
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

محاسبه ضریب شدت تنش مود I در صفحه و استوانه جدار ضخیم دارای ترک تحت شوک حرارتی غیرفوریه‌ای با استفاده از تابع وزنی

امید عاصمی

استاد راهنما

دکتر محمدباقر نظری

تیرماه ۱۳۹۴

تقدیم نامه

سپاس از دو وجود مقدس

آنان که ناتوان شدند تا به توانایی برسم

مویشان سپید گشت تا رو سفید شوم

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود و روشنگر راهم باشند

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

سپاس گزاری

شکر شایان نثار ایزد منان که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به پایان برسانم به امید آنکه توفیق یابم جز خدمت به خلق او نکوشم.

از پدر و مادر عزیزم این دو معلم بزرگوار که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت های من گذشتند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاوری بی چشم داشت برای من بودن نهایت تقدیر و تشکر را داریم.

از زحمات فراوان استاد بزرگوار و عزیزم جناب آقای دکتر محمدباقر نظری که از محضر پر فیض تدریسش بهره بسیار برده ام تشکر و قدردانی می نمایم.

همچنین از دوستان گرانقدرم آقایان مهندس نظری، شهابی، کشکولی، البرزیان و فرزانه و همکاران شرکت سیم و کابل مغان آقایان مهندس آسیایی، ابراهیمیان، اصغری، مقیمی و گلستانی و خانم هشترودی، آقایان و شمس که در تمام مراحل این پایان نامه در کنارم بودند، تشکر می گردد.

امید عاصمی

تابستان ۹۴

تعهد نامه

اینجانب امید عاصمی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه محاسبه ضریب شدت تنش مود I در صفحه و استوانه جدار ضخیم دارای ترک تحت شوک حرارتی غیرفوریه‌ای با استفاده از تابع وزنی تحت راهنمائی محمدباقر نظری متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه‌ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

❋ متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

چکیده

در این پایان‌نامه، ضریب شدت تنش برای صفحه و استوانه از جنس مواد همگن و همسانگرد شامل یک ترک نیم‌بیضوی طولی یا ترک محیطی کامل تعیین شده است که تحت شوک حرارتی غیرفوریه‌ای (هذلولوی) قرار دارد. معادلات حاکم غیرکوپل در نظر گرفته شده است. حل تحلیلی معادله هدایت گرمایی با استفاده از تبدیل انتگرال هنکل محدود و روش جداسازی متغیرها به‌دست آمده است. ضریب شدت تنش برای عمق و گوشه‌های ترک نیم‌بیضوی و برای ترک محیطی طولی با استفاده از روش تابع وزنی به‌دست می‌آید. نتایج، رفتار متفاوت ترک تحت شوک حرارتی هذلولوی نسبت به مدل فوریه را نشان می‌دهد. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، ضریب شدت تنش در عمق ترک نیم‌بیضوی به‌خصوص برای ترک‌های با عمق نسبی کمتر در مدل هذلولوی بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از مدل فوریه است. در گوشه این ترک نیز ضریب شدت تنش برای مدل هذلولوی همیشه بزرگتر از مدل فوریه است. برخلاف بارگذاری مکانیکی، ضریب شدت تنش بیشینه ممکن است در گوشه ترک اتفاق بیفتد.

همچنین در ترک‌های محیطی کامل، ضریب شدت تنش بیشینه برای مدل‌های فوریه و هذلولوی برای ترک-های کوتاه تقریبا برابر است. اما در ترک‌های با طول بیشتر ضریب شدت تنش حاصل از مدل هذلولوی از مدل فوریه بطور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است. همچنین، در مدل هذلولوی ضریب شدت تنش بیشینه در هر لحظه قبل از رسیدن پیشانی موج به سطح مقابل برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد.

مطابق نتایج، در نظر گرفتن مدل مناسب هدایت گرمایی در طراحی سازه‌ها تحت بار حرارتی گذرا اهمیت ویژه‌ای دارد.

واژگان کلیدی:

ضریب شدت تنش، هدایت گرمایی هذلولوی، روش تابع وزنی، استوانه جدار ضخیم، تبدیل انتگرال هنکل.

فهرست عنوان‌ها

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست نشانه‌ها

مدول یانگ	E
ضریب انبساط حرارتی	α
ضریب پواسون	ν
ضریب هدایت گرمایی	k
دما	T
ضریب تصحیح شکل ترک	Q
منبع گرمایی	Q_0
ظرفیت گرمایی	c
شار گرمایی	$\mathbf{q}$
جابه‌جایی	$\mathbf{u}$
تنش عمودی	σ
کرنش عمودی	ε
زمان آسایش حرارتی	τ_q
تنش طولی	σ_z
تنش شعاعی	σ_r
تنش محیطی	σ_θ

چگالی و موقعیت ناپیوستگی	ρ
تابع وزنی	m
ضریب شدت تنش	K
طول ترک	a
مقادیر ویژه	λ_n

فصل ۱

مقدمه و تعاریف

۱-۱ مقدمه

هدایت گرمایی سریع یکی از مسائلی است که در تجهیزات مهندسی مدرن مانند راکتورهای جوش هسته‌ای، دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه ایکس و لیزر [۱] و حین فرایندهایی چون ذوب سطحی فلزات [۲] و پوشش‌دهی فلزات با نانوسرامیک‌ها [۳] اتفاق می‌افتد. در این موارد، توزیع دمای حاصل از قانون فوریه به‌اندازه کافی دقیق نیست. طبق تئوری هدایت گرمایی کلاسیک (قانون فوریه)، اگر جسمی تحت شوک گرمایی در مرز قرار گیرد، اثر آن بلافاصله در فواصل بسیار دور از محل اعمال شرایط مرزی احساس می‌شود که از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. از طرفی، توزیع دمای به‌دست آمده از قانون فوریه در برخی موارد، به اندازه کافی دقیق نیست. برای مثال، دمای اندازه‌گیری شده در باریکه نازکی که تحت گرمایش از طریق لیزر قرار گرفته است، در زمان‌های بسیار نزدیک به زمان اعمال شوک حرارتی حدود ۳۰۰°C بیشتر از دمایی است که توسط قانون فوریه محاسبه می‌شود[۴].

مهم‌ترین نقص قانون فوریه، منجر شدن به سرعت بی‌نهایت امواج حرارتی است. برای حل مشکل مذکور، ورنات[۵] و کاتانو[۶]، تئوری هدایت گرمایی هذلولوی[۱] را به طور مستقل ارائه کردند. این مدل شامل یک تأخیر زمانی[۲] (زمان آسایش حرارتی) برای شار گرمایی به‌صورت زیر است.

$$q_i\left(\mathbf{x},t+\tau_q\right)=-k\frac{\partial T\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial x_i} \qquad ۱-۱$$

که در آن، q_i شار گرمایی، k ضریب هدایت گرمایی، $\partial T/\partial x_i$ گرادیان دما و τ_q تأخیر زمانی (زمان آسایش حرارتی) است. τ_q را می‌توان با استفاده از سرعت موج حرارتی، C، و ضریب پخش گرمایی، $k/\rho c$ ، که به‌صورت زیر متناسب است، محاسبه کرد.

---
[۱] Hyperbolic heat conduction

[۲] Relaxation time

$$\tau_q \propto \frac{k}{\rho c}\left(1/C^2\right) \qquad ۲-۱$$

با فرض $\tau_q=0$، رابطه هدایت گرمایی هذلولوی ۱-۱ به رابطه هدایت گرمایی کلاسیک (قانون فوریه) کاهش می‌یابد.

برای یک فلز معمولی در دمای اتاق، $^{k}/_{\rho c} \sim 10^{-4}\, ^{m^2}/_{s}$، $\tau_q \sim 10^{-12} s$ و $C \sim 10^5\, ^{m}/_{s}$ است. از نظر فیزیکی، مدل موج حرارتی، رابطه ۱-۱، به این معنی است که یک تأخیر زمانی بین شار گرمایی و گرادیان دما وجود دارد. هدایت گرمای غیرکلاسیک در مقیاس میکرو/نانو یا در انتقال گرمای بسیار سریع قابل مشاهده است.

۱-۲ هدایت گرمایی هذلولوی

معادله حاکم بر دما با ترکیب رابطه ساختاری هدایت گرمایی و قانون اول ترمودینامیک به‌دست می‌آید. بسط تیلور مرتبه یک شار گرمایی به‌صورت زیر است.

$$q_i\left(\mathbf{x},t+\tau_q\right)=q_i\left(\mathbf{x},t\right)+\tau_q\frac{\partial q_i\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t} \qquad ۳-۱$$

رابطه بین بردار شار گرمایی و گرادیان دما در لحظه t با جایگزینی رابطه ۱-۳ در رابطه ۱-۱ به‌دست می‌آید.

$$q_i\left(\mathbf{x},t\right)+\tau_q\frac{\partial q_i\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t}=-k\frac{\partial T\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial x_i} \qquad ۴-۱$$

از طرفی، قانون بقای انرژی برای هدایت گرمایی صلب به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$-q_{i,i}\left(\mathbf{x},t\right)+Q_0=\rho c\frac{\partial T\left(\mathbf{x},t\right)}{\partial t} \qquad ۵-۱$$

که در آن، Q_0 منبع گرمایی، ρ چگالی و c ظرفیت گرمایی ویژه است. با مشتق‌گیری از رابطه ۱-۴ نسبت به x_i و جایگذاری آن در رابطه بقای انرژی، معادله حاکم دما به‌دست می‌آید.

$$\rho c\tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x_i^{\,2}} + \tau_q \frac{\partial Q_0}{\partial t} + Q_0 \qquad ۶-۱$$

رابطه فوق، معادله موج گرمایی نیز نامیده می‌شود. شرایط مرزی معادله موج گرمایی به-صورت زیر است.

$$T\left(x_j,t\right) = \overline{T_0}\left(x_j,t\right) \qquad ۷-۱$$

و

$$q_i\left(x_j,t\right) = \overline{q_i}\left(x_j,t\right) \qquad ۸-۱$$

که در آن، $\bar{T}$ و $\bar{q}$ بیانگر مقادیر معلوم دما و شار گرمایی روی مرز هستند. در غیاب منبع گرمایی، شرایط اولیه به‌صورت زیر است.

$$T\left(x_j,0\right) = 0 \qquad ۹-۱$$

و

$$\frac{\partial T\left(x_j,0\right)}{\partial t} = 0 \qquad ۱۰-۱$$

۱-۳ مکانیک شکست

پدیده شکست در اجسام یکی از عمده‌ترین مسائلی است که انسان از زمان ساختن ساده-ترین ابزارها با آن مواجه بوده و بدلیل پیشرفت تکنولوژی در عصر حاضر، این مسأله از اهمیت بیشتری نسبت به گذشته برخوردار می‌باشد. متلاشی شدن بسیاری از هواپیماها و فضاپیماها طی دهه‌های گذشته، لزوم درک دقیق‌تری از مکانیک شکست در اجسام را ایجاب می‌کند.

در مکانیک شکست ارتجاعی خطی، میدان تنش در حوزه نوک ترک برحسب بارگذاری جسم، اندازه و هندسه ترک یا ناپیوستگی ترک‌گونه بیان می‌شود. مهمترین اصل مکانیک

شکست ارتجاعی خطی این است که توزیع تنش نزدیک یک ترک نوک تیز برحسب کمیتی به نام ضریب شدت تنش K، (با واحد $MPa\sqrt{m}$) قابل بیان است که به هر دو عامل، بارگذاری قطعه و هندسه آن (شامل طول ترک) بستگی دارد.

وقتی ضریب شدت تنش در جسم به چقرمگی ماده برسد و یا از آن بزرگتر شود؛ ترک در جسم رشد می‌کند و باعث گسیختگی آن می‌شود. بنابراین، تعیین مقدار ضریب شدت تنش در اجسام ترک‌دار برای ارزیابی ایمنی و تخمین عمر آن‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است.

در مکانیک شکست از روش‌های مختلف تحلیلی، تجربی و عددی برای تعیین ضریب شدت تنش استفاده می‌شود که روش تابع وزنی یکی از روش‌های تحلیلی است.

۱-۴ روش تابع وزنی

تابع وزنی اثر بارگذاری و هندسه جسم را روی ضریب شدت تنش از هم جدا می‌کند. به‌طوری که اگر تابع وزنی برای یک ترک در یک جسم با هندسه معلوم در دسترس باشد، می‌توان ضریب شدت تنش برای هر بارگذاری دلخواه را به‌دست آورد.

استفاده از تابع وزنی برای محاسبه ضریب شدت تنش در سازه‌هایی که رشد ترک از الگویی خاص پیروی می‌کند مثل ترک‌های نیم‌بیضوی در مخازن تحت فشار استوانه‌ای و لوله‌های انتقال سیال می‌تواند سبب تسهیل محاسبات گردد. روش تابع وزنی توسط بوکنر در سال ۱۹۷۰ معرفی شده است [۷].

اگر تابع وزنی $m(x,a)$ برای یک هندسه خاص معلوم باشد؛ ضریب شدت تنش با انتگرال‌گیری از حاصل‌ضرب توزیع تنش در هندسه بدون ترک، $\sigma(x)$ و تابع وزنی روی سطح فرضی ترک تعیین می‌شود.

$$K=\int_0^a m(x,a)\sigma(x)dx \qquad ۱۱-۱$$

بوکنر [۷] و رایس [۸]، تابع وزنی را برحسب بازشدگی سطح ترک بیان کردند.

$$m(x,a)=\frac{H}{K_r}\frac{\partial v_r(x,a)}{\partial a} \qquad ۱۲-۱$$

که در آن، a طول ترک، v_r بازشدگی سطح ترک برای بارگذاری مرجع، K_r ضریب شدت تنش مرجع و H ثابتی است که به خصوصیات ماده بستگی دارد. در دسترس نبودن تابع بازشدگی برای هندسه و ترک‌های مختلف، کاربرد رابطه ۱-۱۲ برای تعیین تابع وزنی را محدود می‌کند. از این‌رو، روش‌های مختلفی مثل کاربرد یک تقریب یکتا برای بازشدگی سطح ترک توسط پتروسکی و آخن‌باخ [۹] و یا پیشنهاد توابع وزنی تقریبی ارائه شده است.

گلینکا و شن [۱۰] یک تابع وزنی تقریبی شامل چهار جمله پیشنهاد کردند که کاربرد آن برای ترک‌های نیم‌بیضوی منجر به نتایجی با خطای کمتر از ۱٪ نسبت به روش المان محدود می‌شود. این تابع وزنی شامل یک جمله تکین در نوک ترک با مرتبه ۰/۵- و سه جمله دیگر با سه ضریب مجهول است که معمولا با استفاده از دو بارگذاری مرجع و یک شرط مرزی جابه‌جایی تعیین می‌شود. تابع وزنی برای عمق ترک نیم‌بیضوی (نقطه A در شکل ۱-۱) به‌صورت زیر است.

$$m_A(r,a)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{R_i+a-r}}+M_{1A}\sqrt{\frac{2}{\pi a}}+M_{2A}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{a}\sqrt{R_i+a-r}+M_{3A}\sqrt{\frac{2}{\pi a^3}}\left(R_i+a-r\right) \qquad ۱۳-۱$$

ثابت‌های مجهول M_{iA}(i=1, 2, 3) با در نظر گرفتن دو بارگذاری مرجع و شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک $r=R_i$ تعیین می‌شوند [۱۰]. معمولا بارگذاری یکنواخت به اندازه یک و بارگذاری خطی با حداکثر اندازه یک روی ترک (در جهت شعاعی شکل ۱-۱) به عنوان بارگذاری‌های مرجع در نظر گرفته می‌شود.

۱-۱۴- الف

$$\sigma_{ref,1}=1$$

۱-۱۴- ب

$$\sigma_{ref,2}=\left(\frac{r-R_i}{a}\right)$$

متناظر با هر بارگذاری، ضریب شدت تنش مرجع به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

۱-۱۵- الف

$$K_{ref,1}=\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}Y_0$$

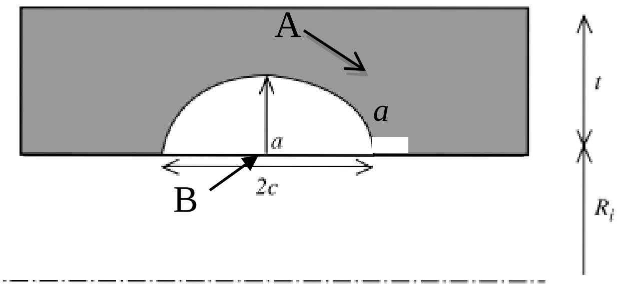
۱-۱۵- ب

$$K_{ref,2}=\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}Y_1$$

که در آن، Y_0 و Y_1 ضرایب تصحیح هندسه به‌صورت توابعی از a/t و a/c است. Q نیز ضریب تصحیح شکل است که به شکل جسم دارای ترک بستگی دارد. Q برای استوانه دارای ترک نیم‌بیضوی به‌صورت زیر است.

۱۶-۱

$$Q=1+1.464\left(\frac{a}{c}\right)^{1.65},(a/c\le 1)$$



شکل ۱-۱- طرح کلی ترک نیم‌بیضوی طولی در استوانه

همچنین، تابع وزنی برای گوشه‌های یک ترک نیم بیضوی در راستای طولی استوانه (نقطه B در شکل ۱-۱) نیز به‌صورت رابطه ۱-۱۷پیشنهاد شده است [۱۰].

۱۷-۱

$$n_B(r,a)=\frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}{\sqrt{r-R_i}}+N_{1B}\sqrt{\frac{4}{\pi a}}+N_{2B}\frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}{a}\sqrt{r-R_i}+N_{3B}\sqrt{\frac{4}{\pi a^3}}\left(r-R_i\right)$$

برای گوشه‌های ترک، ضرایب شدت تنش مرجع به‌صورت زیر بیان می‌شوند.

۱-۱۸- الف

$$K_{ref,1}=\sqrt{\frac{\pi a}{Q}}F_0$$

$$K_{ref,2} = \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_1$$ ۱-۱۸- ب

که در آن، F_0 و F_1 ضرایب تصحیح هندسه به‌صورت توابعی از *a/t* و *a/c* است.

تکینی ۰/۵- در تابع وزنی فوق (رابطه ۱-۱۷) به عنوان یک مقدار تقریبی در ارتباط با لایه مرزی نقطه سطح در نظر گرفته می‌شود. به این دلیل که تکینی ۰/۵- تنش نوک ترک در فصل مشترک سطوح آزاد، مانند نقطه B در شکل، به صفر میل می‌کند. تکینی ۰/۵- در جبهه ترک وقتی اتفاق می‌افتد که نوک ترک کاملا در ماده قرار داشته باشد. در واقع، تابع وزنی (۱-۱۷) برای یک ترک سکه‌ای درون ماده به‌دست آمده است. در این تابع وزنی انحراف تکینی میدان تنش از ۰/۵- در نزدیکی گوشه ترک لحاظ نشده است. سی [۱۱] نشان داد؛ برای یک ترک سطحی، در لایه‌های میانی تکینی ۰/۵- برقرار است. پس بخش عمده‌ای از جبهه ترک تحت تأثیر تکینی ۰/۵- قرار دارد. علاوه براین، لایه‌های سطحی نزدیک به گوشه تحت تأثیر تکینی ۰/۵- در لایه‌های دیگر قرار دارد. بطوریکه تکینی گوشه ترک در فولادها با $\nu=0.3$، برابر $r^{-0.4523}$ است که با $r^{-0.5}$ اختلاف چندانی ندارد. بنابراین، نتایج تابع وزنی (۱-۱۷) که با فرض تکینی ۰/۵- به‌دست آمده است، تقریبی می‌باشد.

۱-۵ مروری بر تحقیقات پیشین

گزارش‌های متعددی درباره شکست صفحه تحت شوک گرمایی فوریه‌ای منتشر شده است. امری و همکاران [۱۲] ضریب شدت تنش شوک گرمایی را با استفاده روش تابع گرین به‌دست آوردند. نید [۱۳] با حل عددی معادلات الاستیسیته حاکم، ضریب شدت تنش شوک گرمایی را برای صفحه‌ای شامل یک ترک لبه‌ای به‌دست آورد که تحت شوک سرمایشی در لبه شامل ترک قرار داشت. تاناکا و همکاران [۱۴] و اسلادک و اسلادک [۱۵] ضریب شدت تنش شوک گرمایی گذرا را با استفاده از روش المان مرزی تعیین

کردند. چورتون و همکاران [۱۶] کاربرد وصله برای جلوگیری از رشد ترک تحت شوک گرمایی را بررسی کردند.

در زمینه هدایت گرمایی هذلولوی نیز مطالعاتی روی شکست صفحه انجام شده است. چانگ و ونگ [۱۷] ضریب شدت تنش برای یک ترک عمود بر لبه در یک محیط نیمه‌بی-نهایت را به‌دست آوردند که تحت شوک گرمایی هذلولوی قرار دارد. ایشان با حل تحلیلی میدان دما و تنش و سپس با انتگرال‌گیری عددی از رابطه تابع وزنی، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش را ارائه کرده‌اند. طبق این نتایج، ضریب شدت تنش حاصل از قانون هدایت گرمایی هذلولوی از مقادیر متناظر با قانون فوریه بزرگتر است. هو و چن [۱۸] ضرایب شدت تنش برای یک ترک محدود موازی با مرز در یک باریکه تحت شوک گرمایی هذلولوی را به‌دست آوردند. ونگ و هان [۱۹] نیز ضریب شدت تنش را برای یک ترک سکه‌ای در فصل مشترک دو باریکه از جنس مواد مرکب ارائه کردند. چن و هو [۲۰] نیز یک نیم‌صفحه حاوی ترک محدود موازی با مرز تحت شوک گرمایی هذلولوی را بررسی کردند.

لین و اسمیت [۲۱] نشان دادند ترک نیم‌بیضوی، مدل مناسبی برای نقص‌های داخلی سازه‌های استوانه‌ای است. شهرآئینی و هاشمی [۲۲] با کاربرد نمودار ارزیابی آسیب، اثر ابعاد ترک‌های نیم‌بیضوی بر ایمنی لوله‌های انتقال گاز را بررسی کردند. بخش عمده‌ای از مطالعات انجام شده در خصوص رفتار ترک در لوله‌ها و مخازن تحت فشار با استفاده از روش‌های المان محدود و المان مرزی [۲۳] انجام شده است. شاهانی و نبوی با استفاده از روش تابع وزنی، یک عبارت تحلیلی برای ضرایب شدت تنش در عمق و سطح یک ترک نیم‌بیضوی طولی در یک استوانه تحت فشار داخلی و بار حرارتی پایا [۲۴] و گذرا ارائه کردند. در بارگذاری حرارتی گذرا، استوانه تحت شرایط مرزی گرمایی ثابت [۲۵] و وابسته به زمان [۲۶] قرار داشت و در هر لحظه توزیع تنش حرارتی در استوانه با برازش منحنی

چندجمله‌ای تقریب زده شد. زو [۲۷] نیز با کاربرد روش تابع وزنی و تقریب توزیع تنش گرمایی با توابع چندجمله‌ای، ضریب شدت تنش برای استوانه حاوی ترک نیم‌بیضوی طولی را با تقریب حداقل مربعات به‌دست آورد. ما و لیو [۲۸] با معرفی تابع وزنی گرمایی، ضریب شدت تنش را با انتگرال‌گیری از حاصل‌ضرب توزیع دما و تابع وزنی گرمایی روی سطح ترک به‌دست آوردند. هر چند در این روش به محاسبه تنش گرمایی در جسم بدون ترک نیازی نیست؛ اما تابع وزنی گرمایی باید برای آن به‌دست آید که کار دشوارتری است. لو و همکارانش [۲۹] با استفاده از روش گسترش ترک مجازی، تابع وزنی گرمایی را برای نقاط مختلف یک ترک نیم‌بیضوی طولی به‌دست آوردند. در تحقیقات فوق هدایت گرمایی بر اساس قانون فوریه در نظر گرفته شده است.

