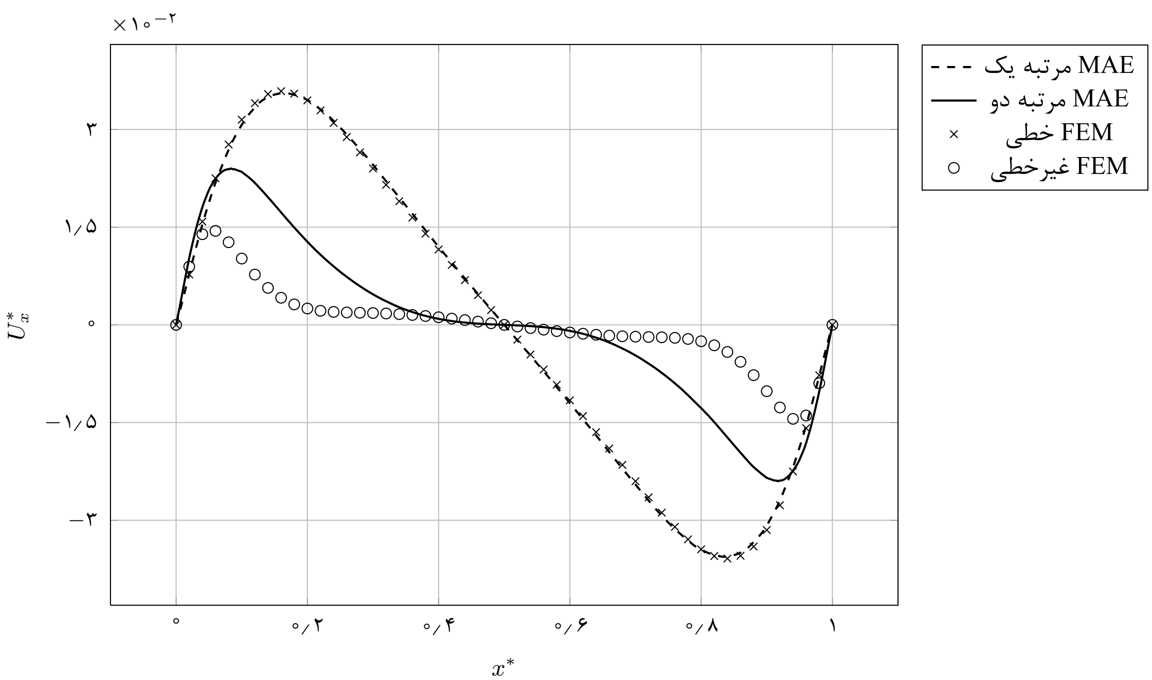
شکل ۴-۱۷: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon = ۰/۰۰۶$



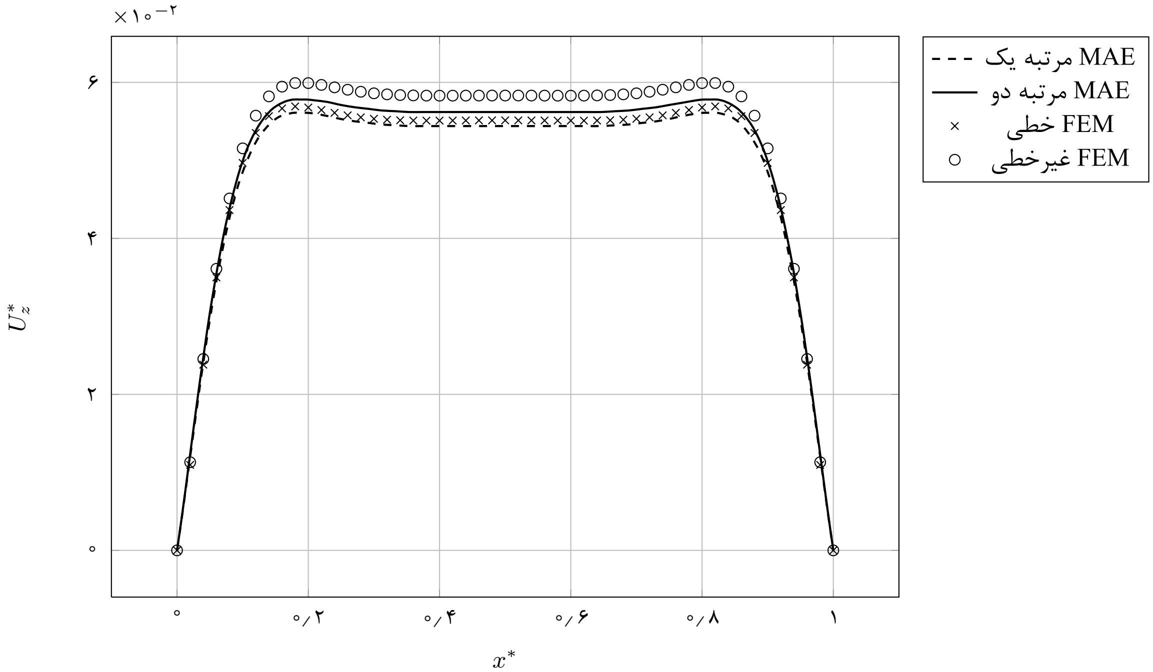
شکل ۴-۱۸: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon = ۰/۰۱۲$



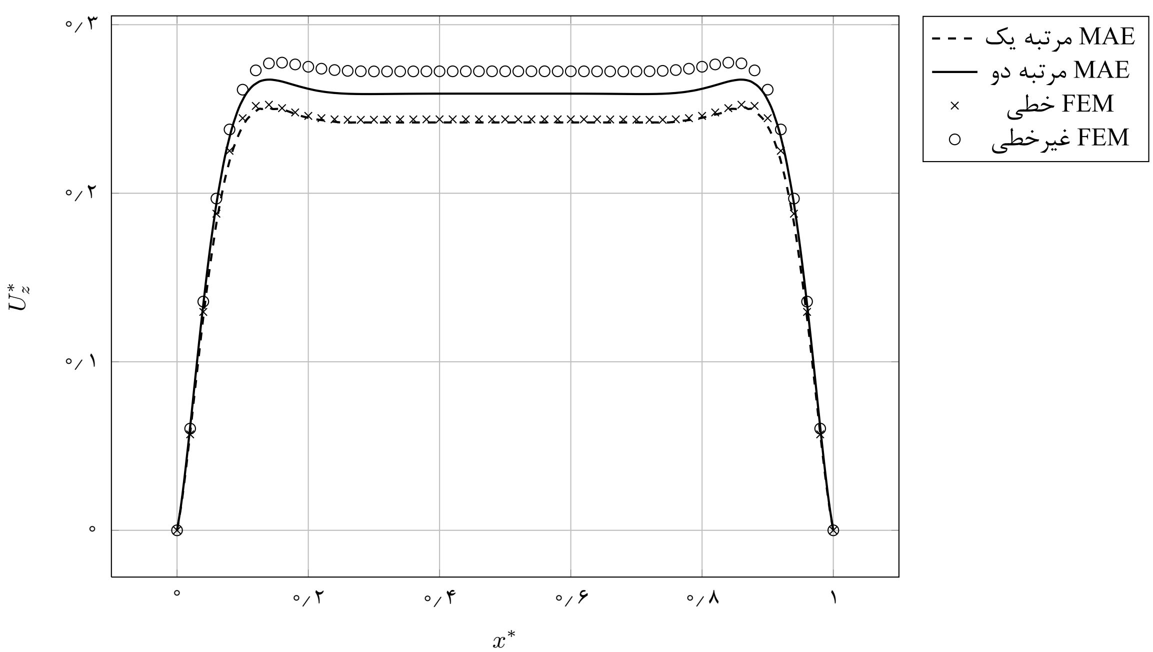
شکل ۴-۱۹: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon = ۰/۰۲۴$



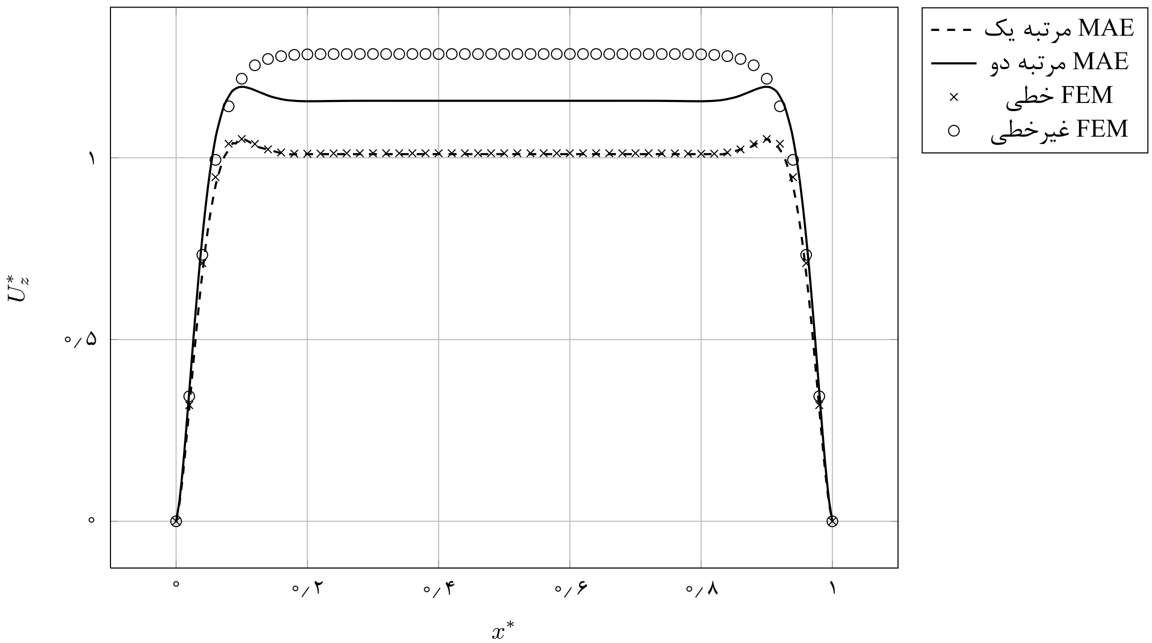
شکل ۴-۲۰: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $\epsilon = ۰/۰۴۸$



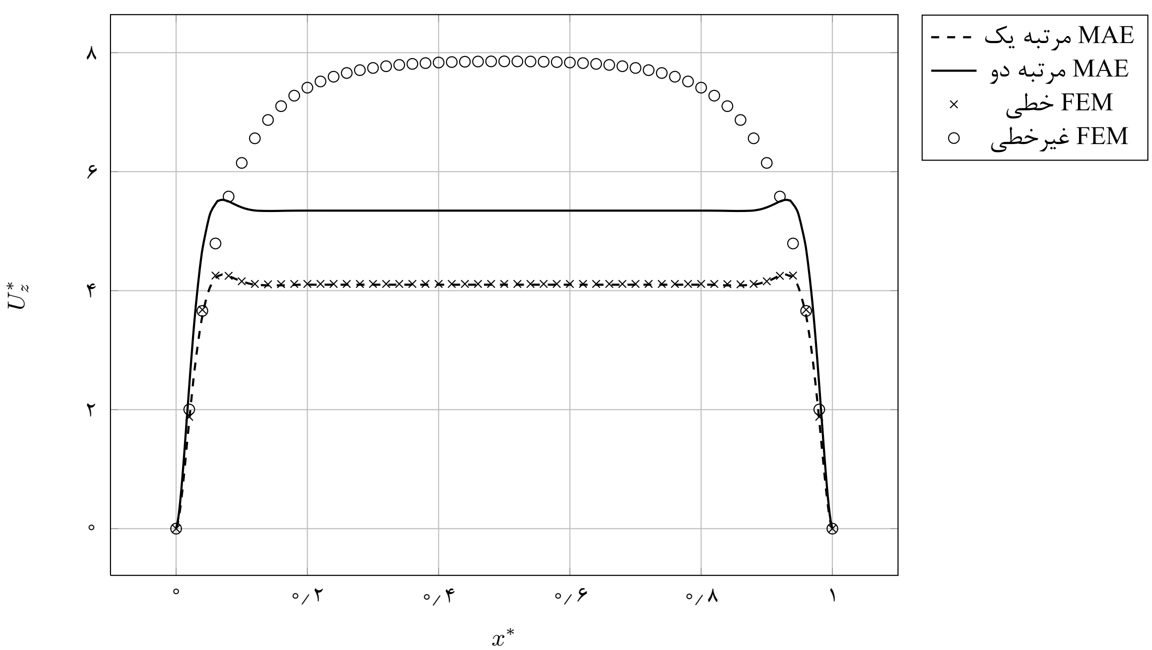
شکل ۴-۲۱: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $R^* = ۲٫۵$



