بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

تحلیل توزیع تنش و ممان در اطراف انواع گشودگی در صفحات چندلایه متقارن تحت بارگذاری کششی و خارج از صفحه به روش تحلیلی

مجید شیبانی

اساتید راهنما:

دکتر محمود شریعتی

دکتر حمیدرضا ایپکچی

استاد مشاور:

دکتر محمد جعفری

بهمن‌ماه ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **مجید شیبانی.** رشته **مکانیک** گرایش **طراحی کاربردی** تحت عنوان **تحلیل توزیع تنش و ممان در اطراف انواع گشودگی در صفحات چندلایه متقارن تحت بارگذاری کششی و خمشی به روش تحلیلی** که در تاریخ **۹۳ /۱۱/۳۰** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۱۹) ☑	دفاع مجدد ☐	مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹)　　۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶)　　۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	دکتر محمود شریعتی	استاد	
۲- استاد راهنما	دکتر حمیدرضا ایپک‌چی	دانشیار	
۳ـ استاد مشاور	دکتر محمد جعفری	استادیار	
۴ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مجید محمدی	استادیار	
۵ـ استاد ممتحن	دکتر مهدی قناد کهتویی	استادیار	
۶ ـ استاد ممتحن	دکتر محمدباقر نظری	استادیار	

رئیس دانشکده : امضاء

شاه‌مردان

دانشکده مکانیک

تأیید رئیس دانشکده

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آقای مجید شیبانی

تحت عنوان:

تحلیل توزیع تنش و ممان در اطراف انواع گشودگی در صفحات چندلایه متقارن تحت بارگذاری کششی و خمشی به روش تحلیلی

در تاریخ .... توسط کمیته‌ی تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد

مورد ارزیابی و با درجه‌ی .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر محمود شریعتی		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد جعفری	
نام و نام خانوادگی: دکتر حمیدرضا ایپکچی		نام و نام خانوادگی:	

اساتید داور	امضاء	نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی قنّاد کهتویی		نام و نام خانوادگی: دکتر مجید محمدی	
نام و نام خانوادگی: دکتر محمد باقر نظری			

تقدیم به عزیزترین‌ها

پدر

مادر

و برادرم

به جبران قطره‌ای از دریای محبّتشان

بدون شک جایگاه و منزلت معلّم، اجلّ از آن است که در مقام قدردانی از زحمات او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می کند و سلامت امانت هایی را که به دستش سپرده اند را تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب

{من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ}

از پدر و مادر عزیزم، این دو معلم بزرگوارم که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده اند و کریمانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی، یار و یاوری بی چشم داشت برای من بوده اند؛

و از استاد ارجمند و شایسته؛ جناب آقای پرفسور محمود شریعتی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه، بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را به عهده گرفتند؛ و همچنین از جناب آقایان دکتر حمیدرضا ایپک چی، دکتر محمد جعفری و مهندس بهزاد مشیری به پاس زحمت هایشان کمال تشکر و قدردانی را دارم

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهدنامه

اینجانب مجید شیبانی دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل توزیع تنش و ممان در اطراف انواع گشودگی در صفحات چندلایه متقارن تحت بارگذاری کششی و خمشی به روش تحلیلی، تحت راهنمایی دکتر محمود شریعتی و دکتر حمیدرضا ایپکچی متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام‌شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

تحلیل پایای صفحه‌ی میانی چندلایه‌های متقارن به دوشاخه مختلف مسائل تغییر شکل خالص درون صفحه‌ای توسط نیروی خالص درون صفحه‌ای و همچنین تغییر شکل‌های خارج صفحه‌ای توسط گشتاورهای خمشی تقسیم می‌شوند. بررسی مقالات منتشرشده نشان می‌دهد که حل‌های کمی برای صفحات ناهمسانگرد حاوی گشودگی وجود دارند. در این پایان‌نامه با گسترش حل تحلیلی لخنیتسکی، به تحلیل توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در صفحات نا محدود چندلایه متقارن پرداخته شده است. همچنین علاوه بر ارائه جداگانه یک حل عمومی برای تحلیل توزیع ممان خمشی در صفحات چندلایه متقارن حاوی گشودگی که تحت خمش هستند، برای اولین بار تحلیل توزیع ماکزیمم تنش در اطراف انواع گشودگی در این صفحات و همچنین تحلیل استحکام صفحات چندلایه متقارن تحت هر دو حالت بارگذاری درون و بیرون صفحه‌ای، جداگانه صورت گرفته و نتایج مهم آن ثبت گردیده است. به‌منظور بسط حل تحلیلی لخنیتسکی برای تحلیل تنش و ممان خمشی چندلایه‌های متقارن حاوی انواع گشودگی ها، به‌وسیله نگاشت هم‌نوا، ناحیه خارج گشودگی غیردایروی به محدوده داخل گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل می‌شود. در این تحقیق سعی می‌شود با بسط روش فوق، تأثیر پارامترهای مختلف از قبیل نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی مورد مطالعه قرار گیرد. برای بررسی نتایج حل تحلیلی ارائه‌شده از روش اجزای محدود (نرم‌افزار آباکوس) استفاده شده است که نتایج حاصل از حل تحلیلی تطابق خوبی با نتایج حل عددی دارد. توزیع تنش و ممان خمشی در اطراف گشودگی‌های دایروی، بیضوی، مثلثی، مربعی، پنج‌ضلعی و شش‌ضلعی به‌دست‌آمده است. نتایج نشان می دهد که با نرم‌تر شدن گوشه‌های گشودگی و انتخاب زاویه چرخش گشودگی مناسب و اضافه کردن تعداد لایه‌ها می‌توان تمرکز تنش را کاهش داد.

کلمات کلیدی: چندلایه متقارن، حل تحلیلی، بارگذاری درون-صفحه‌ای و بیرون-صفحه‌ای، توزیع تنش و ممان خمشی، تحلیل استحکام شکست و نگاشت هم‌نوا

فصل اول: مقدمه و کارهای پیشین

فصل دوم : روابط حاکم بر چندلایه‌ها

فصل سوم : استخراج معادلات توزیع تنش ناشی از بار داخل صفحه‌ای

عنوان **فهرست اشکال** صفحه

عنوان **فهرست جدول‌ها** صفحه

علائم

B	دترمینان ماتریس سفتی
B^*, B'^*, C'^*	ثابت‌های شرایط بارگذاری
$E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}$	ثابت‌های مهندسی برای یک لایه
f_1, f_2	شرایط مرزی تنش مرحله اول بر روی گشودگی مجازی
f_1^0, f_2^0	شرایط مرزی تنش مرحله دوم بر روی گشودگی
$k_1 - k_8, \overline{k_1} - \overline{k_8}$	ثابت‌های مختلط و مزدوج‌هایشان
$k_9 - k_{16}, \overline{k_9} - \overline{k_{16}}$	ثابت‌های مختلط و مزدوج‌هایشان برای گشتاور
P	شدت فشار یکنواخت در مرز گشودگی
$s_i(j = 1,...,4)$	جواب‌های معادله مشخصه
T	نیروی مماسی روی مرز گشودگی
X_n, Y_n	اجزای منتجه‌های تنش در مرز گشودگی
$m(s)$	گشتاور خمشی درروی گشودگی مجازی
Z	مختصات مختلط، $z = x + iy$
z_i	مختصات مختلط ناهمسانگرد، $z_i = x + s_i y$
β	زاویه اعمال بار
α	زاویه چرخش گشودگی
$p(s)$	یک نیروی خمشی درروی گشودگی مجازی
$\varphi(z_1), \psi(z_2)$	توابع تنش برای مسأله صفحه داده‌شده
$\varphi_1(z_1), \psi_1(z_2)$	توابع تنش مرحله اول حل
$\varphi_0(z_1), \psi_0(z_2)$	توابع تنش مرحله دوم حل
ζ	مختصات نگاشته شده متغیر مختلط، z
ρ, θ	مختصات منحنی الخط
$\sigma_\rho, \sigma_\theta, \sigma_{\rho\theta}$	تنش‌ها در مختصات منحنی الخط
$\varphi'(z_1), \psi'(z_2)$	مشتق اول توابع تنش
$\omega(\zeta)$	تابع نگاشت

فصل اول

مقدمه و مروری بر کارهای پیشین

۱-۲ مقدمه

به دلیل سبک بودن و خواص برتر و ممتاز، کامپوزیت‌های پیشرفته کاربرد زیادی در حمل‌ونقل و دیگر صنایع ساختمانی پیدا کرده‌اند. به‌طورمعمول صفحات با ابعاد بزرگ در این صنایع کاربردهای زیادی دارند و بسته به کاربرد، معمولا گشودگی‌هایی در این صفحات وجود دارند. به دلایل اجرایی و عملی، معمولاً تمرکز تنش یک نگرانی جدی برای طراح به وجود می‌آورد و توزیع تنش اطراف گشودگی برای پیش‌بینی و محاسبه مقدار استحکام صفحه باید شناخته‌شده باشد. ازجمله این موارد، می‌توان به گشودگی درها و پنجره‌ها در بدنه هواپیماها و زیردریایی‌ها، محل اتصال فشارسنج‌ها و دماسنج‌ها در بدنه کوره‌ها، محل اتصال دو ورق به همدیگر توسط پیچ‌ها و پرچ‌ها، وجود گشودگی‌هایی در پره‌های توربین‌ها جهت جریان یافتن سیال خنک‌کننده در پره‌ها و غیره اشاره کرد. استفاده از مواد مرکب در صنایع هوافضا و بسیاری از صنایع دیگر به خاطر نسبت استحکام به وزن و سفتی بالای این‌گونه مواد دارای افزایش چشم‌گیری است. با در نظر گرفتن کاربرد وسیع مواد مرکب و ماهیت پیچیده و متفاوت رفتار آن‌ها نسبت به مواد فلزی، مطالعه استحکام شکست آن‌ها لازم به نظر می‌رسد.

گاهی اوقات در اثر تغییرات به وجود آمده در برخی نقاط سازه ممکن است مساحت سطح موردنظر به‌وسیله یک شکاف و یا حفره کاهش یافته باشد که این کاهش سطح ناگهانی به‌وسیله گشودگی، باعث ایجاد تنش‌های ناخواسته در سازه می‌شود و معمولاً از محل این نواحی، سازه با شکست مواجه می‌شود. ازاین‌رو تحلیل تنش‌ها در این نواحی برای طراحان اهمیت ویژه‌ای دارد. استحکام شکست بیشتر مواد شدیداً به تمرکز تنش ناشی از وجود گشودگی وابسته است. تجربه نشان داده است که تنش واقعی شکست برای صفحات حاوی گشودگی، اساساً کمتر از استحکام کشش نهایی همان ماده بدون گشودگی است؛ بنابراین برای طراحی دقیق صفحات حاوی گشودگی، دانستن اطلاعات دقیق در مورد تغییر شکل‌ها و توزیع تنش‌ها لازم است. تمرکز تنش اهمیت ویژه‌ای در ارزیابی قابلیت اطمینان سازه‌های مهندسی دارد. [۱].

۱-۳ مواد مرکب

تقاضای روزافزون برای بهبود عملکرد سازه‌ها به‌صورت خواسته‌های مختلفی از قبیل وزن کمتر، استحکام بیشتر و هزینه‌های کمتر مطرح می‌شوند. استحکام بیشتر و هزینه‌ی کمتر مشخص می‌کند که مواد مصرفی کنونی غالباً به حد بهره‌دهی خود می‌رسند. ازاین‌رو دانشمندان و نیز صاحب‌نظران علم مواد همیشه در تکاپو هستند که یا خواص مواد موجود و متداول را بهبود بخشند و یا مواد جدیدتری تولید نمایند که به‌عنوان نمونه می‌توان مواد کامپوزیت[1] را نام برد. به‌طور کلی یک ماده‌ی کامپوزیتی ترکیبی است، از تقویت‌کننده (الیاف، ذرات، ورق پوسته‌ای و یا پرکننده‌ها) که در زمینه‌ی (پلیمر، فلز و یا سرامیک) قرار گرفته باشد. زمینه، تقویت‌کننده را نگه می‌دارد تا فرم مورد نیاز تشکیل شود، درحالی‌که تقویت‌کننده خواص مکانیکی کلی زمینه را بهبود می‌بخشد. لذا به‌منظور کسب نتیجه‌ی مطلوب، شناخت لازم از مواد مورداستفاده اعم از ماتریس‌ها، تقویت‌کننده‌ها، نحوه‌ی ترکیب، تولید مواد، طراحی و روش ساخت برای طراحان ضروری هست.

معیارهای دیگری ازجمله سه معیار زیر نیز باید در نظر گرفته شود تا بتوان ماده‌ای را به‌عنوان ماده‌ی کامپوزیت معرفی نمود.

۱. نخست این‌که هر دو ماده الزاماً باید با یک نسبت فراوانی وجود داشته باشند (مثلاً بیشتر از ۵ درصد).

۲. دوم این‌که فازهای تشکیل‌دهنده، خواص متفاوتی داشته باشند. ازاین‌جهت ممکن است خواص کامپوزیت به‌طور فراوانی با خواص اجزای تشکیل‌دهنده‌ی آن متفاوت باشد که تحت این شرایط می‌توان این‌گونه مواد را کامپوزیت تلقی نمود. به‌عنوان مثال پلاستیک‌ها گرچه معمولاً دارای مقدار کمی روان-ساز، مواد جاذب پرتوهای ماورای بنفش و برخی اجزاء و افزودنی‌های دیگر هستند که به دلیل مسائل تجاری ازجمله اقتصادی بودن و سادگی فرایند تولید به آن‌ها اضافه می‌شوند، اما هیچ‌یک از این معیارها

1. Composite

را در برنداشته و در گروه‌بندی کامپوزیت‌ها قرار نمی‌گیرند.

۳. نهایتاً این‌که یک کامپوزیت مصنوعی معمولاً توسط مخلوط و ترکیب کردن مناسب اجزای تشکیل‌دهنده توسط وسایل مکانیکی مختلف تولید می‌شوند. لذا یک آلیاژ ریختگی با ریزساختار دوفازی که محصول فرایند انجماد یک مذاب یکنواخت است که بعداً عملیات حرارتی روی آن انجام می‌شود را نمی‌توان جزو گروه‌های کامپوزیت‌ها محسوب نمود.

البته اگر ذرات سرامیکی با نسبت مناسب با یک فلز مخلوط شده و تولید ماده‌ای متشکل از ذرات سرامیکی توزیع‌شده در داخل یک فلز را بنمایند، چنین ماده‌ای را می‌توان ماده کامپوزیتی نامید.[۱]

۱-۳-۱ اجزای تشکیل‌دهنده‌ی مواد مرکب

می‌دانیم که مواد مرکب در مقیاس میکروسکوپی دارای دو یا بیشتر از دو فاز مجزا با ترکیب شیمیایی معین بوده که توسط فصل مشترک مشخصی از یکدیگر جدا شده‌اند. نکته‌ی حائز اهمیت این است که بتوان ویژگی‌های این اجزا را از هم تفکیک کرد. مفهوم اصلی کامپوزیت به معنی دارا بودن یک ماده زمینه‌ای (ماتریس) مناسب است. معمولاً مواد کامپوزیتی توسط الیاف تقویت‌کننده در یک زمینه رزینی ساخته می‌شوند. تقویت‌کننده‌ها می‌توانند الیاف، ویسکرها[1] و ... بوده و زمینه می‌تواند از جنس فلزات، سرامیک‌ها یا پلیمرها باشند.

مواد مرکب از سه قسمت اصلی تشکیل می‌شوند.

الف) زمینه (ماتریس)

زمینه، الیاف را از هم جدا می‌کند تا از سائیدگی و تشکیل عیوب سطحی جلوگیری نماید. یک زمینه مناسب باید توانایی تغییر شکل تحت بارگذاری اعمالی را داشته و نیرو را به الیاف انتقال دهد و تمرکز تنش را توزیع کند و همچنین از الیاف در مقابل عوامل محیطی حفاظت کرده و مانع از رشد ترک در کامپوزیت گردد.

1. Vhiskers

ب) تقویت‌کننده

نقش تقویت‌کننده در یک ماده‌ی کامپوزیتی به‌طور اساسی افزایش دادن خواص مکانیکی زمینه است. نحوه‌ی مونتاژ الیاف در زمینه و جهت قرار دادن آن‌ها خواص متفاوتی را در کامپوزیت ایجاد می‌کند.

ج) فصل مشترک

فصل مشترک، سطح محدود یا منطقه‌ای است که در آن یک ناپیوستگی رخ می‌دهد، خواه این ناپیوستگی فیزیکی، مکانیکی و یا شیمیایی باشد. جهت به دست آوردن خصوصیات مطلوب در یک کامپوزیت، بار اعمال‌شده از زمینه به الیاف باید از طریق فصل مشترک انتقال پیدا کند؛ شکست در فصل مشترک پدیده‌ای نامطلوب محسوب می‌شود

۱-۳-۲ طبقه‌بندی مواد مرکب

مواد مرکب را می‌توان با توجه به ساختار، مواد تشکیل‌دهنده‌ی زمینه و یا جنس الیاف طبقه‌بندی کرد.

۱-۳-۲-۱ طبقه‌بندی مواد مرکب بر اساس ساختار

۱. مواد مرکب الیافی؛

۲. مواد مرکب لایه‌ای؛

۳. مواد مرکب ذره‌ای؛

۴. مواد مرکب با ساختار ترکیبی.

در مواد مرکب ذره‌ای، ذرات ماتریس می‌توانند، مواد فلزی و یا غیرفلزی باشند که نتیجه آن، وجود چهار نوع ماده مرکب مختلط فلز در فلز، غیرفلز در فلز، فلز در غیرفلز و غیرفلز در غیرفلز است. سفتی و استحکام در مواد مرکب الیافی، بیشتر از الیاف حاصل می‌گردد و ماتریس در حقیقت وظیفه نگه‌داشتن الیاف و انتقال نیرو را به عهده دارد.

در مواد مرکب لایه‌ای که بیشترین کاربرد را دارد، لایه‌های تشکیل‌دهنده ماده‌ی مرکب، خود از نوع مواد مرکب الیافی هستند. در این مواد، می‌توان لایه‌ها را با زوایای مختلف و ترکیب‌های متفاوت روی هم چسباند که عموماً برای چسباندن آن‌ها، از ماده‌ای هم‌جنس ماتریس استفاده می‌شود.

ازنظر فنی، کامپوزیت‌های الیافی، مهم‌ترین نوع کامپوزیت‌ها هستند که خود به دو دسته الیاف کوتاه و بلند تقسیم می‌شوند. الیاف، می‌بایست استحکام کششی بسیار بالایی داشته باشند. درواقع، قسمت اعظم نیرو توسط الیاف تحمل می‌شود و ماتریس پلیمری درواقع ضمن حفاظت الیاف از صدمات فیزیکی و شیمیایی، کار انتقال نیرو به الیاف را انجام می‌دهد. ضمناً ماتریس، الیاف را به‌مانند یک چسب کنار هم نگه می‌دارد و البته گسترش ترک را محدود می‌کند.

۱-۳-۲-۲ طبقه‌بندی مواد مرکب بر اساس فاز زمینه

۱. کامپوزیت‌های زمینه پلیمری؛

۲. کامپوزیت‌های زمینه فلزی؛

۳. کامپوزیت‌های زمینه سرامیکی؛

۴. کامپوزیت‌های زمینه معدنی.

کامپوزیت‌های پایه پلیمری، بیش از ۹۰٪ کاربرد کامپوزیت‌ها را به خود اختصاص داده‌اند و از بقیه مهم‌تر هستند.

کارایی کامپوزیت‌های پلیمری، توسط خواص اجزای آن‌ها تعیین می‌شود. اغلب آن‌ها دارای الیاف با مدول بالا هستند که در ماتریس‌های پلیمری قرار داده‌شده‌اند و فصل مشترک خوبی نیز بین این دو جزء وجود دارد.

همان‌طور که توضیح داده شد، ماتریس یکی از اجزای تشکیل‌دهنده کامپوزیت‌های پلیمری هست. این بخش، عملکردهای بسیار مهمی در کامپوزیت دارد. اول این‌که به‌عنوان یک چسب، الیاف تقویت‌کننده را نگه می‌دارد. دوم، ماتریس، تحت بار اعمالی تغییر شکل می‌دهد و تنش را به الیاف محکم

و سفت منتقل می‌کند. سوم، رفتار الاستیک ماتریس پلیمری، انرژی را جذب کرده، موجب کاهش تمرکز تنش می‌شود که درنتیجه، رفتار چقرمگی در شکست را بهبود می‌بخشد. در میان رزین‌ها (ماتریس)، پلی‌استر، وینیل استر، اپوکسی و فنولیک از اهمیت بیشتری برخوردار هستند.[۲]

۱-۳-۲-۳ طبقه‌بندی مواد مرکب بر اساس الیاف

۱. الیاف فلزی؛

۲. الیاف معدنی؛

۳. الیاف پلیمری.

الیاف بسته به نوع کاربرد دارای جنس‌های متفاوتی می‌باشند. از الیاف متداول در کامپوزیت‌ها، می‌توان به شیشه، کربن و آرامید اشاره نمود. نوع الیاف، مقدار و آرایش یافتگی آن‌ها روی خواص آن تأثیر می‌گذارد. در ادامه به خواص برخی از الیاف اشاره شده است.

الیاف شیشه

الیاف شیشه، مشهورترین تقویت‌کننده مورداستفاده در صنعت کامپوزیت است و انواع مختلفی از آن، به‌صورت تجاری وجود دارند که برخی از آن‌ها عبارت‌اند از: E، R، S، C، ECR، AR. ترکیبات شیمیایی این الیاف باهم متفاوت است؛ و هرکدام برای کاربرد خاصی مناسب است. تقریباً ۹۰ درصد الیاف مورداستفاده در کامپوزیت‌های مهندسی، الیاف شیشه است. الیاف شیشه استحکام و سختی مناسبی دارد. خواص مکانیکی خود را در دماهای بالا حفظ می‌کند. مقاومت رطوبت و خوردگی مناسبی دارد و نسبتاً ارزان است.

الیاف کربن

اگرچه اکثر الیاف مورداستفاده در صنعت کامپوزیت، از جنس شیشه است؛ ولی مدول آن نسبتاً پایین است. در سال‌های پیش، تلاش‌های زیادی انجام گرفت تا تقویت‌کننده‌های جدید با مدول بالاتر نسبت به الیاف شیشه ساخته شوند. مشخصه الیاف کربن، سبکی، استحکام و سفتی بالا است.

در ابتدا، دو نوع الیاف کربن وجود داشت که استحکام و مدول آن‌ها باهم تفاوت داشت. اولی، الیاف کربن با استحکام بالا که به‌عنوان نوع دو درجه‌بندی می‌شد. دومی، نوع مدول بالای این الیاف که به‌عنوان نوع یک درجه‌بندی می‌شد. با اعمال کمی کشش و تغییر آرایش یافتگی و با کاهش قطر الیاف از ۷ به ۵ میکرومتر، استحکام و مدول الیاف افزایش می‌یابد. این الیاف، الیاف با مدول متوسط نام دارد.

الیاف آرامید

الیاف آرامید که در حدود سال ۱۹۷۰ معرفی شد، ترکیب آلی حلقوی از کربن، هیدروژن، اکسیژن و نیتروژن است. دانسیته کم و استحکام کششی بالا در این الیاف، موجب تشکیل یک ساختار چقرمه و مقاوم به ضربه با سفتی حدود نصف الیاف کربن می‌شود. الیاف آرامید در ابتدا به‌منظور جایگزینی فولاد در تایرهای رادیال ساخته شدند و بعداً کاربردهای دیگری پیدا کردند. جلیقه ضدگلوله از موفقیت‌آمیزترین کاربردهای الیاف آرامید است [۲و۳].

خواص مکانیکی مواد موردبررسی در این تحقیق در جدول (۱-۱) آورده شده است.

جدول۱-۱ خواص مکانیکی ماده گرافیت/اپوکسی [۳۰]

E_1= 181 Gpa
E_2= 10.3 Gpa
G_{12}= 7.17 Gpa
ν_{12}= 0.28
ν_{21}=0.02

۱-۳-۳ ویژگی‌های مواد کامپوزیتی

معمولاً کامپوزیت‌ها برای کاربردهایی که کارایی زیاد و وزن کم لازم است، طراحی و ساخته می‌شوند. این مواد دارای مزایای بسیار زیادی نسبت به مواد مهندسی سنتی هستند که در زیر شرح داده می‌شوند:

۱. مواد کامپوزیتی قابلیت یکپارچه کردن اجزا را دارند، چند جزء فلزی مختلف می‌تواند با یک کامپوزیت جایگزین شود.

۲. با قرار دادن حس‌گرهایی در ساختارهای کامپوزیتی می‌توان آن‌ها را به سرویس‌های ردیابی مجهز کرد. از این امکان برای آشکارسازی آسیب ناشی از خستگی در ساختار هواپیما استفاده می‌شود.

۱. کامپوزیت‌ها دارای سفتی ویژه[1] (نسبت سفتی به دانسیته) بالایی هستند. کامپوزیت‌ها دارای سفتی فولاد، با یک‌پنجم وزن آن و دارای سفتی آلومینیوم با یک‌دوم وزن آن هستند.

۲. استحکام ویژه‌ی (نسبت استحکام به چگالی) کامپوزیت‌ها بسیار بالاست. به همین دلیل هواپیماها و اتومبیل‌ها در عین سرعت بیشتر سوخت کمتری مصرف می‌کنند. استحکام ویژه کامپوزیت‌ها ۳ تا ۵ برابر آلیاژهای فولاد و آلومینیوم است.

۳. استحکام خستگی[2] (حد دوام) کامپوزیت‌ها بسیار بالاست. آلیاژهای فولاد و آلومینیوم دارای حد خستگی خوبی در حدود ۵۰٪ استحکام استاتیکی خود هستند. کامپوزیت‌های گرافیت/ اپوکسی دارای استحکام خستگی بالایی نزدیک به ۹۰٪ استحکام استاتیکی خود می‌باشند.

۴. کامپوزیت‌ها مقاومت به خوردگی خوبی دارند. آهن و آلومینیوم در حضور آب‌وهوا خورده می-شوند، لذا احتیاج به پوشش و آلیاژ خاص دارند؛ اما لایه بیرونی کامپوزیت‌های پلیمری از پلاستیک است، لذا مقاومت شیمیایی و مقاومت به خوردگی آن‌ها بسیار خوب است.

۵. ساخت قطعات با شکل‌های پیچیده و طرح‌های خاص که بعضی مواقع توسط فلزات امکان‌پذیر نیست، با استفاده از کامپوزیت‌ها بدون نیاز به پرچ‌کاری یا جوش‌کاری اجزای مختلف می‌تواند صورت گیرد. این موضوع ضریب اطمینان قطعه را افزایش داده و زمان تولید را کاهش می‌دهد؛ همچنین عملیات ساخت را عملی‌تر می‌کند.

۶. کامپوزیت‌ها استفاده از روش‌های طراحی برای ساخت (DFM)[3] و طراحی برای مونتاژ

---
1. Specific Stiffness
2. Fatigue Strength
3. Design for Manufacturing

(DFA)[1] را امکان‌پذیر و عملی می‌کند. این روش‌ها کمک می‌کنند که تعداد اجزای محصول به حداقل برسد و درنتیجه باعث کاهش زمان اتصال و مونتاژ می‌شوند. با کاهش تعداد اتصالات، قطعه با اجزای با استحکام بالا و هزینه کمتر ساخته می‌شود.

۷. ویژگی‌های صوتی، ارتعاشی و زبری (NVH)[2] کامپوزیت‌ها از فلزات بهتر است. کامپوزیت‌ها ارتعاشات را بهتر از فلزات از بین می‌برند. این ویژگی کاربردهای مختلفی همچون لبه انتهایی هواپیما تا چوب گلف را دارد.

۸. کامپوزیت‌ها در فشار و دمای کمتری نسبت به فلزات تولید می‌شوند، لذا قیمت ابزار و تجهیزاتی که برای مراحل ساخت کامپوزیت‌ها لازم است، از ابزار مورد نیاز برای ساخت فلزات ارزان‌تر است[۴۰].

۱-۳-۴ کاربردهای کامپوزیت‌ها

در دهه‌های گذشته، روش‌های پیشرفته ساخت مواد و سامانه‌ها و دستگاه‌های مربوط به کامپوزیت‌ها رشد چشمگیری داشته‌اند تا نیازهای بازارهای مختلف را برطرف سازند. با توجه به مزایا و سوددهی این صنعت، بسیاری صنایع بر روی کامپوزیت‌ها سرمایه‌گذاری کرده‌اند. توسعه و افزایش استفاده از کامپوزیت‌ها به دلیل کاهش قیمت الیاف و کاهش هزینه‌های مربوط به روش‌های ساخت خودکار و روش‌های تولید انبوه بوده است. به‌عنوان مثال، قیمت الیاف کربن از ۱۵۰ دلار بر پوند در سال ۱۹۷۵ به ۸ دلار بر پوند در سال ۲۰۰۰ کاهش یافت. این کاهش قیمت به دلیل توسعه روش‌های تولید کم‌هزینه و افزایش مصرف صنایع صورت گرفته است. می‌توان بازارهای فروش مواد کامپوزیتی را به گروه‌هایی از قبیل صنایع هوافضا، صنایع خودروسازی، ساختمان‌سازی، صنایع دریایی، سازندگان تجهیزات مقاوم به خوردگی، سازندگان کالاهای مصرفی، تجهیزات کاربردی، تجاری و ... طبقه‌بندی کرد.

1. Design for Assembly
2. Noise Vibration Harshness

۱-۳-۴-۱ صنعت هوافضا

این صنعت از نخستین صنایعی بود که مزایای استفاده از کامپوزیت‌ها را درک کرد. به کمک کامپوزیت‌ها هواپیماها، موشک‌ها و پرتابه‌ها با سرعت بیشتر مسافت بیشتری را توانستند بپیمایند. معمولاً کامپوزیت-های با الیاف شیشه و کربن برای ساخت قطعات هواپیما طراحی می‌شوند. عموماً صنعت هواپیماسازی از کامپوزیت‌هایی با الیاف کربن به دلیل ویژگی برجسته و کارایی بالا استفاده می‌کند.

بال‌ها، بدنه هواپیما، برج‌های رادار، دم هواپیما، تیغه‌های بالگرد، چرخ‌های نورد، مخزن‌های سوخت، محفظه‌های موتور راکت، تیوب‌های سکوی پرتاب، ازجمله مواردی هستند که در ساخت آن‌ها (در این صنعت) از مواد کامپوزیتی استفاده می‌شود.

۱-۳-۴-۲ صنعت خودروسازی

مواد کامپوزیتی به‌عنوان یک ماده منتخب در بعضی کاربردهای صنعت اتومبیل‌سازی به کار می‌روند. سازندگان اتومبیل‌ها با استفاده از کامپوزیت‌ها قادرند ظاهر، قیمت و کارایی اتومبیل را به شکل مطلوب تغییر دهند. امروزه استفاده از بدنه‌های از جنس کامپوزیت، در همه نوع اتومبیل از اتومبیل‌های ورزشی و اتومبیل‌های مسافربری گرفته تا کامیون‌های سنگین، متوسط و کوچک موفقیت‌آمیز بوده است. چون بازارهای اتومبیل نسبت به قیمت بسیار حساس هستند، کامپوزیت‌های با الیاف کربن به دلیل قیمت بالای آن‌ها هنوز قابل‌قبول نیستند. در صنایع اتومبیل‌سازی بیشتر از کامپوزیت‌های تقویت‌شده با الیاف شیشه استفاده می‌شود. به‌طور مثال پنل‌های بدنه، اتاقک، بادگیرها، کنسول‌ها، پنل‌های تجهیزات، محفظه لامپ‌ها، ضربه‌گیرها، محورهای محرک، چرخ‌دنده‌ها، یاتاقان‌ها، از این مواد ساخته می‌شوند.

۱-۳-۴-۳ صنعت کالاهای ورزشی

وسایل ورزشی و تفریحی از اصلی‌ترین مصرف‌کنندگان مواد کامپوزیتی هستند. علت افزایش میزان مصرف کامپوزیت‌ها در وسایل ورزشی و قایق‌های مسابقه‌ای کارایی بسیار خوب آن‌ها است. کلوپ‌های گلف، کلاه‌های محافظ، لوازم اسکی، کمان تیرکمان، تخته‌های موج‌سواری، چوب‌های ماهی‌گیری، نمونه-های از کاربرد کامپوزیت‌ها در این صنعت به شمار می‌روند.

۱-۳-۴-۳ صنایع دریایی

به دلیل مقاومت به خوردگی کامپوزیت‌ها، از این مواد در ساخت کشتی‌ها استفاده می‌شود. وزن کم این مواد باعث کاهش مصرف سوخت، افزایش سرعت مسافرت‌های دریایی و افزایش ظرفیت حمل بار می-شود. حدود ۷۰٪ اجزای قایق‌های تفریحی از مواد کامپوزیتی ساخته شده است. همچنین از کامپوزیت‌ها برای ساخت لوله‌های مصرفی در دریا برای استخراج گاز و نفت استفاده می‌شوند. انگیزه اصلی استفاده از کامپوزیت‌ها در این صنعت، کاهش هزینه‌های نگهداری و کاهش هزینه‌های نصب و نیز مقاومت به خوردگی خوب این مواد است. مزیت دیگری که استفاده از اتصالات چسبی نسبت به جوش‌کاری دارد این است که نیاز به کارگرم این قطعات را به حداقل می‌رساند. به‌عنوان مثال در ساخت بدنه کشتی، عرشه، دکل‌ها، محفظه موتور، از مواد کامپوزیتی استفاده می‌شود[۴۸].

۱-۳-۵ رفتار مکانیکی مواد مرکب

اغلب مواد مهندسی، همگن و ایزوتروپ می‌باشند. یک جسم همگن دارای خواص یکنواخت در تمام نقاط جسم است و دیگر خواص ماده تابعی از موقعیت نقاط آن نمی‌باشد. مواد مرکب در حالت کلی غیر همگن و غیرایزوترپ هستند.

به‌طور کلی مواد بر اساس خاصیتی که دارند بدین‌صورت تعریف می‌گردند.

۱. ماده‌ی همگن: خواص در کل ماده یکسان است؛ به‌طوری‌که خواص در هر نقطه، مستقل از موقعیت آن تعریف می‌گردد.

۲. ماده‌ی ناهمگن: خواص در کل ماده یکسان نیست؛ به‌طوری‌که خواص در هر نقطه، وابسته به موقعیت آن هست.

۳. ماده‌ی همسانگرد: خواص در هر نقطه از ماده در جهت‌های مختلف یکسان است؛ به‌طوری‌که خواص در هر نقطه، مستقل از جهت تعریف می‌گردد.

۴. ماده‌ی ناهمسانگرد: خواص در هر نقطه از ماده در جهت‌های مختلف متفاوت است؛ به‌طوری‌که خواص در هر نقطه، وابسته به جهت تعریف می‌گردد.

سه نوع رفتار ناهمسانگردی ممکن است در مواد وجود داشته باشد.

۱. ماده‌ی ناهمسانگرد کامل: خواص ماده در هر نقطه و در جهات مختلف تغییر می‌کند و هیچ صفحه‌ی تقارنی برای خواص ماده وجود ندارد.

۲. ماده‌ی مونوکلینیک[1]: خواص ماده‌ی ناهمسانگرد نسبت به یک صفحه متقارن است.

۳. ماده‌ی ارتوتروپیک: در نقطه‌ای از ماده، خواص در سه جهت عمود بر هم متفاوت است؛ ولی خواص ماده نسبت به سه صفحه عمود بر هم متقارن است.

ماده همسانگرد عرضی[2]: اگر در هر نقطه از ماده یک صفحه وجود داشته باشد که خواص مکانیکی در آن در تمام جهات مساوی باشد، اصطلاحاً آن ماده را همسانگرد عرضی گویند.

در بررسی رفتار مواد مرکب با توجه به خواص ناهمگن و ناهمسانگرد آن‌ها دو دیدگاه وجود دارد.

۱. دیدگاه میکرو مکانیک[3] که رفتار ماده‌ی مرکب را با توجه به خواص اجزای تشکیل‌دهنده‌ی آن و اثر متقابل آن‌ها از دیدگاه میکروسکوپی موردبررسی قرار می‌دهد.

۲. دیدگاه ماکروسکوپیک[4] برای بررسی رفتار مواد مرکب از دیدگاه مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شود، به‌طوری‌که رفتار ماده‌ی مرکب با ماده‌ی همگنی بیان می‌شود؛ که رفتار کاملاً مشابهی با ماده‌ی مرکب از خود نشان می‌دهد.

با مطالعه‌ی رفتار مواد مرکب از دو دیدگاه مختلف، طراحی آن‌ها با توجه به عملکرد مورد نیاز امکان‌پذیر می‌شود که از مزایای مواد مرکب در مقایسه با مواد خالص است[۴۱].

---

1. Monocilinic materialm
2. Transversely isotropic material
3. Micromechanical
4. Macroscopic

۴-۱ مروری بر پژوهش‌های انجام‌شده

در مورد تحلیل تنش صفحات دارای گشودگی، تحقیقات بسیار وسیعی از روش‌های مختلف عددی، تجربی و تحلیلی انجام‌شده است.

با توجه به گستردگی تحقیقات انجام‌شده در این زمینه، سعی می‌شود تا به مروری بر تحلیل تنش صفحات حاوی گشودگی با استفاده از روش حل تحلیلی بر پایه استفاده از تابع پتانسیل مختلط پرداخته شود. استفاده از روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسته دوبعدی اولین بار توسط موشخلیشویلی[1] [۴] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. کاربردهایی از روش ارائه‌شده توسط او در مطالعات ساوین[2] [۵] بر روی صفحات همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای مواد غیرهمسانگرد فقط برای گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل مطالعاتی را انجام داد.

توسعه کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد غیرهمسانگرد توسط اشلبای[3] [۶]، اشترو[4] [۷] و لخنیتسکی[5] [۸] انجام شد. بعدها پژوهشگران متعددی با استفاده از روابط ارائه‌شده توسط آن‌ها به مطالعه صفحات غیرهمسانگرد حاوی گشودگی پرداختند. چن[6] [۹] رفتار صفحه ارتوتروپیک حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل، تحت شار حرارتی یکنواخت را مورد مطالعه قرار داد. او با استفاده از روش تابع پتانسیل مختلط توانست تنش محیطی[7] اطراف گشودگی را محاسبه کند. تحلیل تنش صفحات ارتوتروپیک با گشودگی مستطیلی توسط جونگ[8] [۱۰] و راجایا[9] [۱۱] انجام شد. روابط آن‌ها براساس روش حل ارائه‌شده توسط لخنیتسکی و فرمول‌بندی اشترو و استفاده از نگاشت

1. Muskhelishvili
2. Savin
3. Eshelby
4. Stroh
5. Lekhnitskii
6. Chen
7. hoop stress
8. Jong
9. Rajaiah

هم‌نوا بود. زیمرمن[1] [۱۲] استفاده از تابع نگاشت هم‌نوا، برای نگاشت نقاط گشودگی‌هایی با شکل‌های مختلف به دایره‌ای به شعاع واحد را موردبررسی قرار داد. هوو[2] [۱۳] میدان تنش در اطراف گشودگی‌های با شکل‌های مختلف در یک صفحه الاستیک غیرهمسانگرد تحت بارگذاری در بین‌هایت را مورد مطالعه قرار داد. هافنباخ[۱۴] و همکارانش با ارائه یک حل تحلیلی، میدان تنش و جابجایی اطراف گشودگی بیضی‌شکل را در یک صفحه غیرهمسانگرد به دست آوردند.

