دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

دانشجو:

محمدرضا حکم‌آبادی

اساتید راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهتویی

دکتر محمد جعفری

ماه و سال انتشار:

شهریورماه ۱۳۹۳

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

دانشجو: محمدرضا حکم‌آبادی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قنّاد کهتویی

دکتر محمد جعفری

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه‌ی کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار:

بهمن‌ماه ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

فرم صورتجلسه دفاع پایان‌نامه تحصیلی دوره‌ی کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای محمدرضا حکم‌آبادی رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی که در تاریخ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است.

قبول (با درجه : .... امتیاز ....) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره‌ی کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر مهدی قنّاد کهتویی		
۲ـ استاد راهنما	دکتر محمد جعفری		
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر هادی قادری		
۴ـ استاد ممتحن			
۵ ـ استاد ممتحن			

تأیید رئیس دانشکده

گروه طراحی کاربردی

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آقای محمدرضا حکم‌آبادی

تحت عنوان:

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

در تاریخ .... توسط کمیته‌ی تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه‌ی .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی قنّاد کهتویی		نام و نام خانوادگی:	
نام و نام خانوادگی: دکتر محمد جعفری		نام و نام خانوادگی:	

اساتید داور	امضاء	نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی گردویی		نام و نام خانوادگی: دکتر هادی قادری	
نام و نام خانوادگی: دکتر محمد باقر نظری			

تقدیم

اگر قابل باشد،

تقدیم به پدر و مادرم.

تشکر و قدردانی

سپاس خدای را که سخنوران، در ستودن او بمانند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و درود بر محمد (ص) و خاندان پاک و مطهرش، هم آنان که وجودمان وام‌دار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز.

بر حسب وظیفه و از باب (مَنْ لَمْ یَشْکُرِ الْمُنْعِمَ مِنَ الْمَخْلُوقِینَ لَمْ یَشْکُرِ اللَّهَ عَزَّ وَ جَلَّ):

از پدر و مادرم و همچنین تمامی اعضای خانواده‌ام که همواره در تمامی مراحل زندگی تکیه‌گاه من بوده و با حمایت‌های معنوی و مادی‌شان زمینه‌ی رشد و پیشرفت مرا فراهم کرده‌اند؛

از اساتید عزیز و شایسته؛ جناب آقای دکتر مهدی قنّاد و جناب آقای دکتر محمد جعفری که در کمال سعه‌صدر، با حسن خلق و فروتنی، زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را بر عهده گرفتند؛

از اساتید فرزانه و دلسوز حجت‌الاسلام و المسلمین جناب آقای امینیان و جناب آقای دکتر گردویی که رهنمودهایشان در طول دوران تحصیلم، همواره موجب دلگرمی بوده است؛

و در انتها از تمامی دوستان به ویژه جناب آقای مهندس محمد پرهیزکار یعقوبی، مهندس آرش محمدی و مهندس سید ناصر مستشیری که در تدوین این اثر مرا یاری نموده‌اند؛

صمیمانه تشکر می‌کنم و از خداوند منان سلامت و سعادت ایشان را خواستارم.

محمدرضا حکم‌آبادی

تعهدنامه

اینجانب محمدرضا حکم‌آبادی دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک-گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، تحت راهنمایی دکتر مهدی قنّاد کهتویی و دکتر محمد جعفری متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در پژوهش پیش‌رو با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی به استخراج معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای ارتوتروپیک جدار ضخیم چرخان، تحت بارگذاری مکـانیکی و حرارتـی در حالت پایا پرداخته می‌شود. تنش‌های شعاعی، محیطی، محوری و فـون میـزس و همچنـین جابه‌جایی شعاعی برای استوانه با شرایط انتهایی الف- دو سر باز (تنش صفحه‌ای) و ب- دو سر بسته‌ی مقید (کرنش صفحه‌ای) تحت بارگذاری‌های فشـاری، چرخشـی و حرارتـی بـه صـورت تحلیلی (حل دقیق) به‌دست می‌آید و با نتایج به‌دست آمده از روش اجزای محدود مقایسه می-گردد. همچنین به منظور مطالعه‌ی جامع‌تر، عـلاوه بـر تحلیـل اسـتوانه تحـت بارگـذاری‌هـای ترکیبی (فشاری-چرخشی) و (فشاری-چرخشی-حرارتی)؛ نتایج حاصل از بارگذاری‌های خـالص فشاری، چرخشی و حرارتی نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در ادامه برای مـاده‌ی مـورد مطالعـه در این پژوهش، ۶ حالت ناهمسانگردی در نظر گرفته می‌شود و نتـایج حاصـل از توزیـع جابـه-جایی و تنش‌ها در این ۶ حالت مورد بررسی قرار می‌گیرد. بررسی نتایج حاکی از آن اسـت کـه جهت ناهمسانگردی، تأثیر بسزایی در توزیع تنش‌ها و جابه‌جـایی بـرای مـاده‌ی مـورد مطالعـه دارد.

واژگان کلیدی: حل ترموالاستیک، استوانه‌ی جدار ضـخیم، مـاده‌ی ارتوتروپیـک، مـاده‌ی ناهمسـانگرد، نظریـه‌ی الاستیسـیته‌ی مسـتوی (PET)، روش اجـزای محـدود (FEM).

مطالب

شکل‌ها

جداول

علائم

$u_r,\ u_\theta,\ u_x$	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در مختصات کلی (r,θ,x)
r	فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع استوانه یا مختصه‌ی شعاعی)
R	فاصله‌ی سطح میانی پوسته از محور تقارن (در پوسته‌ی استوانه‌ای، شعاع صفحه‌ی میانی استوانه)
z	فاصله‌ی هر نقطه از سطح میانی پوسته
u_r^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی
u_r^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی
u_r^2	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی دو جابه‌جایی شعاعی
$\vec{\mathrm{U}}$	میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\overrightarrow{\mathrm{U}^0}$	مؤلفه‌های مرتبه‌ی صفر میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$\overrightarrow{\mathrm{U}^1}$	مؤلفه‌های مرتبه‌ی یک میدان جابه‌جایی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_x	جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_x^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_x^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محوری در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_θ	جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_θ^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_θ^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی محیطی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_z	جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_z^0	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی صفر جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
U_z^1	مؤلفه‌ی مرتبه‌ی یک جابه‌جایی شعاعی در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
$u_1,\ u_2,\ u_3$	مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در مختصات اصلی (1,2,3)
$\varepsilon_{11},\ \varepsilon_{22},\ \varepsilon_{33}$ $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_3$	مؤلفه‌های کرنش نرمال در مختصات اصلی (1,2,3)
$\gamma_{12},\ \gamma_{13},\ \gamma_{23}$ $\gamma_{21},\ \gamma_{31},\ \gamma_{32}$	مؤلفه‌های کرنش برشی در مختصات اصلی (1,2,3)
$\varepsilon_1^T,\ \varepsilon_2^T,\ \varepsilon_3^T$	مؤلفه‌های کرنش نرمال حرارتی در مختصات اصلی (1,2,3)
$\sigma_{11},\ \sigma_{22},\ \sigma_{33}$ $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$	مؤلفه‌های تنش نرمال در مختصات اصلی (1,2,3)
$\sigma_{12},\ \sigma_{13},\ \sigma_{23}$ $\sigma_{21},\ \sigma_{31},\ \sigma_{32}$	مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات اصلی (1,2,3)

$\tau_{12},\ \tau_{13},\ \tau_{23}$ $\tau_{21},\ \tau_{31},\ \tau_{32}$	مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات اصلی (1,2,3)
$E_1,\ E_2,\ E_3$	مدول کشسانی (الاستیسیته) در مختصات اصلی (1,2,3)
$\nu_{12},\ \nu_{13},\ \nu_{23}$ $\nu_{21},\ \nu_{31},\ \nu_{32}$	ضرایب پواسون در مختصات اصلی (1,2,3)
$G_{21},\ G_{31},\ G_{32}$ $G_{12},\ G_{23},\ G_{23}$	مدول برشی در مختصات اصلی (1,2,3)
$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$	ضرایب انبساط حرارتی در مختصات اصلی (1,2,3)
σ_i	حرف اختصاری بیانگر مؤلفه‌های تنش
ε_j	حرف اختصاری بیانگر مؤلفه‌های کرنش
ε_i^T	حرف اختصاری بیانگر مؤلفه‌های کرنش حرارتی
C	ماتریس سفتی
C_{ij}	مؤلفه‌های ماتریس سفتی
S	ماتریس نرمی
S_{ij}	مؤلفه‌های ماتریس نرمی
W	انرژی ذخیره شده در مواد مرکب کشسان خطی
$\varepsilon_r,\ \varepsilon_\theta,\ \varepsilon_x$	مؤلفه‌های کرنش نرمال در مختصات کلی (r,θ,x)
$\gamma_{r\theta},\ \gamma_{rx},\ \gamma_{\theta x}$ $\gamma_{\theta r},\ \gamma_{xr},\ \gamma_{x\theta}$	مؤلفه‌های کرنش برشی در مختصات کلی (r,θ,x)
$\varepsilon_r^T,\ \varepsilon_\theta^T,\ \varepsilon_x^T$	مؤلفه‌های کرنش نرمال حرارتی در مختصات کلی (r,θ,x)
$\sigma_r,\ \sigma_\theta,\ \sigma_x$	مؤلفه‌های تنش نرمال در مختصات کلی (r,θ,x)
$\sigma_{r\theta},\ \sigma_{rx},\ \sigma_{\theta x}$ $\sigma_{\theta r},\ \sigma_{xr},\ \sigma_{x\theta}$	مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات کلی (r,θ,x)
$\tau_{r\theta},\ \tau_{rx},\ \tau_{\theta x}$ $\tau_{\theta r},\ \tau_{xr},\ \tau_{x\theta}$	مؤلفه‌های تنش برشی در مختصات کلی (r,θ,x)
$\sigma_{eff},\ \sigma_v$	تنش فون میزس
$\tilde{\sigma}$	تانسور تنش
$\vec{B}$	بردار نیروهای حجمی
$B_r,\ B_\theta,\ B_x$	نیروهای حجمی در راستای شعاعی، محیطی و محوری
$E_r,\ E_\theta,\ E_x$	مدول کشسانی (الاستیسیته) در مختصات کلی (r,θ,x)
$\nu_{r\theta},\ \nu_{rx},\ \nu_{\theta x}$ $\nu_{\theta r},\ \nu_{xr},\ \nu_{x\theta}$	ضرایب پواسون در مختصات کلی (r,θ,x)

مدول برشی در مختصات کلی (r,θ,x)	$G_{r\theta},\ G_{rx},\ G_{\theta x}$ $G_{\theta r},\ G_{xr},\ G_{x\theta}$
ضرایب انبساط حرارتی در مختصات کلی (r,θ,x)	$\alpha_r,\ \alpha_\theta,\ \alpha_x$
سرعت دورانی ثابت	ω
زمان	t
فشار داخلی	P_i
فشار خارجی	P_o
شعاع داخلی	r_i
شعاع خارجی	r_o
طول استوانه	L
دمای لایه‌ی داخلی	T_i
دمای لایه‌ی خارجی	T_o
چگالی	ρ
شعاع بی‌بعد شده	$\overline{r}$
حل قسمت خصوصی	u_{r_p}
حل قسمت عمومی	u_{r_g}
اختلاف دما	ΔT
بردار شار حرارتی	$\vec{Q}_r$
شار حرارتی در راستای شعاعی، محیطی و محوری	$q_r,\ q_\theta,\ q_x$
حرف اختصاری بیانگر ضرایب انتقال حرارت هدایتی	k_{ij}
ضرایب انتقال حرارت هدایتی	$k_{11},\ k_{22},\ k_{33}$

فصل ۱

مقدمه

۱-۱ مقدمه‌ای بر پوسته‌ها

پوسته‌ها سازه‌های منحنی شکلی می‌باشند که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است و به دلیل کیفیت رفتاری و مقاومت بالا در برابر نیروها و لنگرهای وارده، در بالاترین مرتبه‌ی تکاملی سازه‌ها قرار می‌گیرند. این گونه سازه‌ها به دلیل وجود گسترده در سیستم‌های طبیعی از جمله: صدف جانوران، جمجمه و ... و سیستم‌های مصنوعی همچون: هواپیما، زیردریایی، لوله‌ها و ... از دیرباز توجه پژوهشگران را به خود جلب کرده‌اند. در این میان، پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک و جدار ضخیم کامپوزیتی، جایگاه ویژه‌ای را در پژوهش‌های علمی و کاربردهای صنعتی و تجاری به خود اختصاص داده‌اند. کاربرد وسیع پوسته‌های کامپوزیتی در صنایع، متأثر از مقاومت و سفتی بالا نسبت به چگالی جرمی می‌باشد؛ امکان افزایش این مشخصه‌ها با استفاده از به‌کارگیری فناوری‌های روز و روش‌های ساخت متنوع، دامنه‌ی استفاده از این مواد را روزافزون کرده است [۱].

۱-۲ دسته‌بندی پوسته‌ها

در این بخش، پوسته‌ها بر اساس سه دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری دسته‌بندی می‌شوند.

الف) دیدگاه هندسی

پوسته‌ی حاصل از انتقال[1]: از انتقال یک منحنی یا سطح مادی در امتداد خط راست خارج از صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی حاصل از دوران[2]: از دوران یک منحنی یا سطح مادی حول محور واقع در صفحه‌ی قوس، حاصل می‌شود.

پوسته‌ی جدار نازک[3]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کوچک‌تر از $\frac{1}{20}$ باشد. (البته در برخی منابع این نسبت $\frac{1}{10}$ ذکر شده است [۲].)

---

1. Shell of Translation
2. Shell of Rotation
3. Thin Shell

پوسته‌ی جدار ضخیم[1]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی[2] آن بزرگ‌تر از $\frac{1}{10}$ یا $\frac{1}{20}$ باشد.

ب) دیدگاه مادی

پوسته‌ی همگن و همسانگرد[3]:خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف و جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی همگن و ناهمسانگرد[4]: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان است ولی در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

پوسته‌ی ناهمگن و همسانگرد[5]: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته در نقاط مختلف جسم یکسان نیست ولی در جهات مربوط به هر نقطه یکسان است.

پوسته‌ی ناهمگن و ناهمسانگرد[6]: خواص مکانیکی ماده‌ی پوسته هم در نقاط مختلف جسم و هم در جهات مربوط به هر نقطه یکسان نیست.

ج) دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییرشکل‌های کوچک[7]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است (رفتار خطی از نظر هندسی).

پوسته با تغییرشکل‌های بزرگ[8]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست (رفتار غیرخطی از نظر هندسی).

پوسته با رفتار کشسان[9]: تغییر شکل‌ها بازگشت‌پذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند (رفتار خطی از نظر مادی).

1. Thin Shell
2. Middle Surface
3. Homogeneous and Isotropic Shell
4. Homogeneous and Anisotropic Shell
5. Inhomogeneous and Isotropic Shell
6. Inhomogeneous and Anisotropic Shell
7. Small Deflection
8. Large Deflection
9. Elastic Behavior

پوسته با رفتار مومسان[1]: تغییر شکل‌ها بازگشت‌ناپذیرند و روابط تنش-کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند (رفتار غیرخطی از نظر مادی).

۱-۳ نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها

در این بخش نظریه‌های تحلیل پوسته‌ها به دو دسته‌ی پوسته‌های نازک و ضخیم تقسیم‌بندی می‌شوند و سپس شرح مختصری بر این نظریه‌ها ارائه می‌گردد.

۱-۳-۱ نظریه‌های پوسته‌های نازک

پوسته‌هایی که نسبت ضخامت آن‌ها h، به شعاع سطح میانی R کوچک‌تر از $\frac{1}{10}$ یا $\frac{1}{20}$ می‌باشد، در زمره‌ی پوسته‌های نازک قرار می‌گیرند. در پوسته‌های نازک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر به کار نمی‌آید؛ بلکه با ساده‌سازی روابط الاستیسیته، روش‌های تحلیلی-تقریبی برای تحلیل این دسته از پوسته‌ها به‌دست می‌آورند. البته باید توجه داشت که درجه‌ی ساده‌سازی روابط الاستیسیته بر دقت نتایج نظریه‌های ارائه شده تأثیرگذار خواهد بود.

اولین فرضیات را کیرشهف[2] (۱۸۵۰) درباره‌ی ورق‌ها ارائه کرد که پس از آن در بسط نظریه‌ی پوسته‌ها به کار گرفته شد. نظریه‌ی پوسته‌ها مبتنی بر فرضیات کیرشهف، توسط آرون[3] (۱۸۷۴) معرفی گردید، اما کار وی کامل نبود. لاو[4] (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که اکنون به عنوان نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک یا نظریه‌ی لاو-کیرشهف مشهور است. رایسنر[5] (۱۹۱۲) با استفاده از فرضیات لاو، تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری را ارائه نمود. نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو با در نظر گرفتن خیزهای کوچک اولین بار توسط فلوگه[6]

1. Plastic Behavior
2. Kirchhoff
3. Aron
4. Love
5. Reissner
6. Flugge

(۱۹۳۲) ارائه شد. معادلات فلوگه به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شود و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. با ساده‌سازی آن‌ها نظریه‌ی پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی یک و صفر به‌دست می‌آید. نظریات فلوگه توسط بیرنه[1] (۱۹۴۴) تکمیل شد. نظریه‌ی غیرخطی پوسته‌های نازک به وسیله‌ی نقدی[2] (۱۹۵۷) فرمول‌بندی شد، که به‌کارگیری آن‌ها مشکل می‌باشد. سندرز[3] (۱۹۵۹) فرمول‌بندی پوسته‌ها را با استفاده از اصل کار مجازی ارائه کرد و نووژیلف[4] (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل مختلط نشان داد و به این ترتیب معادلات به صورت فشرده‌تری نوشته شدند.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های نازک را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

۱- نظریه با تقریب مرتبه‌ی صفر (نظریه‌ی غشایی[5])؛

۲- نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک (نظریه‌ی خمشی[6])؛

۳- نظریه با تقریب مرتبه‌ی دو (نظریه‌ی فلوگه).

الف) نظریه‌ی غشایی

غشاء از دیدگاه مکانیکی، یک تار دوبعدی است که فقط می‌تواند نیروهای محوری (نیروهای غشایی) را تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آن‌ها خیلی کم است و از نظر فیزیکی نمی‌توانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این نظریه تحلیل می‌شوند. میدان نیروهای داخلی در اغلب پوسته‌های نازک، عمدتاً از نیروهای غشایی تشکیل می‌شود و از این جهت نیروهای غشایی برای تأمین تعادل ایستایی پوسته کافی هستند؛ به عبارتی دیگر پوسته از نظر ایستایی معین است. در نظریه‌ی غشایی، جابه‌جایی پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف و مسائل در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای با چشم‌پوشی از تنش و کرنش عمودی در راستای شعاعی، تحلیل می‌شوند [۳].

1. Byrne
2. Naghdi
3. Sanders
4. Novozhilov
5. Membrane Theory
6. Bending Theory

ب) نظریه‌ی خمشی

ورق از دیدگاه مکانیکی، یک تیر دوبعدی است که علاوه بر نیروهای محوری، نیروهـای برشـی و لنگرهای خمشی را نیز می‌تواند تحمل کند. پوسته‌هایی که سختی خمشی آن‌ها قابل توجه باشند و از نظر فیزیکی بتوانند لنگرهای خمشی را تحمل کنند، با این نظریه تحلیل می‌شوند. فرضیه‌ی مقدماتی تیرها توسط ناویر[1] ارائه و سپس توسط کیرشـهف در مـورد ورق‌هـا تعمـیم داده شـد و لاو بـا همـین فرضیات، نظریه‌ی خمشی را صورت‌بندی نمود.

در حالت کلی، معادلات تعادل به تنهایی برای به‌دست آوردن نیروهای خمشی کافی نیستند و به عبارتی دیگر، پوسته از نظر ایستایی نامعین اسـت. در نظریـه‌ی خمشـی نیـز، جابـه‌جـایی پوسـته بـا جابه‌جایی سطح میانی توصیف مـی‌شـود. فرضـیات نظریـه‌ی غشـایی و نظریـه‌ی خمشـی (نظریـه‌ی کلاسیک) را فرضیات لاو-کیرشهف می‌نامند که عبارت‌اند از [۳]:

۱- نسبت ضخامت پوسته به شـعاع انحنـای سـطح میـانی در مقایسـه بـا واحـد، کوچـک اسـت (پوسته‌ی نازک)؛

۲- خیزها در مقایسه با ضخامت پوسته، کوچک هستند (خیزکوچک)؛

۳- مؤلفه‌ی تنش عمود بر سطح میانی نسبت به سایر مؤلفه‌های تنش، قابـل چشـم‌پوشـی اسـت (تنش صفحه‌ای)؛

۴- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. با این فرض، کرنش‌های برشی و مؤلفه‌ی کرنش عمود بر سطح میانی، صـفر در نظر گرفته می‌شوند (کرنش صفحه‌ای).

۱-۳-۲ نظریه‌ی پوسته‌های ضخیم

لامه[2] (۱۸۵۲) نخستین فردی بود که حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار

1. Navier
2. Lame´

ثابت را که تحت فشار یکنواخت داخلی قرار داشت با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی[1]، برای ماده‌ی همگن و همسانگرد ارائه کرد [۴]، که تاکنون نیز در حل مسائل مختلف مهندسی کاربرد فراوانی داشته است. گالرکین[2] (۱۹۳۰) روابط پوسته‌های ضخیم را با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف[3] (۱۹۴۹) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی، معادلات قابل‌حلی برای پوسته‌های ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ کردن اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، نظریه‌ی تغییر شکل برشی[4] را برای پوسته‌های ضخیم پایه‌گذاری نمود. میرسکی[5] و هرمان[6] (۱۹۵۸) با به‌کارگیری نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول[7]، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند [۵]. گرینس‌پن[8] (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌ی ضخیم را با نظریه‌های مختلف پوسته‌های نازک و ضخیم مقایسه نمود.

نظریه‌ی عمومی پوسته‌های ضخیم را می‌توان به این‌گونه تقسیم‌بندی کرد.

۱- نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی؛

۲- نظریه‌ی تغییر شکل برشی.

الف) نظریه‌ی الاستیسیته‌ی خطی

به طور کلی در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، ۱۵ معادله وجود دارد که می‌توان ۱۵ مجهول را به دست آورد؛ معادلات عبارت‌اند از: سه معادله‌ی تعادل (تنش)، شش معادله‌ی سینماتیک (کرنش-جابه‌جایی) و شش معادله‌ی رفتاری (تنش-کرنش) و مجهولات عبارت‌اند از: شش مؤلفه‌ی تنش (تانسور متقارن تنش)، شش مؤلفه‌ی کرنش (تانسور متقارن کرنش) و سه مؤلفه‌ی جابه‌جایی (بردار جابه‌جایی). نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی هر چند مشخصات رفتاری پوسته‌ها را به طور کامل

1. Plane Elasticity Theory (PET)
2. Galerkin
3. Vlassov
4. Shear Deformation Theory (SDT)
5. Mirsky
6. Hermann
7. First-Order Shear Deformation Theory (FSDT)
8. Greenspon

توصیف می‌کند و منجر به حل دقیق می‌شود ولی حل معادلات آن بسیار پیچیده می‌باشد و عملاً به‌کارگیری آن‌ها امکان‌ناپذیر است. با فرضیات ساده شونده‌ای می‌توان معادلات بالا را کاهش داد و نظریه‌ی الاستیسیته‌ی دوبعدی (مستوی) را برای تحلیل استوانه‌ها به کار برد. در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور استوانه، پس از اعمال فشار و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود اما برخلاف نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌های نازک، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته برابر جابه‌جایی سطح میانی در نظر گرفته نمی‌شود. این نظریه را لامه برای استوانه‌ی جدار ثابت متقارن محوری از ماده‌ی همگن و همسانگرد به کار برد و توزیع تنش را در استوانه‌ها به‌دست آورد. نظریه‌ی لامه به نظریه‌ی کلاسیک استوانه‌های ضخیم مشهور است [۴].

معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌ی ضخیم جدار ثابت، عبارت است از:

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}+\frac{u_r}{r^2}=0 \quad or \quad r^2u_r''+ru_r'+u_r=0 \qquad (۱-۱)$$

و جابه‌جایی استوانه u_r برابر است با:

$$u_r=C_1r+\frac{C_2}{r} \qquad (۲-۱)$$

r شعاع استوانه، C_1 و C_2 ثابت‌های معادله هستند که با شرایط مرزی به دست می‌آیند.

ب) نظریه‌ی تغییر شکل برشی

در این نظریه، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته با جابه‌جایی سطح میانی توصیف نمی‌شود بلکه با مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی بیان می‌شود. به طور کلی فاصله‌ی هر نقطه از پوسته تا محور تقارن (r) برابر است با فاصله‌ی سطح میانی از محور تقارن (R) به علاوه‌ی فاصله‌ی آن نقطه از سطح میانی (z)، یعنی:

$$r=R+z \quad , \quad \left|\frac{z}{R}\right|\prec 1 \qquad (۳-۱)$$

بر اساس نظریه‌ی لامه، جابه‌جایی شعاعی استوانه‌ی توخالی:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1(R+z) + \frac{C_2}{(R+z)} \tag{۴-۱}$$

به کمک بسط تیلور می‌توان نوشت.

$$\begin{aligned} u_r &= C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1(R+z) + \frac{C_2}{R}\left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \cdots\right) \\ &= \left(C_1 R + \frac{C_2}{R}\right) + z\left(C_1 - \frac{C_2}{R^2}\right) + z^2 \frac{C_2}{R^3} + \cdots \\ &\Rightarrow u_r = u_r^0 + z\, u_r^1 + z^2 u_r^2 + \cdots \end{aligned} \tag{۵-۱}$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، جابه‌جایی شعاعی را به صورت یک چندجمله‌ای بر حسب (z) می‌توان نوشت. اگر $(z=0)$ باشد، نشانگر جابه‌جایی سطح میانی پوسته است. اگر فقط جمله‌ی اول در نظر گرفته شود $(u_r = u_r^0)$، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی صفر پوسته‌های جدار ضخیم می‌شود که مشابه نظریه‌ی خمشی (نظریه‌ی مرتبه‌ی یک در پوسته‌های نازک) و اگر دو جمله از این بسط در نظر گرفته شود $(u_r = u_r^0 + z\, u_r^1)$، تحلیل با تقریب مرتبه‌ی یک پوسته‌های جدار ضخیم می‌شود که مشابه نظریه‌ی فلوگه (نظریه‌ی مرتبه‌ی دو در پوسته‌های نازک) می‌باشد.

در این نظریه، علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثرات برش، خمش و پیچش، می‌توان اثرات اینرسی دورانی و میدان حرارتی[1] را نیز در نظر گرفت. نظریه با تقریب مرتبه‌ی یک به نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان شهرت دارد که تعمیم نظریه‌ی تیموشنکو در تیرها و همچنین نظریه‌ی میندلین[2] در ورق‌ها می‌باشد.

میدان جابه‌جایی $\vec{U}$ در این نظریه عبارت است از:

$$\begin{cases} U_x = U_x^0 + z\, U_x^1 \\ U_\theta = U_\theta^0 + z\, U_\theta^1 \Rightarrow \overrightarrow{U} = \overrightarrow{U^0} + z\, \overrightarrow{U^1} \\ U_z = U_z^0 + z\, U_z^1 \end{cases} \tag{۶-۱}$$

1. Thermal Field
2. Mindlin

در نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی، پس از تغییر شکل، مستوی باقی می‌مانند ولیکن الزاماً عمود نیستند، یعنی کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. هرچند به‌کارگیری نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی، منجر به حل دقیق مسائل می‌شود، ولیکن به دلیل اینکه تاکنون هیچ راه حل کاملی برای پوسته‌های جدار ضخیم (به غیر از موارد خاص) با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی ارائه نشده است، نظریه‌ی تغییر شکل برشی برای تحلیل سازه‌های پوسته‌ای مختلف با انواع جداره، انواع مواد، انواع بارگذاری و شرایط مرزی، حتی نامتقارن محوری[1]، روش مناسبی می‌باشد.

۴-۱ مقدمه‌ای بر مواد

بیشتر موادی که در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند مواد همگن و همسانگرد می‌باشند. این مواد به دلیل یکنواختی خواص، از قبیل: مقاومت مکانیکی، مقاومت حرارتی، مقاومت در برابر خوردگی و سایش، مقاومت در برابر خزش و خستگی و ... محدودیت‌هایی ایجاد می‌کنند. با پیشرفت سریع صنایع هوافضا، توربین‌ها، رآکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به مواد با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا به وجود آمد. در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد استفاده از مواد همگن خواسته‌های طراح را برآورده نمی‌سازد. همچنین در دماهای بالا فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اُکسایش، خوردگی، خزش[2] و ... قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها، بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌سازد. از این رو ایده‌ی مواد مرکب[3] مطرح گردید [۶].

ماده‌ی کامپوزیتی[4]، ترکیب ماکروسکوپی[5] دو یا چند ماده‌ی ناهمساز با خواص فیزیکی و شیمیایی متفاوت است که سطح مشترک مشخصی بین آن‌ها وجود دارد. مواد تشکیل‌دهنده،

1. Nonaxisymmetric
2. Creep
3. Compound Materials
4. Composite Material
5. Macroscopic

خصوصیات فیزیکی و شیمیایی خود را حفظ کرده ولی در مجموع ترکیب کامپوزیتی خواص بهتری از هــر یــک از اجــزاء تشــکیل‌دهنــده‌ی خــود را دارا مــی‌باشــد. کامپوزیــت‌هــا از دیــدگاه متــالورژی (میکروسکوپی[1])، ناهمگن و ناهمسانگرد هستند، ولیکن از دیدگاه مکانیکی (ماکروسـکوپی)، همگــن و ناهمسانگرد تلقی می‌شوند.

اشکال عمده‌ی مواد مرکب، تغییر ناگهانی مواد و خواص آن‌هاست کـه در نتیجـه موجـب تغییـر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود، لذا نیاز به ماده‌ای بـا عـدم تغییـر ناگهـانی خـواص، موجب پی‌ریزی ایده‌ی تغییر تدریجی خواص مواد گردید. مواد با تغییرات تـابعی خـواص[2] در سـاختار ارگانیسم‌های زنده مانند استخوان قابل مشاهده است. به عنوان مثال: استخوان در لایه‌ی بیرونــی کـه نیاز به مقاومت مناسبی در برابر عوامل خارجی از قبیل ضربه دارد، از استحکام بیشتری برخوردار است و به تدریج از سختی آن کم می‌شود تا لایه‌ی درونی که کاملاً نرم می‌باشد تـا شـرایط مناسـب بـرای جذب مواد غذایی را داشته باشد. از این‌رو تغییرات خواص به صورت کاملاً پیوسـته و تـدریجی ایجـاد می‌شود. مواد *FG* ناهمگن هستند [۷].

۱-۵ مواد FG

مواد ناهمگن *FG* در مقایسه با مواد همگن (ایزوتروپ‌ها) و مواد ناهمسانگرد (کامپوزیت‌ها) دارای ویژگی‌هایی به شرح زیر می‌باشند.

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا؛

۲- مقاومت زیاد در برابر بارهای مکانیکی بالا؛

۳- یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مواد *FG*، کاهش تمرکز تنش در اجسام جامد است. در بسـیاری از اجسام به دلیل وجود شکل‌های خاص هندسی، تمرکز تنش در نقاطی از جسم ایجاد می‌شود که به کمک مواد *FG* می‌توان آثار نامطلوب تمرکز تنش را به صورت چشم‌گیری کاهش داد.

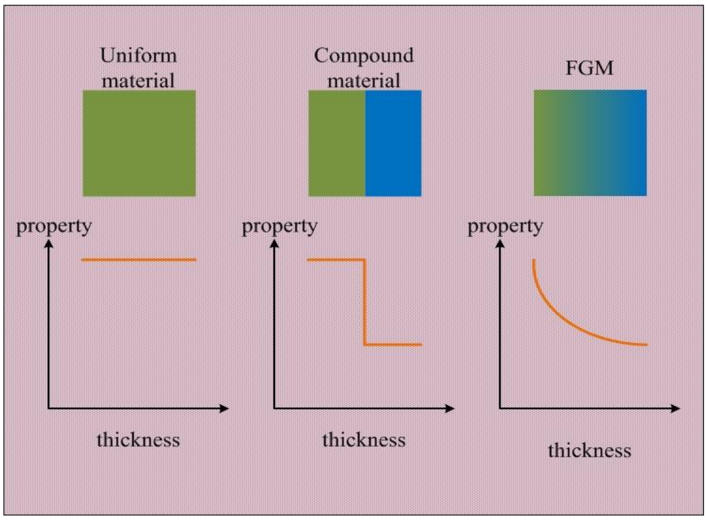
1. Microscopic
2. Functionally Graded Materials (FGM)

۴- بهترین ترکیب برای تغییر خواص ماده که مانع ایجاد یا رشد ترک شود، مواد *FG* است.

۵- اگر پوشش ترد بر روی مواد نرم به صورت لایه‌های جدا انجام شود، احتمال جدا شدن لایه‌ی ترد بسیار زیاد است. به کمک مواد *FG*، این کار با تغییرات پیوسته و تدریجی انجام می‌پذیرد.

۶- تغییرات تدریجی خواص در ساختار مواد *FG*، موجب استحکام بین لایه‌های مختلف آن می‌شود. در صورتی که در مواد مرکب کامپوزیتی، تداخل بین ساختارهای زمینه و الیاف، نوعی ناهماهنگی در خواص مکانیکی ایجاد می‌کند. به عنوان مثال هنگامی که مواد کامپوزیتی در معرض بارهای حرارتی بالا قرار می‌گیرند، ترک، ابتدا در مرز زمینه[1] و الیاف[2] ایجاد و سپس در لایه‌ها و مقاطع ضعیف داخل زمینه و الیاف منتشر می‌شود. در مواد *FG*، به دلیل پیوستگی موجود در خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی، تنش‌ها و گرادیان آن‌ها حالت پیوسته‌ای پیدا می‌کنند که باعث استحکام ماده می‌شوند [۸].

شکل ۱-۱ مقایسه‌ی بین تغییرات خواص در مواد همسانگرد، کامپوزیت و *FGM* را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱ تغییرات خواص در مواد مختلف

۱-۶ مواد مرکب

به طور کلی یک ماده‌ی کامپوزیتی ترکیبی است، از تقویت‌کننده (الیاف، ذرات، ورق پوسته‌ای و

1. Matrix
2. Fiber

یا پرکننده‌ها) که در زمینه‌ی (پلیمر، فلز و یا سرامیک) قرار گرفته باشد. زمینه، تقویت‌کننده را نگه می‌دارد تا فرم مورد نیاز تشکیل شود، در حالی که تقویت‌کننده خواص مکانیکی کلی زمینه را بهبود می‌بخشد. لذا به منظور کسب نتیجه‌ی مطلوب، شناخت لازم از مواد مورد استفاده اعم از ماتریس‌ها، تقویت‌کننده‌ها، نحوه‌ی ترکیب، تولید مواد، طراحی و روش ساخت برای طراحان ضروری می‌باشد.

۱-۶-۱ اجزاء تشکیل‌دهنده‌ی مواد مرکب

مواد مرکب از سه قسمت اصلی تشکیل می‌شوند.

۱. **زمینه (ماتریس)**

زمینه، الیاف را از هم جدا می‌کند تا از سائیدگی و تشکیل عیوب سطحی جلوگیری نماید. یک زمینه مناسب باید توانایی تغییر شکل تحت بارگذاری اعمالی را داشته و نیرو را به الیاف انتقال دهد و تمرکز تنش را توزیع کند، و همچنین از الیاف در مقابل عوامل محیطی حفاظت کرده و مانع از رشد ترک در کامپوزیت گردد.

۲. **تقویت‌کننده (الیاف)**

نقش تقویت‌کننده در یک ماده‌ی کامپوزیتی به طور اساسی افزایش دادن خواص مکانیکی زمینه است. نحوه‌ی مونتاژ الیاف در زمینه و جهت قرار دادن آن‌ها خواص متفاوتی را در کامپوزیت ایجاد می‌کند.

۳. **فصل مشترک**

فصل مشترک، سطح محدود یا منطقه‌ای است که در آن یک ناپیوستگی رخ می‌دهد خواه این ناپیوستگی فیزیکی، مکانیکی و یا شیمیایی باشد. جهت به‌دست آوردن خصوصیات مطلوب در یک کامپوزیت، بار اعمال شده از زمینه به الیاف باید از طریق فصل مشترک انتقال پیدا کند؛ شکست در فصل مشترک پدیده‌ای نامطلوب محسوب می‌شود [۹].

۱-۶-۲ طبقه‌بندی مواد مرکب

مواد مرکب را می‌توان با توجه به ساختار، مواد تشکیل‌دهنده‌ی زمینه (ماتریس) و یا جنس الیاف طبقه‌بندی کرد.

طبقه‌بندی مواد مرکب بر اساس ساختار

۱. مواد مرکب الیافی؛

۲. مواد مرکب لایه‌ای؛

۳. مواد مرکب ذره‌ای؛

۴. مواد مرکب با ساختار ترکیبی.

طبقه‌بندی مواد مرکب بر اساس فاز زمینه

۱. کامپوزیت‌های زمینه پلیمری؛

۲. کامپوزیت‌های زمینه فلزی؛

۳. کامپوزیت‌های زمینه سرامیکی؛

۴. کامپوزیت‌های زمینه معدنی.

