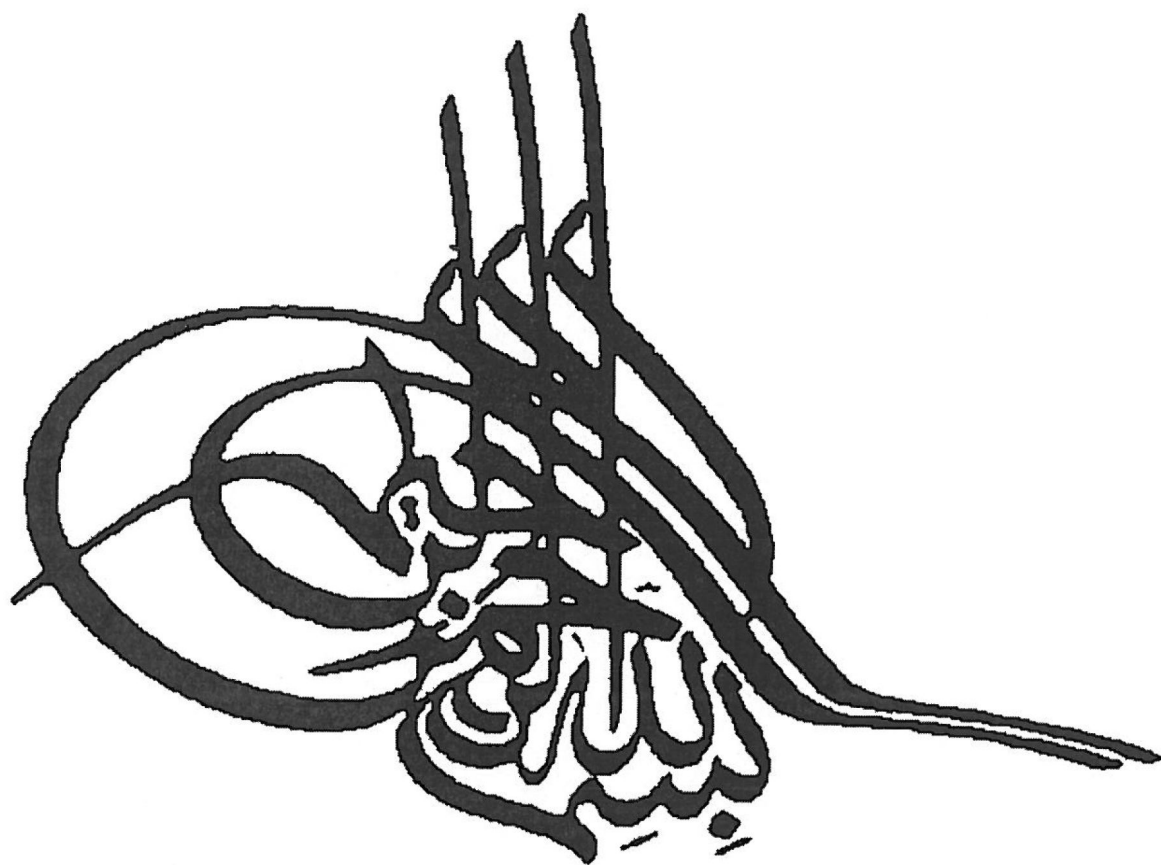






دانشکده مهندسی مکانیک

گروه : سیالات

پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه خنک کاری مغز به منظور کاهش آسیب های وارده با استفاده از روش انتقال
حرارت معکوس

وحید عامریان

اساتید راهنما :

دکتر پوریا اکبرزاده

دکتر علی عباس نژاد

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ۹۴



مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد
با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان
نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای وحید عامریان به شماره دانشجویش ۹۱۰۲۸۸۳ رشته مکانیک گرایش
تبدیل انرژی تحت عنوان مطالعه خنک کاری منفرجه به منظور کاهش آسیب های وارده با استفاده از
روش انتقال حرارت معکوس که در تاریخ ۱۳۹۴/۳/۶ با حضور هیأت داوران در دانشگاه شاهرود
برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: بسیار خوب امتیاز ۱۸/۴۸) ☒ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۳- بسیار خوب (۱۹-۲۰)

۱- عالی (۲۰-۱۹)

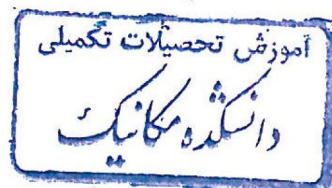
۵- قابل قبول (۹-۱۰)

۳- خوب (۱۷-۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استادیار	پوریا اکبرزاده	استادیار	
۲- استادیار	عزیز عباس نژاد	استادیار	
۳- استادیار	محمد محمدیون	استادیار	
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	محمد ضامن	استادیار	
۵- استاد منتحن	محمد محسن شاهمردان	دانشیار	
۶- استاد منتحن	مهدی کاجانی	استادیار	

رئیس دانشکده:



تعهد نامه

اینجانب وحید عامریان دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکانیک-تبدیل انرژی دانشکده مکانیک دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه خنک کاری مغز به منظور کاهش آسیب های وارده با استفاده از روش انتقال حرارت معکوس تحت راهنمایی دکتر عباس نژاد متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « Shahrood University » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ
امضای دانشجو

※ متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد .

تقدیر و تشکر

با تشکر از اساتید بزرگوارم جناب آقایان دکتر اکبرزاده، عباس‌نژاد و محمدیون که شایسته هر نوع سپاس، تجلیل و تکریم هستند. همچنین پدر و مادر عزیزم که در تمامی مراحل پشتیبان من بودند.

چکیده

در تحقیق حاضر مسئله خنک کاری مغز به روش انتقال حرارت معکوس به منظور کاهش آسیب های احتمالی مورد بررسی قرار گرفته است. کاهش دمای مغزفواید بسیاری در مقابل آسیب های تراماتیک و ایشکمیک مغز دارد و می تواند بیمار را مدت بیشتری در وضعیت حیاتی نگه دارد. هندسه مغز به عنوان یک فرض ساده کننده، به صورت یک نیمکره متقارن در نظر گرفته شده است. مسئله معکوس با روش گرادیان مزدوج حل شده است. اساس روش بر مبنای مینیمم سازی تابع هدفی است که به صورت مجموع مربعات تفاضل دماهای محاسبه شده و دماهای اندازه گیری شده از آزمایش بر روی مرز خارجی مغز تعریف می گردد. با حدس یک شار اولیه مسئله را حل کرده، توزیع دما و شار حرارتی مورد نظر به منظور کاهش دمای مرکز مغز به میزان ۵ درجه (رسیدن به دمای ۳۳ درجه)، به دست آمده اند. توابع محاسبه شده با استفاده از روش معکوس با توابع دقیق مقایسه شده اند.

کلید واژه : خنک کاری مغز - انتقال حرارت معکوس - روش گرادیان مزدوج - دستگاه مختصات عمومی

فهرست علائم و اختصارات:

C	گرمای ویژه، J/kg
d	جهت گام بهینه
e_{RMS}	خطای RMS
k	هدایت گرمایی بافت، $W/m\ ^\circ C$
Ns	تعداد سنسورها
n	بردار عمود بر سطح
q	شار حرارتی W/m^2
q'''_m	نرخ تولید گرمای متابولیک W/m^3
R	شعاع سر m
S	تابع هدف
T	دما K
$T_{a.}$	دمای مرکزی بدن K
t	زمان s
$\dot{W}_b$	نرخ خون تزریق وریدی $kg/(mas)$
Y	دمای مورد نظر (اندازه گیری شده)

Greek letters

a	نفوذپذیری گرمایی m^2/s
β	اندازه گام حل
γ	ضریب الحاقی
ε	پارامتر توقف
θ	زمان بی بعد
λ	متغیر مسئله حساسیت
ρ	چگالی بافت زنده kg/m^3
b	خون
r^*	مشتق نسبت به r^*
z^*	مشتق نسبت به z^*
η	مشتق نسبت به η
ξ	مشتق نسبت به ξ
Superscripts	
k	تعداد تکرارها

فهرست مطالب

عنوان	شماره صفحه
فصل اول: مقدمه	۱
۱-۱ مقدمه:	۲
۲-۱ تاریخچه:	۷
فصل دوم: بررسی روش‌های بهینه‌سازی توابع	۱۵
۱-۲ مسائل بهینه‌سازی	۱۷
۲-۲ دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی	۱۸
۳-۲ رامحل کلی	۱۹
۴-۲ نرخ همگرانی	۲۰
۱-۵-۲ محاسبه گرادیان	۲۳
۲-۵-۲ تعیین طول گام بهینه در جهت کاهش تابع	۲۴
۶-۲ معیار همگرانی	۲۵
۷-۲ روش کاهش سریع	۲۵
۸-۲ مقدمه‌ای بر روش انتقال حرارت معکوس	۲۶
۱-۸-۲ مقدمه	۲۶
۲-۸-۲ مشکلات حل مسائل انتقال حرارت معکوس	۲۸
۳-۸-۲ ارزیابی روش‌های مسائل معکوس حرارتی	۳۲
۴-۸-۲ تکنیک‌های حل مسائل انتقال حرارت معکوس	۳۲
۵-۸-۲ تکنیک I	۳۴
۱-۵-۸-۲ شرح تکنیک	۳۴
۲-۵-۸-۲ روش‌های محاسبه ضرایب حساسیت	۳۷
۶-۸-۲ تکنیک II	۳۸
۱-۶-۸-۲ متد گرادیان مزدوج	۳۸
۲-۶-۸-۲ الگوریتم محاسباتی تکنیک دوم	۴۳
۳-۶-۸-۲ اندازه‌گیری پیوسته	۴۴
۷-۸-۲ تکنیک III	۴۵
۱-۷-۸-۲ روش گرادیان مزدوج با مسئله اضافی جهت تخمین پارامترها	۴۵
۲-۷-۸-۲ الگوریتم محاسباتی تکنیک سوم	۴۸
۸-۸-۲ تکنیک IV	۴۹

۴۹	۱-۸-۸-۲ گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای تخمین توابع
۵۱	۲-۸-۸-۲ الگوریتم محاسباتی تکنیک چهارم
۵۳	فصل سوم: مدل ریاضی
۵۵	۱-۳ مقدمه
۵۵	۲-۳ مدل های هدایت گرمایی
۵۵	۱-۲-۳ مدل پنز
۵۹	۲-۲-۳ مدل چن هلمز [۲۶]
۶۱	فصل چهارم: تخمین شار حرارتی گذرا در حالت متقارن محوری
۶۲	۲-۴ محاسبه توزیع دما در حالت گذرا
	در این بخش به بررسی روش حل معادلات انتقال حرارت متقارن محوری در حالت گذرا پرداخته میشود.
۶۲	۱-۲-۴ معادله حاکم
۶۶	۴-۲-۴ تبدیل معادلات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی
۶۸	۵-۲-۴ گسسته سازی معادلات
۷۳	۳-۴ مسئله معکوس
۷۴	۱-۳-۴ مسئله حساسیت
۷۴	۲-۳-۴ مسئله الحاقی
۷۵	۳-۳-۴ معادله گرادیان
۷۵	۴-۳-۴ روش تکرار
۷۶	۱-۵-۴ معادله حاکم
۷۸	۳-۵-۴ مسئله معکوس
۷۸	۱-۳-۵-۴ مسئله حساسیت
۷۹	۲-۳-۵-۴ مسئله الحاقی
۸۱	فصل پنجم: نتایج
۹۲	نتیجه گیری:
۹۳	پیوست الف
۹۴	پیوست ب
۹۴	اعتبارسنجی حل مستقیم
۱۱۳	مراجع:

فهرست جداول

جدول ۱-۲- دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی ۱۸

جدول ۱-۴. خواص لایه های استفاده شده ۷۹

جدول ۱-۵. خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای شار حرارتی ۸۸

فهرست اشکال

شکل ۱-۲- نمودار روند بهینه‌سازی تابع هدف ۱۹

شکل ۲-۲- جهت‌های سریع‌ترین افزایش ۲۱

شکل ۱-۳-۱. امان در نظر گرفته شده برای به دست آوردن معادله انتقال حرارت زیستی پنز ۵۶

شکل ۱-۴- نمایش فیزیک مسئله ۶۲

شکل ۲-۴- نمایش صفحه مختصات فیزیکی و محاسباتی ۶۴

شکل ۳-۴- نمایش گره مرکزی و هشت گره همسایه آن ۷۰

شکل ۴-۴- نمایش صفحه محاسباتی ۷۱

شکل ۵-۴- نمایش شرایط مرزی در صفحه فیزیکی ۷۱

شکل ۶-۴- نمایش مساله سه لایه در صفحه محاسباتی ۷۸

شکل ۷-۴- نمایش هندسه مساله متشکل از سه لایه مختلف بافت مغز، استخوان و پوست

سر ۸۰

شکل ۱-۵- شبکه مورد استفاده در حل مسئله و موقعیت سنسورها ۸۳

شکل ۲-۵- مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع خطی

می باشد ۸۵

شکل ۳-۵- مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع پله می -

باشد ۸۵

شکل ۴-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابعی ترکیبی

از $\sin$ و $\cos$ می باشد ۸۶

شکل ۵-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی

دقیق که به صورت تابع خطی می باشد ۸۶

شکل ۶-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی

دقیق که به صورت تابع پله ای می باشد ۸۷

شکل ۷-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی

دقیق که به صورت تابعی ترکیبی از $\sin$ و $\cos$ می باشد ۸۷

شکل ۸-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع خطی

می باشد ۸۹

شکل ۹-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع پله می -

باشد ۸۹

شکل ۱۰-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع

سینوس و کسینوس می باشد ۹۰

شکل ۱۱-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی

دقیق که به صورت تابع خطی می باشد ۹۰

شکل ۱۲-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی

دقیق که به صورت تابع پله می باشد ۹۱

شکل ۵-۱۳. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی

دقیق که به صورت تابع سینوس-کسینوس می باشد ۹۱

شکل ۵-۱۴. مقایسه دمای محاسبه شده و دمای دقیق. ۹۲

شکل ۵-۱۵. شار محاسبه شده ۹۲

ضمائم:

شکل ۱- هندسه مستطیلی با شرایط مرزی دما ، عایق و شار حرارت ۹۶

شکل ۲- مقایسه منحنی های توزیع دمای گره ۱ پس از ۱۲ ثانیه ۹۷

شکل ۳- مقایسه منحنی های توزیع دمای گره ۲ پس از ۱۲ ثانیه ۹۸

شکل ۴- مقایسه منحنی های توزیع دمای گره ۴ پس از ۱۲ ثانیه ۹۸

شکل ۵- مقایسه منحنی های توزیع دمای گره ۵ پس از ۱۲ ثانیه ۹۹

شکل ۶- مقایسه منحنی های توزیع دمای گره ۷ پس از ۱۲ ثانیه ۹۹

شکل ۷- مقایسه منحنی های توزیع دمای گره ۸ پس از ۱۲ ثانیه ۱۰۰

شکل ۸- هندسه منحنی با شرایط مرزی عایق و شار حرارتی ۱۰۱

شکل ۹- مقایسه منحنی توزیع دما برای گره میانی پس از ۶۰ ثانیه ۱۰۱

شکل ۱۰- نمایش هندسه منحنی متشکل از سه لایه مختلف آزیست ، فولاد و آلومینیم ۱۰۲

شکل ۱۱- نمایش کانتورهای توزیع دمای کد حاضر برای مسئله چندلایه ۱۰۳

شکل ۱۲- نمایش کانتورهای توزیع دمای FLUENT برای مسئله چندلایه ۱۰۳

شکل ۱۳- نمایش شبکه ۳۰*۳۰ ۱۰۴

- شکل ۱۴- نمایش شبکه 40×40 ۱۰۵
- شکل ۱۵- نمایش شبکه 50×50 ۱۰۵
- شکل ۱۶- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 30×30 در مسئله یک لایه ۱۰۶
- شکل ۱۷- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 30×30 در مسئله دولایه ۱۰۶
- شکل ۱۸- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 30×30 در مسئله سه لایه ۱۰۷
- شکل ۱۹- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 40×40 در مسئله یک لایه ۱۰۷
- شکل ۲۰- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 40×40 در مسئله دولایه ۱۰۸
- شکل ۲۱- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 40×40 در مسئله سه لایه ۱۰۸
- شکل ۲۲- نمایش منحنی‌های توزیع دمای گره میانی در مسئله یک لایه ۱۰۹
- شکل ۲۳- نمایش منحنی‌های توزیع دمای گره میانی در مسئله دولایه ۱۱۰
- شکل ۲۴- نمایش منحنی‌های توزیع دمای گره میانی در مسئله سه لایه ۱۱۰
- شکل ۲۵- نمایش کانتورهای توزیع دمای کد حاضر برای هندسه نامنظم با تقارن محوری ۱۱۱
- شکل ۲۶- نمایش کانتورهای توزیع دمای FLUENT برای هندسه نامنظم با تقارن محوری ۱۱۲
- شکل ۲۷- نمایش کانتورهای توزیع دمای کد حاضر ۱۱۳
- شکل ۲۸- نمایش منحنی‌های توزیع دمای مرکز کره ۱۱۳
- شکل ۲۹- نمایش منحنی‌های توزیع دمای نقطه‌ای که در موقعیت $r = 5 \text{ cm}$ قرار گرفته ۱۱۴
- شکل ۳۰- نمایش منحنی‌های توزیع دمای نقطه‌ای که بر روی سطح کره قرار گرفته ۱۱۴
- است ۱۱۴

فصل اول: مقدمه

۱-۱ مقدمه:

توسعه کامپیوتر و ابزار محاسباتی، رشد روش‌های عددی را برای مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی تسریع کرده است. برای مدل‌سازی یک پدیده فیزیکی به یک مدل ریاضی و یک روش حل نیاز است. مدل‌سازی مسائل هدایت حرارتی نیز به‌مانند دیگر پدیده‌های فیزیکی با حل معادلات حاکم امکان‌پذیر است. برای حل مسائل هدایت حرارتی به اطلاعات زیر نیاز داریم:

➤ هندسه ناحیه حل

➤ شرایط اولیه

➤ شرایط مرزی (دما یا شار حرارتی سطحی)

➤ خواص ترموفیزیکی

➤ محل و قدرت منبع حرارتی در صورتی که وجود داشته باشند.

پس از حل معادلات حاکم توزیع دما در داخل ناحیه حل به دست می‌آید. این نوع مسائل را مسائل مستقیم حرارتی می‌گوییم. روش‌های حل مسائل مستقیم از سال‌ها پیش توسعه یافته‌اند. این روش‌ها شامل حل مسائلی با هندسه پیچیده و مسائل غیرخطی نیز می‌گردند. علاوه بر این پایداری و یکتایی این روش‌ها نیز بررسی شده است. روش‌های اولیه عمدتاً بر مبنای حل‌های تحلیلی بوده‌اند.

این روش‌ها بیشتر برای مسائل خطی و با هندسه‌های ساده قابل استفاده هستند. برعکس، روش‌های عددی دارای این محدودیت نبوده و برای کاربردهای مهندسی بیشتر مورد توجه هستند.

دسته دیگر از این مسائل که در دهه‌های اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند، مسائل معکوس حرارتی هستند. در این نوع از مسائل یک یا تعدادی از اطلاعات مورد نیاز برای حل مستقیم، دارای مقدار معلومی نمی‌باشند و ما قصد داریم از طریق اندازه‌گیری دما در یک یا چند نقطه از ناحیه مورد نظر، به تخمین مقادیر مجهول بپردازیم.

به‌طور کلی می‌توان گفت که در مسائل مستقیم حرارتی، علت (شار حرارتی، هندسه و...) معلوم، و هدف یافتن معلول (میدان دما) است. اما در مسائل معکوس حرارتی، معلول (دما در بخش‌ها و یا تمام میدان)، معلوم است، و هدف یافتن علت (شار حرارتی، هندسه و...) است.

مسائل انتقال حرارت معکوس که IHTP^۱ نیز نامیده می‌شوند با استناد بر اندازه‌گیری‌های دما و یا شار حرارتی، کمیت‌های مجهولی را که در آنالیز مسائل فیزیکی در مهندسی گرمایی ظاهر می‌شوند، تخمین می‌زنند. به‌عنوان مثال، در مسائل معکوسی که با هدایت حرارت مرتبط می‌باشند، با استفاده از اندازه‌گیری دما در جسم می‌توان شار حرارتی مرز را اندازه‌گیری نمود. این در حالی است که در مسائل هدایت حرارت مستقیم با داشتن شار حرارتی، میدان دمای جسم مشخص می‌شود. یکی از مهم‌ترین مزایای IHTP همکاری بسیار نزدیک میان تحقیقات آزمایشگاهی و تئوری است. به‌عنوان مثال در تحقیقات آزمایشگاهی با استفاده از حس‌گر می‌توان دمای جسم را تعیین نمود. این دما به‌عنوان داده‌های ورودی معادلات تئوری برای اندازه‌گیری شار حرارتی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نتیجه جواب‌های به‌دست‌آمده از روابط تئوری تطابق بسیار خوبی با جواب‌های حقیقی خواهند داشت.

هنگام حل IHTP همواره مشکلاتی وجود دارد که باید تشخیص داده شوند. به علت ناپایداری جواب‌های IHTP، این مسائل از لحاظ ریاضی در گروه مسائل بدخیم دسته‌بندی می‌شوند. به عبارت دیگر، به‌واسطه وجود خطاهای اندازه‌گیری در آزمایش‌ها، ممکن است جواب کاملاً متفاوتی به دست آید. برای غلبه بر این مشکلات روش‌هایی پیشنهاد داده شده‌اند که حساسیت جواب مسئله به خطای موجود در داده‌های ورودی را کمتر می‌کند. از جمله این روش‌ها می‌توان به استفاده از دماهای زمانه‌ای بعدی^۲، فیلترهای هموارسازی دیجیتالی^۳ اشاره نمود.

^۱ Inverse heat transfer problems

^۲ Using Future Temperatures

^۳ Digital Smoothing Filters

در سالهای اخیر تمایل به استفاده از تئوری و کاربرد IHTP رو به افزایش است. IHTP ارتباط بسیار نزدیکی با بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی دارد. مهندسان مکانیک، هوافضا، شیمی و هسته‌ای، ریاضی‌دانان، متخصصان فیزیک نجومی^۴، فیزیکدانان و آماردانان^۵ همگی با کاربردهای متفاوتی که از IHTP در ذهن دارند، به این موضوع علاقه‌مند می‌باشند.

مغز در داخل استخوان جمجمه و نخاع در داخل ستون فقرات جای گرفته است. سه پرده که در مجموع منژ نامیده می‌شوند، مغز و نخاع را از اطراف محافظت می‌کنند. مغز بیشترین انرژی بدن را مصرف می‌کند و منطقه‌ی گرمی از بدن است. وزن مغز زن و مرد باهم متفاوت است. خوب است بدانیم که هنگام سکتة مغزی فشار داخل جمجمه بالا می‌رود و داخل مغز به شدت گرم می‌شود پس باید به سرعت از فشار داخل جمجمه کاست تا بیمار دچار آسیب بیشتر نشود. همچنین، تخمین زده می‌شود در مغز انسان حدود یکصد میلیارد سلول عصبی یا نرون فعالیت می‌کنند. نرون یا سلول عصبی بر اساس مکانیسم الکتروشیمیایی فعالیت می‌کند، اختلاف پتانسیل ناشی از افزایش و کاهش بار الکتریکی در یک نرون که از منفی ۷۰ میلی ولت تا مثبت ۷۰ میلی ولت در نوسان است باعث رها شدن یا ریلیز^۶ مواد مخدر طبیعی یا همان ناقل‌های عصبی از انتهای سلول عصبی یا آکسون می‌شود. فعالیت الکتریکی یکصد میلیارد سلول عصبی، حرارت بسیار زیادی تولید می‌کند.

مغز برای خنک کردن خود نیاز به یک سیستم خنک‌کننده قوی دارد. در مغز انسان حدود ۱۶ هزار کیلومتر رگ و مویرگ خونی وجود دارد. یکی از وظایف اصلی این سیستم علاوه بر تأمین سوخت میلیاردها سلول، خنک کردن مغز است. به عبارتی حرارت مغز توسط این سیستم جذب می‌شود و با گردش خود در جاهایی مثل پیشانی، صورت و گوش‌ها آزاد می‌شود و خنک می‌شود. مصرف سیگار با افزایش غلظت خون باعث می‌شود تا حرکت خون در این مویرگ‌ها سخت شود و عملیات سوخت‌رسانی و خنک کردن مغز

^۴ astrophysics

^۵ statistician

^۶ Release

به درستی انجام نشود. به عبارتی افراد سیگاری مغزشان داغ تر از افراد غیر سیگاری است و سوخت کمتری به مغزشان می‌رسد. ریزش مو و دیرخواب رفتن یکی از نتایج بالا بودن دمای مغز است. اختلال در عملکرد سلول‌های عصبی و به دنبال آن اختلال در آزادسازی ناقل‌های عصبی و کنترل سیستم هورمونی از دیگر نتایج این وضعیت است.

از سوی دیگر، چندی پیش پزشکان برای نجات نوزادی از روش خنک کردن مغز استفاده کردند که در نوع خودش بی‌نظیر و شگفت‌انگیز بود. نوزاد انگلیسی که هنگام تولد بند ناف به دور گردنش پیچیده شده بود و نفس نمی‌کشید، (اکسیژن کافی به مغزش نمی‌رسید) با فن خنک کردن مغز (به مدت ۳ روز) به زندگی بازگشت. پزشکان برای کم کردن نیاز مغز این نوزاد به اکسیژن، با استفاده از گاز زنون مغز او را سرد کردند. برای این کار از دستگاه جدیدی استفاده شد. آنان با جای دادن آلتی در مغز نوزاد، سر نوزاد را خنک نگه داشتند. نوزاد که مغزش به مدت ۳ روز با این تکنیک خنک نگه داشته شد؛ در حال حاضر، در آغوش مادرش به زندگی لبخند می‌زند.

ممکن است که تقلا برای خوابیدن، بعد از یک روز خسته‌کننده با سرشماری گوسفندان یا خوردن قرص‌های خواب هم چندان مؤثر نباشد، اما پژوهشگران دانشکده پزشکی پتینزبورگ در آخرین اجلاس «خواب» سال ۲۰۱۱ روش جالبی را برای درمان بی‌خوابی پیشنهاد کردند: خنک کردن مغز!

آنها یک کلاه پلاستیکی خنک‌کننده ابداع کردند که قسمت‌های پیشانی را می‌پوشاند و با پایین آوردن دمای مغز می‌تواند به خواب سریع فرد کمک کند. پزشکان در تحقیقی که روی افراد عادی و بیمارانی که از بی‌خوابی رنج می‌بردند انجام دادند، افراد بی‌خواب بعد از پوشیدن این کلاه خاص، به‌طور میانگین در زمان ۱۳ دقیقه به خواب رفتند، یعنی زمانی برابر افراد سالم. دانشمندان فکر می‌کنند که این کلاه با پایین آوردن دمای مغز سبب کاهش سوخت‌وساز آن (به‌ویژه در ناحیه پیشانی مغز) می‌شود و به خواب سریع‌تر و راحت‌تر فرد کمک می‌کند. هنوز این کلاه‌ها به‌صورت تجاری وارد بازار نشده‌اند. همچنین عوارض احتمالی استفاده از آنها مشخص نشده‌اند؛ مثلاً معلوم نیست که استفاده از این کلاه‌ها سبب تشدید علائم افراد

مبتلا به سینوزیت خواهد شد یا نه؟ محققان دانشگاه نیویورک در پژوهش‌های مختلف خود دریافتند، خمیازه کشیدن نقش مهمی در تنظیم درجه حرارت مغز به عهده دارد. در صورتی که ناحیه سر «گرم» باشد، خمیازه با تحریک جریان خون و ضربان قلب گرمای بالای آن را کاهش می‌دهد. چرخه خواب و استرس، تابع نوسان درجه حرارت مغز است و کار خمیازه آن که این دمای پیوسته در حال تغییر را تنظیم و متوازن کند. توضیح ساده محققان دانشگاه وین این است که ما با خمیازه کشیدن، دمای اطراف را دست‌کاری می‌کنیم. به تعبیر دیگر، دهن‌دره همانند ترموستات مغز عمل می‌کند. گروه تحقیقاتی دانشگاه وین برای بررسی این فرضیه، تناوب خمیازه کشیدن شهروندان در ماه‌های تابستانی و زمستانی را زیر نظر گرفت. مشابه همین بررسی در هوای خشک و ۳۷ درجه آریزونا انجام شد.

پژوهش‌ها نشان داد که مردم وین در تابستان بیشتر از زمستان خمیازه می‌کشند اما در آمریکا نتیجه کاملاً برعکس بود. علت روشن بود: متوسط دمای وین در تابستان ۲۰ درجه است و این متوسط حرارت زمستانی در آریزونا است. محققان آمریکایی و اتریشی بر این اساس فرضیه‌ای را طرح کردند: تعداد خمیازه‌ها به فصل سال یا بلندی و کوتاهی روز یا روشنایی و تاریکی محیط ربط ندارد بلکه موضوع به درجه حرارت ۲۰ درجه برمی‌گردد.

یک افشانه بینی که می‌تواند جان هزاران مبتلا به بیماری قلبی را نجات دهد توسط محققان انگلیسی مورد کار آزمایشی قرار گرفته است. یک دستگاه ویژه برای پمپاژ سردکننده پزشکی در بینی بیمار در حال انتقال به بیمارستان مورد استفاده قرار می‌گیرد. کارشناسان بر این باورند که این درمان می‌تواند جان افراد زیادی را نجات داده و از ابتلای تعداد زیادی از بیماران به آسیب‌های مغزی شدید و دائمی جلوگیری کند.

خدمات اورژانس ساحل جنوب شرقی بنیاد بهداشت انگلیس اولین سرویس آمبولانسی است که از این ابداع سوئیسی به‌عنوان بخشی از کار آزمایشی پزشکان بیمارستان رویال ساسکس کانتی استفاده می‌کند. ماده سردکننده که توسط یک ماسک صورت منتقل می‌شود، جریان مداومی از مایع در حال تبخیر را به

حفره بینی بیمار می‌فرستد. محققان توانسته‌اند پیشرفت‌های بزرگی را در نجات زندگی بیماران قلبی به دست آورند اما بسیاری با آسیب‌های چشمگیری در سلول‌های مغزی روبرو شده و در اثر کمبود اکسیژن ناشی از توقف عملکرد قلب می‌میرند.

ایده افشانه بینی، خنک‌سازی هر چه سریع‌تر مغز در محل تماس پایه مغز با مدخل بینی است. گفته می‌شود خنک کردن مغز می‌تواند از سلول‌های مغزی در زمان نبود اکسیژن در خون محافظت کند. اگر این درمان زودهنگام ارائه شود، بیمار شانس بهبود بیشتری داشته و این فناوری جدید به پیراپزشکان اجازه خواهد داد پیش از رسیدن بیمار به بیمارستان عملیات خنک‌سازی را آغاز کنند. در حال حاضر برخی از خدمات اورژانس انگلیس از شیوه‌های مختلف فرآیند خنک‌سازی مانند قطره نمکی سرد و پدهای خنک‌کننده پیش از رسیدن بیمار به بیمارستان استفاده می‌کنند. اما این روش‌ها به‌طور مستقیم مغز را هدف قرار نداده و به‌جای آن بر خنک‌سازی کل بدن و خون برای دستیابی به تأثیر مشابه تکیه دارند.

۱-۲- تاریخچه:

مطالعات آسیب‌شناسی مغزی به‌طور تجربی نشان می‌دهد که سرد کردن مغز پس از یک ایشکمی مغزی^۷ می‌تواند میزان صدمات وارده بر مغز را کاهش دهد. آسیب تراماتیک مغز (TBI)^۸ که معمولاً براثر آسیب‌های خارجی در تصادفات و ... اتفاق می‌افتد و آسیب ایشکمیک مغز^۹ که در اثر سکتة مغزی ایجاد می‌شود، سبب آسیب‌های فراوانی بر مغز می‌شود. آزمایش‌ها و بررسی‌های مختلف نشان داده‌اند که کاهش دمای مغز^{۱۰} حتی در حد ۱ الی ۲ درجه سانتی‌گراد فواید بسیاری از قبیل: محافظت در مقابل سکتة، کاهش ورم و آماس و کاهش فشار داخلی مغز (ICP)^{۱۱} دارد. سادگی و راندمان بالای سرمادرمانی مغز باعث شده است تا پزشکان از آن به‌عنوان یک‌راه حل کلینیکی جهت درمان نوزادانی که از عارضه خفگی (نرسیدن

^۷ Hypoxia Ischemia

^۸ Traumatic Brain Injury

^۹ Ischemic Brain Injury

^{۱۰} Hypothermia

^{۱۱} Intracranial Pressure

اکسیژن) در زمان تولد^{۱۲} رنج می‌برند، استفاده کنند. همچنین سرد کردن فوری مغز درست در دقایق اولیه پس از حمله ایشکمی، امری مهم و ضروری در کاهش پیامدها و صدمات وارده بر مغز و نجات بیمار است. این عمل (سرد کردن فوری مغز) موجب افت متابولیسم مغز شده و در نتیجه نیاز آن را به دریافت اکسیژن و دفع دی‌اکسید کربن و بالطبع خون‌رسانی کاهش می‌دهد. گزارش‌های منتشر شده نشان داده‌اند که کم‌خونی اثر مخرب کمتری روی مغز بجای خواهد گذاشت. علی‌رغم اینکه هنوز به‌طور کامل مشخص نشده است که عمل خنک کردن چطور به محافظت از مغز کمک می‌کند، آزمایش‌های بسیاری نشان داده‌اند که کاهش دما در بافت مغز از عملکرد مغز در مقابل آسیب‌های ایشکمیک محافظت می‌کند. همچنین این کار سبب کاهش التهاب و تثبیت فشار داخلی مغز می‌شود [۱-۳]. همچنین، در اکثر بررسی‌های بیمارستانی که روی گروه‌های کوچک که از TBI رنج می‌بردند، انجام شده است، نتایج این حقیقت که خنک کردن مغز آثار خوبی هم در کوتاه‌مدت و هم در بلندمدت دارد را تأیید می‌کند [۴-۷]. اخیراً یتینگ و همکاران [۸] در تحقیق خود گزارش کردند که با خنک کاری مغز از طریق صورت می‌توان به بهبود عملکرد عصبی کمک کرد. آن‌ها در نتایج خود نشان دادند که با استفاده از روش خنک کاری مغز از طریق صورت می‌توان از مغز در مقابل آسیب ایشکمیک محافظت کرد. همچنین نشان دادند که مشکلات مغزی ناشی از آن قابل درمان است.

ملاحظات انتقال حرارت مغز در حیات کسانی که در آب‌های سرد غرق می‌شوند، نیز مؤثر است. به‌طوری‌که در اثر این پدیده بازگشت به زندگی افرادی که در آب‌های سرد غرق شده‌اند، حتی تا پس از ۶۶ دقیقه نیز گزارش شده است. این مسئله عموماً به خاطر قطع فعالیت متابولیکی مغز و اثرات محافظتی این سردشدگی است. موارد ذکر شده لزوم و اهمیت بررسی انتقال حرارت از مغز را با سیال اطراف نمایان می‌سازند.

