

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی تحلیلی و آزمایشگاهی اثر ویسکوالاستیک بر روی حرکت قطره

مهدی داودی

استاد راهنما :

دکتر محمود نوروزی

بهمن ۱۳۹۳

دانشگاه شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه تبدیل انرژی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مهدی داودی به شماره دانشجویی: ۹۱۰۲۹۲۴

تحت عنوان: بررسی تحلیلی و آزمایشگاهی اثر ویسکوالاستیک روی حرکت قطره

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
			دکتر محمود نوروزی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور

تقديم به

پدم

تشکر و قدردانی:

ضمن سپاس فراوان از خانواده عزیزم و به خصوص پدر بزرگوام لازم می‌دانم از تمامی اساتید به ویژه استاد گرانقدرم دکتر نوروزی که در تمام مراحل تحصیلی با راهنمایی‌های مدبرانه خود مسیر تحصیلی مرا نظارت و مدیریت نموده‌اند نهایت تشکر و قدردانی را داشته باشم.

تعهد نامه

اینجانب مهدی داودی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته تبدیل انرژی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی تحلیلی و آزمایشگاهی اثر ویسکوالاستیک روی حرکت قطره تحت راهنمایی دکتر نوروزی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « University of Shahrood » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو مهدی داودی

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

بررسی جریان‌های دو فازی به خصوص بررسی‌های مربوط به حرکت قطرات یک سیال در سیالی دیگر از اهمیت ویژه‌ای در صنایع پزشکی و داروسازی (تولید پنسلیین و...)، حوضچه‌های ته‌نشینی مراکز تصفیه آب (در عملیات-های لخته‌سازی جامدهای شناور در آب)، مبردها و ... دارد. در این تحقیق با استفاده از روش‌های تحلیلی، سرعت و شکل نهایی قطره خزشی در شرایطی که دو سیال غیر قابل انحلال باشند مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. در صنایع مختلف هر کدام از فازهای سیال داخلی و خارجی می‌توانند غیریوتنی باشند. به این منظور در تحقیق حاضر یک حل جامع که در آن هر دو سیال غیریوتنی هستند ارائه شده است. برای شبیه‌سازی تنش‌های سیالات داخل و خارج قطره از معادلات متشکله گزیکس و اولدرویید-بی استفاده شده است. به منظور خطی سازی معادلات حاکم از پارامترهای بی‌بعد دوبرا (مربوط به هر کدام از سیالات داخلی و خارجی) استفاده شده است. به منظور بررسی دقت بخش تحلیلی یک بخش آزمایشگاهی نیز به تحقیق حاضر اضافه شده است. در قسمت آزمایشگاهی از محلول ماده پلیمری پلی‌اکریلامید (PAA) در آب و گلیسرین به عنوان فاز ویسکوالاستیک داخل قطره استفاده شده است. در تحقیقات آزمایشگاهی گذشته از ماده پلیمری زانتام استفاده شده بود که به علت ساختار غیر قابل انعطاف پذیر زنجیره‌های مولکولی زانتام، این ماده به خوبی قابل شبیه‌سازی با مدل‌های ساده رئولوژی ارائه شده نبوده است. روغن سیلیکون به عنوان سیال خارجی انتخاب شده است که یک ماده آب‌گریز می‌باشد. همچنین به علت ویسکوزیته بالا، این ماده خود را به انتخاب بسیار مناسبی در شبیه‌سازی‌های جریان خزشی به عنوان سیال آب‌گریز تبدیل کرده است. در حرکت خزشی قطره نیوتنی در یک سیال نیوتنی خارجی نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی شکل نهایی قطره را کاملاً کروی پیش‌بینی می‌کند. در این حالت نیروی کشش سطحی پارامتر غالب می‌باشد که سعی در کم کردن سطح مقطع قطره دارد که به طبع آن شکل نهایی کروی

می‌شود. حال آنکه در موارد غیرنیوتنی این قطرات، با تغییر دادن خواص سیالات داخلی و خارجی، شکل قطره به حالت‌های مختلفی می‌تواند تبدیل شود. به صورت عمده این پدیده به اختلاف تنش‌های نرمال بین سیال داخلی و خارجی مرتبط می‌باشد. برای مثال در حالت خاصی که سیال خارجی نیوتنی و سیال داخلی ویسکوالاستیک باشد، با افزایش سایز قطره یک فرورفتگی در انتهای قطره ظاهر می‌شود که با افزایش سایز یا خاصیت الاستیک سیال این فرورفتگی بزرگتر می‌شود. در قسمت تحلیلی تحقیق حاضر نشان داده شده است که با تغییر پارامترهای مختلف در حالتی که هر دو سیال غیرنیوتنی باشند در سایزهای بزرگ می‌توان قطرات با اشکال مختلف مشاهده کرد که مقایسه‌های انجام شده بین حل تحلیلی و آزمایشگاهی تایید کننده دقت بالای این حل در پیش بینی شکل قطره می‌باشد. در ادامه یک رابطه برای پیش بینی سرعت حرکت قطره در سیال خارجی ارائه شده است. نتایج نشان دهنده این امر هستند که افزایش الاستیسیته سیال داخلی باعث کاهش سرعت سقوط قطره می‌شود حال آنکه افزایش الاستیسیته سیال خارجی سرعت سقوط را افزایش خواهد داد. نتایج به دست آمده در بخش تحلیلی تحقیق حاضر، دقت بالاتری در شبیه‌سازی نتایج آزمایشگاهی نشان داده است. به منظور بررسی عوامل تاثیر گذار در شکل قطره، تنش‌های نرمال فاز داخلی بر روی سطح قطره مطالعه شده که تایید کننده تاثیر بالای این پارامتر در شکل نهایی قطره است.

کلید واژه: ویسکوالاستیک سقوط قطره عدد کپیلاری عدد دوبرا حساب اغتشاشات

مقالات مستخرج از پایان نامه

M. Davoodi, M. Norouzi, Analytical Study on Motion and Shape of Creeping Viscoelastic Drops
Falling through Viscoelastic Media, Physical Review E, submitted

(Journal Information: Publisher: APS Journals – American Physical Society, IF =2.03, H-Index=147)

فهرست علائم

K	نسبت ویسکوزیته
ρ_i	دانسیته قطره
ρ_o	دانسیته سیال خارجی
$\eta_{p,0}$	ویسکوزیته قسمت پلیمری در نرخ برش صفر
η_0	ویسکوزیته سیال در نرخ برش صفر
β_i	نسبت ویسکوزیته قسمت پلیمری به ویسکوزیته سیال داخلی
β_o	نسبت ویسکوزیته قسمت پلیمری به ویسکوزیته سیال خارجی
De_i	عدد دبورا سیال داخلی
De_o	عدد دبورا سیال خارجی
λ_i	زمان رهایی از تنش سیال داخلی
λ_o	زمان رهایی از تنش سیال خارجی
U_0	سرعت مرجع

U_{∞}	سرعت سقوط (حد) قطره
R	شعاع معادل قطره
u_i	تانسور سرعت سیال داخلی
u_o	تانسور سرعت سیال خارجی
$(v_r)_i$	سرعت در راستای شعاعی سیال داخلی
$(v_r)_o$	سرعت در راستای شعاعی سیال خارجی
$(v_{\theta})_i$	سرعت زاویه ای سیال داخلی
$(v_{\theta})_o$	سرعت زاویه ای سیال خارجی
D_i	تانسور نرخ برش سیال داخلی
D_o	تانسور نرخ برش سیال خارجی
τ_i	تانسور تنش سیال داخلی
τ_o	تانسور تنش سیال خارجی
P_i	فشار سیال داخلی
P_o	فشار سیال خارجی
$\hat{d}$	مشتق هم رفتی

Γ کشش سطحی

Ca عدد بی بعد کپیلاری

ψ_i تابع جریان سیال داخلی

ψ_o تابع جریان سیال خارجی

F_D نیروی درگ

F_B نیروی بویانسی

F برآیند نیروهای وارد بر سطح قطره

$Ec = \frac{De_o}{Ca}$ عدد بی بعد الاستوکپیلاری

فهرست تصاویر

شکل ۱- مخزن تخمیر تولید پنیسیلین

شکل ۲- تاثیر شکل اولیه پهن^۱ در تغییر شکل قطره با زمان [۶]

شکل ۳- تاثیر شکل اولیه کشیده^۱ و کشش سطحی در تغییرات شکل با زمان [۶]

شکل ۴- تغییرات شکل حباب با توجه به سرعت بالا آمدن [۷]

شکل ۵- مراحل الحاق شدن دو قطره هوا به یک دیگر [۷]

شکل ۶- تغییرات شکل نهایی قطره با سایز قطره [۸]

شکل ۷- تاثیر افزایش حجم قطره و تغییر شکل قطره از کروی به حالت پهن شده [۸]

شکل ۸- مقایسه شکل های آزمایشگاهی با حل تحلیل به ازای تغییرات حجم [۸]

شکل ۹- تاثیرات نسبت ویسکوزیته پلیمری به ویسکوزیته حلال بر روی سرعت سقوط [۲۱]

شکل ۱۰- تغییر مکان فشار ماکسیمم با افزایش رشد فرورفتگی [۲۱]

شکل ۱۱- تاثیر ویسکوالاستیسیته روی شکل قطره. شکل سمت راست قطره ویسکوالاستیک و سیال

خارجی نیوتنی است. شکل سمت چپ قطره غیر نیوتنی و سیال نیوتنی لحاظ شده است [۲۳]

شکل ۱۲- تاثیر اثر ویسکوالاستیسیته و سرعت روی شکل قطره [۲۷]

شکل ۱۳- ساختار مولکولی پلی اکریلامید

شکل ۱۴- پلیمر پلی اکریلامید

شکل ۱۵- همزن هات پلیت

شکل ۱۶- دوربین سرعت بالا (pcو. Dimax S/4000 frames per second)

شکل ۱۷- پرژکتور ۸۰۰ وات شرکت SOMITA

شکل ۱۸- دستگاه ویسکومتر شرکت BROOKFIELD مدل DV-E /LV

شکل ۱۹- ترازوی شرکت RADWAG مدل PS 510/C/1

شکل ۲۰- سلول آزمایشگاهی مورد استفاده دز آزمایش

شکل ۲۱- شماتیک مکانیزم آزمایش

شکل ۲۲- تغییرات ویسکوزیته با نرخ برش

شکل ۲۳- محاسبه ضریب شکل برای اندازه گیری کشش سطحی

شکل ۲۴- سرنگ ها و سلول مورد استفاده توسط آزمایشگاه

شکل ۲۵- لحظه جدا شدن قطره پلی اکریلامید در روغن سیلیکون

شکل ۲۶- نتایج تست نوسان برای محلول پلی اکریلامید

شکل ۲۷- مدل فنر و دمپر ماکسول

شکل ۲۸- تغییرات سرعت بر حسب شعاع

شکل ۲۹- مقایسه شکل قطرات بر اساس نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی دیگر

شکل ۳۰- مقایسه شکل قطرات در قسمت آزمایشگاهی و تحلیلی

شکل ۳۱- شکل قطره نیوتنی

شکل ۳۲- تاثیر جملات با درجه‌های مختلف روی شکل قطره

شکل ۳۳- تغییرات شکل قطره پلی اکریلامید با تغییرات حجم

(I=1.42ml, II=1.80ml, III=7.42ml, IV=8.22, V=11.78ml)

شکل ۳۴- تاثیر پارامترهای دبورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

شکل ۳۵- تاثیر پارامترهای کپیلاری (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

شکل ۳۶- تاثیر پارامترهای دبورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

شکل ۳۷- تاثیر پارامترهای کپیلاری و نسبت ویسکوزیته روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

شکل ۳۸- تاثیر پارامترهای جریان روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

شکل ۳۹- تاثیر پارامترهای مختلف روی تنش نرمال سیال داخلی

شکل ۴۰- تاثیر پارامترهای مختلف روی سرعت سقوط

شکل ۴۱- تاثیر پارامترهای دبورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

شکل ۴۲- تاثیر پارامترهای کپیلاری (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

شکل ۴۳- تاثیر پارامترهای دبورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

شکل ۴۴- تاثیر پارامترهای کپیلاری و نسبت ویسکوزیته و ضریب تحرک روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

شکل ۴۵- تاثیر پارامترهای جریان روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

شکل ۴۶- تاثیر پارامترهای مختلف روی تنش نرمال سیال داخلی

شکل ۴۷- تاثیر پارامترهای مختلف روی سرعت سقوط

فهرست

فصل اول: مقدمه.....	۱
مقدمه.....	۲
مروری بر کارهای گذشته.....	۳
روش‌های تحلیلی و آزمایشگاهی در این پروژه.....	۱۶
فصل دوم: مراحل آزمایشگاهی.....	۱۹
مراحل آزمایشگاهی.....	۲۰
مواد مورد استفاده.....	۲۰
تجهیزات آزمایشگاهی.....	۲۴
همزن هات پلیت.....	۲۴
دوربین با سرعت عکس برداری بالا.....	۲۵
دستگاه ویسکومتر.....	۲۶
ترازوی با دقت بالا.....	۲۷
سلول آزمایشگاهی.....	۲۸
تهیه کردن مواد.....	۲۹

۳۰	 مکانیزم آزمایش
۳۱	 تست های رئومتری
۳۱	 تست ویسکوزیته
۳۲	 تست کشش سطحی
۳۵	 تست نوسان
۳۷	 تفسیر نتایج تست نوسان با مدل ماکسول
۳۹	 فصل سوم: روش حل تحلیلی
۴۰	 معادلات حاکم
۴۲	 شرایط مرزی
۴۴	 روش تحلیلی
۴۴	 سیال اوا دروید-بی
۴۵	 روش حل حساب اغتشاشات سیال اوا دروید-بی
۴۷	 پاسخ های حل تحلیلی جریان سیال اوا دروید-بی
۵۰	 محاسبات مربوط به تاخمین اولیه شکل قطره سیال اولدروید-بی
۵۲	 بررسی تغییر شکل روی جریان و شکل نهایی سیال اولدروید-بی

محاسبه ضریب اصطکاک و سرعت سقوط قطره سیال اولدروید-بی.....	۵۶
سیال گزیکس.....	۵۸
حل حساب اغتشاشات سیال گزیکس.....	۵۸
پاسخ های حل تحلیلی جریان سیال گزیکس.....	۶۱
محاسبات مربوط به تاخمین اولیه شکل قطره گزیکس	۶۴
بررسی تغییر شکل روی جریان و شکل نهایی.....	۶۸
محاسبه ضریب اصطکاک و سرعت سقوط قطره.....	۷۱
فصل چهارم: بحث و بررسی نتایج.....	۷۵
بحث و بررسی نتایج.....	۷۶
مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تحلیل.....	۷۶
نتایج آزمایشگاهی.....	۷۸
نتایج تحلیلی مدل اولدروید-بی.....	۸۰
نتایج مدل سازی اولدروید-بی قطره غیرنیوتنی در محیط نیوتنی.....	۸۰
نتایج مدل سازی اولدروید-بی قطره نیوتنی در محیط غیرنیوتنی.....	۸۳
نتایج مدل سازی اولدروید-بی قطره غیرنیوتنی در محیط غیرنیوتنی.....	۸۶

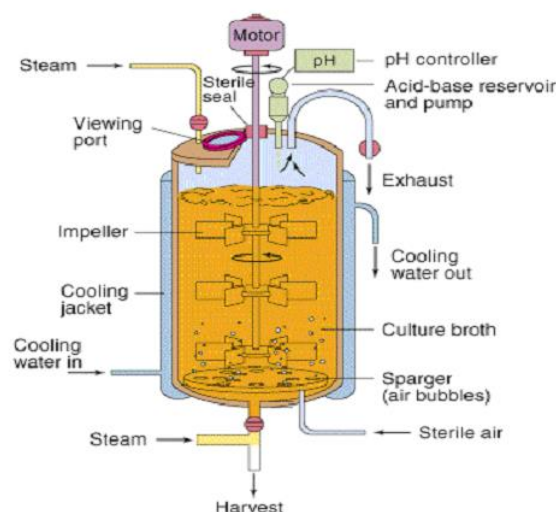
۸۷.....	نتایج مدل سازی اولدروید-بی تنش های نرمال
۸۹.....	نتایج مدل سازی اولدروید-بی سرعت سقوط
۹۰.....	نتایج تحلیلی مدل گزیکس
۹۱.....	نتایج مدل سازی گزیکس قطره غیرنیوتنی در محیط نیوتنی
۹۴.....	نتایج مدل سازی گزیکس قطره نیوتنی در محیط غیرنیوتنی
۹۷.....	نتایج مدل سازی گزیکس قطره غیرنیوتنی در محیط غیرنیوتنی
۹۹.....	نتایج مدل سازی گزیکس تنش های نرمال
۱۰۲.....	نتایج مدل سازی گزیکس سرعت سقوط
۱۰۴.....	نتیجه گیری
۱۰۶.....	پیشنهادهات
۱۰۷.....	ضمیمه
۱۱۲.....	فهرست منابع

فصل اول

مقدمه

۱- مقدمه:

بررسی شکل و حرکت قطرات به صورت وسیع و گسترده محققان را از رشته‌های مختلف از بیولوژی تا رشته‌های مهندسی به سمت خود جلب کرده است. اهمیت این موضوع را می‌توان در جداسازی سیالات و به صورت ویژه در زمینه‌های صنایع نفت و پتروشیمی، تولید دارو (برای مثال تولید پنی‌سیلین)، ته نشینی مواد موجود در فاضلاب‌ها، نیروگاه‌ها و برج‌های خنک کننده، مبدل‌های حرارتی و ... مشاهده کرد. شناخت هرچه بیشتر فیزیک قطرات، منجر به کنترل و طراحی بهینه‌تر پروسه‌هایی که در آنها این فرآیند اتفاق می‌افتد خواهد شد. برای مثال در صنایع داروسازی و تولید پنیسیلین، گاز اکسیژن به صورت حباب در یک سیال خارجی تزریق می‌شود (شکل ۱). وقتی که گاز اکسیژن به صورت حباب در مخازن تخمیر وارد شود در اطراف این حباب‌ها غلظت اکسیژن افزایش می‌یابد و این در حالی است که در مکان‌های دیگر این غلظت کم‌تر می‌باشد. با توجه به این مسئله که اکسیژن نقش بسیار کلیدی در فرآیندهای متابولیکی هوازی دارد نیاز به کنترل دقیق آن در سطح تماس گاز/مایع می‌رود.



شکل ۱- مخزن تخمیر تولید پنیسیلین

مسئولیت تزریق اکسیژن به مخازن تخمیر به عهده اسپری کننده‌های موجود در کف مخزن است. به منظور جلوگیری از تولید فوم در سطح تماس حباب با مایع از همزن‌های مکانیکی بهره‌گیری شده است. در صنایع شیمی و نفتی به منظور جداسازی سیالاتی که دارای دمای تبخیر یکسانی هستند به صورت عمده از مواد پلیمری لخته کننده استفاده می‌شود. با این عمل یکی از سیالات به صورت قطره‌ای شروع به رسوب کردن می‌کند که محاسبه سرعت ته نشینی این قطرات یکی از مهم‌ترین مسائل مورد نیاز در این صنایع می‌باشد. به همین صورت در بسیاری از برج‌های خنک کننده از سیستم خنک کاری قطره‌ای استفاده می‌شود که کنترل روی سرعت سقوط و سایز قطرات تاثیر بسیار زیادی روی بازدهی خنک کاری این سیستم‌ها دارد. از دیگر کاربردهای این موضوع می‌توان به صنایع تولید چاپگرها و پاشش رنگ اشاره کرد که از رنگ به صورت اسپری و قطره‌ای استفاده می‌کنند. در این صنایع تحقیقات روزافزونی در راستای اندازه‌گیری سایز و حرکت این قطرات در حال انجام‌گیری است.

۱-۱- مروری بر کارهای گذشته

در چند دهه اخیر، نیاز به بررسی و تحلیل روی سقوط و یا بالا رفتن قطرات در یک فاز سیال دیگر به صورت روز افزون در صنایع مختلف از پتروشیمی گرفته تا صنایع داروسازی در حال افزایش بوده است. از همین رو محققان زیادی از رشته‌های ریاضی تا مکانیک سیالات و شیمی سعی بر شبیه‌سازی این پدیده و عوامل موثر بر آن کرده‌اند.

اولین کارهای شبیه‌سازی قطرات توسط آقایان هادامارد [۱] و ریبزینسکی [۲] انجام گرفت. در این تحقیقات حرکت خزشی یک قطره نیوتنی در یک محیط خارجی ویسکوز به صورت تحلیلی مورد بررسی قرار گرفت. در این میان فرض می‌شود که سیالات غیر قابل انحلال در یک دیگر می‌باشند. تمرکز اصلی این

تحقیق بر روی بررسی‌های مرتبط به سرعت حد (سرعت سقوط و یا بالا رفتن قطره) و نیروی درگ اعمال شونده روی سطح قطره با استفاده از معادلات استوکس است. در این تحقیق نشان داده شد که شکل نهایی قطره نیوتنی کاملاً کروی باقی می‌ماند و سرعت حد با پارامترهای جریان رابطه زیر را دارد:

$$U_{\infty} = \left(\frac{2K+2}{9K+6} \right) \frac{(\rho_i - \rho_o)gR^2}{\eta_o}$$

که در این معادله K نسبت ویسکوزیته بین دو سیال داخلی و خارجی، ρ_i و ρ_o دانسیته محیط‌های داخل و خارج قطره، g شتاب گرانش، R شعاع قطره و η_o ویسکوزیته نرخ برش صفر محیط خارجی است. در راستای این کار آقایان تیلور و آکریووس [۳] به صورت تحلیلی به بررسی شکل قطرات در این جریان پرداختند و نشان دادند در حالاتی که عدد بی‌بعد رینولدز بسیار کم باشد و عدد کپیلاری (معرف کشش سطحی بین دو سیال) میزان محدودی داشته باشد قطره به صورت کروی به سقوط خود ادامه می‌دهد و حال آنکه وقتی عدد رینولدز افزایش می‌یابد این شکل از حالت کروی به حالت پهن تری^۱ تبدیل می‌شود. محاسبات تحلیلی که با استفاده از روش حساب اغتشاشات انجام شد نشان داد که شکل قطره با توجه به خصوصیات مواد شاید حتی از حالت پهن^۱ شده به حالت بیضی کشیده^۲ نیز بتواند تبدیل شود که بسیار نادر خواهد بود. به مرور زمان تاثیر گذاری عوامل موثر دیگری نیز در شکل خصوصیات رئولوژی

^۱. Oblate shape ^۲.Prolate shape

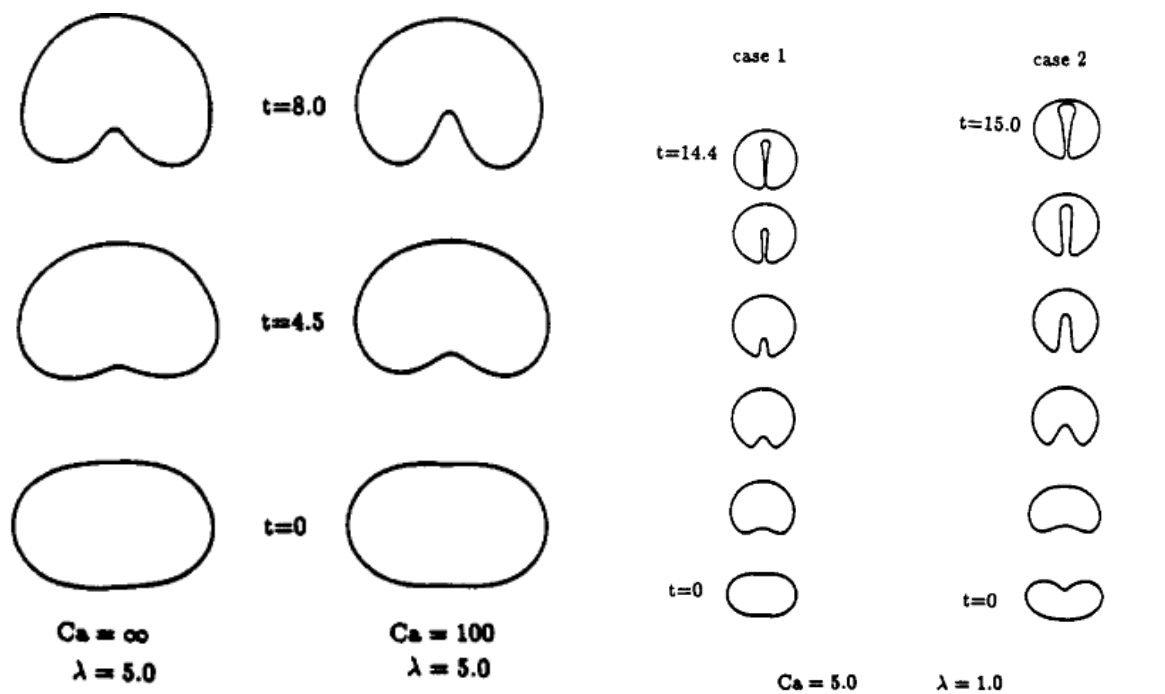
سیال داخلی و خارجی، سایز قطره و شکل اولیه قبل از سقوط اشاره کرد [۵۴]. محققان کوه و لیل [۶]

مراحل تغییر شکل قطره در حالت‌هایی که در ابتدا غیر کرووی رها شوند را در جریان‌های خزشی بررسی

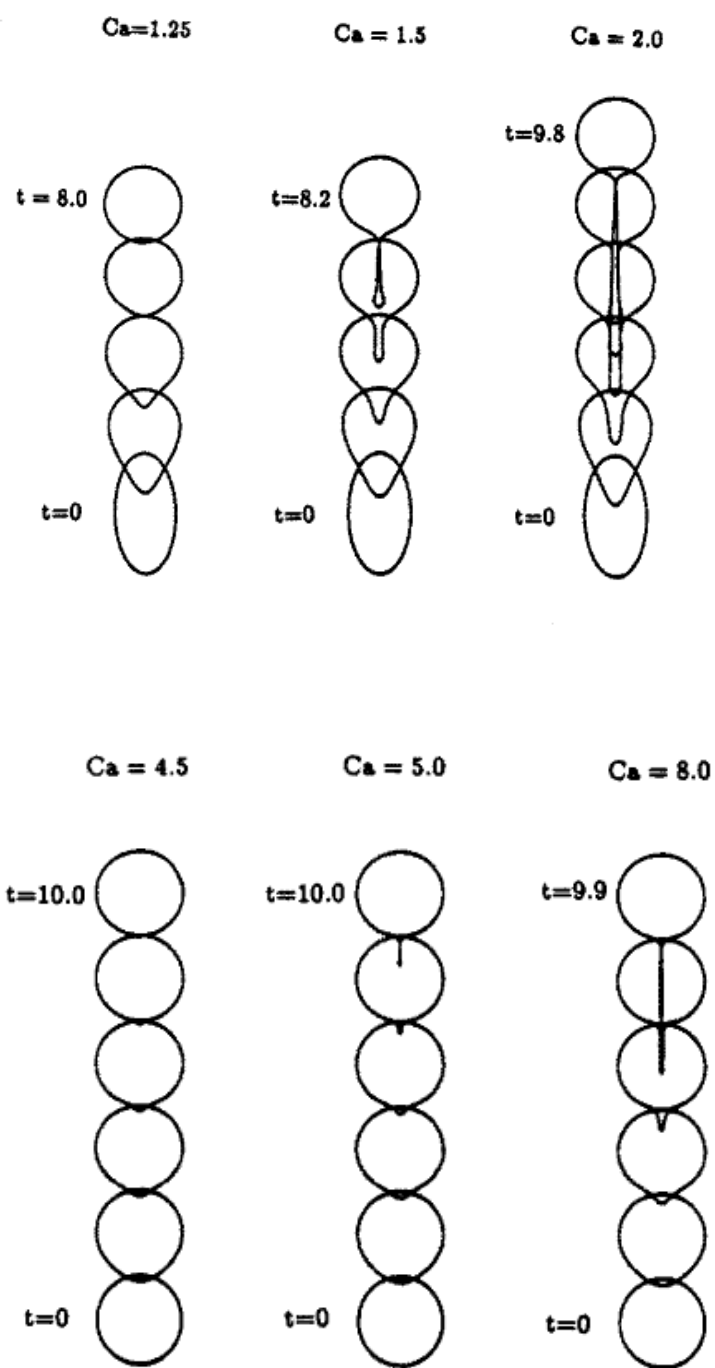
کردند. بر اساس این تحقیق شکل نهایی قطراتی که شکل آنها مقدار زیادی از کرووی تفاوت ندارند در انتها

همچنان کرووی باقی می‌ماند. جالب است که این تغییر شکل اولیه چنان که از حالت کرووی زیاد فاصله داشته

باشد شکل نهایی دیگر ثابت باقی نمی‌ماند (شکل ۲).



شکل ۲- تاثیر شکل اولیه پهن در تغییرات شکل قطره با زمان [۶]



شکل ۳- تاثیر شکل اولیه کشیده و کشش سطحی در تغییرات شکل با زمان [۶]

در این نتایج نشان داده شد که با کاهش کشش سطحی (افزایش عدد بی بعد کپیلاری) در حالتی که

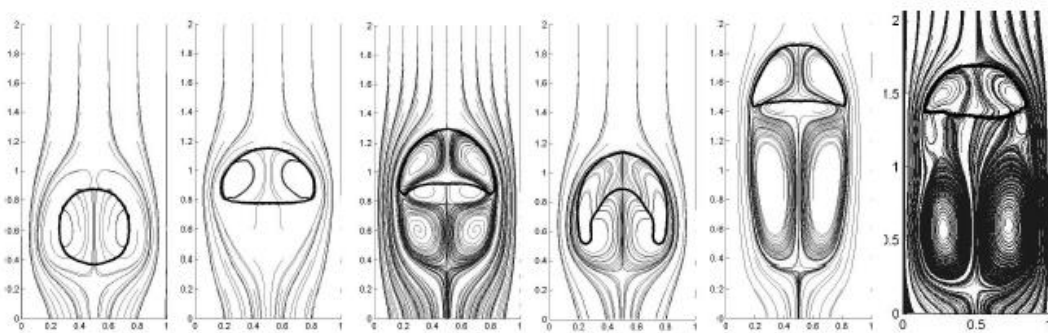
شکل اولیه کشیده باشد احتمال وجود یک دنباله در انتهای قطره تشدید می شود (شکل ۳).

اسمولیانیسکی و همکاران [۷] تغییرات دینامیکی بالا آمدن حباب‌های هوا را در یک سیال دیگر مورد

بررسی قرار داد. مقادیر مختلف کشش سطحی در این آزمایش مورد بررسی قرار گرفت و نشان داده شد که

این پارامتر یک عامل تاثیر گذار در این رژیم است (شکل ۴). شکل‌های مختلف حباب که با تغییرات سرعت

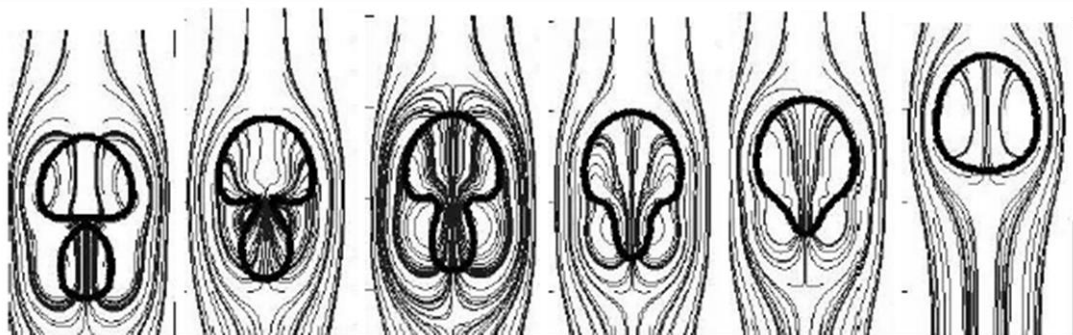
صعود به دست آمد با نتایج آزمایشگاهی مشابهت بسیار خوبی نشان داده است.



شکل ۴- تغییرات شکل حباب با توجه به سرعت بالا آمدن [۷]

در بخش دیگر این تحقیق الحاق شدن دو قطره به یکدیگر مورد بررسی قرار گرفت که در شکل ۵

آورده شده است.

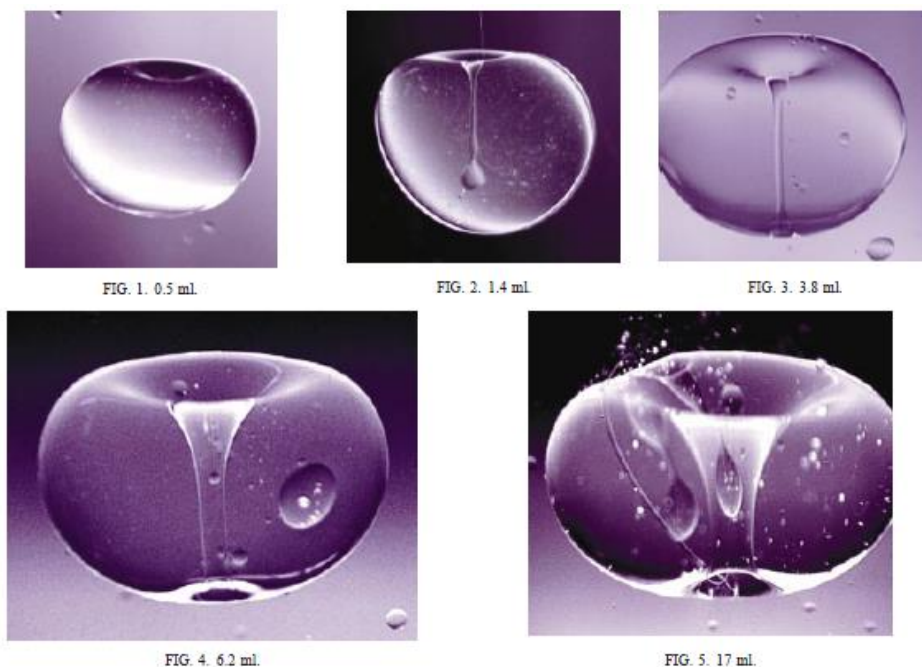


شکل ۵- مراحل الحاق شدن دو قطره هوا به یک دیگر [۷]

با توجه به نقش و کاربرد زیاد مسائل مربوط به تحلیل قطرات در صنایع نفتی و دارویی و لحاظ کردن این نکته که اکثر مایعات مورد بررسی در این صنایع در طبقه سیالات غیرنیوتنی دسته بندی می شوند نیاز به بررسی دقیق تر این مسائل با توجه به شرط غیرنیوتنی سیالات می باشد. تحقیقات زیادی در این زمینه انجام گرفته است که سعی بر بررسی دقیق تر این فرآیندها نموده اند. در تحقیقات گذشته با توجه به پیچیدگی این دسته از مسائل و به منظور ساده سازی معادلات، معمولا یکی از سیالات داخلی یا خارجی را همچنان نیوتنی لحاظ می کردند.