آن‌ها نتایج خود را برای زوایای مختلف الیاف و بار ارائه دادند و از نتایج اجزای محدود و تجربی برای بررسی حل خود استفاده کردند. توزیع تنش اطراف گشودگی مثلثی در یک صفحه غیرهمسانگرد با استفاده از روش پتانسیل مختلط توسط دائوست[3] [۱۵] و همکارش ارائه شد. اهمیت کار آن‌ها تابع نگاشتی بود که در نظر گرفتند. تابع نگاشت آن‌ها قادر بود مثلث‌هایی با نسبت قاعده به ارتفاع مختلف را به دایره‌ای به شعاع واحد بنگارد. در تحقیق آن‌ها تأثیر شعاع انحنای گوشه گشودگی نیز مورد مطالعه قرار گرفت.

حل آن‌ها برای یک صفحه تک‌لایه با زاویه الیاف صفر درجه بود. رضایی پژند و جعفری [۱۶] با تعریف تابع تنشی که معادلات سازگاری را ارضا می‌کرد؛ حل تحلیلی صفحات غیرهمسانگرد دارای گشودگی-های مختلف را ارائه کردند. یوکاجونکر[4] و رائو[5] [۱۷] صفحه حاوی گشودگی مثلثی را که تحت بارگذاری کشش تک‌محوره، دومحوره با نسبت تنش مختلف و تنش برشی قرار داشت؛ را مورد مطالعه قراردادند.

رمئو[6] [۱۸] از روش تحلیلی و تجربی، کرنش در صفحات چندلایه حاوی گشودگی مستطیلی را موردبررسی قرار داد. این صفحات در حالت کلی تحت بارگذاری تنش دومحوره و برش به‌طور همزمان قرار گرفتند. آن‌ها نتیجه گرفتند که کرنش در صورت حضور همه بارگذاری‌ها بیشتر از زمانی است که تک‌تک بارها به‌صورت مجزا اعمال می‌شوند.

---

1. Zimmerman
2. Hwu
3. Daoust
4. Ukadgaonker
5. Rao
6. Romeo

اسمر[1] و جبّور[2] [۱۹] باهمین روش، توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مستطیلی را در یک صفحه غیرهمسانگرد و تحت کشش به دست آوردند. آن‌ها تأثیر انحنای گشودگی و زاویه بار را به‌طور مجزا بر روی تمرکز تنش موردبررسی قرار دادند. رضایی پژند و جعفری [۲۰] به بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی شبه مربعی در صفحات غیرهمسانگرد پرداختند. آن‌ها تأثیر پارامترهای مختلفی از قبیل زاویه بار، زاویه الیاف و زاویه چرخش گشودگی را مورد مطالعه قرار دادند. در مورد تحلیل تنش صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی مطالعات زیادی انجام‌شده است؛ که غالب این تحقیقات برای گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل هست [۲۱]. کلتاچی[3] و ارسلان[4] [۲۲] نیز بر روی تمرکز تنش چندلایه-های متقارن با گشودگی دایروی و تحت بار تک‌محوره کششی مطالعاتی را انجام دادند. آن‌ها تنش را برای هر لایه به‌طور مجزا موردبررسی قرار دادند و با استفاده از معیار شکست تسای-هیل برای هر لایه کمترین تنش محیطی قابل‌تحمل را برحسب زاویه الیاف به دست آوردند.

همچنین هارمندرا[5][۲۳] تمرکز تنش اطراف گشودگی‌های دایره‌ای، بیضی‌شکل و مثلثی را برای صفحات چندلایه ارتوتروپیک و غیرهمسانگرد با استفاده از حل موشخلیشیولی ارائه کرد. او فرض کرد که ابعاد صفحه در مقابل اندازه گشودگی بزرگ است طوری که بتوان صفحه را بین‌هایت در نظر گرفت. ریبیکی[6] [۲۴] و همکارانش با استفاده از روش اجزای محدود،

توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای را در چندلایه‌ها به دست آوردند. صفحه مورد تحلیل آن‌ها تحت بار تک‌محوره قرار داشت.

آن‌ها از روش تجربی برای تأیید روش اجزای محدود خود استفاده کردند. در مقاله‌ای توسط ولایچامی[7][۲۵] همکارانش به طراحی بهین صفحات چندلایه کامپوزیتی حاوی گشودگی بیضی‌شکل

---

1. Asmar
2. Jabbour
3. Kaltakci
4. Arsalan
5. Dharmendra
6. Rybicki
7. Vellaichamy

پرداخته شد. متغیرهای طراحی در تحقیق آن‌ها نسبت قطرهای بیضی و زاویه چرخش گشودگی بودند. تابع هدف دسترسی به کمترین تنش ممکن در اطراف گشودگی بود

در مقاله‌ای توسط هافنباخ[1] [۲۶] و همکارانش با درنظرگرفتن تابع جابجایی برحسب متغیر مختلط و استفاده از نگاشت هم‌نوا، مسأله تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی محدود حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی‌شکل مورد مطالعه قرار گرفت. برای بررسی صحت روش حل تحلیلی در این مقاله، از روش تجربی استفاده شد. هافنباخ[۲۷]، با استفاده از روش تحلیلی بر پایه تئوری کلاسیک چندلایه‌ها و استفاده از تابع پتانسیل به شکل متغیر مختلط، میدان تنش و کرنش در اطراف گشودگی برای کامپوزیت‌های تقویت‌شده را تعیین کرد. آن‌ها برای نگاشت نقاط روی مرز گشودگی بیضی‌شکل به دایره‌ای به شعاع واحد از تابع نگاشت هم‌نوا استفاده کردند. همچنین از ترکیب روش حداقل مربعات و روش هم‌مکانی[2] برای مدل‌سازی مرز خارجی صفحه استفاده کردند. در مورد چندلایه‌های نامتقارن هم تحقیقاتی انجام‌شده است که غالب آن‌ها برای گشودگی‌های دایره‌ای و بیضی‌شکل هست [۲۸-۳۱].

استفاده از روش پتانسیل مختلط که توسط لخنیتیسکی و ساوین ارائن شد، برای مسائل متقارن قابل‌استفاده است اما تا زمانی که بکر روش پتانسیل مختلط خود را برای مسائل ورق که دارای جفت شدن کشش و خمش هستند ارائه نکرده بود، حل خاصی برای این مسائل وجود نداشت. این روش برای مسائل ترک گیریفیث، گشودگی‌های بیضوی و تمرکز تنش و ممان خمشی در صفحات نامتقارن به‌کاررفته است.

مقدار زیادی از مقالات و مراجع برای مسائل درون صفحه‌ای وجود دارند، ولی برای مسائل خمش، حل‌های خیلی کمی موجود است.

بعضی از حل‌های مهم شناخته‌شده برای مواد همسانگرد عبارت‌اند از: حل گودیر[3] [۳۲]و ریزنر[4] [۳۳]

1. Hufenbach
2. Collocation Method
3.Goodier
4. Reissner

برای ورق‌های نازک و حل نقدی[1] [۳۴]و لی[2] و کانلی[3] [۳۵]و چن[4] و آرچر[5] [۳۶]برای ورق‌های ضخیم بر اساس تئوری ورق‌های نازک، لخنیتیسکی[۳۷] و ساوین[۳۸] که روش حل برای مسائل گشودگی در صفحات ناهمسانگردی را ارائه کردند.

لخنتیسکی نتایج را برای گشودگی‌های دایروی در صفحات تخته چندلا ارائه کرد. علاوه بر نتایج حل برای گشودگی‌های دیگر در صفحات همسانگرد، ساوین معادلات برای حل مساله گشودگی بیضوی را نیز ارائه نمود. بر اساس روش حل استرو، هوو[۳۹] روش حلی برای بارگذاری داخل صفحه‌ای و خمش درون صفحه‌ای در صفحات ناهمسانگردی حاوی گشودگی را ارائه کرد.

به‌جز حل‌هایی که لخنیتیسکی و ساوین برای مسائل گشودگی دایروی و بیضوی ارائه کردند، حل دیگری برای صفحات ناهمسانگردی وجود ندارد. انگیزه برای حل جامع که بتواند انواع شکل‌ها را در نظر بگیرد و شرایط مختلف بارگذاری در صفحات چندلایه ناهمسانگردی به وجود آمده است که با معرفی نگاشت هم‌نوا و بارگذاری دومحوره دلخواه این امر محقق شده. برای حالت‌های مختلف گشودگی و بارگذاری، توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی، با تعیین مدول خمشی به دست می‌آید.

با در نظر گرفتن ضریب پوآسون و مدول یانگ مناسب، می‌توان حل را برای حالت همسانگرد نیز استفاده نمود. نتایج به‌دست‌آمده برای دایره و دیگر گشودگی‌ها با نتایج برای همسانگرد که ساوین ارائه کرد هم‌خوانی خوبی دارند. همچنین این حل، نتایج کاملاً مشابه با نتایج معادلات ساوین برای گشودگی بیضوی در صفحه ناهمسانگردی را ارائه نمود.

در این پایان‌نامه با توجه به تنوع زیاد مواد کامپوزیتی، از خواص مکانیکی پرکاربردترین آن‌ها (گرافیت/اپوکسی) استفاده شده است.

---

1. Naghdi
2. Lee
3. Conlee
4. Chen
5. Archer

فصل دوم

روابط حاکم بر چندلایه‌ها

۲-۱ مروری مختصر بر روابط تنش-کرنش حاکم بر کامپوزیت‌ها

در حالت سه‌بعدی مطابق رابطه (۲-۱) می‌توان هر مؤلفه تـــنش را به تمام مؤلفه‌های کرنش و هر کرنش را به تمام مؤلفه‌های تنش مربوط ساخت [۲۹].

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j$$
$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \qquad (۲-۱)$$

که در آن $[C]$ و $[S]$ به ترتیب ماتریس‌های سفتی و نرمی ماده بوده که رابطه‌ی بین آن‌ها عبارت است از :

$$[C]=[S]^{-1} \qquad (۲-۲)$$

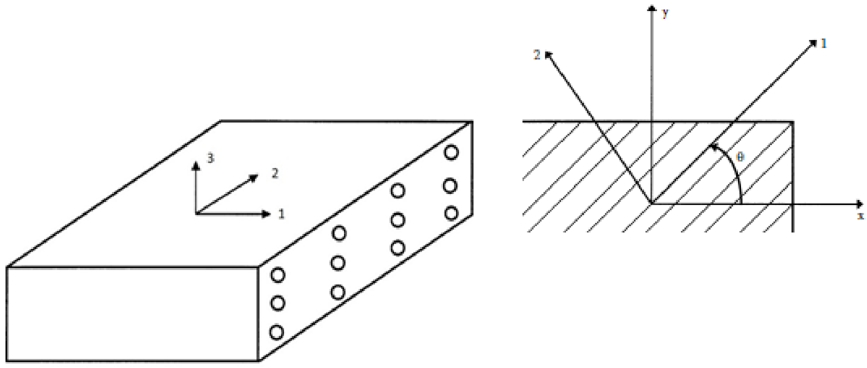
از طرفی برای مواد کامپوزیتی غیر همسانگرد، روابط تنش-کرنش در حالت کلی به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} & s_{26} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} & s_{35} & s_{36} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} & s_{45} & s_{46} \\ s_{15} & s_{25} & s_{35} & s_{45} & s_{55} & s_{56} \\ s_{16} & s_{26} & s_{36} & s_{46} & s_{56} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (۲-۳)$$

برای مواد همسانگرد عرضی که شامل ۵ ثابت مستقل هست، رابطه (۲-۴) برقرارخواهد بود[۴۲]:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{23} & s_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(s_{22}-s_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (۲-۴)$$

که راستای ۱،۲ و۳ راستاهای متعامد المان هستند که در شکل (۲-۱) نشان داده‌شده‌اند :



شکل ۲-۱ : صفحه‌ی ۲-۳ صفحه‌ی عمود بر راستای الیاف است.

۲-۱-۱ روابط تنش-کرنش برای حالت تنش صفحه‌ای در مواد ناهمسانگرد

$$\begin{aligned} &\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0 \\ &\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 \neq 0, \tau_{12} \neq 0 \end{aligned} \qquad (۵-۲)$$

در این حالت ماتریس ضرایب به شکل کاهش یافته (۲-۶) درمی‌آید :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \qquad (۶-۲)$$

از طرفی طبق تعریف داریم[۴۳]:

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{16} \\ s_{12} & s_{22} & s_{26} \\ s_{16} & s_{26} & s_{66} \end{bmatrix}^{-1} \qquad (۷-۲)$$

که در آن :

$$Q_{11} = \frac{(s_{22}s_{66} - s_{26}{}^2)}{\Delta} \quad , Q_{12} = \frac{(s_{16}s_{26} - s_{12}s_{66})}{\Delta} \quad , Q_{22} = \frac{(s_{11}s_{66} - s_{16}{}^2)}{\Delta}$$

$$Q_{26} = \frac{(s_{12}s_{16} - s_{11}s_{26})}{\Delta} \quad , Q_{16} = \frac{(s_{12}s_{26} - s_{16}s_{22})}{\Delta} \quad Q_{66} = \frac{(s_{11}s_{22} - s_{12}{}^2)}{\Delta} \qquad (۸-۲)$$

$$\Delta = (s_{11}s_{22}s_{66} - s_{11}s_{26}{}^2 - s_{12}{}^2 s_{66} - s_{16}{}^2 s_{22} + 2s_{12}s_{16}s_{26})$$

و برای مواد اورتوتروپیک داریم [۴۳]:

$$Q_{11}=\frac{S_{22}}{S_{11}S_{22}-S_{12}{}^{2}} \quad ,Q_{12}=\frac{-S_{12}}{S_{11}S_{22}-S_{12}{}^{2}} \quad ,Q_{22}=\frac{S_{11}}{S_{11}S_{22}-S_{12}{}^{2}} \quad ,Q_{66}=\frac{1}{S_{66}} \tag{۹-۲}$$

که در آن :

$$S_{11}=\frac{1}{E_1} \quad ,S_{22}=\frac{1}{E_2} \quad ,S_{12}=-\frac{\nu_{12}}{E_1}=-\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad ,S_{66}=\frac{1}{G_{12}} \tag{۱۰-۲}$$

برای تبدیل مختصات از ۱-۲ به $x-y$ طبق روابط (۲-۱۱) داریم :

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \frac{\gamma_{xy}}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \frac{\gamma_{12}}{2}\end{bmatrix} \tag{۱۱-۲}$$

ماتریس‌های $[R],[T]$ و $[T]^{-1}$ را به‌صورت روابط (۲-۱۲) تعریف می‌کنیم :

$$[T]^{-1}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}$$

$$[T]=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta\\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix} \tag{۱۲-۲}$$

$$R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

لذا می‌توان نوشت [۴۳]:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=[T]^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=[T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}$$

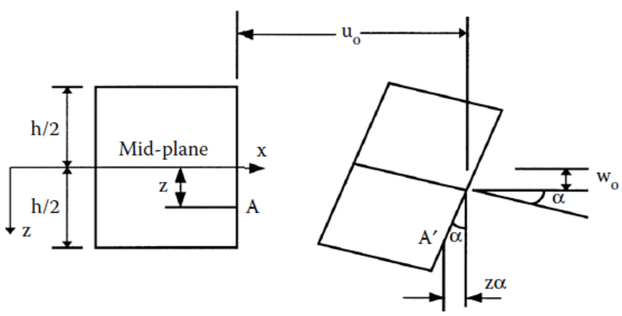
$$\begin{pmatrix}[T]^{-T}=[R][T][R]^{-1}\\ [\bar{Q}]=[T]^{-1}[Q][T]^{-T}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \quad (۱۳-۲)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}
\overline{Q_{11}} &= m^4Q_{11}+2m^2n^2\left(Q_{12}+2s_{66}\right)+n^4Q_{22}\\
\overline{Q_{12}} &= m^2n^2\left(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66}\right)+\left(m^4+n^4\right)Q_{12}\\
\overline{Q_{22}} &= n^4Q_{11}+2m^2n^2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)+m^4Q_{22}\\
\overline{Q_{16}} &= m^3n\left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)+mn^3\left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)\\
\overline{Q_{26}} &= mn^3\left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)+nm^3\left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)\\
\overline{Q_{66}} &= m^2n^2\left(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66}\right)+\left(m^4+n^4\right)Q_{66}\\
m &= \cos\theta, n=\sin\theta
\end{aligned} \quad (۱۴-۲)$$

۲-۱-۲ تغییرات تنش و کرنش در یک چندلایه کامپوزیتی

اگر یک مقطع از یک ورق را در مختصات کارتزین مطابق شکل (۲-۲) در نظر بگیریم، با فرض اینکه u_0، v_0 و w_0 جابه‌جایی صفحه‌ی میانی در راستاهای x، y و z باشند، هر نقطه خارج از صفحه‌ی میانی دارای جابه‌جایی‌های u,v و w در راستاهای x، y و z خواهد بود که مطابق روابط (۲-۱۵) و (۲-۱۶) تعریف می‌شود[۴۹].



شکل۲-۲: رابطه‌ی بین جابجایی به نسبت ضخامت را با جابجایی انحنای صفحه‌ی میانی بیان می‌کند.[۴۳]

$$U = u_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial x} \qquad ,V = v_0 - z\frac{\partial w_0}{\partial y} \tag{۲-۱۵}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad ,\varepsilon_Y = \frac{\partial V}{\partial y} \qquad ,\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \tag{۲-۱۶}$$

با جایگذاری روابط (۲-۱۵) در روابط (۲-۱۶) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{۲-۱۷}$$

و ماتریس کرنش و انحنای صفحه‌ی میانی به ترتیب به‌صورت روابط (۲-۱۸) تعریف می‌شوند :

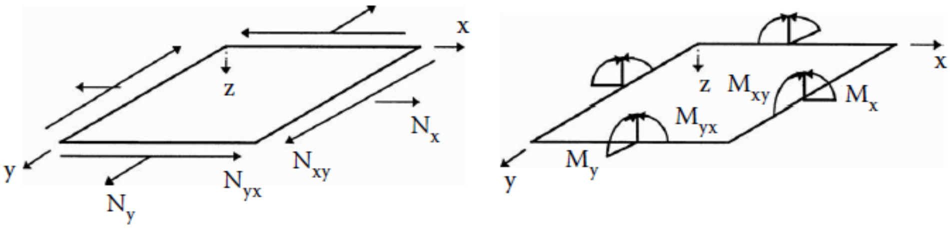
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad , \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \tag{۲-۱۸}$$

و با جایگذاری رابطه (۲-۱۸) در رابطه آخر (۲-۱۳)، رابطه (۲-۱۹) حاصل می‌شود :

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{16} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \right] \tag{۲-۱۹}$$

۲-۱-۳ منتجه‌های نیرو و ممان خمشی در چندلایه‌ها

کرنش و انحنای صفحه‌ی میانی که در روابط (۲-۱۸) معرفی شدند، برای تعیین تنش‌ها و کرنش چندلایه‌ها همچنان مجهول هستند. با انتگرال‌گیری روی ضخامت لایه‌ها، تنش‌ها در هر لایه را می‌توان به دست آورد. با توجه به معلوم بودن گشتاورها و نیروهای وارده به چندلایه کرنش صفحه‌ی میانی و انحنای ورق که در شکل (۲-۳) به‌صورت شماتیک نشان داده‌شده‌اند، قابل‌محاسبه هستند[۴۳].



شکل۲-۳: منتجه‌های نیرو و ممان[۴۳] .

از طرفی طبق رابطه (۲-۲۰) منتجه نیرو و ممان خمشی را تعریف می‌کنیم[۴۲].

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz$$
$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x . zdz \qquad (۲۰-۲)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \qquad (۲۱-۲)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} zdz = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} zdz \qquad (۲۲-۲)$$

که در آن t ضخامت لایه و h_k ارتفاع لایه k ام از صفحه‌ی میانی مطابق شکل (۲-۴) هستند. با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۱۹) در رابطه (۲-۲۱) و (۲-۲۲) خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} dz \qquad (۲۳-۲)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \qquad (۲۴-۲)$$

با انتگرال‌گیری مطابق روابط (۲-۲۳) و (۲-۲۴) خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (۲-۲۵)$$

و همچنین :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (۲-۲۶)$$

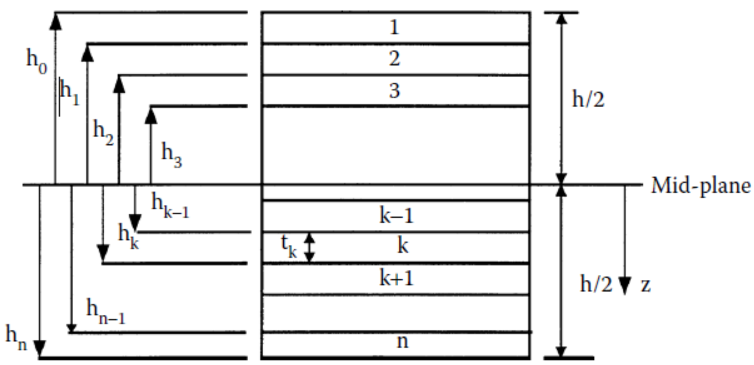
که ماتریس B, A و D به ترتیب ماتریس‌های نرمی کششی، کوپلینگ کشش- خمش و خمشی هستند. به‌عبارت‌دیگر ماتریس A منتجه‌های نیروی درون صفحه‌ای را به کرنش درون صفحه‌ای ارتباط می‌دهد، ماتریس B مؤلفه‌های کشش و خمش را به کرنش و انحنای صفحه‌ی میانی کوپل می‌کند و ماتریس D منتجه‌های گشتاور خمشی را به انحنای ورق ارتباط می‌دهد[۴۳] .

که این سه ماتریس را به‌صورت روابط (۲-۲۷) تا (۲-۲۹) تعریف می‌کنیم :

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (\bar{Q}_{ij})(h_k - h_{k-1}); i, j = 1,2,6 \quad (۲-۲۷)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (\bar{Q}_{ij})(h^2{}_k - h^2{}_{k-1}); i, j = 1,2,6 \quad (۲-۲۸)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} (\bar{Q}_{ij})(h^3{}_k - h^3{}_{k-1}); i, j = 1,2,6 \quad (۲-۲۹)$$



شکل۲-۴: برش مقطع یک چندلایه[۴۲].

۲-۱-۴ چندلایه متقارن

اگر جنس، زاویه الیاف و ضخامت هر لایه در بالا و پایین صفحه میانی یکسان باشد، چندلایه متقارن نامیده می‌شود. در چندلایه‌های متقارن ماتریس $B=0$ است[۴۲]:

درنتیجه روابط (۲-۲۵) و (۲-۲۶) به‌صورت (۲-۳۰) و (۲-۳۱) ساده می‌شوند :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} \tag{۲-۳۰}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{۲-۳۱}$$

بعداً نشان خواهیم داد که تنش‌ها به z وابسته نیستند. درنتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz \tag{۲-۳۲}$$

$$\int_{h_{k-1}}^{h_k} dz = (h_k - h_{k-1}) = t_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{h_{k-1}}^{h_k} dz = \sum_{k=1}^{n} t_k = T \tag{۲-۳۳}$$

که T ضخامت چندلایه است.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} \tag{۲-۳۴}$$

درنتیجه برای به دست آوردن مؤلفه‌های ماتریس سفتی کاهش‌یافته برای مواد کامپوزیتی چندلایه از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{16} \\ a_{12} & a_{22} & a_{26} \\ a_{16} & a_{26} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \tag{۲-۳۵}$$

که در آن :

$$[a]=\left[\overline{b_{ij}}\right]^{-1} \qquad \overline{b_{ij}}=\frac{1}{T}[A]$$ (۲-۳۶)

$$a_{11}=\frac{\left(\overline{b_{22}}\,\overline{b_{66}}-\overline{b_{26}^2}\right)}{B},\ a_{22}=\frac{\left(\overline{b_{11}}\,\overline{b_{66}}-\overline{b_{16}^2}\right)}{B},\ a_{26}=\frac{\left(\overline{b_{12}}\,\overline{b_{16}}-\overline{b_{11}}\,\overline{b_{26}}\right)}{B}$$
$$a_{12}=\frac{\left(\overline{b_{16}}\,\overline{b_{26}}-\overline{b_{12}}\,\overline{b_{66}}\right)}{B},\ a_{16}=\frac{\left(\overline{b_{12}}\,\overline{b_{26}}-\overline{b_{16}}\,\overline{b_{22}}\right)}{B},\ a_{66}=\frac{\left(\overline{b_{11}}\,\overline{b_{22}}-\overline{b_{12}^2}\right)}{B}$$ (۲-۳۷)

که در آن :

$$B=\left(\overline{b_{11}}\,\overline{b_{22}}\,\overline{b_{66}}-2\overline{b_{11}}\,\overline{b_{26}}^2+2\overline{b_{12}}\,\overline{b_{26}}\,\overline{b_{16}}-\overline{b_{66}}\,\overline{b_{12}}^2-\overline{b_{22}}\,\overline{b_{16}}^2\right)$$ (۲-۳۸)

۲-۱-۵ روابط تنش-کرنش برای حالت کرنش صفحه‌ای در مواد ناهمسانگرد

در حالت کرنش صفحه‌ای ($\varepsilon_z=\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$) رابطه‌ی (۲-۳۸) از رابطه‌ی (۲-۳) به دست آید :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= S_{11}\sigma_x+S_{12}\sigma_y+S_{13}\sigma_z+S_{16}\tau_{xy}\\
\varepsilon_y &= S_{12}\sigma_x+S_{22}\sigma_y+S_{23}\sigma_z+S_{26}\tau_{xy}\\
0 &= S_{13}\sigma_x+S_{23}\sigma_y+S_{33}\sigma_z+S_{36}\tau_{xy}\\
\gamma_{xy} &= S_{16}\sigma_x+S_{26}\sigma_y+S_{36}\sigma_z+S_{66}\tau_{xy}
\end{aligned}$$ (۲-۳۸)

با حل معادله سوم و به دست آوردن σ_z و جایگذاری در سه رابطه‌ی دیگر داریم :

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{16}\\ S_{12}&S_{22}&S_{26}\\ S_{16}&S_{26}&S_{66}\end{bmatrix}^{new}\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$$ (۲-۳۹)

که در آن:

$$\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{16}\\ S_{12}&S_{22}&S_{26}\\ S_{16}&S_{26}&S_{66}\end{bmatrix}^{new}=\begin{bmatrix}\dfrac{S_{11}S_{33}-S^2_{13}}{S_{33}}&\dfrac{S_{12}S_{33}-S_{13}S_{23}}{S_{33}}&\dfrac{S_{16}S_{33}-S_{13}S_{36}}{S_{33}}\\ \dfrac{S_{12}S_{33}-S_{13}S_{23}}{S_{33}}&\dfrac{S_{22}S_{33}-S^2_{23}}{S_{33}}&\dfrac{S_{26}S_{33}-S_{23}S_{36}}{S_{33}}\\ \dfrac{S_{16}S_{33}-S_{13}S_{36}}{S_{33}}&\dfrac{S_{26}S_{33}-S_{23}S_{36}}{S_{33}}&\dfrac{S_{66}S_{33}-S^2_{36}}{S_{33}}\end{bmatrix}$$ (۲-۴۰)

و همچنین :

$$S_{33}=\frac{1}{E_3},\ S_{13}=-\frac{\nu_{13}}{E_1}=-\frac{\nu_{31}}{E_3},\ S_{23}=-\frac{\nu_{23}}{E_2}=-\frac{\nu_{32}}{E_3}$$ (۲-۴۱)

فصل سوم

استخراج معادلات توزیع تنش ناشی از بار داخل صفحه‌ای

۳-۱ روابط متغیر مختلط

در حالت دوبعدی رابطه سازگاری به‌صورت زیر بیان می‌شود[۲۹]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad (۳-۱)$$

رابطه تنش و کرنش برای ماتریس نرمی کاهش‌یافته برای حالت تنش صفحه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}\\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}\\ \gamma_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy}\end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

که ماتریس a از رابطه ۲-۳۵ به دست می‌آید.

تابع ایری[1] مطابق رابطه (۳-۳) را تعریف می‌کنیم :

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \quad ,\sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad ,\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \qquad (۳-۳)$$

با جایگذاری تابع تنش در رابطه سازگاری، معادله سازگاری برای ماده غیرهمسانگرد و برحسب تابع تنش به‌صورت زیر است:

$$a_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^3 \partial y}+\left(2a_{12}+a_{66}\right)\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2}-2a_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3}+a_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial y^4}=0 \qquad (۳-۴)$$

در این رابطه a_{ij} اعضاء ماتریس نرمی کاهش‌یافته یک ورق چندلایه متقارن است که بر اساس فرض تنش صفحه‌ای قابل‌محاسبه می‌باشند. معادله (۳-۴)، معادله تعمیم‌یافته‌ی بای هارمونیک شناخته می‌شود و با کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه اول مطابق رابطه (۳-۵) قابل‌حل می‌شود[۸]:

$$\begin{aligned}&D_1 D_2 D_3 D_4 U=0\\ &D_i(i=1,2,3,4)=\frac{\partial}{\partial y}-s_i\frac{\partial}{\partial x}\end{aligned} \qquad (۳-۵)$$

با مرتب‌سازی آن، معادله به‌صورت رابطه (۳-۶) درخواهد آمد :

1. Airy Function

$$a_{22}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}-2a_{26}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}s+\left(2a_{12}+a_{66}\right)\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}s^2-2a_{16}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}s^3+a_{11}\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}s^4=0$$
(۳-۶)

معادله (۳-۶) دارای معادله مشخصه به‌صورت معادله (۳-۷) هست :

$$a_{11}s^4-2a_{16}s^3+(2a_{12}+a_{66})s^2-2a_{26}s+a_{22}=0 \qquad (۳-۷)$$

بر اساس روابط انرژی که لخننیتیسکی به دست آورد، او نشان داد که معادله فوق نمی‌تواند ریشه حقیقی داشته باشد[۸] با حل معادلات بای هارمونیک[1] جواب به‌صورت رابطه (۳-۸) خواهد بود :

$$U(x,y)=F_1(x+s_1y)+F_2(x+s_2y)+F_3(x+s_3y)+F_4(x+s_4y) \qquad (۳-۸)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}&s_1=\alpha_1+i\beta_1; s_2=\alpha_2+i\beta_2\\&s_3=\alpha_1-i\beta_1; s_4=\alpha_2-i\beta_2\\&\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2=real\\&\beta_1\neq\beta_2\end{aligned} \qquad (۳-۹)$$

رابطه (۳-۸) را می‌توان به‌صورت رابطه (۳-۱۰) نوشت :

$$U(x,y)=F_1(z_1)+F_2(z_2)+\overline{F_1(z_1)}+\overline{F_2(z_2)} \qquad (۳-۱۰)$$

که z_i توسط انتقال ساده زیر به دست می‌آید:

$$z_i=x+s_iy \qquad i=1,2 \qquad (۳-۱۱)$$

در رابطه (۳-۱۰)، F_1 و F_2 دو تابع تحلیلی هستند و $\overline{F_1}$و $\overline{F_2}$ به ترتیب مزدوج آن‌ها می‌باشند.

برای ساده‌سازی و پایین آوردن مرتبه مشتق از فرض زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&\frac{dF_1}{dz_1}=\varphi(z_1) \quad , \quad \frac{dF_2}{dz_2}=\psi(z_2)\\&\frac{d\overline{F}_1}{d\overline{z}_1}=\overline{\varphi(z_1)} \quad , \quad \frac{d\overline{F}_2}{d\overline{z}_2}=\overline{\psi(z_2)}\end{aligned} \qquad (۳-۱۱)$$

توابع تحلیلی $\varphi(z_1)$و $\psi(z_2)$ به فرم توابع انتگرالی توسط ساوین تعریف شده‌اند[۴]. البته توابع فوق

1. Bi harmonic

به فرم‌های دیگری مثل سری لورنت نیز تعریف می‌شوند[۴]

با توجه به معادلات بالا می‌توان نتیجه گرفت که تنش‌های داخل صفحه‌ای به‌صورت تابعی از دو تابع تنش $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ به‌صورت رابطه (۳-۱۳) تا (۳-۱۵) بیان می‌شود :

$$
\begin{aligned}
&\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}[F_1(z_1)+F_2(z_2)+\overline{F_1(z_1)}+\overline{F_2(z_2)}]=\\
&\frac{\partial}{\partial y}[\frac{dF_1}{dz_1}\frac{\partial z_1}{\partial y}+\frac{dF_2}{dz_2}\frac{\partial z_2}{\partial y}+\frac{\overline{dF_1}}{d\overline{z_1}}\frac{\partial \overline{z_1}}{\partial y}+\frac{\overline{dF_2}}{d\overline{z_2}}\frac{\partial \overline{z_2}}{\partial y}]=\\
&\left[s_1\frac{d\varphi(z_1)}{dz_1}\frac{\partial z_1}{\partial y}+s_2\frac{d\psi(z_2)}{dz_2}\frac{\partial z_2}{\partial y}+s_1\frac{d\overline{\varphi(z_1)}}{d\overline{z_1}}\frac{\partial \overline{z_1}}{\partial y}+s_2\frac{d\overline{\psi(z_2)}}{d\overline{z_2}}\frac{\partial \overline{z_2}}{\partial y}\right]=\\
&\left[s_1{}^2\varphi'(z_1)+s_2{}^2\psi'(z_2)+\overline{s_1{}^2\varphi'(z_1)}+s_2{}^2\overline{\psi'(z_2)}\right]
\end{aligned}
\tag{۳-۱۲}
$$

با توجه به رابطه $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}[z]$ می‌توان رابطه (۳-۱۲) را به‌صورت رابطه (۳-۱۳) نوشت :

$$\sigma_x=2\operatorname{Re}[s_1^2\varphi'(z_1)+s_2^2\psi'(z_2)] \tag{۳-۱۳}$$

به همین ترتیب بقیه تنش‌ها محاسبه می‌شوند :

$$
\begin{aligned}
&\sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}[F_1(z_1)+F_2(z_2)+\overline{F_1(z_1)}+\overline{F_2(z_2)}]=\\
&\frac{\partial}{\partial x}[\frac{dF_1}{dz_1}\frac{\partial z_1}{\partial x}+\frac{dF_2}{dz_2}\frac{\partial z_2}{\partial x}+\frac{\overline{dF_1}}{d\overline{z_1}}\frac{\partial \overline{z_1}}{\partial x}+\frac{\overline{dF_2}}{d\overline{z_2}}\frac{\partial \overline{z_2}}{\partial x}]=\\
&\left[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)+\overline{\varphi'(z_1)}+\overline{\psi'(z_2)}\right]=2\operatorname{Re}\left[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)\right]
\end{aligned}
\tag{۳-۱۴}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial xy}=-\frac{\partial^2}{\partial xy}[F_1(z_1)+F_2(z_2)+\overline{F_1(z_1)}+\overline{F_2(z_2)}]=\\
&\frac{\partial}{\partial x}[\frac{dF_1}{dz_1}\frac{\partial z_1}{\partial y}+\frac{dF_2}{dz_2}\frac{\partial z_2}{\partial y}+\frac{\overline{dF_1}}{d\overline{z_1}}\frac{\partial \overline{z_1}}{\partial y}+\frac{\overline{dF_2}}{d\overline{z_2}}\frac{\partial \overline{z_2}}{\partial y}]=\\
&-\left[s_1\varphi'(z_1)+s_2\psi'(z_2)+\overline{s_1\varphi'(z_1)}+s_2\overline{\psi'(z_2)}\right]=-2\operatorname{Re}\left[s_1\varphi'(z_1)+s_2\psi'(z_2)\right]
\end{aligned}
\tag{۳-۱۵}
$$

که تنش‌ها به‌صورت خلاصه به فرم روابط (۳-۱۶) به دست می‌آیند:

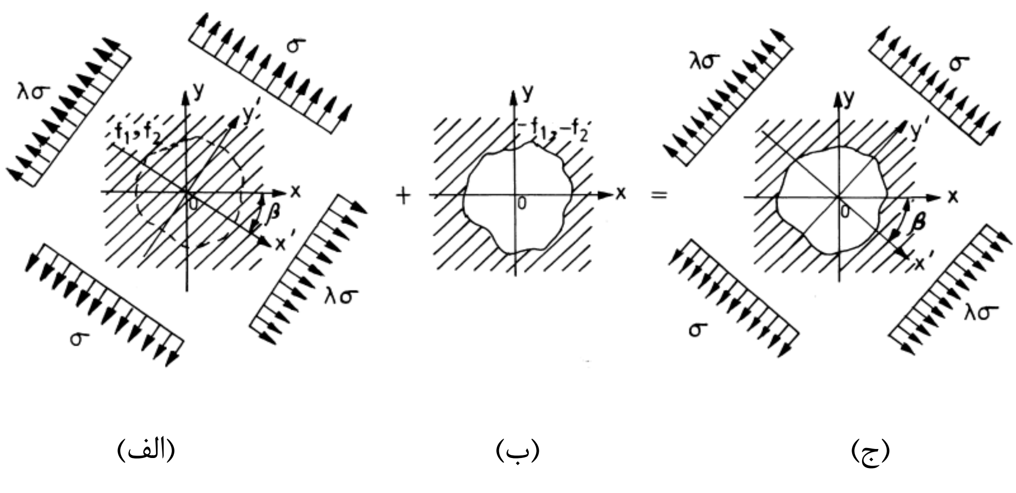
$$\sigma_x = 2\,\mathrm{Re}[S_1^2\varphi'(z_1) + S_2{}^2\psi'(z_2)]$$
$$\sigma_y = 2\,\mathrm{Re}[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)] \qquad (۱۶-۳)$$
$$\tau_{xy} = -2\,\mathrm{Re}[S_1\phi'(z_1) + S_2\psi'(z_2)]$$

۳-۲ حل مساله برای شرایط بارگذاری داخل صفحه‌ای

در این بخش به حل مساله بارگذاری درون- صفحه‌ای می‌پردازیم.

۳-۲-۱ معرفی بارگذاری اعمال‌شده به صفحه

به‌منظور بررسی حالت‌های بارگذاری مختلف در صفحه از یک بارگذاری ۲ محوره اختیاری مطابق شکل (۳-۱-الف) استفاده می‌کنیم. این نوع بارگذاری از حل صفحات دارای گشودگی بیضوی توسط گرفته‌شده است[۲۹].



شکل۳-۱ : نمای حل مساله :(الف) :بار خارجی در لبه‌های بیرونی، شرایط مرزی f_1 و f_2 روی گشودگی مجازی. (ب) : بار معکوس روی مرز گشودگی : $-f_1$ و $-f_2$.(ج) : شرایط تمرکز تنش برای مرز داخلی بدون بار و مرز خارجی تحت بارگذاری

در این بارگذاری، تنش‌ها در راستای محورهای $x'oy'$ اعمال می‌شود که با زاویه β حول محورهای xoy می‌توانند بچرخد که $\sigma_{x'}^{\infty} = \lambda\sigma$، $\sigma_{y'}^{\infty} = \sigma$ و $\tau_{x'y'}^{\infty} = 0$ $at(z) \to \infty$ که تنش‌های اعمالی حول محورهای $x'oy'$ در بینهایت هستند.