اساساً انتقال حرارت در مغز در قالب تبادل حرارت خارجی (انتقال حرارت از سر)، تبادل حرارت داخل و تولید حرارت متابولیکی است. این اثرات با شرایط مرزی، سیرکولاسیون خون، نرخ متابولیسم مغز و

^{۱۲} Prenatal Asphyxia

ابعاد سر تغییر می‌کنند. بررسی تأثیر عوامل مختلف در پدیده انتقال حرارت از مغز با دشواری روبروست. بخصوص که امکان انجام آزمایش‌های تجربی در این زمینه به دلیل خطرات موجود و محدودیت‌های ابزاری ممکن نیست. لذا این بررسی‌ها نیازمند یک مدل مطمئن با خصوصیات فیزیکی و شرایط محیطی واقعی می‌باشند.

مطالعه و بررسی عکس‌العمل خنک شدن سر در مقابل مکانیسم‌های مختلف خنک کاری، می‌تواند ابزاری در جهت طراحی و ساخت تجهیزات قابل‌حمل جهت خنک کاری‌های اورژانس در وسایل نقلیه پزشکی باشد که با آن‌ها دمای مغز در ۳۰ دقیقه از 37°C به 34°C رسیده و لذا متابولیسم آن تا ۳۰٪ کاهش می‌یابد. این مطالعات در طراحی سیستم‌های تهویه مطبوع و ایجاد محیط‌های ارگونومیک جهت راحتی افراد نیز می‌تواند موردتوجه قرار گیرد. در یک سری مدل‌سازی‌های کامپیوتری انجام‌شده [۹-۱۱] نشان داده است که دمای مغز انسان در نقاط مرکزی و داخلی بسیار متفاوت‌اند از نقاطی که نزدیکی سطح قرار دارند. گرادیان دمای بسیار بزرگی در نزدیکی سطح مغز اتفاق می‌افتد که به‌صورت آزمایشگاهی با افزایش فاصله از سر کاهش می‌یابد [۱۲، ۱۳].

هدف کلی رسیدن به دمای میانگین ۳۳ در مغز در مدت‌زمان ۳۰ دقیقه است [۱۴]. البته باید خاطرنشان کرد که خنک کردن مغز تا دماهای پایین‌تر سبب افزایش ریسک ابتلا به لرزش‌های غیرقابل‌کنترل و کاردیاک ارست^{۱۳} می‌شود.

یکی از سؤال‌های مهم برای انتخاب روش مناسب برای خنک کردن مغز این است که بفهمیم هر یک از این روش‌ها چطور دمای مغز را کاهش می‌دهند. از آنجاکه اندازه‌گیری نتایج حاصل از خنک کردن مغز در بافت زنده فراتر از فناوری حاضر است، ارائه و بهبود مدل‌هایی که به‌طور دقیق تغییرات دما و همچنین محدودیت‌ها را نشان می‌دهد، می‌تواند موفقیت بزرگی باشد.

^{۱۳} Cardiac arrest

مسئله مهم دیگر تبادل گرمایی بین پوست سر و محیط اطراف است که به کمک ضریب انتقال حرارت توصیف می‌شود. برای رسیدن هدف که خنک کردن مغز در نقاط مرکزی است، نیاز به استفاده از دستگاهی است که ضریب انتقال حرارت بزرگی ایجاد کند. در حالت ایدئال، دستگاهی با این مشخصات قادر خواهد بود دمای پوست سر را هم‌دمای دستگاه ثابت نگه دارد.

عموماً گزارش‌های انتقال حرارت از مغز تاکنون به دو صورت بوده است. یک دسته از این مطالعات شبیه‌سازی را تنها از جنبه انتقال حرارت در داخل بافت‌ها مدنظر قرار داده و در بهترین حالت انتقال حرارت جابجایی را با ضریب انتقال حرارت جابجایی در مدل خود بکار گرفته‌اند [۱۷-۱۵، ۱۱]. دسته دیگر بدون مدل نمودن انتقال حرارت درون بافت، تنها به بررسی الگوی جریان خارج از بدن (به‌صورت تجربی) پرداخته‌اند.

همچنین مدل‌سازی از توزیع دما در سر یک انسان بالغ تحت سرما درمانی با گذاشتن یخ روی سر توسط دنیس و همکارانش [۱۶] صورت گرفته است. گزارش زو و همکارانش [۱۷] نیز شامل مدل‌سازی ریاضی سرد شدن مغز با شرایط مرزی دما ثابت است. سوکستانسکی و همکارش [۱۲] با استفاده از روش تحلیلی اثر عوامل مختلف را بر دمای مغز بررسی کرده و دبی و دمای جریان خون ورودی به بافت را تنها عامل مؤثر بر دمای مغز دانسته‌اند. این مدل‌سازی‌ها با فرض ثابت بودن دمای سطح پوست همراه بوده و در آن‌ها هوای اطراف و جنبه انتقال حرارت جابجایی در سال اطراف سر در نظر گرفته نشده است.

از طرف دیگر، از جنبه خارجی کلارک و همکارانش [۱۸] مطالعه‌ای برای تعیین جابجایی آزاد در اطراف سر را انجام داده و منتشر کرده‌اند که در این تحقیق تأثیر حالت‌های مختلف بدن (خوابیده و ایستاده) بر الگوی جریان هوای اطراف سر به‌صورت تجربی مطالعه شده و ضخامت تقریبی لایه مرزی حرارتی و میزان انتقال حرارت در نقاط مختلف سر به کمک سیستم نوری شلیرن^{۱۴} و کالری‌متر سطحی در آن سال‌ها اندازه‌گیری شده است.

^{۱۴} Schlieren

بسیاری از کارهای انجام شده در این زمینه اثرات مثبتی برای محافظت از مغز داشته‌اند و توانسته دما را تا ۷ درجه سانتی‌گراد در مدت زمان ۱ ساعت کاهش بدهد، با این حال متدهایی که به کاهش دمای بیشتر کمک می‌کنند تهاجمی^{۱۵} هستند که منجر به عوارض بعدی روی بیمار می‌شود. لازم به ذکر است، در حالت کلی دو روش برای اعمال خنک کاری به صورت غیرتهاجمی^{۱۶} وجود دارد: خنک کردن سر به کمک دستگاه‌های خنک‌کن و خنک کردن کل بدن.

سرد کردن تمام بدن یک نوزاد تازه متولد شده در ۶ ساعت نخست تولد می‌تواند از آسیب‌های مغزی ناشی از فقدان اکسیژن در جریان زایمان‌های دشوار جلوگیری کند و یا از شدت آن به میزان قابل توجهی بکاهد. به گزارش فرانس پرس هزاران کودک سالانه در سطح دنیا متولد شوند که به دلیل برخی مشکلات در بدو تولد مانند نرسیدن اکسیژن به آن‌ها و یا نرسیدن خون به مغزشان در معرض خطر مرگ یا معلولیت قرار می‌گیرند. خنک کردن بدن به اندازه چند درجه یعنی اعمال نوعی هایپوترمی خفیف نیاز مغز به اکسیژن را کاهش داده و دیگر پروسه‌هایی را که می‌توانند به آسیب مغزی دچار شوند، کند می‌کند. این شیوه درمان به افراد بالغ نیز در بهبودی پس از تجربه ایست قلبی کمک می‌کند.

در قالب تکنیک هایپوترمی یا همان خنک کردن مغز، نوزاد درون یک پتوی خاص حاوی آب سرد قرار داده می‌شود. این پتو دمای بدن نوزاد را برای مدت ۳ روز تا سطح ۹۲/۳ درجه فارنهایت (۳۳/۵ درجه سانتی‌گراد) پایین آورده و سپس به تدریج بدن را دوباره گرم کرده و درجه حرارت را به وضعیت نرمال حدود ۹۸/۶ درجه فارنهایت برمی‌گرداند. این نوزادان ۱۸ تا ۲۲ ماه بعد مورد معاینه قرار گرفتند که نتایج یافته‌ها نشان داد مرگ یا معلولیت‌های قابل توجه همچون فلج مغزی تنها در ۴۴ درصد نوزادانی که بدنشان خنک شده بود، رخ داد رقمی که در نوزادان تحت درمان‌های معمول به ۶۴ رسید و هیچ‌گونه عوارض جانبی همچون مشکلات در ریتم قلب در نتیجه این شیوه درمان رخ نداد. طبق این یافته‌ها، خنک کردن مغز

^{۱۵} Invasive

^{۱۶} Non-Invasive

نوزادان به میزان ۲ تا ۵ درجه سانتی‌گراد می‌تواند احتمال معلولیت و مرگ آن‌ها در اثر کمبود اکسیژن در نتیجه کنده شدن جفت از دیواره رحم پیش از تولد و فشردگی بند ناف را به میزان قابل‌توجهی کاهش دهد.

آزوپاردی و همکاران [۱۹] بررسی روی گروهی از بچه‌ها در سن ۶ و ۷ سالگی که به‌منظور تعیین اینکه آیا خنک کردن مغز بعد از خفگی حین زایمان یا پس از زایمان در بلندمدت اثری دارد یا خیر، انجام دادند. نتایج اولیه آن‌ها نشانگر این بود که اثرات خوبی در افراد با IQ بالاتر از ۸۵ دیده می‌شد.

ژو و همکاران [۲۰] اثربخشی و امنیت خنک کردن ملایم سر را در انسفالوپاتی هیپوکسیک-ایشکمیک^{۱۷} در نوزادان تازه متولدشده موردبررسی قرار دادند. در تحقیق آن‌ها نوزادان مبتلا به HIE به‌صورت تصادفی انتخاب‌شده بودند. عمل خنک کردن از ۶ ساعت بعد از تولد، درحالی‌که دما در قسمت حلق و بینی حدود 34°C و در قسمت تحتانی حدود 35.4°C بود، شروع شد و ۷۲ ساعت طول کشید. متأسفانه نتایج اولیه منجر به مرگ و ناتوانی‌های شدید شده بود. ویلرم و همکارانش [۱۵] با مدل‌سازی سرد کردن مغز نوزاد به این نتیجه رسیدند که با قرار دادن سر در محیط با دمای پایین (۱۰ درجه سانتی‌گراد) تنها مناطق سطحی مغز تا حدود 33°C - 34°C سرد می‌شود و تغییر دمای محسوسی در مناطق عمقی آن به وجود نخواهد آمد.

دنيس و همکاران [۱۶] هندسه واقعی سر انسان را در نظر گرفتند و خنک کردن سر و گردن انسان را با روش المان محدود موردبررسی قرار دادند. آن‌ها در کار خود همزمان علاوه بر استفاده از یک کلاهک خنک‌کن، پک‌هایی از یخ روی سر و گردن قرار دادند. بر اساس نتایجشان، وسیله‌ی دیگری نیز برای خنک کاری موردنیاز است که دمای قسمت‌های مرتبط دیگر نیز کاهش یابد و در نتیجه به هدف موردنظر که در قبل ذکر شده بود، برسند. مسئله را در چهار حالت مختلف که موقعیت مکانی خنک کاری متفاوت بوده بررسی کرده‌اند، که متأسفانه به دمای 33°C درجه سانتی‌گراد در مدت ۳۰ دقیقه نرسیده‌اند.

^{۱۷} Hypoxic-Ischemic Encephalopathy

گلوکمن و همکاران [۲۱] از یک کلاه خنک‌کن روی سر استفاده کردند و دمای قسمت تحتانی بدن را نیز در ۳۴-۳۵ ثابت نگه داشتند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد باینکه این کار اثر قابل قبولی روی نوزادانی که مورد بررسی قرار گرفته بودند، نداشته است. اما در کل به زنده ماندن بیماران بدون اثرات شدید عصبی کمک می‌کند.

اسپوزیتو و همکاران [۲۲] در تحقیق خود، محدودیت‌ها و اثرات جانبی روش‌های کنونی خنک‌کاری مغز را بررسی کرده‌اند. همچنین در مورد مزایا و معایب تزریق مایع خنک در رگ‌های خونی بحث کرده‌اند. همچنین پلی و همکاران [۲۳] ارتباط بین دمای مغز و خنک کردن سطح سر و گردن را مورد تحقیق قرار دادند و در کار دیگر، ناکامورا و همکاران [۲۴] تأثیر خنک‌کاری سر و گردن را بر دمای کلی بدن بررسی کرده‌اند.

از آنجاکه در هیچ‌یک از بررسی‌های انجام‌شده به دمای ۳۳ درجه در مدت‌زمان ۳۰ دقیقه که مطلوب پزشکان است، نرسیده‌اند برای اولین بار با استفاده از روش انتقال حرارت معکوس شار حرارتی و شرایط مرزی مناسب مدنظر است. در این روش با معلوم بودن جواب هدف که کاهش دما تا ۳۳ درجه و زمان ۳۰ دقیقه است، بهترین شرایط برای رسیدن به آن محاسبه می‌شوند. همچنین معادلات موردنظر معادلات انتقال حرارت در بافت زنده پنز^{۱۸} که غیر فوریه‌ای بوده می‌باشند. هندسه مغز به صورت یک نیم‌کره در نظر گرفته شده است. مسئله با استفاده از روش مختصات عمومی^{۱۹} و در حالت متقارن محوری حل شده است. علت استفاده از این روش این است که قادر به اعمال روی هر هندسه پیچیده دیگر خواهد بود که در کار-های آینده قطعاً مورد نیاز خواهد بود. در این روش، صفحه فیزیکی نامنظم مسئله به صفحه محاسباتی مستطیل شکل تبدیل می‌شود.

^{۱۸} Pennes

^{۱۹} General coordinate

فصل دوم: بررسی روش‌های بهینه‌سازی توابع

در این فصل به معرفی و بررسی روش‌هایی که برای بهینه‌سازی توابع استفاده می‌شوند، می‌پردازیم. ابتدا به تعریف مسئله بهینه‌سازی پرداخته و در ادامه مفاهیم مربوط به روند انجام فرایند بهینه‌سازی در یک مسئله معرفی می‌شوند. انواع روش‌های مستقیم و غیرمستقیم بهینه‌سازی معرفی می‌شوند. از آنجاکه در این پایان‌نامه از روش غیرمستقیم برای بهینه‌سازی استفاده کرده‌ایم، بنابراین بیشتر به این روش‌ها پرداخته‌ایم. در تمامی این روش‌ها محاسبه گرادیان تابع الزامی است، بنابراین بررسی خواص و نحوه محاسبه آن آورده شده است. در ادامه شرح مختصری از انواع روش‌های غیرمستقیم به همراه الگوریتم محاسباتی آن‌ها آورده شده است.

۱-۲ مسائل بهینه‌سازی

یک مسئله بهینه‌سازی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

تعیین بردار $\bar{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ به گونه‌ای که تابع $f(\bar{X})$ تحت شرایط زیر مینیمم شود.

$$\begin{cases} l_j(\bar{X}) = \alpha & j = 1, 2, \dots, p \\ g_j(\bar{X}) \leq \beta & j = 1, 2, \dots, r \end{cases} \quad (1-2)$$

که در آن $\bar{X}$ یک بردار n بعدی به نام بردار طراحی، $f(\bar{X})$ تابع هدف و $l_j(\bar{X})$ و $g_j(\bar{X})$ به ترتیب قیدهای برابری و نابرابری نامیده می‌شوند. در حالت کلی تعداد متغیرها n و تعداد قیود p یا r رابطه‌ای باهم ندارند. مسئله فوق یک مسئله بهینه‌سازی مقید نامیده می‌شود. در مسائلی که قیودی وجود ندارند با یک مسئله بهینه‌سازی نامقید روبرو هستیم.

نقطه X^* را مینیمم یا نقطه سکون تابع هدف $f(\bar{X})$ می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$\nabla f|_{X^*} = 0 \quad (2-2)$$

شرط بالا یک شرط لازم است در صورتی که ماتریس هسین^{۲۰} معین مثبت باشد آنگاه حتماً نقطه مینیمم نسبی خواهد بود. یعنی اگر داشته باشیم:

$$[H]_{x^*} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{x^*} \quad (3-2)$$

البته شرط بالا در صورتی صادق است که تابع $f(\bar{X})$ مشتق پذیر باشد.

۲-۲ دسته بندی روش های بهینه سازی

روش های حل مسائل مینیمم سازی به دودسته روش های جستجوی مستقیم و روش های کاهش تقسیم بندی می شوند.

برای استفاده از روش های جستجوی مستقیم در محاسبه نقطه مینیمم، تنها به مقدار تابع هدف نیاز است و نیازی به مشتقات جزئی تابع نیست. بنابراین اغلب، روش های غیرگرادیانی یا روش های مرتبه صفر نامیده می شوند زیرا از مشتقات مرتبه صفر تابع استفاده می کنند. این روش ها بیشتر برای مسائلی کاربرد دارند که تعداد متغیرها کم و یا محاسبه مشتقات تابع مشکل می باشند و به طور کلی کارایی کمتری نسبت به روش های کاهش دارند.

روش های کاهش علاوه بر مقدار تابع به مشتقات اول و در برخی موارد به مشتقات مرتبه دوم تابع هدف نیز نیاز دارند. از آنجاکه در روش های کاهش، اطلاعات بیشتری از تابع هدفی که (از طریق مشتقات آن) مینیمم می شود، مورد استفاده قرار می گیرد، این روش ها کارایی بیشتری نسبت به روش های جستجوی مستقیم دارند.

^۱ Hessian Matrix

روش‌های کاهشی همچنین روش‌های گرادیانی نیز نامیده می‌شوند. در این بین روش‌هایی که فقط به مشتق اول تابع هدف نیاز دارند، روش‌های مرتبه اول و آن‌هایی که به مشتق اول و دوم هر دو نیاز دارند، روش‌های مرتبه دوم نامیده می‌شوند. در جدول (۱-۲) روش‌هایی از هر دودسته آمده است.

جدول ۱-۲- دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی

روش‌های جستجوی مستقیم	روش‌های کاهشی
روش جستجوی تصادفی	بیشترین کاهش
جستجوی شبکه	گرادیان مزدوج
روش تک متغیر	روش نیوتن
جستجوی الگو	روش لونیبرگ-مارکورات
	میزان متغیر

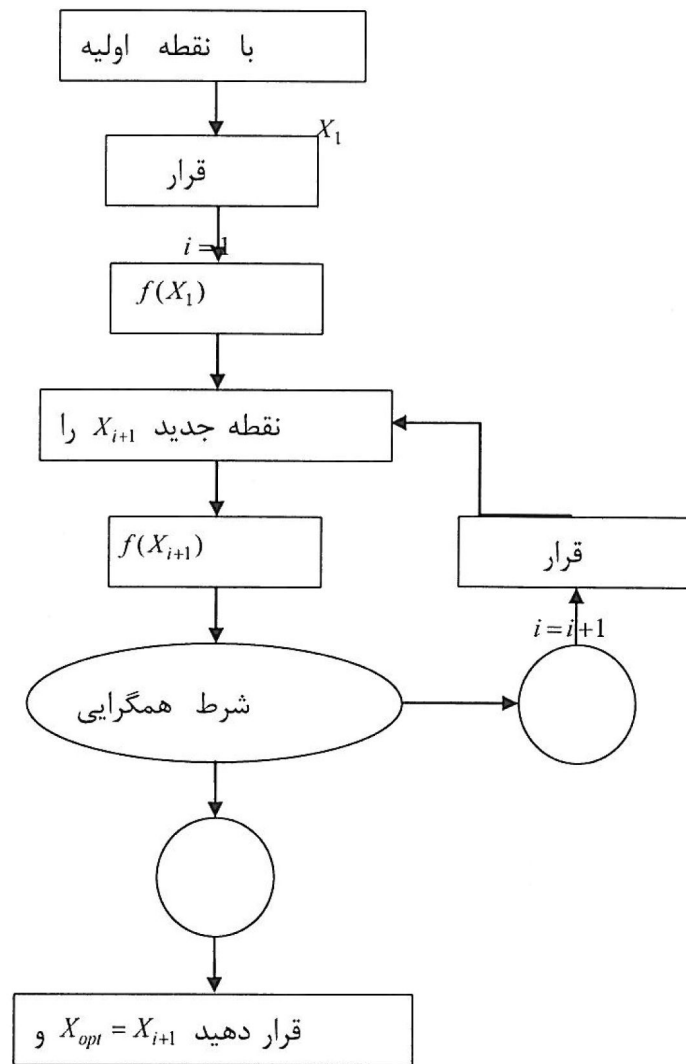
۳-۲ راه حل کلی

تمام روش‌های مینیمم سازی نامقید اساساً تکراری هستند و از این رو از یک حدس اولیه شروع می‌کنند و به شکل ترتیبی به سمت نقطه مینیمم پیش می‌روند. طرح کلی این روش‌ها در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.

باید توجه شود تمام روش‌های مینیمم سازی نامقید:

۱. نیاز به نقطه اولیه X_1 برای شروع تکرار دارند.

۲. با یکدیگر تنها در نحوه تولید نقطه بعدی X_{i+1} از X_i تفاوت دارند.



شکل ۲-۱- نمودار روند بهینه‌سازی تابع هدف

۲-۴ نرخ همگرایی

روش‌های مختلف بهینه‌سازی، نرخ همگرایی مختلف دارند. به‌طور کلی یک روش، همگرایی از مرتبه

p دارد اگر داشته باشیم:

$$\frac{\|X_{i+1} - X^*\|}{\|X_i - X^*\|^p} \leq l, \quad l \geq 0, p \geq 1 \quad (۲-۴)$$

که X_i و X_{i+1} نقاط محاسبه شده در پایان تکرارهای i و $i+1$ هستند. X^* نقطه بهینه و $\|X\|$ نشان دهنده طول یا نرم بردار X است که از رابطه زیر به دست می آید:

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2} \quad (5-2)$$

اگر $p=1$ و $0 \leq l \leq 1$ باشد، روش همگرایی خطی (متناظر باهمگرایی آهسته) و اگر $p=2$ باشد، روش همگرایی مرتبه دوم (متناظر باهمگرایی سریع) نامیده می شود. یک روش بهینه سازی، همگرایی فوق خطی است اگر:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\|X_{i+1} - X^*\|}{\|X_i - X^*\|^p} \rightarrow 0 \quad (6-2)$$

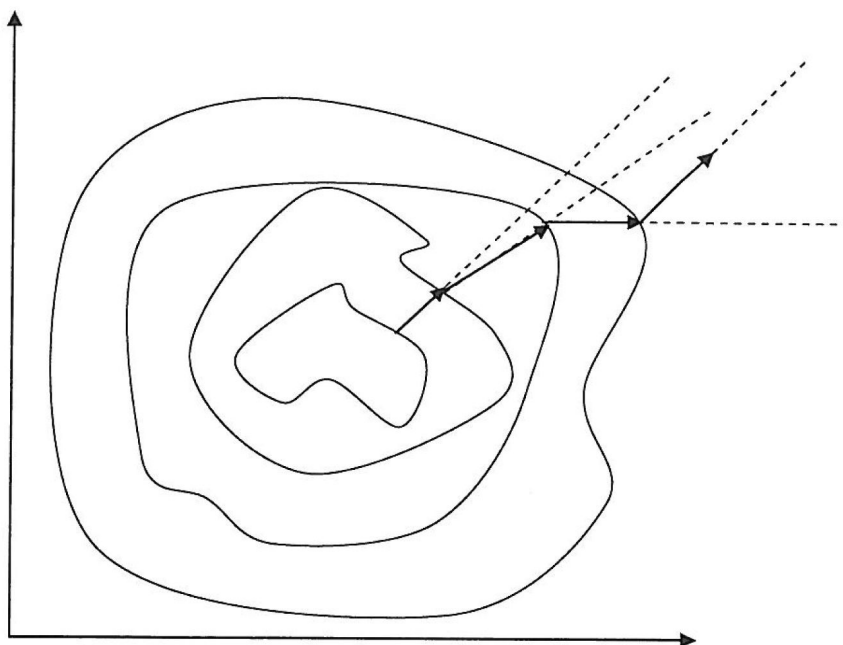
تعریف دیگری برای روش همگرایی مرتبه دوم وجود دارد: اگر یک روش مینیمم سازی با استفاده از روند دقیق ریاضی بتواند نقطه مینیمم یک تابع درجه دوم n متغیره را در n تکرار پیدا کند. روش همگرایی مرتبه دوم نامیده می شود.

۵-۲ گرادیان تابع

گرادیان تابع، یک بردار n مؤلفه ایست که با رابطه زیر داده می شود:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]^T \quad (7-2)$$

اگر از یک نقطه در فضای n بعدی در راستای گرادیان حرکت کنیم، مقدار تابع با سریع ترین نرخ افزایش می یابد. بنابراین جهت گرادیان، جهت بیشترین افزایش نیز نامیده می شود.



شکل ۲-۲- جهت‌های سریع‌ترین افزایش

اما جهت بیشترین افزایش یک خاصیت محلی است و نه سراسری. این مطلب در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. در این شکل، بردار گرادیان ∇f محاسبه شده در نقاط ۱، ۲، ۳، ۴ به ترتیب در جهت‌های $11'$ ، $22'$ ، $33'$ ، $44'$ قرار دارد. بنابراین در نقطه ۱ مقدار تابع در جهت $11'$ با سریع‌ترین نرخ افزایش می‌یابد و به همین ترتیب اگر به تعداد بی‌نهایت مسیر کوچک در جهت‌های سریع‌ترین افزایش حرکت کنیم، مسیر حرکت یک منحنی شبیه به منحنی ۴-۳-۲-۱ خواهد بود.

از آنجاکه بردار گرادیان جهت بیشترین افزایش مقدار تابع را نشان می‌دهد، منفی بردار گرادیان جهت سریع‌ترین کاهش را نشان می‌دهد. بنابراین انتظار داریم روش‌هایی که از بردار گرادیان برای بهینه‌سازی استفاده می‌کنند نسبت به روش‌های دیگر سریع‌تر به نقطه مینیمم برسند. بنابراین دو قضیه زیر را بدون اثبات می‌آوریم.

۱. بردار گرادیان جهت سریع‌ترین افزایش را نشان می‌دهد.

۲. بیشترین نرخ تغییر تابع f در هر نقطه X^* ، برابر اندازه بردار گرادیان در آن نقطه است.

۲-۵-۱ محاسبه گرادیان

محاسبه گرادیان نیاز به محاسبه مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ($i=1,2,\dots,n$) دارد. سه حالت وجود دارد که

محاسبه گرادیان را مشکل می‌کند:

۱. تابع در تمامی نقاط مشتق‌پذیر است، اما محاسبه مؤلفه‌های بردار گرادیان غیرعملی است.

۲. رابطه‌ای برای مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ می‌توان به دست آورد، اما محاسبه آن نیازمند زمان

محاسباتی زیادی است.

۳. گرادیان تابع در تمامی نقاط تعریف نشده باشد.

در مورد اول می‌توان از فرمول تفاضل محدود پیشرو برای تخمین مشتق جزئی استفاده کرد:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{X_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i, u_i) - f(X_m)}{\Delta x_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad (۸-۲)$$

برای یافتن نتیجه بهتر می‌توان از فرمول اختلاف مرکزی محدود زیر استفاده کرد:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{X_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i, u_i) - f(X_m - \Delta x_i, u_i)}{2\Delta x_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad (۹-۲)$$

در روابط بالا Δx_i یک کمیت اسکالر کوچک و u_i برداری n بعدی است که مؤلفه i ام آن یک، و مابقی صفر هستند. در محاسبات، مقدار Δx_i را می‌بایست با دقت انتخاب نمود، زیرا کوچک بودن بیش‌ازحد آن ممکن است اختلاف میان مقادیر محاسبه‌شده تابع در $(X_m + \Delta x_i, u_i)$ و $(X_m - \Delta x_i, u_i)$ را بسیار کوچک کرده، و موجب افزایش خطای گرد کردن شود و نتایج را با خطا همراه سازد. به همین ترتیب بزرگ

بودن بیش از اندازه Δx_i نیز خطای برشی را در محاسبه گرادیان ایجاد می‌کند. در حالت دوم استفاده از فرمول‌های تفاضل محدود پیشنهاد می‌شود. برای حالت سوم با توجه به این نکته که گرادیان در تمام نقاط تعریف شده نیست، نمی‌توان از فرمول‌های تفاضل محدود استفاده کرد. بنابراین در این موارد مینیمم کردن فقط با استفاده از روش‌های مستقیم امکان‌پذیر است.

۲-۵-۲ تعیین طول گام بهینه در جهت کاهش تابع

در بیشتر روش‌های بهینه‌سازی، نیاز است که نقطه مینیمم در یک راستای مشخص را تعیین نمود. بنابراین لازم است نرخ تغییر تابع هدف از یک نقطه مانند $\overline{X}_i$ ، در راستای مشخصی مانند $\overline{S}_i$ ، نسبت به پارامتری چون λ محاسبه شود. باید در نظر داشت که موقعیت هر نقطه در این راستا را می‌توان با توجه به نقطه X_i ، به صورت $\overline{X}_{i+1} = \overline{X}_i + \lambda \overline{S}_i$ نشان داد. بنابراین نرخ تغییر تابع نسبت به این متغیر λ در راستای $\overline{S}_i$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} \quad (۱۰-۲)$$

که در رابطه فوق x_j مؤلفه j -ام $\overline{X}_i$ است. از طرفی داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} (x_{ij} + \lambda s_{ij}) = s_{ij} \quad (۱۱-۲)$$

که x_{ij} و s_{ij} مؤلفه‌های j -ام $\overline{X}_i$ و $\overline{S}_i$ هستند. بنابراین نرخ تغییر تابع در راستای $\overline{S}_i$ برابر است با:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot s_{ij} = \nabla f^T \cdot \overline{S}_i \quad (۱۲-۲)$$

در صورتی که λ^* تابع f را در راستای $\overline{S}_i$ مینیمم کند، در نقطه $\overline{X}_i + \lambda^* \cdot \overline{S}_i$ می‌توان نوشت:

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = \nabla f^T \cdot \bar{S}_i = 0 \quad (۱۳-۲)$$

بنابراین مینیمم تابع، در راستای $\bar{S}_i$ ، در نقطه $\bar{X}_i + \lambda^* \bar{S}_i$ می‌باشد.

۲-۶ معیار هم‌گرایی

معیارهای زیر می‌توانند برای بررسی هم‌گرایی در محاسبات تکراری به کار روند:

- در صورتی که تغییرات تابع در دو تکرار متوالی از مقدار معینی کوچک‌تر شود:

$$\left| \frac{f(\bar{X}_{i+1}) - f(\bar{X}_i)}{f(\bar{X}_i)} \right| \leq \varepsilon_1 \quad (۱۴-۲)$$

- زمانی که مشتقات جزئی (گرادیان مؤلفه‌ها) به اندازه کافی کوچک شود:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \leq \varepsilon_2 \quad (۱۵-۲)$$

- زمانی که تغییرات بردار موردنظر در دو تکرار متوالی کوچک شود:

$$|\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_i| \leq \varepsilon_3 \quad (۱۶-۲)$$

که ε_1 ، ε_2 و ε_3 مقادیر معین کوچکی در نظر گرفته می‌شوند.

۲-۷ روش کاهش سریع

استفاده از قرینه بردار گرادیان به عنوان جهت مینیمم سازی اولین بار توسط کوشی انجام گرفت. در این روش محاسبات از نقطه‌ای مانند X_1 شروع شده و طی فرآیندهای تکراری با حرکت در جهت سریع‌ترین نرخ کاهش، نهایتاً به نقطه مینیمم می‌رسد. مراحل مختلف این روش را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

۱. شروع محاسبات از یک نقطه $\bar{X}_1$ دلخواه به عنوان اولین تکرار ($i=1$)

$$\bar{S}_i = -\nabla f_i = -\nabla f(\bar{X}_i) \quad \text{به صورت } \bar{S}_i \text{ یافتن جهت}$$

۳. محاسبه طول گام بهینه λ_i^* در جهت $\bar{S}_i$ و قرار دادن $\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i + \lambda_i^* \bar{S}_i$ و یا

$$\bar{X}_{i+1} = \bar{X}_i - \lambda_i^* \nabla f_i$$

۴. بررسی بهینه بودن نقطه $\bar{X}_{i+1}$ و پایان محاسبات در صورت مینیمم بودن این نقطه، در غیر این

صورت قرار دادن $i = 2$ و ادامه محاسبات از مرحله ۲.

۸-۲ مقدمه ای بر روش انتقال حرارت معکوس

۸-۲-۱ مقدمه

با ظهور مواد مخلوط مدرن و وابستگی شدید خواص ترموفیزیکی آن‌ها به دما و مکان، روش‌های معمولی برای محاسبه آن‌ها راضی‌کننده نیستند. همچنین انتظارات عملیاتی صنعتی مدرن هر چه بیشتر و بیشتر پیچیده شده‌اند و یک محاسبه دقیق در محل از خواص ترموفیزیکی تحت شرایط واقعی عملیات ضرورت پیدا کرد. شیوه انتقال حرارت معکوس (IHTP)^{۲۱} می‌تواند جواب‌های رضایت بخشی برای این گونه حالات و مسائل به دست دهد.

سود عمده IHTP این است که شرایط آزمایش را تا حد امکان به شرایط واقعی نزدیک می‌سازد.

کاربرد عمده تکنیک IHTP شامل محدوده‌های خاص زیر می‌باشند (در میان سایرین)

- محاسبه خواص ترموفیزیکی مواد به عنوان مثال؛ خواص ماده سپر حرارتی^{۲۲} در طی ورودش به اتمسفر زمین و برآورد وابستگی دمایی ضریب هدایت قالب^{۲۳} سرد در طی باز پخت استیل
- برآورد خواص تشعشعی بالک و شرایط مرزی در جذب^{۲۴}، نشر^{۲۵} و بازپخش^{۲۶} مواد نیمه‌رسانا^{۲۷}

^{۲۱} Inverse Heat Transfer Problems

^{۲۲} heat shield

^{۲۳} ingot

- کنترل حرکت سطح مشترک جامد - مایع در طی جامدسازی^{۲۸}
 - برآورد شرایط ورود و شار حرارتی مرزی در جابجایی اجباری درون کانال‌ها
 - برآورد همرفت سطح مشترک بین سطوح متناوباً^{۲۹} در تماس
 - نظارت خواص تشعشعی سطوح بازتاب‌کننده^{۳۰} گرم‌کننده‌ها و پنل‌های برودتی^{۳۱}
 - برآورد وابستگی دمایی ناشناخته ضریب هدایت سطوح مشترک بین ذوب و انجماد فلزات در طی ریخته‌گری^{۳۲}
 - برآورد توابع واکنشی^{۳۳}
 - کنترل و بهینه‌سازی عملیات پروراندن لاستیک^{۳۴}
 - برآورد شکل مرزی اجسام^{۳۵}
- برآورد این‌گونه خواص از طریق تکنیک‌های رایج کاری به‌شدت دشوار یا حتی غیرممکن است. اگرچه با اعمال آنالیز انتقال حرارت معکوس، این‌گونه مسائل نه‌تنها می‌توانند حل شوند، بلکه ارزش اطلاعات مطالعات افزوده‌شده و کارهای تجربی سرعت می‌گیرند.

^{۲۴} absorb

^{۲۵} emitt

^{۲۶} scatter

^{۲۷} semi-transparent materials

^{۲۸} solidification

^{۲۹} periodically

^{۳۰} Reflecting surfaces of heaters

^{۳۱} Cryogenic panels

^{۳۲} Casting

^{۳۳} Reaction function

^{۳۴} Curing

^{۳۵} Boundary shapes of bodies

۲-۸-۲ مشکلات حل مسائل انتقال حرارت معکوس

برای تشریح مشکلات اصلی حل مسائل انتقال حرارت معکوس، جامد نیمه بینهایت ($0 < x < \infty$) در دمای اولیه صفر در نظر می‌گیریم. برای زمان‌های $t > 0$ سطح مرزی در $x = 0$ تحت یک شار گرمایی متناوب به فرم $q(t) = q_0$ قرار گرفته است. جایی که q_0 و ω به ترتیب دامنه و فرکانس نوسان شار گرمایی هستند و t متغیر زمان است. بعد از گذشت حالت متغیر^{۳۶}، توزیع دمایی شبه - ثابت^{۳۷} در جامد با توزیع دمایی زیر به دست می‌آید:

$$T(x, t) = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{w}} \exp\left(-z \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right) \cos\left(wt - z \sqrt{\frac{w}{2\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (۱۷-۲)$$

جایی که α پخشندگی حرارتی و k ضریب رسانایی حرارتی جامد هستند.