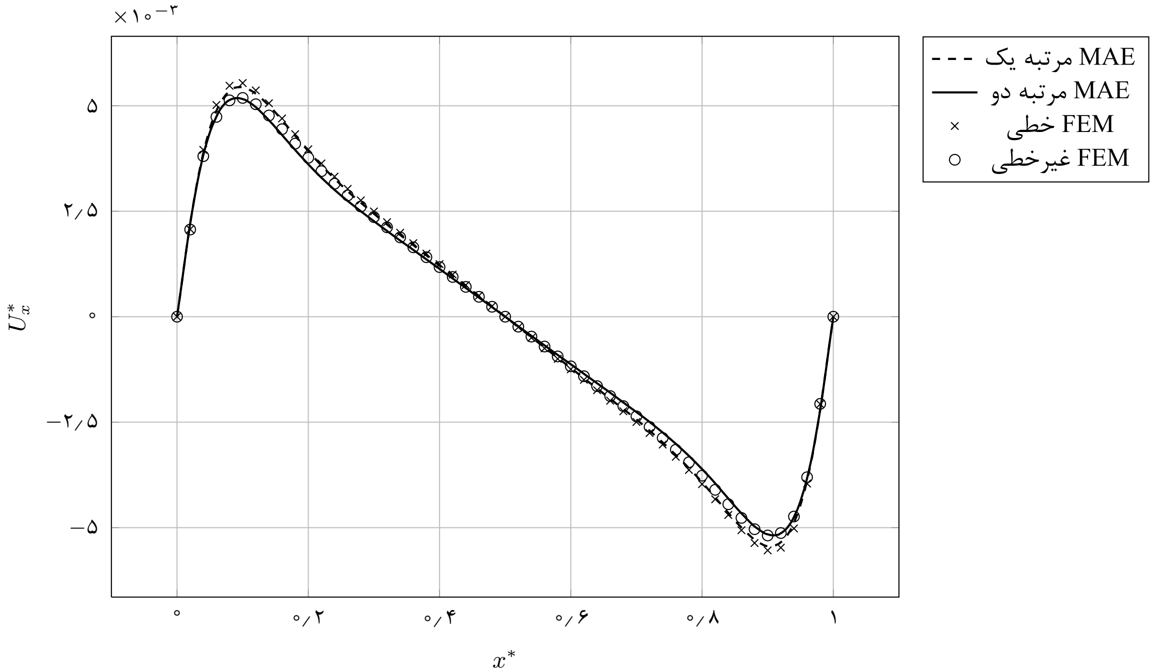
شکل ۴-۲۲: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $R^* = ۵٫۰$



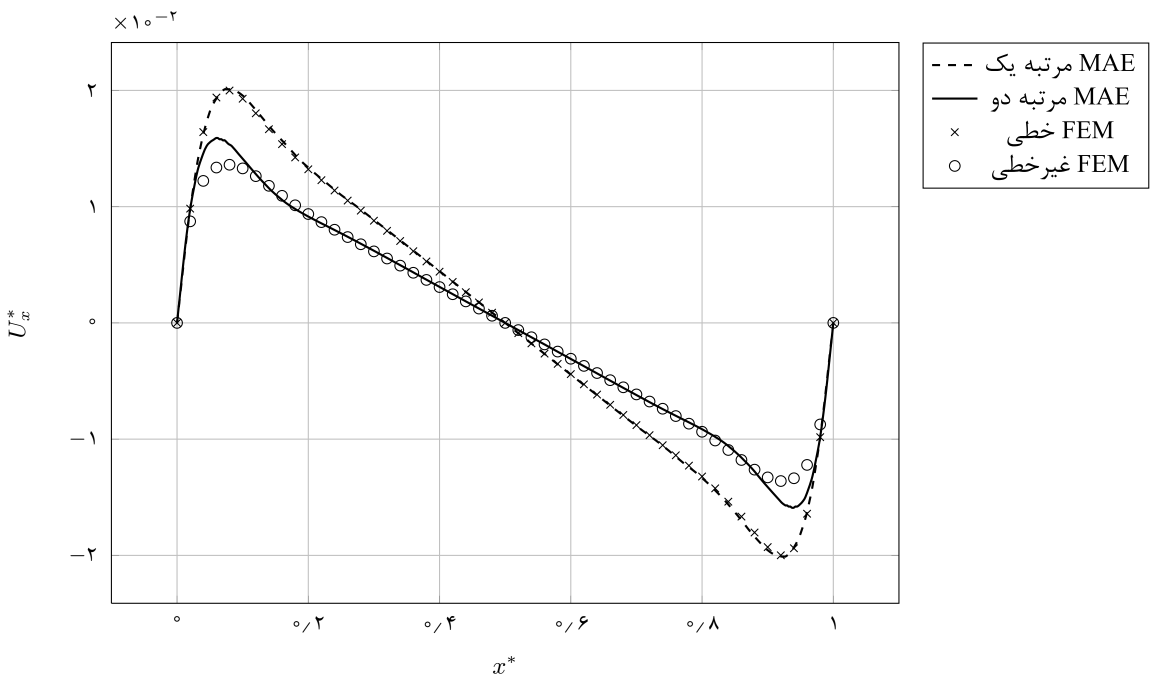
شکل ۴-۲۳: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $R^* = ۱۰$



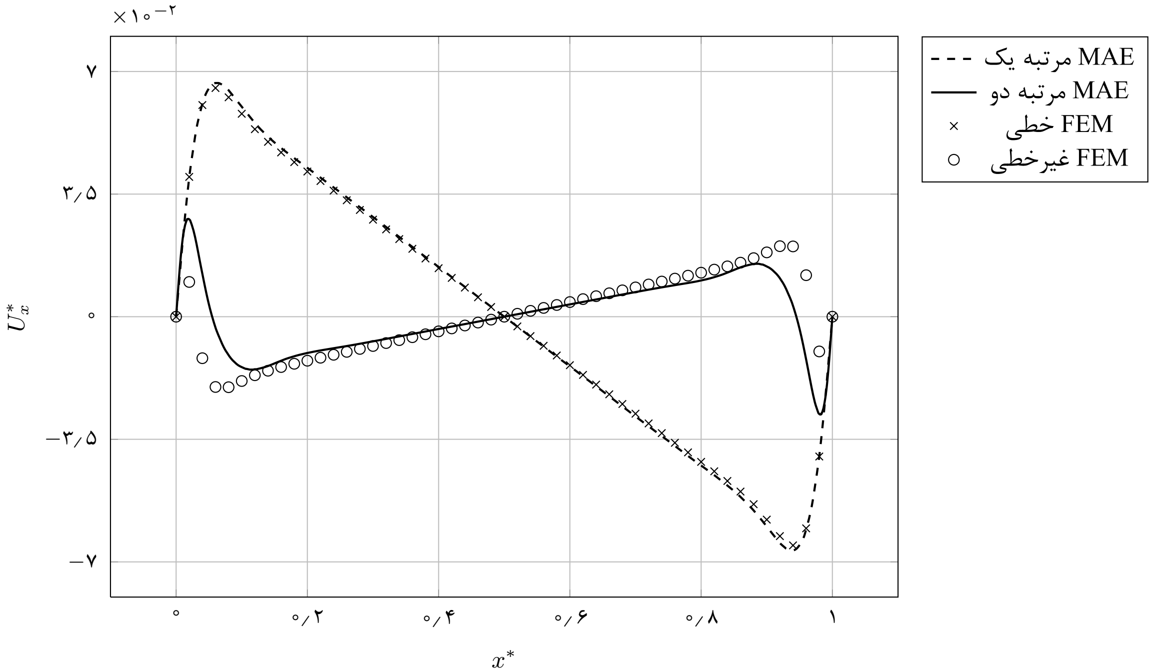
شکل ۴-۲۴: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $R^* = ۲۰$



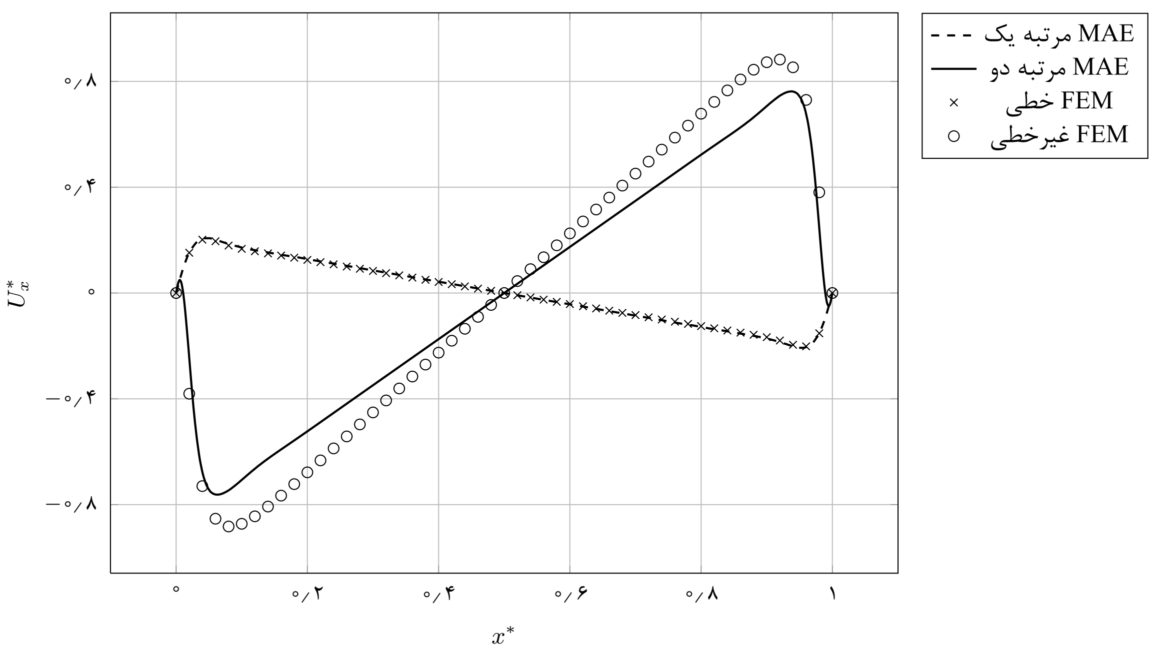
شکل ۴-۲۵: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $R^* = ۲٫۵$



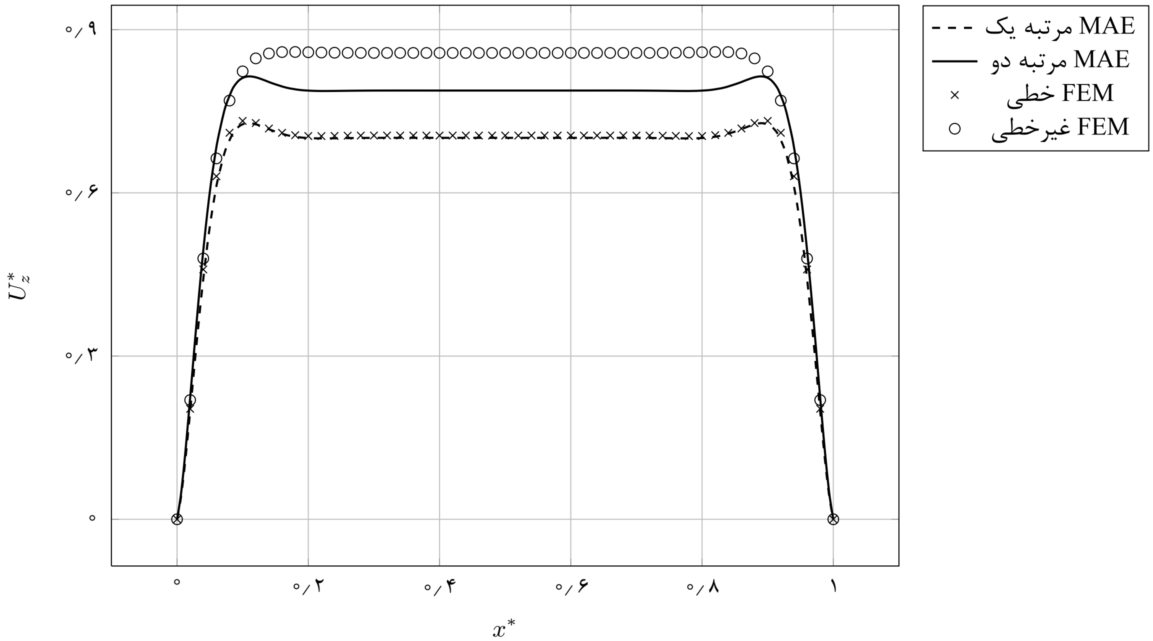
شکل ۴-۲۶: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $R^* = ۵٫۰$