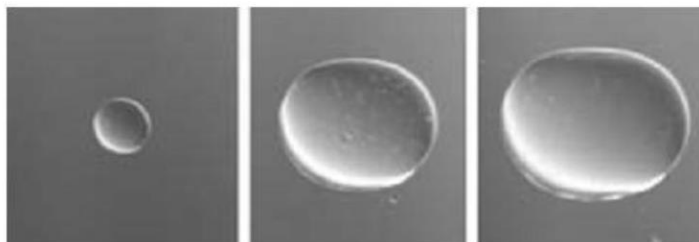
از میان تحقیقات مربوط به مسئله قطره کار برجسته آقاییان بلمونته و ساسکراتزه [۸] را می توان اشاره کرد. این تحقیق شامل دو قسمت تحلیلی و آزمایشگاهی بوده که در آن به بررسی اثر الاستیک سیال داخلی در تغییرات شکل قطره پرداخته است. در قسمت آزمایشگاهی، از محلول پلیمری زانتام در فاز حلال آب و گلسیرین استفاده شده است. متاسفانه ماده زانتام به صورت عمومی در میان محققان به عنوان ماده ای پلیمری با ساختار مولکولی غیر قابل انعطاف پذیر شناخته شده است که به سختی با مدل های رئولوژی قابل

شبیه‌سازی می‌باشد. در نتیجه علاوه بر نتایج کیفی خوب شکل پیش بینی شده دارای مقداری خطا می‌باشد. در قسمت دوم این تحقیق یک مدل سازی ریاضی بر اساس حساب اغتشاشات انجام شده است. در مدل سازی ریاضی فرض شده است که سیالات غیر قابل انحلال هستند و سرعت سقوط قطره در فاز سیال خارجی آنقدر کم باشد که آن را بتوان جریان خزشی لحاظ کرد. با توجه به فرضیات لحاظ شده، روغن سلیکون به عنوان سیال خارجی در بخش آزمایشگاهی انتخاب شده است. از خصوصیات بارز این سیال می‌توان به آب‌گریزی بالا آن و وجود انواع مختلف آن با ویسکوزیته‌های متفاوت در بازار اشاره کرد. در این تحقیق از مدل مرتبه سوم (این مدل معمولاً یک مدل ریاضی لحاظ می‌شود که در میان محققانی که تمرکز روی فیزیک سیالات دارند زیاد محبوب نیست و بیشتر مورد توجه ریاضی دانان قرار دارد) به منظور شبیه‌سازی جمله پلیمری تانسور تنش استفاده شده است. نتایج، اطلاعات جالبی را در ارتباط با شکل قطرات ویسکوالاستیک در اختیار گذاشت.



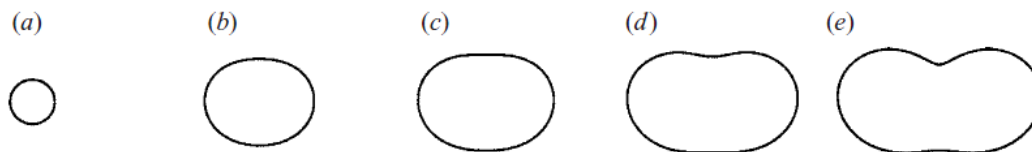
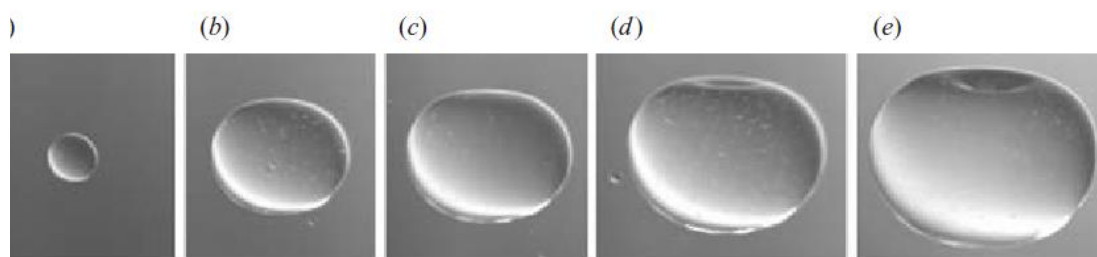
شکل ۶- تغییرات شکل نهایی قطره با سایز قطره [۸]

قطرات کوچک سیالات ویسکوالاستیک همچنان شکل نهایی کروی خود را حفظ می‌کردند حال آنکه با افزایش سایز و یا خاصیت الاستیک قطره (پارامتر دبورا در حل تحلیلی) شکل قطره از حالت کروی به یک بیضی پهن تبدیل می‌شود (شکل ۶-۷).



شکل ۷- تاثیر افزایش حجم قطره و تغییر شکل قطره از کروی به حالت پهن شده [۸]

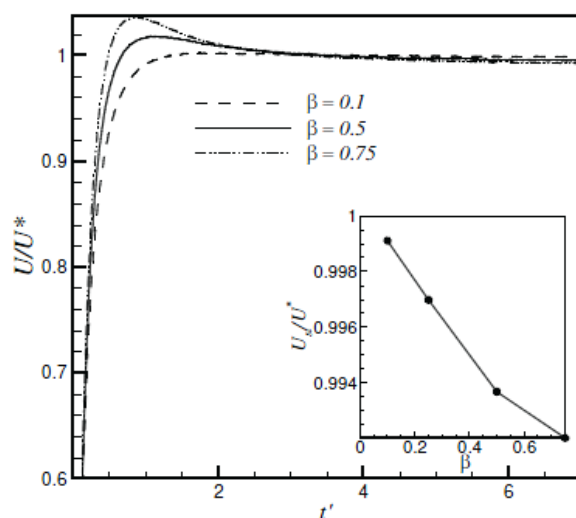
با افزایش پارامتر دبورا از یک مقدار بحرانی به بعد در انتهای قطره یک فرورفتگی ایجاد می‌شود که در کمال تعجب در حالت پایا همچنان باقی می‌ماند (شکل ۸). افزایش پارامتر دبورا باعث رشد این فرورفتگی تا حدی می‌تواند



شکل ۸- مقایسه شکل‌های آزمایشگاهی با حل تحلیلی به ازای تغییرات حجم [۸]

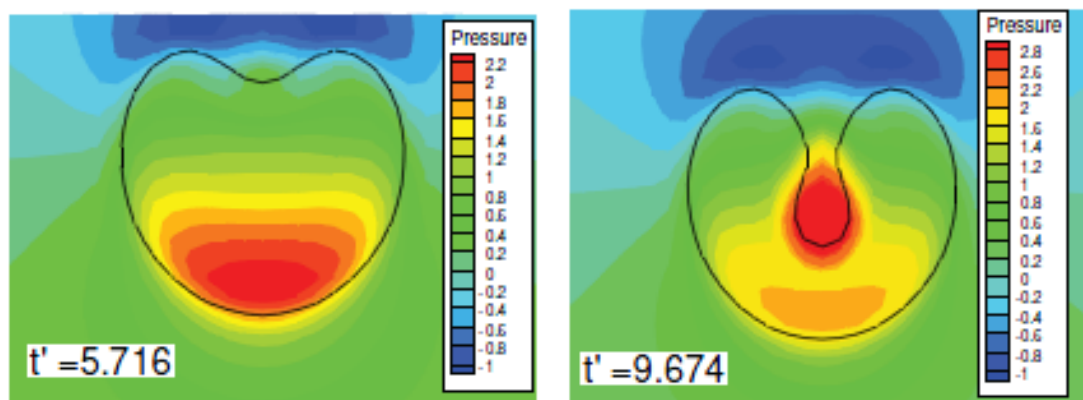
شود که قطره شکل یک دونات را به خود بگیرد و سیال خارجی از داخل سیال داخلی عبور کند (شکل ۶). در قسمت دیگر این تحقیق سرعت حد (سرعت سقوط) قطره مورد بررسی قرار گرفت که در آن نشان داده شد که افزایش خصوصیت الاستیک باعث کاهش این پارامتر می‌شود. لازم به ذکر است که مشاهده فرورفتگی در سطح سیالات ویسکوالاستیک یک پدیده نادر نیست و در بسیاری از مسائل دیگر هم که از سیالات غیر نیوتنی استفاده می‌شود، مشاهده شده است [۹-۱۱]. برای مثال در هنگام بالا آمدن حباب هوا در یک محیط غیر نیوتنی نیز این تغییر شکل مشاهده شده است [۱۲-۱۴]. یکی از تحقیقات خوب در این زمینه کار نوح و همکاران [۱۵] است که با بهره‌گیری از شبیه‌سازی عددی به بررسی این پدیده پرداخته‌اند. در میان سیالات نیوتنی نیز در بعضی موارد که ویسکوزیته سیال پایین است قطرات با نوک تیز هم مشاهده شده است [۱۶-۱۹] ولی دلایل این پدیده‌ها به کلی در سیالات نیوتنی و غیر نیوتنی متفاوت است [۲۰]. به صورت عمومی، اثر کشش سطحی به عنوان عامل نگه دارنده شکل قطره به صورت کروی گزارش شده است. در سیالات غیر نیوتنی با افزایش خاصیت الاستیک و حجم قطره تنش‌های نرمال بر نیروی کشش سطحی غلبه کرده و شکل قطره را از حالت کروی به شکل‌های دیگر تغییر می‌دهند.

موخاراجی و سرکار [۲۱] با مدل‌های عددی سقوط یک قطره ویسکوالاستیک را در سیال نیوتنی شبیه‌سازی کردند. در این تحقیق تمرکز اصلی روی مقدار سرعت حد قطره بود در ادامه تصاویر شکل قطرات پیش بینی شده به همراه جریان‌های داخلی و خارجی قطره گزارش شده است. آنها نشان دادند که افزایش الاستیسیته می‌تواند باعث افزایش جریان‌های داخل و خارج قطره شود. سرعت سقوط قطره با افزایش الاستیسیته کاهش می‌یابد (شکل ۹).



شکل ۹- تاثیرات نسبت ویسکوزیته پلیمری به ویسکوزیته حلال بر روی سرعت سقوط [۲۱]

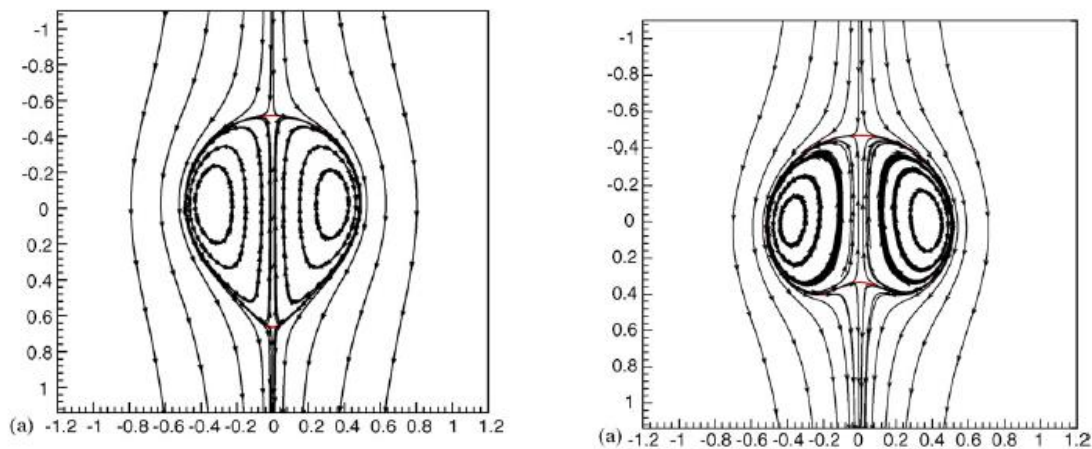
نکته جالب توجه در این تحقیق تغییرات فشار داخل و خارج قطره است. بر اساس این شبیه‌سازی با رشد فرورفتگی نقطه ماکسیمم فشار از جلوی قطره به نقطه فرورفتگی تغییر مکان می‌دهد که می‌تواند علت رشد فرورفتگی را توجیه کند (شکل ۱۰).



شکل ۱۰- تغییر مکان فشار ماکسیمم با افزایش رشد فرورفتگی [۲۱]

در امتداد این کار آقای کیشور و همکارانش [۲۲] با استفاده از روش عددی المان محدود اقدام به بررسی نیروی درگ در قطراتی که با مدل توانی پاورلو شبیه‌سازی شده بودند کردند.

با توجه به کارهای قبلی می‌توان حدس زد که لحاظ کردن هر دو سیال به عنوان سیال غیرنیوتنی کار نسبتاً پیچیده‌ای بوده و بنابراین تعداد بسیار کمی از کارها این مسئله را بررسی نمودند. کارهای عددی عمدتاً فقط یکی از دو سیال را غیرنیوتنی لحاظ می‌کردند. در این میان کار ارزشمند یو و همکاران [۲۳] به صورت عددی با روش المان محدود تاثیر الاستیسیته را روی شکل و حرکت قطره بررسی کردند (شکل ۱۱). این تحقیق به دو قسمت عمده تقسیم شده است. در قسمت اول قطره را ویسکوالاستیک و سیال خارجی را ویسکوز لحاظ کردند. به منظور شبیه‌سازی جملات پلیمری تنش، از مدل FENE استفاده شد. در این قسمت همانند کارهای ارائه شده قبلی نشان داده شد که افزایش پارامتر دبورا باعث کاهش سرعت سقوط و افزایش نیروی درگ می‌شود. نتایج جالبی در رابطه با شکل قطره نیز گزارش شد که در آن با افزایش عدد دبورا و کپیلاری، قطره شکل کروی خود را از دست می‌دهد و یک شکل پهن به خود می‌گیرد. با افزایش بیشتر عدد بی‌بعد دبورا و کپیلاری یک فرو رفتگی در انتهای قطره ظاهر می‌شود که به سمت

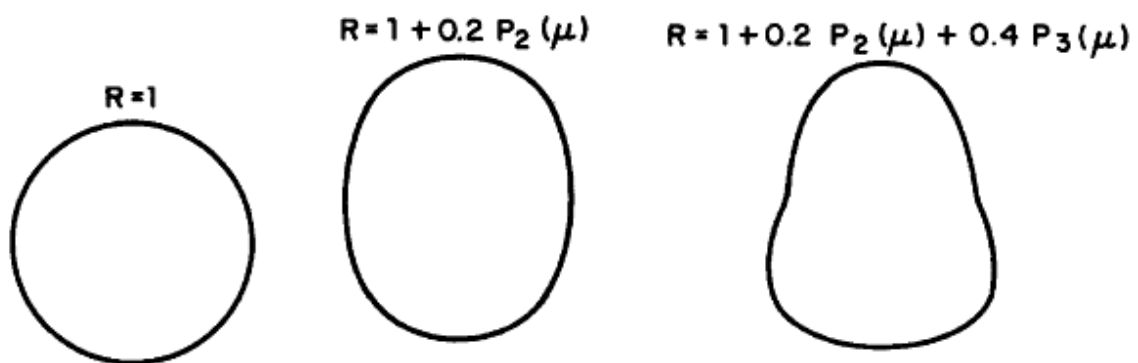


شکل ۱۱- تاثیر ویسکوالاستیسیته روی شکل قطره. شکل سمت راست قطره ویسکوالاستیک و سیال

خارجی نیوتنی است. شکل سمت چپ قطره غیر نیوتنی و سیال نیوتنی لحاظ شده است [۲۳]

داخل قطره کشیده می‌شود. در قسمت دیگر این تحقیق جای دو سیال عوض شده و این بار سیال داخلی نیوتنی و سیال خارجی غیرنیوتنی لحاظ گردید. در این حالت نشان داده شد که با افزایش مقدار ویسکوالاستیسیته سرعت سقوط افزایش یافته و حتی قطره شکل‌های کشیده‌تری را نیز می‌تواند تجربه کند. در ادامه این سری از بررسی‌ها آکارایا و همکاران [۲۴-۲۵] یک سری بررسی‌هایی روی خاصیت ویسکوزیته سیالاتی که با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابند انجام دادند و حتی یک رابطه ریاضی برای تنش برشی حالاتی که عدد رینولدز پایین است پیشنهاد کردند.

موهان و همکاران [۲۶] روی حالت خاصی که سیال بیرونی غیرنیوتنی باشد تمرکز کردند و نشان دادند که با تغییر خاصیت‌های ماده بیرونی قطره شکل کروی خود را از دست داده و می‌تواند پهن و یا کشیده شود. از قدیمی‌ترین و معتبرترین کارهای تحقیقاتی بر روی قطره می‌توان به کار اسلاتری و دانشجوی ایشان آقای واگنر اشاره کرد [۲۷]. در این تحقیق اثر جریان کم سرعت سیال غیرنیوتنی که از روی یک قطره غیرنیوتنی دیگر می‌گذرد بررسی شده است. این تحقیق تحلیلی جزء معتبرترین و جامع‌ترین تحقیقات موجود در این زمینه می‌باشد که در کمتر کاری نویسنده ای به آن اشاره نمی‌کند. به منظور شبیه‌سازی جمله‌های تنش پلیمری از مدل مرتبه ۳ استفاده شده است که متاسفانه جزء مدل‌های محبوب رئولوژیست



شکل ۱۲- تاثیر اثر ویسکوالاستیسیته و سرعت روی شکل پایای قطره [۲۷]

های فیزیک گرا نمی‌باشد. در این مدل تمامی حالات ممکن جمله‌های تنش در یکسری ضرایب مجهول ضرب می‌شود که این ضرایب مفاهیم فیزیکی خاصی ندارند. با توجه به این که بسیاری از سیالات حساسیت کمی به تغییرات خواص رئولوژی دارند به سختی می‌توان این ضرایب را از آزمایش به دست آورد. در کمال تعجب در قسمت نتایج به بررسی حالت اینرسی سیال کرده و بحث را تنها با بررسی این حالت خاص به پایان رسانده‌اند (شکل ۱۲). برای مطالعه و بررسی جامع کارهای که در زمینه قطره انجام شده افراد می‌توانند به کار آقایان دایرینه و مک هاگ [۲۸] مراجعه کنند.

این پروژه پایان نامه در ادامه کار آقای زارع وامرزاری [۲۹] تعریف شده است که در آن سعی شده یک حل کاملاً جامع برای حالتی که هر دو سیال داخلی و خارجی غیرنیوتنی هستند ارائه شود. همان طور که در قسمت مطالعات پیشین مشاهده شد به علت پیچیدگی معادلات حاکم، تنها در یک تحقیق [۲۷] به بررسی این پدیده پرداخته شده که به علت عدم استفاده از یک مدل رئولوژی مناسب، بررسی انجام شده دقت کافی را دارا نبوده است. در این پایان‌نامه سعی شده است با استفاده از روش حساب اغتشاشات یک حل تحلیلی برای حرکت و تغییر شکل خزشی قطرات ویسکوالاستیکی که در محیط‌های ویسکولاستیک سقوط می‌کند ارائه شود. برای شبیه سازی جملات تنش پلیمری از مدل شبه‌خطی اولدروید-بی استفاده شده است. متأسفانه مدل اولدروید-بی قادر به شبیه‌سازی رفتار ویسکوزیته با تغییرات نرخ برش نمی‌باشد. به منظور بالابردن دقت در ادامه این حل تحلیلی از مدل غیرخطی گزیکس استفاده شده است که توانایی بسیار خوبی در شبیه‌سازی رفتار کاهشی ویسکوزیته با افزایش نرخ برش سیالات ویسکوالاستیک دارد. به منظور خطی‌سازی معادلات حاکم از اعداد بی‌بعد دبورا و کپیلاری به عنوان پارامترهای اغتشاشی استفاده شده است. با استفاده از معادله مومنتم یک رابطه ریاضی بین پارامترهای رئولوژی و تابع جریان به دست آمده است. در ادامه با استفاده از تابع جریان جملات تنش داخل و خارج قطره محاسبه و با بهره‌گیری از

روابط موجود بین تنش‌های نرمال و کشش سطحی یک رابطه تخمینی برای محاسبه شکل قطره ارائه شده است. در این پروژه هدف بر آن است تا با استفاده از روش‌های تحلیلی یک رابطه برای شبیه‌سازی سرعت سقوط خزشی قطرات ویسکوالاستیک در محیط‌های ویسکوالاستیک ارائه شود. همچنین روابطی برای تخمین شکل نهایی این قطرات بر اساس پارامترهای موثر در این مسئله پیشنهاد می‌شود. در قسمت دوم این مطالعه یک حالت خاص این فرآیند (قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی) در آزمایشگاه شبیه‌سازی و مورد بررسی قرار گرفته است تا دقت روابط به دست آمده در قسمت تحلیلی را مورد بررسی قرار دهد.

۲- روش‌های تحلیلی و آزمایشگاهی در این پروژه

به منظور شبیه‌سازی جمله‌های تنش سیال ویسکوالاستیک از مدل‌های اولدروید-بی و گزیکس استفاده شده است. به منظور خطی سازی معادلات حاکم از یک حل بر اساس آنالیز اغتشاشات استفاده شده است. پارامتر اغتشاشی در سیال داخلی عدد دبورا بر اساس زمان رهایی از تنش مرتبط به آن است. به همین ترتیب از عدد بی بعد دبورا بر اساس زمان رهایی از تنش سیال محیط خارجی به عنوان پارامتر اغتشاشی جریان خارجی استفاده شده است. حل‌ها طی دو مرحله انجام گرفته‌اند. در مرحله اول جریان و تنش‌ها با فرض کروی بودن قطرات به دست آمده است. با استفاده از این حل تنش‌ها در روی سطح کروی قطره به دست آمده و با استفاده از شرایط مرزی تنش یک شکل اولیه برای قطره به دست می‌آید. در مرحله دوم جریان درون شکل تخمین زده شده در مرحله قبل محاسبه می‌شود و با استفاده از شرط مرزی تنش یک شکل دقیق تر از قطره تخمین زده می‌شود.

در انتها به منظور شبیه‌سازی این فرآیند در آزمایشگاه از محلول پلیمری پلی‌اکریلامید در محلول آب و گلیسرین به عنوان فاز داخلی قطره و از روغن سیلیکون که یک ماده آب‌گریز است به عنوان فاز خارجی استفاده شده است.



فصل دوم

مراحل آزمایشگاهی

۳- مراحل آزمایشگاهی

در قسمت آزمایشگاهی سعی بر شبیه‌سازی سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در یک محیط خارجی دیگر داریم. به منظور تولید جریان خزشی نیاز به انتخاب سیالاتی به عنوان مواد داخلی و خارجی قطره داریم که از ویسکوزیته نسبتاً بالایی برخوردار باشند. لازم به ذکر نیست که اکثر پلیمرهای موجود در بازار موادی قابل انحلال در آب هستند. به همین دلیل و به منظور بالا بردن ویسکوزیته این محلول از گلیسرین استفاده شده است. در انتخاب ماده خارجی لازم است یک سری موارد را مورد توجه ویژه قرار داد. این ماده باید آب‌گریز باشد تا در هنگام سقوط، قطره در سیال خارجی قابل حل نباشد. با توجه به این مسئله خانواده روغن‌ها می‌تواند انتخاب مناسبی باشد.

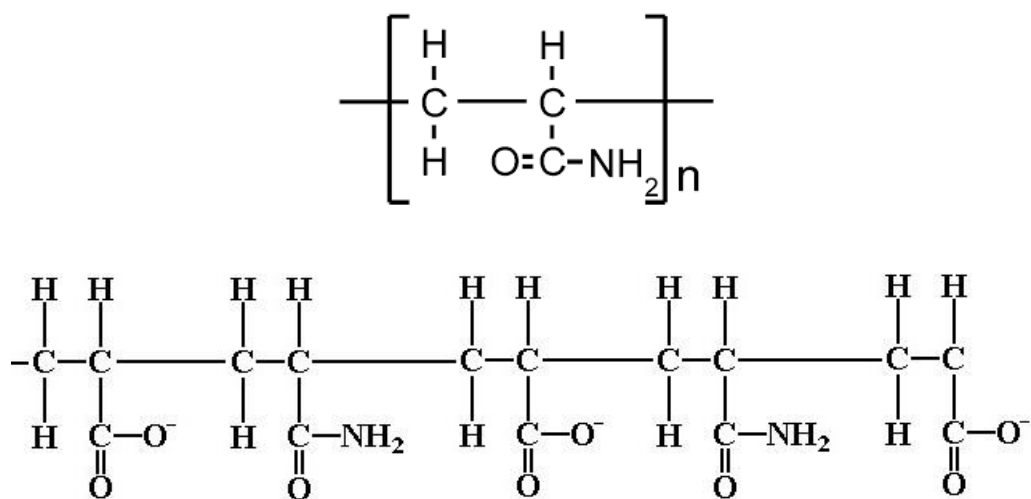
۳-۱- مواد مورد استفاده

معمولاً مدل‌های ویسکوالاستیک توانایی شبیه‌سازی برای مواد پلیمری با ساختار مولکولی غیر قابل انعطاف را به خوبی ندارند. با توجه به این مسئله از پلیمر پلی‌اکریلامید به عنوان ماده ویسکوالاستیک استفاده شده است که در صنعت جزء پرکاربردترین مواد غیرنیوتنی می‌باشد. در صنایع مختلف به صورت گسترده از این پلیمر استفاده می‌شود بنابراین لازم است این ماده را به صورت تخصصی‌تری شناخت تا بتوان تصمیمات لازم به منظور طراحی و انتخاب تجهیزات لازم در مراحل تولید و اختلاط این ماده را اتخاذ کرد.

یک بافت پلیمری را می‌توان مجموعه‌ای از ساختارهای کوچکی دانست (مونومرها) که به تعداد بسیار زیادی این ساختار تکرار شده است. تولید پلیمر طی فرآیندی انجام می‌شود که پلیمریزاسیون نامیده می‌شود که دو نوع عمده آن تغلیظ^۱ و اضافه کردن^۲ می‌باشند.

پلیمریزاسیون به روش اضافه کردن وقتی اتفاق می‌افتد که یک رادیکال آزاد به ماده اضافه شود. رادیکال آزاد به موادی که اتصالات دوتایی دارند حمله می‌کند تا تمام این اتصالات بشکنند و واکنش بین زنجیرهای پلیمری انجام شود. پلیمریزاسیون به روش تغلیظ به حالتی گفته می‌شود که دو مونومر در آب به هم دیگر متصل شوند.

پلیمرزاسیون رادیکال‌های آزاد مونومرهای اکریلامید در آب منجر به تولید پلی‌اکریلامید می‌شود (شکل ۱۳). شاید بتوان ادعا کرد این ماده در دسته پر کار بردترین پلیمرها باشد که در صنایع مختلف استفاده می‌شود. در اکثر موارد کاربردهای پلی‌اکریلامید، این ماده در یک ماده پایه آبی محلول است بنابراین نیاز است که خواص این پلیمر در حالات محلول در آب بررسی شود. یکی از پارامترهای بسیار مهم در بررسی جریان قطره عامل ویسکوزیته می‌باشد. به منظور بالا بردن ویسکوزیته سیال داخل قطره در این تحقیق از گلیسرین استفاده شده است. لازم به ذکر است که گلیسرین تمایل بسیار بالایی به جذب آب در خود دارد که باعث می‌شود یک انتخاب خوب به منظور تغییر پارامتر ویسکوزیته سیال داخلی ما باشد.



شکل ۱۳- ساختار مولکولی پلی‌اکریلامید

در مشاهدات تجربی این پلیمر به صورت پودری سفید رنگ و بدون بو است (شکل ۱۴).



شکل ۱۴- پلیمر پلی اکریلامید

عموما جرم مولکولی این ماده بین $10^6 * 2$ و $10^7 * 2$ گرم بر مول گزارش شده است که بسته به کیفیت تولید متفاوت می باشد. لازم به ذکر است که پلی اکریلامید یک ماده غیر سمی است ولی مونومرهای اکریلامید جزو سم های عصب گرا می باشد پس اگر حتی مقدار کوچکی از آن غیر پلیمریزه شده بماند این ماده می تواند سمی لحاظ شود.

در اکثریت کاربردهای صنعتی، از این ماده به صورت محلول در آب استفاده می شود که در زیر به اجمال به بررسی چندی از کاربردهای این ماده پرداخته شده است.

در سیستم های تصویه آب شرب از پلی اکریلامید به عنوان ماده لخته کننده مواد معلق در آب استفاده می شود. پس از اضافه شدن این پلیمر مواد معلق به صورت قطرات ویسکوالاستیک لخته شده و در کف

استخرهای ساکن ته نشین می‌شود. لازم به ذکر است که سرعت ته نشینی به عوامل مختلفی همچون سائز قطرات و خواص ویسکوالاستیک آن مرتبط می‌باشد. تخمین این زمان از اهمیت بالایی در صنعت برخوردار است.

درفرآیند بازیافت روغن از پلی‌اکریلامید به عنوان ماده محلول در آب با ویسکوزیته بالا استفاده می‌شود. به منظور افزایش صرفه اقتصادی در روش‌های مرسوم ماده پلیمری تزریق می‌شود تا روغنی که در مخزن گیر کرده است را به بیرون پمپ هدایت کند.

در فرآیند بالا بردن کیفیت خاک، پلی‌اکریلامید در کریلیوم تزریق می‌شود که در باغبانی و کشاورزی تجاری از این ماده به منظور عامل کاهنده فرسایش خاک به صورت انبوه استفاده می‌شود. شایان به ذکر است که در دماهای بالای محیط این ماده تجزیه شده و می‌تواند خود باعث آلودگی‌های محیطی شود.

به عنوان فاز حلال از آب و گلیسیرین استفاده شده است. گلیسیرین جزء موادی است که قابلیت جذب بالا آب را دارد و همچنین می‌تواند ویسکوزیته بالایی را برای محلول به وجود آورد. از خصوصیات جالب گلیسیرین می‌توان به این مسئله اشاره کرد که اگر ماده پلیمری به خوبی در آب حل نشده باشد به آسانی قابل تشخیص نخواهد بود ولی با اضافه شدن گلیسیرین این حالت خود را به صورت ناهمگنی و رگه در محلول جدید نشان می‌دهد. با بهره جستن از این خصوصیت گلیسیرین می‌توان مدت زمانی که ماده احتیاج به هم خوردن در دستگاه‌های پلپیت دارد را مشخص کرد.

به عنوان فاز خارجی از روغن سلیکون استفاده شده است. این ماده آب‌گریز با ویسکوزیته‌های مختلفی در بازار موجود است. به منظور ایجاد جریان خزشی از ترکیب ۱:۵ ویسکوزیته ۱۲۰۰ و ۸۰۰ سانتی پویز استفاده شده است که ویسکوزیته نهایی ۹۵۶ سانتی پویز محاسبه شده است.

۲-۳- تجهیزات آزمایشگاهی

در قسمت آزمایشگاهی از تجهیزات مختلفی استفاده شده که در این بخش به اجمال به بررسی آنها می-پردازیم.

۱-۲-۳ همزن هات پلیت

سیال ویسکوالاستیک از ۳ ماده اولیه تشکیل شده است: ماده پلیمری پلی اکریلامید، آب به عنوان ماده حلال و گلیسرین به عنوان ماده ویسکوز کننده. به طور کلی از هر نوع همزنی که بتوان از نرخ برش های بالا اجتناب کرد، می توان استفاده کرد. در این آزمایش از همزن هات پلیت (IKA RCT) استفاده شده است



شکل ۱۵- همزن هات پلیت

(شکل ۱۵) که ساختار ساده‌ای دارد. این همزن یک قرص مغناطیسی که داخل مخلوط قرار می‌گیرد را به چرخش در می‌آورد. در صورت نیاز می‌توان به ماده گرما نیز داد که در این آزمایش به منظور جلوگیری از از همپاشی^۱ ماده پلیمری، تمام فرآیندهای همگن‌سازی در دمای محیط (۲۴ درجه سانتی‌گراد) انجام گرفته شده است.

۳-۲-۲- دوربین با سرعت عکس برداری بالا

به منظور عکس برداری و تخمین سرعت سقوط قطره از دوربین عکس برداری با سرعت بالا (pco. Dimax S/4000 frames per second) استفاده شده است (شکل ۱۶) که به لنز شرکت زایس (PLANAR T1.4/85 mm ZF.2) مجهز است.



شکل ۱۶- دوربین سرعت بالا (pco. Dimax S/4000 frames per second)

به منظور نور پردازی از ۴ پرژکتور ۸۰۰ وات شرکت SOMITA بهره‌گیری شده است (شکل ۱۷).



شکل ۱۷- پرژکتور ۸۰۰ وات شرکت SOMITA

در تنظیمات این دوربین حالت ۱۰۰۰ فریم بر ثانیه انتخاب شده است. با توجه به تعداد فریم‌های تغییر کرده و تغییر جابجایی قطره نسبت به خط کش جاسازی شده در سلول سرعت سقوط اندازه گیری می‌شود.

۳-۲-۳- دستگاه ویسکومتر

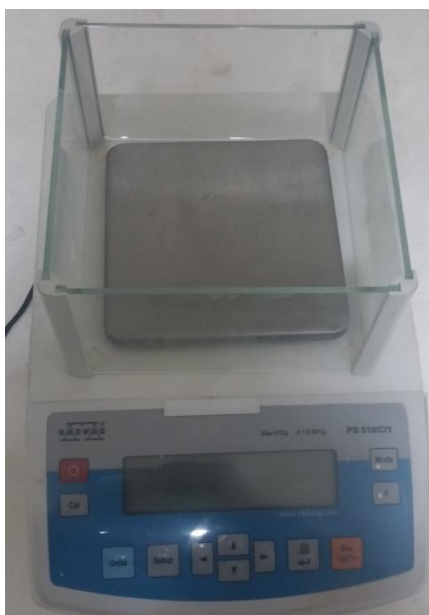
برای اندازه گیری تغییرات ویسکوزیته سیال بر حسب نرخ برش از دستگاه ویسکومتر شرکت BROOKFIELD مدل DV-E /LV استفاده شده است (شکل ۱۸). با استفاده از این تغییرات می‌توان ضریب تحرک را به دست آورد.