معادله بالا نشان می‌دهد که پاسخ دمایی دارای یک تأخیر فاز نسبت به شار اعمالی سطحی می‌باشد و این تأخیر برای مکان‌های عمیق‌تر درون جسم واضح‌تر می‌باشد. در صورتی که این شار بتواند برآورد شود، این تأخیر دمایی نیاز به برداشت اطلاعات پس از اعمال شار حرارتی را آشکار می‌کند.

دامنه نوسان دما در هر مکانی، $|\Delta T(x)|$ ، با قرار دادن $\cos(0) = 1$ در معادله به دست می‌آید. لذا:

$$|\Delta T(x)| = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{w}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right) \quad (۱۸-۲)$$

این معادله نشان می‌دهد که $|\Delta T(x)|$ به صورت توانی با افزایش عمق و با افزایش فرکانس تغییر می‌کند.

^{۳۶} Transients

^{۳۷} Quasi-stationary temperature distribution

اگر دامنه شار حرارتی سطحی (q) به وسیله بکار بردن اندازه گیری مستقیم دما در نقاط داخلی اندازه گیری گردد آنگاه هرگونه خطای اندازه گیری $|\Delta T(x)|$ با عمق x و فرکانس ω به صورت توانی بزرگنمایی می شود، که به صورت معادله زیر نشان داده می شود:

$$q_o = k |\Delta T(x)| \sqrt{\frac{w}{\alpha}} \exp(x \sqrt{\frac{w}{2\alpha}}) \quad (19-2)$$

برای تخمین شار حرارتی مرزی جانمایی یک حس گر در عمق x از سطح، جایی که دامنه نوسانات دما بسیار بزرگتر از خطاهای اندازه گیری اند، ضروری می باشد. در غیر اینصورت تشخیص اینکه نوسانات دمایی در اثر شار حرارتی یا خطای اندازه گیری بوده غیرممکن خواهد بود، که منجر به عدم یگانگی جواب معادله خواهد شد.

از آنجاکه خطاها در دقت روش های معکوس بسیار مؤثرند، بک^{۳۸} ([۲۶-۲۸]) توصیفات این گونه خطاها را به صورت ۸ نکته بیان نموده است.

۱. خطاها به مقدار اصلی اضافه می شوند $Y_i = T_i + \varepsilon_i$ که Y_i مقدار اندازه گیری شده، T_i مقدار واقعی و ε_i یک خطای رندوم می باشد.

۲. خطای دمایی دارای میانگین^{۳۹} صفر می باشد. یعنی $E(\varepsilon_i) = 0$. جایی که $E(0)$ یک عملگر اندازه است، آنگاه گفته می شود که خطا بدون پیش مقدار^{۴۰} است.

۳. خطا دارای انحراف^{۴۱} ثابت است، که عبارت است از

$$\sigma_i^2 = E\{[Y_i - E(Y_i)]^2\} = \sigma^2 = \text{const} \quad (20-2)$$

که به معنای استقلال انحراف Y_i از اندازه گیری است.

^{۳۸} Beck

^{۳۹} mean

^{۴۰} unbiased

^{۴۱} variance

۴. خطاهای مرتبط با اندازه‌گیری‌های مختلف ناهمبسته هستند. دو خطای اندازه‌گیری ε_i و ε_j (که

$i \neq j$) ناهمبسته هستند اگر کوواریانس^{۴۲} ε_i و ε_j صفر باشد. یعنی

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \equiv E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = 0 \quad i \neq j \quad (21-2)$$

در این حالت خطاهای ε_i و ε_j هیچ تأثیری یا رابطه‌ای بر هم ندارند.

۵. خطاهای اندازه‌گیری دارای یک توزیع نرمال (گوسی)^{۴۳} است. با توجه به فرضیات ۲، ۳ و ۴ بالا

توزیع احتمال ε_i به وسیله معادله زیر داده می‌شود

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (22-2)$$

۶. پارامترهای معرفی کننده خطا مثل σ معلوم هستند.

۷. تنها متغیری که دارای خطاهای رندوم می‌باشد دمای اندازه‌گیری شده است. پارامترهای اندازه‌گیری

شده مکان‌های اندازه‌گیری شده، ابعاد جسم گرم شونده و تمامی کمیت‌هایی که در فرمول نویسی

ظاهر شده‌اند به دقت^{۴۴} مشخص هستند.

۸. اطلاعات پیشین کمیت‌ها جهت تخمین موجود نیست (می‌تواند پارامتر یا تابع باشند) اگر این

اطلاعات موجود می‌بود می‌توانست جهت بهبود تخمین مقادیر بکار رود.

در ادامه چندین تکنیک مختلف برای حل مسائل IHTP را معرفی می‌نماییم. این گونه تکنیک‌ها

معمولاً نیازمند حل مستقیم مربوطه می‌باشد. البته ارائه روش‌هایی که مسائل معکوس را بدون ارتباط با

مسائل مستقیم حل کنند بسیار دشوار است.

تکنیک‌های حل مسائل می‌توانند به صورت زیر طبقه‌بندی شوند:

^{۴۲} covariance

^{۴۳} normal (Gaussian) distribution

^{۴۴} accurately

۱. روش‌های معادلات انتگرالی^{۴۵}
۲. روش‌های تبدیل انتگرال^{۴۶}
۳. روش‌های حل سری^{۴۷}
۴. روش‌های چندجمله‌ای^{۴۸}
۵. بزرگنمایی معادلات هدایت گرمایی^{۴۹}
۶. روش‌های عددی^{۵۰} مثل تفاضل محدود، المان محدود و المان مرزی
۷. تکنیک‌های فضایی^{۵۱} با اعمال فیلترینگ نویز اضافی مثل روش نرم کردن^{۵۲}
۸. تکنیک فیلترینگ تکرارشونده^{۵۳} [۲۹]
۹. تکنیک حالت پایدار^{۵۴}
۱۰. روش تابع مشخصه متوالی بک^{۵۵}
۱۱. روش لوبنرگ - مارگارت^{۵۶} برای مینیمم کردن نرم کوچک‌ترین مربعات^{۵۷}
۱۲. روش منظم سازی تیخونوف^{۵۸}
۱۳. روش منظم سازی تکراری^{۵۹} برآورد توابع و پارامترها

^{۴۵} Integral equation approach

^{۴۶} Integral transform techniques

^{۴۷} Series solution approach

^{۴۸} Polynomial approach

^{۴۹} Hyperbolization of the heat conduction equation

^{۵۰} Numerical methods

^{۵۱} Space marching techniques

^{۵۲} Mollification method

^{۵۳} Iterative filtering techniques

^{۵۴} Steady-state techniques

^{۵۵} Beck's sequential function specification method

^{۵۶} Levenberg-Marquardt

^{۵۷} Minimization of the least-squares norm

^{۵۸} Tikhonov regularization approach

^{۵۹} Iterative regularization methods

۳-۸-۲ ارزیابی روش‌های مسائل معکوس حرارتی

اگر مسائل معکوس شامل تعداد زیادی پارامتر مانند برآورد شار حرارتی گذرا در زمان‌های مختلف باشند، ممکن است نوساناتی در حل رخ دهد. یک روش برای کاهش این ناپایداری‌ها استفاده از منظم سازی تیخونوف می‌باشد.

۴-۸-۲ تکنیک‌های حل مسائل انتقال حرارت معکوس

هدف اصلی این بخش معرفی تکنیک‌هایی جهت حل مسائل انتقال حرارت معکوس و روابط ریاضی مورد نیاز می‌باشد.

گر چه تکنیک‌های زیادی موجود هستند، اما در اینجا به ذکر ۴ تکنیک قدرتمند بسنده می‌کنیم.

- I. لونبرگ - مارکوت^{۶۱} برای تخمین پارامترها
- II. گرادیان مزدوج^{۶۲} برای تخمین پارامترها
- III. گرادیان مزدوج با مسئله اضافی^{۶۳} برای تخمین پارامترها
- IV. گرادیان مزدوج با مسئله اضافی برای تخمین توابع

این روش‌ها معمولاً کافی، تطبیق‌پذیر، مستقیم و قدرتمند جهت غلبه بر مشکلات موجود در حل معادلات انتقال حرارت معکوس می‌باشند.

تکنیک I: این تکنیک یک روش تکراری برای حل مسائل کوچک‌ترین مربعات تخمین پارامترهاست.

این روش اولین بار در سال ۱۹۶۶ توسط لونبرگ [۳۱] ایجاد شد، سپس در سال ۱۹۶۳ مارکوارت [۳۲]

^{۶۰} Genetic algorithms

^{۶۱} Levenberg - Marquardt

^{۶۲} Conjunction gradient

^{۶۳} Adjoint problem

همان تکنیک را با استفاده از روشی دیگر به دست آورد. حل مسائل معکوس به این روش، نیازمند محاسبه ماتریس حساسیت J می باشد. ماتریس حساسیت به صورت زیر تعریف می گردد:

$$j_{ij} = \frac{\delta T_i}{\delta p_j} \quad (2-23)$$

جایی که:

$$i = 1, 2, \dots, N$$

$$j = 1, 2, \dots, N$$

I = تعداد اندازه گیری

N = تعداد پارامترهای نامعلوم

T_i = دمای لام تخمین زده شده

p_j = پارامتر لام نامعلوم

این ضریب حساسیت نقش مهمی را در تکنیک های I تا III ایفا می کند و در ادامه روش های متفاوت حل بیان خواهد شد.

این روش برای حل معادلات خطی و غیرخطی بسیار مؤثر است. گر چه در مسائل غیرخطی با افزایش پارامترهای نامعلوم ممکن است حل ماتریس حساسیت به درازا بکشد.

تکنیک II روش گرادیان مزدوج در بهینه سازی را جهت تخمین پارامترها بکار می برد، که همانند تکنیک I نیازمند حل ماتریس حساسیت بوده که مخصوصاً در حالت غیرخطی وقتی تعداد پارامترها زیاد شوند کاری زمان بر است.

تکنیک‌های III و IV: روش گرادیان مزدوج در کوچک‌سازی را با مسئله اضافی بکار می‌برد-۳۳]

۳۶]

روش III مخصوصاً برای مسائلی که جهت تخمین ضریب آزمایشی در تخمین توابع بکار برده می‌شوند مناسب است. مسئله اضافی در جهت کاهش نیاز به حل ماتریس حساسیت استفاده می‌شود.

تکنیک IV روشی برای تخمین توابع می‌باشد مخصوصاً وقتی که اطلاعات مقیاسی درباره فرم تابع کمیت نامعلوم در دسترس نباشد.

تکنیک‌های اول، سوم و چهارم به همراه شرط توقف مناسب جهت تکرارهایشان؛ جزء دسته تکنیک‌های خطی سازی تکراری هستند.

در ادامه به بررسی و معرفی گام‌های اولیه و الگوریتم حل این روش‌ها با استفاده از روش تمام دامنه می‌پردازیم.

۲-۸-۵ تکنیک I

۲-۸-۵-۱ شرح تکنیک

این روش برای حل مسائل غیرخطی ابداع شد گر چه می‌توان آن را در مسائل خطی بسیار ناهنجار^{۶۴} که از طریق مرسوم قابل حل نمی‌باشند نیز اعمال کرد. گام‌های اصلی روش به صورت زیر است:

- مسئله مستقیم
- مسئله معکوس
- پروسه تکرار
- شرط توقف
- حل الگوریتم

^{۶۴} ill-condition

این روش یک متد کاهشی شدید^{۶۵} می‌باشد. در حل مسئله مستقیم، هدف یافتن دمای گذرا^{۶۶} می‌باشد. در حل مسئله غیرمستقیم، هدف یافتن پارامتر نامعلوم با استفاده از دمای گذرای اندازه‌گیری شده در نقاط مختلف می‌باشد.

ماتریس حساسیت^{۶۷} یا ماتریس ژاکوبین^{۶۸} به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(p) = \left[\frac{\delta T^T(p)}{\delta p} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\delta T_1}{\delta p_1} & \frac{\delta T_1}{\delta p_2} & \dots & \frac{\delta T_1}{\delta p_N} \\ \frac{\delta T_2}{\delta p_1} & \ddots & & \frac{\delta T_2}{\delta p_N} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta T_N}{\delta p_1} & \dots & \dots & \frac{\delta T_N}{\delta p_N} \end{bmatrix} \quad (2-24)$$

N: تعداد کل پارامترهای نامعلوم

I: تعداد کل اندازه‌گیری

المان‌های ماتریس حساسیت ضریب حساسیت^{۶۹} نامیده شده و با J_{ij} نشان داده می‌شود. برای معادلات خطی این ماتریس تابع پارامترهای مجهول نیست اما در حالت غیرخطی ماتریس دارای پارامتری وابسته به p (مجهول) می‌باشد.

ذکر این نکته ضروری است که ماتریس $|J^T J|$ که شرط شناسایی^{۷۰} نامیده می‌شود نبایستی برابر صفر^{۷۱} باشد زیرا اگر این مقدار برابر صفر با حتی مقداری بسیار کوچک باشد، پارامتر مجهول p را نمی‌توان از پروسه معادلات تکراری به دست آورد.

^{۶۵} Steepest Descent Method

^{۶۶} transient

^{۶۷} Sensitivity matrix

^{۶۸} Jacobian matrix

^{۶۹} Sensitivity Coefficient

مسائلی که شرط شناسایی تقریباً صفر داشته باشند مسائل ناهنجار نامیده می‌شوند. مسائل انتقال حرارت معکوس عموماً از این دسته‌اند؛ مخصوصاً در نزدیکی حدس اولیه‌ای که برای پارامترهای نامعلوم بکار می‌بریم.

ضریب حساسیت J_{ij} ، میدان حساسیت دمای اندازه‌گیری شده T_i با توجه به تغییرات پارامتر مجهول p می‌باشد. میزان اندک J_{ij} نشان‌دهنده این است که تغییرات زیاد p_j باعث تغییرات اندکی در T_i می‌شوند به آسانی قابل فهم است که در این گونه موارد تخمین p_j کاری دشوار می‌باشد زیرا عملاً هر مقدار T_i گستره بزرگی از p_j ها را در برمی‌گیرد. در حقیقت وقتی ضریب حساسیت کوچک است $J^T J \simeq 0$ بوده و مسئله ما ناهنجار می‌باشد. به همین علت داشتن ضرایب حساسیت غیر وابسته خطی با اندازه بزرگ مطلوب می‌باشد، تا مسئله معکوس به خطاهای اندازه‌گیری حساس نبوده و پارامترها به صورت دقیق تخمین زده شوند. لازم است که تغییرات ضریب حساسیت قبل از حل مسئله آزمایش شود. این گونه آزمایش‌ها بهترین مکان حس‌گر و زمان اندازه‌گیری در طی حل را به دست می‌دهد.

لونبرگ - مارکارت برای کاستن از این وابستگی، از دو پارامتر μ^k (عامل استهلاک)^{۷۲} و Ω (ماتریس قطری)^{۷۳} استفاده کردند. هدف از اعمال ترم $\mu^k \Omega^k$ کاهش نوسانات و ناپایداری‌ها در طی شرایط ناهنجار؛ از طریق بزرگ کردن مؤلفه‌هایش در مقایسه با $J^T J$ در شرایط مورد نیاز، می‌باشد.

عامل استهلاک در ابتدای پروسه تکرار بزرگ در نظر گرفته می‌شود تا در ناحیه اطراف حدس اولیه بکار رود. با کمک این روش دیگر لازم نیست ماتریس $J^T J$ در ابتدای پروسه نامساوی صفر باشد. چون در ابتدا ضریب μ^k بزرگ است. روش لونبرگ یک به سمت متد کاهشی شدید گرایش دارد، اما با ادامه پروسه

^{۷۰} Identifiability Condition

^{۷۱} non-singular

^{۷۲} Damping parameter

^{۷۳} Diagonal matrix

تکرار و کوچک‌تر شدن ضریب μ^k در طی این پروسه، روش به سمت روش گوس^{۷۴} گرایش پیدا می‌کند. شرط توقف پیشنهادی توسط دنیس^{۷۵} و شنابل^{۷۶} کوچک بودن فرم کوچک‌ترین مربعات، گرادیان تابع مجهول و همگرایی پارامترها را چک می‌کند.

الگوریتم محاسباتی لونبرگ - مارکارت را می‌توان در موارد استفاده از چندین حس گر ارتقا بخشید.

۲-۵-۸-۲ روش‌های محاسبه ضرایب حساسیت

روش‌های متعددی جهت محاسبه ضرایب حساسیت موجود است که در ادامه سه نمونه از آن‌ها ذکر شده است.

i. تحلیل مستقیم^{۷۷}

ii. مسائل مقدار مرزی^{۷۸}

iii. تقریب تفاضل محدود^{۷۹}

i. روش تحلیل مستقیم: اگر مسئله مستقیم هدایت خطی بوده و حل تحلیل برای حوزه دمایی موجود باشد، ضریب حساسیت با تفاضل گیری جواب در جهت p_j (پارامتر نامعلوم) به دست می‌آید.

اگر $J_{pj} = \frac{\delta T_i}{\delta p_j}$ غیر وابسته به p_j باشد، آنگاه مسئله معکوس جهت محاسبه p_j خطی خواهد بود.

در مسائلی که چندین درجه بزرگی موجود باشد، ضریب حساسیت نسبت به هر کدام از پارامترها باید چندین مرتبه بزرگ‌تر باشد که این موضوع خود باعث ایجاد مشکلات و سختی‌هایی در مقایسه و

^{۷۴} Gauss Method

^{۷۵} Dennis

^{۷۶} Schnabel

^{۷۷} Direct Analytic Solution

^{۷۸} The Boundary Value Problem Approach

^{۷۹} Finite Difference Approximation

شناسایی وابستگی خطی بودن شود. این سختی‌ها را می‌توان با آنالیز ابعادی ضرایب حساسیت یا با استفاده از فرمول زیر کاهش داد:

$$J_{p_i} = p_j \frac{\delta T}{\delta p_j} \quad (25-2)$$

با توجه به اینکه ضریب حساسیت ذکرشده در بالا هم واحد با درجه حرارت است، مقایسه مرتبه بزرگی آن راحت‌تر است.

- ii. مسائل مقدار مرزی: یک مسئله مقدار مرزی می‌تواند با تفاضل گیری از مسئله مستقیم اصلی نسبت به ضرایب مجهول جهت به دست آوردن ضرایب حساسیت بکار رود. اگر مسئله هدایت مستقیم خطی باشد، ساختار مسئله حساسیت مربوطه ساده و مستقیم است. در حالت‌های پیشرفته حل ضرایب حساسیت می‌تواند بسیار زمان‌بر باشد و بایستی از روش‌های عددی مثل تفاضل محدود بهره گرفت.
- iii. تقریب تفاضل محدود: می‌توان تفاضل اول ظاهرشده در تعریف J_{ij} را از طریق تفاضل پیشرو یا تفاضل مرکزی حل کرد اما برای حل به این روش لازم است N مجهول اضافی در حالت اول و $2N$ مجهول اضافی در حالت دوم محاسبه شود که خود بسیار زمان‌بر خواهد بود.

۲-۸-۶ تکنیک II

۲-۸-۱-۶ متد گرادیان مزدوج^{۸۰}

روش گرادیان مزدوج روش تکرار مستقیم و قدرتمندی در زمینه حل مسائل خطی و غیرخطی معکوس می‌باشد. در پروسه تکرار، در هر تکرار یک گام مناسب در جهت ترولی^{۸۱} انتخاب می‌شود تا تابع موردنظر را کاهش دهد.

^{۸۰} THE CONJUGATE GRADIENT METHOD

^{۸۱} Direction of descent

جهت نزولی از ترکیب خطی جهت منفی گرادیان در گام تکرار حاضر با جهت نزولی تکرار پیشین به دست می‌آید. این ترکیب خطی به گونه‌ای است که زاویه جهت نزولی و جهت منفی گرادیان کمتر از 90° باشد تا مینیمم شدن تابع مورد نظر حتمی گردد. [۳۴، ۳۷-۳۹] روش گرادیان مزدوج با شرط توقف مناسب به دست آمده از تکنیک تنظیم تکرارها^{۸۲}، که در آن مقدار تکرارها به گونه‌ای انتخاب می‌شود که جواب پایدار به دست دهد، در حل مسائل معکوس بکار می‌رود.

الگوریتم روش به صورت گام‌های زیر است:

- مسئله مستقیم
- مسئله معکوس
- پروسه تکرار
- شرط توقف
- الگوریتم محاسباتی

در ادامه به بررسی گام‌های فوق پرداخته خواهد شد.

در حل مسئله معکوس شار حرارتی مجهول را به صورت تابعی خطی به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$g_p(t) = \sum_{j=1}^N p_j c_j(t) \quad (2-26)$$

که در آن $c_j(t)$ تابع تست معلوم و p_j پارامترهای مجهول می‌باشند.

بدین ترتیب تخمین تابع مجهول $g_p(t)$ به تخمین پارامترهای مجهول p_j ، $j=1, \dots, N$ ، تقلیل

می‌یابد. این گونه پارامترها را می‌توان با روش تفاضل مربعات مجهولی^{۸۳} حل کرد.

^{۸۲} Iterative regularization techniques

^{۸۳} Minimization of the ordinary least squares norm

$$S(p) = [Y - T(p)]^T [Y - T(p)] = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(p)]^2 \quad (27-2)$$

S: مجموع مربعات خطاها یا تابع موردنظر

p: بردار پارامترهای مجهول

$T_i(p)$: دمای تخمین زده شده در زمان t_i

Y_i : دمای اندازه گیری شده در زمان t_i

N: تعداد کل پارامترهای مجهول

I: تعداد کل اندازه گیری ها، به طوری که $I \geq N$

ذکر دو نکته در اینجا ضروری می نماید:

۱. بردار گرادیان جهت سریع ترین افزایش را نشان می دهد، لذا قرینه بردار جهت سریع ترین کاهش را

نشان می دهد. بنابراین روش هایی که از بردار گرادیان جهت بهینه سازی استفاده می کنند نسبت به

روش های دیگر سریع تر به نقطه مینیمم می رسند.

۲. بیشترین نرخ تغییر تابع f در هر نقطه X^* ، برابر اندازه بردار گرادیان در آن نقطه است. در بیشتر

روش های بهینه سازی نیاز است که نقطه مینیمم در یک راستای مشخص تعیین گردد. یعنی لازم

است نرخ تغییر تابع هدف از یک نقطه مانند $\bar{X}_i$ در راستای مشخصی مانند $\bar{S}_i$ نسبت به پارامتری

چون λ محاسبه شود.

لذا اگر نرخ تغییر تابع در راستای $\bar{S}_i$ برابر باشد با

$$\frac{dF}{d\lambda} = \sum \frac{\delta f}{\delta x_j} \cdot S_{ij} = \nabla f^T \cdot \bar{S}_i \quad (28-2)$$

و در صورتی که λ^* تابع f را در جهت $\bar{S}_i$ مینم کند؛ مینم تابع در نقطه $\bar{x}_i + \lambda^* \cdot \bar{S}_i$ خواهد بود زیرا

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda = \lambda^*} = \nabla f^T \cdot \bar{S}_i = 0 \quad (29-2)$$

پروسه تکرار در روش گرادیان مزدوج جهت کمینه سازی نرم $s(p)$ داده شده به صورت زیر می باشد

$$p^{k+1} = p^k - \beta^k d^k \quad (30-2)$$

جایی که β^k جستجوگر سائز گام^{۸۴}، d^k جهت نزول^{۸۵} و بالانویس k نمایانگر تعداد تکرار است.

جهت نزولی به صورت پیوستگی جهت گرادیان و $\nabla S(p^k)$ و جهت نزولی تکرار قبلی d^{k-1} می باشد که فرم ریاضی آن به صورت زیر است:

$$d^k = \nabla S(p^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (31-2)$$

تعاریف گوناگونی برای ضریب همبستگی^{۸۶} γ^k موجود است. به عنوان مثال بسط پولاک^{۸۷} - ریبیر^{۸۸}

(معادله ۲-۳۲) در مراجع [۳۷،۴۰،۴۱] و بسط فلچر^{۸۹} - ریوز^{۹۰} (معادله ۲-۳۳) در مراجع [۳۷،۳۸،۴۰] آمده است.

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N \{ [\nabla S(p^k)]_j [\nabla S(p^k) - \nabla S(p^{k-1})]_j \}}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(p^{k-1})]_j^2} \quad k = 1, 2, \dots \quad (32-2)$$

^{۸۴} search step size

^{۸۵} direction of descent

^{۸۶} Conjugation coefficient

^{۸۷} Polak

^{۸۸} Ribiere

^{۸۹} Fletcher

^{۹۰} Reeves

وقتی که برای $k=0$ شرط مرزی $\gamma^* = 0$ برقرار باشد.

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(p^k)]_j^T}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(p^{k-1})]_j^T} \quad k = 1, 2, \dots \quad (33-2)$$

بسط جهت گرادیان نسبت به پارامتر مجهول p به صورت

$$\nabla S(p^k) = -\tau (J^k)^T [Y - T(p^k)] \quad (34-2)$$

می باشد. جایی که J^k ماتریس حساسیت می باشد. به عبارت دیگر درایه J ام جهت گرادیان را می توان

از فرم صریح

$$[\nabla S(p^k)]_j = -\tau \sum_{i=1}^I \frac{\delta T_i^k}{\delta p_j} [Y_i - T_i(p^k)] \quad j = 1, \dots, N \quad (35-2)$$

به دست آورد.

هرکدام از بسط های ذکر شده در مراجع جهت γ^k باعث ایجاد زاویه کمتر از 90° بین جهت نزول و

جهت منفی گرادیان شده، در نتیجه تابع $S(p)$ بهینه می گردد. [۳۶]

این بسط ها در مسائل خطی هم ارز بوده اما در مسائل غیرخطی، بر طبق برخی مشاهدات، بسط

پولاک - ریبر باعث بهبود همگرایی می شود. باید دانست که اگر $\gamma^k = 0$ باشد، در تمامی تکرارها جهت

نزول همان جهت گرادیان می باشد و طول گام بهینه کاهشی به دست خواهد آمد گر چه روش گام بهینه

کاهشی به سرعت روش گرادیان مزدوج همگرا نمی شود. گام جستجو β^k از کمینه ساختن تابع $S(p^{k+1})$

نسبت به β^k به دست می آید.

$$\min_{\beta^k} S(p^{k+1}) = \min_{\beta^k} [Y - T(p^{k+1})]^T [Y - T(p^{k+1})] \quad (36-2)$$

با جایگذاری p^{k+1} از معادله (۳۰-۲) در معادله بالا و همچنین خطی سازی بردار دمای $T(p^k - \beta^k J^k)$ با بسط سری تیلور گام جستجو به صورت ماتریس زیر به دست خواهد آمد:

$$\beta^k = \frac{[J^k d^k]^T [T(p^k) - Y]}{[J^k d^k]^T [J^k d^k]} \quad (37-2)$$

پس از محاسبه ماتریس حساسیت J^k به یکی از روش‌های گفته شده در قبل، جهت گرادیان $\nabla S(p^k)$ ، ضریب همبستگی γ^k و گام جستجو β^k پروسه تکرار تا رسیدن به شرط توقف که طبق قانون اختلاف^{۹۱} می‌باشد ادامه پیدا می‌کند.

$$S(p^{k+1}) < \varepsilon \quad \text{شرط توقف} \quad (38-2)$$

$$|Y(t_i) - T(x_{meas}, t_i)| \approx \sigma_i \quad (39-2)$$

σ : انحراف معیار استاندارد

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^I \sigma_i^2 = I\sigma^2 \quad (40-2)$$

اگرچه استفاده از این فرضیه جهت تکنیک I لازم نیست؛ زیرا تکنیک اول به صورت اتوماتیک با کنترل پارامتر استهلاک μ^k و کاهش شدید صعود بردار پارامترها در پروسه تکرار از ناپایداری جواب‌ها جلوگیری می‌کند. استفاده از قانون اختلاف نیازمند اطلاعات اولیه از انحراف استاندارد خطای اندازه‌گیری می‌باشد. یک روش جایگزین می‌تواند استفاده از اندازه‌گیری‌های اضافی باشد.

۲-۶-۸-۲ الگوریتم محاسباتی تکنیک دوم

با فرض آنکه $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_L)$ دماهای اندازه‌گیری شده در زمان‌های t_i ($i=1, 2, \dots, L$) بوده و p^0 حدس اولیه برای بردار مجهول p باشد. ابتدا $k=0$ قرار داده و سپس:

^{۹۱} Discrepancy principle

گام ۱: حل معادله مستقیم حرارت با استفاده از p^k و به دست آوردن بردار دمای اندازه‌گیری

$$T(p^k) = (T_1, T_2, \dots, T_L)$$

گام ۲: ارائه حل اگر شرط توقف (۳۸-۲) ارضا نشده باشد.

گام ۳: حل ماتریس حساسیت J^k از معادله (۳۵-۲) به یکی از روش‌های گفته‌شده

گام ۴: با دانستن Y ، J^k و $T(p^k)$ جهت گرادیان $\nabla S(p^k)$ از معادله (۳۴-۲) به دست آمده

سپس γ^k از معادلات (۳۲-۲) یا (۳۳-۲) محاسبه می‌گردد.

گام ۵: جهت نزول d^k از معادله (۳۱-۲) محاسبه می‌آید.

گام ۶: با دانستن d^k ، Y ، J^k و $T(p^k)$ گام جستجو β^k از معادله (۳۷-۲) به دست می‌آید.

گام ۷: با دانستن p^k و β^k و d^k حدس جدید p^{k+1} از معادله (۳۰-۲) به دست می‌آید.

گام ۸: بجای k ، $k+1$ را جایگزین کرده به گام ۱ بازمی‌گردد.

۳-۶-۸-۲ اندازه‌گیری پیوسته

تا اینجا فرض بر گسسته بودن دامنه زمانی و دماهای اندازه‌گیری شده بوده است. در حالتی که تعداد داده‌ها به اندازه‌ای باشد که بتوان آن‌ها را تقریباً پیوسته در نظر گرفت نیازمند برخی اصلاحات در فرم اولیه، بردار گرادیان (معادله ۴-۱۸)، گام جستجو (معادله ۴-۲۱) و تلورانس (معادله ۴-۲۴) مورد استفاده در قانون اختلاف می‌باشد.

با فرض پیوستگی اطلاعات اندازه‌گیری شده انتگرال تابع در بازه زمان $0 \leq t \leq t_f$ به صورت:

$$S(p) = \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(x, t; p)]^2 dt \quad (۴۱-۲)$$

نوشته شده که تابع گرادیان معادله بالا نیز به صورت

$$\nabla S(p) = -\int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(x_{\text{meas}}, t; p)] \frac{\delta T}{\delta p} dt \quad (42-2)$$

نوشته می‌گردد. به عبارت دیگر هر جزء بردار گرادیان به فرم

$$[\nabla S(p)]_j = -\int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(x_{\text{meas}}, t; p)] \frac{\delta T}{\delta p_j} dt \quad j = 1, \dots, N \quad (43-2)$$

خواهد بود. در ادامه گام جستجو β^k نیز باید به فرم پیوسته برای دامنه زمان بازنویسی گردد.

که این مهم با بهینه‌سازی تابع $S(p)$ برحسب β^k در دامنه محقق می‌گردد. لذا

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} [T(x_{\text{meas}}, t; p) - Y(t)] \left[\frac{\delta T}{\delta p_j} \right] d^k dt}{\int_{t=0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\delta T}{\delta p_j} \right]^T d^k \right\} dt} \quad (44-2)$$

که این معادله بسیار شبیه به فرم گسسته می‌باشد.

تلورانس نیز به صورت $\varepsilon = \sigma^2 t_f$ نوشته می‌گردد و الگوریتم حل همچنان دست‌نخورده باقی خواهد

ماند.

در مسائلی که هدف تعیین ضرایب پارامتری شده تابع مجهول باشد تکنیک III راه‌حلی جایگزین

جهت پرهیز از حل چندباره ماتریس حساسیت در به دست آوردن جهت گرادیان و گام جستجو می‌باشد.

۷-۸-۲ تکنیک III

۱-۷-۸-۲ روش گرادیان مزدوج با مسئله اضافی جهت تخمین پارامترها

در این بخش به تشریح روشی دیگر از متد گرادیان مزدوج پرداخته می‌شود که با کمک حل دو

مسئله کمکی، مسئله حساسیت و مسئله اضافی، به حل گام جستجو β^k و معادله گرادیان $\nabla s(p^k)$

می‌پردازد. این روش مخصوصاً در مسائلی که هدف یافتن ضرایب توابع امتحانی^{۹۲} بکار رفته در فرم تابع مجهول می‌باشد کاربرد دارد.

جهت راحتی مراحل بعدی آنالیز، مقادیر اندازه‌گیری شده پیوسته فرض می‌گردد.

فرم معادله تفاضل مربعات به صورت

$$S(P) = \int_{t=0}^{t_f} [Y(t) - T(x_{\text{meas}}, t; P)]^2 dt \quad (۴۵-۲)$$

است. مطابق قبل $Y(t)$ دمای اندازه‌گیری شده و $T(x_{\text{meas}}, t; P)$ دمای تخمین زده شده در نقطه x_{meas} در بازه زمانی t_f می‌باشد.

گام‌های اصلی حل به شرح زیر بوده که در ادامه به شرح بیشتر هر کدام پرداخته می‌شود.

- مسئله مستقیم
- مسئله معکوس
- مسئله حساسیت
- مسئله اضافی الحاقی
- معادله گرادیان
- پروسه تکرار
- شرط توقف
- الگوریتم محاسباتی

^{۹۲} Trial function

گام‌های اول و دوم همانند سابق بوده لذا از شرح مجدد خودداری می‌گردد. در گام سوم تابع حساسیت $\Delta T(x, t)$ حاصل حل مسئله حساسیت به صورت مشتق وابسته دما در جهت آشفتگی^{۹۳} تابع مجهول تعریف می‌شود.

این مسئله می‌تواند با فرض اینکه دما با مقدار $\Delta T(x, t)$ دچار آشفتگی شده وقتی که چشمه حرارتی $g_p(t)$ با میزان $\Delta g_p(t)$ دچار انحراف گردیده به دست آید. که انحراف $\Delta g_p(t)$ از مجموع انحراف هر یک از پارامترهایش حاصل شده است.

$$\Delta g_p(t) = \sum_{j=1}^N \Delta p_j c_j(t) \quad (۴۶-۲)$$

اکنون اگر در معادله مستقیم $T(x, t)$ با $[T(x, t) + \Delta T(x, t)]$ و $g_p(t)$ با $[\Delta g_p(t) + g_p(t)]$ جایگزین گردد، معادله حساسیت به دست خواهد آمد.

عامل لاگرانژ $\lambda(x, t)$ جهت بهینه‌سازی تابع استفاده می‌گردد. این عامل جهت محاسبه تابع گرادیان با کمک حل مسئله الحاقی در مسئله حساسیت لازم می‌باشد. در این راستا با ضرب معادله مشتق جزئی مسئله مستقیم در ضریب لاگرانژ و انتگرال‌گیری آن در حوزه زمان و جمع معادله حاصل بافرم اولیه تابع $S(p)$ ، $S(p)$ جایگزین به دست می‌آید.

