بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک، گروه مکاترونیک

مدل‌سازی و کنترل جستجوگر ژیروسکوپ آزاد با عملگر الکترومغناطیسی در مد پویش

دانشجو:

محمد کفراشی

استاد راهنما:

دکتر حبیب احمدی

استاد مشاور:

دکتر محمدرضا عاروان

پایان‌نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **محمدکفراشی** رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **مکاترونیک** تحت عنوان **مدل‌سازی و کنترل جستجوگر ژیروسکوپ آزاد با عملگر الکترومغناطیسی در مد پویش** که در تاریخ **۹۳/۶/۲۵** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه : بسیار خوب امتیاز ۱۸٫۸) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر حبیب احمدی	استادیار	
۲ـ استاد مشاور	دکتر محمدرضا عاروان	دانشیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی بامداد	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر امیر جلالی	استادیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر علی اکبرزاده کلات	استادیار	

رئیس دانشکده : امضاء

دانشکده مکانیک
دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیم به پدر و مادر مهربانم

و

همسرم که همراهم بود

تقدیر و تشکر

اکنون‌که به یاری خداوند نگارش این پایان‌نامه را به پایان رسانده‌ام، بر خود لازم می‌دانم از استاد دلسوزم جناب آقای دکتر حبیب احمدی، قدردانی نموده و از راهنمایی‌های ایشان در طول نگارش این پایان‌نامه، سپاسگزاری نمایم.

همچنین وظیفه‌ی خود می‌دانم که از جناب آقای دکتر محمدرضا عاروان به خاطر راهنمایی‌های با ارزش و کمک‌های بی‌دریغ ایشان کمال قدردانی را داشته باشم.

از پدر، مادر و همسر عزیز و مهربانم به خاطر صبر و همراهی اینجانب در این راه تشکر می‌نمایم.

همچنین بر خود لازم می‌دانم که از سایر دوستانی که در این پایان‌نامه به بنده لطف و با اینجانب همکاری نموده‌اند تشکر نمایم، ازجمله مهندس رضا وفایی، مهندس فرهاد باوفا، مهندس امیر سلطان‌زاده جزی، مهندس مهدی ترکمانی، مهندس سجاد دهقانی و مهندس مرتضی قاطعی و از درگاه خداوند متعال توفیقات روزافزون برای این عزیزان را مسئلت دارم.

محمد کفراشی

تعهد نامه

اینجانب محمد کفراشی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مکاترونیک دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه: مدل‌سازی و کنترل جستجوگر ژیروسکوپ آزاد با عملگر الکترومغناطیسی در مد پویش، تحت راهنمایی دکتر حبیب احمدی و مشاوره دکتر محمدرضا عاروان متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام‌شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورداستفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- **کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.**
- **استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.**

چکیده:

در این تحقیق، مدل‌سازی و طراحی سیستم جستجوگر ژیروسکوپ آزاد با عملگر الکترومغناطیسی، در مد پویش، مورد بررسی قرار گرفته است. سازوکار این جستجوگر دارای یک روتور مغناطیس دائمی است که دارای تقارن دوقطبی مغناطیسی است. ابتدای بحث در مورد مدل‌سازی دینامیکی سازوکار جستجوگر در دو روش نیوتن و لاگرانژ به همراه مدل‌سازی اثر طوقه‌های جستجوگر و گشتاور مغناطیسی بر روی روتور مغناطیس دائم است و سپس برای انجام ردیابی مناسب در مد پویش، کنترل‌کننده PD همراه با فیلتر پایین گذر و همچنین یک کنترل کننده‌ی غیرخطی بر مبنای خطی‌سازی ورودی و خروجی پیشنهاد شده و کنترل کننده‌ها توسط الگوریتم TLBO بهینه‌سازی شده‌اند. به این ترتیب با پیاده سازی کنترل‌کننده‌ها و ایجاد جریان در محرکه‌های الکترومغناطیسی سیستم جستجوگر ژیروسکوپ آزاد، گشتاور لازم را ایجاد و امکان کنترل جهت‌دهی مناسب محور بینایی فراهم شده است.

کلمات کلیدی: جستجوگر ژیروسکوپ آزاد، مد پویش، گشتاور الکترومغناطیسی، روتور، مدل‌سازی دینامیکی، طوقه، کنترل‌کننده.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

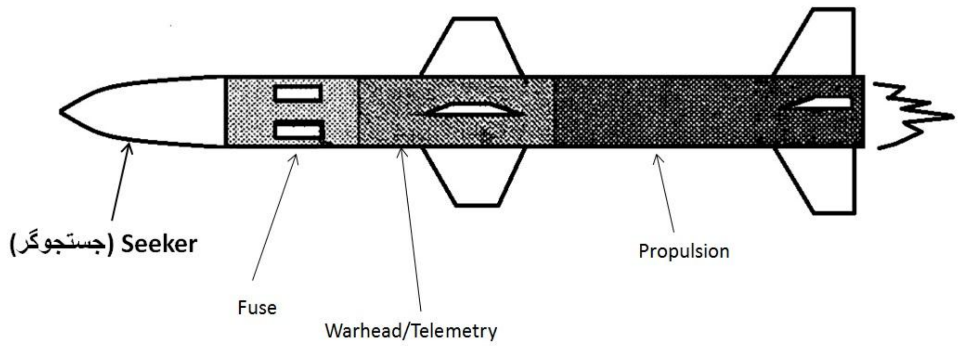
فهرست جدول‌ها

فصل اول:

مقدمه

۱-۱-مقدمه

در دسته‌بندی موشک‌ها، موشکی هدایت‌شونده است که اگر به‌طور معمول در جهت تقریبی یک هدف شلیک شود بتواند با استفاده از دستورات سیستم ناوبری، جهت حرکت خود را برای رسیدن به هدف بهبود بخشد[۱]. برای پیاده‌سازی روش‌های هدایت دونقطه‌ای همچون هدایت تناسبی، در موشک‌های آشیانه‌یاب نیاز به اندازه‌گیری نرخ چرخش خط دید است[۲]. این اندازه‌گیری توسط بخشی به نام جستجوگر که در نوک موشک تعبیه شده است، صورت می‌گیرد. شکل (۱-۱) موقعیت یک جستجوگر موشک ضد هواپیما را نسبت به اجزاء دیگر موشک نشان می‌دهد[۳].

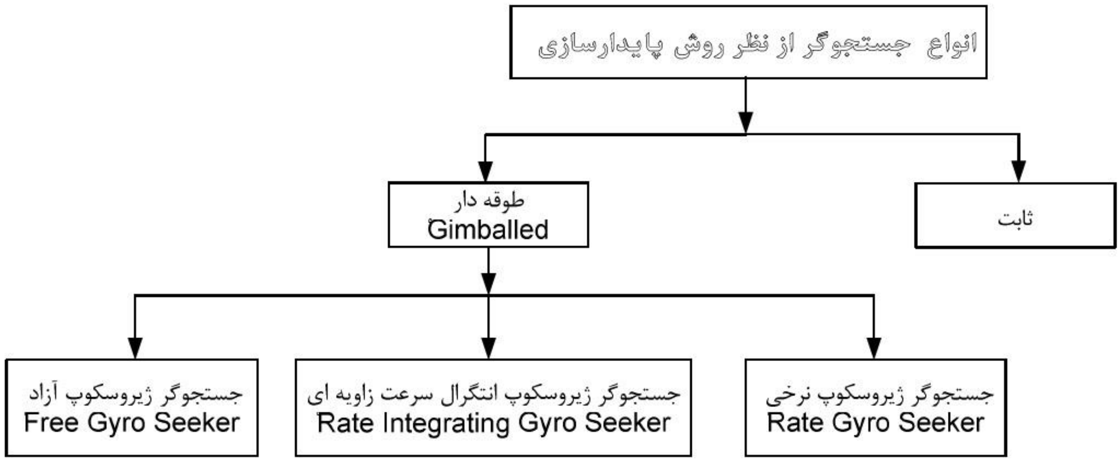


شکل (۱-۱) اجزاء یک موشک ضد هواپیما

باید به این نکته توجه کرد که هدایت موشک‌ها در بالای سطح زمین انجام می‌گیرد بنابراین اژدرهای هدایت‌شونده به دلیل هدایت در زیر سطح آب، موشک نامیده نمی‌شوند[۴].

جستجوگر می‌تواند قبل از پرتاب موشک و یا بعد از آن هدف را پیدا کند و اصطلاحاً روی هدف قفل نماید. فن‌آوری مورد استفاده در ابزار بینایی جستجوگر جهت تشخیص هدف، می‌تواند به‌صورت راداری، لیزری، مادون‌قرمز و یا مرئی باشد[۱۸-۵]. یک جستجوگر وظیفه دارد هدف را از محیط اطراف تشخیص داده و علی‌رغم حرکت وضعی و حرکت انتقالی موشک نسبت به هدف که باعث تغییر راستای جستجوگر تا هدف (خط دید) در فضا می‌شود، همواره هدف را در میدان دید خود نگه دارد. ابزار بینایی جستجوگر می‌تواند به‌صورت ثابت در راستای نوک موشک متصل باشد یا بر روی

طوقه‌هایی سوار شده و در دو جهت خمش[1] و گردش[2] قابلیت تغییر وضعیت داشته باشد. در نوع طوقه‌دار همواره سعی می‌شود که راستای مرکز ابزار بینایی جستجوگر در جهت راستای خط دید هدف قرار گیرد. بدین منظور باید توسط یک سیستم کنترل، زاویه‌ی چرخش طوقه‌ها، با توجه به خطای اندازه‌گیری شده توسط سامانه‌ی بینایی به خاطر حرکت وضعی و انتقالی موشک یا هدف، به‌روزرسانی شود. مطابق دیاگرام شکل (۱-۲) پایدارسازی سیستم طوقه‌ها به سه صورت انجام می‌پذیرد.



شکل (۱-۲) دسته‌بندی انواع جستجوگرها از نظر نحوه پایدارسازی[۱۹]

در نوع اول که به جستجوگرهای پایدار شده با ژیروسکوپ نرخی معروف هستند[۲۰] و به اختصار با عنوان جستجوگر ژیروسکوپ نرخی شناخته می‌شوند، مانند هر سیستم کنترلی دیگر خروجی مورد نظر یعنی زاویه محور جستجوگر را با ورودی مرجع یعنی زاویه خط دید، مقایسه کرده و یک جبران‌ساز از روی خطای تولیدشده، دستور گشتاور مناسب را برای اصلاح خطای زاویه محور

[1] pitch
[2] yaw

جستجوگر را صادر می‌کند. تاکنون کارهای متنوعی در زمینه مدل‌سازی و کنترل این جستجوگرها انجام شده است[۲۹-۲۱]. در نوع دوم برای مستقل کردن حرکت جستجوگر از حرکت وضعی موشک، ابزار بینایی بر روی محور روتور یک ژیروسکوپ آزاد نصب شده است و سیستم کنترل تنها باید حرکت انتقالی موشک را نسبت به هدف و درصد کمی از حرکت وضعی موشک که در اثر ایده‌آل نبودن ژیروسکوپ ظاهر می‌شود را جبران کند. به بیانی جستجوگری که سامانه‌ی بینایی آن توسط یک ژیروسکوپ آزاد پایدار شده باشد را به اختصار جستجوگر ژیروسکوپ آزاد می‌نامند. در نوع سوم که جستجوگر ژیروسکوپ انتگرال سرعت زاویه‌ای خوانده می‌شود، نحوه‌ی پایدارسازی ابزار بینایی شبیه یک صفحه پایدار در سامانه‌های تعیین موقعیت اینرسی است. به این ترتیب یک ژیروسکوپ انتگرال سرعت زاویه‌ای روی هر یک از طوقه‌ها نصب شده و پایدارسازی به کمک آن صورت می‌پذیرد.

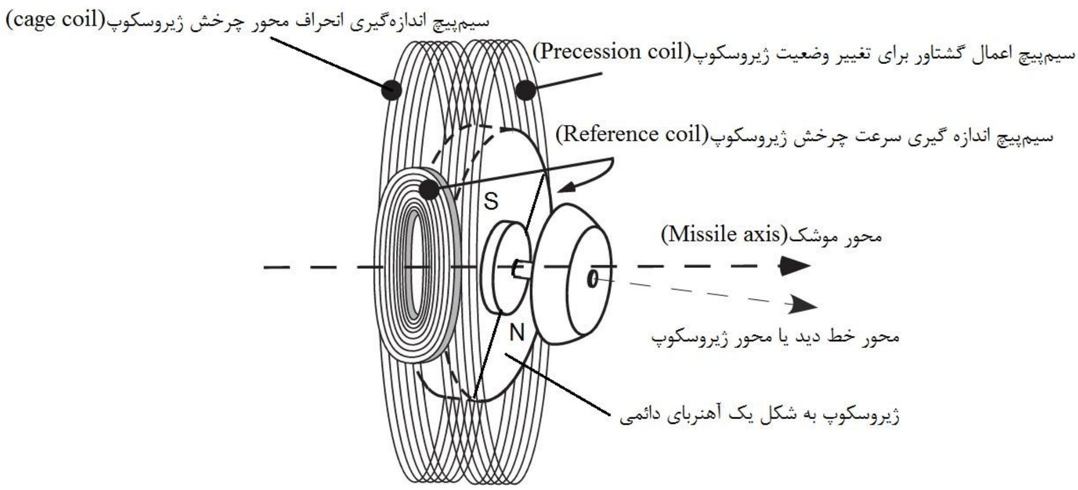
محور جستجوگر ژیروسکوپ آزاد که حس‌گر بینایی آن روی طوقه‌ها یا قاب‌هایی سوار است، دارای دو درجه آزادی خمش و گردش نسبت به بدنه موشک هستند. این نوع جستجوگرها که با نام سیستم‌های جستجوگر پایدار شده با ژیروسکوپ آزاد نیز نامیده می‌شوند، از سال ۱۹۵۰میلادی تاکنون با موفقیت گسترش یافته و به کار گرفته‌شده‌اند. هزینه ساخت کمتر و نقش مؤثر در عملیات نظامی، عمده مزیت این نوع جستجوگرهاست. تولید مداوم و برنامه‌های مهندسی و توسعه‌ای در این زمینه باعث بهینه‌تر شدن و کاربردی‌تر شدن تدریجی این جستجوگرها شده است[۳۰]. در این جستجوگرها، روتور مغناطیس دائمی حول حس‌گر بینایی با سرعت بالایی دوران می‌کند. حرکت دورانی سریع روتور، ایجادکننده خاصیت صلبیت در راستای چرخش روتور جستجوگر است و باعث می‌شود محور حس‌گر بینایی که خود دارای دو درجه آزادی خمش و گردش نسبت به بدنه موشک است، علی‌رغم حرکت وضعی و انتقالی موشک ثابت بماند و این خود یک عامل خودکنترلی مهم در این نوع جستجوگرهاست[۳۱].

۱-۲-تاریخچه کارهای انجام شده

سازوکارهای متفاوتی برای جهت‌دهی ابزار بینایی جستجوگر وجود دارد برای مثال جستجوگر می‌تواند با استفاده از موتورهای الکتریکی، امکان تغییر جهت ابزار بینایی را فراهم نماید، شکل (۱-۳) تصاویری از این جستجوگر را نمایش می‌دهد.

شکل (۱-۳) تصاویری از جستجوگرهای نوع Roll-pitch [۳۲]

در سازوکار جستجوگری که با استفاده از اصول مکانیکی و مغناطیسی به شکل (۱-۳) پیشنهاد شده است، روتوری با سرعت زاویه‌ای بالایی حول محورش چرخش می‌کند و در این صورت به خاطر خاصیت صلبیت ژیروسکوپی، راستای محور چرخش ژیروسکوپ در اثر گشتاورهای ناخواسته از بدنه موشک یا حرکت انتقالی موشک تغییر نکرده و پایدار می‌ماند. وظیفه مجموعه سیم‌پیچ‌ها جهت دادن روتور به سمت دلخواه، سنجش انحراف حس‌گر بینایی از محور موشک و سنجش تعداد گردش روتور نسبت به چرخش خود موشک است. سازوکار جستجوگر مورد مطالعه در تحقیق فوق مطابق شکل (۱-۴) است.

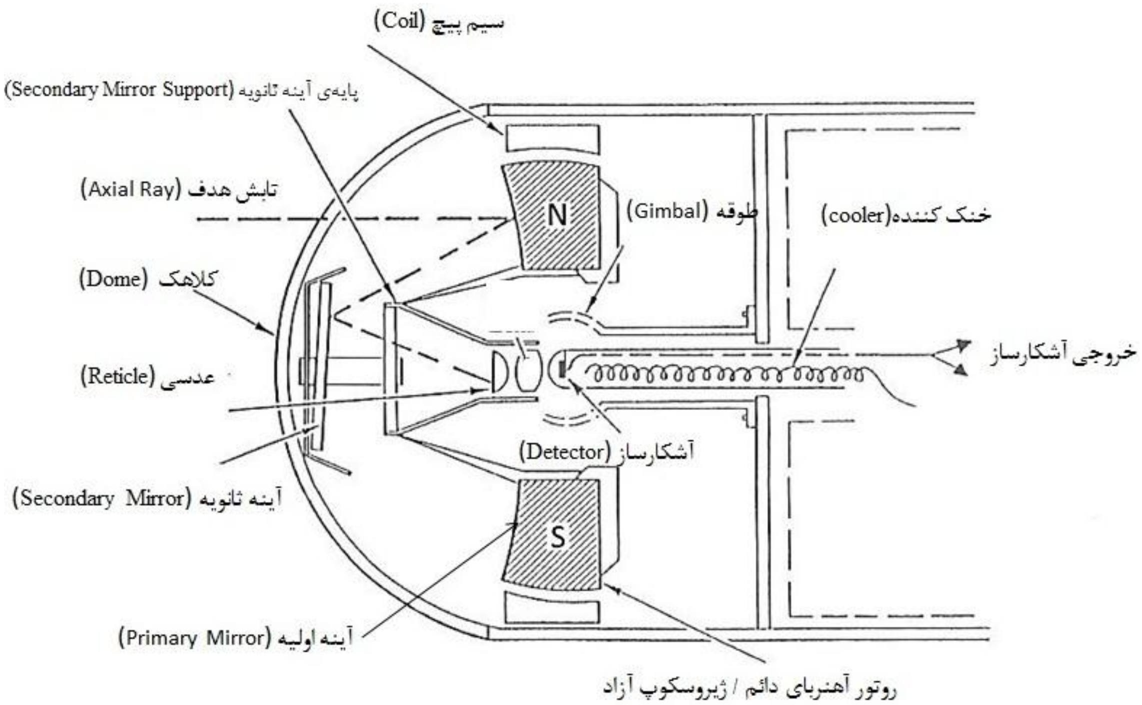


شکل (۱-۴) ساختار ژیروسکوپ و سیم‌پیچ‌های جستجوگر[۳۳]

در ساختار شکل (۱-۴)، سیم‌پیچ‌ها در اطراف ژیروسکوپ به بدنه موشک مقید هستند و سه نقش اصلی این سیم‌پیچ‌ها اعمال گشتاور به ژیروسکوپ و اندازه‌گیری وضعیت و سرعت چرخش ژیروسکوپ نسبت به بدنه موشک است. سیم‌پیچ‌های حس‌گر سرعت چرخش[۱] که در اطراف بدنه موشک مطابق شکل نصب شده‌اند، وظیفه اندازه‌گیری سرعت چرخش ژیروسکوپ نسبت به بدنه موشک را بر عهده دارند. همچنین سیم‌پیچ‌های اندازه‌گیری انحراف محور چرخش ژیروسکوپ[۲] وظیفه‌ی اندازه‌گیری زاویه‌ی محور گردش ژیروسکوپ نسبت به محور بدنه موشک را دارد و سیم‌پیچ انحراف‌دهنده[۳] نیز وظیفه اعمال گشتاور الکترومغناطیسی برای جهت‌دهی به محور ژیروسکوپ را بر عهده دارد. جهت کاهش اثرات نامطلوب میدان مغناطیسی و همچنین افزایش میدان مغناطیسی یکنواخت، سیم‌پیچ های اندازه‌گیری انحراف محور چرخش ژیروسکوپ و سیم‌پیچ انحراف‌دهنده، روبری هم و در جهت مخالف نسبت به هم سیم‌پیچی شده‌اند. همچنین سیم‌پیچ دیگری به بدنه پرتابگر متصل است که در

[1] Reference coil
[2] Cage coil
[3] precession coil

زمان قبل از پرتاب موشک، با ایجاد یک میدان مغناطیسی دوار، ژیروسکوپ را به سرعت چرخش لازم می‌رساند. معادلات دینامیکی ژیروسکوپ در این تحقیق به روش نیوتن استخراج شده و از ترکیب آن‌ها با معادلات مغناطیسی، معادلات کامل جستجوگر به دست آمده است. ابزار بینایی در این جستجوگر از نوع مادون‌قرمز است که در شکل (۱-۵) ساختمان جستجوگر به همراه اجزاء سامانه‌ی بینایی جستجوگر نشان داده شده است.



شکل (۱-۵) ساختمان یک جستجوگر ژیروسکوپ آزاد با بینایی مادون قرمز[۳۳]

همان‌طور که در شکل (۱-۵) مشاهده می‌شود آشکارساز مادون‌قرمز بعد از دریافت انعکاس نور هدف، انحراف راستای خط دید از راستای محور جستجوگر را اندازه‌گیری می‌کند، بعد از آن مدارات الکترونیکی و کنترلی موشک، متناسب با سیگنال خطا، گشتاور الکترومغناطیسی مورد نیاز را جهت کاهش خطا، از طریق سیم‌پیچ‌های اطراف روتور مغناطیسی به روتور مغناطیسی اعمال می‌کند.

در [۳۴] و [۳۵] ساختاری شبیه به شکل (۱-۵) نیز به‌عنوان جستجوگر ژیروسکوپ آزاد پیشنهاد شده است. در کار ایشان، معادلات دینامیکی روتور مغناطیسی توسط روش نیوتن استخراج شده و همچنین معادلات گشتاور الکترومغناطیسی سیم‌پیچ‌ها نیز به آن اضافه و معادلات دینامیکی کاملی از جستجوگر، به دست آمده است.

در زمینه مدل‌سازی، با استفاده از دینامیک برداری و معادلات لاگرانژ برای یک جستجوگر مادون‌قرمز/لیزری با ژیروسکوپ آزاد بدون طوقه، معادلات گشتاور دینامیکی محاسبه شده و به بررسی خاصیت رقص‌محوری و معادلات آن پرداخته شده[۳۶]. همچنین مدل ساده شده معادلات دینامیکی ژیروسکوپ آزاد برای کاربردهای عملیاتی، تعیین شده و با تعریف یک تابع بهینه‌سازی و با استفاده از الگوریتم ژنتیک و پیاده‌سازی تابع هزینه در آن، مقادیر زوایای اویلر و نرخ تغییرات مناسب آن جهت عملکرد مناسب ژیروسکوپ به دست آمده است[۳۷]. تحقیقات تجربی در حوزه جهت‌دهی ژیروسکوپ الکترواستاتیک با استفاده از میدان مغناطیسی، نیز ارائه شده[۳۸] و همچنین تحقیقاتی در بحث ژیروسکوپ آزاد به عنوان حسگر سرعت زاویه‌ای نیز به انجام رسیده است [۳۹] و [۴۰].