با انتقال محورهای تنش‌ها به شکل روابط (۳-۱۷) و (۳-۱۸) به دست می‌آیند :

$$\sigma_{x'}^{\infty}+\sigma_{y'}^{\infty}=\sigma_{x}^{\infty}+\sigma_{y}^{\infty} \qquad (۳-۱۷)$$

$$\sigma_{y'}^{\infty}-\sigma_{x'}^{\infty}+2i\tau_{x'y'}^{\infty}=(\sigma_{y}^{\infty}-\sigma_{x}^{\infty}+2i\tau_{xy}^{\infty})e^{2i\beta} \qquad (۳-۱۸)$$

با استفاده از معادلات (۳-۱۷) و (۳-۱۸) تنش‌ها در مختصات xoy به شکل روابط (۳-۱۹)

به دست می‌آیند :

$$\begin{aligned}\sigma_{x}^{\infty}&=\frac{\sigma}{2}\left[(\lambda+1)+(\lambda-1)\cos 2\beta\right]\\ \sigma_{y}^{\infty}&=\frac{\sigma}{2}\left[(\lambda+1)-(\lambda-1)\cos 2\beta\right]\\ \tau_{xy}^{\infty}&=\frac{\sigma}{2}\left[(\lambda-1)\sin 2\beta\right]\end{aligned} \qquad (۳-۱۹)$$

روابط (۳-۱۹) برای تحلیل تنش در صفحات بدون گشودگی نیز مفید هستند.

۳-۲-۲ انواع بارگذاری

۱- تنش تک‌محوره‌ی متمایل در بینهایت : $\lambda=0$ ، $\beta\neq 0$

۲- تنش در راستای y : $\lambda=0$ ، $\beta=0$

۳- تنش در راستای x : $\lambda=0$ ، $\beta=\frac{\pi}{2}$

۴- تنش هیدرو استاتیک در بینهایت : $\lambda=1$ ، $\beta\neq 0$

۵- تنش دومحوره برابر : $\lambda=1$ ، $\beta=0$

۶- تنش برشی در بینهایت : $\lambda=-1$ ، $\beta=\frac{\pi}{4}$ یا $\beta=\frac{3\pi}{4}$

۳-۳ روند کلی حل

صفحه‌ی ناهمسانگرد دارای گشودی که تحت بارگذاری در لبه‌های خارجی می‌باشد در شکل (۳-۱-الف) نشان داده‌شده است. در لبه‌های گشودگی باری اعمال نمی‌شود. برای حل، ابتدا از صفحه‌ی بدون

گشودگی تحت تنش دومحوری، تابع تنش‌های $\varphi_1(z_1)$ و $\psi_1(z_2)$ که در شکل (۳-۱-الف) نشان داده‌شده است شروع می‌کنیم. شرایط مرزی f_1 و f_2 روی گشودگی مجازی از این توابع تنش به دست می‌آیند.

سپس ورق حاوی گشودگی در غیاب بارگذاری بیرونی تحت شرایط مرزی منفی f_1 و f_2 در مرز گشودگی مطابق شکل (۳-۱-ب) قرار می‌گیرد.برای این مرحله توابع تنش $\varphi_0(z_1)$ و $\psi_0(z_2)$ بر اساس مقاله یوکاجونکر [۲۹] از شرایط مرزی به دست می‌آیند.

با استفاده از روش جمع آثار مرحله اول و دوم حل مطابق رابطه (۳-۲۰) داریم :

$$\begin{aligned}\varphi(z_1) &= \varphi_1(z_1)+\varphi_0(z_1)\\ \psi(z_2) &= \psi_1(z_2)+\psi_0(z_2)\end{aligned} \qquad (۳-۲۰)$$

با قرار دادن $\varphi_1'(z_1)=B^*+iC^*$ و $\psi_1'(z_2)=B'^*+iC'^*$ و انتگرال‌گیری مقدار $\varphi_1(z_1)$ و $\psi_1(z_2)$ به دست می‌آید. برای یکتایی جواب $C^*=0$ فرض می‌شود[۳۸]. درنتیجه رابطه (۳-۲۰) به شکل روابط (۳-۲۱) تبدیل می‌شوند :

$$\begin{aligned}\varphi_1(z_1) &= B^* z_1\\ \psi_1(z_2) &= (B'^*+iC'^*)z_2\end{aligned} \qquad (۳-۲۱)$$

۳-۳-۱ گام اول حل

بردار نیروی اعمالی در واحد سطح با استفاده از تئوری الاستیسیته برحسب تنش به‌صورت روابط (۳-۲۲) قابل‌محاسبه می‌باشد[۲۹]:

$$\begin{aligned}X_n &= \sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,y)\\ Y_n &= \sigma_y\cos(n,y)+\tau_{xy}\cos(n,x)\end{aligned} \qquad (۳-۲۲)$$

که در آن :

$$\begin{aligned}\cos(n,x) &= \frac{dy}{ds}\\ \cos(n,y) &= -\frac{dx}{ds}\end{aligned} \qquad (۳-۲۳)$$

همچنین برحسب تابع تنش می‌توان معادلات (۳-۲۲) را به شکل معادلات (۳-۲۴) نوشت :

$$X_n = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds}\frac{dU}{dy}$$
$$Y_n = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds}\frac{dU}{dx} \quad (۳-۲۴)$$

با انتگرال‌گیری از معادلات (۳-۲۴) خواهیم داشت :

$$\frac{dU}{dx} = -\int_0^s Y_n ds + c_1 \quad (۳-۲۵)$$

$$\frac{dU}{dy} = -\int_0^s X_n ds + c_2 \quad (۳-۲۶)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۰) در روابط (۳-۲۵) و (۳-۲۶) داریم :

$$\varphi_1(z_1) + \psi_2(z_2) + \overline{\varphi_1(z_1)} + \overline{\psi_2(z_2)} = -\int_0^s Y_n ds + c_1 = f_1 \quad (۳-۲۷)$$

$$s_1\varphi_1(z_1) + s_2\psi_2(z_2) + \overline{s_1\varphi_1(z_1)} + \overline{s_2\psi_2(z_2)} = -\int_0^s X_n ds + c_2 = f_2 \quad (۳-۲۸)$$

با توجه با رابطه (۳-۱۳)، شرایط مرزی روی گشودگی مجازی طبق رابطه (۳-۲۹)

به دست می‌آیند :

$$f_1 = 2\,\mathrm{Re}[\varphi_1(z_1) + \psi_1(z_2)]$$
$$f_2 = 2\,\mathrm{Re}[s_1\varphi_1(z_1) + s_2\psi_1(z_2)] \quad (۳-۲۹)$$

حال ورق با گشودگی و شرایط مرزی منفی که تحت بار خارجی نیست را در نظر می‌گیریم. شرایط مرزی روی گشودگی به‌صورت $f_1^0 = -f_1$ و $f_2^0 = -f_2$ است و داریم :

$$f_1^0 = -2\,\mathrm{Re}[B^* z_1 + (B'^* + iC'^*) z_2]$$
$$f_2^0 = -2\,\mathrm{Re}[s_1 B^* z_1 + s_2 (B'^* + iC'^*) z_2] \quad (۳-۳۰)$$

که در آن :

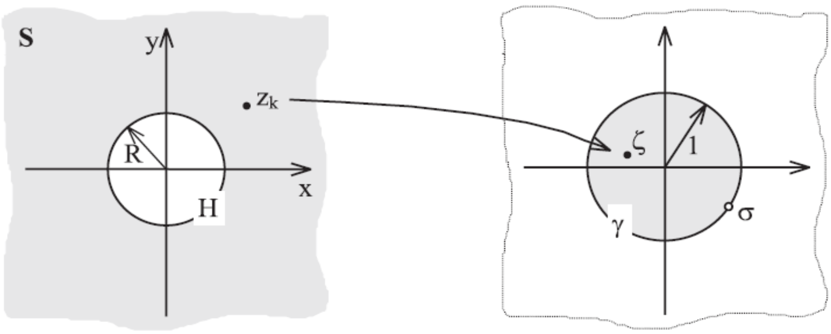
$$B^* = \frac{\sigma_x^\infty + (\alpha_2{}^2 + \beta_2{}^2)\sigma_y^\infty + 2\alpha_2\tau_{xy}^\infty}{2\left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2{}^2 - \beta_1^2)\right]} \quad (۳-۳۱)$$

$$B'^* = \frac{\left[(\alpha_1{}^2 - \beta_1^2) - 2\alpha_1\alpha_2\right]\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty - 2\alpha_2\tau_{xy}^\infty}{2\left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2{}^2 - \beta_1^2)\right]} \quad (۳-۳۲)$$

$$C'^{*}=\frac{\begin{pmatrix}(\alpha_1-\alpha_2)\sigma_x^{\infty}+\left[\alpha_2(\alpha_1^{\,2}-\beta_1^{2})-\alpha_1(\alpha_2^{\,2}-\beta_2^{\,2})\right]\sigma_y^{\infty}\\+\left[\left(\alpha_1^{\,2}-\beta_1^{\,2}\right)-(\alpha_2^{\,2}-\beta_2^{\,2})\right]\tau_{xy}^{\infty}\end{pmatrix}}{2\beta_2\left[(\alpha_2-\alpha_1)^2+(\beta_2^{\,2}-\beta_1^{\,2})\right]}\times \qquad (۳-۳۳)$$

۳-۳-۲ نگاشت هم‌نوا

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، توزیع تنش اطراف گشودگی دایره‌ای توسط ساوین و لخنیتسکی با استفاده از روش تحلیلی موردبحث، بررسی شد. برای بسط روش حل آن‌ها به سایر گشودگی‌ها ابتدا باید با استفاده از یک تابع نگاشت ساده $(z=x+sy)$ نقاط روی هر گشودگی با شکل خاص (کانتور) را به دایره به شعاع واحد مطابق شکل (۳-۲) تبدیل کرد.[۴۰].



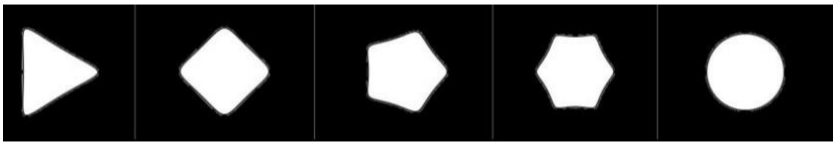
شکل۳-۲ : نگاشت ارائه‌شده صفحه‌ی بین‌هایت دارای گشودگی را به دایره واحد تبدیل می‌کند.

که x و y آن از روابط (۳-۳۴) به دست می‌آیند:

$$\begin{cases}x=\lambda\left(\cos\theta+w\cos\left(n\theta\right)\right)\\ y=-\lambda\left(c\sin\theta-w\sin\left(n\theta\right)\right)\end{cases} \qquad (۳-۳۴)$$

در رابطه بالا، پارامترهای مختلفی وجود دارند که با تغییر آن‌ها، می‌توان گشودگی‌های مختلف را مدل کرد. c و nنشان‌دهنده نوع هندسه گشودگی است. به‌طوری‌که n تعداد اضلاع شکل گشودگی و c میزان کشیدگی و یا نسبت اضلاع شکل گشودگی را مشخص می‌کند. λ بزرگی گشودگی را نشان می‌دهد و در گشودگی‌های لبه‌دار w معیار تیزی یا نرمی و انحنای گشودگی است $(w\geq 0)$. با تغییر این پارامتر (w) می‌توان انواع گشودگی‌های مختلف را با شعاع انحناهای متفاوت ایجاد کرد و در هر

مورد تنش در جهت‌های مختلف را موردبررسی قرار داد. تأثیر پارامترهای مختلف در ایجاد گشودگی در شکل (۳-۳) نشان داده‌شده است. به‌عنوان مثال در معادله مثلثاتی بالا برای گشودگی مثلث متساوی-الاضلاع باید $n=2$ و $c=1$ باشد. برای هر گشودگی وقتی w کاهش می‌یابد گشودگی ملایم‌تر می‌شود تا اینکه w به کمترین مقدار خود، یعنی $w=0$ می‌رسد. در این حالت گشودگی به دایره تبدیل می‌شود. مثلاً برای گشودگی شش‌ضلعی $(n=5, c=1)$ تغییرات w در شکل زیر ارائه‌شده است و روند میل کردن گشودگی شش‌ضلعی به دایره را نشان می‌دهد. در این شکل انواع گشودگی‌ها برای c=1 هست.



n=2 w=0.3 | n=3 w=0.15 | n=4 w=0.1 | n=5 w=0.08 | n=1 w=0

شکل ۳-۳: تأثیر پارامترهای n وw در ایجاد گشودگی

رابطه (۳-۳۴) تنها نقاط روی مرز گشودگی را مدل می‌کند، برای به دست آوردن نقاط خارج از گشودگی از متغیر ξ استفاده می‌کنیم که آن به‌وسیله پارامترهای ρ و θ به‌صورت زیر تعریف می‌شود[۴۰]:

$$\xi = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{۳-۳۵}$$

با توجه به رابطه اویلر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} e^{in\theta} &= \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \\ e^{-in\theta} &= \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) \end{aligned} \tag{۳-۳۶}$$

با جایگذاری $\rho=1$ در رابطه (۳-۳۶) می‌توان دایره‌ای به شعاع واحد را به‌صورت زیر مدل کرد:

$$\xi = e^{i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) \tag{۳-۳۷}$$

که با توجه به روابط (۳-۳۶) و (۳-۳۷) و از ترکیب آن‌ها خواهیم داشت:

$$\cos(n\theta)=\frac{1}{2}\left[\zeta^n+\frac{1}{\zeta^n}\right]$$
$$\sin(n\theta)=-\frac{i}{2}\left[\zeta^n-\frac{1}{\zeta^n}\right] \qquad (۳-۳۸)$$

برای نگاشتن هر نوع گشودگی، به دایره‌ای به شعاع واحد می‌توان از تابع انتقال $w(\zeta)$ که به‌صورت رابطه (۳-۳۹) تعریف می‌شود استفاده کرد:

$$w(\zeta)=x+iy \qquad (۳-۳۹)$$

با جایگذاری x و y از رابطه (۳-۳۴) در رابطه (۳-۳۹) به رابطه (۳-۴۰) خواهیم رسید :

$$w(\xi)=\frac{\lambda}{2}\left[r\left(\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)+w\left(\xi^n+\frac{1}{\xi^n}\right)\right)-c\left(\xi-\frac{1}{\xi}\right)+w\left(\xi^n-\frac{1}{\xi^n}\right)\right] \qquad (۳-۴۰)$$

که با ساده‌سازی به‌صورت رابطه (۳-۴۱) خواهد شد:

$$w(\xi)=\frac{\lambda}{2}\left[b\xi+\frac{a}{\xi}+wd\xi^n+\frac{we}{\xi^n}\right] \qquad (۳-۴۱)$$

که در آن :

$$a=r+c$$
$$b=r-c$$
$$d=1+r \qquad (۳-۴۲)$$
$$e=r-1$$

با توجه به تابع نگاشت فوق اگر $\rho=1$ باشد، نقاط روی مرز گشودگی مشخص می‌شوند اما برای نگاشتن نقاط خارج گشودگی کافی است مقدار ρ را کوچک‌تر از یک انتخاب کرد. با استفاده از تابع نگاشت فوق و انتخاب مناسب برای پارامترهای n، c و w می‌توان گشودگی‌های مختلف را مدل کرد. به‌جای z_1 و z_2 در معادلات (۳-۳۰) به ترتیب مقادیر $z_1=x+s_1y$ و $z_2=x+s_1y$ جایگذاری می‌شود که z_i به‌صورت رابطه (۳-۴۳) قابل‌محاسبه هست :

$$z_i=x+s_iy \qquad i=1,2 \qquad (۳-۴۳)$$

با استفاده از تعریف x و y در معادله (۳-۳۴) معادله (۳-۴۳) به‌صورت رابطه (۲-۸۰) خواهد شد:

$$z_i = \lambda\left[r(\cos\theta + w\cos n\theta) - s_i(c\sin\theta - w\sin n\theta)\right] \qquad (۴۴-۳)$$

z_1 برحسب ξ با استفاده از معادلات (۳-۳۷) و (۳-۴۵) به‌صورت رابطه (۳-۴۶) بیان می‌شود:

$$z_1 = \frac{\lambda}{2}\left[a_1\xi + \frac{b_1}{\xi} + wc_1\xi^n + \frac{wd_1}{\xi^n}\right] \qquad (۴۶-۳)$$

که برای حالت روی مرز دایره $(r=1)$ داریم :

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 + is_1c \qquad &, c_1 = 1 - is_1 \\ b_1 &= 1 - is_1c \qquad &, d_1 = 1 + is_1 \end{aligned} \qquad (۴۷-۳)$$

به همین ترتیب برای z_2 خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} z_2 &= x + s_2y \\ z_2 &= \frac{\lambda}{2}\left[a_2\xi + \frac{b_2}{\xi} + wc_2\xi^n + \frac{wd_2}{\xi^n}\right] \end{aligned} \qquad (۴۸-۳)$$

که در آن:

$$a_2 = 1 + is_2c \quad , b_2 = 1 - is_2c \quad , c_2 = 1 - is_2 \quad , d_2 = 1 + is_2 \qquad (۴۹-۳)$$

۳-۳-۳ گام دوم حل

در این مرحله مشابه با رابطه (۳-۲۹)، رابطه (۳-۵۰) را تعریف می‌کنیم :

$$\begin{aligned} f_1^0 &= 2\,\mathrm{Re}[\varphi_0(z_1) + \psi_0(z_2)] \\ f_2^0 &= 2\,\mathrm{Re}[s_1\varphi_0(z_1) + s_2\psi_0(z_2)] \end{aligned} \qquad (۵۰-۳)$$

رابطه شوارتز را به‌صورت رابطه (۳-۵۱) تعریف می‌کنیم :

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma U(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0 \qquad (۵۱-۳)$$

در این انتگرال $U(\theta)$ قسمت حقیقی تابع $F(\xi)$ روی دایره‌ای به شعاع واحد (γ) می‌باشد و α_0 یک ثابت حقیقی است. با استفاده از قضیه شوارتز می‌توان نوشت[۲۹]:

$$\Phi_0(\xi)+\psi_0(\xi)=\frac{1}{4\pi i}\int -f_1^0(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha_0$$
$$s_1\Phi_0(\xi)+s_2\psi_0(\xi)=\frac{1}{4\pi i}\int -f_2^0(\theta)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha_0 \qquad (۵۲-۳)$$

با حل دستگاه معادلات (۳-۵۲) نسبت به $\phi_0(\xi)$ و $\Psi_0(\xi)$ توابع تحلیلی زیر حاصل می‌شود:

$$\Phi_0(\xi)=\frac{i}{4\pi(s_1-s_2)}\int(s_2 f_1^0-f_2^0)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (۵۳-۳)$$

$$\Psi_0(\xi)=\frac{-i}{4\pi(s_1-s_2)}\int(s_1 f_1^0-f_2^0)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} \qquad (۵۴-۳)$$

با جایگذاری معادلات (۳-۴۶) و (۳-۴۸) داخل معادله مربوط به شرایط مرزی (۳-۳۰) خواهیم داشت:

$$f_1^0=-2\,\mathrm{Re}\left[K_1\xi+\frac{K_2}{\xi}+K_3\xi^n+\frac{K_4}{\xi^n}\right] \qquad (۵۵-۳)$$

به‌طور مشابه :

$$f_2^0=-2\,\mathrm{Re}\left[K_5\xi+\frac{K_6}{\xi}+K_7\xi^n+\frac{K_8}{\xi^n}\right] \qquad (۵۶-۳)$$

که در آن :

$$K_1=\frac{\lambda}{2}\left[B^*a_1+(B'^*+iC'^*)a_2\right] \quad ,K_3=\frac{\lambda}{2}\left[B^*c_1w+(B'^*+iC'^*)wc_2\right]$$
$$K_2=\frac{\lambda}{2}\left[B^*b_1+(B'^*+iC'^*)b_2\right] \quad ,K_4=\frac{\lambda}{2}\left[B^*wd_1+(B'^*+iC'^*)wd_2\right] \qquad (۵۷-۳)$$

$$K_5=\frac{\lambda}{2}\left[s_1B^*a_1+(B'^*+iC'^*)a_2s_2\right] \quad ,K_7=\frac{\lambda}{2}\left[s_1B^*c_1w+(B'^*+iC'^*)wc_2s_2\right]$$
$$K_6=\frac{\lambda}{2}\left[s_1B^*b_1+(B'^*+iC'^*)b_2s_2\right] \quad ,K_8=\frac{\lambda}{2}\left[s_1B^*wd_1+(B'^*+iC'^*)wd_2s_2\right] \qquad (۵۸-۳)$$

برای حل معادلات (۳-۵۳) و (۳-۵۴) از رابطه شوارتز استفاده شد. رابطه دیگر شوارتز که از آن استفاده می‌شود انتگرال زیر است: [۴۰]:

$$\frac{i}{4\pi\left(s_1-s_2\right)}\int_{\gamma} 2a.\mathrm{Re}\left(K_1\sigma^N+\frac{K_2}{\sigma^N}\right)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}=\frac{-a}{s_1-s_2}\left(K_1+\overline{K}_2\right)\xi^N \tag{۳-۵۹}$$

با جایگذاری معادلات (۳-۵۵) و (۳-۵۶) در روابط (۳-۵۳) و (۳-۵۴) و استفاده از رابطه (۳-۵۹) داریم :

$$\Phi_0\left(\xi\right)=\frac{\xi}{s_1-s_2}\left(s_2\left(K_1+\overline{K}_2\right)-\left(K_5+\overline{K}_6\right)\right)+\frac{\xi^n}{s_1-s_2}\left(s_2\left(K_3+\overline{K}_4\right)-\left(K_7+\overline{K}_8\right)\right) \tag{۳-۶۰}$$

$$\Psi_0\left(\xi\right)=\frac{\xi}{s_2-s_1}\left(s_1\left(K_1+\overline{K}_2\right)-\left(K_5+\overline{K}_6\right)\right)+\frac{\xi^n}{s_2-s_1}\left(s_1\left(K_3+\overline{K}_4\right)-\left(K_7+\overline{K}_8\right)\right) \tag{۳-۶۱}$$

در این رابطه $\overline{K}$ مزدوج K است. حال آخرین مرحله محاسبه $\phi_0'(z_1)$ و $\psi_0'(z_2)$ است. برای به دست آوردن مشتق‌ها از تعریف مشتق مطابق با رابطه (۳-۶۲) و (۳-۶۳) استفاده می‌شود:

$$\varphi_0'(z_1)=\frac{d\varphi_0\left(z_1\right)}{dz_1}=\frac{d\varphi_0(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dz_1}=\frac{d\varphi_0(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{1}{dz_1/d\xi} \tag{۳-۶۲}$$

و به همین ترتیب برای محاسبه $\psi_0'(z_2)$ داریم:

$$\psi_0'(z_2)=\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\xi}=\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{1}{dz_2/d\xi} \tag{۳-۶۳}$$

با توجه به معادلات (۳-۴۶) و (۳-۴۸)، روابط (۳-۶۴) و (۳-۶۵) به دست می‌آیند :

$$\frac{dz_1}{d\xi}=\frac{\lambda}{2}\left[a_1-\frac{b_1}{\xi^2}+wc_1N\xi^{n-1}-wd_1\,n/\xi^{n+1}\right] \tag{۳-۶۴}$$

$$\frac{dz_2}{d\xi}=\frac{\lambda}{2}\left[a_2-\frac{b_2}{\xi^2}+wc_2n\xi^{n-1}-wd_2\,n/\xi^{n+1}\right] \tag{۳-۶۵}$$

با مشتق‌گیری از روابط (۳-۶۰) و (۳-۶۱)، روابط (۳-۶۶) و (۳-۶۷) به دست می‌آیند :

$$\varphi_0'\left(z_1\right)=\frac{\left[\frac{1}{s_1-s_2}\left(s_2\left(K_1+\overline{K}_2\right)-(K_5+\overline{K_6})\right)+\frac{n\xi^{n-1}}{s_1-s_2}\left(s_2\left(K_3+K_4\right)-\left(K_7+\overline{K}_8\right)\right)\right]}{\left(dz_1/d\xi\right)} \qquad (۳-۶۶)$$

$$\psi_0'\left(z_2\right)=\frac{\left[\frac{1}{s_2-s_1}\left(s_1\left(K_1+\overline{K}_2\right)-(K_5+\overline{K_6})\right)+\frac{n\xi^{n-1}}{s_2-s_1}\left(s_1\left(K_3+K_4\right)-\left(K_7+\overline{K}_8\right)\right)\right]}{\left(dz_2/d\xi\right)} \qquad (۳-۶۷)$$

درنهایت با استفاده از اصل جمع آثار داریم :

$$\varphi'(z_1)=\varphi_1'(z_1)+\varphi_0'(z_1)=B^*+\varphi_0'(z_1) \qquad (۳-۶۸)$$

$$\psi'(z_2)=\psi_1'(z_2)+\psi_0'(z_2)=(B'^*+iC'^*)+\psi_0'(z_2) \qquad (۳-۶۹)$$

و با جایگذاری در روابط (۳-۱۶)، مقادیر تنش‌ها به دست می‌آیند :

$$\sigma_x=\sigma_x^\infty+2\,\mathrm{Re}[S_1^2\varphi'(z_1)+S_2{}^2\psi'(z_2)] \qquad (۳-۷۰)$$

$$\sigma_y=\sigma_y^\infty+2\,\mathrm{Re}[\varphi'(z_1)+\psi'(z_2)] \qquad (۳-۷۱)$$

$$\tau_{xy}=\tau_{xy}^\infty-2\,\mathrm{Re}[S_1\phi'(z_1)+S_2\psi'(z_2)] \qquad (۳-۷۲)$$

در آخر تنش‌ها را به مختصات قطبی انتقال می‌دهیم. برای این کار از تعریف موجود در الاستیسیته استفاده می‌کنیم :

$$\sigma_x=\frac{\partial^2U}{\partial y^2}\rightarrow\sigma_\rho=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2U}{\partial\theta^2} \qquad (۳-۷۳)$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}\rightarrow\frac{\partial^2U}{\partial r^2} \qquad (۳-۷۴)$$

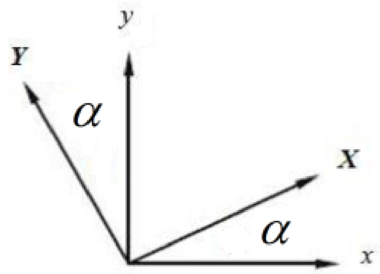
$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2U}{\partial x\partial y}\rightarrow\tau_{\rho\theta}=-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) \qquad (۳-۷۵)$$

درنتیجه با اعمال این تغییرات در روابط (۳-۱۲) تا (۳-۱۵) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned}
&\sigma_\rho=2\,\mathrm{Re}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)^2\varphi'(z_1)+(\sin\theta-S_2\cos\theta)^2\psi'(z_2)]\\
&\sigma_\theta=2\,\mathrm{Re}[(\cos\theta+S_1\sin\theta)^2\varphi'(z_1)+(\cos\theta+S_2\sin\theta)^2\psi'(z_2)]\\
&\tau_{\rho\theta}=2\,\mathrm{Re}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)(\cos\theta+S_1\sin\theta)\phi'(z_1)\\
&+(\sin\theta-S_2\cos\theta)(\cos\theta+S_2\sin\theta)\psi'(z_2)]\\
&\sigma_\rho+\sigma_\theta=\sigma_x+\sigma_y
\end{aligned} \qquad (۳-۷۶)$$

۳-۴ چرخش گشودگی

برای بررسی حالت چرخش گشودگی نیاز است که در روابط (۳-۴۴) تا (۳-۴۹) تغییراتی به شکل زیر اعمال کنیم[۴۰]:



شکل ۳-۴ : چرخش محورها

با توجه به تعریف z_i در مختصات جدید $X-Y$ داریم:

$$z_i = X + s_i Y \qquad (۳-۷۷)$$

که مختصات $X-Y$ جدید با توجه به مختصات $x-y$ مرجع و اگر زاویه چرخش گشودگی را α مطابق شکل (۳-۴) در نظر بگیریم، به‌صورت رابطه (۳-۷۸) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} X = x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases} \qquad (۳-۷۸)$$

که در آن:

$$\begin{cases} x = \lambda\left(\cos\theta + w\cos(n\theta)\right) \\ y = -\lambda\left(c\sin\theta - w\sin(n\theta)\right) \end{cases} \qquad (۳-۷۹)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۷۹) در رابطه (۳-۷۸) و سپس در رابطه (۳-۷۷) خواهیم داشت:

$$z_i = \left(x\cos\alpha - y\sin\alpha\right) + s_i\left(x\sin\alpha + y\cos\alpha\right) \qquad (۳-۸۰)$$

$$\Rightarrow z_i = \lambda\begin{bmatrix} \left(\cos\theta + w\cos(n\theta)\right)\cos\alpha - \left(c\sin\theta - w\sin(n\theta)\right)\sin\alpha \\ +s_i\left(-\left(\cos\theta + w\cos(n\theta)\right)\sin\alpha - \left(c\sin\theta - w\sin(n\theta)\right)\cos\alpha\right) \end{bmatrix} \qquad (۳-۸۱)$$

$$\Rightarrow z_i = \lambda \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\alpha + w\cos(n\theta)\cos\alpha - c\sin\theta\sin\alpha + \\ w\sin(n\theta)\sin\alpha - s_i\cos\theta\sin\alpha - s_i w\cos(n\theta)\sin\alpha - \\ s_i c\sin\theta\cos\alpha + s_i w\sin(n\theta)\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{۸۲-۳}$$

$$\Rightarrow z_i = \frac{\lambda}{2} \begin{bmatrix} \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\cos\alpha + w\left(\xi^n + \frac{1}{\xi^n}\right)\cos\alpha - ic\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\sin\alpha + \\ iw\left(\xi^n - \frac{1}{\xi^n}\right)\sin\alpha + s_i\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)\sin\alpha + s_i w\left(\xi^n + \frac{1}{\xi^n}\right)\sin\alpha + \\ is_i c\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right)\cos\alpha - is_i w\left(\xi^n - \frac{1}{\xi^n}\right)\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{۸۳-۳}$$

پس بنابراین خواهیم داشت:

$$z_i = \frac{\lambda}{2}\left[a\xi + \frac{b}{\xi} + cw\xi^n + \frac{dw}{\xi^n}\right] \tag{۸۴-۳}$$

که در آن:

$$\begin{cases} a = \cos\alpha - ic\sin\alpha + s_i\sin\alpha + is_i c\cos\alpha \\ b = \cos\alpha + ic\sin\alpha + s_i\sin\alpha - is_i c\cos\alpha \\ c = \cos\alpha + i\sin\alpha + s_i\sin\alpha - is_i\cos\alpha \\ d = \cos\alpha - i\sin\alpha + s_i\sin\alpha + is_i\cos\alpha \end{cases} \tag{۸۵-۳}$$

سپس روند حل از معادله (۳-۵۵) به بعد، همانند قبل هست.

۳-۵ استحکام شکست

استحکام شکست در تک لایه ناهمسانگرد دارای اهمیت بالایی در توضیح مشخصات سفتی آن هست. یک طراحی موفق سازه نیازمند استفاده کارآمد و امن از مواد می‌باشد. نظریه‌های استحکام که صحتشان با انجام آزمایش‌ها تجربی اثبات‌شده‌اند، برای بررسی وجود تنش‌ها در محدوده‌ی امن استحکام باید در مقام مقایسه به کار بروند.

برای یک چندلایه، استحکام وابسته به استحکام تک‌تک لایه‌ها است. این موضوع رسیدن به روشی اقتصادی و ساده برای تشخیص استحکام چندلایه را محقق می‌سازد.

نظریه‌های مختلفی تا امروز برای مطالعه استحکام شکست لایه‌ها ارائه‌شده‌اند که عموماً بر پایه

استحکام محوری و برشی در تک لایه‌های تک جهتی ساخته‌شده‌اند. یک نظریه استحکام ساده برای مواد همسانگرد بر پایه‌ی پیدا کردن تنش‌های نرمال و بیشترین تنش‌های برشی اصلی شکل می‌گیرد؛ اما برای یک تک لایه ناهمسانگرد، این‌طور نیست. به این صورت که در تک لایه‌های ناهمسانگرد نظریه‌ها بر پایه تنش‌ها در ماده یا محورهای محلی ساخته می‌شوند، چون تک لایه‌ها (لمینا) ناهمسانگرد هستند و برعکس مواد همسانگرد، خواص در زاویه مختلف، متفاوت می‌باشند. در مورد تک لایه‌های تک جهتی، دو محور جنس ماده وجود دارد : یکی موازی با الیاف و دیگری عمود بر راستای الیاف. درنتیجه چهار پارامتر استحکام نرمال وجود دارد، در هر یک از دو محور جنس ماده، یکی در جهت کشش و دیگری در جهت فشاری. پارامتر پنجم استحکام مربوط به استحکام برشی در تک لایه ناهمسانگرد تک جهتی می‌شود. مقدار تنش‌های برشی چه منفی باشد یا مثبت، تأثیر درنتیجه استحکام برشی ندارد؛ اما در تک لایه زاویه‌ای، علامت تنش‌های برشی تأثیرگذار خواهند بود[۴۲]:

$$\begin{aligned} X &= (\sigma_1^T)_{ult} \rightarrow if\,(\sigma_1 > 0) \\ X &= (\sigma_1^C)_{ult} \rightarrow if\,(\sigma_1 < 0) \\ Y &= (\sigma_2^T)_{ult} \rightarrow if\,(\sigma_2 > 0) \\ Y &= (\sigma_2^C)_{ult} \rightarrow if\,(\sigma_2 < 0) \\ S &= (\tau_{12})_{ult} \end{aligned} \qquad (۸۶-۳)$$

که X بیان‌کننده استحکام کششی در جهت طولی، Y بیان‌کننده استحکام در جهت عرضی و S استحکام برشی هست.

معیارهای شکست موجود، توانایی ارائه مکانیزم شکست را ندارند و فقط با توجه به رفتار ماده وقوع شکست را نشان می‌دهند. در این پایان‌نامه معیارهای شکست ارائه‌شده در حقیقت بیشترین تنش مجاز اعمال‌شده به چندلایه دارای گشودگی را به ما نشان می‌دهند. کمترین مقدار استحکام شکست محاسبه‌شده در اطراف گشودگی همان استحکام شکست صفحه‌ی دارای گشودگی خواهد بود. برای محاسبه‌ی استحکام شکست در تک لایه از معیارهای مختلفی استفاده می‌شود.

برای لایه‌های مختلف چندلایه استحکام شکست را با توجه به معیارهای شکست محاسبه می‌کنیم

و کمترین مقدار به‌دست‌آمده را با توجه به اصل شکست اولین لایه (FPF)، به‌عنوان استحکام شکست چندلایه در نظر می‌گیریم.

در اینجا از ۳ معیار شکست مختلف برای محاسبه استحکام شکست استفاده و نتایج ثبت گردیده است.

۳-۵-۱ نظریه H-vM

با توجه به نظریه H-vM استحکام نهایی مطابق با رابطه (۳-۸۷) محاسبه خواهد شد [۴۲]:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_\theta}{\sigma}\right)\begin{bmatrix} \frac{\sin^4(\theta-\varphi)}{X^2}+\frac{\cos^4(\theta-\varphi)}{Y^2}+ \\ \frac{\sin^2(\theta-\varphi)\cos^2(\theta-\varphi)}{S^2}-k^*\frac{\sin^2(\theta-\varphi)\cos^2(\theta-\varphi)}{XY}\end{bmatrix}} \tag{۸۷-۳}$$

$$k^* = \frac{E_1(1+\nu_{21})+E_2(1+\nu_{12})}{2\sqrt{E_1E_2(1+\nu_{21})(1+\nu_{12})}}$$

که φ زاویه‌ی الیاف با محور x می‌باشد.

۳-۵-۲ نظریه Tsai-Hill

با توجه به معیار ارائه‌شده توسط Tsai-Hill (T-H)، استحکام شکست به‌صورت رابطه (۳-۸۸) به دست می‌آید [۴۳] :

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{(\frac{\sigma_1}{\sigma})^2\frac{1}{X^2}+(\frac{\sigma_2}{\sigma})^2\frac{1}{Y^2}+(\frac{\tau_6}{\sigma})^2\frac{1}{S^2}-(\frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma^2})\frac{1}{X^2}} \tag{۸۸-۳}$$

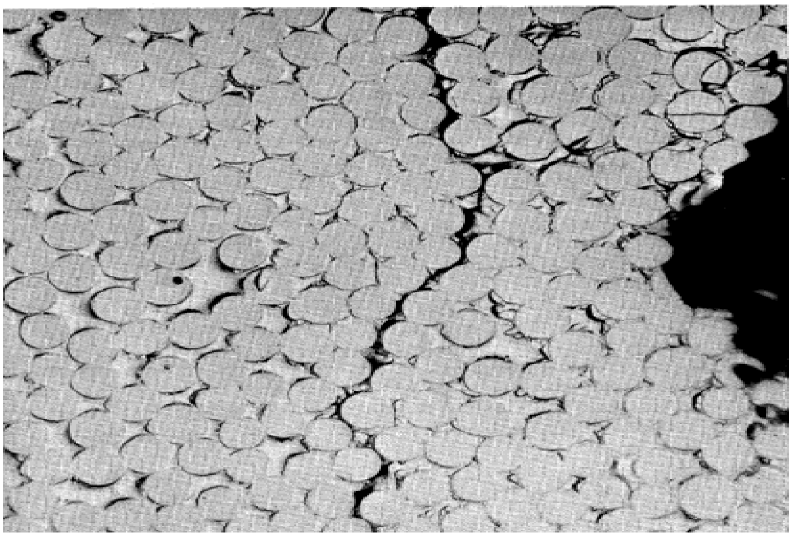
که تنش‌های σ_1، σ_2 و τ_6 تنش‌های انتقال‌یافته σ_x، σ_y و τ_{xy} در راستای الیاف هستند.

۳-۵-۳ نظریه Hashin

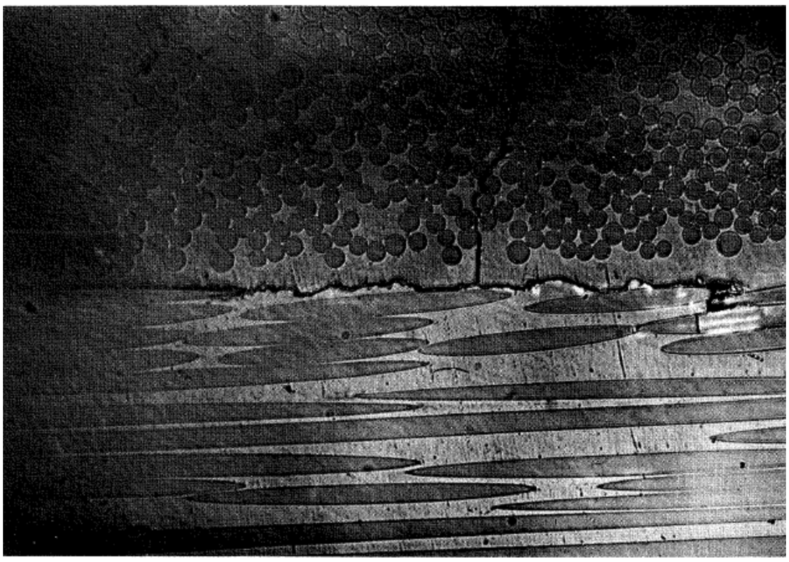
با در نظر گرفتن معیار Hashin (H) برای مود استحکام کششی ماتریس، استحکام شکست برای لایه‌های یک‌جهتی به شکل رابطه (۳-۹۹) محاسبه می‌شود [۲۹] :

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{(\frac{\sigma_2}{\sigma})^2\frac{1}{X^2}+(\frac{\tau_6}{\sigma})^2\frac{1}{S^2}} \tag{۸۹-۳}$$

در شکل های ۳ و ۴ دو نمونه از شروع ترک در تک لایه ها نشان داده شده است :



شکل ۳ : میکرو ترک در شیشه /اپوکسی[۴۳]



شکل۴ : شروع میکروترک در تک لایه یک جهته[۴۳]

فصل چهارم

استخراج معادلات توزیع ممان ناشی از بار خارج صفحه‌ای

۴-۱ روابط متغیر مختلط

بر اساس فرضیات کیرشهف جابجایی‌های U و V در جهات y,x و کرنش‌های متناظر ε_x، ε_y و γ_{xy} براساس خیز $w(x,y)$ به دست می‌آیند [۴۴] :

$$\begin{aligned} U &= -zw_{,x} \\ V &= -zw_{,y} \\ \varepsilon_x &= -zw_{,xx} \\ \varepsilon_y &= -zw_{,yy} \\ \gamma_{xy} &= -2zw_{,xy} \end{aligned} \tag{۱-۴}$$

علاوه بر این فرض $\sigma_z = 0$ در $z = \pm\frac{t}{2}$ (t: ضخامت ورق) بیان می‌کند که در هر برش، مقطع عمود بر محور z، $\sigma_z=0$ است؛ که این امر به دلیل کوچک بودن ضخامت ورق است و نیروی برشی در این برش مقطع اثر نمی‌کند.