طبقه‌بندی مواد مرکب بر اساس ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی الیاف

۱. الیاف فلزی؛

۲. الیاف معدنی؛

۳. الیاف پلیمری.

۱-۶-۳ عوامل تعیین‌کننده‌ی خواص مواد مرکب

از عوامل مهم که می‌تواند در خواص کامپوزیت‌ها تأثیرگذار باشد، می‌توان موارد زیر را برشمرد.

۱. خواص فازهای تشکیل‌دهنده (زمینه و تقویت‌کننده)؛

۲. توزیع فازها؛

۳. اثرات متقابل فازها بر یکدیگر؛

۴. طول الیاف، شکل و اندازه‌ی الیاف و جهت قرار گرفتن الیاف.

۱-۶-۴ ویژگی‌های مواد مرکب

۱. مقاومت بالا در برابر تغییر شکل نسبت به جرم ماده؛

۲. استحکام بالا نسبت به جرم ماده؛

۳. مقاومت خستگی (حد دوام) بالا؛

۴. مقاومت خوردگی مناسب؛

۵. انعطاف‌پذیری در طراحی مواد؛

۶. قابلیت طراحی مواد مرکب مطابق با شرایط تولید و مونتاژ؛

۷. قابلیت جذب انرژی؛

۸. قابلیت جذب ارتعاش؛

۹. هزینه‌ی تولید بهینه؛

۱۰. ساخت مواد هوشمند.

۱-۶-۵ کاربردهای مواد مرکب

۱. صنایع هوافضا

استفاده از مواد مرکب در هواپیماها وزن سازه را به مقدار ۲۰ تا ۳۰ درصد کاهش می‌دهد که علاوه بر کاهش مصرف انرژی و هزینه‌ی پرواز، دسترسی به ارتفاع بالاتر و سرعت بیشتر نیز امکان‌پذیر خواهد بود. ویژگی‌های کاهش وزن و پایداری ابعادی مواد مرکب، موجب توجه به این مواد در صنایع فضایی شده است. برای این منظور مواد مرکب به گونه‌ای طراحی می‌گردند که ضریب انبساط ناچیزی در آن‌ها ایجاد گردد تا از تغییر شکل قطعات در حین عبور وسایل فضایی از لایه‌های نزدیک سطح

زمین جلوگیری شود.

۲. صنایع خودروسازی

فرآیندهای متنوع تولید قطعات مواد مرکب، تـأمین اسـتحکام مـورد نیـاز قطعـات، کـاهش وزن خودرو، کاهش هزینه‌ی تولید، قابلیت کنترل مناسب بر سطح ظاهری از جمله امتیـازاتی هسـتند کـه خودروسازان را به استفاده‌ی گسترده از مواد مرکب ترغیب کرده است.

۳. صنایع ورزشی

از آنجا که در تجهیزات ورزشی وزن کم، استحکام بالا و زیبایی سطح خارجی اهمیت بالایی دارد، بنابراین از مواد مرکب در ساخت آن‌ها استفاده فراوانی می‌شود به عنوان نمونه با وجود قیمـت بـالا، از ماده‌ی مرکب کربن–اپوکسی در ساخت تجهیزاتی همچون راکت تنیس، دسته‌ی گلف، اسـکیت بـورد، لوازم اسکی، میله‌های قلاب ماهیگیری، بدنه‌ی دوچرخه و ... استفاده می‌شود.

۴. صنایع دریایی

مقاومت خوردگی، کاهش وزن از جمله مهم‌ترین عوامل در کاربرد روزافزون مواد مرکب در صنایع کشتی‌سازی است. همچنین ساخت لوله‌های انتقال نفت و گاز از مواد مرکب به دلیل مقاومت حرارتی مناسب از تغییر درجه حرارت سیال داخل لوله تحت اثر عوامل محیطی جلوگیری می‌کند و افزون بـر آن به دلیل کاهش وزن و عدم نیاز به جوشکاری لوله‌ها به یکدیگر هزینه‌ی اجـرای خطـوط انتقـال را کاهش می‌دهد.

۵. سازه‌های عمرانی و ساختمان‌سازی

امروزه برای ساخت پل‌ها از پلاستیک‌های تقویت‌شده با الیاف شیشه یا کربن اسـتفاده مـی‌شـود. دلیل این امر دست‌یابی به اهدافی چون افزایش مقاومت سازه در برابـر زلزلـه، کـاهش وزن، مقاومـت خوردگی، سهولت نصب، هزینه‌ی کم در مقایسه با زمان نگهداری طولانی، حمل و نقل آسـان را مـی-توان ذکر کرد. برای افزایش ظرفیت تحمل بار ستون‌های ساختمان‌ها و افزایش مقاومت سـاختمان در برابر زلزله، ستون‌ها از مواد مرکب با الیاف کربن یا الیاف آرامیدی و زمینه‌ی اپوکسی ساخته می‌شوند.

۶. قطعات صنعتی

از مواد مرکب به علت امکان طراحی آن‌ها با توجه به شرایط کاری، استحکام بالا نسبت به وزن، مستهلک کردن ارتعاشات خارجی و کاهش هزینه تولید، نگهداری آسان و... برای تولید قطعات صنعتی استفاده می‌گردد. از جمله قطعاتی که در ساخت آن‌ها از مواد مرکب استفاده می‌شود می‌توان به موارد ذیل اشاره نمود. محورهای انتقال قدرت، غلتک‌های دستگاه‌های چاپ، محور محرک در برج‌های خنک‌کننده [۱۰].

۱-۶-۶ رفتار مکانیکی مواد مرکب

مواد بر اساس خاصیتی که دارند بدین صورت تعریف می‌گردند.

۱. ماده‌ی همگن: خواص در کل ماده یکسان است؛ به طوری که خواص در هر نقطه، مستقل از موقعیت آن تعریف می‌گردد.

۲. ماده‌ی ناهمگن: خواص در کل ماده یکسان نیست؛ به طوری که خواص در هر نقطه، وابسته به موقعیت آن می‌باشد.

۳. ماده‌ی همسانگرد: خواص در هر نقطه از ماده در جهت‌های مختلف یکسان است؛ به طوری که خواص در هر نقطه، مستقل از جهت تعریف می‌گردد.

۴. ماده‌ی ناهمسانگرد: خواص در هر نقطه از ماده در جهت‌های مختلف متفاوت است؛ به طوری که خواص در هر نقطه، وابسته به جهت تعریف می‌گردد.

سه نوع رفتار ناهمسانگردی ممکن است در مواد وجود داشته باشد.

۱. ماده‌ی ناهمسانگرد کامل: خواص ماده در هر نقطه و در جهات مختلف تغییر می‌کند و هیچ صفحه‌ی تقارنی برای خواص ماده وجود ندارد.

۲. ماده‌ی مونوکلینیک[1]: خواص ماده‌ی ناهمسانگرد نسبت به یک صفحه متقارن است.

۳. ماده‌ی ارتوتروپیک: در نقطه‌ای از ماده خواص در سه جهت عمود بر هم متفاوت است ولی

1. Monocilinic material

خواص ماده نسبت به سه صفحه عمود بر هم متقارن است.

ماده همسانگرد عرضی[1]: اگر در هر نقطه از ماده یک صفحه وجود داشته باشد که خواص مکانیکی در آن در تمام جهات مساوی باشد، اصطلاحاً آن ماده را همسانگرد عرضی گویند.

در بررسی رفتار مواد مرکب با توجه به خواص ناهمگن و ناهمسانگرد آن‌ها دو دیدگاه وجود دارد.

۱. دیدگاه میکرومکانیک[2]، که رفتار ماده‌ی مرکب را با توجه به خواص اجزای تشکیل‌دهنده‌ی آن و اثر متقابل آن‌ها از دیدگاه میکروسکوپی مورد بررسی قرار می‌دهد.

۲. دیدگاه ماکروسکوپیک برای بررسی رفتار مواد مرکب از دیدگاه مکانیک محیط‌های پیوسته استفاده می‌شود، به طوری که رفتار ماده‌ی مرکب با ماده‌ی همگنی بیان می‌شود؛ که رفتار کاملاً مشابهی با ماده‌ی مرکب از خود نشان می‌دهد.

با مطالعه‌ی رفتار مواد مرکب از دو دیدگاه مختلف، طراحی آن‌ها با توجه به عملکرد مورد نیاز امکان‌پذیر می‌شود، که از مزایای مواد مرکب در مقایسه با مواد خالص است.

۱-۶-۷ رفتار مکانیکی مواد مرکب تک لایه از دیدگاه ماکروسکوپی

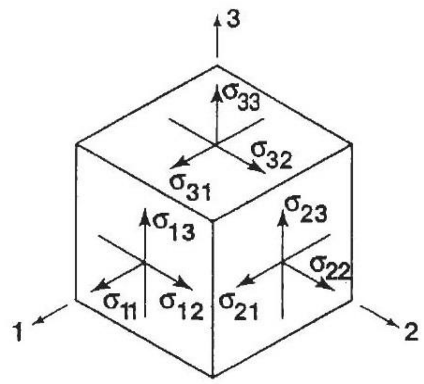
در این بخش رفتار مکانیکی مواد مرکب تک لایه بررسی می‌گردد؛ پس از بیان رفتار مواد ناهمسانگرد در حالت کلی، روابط برای حالت‌های خاص ماده‌ی مرکب ارائه می‌شوند. شناخت رفتار مواد مرکب تک لایه اهمیت زیادی دارد، زیرا از نتایج آن‌ها برای بررسی قطعات ساخته‌شده از مواد مرکب چند لایه استفاده می‌شود.

ارتباط بین تنش-کرنش در مواد مرکب

المان مکعبی را در داخل ماده‌ی مرکب در نظر بگیرید (شکل ۱-۲) که در حالت کلی تحت اثر بارگذاری خارجی بر سطوح آن، تنش‌های محوری σ_{11}، σ_{22}، σ_{33} و تنش‌های برشی σ_{12}، σ_{21}، σ_{13}، σ_{31}، σ_{23} و σ_{32} اعمال می‌شود. در شکل ۱-۲ راستا و سطح اثر مؤلفه‌های تنش نشان داده شده

1. Transversely isotropic material
2. Micromechanical

است. که اندیس اول بیانگر جهت بردار عمود بر سطحی است که نیرو بر آن اعمال می‌شود و اندیس دوم بیانگر جهت نیروی اعمالی است. برای ایجاد شرایط تعادل المان نسبت به گشتاور ایجادشده حول محورهای مختصات نیاز است، که مؤلفه‌های تنش برشی متقارن باشند ($\sigma_{12} = \sigma_{21}$، $\sigma_{13} = \sigma_{31}$، $\sigma_{23} = \sigma_{32}$). بارگذاری اعمالی بر سطوح المان در هر نقطه از ماده، جابه‌جایی ایجاد می‌کند که مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در راستای ۱، ۲ و ۳ به ترتیب u_1، u_2 و u_3 است.



شکل ۱-۲ المان مکعبی

اگر تغییر شکل در هر نقطه نسبت به نقاط مجاور آن متفاوت باشد کرنش‌های محوری ε_{11}، ε_{22}، ε_{33} و کرنش-های برشی γ_{12}، γ_{21}، γ_{13}، γ_{31}، γ_{23} و γ_{32} ایجاد می‌گردند که طبق تعریف مقادیر آن‌ها برای مختصات (x_1, x_2, x_3) برابر است با:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \gamma_{23} = \gamma_{32} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\
\varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \gamma_{13} = \gamma_{31} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\
\varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} & \gamma_{12} = \gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}
\end{aligned}
\qquad (۷\text{-}۱)
$$

کرنش محوری بیانگر مقدار تغییر طول در واحد طول المان و کرنش برشی بیانگر مقدار تغییر زاویه در داخل هر صفحه از المان می‌باشد.

در حالت کلی، رابطه‌ی تنش-کرنش در مواد مرکب کشسان خطی به اختصار بدین صورت است.

$$\sigma_i = \sum_{j=1}^{6} C_{ij}\varepsilon_j \qquad i = 1,...,6 \qquad (۱-۸)$$

که σ_i و ε_j به ترتیب حروف اختصاری بیانگر مؤلفه‌های تنش و کرنش هستند، که مطابق جدول ۱-۱ تعریف می‌شوند. و C_{ij} مؤلفه‌های ماتریس سفتی[1] (C) می‌باشند که دارای ۳۶ عضو است.

جدول ۱-۱ حروف اختصاری مؤلفه‌های تنش و کرنش

مؤلفه‌های کرنش		مؤلفه‌های تنش	
حروف اختصاری	حروف تانسوری	حروف اختصاری	حروف تانسوری
ε_1	ε_{11}	σ_1	σ_{11}
ε_2	ε_{22}	σ_2	σ_{22}
ε_3	ε_{33}	σ_3	σ_{33}
ε_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23} = 2\varepsilon_{32}$	σ_4	$\sigma_{23} = \sigma_{32}$
ε_5	$\gamma_{13} = 2\varepsilon_{13} = 2\varepsilon_{31}$	σ_5	$\sigma_{13} = \sigma_{31}$
ε_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{21}$	σ_6	$\sigma_{12} = \sigma_{21}$

رابطه‌ی (۱-۸) را می‌توان بر حسب مؤلفه‌هایش بدین صورت بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (۱-۹)$$

اگر مقدار کرنش معینی به ماده اعمال شود، با استفاده از رابطه‌ی فوق می‌توان توزیع تنش در ماده‌ی مرکب را تعیین کرد. چنانچه توزیع تنش معینی به ماده اعمال شود برای تعیین کرنش‌های ایجاد شده از معکوس ماتریس سفتی استفاده می‌شود.

1. Stiffness matrix

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{۱۰-۱}$$

که S_{ij} مؤلفه‌های ماتریس نرمی[1] (S) و برابر با معکوس ماتریس سفتی است.

$$S = C^{-1} \qquad \text{یا} \qquad C = S^{-1} \tag{۱۱-۱}$$

اگر به ماده‌ی ناهمسانگرد فقط تنش تک جهتی در راستای محور ۱ اعمال شود ($\sigma_{11} \neq 0$ و $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$) و مؤلفه‌های ماتریس نرمی مخالف با صفر باشد، مطابق با رابطه‌ی (۱-۱۰)، علاوه بر کرنش محوری در راستای سه محور مختصات، مؤلفه‌های کرنش برشی نیز ایجاد می‌گردد و آن را اصطلاحاً اثر متقابل بین برش و کشش می‌نامند، به طوری که با اعمال تنش محوری، کرنش برشی و برعکس با اعمال تنش برشی، کرنش محوری ایجاد می‌شود.

به منظور تعیین تعداد ثابت‌های مستقل تنش و کرنش مواد مرکب، انرژی کشسانی ذخیره شده در ماده بررسی می‌گردد. با توجه به تنش اعمالی و کرنش ایجاد شده در ماده، انرژی ذخیره شده در واحد حجم برابر است با:

$$W = \int \sum_{i=1}^{6} \sigma_i d\,\varepsilon_i \tag{۱۲-۱}$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۱-۹) در رابطه‌ی (۱-۱۲) مقدار انرژی ذخیره شده در مواد مرکب کشسان خطی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$W = \int \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} C_{ij}\,\varepsilon_j d\,\varepsilon_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} C_{ij}\,\varepsilon_j \varepsilon_i \tag{۱۳-۱}$$

بنابراین مؤلفه‌های ماتریس سفتی از مشتق مرتبه‌ی دوم انرژی ذخیره شده در واحد حجم نسبت به مؤلفه‌های کرنش تعیین می‌شوند. یعنی:

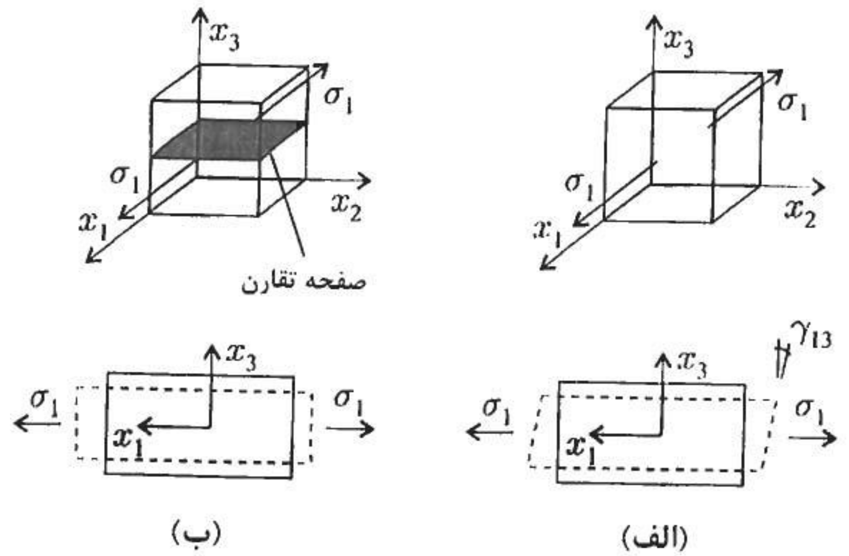
---
1. Compliance matrix

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \tag{۱۴-۱}$$

از آنجا که مقدار مشتق مرتبه‌ی دوم وابسته به ترتیب مشتق‌گیری نیست می‌توان نتیجه گرفت.

$$C_{ij} = C_{ji} \tag{۱۵-۱}$$

بنابراین ماتریس سفتی، یک ماتریس متقارن است که در حالت کلی برای تعریف آن در ماده‌ی ناهمسانگرد به ۲۱ متغیر مستقل نیاز است. به طور مشابه می‌توان نشان داد که ماتریس نرمی نیز متقارن است.



شکل ۱-۳ تغییر شکل بر اثر تنش تک جهتی الف- ماده‌ی ناهمسانگرد ب- ماده‌ی منوکلینیک

رابطه‌ی تنش-کرنش در مواد منوکلینیک

اگر توزیع الیاف در مواد مرکب نسبت به صفحاتی تقارن داشته باشد در این صورت تعداد متغیرهای مورد نیاز برای تعریف رابطه‌ی تنش-کرنش کاهش می‌یابد. در مواد منوکلینیک که یک صفحه‌ی تقارن دارند، تعداد ثابت‌های مورد نیاز برای رابطه‌ی تنش-کرنش به ۱۳ ثابت کاهش می‌یابد. به منظور بررسی رفتار ماده‌ی ناهمسانگرد کلی و ماده‌ی منوکلینیک، شکل ۱-۳ را در نظر بگیرید. اگر به ماده‌ی ناهمسانگرد کلی فقط تنش تک جهتی در راستای محور ۱ اعمال شود؛ مطابق با شکل ۱-۳ (قسمت الف) در داخل صفحه‌ی ۳-۱ کرنش کششی ε_{11} و کرنش برشی γ_{13} بر اساس رابطه‌ی

(۱۰-۱) ایجاد می‌شود. اگر خواص ماده نسبت به صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی ۲-۱ مطابق با شکل ۱-۲ (قسمت ب) متقارن باشد، در این صورت تنش تک جهتی در جهت محور ۱، هیچ کرنش برشی γ_{13} در المان ایجاد نمی‌کند. این شرایط طبق رابطه‌ی (۱۰-۱) وقتی برقرار است که مؤلفه‌ی S_{15} در ماتریس نرمی برابر صفر باشد. به طور مشابه می‌توان نشان داد که مؤلفه‌های S_{14}، S_{24}، S_{34}، S_{25}، S_{35}، S_{46}، S_{56} و مقادیر متقارن آن‌ها، باید صفر باشند. پس رابطه‌ی تنش-کرنش برای مواد منوکلینیک را با توجه به مؤلفه‌های ماتریس نرمی و سفتی به ترتیب می‌توان به فرم‌های زیر بیان کرد.

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16}\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26}\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36}\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0\\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} \quad (۱۶-۱)$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16}\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26}\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36}\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0\\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \quad (۱۷-۱)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش در مواد ارتوتروپیک

اگر خواص ماده نسبت به دو صفحه‌ی عمود بر هم متقارن باشد، برای مثال صفحات موازی با صفحه‌ی ۲-۱ و ۳-۱، مشابه با روشی که برای مواد منوکلینیک بیان شد ثابت می‌شود که باید مؤلفه-های S_{16}، S_{26}، S_{36} و S_{45} در ماتریس ماده‌ی منوکلینیک صفر باشند. پس برای ماده با دو صفحه‌ی تقارن عمود بر هم، رابطه‌ی تنش-کرنش به فرم زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix} \tag{۱۸-۱}$$

اگر ماده نسبت به صفحه‌ی ۳-۱ و ۳-۲ متقارن باشد، رابطه‌ی بین تنش و کرنش مشابه با رابطه‌ی (۱-۱۸) است. پس ثابت می‌شود؛ اگر ماده‌ای دارای دو صفحه‌ی تقارن عمود بر هم باشد رفتار ماده نسبت به صفحه‌ی عمود بر آن‌ها نیز متقارن است. اصطلاحاً به ماده‌ای که دارای سه صفحه‌ی تقارن عمود بر هم باشد ماده‌ی ارتوتروپیک گویند که برای تعریف آن به ۹ ثابت نیاز است. از معکوس رابطه‌ی (۱-۱۸) رفتار ماده‌ی ارتوتروپیک با استفاده از ماتریس سفتی بدین فرم به‌دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{23}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{33}\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \tag{۱۹-۱}$$

همان طور که از روابط (۱-۱۸) و (۱-۱۹) بر می‌آید در مواد ارتوتروپیک اثر متقابلی بین تنش‌ها محوری و کرنش‌های برشی وجود ندارد.

رابطه‌ی تنش-کرنش در مواد همسانگرد عرضی

مواد همسانگرد عرضی صفحه‌ای دارند که خواص در کلیه‌ی جهت‌ها در داخل این صفحه یکسان است. در این مواد تعداد ثابت‌های کشسان ماده برای بیان ارتباط تنش و کرنش کاهش می‌یابد. اگر خواص همسانگرد در داخل صفحه‌ی ۳-۲ باشد، موقعیت اندیس ۲ و ۳ در تعریف مؤلفه‌های ماتریس نرمی می‌تواند تغییر داده شود بدون آنکه مقدار مؤلفه تغییر کند، بنابراین می‌توان چنین نوشت.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{22}-S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \qquad (۱-۲۰)$$

پس برای تعریف ماتریس نرمی در ماده‌ی مرکب همسانگرد عرضی به ۵ ثابت مستقل نیاز است.

رابطه‌ی بین تنش و کرنش با استفاده از ماتریس سفتی به فرم زیر بیان می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{22}-C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (۱-۲۱)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش در مواد همسانگرد

در مواد همسانگرد، بی‌نهایت صفحه وجود دارد که خواص ماده در جهت‌های یکسان متفاوت است. بنابراین بیان ارتباط بین تنش و کرنش با توجه به دو ثابت مستقل امکان‌پذیر است.

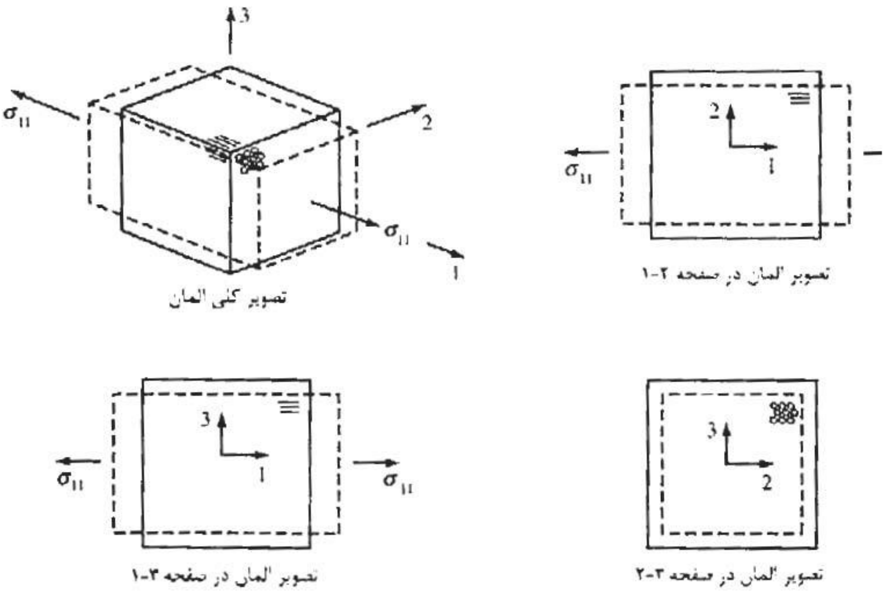
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{11}-C_{12})}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (۱-۲۲)$$

ثابت‌های مهندسی در مواد مرکب

ثابت‌های مهندسی در بررسی خواص مکانیکی مواد همسانگرد شامل مدول کشسانی محوری، برشی و ضریب پواسون است که با داشتن دو ثابت از آن‌ها، ارتباط بین تنش و کرنش تعریف می‌گردد.

به طور مشابه در مواد ارتوتروپیک مدول کشسانی محوری، برشی و ضرایب پواسون تعریف می‌شوند، که با استفاده از آزمایش کشش ساده یا برش خالص اندازه‌گیری می‌گردند. ثابت‌های مهندسی در مقایسه با اعضای ماتریس سفتی و یا ماتریس نرمی تعبیر فیزیکی مناسب‌تری دارند. در این قسمت هدف بیان ارتباط بین ثابت‌های مهندسی با اعضای ماتریس سفتی و ماتریس نرمی است.

بدین منظور برخی از بارگذاری‌های خاص برای تعیین ارتباط بین اعضای ماتریس نرمی و ثابت‌های مهندسی بررسی می‌شود. شکل ۱-۴ نمونه‌ای از المان یک ماده‌ی مرکب ارتوتروپیک را نشان می‌دهد که تحت اثر کشش تک جهتی در راستای محور ۱ مخالف با صفر است ($\sigma_{11} \neq 0$ و $\sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$).



شکل ۱-۴ تصویر سه‌بعدی المانی تحت اثر کشش تک جهتی در راستای محور ۱

همچنین شکل ۱-۴ تغییر شکل المان در صفحات دستگاه مختصات را نیز نشان می‌دهد. المان بر اثر تنش کششی در راستای محور ۱ افزایش طول می‌دهد در صورتی که ابعاد آن در راستای محورهای ۲ و ۳ به علت اثر پواسون کاهش می‌یابد که مقدار کاهش ابعاد ممکن است در راستای این دو محور برابر نباشد. از آنجا که ماده، ارتوتروپیک است طبق رابطه‌ی (۱-۱۸) هیچ اثر متقابلی بین کشش و برش وجود ندارد و تنش محوری باعث ایجاد کرنش برشی نمی‌گردد. اگر مدول کشسانی در

راستای محور ۱ برابر با E_1 باشد، ارتباط بین کرنش و تنش کششی در این راستا برابر است با:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_1} \tag{۲۳-۱}$$

برای تعیین مقدار کاهش ابعاد در جهت عمود بر محور بارگذاری، از تعریف ضریب پواسون استفاده می‌شود که برابر با قرینه‌ی نسبت بین کرنش عرضی در راستای محور ۲ به کرنش محوری در راستای محور ۱ است.

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \tag{۲۴-۱}$$

که اندیس اول در ضریب پواسون مربوط به جهت اعمال تنش محوری و اندیس دوم مربوط به جهت ایجاد کرنش عرضی می‌باشد.

پس مقدار کرنش عرضی را می‌توان با ترکیب روابط (۱-۲۳) و (۱-۲۴) بدین صورت بیان کرد.

$$\varepsilon_{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{11} \tag{۲۵-۱}$$

به طور مشابه، مقدار کرنش عرضی در راستای محور ۳ با توجه به تعریف ضریب پواسون ν_{13} برابر است با :

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}\sigma_{11} \tag{۲۶-۱}$$

اگر این شرایط بارگذاری در رابطه‌ی (۱-۱۸) در نظر گرفته شود مقدار کرنش بر حسب مؤلفه‌های ماتریس نرمی بدین صورت بیان می‌گردد.

$$\varepsilon_{11} = S_{11}\sigma_{11} \quad , \quad \varepsilon_{22} = S_{12}\sigma_{11} \quad , \quad \varepsilon_{33} = S_{13}\sigma_{11} \tag{۲۷-۱}$$

از مقایسه‌ی روابط (۱-۲۳)، (۱-۲۵) و (۱-۲۶) با رابطه‌ی (۱-۲۷) نتیجه می‌شود.

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad , \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \quad , \quad S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} \tag{۲۸-۱}$$

اگر المان تحت اثر تنش تک جهته کششی فقط در راستای محور ۲ باشد و بقیه‌ی مؤلفه‌های

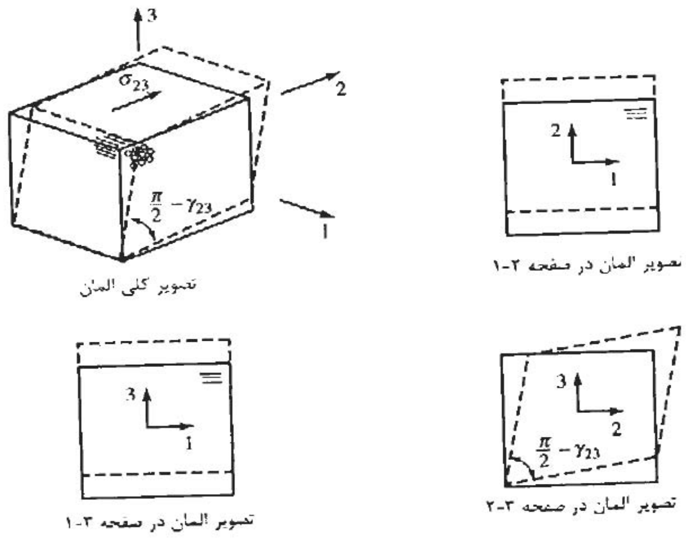
تنش صفر باشند، مقدار کرنش در راستای محور ۲ با توجه به مدول کشسانی E_2 در راستای محور ۲ تعیین می‌شود و کرنش عرضی در راستای محور ۱ و ۳ را می‌توان با استفاده از ضرایب پواسون ν_{21} و ν_{23}بیان کرد.

$$\varepsilon_{22}=S_{22}\sigma_{22}=\frac{\sigma_{22}}{E_2}\quad,\quad \varepsilon_{11}=S_{12}\sigma_{22}=-\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma_{22}\quad,\quad \varepsilon_{33}=S_{23}\sigma_{22}=-\frac{\nu_{23}}{E_2}\sigma_{22} \tag{۲۹-۱}$$

به طور مشابه مؤلفه‌های کرنش در شرایط اعمال تنش تک جهتی در راستای محور ۳ با استفاده از مدول کشسانی E_3 و ضرایب پواسون ν_{31} و ν_{32} تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{33}=S_{33}\sigma_{33}=\frac{\sigma_{33}}{E_3}\qquad \varepsilon_{11}=S_{13}\sigma_{33}=-\frac{\nu_{31}}{E_3}\sigma_{33}\\&\varepsilon_{22}=S_{23}\sigma_{33}=-\frac{\nu_{32}}{E_3}\sigma_{33}\end{aligned} \tag{۳۰-۱}$$

به منظور بررسی تغییر شکل ماده‌ی ارتوتروپیک تحت اثر تنش برشی، المانی تحت تأثیر تنش برشی σ_{23} مطابق شکل ۱-۵ را در نظر بگیرید؛ که بر اثر تنش برشی اعمالی در صفحه‌ی ۳-۲، زاویه-ی قائمه‌ی المان در این صفحه به اندازه‌ی γ_{23} تغییر کرده است، در صورتی که زاویه‌ی المان در صفحات دیگر عمود باقی می‌ماند. باید توجه داشت که جهت تنش برشی و کرنش برشی مثبت، در شکل ۱-۵ نشان داده شده است.



شکل ۱-۵ تصویر سه‌بعدی المانی تحت اثر تنش برشی در صفحه‌ی ۳-۲

با استفاده از مدول برشی G_{23} مقدار کرنشی برشی در صفحه‌ی ۳-۲ برابر است با:

$$\gamma_{23} = S_{44}\sigma_{23} = \frac{\sigma_{23}}{G_{23}} \tag{۳۱-۱}$$

در صورتی که برش خالص در صفحه ۳-۱ یا ۲-۱ ایجاد شود به طور مشابه رابطه‌ی بین کرنش برشی و تنش برشی در این دو صفحه بدین صورت بیان می‌شود.

$$\gamma_{13} = S_{55}\sigma_{13} = \frac{\sigma_{13}}{G_{13}} \qquad \gamma_{12} = S_{66}\sigma_{12} = \frac{\sigma_{12}}{G_{12}} \tag{۳۲-۱}$$

که G_{13} و G_{12} به ترتیب مدول برشی در صفحات ۳-۱ و ۲-۱ هستند.

در نهایت می‌توان ارتباط بین تنش و کرنش در ماده‌ی ارتوتروپیک را با استفاده از ثابت‌های مهندسی بیان کرد.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{21}}{E_2} & \frac{-\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \tag{۳۳-۱}$$

از طرفی با توجه به تقارن ماتریس نرمی داریم.

$$\frac{\nu_{21}}{E_2} = \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad , \quad \frac{\nu_{31}}{E_3} = \frac{\nu_{13}}{E_1} \quad , \quad \frac{\nu_{32}}{E_3} = \frac{\nu_{23}}{E_2} \tag{۳۴-۱}$$

پس برای تعریف ماده‌ی ارتوتروپیک به ۹ ثابت مهندسی نیاز است. در این ماده با استفاده از سه صفحه‌ی تقارن، می‌توان دستگاه مختصات عمود بر هم تعریف کرد که به آن دستگاه مختصات محورهای اصلی گفته می‌شود. خواص مهندسی نسبت به محورهای دستگاه مختصات اصلی بیان می-

شود. مؤلفه‌های ماتریس سفتی مطابق با رابطه‌ی (۱-۱۱) از معکوس ماتریس نرمـی رابطـه‌ی (۱-۳۳) بدین صورت به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&C_{11}=\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} \quad , \quad C_{12}=\frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} \quad , \quad C_{13}=\frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}\\
&C_{21}=\frac{\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta} \quad , \quad C_{22}=\frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} \quad , \quad C_{23}=\frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_2E_3\Delta}\\
&C_{31}=\frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta} \quad , \quad C_{32}=\frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta} \quad , \quad C_{33}=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}\\
&C_{44}=G_{23} \quad , \quad C_{55}=G_{13} \quad , \quad C_{66}=G_{12}
\end{aligned} \tag{۱-۳۵}
$$

که Δ چنین تعریف می‌شود [۱۰].

$$
\Delta=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{13}\nu_{31}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3} \tag{۱-۳۶}
$$

۱-۷ پیشینه‌ی پژوهش

همان طور که در ابتدای این فصل بدان اشاره شد؛ پژوهش‌های بسیاری بر روی پوسته‌ها به ویـژه پوسته‌های استوانه‌ای از دیرباز تا به امروز، به دلیل اهمیت و کاربرد فراوان آن‌ها صورت گرفتـه اسـت. تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلـف دارای قـدمت نسـبتاً طـولانی است. تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش بازمی‌گردد ولیکن تحلیل اسـتوانه‌هـای ناهمگن مربوط به دهه‌های اخیر است. هـر کـدام از ایـن پـژوهش‌هـا از منظـری خـاص پوسـته‌هـای استوانه‌ای را مورد تحلیل و بررسی قرار داده‌اند؛ آنچه که در ادامه ارائه می‌گردد تنها بخـش انـدکی از پژوهش‌های موجود می‌باشد که با توجه به ارتباط و نزدیکی آن‌ها به پژوهش حاضر، انتخاب شده‌اند.

حل استوانه‌های جدار ضخیم اولین بار در سال ۱۸۵۲ توسط لامه [۴] ارائه شد. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی استوانه‌های همسانگرد را که تحت فشار یکنواخت قرار داشتند، حـل کرد و توزیع تنش را در آن‌ها به‌دست آورد.

لخنیتسکی[1] در سال ۱۹۵۰ [۱۱] نظریه‌ی الاستیسیته‌ی اجسام مرکب را فرمول‌بندی کرد و پس از وی دیگران، نظریه‌های حاکم بر ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیتی را ارائه نمودند.

تانگ[2] [۱۲] در سال ۱۹۶۹ توزیع تنش در دیسک چرخان همگن ساخته شده از مواد ناهمسانگرد با فرض تنش صفحه‌ای را به‌دست آورد و نیز ایشان بیان کردند که توزیع تنش در دیسک چرخان با ضخامت ثابت متأثر از خاصیت ناهمسانگردی ماده‌ی سازنده‌ی آن می‌باشد.

بهار[3] در ۱۹۷۵ [۱۳] مسائل تنش صفحه‌ای در الاستیسیته‌ی خطی را با فرض ماده‌ی همگن و همسانگرد در چارچوب فضای حالت[4] مورد بررسی قرار داد.

لیخنیتسکی در ۱۹۸۱ [۱۱] دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی را برای استوانه‌ی ناهمسانگرد به‌دست آورد. او حل حالت ساده شده‌ی یک سیلندر را که در معرض بار متقارن قرار داشت، ارائه کرد. همچنین ایشان حل استوانه‌های ارتوتروپ را تحت نیروی محوری و گشتاور خمشی، استخراج نمود؛ ایشان ابتدا میدان تنش را که شامل ثوابت مجهول بود به‌دست آورد، سپس با استفاده از شرایط مرزی ثوابت مجهول را تعیین کرد.