برخی از تحقیقات به مدل‌سازی و طراحی کنترل‌کننده‌های مختلف برای جستجوگر ژیروسکوپ آزاد در وضعیت جستجوی هدف پرداخته‌اند. طراحی کنترل‌کننده‌های مختلف برای یک جستجوگر ژیروسکوپ آزاد، در وضعیت جستجوی هدف صورت پذیرفته است. در این مقالات عواملی مانند ضربه ناشی از پرتاب موشک، نامیزانی دینامیکی روتور دوار و شتاب‌های جانبی بزرگ موشک هنگام مانور آن به عنوان اغتشاشات و نامعینی‌ها در مدل سیستم در نظر گرفته شده و کنترل‌کننده‌های مختلف از نوع مقاوم، فیدبک حالت، فیدبک خروجی و LQG/LTR بر مبنای تئوری H_∞، برای این سیستم طراحی‌شده و کارائی این کنترل‌کننده‌ها در اجرای الگوهای دایره‌ی، پویش کانونی و پویش گل رز مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفته است[۴۱-۴۶].

۱-۳-اهمیت و تفاوت موضوع تحقیق با کارهای قبلی

تحقیقی که در این پایان‌نامه صورت پذیرفته، بر اساس مدل‌سازی و طراحی سیستم کنترل جستجوگر ژیروسکوپ آزاد با عملگر الکترومغناطیسی در مد پویش است. سازوکار پیشنهادی دارای روتور مغناطیس دائمی است که دارای تقارن دوقطبی مغناطیسی متفاوتی نسبت به کارهای قبلی است. در مدل‌سازی این جستجوگر اثر طوقه‌های داخلی و خارجی و همچنین گشتاور اصطکاکی لولاهای جستجوگر در نظر گرفته شده است که در کارهای قبلی وجود ندارد. در استخراج معادلات دینامیکی جستجوگر، معادلات پیچیده دینامیکی جهت حصول اطمینان به دو روش نیوتن و لاگرانژ استخراج گردیده است. همچنین برای عملکرد جستجوگر در مد پویش با استفاده از کنترل‌کننده PD و بهینه‌سازی ضرایب کنترل‌کننده از الگوریتم جدید TLBO استفاده شده و پاسخ جستجوگر به محک پویش گل رز نیز بررسی شده است، و در نهایت یک کنترل‌کننده جدید بر مبنای خطی‌سازی ورودی و خروجی برای سیستم مورد مطالعه ارائه شده است.

۱-۴-اهداف پایان‌نامه

هدف اصلی در این پایان‌نامه، مدل‌سازی الکترودینامیکی کامل‌تری از جستجوگر ژیروسکوپ آزاد بدون حذف اثر طوقه‌ها و گشتاورهای اصطکاکی لولاها، همراه با مدل‌سازی الکترومغناطیسی گشتاورهای وارده به روتور مغناطیس دائم جستجوگر است. هدف بعدی در این پایان‌نامه بررسی و طراحی کنترل‌کننده جستجوگر در مد پویش است. از این رو بحث در مورد کنترل جریان محرکه‌های الکترومغناطیسی صورت خواهد گرفت تا راستای سیستم بینایی یا همان محور روتور به کمک اعمال گشتاور الکترومغناطیس در نقاط دلخواه جهت‌دهی شوند.

۱-۵-ساختار پایان‌نامه

بعد از مقدمه ارائه شده در این فصل، در ادامه و در فصل دوم به منظور مدل‌سازی بخش‌های دینامیکی و الکترومغناطیسی جستجوگر، مفاهیم مورد نیاز در حوزه مکانیک و الکترومغناطیس ارائه

خواهد شد. از جمله مباحث ارائه شده در فصل دوم، تشریح مباحث مربوط به زوایای اویلر، قضیه کوریولیس، تکانه‌ی زاویه‌ای جسم صلب، ماتریس لختی دورانی، نگاشت ماتریس لختی دورانی، معادلات لاگرانژ، گشتاور دوقطبی مغناطیسی و قانون بیوساوار است.

فصل سوم به مدل‌سازی کامل جستجوگر اختصاص دارد. در ابتدای این فصل ابتدا به اثبات معادلات ژیروسکوپی یک چرخ دوار پرداخته می‌شود و سپس خواص صلبیت و حرکت تقدیمی چرخ‌دوار شرح داده می‌شود. در ادامه، مدل ساده‌شده‌ای از سازوکار جستجوگر را نمایش داده و جهت به دست آوردن معادلات دینامیکی جستجوگر، به‌صورت مجزا ابتدا به روش نیوتن و سپس به روش لاگرانژ معادلات دینامیکی جستجوگر استخراج می‌شود. همچنین مدلی برای گشتاورهای اصطکاکی لولاها در نظر گرفته و با استفاده از قانون بیوساوار و گشتاور دوقطبی مغناطیسی، مدل ساده‌ای از گشتاور الکترومغناطیسی وارد بر روتور مغناطیس دائم به دست خواهد آمد. به این ترتیب معادلات دینامیکی و الکترومغناطیسی مجموعه جستجوگر با هم در نظر گرفته خواهد شد و معادلات الکترودینامیکی مجموعه‌ی جستجوگر استخراج خواهد شد.

در فصل چهارم ابتدا معادلات الکترودینامیکی جستجوگر در محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار متلب، شبیه‌سازی می‌شود. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی مدل جستجوگر و تحلیل مدل خطی‌شده معادلات غیرخطی جستجوگر، حول نقطه‌ی کار محلی، منجر به انتخاب یک کنترل‌کننده در مد پویش برای جستجوگر خواهد شد. جهت تنظیم بهینه ضرایب کنترل‌کننده از الگوریتم بهینه‌سازی TLBO نیز بررسی خواهد شد، در پایان نتیجه کنترل جستجوگر در مد پویش با محک الگوی گل رز نیز بررسی خواهد شد، در انتها نیز یک کنترل‌کننده غیرخطی کارآمد برای ردیابی سیستم در مد پویش ارائه شده است.

فصل پنجم به‌عنوان آخرین فصل این تحقیق به نتیجه‌گیری و بیان پیشنهادات اختصاص داده شده است.

فصل دوم:

مباحث مکانیکی و الکترومغناطیسی جهت مدل‌سازی

۲-۱- مقدمه

برای تحلیل و شناخت سازوکار دینامیکی ژیروسکوپ آزاد جستجوگر و همچنین خواص ژیروسکوپی روتور دوار آن، در این فصل به توضیح مباحث مکانیکی ازجمله تعریف زوایای اولر، کوریولیس، ماتریس لختی دورانی، روش مدل‌سازی لاگرانژ و نیوتن و نیز تحلیل ژیروسکوپ مکانیکی و خواص آن پرداخته خواهد شد[۴۷]. در ادامه نیز به دلیل ساختار اعمال گشتاور مغناطیسی در جستجوگر به بحث چگونگی ایجاد گشتاور الکترومغناطیس بر دوقطبی مغناطیس و قانون بیوساوار پرداخته خواهد شد.

۲-۲- زوایای اولر[1]

در فصل‌های بعد برای مدل‌سازی و بیان وضعیت اجزاء ژیروسکوپ آزاد در جستجوگر، از مختصات معروف و پرکاربرد زوایای اولر استفاده خواهد شد.

هرگاه دستگاه مرجع I با دوران اولر $R_{X'Y'Z'}(\varphi,\theta,\psi)$ تبدیل به دستگاه B شود، سه مقدار φ و θ و ψ توصیف عددی دستگاه B در I است (رابطه ۲-۱):

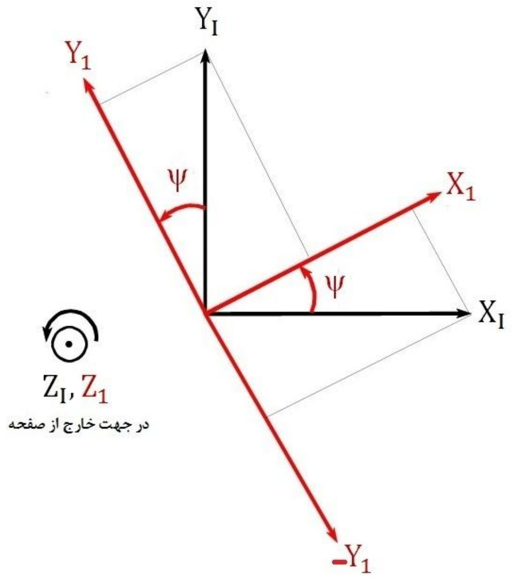
$$\{B\} = R_{X'Y'Z'}(\varphi,\Theta,\psi)\{I\} \qquad (۱-۲)$$

زوایای φ و θ و ψ که به‌طورکلی با عنوان زوایای اولر توصیف‌کننده دستگاه B در I، شناخته می‌شوند و به ترتیب غلتش[2]، خمش[3] و گردش[4] نامیده می‌شوند. توالی دوران‌های اولری که در این تحقیق مدنظر است در ادامه شرح داده می‌شود.

[1] Euler angles
[2] Roll
[3] Pitch
[4] Yaw

۲-۲-۱- دوران اول اولر یا گردش

شکل (۲-۱) دوران دستگاه $X_1Y_1Z_1$ حول بردار Z_I به‌اندازه زاویه Ψ را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۱) دوران دستگاه $X_1Y_1Z_1$ حول بردار Z_I به‌اندازه زاویه ψ (گردش)

$$x_I = \cos(\psi).x_1 - \sin(\psi).y_1 \tag{۲-۲}$$

$$y_I = \sin(\psi).x_1 + \cos(\psi).y_1 \tag{۲-۳}$$

$$z_I = z_1 \tag{۲-۴}$$

یا

$$\begin{Bmatrix} x_I \\ y_I \\ z_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \tag{۲-۵}$$

یا

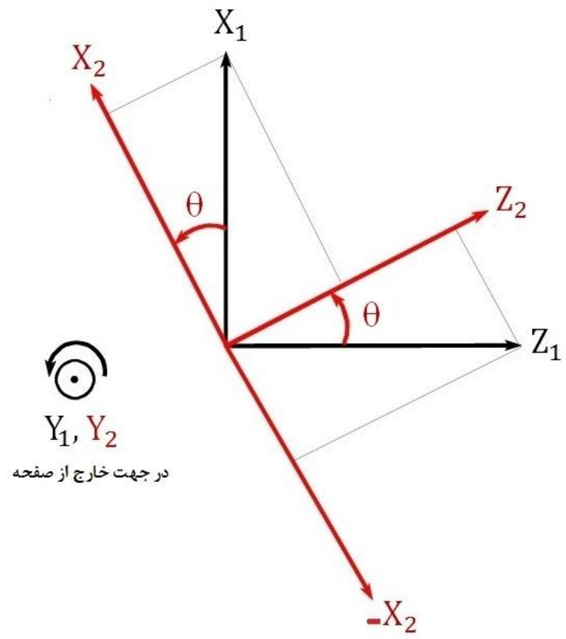
$$\{p\}_I = {}_1^IC.\{p\}_1 = [{}_I^1C]^{-1}.\{p\}_1 \tag{۲-۶}$$

می‌توان مطابق آنچه گفته شد نشان داد که:

$$\{p\}_1 = {}_I^1C.\{p\}_I = [{}_1^IC]^{-1}.\{p\}_I \tag{۲-۷}$$

۲-۲-۲- دوران دوم اولر یا خمش

در شکل (۲-۲) دوران دستگاه $X_2Y_2Z_2$ حول بردار Y_1 به‌اندازه زاویه θ را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۲) دوران دستگاه $X_2Y_2Z_2$ حول بردار Y_1 به‌اندازه زاویه θ (خمش)

$$x_1 = \cos(\theta).x_2 + \sin(\theta).z_2 \tag{۲-۸}$$

$$y_1 = y_2 \tag{۲-۹}$$

$$z_1 = -\sin(\theta).x_2 + \cos(\theta).z_2 \tag{۲-۱۰}$$

یا

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \tag{۲-۱۱}$$

یا

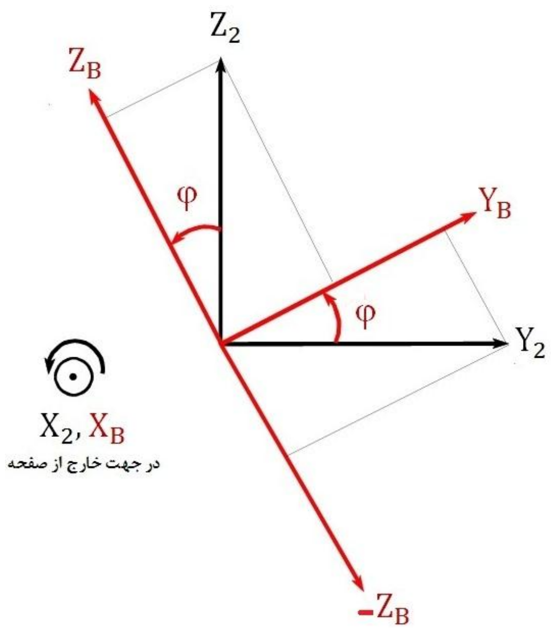
$$\{p\}_1 = {}_2^1C.\{p\}_2 = [{}_1^2C]^{-1}.\{p\}_2 \tag{۲-۱۲}$$

می‌توان مطابق آنچه گفته شد نشان داد که:

$$\{p\}_2 = {}_1^2C.\{p\}_1 = [{}_2^1C]^{-1}.\{p\}_1 \tag{۲-۱۳}$$

۲-۲-۳- دوران سوم اولر یا غلتش

در شکل (۲-۳) دوران دستگاه $X_BY_BZ_B$ حول بردار X_2 به‌اندازه عددی زاویهΦ را نشان می‌دهد.



شکل (۲-۳) دوران دستگاه $X_BY_BZ_B$ حول بردار X_2 به‌اندازه زاویه φ (غلتش)

$$y_2 = \cos(\varphi).y_B - \sin(\varphi).z_B \tag{۲-۱۴}$$

$$z_2 = \sin(\varphi).y_B + \cos(\phi).z_B \tag{۲-۱۵}$$

$$x_2 = x_B \tag{۲-۱۶}$$

یا

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{Bmatrix} \tag{۲-۱۷}$$

یا

$$\{p\}_2 = {}_B^2C.\{p\}_B = [{}_2^BC]^{-1}.\{p\}_B \tag{۲-۱۸}$$

می‌توان مطابق آنچه گفته شد نشان داد که:

$$\{p\}_B = {}_2^BC.\{p\}_2 = [{}_B^2C]^{-1}.\{p\}_2 \tag{۲-۱۹}$$

می‌توان روند تغییر زوایای اولر توضیح داده شده را با شکل (۲-۴) نشان داد:

$$\{I\} \xrightarrow{R_{Z_I}(\Psi)} \{1\} \xrightarrow{R_{Y_1}(\theta)} \{2\} \xrightarrow{R_{X_2}(\varphi)} \{B\}$$

شکل (۲-۴) روند تغییر زوایای اولر مد نظر در این تحقیق

ماتریس دوران نهایی پس از سه دوران برداری رابطه‌ی (۲-۱) عبارت است از:

$$ {}_{B}^{I}C = {}_{1}^{I}C_{2}^{1}C_{B}^{2}C = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -\sin(\psi) & 0 \\ \sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix} \quad (۲۰-۲)$$

با ضرب سه ماتریس موجود در رابطه (۲-۲۰) و جایگذاری s بجای sin و c بجای cos (برای خلاصه‌نویسی)، ماتریس دوران اولر به‌صورت زیر خواهد شد:

$$ {}_{B}^{I}C = {}_{1}^{I}C_{2}^{1}C_{B}^{2}C = \begin{bmatrix} c_{\theta}c_{\psi} & s_{\varphi}s_{\theta}c_{\psi} - c_{\varphi}s_{\psi} & c_{\varphi}s_{\theta}c_{\psi} + s_{\varphi}s_{\psi} \\ c_{\theta}s_{\psi} & s_{\varphi}s_{\theta}s_{\psi} + c_{\varphi}c_{\psi} & c_{\varphi}s_{\theta}s_{\psi} - s_{\varphi}c_{\psi} \\ -s_{\theta} & s_{\varphi}c_{\theta} & c_{\varphi}c_{\theta} \end{bmatrix} \quad (۲۱-۲)$$

۲-۲-۴- تکینگی زوایای اولر

از رابطه (۲-۲۱) مشاهده می‌گردد که هرگاه زاویه‌ی θ برابر با ۹۰ درجه باشد آنگاه زوایای ψ و φ به‌طور مستقل معنی نداشته و تنها کمیت φ-ψ معنی دارد. به‌عبارت‌دیگر اختلاف زوایای ψ و φ از هم، وضعیت دستگاه دوران یافته نهایی را تعیین می‌کند نه اینکه هرکدام از این زوایا چه مقدار باشند؛ بنابراین از زوایای اولر معمولاً برای حل معادلات وقتی که θ مقدار ۹۰ درجه نداشته باشد، استفاده می‌شود.

۲-۲-۵- محاسبه‌ی زوایای اولر با استفاده از ماتریس دوران

حال به منظور محاسبه‌ی زوایای اولر از روی درایه‌های ماتریس دوران با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۱) می‌توان به روابط (۲-۲۲) رسید:

$$\begin{cases}\psi = \text{atan2}(C_{21}, C_{11}) \\ \theta = -\arcsin(C_{31}) \\ \varphi = \text{atan2}(C_{32}, C_{33})\end{cases} \qquad (۲۲-۲)$$

که در آن‌ها، C_{ij} درایه سطر i ام و ستون j ام از ماتریس ${}^{I}_{B}C$ است و منظور از atan2، تابع arctan چهار ربعی است که با توجه به مثبت یا منفی بودن نشانوندهایش (که اولی سینوس و دومی کسینوس زاویه است) مقدار زاویه را در محدوده‌ی $-\pi$ تا π محاسبه می‌کند.

۲-۲-۶- معادله‌ی حالت زوایای اولر

اگر سرعت زاویه‌ای جسمی نسبت به دستگاه لخت از دید ناظر $\{B\}$ (واقع بر دستگاه بدنی) را این‌گونه تعریف کنیم:

$${}^{B}\overrightarrow{w}_{B/I} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \qquad (۲۳-۲)$$

آنگاه اگر زوایای اولر جسم صفر باشند، p، q و r به ترتیب $\dot{\varphi}$، $\dot{\theta}$ و $\dot{\psi}$ خواهند بود، اما در حالت کلی این رابطه برقرار نیست و ارتباط بین این دو دسته کمیت را به‌صورت زیر می‌توان یافت:

$$\begin{aligned}{}^{B}\overrightarrow{w}_{B/I} &= {}^{B}\overrightarrow{w}_{B/2} + {}^{B}\overrightarrow{w}_{2/1} + {}^{B}\overrightarrow{w}_{1/I} = {}^{B}\overrightarrow{w}_{B/2} + {}^{B}_{2}C\,{}^{2}\overrightarrow{w}_{2/1} + {}^{B}_{1}C\,{}^{1}\overrightarrow{w}_{B/I} \\ &= \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + {}^{B}_{2}C \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + {}^{B}_{1}C \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}\end{aligned} \qquad (۲۴-۲)$$

پس از محاسبه و ساده‌سازی، رابطه دیفرانسیلی حالت زوایای اولر به فرم زیر به دست خواهد آمد.

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\varphi & S_\varphi C_\theta \\ 0 & -S_\varphi & C_\varphi C_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \qquad (۲۵-۲)$$

۲-۳- قضیه کوریولیس

اگر دستگاه دلخواه$\{B\}$ نسبت به دستگاه دلخواه $\{I\}$ دارای سرعت زاویه‌ای $\overrightarrow{w}_{B/I}$ باشد، آنگاه سرعت بردار $\vec{r}$ نسبت به ناظر واقع در دستگاه $\{I\}$ برابر است با:

$$D_I\vec{r} = D_B\vec{r} + \vec{w}_{B/I} \times \vec{r} \qquad (۲-۲۶)$$

در رابطه (۲-۲۶)، عبارات $D_I\vec{r}$ و $D_B\vec{r}$ مشتق زمانی بردار $\vec{r}$ را به ترتیب نسبت به ناظرهای واقع در دستگاه‌های {I} و {B} نشان می‌دهد.

۲-۴-تکانه‌ی زاویه‌ای

۲-۴-۱-تکانه‌ی زاویه‌ای برای یک جرم پیوسته حول نقطه‌ی دلخواه

تکانه‌ی زاویه‌ای مجموعه‌ای از ذرات حول نقطه‌ی دلخواه A عبارت است از:

$$\vec{H}_{total/A} = \sum_i(\vec{r}_{i/A} \times \vec{P}_i) = \sum_i(\vec{r}_{i/A} \times m_i\vec{v}_i) \qquad (۲-۲۷)$$

که در رابطه‌ی (۲-۲۷):

$\vec{P}_i$: تکانه خطی ذره i ام

m_i : جرم ذره i ام

$\vec{r}_{i/A}$: بردار موقعیت ذره i ام نسبت به نقطه‌ی دلخواه A

$\vec{v}_i$: سرعت مطلق ذره i ام ($D_I\,\vec{r}_{i/A}$)

در صورتی که رابطه (۲-۲۸) برای جرم پیوسته تعریف شود، خواهیم داشت:

$$\vec{H}_{m/A} \triangleq \int \vec{r}_{dm/A} \times d\vec{P}_m = \int (\vec{r}_{dm/A} \times \vec{v}_{dm})\, dm \qquad (۲-۲۸)$$

که در رابطه‌ی (۲-۲۸) $\vec{r}_{dm/A}$ و $\vec{v}_{dm}$ به ترتیب بردارهای مکان و سرعت المان دیفرانسیلی dm هستند.

۲-۴-۲- تکانه‌ی زاویه‌ای جسم صلب حول نقطه‌ی ثابت

هرگاه نقطه‌یO از یک جسم صلب، نقطه‌ای ثابت در دستگاه لخت باشد و جسم با سرعت $\overrightarrow{w}_{B/I}$ در حال دوران باشد، آنگاه سرعت هر نقطه از جسم عبارت است از:

$$\vec{v}_{dm} = \vec{v}_{dm/o} + \vec{v}_o = \overrightarrow{w}_{B/I} \times \vec{r}_{dm/o} \tag{۲-۲۹}$$

پس از جایگذاری این رابطه در تعریف تکانه‌ی زاویه‌ای، رابطه‌ی پرکاربرد زیر برای محاسبه‌ی تکانه‌ی زاویه‌ای یک جسم صلب حول یک نقطه‌ی ثابت حاصل می‌گردد:

$$\overrightarrow{H}_{m/o} = \int \vec{r}_{dm/A} \times (\overrightarrow{w}_{B/I} \times \vec{r}_{dm/o}) dm \tag{۲-۳۰}$$

۲-۴-۳- تکانه‌ی زاویه‌ای حول نقطه‌یO

رابطه‌ی زیر بیان کننده تکانه‌ی زاویه‌ای حول نقطه‌یO است.

$$\overrightarrow{H}_{m/o} = I_{m/O}\, \overrightarrow{w}_{B/I} \tag{۲-۳۱}$$

که در آن $I_{m/O}$ ماتریس اینرسی جسم است که روی بردار سرعت زاویه‌ای اثر کرده و تکانه‌ی زاویه‌ای را حول نقطه‌یO به دست می‌دهد.

۲-۵- تعریف لختی دورانی و ماتریس لختی دورانی

لختی دورانی، عبارت است از مقاومت در برابر تغییر سرعت چرخشی ناشی از توزیع شعاعی جرم حول محوری از جسم صلب. این خاصیت در مدل‌سازی رفتار روتور مغناطیس دائم جستجوگر در فصل بعد به دست خواهد آمد.

می‌توان نشان داد که مقدار لختی برای یک جسم صلب برای مثال حول محور z آن به فرم زیر است:

$$\vec{I}_{z/o} = \int\int\int \rho\,(x, y, z)(x_{dm/o}^2 + y_{dm/o}^2) dxdydz \tag{۲-۳۲}$$

که در آن $x_{dm/o}$ و $y_{dm/o}$ فواصل هرالمان انتگرال‌گیری از محور و $\rho(x, y, z)$ چگالی جرمی جسم در نقطه‌ی انتگرال‌گیری است. لختی دورانی در این حالت یک کمیت اسکالر است.