شکل ۱۸- دستگاه ویسکومتر شرکت BROOKFIELD مدل DV-E /LV

۳-۲-۴- ترازوی با دقت بالا

تمامی اندازه گیری‌ها توسط ترازوی شرکت RADWAG مدل PS 510/C/1 با دقت 0.0001 گرم انجام گرفته است (شکل ۱۹). به منظور محاسبه حجم قطره وزن سرنگ حاوی سیال قبل و بعد از تزریق قطره با دقت 0.0001 گرم توسط این ترازو محاسبه شده و با استفاده از محاسبه اختلاف وزن این اندازه‌گیری‌ها وزن قطره محاسبه می‌شود. در مرحله بعدی با استفاده از مفهوم جرم حجمی ماده و وزن محاسبه شده قطره، حجم آن قابل اندازه گیری است.



شکل ۱۹- ترازوی شرکت RADWAG مدل PS 510/C/1

۳-۲-۵- سلول آزمایشگاهی

سیال خارجی در محوطه‌ای قرار می‌گیرد که سلول آزمایشگاهی نامیده می‌شود. برای انتخاب و طراحی سلول آزمایشگاهی باید به نکات زیر توجه داشت:

- به دلیل وجود نیازهای عکاسی، این سلول باید شفاف باشد.
- باید توجه شود که عرض این سلول به گونه‌ای انتخاب شود که دیواره تأثیری بر روی حرکت قطره نگذارد.
- طول سلول باید به گونه‌ای انتخاب شود که قطره در زمان تزریق شدن در محیط خارجی بتواند فرصت جدا شدن از فیلامنت خود را داشته باشد.
- با توجه به موارد اشاره شده از یک محوطه مکعب مستطیل شکل ($15\text{Cm} \times 15\text{Cm} \times 50\text{Cm}$) از جنس پیرکسی که با چسب آکواریوم آب بندی شده است استفاده شده است (شکل ۲۰).



شکل ۲۰- سلول آزمایشگاهی مورد استفاده در آزمایش

۳-۳- تهیه کردن مواد

در این آزمایش ۰,۰۴٪ جرمی ماده پلیمری پلی اکریلامید در حلال آب و گلیسرین که به نسبت ۱ به ۴ حجمی ترکیب شده اند حل شده است. به این منظور پلی اکریلامید را ابتدا با آب ترکیب کرده و برای مدت ۲۴ ساعت با سرعت ۸۰ دور در دقیقه در دمای محیط توسط هات پلیت مخلوط می کنیم. بعد از همگن شدن می توان از انواع مختلف مواد رنگ دهنده استفاده کرد. باید توجه داشت که اکثر مواد رنگ دهنده محلول در آب جزء نمک ها دسته بندی می شوند و این مواد می توانند تاثیرات زیادی روی خواص سیال داشته باشند (معمولا باعث کاهش شدید ویسکوزیته و خواص الاستیک سیال می شوند). با توجه به این مسئله،

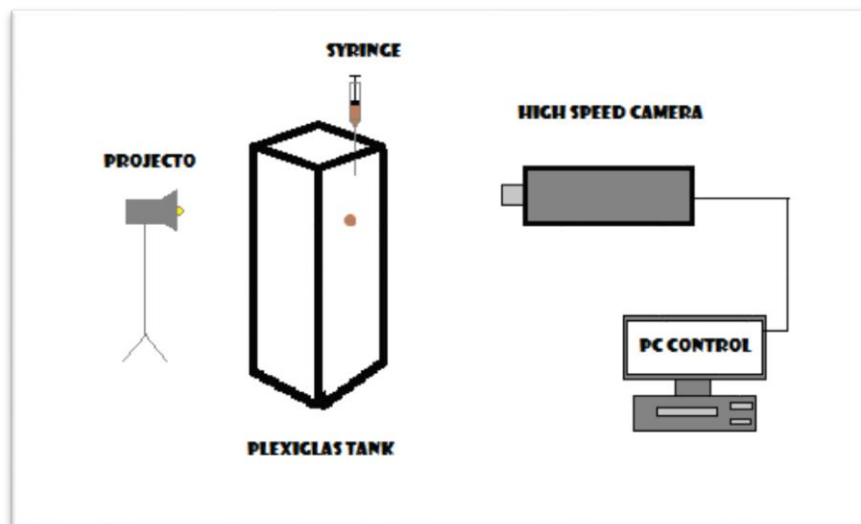
ماده پرمگنات که به سادگی در آب حل می‌شود و تاثیرات کمی روی ماده ویسکوالاستیک دارد در این آزمایش انتخاب شده است. به این منظور، مقدار بسیار کمی از این ماده (کمتر از ۰,۰۰۱ گرم) برای مدت ۲ ساعت با محلول آب و پلی‌اکریلامید مخلوط شده است. اضافه کردن پرمگنات رنگ بنفش به سیال می‌دهد که بعد از گذشت چند ساعت به قهوه‌ای تیره تبدیل می‌شود. بعد از این مرحله، گلیسرین طی ۴ مرحله (هر ۶ ساعت) به محلول اضافه شده و سیال برای مدت ۲۴ ساعت هم خورده تا به یک محلول کاملاً همگن تبدیل شود.

۳-۴- مکانیزم آزمایش

در قسمت تحلیلی تحقیق حاضر به علت حجم سنگین و شکل پیچیده معادلات حاکم از ساده‌سازی‌هایی استفاده شده است که لازم است در قسمت آزمایشگاهی به آن‌ها توجه ویژه‌ای شود. با توجه به در نظر گرفتن فرض جریان خزشی لازم است که بتوان سرعت سقوط قطرات را به حدی پایین نگه داشت که $Re \ll 1$ در آن برقرار باشد. عموماً سرعت سقوط قطره وابستگی شدیدی به اختلاف چگالی دو سیال و ویسکوزیته آنها (محیط خارجی و محیط قطره) دارد. متأسفانه چگالی روغن‌های سیلیکون موجود در بازار دارای تفاوت زیادی نمی‌باشند ولی خوشبختانه در انتخاب ویسکوزیته آن انتخاب‌های نسبتاً خوبی داریم. با توجه گرفتن این نکته، به منظور تولید جریان خزشی، از روغن سیلیکون با ویسکوزیته بالا استفاده شده است. به همین ترتیب برای افزایش ویسکوزیته سیال داخل قطره از گلیسرین استفاده شده است که یک ماده ویسکوز کننده است.

همانند شکل (۲۰)، روغن سیلیکون در داخل سلول آزمایشگاهی ریخته می‌شود. به منظور عکس برداری با دوربین سرعت بالا، سلول در فاصله یک متری (این فاصله بستگی به نوع لنز دارد) آن قرار می‌گیرد. برای

نور پردازی ۴ عدد نورافکن ۸۰۰ وات در اطراف سلول قرار می‌گیرند و مکانیزم تزریق قطره در بالای سلول قرار می‌گیرد (شکل ۲۱). لازم به ذکر است که برای تزریق فاز قطره از سرنگ با سایزهای مختلف استفاده شده است. برای تولید حجم‌های بزرگ‌تر قطره از بورت نیز بهره گرفته شده است.

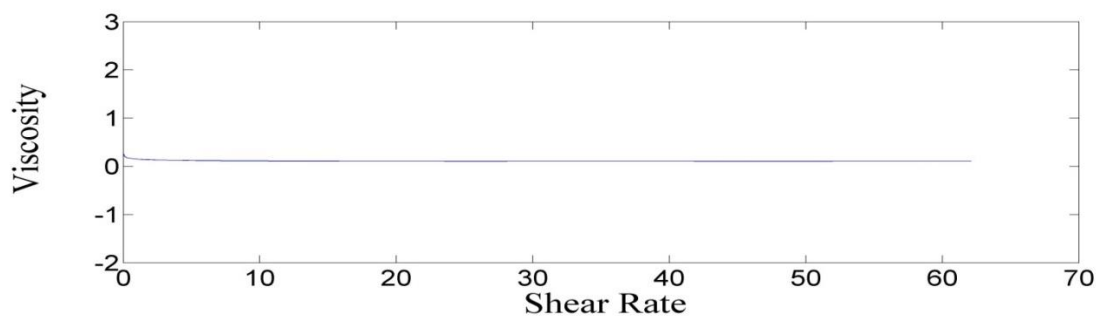


شکل ۲۱- شماتیک مکانیزم آزمایش

۳-۵- تست‌های رئومتر

۳-۵-۱- تست ویسکوزیته

ویسکوزیته روغن سیلیکون مورد استفاده در این آزمایش ۹۵۶ سانتی پویز است. نمودار تغییرات ویسکوزیته بر حسب نرخ برش برای سیال پلیمری که توسط پژوهشکده رنگ و پلیمر اندازه گیری شده است در شکل ۲۲ رسم شده است.



شکل ۲۲- تغییرات ویسکوزیته با نرخ برش

عموما ویسکوزیته سیالات ویسکوالاستیک با تغییرات نرخ برش تغییر خواهند کرد. در این میان یک دسته از سیالات هستند که ویسکوزیته ثابتی با تغییرات نرخ برش نشان می دهند که به آن ها سیالات با گر^۱ گفته می شوند که مورد توجه بسیار زیاد محققان آزمایشگاهی می باشد. از آنجا که در سیالات دیگر با تغییر نرخ برش، ویسکوزیته نیز تغییر می کند تمایز بین تاثیرات تغییر ویسکوزیته و خاصیت الاستیک سیال در نتایج بسیار پیچیده می شود. از این رو با استفاده از سیالات با گر^۱ ویسکوزیته ثابت مانده و میتوان تاثیر پارامترهای دیگر را به تفکیک بررسی و مورد مطالعه قرار داد.

۳-۵-۲- تست کشش سطحی

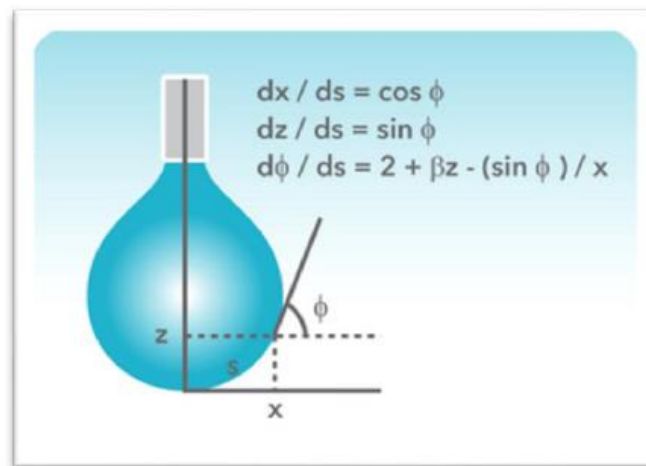
یکی از مهم ترین و تاثیرگذارترین پارامترها روی شکل و سرعت سقوط قطره را می توان کشش سطحی بین دو مایع نام برد. به طور کلی این پارامتر سعی بر حفظ شکل کروی قطره و کمینه کردن مساحت قطره دارد.

روش های تحلیلی ابتدا کشش سطحی بین هر کدام از مایعات با هوا به دست آمده و سپس طی یک سریفرضیات ساده کننده یک رابطه تحلیلی برای کشش سطحی بین دو سیال به دست می آید. تجربه نشان

داده این روابط تحلیلی از دقت بالایی برخوردار نخواهند بود و تنها برای به دست آوردن محدوده این پارامتر کمک خواهد کرد. در میان روش‌های آزمایشگاهی روش قطره معلق از محبوبیت و دقت بالایی برخوردار است. در این روش بین پارامترهای مختلف سیالات از جمله کشش سطحی و یک پارامتر هندسی (پارامتر شکل) رابطه‌ای برقرار است که با استفاده از آن می‌توان مقدار دقیقی از اندازه کشش سطحی را تخمین زد. برای مثال در روش اندازه‌گیری نوری زاویه تماس این رابطه بین کشش سطحی، $\Delta\rho$ (اختلاف چگالی دو سیال)، g (نیروی گرانش)، R_0 (شعاع معادل قطره)، و β (پارامتر هندسی شکل) برقرار است:

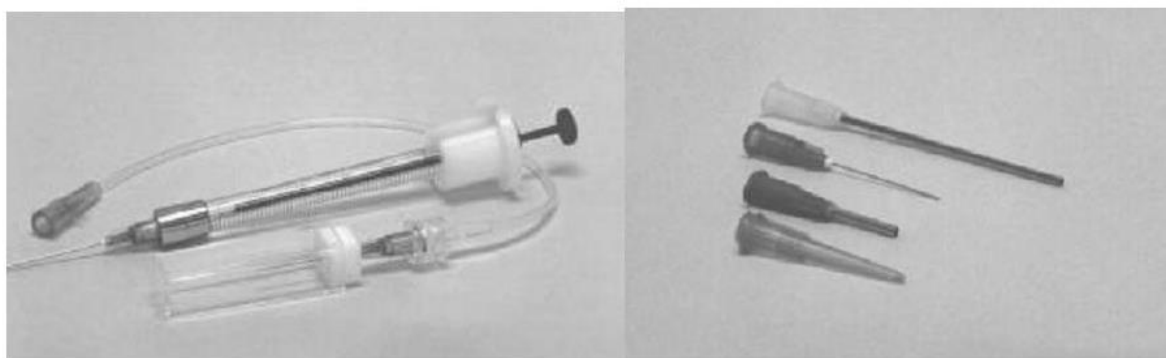
$$\Gamma = \Delta\rho g \frac{R_0^2}{\beta}$$

نحوه محاسبه ضریب در شکل ۲۳ نشان داده شده است.



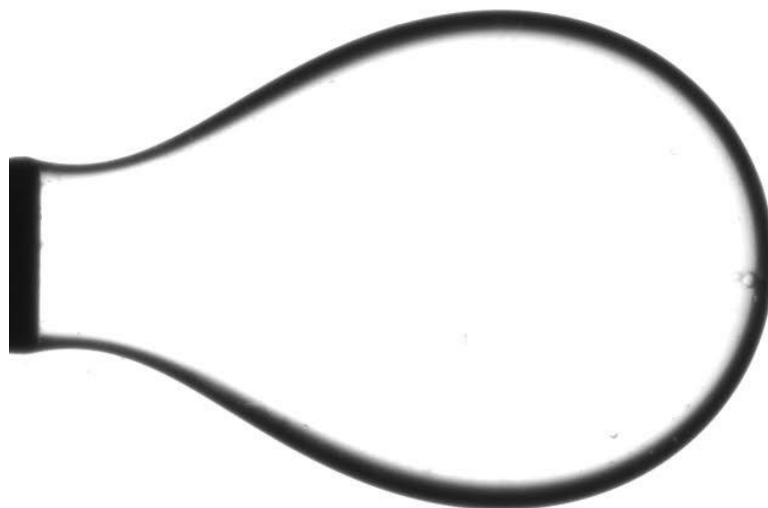
شکل ۲۳- محاسبه ضریب شکل برای اندازه‌گیری کشش سطحی

کشش سطحی بین دو سیال با روش نوری زاویه تماس توسط دستگاه OCA20 کمپانی Data Physics پژوهشکده شیمی و مهندسی شیمی ایران انجام گرفته است. در این روش سیال محیط را در یک سلول بسیار کوچک قرار داده و با استفاده از سرنگ (شکل ۲۴) قطره از سیال دیگر را در آن می ریزند. در انتخاب سرنگ باید دقت کافی انجام گیرد تا قطره حاصل تاثیر دیواره را تجربه نکند و بتواند در آستانه جدایش قرار گیرد. در شکل زیر انواع مختلف سرنگ‌های مورد استفاده در آزمایش نشان داده شده است:



شکل ۲۴- سرنگ‌ها و سلول مورد استفاده توسط آزمایشگاه

پس از عکس برداری از قطره مورد نظر در محیط نمونه محاسبات لازم برای ضریب شکل و به دست آوردن کشش سطحی توسط نرم افزار انجام خواهد گرفت. برای نمونه قطره پلیمری پلی‌اکریلامید در فاز خارجی روغن سیلیکون عکس برداری شده توسط دستگاه در شکل ۲۵ قابل مشاهده است.



شکل ۲۵- لحظه جدا شدن قطره پلی اکریلامید در روغن سیلیکون

با استفاده از این محاسبات مقدار کشش سطحی بین دو سیال ۲۷,۹۵ میلی نیوتن بر متر به دست آمده است.

۳-۵-۳- تست نوسان

تست نوسان یکی از معروفترین تستهای مواد ویسکوالاستیک است. در این تست ماده تحت یک تنش نوسانی $\tau = \tau_0 \cos \omega t$ قرار گرفته و تغییر شکل ماده مورد بررسی قرار می گیرد. انتظار می رود که تغییر شکل و تنش هم فرکانس باشند اما یک اختلاف فاز δ در آنها مشاهده می شود $\gamma = \gamma_0 \cos(\omega t - \delta)$. در این تست مقدار γ_0 بسیار کوچک لحاظ شده است تا از تغییر شکل های بزرگ اجتناب گردد.

به این منظور از تنش و برش مختلط استفاده می‌کنیم که قسمت حقیقی آن تنش و برش ما هستند:

$$\tau^* = G^* \gamma^* \quad (۱) \text{ مدل سازی جامد}$$

$$\tau^* = \eta^* \dot{\gamma}^*$$

$$(۲) \text{ مدل سازی سیال}$$

G^* یک بخش موهومی دارد و یک بخش حقیقی:

$$G^* = G' + iG'' \quad (۳)$$

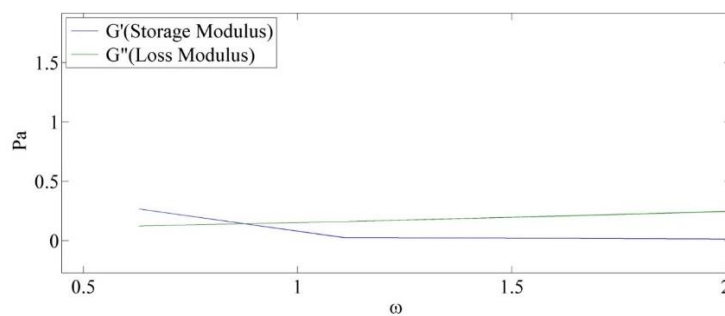
که G'' نماینده بخش سیال ماده (موهومی) و G' نماینده بخش جامد (حقیقی) آن است. بر اساس مدل - سازی جامد داریم:

$$G^* = \frac{\tau^*}{\gamma^*} = \frac{\tau e^{i\omega t}}{\gamma e^{i(\omega t - \delta)}} \quad (۴)$$

که در آن خود اختلاف فاز می‌تواند تابع فرکانس باشد. با توجه به رابطه بالا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} G' &= \frac{\tau_0}{\gamma_0} \cos \delta \\ G'' &= \frac{\tau_0}{\gamma_0} \sin \delta \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \tan \delta = \frac{G''}{G'} \quad (۵)$$

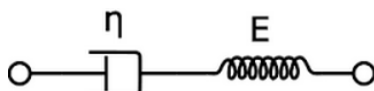
بعد از اندازه گیری‌های انجام شده در پژوهشکده رنگ و پلیمر ایران نمودار مربوط به $G'G''$ همانند شکل ۲۶ به دست آمده است.



شکل ۲۶- نتایج تست نوسان برای محلول پلی اکریلامید

۵-۵-۳-۱- تفسیر نتایج تست نوسان با مدل ماکسول

یکی از بهترین مدل‌ها برای تفسیر نتایج تست نوسان مدل ماکسول است. این مدل از یک فنر و دمپر سری تشکیل شده است.



شکل ۲۷- مدل فنر و دمپر ماکسول

$$\tau + \lambda \dot{\tau} = \eta \dot{\gamma} \quad (۶) \text{ مدل ماکسول}$$

$$\tau = \tau_0 \cos \omega t \quad (۷) \text{ تحریک}$$

$$\gamma = \gamma_0 \cos(\omega t - \delta) \quad (۸) \text{ پاسخ}$$

با جایگذاری این روابط در مدل ماکسول رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\tau_0 \cos \omega t - \lambda \tau_0 \sin \omega t = \eta \dot{\gamma} \quad (۹)$$

با فرض $\tan \theta = \frac{1}{\lambda \omega}$ خواهیم داشت:

$$\sin \omega t - \tan \theta \cos \omega t = -\frac{\eta \dot{\gamma}}{\lambda \tau_0 \omega} \quad (۱۰)$$

$$\sin \omega t - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \omega t = -\frac{\eta \dot{\gamma}}{\lambda \tau_0 \omega} \quad (۱۱)$$

$$\cos \theta \sin \omega t - \sin \theta \cos \omega t = -\frac{\eta \dot{\gamma}}{\lambda \tau_0 \omega} \cos \theta \quad (۱۲)$$

$$\sin(\omega t - \theta) = -\frac{\eta \dot{\gamma}}{\lambda \tau_0 \omega} \cos \theta \quad (۱۳)$$

$$\cos(\omega t - \theta) = -\frac{\eta \dot{\gamma}}{\lambda \tau_0 \omega} \cos \theta \Rightarrow \gamma = \frac{\lambda \tau_0}{\eta \cos \theta} \cos(\omega t - \theta) \quad (۱۴)$$

با توجه به فرضیات داریم:

$$\gamma_0 = \frac{\lambda \tau_0}{\eta \cos \theta}, \tan \delta = \frac{1}{\lambda \omega} \quad (۱۵)$$

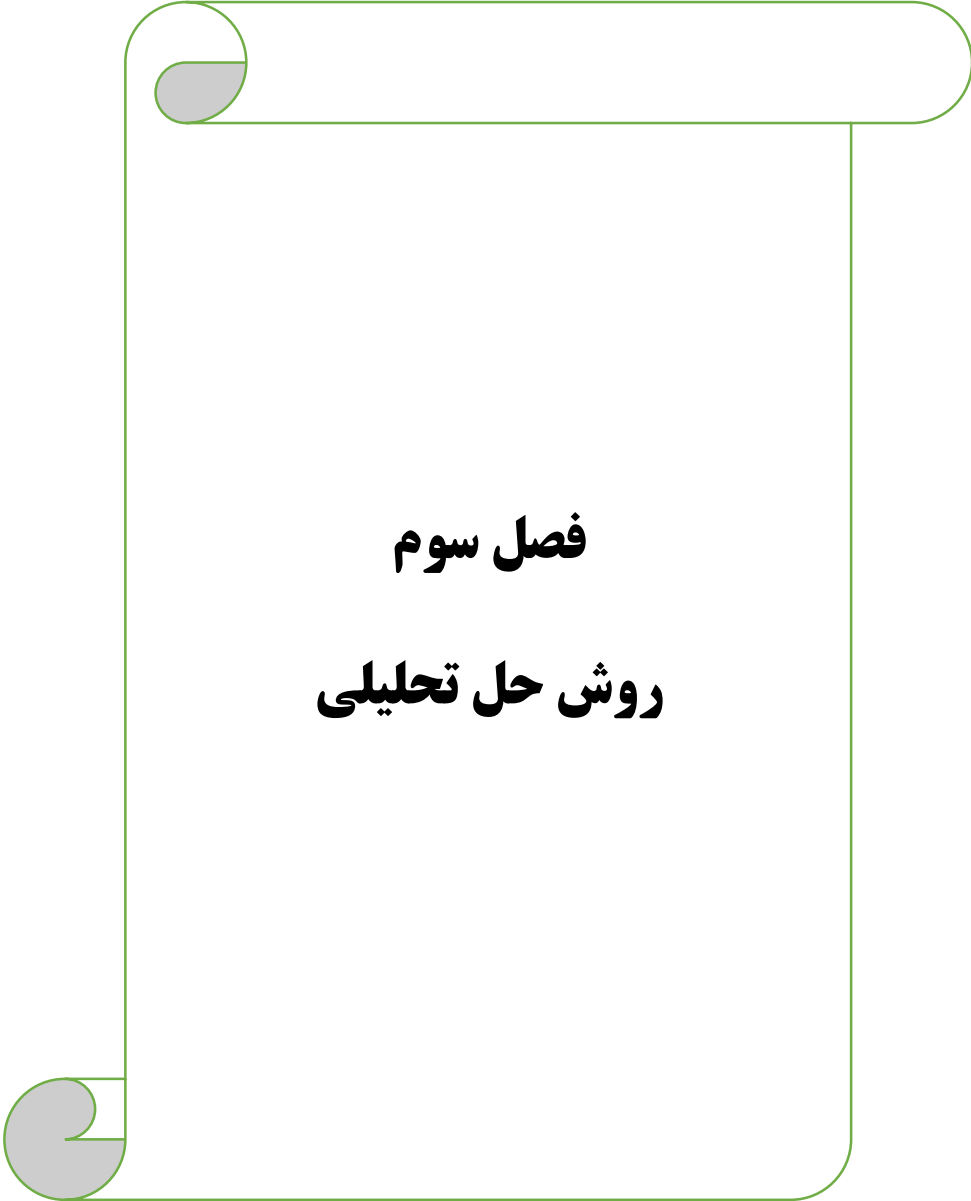
در نتایج آزمایشگاهی، برای مکانی که دو نمودار یکدیگر را قطع می کنند ($G' = G''$) خواهیم داشت

$$\tan \delta = \frac{1}{\lambda \omega} = 1 \quad \text{پس :}$$

$$1 = \frac{1}{\lambda \omega} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{\omega} \quad (۱۶)$$

با استفاده از تفاسیر بالا مقدار زمان رهایی از تنش برای سیال پلی اکریلامید $\lambda = \frac{1}{0.85} = 1.176s$ به دست

آمده است.



فصل سوم

روش حل تحلیلی

۴- معادلات حاکم

به منظور ساده‌سازی معادلات حاکم مرسوم است از حالت بی‌بعد آنها استفاده شود. این عمل حل به دست آمده را به حالات متفاوت قابل تعمیم می‌کند. در حل این معادلات از پارامترهای بی‌بعد زیر استفاده شده است:

$$\beta = \frac{\eta_{p,0}}{\eta_0} \quad De = \frac{\lambda U_0}{R} \quad u = \frac{u^*}{U_0} \quad \tau = \frac{\tau^* R}{\eta_0 U_0} \quad P = \frac{P^* R}{\eta_0 U_0} \quad D = \frac{D^* R}{U_0} \quad (17)$$

که در آن β نسبت ویسکوزیته پلیمری در نرخ برش صفر ($\eta_{p,0}$) به نسبت ویسکوزیته حلال در نرخ برش صفر (η_0) و De عدد بی‌بعد دپورا، λ معرف زمان رهایی از تنش، U_0 سرعت بی‌بعد، R شعاع معادل قطره، u^* و τ^* تانسورهای بعددار سرعت و تنش و P^* فشار می‌باشد. D تانسور نرخ تغییر شکل است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (18)$$

لازم به ذکر است که در این جا و تمام متن پایان نامه تمامی پارامترهای ستاره‌دار حالات بعددار و پارامترهای بدون ستاره نمایانگر حالات بی‌بعد این پارامترها هستند. از آنجایی که اکثر پارامترها برای هر دو سیال داخلی و بیرونی یکی است برای نشان دادن سیال داخلی از زیر نماد "i" و برای سیال خارجی از زیر نماد "o" استفاده شده است.

معادلات حاکم بر سیالات قوانین نویراستوکس و بقای جرم می‌باشند که با فرض جریان خزشی و از بین بردن جمله‌های جابجایی به معادلات استوکس تبدیل شده‌اند:

$$\nabla V^* = 0 \quad (۱۹)$$

$$\nabla . P^* = \rho g + \nabla . \tau^* \quad (۲۰)$$

با توجه به شکل قطرات از مختصات کروی استفاده شده است. معادلات بقای جرم و استوکس در مختصات کروی به شرح زیر می‌باشند:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0 \quad (۲۱)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{\rho g_r R^2}{\eta U_\infty} \quad (۲۲)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \\ & + \frac{(\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}) - \tau_{\varphi\varphi} \cot \theta}{r} + \frac{\rho g_\theta R^2}{\eta U_\infty} \end{aligned} \quad (۲۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P}{\partial \varphi} = & \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\varphi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\varphi\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \\ & + \frac{(\tau_{\varphi r} - \tau_{r\varphi}) + \tau_{\varphi\theta} \cot \theta}{r} + \frac{\rho g_\varphi R^2}{\eta U_\infty} \end{aligned} \quad (۲۴)$$

به منظور ساده‌سازی و از بین بردن پارامتر فشار از معادله اول نسبت به پارامتر r مشتق گرفته و کل معادله را در r ضرب کرده و سپس آن را از مشتق معادله دوم نسبت به θ کم شده است. پس از محاسبات انجام شده معادله به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{r^3} (3r^2 \tau_{r\theta} + r^3 \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{r\theta})) - \frac{1}{r \sin \theta} (\tau_{\theta\theta} \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta})) + \frac{1}{r \sin \theta} (\cos \theta \tau_{\varphi\varphi}) \right. \\
& + \frac{2r (\frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{rr}) + r^2 (\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial r} \tau_{rr})}{r^2} - \frac{(\cos \theta \tau_{r\theta} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{r\theta}) \cos \theta}{r \sin^2 \theta} + \\
& \left. - \frac{\sin \theta \tau_{r\theta} + 2 \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{r\theta} + \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tau_{r\theta}}{r \sin \theta} - \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{r\varphi\varphi}}{r} \right] - \quad (25) \\
& \left[-\frac{1}{r^4} (9r^2 \tau_{r\theta} + 3r^3 \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{r\theta})) + \frac{1}{r^3} (6r \tau_{r\theta} + 6r^2 \frac{\partial}{\partial r} (\tau_{r\theta}) + r^3 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\tau_{r\theta})) \right. \\
& - \frac{1}{r^2 \sin \theta} (\tau_{\theta\theta} \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_{\varphi\varphi} + \tau_{\varphi\varphi} \cos \theta) \\
& \left. + \frac{1}{r \sin \theta} (\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \tau_{\theta\theta} + \sin \theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \tau_{\theta\theta} - \frac{\partial}{\partial r} \tau_{\varphi\varphi}) \right] \quad r = 0
\end{aligned}$$

۴-۱- شرایط مرزی

لازم به ذکر است که پس از انجام عملیات اشاره شده، معادله درجه دو به یک معادله درجه سه تبدیل خواهد شد که برای حل آن به سه شرط مرزی نیاز است.