رفتار ترک محیطی کامل در سطح داخلی استوانه تحت بار گرمایی نیز توسط محققین بررسی شده است. در بخشی از تحقیقات منتشر شده، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی کامل روی سطح داخلی استوانه با روش‌های تحلیلی به دست آمده است. نید و اردگن [۳۰]، استوانه‌ای بلند حاوی یک ترک محیطی را در نظر گرفتند که معادله الاستیسیته حاکم بر آن، با اعمال شرایط مرزی به یک دستگاه معادلات انتگرالی تکین تبدیل می‌شود. همچنین، نید [۳۱] با روش مذکور ضریب شدت تنش گرمایی گذرا برای یک استوانه حاوی ترک محیطی را به‌دست آورد.

گربنر [۳۲] با استفاده از روش المان محدود، ضریب شدت تنش برای استوانه‌ای شامل یک ترک محیطی و تحت بار محوری را محاسبه کرد. چن [۳۳] نیز با کاربرد روش‌های المان محدود و تفاضل محدود ضریب شدت تنش در استوانه‌ای با ترک محیطی را به طور عددی به‌دست آورد.

طبق جستجوهای انجام شده، گزارشی در مورد ضریب شدت تنش در صفحه‌های حاوی ترک نیم‌بیضوی و استوانه‌های حاوی ترک نیم‌بیضوی طولی و محیطی کامل تحت

بارگذاری گرمایی هذلولوی منتشر نشده است. در این پایان‌نامه، ضریب شدت تنش برای عمق و گوشه یک ترک نیم‌بیضوی طولی در یک صفحه و همچنین ترک نیم‌بیضوی طولی و ترک محیطی کامل در یک استوانه جدار ضخیم با استفاده از روش تابع وزنی و یک عبارت تحلیلی تعیین و با انتگرال‌گیری عددی ارزیابی شده است که تحت بارگذاری گرمایی غیرفوریه‌ای (هذلولوی) قرار دارد.

فصل ۲

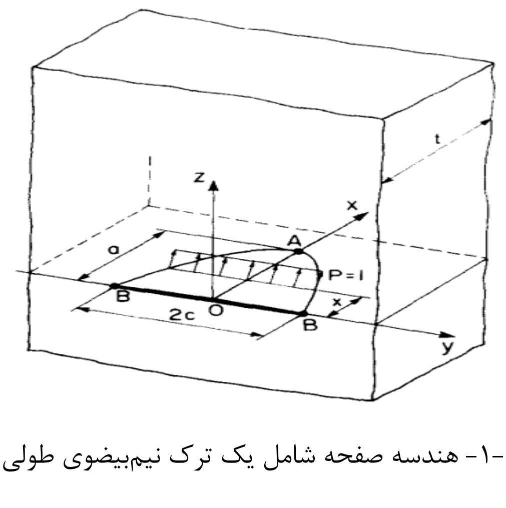
ضریب شدت تنش در صفحه

۲-۱ مقدمه

در این فصل، ضریب شدت تنش برای یک صفحه حاوی ترک نیم‌بیضوی و لبه‌ای تعیین شده است. صفحه تحت شوک گرمایی غیرفوریه‌ای (هذلولوی) به‌صورت کاهش دما در مرز شامل ترک قرار دارد. معادلات ترموالاستیسیته حاکم به‌صورت غیرکوپل حل شده‌اند. حل معادله هدایت گرمایی پس از بی‌بعد سازی با روش جداسازی متغیرها استخراج شده است. در نهایت، ضریب شدت تنش برای عمق و گوشه‌های ترک با استفاده از روش تابع وزنی به‌دست آمده است.

۲-۲ میدان‌های دما و تنش در صفحه بدون ترک

مطابق شکل ۲-۱، یک صفحه بدون تکیه‌گاه با عرض محدود t (در جهت x) و طول نامحدود در راستاهای y و z شامل ترکی نیم‌بیضوی با ابعاد محدود در راستای x در نظر گرفته می‌شود. در ابتدا، دمای صفحه برابر با دمای اتاق و یکنواخت است و به‌صورت تغییر دمای مرز تحت بارگذاری گرمایی قرار می‌گیرد. از کوپل میدان‌های کرنش و دما و همچنین نیروهای اینرسی صرف‌نظر می‌شود.



شکل ۲-۱- هندسه صفحه شامل یک ترک نیم‌بیضوی طولی [۳۴]

برای این صفحه و در غیاب منبع گرمایی داخلی، معادله حاکم هدایت گرمایی به‌صورت زیر است:

$$\rho c\tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$ ۱-۲

که در آن، k ضریب هدایت گرمایی، c ظرفیت حرارتی، ρ چگالی و T میدان دما است. دو شرط مرزی و دو شرط اولیه دمایی به‌ترتیب به‌صورت زیر است.

۲-۲- الف $$T(0,\mathrm{t}) = T_0$$

۲-۲- ب $$T(\mathrm{x}=t,\mathrm{t}) = 0$$

۲-۲- ج $$T(\mathrm{x},0) = 0$$

۲-۲- د $$\frac{\partial T(\mathrm{x},0)}{\partial \mathrm{t}} = 0$$

رابطه هدایت گرمایی هذلولوی برحسب متغیرهای بی‌بعد بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial T}{\partial t^*} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^{*2}}$$ ۳-۲

که در آن،

۲-۴- الف $$\mathrm{t}^* = \mathrm{t}/\tau_q$$

۲-۴- ب $$x^* = x/l_0$$

۲-۴- ج $$l_0 = \sqrt{k\tau_q/\rho c}$$

میدان دما با حل رابطه هدایت گرمایی (رابطه ۲-۳) با استفاده از روش جداسازی متغیرها برحسب متغیرهای بی‌بعد مکان x^* و زمان t^* حاصل می‌شود.

$$T(x^*,\mathrm{t}^*) = S(x^*) + \sum f_n(\mathrm{t}^*)\sin(\lambda_n x^*)$$ ۵-۲

که در آن،

۲-۶- الف $$S\left(x^*\right) = T_0\left(1 - \frac{x^*}{t^*}\right)$$

۲-۶- ب $$\lambda_n = \frac{n\pi}{t^*}$$

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n^2 - 0.25}$$ ۲-۶- ج

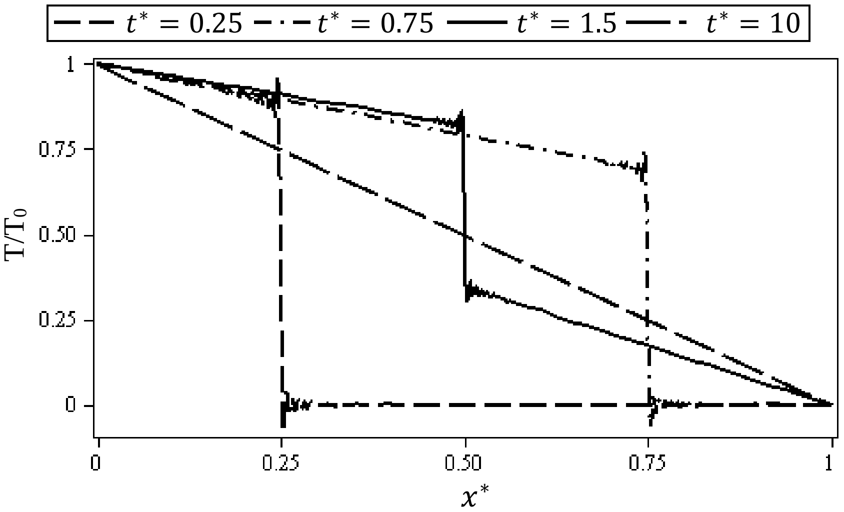
$$f_n(t^*) = e^{-\frac{t^*}{2}}\left(a_n \cos(\omega_n t^*) + b_n \sin(\omega_n t^*)\right)$$ ۲-۶- د

در روابط ۲-۶- الف و ۲-۶- ب، t^* ضخامت بی‌بعد صفحه است. در رابطه ۲-۶- د، ضرایب a_n و b_n با توجه به خاصیت تعامد حل‌های معادله دیفرانسیل اشتروم-لیوویل بدست می-آید.

$$a_n = -2\int_0^{t^*} T_0\left(1 - \frac{x^*}{t^*}\right)\sin(\lambda_n x^*)\,d x^* = -2\frac{t^* T_0}{n\pi}$$ ۲-۷- الف

$$b_n = \frac{a_n}{2\omega_n}$$ ۲-۷- ب

در رابطه ۲-۷- الف، t^* ضخامت بی‌بعد صفحه است. توزیع دمای حاصل از حل تحلیلی در صفحه با فرض ضخامت واحد در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. در ابتدا، دمای سطح شوک گرمایی صفحه (x=0) از دمای اولیه آن (صفر) تا T_0 کاهش می‌یابد. سرعت محدود موج گرمایی در توزیع دما برای t^*=0.25 به‌خوبی مشهود است. در نقاط ناحیه اثر موج گرمایی، دما تغییر کرده است؛ در حالیکه نقاط بین پیشانی موج و سطح $x^* = 1$ هنوز در دمای اولیه قرار دارند. توزیع دما برای t*=1.5 نیز برگشت موج گرمایی پس از برخورد با سطح $x^* = 1$ صفحه را نشان می‌دهد. استهلاک موج گرمایی در این منحنی از نکات قابل ذکر است. با گذشت زمان، استهلاک موج گرمایی بیشتر شده به گونه‌ای که توزیع دمای هذلولوی به توزیع دمای فوریه‌ای در توزیع دمای متناظر با t*=10 نزدیک می‌شود. در این زمان پیشانی موج گرمایی کاملا مستهلک شده است.



شکل ۲-۲- توزیع دما در صفحه تحت شوک گرمایی در یک سطح

از آنجایی که ضخامت صفحه در مقایسه با طول آن کوچک است، کرنش عمودی در جهت z به‌صورت زیر است.

$$\varepsilon_{zz}(x^*,t^*) = A + Bx^* - \alpha T(x^*,t^*) \qquad ۸-۲$$

که در آن، A و B ثابت‌های مجهول و α ضریب انبساط حرارتی است. توزیع تنش گرمایی در صفحه به‌صورت زیر است.

$$\sigma_{zz}(x^*,t^*) = \frac{E}{1-\nu}\left(A + Bx^* - \alpha T(x^*,t^*)\right) \qquad ۹-۲$$

که در آن، E مدول یانگ است. تعادل صفحه در غیاب نیروهای خارجی ایجاب می‌کند تعادل نیرویی در جهت z و گشتاوری حول y برقرار باشد.

$$\int_0^{t^*} \sigma_{zz}(x^*,t^*)dx^* = 0 \qquad \text{۲-۱۰- الف}$$

$$\int_0^{t^*} x^*\sigma_{zz}(x^*,t^*)dx^* = 0 \qquad \text{۲-۱۰- ب}$$

با استفاده از حل همزمان دو معادله فوق، ضرایب مجهول A و B تعیین می‌شوند. در نهایت، توزیع تنش در صفحه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

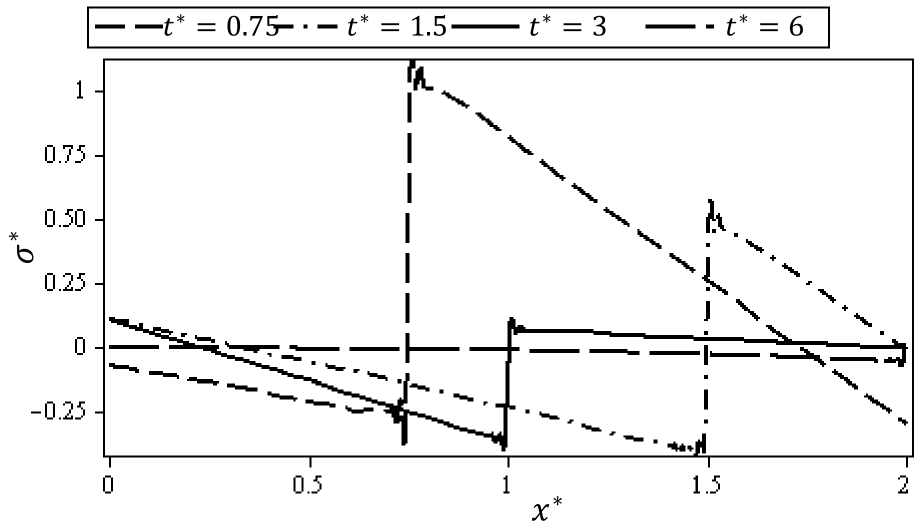
-۲

$$\sigma(x^*,t^*)=\frac{2t^*T_0E\alpha}{\pi(1-\nu)}e^{-\frac{t^*}{2}}\sum\left\{-\frac{\cos(\omega_n t^*)}{n}-\frac{\sin(\omega_n t^*)}{2n\omega_n}\right\}\times\left\{\frac{2}{n\pi}\left[2+(-1)^n-\frac{3x^*}{t^*}\left(1+(-1)^n\right)\right]-\sin(\lambda_n t^*)\right\}$$

۱

در شکل ۲-۳، تغییرات تنش گرمایی بی‌بعد در صفحه برای زمان‌های مختلف رسم شده است. در این شکل، تنش گرمایی به‌صورت زیر بی‌بعد شده است.

$$\sigma^*(x^*,t^*)=\frac{\sigma(x^*,t^*)}{E\alpha T_0/(1-\nu)} \qquad ۱۲-۲$$



شکل ۲-۳- توزیع تنش در صفحه تحت شوک گرمایی در یک سطح (ضخامت صفحه $t^* = 2$)

با توجه به شکل ۲-۳، اثر سرعت محدود موج گرما در نمودارها مشهود است. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی، تنش فشاری در نزدیکی سطح (x=0) تا موقعیت پیشانی موج تنش به‌وجود می‌آید. با گذشت زمان، تنش فشاری کاهش می‌یابد و به تنش کششی تبدیل می‌شود. این تنش با تنش حاصل از هدایت گرمایی کلاسیک متفاوت است. در حالت هدایت گرمایی کلاسیک، تنش روی سطح (x=0) همیشه فشاریست و به‌صورت یکنواخت با زمان کاهش می‌یابد [۱۳]. مشابه حالت هدایت گرمایی کلاسیک، در حالت پایا تنش به صفر می‌رسد.

۲-۳ تعیین ضریب شدت تنش با روش تابع وزنی

۲-۳-۱ تابع وزنی برای گوشه‌ها و عمق ترک نیم‌بیضوی

با در نظر گرفتن ضرایب شدت تنش مرجع (رابطه ۱-۱۵) و اعمال شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک، ثابت‌های مجهول $M_{iA}(i=1, 2, 3)$ برای تابع وزنی در عمق ترک (نقطه A در شکل ۲-۱) به‌صورت زیر تعیین می‌شود [۱۰].

$$M_{1A}=\frac{\pi}{\sqrt{2Q}}\left(4Y_0-6Y_1\right)-\frac{24}{5}$$ ۲-۱۳- الف

$$M_{2A}=3$$ ۲-۱۳- ب

$$M_{3A}=2\left(\frac{\pi}{\sqrt{2Q}}Y_0-M_{1A}-4\right)$$ ۲-۱۳- ج

ضرایب تصحیح هندسه Y_0 و Y_1 به‌صورت توابعی از *a/t* و *a/c* در مرجع [۱۰] آمده است.

همچنین، ضرایب مجهول $N_{iB}(i=1, 2, 3)$ مربوط به تابع وزنی در گوشه ترک (نقطه B در شکل ۲-۱) با در نظرگرفتن دو ضریب شدت تنش مرجع (رابطه ۱-۱۸) و شرط صفر بودن تابع وزنی در نوک ترک به‌دست می‌آیند.

$$N_{1B}=\frac{\pi}{\sqrt{4Q}}\left(30F_1-18F_0\right)-8$$ ۲-۱۴- الف

$$N_{2B}=\frac{\pi}{\sqrt{4Q}}\left(60F_0-90F_1\right)+15$$ ۲-۱۴- ب

$$N_{3B}=-\left(1+N_{1B}+N_{2B}\right)$$ ۲-۱۴- ج

ضرایب تصحیح هندسه F_0 و F_1 به‌صورت توابعی از *a/t* و *a/c* در مرجع [۱۰] آمده است.

۲-۳-۲ ضریب شدت تنش

با معلوم بودن تابع وزنی و تنش گرمایی به‌صورت یک تابع پیوسته از مکان، می‌توان ضریب شدت تنش را تعیین کرد.

$$K_A = \int_0^a \sigma_{zz} m_A(\mathrm{x}, a)\, dx \qquad \text{الف -۱۵-۲}$$

$$K_B = \int_0^a \sigma_{zz} n_B(\mathrm{x}, a)\, dx \qquad \text{ب -۱۵-۲}$$

به‌دلیل پیچیدگی عبارت تنش، انتگرال‌گیری از روابط ۲-۱۵ به‌طور تحلیلی امکان‌پذیر نیست. برای حل این مشکل، شاهانی و نبوی [۲۸] با استفاده از برازش دو تابع درجه دوم بر بخشی از عبارت تنش در هر زمان، یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش ارائه کردند. در اینجا، از برازش دو منحنی درجه دوم بر کل عبارت تنش استفاده شده است. اگر موقعیت ناپیوستگی تابع تنش ρ باشد، توزیع تنش حرارتی به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود تا برازش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

$$\sigma_{zz1} = A_1 x^2 + B_1 x + C_1 \quad , \quad 0 \le x \le \rho \qquad \text{الف -۱۶-۲}$$

$$\sigma_{zz2} = A_2 x^2 + B_2 x + C_2 \quad , \quad \rho \le x \le a \qquad \text{ب -۱۶-۲}$$

با استفاده از دو منحنی فوق، ضریب شدت تنش به‌ترتیب برای عمق و گوشه‌های ترک به-صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$K_A = \int_0^\rho \sigma_{zz1} m_A(\mathrm{x}, a)\, dx + \int_\rho^a \sigma_{zz2} m_A(\mathrm{x}, a)\, dx \qquad \text{الف -۱۷-۲}$$

$$K_B = \int_0^\rho \sigma_{zz1} n_B(\mathrm{x}, a)\, dx + \int_\rho^a \sigma_{zz2} n_B(\mathrm{x}, a)\, dx \qquad \text{ب -۱۷-۲}$$

۲-۴ مطالعه موردی

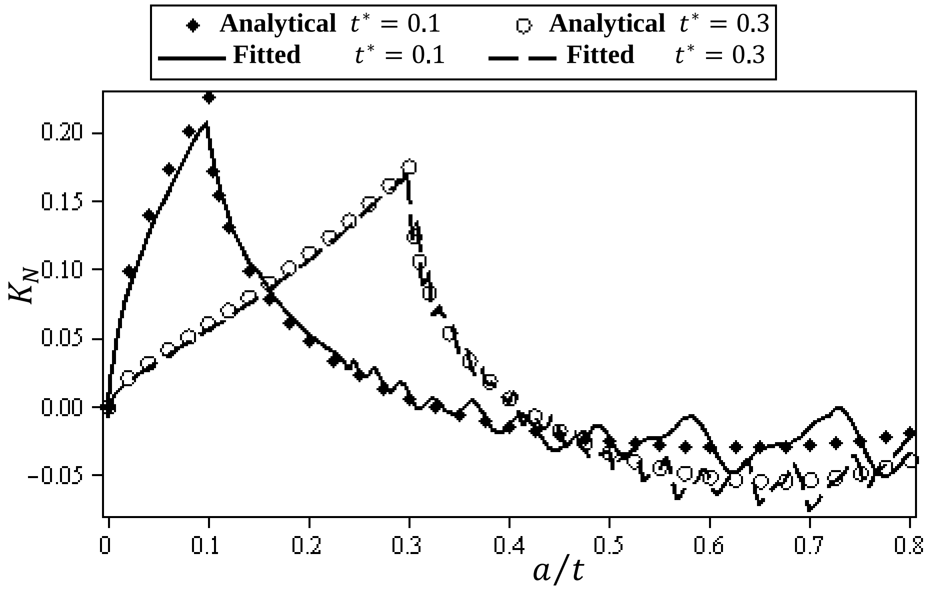
۲-۴-۱ صفحه حاوی ترک نیم‌بیضوی

مطابق شکل ۲-۱ صفحه‌ای به ضخامت واحد در نظر گرفته شده است. شوک گرمایی به سطح شامل ترک صفحه ($x = 0$) به‌صورت کاهش دما $T_0 = -100°\mathrm{C}$ اعمال می‌شود. دمای سطح دیگر صفحه ($x = t$) در صفر ثابت است. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\nu = 0.3$، مدول برشی $G = 80$ MPa، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times$

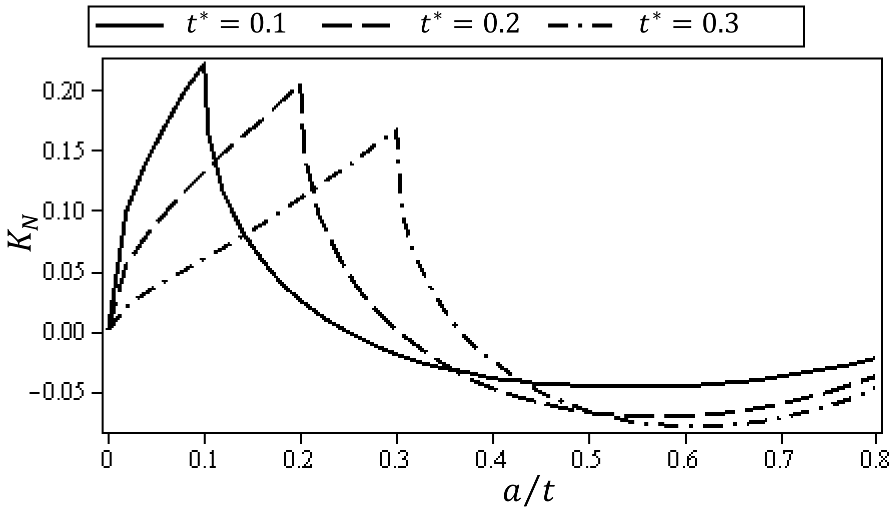
$10^{-6}\ ^1/_{°C}$ و ضریب پخش گرمایی $10^{-5}\ ^{m^2}/_{s}$ در نظر گرفته شده است. در نتایج ارائه-شده، ضریب شدت تنش به‌صورت زیر بی‌بعد شده است:

$$K_N = \frac{K}{E\alpha T_0/(1-\nu)\sqrt{\pi a/Q}} \qquad ۱۸-۲$$

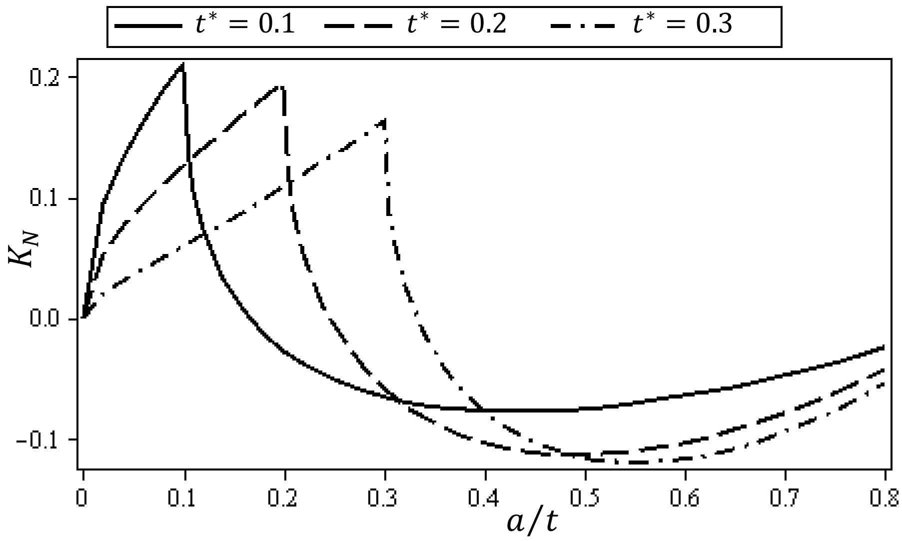
در شکل ۲-۴ ضریب شدت تنش عمق ترک با استفاده از دو عبارت تنش تحلیلی (رابطه ۲-۱۱) و توزیع تنش برازش شده (رابطه ۲-۱۶) در رابطه تابع وزنی با یکدیگر مقایسه شده است. برای هر دو توزیع تنش، ضریب شدت تنش با انتگرال‌گیری عددی با روش سیمپسون ⅜ به‌دست آمده است. ناحیه انتگرال‌گیری به ۱۰۰۰ قسمت مساوی تقسیم شده است. نتایج تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند. تغییرات ضریب شدت تنش با کاربرد توزیع تنش تحلیلی با نوسان همراه است که به تغییرات توزیع تنش مربوط می‌شود. برای ترک‌هایی که پیشانی موج تنش از نوک آن‌ها عبور کرده است، ضریب شدت تنش متناسب با طول ترک افزایش می‌یابد. اما در ترک‌هایی که موج تنش به نوک آن‌ها نرسیده است، تنش در بخشی از سطح انتهایی ترک –بین محل پیشانی موج و نوک ترک- فشاری است که باعث بسته شدن سطوح ترک و کاهش ضریب شدت تنش می‌شود. بنابراین، در زمان-های ابتدایی اعمال شوک گرمایی برای یک ترک ضریب شدت تنش بیشینه زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک آن برسد. در شکل‌های ۲-۵ و ۲-۶ ضریب شدت تنش عمق ترک برای دو نسبت قطرهای ترک a/c=0.4 و a/c=1 در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. با توجه به شکل‌های ۲-۴، ۲-۵ و ۲-۶ رفتار ترک‌های با عمق کم مشابه است و نسبت قطرهای ترک (a/c) بر ضریب شدت تنش ترک‌های کم‌عمق اثر چندانی ندارد.