مشتق وابسته $S(p)$ در جهت آشفتگی $[\Delta S(p)]$ از جایگزینی $[T(x, t) + \Delta T(x, t)]$ ، $[g_p(t) + \Delta g_p(t)]$ و $S(p) + \Delta S(p)$ بجای $T(x, t)$ ، $g_p(t)$ و $S(p)$ در معادله به دست آمده و صرف نظر کردن از ترم‌های درجه دوم حاصل می‌شود. می‌توان با حل جزء به جزء طرف راست مسئله و صرف نظر کردن از انتگرال‌های شامل ΔT به فرم ساده شده معادله الحاقی دست یافت.

بنا بر تعریف، مشتق وابسته $S(p)$ در جهت بردار Δp به صورت

^{۹۳} perturbation

$$\Delta S(p) = \sum_{j=1}^N [\nabla S(p)]_j \Delta p_j \quad (47-2)$$

نوشته می‌شود. استفاده از معادله الحاقی برای آن دسته از مسائلی که حل تحلیل نداشته و نیاز به استفاده از روش‌های تفاضل محدود است، مناسب می‌باشد. با این روش، گرادیان با حل تنها یک معادله الحاقی به دست می‌آید. درحالی‌که روش دوم نیازمند حل N باره مسئله مستقیم جهت به دست آمدن ضرایب حساسیت می‌باشد.

گام جستجو که جهت بهینه‌سازی تابع $S(p)$ در هر تکرار بکار می‌رود از خطی سازی دمای تخمین زده شده $T(x_{\text{meas}}, t; P^k - \beta^k d^k)$ در فرم بهینه تابع $S(p^{k+1})$ با کمک بسط سری تیلور به دست می‌آید.

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} [T(x_{\text{meas}}, t; P^k) - Y(t)] \Delta T(x_{\text{meas}}, t; d^k) dt}{\int_{t=0}^{t_f} [\Delta T(x_{\text{meas}}, t; d^k)]^2 dt} \quad (48-2)$$

که $\Delta T(x_{\text{meas}}, t; d^k)$ حل مسئله حساسیت حاصل از قرار دادن $j = 1, \dots, N$ $\Delta p_j = d_j^k$ در محاسبه $\Delta g_p(t)$ معادله (46-2) می‌باشد.

باید توجه داشت که در هر گام تکرار لازم است یک مسئله حساسیت جهت محاسبه β^k حل گردد.

شرط توقف نیز همانند تکنیک II به صورت $\varepsilon = \delta^2 t_f$ می‌باشد.

۲-۷-۸-۲ الگوریتم محاسباتی تکنیک سوم

به صورت خلاصه الگوریتم حل به صورت زیر می‌باشد. با قرار دادن $k = 0$ ، فرضیات $Y(t)$ و p^0

مطابق تکنیک II می‌باشد.

مرحله ۱: محاسبه $g_p(t)$ از معادله $g_p(t) = \sum_{j=1}^N p_j c_j(t)$ و آنگاه حل معادله مستقیم جهت به

دست آوردن $T(x, t)$

مرحله ۲: بررسی شرط توقف و ارائه حل در صورت ارضاء نشدن آن

مرحله ۳: حل معادله الحاقی جهت محاسبه $\lambda(x, t)$ با دانستن $T(x, t)$ و $Y(t)$

مرحله ۴: با دانستن $\lambda(x, t)$ ، به دست آوردن پارامترهای بردار گرادیان $\nabla S(p)$

مرحله ۵: با دانستن $\nabla S(p)$ ، محاسبه γ^k و آنگاه جهت نزول d^k

مرحله ۶: با قرار دادن $\Delta p^k = d^k$ ، محاسبه $\Delta g_p(t)$ و سپس حل مسئله حساسیت برای به دست

آوردن $\Delta T(x_{\text{meas}}, t; d^k)$

مرحله ۷: با دانستن $\Delta T(x_{\text{meas}}, t; d^k)$ ، به دست آوردن گام جستجو β^k

مرحله ۸: با دانستن β^k و d^k ، محاسبه تخمین جدید p^{k+1} و جایگزینی k با $k+1$ و آنگاه بازگشت

به مرحله ۱

۸-۸-۲ تکنیک IV

۱-۸-۸-۲ گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای تخمین توابع

در این روش هیچ اطلاعات اولیه از فرم تابع مجهول به جز فضای تابع موجود نیست. در اینجا تابع

$S[g_p(t)]$ به صورت زیر تعریف می گردد.

$$S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \{Y(t) - T[x_{\text{meas}}, t; g_p(t)]\}^2 dt \quad (۴۹-۲)$$

و گامهای حل نیز مانند تکنیک III می باشد.

تفاوت این روش با دو تکنیک قبل در این است که $g_p(t)$ دیگر به صورت ساده پارامتری نوشته نمی شود. حل مسائل الحاقی و حساسیت در حالت کلی بسیار شبیه حالت تکنیک III می باشد. اما جهت محاسبه معادله گرادیان دیگر نمی توان مانند گذشته عمل نمود.

از مقایسه مسئله الحاقی و $\Delta S(g_p(t))$ می توان معادله گرادیان $\nabla S[g_p(t)]$ را به دست آورد.

$$\Delta S[g_p(t)] = \int_{t=0}^{t_f} \nabla S(g_p(t)) \Delta g_p(t) dt \quad (50-2)$$

تابع مجهول $g_p(t)$ از بهینه سازی $S[g_p(t)]$ به دست خواهد آمد. لذا پروسه تکرار به صورت

$$g_p^{k+1}(t) = g_p^k(t) - \beta^k d^k(t) \quad (51-2)$$

خواهد بود. که در آن $d^k(t)$ ، جهت نزول، به صورت زیر می باشد.

$$d^k(t) = \nabla S[g_p^k(t)] + \gamma^k d^{k-1}(t) \quad (52-2)$$

همچنین ضریب γ^k نیز می تواند از هر کدام از بسط های پولاک - ریبیر و یا فلچر - ریوز به دست آید.

در انتها β^k نیز از بهینه سازی $S[g_p^{k+1}(t)]$ نسبت به β^k و پس از ساده سازی با اعمال بسط سری تیلور، مشتق گیری نسبت به β^k و مساوی صفر قرار دادن آن، به دست می آید.

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f} \{T[x_{\text{meas}}, t; g_p^k(t)] - Y(t)\} \Delta T[x_{\text{meas}}, t; d^k(t)] dt}{\int_{t=0}^{t_f} \{\Delta T[x_{\text{meas}}, t; d^k(t)]\}^2 dt} \quad (53-2)$$

که در آن $\Delta T[x_{\text{meas}}, t; d^k(t)]$ جواب مسئله حساسیت با جایگزینی $\Delta g_p^k(t) = d^k(t)$ می باشد.

از آنجاکه معادله گرادیان در زمان نهایی t_f همواره صفر می‌باشد لذا حدس اولیه $g_p(t)$ هرگز تحت پروسه تکرار تغییر نمی‌کند. لذا تابع تخمین زده شده می‌تواند از جواب دقیق منحرف گردد که جهت غلبه بر این موضوع می‌توان از بازه زمانی بزرگ‌تر از بازه مورد نیاز استفاده نمود. همچنین می‌توان با تکرار حل معکوس و استفاده از جواب تکرار قبل جهت حدس اولیه نیز اثر این مشکل را کاهش داد.

شرط توقف نیز مانند تکنیک پیشین $\varepsilon = \delta^2 t_f$ می‌باشد که در موارد بدون خطا می‌تواند مقداری بسیار کوچک یا حتی صفر داشته باشد.

۲-۸-۸-۲ الگوریتم محاسباتی تکنیک چهارم

به صورت خلاصه الگوریتم محاسباتی این تکنیک به شرح زیر می‌باشد:

مرحله ۱: حل معادله مستقیم و محاسبه $T(x, t)$ بر اساس $g_p^k(t)$

مرحله ۲: بررسی شرط توقف و ادامه حل در صورت ارضا نشدن آن

مرحله ۳: با دانستن $T(x_{meas}, t)$ و $Y(t)$ ، حل معادله الحاقی و به دست آوردن $\lambda(x, t)$

مرحله ۴: حل $\nabla S[g_p^k(t)]$ با دانستن $\lambda(x, t)$

مرحله ۵: با دانستن گرادیان $\nabla S[g_p^k(t)]$ ، محاسبه γ^k از هرکدام از بسط‌های ذکر شده و نیز

جهت نزول d^k

مرحله ۶: با قرار دادن $\Delta g_p^k = d^k(t)$ و حل معادله حساسیت، به دست آوردن

$$\Delta T[x_{meas}, t; d^k(t)]$$

مرحله ۷: با دانستن $\Delta T[x_{meas}, t; d^k(t)]$ ، به دست آوردن گام جستجو β^k

مرحله ۸: با دانستن گام جستجو β^k و جهت نزول $d^k(t)$ ، محاسبه مقدار جدید $g_p^{k+1}(t)$ و بازگشت

به مرحله ۱

حل معادله مستقیم جواب‌های دقیق $Y_{ex}(t_i)$ را به دست می‌دهد.

برای محاسبه داده‌های دارای خطا می‌توان از راه‌حل زیر استفاده نمود:

$$Y(t_i) = Y_{ex}(t_i) + w\sigma \quad (54-2)$$

که در آن w متغیر رندوم با پراکندگی نرمال^{۹۴} که دارای هسته اصلی صفر^{۹۵} و انحراف معیار استاندارد^{۹۶} می‌باشد. با اطمینان ۹۹٪ به صورت $-2.576 < w < 2.576$ بوده که می‌تواند از زیر برنامه IMSL یا DRRNOR به دست آید [۳۱]. این مقادیر می‌تواند بجای داده‌های آزمایشگاهی اندازه‌گیری شده جهت حل معکوس استفاده شود.

^{۹۴} Normal distribution

^{۹۵} Zero mean

^{۹۶} Unitary standard deviation

فصل سوم: مدل ریاضی

۳-۱ مقدمه

طبیعت پیچیده انتقال حرارت در بافت‌های زنده مانع مدل‌سازی ریاضی دقیقی شده است. فرضیات و ساده‌سازی‌هایی باید انجام شود. در ادامه مروری مختصر بر معادلات و توزیع دما در بافت‌های زنده خواهیم داشت.

۳-۲ مدل‌های هدایت گرمایی

از معادله انتقال حرارت زیستی پنز^{۹۷} [۲۵] شروع می‌کنیم که در سال ۱۹۴۸ ارائه شده است. ویژگی این معادله ساده بودن آن و کاربردی بودنش در شرایط خاص است. مدل‌هایی که در این بخش ارائه گردیده مدل‌های ماکروسکوپیکی است که بیشتر از سایر مدل‌ها در توصیف انتقال گرما مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳-۲-۱ مدل پنز

معادله پنز بر اساس فرض‌های ساده کننده‌ای طبق فاکتور زیر است:

(۱) تعادل گرمایی^{۹۸}: انتقال حرارت بین خون و بافت در بسترهای کپیلاری^{۹۹} و همچنین رگ‌ها انجام می‌شود. از این رو از انتقال حرارت بین خون و بافت قبل و بعد از ورود به بافت صرف نظر می‌شود.

(۲) تزریق وریدی خون: جریان خون در مویرگ‌های کوچک، ایزوتروپیک فرض می‌شود. این فرض باعث می‌شود جهت جریان کم‌اهمیت شود.

(۳) آرایش رگ‌ها:

رگ‌های خونی بزرگ‌تر در همسایگی بستر مویرگ‌های کپیلاری هیچ نقشی در تبادل حرارت بین بافت و خون مویرگ ایفا نمی‌کند. بنابراین، مدل پنز همدسه‌ی رگ‌های اطراف را در نظر نمی‌گیرد.

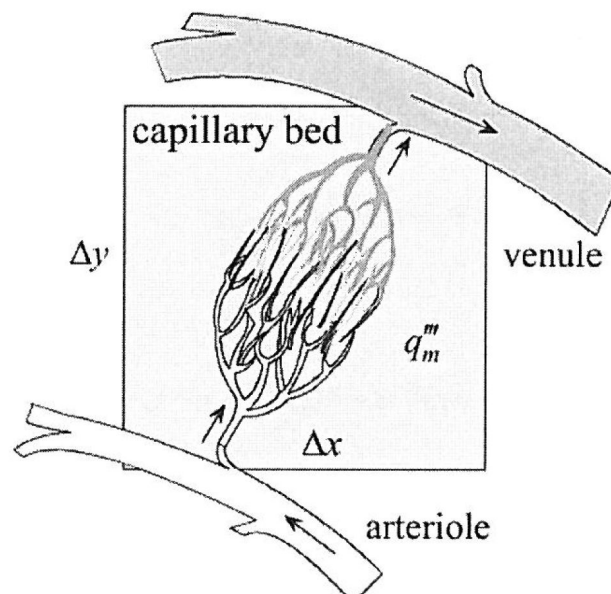
^{۹۷} Pennes

^{۹۸} equilibration site

^{۹۹} capillary

۴) دمای خون:

فرض می‌شود که خون با همان دمای هسته بدن T_a به مویرگ‌ها می‌رسد که به‌طور مداوم با بافت‌ها که در دمای T قرار دارند، تبادل گرمایی می‌کنند. بر اساس این فرضیات معادله پنز اثر خون را به‌عنوان یک منبع حرارتی ایزوتروپیک (یا چاه گرمایی) مدل کرده است که با نرخ جریان خون و اختلاف دمای بین T_a و T متناسب است. در این مدل، خونی که مسیر خود را آغاز می‌کند، تا زمانی که به مویرگ‌ها و رگ‌های درون بافت‌ها برسد در نظر گرفته می‌شود (المان بافتی که خون در آن وارد شده است را در شکل ۱-۳. در نظر بگیرید). المان به‌اندازه کافی بزرگ است که رگ‌ها و مویرگ‌ها را در برداشته باشد، اما در مقایسه با ابعادی که ما مورد بررسی قرار می‌دهیم کوچک است.



شکل ۱-۳. المان در نظر گرفته شده برای به دست آوردن معادله انتقال حرارت زیستی پنز

با نوشتن معادله انرژی به صورت زیر داریم:

$$\dot{E}_{in} + \dot{E}_g - \dot{E}_{out} = E \quad (1-3)$$

در اینجا از اثر جابجایی صرف نظر شده و به جای آن ترم مربوط به تزریق وریدی خون اضافه شده است. ساده ترین راه برای بررسی این ترم این است که آن را به صورت ترم تولید انرژی در نظر بگیریم.

اگر نرخ انرژی اضافه شده توسط خون در واحد حجم بافت: q''_b

انرژی متابولیک تولید شده در واحد حجم بافت: q'''_m

با در نظر گرفتن المان موجود در شکل ۱ خون با دمای مرکزی بدن به آن وارد می شود. T_a و در داخل المان به دمای تعادل المان بافت که T است، می رسد.

$$q'''_b = \rho_b C_b \dot{W}_b (T_a - T) \quad (2-3)$$

که در معادله فوق، C_b گرمای ویژه خون، $\dot{W}_b$ نرخ خون تزریق وریدی بر واحد حجم بافت و ρ_b چگالی خون هست.

با استفاده از معادله انرژی و حذف کردن ترم جابجایی^{۱۰۰} و استفاده از موارد فوق داریم:

$$\nabla \cdot k \nabla T + \rho_b C_b \dot{W}_b (T_a - T) + q'''_m = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3-3)$$

که C گرمای ویژه بافت، k هدایت گرمایی و ρ چگالی بافت است.

در معادله فوق اولین ترم مربوط به هدایت در ۳ جهت است. با توجه به سیستم مختصات مورد نظر ما به سه حالت زیر تبدیل می شود:

مختصات کارتزین،

$$\nabla \cdot k (\nabla T) = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) \quad (4-3)$$

مختصات استوانه ای،

^{۱۰۰} convection

$$\nabla \cdot k(\nabla T) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) \quad (5-3)$$

مختصات کروی،

$$\nabla \cdot k(\nabla T) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \quad (6-3)$$

قابل توجه است که نقش ریاضیات ترم تزریق وریدی در معادله پنز را می توان مانند اثر جابجایی در سطح پره ها در نظر گرفت.

معادله پنز عنوان بسیاری از مطالعات و تحقیقات بوده است. در ادامه خلاصه ای از انتقادهای انجام شده توسط افراد مختلف ارائه می شود. البته بیشتر توجه روی ۴ فرض انجام شده برای فرمول پنز است. اختلاف بین نتایج و تئوری و آزمایشگاهی به دلیل همین فرض ها هستند.

(۱) تعادل گرمایی: تعادل گرمایی در مویرگ ها اتفاق نمی افتد (فرض پنز). به جای آن، تعادل گرمایی در رگ های pre-artery یا past-venal انجام می شود که دارای قطر بین $500 - 700 \mu m$ هستند. این نتیجه گیری بر اساس تئوری طول تعادل گرمایی L_e انجام شده است، که فاصله ای است که خون در رگ می رود تا با بافت های اطراف به تعادل گرمایی برسد. برای مویرگ های کپیلاری این فاصله بسیار کوچک تر از طول آن ها است. رگ هایی که در آن ها $\frac{L_e}{L} > 1$ معمولاً از نظر گرمایی بسیار با اهمیت هستند.

(۲) تزریق وریدی خون:

جهت دار بودن تزریق وریدی خون یک فاکتور مهم در تبادل انرژی بین رگ ها و بافت ها است. معادله پنز از این اثر صرف نظر کرده است. تزریق وریدی مویرگ ایزوتروپیک نیست، بلکه از arterioles به venules حرکت می کند.

(۳) آرایش رگ ها:

معادله پنز هندسه رگ‌های اطراف را در نظر نگرفته است. بنابراین، جنبه‌های مهمی از سیستم گردش در نظر گرفته نشده است، که شامل انرژی تبادل شده در رگ‌های بزرگ است که دلیل انتقال حرارت در مسیر برگشت رگ‌هاست.

(۴) دمای خون:

دمای خون از ابتدا تا مویرگ‌ها و رگ‌ها متفاوت است. برخلاف مدل پنز دمای خون در موقع رفت و برگشت T_a نیست و برخی جاها هم دقیقاً T که دمای بافت است، نیست.

(۵) کاربردی بودن:

با وجود مشکلات آن کاربردهای بسیار زیادی در موارد مختلف از قبیل خنک کاری، اندازه‌گیری تزریق وریدی خون و مدل‌سازی دمای بدن دارد. در برخی موارد نتایج تئوری با نتایج آزمایشگاهی همخوانی دارد. تحقیقات نشان داده است که معادله پنز در مواردی که قطر رگ بیشتر از $500 \mu m$ است و یا نسبت $\frac{L_e}{L} > 0.3$ درست است.

۳-۲-۲ مدل چن هلمز^{۱۱} [۲۶]

پیشرفت مهمی که در تکامل مدل‌سازی انتقال حرارت در بافت انجام شد، بررسی‌های چن و هولمز است که در آن تعادل خون با بافت قبل از رسیدن به arterioles اتفاق می‌افتد.

بر اساس این یافته آن‌ها ترم پرفیوژن را در معادله پنز تغییر دادند.

با در نظر گرفتن موارد مختلف و هندسه رگ‌ها فرمولاسیون به فرم زیر انجام شده است:

$$\nabla \cdot k \nabla T + \dot{w}_b^* \rho_b c_b (T_a^* - T) - \rho_b c_b \bar{u} \cdot \nabla T + \nabla \cdot k_p \nabla T + q_m = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۷-۳)$$

باینکه ترم دوم در این معادله شبیه ترم پرفیوژن معادله پنز است، در دو وجه متفاوت است.

(۱) $\dot{w}_b^*$ نرخ پرفیوژن است در محلی است که رگ‌ها چند شاخه می‌شوند.

(۲) T_a^* با دمای هسته بدن برابر نیست بلکه دمای خون در جریان بالادست است.

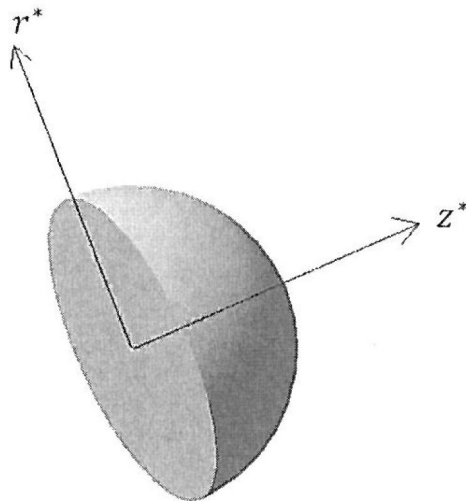
ترم سوم در معادله فوق معرف انرژی جابجا شده در اثر خون متعادل شده است. پارامتر $\bar{u}$ که نرخ جریان حجمی در واحد سطح است معرف جهت جریان خون است. این ترم مشابه ترم جابجایی در پره‌های متحرک است. ترم چهارم در معادله فوق معرف مکانیسم هدایت در زمان تعادل گرمایی است. نماد k_p معرف هدایت گرمایی ناشی از تزریق وریدی است که تابعی از سرعت جریان خون است.

فصل چهارم: تخمین شار حرارتی گذرا در حالت

متقارن محوری

۴-۱- فیزیک مسئله

هندسۀ مورد نظر یک پوستۀ نیم کروی است که شار حرارتی وابسته به زمان $q(t)$ روی سطح آن وارد می شود و می خواهیم آن را تخمین بزنیم.



شکل ۴-۱ نمایش فیزیک مسئله

۴-۲- محاسبه توزیع دما در حالت گذرا

در این بخش به بررسی روش حل معادلات انتقال حرارت متقارن محوری در حالت گذرا پرداخته می شود.

۴-۲-۱ معادله حاکم

در مورد بافت های زنده عموماً از مدل شناخته شده پنز جهت مدل کردن انتقال حرارت ناشی از دیفیوژن خون استفاده می شود که در نبود انتقال حرارت نشعشی و جابجایی، رابطه انتقال حرارت را به صورت زیر ارائه می دهد [۴۴]:

$$\nabla^2 kT + \rho_b C_b \dot{W}_b (T_{a.} - T) + q_m''' = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۴-۱)$$

معادله حاکم معادله انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه ای با فرض تقارن محوری می باشد

که به صورت زیر توصیف شده است :

$$k \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \rho_b C_b \dot{W}_b (T_{a.} - T) + q'''_m = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۲-۴)$$

با فرض متغیر های بی بعد زیر و ثابت بودن k داریم :

$$\eta = \frac{r}{R}, \theta = \frac{T - T_{a.}}{qR/k}, t^* = \frac{\alpha t}{R^2}, z^* = \frac{z}{R} \quad (۳-۴)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} - \frac{\rho_b C_b \dot{W}_b R^2}{k} \theta + \frac{q'''_m R}{q} = \frac{\partial \theta}{\partial t^*} \quad (۴-۴)$$

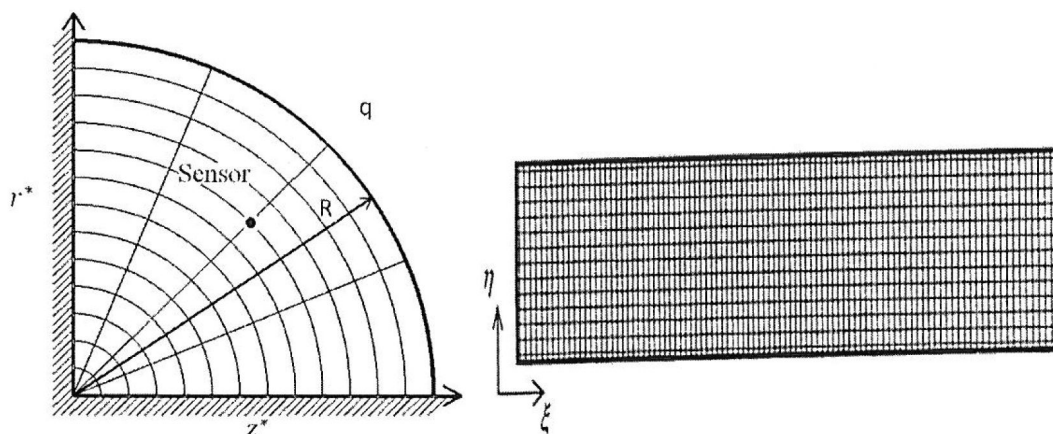
شرط مرزی مسئله در حالت کلی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{روی مرز سمت چپ و پایین} \quad (۵-۴)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{q}{Rq.} \quad \text{روی مرز بالا} \quad (۶-۴)$$

۴-۲-۲- معادلات حاکم در دستگاه مختصات عمومی

در تدوین کد مربوط به محاسبه توزیع دما از روش مختصات عمومی استفاده شده است. در این روش محاسبات در صفحه محاسباتی که دارای شبکه ای هموار است انجام می شود و سپس نتایج در صفحه فیزیکی که معمولاً دارای پیچیدگی بیشتری می باشد به نمایش در می آید. یک مثال در این مورد انتقال مسئله از دستگاه مختصات استوانه ای (صفحه فیزیکی) به صفحه محاسباتی مطابق شکل زیر می باشد.



شکل ۴-۲ - نمایش صفحه مختصات فیزیکی و محاسباتی

همان طور که در شکل ملاحظه می‌شود محور Z محور تقارن است و با دوران حول محور Z ، مدل سه بعدی با تقارن محوری به دست می‌آید.

حال روابط زیر را بین فضای فیزیکی و محاسباتی تعریف می‌کنیم:

$$z^* = z^*(\xi, \eta) \quad (۷-۴)$$

$$r^* = r^*(\xi, \eta) \quad (۸-۴)$$

قانون زنجیری برای مشتق‌های پاره‌ای به صورت زیر است:

$$\frac{\partial}{\partial z^*} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z^*} \quad (۹-۴)$$

و به طریق مشابه:

$$\frac{\partial}{\partial r^*} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r^*} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r^*} \quad (۱۰-۴)$$

مشتق‌های پاره‌ای را با استفاده از اندیس‌ها نشان می‌دهیم، مثلاً " $\xi_{z^*} = \frac{\partial \xi}{\partial z^*}$ " با توجه به اینکه r^* و z^* توابعی از ξ, η می‌باشند محاسبه مشتق‌های آنها بر حسب ξ, η ساده است، همچنین می‌توان گفت ξ, η نیز به صورت ضمنی توابعی از r^* و z^* هستند و می‌توان آنها را به صورت زیر نمایش داد:

$$\xi = \xi(z^*, r^*) \quad (۱۱-۴)$$

$$\eta = \eta(z^*, r^*) \quad (۱۲-۴)$$

ولی محاسبه مشتق‌های ξ, η بر حسب r^* و z^* پیچیده تر است و به همین دلیل از ژاکوبین‌های تبدیل استفاده می‌کنیم.

۴-۲-۳- متریک ها و ژاکوبین های تبدیل

در معادلات قبل جمله هایی مانند $\xi_z^*, \xi_r^*, \eta_z^*, \eta_r^*$ ظاهر شدند این مشتق های تبدیل ، متریک های انتقال و یا به صورت ساده تر، متریک نامیده می شوند. تفسیر متریک ها با تقریب زیر مشخص می شود.

$$\xi_z^* = \frac{\partial \xi}{\partial z^*} \cong \frac{\Delta \xi}{\Delta z^*} \quad (13-4)$$

عبارت فوق ، نشان می دهد که متریک ها نسبت طول قوسها در فضای محاسباتی به طول قوسهای مشابه در فضای فیزیکی هستند . اکنون به محاسبه متریک ها می پردازیم:

$$d\xi = \xi_z^* dz^* + \xi_r^* dr^* \quad (14-4)$$

$$d\eta = \eta_z^* dz^* + \eta_r^* dr^* \quad (15-4)$$

که آنها را به صورت فشرده زیر می توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_z^* & \xi_r^* \\ \eta_z^* & \eta_r^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dz^* \\ dr^* \end{bmatrix} \quad (16-4)$$

با معکوس کردن متغیرهای مستقل معادلات زیر به دست می آیند:

$$dz^* = z_{\xi}^* d\xi + z_{\eta}^* d\eta \quad (17-4)$$

$$dr^* = r_{\xi}^* d\xi + r_{\eta}^* d\eta \quad (18-4)$$

حال آنها را به صورت فشرده زیر می نویسیم :

$$\begin{bmatrix} dz^* \\ dr^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{\xi}^* & z_{\eta}^* \\ r_{\xi}^* & r_{\eta}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (19-4)$$

از مقایسه روابط (۱۶-۴) و (۱۹-۴) می توان نتیجه گرفت :

$$\begin{bmatrix} \xi_{z^*} & \xi_{r^*} \\ \eta_{z^*} & \eta_{r^*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^*_{\xi} & z^*_{\eta} \\ r^*_{\xi} & r^*_{\eta} \end{bmatrix} \quad (20-4)$$

$$\xi_{r^*} = -\frac{1}{J} z^*_{\eta} \quad (21-4)$$

$$\xi_{z^*} = -\frac{1}{J} r^*_{\eta} \quad (22-4)$$

$$\eta_{z^*} = -\frac{1}{J} r^*_{\xi} \quad (23-4)$$

$$\eta_{r^*} = -\frac{1}{J} z^*_{\xi} \quad (24-4)$$

$$J = z^*_{\xi} r^*_{\eta} - r^*_{\xi} z^*_{\eta} \quad (25-4)$$

در روابط فوق ، J ژاکوبین تبدیل نامیده می‌شود. ژاکوبین J عبارت است از : نسبت سطح (نسبت حجم در حالت سه بعدی) در فضای فیزیکی به سطح در فضای محاسباتی.

۴-۲-۴ تبدیل معادلات از صفحه فیزیکی به صفحه محاسباتی

با استفاده از روابط زیر تمامی مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه دوم متغیر وابسته θ از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی منتقل می‌شود.

$$\frac{\partial \theta}{\partial r^*} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial r^*} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial r^*} \quad (26-4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z^*} = \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z^*} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z^*} \quad (27-4)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} = \xi_{r^* r^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \xi_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{r^*} \xi_{r^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{r^* r^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \eta_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \quad (28-4)$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} = \xi_{z^* z^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \xi_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{z^*} \xi_{z^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{z^* z^*} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \eta_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \quad (29-4)$$

با جمع روابط (۲۸-۴) و (۲۹-۴) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} &= (\xi_{z^* z^*} + \xi_{r^* r^*}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + (\eta_{z^* z^*} + \eta_{r^* r^*}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \xi_{z^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + \\ &+ 2\eta_{z^*} \xi_{z^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + \xi_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{r^*} \xi_{r^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \end{aligned} \quad (30-4)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} \xi_{z^* z^*} + \xi_{r^* r^*} &= \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) - \\ &\frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \right. \\ &\left. \frac{\partial^2 z^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \end{aligned} \quad (31-4)$$

$$\begin{aligned} \eta_{z^* z^*} + \eta_{r^* r^*} &= \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) - \\ &\frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \right. \\ &\left. \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) \end{aligned} \quad (32-4)$$

بنابراین معادله حاکم در دستگاه مختصات عمومی به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) - \right. \\ &\frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) + \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 r^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} - \right. \\ &\left. \frac{\partial^2 z^*}{\partial \eta^2} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + \left(\frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z^*}{\partial \eta} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) - \right. \\ &\frac{2}{|J|^2} \left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \frac{\partial z^*}{\partial \eta} + \frac{\partial r^*}{\partial \xi} \frac{\partial r^*}{\partial \eta} \right) \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{|J|^2} \left[\left(\frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial r^*}{\partial \xi} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial^2 z^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial r^*}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 r^*}{\partial \xi^2} \frac{\partial z^*}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \\ &\xi_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{z^*} \xi_{z^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \eta_{z^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + \xi_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) + 2\eta_{r^*} \xi_{r^*} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \\ &\eta_{r^*}^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{r^{*2}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \xi_{r^*} + \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \eta_{r^*} \right) - \frac{\rho_b C_b \dot{W}_b R^2}{K} \theta + \frac{q''' m R}{q} = \frac{\partial \theta}{\partial t^*} \end{aligned} \quad (33-4)$$

۴-۲-۵- گسسته سازی معادلات

در عبارت $\nabla^2 \theta = \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \theta}{\partial r^*}$ ضرایب گره‌های همسایه به صورت زیر محاسبه می‌شوند (در گسسته سازی معادلات از طرح تفاضل مرکزی^{۱،۲} استفاده شده است).