رن[5] در ۱۹۹۵ [۱۴] حل دقیق پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمسانگرد با تکیه‌گاه ساده تحت بار متقارن سطحی را به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی در یک سری همگرا به‌دست آورد. در این پژوهش نشان داده شده است که نظریه‌ی کلاسیک پوسته‌ها می‌تواند توصیف خوبی از رفتار پوسته استوانه‌ای داشته باشد. همگرایی به حل دقیق زمانی اتفاق می‌افتد که پوسته نازک می‌شود. همچنین ایشان از نتایج عددی نتیجه گرفتند، ناهمسانگردی تأثیر بسزایی بر توزیع تنش در امتداد ضخامت پوسته دارد.

در ۱۹۹۵ ال‌ناگار[6] [۱۵] و همکاران، توزیع تنش در استوانه‌های چرخان ارتوتروپیک را در حالت تنش صفحه‌ای به‌دست آوردند.

1. Lekhnitskii
2. Tang
3. Bahar
4. State Space
5. Ren
6. El-Naggar

هراکویچ[1] در ۱۹۹۸ [۱۶] حل تحلیلی استوانه‌ای طویل را که در معرض بار ترکیبی مکانیکی و حرارتی قرار داشت، در حالت تنش صفحه‌ای ارائه کرد.

در سال ۱۹۹۹ هورگان[2] و چان[3] [۱۷] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، معادلات حاکم بر استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد ناهمگن که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند، را استخراج کردند. ایشان نشان دادند که در استوانه‌های همگن بیشینه‌ی تنش محیطی الزاماً در شعاع داخلی رخ می‌دهد اما این امر در استوانه‌های ناهمگن صادق نیست و ممکن است در شعاع خارجی رخ دهد.

تارن[4] در ۲۰۰۱ [۱۸] با در نظر گرفتن این موضوع که در مواد ناهمسانگرد استوانه‌ای، خاصیت الاستیک در هر نقطه توسط جهت‌های شعاعی، محیطی، و محوری در مختصات استوانه ای مشخص می شود؛ صورت فضای حالت را برای تحلیل ترموالاستیک اجسام ناهمسانگرد استوانه‌ای توسعه داد.

جباری و همکاران در ۲۰۰۲ [۱۹] تحلیل حرارتی پایدار یک بعدی در استوانه‌ی ضخیم ساخته شده از مواد FG توسعه دادند. در این پژوهش بارگذاری حرارتی تابعی از شعاع استوانه و بارگذاری به صورت فشار داخلی و متقارن در نظر گرفته شد. در پژوهش صورت گرفته نتایج تحلیل جابه‌جایی شعاعی و تنش شعاعی و محیطی برای ماده‌ی همگن حاکی از این است که: جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت کاهش می‌یابد و در شعاع خارجی به حداقل مقدار خود می‌رسد. تنش شعاعی در راستای شعاع استوانه افزایش یافته در صورتی که تنش محیطی تحت بارگذاری فشار داخلی و فشار خارجی صفر در راستای ضخامت کاهش می‌یابد.

هونگ-جان[5] و همکاران [۲۰] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، استوانه‌ی جدار ضخیمی که ضریب پواسون و مدول الاستیسیته‌ی آن به صورت خطی و نمایی تغییر می‌کرد را به صورت یکپارچه و چند لایه، در سال ۲۰۰۶ مورد تحلیل قرار دادند. استوانه تحت فشار داخلی و

1. Herakovich
2. Horgan
3. Chan
4. Tarn
5. Hongjun

خارجی قرار داشت و حل به‌دست آمده مربوط به حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای بود. نتایج نشان می‌داد که تغییر خواص از نمایی به خطی و یا بالعکس، باعث تغییر چندانی بر روی توزیع تنش شعاعی نمی‌گردد اما این امر تنش محیطی و جابه‌جایی شعاعی را با شدت بیشتری دست‌خوش تغییر می‌کند.

در اوایل سال ۲۰۰۷ ژیفای[1] و همکاران [۲۱] معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را با استفاده از الاستیسیته‌ی مستوی، تنها در حالت کرنش صفحه‌ای استخراج نمودند. ایشان تغییرات خواص در استوانه‌ی ناهمگن را تنها برای مدول الاستیسیته‌ی آن در نظر گرفتند و به صورت خطی مدل کردند. سپس معادلات حاکم را با دو روش، یک بار با استفاده از چند لایه کردن استوانه به لایه‌هایی با خواص ثابت و به‌کارگیری حل لامه همراه با روش بازگشتی که از شرایط مرزی پیوستگی بر روی تنش و جابه‌جایی شعاعی بین لایه‌ها استفاده می‌کرد و بار دیگر با در نظرگیری استوانه‌ی یکپارچه با خواص متغیر، حل کردند. همچنین نشان دادند که در روش چند لایه کردن با افزایش تعداد لایه‌ها، مقدار جابه‌جایی شعاعی به‌دست آمده در داخل استوانه کاهش می‌یابد. اندکی بعد در همین سال، توتونچو[2] [۲۲] پژوهشی مشابه با کار گذشته [۲۰] را انجام داد. ایشان با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و به‌کارگیری سری فریبینیوس، استوانه جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی قرار داشت و مدول الاستیسیته‌ی آن به صورت نمایی تغییر می‌کرد را در حالت کرنش صفحه‌ای حل کرد. در این پژوهش اثر تغییر ثابت ناهمگنی بر روی توزیع تنش شعاعی و محیطی و جابه‌جایی شعاعی مورد مطالعه قرار گرفت.

چن[3] و لین[4] [۲۳] در سال ۲۰۰۸ تحلیل استوانه‌ی همگن همسانگرد جدار ضخیم را با حل عددی معادلات دیفرانسیل ارائه نمودند. ایشان علاوه بر مطالعه‌ی اثر فشار داخلی و خارجی بر توزیع تنش در راستای ضخامت استوانه نشان دادند که تغییر نسبت شعاع داخلی به خارجی، می‌تواند تأثیر

1. Zhifei
2. Tutuncu
3. Chen
4. Lin

قابل توجهی در توزیع تنش داشته باشد.

کیهانی و همکاران [۲۴] در ۲۰۰۹ حل تحلیلی برای انتقال حرارت هدایتی در استوانه‌ی ساخته شده از مواد مرکب در شرایط پایدار را ارائه کردند. در پژوهش ایشان تانسور ضرایب هدایت حرارتی برای مواد مرکب معرفی شده و نحوه‌ی تعیین ضرایب از روی خواص الیاف و ماده‌ی زمینه بیان شده است. همچنین معادله‌ی انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه‌ای برای مواد کامپوزیتی به‌دست آمده و به روش جداسازی متغیرها حل دقیقی برای این معادله در شرایط مرزی معینی ارائه شده است.

عبدالله[1] و همکاران [۲۵] در سال ۲۰۱۱ حل الاستیک استوانه‌های نامحدود ارتوتروپیک چرخان را ارائه کردند؛ ایشان با بررسی اثر چرخش بر روی تنش‌ها نشان دادند که بیشینه‌ی تنش شعاعی در لایه‌ی میانی استوانه رخ می‌دهد.

ژانگ و همکاران [۲۶] در سال ۲۰۱۲ به روش تحلیلی توزیع تنش تنش در لوله‌های کامپوزیتی تحت فشار را کع در معرض بارهای ترمومکانیکی قرار داشت را ارائه نمودند. این پژوهشگران بار مکانیکی وارده را ناشی از سیال تحت فشار در نظر گرفتند که موجب ایجاد توزیع تنش یکنواخت می-گردد. همچنین ایشان در نتایج حاصل از حل تحلیلی را به کمک حل عددی، اعتبار سنجی نمودند.

قنّاد و زمانی‌نژاد [۲۷] با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و تعریف روابط ساختاری در حالت کلی (تنش و کرنش صفحه‌ای)، حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن همسانگرد را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند را به‌دست آوردند. ایشان ناهمگنی خواص برای مدول الاستیسیته را به صورت توانی در نظر گرفتند و فرض کردند ضریب پواسون ثابت می‌باشد. همچنین نشان دادند برای افزایش یا کاهش تنش و جابه‌جایی، باید مقادیر مثبت یا منفی برای ثابت ناهمگنی اختیار گردد. در همین زمان ایشان [۲۸] با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن را که تحت فشار داخلی و خارجی قرار داشتند، مورد تحلیل قرار دادند. ایشان با

1. Abd-Alla

بررسی و مقایسه نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی در نـواحی دور از دو سر استوانه نشان دادند با افزایش ضخامت استوانه حل نیمه تحلیلی یا نظریه‌ی تغییر شـکل برشی مرتبه‌ی اول از حل دقیق یا نظریه‌ی الاستیسـیته‌ی مسـتوی دور مـی‌گـردد و همچنـین بیـان نمودند که اختلاف نظریـه‌ی تغییـر شـکل برشـی مرتبـه‌ی اول از الاستیسـیته‌ی مسـتوی در میـزان جابه‌جایی شعاعی، وقتی ضخامت جداره‌ی استوانه برابر شعاع لایه‌ی میـانی آن اسـت، در حـدود ٪۲۵ می‌باشد.

جدول ۱-۲ برخی از مطالعات انجام شده را به صورت فهرست‌وار ارائه می‌کند.

جدول ۱-۲ پژوهش‌های صورت گرفته

سال	پژوهشگر	موضوع پژوهش
۱۸۵۲	لامه	حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم همگن با استفاده از PET
۱۹۵۰	لخنیتسکی	فرمول‌بندی نظریه‌ی الاستیسیته‌ی اجسام مرکب
۱۹۶۸	تانگ	حل دیسک چرخان همگن ساخته شده از مواد ناهمسانگرد
۱۹۷۵	بهار	بیان مسائل الاستیسیته خطی حوزه‌ی تنش صفحه‌ای در چارچوب فضای حالت
۱۹۸۱	لیخنیتسکی	حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی را برای استوانه‌ی ناهمسانگرد
۱۹۹۵	رن	حل دقیق پوسته‌ی استوانه‌ای ناهمسانگرد با تکیه‌گاه ساده تحت بار متقارن سطحی را به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی سه‌بعدی
۱۹۹۵	النگار و همکاران	تحلیل استوانه‌های چرخان ارتوتروپیک در حالت تنش صفحه‌ای
۱۹۹۸	هراکویچ	حل تحلیلی استوانه‌ای طویل را که در معرض بار ترکیبی مکانیکی و حرارتی در حالت تنش صفحه‌ای
۱۹۹۹	هورگان و چان	حل استوانه‌ها و دیسک‌های جدار ضخیم ناهمگن با استفاده از PET
۲۰۰۱	تارن	توسعه صورت فضای حالت برای تحلیل ترموالاستیک اجسام ناهمسانگرد استوانه‌ای
۲۰۰۲	جباری و همکاران	توسعه‌ی تحلیل حرارتی پایدار یک بعدی را در استوانه‌ی ضخیم ساخته شده از مواد FG
۲۰۰۶	هونگ-جان و همکاران	آنالیز الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن به روش چند لایه کردن با استفاده از PET
۲۰۰۷	ژیفای و همکاران	حل دقیق الاستیک استوانه‌های ناهمگن با روش‌های چند لایه کردن و یکپارچه در نظر گرفتن
۲۰۰۷	توتونچو	حل دقیق الاستیک استوانه‌های ناهمگن با استفاده از سری‌ها
۲۰۰۸	چن و لین	آنالیز الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم و مخازن کروی تحت فشار ساخته شده از مواد ناهمگن
۲۰۰۹	لی و پنگ	حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن با به‌کارگیری روش انتگرال فردهولم و استفاده از PET
۲۰۱۱	عبدالله و همکاران	بررسی اثر چرخش در استوانه‌های نامحدود غیر همگن ارتوتروپیک
۲۰۱۲	حیدرپور و همکاران	تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن چرخان با استفاده از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم
۲۰۱۲	قنّاد و زمانی‌نژاد	حل کامل استوانه‌های جدار ضخیم ناهمگن
۲۰۱۲	قنّاد و زمانی‌نژاد	تحلیل الاستیک استوانه‌های ناهمگن با استفاده از $FSDT$

۱-۸ جمع‌بندی

در این پژوهش، ابتدا با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر یک استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری حرارتی، ساخته شده از مواد ارتوتروپیک که تحت فشار داخلی و خارجی قرار گرفته، در حالت کلی استخراج می‌شود و سپس با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف، معادله‌ی معادله‌ی ساختاری واحدی به‌دست آمده که با استفاده از روش تحلیلی حل می‌شود و نتایج با نتایج حاصل از حل عددی مقایسه می‌شود. تأثیر انتخاب شرایط مرزی و پارامترهای مختلف مورد استفاده بر رفتار سازه مورد بررسی قرار می‌گردد.

فصل ۲

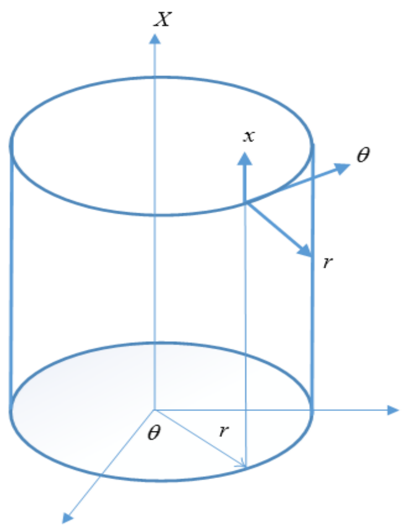
تحلیل الاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

۲-۱ مقدمه

در این فصل هدف استخراج روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم ارتوتروپیک به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی می‌باشد، بدین منظور ابتدا معادله‌ی ساختاری مواد ارتوتروپیک و روابط الاستیسیته‌ی مستوی در سیستم مختصات استوانه‌ای برای پوسته‌ی جدار ضخیم بیان می‌شوند. پس از آن به طور مختصر به بیان نظریه الاستیسیته‌ی مستوی پرداخته و فرضیات حاکم بر مسأله و شرایط مرزی استوانه‌ی مورد مطالعه ارائه می‌گردد. در ادامه با در نظر گرفتن فرضیات بیان شده، روابط حاکم بر پوسته‌های جدار ضخیم ارتوتروپیک استخراج شده و حل می‌گردد. همچنین بخش انتهایی این فصل نیز به مطالعه‌ی موردی اختصاص داده شده است.

۲-۲ روابط الاستیسیته‌ی مستوی در مختصات استوانه‌ای

در این بخش روابط الاستیسیته‌ی مستوی در سیستم مختصات استوانه‌ای شامل: میدان جابه-جایی، میدان کرنش، معادلات سازگاری و معادلات تعادل بیان می‌گردد و به دنبال آن معادله‌ی ساختاری در حالت کلی برای مواد ارتوتروپیک آمده است. در این مسئله مختصات استوانه‌ای (r,θ,x) بر مختصات اصلی (1,2,3) منطبق می‌باشد.



شکل ۲-۱ نمایش مختصات استوانه‌ای

۲-۲-۱ میدان جابه‌جایی

در مختصات استوانه‌ای میدان جابه‌جایی به طور کلی بر اساس سه پارامتر جابه‌جایی شعاعی u_r، جابه‌جایی محیطی u_θ و جابه‌جایی محوری u_x بیان می‌گردد.

$$
\begin{aligned}
u_r &= u_r(r,\theta,x) \\
u_\theta &= u_\theta(r,\theta,x) \\
u_x &= u_x(r,\theta,x)
\end{aligned}
\tag{۲-۱}
$$

۲-۲-۲میدان کرنش

روابط کرنش-جابه‌جایی در سیستم مختصات استوانه‌ای به فرم زیر بیان می‌گردند [۲۹].

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r} & \gamma_{\theta x} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial \theta} \\
\varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r\right) & \gamma_{rx} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r} \\
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta + r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)
\end{aligned}
\tag{۲-۲}
$$

۲-۲-۳ معادلات سازگاری

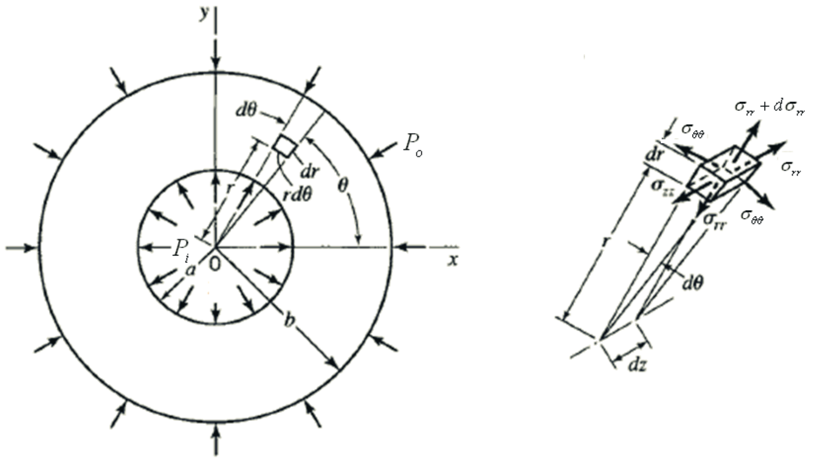
معادلات سازگاری در سیستم مختصات استوانه‌ای به صورت زیر می‌باشند [۲۹].

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{rx}}{\partial r \partial x} \\
&-r\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2 (r\gamma_{r\theta})}{\partial r \partial \theta} \\
&r^2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial x^2} + r\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial \theta^2} - r\frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial x} = r\frac{\partial^2 \gamma_{\theta x}}{\partial \theta \partial x} \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial (r\gamma_{r\theta})}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\gamma_{\theta x}) - \frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial \theta}\right) = 2r\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r\right) \\
&r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r\gamma_{\theta x}) - \frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial \theta}\right)\right) - \frac{\partial^2 (r\gamma_{r\theta})}{\partial x \partial r} = 2\frac{\partial^2 (r\varepsilon_r)}{\partial x \partial \theta} \\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{r\theta}}{\partial r} - r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\gamma_{rx}}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma_{rx}}{\partial \theta}\right) = -2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \theta}\right)
\end{aligned}
\tag{۲-۳}
$$

۲-۲-۴ معادلات تعادل [۳۰]

معادلات تعادل در حالت کلی به فرم زیر می‌باشد.

$$\vec{\nabla}.\tilde{\sigma}+\vec{B}=0 \tag{۲-۴}$$



شکل ۲-۲ المانی از استوانه‌ی جدار ضخیم

با بسط رابطه‌ی بالا در سیستم مختصات استوانه‌ای سه معادله‌ی تعادل به فرم زیر نوشته می‌شود.

که در این معادلات ρB_r، ρB_θ و ρB_x به ترتیب نیروهای حجمی[1] در راستای شعاعی، محیطی و محوری هستند.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+\rho B_r=0\\
&\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{\theta x}}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+\rho B_\theta=0\\
&\frac{\partial\tau_{rx}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta x}}{\partial\theta}+\frac{\tau_{r\theta}}{r}+\rho B_x=0
\end{aligned} \tag{۲-۵}$$

۲-۲-۵ معادله‌ی ساختاری

با توجه به مطالب ذکر شده در فصل اول، معادله‌ی ساختاری برای مواد ارتوتروپیک در مختصات اصلی (1,2,3) و مختصات کلی (r,θ,x) به ترتیب، به صورت زیر می‌باشد [۱۶].

1. Body force

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{13}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{13}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (۶-۲)$$

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\\ \tau_{\theta x}\\ \tau_{rx}\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\\ \gamma_{\theta x}\\ \gamma_{rx}\\ \gamma_{r\theta}\end{bmatrix} \qquad (۷-۲)$$

معادله‌ی ساختاری برای ماده‌ی ارتوتروپیک بر اساس ماتریس نرمی، در مختصات کلـی (r,θ,x) با معکوس گرفتن از رابطه‌ی (۲-۷) حاصل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\\ \gamma_{\theta x}\\ \gamma_{rx}\\ \gamma_{r\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0\\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0\\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\\ \tau_{\theta x}\\ \tau_{rx}\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix} \qquad (۸-۲)$$

رابطه‌ی (۲-۷) بر حسب ثابت‌های مهندسی:

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\\ \tau_{\theta x}\\ \tau_{rx}\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{1-\nu_{rx}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta} & \frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta} & \frac{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}{E_r E_\theta\Delta} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rx} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\\ \gamma_{\theta x}\\ \gamma_{rx}\\ \gamma_{r\theta}\end{bmatrix} \qquad (۹-۲)$$

که Δ چنین تعریف می‌شود.

$$\Delta = \frac{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}-\nu_{rx}\nu_{xr}-2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx}}{E_r E_\theta E_x} \tag{۱۰-۲}$$

رابطه‌ی (۲-۸) بر حسب ثابت‌های مهندسی:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_r} & \frac{-\nu_{\theta r}}{E_\theta} & \frac{-\nu_{xr}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{r\theta}}{E_r} & \frac{1}{E_\theta} & \frac{-\nu_{x\theta}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{rx}}{E_r} & \frac{-\nu_{\theta x}}{E_\theta} & \frac{1}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{1x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \tag{۱۱-۲}$$

۲-۳ نظریه‌ی الاستسیته‌ی مستوی

در نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، همان طور که در فصل یک نیز به آن اشاره شد فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از اعمال بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند و تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه متقارن بوده و مقدار آن‌ها در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند؛ در حقیقت کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین تغییر مکان شعاعی در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند؛ به عبارت دیگر تغییر مکان شعاعی فقط تابع شعاع استوانه می‌باشد ($u_r(r)$). بنابراین می‌توان گفت که محورهای استوانه، محورهای اصلی و تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی می‌باشند.

۲-۳-۱ فرضیات حاکم بر مسأله

۱- پوسته‌ی استوانه‌ای مورد تحلیل از نظر هندسه، جنس، بارگذاری و شرایط مرزی متقارن

محوری است بنابراین جابه‌جایی‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها مستقل از θ می‌باشند، به عبارت دیگر می‌توان از تغییرات در راستای محیطی استوانه صرفه نظر کرد ($\frac{\partial}{\partial\theta}(\ )=0$).

۲- با توجه به فرضیات نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی، کرنش برشی و تنش برشی صفر در نظر گرفته می‌شود.

۳- پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه در این پژوهش با سرعت دورانی ثابت ω، حول محور تقارن خود (راستای x) می‌چرخد ($\dot{u}_\theta = r\omega$).

۴- پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه جدار ثابت می‌باشد و از ماده همگن و ارتوتروپیک است.

u_r و u_θ مؤلفه‌های جابه‌جایی در راستای شعاعی، محیطی هستند که u_r تابعی نامعلوم از شعاع می‌باشد. جابه‌جایی در راستای محیطی u_θ وضعیتی معلوم داشته و به صورت تابعی مشخص از سرعت دورانی ثابت ω، شعاع r و زمان t می‌باشد.

۲-۳-۲ شرایط مرزی و انتهایی استوانه

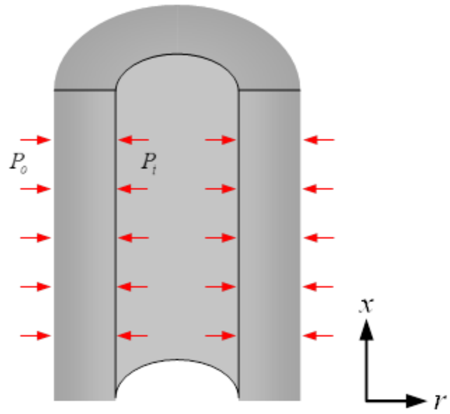
در پژوهش پیش‌رو پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه در معرض بارگذاری فشار یکنواخت در سطوح داخلی و خارجی می‌باشد (شکل ۲-۳) لذا شرایط مرزی تنش در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه به صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_r\big|_{r=r_i} = -P_i \quad , \quad \sigma_r\big|_{r=r_o} = -P_o \tag{۲-۱۲}$$

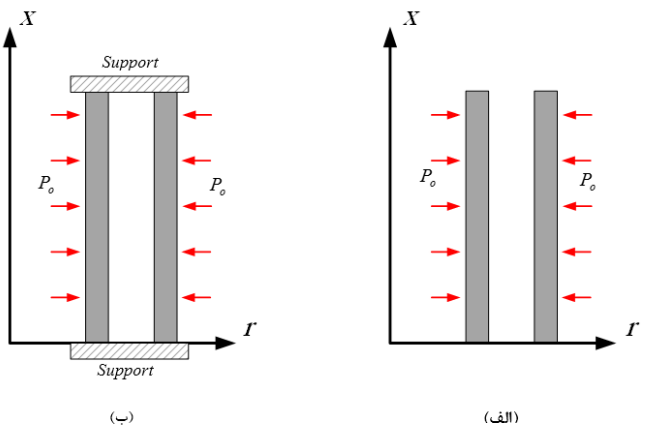
همچنین دو شرط انتهایی برای استوانه‌ی مورد مطالعه در نظر گرفته شده (شکل ۲-۴) و دو سر استوانه با حفظ شرایط نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی (تحلیل دو بعدی مسائل) می‌تواند باز یا بسته باشد، یعنی تنش و کرنش طولی، مقداری ثابت دارند.

الف-کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

ب- تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)



شکل ۲-۳ شرایط مرزی تنش در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه



شکل ۲-۴ شرایط انتهایی استوانه‌ی مورد مطالعه الف-تنش صفحه‌ای ب-کرنش صفحه‌ای

۲-۴ معادلات حاکم بر پوسته‌ی مورد مطالعه

در این بخش فرضیات بیان شده بر معادله‌ی ساختاری مواد ارتوتروپیک و روابط الاستیسیته‌ی مستوی نیز در سیستم مختصات استوانه‌ای اعمال می‌شوند، که در ادامه با اعمال بارگذاری و شرایط مرزی معادلات حاصل حل گردیده و روابط حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای جدار ضخیم ارتوتروپیک استخراج می‌گردد.

۲-۴-۱ میدان جابه‌جایی

با توجه به فرضیات حاکم بر مسأله (قسمت ۲-۳-۱)، میدان جابه‌جایی برای پوسته‌ی استوانه‌ای مورد تحلیل به صورت زیر خواهد بود.

$$u_r = u_r\left(r\right)$$
$$u_\theta = r\omega t \qquad (۱۳\text{-}۲)$$
$$u_x = u_x\left(x\right)$$

۲-۴-۲ میدان کرنش

با در نظر گرفتن روابط (۲-۱۳) به عنوان میدان جابه‌جایی و جایگذاری آن‌ها در معادلات میدان کرنش (۲-۲) روابط کرنش‌های نرمال شعاعی ε_r، محیطی ε_θ و محوری ε_x برای پوسته‌ی استوانه‌ای مورد مطالعه حاصل می‌گردند.

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \qquad \gamma_{\theta x} = 0$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \qquad \gamma_{rx} = 0 \qquad (۱۴\text{-}۲)$$
$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} \qquad \gamma_{r\theta} = 0$$

۳-۴-۲ معادلات سازگاری

با قرار دادن روابط کرنش (۲-۱۴) در معادلات سازگاری (روابط(۲-۳)) مشاهده می‌گردد که میدان کرنش در نظر گرفته شده برای استوانه‌ی مورد مطالعه، تمامی معادلات سازگاری را ارضا می‌کند.

۴-۴-۲ معادله‌ی تعادل

با در نظر گرفتن فرضیات بیان شده در قسمت (۲-۳-۱) و همچنین در غیاب نیروهای حجمی ($\rho B_r = \rho B_\theta = \rho B_x = 0$)، معادلات تعادل تنش (۲-۵) به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

۵-۴-۲ معادله‌ی ساختاری

با توجه به فرضیات بیان شده در بخش (۲-۳-۱)، معادله‌ی ساختاری در مواد ارتوتروپیک (رابطه-

ی (۲-۷))، برای استوانه‌ی مورد مطالعه به فرم کاهش یافته زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\end{bmatrix} \tag{۲-۱۶}$$

۲-۴-۵-۱ شرایط انتهایی استوانه

در ادامه تأثیر هر یک از شرایط انتهایی استوانه را بر معادله‌ی ساختاری (۲-۱۶) بیان می‌گردد.

الف- کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

در حالت کرنش صفحه‌ای، کرنش محوری ($\varepsilon_x = 0$) صفر خواهد بود. در نتیجه رابطه‌ی (۲-۱۶) به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix} \tag{۲-۱۷}$$

در رابطه‌ی اخیر ماتریس سفتی نسبت به قطر اصلی دارای تقارن است، (یعنی $C_{12}=C_{21}$).

رابطه‌ی (۲-۱۷) را با استفاده از ثابت‌های مهندسی به صورت زیر می‌توان ارائه کرد.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta} & \dfrac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta}\\ \dfrac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta} & \dfrac{1-\nu_{rx}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix} \tag{۲-۱۸}$$

اکنون به منظور پارامتری نمودن روابط و ساده‌سازی حل معـادلات؛ روابـط (۲-۱۷) و (۲-۱۸) را که هر دو بیان کننده معادله‌ی ساختاری در حالت کرنش صفحه‌ای برای استوانه‌ی مورد مطالعه مـی-باشند به فرم زیر نمادگذاری می‌کنیم [۳۱].

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix} \tag{۲-۱۹}$$

با توجه به روابط (۲-۱۷) تا (۲-۱۹)، برای حالت کرنش صفحه‌ای ضرایب A، B و C در معادلـه‌ی ساختاری ساده‌شده به فرم زیر تعریف می‌گردند.

$$A = C_{11} = \frac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x \Delta}$$
$$B = C_{12} = C_{21} = \frac{\nu_{\theta r} + \nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x \Delta} \qquad (۲۰-۲)$$
$$C = C_{22} = \frac{1-\nu_{rx}\nu_{xr}}{E_r E_x \Delta}$$

ب- تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

در حالت تنش صفحه‌ای، مقدار تنش محوری ($\sigma_x = 0$) صفر است. بنابراین از رابطـه‌ی (۲-۱۶) می‌توان رابطه‌ای برای کرنش محوری بر حسب کرنش‌های شعاعی و محیطی نوشت.

$$\varepsilon_x = \frac{-1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_r + C_{32}\varepsilon_\theta) \qquad (۲۱-۲)$$

حال با جایگذاری ε_x از رابطه‌ی (۲-۲۱) در رابطه‌ی (۲-۱۶) مـی‌تـوان بـه روابطـی بـرای تـنش شعاعی و محیطی دست یافت که بر حسب کرنش‌های شعاعی، محیطی و ثابت‌های الاستیک باشد.

$$\sigma_r = (C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}})\varepsilon_r + (C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}})\varepsilon_\theta$$
$$\sigma_\theta = (C_{12} - \frac{C_{32}C_{13}}{C_{33}})\varepsilon_r + (C_{22} - \frac{C_{32}C_{32}}{C_{33}})\varepsilon_\theta \qquad (۲۲-۲)$$

می‌توان روابط بالا را به صورت ماتریسی بازنویسی کرد.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} & C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}} \\ C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}} & C_{22} - \frac{C_{32}C_{32}}{C_{33}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix} \qquad (۲۳-۲)$$

رابطه‌ی (۲-۲۳) بیانگر معادله‌ی ساختاری در حالت تنش صفحه‌ای برای استوانه‌ی مورد مطالعـه می‌باشد، که با توجه متقارن بودن ماتریس ثابت‌های الاستیک در این رابطه می‌تـوان همچـون حالـت الف (کرنش صفحه‌ای) آن را به صورت زیر نمادگذاری نمود.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix} \qquad (۲۴-۲)$$

با در نظر گرفتن روابط (۲-۲۳) و (۲-۲۴) برای حالت تنش صفحه‌ای، ضرایب A، B و C در معادله‌ی ساختاری ساده‌شده به صورت زیر بیان می‌گردند.

$$
\begin{aligned}
A &= B_{11} = C_{11} - \frac{C_{13}C_{13}}{C_{33}} \\
B &= B_{12} = B_{21} = C_{12} - \frac{C_{13}C_{32}}{C_{33}} \\
C &= B_{22} = C_{22} - \frac{C_{32}C_{32}}{C_{33}}
\end{aligned}
\tag{۲-۲۵}
$$

در نهایت می‌توان ضرایب A، B و C را در معادله‌ی ساختاری ساده‌شده در حالت تنش صفحه‌ای بر حسب ثابت‌های مهندسی بیان کرد.

$$
\begin{aligned}
A &= -\frac{E_r E_x(-1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})}{(1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}+\nu_{rx}\nu_{xr}+2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx})(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})E_x} - \\
&\quad \frac{E_r^2(\nu_{xr}^2+2\nu_{xr}\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}+\nu_{\theta r}^2\nu_{x\theta}^2)}{(1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}+\nu_{rx}\nu_{xr}+2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx})(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})E_x} \\[2ex]
B &= -\frac{E_r E_x(-\nu_{\theta r}+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}^2-\nu_{\theta x}\nu_{xr}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})}{(1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}+\nu_{rx}\nu_{xr}+2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx})(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})E_x} - \\
&\quad \frac{E_r E_\theta(\nu_{x\theta}\nu_{xr}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}^2+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}^2+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{r\theta}\nu_{xr})}{(1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}+\nu_{rx}\nu_{xr}+2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx})(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})E_x} \\[2ex]
C &= -\frac{E_r E_x(-1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{rx}\nu_{xr}+\nu_{rx}\nu_{xr}\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})}{(1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}+\nu_{rx}\nu_{xr}+2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx})(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})E_x} - \\
&\quad \frac{E_r E_\theta(\nu_{x\theta}^2+2\nu_{x\theta}\nu_{r\theta}\nu_{xr}+\nu_{r\theta}^2\nu_{xr}^2)}{(1+\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}+\nu_{rx}\nu_{xr}+2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx})(1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r})E_x}
\end{aligned}
\tag{۲-۲۶}
$$

۲-۵ روابط اساسی

از روابط (۲-۱۹) و (۲-۲۴) می‌توان نتیجه گرفت میدان تنش در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای شامل دو مؤلفه‌ی تنش شعاعی و تنش محیطی می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
\sigma_r &= A\varepsilon_r + B\varepsilon_\theta \\
\sigma_\theta &= B\varepsilon_r + C\varepsilon_\theta
\end{aligned}
\tag{۲-۲۷}
$$

همان طور که در قسمت (۲-۲-۲) ذکر شد، معادلـه‌ی کـرنش شـعاعی و کـرنش محـوری بـرای استوانه‌ی مورد مطالعه به صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r} \tag{۲-۲۸}$$

با جایگذاری روابط تنش (۲-۲۷) و روابط کرنش (۲-۲۸) در معادله‌ی تعادل (۲-۱۵) داریم.