درنهایت با صرفه نظر کردن از تمامی تنش‌ها در جهت z رابطه (۴-۲) و با جایگذاری رابطه (۴-۱) در رابطه (۴-۲)، رابطه (۴-۳) بر اساس رابطه (۲-۱۳) به دست می‌آیند [۴۴]:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{۲-۴}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -z(\bar{Q}_{11}w_{,xx} + \bar{Q}_{12}w_{,yy} + 2\bar{Q}_{16}w_{,xy}) \\ \sigma_y &= -z(\bar{Q}_{12}w_{,xx} + \bar{Q}_{22}w_{,yy} + 2\bar{Q}_{26}w_{,xy}) \\ \tau_{xy} &= -z(\bar{Q}_{16}w_{,xx} + \bar{Q}_{26}w_{,yy} + 2\bar{Q}_{66}w_{,xy}) \end{aligned} \tag{۳-۴}$$

از معادلات تعادل مطابق با رابطه (۴-۴) تنش‌های τ_{xz} و τ_{yz} به دست می‌آیند :

$$\begin{aligned} \sigma_{x,x} + \tau_{xy,x} + \tau_{xz,z} &= 0 \\ \tau_{yx,x} + \sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} &= 0 \end{aligned} \tag{۴-۴}$$

چون $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ در $z = \pm\frac{t}{2}$ و با قرار دادن تنش‌ها از رابطه (۴-۳) در رابطه (۴-۴) و با انتگرال‌گیری

مطابق با روابط (۴-۵) و (۴-۶) داریم :

$$\tau_{xz} = -\int(\sigma_{x,x}+\tau_{xy,x})dz = (\frac{z^2}{2}+c)\left[\bar{Q}_{11}w_{,xxx}+3\bar{Q}_{16}w_{,xxy}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})w_{,xyy}+\bar{Q}_{26}w_{,yyy}\right]$$
$$BC's: at(\frac{t}{2}) \to \tau_{xz}=0 \Rightarrow c=-\frac{t^2}{8} \quad (۴-۵)$$
$$\Rightarrow \tau_{xz} = (\frac{z^2}{2}-\frac{t^2}{8})\left[\bar{Q}_{11}w_{,xxx}+3\bar{Q}_{16}w_{,xxy}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})w_{,xyy}+\bar{Q}_{26}w_{,yyy}\right]$$

$$\tau_{yz} = -\int(\sigma_{y,y}+\tau_{yx,x})dz = (\frac{z^2}{2}+c)\left[\bar{Q}_{16}w_{,xxx}+3\bar{Q}_{26}w_{,xyy}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})w_{,xxy}+\bar{Q}_{22}w_{,yyy}\right]$$
$$BC's: at(\frac{t}{2}) \to \tau_{yz}=0 \Rightarrow c=-\frac{t^2}{8} \quad (۴-۶)$$
$$\Rightarrow \tau_{yz} = (\frac{z^2}{2}-\frac{t^2}{8})\left[\bar{Q}_{16}w_{,xxx}+3\bar{Q}_{26}w_{,xyy}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})w_{,xxy}+\bar{Q}_{22}w_{,yyy}\right]$$

گشتاورها و نیروهای برشی عرضی، مطابق روابط (۴-۷) تا (۴-۱۱) تعریف می‌شود[۴۲]:

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2}\sigma_x.zdz \quad (۴-۷)$$
$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2}\sigma_y.zdz \quad (۴-۸)$$
$$M_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xy}.zdz \quad (۴-۹)$$
$$Q_x = \int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xz}dz \quad (۴-۱۰)$$
$$Q_y = \int_{-t/2}^{t/2}\tau_{yz}dz \quad (۴-۱۱)$$

با جایگذاری روابط (۴-۳) در روابط (۴-۷) تا (۴-۱۱) خواهیم داشت :

$$M_x = -\frac{t^3}{12}\left[\bar{Q}_{11}w_{,xx}+\bar{Q}_{12}w_{,yy}+2\bar{Q}_{16}w_{,xy}\right] \quad (۴-۱۲)$$
$$M_y = -\frac{t^3}{12}\left[\bar{Q}_{12}w_{,xx}+\bar{Q}_{22}w_{,yy}+2\bar{Q}_{26}w_{,xy}\right] \quad (۴-۱۳)$$
$$M_{xy} = -\frac{t^3}{12}\left[\bar{Q}_{16}w_{,xx}+\bar{Q}_{26}w_{,yy}+2\bar{Q}_{66}w_{,xy}\right] \quad (۴-۱۴)$$
$$Q_x = -\frac{t^3}{12}\left[\bar{Q}_{11}w_{,xxx}+3\bar{Q}_{16}w_{,xxy}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})w_{,xyy}+\bar{Q}_{26}w_{,yyy}\right] \quad (۴-۱۵)$$
$$Q_y = -\frac{t^3}{12}\left[\bar{Q}_{16}w_{,xxx}+3\bar{Q}_{26}w_{,xyy}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})w_{,xxy}+\bar{Q}_{22}w_{,yyy}\right] \quad (۴-۱۶)$$

معادلات تعادل را می‌توان مطابق رابطه (۴-۱۷) تعریف می‌کرد [۴۴] :

$$\begin{Bmatrix} M_{x,x}+M_{xy,y}-Q_x \\ M_{xy,x}+M_{y,y}-Q_y \\ Q_{x,x}+Q_{y,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۴-۱۷}$$

از سومین معادله رابطه (۴-۱۷) داریم:

$$\bar{Q}_{11} w_{,xxxx} + 4\bar{Q}_{16} w_{,xxxy} + 2(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66}) w_{,xxyy} + 4\bar{Q}_{26} w_{,xyyy} + \bar{Q}_{22} w_{,yyyy} = 0 \tag{۴-۱۸}$$

معادله فوق به‌صورت شکل عمومی معادله بای هارمونیک است. برای حل مانند قبل از ۴ اپراتور خطی مرتبه اول مطابق رابطه (۴-۱۹) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & D_1 D_2 D_3 D_4 w = 0 \\ & D_i (i=1,2,3,4) = \frac{\partial}{\partial y} - s_i \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned} \tag{۴-۱۹}$$

درنتیجه معادله (۴-۱۸) به فرم معادله (۴-۲۰) درمی‌آید :

$$\bar{Q}_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 4\bar{Q}_{16}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} s + 2(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} s^2 + 4\bar{Q}_{26}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} s^3 + \bar{Q}_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} s^4 = 0 \tag{۴-۲۰}$$

و معادله مشخصه به‌صورت رابطه (۴-۲۱) به دست می‌آید.

$$\bar{Q}_{22} s^4 + 4\bar{Q}_{26} s^3 + 2(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66}) s^2 + 4\bar{Q}_{16} s + \bar{Q}_{11} = 0 \tag{۴-۲۱}$$

بر اساس روابط انرژی که لخننیتیسکی به دست آورد، او نشان داد که معادله فوق نمی‌تواند ریشه حقیقی داشته باشد. [۳۷]

برای حل معادلات بای هارمونیک که ریشه‌های نابرابر دارند، معادله دارای ۴ ریشه مختلط هست و فرم کلی جواب به‌صورت زیر خواهد بود :

$$w(x,y) = F_1(x+s_1 y) + F_2(x+s_2 y) + F_3(x+s_3 y) + F_4(x+s_4 y) \tag{۴-۲۲}$$

که در آن :

$$\begin{aligned} & s_1 = \alpha_1 + i\beta_1 ; s_2 = \alpha_2 + i\beta_2 \\ & s_3 = \alpha_1 - i\beta_1 ; s_4 = \alpha_2 - i\beta_2 \\ & \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 = real \\ & \beta_1 \neq \beta_2 \end{aligned} \tag{۴-۲۳}$$

درنتیجه تابع خیز (۴-۲۲) به شکل رابطه (۴-۲۴) درمی‌آید :

$$w(x,y)=F_1(z_1)+F_2(z_2)+\overline{F_1(z_1)}+\overline{F_2(z_2)} \qquad (۴-۲۴)$$

که z_i توسط انتقال ساده زیر به دست می‌آید:

$$z_i=x+s_iy \qquad i=1,2 \qquad (۴-۲۵)$$

در رابطه (۴-۲۴)، F_1 و F_2 دو تابع تحلیلی هستند و $\overline{F_1}$و $\overline{F_2}$ به ترتیب مزدوج آن‌ها می‌باشند.

برای ساده‌سازی و پایین آوردن مرتبه مشتق، از فرض زیر استفاده می‌کنیم :

$$\frac{dF_1}{dz_1}=\varphi(z_1) \quad , \quad \frac{dF_2}{dz_2}=\psi(z_2)$$
$$\frac{d\overline{F}_1}{d\overline{z}_1}=\overline{\varphi(z_1)} \quad , \quad \frac{d\overline{F}_2}{d\overline{z}_2}=\overline{\psi(z_2)} \qquad (۴-۲۶)$$

با قرار دادن مشتقات $w(x,y)$ شامل $\varphi(z_1)$و $\psi(z_2)$ در معادلات (۴-۱۲) تا (۴-۱۶) و جایگذاری نتایج Q_xو Q_yدر معادلات سوم (۴-۱۷) خواهیم داشت :

$$M_x=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_1\varphi'(z_1)+q_1\psi'(z_2)\right] \qquad (۴-۲۷)$$
$$M_y=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_2\varphi'(z_1)+q_2\psi'(z_2)\right] \qquad (۴-۲۸)$$
$$M_{xy}=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_3\varphi'(z_1)+q_3\psi'(z_2)\right] \qquad (۴-۲۹)$$
$$Q_x=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[s_1p_4\varphi''(z_1)+s_2q_4\psi''(z_2)\right] \qquad (۴-۳۰)$$
$$Q_y=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_4\varphi''(z_1)+q_4\psi''(z_2)\right] \qquad (۴-۳۱)$$

که در آن :

$$p_1=\bar{Q}_{11}+\bar{Q}_{12}s_1^2+2\bar{Q}_{16}s_1 \quad ,q_1=\bar{Q}_{11}+\bar{Q}_{12}s_2^2+2\bar{Q}_{16}s_2$$
$$p_2=\bar{Q}_{12}+\bar{Q}_{22}s_1^2+2\bar{Q}_{26}s_1 \quad ,q_1=\bar{Q}_{12}+\bar{Q}_{22}s_2^2+2\bar{Q}_{26}s_2 \qquad (۴-۳۲)$$
$$p_3=\bar{Q}_{16}+\bar{Q}_{26}s_1^2+2\bar{Q}_{66}s_1 \quad ,q_1=\bar{Q}_{16}+\bar{Q}_{26}s_2^2+2\bar{Q}_{66}s_2$$
$$p_4=\frac{\bar{Q}_{11}}{s_1}+3\bar{Q}_{16}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})s_1+\bar{Q}_{26}s_1^2 \;,q_4=\frac{\bar{Q}_{11}}{s_2}+3\bar{Q}_{16}+(\bar{Q}_{12}+2\bar{Q}_{66})s_2+\bar{Q}_{26}s_2^2$$

با به دست آمدن معادلات (۴-۲۷) تا (۴-۳۱) فرمول‌های محاسبه‌ی خمش صفحات نازک ناهمسانگرد کامل شد.

۴-۲ حل مساله برای شرایط بارگذاری خارج صفحه‌ای

در این بخش نوع بارگذاری مساله مطرح شده است.

۴-۲-۱ معرفی بارگذاری اعمال‌شده به صفحه

صفحه‌ی نامتناهی دارای گشودگی بدون تنش تحت گشتاور از راه دور در محورهای دلخواه $x'oy'$ که با زاویه β نسبت به xoy چرخیده است، مطابق شکل (۴-۱-الف) قرار گرفته. گشتاورها در محورهای $x'oy'$ به‌صورت روابط (۴-۳۳) تعریف می‌شوند :

$$
\begin{aligned}
M_{x'}^{\infty} &= \lambda M' \\
M_{y'}^{\infty} &= M'
\end{aligned}
\qquad (۳۳-۴)
$$

که در آن λ، ضریب بار دومحوره است. با استفاده از قوانین چرخش محورها روابط (۴-۳۴) به دست می‌آیند :

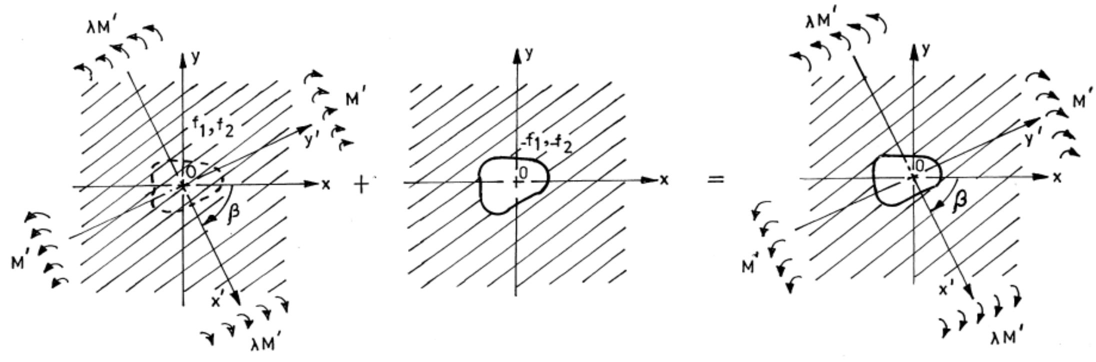
$$
\begin{aligned}
M_{x'}^{\infty} + M_{y'}^{\infty} &= M_x^{\infty} + M_y^{\infty} \\
M_{y'}^{\infty} - M_{x'}^{\infty} + 2iM_{x'y'}^{\infty} &= (M_y^{\infty} - M_x^{\infty} + 2iM_{xy}^{\infty})e^{2i\beta}
\end{aligned}
\qquad (۳۴-۴)
$$

درنتیجه داریم :

$$M_x^{\infty} = \frac{M'}{2}\left[(\lambda+1)+(\lambda-1)\cos 2\beta\right] \qquad (۳۵-۴)$$

$$M_y^{\infty} = \frac{M'}{2}\left[(\lambda+1)-(\lambda-1)\cos 2\beta\right] \qquad (۳۶-۴)$$

$$M_{xy}^{\infty} = \frac{M'}{2}\left[(\lambda-1)\sin 2\beta\right] \qquad (۳۷-۴)$$



شکل ۴-۱ : (الف) :گشتاور خارجی در لبه‌های بیرونی، شرایط مرزی f_1 و f_2 روی گشودگی مجازی. (ب) : بار معکوس روی مرز گشودگی : f_1 - و f_2 -.(ج) : شرایط تمرکز تنش برای مرز داخلی بدون بار و مرز خارجی تحت گشتاور خارجی[۲۹]

۴-۳ روند کلی حل

۴-۳-۱ فرضیات مساله

صفحه شامل گشودگی تحت گشتاورهای M_x^∞، M_y^∞ و M_{xy}^∞ در لبه‌های خارجی قرار دارد. باربرشی اعمال نمی‌شود ($Q_x^\infty = Q_y^\infty = 0$) و لبه‌های گشودگی تحت هیچ باری نیست.

۴-۳-۲ حل مساله

گام اول : برای یک صفحه‌ی بدون گشودگی تحت گشتاورهای M_x^∞، M_y^∞ و M_{xy}^∞ تابع تنش‌های $\varphi_1(z_1)$ و $\psi_1(z_2)$ مطابق شکل (۴-۱-الف) به دست می‌آیند. از این تابع تنش‌ها شرایط تنش مرزی f_1, f_2 برای گشودگی مجازی به دست می‌آیند.

گام دوم : یک صفحه با گشودگی تحت شرایط تنش مرزی معکوس (منفی) f_1, f_2 ، ($-f_1, -f_2$) در مرز گشودگی در غیاب بار خارجی مطابق شکل (۴-۱-ب) در نظر گرفته می‌شود. تابع تنش‌های گام دوم $\varphi_0(z_1)$ و $\psi_0(z_2)$از این شرایط مرزی به دست می‌آیند.

با استفاده از اصل جمع آثار مطابق شکل (۴-۱-ج) داریم :

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= \varphi_1(z_1) + \varphi_0(z_1) \\ \psi(z_2) &= \psi_1(z_2) + \psi_0(z_2) \end{aligned} \tag{۴-۳۸}$$

۴-۳-۳ به دست آوردن تابع تنش‌ها

تابع تنش‌های گام اول با در نظر گرفتن $\varphi_1(z_1)$و $\psi_1(z_2)$ و M_x^∞، M_y^∞ و M_{xy}^∞به‌جای $\varphi(z_1)$ و $\psi(z_2)$ و M_x، M_y و M_{xy}در معادله (۴-۲۷) تا (۴-۳۱) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} M_x^\infty &= -\frac{t^3}{6}\operatorname{Re}\left[p_1\varphi_1'(z_1) + q_1\psi_1'(z_2)\right] \\ M_y^\infty &= -\frac{t^3}{6}\operatorname{Re}\left[p_2\varphi_1'(z_1) + q_2\psi_1'(z_2)\right] \\ M_{xy}^\infty &= -\frac{t^3}{6}\operatorname{Re}\left[p_3\varphi_1'(z_1) + q_3\psi_1'(z_2)\right] \end{aligned} \tag{۴-۳۹}$$

با گرفتن $\varphi_1'(z_1)$ و $\psi_1'(z_2)$ از معادلات (۴-۳۹) و با قرار دادن $\varphi_1'(z_1)=B_1^*+iC_1^*$ و $\psi_1'(z_2)=B_1'^*+iC_1'^*$ و انتگرال‌گیری مقدار $\varphi_1(z_1)$ و $\psi_1(z_2)$ به دست می‌آید. برای یکتایی جواب $C_1^*=0$ فرض می‌شود. [۱۵]

درنتیجه رابطه (۴-۳۹) به صورت رابطه (۴-۴۰) تبدیل خواهد شد :

$$\begin{aligned}
M_x^\infty &= -\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_1B_1^*+q_1(B_1'^*+iC_1'^*)\right]\\
M_y^\infty &= -\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_2B_1^*+q_2(B_1'^*+iC_1'^*)\right]\\
M_{xy}^\infty &= -\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_3B_1^*+q_3(B_1'^*+iC_1'^*)\right]
\end{aligned} \tag{۴-۴۰}$$

که در آن B_1^*، $B_1'^*$ و $C_1'^*$ مطابق رابطه (۴-۴۱) به دست می‌آیند[۴۴]:

$$\begin{aligned}
&B_1^*=\frac{T_8}{T_{10}},\; B_1'^*=\frac{T_9}{T_{10}}\\
&C_1'^*=\left[\frac{a_{11}T_8+b_{11}T_9}{c_{11}T_{10}}\right]-T_7
\end{aligned} \tag{۴-۴۱}$$

که در آن :

$$\begin{aligned}
&a_{11}=\bar{Q}_{11}+\bar{Q}_{12}(\alpha_1^2-\beta_1^2)+2\bar{Q}_{16}\alpha_1 && ,T_1=Xc_{22}-Yc_{11}\\
&a_{22}=\bar{Q}_{12}+\bar{Q}_{22}(\alpha_1^2-\beta_1^2)+2\bar{Q}_{26}\alpha_1 && ,T_2=b_{11}c_{33}-c_{11}b_{33}\\
&a_{33}=\bar{Q}_{16}+\bar{Q}_{26}(\alpha_1^2-\beta_1^2)+2\bar{Q}_{66}\alpha_1 && ,T_3=Xc_{33}-Zc_{11}\\
&b_{11}=\bar{Q}_{11}+\bar{Q}_{12}(\alpha_2^2-\beta_2^2)+2\bar{Q}_{16}\alpha_2 && ,T_4=b_{11}c_{22}-c_{11}b_{22}\\
&b_{22}=\bar{Q}_{12}+\bar{Q}_{22}(\alpha_2^2-\beta_2^2)+2\bar{Q}_{26}\alpha_2 && ,T_5=a_{11}c_{22}-c_{11}a_{22}\\
&b_{33}=\bar{Q}_{16}+\bar{Q}_{26}(\alpha_2^2-\beta_2^2)+2\bar{Q}_{66}\alpha_2 && ,T_6=a_{11}c_{33}-c_{11}a_{33}\\
&c_{11}=2\bar{Q}_{12}\alpha_2\beta_2+2\bar{Q}_{16}\beta_2 && ,T_7=\frac{X}{c_{11}},T_8=T_1T_2-T_3T_4\\
&c_{22}=2\bar{Q}_{22}\alpha_2\beta_2+2\bar{Q}_{26}\beta_2 && ,T_9=T_3T_5-T_1T_6,T_{10}=T_2T_5-T_4T_6\\
&c_{33}=2\bar{Q}_{26}\alpha_2\beta_2+2\bar{Q}_{66}\beta_2\\
&X=-\frac{6M_x^\infty}{t^3}\\
&Y=-\frac{6M_Y^\infty}{t^3}\\
&Z=-\frac{6M_{xY}^\infty}{t^3}
\end{aligned} \tag{۴-۴۲}$$

۴-۳-۳-۱ به دست آوردن شرایط مرزی تنش گام اول

شرایط مرزی تنش f_1, f_2 روی گشودگی مجازی به این صورت به دست می‌آیند که یک گشتاور خمشی $m(s)$ و یک نیروی خمشی $p(s)$ درروی گشودگی مجازی در نظر گرفته می‌شوند. به سبب گشتاور اعمالی روی لبه‌های بیرونی صفحه داریم[۴۴]:

$$m(s) = M_n \tag{۴-۴۳}$$

$$p(s) = Q_n + \frac{\partial}{\partial s} M_{nt} \tag{۴-۴۴}$$

که M_n و M_{nt} ممانهای عمودی و مماسی درروی کانتور گشودگی هستند.

Q_nنیروی برشی متقاطع است که روی گشودگی اعمال می‌شود. با انتگرال‌گیری روی مرز گشودگی از معادله (۴-۴۴)، داریم :

$$f(s) + c = p + M_{nt} \tag{۴-۴۵}$$

که در آن :

$$f(s) + c = \int_0^s p(s) ds \tag{۴-۴۶}$$

$$\int_0^s Q_n ds = p \tag{۴-۴۷}$$

$f(s)$ تابع بار مجتمع و p نیروی متقاطع مجتمع است. c ثابت حقیقی انتگرال است و با استفاده از تانسور تغییر شکل داریم :

$$M_n = M_x \cos^2(n,x) + M_y \cos^2(n,y) + 2M_{xy} \cos(n,x)\cos(n,y)$$
$$M_{nt} = (M_y - M_x)\cos(n,x)\cos(n,y) + M_{xy}(\cos^2(n,x) - \cos^2(n,y))$$
$$Q_n = Q_x \cos(n,x) + Q_y \cos(n,y) \tag{۴-۴۸}$$

با قرار دادن معادلات (۴-۴۸) در معادلات (۴-۴۳) و (۴-۴۵) داریم :

$$m(s) = M_x \cos^2(n,x) + M_y \cos^2(n,y) + 2M_{xy} \cos(n,x)\cos(n,y) \tag{۴-۴۶}$$

$$f(s) + c = p + (M_y - M_x)\cos(n,x)\cos(n,y) + M_{xy}(\cos^2(n,x) - \cos^2(n,y)) \tag{۴-۴۷}$$

با ضرب معادله (۴-۴۶) در $\cos(n,x)$ و معادله (۴-۴۷) در $\cos(n,y)$ و ترکیب دو معادله، مطابق با رابطه (۴-۴۸) داریم :

$$M_x \cos(n,x) + (M_{xy} - p)\cos(n,y) = m\cos(n,x) - (f+c)\cos(n,y) \qquad (۴\text{-}۴۸)$$

همچنین با ضرب معادله (۴-۴۶) در $\cos(n,y)$ و معادله (۴-۴۷) در $\cos(n,x)$ و ترکیب دو معادله، مطابق با رابطه (۴-۴۹) می‌توان نوشت :

$$M_y \cos(n,y) + (M_{xy} + p)\cos(n,x) = m\cos(n,y) + (f+c)\cos(n,x) \qquad (۴\text{-}۴۹)$$

با فرض $\cos(n,x) = \frac{dy}{ds}, \cos(n,y) = -\frac{dx}{ds}$، معادلات (۴-۴۸) و (۴-۴۹) به صورت معادلات (۴-۵۰) و (۴-۵۱) درمی‌آیند:

$$M_x dy - (M_{xy} - p)dx = mdy + (f+c)dx \qquad (۴\text{-}۵۰)$$

$$(M_{xy} + p)dy - M_y dx = -mdx + (f+c)dy \qquad (۴\text{-}۵۱)$$

نیروی متقاطع مجتمع p در معادله (۴-۴۷) به‌صورت زیر به دست می‌آید:[۵]

$$p = \int_0^s Q_x dy - Q_y dx \qquad (۴\text{-}۵۲)$$

با قرار دادن Q_x و Q_y از معادلات (۴-۳۰) و (۴-۳۱) در (۴-۵۲) داریم :

$$p = -\frac{h^3}{6}\mathrm{Re}\left[p_4 Q'(z_1) + q_4 \psi'(z_2) \right] \qquad (۴\text{-}۵۳)$$

به سبب غیاب نیروی متقاطع در قسمت حل با توجه به فرض مساله که $Q_x^\infty = Q_y^\infty = 0$ ، در معادله (۴-۵۲)، $p=0$ می‌شود.

با قرار دادن معادلات (۴-۴۰) برای M_x, M_y, M_{xy} در معادلات (۴-۵۰) و (۴-۵۱) خواهیم داشت :

$$-\frac{t^3}{6}\left\{\mathrm{Re}\left[p_1\varphi_1'(z_1)+q_1\psi_1'(z_2)\right]dy-\mathrm{Re}\left[p_3\varphi_1'(z_1)+q_3\psi_1'(z_2)\right]dx\right\}= \\ mdy+(f+c)dx \tag{۵۴-۴}$$

$$-\frac{t^3}{6}\left\{\mathrm{Re}\left[p_3\varphi_1'(z_1)+q_3\psi_1'(z_2)\right]dy-\mathrm{Re}\left[p_2\varphi_1'(z_1)+q_2\psi_1'(z_2)\right]dx\right\}= \\ -mdx+(f+c)dy \tag{۵۵-۴}$$

با قرار دادن معادلات (۴-۲۷) تا (۴-۳۱) در معادلات اول و دوم رابطه (۴-۱۷) داریم :

$$\begin{aligned} p_1 &= -s_1 p_3 \\ q_1 &= -s_2 p_3 \\ p_3 &= -s_1 p_2 \\ q_3 &= -s_2 q_2 \end{aligned} \tag{۵۶-۴}$$

با قرار دادن معادلات (۴-۵۶) در (۴-۵۴) و (۴-۵۵) و با انتگرال‌گیری داریم :

$$\mathrm{Re}\left[\frac{p_1}{s_1}\varphi_1(z_1)+\frac{q_1}{s_2}\psi_1(z_2)\right]=-\frac{t^3}{6}\int_0^s(mdy+fdx)+cx+c_1=f_1 \tag{۵۷-۴}$$

$$\mathrm{Re}\left[p_2\varphi_1(z_1)+q_2\psi_1(z_2)\right]=-\frac{t^3}{6}\int_0^s(mdx-fdy)-cx+c_2=f_2 \tag{۵۸-۴}$$

به‌این‌ترتیب f_1 و f_2 روی مرز گشودگی مجازی به دست می‌آیند.

۴-۳-۲ به دست آوردن شرایط مرزی تنش گام دوم

در گام دوم حل داریم : $f_1^0=-f_1$ و $f_2^0=-f_2$ و با توجه به معادلات (۴-۵۹) و سمت چپ معادلات (۴-۵۷) و (۴-۵۸) خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) &= B_1^* z_1 \\ \psi_1(z_2) &= (B_1'^*+iC_1'^*)z_2 \end{aligned} \tag{۵۹-۴}$$

$$f_1^0=-\mathrm{Re}\left[\frac{p_1}{s_1}B_1^*z_1+\frac{q_1}{s_2}(B_1'^*+iC_1'^*)z_2\right] \tag{۶۰-۴}$$

$$f_2^0=-\mathrm{Re}\left[p_2B_1^*z_1+q_2(B_1'^*+iC_1'^*)z_2\right] \tag{۶۱-۴}$$

حال برای به دست آوردن $\varphi_0(z_1),\psi_0(z_2)$ با استفاده از معادلات (۳-۴۶) تا (۳-۴۹) داریم :

$$f_1^0=-\text{Re}\left[\frac{\lambda}{2}[\frac{p_1}{s_1}B_1^*\left[a_1\xi+\frac{b_1}{\xi}+wc_1\xi^n+\frac{wd_1}{\xi^n}\right]+\frac{q_1}{s_2}(B_1^{'*}+iC_1^{'*})\left[a_2\xi+\frac{b_2}{\xi}+wc_2\xi^n+\frac{wd_2}{\xi^n}\right]]\right]$$

$$=-\text{Re}\left[\begin{array}{l}\frac{\lambda}{2}[\frac{p_1}{s_1}B_1^*a_1+\frac{q_1}{s_2}(B_1^{'*}+iC_1^{'*})a_2]\xi+\frac{\lambda}{2}[\frac{p_1}{s_1}B_1^*b_1+\frac{q_1}{s_2}(B_1^{'*}+iC_1^{'*})b_2]\frac{1}{\xi}\\+\frac{\lambda}{2}[\frac{p_1}{s_1}B_1^*wc_1+\frac{q_1}{s_2}(B_1^{'*}+iC_1^{'*})wc_2]\xi^n+\frac{\lambda}{2}[\frac{p_1}{s_1}B_1^*wd_1+\frac{q_1}{s_2}(B_1^{'*}+iC_1^{'*})wd_2]\frac{1}{\xi^n}\end{array}\right]$$

$$f_2^0=-\text{Re}\left[\frac{\lambda}{2}[p_2B_1^*\left[a_1\xi+\frac{b_1}{\xi}+wc_1\xi^n+\frac{wd_1}{\xi^n}\right]+q_2(B_1^{'*}+iC_1^{'*})\left[a_2\xi+\frac{b_2}{\xi}+wc_2\xi^n+\frac{wd_2}{\xi^n}\right]]\right]$$

$$=-\text{Re}\left[\begin{array}{l}\frac{\lambda}{2}[p_2B_1^*a_1+q_2(B_1^{'*}+iC_1^{'*})a_2]\xi+\frac{\lambda}{2}[p_2B_1^*b_1+q_2(B_1^{'*}+iC_1^{'*})b_2]\frac{1}{\xi}\\+\frac{\lambda}{2}[p_2B_1^*wc_1+q_2(B_1^{'*}+iC_1^{'*})wc_2]\xi^n+\frac{\lambda}{2}[p_2B_1^*wd_1+q_2(B_1^{'*}+iC_1^{'*})wd_2]\frac{1}{\xi^n}\end{array}\right]$$

(۶۲-۴)

که روابط (۴-۶۲) به‌طور خلاصه به فرم رابطه (۴-۶۵) و (۴-۶۶) درمی‌آیند :

$$f_1^0=-\text{Re}\left[K_9\xi+\frac{K_{10}}{\xi}+K_{11}\xi^n+\frac{K_{12}}{\xi^n}\right] \quad (۶۵-۴)$$

$$f_2^0=-\text{Re}\left[K_{13}\xi+\frac{K_{14}}{\xi}+K_{15}\xi^n+\frac{K_{16}}{\xi^n}\right] \quad (۶۶-۴)$$

مطابق رابطه (۴-۵۷) و (۴-۵۸)، روابط (۴-۶۷) و (۴-۶۸) را تعریف می‌کنیم. همچنین با استفاده از رابطه‌ی شوارتز (۳-۵۱)، معادلات (۴-۶۹) و (۴-۷۰) به دست می‌آیند :

$$f_1^0=\text{Re}[\frac{p_1}{s_1}\varphi_0(z_1)+\frac{q_1}{s_2}(\psi_0)z_2] \quad (۶۷-۴)$$

$$f_2^0=\text{Re}[p_2\varphi_0(z_1)+q_2(\psi_0)z_2] \quad (۶۸-۴)$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{s_1}\varphi_0(z_1)+\frac{q_1}{s_2}(\psi_0)z_2=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_1^0}{2}\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} \quad (۶۹-۴)$$

$$\Rightarrow p_2\varphi_0(z_1)+q_2(\psi_0)z_2=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_2^0}{2}\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma} \quad (۷۰-۴)$$

با حل دستگاه معادلات (۴-۶۹) و (۴-۷۰) داریم :

$$\varphi_0(z_1)=\frac{is_1}{2\pi(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\int(q_1f_2^0-q_2s_2f_1^0)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha \quad (۷۱-۴)$$

$$(\psi_0)z_2=\frac{-is_1}{2\pi(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\int(p_1f_2^0-p_2s_1f_1^0)\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha \quad (۷۲-۴)$$

با جایگذاری روابط (۴-۶۷) و (۴-۶۸) در روابط (۴-۷۱) و (۴-۷۲)، روابط (۴-۷۳) و (۴-۷۴) به دست می‌آیند :

$$\varphi_0(\xi)=$$

$$\frac{is_1}{2\pi(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\int \begin{matrix}(-q_1\,\mathrm{Re}\left[K_{13}\xi+\dfrac{K_{14}}{\xi}+K_{15}\xi^n+\dfrac{K_{16}}{\xi^n}\right]\\ +q_2s_2\,\mathrm{Re}\left[K_9\xi+\dfrac{K_{10}}{\xi}+K_{11}\xi^n+\dfrac{K_{12}}{\xi^n}\right])\end{matrix}\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha \qquad (۴\text{-}۷۳)$$

$$\psi_0(\xi)=$$

$$\frac{is_1}{2\pi(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\int \begin{matrix}(p_1\,\mathrm{Re}\left[K_{13}\xi+\dfrac{K_{14}}{\xi}+K_{15}\xi^n+\dfrac{K_{16}}{\xi^n}\right]\\ -p_2s_1\,\mathrm{Re}\left[K_9\xi+\dfrac{K_{10}}{\xi}+K_{11}\xi^n+\dfrac{K_{12}}{\xi^n}\right])\end{matrix}\frac{\sigma+\xi}{\sigma-\xi}\frac{d\sigma}{\sigma}+i\alpha \qquad (۴\text{-}۷۴)$$

با استفاده از رابطه‌ی دیگر شوارتز (۳-۵۹) داریم :

$$\varphi_0(z_1)=\frac{s_1}{(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\begin{bmatrix}\left(q_1\left(K_{13}+\overline{K}_{14}\right)-q_2s_2\left(K_9+\overline{K}_{10}\right)\right)\xi\\ +\left(q_1(K_{15}+\overline{K}_{16})-q_2s_2(K_{11}+\overline{K}_{12})\right)\xi^n\end{bmatrix} \qquad (۴\text{-}۷۵)$$

$$\psi_0(z_2)=\frac{s_2}{(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\begin{bmatrix}\left(-p_1\left(K_{13}+\overline{K}_{14}\right)+p_2s_1\left(K_9+\overline{K}_{10}\right)\right)\xi\\ +\left(-p_1(K_{15}+\overline{K}_{16})+p_2s_1(K_{11}+\overline{K}_{12})\right)\xi^n\end{bmatrix} \qquad (۴\text{-}۷۶)$$

درنهایت از حل دو گام با استفاده از اصل جمع آثار روابط (۴-۷۷) ساخته می‌شوند :

$$\begin{aligned}&\varphi(z_1)=\varphi_1(z_1)+\varphi_0(z_1)\\&\psi(z_2)=\psi_1(z_2)+\psi_0(z_2)\\&\Rightarrow \varphi'(z_1)=\varphi_1'(z_1)+\varphi_0'(z_1)=B_1^*+\varphi_0'(z_1)\\&\Rightarrow \psi'(z_2)=\psi_1'(z_2)+\psi_0'(z_2)=(B_1'^*+iC_1'^*)+\psi_0'(z_2)\end{aligned} \qquad (۴\text{-}۷۷)$$

برای به دست آوردن مشتق‌ها از تعریف مشتق به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\varphi_0'(z_1)=\frac{d\varphi_0(z_1)}{dz_1}=\frac{d\varphi_0(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dz_1}=\frac{d\varphi_0(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{1}{dz_1/d\xi} \qquad (۴\text{-}۷۸)$$

و به همین ترتیب برای محاسبه $\psi_0'(z_2)$ داریم:

$$\psi_0'(z_2)=\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{d\xi}=\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\cdot\frac{1}{dz_2/d\xi} \qquad (۴\text{-}۷۹)$$

درنتیجه داریم :

$$\varphi_0'(z_1)=\frac{s_1}{(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\begin{bmatrix}\left(q_1\left(K_{13}+\overline{K}_{14}\right)-q_2s_2\left(K_9+\overline{K}_{10}\right)\right)\\+n\xi^{n-1}\left(q_1(K_{15}+\overline{K}_{16})-q_2s_2(K_{11}+\overline{K}_{12})\right)\end{bmatrix}\left(dz_1/d\xi\right) \qquad (۸۰-۴)$$

$$\psi_0'(z_2)=\frac{s_2}{(p_1q_2s_2-p_2q_1s_1)}\begin{bmatrix}\left(-p_1\left(K_{13}+\overline{K}_{14}\right)+p_2s_1\left(K_9+\overline{K}_{10}\right)\right)\\+n\xi^{n-1}\left(-p_1(K_{15}+\overline{K}_{16})+p_2s_1(K_{11}+\overline{K}_{12})\right)\end{bmatrix}\left(dz_2/d\xi\right) \qquad (۸۱-۴)$$

و با استفاده از روابط (۴-۸۲) حل کامل می‌شود :

$$\frac{dz_1}{d\xi}=\frac{\lambda}{2}\left[a_1-\frac{b_1}{\xi^2}+wc_1N\xi^{n-1}-wd_1\,n/\xi^{n+1}\right]$$
$$\frac{dz_2}{d\xi}=\frac{\lambda}{2}\left[a_2-\frac{b_2}{\xi^2}+wc_2n\xi^{n-1}-wd_2\,n/\xi^{n+1}\right] \qquad (۸۲-۴)$$

با به دست آمدن $\varphi'(z_1),\psi'(z_2)$ مقادیر گشتاورها و نیروهای برشی به دست می‌آیند.