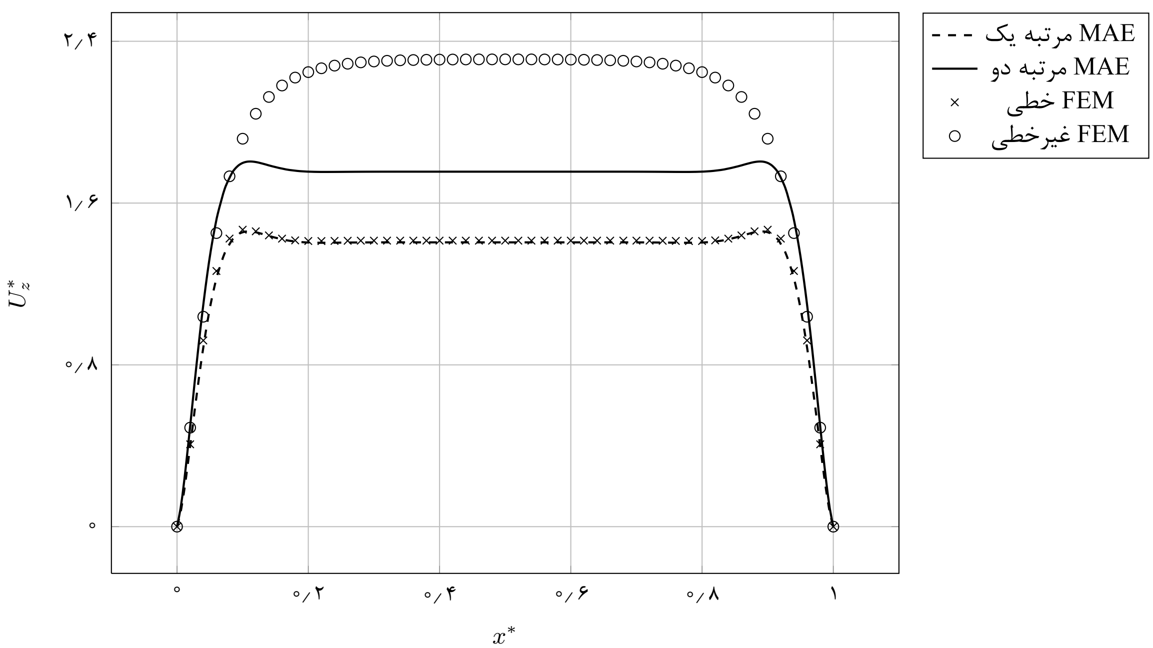
شکل ۴-۲۷: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای ۱۰ = R^*



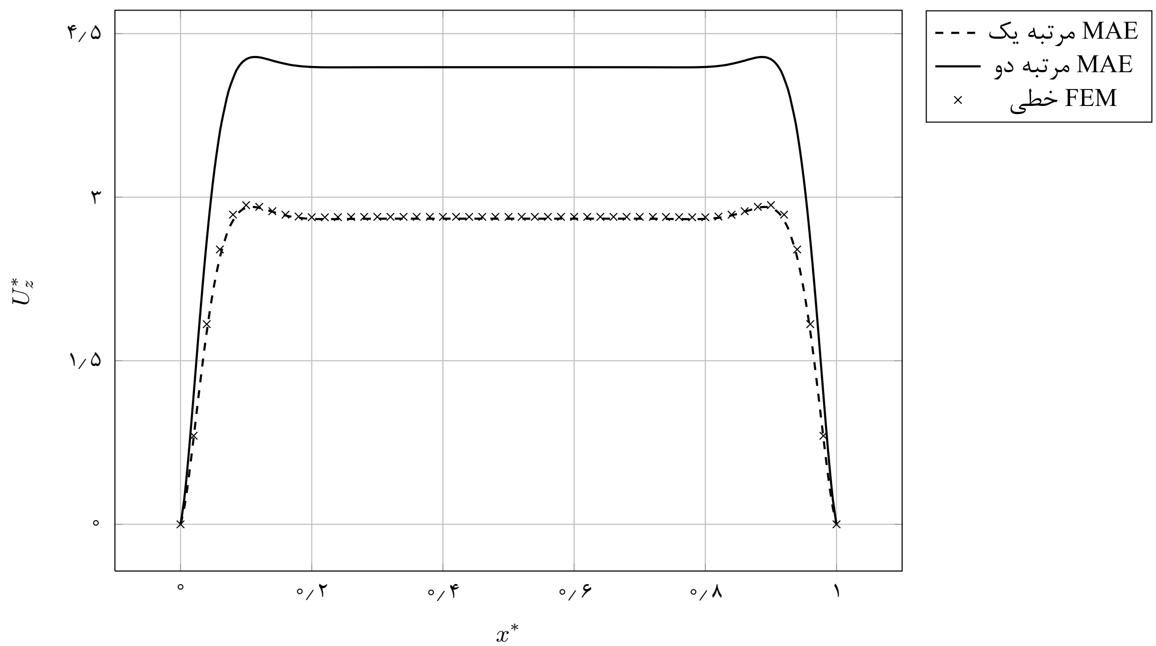
شکل ۴-۲۸: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای ۲۰ = R^*



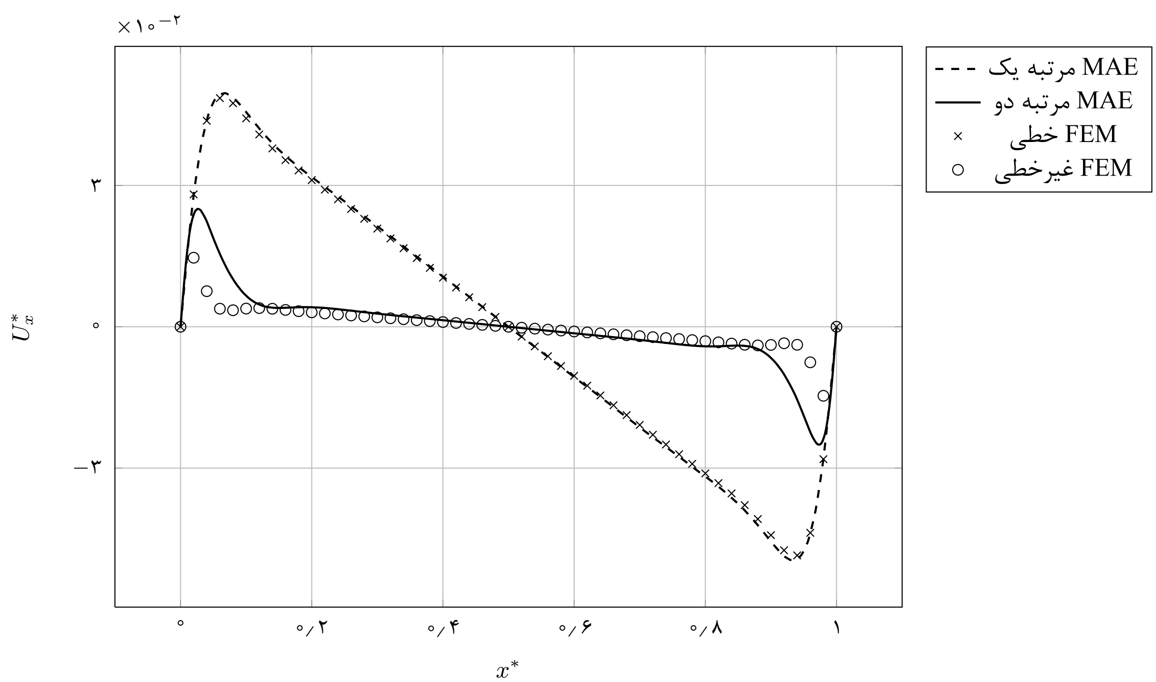
شکل ۴-۲۹: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $p_i^* = ۰٫۴$



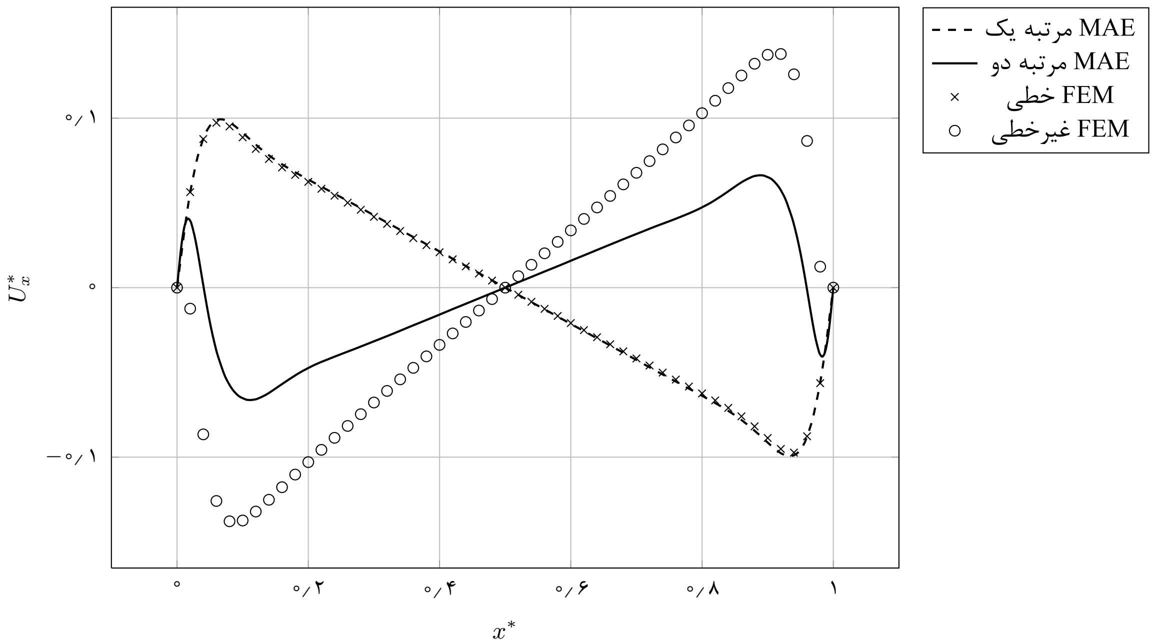
شکل ۴-۳۰: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $p_i^* = ۰٫۸$



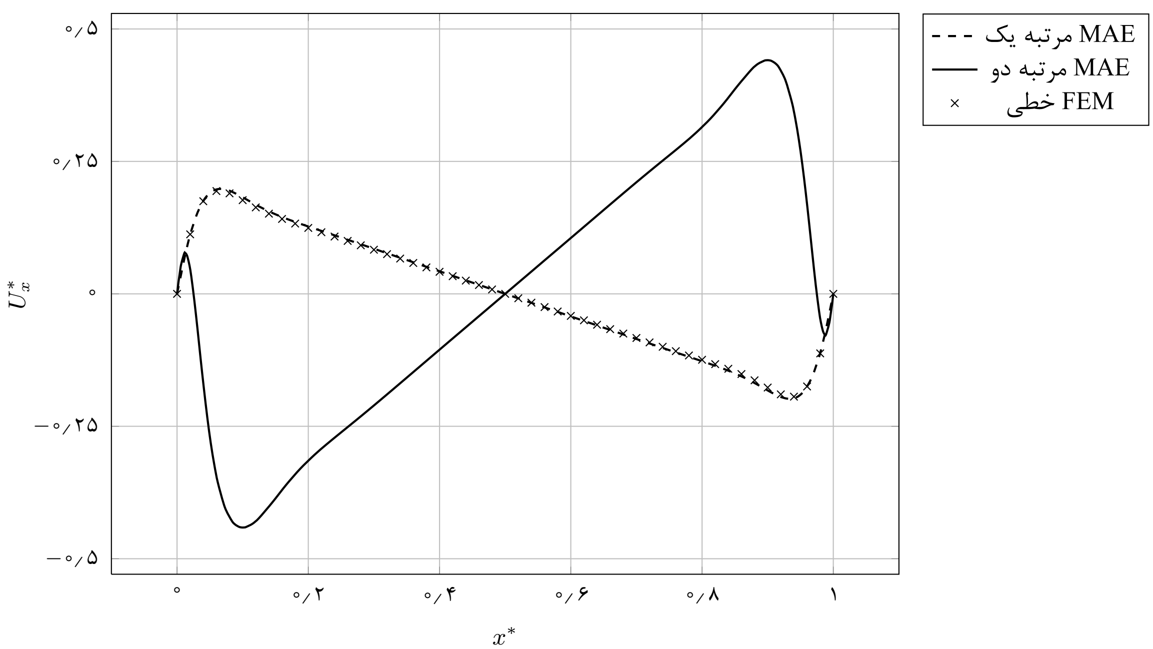
شکل ۴-۳۱: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $p_i^* = ۱٫۶$