شکل ۲-۴- مقایسه ضریب شدت تنش در عمق ترک برای توزیع تنش تحلیلی و برازش‌شده و *a/c*=0.2

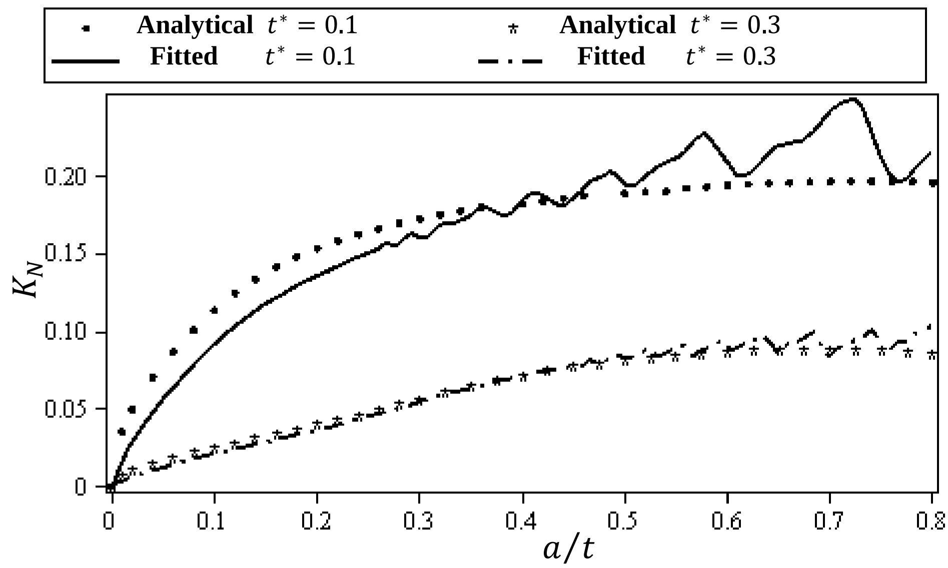


شکل ۲-۵- ضریب شدت تنش در عمق ترک برای *a/c*=0.4

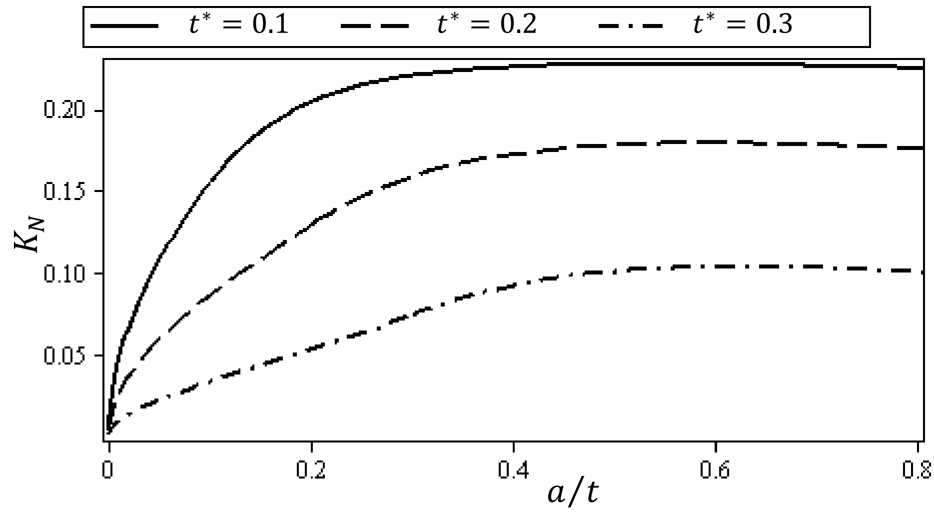


شکل ۲-۶- ضریب شدت تنش در عمق ترک برای *a/c*=1

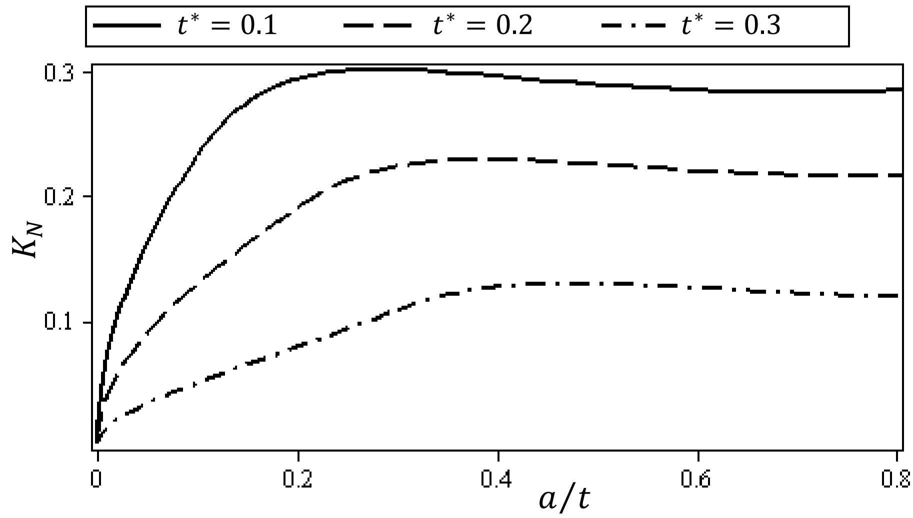
ضریب شدت تنش گوشه ترک با استفاده از دو عبارت تنش تحلیلی (رابطه ۲-۱۱) و توزیع تنش برازش شده (رابطه ۲-۱۶) در رابطه تابع وزنی برای دو زمان مشخص ,*t**=0.1 0.3 با یکدیگر مقایسه شده است. برای هر دو توزیع تنش، ضریب شدت تنش با انتگرال-گیری عددی با روش سیمپسون ⅜ به‌دست آمده است. نتایج نشان می‌دهد، در یک زمان مشخص ضریب شدت تنش در گوشه ترک برحسب عمق آن (*a/t*) به‌طور یکنوا افزایشی است.



شکل ۲-۷- مقایسه ضریب شدت تنش گوشه ترک برای توزیع تنش تحلیلی و برازش‌شده و *a/c*=0.2



شکل ۲-۸- ضریب شدت تنش در گوشه ترک برای a/c=0.4



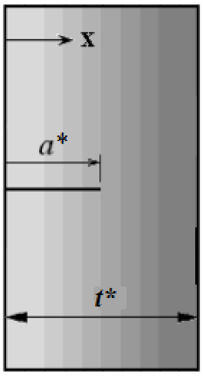
شکل ۲-۹- ضریب شدت تنش در گوشه ترک برای a/c=1

در شکل‌های ۲-۸ و ۲-۹ ضریب شدت تنش گوشه ترک برای دو نسبت قطرهای ترک a/c=0.4 و a/c=1 در زمان‌های مختلف نشان داده شده است. با توجه به نمودارهای مربوط به گوشه ترک، در ترک‌های با نسبت قطر بزرگتر ضریب شدت تنش گوشه -برخلاف عمق ترک- بیشتر است.

۲-۴-۲ باریکه شامل ترک لبه‌ای

یک باریکه‌ی به اندازه کافی بلند به ضخامت واحد (در فضای بی‌بعد) در راستای x و حاوی یک ترک لبه‌ای به طول a^* (در فضای بی‌بعد) در سطح x=0 در نظر گرفته می‌شود (مطابق

شکل ۲-۱۰). شوک گرمایی به لبه شامل ترک ($x = 0$) به‌صورت کاهش دما $T_0 = -100°C$ اعمال می‌شود. دمای لبه دیگر ($x = t$) در صفر ثابت است. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\nu = 0.3$، مدول برشی $G = 80$ MPa، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ {}^{1}/_{°C}$ و ضریب پخش گرمایی $10^{-5}\ {}^{m^2}/_{s}$ در نظر گرفته شده است.



شکل۲-۱۰- هندسه باریکه شامل یک ترک لبه‌ای

برای هندسه مذکور، تابع وزنی به شکل زیر است [۳۵].

$$m(x^*, a^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(a^* - x^*\right)}}\left[1 + M_1\left(\frac{a^* - x^*}{a^*}\right)^{1/2} + M_2\left(\frac{a^* - x^*}{a^*}\right)^2\right] \quad , \quad 0 \le a^* \le 0.5$$ ۲-۱۹

که در آن،

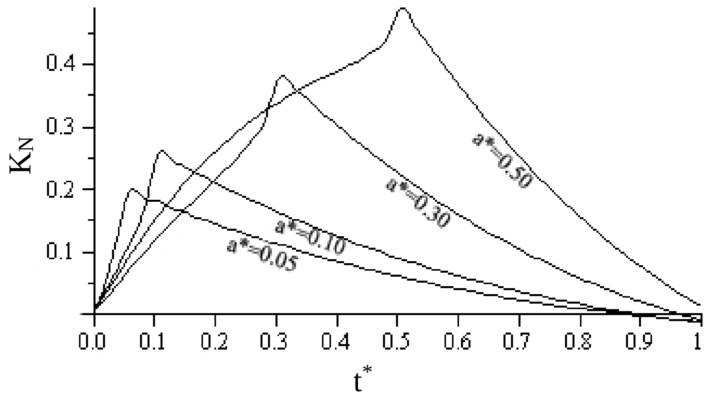
$$M_1 = 0.6147 + 17.1844\left(a^*\right)^2 + 8.7822\left(a^*\right)^6$$ ۲-۲۰- الف

$$M_2 = 0.2502 + 3.2899\left(a^*\right)^2 + 70.0444\left(a^*\right)^6$$ ۲-۲۰- ب

در شکل ۲-۱۱، نمودار ضریب شدت تنش بی‌بعد برای طول ترک‌های متفاوت آمده است.

با توجه شکل ۲-۱۱ در طول ترک‌های مشخص، با افزایش زمان، ضریب شدت تنش افزایش می‌یابد تا به مقدار بیشینه برسد و سپس، کاهش می‌یابد. در نتایج ارائه‌شده، ضریب شدت تنش به‌صورت زیر بی‌بعد شده است:

$$K_N = \frac{K}{E\alpha T_0/(1-\upsilon)\sqrt{l_0}}$$ ۲-۲۱



شکل ۲-۱۱- ضریب شدت تنش در باریکه برحسب زمان (t^*) برای طول ترک متفاوت

فصل ۳

ضریب شدت تنش در استوانه حاوی ترک نیم‌بیضوی طولی

۳-۱ مقدمه

وجود عیوب و ترک‌های سطحی یکی از مسائل معمول در سازه‌های مدور مثل لوله‌ها و مخازن تحت فشار است. ارزیابی دقیق ایمنی و تخمین عمر این سازه‌ها مستلزم بررسی رفتار ترک می‌باشد. در این فصل، ضریب شدت تنش برای عمق و گوشه یک ترک نیم-بیضوی طولی در یک استوانه جدار ضخیم با کاربرد روش تابع وزنی و یک عبارت تحلیلی تعیین و با انتگرال‌گیری عددی ارزیابی شده است که تحت بارگذاری حرارتی غیرفوریه‌ای (هذلولوی) قرار دارد.

۳-۲ میدان‌های ترموالاستیسیته در استوانه بدون ترک

در این بخش، میدان‌های دما و تنش در یک استوانه با شعاع‌های داخلی R_i و خارجی R_o و به اندازه کافی بلند به‌دست می‌آید که تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی به‌صورت متقارن محوری قرار دارد. از کوپل میدان‌های کرنش و دما و همچنین نیروهای اینرسی صرف‌نظر می‌شود. معادلات حاکم ترموالاستیسیته شبه‌استاتیکی در حالت کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\rho c \tau_q \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \qquad ۳-۱$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \qquad ۳-۲$$

که در آن، $\beta = \alpha(1+\nu)/(1-\nu)$ ، α ضریب انبساط گرمایی، ν ضریب پواسون، k ضریب هدایت گرمایی، c ظرفیت گرمایی، u میدان جابه‌جایی و T میدان دما است. شرایط مرزی و اولیه دمایی به‌صورت زیر است.

$$T(R_i, t) = T_1 \qquad \text{۳-۳- الف}$$

$$T(R_o, t) = 0 \qquad \text{۳-۳- ب}$$

$$T(r, 0) = 0 \qquad \text{۳-۳- ج}$$

$$\frac{\partial T(r,0)}{\partial t} = 0 \qquad \text{۳-۳- د}$$

همچنین، اعمال فشار داخلی P_i و خارجی P_o یکنواخت به استوانه به‌صورت شرایط مرزی مکانیکی بیان می‌شود.

$$\sigma_r(R_i, t) = -P_i \qquad \text{۳-۴- الف}$$

$$\sigma_r(R_o, t) = -P_o \qquad \text{۳-۴- ب}$$

۳-۲-۱ میدان دما

میدان دما در استوانه بدون ترک از حل معادله هدایت گرمایی (رابطه ۳-۱) با توجه به شرایط اولیه و مرزی (رابطه ۳-۳) به‌دست می‌آید. رابطه هدایت گرمایی هذلولوی برحسب متغیرهای بی‌بعد به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial T}{\partial t^*} = \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial T}{\partial r^*}\right) \qquad \text{۳-۵}$$

که در آن،

$$t^* = t/\tau_q \qquad \text{۳-۶- الف}$$

$$r^* = r/l_0 \qquad \text{۳-۶- ب}$$

$$l_0 = \sqrt{k\tau_q/\rho c} \qquad \text{۳-۶- ج}$$

میدان دما با حل رابطه هدایت گرمایی با استفاده از روش جداسازی متغیرها برحسب متغیرهای بی‌بعد r^* و t^* حاصل می‌شود.

$$T(r^*,t^*)=S(r^*)+\sum f_n\left(t^*\right)\Lambda_0\left(\lambda_n r^*\right)$$ ۳-۷

که در آن،

$$S\left(r^*\right)=T_1\frac{\ln\left(r^*/R_o\right)}{\ln\left(R_i/R_o\right)}$$ ۳-۸- الف

$$\omega_n=\sqrt{\lambda_n^2-0.25}$$ ۳-۸- ب

$$f_n(t^*)=e^{-\frac{t^*}{2}}\left(a_n\cos(\omega_n t^*)+b_n\sin(\omega_n t^*)\right)$$ ۳-۸- ج

$$\Lambda_0(\lambda_n r^*)=J_0\left(\lambda_n R_i\right)Y_0\left(\lambda_n r^*\right)-Y_0\left(\lambda_n R_i\right)J_0\left(\lambda_n r^*\right)$$ ۳-۸- د

در رابطه ۳-۸- ج، ضرایب a_n و b_n با توجه به خاصیت تعامد حل‌های معادله دیفرانسیل اشتروم-لیوویل به‌دست می‌آید.

$$a_n=\frac{\int_{R_i}^{R_o}r^*S\left(r^*\right)\Lambda_0\left(\lambda_n r^*\right)dr^*}{\int_{R_i}^{R_o}r^*\Lambda_0^2\left(\lambda_n r^*\right)dr^*}=-T_1\pi^2J_0^2\left(\lambda_n R_i\right)\left(\frac{2}{\pi}+\frac{\Lambda_0\left(\lambda_n R_i\right)}{\ln\left(R_i/R_o\right)}\right)/2\left(J_0^2\left(\lambda_n R_i\right)-J_0^2\left(\lambda_n R_o\right)\right)$$ ۳-۹- الف

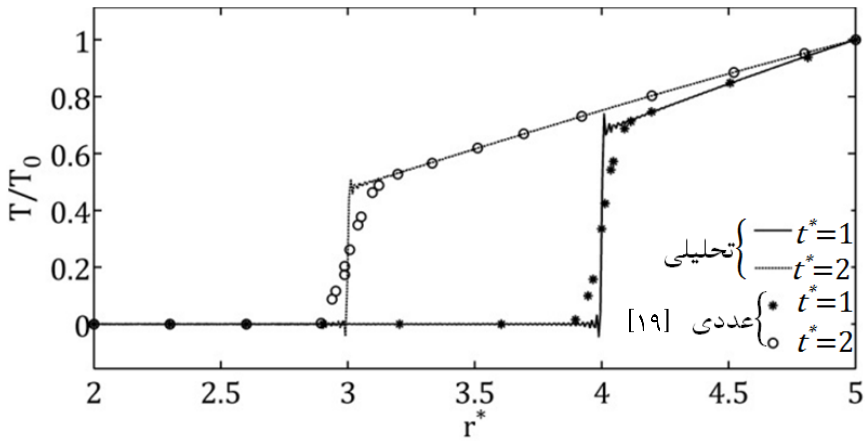
$$b_n=\frac{a_n}{2\omega_n}$$ ۳-۹- ب

ضرایب λ_n نیز ریشه‌های مثبت معادله مشخصه زیر می‌باشند.

$$J_0\left(\lambda_n R_i\right)Y_0\left(\lambda_n R_o\right)-Y_0\left(\lambda_n R_i\right)J_0\left(\lambda_n R_o\right)=0$$ ۳-۱۰

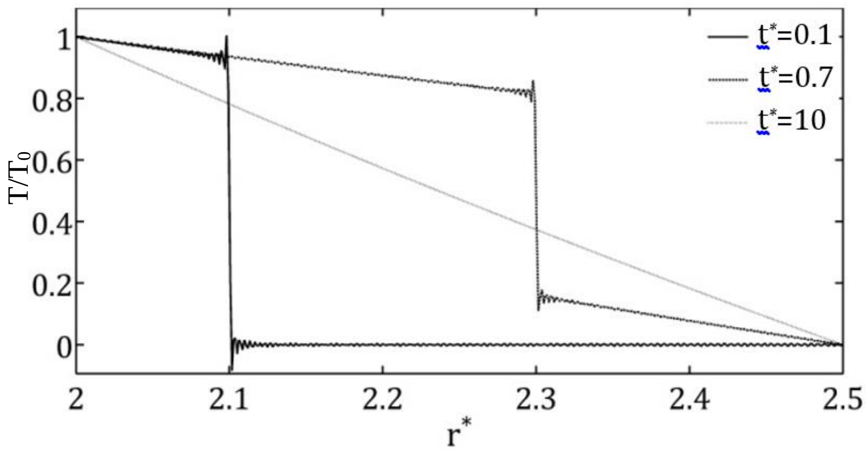
در شکل ۳-۱ توزیع دمای حاصل از رابطه ۳-۷ با نتایج عددی که ونگ و هان [۱۹] به‌دست آوردند، مقایسه شده است. در مرجع [۱۹]، نتایج عددی برای استوانه‌ای با شعاع‌های $R_i = 2$ و $R_o = 5$ در فضای بی‌بعد با کاربرد ۵۰۰ المان چهارگوش ۹گره‌ای در روش المان محدود برای گسسته‌سازی فضا و بکارگیری روش پسرو در روش تفاضل محدود برای گسسته‌سازی زمان به‌دست آمده است. در ابتدا، دمای سطح خارجی استوانه از دمای اولیه

استوانه (صفر) تا T_0 افزایش می‌یابد. هرچند کاربرد روش پسرو مثل روش‌های تفاضل مرکزی و پیشرو در تعیین توزیع دما باعث نوسان در نزدیکی موقعیت ناپیوستگی نمی‌شود، اما تغییر یکباره دما در پیشانی موج را در یک بازه ایجاد می‌نماید (دو روش دیگر پرش دما را صحیح‌تر مدل می‌کنند).



شکل ۳-۱- مقایسه توزیع دما در دیواره استوانه حاصل از رابطه تحلیلی (رابطه ۳-۷) و نتایج عددی [۱۹]

در شکل ۳-۲، توزیع دما در استوانه برای زمان‌های مختلف رسم شده است. با توجه به شکل ۳-۲، سرعت موج گرما در فضای بی‌بعد برابر واحد است.



شکل ۳-۲- توزیع دما در دیواره استوانه طبق حل تحلیلی مدل هدایت گرمایی هذلولوی

۳-۲-۲ میدان تنش

رابطه تعادل برحسب جابه‌جایی در جهت r به‌صورت بی‌بعد زیر قابل بیان است.

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial u^*}{\partial r^*}-\frac{u^*}{r^{*2}}-\beta\frac{\partial T}{\partial r^*}=0 \qquad ۱۱-۳$$

که در آن،

$$u^*=\frac{u}{l_o} \qquad ۱۲-۳$$

جابه‌جایی بی‌بعد u^* از حل رابطه ۳-۱۱ به‌دست می‌آید.

$$u^*\left(r^*,t^*\right)=\frac{\beta}{r^*}*\left[\frac{\left(1-2\nu\right)r^{*2}+R_i^2}{R_o^2-R_i^2}\int_{R_i}^{R_o}r^*T\left(r^*,t^*\right)dr^*+\int_{R_i}^{r^*}r^*T\left(r^*,t^*\right)dr^*\right]+A\left(t^*\right)r^*+\frac{B\left(t^*\right)}{r^*}=$$
$$\frac{\beta}{r^*}\{\frac{\left(1-2\nu\right)r^{*2}+R_i^2}{R_o^2-R_i^2}[\frac{T_1}{\ln(R_i^2/R_o^2)}\left(\frac{R_i^2}{4}-\frac{R_o^2}{4}-\frac{R_i^2}{4}\ln(R_i/R_o)\right)+\sum\frac{f_n(t^*)}{\lambda_n}\left(R_o\Lambda_1(\lambda_nR_o)-R_i\Lambda_1(\lambda_nR_i)\right)$$
$$+\frac{T_1}{\ln(R_i/R_o)}\left(\frac{r^*}{2}\ln(\frac{r^*}{R_o}-\frac{1}{2})-\frac{R_i^2}{2}\ln(\frac{r^*}{R_o}-\frac{1}{2})\right)+\sum\frac{f_n(t^*)}{\lambda_n}\left(r^*\Lambda_1(\lambda_n\bar{r})-R_i\Lambda_1(\lambda_nR_i)\right)]\}+A\left(t^*\right)r^*+\frac{B\left(t^*\right)}{r^*} \qquad ۱۳-۳$$

ثابت‌های A و B با اعمال شرایط مرزی مکانیکی به‌دست می‌آیند. برای بارگذاری حرارتی، تنش عمودی در راستای شعاعی در دیواره داخلی و خارجی استوانه برابر صفر است.

$$\sigma_r(R_i,t)=0 \qquad ۱۴-۳ \text{- الف}$$

$$\sigma_r(R_o,t)=0 \qquad ۱۴-۳ \text{- ب}$$

توزیع تنش محیطی در استوانه نیز به‌صورت زیر است.