در قسمت آزمایشگاهی دو سیال غیر قابل انحلال انتخاب شده‌اند پس می‌توان گفت مولفه‌های شعاعی در روی سطح قطره صفر هستند:

$$(u_o)_r|_{r=R} = (u_i)_r = 0 \quad (26)$$

سرعت و تنش روی سطح قطره با سیال خارجی برابر است:

$$(u_o)_\theta|_{r=R} = \frac{1}{k+1}(u_i)_\theta \quad (27)$$

$$(\tau_i)_{r\theta}|_{r=R} = \frac{k}{k+1}(\tau_o)_{r\theta} \quad (28)$$

لازم به ذکر است که ضرایب شامل K در این شرایط مرزی به خاطر تفاوت در بی بعدسازی آنها ظاهر

$$\text{شده‌اند } (U_i)_0 = \frac{(U_o)_0}{K+1}.$$

با توجه به درجه سه بودن معادلات استوکس سه شرط بالا برای به دست آوردن معادلات جریان و فشار در قطره کافی به نظر می‌رسد. حال آنکه باید این نکته را لحاظ کرد که تمامی شرایط مرزی بر روی سطح قطره‌ای بسته می‌شوند که خود یکی از مجهولات مسئله می‌باشد. به این منظور در ابتدا فرض شده است که قطره کروی شکل باشد و معادلات جریان را در این شرایط محاسبه می‌شود. سپس به منظور تخمین شکل حدودی قطره از معادله تنش‌های نرمال استفاده می‌شود:

$$n.(\tau_o - \tau_i).n - p_o + p_i = \Gamma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (29)$$

توضیحات جامع‌تری از روش تخمین زدن شکل قطره در قسمت بعدی داده خواهد شد. این معادله در

حالت بی‌بعد به صورت زیر نیز بیان می‌شود:

$$n.\left(\tau_i - \frac{k}{k+1}\tau_o\right).n - p_o + p_i = \frac{1}{Ca}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (30)$$

نیاز به اشاره نیست که در حل جریان معادله پاسخ باید در بی‌نهایت و مرکز کره نیز مقداری محدود داشته باشد:

$$\text{as } r \rightarrow 0: \quad u_i \text{ remains finite} \quad (31)$$

$$\text{as } r \rightarrow \infty: \quad (u_o)_z \rightarrow 1, (u_o)_x \rightarrow 0, (u_o)_y \rightarrow 0 \quad (32)$$

۵- روش تحلیلی

۵-۱- سیال اولدریوید-بی

به منظور مدل سازی تانسور تنش قسمت پلیمری سیال از معادله اولدریوید-بی استفاده شده است. این مدل از تعمیم مدل جفری به دست می آید که در آن به جای مشتق عادی از مشتق همرفتی استفاده می شود. مدل اولدریوید-بی مدلی است که قابلیت مدل سازی فرآیندهای با تغییر شکل بزرگ را دارا است و در آن زمان رهایی از تنش و تغییر شکل به خوبی شبیه سازی می شود. لازم به ذکر است که از این مدل برای شبیه سازی سیالات با غلظت کم باید استفاده شود چون تغییرات ویسکوزیته با نرخ برش را ثابت در نظر می گیرد. این دسته از سیالات به سیالات با گر در رئولوژی معروف هستند که ویسکوزیته ثابتی را با تغییرات نرخ برش مشاهده می کنند. معادله متشکله اولدریوید-بی به صورت زیر استفاده می شود:

$$\tau + \lambda_1 \overset{\nabla}{\tau} = 2(\eta + \lambda_2 \overset{\nabla}{D}) \quad (33)$$

که در آن مشتق همرفتی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\hat{d}_j(A) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j \cdot \nabla \right) (A) - \{ (\nabla u_j^T)(A) + (A)(\nabla u_j) \} \quad (34)$$

۵-۱-۱- حل حساب اغتشاشات سیال اولدریوید-بی

به منظور خطی سازی معادلات حاکم در این جا از روش حساب اغتشاشات بهره گرفته شده است. در این حل پارامترهای اغتشاشی را بر اساس عدد بی بعد دبورای جریان داخلی و خارجی تعریف کرده ایم. با استفاده از این روش تمامی پارامترهای سرعت و فشار و مشتقات هم رفتی به صورت یک بست نوشته می شوند. با بهره گیری از این روش برای جریان داخلی خواهیم داشت:

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (u_i)_k \quad (35)$$

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (P_i)_k \quad (36)$$

$$D_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (D_i)_k \quad (37)$$

به همین صورت برای جریان خارجی خواهیم داشت:

$$u_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (u_o)_k \quad (38)$$

$$P_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (P_o)_k \quad (39)$$

$$D_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (D_o)_k \quad (40)$$

به منظور خطی سازی معادله متشکله اولدروید-بی جمله های تنش را نیز به همان صورت بسط می دهیم:

$$\tau_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (\tau_i)_k \quad (41)$$

$$\tau_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (\tau_o)_k \quad (42)$$

که پس از جاگذاری در معادله متشکله و ساده سازی های لازم جملات درجه صفر تا دو بر حسب پارامترهای جریان به شکل ساده و خطی سازی شده زیر به دست خواهند آمد:

$$(\tau_i)_0 = 2(D_i)_0 \quad (43-الف)$$

$$(\tau_i)_1 = 2(D_i)_1 - 2\beta_i \hat{d}_0(D_i)_0 \quad (43-ب)$$

$$(\tau_i)_2 = 2(D_i)_2 - 2\beta_i(\hat{d}_0(D_i)_1 + \hat{d}_1(D_i)_0) + 2\beta_i \hat{d}_0^2(D_i)_0 \quad (43-پ)$$

$$(\tau_o)_0 = 2(D_o)_0 \quad (43-ت)$$

$$(\tau_o)_1 = 2(D_o)_1 - 2\beta_i \hat{d}_0(D_o)_0 \quad (43-ث)$$

$$(\tau_o)_2 = 2(D_o)_2 - 2\beta_i(\hat{d}_0(D_o)_1 + \hat{d}_1(D_o)_0) + 2\beta_i \hat{d}_0^2(D_o)_0 \quad (43-ج)$$

به منظور ساده سازی هر چه بیشتر از تابع جریان در این تحقیق استفاده شده است که به صورت خودکار معادله بقای جرم را ارضا خواهد کرد. پس از بست دادن آن حول عدد بی بعد دبورا خواهیم داشت:

$$\psi_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (\psi_i)_k \quad (44)$$

$$\psi_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o^k (\psi_o)_k \quad (45)$$

در مختصات کروی تابع جریان به صورت زیر تعریف می شود:

$$(u_i)_r(r, \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \quad (u_i)_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \quad (46)$$

$$(u_o)_r(r, \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_o}{\partial \theta} \quad (u_o)_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_o}{\partial r} \quad (47)$$

۵-۱-۲- پاسخ‌های حل تحلیلی جریان سیال اولدروید-بی

با جایگذاری بسط‌های اغتشاشی در معادله استوکس و جمع‌آوری جملات هم مرتبه معادله مرتبط با همان مرتبه به دست می آید. پس از جمع‌آوری جملات با مرتبه صفر دپورا معادله به دست آمده همانند معادله حاکم بر سیال نیوتنی در مختصات کروی تحت جریان خزشی می‌شود:

$$\nabla^4 (\psi_i)_0 = 0 \quad (48)$$

$$\nabla^4 (\psi_o)_0 = 0 \quad (49)$$

که در آن ∇^2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (۵۰)$$

بعد از حل این معادله و استفاده کردن از شرایط مرزی جواب جمله صفر حساب اغتشاشات به دست می‌آید که در این حالت دقیقاً برابر جملات به دست آمده توسط آقای هادامارد [۱] است:

$$(\psi_i)_0 = -\frac{1}{4}(r^2 - r^4)\sin^2 \theta \quad (۵۱-الف)$$

$$(\psi_o)_0 = \frac{1}{4}\left(2r^2 - \frac{3k+2}{k+1}r + \frac{k}{k+1}\frac{1}{r}\right)\sin^2 \theta \quad (۵۲-ب)$$

به همین ترتیب می‌توان جملات با توان یک را از معادله استوکس را جدا و حل کرد. متأسفانه به دلیل حجم بزرگ این معادلات از آوردن جواب آن در این جا جلوگیری می‌شود و تنها به ارائه جواب بسنده می‌کنیم. جواب جمله مرتبه یک به صورت زیر خواهد بود:

$$(\psi_i)_1 = \bar{f}_1(r)\sin^2 \theta \cos \theta \quad (۵۳-الف)$$

$$(\psi_o)_1 = f_{o1}(r)\sin^2 \theta \cos \theta \quad (۵۴-ب)$$

که در آن $\bar{f}_1(r)$, $f_{o1}(r)$ به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\bar{f}_1(r) = Ai(r^5 - r^3) \quad (۵۵-الف)$$

$$f_{o1}(r) = \frac{1}{320De_o(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)}\left(Ao_1 + \frac{Ao_2}{r} + \frac{Ao_3}{r^2} + \frac{Ao_4}{r^3}\right) \quad (۵۶-ب)$$

پس از استفاده از شرایط مرزی ضرایب نا معلوم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$Ai = \left(\frac{1}{320(K+1)^2 De_i} \right) (-168K^2 De_i \beta_i - 27K^2 De_o \beta_o - 168K De_i \beta_i + 48K De_o \beta_o + 12 De_o \beta_o) \quad (57)$$

$$Ao_1 = -315K^3 De_o \beta_o - 168K^2 De_i \beta_i - 822K^2 De_o \beta_o - 168K De_i \beta_i - 612K De_o \beta_o - 168 De_o \beta_o \quad (58)$$

$$Ao_2 = 810K^3 De_o \beta_o + 1890K^2 De_o \beta_o + 1440K De_o \beta_o + 360 De_o \beta_o \quad (59)$$

$$Ao_3 = -675K^3 De_o \beta_o + 168K^2 De_i \beta_i - 1368K^2 De_o \beta_o + 168K De_i \beta_i - 948K De_o \beta_o - 192 De_o \beta_o \quad (60)$$

$$Ao_4 = 180K^3 De_o \beta_o + 300K^2 De_o \beta_o + 120K De_o \beta_o \quad (61)$$

به همین ترتیب جواب جملات درجه بعدی نیز محاسبه خواهند شد. جواب جمله مرتبه دو به صورت

زیر به دست آمده است:

$$\psi i_2 = \bar{f}_{i_{21}}(r) \sin^2 \theta + \bar{f}_{i_{22}}(r) \sin(z)^2 \cos(z)^2 \quad (62\text{-الف})$$

$$\psi o_2 = \bar{f}_{o_{21}}(r) \sin^2 \theta + \bar{f}_{o_{22}}(r) \sin(z)^2 \cos(z)^2 \quad (63\text{-ب})$$

که در آن $\bar{f}_{i_{21}}(r)$, $\bar{f}_{i_{22}}(r)$, $\bar{f}_{o_{21}}(r)$ and $\bar{f}_{o_{22}}(r)$ به صورت زیر می باشند:

$$\bar{f}_{i_{21}}(r) = -\frac{1}{538137600(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)(K + 1)De_i} (Ai_{21}r^6 + Ai_{22}r^4 + Ai_{23}r^2) \quad (64)$$

$$\bar{f}_{i_{22}}(r) = \left(\frac{Ai_{24}}{53813760(K^2 + 2K + 1)(K + 1)^2 De_i} \right) (r^6 - r^4) \quad (65)$$

$$fo_{21}(r) = \left(\frac{1}{538137600(K+1)(K^4+4K^3+6K^2+4K+1)De_o} \right) (Ao_{21}r + Ao_{22}\frac{1}{r} + Ao_{23}\frac{1}{r^2} + Ao_{24}\frac{1}{r^3} + Ao_{25}\frac{1}{r^4} + Ao_{26}\frac{1}{r^5} + Ao_{27}\frac{1}{r^7} + Ao_{28}\frac{1}{r^9}) \quad (66)$$

$$fo_{22}(r) = -\frac{1}{53813760De_o(K^3+3K^2+3K+1)(K+1)^2} (Ao_{29}\frac{1}{r} + Ao_{210}\frac{1}{r^2} + Ao_{211}\frac{1}{r^3} + Ao_{212}\frac{1}{r^4} + Ao_{213}\frac{1}{r^5} + Ao_{214}\frac{1}{r^7} + Ao_{215}\frac{1}{r^9}) \quad (67)$$

با استفاده از شرایط مرزی ضرایب نامعلوم به دست خواهد آمد که به خاطر حجم بزرگ آنها در ضمیمه شماره یک در انتهای پایان نامه درج شده‌اند.

۵-۱-۳- محاسبات مربوط به تخمین اولیه شکل قطره سیال اولدرود-بی

میدانیم که در تغییر شکل‌های کوچک رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu}] \quad (68)$$

باجای‌گذاری این رابطه در شرایط مرزی تنش خواهیم داشت:

$$n.(\tau_i - \frac{k}{k+1}\tau_o).n - p_o + p_i = \frac{1}{Ca} (2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu} [(1-\mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu}]) \quad (69)$$

که در آن $\mu = \cos(\theta)$ و ζ تابع تغییر شکل قطره از حالت کروی است. برای اینکه شکل قطره همچنان کروی باقی بماند باید مرکز جرم قطره در مرکز قطره باقی بماند. همچنین قانون بقای جرم نیز باید برقرار باشد. این دو شرط را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\int_{-1}^1 \zeta d\mu = 0 \quad , \quad \int_{-1}^1 \zeta \mu d\mu = 0 \quad (۷۰)$$

بعد از محاسبه تنش‌های نرمال و جمله فشار با استفاده از معادله جریان و استفاده از معادله مرزی تنش‌های نرمال شکل جدید قطره به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\xi(\theta) = Ca\xi_1(3\cos(\theta)^2 - 1) + Ca\xi_2\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3 - \frac{3}{2}\cos(\theta)\right) \quad (۷۱)$$

که در آنها ζ_1, ζ_2 از رابطه زیر به دست می آیند:

$$\begin{aligned} \xi_1(\theta) = & -\left(\frac{1}{3840(K+1)^3}\right)(3792K^3De_i\beta_i + 90K^3De_o\beta_i + 243K^3De_o\beta_o + 10968K^2De_i\beta_i \\ & + 330K^2De_o\beta_i + 297K^2De_o\beta_o + 7536KDe_i\beta_i - 120KDe_o\beta_i - 1404KDe_o\beta_o + 360De_i\beta_i \\ & - 360De_o\beta_i - 324De_o\beta_o) \end{aligned} \quad (۷۲)$$

$$\begin{aligned}
\xi_2(\theta) = & \frac{1}{(K+1)^5 6726720000} (2491577088K^5 De_i^2 \beta_i^2 + 400432032K^5 De_i De_o \beta_i \beta_o \\
& + 30787182K^5 De_i De_o \beta_o^2 + 14594580K^5 De_o^2 \beta_i \beta_o - 18299169K^5 De_o^2 \beta_o^2 \\
& - 1760478720K^5 De_i^2 \beta_i - 40078080K^5 De_i De_o \beta_o - 16216200K^5 De_o^2 \beta_i + 118198080De_o^2 \beta_i \beta_o \\
& + 37353960K^5 De_o^2 \beta_o + 7504328832K^4 De_i^2 \beta_i^2 + 63567504K^4 De_i^2 \beta_i \beta_o \\
& + 1416647232K^4 De_i De_o \beta_i^2 - 43987944K^4 De_i De_o \beta_i \beta_o + 125935146K^4 De_i De_o \beta_o^2 \\
& + 315242928K^4 De_o^2 \beta_i \beta_o - 49069782K^4 De_o^2 \beta_o^2 - 8223895680K^4 De_i^2 \beta_i \\
& - 389188800K^4 De_i De_o \beta_i - 290720640K^4 De_i De_o \beta_o - 97297200K^4 De_o^2 \beta_i \\
& + 207538800K^4 De_o^2 \beta_o + 3672789120K^3 De_i^2 \beta_i^2 - 615494880K^3 De_i^2 \beta_i \beta_o \\
& + 1582124544K^3 De_i De_o \beta_i^2 - 1156058904K^3 De_i De_o \beta_i \beta_o + 79035576K^3 De_i De_o \beta_o^2 \\
& - 425404980K^3 De_o^2 \beta_i \beta_o - 150547212K^3 De_o^2 \beta_o^2 - 13549536000K^3 De_i^2 \beta_i \\
& - 1167566400K^3 De_i De_o \beta_i - 270592000K^3 De_i De_o \beta_o - 242522280K^3 De_o^2 \beta_i \\
& + 329648200K^3 De_o^2 \beta_o - 5201099904K^2 De_i^2 \beta_i^2 - 2148850704K^2 De_i^2 \beta_i \beta_o \\
& - 1085692608K^2 De_i De_o \beta_i^2 + 3392525136K^2 De_i De_o \beta_i \beta_o - 157867872K^2 De_i De_o \beta_o^2 \\
& + 671999328K^2 De_o^2 \beta_i \beta_o - 68538672K^2 De_o^2 \beta_o^2 - 8910021120K^2 De_i^2 \beta_i - 113791392De_i^2 \beta_o^2 \\
& - 1167566400K^2 De_i De_o \beta_i + 279753600K^2 De_i De_o \beta_o + 239759520K^2 De_o^2 \beta_i \\
& + 438214560K^2 De_o^2 \beta_o - 3861137280K De_i^2 \beta_i^2 - 1469788320K De_i^2 \beta_i \beta_o + 559278720De_i^2 \beta_i \\
& - 1251169920K De_i De_o \beta_i^2 + 4379959584K De_i De_o \beta_i \beta_o - 1248199680K De_i De_o \beta_o^2 \\
& + 1516250736K De_o^2 \beta_i \beta_o - 376418016K De_o^2 \beta_o^2 - 1264623360K De_i^2 \beta_i - 522762240De_i De_o \beta_o \\
& - 389188800K De_i De_o \beta_i - 223059200K De_i De_o \beta_o + 898978080K De_o^2 \beta_i + 497777280De_o^2 \beta_i \\
& + 151263840K De_o^2 \beta_o + 275795520De_i De_o \beta_i \beta_o - 370120608De_i De_o - 127487360De_o^2 \beta_o)
\end{aligned} \tag{۷۳}$$

۵-۱-۴- بررسی تغییر شکل روی جریان و شکل نهایی سیال اولدریوید-بی

در این مرحله با شکل تخمین زده شده در مرحله قبل حل جریان تصحیح و با تابع جریان جدید شکل

دقیق‌تری از قطره محاسبه شده است. به این منظور جریان حول پارامتر دپورا و کپیلاری بسط اغتشاشی

داده شده‌اند:

$$u_i = u_i^{(0)} + DeCau_i^{(1)} \quad (الف-۷۴)$$

$$u_o = u_o^{(0)} + DeCau_o^{(1)} \quad (ب-۷۴)$$

جملات تنش ویسکوالاستیک این بار به صورت کاملاً نیوتنی ظاهر می‌شوند. تنش‌های مرتبه صفر به بالا مطابق رابطه زیر به دست آمده‌اند:

$$\tau_i^k = 2D_i^k \quad (الف-۷۵)$$

$$\tau_o^k = 2D_o^k \quad (ب-۷۵)$$

به همین ترتیب برای توابع جریان خواهیم داشت:

$$\nabla^4 \psi_i^{(1)} = 0 \quad (الف-۷۶)$$

$$\nabla^4 \psi_o^{(1)} = 0 \quad (ب-۷۶)$$

در مرحله قبلی تابع جریان با فرض کروی بودن قطره و با استفاده از شرایط مرزی در سطح کره به دست آمده‌اند. در این مرحله هدف بر آن است که توابع جریان در شکل تخمین زده شده جدید محاسبه شود. بنابراین در این مرحله شرایط مرزی در شکل تخمین زده شده اعمال شده است. به منظور ساده‌سازی آقایان ساسکراتزه و بلمونته [۸] پیشنهاد کردند که شرایط مرزی همچنان روی $r=1$ اعمال شود و در عوض خود شرایط مرزی روی شکل جدید بسط داده شود. شرایط مرزی بسط داده شده جدید به صورت زیر ارائه شده است:

$$(u_o)_r^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (u_o)_{0,r}}{\partial r} - 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta u_{0,\theta} = 0 \quad (الف-۷۷)$$

$$(u_i)_r^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (u_i)_{0,r}}{\partial r} - 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta \tilde{u}_{0,\theta} = 0 \quad (77\text{-ب})$$

$$(u_o)_\theta^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial u_{0,\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta u_{0,r} =$$

$$\frac{1}{k+1} ((u_i)_\theta^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{0,\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta \tilde{u}_{0,r}) \quad (77\text{-پ})$$

$$(\tau_o)_{r\theta}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_o)_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_o)_{0,rr} - (\tau_o)_{0,\theta\theta}) =$$

$$\frac{k}{k+1} ((\tau_i)_{r\theta}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_i)_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_i)_{0,rr} - (\tau_i)_{0,\theta\theta})) \quad (77\text{-ت})$$

$$(\tau_o)_{rr}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_o)_{0,rr}}{\partial r} - \xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_o)_{0,r\theta}) -$$

$$\frac{K}{K+1} ((\tau_i)_{rr}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_i)_{0,rr}}{\partial r} - \xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_i)_{0,r\theta})) =$$

$$\frac{1}{Ca} (2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu}]) \quad (77\text{-ث})$$

با استفاده از شرایط مرزی جدید تابع جریان مرتبه اول مطابق زیر محاسبه شده است:

$$\psi_o^{(1)} = - \left(\frac{A_{Do}}{20(K+1)^2} \right) ((3K^2 - K + 8)r - \frac{(3K^2 - 3K + 6)}{r}) \sin(z)^2$$

$$+ \left(\frac{3A_{Do}}{8(35K + 35)} \right) \left(\frac{(21K + 18)}{r} - \frac{(21K + 4)}{r^3} \right) \sin(z)^2 (5\cos(z)^2 - 1) \quad (78\text{-الف})$$

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{A_{Di}}{10(K+1)}((4-2K)r^4 + (3K-3)r^2)\sin(z)^2$$

$$-\frac{6A_{Di}}{280}(5r^6-12r^4)((\sin(z))^2)(5(\cos(z))^2-1)$$

(۷۸-ب)

که در آنها ضرایب A_{Do} و A_{Di} مطابق روابط زیر به دست آمده است:

$$A_{Di} = \left(\frac{1}{3840((K+1)^3 De_i)}\right)(7584De_i K^3 \beta_i + 180De_o K^3 \beta_i + 486De_o K^3 \beta_o$$

$$+ 21936De_i K^2 \beta_i + 660De_o K^2 \beta_i + 594De_o K^2 \beta_o + 15072De_i K \beta_i$$

$$- 240De_o K \beta_i - 2808De_o K \beta_o + 720De_i \beta_i - 720De_o \beta_i - 648De_o \beta_o)$$

(۷۹-الف)

$$A_{Do} = \left(\frac{1}{3840((K+1)^3 De_o)}\right)(7584De_i K^3 \beta_i + 180De_o K^3 \beta_i + 486De_o K^3 \beta_o$$

$$+ 21936De_i K^2 \beta_i + 660De_o K^2 \beta_i + 594De_o K^2 \beta_o + 15072De_i K \beta_i$$

$$- 240De_o K \beta_i - 2808De_o K \beta_o + 720De_i \beta_i - 720De_o \beta_i - 648De_o \beta_o)$$

(۷۹-ب)

با استفاده از شرط مرزی تنش‌های نرمال تغییر شکل اصلاح شده برابر با رابطه زیر به دست آمده است:

$$\xi(\theta) = Ca\xi_1(3\cos(\theta)^2 - 1) + Ca\xi_2\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3 - \frac{3}{2}\cos(\theta)\right) + Ca^2\xi_{11}\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3 - \frac{3}{2}\cos(\theta)\right) \quad (۸۰)$$

$\xi^{(1)}$ برابر است با:

$$\xi^{(1)} = -\left(\frac{1}{1280(K+1)^3(70K+70)}\right)(11K+10)(7584K^3De_i\beta_i + 180K^3De_o\beta_i + 486K^3De_o\beta_o + 21936K^2De_i\beta_i + 660K^2De_o\beta_i + 594K^2De_o\beta_o + 15072KDe_i\beta_i - 240KDe_o\beta_i - 2808KDe_o\beta_o + 720De_i\beta_i - 720De_o\beta_i - 648De_o\beta_o) \quad (81)$$

۵-۱-۵- محاسبه ضریب اصطکاک و سرعت سقوط قطره سیال اودروید-بی

با استفاده از تابع جریان $\psi = (\psi_o)_1 + De_o(\psi_o)_1 + De_o Ca(\psi_o)^1 + (De_o)^2(\psi_o)_2$ نیروی درگ وارد بر سطح قطره از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$F_D = 2\pi \int_{-1}^1 [\mu(\tau_o)_{rr} - \mu P_o - (1-\mu^2)^{1/2}(\tau_o)_{r\theta}]|_{r=1} d\mu \quad (82)$$

پس از محاسبه جمله‌های تنش رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F_D = 2\pi \left(\left(\frac{3k+2}{k+1} \right) + De_o Ca \frac{(3K^2 - K + 8)}{(5(K+1)^2)} A_{Do} - De^2 C_d \left(\frac{1}{14414400} \right) \frac{1}{2(K^2 + 2K + 1)(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)} \right) \quad (83)$$

که در آن ضریب C_d برابر است با:

$$\begin{aligned}
C_d = \frac{1}{De_o} & (-1648647K^5 De_o \beta_o^2 - 2632320K^5 De_o \beta_o + 52468416K^4 De_i \beta_i^2 + 4540536K^4 De_i \beta_i \beta_o - 7783776K^4 De_o \beta_o \beta_i \\
& + 8172450K^4 De_o \beta_o^2 - 25122240K^4 De_i \beta_i - 95135040K^4 De_o \beta_i + 87440640K^4 De_o \beta_o + 68612544K^3 De_i \beta_i^2 \\
& - 39855816K^3 De_i \beta_i \beta_o - 126126000K^3 De_o \beta_o \beta_i + 47117928K^3 De_o \beta_o^2 - 75366720K^3 De_i \beta_i - 161441280K^3 De_o \beta_i \\
& + 165843200K^3 De_o \beta_o - 20180160K^2 De_i \beta_i^2 - 26632320De_o \beta_o - 76011936K^2 De_i \beta_i \beta_o - 258834576K^2 De_o \beta_o \beta_i \\
& + 110544720K^2 De_o \beta_o^2 - 75366720K^2 De_i \beta_i + 70150080K^2 De_o \beta_i + 24998688De_o \beta_o^2 - 36324288KDe_i \beta_i^2 \\
& - 31615584KDe_i \beta_i \beta_o - 176816640KDe_o \beta_o \beta_i + 101841168KDe_o \beta_o^2 + 18616000K^2 De_o \beta_o + 107627520De_o \beta_i \\
& - 25122240KDe_i \beta_i + 244083840KDe_o \beta_i - 83786560KDe_o \beta_o - 36324288De_o \beta_o \beta_i)
\end{aligned} \quad (۸۴)$$

در حرکت قطره نیروهای بویانسی و اصطکاکی درگ از مهم‌ترین عوامل تاثیر گذار در این مسئله هستند.

از آنجایی که حرکت قطره خزشی و با سرعت ثابت است رابطه زیر همواره برقرار است:

$$F = F_D + F_B = 0 \quad (۸۵)$$

که در آن نیروی بویانسی برابر است با:

$$F_B = \frac{4\pi R^2(\rho - \tilde{\rho})}{3\eta U_\infty} \quad (۸۶)$$

با استفاده از نیروی اصطکاکی محاسبه شده و تعریف ارائه شده برای نیروی بویانسی می‌توان سرعت حد

قطره را به دست آورد:

$$U_\infty = \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\rho} - \rho)gR^2}{\eta \left(\left(\frac{3k+2}{k+1} \right) + De_o Ca \frac{(3K^2 - K + 8)}{(5(K+1))^2} A_{Do} - De^2 C_d \left(\frac{1}{14414400} \right) \frac{1}{2(K^2 + 2K + 1)(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)} \right)} \quad (۸۷)$$

که در حالت خاصی که هر دو سیال نیوتنی باشند به جواب آقای هادامارد [۱] تبدیل می‌شود:

$$U_{\infty} = \left(\frac{2k+2}{9k+6}\right) \frac{(\tilde{\rho}-\rho)gR^2}{\eta} \quad (88)$$

۵-۲- سیال گزیکس

در این قسمت به منظور مدل سازی جملات تنش قسمت پلیمری سیال از مدل غیرخطی گزیکس استفاده شده است. لازم به ذکر است که تمامی مراحل حل تحلیلی مشابه مدل اولرود-بی بوده به همین دلیل از تکرار توضیحات تکراری در مراحل حل در این بخش جلوگیری شده است.

معادله متشکله گزیکس به صورت زیر بیان می شود:

$$\tau = \tau_s + \tau_p \quad (89)$$

$$\tau_s = 2(1-\beta)D \quad (90)$$

$$\tau_p + De\tau_p + De\frac{\alpha}{\beta}\{\tau_p.\tau_p\} = 2\beta D \quad (91)$$

$$\tau_s = 2D \quad (92)$$

که در آن مشتق همرفتی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\hat{d}_j(A) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j.\nabla\right)(A) - \{(\nabla u_j^T)(A) + (A)(\nabla u_j)\} \quad (93)$$

۵-۲-۱- حل حساب اغتشاشات سیال گزیکس

به منظور خطی سازی معادلات حاکم از روش حساب اغتشاشات بهره گرفته شده است.

پارامترهای جریان داخلی مطابق زیر بسط داده شده است:

$$u_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (u_i)_k \quad (94)$$

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (P_i)_k \quad (95)$$

$$D_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (D_i)_k \quad (96)$$

برای سرعت فشار و تانسور نرخ تغییر شکل جریان خارجی خواهیم داشت:

$$u_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (u_o)_k \quad (97)$$

$$P_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (P_o)_k \quad (98)$$

$$D_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (D_o)_k \quad (99)$$

به منظور خطی سازی معادله متشکله از بسط اغتشاشی تنش به صورت زیر بهره گرفته شده است:

$$\tau_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (\tau_i)_k \quad (100)$$

$$\tau_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o^k (\tau_o)_k \quad (1.1)$$

شکل خطی سازی شده معادله گزیکس بعد از جایگذاری جملات حساب اغتشاش و جداسازی جملات

هم مرتبه به صورت زیر به دست آمده است:

$$\tilde{\tau}_0 = 2\tilde{D}_0 \quad (1.2)$$

$$\tilde{\tau}_1 = 2\tilde{D}_1 - 2\beta\hat{d}_0\tilde{D}_0 - 4\alpha\beta\{\tilde{D}_0.\tilde{D}_0\} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_2 = 2\tilde{D}_2 - 2\beta(\hat{d}_0\tilde{D}_1 + \hat{d}_1\tilde{D}_0) + 2\beta\hat{d}_0^2\tilde{D}_0 + 4\alpha\beta\{\hat{d}_0(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0) - (\tilde{D}_0.\tilde{D}_1) - (\tilde{D}_1.\tilde{D}_0)\} \\ 4\alpha\beta\{\tilde{D}_0.\hat{d}_0\tilde{D}_0 + \hat{d}_0\tilde{D}_0.\tilde{D}_0\} + 8\alpha^2\beta\{\tilde{D}_0.(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0) + (\tilde{D}_0.\tilde{D}_0).\tilde{D}_0\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\tau_0 = 2D_0 \quad (1.5)$$

$$\tau_1 = 2D_1 - 2\beta\hat{d}_0D_0 - 4\alpha\beta\{D_0.D_0\} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_2 = 2D_2 - 2\beta(\hat{d}_0D_1 + \hat{d}_1D_0) + 2\beta\hat{d}_0^2D_0 + 4\alpha\beta\{\hat{d}_0(D_0.D_0) - (D_0.D_1) - (D_1.D_0)\} \\ 4\alpha\beta\{D_0.\hat{d}_0D_0 + \hat{d}_0D_0.D_0\} + 8\alpha^2\beta\{D_0.(D_0.D_0) + (D_0.D_0).D_0\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

بسط تابع جریان برای سیالات خارجی و داخلی برابر است با:

$$\psi_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i^k (\psi_i)_k \quad (1.7)$$

$$\psi_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o^k (\psi_o)_k \quad (1.8)$$

که در مختصات کروی تابع جریان به صورت زیر تعریف شده است:

$$(u_i)_r(r, \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial \theta} \quad (u_i)_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_i}{\partial r} \quad (109)$$

$$(u_o)_r(r, \theta) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_o}{\partial \theta} \quad (u_o)_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_o}{\partial r} \quad (110)$$

۵-۲-۲- پاسخ‌های حل تحلیلی جریان برای سیال گزیکسی

با جایگذاری جملات اغتشاشی در معادله مومنوم و جمع آوری جملات مرتبه صفر معادله زیر به دست آمده است:

$$\nabla^4(\psi_i)_0 = 0 \quad (111)$$

$$\nabla^4(\psi_o)_0 = 0 \quad (112)$$

که در آن ∇^2 به صورت زیر تعریف می شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (113)$$

با حل این معادله و استفاده از شرایط مرزی، حل سقوط قطره نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی به دست

آمده است:

$$(\psi_i)_0 = -\frac{1}{4}(r^2 - r^4)\sin^2 \theta \quad (114)$$

$$(\psi_o)_0 = \frac{1}{4} \left(2r^2 - \frac{3k+2}{k+1} r + \frac{k}{k+1} \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \quad (115)$$

بعد از جداسازی و حل معادله مرتبه یک پاسخ جریان به صورت زیر محاسبه شده است:

$$(\psi_i)_1 = f_i(r) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (116)$$

$$(\psi_o)_1 = f_o(r) \sin^2 \theta \cos \theta \quad (117)$$

که در آن $f_i(r)$, $f_o(r)$ برابر است با:

$$f_i(r) = Ai(r^5 - r^3) \quad (118)$$

$$f_o(r) = \frac{1}{320De_o(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)} \left(Ao_1 + \frac{Ao_2}{r} + \frac{Ao_3}{r^2} + \frac{Ao_4}{r^3} \right) \quad (119)$$

پس از استفاده از شرایط مرزی ضرایب مجهول به صورت زیر محاسبه شده است:

$$Ai = \left(\frac{1}{320(K+1)^2 De_i} \right) (-168K^2 De_i \beta_i - 27K^2 De_o \beta_o - 168K De_i \beta_i + 48K De_o \beta_o + 12 De_o \beta_o + 48K^2 De_i \beta_i \alpha_i + 48K De_i \beta_i \alpha_i - 24K De_o \beta_o \alpha_o + 16 De_o \beta_o \alpha_o) \quad (120)$$

$$Ao_1 = -315K^3 De_o \beta_o - 168K^2 De_i \beta_i - 822K^2 De_o \beta_o - 168K De_i \beta_i - 612K De_o \beta_o - 168 De_o \beta_o + (120K^3 + 320K^2 + 256K + 96) De_o \beta_o \alpha_o + (48K^2 + 48K) De_i \beta_i \alpha_i \quad (121)$$

$$Ao_2 = 810K^3 De_o \beta_o + 1890K^2 De_o \beta_o + 1440K De_o \beta_o + 360 De_o \beta_o + (-360K^3 - 840K^2 - 640K - 160) De_o \beta_o \alpha_o \quad (122)$$

$$Ao_3 = -675K^3 De_o \beta_o + 168K^2 De_i \beta_i - 1368K^2 De_o \beta_o + 168K De_i \beta_i - 948K De_o \beta_o - 192 De_o \beta_o \quad (123)$$

$$+ (360K^3 + 720K^2 + 464K + 64) De_o \beta_o \alpha_o - (+48K^2 + 48K) De_i \beta_i \alpha_i$$

$$Ao_4 = 180K^3 De_o \beta_o + 300K^2 De_o \beta_o + 120K De_o \beta_o + (-120K^3 - 200K^2 - 80K) De_o \beta_o \alpha_o \quad (124)$$

برای بالا بردن دقت حل جملات درجه دوم نیز محاسبه گشته است که به صورت زیر به دست آمده‌اند:

$$\psi i_2 = \bar{f}i_{21}(r) \sin^2 \theta + \bar{f}i_{22}(r) \sin(z)^2 \cos(z)^2 \quad (125)$$

$$\psi o_2 = fo_{21}(r) \sin^2 \theta + fo_{22}(r) \sin(z)^2 \cos(z)^2 \quad (126)$$

که در آن $\bar{f}i_{21}(r)$, $\bar{f}i_{22}(r)$, $fo_{21}(r)$ and $fo_{22}(r)$ به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\bar{f}i_{21}(r) = -\frac{1}{538137600(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)(K + 1)De_i} (Ai_{21}r^6 + Ai_{22}r^4 + Ai_{23}r^2) \quad (127)$$

$$\bar{f}i_{22}(r) = \left(\frac{Ai_{24}}{53813760(K^2 + 2K + 1)(K + 1)^2 De_i} \right) (r^6 - r^4) \quad (128)$$

$$fo_{21}(r) = \left(\frac{1}{538137600(K + 1)(K^4 + 4K^3 + 6K^2 + 4K + 1)De_o} \right) (Ao_{21}r + Ao_{22} \frac{1}{r} + Ao_{23} \frac{1}{r^2} + Ao_{24} \frac{1}{r^3} + Ao_{25} \frac{1}{r^4} + Ao_{26} \frac{1}{r^5} + Ao_{27} \frac{1}{r^7} + Ao_{28} \frac{1}{r^9}) \quad (129)$$

$$fo_{22}(r) = -\frac{1}{53813760De_o(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)(K + 1)^2} (Ao_{29} \frac{1}{r} + Ao_{210} \frac{1}{r^2} + Ao_{211} \frac{1}{r^3} + Ao_{212} \frac{1}{r^4} + Ao_{213} \frac{1}{r^5} + Ao_{214} \frac{1}{r^7} + Ao_{215} \frac{1}{r^9}) \quad (130)$$

با استفاده از شرایط مرزی ضرایب مجهول محاسبه شده است که به خاطر حجم بزرگ معادلات از ارائه آنها در این بخش خودداری شده است.