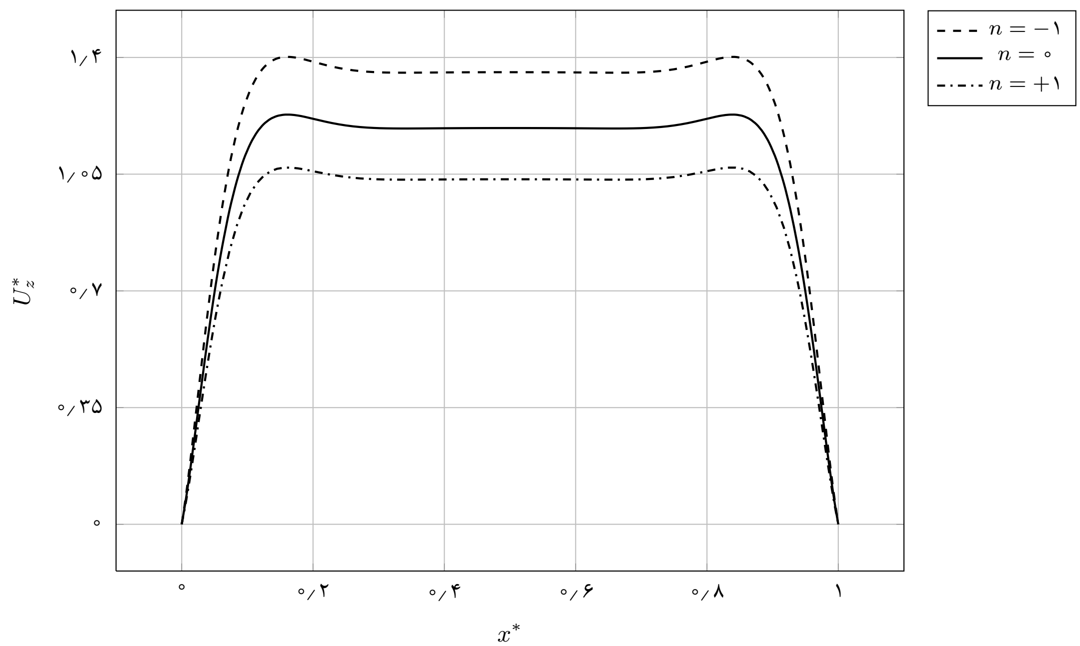
شکل ۴-۳۲: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $p_i^* = ۰٫۴$



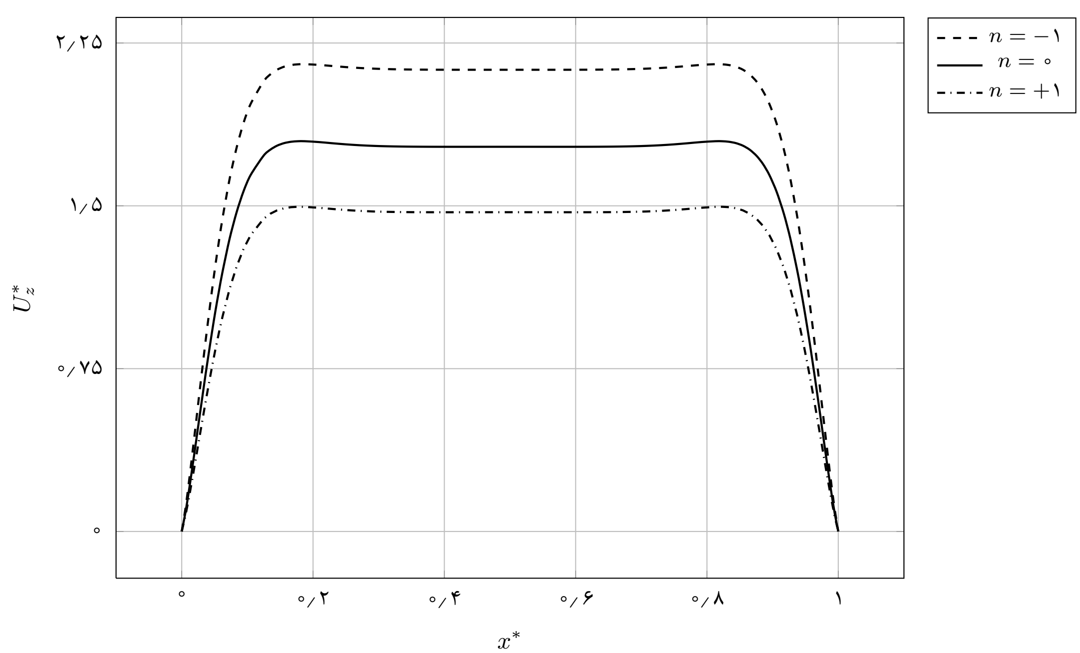
شکل ۴-۳۳: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $p_i^* = ۰/۸$



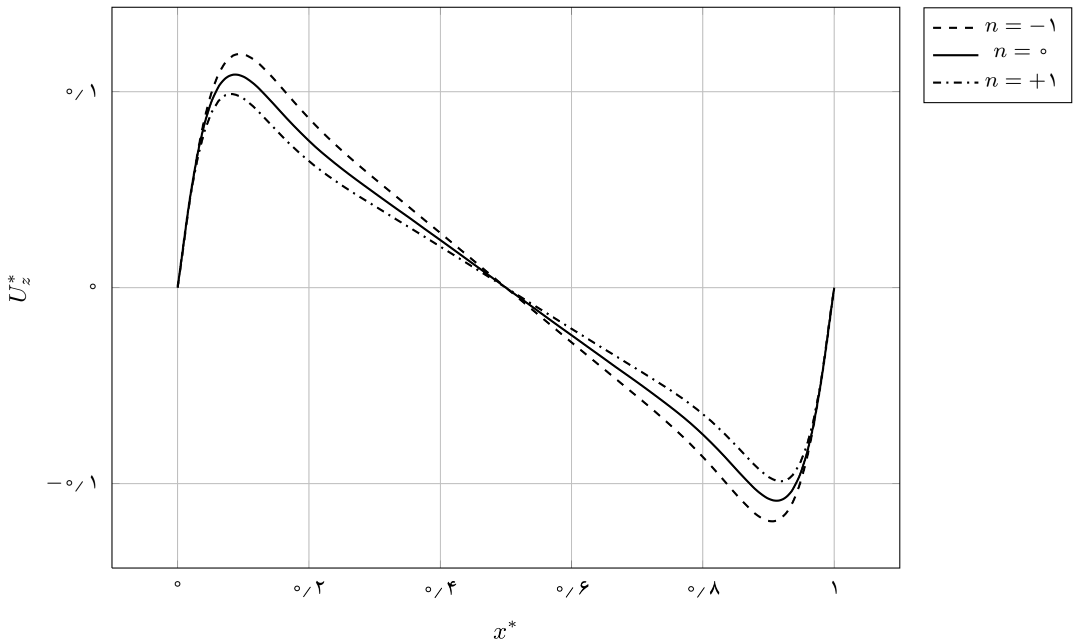
شکل ۴-۳۴: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته به ازای $p_i^* = ۱/۶$



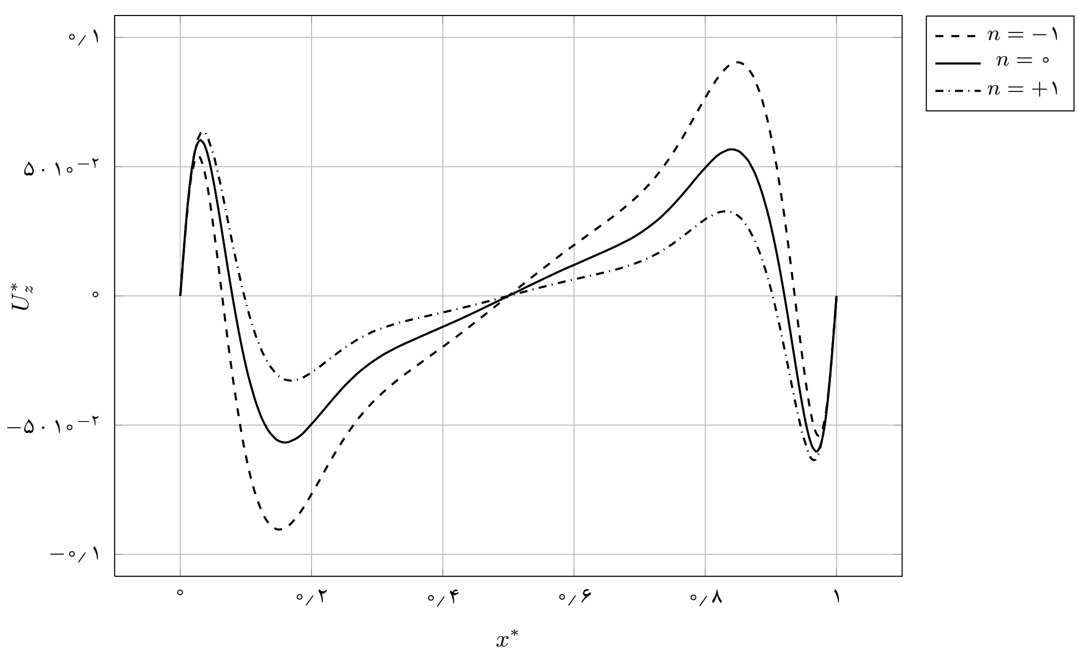
شکل ۴-۳۵: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



شکل ۴-۳۶: جابه‌جایی شعاعی بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو



شکل ۴-۳۷: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته بر حسب MAE مرتبه یک



شکل ۴-۳۸: جابه‌جایی محوری بی‌بعدشده‌ی سطح میانی پوسته بر حسب MAE مرتبه دو

۴-۴ مقایسه‌ی تئوری‌ها

با مقایسه‌ی نتایج این فصل با نتایج مراجع [۱۱] و [۱۲]، می‌توان گفت که رفتار خطی سازه در نقاط دور از مرز به کمک تئوری الاستیسیته‌ی مستوی قابل ارزیابی است. با کمک تئوری تغییر شکل برشی، می‌توان اثرات وجود مرز را نیز در حل خطی مشاهده نمود. حل خارجی با روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته با حل تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و حل کلی با روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته با حل تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول خطی هم‌خوانی دارد.

در صورتی که شرایط برای رفتار غیرخطی سازه مهیا باشد (یعنی استوانه به‌طور نسبی نازک و نرم باشد)، میان حل‌های خطی و غیرخطی اختلاف ایجاد می‌گردد. در این شرایط، باید از جملات مرتبه‌ی دو و یا در صورت نیاز مرتبه‌های بالاتر برای بررسی پاسخ پوسته استفاده کرد. شکل ۴-۳۹ به صورت نمادین، محدوده‌ی اعتبار حل‌های مختلف را نشان می‌دهد. عامل هندسی مؤثر بر میزان سهم حل MAE مرتبه یک، ضخامت پوسته است. همچنین، طول پوسته پارامتر هندسی مؤثر بر محدوده‌ی اعتبار حل‌های داخلی و خارجی است.

MAE مرتبه بالا	MAE مرتبه بالا	MAE مرتبه بالا
MAE مرتبه دو	MAE مرتبه دو	MAE مرتبه دو
FSDT MAE مرتبه یک	PET FSDT MAE مرتبه یک	FSDT MAE مرتبه یک
حل داخلی چپ	حل خارجی	حل داخلی راست

شکل ۴-۳۹: سهم تئوری‌های مختلف از پاسخ

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱ مقدمه

در فصل گذشته نتایج حاصل از تحلیل مسأله در قالب نمودارها و جدول‌هایی ارائه گردید. در این فصل ابتدا به تفسیر نتایج پرداخته می‌شود و سپس پیشنهادهایی برای ادامه‌ی پژوهش حاضر مطرح می‌گردد.

۵-۲ بحث و نتیجه‌گیری

نتایج پژوهش، به‌صورت زیر قابل بیان است.

۱. حل خارجی مرتبه یک و حل به کمک PET در توافق کامل با یکدیگر هستند.

۲. حل FEM خطی و حل MAE مرتبه یک با اختلاف بسیار ناچیزی با هم یکی هستند. پس می‌توان نتیجه گرفت که در حل MAE مرتبه یک، هیچ کدام از جنبه‌های حل غیرخطی دیده نمی‌شود. در واقع حل MAE مرتبه یک در توافق کامل با حل FSDT خطی است؛ با این تفاوت که MAE مرتبه یک به کمک سه بسط حل را تقریب می‌زند، اما FSDT خطی به کمک یک حل صریح و دقیق این کار را انجام می‌دهد.

۳. عوامل اختلاف حل‌های MAE مرتبه دو و FEM غیرخطی با یکدیگر و با واقعیت عبارتند از: (الف) انجام حل تحلیلی غیرخطی تا مرتبه‌ی دو (و نه بالاتر). (ب) دنبالگر در نظر گرفتن بار فشاری توسط ANSYS و نادنبالگر در نظر گرفتن آن در حل تحلیلی. (پ) در نظر گرفتن پدیده‌ی تنش سفتی توسط ANSYS در حل‌های غیرخطی. (ت) استفاده از مدل‌سازی نیمه‌همگن در شبیه‌سازی عددی و مدل‌سازی تغییر پیوسته در حل تحلیلی. (ث) تقریبی بودن هر دو حل.

۴. در تمام نقاط تنش بیشینه، تنش محیطی است. تنش برشی نیز به جز در نزدیکی مرز، مطابق انتظار، صفر است.

۵. در نقاط دور از مرز جابه‌جایی شعاعی ثابت بوده و تغییرات جابه‌جایی محوری به صورت خطی است. از دیدگاه فیزیکی، وجود شرایط مرزی از نوع جابه‌جایی صفر در دوانتهای استوانه، عامل ایجاد اغتشاش در این رفتار هستند.