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dr}(A\frac{du_r}{dr} + B\frac{u_r}{r}) + \frac{1}{r}((A-B)\frac{du_r}{dr} + (B-C)\frac{u_r}{r}) = 0 \\ &A\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{A}{r}\frac{du_r}{dr} - C\frac{u_r}{r^2} = 0 \end{aligned} \tag{۲-۲۹}$$

با تقسیم رابطه‌ی بالا بر A و با قرار دادن $\nu^* = \frac{C}{A}$؛ که بر اساس شـرایط انتهـایی مسـأله تعیـین می‌گردد، می‌توان نوشت.

$$r^2\frac{d^2u_r}{dr^2} + r\frac{du_r}{dr} - \nu^*\frac{u_r}{r^2} = 0 \tag{۲-۳۰}$$

معادله‌ی (۲-۳۰) یک معادله‌ی کوشی- اویلر می‌باشد که آن را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$r^2u_r'' + ru_r' - \nu^*u_r = 0 \tag{۲-۳۱}$$

اگر در معادله‌ی (۲-۳۱) مقدار $u_r(r) = r^m$ گذاشته شود، معادله مشخصه‌ی زیر حاصل می‌گردد.

$$(m-1)mr^m + mr^m - \nu^*r^m = 0 \tag{۲-۳۲}$$

ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی بالا عبارت‌اند از:

$$m = \pm\sqrt{\nu^*} \quad , \quad \xi = \sqrt{\nu^*} \tag{۲-۳۳}$$

۲-۶ حل الاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک

با در نظر گرفتن معادله‌ی (۲-۳۳) به عنوان ریشه‌های معادله‌ی مشخصه، پاسخ معادله‌ی (۲-۳۱) به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$u_r = c_1r^{\xi} + c_2r^{-\xi} \tag{۲-۳۴}$$

با قرار دادن جابه‌جایی شعاعی (رابطه‌ی (۲-۳۴)) در روابط (۲-۲۸)، کرنش‌های شعاعی و محیطی محاسبه می‌گردند.

$$\varepsilon_r=\frac{c_1 r^{\xi}\xi}{r}-\frac{c_2 r^{-\xi}\xi}{r} \qquad (۲\text{-}۳۵)$$
$$\varepsilon_\theta=\frac{c_1 r^{\xi}}{r}+\frac{c_2 r^{-\xi}}{r}$$

برای محاسبه تنش‌ها، روابط کرنش‌های شعاعی و محیطی را در رابطه‌ی (۲-۲۷) قرار می‌دهیم.

$$\sigma_r=c_1(A\xi+B)r^{\xi-1}+c_2(B-A\xi)r^{-\xi-1} \qquad (۲\text{-}۳۶)$$
$$\sigma_\theta=c_1(B+C\xi)r^{\xi-1}+c_2(B-C\xi)r^{-\xi-1}$$

با اعمال شرایط مرزی تنش (روابط (۲-۱۲)) در اولین معادله‌ی (۲-۳۶) خواهیم داشت.

$$c_1(A\xi+B)r_i^{\xi-1}+c_2(B-A\xi)r_i^{-\xi-1}+P_i=0 \qquad (۲\text{-}۳۷)$$
$$c_1(A\xi+B)r_o^{\xi-1}+c_2(B-A\xi)r_o^{-\xi-1}+P_o=0$$

با حل همزمان معادلات بالا ثابت‌های c_1 و c_2 به‌دست می‌آیند.

$$c_1=\frac{\left(-r_i^{-\xi}P_o r_o+r_o^{-\xi}P_i r_i\right)}{\left(r_o^{\xi}r_i^{-\xi}-r_o^{-\xi}r_i^{\xi}\right)\left(B+A\xi\right)} \qquad (۲\text{-}۳۸)$$
$$c_2=\frac{\left(r_i^{\xi}P_o r_o+r_o^{\xi}P_i r_i\right)}{\left(A\xi-B\right)r_o^{\xi}r_i^{-\xi}+\left(B-A\xi\right)r_o^{\xi}r_i^{-\xi}}$$

با جایگذاری ثابت‌های c_1 و c_2 در معادله‌ی (۲-۳۴)، جابه‌جایی شعاعی بر حسب ضرایب A، B و C که متأثر از شرایط مرزی انتهایی می‌باشند، به‌دست می‌آید.

$$u_r=\frac{\left(-r_i^{-\xi}P_o r_o+r_o^{-\xi}P_i r_i\right)r^{\xi}}{\left(r_o^{\xi}r_i^{-\xi}-r_o^{-\xi}r_i^{\xi}\right)\left(B+A\xi\right)}+\frac{\left(-r_i^{\xi}P_o r_o+r_o^{\xi}P_i r_i\right)r^{-\xi}}{\left(A\xi-B\right)r_o^{\xi}r_i^{-\xi}+\left(B-A\xi\right)r_o^{\xi}r_i^{-\xi}} \qquad (۲\text{-}۳۹)$$

با قرار دادن u_r از رابطه‌ی بالا، در روابط سینماتیک (۲-۲۸)، کرنش‌های شعاعی و محیطی حاصل می‌گردند. و در نهایت می‌توان با جایگذاری کرنش‌های شعاعی و محیطی در رابطه‌ی (۲-۲۷)، تنش‌های محیطی و شعاعی را محاسبه نمود.

$$\sigma_r = \frac{r_i^{\xi+1}P_i\left(-r^{\xi}+r_o^{2\xi}r^{-\xi}\right)+r_o^{\xi+1}P_i\left(r^{\xi}-r^{-\xi}r_i^{2\xi}\right)}{r\left(r_o^{2\xi}-r_i^{2\xi}\right)} \tag{۴۰-۲}$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_i^{\xi+1}P_i\left(B^2-CA\right)\left(r_o^{2\xi}r^{-\xi}+r^{\xi}\right)+r_o^{\xi+1}P_o\left(CA-B^2\right)\left(r_i^{2\xi}r^{-\xi}+r^{\xi}\right)}{r\left(B+A\xi\right)\left(\left(A\xi-B\right)r_o^{2\xi}-\left(B-A\xi\right)r_i^{2\xi}\right)} \tag{۴۱-۲}$$

در ادامه به کمک رابطه‌ی (۲-۱۶) و با توجه به اینکه در حالت کرنش صفحه‌ای، مقدار کرنش محوری ($\varepsilon_x=0$) صفر است می‌توان رابطه‌ی زیر را برای محاسبه تنش محوری نوشت.

$$\sigma_x = C_{13}\varepsilon_r + C_{32}\varepsilon_\theta \tag{۴۲-۲}$$

همچنین با جایگذاری C_{13} و C_{32} از رابطه‌ی (۲-۹) می‌توان رابطه‌ی تنش محوری را بر حسب ضرایب مهندسی به فرم زیر ارائه نمود.

$$\sigma_x = \frac{\nu_{rx}+\nu_{\theta r}\nu_{r\theta}}{E_\theta E_x\Delta}\varepsilon_r + \frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}\varepsilon_\theta \tag{۴۳-۲}$$

تنش مؤثر

برای محاسبه‌ی تنش مؤثر[1] (تنش فون میزس[2]) در هر دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای می‌توان از رابطه‌ی زیر بهره گرفت.

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_r^2+\sigma_\theta^2+\sigma_x^2-\sigma_r\sigma_\theta-\sigma_x\sigma_\theta-\sigma_r\sigma_x} \tag{۴۴-۲}$$

با توجه به حضور ضرایب A و B در تنش شعاعی و ضرایب B و C در تنش محیطی می‌توان به این نتیجه رسید که تنش‌های شعاعی و محیطی به شرایط انتهایی استوانه وابستگی مستقیم دارند.

۲-۷ اعمال شرایط انتهایی استوانه در روابط نهایی

همان گونه پیش‌تر ذکر شد استوانه با دو شرط انتهایی دو سر بسته و مقید (کرنش صفحه‌ای) و دو سر باز (تنش صفحه‌ای) مد نظر است. لذا می‌توان جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های شعاعی، محیطی،

1. Effective
2. Von Mises

محوری (کرنش صفحه‌ای) و فون میزس را در هر حالت؛ با قرار دادن ضرایب A، B و C مربوط به همان حالت (روابط (۲-۲۰) برای کرنش صفحه‌ای و روابط (۲-۲۶) برای تنش صفحه‌ای) محاسبه نمود.

عملیات ریاضی بیان شده جهت حل دستگاه معادلات حاکم و اعمال شرایط مرزی، توسط نرم‌افزار *Maple 13* انجام شده؛ که در قسمت بعدی نتایج حاصل از مطالعه‌ی عددی توسط این نرم‌افزار نشان داده خواهد شد.

۲-۸ مطالعه‌ی موردی

به منظور مطالعه‌ی موردی یک استوانه‌ای جدار ضخیم با مشخصات هندسی $r_i = 40\ mm$، $r_o = 60\ mm$ و $L = 800\ mm$ در نظر گرفته می‌شود. استوانه از جنس گرافیت-کربن[1] می‌باشد. همچنین به منظور صحه‌گذاری بر روند حل، نتایج حاصل از حل تحلیلی و عددی در موارد لازم با یکدیگر مقایسه می‌گردند. جدول ۲-۱ خواص مکانیکی مربوط به استوانه را بیان می‌کند [۳۲].

توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی در شرایط انتهایی ذکر شده، تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند، از این رو نمودارها برای حالت کرنش صفحه‌ای رسم شده که نتایج همانند حالت تنش صفحه‌ای است.

۲-۸-۱ انتخاب المان و شبکه‌بندی مسأله

نظر به آنچه که در بخش فرضیات حاکم بر مسأله بیان شد؛ مسأله حالت تقارن محوری دارد. در این حالت نیازی به مدل‌سازی سه بعدی نیست و می‌توان از المان‌های دو بعدی نرم‌افزار *ANSYS* همچون المان *PLANE223* که قابلیت تقارن محوری دارند، استفاده کرد و حتی نتایج را به صورت سه‌بعدی استخراج کرد [۳۳].

این المان دو بعدی از هشت گره تشکیل شده که تا چهار درجه آزادی را برای هر گره تأمین می‌کند. این المان دارای دقت بالا برای تحلیل مسائل متقارن محوری می‌باشد.

1. Graphit fabric-carbon

۲-۸-۲ بررسی تأثیر بارگذاری فشاری

جهت مطالعه‌ی اثر بارگذاری فشاری، پنج ترکیب بارگذاری فشار یکنواخت داخلی و خارجی، بر استوانه اعمال و تأثیرات آن بر جابه‌جایی شعاعی و تنش شعاعی، محیطی، فون میزس و تنش محوری (در حالت کرنش صفحه‌ای) مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پنج ترکیب بارگذاری به صورت زیر می‌باشند.

۱- فشار داخلی 80 Mpa – فشار خارجی 0؛

۲- فشار داخلی 60 Mpa – فشار خارجی 20 Mpa ؛

۳- فشار داخلی 40 Mpa – فشار خارجی 40 Mpa ؛

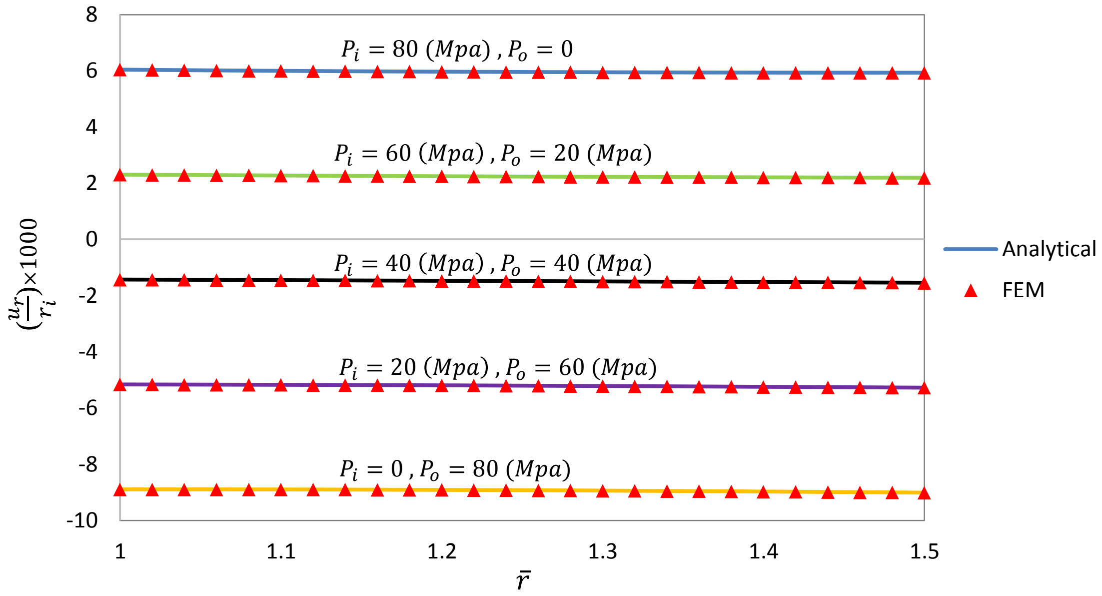
۴- فشار داخلی 20 Mpa – فشار خارجی 60 Mpa ؛

۵- فشار داخلی 0 – فشار خارجی 80 Mpa.

جدول ۲-۱ خواص ماده‌ی گرافیت-کربن

مدول الاستیسیته (Gpa)		
$E_1 = 173.0584$	$E_2 = 33.0948$	$E_3 = 5.1710$
ثابت‌های برشی (Gpa)		
$G_{23} = 3.2405$	$G_{13} = 8.2737$	$G_{12} = 9.3768$
ضرایب پواسون		
$\nu_{12} = 0.036$	$\nu_{13} = 0.25$	$\nu_{23} = 0.171$
ضرایب انبساط حرارتی ($10^{-6}\ {}^{1}\!/_{K}$)		
$\alpha_1 = 2.62$	$\alpha_2 = 2.35$	$\alpha_3 = 1.97$
چگالی (${}^{kg}\!/_{m^3}$)		
$\rho = 7500$		

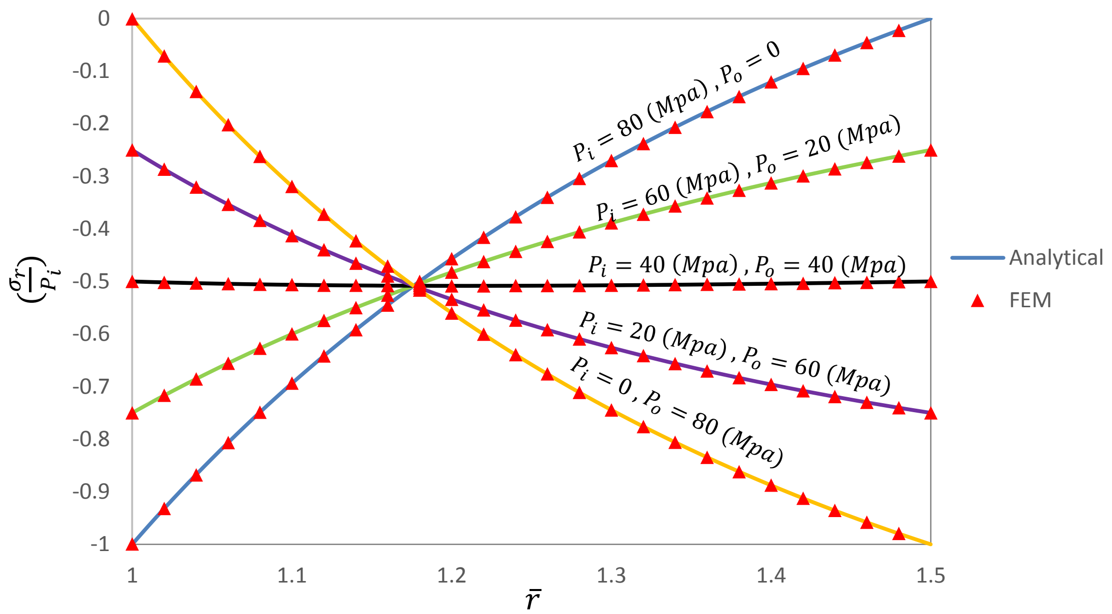
شکل ۲-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه و بر اساس شعاع بی‌بعد شده $\bar{r}=\frac{r}{r_i}$ و فشار بی‌بعد شده $\frac{\sigma_r}{P_i}$، $(P_i = 80\ Mpa)$ را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و روش اجزای محدود نشان می‌دهد. تغییرات جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه بسیار اندک بوده و قابل ملاحظه نمی‌باشد. همچنین جابه‌جایی استوانه متأثر از فشار داخلی دارای مقادیر مثبت و در اثر فشار خارجی دارای مقادیر منفی و بزرگ‌تر می‌باشد. جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز با استفاده از اصل جمع آثار، از مجموع جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی به‌دست می‌آید. همچنین با توجه به شکل مشاهده می‌گردد که حل تحلیلی و عددی مؤید یکدیگر می‌باشند.



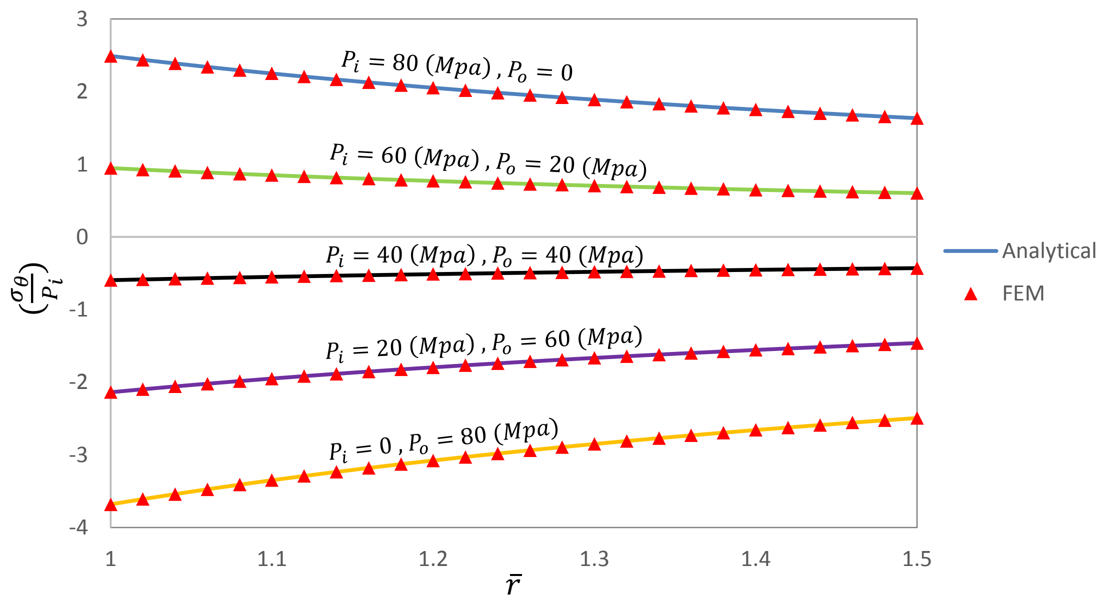
شکل ۲-۵ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی تحت بارگذاری فشاری

شکل ۲-۶ توزیع تنش شعاعی را با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی و روش اجزای محدود در استوانه مورد بررسی قرار می‌دهد. که بر اساس آن مشاهده می‌شود، هردو روش انطباق خوبی دارند. نمودار حاکی از آن است هنگامی که استوانه تحت فشار داخلی قرار دارد مقدار تنش شعاعی در راستای ضخامت به سمت لایه‌ی خارجی کاهش می‌یابد و هرچه سهم فشار داخلی در بارگذاری ترکیبی کاهش می‌یابد شیب نمودار نیز کاهش می‌یابد. بر عکس در استوانه تحت فشار

خارجی، مقدار تنش شعاعی در راستای ضخامت و به سمت لایهی خارجی افزایش پیـدا مـیکنـد؛ در صورتی که استوانه در معرض فشار داخلی و خارجی یکسانی قرار گیرد تنش شعاعی کمتـرین میـزان تغییرات را در ضخامت استوانه خواهد داشت.



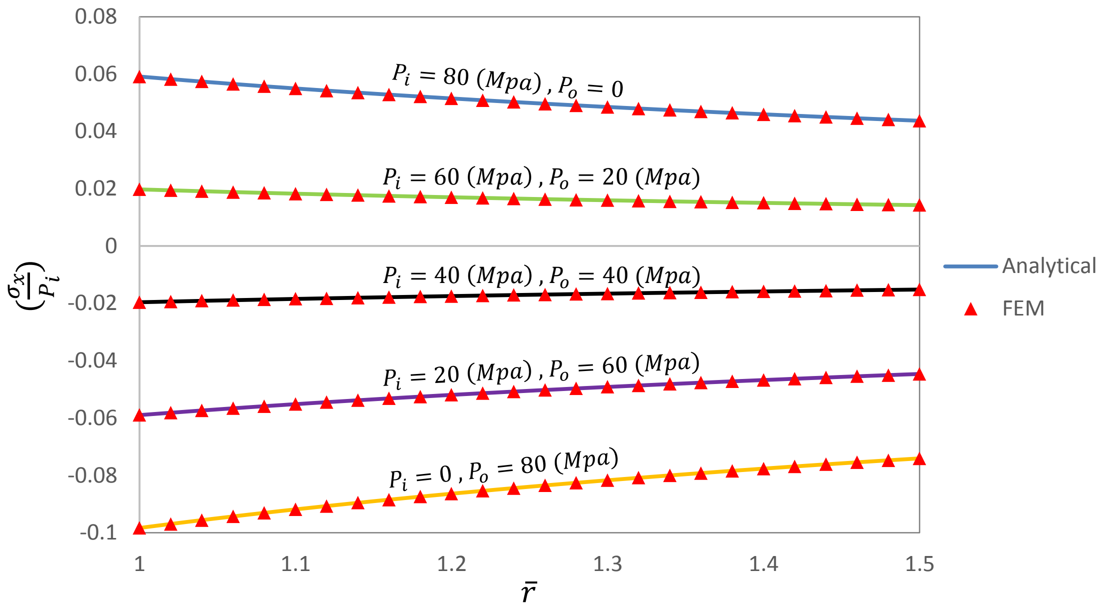
شکل ۲-۶ توزیع تنش شعاعی در استوانهی تحت بارگذاری فشاری



شکل ۲-۷ توزیع تنش محیطی در استوانهی تحت بارگذاری فشاری

توزیع تنش محیطی در راستای ضخامت استوانه با استفاده از نظریهی الاستیسـیتهی مسـتوی و روش اجزای محدود در شکل ۲-۷ نشان داده شده است. از نمودار این نتیجه حاصل مـیگـردد، کـه

فشار داخلی، موجب ایجاد تنش محیطی کششی شده که در راستای ضخامت و به سمت لایه خارجی سیری نزولی دارد. در فشار خارجی، تنش محیطی دارای مقادیر منفی (تنش محیطی فشاری) بوده که در راستای ضخامت روندی صعودی دارد. تنش محیطی برای استوانه تحت فشار داخلی و خارجی نیز با استفاده از اصل جمع آثار، از مجموع تنش‌های محیطی منتج از فشار داخلی و فشار خارجی حاصل می‌شود که همان‌گونه که از نتایج بر می‌آید فشار خارجی اثر غالب داشته و سبب منفی شدن تنش محیطی می‌گردد.

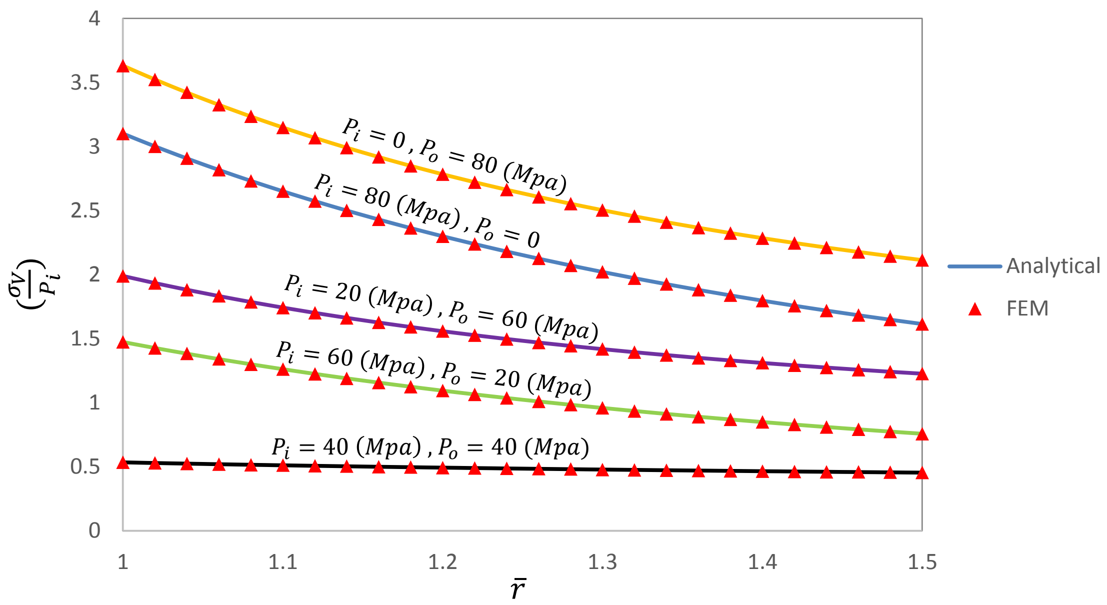


شکل ۲-۸ توزیع تنش محوری در استوانه‌ی تحت بارگذاری فشاری

در شکل ۲-۸ توزیع تنش محوری در راستای ضخامت استوانه با استفاده PET و FEM مورد بررسی قرار گرفته است. با مقایسه‌ی شکل ۲-۷ با شکل ۲-۸ می‌توان گفت که تنش محیطی و تنش محوری دارای رفتار یکسانی بوده؛ با این تفاوت که تنش محیطی مقادیر بزرگ‌تری را نسبت به مقادیر تنش محوری دارا می‌باشد.

شکل ۲-۹ توزیع تنش فون میزس در راستای ضخامت استوانه را با استفاده از حل تحلیلی و عددی نشان می‌دهد، که برای بارگذاری‌های ترکیبی در راستای ضخامت استوانه روندی کاهشی را پیش‌بینی می‌کند. توزیع تنش در بارگذاری داخلی یا خارجی دارای بیش‌ترین تغییرات نسبت به

بارگذاری ترکیبی می‌باشد و همچنان فشار خارجی، اثر غالب را بر مجموعه دارد. نتایج نشانگر این است که تنش محیطی با مقادیر بزرگ‌تر نسبت به سایر تنش‌ها نقش پر رنگ‌تری را در توزیع تنش فون میزس دارد.



شکل ۲-۹ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی تحت بارگذاری فشاری

۲-۸-۳ بررسی جهت ناهمسانگردی

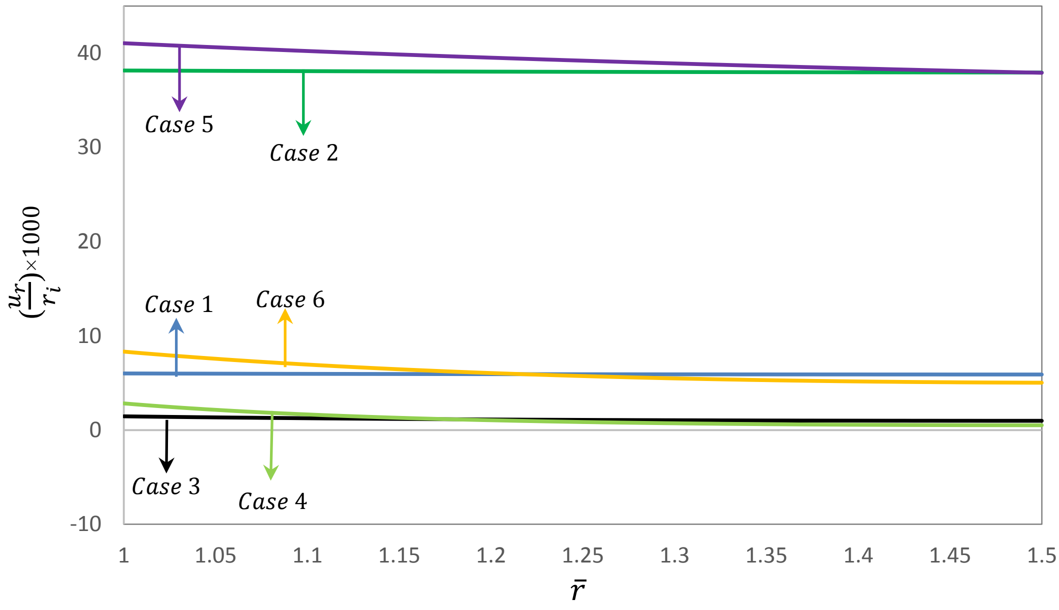
به منظور بررسی اثر ناهمسانگردی در استوانه‌ی ارتوتروپیک تحت بارگذاری فشاری، جهت خواص را طی شش حالت (*Case*) در سه راستای شعاعی، محیطی و محوری در استوانه تغییر می‌دهیم. که در تمام حالت‌ها بارگذاری به صورت فشار داخلی و به میزان $80\ Mpa$ می‌باشد. جدول ۲-۲ حاوی اطلاعات مربوط به این حالت‌ها برای ماده‌ی گرافیت فابریک-کربن می‌باشد.

شکل ۲-۱۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی برای ۶ حالت ناهمسانگردی را در راستای ضخامت استوانه‌ی تحت فشار داخلی نشان می‌دهد. شکل بیانگر این مطلب است که *Case* 3 و *Case* 4 کمترین مقدار جابه‌جایی شعاعی را دارند، که در هر دو حالت بزرگ‌ترین مدول الاستیسیته $(E = 173.0584\ Gpa)$ در راستای محیطی قرار دارد. جابه‌جایی شعاعی برای *Case* 3، تغییرات قابل ملاحظه‌ای ندارد، در حالی که برای *Case* 4، توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه به سمت لایه‌ی خارجی

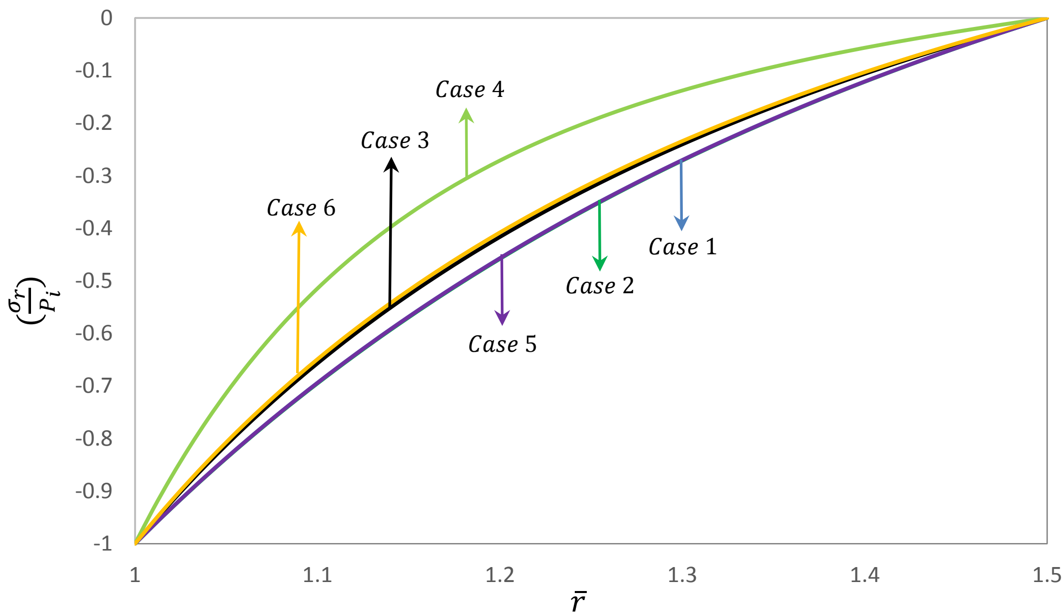
به صورت نزولی می‌باشد. در ادامه مقدار بزرگ‌تر جابه‌جایی شعاعی مربوط به *Case* 1 و *Case* 6 می‌باشد که وجه مشترک هر دو حالت قرار گرفتن دومین مدول الاستیسیته از نظر مقدار ($E = 33.0948\ Gpa$) در راستای محیطی است. برای *Case* 1 جابه‌جایی شعاعی تغییرات محسوسی ندارد، اما جابه‌جایی شعاعی برای *Case* 6 در راستای ضخامت استوانه دارای روندی نزولی می‌باشد. *Case* 5 و *Case* 2 به ترتیب دارای بیشینه‌ی جابه‌جایی شعاعی هستند که در هر دو حالت کمترین مقدار مدول الاستیسیته ($E = 5.1710\ Gpa$) به راستای محیطی اختصاص داده شده است. *Case* 2 جابه‌جایی شعاعی کمتری نسبت به *Case* 5 دارد زیرا راستای شعاعی *Case* 2 دارای مدول الاستیسیته بزرگ‌تر می‌باشد.

جدول ۲-۲ حالت‌های ناهمسانگردی برای ماده‌ی گرافیت فابریک-کربن

شماره‌ی حالت	مدول الاستیسیته (GPa)	ثابت‌های برشی (GPa)	ضرایب پواسون	ضرایب انبساط حرارتی ($10^{-6}\ 1/K$)
Case 1	$E_r = 173.0584$ $E_\theta = 33.0948$ $E_x = 5.1710$	$G_{r\theta} = 9.3768$ $G_{rx} = 8.2737$ $G_{\theta x} = 3.2405$	$\nu_{r\theta} = 0.036$ $\nu_{rx} = 0.25$ $\nu_{\theta x} = 0.171$	$\alpha_r = 2.62$ $\alpha_\theta = 2.35$ $\alpha_x = 1.97$
Case 2	$E_r = 173.0584$ $E_\theta = 5.1710$ $E_x = 33.0948$	$G_{rx} = 9.3768$ $G_{r\theta} = 8.2737$ $G_{x\theta} = 3.2405$	$\nu_{rx} = 0.036$ $\nu_{r\theta} = 0.25$ $\nu_{x\theta} = 0.171$	$\alpha_r = 2.62$ $\alpha_\theta = 1.97$ $\alpha_x = 2.35$
Case 3	$E_r = 33.0948$ $E_\theta = 173.0584$ $E_x = 5.1710$	$G_{\theta r} = 9.3768$ $G_{\theta x} = 8.2737$ $G_{rx} = 3.2405$	$\nu_{\theta r} = 0.036$ $\nu_{\theta x} = 0.25$ $\nu_{rx} = 0.171$	$\alpha_r = 2.35$ $\alpha_\theta = 2.62$ $\alpha_x = 1.97$
Case 4	$E_r = 5.1710$ $E_\theta = 173.0584$ $E_x = 33.0948$	$G_{\theta x} = 9.3768$ $G_{\theta r} = 8.2737$ $G_{xr} = 3.2405$	$\nu_{\theta x} = 0.036$ $\nu_{\theta r} = 0.25$ $\nu_{xr} = 0.171$	$\alpha_r = 1.97$ $\alpha_\theta = 2.62$ $\alpha_x = 2.35$
Case 5	$E_r = 33.0948$ $E_\theta = 5.1710$ $E_x = 173.0584$	$G_{xr} = 3.2405$ $G_{x\theta} = 8.2737$ $G_{r\theta} = 9.3768$	$\nu_{xr} = 0.036$ $\nu_{x\theta} = 0.25$ $\nu_{r\theta} = 0.171$	$\alpha_r = 2.35$ $\alpha_\theta = 1.97$ $\alpha_x = 2.62$
Case 6	$E_r = 5.1710$ $E_\theta = 33.0948$ $E_x = 173.0584$	$G_{x\theta} = 9.3768$ $G_{xr} = 8.2737$ $G_{\theta r} = 3.2405$	$\nu_{x\theta} = 0.036$ $\nu_{xr} = 0.25$ $\nu_{\theta r} = 0.171$	$\alpha_r = 1.97$ $\alpha_\theta = 2.35$ $\alpha_x = 2.62$



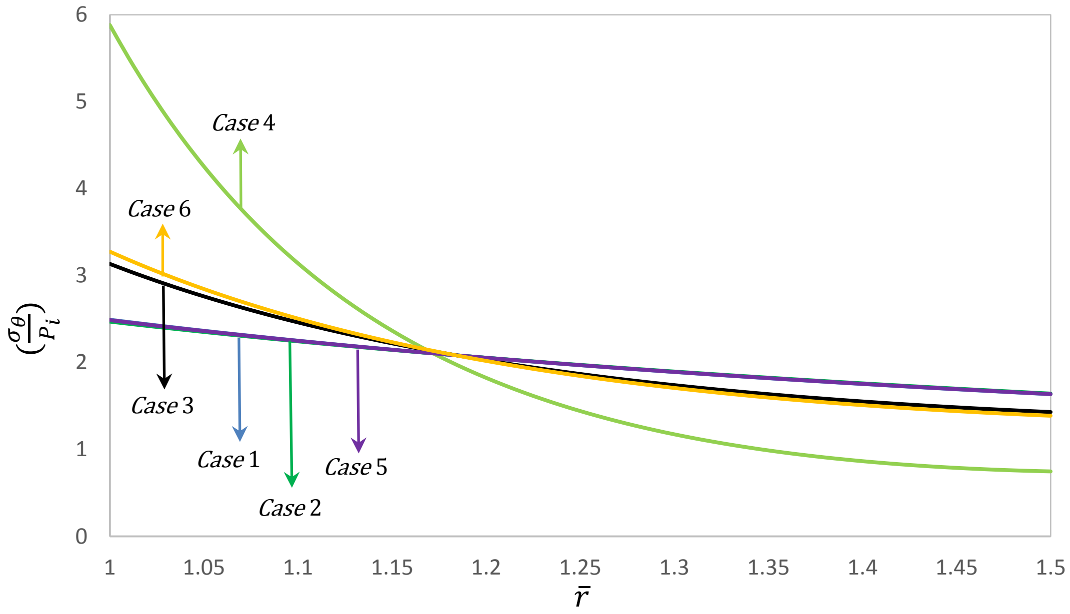
شکل ۲-۱۰ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های ناهمسانگرد تحت فشار داخلی



شکل ۲-۱۱ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های ناهمسانگرد تحت فشار داخلی

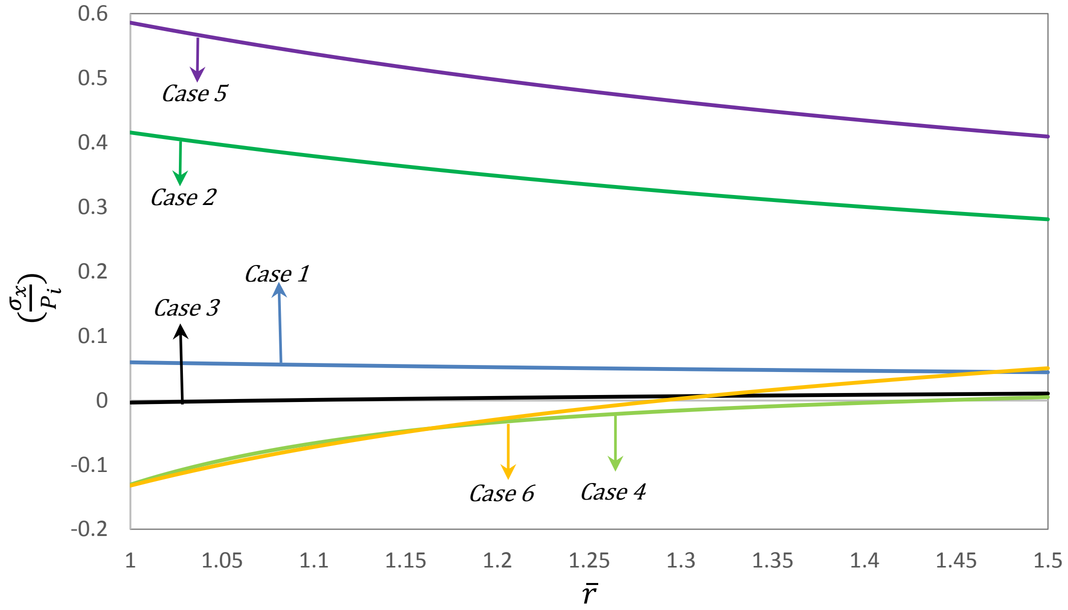
شکل ۲-۱۱ امکان بررسی توزیع تنش شعاعی را برای ۶ حالت ناهمسانگردی در راستای ضخامت استوانه‌ی تحت فشار داخلی فراهم می‌سازد، که بر اساس آن مشاهده می‌گردد در تمامی حالت‌ها تنش شعاعی در راستای ضخامت استوانه و به سمت لایه‌ی خارجی رو به کاهش است. همچنین نتایج حاکی از این است که *Case* 4 کمترین میزان تنش را ، نسبت به سایر حالت‌ها داشته و *Case* 3 و

Case 6 نیز رفتاری مشابه را در مقابل بارگذاری فشار داخلی از خود نشان می‌دهند. و برای *Case* 1، *Case* 2 و *Case* 5 نیز جهت ناهمسانگردی به گونه‌ای می‌باشد که موجب بروز بیش‌ترین مقدار تنش شعاعی در این سه حالت می‌گردد.