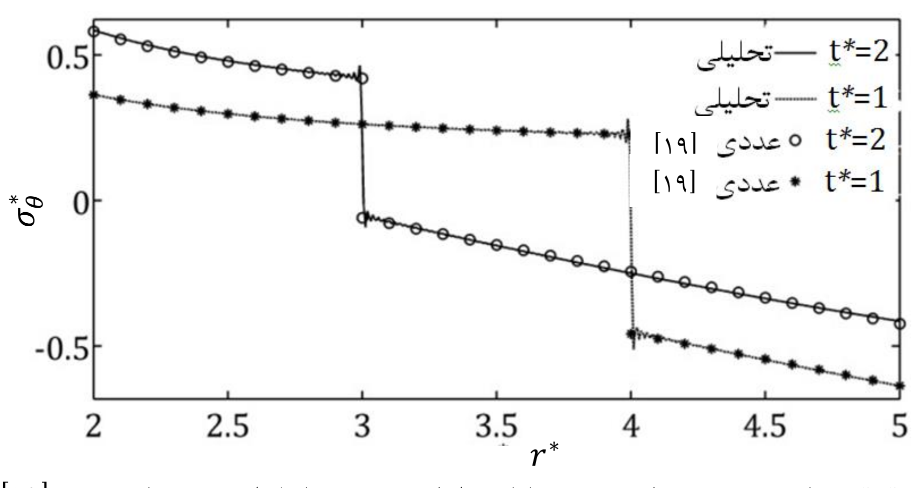
$$\sigma_\theta\left(r^*,t^*\right)/\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)=\frac{1+R_i^2/r^{*2}}{R_o^2-R_i^2}\int_{R_i}^{R_o}r^*T\left(r^*,t^*\right)dr^*+\frac{1}{r^{*2}}\int_{R_i}^{r^*}r^*T\left(r^*,t^*\right)dr^*-T\left(r^*,t^*\right)=$$
$$\frac{R_o^2+R_i^2}{R_o^2\left(R_o^2-R_i^2\right)}(\frac{T_1}{\ln\left(R_i/R_o\right)}\left(\frac{R_i^2-R_o^2}{4}-\frac{R_i^2}{2}\ln\left(\frac{R_i}{R_o}\right)\right)+$$
$$\sum\frac{1}{\lambda_n}f_n(t^*)(R_o\Lambda_1\left(\lambda_nR_o\right)-R_i\Lambda_1\left(\lambda_nR_i\right)))$$
$$+\frac{T_1}{\ln\left(R_i/R_o\right)}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{r^*}{R_o}-\frac{1}{2}\right)-\frac{R_i^2}{2R_o^2}\ln\left(\frac{r^*}{R_o}-\frac{1}{2}\right)\right]+ \qquad ۱۵-۳$$
$$\sum\frac{1}{\lambda_nr^{*2}}f_n(t^*)(r^*\Lambda_1\left(\lambda_nr^*\right)-R_i\Lambda_1\left(\lambda_nR_i\right))$$

توزیع تنش محیطی حاصل از رابطه تحلیلی ۳-۱۵ با توزیع تنش ناشی از توزیع دمای عددی [۱۹] در شکل ۳-۳ مقایسه شده است. توزیع تنش اخیر در مرجع [۱۹] نیامده و در اینجا با استفاده از توزیع دمای عددی [۱۹] (شکل ۳-۳) به‌دست آمده است. برای این-کار، دو منحنی بر توزیع دما در هر لحظه از ابتدا تا موقعیت دقیق ناپیوستگی و از ناپیوستگی تا انتهای بازه برازش شده است. نتیجه دو روش تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارد.

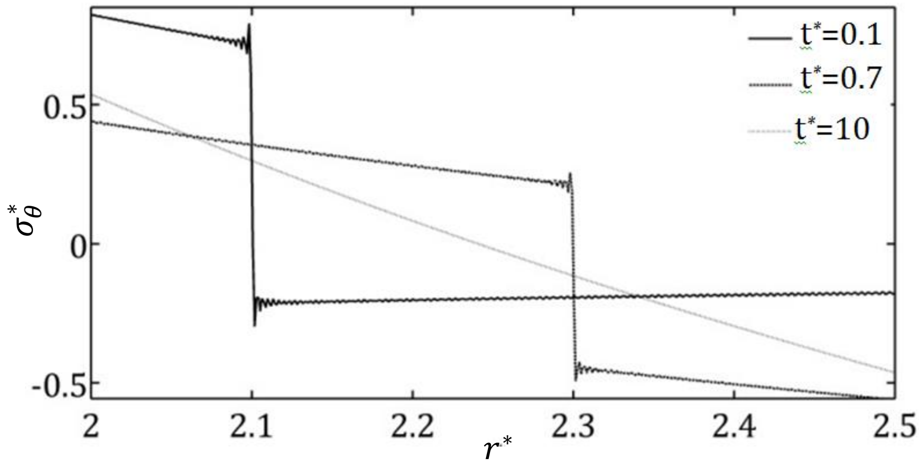
در شکل ۵، تغییرات تنش محیطی بی‌بعد در استوانه برای زمان‌های مختلف رسم شده است. تنش محیطی به‌صورت زیر بی‌بعد شده است.

$$\sigma_\theta^* = \sigma_\theta / \left(E\alpha T_1 / (1-\nu) \right) \qquad ۱۶-۳$$

تنش محیطی ناشی از توزیع دمای غیرفوریه‌ای با تنش حاصل از توزیع دمای فوریه‌ای تفاوت قابل توجهی دارد. اثر سرعت محدود موج تنش در نمودارها مشهود است. در زمان-های ابتدایی اعمال شوک گرمایی، تنش کششی در دیواره داخلی تا موقعیت پیشانی موج تنش به‌وجود می‌آید و در بخش دیگر دیواره تنش محیطی فشاری است.



شکل ۳-۳- مقایسه تنش محیطی بی‌بعد تحلیلی (رابطه ۳-۱۵) و حاصل از توزیع دمای عددی [۱۹].



شکل ۳-۴- توزیع تنش محیطی در دیواره استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

اما با گذشت زمان موج تنش مستهلک شده و نهایتا بر توزیع تنش حاصل از مدل فوریه منطبق می‌گردد (در شکل نشان داده نشده است).

۳-۳ تعیین ضریب شدت تنش با استفاده از روش تابع وزنی

۳-۳-۱ تابع وزنی برای گوشه‌ها و عمق ترک نیم‌بیضوی داخلی

تابع وزنی برای عمیق‌ترین نقطه یک ترک نیم‌بیضوی (نقطه A در شکل ۳-۵) در راستای طولی استوانه به‌صورت زیر است [۱۰].

$$m_A(r,a)=\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{R_i+a-r}}+M_{1A}\sqrt{\frac{2}{\pi a}}+M_{2A}\frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{a}\sqrt{R_i+a-r}+M_{3A}\sqrt{\frac{2}{\pi a^3}}\left(R_i+a-r\right) \qquad ۳-۱۷$$

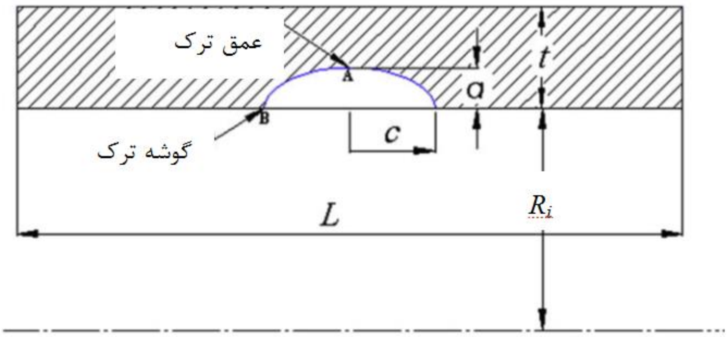
ثابت‌های مجهول $M_{iA}(i=1, 2, 3)$ با در نظر گرفتن دو بارگذاری مرجع (رابطه ۱-۱۵) و شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک $r=R_i$ تعیین می‌شوند [۱۰].

$$M_{1A}=\frac{2\pi}{\sqrt{2Q}}\left(3Y_1-Y_0\right)+\frac{24}{5} \qquad ۳-۱۸- الف$$

$$M_{2A}=3 \qquad ۳-۱۸- ب$$

$$M_{3A}=\frac{6\pi}{\sqrt{2Q}}\left(2Y_1-Y_0\right)+\frac{8}{5}$$ ۳-۱۸- ج

ضرایب تصحیح هندسه Y_0 و Y_1 به‌صورت توابعی از a/t و a/c برای $R_0/R_i = 1.25$ در مرجع [۱۰] آمده است.



شکل ۳-۵- هندسه استوانه شامل یک ترک نیم‌بیضوی طولی داخلی [۲۸]

تابع وزنی برای گوشه‌های یک ترک نیم‌بیضوی در راستای طولی استوانه (نقطه B در شکل ۳-۵) نیز به‌صورت زیر ارائه شده است.

$$n_B(r,a)=\frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}{\sqrt{r-R_i}}+N_{1B}\sqrt{\frac{4}{\pi a}}+N_{2B}\frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}{a}\sqrt{r-R_i}+N_{3B}\sqrt{\frac{4}{\pi a^3}}\left(r-R_i\right)$$ ۳-۱۹

ضرایب مجهول N_{iB} (i=1, 2, 3) با در نظرگرفتن دو بارگذاری مرجع (رابطه ۱-۱۸) و شرط صفر بودن تابع وزنی در نوک ترک به‌دست می‌آیند.

$$N_{1B}=\frac{3\pi}{\sqrt{Q}}\left(5F_1-3F_0\right)-8$$ ۳-۲۰- الف

$$N_{2B}=\frac{15\pi}{\sqrt{Q}}\left(2F_0-3F_1\right)+15$$ ۳-۲۰- ب

$$N_{3B}=\frac{3\pi}{\sqrt{Q}}\left(10F_1-7F_0\right)-8$$ ۳-۲۰- ج

که در آن، F_0 و F_1 ضرایب تصحیح هندسه به‌صورت توابعی از a/t و a/c می‌باشند.

۳-۳-۲ ضریب شدت تنش

با معلوم بودن تنش گرمایی به‌صورت یک تابع پیوسته از r و تابع وزنی، می‌توان ضریب شدت تنش را تعیین کرد.

$$K_A = \int_0^a \sigma_\theta m_A(\mathrm{r}, a)\, dr \qquad \text{(۳-۲۱- الف)}$$

$$K_B = \int_0^a \sigma_\theta n_B(\mathrm{r}, a)\, dr \qquad \text{(۳-۲۱- ب)}$$

به‌دلیل پیچیدگی عبارت تنش محیطی، انتگرال‌گیری از روابط ۳-۲۱ به‌طور تحلیلی امکان‌پذیر نیست. برای حل این مشکل، انتگرال‌گیری عددی در دو ناحیه توسط مفتخر و گلینکا [۳۶] و همچنین کشیاک و دیگران [۳۷] ارائه شده است. شاهانی و نبوی [۲۵] با استفاده از برازش دو تابع درجه دوم بر بخشی از عبارت تنش محیطی در هر زمان، یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش ارائه کردند. در اینجا، به‌منظور بیان یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش از برازش دو منحنی درجه دوم بر کل عبارت تنش محیطی استفاده شده است.

عبارت تحلیلی ضریب شدت تنش به‌ترتیب برای عمق و گوشه‌های ترک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$K_A = \int_0^\rho \sigma_{1x} m_A(\mathrm{x}, a)\, dx + \int_\rho^a \sigma_{2x} m_A(\mathrm{x}, a)\, dx = A_1 f_1(a,\rho) + B_1 f_2(a,\rho) + C_1 f_3(a,\rho) + A_2 f_4(a,\rho) + B_2 f_5(a,\rho) + C_2 f_6(a,\rho) \qquad \text{(۳-۲۲)}$$

$$K_B = \int_0^\rho \sigma_{1x} n_B(\mathrm{x}, a)\, dx + \int_\rho^a \sigma_{2x} n_B(\mathrm{x}, a)\, dx = A_1 h_1(a,\rho) + B_1 h_2(a,\rho) + C_1 h_3(a,\rho) + A_2 h_4(a,\rho) + B_2 h_5(a,\rho) + C_2 h_6(a,\rho) \qquad \text{(۳-۲۳)}$$

که در آن‌ها،

$$f_1 = \sqrt{8a/\pi}\left(1-\sqrt{1-\rho^*}\right) + \sqrt{a/\pi}\,\rho^* M_{1A} + \sqrt{8a/9\pi}\left(1-\sqrt{\left(1-\rho^*\right)^3}\right) M_{2A} + \sqrt{2a/\pi}\,\rho^*\left(1-0.5\rho^*\right) M_{3A} \qquad \text{(۳-۲۴- الف)}$$

$$f_2 = \sqrt{8a^3/9\pi}\left(\left(1-\sqrt{1-\rho^*}\right)\left(2+3R_i^*\right)-\rho^*\sqrt{1-\rho^*}\right)+\sqrt{a^3/2\pi}\,\rho^*\left(\rho^*+2R_i^*\right)M_{1A}+$$
$$\sqrt{8a^3/225\pi}\left(\left(2+5R_i^*\right)-\left(2+3\rho^*+5R_i^*\right)\sqrt{\left(1-\rho^*\right)^3}\right)M_{2A}+$$
$$\sqrt{a^3/18\pi}\,\rho^*\left(\left(3-2\rho^*\right)\rho^*+3\left(2-\rho^*\right)R_i^*\right)M_{3A}$$
۳-۲۴- ب

$$f_3 = \sqrt{8a^5/225\pi}\left(\left(2+20R_i^*+15R_i^{*2}\right)-\sqrt{1-\rho^*}\left(8(1+R_i^*)^2+4(1+R_i^*)(\rho^*+R_i^*)+3(\rho^*+R_i^*)^2\right)\right)+$$
$$\sqrt{2a^5/9\pi}\left(R_i^{*3}-(\rho^*+R_i^*)^3\right)M_{1A}+\sqrt{8a^5/105^2\pi}((8+28R_i^*+35R_i^{*2})-\left(2+3\rho^*+5R_i^*\right)-$$
$$\sqrt{1-\rho^*}\left(8+4\rho^*\right)+3\rho^{*2}\left(1-5\rho^*\right)+14R_i^*\left(2+\rho^*-\rho^{*2}\right)+35R_i^{*2}\left(1-\rho^*\right))M_{2A}-$$
$$4\sqrt{a^5/72\pi}(1+R_i^*)\left(\left(R_i^{*3}-(\rho^*+R_i^*)^3\right)+3\left((\rho^*+R_i^*)^4-R_i^{*4}\right)\right)M_{3A}$$
۳-۲۴- ج

$$f_4 = \sqrt{8a\left(1-\rho^*\right)/\pi}+\sqrt{2a/\pi}\left(1-\rho^*\right)M_{1A}+\sqrt{8a/9\pi}\sqrt{\left(1-\rho^*\right)^3}M_{2A}+\sqrt{a^3/2\pi}\left(1-\rho^*\right)^3M_{3A}$$
۳-۲۴- د

$$f_5 = \sqrt{2a^3/9\pi}\sqrt{1-\rho^*}\left(2+\rho^*+3R_i^*\right)+\sqrt{a^3/2\pi}\left(1-\rho^*\right)\left(1+\rho^*+2R_i^*\right)M_{1A}+\sqrt{8a^3/225\pi}\sqrt{\left(1-\rho^*\right)^3}$$
$$*\left(2+3\rho^*+5R_i^*\right)M_{2A}+\sqrt{a^3/18\pi}\left(1-\rho^*\right)^2\left(1+2\rho^*+3R_i^*\right)M_{3A}$$
۳-۲۴- ه

$$f_6 = \sqrt{8a^5/225\pi}\sqrt{1-\rho^*}\left(8+4\rho^*+3\rho^{*2}+20R_i^*+10R_i^*\rho^*+15R_i^{*2}\right)+\sqrt{2a^5/9\pi}((1+R_i^*)^3-$$
$$\left(\rho^*+R_i^*\right)^3)M_{1A}+\sqrt{8a^5/105^2\pi}\sqrt{1-\rho^*}(8+4\rho^*+3\rho^{*2}-15\rho^{*3}+14(2+\rho^*-3\rho^{*2})+$$
$$35R_i^{*2}(1-\rho^*))M_{2A}+\sqrt{a^5/72\pi}\left((1+R_i^*)^4-4(1+R_i^*)(\rho^*+R_i^*)^3+3(\rho^*+R_i^*)^4\right)M_{3A}$$
۳-۲۴- و

و

$$h_1 = 4\sqrt{\rho^* a/\pi}+\sqrt{8a/\pi}\,\rho^*N_{1B}+\sqrt{16a/9\pi}\sqrt{\rho^{*3}}N_{2B}+\sqrt{a/\pi}\,\rho^{*2}N_{3B}$$
۳-۲۵- الف

$$h_2 = \sqrt{16a^3/9\pi}\sqrt{\rho^*}\left(\rho^*+3R_i^*\right)+\sqrt{a^3/\pi}\,\rho^*\left(\rho^*+2R_i^*\right)N_{1B}+\sqrt{8a^3\rho^{*3}/225\pi}\left(3\rho^*+5R_i^*\right)N_{2B}+$$
$$\sqrt{a^3/9\pi}\,\rho^{*2}\left(2\rho^*+3R_i^*\right)N_{3B}$$
۳-۲۵- ب

$$h_3=\sqrt{16a^5/225\pi}\sqrt{\rho^*}\left(3\rho^{*2}+10R_i^*\rho^*+15R_i^{*2}\right)+\sqrt{4a^5/9\pi}\rho^*\left(\rho^{*2}+3R_i^*\rho^*+3R_i^{*2}\right)N_{1B}+$$
$$\sqrt{16a^5/105^2\pi}\sqrt{\rho^{*3}}\left(15\rho^{*2}+42R_i^*\rho^*+35R_i^{*2}\right)N_{2B}+\sqrt{a^5/36\pi}\rho^{*2}\left(3\rho^{*2}+8R_i^*\rho^*+6R_i^{*2}\right)\bar{N}_{3B}$$ ۳-۲۵ ج

$$h_4=4\sqrt{a/\pi}\left(1-\sqrt{\rho^*}\right)+2\sqrt{a/\pi}\left(\rho^*-1\right)N_{1B}+4\sqrt{a^3/9\pi}\left(1-\sqrt{\rho^{*3}}\right)N_{2B}+\sqrt{a/\pi}\left(1-\rho^{*2}\right)N_{3B}$$ ۳-۲۵ د

$$h_5=\sqrt{16a^3/9\pi}\left(\left(1+3R_i^*\right)-\sqrt{\rho^*}\left(\rho^*+3R_i^*\right)\right)+\sqrt{a^3/\pi}\left(1-\rho^*\right)\left(1+\rho^*+2R_i^*\right)N_{1B}+$$
$$\sqrt{16a^5/225\pi}\left(3-3\rho^{*^2}\sqrt{\rho^*}+5R_i^*\left(1-\rho^*\sqrt{\rho^*}\right)\right)N_{2B}+\sqrt{a^3/9\pi}\left(2\left(1-\rho^{*^3}\right)+3R_i^*\left(1-\rho^{*^2}\right)\right)N_{3B}$$ ۳-۲۵ ه

$$h_6=\sqrt{16a^5/225\pi}\sqrt{1-\rho^*}\left(\left(3\rho^{*2}+10R_i^*\rho^*+15R_i^{*2}\right)-\sqrt{\rho^*}\left(3\rho^{*2}+10R_i^*\rho^*+15R_i^{*2}\right)\right)+$$
$$\sqrt{4a^5/9\pi}\rho^*\left((1+R_i^*)^3-(\rho^*+R_i^*)^3\right)N_{1B}+\sqrt{16a^5/105^2\pi}(15\left(1-\rho^{*^3}\sqrt{\rho^*}\right)\rho^{*2}+42R_i^*\left(1-\rho^{*^2}\sqrt{\rho^*}\right)+$$
$$35R_i^{*2}\left(1-\rho^*\sqrt{\rho^*}\right))N_{2B}+\sqrt{a^5/36\pi}\rho^{*2}\left(3\left(1-\rho^{*^4}\right)\rho^{*2}+8R_i^*\left(1-\rho^{*^4}\right)+6R_i^{*2}\left(1-\rho^{*^2}\right)\right)N_{3B}$$ ۳-۲۵ و

در این روابط، ρ^* موقعیت ناپیوستگی تابع تنش می‌باشد که به‌صورت زیر بی‌بعد شده است.

$$\rho^*=\rho/a$$ ۳-۲۶- الف

$$R_i^*=R_i/a$$ ۳-۲۶- ب

۳-۴ صحت‌سنجی نتایج

به‌علت در دسترس نبودن نتایج مشابه منتشرشده، امکان ارزیابی مستقیم نتایج وجود ندارد. به همین دلیل، ضریب شدت تنش به دو روش محاسبه شده است:

الف- استفاده از روابط تحلیلی ۳-۲۲ و ۳-۲۳ که با کاربرد منحنی‌های درجه دوم برازش شده بر توزیع تنش (رابطه ۳-۱۵) به‌دست آمده است.

ب- با انتگرال‌گیری عددی از رابطه تابع وزنی (رابطه ۳-۲۱) که در ان از رابطه دقیق تنش (رابطه ۳-۱۵) استفاده شده است.