حال با استفاده از تعریف لختی دورانی و تعمیم آن در فضای سه بعدی ماتریس لختی دورانی مطابق رابطه زیر تعریف می‌شود.

$$I = \begin{bmatrix} I_{X/o} & I_{XY/o} & I_{XZ/o} \\ I_{YZ/o} & I_{Y/o} & I_{YZ/o} \\ I_{ZX/o} & I_{ZY/o} & I_{Z/o} \end{bmatrix} \tag{۲-۳۳}$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_{XX/o} &= \int (y^2 + z^2)dm \quad \text{و} \quad I_{XY/o} = -\int xy\, dm \\ I_{YY/o} &= \int (x^2 + z^2)dm \quad \text{و} \quad I_{XZ/o} = -\int xz\, dm \\ I_{ZZ/o} &= \int (x^2 + y^2)dm \quad \text{و} \quad I_{YZ/o} = -\int yz\, dm \end{aligned} \tag{۲-۳۴}$$

$I_{XX/o}$، $I_{YY/o}$ و $I_{ZZ/o}$ را لختی‌های دورانی یا گشتاورهای لختی می‌نامند. همینطور $I_{XY/o}$، $I_{XZ/o}$ و $I_{YZ/o}$ را حاصل ضرب‌های لختی‌های دورانی می‌نامند. تعریف این کمیت‌ها در مراجع مهندسی مکانیک به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} I_{XX/o} &= \int\int\int \rho(x^2 + x^2)dxdydz \quad \text{و} \quad I_{XY/o} = -\int\int\int \rho\, xy\, dxdydz \\ I_{YY/o} &= \int\int\int \rho(x^2 + x^2)dxdydz \quad \text{و} \quad I_{XY/o} = -\int\int\int \rho\, xz\, dxdydz \\ I_{ZZ/o} &= \int\int\int \rho(x^2 + x^2)dxdydz \quad \text{و} \quad I_{YZ/o} = -\int\int\int \rho\, yz\, dxdydz \end{aligned} \tag{۲-۳۵}$$

که در روابط (۲-۳۵)، $\rho = \rho(x, y, z)$ چگالی جرمی جسم در نقطه‌ی انتگرال‌گیری است. از خواص ماتریس لختی دورانی جمع پذیر بودن آن است.

۲-۵-۱- نگاشت ماتریس لختی دورانی

هرگاه دو دستگاه مختصات مرجع به نام $\{A\}$ و $\{B\}$ داشته باشیم، ماتریس لختی دورانی به‌صورت زیر از دستگاه $\{B\}$ به $\{A\}$ نگاشته می‌شود.

$$ {}^{A}I = {}^{A}_{B}C \, {}^{B}I^{B}_{A}C \tag{۲-۳۶} $$

اثبات:

$$ \begin{aligned} {}^{A}H &= {}^{A}_{B}C({}^{B}H) = {}^{A}_{B}C({}^{B}I \, {}^{B}w_{B/I}) = {}^{A}_{B}C({}^{B}I^{B}_{A}C \, {}^{A}w_{B/I}) \\ &= ({}^{A}_{B}C \, {}^{B}I^{B}_{A}C) \, {}^{A}w_{B/I} = {}^{A}I \, {}^{A}w_{B/I} \end{aligned} \tag{۲-۳۷} $$

۲-۶- قانون بقای تکانه‌ی زاویه‌ای حول نقطه‌ی ثابت

برای هر سیستم تغییرات تکانه‌ی زاویه‌ای حول یک نقطه‌ی ثابت از دید ناظر لخت، مساوی با گشتاورهای خارجی وارد بر آن سیستم حول همان نقطه‌ی ثابت است. بنابراین مجموع گشتاورهای وارد شده بر سیستم ($\sum \vec{T}_{ext/O}$) از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$ \sum \vec{T}_{ext/O} = D_I \, \vec{H}_{/O} \tag{۲-۳۸} $$

در رابطه‌ی (۲-۳۸)، اگر تکانه‌ی زاویه‌ای تغییری در طول زمان داشته باشد به معنای وجود گشتاورهای خارجی است که به آن وارد شده است. رابطه‌ی متناظر آن رابطه‌ی معروف دوم نیوتن است که به عبارتی نشان می‌دهد نیروی وارده به یک جسم متناسب است با تغییرات زمانی تکانه‌ی خطی آن.

۲-۷- روش لاگرانژ

برای به دست آوردن معادلات سیستم‌های مکانیکی با درجات آزادی پایین، به راحتی می‌توان از روش برداری نیوتن استفاده کرد. ضرورت در نظر گرفتن نیروهای مقید در نمودارهای آزاد در این روش، مشکلات جبری را برای سیستم‌ها با درجات آزادی زیاد به وجود می‌آورد. لاگرانژ یک روش اسکالر را فرمول‌بندی کرد که از کمیت‌های اسکالر انرژی جنبشی، انرژی پتانسیل و همچنین کار برحسب مختصات عمومی استفاده می‌شود. معادله لاگرانژ به‌صورت زیر در منابع مکانیکی بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad (۳۹-۲)$$

که در رابطه‌ی (۲-۳۹):

T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل، Q_i نیروی تعمیم‌یافته i ام و q_i مختصات i ام سیستم هستند.

۲-۸-ریشه اصطلاح ژیروسکوپ

ژیروسکوپ کلمه‌ای است دارای ریشه یونانی به معنی چرخش[1] و دیدن[2]. چنین اسمی را لئون فوکو، به دستگاه آزمایشگاهی خود، که به منظور نشان دادن چرخش شبانه‌روزی زمین ابداع کرده بود، داد.

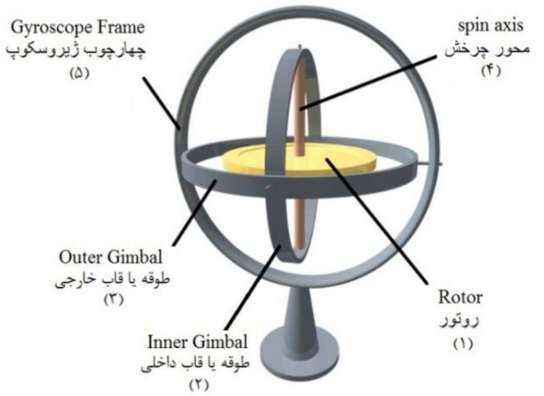
۲-۸-۱- تعریف ژیروسکوپ

«ژیروسکوپ جسم صلب تندگردی است، که محور دوران آن بتواند جهت خودش را در فضا تغییر ندهد».

۲-۸-۲- سازوکار ژیروسکوپ

برای اتصال نقطه‌ی از یک جسم صلب به یک پایه، به طوری که جسم بتواند آزادانه حول آن نقطه بچرخد، روش‌های مختلفی وجود دارند. مثلاً قرار دادن جسم در سازوکار تعلیق[3]، که کاملاً متوازن شده باشد شکل (۲-۵). می‌توان روش‌های دیگر تعلیق جسم جامد را نیز نام برد. ماهیت این روش‌ها در بکار بردن تعلیق الکترواستاتیکی، الکترومغناطیسی، آیرودینامیکی، آیرو و هیدرواستاتیکی و امثال آن است.

[1] γιροδ
[2] δκοπειν
[3] Gimbal



شکل (۲-۵) ژیروسکوپ ساده مکانیکی

۲-۸-۳- مفاهیم سیستم تعلیق ژیروسکوپ

محور چرخش[1]، محوری است که چرخش طبیعی روتور حول آن انجام می‌پذیرد. قاب‌های داخلی و خارجی قطعات جداگانه‌ای هستند که برای محور چرخش ژیروسکوپ دو درجه آزادی فراهم می‌کند.

مرکز نقطه تعلیق، محل تقاطع محورهای چرخش سازوکار تعلیق است. ژیروسکوپی که مرکز ثقل آن بر نقطه تعلیق منطبق باشد، ژیروسکوپ متعادل (بالانس) یا ژیروسکوپ استاتیک می‌نامند.

اگر گشتاور نیروهای بیرونی روی ژیروسکوپ استاتیک وارد نشود، در این صورت آن را ژیروسکوپ آزاد می‌نامند. در ژیروسکوپ استاتیک، حرکت چرخشی را می‌توان مستقل از حرکت انتقالی (خطی) آن به همراه نقطه تعلیق مورد بررسی قرار داد. چرا که گشتاور نیروی اینرسی حرکت انتقالی و گشتاور در عکس العمل تکیه‌گاه نسبت به نقطه تعلیق مستقل از مقدار و جهت آن‌ها برابر صفر هستند.

در ژیروسکوپ نامتعادل، حرکت انتقالی ژیروسکوپ به همراه نقطه تعلیق، روی حرکت چرخش آن تاثیر می‌گذارد.

[1] spin

۲-۸-۴- خواص قابل مشاهده ژیروسکوپ

ابتدا یک ژیروسکوپ استاتیک را بررسی می‌کنیم. در شکل (۲-۵)، مادامی که روتور شماره ۱ نچرخد هیچ پدیده‌ای در رفتار آن مشاهده نمی‌شود تا آن را از جسم غیر ژیروسکوپی متمایز کند. در اینجا منظور از جسم غیر ژیروسکوپی، جسمی است که اندازه حرکت زاویه‌ای ندارد. مثلاً چرخش پایه شماره ۵ باعث می‌شود محور اصلی شماره ۴ روتور غیرچرخان در نتیجه بوجود آمدن نیروی اصطکاک در تکیه‌گاه، تغییر وضعیت دهد. گشتاور وارده به هریک از قاب‌های سازوکار تعلیق مربوط به روتور باعث چرخش آن در جهت گشتاور وارده می‌شود، ضربه زدن به قاب نیز باعث می‌شود، که قاب در جهت ضربه بچرخد.

حال اگر روتور حول محور اصلی خودش، با سرعت زیاد وادار به چرخش شود. وجود این چرخش باعث تبدیل شدن وسیله مورد بحث به ژیروسکوپ می‌گردد، حال اگر در شکل (۲-۵) همان تجربیاتی که با جسم ژیروسکوپی انجام شد را تکرار کرد. این بار پدیده‌های زیر مشاهده خواهد شد:

اول آنکه، با چرخش پایه شماره ۵، وضعیت محور اصلی ژیروسکوپ ۴ تغییر نمی‌کند، هرچند که اصطکاک در محورهای سازوکار تعلیق که قبلاً این وضعیت را تغییر می‌داد هنوز وجود دارد. به همین شکل، ضربه زدن به قاب‌های ژیروسکوپ که قبلاً باعث چرخش آن می‌شد، اکنون باعث انحراف محور اصلی ژیروسکوپ از حالت اولیه نمی‌شود. البته در صورت مشاهده دقیق، متوجه می‌شویم که ضربه زدن به چارچوب، باعث نوسان حرکت ژیروسکوپ با دامنه اندک می‌شود. بعلاوه این نوسان‌ها سریع از بین می‌روند. خاصیت حفظ و پایداری حول محور چرخش ژیروسکوپ را صلبیت نامیده‌اند.

دوم آنکه، تحت تاثیر گشتاور وارده به محور چرخش قاب بیرونی، دوران ژیروسکوپ حول محور چرخش قاب داخلی اتفاق می‌افتد و بالعکس اعمال گشتاور حول محور قاب داخلی، باعث چرخش ژیروسکوپ حول محور قاب بیرونی می‌شود. این چرخش را حرکت تقدیمی[1] ژیروسکوپ می‌نامند.

در صورت تغییر جهت گشتاور وارده یا تغییر جهت چرخش روتور، جهت حرکت تقدیمی نیز تغییر می‌کند. مشاهدات دیگر ژیروسکوپ امکان می‌دهند که قاعده زیر را بیان کرد.

حرکت تقدیمی ژیروسکوپ به گونه‌ای خواهد بود که بردار سرعت زاویه‌ای چرخش طبیعی روتور از کوتاه‌ترین راه با بردار گشتاور نیروهای بیرونی $\overrightarrow{\mathrm{M}_{\mathrm{o}}}$ منطبق شود.

سایر ویژگی‌هایی که ژیروسکوپ را از حرکات طبیعی اجسام غیر ژیروسکوپی متمایز می‌کند عبارت‌اند از:

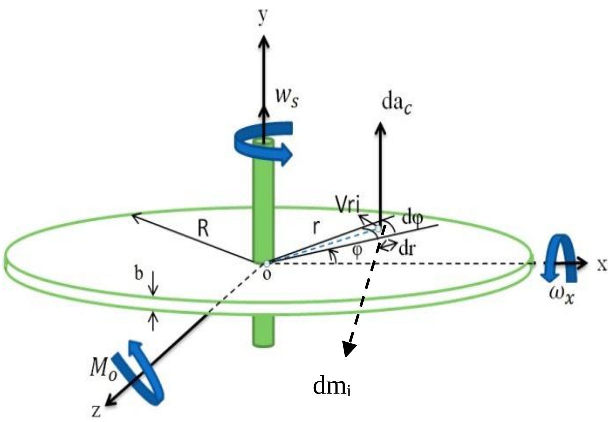
- درصورت ثابت بودن مقدار گشتاور خارجی عمود بر محور چرخش ژیروسکوپ، با افزایش سرعت زاویه‌ای چرخش طبیعی روتور، سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی کاهش می‌یابد.
- در صورت ثابت بودن مقدار سرعت زاویه‌ای چرخش طبیعی روتور، سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی متناسب با مقدار گشتاور وارده است.
- برخلاف یک جسم غیر ژیروسکوپی، در ژیروسکوپ، گشتاور ثابت بجای تولید شتاب ثابت، باعث ایجاد سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی ثابت می‌گردد.

[1] Precession of Gyro

۲-۸-۵- اثبات رابطه گشتاور نیروهای کوریولیس خارجی بر ژیروسکوپ[۴۸]

اعمال گشتاور نیروهای خارجی روی ژیروسکوپ در حال چرخش، باعث ایجاد حرکت تقدیمی در آن می‌شود. در این حالت طبق اصل دالامبر، برآیند گشتاور نیروهای بیرونی باعث حرکت جسم با چنان شتابی می‌شود، که گشتاور نیروی اینرسی آن یعنی $\overrightarrow{M_o^{in}}$ از نظر مقدار برابر گشتاور نیروهای بیرونی $\overrightarrow{M_o}$ بوده و از نظر جهت مخالف آن باشد. در شکل (۲-۵) روتور ژیروسکوپ، حرکت پیچیده‌ای شامل چرخش با سرعت زاویه‌ای طبیعی w_s و چرخش حول محور ox با سرعت زاویه‌ای تقدیمی w_x را داراست.

در شکل (۲-۶) شتاب المان جرم dm_i از روتور را بررسی می‌کنیم که سرعت نسبی این جرم از رابطه $v_{ri} = rw_s$ تعیین می‌شود. در صورت وجود سرعت زاویه‌ای انتقالی w_x و سرعت نسبی خطی v_{ri}، شتاب کوریولیس $\overrightarrow{da_c} = 2\overrightarrow{w_s} \times \vec{v}_{ri}$ بوجود می‌آید که جهت آن در شکل (۲-۶) مخالف نیروی اینرسی و برابر $-dm_i da_c$ است.



شکل (۲-۶) یک قرص گردان

نیروی اینرسی کوریولیس یک المان در شکل (۲-۶) برابر است با:

$$df_i^{in} = -da_c\, dm_i \qquad (۲-۴۰)$$

اگر δ چگالی جرمی روتور باشد و dv حجم المان باشد، از رابطه‌ی (۲-۵۷) داریم:

$$df_i^{in} = -da_c\,\delta\,dv \qquad (۵۸-۲)$$

همچنین اندازه شتاب کوریولیس برای المان، معادل است با:

$$da_c = |2\overrightarrow{w_s} \times \vec{v}_{ri}| = 2w_s r w_x \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 2w_s r w_x \cos\varphi \qquad (۵۹-۲)$$

همچنین حجم المان با توجه به شکل (۲-۶)، برابر است با:

$$dv = r\,b\,dr\,d\varphi \qquad (۶۰-۲)$$

با جایگذاری روابط (۲-۵۹) و (۲-۶۰) در (۲-۵۸) خواهیم داشت که:

$$df_i^{in} = -2\delta b r^2 w_s w_x \cos\varphi\,dr d\varphi \qquad (۶۱-۲)$$

رابطه اثر گشتاور وارد بر یک المان نیز برابر است با:

$$\overrightarrow{dM}^{in} = \vec{r} \times df_i^{in} \qquad (۶۲-۲)$$

به این ترتیب گشتاور المان حول محور z عبارت است از:

$$dM_z^{in} = -2\delta b r^3 w_s w_x \cos^2\varphi\ \ dr\,d\varphi \qquad (۶۳-۲)$$

برای اینکه گشتاور کل حاصل از نیروی اینرسی کوریولیس را به دست آوریم، باید در تمام حجم روتور انتگرال‌گیری کنیم آنگاه:

$$M_z^{in} = -2\delta b w_s w_x \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\,d\varphi = -b\delta\pi\frac{R^2}{2} R w_s w_x = m\frac{R^2}{2} w_s w_x \qquad (۶۴-۲)$$

رابطه بالا را می‌توان برحسب لختی دورانی روتور حول محور z نوشت. لختی دورانی روتور شکل (۲-۶) حول محور Z عبارت است از:

$$I = m\frac{R^2}{2} \qquad (۶۵-۲)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۶۵) در (۲-۶۴) گشتاور کل حاصل از نیروی کوریولیس برابر است با:

$$M_z^{in} = -I w_s w_x \qquad (۶۶-۲)$$

طبق اصل دالامبر، مقدار گشتاورهای کل نیروهای خارجی و نیروی اینرسی، برابر هستند و از نظر علامت مخالف هم می‌باشند. بنابراین گشتاور کل نیروهای خارجی برابر است با:

$$M_O = I w_s w_x \tag{۲-۶۷}$$

بنابراین گشتاور ژیروسکوپی، گشتاور برآیند نیروهای اینرسی کوریولیس محسوب می‌شود.

حال چنانچه یک دستگاه مرجع اینرسی ثابت OXYZ و یک دستگاه مرجع oxyz متصل به طوقه‌ی روتور یا مجموعه‌ی دوار را به نحوی در نظر بگیریم که در ابتدای کار که هیچ گونه گشتاوری به روتور اعمال نشده است این دو دستگاه برهم منطبق باشند، مجموعه‌ی گشتاورهای خارجی وارد بر ژیروسکوپ حول مبدأ مختصات O را می‌توان به‌صورت معادله زیر بیان نمود:

$$\vec{M}_O = \left(\frac{d\vec{H}_o}{dt}\right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{H}_o \tag{۲-۶۸}$$

که در رابطه (۲-۶۸):

$\vec{M}_o$: برآیند گشتاورهای خارجی وارد بر ژیروسکوپ حول مبدأ مختصات است.

$\vec{H}_o$: اندازه حرکت زاویه‌ای در دستگاه xyz است.

$\vec{\Omega}$: سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی روتور نسبت به دستگاه OXYZ است.

از خاصیت جمع پذیری گشتاور و با توجه به رابطه (۲-۶۸) مشخص است که قسمت $\vec{\Omega} \times \vec{H}_o$ گشتاور خارجی ناشی از شتاب کوریولیس و همچنین قسمت $\left(\frac{d\vec{H}_o}{dt}\right)_{xyz}$ نشان دهنده مقدار گشتاور خارجی ناشی از تغییر تکانه زاویه‌ای در دستگاه چسبیده به روتور ژیروسکوپ است.

حال اگر سرعت زاویه‌ی روتور ثابت بماند، در آن صورت $\left(\frac{d\vec{H}_o}{dt}\right)_{xyz}$ برابر صفر می‌شود و نهایتاً رابطه حرکت تقدیمی ژیروسکوپ باقی خواهد ماند که برابر است با:

$$\vec{M}_O = \vec{\Omega} \times \vec{H}_o \tag{۲-۶۹}$$

۲-۹- الکترومغناطیس[۴۹]

در این قسمت مباحث الکترومغناطیسی لازم جهت توصیف و مدل‌سازی نیروها و گشتاورهای الکترومغناطیسی کویل‌ها و روتور مغناطیس دائم جستجوگر ارائه خواهد شد.

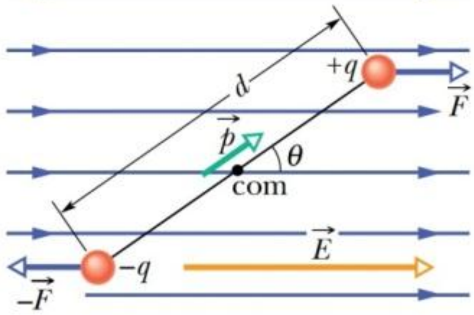
۲-۹-۱- گشتاور دوقطبی مغناطیسی

به دلیل تناظر موجود در گشتاور دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی، جهت شناخت بهتر گشتاور دوقطبی مغناطیسی، با تئوری تشکیل گشتاور دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی آشنا می‌شویم.

۲-۹-۲- گشتاور دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی

می‌توان دو بار مساوی و با علامت‌های مخالف یعنی مثلاً $+q$ و $-q$ را در نظر گرفت که در فاصله‌ی d از هم هستند. وقتی یک دوقطبی در یک میدان الکتریکی خارجی قرار گیرد، نیروی وارد بر بار مثبت در یک جهت و نیروی وارد بر بار منفی در جهت مخالف با بار مثبت است. برای در نظر گرفتن برآیند این نیروها، بهتر است بردار گشتاور دوقطبی p را تعریف کرد. اندازه‌ی بردار p عبارت است از $p=qd$ وجهت آن در امتداد خط واصل بار منفی و بار مثبت است. مانند اغلب بردارها، نوشتن گشتاور دوقطبی به‌صورت برداری، این امکان را فراهم می‌آورد که روابط مقدماتی مشتمل بر دوقطبی الکتریکی را به‌صورت مختصر بنویسیم.

شکل (۲-۷)، یک دوقطبی الکتریکی را در میدان الکتریکی یکنواخت E نشان می‌دهد. (این میدان ناشی از خود دوقطبی نیست بلکه به وسیله یک عامل خارجی همچون دو صفحه با بار الکتریسته یکی مثبت و دیگری منفی تولید شده است) در شکل (۲-۷)، گشتاور دوقطبی p با جهت میدان الکتریکی زاویه‌ی θ را می‌سازد.



شکل (۲-۷) یک دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی یکنواخت E [۴۹]

با فرض میدان یکنواخت الکتریکی، به طوری که E در محل بارهای +q و –q دارای اندازه و جهت یکسان باشد، نیروهای وارد بر بارهای +q و –q دارای اندازه‌ی یکسان (F=qE) ولی با جهت‌های مخالف خواهند بود. به این ترتیب نیروی خالص وارد بر دوقطبی از طرف میدان خارجی یکنواخت، برابر صفر است. ولی یک گشتاور نیروی خالص حول مرکز جرم آن وجود دارد که می‌خواهد دوقطبی را بچرخاند تا p را در راستای E قرار دهد. اندازه‌ی گشتاور نیروی خالص ناشی از اثر دو نیرو حول مرکز دوقطبی برابر است با:

$$\tau = F\frac{d}{2}\sin\theta + F\frac{d}{2}\sin\theta = F\,d\,\sin\theta \qquad (۲\text{-}۷۰)$$

معادله‌ی ۲-۷۰ را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$\tau = (qE)d\,\sin\theta = (qd)E\,\sin\theta = p\,E\,\sin\theta \qquad (۲\text{-}۷۱)$$

معادله ۲-۷۱ را می‌توان به فرم ضرب خارجی دو بردار زیر نیز نوشت:

$$\tau = p \times E \qquad (۲\text{-}۷۲)$$

شکل (۲-۸)، رابطه ۲-۷۲ را به‌صورت برداری نشان می‌دهد.