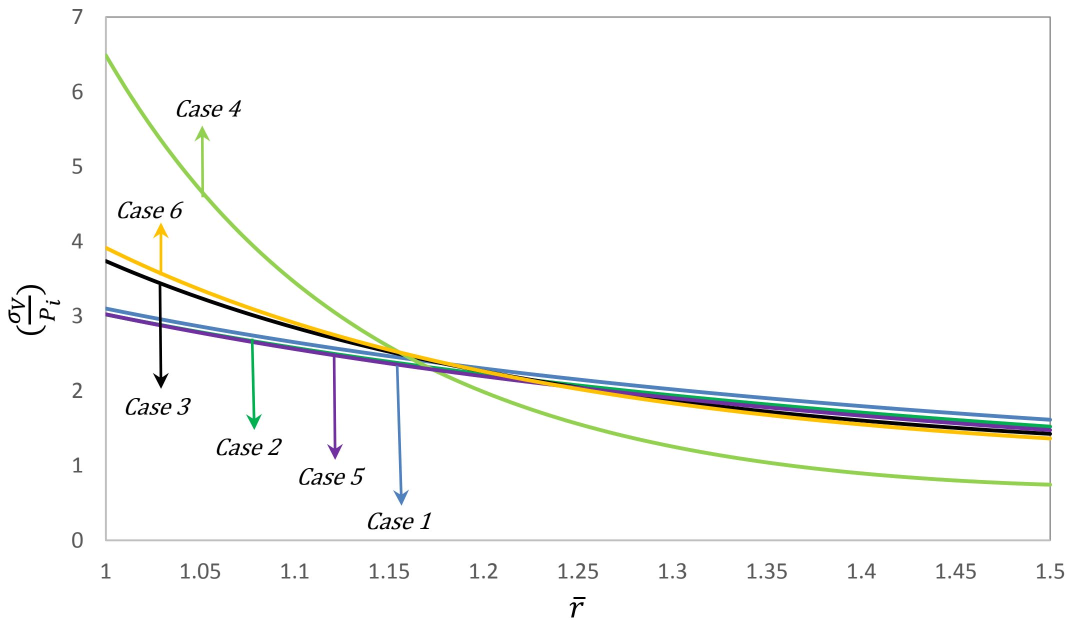


شکل ۲-۱۲ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های ناهمسانگرد تحت فشار داخلی

شکل ۲-۱۲ حاوی نتایج حاصل از بارگذاری فشار داخلی بر توزیع تنش محیطی، برای ۶ حالت ناهمسانگردی در راستای ضخامت استوانه می‌باشد. این شکل بیانگر این است که در استوانه‌ی تحت فشار داخلی، توزیع تنش در تمامی حالت‌ها سیری نزولی دارد. توزیع تنش در *Case* 4، متفاوت از دیگر حالت‌ها، دارای بیش‌ترین تغییرات است به نحوی که مقدار تنش محیطی از لایه‌ی داخلی به لایه‌ی خارجی بیش از ۸۰ درصد کاهش پیدا می‌کند. همچنین جهت ناهمسانگردی در *Case* 3 و *Case* 6 به گونه‌ای است که موجب شده تا میزان تغییرات تنش محیطی در راستای جداره‌ی استوانه برای این دو حالت نسبت به *Case* 4 کاهش یابد. *Case* 1 و *Case* 2، کمترین تنش محیطی را همراه با کمترین تغییرات در راستای ضخامت دارند که در هر دو حالت بزرگ‌ترین مدول الاستیسیته در راستای شعاعی قرار دارد. در *Case* 5 نیز جهت ناهمسانگردی موجب شده تا در این حالت توزیع تنش محیطی مشابه *Case* 1 و *Case* 2 باشد.



شکل ۲-۱۳ توزیع تنش محوری در استوانه‌های ناهمسانگرد تحت فشار داخلی



شکل ۲-۱۴ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌های ناهمسانگرد تحت فشار داخلی

شکل ۲-۱۳ اثر بارگذاری فشار داخلی را بر توزیع تنش محوری در راستای ضخامت برای ۶ حالت ناهمسانگردی در استوانه دو سر بسته و مقید نشان می‌دهد. *Case 3* و *Case 1*، که به ترتیب دارای کمترین تنش محوری می‌باشند، توزیع تنش تغییرات محسوسی در راستای ضخامت استوانه ندارد. و در هر دو حالت کوچک‌ترین مدول الاستیسیته به راستای محوری اختصاص داده شده است. همان

طور که مشاهده می‌شود جهت ناهمسانگردی $Case\ 4$ و $Case\ 6$ سبب شده تـا در ایـن حالـت‌هـا در استوانه تنش محوری فشاری ایجاد گردد؛ که در هر دو حالـت ($E_r = 5.1710\ Gpa$) مـی‌باشـد.برای استوانه‌های ناهمسانگرد $Case\ 2$ و $Case\ 5$ که در معرض بارگذاری فشار داخلی قرار گرفته‌اند؛ جهـت ناهمسانگردی موجب به وجود آمدن تنش محوری کششی در این دو حالت شده است.

شکل ۲-۱۴ دربردارنده‌ی نتایج حاصل از اعمال بارگذاری فشار داخلی بر توزیع تنش فون میزس در راستای ضخامت استوانه می‌باشد. از آن جا که تنش محیطی به دلیل داشتن مقادیر بزرگ‌تر نقـش غالب را در رابطه‌ی تنش فون میزس دارد بنابراین رفتار نمودارهای توزیع تنش فون میـزس در هـر ۶ حالت ناهمسانگردی مشابه رفتار نمودارهای توزیع تنش محیطی می‌باشد.

فصل ۳

تحلیل الاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

۳-۱ مقدمه

در این فصل هدف تحلیل الاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی می‌باشد. روند حل مسأله در فصل پیش‌رو مشابه فصل دوم می‌باشد، اما تفاوت از آنجایی آغاز می‌گردد که به دلیل اعمال چرخش در استوانه، ترم ناهمگنی وارد معادله‌ی تعادل می‌گردد، بنابراین در این فصل به حل معادله‌ی مشخصه که اکنون دارای ترم ناهمگنی می‌باشد پرداخته می‌شود و سپس نتایج حاصل از اعمال چرخش بر استوانه، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۲ روابط اساسی

با توجه به فرضیات بیان شده در قسمت (۲-۳-۱) و با در نظر گرفتن نیروهای حجمی در راستای شعاعی ($\rho B_\theta = \rho B_x = 0$) معادلات تعادل (۲-۵) به صورت زیر خلاصه می‌گردند.

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r\omega^2 = 0 \qquad (۳-۱)$$

با جایگذاری روابط تنش (۲-۲۷) و روابط کرنش (۲-۲۸) در معادله‌ی بالا داریم.

$$\begin{aligned} &A\frac{d^2u_r}{dr^2} - B\frac{u_r}{r^2} + \frac{B}{r}\frac{du_r}{dr} + \frac{A}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{B}{r}\frac{du_r}{dr} + B\frac{u_r}{r^2} - C\frac{u_r}{r^2} = -\rho r\omega^2 \\ &A\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{A}{r}\frac{du_r}{dr} - C\frac{u_r}{r^2} = -\rho r\omega^2 \end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

با قرار دادن $\nu^* = \frac{C}{A}$، که بر اساس شرایط انتهایی مسأله تعیین می‌گردد، می‌توان نوشت.

$$\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_r}{dr} - \nu^*\frac{u_r}{r^2} = -\frac{\rho}{A}r\omega^2 \qquad (۳-۳)$$

معادله‌ی (۳-۳) یک معادله‌ی کوشی- اویلر می‌باشد که می‌توان آن را به فرم زیر بازنویسی کرد.

$$r^2u_r'' + ru_r' - \nu^*u_r = -\frac{\rho}{A}r^3\omega^2 \qquad (۳-۴)$$

۳-۳ حل الاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک چرخان

معادله‌ی(۳-۳) دارای دو قسمت حل خصوصی و حل عمومی می‌باشد. که پاسخ حل عمـومی آن در فصل دوم به‌دست آمده است. برای یافتن پاسخ قسمت خصوصی نیز به صورت زیر عمل می‌کنیم.

با توجه به اینکه ترم ناهمگنی در رابطه‌ی (۳-۴)، یک عبارت درجه‌ی ۳ می‌باشـد. بنـابراین حـل خصوصی را یک عبارت درجه‌ی ۳ با ضرایب نامعین در نظر می‌گیریم.

$$u_{r_p} = A^* r^3 + B^* r^2 + C^* r + D^*$$
$$u'_{r_p} = 3A^* r^2 + 2B^* r + C^* \qquad (۳-۵)$$
$$u''_{r_p} = 6A^* r + 2B^*$$

روابط بالا را در معادله‌ی (۳-۴) قرار می‌دهیم، تا ضرایب (A^*, B^*, C^*, D^*) محاسبه گردند.

$$r^3(6A^* + 3A^* - \nu^* A^*) + r^2(2B^* + 2B^* - \nu^* B^*) + r(C^* - \nu^* C^*) + \nu^* D^* = -\frac{\rho}{A} r^3 \omega^2 \qquad (۳-۶)$$

با توجه به رابطه‌ی بالا می‌توان گفت که ضرایب (B^*, C^*, D^*) صفر مـی‌باشـند امـا ضـریب A^* برابر است با:

$$(9-\nu^*)A^* = -\frac{\rho}{A}\omega^2 \quad \rightarrow \quad A^* = -\frac{\rho\omega^2}{A(9-\nu^*)} \qquad (۳-۷)$$

سپس با قرار دادن A^* در اولین رابطه‌ی (۳-۵) حل خصوصی به‌دست می‌آید.

$$u_{r_p} = -\frac{\rho\omega^2 r^3}{A(9-\nu^*)} \qquad (۳-۸)$$

پاسخ کلی معادله‌ی (۳-۳) شامل حل عمومی به‌دست آمده در فصل سوم یعنـی همـان رابطـه‌ی (۲-۳۴) و حل خصوصی یا همان رابطه‌ی (۳-۸) می‌باشد.

$$u_r = u_{r_g} + u_{r_p} = c_1 r^{\xi} + c_2 r^{-\xi} - \frac{\rho\omega^2 r^3}{A(9-\nu^*)} \qquad (۳-۹)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا به عنوان جابه‌جـایی شـعاعی در روابـط (۲-۲۸) کـرنش‌هـای شـعاعی و

محیطی به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_r = \frac{c_1 r^{\xi} \xi}{r} - \frac{c_2 r^{-\xi} \xi}{r} - \frac{3\rho\omega^2 r^2}{A(9-\nu^*)}$$
$$\varepsilon_\theta = \frac{c_1 r^{\xi}}{r} + \frac{c_2 r^{-\xi}}{r} - \frac{\rho\omega^2 r^2}{A(9-\nu^*)} \qquad (۳-۱۰)$$

با قرار دادن معادلات میدان کرنش (۳-۱۰) در روابط (۲-۲۷) تنش‌های شعاعی و محیطی محاسبه می‌گردند.

$$\sigma_r = A\left(\frac{c_1 r^{\xi} \xi}{r} - \frac{c_2 r^{-\xi} \xi}{r} - \frac{3\rho\omega^2 r^2}{A(9-\nu^*)}\right) + B\left(\frac{c_1 r^{\xi}}{r} + \frac{c_2 r^{-\xi}}{r} - \frac{\rho\omega^2 r^2}{A(9-\nu^*)}\right)$$
$$\sigma_\theta = B\left(\frac{c_1 r^{\xi} \xi}{r} - \frac{c_2 r^{-\xi} \xi}{r} - \frac{3\rho\omega^2 r^2}{A(9-\nu^*)}\right) + C\left(\frac{c_1 r^{\xi}}{r} + \frac{c_2 r^{-\xi}}{r} - \frac{\rho\omega^2 r^2}{A(9-\nu^*)}\right) \qquad (۳-۱۱)$$

به منظور محاسبه‌ی ضرایب c_1 , c_2 با اعمال شرایط مرزی تنش در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه (روابط (۲-۱۲)) در معادله‌ی تنش شعاعی (اولین معادله‌ی (۳-۱۱)) داریم.

$$A\left(\frac{c_1 r_i^{\xi} \xi}{r_i} - \frac{c_2 r_i^{-\xi} \xi}{r_i} - \frac{3\rho\omega^2 r_i^2}{A(9-\nu^*)}\right) + B\left(\frac{c_1 r_i^{\xi}}{r_i} + \frac{c_2 r_i^{-\xi}}{r_i} - \frac{\rho\omega^2 r_i^2}{A(9-\nu^*)}\right) + P_i = 0$$
$$A\left(\frac{c_1 r_o^{\xi} \xi}{r_o} - \frac{c_2 r_o^{-\xi} \xi}{r_o} - \frac{3\rho\omega^2 r_o^2}{A(9-\nu^*)}\right) + B\left(\frac{c_1 r_o^{\xi}}{r_o} + \frac{c_2 r_o^{-\xi}}{r_o} - \frac{\rho\omega^2 r_o^2}{A(9-\nu^*)}\right) + P_o = 0 \qquad (۳-۱۲)$$

با حل همزمان معادلات (۳-۱۲) ثابت‌های c_1 و c_2 بر حسب ضرایب A، B و C به‌دست می‌آیند.

$$c_1 = -\frac{r_i r_o^{-\xi}\left(\omega^2 \rho r_i^2 (-3A - B) + P_i (9A - C)\right)}{(9A - C)(A\xi + B)\left(-r_o^{\xi} r_i^{-\xi} + r_o^{-\xi} r_i^{\xi}\right)}$$
$$-\frac{r_o r_i^{-\xi}\left(\omega^2 \rho r_o^2 (3A + B) + P_o (C - 9A)\right)}{(9A - C)(A\xi + B)\left(-r_o^{\xi} r_i^{-\xi} + r_o^{-\xi} r_i^{\xi}\right)} \qquad (۳-۱۳)$$

$$c_2 = -\frac{\omega^2 (3A\rho + B)\left(r_o^3 r_i^{\xi} - r_i^3 r_o^{\xi}\right) + (C - 9A)\left(P_o r_o r_i^{\xi} + P_i r_i r_o^{\xi}\right)}{(C - 9A)\left(\xi r_o^{\xi} r_i^{-\xi} A + r_o^{-\xi} r_i^{\xi} B\right) + (9A - C)\left(\xi r_o^{-\xi} r_i^{\xi} A + r_o^{\xi} r_i^{-\xi} B\right)} \qquad (۳-۱۴)$$

با جایگذاری ثابت‌های c_1 و c_2 در معادله‌ی (۳-۹)، جابه‌جایی شعاعی بر حسب ضرایب A، B و C

که متأثر از شرایط مرزی انتهایی می‌باشد، به‌دست می‌آید.

$$u_r=\left(-\frac{r_i r_o^{-\xi}\left(\omega^2\rho r_i^2\left(-3A-B\right)+P_i\left(9A-C\right)\right)}{\left(9A-C\right)\left(A\xi+B\right)\left(-r_o^{\xi}r_i^{-\xi}+r_o^{-\xi}r_i^{\xi}\right)}\right)r^{\xi}-$$
$$\left(\frac{r_o r_i^{-\xi}\left(\omega^2\rho r_o^2\left(3A+B\right)+P_o\left(C-9A\right)\right)}{\left(9A-C\right)\left(A\xi+B\right)\left(-r_o^{\xi}r_i^{-\xi}+r_o^{-\xi}r_i^{\xi}\right)}\right)r^{\xi}-$$
$$\left(\frac{\omega^2\left(3A\rho+B\right)\left(r_o^3 r_i^{\xi}-r_i^3 r_o^{\xi}\right)+\left(C-9A\right)\left(P_o r_o r_i^{\xi}+P_i r_i r_o^{\xi}\right)}{\left(C-9A\right)\left(\xi r_o^{\xi}r_i^{-\xi}A+r_o^{-\xi}r_i^{\xi}B\right)+\left(9A-C\right)\left(\xi r_o^{-\xi}r_i^{\xi}A+r_o^{\xi}r_i^{-\xi}B\right)}\right)r^{-\xi}- \tag{۱۵-۳}$$
$$\frac{\rho\omega^2 r^3}{A(9-\nu^*)}$$

با قرار دادن u_r از رابطه‌ی بالا، در روابط سینماتیک (۳-۱۰)، کرنش‌های شعاعی و محیطی حاصل می‌گردند. در انتها با جایگذاری کرنش‌های شعاعی و محیطی در رابطه‌ی (۳-۱۱)، تنش‌های محیطی و شعاعی به‌دست می‌آیند.

۳-۴ اعمال شرایط انتهایی استوانه در روابط نهایی

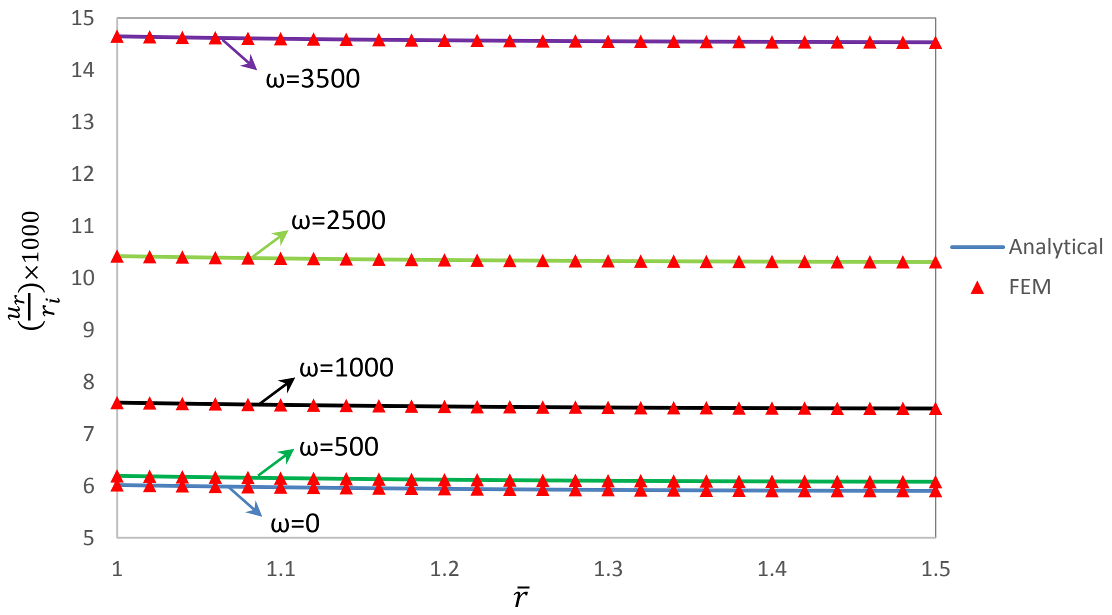
در فصل دوم ذکر شد که استوانه با دو شرط انتهایی دو سر بسته‌ی مقید (کرنش صفحه‌ای) و دو سر باز (تنش صفحه‌ای) مد نظر است. بنابراین می‌توان جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های شعاعی، محیطی، فون میزس و تنش محوری را در هر حالت؛ با قرار دادن ضرایب A، B و C مربوط به همان حالت (روابط (۲-۲۰) برای کرنش صفحه‌ای و روابط (۲-۲۶) برای تنش صفحه‌ای) محاسبه نمود.

۳-۵ مطالعه‌ی موردی

در این فصل تمامی مشخصات استوانه از جمله هندسه و ماده مانند گذشته بوده اما در بارگذاری علاوه بر بارگذاری فشاری، به منظور بررسی اثر چرخش (دوران حول محور طولی x) که هدف این فصل بوده؛ سرعت دورانی نیز به استوانه اعمال می‌شود.

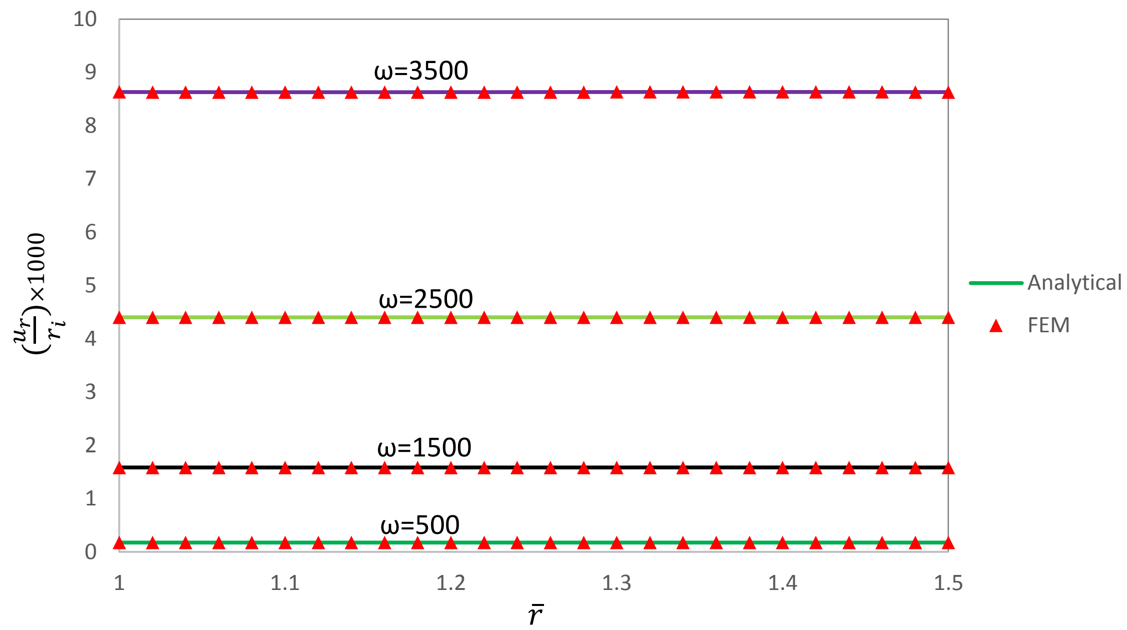
۳-۵-۱ بررسی تأثیر بارگذاری فشاری و چرخشی

با هدف مطالعه‌ی اثر چرخش بر توزیع جابه‌جایی و تنش‌ها، ابتدا به استوانه با فشار داخلی ثابت ($80\ Mpa$)، پنج سرعت دورانی ($0,\ 500, 1500, 2500, 3500\ (\frac{rad}{s})$) اعمال می‌گردد، سپس فشار داخلی از استوانه حذف می‌گردد تا استوانه رفتار استوانه تحت چرخش خالص مورد بررسی قرار گیرد.

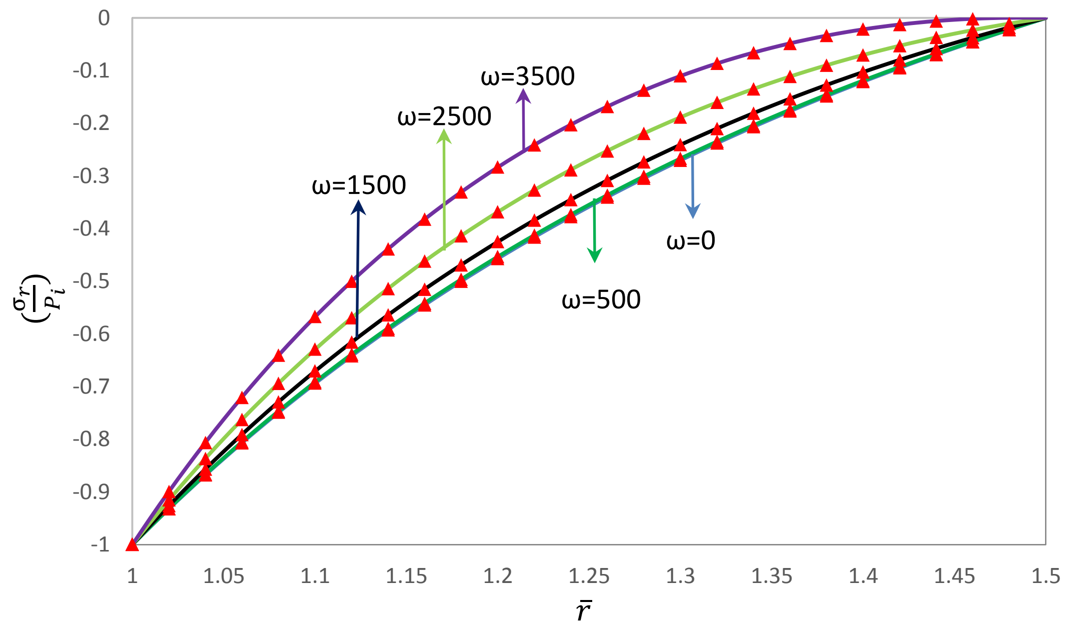


شکل ۳-۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی

شکل ۳-۱ و شکل ۳-۲، توزیع جابه‌جایی شعاعی را در راستای ضخامت استوانه در سرعت‌های دورانی متفاوت با کمک نظریه الاستیسیته‌ی مستوی و روش اجزای محدود نشان می‌دهند؛ با این تفاوت که در شکل ۳-۱ توزیع جابه‌جایی متأثر از بارگذاری فشار داخلی و چرخش بوده اما در شکل ۳-۲ توزیع جابه‌جایی فقط متأثر از چرخش استوانه است. به نحوی که ملاحظه می‌گردد چه در بارگذاری فشار داخلی و چه در بارگذاری فشار داخلی توأم با چرخش توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه تغییرات قابل ملاحظه‌ای ندارد. در استوانه‌ی تحت چرخش عدم حضور فشار موجب کاهش محسوس جابه‌جایی شعاعی می‌گردد؛ بنابراین بر مبنای اصل جمع آثار، جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و چرخش، از مجموع جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت چرخش به‌دست می‌آید.

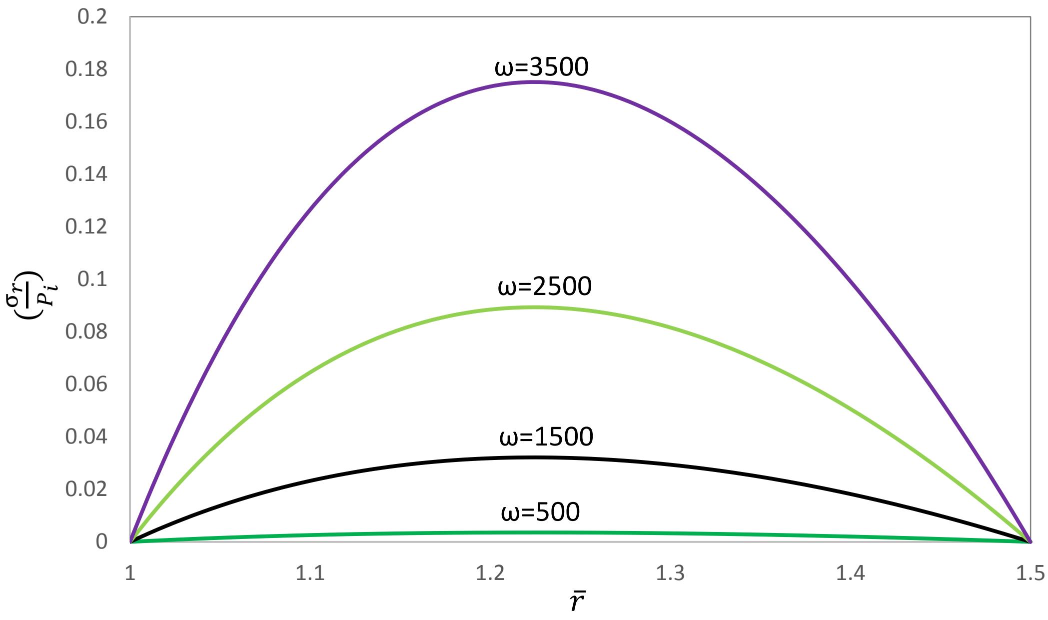


شکل ۳-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی چرخان



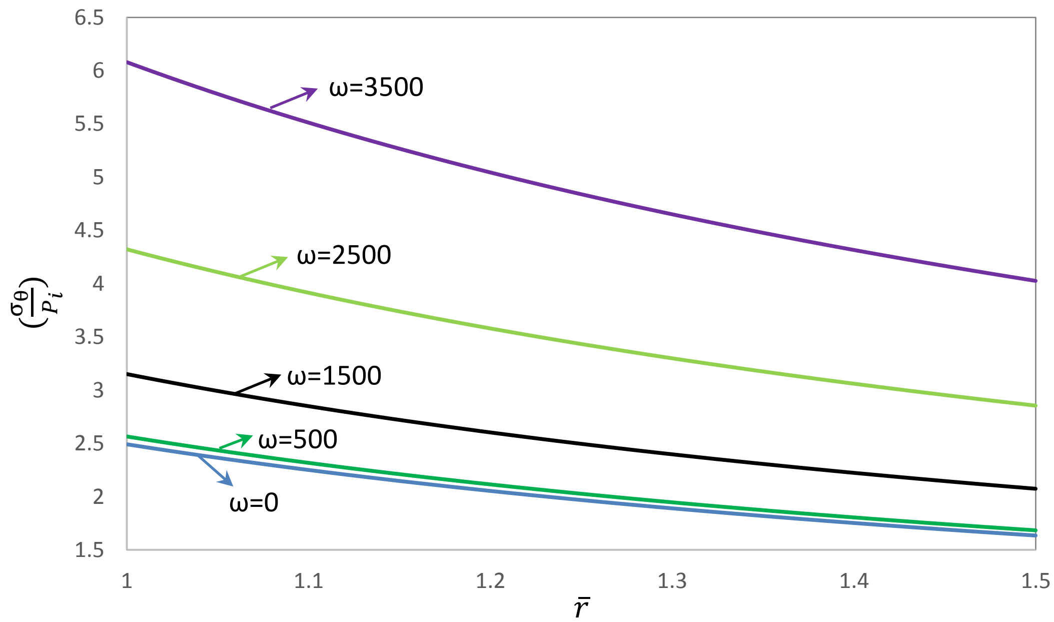
شکل ۳-۳ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی

شکل ۳-۳ مبین توزیع تنش شعاعی در راستای ضخامت استوانه تحت بارگذاری فشار داخلی در سرعت‌های دورانی متفاوت با کمک PET و FEM می‌باشد. مشاهده می‌گردد که اعمال فشار داخلی $(80\ \ Mpa)$ موجب ایجاد تنش شعاعی منفی (فشاری) در راستای ضخامت می‌گردد که با افزایش سرعت دورانی استوانه، مقادیر تنش شعاعی را کاهش می‌یابد.

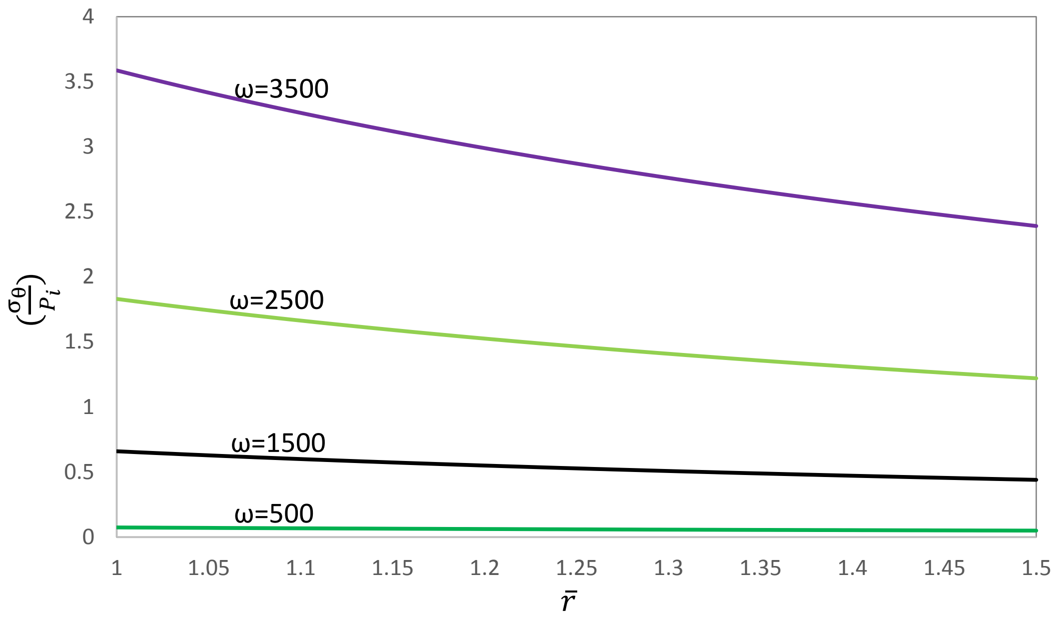


شکل ۳-۴ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی چرخان

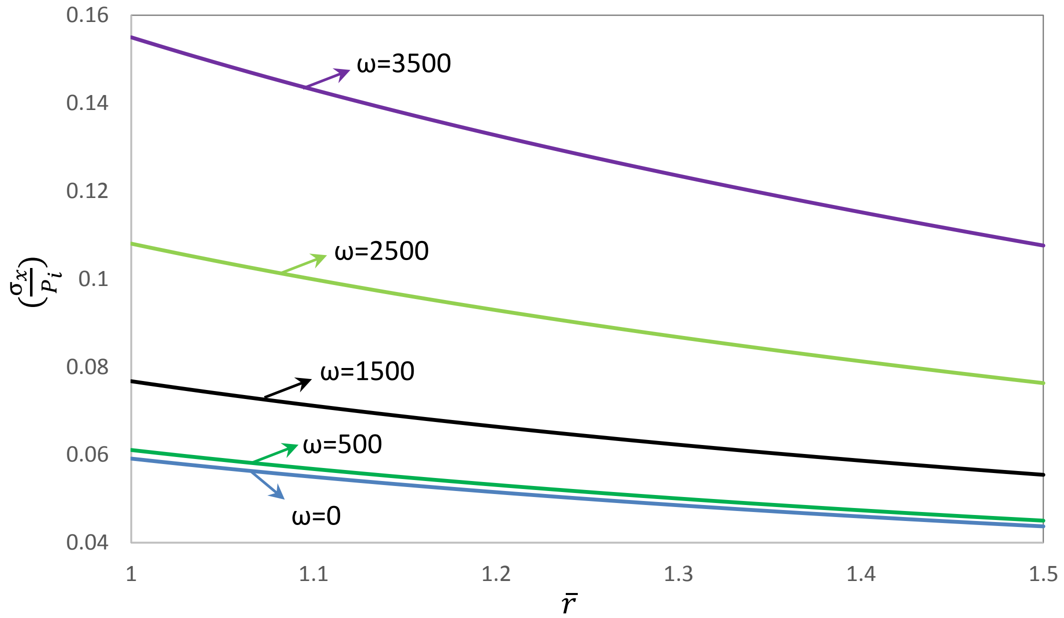
شکل ۳-۴ نشان دهنده‌ی توزیع تنش شعاعی در راستای ضخامت استوانه برای سرعت‌های دورانی متفاوت می‌باشد. اعمال دوران به عنوان نیروی حجمی موجب ایجاد تنش شعاعی کششی در استوانه می‌گردد که در لایه‌ی میانی بیشینه‌ی تنش و در لایه‌های داخلی و خارجی کمینه‌ی تنش شعاعی به وجود می‌آید.