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} = \quad (34-4)$$

$$\xi_{z^* z^*} \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{\tau} \right) + \xi_{z^*}^2 (\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j}) + \frac{1}{\tau} \xi_{z^*} \eta_{z^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1}) + \eta_{z^* z^*} \left(\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{\tau} \right) + \xi_{z^*}^2 (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j}) + \frac{1}{\tau} \xi_{z^*} \eta_{z^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1})$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} = \quad (35-4)$$

$$\xi_{r^* r^*} \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{\tau} \right) + \xi_{r^*}^2 (\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j} - 2\theta_{i,j}) + \frac{1}{\tau} \xi_{r^*} \eta_{r^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1}) + \eta_{r^* r^*} \left(\frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{\tau} \right) + \eta_{r^*}^2 (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1} - 2\theta_{i,j}) + \frac{1}{\tau} \xi_{r^*} \eta_{r^*} (\theta_{i+1,j+1} + \theta_{i-1,j-1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1})$$

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} = \frac{1}{\tau r_{i,j}^*} ((\theta_{i+1,j} + \theta_{i-1,j}) \xi_{r^*} + (\theta_{i,j+1} + \theta_{i,j-1}) \eta_{r^*}) \quad (36-4)$$

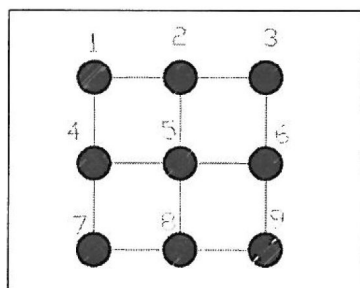
با جمع روابط (۳۴-۴)، (۳۵-۴) و (۳۶-۴) و مرتب کردن ضرایب متغیرها رابطه زیر حاصل می‌شود:

شود:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \theta}{\partial r^*} = \quad (37-4)$$

$$-2(\xi_{z^*}^2 + \eta_{z^*}^2 + \xi_{r^*}^2 \eta_{r^*}^2) - \frac{1}{\tau} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i-1,j+1} + \frac{1}{\tau} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i+1,j+1} + \frac{1}{\tau} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i-1,j-1} - \frac{1}{\tau} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \theta_{i+1,j-1} + \left(\frac{1}{\tau} \eta_{z^* z^*} + \frac{1}{\tau} \eta_{r^* r^*} + \eta_{z^*}^2 + \eta_{r^*}^2 + \frac{1}{\tau r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) \theta_{i,j+1} + \left(-\frac{1}{\tau} \xi_{z^* z^*} - \frac{1}{\tau} \xi_{r^* r^*} + \xi_{z^*}^2 + \xi_{r^*}^2 - \frac{1}{\tau r_{i,j}^*} \xi_{r^*} \right) \theta_{i-1,j} + \left(\frac{1}{\tau} \xi_{z^* z^*} + \frac{1}{\tau} \xi_{r^* r^*} + \xi_{z^*}^2 + \xi_{r^*}^2 - \frac{1}{\tau r_{i,j}^*} \xi_{r^*} \right) \theta_{i+1,j}$$

$$\frac{1}{r_{i,j}^*} \xi_{r^*}) \theta_{i+1,j} + \left(-\frac{1}{r} \eta_{z^*z^*} - \frac{1}{r} \eta_{r^*r^*} + \eta_{z^*}^r + \eta_{r^*}^r + \frac{1}{r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) \theta_{i,j-1}$$



شکل ۴-۳- نمایش گره مرکزی و هشت گره همسایه آن

با استفاده از روش گوس سایدل، معادله (۴-۳۳) گسسته می‌شود:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j}^n = & (-\psi(i,j,1)\theta_{i-1,j+1}^{n-1} - \psi(i,j,2)\theta_{i,j+1}^{n-1} - \psi(i,j,3)\theta_{i+1,j+1}^{n-1} - \\ & \psi(i,j,4)\theta_{i-1,j}^{n-1} - \psi(i,j,5)\theta_{i+1,j}^{n-1} - \psi(i,j,6)\theta_{i-1,j-1}^{n-1} - \psi(i,j,7)\theta_{i+1,j-1}^{n-1} - \\ & \psi(i,j,8)\theta_{i,j-1}^{n-1} - \psi(i,j,9)\theta_{i,j-1}^{n-1}) / \psi(i,j,5) \end{aligned} \quad (4-38)$$

که در رابطه فوق ضرایب به صورت زیر محاسبه شده‌اند:

$$\psi(i,j,1) = -\frac{1}{r} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \quad (4-39)$$

$$\psi(i,j,2) = \left(\frac{1}{r} \eta_{z^*z^*} + \frac{1}{r} \eta_{r^*r^*} + \eta_{z^*}^r + \eta_{r^*}^r + \frac{1}{r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) = \frac{1}{r} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \quad (4-40)$$

$$\xi_{r^*} \eta_{r^*}) \psi(i,j,3) = \left(-\frac{1}{r} \xi_{z^*z^*} - \frac{1}{r} \xi_{r^*r^*} + \xi_{z^*}^r + \xi_{r^*}^r - \frac{1}{r_{i,j}^*} \xi_{r^*} \right) \psi(i,j,4)$$

$$\begin{aligned} \psi(i,j,6) = & \frac{1}{r} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) = \left(-\frac{1}{r} \eta_{z^*z^*} - \frac{1}{r} \eta_{r^*r^*} + \eta_{z^*}^r + \eta_{r^*}^r - \right. \\ & \left. \frac{1}{r_{i,j}^*} \eta_{r^*} \right) \psi(i,j,8) \end{aligned} \quad (4-41)$$

$$\psi(i,j,9) = -\frac{1}{r} (\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*}) \quad (4-42)$$

همچنین جملات $(\xi_{z^*z^*} + \eta_{r^*r^*})$ و $(\xi_{z^*} \eta_{z^*} + \xi_{r^*} \eta_{r^*})$ به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \xi_{z^*z^*} + \xi_{r^*r^*} = & \frac{1}{|J|} [l_1 (r_{\xi\xi}^* z_{\eta}^* - z_{\xi\xi}^* r_{\eta}^*) + l_r (r_{\xi\eta}^* z_{\eta}^* - z_{\xi\eta}^* r_{\eta}^*) + l_r (r_{\eta\eta}^* z_{\eta}^* - \\ & z_{\eta\eta}^* r_{\eta}^*)] \end{aligned} \quad (4-43)$$

$$\eta_{z^*z^*} + \eta_{r^*r^*} = \frac{1}{|J|} [l_1(z_{\xi\xi}^* r_{\xi}^* - r_{\xi\xi}^* z_{\xi}^*) + l_2(z_{\xi\eta}^* r_{\xi}^* - r_{\xi\eta}^* z_{\xi}^*) + l_3(z_{\eta\eta}^* r_{\xi}^* - r_{\eta\eta}^* z_{\xi}^*)] \quad (44-4)$$

که در روابط فوق l_1 ، l_2 و l_3 عبارت‌اند از:

$$l_1 = \frac{1}{|J|^2} (z_{\eta}^{*2} + r_{\eta}^{*2}) \quad (45-4)$$

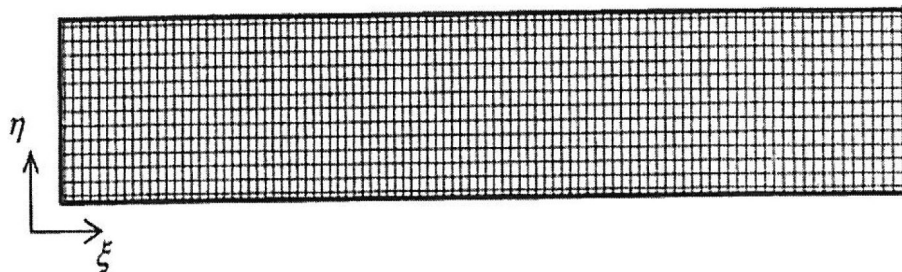
$$l_2 = -\frac{2}{|J|^2} (z_{\eta}^* z_{\xi}^* + r_{\eta}^* r_{\xi}^*) \quad (46-4)$$

$$l_3 = \frac{1}{|J|^2} (z_{\xi}^{*2} + r_{\xi}^{*2}) \quad (47-4)$$

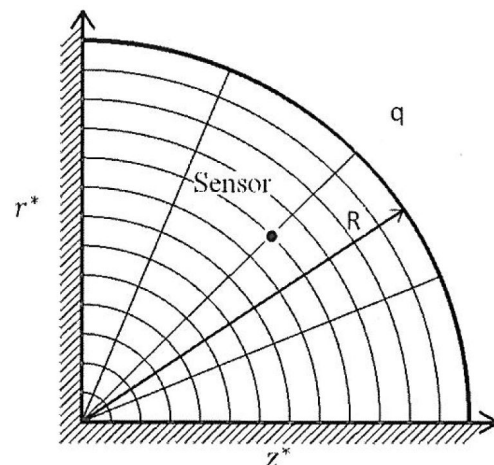
۶-۲-۴ شرایط مرزی مسئله

همان‌طور که در شکل ۴-۵ (در صفحه فیزیکی) مشاهده می‌شود شرایط مرزی در قسمت بالا شار

حرارتی و در قسمت‌های دیگر عایق می‌باشد. محور z^* محور تقارن است.



شکل ۴-۴- نمایش صفحه محاسباتی



شکل ۴-۵- نمایش شرایط مرزی در صفحه فیزیکی

شرایط مرزی مسئله به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{روی مرز سمت چپ و پایین} \quad (48-4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{q}{Rq} \quad \text{روی مرز بالا} \quad (49-4)$$

$$\theta(z^*, r^*, \cdot) = 1 \quad (50-4)$$

مشتق عمودی θ در امتداد خطوط ξ ثابت و η ثابت با استفاده از روابط زیر به دست می آیند [۴۵]

و [۴۶]:

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{\xi=c} = \frac{1}{J\alpha^{1/2}} (\alpha\theta_\xi - \beta\theta_\eta) \quad (51-4)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial n} \right|_{\eta=c} = \frac{1}{J\gamma^{1/2}} (-\beta\theta_\xi - \gamma\theta_\eta) \quad (52-4)$$

که در روابط فوق α ، β و γ به صورت زیر محاسبه می شوند:

$$\alpha = z_\eta^{*2} + r_\eta^{*2}, \beta = z_\xi^* z_\eta^* + r_\xi^* r_\eta^*, \gamma = z_\xi^{*2} + r_\xi^{*2} \quad (53-4)$$

بنابراین شرایط مرزی در صفحه محاسباتی به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$\frac{1}{J\alpha^{1/2}} (\alpha\theta_\xi - \beta\theta_\eta) = 0 \quad (54-4)$$

$$\frac{1}{J\gamma^{1/2}} (-\beta\theta_\xi - \gamma\theta_\eta) = \frac{q}{Rq} \quad (55-4)$$

$$\frac{1}{J\gamma^{1/2}} (-\beta\theta_\xi - \gamma\theta_\eta) = 0 \quad (56-4)$$

شرایط مرزی مسئله به صورت زیر گسسته می شوند:

برای مرز سمت چپ یعنی $\xi = 0$ و برای $j = 1, j_{\max} - 1$ داریم:

$$\alpha(\cdot, j)(\theta_{\cdot, j} - \theta_{\cdot, j-1}) - \beta(\cdot, j) \frac{\theta_{\cdot, j+1} - \theta_{\cdot, j-1}}{2} = 0 \quad (57-4)$$

که از رابطه فوق $\theta_{\cdot, j}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\theta_{\cdot, j} = \frac{1}{\alpha(\cdot, j)} [\alpha(\cdot, j)\theta_{\cdot, j} - \frac{1}{2}\beta(\cdot, j)\theta_{\cdot, j+1} + \frac{1}{2}\beta(\cdot, j)\theta_{\cdot, j-1}] \quad (58-4)$$

برای $j = 0$ داریم:

$$\alpha(\cdot, 0)(\theta_{\cdot, 0} - \theta_{\cdot, -1}) - \beta(\cdot, 0)(\theta_{\cdot, 1} - \theta_{\cdot, -1}) = 0 \quad (59-4)$$

که از رابطه فوق $\theta_{\cdot, 0}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\theta_{\cdot, 0} = \frac{1}{(\alpha(\cdot, 0) - \beta(\cdot, 0))} [\alpha(\cdot, 0)\theta_{\cdot, 0} - \beta(\cdot, 0)\theta_{\cdot, 1}] \quad (60-4)$$

برای $j = j_{max}$ داریم:

$$\alpha(\cdot, j_{max})(\theta_{\cdot, j_{max}} - \theta_{\cdot, j_{max}-1}) - \beta(\cdot, j_{max})(\theta_{\cdot, j_{max}} - \theta_{\cdot, j_{max}-1}) = 0 \quad (61-4)$$

که از رابطه فوق $\theta_{\cdot, j_{max}}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\theta_{\cdot, j_{max}} = \frac{1}{(\alpha(\cdot, j_{max}) + \beta(\cdot, j_{max}))} [\alpha(\cdot, j_{max})\theta_{\cdot, j_{max}} - \beta(\cdot, j_{max})\theta_{\cdot, j_{max}-1}] \quad (62-4)$$

برای مرز سمت راست یعنی $\xi_{max} = \xi$ و برای $j = j_{max} - 1$ داریم:

$$\frac{1}{J\alpha(i_{max}, j) \cdot \Delta} [\alpha(i_{max}, j)(\theta_{i_{max}, j} - \theta_{i_{max}-1, j}) - \beta(i_{max}, j) \frac{\theta_{i_{max}, j+1} - \theta_{i_{max}, j-1}}{2}] = \frac{q}{Rq} \quad (63-4)$$

$$\beta(i_{max}, j) \frac{\theta_{i_{max}, j+1} - \theta_{i_{max}, j-1}}{2} = \frac{q}{Rq}$$

که از رابطه فوق $\theta_{i_{max}, j}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\theta_{i_{max}, j} = \frac{1}{\alpha(i_{max}, j)} [\alpha(i_{max}, j)\theta_{i_{max}-1, j} + \frac{1}{2}\alpha(i_{max}, j)\theta_{i_{max}, j+1} - \frac{1}{2}\beta(i_{max}, j)\theta_{i_{max}, j-1} + \frac{qJ\alpha(i_{max}, j) \cdot \Delta}{Rq}] \quad (64-4)$$

$\theta_{i_{max}, 0}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\theta_{i_{max}, 0} = \frac{1}{(\alpha(i_{max}, 0) + \beta(i_{max}, 0))} [\alpha(i_{max}, 0)\theta_{i_{max}-1, 0} + \beta(i_{max}, 0)\theta_{i_{max}, 1} + \frac{qJ\alpha(i_{max}, 0) \cdot \Delta}{Rq}] \quad (65-4)$$

$\theta_{i_{max}, j_{max}}$ به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\theta_{i_{max}, j_{max}} = \frac{1}{(\alpha(i_{max}, j_{max}) - \beta(i_{max}, j_{max}))} \left[\alpha(i_{max}, j_{max}) \theta_{i_{max}-1, j_{max}} - \beta(i_{max}, j_{max}) \theta_{i_{max}, j_{max}-1} + \frac{qJ\alpha(i_{max}, j_{max}) \cdot \Delta}{Rq} \right] \quad (66-4)$$

برای مرز پایین یعنی $\eta = 0$ و برای $i = 1, i_{max} - 1$ داریم:

$$\theta_{\cdot, i} = \frac{1}{\gamma(i, \cdot)} \left[-\frac{1}{\gamma} \beta(i, \cdot) \theta_{i+1, \cdot} + \frac{1}{\gamma} \beta(i, \cdot) \theta_{i-1, \cdot} + \gamma(i, \cdot) \theta_{i, 1} \right] \quad (67-4)$$

$\theta_{\cdot, i}$ و $\theta_{i_{max}, \cdot}$ در قسمت قبل محاسبه شده‌اند.

برای مرز بالا یعنی $\eta = \eta_{max}$ و برای $i = 1, i_{max} - 1$ داریم:

$$\theta_{i, j_{max}} = \frac{1}{\gamma(i, j_{max})} \left[-\frac{1}{\gamma} \beta(i, j_{max}) \theta_{i+1, j_{max}} + \frac{1}{\gamma} \beta(i, j_{max}) \theta_{i-1, j_{max}} + \gamma(i, j_{max}) \theta_{i, j_{max}-1} \right] \quad (68-4)$$

$\theta_{\cdot, j_{max}}$ و $\theta_{i_{max}, j_{max}}$ در قسمت قبل محاسبه شده‌اند.

۳-۴ مسئله معکوس

مسئله معکوس شامل تخمین تغییرات زمانی شار حرارتی غیرخطی با استفاده از دماهای گذرای خوانده شده از روی یک حس گر است.

مسئله معکوس باید به صورتی حل شود که تابع زیر حداقل شود:

$$S[q(t^*)] = \frac{1}{\gamma} \int_{t^*=1}^{t_f^*} \sum_{m=1}^{Ns} [\theta(\xi_m, \eta_m, t^*; q) - Y_m(t^*)]^2 dt^* \quad (69-4)$$

در رابطه فوق، $\theta(\xi_m, \eta_m, t^*; q)$ و $Y_m(t^*)$ به ترتیب دماهای تخمین زده شده و اندازه گیری شده هستند و Ns ، تعداد حس گرهاست. به عنوان ابزارهای روش تکرار، مسائل حساسیت و الحاقی به ترتیبی که در زیر توضیح داده خواهد شد، ایجاد و حل می شوند [۴۷]:

۴-۳-۱ مسئله حساسیت

برای به دست آوردن معادله حساسیت فرض می‌شود، زمانی که $q(t^*)$ به اندازه $\Delta q(t^*)$ تغییر می‌کند، $\theta(r^*, z^*, t^*)$ به اندازه $\Delta \theta(r^*, z^*, t^*)$ تغییر می‌کند. بنابراین در مسئله مستقیم $\theta(r^*, z^*, t^*)$ با $[\theta(r^*, z^*, t^*) + \Delta \theta(r^*, z^*, t^*)]$ و $q(t^*)$ با $[q(t^*) + \Delta q(t^*)]$ تعویض می‌شود و حاصل از مسئله مستقیم کم شده و به این ترتیب معادلات حاکم بر مسئله حساسیت به دست می‌آیند. این معادلات به صورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \Delta \theta}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \Delta \theta}{\partial z^{*2}} - \frac{\rho_b C_b \dot{W}_b R^2}{k} \Delta \theta + \frac{q_m''' R}{q} = \frac{\partial \Delta \theta}{\partial t^*} \quad (۷۰-۴)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} = 0 \quad \text{روی مرز سمت چپ و پایین} \quad (۷۱-۴)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} = \frac{\Delta q}{Rq} \quad \text{روی مرز بالا} \quad (۷۲-۴)$$

$$\Delta \theta(z^*, r^*, 0) = 0 \quad (۷۳-۴)$$

در روابط فوق n بردار عمود بر سطح می‌باشد.

شرایط مرزی در صفحه محاسباتی به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\frac{1}{J_\alpha^{1/2}} (\alpha \Delta \theta_\xi - \beta \Delta \theta_\eta) = 0 \quad \text{روی مرزهای سمت چپ و پایین} \quad (۷۴-۴)$$

$$\frac{1}{J_\alpha^{1/2}} (\alpha \Delta \theta_\xi - \beta \Delta \theta_\eta) = \frac{\Delta q}{Rq} \quad \text{روی مرز بالا} \quad (۷۵-۴)$$

$$\frac{1}{J_\gamma^{1/2}} (-\beta \Delta \theta_\xi - \gamma \Delta \theta_\eta) = 0 \quad (۷۶-۴)$$

نحوه تفاضلی کردن روابط فوق مشابه قسمت قبل می‌باشد.

۴-۳-۲ مسئله الحاقی

رابطه الحاقی برای تعیین ضریب لاگرانژ $\lambda(z^*, r^*, t_f^*)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial \lambda}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z^{*2}} + \frac{\rho_b C_b W_b R^2}{k} \theta + \sum_{m=1}^{N_s} [\theta(\xi, \eta, t^*; q) - Y_m(t)] \delta(\eta -$$

$$\eta_m) \delta(\xi - \xi_m) = \frac{\partial \lambda}{\partial t^*}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial n} = 0 \quad (78-4)$$

$$\lambda(z^*, r^*, t_f^*) = 0 \quad (79-4)$$

شرایط مرزی در صفحه محاسباتی به صورت زیر نمایش داده می شوند:

$$\frac{1}{J_\alpha^{1/2}} (\alpha \lambda_\xi - \beta \lambda_\eta) = 0 \quad \text{روی مرزهای سمت چپ و پایین} \quad (80-4)$$

$$\frac{1}{J_\gamma^{1/2}} (-\beta \lambda_\xi + \gamma \lambda_\eta) = 0 \quad (81-4)$$

۳-۳-۴ معادله گرادیان

معادله گرادیان به صورت زیر است:

$$\nabla S[q(t^*)] = \lambda(\xi, \eta, t^*) \quad (82-4)$$

در رابطه فوق ξ و η به محل تابع مجهول (شار حرارتی) بستگی دارد.

۴-۳-۴ روش تکرار

تابع مجهول $q(t^*)$ به وسیله حداقل کردن تابع $S[q(t^*)]$ (معادله ۴-۶۹) تخمین زده می شود.

معادله تکراری برای تخمین $q(t^*)$ به صورت زیر است:

$$q^{k+1}(t^*) = q^k(t^*) - \beta^k d^k(t^*) \quad (83-4)$$

که k تعداد تکرارهاست. $d^k(t^*)$ (جهت جستجو) به صورت زیر تعیین می شود:

$$d^k(t^*) = \nabla S[q^k(t^*)] + \gamma^k d^{k-1}(t^*) \quad (84-4)$$

ضریب پیوستگی γ^k را می توان با استفاده از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\gamma^k = \frac{\int_{t^*=.}^{t_f^*} \{\nabla S[q^k(t^*)]\}^T dt^*}{\int_{t^*=.}^{t_f^*} \{\nabla S[q^{k-1}(t^*)]\}^T dt^*} \quad (۸۵-۴)$$

که $\gamma^* = 0$ فرض می‌شود. β^k (اندازه گام بهینه) با حداقل کردن تابع $S[q^{k+1}(t^*)]$ نسبت به β^k به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\beta^k = \frac{\int_{t^*=.}^{t_f^*} \sum_{m=1}^{Ns} [\theta(\xi_m, \eta_m, t^*; q^k) - \gamma(t^*)] \Delta \theta(\xi_m, \eta_m, t^*; d^k) dt^*}{\int_{t^*=.}^{t_f^*} \sum_{m=1}^{Ns} [\Delta \theta(\xi_m, \eta_m, t^*; d^k)]^T dt^*} \quad (۸۶-۴)$$

در رابطه فوق $\Delta \theta(\xi_m, \eta_m, t^*; d^k)$ از حل مسئله حساسیت با قرار دادن $\Delta q^k(t^*) = d^k(t^*)$ به دست می‌آید.

۵-۴: تخمین شار حرارتی مجهول در مدل سه لایه

۵-۴-۱ معادله حاکم

معادله حاکم معادله انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه ای با فرض تقارن

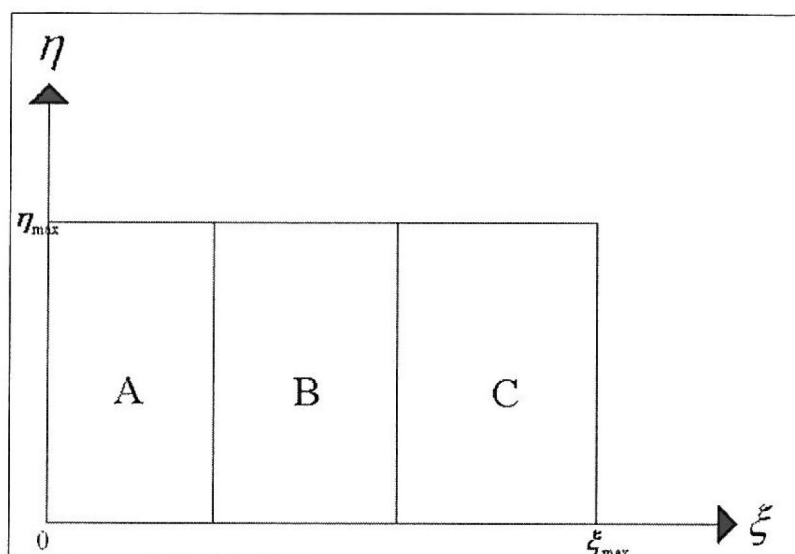
محوری می باشد که به صورت زیر توصیف شده است:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(kr \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \rho_b C_b \dot{W}_b (T_{a.} - T) + q_m''' = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۸۷-۴)$$

۵-۴-۲ شرایط مرزی مساله

مطابق شکل ۴-۶ در مسائل سه لایه، در محل جدایش اجسام روابط (۴-۸۸)، (۴-۸۹) و (۴-۹۰)

مورد استفاده قرار می‌گیرند.



شکل ۴-۶- نمایش مساله سه لایه در صفحه محاسباتی

$$q_{\xi in} + q_{\eta in} = q_{\xi out} + q_{\eta out} \quad (۸۸-۴)$$

$$k_A(T_{i,j} - T_{i-1,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(T_{i,j} - T_{i,j-1}) = k_B(T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(T_{i,j+1} - T_{i,j}) \quad (۸۹-۴)$$

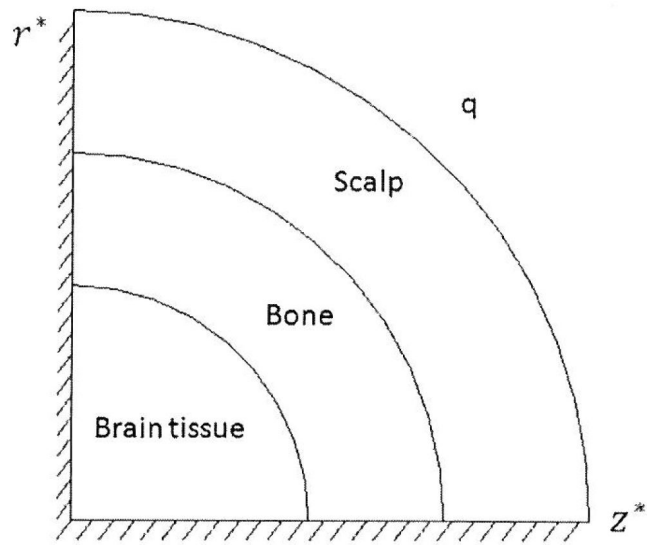
$$k_B(T_{i,j} - T_{i-1,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(T_{i,j} - T_{i,j-1}) = k_C(T_{i+1,j} - T_{i,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(T_{i,j+1} - T_{i,j}) \quad (۹۰-۴)$$

مطابق شکل ۴-۷ جسمی متشکل از سه لایه مختلف که از جدول (۴-۱) پوست، استخوان و بافت را

در نظر می گیریم.

جدول ۴-۱. خواص لایه های استفاده شده

r	q_0	k	ρ	C	
mm	$W m^{-3}$		Kgm^{-3}	$J Kg^{-1} K^{-1}$	
93	363	۰.۳۴	۱۰۰۰	۴۰۰۰	پوست سر
89	۳۶۸	۱.۱۶	۱۵۲۰	۲۳۰۰	استخوان
85	۱۶۷۰	۰.۴۹	۱۰۳۰	۳۷۰۰	بافت



شکل ۴-۷- نمایش هندسه مساله متشکل از سه لایه مختلف بافت مغز، استخوان و پوست سر

۴-۵-۳ مسئله معکوس

مسئله معکوس شامل تخمین تغییرات زمانی شارحرارتی غیر خطی با استفاده از دماهای گذرای خوانده شده از روی یک سنسور است. روند مشابه حالت قبل می باشد.

۴-۵-۳-۱ مسئله حساسیت

معادلات حاکم بر مسئله حساسیت همانند حالت یک لایه می باشند. در محل جدایش اجسام روابط زیر مورد استفاده قرار می گیرند:

$$k_A(\Delta T_{i,j} - \Delta T_{i-1,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(\Delta T_{i,j} - \Delta T_{i,j-1}) = k_B(\Delta T_{i+1,j} - \Delta T_{i,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(\Delta T_{i,j+1} - \Delta T_{i,j}) \quad (4-96)$$

$$k_B(\Delta T_{i,j} - \Delta T_{i-1,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\Delta T_{i,j} - \Delta T_{i,j-1}) = k_C(\Delta T_{i+1,j} - \Delta T_{i,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\Delta T_{i,j+1} - \Delta T_{i,j}) \quad (97-4)$$

۴-۵-۳-۲ مسئله الحاقی

معادلات حاکم بر مسئله الحاقی همانند قبل می‌باشند. در محل جدایش اجسام روابط زیر مورد

استفاده قرار می‌گیرند:

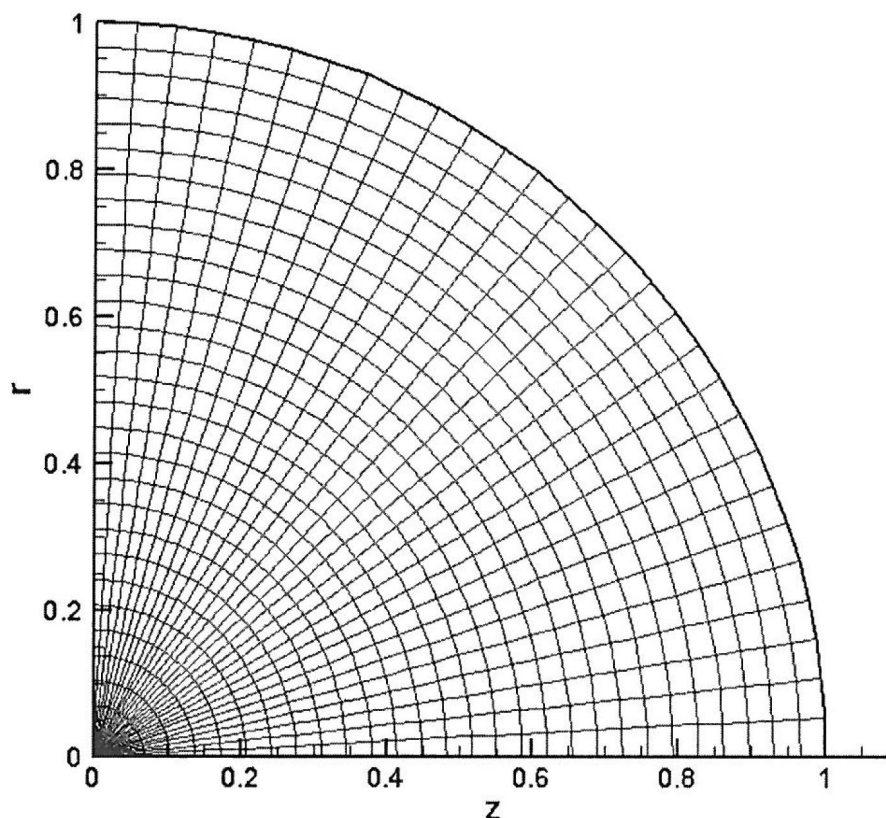
$$k_A(\lambda_{i,j} - \lambda_{i-1,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j-1}) = k_B(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}) + \frac{2k_A k_B}{k_A + k_B}(\lambda_{i,j+1} - \lambda_{i,j}) \quad (98-4)$$

$$k_B(\lambda_{i,j} - \lambda_{i-1,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j-1}) = k_C(\lambda_{i+1,j} - \lambda_{i,j}) + \frac{2k_C k_B}{k_C + k_B}(\lambda_{i,j+1} - \lambda_{i,j}) \quad (99-4)$$

فصل پنجم: نتایج

برای گسسته سازی معادلات حاکم از روش تفاضل محدود و از یک شبکه 35×35 استفاده نموده-
ایم. در کار حاضر، به منظور بررسی صحت کد، ابتدا چند حالت مختلف در نظر گرفته شده است که با اندازه
گیری دما، تنها در یک نقطه، شار حرارتی را تخمین می‌زنیم و حساسیت مسئله نسبت به داده های نویزدار
و محل قرارگیری سنسور مورد بررسی قرار گرفته است. حدس اولیه برای شار حرارتی مجهول صفر در نظر
گرفته شده است.

در شکل ۵-۱ شبکه مورد استفاده در حل مسئله، نشان داده شده است.



شکل ۵-۱ شبکه مورد استفاده در حل مسئله و موقعیت سنسورها

به منظور بررسی دقت روش مورد استفاده، توابع خطی، پله‌ای و سینوسی - کسینوسی به صورت-
های زیر برای $q(t)$ در نظر گرفته شده است:

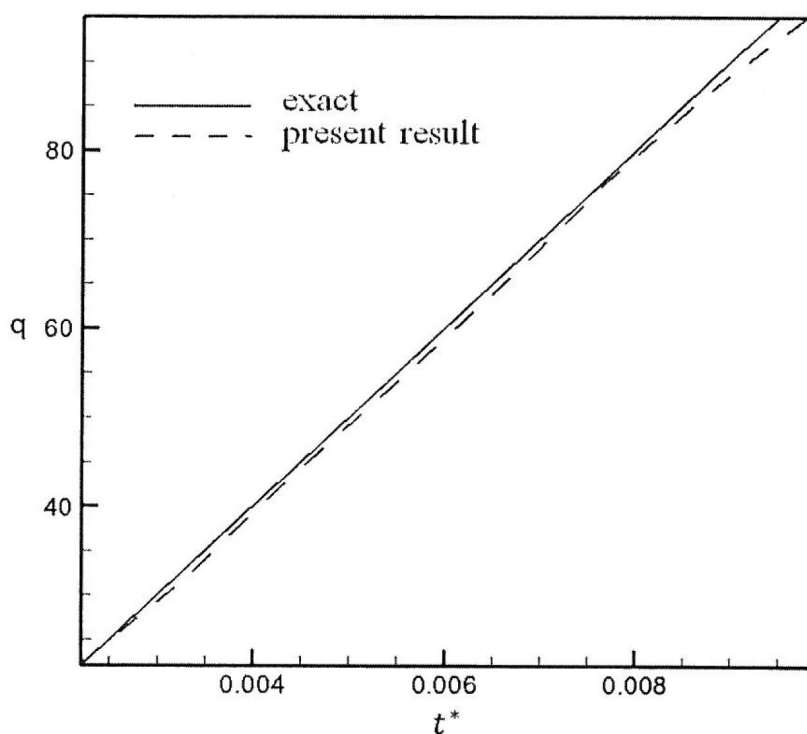
$$q(t) = 10^4 t^* \quad (1-5)$$

$$q(t) = \begin{cases} 10^4 & \text{for } 0.0033 < t^* < 0.0087 \\ 0 & \text{for } t^* \leq 0.0033 \text{ and } t^* \geq 0.0087 \end{cases} \quad (2-5)$$

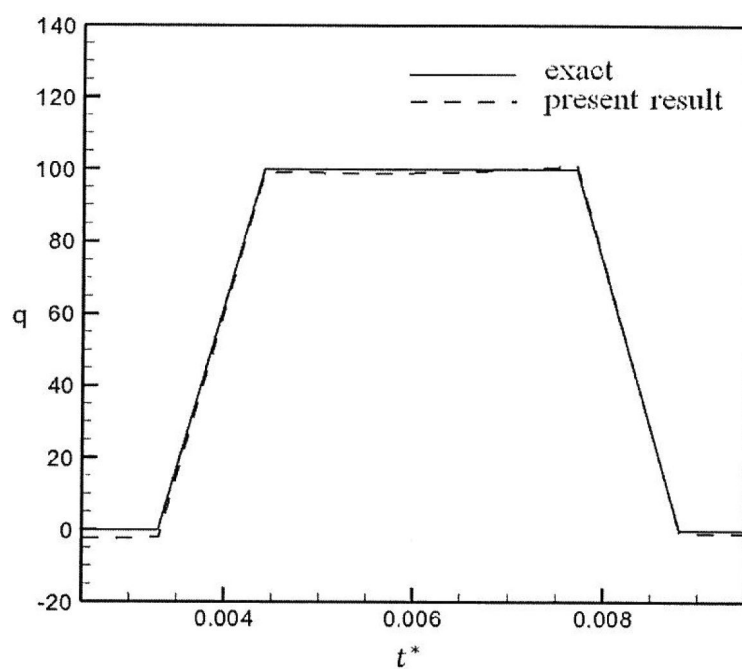
$$q(t) = 10^4 \sin 0.1 t^* + 10^4 \cos 2 t^* \quad (3-5)$$

در شکل‌های (۲-۵)، (۳-۵) و (۴-۵) توابع فوق با توابع محاسبه شده با استفاده از روش معکوس مقایسه شده‌اند سپس حل معکوس با داده‌های نویزدار ارائه شده است. در عمل، خطاهایی در اندازه‌گیری داده‌ها وجود دارد بنابراین از داده‌های نویزدار برای شبیه‌سازی خطاها استفاده شده است. تاثیر داده‌های نویز دار را در (۵-۵)، (۶-۵) و (۷-۵) در مقایسه با داده‌های بدون نویز (شکل‌های (۲-۵) تا (۴-۵)) می‌توان مشاهده کرد. پایداری روش نسبت به نویز $\sigma = 0.03 T_{\max}$ مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین خطای RMS با استفاده از فرمول زیر محاسبه و ارائه شده است. (جدول ۱-۵)

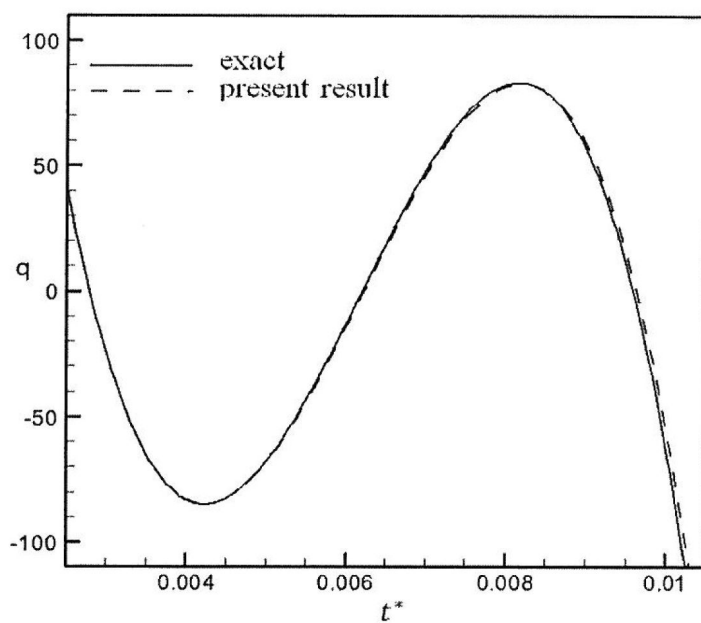
$$e_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{I} \sum_{i=1}^I [Y_{est} - Y_{ex}]^2} \quad (4-5)$$