شکل (۲-۸) نمایش برداری رابطه $\tau = p \times E$ [۴۹]

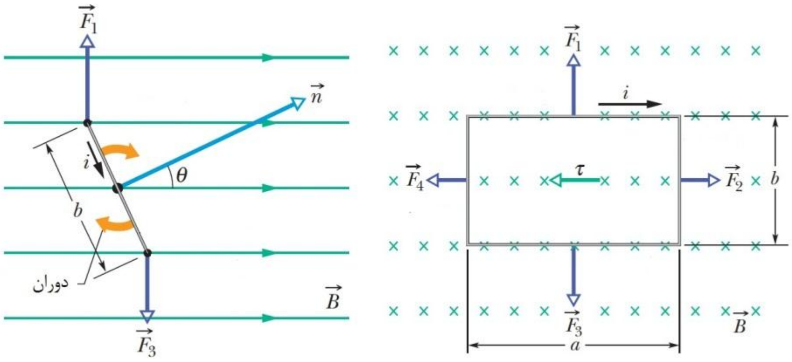
در ادامه این بحث، تناظری یک‌به‌یک بین گشتاور دوقطبی الکتریکی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی ارائه خواهد شد.

۲-۹-۳- گشتاور دوقطبی مغناطیسی در میدان مغناطیسی

می‌توان یک محیط مغناطیسی را به صورت مجموعه‌ای از دوقطبی‌های مغناطیسی فرض کرد حال اگر این محیط را بدون اینکه هیچ یک از دوقطبی‌ها را از وسط ببریم، دونیم کنیم، هر دو قسمت، یک قطب شمال در یک‌سر و یک قطب جنوب در سر دیگر دارد. می‌توان کار برش را ادامه داد، تا وقتی به سطح یک اتم منفرد رسید در اینجا متوجه می‌شویم که دوقطبی مغناطیسی، مانند دوقطبی‌های الکتریکی، از دو بار منفرد و مخالف تشکیل نشده است، بلکه در عوض یک حلقه جریان بسیار کوچک است، که در آن جریان، متناسب با چرخش الکترون در اتم است در این صورت نیاز به شناخت گشتاور نیروی وارد بر یک حلقه جریان است.

وقتی یک حلقه سیم حامل جریان در یک میدان مغناطیسی قرار گیرد، بر آن گشتاور نیرویی وارد می‌شود که می‌خواهد حلقه را حول محور مشخصی بچرخاند (برای کلیت موضوع، می‌توان فرض کرد که جریان از مرکز جرم حلقه می‌گذرد). این اصل، اساس کار موتورهای الکتریکی و گالوانومتر است.

شکل (۲-۹) حلقه سیمی مستطیلی شکل، حامل جریان i در یک میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد که بردار یکه‌ی n بر صفحه حلقه عمود است و بردار یکه‌ی n با بردار میدان B، زاویه‌ی θ را می‌سازد. نیروی مغناطیسی، حلقه را حول محور z می‌چرخاند تا n و B را هم راستا کند.



شکل (۲-۹) نیروی وارد بر یک حلقه جریان وقتی میدان مغناطیسی از آن بگذرد[۴۹]

نیروی خالص وارد بر حلقه را با استفاده از معادله‌ی برداری $\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$ برای هر چهار ضلع حلقه تعیین می‌کنند.

به این ترتیب اندازه‌ی نیروی F_2 وارد بر ضلع شماره‌ی۲ حلقه (به طول b) برابر است با:

$$F_2 = ibB\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = ibB\cos\theta \qquad (۷۳-۲)$$

به همین ترتیب سایر نیروها در شکل عبارت‌اند از:

$$F_4 = ibB\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = ibB\cos\theta \qquad (۷۴-۲)$$

نیروهای F_1 و F_2 حول محور z، بازوهای گشتاوری به اندازه‌ی $(b/2)\sin\theta$ دارند.

در نتیجه گشتاور نیروی کل وارد بر حلقه برابر است با:

$$\tau = 2(iaB)\left(\frac{b}{2}\right)\sin\theta = iabB\sin\theta \qquad (۷۵-۲)$$

معادله بالا برای N حلقه سیم حامل جریان i تبدیل به معادله زیر خواهد شد.

$$\tau = NiAB\sin\theta \qquad (۷۶-۲)$$

که در آن، مساحت حلقه‌ی مستطیلی، یعنی A را جایگزین حاصل ضرب ab کرده‌ایم.

حال که مفاهیم گشتاور دوقطبی الکتریکی در میدان الکتریکی و دوقطبی مغناطیسی ارائه شد، می‌توانیم گشتاور دوقطبی مغناطیسی را به سادگی بیان کنیم. از این مطلب در مدل‌سازی گشتاور اعمالی کویل‌های الکترومغناطیسی به روتور مغناطیس دائم جستجوگر استفاده خواهیم کرد.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد گشتاور نیروی وارد بر یک دوقطبی الکتریکی برابر معادله ۲-۷۲ است. در اینجا بردار m را به‌صورت گشتاور دوقطبی مغناطیسی تعریف می‌کنیم و عبارت است از:

$$m=NiA \qquad (۲-۷۷)$$

جهت بردار گشتاور دوقطبی مغناطیسی، موازی است با بردار یکه‌ی n در شکل (۲-۷)، می‌توان معادله‌ی ۲-۷۷ را به‌صورت $\tau=mB\sin\theta$ یا به‌صورت حاصل ضرب برداری زیر نوشت:

$$\tau = m \times B \qquad (۲-۷۸)$$

با آنکه این معادله را در حالت کلی اثبات نکردیم، ولی معادله‌ی ۲-۷۸ عمومی‌ترین توصیف گشتاور نیروی وارد بر هر حلقه‌ی جریان مسطح را در یک میدان یکنواخت B ارائه می‌دهد. با کمی دقت می‌توان گفت که معادله ۲-۷۸ مشابه معادله ۲-۷۲ است.

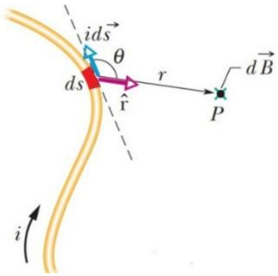
۲-۹-۴- مغناطش

فرض کنید که یک محیط مغناطیسی از اتم‌هایی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی m_i تشکیل شده است. این دوقطبی‌ها در حالت کلی در جهت‌های متفاوتی در فضا قرار گرفته‌اند. فرض کنید که می‌خواهیم گشتاور دوقطبی خالص M مربوط به حجم V از ماده را با انجام جمع برداری تمام گشتاورهای دوقطبی موجود در آن محاسبه کنیم یعنی: $m = \sum m_i$، بنابراین مغناطیدگی M محیط را به‌صورت گشتاور دوقطبی خالص به ازای واحد حجم تعریف می‌کنیم:

$$M = \frac{m}{V} = \frac{\sum m_i}{V} \qquad (۲-۷۹)$$

۲-۹-۵- قانون بیوساوار

از قانون بیوساوار می‌توان میدان مغناطیسی ایجاد شده توسط یک توزیع جریان در هرنقطه از فضا را به دست آورد. در شکل (۲-۱۰)، المان جریان ids مربوط به یک توزیع جریان اختیاری است که منجر به تولید اثر میدان مغناطیس dB در نقطه P شده است.



شکل (۲-۱۰) قانون بیوساوار [۴۹]

طبق قانون بیوساوار خواهیم داشت:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\, ds \times u_r}{r^2} \qquad (۲-۸۰)$$

در رابطه برداری بالا، μ_0 ثابت تراوایی و مقدار آن برابر است با $4\pi \times 10^{-7} T.m/A$.

همچنین u_r بردار یکه مرکز المان توزیع جریان تا نقطه‌ی P است.

برای یافتن میدان کل B ناشی از تمامی توزیع جریان، باید روی همه‌ی اجزای جریان ids انتگرال گرفت:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\, ds \times u_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\, ds \times r}{r^3} \qquad (۲-۸۱)$$

۲-۱۰- نتیجه‌گیری

در این فصل مفاهیم مورد نیاز در حوزه مکانیک و الکترومغناطیس لازم جهت مدل‌سازی جستجوگر ژیروسکوپ آزاد تشریح شد. لزوم ارائه این مباحث در آن است که سازوکار روتور جستجوگر ژیروسکوپ آزاد که مشابه یک ژیروسکوپ است و بر پایه مباحث نظری خواص ژیروسکوپی گفته شده، قابل تشریح و مدل‌سازی است.

فصل سوم:

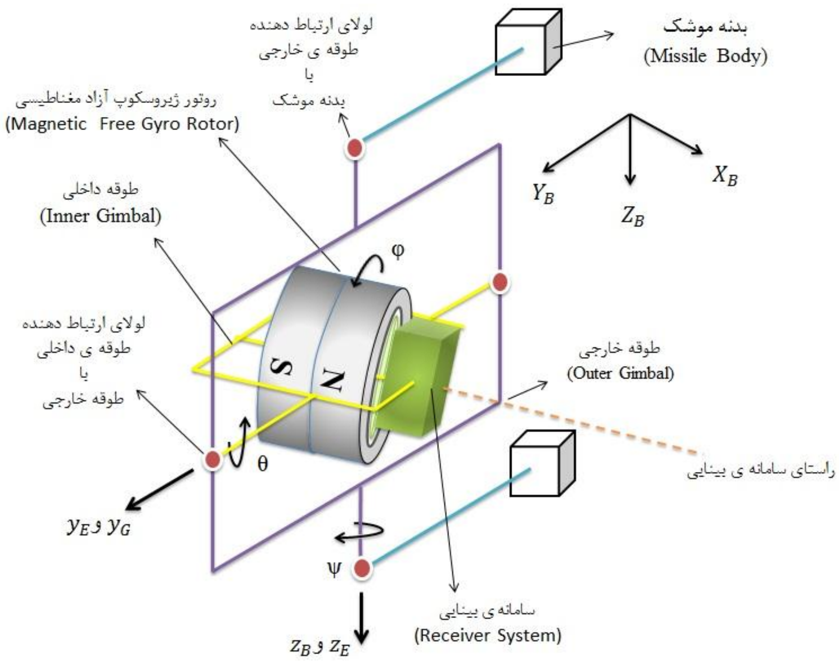
مدل‌سازی

۳-۱- مقدمه

در فصل اول مطالب و توضیحات مقدماتی در مورد جستجوگر ارائه شد و در فصل دوم به تشریح مباحث نظری لازم جهت تحلیل و مدل‌سازی ژیروسکوپ پرداخته شد. حال در این فصل، ابتدا ساختمان ساده شده از جستجوگر ژیروسکوپ آزاد موردنظر در این تحقیق ارائه و سپس به مدل‌سازی تمام اجزای مکانیکی و مغناطیسی پرداخته خواهد شد. ضمن اینکه استخراج معادلات دینامیکی با دو روش نیوتن و لاگرانژ جهت اعتبار سنجی صحت معادلات انجام خواهد شد.

۳-۲- جستجوگر

شکل (۳-۱) نمایی از ساختار قسمت‌های مختلف جستجوگر ژیروسکوپ آزاد را نمایش می‌دهد. جستجوگر ژیروسکوپ آزاد، شامل یک روتور مغناطیس دائم است که حس‌گر بینایی در راستای آن قرار می‌گیرد. روتور مغناطیسی، آزادانه با سرعت دورانی بسیار زیادی می‌چرخد، حال آنکه مجموعه‌ی بینایی و روتور جستجوگر، توسط دو طوقه یا قاب با دو درجه آزادی به بدنه جستجوگر ارتباط دارند.



شکل (۳-۱) نمایی از ساختار قسمت‌های مختلف جستجوگر ژیروسکوپ آزاد

خاصیت دورانی روتور مغناطیسی، به روتور این اجازه را می‌دهد که راستای دورانی خود را مستقل از حرکات وضعی و یا انتقالی بدنه جستجوگر حفظ کند و به‌تبع آن راستای خط دید سامانه بینایی نیز پایدار و ثابت بماند. حال اگر جهت پویش یا ردگیری هدف، نیاز به کنترل وضعیت سامانه بینایی باشد، آنگاه می‌توان توسط اعمال جریان به سیم‌پیچ‌های چسبیده به بدنه جستجوگر (عملکرد سیم‌پیچ‌ها در بخش ۳-۴ تشریح شده است)، گشتاور مورد نظر را در روتور مغناطیس دائم ایجاد کرد و به موجب آن راستای چرخش روتور را تغییر داد.

در این فصل مدل‌سازی جستجوگر نشان‌داده شده در شکل (۳-۱)، استخراج خواهد شد. مدل کامل با در نظر گرفتن کل مجموعه ژیروسکوپ و سیم‌پیچ‌های اعمال گشتاور به دست خواهد آمد.

۳-۳- مدل‌سازی دینامیکی جستجوگر

در این قسمت با استفاده از اختصاص دستگاه‌های مختصات به بدنه روتور و طوقه‌ها و توصیف وضعیت آن‌ها به کمک زوایای اولر که در فصل ۲ شرح داده شد و همچنین استفاده کردن از تئوری ژیروسکوپ که در فصل ۲ بیان شد، مدل‌سازی جستجوگر انجام می‌پذیرد. معادلات دینامیکی جستجوگر، جهت اعتبارسنجی، با دو روش نیوتن و لاگرانژ استخراج گردیده و نیز با مدل به دست آمده در سایر مقالات، مقایسه شده است.

۳-۳-۱-تعیین دستگاه‌های مختصات

برای تحلیل و استخراج معادلات، ابتدا دستگاه‌هایی به شرح ذیل تعیین می‌کنیم.

۱- دستگاه مختصات اینرسی $ox_Iy_Iz_I$ دستگاهی است که نسبت به ستارگان دوردست ثابت است، یا در تعریفی دقیق‌تر دستگاهی است که هیچ‌گونه حرکت زاویه‌ای ندارد و قانون دوم نیوتن در آن صادق است. محورهای این دستگاه مختصات طوری در نظر گرفته شده که در لحظه پرتاب موشک بر دستگاه مختصات بدنی منطبق باشد.

۲- دستگاه مختصات بدنی $ox_By_Bz_B$ دستگاهی است که به بدنه موشک چسبیده است به گونه‌ی که x_B در راستای نوک موشک و محور z_B در راستای محور دوران طوقه‌ی خارجی باشد و y_B در راستای متعامد و راستگرد نسبت به این دو محور باشد. دستگاه مختصات اینرسی در تحلیل جستجوگر، همان دستگاه بدنی موشک در نظر گرفته شده است.

۳- دستگاه مختصات طوقه‌ی خارجی $ox_Ey_Ez_E$ دستگاهی است که به طوقه‌ی خارجی چسبانده شده، به طوری که اگر دستگاه بدنی را به‌اندازه‌ی زاویه ψ حول محور z_B دوران دهیم به دستگاه مختصات طوقه‌ی خارجی می‌رسیم. (محور z_E هم‌جهت با z_B یا همان محور دوران طوقه‌ی خارجی خواهد بود).

۴- دستگاه مختصات طوقه‌ی داخلی $ox_Gy_Gz_G$ دستگاهی است که به طوقه‌ی داخلی متصل شده به طوری که اگر دستگاه مختصات طوقه‌ی خارجی را به‌اندازه‌ی زاویه θ حول محور y_E دوران دهیم به دستگاه مختصات طوقه‌ی داخلی می‌رسیم. (محور y_E هم‌جهت با y_G یا همان محور دوران طوقه‌ی داخلی خواهد بود).

۵- دستگاه مختصات روتور $ox_Ry_Rz_R$ همان دستگاه طوقه‌ی داخلی است که حول محور x_G به‌اندازه زاویه φ دوران یافته است.

۶- دستگاه مختصات خط دید $ox_Ly_Lz_L$ دستگاهی است که محور x_L آن در راستای خط دید جستجوگر است، وضعیت این دستگاه به روش دوران اولر طی دو دوران به ترتیب از دستگاه بدنی حول محور z به‌اندازه ψ_L و سپس دوران حول محور y دستگاه جدید به‌اندازه θ_L، تعیین می‌شود.

۷- دستگاه مختصات جستجوگر $ox_Dy_Dz_D$ دستگاهی است که محور x_D آن در راستای سامانه بینایی جستجوگر است. وضعیت این دستگاه به روش دوران اولر طی دو دوران به ترتیب از دستگاه بدنی حول محور z به‌اندازه ψ_D و سپس دوران حول محور y دستگاه جدید به‌اندازه θ_D، تعیین می‌شود.

۳-۳-۲- تعادل ژیروسکوپ جستجوگر

اگر محورهای دوران طوقه‌ها و لولاها و محور چرخش روتور همگی در یک نقطه از هم عبور کنند و آن نقطه مرکز جرم مجموعه جستجوگر باشد، در این صورت اگر در هر وضعیتی محور روتور را قرار دهیم، حتی هنگام عدم چرخش روتور، وضعیت محور روتور عوض نخواهد شد. این حالت بیانی از حالت تعادل ژیروسکوپ جستجوگر است.

۳-۳-۳- استخراج معادلات ژیروسکوپ آزاد جستجوگر از روش نیوتن

توالی دوران‌ها را مطابق با دوران اولر به این ترتیب می‌توان تعیین شود که ابتدا دستگاه متصل به بدنه جستجوگر{B} با دوران حول محور Z_B به اندازه ψ، به دستگاه متصل به طوقه‌ی خارجی{E} منطبق شود سپس دستگاه {E} با دوران حول محور Y_E به‌اندازه θ به دستگاه متصل به طوقه‌ی داخلی{G} منطبق شود و در دوران آخر دستگاه {G} حول محورش X_G به‌اندازه φ دوران کند و به دستگاه متصل به روتور یعنی {R} منطبق شود. لازم به ذکر است چون مرکز تعلیق و مرکز جرم جستجوگر بر

هم منطبق‌اند، دو دستگاه لخت{I} و بدنه جستجوگر{B} را بر هم منطبق در نظر می‌گیریم. خلاصه‌ای از دوران‌ها و توالی سه دوران را به شکل (۳-۲) نیز می‌توان نشان داد.

$$\{B\} \xrightarrow{R_{\hat{z}_B}(\psi)} \{E\} \xrightarrow{R_{\hat{y}_E}(\theta)} \{G\} \xrightarrow{R_{\hat{x}_G}(\varphi)} \{R\}$$

شکل (۳-۲) توالی سه دوران اولر

همان‌طور که در فصل دوم برای یک جسم صلب تعریف شد، برآیند گشتاورهای خارجی وارد بر جسم برابر است با مشتق زمانی تکانه‌ی زاویه‌ی جسم نسبت به دستگاه لخت، یعنی:

$$\sum \vec{T}_{ext/O} = D_I\, \vec{H}_{total/O} \tag{۳-۱}$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۱)، برای به دست آوردن گشتاور خارجی لولای واصل بین طوقه‌ی داخلی و روتور که در راستای X_G است، باید از تکانه‌ی زاویه‌ی روتور مشتق زمانی گرفت. آنگاه مطابق رابطه (۳-۲) مؤلفه اول بردار به دست آمده، گشتاور خارجی لولا در راستای X_G خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} \tau_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = D_I\, {}^{G}\vec{H}_{R/O} \tag{۳-۲}$$

که در رابطه‌ی (۳-۲):

$\vec{H}_{R/O}$: تکانه‌ی زاویه‌ی روتور جستجوگر حول مرکز تعلیق و مرکز جرم o جستجوگر است.

لازم به ذکر است که $\vec{H}_{R/O}$ در رابطه (۳-۲) معادل است با:

$$\vec{H}_{R/O} = I_R \vec{w}_{R/I} \tag{۳-۳}$$

در رابطه‌ی (۳-۳):

I_R : ماتریس لختی دورانی روتور است.

رابطه‌ی (۳-۳) را به‌صورت زیر در دستگاه G توصیف می‌کنیم.

$${}^{G}\vec{H}_{R/O} = {}^{G}I_R\, {}^{G}\vec{w}_{R/I} \tag{۳-۴}$$

در رابطه‌ی (۳-۴):

${}^{G}I_R$: ماتریس لختی دورانی روتور است که در دستگاه G توصیف‌شده و به دلیل تقارن روتور و منطبق بودن محور دوران X_G با محور X_R، لذا توصیف آن در هر دو دستگاه G و R یکسان است:

$$ {}^{G}I_R = {}^{R}I_R = \begin{bmatrix} I_R & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \tag{۳-۵} $$

${}^{G}\overrightarrow{w}_{R/I}$: بردار سرعت زاویه‌ی روتور نسبت به دستگاه لخت است که در دستگاه G توصیف شده است.

این بردار را می‌توان از برآیند دو بردار سرعت زاویه‌ی دیگر نیز به دست آورد:

$$ {}^{G}w_{G/_I} = {}^{G}w_{G/_E} + {}^{G}w_{E/_I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \tag{۳-۶} $$

در رابطه‌ی (۳-۶):

${}^{G}w_{E/_I}$: سرعت زاویه‌ی طوقه خارجی نسبت به دستگاه لخت است که در دستگاه G توصیف شده است.

${}^{G}w_{G/_E}$: سرعت زاویه‌ی طوقه داخلی نسبت به طوقه خارجی است که در دستگاه G توصیف شده است.

و همچنین خواهیم داشت:

$$ {}^{G}w_{R/_I} = {}^{G}w_{R/_G} + {}^{G}w_{G/_I} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \tag{۳-۷} $$

در رابطه‌ی (۳-۷):

${}^{G}w_{R/_G}$: سرعت زاویه‌ی روتور نسبت به طوقه داخلی است که در دستگاه G توصیف شده است.

از قرار دادن رابطه‌ی (۳-۵) و (۳-۷) در (۳-۴)، ${}^{G}\overrightarrow{H}_{R/O}$ به دست می‌آید:

$$ {}^{G}\overrightarrow{H}_{R/O} = \begin{bmatrix} I_R & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R(\dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta) \\ I_r\dot{\theta} \\ I_r\dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \qquad (۳-۸) $$

حال با توجه به رابطه (۳-۲) و به کمک رابطه‌ی (۲-۲۶)، توصیف τ_x در دستگاه G عبارت است از:

$$ \begin{aligned} \begin{bmatrix} \tau_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= D_I\, {}^{G}\overrightarrow{H}_{R/O} = D_G\, {}^{G}\overrightarrow{H}_{R/O} + {}^{G}w_{G/_I} \times {}^{G}\overrightarrow{H}_{R/_O} \\ &= \begin{bmatrix} I_R\ddot{\varphi} - I_R\ddot{\psi}s\theta - I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ I_r\ddot{\theta} \\ I_r\ddot{\psi}c\theta - I_r\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (I_r - I_R)\dot{\psi}^2 c\theta s\theta + I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ (I_R - I_r)\dot{\theta}\dot{\psi}s\theta - I_R\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_R\ddot{\varphi} - I_R\ddot{\psi}s\theta - I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ I_r\ddot{\theta} + (I_r - I_R)\dot{\psi}^2 c\theta s\theta + I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ I_r\ddot{\psi}c\theta - I_r\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta + (I_R - I_r)\dot{\theta}\dot{\psi}s\theta - I_R\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۳-۹) $$

از رابطه‌ی بالا گشتاور τ_x توصیف‌شده در دستگاه G برابر است با:

$$ \tau_x = I_R\ddot{\varphi} - I_R\ddot{\psi}s\theta - I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \qquad (۳-۱۰) $$

در ادامه برای به دست آوردن گشتاور خارجی لولای واصل بین طوقه‌ی داخلی و خارجی، وقتی که ناظر در دستگاه {I} باشد، با مشتق زمانی از تکانه‌ی زاویه‌ی مجموع طوقه‌ی داخلی و روتور، مشابه رابطه (۳-۲) گشتاور خارجی لولا در راستای Y_G به دست می‌آید:

$$ \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_y \\ 0 \end{bmatrix} = D_I\left({}^{G}\overrightarrow{H}_{R/O} + {}^{G}\overrightarrow{H}_{G/O}\right) = D_I\, {}^{G}\overrightarrow{H}_{R/O} + D_I\, {}^{G}\overrightarrow{H}_{G/O} \qquad (۳-۱۱) $$

که در رابطه‌ی (۳-۱۱)، $D_I\left({}^{G}\overrightarrow{H}_{R/O}\right)$ مطابق رابطه‌ی (۳-۴) به دست آمد. اما در قسمت دوم سمت راست رابطه‌ی (۳-۱۱)، $\overrightarrow{H}_{G/O}$ تکانه‌ی زاویه‌ای طوقه‌ی داخلی جستجوگر حول مرکز تعلیق و جرم o جستجوگر است که برابر است با:

$$ \overrightarrow{H}_{G/O} = I_G\overrightarrow{w}_{G/I} \qquad (۳-۱۲) $$

در رابطه‌ی (۳-۱۲):

I_G : ماتریس لختی دورانی طوقه‌ی داخلی است.