شکل ۳-۵ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی

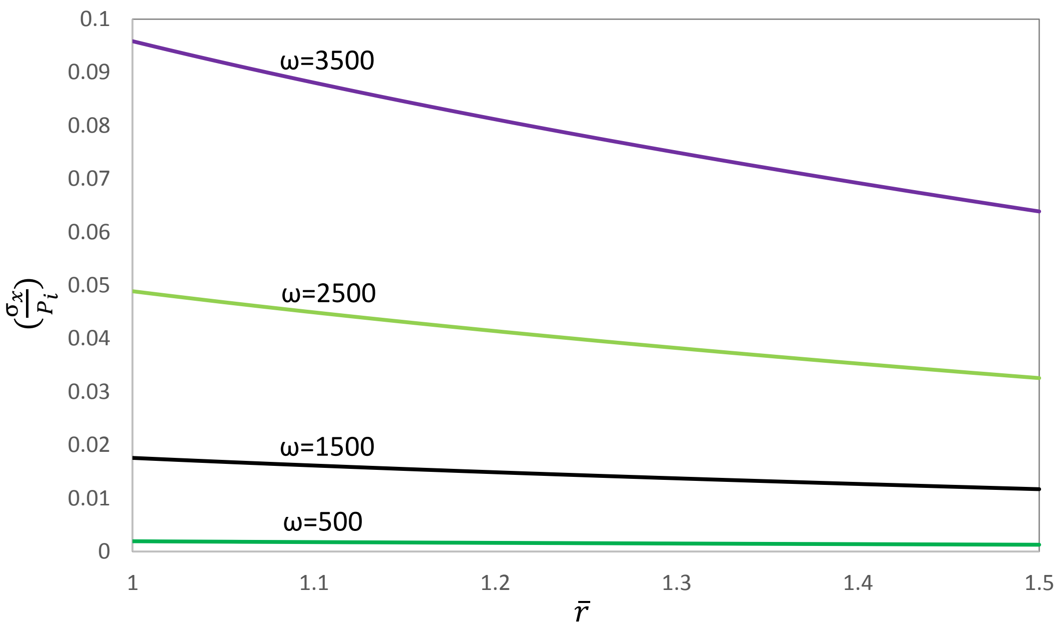


شکل ۳-۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی چرخان

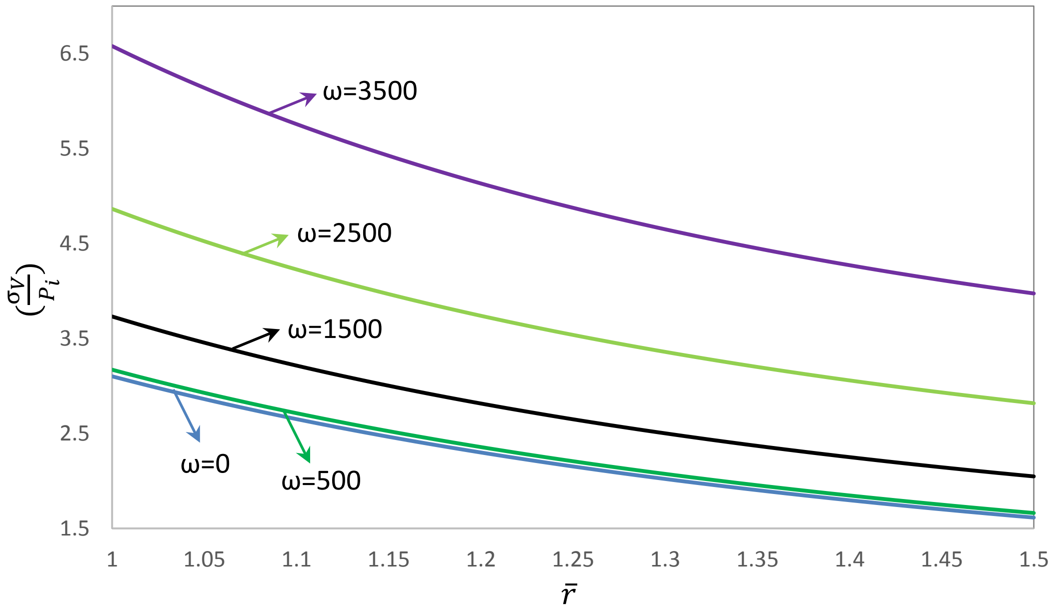


شکل ۳-۷ توزیع تنش محوری در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی

شکل ۳-۵ تا شکل ۳-۸ نتایج حاصل از تنش‌های محیطی و محوری استوانه را تحت بارگذاری فشار داخلی-چرخشی و چرخشی نشان می‌دهند. بررسی نمودارها حاکی از این است که بارگذاری مذکور باعث رفتار یکسانی برای توزیع تنش‌های محیطی و محوری می‌شوند. در تمامی چهار نمودار یاد شده، بیش‌ترین میزان تنش در لایه‌ی داخلی و کمترین میزان تنش در لایه‌ی خارجی رخ می‌دهد.



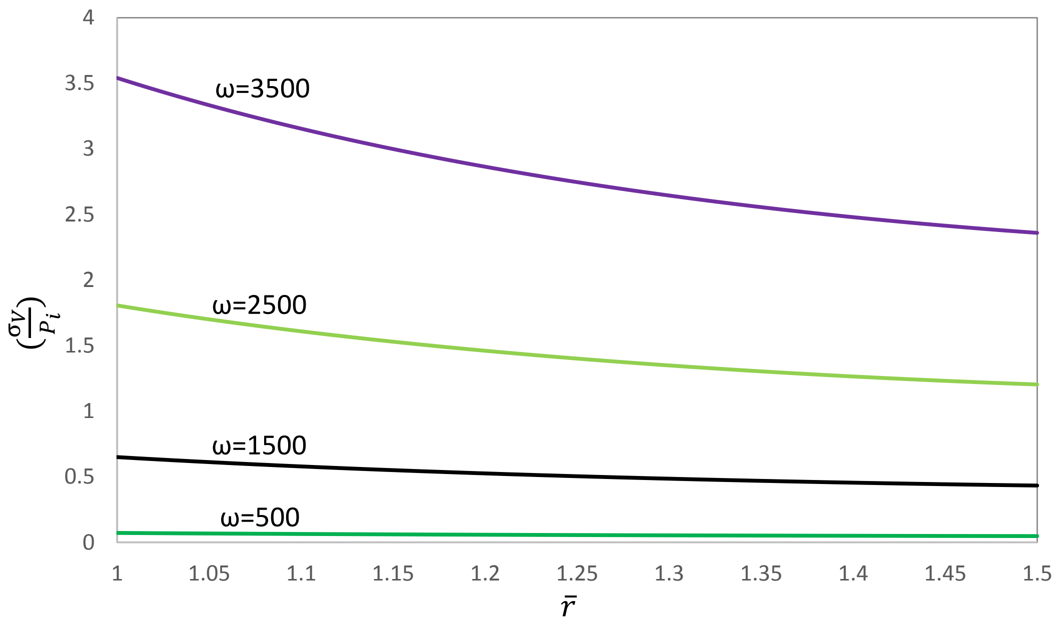
شکل ۳-۸ توزیع تنش محوری در استوانه‌ی چرخان



شکل ۳-۹ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی

تأثیر سرعت‌های دورانی متفاوت بر توزیع تنش فون میزس در راستای ضخامت استوانه‌ی با بارگذاری فشار داخلی- چرخش و بارگذاری چرخشی، به ترتیب در شکل ۳-۹ وشکل ۳-۱۰ مشخص شده است. تنش محیطی با در اختیار داشتن مقادیر بزرگ‌تر نقش غالب را در تنش فون میزس دارد؛ بنابراین گراف‌های توزیع تنش فون میزس در هر حالت بارگذاری، مشابه گراف‌های توزیع تنش

محیطی رفتار می‌کنند.



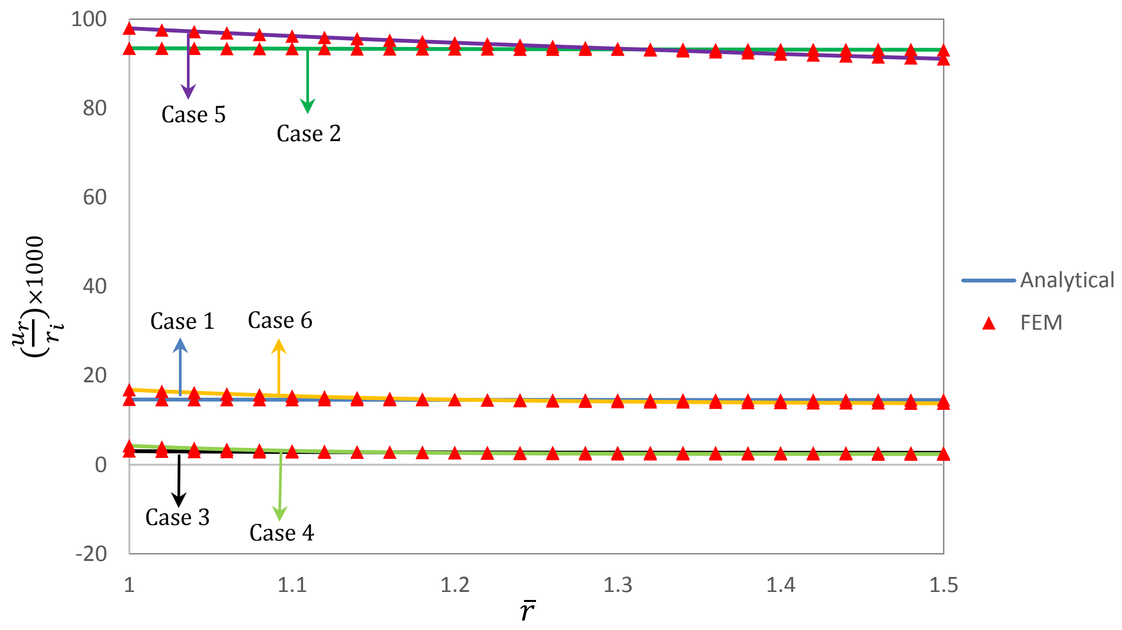
شکل ۳-۱۰ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی چرخان

۳-۵-۲بررسی اثر ناهمسانگردی

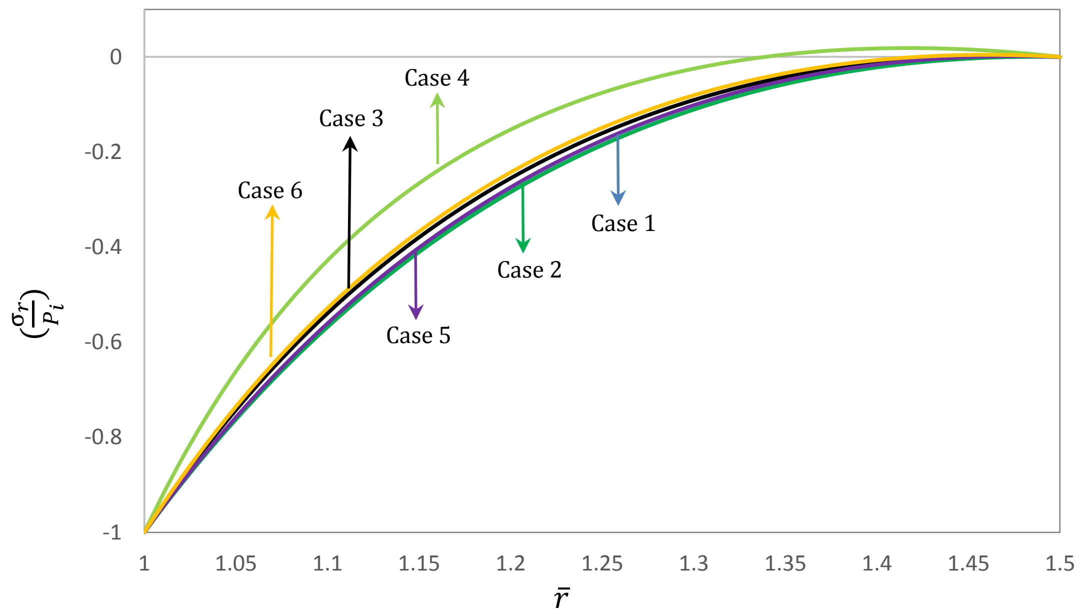
در فصل حاضر برای بررسی اثر ناهمسانگردی، استوانه را در شرایط زیر قرار می‌دهیم: فشار داخلی ($80\ Mpa$)، سرعت دورانی ($3500\ \frac{rad}{s}$).

شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی برای ۶ حالت ناهمسانگردی را در راستای ضخامت استوانه تحت فشار داخلی و چرخش نشان می‌دهد، که همان توزیع جابه‌جایی شعاعی تحت بارگذاری فشاری خالص بوده که دامنه‌ی تغییراتش افزایش یافته است.

در شکل ۳-۱۲ که نشان دهنده‌ی توزیع تنش شعاعی برای ۶ حالت ناهمسانگردی در راستای ضخامت استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی می‌باشد، حضور فشار داخلی در استوانه موجب پدید آمدن تنش با مقادیر منفی (فشاری) شده است، در حالی که اعمال بارگذاری چرخشی به استوانه موجب کاهش تنش در تمامی حالت‌ها گردیده و تمایل به ایجاد تنش مثبت (کششی) دارد.



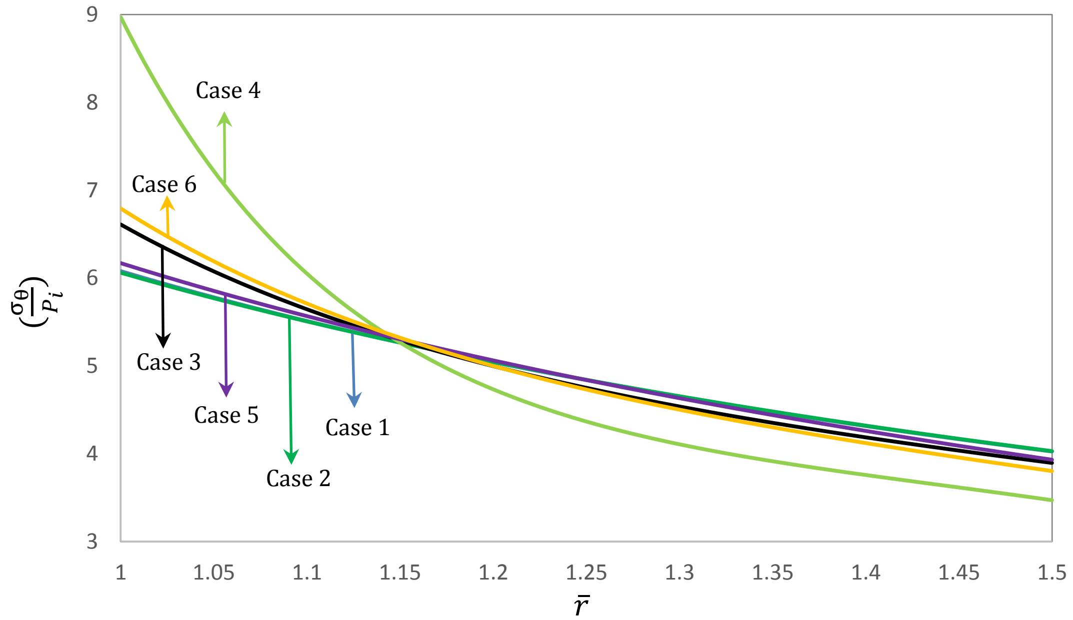
شکل ۳-۱۱ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت فشار داخلی



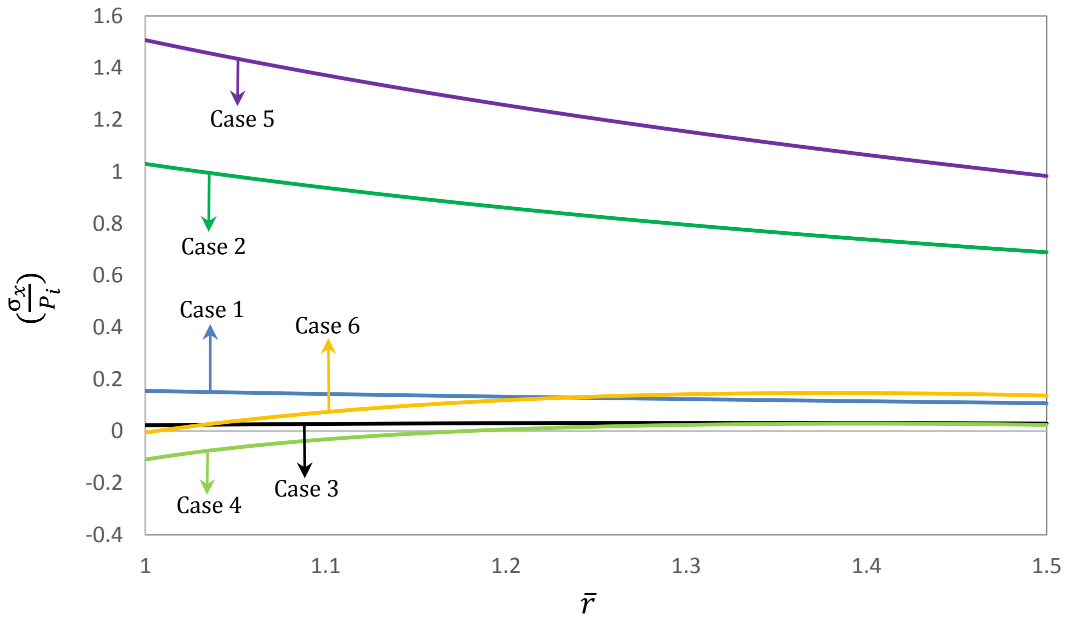
شکل ۳-۱۲ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت فشار داخلی

با توجه به شکل ۳-۱۳ و نتایج حاصل از توزیع تنش محیطی در فصل دوم، این نتیجه استنباط می‌گردد که در توزیع تنش محیطی استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت فشار داخلی، اثر فشار به مراتب ملموس‌تر از اثر چرخش می‌باشد، به علاوه می‌توان تنش محیطی حاصل از بارگذاری‌ها فشار داخلی و چرخشی را به صورت جداگانه محاسبه نموده و بر اساس اصل جمع آثار تنش محیطی را

برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی به‌دست آورد.



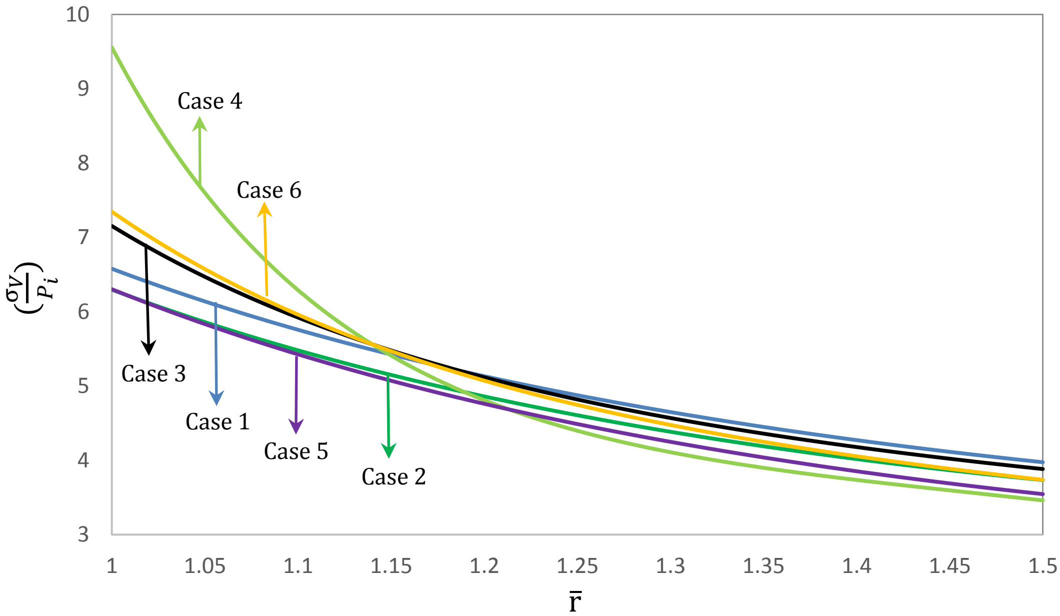
شکل ۳-۱۳ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت فشار داخلی



شکل ۳-۱۴ توزیع تنش محوری در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت فشار داخلی

با توجه به شکل ۳-۱۴ و نتایج توزیع تنش محیطی در استوانه‌های ناهمسانگرد تحت فشار داخلی در فصل گذشته، مشاهده که مقایسه دو شکل ۳-۱۴ و شکل ۲-۱۳ نشان می‌دهد، که در اثر اعمال چرخش به استوانه‌ی تحت فشار داخلی، *Case* 3 و *Case* 4 نسبت به دیگر حالت‌ها افزایش تنش

کمتری را تجربه می‌کنند. در نمونه بررسی شده می‌توان گفت که در توزیع تنش محوری، سرعت دورانی اثر برتر را نسبت به فشار داخلی دارد.



شکل ۳-۱۵ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت فشار داخلی

با دقت در شکل ۳-۱۵ تأثیر تنش محیطی در توزیع تنش فون میزس به عنوان تنش غالب مشهود است که سبب می‌گردد نمودارهای توزیع تنش فون میزس برای هر ۶ حالت ناهمسانگردی، مشابه با نمودارهای تنش محیطی رفتار کنند.

فصل ۴

تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی

۴-۱ مقدمه

در فصل پیش‌رو تمرکز بر تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک جدار ضخیم به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی می‌باشد، به عبارت دیگر اکنون در استوانه علاوه بر حضور بارهای فشاری و چرخش، انتقال حرارت پایدار یک بعدی در راستای شعاعی نیز صورت می‌گیرد. روند حل مسأله همچنان مانند فصل‌های گذشته بوده با این تفاوت که حضور بار حرارتی در مجموعه باعث به وجود آمدن کرنش حرارتی در استوانه گردیده که در معادله‌ی ساختاری ظاهر می‌شود و در نهایت موجب گسترش ترم ناهمگنی در معادله‌ی مشخصه می‌گردد.

۴-۲معادله‌ی ساختاری

از آنجا که گرادیان دمایی در جهت شعاعی رخ می‌دهد، جابه‌جایی محیطی صفر می‌باشد و تنش‌ها و کرنش‌ها مستقل از θ هستند، لذا معادله‌ی ساختاری ترموالاستیک برای مواد ارتوتروپیک در مختصات استوانه‌ای کلی بر اساس ماتریس سفتی و نرمی به ترتیب به فرم زیر می‌باشد [۱۶].

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r - \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^T \\ \varepsilon_x - \varepsilon_x^T \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \qquad (۱\text{-}۴)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r - \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta - \varepsilon_\theta^T \\ \varepsilon_x - \varepsilon_x^T \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} \qquad (۲\text{-}۴)$$

که در رابطه‌ی بالا $\varepsilon^T = \alpha\, \Delta T$ کرنش حرارتی می‌باشد.

با توجه به مطالب بیان شده در فصل ۱ می‌توان مؤلفه‌های ماتریس سفتی در مواد ارتوتروپیک را

بر حسب ضرایب مهندسی بیان کرد، در نتیجه معادله‌ی ساختاری (۴-۱) به فرم زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\\ \tau_{\theta x}\\ \tau_{rx}\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{1-\nu_{rx}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta} & \frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta} & 0 & 0 & 0\\ \frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta} & \frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta} & \frac{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}{E_r E_\theta\Delta} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta x} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rx} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r-\varepsilon_r^T\\ \varepsilon_\theta-\varepsilon_\theta^T\\ \varepsilon_x-\varepsilon_x^T\\ \gamma_{\theta x}\\ \gamma_{rx}\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix} \tag{۴-۳}$$

که در رابطه‌ی بالا Δ عبارت است از:

$$\Delta=\frac{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}-\nu_{rx}\nu_{xr}-2\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}\nu_{rx}}{E_r E_\theta E_x} \tag{۴-۴}$$

به طور مشابه این امکان وجود دارد که بتوان مؤلفه‌های ماتریس نرمی در مواد ارتوتروپیک را نیـز (رابطه‌ی (۴-۲)) بر حسب ضرایب مهندسی بیان کرد.

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r-\varepsilon_r^T\\ \varepsilon_\theta-\varepsilon_\theta^T\\ \varepsilon_x-\varepsilon_x^T\\ \gamma_{\theta x}\\ \gamma_{rx}\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_r} & \frac{-\nu_{\theta r}}{E_\theta} & \frac{-\nu_{xr}}{E_x} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\nu_{r\theta}}{E_r} & \frac{1}{E_\theta} & \frac{-\nu_{x\theta}}{E_x} & 0 & 0 & 0\\ \frac{-\nu_{rx}}{E_r} & \frac{-\nu_{\theta x}}{E_\theta} & \frac{1}{E_x} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\theta x}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{rx}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{r\theta}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\\ \tau_{\theta x}\\ \tau_{rx}\\ \tau_{r\theta}\end{bmatrix} \tag{۴-۵}$$

در ادامه به ترتیب روابط (۴-۱) و (۴-۲) را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta^T \\ \varepsilon_x^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۶-۴}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{rx} \\ \gamma_{r\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{\theta x} \\ \tau_{rx} \\ \tau_{r\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_r^T \\ \varepsilon_\theta^T \\ \varepsilon_x^T \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۷-۴}$$

با توجه به فرضیات بیان شده در بخش (۲-۳-۱) و بر اساس فرض شماره ۱، تنش‌های برشی $\tau_{\theta x}$ و $\tau_{r\theta}$ (در مختصات اصلی، τ_{23} و τ_{12}) صفر منظور می‌گردند و به دنبال آن کرنش‌های برشی $\gamma_{\theta x}$ و $\tau_{r\theta}$ (یا γ_{23} و γ_{12}) نیز برابر با صفر خواهند بود.

$$\begin{cases} \tau_{\theta x} = 0 \\ \tau_{r\theta} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \gamma_{\theta x} = 0 \\ \gamma_{r\theta} = 0 \end{cases} \tag{۸-۴}$$

همچنین بر اساس فرض شماره‌ی ۲ کرنش برشی γ_{rx} (یا γ_{13}) و تنش برشی τ_{rx} (یا τ_{13}) نیز صفر منظور می‌گردند.

$$\gamma_{rx} = 0 \quad , \quad \tau_{rx} = 0 \tag{۹-۴}$$

سرانجام می‌توان معادله‌ی ساختاری، را بر اساس ماتریس سفتی (رابطه‌ی (۴-۶)) و بر اساس ماتریس سفتی نرمی (رابطه‌ی (۴-۷)) به ترتیب به فرم‌های کاهش یافته‌ی زیر ارائه نمود.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\ C_{21}&C_{22}&C_{23}\\ C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\ C_{21}&C_{22}&C_{23}\\ C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r^T\\ \varepsilon_\theta^T\\ \varepsilon_x^T\end{bmatrix} \tag{۴-۱۰}$$

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}\\ S_{21}&S_{22}&S_{23}\\ S_{31}&S_{32}&S_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_r^T\\ \varepsilon_\theta^T\\ \varepsilon_x^T\end{bmatrix} \tag{۴-۱۱}$$

رابطه‌ی (۴-۱۰) بر حسب ضرایب مهندسی:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\end{bmatrix}=&\begin{bmatrix}\frac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta}\\ \frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{1-\nu_{rx}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}&\frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}\\ \frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}&\frac{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}{E_r E_\theta\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\end{bmatrix}\\ &-\begin{bmatrix}\frac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta}\\ \frac{\nu_{\theta r}+\nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{1-\nu_{rx}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}&\frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}\\ \frac{\nu_{xr}+\nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x\Delta}&\frac{\nu_{x\theta}+\nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_r E_x\Delta}&\frac{1-\nu_{r\theta}\nu_{\theta r}}{E_r E_\theta\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r^T\\ \varepsilon_\theta^T\\ \varepsilon_x^T\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۴-۱۲}$$

رابطه‌ی (۴-۱۱) بر حسب ضرایب مهندسی:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{E_r}&\frac{-\nu_{\theta r}}{E_\theta}&\frac{-\nu_{xr}}{E_x}\\ \frac{-\nu_{r\theta}}{E_r}&\frac{1}{E_\theta}&\frac{-\nu_{x\theta}}{E_x}\\ \frac{-\nu_{rx}}{E_r}&\frac{-\nu_{\theta x}}{E_\theta}&\frac{1}{E_x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \sigma_x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_r^T\\ \varepsilon_\theta^T\\ \varepsilon_x^T\end{bmatrix} \tag{۴-۱۳}$$

۴-۲-۱ شرایط انتهایی استوانه

در این قسمت تأثیر هر یک از شرایط انتهایی استوانه بر معادله‌ی ساختاری بیان می‌گردد.

الف- کرنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر بسته و مقید)

همان طورکه پیش‌تر بیان شد در حالت کرنش صفحه‌ای، مقدار کرنش محوری کل برابر با صفر خواهد بود. در نتیجه با توجه به $\varepsilon = \alpha\, \Delta T$، رابطه‌ی (۴-۱۰) به فرم زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_{11}\alpha_r + C_{12}\alpha_\theta + C_{13}\alpha_x \\ C_{21}\alpha_r + C_{22}\alpha_\theta + C_{23}\alpha_x \end{bmatrix} \Delta T \tag{۴-۱۴}$$

اکنون همانند فصل ۲ به منظور پارامتری نمودن روابط؛ رابطه‌ی (۴-۱۴) که معادله‌ی ساختاری در حالت کرنش صفحه‌ای برای استوانه‌ی مورد نظر می‌باشد را به فرم زیر نمادگذاری می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix} \Delta T \tag{۴-۱۵}$$

در نهایت با توجه به روابط (۴-۱۲)، (۴-۱۳) و (۴-۱۵)، برای حالت کرنش صفحه‌ای ضرایب A، B، C، D و E در معادله‌ی ساختاری ساده شده به قرار زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned}
A &= C_{11} = \frac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x \Delta} \\
B &= C_{12} = C_{21} = \frac{\nu_{\theta r} + \nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x \Delta} \\
C &= C_{22} = \frac{\nu_{xr} + \nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_r E_x \Delta} \\
D &= C_{11}\alpha_r + C_{12}\alpha_\theta + C_{13}\alpha_x = \frac{1-\nu_{\theta x}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x \Delta}\alpha_r + \frac{\nu_{\theta r} + \nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x \Delta}\alpha_\theta + \frac{\nu_{xr} + \nu_{\theta r}\nu_{x\theta}}{E_\theta E_x \Delta}\alpha_x \\
E &= C_{21}\alpha_r + C_{22}\alpha_\theta + C_{23}\alpha_x = \frac{\nu_{\theta r} + \nu_{\theta x}\nu_{xr}}{E_\theta E_x \Delta}\alpha_r + \frac{1-\nu_{rx}\nu_{xr}}{E_r E_x \Delta}\alpha_\theta + \frac{\nu_{x\theta} + \nu_{r\theta}\nu_{xr}}{E_\theta E_x \Delta}\alpha_x
\end{aligned} \tag{۴-۱۶}$$

ب- تنش صفحه‌ای (استوانه با دو سر باز)

در حالت تنش صفحه‌ای، مقدار تنش محوری صفر در نظر گرفته می‌شود، لذا با توجه به $\varepsilon_i = \alpha_i \Delta T$، رابطه‌ی (۴-۱۱) به فرم زیر تبدیل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_r \\ \alpha_\theta \end{bmatrix} \Delta T \tag{۴-۱۷}$$

با بازنویسی رابطه‌ی (۴-۱۷) بر حسب معکوس ماتریس نرمی، و جایگذاری ضرایب مهندسی داریم.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{E_r^2}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta} & \dfrac{\nu_{r\theta}E_rE_\theta}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta}\\ \dfrac{\nu_{r\theta}E_rE_\theta}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta} & \dfrac{E_rE_\theta}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta}\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\dfrac{\alpha_r}{E_r}\\ \dfrac{\alpha_\theta}{E_\theta}\end{bmatrix}\Delta T\right) \tag{۱۸-۴}$$

اکنون رابطه‌ی (۴-۱۸) که معادله‌ی ساختاری در حالت تنش صفحه‌ای برای استوانه‌ی مورد نظر می‌باشد را به فرم زیر نمادگذاری می‌کنیم.

$$\begin{bmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ B & C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}D\\ E\end{bmatrix}\Delta T \tag{۱۹-۴}$$

در نهایت با توجه به روابط (۴-۱۸) و (۴-۱۹)، برای حالت تنش صفحه‌ای ضرایب A، B، C، D و E در معادله‌ی ساختاری ساده شده به قرار زیر می‌باشند.

$$\begin{aligned}&A=\frac{E_{r\theta}^2}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta}\quad,\quad B=\frac{\nu_{r\theta}E_rE_\theta}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta}\quad,\quad C=\frac{E_rE_\theta}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta}\\ &D=\frac{E_r\left(\alpha_r+\nu_{r\theta}\alpha_\theta\right)}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta}\quad,\quad E=\frac{E_r\nu_{r\theta}+E_r\alpha_\theta}{E_r-\nu_{r\theta}^2E_\theta}\end{aligned} \tag{۲۰-۴}$$

۴-۳ حل معادله‌ی انتقال حرارت

به طور کلی رابطه‌ی فوریه برای انتقال حرارت هدایتی در مواد اورتوتروپیک در سیستم مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است.

$$\begin{Bmatrix}q_r\\ q_\theta\\ q_x\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}k_{11} & 0 & 0\\ 0 & k_{22} & 0\\ 0 & 0 & k_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial T}{\partial r}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial T}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial T}{\partial x}\end{Bmatrix} \tag{۲۱-۴}$$

در رابطه‌ی بالا q شار حرارتی، k_{ij} ضرایب انتقال حرارت هدایتی و T دما است. مطابق قاعده‌ی رفت و برگشتی در ترمودینامیک، تانسور ضرایب انتقال حرارت هدایتی باید متقارن باشد، یعنی برای تمام مواد موجود در طبیعت بایستی:

$$k_{ij} = k_{ji} \qquad (۲۲\text{-}۴)$$

همچنین بر اساس قانون دوم ترمودینامیک مقادیر روی قطر اصلی تانسور ضرایب انتقال حرارت هدایتی مثبت می‌باشند و بین درایه‌ها بایستی رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$k_{ii}k_{jj} \square\ k_{ij}^2 \qquad for: i \neq j \qquad (۲۳\text{-}۴)$$

در غیاب منبع حرارتی و حالت پایدار بارگذاری حرارتی، قانون فوریه به صورت زیر ارائه می‌شود [۲۴].

$$div(\vec{Q}_r) = 0 \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

و با توجه به فرض تقارن محوری، انتقال حرارت یک بعدی در راستای شعاعی و ثابت بودن مقادیر ضرایب انتقال حرارتی:

$$T'' + \frac{1}{r}T' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial T}{\partial r}) = 0 \qquad (۲۵\text{-}۴)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی بالا، معادله‌ی انتقال حرارت برای مسأله‌ی مورد نظر حاصل می‌گردد.

$$T = c_3 \ln r + c_4 \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

۴-۳-۱ شرایط مرزی دمایی

در این مسأله به عنوان شرایط مرزی دمایی، دمای لایه‌ی داخلی استوانه T_i و دمای لایه‌ی خارجی T_o به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$T\big|_{r=r_i} = 25\ ^\circ C \quad , \quad T\big|_{r=r_o} = 125\ ^\circ C \qquad (۲۷\text{-}۴)$$

برای محاسبه ضرایب c_3 و c_4 معادله‌ی انتقال حرارت، شرایط مرزی بالا را در رابطه‌ی (۴-۲۶) اعمال می‌کنیم، که با حل همزمان معادلات بالا ثابت‌های c_3 و c_4 به‌دست می‌آیند.

$$c_3 = \frac{100}{\ln r_0 - \ln r_i} \quad , \quad c_4 = \frac{25(\ln r_o - 5\ln r_i)}{\ln r_0 - \ln r_i} \qquad (۲۸\text{-}۴)$$

اکنون ثابت‌های c_3 و c_4 در معادله‌ی انتقال حرارت (رابطه‌ی (۴-۲۶)) جایگذاری می‌کنیم تا

رابطه‌ی توزیع دما در استوانه استخراج گردد.

$$T = \frac{100}{\ln r_0 - \ln r_i}\ln r + \frac{25(\ln r_o - 5\ln r_i)}{\ln r_0 - \ln r_i} \qquad (۴-۲۹)$$

با توجه به روابط مشابه (۴-۱۵) و (۴-۱۹) به منظور دست‌یابی به توزیع تنش شعاعی و محیطی باید ΔT را محاسبه نمود، به همین جهت ابتدا T^* را به عنوان دمای مرجع معرفی کرده و در این پژوهش مقدار آن را برابر با $25\ ^\circ C$ در نظر می‌گیریم، پس از آن با قرار دادن T^* در رابطه‌ی ΔT، اختلاف دما محاسبه می‌گردد.

$$\Delta T = T - T^* \quad , \quad T^* = 25 \qquad (۴-۳۰)$$

$$\Delta T = \left(\frac{100}{\ln r_0 - \ln r_i}\ln r + \frac{25(\ln r_o - 5\ln r_i)}{\ln r_0 - \ln r_i}\right) - 25 \qquad (۴-۳۱)$$

۴-۴ روابط اساسی

روابط (۴-۱۵) و (۴-۱۹) نشان می‌دهد که میدان تنش در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای شامل دو مؤلفه‌ی تنش شعاعی و تنش محیطی می‌باشد، بنابراین با بازنویسی روابط یاد شده بر حسب کرنش شعاعی و محیطی داریم.

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A\frac{du_r}{dr} + B\frac{u_r}{r} - D\Delta T \\ \sigma_\theta &= B\frac{du_r}{dr} + C\frac{u_r}{r} - E\Delta T \end{aligned} \qquad (۴-۳۲)$$

حال با در نظر گرفتن چرخش در اولین معادله‌ی تعادل از مجموعه معادلات (۲-۵):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = -\rho r \omega^2 \qquad (۴-۳۳)$$

با جایگذاری روابط (۴-۳۲) در معادله‌ی تعادل بالا:

$$A\frac{d^2u_r}{dr^2} + \frac{A}{r}\frac{du_r}{dr} - \frac{C}{r}\frac{u_r}{r} - D\Delta T' + (E - D)\frac{\Delta T}{r} = -\rho r \omega^2 \qquad (۴-۳۴)$$

با قرار دادن $\nu^* = \frac{C}{A}$، که بر اساس شرایط انتهایی مسأله تعیین می‌گردد، می‌توان نوشت.

$$\frac{d^2u_r}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du_r}{dr}-\nu^*\frac{u_r}{r^2}-\frac{D}{A}\Delta T'+\frac{(E-D)}{A}\frac{\Delta T}{r}=-\frac{\rho}{A}r\omega^2 \tag{۴-۳۵}$$

معادله‌ی بالا یک معادله‌ی کوشی- اویلر می‌باشد که می‌توان آن را به فرم زیر بازنویسی کرد.

$$r^2u_r''+ru_r'-\nu^*u_r=-\frac{\rho r^3\omega^2}{A}+\frac{r(D-E)\Delta T}{A}+\frac{Dr^2\Delta T'}{A} \tag{۴-۳۶}$$

۴-۵ حل ترموالاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک چرخان

همان طور که مشاهده می‌شود معادله‌ی (۴-۳۶) دارای دو قسمت حل خصوصی و حل عمومی می‌باشد. که پاسخ حل عمومی آن در فصل دوم به‌دست آمده است، در این قسمت نیز به یافتن پاسخ قسمت خصوصی می‌پردازیم.