شکل ۲-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع خطی می‌باشد

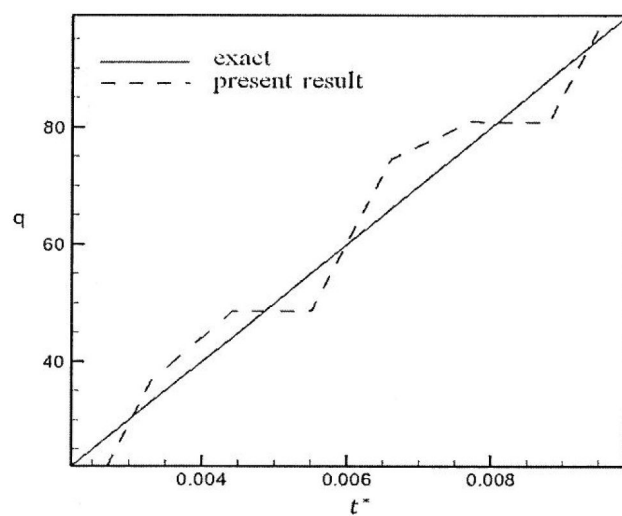


شکل ۵-۳. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع پله می باشد



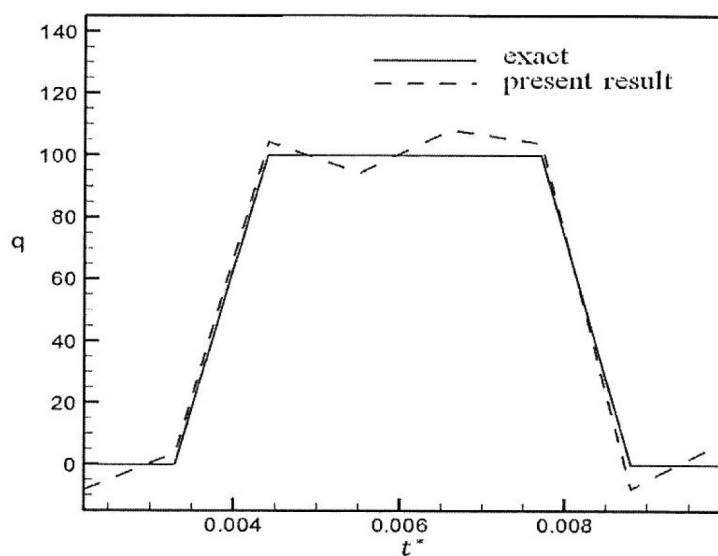
شکل ۵-۴. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابعی ترکیبی از

$\sin$ و $\cos$ می باشد



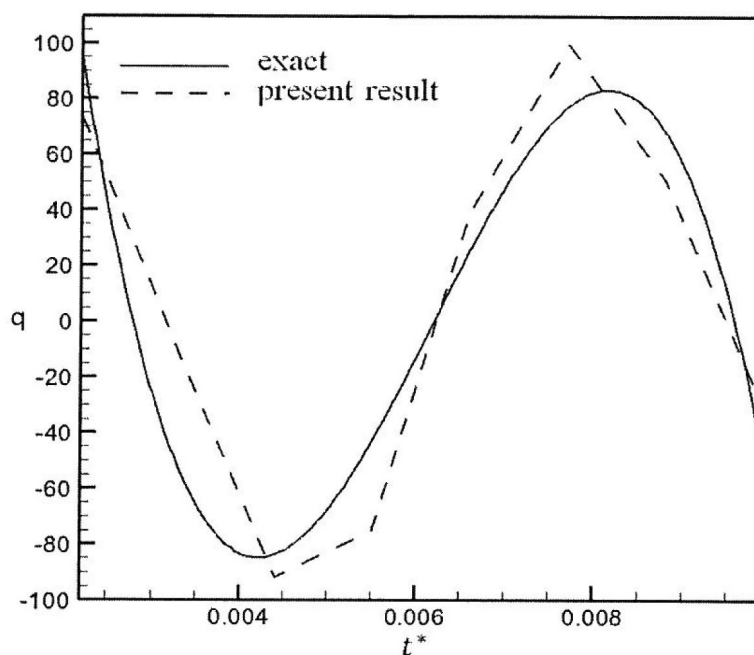
شکل ۵-۵. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی دقیق که

به صورت تابع خطی می باشد



شکل ۵-۶. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی دقیق که

به صورت تابع پله ای می باشد



شکل ۵-۷. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی دقیق که

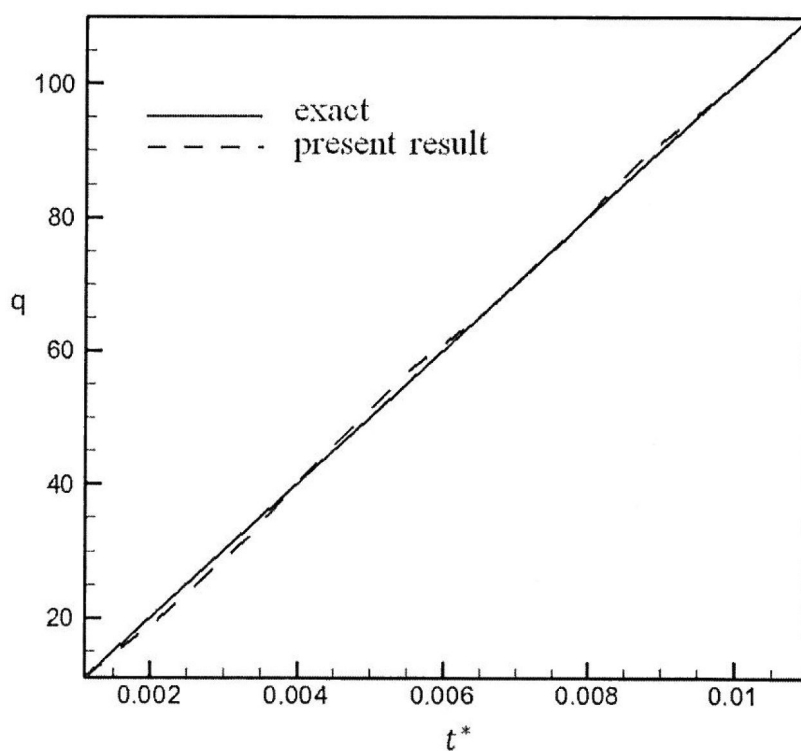
به صورت تابعی ترکیبی از $\sin$ و $\cos$ می باشد

جدول ۵-۱. خطای RMS برای توابع مختلف در نظر گرفته شده برای شار حرارتی

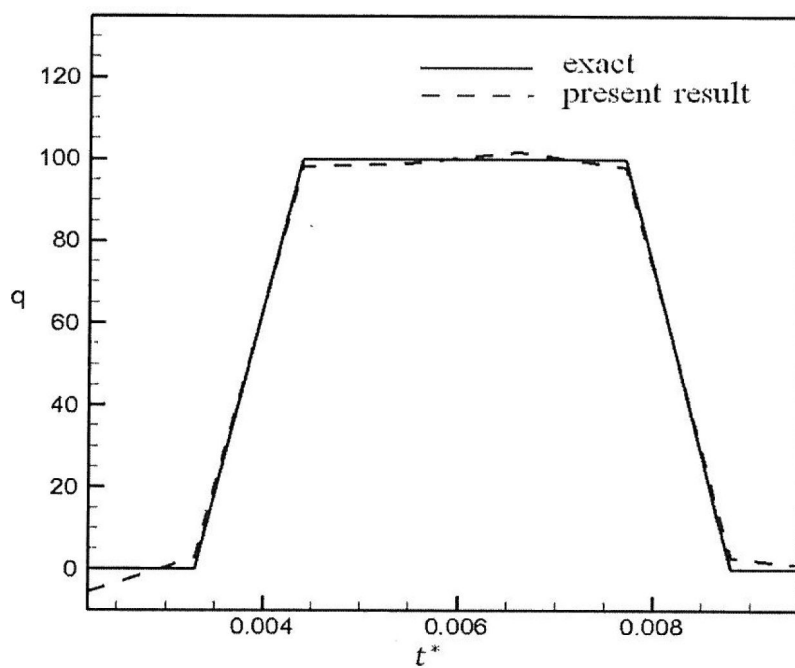
σ		RMS Error	Iteration
0	Linear	0.3472	141
	Sinus	0.0379	102
	step	0.1627	127
$0.03T_{max}$	Linear	0.5434	43
	Sinus	0.117	26
	step	0.1962	34

در شکل های (۵-۸)، (۵-۹) و (۵-۱۰) توابع قبلی با توابع محاسبه شده با استفاده از روش معکوس برای حالتی که چندلایه داشته باشیم، مقایسه شده اند سپس حل معکوس با داده های نویزدار ارائه شده است. در عمل، خطاهایی در اندازه گیری داده ها وجود دارد بنابراین از داده های نویزدار برای شبیه سازی

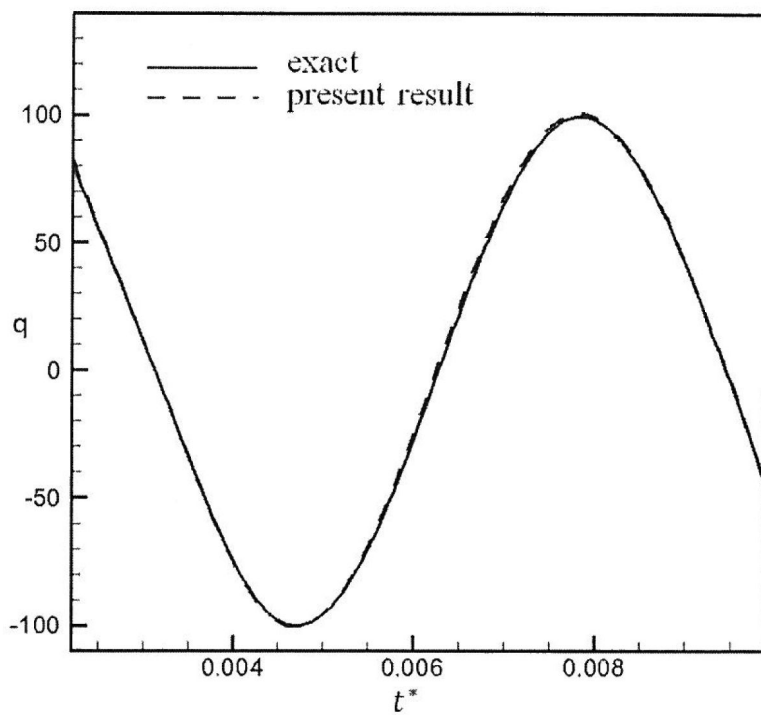
خطاها استفاده شده است. تاثیر داده‌های نویز دار را در (۵-۱۱)، (۵-۱۲) و (۵-۱۳) در مقایسه با داده‌های بدون نویز (شکل‌های (۵-۸) تا (۵-۱۰)) می‌توان مشاهده کرد.



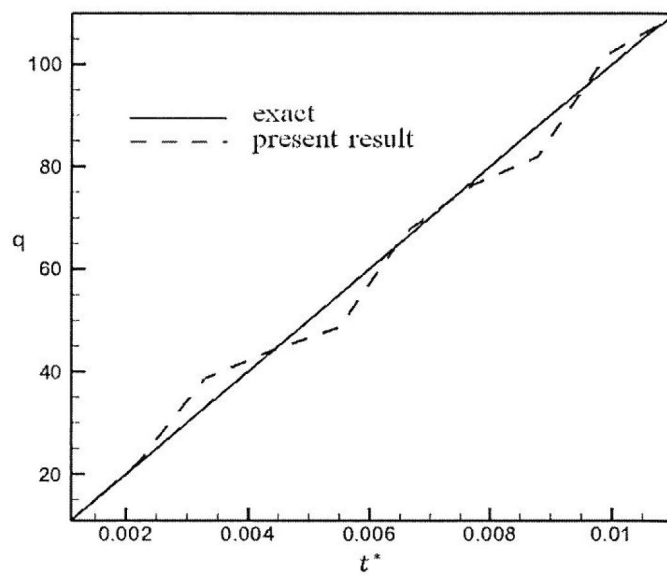
شکل ۵-۸. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع خطی می‌باشد



شکل ۵-۹. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع پله می باشد

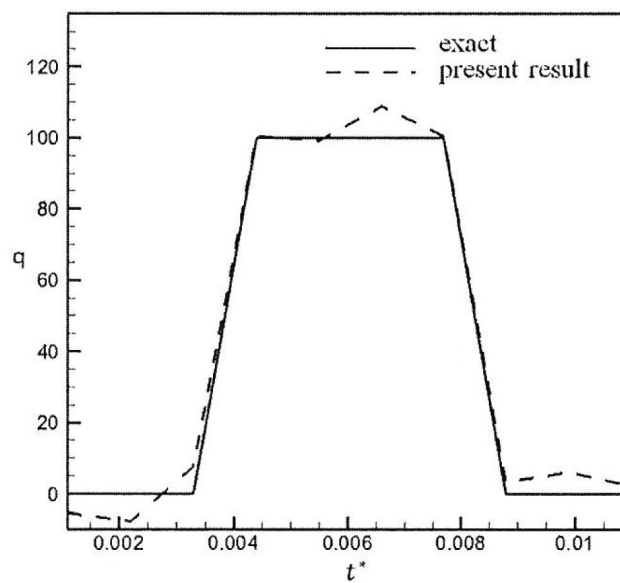


شکل ۵-۱۰. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با شار حرارتی دقیق که به صورت تابع سینوس و کسینوس می باشد



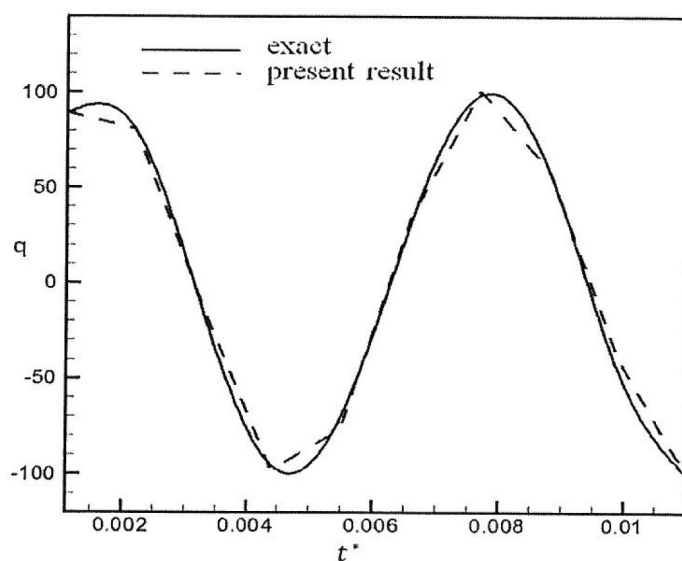
شکل ۵-۱۱. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی دقیق

که به صورت تابع خطی می باشد



شکل ۵-۱۲. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی دقیق

که به صورت تابع پله می باشد



شکل ۵-۱۳. مقایسه شار حرارتی محاسبه شده با استفاده از داده های نویزدار با شار حرارتی دقیق

که به صورت تابع سینوس-کسینوس می باشد

حال با توجه اینکه می دانیم کد مورد نظر جواب قابل قبول و صحیحی می دهد، توزیع دمای بی

بعد، که صرفاً یک حدس می باشد، برای رسیدن به هدف مطلوب که کاهش دمای ۵ درجه در مدت زمان ۳۰

دقیقه را داشته باشیم را به صورت زیر در نظر می گیریم:

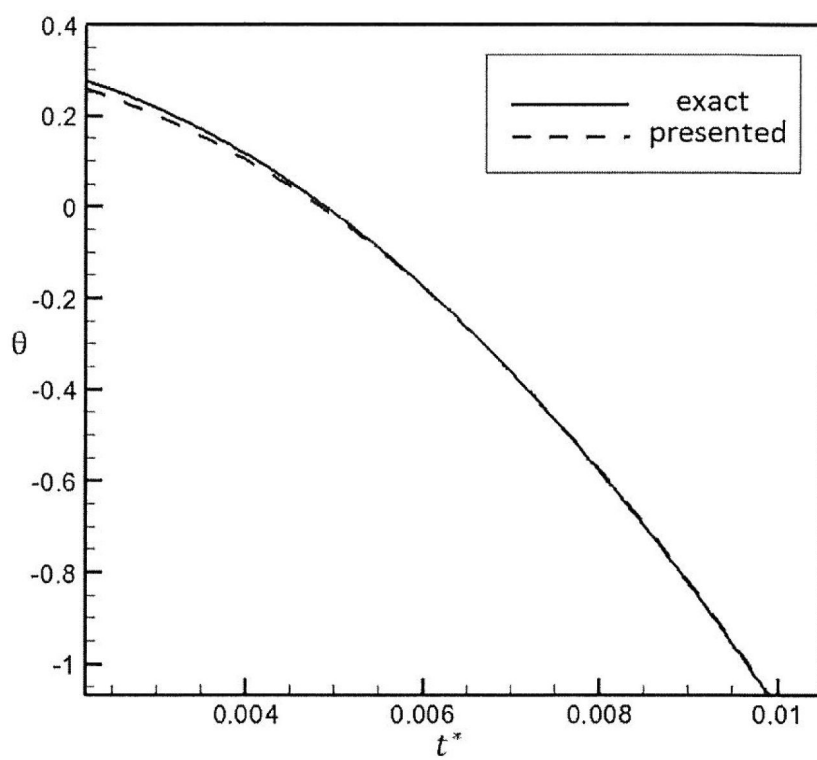
$$\theta = -\frac{5}{1800^2} \left(\frac{R^2 t^*}{\alpha} \right)^2 + 1 \quad (۴-۵)$$

این توزیع دما در شکل (۵-۱۳) نمایش داده شده است. حال با وارد کردن این توزیع دما به عنوان

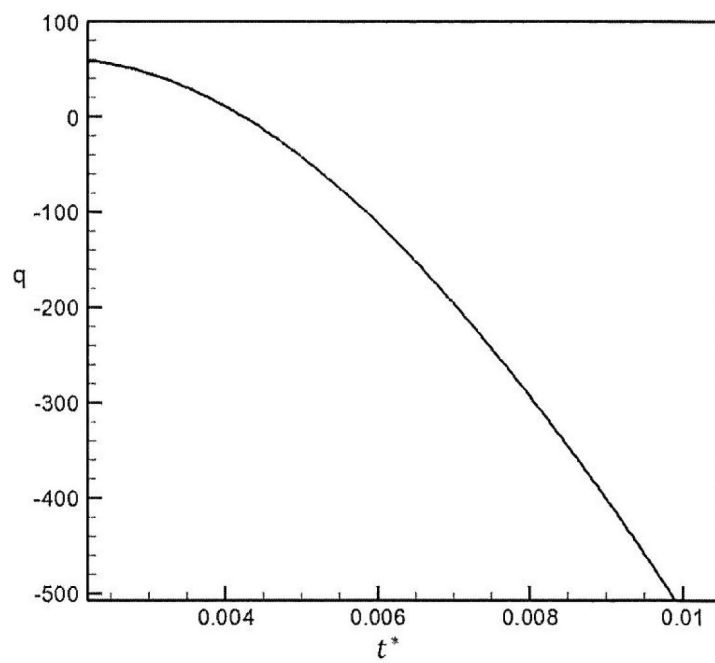
حل مسئله مستقیم، شار مطلوب را به دست می آوریم (شکل (۵-۱۴))

$$q = -8.88 t^{*2} - 1.93 t^* - 73.51 \quad)$$

(۵-۵)



شکل ۵-۱۴. مقایسه دمای محاسبه شده و دمای دقیق.



شکل ۵-۱۵. شار محاسبه شده

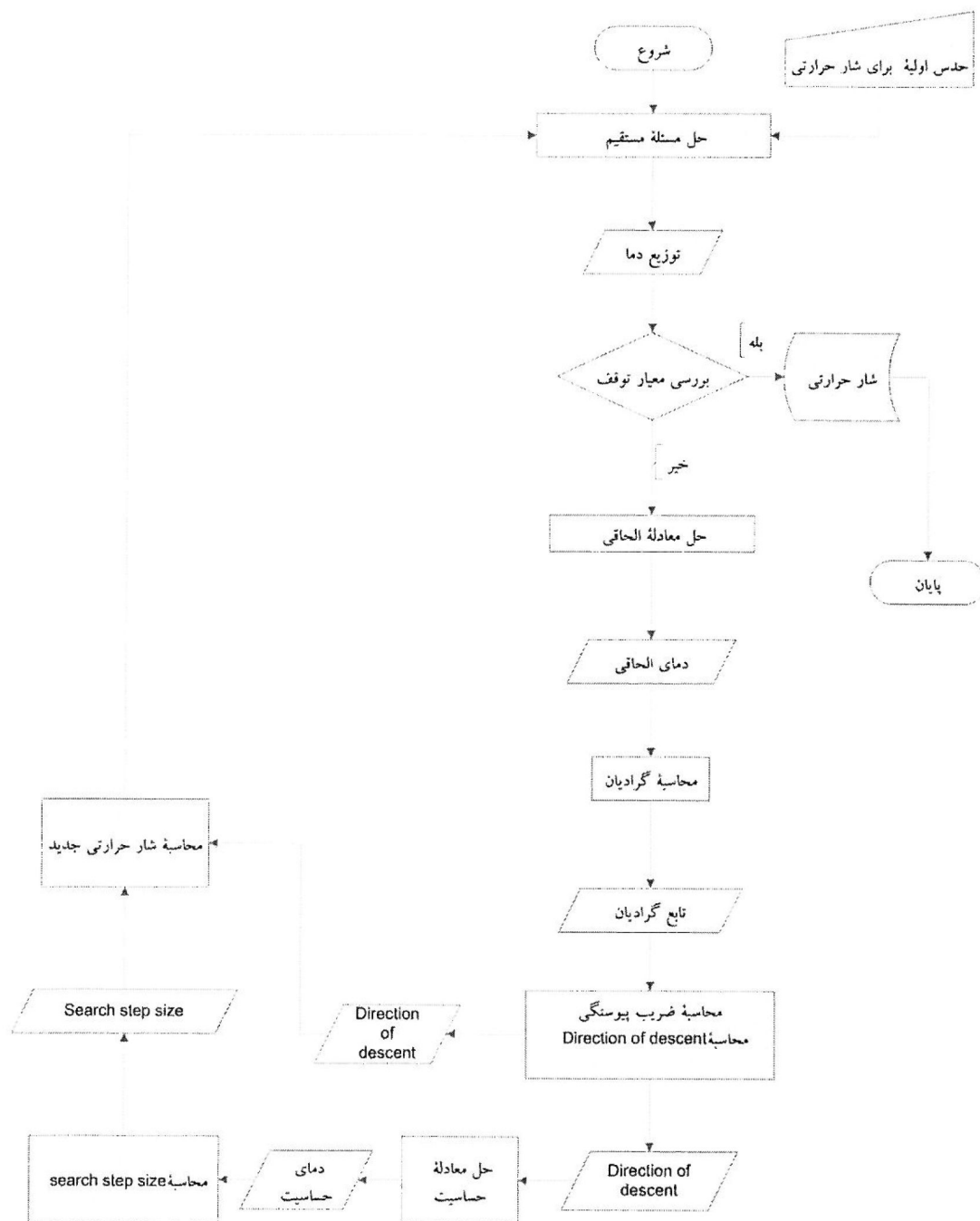
نتیجه‌گیری:

هدف کلی رسیدن به دمای میانگین ۳۳ در مغز در مدت‌زمان ۳۰ دقیقه است و از آنجاکه در هیچ‌یک از بررسی‌های انجام‌شده به این هدف که مطلوب پزشکان است، نرسیده‌اند برای اولین بار روش انتقال حرارت معکوس مدنظر قرار داده‌شد. در این روش با معلوم بودن جواب هدف بهترین شرایط برای رسیدن به آن محاسبه می‌شوند. هندسه مغز به‌صورت یک نیم‌کره در نظر گرفته‌شده است. مسئله با استفاده از روش مختصات عمومی و در حالت متقارن محوری حل شده است. در این روش، صفحه فیزیکی نامنظم مسئله به صفحه محاسباتی مستطیل شکل تبدیل می‌شود. پس از حل در حالتی که مغز تنها شامل یک لایه از بافت بود، درستی حل مورد بررسی قرار گرفت. سپس مسئله یک قدم نزدیک‌تر به واقعیت حل شد که سه لایه شامل: بافت، استخوان و پوست سر در نظر گرفته شد و درستی حل مسئله معکوس بررسی شد. در انتها با در نظر گرفتن یک توزیع دمای فرضی، مسئله را حل کرده و شار حرارتی بهینه را بدست آوردیم.

پیشنهاد می‌شود در کارهای بعدی هندسه کامل‌تری برا سر در نظر گرفته شود تا به واقعیت نزدیک‌تر شود. همچنین، استفاده از یک توزیع دمای مناسب‌تر با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی می‌تواند جواب بهتری را نتیجه دهد.

پیوست الف

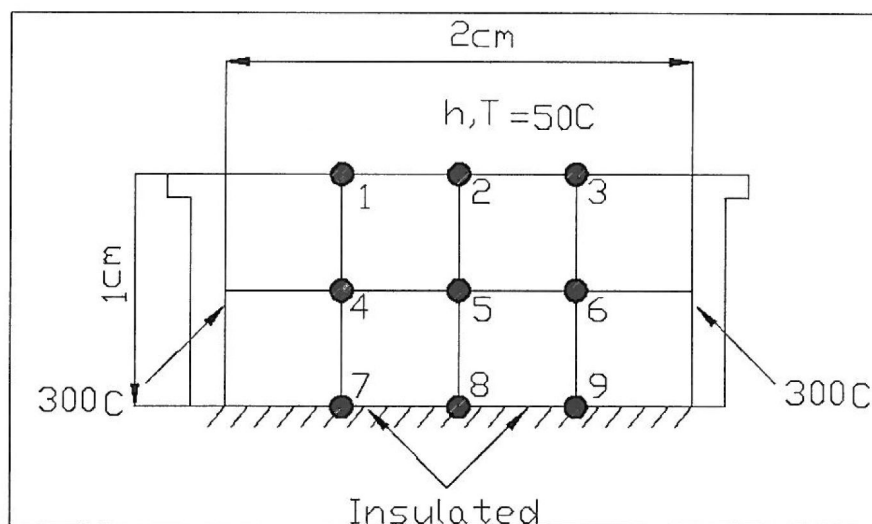
فلوچارت کدهای کامپیوتری تهیه شده برای حل مسائل معکوس



پیوست ب

اعتبارسنجی حل مستقیم

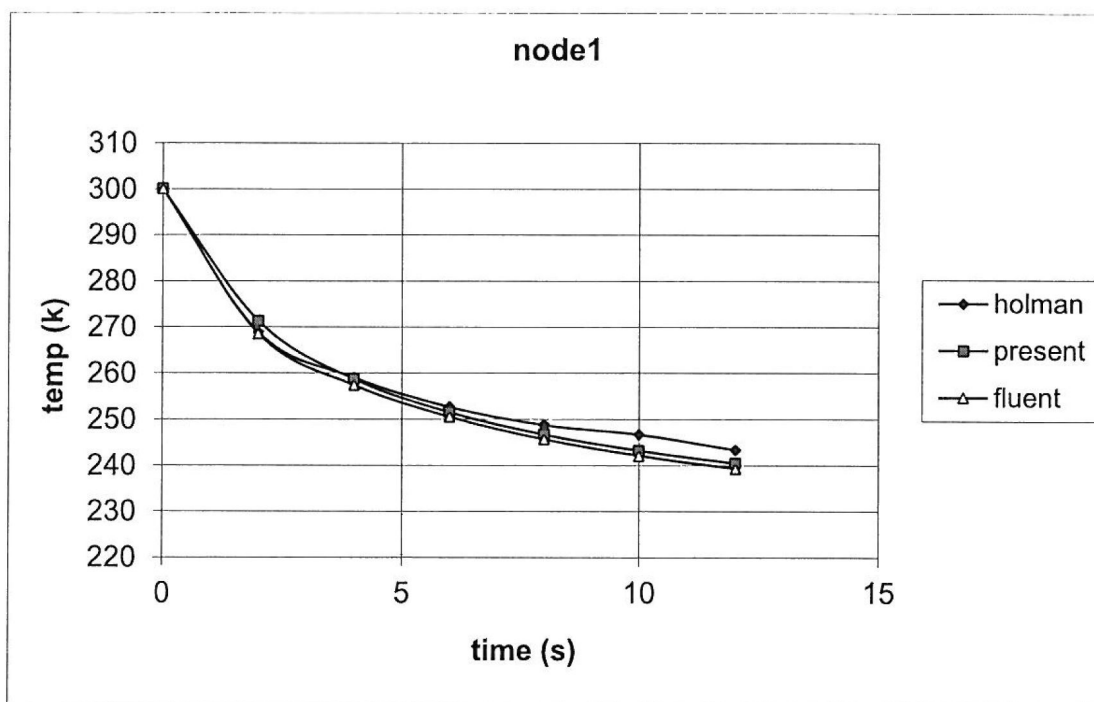
به منظور بررسی صحت کد انتقال حرارت گذرا، نتایج با داده‌های موجود در مرجع [۵۵] و نیز نتایج حاصل از نرم‌افزار FLUENT مقایسه گردیده است، به این منظور در اولین آزمایش جسمی با هندسه مستطیلی و با ابعاد $2\text{cm} \times 1\text{cm}$ (از جنس سرامیک با ضریب هدایت حرارتی $k=3\text{ w/m.k}$ و چگالی $\rho=1600\text{ kg/m}^3$ و $C=0.8\text{ kJ/kg.K}$ با دمای اولیه 300°K و شرایط مرزی نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر می‌گیریم، شرط مرزی برای دیواره‌های طرف چپ و راست شرط دما ثابت (300°K)، برای مرز پایین عایق و برای مرز بالا شار حرارتی در حضور سیالی با شرایط ($T_\infty=50^\circ\text{K}$, $h=200\text{ W/m}^2.\text{K}$) هست. روشن است که به دلیل تقارن مسئله، دمای گره‌های ۱،۳ و نیز گره‌های ۴،۶ و ۷،۹ یکسان می‌باشد، بنابراین از هر گروه تنها به دمای یکی از گره‌ها اشاره شده است. منحنی‌های توزیع دما برای گره‌های نشان داده شده، در مدت زمان ۱۲sec مطابق شکل‌های ۸ تا ۱۳ ارائه شده است.



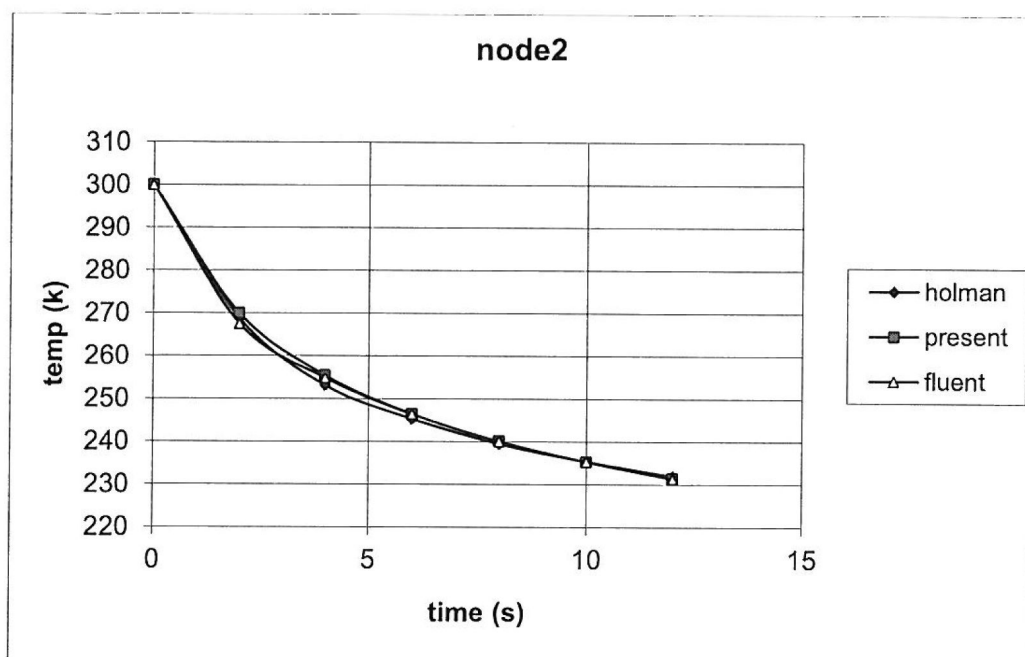
شکل ۱- هندسه مستطیلی با شرایط مرزی دما، عایق و شار حرارت

انطباق خوبی میان نتایج ارائه شده با نتایج نرم‌افزار FLUENT وجود دارد و اختلاف ناچیز موجود با نتایج مرجع [۵۵] ناشی از شبکه درشتی هست (شبکه 5×3) که در این مرجع برای حل مسئله

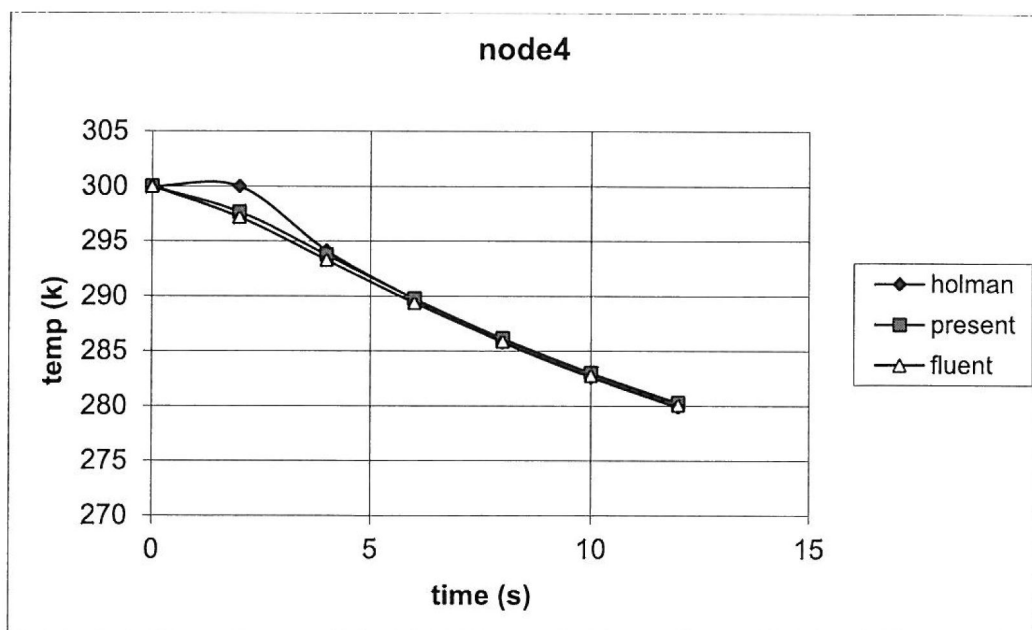
مورد استفاده قرار گرفته است. به علاوه با مقایسه نتایج FLUENT با نتایج مرجع [۵۵] از صحت نتایج FLUENT نیز اطمینان حاصل شده است.