رابطه‌ی (۳-۱۲) را می‌توان در دستگاه G این‌گونه توصیف کرد.

$$ {}^{G}\vec{H}_{G/O} = {}^{G}I_G \, {}^{G}\vec{w}_{G/I} \tag{۱۳-۳} $$

در رابطه‌ی (۳-۱۳):

${}^{G}I_G$: توصیف ماتریس لختی دورانی طوقه‌ی داخلی در دستگاه G است. که طبق فرض تقارن طوقه‌ی داخلی با محورهای دستگاه G، می‌توان این‌گونه فرض شود که برابر است با:

$$ {}^{G}I_G = \begin{bmatrix} I_{G2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g2} \end{bmatrix} \tag{۱۴-۳} $$

${}^{G}\vec{w}_{G/I}$: بردار سرعت زاویه‌ی طوقه‌ی داخلی نسبت به دستگاه لخت است که در دستگاه G توصیف شده و عبارت است از:

$$ {}^{G}w_{G/_I} = {}^{G}w_{G/_E} + {}^{G}w_{E/_I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \tag{۱۵-۳} $$

حال با قرار دادن روابط (۳-۱۴) و (۳-۱۵) در (۳-۱۳)، ${}^{G}\vec{H}_{G/O}$ به دست می‌آید:

$$ {}^{G}\vec{H}_{G/O} = \begin{bmatrix} I_{G2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -I_{G2}\dot{\psi}s\theta \\ I_{g2}\dot{\theta} \\ I_{g2}\dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \tag{۱۶-۳} $$

$D_I \, {}^{G}\vec{H}_{G/O}$ موجود در رابطه‌ی (۲-۱۳) با استفاده از رابطه‌ی (۲-۱۶)، برابر است با:

$$ \begin{aligned} D_I \, {}^{G}\vec{H}_{G/O} &= D_G \, {}^{G}\vec{H}_{G/O} + {}^{G}w_{G/_I} \times {}^{G}\vec{H}_{G/_O} \\ &= \begin{bmatrix} -I_{G2}\ddot{\psi}s\theta - I_{G2}\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ I_{g2}\ddot{\theta} \\ I_{g2}\ddot{\psi}c\theta - I_{g2}\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ (I_{g2} - I_{G2})\dot{\psi}^2 c\theta s\theta \\ (I_{G2} - I_{g2})\dot{\theta}\dot{\psi}s\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -I_{G2}\ddot{\psi}s\theta - I_{G2}\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ I_{g2}\ddot{\theta} + (I_{g2} - I_{G2})\dot{\psi}^2 c\theta s\theta \\ I_{g2}\ddot{\psi}c\theta + (I_{G2} - 2I_{g2})\dot{\theta}\dot{\psi}s\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۱۷-۳} $$

با قرار دادن روابط (۳-۴) و (۳-۱۷) در (۳-۱۱) داریم:

$$ \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R\ddot{\varphi} - (I_{G2} + I_R)\ddot{\psi}s\theta - (I_R + I_{G2})\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ (I_r + I_{g2})\ddot{\theta} + (I_{g2} + I_r - I_R - I_{G2})\dot{\psi}^2 c\theta s\theta + I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \\ (I_r + I_{g2})\ddot{\psi}c\theta + (I_R + I_{G2} - 2I_{g2} - 2I_r)\dot{\theta}\dot{\psi}s\theta - I_R\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{bmatrix} \tag{۱۸-۳} $$

درنهایت از رابطه (۳-۱۸) گشتاور خارجی لولا در راستای Y_G برابر است با:

$$\tau_y = \left(I_r + I_{g2}\right)\ddot{\theta} + \left(I_{g2} + I_r - I_R - I_{G2}\right)\dot{\psi}^2 c\theta s\theta + I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta \qquad (۳-۱۹)$$

برای به دست آوردن گشتاور خارجی لولای واصل بین طوقه‌ی خارجی و بدنه جستجوگر (وقتی که ناظر در دستگاه {I} باشد) از تکانه‌ی زاویه‌ی مجموع طوقه‌ی داخلی و خارجی و روتور، مشتق گرفته می‌شود. آنگاه گشتاور خارجی لولا در راستای Z_E عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_z \end{bmatrix} = D_I\left({}^{E}\overrightarrow{H}_{R/O} + {}^{E}\overrightarrow{H}_{G/O} + {}^{E}\overrightarrow{H}_{E/O}\right) = D_I\, {}^{E}\overrightarrow{H}_{R/O} + D_I\, {}^{E}\overrightarrow{H}_{G/O} + D_I\, {}^{E}\overrightarrow{H}_{E/O} \qquad (۳-۲۰)$$

مطابق با آنچه برای محاسبه دو گشتاور τ_x و τ_y انجام داده شد، τ_Z از معادله مجموع سه گشتاور رابطه‌ی (۳-۲۰) به دست می‌آید.

عبارت $\overrightarrow{H}_{R/O}$ تکانه‌ی زاویه‌ای طوقه‌ی داخلی جستجوگر حول مرکز تعلیق و جرم o جستجوگر است و به‌صورت $\overrightarrow{H}_{R/O}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{H}_{R/O} = I_R\overrightarrow{w}_{R/I} \qquad (۳-۲۱)$$

رابطه‌ی (۳-۲۱) را در دستگاه E به‌صورت زیر نشان می‌دهند:

$${}^{E}\overrightarrow{H}_{R/O} = {}^{E}I_R\, {}^{E}\overrightarrow{w}_{R/I} \qquad (۳-۲۲)$$

که در رابطه‌ی (۳-۲۲):

${}^{E}I_R$: ماتریس لختی دورانی روتور، توصیف شده در دستگاه E است. این ماتریس از نگاشت ماتریس ${}^{R}I_R$ به دستگاه E به دست خواهد آمد، بنابراین با استفاده از رابطه داریم:

$$\begin{aligned} {}^{E}I_R &= {}^{E}_{G}C\, {}^{G}I_R\, {}^{G}_{E}C = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_R & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I_R c^2\theta + I_r s^2\theta & 0 & (I_r - I_R)c\theta s\theta \\ 0 & I_r & 0 \\ (I_r - I_R)c\theta s\theta & 0 & I_R s^2\theta + I_r c^2\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (۳-۲۳)$$

همچنین با استفاده از نگاشت ${}^{E}_{G}C$، ${}^{E}\vec{w}_{R/I}$ برابر است با:

$$
{}^{E}\vec{w}_{R/I} = {}^{E}_{G}C\ {}^{G}\vec{w}_{R/I} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}c\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} - \dot{\varphi}s\theta \end{bmatrix} \qquad (۲۴\text{-}۳)
$$

حال با قرار دادن روابط (۳-۲۳) و (۳-۲۴) در (۳-۲۲)، ${}^{E}\vec{H}_{R/O}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$
{}^{E}\vec{H}_{R/O} = \begin{bmatrix} I_R c^2\theta + I_r s^2\theta & 0 & (I_r - I_R)c\theta s\theta \\ 0 & I_r & 0 \\ (I_r - I_R)c\theta s\theta & 0 & I_R s^2\theta + I_r c^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi}c\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} - \dot{\varphi}s\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_R\dot{\varphi}c\theta + (I_r - I_R)\dot{\psi}c\theta s\theta \\ I_r\dot{\theta} \\ -I_R\dot{\varphi}s\theta + I_R\dot{\psi}s^2\theta + I_r\dot{\psi}c^2\theta \end{bmatrix} \qquad (۲۵\text{-}۳)
$$

در این مرحله با استفاده از رابطه‌ی (۲-۲۶)، $D_I\ {}^{E}\vec{H}_{R/O}$ به دست می‌آید:

$$
D_I\ {}^{E}\vec{H}_{R/O} = D_E\ {}^{E}\vec{H}_{R/O} + {}^{E}w_{E/I} \times {}^{E}\vec{H}_{R/O} \qquad (۲۶\text{-}۳)
$$

که در آن $\vec{H}_{G/O}$ تکانه‌ی زاویه‌ای طوقه‌ی داخلی جستجوگر حول مرکز جرم و ثقل o جستجوگر است.

و با توجه به رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$
\vec{H}_{G/O} = I_G\vec{w}_{G/I} \qquad (۲۷\text{-}۳)
$$

رابطه‌ی (۳-۲۷) در دستگاه E به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$
{}^{E}\vec{H}_{G/O} = {}^{E}I_G\ {}^{E}\vec{w}_{G/I} \qquad (۲۸\text{-}۳)
$$

که در رابطه‌ی (۳-۲۸):

${}^{E}I_G$: ماتریس لختی دورانی طوقه‌ی داخلی، توصیف شده در دستگاه E است. این ماتریس از نگاشت ماتریس ${}^{G}I_G$ به دستگاه E، مشابه رابطه‌ی (۲-۳۶)، به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$
\begin{aligned}
{}^{E}I_G &= {}^{E}_{G}C\ {}^{G}I_G\ {}^{G}_{E}C = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{G2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I_{G2}c^2\theta + I_{g2}s^2\theta & 0 & (I_{g2} - I_{G2})c\theta s\theta \\ 0 & I_{g2} & 0 \\ (I_{g2} - I_{G2})c\theta s\theta & 0 & I_{G2}s^2\theta + I_{g2}c^2\theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \qquad (۲۹\text{-}۳)
$$

همچنین با استفاده از نگاشت $^{E}_{G}C$، $^{E}\overrightarrow{w}_{G/I}$ برابر است با:

$$^{E}\overrightarrow{w}_{G/I} = {}^{E}_{G}C\,{}^{G}\overrightarrow{w}_{G/I} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۰)$$

حال با قرار دادن روابط (۳-۲۹) و (۳-۳۰) در (۳-۲۸)، $^{E}\overrightarrow{H}_{G/O}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$^{E}\overrightarrow{H}_{G/O} = \begin{bmatrix} I_{G2}c^2\theta + I_{g2}s^2\theta & 0 & (I_{g2} - I_{G2})c\theta s\theta \\ 0 & I_{g2} & 0 \\ (I_{g2} - I_{G2})c\theta s\theta & 0 & I_{G2}s^2\theta + I_{g2}c^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I_{g2} - I_{G2})\dot{\psi}c\theta s\theta \\ I_{g2}\dot{\theta} \\ I_{G2}\dot{\psi}s^2\theta + I_{g2}\dot{\psi}c^2\theta \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۱)$$

در این مرحله با استفاده از رابطه‌ی (۲-۲۶)، $D_I\,{}^{E}\overrightarrow{H}_{G/O}$ را به دست می‌آوریم:

$$D_I\,{}^{E}\overrightarrow{H}_{G/O} = D_E\,{}^{E}\overrightarrow{H}_{G/O} + {}^{E}w_{E/I} \times {}^{E}\overrightarrow{H}_{G/O} \qquad (۳-۳۲)$$

که در آن $\overrightarrow{H}_{E/O}$ تکانه‌ی زاویه‌ای طوقه‌ی داخلی جستجوگر حول مرکز جرم و ثقل o جستجوگر است.

و با توجه به رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\overrightarrow{H}_{E/O} = I_E\overrightarrow{w}_{E/I} \qquad (۳-۳۳)$$

که در رابطه‌ی (۳-۳۳):

I_E : ماتریس لختی دورانی طوقه‌ی خارجی است.

توصیف رابطه‌ی (۳-۳۳) در دستگاه E عبارت است از:

$$^{E}\overrightarrow{H}_{E/O} = {}^{E}I_E\,{}^{E}\overrightarrow{w}_{E/I} \qquad (۳-۳۴)$$

که در رابطه‌ی (۳-۳۴):

$^{E}I_E$: ماتریس لختی دورانی طوقه‌ی خارجی است که در دستگاه E توصیف شده است؛ که فرض شده برابر است با:

$$^{E}I_E = \begin{bmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g1} \end{bmatrix} \qquad (۳-۳۵)$$

$^{E}\overrightarrow{w}_{E/I}$: بردار سرعت زاویه‌ای طوقه‌ی داخلی نسبت به دستگاه لخت است که در دستگاه E توصیف شده است و عبارت است از:

$$^{E}w_{E/_{I}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۶}$$

حال با قرار دادن روابط (۳-۳۵) و (۳-۳۶) در (۳-۳۴)، $^{E}\overrightarrow{H}_{E/O}$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$^{E}\overrightarrow{H}_{E/O} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{g1}\dot{\psi} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۷}$$

حال می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی (۲-۲۶)، $D_I\ ^{E}\overrightarrow{H}_{E/O}$ را به صورت زیر به دست آوریم:

$$D_I\ ^{E}\overrightarrow{H}_{E/O} = D_E\ ^{E}\overrightarrow{H}_{G/O} + \ ^{E}w_{E/_{I}} \times \ ^{E}\overrightarrow{H}_{G/_{O}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{g1}\ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_{g1}\ddot{\psi} \end{bmatrix} \tag{۳-۳۸}$$

در ادامه با جایگذاری سه رابطه‌ی (۳-۲۶) و (۳-۳۲) و (۳-۳۸) در رابطه‌ی (۳-۲۰)، τ_z برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} \tau_z = &-I_R\dot{\varphi}\dot{\theta}c\theta - I_R\ddot{\varphi}s\theta + (I_{g1} + \left(I_{g2} + I_r\right)c^2\theta \\ &+(I_{G2} + I_R)s^2\theta)\ddot{\psi} + 2\left(I_{G2} + I_R - I_{g2} - I_r\right)\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta s\theta \end{aligned} \tag{۳-۳۹}$$

لذا سه گشتاور اعمالی از سه لولای موجود در ساختار دینامیکی جستجوگر از روش نیوتن به‌صورت زیر به دست آمد:

$$\begin{cases} I_R\ddot{\varphi} - I_R\ddot{\psi}s\theta - I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta = \tau_x \\ \left(I_r + I_{g2}\right)\ddot{\theta} + I_R\dot{\psi}\dot{\varphi}c\theta - \left(I_{G2} - I_{g2} + I_R - I_r\right)\dot{\psi}^2 s\theta c\theta = \tau_y \\ -I_R\dot{\varphi}\dot{\theta}c\theta - I_R\ddot{\varphi}s\theta + (I_{g1} + \left(I_{g2} + I_r\right)c^2\theta + (I_{G2} + I_R)s^2\theta)\ddot{\psi} + 2\left(I_{G2} + I_R - I_{g2} - I_r\right)\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta s\theta = \tau_z \end{cases} \tag{۳-۴۰}$$

۳-۳-۴- استخراج معادلات ژیروسکوپ آزاد جستجوگر از روش لاگرانژ

در این قسمت جهت اعتبار سنجی صحت مراحل به دست آوردن معادلات (۳-۴۰)، به روش لاگرانژ معادلات (۳-۴۰) استخراج می‌شود.

همان‌طور که در فصل ۲ در مورد روش لاگرانژ شرح داده شد، معادله لاگرانژ طبق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = Q_i \qquad i = 1,2,\dots,n \qquad (۳-۴۱)$$

به طوری که:

i: شماره درجه آزادی سیستم

n: تعداد درجات آزادی سیستم

q_i: درجه آزادی i ام

U: مجموع تمام انرژی‌های پتانسیل سیستم

T: مجموع تمام انرژی‌های جنبشی سیستم

Q_i: نیروی تعمیم‌یافته i ام سیستم

با توجه به شکل (۳-۱) مختصات تعمیم‌یافته سیستم که در اینجا زوایای اولر هستند به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} q_1 &= \psi \\ q_2 &= \theta \\ q_3 &= \phi \end{aligned} \qquad (۳-۴۲)$$

بنابراین نیروهای تعمیم‌یافته سیستم به‌صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_\psi \\ Q_2 &= Q_\theta \\ Q_3 &= Q_\phi \end{aligned} \qquad (۳-۴۳)$$

برای مثال Q_{ψ} عبارت است از نیروهای تعمیم‌یافته‌ای که در سیستم مورد مطالعه یک گشتاور دورانی است که به‌اندازه زاویه ψ، جابجا می‌شود.

با فرض اینکه اگر در طراحی و ساخت جستجوگر، مرکز دوران‌های اجزای جستجوگر (مرکز تعلیق) بر مرکز جرم جستجوگر، منطبق شود و نیز اگر هیچ انرژی پتانسیلی در هیچ قسمتی از جستجوگر ذخیره نشده باشد، آنگاه انرژی پتانسیل سیستم برابر صفر خواهد بود.

$$U=0 \tag{۴۴-۳}$$

انرژی جنبشی دورانی جسم صلب توسط رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$T = \frac{1}{2} w^{T} I\, w \tag{۴۵-۳}$$

که در آن w بردار سرعت زاویه‌ای مطلق جسم صلب دورانی است و w^{T} ترانهاده ماتریس w است. همچنین I ماتریس لختی دورانی جسم صلب است.

بنابراین انرژی جنبشی کل سیستم شامل مجموع سه انرژی جنبشی عمده زیر است:

$$T_{total} = T_E + T_G + T_R \tag{۴۶-۳}$$

که در رابطه‌ی (۳-۴۶):

T_E: انرژی جنبشی حاصل از دوران طوقه خارجی

T_G: انرژی جنبشی حاصل از دوران طوقه‌ی داخلی

T_R: انرژی جنبشی حاصل از دوران روتور مغناطیس دائم

انرژی جنبشی حاصل از سه جمله‌ی رابطه‌ی (۳-۴۶) با توجه به رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} T_E &= \frac{1}{2}\, w_{E/I}^{T}\, I_E\, w_{E/I} \\ T_G &= \frac{1}{2}\, w_{G/I}^{T}\, I_G\, w_{G/I} \\ T_R &= \frac{1}{2}\, w_{R/I}^{T}\, I_R\, w_{R/I} \end{aligned} \tag{۴۷-۳}$$

باید دقت داشت که برای به دست آوردن انرژی جنبشی دورانی توسط روابط (۳-۴۷)، لازم است که در محاسبه هرکدام از روابط، ماتریس لختی دورانی و بردار سرعت زاویه‌ی را در یک دستگاه یکسان توصیف کنیم. بنابراین با توجه به اینکه ماتریس لختی دورانی روتور و طوقه‌ها در دستگاه‌های متصل به آنها (به خاطر تقارن) می‌توانند راحت‌تر به دست آیند، بنابراین سرعت زاویه‌ای را نیز در همان دستگاهی که ماتریس لختی دورانی توصیف شده است، بیان می‌کنیم.

برای طوقه‌ی خارجی ماتریس لختی دورانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ {}^{E}I_{E} = \begin{bmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g1} \end{bmatrix} \qquad (۳-۴۸) $$

سرعت زاویه‌ای طوقه‌ی خارجی نسبت به دستگاه I توصیف شده در دستگاه E برابر است با:

$$ {}^{E}w_{E/I} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \qquad (۳-۴۹) $$

انرژی جنبشی طوقه‌ی خارجی با جایگذاری روابط (۳-۴۸) و (۳-۴۹) در رابطه اول (۳-۴۷) این‌گونه به دست می‌آید:

$$ T_{E} = \frac{1}{2}\ {}^{E}w_{E/I}^{T}\ {}^{E}I_{E}\ {}^{E}w_{E/I} = \frac{1}{2}[0 \quad 0 \quad \dot{\psi}] \begin{bmatrix} I_{G1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} I_{g1}\dot{\psi}^{2} \qquad (۳-۵۰) $$

به همان ترتیبی که انرژی جنبشی طوقه‌ی خارجی به دست آمد، انرژی جنبشی را برای طوقه‌ی داخلی و سپس روتور به دست می‌آوریم.

برای طوقه‌ی داخلی، ماتریس لختی دورانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ {}^{G}I_{G} = \begin{bmatrix} I_{G2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g2} \end{bmatrix} \qquad (۳-۵۱) $$

سرعت زاویه‌ی طوقه‌ی خارجی نسبت به دستگاه I توصیف شده در دستگاه G نیز برابر است با:

$$ {}^{G}w_{G/I} = {}^{G}w_{G/E} + {}^{G}_{E}C\ {}^{E}w_{E/I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \tag{۵۲-۳} $$

با جایگذاری رابطه (۳-۵۱) و (۳-۵۲) در رابطه دوم (۳-۴۷)، انرژی جنبشی طوقه‌ی خارجی برابر است با:

$$ T_G = \frac{1}{2}\ {}^{G}w_{G/I}^{T}\ {}^{G}I_G\ {}^{G}w_{G/I} = \frac{1}{2}[-\dot{\psi}s\theta \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}c\theta] \begin{bmatrix} I_{G2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{g2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{g2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} $$
$$ = \frac{1}{2}\ I_{G2}\ \dot{\psi}^2\ s^2\theta + \frac{1}{2}\ I_{g2}\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\ I_{g2}\ \dot{\psi}^2\ c^2\theta \tag{۵۳-۳} $$

برای روتور، ماتریس لختی دورانی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$ {}^{G}I_R = \begin{bmatrix} I_R & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \tag{۵۴-۳} $$

سرعت زاویه‌ی روتور نسبت به دستگاه I توصیف شده در دستگاه G برابر است با:

$$ {}^{G}w_{G/I} = {}^{G}w_{R/G} + {}^{G}w_{G/E} + {}^{G}_{E}C\ {}^{E}w_{E/I} $$
$$ = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \tag{۵۵-۳} $$

با جایگذاری روابط (۳-۵۴) و (۳-۵۵) در رابطه‌ی سوم (۳-۴۷)، انرژی جنبشی روتور، برابر است با:

$$ T_R = \frac{1}{2}\ {}^{G}w_{R/I}^{T}\ {}^{G}I_R\ {}^{G}w_{R/I} $$
$$ = \frac{1}{2}[\dot{\varphi}-\dot{\psi}s\theta \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}c\theta] \begin{bmatrix} I_R & 0 & 0 \\ 0 & I_r & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi}c\theta \end{bmatrix} \tag{۵۶-۳} $$
$$ = \frac{1}{2}\ I_R\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta\right)^2 + \frac{1}{2}\ I_r\ \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\ I_r\dot{\psi}^2\ c^2\theta $$

با جایگذاری روابط، (۳-۵۰)، (۳-۵۳) و (۳-۵۶) در رابطه (۳-۴۶)، انرژی جنبشی کل سیستم جستجوگر برابر است با:

$$
\begin{aligned}
T_{total} &= T_E + T_G + T_R \\
&= \frac{1}{2} I_{g1}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2} I_{G2}\,\dot{\psi}^2\,s^2\theta + \frac{1}{2} I_{g2}\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_{g2}\,\dot{\psi}^2\,c^2\theta \\
&\quad + \frac{1}{2} I_R\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta\right)^2 + \frac{1}{2} I_r\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_r\dot{\psi}^2\,c^2\theta
\end{aligned}
\qquad (۵۷-۳)
$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۴۱)، اولین معادله با جایگذاری $q_1 = \psi$ عبارت است از:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \psi} + \frac{\partial U}{\partial \psi} = Q_\psi \qquad (۵۷-۳)
$$