۵-۲-۳- محاسبات مربوط به تخمین اولیه شکل قطره سیال گزیکس

رابطه زیر در تغییر شکل‌های کوچک برقرار است:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu}[(1 - \mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu}] \quad (131)$$

با جای‌گذاری این رابطه در شرایط مرزی تنش رابطه زیر برقرار است:

$$n.(\tau_i - \frac{k}{k+1} \tau_o).n - p_o + p_i = \frac{1}{Ca} (2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu}[(1 - \mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu}]) \quad (132)$$

که در آن $\mu = \cos(\theta)$ و ζ تابع انحراف شکل قطره از حالت کروی است. دو شرط مرزی زیر برای این تابع برقرار است که بیان‌کننده شرط بقای جرم و ثابت ماندن مرکز جرم در مرکز قطره هستند:

$$\int_{-1}^1 \zeta d\mu = 0 \quad , \quad \int_{-1}^1 \zeta \mu d\mu = 0 \quad (133)$$

بعد از محاسبه تنش‌های نرمال و جمله فشار و جایگذاری آن در معادله مرزی تنش‌های نرمال شکل قطره به صورت زیر محاسبه شده است:

$$\xi(\theta) = Ca\xi_1(3\cos(\theta)^2 - 1) + Ca\xi_2(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3 - \frac{3}{2}\cos(\theta)) \quad (134)$$

که در آنها ζ_1, ζ_2 مطابق رابطه زیر به دست آمده است:

$$\begin{aligned} \xi_1(\theta) = & -\left(\frac{1}{3840(K+1)^3}\right)(3792K^3De_i\beta_i + 90K^3De_o\beta_i + 243K^3De_o\beta_o + 10968K^2De_i\beta_i \\ & + 330K^2De_o\beta_i + 297K^2De_o\beta_o + 7536KDe_i\beta_i - 120KDe_o\beta_i - 1404KDe_o\beta_o + 360De_i\beta_i' \quad (130 \\ & - 360De_o\beta_i - 324De_o\beta_o + (288K^3De_i + 180K^3De_o + 2352K^2De_i + 660K^2De_o + 2640De_o \\ & + 4704KDe_i + 1200KDe_o + 440De_i)\beta_i\alpha_i + (216K^2 + 504K - 432)De_o\beta_o\alpha_o) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\xi_2(\theta) = & \frac{1}{(K+1)^5 6726720000} (2491577088K^5 De_i^2 \beta_i^2 + 400432032K^5 De_i De_o \beta_i \beta_o \\
& + 30787182K^5 De_i De_o \beta_o^2 + 14594580K^5 De_o^2 \beta_i \beta_o - 18299169K^5 De_o^2 \beta_o^2 \\
& - 1760478720K^5 De_i^2 \beta_i - 40078080K^5 De_i De_o \beta_o - 16216200K^5 De_o^2 \beta_i + 118198080De_o^2 \beta_i \beta_o \\
& + 37353960K^5 De_o^2 \beta_o + 7504328832K^4 De_i^2 \beta_i^2 + 63567504K^4 De_i^2 \beta_i \beta_o \\
& + 1416647232K^4 De_i De_o \beta_i^2 - 43987944K^4 De_i De_o \beta_i \beta_o + 125935146K^4 De_i De_o \beta_o^2 \\
& + 315242928K^4 De_o^2 \beta_i \beta_o - 49069782K^4 De_o^2 \beta_o^2 - 8223895680K^4 De_i^2 \beta_i \\
& - 389188800K^4 De_i De_o \beta_i - 290720640K^4 De_i De_o \beta_o - 97297200K^4 De_o^2 \beta_i \\
& + 207538800K^4 De_o^2 \beta_o + 3672789120K^3 De_i^2 \beta_i^2 - 615494880K^3 De_i^2 \beta_i \beta_o \\
& + 1582124544K^3 De_i De_o \beta_i^2 - 1156058904K^3 De_i De_o \beta_i \beta_o + 79035576K^3 De_i De_o \beta_o^2 \\
& - 425404980K^3 De_o^2 \beta_i \beta_o - 150547212K^3 De_o^2 \beta_o^2 - 13549536000K^3 De_i^2 \beta_i \\
& - 1167566400K^3 De_i De_o \beta_i - 270592000K^3 De_i De_o \beta_o - 242522280K^3 De_o^2 \beta_i \\
& + 329648200K^3 De_o^2 \beta_o - 5201099904K^2 De_i^2 \beta_i^2 - 2148850704K^2 De_i^2 \beta_i \beta_o \\
& - 1085692608K^2 De_i De_o \beta_i^2 + 3392525136K^2 De_i De_o \beta_i \beta_o - 157867872K^2 De_i De_o \beta_o^2 \\
& + 671999328K^2 De_o^2 \beta_i \beta_o - 68538672K^2 De_o^2 \beta_o^2 - 8910021120K^2 De_i^2 \beta_i - 113791392De_o^2 \beta_o^2 \\
& - 1167566400K^2 De_i De_o \beta_i + 279753600K^2 De_i De_o \beta_o + 239759520K^2 De_o^2 \beta_i \\
& + 438214560K^2 De_o^2 \beta_o - 3861137280K De_i^2 \beta_i^2 - 1469788320K De_i^2 \beta_i \beta_o + 559278720De_i^2 \beta_i \\
& - 1251169920K De_i De_o \beta_i^2 + 4379959584K De_i De_o \beta_i \beta_o - 1248199680K De_i De_o \beta_o^2 \\
& + 1516250736K De_o^2 \beta_i \beta_o - 376418016K De_o^2 \beta_o^2 - 1264623360K De_i^2 \beta_i - 522762240De_i De_o \beta_o \\
& - 389188800K De_i De_o \beta_i - 223059200K De_i De_o \beta_o + 898978080K De_o^2 \beta_i + 497777280De_o^2 \beta_i \\
& + 151263840K De_o^2 \beta_o + 275795520De_i De_o \beta_i \beta_o - 370120608De_i De_o - 127487360De_o^2 \beta_o \\
& (201417216K^5 De_i^2 \beta_i^2 - 138378240K^5 De_i^2 \beta_i + 181621440K^5 De_o^2 \beta_i - 402834432K^4 De_i^2 \beta_i^2 \\
& + 207567360K^4 De_i De_o \beta_i^2 + 4443479040K^4 De_i^2 \beta_i - 1556755200K^4 De_i De_o \beta_i + 1089728640K^4 De_o^2 \beta_i \\
& - 2841366528K^3 De_i^2 \beta_i^2 + 161441280K^3 De_i De_o \beta_i^2 + 21371750400K^3 De_i^2 \beta_i - 4670265600K^3 De_i De_o \beta_i \\
& + 2845402560K^3 De_o^2 \beta_i - 3668560896K^2 De_i^2 \beta_i^2 - 299819520K^2 De_i De_o \beta_i^2 + 36070594560K^2 De_i^2 \beta_i \\
& - 4670265600K^2 De_i De_o \beta_i + 4762517760K^2 De_o^2 \beta_i - 1431446016K De_i^2 \beta_i^2 - 253693440K De_i De_o \beta_i^2 \\
& + 26491745280K De_i^2 \beta_i - 1556755200K De_i De_o \beta_i + 4439635200K De_o^2 \beta_i + 7211043840De_i^2 \beta_i \\
& + 1614412800De_o^2 \beta_i) \alpha_i^2 +
\end{aligned} \tag{136}$$

$$\begin{aligned}
& (-8648640K^5De_o^2\alpha_o\beta_i\beta_o - 1416839424K^5De_i^2\beta_i^2 - 113297184K^5De_iDe_o\beta_i\beta_o + 29189160K^5De_o^2\beta_i\beta_o \\
& + 76108032K^4De_i^2\alpha_o\beta_i\beta_o - 252924672K^4De_iDe_o\alpha_o\beta_i\beta_o - 51891840K^4De_o^2\alpha_o\beta_i\beta_o + 1399157760K^5De_i^2\beta_i \\
& - 103783680K^5De_o^2\beta_i - 734173440K^4De_i^2\beta_i^2 - 18162144K^4De_i^2\beta_i\beta_o - 1131242112K^4De_iDe_o\beta_i^2 \\
& + 580660080K^4De_iDe_o\beta_i\beta_o + 58378320K^4De_o^2\beta_i\beta_o + 189116928K^3De_i^2\alpha_o\beta_i\beta_o + 187643456K^3De_iDe_o\alpha_o\beta_i\beta_o \\
& - 329224896K^3De_o^2\alpha_o\beta_i\beta_o + 445885440K^4De_i^2\beta_i + 2681078400K^4De_iDe_o\beta_i - 622702080K^4De_o^2\beta_i \\
& + 8895414528K^3De_i^2\beta_i^2 + 175855680K^3De_i^2\beta_i\beta_o - 1017080064K^3DeDe_o\beta_i^2 + 513200688K^3De_iDe_o\beta_i\beta_o \\
& + 720215496K^3De_o^2\beta_i\beta_o + 25369344K^2De_i^2\alpha_o\beta_i\beta_o + 1407037632K^2De_iDe_o\alpha_o\beta_i\beta_o - 23319296K^2De_o^2\alpha_o\beta_i\beta_o \\
& + 8043235200K^3De_iDe_o\beta_i - 1649007360K^3De_o^2\beta_i + 14325991680K^2De_i^2\beta_i^2 + 613957344K^2De_i^2\beta_i\beta_o \\
& + 1359566208K^2De_iDe_o\beta_i^2 - 2722495776K^2De_iDe_o\beta_i\beta_o + 401873472K^2De_o^2\beta_i\beta_o - 87639552KDe_i^2\alpha_o\beta_i\beta_o \\
& + 489320832KDe_iDe_o\alpha_o\beta_i\beta_o - 16912896000K^3De_i^2\beta_i + 152472320KDe_o^2\alpha_o\beta_i\beta_o - 39422423040K^2De_i^2\beta_i \\
& + 8043235200K^2De_iDe_o\beta_i - 3782338560K^2De_o^2\beta_i + 6113243136KDe_i^2\beta_i^2 + 419939520KDe_i^2\beta_i\beta_o \\
& + 1245404160KDe_iDe_o\beta_i^2 - 2899600704KDe_iDe_o\beta_i\beta_o - 294918624KDe_o^2\beta_i\beta_o - 477148672De_iDe_o\alpha_o\beta_i\beta_o \\
& - 110190080De_o^2\alpha_o\beta_i\beta_o - 33318405120KDe_i^2\beta_i + 2681078400KDe_iDe_o\beta_i - 4589544960KDe_o^2\beta_i \\
& - 357861504De_iDe_o\beta_i\beta_o - 5765760De_o^2\beta_i\beta_o - 9855605760De_i^2\beta_i - 1937295360De_o^2\beta_i)\alpha_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (703872K^5De_iDe_o\beta_o^2 - 209664K^5De_o^2\beta_o^2 + 528325632K^5De_iDe_o\beta_o - 151187904K^5De_o^2\beta_o \\
& + 9325056K^4De_iDe_o\beta_o^2 - 1472640K^4De_o^2\beta_o^2 + 1275365376K^4De_iDe_o\beta_o - 119134080K^4De_o^2\beta_o \\
& + 49693696K^3De_iDe_o\beta_o^2 - 2574624K^3De_o^2\beta_o^2 + 1169111040K^3De_iDe_o\beta_o + 62677056K^3De_o^2\beta_o \\
& - 83650944K^2De_iDe_o\beta_o^2 + 8375744K^2De_o^2\beta_o^2 - 86194176K^2De_iDe_o\beta_o + 122326272K^2De_o^2\beta_o \\
& - 284444160KDe_iDe_o\beta_o^2 - 98438912KDe_o^2\beta_o^2 - 2247877632KDe_iDe_o\beta_o - 392401152KDe_o^2\beta_o \\
& + 126004736De_iDe_o\beta_o^2 + 32654336De_o^2\beta_o^2 - 1739612160De_iDe_o\beta_o - 484104192De_o^2\beta_o)\alpha_o^2 \\
& + (-16774704K^5De_iDe_o\beta_o^2 - 4324320K^5De_o^2\beta_i\beta_o + 6317388K^5De_o^2\beta_o^2 - 898979328K^5De_iDe_o\beta_o \\
& + 222538176K^5De_o^2\beta_o - 266378112K^4De_i^2\beta_i\beta_o + 888695808K^4De_iDe_o\beta_i\beta_o - 41502144K^4De_iDe_o\beta_o^2 \\
& - 25945920K^4De_o^2\beta_i\beta_o + 23610120K^4De_o^2\beta_o^2 - 2598952704K^4De_iDe_o\beta_o + 166402560K^4De_o^2\beta_o \\
& + 1114489376K^3De_iDe_o\beta_i\beta_o - 179568304K^3De_iDe_o\beta_o^2 + 449440992K^3De_o^2\beta_i\beta_o + 75777960K^3De_o^2\beta_o^2 \\
& - 661909248K^3De_i^2\beta_i\beta_o - 3391074560K^3De_iDe_o\beta_o - 197993664K^3De_o^2\beta_o - 88792704K^2De_i^2\beta_i\beta_o \\
& - 2383469088K^2De_iDe_o\beta_i\beta_o + 44146912K^2De_iDe_o\beta_o^2 - 408920512K^2De_o^2\beta_i\beta_o - 28535680K^2De_o^2\beta_o^2 \\
& - 540369408K^2De_o^2\beta_o + 306738432KDe_i^2\beta_i\beta_o - 2241535296KDe_iDe_o\beta_i\beta_o + 1184822912KDe_iDe_o\beta_o^2 \\
& - 773636864KDe_o^2\beta_i\beta_o + 356318560KDe_o^2\beta_o^2 + 1544361728KDe_iDe_o\beta_o + 194757888KDe_o^2\beta_o \\
& + 367727360De_iDe_o\beta_i\beta_o + 68310528De_iDe_o\beta_o^2 + 106346240De_o^2\beta_i\beta_o + 22330880De_o^2\beta_o^2 \\
& - 2216921856K^2De_iDe_o\beta_o + 2070182400De_iDe_o\beta_o + 593269248De_o^2\beta_o)\alpha_o)
\end{aligned}$$

۵-۲-۴- بررسی تغییر شکل روی جریان و شکل نهایی سیال گزیکس

در این مرحله جریان در شکل جدید تخمین زده شده حل شده است. به این منظور جریان حول پارامتر دوبرا و کپیلاری بسط اغتشاشی داده شده است:

$$u_i = u_i^{(0)} + DeCau_i^{(1)} \quad (۱۳۷)$$

$$u_o = u_o^{(0)} + DeCau_o^{(1)} \quad (۱۳۸)$$

جملات تنش معادله متشکله به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\tau_i^k = 2D_i^k \quad (۱۳۹)$$

$$\tau_o^k = 2D_o^k \quad (۱۴۰)$$

به همین ترتیب برای توابع جریان خواهیم داشت:

$$\nabla^4 \psi_i^{(1)} = 0 \quad (۱۴۱)$$

$$\nabla^4 \psi_o^{(1)} = 0 \quad (۱۴۲)$$

شرایط مرزی بسط داده شده روی شکل جدید قطره به صورت زیر خواهند بود:

$$(u_o)_r^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (u_o)_{0,r}}{\partial r} - 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta u_{0,\theta} = 0 \quad (۱۴۳)$$

$$(u_i)_r^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (u_i)_{0,r}}{\partial r} - 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta \tilde{u}_{0,\theta} = 0 \quad (144)$$

$$(u_o)_\theta^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial u_{0,\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta u_{0,r} =$$

$$\frac{1}{k+1} ((u_i)_\theta^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial \tilde{u}_{0,\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta \tilde{u}_{0,r}) \quad (145)$$

$$(\tau_o)_{r\theta}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_o)_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_o)_{0,rr} - (\tau_o)_{0,\theta\theta}) =$$

$$\frac{k}{k+1} ((\tau_i)_{r\theta}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_i)_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_i)_{0,rr} - (\tau_i)_{0,\theta\theta})) \quad (146)$$

$$(\tau_o)_{rr}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_o)_{0,rr}}{\partial r} - \xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_o)_{0,r\theta}) -$$

$$\frac{K}{K+1} ((\tau_i)_{rr}^{(1)} - \xi_1 \left(\frac{3}{2} \cos \theta^2 - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial (\tau_i)_{0,rr}}{\partial r} - \xi_1 \cos \theta \sin \theta ((\tau_i)_{0,r\theta})) =$$

$$\frac{1}{Ca} (2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu} [(1 - \mu^2) \frac{d\zeta}{d\mu}]) \quad (147)$$

که با استفاده از این شرایط مرزی تابع جریان مرتبه اول مطابق زیر محاسبه شده است:

$$\psi_o^{(1)} = - \left(\frac{A_{Do}}{20(K+1)^2} \right) \left((3K^2 - K + 8)r - \frac{(3K^2 - 3K + 6)}{r} \right) \sin(z)^2$$

$$+ \left(\frac{3A_{Do}}{8(35K + 35)} \right) \left(\frac{(21K + 18)}{r} - \frac{(21K + 4)}{r^3} \right) \sin(z)^2 (5\cos(z)^2 - 1) \quad (148)$$

$$\psi_i^{(1)} = -\frac{A_{Di}}{10(K+1)}((4-2K)r^4 + (3K-3)r^2)\sin(z)^2 - \frac{6A_{Di}}{280}(5r^6 - 12r^4)((\sin(z))^2)(5(\cos(z))^2 - 1) \quad (۱۴۹)$$

که ضرایب A_{Di} و A_{Do} برابر است با:

$$A_{Di} = -\left(\frac{1}{3840De_i(K+1)^3}\right)(3792K^3De_i\beta_i + 90K^3De_o\beta_i + 243K^3De_o\beta_o + 10968K^2De_i\beta_i + 330K^2De_o\beta_i + 297K^2De_o\beta_o + 7536KDe_i\beta_i - 120KDe_o\beta_i - 1404KDe_o\beta_o + 360De_i\beta_i' - 360De_o\beta_i - 324De_o\beta_o + (288K^3De_i + 180K^3De_o + 2352K^2De_i + 660K^2De_o + 2640De_o) + 4704KDe_i + 1200KDe_o + 440De_i)\beta_i\alpha_i + (216K^2 + 504K - 432)De_o\beta_o\alpha_o)$$

$$A_{Do} = -\left(\frac{1}{3840De_o(K+1)^3}\right)(3792K^3De_i\beta_i + 90K^3De_o\beta_i + 243K^3De_o\beta_o + 10968K^2De_i\beta_i + 330K^2De_o\beta_i + 297K^2De_o\beta_o + 7536KDe_i\beta_i - 120KDe_o\beta_i - 1404KDe_o\beta_o + 360De_i\beta_i' - 360De_o\beta_i - 324De_o\beta_o + (288K^3De_i + 180K^3De_o + 2352K^2De_i + 660K^2De_o + 2640De_o) + 4704KDe_i + 1200KDe_o + 440De_i)\beta_i\alpha_i + (216K^2 + 504K - 432)De_o\beta_o\alpha_o)$$

با استفاده از تابع جریان محاسبه شده تابع شکل اصلاح شده قطره برابر است با:

$$\xi(\theta) = Ca\xi_1(3\cos(\theta)^2 - 1) + Ca\xi_2\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3 - \frac{3}{2}\cos(\theta)\right) + Ca^2\xi^{(1)}\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3 - \frac{3}{2}\cos(\theta)\right) \quad (۱۵۰)$$

که $\xi^{(1)}$ برابر است با:

$$\xi^{(1)} = -\left(\frac{1}{1280(K+1)^3(70K+70)}\right)(11K+10)(3792K^3De_i\beta_i + 90K^3De_o\beta_i + 243K^3De_o\beta_o + 10968K^2De_i\beta_i^{(103)} \\ + 330K^2De_o\beta_i + 297K^2De_o\beta_o + 7536KDe_i\beta_i - 120KDe_o\beta_i - 1404KDe_o\beta_o + 360De_i\beta_i \\ - 360De_o\beta_i - 324De_o\beta_o + (288K^3De_i + 180K^3De_o + 2352K^2De_i + 660K^2De_o + 2640De_o \\ + 4704KDe_i + 1200KDe_o + 440De_i)\beta_i\alpha_i + (216K^2 + 504K - 432)De_o\beta_o\alpha_o)$$

۵-۲-۵- محاسبه ضریب اصطکاک و سرعت سقوط قطره سیال گزیکس

بین نیروی درگ و جملات تنش و فشار رابطه زیر برقرار است:

$$F_D = 2\pi \int_{-1}^1 [\mu(\tau_o)_{rr} - \mu P_o - (1-\mu^2)^{1/2}(\tau_o)_{r\theta}]|_{r=1} d\mu \quad (154)$$

پس از محاسبه جمله‌های تنش و فشار با استفاده از تابع جریان

$$\psi = (\psi_o)_1 + De_o(\psi_o)_1 + De_o Ca(\psi_o)^1 + (De_o)^2(\psi_o)_2$$

شده است:

$$F_D = 2\pi \left(\left(\frac{3k+2}{k+1} \right) + De_o Ca \frac{(3K^2 - K + 8)}{(5(K+1)^2)} A_{Do} \right. \\ \left. - De^2 C_d \left(\frac{1}{14414400} \right) \frac{1}{2(K^2 + 2K + 1)(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)} \right) \quad (155)$$

که در آن ضریب C_d برابر است با:

$$\begin{aligned}
C_d = \frac{1}{De_o} & (-1648647K^5De_o\beta_o^2 - 2632320K^5De_o\beta_o + 52468416K^4De_i\beta_i^2 + 4540536K^4De_i\beta_i\beta_o - 7783776K^4De_o\beta_o\beta_i \\
& + 8172450K^4De_o\beta_o^2 - 25122240K^4De_i\beta_i - 95135040K^4De_o\beta_i + 87440640K^4De_o\beta_o + 68612544K^3De_i\beta_i^2 \\
& - 39855816K^3De_i\beta_i\beta_o - 126126000K^3De_o\beta_o\beta_i + 47117928K^3De_o\beta_o^2 - 75366720K^3De_i\beta_i - 161441280K^3De_o\beta_i \\
& + 165843200K^3De_o\beta_o - 20180160K^2De_i\beta_i^2 - 26632320De_o\beta_o - 76011936K^2De_i\beta_i\beta_o - 258834576K^2De_o\beta_o\beta_i \\
& + 110544720K^2De_o\beta_o^2 - 75366720K^2De_i\beta_i + 70150080K^2De_o\beta_i + 24998688De_o\beta_o^2 - 36324288KDe_i\beta_i^2 \\
& - 31615584KDe_i\beta_i\beta_o - 176816640KDe_o\beta_o\beta_i + 101841168KDe_o\beta_o^2 + 18616000K^2De_o\beta_o + 107627520De_o\beta_i \\
& - 25122240KDe_i\beta_i + 244083840KDe_o\beta_i - 83786560KDe_o\beta_o - 36324288De_o\beta_o\beta_i + (207567360K^5\beta_i + 518918400K^4\beta_i \\
& + 484323840K^3\beta_i + 426666240K^2\beta_i + 438197760K\beta_i + 184504320\beta_i)\alpha_i^2 + (19459440K^5\beta_i\beta_o - 17297280K^4\alpha_o\beta_i\beta_o \\
& - 311351040K^5\beta_i + 84324240K^4\beta_i\beta_o - 61117056K^3\alpha_o\beta_i\beta_o - 821620800K^4\beta_i + 207279072K^3\beta_i\beta_o - 48432384K^2\alpha_o\beta_i\beta_o \\
& - 910990080K^3\beta_i + 185849664K^2\beta_i\beta_o - 16912896K\alpha_o\beta_i\beta_o - 910029120K^2\beta_i + 45741696K\beta_i\beta_o - 12300288\alpha_o\beta_i\beta_o \\
& - 816816000K\beta_i + 2306304\beta_i\beta_o - 307507200\beta_i)\alpha_i^2 + (82368K^5\beta_o^2 - 161644032K^5\beta_o + 851136K^4\beta_o^2 - 355728384K^4\beta_o \\
& + 5802368K^3\beta_o^2 - 287215104K^3\beta_o + 17352192K^2\beta_o^2 - 218110464K^2\beta_o + 17352192K\beta_o^2 - 156609024K\beta_o + 1830400\beta_o^2 \\
& - 31629312\beta_o)\alpha_o^2 + (-576576K^5\beta_o^2 + 231383808K^5\beta_o - 8648640K^4\beta_i\beta_o - 9860136K^4\beta_o^2 + 534091776K^4\beta_o \\
& + 2306304K^3\beta_i\beta_o - 40959776K^3\beta_o^2 + 520395776K^3\beta_o + 51699648K^2\beta_i\beta_o - 88138336K^2\beta_o^2 + 476726016K^2\beta_o \\
& + 61501440K\beta_i\beta_o - 76199552K\beta_o^2 + 325152256K\beta_o + 20756736\beta_i\beta_o - 12410112\beta_o^2 + 66114048\beta_o)\alpha_o)
\end{aligned} \tag{۱۵۶}$$

از آنجایی که حرکت قطره خزشی و با سرعت ثابت است رابطه زیر برقرار است:

$$F = F_D + F_B = 0 \tag{۱۵۷}$$

که در آن نیروی بویانسی برابر است با:

$$F_B = \frac{4\pi R^2(\rho - \tilde{\rho})}{3\eta U_\infty} \tag{۱۵۸}$$

با برابر قرار دادن نیروهای بویانسی و اصطکاکی درگ سرعت حد قطره به صورت زیر محاسبه شده

ست:

$$U_{\infty} = \frac{2}{3} \frac{(\tilde{\rho} - \rho)gR^2}{\eta \left(\left(\frac{3k+2}{k+1} \right) + De_o Ca \frac{(3K^2 - K + 8)}{(5(K+1)^2)} A_{Do} - De^2 C_d \left(\frac{1}{14414400} \right) \frac{1}{2(K^2 + 2K + 1)(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)} \right)} \quad (۱۵۹)$$

که در حالت خاصی که هر دو سیال نیوتنی باشند رابطه زیر برقرار است:

$$U_{\infty} = \left(\frac{2k+2}{9k+6} \right) \frac{(\tilde{\rho} - \rho)gR^2}{\eta} \quad (۱۶۰)$$

که مطابق با جواب ارائه شده توسط آقای هادامارد [۱] برای حل نیوتنی می‌باشد.



فصل چهارم

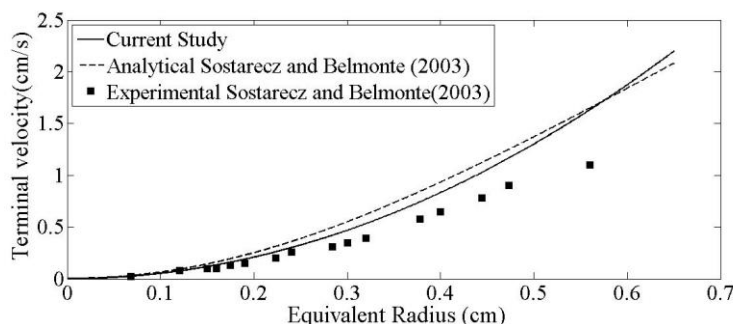
بحث و بررسی نتایج

۶- بحث و بررسی نتایج

در این قسمت به بررسی نتایج در هر دو قسمت آزمایشگاهی و تحلیلی می‌پردازیم تا تاثیر عوامل مختلف را روی حرکت و شکل قطره مورد مطالعه قرار دهیم.

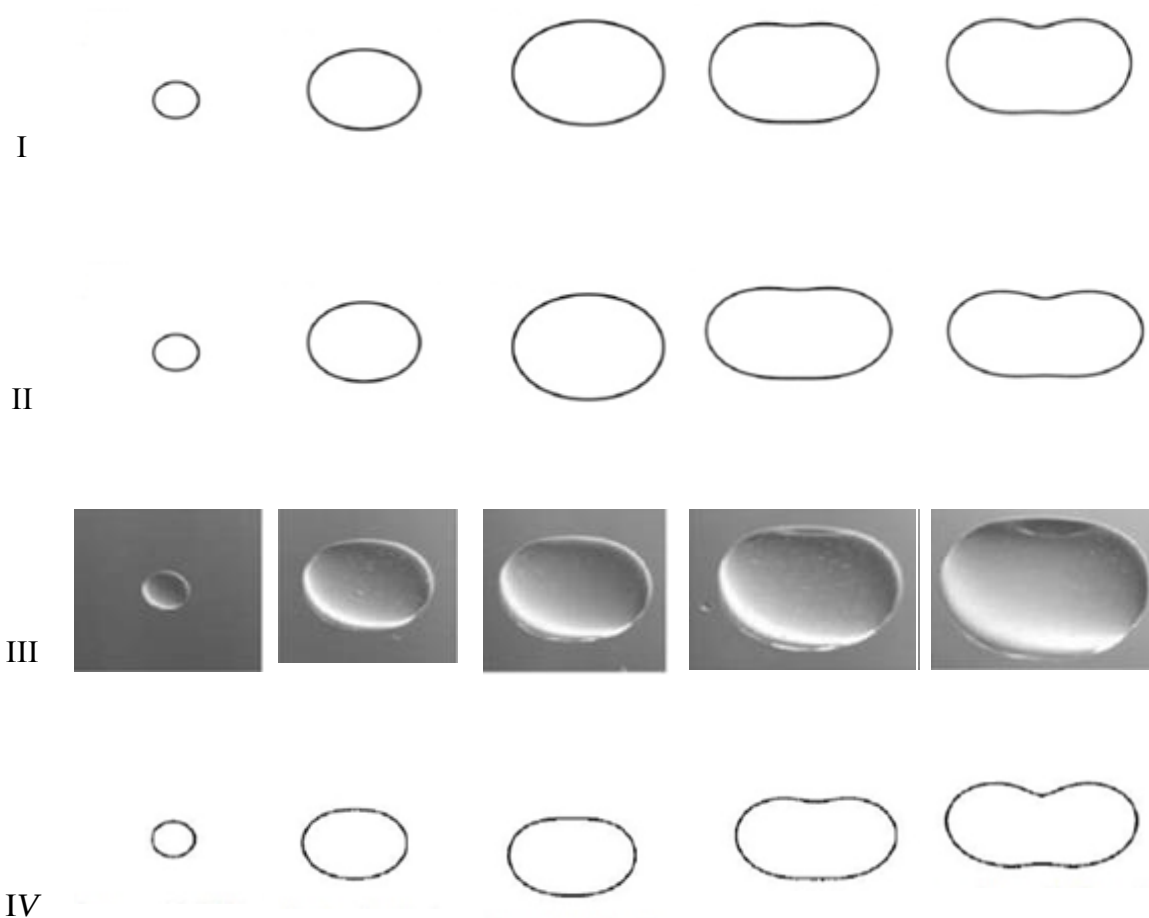
۶-۱- مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی

در ابتدا به بررسی نتایج کار تحلیلی با کار آقایان ساسکراتزه و بلمونته [۸] می‌پردازیم. در شکل ۲۸ نتایج به دست آمده برای تخمین سرعت در حل تحلیلی و آزمایشگاهی آقایان ساسکراتزه و بلمونته [۸] را با حل تحلیلی حاضر مقایسه می‌کنیم. همان طور که در شکل زیر مشاهده می‌شود نتایج تحقیق حاضر همخوانی بهتری با نتایج آزمایشگاهی پیشین دارد. همان طور که دیده می‌شود با افزایش حجم قطره سرعت سقوط افزایش می‌یابد و فاصله بین حل تحلیلی و آزمایشگاهی بیشتر می‌شود. این مسئله را می‌توان به افزایش اعداد دورا و کپیلاری نسبت داد. همان طوری که در شکل معلوم است با افزایش این اعداد پارامترهای اغتشاشی افزایش یافته که این امر دقت حل تحلیلی را پایین می‌آورد.



شکل ۲۸- تغییرات سرعت بر حسب شعاع

در شکل ۲۹ به مقایسه حل تحلیلی و آزمایشگاهی آقایان ساسکراتزه و بلمونته [۸] با حل حاضر می-پردازیم. به وضوح می توان دریافت که حل حاضر تطابق بهتری با حل آزمایشگاهی نشان می دهد. با افزایش سایز قطره و به طبع آن افزایش سرعت سقوط و اعداد دبورا و کپیلاری شکل قطره از حالت کروی به یک حالت پهن شده تبدیل می شود. با افزایش حجم و این پارامترها یک فرورفتگی در انتهای قطره به وجود می آید که با ادامه روند، این فرورفتگی به سمت داخل رشد کرده و بزرگ تر می شود.

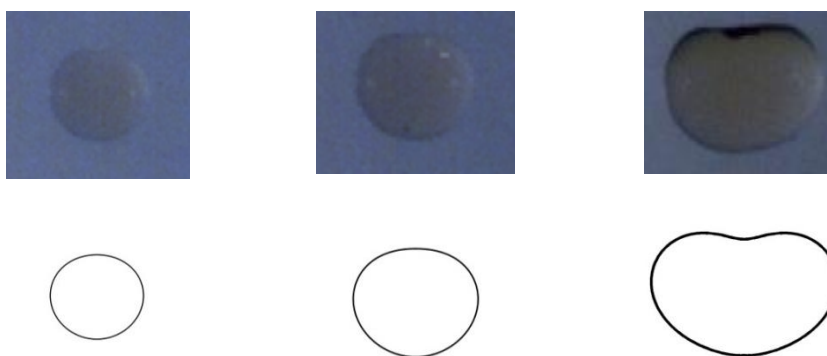


شکل ۲۹- مقایسه شکل قطرات بر اساس نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی دیگر

(I - نتیجه به دست آمده از حل گزیکس تحقیق حاضر II . نتیجه به دست آمده از حل اولدروید-بی تحقیق حاضر

III - نتیجه به دست آمده از حل آزمایشگاهی [۸] IV - نتیجه تحلیلی به دست آمده از حل [۸])

در ادامه به مقایسه حل تحلیلی حاضر با قسمت آزمایشگاهی می‌پردازیم. همان طور که اشاره شد در قسمت آزمایشگاهی از ماده پلیمری پلی‌اکریلامید به جای زانتام استفاده شده که دارای ساختار مولکولی انعطاف پذیرتری می‌باشد و تطابق بهتری با مدل‌سازی ریاضی نشان داده است. مجدداً افزایش سایز قطره شکل قطره را از حالت کروی به حالت پهن تبدیل می‌کند و با ادامه افزایش حجم قطره یک فرورفتگی در انتهای قطره به وجود می‌آید که با افزایش حجم رشد کرده و به سمت داخل قطره کشیده می‌شود (شکل ۳۰).



شکل ۳۰- مقایسه شکل قطرات در قسمت آزمایشگاهی و تحلیلی

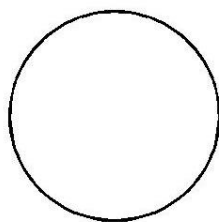
۶-۲- نتایج آزمایشگاهی

در شکل ۳۱ قطره آب در حال سقوط در روغن سیلیکون مورد بررسی قرار گرفته است. همان طور که مشاهده می‌شود قطره سیال نیوتنی شکل کاملاً کروی خود را حفظ می‌کند.