مقایسه نتایج با مقادیر گزارش‌شده در جدول‌های ۳-۱ و ۳-۲ دقت روش انتگرال‌گیری عددی —با توجه به رفتار مجانبی توابع وزنی در ابتدا/انتهای ترک- در حالت پایا را نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش با دو رابطه هدایت گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی —که باید در حالت پایا برهم منطبق شوند- به‌دست آمده است. در اینجا، فرض شده است سطح داخلی استوانه تحت فشار $P_i = 10\ \mathrm{MPa}$ و کاهش دمای $T(R_i, t) = -100\mathrm{°C}$ قرار دارد. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\nu = 0.3$، مدول برشی $G = 80\ \mathrm{MPa}$، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ {}^{1}/_{\mathrm{°C}}$ و ضریب پخش گرمایی $10^{-5}\ {}^{m^2}/_{s}$ با نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o\ /R_i = 1.25$ در نظر گرفته شده است. نزدیکی مقادیر محاسبه‌شده با نتایج منتشرشده، دقت روش انتگرال‌گیری عددی را تأیید می‌نماید. در بارگذاری مکانیکی-حرارتی پایا برای ترک‌های باریک‌تر (با a/c کوچکتر)، ضریب شدت تنش عمق ترک بزرگتر است. ضریب شدت تنش گوشه ترک با عمیق‌تر شدن ترک افزایش می‌یابد. برای $a/c=1$، ضریب شدت تنش گوشه تقریبا مستقل از عمق ترک است. در جدول‌های ۳-۱ و ۳-۲، داده‌ها به‌صورت زیر بی‌بعد شده‌اند.

$$K_N = \frac{K}{P_i\sqrt{\pi a / Q}} \qquad ۳-۲۷$$

جدول ۳-۱- مقایسه ضریب شدت تنش پایا برای عمق ترک

a/c	a/t	ضریب شدت تنش (K_N) هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای	 هدایت گرمایی فوریه‌ای	 نتایج منتشرشده [۲۵]
۰/۲	۰/۲	۲۰/۸۱	۲۰/۸۱	۲۰/۷۸
	۰/۴	۱۸/۷۸	۱۸/۸۰	۱۸/۷۶
	۰/۶	۱۷/۷۰	۱۷/۷۱	۱۷/۷۳
	۰/۸	۱۶/۴۰	۱۶/۴۰	۱۶/۴۸
۱	۰/۲	۱۸/۹۷	۱۸/۹۸	۱۸/۹۴
	۰/۴	۱۳/۵۱	۱۳/۵۳	۱۳/۵۰
	۰/۶	۸/۱۲	۸/۱۳	۸/۱۷
	۰/۸	۲/۸۰	۲/۷۹	۲/۸۹

جدول ۳-۲- مقایسه ضریب شدت تنش پایا برای گوشه ترک

a/c	a/t	ضریب شدت تنش (K_N) هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای	 هدایت گرمایی فوریه‌ای	 نتایج منتشرشده [۲۵]
۰/۲	۰/۲	۱۴/۱۳	۱۴/۱۲	۱۴/۱۴
	۰/۴	۱۵/۵۶	۱۵/۵۵	۱۵/۵۳
	۰/۶	۱۷/۹۱	۱۷/۹۱	۱۷/۸۷
	۰/۸	۲۰/۷۸	۲۰/۷۸	۲۰/۷۴
۱	۰/۲	۲۶/۰۳	۲۶/۰۱	۲۶/۰۳
	۰/۴	۲۵/۰۹	۲۵/۰۸	۲۵/۰۶
	۰/۶	۲۴/۵۵	۲۴/۵۵	۲۴/۴۹
	۰/۸	۲۴/۳۰	۲۴/۳۰	۲۴/۲۳

۳-۵ مطالعه موردی

۳-۵-۱ استوانه جدار ضخیم حاوی یک ترک نیم‌بیضوی طولی روی سطح داخلی

یک استوانه جدار ضخیم با طول به قدر کافی بلند و با نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i = 1.25$ در نظر گرفته می‌شود. سطح داخلی استوانه تحت کاهش دمای $T(R_i, t) = T_1 = -100°\mathrm{C}$ قرار می‌گیرد. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\nu = 0.3$، مدول برشی $G = 80\ \mathrm{MPa}$، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ {}^{1}/_{°\mathrm{C}}$ و ضریب پخش گرمایی $10^{-5}\ {}^{m^2}/_{s}$ در نظر گرفته شده و مسأله در حالت کرنش صفحه‌ای حل شده است. ضریب شدت تنش به‌صورت زیر بی‌بعد شده است.

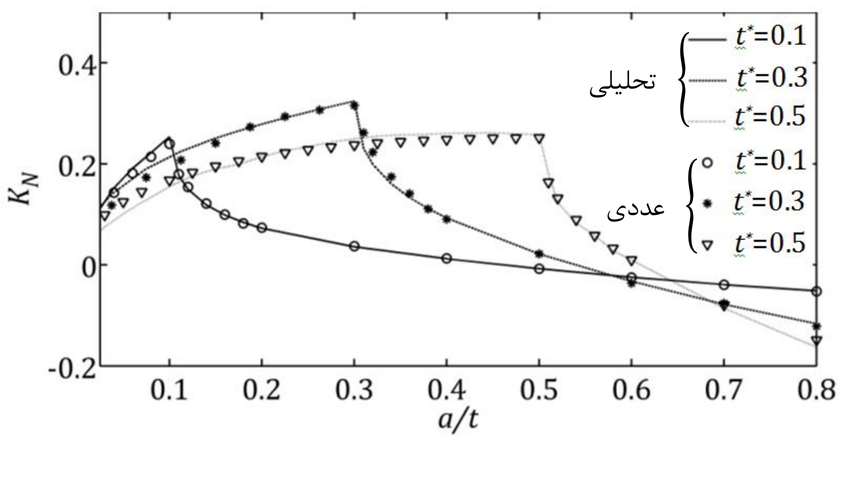
$$K_T = \frac{K}{E\alpha T_1\sqrt{l_0}\,/\,(1-\nu)} \tag{۳-۲۸}$$

در شکل ۳-۶ ضریب شدت تنش عمق ترک با استفاده از دو روش تحلیلی (روابط تحلیلی ۳-۲۲ و ۳-۲۳) و انتگرال‌گیری عددی از حاصل‌ضرب تابع وزنی و تنش تحلیلی (رابطه ۳-۱۵) برای سه زمان مشخص t*=0.1, 0.3, 0.5 و برحسب عمق نسبی ترک (*a/t*) مقایسه شده است. نتایج تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند. در یک زمان مشخص در ابتدای اعمال شوک گرمایی، سرعت محدود موج دما باعث تغییر دمای بخشی از دیواره داخلی و به تبع آن ایجاد تنش‌های کششی در این بخش می‌شود. در نتیجه، برای ترک-هایی که پیشانی موج تنش از نوک آن‌ها عبور کرده است، ضریب شدت تنش متناسب با طول ترک افزایش می‌یابد. اما در ترک‌هایی که موج تنش به نوک آن‌ها نرسیده است، تنش در بخشی از سطح انتهایی ترک –بین محل پیشانی موج و نوک ترک- فشاری است که باعث بسته شدن سطوح ترک و کاهش ضریب شدت تنش با افزایش طول ترک می-گردد. بنابراین، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی برای یک ترک ضریب شدت تنش بیشینه زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک آن برسد.

در جدول ۳-۳ مقدار و موقعیت ضریب شدت تنش بیشینه برای دو مدل در زمان‌های مشخص با هم مقایسه شده است. در ابتدای اعمال شوک، بیشینه ضریب شدت تنش در موقعیت ناپیوستگی موج تنش اتفاق می‌افتد و با سرعتی برابر با موج تنش در دیواره جابه-جا می‌شود.

در مدل فوریه ترک‌های عمیق‌تر زودتر تحت تأثیر شوک حرارتی قرار می‌گیرند. ضریب شدت تنش در ترک‌هایی که پیشانی موج به نوک آن‌ها نرسیده است، در مدل فوریه بزرگتر از مدل هذلولوی است.

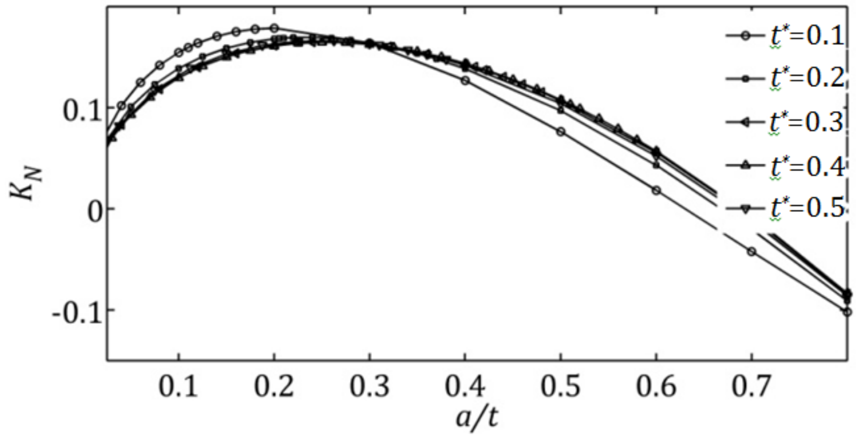
در شکل‌های ۳-۷ و ۳-۸ ضریب شدت تنش حاصل از کاربرد دو مدل هدایت گرمایی فوریه و هذلولوی در زمان‌های مشخص و برحسب عمق نسبی (a/t) ترک نشان داده شده است. تفاوت ناچیز منحنی‌ها در شکل ۳-۷ تغییر آهسته‌تر دما در مدل فوریه نسبت به مدل هذلولوی را نشان می‌دهد. طبق نتایج، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی، ضریب شدت تنش در دو مدل به‌ویژه مدل هذلولوی سریعا افزایش و سپس به‌تدریج کاهش می‌یابد. بیشینه آن در مدل هذلولوی به‌طور قابل توجهی بزرگتر از مدل فوریه است. بطوریکه، در $t^*=0.3$ بیشینه ضریب شدت تنش در مدل هذلولوی ۸۷٪ بزرگتر از مدل فوریه است. در $t^*=0.5$ این مقادیر ۴۷٪ اختلاف دارند.



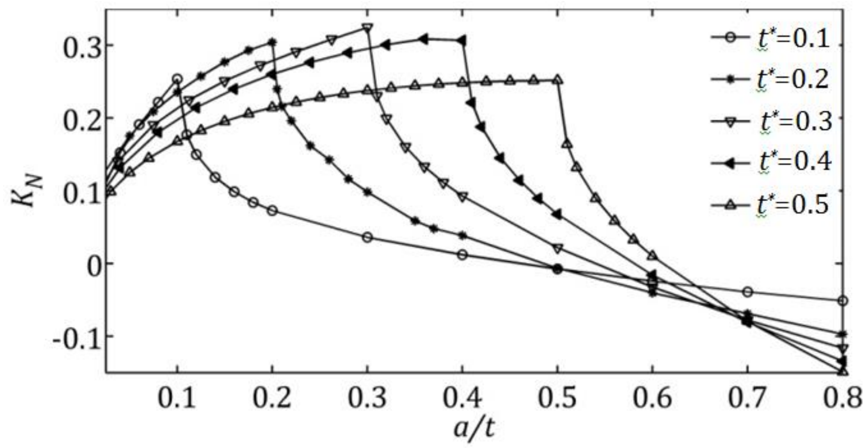
شکل ۳-۶- مقایسه مقادیر تحلیلی و عددی ضریب شدت تنش در عمق ترک برای $a/c=1.0$

جدول ۳-۳- بیشینه ضریب شدت تنش عمق ترک و محل وقوع آن برای دو مدل فوریه و هذلولوی در زمان‌های مختلف

زمان (t^*)	هدایت گرمایی هذلولوی	عمق ترک (a/t)	هدایت گرمایی فوریه-ای	عمق ترک (a/t)
۰/۱	۰/۲۵۳	۰/۱	۰/۱۸۷	۰/۱۸۴
۰/۲	۰/۳۱۲	۰/۲	۰/۱۷۷	۰/۲۱۱
۰/۳	۰/۳۲۴	۰/۳	۰/۱۷۳	۰/۲۲۴
۰/۴	۰/۳۰۷	۰/۴	۰/۱۷۲	۰/۲۳۰
۰/۵	۰/۲۵۲	۰/۵	۰/۱۷۱	۰/۲۳۲



شکل ۳-۷- ضریب شدت تنش در عمق ترک (مدل هدایت گرمایی فوریه و a/c=1.0)

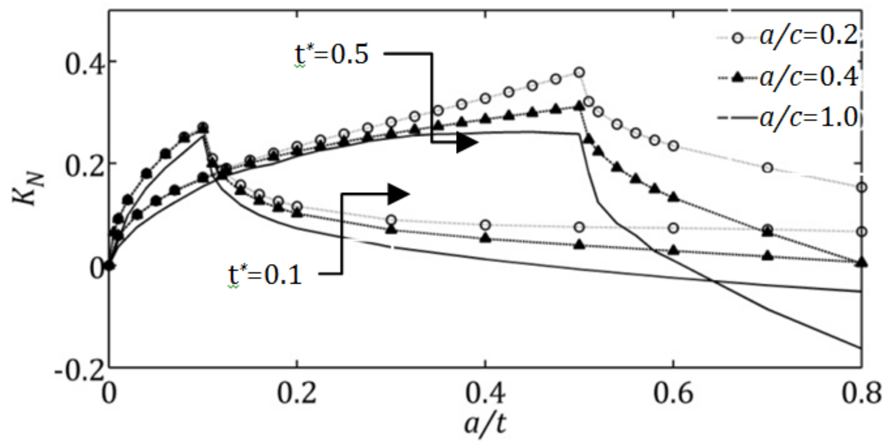


شکل ۳-۸- ضریب شدت تنش در عمق ترک برای مدل هدایت گرمایی هذلولوی و a/c=1.0

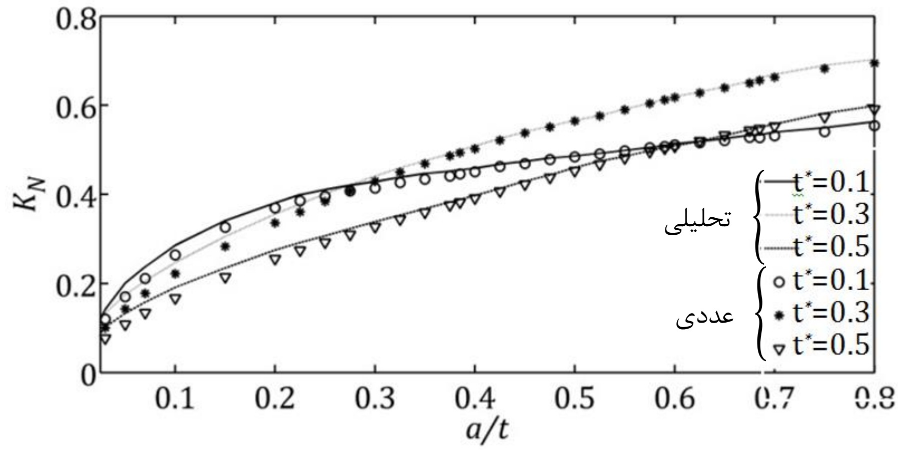
تغییرات ضریب شدت تنش برحسب عمق نسبی برای سه نسبت قطر a/c=0.2, 0.4 و 1.0 در زمان‌های 0.5 و0.1=t^* در شکل ۳-۹ نشان داده شده است. براساس این نتایج، رفتار ترک‌های با عمق کم مشابه است و نسبت قطرهای ترک (a/c) بر ضریب شدت تنش ترک-های کم‌عمق اثر چندانی ندارد. با گذشت زمان ترک‌های عمیق‌تری دارای رفتار مشابه می-باشند. مطابق نتایج، در t^*=0.1 ضریب شدت تنش ترک‌های تا عمق تقریبی a/t=0.175 دارای حداکثر ۱۰٪ اختلاف می‌باشند. در t^*=0.3 این عمق برابر a/t=0.225 (در شکل ۳-۹ نیامده است) و در t^*=0.5 تقریبا برابر a/t=0.3 است. به‌علاوه، در ترک‌های با عمق نسبی یکسان ترک‌های باریک‌تر (با a/c کمتر) دارای ضریب شدت تنش بزرگتری می-باشند. البته در صورت افزایش عمق ترک در این شرایط، نسبت قطر ترک افزایش می‌یابد که باعث کاهش ضریب شدت تنش در عمق ترک می‌شود.

ضریب شدت تنش گوشه ترک با استفاده از دو روش تحلیلی (رابطه ۳-۲۳) و انتگرال-گیری عددی از تابع وزنی برای سه زمان مشخص t^*=0.1, 0.3, 0.5 و برحسب عمق نسبی ترک (a/t) در شکل ۳-۱۰ نشان داده شده است. تطابق قابل قبول نتایج دو روش صحت رابطه تحلیلی را تأیید می‌کند. نتایج نشان می‌دهد، در یک زمان مشخص ضریب شدت تنش در گوشه ترک برحسب عمق آن (a/t) به‌طور یکنوا افزایشی است. از آنجا که در اکثر فرایندهای طراحی تنش‌های حرارتی به‌عنوان تنش‌های خودمتعادل در دسته تنش‌های ثانویه قرار می‌گیرند، تناسب ضریب شدت تنش گوشه با ابعاد و بیشتر شدن احتمال رشد ترک در طول سازه مهم است (در مواقع دیگر خودمتعادل بودن تنش حرارتی ایجاب می-کند تنش در بخشی از سازه فشاری باشد که در توقف رشد ترک تأثیر مثبت دارد). ضریب شدت تنش گوشه دو مدل هدایت گرمایی هذلولوی و فوریه در زمان‌های مشخص و برحسب عمق نسبی ترک (a/t) در شکل ۳-۱۱ مقایسه شده است. طبق نتایج، در گوشه

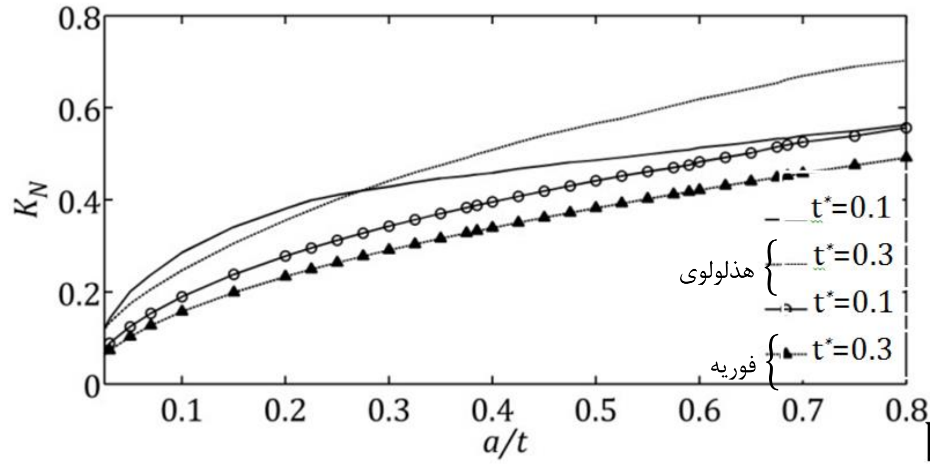
ترک –برخلاف عمق آن- ضریب شدت تنش هذلولوی همیشه از مدل فوریه بزرگتر است. بنابراین، احتمال گسیختگی سازه در اثر تنش‌های حرارتی در مدل هذلولوی بیشتر است.



شکل ۳-۹- مقایسه ضریب شدت تنش عمق ترک برای نسبت قطرهای مختلف



شکل ۳-۱۰- مقایسه مقادیر تحلیلی و عددی ضریب شدت تنش گوشه ترک

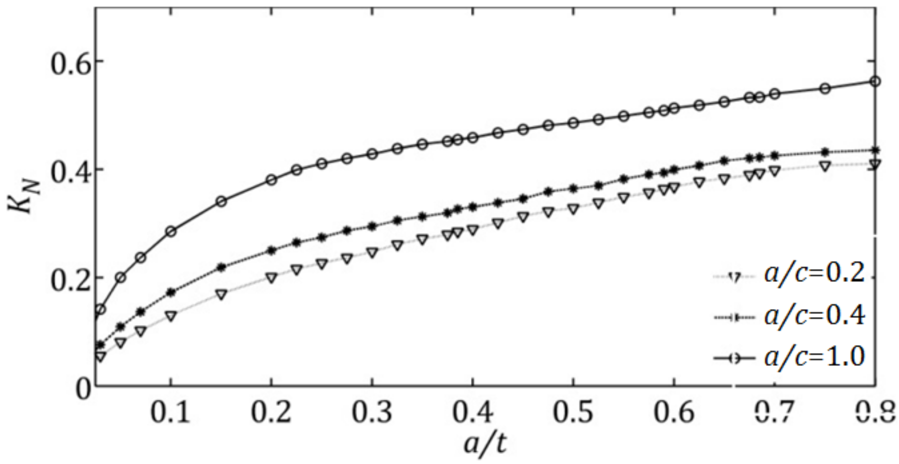


شکل ۳-۱۱- مقایسه ضریب شدت تنش در گوشه ترک برای مدل‌های هدایت گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی با a/c=1.0

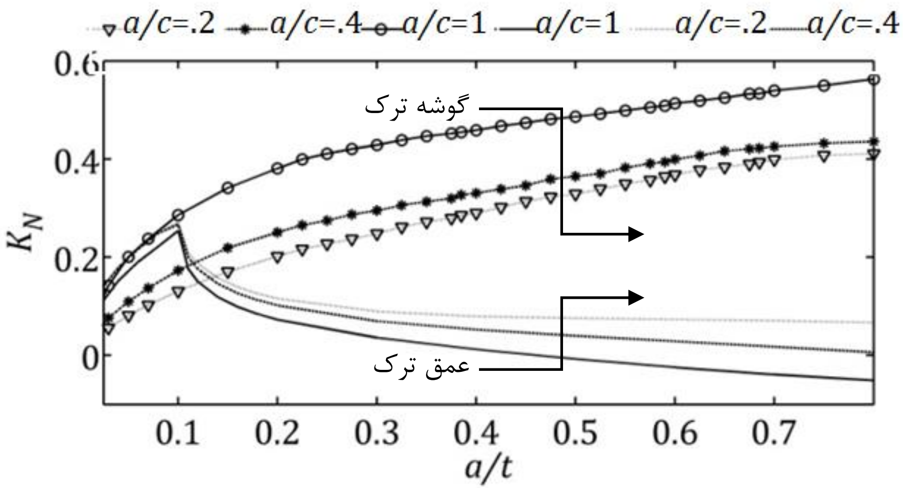
در شکل ۳-۱۲ ضریب شدت تنش گوشه ترک برای نسبت قطرهای مختلف در زمان t*=0.1 با یکدیگر مقایسه شده است. در ترک‌های با نسبت قطر بزرگتر ضریب شدت تنش گوشه -برخلاف عمق ترک- بیشتر است.

کاهش شدید ضریب شدت تنش عمق ترک برای ترک‌هایی که موج تنش به نوک آن‌ها نرسیده است و از طرفی افزایش متناسب ضریب شدت تنش گوشه با ابعاد ترک بزرگتر بودن ضریب شدت تنش گوشه نسبت به عمق ترک را امکان‌پذیر می‌کند. در شکل ۳-۱۳ ضریب شدت تنش عمق و گوشه ترک در زمان t*=0.1 برای مقادیر متفاوت نسبت قطر و عمق نسبی آمده است. طبق نتایج، برای نسبت قطر a/c=1.0 ضریب شدت تنش در گوشه ترک همیشه از مقدار آن در عمق بزرگتر است. اما برای نسبت قطرهای a/c=0.2, 0.4، ضریب شدت تنش عمق برای ترک‌های کم‌عمق بزرگتر است و برای ترک‌های عمیق‌تر، ضریب شدت تنش گوشه ترک بیشتر است.

عمق نسبی که بعد از آن ضریب شدت تنش گوشه از عمق ترک بیشتر می‌شود (عمق نسبی گذار)، در زمان‌ها و برای نسبت قطرهای مختلف در جدول ۳-۴ آمده است.