با توجه به اینکه ترم ناهمگنی در رابطه‌ی (۴-۳۶) یک عبارت درجه‌ی ۳ می‌باشد. بنابراین حل خصوصی را یک عبارت درجه‌ی ۳ با ضرایب نامعین و به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} u_{r_p} &= A^*r^3+B^*r\ln r+C^*r+D^*r=A^*r^3+B^*r\ln r+E^*r \\ u_{r_p}' &= 3A^*r^2+B^*\ln r+B^*+E^* \\ u_{r_p}'' &= 6A^*r+\frac{B^*}{r} \end{aligned} \tag{۴-۳۷}$$

روابط بالا را همراه با ΔT و مشتق آن در معادله‌ی (۴-۳۶) قرار می‌دهیم، تا ضرایب (A^*,B^*,E^*) محاسبه گردند.

$$\begin{aligned} A^* &= -\frac{\rho\omega^2}{A(9-\nu^*)} \quad , \quad B^*=\frac{100(D-E)}{A\left(1-\nu^*\right)(\ln r_0-\ln r_i)} \\ E^* &= \frac{100\left(D-E\right)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0-\ln r_i)}\left(-\ln r_i-\frac{100}{(1-\nu^*)}+D\right) \end{aligned} \tag{۴-۳۸}$$

سپس با قرار دادن A^*، B^* و E^* در اولین رابطه‌ی (۴-۳۷) حل خصوصی به‌دست می‌آید.

$$u_{r_p} = -\frac{\rho\omega^2 r^3}{A(9-\nu^*)} + \frac{100 r \ln r (D-E)}{A\left(1-\nu^*\right)(\ln r_0 - \ln r_i)} + \frac{100 r\left(D-E\right)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0 - \ln r_i)}\left(-\ln r_i - \frac{100}{(1-\nu^*)} + D\right) \tag{۳۹-۴}$$

در نهایت پاسخ کلی معادله‌ی (۴-۳۶)، شامل حل عمومی به‌دست آمده در فصل دوم یعنی همان رابطه‌ی (۲-۳۴) و حل خصوصی (رابطه‌ی (۴-۳۹)) می‌باشد.

$$u_r = c_1 r^{\xi} + c_2 r^{-\xi} - \frac{\rho\omega^2 r^3}{A(9-\nu^*)} + \frac{100 r \ln r (D-E)}{A\left(1-\nu^*\right)(\ln r_0 - \ln r_i)} + \frac{100 r\left(D-E\right)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0 - \ln r_i)}\left(-\ln r_i - \frac{100}{(1-\nu^*)} + D\right) \tag{۴۰-۴}$$

و با قرار دادن معادلات میـدان کـرنش در رابطـه‌ی (۴-۱۵) و یـا (۴-۱۹) تـنش‌هـای شـعاعی و محیطی محاسبه می‌گردند.

$$\begin{aligned}\sigma_r &= A\varepsilon_r + B\varepsilon_\theta - D\Delta T = \\ &\frac{c_1 r^{\xi}}{r}\left(A\xi + B\right) + \frac{c_2 r^{-\xi}}{r}\left(B - A\xi\right) - \frac{r^2\rho\omega^2}{\left(9-\nu^*\right)}\left(3 + \frac{B}{A}\right) + \\ &\frac{100 \ln r (D-E)}{A\left(1-\nu^*\right)(\ln r_0 - \ln r_i)}(A+B) + \\ &\frac{100\left(D-E\right)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0 - \ln r_i)}\left(-\ln r_i - \frac{100}{(1-\nu^*)} + D\right)(A+B) - \\ &D\left(\frac{100}{\ln r_0 - \ln r_i}\ln r + \frac{25(\ln r_o - 5\ln r_i)}{\ln r_0 - \ln r_i} - 25\right)\end{aligned} \tag{۴۱-۴}$$

$$\begin{aligned}\sigma_\theta &= B\varepsilon_r + C\varepsilon_\theta - E\Delta T = \\ &\frac{c_1 r^{\xi}}{r}\left(B\xi + C\right) + \frac{c_2 r^{-\xi}}{r}\left(C - B\xi\right) - \frac{r^2\rho\omega^2}{A\left(9-\nu^*\right)}\left(3B + C\right) + \\ &(\frac{100 \ln r (D-E)}{A\left(1-\nu^*\right)(\ln r_0 - \ln r_i)}(B+C) + \\ &\frac{100\left(D-E\right)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0 - \ln r_i)}\left(-\ln r_i - \frac{100}{(1-\nu^*)} + D\right)(B+C) - \\ &E\left(\frac{100}{\ln r_0 - \ln r_i}\ln r + \frac{25(\ln r_o - 5\ln r_i)}{\ln r_0 - \ln r_i} - 25\right)\end{aligned} \tag{۴۲-۴}$$

محاسبه‌ی ضرایب c_1 , c_2 با اعمال شرایط مرزی تنش و دما در سطوح داخلی و خارجی استوانه (روابط (۲-۱۲) و (۴-۳۰)) در معادله‌ی تنش شعاعی (۴-۴۱) امکان‌پذیر می‌باشد.

$$\begin{aligned}&\frac{c_1 r^{\xi}}{r}(A\xi+B)+\frac{c_2 r^{-\xi}}{r}(B-A\xi)-\frac{r^2\rho\omega^2}{(9-\nu^*)}\left(3+\frac{B}{A}\right)+\\&\frac{100\ln r(D-E)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0-\ln r_i)}(A+B)+\\&\frac{100(D-E)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0-\ln r_i)}\left(-\ln r_i-\frac{100}{(1-\nu^*)}+D\right)(A+B)-\\&D\left(\frac{100}{\ln r_0-\ln r_i}\ln r+\frac{25(\ln r_o-5\ln r_i)}{\ln r_0-\ln r_i}-25\right)+P_i=0\end{aligned} \tag{۴-۴۳}$$

$$\begin{aligned}&\frac{c_1 r^{\xi}}{r}(A\xi+B)+\frac{c_2 r^{-\xi}}{r}(B-A\xi)-\frac{r^2\rho\omega^2}{(9-\nu^*)}\left(3+\frac{B}{A}\right)+\\&\frac{100\ln r(D-E)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0-\ln r_i)}(A+B)+\\&\frac{100(D-E)}{A(1-\nu^*)(\ln r_0-\ln r_i)}\left(-\ln r_i-\frac{100}{(1-\nu^*)}+D\right)(A+B)-\\&D\left(\frac{100}{\ln r_0-\ln r_i}\ln r+\frac{25(\ln r_o-5\ln r_i)}{\ln r_0-\ln r_i}-25\right)+P_o=0\end{aligned} \tag{۴-۴۴}$$

با حل همزمان معادلات (۴-۴۴) و (۴-۴۳) ثابت‌های c_1 و c_2 بر حسب ضرایب A، B و C به‌دست می‌آیند. سپس با جایگذاری ثابت‌های c_1 و c_2 در معادله‌ی (۴-۴۰)، جابه‌جایی شعاعی بر حسب ضرایب A، B و C که متأثر از شرایط مرزی انتهایی می‌باشند، به‌دست می‌آید.

در انتها می‌توان با جایگذاری u_r در روابط (۴-۳۰)، کرنش‌های شعاعی و محیطی و پس از آن تنش‌ها را محاسبه نمود و یا می‌توان با جایگذاری مستقیم u_r در روابط تنش شعاعی و محیطی را به‌دست آورد.

۴-۶ اعمال شرایط انتهایی استوانه در روابط نهایی

همان گونه که پیش‌تر بیان شد، استوانه با دو شرط انتهایی دو سر بسته‌ی مقید و دو سر باز مدنظر است. بنابراین می‌توان جابه‌جایی شعاعی و تنش‌های شعاعی، محیطی، فون میزس و تنش

محوری را در هر حالت؛ با قرار دادن ضرایب A، B و C مربوط به همـان حالـت (روابـط (۴-۱۶) بـرای کرنش صفحه‌ای و روابط (۴-۲۰) برای تنش صفحه‌ای) محاسبه نمود.

۴-۷ مطالعه‌ی موردی

در فصل حاضر با اعمال دما به استوانه، به تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم می‌پردازیم.

۴-۷-۱ بررسی تأثیر بارگذاری فشاری، چرخشی و حرارتی

در این قسمت ابتدا نتایج مربوط به استوانه با سرعت دورانی $\omega=1500\ (\frac{rad}{s})$، تحت فشار داخلی $40\ Mpa$ را در پنج توزیع دمای مختلف مورد بررسی قرار می‌دهیم، در مرحله‌ی بعد با حـذف فشـار و چرخش از مجموعه، اثر بارگذاری حرارتی خالص در استوانه مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

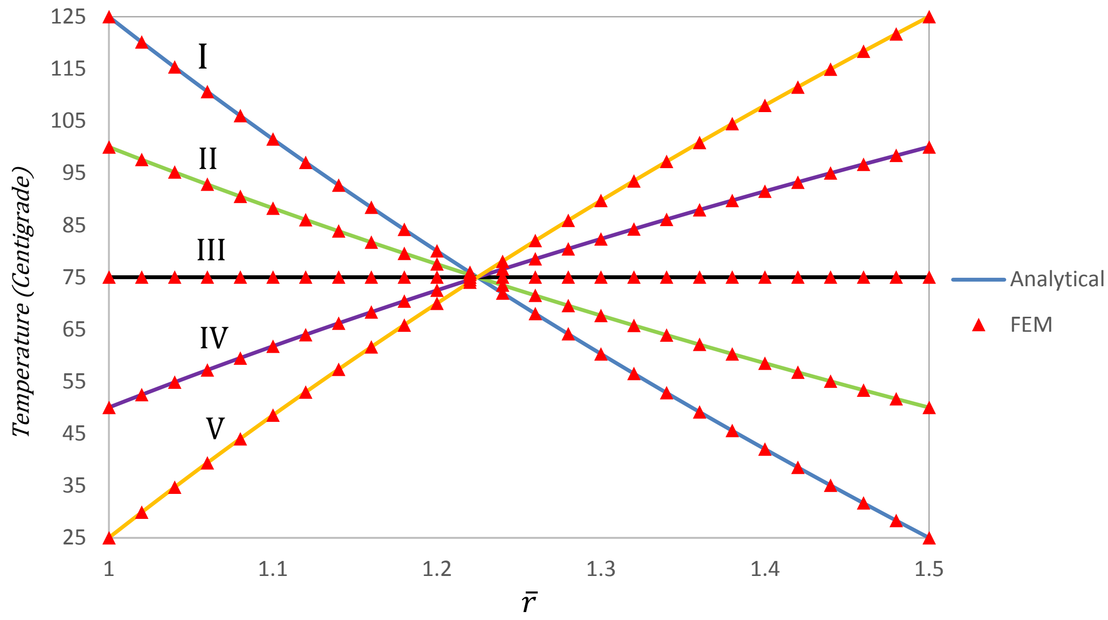
جدول ۴-۱ توزیع دما در لایه‌ی داخلی و خارجی استوانه

شماره‌ی حالت	دمای لایه‌ی خارجی ($^\circ C$)	دمای لایه‌ی داخلی ($^\circ C$)
I	25	125
II	50	100
III	75	75
VI	100	50
V	125	25

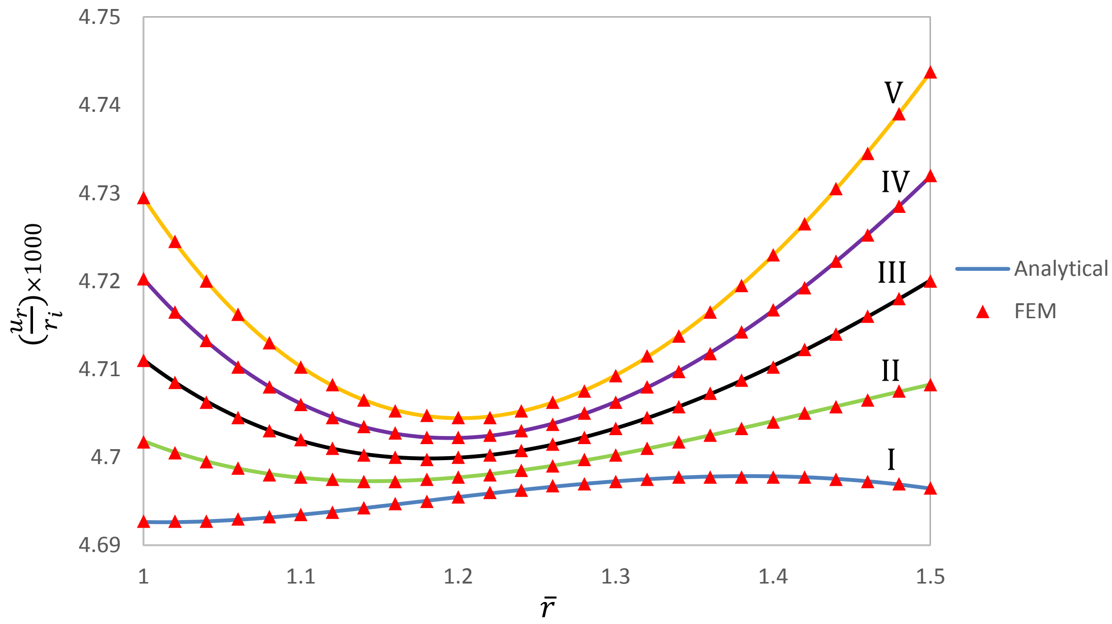
شکل ۴-۱ پنج توزیع دمای جدول ۴-۱ را در راستای ضخامت استوانه نشان مـی‌دهـد. از نمـودار این گونه استنباط می‌شود که لایه‌ی داخلی استوانه، رفتاری مستقل از بارگذاری حرارتی دارد.

شکل ۴-۲ نشان دهنده‌ی توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه تحت فشار داخلی و دوران برای پنج توزیع دما به کمک روش PET و FEM می‌باشد، که هر دو روش رفتاری همسانی را پیش‌بینی می‌کنند؛ نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که بیشینه‌ی جابه‌جایی مربوط به حالتی اسـت که دمای سطح داخلی $25\ ^\circ C$ و دمای سطح خارجی $125\ ^\circ C$ است؛ بنـابراین مـی‌تـوان گفـت کـه بـا

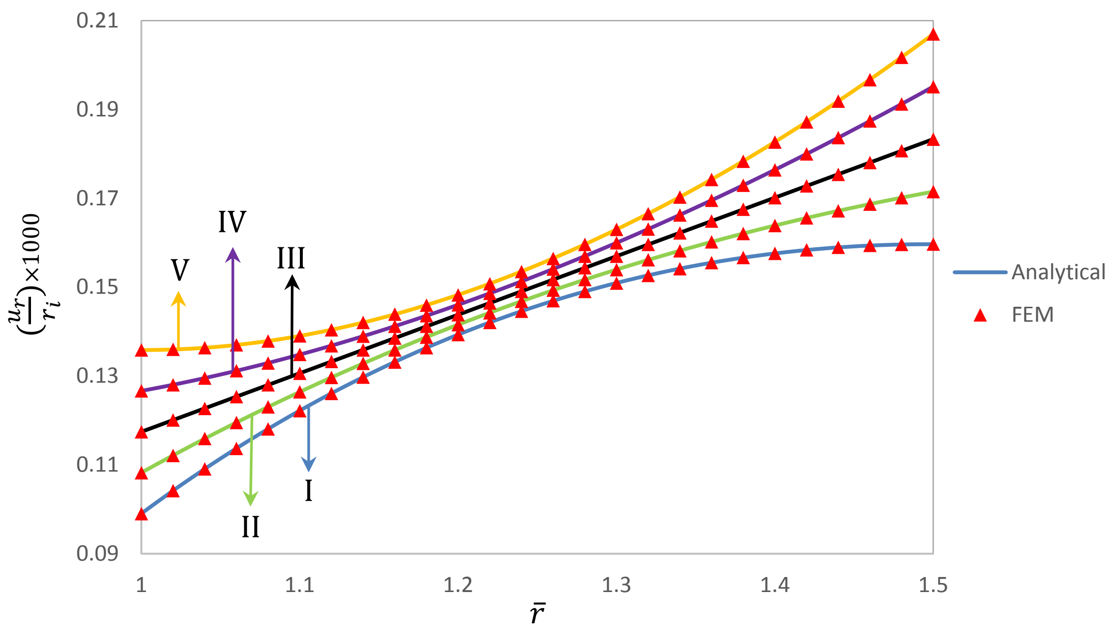
افزایش دما در لایه‌ی خارجی، بیش‌ترین جابه‌جایی شعاعی را همراه با بیش‌ترین تغییرات در راستای ضخامت خواهیم داشت؛ که با افزایش سطح دما در لایه‌ی داخلی از میزان این تغییرات کاسته می‌شود.



شکل ۴-۱ توزیع دما در راستای ضخامت استوانه



شکل ۴-۲ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری ترکیبی

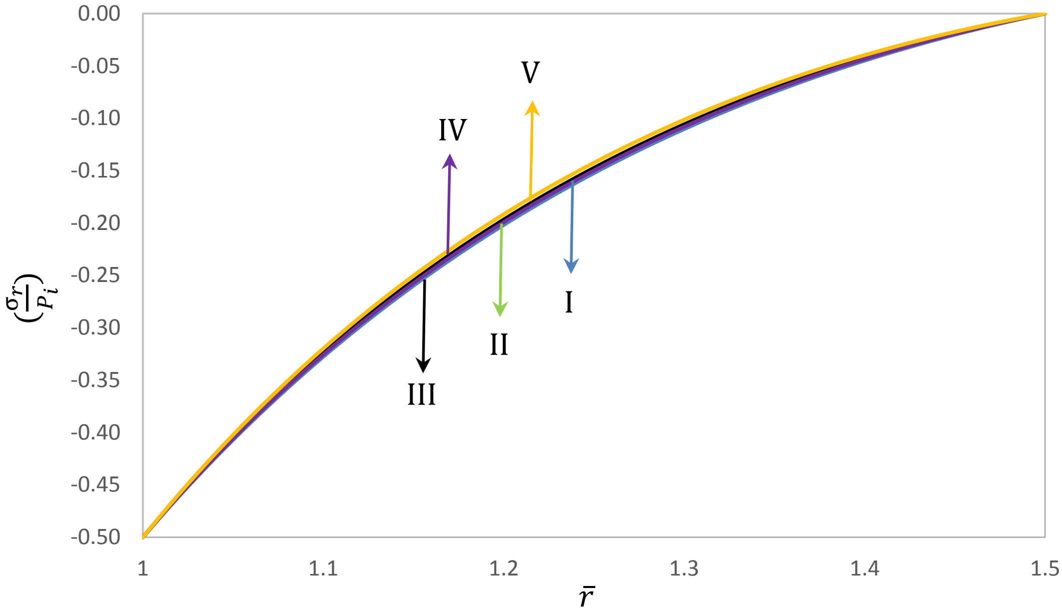


شکل ۴-۳ توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی

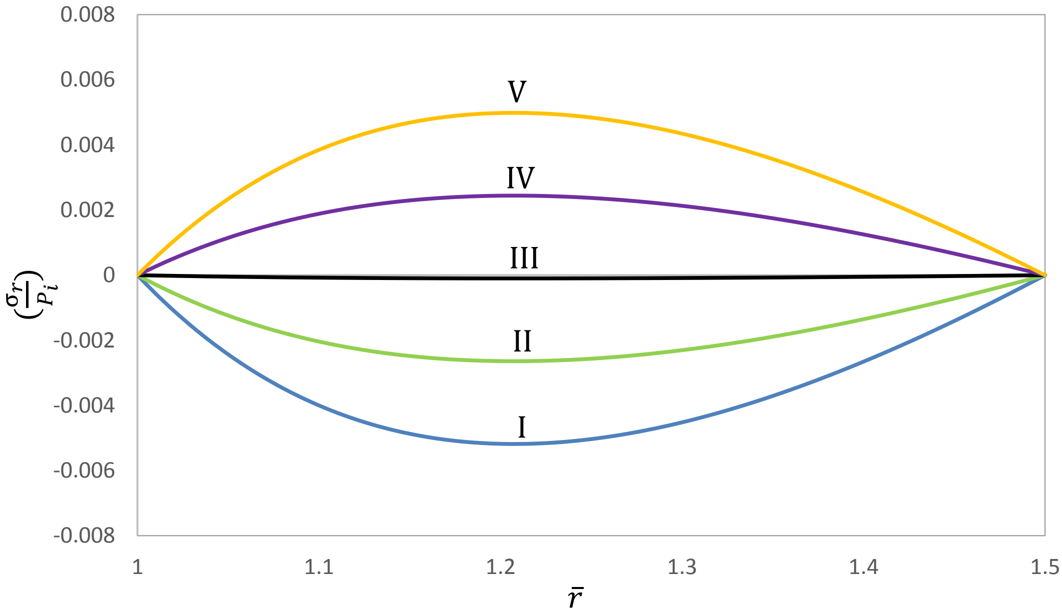
بررسی اثر دما بر توزیع جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه، در شکل ۴-۳ قابل مشاهده است. هر پنج توزیع دما بیش‌ترین مقدار جابه‌جایی را برای لایه‌ی خارجی و کمترین مقدار جابه‌جایی را برای لایه‌ی داخلی استوانه پیش‌بینی می‌کنند. همچنین ملاحظه می‌گردد که با افزایش اختلاف دما در لایه‌ی داخلی و خارجی نمودارها رفتاری غیرخطی پیدا می‌کنند. در اینجا نیز بیش‌ترین جابه‌جایی مربوط به حالت توزیع دمایی (V) می‌باشد. مقایسه‌ی شکل ۴-۲ و شکل ۴-۳ گویای این مطلب است که مقادیر بزرگ جابه‌جایی در نمودار شکل ۴-۲، ناشی از بارگذاری فشار داخلی و دوران استوانه بوده و اثر بارگذاری حرارتی بر جابه‌جایی شعاعی بسیار اندک می‌باشد.

در شکل ۴-۴، انطباق هر پنج گراف توزیع دما بر روی هم، تأثیر بسیار ناچیز بارگذاری حرارتی را در مقایسه با فشار داخلی و چرخش بر توزیع تنش شعاعی در راستای جداره‌ی استوانه نشان می‌دهد.

نتایج شکل ۴-۵ بیان کننده‌ی این مطلب است که در حالت‌هایی که دما در لایه‌ی خارجی بیشتر از لایه‌ی داخلی است تنش شعاعی مثبت (کششی) و در حالت‌هایی که سهم دما در لایه‌ی داخلی بیشتر از لایه خارجی است، تنش شعاعی منفی (فشاری) در استوانه ایجاد می‌گردد. در صورتی که دمای سطوح داخلی و خارجی یکسان باشد تنش شعاعی در جسم ایجاد نمی‌شود

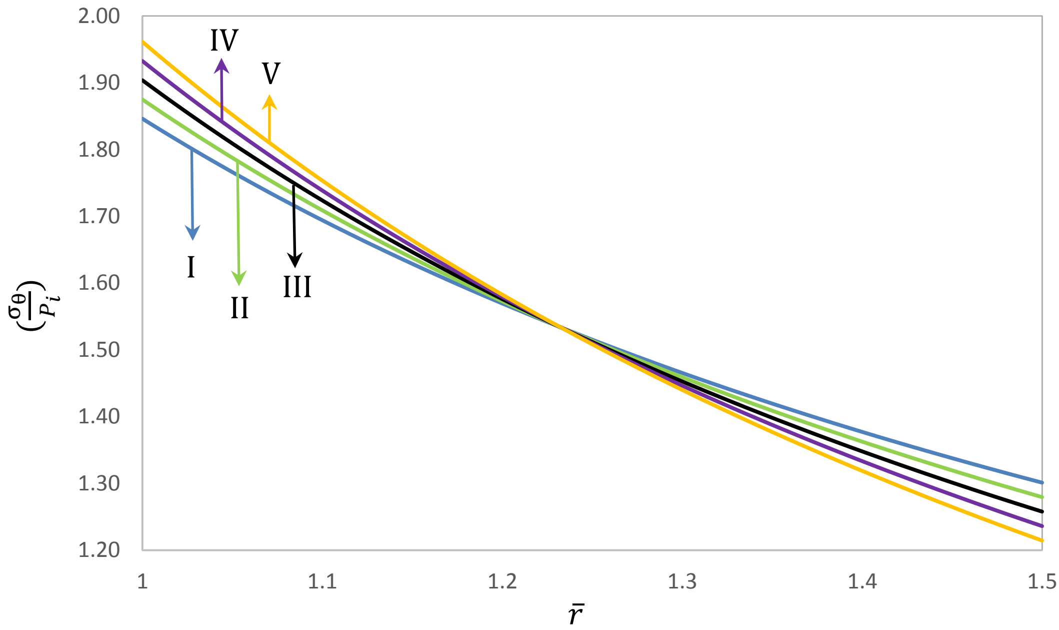


شکل ۴-۴ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری ترکیبی

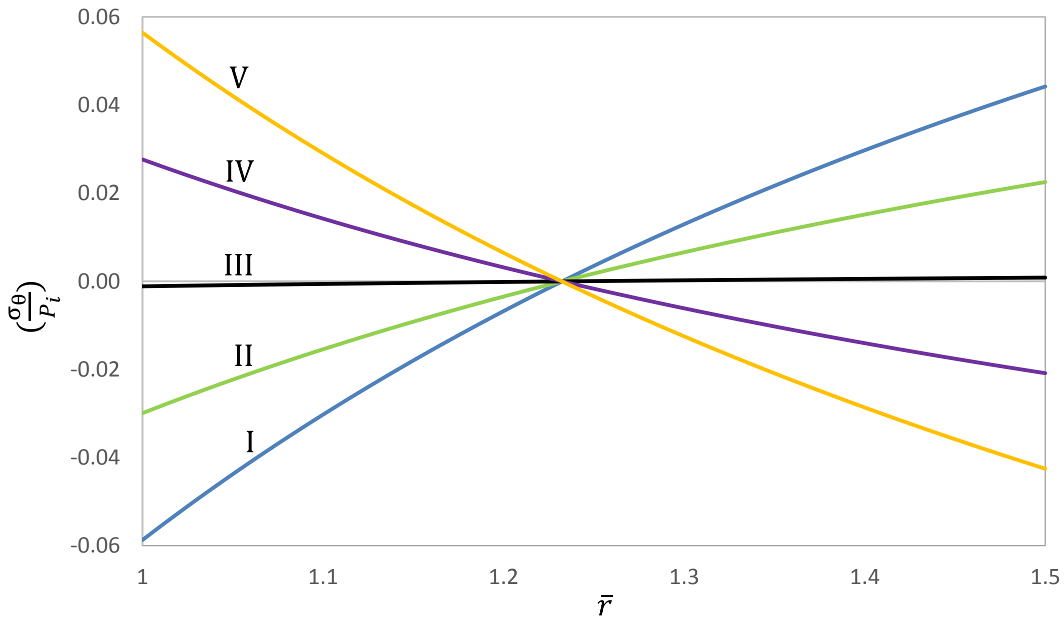


شکل ۴-۵ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی

شکل ۴-۶ نشان می‌دهد که حضور فشار داخلی و چرخش خود موجب گردیده که بیش‌ترین و کمترین تنش محیطی به ترتیب در لایه‌ی داخلی و خارجی ایجاد گردد اما اثرات بارگذاری حرارتی در قالب پنج توزیع دما، بازه‌ی تغییرات کوچکی را برای توزیع تنش محیطی به وجود آورده است، که در این بین حالت (V)، نسبت به سایر حالت‌ها بیش‌ترین تغییرات را دارد.



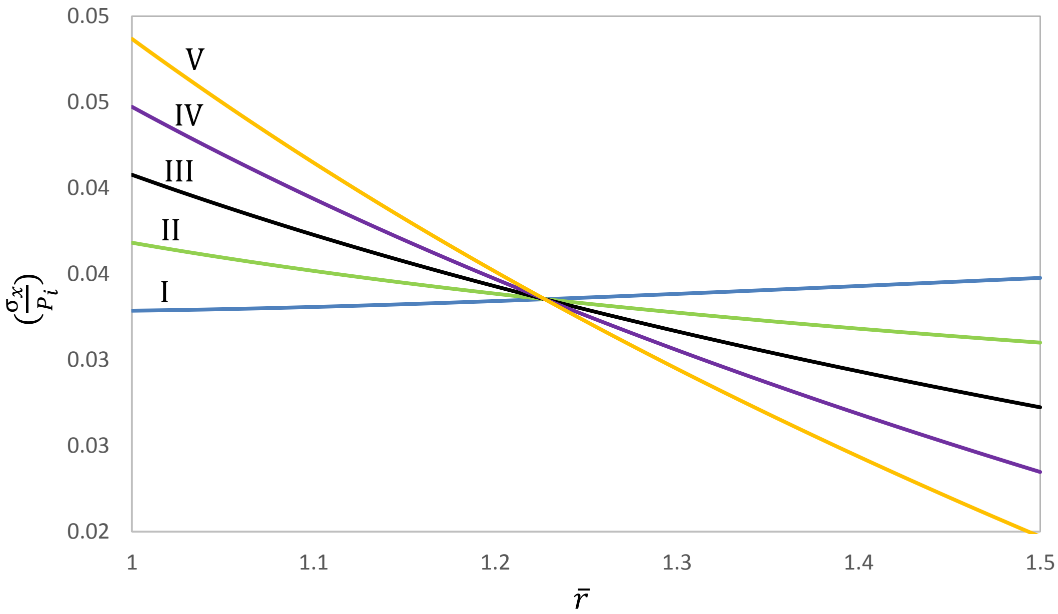
شکل ۴-۶ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری ترکیبی



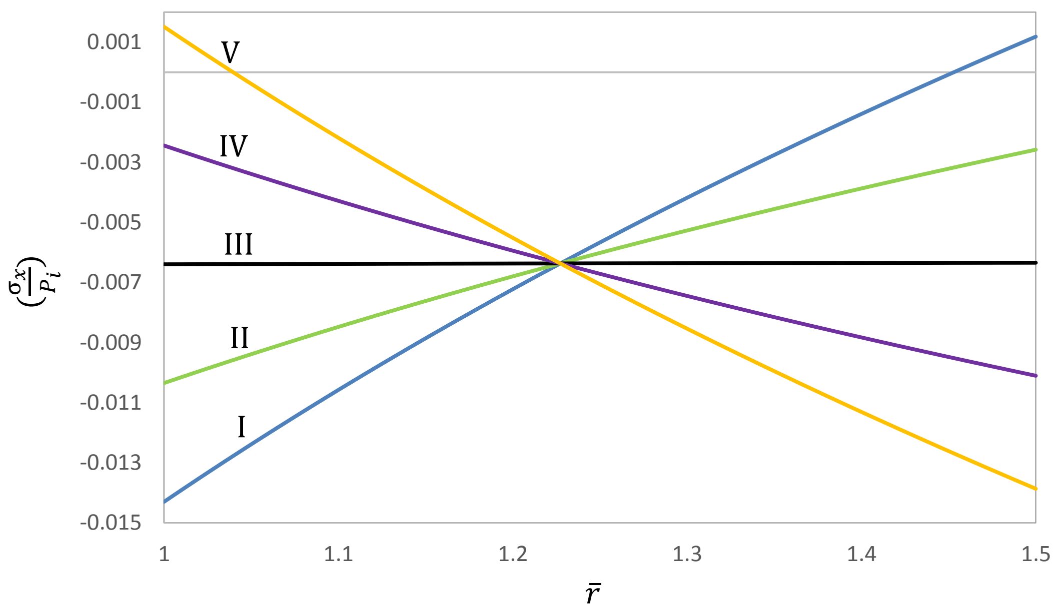
شکل ۴-۷ توزیع تنش محیطی در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی

بررسی شکل ۴-۷ نشان می‌دهد که بالاتر بودن دما در لایه‌ی خارجی نسبت به دمای لایه‌ی داخلی موجب می‌گردد، استوانه در لایه‌ی داخلی تنش محیطی کششی (مثبت) و در لایه‌ی خارجی تنش محیطی فشاری (منفی) را تجربه کند؛ اما بالاتر بودن دما در لایه‌ی داخلی نسبت به لایه‌ی خارجی سبب می‌گردد، در لایه‌ی داخلی استوانه تنش محیطی فشاری و در لایه‌ی خارجی تنش

محیطی کششی رخ دهد. همچنین مشاهده می‌گردد که توزیع تنش محیطی در لایـه میـانی رفتـاری مستقل از بارگذاری حرارتی دارد.



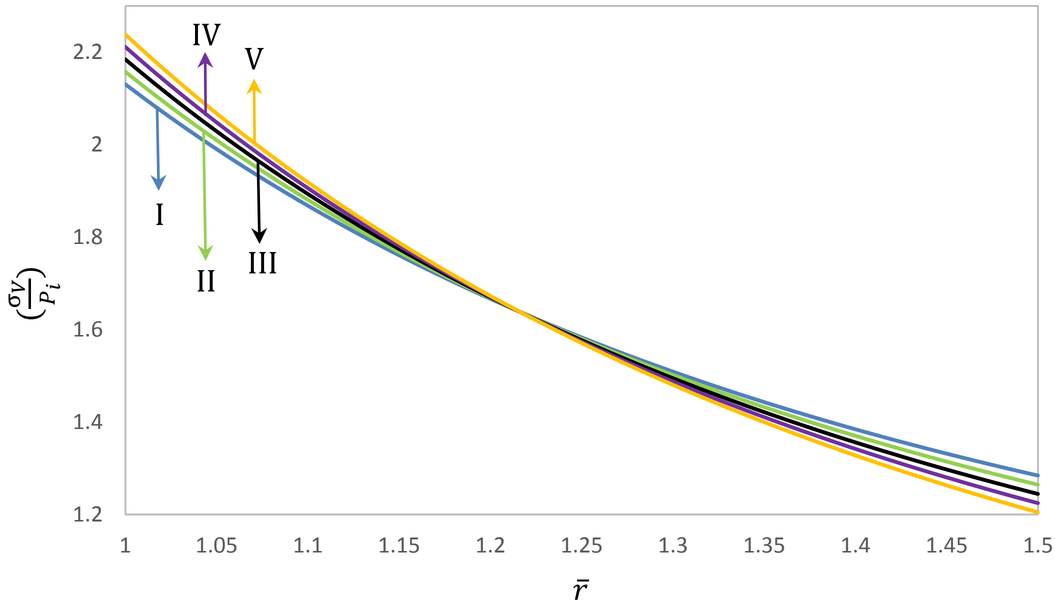
شکل ۴-۸ توزیع تنش محوری در استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری ترکیبی



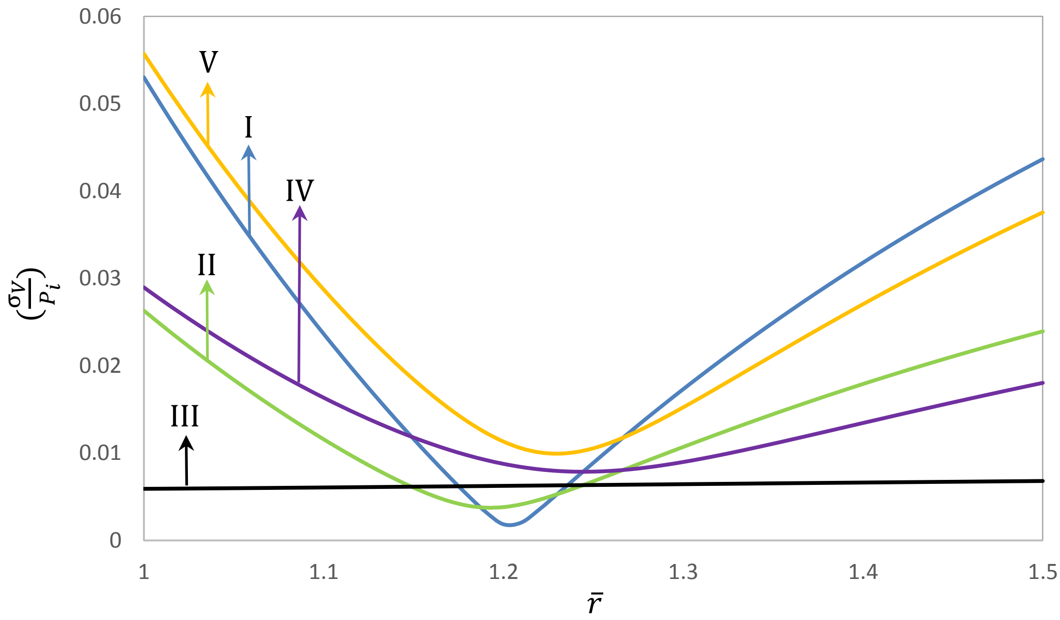
شکل ۴-۹ توزیع تنش محوری در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی

شکل ۴-۸ بیانگر این است که حضور بارهای فشار داخلی و چرخش در کنـار بارگـذاری حرارتـی موجب می‌شود تنش محوری از لایه‌ی داخلی به سمت لایه‌ی خارجی کاهش یابد، که با کاهش سـهم

دما در لایه‌ی خارجی (و افزایش دما در لایه‌ی داخلی) رفته‌رفته از سرعت تغییرات تنش در راستای ضخامت استوانه کاسته می‌شود. تنها در حالت (I) به دلیل افزایش دما در سطح داخلی نسبت به سطح خارجی، توزیع تنش محوری با شیب کم در راستای جدار استوانه افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۱۰ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری ترکیبی



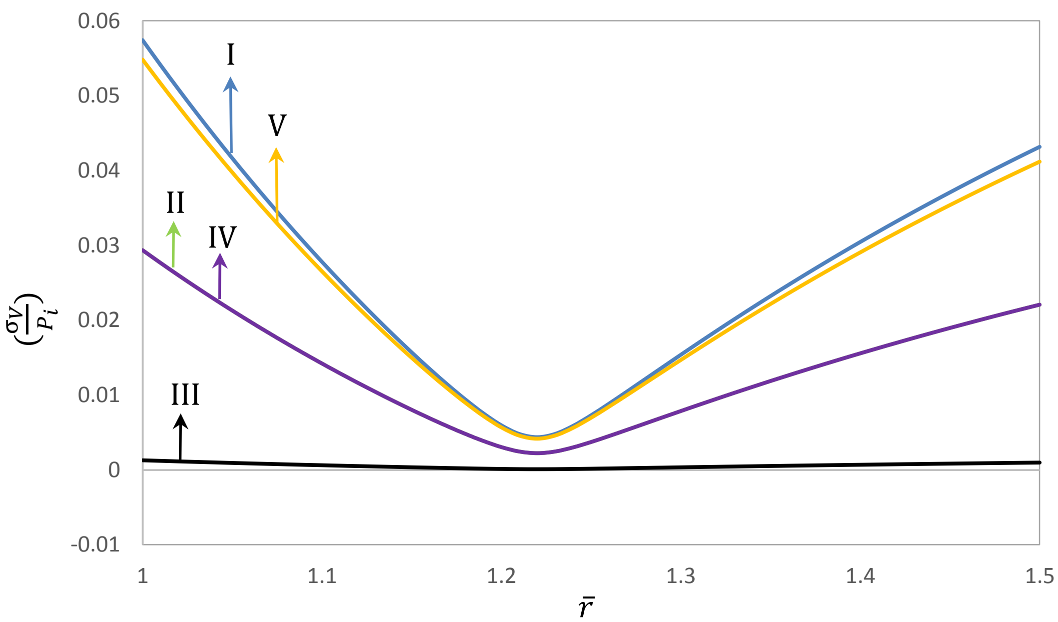
شکل ۴-۱۱ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی (کرنش صفحه‌ای)

در شکل ۴-۹، با حذف فشار داخلی و چرخش از استوانه، می‌توان گفت که افزایش دما در لایه‌ی

داخلی نسبت به لایه‌ی خارجی سبب می‌گردد تا تنش محوری در راستای ضخامت استوانه افزایش پیدا کند، و بر عکس افزایش بارگذاری حرارتی در لایه‌ی خارجی نسبت به لایه‌ی داخلی سبب می‌گردد تا تنش محوری در راستای ضخامت استوانه کاهش یابد. در لایه‌ی میانی نیز توزیع تنش محوری، مستقل از بارگذاری حرارتی می‌باشد.