که در رابطه‌ی (۳-۵۷):

$$
\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = I_{g1}\dot{\psi} + I_{G2}\dot{\psi}\,s^2\theta + I_{g2}\dot{\psi}\,c^2\theta - I_R\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi}s\theta\right)s\theta + I_r\dot{\psi}\,c^2\theta \qquad (۵۸-۳)
$$

،

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) &= I_{g1}\ddot{\psi} + I_{G2}\ddot{\psi}s^2\theta + 2\,I_{G2}\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta s\theta + I_{g2}\ddot{\psi}c^2\theta - 2\,I_{g2}\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta c\theta - I_R\ddot{\varphi}s\theta \\
&\quad - I_R\dot{\varphi}\dot{\theta}c\theta + I_R\ddot{\psi}s^2\theta + 2\,I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta s\theta + I_r\ddot{\psi}c^2\theta - 2\,I_r\dot{\psi}\dot{\theta}s\theta c\theta
\end{aligned}
\qquad (۵۹-۳)
$$

،

$$
\frac{\partial T}{\partial \psi} = 0 \qquad (۶۰-۳)
$$

و

$$
\frac{\partial U}{\partial \psi} = 0 \qquad (۶۱-۳)
$$

به این ترتیب اولین معادله حرکت سیستم برابر است با

$$
\begin{aligned}
&-I_R\dot{\varphi}\dot{\theta}c\theta - I_R\ddot{\varphi}s\theta + I_{g1}\ddot{\psi} + \left(I_{g2} + I_r\right)\ddot{\psi}c^2\theta + (I_{G2} + I_R)\ddot{\psi}s^2\theta \\
&+2\left(I_{G2} + I_R - I_{g2} - I_r\right)\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta s\theta = Q_\psi
\end{aligned}
\qquad (۶۲-۳)
$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی (۳-۴۱)، دومین معادله حرکت با جایگذاری $q_2 = \theta$ عبارت است از:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial \theta} = Q_\theta \qquad (۶۳-۳)
$$

که در رابطه‌ی (۳-۶۳):

$$
\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = I_{g2}\dot{\theta} + I_r\dot{\theta} \qquad (۶۴-۳)
$$

،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = (I_{g2} + I_r)\ddot{\theta} \qquad (۶۵\text{-}۳)$$

،

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = I_{G2}\, \dot{\psi}^2 s\theta c\theta - I_{g2}\, \dot{\psi}^2 s\theta c\theta - I_R \dot{\psi}\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi} s\theta\right) c\theta - I_r\, \dot{\psi}^2 s\theta c\theta \qquad (۶۶\text{-}۳)$$

و

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \qquad (۶۷\text{-}۳)$$

به این ترتیب دومین معادله حرکت سیستم برابر است با:

$$\left(I_r + I_{g2}\right)\ddot{\theta} + \left(I_{g2} + I_r - I_R - I_{G2}\right)\dot{\psi}^2 c\theta s\theta + I_R \dot{\psi}\dot{\theta} c\theta = Q_\theta \qquad (۶۸\text{-}۳)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳-۴۱)، سومین معادله حرکت سیستم نیز با جایگذاری $q_3 = \varphi$ عبارت است از:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = Q_\varphi \qquad (۶۹\text{-}۳)$$

که در رابطه‌ی (۳-۶۹):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = I_R\left(\dot{\varphi} - \dot{\psi} s\theta\right) \qquad (۷۰\text{-}۳)$$

،

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = I_R \ddot{\varphi} - I_R \ddot{\psi} s\theta - I_R \dot{\psi}\dot{\theta} c\theta s\theta \qquad (۷۱\text{-}۳)$$

،

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0 \qquad (۷۲\text{-}۳)$$

و

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 \qquad (۷۳\text{-}۳)$$

به این ترتیب سومین معادله حرکت سیستم برابر است با:

$$I_R \ddot{\varphi} - I_R \ddot{\psi} s\theta - I_R \dot{\psi}\dot{\theta} c\theta = Q_\varphi \qquad (۷۴\text{-}۳)$$

نیروهای تعمیم‌یافته در این سیستم توسط سه گشتاور از سه لولا به‌قرار زیر وارد خواهند شد.

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_\psi = \tau_z \\ Q_2 &= Q_\theta = \tau_y \\ Q_3 &= Q_\phi = \tau_x \end{aligned} \tag{۳-۷۵}$$

با قرار دادن جملات بدست آمده توسط معادلات (۳-۷۵) در معادلات (۳-۶۲)، (۳-۶۸) و (۳-۷۴)، معادلات حرکت سیستم به روش لاگرانژ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} I_R\ddot{\varphi} - I_R\ddot{\psi}s\theta - I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta = \tau_x \\ I_r\ddot{\theta} + I_R\dot{\psi}\dot{\varphi}c\theta - (I_R - I_r)\dot{\psi}^2 s\theta c\theta = \tau_y \\ -I_R\dot{\varphi}\dot{\theta}c\theta - I_R\ddot{\varphi}s\theta + (I_r c^2\theta + I_R s^2\theta)\ddot{\psi} + 2(I_R - I_r)\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta s\theta = \tau_z \end{cases} \tag{۳-۷۶}$$

۳-۴- اعتبار سنجی معادلات دینامیکی بدست آمده

برای ارزیابی صحت معادلات دینامیکی استخراج شده برای ژیروسکوپ جستجوگر، نشان داده شد که دو رابطه (۳-۴۰) و (۳-۷۶)، به ترتیب از دو روش نیوتن (در بخش ۳-۳-۳) و روش لاگرانژ (در بخش ۳-۳-۴) بدست آمد، یکسان هستند. همچنین می‌توان در ارزیابی دیگری نشان داد که اگر اثر طوقه‌های ژیروسکوپ در معادلات (۳-۷۶) حذف شود، در این صورت، باید از معادلات دینامیکی جستجوگر، معادلات ژیروسکوپ آزاد در فضا بدون در نظرگیری اثر طوقه‌ها که در مراجع دیگر ارائه شده است، ظاهر شود.

مطابق آنچه که گفته شد، رابطه زیر بعد از حذف اثر طوقه‌ها در معادلات دینامیکی جستجوگر استخراج می‌شود:

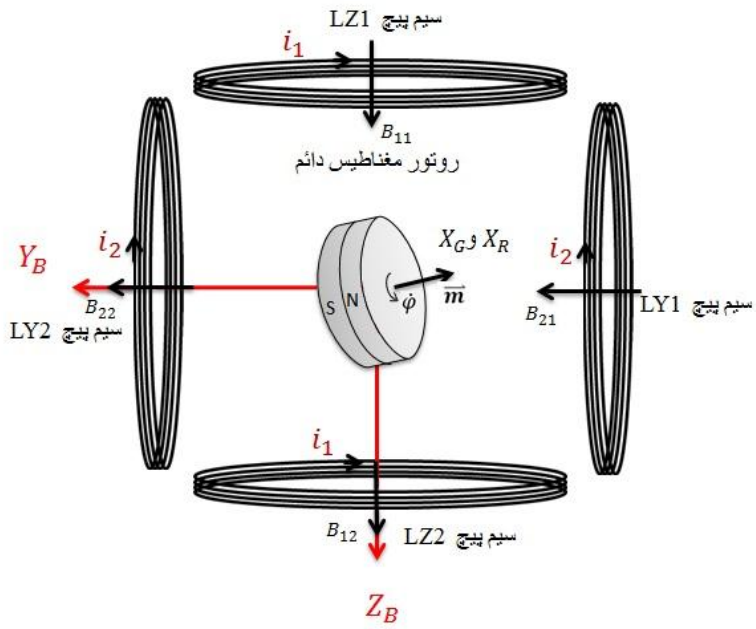
$$\begin{cases} I_R\ddot{\varphi} - I_R\ddot{\psi}s\theta - I_R\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta = \tau_x \\ I_r\ddot{\theta} + I_R\dot{\psi}\dot{\varphi}c\theta - (I_R - I_r)\dot{\psi}^2 s\theta c\theta = \tau_y \\ -I_R\dot{\varphi}\dot{\theta}c\theta - I_R\ddot{\varphi}s\theta + (I_r c^2\theta + I_R s^2\theta)\ddot{\psi} + 2(I_R - I_r)\dot{\psi}\dot{\theta}c\theta s\theta = \tau_z \end{cases} \tag{۳-۷۷}$$

با مقایسه معادلات (۳-۷۷) و معادلات بدست آمده در مرجع [۱۴]، مشاهده می‌شود که معادلات یکسان استخراج شده‌اند.

یکی از روش‌های اعتبارسنجی برای ارزیابی مدل‌سازی انجام شده مقایسه نتایج شبیه‌سازی سیستم با داده‌های تجربی یا نتایج معتبر در مقالات علمی می‌باشد؛ لذا جهت اعتبار سنجی معادلات بدست آمده با استفاده از روش فوق در فصل بعد، از شبیه‌سازی دینامیکی سیستم و مقایسه آن با رفتار مورد انتظار از خواص ژیروسکوپ آزاد، استفاده خواهد شد.

۳-۵- مدل‌سازی گشتاور الکترومغناطیسی وارد بر روتور مغناطیس دائم ژیروسکوپ آزاد

بر اساس ساختمان کلی جستجوگر، سیم‌پیچ‌هایی در اطراف روتور مغناطیس دائم نصب می‌شوند، که با تغییر مقدار جریان عبوری از آن‌ها، می‌توان میدان مغناطیسی دلخواهی از روتور مغناطیس دائم جستجوگر عبور داد و به تبع آن، گشتاور الکترومغناطیسی را به روتور مغناطیس دائم وارد کرد و به این ترتیب می‌توان با تغییر جریان سیم‌پیچ‌ها، وضعیت راستای سامانه‌ی بینایی جستجوگر را نیز تغییر داد.



شکل (۳-۳) نمایی کلی از چگونگی سازوکار اعمال گشتاور الکترومغناطیسی به روتور جستجوگر

مطابق با شکل (۳-۳)، زوج سیم‌پیچ LZ1 و LZ2 از نظر فیزیکی به پوسته‌ی جستجوگر و یا به عبارتی دستگاه {B} متصل هستند و از نظر الکتریکی طوری باهم سری شده‌اند که درصورت عبور جریان i1 از آن‌ها، میدان یکدیگر را در جهت ZB تقویت می‌کنند.

به همین ترتیب زوج سیم‌پیچ LY1 و LY2 از نظر فیزیکی به پوسته‌ی جستجوگر و یا به عبارتی دستگاه {B} متصل هستند و از نظر الکتریکی طوری باهم سری شده‌اند که درصورت عبور جریان i2 از آن‌ها، میدان یکدیگر را در جهت YB تقویت می‌کنند.

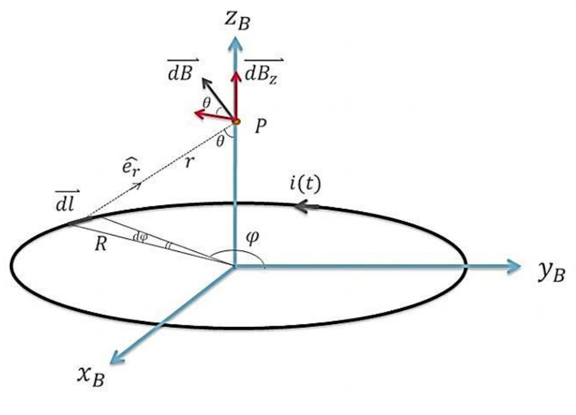
می‌توان مدل ساده‌شده روتور مغناطیس دائم جستجوگر را مشابه یک میله مغناطیس دائم با بردار مغناطیدگی $\vec{m}$ فرض کرد که بردار $\vec{m}$ مغناطیدگی دوقطبی روتور را نشان می‌دهد. این بردار همیشه در راستای دید جستجوگر است.

در این صورت گشتاور الکترومغناطیسی واردشده به روتور جستجوگر عبارت است از:

$$\vec{\tau}_{elctro} = \vec{m} \times \vec{B} \qquad (۷۸-۳)$$

رابطه بالا نشان می‌دهد ضرب خارجی بردار مغناطیدگی m روتور مغناطیس دائم، در بردار میدان مغناطیسی B حاصل از سیم‌پیچ‌ها، برابر گشتاوری است که به روتور اعمال خواهد شد.

برای به دست آوردن میدان مغناطیسی هر زوج سیم‌پیچ در محل روتور از روش بیوساوار مطابق شکل (۳-۴)، برای یک حلقه‌ی جریان شروع می‌کنیم.



شکل (۳-۴) قانون بیوساوار برای حلقه‌ی جریان

همان‌طور که اشاره شد، در اثر عبور جریان از المان dl برای یک حلقه‌ی جریان، چگالی میدان مغناطیسی در جهت Z و با مقدار $\overrightarrow{dB}$ ایجاد می‌شود که طبق قانون بیوساوار با توجه به رابطه (۲-۸۰) معادل است با:

$$\overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\overrightarrow{\imath\, dl}\times\hat{e}_r}{r^2} \qquad (۳-۷۹)$$

در رابطه برداری بالا، μ_0 ثابت تراوایی مغناطیسی است و مقدار آن برابر است با $4\pi\times10^{-7}$T.m/A.

همچنین $\hat{e}_r$ بردار یکه المان توزیع جریان از مرکز تا نقطه‌ی P است.

برای یافتن میدان کل B ناشی از تمامی توزیع جریان، باید روی همه‌ی اجزای جریان $i\overrightarrow{dl}$ انتگرال بگیریم:

$$\vec{B} = \int \overrightarrow{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{\imath\, dl}\times\hat{e}_r}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{\imath\, ds}\times\vec{r}}{r^3} \qquad (۳-۸۰)$$

میدان در جهت Z_B باعث ایجاد عمده گشتاور الکترومغناطیسی روی روتور می‌شود. بنابراین باید به محاسبه $\overrightarrow{B_z}$ بپردازیم که برابراست با:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{B_z} &= \int \overrightarrow{dB}.\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\overrightarrow{\imath\, dl}\times\hat{e}_r}{r^2}.\sin\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{i\,.dl\,.r}{r^3}.\sin\theta \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{i\,.R.d\varphi\,.r}{r^3}.\frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{i\,.R^2.d\varphi}{\left(\sqrt{R^2+Z^2}\right)^3} = \frac{R^2\mu_0}{2(R^2+Z^2)^{3/2}}\ i\end{aligned} \qquad (۳-۸۱)$$

دو سیم‌پیچ LZ1 و LZ2 را تصور کنید که به‌صورت متقارن روبروی هم قرار دارند، حال اگر هرکدام به تعداد عدد N دور حلقه سیم داشته باشند، مطابق شکل (۳-۳) میدان در وسط دو سیم‌پیچ، برابر همان $\overrightarrow{B_z}$ در رابطه‌ی (۳-۸۱) ضرب‌در ۲N خواهد شد. یعنی:

$$\overrightarrow{B_z} = \frac{R^2\mu_0 N}{(R^2+Z^2)^{3/2}}\ i \qquad (۳-۸۲)$$

با توجه به توضیحات ارائه شده، برای نوشتن میدان ایجاد شده توسط دو زوج سیم‌پیچ شکل (۳-۳) در مرکز دوران روتور مغناطیسی، می‌توانیم دو رابطه زیر را بنویسیم؛ که نسبتی از میدان مغناطیسی سیم‌پیچ‌ها است:

$$\overrightarrow{B_Z} = \frac{R^2 \mu_0 N}{(R^2+Z^2)^{3/2}}\, i_1$$
$$\overrightarrow{B_Y} = \frac{R^2 \mu_0 N}{(R^2+Y^2)^{3/2}}\, i_2 \qquad (۳-۸۳)$$

با فرض آنکه ابعاد سیم‌پیچ‌ها به اندازه‌ای بزرگ باشد که میدان در تمامی نقاط قرارگیری روتور، تقریباً یکسان باشد، می‌توان با دو پارامتر ثابت α و β رابطه‌ی (۳-۸۳) را ساده‌تر نیز نوشت، که عبارت است از:

$$\overrightarrow{B_Z} = \alpha\, i_1$$
$$\overrightarrow{B_Y} = \beta\, i_2 \qquad (۳-۸۴)$$

بردار میدان مغناطیسی در دستگاه لخت $\{B\}$ توصیف شده است و برابر است با:

$${}^{B}\vec{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta\, i_2 \\ \alpha\, i_1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۸۵)$$

توصیف رابطه‌ی (۳-۸۵) در دستگاه $\{G\}$ عبارت است از:

$${}^{G}\vec{B} = {}^{G}_{B}C\, {}^{B}\vec{B} \qquad (۳-۸۶)$$

که در رابطه‌ی (۳-۸۶) ، ماتریس ${}^{G}_{B}C$ نگاشت دستگاه$\{B\}$ به دستگاه$\{G\}$ است و برابراست با:

$${}^{G}_{B}C = {}^{G}_{E}C\,{}^{E}_{B}C = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\psi & s\psi & 0 \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \qquad (۳-۸۷)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳-۸۷) در رابطه‌ی (۳-۸۶)، ${}^{G}\vec{B}$ برابر است با:

$${}^{G}\vec{B} = {}^{G}_{B}C\, {}^{B}\vec{B} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ -s\psi & c\psi & 0 \\ s\theta c\psi & s\theta s\psi & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \beta\, i_2 \\ \alpha\, i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta c\theta s\psi\, i_2 - \alpha s\theta\, i_1 \\ \beta c\psi\, i_2 \\ \beta s\theta s\psi\, i_2 + \alpha c\theta\, i_1 \end{bmatrix} \qquad (۳-۸۸)$$

طبق رابطه‌ی (۳-۷۸)، گشتاور الکترومغناطیسی وارد شده بر روتور جستجوگر عبارت است از:

$$ {}^{G}\vec{\tau}_{elctro} = {}^{G}\overrightarrow{m} \times {}^{G}\overrightarrow{B} = \begin{bmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \beta c\theta s\psi\, i_2 - \alpha s\theta\, i_1 0 \\ \beta c\psi\, i_2 \\ \beta s\theta s\psi\, i_2 - \alpha c\theta\, i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -m\beta s\theta s\psi\, i_2 - m\alpha c\theta\, i_1 \\ m\beta c\psi\, i_2 \end{bmatrix} \qquad (۸۹\text{-}۳) $$

۳-۶- مدل گشتاور اصطکاکی لولاهای طوقه‌ها و روتور

برای آنکه اثر گشتاور اصطکاکی موجود در مفاصل لولای طوقه‌ها در مدل‌سازی لحاظ شود، این گشتاورها را در سه قسمت اتصال طوقه‌ها، متناسب با سرعت زاویه‌ای اتصالات، تعریف می‌کنیم و مطابق رابطه زیر نشان می‌دهیم:

$$ {}^{G}\vec{\tau}_{fr} = {}^{G}_{E}C\, {}^{E}\vec{\tau}_{fr1} + {}^{G}\vec{\tau}_{fr2} + {}^{G}\vec{\tau}_{fr3} \qquad (۹۰\text{-}۳) $$

که در رابطه‌ی (۳-۹۰):

${}^{G}\vec{\tau}_{fr}$: کل گشتاورهای اصطکاکی واردشده به لولاهای جستجوگر، توصیف شده در دستگاه $\{G\}$.

${}^{E}\vec{\tau}_{fr1}$: گشتاور اصطکاکی بین طوقه‌ی خارجی با بدنه، توصیف شده در دستگاه $\{E\}$.

${}^{G}\vec{\tau}_{fr2}$: گشتاور اصطکاکی بین طوقه‌ی داخلی با طوقه‌ی خارجی، توصیف شده در دستگاه $\{G\}$.

${}^{G}\vec{\tau}_{fr3}$: گشتاور اصطکاکی بین طوقه‌ی داخلی با روتور، توصیف شده در دستگاه $\{G\}$.

مطابق رابطه‌ی (۳-۹۰)، مدل گشتاور اصطکاکی لولاهای طوقه‌ها و روتور عبارت است از:

$$ {}^{G}\vec{\tau}_{fr} = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -e\dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -f\dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -g\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\dot{\psi} s\theta - g\dot{\varphi} \\ -f\dot{\theta} \\ -e\dot{\psi} c\theta \end{bmatrix} \qquad (۹۱\text{-}۳) $$

که در آن e و f و g ضرایب ثابتی هستند که به مشخصات اصطکاک لولاها وابسته هستند.

۳-۷- مدل کامل جستجوگر با ترکیب مدل بخش مکانیکی و الکترومغناطیسی

برآیند گشتاورهای وارد شده توسط میدان مغناطیسی به روتور و گشتاور ناشی از اصطکاک لولاها که در دستگاه $\{G\}$ توصیف شده است با جمع جبری دو رابطه‌ی (۳-۸۹) و (۳-۹۱) به دست می‌آید:

$$ {}^{G}\vec{\tau} = {}^{G}\vec{\tau}_{elctro} + {}^{G}\vec{\tau}_{fr} = \begin{bmatrix} e\dot{\psi} s\theta - g\dot{\varphi} \\ -f\dot{\theta} - m\beta s\theta s\psi\, i_2 - m\alpha c\theta\, i_1 \\ -e\dot{\psi} c\theta + m\beta c\psi\, i_2 \end{bmatrix} \qquad (۹۲\text{-}۳) $$

با توجه به رابطه ۳-۹۱ که تمامی گشتاورهای خارجی وارد بر دینامیک جستجوگر را نشان می‌دهد و همچنین معادلات دینامیکی که از روش‌های نیوتن و لاگرانژ به دست آمد، معادلات الکترودینامیکی جستجوگر را می‌توان به‌طور کامل نوشت که این موضوع در ادامه تشریح شده است.

τ_z در معادلات دینامیکی جستجوگر در جهت محور z دستگاه E به دست آمده است و باید به دستگاه G نگاشته شود.