شکل ۳-۱۲- ضریب شدت تنش گوشه ترک برای نسبت قطرهای مختلف در t^*=0.1



شکل ۳-۱۳- مقایسه ضریب شدت تنش در عمق و گوشه ترک برای نسبت قطرهای مختلف

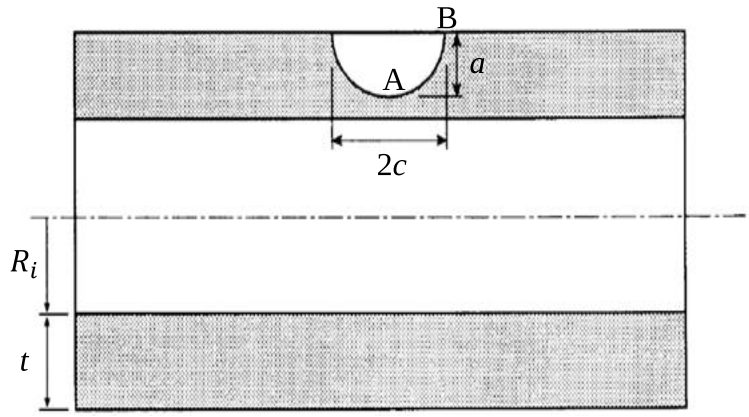
جدول ۳-۴- عمق نسبی گذار برای بیشینه ضریب شدت تنش از عمق ترک به گوشه

t^*	a/t a/c=0.2	a/c=0.4	a/c=1.0
۰/۱	۰/۱۳۷	۰/۱۱۴	–
۰/۲	۰/۲۳۹	۰/۲۰۹	–
۰/۳	۰/۳۳۷	۰/۳۰۴	–
۰/۴	۰/۴۳۴	۰/۴۰۲	–
۰/۵	۰/۵۱۱	۰/۳۹۲	–

چون ضریب شدت تنش عمق در ترک‌های با سطح بیشتر – در یک زمان و برای یک عمق ترک مشخص- کاهش شدیدتری دارد، افزایش سطح ترک باعث می‌شود ضریب شدت تنش گوشه در عمق ترک کمتری از ضریب شدت تنش عمق بیشتر گردد.

۳-۵-۲ استوانه حاوی ترک نیم‌بیضوی طولی روی سطح خارجی

تحقیقات لیو [۳۸] نشان می‌دهد با کاهش ضخامت دیواره استوانه ترک‌های خارجی نیز به اندازه ترک‌های داخلی می‌توانند خطرناک باشند. در این بخش، ضریب شدت تنش برای استوانه‌ای تعیین می‌شود که تحت گرمایش داخلی به‌صورت $T(R_i, t) = T_1 = 100°\mathrm{C}$ قرار دارد و شامل یک ترک نیم‌بیضوی طولی در سطح خارجی است (مطابق شکل ۳-۱۴).

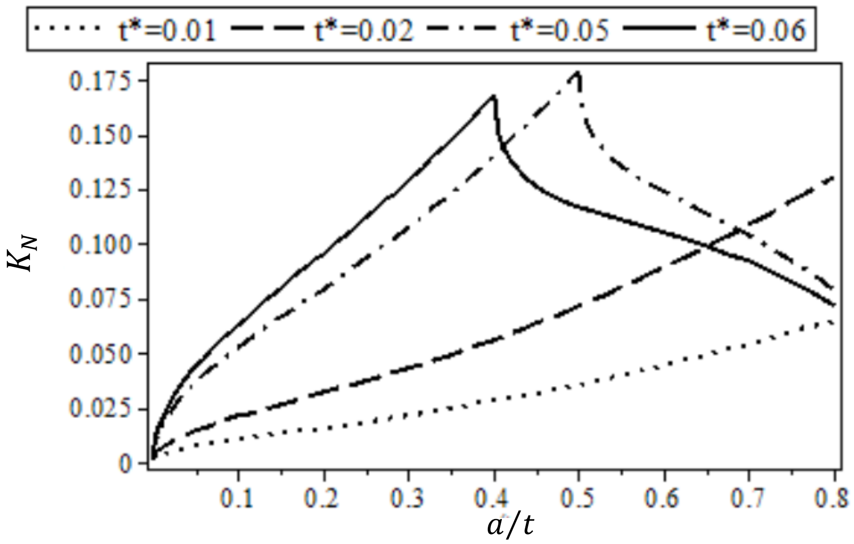


شکل ۳-۱۴- هندسه استوانه شامل یک ترک نیم‌بیضوی طولی خارجی [۳۴]

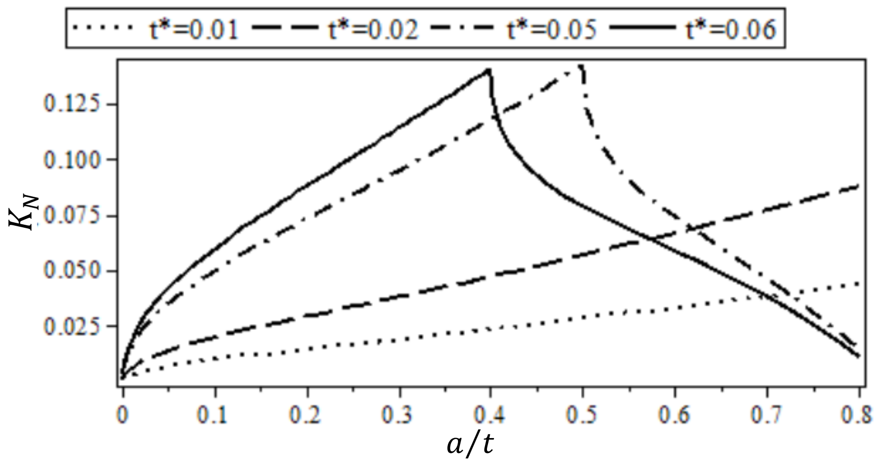
خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون ν=0.3، مدول برشی $G = 80$ MPa، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times 10^{-6}\, 1/°\mathrm{C}$ و ضریب پخش گرمایی $10^{-5}\, m^2/s$ با نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o\ /R_i = 1.1$ در نظر گرفته شده است. نمودار ضرایب شدت تنش بی‌بعد برای هندسه‌های مختلف ترک رسم شده است. در ادامه نمودارهای ضرایب شدت تنش برای مقادیر مختلف a/c برحسب عمق نسبی (a/t) آمده است. با اعمال دمای T_1 به دیواره داخلی، موج تنش از سطح داخلی شروع به حرکت می‌کند. توزیع تنش فشاری در سطح داخلی استوانه تا موقعیت پیشانی موج گرمایی اتفاق می‌افتد. در حالیکه

تنش در بقیه دیواره –که شامل ترک است- کششی است و باعث باز شدن دهانه ترک می‌شود. طبق نتایج، برای ترکی که پیشانی موج در موقعیت نوک آن قرار دارد؛ ضریب شدت تنش بیشینه است. علاوه براین، برای ترک‌های با نسبت قطر (a/c) کمتر، ضریب شدت تنش بزرگتر است.

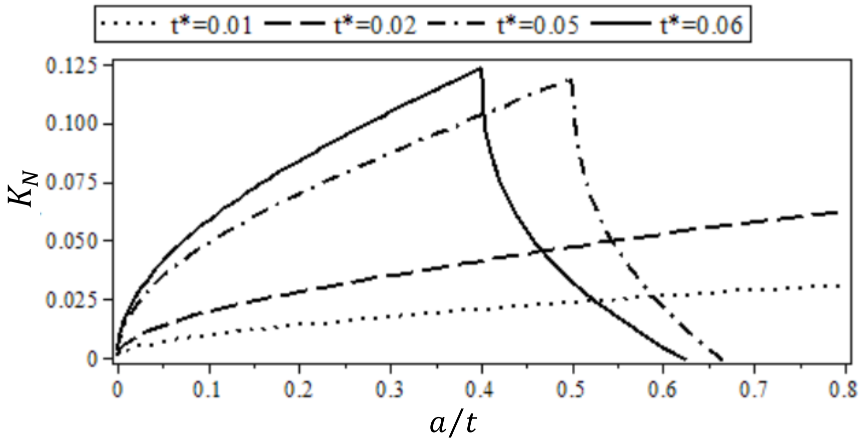
در زمان‌های ابتدایی که موج به نوک ترک نرسیده است، ضریب شدت تنش با عمق ترک متناسب است. با عبور موج تنش از نوک ترک، ضریب شدت تنش به شدت کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۱۵- ضریب شدت تنش در عمق ترک با $a/c = 0.2$

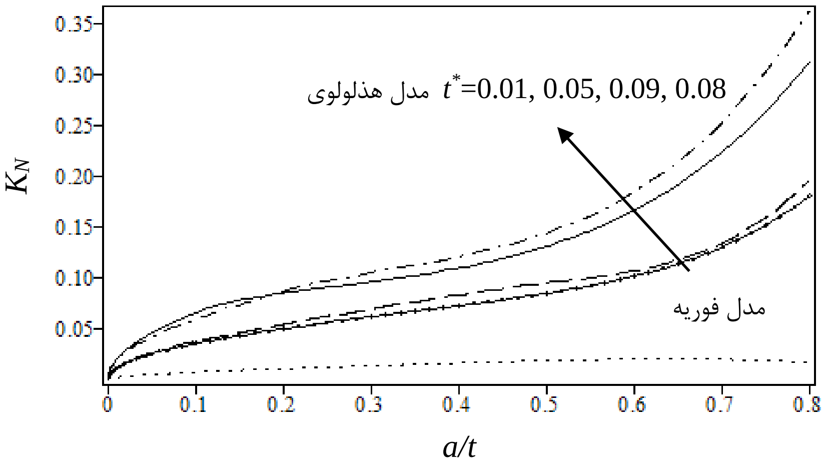


شکل ۳-۱۶- ضریب شدت تنش در عمق ترک با $a/c = 0.4$



شکل ۳-۱۷- ضریب شدت تنش در عمق ترک با $a/c = 1$

در شکل ۳-۱۸ ضریب شدت تنش در گوشه ترک برای a/c=0.4 و مدل هذلولوی در زمان‌های مختلف و مدل فوریه در t^*=0.05 نشان داده شده است. در زمان‌های ابتدایی که پیشانی موج تنش نزدیک دیواره داخلی است؛ برای ترک‌های کوتاه‌تر ضریب شدت تنش کوچکتر است. مطابق نتایج، ضریب شدت تنش حاصل از مدل هذلولوی به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از مقدار متناظر مدل فوریه است.



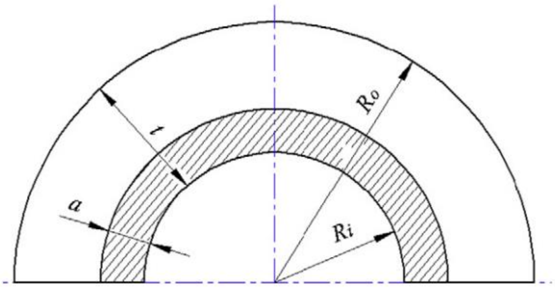
شکل ۳-۱۸- ضریب شدت تنش برای گوشه ترک با $a/c = 0.4$

فصل ۴

ضریب شدت تنش در استوانه حاوی ترک محیطی

۴-۱ مقدمه

نقص اتصال لوله‌ها به یکدیگر معمولا به‌صورت یک ترک محیطی (مطابق شکل ۴-۱) مدل می‌شود. در این فصل، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی در داخل یک استوانه جدار ضخیم با کاربرد روش تابع وزنی و یک عبارت تحلیلی تعیین و با انتگرال‌گیری عددی ارزیابی شده است که تحت بارگذاری حرارتی غیرکلاسیک (هذلولوی) قرار دارد.



شکل ۴-۱- یک ترک محیطی کامل در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم [۳۹]

۴-۲ معادلات ترموالاستیسیته حاکم

معادلات حاکم بر میدان‌های دما و تنش در استوانه بدون ترک با استفاده از روش جداسازی متغیرها، در فصل ۳ آمده است. در این فصل، معادله حاکم بر دما با استفاده از روش تبدیل انتگرالی محدود هنکل جل می‌شوند. در اینجا فرض می‌شود دمای سطح داخلی استوانه تا T_0 کاهش می‌یابد.

۴-۲-۱ میدان دما

تبدیل هنکل محدود برای تابع $f(r,t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{F}(\lambda_n,t) = H[f(r,t);\lambda_n] = \int_{R_i}^{R_o} rf(r,t)K(r,\lambda_n)dr \qquad ۴-۱$$

که در آن، λ_n پارامتر تبدیل و $K(r,\lambda_n)$ هسته تبدیل است. معادله با مشتقات جزئی هدایت گرمایی (رابطه ۳-۵) با اعمال تبدیل هنکل محدود به یک معادله دیفرانسیل معمولی برحسب زمان تبدیل می‌شود. پس از تبدیل هنکل محدود، معادله هدایت گرمایی (رابطه ۳-۵) به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\frac{d^2\bar{F}}{dt^{*2}}+\frac{d\bar{F}}{dt^*}+\lambda_n^2\bar{F}=T_0R_i^*K(R_i^*,\lambda_n)$$ ۲-۴

که در آن، هسته تبدیل $K(r^*, \lambda_n)$ براساس معادله حاکم و شرایط مرزی به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

$$K(r^*,\lambda_n)=J_0(\lambda_n r^*)Y_0(\lambda_n R_i^*)\ -J_0(\lambda_n R_i^*)Y_0(\lambda_n r^*)$$ ۳-۴

پارامتر تبدیل λ_n نیز ریشه‌های مثبت معادله زیر است.

$$J_0(\lambda_n R_o^*)Y_0(\lambda_n R_i^*)-J_0(\lambda_n R_i^*)Y_0(\lambda_n R_o^*)=0$$ ۴-۴

از طرفی، عبارت غیرهمگنی (طرف راست) معادله ۴-۲ با توجه به خصوصیات تابع بسل ساده می‌شود.

$$T_0R_iK(R_i,\lambda_n)=-\frac{2}{\pi}T_0$$ ۵-۴

حل معادله ۴-۲ به‌صورت زیر است.

$$\bar{F}(t^*,\lambda_n)=-\frac{4}{\pi\sqrt{4\lambda_n^2-1}}T_0\int_0^{t^*}e^{-\frac{t^*-\tau}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n^2-1}}{2}(t^*-\tau)\right)d\tau$$ ۶-۴

تبدیل هنکل معکوس به‌صورت زیر است.

$$f(r,t)=H^{-1}[\bar{F}(\lambda_n,t);r]\ =\sum a_nK(r,\lambda_n)\bar{F}(\lambda_n,t)$$ ۷-۴

ضرایب a_n با توجه به تعامد حل‌های معادله اشتروم- لیوویل تعیین می‌شود.

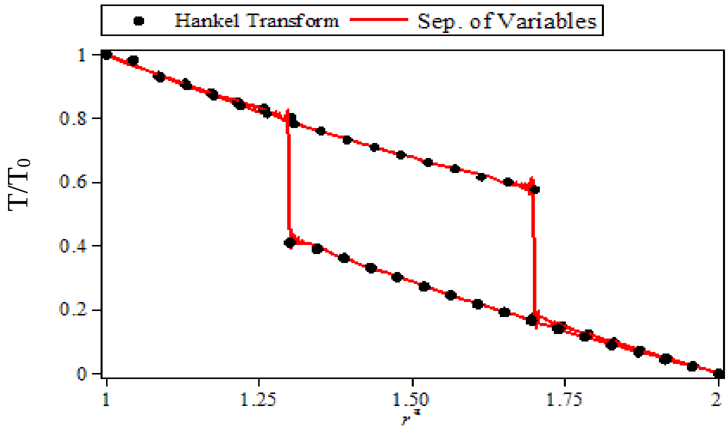
$$a_n=\frac{1}{\int_{R_i}^{R_o}K^2(r,\lambda_n)dr}$$ ۸-۴

با استفاده از تبدیل هنکل معکوس، توزیع دما به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}T(r^*,t^*)&=\sum a_nK(r^*,\lambda_n)\bar{F}(\lambda_n,t)\\&=-2\pi T_0\sum\frac{1}{\sqrt{4\lambda_n^2-1}}\frac{\lambda_n^2J_0^2(\lambda_nR_o^*)}{J_0^2(\lambda_nR_i^*)-J_0^2(\lambda_nR_o^*)}\\&\left(J_0(\lambda_nr^*)Y_0(\lambda_nR_i^*)-J_0(\lambda_nR_i^*)Y_0(\lambda_nr^*)\right)\\&\int_0^{t^*}e^{-\frac{t^*-\tau}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n^2-1}}{2}(t^*-\tau)\right)d\tau\end{aligned}$$ ۹-۴

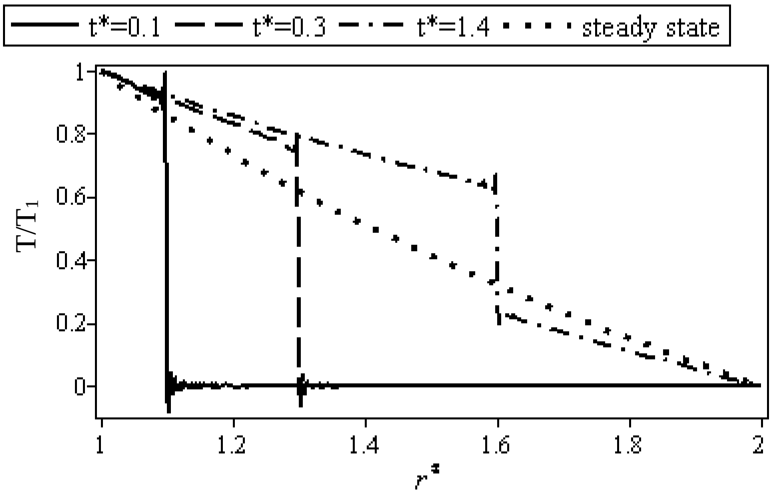
در شکل ۴-۲، توزیع دما دو روش تبدیل هنکل محدود و جداسازی متغیرها برای زمان‌های t^*=1.3 و t^*=1.7 با هم مقایسه شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، نتیجه

دو روش انطباق قابل قبولی با یکدیگر دارد. منحنی‌ها با در نظر گرفتن ۳۰۰ جمله رابطه مربوطه رسم شده است.



شکل ۴-۲- مقایسه توزیع دما در دیواره استوانه با استفاده از روش‌های تبدیل هنکل و جداسازی متغیرها

در شکل ۴-۳، توزیع دما در استوانه برای زمان‌های مختلف رسم شده است. سرعت محدود موج گرمایی در توزیع دما برای $t^*=0.1$ به‌خوبی مشهود است. در نقاط ناحیه اثر موج گرمایی، دما تغییر کرده است؛ در حالیکه نقاط بین پیشانی موج و سطح خارجی استوانه هنوز در دمای اولیه قرار دارند. توزیع دما برای $t^*=1.4$ نیز برگشت موج گرمایی پس از برخورد با سطح خارجی استوانه را نشان می‌دهد. استهلاک موج گرمایی به‌صورت کاهش ارتفاع پیشانی موج از نکات قابل ذکر است که در مقایسه منحنی‌های مربوط به $t^*=.10$ و $t^*=.30$ دیده می‌شود.



شکل ۴-۳- توزیع دما در دیواره استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

۴-۲-۲ میدان تنش

توزیع تنش طولی در استوانه با فرض کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر است.

$$\sigma_z\left(r^*,t^*\right)=\left(\frac{E\alpha}{1-\nu}\right)\left\{\frac{2\nu}{R_o^2-R_i^2}\left[\frac{T_0}{\ln\left(R_i/R_o\right)}\left(\frac{R_i^2-R_o^2}{4}-\frac{R_i^2}{2}\ln\left(\frac{R_i}{R_o}\right)\right)+C_1-C_2\right]-T\left(r^*,t^*\right)\right\} \qquad ۴-۱۰$$

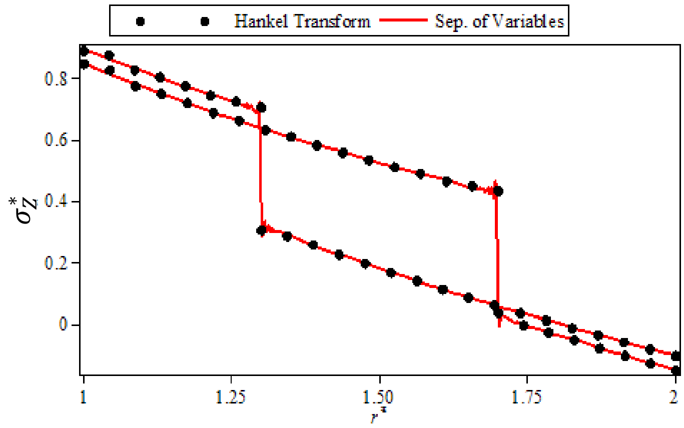
که در آن،

$$C_1=f_n\left(t^*\right)J_0\left(\lambda_nR_i\right)/\lambda_n\left(R_oY_1\left(\lambda_nR_o\right)-R_iY_1\left(\lambda_nR_i\right)\right) \qquad ۴-۱۱-\text{الف}$$

$$C_2=f_n\left(t^*\right)Y_0\left(\lambda_nR_i\right)/\lambda_n\left(R_oJ_1\left(\lambda_nR_o\right)-R_iJ_1\left(\lambda_nR_i\right)\right) \qquad ۴-۱۱-\text{ب}$$

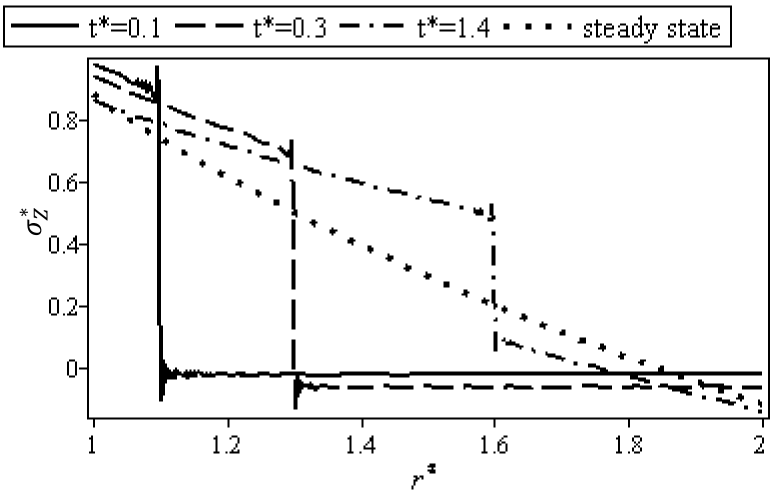
در شکل ۴-۴ توزیع تنش طولی حاصل از توزیع دمای دو روش تبدیل هنکل و جداسازی متغیرها با هم مقایسه شده که در آن، تنش طولی به‌صورت زیر بی‌بعد شده است.

$$\sigma_z^*=\frac{\sigma_z(1-\nu)}{E\alpha T_0} \qquad ۱۲-۴$$



شکل ۴-۴- مقایسه توزیع تنش طولی در دیواره استوانه با استفاده از روش‌های تبدیل هنکل و جداسازی متغیرها.

تغییرات تنش طولی بی‌بعد در استوانه برای زمان‌های مختلف در شکل ۴-۵ نشان داده شده است. تنش طولی ناشی از توزیع دمای غیرفوریه‌ای با تنش حاصل از توزیع دمای فوریه‌ای تفاوت قابل توجهی دارد. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک گرمایی، تنش طولی کششی در دیواره داخلی تا موقعیت پیشانی موج تنش به‌وجود می‌آید و در قسمتی از بخش دیگر دیواره، تنش طولی فشاری است. به محض اعمال شرط مرزی دمایی، تنش طولی تمام نقاط برخلاف دما تغییر می‌کند. این مسأله به‌خاطر اعمال شرایط نیرویی اتفاق می‌افتد. اما موقعیت ناپیوستگی در نمودارهای توزیع دما و تنش یکسان است.