برای قطبی کردن معادلات گشتاورها از روابط (۳-۷۳) تا (۳-۷۵) بهره می‌بریم :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{dF_1}{dz_1}\frac{\partial z_1}{\partial r}+\frac{dF_2}{dz_2}\frac{\partial z_2}{\partial r}+\frac{d\overline{F_1}}{d\overline{z_1}}\frac{\partial\overline{z_1}}{\partial r}+\frac{d\overline{F_2}}{d\overline{z_2}}\frac{\partial\overline{z_2}}{\partial r}\right]=$$

$$\begin{bmatrix}(\cos\theta+s_1\sin\theta)\dfrac{d\varphi(z_1)}{dz_1}\dfrac{\partial z_1}{\partial r}+(\cos\theta+s_2\sin\theta)\dfrac{d\psi(z_2)}{dz_2}\dfrac{\partial z_2}{\partial r}\\+(\cos\theta-s_1\sin\theta)\dfrac{d\overline{\varphi(z_1)}}{d\overline{z_1}}\dfrac{\partial\overline{z_1}}{\partial r}+(\cos\theta-s_1\sin\theta)\dfrac{d\overline{\psi(z_2)}}{d\overline{z_2}}\dfrac{\partial\overline{z_2}}{\partial r}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}(\cos\theta+s_1\sin\theta)^2\varphi'(z_1)+(\cos\theta+s_2\sin\theta)^2\psi'(z_2)\\+(\cos\theta-s_1\sin\theta)^2\overline{\varphi'(z_1)}+(\cos\theta-s_1\sin\theta)^2\overline{\psi'(z_2)}\end{bmatrix}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\left[(\cos\theta+s_1\sin\theta)^2\varphi'(z_1)+(\cos\theta+s_2\sin\theta)^2\psi'(z_2)\right] \qquad (۸۳-۴)$$

به‌طور مشابه داریم :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\rightarrow\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \qquad (۸۴-۴)$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\rightarrow-\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) \qquad (۸۵-۴)$$

با جایگذاری معادلات قطبی خیز در روابط (۴-۱۲) تا (۴-۱۴)، معادلات نهایی به دست می‌آیند :

$$M_{\rho}=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11}[(\cos\theta+S_1\sin\theta)^2\varphi'(z_1)+(\cos\theta+S_2\sin\theta)^2\psi'(z_2)]\\+\bar{Q}_{12}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)^2\varphi'(z_1)+(\sin\theta-S_2\cos\theta)^2\psi'(z_2)]\\+4\bar{Q}_{16}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)(\cos\theta+S_1\sin\theta)\phi'(z_1)\\+(\sin\theta-S_2\cos\theta)(\cos\theta+S_2\sin\theta)\psi'(z_2)]\end{bmatrix} \quad (۸۶\text{-}۴)$$

$$M_{\theta}=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\begin{bmatrix}\bar{Q}_{12}[(\cos\theta+S_1\sin\theta)^2\varphi'(z_1)+(\cos\theta+S_2\sin\theta)^2\psi'(z_2)]\\+\bar{Q}_{22}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)^2\varphi'(z_1)+(\sin\theta-S_2\cos\theta)^2\psi'(z_2)]\\+4\bar{Q}_{26}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)(\cos\theta+S_1\sin\theta)\phi'(z_1)\\+(\sin\theta-S_2\cos\theta)(\cos\theta+S_2\sin\theta)\psi'(z_2)]\end{bmatrix} \quad (۸۷\text{-}۴)$$

$$M_{\rho\theta}=-\frac{t^3}{6}\mathrm{Re}\begin{bmatrix}\bar{Q}_{16}[(\cos\theta+S_1\sin\theta)^2\varphi'(z_1)+(\cos\theta+S_2\sin\theta)^2\psi'(z_2)]\\+\bar{Q}_{26}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)^2\varphi'(z_1)+(\sin\theta-S_2\cos\theta)^2\psi'(z_2)]\\+4\bar{Q}_{66}[(\sin\theta-S_1\cos\theta)(\cos\theta+S_1\sin\theta)\phi'(z_1)\\+(\sin\theta-S_2\cos\theta)(\cos\theta+S_2\sin\theta)\psi'(z_2)]\end{bmatrix} \quad (۸۸\text{-}۴)$$

برای چرخش گشودگی هم از روابط ارائه‌شده در بخش ۳-۴ و برای تحلیل استحکام از روابط بخش ۳-۵ استفاده می‌کنیم. کلیه روابط ارائه‌شده در بالا برای تک لایه یک‌جهتی هست. برای تحلیل چندلایه‌ها کافی است در معادله (۴-۲۰) به بعد، به‌جای ماتریس $\left[\bar{Q}\right]$، ماتریس $\left[D\right]$ که در رابطه (۲-۲۹) ارائه گردید، در روابط جایگزین شود

فصل پنجم

بحث و نتایج

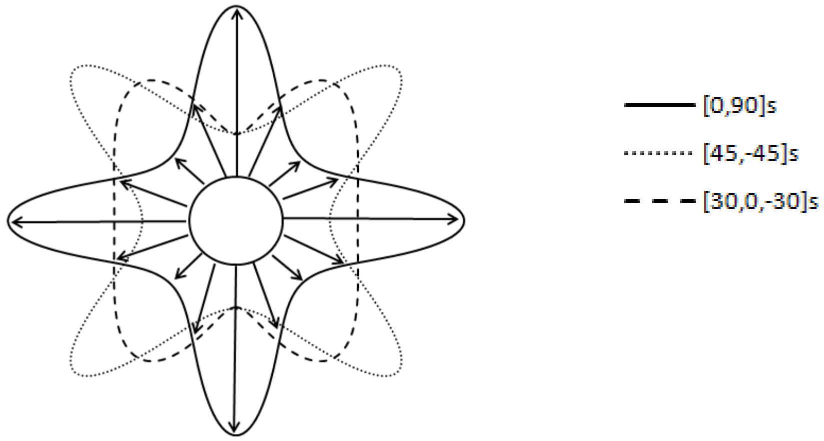
۵-۱ صفحه تحت بارگذاری درون-صفحه‌ای

مسأله موردبررسی در این بخش، صفحه‌ای حاوی گشودگی است که به علّت بزرگ بودن ابعاد آن نسبت به ابعاد گشودگی، صفحه بی‌نهایت فرض می‌شود. این صفحه مطابق فرض در بخش ۳-۲-۲ تحت بارگذاری کششی دومحوره برابر ($\lambda = 1, \beta = 0$) قرار دارد. در این مسأله، صفحه دارای رفتار الاستیک خطی بوده و همچنین با اعمال شرایط مرزی ($\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0$) تنها تنش ایجادشده در اطراف گشودگی σ_θ است. بقیه تنش‌ها در مقابل این تنش قابل صرف‌نظر می‌باشند.

در این بخش سعی می‌شود تا تأثیر پارامترهایی همچون زاویه چرخش گشودگی (α)، انحنای گشودگی (w) و همچنین تأثیر زاویه الیاف بر توزیع تنش اطراف گشودگی‌ها مورد بررسی قرار گیرد. در نتایج ارائه‌شده در بخش‌های بعدی منظور از تنش بی‌بعد، بیشترین تنش محیطی (σ_θ) ایجادشده در اطراف گشودگی به تنش اعمالی می‌باشد. هدف مطالعه روند تغییرات این تنش با تغییر در پارامترهایی مانند انحنای گشودگی و زاویه چرخش گشودگی است.

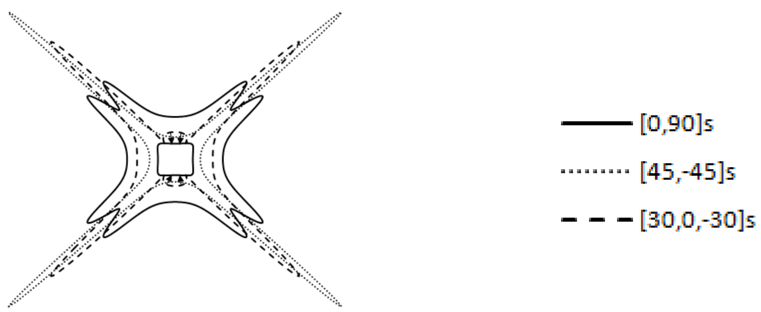
۵-۱-۱ توزیع تنش در اطراف گشودگی‌ها

در این بخش به تحلیل توزیع تنش در اطراف انواع گشودگی‌ها برای صفحه از جنس ماده گرافیت/اپوکسی پرداخته‌ایم. مطابق شکل (۵-۱) کانتور تنش برای گشودگی دایروی در هر سه حالت چیدمان [0,90]s،[45,-45]s و[30,0,-30]s رسم شده است. به دلیل تقارن شکل و بارگذاری، کانتور تنش نیز متقارن شده است. برای چیدمان [0,90]s، بیشترین تنش بی بعد در زاویه‌های ۰ و ۹۰ درجه، برای چیدمان [45,-45]s، در زاویه‌های ۴۵و۱۳۵درجه و برای چیدمان [30,0,-30]s، در زاویه‌های ۵۵/۸ و ۱۲۴/۲درجه بدست آمده است.



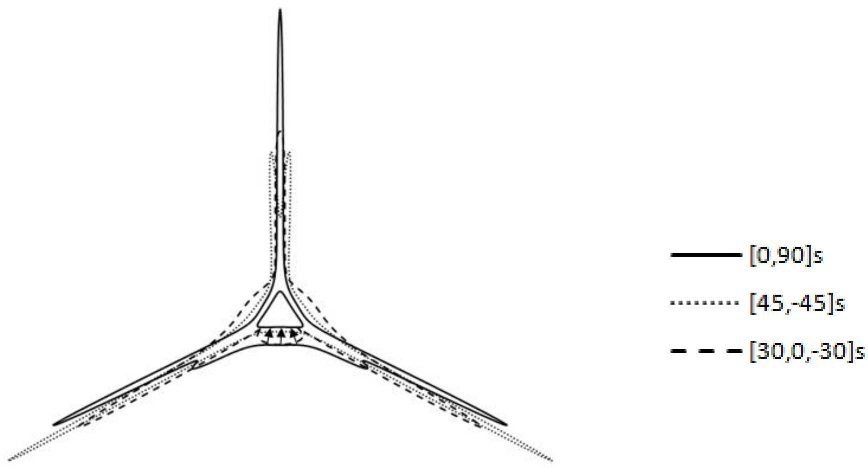
شکل۵-۱: توزیع تنش برای گشودگی دایروی

در شکل (۵-۲) کانتورهای تنش برای هر سه حالت چیدمان برای گشودگی مربعی رسم شده اند که به وضوح افزایش تمرکز تنش در نقاط تیز مشهود است. برای گشودگی مربعی در حالت چیدمان [0,90]s، بیشترین تنش بی بعد در زاویه‌های ۳۳/۳ و ۵۶/۷ درجه، برای چیدمان [45,-45]s، در زاویه‌های ۴۵و۱۳۵درجه و برای چیدمان [30,0,-30]s، در زاویه‌های ۴۸/۶ و ۱۳۱/۴درجه بدست آمده است. در چیدمان [30,0,-30]s مطابق شکل (۵-۲) تنش منفی نیز پدید می‌آید.



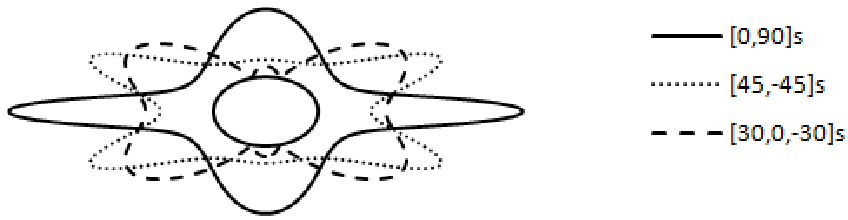
شکل۵-۲: توزیع تنش برای گشودگی مربعی

همچنین در شکل (۵-۳) کانتورهای تنش برای هر سه حالت چیدمان برای گشودگی مثلثی رسم شده اند که مشابه گشودگی مربعی تمرکز تنش اصلی در نقاط تیز است. در حالت چیدمان [0,90]s، بیشترین تنش بی بعد در زاویه۰ درجه، برای چیدمان [45,-45]s، در زاویه‌های ۲۱۲/۴ و ۳۲/۴ - درجه و برای چیدمان [30,0,-30]s، در زاویه‌های ۳۶- و ۲۱۶ درجه بدست آمده است.



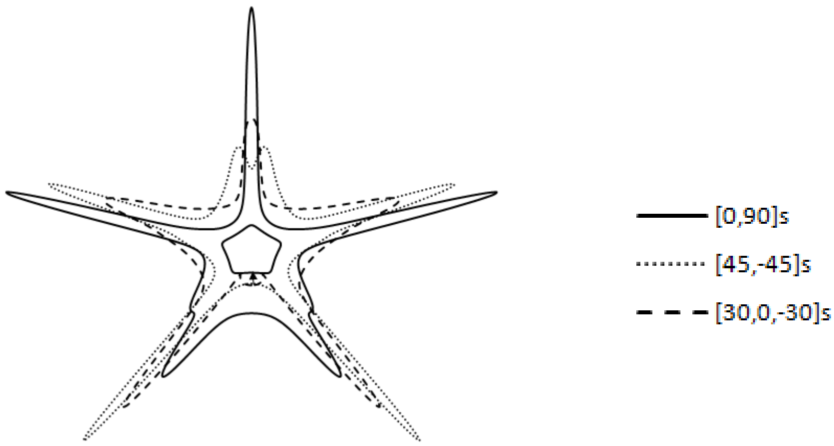
شکل۵-۳: توزیع تنش برای گشودگی مثلثی

در شکل (۵-۴) کانتورهای تنش برای هر سه حالت چیدمان برای گشودگی بیضوی رسم شده اند که این کانتورها تا حدی نزدیک به حالت دایروی هستند. در حالت چیدمان [0,90]s، بیشترین تنش بی بعد در زاویه‌های۰و۱۸۰ درجه، برای چیدمان [45,-45]s، در زاویه ۲۴/۳- درجه و برای چیدمان [30,0,-30]s، در زاویه ۳۰/۶درجه بدست آمده است.



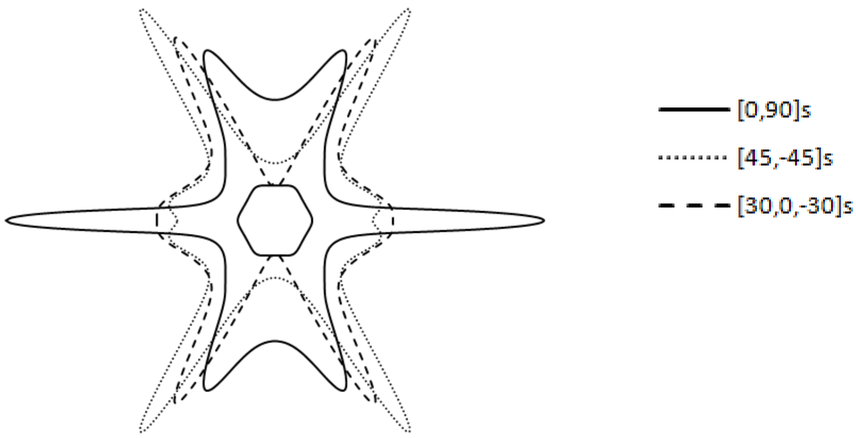
شکل۵-۴: توزیع تنش برای گشودگی بیضوی

همچنین در شکل (۵-۵) کانتورهای تنش برای هر سه حالت چیدمان برای گشودگی پنج-ضلعی رسم شده اند که دارای تقارن هستند و در نقاط تیز دارای تمرکز تنش بیشتری می‌باشند.در حالت چیدمان [0,90]s، بیشترین تنش بی بعد در زاویه ۰ درجه، برای چیدمان [45,-45]s، در زاویه۲۲۲/۲ درجه و برای چیدمان [30,0,-30]s، در زاویه ۲۳۵/۸ درجه بدست آمده است.



شکل۵-۵: توزیع تنش برای گشودگی پنج‌ضلعی

و در آخر، در شکل (۵-۶) کانتورهای تنش برای هر سه حالت چیدمان برای گشودگی شش-ضلعی رسم شده‌اند. در حالت چیدمان [0,90]s، بیشترین تنش بی بعد در زاویه ۰ درجه، برای چیدمان [45,-45]s، در زاویه ۵۵/۸ درجه و برای چیدمان [30,0,-30]s، در زاویه ۶۱/۲ درجه بدست آمده است.



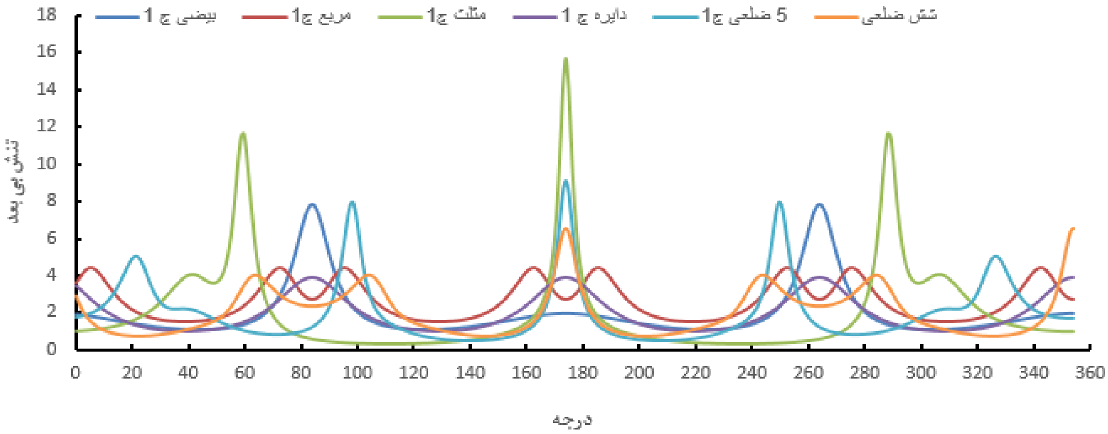
شکل۵-۶: توزیع تنش برای گشودگی شش‌ضلعی

با مقایسه کانتور تنش‌های رسم شده برای هر شش شکل بالا مشاهده می‌شود که تیز بودن گوشه‌های شکل‌ها به شدت تمرکز تنش را افزایش می‌دهد. همچنین به دلیل تقارن شکل و بارگذاری، کانتور تنش‌ها متقارن به‌دست می‌آیند. در ادامه در جدول (۵-۱) مقدار تنش بی‌بعد در گشودگی‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده است.

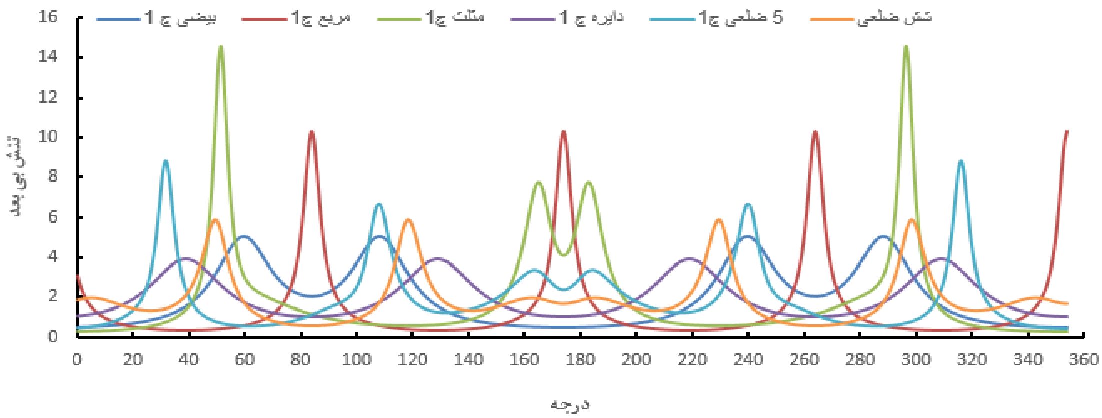
جدول ۵-۱: مقدار بیشترین تنش بی‌بعد در گشودگی‌های مختلف

شش‌ضلعی	پنج‌ضلعی	مثلثی	مربعی	بیضوی	دایروی	چیدمان
۶/۵۳	۹/۱۴	۱۵/۶۷	۴/۴	۷/۸۳	۳/۹۱۷	[0,90]s
۵/۸۴	۸/۸۴	۱۴/۵۷	۱۰/۳۳	۵/۰۵	۳/۹۱۷	[45,-45]s
۴/۶۷	۶/۸۵۵	۱۰/۵۷	۷/۷	۳/۸	۲/۸	[30,0,-30]s

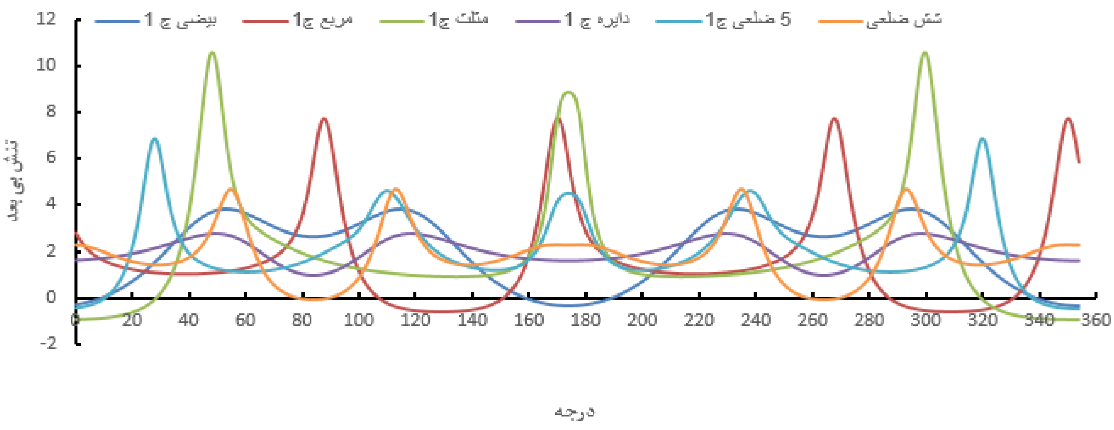
مطابق شکل‌های ۵-۷ تا ۵-۸ مقایسه کلی تنش بی‌بعد برای انواع گشودگی انجام شده است:



شکل ۵-۷ : مقایسه تنش بی‌بعد اشکال مختلف برای چیدمان [0,90]s برحسب زاویه نقاط مرز گشودگی



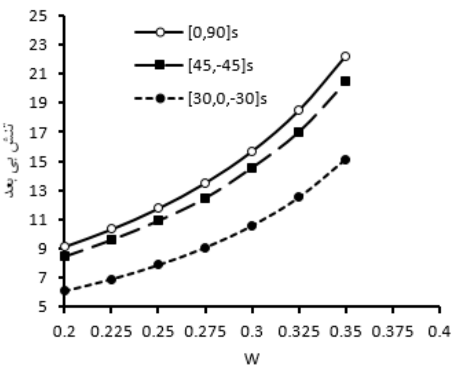
شکل ۵-۸ : مقایسه تنش بی‌بعد اشکال مختلف برای چیدمان [45,-45]s برحسب زاویه نقاط مرز گشودگی



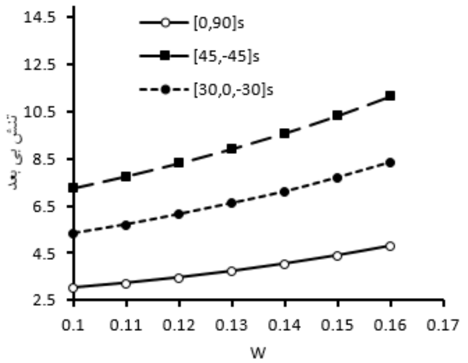
شکل ۵-۹ : مقایسه تنش بی‌بعد اشکال مختلف برای چیدمان [30,0,-30]s برحسب زاویه نقاط مرز گشودگی

۵-۱-۱-۱ تأثیر تغییر پارامتر انحنای گشودگی

در این بخش تأثیر تغییر پارامتر انحنای گشودگی بر تنش بی‌بعد را بررسی می‌کنیم.همان‌طور که قابل پیش‌بینی است و با توجه به اشکال (۵-۱۰) تا (۵-۱۴) مشخص است که برای هر سه نوع چیدمان و نیز برای هر نوع چیدمان دیگر، کمترین تمرکز تنش اطراف گشودگی، زمانی حاصل می‌شود که w کمترین مقدار خود را داشته باشد. این شکل‌ها نشان می‌دهد که با کاهش مقدارw، از مقدار تنش بی‌بعد نیز کاسته می‌شود تا جایی که w=۰ شود؛ که در این حالت گشودگی‌ها به دایره تبدیل می‌شوند؛ بنابراین برای هر سه حالت چیدمان لایه‌ها زمانی که انحنا گشودگی (w) کمترین مقدار را دارا باشد، تمرکز تنش به حداقل مقدار خود خواهد رسید.



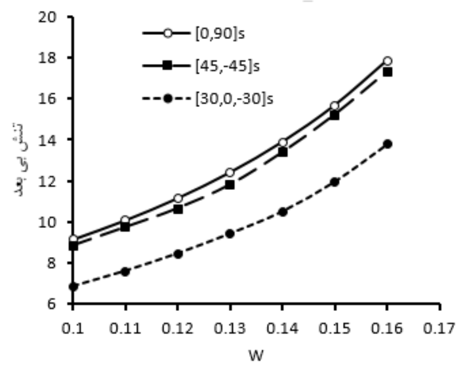
شکل ۵-۱۰ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی مثلثی برحسب انحنای گشودگی (w)



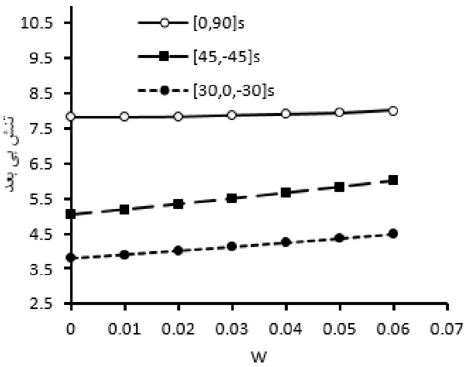
شکل ۵-۱۱ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی مربعی برحسب انحنای گشودگی (w)

با توجه به شکل‌های (۵-۱۰) و (۵-۱۱) نرخ رشد تنش بی‌بعد بر حسب افزایش انحنای گشودگی، برای گشودگی مربعی حالت تقریبا خطی دارد، درحالی که برای گشودگی مثلثی این افزایش به صورت سهمی می‌باشد. همچنین سرعت افزایش تنش بی‌بعد برای گشودگی مربعی در حالت چیدمان دوم و برای گشودگی مثلثی در حالت چیدمان اول بیشتر است.

همچنین با توجه به شکل‌های (۵-۱۲) و (۵-۱۳) سرعت رشد تنش بی‌بعد بر حسب افزایش انحنای گشودگی، برای گشودگی بیضوی حالت خطی دارد، درحالی که برای گشودگی پنج‌ضلعی این افزایش به صورت سهمی می‌باشد.

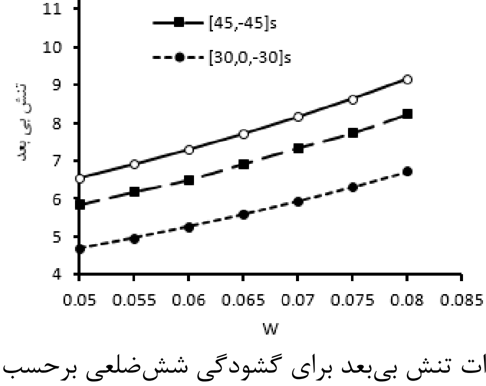


شکل ۵-۱۲ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی برحسب انحنای گشودگی (w)



شکل ۵-۱۳ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی بیضوی برحسب انحنای گشودگی (w)

همچنین مطابق با شکل ۵-۱۴ مشاهده می‌شود برای گشودگی شش‌ضلعی، تنش بی‌بعد با افزایش مقدار انحنای گشودگی با سرعت خطی افزایش می‌یابد.



شکل ۵-۱۴ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی شش‌ضلعی برحسب انحنای گشودگی (w)

در انتهای این بخش بیشترین مقدار تنش بی‌بعد برای همه گشودگی‌ها بر حسب مقدار انحنای گشودگی بهینه در جدول ۵-۲ آورده شده است. مطابق داده‌های این جدول برای گشودگی های مربعی و مثلثی تنش بی‌بعد کاهش محسوسی داشته است.

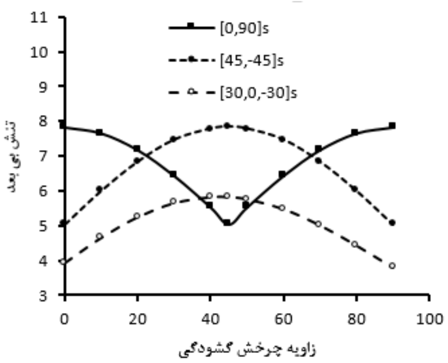
جدول ۵-۲: مقدار بیشترین تنش بی‌بعد در گشودگی‌های مختلف در مقدار W بهینه

شش‌ضلعی	پنج‌ضلعی	مثلثی	مربعی	بیضوی	دایروی	چیدمان
۶/۵۳	۹/۱۴	۹/۱۴	۳/۰۲	۷/۸۳	۳/۹۱۷	[0,90]s
۵/۸۴	۸/۸۴	۸/۴۷	۷/۲۷	۵/۰۵	۳/۹۱۷	[45,-45]s
۴/۶۷	۶/۸۵۵	۶/۱۱	۵/۳۳	۳/۸	۲/۸	[30,0,-30]s

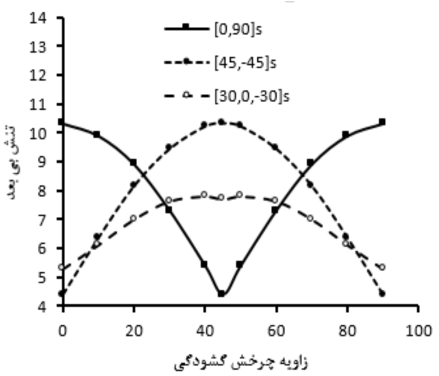
۵-۱-۱-۲ تأثیر پارامتر زاویه چرخش گشودگی

در این بخش تأثیر پارامتر تغییر زاویه چرخش گشودگی بر مقدار بیشترین تنش بی‌بعد بررسی می‌شود. بدیهی است که این پارامتر را نمی‌توان برای گشودگی دایروی بررسی کرد.

مطابق شکل‌های (۵-۱۵) و (۵-۱۶) حالت بهینه تنش بی بعد با زاویه چرخش ۴۵ درجه برای چیدمان اول و چرخش ۰یا ۹۰ درجه برای چیدمان‌های دوم و سوم اتفاق می‌افتد.

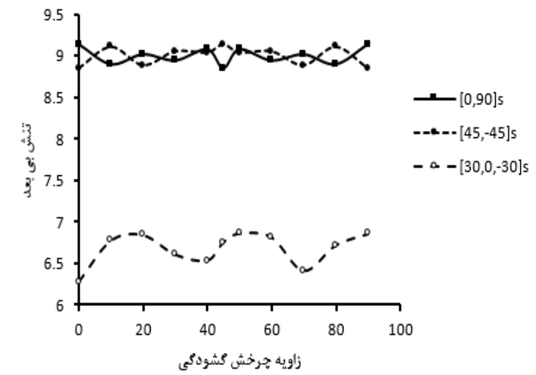


شکل ۵-۱۵ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی بیضوی برحسب زاویه چرخش گشودگی

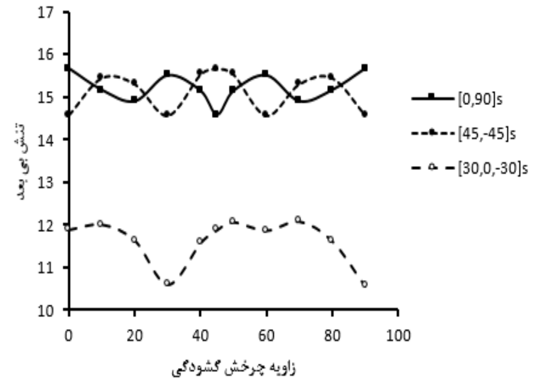


شکل ۵-۱۶ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی مربعی برحسب زاویه چرخش گشودگی

همچنین با توجه به شکل (۵-۱۸) حالت بهینه تنش بی بعد برای گشودگی مثلثی، با زاویه چرخش ۴۵ درجه برای چیدمان اول و چرخش ۰یا ۹۰ درجه برای چیدمان‌های دوم و چرخش ۳۰ و ۹۰ برای چیدمان سوم اتفاق می‌افتد.



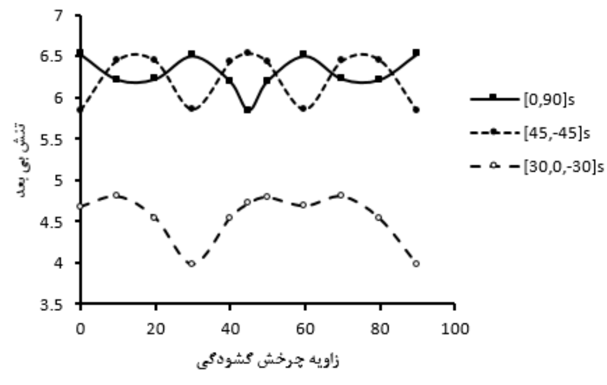
شکل ۵-۱۷ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی برحسب زاویه چرخش گشودگی



شکل ۵-۱۸ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی مثلثی برحسب زاویه چرخش گشودگی

مطابق با شکل (۵-۱۷) حالت بهینه تنش بی بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی، با زاویه چرخش ۴۵ درجه برای چیدمان اول و چرخش ۰یا ۹۰ درجه برای چیدمان‌های دوم و چرخش۷۰ درجه برای چیدمان سوم اتفاق می‌افتد.

مقادیر بیشترین تنش بی‌بعد برای گشودگی‌ها در جدول (۵-۳) ارائه شده است.



شکل ۵-۱۹ : بررسی تغییرات تنش بی‌بعد برای گشودگی شش‌ضلعی برحسب زاویه چرخش گشودگی

در آخر مطابق با شکل (۵-۱۹) حالت بهینه تنش بی بعد برای گشودگی شش‌ضلعی، با زاویه چرخش ۴۵ درجه برای چیدمان اول و چرخش ۰یا ۹۰ درجه برای چیدمان‌های دوم و چرخش۳۰و۹۰ درجه برای چیدمان سوم اتفاق می‌افتد.

جدول ۵-۳ : تأثیر زاویه چرخش گشودگی در مقدار بیشترین تنش بی‌بعد برای انواع گشودگی‌ها

نوع گشودگی	[0,90]s	[45,-45]s	[30,0,-30]s
مربعی	۴/۴ در ۴۵ درجه	۴/۴ در ۰و۹۰ درجه	۵/۲۸ در ۰و۹۰ درجه
بیضوی	۵/۰۴ در ۴۵ درجه	۵/۰۴ در ۰و۹۰ درجه	۳/۸ در ۹۰ درجه
مثلثی	۱۴/۵۷ در ۴۵درجه	۱۴/۵۷ در ۰و۹۰ درجه	۱۰/۶ در ۳۰و۹۰ درجه
پنج‌ضلعی	۸/۸۴ در ۴۵ درجه	۸/۸۴ در ۰و۹۰ درجه	۶/۴ در ۷۰ درجه
شش‌ضلعی	۵/۸۴ در ۴۵ درجه	۵/۸۴ در ۰و۹۰ درجه	۳/۹۷ در ۳۰و۹۰ درجه

۵-۱-۱-۳ تأثیر پارامتر زاویه چرخش گشودگی در مقدار بهینه انحنای گشودگی

با توجه به مقادیر بدست آمده در بخش ۵-۱-۱-۱ برای مقدار انحنای بهینه، تاثیر زاویه چرخش گشودگی برای همه گشودگی‌ها بررسی شده است. طبق نتایج ارائه شده در جدول (۵-۴) کاهش محسوس تنش بی‌بعد را برای گشودگی‌های مثلثی و مربعی شاهد هستیم.

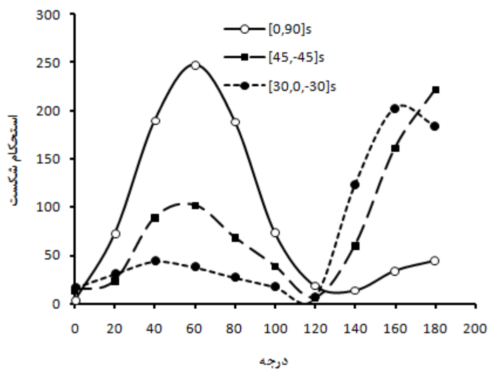
جدول ۵-۴ : تأثیر زاویه چرخش گشودگی در مقدار بیشترین تنش بی‌بعد برای انحنای گشودگی بهینه

نوع گشودگی	[0,90]s	[45,-45]s	[30,0,-30]s
مربعی	۳/۰۳ در ۴۵ درجه	۳/۰۳ در ۰و۹۰ درجه	۳/۲۵ در ۰و۹۰ درجه
بیضوی	۵/۰۴ در ۴۵ درجه	۵/۰۴ در ۰و۹۰ درجه	۳/۸ در ۰و۹۰ درجه
مثلثی	۸/۸۲ در ۱۰و۸۰ درجه	۸/۴۷در ۰و۹۰ درجه	۶/۱۱ در ۳۰و۹۰ درجه
پنج‌ضلعی	۸/۸۴ در ۴۵ درجه	۸/۸۴ در ۰و۹۰ درجه	۶/۴ در ۷۰ درجه
شش‌ضلعی	۵/۸۴ در ۴۵ درجه	۵/۸۴ در ۰و۹۰ درجه	۳/۹۷ در ۳۰و۹۰ درجه

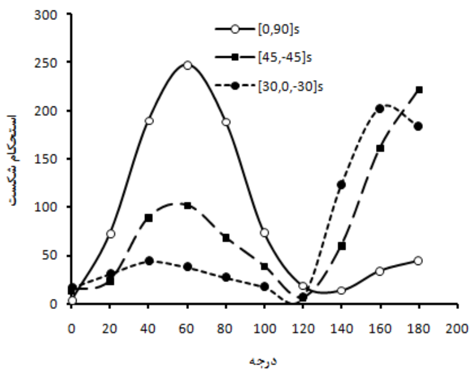
۵-۱-۲ استحکام شکست

معیار شکست موجود توانایی ارائه مکانیزم شکست را ندارند و فقط با توجه به رفتار ماده وقوع شکست را نشان می‌دهند. در این پایان‌نامه معیارهای شکست ارائه‌شده در حقیقت بیشترین تنش مجاز اعمال‌شده به چندلایه دارای گشودگی را به ما نشان می‌دهند. کمترین مقدار استحکام شکست محاسبه‌شده در اطراف گشودگی همان استحکام شکست صفحه‌ی دارای گشودگی خواهد بود. برای چیدمان‌های [0,90]s، [45,-45]s و[30,0,-30]s به ترتیب لایه‌ها با زوایای ۹۰، ۴۵و ۳۰ درجه مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

در شکل‌های (۵-۲۰) تا (۵-۲۲)، تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مثلثی بر حسب هر سه معیار معرفی شده نشان داده است. به دلیل نزدیک بودن روابط دو نظریه تیسای[1] و هاشین[2] نمودار ها تقریبا روی هم منطبق می‌شوند.



شکل ۵-۲۰ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مثلثی برحسب معیار هاشین



شکل ۵-۲۱ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مثلثی برحسب معیار تیسای

با توجه به شکل‌های (۵-۲۰) و (۵-۲۳)، نتایج محاسبات برای گشودگی مثلثی در جدول (۵-۵) ثبت گردیده است.