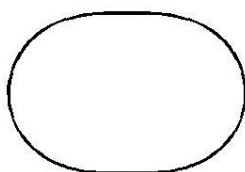


شکل ۳۱- شکل قطره نیوتنی

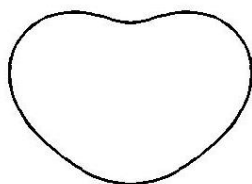
در شکل ۳۲ تاثیر جملات مختلف محاسبه شده را بر روی شکل پایای قطره مشاهده می‌کنیم. به نظر



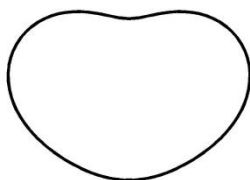
$$R=1$$



$$R=1+Ca\xi_1(3\cos(\theta)^2-1)$$



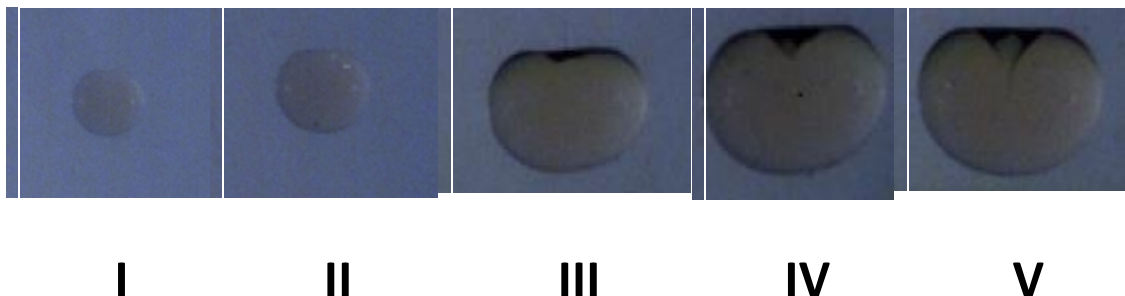
$$R=1+Ca\xi_1(3\cos(\theta)^2-1)+Ca^2\xi_{11}\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3-\frac{3}{2}\cos(\theta)\right)$$



$$R=1+Ca\xi_1(3\cos(\theta)^2-1)+Ca\xi_2\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3-\frac{3}{2}\cos(\theta)\right)+Ca^2\xi_{11}\left(\frac{5}{2}\cos(\theta)^3-\frac{3}{2}\cos(\theta)\right)$$

شکل ۳۲- تاثیر جملات با درجه های مختلف روی شکل قطره

می‌آید که جمله درجه یک پهن شده گی قطره را شبیه‌سازی می‌کند حال آنکه جملات مرتبه دو جزئیات فرورفتگی را به تصویر می‌کشند. در شکل بعدی قطرات پلی‌اکریلامید با سایزهای مختلف را مشاهده می‌کنیم. با افزایش سایز، تنش‌های نرمال بر نیروی کشش سطحی غلبه کرده و باعث تغییر شکل قطره از حالت کروی می‌شوند. همان طور که نشان داده شده قطرات کوچک بعد از جدا شدن از نازل همچنان شکل کروی خود را حفظ می‌کنند. با افزایش حجم نیروی الاستیک شکل قطرات را پهن کرده که با ادامه این روند یک فرورفتگی در انتهای قطره شروع به رشد به سمت داخل می‌کند.



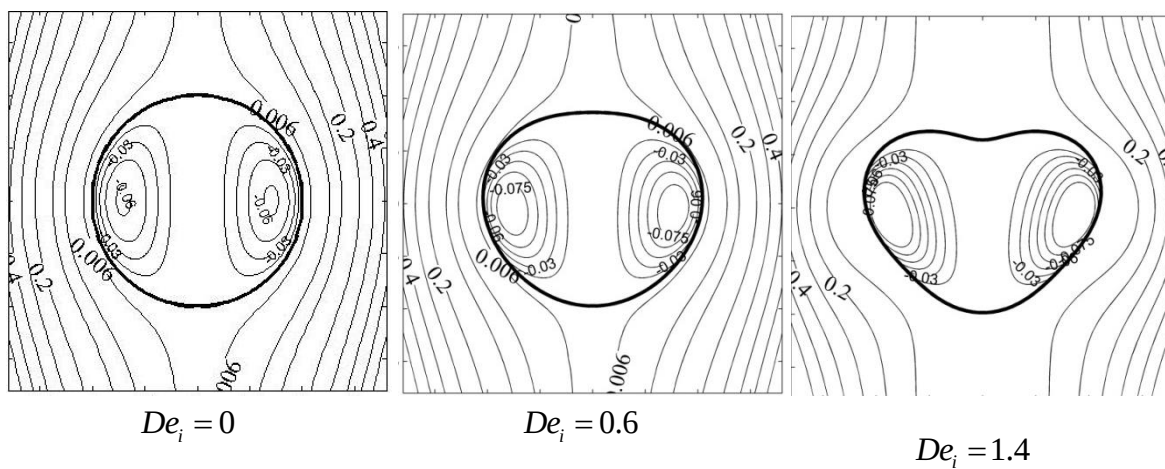
شکل ۳۳- تغییرات شکل قطره پلی‌اکریلامید با تغییرات حجم

$$(I = 1.42ml, II = 1.80ml, III = 7.42ml, IV = 8.22, V = 11.78ml)$$

۳-۶- نتایج تحلیلی مدل اولدروید-بی

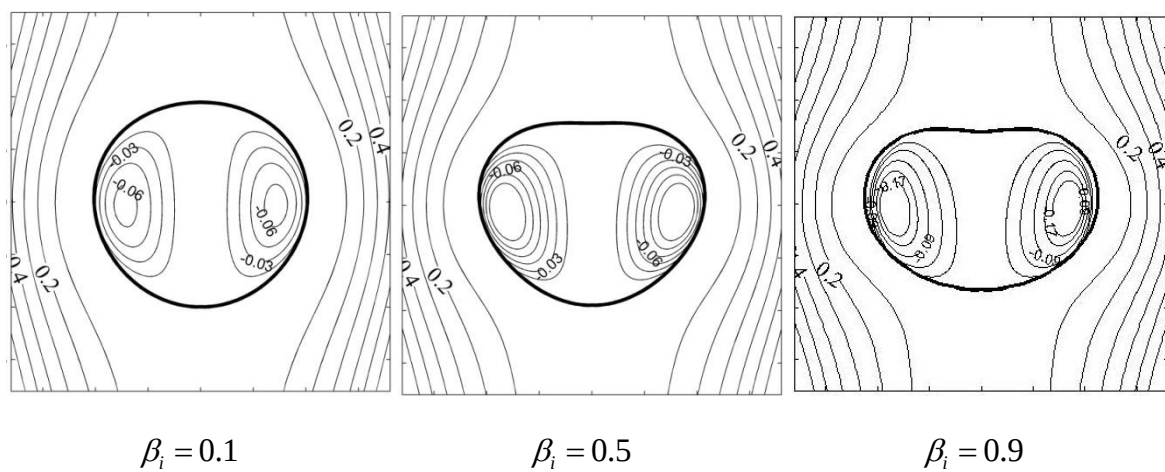
۳-۶-۱- نتایج مدل سازی اولدروید-بی برای قطره غیر نیوتنی در محیط نیوتنی

با توجه به نتایج تحلیلی که در قسمت سقوط قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی گرفته شده است و در شکل‌های (۳۴-۳۵) مشهود است می‌توان گفت که پارامتر نسبت ویسکوزیته پلیمری به حلال (β_i) جزء مهم‌ترین پارامترهایی است که باعث تغییر شکل قطره از حالت کروی به حالت پهن می‌شود. در این میان



(الف): شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

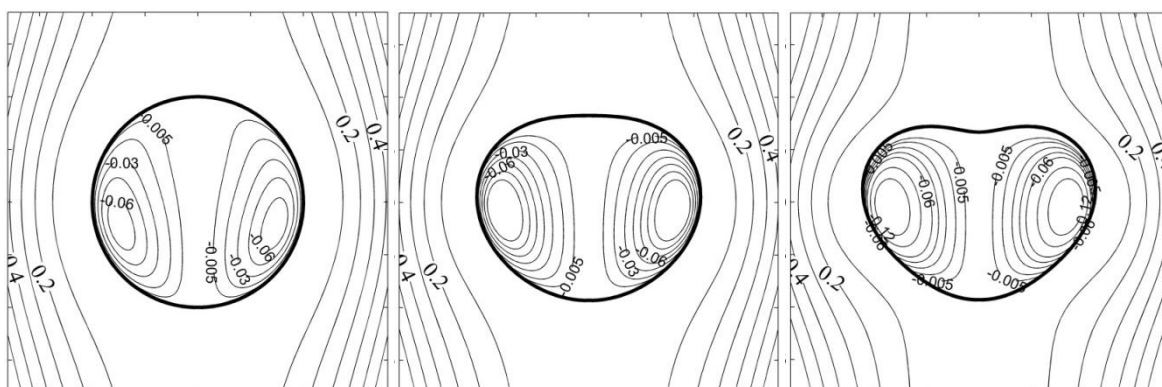
$$Ca=0.4 \quad \beta_o=0 \quad \beta_i=.4 \quad De_o=0 \quad K=50$$



(ب): شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

$$Ca=0.4 \quad \beta_o=0 \quad De_i=.8 \quad De_o=0 \quad K=50$$

شکل ۳۴- تاثیر پارامترهای دبورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی



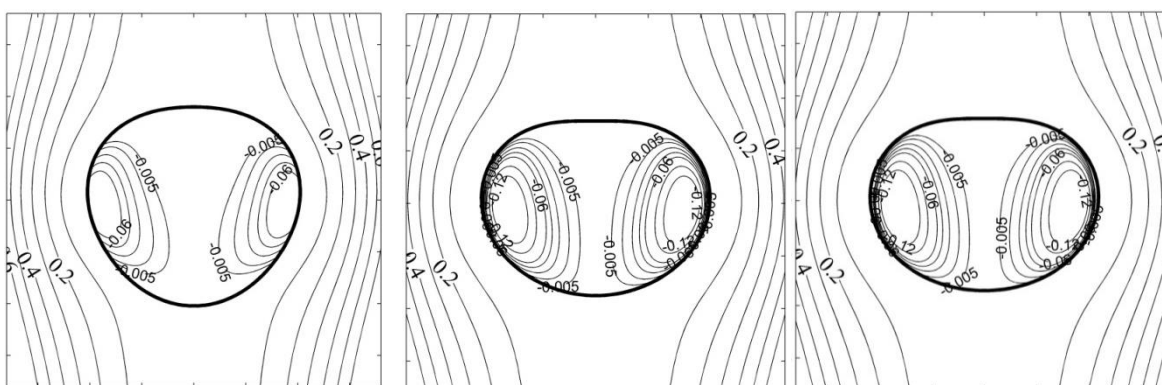
Ca=0

Ca=0.3

Ca=0.5

(الف): شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

$$\beta_o=0 \quad \beta_i=0.6 \quad De_i=0.8 \quad De_o=0 \quad K=50$$



K=1

K=10

K=30

(ب): شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

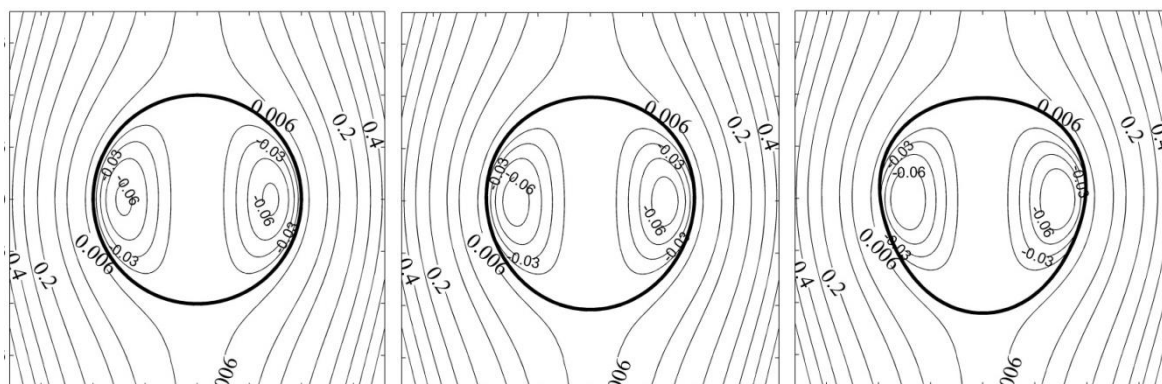
$$Ca=0.3 \quad \beta_o=0 \quad \beta_i=0.9 \quad De_i=0.8 \quad De_o=0$$

شکل ۳۵- تاثیر پارامترهای کپیلاری (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

به نظر می‌رسد پارامتر K پارامتر موثری در تغییر شکل قطره نباشد. لازم به ذکر نیست که K براساس نسبت سرعت‌های مرجع تعریف شده است پس به صورت غیر مستقیم می‌تواند باعث افزایش عدد کپیلاری و یا دبورا شود. همچنین پارامترهای کپیلاری و دبورا بیشترین تاثیر را روی به وجود آمدن فرورفتگی و رشد آن دارند. جالب است که با افزایش کپیلاری و دبورا شکل قطره کشیده‌تر می‌شود و ابتدای قطره شکل تیزتری به خود می‌گیرد.

۶-۳-۲- نتایج مدل سازی اولدروید-بی برای قطره نیوتنی در محیط غیر نیوتنی

در این قسمت به بررسی شکل قطره در حالت خاصی که سیال خارجی غیر نیوتنی و سیال داخلی نیوتنی است می‌پردازیم. همان طور که در شکل (۳۶-۳۷) مشاهده می‌شود پارامتر دبورای سیال خارجی سعی در کشیده کردن قطره دارد. این در حالی است که پارامتر نسبت ویسکوزیته پلیمری به نیوتنی سعی بر پهن کردن شکل قطره نسبت به حالت کروی دارد. اثر مشابهی برای پارامترهای کپیلاری و K مشاهده شده است. جالب است که اشاره شود پارامتر K در مقادیر کوچک‌تر از یک می‌تواند تاثیر زیادی روی کشیده شدن قطره بگذارد در حالی که برای مقادیر بزرگ پارامتر نسبتا کم تاثیری است.



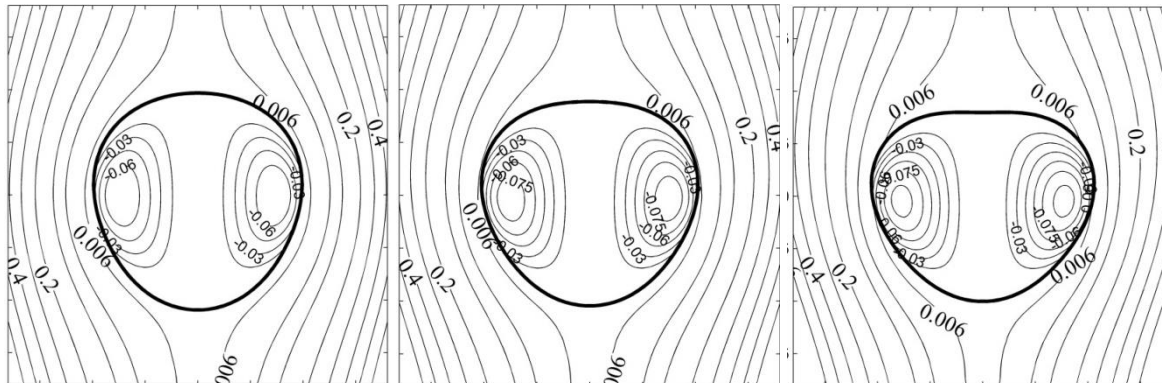
$De_o = 0.1$

$De_o = 0.9$

$De_o = 1.9$

(الف): شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیرنیوتنی

$$Ca = .8 \quad \beta_o = 0.1 \quad \beta_i = 0 \quad De_i = 0 \quad K = 20$$



$\beta_o = 0.1$

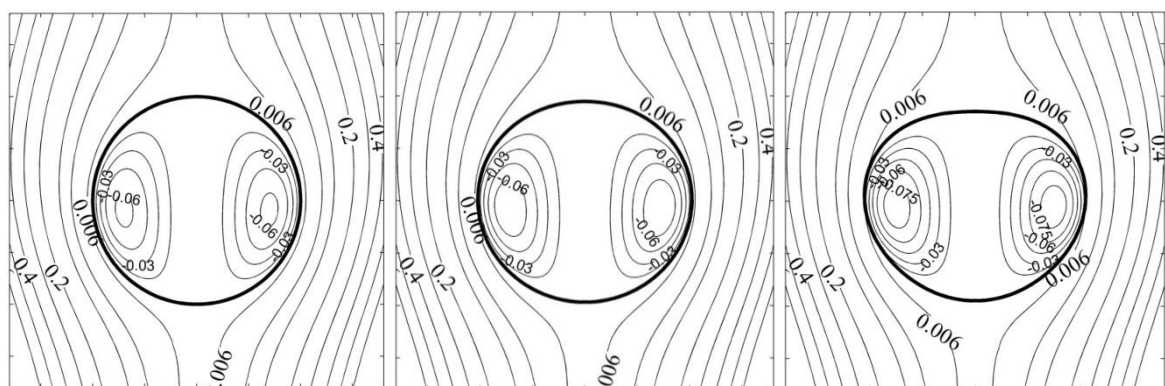
$\beta_o = 0.5$

$\beta_o = 0.9$

(ب): شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیرنیوتنی

$$Ca = .8 \quad \beta_i = 0 \quad De_i = 0 \quad De_o = 1.8 \quad K = 20$$

شکل ۳۶- تاثیر پارامترهای دبورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی



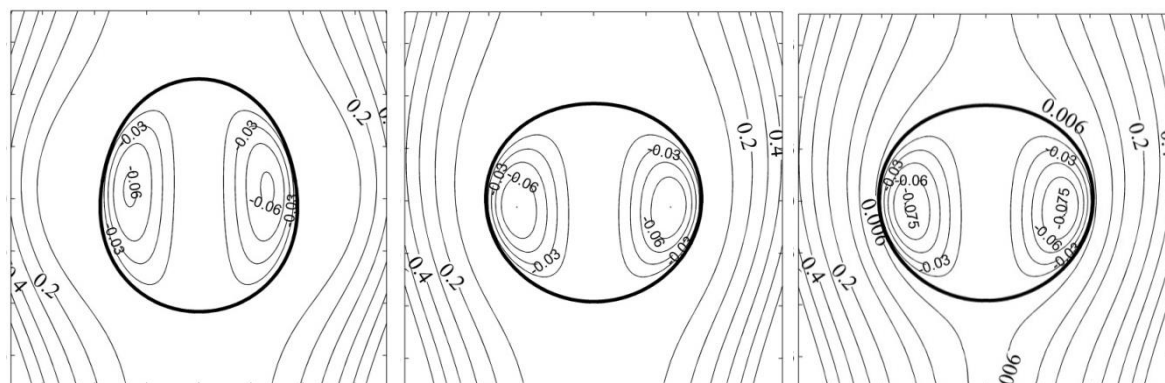
Ca=0

Ca=0.3

Ca=0.7

(الف): شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیرنیوتنی

$$\beta_o=0.9 \quad \beta_i=.4 \quad De_i=0 \quad De_o=1.6 \quad K=20$$



K=0.1

K=20

K=50

(ب): شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیرنیوتنی

$$Ca=0.4 \quad \beta_o=0.9 \quad \beta_i=0.4 \quad De_i=0 \quad De_o=1.6$$

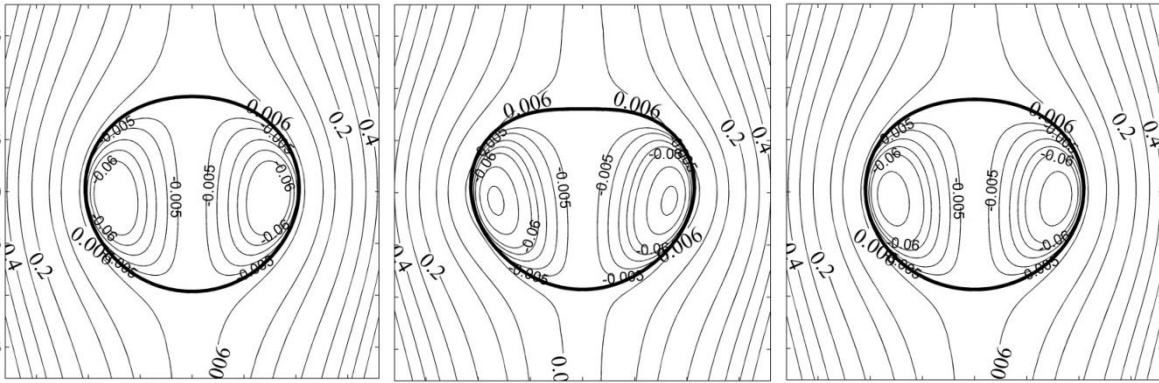
شکل ۳۷- تاثیر پارامترهای کپیلاری و نسبت ویسکوزیته روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر

نیوتنی

۶-۳-۳- نتایج مدل سازی اولدروید-بی برای قطره غیرنیوتنی در محیط

غیرنیوتنی

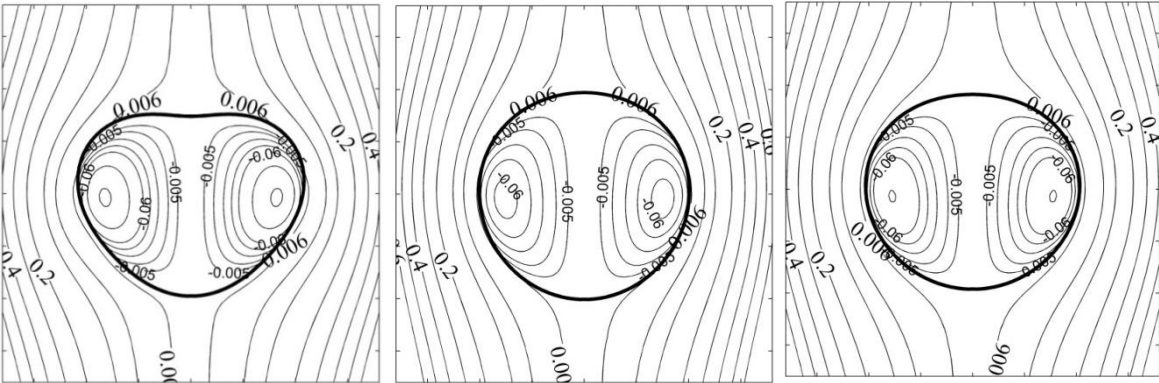
غالبا وقتی هر دو سیال نیوتنی هستند عامل موثر در سقوط خزشی قطره، نیروی کشش سطحی است که سعی در کمینه نگه داشتن سطح مقطع و به طبع آن کروی نگه داشتن شکل قطره دارد. در حالتی که سیالات غیرنیوتنی باشند نیروهای تنش نرمال توانسته بر نیروی کشش سطحی فائق آمده و شکل نهایی را از حالت کروی خارج کنند. با توجه به بررسی‌های بالا می‌توان انتظار داشت تاثیر بر هم‌کنش این نیروها تنوع بالای تغییر شکل قطرات را در حالتی که هر دو سیال غیرنیوتنی باشند بوجود آورد. در این حالات می‌توان با استفاده از تغییر خواص رئولوژی سیالات شکل‌های پهن و کشیده و حتی کروی را نیز برای قطرات بسیار بزرگ مشاهده کرد (شکل ۳۸).



$Ca=0.3 \beta_o=0.3 \beta_i=.6$
 $De_i=0.4 De_o=0.3 K=30$

$Ca=0.3 \beta_o=0.3 \beta_i=0.6$
 $De_i=0.9 De_o=0.3 K=30$

$Ca=0.3 \beta_o=0.3 \beta_i=0.9$
 $De_i=0.4 De_o=0.3 K=30$



$Ca=0.7 \beta_o=0.3 \beta_i=.6$
 $De_i=0.4 De_o=0.3 K=30$

$Ca=0.3 \beta_o=0.3 \beta_i=0.6$
 $De_i=0.4 De_o=0.3 K=1$

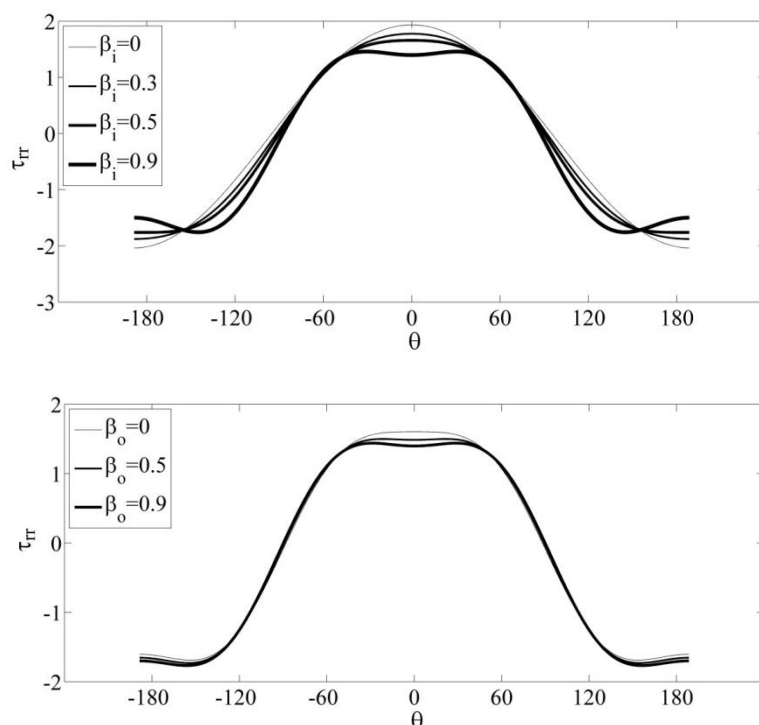
$Ca=0.3 \beta_o=0.3 \beta_i=.6$
 $De_i=0.4 De_o=0.9 K=30$

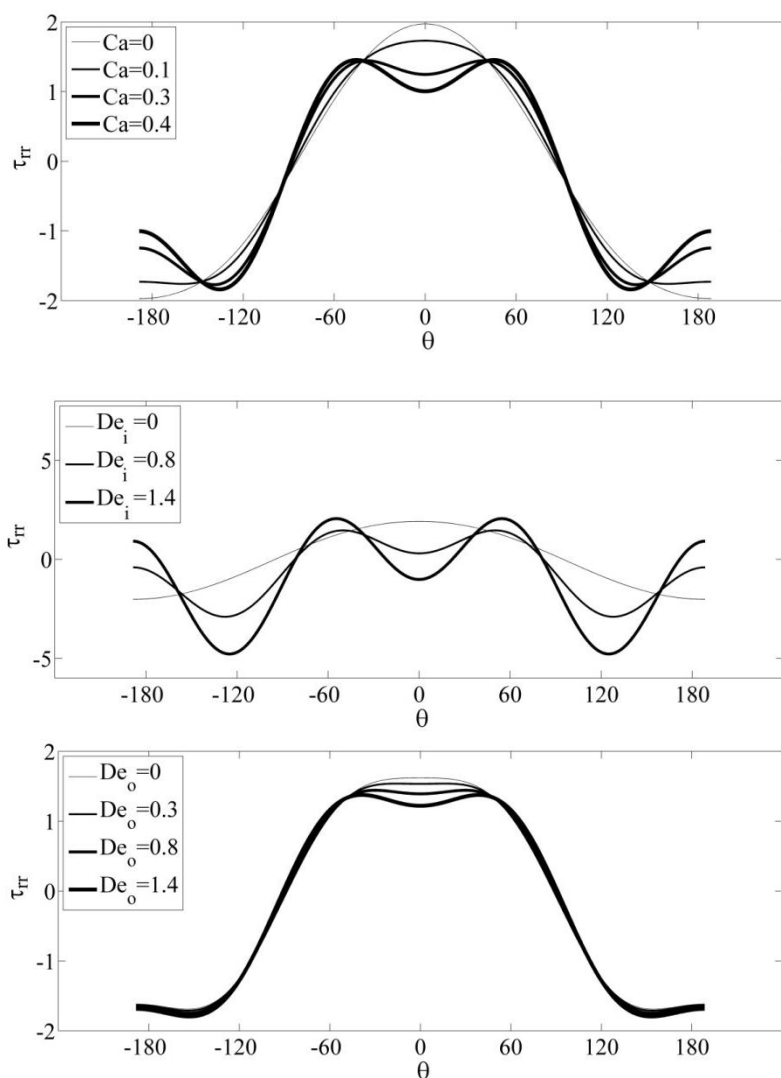
شکل ۳۸- تاثیر پارامترهای جریان روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

۶-۳-۴- نتایج مدل سازی اولدروید-بی برای تنش‌های نرمال

به نظر می‌رسد تغییر شکل قطرات از حالت کروی به پهن یا کشیده و به وجود آمدن فرورفتگی در فازهای غیر نیوتنی به صورت عمده حاصل برهم کنش تنش‌های نرمال در داخل و یا خارج قطره می‌باشد. از این رو

در این قسمت تلاش بر این بوده است تا تاثیر پارامترهای مهم رئولوژی روی این عامل مورد بررسی قرار گیرد. با توجه به شکل ۳۹ می‌توان دریافت که تاثیر پارامترهای داخلی روی تغییرات تنش نرمال داخل قطره بسیار موثرتر از سیالات خارجی است. با افزایش خاصیت الاستیک در انتهای قطره (معادل زاویه صفر درجه در نمودارها) تنش نرمال کاهش یافته که این خود عامل به وجود آمدن فرورفتگی در این ناحیه می‌شود. همچنین با افزایش اعداد کپیلاری و دبورای داخلی میزان تنش نرمال در ابتدای قطره (معادل زاویه ۱۸۰ درجه) افزایش یافته که باعث تیزشدن سر قطره و کشیده‌شدگی آن می‌شود. همان طور که مشهود است پارامترهای الاستیک خارجی در انتهای قطره همچنان تاثیر گذار خواهند بود و می‌توانند وجود آمدن فرورفتگی را تشدید کنند.





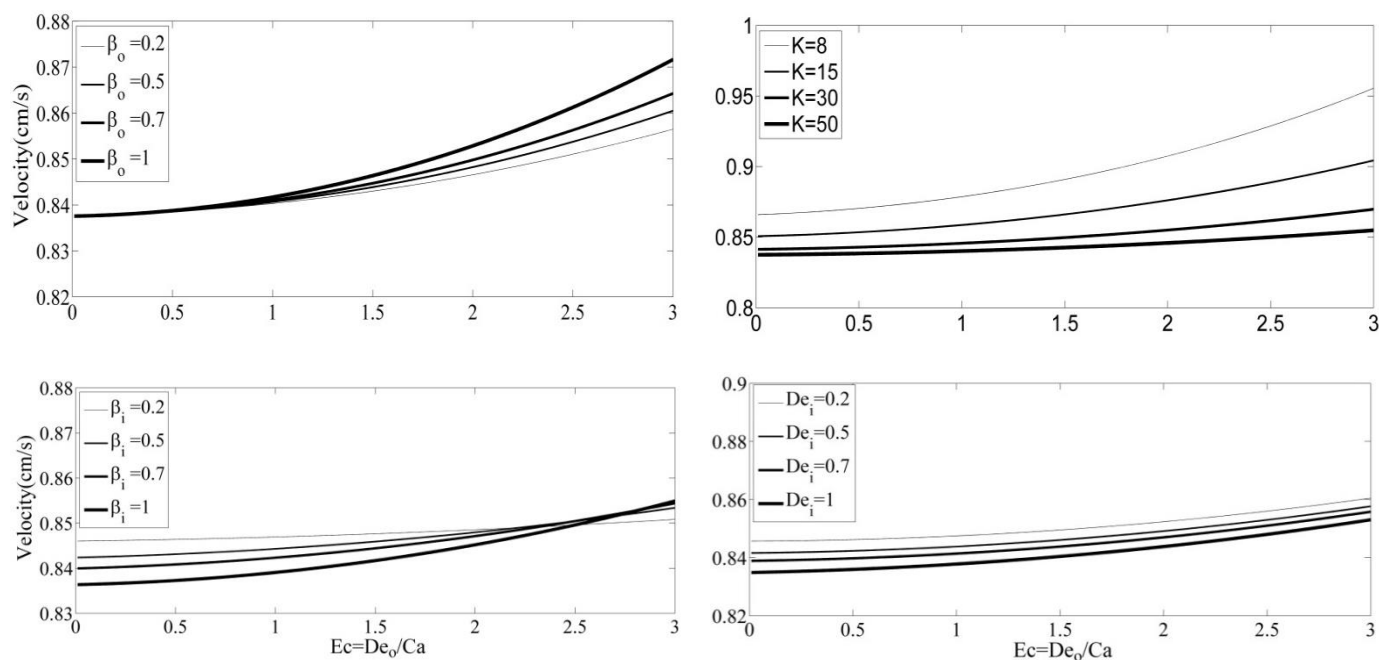
شکل ۳۹- تاثیر پارامترهای مختلف روی تنش نرمال سیال داخلی

۶-۳-۵- نتایج مدل سازی اولدروید-بی برای سرعت سقوط

در این قسمت تاثیر عدد الاستوکپیلاری را بر روی پارامترهای مختلف بررسی می کنیم. این عدد بی بعد

کاملا مستقل از سینماتیک جریان بوده و به صورت $Ec = \frac{De}{Ca} = \frac{\lambda \Gamma}{(K+1)\eta R}$ تعریف می شود. بر اساس

نتایج ارائه شده در شکل ۴۰ می‌توان مشاهده کرد که افزایش خواص الاستیک بیرونی سرعت سقوط را افزایش داده حال آنکه افزایش خاصیت الاستیک سیال داخلی سرعت سقوط را کاهش می‌دهد.



شکل ۴۰- تاثیر پارامترهای مختلف روی سرعت سقوط

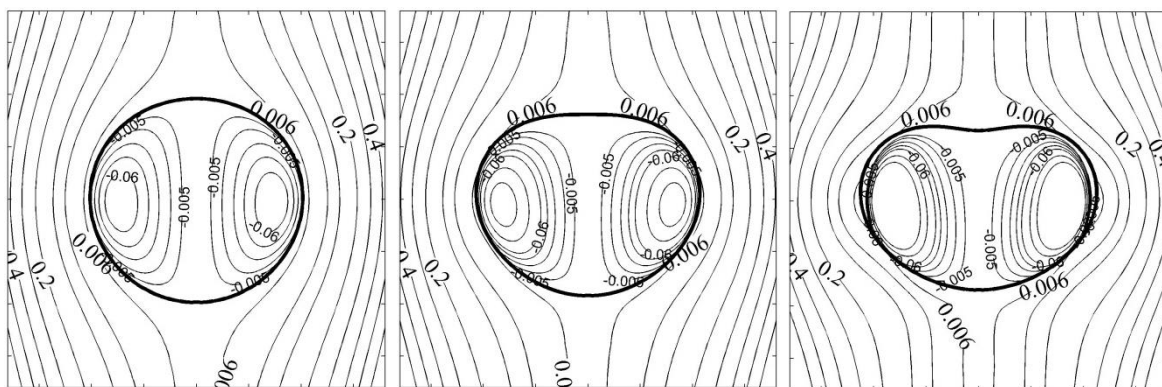
۴-۶- نتایج تحلیلی مدل گزیکس

در این قسمت به بررسی نتایج شبیه‌سازی شده شکل و حرکت قطرات مدل غیرخطی گزیکس پرداخته شده است. این مدل توانایی شبیه‌سازی رفتار سیالات غیرنیوتنی که ویسکوزیته آنها با افزایش نرخ برش کاهش می‌یابد را به خوبی دارد. لازم به ذکر است که ویسکوزیته اکثر سیالات ویسکوالاستیک با افزایش نرخ برش

کاهش پیدا می کنند پس می توان ادعا کرد که در مقایسه با مدل اولدریود-بی که ویسکوزیته را پارامتری ثابت لحاظ میکند، این مدل شبیه سازی دقیق تری از پدیده سقوط قطره نشان خواهد داد.