شکل ۴-۱۰ اثر بارگذاری ترکیبی را بر توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی چرخان نشان می‌دهد؛ که تشابه رفتاری این نمودار با نمودار توزیع تنش محیطی (شکل ۴-۶)، مبین اثر غالب تنش محیطی نسبت به سایر تنش‌ها می‌باشد.

شکل ۴-۱۱ و شکل ۴-۱۲ نتایج حاصل از اعمال حرارت را بر توزیع تنش فون میزس به ترتیب در حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای نشان می‌دهند. ملاحظه می‌گردد که در استوانه با هر دو شرط انتهایی ذکر شده، بیشینه‌ی تنش در لایه‌ی داخلی و بیشینه‌ی تنش در لایه‌ی میانی ایجاد می‌گردد. اختلاف دو نمودار اخیر با یکدیگر، دخالت تنش محوری در حالت کرنش صفحه‌ای می‌باشد.

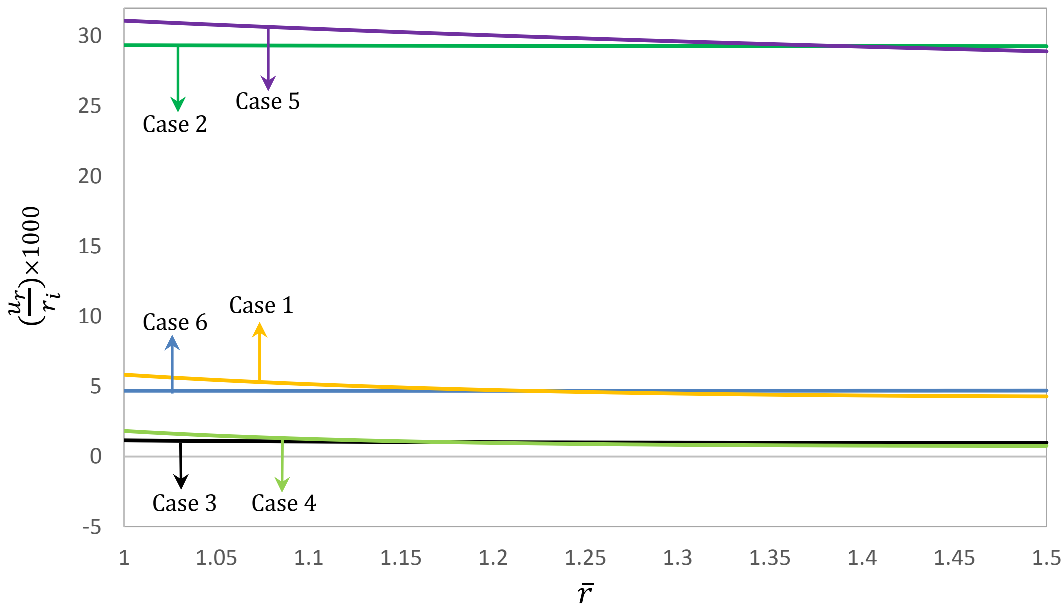


شکل ۴-۱۲ توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی تحت بارگذاری حرارتی (تنش صفحه‌ای)

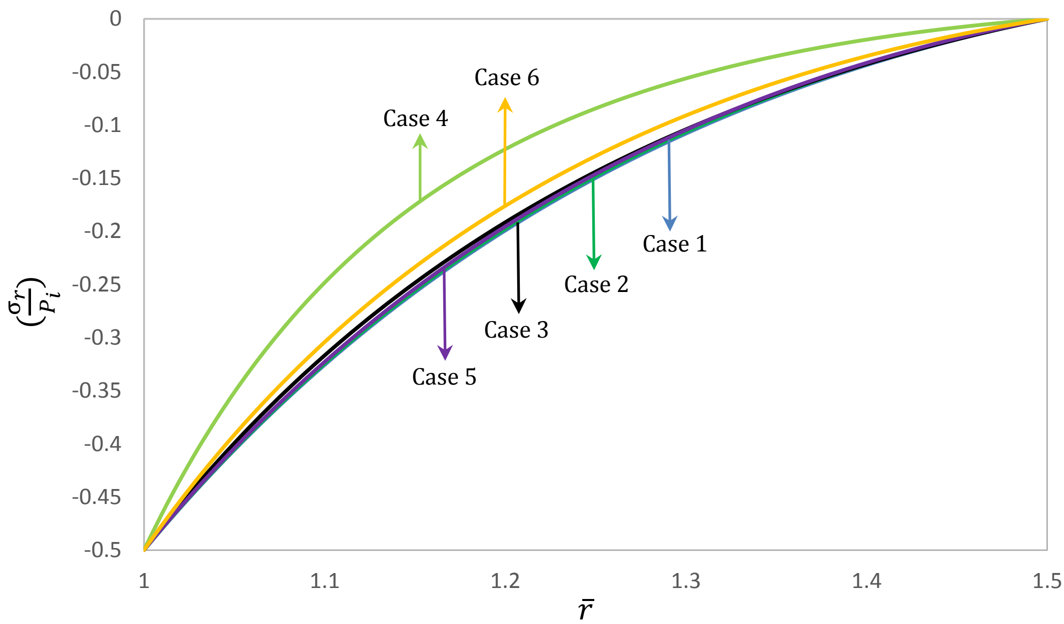
۴-۷-۲ بررسی جهت ناهمسانگردی

به منظور بررسی اثر ناهمسانگردی، شرایط زیر را در نظر می‌گیریم: فشار داخلی ($40\ Mpa$)،

سرعت دورانی ($1500\ \frac{rad}{s}$)، دمای لایه‌ی داخلی ($100\ ^\circ C$) و دمای لایه‌ی خارجی ($50\ ^\circ C$).



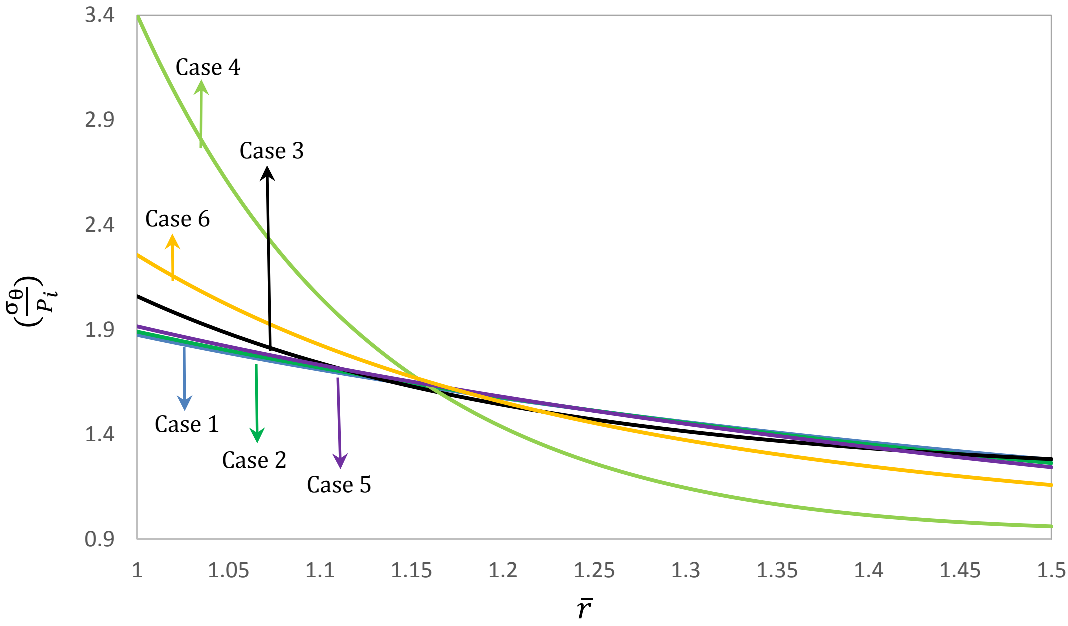
شکل ۴-۱۳ جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت بارگذاری ترکیبی



شکل ۴-۱۴ توزیع تنش شعاعی در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت بارگذاری ترکیبی

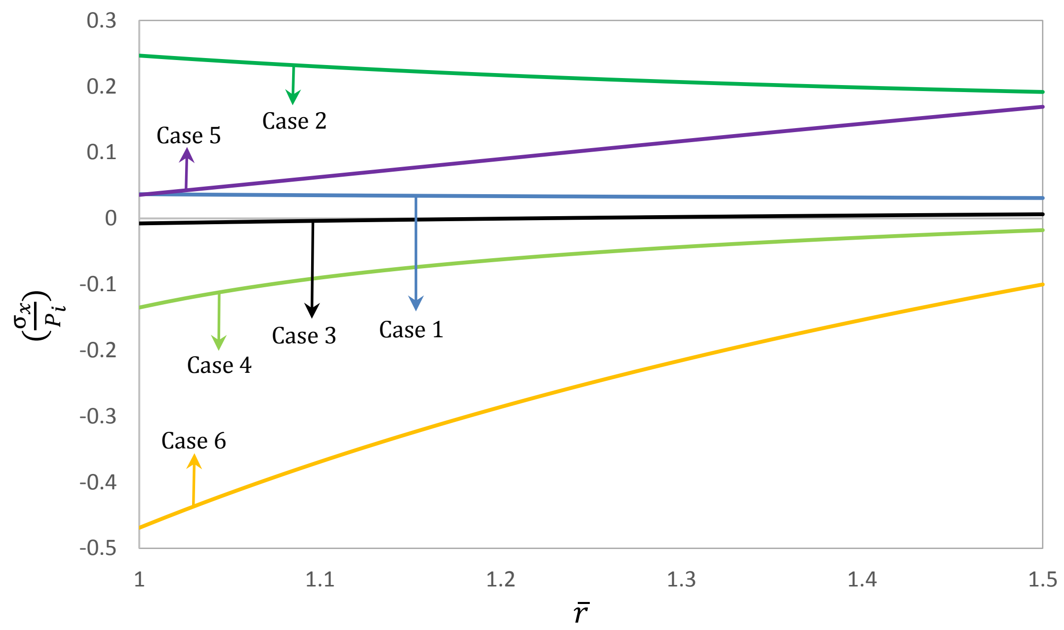
شکل ۴-۱۳ تا شکل ۴-۱۵ به ترتیب توزیع جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و تنش محیطی را برای ۶ حالت ناهمسانگردی در استوانه‌ی ناهمسانگرد چرخان تحت بارگذاری ترکیبی نشان می‌دهند.

نتایج حاکی از آن است که اثر دما در مقابل فشار و چرخش بسیار اندک می‌باشد. با توجه به نتایج سه نمودار یاد شده و نتایج متناظر در فصل بارگذاری فشار داخلی-چرخشی (فصل سوم)، می‌توان گفت که اثر دما در مقابل اثر فشار و چرخش؛ بر توزیع جابه‌جایی شعاعی، تنش شعاعی و تنش محیطی بسیار اندک می‌باشد. به همین دلیل رفتار نمودارهای شکل ۴-۱۳ تا شکل ۴-۱۵، مشابه نمودارهای متناظر در فصل بارگذاری فشاری-چرخشی (فصل سوم) می‌باشد.

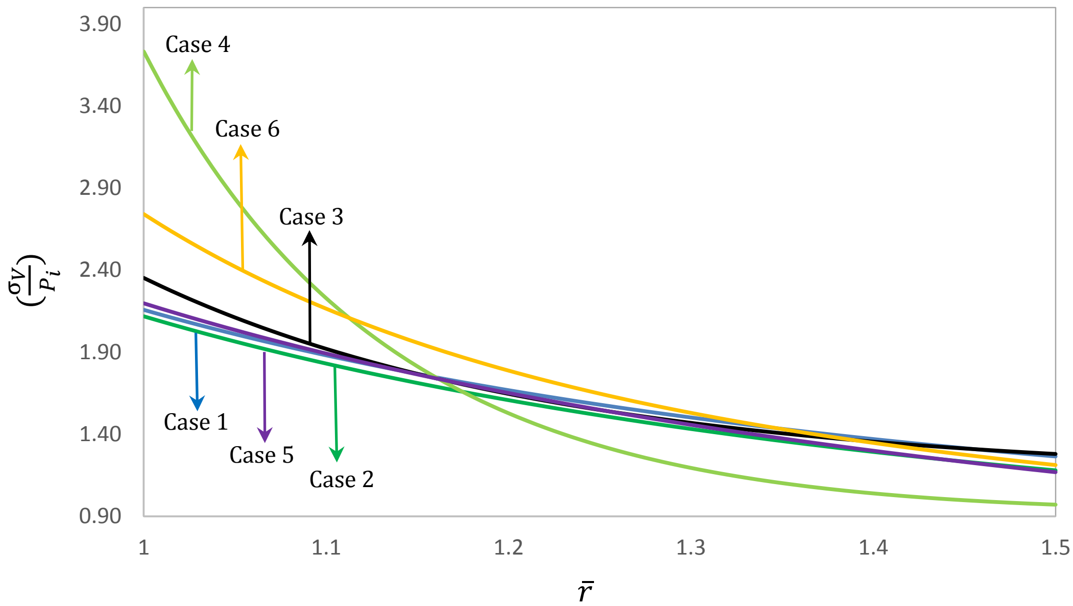


شکل ۴-۱۵ توزیع تنش محیطی در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت بارگذاری ترکیبی

شکل ۴-۱۶ اثر بارگذاری فشاری بر توزیع تنش محوری در راستای ضخامت را برای ۶ حالت ناهمسانگردی در استوانه‌ی چرخان دو سر بسته‌ی مقید تحت بارگذاری فشاری و حرارتی نشان می-دهد. کمترین میزان تنش محوری به ترتیب در *Case* 3 و *Case* 1 اتفاق می‌افتد؛ در این حالت‌ها توزیع تنش نسبت به شعاع تغییراتی مشهودی ندارد و در هر دو حالت راستای شعاعی پذیرای کمترین مدول الاستیسیته می‌باشد. در *Case* 1، *Case* 2 و *Case* 5 جهت ناهمسانگردی موجب شده تا در استوانه تنش محوری کششی ایجاد گردد. در صورتی که جهت ناهمسانگردی در *Case* 4 و *Case* 6، به گونه‌ای است که در این حالت‌ها در استوانه تنش محوری فشاری رخ می‌دهد؛ در هر دو حالت یاد شده ($E_r = 5.1710\ Gpa$) می‌باشد.



شکل ۴-۱۶ توزیع تنش محوری در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت بارگذاری ترکیبی



شکل ۴-۱۷ تنش فون میزس در استوانه‌های ناهمسانگرد چرخان تحت بارگذاری ترکیبی

شکل ۴-۱۷ گویای این مطلب است که حتی با اضافه شدن بارگذاری حرارتی به استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی، همچنان تنش محیطی در توزیع تنش فون میزس اثر غالب را نسبت به سایر تنش‌ها دارد.

فصل ۵

نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

۵-۱ تحلیل الاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک

۵-۱-۱ بررسی تأثیر بارگذاری فشاری

نتایج حاکی از آن است جابه‌جایی شعاعی در راستای ضخامت استوانه تغییرات محسوسی ندارد. و می‌توان جابه‌جایی شعاعی را در استوانه تحت فشار داخلی و خارجی با استفاده از اصل جمع آثار، از مجموع جابه‌جایی شعاعی استوانه تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی محاسبه نمود.

توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای تفاوت قابل ملاحظه‌ای با یکدیگر ندارند، بنابراین می‌توان گفت توزیع تنش‌های شعاعی و محیطی مستقل از شرایط انتهایی می‌باشند.

در شرایطی که بارگذاری صرفاً فشار داخلی باشد، لایه‌ی داخلی استوانه حداکثر مقدار تنش‌های شعاعی، محیطی و محوری را تجربه می‌کند؛ لذا طراحان باید توجه داشته باشند که حالت بحرانی در لایه داخلی رخ می‌دهد. هر چند در بارگذاری فشار خارجی بر خلاف بارگذاری فشار داخلی، تنش شعاعی حداکثر در لایه‌ی خارجی به وجود می‌آید، اما معیار تسلیم فون میزس بیانگر این است که برای بارگذاری فشار خارجی نیز حالت بحرانی در لایه‌ی داخلی رخ می‌دهد؛

با توجه به توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی می‌توان گفت که اثر فشار خارجی نسبت فشار داخلی مشهودتر است. همچنین تشابه رفتاری توزیع تنش فون میزس با توزیع تنش محیطی بیانگر اثر غالب تنش محیطی نسبت به سایر تنش‌های دخیل در مسأله می‌باشد. تنش در استوانه‌ی تحت فشار داخلی و خارجی نیز با استفاده از اصل جمع آثار، از مجموع تنش در استوانه‌ی تحت فشار داخلی و تحت فشار خارجی به‌دست می‌آید.

حل تحلیل و عددی نتایج یکسانی را برای جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها پیش‌بینی می‌کنند، که به عنوان نمونه، جدول ۵-۱ مقایسه‌ی نتایج *PET* و *FEM* استوانه‌ی تحت فشار داخلی (80 *Mpa*) را نشان می-دهد.

جدول ۵-۱ مقایسه نتایج PET و FEM در استوانه‌ی تحت فشار داخلی

		جابه‌جایی شعاعی (mm)	تنش شعاعی (Mpa)	تنش محیطی (Mpa)	تنش محوری (Mpa)
	FEM	0.023864	51.3340	176.6800	4.33710
$\bar{r}=1.12$	PET	0.023864	51.3344	176.6782	4.33714
	اختلاف (درصد)	-	0.001	0.002	0.001
	FEM	0.023725	28.6400	157.5100	3.9944
$\bar{r}=1.25$	PET	0.023724	28.6580	157.5178	3.9946
	اختلاف (درصد)	0.0043	0.063	0.005	0.005

۵-۱-۲ بررسی جهت ناهمسانگردی

بررسی نتایج حاکی از آن است که جهت ناهمسانگردی تأثیر بسزایی در توزیع تنش‌ها و جابه-جایی برای ماده‌ی مورد مطالعه دارد.

مشاهده می‌شود در حالت‌هایی که بزرگ‌ترین مدول الاستیسیته به راستای محیطی اختصاص داده شده، کمترین جابه‌جایی شعاعی ایجاد می‌شود؛ و با کاهش مدول الاستیسیته در راستای محیطی جابه‌جایی شعاعی افزایش می‌یابد. پس با استناد به نتایج می‌توان گفت که مدول کشسانی راستای محیطی بیشترین تأثیر را بر توزیع جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی ناهمسانگرد تحت فشار دارد. بنابراین اگر قید طراحی، جابه‌جایی شعاعی باشد، *Case* 3 و *Case* 4 باید به عنوان گزینه‌های مطلوب مد نظر قرار گیرند.

اگر قید طراحی تنش ایجاد شده در جسم باشد؛ معیار تسلیم فون میزس می‌تواند تصویر روشنی از توزیع تنش در استوانه‌های ناهمسانگرد ارائه دهد. بر این اساس *Case* 1، *Case* 2 و *Case* 5 انتخاب مناسبی برای حالت ناهمسانگردی هستند.

در صورتی که طراحان بر حسب نیاز یکی از *Case* 3، *Case* 6 و یا *Case* 4 را انتخاب کنند، باید توجه داشته باشند که در توزیع تنش فون میزس، این حالت‌ها نسبت به سه حالت دیگر میزان تنش

بیشتر را همراه با بازه‌ی بزرگتر تغییرات متحمل می‌شوند. لذا طراحان باید ضریب اطمینان بـالاتری را در طراحی خود مد نظر قرار دهند.

۵-۲ تحلیل الاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک چرخان

۵-۲-۱ بررسی تأثیر بارگذاری فشار داخلی-چرخشی

مقایسه نتایج این فصل با فصل دوم نشان می‌دهد که رفتار جابه‌جایی شعاعی در استوانه‌ی تحـت بارگذاری ۱- فشار داخلی، ۲- فشار داخلی-چرخش و ۳- چرخش خالص، رفتار یکسان اما بـا مقـادیر متفاوت دارد. افزایش سرعت دورانی موجب افزایش جابه‌جایی شعاعی در کل ضـخامت اسـتوانه مـی-گردد. اعمال فشار داخلی در استوانه موجب پدید آمـدن تـنش شـعاعی فشـاری شـده، در حـالی کـه بارگذاری چرخشی تمایل به ایجاد تنش کششی در راستای جداره‌ی استوانه دارد. قرار گرفتن اسـتوانه تحت بارگذاری فشار داخلی-چرخشی و یا چرخش موجب می‌شود که در هر دو حالت بارگذاری، لایه-ی داخلی استوانه مقدار بیشینه و لایه‌ی خارجی مقدار کمینه‌ی تنش فون میزس را تحمل کند. برای استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی، با در نظر گرفتن هر یک از بارگذاری‌هـای دورانـی و فشـاری بـه طور جداگانه معادلات حاکم را حل کرده و نتایج حاصل را با استفاده از اصل برهم‌نهی با یکدیگر جمع نمود.

جدول ۵-۲ مقایسه‌ی نتایج PET و FEM اسـتوانه‌ی تحـت فشـار داخلـی ($80\ Mpa$) و سـرعت دورانی ($3500\ \frac{rad}{s}$) را نشان می‌دهد؛ که دلالت بر انطباق حل عددی و تحلیلی دارد.

۵-۲-۲ بررسی جهت ناهمسانگردی

اعمال چرخش در استوانه‌ی ناهمسانگرد تحت فشار داخلی، برای هر شش حالـت ناهمسـانگردی، اثری مشابه با فشار داخلی داشته و موجب افزایش بازه تغییرات در توزیع تنش‌ها و جابـه‌جـایی شـده است. بنابراین برای تعیین جهت ناهمسانگردی مناسب می‌توان از نتایج فصل بارگذاری فشاری (فصـل

دوم) بهره جست.

جدول ۵-۲ مقایسه نتایج PET و FEM در استوانه‌ی چرخان تحت فشار داخلی

		جابه‌جایی شعاعی (mm)	تنش شعاعی (Mpa)	تنش محیطی (Mpa)	تنش محوری (Mpa)
$\bar{r}=1.12$	FEM	0.058376	40.0140	432.8900	11.2670
	PET	0.058376	40.0151	432.8893	11.2673
	اختلاف (درصد)	-	0.003	0.001	0.003
$\bar{r}=1.25$	FEM	0.058245	14.7510	387.1400	10.2340
	PET	0.058245	14.7909	387.1720	10.2342
	اختلاف (درصد)	–	0.27	0.01	0.002

۵-۳ تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک چرخان

۵-۳-۱ بررسی تأثیر بارگذاری فشار داخلی، چرخشی و حرارتی

مقایسه‌ی نمودارها در حالت بارگذاری ترکیبی (فشار داخلی + چرخش + حرارت) با بارگذاری حرارتی بیان کننده‌ی این مطلب است که در استوانه‌ی ارتوتروپیک تأثیرات بارگذاری حرارتی نسبت به بارگذاری فشاری و یا بارگذاری چرخشی بسیار اندک است.

در هر دو حالت بارگذاری ترکیبی و بارگذاری حرارتی، لایه‌ی خارجی بیش‌ترین میزان جابه‌جایی شعاعی را دارد و بیش‌ترین بازه‌ی تغییرات نیز در حالتی است که دمای سطح داخلی $25\ ^{\circ}C$ و دمای سطح خارجی $125\ ^{\circ}C$ می‌باشد، بنابراین در صورت در نظر گرفتن جابه‌جایی شعاعی به عنوان قید طراحی، توصیه می‌شود که طراح توجه خود را به لایه‌ی داخلی معطوف نماید.

در بارگذاری حرارتی، حالت‌هایی که دما در لایه‌ی خارجی بیشتر از لایه‌ی داخلی است تمایل به ایجاد تنش شعاعی کششی و حالت‌هایی که دما در لایه‌ی داخلی بیشتر از لایه خارجی است؛ تمایل به ایجاد تنش شعاعی فشاری دارند. اما نتایج توزیع تنش فون میزس در استوانه‌ی تحت حرارت، حاکی از

این است که، حالت بحرانی علاوه بر لایه‌ی خارجی در لایه‌ی داخلی نیز رخ می‌دهد و در لایه‌ی میانی توزیع تنش مستقل از بارگذاری حرارتی می‌باشد. همچنین در بارگذاری حرارتی اختلاف نمودارهای توزیع تنش فون میزس در دو حالت کرنش صفحه‌ای و تنش صفحه‌ای، بیانگر وابستگی تنش فون میزس به شرایط انتهایی استوانه می‌باشد.

به منظور مقایسه‌ی نتایج حل تحلیلی و عددی، نتایج PET و FEM در استوانه‌ی تحت فشار داخلی ($40\ Mpa$) و سرعت دورانی ($1500\ \frac{rad}{s}$) که در لایه‌ی داخلی و خارجی به ترتیب در معرض دمای ($25\ ^\circ C$) و ($125\ ^\circ C$) قرار دارد، در جدول ۵-۳ آورده شده است.

جدول ۵-۳ مقایسه نتایج PET و FEM در استوانه‌ی چرخان تحت بارگذاری ترکیبی

		جابه‌جایی شعاعی (mm)	تنش شعاعی (Mpa)	تنش محیطی (Mpa)	تنش محوری (Mpa)
$\bar{r}=1.12$	FEM	0.018833	23.2470	137.3400	3.21100
	PET	0.018832	23.2478	137.3361	3.21105
	اختلاف (درصد)	0.005	0.004	0.003	0.002
$\bar{r}=1.25$	FEM	0.018823	11.3810	120.6600	2.5781
	PET	0.018822	11.3948	120.6689	2.5783
	اختلاف (درصد)	0.005	0.13	0.01	0.01

۵-۳-۲ بررسی جهت ناهمسانگردی

همچنان که پیش‌تر نیز بیان گردید تأثیر بارگذاری حرارتی نسبت به بارگذاری فشار داخلی و یا بارگذاری چرخشی در هر شش حالت ناهمسانگردی، بسیار اندک است؛ بنابراین حتی با حضور بارگذاری حرارتی، نتایج فصل بارگذاری فشاری (فصل دوم) برای تعیین جهت ناهمسانگردی مناسب در توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی همچنان قابل اطمینان است.

۴-۵ پیشنهادها

با توجه به مطالعات انجام شده در این زمینه پیشنهادهای مختلفی را می‌توان ارائه نمود که برخی از این پیشنهادها به قرار زیر است.

۱- تحلیل ترموالاستیک استوانه‌ی ارتوتروپیک جدار ضخیم با ضخامت متغییر؛

۲- تحلیل الکتروترمومکانیکی استوانه‌های پیزوالکتریک جدار ضخیم با استفاده از نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی؛

۳- تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های ارتوتروپیک چرخان جدار ضخیم با در نظرگیری وابستگی خواص به میدان دمایی در جسم؛

۴- تحلیل سه بعدی حرارتی گذرا در استوانه‌های جدار ضخیم نامتقارن محوری؛

۵- تحلیل الکتروترمومکانیکی استوانه‌های ارتوتروپیک جدار ضخیم نامتقارن محوری؛

۶- تحلیل استوانه‌های ارتوتروپیک جدار ضخیم تحت فشار متغییر در طول استوانه.

پیشنهادهای ارائه شده تنها بخش کوچکی را شامل می‌شود، چرا که تغییر در تحلیل، بارگذاری، هندسه، جنس و شرایط مرزی هر کدام سبب ایجاد موضوعات جدید برای پژوهش می‌گردد.

مراجع

[۱] محسنی شکیب م.؛ ***مکانیک سازهای مرکب***، مؤسسه چاپ و انتشارات دانشگاه امام حسین (ع)، تهران، ۱۳۸۵.

[2] Timoshenko S. P., Krieger S. W.; ***Theory of Plate and Shells***, 2th ed, McGraw-Hill, New York, 1959.

[3] Ugural A.C.; ***Stresses in Plates and Shells***, McGraw-Hill, New York, 1981.

[4] Ugural A.C., Fenster S.K.; ***Advanced Strength and Applied Elasticity***, 4th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[5] Mirsky I., Hermann G.; ***Axially Motions of Thick Cylindrical Shells***, J. Appl. Mech., Vol. 25, pp. 97-102,1958.

[۶] یوسفی م.؛ ***تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول*** ، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، زمستان ۱۳۹۱.

[۷] پرهیزکار یعقوبی م.؛ ***تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار ضخیم FGM پیزوالکتریک به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول با توزیع توانی خواص***، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تابستان ۱۳۹۲.

[۸] قارونی ح.؛ ***تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول***، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، زمستان ۱۳۹۰.

[۹] سلطانی ن.؛ ***آشنایی با کامپوزیت‌های زمینه فلزی، پلیمری، سرامیکی و فرآیندهای ساخت***، جهان جام‌جم، تهران، ۱۳۸۷.

[۱۰] طاهای ابدی م.؛ ***رفتار مکانیکی مواد مرکب***، پژوهشکده هوافضا، تهران، ۱۳۸۸.

[11] Lekhnitskii S.G.;***Theory of Elasticity of an Anisotropic Body***, Mir Publishers, 1981.

[12] Tang s.; ***Elastic Sresses in Rotating Anisotropic Disks***, Int. J. mech. Sci., Vol 11, pp. 509-517, 1969.

[13] Bahar L.Y.; ***A State Space Approach to Elasticity***, Journal of The Franklin Institute, Vol. 299, No.1, 1975.

[14] Ren J. G.; ***Analysis of Laminated Circular Cylindrical Shells Under Axisymmetric Loading,*** Composite Structures, 30, pp. 271-280, 1995.

[15] El-Naggar A. M., Abd-Alla A. M., Ahmed S. M.; ***On the Rotation of a Non-Homogeneous Composite Infinite Cylinder of Orthotropic Material,*** Applied Mathematics and Computation, 69, pp. 147-157, 1995.

[16] Herakovich C.T., ***Mechanics of Fibrous Composites,*** John Wiley & Son Inc, New York, 1998.

[17] Horgan C.O., Chan A.M.; ***The Pressurized Hollow Cylinder or Disk Problem for Functionally Graded Isotropic Linearly Elastic Materials***, journal of elasticity, 55, pp.43-59, 1999.

[18] Tarn J.Q., ***A State Space Formalism for Anisotropic Elasticity: Part II: Cylindrical Anisotropy,*** International Journal of Solids and Structures, 39, pp. 5157-5172 , 2002.

[19] Jabbari M, Sohrabpour S., Eslami M.R.; ***Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder due to Radially Symmetric Loads***, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 79, pp. 493-497, 2002.

[20] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z.; ***Elastic Analysis of Heterogeneous Hollow Cylinders***, Mechanics Research Communications, 33, pp. 681-691, 2006.

[21] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X.; ***Exact Solutions of Heterogeneous Elastic Hollow Cylinders***, Composite Structures, 79, pp. 140-147, 2007.

[22] Tutuncu N.; ***Stresses in Thick-Walled FGM Cylinders with Exponentially-Varying Properties***, Engineering Structures, 29, pp. 2032-2035, 2007.

[23] Chen Y.Z., Lin X.Y***.; Elastic Analysis for Thick Cylinders and Spherical Pressure Vessels made of Functionally Graded Materials***, Computational Materials Science, 44, pp. 581-587, 2008.

[۲۴] م. ح. کیهانی، م. شریعتی، م. نوروزی؛ ***حل تحلیلی انتقال حرارت پایدار هدایتی در استوانه‌ی کامپوزیتی،*** مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس، ش ۳۷، پاییز ۱۳۸۸.

[25] Abd-Alla A.M., Mahmoud S.R., Al-Shehri N.A.; ***Effect of the Rotation on a Non-Homogeneous Infinite Cylinder of Orthotropic Material***, Applied Mathematics and Computation, 217, pp. 8914-8922, 2011.

[26] Zhang Q., Wang Z.W., Tang C.Y., Hu D.P., Liu P.Q., Xia L.Z.: ***Analytical Solution of The Thermo-Mechanical Stresses in A Multilayered Composite Pressure Vessel Considering The Influence of The Closed Ends***, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 98, pp. 102-110, 2012

[27] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; ***Complete Elastic Solution of Pressurized Thick Cylindrical Shells Made of Heterogeneous Functionally Graded Materials***, Mechanika, 18(6), pp. 640-649, 2012.

[28] Ghannad M., Zamani-Nejad M.; ***Elastic Analysis of Heterogeneous Thick Cylinders Subjected to Internal or External Pressure Using Shear Deformation Theory***, Acta Polytechnica Hungarica, Vol. 9, No. 6, pp. 117-136, 2012.

[۲۹] والپین اس.؛ ***مکانیک محیط‌های پیوسته***، مترجم کلانتری ف.، دانشگاه گیلان، گیلان، ۱۳۷۹.

[۳۰] بوژمهرانی م.؛ ***تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های جدار ضخیم چرخان از مواد ناهمگن FG، تحت فشار داخلی و خارجی***، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، تیر ۱۳۹۰.

[۳۱] قنّاد م، رحیمی غ، اسماعیل زاده خادم س.؛ ***حل کلی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ساخته شده از مواد ناهمگن FG به کمک نظریه‌ی الاستیسیته‌ی مستوی***، مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس، ص ص. ۳۱-۴۱، پاییز ۱۳۸۹.

[32] Reddy J. N.; ***Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells Theory and Analysis,*** 2th ed, CRC Press, 2004.

[33] Ansys Co.; ***Coupled-Field Analysis Guide***, ANSYS Inc., USA, 2009.

Abstract:
In this research, the governing equation of homogeneous and anisotropic axisymmetric thick-walled cylinders subjected to mechanical and thermal and steady state loading based on the plane elasticity theory is presented. The stresses and displacement calculated under generalized plane stress and plane strain assumptions. For investigating the accuracy of results conducted from analytical solution, the numerical modeling of cylinder has been done and the results of two methods compare. In addition, combination loading the results of the mechanical, rotational and thermal loading examined. Also in in this research, the results of the stresses and displacement distribution in the six Anisotropy case Studied. The results indicate that for Material studied the Anisotropy orientation of stresses and displacement distribution it is important. Finally conclusion, discussion and suggestion have been indicated.

Key words: Elastic solution, Thick-walled cylinders, Orthotropic material, Anisotropic material, Plane elasticity theory, Finite element method.

Shahrood
University of Technology

Mechanical Engineering Faculty

Master of Science thesis

Thermoelastic analysis of orthoteropic rotating thick-walled cylinder using plane elasticity theory

Mohammadreza Hokmabadi

Supervioser:
Dr. Mehdi Ghannad

Dr. Mohammad Jafari

September 2014