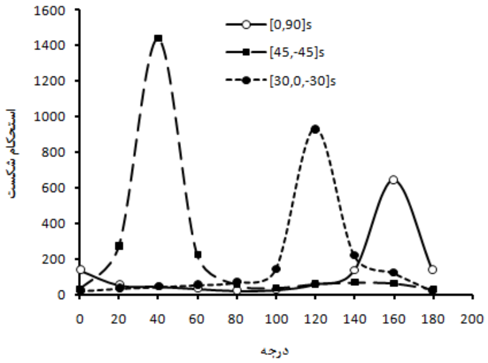
جدول ۵-۵ : کمترین مقدار استحکام شکست برای گشودگی مثلثی

چیدمان	H-vm	Tsai	Hashin
[0,90]s	۳۳/۶ در ۱۲۰ درجه	۲/۷۵ در ۰ درجه	۲/۷۶ در ۰ درجه
[45,-45]s	۱۳/۳۴ در ۱۲۰ درجه	۶/۱۲ در ۱۲۰ درجه	۶/۱ در ۱۲۰ درجه
[30,0,-30]s	۱۵ در ۰ درجه	۵/۹۵ در ۱۲۰ درجه	۵/۹۵ در ۱۲۰ درجه

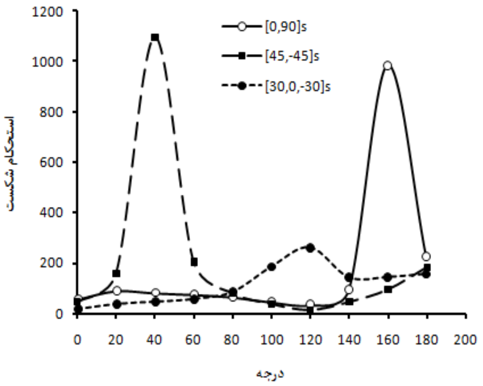
1. Tsai
2. Hashin

در نتیجه برای هر لایه کمترین مقدار تنش، تنش مجاز می‌باشد.

در شکل‌های (۵-۲۲) و (۵-۲۴)، تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مربعی بر حسب هر سه معیار معرفی شده نشان داده است.



شکل ۵-۲۲ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مربعی برحسب معیار Hvm



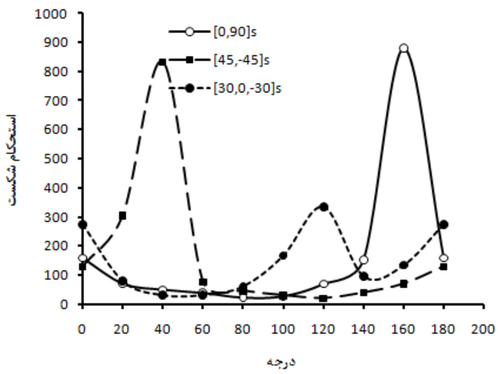
شکل ۵-۲۳ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مثلثی برحسب معیار Hvm

با توجه به شکل‌های (۵-۲۲) و (۵-۲۵)، نتایج محاسبات برای گشودگی مربعی در جدول (۵-۶) ثبت گردیده است.

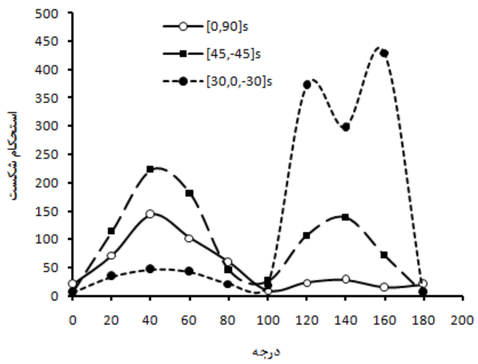
جدول ۵-۶ : کمترین مقدار استحکام شکست برای گشودگی مربعی

چیدمان	H-vm	Tsai	Hashin
[0,90]s	۱۹/۵۳ در ۸۰ درجه	۹/۰۷ در ۱۰۰ درجه	۹/۰۷ در ۱۰۰ درجه
[45,-45]s	۲۸/۶ در ۰و ۱۸۰ درجه	۴/۲ در ۰ و۱۸۰ درجه	۴/۲ در ۰ و۱۸۰ درجه
[30,0,-30]s	۱۹/۳ در ۰ و ۱۸۰ درجه	۵/۹۲ در ۰ و ۱۸۰ درجه	۵/۹۲ در ۰ و۱۸۰ درجه

همچنین در شکل‌های (۵-۲۴) و (۵-۲۷)، تغییرات استحکام شکست برای گشودگی بیضوی بر حسب هر سه معیار معرفی شده نشان داده است.



شکل ۵-۲۴ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی بیضوی برحسب معیار Hvm



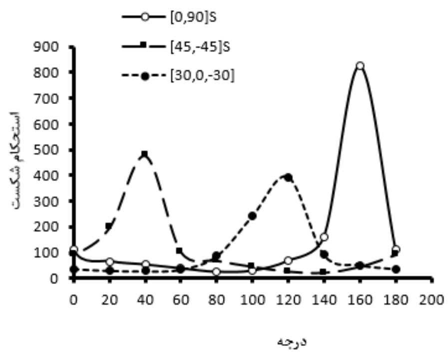
شکل ۵-۲۵ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مربعی برحسب معیار تیسای و هاشین

با توجه به شکل‌های (۵-۲۵) و (۵-۲۷)، نتایج محاسبات برای گشودگی بیضوی در جدول (۵-۷) ثبت گردیده است.

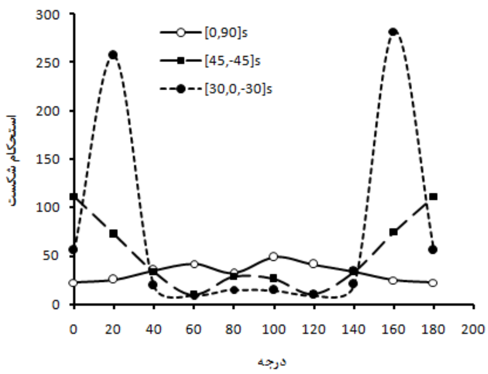
جدول ۵-۷ : کمترین مقدار استحکام شکست برای گشودگی بیضوی

چیدمان	H-vm	Tsai	Hashin
[0,90]s	۲۳/۶ در ۸۰ درجه	۲۲/۰۶ در ۰و۱۸۰ درجه	۲۲/۰۶ در ۰و۱۸۰ درجه
[45,-45]s	۱۹/۶۵ در ۱۲۰ درجه	۹/۷۱ در ۶۰ درجه	۹/۷۱ در ۶۰ درجه
[30,0,-30]s	۲۸/۵ در ۴۰ درجه	۹/۱ در ۶۰ درجه	۹/۱ در ۶۰ درجه

همچنین با توجه به شکل‌های (۵-۲۶) و (۵-۲۹)، نتایج محاسبات برای گشودگی دایروی در جدول (۵-۸) ثبت گردیده است.



شکل ۵-۲۶ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی دایروی برحسب معیار Hvm

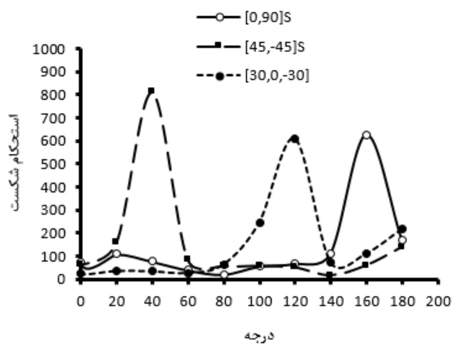


شکل ۵-۲۷ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی بیضوی برحسب معیار تیسای و هاشین

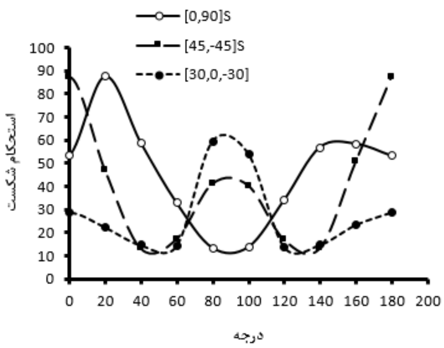
جدول ۵-۸ : کمترین مقدار استحکام شکست برای گشودگی دایروی

چیدمان	H-vm	Tsai	Hashin
[0,90]s	۲۲/۰۲ در ۸۰ درجه	۱۳/۷۵ در ۱۰۰ درجه	۱۳/۷۵ در ۱۰۰ درجه
[45,-45]s	۲۲/۱۲ در ۱۴۰ درجه	۱۲/۹ در ۴۰ درجه	۱۲/۹ در ۴۰ درجه
[30,0,-30]s	۲۷/۷۵ در ۴۰ درجه	۱۳/۸۸ در ۱۲۰ درجه	۱۳/۸۸ در ۱۲۰ درجه

همچنین با توجه به شکل‌های (۵-۲۸) و (۵-۳۱)، نتایج محاسبات برای گشودگی پنج‌ضلعی در جدول (۵-۹) ثبت گردیده است.



شکل ۵-۲۸ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی پنج‌ضلعی برحسب معیار Hvm

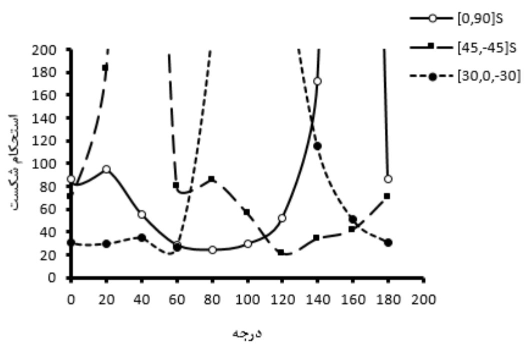


شکل ۵-۲۹ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی دایروی برحسب معیار تیسای و هاشین

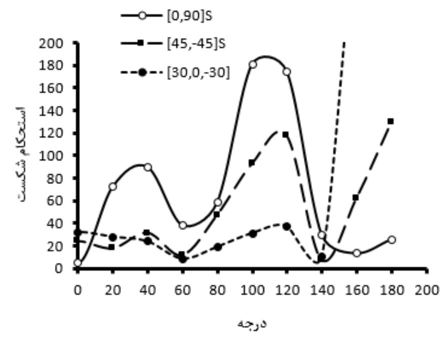
جدول ۵-۹ : کمترین مقدار استحکام شکست برای گشودگی پنج‌ضلعی

چیدمان	H-vm	Tsai	Hashin
[0,90]s	۲۴/۳ در ۸۰ درجه	۴/۷۳ در ۰ درجه	۴/۷۳ در ۰ درجه
[45,-45]s	۱۶/۱ در ۱۴۰ درجه	۷/۱۱ در ۱۴۰ درجه	۷/۱۱ در ۱۴۰ درجه
[30,0,-30]s	۲۲ در ۰ درجه	۸/۴۶ در ۶۰ درجه	۸/۴۶ در ۶۰ درجه

همچنین با توجه به شکل‌های (۵-۳۰) و (۵-۳۳)، نتایج محاسبات برای گشودگی شش‌ضلعی در جدول (۵-۱۰) ثبت گردیده است.



شکل ۵-۳۰ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی شش‌ضلعی برحسب معیار Hvm

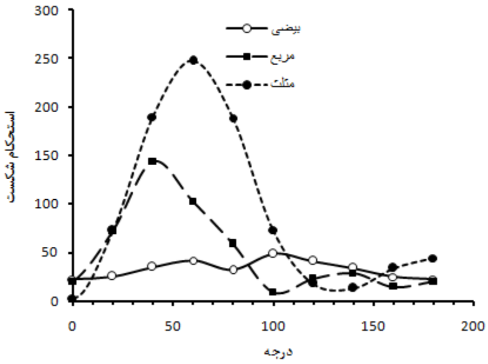


شکل ۵-۳۱ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی پنج‌ضلعی برحسب معیار تیسای و هاشین

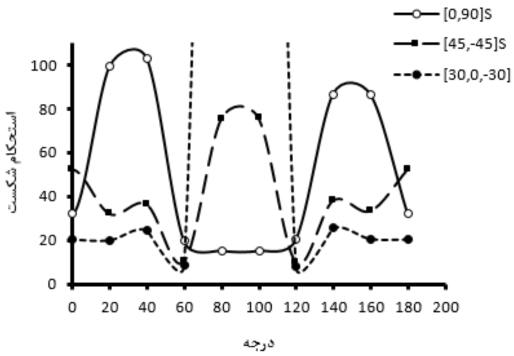
جدول ۵-۱۰ : کمترین مقدار استحکام شکست برای گشودگی شش‌ضلعی

چیدمان	H-vm	Tsai	Hashin
[0,90]s	۱۹/۲۵ در ۸۰ درجه	۱۹/۶۵ در ۶۰ درجه	۱۹/۶۵ در ۶۰ درجه
[45,-45]s	۲۰/۶۷ در ۱۲۰ درجه	۱۰/۰۵ در ۱۲۰ درجه	۱۰/۰۵ در ۱۲۰ درجه
[30,0,-30]s	۲۶/۳۵ در ۶۰ درجه	۸/۲ در ۱۲۰ درجه	۸/۲ در ۱۲۰ درجه

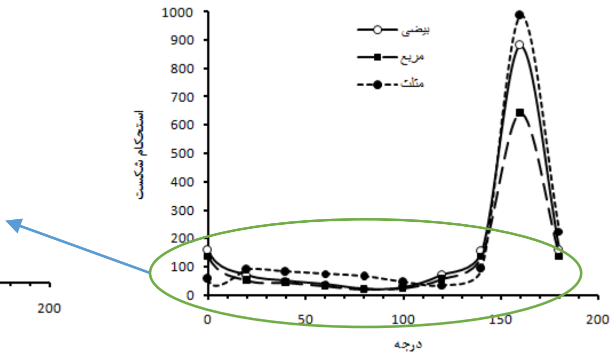
در شـکل‌های (۵-۳۲) تا (۵-۴۲) به مقایسـه تغییرات اسـتحکام شـکسـت برای گشـودگی‌های بیضـوی، مربعی و مثلثی پرداخته ایم. با توجه به شـکل‌های (۵-۳۲) و (۵-۳۵) کمترین استحکام برای چیدمان [0,90]s مربوط به شکل گشودگی مربعی می‌باشد.



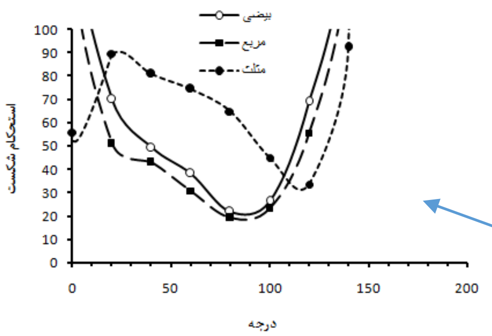
شکل ۵-۳۲ :بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان [۰,۹۰]s بر اساس معیار تیسای و هاشین



شکل ۵-۳۳ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی شش‌ضلعی برحسب معیار تیسای و هاشین

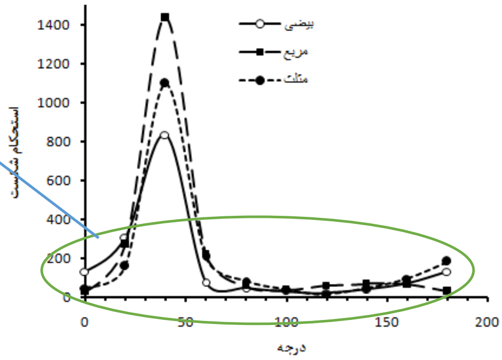


شکل ۵-۳۴: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان [۰,۹۰]s بر اساس معیار Hvm

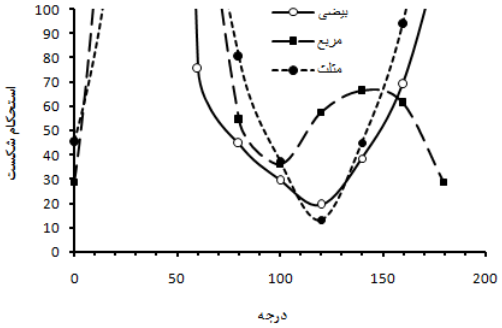


شکل۵-۳۵: بزرگنمایی شکل ۵-۳۴ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

با توجه به شکلهای (۵-۳۶) و (۵-۳۷) کمترین استحکام برای چیدمان [45,-45]s مربوط به شکل گشودگی مثلثی می‌باشد.

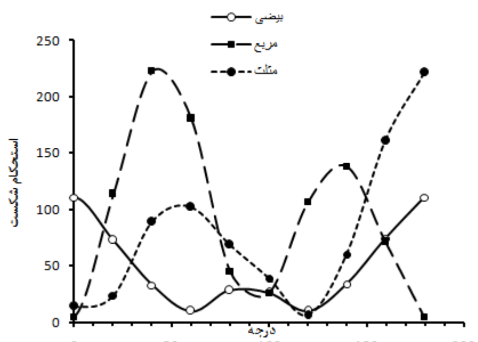


شکل ۵-۳۶: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۴۵,-۴۵] بر اساس معیار Hvm

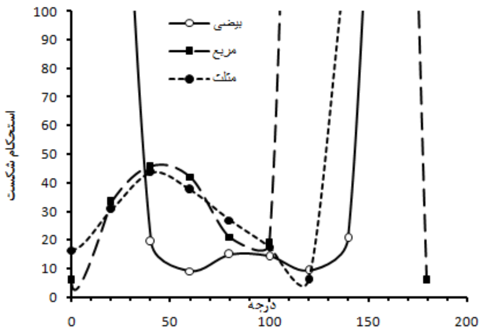


شکل۵-۳۷: بزرگنمایی شکل ۵-۳۶ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

با توجه به شکل‌های (۵-۳۸) کمترین استحکام مربوط به شکل گشودگی مربعی می‌باشد.

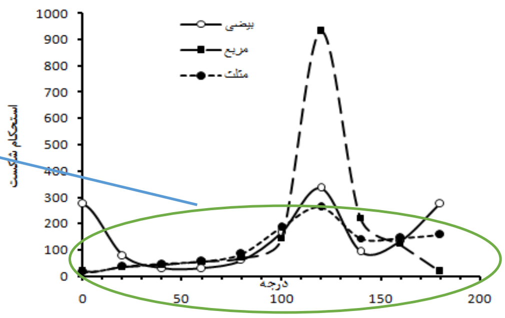


شکل ۵-۳۸: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۴۵,-۴۵] بر اساس معیار تیسای و هاشین

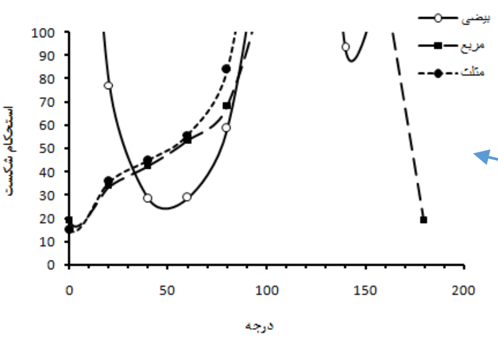


شکل ۵-۳۹: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۳۰,۰,-۳۰] بر اساس معیار تیسای و هاشین

همچنین مطابق با نمودارهای (۵-۳۹) تا (۵-۴۱) کمترین استحکام برای گشودگی مثلثی مربوط به چیدمان s[30,0,-30] به شکل می‌باشد.

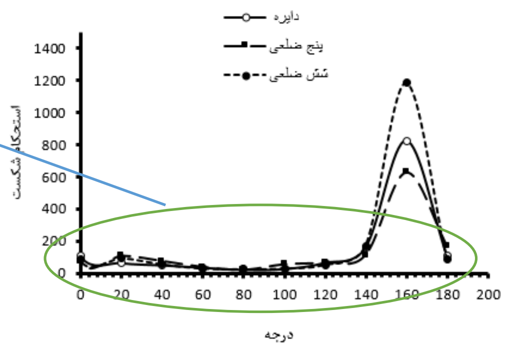


شکل ۵-۴۰: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۳۰,۰,-۳۰] بر اساس معیارHvm

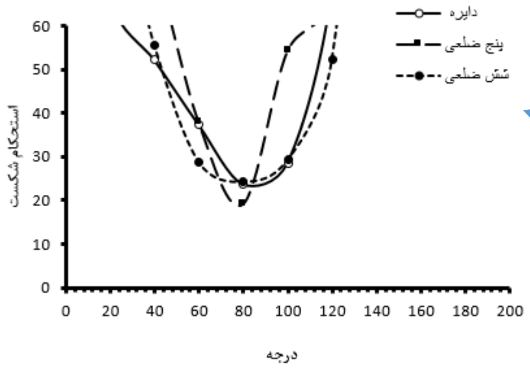


شکل۵-۴۱: بزرگنمایی شکل ۵-۴۰ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

حال در شــکل‌های (۵-۴۲) تا (۵-۵۳) به مقایســه تغییرات اســتحکام شکست برای گشودگی‌های دایروی، پنج‌ضـــلعی و شـــش‌ضـــلعی پرداخته ایم. با توجه به شـــکل‌های (۵-۴۲) و (۵-۴۳) کمترین استحکام برای چیدمان s[0,90]مربوط به شکل گشودگی پنج‌ضلعی می‌باشد.

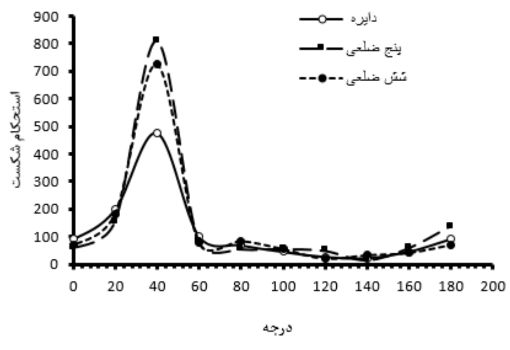


شکل ۵-۴۲: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۰,۹۰] بر اساس معیار Hvm



شکل۵-۴۳: بزرگنمایی شکل ۵-۴۲ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

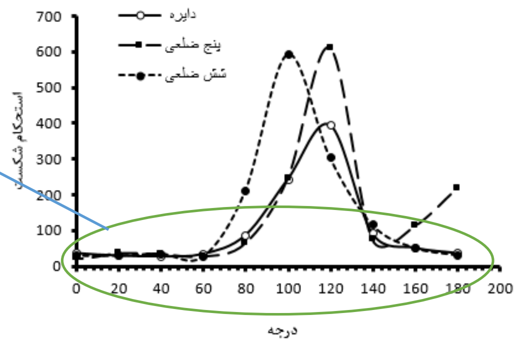
همچنین مطابق به شکل‌های (۵-۴۴) کمترین استحکام برای چیدمان s[45,-45]مربوط به شکل گشودگی دایروی می‌باشد.



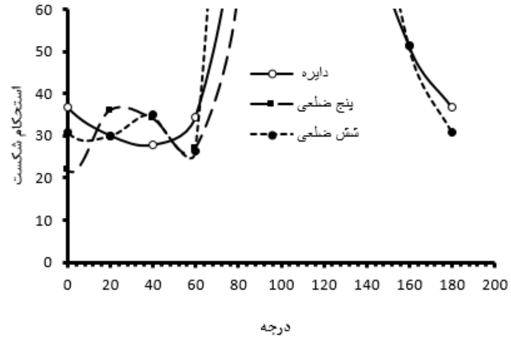
شکل ۵-۴۴: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۴۵,-۴۵] بر اساس معیار Hvm

با توجه به شکل‌های (۵-۴۵) و (۵-۴۶) کمترین استحکام برای چیدمان s[30,0,-30]مربوط به شکل گشودگی پنج‌ضلعی می‌باشد.

برای مشاهده بهتر نقاط حساس شکست بزرگنمایی نمودارها در کنار آنها قرار داده شده است.

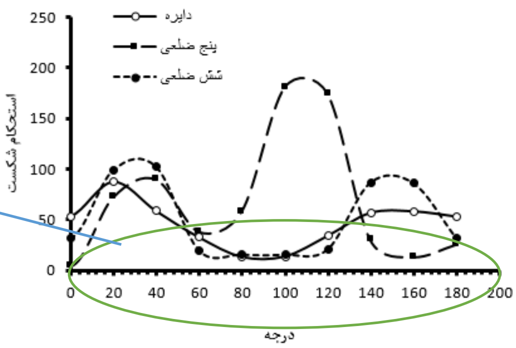


شکل ۵-۴۵: بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۳۰,۰,-۳۰] بر اساس معیار Hvm

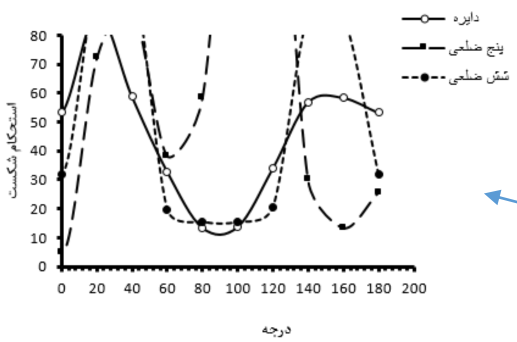


شکل۵-۴۶: بزرگنمایی شکل ۵-۴۵ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

همچنین با توجه به شکل‌های (۵-۴۷) و (۵-۴۸) کمترین استحکام برای چیدمان s[0,90]مربوط به شکل گشودگی دایروی می‌باشد.

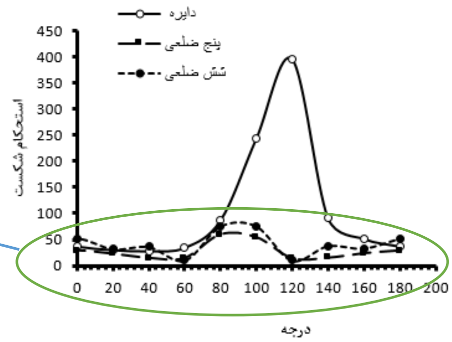


شکل ۵-۴۷ :بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۰,۹۰] بر اساس معیار تیسای و هاشین

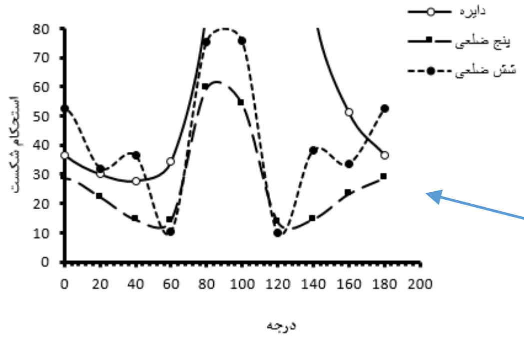


شکل۵-۴۸: بزرگنمایی شکل ۵-۴۷ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

همچنین مطابق به شکل‌های (۵-۴۹) و (۵-۵۰) کمترین استحکام برای چیدمان s[45,-45] مربوط به شکل گشودگی شش‌ضلعی می‌باشد.

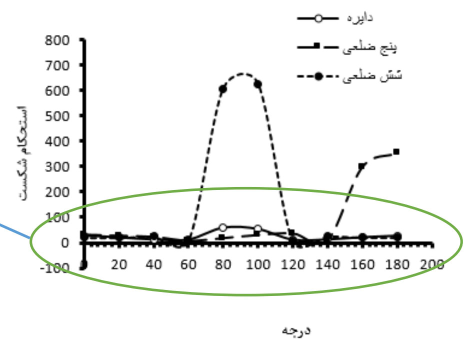


شکل ۵-۴۹ :بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۴۵,-۴۵] بر اساس معیار تیسای و هاشین

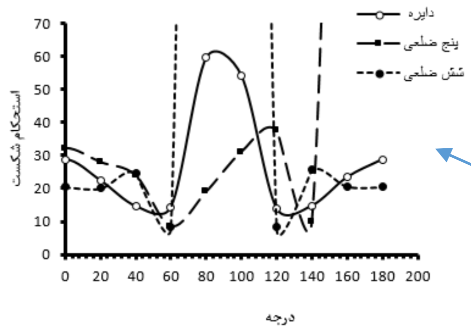


شکل۵-۵۰: بزرگنمایی شکل ۵-۴۹ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

مطابق به شکل‌های (۵-۵۱) و (۵-۵۲) کمترین استحکام برای چیدمان s[30,0,-30]مربوط به شکل گشودگی شش‌ضلعی می‌باشد.



شکل ۵-۵۱ :بررسی تغییرات استحکام شکست برای چیدمان s[۳۰,۰,-۳۰] بر اساس معیار تیسای و هاشین

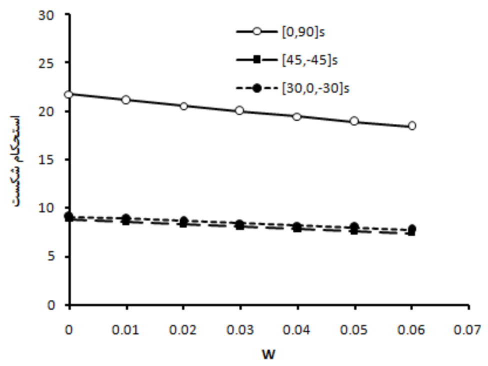


شکل۵-۵۲: بزرگنمایی شکل ۵-۵۱ برای دیدن بهتر نقاط حساس استحکام

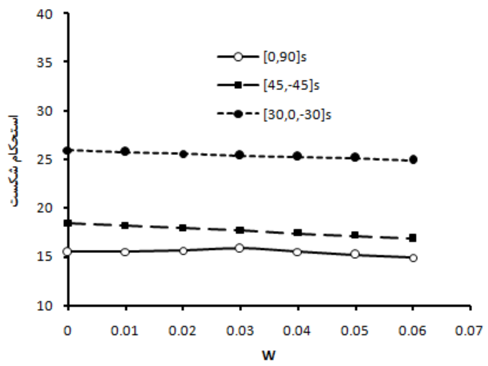
۵-۱-۳ تغییرات استحکام شکست بر حسب انحنای گشودگی

در این قسمت به بررسی تغییرات استحکام شکست بر حسب تغییر انحنای گشودگی در انواع گشودگی‌ها پرداخته شده است.

با توجه به شکل‌های (۵-۵۳) و (۵-۵۴) با افزایش انحنا، استحکام به صورت خطی کاهش می‌یابد.

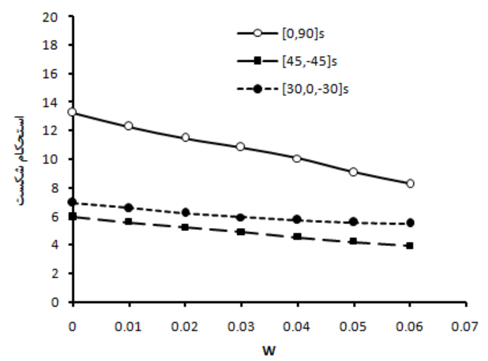


شکل۵-۵۳: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی بیضوی بر اساس معیار تیسای و هاشین

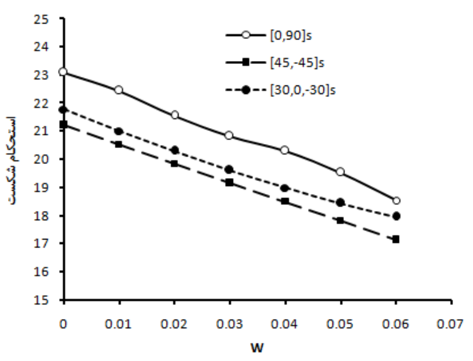


شکل۵-۵۴: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی بیضوی بر اساس معیار Hvm

در شکل‌های (۵-۵۵) و (۵-۵۶) مشاهده می‌شود شیب کاهش استحکام گشودگی مربعی نسبت به بیضوی سریع تر است؛ ولی همچنان خطی تغییر می‌کند.

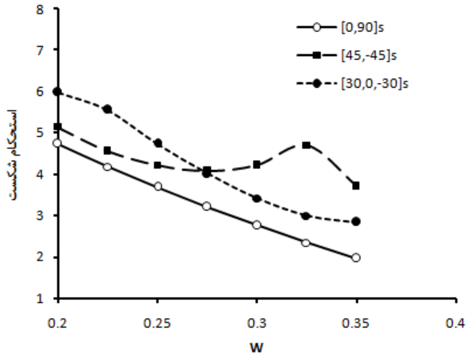


شکل۵-۵۵: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مربعی بر اساس معیار تیسای و هاشین

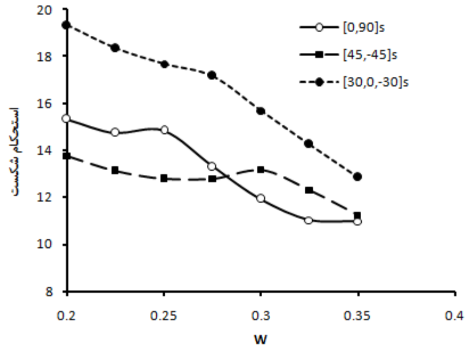


شکل۵-۵۶: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مربعی بر اساس معیار Hvm

روند تغییر استحکام برای گشودگی مثلثی متفاوت از دو شکل (۵-۵۵) و (۵-۵۶) است اما با توجه به هر سه معیار مطابق شکل‌های (۵-۵۷) و (۵-۵۸) شاهد تغییر شیب متفاوتی هستیم.

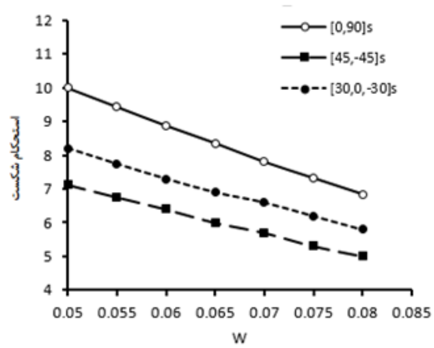


شکل۵-۵۷: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مثلثی بر اساس معیار تیسای و هاشین

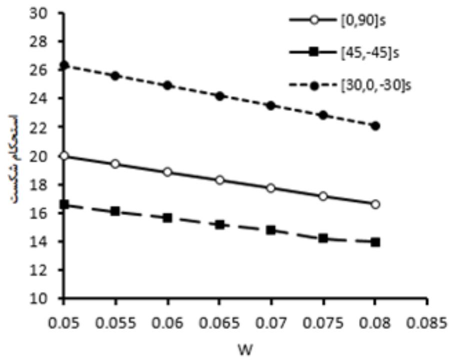


شکل۵-۵۸: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی مثلثی بر اساس معیارHvm

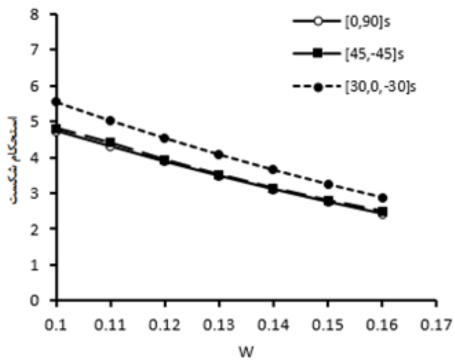
برای گشودگی های پنج و شش‌ضلعی، روند کاهش استحکام با افزایش انحنا مطابق شکل‌های (۵-۵۹) تا (۵-۶۲) کاملا خطی بوده؛ با این تفاوت که مقادیر استحکام تنش در گشودگی پنج‌ضلعی نسبت به شش‌ضلعی به هم نزدیک تر هستند.



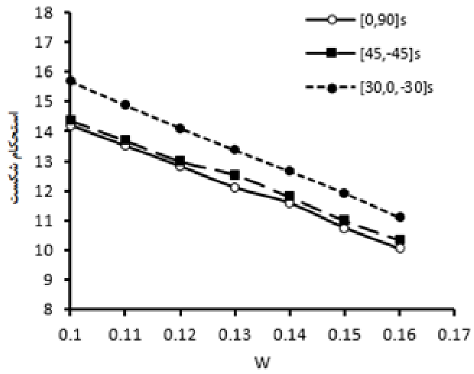
شکل۵-۵۹: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی شش‌ضلعی بر اساس معیار تیسای و هاشین



شکل۵-۶۰: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی شش‌ضلعی بر اساس معیارHvm



شکل۵-۶۱: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی پنج‌ضلعی بر اساس معیار تیسای و هاشین



شکل۵-۶۲: بررسی تغییرات استحکام شکست برای گشودگی پنج‌ضلعی بر اساس معیارHvm

در انتهای این بخش، مقادیر به دست آمده بیان کننده این امر هستند که مقادیر استحکام شکست که از نظریه‌های تیسای و هاشین به دست آمد کاملا با هم منطبق هستند؛ ولی با مقادیر نظریه H-vm در بعضی زاویه‌ها کاملا متفاوت اند. در بسیاری از حالت‌ها کمترین مقدار استحکام شکست در نقاطی غیر از نقاط با بیشترین تنش بی‌بعد رخ داده اند که به دلیل خواص ماده غیر همسانگرد می‌باشد.

۵-۲ صفحه تحت بارگذاری بیرون-صفحه‌ای

مسأله موردبررسی در این بخش صفحه‌ای حاوی گشودگی است که به علّت بزرگ بودن ابعاد آن نسبت به ابعاد گشودگی، صفحه بی‌نهایت فرض می‌شود. این صفحه مطابق شکل بخش ۴-۲-۱ تحت بارگذاری خمشی دومحوره برابر ($\lambda = 1, \beta = 0$) است. در این مسأله، صفحه دارای رفتار الاستیک خطی بوده و همچنین تنها ممان ایجادشده در اطراف گشودگی M_θ است. بقیه ممان‌ها در مقابل این ممان قابل صرف‌نظر می‌باشند $(M_\rho = M_{\rho\theta} = 0)$.

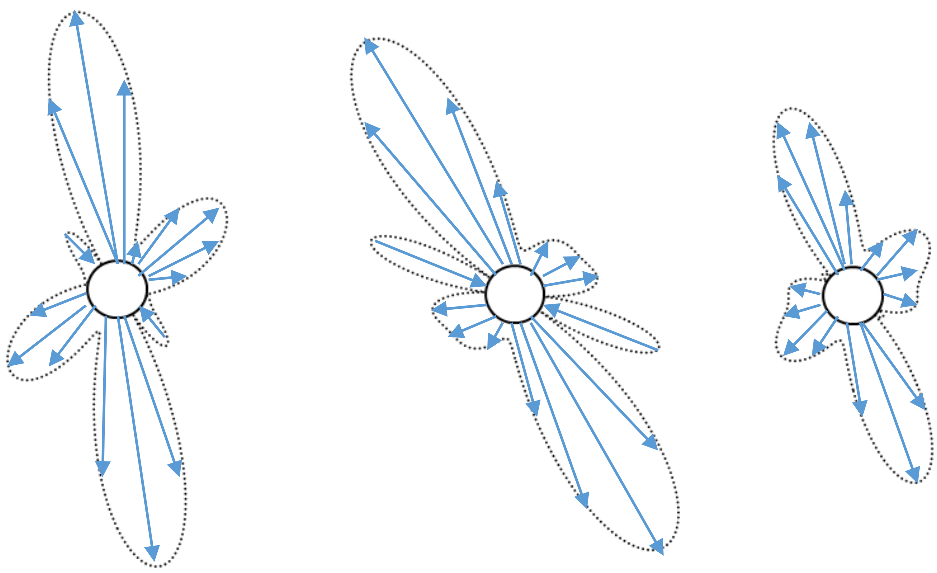
در این بخش سعی می‌شود تا تأثیر پارامترهایی همچون زاویه چرخش گشودگی (α)، انحنای گشودگی (w) و همچنین تأثیر زاویه الیاف بر توزیع ممان اطراف گشودگی‌ها مورد بررسی قرار گیرد. در نتایج ارائه‌شده در بخش‌های بعدی منظور از ممان بی‌بعد، بیشترین ممان محیطی (M_θ) ایجادشده در اطراف گشودگی به ممان اعمالی می‌باشد. هدف مطالعه روند تغییرات این ممان با تغییر در پارامترهایی مانند انحنای گشودگی و زاویه چرخش گشودگی است.