۶-۴-۱- نتایج مدل گزیکس برای قطره غیر نیوتنی در محیط نیوتنی

در این قسمت به بررسی حالت خاصی که سیال داخلی ویسکوالاستیک و سیال خارجی نیوتنی باشد پرداخته شده است. در شکل ۴۱ تاثیر پارامترهای نسبت ویسکوزیته (β_i) و عدد دبورا بر تغییرات شکل قطره نشان داده شده است. با افزایش این پارامترها شکل قطره از حالت کروی به حالت پهن شده تبدیل می شود. این تغییر شکل را می توان به افزایش تنش های نرمال قسمت پلیمری سیال نسبت داد. در حالت کروی کشش سطحی پارامتر غالب بوده که با افزایش خاصیت الاستیک سیال، تنش های نرمال بر این نیرو غلبه کرده و شکل قطره را از حالت کروی به حالت پهن تبدیل می کند. با افزایش خاصیت الاستیک در انتهای قطره یک فرورفتگی تشکیل می شود که با افزایش بیشتر الاستیسیته این فرورفتگی به رشد خود به سمت داخل قطره ادامه می دهد. با افزایش عدد بی بعد دبورا تغییر شکل مشابهی مشاهده می شود که نشان دهنده این مسئله است که علاوه بر خاصیت الاستیک افزایش شعاع قطره و سرعت سقوط نیز می توانند تاثیرات مشابهی در تنش و تغییر شکل قطره داشته باشد. در شکل ۴۲ تاثیر پارامتر کپیلاری (Ca) و ضریب تحرک (α_i) بر تغییر شکل قطرات به تصویر کشیده شده است. پارامتر کشش سطحی جزو موثرترین پارامترها در تعیین شکل قطره می باشد. همان طور که مشاهده می شود حتی در حالات غیر نیوتنی با افزایش کشش سطحی بین دو سیال قطره به شکل کروی خود باز می گردد. در قسمت "ب" تاثیر پارامتر (α_i) روی تغییرات شکل قطره مشاهده می شود. نتایج تایید کننده این مسئله هستند که با افزایش خاصیت تغییر ویسکوزیته با نرخ برش (ضریب تحرک) تغییرات شکل نسبت به حالت کروی کمتر خواهد شد. دلیل این امر کاهش ویسکوزیته و به دنبال آن تنش نرمال روی سطح قطره می باشد.



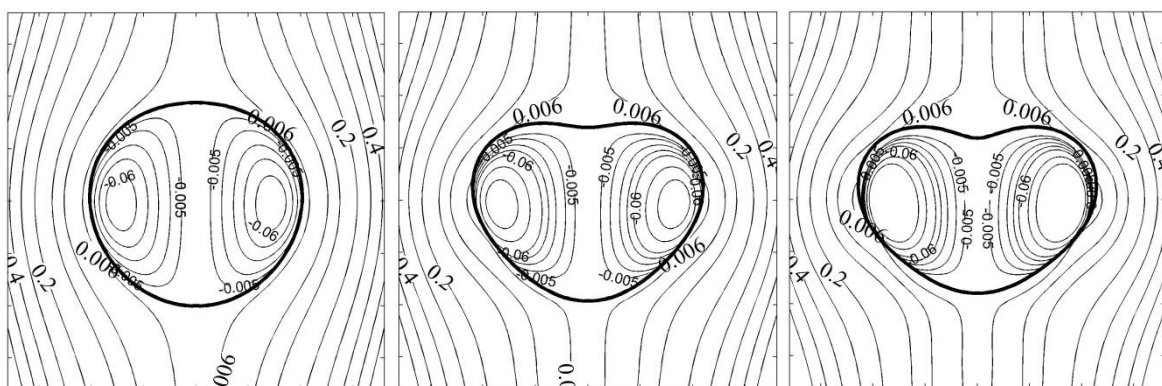
$De_i = 0.1$

$De_i = 0.5$

$De_i = 0.9$

(الف): شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

$$Ca=0.4 \quad \beta_i=.85 \quad \alpha_i=0.1 \quad K=20$$



$\beta_i = 0.1$

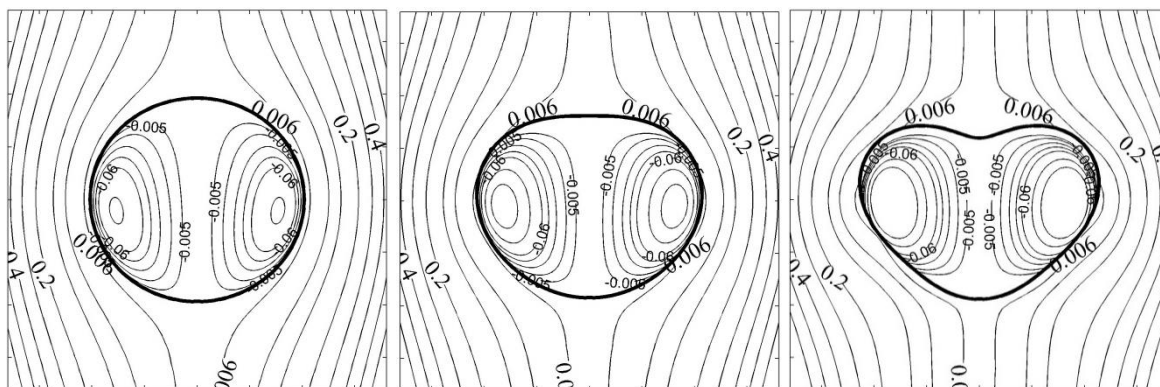
$\beta_i = 0.6$

$\beta_i = 0.9$

(ب): شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

$$Ca=0.6 \quad \beta_o=0 \quad De_i=.6 \quad \alpha_i=0.1 \quad K=20$$

شکل ۴۱- تاثیر پارامترهای دپورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی



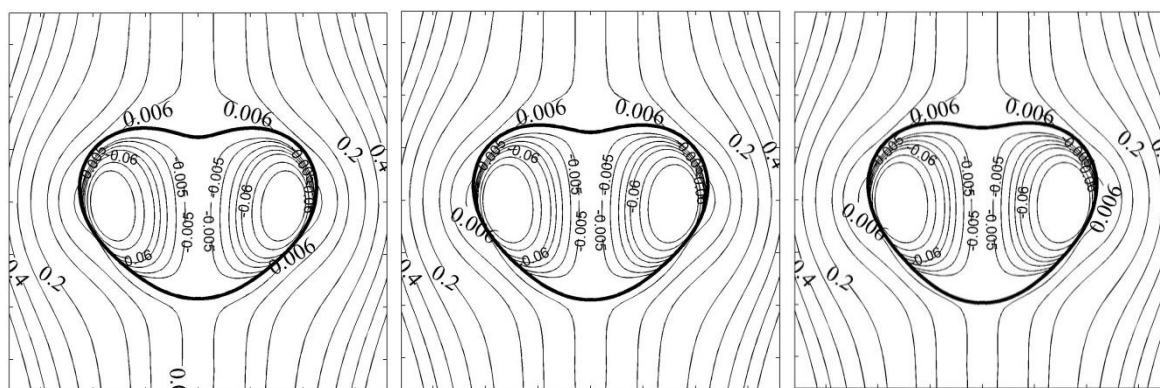
Ca=0.1

Ca=0.4

Ca=0.7

(الف): شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

$$\alpha_i=0.1 \quad \beta_i=0.85 \quad De_i=0.5 \quad K=20$$



$\alpha_i=0.05$

$\alpha_i=0.4$

$\alpha_i=0.9$

(ب): شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

$$Ca=0.6 \quad K=20 \quad De_i=0.8 \quad \beta_i=0.85$$

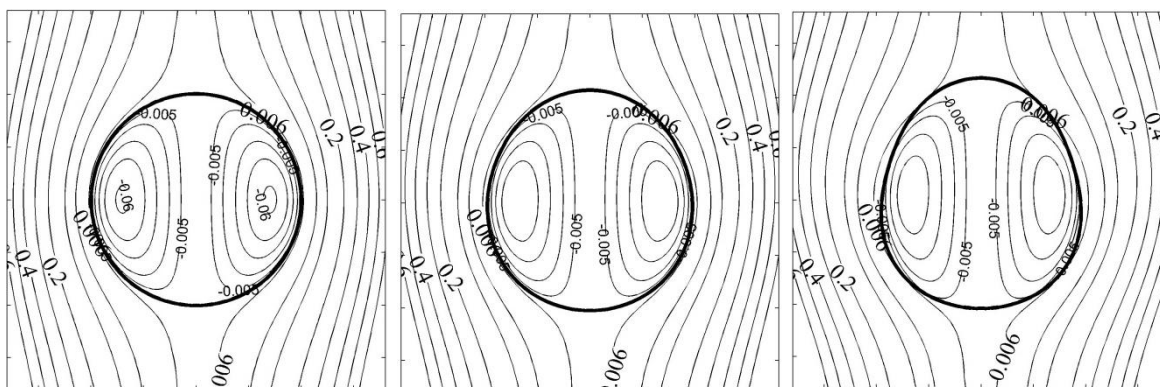
شکل ۴۲- تاثیر پارامترهای کپیلاری (الف) و ضریب تحرک (ب) روی شکل قطره غیرنیوتنی در سیال خارجی نیوتنی

۶-۴-۲- نتایج مدل گزیکس برای قطره نیوتنی در محیط غیر نیوتنی

در این قسمت به یکی دیگر از حالت‌های خاص سقوط خزشی قطره که در آن سیال خارجی دارای خواص ویسکوالاستیک و سیال داخلی نیوتنی هستند، پرداخته شده است.

در شکل (۴۳-۴۴) شکل‌های قطرات در شرایط مختلف ترسیم شده است. در شکل ۴۳ نشان داده شده است که با افزایش خاصیت الاستیک سیال خارجی (β_0) شکل قطرات از حالت کروی به یک بیضی کشیده تبدیل می‌شود. پارامتر دبورا (De_0) تاثیر مشابهی روی شکل قطرات گذاشته است که نشان دهنده این مسئله است که علاوه بر افزایش خاصیت الاستیک، افزایش حجم و سائز قطرات نیز این تغییرات شکل را تشدید می‌کند.

شکل ۴۴ تاثیر پارامتر بسیار مهم کپیلاری را در تغییر شکل این قطرات نشان می‌دهد. همان طور که ملاحظه می‌شود افزایش نیروی کشش سطحی بین دو سیال شکل قطره را به حالت کروی خود باز می‌گرداند و با کاهش آن تنش‌های نرمال بر این نیرو غلبه کرده و قطره شکل بیضوی پیدا می‌کند. در ادامه به بررسی تاثیر پارامتر نسبت ویسکوزیته سیال داخلی به خارجی پرداخته شده است. کاهش این پارامتر در مقادیر کوچک تر از یک باعث بیضوی شدن قطرات می‌شود حال آنکه افزایش آن باعث پهن شدن قطره می‌شود که تایید کننده تاثیر این پارامتر در کار آقایان تیلور و آکریووس [۳] است. افزایش پارامتر ضریب تحرک باعث کاهش بیشتر ویسکوزیته و به دنبال آن تنش‌های نرمال می‌شود. همانطور که در شکل ۴۴ نشان داده شده است افزایش این پارامتر کاهش تغییر شکل قطرات را به دنبال دارد.



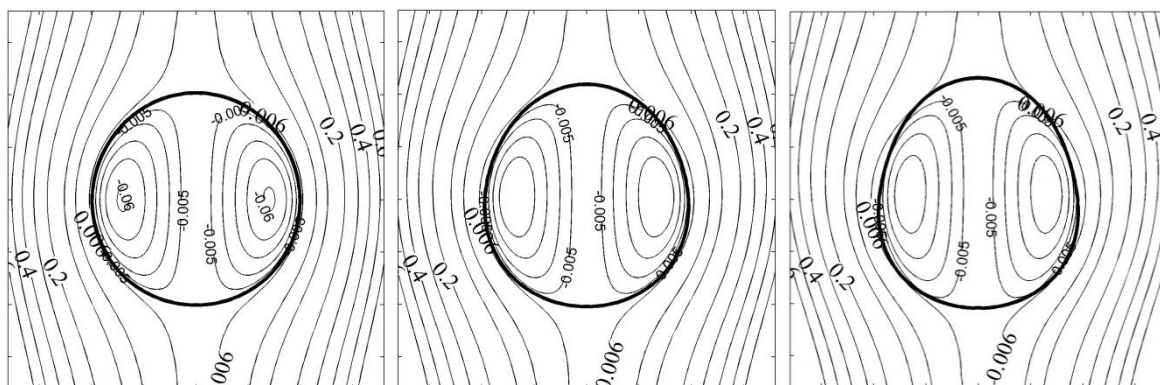
$De_0 = 0.1$

$De_0 = 0.9$

$De_0 = 1.9$

(الف): شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیرنیوتنی

$$Ca = 0.9 \quad \beta_0 = 0.8 \quad K = 1 \quad \alpha_0 = 0.1$$



$\beta_0 = 0.1$

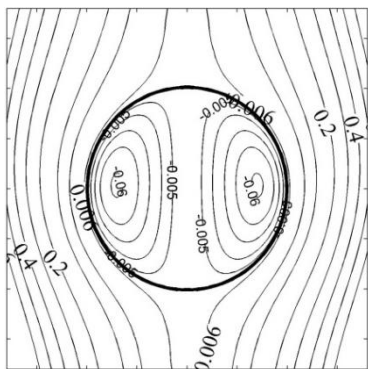
$\beta_0 = 0.5$

$\beta_0 = 0.9$

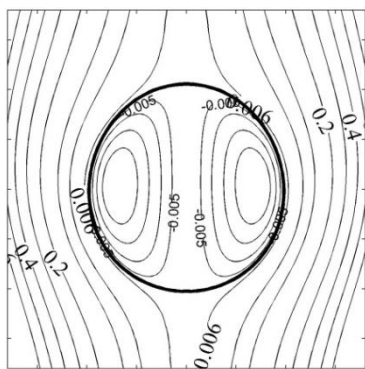
(ب): شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیرنیوتنی

$$Ca = 0.8 \quad \alpha_0 = 0.1 \quad De_0 = 1.7 \quad K = 1$$

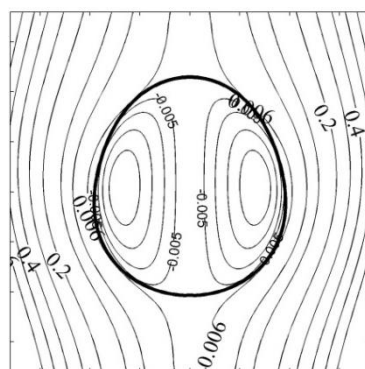
شکل ۴۳- تاثیر پارامترهای دپورا (الف) و نسبت ویسکوزیته (ب) روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی



Ca=0.1

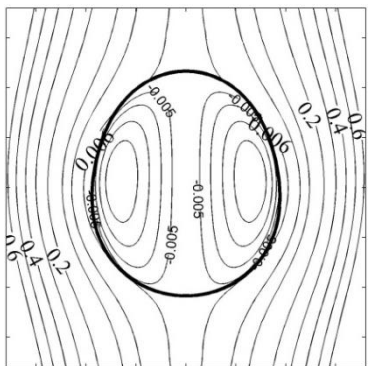


Ca=0.4

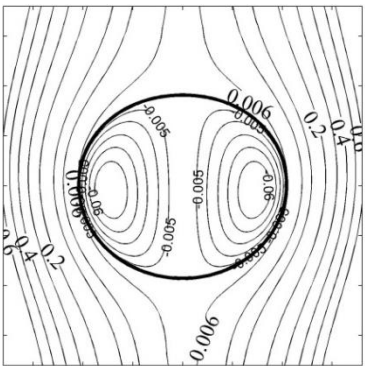


Ca=0.9

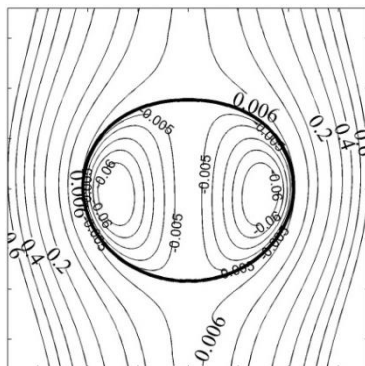
$$\beta_o=0.8 \quad \alpha_o=0.1 \quad \text{De}_o=1.7 \quad K=1$$



K=0.5



K=8



K=80

$$\text{Ca}=0.7 \quad \beta_o=0.7 \quad \alpha_o=0.9 \quad \text{De}_o=1.6$$



$\alpha_o=0.5$

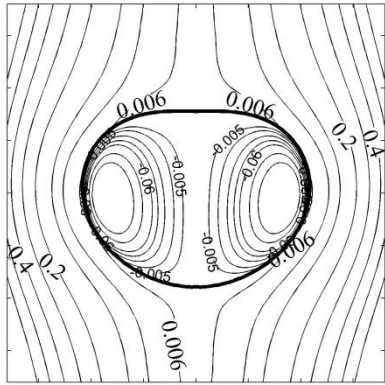
$\alpha_o=0.9$

$$\text{Ca}=0.9 \quad \beta_o=0.6 \quad K=1 \quad \text{De}_o=1.8$$

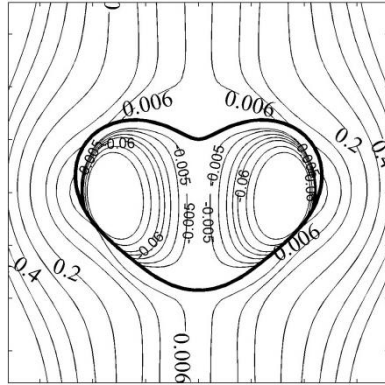
شکل ۴۴- تاثیر پارامترهای کپیلاری و نسبت ویسکوزیته و ضریب تحرک روی شکل قطره نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

۶-۴-۳- نتایج مدل گریکس برای قطره غیر نیوتنی در محیط غیر نیوتنی

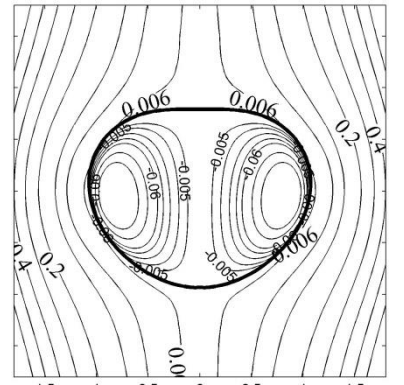
پارامتر بسیار موثر در حرکت خزشی سیال نیوتنی در یک سیال نیوتنی دیگر نیروی کشش سطحی است که تمایل به کمینه کردن سطح مقطع بین دو سیال و کروی نگه داشتن قطره دارد. با تغییر هر کدام از این سیالات به ماده غیر نیوتنی تنش‌های نرمال برگرفته از خاصیت الاستیک توانایی غلبه بر این نیرو را پیدا کرده و شکل قطره از حالت کروی خارج می‌شود. همان طور که در شکل ۴۵ مشاهده می‌شود برهم کنش تنش‌های نرمال و نیروی کشش سطحی اشکال بسیار مختلف قطرات را می‌توانند ایجاد کنند.



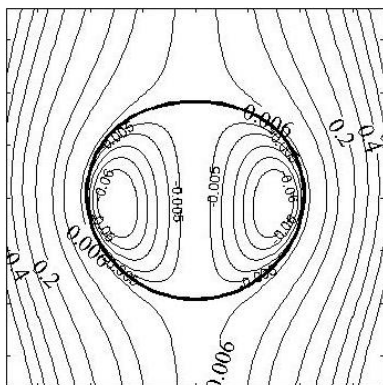
Ca=0.4 $\beta_o=0.7$ $\beta_i=0.8$ $\alpha_o=0.4$
 De_i=0.6 De_o=0.9 K=50 $\alpha_i=0.3$



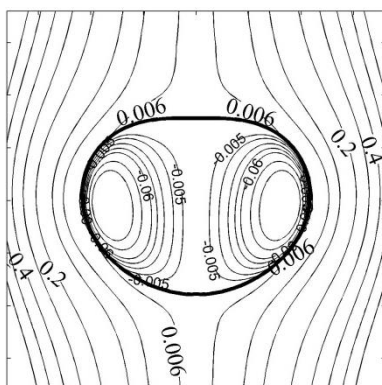
Ca=0.7 $\beta_o=0.7$ $\beta_i=0.8$ $\alpha_o=0.4$
 De_i=0.6 De_o=0.9 K=50 $\alpha_i=0.3$



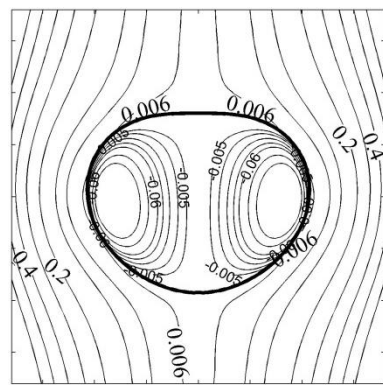
Ca=0.4 $\beta_o=0.1$ $\beta_i=0.8$ $\alpha_o=0.4$
 De_i=0.6 De_o=0.9 K=50 $\alpha_i=0.3$



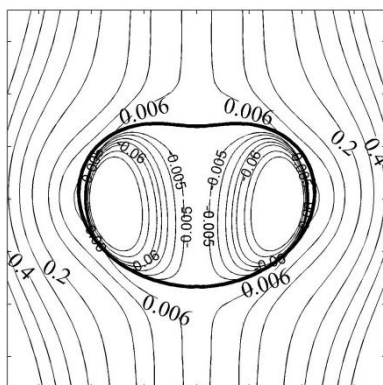
$Ca=0.4 \beta_o=0.7 \beta_i=0.2 \alpha_o=0.4$
 $De_i=0.6 De_o=0.9 K=50 \alpha_i=0.3$



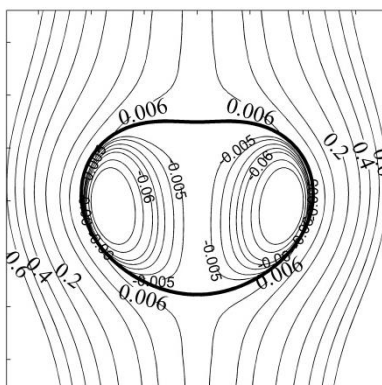
$Ca=0.4 \beta_o=0.7 \beta_i=0.8 \alpha_o=0.9$
 $De_i=0.6 De_o=0.9 K=50 \alpha_i=0.3$



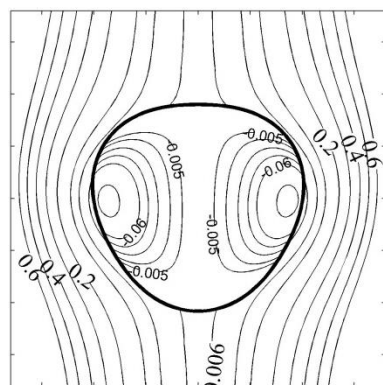
$Ca=0.4 \beta_o=0.7 \beta_i=0.8 \alpha_o=0.4$
 $De_i=0.6 De_o=0.9 K=50 \alpha_i=0.8$



$Ca=0.4 \beta_o=0.7 \beta_i=0.8 \alpha_o=0.4$
 $De_i=0.9 De_o=0.9 K=50 \alpha_i=0.3$



$Ca=0.4 \beta_o=0.7 \beta_i=0.8 \alpha_o=0.4$
 $De_i=0.6 De_o=1.9 K=50 \alpha_i=0.3$



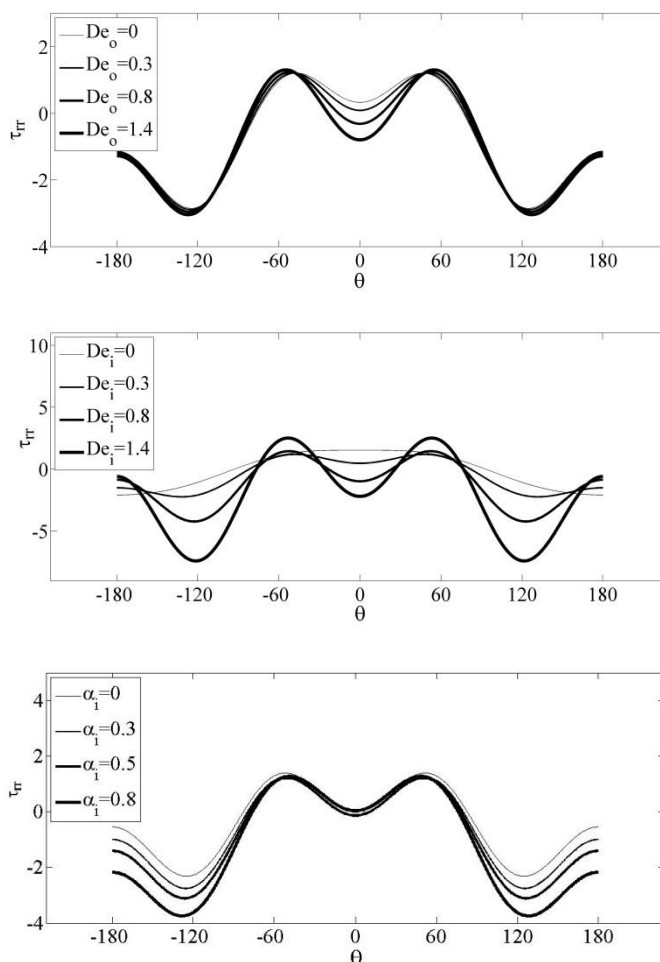
$Ca=0.4 \beta_o=0.7 \beta_i=0.8 \alpha_o=0.4$
 $De_i=0.6 De_o=0.9 K=1 \alpha_i=0.3$

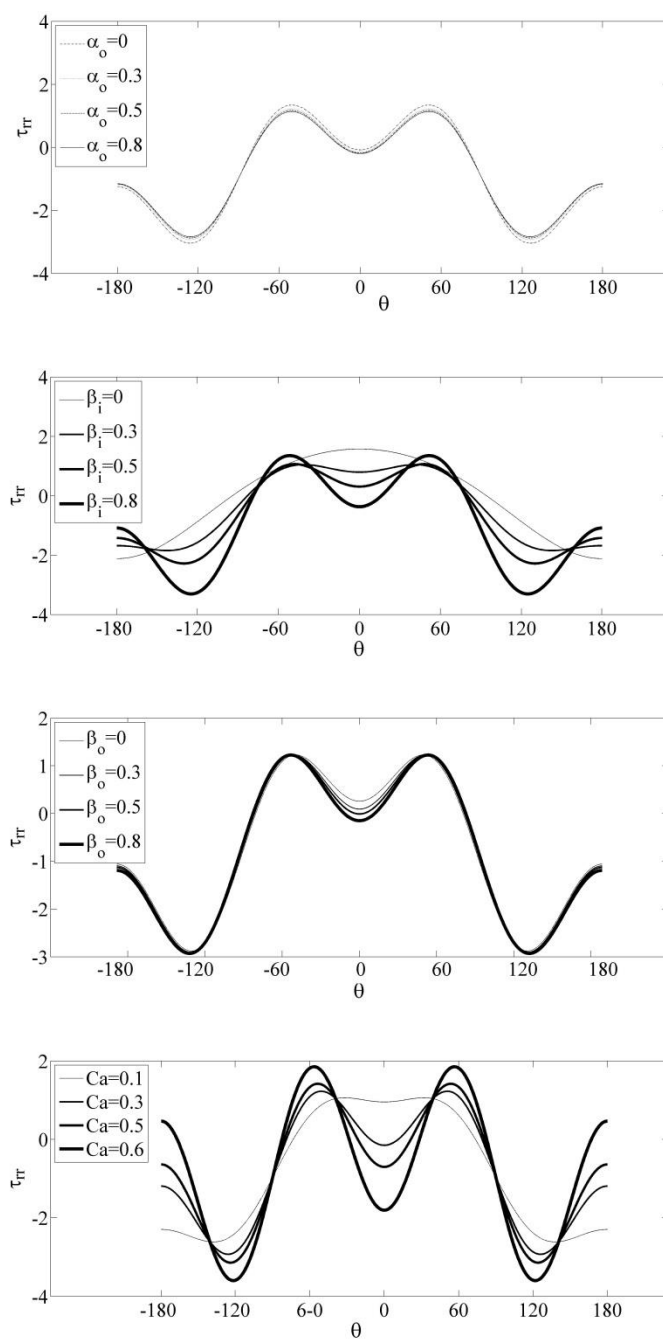
شکل ۴۵- تاثیر پارامترهای جریان روی شکل قطره غیر نیوتنی در سیال خارجی غیر نیوتنی

۶-۴-۴- نتایج مدل گزیکس برای تنش‌های نرمال

شکل نهایی قطره حاصل بر هم کنش نیروهای کشش سطحی و تنش‌های نرمال سیال داخلی و خارجی می‌باشد. برای بررسی دقیق‌تر تاثیر این پارامترها روی شکل قطره تنش نرمال سیال داخلی که با استفاده از

مدل گزیکس شبیه‌سازی شده است در شکل ۴۶ به تصویر کشیده شده است. افزایش خواص الاستیک سیال داخلی، باعث کاهش تنش نرمال انتهای قطر (معادل زاویه صفر درجه) و افزایش این تنش در دو ناحیه سمت راست و چپ سطح قطره می‌شود که تاثیر بالای این پارامترها را بر پهن شدگی و پدیده ایجاد شدن حفره در انتهای قطره نشان می‌دهد. همچنین نشان داده شده است که افزایش خواص الاستیک تاثیر کمتری روی تنش‌های نرمال خواهد داشت. نتیجه جالب در این قسمت مربوط به افزایش کشش سطحی بین دو سیال است که باعث افزایش تنش نرمال در انتهای قطره و پر شدن حفره ایجاد شده ناشی از خواص الاستیک می‌شود.

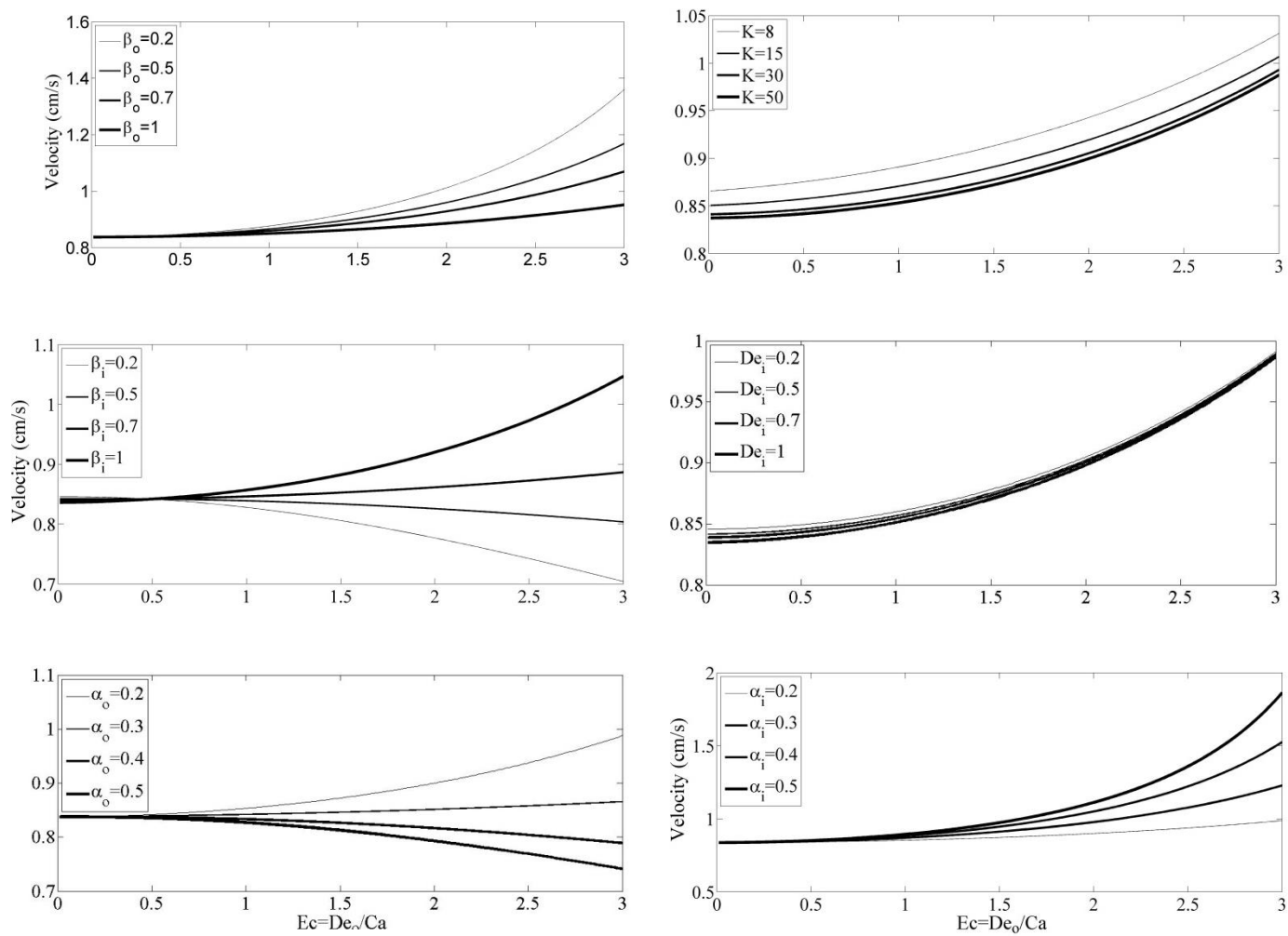




شکل ۴۶- تاثیر پارامترهای مختلف روی تنش نرمال سیال داخلی

۶-۴-۵- نتایج مدل گزیکس برای سرعت سقوط

در این قسمت تاثیر عدد الاستوکپیلاری را بر روی سرعت حد بررسی می کنیم. این عدد توسط پروفیسور مک کینلی در سال ۲۰۰۵ ارائه شد [۳۰] که به صورت نسبت اعداد بی بعد دبورا به کپیلاری $Ec = \frac{De}{Ca} = \frac{\lambda \Gamma}{(K+1)\eta R}$ تعریف می شود و کاملاً از سینتیک جریان مستقل است. بر اساس نتایج به دست آمده در شکل ۴۷ می توان مشاهده کرد که افزایش خواص الاستیک بیرونی سرعت سقوط را افزایش داده حال آنکه افزایش خاصیت الاستیک سیال داخلی سرعت سقوط را کاهش می دهد. افزایش ضریب تحرک سیال داخلی باعث کاهش ویسکوزیته با افزایش نرخ برش می شود (نیروی درگ را کاهش می دهد) که خود عامل افزایش سرعت سقوط است. افزایش عدد ضریب تحرک برای سیال خارجی با توجه به خاصیت های مختلف سیالات داخلی و یا خارجی می تواند افزایش و یا کاهش سرعت سقوط را به دنبال داشته باشد.