۶. تغییرات طول استوانه اثرات خود را در اندازه‌ی نسبی محدوده‌ی حل‌های خطی و غیرخطی نشان می‌دهد. هر چه استوانه بلندتر باشد، اثر وجود مرزها در حل کم‌تر دیده می‌شود و حل خارجی بخش عمده‌ی نمودار جابه‌جایی بر حسب موقعیت محوری را پوشش می‌دهد. در مقابل با کوتاه‌تر شدن

پوسته، حل‌های داخلی گستره‌ی بیش‌تری از این نمودار را دربرمی‌گیرد. این نتیجه‌گیری با اصل اثر موضعی[1] هم‌خوانی دارد.[2]

۷. منشأ رفتار غیرخطی هندسی در پوسته، اندازه‌ی نسبی ضخامت پوسته است. یعنی، بر خلاف تغییرات ضخامت، تغییرات طول استوانه، اثری در میزان اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی ندارد. به عبارت دیگر، هر چه پوسته نازک‌تر باشد، اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی افزایش می‌یابد و هر چه ضخیم‌تر گردد این دو حل به یکدیگر نزدیک‌تر می‌شوند. این در حالی است که با افزایش یا کاهش طول استوانه، تغییری در میزان اختلاف حل خطی و غیرخطی مشاهده نمی‌شود.

۸. میزان نازکی یا ضخامت پوسته، تنها عامل هندسی مؤثر بر مرتبه‌ی بزرگی جابه‌جایی نسبت به ضخامت است. برای استوانه‌های بسیار نازک، مرتبه‌ی بزرگی جابه‌جایی از مرتبه‌ی بزرگی ضخامت بیش‌تر است و برای استوانه‌های ضخیم بالعکس. در ضخامت‌های خاص می‌توان مواردی را مشاهده نمود که جابه‌جایی هم‌مرتبه با اندازه‌ی ضخامت است.

۹. برای استوانه‌های تحت فشار داخلی، در نمودارهای جابه‌جایی محوری بر حسب موقعیت محوری، شیب حل خارجی در MAE مرتبه یک همواره منفی است؛ در حالی که علامت این شیب برای MAE مرتبه دو وابسته به ضخامت استوانه است. اگر استوانه ضخیم باشد این شیب همچنان منفی باقی می‌ماند؛ اما در استوانه های نازک‌تر، این شیب مثبت می‌شود. چنان که می‌توان در ضخامت‌های خاصی، رفتار کاملاً قرینه در حل خارجی مشاهده کرد. علت بروز این تغییر علامت شیب، تغییر کردن جملات غالب در حل‌های داخلی غیرخطی است.

۱۰. هر چه نسبت بار فشاری اعمالی بر پوسته به مدول الاستیسیته‌ی آن بیش‌تر باشد، اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی بیش‌تر می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، برای کاربردهای عملی و صنعتی که در آن‌ها از مواد بسیار سفت (مانند فولاد و آلومینیوم) استفاده می‌شود، رفتار پوسته به‌شدت خطی است و نیازی به بررسی رفتار غیرخطی وجود ندارد (به شرط آن که پوسته نازک نباشد). بنابراین، در پوسته‌های استوانه‌ای تحت فشار، رفتار غیرخطی هندسی در مواد بسیار نرم دیده می‌شود.

۱۱. ثابت ناهمگنی مثبت (منفی) باعث سفت‌تر (نرم‌تر) شدن کلی پوسته می‌شود. بنابراین مطابق انتظار، جابه‌جایی در پوسته‌های ناهمگن با ثابت ناهمگنی مثبت (منفی)، کم‌تر (بیش‌تر) از پوسته‌های همگن

1. Principle of Local Action

۲. بر طبق این اصل، در بررسی اثر تنش در نقطه‌ی خاصی از یک محیط پیوسته، می‌توان از حرکت نقاط خارج از یک همسایگی دلخواه از نقطه‌ی مذکور، چشم‌پوشی کرد [۱].

است.

۱۲. تغییرات ثابت ناهمگنی تأثیر مشهودی بر رفتار غیرخطی پوسته (اختلاف حل‌های خطی و غیرخطی و محدوده‌ی حل های داخلی و خارجی) ندارد.

۱۳. از نظر مرتبه‌ی بزرگی، همواره جابه‌جایی شعاعی بزرگ‌تر از جابه‌جایی محوری است.

۱۴. حل‌های خطی و غیرخطی در جابه‌جایی شعاعی در نقاط دور از مرز (حل خارجی) و در جابه‌جایی محوری در نقاط نزدیک مرز (حل های داخلی) اختلاف دارند. به نظر می‌رسد وابستگی حل خارجی جابه‌جایی محوری به شروط انطباق، عامل این اختلاف باشد.

۵-۳ پیشنهادها

به منظور توسعه‌ی پژوهش حاضر، موارد زیر قابل بررسی و مطالعه هستند.

۱. به دست آوردن تنش معادل و بررسی معیارهای شکست مختلف.

۲. بررسی لزوم حل مراتب بالاتر در روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته.

۳. استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالا.

۴. حل به کمک سایر تئوری‌های غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای.

۵. غیرخطی در نظر گرفتن رفتار ماده (جامد غیرهوکی).

۶. استفاده از توابع دیگر برای مدل‌سازی مواد ناهمگن مانند تابع نمایی و تابع توانی ردی.

۷. حل برای مواد ناهمسانگرد (ارتوتروپیک، ارتوتروپیک عرضی و ...).

۸. حل برای مواد ویسکوالاستیک.

۹. حل برای پوسته بر بستر الاستیک.

۱۰. بررسی پدیده‌ی کمانش و پس‌کمانش غیرخطی در سازه.

۱۱. حل برای سایر پوسته‌های پرکاربرد مانند کره و مخروط.

۱۲. متغیر در نظر گرفتن ضخامت جداره‌ی پوسته.

۱۳. استفاده از دستگاه‌های مختصات پیچیده‌تر (استوانه‌ای بیضوی، استوانه‌ای هذلولوی، استوانه ای سهموی، بیضوی مدور، هذلولوی مدور، سهموی مدور و ...).

۱۴. اعمال بارگذاری‌های مکانیکی (محوری، پیچشی، خمشی و ...)، حرارتی، چرخشی، الکترومغناطیسی و ... .

۱۵. چشم‌پوشی نکردن از وزن پوسته در محاسبات.

۱۶. در نظر گرفتن خواص وابسته به دما برای مسائل دارای بارگذاری حرارتی.

۱۷. حل دینامیکی مسأله و به دست آوردن فرکانس های طبیعی و شکل مدهای سازه.

۱۸. دنبالگر (ناپایستار) در نظر گرفتن بار فشاری.

۱۹. اعمال بارگذاری تابع زمان و یا مکان بر سازه.

۲۰. وارد کردن گشودگی و یا ترک در مسأله.

۲۱. تغییر دادن شرایط مرزی.

۲۲. در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه در پوسته.

۲۳. بررسی اعتبار اصل برهم‌نهی (جمع) آثار برای بارگذاری مرکب.

پیوست الف

بسط مجانبی تطبیق‌یافته

الف–۱ مقدمه

در پژوهش حاضر، به خاطر ماهیت مسأله، می‌توان از روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته برای حل استفاده کرد. در این پیوست، به منظور معرفی این روش، یک مسأله‌ی ساده که تمام جنبه‌های روش بسط مجانبی تطبیق‌یافته (شامل بسط‌های خارجی و داخلی، مقیاس‌های کشیده‌شده، شروط انطباق و راه‌های به دست آوردن آن‌ها و در نهایت ایجاد بسط مجانبی تطبیق‌یافته) را در بر می‌گیرد، بررسی می‌گردد.

الف–۲ تعریف مسأله‌ی نمونه

مسأله‌ی معادله‌ی دیفرانسیل معمولی مرتبه دوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\epsilon\frac{\mathrm{d}^{۲}u}{\mathrm{d}x^{۲}}+(۱+\epsilon)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\circ,\quad \circ\le x\le ۱, \tag{الف–۱}$$

$$u(\circ)=\circ, u(۱)=۱. \tag{الف–۲}$$

مسأله‌ی متناظر با آن به ازای $\epsilon=\circ$ به صورت زیر است.

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\circ,\quad \circ\le x\le ۱, \tag{الف–۳}$$

$$u(\circ)=\circ, \tag{الف–۴}$$

$$u(۱)=۱. \tag{الف–۵}$$

با توجه به این که معادله‌ی (الف–۳) از مرتبه‌ی یک است، می‌توان نتیجه گرفت که از دو شرط (الف–۴) و (الف–۵) تنها یکی ارضا خواهد شد.

ابتدا، حل دقیق مسائل فوق را می‌یابیم، که به ترتیب عبارتند از:

$$u^{\epsilon}(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x/\epsilon}}{\mathrm{e}^{-۱}-\mathrm{e}^{-۱/\epsilon}}=\begin{cases}\circ, & \text{اگر } x=\circ;\\ \mathrm{e}^{۱-x}, & \text{اگر } x>\circ,\end{cases} \tag{الف–۶}$$

(زمانی که $\epsilon\to\circ$)، و

$$u^{\circ}(x)=\begin{cases}\circ, & \text{اگر } u(\circ)=\circ;\\ \mathrm{e}^{۱-x}, & \text{اگر } u(۱)=۱.\end{cases} \tag{الف–۷}$$

بنابراین، در هر دو حالت، یک لایه‌ی مرزی در $x=\circ$ یا $x=۱$ وجود دارد، زیرا:

$$\begin{cases}u^{\epsilon}(۱)-u^{\circ}(۱)=۱, & \text{اگر } u^{\circ}(x)=\circ;\\ u^{\epsilon}(\circ)-u^{\circ}(\circ)=\mathrm{e}, & \text{اگر } u^{\circ}(x)=\mathrm{e}^{۱-x}.\end{cases} \tag{الف–۸}$$

بنابراین مسأله به اصطلاح تکین[1] است. برای روشن‌تر شدن این موضوع بسط زیر را در نظر بگیرید.

$$u^{\epsilon}(x) = u_{\circ}(x) + \epsilon u_{۱}(x) + \epsilon^{۲} u_{۲}(x) + \cdots . \qquad \text{(الف-۹)}$$

با جایگذاری این بسط در مسأله‌ی (الف-۱) و مقایسه‌ی ضرایب ϵ^i می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{\mathrm{d}u_{\circ}}{\mathrm{d}x} + u_{\circ} = \circ, \qquad \text{(الف-۱۰)}$$

$$u_{\circ}(\circ) = \circ, \qquad \text{(الف-۱۱)}$$

$$u_{\circ}(۱) = ۱. \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

سپس می‌توان نوشت:

$$\frac{\mathrm{d}u_{۱}}{\mathrm{d}x} + u_{۱} + \frac{\mathrm{d}^{۲}u_{\circ}}{\mathrm{d}x^{۲}} + \frac{\mathrm{d}u_{\circ}}{\mathrm{d}x} = \circ, \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

$$u_{۱}(\circ) = \circ. \qquad \text{(الف-۱۴)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{۲}}{\mathrm{d}x} + u_{۲} + \frac{\mathrm{d}^{۲}u_{۱}}{\mathrm{d}x^{۲}} + \frac{\mathrm{d}u_{۱}}{\mathrm{d}x} = \circ, \qquad \text{(الف-۱۵)}$$

$$u_{۲}(\circ) = \circ. \qquad \text{(الف-۱۶)}$$

چون معادله‌ی (الف-۱۰) از مرتبه‌ی یک است تنها یک شرط مرزی را می‌تواند ارضا کند. جواب آن به صورت زیر است.

$$u_{\circ}(x) = C_{\circ}\mathrm{e}^{-x}. \qquad \text{(الف-۱۷)}$$

می‌توان نشان داد با این که $u_{\circ}(x)$ تنها یکی از دو شرط (الف-۱۱) و (الف-۱۲) را ارضا می‌کند، اما بسط مجانبی‌ای به شکل (الف-۹) وجود نخواهد داشت. دو حالت وجود دارد:
(آ) فرض کنید که شرط مرزی در $x = \circ$ ارضا شود (در این لحظه به شرط دیگر توجهی نمی‌شود). بنابراین $C_{\circ} = \circ$، پس

$$u_{\circ}(x) = \circ. \qquad \text{(الف-۱۸)}$$

سپس با حل معادلات (الف-۱۳) و (الف-۱۵) نتیجه می‌شود:

$$u_{۱}(x) = u_{۲}(x) = \circ. \qquad \text{(الف-۱۹)}$$

1. Singular

بنابراین هیچ بسط مجانبی‌ای یافت نمی‌شود.

(ب) فرض کنید که شرط مرزی در $x = ۱$ ارضا شود. بنابراین $C_۰ = \mathrm{e}$ و $u_۰(x) = \mathrm{e}^{۱-x}$. در نتیجه، معادلات (الف-۱۳) و (الف-۱۵) تبدیل به معادلات زیر می‌شوند.

$$\frac{\mathrm{d}u_۱}{\mathrm{d}x} + u_۱ = ۰, \tag{الف-۲۰}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_۲}{\mathrm{d}x} + u_۲ = ۰. \tag{الف-۲۱}$$

بنابراین،

$$u_۱(x) = C_۱\mathrm{e}^{-x}, \quad u_۲(x) = C_۲\mathrm{e}^{-x}. \tag{الف-۲۲}$$

اما از شرط‌های $u_۱(۱) = u_۲(۱) = ۰$ نتیجه می‌شود $C_۱ = C_۲ = ۰$. پس

$$u_۱(x) = u_۲(x) = ۰. \tag{الف-۲۳}$$

پس بسط مجانبی «مجاز» به شکل زیر خواهد بود.

$$U_i^\epsilon(x) = \mathrm{e}^{۱-x}, \tag{الف-۲۴}$$

به ازای $i = ۰, ۱, ۲, \cdots$.