۵-۲-۱ توزیع ممان خمشی

در این بخش به تحلیل توزیع ممان در اطراف انواع گشودگی‌ها برای صفحه از جنس ماده گرافیت/اپوکسی پرداخته شده است. مطابق شکل‌های (۵-۶۵) تا (۵-۷۰) کانتور ممان برای گشودگی‌های مختلف در هر سه حالت چیدمان [۰,۹۰]s،[۴۵,-۴۵]s و [۳۰,۰,-۳۰]s رسم شده است.

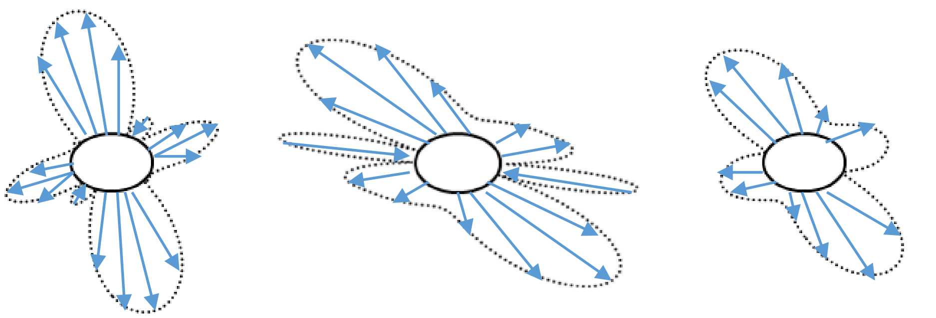
ضخامت هر لایه ۰/۵ میلیمتر و طول و عرض ورق مربع شکل ۵۰۰ میلیمتر در نظر گرفته شده است.

با توجه به زوایای متفاوت چیدمان‌ها ، مقادیر مثبت و منفی ممان؛ در چیدمان‌ها تغییر می‌کند .



(الف) (ب) (ج)

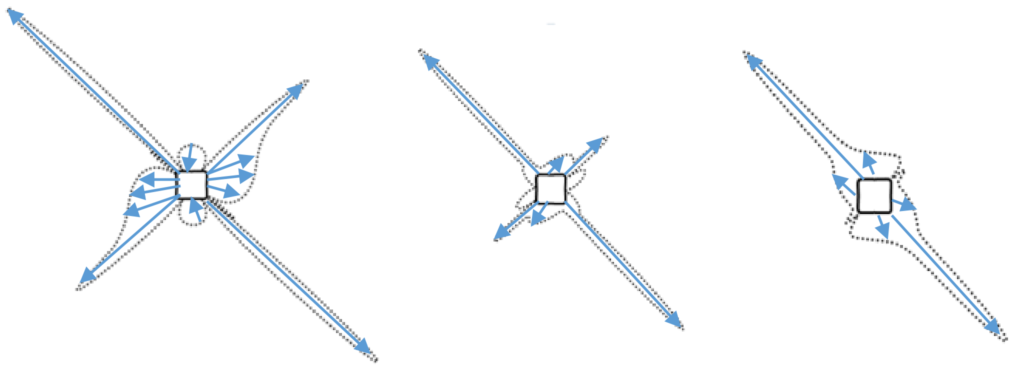
شکل ۵-۶۳ : (الف) :توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی دایروی برای چیدمان s[۰,۹۰] (ب) : توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی دایروی برای چیدمانs[۴۵,-۴۵] (ج): توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی دایروی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]



(الف) (ب) (ج)

شکل ۵-۶۴ : (الف) :توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی بیضوی برای چیدمان s[۰,۹۰] (ب) : توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی بیضوی برای چیدمانs[۴۵,-۴۵] (ج): توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی بیضوی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]

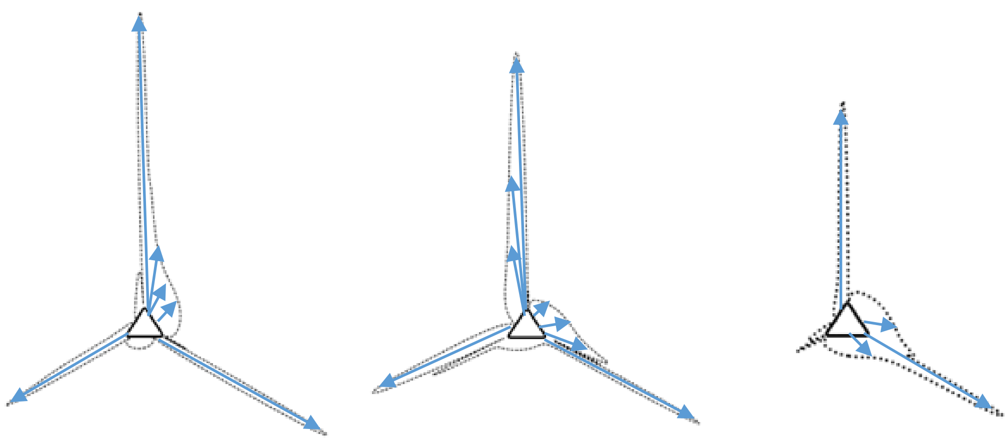
در گشودگی‌های مربعی و مثلثی به دلیل وجود نقاط تیز در گوشه‌ها مقدار ممان به شدت نه نسبت سایر نقاط افزایش می‌یابد .



(الف) (ب) (ج)

شکل ۵-۶۵ : (الف) :توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی مربعی برای چیدمان s[۰,۹۰] (ب) : توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی مربعی برای چیدمانs[۴۵,-۴۵] (ج): توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی مربعی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]

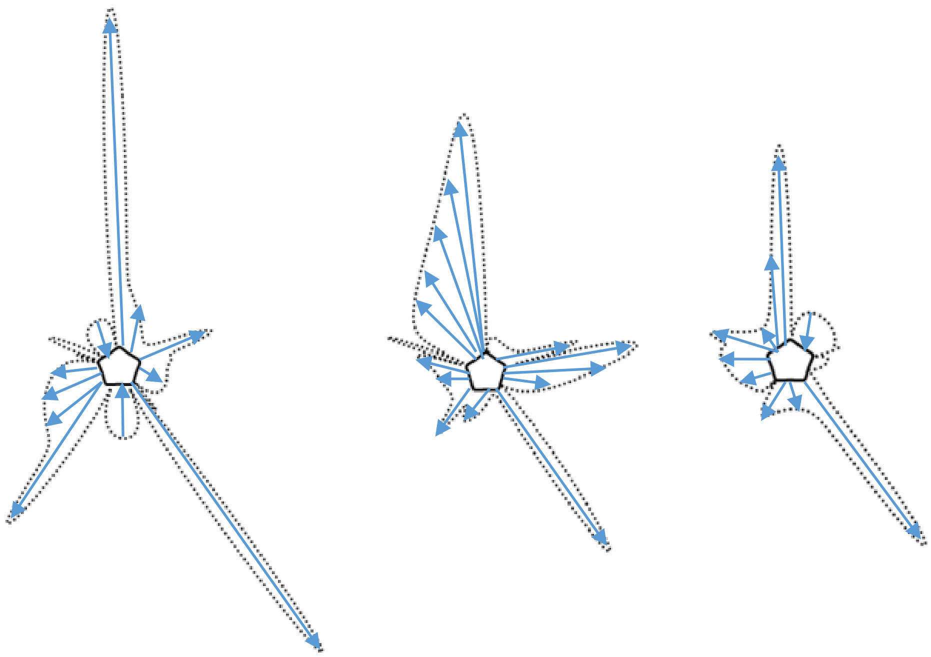
همچنین مطابق شکل‌های (۵-۶۵) و (۵-۶۶) مقدار بیشترین تمرکز ممان برای گشودگی مثلثی بیشتر از حالت مربعی است



(الف) (ب) (ج)

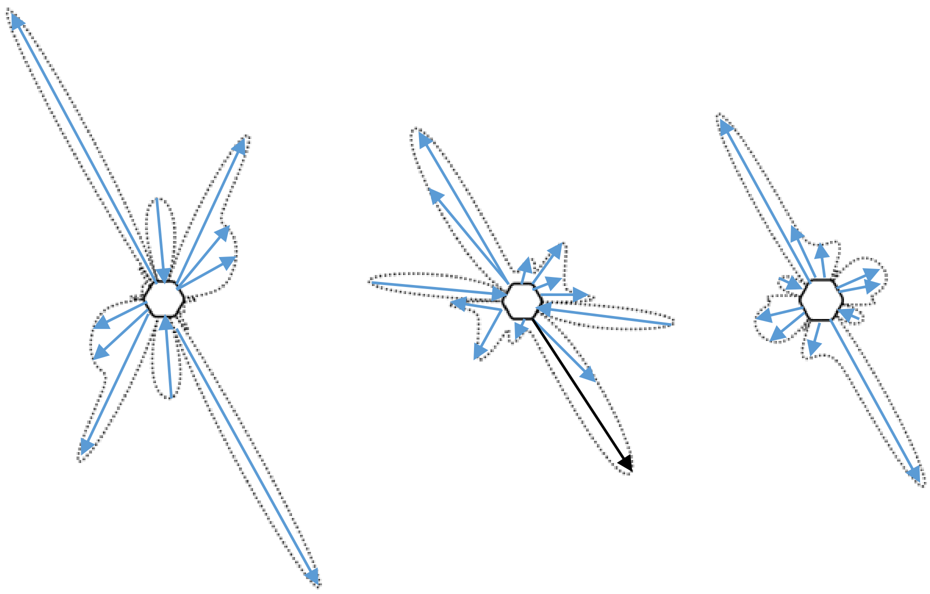
شکل۵-۶۶ : (الف) :توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی مثلثی برای چیدمان s[۰,۹۰] (ب) : توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی مثلثی برای چیدمانs[۴۵,-۴۵] (ج): توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی مثلثی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]

با توجه به شکل‌های (۵-۶۶) و(۵-۶۷) برعکس سایر گشودگی‌ها ،تقارنی در توزیع ممان دیده نمی-شود:



(الف) (ب) (ج)

شکل۵-۶۷ : (الف) :توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی پنج‌ضلعی برای چیدمان [۰,۹۰]s (ب) : توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی پنج‌ضلعی برای چیدمان[۴۵,-۴۵]s (ج): توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی پنج-ضلعی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]



(الف) (ب) (ج)

شکل ۵-۶۸ : (الف) :توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی شش‌ضلعی برای چیدمان [۰,۹۰]s (ب) : توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی شش‌ضلعی برای چیدمان[۴۵,-۴۵]s (ج): توزیع ممان خمشی در اطراف گشودگی شش-ضلعی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]

با توجه به کانتورهای به دست آمده مطابق داده‌های جدول (۵-۱۱) به مقایسه بیشترین ممان خمشی در اطراف انواع گشودگی‌ها پرداخته شده است:

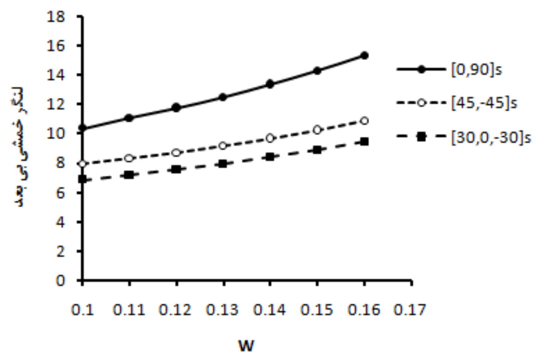
جدول ۵-۱۱ : مقادیر بیشترین ممان خمشی بی‌بعد در اطراف گشودگی‌ها

نوع گشودگی	[۰,۹۰]s	[۴۵,-۴۵]s	[۳۰,۰,-۳۰]s
دایروی	۸/۷۶۵ در ۸۱ درجه	۹/۲۴۴ در ۶۰ درجه	۵/۸۸ در ۷۱ درجه
مربعی	۱۴/۲۴ در ۹۵/۴ درجه	۱۰/۲۲ در ۹۳/۶ درجه	۸/۸۶ در ۹۵/۴ درجه
بیضوی	۴/۵۲ در ۱۶۷ درجه	۶/۷۹ در ۱۳۶ درجه	۴/۳۷ در ۳۲/۴- درجه
مثلثی	۲۰/۴۴ در ۴۵درجه	۱۷/۶۸ در ۰و۹۰ درجه	۱۲/۴۶ در ۳۰و۹۰ درجه
پنج‌ضلعی	۱۸/۲۴ در ۴۵ درجه	۱۲/۶ در ۰و۹۰ درجه	۹/۷۵ در ۷۰ درجه
شش‌ضلعی	۱۶/۳۸ در ۴۵ درجه	۹/۸۲ در ۰و۹۰ درجه	۹/۰۱ در ۳۰و۹۰ درجه

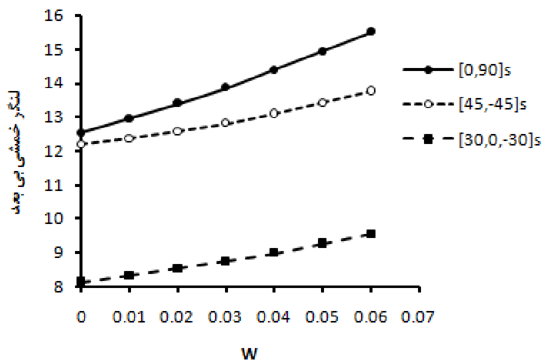
۵-۲-۱-۱ تأثیر پارامتر انحنای گشودگی

در این بخش به تغییرات ممان خمشی بی بعد بر حسب پارامتر انحنای گشودگی پرداخته می‌شود.

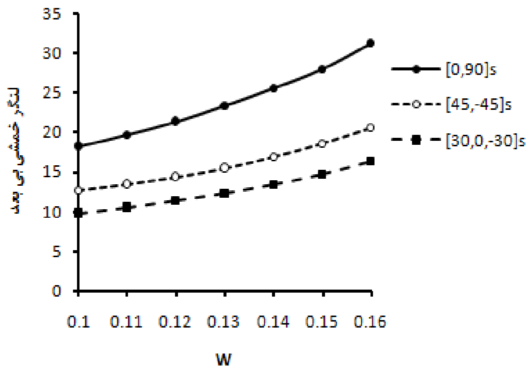
برای گشودگی‌های مربعی و بیضوی شیب تغییر ممان خمشی تقریبا خطی و صعودی است.



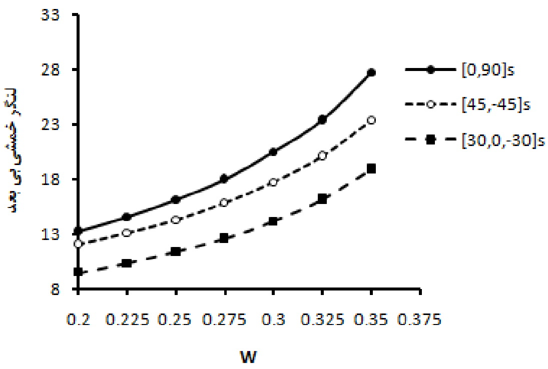
شکل ۵-۶۹ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی مربعی برحسب انحنای گشودگی (w)



شکل ۵-۷۰ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی بیضوی برحسب انحنای گشودگی (w)

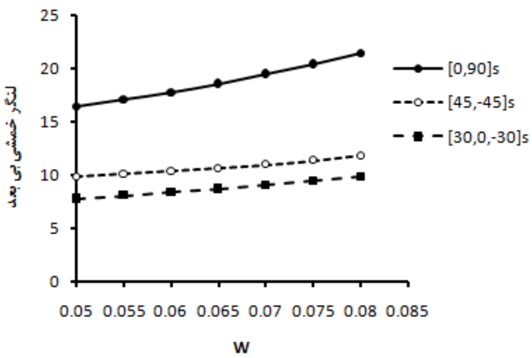


شکل ۵-۷۱ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی برحسب انحنای گشودگی (w)



شکل ۵-۷۲ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی مثلثی برحسب انحنای گشودگی (w)

برای گشودگی‌های مثلثی و پنج ضلعی شیب افزایش ممان خمشی بر حسب افزایش انحنا، بر خلاف دو شکل قبل، سهمی شکل است.



شکل ۵-۷۳ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی شش‌ضلعی برحسب انحنای گشودگی (w)

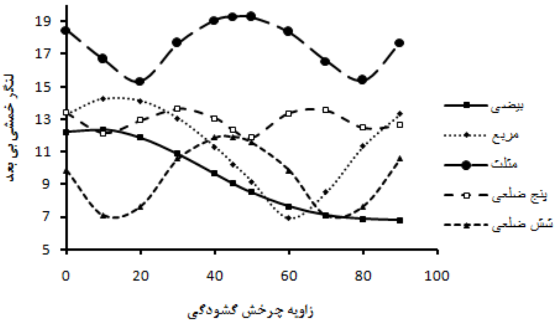
همچنین برای گشودگی شش‌ضلعی نیز روند افزایش ممان خمشی روندی خطی است.

با مشاهده نتایج به دست امده برای گشودگی های مربعی و مثلثی، کاهش محسوس ممان خمشی در اطراف گشودگی را شاهد هستیم.

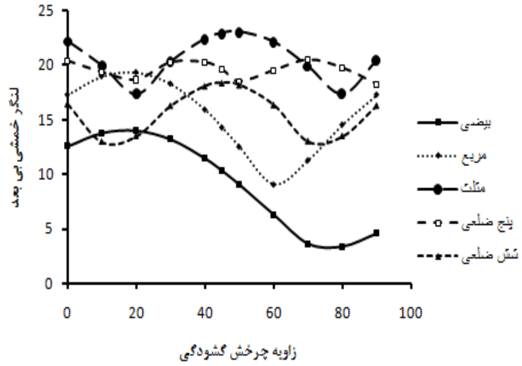
۵-۲-۱-۲ تأثیر پارامتر زاویه چرخش گشودگی

در این بخش به تاثیر تغییرات زاویه‌ی چرخش بر مقدار ممان خمشی بی‌بعد برای انواع گشودگی‌ها پرداخته شده است.

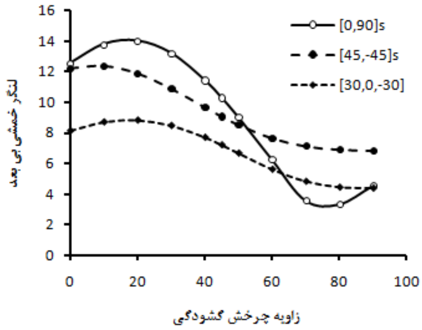
در شکل‌های (۵-۷۴) تا (۵-۸۱) مقایسه مقدار ممان بی بعد برای تمام گشودگی‌ها انجام شده است.



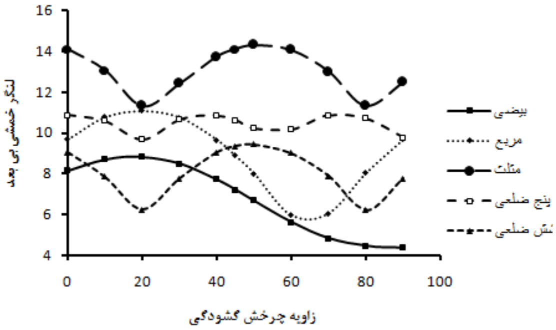
شکل ۵-۷۴ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای برحسب زاویه چرخش گشودگی s[۴۵,-۴۵]چیدمان



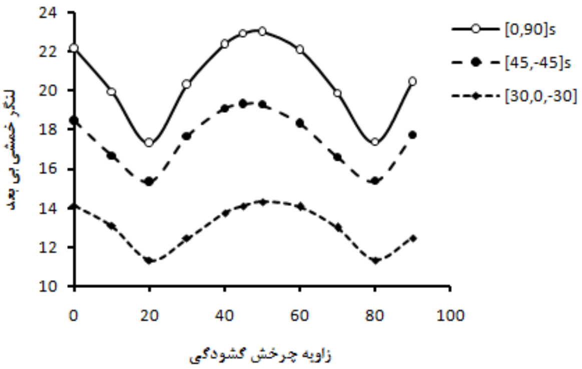
شکل ۵-۷۵ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برحسب زاویه چرخش گشودگی s[۰,۹۰]برای چیدمان



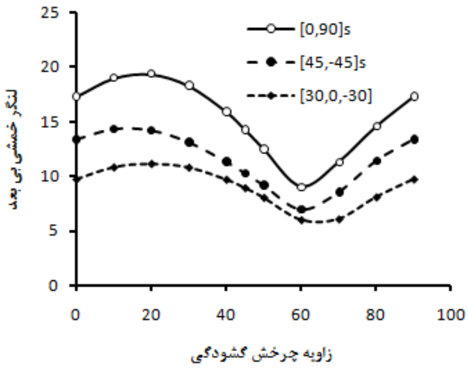
شکل ۵-۷۶ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی بیضوی برحسب زاویه چرخش گشودگی



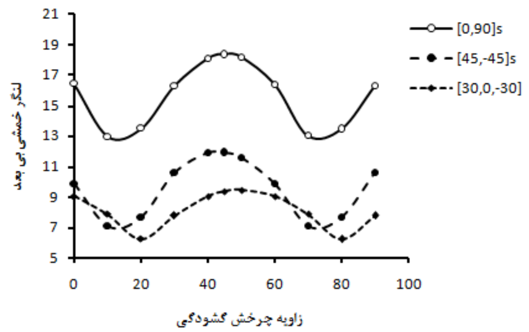
شکل ۵-۷۷ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای برحسب زاویه چرخش گشودگی s[۳۰,۰,-۳۰]چیدمان



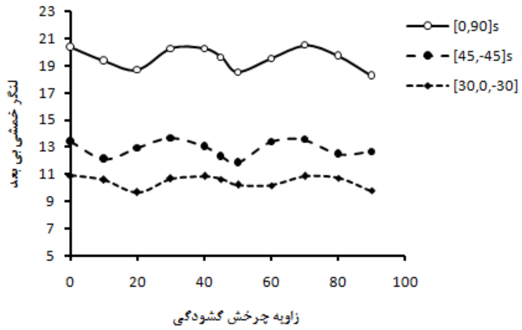
شکل ۵-۷۸ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی مثلثی برحسب زاویه چرخش گشودگی



شکل ۵-۷۹ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی مربعی برحسب زاویه چرخش گشودگی



شکل ۵-۸۰ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی شش‌ضلعی برحسب زاویه چرخش گشودگی



شکل ۵-۸۱ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی‌بعد برای گشودگی پنج‌ضلعی برحسب زاویه چرخش گشودگی

مقدار ممان خمشی به دست آمده از شکل ها (۵-۷۴) تا (۵-۸۱) در جدول (۵-۱۲) ارائه گردیده است.

جدول ۵-۱۲ : بررسی تغییرات ممان خمشی بی بعد بر حسب تغییر زاویه چرخش گشودگی

نوع گشودگی	[۰,۹۰]s	[۴۵,-۴۵]s	[۳۰,۰,-۳۰]s
مربعی	۸/۸۹ در ۶۰ درجه	۶/۹ در ۶۰ درجه	۵/۹۵ در ۶۵ درجه
بیضوی	۳/۳۱ در ۸۰ درجه	۶/۷۹ در ۹۰ درجه	۴/۳۷ در ۹۰ درجه
مثلثی	۱۷/۳۱ در ۲۰ درجه	۱۵/۳۱ در ۲۰ درجه	۱۱/۳ در ۲۰ درجه
پنج‌ضلعی	۱۸/۲۴ در ۹۰ درجه	۱۱/۸۴ در ۵۰ درجه	۹/۶۵ در ۲۰ درجه
شش‌ضلعی	۱۲/۹۲ در ۱۰ درجه	۷/۰۶ در ۱۰و۷۰ درجه	۷/۷۵ در ۳۰و۹۰ درجه

۵-۲-۱-۳ تأثیر پارامتر زاویه چرخش گشودگی در مقدار انحنای گشودگی بهینه

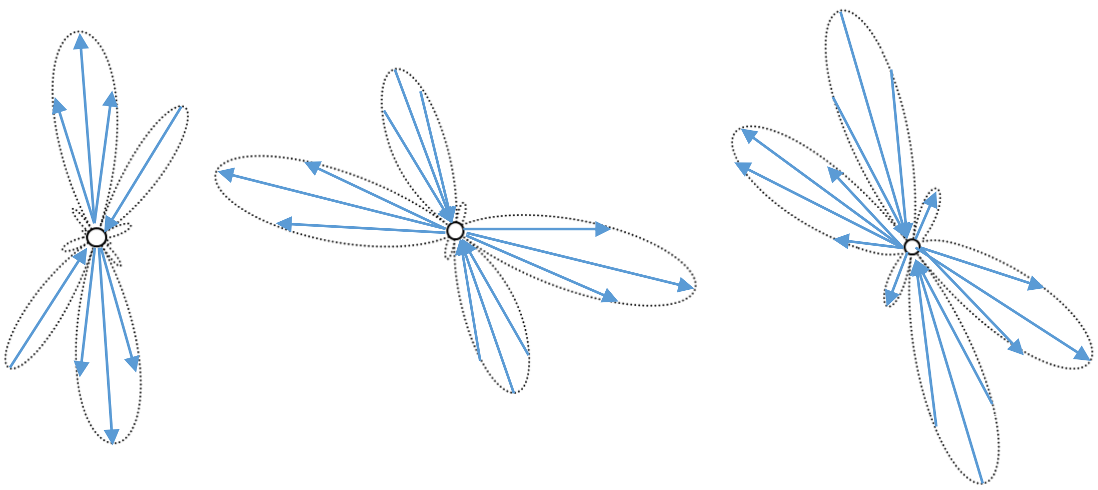
در این بخش با استفاده از مقدار انحنای بهینه، تاثیر زاویه‌ی چرخش گشودگی بر ممان خمشی در اطراف گشودگی را بررسی و نتایج را در جدول (۵-۱۳) ثبت کردیم.

جدول ۵-۱۳ : تأثیر زاویه چرخش گشودگی در مقدار بیشترین ممان خمشی بی‌بعد برای انحنای گشودگی بهینه

نوع گشودگی	[۰,۹۰]s	[۴۵,-۴۵]s	[۳۰,۰,-۳۰]s
مربعی	۶/۷۷ در ۶۰ درجه	۵/۶۶ در ۶۰ درجه	۴/۴۳ در ۶۰ درجه
بیضوی	۳/۳۱ در ۸۰ درجه	۶/۷۹ در ۹۰ درجه	۴/۳۷ در ۹۰ درجه
مثلثی	۱۱/۱۹ در۲۰و۸۰ درجه	۱۰/۷ در۲۰و۸۰ درجه	۷/۴۵ در۲۰و۸۰ درجه
پنجضلعی	۱۸/۲۴ در ۹۰ درجه	۱۱/۸۴ در ۵۰ درجه	۹/۶۵ در ۲۰ درجه
شش‌ضلعی	۱۲/۹۲ در ۱۰ درجه	۷/۰۶ در ۱۰و۷۰ درجه	۷/۷۵ در ۳۰و۹۰ درجه

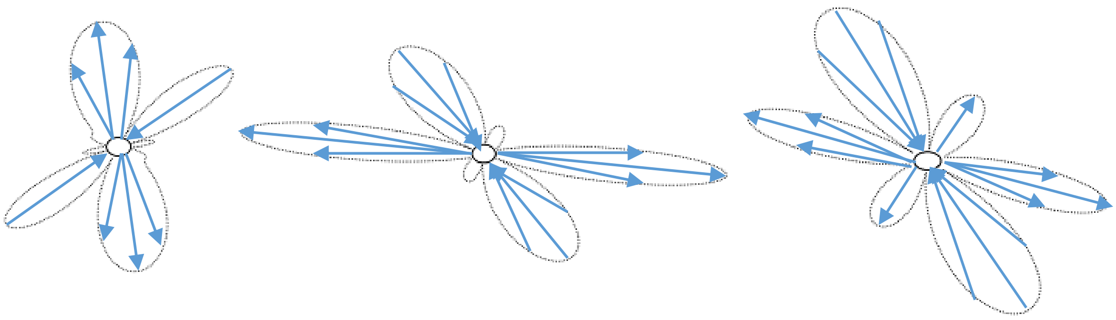
۵-۲-۲ توزیع تنش

در این بخش به تحلیل توزیع ممان در اطراف انواع گشودگی‌ها برای صفحه از جنس ماده گرافیت/اپوکسی پرداخته‌ایم. مطابق شکل (۵-۱) کانتور تنش برای گشودگی دایروی در هر سه حالت چیدمان [0,90]s،[45,-45]s و[30,0,-30]s رسم شده است. برای بی بعد سازی ،بیشترین تنش بدست آمده از حل را به بیشترین تنش ناشی از گشتاور قابل محاسبه از M' و ابعاد ورق تقسیم می‌کنیم . همچنین می توان با قرار دادن مقادیر ψ,φ بدست آمده از مرحله بی بعد سازی در بخش توزیع ممان ، در روابط (۴-۳) تنش های بی بعد را بدست آورد که نتیجه هر دو یکسان می‌باشد.



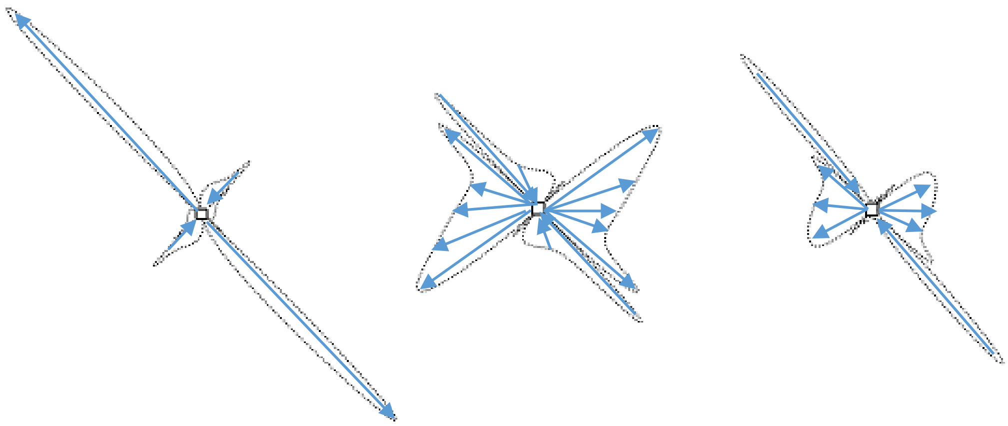
(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۸۲ : (الف) :توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی دایروی برای چیدمان [۰,۹۰]s (ب) : توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی دایروی برای چیدمان[۴۵,-۴۵]s (ج): توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی دایروی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]



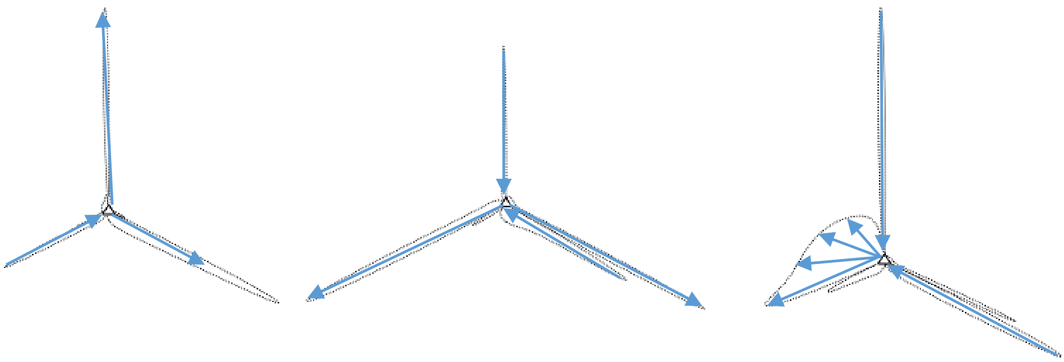
(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۸۳ : (الف) :توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی بیضوی برای چیدمان [۰,۹۰]s (ب) : توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی بیضوی برای چیدمان[۴۵,-۴۵]s (ج): توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی بیضوی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]



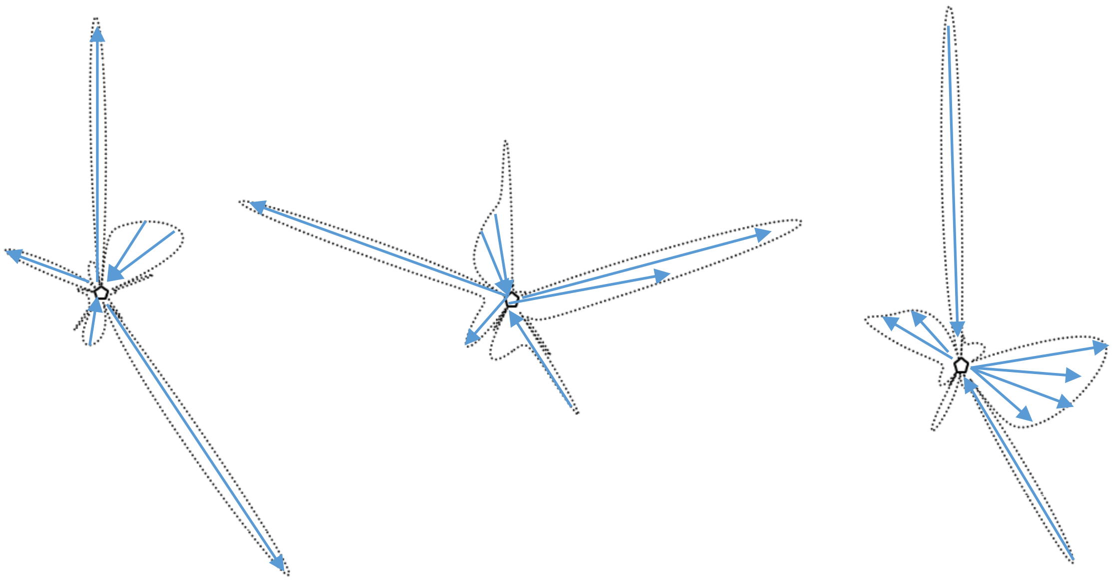
(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۸۴ : (الف) :توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی مربعی برای چیدمان [۰,۹۰]s (ب) : توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی مربعی برای چیدمان[۴۵,-۴۵]s (ج): توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی مربعی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]



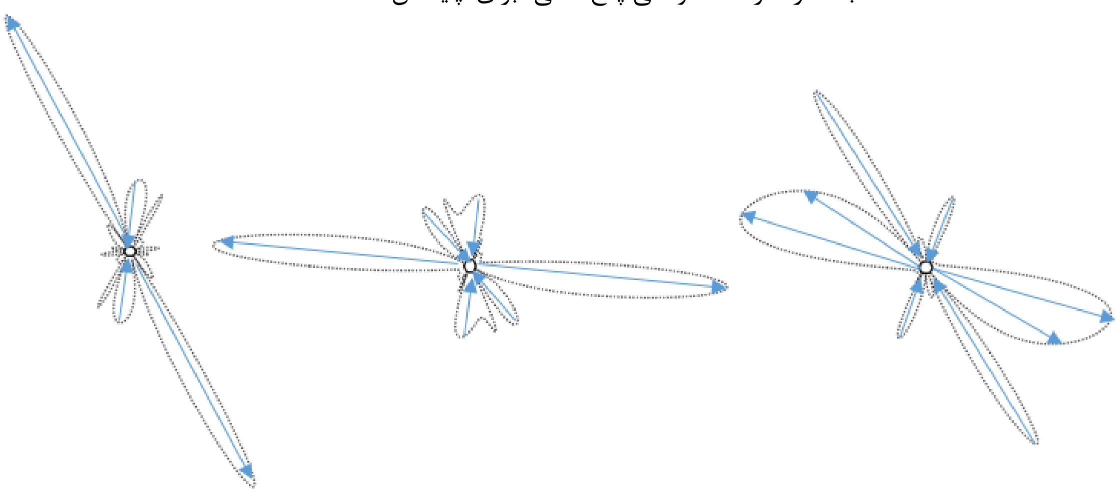
(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۸۵ : (الف) :توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی مثلثی برای چیدمان [۰,۹۰]s (ب) : توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی مثلثی برای چیدمان[۴۵,-۴۵]s (ج): توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی مثلثی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]



(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۸۶ : (الف) :توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی پنج‌ضلعی برای چیدمان s[۰,۹۰] (ب) : توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی پنج‌ضلعی برای چیدمانs[۴۵,-۴۵] (ج): توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی پنج‌ضلعی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]



(ج) (ب) (الف)

شکل ۵-۸۷ : (الف) :توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی شش‌ضلعی برای چیدمان s[۰,۹۰] (ب) : توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی شش‌ضلعی برای چیدمانs[۴۵,-۴۵] (ج): توزیع بیشترین تنش بی بعد در اطراف گشودگی شش‌ضلعی برای چیدمان[۳۰,۰,-۳۰]

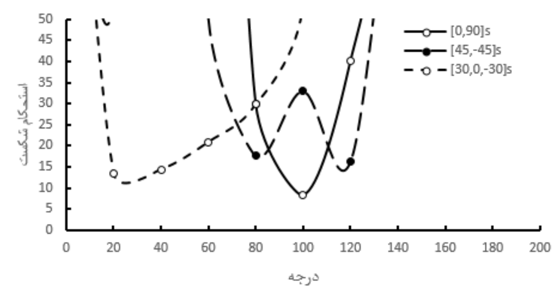
داده‌های مربوط به مقایسه بیشترین تنش‌های کششی و فشاری بی بعد ناشی از بار گذاری خمشی در گشودگی‌ها مطابق با نمودارهای (۵-۸۲) تا (۵-۸۷) در جدول (۵-۱۴) ارائه گردیده است.

جدول۵-۱۴ : مقایسه بیشترین تنش‌های کششی و فشاری بی بعد ناشی از بار گذاری خمشی در گشودگی‌ها

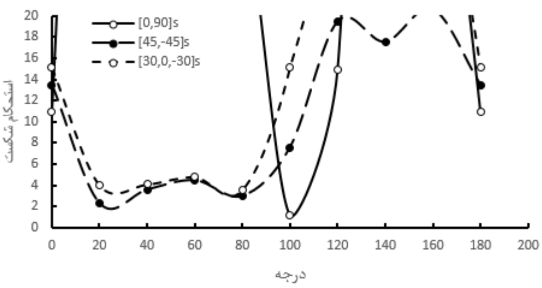
نوع گشودگی	[۰,۹۰]s	[۴۵,-۴۵]s	[۳۰,۰,-۳۰]s
دایره	+۲۱/۵ و -۱۶	+۲۹/۲ و -۱۹/۷	+۲۵/۹۲ و -۳۱/۴۷
بیضوی	+۱۳/۳ و -۱۸/۵	+۴۰ و -۱۸/۱۵	+۲۱/۱۴ و -۲۱/۷۴
مثلثی	+۴۵/۴۶ و -۲۲/۷	+۴۷/۸ و -۳۴/۷	+۲۶/۰۸ و -۵۵
پنج‌ضلعی	+۵۰/۲۷ و -۱۴/۴۵	+۴۳/۸۳ و -۲۰/۶	+۲۲/۵۸ و -۴۸/۱۴
شش‌ضلعی	+۴۸/۰۳ و -۱۲/۴۳	+۴۴/۴۷ و -۱۵/۷۵	+۲۹/۲۶ و -۳۲/۹۸
مربع	+۴۲/۷۴ و -۹/۹	+۲۰/۳ و -۲۱/۶۳	+۱۱/۱۵ و -۲۹/۵

۵-۲-۲-۱ استحکام شکست

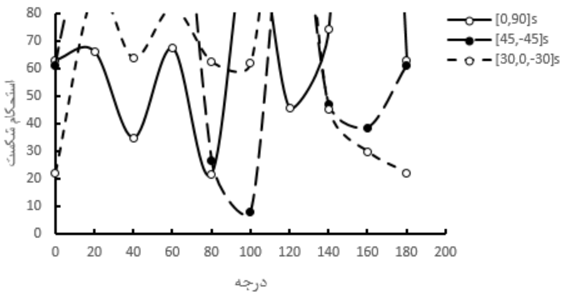
در این بخش نمودارهای استحکام برای همه گشودگی‌ها رسم شده است.