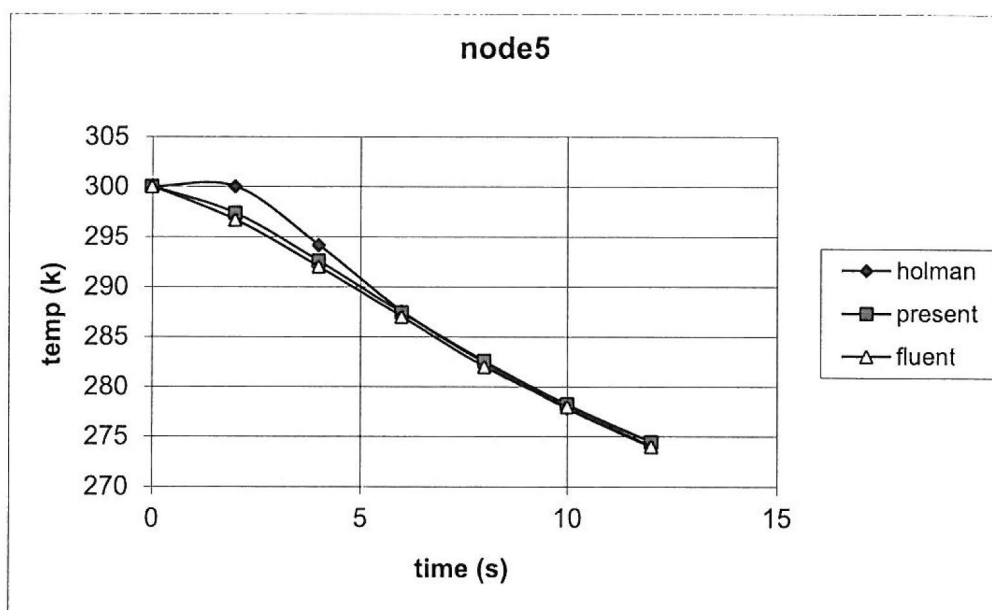
شکل ۲- مقایسه منحنی‌های توزیع دمای گره ۱ پس از ۱۲ ثانیه



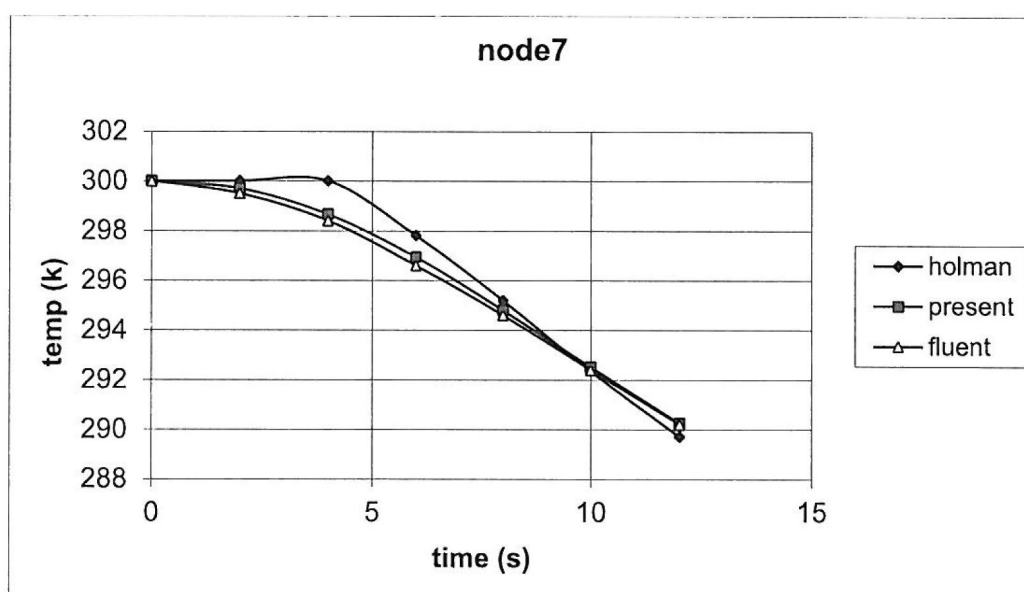
شکل ۳- مقایسه منحنی‌های توزیع دمای گره ۲ پس از ۱۲ ثانیه



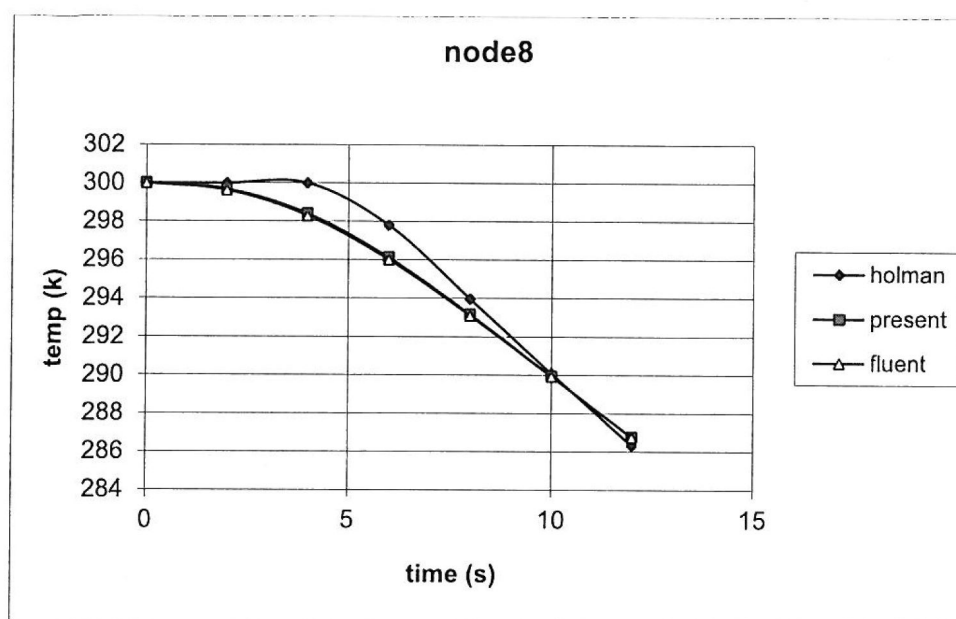
شکل ۴- مقایسه منحنی‌های توزیع دمای گره ۴ پس از ۱۲ ثانیه



شکل ۵- مقایسه منحنی‌های توزیع دمای گره ۵ پس از ۱۲ ثانیه

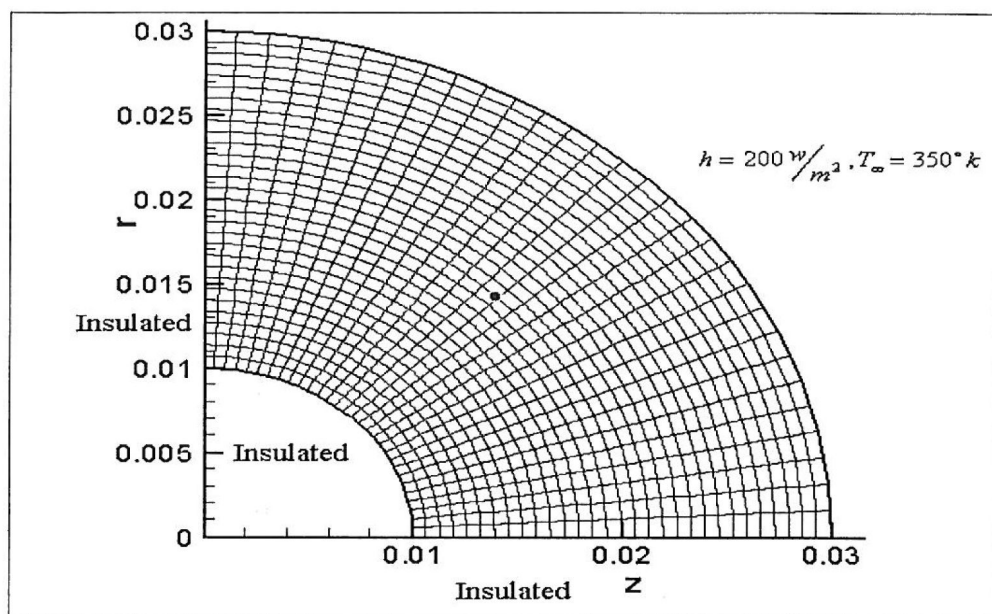


شکل ۶- مقایسه منحنی‌های توزیع دمای گره ۷ پس از ۱۲ ثانیه



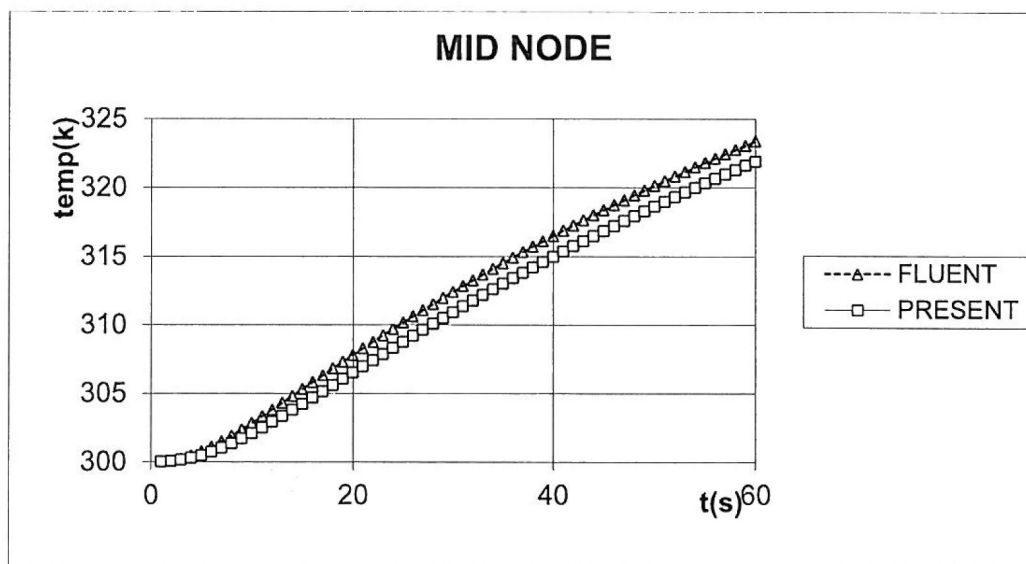
شکل ۷- مقایسه منحنی‌های توزیع دمای گره ۸ پس از ۱۲ ثانیه

در آزمایش بعدی، به‌منظور بررسی صحت عملکرد برنامه در هندسه‌های منحنی، جسمی با هندسه ربع دایره، با شعاع داخلی ۱ cm و شعاع خارجی ۳ cm از جنس سرامیک، با ضریب هدایت حرارتی $k=3 \text{ W/m.k}$ ، چگالی $\rho=1600 \text{ kg/m}^3$ و $C=0.8 \text{ kJ/kg.K}$ با دمای اولیه 300°K و شرایط مرزی نشان داده‌شده در شکل ۸ را در نظر می‌گیریم، شرط مرزی برای دیواره‌های طرف چپ، پایین و بالا عایق و برای دیواره طرف راست بالا شار حرارتی در حضور سیالی با شرایط $(h=200 \text{ W/m}^2.\text{K}, T_\infty=350^\circ \text{K})$ هست.



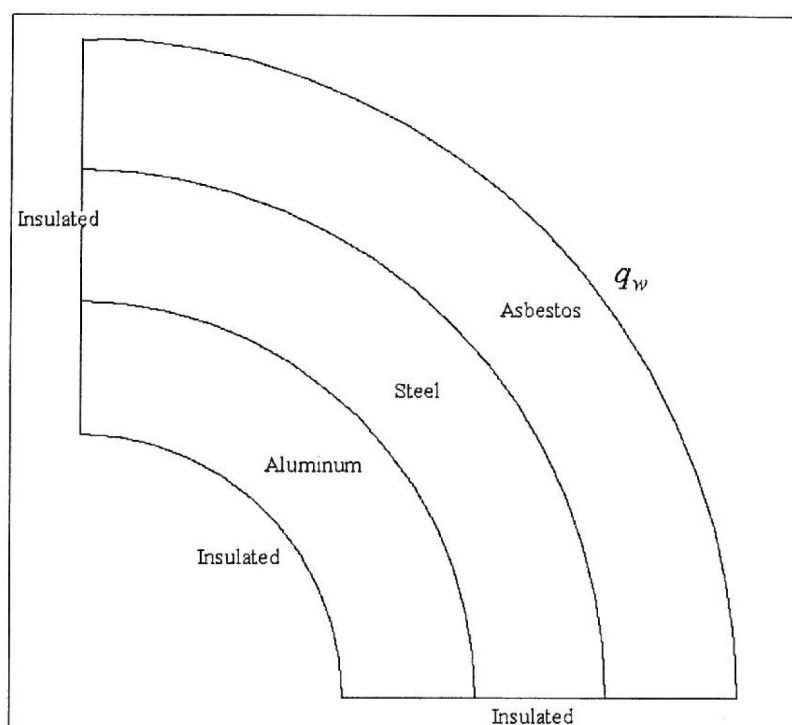
شکل ۸- هندسه منحنی با شرایط مرزی عایق و شار حرارتی

در شکل ۹ منحنی توزیع دما برای گره میانی در مدت زمان ۶۰s با منحنی توزیع دمای FLUENT مقایسه شده است و همان طور که مشاهده می شود نتایج از انطباق خوبی برخوردار می باشند.

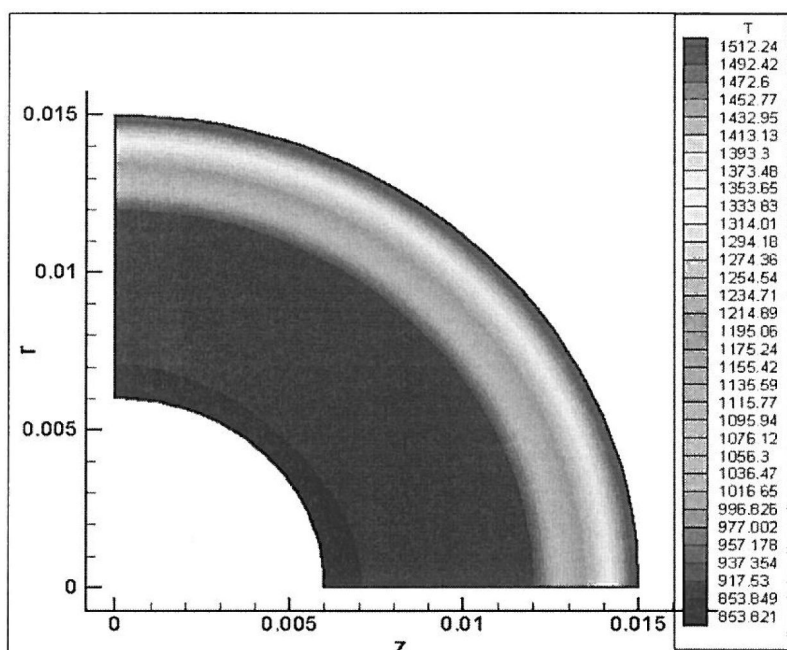


شکل ۹- مقایسه منحنی توزیع دما برای گره میانی پس از ۶۰ ثانیه

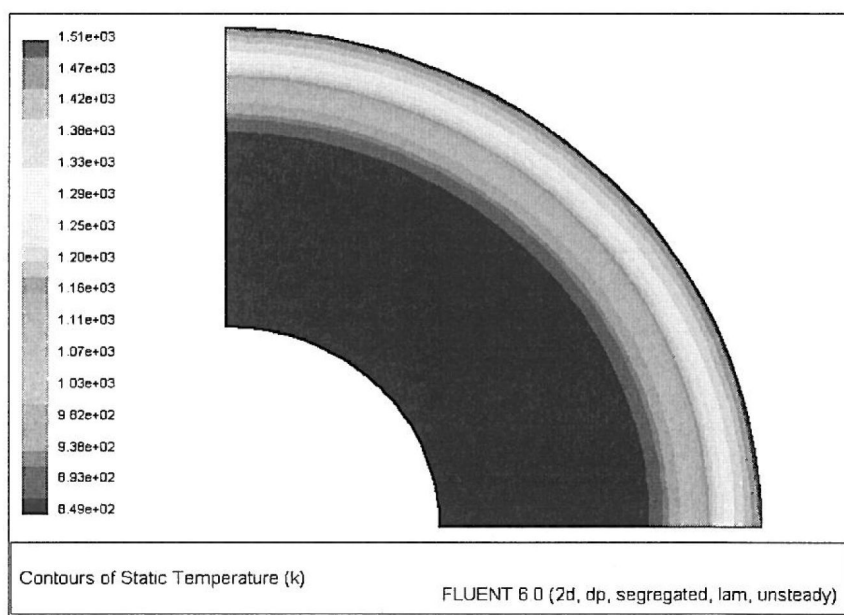
در سومین آزمایش به منظور بررسی صحت عملکرد برنامه در محاسبه توزیع دما برای مسائل چندلایه، مطابق شکل ۱۰ جسمی متشکل از سه لایه مختلف آزیست ($\rho = 1850 \frac{kg}{m^3}, C_p = 1200 \frac{J}{kg.k}, k = 0.42 \frac{w}{m.k}$) فولاد ($\rho = 7800 \frac{kg}{m^3}, C_p = 500 \frac{J}{kg.k}, k = 20 \frac{w}{m.k}$) و آلومینیم ($\rho = 2719 \frac{kg}{m^3}, C_p = 871 \frac{J}{kg.k}, k = 202.4 \frac{w}{m.k}$) را در نظر می گیریم ، هندسه مسئله ربع دایره ای با شعاع داخلی ۰٫۶cm و شعاع خارجی ۱٫۵cm می باشد که مرز بالا در معرض شار حرارتی ثابت $q_w = 100000 \frac{w}{m^2.k}$ قرار دارد ، دمای اولیه $300^\circ k$ است و سایر مرزها عایق می باشند . کانتورهای توزیع دما مطابق شکل های ۱۱، ۱۲ با کانتورهای توزیع دمای FLUENT مقایسه شده است و همان طور که مشاهده می شود نتایج از انطباق خوبی برخوردار هست.



شکل ۱۰- نمایش هندسه منحنی متشکل از سه لایه مختلف آزیست ، فولاد و آلومینیم



شکل ۱۱- نمایش کانتورهای توزیع دمای کد حاضر برای مسئله چندلایه

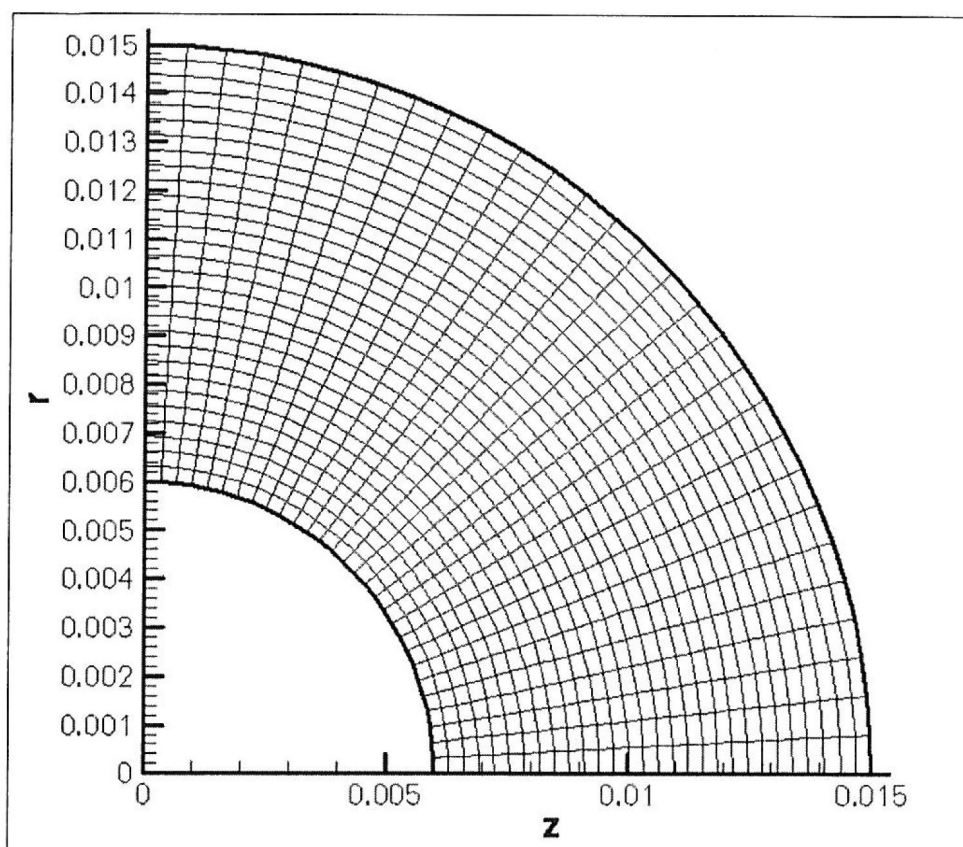


شکل ۱۲- نمایش کانتورهای توزیع دمای FLUENT برای مسئله چندلایه

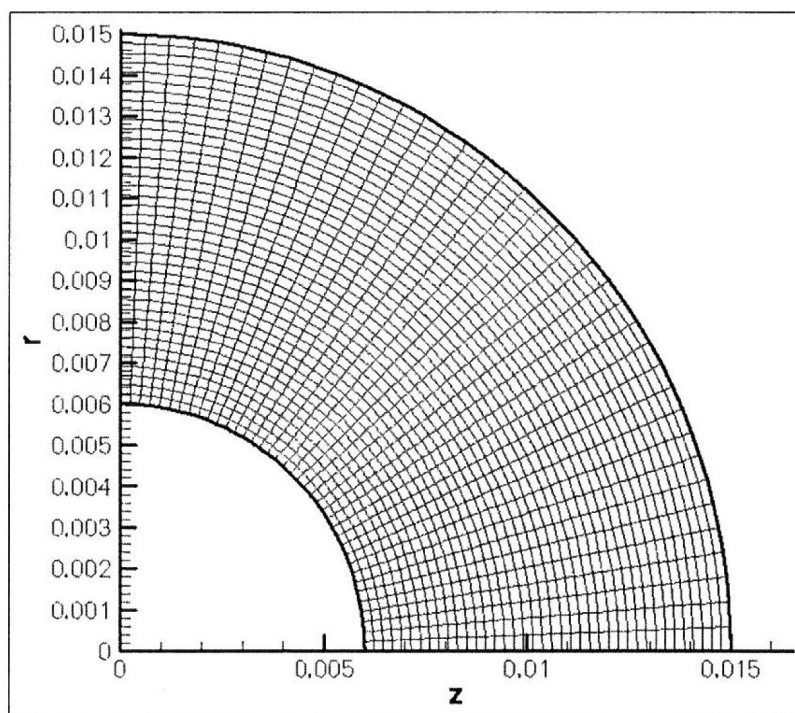
به منظور نشان دادن استقلال از شبکه در حل مستقیم، هندسه مورد نظر توسط شبکه‌های 30×30 ،

40×40 و 50×50 شبکه‌بندی شده و شار حرارتی $q_w = 1000 \text{ t}$ بر روی سطح بالایی اعمال شده است. نتایج

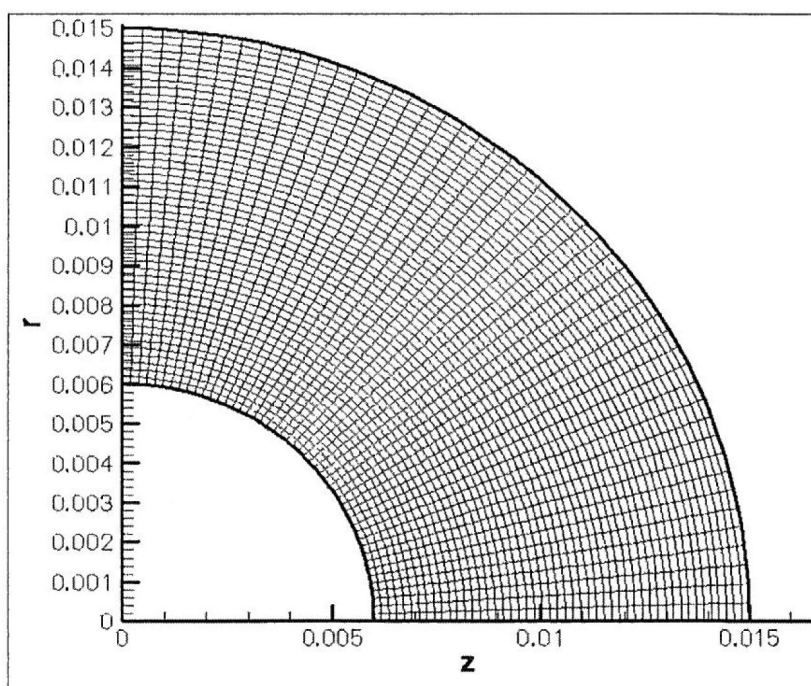
نشان داده شده (کانتورهای توزیع دما) در شکل های ۱۶، ۱۷ و ۱۸، استقلال از شبکه را در حل مسائل یک لایه، دو لایه و سه لایه تأیید می کنند.



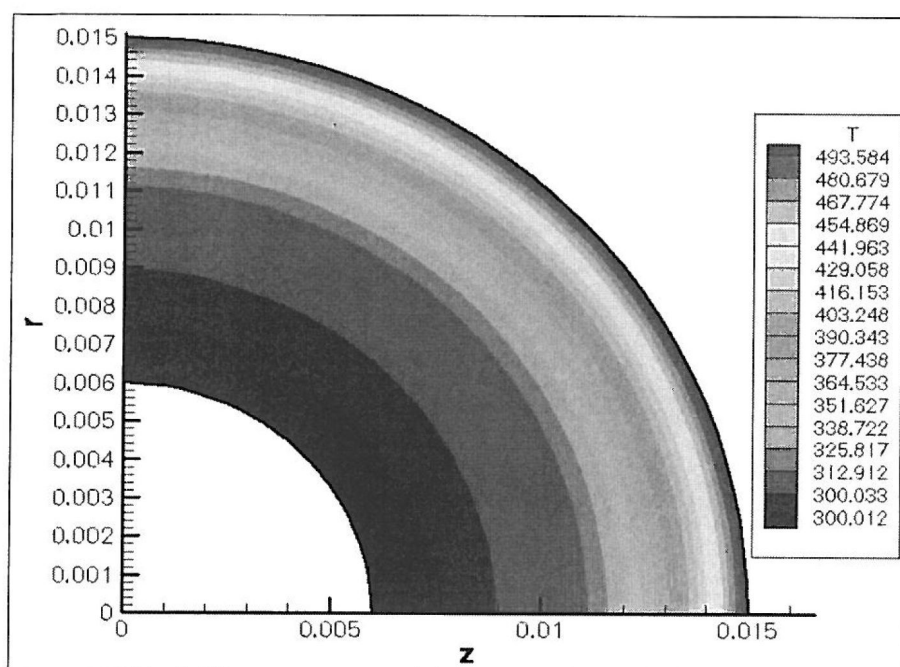
شکل ۱۳- نمایش شبکه ۳۰*۳۰



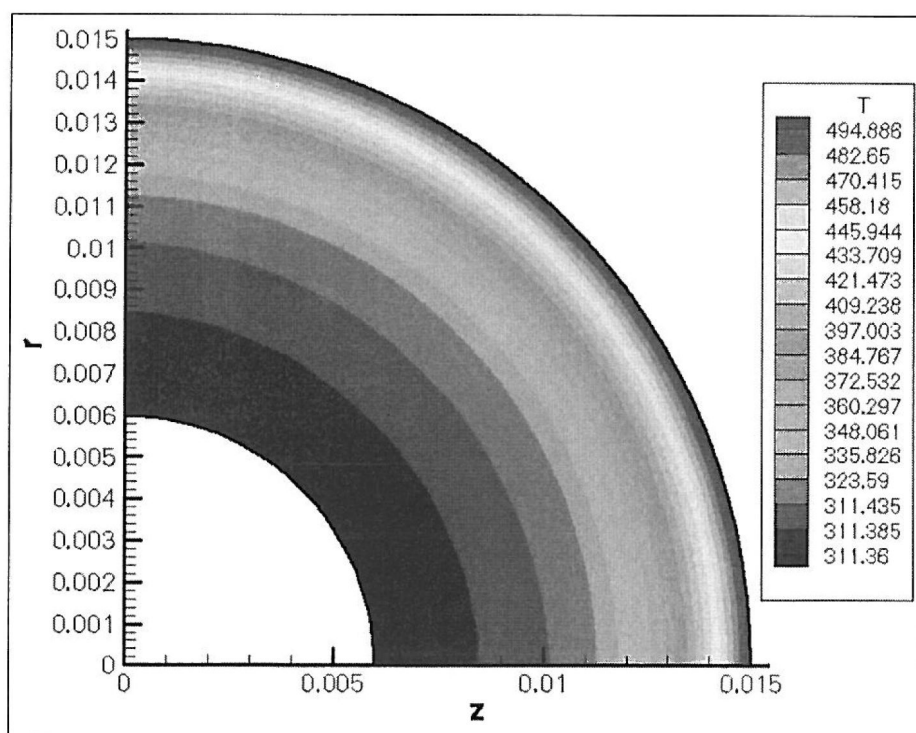
شکل ۱۴- نمایش شبکه ۴۰*۴۰



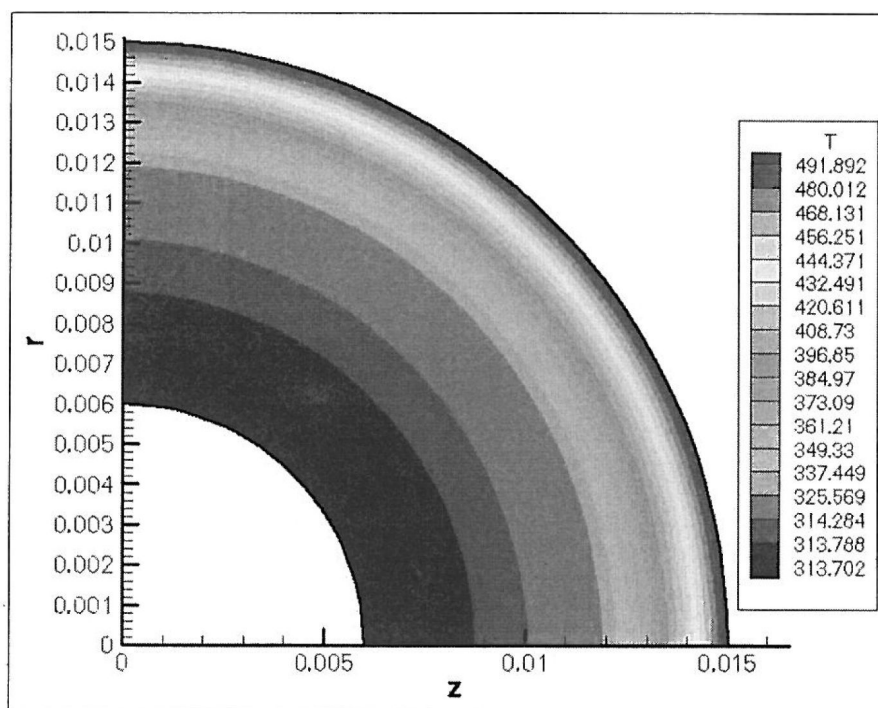
شکل ۱۵- نمایش شبکه ۵۰*۵۰



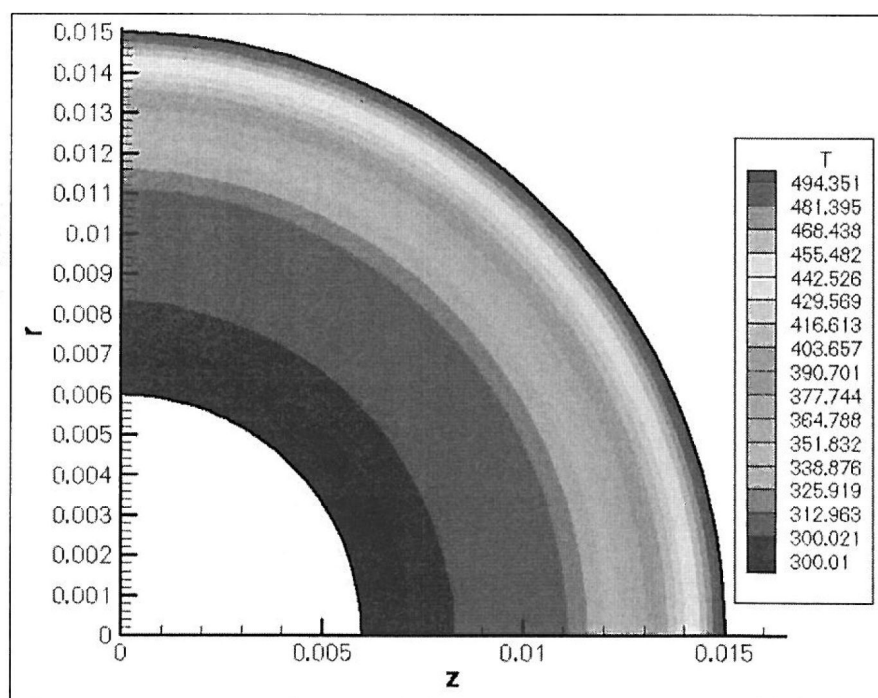
شکل ۱۶- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 30×30 در مسئله یک لایه



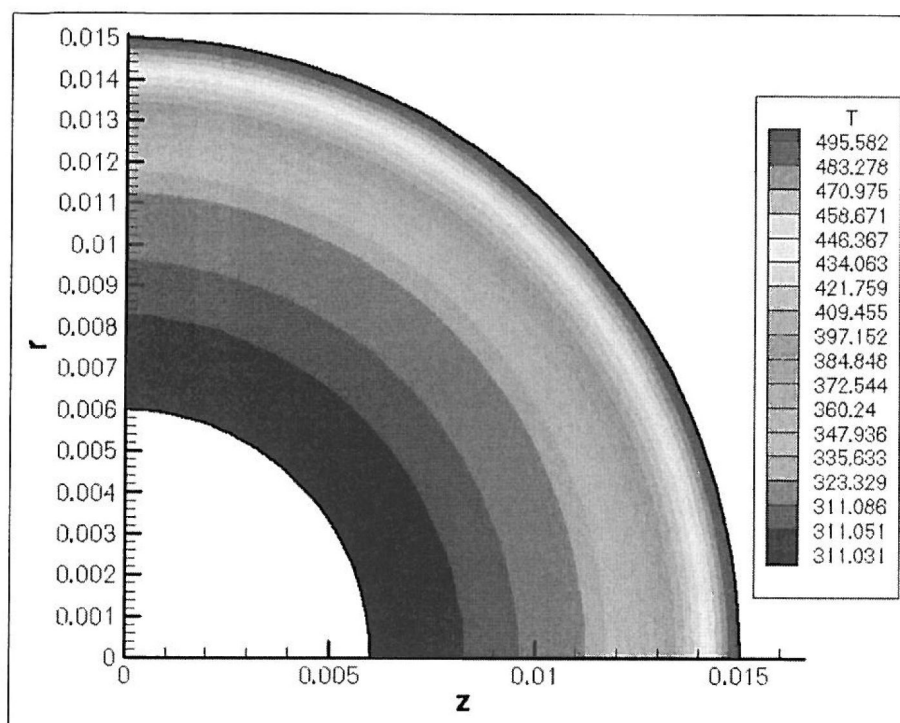
شکل ۱۷- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 30×30 در مسئله دو لایه