الف-۳ بسط‌های خارجی

در این قسمت بسط خارجی معرفی می‌گردد. بسط زیر را در نظر بگیرید.

$$u^\epsilon(x) = u_۰(x) + \epsilon u_۱(x) + \epsilon^۲ u_۲(x) + \cdots . \tag{الف-۲۵}$$

برای سادگی در نوشتار، مشتق تابع یک متغیره با نماد $'$ نشان داده می‌شود. مثلاً: $f'(x) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ و $f'(\xi) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\xi}$. با جایگذاری در (الف-۱) و برابر قرار دادن ضرایب ϵ^i معادلات زیر به دست می‌آید.

$$O(\epsilon^۰): \qquad u_۰' + u_۰ = ۰, u_۰(۱) = ۱, \tag{الف-۲۶}$$

$$O(\epsilon^۱): \qquad u_۱' + u_۱ + u_۰'' + u_۰ = ۰, u_۱(۱) = ۰, \tag{الف-۲۷}$$

$$O(\epsilon^۲): \qquad u_۲' + u_۲ + u_۱'' + u_۱ = ۰, u_۲(۱) = ۰. \tag{الف-۲۸}$$

پاسخ معادلات فوق به ترتیب عبارتند از:

$$u_{0}(x) = \mathrm{e}^{1-x}, \quad u_{1}(x) = 0, \quad u_{2}(x) = 0. \tag{الف-۲۹}$$

بنابراین تقریب‌های خارجی (تا جملات $i+1$) می‌تواند به شکل زیر ساخته شوند.

$$O_i^{\epsilon}(x) = \mathrm{e}^{1-x}, \tag{الف-۳۰}$$

به ازای $i = 0, 1, 2$.

الف-۴ بسط‌های داخلی

یافتن بسط‌های داخلی از بسط‌های خارجی به مراتب سخت‌تر است. در ابتدا می بایست با تکنیک «مقیاس مجدد»[2]، مقیاس مناسب تشخیص داده شود.

الف-۴-۱ مقیاس مجدد

متغیر جدید $\xi = x/\delta$ را در نظر بگیرید، که δ تابعی از ϵ است، یعنی $\delta = \delta(\epsilon)$. می توان نشان داد برای این که بسط داخلی و خارجی قابلیت انطباق داشته باشند، δ باید بسیار کوچک باشد، بنابراین ξ با تغییر x بسیار سریع تغییر می‌کند. به همین دلیل آن را متغیر «سریع» می نامند.
هدف اول در این بخش یافتن فرمول مناسبی برای δ است. ابتدا معادله‌ی (الف-۱) بر حسب ξ بازنویسی می‌شود.

$$\frac{\epsilon}{\delta^2}\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{1+\epsilon}{\delta}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi} + U = 0. \tag{الف-۳۱}$$

به منظور بررسی رابطه‌ی میان ضرایب معادله‌ی (الف-۳۱)، یعنی

$$\frac{\epsilon}{\delta^2}, \quad \frac{1+\epsilon}{\delta}, \quad 1,$$

بحث مقیاس مجدد به پنج قسمت تقسیم می‌شود. توجه کنید که چون $\epsilon \ll 1$،

$$\frac{1+\epsilon}{\delta} \sim \frac{1}{\delta}. \tag{الف-۳۲}$$

حالت اول) $\delta \gg 1$. با توجه به این که $\epsilon \ll 1$ می‌توان نتیجه گرفت،

$$\frac{\epsilon}{\delta^2} \ll \frac{1}{\delta^2} \ll \frac{\epsilon}{\delta} \ll 1. \tag{الف-۳۳}$$

2. Rescaling

با توجه به معادله‌ی (الف-۳۱) می‌توان گفت،

$$\underbrace{\frac{\epsilon}{\delta^{2}}}_{o(1)}\frac{\mathrm{d}^{2}U}{\mathrm{d}\xi^{2}}+\underbrace{\frac{1+\epsilon}{\delta}}_{o(1)}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}+\underbrace{U}_{O(1)}=0, \tag{الف-۳۴}$$

بنابراین، $U=o(1)$. در نتیجه δ بزرگ مقیاس مناسبی نیست.

حالت دوم) $\delta\sim 1$. در این حالت $\xi\sim x$، و معادله‌ی (الف-۱) بدون تغییر باقی می‌ماند. در این حالت یک بسط معمولی ایجاد می‌گردد که مناسب نیست.

حالت سوم) $\delta\ll 1$ و $\frac{1}{\delta}\ll\frac{\epsilon}{\delta^{2}}$. در این حالت نتیجه می‌شود $\delta\ll\epsilon$. با تقسیم کردن طرفین معادله‌ی (الف-۳۱) بر $\frac{\epsilon}{\delta^{2}}$ می توان آن را به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\frac{\mathrm{d}^{2}U}{\mathrm{d}\xi^{2}}+\underbrace{\frac{1+\epsilon}{\epsilon}\delta\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}}_{o(1)}+\underbrace{\frac{\delta^{2}}{\epsilon}}_{o(1)}=0. \tag{الف-۳۵}$$

می‌توان نتیجه گرفت،

$$\frac{\mathrm{d}^{2}U}{\mathrm{d}\xi^{2}}=o(1). \tag{الف-۳۶}$$

بنابراین این بسط نیز منجر به یک بسط داخلی مناسب نخواهد شد.

حالت چهارم) $\delta\ll 1$ و $\frac{1}{\delta}\sim\frac{\epsilon}{\delta^{2}}$، که یعنی $\delta\sim\epsilon$. با ضرب کردن طرفین معادله‌ی (الف-۳۱) در δ می‌توان آن را به شکل زیر بازنویسی کرد.

$$\underbrace{\frac{\epsilon}{\delta}}_{\sim 1}\frac{\mathrm{d}^{2}U}{\mathrm{d}\xi^{2}}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\xi}+\underbrace{\epsilon\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}+\delta\,U}_{o(1)}=0, \tag{الف-۳۷}$$

که منجر به مقیاس درست می‌شود. با انتخاب عبارت ساده‌ی $\delta=\epsilon$ هدف مورد نظر محقق می‌گردد. در نتیجه $\xi=x/\epsilon$.

حالت پنجم) $\delta\ll 1$ و $\frac{1}{\delta}\gg\frac{\epsilon}{\delta^{2}}$، در نتیجه $\delta\gg\epsilon$. با ضرب کردن معادله‌ی (الف-۳۱) در δ، به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\underbrace{\frac{\epsilon}{\delta}}_{o(1)}\frac{\mathrm{d}^{2}U}{\mathrm{d}\xi^{2}}+\underbrace{(1+\epsilon)}_{\sim 1}\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}+\underbrace{\delta\,U}_{o(1)}=0, \tag{الف-۳۸}$$

که به معنای این است که $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\xi}=o(1)$، که مطلوب نیست.

الف-۴-۲ بسط داخلی معین

اکنون با توجه به مقیاس مجدد متغیر سریع تعریف می‌شود.

$$\xi = \frac{x}{\epsilon}. \tag{الف-۳۹}$$

بسط داخلی به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$u^{\epsilon}(x) = U_{۰}(\xi) + \epsilon U_{۱}(\xi) + \epsilon^{۲} U_{۲}(\xi) + \cdots . \tag{الف-۴۰}$$

به ازای $i = ۰, ۱, ۲, \cdots$ به راحتی می توان نشان داد که

$$\frac{\mathrm{d}U_i(\xi)}{\mathrm{d}x} = \frac{۱}{\epsilon}\frac{\mathrm{d}U_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi}, \qquad \frac{\mathrm{d}^{۲}U_i(\xi)}{\mathrm{d}x^{۲}} = \frac{۱}{\epsilon^{۲}}\frac{\mathrm{d}^{۲}U_i(\xi)}{\mathrm{d}\xi^{۲}}. \tag{الف-۴۱}$$

با قرار دادن (الف-۴۰) و (الف-۴۱) در معادله‌ی (الف-۳۱) و بالانس جملات در دو طرف معادله، معادلات زیر به دست می‌آید.

$$O(\epsilon^{-۱}): \qquad U_{۰}'' + U_{۰}' = ۰, \tag{الف-۴۲}$$

$$O(\epsilon^{۰}): \qquad U_{۱}'' + U_{۱}' + U_{۰}' + U_{۰} = ۰, \tag{الف-۴۳}$$

$$O(\epsilon^{۱}): \qquad U_{۲}'' + U_{۲}' + U_{۱}' + U_{۱} = ۰. \tag{الف-۴۴}$$

از حل معادلات فوق جواب‌ها به شکل زیر به دست می‌آید.

$$U_{۰}(\xi) = C_{۰۱}\mathrm{e}^{-\xi} + C_{۰۲}, \tag{الف-۴۵}$$

$$U_{۱}(\xi) = C_{۱۱}\mathrm{e}^{-\xi} + C_{۱۲} - C_{۰۲}\xi, \tag{الف-۴۶}$$

$$U_{۲}(\xi) = C_{۲۱}\mathrm{e}^{-\xi} + C_{۲۲} + \frac{C_{۰۲}}{۲}\xi^{۲} - C_{۱۲}\xi. \tag{الف-۴۷}$$

در این‌جا C_{ij} ها به ازای $i = ۰, ۱, ۲; j = ۱, ۲$ ثابت هستند. گام بعد، تعیین این ثوابت است. برای این منظور از شرط مرزی در $x = ۰$، که متناظر با $\xi = ۰$ است، استفاده می‌شود تا بتوان نتیجه گرفت که،

$$U_{۰}(۰) = ۰, \quad U_{۱}(۰) = ۰, \quad U_{۲}(۰) = ۰. \tag{الف-۴۸}$$

بنابراین

$$C_{i۱} = -C_{i۲} =: A_i, \quad i = ۰, ۱, ۲. \tag{الف-۴۹}$$

بنابراین معادلات (الف-۴۵) تا (الف-۴۷) به شکل زیر ساده می‌شوند.

$$U_۰(\xi) = A_۰(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱), \quad \text{(الف-۵۰)}$$

$$U_۱(\xi) = A_۱(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱) + A_۰\xi, \quad \text{(الف-۵۱)}$$

$$U_۲(\xi) = A_۲(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱) - \frac{A_۰}{۲}\xi^۲ + A_۱\xi. \quad \text{(الف-۵۲)}$$

ملاحظه می‌شود که ثوابت A_i همچنان نامعین هستند. برای محاسبه‌ی آن‌ها از پروسه‌ی انطباق[۳] استفاده می‌شود. یک محدوده‌ی داخلی[۴] در نزدیکی لایه‌ی مرزی وجود دارد که اغلب نازک است و در مورد مسأله‌ی حاضر از مرتبه‌ی بزرگی $O(\epsilon)$ است؛ در حالی که یک محدوده‌ی خارجی[۵] دور از لایه‌ی مرزی و از مرتبه‌ی $O(۱)$ وجود دارد (بنابراین نسبت به محدوده‌ی داخلی بسیار بزرگ‌تر است). با بزرگ شدن ϵ تا مرتبه‌ی $O(۱)$ ، محدوده‌ی داخلی به محدوده‌ی خارجی می‌رسد. پس می توان نتیجه گرفت که یک محدوده‌ی میانی (یا انطباق، هم‌پوشانی)[۶] بین آن‌ها وجود دارد که از مرتبه‌ی $O(\epsilon^\gamma)$ است که $\gamma \in (۰, ۱)$.
بسط‌های داخلی و خارجی به ترتیب در نواحی داخلی و خارجی معتبرند. هدف، یافتن تقریبی است که در تمام دامنه‌ی مورد بررسی معتبر باشد تا بتوان آن را یک تقریب یکنواخت[۷] نامید. بنابراین منطقی به نظر می‌رسد که بسط های داخلی و خارجی در محدوده‌ی میانی بر هم منطبق شوند و شروط مشترکی در این ناحیه توسط بسط‌های داخلی و خارجی ارضا شود. به این شرط‌های مشترک، شروط انطباق[۸] می‌گویند.

الف-۵ شروط انطباق

اکنون انتظار می‌رود حل‌های داخلی و خارجی در محدوده‌ی میانی با هم برابر باشند.

$$U_۰(\xi) + \epsilon U_۱(\xi) + \epsilon^۲ U_۲(\xi) = u_۰(x) + \epsilon u_۱(x) + \epsilon^۲ u_۲(x) + O(\epsilon^۳). \quad \text{(الف-۵۳)}$$

در این بخش دو روش برای به دست آوردن شروط انطباق معرفی می‌شود.