بنابراین توصیف τ_z در دستگاه G برابر است با :

$$ {}^{G}\vec{\tau}_z = {}^{G}_{E}C\,{}^{E}\vec{\tau}_z = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_z s\theta \\ 0 \\ \tau_z c\theta \end{bmatrix} \tag{۳-۹۳} $$

و لذا بردار گشتاورهای دینامیکی در دستگاه G عبارت است از:

$$ \begin{aligned} {}^{G}\vec{\tau}_{dynamice} &= {}^{G}_{E}C\,{}^{E}\vec{\tau}_z + \begin{bmatrix} \tau_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_y \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\theta & 0 & -s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_x - \tau_z s\theta \\ \tau_y \\ \tau_z c\theta \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۳-۹۴} $$

با مساوی قرار دادن رابطه‌ی (۳-۹۲) با (۳-۹۴)، مدل الکترومغناطیسی جستجوگر عبارت است از:

$$ \begin{bmatrix} \tau_x - \tau_z s\theta \\ \tau_y \\ \tau_z c\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e\dot{\psi} s\theta - g\dot{\varphi} \\ -f\dot{\theta} - m\beta s\theta s\psi\, i_2 - m\alpha c\theta\, i_1 \\ -e\dot{\psi} c\theta + m\beta c\psi\, i_2 \end{bmatrix} \tag{۳-۹۵} $$

در رابطه‌ی (۳-۹۵) گشتاورهای τ_x، τ_y و τ_z مطابق آنچه که در بخش‌های ۳-۳-۳ و ۳-۳-۴ به دست آمد عبارتنداز:

$$ \begin{cases} \tau_x = I_R\ddot{\varphi} - I_R\ddot{\psi} s\theta - I_R\dot{\psi}\dot{\theta} c\theta \\ \tau_y = (I_r + I_{g2})\ddot{\theta} + I_R\dot{\psi}\dot{\varphi} c\theta - (I_{G2} - I_{g2} + I_R - I_r)\dot{\psi}^2 s\theta c\theta \\ \tau_z = -I_R\dot{\varphi}\dot{\theta} c\theta - I_R\ddot{\varphi} s\theta + (I_{g1} + (I_{g2} + I_r)c^2\theta + (I_{G2} + I_R)s^2\theta)\ddot{\psi} + 2(I_{G2} + I_R - I_{g2} - I_r)\dot{\psi}\dot{\theta} c\theta s\theta \end{cases} \tag{۳-۹۶} $$

۳-۸- بیان معادلات جستجوگر با معادلات حالت

با انتخاب متغیرهای حالت $x_1 = \psi$، $x_2 = \dot{\psi}$، $x_3 = \theta$، $x_4 = \dot{\theta}$، $x_5 = \varphi$ و $x_6 = \dot{\varphi}$، می‌توان معادلات (۳-۶) را به صورت معادلات زیر نشان داد:

$$\dot{x_1} = x_2 \tag{۹۷-۳}$$

،

$$\dot{x_3} = x_4 \tag{۹۸-۳}$$

و

$$\dot{x_5} = x_6 \tag{۹۹-۳}$$

و با جایگذاری متغیرهای حالت (۳-۹۹) در رابطه‌ی (۳-۹۴) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \tau_x - \tau_z s(x_3) \\ \tau_y \\ \tau_z c(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e x_2 s(x_3) - g x_6 \\ -f x_4 - m\beta s(x_3) s(x_1)\, i_2 - m\alpha c(x_3)\, i_1 \\ -e x_2 c(x_3) + m\beta c(x_1)\, i_2 \end{bmatrix} \tag{۱۰۰-۳}$$

که در رابطه‌ی (۳-۱۰۰):

$$\tau_x = I_R \dot{x_6} - I_R \dot{x_2} s(x_3) - I_R x_2 x_4 c(x_3) \tag{۱۰۱-۳}$$

،

$$\tau_y = \left(I_r + I_{g2} \right) \dot{x_4} + I_R x_2 x_6 c(x_3) - \left(I_{G2} - I_{g2} + I_R - I_r \right) {x_2}^2 s(x_3) c(x_3) \tag{۱۰۲-۳}$$

و

$$\begin{aligned} \tau_z = {} & -I_R x_6 x_4 c(x_3) - I_R \dot{x_6} s(x_3) \\ & + (I_{g1} + \left(I_{g2} + I_r\right) c^2(x_3) + (I_{G2} + I_R) s^2(x_3)) \dot{x_2} \\ & + 2\left(I_{G2} + I_R - I_{g2} - I_r\right) x_2 x_4 c(x_3) s(x_3) \end{aligned} \tag{۱۰۳-۳}$$

آنگاه معادلات حالت سیستم:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \dot{x_2} = f_1 + g_1 * i_2 \\ \dot{x_3} = x_4 \\ \dot{x_4} = f_2 + g_2 * i_1 + g_3 * i_2 \\ \dot{x_5} = x_6 \\ \dot{x_6} = f_3 + g_4 * i_2 \end{cases} \tag{۳-۱۰۴}$$

در روابط (۳-۱۰۴):

$$f_1 = \frac{(-g x_6 s(x_3)+x_4 c(x_3)(I_R x_6-(2I_{G2}+I_R)x_2 s(x_3))+x_2(-e+(I_{g2}+I_r)x_4 s(2x_3)))}{(I_{g1}+I_{G2}+(I_{g2}-I_{G2}+I_r)c^2(x_3))} \tag{۳-۱۰۵}$$

،

$$g_1 = \frac{2\beta m c(x_1)(1+s^2(x3))}{c(x3)(2I_{g1}+I_{g2}+I_{G2}+Ir+\left(I_{g2}-I_{G2}+Ir\right)c(2x3))} \tag{۳-۱۰۶}$$

،

$$f_2 = \frac{-\ I_R x_2 x_6 c(x_3)+\left(\ I_{G2}-\ I_{g2}+\ I_R-\ I_r\right)x_2{}^2 s(x_3)c(x_3)-f x_4}{\left(\ I_r+I_{g2}\right)} \tag{۳-۱۰۷}$$

،

$$g_2 = -\frac{m\alpha c(x_3)}{\left(\ I_r+I_{g2}\right)} \tag{۳-۱۰۸}$$

،

$$g_3 = -\frac{m\beta s(x_3)s(x_1)}{\left(\ I_r+I_{g2}\right)} \tag{۳-۱۰۹}$$

،

$$\begin{aligned} f_3 = &-\frac{\left(g\left(I_{g1}+I_{G2}+I_R\right)x_6+g\left(I_{g2}-I_{G2}+I_r-I_R\right)x_6 c^2(x_3)+\left(I_{g2}-I_{G2}+I_r-I_R\right)I_R x_2 x_4 c^3(x_3)\right)}{\left(I_R\left(I_{g1}+I_{G2}+\left(I_{g2}-I_{G2}+I_r\right)c^2(x_3)\right)\right)} \\ &-\frac{\left(e I_R x_2 s(x_3)-I_R x_4 c(x_3)\left(\left(I_{g1}+2I_{g2}-I_{G2}+2I_r-I_R\right)x_2+I_R x_6 s(x_3)\right)\right)}{\left(I_R\left(I_{g1}+I_{G2}+\left(I_{g2}-I_{G2}+I_r\right)c^2(x_3)\right)\right)} \end{aligned} \tag{۳-۱۱۰}$$

و

$$g4 = \frac{2\beta m c(x_1)(I_{g1}+I_{g2}+I_r+I_R+(-I_{g2}+I_{G2}-I_r+I_R)s^2(x_3))s(x_3)}{I_R c(x_3)(2I_{g1}+I_{g2}+I_{G2}+I_r+(I_{g2}-I_{G2}+I_r)c(2x_3))} \tag{۳-۱۱۱}$$

۳-۹- نتیجه‌گیری

در این فصل، معادلات دینامیکی و الکترومغناطیسی جستجوگر به صورت مجزا استخراج گردید و ترکیب معادلات دینامیکی و الکترومغناطیسی، معادلات کامل جستجوگر را مشخص نمود. صحت معادلات دینامیکی جستجوگر با نتایج تحقیق در یکی از مراجع در شرایط یکسان، مقایسه گردید که نتیجه آن، یکسان بودن معادلات تحقیق حاضر را با تحقیق قبلی نشان داد. همچنین به دلیل قرارگیری راستای سامانه‌ی بینایی جستجوگر در جهت یک محور از دستگاه طوقه داخلی، توصیف زوایای اجزاء بر اساس مختصات اولر و از دید ناظر قرار گرفته در دستگاه مختصات چسبیده به طوقه داخلی انجام پذیرفته است.

فصل چهارم:

شبیه‌سازی و کنترل

۴-۱- مقدمه

در فصل قبل معادلات دینامیکی و الکترومغناطیسی جستجوگر استخراج و با ترکیب آن‌ها معادلات کامل جستجوگر تعیین شد. در این فصل مدل به دست آمده از جستجوگر شبیه‌سازی می‌شود و خواص ژیروسکوپی سیستم مشاهده خواهد شد. همچنین نتیجه اعمال گشتاورهای مغناطیسی به روتور جستجوگر بررسی خواهد شد و می‌توان با مقایسه پاسخ شبیه‌سازی‌ها با پاسخ مورد انتظار از یک جستجوگر واقعی، صحت معادلات به دست آمده را ارزیابی کرد. با استفاده از مشاهده رفتار پاسخ‌های مربوط به مدل شبیه‌سازی‌شده و مدل خطی‌شده معادلات جستجوگر حول نقطه‌ی کار سیستم، به طراحی کنترل‌کننده مناسبی برای جستجوگر پرداخته خواهد شد. در ادامه با تعریف الگوی پویش معروفی به نام الگوی گل رز[1]، کنترل‌کننده‌های طراحی شده مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

۴-۲- شبیه‌سازی مدل

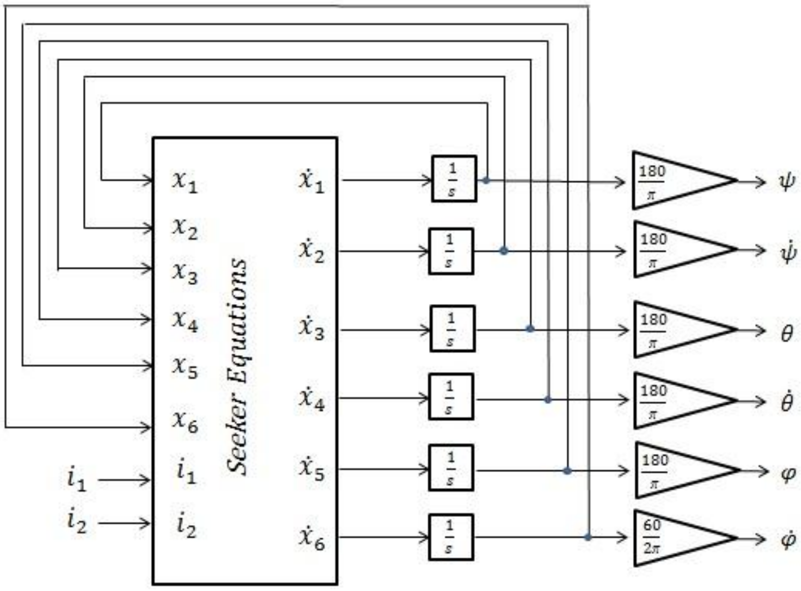
این بخش به شبیه‌سازی مدل جستجوگر برای شناخت و شناسایی رفتار آن اختصاص دارد. از مشاهده رفتار مدل در محیط شبیه‌سازی، در بخش کنترل جهت طرح کنترل‌کننده مناسب استفاده خواهد شد.

۴-۲-۱- دیاگرام بلوکی

در این قسمت در محیط شبیه‌سازی نرم‌افزار متلب، معادلات الکترودینامیکی جستجوگر یعنی روابط (۳-۱۰۴)، شبیه‌سازی خواهد شد. شکل (۴-۱) دیاگرام بلوکی شبیه‌سازی‌شده جستجوگر را نشان می‌دهد.

---

[1] Rosette pattern



شکل (۴-۱) دیاگرام بلوکی جستجوگر بر اساس معادلات حالت روابط (۳-۱۰۴)

در شکل (۴-۱)، i1 و i2 جریان‌های ورودی سیم‌پیچ‌های جستجوگر برحسب آمپر هستند. زوایای دوران و سرعت زاویه‌ای‌ها و سرعت چرخش روتور نیز خروجی‌های سیستم جستجوگر هستند.

۴-۲-۲- تعیین ثابت‌ها و ضرایب جستجوگر

جهت شبیه‌سازی مدل جستجوگر نیاز به مقادیر عددی ثابت‌ها و ضرایب موجود در معادلات سیستم جستجوگر است، مقادیر این پارامترها برای یک نمونه جستجوگر مورد مطالعه در جدول (۴-۱) آمده است.

جدول (۴-۱) مقادیر پارامترها برای یک نمونه جستجوگر مورد مطالعه

واحد	مقدار	نوع ثابت
$Kg.m^2$	$360 \times 1e-6$	I_R
$Kg.m^2$	$224 \times 1e-6$	I_r
$Kg.m^2$	$35 \times 1e-6$	I_{G1}
$Kg.m^2$	$25 \times 1e-6$	I_{g1}
$Kg.m^2$	$35 \times 1e-6$	I_{G2}
$Kg.m^2$	$25 \times 1e-6$	I_{g2}
Rev.T/A	$3.5 \times 1e-3$	α
Rev.T/A	$3.5 \times 1e-3$	β
-	$10 \times 1e-4$	e
-	$10 \times 1e-4$	f
-	$57 \times 1e-7$	g
N.m/T	12	m

۴-۲-۳- تعیین شرایط اولیه جستجوگر

در ابتدای عملکرد جستجوگر، لازم است که روتور جستجوگر با سرعت دورانی زیادی چرخش کند. فنری قوی که از قبل در داخل سامانه‌ی جستجوگر جمع شده است، وظیفه تهیه نیروی محرکه لازم جهت چرخش اولیه روتور را دارد. هنگام آزاد شدن نیروی فنر، روتور جستجوگر به سرعت چرخش تا حدود ۴۲۰۰ دور در دقیقه خواهد رسید. لولاهای جستجوگر تا رسیدن روتور به سرعت نامی‌اش قفل‌اند به گونه‌ی که دستگاه‌های مختصات تعریف شده اجزاء جستجوگر، شامل دستگاه‌های $\{B\}$، $\{E\}$ و $\{G\}$ بر هم منطبق‌اند، لذا در زمان ابتدای عملیات پویش ($t=0$)، مقادیر ψ و θ صفر، هستند.

به این ترتیب شرایط اولیه متغیرهای حالت جستجوگر عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1(t=0) = \psi(t=0) = 0 \\ x_2(t=0) = \dot{\psi}(t=0) = 0 \\ x_3(t=0) = \theta(t=0) = 0 \\ x_4(t=0) = \dot{\theta}(t=0) = 0 \\ x_5(t=0) = \varphi(t=0) = 0 \\ x_6(t=0) = \dot{\varphi}(t=0) = 4200\ \text{RPM} \end{cases} \quad (۱-۴)$$

۴-۲-۴- تعیین محدودیت‌های عملکرد جستجوگر

با توجه به ظاهر سازوکار دینامیکی جستجوگر که در شکل (۳-۱) نمایش داده شد، بیشینه تغییر زاویه طوقه‌ها حدود $-\pi/3$ تا $\pi/3$ رادیان برای تمام موشک‌ها محاسبه شده است[۱۹]. که در جستجوگر مورد مطالعه این تحقیق بیشینه تغییر زاویه طوقه‌ها حدود $-\pi/12$ تا $\pi/12$ رادیان است.

محدوده i1 و i2 که جریان‌های اعمالی به سیم‌پیچ‌های جستجوگراند، در این تحقیق از منفی چهار آمپر تا مثبت چهار آمپر در نظر گرفته شده است که این محدوده با توجه به توان منبع تغذیه موجود در موشک‌ها و بیشترین جریان مورد نیاز برای ایجاد گشتاور مغناطیسی لازم به روتور انتخاب می‌شود.

لازم به توضیح است که با آزاد شدن قفل روتور ژیروسکوپ آزاد جستجوگر و سپری شدن زمان، بعد از اینکه روتور با سرعت نامی به چرخش درآمد، به‌تدریج از سرعت چرخش روتور کاسته خواهد شد. طول عمر عملکرد یک جستجوگر در نوعی پرتابه، از آغاز آزاد شدن قفل روتور ژیروسکوپ تا لحظه‌ی برخورد پرتابه به هدف حدود ۳۰ ثانیه است؛ بنابراین جستجوگرها طوری طراحی می‌شوند که افت دوران روتور در طول این زمان، تأثیر چندانی بر عملکرد جستجوگر نداشته باشد. به این ترتیب برای سادگی در تحلیل عملکرد جستجوگر می‌توان سرعت دوران روتور را تقریباً ثابت فرض کرد.

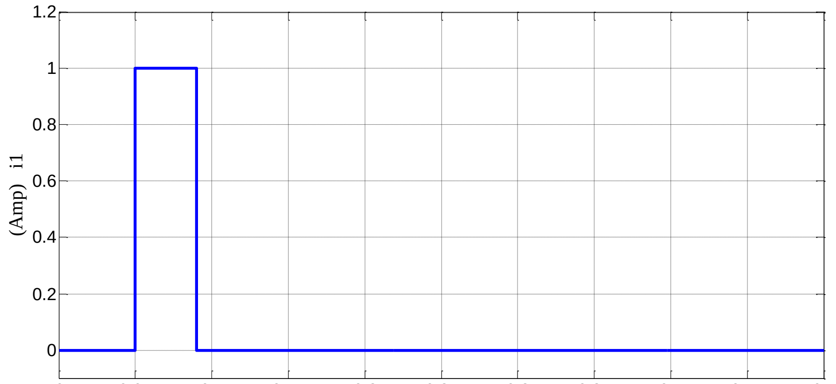
۴-۲-۵- مشاهده خواص ژیروسکوپی مدل جستجوگر با توجه به شبیه‌سازی

همان‌طور که در فصل دوم در مورد خواص قابل‌مشاهده ژیروسکوپ توضیح داده شد، به‌طورکلی خواصی که از ژیروسکوپ معرفی شده‌اند عبارت‌اند از: حرکت تقدیمی، صلبیت و رقص‌محوری. به دلیل

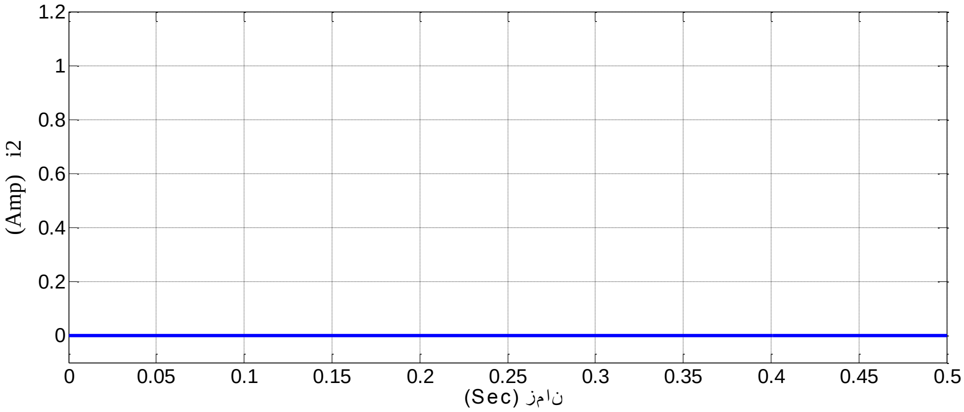
وجود این خواص در ژیروسکوپ آزاد موجود در جستجوگر، مشاهده و بررسی آن‌ها در مدل به‌دست‌آمده، می‌تواند کمک خوبی در جهت اعتبار سنجی و شناخت بهتر رفتار جستجوگر داشته باشد.

۴-۲-۵-۱- حرکت تقدیمی

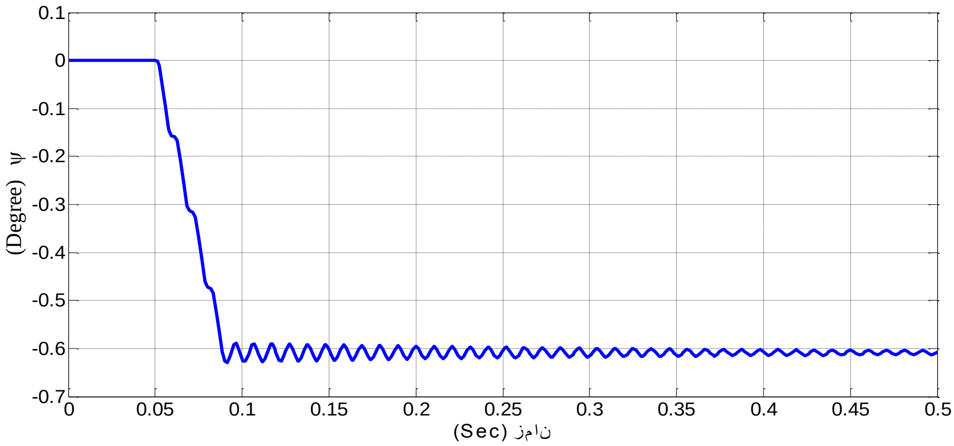
بر اساس خاصیت حرکت تقدیمی ژیروسکوپ که در بخش ۲-۸-۴ اشاره شد، می‌توان گفت که تأثیر گشتاور وارده به محور چرخش قاب بیرونی، باعث دوران روتور حول محور چرخش قاب داخلی می‌شود؛ و بالعکس، اعمال گشتاور حول محور قاب داخلی، باعث چرخش روتور حول محور قاب بیرونی خواهد شد. لذا برای مثال اگرچه طبق رابطه‌ی (۳-۸۳)، جریان مثبت i1 به روتور، گشتاور الکترومغناطیسی در جهت عکس زاویه‌ی θ را می‌دهد، اما به دلیل خاصیت حرکت تقدیمی که روتور جستجوگر به عنوان یک ژیروسکوپ دارد، انتظار آن را داریم که اندازه ψ افزایش یابد. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند، مطابق آنچه که گفته شد، اعمال جریان مثبت i1، اندازه ψ را افزایش می‌دهد، شکل‌های (۴-۲) تا (۴-۶)، نتیجه این شبیه‌سازی را نشان می‌دهند.



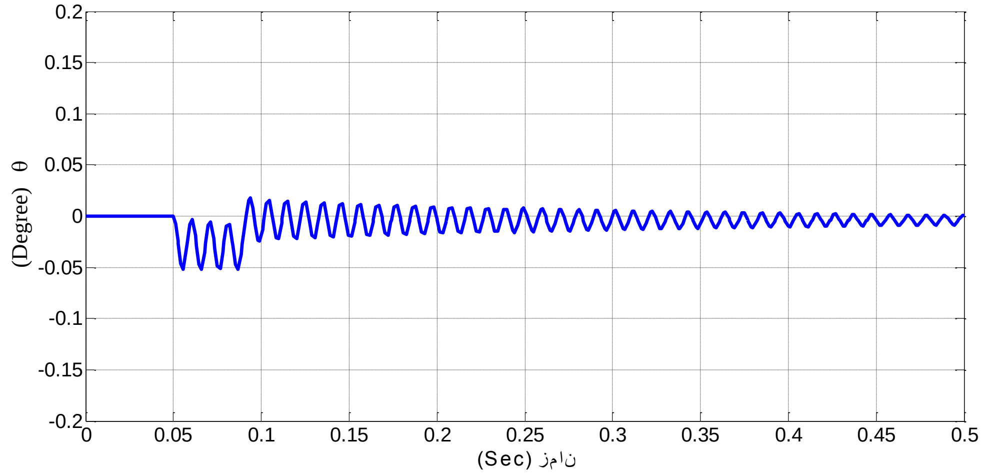
شکل (۴-۲) پالس مثبت اعمالی به ورودی i1



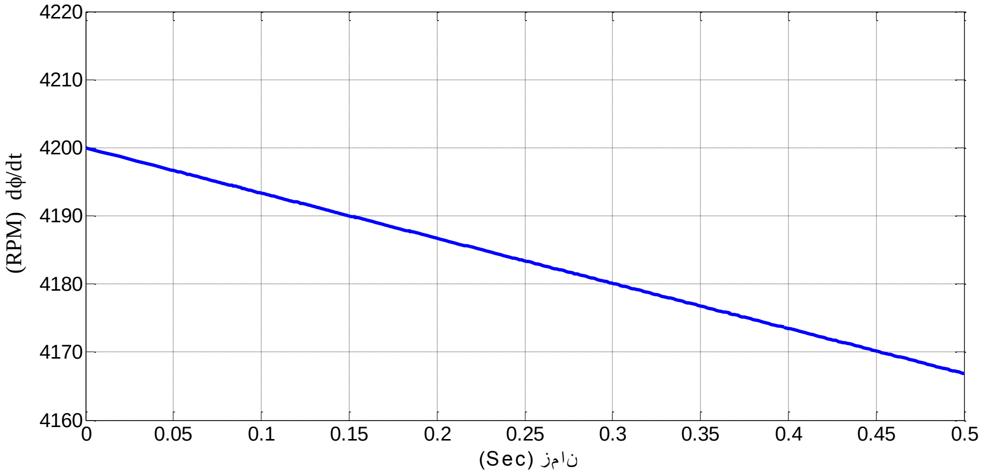
شکل (۴-۳) ورودی i2



شکل (۴-۴) تغییرات ψ



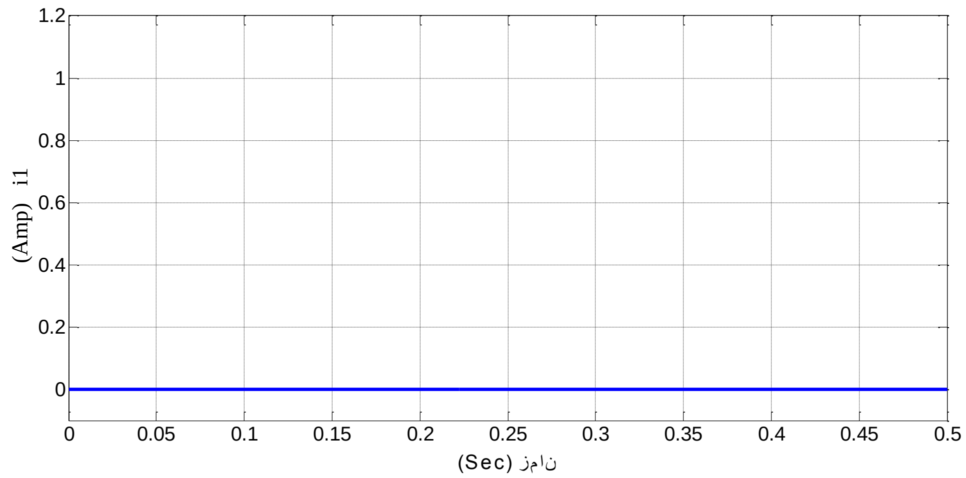
شکل (۴-۵) تغییرات θ



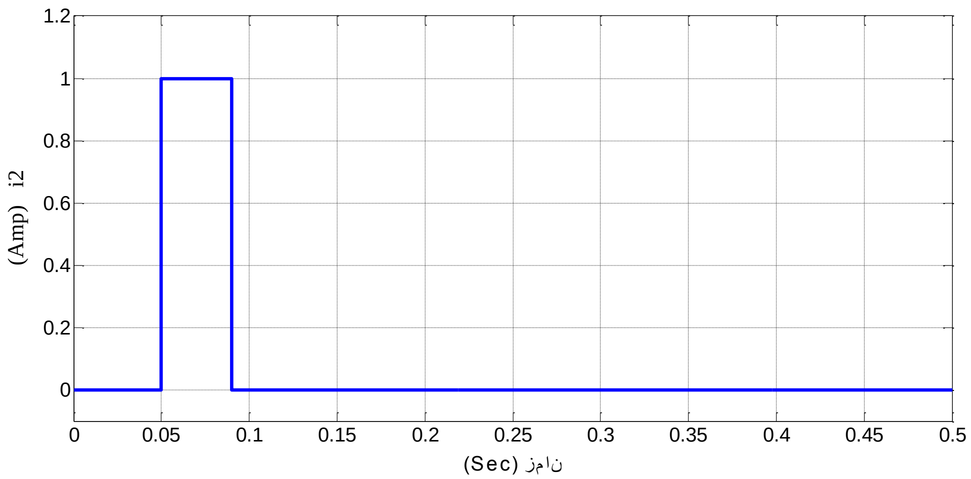
شکل (۴-۶) تغییرات dφ/dt

شکل (۴-۲) و (۴-۳) نشان‌دهنده جریان‌های ورودی به جستجوگر هستند. در شکل (۴-۴) مشاهده می‌شود که مطابق انتظار در زمان اعمال پالس جریان به ورودی i1 (شکل (۴-۲))، اندازه ψ افزایش می‌یابد و شکل (۴-۵) نشان می‌دهد که خروجی θ رشدی ندارد. لازم به ذکر است مطابق شکل (۴-۶)، سرعت چرخش روتور به تدریج با سپری شدن زمان، کاهش می‌یابد.