شکل ۴-۵- توزیع تنش طولی در دیواره استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

۴-۳ ضریب شدت تنش

برای استوانه‌ای شامل یک ترک محیطی داخلی، توابع وزنی متعددی پیشنهاد شده است که دقت نتایج، کاربرد اغلب آن‌ها را به موارد خاص محدود می‌سازد. مشی و واتانابی [۴۰ و ۴۱] براساس تئوری پوسته‌ها و مدل‌سازی بخش ضعیف شده‌ی استوانه با فنر، یک تابع وزنی برای ترک محیطی در استوانه‌های جدار نازک ارائه کردند. نبوی و قاجار [۳۹] با کاربرد نتایج المان محدود، یک تابع وزنی چندجمله‌ای برای محدوده وسیعی از نسبت قطرهای خارجی به داخلی استوانه و یک تابع متعالی [۴۲] برای یک نسبت قطر مشخص را برای ترک محیطی به‌دست آوردند. ایشان با کاربرد توابع وزنی مذکور، یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش پایا به‌دست آوردند که منجر به نتایجی با دقت قابل قبول می‌شود.

۴-۳-۱ تابع وزنی

با درنظرگرفتن ضرایب شدت تنش مرجع (رابطه ۱-۱۵) و اعمال شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک، ثابت‌های مجهول M_i (i=1, 2, 3) به‌صورت زیر تعیین می-گردد.

$$M_1 = -\sqrt{2}\pi\left(-Y_1 + 3Y_2\right) - \frac{24}{5} \quad \text{(۴-۱۳- الف)}$$

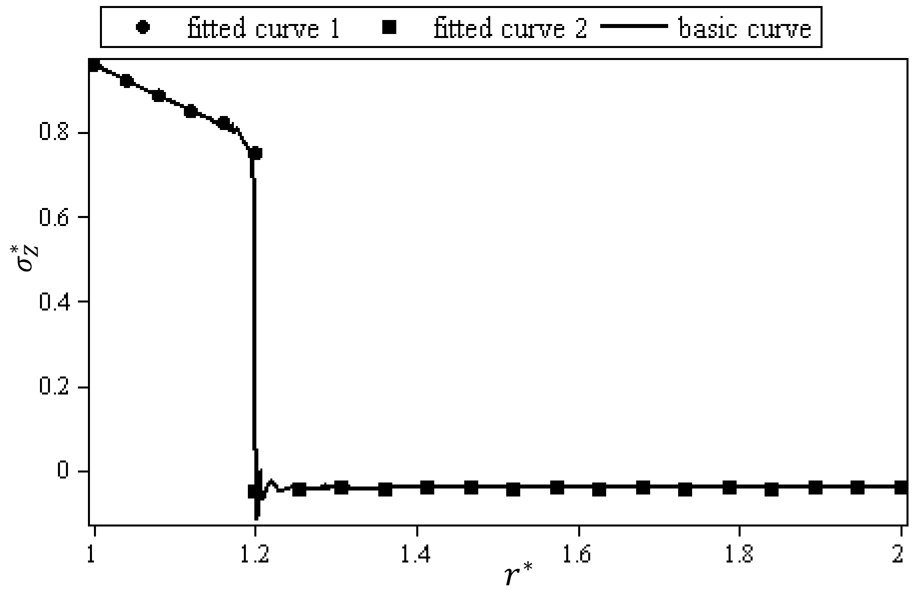
$$M_2 = 3 \quad \text{(۴-۱۳- ب)}$$

$$M_3 = 3\sqrt{2}\pi\left(Y_1 - 2Y_2\right) + \frac{8}{5} \quad \text{(۴-۱۳- ج)}$$

ضرایب تصحیح هندسه Y_1 و Y_2 به‌صورت توابعی از عمق نسبی ترک (a/t) و ضخامت دیواره (R_o/R_i) به‌صورت یک تابع چندجمله‌ای به ترتیب در مراجع [۳۹] و [۴۲] آمده است. با معلوم بودن تنش حرارتی بصورت یک تابع از r و تابع وزنی، می‌توان ضریب شدت تنش را تعیین کرد.

$$K = \int_{R_i}^{R_i+a} \sigma_z(\mathrm{r})\, m\left(\mathrm{r}, a\right) dr \quad \text{(۴-۱۴)}$$

انتگرال‌گیری تحلیلی از رابطه ۴-۱۴ به دلیل پیچیدگی عبارت تنش طولی امکان‌پذیر نیست. برای حل این مشکل، از برازش منحنی‌های چندجمله‌ای (رابطه ۲-۱۶) بر عبارت تنش گرمایی در هر زمان استفاده می‌شود. تقریب‌های قطعه‌ای خطی تابع تنش [۳۶]، قطعه‌ای درجه دو [۲۵ و ۲۶] و درجه سه [۲۷] تاکنون بکار برده شده است. فرآیند برازش منحنی بر توزیع تنش در شکل ۴-۶ برای یک زمان خاص نشان داده شده است. در این شکل، یک منحنی درجه دوم بین $r^*=1$ تا $r^*=1.2$ و یک منحنی دیگر از $r^*=1.2$ تا $r^*=2$ بر توزیع تنش طولی برازش شده است.



شکل ۴-۶- برازش دو منحنی درجه دو بر توزیع تنش.

با توجه به برازش منحنی، عبارت تحلیلی ضریب شدت تنش به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$K_A=\int_{R_i}^{R_i+\rho}\sigma_{z1}m(\mathrm{r},a)\,dr+\int_{R_i+\rho}^{R_i+a}\sigma_{z2}m(\mathrm{r},a)\,dx=A_1f_1(a,\rho)+B_1f_2(a,\rho)+C_1f_3(a,\rho)+A_2f_4(a,\rho)+B_2f_5(a,\rho)+C_2f_6(a,\rho) \qquad ۱۵-۴$$

که در آن، ثابت‌های $f_i\,(i=1..6)$ در روابط ۳-۲۴ آمده است.

۴-۴ صحت‌سنجی نتایج

فرآیند ارزیابی نتایج به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

ضریب شدت تنش به دو روش محاسبه شده است. روش اول استفاده از رابطه تحلیلی ۴-۱۵ که با کاربرد منحنی‌های درجه دوم برازش شده بر توزیع تنش (رابطه ۴-۱۰) به‌دست آمده است. روش دوم انتگرال‌گیری عددی از رابطه تابع وزنی (رابطه ۴-۱۴) که در آن از رابطه دقیق تنش (رابطه ۴-۱۰) استفاده شده است.

مقایسه نتایج با مقادیر گزارش‌شده در جدول ۴-۱ دقت روش انتگرال‌گیری عددی –با توجه به رفتار مجانبی توابع وزنی در نوک ترک- در حالت پایا را نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش با دو رابطه هدایت گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی –که باید در حالت پایا برهم منطبق شوند- به‌دست آمده و سپس با مقادیر منتشر شده در مرجع [۴۲] مقایسه شده است.

در اینجا، فرض شده است سطح داخلی استوانه تحت فشار $P_i = 10\ \mathrm{MPa}$ و کاهش دمای $T(R_i, 0) = T_0 = -100°\mathrm{C}$ و سطح خارجی آن تحت فشار $P_o = 0.1\ \mathrm{MPa}$ قرار دارد. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\upsilon = 0.3$، مدول برشی $G = 80\mathrm{MPa}$، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ {}^{1}/_{°\mathrm{C}}$ و ضریب پخش حرارتی $10^{-5}\ {}^{\mathrm{m}^2}/_{\mathrm{s}}$ با نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i = 2$ در نظر گرفته شده است. نزدیکی مقادیر محاسبه‌شده با نتایج دیگر، دقت روش انتگرال‌گیری عددی را تأیید می‌نماید. در بارگذاری مکانیکی-حرارتی پایا ضریب شدت تنش بی‌بعد با افزایش طول ترک کاهش می‌یابد که به‌دلیل فشاری بودن تنش گرمایی در لایه‌های میانی استوانه است. در جدول ۴-۱، داده‌ها به‌صورت زیر بی‌بعد شده‌اند.

$$K_N = \frac{K}{P_i\sqrt{\pi a}} \qquad ۴\text{-}۱۶$$

جدول ۴-۱- ضریب شدت تنش برای توزیع تنش پایا

a/t	K_N		
	هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای	هدایت گرمایی فوریه‌ای	نتایج منتشرشده [۴۲]*
۰/۱	۳۱/۷۹	۳۱/۶۷	۳۱/۹۰
۰/۲	۲۸/۳۵	۲۸/۴۳	۲۸/۳۶
۰/۳	۲۵/۶۱	۲۵/۷۰	۲۵/۵۹
۰/۴	۲۳/۳۵	۲۳/۴۴	۲۳/۳۳
۰/۵	۲۱/۵۲	۲۱/۶۰	۲۱/۵۳
۰/۶	۲۰/۱۶	۲۰/۲۵	۲۰/۲۲
۰/۷	۱۹/۴۰	۱۹/۴۸	۱۹/۴۹
۰/۸	۱۹/۶۳	۱۹/۷۱	۱۹/۷۵

*مقادیر از نمودار خوانده شده است.

۴-۵ مطالعه موردی

۴-۵-۱ استوانه جدار ضخیم حاوی یک ترک محیطی کامل

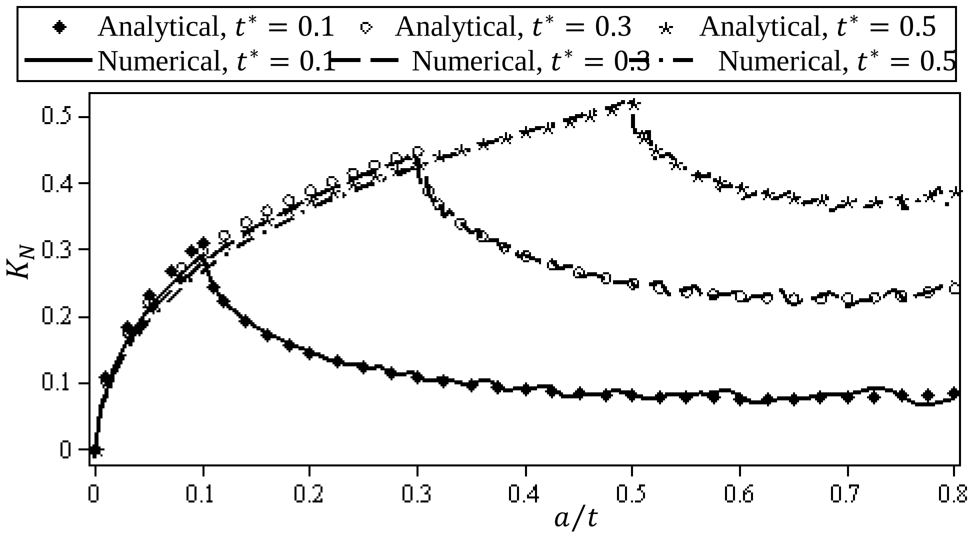
یک استوانه جدار ضخیم با طول به قدر کافی بلند و با نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o\,/R_i = 2$ در نظر گرفته می‌شود که سطح داخلی استوانه تحت کاهش دمای $T(R_i, t) = -100\text{°C}$ قرار دارد. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\upsilon = 0.3$، مدول برشی $G = 80\ \text{MPa}$، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ {}^{1}\!/_{\text{°C}}$ و ضریب هدایت گرمایی $10^{-5}\ {}^{m^2}\!/_{s}$ در نظر گرفته شده است.

در ادامه، تغییرات ضریب شدت تنش حرارتی برای مدل هدایت گرمایی هذلولوی و هندسه‌های مختلف ترک به‌صورت نمودار ارائه شده است که در آن، ضریب شدت تنش به‌صورت زیر بی‌بعد شده است.

$$K_T = \frac{K}{E\alpha T_1\sqrt{l_0}\,/\left(1-\nu\right)} \qquad ۱۷-۴$$

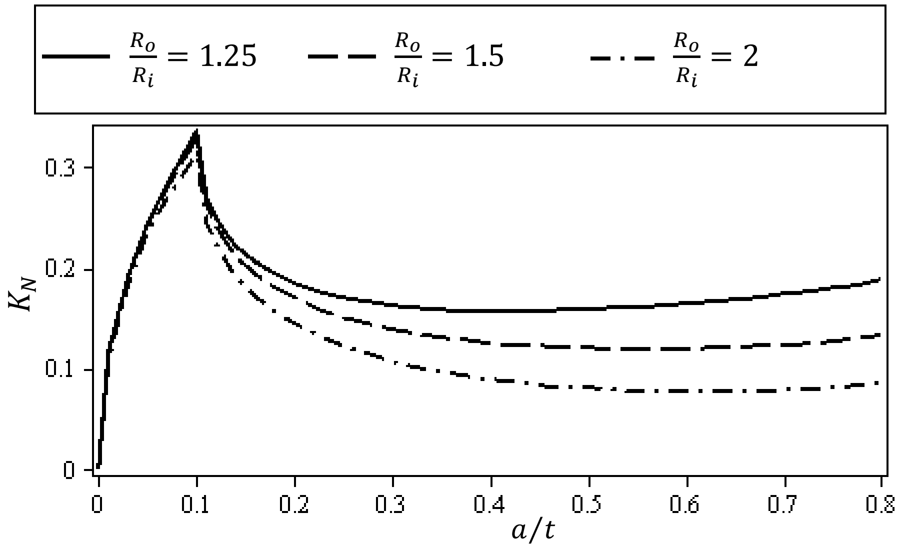
در شکل ۴-۷ ضریب شدت تنش عمق ترک با استفاده از دو روش تحلیلی (رابطه ۴-۱۴) و انتگرال‌گیری عددی از تابع وزنی برای سه زمان مشخص t^*=0.1, 0.3, 0.5 و برحسب عمق نسبی ترک (a/t) مقایسه شده است. نتایج تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند. البته در مورد نتایج انتگرال‌گیری عددی دو نکته قابل ذکر است. مقدار ضریب شدت تنش بیشینه در روش عددی کمتر از روش تحلیلی به‌دست می‌آید. بطوریکه، در t^*=0.1 ضریب شدت تنش بیشینه در روش تحلیلی حدود ۷/۵٪ بزرگتر از روش عددی است. برای ترک‌های عمیق نتایج انتگرال‌گیری عددی با نوسان همراه است.

در یک زمان مشخص در ابتدای اعمال شوک حرارتی، سرعت محدود موج دما باعث تغییر دمای بخشی از دیواره داخلی و به تبع آن ایجاد تنش‌های کششی در این بخش می‌شود. در نتیجه، برای ترک‌هایی که پیشانی موج تنش از نوک آن‌ها عبور کرده است، ضریب شدت تنش متناسب با طول ترک افزایش می‌یابد. اما در ترک‌هایی که موج تنش به نوک آن‌ها نرسیده است، تنش در بخشی از سطح انتهایی ترک –بین محل پیشانی موج و نوک ترک- فشاری است که باعث بسته شدن سطوح ترک و کاهش ضریب شدت تنش با افزایش طول ترک می‌گردد. بنابراین، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی برای یک ترک ضریب شدت تنش بیشینه زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک آن برسد.

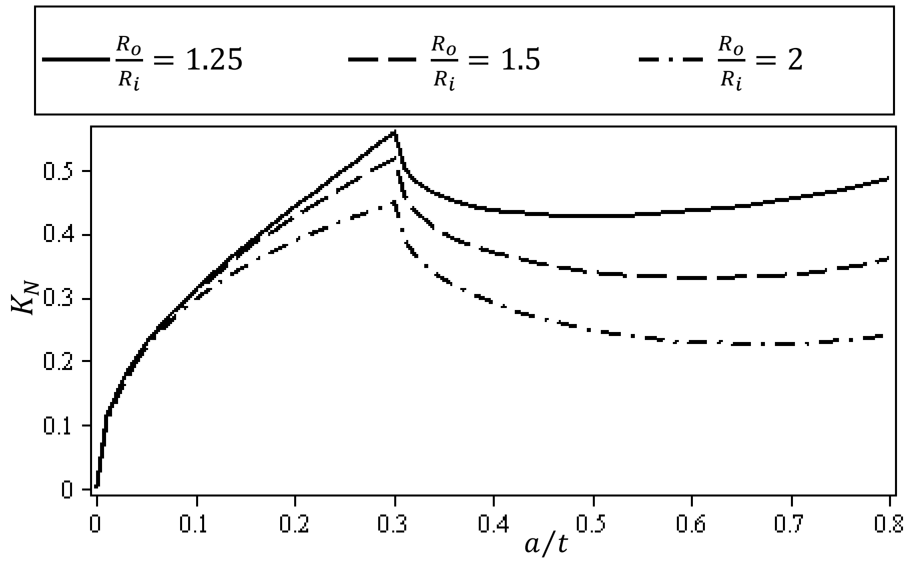


شکل ۴-۷- مقایسه ضریب شدت تنش حاصل از روش تحلیلی (رابطه ۴-۱۴) و انتگرال‌گیری عددی

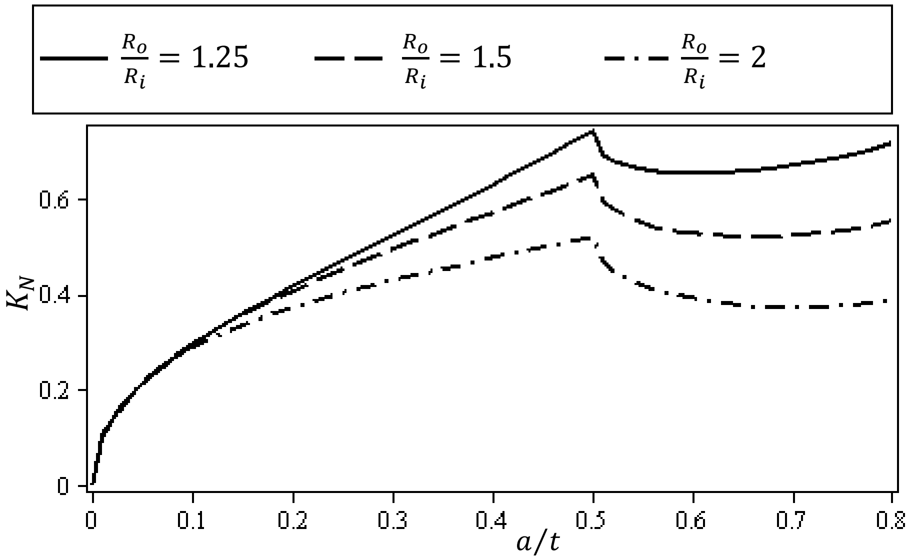
در شکل ۴-۸ ضریب شدت تنش برای نسبت قطرهای مختلف با یکدیگر مقایسه شده است. بطور کلی، ضریب شدت تنش در استوانه‌های نازکتر از استوانه‌های ضخیم‌تر بزرگتر است. به‌عبارت دیگر وجود نقص در استوانه‌های جدار نازک بحرانی‌تر است. براساس نتایج شکل ۴-۸، در زمان‌های اولیه اعمال شوک گرمایی رفتار ترک‌های کوتاه (a/t<0.15) مشابه است. به‌عبارت دیگر، در این زمان‌ها، ضخامت دیواره استوانه (R_o/R_i) بر ضریب شدت تنش ترک‌های کوتاه اثر چندانی ندارد. همچنین به مرور زمان ، ضریب شدت تنش در ترک‌های بلند افزایش می‌یابد. این مسأله در استوانه‌های نازکتر بیشتر به چشم می-خورد، بطوریکه از یک زمان مشخص به بعد ضریب شدت تنش بیشینه متناظر با ترک با طول بیشتر است (شکل ۴-۱۰). بنابراین، وجود نقصی کوچک در استوانه‌ها خصوصا با دیواره نازک تحت شوک حرارتی هذلولوی می‌تواند سریعتر از مدل فوریه منجر به گسیختگی سازه شود.



شکل ۴-۸- اثر نسبت قطر روی ضریب شدت تنش در زمان‌های t^*=0.1

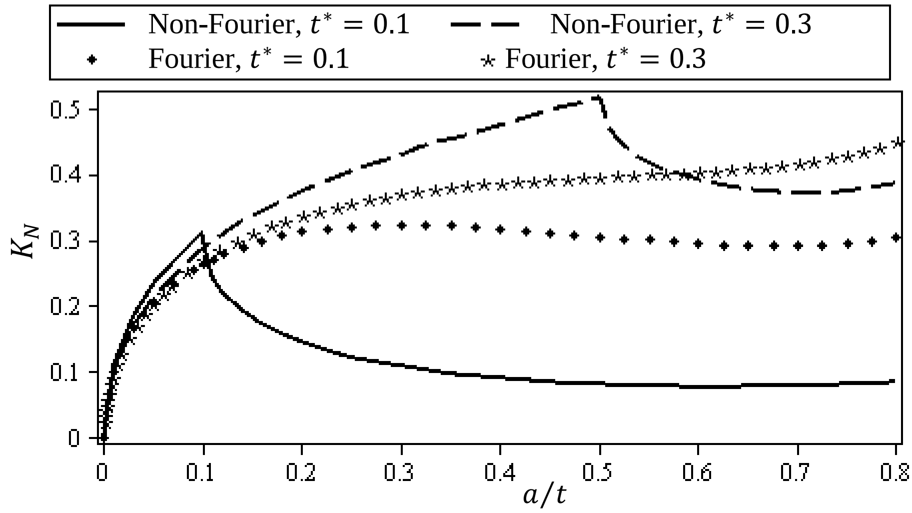


شکل ۴-۹- اثر نسبت قطر روی ضریب شدت تنش در زمان‌های t^*=0.3



شکل ۴-۱۰- اثر نسبت قطر روی ضریب شدت تنش در زمان‌های t^*=0.5

در شکل ۴-۱۱ ضریب شدت تنش مدل‌های فوریه و هذلولوی در زمان‌های مختلف با هم مقایسه شده است. طبق نتایج، بیشینه ضریب شدت تنش در مدل هذلولوی در t^*=0.1 با مدل فوریه تفریبا برابر است اما در طول ترک کمتری اتفاق می‌افتد. همچنین، بجز ترک‌های با طول نسبی تقریبا ۰/۱، ضریب شدت تنش مدل فوریه بطور قابل ملاحظه-ای بزرگتر از مدل هذلولوی است. طبق این نتایج، ترک‌های عمیق در مدل فوریه زودتر تحت تأثیر شوک گرمایی قرار می‌گیرند. اما با گذشت زمان ضریب شدت تنش مدل هذلولوی سریعتر از مدل فوریه افزایش می‌یابد. بطوریکه، در t^*=0.5 ترک‌های با طول a/t<0.575 ضریب شدت تنش مدل هذلولوی بزرگتر از مدل فوریه است.



شکل ۴-۱۱- مقایسه ضریب شدت تنش حاصل از مدل‌های هدایت گرمایی فوریه و هذلولوی

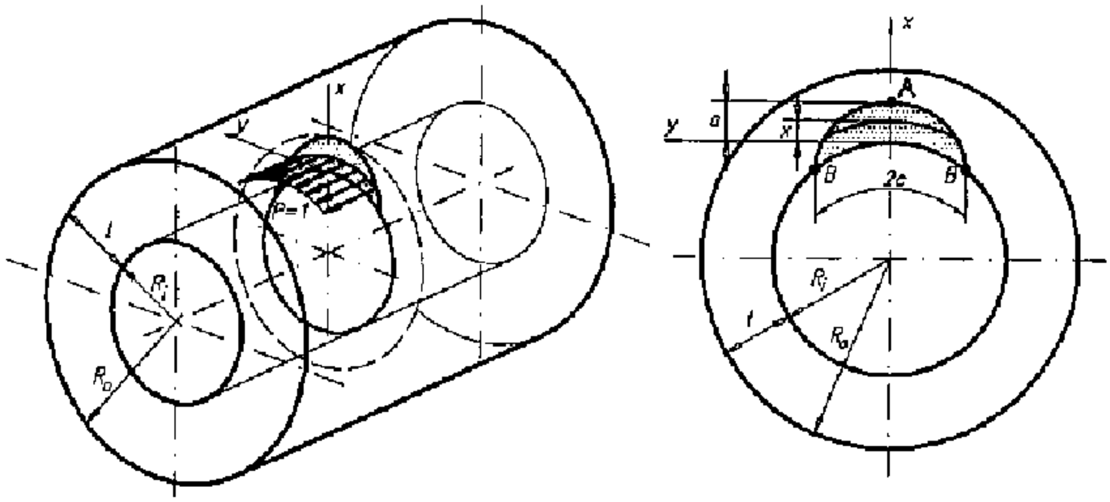
در جدول ۴-۲ مقدار و موقعیت ضریب شدت تنش بیشینه برای دو مدل در زمان‌های مشخص با هم مقایسه شده است. برای مدل هذلولوی، بیشینه ضریب شدت تنش در موقعیت ناپیوستگی موج تنش اتفاق می‌افتد و با سرعت موج گرما در دیواره جابجا می‌شود. اما برای مدل فوریه، بجز در $t^*=0.1$، مقدار ضریب شدت تنش با طول ترک متناسب است و مقدار بیشینه برای طول ترک نسبی ۰/۸ اتفاق می‌افتد.