3. Matching
4. Inner Region
5. Outer Region
6. Intermediate (or, Matching, Overlapping) Region
7. Uniform Expansion
8. Matching Conditions

الف-۵-۱ انطباق به کمک بسط‌ها

بنا به تعریف متغیر سریع می‌توان نوشت $x = \epsilon\xi$ و سمت راست معادله‌ی (الف-۵۳) را بر حسب ξ بسط داد. بنابراین شروط انطباق زیر حاصل می‌شوند.

$$U_۰(\xi) \sim u_۰(۰) = \mathrm{e}, \tag{الف-۵۴}$$

$$U_۱(\xi) \sim u'_۰(۰)\xi + u_۱(۰) = -\mathrm{e}\xi, \tag{الف-۵۵}$$

$$U_۲(\xi) \sim \frac{۱}{۲}u''_۰(۰)\xi^۲ + u'_۱(۰)\xi + u_۲(۰) = \frac{\mathrm{e}}{۲}\xi^۲, \tag{الف-۵۶}$$

زمانی که $\xi \to \infty$، به کمک معادله‌ی می توان نوشت

$$U_۰(\xi) \to A_۰, \tag{الف-۵۷}$$

وقتی $\xi \to \infty$، از مقایسه‌ی (الف-۵۷) با (الف-۵۴) نتیجه می شود،

$$A_۰ = -\mathrm{e}. \tag{الف-۵۸}$$

بنابراین معادلات (الف-۵۰) تا (الف-۵۲) به شکل زیر ساده می‌شوند.

$$U_۰(\xi) = -\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱), \tag{الف-۵۹}$$

$$U_۱(\xi) = A_۱(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱) - \mathrm{e}\xi, \tag{الف-۶۰}$$

$$U_۲(\xi) = A_۲(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱) + \frac{\mathrm{e}}{۲}\xi^۲ + A_۱\xi. \tag{الف-۶۱}$$

بدین ترتیب جمله‌ی نخست بسط داخلی به دست می‌آید. با مقایسه‌ی (الف-۵۵) و (الف-۶۰) برای ξ بزرگ نتیجه می‌شود،

$$A_۱ = ۰. \tag{الف-۶۲}$$

به همین شکل، با مقایسه‌ی (الف-۵۶) و (الف-۶۱) می توان نوشت،

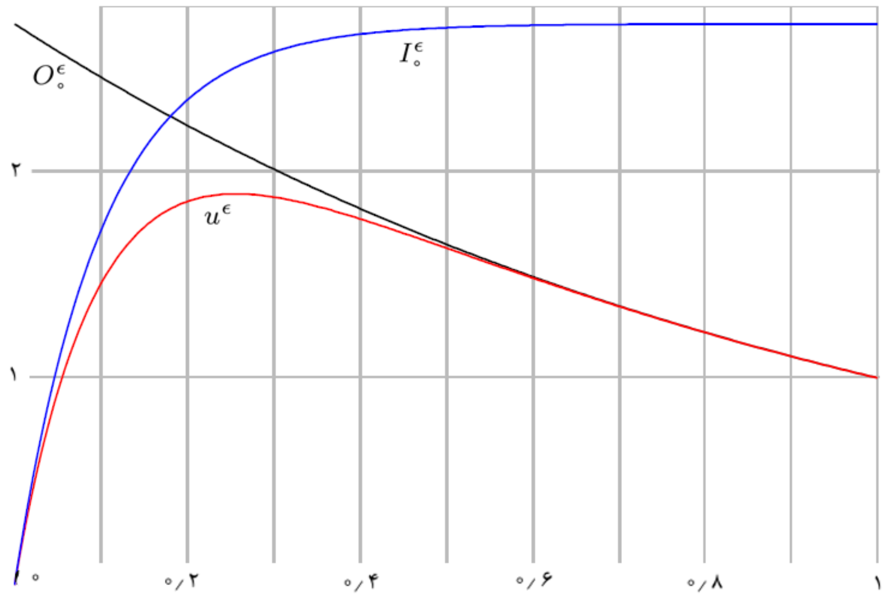
$$A_۲ = ۰. \tag{الف-۶۳}$$

پس سه جمله‌ی بسط داخلی به دست می‌آید.

$$U_۰(\xi) = \mathrm{e}(۱ - \mathrm{e}^{-\xi}), \tag{الف-۶۴}$$

$$U_۱(\xi) = -\mathrm{e}\xi, \tag{الف-۶۵}$$

$$U_۲(\xi) = \frac{\mathrm{e}}{۲}\xi^۲. \tag{الف-۶۶}$$



شکل الف-۱: تصویر توابع u^ϵ، $O_\circ^\epsilon$ و $I_\circ^\epsilon$ با $\epsilon = ۰/۱$.

با استفاده از این توابع، تقریب‌های زیر (تا ۱ $+ i$ جمله) به ازای $i = ۰, ۱, ۲$ تعریف می‌شوند.

$$I_\circ^\epsilon(\xi) = \mathrm{e}(۱ - \mathrm{e}^{-\xi}), \tag{الف-۶۷}$$

$$I_۱^\epsilon(\xi) = \mathrm{e}(۱ - \mathrm{e}^{-\xi}) - \epsilon \mathrm{e}\xi, \tag{الف-۶۸}$$

$$I_۲^\epsilon(\xi) = \mathrm{e}(۱ - \mathrm{e}^{-\xi}) - \epsilon \mathrm{e}\xi + \epsilon^۲ \frac{\mathrm{e}}{۲}\xi^۲. \tag{الف-۶۹}$$

شکل الف-۱ حل دقیق، بسط داخلی و بسط خارجی را تا یک جمله نشان می دهد.

الف-۵-۲ قاعده‌ی انطباق ون‌دایک

انطباق به کمک متغیر میانی[9] می‌تواند بسیار خسته‌کننده باشد. در عوض قاعده‌ی انطباق ون‌دایک همواره کاراست و باعث صرفه جویی در وقت می‌شود.

برای تابع f، بسط‌های متناظر خارجی و داخلی وجود دارد که به ترتیب با $f = \Sigma_n \epsilon^n f_n(x)$ و $f = \Sigma_n \epsilon^n g_n(x)$ نشان داده می‌شوند. تعاریف زیر را برای اعداد صحیح نامنفی P و Q در نظر بگیرید:

9. Intermediate Variavble

$$E_P f = \text{حد خارجی (} x \text{ ثابت و } \epsilon \downarrow ۰ \text{) با نگه داشتن}$$
$$\text{جمله از بسط خارجی } P + ۱$$
$$= \sum_{n=۰}^{P} \epsilon^n f_n(x), \tag{الف-۷۰}$$

و

$$H_Q f = \text{حد داخلی (} \xi \text{ ثابت و } \epsilon \downarrow ۰ \text{) با نگه داشتن}$$
$$\text{جمله از بسط داخلی } Q + ۱$$
$$= \sum_{n=۰}^{Q} \epsilon^n g_n(x). \tag{الف-۷۱}$$

قاعده‌ی انطباق ون‌دایک بیان می‌کند که،

$$E_P H_Q f = H_Q E_P f. \tag{الف-۷۲}$$

مثال ۱) قرار دهید $P = Q = ۰$. برای مسأله‌ی حاضر تعریف می‌شود $f = \epsilon^n$ و $H_{۰} g := A_{۰}(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱)$ و $E_{۰} f := \mathrm{e}^{۱-x}$. بنابراین

$$\begin{aligned} E_{۰} H_{۰} g &= E_{۰}\{A_{۰}(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱)\} \\ &= E_{۰}\{A_{۰}(\mathrm{e}^{-x/\epsilon} - ۱)\} \\ &= -A_{۰}. \end{aligned} \tag{الف-۷۳}$$

و

$$\begin{aligned} H_{۰} E_{۰} f &= H_{۰}\{\mathrm{e}^{۱-x}\} \\ &= H_{۰}\{\mathrm{e}^{۱-\epsilon\xi}\} \\ &= \mathrm{e}. \end{aligned} \tag{الف-۷۴}$$

با استفاده از قاعده‌ی ون‌دایک می‌توان گفت،

$$A_{۰} = -\mathrm{e}. \tag{الف-۷۵}$$

با این روش می توان شروط انطباق مرتبه بالا را نیز به دست آورد. به مثال بعد دقت کنید.

مثال ۲) قرار دهید $P = Q = ۱$. برای مسأله‌ی مورد بررسی $f = u^\epsilon$.

$$H_{۱} g := A_{۰}(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱) + \epsilon(A_{۱}(\mathrm{e}^{-\xi} - ۱) - \mathrm{e}\xi),$$

و

$$E_1 f := \mathrm{e}^{1-x}.$$

بنابراین

$$\begin{aligned} E_1 H_1 g &= E_1\{A_0(\mathrm{e}^{-\xi}-1)+\epsilon(A_1(\mathrm{e}^{-\xi}-1)-\mathrm{e}\xi)\} \\ &= E_1\{A_0(\mathrm{e}^{-x/\epsilon}-1)+\epsilon(A_1(\mathrm{e}^{-x/\epsilon}-1)-\mathrm{e}\xi)\} \\ &= A_0-\mathrm{e}x+\epsilon A_1, \end{aligned} \tag{الف-۷۶}$$

و

$$\begin{aligned} H_1 E_1 f &= H_1\{\mathrm{e}^{1-x}\} \\ &= H_1\{\mathrm{e}^{1-\epsilon\xi}\} \\ &= H_1\{\mathrm{e}(1-\epsilon\xi+O(\epsilon^2))\} \\ &= \mathrm{e}(1-\epsilon\xi). \end{aligned} \tag{الف-۷۷}$$

با توجه به قاعده‌ی ون‌دایک می‌توان گفت،

$$A_0=-\mathrm{e}, \quad A_1=0. \tag{الف-۷۸}$$

الف-۶ بسط‌های مجانبی تطبیق‌یافته

در این قسمت به کمک بسط های داخلی و خارجی تقریب یکنواخت برای مسأله به دست می‌آید. این کار را به دو روش می‌توان انجام داد.

۱. روش اول: جمع کردن بسط داخلی و خارجی و سپس کم کردن قسمت مشترک. برای مسأله‌ی مورد بررسی می‌توان نوشت:

$$U_0^\epsilon(x)=\mathrm{e}^{1-x}+\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{-\xi})-\mathrm{e}=\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x/\epsilon}). \tag{الف-۷۹}$$

$$U_1^\epsilon(x)=\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x/\epsilon})-\mathrm{e}x-(-\mathrm{e}\epsilon\xi)=\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x/\epsilon}). \tag{الف-۸۰}$$

$$U_2^\epsilon(x)=\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x/\epsilon})+\frac{1}{2}\mathrm{e}x^2-\frac{1}{2}\mathrm{e}(\epsilon\xi)^2=\mathrm{e}(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-x/\epsilon}). \tag{الف-۸۱}$$

یعنی

$$U_0^\epsilon(x)=U_1^\epsilon(x)=U_2^\epsilon(x). \tag{الف-۸۲}$$

بنابراین در این مسأله‌ی خاص با افزایش جملات دقت افزایش نمی‌یابد!

۲. روش دوم: استفاده از تابع برش[۱۰]. در این روش با استفاده از یک تابع برش مناسب $\chi_\epsilon(x)$ یک ترکیب خطی از بسط داخلی و خارجی به عنوان تقریب تحلیلی معرفی می‌شود.

$$U_i^\epsilon(x) = (1 - \chi_\epsilon(x))O_i^\epsilon(x) + \chi_\epsilon(x)I_i^\epsilon(\frac{x}{\epsilon}), \quad i = 0, 1, 2. \qquad \text{(الف-۸۳)}$$

10. Cut-off Function

پیوست ب

معرفی المان PLANE183

ب-۱ مقدمه

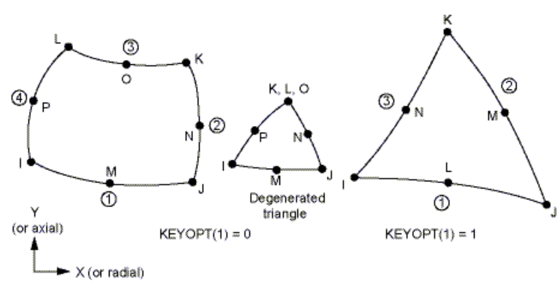
در پژوهش حاضر، از نرم‌افزار ANSYS 12.0 و تکنیک مدل‌سازی نیمه‌همگن برای حل عددی مسأله استفاده شده است. در این بخش، به معرفی اجمالی المان مورد استفاده در تحلیل عددی پرداخته می‌شود.[1]

ب-۲ توصیف المان

المان PLANE183 یک المان مرتبه بالای دوبعدی شش یا هشت گره‌ای است. هر گره از المان دارای دو درجه‌ی آزادی است: جابه‌جایی در جهات X و Y. این المان می تواند به عنوان یک المان صفحه‌ای (تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای عمومی) و یا به عنوان المان متقارن محوری مورد استفاده قرار بگیرد. این المان قابلیت تحلیل مسائل پلاستیسیته، هایپرالاستیسیته، خزش، تنش سفتی، خیز بزرگ و کرنش بزرگ را دارد. همچنین، این المان قابلیت فرمول‌بندی مرکب را دارد که اجازه می‌دهد تغییر شکل‌های مواد الاستوپلاستیک تقریباً غیرقابل‌تراکم و نیز مواد هایپرالاستیک کاملاً غیرقابل‌تراکم را شبیه‌سازی کند.