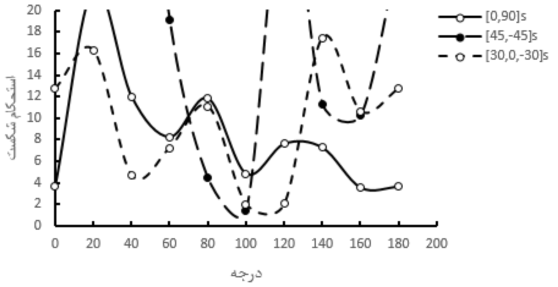
شکل۵-۸۸ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای Hvmگشودگی مربعی بر حسب نظریه



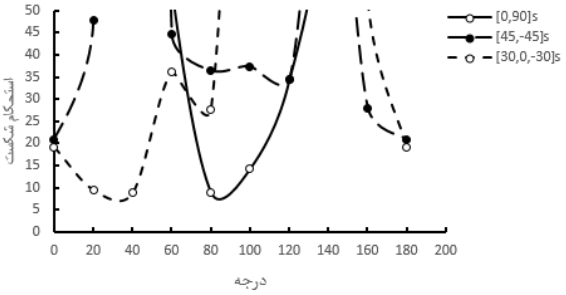
شکل۵-۸۹ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای بر حسب نظریه تسای و هاشین گشودگی مربعی



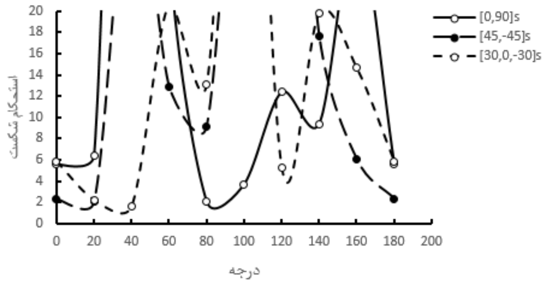
شکل۵-۹۰ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای Hvmگشودگی بیضوی بر حسب نظریه



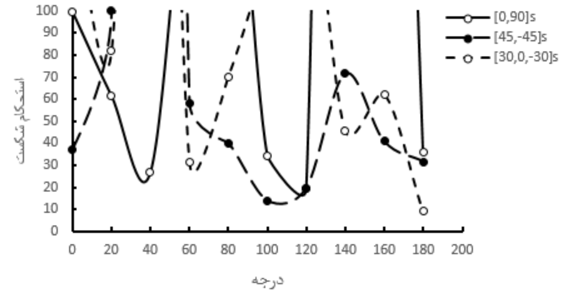
شکل۵-۹۱ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای بر حسب نظریه تسای و هاشین گشودگی بیضوی



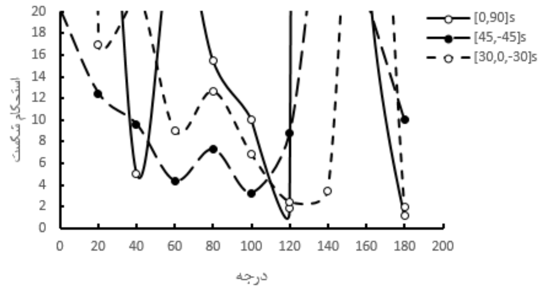
شکل۵-۹۲ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای Hvmگشودگی دایروی بر حسب نظریه



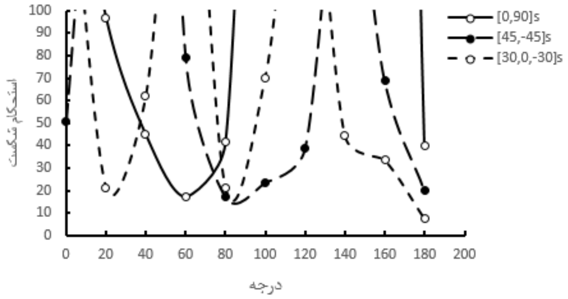
شکل۵-۹۳ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای بر حسب نظریه تسای و هاشین گشودگی دایروی



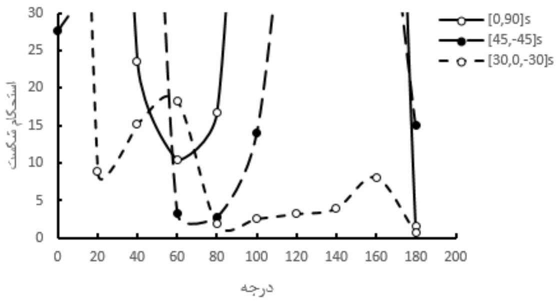
شکل۵-۹۴ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای Hvmگشودگی پنج‌ضلعی بر حسب نظریه



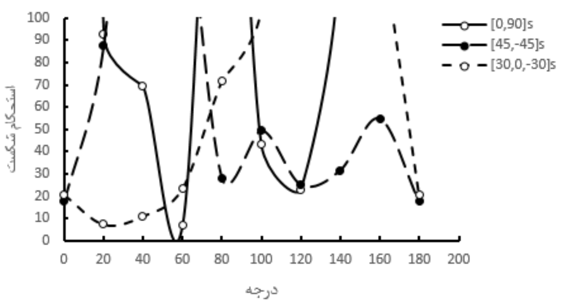
شکل۵-۹۵ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای بر حسب نظریه تسای و هاشین گشودگی پنج‌ضلعی



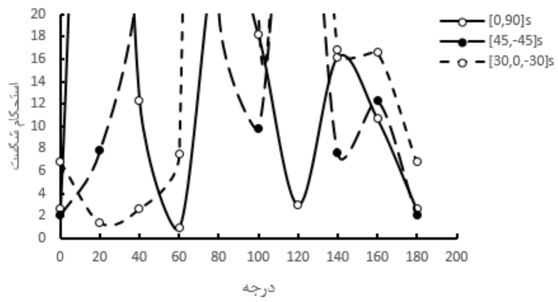
شکل۵-۹۶ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای Hvmگشودگی مثلثی بر حسب نظریه



شکل۵-۹۷ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای بر حسب نظریه تسای و هاشین گشودگی مثلثی



شکل۵-۹۸ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای Hvmگشودگی شش‌ضلعی بر حسب نظریه



شکل۵-۹۹ : بررسی تغییرات استحکام شکست برای بر حسب نظریه تسای و هاشین گشودگی شش‌ضلعی

داده‌های گرفته شده از نمودارهای (۵-۸۸) تا (۵-۹۹) به صورت مقادیر کم ترین استحکام تنش برای گشودگی‌های مختلف در حالت چیدمان‌های مختلف در جدول ۵-۱۵ ارائه گردیده است.

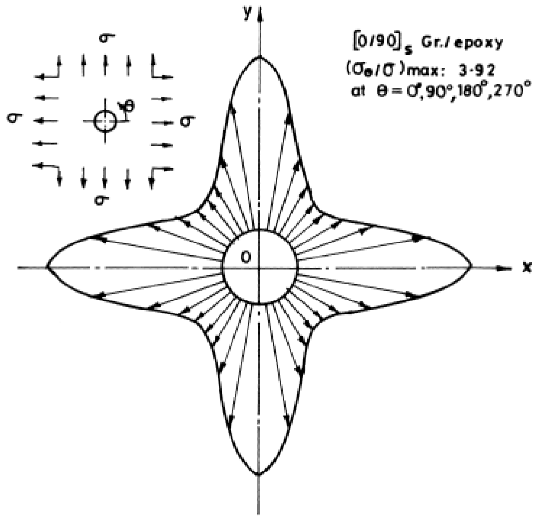
جدول ۵-۱۵ : مقایسه مقدار کم ترین استحکام شکست برای همه‌ی گشودگی‌ها

نوع گشودگی	چیدمان	hvm	Tsai
بیضی	[0,90]s	۲۱/۷ در ۸۰ درجه	۳/۵۵ در ۱۴۰درجه
	[45,-45]s	۷/۹۵ در ۱۰۰درجه	۱/۴۳ در ۱۰۰درجه
	[30,0,-30]s	۲۲ در ۰ درجه	۲/۰۱ در ۱۰۰درجه
مربع	[0,90]s	۸/۰۲ در ۱۰۰درجه	۱/۱۶ در ۱۰۰درجه
	[45,-45]s	۱۶/۲ در ۱۲۰درجه	۲/۲۸ در ۲۰درجه
	[30,0,-30]s	۱۳/۳ در ۲۰درجه	۳/۶ در ۸۰درجه
مثلث	[0,90]s	۱۷/۳ در ۶۰درجه	۱/۵۴ در ۱۸۰درجه
	[45,-45]s	۱۷در ۸۰درجه	۲/۸۳ در ۸۰درجه
	[30,0,-30]s	۷/۴۵ در ۱۸۰درجه	۰/۷۷ در ۱۸۰درجه
دایره	[0,90]s	۸/۹۸ در ۸۰درجه	۲/۰۲ در ۸۰درجه
	[45,-45]s	۲۰/۹ در ۰درجه	۲/۰۲ در ۲۰درجه
	[30,0,-30]s	۸/۷ در ۴۰درجه	/۶۴ ۱در ۴۰درجه
پنج‌ضلعی	[0,90]s	۱۹/۵۵ در ۱۲۰درجه	۱/۸۸ در ۱۲۰درجه
	[45,-45]s	۱۳/۹۴ در ۱۰۰درجه	۳/۲۷ در ۱۰۰درجه
	[30,0,-30]s	۹در ۱۸۰درجه	۱/۹۲ در ۱۰۰درجه
شش‌ضلعی	[0,90]s	۷/۱ در ۶۰درجه	۰/۹۲ در ۶۰درجه
	[45,-45]s	۱۷/۵۴ در ۰درجه	۲/۰۵ در ۰درجه
	[30,0,-30]s	۷/۴۳ در ۲۰درجه	۱/۴۱ در ۲۰درجه

مشاهده می‌شود در چیدمان سوم گشودگی مثلثی و همچنین حالت چیدمان اول گشودگی شش‌ضلعی مقدار استحکام تنش کوچک‌تر از ۱ می‌باشد؛ در نتیجه این لایه دچار شکست شده و کل ورق شکسته محسوب می‌شود.

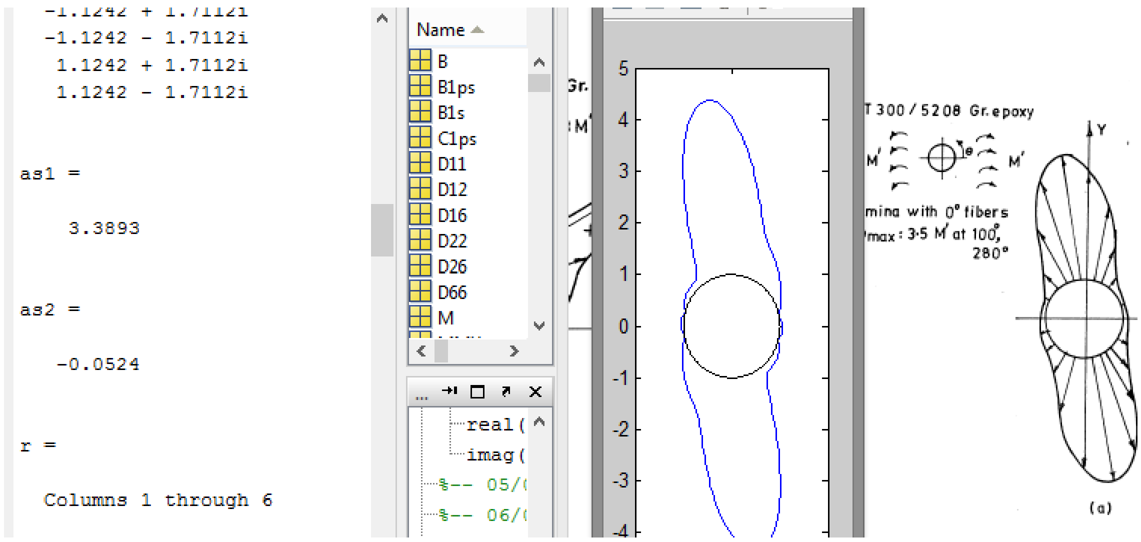
۵-۳ راستی آزمایی نتایج

با توجه به محدود بودن مقالات در زمینه توزیع تنش و ممان و همچنین به دلیل استفاده از نگاشت متفاوت، شکل‌های گشودگی این پایان‌نامه کمی متفاوت با شکل‌های نگاشت‌های قبلی در مقالات هستند؛ از این رو فقط به دو نمونه از نتایج گشودگی دایروی بسنده می‌کنیم :



شکل۵-۱۰۰: مربوط به مرجع [۳۴]

که کاملا با عدد ۳/۹۱۷ به دست آمده در پایان‌نامه مطابقت دارد و دیگری مقایسه توزیع ممان خمشی در تک لایه با گشودگی دایروی در مرجع است:

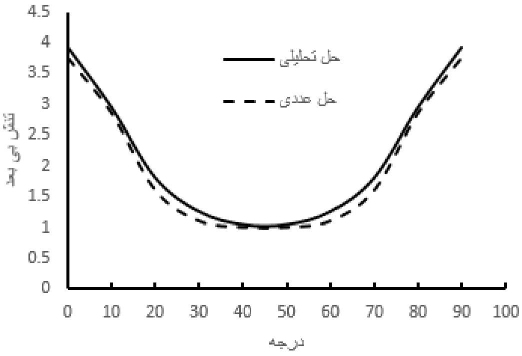


شکل ۵-۱۰۱ : مقایسه نتیجه خمش ورق تک لایه ۶۰ درجه با پایان نامه [۴۱]

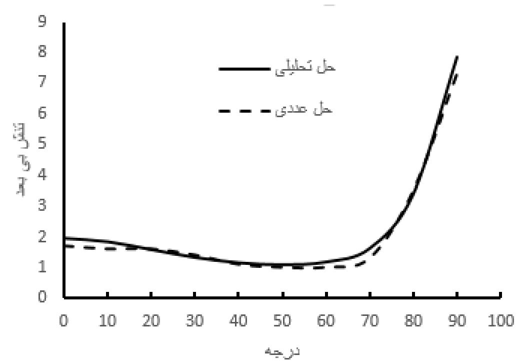
که عدد بدست آمده در پایان‌نامه ۳/۴ و در مقاله ۳/۵ است.

همچنین در ادامه نمودارهای مقایسه نتایج حل عددی و تحلیلی برای هر دو حالت تنش درون-صفحه‌ای و بیرون صفحه‌ای ارائه شده است که همگرایی خوبی در آنها مشاهده می‌شود:

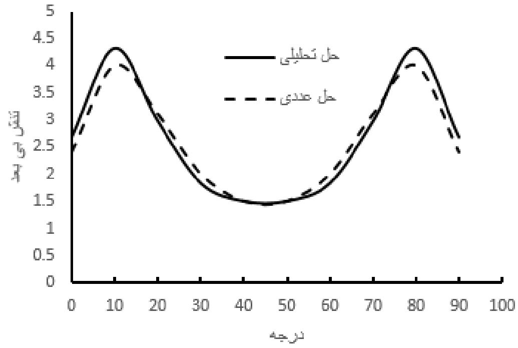
که در آنها شکل‌های (۵-۱۰۲) تا (۵-۱۰۷) مقایسه توزیع تنش بی‌بعد هستند :



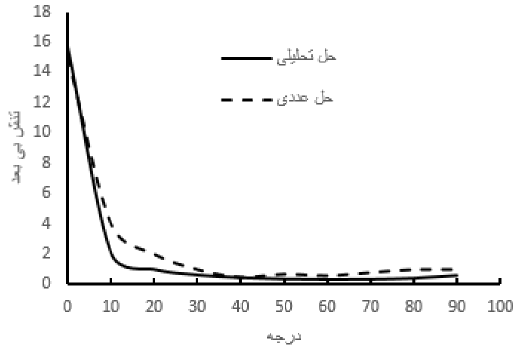
شکل ۵-۱۰۲: مقایسه تنش بی‌بعدبرای گشودگی دایروی



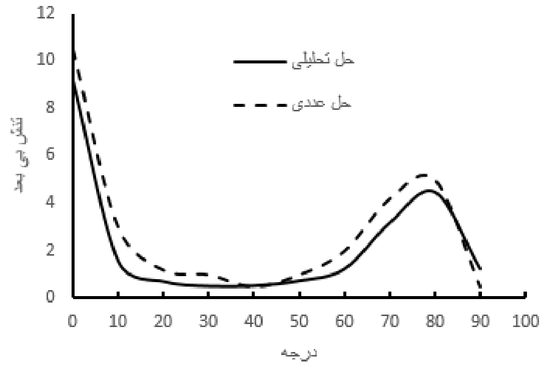
شکل ۵-۱۰۳: مقایسه تنش بی‌بعدبرای گشودگی بیضی



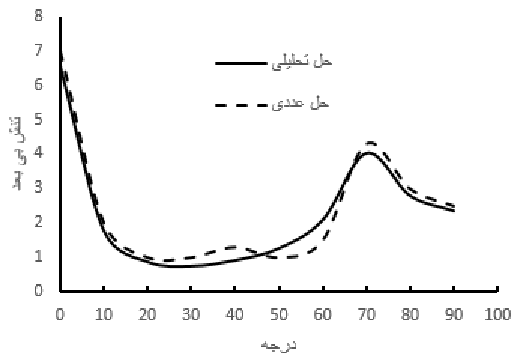
شکل ۵-۱۰۴: مقایسه تنش بی‌بعدبرای گشودگی مربع



شکل ۵-۱۰۵: مقایسه تنش بی‌بعدبرای گشودگی مثلث

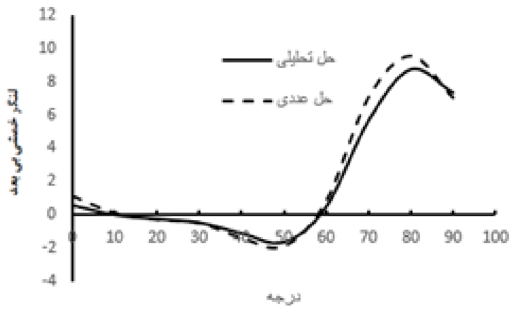


شکل ۵-۱۰۶: مقایسه تنش بی‌بعد برای گشودگی پنج-ضلعی

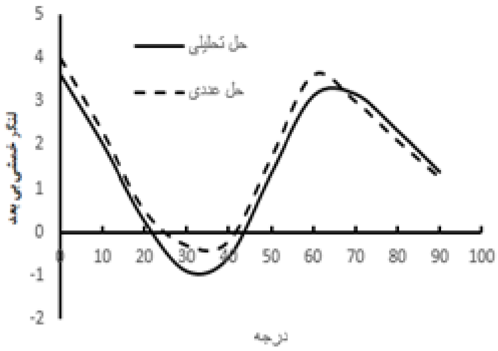


شکل ۵-۱۰۷: مقایسه تنش بی‌بعدبرای گشودگی شش-ضلعی

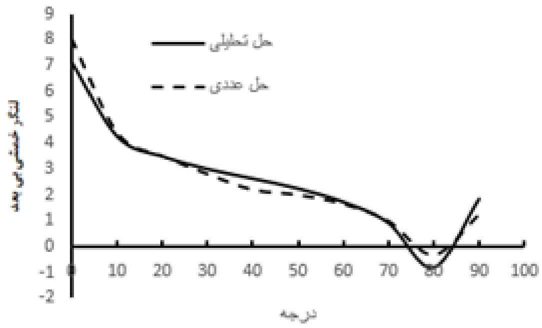
و نمودارهای (۵-۱۰۸) تا (۵-۱۱۳) مقایسه توزیع ممان خمشی بی‌بعد هستند :



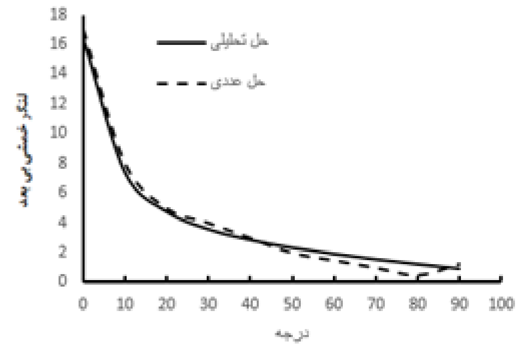
شکل ۵-۱۰۸: مقایسه ممان بی‌بعدبرای گشودگی دایروی



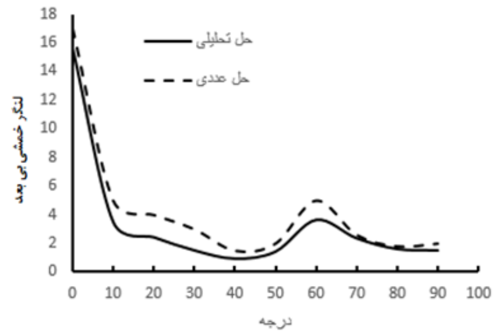
شکل ۵-۱۰۹: مقایسه ممان بی‌بعدبرای گشودگی بیضی



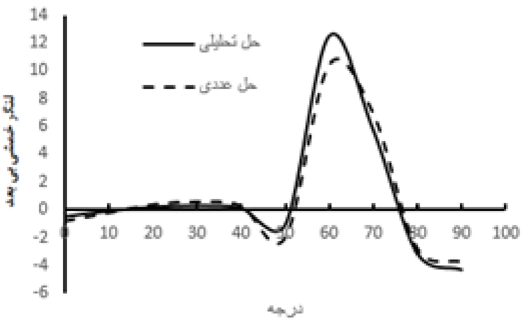
شکل ۵-۱۱۰: مقایسه ممان بی‌بعدبرای گشودگی مربع



شکل ۵-۱۱۱: مقایسه ممان بی‌بعدبرای گشودگی مثلث



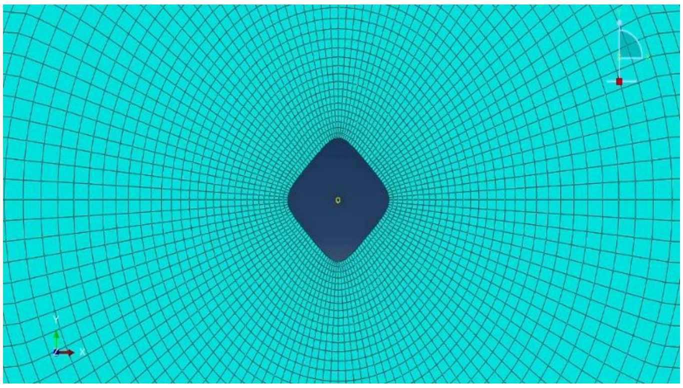
شکل ۵-۱۱۲: مقایسه ممان بی‌بعدبرای گشودگی پنج-ضلعی



شکل ۵-۱۱۳: مقایسه ممان بی‌بعدبرای گشودگی شش-ضلعی

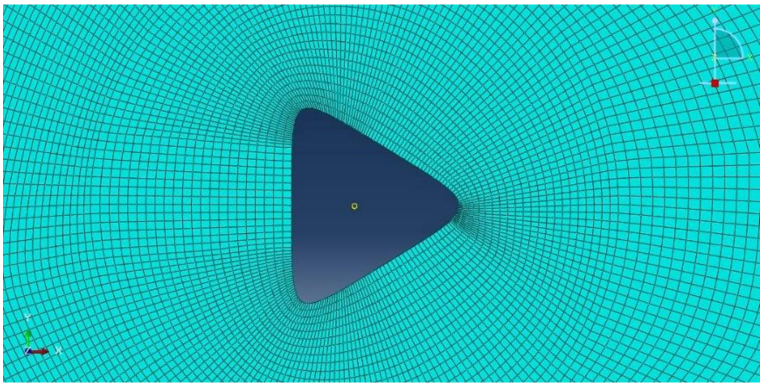
در شکل‌های (۵-۱۱۴) و (۵-۱۱۵) دو نمونه از مش بندی حل عددی با نرم آفزار آباکوس آورده شده است که کیفیت بالای مش بندی را نشان می‌دهد.

در شکل (۵-۱۱۴) برای گشودگی مربعی برای پوشش بهتر نقاط حساس از مش بندی خطی و با ۴ گره (مربعی) استفاده کردیم . تعداد مش به کار رفته با توجه به همگرایی نتایج در این شکل حدود ۱۱۰۰۰ در کل می‌باشد



شکل ۵-۱۱۴ : مش بندی حل عددی برای گشودگی مربعی

همچنین در شکل (۵-۱۱۵) برای گشودگی مثلثی باز هم برای پوشش بهتر نقاط حساس از مش بندی خطی و با ۴ گره (مربعی) استفاده کردیم . تعداد مش به کار رفته با توجه به همگرایی نتایج در این شکل حدود ۱۰۵۰۰ در کل می‌باشد



شکل ۵-۱۱۵ : مش بندی حل عددی برای گشودگی مثلثی

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادها

۶-۱ نتیجه گیری

در این پایان‌نامه توزیع تنش و ممان در اطراف گشودگی‌های مختلف در صفحات غیرهمسانگرد چندلایه متقارن با در نظر گرفتن پارامترهای مهمی از قبیل جنس و نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه چرخش گشودگی و شعاع انحنای گوشه گشودگی مورد مطالعه قرار گرفت.

همان‌طور که در فصل‌های گذشته به‌طور مفصل درباره تأثیر هر یک از پارامترهای موردبحث توضیح داده شد، می‌توان نتایج زیر را به‌طور مختصر بیان کرد:

۱- در گشودگی‌هایی که تعداد اضلاعشان فرد باشد، برای هر سه نوع چیدمان کمترین تنش بی‌بعد اطراف گشودگی، زمانی حاصل می‌شود که w کمترین مقدار خود را داشته باشد. به‌عبارتی با کاهش مقدار w، از مقدار تنش بی‌بعد نیز کاسته می‌شود تا جایی که $w=0$ شود؛ که در این حالت گشودگی به دایره تبدیل شده است. بنابراین برای هر سه حالت چیدمان لایه‌ها زمانی که انحنا گشودگی (w) کمترین مقدار را دارا باشد، تمرکز تنش به حداقل مقدار خود خواهد رسید.

۲- برخلاف گشودگی‌هایی که تعداد اضلاعشان فرد است، گشودگی‌های با تعداد اضلاع زوج لزوماً حالت بهینه‌ی پارامتر انحنای گوشه گشودگی در $w=0$ اتفاق نمی‌افتد؛ بلکه بسته به جنس ماده، نوع چیدمان لایه‌ها، زاویه بار و همچنین زاویه چرخش گشودگی، مقدار بهینه این پارامتر عددی مخالف صفر خواهد بود. به‌عبارتی در این شرایط تنش مطلوب لزوماً برای گشودگی دایروی ($w=0$) نخواهد بود.

۳- مقادیر تنش‌های به دست آمده از بارگذاری بیرون صفحه‌ای به دلیل خیز بیشتر ورق از مقادیر تنش به دست آمده از کشش بیشتر است

۴- استحکام ورق در حالت بارگذاری درون صفحه به دلیل تنش‌های کوچک تر نسبت به حالت بارگذاری بیرون صفحه‌ای ، کمتر می‌باشد.

۵- توزیع ممان بر عکس تنش برای مثلث و پنج ضلعی، متقارن نیست .

۶- کمترین استحکام شکست الزاما در نقطه‌ای بیشترین تنش را دارد رخ نخواهد داد.

۶-۲ پیشنهادها

۱- تحلیل تنش صفحات چندلایه دارای چند گشودگی تحت بارگذاری محوری.

۲- تحلیل تنش صفحات چندلایه متقارن دارای گشودگی تحت بارگذاری حرارتی و محوری به‌صورت همزمان.

۳- تحلیل تنش صفحات چندلایه متقارن پیزو الکتریک دارای گشودگی تحت بارگذاری هیدرواستاتیک.

۴- تحلیل تنش صفحات چندلایه نامتقارن دارای گشودگی تحت بارگذاری محوری.

۵- تحلیل تنش صفحات چندلایه نامتقارن دارای گشودگی تحت گشتاورهای خارجی.

۶- تحلیل تنش صفحات چندلایه متقارن دارای گشودگی تحت بارگذاری داخل گشودگی (پین لود).

۷- تحلیل تنش صفحات چندلایه متقارن دارای چند گشودگی خارج از محور تقارن صفحه تحت بارگذاری داخل گشودگی (پین لود).

مراجع

[1] Gao C. Y., Xiao J. Z. , Ke Y. L.; ***FE Analysis of Stress Concentrations in Composite Plates with Multiple Holes for Zigzag Multi-Fastened Joints***, *Materials Science Forum*, Vol. 770, pp.17-20, 2014.

[۲] محسنی شکیب م.؛ ***مکانیک سازه‌های مرکب***، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه امام حسین (ع)، تهران، ۱۳۸۵.

[۳] فریدون ع.؛ ***مکانیک و تحلیل مواد مرکب***، دانشگاه سمنان، سمنان، ۱۳۹۰.

[4] Muskhelishvili N. I.; ***Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity***, Second edition, Noordhooff, Netherlands, 1962.

[5] Savin G. N.; ***Stress Concentration Around Holes***, Pergamon Press, New York, 1961.

[6] Eshelby J. D., Read W. T., Shockley W.; ***Anisotropic Elasticity with Applications to Dislocation Theory***, *Acta Metallurgica*, Vol. 1, No. 3, pp. 251-259, 1953.

[7] Stroh A. N.; ***Dislocations and Cracks in Anisotropic Elasticity***, *Philosophical Magazine*, Vol. 3, No. 30, pp. 625-646, 1958.

[8] Lekhnitskii S. G.; ***Anisotropic Plates***, Second edition, Gordon and Breach Science, New York, 1968.

[9] Chen W. T.; ***Plane Thermal Stress at an Insulated Hole under Uniform Heat Flow in an Orthotropic Medium***, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 34, No. 1, pp. 133-136, 1967.

[10] Jong T. D.; ***Stresses Around Rectangular Holes in Orthotropic Plates,*** *Journal of Composite Materials*, Vol. 15, No. 3, pp. 311-328, 1981.

[11] Rajaiah K., Naik N. K.; ***Optimum Quasi-Rectangular Holes in Infinite Orthotropic Plates under In-Plane Loadings***, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 4a, pp. 891-892, 1983.

[12] Zimmerman R. W.; **Compressibility of Two-Dimensional Cavities of Various Shapes**, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 53, No. 3, pp. 500-504, 1986.

[13] Hwu C.; ***Anisotropic Plates with Various Openings under Uniform Loading or Pure Bending,*** *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, No. 3, pp. 700-706, 1990.

[14] Hufenbach W., Schaffer M., Herrmann A. S.; ***Calculation of the Stress and Displacement Field of Anisotropic Plates with Elliptical Hole***, *Ingenieur Arch*, Vol. 60, pp.507-517, 1990.

[15] Daoust J., Hoa S. V.; ***An Analytical Solution for Anisotropic Plates Containing Triangular Holes***, *Composite Structures*, Vol. 19, No. 2, pp. 107-130, 1991.

[16] Rezaee-pazhand J., Jafari M.; ***Stress Analysis of Perforated Composite Plates, Composite Structures***, Vol. 71, No. 4, pp. 463-468, 2005.

[17] Ukadgaonker V. G., Rao D. K. N.; ***A General Solution for Stresses Around Holes in Symmetric Laminates under In-Plane Loading***, *Composite Structures*, Vol. 49, No. 3, pp. 339-354, 2000.

[18] Romeo G.; ***Analytical Behavior of Laminates with Rectangular Opening under Biaxial Tension, Compression and Shear Loads***, *Journal of Composite Materials*, Vol. 35, No. 8, pp. 639–64, 2001.

[19] Asmar G. H., Jabbour T.G.; ***Stress Analysis of Anisotropic Plates Containing Rectangular Holes***, *International journal of mechanics and solids*, Vol. 2, No. 1, pp. 59-84, 2007.

[20] Rezaee-pazhand J., Jafari M.; ***Stress Analysis of Composite Plates with Quasi-Square Cut-Out Subjected to Uniaxial Tension***, *Journal of Reinforced plastics and composites*, Vol. 29, No. 13, pp. 2015-2026, 2010.

[21] Whitney J. M., Nuismer R. J.; ***Stress Fracture Criteria for Laminated Composites Containing Stress Concentrations,*** Journal of Composite Materials, Vol. 8, No. 3, pp. 253-265, 1974.

[22] Kalakci M. Yasar, Arsalan H. M.; ***Stress Concentrations of Symmetrically Laminated Composite Plates Containing Circular Holes***, Iranian Journal of Science & Technology, Vol. 30, 2006.

[23] Dharmendra S. Sharma, Member,IAENG; ***Stress Concentration Around Circular/Elliptical/Triangular Cut-outs in Infinite Composite Plate***, Proceedings of the World Congress on Engineering, Vol. Ш, London, U.K., 2011.

[24] Rybicki E. F., Schmueser D.; ***Effect of Stacking Sequence and Lay-up Angle on Free Edge Stresses around a Hole in a Laminated Plate under Tension***, *Journal of Composite Materials*, Vol. 12, No. 3, pp. 300-313, 1978.

[25] Vellaichamy S., Prakash B. G., Brun S.; ***Optimum Design of Cutouts in Laminated Composite Structures***, *Computers and Structures*, Vol. 31, No. 3, pp. 241-246, 1990.

[26] Hufenbach W., Grüber B., Gottwald R., Lepper M.; B. Zhou***, Analytical and experimental analysis of stress concentration in notched multilayered composite with finite outer boundaries***, *Mechanics of Composite Materials*, Vol. 46, No. 5, pp. 531-538, 2010.

[27] Hufenbach W., Grüber B., Gottwald R., Lepper M., Zhou B.; ***An analytical method for the determination of stress and strain concentrations in textile-reinforced GF/PP composites with elliptical cutout and a finite outer boundary and its numerical verification***, *Archive of Applied Mechanics,* Vol. 83, No. 1, pp. 125–135, 2013.

[28] Becker W.; ***Complex Method for the Elliptical Hole in an Unsymmetric Laminate***, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 63, No. 3, pp. 159-169, 1993.

[29] Ukadgaonker V. G., Rao D. K. N.; ***A General Solution for Stress Resultants and Moments around Holes in Unsymmetric Laminates***, *Composite Structures*, Vol. 49, No. 1, pp. 27-39, 2000.

[30] Chen P., Shen Z.; ***Stress Resultants and Moments around Holes in Unsymmetrical Composite Laminates Subjected to Remote Uniform Loading***, *Mechanics Research Communications,* Vol. 30, No. 1, pp. 79-86, 2003.

[31] Madenci E., Ileri L.; ***Analysis of Pin-Loaded Holes in Composite Laminates under Combined Bearing- Bypass and Shear***, *International Journal of Solids Structures,* Vol. 32, No. 14, pp. 2053-2062, 1995.

[32] Goodier J. N.; ***The Influence of Circular and Elliptical Holes on the Transverse Flexure of Elastic Plates,*** Phil Mag, Ser. 7, Vol. 22, pp. 69-80, 1936.

[33] Reissner E.; ***The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates,*** *journal of Applied Mechanics*, Trans ASME, Vol. 67, pp. A-69-77, 1945.

[34] Naghdi P. M.; ***Effect of Elliptic Holes on the Bending of Thick Plates,*** J. Appl. Mech., Trans ASME, Vol. 22, pp. 89-94, 1955.

[35] Lee C. W, Conlee G. D.; ***Bending and Twisting of Thick Plates with a Circular Hole***, J. Franklin Inst., Vol. 285, No. 5, pp. 377-385, 1968.

[36] Chen P.S., Archer R. R.; ***Stress Concentration Factors Due to Bending of a Thick Plate with a Circular Hole,*** Ingenieur Archiv, Vol. 59, pp. 401-11, 1989.

[37] Lekhnitskii S. G.; ***Anisotropic Plates,*** Gordon and Breach, New York, 1968.

[38] Savin G. N.; ***Stress Concentration Around Holes***, Pergamon Press, New York, 1961.

[39] Hwu C.***; Anisotropic Plates with Various Openings under Uniform Loading or Pure Bending***. *journal of Applied Mechanics*, Trans ASME, Vol. 57, pp. 700-706, 1990.

[۴۰] مشـیری اول ب.؛ ***بررسی توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های غیردایروی در صفحات چندلایه متقارن،*** پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تابستان ۱۳۹۳.

[۴۱] حکم‌آبادی م. ر.؛ ***تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی،*** پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تابستان ۱۳۹۳.

[42] Aurtar K. Kaw.; ***Mechanics of Composite Materials,*** 2th ed, Taylor & Francis, 2006.

[43] Jones Robert M..; ***Mechanics of Composite Materials,*** 2th ed, Taylor & Francis, 1999.

[44] Ukadgaonker V. G., Rao D. K. N.; ***A General Solution for Moments Around Holes in Symmetric Laminate,*** *Composite Structures*, Vol. 49, No. 1, pp. 243-262, 2000.

Abstract

The static analysis of mid-plane symmetric laminates uncouples into two different problems such as pure in-plane deformation with pure in-plane forces and the other, out-of-plane deformation with bending and transversal forces. The survey of literature revealed that very few solutions are available for bending of anisotropic plates containing holes.

In this Thesis, by expanding the Lekhnitiskii's analytical solution, the stress distribution around holes of any shape in symmetric laminated plates is investigated.

In addition to providing a general solution for the moments distribution around holes in symmetric laminated plates under remotely applied bending moments individually, for the very first time, both of the maximum stress distribution around holes and failure strength analysis in symmetric laminates for in-plane and out-of- plane loading, separately has been done and important results have been recorded. In order to extend the Lekhnitiskii's analytical method for stress analysis of perforated symmetric laminates with holes, by means of conformal mapping, the area external to the hole can be represented by the area inside the unit circle.

In this Thesis, we tried to study the effect of different parameters such as stacking sequence, rotation angle of hole and bluntness on stress and moments distribution around holes. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results. The analytical results are in good agreement with the numerical results. The stress and moments distributions around circular, elliptical, Triangular, square, pentagonal and hexagonal holes has obtained. The results obtained clearly revealed that appropriate selection of bluntness and rotation angle of hole and with large number of ply groups, can decrease stress concentration.

Keywords: symmetric laminates, analytical solution, in-plane and out-of-plane loading, stress distribution, moments distribution, failure strength analysis and conformal mapping

University of Shahrood

Faculty of Mechanic

The analysis of stress and moment distributions around holes in symmetric laminates under tension and bending loading

Majid Sheybani

Supervisors:

Dr.Mahmood Shariati

Dr.Hamidreza Ipakchi

Advisor:

Dr.Mohammad Jafari

February 2015