شکل ۴۷- تاثیر پارامترهای مختلف روی سرعت سقوط

۷- نتیجه گیری

در این تحقیق به صورت تحلیلی و آزمایشگاهی به بررسی حرکت و تغییر شکل قطرات خزشی غیرنیوتنی که در یک محیط غیرنیوتنی دیگر سقوط می کنند پرداخته شده است. برای شبیه سازی تنش های سیالات داخل و خارج قطره از معادلات متشکله گزیکس و اولدروید-بی استفاده شده است. به منظور خطی سازی معادلات حاکم از پارامترهای بی بعد دوبرا استفاده شده است. به منظور بررسی دقت قسمت تحلیلی یک بخش آزمایشگاهی نیز به تحقیق حاضر اضافه شده است. در قسمت آزمایشگاهی از محلول ماده پلیمری پلی اکریلامید (PAA) به عنوان فاز غیرنیوتنی داخل قطره استفاده شده است. در تحقیقات آزمایشگاهی گذشته از ماده پلیمری زانتام استفاده شده بود که به علت ساختار غیر قابل انعطاف پذیر زنجیره های مولکولی زانتام، این ماده به خوبی قابل شبیه سازی با مدل های ساده رئولوژی نیست. روغن سیلیکون به عنوان سیال خارجی انتخاب شده است که یک ماده آب گریز می باشد. در حرکت خزشی قطره نیوتنی در یک سیال نیوتنی خارجی نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی شکل نهایی قطره را کاملاً کروی پیش بینی می کند. در این حالت نیروی کشش سطحی پارامتر غالب می باشد که سعی در کم کردن سطح مقطع قطره دارد که به طبع آن شکل نهایی کروی می شود. حال آنکه در موارد غیرنیوتنی، با تغییر دادن خواص رئولوژی سیالات داخلی و خارجی، شکل قطره به حالت های مختلفی می تواند تبدیل شود. بر اساس مطالعات انجام شده بر روی تنش نرمال در تحقیق حاضر می توان گفت این پدیده به اختلاف تنش های نرمال بین سیال داخلی و خارجی مرتبط می باشد. در حالت خاصی که سیال خارجی نیوتنی و سیال داخلی ویسکوالاستیک باشد، با افزایش سایز قطره یک فرورفتگی در انتهای قطره ظاهر می شود که با افزایش سایز یا خاصیت الاستیک سیال این فرورفتگی بزرگتر می شود. در نتایج تحلیلی نشان داده شد که افزایش ضریب تحرک باعث کاهش این تغییر شکل می شود. در حالت خاصی که سیال خارجی خواص ویسکوالاستیک و سیال داخلی نیوتنی باشد قطرات

با توجه به نسبت ویسکوزیته و خصوصیات سیال خارجی می‌توانند شکل بیضوی کشیده یا پهن پیدا کنند. با افزایش نسبت ویسکوزیته شکل قطرات از حالت کشیده به پهن تغییر می‌کند که با افزایش حجم قطره یا خاصیت الاستیک سیال خارجی این تغییر شکل افزایش و با افزایش ضریب تحرک تغییر شکل کاهش می‌یابد. در قسمت تحلیلی تحقیق حاضر نشان داده شده است که با تغییر پارامترهای مختلف در حالتی که هر دو سیال غیرنیوتنی باشند می‌توان قطرات با اشکال مختلف ایجاد کرد که مقایسه‌های انجام شده بین حل تحلیلی و آزمایشگاهی دقت خوب این حل در پیش بینی شکل قطره را تایید کرده است. در ادامه یک رابطه برای پیش‌بینی سرعت حرکت قطره در سیال خارجی ارائه شده است. نتایج نشان‌دهنده این امر هستند که افزایش الاستیسیته سیال داخلی باعث کاهش سرعت سقوط قطره می‌شود حال آنکه افزایش الاستیسیته سیال خارجی سرعت سقوط را افزایش خواهد داد. افزایش ضریب تحرک سیال داخلی سرعت سقوط را افزایش می‌دهد حال آنکه افزایش ضریب تحرک سیال خارجی با توجه به خواص داخلی و یا خارجی سیالات می‌تواند باعث افزایش و یا کاهش سرعت حد قطرات شود. نتایج به دست آمده در بخش تحلیلی تحقیق حاضر، دقت بالاتری در شبیه‌سازی نتایج آزمایشگاهی نشان داده است.

۸- پیشنهادات

در ادامه‌ای ای تحقیق می‌توان به بررسی موضوعات زیر پرداخت:

-بررسی انتقال حرارت قطره نیوتنی در محیط نیوتنی در شرایط دما ثابت سیال خارجی

-بررسی انتقال حرارت قطره نیوتنی در محیط غیرنیوتنی در شرایط دما ثابت سیال خارجی

-بررسی انتقال حرارت قطره غیر نیوتنی در محیط غیرنیوتنی در شرایط دما ثابت سیال خارجی

-بررسی انتقال حرارت قطره غیر نیوتنی در محیط نیوتنی در شرایط شار ثابت سیال خارجی

-بررسی انتقال حرارت قطره نیوتنی در محیط غیرنیوتنی در شرایط شار ثابت سیال خارجی

-بررسی انتقال حرارت قطره غیر نیوتنی در محیط غیرنیوتنی در شرایط شار ثابت سیال خارجی

-بررسی تحلیلی شکل قطراتی نیوتنی که به صورت غیر کروی در سیال غیرنیوتنی تزریق می شوند

-بررسی تحلیلی شکل قطراتی غیرنیوتنی که به صورت غیر کروی در سیال نیوتنی تزریق می شوند

ضمیمه: جواب جملات درجه دوم برای حل حساب اغتشاشات

حل جریان بر اساس حساب اغتشاشات به صورت زیر ارائه می شود:

$$\psi_i = \sum_{k=0}^{\infty} De_i (\psi_i)_k \quad (الف ۱)$$

$$\psi_o = \sum_{k=0}^{\infty} De_o (\psi_o)_k \quad (الف ۲)$$

جملات درجه دوم آن به شکل زیر به دست آمده است:

$$\psi_{i_2} = \bar{f}_{i_{21}}(r) \sin^2 \theta + \bar{f}_{i_{22}}(r) \sin(z)^2 \cos(z)^2 \quad (الف ۳)$$

$$\psi_{o_2} = \bar{f}_{o_{21}}(r) \sin^2 \theta + \bar{f}_{o_{22}}(r) \sin(z)^2 \cos(z)^2 \quad (الف ۴)$$

$$\bar{f}_{i_{21}}(r) = -\frac{1}{538137600(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)(K + 1)De_i} (Ai_{21}r^6 + Ai_{22}r^4 + Ai_{23}r^2) \quad (الف ۵)$$

$$\bar{f}_{i_{22}}(r) = \left(\frac{Ai_{24}}{53813760(K^2 + 2K + 1)(K + 1)^2 De_i} \right) (r^6 - r^4) \quad (الف ۶)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{o_{21}}(r) = & \left(\frac{1}{538137600(K + 1)(K^4 + 4K^3 + 6K^2 + 4K + 1)De_o} \right) (Ao_{21}r + Ao_{22} \frac{1}{r} \\ & + Ao_{23} \frac{1}{r^2} + Ao_{24} \frac{1}{r^3} + Ao_{25} \frac{1}{r^4} + Ao_{26} \frac{1}{r^5} + Ao_{27} \frac{1}{r^7} + Ao_{28} \frac{1}{r^9}) \end{aligned} \quad (الف ۷)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{o_{22}}(r) = & -\frac{1}{53813760De_o(K^3 + 3K^2 + 3K + 1)(K + 1)^2} (Ao_{29} \frac{1}{r} + Ao_{210} \frac{1}{r^2} + Ao_{211} \frac{1}{r^3} + Ao_{212} \frac{1}{r^4} \\ & + Ao_{213} \frac{1}{r^5} + Ao_{214} \frac{1}{r^7} + Ao_{215} \frac{1}{r^9}) \end{aligned} \quad (الف ۸)$$

که در آن $Ao_{27}, Ao_{28}, Ao_{29}, Ao_{210}, Ao_{21}, Ao_{22}, Ao_{23}, Ao_{25}, Ao_{24}, Ao_{26}$ و $Ai_{21}, Ai_{22}, Ai_{23}, Ai_{24}$

معادل است با: $Ao_{215}, Ao_{211}, Ao_{212}, Ao_{213}, Ao_{214}$

$$\begin{aligned}
 Ai_{21} = & 144288144K^4De_i\beta_i^2 + 23189166K^4De_o\beta_o\beta_i + 6733530K^4De_o\beta_o^2 - 409368960K^4De_i\beta_i \\
 & + 182630448K^3De_i\beta_i^2 - 119819700K^3De_o\beta_o\beta_i + 2286792K^3De_o\beta_o^2 + 63855792KDe_o\beta_o\beta_i \\
 & - 1484683200K^3De_i\beta_i - 1923600K^3De_o\beta_o - 67603536K^2De_i\beta_i^2 - 1997835840K^2De_i\beta_i \\
 & + 4907840K^2De_o\beta_o - 15135120K^2De_i\beta_i\beta_o - 86720634K^2De_o\beta_i\beta_o + 29958984K^2De_o\beta_o^2 \\
 & - 105945840KDe_i\beta_i^2 - 15135120KDe_i\beta_i\beta_o - 8168160De_o\beta - 8154432De_o\beta_o^2 - 403200K^4De_o\beta_o \\
 & - 13478400KDe_o\beta_o^2 - 1179097920KDe_i\beta_i - 1739920KDe_o\beta_o - 256576320De_i\beta_{io} + 7567560De_o\beta_o\beta_i \\
 Ai_{22} = & -10090080K^4De_i\beta_i^2 - 2886687K^4De_o\beta_o^2 + 490089600K^4De_i\beta_i + 6545280K^4De_o\beta_o \\
 & - 10594584K^3De_i\beta_i\beta_o + 35315280K^3De_o\beta_o\beta_i + 295788K^3De_o\beta_o^2 + 1983421440K^3De_i\beta_i \\
 & + 35962640K^3De_o\beta_o + 413693280K^2De_i\beta_i^2 + 115195080K^2De_i\beta_i\beta_o - 332311980K^2De_o\beta_o\beta_i \\
 & + 1656600K^2De_o\beta_o^2 + 3009726720K^2De_i\beta_i - 17691520K^2De_o\beta_o + 211891680KDe_i\beta_i^2 \\
 & + 125789664KDe_i\beta_i\beta_o - 384384000KDe_o\beta_o\beta_i + 88961808KDe_o\beta_o^2 + 2029547520KDe_i\beta_i \\
 & - 6268080KDe_o\beta_o - 15135120De_o\beta_o\beta_i + 25595856De_o\beta_o^2 + 513152640De_i\beta_i + 40840800De_o\beta_o \\
 & + 191711520K^3De_i\beta_i^2 - 1621620K^4De_o\beta_o\beta_i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Ai_{23} = & -134198064K^4De_i\beta_i^2 - 21567546K^4De_o\beta_o\beta_i - 3846843K^4De_o\beta_o^2 - 80720640K^4De_i\beta_i \\
 & - 6142080K^4De_o\beta_o - 374341968K^3De_i\beta_i^2 + 10594584K^3De_i\beta_i\beta_o + 84504420K^3De_o\beta_o\beta_i \\
 & - 2582580K^3De_o\beta_o^2 - 498738240K^3De_i\beta_i - 34039040K^3De_o\beta_o - 346089744K^2De_i\beta_i^2 \\
 & - 100059960K^2De_i\beta_i\beta_o + 419032614K^2De_o\beta_o\beta_i - 31615584K^2De_o\beta_o^2 - 1011890880K^2De_i\beta_i \\
 & - 110654544KDe_i\beta_i\beta_o + 320528208KDe_o\beta_o\beta_i - 75483408KDe_o\beta_o^2 - 850449600KDe_i\beta_i \\
 & + 8008000KDe_o\beta_o + 7567560De_o\beta_o\beta_i - 17441424De_o\beta_o^2 - 256576320De_i\beta_i - 32672640De_o\beta_o \\
 & + 12783680K^2De_o\beta_o - 105945840KDe_i\beta_i^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ai_{24} = & 125116992K^4De_i\beta_i^2 + 20108088K^4De_o\beta_o\beta_i + 3366765K^4De_o\beta_o^2 - 76396320K^4De_i\beta_i \\
& + 250233984K^3De_i\beta_i^2 - 58017960K^3De_o\beta_o\beta_i - 7567560K^2De_i\beta_i\beta_o + 125116992K^2De_i\beta_i^2 \\
& + 1143396K^3De_o\beta_o^2 - 229188960K^3De_i\beta_i - 961800K^3De_o\beta_o - 201600K^4De_o\beta_o - 4084080De_o\beta_o \\
& - 68900832K^2De_o\beta_o\beta_i + 14979492K^2De_o\beta_o^2 - 229188960K^2De_i\beta_i + 2453920K^2De_o\beta_o \\
& - 7567560KDe_i\beta_i\beta_o + 9225216KDe_o\beta_o\beta_i - 6739200KDe_o\beta_o^2 - 76396320KDe_i\beta_i - 869960KDe_o\beta_o \\
& - 4077216De_o\beta_o^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{21} = & -2513511K^5De_o\beta_o^2 + 2298240K^5De_o\beta_o - 28252224K^4De_i\beta_i^2 - 31783752K^4De_i\beta_i\beta_o - 4540536K^4De_o\beta_o\beta_i \\
& - 56504448K^3De_i\beta_i^2 - 144792648K^3De_i\beta_i\beta_o + 88288200K^3De_o\beta_o\beta_i + 9153144K^3De_o\beta_o^2 - 9999990K^4De_o\beta_o^2 \\
& + 527567040K^3De_i\beta_i - 92863680K^3De_o\beta_o - 28252224K^2De_i\beta_i^2 - 315483168K^2De_i\beta_i\beta_o + 12257280K^4De_o\beta_o \\
& + 367951584K^2De_o\beta_o\beta_i + 38198160K^2De_o\beta_o^2 + 527567040K^2De_i\beta_i - 198918720K^2De_o\beta_o + 175855680K^4De_i\beta_i \\
& - 202474272KDe_i\beta_i\beta_o + 275122848KDe_o\beta_o\beta_i - 5621616KDe_o\beta_o^2 + 175855680KDe_i\beta_i - 80720640De_o\beta_o \\
& - 176816640KDe_o\beta_o - 2018016De_o\beta_o^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{22} = & 288284787K^5De_o\beta_o^2 + 63409920K^5De_o\beta_o - 221981760K^4De_i\beta_i^2 + 434377944K^4De_i\beta_i\beta_o + 153753600De_o\beta_o \\
& - 35675640K^4De_o\beta_o\beta_i + 1307766552K^4De_o\beta_o^2 - 23063040K^4De_i\beta_i + 295375360K^4De_o\beta_o + 111745920De_o\beta_o^2 \\
& - 443963520K^3De_i\beta_i^2 + 1300779480K^3De_i\beta_i\beta_o + 27747720K^3De_o\beta_o\beta_i + 2125334760K^3De_o\beta_o^2 + 502902400KDe_o\beta_o \\
& - 69189120K^3De_i\beta_i + 706737920K^3De_o\beta_o - 221981760K^2De_i\beta_i^2 + 1434809376K^2De_i\beta_i\beta_o - 23063040KDe_i\beta_i \\
& - 230149920K^2De_o\beta_o\beta_i + 1555973952K^2De_o\beta_o^2 - 69189120K^2De_i\beta_i + 823921280K^2De_o\beta_o + 626758704KDe_o\beta_o^2 \\
& + 568407840KDe_i\beta_i\beta_o - 293573280KDe_o\beta_o\beta_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{23} = & -1787836050K^5De_o\beta_o^2 + 529729200K^5De_o\beta_o - 953512560K^4De_i\beta_i\beta_o - 7645127490K^4De_o\beta_o + 235435200De_o\beta_o \\
& + 2295493200K^4De_o\beta_o - 2542700160K^3De_i\beta_i\beta_o - 12441068640K^3De_o\beta_o^2 + 3943539600K^3De_o\beta_o - 635675040De_o\beta_o^2 \\
& - 2224862640K^2De_i\beta_i\beta_o - 9852963120K^2De_o\beta_o^2 + 3354951600K^2De_o\beta_o - 635675040KDe_i\beta_i\beta_o + 1412611200KDe_o\beta_o \\
& - 3904860960KDe_o\beta_o^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{24} = & -458377920\beta_iDe_iK^2 - 2298085440\beta_oK^4De_o + 250233984K^2\beta_i^2De_i + 6872636376\beta_o^2K^3De_o \\
& + 500467968K^3\beta_i^2De_i + 250233984K^4\beta_i^2De_i - 152792640K^4De_i\beta_i - 458377920K^3De_i\beta_i - 308468160De_o\beta_o \\
& + 18450432\beta_iDe_o\beta_oK - 137801664\beta_iDe_o\beta_oK^2 + 536215680\beta_o^2\ln(r)De_o - 5751345600\beta_o\ln(r)K^3De_o \\
& + 1928214288\beta_oK^3De_i\beta_i - 4506902400\beta_o\ln(r)K^2De_o - 3632428800\beta_o\ln(r)K^4De_o + 889238574\beta_o^2K^5De_o \\
& - 498980160\beta_oK^5De_o + 391412736De_o\beta_o^2 + 1552863312\beta_oDe_iK^2\beta_i - 1701641760\beta_oKDe_o + 5673993408\beta_o^2K^2De_o \\
& + 2333290752\beta_o^2KDe_o - 4199649440\beta_oK^3De_o - 3793717760\beta_oK^2De_o - 116035920\beta_oDe_oK^3\beta_i - 269068800\beta_o\ln(r)De_o \\
& + 3485401920\beta_o^2\ln(r)KDe_o + 7238911680\beta_o^2\ln(r)K^4De_o - 1748947200\beta_o\ln(r)KDe_o + 11461610160\beta_o^2\ln(r)K^3De_o \\
& + 40216176\beta_oDe_oK^4\beta_i + 387459072\beta_oDe_iK\beta_i + 1809727920K^5\ln(r)De_o\beta_o^2 - 908107200K^5\ln(r)De_o\beta_o \\
& + 762810048\beta_oK^4De_i\beta_i + 4069489248\beta_o^2K^4De_o - 152792640\beta_iKDe_i + 8981612640\beta_o^2\ln(r)K^2De_o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{25} = & 643242600K^5De_o\beta_o^2 - 25225200K^5De_o\beta_o - 211891680K^4De_i\beta_i\beta_o + 2381258880K^4De_o\beta_o^2 \\
& -92492400K^4De_o\beta_o - 541500960K^3De_i\beta_i\beta_o + 3564320760K^3De_o\beta_o^2 - 126126000K^3De_o\beta_o \\
& -447326880K^2De_i\beta_i\beta_o + 2657054400K^2De_o\beta_o^2 - 75675600K^2De_o\beta_o - 117717600KDe_i\beta_i\beta_o \\
& +965284320KDe_o\beta_o^2 - 16816800KDe_o\beta_o + 134534400De_o\beta_o^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{26} = & -33415200K^5De_o\beta_o^2 - 45536400K^5De_o\beta_o - 111384000K^4De_o\beta_o^2 - 151788000K^4De_o\beta_o - 20238400KDe_o\beta_o \\
& -137373600K^3De_o\beta_o^2 - 187205200K^3De_o\beta_o - 74256000K^2De_o\beta_o^2 - 101192000K^2De_o\beta_o - 14851200KDe_o\beta_o^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{27} = & 2998800K^5De_o\beta_o^2 - 14053200K^5De_o\beta_o + 1999200K^2De_o\beta_o^2 - 9368800K^2De_o\beta_o + 7996800K^4De_o\beta_o^2 \\
& -37475200K^4De_o\beta_o + 6997200K^3De_o\beta_o^2 - 32790800K^3De_o\beta_o
\end{aligned}$$

$$Ao_{28} = -11642400K^5De_o\beta_o - 23284800K^4De_o\beta_o - 11642400K^3De_o\beta_o$$

$$\begin{aligned}
Ao_{29} = & 72011835K^5De_o\beta_o^2 + 25595640K^5De_o\beta_o - 125116992K^4De_i\beta_i^2 + 127135008K^4De_i\beta_i\beta_o + 25945920De_o\beta_o \\
& -20108088K^4De_o\beta_o\beta_i + 326922642K^4De_o\beta_o^2 + 76396320K^4De_i\beta_i + 119177520K^4De_o\beta_o + 25410528De_o\beta_o^2 \\
& -250233984K^3De_i\beta_i^2 + 356684328K^3De_i\beta_i\beta_o + 58017960K^3De_o\beta_o\beta_i + 524625876K^3De_o\beta_o^2 + 112752640KDe_o\beta_o \\
& +229188960K^3De_i\beta_i + 230285720K^3De_o\beta_o - 125116992K^2De_i\beta_i^2 + 339531192K^2De_i\beta_i\beta_o + 76396320KDe_i\beta_i \\
& +68900832K^2De_o\beta_o\beta_i + 364341744K^2De_o\beta_o^2 + 229188960K^2De_i\beta_i + 223510560K^2De_o\beta_o + 139902048KDe_o\beta_o^2 \\
& +109981872KDe_i\beta_i\beta_o - 9225216KDe_o\beta_o\beta_i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{210} = & -715134420K^5De_o\beta_o^2 + 204324120K^5De_o\beta_o - 381405024K^4De_i\beta_i\beta_o - 3058050996K^4De_o\beta_o^2 \\
& +885404520K^4De_o\beta_o - 1017080064K^3De_i\beta_i\beta_o - 4976427456K^3De_o\beta_o^2 + 1521079560K^3De_o\beta_o \\
& -889945056K^2De_i\beta_i\beta_o - 3941185248K^2De_o\beta_o^2 + 1294052760K^2De_o\beta_o - 254270016KDe_i\beta_i\beta_o \\
& -1561944384KDe_o\beta_o^2 + 544864320KDe_o\beta_o - 254270016De_o\beta_o^2 + 90810720De_o\beta_o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{211} = & -643097280\beta_oK^4De_o - 229188960\beta_iK^2De_i + 125116992K^4\beta_i^2De_i + 250233984K^3\beta_i^2De_i + 125116992K^2\beta_i^2De_i \\
& -76396320\beta_iKDe_i - 76396320K^4De_i\beta_i - 229188960K^3De_i\beta_i + 268107840\beta_o^2*\ln(r)De_o + 2937183552\beta_o^2K^3De_o \\
& +365808555\beta_o^2K^5De_o + 4490806320\beta_o^2\ln(r)K^2De_o + 1742700960\beta_o^2\ln(r)KDe_o + 3619455840\beta_o^2\ln(r)K^4De_o \\
& -58017960\beta_oDe_oK^3\beta_i + 776431656\beta_oDe_iK^2\beta_i - 2253451200\beta_o\ln(r)K^2De_o - 1816214400\beta_o\ln(r)K^4De_o \\
& +9225216\beta_iDe_o\beta_oK - 68900832\beta_iDe_o\beta_oK^2 - 2875672800\beta_o\ln(r)K^3De_o + 904863960K^5\ln(r)De_o\beta_o^2 - 123003720\beta_oK^5De_o \\
& +193729536\beta_oDe_iK\beta_i + 5730805080\beta_o^2\ln(r)K^3De_o + 20108088\beta_oDe_oK^4\beta_i + 172355040De_o\beta_o^2 - 874473600\beta_o\ln(r)KDe_o \\
& -116756640De_o\beta_o + 381405024\beta_oK^4De_i\beta_i - 454053600K^5\ln(r)De_o\beta_o - 134534400\beta_o\ln(r)De_o + 964107144\beta_oK^3De_i\beta_i \\
& -1298744440\beta_oK^3De_o + 2445861960\beta_o^2K^2De_o + 1719501696\beta_o^2K^4De_o + 1014861744\beta_o^2KDe_o - 1269111760\beta_oK^2De_o \\
& -607217520\beta_oKDe_o
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Ao_{212} = & 198648450K^5De_o\beta_o^2 + 7567560K^5De_o\beta_o - 127135008K^4De_i\beta_i\beta_o + 741999258K^4De_o\beta_o^2 + 56504448De_o\beta_o^2 \\
& +27747720K^4De_o\beta_o - 303711408K^3De_i\beta_i\beta_o + 1171458288K^3De_o\beta_o^2 + 37837800K^3De_o\beta_o + 5045040KDe_o\beta_o \\
& -226017792K^2De_i\beta_i\beta_o + 938881944K^2De_o\beta_o^2 + 22702680K^2De_o\beta_o - 49441392KDe_i\beta_i\beta_o + 367278912KDe_o\beta_o^2
\end{aligned}$$

$$Ao_{213} = 89778780K^5De_o\beta_o^2 - 124750080K^5De_o\beta_o + 299262600K^4De_o\beta_o^2 - 415833600K^4De_o\beta_o + 369090540K^3De_o\beta_o^2 - 512861440K^3De_o\beta_o + 199508400K^2De_o\beta_o^2 - 277222400K^2De_o\beta_o + 39901680KDe_o\beta_o^2 - 55444480KDe_o\beta_o$$

$$Ao_{214} = De_o\beta_o(-11113200K^5\beta_o + 9102240K^5 - 7408800K^2\beta_o + 6068160K^2 - 29635200K^4\beta_o + 24272640K^4 - 25930800K^3\beta_o + 21238560K^3)$$

$$Ao_{215} = De_o\beta_o(1164240K^5 + 2328480K^4 + 1164240K^3)$$

- [١] J. Hadamard, Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide C. R. Acad. Sci. Paris ١٥٢, ١٧٣٥-١٧٣٨ (١٩١١).
- [٢] W. Rybczynski, Bull. Über die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium, Bull. Acad. Sci. Cracovie ١, ٤٠-٤٦ (١٩١١).
- [٣] T.D. Taylor, A. Acrivos, On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number, J. Fluid Mech. ١٨, ٤٦٦-٤٧٦ (١٩٦٤).
- [٤] G.I. Taylor, The formation of emulsions in definable fields of flow, Proc. R. Soc. London. A ١٤٦, ٥٠١-٥٢٣ (١٩٣٤).
- [٥] H.A. Stone, Dynamics of drop deformation and breakup in viscous fluids, Annu. Rev. Fluid Mech. ٢٦, ٦٥-١٠٢ (١٩٩٤).
- [٦] C.J. Koh, & L.G. Leal, The stability of drop shapes for translation at zero Reynolds number through a quiescent fluid, phys. Fluids A ١(٨) ١٣٠٩-١٣١٣, (١٩٨٩).
- [٧] A. Smolianski, A. Haario and P. Luukka, Numerical bubble dynamics ,Computer Aided Chem. Eng. ١٤, ٩٤١-٩٤٦ (٢٠٠٣).
- [٨] M.C. Sostarecz , A. Belmonte, , Motion and shape of a viscoelastic drop falling through a viscose fluid, J. Fluid Mech. ٤٩٧, ٢٣٥-٢٥٢ (٢٠٠٣).
- [٩] C. Pozrikidis, Numerical studies of singularity formation at free surface and fluid interface in two dimensional stokes flow, J. Fluid Mech. ٣٣١ ١٤٥-١٦٧ (١٩٩٧).
- [١٠] D.D. Joseph, J. Nelson, M. Renardy, Y. Renardy, Two dimensional cusped interfaces, J. Fluid Mech. ٢٢٣ ٣٨٣-٤٠٩ (١٩٩١)
- [١١] D.D. Joseph, Understanding cusped interfaces, J. Non-Newtonian Fluid Mech. ٤٤, ١٢٧-١٤٨ (١٩٩٢)
- [١٢] Y.J. Liu, T.Y. Liao, D.D. Joseph, A two-dimensional cusp at the trailing edge of an air bubble rising in a viscoelastic liquid, J. Fluid Mech. ٣٠٤ ٣٢١-٣٤٢ (١٩٩٥).

- [۱۳] M. Coutanceeau, M. Hajjann, Viscoelastic effect on the behaviour of an air bubble rising axially in a tube Mechanics and Physics of Bubbles in Liquids ۱۹۹-۲۰۷ (۱۹۸۲).
- [۱۴] E. Zana, L.G. Leal, "The dynamics and dissolution of gas bubbles in a viscoelastic fluid", Int. J. Multiphase Flow ۴, ۲۳۷-۲۶۲ (۱۹۷۸)
- [۱۵] D.S. Noh, I.S. Kang, L.G. Leal, Numerical Solutions for the Deformation of a Bubble Rising in Dilute Polymeric Fluids, Phys. Fluids ۵(۶) ۱۳۱۵-۱۳۳۲ (۱۹۹۳)
- [۱۶] E.J. Hinch, A. Acrivos, Long slender drops in a simple shear flow J. Fluid Mech. ۹۸, ۳۰۵-۳۲۸ (۱۹۸۰).
- [۱۷] E.J. Hinch, J. The evolution of slender inviscid drops in an axisymmetric straining flow J. Fluid Mech. ۱۰۱, ۵۴۵-۵۵۳ (۱۹۸۰)
- [۱۸] J.D. Sherwood, Spindle-shaped drops in a viscous extensional flow. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* ۹۰ ۵۲۹-۵۳۶ (۱۹۸۱).
- [۱۹] D.V. Khakhar, J.M. Ottino, Deformation and breakup of slender drops in linear flows, J. Fluid Mech. ۱۶۶ ۲۶۵- ۲۸۵ (۱۹۸۶)
- [۲۰] B.J. Bentley, L.G. Leal, An experimental investigation of drop deformation and breakup in steady, two-dimensional linear flows J. Fluid Mech. ۱۶۷ ۲۴۱- ۲۸۳ (۱۹۸۶).
- [۲۱] S. Mukherjee, K. Sarkar, Viscoelastic drop falling through a viscous medium, Phys. Fluids ۲۳ (۱), ۰۱۳۱۰۱ (۲۰۱۱).
- [۲۲] N. Kishore, R.P. Chhabra, V. Eswaran, Effect of dispersed phase rheology on the drag of single and of ensembles of fluid spheres at moderate Reynolds numbers, Chem. Eng. J. ۱۴۱, ۳۸۷-۳۹۲ (۲۰۰۸).
- [۲۳] R. You, A. Borhan, H. Haj-Hariri, A finite volume formulation for simulating drop motion in a viscoelastic twophase system in a viscoelastic two-phase system, J. Non-Newtonian Fluid Mech. ۱۵۳, ۱۰۹-۱۲۹ (۲۰۰۸).
- [۲۴] A. Acharya, R.A. Mashelkar, Motion of liquid drops in rheologically complex fluids Can. J. Chem. Eng. ۵۶ (۱) ۱۹-۲۵ (۱۹۷۸).
- [۲۵] A. Acharya, R.A. Mashelkar, J. Ulbrecht, Mechanics of bubble motion and deformation in non-newtonian media Chem. Eng. Sci. ۳۲(۸) ۸۶۳-۸۷۲ (۱۹۷۸).

[۲۶] V. Mohan, R. Nagarajan, D. Venkateswarlu, Fall of drops in non-Newtonian media, Can J. Chem. Eng. ۵۰ (۳۷) (۱۹۷۲).

[۲۷] M.G. Wagner, J.C. Slattery, Slow flow of a non-Newtonian fluids past a droplet, AIChE J. ۱۷, ۱۱۹۸-۱۲۰۷ (۱۹۷۱).

[۲۸] L. S. Dairenieh & A. J. McHugh, Viscoelastic fluid flow past a submerged spheroidal body.

J. Non-Newtonian Fluid Mech. ۱۹, ۸۱-۱۱۱ (۱۹۸۵).

[۲۹] بهروز زارع و امرزانی بررسی تحلیلی و آزمایشگاهی سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در میان یک فاز مایع دانشگاه صنعتی شاهرود ۱۳۹۱.

[۳۰] G.H. McKinley, Dimensionless groups for understanding free surface flows of complex fluids, Sco. Rheol. Bulletin ۷۴(۲), ۶-۹ (۲۰۰۵).

Abstract

Investigation on two phase flow problem and particularly motion of droplets descending in another media is of great importance in medical fields (particularly production of penicillin), sedimentation reservoirs, water treatment industries (in sedimentation process of solids in water), heat exchangers and other problems in industry.

In the present study, an analytical solution based on the perturbation method is obtained to simulate the creeping flow and motion of a viscoelastic drop descending in another immiscible viscoelastic quiescent media. In different industrial application any of these media (interior or exterior fluids) can show non-Newtonian behaviors. For the sake of this reason a rigorous investigation on the scenario in which both fluids are non-Newtonian is carried out.

The quasi-linear and non-linear Oldroyd-B and Giesekus constitutive equations are implemented for both interior and exterior phases due to their high suitability in simulation of polymeric solutions behaviors. The perturbation parameters are considered to be Deborah numbers defined based on the corresponding relaxation times of drop and exterior fluids and capillary number to linearize the governing equations. To check the accuracy of presented solution an experimental part is also included to the current version of study. In the experimental part a solution of Polyacrylamide in water/glycerin is implemented as the interior viscoelastic phase. In previous studies Xanthan gum were used in most of works that due to its rigid molecular structure it was not to be simulated perfectly using the presented simple constitutive equations. Silicon oil is used as the exterior media which is a water repellence fluid. Also due to its high viscosity, it is a great choice in creep simulation scenario. In contrast to the generally spherical shape of Newtonian drop creeping in viscous media, it is shown that the effect of elasticity in this scenario can even feature prolate and oblate shapes. The results have shown suitable agreements with previously reported experimental results.

The motion of the droplet in surrounding media is considered to be creeping. Effects of different parameters including Deborah numbers, elasto-capillary number, viscosity ratios of drop and exterior media and, viscosity ratio between the drop and external flows are

rigorously investigated on the shape, motion, stream function and drag force of drop falling into quiescent media.

Keywords: Viscoelastic drops; Viscoelastic media; Creeping motion; Oldroyd-B model; Deborah number; Elasto-capillary number; Perturbation method.



University of Shahrood

Faculty Mechanical Engineering

**An Analytical Study on Motion and Shape of Creeping Viscoelastic Drops
Falling through Viscoelastic Media**

Mahdi Davoodi

Supervisor: Dr M. Norouzi

Winter ۲۰۱۵