ب-۳ داده‌های ورودی

هندسه، محل گره‌ها و دستگاه مختصات برای این المان در شکل ب-۱ نشان داده شده است. هر چند که می‌توان با اختصاص دادن شماره‌ی گره‌ی مشترک به گره‌های K، L و O، زمانی که KEYOPT(1)=0 باشد، المان مثلثی تشکیل داد، اما بهتر است برای المان‌های مثلثی از KEYOPT(1)=1 استفاده کرد. علاوه بر گره‌ها، داده‌های ورودی المان شامل ضخامت (TK)[2] و خواص مواد ارتوتروپیک است. جهات اصلی مادّه‌ی ارتوتروپیک با جهات دستگاه مختصات انطباق دارد.



شکل ب-۱: هندسه‌ی المان PLANE183

بارهای فشاری را می‌توان به صورت بارهای سطحی بر روی وجوه المان تعریف کرد. فشار مثبت به سمت داخل المان عمل می‌کند.

۱. این بخش با استفاده از راهنمای نرم‌افزار ANSYS 12.0 نوشته شده است.
۲. تنها برای گزینه‌ی تنش-صفحه‌ای.

دما را می‌توان به صورت بارهای حجمی در هر گره وارد نمود. TUNIF دمای پیش‌فرض گره‌ی I یعنی T(I) است. اگر دمای تمام گره‌های گوشه تعیین شود، دمای گره‌های واقع در وسط یال‌های المان برابر با میانگین دماهای دو گره‌ی اطراف آن خواهد بود. برای سایر الگوهای دمایی ورودی، دماهای ذکر نشده برابر با TUNIF در نظر گرفته می‌شود.

نیروهای گره‌ای، در صورت وجود، برای تحلیل‌های صفحه‌ای (برای KEYOPT(3)=3 و KEYOPT(3)=5) و یا تحلیل متقارن محوری ۳۶۰°، می‌بایست بر واحد عمق صفحه تعریف شوند.

از دستور ESYS برای جهت‌دهی به خواص مواد و خروجی تنش-کرنش استفاده می‌شود. با استفاده از این دستور می‌توان تعیین کرد که خروجی منطبق بر دستگاه مختصات مادّی و یا دستگاه مختصات جهانی باشد. برای مواد هایپرالاستیک، خروجی تنش و کرنش، به جای دستگاه مختصات مادّی/المان، همواره بر اساس دستگاه مختصات جهانی کارتزین می‌باشد.

با استفاده از دستور INISTATE می‌توان تنش اولیه در سازه تعریف کرد.

گره‌ها	I, J, K, L, M, N, O, P	KEYOPT(1)=0
	I, J, K, L, M, N	KEYOPT(1)=1
درجات آزادی	UX, UY	
ثابت‌های حقیقی	ندارد	KEYOPT(3)=0, 1 or 2
	THK	KEYOPT(3)=3
خواص ماده	EX, EY, EZ, PRXY, PRYZ, PRXZ (or NUXY, NUYZ, NUXZ), ALPX, ALPY, ALPZ (or CTEX, CTEY, CTEZ or THSX, THSY, THSZ), DENS, GXY, GYZ, GXZ, DAMP	
بارهای فشاری	سطح ۱ (J-I)، سطح۲ (K-J)، سطح ۳ (I-K)، سطح ۴ (I-L)	KEYOPT(1)=0
	سطح ۱ (J-I)، سطح۲ (K-J)، سطح ۳ (I-K)	KEYOPT(1)=1
بارهای دمایی	T(I), T(J), T(K), T(L), T(M), T(N), T(O), T(P)	KEYOPT(1)=0
	T(I), T(J), T(K), T(L), T(M), T(N)	KEYOPT(1)=1
شکل المان	چهارضلعی هشت گره‌ای	KEYOPT(1)=0
	سه‌ضلعی شش گره‌ای	KEYOPT(1)=1
رفتار المان	تنش-صفحه‌ای	KEYOPT(3)=0
	متقارن محوری	KEYOPT(3)=1
	کرنش-صفحه‌ای	KEYOPT(3)=2
	تنش-صفحه‌ای با ورودی ضخامت (TK)	KEYOPT(3)=3
	کرنش-صفحه‌ای عمومی	KEYOPT(3)=5
فرمول‌بندی المان	تنها استفاده از فرمول‌بندی جابه‌جایی	KEYOPT(6)=0
	استفاده از فرمول‌بندی ترکیبی u-P	KEYOPT(6)=1

جدول ب-۱: خلاصه‌ی داده‌های ورودی المان PLANE183

ب-۴ داده‌های خروجی

خروجی‌های متناظر با المان PLANE183 در دو گروه دسته‌بندی می‌شوند. (الف) جابه‌جایی‌های گره‌ای. (ب) سایر خروجی‌ها، که در جدول ب-۲ آورده شده است.

برای حل‌های متقارن محوری، خروجی‌های تنش و کرنش X، Y، XY و Z متناظر با تنش‌ها و کرنش‌های شعاعی، محوری، برش درون‌صفحه‌ای و محیطی هستند.

ب-۵ فرضیات و محدودیت‌ها

۱. مساحت المان باید مثبت باشد.

۲. در تحلیل‌های متقارن محوری، المان باید در صفحه‌ی XY قرار بگیرد و محور Y محور تقارن باشد. مدل متقارن محوری باید در ربع X+ ایجاد شود.

۳. اگر گره‌ی میانی یک یال المان حذف شود، جابه‌جایی در طول آن یال به جای سهمی به‌صورت خطی تغییر می‌کند.

۴. تنش سفتی همواره در تحلیل‌های غیرخطی در نظر گرفته می‌شود.

EL	شماره‌ی المان
NODES	گره‌ها
MAT	شماره‌ی مادّه
THICK	ضخامت
VOLU	حجم
XC,YC	محل نمایش نتایج
PRES	فشارها
TEMP	دماها
S: X, Y, Z, XY	تنش‌ها (در حالت تنش صفحه‌ای SZ=0.0)
S:1, 2, 3	تنش‌های اصلی
S: INT	شدت تنش
S: EQV	تنش معادل
EPEL: X, Y, Z, XY	کرنش‌های الاستیک
EPEL: 1, 2, 3	کرنش‌های الاستیک اصلی
EPEL: EQV	کرنش الاستیک معادل
EPTH: X, Y, Z, XY	کرنش‌های حرارتی
EPTH: EQV	کرنش‌های حرارتی معادل
EPPL: X, Y, Z, XY	کرنش‌های پلاستیک
EPPL: EQV	کرنش‌های پلاستیک معادل
EPCR: X, Y, Z, XY	کرنش‌های خزش
EPCR: EQV	کرنش‌های خزش معادل
EPTO: X, Y, Z, XY	کرنش‌های مکانیکی کل
EPTO: EQV	کرنش‌های مکانیکی کل معادل
NL: EPEQ	کرنش پلاستیک معادل تجمعی
NL: CREQ	کرنش خزشی معادل تجمعی
NL: SRAT	تسلیم پلاستیک
NL: PLWK	کار پلاستیک
NL: HPRES	فشار هیدرواستاتیک
SEND: ELASTIC, PLASTIC, CREEP	شدت انرژی کرنشی
LOCI	نقاط محل انتگرال‌گیری
SVAR: 1, 2, ... , N	متغیرهای وضعیت

جدول ب-۲: خروجی‌های المان PLANE183

مراجع

[1] Y., Başar and D., Weichert. *Nonlinear Continuum Mechanics of Solids: Fundamental Mathematical and Physical Concepts*. Springer, Berlin, 1st ed. , 1999.

[2] M., Amabili. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, Cambridge, 1st ed. , 2008.

[3] H.-S., Shen. *Functionally graded materials: Nonlinear analysis of plates and shells*. Taylor & Francis Group LLC, New York, 1st ed. , 2009.

[4] S.P., Timoshenko. *Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems)*. Van Nostrand Reinhold Co., New York, 3rd ed. , 1976.

[5] J., Oliver and E., Oñate. A total lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. part ii: arches, frames and axisymmetric shells. *Numerical methods in engineering*, Vol. 23: pp. 253–274, 1986.

[6] A., Combescure and G., Gusic. Nonlinear buckling of cylinders under external pressure with nonaxisymmetric thickness imperfections using the COMI axisymmetric shell element. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38: pp. 6207–6226, August 2001.

[7] M., Balah and H.N., Al-Ghamedy. Finite element formulation of a third order laminated finite rotation shell element. *Computers & Structures*, Vol. 80(26): pp. 1975 – 1990, 2002.

[8] R.A., Arciniega and J.N., Reddy. Large deformation analysis of functionally graded shells. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 44: pp. 2036–2052, 2007.

[9] N., Tutunchu and B., Temel. A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres. *Composite structures*, Vol. 91: pp. 385–390, 2009.

[10] R., Sarfaraz Khabbaz, B., Dehghan Manshadi, and A., Abedian. Nonlinear analysis of FGM plates under pressure loads using the higher-order shear deformation theories. *Composite Structures*, Vol. 89: pp. 333–344, 2009.

[۱۱] قنّاد، م. و رحیمی، غ.ح. حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی. مکانیک مدرس، ج ۱۰، ش ۳: صص ۳۱–۴۳، ۱۳۸۹.

[۱۲] قنّاد، م. و رحیمی، غ.ح. حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری از مواد ناهمگن FG با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی. مکانیک مدرس، ج ۱۰، ش ۴: صص ۱۳–۲۵، ۱۳۸۹.

[13] M., Ghannad and M., Zamani-Nejad. Elastic analysis of pressurized thick hollw cylindrical shells with clamped-clamped ends. *Mechanika*, Vol. 85: pp. 640–649, 2010.

[14] M., Shariyat, M., Khaghani, and S.M.H., Lavasani. Nonlinear thermoelasticity, vibration, and stress wave propagation analyses of thick FGM cylinders with temperature-dependent material properties. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 29: pp. 378–391, 2010.

[۱۵] رضایی‌پژند، م. و اعرابی، ا. تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌ی متقارن محوری چندلایه با لایه‌ی پیزوالکتریک گسترده. مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، ج ۲: صص ۱–۱۱، ۱۳۹۰.

[16] M., Ghannad and H., Gharooni. Displacements and stresses in pressurized thick FGM cylinders with varying properties of power function based on hsdt. *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 4: pp. 237–251, 2012.

[17] M., Strozzi and F., Pellicano. Nonlinear vibrations of functionally graded cylindrical shells, thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*, Vol. 76: pp. 63–77, 2013.

[18] H.V., Tung. Nonlinear thermomechanical stability of shear deformable FGM shallow spherical shells resting on elastic foundations with temperature dependent properties. *Composite Structures*, Vol. 114: pp.107–116, 2014.

[19] A.M., Zenkour and I.A., Abbas. A generalized thermoelasticity problem of an annular cylinder with temperature-dependent density and material properties. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 84: pp. 54–60, July 2014.

[20] N.D., Duc, V.T.T., Anh, and P.H., Cong. Nonlinear axisymmetric response of FGM shallow spherical shell on elastic foundations under uniform external pressure and temperature. *Euoropean Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 45: pp. 80–89, 2014.

[21] Wunderlich W., Pilkey W.D. *Mechanics of structures: Variational and computational methods*. CRC Press LLC, Boca Raton, 2nd ed. , 2003.

Abstract

In present study, the governing equations of pressurized thick cylindrical shells are derived in static equilibrium condition, with nonlinear strain-displacement (kinematic) relations (Green-Lagrange strain tensor), and based on the First-order Shear Deformation Theory (FSDT). The problem is considered to be full axisymmetric and thickness of cylinder is constant. Shell is made up of heterogeneous and isotropic material, with variable modulus of elasticity through the thickness according to the power law, and obeys linear elastic constitutive equations. As a common assumption, Poisson's ration is supposed to be constant throughout the shell. The cylinder is clamped at both lengthwise bounds and undergoes uniform, time-independent, conservative (non-follower) internal and external pressures.

The governing equations form a coupled system of nonlinear differential equations of second order, with constant coefficients. These equations are derived using virtual work principle and solved utilizing perturbations theory (matched asymptotic expansion method).The analytical solution is carried out up to second order. Also, the parametric finite element modeling of the problem is done by using ANSYS Parametric Design Language (APDL). The effect of variations of cylinder's geometric, loading, material and heterogeneity parameters upon nonlinear behaviour of the shell is studied. The results are validated and compared with those obtained from the finite elements method (FEM).

Keywords: *Thick-walled cylindrical shell, First-order shear deformation theory, Nonlinear kinematic relations, Matched asymptotic expansion method.*

Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

Elastic Analysis of Pressurized FGM Thick Cylindrical Shells with Nonlinear Strain-Displacement Relations Based on FSDT

Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science (M.Sc)
In Mechanical Engineering, Applied Mechanics

Mohammad Hossein Sohani

Supervisor:
Dr. Mehdi Ghannad

September 2014