جدول ۴-۲- ضریب شدت تنش حداکثر و محل وقوع آن برای دو مدل فوریه و هذلولوی در زمان‌های مختلف

زمان (t^*)	هدایت گرمایی هذلولوی	عمق ترک (a/t)	هدایت گرمایی فوریه‌ای	عمق ترک (a/t)
۰/۱	۰/۳۱۱۵	۰/۱	۰/۳۲۲	۰/۲۷۴
۰/۳	۰/۴۴۷۹	۰/۳	۰/۴۲۸۵	۰/۸
۰/۵	۰/۵۱۸۳	۰/۵	۰/۴۴۵۸	۰/۸
۰/۷	۰/۶۰۲۴	۰/۷	۰/۴۴۸۳	۰/۸
۱/۳	۰/۶۱۳۳	۰/۷	۰/۴۴۸۷	۰/۸
۱/۸	۰/۳۸۴۲	۰/۲	۰/۴۴۸۷	۰/۸

۴-۵-۲ استوانه جدار ضخیم حاوی یک ترک محیطی نیم‌بیضوی

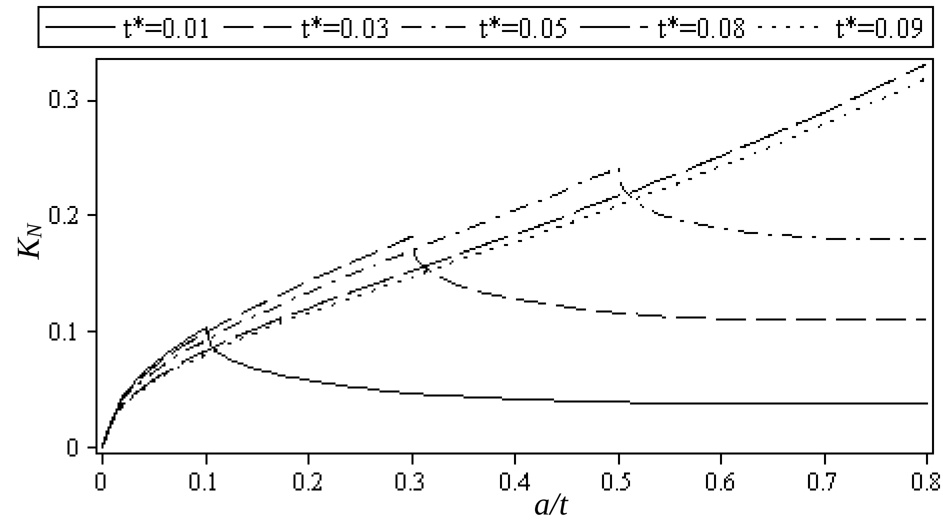
یک استوانه جدار ضخیم با طول به قدر کافی بلند و با نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o / R_i = 2$ در نظر گرفته می‌شود که سطح داخلی استوانه تحت کاهش دمای $T(R_i, t) = -100°\mathrm{C}$ قرار دارد. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\upsilon = 0.3$، مدول برشی $G = 80\ \mathrm{MPa}$، ضریب انبساط حرارتی $\alpha = 12 \times 10^{-6}\ {}^{1}/_{°\mathrm{C}}$ و ضریب پخش گرمایی $10^{-5}\ {}^{m^2}/_{s}$ در نظر گرفته شده است.



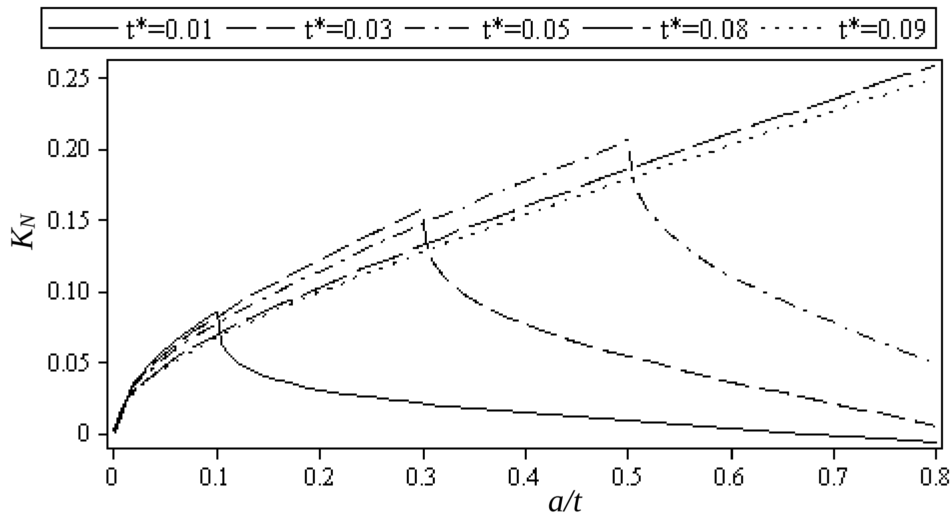
شکل ۴-۱۲- یک ترک محیطی نیم‌بیضوی در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم [۱۰]

تابع وزنی برای عمق و گوشه ترک به‌ترتیب در روابط ۳-۱۷ و ۳-۱۹ آمده است. ثابت‌های M_{iA} (i=1, 2, 3) و N_{iB} (i=1, 2, 3) در مرجع [۴۳] آمده است.

در شکل‌های ۴-۱۳و ۱۴ ضریب شدت تنش عمق ترک حاصل از کاربرد مدل هدایت گرمایی هذلولوی در زمان‌های مشخص و برحسب عمق نسبی (a/t) ترک نشان داده شده است. طبق نتایج نمودارها، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک، ضریب شدت تنش در مدل هذلولوی سریعا افزایش و سپس به‌تدریج کاهش می‌یابد. با گذشت زمان و استهلاک موج گرما، ضریب شدت تنش با طول ترک متناسب می‌شود.

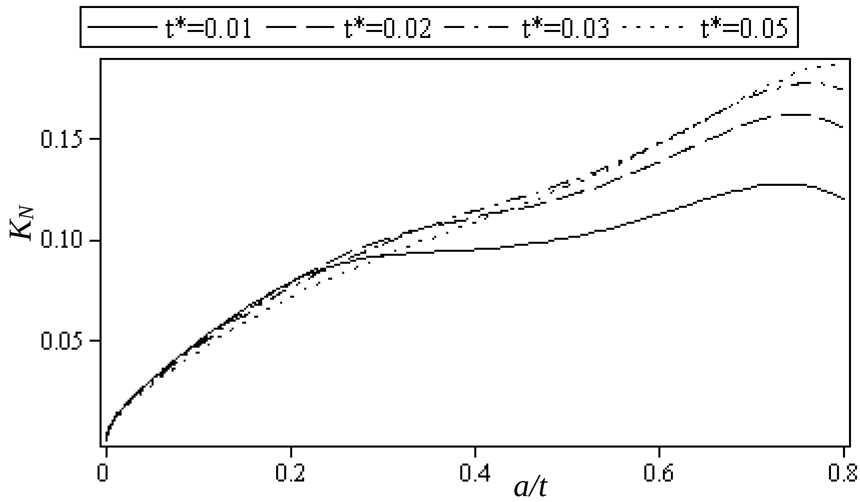


شکل ۴-۱۳- ضریب شدت تنش در عمق ترک در $a/c = 0.2$

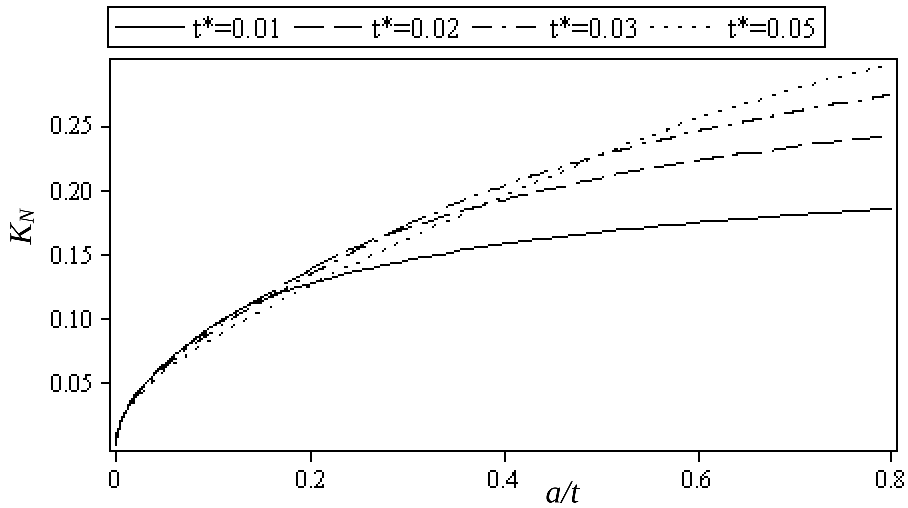


شکل ۴-۱۴- ضریب شدت تنش در عمق ترک در $a/c = 1.0$

در شکل‌های ۴-۱۵ و ۱۶ ضریب شدت تنش گوشه ترک حاصل از هدایت گرمایی هذلولوی برحسب عمق نسبی (a/t) ترک نشان داده شده است. در یک زمان مشخص ضریب شدت تنش در گوشه ترک برحسب عمق آن (a/t) به‌طور یکنوا افزایشی است.



شکل ۴-۱۵- ضریب شدت تنش در گوشه ترک در نسبت قطرهای $a/c = 0.2$



شکل ۴-۱۶- ضریب شدت تنش در گوشه ترک در نسبت قطرهای $a/c = 1.0$

فصل ۵

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۵-۱ نتیجه‌گیری

در این پژوهش، به محاسبه ضریب شدت تنش مود I برای صفحه حاوی ترک لبه‌ای و نیم‌بیضوی و استوانه حاوی ترک نیم‌بیضوی طولی داخلی و خارجی و ترک محیطی تحت شوک حرارتی هذلولوی با استفاده از روش تابع وزنی تعیین شده است.
برخی نتایج حاضر به شرح زیر می‌باشد.

۱. کاربرد برازش منحنی برای توزیع تنش نسبت به روش انتگرال‌گیری عددی منجر به نتایج پایدارتری می‌شود. البته، نتیجه دو روش تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارد.

۲. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، ضریب شدت تنش در عمق برای ترک‌های با عمق کم به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگ‌تر از مدل فوریه است. بیشینه ضریب شدت تنش در عمق زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک ترک آن برسد (فصل‌های ۲، ۳ و ۴).

۳. ضریب شدت تنش در عمق ترک ابتدا سریعا افزایش و سپس تا مقدار پایا به‌تدریج کاهش می‌یابد (فصل‌های ۲ و ۳).

۴. برای ترک‌های کوچک (کم‌عمق) نسبت قطرهای ترک اثر چندانی بر رفتار آن ندارد (فصل‌های ۲ و ۳). اما با گذشت زمان یا عمیق‌تر شدن ترک، اثر نسبت قطر بر ضریب شدت تنش بیشتر می‌شود. به‌علاوه، در ترک‌های با عمق نسبی یکسان، ترک‌های باریک‌تر دارای ضریب شدت تنش بزرگتری می‌باشند.

۵. ضریب شدت تنش گوشه ترک در مدل هذلولوی همیشه از مدل فوریه بزرگتر است. این موضوع در امکان رشد ناپایدار ترک قابل توجه است. رشد طولی ترک موجب کاهش نسبت قطرهای ترک و در نتیجه بیشتر شدن ضریب شدت تنش در عمق ترک می‌گردد (فصل‌های ۲ و ۳).

۶. در ترک‌های محیطی کوتاه $a/t \approx 0.1$ ضریب شدت تنش بیشینه برای مدل‌های فوریه و هذلولوی تقریبا برابر است. اما در ترک‌های با طول بیشتر ضریب شدت تنش مدل هذلولوی از مدل فوریه به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است (فصل ۴).

۷. در مدل هذلولوی و برای $0.1<a/t<0.8$ ضریب شدت تنش بیشینه در هر لحظه برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد (فصل ۴).

۵-۲ پیشنهادها

به منظور ادامه تحقیق حاضر، محاسبه ضریب شدت تنش برای مدل‌های دیگر هدایت گرمایی مثل تأخیر فاز دوگانه ، شامل دو تأخیر زمانی گرادیان دمایی و شار گرمایی پیشنهاد می‌شود.

منابع

[1] Babaei M. H., Chen Z. T., (2008), "Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere", ***International Journal of Thermophysics***, Vol. 29, pp. 1457-1469.

[2] Tang D. W., Araki N., (1996), "Non-Fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance", ***International Journal of Heat Mass Transfer***, Vol. 39, pp. 1585–1590.

[3] Zhang M. Y., Cheng G. J., (2011), "Pulsed laser coating of hydroxyapatite/titanium nanoparticles on Ti-6Al-4V substrate: Multiphysics simulation and experiments", ***Institute of Electrical and Electronics Engineers Transactions on NanoBioscience***, Vol. 99, pp. 1-1.

[4] Maurer M. J., Thomson H. A., (1973), "Non-Fourier effects at high heat flux", ***Journal of Heat Transfer***, Vol. 95, pp. 284–286.

[5] Vernotte P., (1958), "Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur", ***Comptes Rendus de l'Académie des Sciences***, Vol. 246 ,pp. 3154–3155.

[6] Cattaneo C., (1958), "Sur une forme de l'equation de la chaleur eliminant le paradoxe d'ine propagation instantanee", ***Comptes Rendus de l'Académie des Sciences***, Vol. 247 ,pp. 431–433.

[7] Bueckner H. F., (1970), "Principle for the computation of stress intensity factors", ***Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik***, Vol. 50, pp. 129-146.

[8] Rice J. R., (1972), "Remarks on elastic crack-tip stress fields", ***International Journal of Solids and Structures***, Vol. 8, pp. 751-758.

[9] Petroski H. J., Achenbach J. D., (1978), "Computation of the weight function from a stress intensity factor", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 10, pp. 257-266.

[10] Glinka G., Shen G., (1991), "Universal features of weight functions for cracks in mode I", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 40, pp. 1135-1146.

[11] Sih G. C., Li C. T., (1991), "Initiation and growth characterization of comer cracks near circular hole", ***Theoretical and Applied Fracture Mechanics***, Vol. 40, pp. 1135-1146.

[12] Emery A. F., Walker G. E., Williams Jr and J. A., Enana J. Bas., (1969), "Green's function for the stress intensity factors of edged cracks and its applications to thermal stresses", Vol. 91, pp. 618-624.

[13] Nied H. F., (1987), "Thermal shock in an edge-cracked plate subjected to uniform surface heating", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 26, pp. 239-246.

[14] Tanaka M., Togoh H., Kikuta M., (1984), "Boundary element method applied to 2-D thermoelastic problems in steady and nonsteady states", ***Engineering Analysis***, Vol. 1, pp. 13-19.

[15] Sladek V., Sladek J., (1987), "Computation of the stress intensity factor in 2-D stationary thermoelasticity using the BEM", ***Acta Technica Ceskoslovensk Akademie Ved***, Vol. 32, No. 2, pp. 217-229.

[16] Cheverton R. D., Gehlen P. C., Hahn G. T., Iskander S. K., (1980), "Application of crack arrest theory to a thermal shock experiment, in crack arrest methodology and application", ***American Society for Testing and Materials***, (edited by G. T. Hahn and M. F. Kanninen),, pp. 392-421.

[17] Wang B. L., Chang D. M., (2012), "Transient thermal fracture and crack growth behavior in brittle media based on non-Fourier heat conduction", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 94, pp. 29-36.

[18] Hu K. Q., Chen Z. T., (2012), "Thermoelastic analysis of a partially insulated crack in a strip under thermal impact loading using the hyperbolic heat conduction theory", ***International Journal of Engineering Science***, Vol. 51, pp. 144-160.

[19] Wang B. L., Han J. C., (2012), "Non-Fourier heat conduction in layered composite materials with an interface crack", ***International Journal of Engineering Science***, Vol. 55, pp. 66-75.

[20] Chen Z. T., Hu K. Q., (2012), "Thermo-elastic analysis of a cracked half-plane under a thermal shock impact using the hyperbolic heat conduction theory", ***Journal of Thermal Stresses***, Vol. 35, pp. 342-362.

[21] Lin X. B, Smith R. A., (1998), "Fatigue growth prediction of internal surface cracks in pressure vessels", ***ASME Journal of Pressure Vessel Technology***, Vol. 120, pp. 17-23.

[۲۲] شهرآئینی س. ا.، هاشمی س. ح.، (۱۳۹۳)، "بررسی اثر تغییرات طول و عمق ترک سطحی نیم‌بیضوی بر ایمنی لوله فولادی انتقال گاز"، **مهندسی مکانیک مدرس**، شماره ۵، دوره ۱۴، ص-ص ۲۶-۳۲.

[23] Kamaya M., Nishioka T., (2005), "Analysis of surface crack in cylinder by finite element alternating method", ***ASME Journal of Pressure Vessel Technology***, Vol. 127, pp. 165-172.

[24] Shahani A. R., Nabavi S. M., (2006), "Closed-form stress intensity factors for a semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under thermal stress", ***International Journal of Fatigue***, Vol. 28, No. 9, pp. 26-32.

[25] Shahani A. R., Nabavi S. M., (2007), "Transient thermal stress intensity factors for an internal longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 74, pp. 2585-2602.

[26] Nabavi S. M., Shahani A. R., (2009), "Thermal stress intensity factors for a cracked cylinder under transient thermal loading", ***International Journal of Pressure Vessels and Piping***, Vol. 86, pp. 153–163.

[27] Xu R. X., Wu X. R., (1989), "A weight function aproach to stress intensity factors for half-elliptical surface cracks in cylinderical pressure vessels to a thermal shock", ***International Journal of Pressure Vessels and Piping***, Vol. 39, pp. 375–409.

[28] Ma C. C., Liao M. H., (1996), "Analysis of axial cracks in hollow cylinders subjected to thermal shock by using the thermal weight function method", ***ASME Journal of Pressure Vessel Technology***, Vol. 118, pp. 146-153.

[29] Lu Y. L., Zhang S. J., Huang X. P., Huang J., (2003), "Determination of histories of SIF distributions for axial semi-elliptical surface cracks in hollow cylinders subjected to thermal shock", ***International Journal of Pressure Vessels and Piping***, Vol. 80, pp. 167-178.

[30] Nied H.F., Erdogan F., (1983), "Transient thermal stress problem for a circumferentially cracked hollow cylinder", ***Journal of Thermal Stresses***, Vol. 6, pp. 1–14.

[31] Nied H.F., (1984), "Thermal shock in a circumferentially cracked hollow cylinder with cladding", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 20, pp.113–137.

[32] Grebner H., (1985), "Finite element calculation of stress intensity factors for complete circumferential surface cracks at the outer wall of a pipe", ***International Journal of Fracture***, Vol. 27, pp. 99–102.

[33] Chen Y.Z., (2000), "Stress intensity factors in a finite length cylinder with a circumferential crack", ***International Journal of Pressure Vessels and Piping***, Vol. 77, pp. 439–444.

[34] Wang X. J., Lambert S. B., (1996), "Stress intensity factors and weight functions for longitudinal semi-elliptical surface cracks in thin pipes", ***International Journal of Pressure Vessels and Piping***, Vol. 65, pp. 75-87.

[35] Bueckner A.P., (1971), "Weight functions for the notched bar", ***Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik***, Vol. 51, No. 2, pp. 97-109.

[36] Moftakhar A. A, Glinka G., (1992), "Calculation of stress intensity factors by efficient integration of weight functions", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 43, No. 5, pp. 749-756.

[37] Kiciak A., Glinka G., Burns D. J, (2003), "Calculation of stress intensity factors and crack opening displacements for cracks subjected to complex stress fields", ***ASME Journal of Pressure Vessel Technology***, Vol. 125, pp. 261-266.

[38] Liu A., (1996), "ASM Handbook Fatigue and Fracture", ***Rockwell International Science Center***, Vol. 19, pp. 980–1000.

[39] Nabavi S.M., Ghajar R., (2010), "Analysis of thermal stress intensity factors for cracked cylinders using weight function method", ***International Journal of Engineering Science***, Vol. 48, pp. 1811–1823.

[40] Meshii T., Watanabe K., (1998), "Closed-form stress intensity factor for an arbitrarily located inner circumferential surface crack in a cylinder subjected to axisymmetric bending loads", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 59, pp. 589–597.

[41] Meshii T., Watanabe K., (2001), "Stress intensity factor for a circumferential crack in a finite-length thin to thick-walled cylinder under an arbitrary biquadratic stress distribution on the crack surfaces", ***Engineering Fracture Mechanics***, Vol. 68, pp. 975–986.

[42] Ghajar R., Nabavi S.M., (2010), "Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder", ***Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures***, Vol. 33, pp. 504–512.

[43] Shen. G., Glinka G., (1993), " Stress Intensity Factors for Internal Edge and Semi-Elliptical Cracks in Hollow Cylinders ", ***ASME Pressure Vessels & Piping***, High Pressure - Codes, Analysis, and Applications, A. Khare, Vol. 263, pp. 45-50.

Abstract
In this thesis, the stress intensity factor for a semi-elliptical/circumferential crack in a thick-walled plate/cylinder which is made of homogenous and isotropic materials and subjected to the non-Fourier (hyperbolic) thermal shock is derived analytically and numerically. The uncoupled thermoelasticity governing equations are assumed. The non-dimensional hyperbolic heat equation is solved using Finite Hankel Transform and separation of variables method. The weight function method is implemented to obtain the stress intensity factor for the deepest and surface points the crack. Results show the different behavior of the crack under hyperbolic thermal shock. At a short time after the thermal shock, the stress intensity factor at the deepest point of the semi-elliptical crack –especially for shallow cracks- for hyperbolic model is significantly greater than Fourier one. The stress intensity factor at the deepest point is greater as the crack is narrower for both models. Unlike mechanical loading, the maximum stress intensity factor may occur at the surface point.
For relatively short circumferential cracks, the maximum stress intensity factor of Fourier and hyperbolic models is closed. But for longer cracks, the stress intensity factor of the hyperbolic model is significantly greater than Fourier model. Moreover, the maximum stress intensity factor in hyperbolic model occurs for a crack the peak of stress wave reaches to its tip.
According to the results, selection of adequate heat conduction model for structure design under transient thermal loading is critical.

Keywords
Stress Intensity Factor, Non-Classic Heat Conduction, Weight Function Method, Thick-Walled Cylinder, Finite Hankel Transform.

University of Shahrood

Faculty of Mechanical Engineering

Calculation of stress intensity factor mode I in a thick-walled cracked plate/cylinder under non-Fourier thermal shock using weight function method

Omid Asemi

Supervisor
Dr. Mohammad Bagher Nazari

June 2015