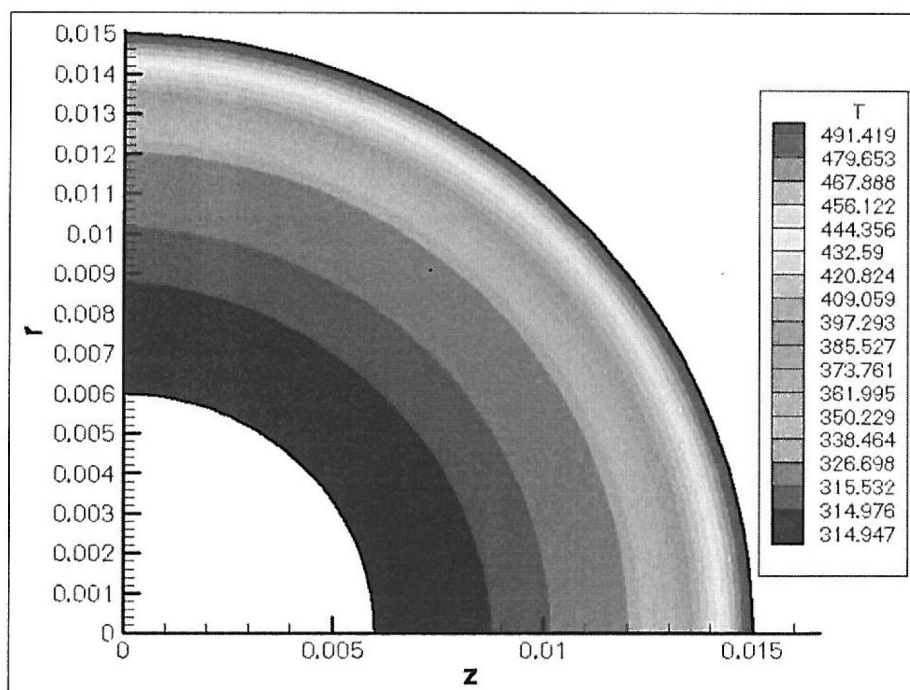
شکل ۱۸- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 30×30 در مسئله سه لایه



شکل ۱۹- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 40×40 در مسئله یک لایه



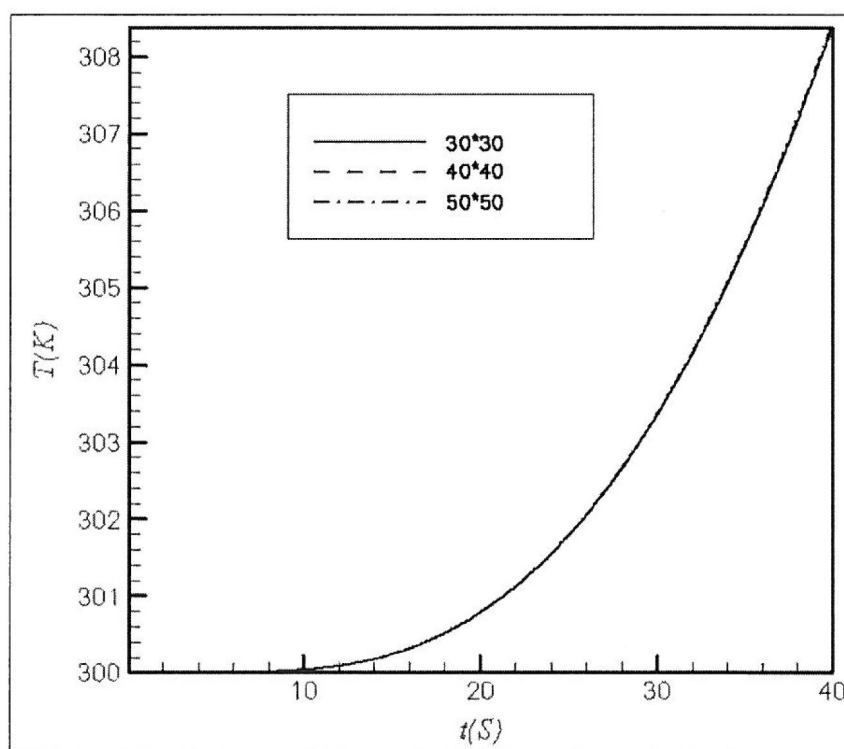
شکل ۲۰- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 40×40 در مسئله دولایه



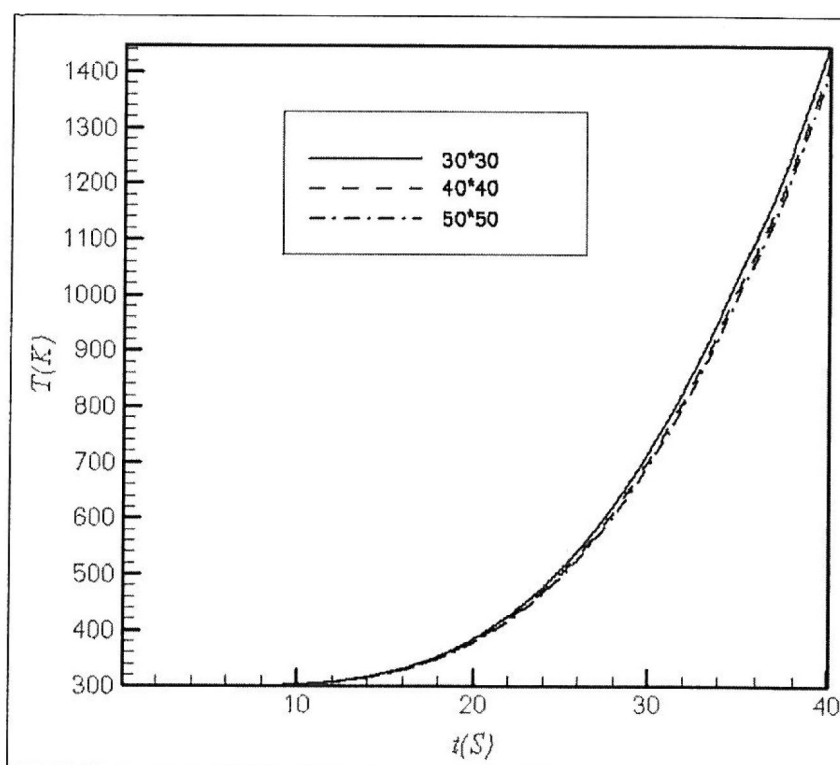
شکل ۲۱- نمایش کانتورهای توزیع دما برای شبکه 40×40 در مسئله سه لایه

به دلیل انطباق بسیار زیاد منحنی‌های توزیع دمای گره میانی در حالتی که شار حرارتی $q_w = 1000 \text{ t}$ بر سطح بالایی اعمال شده است و به‌منظور نمایش بهتر منحنی‌های توزیع دما، شار حرارتی $q_w = 100000 \text{ t}$ برای نمایش بهتر اختلاف دمای گره میانی مورد استفاده قرار گرفته است.

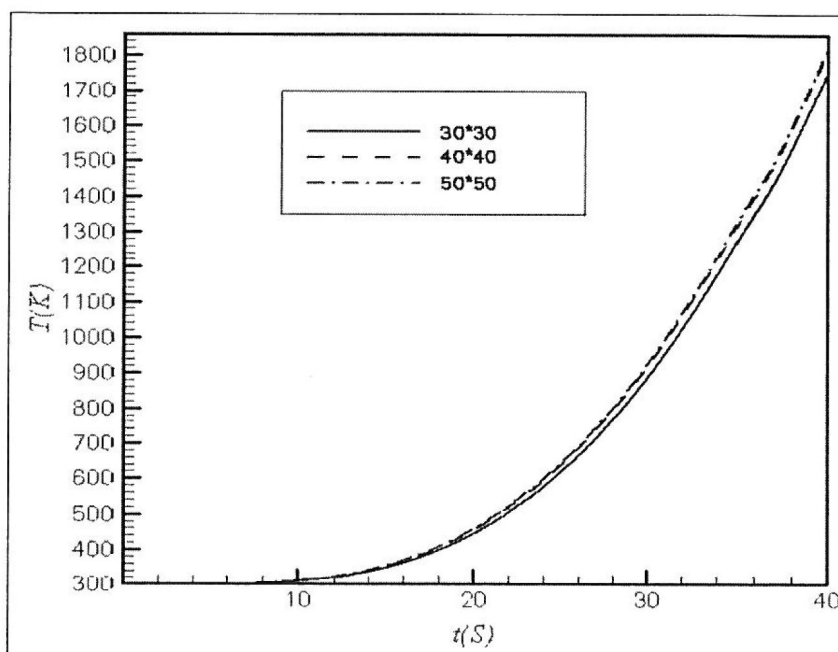
منحنی‌های نشان داده‌شده، استقلال از شبکه را در محاسبه دمای گره میانی، تأیید می‌کنند.



شکل ۲۲- نمایش منحنی‌های توزیع دمای گره میانی در مسئله یک‌لایه

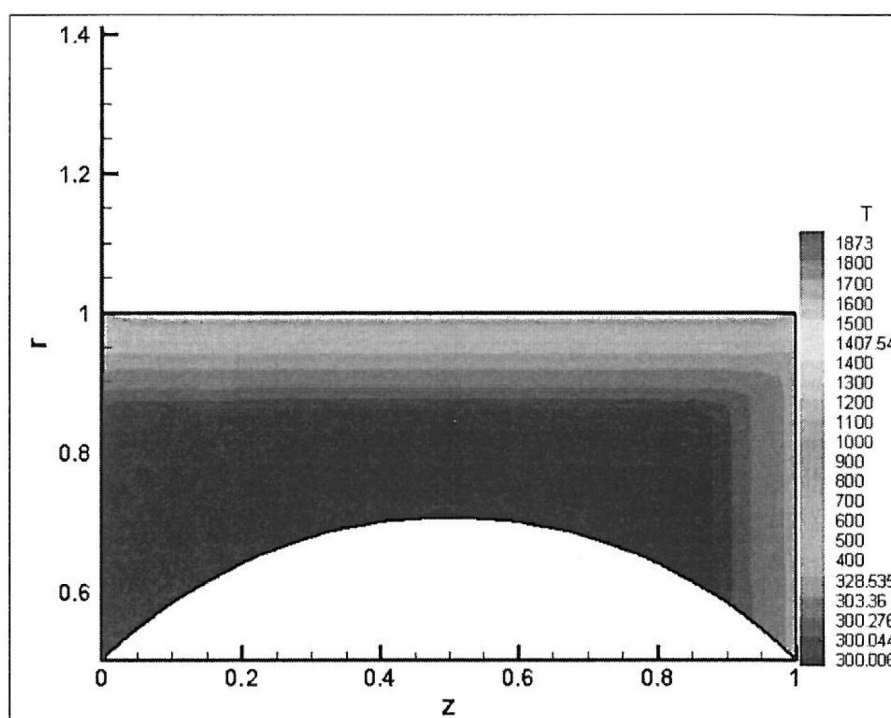


شکل ۲۳- نمایش منحنی‌های توزیع دمای گره میانی در مسئله دولایه

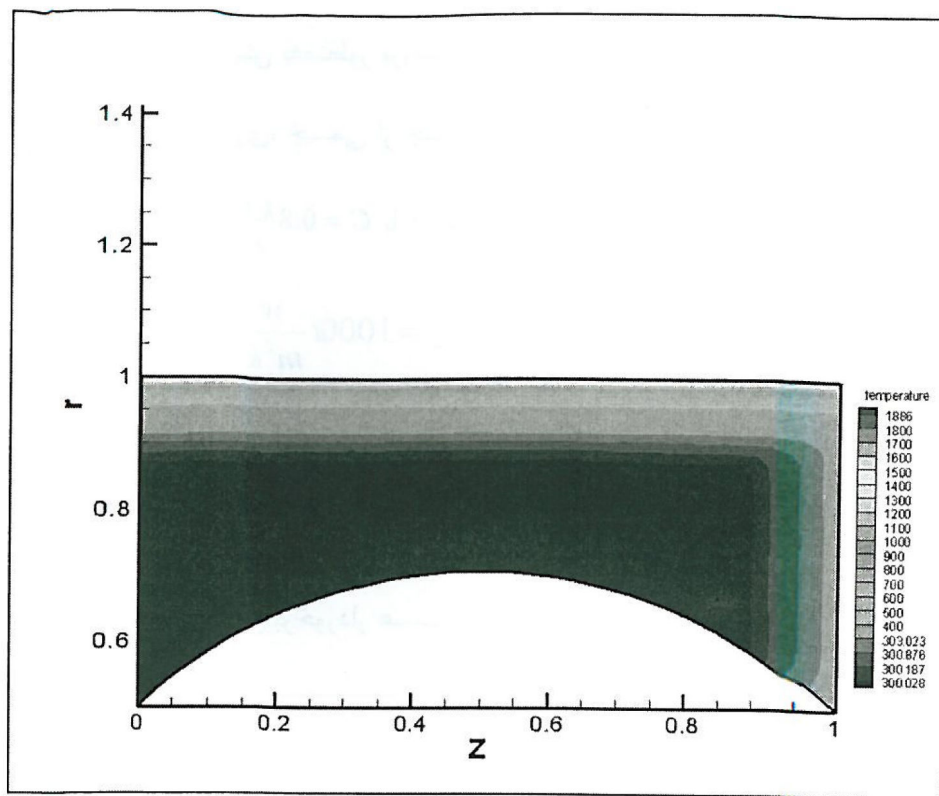


شکل ۲۴- نمایش منحنی‌های توزیع دمای گره میانی در مسئله سه لایه

در چهارمین آزمایش به منظور بررسی صحت عملکرد برنامه در محاسبه توزیع دما برای هندسه-های نامنظم با تقارن محوری، جسمی از جنس سرامیک با ضریب هدایت حرارتی $k=3 \text{ W/m.K}$ و چگالی $\rho=1600 \text{ kg/m}^3$ و $C=0.8 \text{ kJ/kg.K}$ با دمای اولیه 300°K را در نظر می‌گیریم که مرز بالا در معرض شار حرارتی وابسته به زمان $q_w=1000t \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ قرار دارد، مرز سمت راست در معرض شار حرارتی ثابت $q_0=700 \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}}$ قرار دارد و سایر مرزها عایق می‌باشند. کانتورهای توزیع دما مطابق شکل‌های ۲۶، ۲۵ با کانتورهای توزیع دمای FLUENT بعد از مدت‌زمان ۱۸۰ ثانیه مقایسه شده است و همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج از انطباق خوبی برخوردار هست.



شکل ۲۵- نمایش کانتورهای توزیع دمای کد حاضر برای هندسه نامنظم با تقارن محوری



شکل ۲۶- نمایش کانتورهای توزیع دمای FLUENT برای هندسه نامنظم با تقارن محوری

در ادامه به منظور بررسی صحت کد انتقال حرارت گذرا، نتایج با حل تحلیلی ارائه شده در مرجع

[۵۶] مقایسه گردید، به این منظور کره‌ای با شعاع ۱۰ cm از جنس سرامیک با ضریب هدایت حرارتی $k=3$

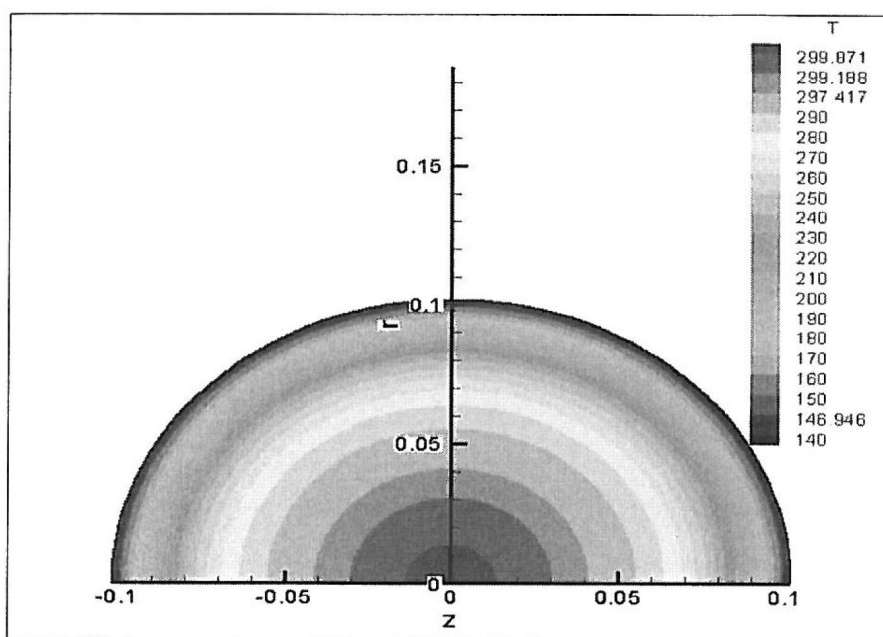
$W/m.k$ و چگالی $\rho=1600 \text{ kg/m}^3$ و $C=0.8 \text{ kJ/kg.K}$ با دمای اولیه $300^\circ K$ در داخل سیالی با شرایط)

در نقطه‌ای که در موقعیت $r=5 \text{ cm}$ قرار گرفته و در مدت زمان ۱۲۰ ثانیه توزیع دما در مرکز کره، در

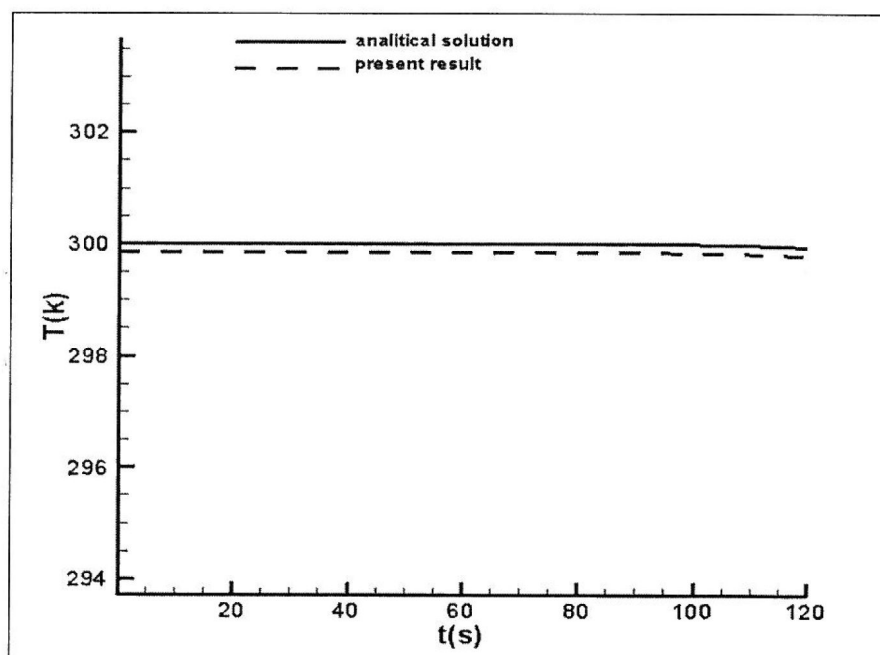
نقطه‌ای که در موقعیت $r=5 \text{ cm}$ قرار گرفته و در نقطه‌ای که روی سطح کره قرار گرفته با نتایج حل تحلیلی

مقایسه گردید. نتیجه ارائه شده در مرجع [۵۶] به صورت زیر است:

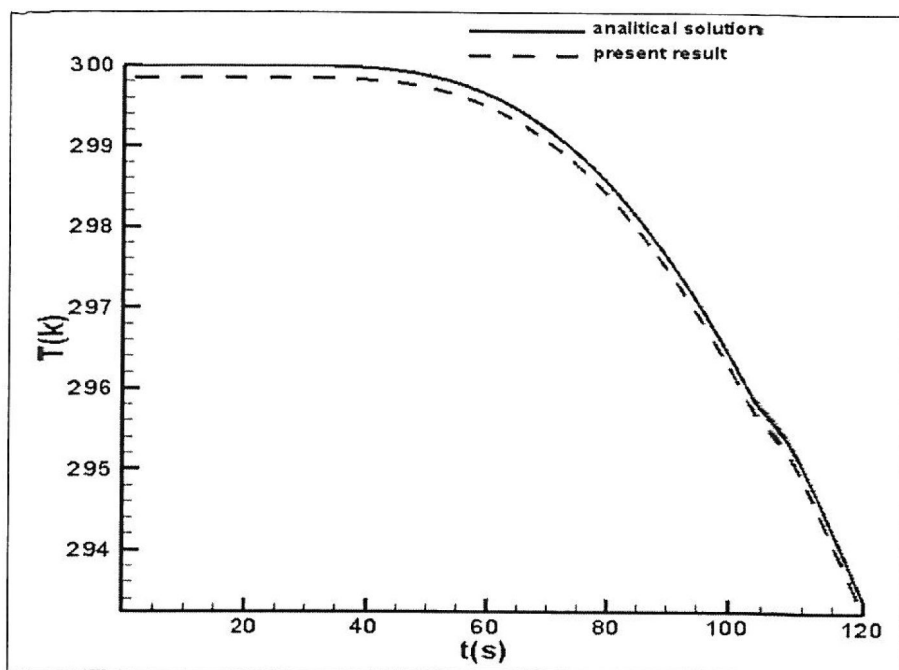
$$T = T_{\infty} + 4(T_0 - T_{\infty}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\lambda_n R) - \lambda_n R \cos(\lambda_n R)}{2\lambda_n R - \sin(2\lambda_n R)} \frac{\sin(\lambda_n r)}{\lambda_n r} e^{-\alpha \lambda_n^2 t}$$



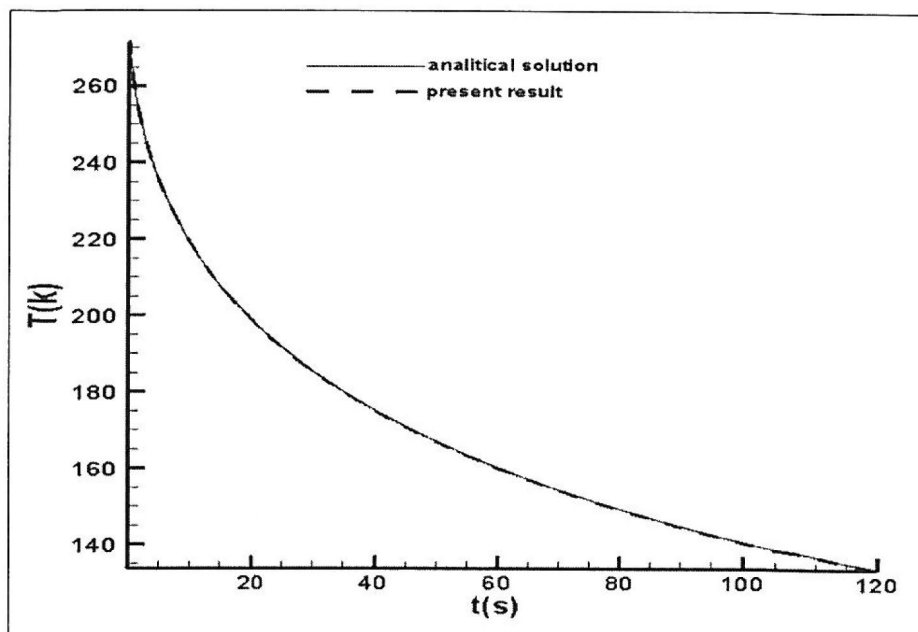
شکل ۲۷- نمایش کانتورهای توزیع دمای کد حاضر



شکل ۲۸- نمایش منحنیهای توزیع دمای مرکز کره



قرار گرفته است $r = 5 \text{ cm}$ موقعیت شکل ۲۹- نمایش منحنی‌های توزیع دمای نقطه‌ای که در



شکل ۳۰- نمایش منحنی‌های توزیع دمای نقطه‌ای که بر روی سطح کره قرار گرفته است

انطباق خوبی که بین نتایج وجود دارد تأیید کننده نتایج کد حاضر است.

مراجع:

- ١] [Dietrich W. ١٩٩٢. "The importance of brain temperature in cerebral injury", J. Neurotraum., ٩, pp. S٤٧٥-S٤٨٥.
- ٢] [Busto R., Dietrich W., Globus M., Ginsberg M., ١٩٨٩. "The importance of brain temperature in cerebral ischemic injury", Stroke., ٢٠, pp. ١١١٣- ١١١٤.
- ٣] [Polderman K., ٢٠٠٤. "Application of therapeutic hypothermia in the ICU: opportunities and pitfalls of a promising treatment modality. Part ١: indications and evidence", Intensive. Care. Med., ٣٠, pp. ٥٥٦-٥٧٥.
- ٤] [Davies A., ٢٠٠٥. "Hypothermia improves outcome from traumatic brain injury", Crit. Care. Resusc., ٧, pp. ٢٣٨-٢٤٣.
- ٥] [Henderson W., Dhingra V., Chittock D., Fenwick J. C., Ronco J. J., ٢٠٠٣. "Hypothermia in the management of traumatic brain injury: a systematic review and meta-analysis", Intensive Care. Med., ٢٩, pp. ١٦٣٧-١٦٤٤.
- ٦] [Hutchinson J., Ward R., Lacroix J., Hebert P., Barnes M., Bohn D., Dirks P., Doucette S., Fergusson D., Gottesman R., Joffe A., Kirpalani H., Meyer P., Morris. K., Moher D., Singh R., Skippen P., ٢٠٠٨. "Hypothermia therapy after traumatic brain injury in children", New Engl. J. Med., ٣٥٨, pp. ٢٤٤٧-٢٤٥٦.

- [Liu W., Qiu W., Zhang Y., Wang W.M., Lu F., Yang X.F., 2006.
7] “Effects of selective brain cooling in patients with severe traumatic brain injury: a pre-liminary study”, J. Int. Med. Res., 34, pp. 58-64.
- [Yeting He, Masami Fujii, Takao Inoue., Sadahiro Nomura.,
8] Yuichi Maruta, Fumiaki Oka, Satoshi Shirao, Yuji Owada, Hiroyuki Kida, Ichiro Kunitsugu, Toshitaka Yamakawa, Tatsuji Tokiwa, Takeshi Yamakawa, Michiyasu Suzuki 2013.
“Neuroprotective effects of focal brain cooling on photochemically-induced cerebral infarction in rats: Analysis from a neurophysiological perspective”, J. Brain Research., 1497, pp. 53-60.
- [Nelson D., Nunneley S., 1998. “Brain temperature and limits on
9] transcranial cooling in humans: quantitative modeling results”, Eur. J. Appl. Physiol. 78, pp. 353-359.
- [Zhu L., Diao C., 2001. “Theoretical simulation of temperature
10] distribution in the brain during mild hypothermia treatment for brain injury”, Med. Biol. Eng. Comput., 39, pp. 681-687. DOI: 10.1007/BF02345442
- [Van Leeuwen G.M.J., Hand J.W., Lagenduk J.J.W., Azzopardi
11] D.V., Edwards A.D., 2000. “Numerical modeling of temperature distribution within the natal head”, Pediatr Res., 48, pp. 351-356. DOI: 10.1203/00006450-200009000-00015
- [Sukstanskii A.L., Yablonskiy D.A., 2004. “An analytical model

12] of temperature regulation in human head", J. Therm. Biol., 29, pp. 583-587.

[Zhu M., Ackerman J.J., Sukstanskii A., Yablonskiy D.A., 2006.
13] "How the body controls brain temperature: the temperature shielding effect of cerebral blood flow", J. Appl. Physiol., 101, pp. 1481-1488.

[Ku, Y.-T., Montgomery, L. D. and Webbon, B. W., 1996.
14] "Hemodynamic and Thermal Responses to Head and Neck Cooling in Men and Women", American J. Phys. Med Rehabilitation, 25 (6), pp. 443-450.

[Vuillerme V., Fohr J.P., Saulnier J.P., Oriot D., Blay D., 1998.
15] "Convective Heat Transfer around an Infant Head", Ann. NY Acad. Sci., 858, pp. 310-7.

[Dennis B.H., Eberhart R.C., Dulikravich G.S., Radons S.W.,
16] 2003. "Finite Element Simulation of cooling of Realistic 3-D Human Head and Neck", J.Biomech.Eng, 125, pp. 832-840.

[Xu.X, Tikuisis P., Giesbrecht G., 1999. "A Mathematical Model
17] for Human Brain Cooling During Cold-Water Near-Drowning", J. Applied Physiol., 86, pp. 265-273.

[Clark R.P., Toy N., 1975. "Natural Convection Around the
18] Human Head", J. Physiol., 244, pp. 283-293.

[Azzopardi D., Strohm B., Marlow N., Brocklehurst P., Deierl A.,

- 19] Eddama O., Goodwin J., Halliday H., Juszczak E., Kapellou O., Levene M., Linsell L, Omar O., Thoresen M., Tusor N., Whitelaw A., Edwards D., 2014. "Effects of Hypothermia for Perinatal Asphyxia on Childhood Outcomes", *N Engl J Med*, 371, pp. 140-149.
- 20] [Wen-hao Zhou W., Guo-qiang Cheng G., Shao X., Liu X., Shan R., De-yi Zhuang D., Zhou C., Du L., Cao Y., Yang Q., Wang L., 2010. "Selective Head Cooling with Mild Systemic Hypothermia after Neonatal Hypoxic-Ischemic Encephalopathy: A Multicenter Randomized Controlled Trial in China", *The Journal of Pediatrics*, 157 (3), pp. 367-372.
- 21] [Gluckman P.D., Wyatt J.S., Azzopardi D., Ballard R., Edwards A.D., Ferriero D.M., Polin R.A., Robertson C.M., Thoresen M., Whitelaw A., Gunn A.J., 2005. "Selective head cooling with mild systemic hypothermia after neonatal encephalopathy: multicentre randomised trial", *Lancet*, 365, pp. 663-670.
- 22] [Esposito E., Ebner M., Ziemann U., Poli S., 2014. "In cold blood: intraarterial cold infusions for selective brain cooling in stroke", *J. Cerebral Blood Flow & Metabolism*. 34, pp. 743-752.
- 23] [Poli S., Purrucker J., Priglinger M., Diedler J., Sykora M., Popp E., Steiner T., Veltkamp R., Bosel J., Rupp A., Hacke W., Hametner C., 2013. "Induction of Cooling With a Passive Head and Neck Cooling Device: Effects on Brain Temperature After Stroke", *Stroke*, 44, pp. 708-713.

- 24] [Mayumi Matsuda-Nakamura, Satoshi Wada, Shuri Marui,
Nobuo Sato, Kei Nagashima, 2014. "The effect of the head or neck
cooling on body core temperature and thermal sensation in
humans", *FASEB J.*, 28, pp. 1104-6.
- 25] [Pennes H.H., 1948. "Analysis of Tissue and Arterial Blood
Temperatures in
the Resting Forearm," *J. Applied Physiology*, 1, pp. 93-122.
- 26] [Chen M.M., and Holmes K.R., 1980. "Microvascular
Contributions in
Tissue Heat Transfer," *Annals of the New York Academy of
Sciences*,
335, pp. 137-150.
- 27] [Beck J. V. and Arnold K. J., 1977. "Parameter Estimation in
Engineering and Science", New York: Wiley Interscience.
- 28] [Beck J.V., Blackwell B., St.Clair C.R., 1988. "Inverse Heat
Conduction: Ill-Posed Problems", New York: Wiley Interscience.
- 29] [Beck J. V., 1979. "Criteria for Comparison of Methods of
Solution of the Inverse Heat Conduction Problems," *Nucl. Eng.
Design*, 53, pp. 11-22.
- 30] [Matsevityi Y.M. and Multanovskii A.V., 1986. "Pointwise
Identification of Thermophysical Characteristics," *J. Eng. Phys.*, 49(6),

pp. 1392-1397.

- 31] [Goldberg D., 1989. "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", MA: Addison Wesley, Reading.
- 32] [Levenberg K., 1944. "A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares", *Quart. Appl. Math.*, 2, pp. 164-168.
- 33] [Marquardt D., 1963. "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters", *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 11, pp. 431-441.
- 34] [Ozisik M., 1993. "Heat Conduction, 2nd ed.", New York: Wiley.
- 35] [Hestenes M. R. a. S. E., 1982. "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems", *J Res. NBS*, 86, pp. 4-9-436.
- 36] [Jamy Y., Ozisik M. N. and Bardon J. P., 1991. "A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction", *Int. J Heat and Mass Transfer*, 34, pp. 2911-2919.
- 37] [Beckman F. S., 1960. "The Solution of Linear Equation by Conjugate Gradient Method", in *Mathematical Methods for Digital Computer*, A. R. a. H. S. Wilf(eds.), Ed., New York, Wiley.
- 38] [Daniel J. W., 1971. "The Approximate Minimization of Functionals", Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc.

- 39] [Fletcher R. and Reeves C. M., 1964. "Function Minimization by Conjugate Gradients", *Computer J.*, 7, pp. 149-154.
- 40] [Kammerer W.I., Nashed, M.Z., 1972. "On the Convergence of the Conjugate Gradient Method for Singular Linear Operator Equations", *J. Num. Anal.*, 9, pp. 165-181.
- 41] [Alifanov O., 1994. "Inverse Heat Transfer Problems", New York: Springer-Verlag.
- 42] [Alifanov O. M., 1974. "Solution of an Inverse Problem of Heat-Conduction by Iterative Methods", *J Eng. Phys.*, 26, pp. 471-476.
- 43] [Powell W. B. and Price T. W., 1964. "A Method for Determination of Local Heat Flux Transient Temperature Measurements", *ISA Transactions*, 13(3), pp. 246-254.
- 44] [Beck, J.V. 1962. "Calculation of Surface Heat Flux from an Internal Temperature History" *ASME Paper*, 62, pp. 40.
- 45] [Goldman, A. and Kao, Y. C., 1981. "Numerical Solution to a Two-dimensional Conduction Problem Using Rectangular and Cylindrical Body-Fitted Coordinate Systems", *J. Heat Transfer*, 103, pp. 753-758,
- 46] [Ushikawa, S. and Takeda, R., 1985. "Use of Boundary-fitted Coordinates Transformation for Unsteady Heat Conduction Problems in Multi connected Regions with Arbitrarily Shaped Boundary", *J.*

Heat Transfer, 107, pp. 494-498.

- [47] Alencar Jr., J. P., Orlande, H. R. B. and Ozisik, M. N. 1998. "A Generalized Coordinates Approach for the Solution of Inverse Heat Conduction Problems" Proceedings of the 11th International Heat Transfer Conference, Kyongju, South Korea, 7, pp. 43-48.

Abstract

The brain is one of the most important organs in a biological body. With the interruption of cardiopulmonary circulation in many cardiac surgical procedures or accidental events leading to cerebral circulation arrest, an imbalance between energy production and consumption will occur. Meanwhile, the cooling function of the blood flow on the hot tissue will be stopped, while metabolic heat generation in the tissues still keeps running for a while. Under such adverse situations, the potential for cerebral protection through hypothermia has been intensively investigated in clinics by lowering brain temperature to restrain the cerebral oxygen demands. In this paper, the conjugate gradient method, coupled with an adjoint equation approach, is used to solve the inverse^[1] heat conduction problem using Pennes bio heat equation in the axisymmetric coordinate system and estimate the time-dependent^[2] heat flux using temperature distribution at a point brain to achieve the temperature reduction about Δ degrees within τ minutes. To solve this problem the general coordinate method is used. The obtained results for few selected examples show the good accuracy of the presented method. Also the solutions have good stability even if the input data includes noise.

Keywords: Hypothermia, inverse heat transfer, brain cooling, general coordinate



University of Shahrood

Department of Mechanical Engineering

**Optimum brain cooling to reduce TBI damages using
inverse heat transfer method**

Vahid Amerian

Supervisor:

Dr. Pouria Akbarzadeh

Dr. Ali Abbasnejad

Co-Supervisors:

Dr. Mohammad Mohammadiun

May ۲۰۱۵