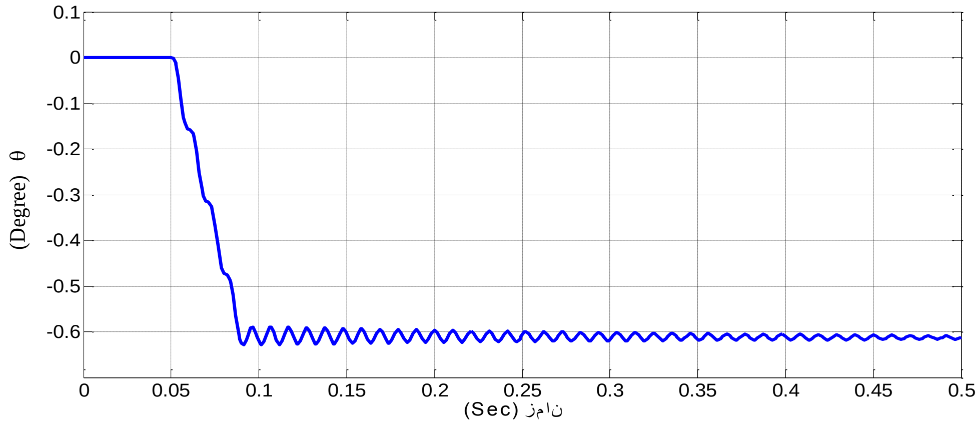
همچنین با توجه به توضیحات فوق، به ازای اعمال جریان مثبت i2، انتظار داریم در شبیه‌سازی‌ها و بر اساس بحث حرکت تقدیمی، اندازه θ افزایش یابد. شکل‌های (۴-۷) تا (۴-۱۰) نتیجه شبیه‌سازی اعمال جریان به i2 را نشان می‌دهند که در این حالت نیز پاسخ‌ها مطابق انتظار به دست آمده‌اند.



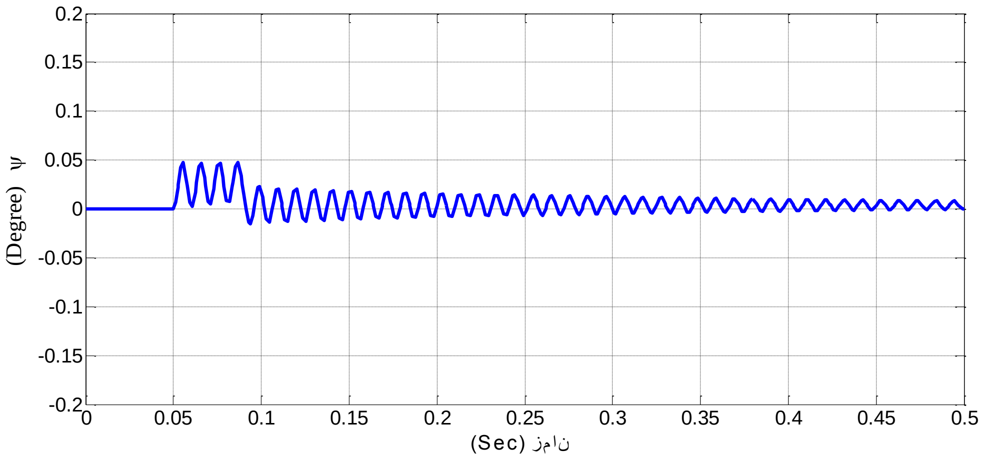
شکل (۴-۷) ورودی i1



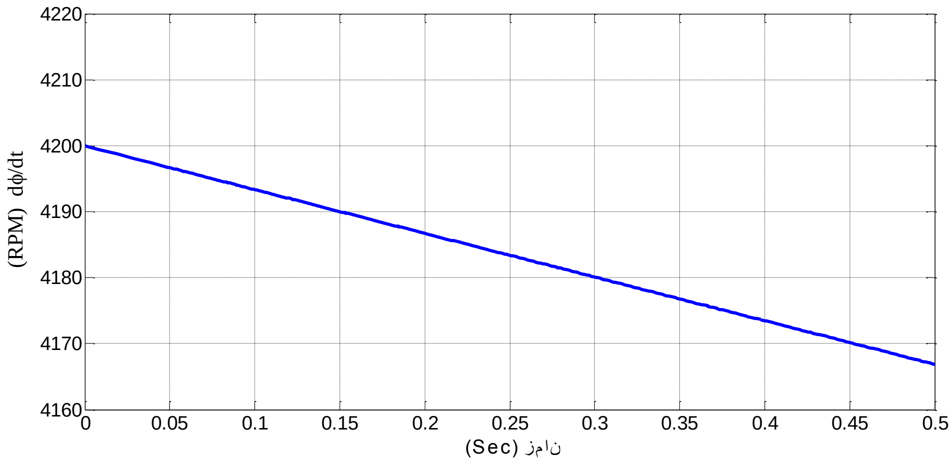
شکل (۴-۸) پالس مثبت اعمالی به ورودی i2



شکل (۴-۹) تغییراتθ



شکل (۴-۱۰) تغییراتψ



شکل (۴-۱۱) تغییرات dφ/dt

۴-۲-۵-۲- صلبیت

همان‌طور که در بخش ۲-۸-۴ اشاره شد، خاصیت حفظ و پایداری ژیروسکوپ حول محور چرخشش را خاصیت صلبیت ژیروسکوپ می‌نامند. حال در این بخش برای مشاهده این خاصیت در مدل جستجوگر، پالس جریان مثبت برابر یک آمپر را به ورودی i2 اعمال نموده و انتظار خواهیم داشت که گشتاور ایجاد شده از این جریان، باعث تغییر در محور دوران روتور در جهت عکس θ شود. انتظار بعدی از رفتار سیستم این است که نباید بعد از قطع این جریان، مقدار جدید متغیر θ، بدون اعمال جریان‌های بعدی تغییری کند. با برقراری این دو انتظار یا خاصیت فوق، گفته خواهد شد که روتور در حالتی که گشتاوری از خارج به آن اعمال نشود، محور چرخش خود را طبق خاصیت صلبیت حفظ می‌کند، به عبارتی زاویه‌های ψ و θ وقتی که جریانی به ورودی‌های i1 و i2 وارد نشود، با نوسانات ضعیفی که به خاطر خاصیت رقص محوری ژیروسکوپی است حفظ خواهند ماند. شکل‌های (۴-۵) و (۴-۹) گویای وجود خاصیت صلبیت در مدل جستجوگر شبیه‌سازی‌شده هستند. چراکه در قبل و بعد اعمال جریان‌ها i1 و i2، خروجی‌های ψ و θ مربوط به آن‌ها افزایش و یا کاهشی ندارد.

۴-۲-۵-۳- رقص محوری

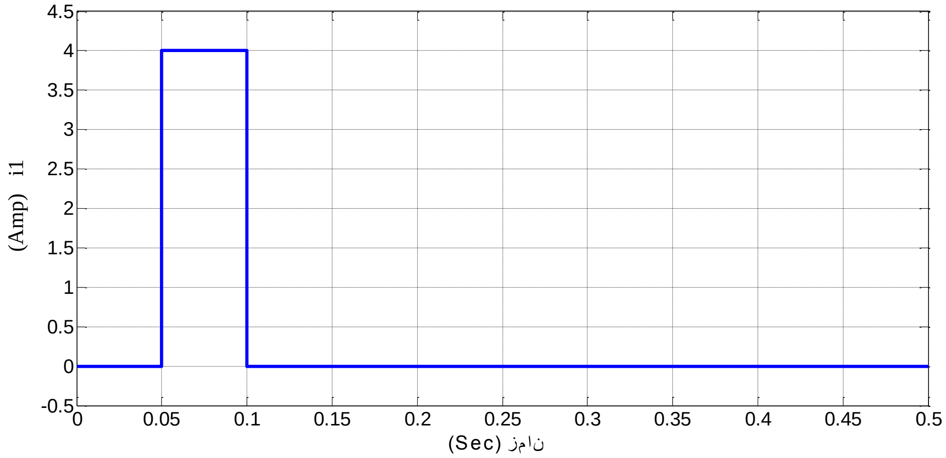
نوساناتی که به شکل سینوسی با توجه با پارامترهای ژیروسکوپ آزاد همچون IR، Ir و ws، در نتایج شبیه‌سازی‌های مربوط به حرکت تقدیمی و صلبیت، در پاسخ‌ها قابل مشاهده است را خاصیت رقص محوری ژیروسکوپ می‌نامند. این نوسانات به خاطر اعمال تحریک پالسی به i1 و i2، با دامنه بیشتری در شبیه‌سازی‌ها مشاهده می‌شوند. این نوسانات ناخواسته هستند و در بحث کنترل‌کننده جستجوگر، کنترل‌کننده باید بتواند این نوسانات را تا حد امکان حذف کند. لازم به ذکر است که فرکانس این نوسانات در پاسخ‌های مشاهده شده در این تحقیق حدود ۶۸۴ رادیان بر ثانیه است.

۴-۲-۶- اثر ضرایب اصطکاکی لولاها و لختی‌های دورانی طوقه‌ها در پاسخ سیستم جستجوگر

در این تحقیق ضرایب اصطکاکی لولاها و لختی‌های دورانی طوقه‌های خارجی و داخلی جستجوگر در مدل‌سازی جستجوگر در نظر گرفته شده که تاکنون در تحقیقات قبلی از آن‌ها صرف‌نظر کرده‌اند، لذا در تحقیق حاضر مدلی دقیق‌تر بدست آمده. حال می‌توان به کمک مدل بدست آمده، با بررسی ضرایب اصطکاکی لولاها و لختی‌های دورانی طوقه‌ها روی مدل جدید، از اثرات این ضرایب و لختی‌ها بر سیستم جستجوگر آگاه شد.

از نتایج بدست آمده در بخش ۴-۲-۵-۱ بدیهی است که ضریب اصطکاک g مربوط به لولای محور دوران روتور باعث کاهش تدریجی سرعت چرخش روتور ($d\varphi/dt$) خواهد شد، اما در خصوص اثرات سایر ضرایب یعنی ضرایب اصطکاک لولاهای جهت‌دهی طوقه‌ها (e و f) و همچنین لختی‌های دورانی طوقه‌های داخلی و خارجی (I_{g1}، I_{g2}، I_{G1} و I_{G2}) بر سیستم، می‌توان آزمایشاتی تعریف کرد. چهار آزمایش با شرایطی متفاوت در جهت بررسی ضرایب اصطکاک لولاهای جهت‌دهی طوقه‌ها و همچنین لختی‌های دورانی طوقه‌های داخلی و خارجی بر سیستم تعریف شده که در ذیل نتایج آن ارائه شده:

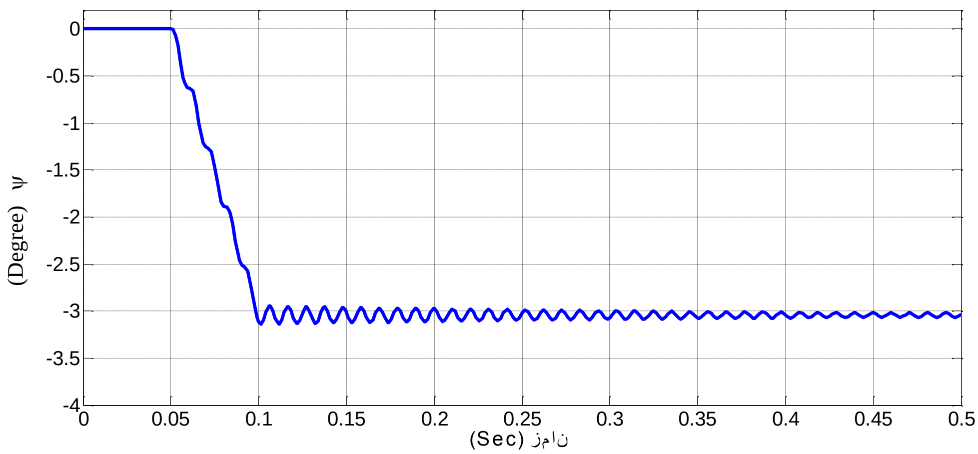
در تمامی چهار آزمایش الف تا د فرض می‌شود که پالس جریان مثبتی به شکل (۴-۱۲) به ورودی i1 سیستم شکل (۴-۱) اعمال شده است.



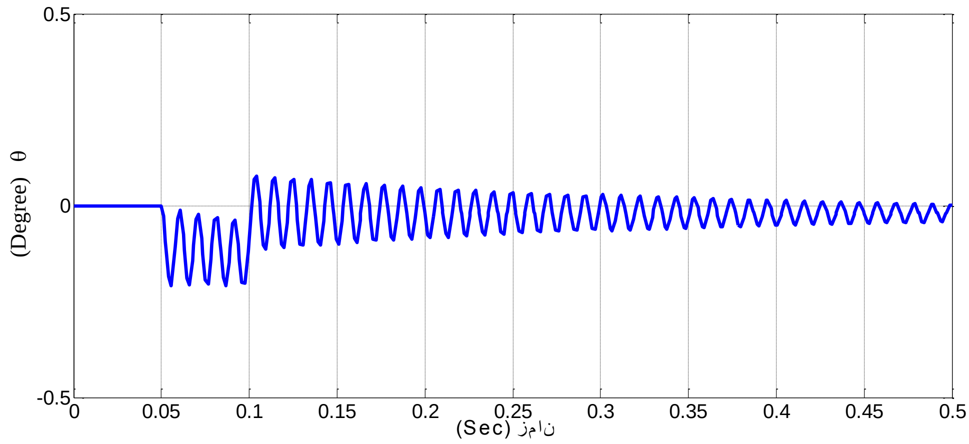
شکل(۴-۱۲) پالس مثبت اعمالی به ورودی i1

آنگاه:

الف) اگر ضرایب اصطکاک لولاها (e و f) و مقادیر لختی‌های دورانی طوقه‌ها (I_{g1}، I_{g2}، I_{G1} و I_{G2}) مطابق جدول (۴-۱) در مدل لحاظ شوند، پاسخ‌های دو خروجی سیستم مطابق شکل‌های (۴-۱۳) و (۴-۱۴) مشاهده خواهند شد.

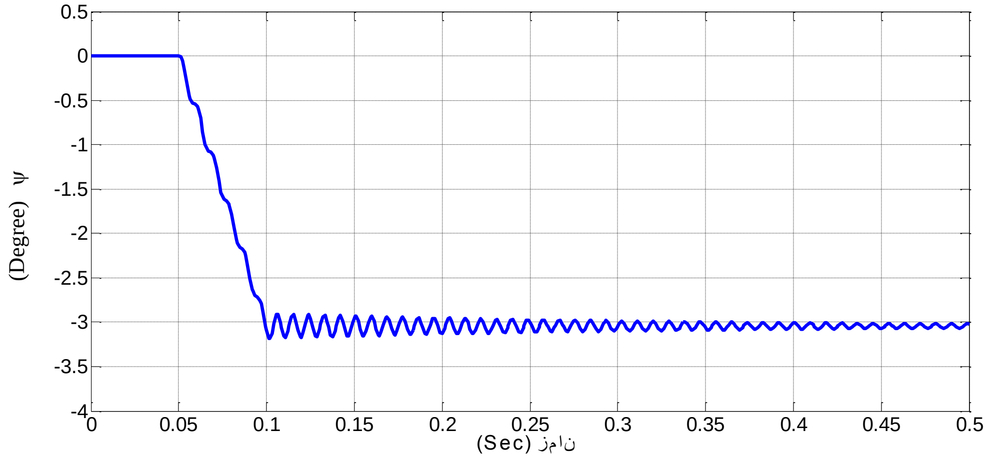


شکل(۴-۱۳) تغییرات ψ

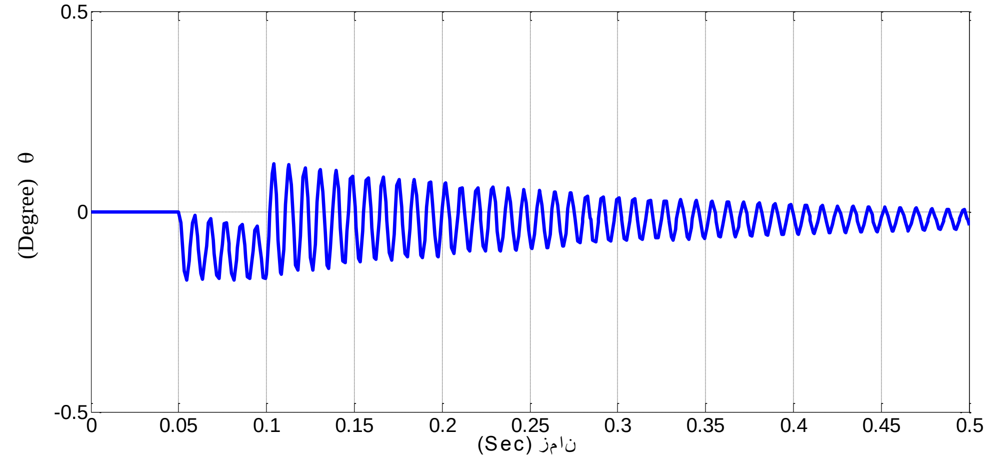


شکل(۴-۱۴) تغییرات θ

ب) اگر مطابق جدول (۴-۱) ضرایب اصطکاکی لولاها (e و f) لحاظ شده و مقادیر لختی‌های دورانی طوقه‌ها (I_{g1}، I_{g2}، I_{G1} و I_{G2}) در مدل سیستم حذف شوند، پاسخ‌های دو خروجی سیستم مطابق شکل‌های (۴-۱۵) و (۴-۱۶) خواهند شد.

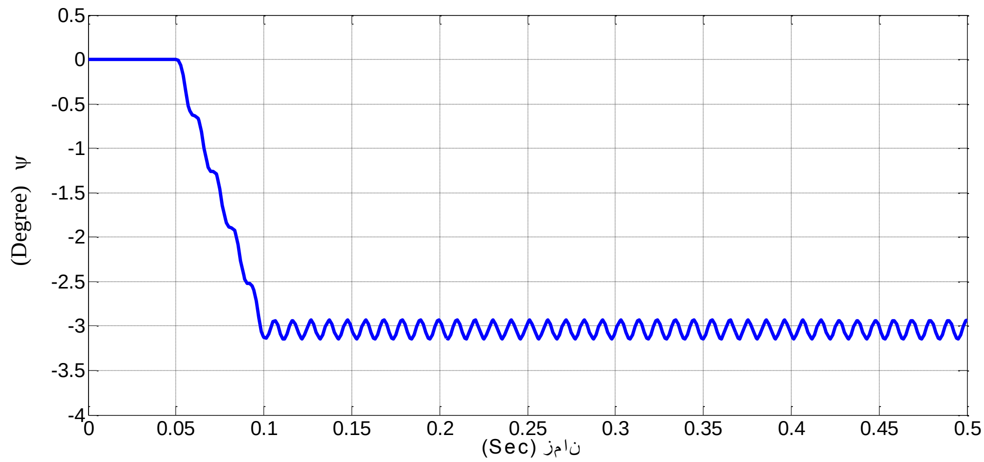


شکل(۴-۱۵) تغییرات ψ

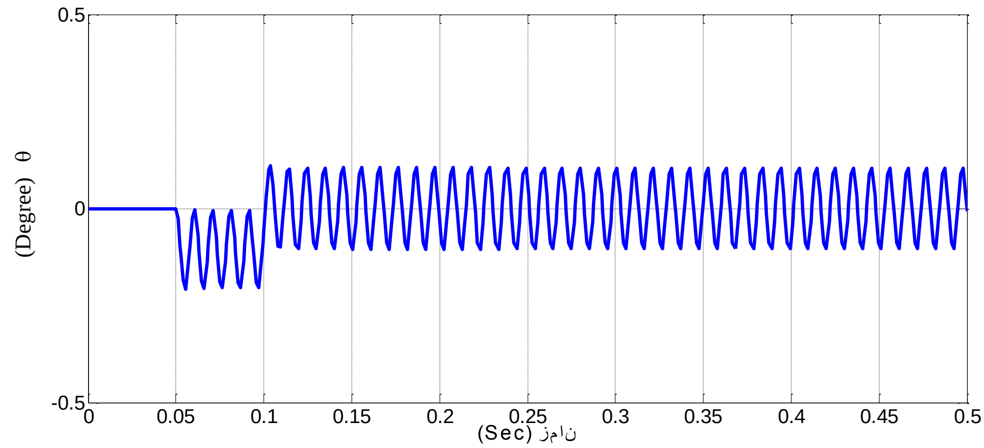


شکل(۴-۱۶) تغییرات θ

ج) اگر مطابق جدول (۴-۱) مقادیر لختی‌های دورانی طوقه‌ها (I_{g1}، I_{g2}، I_{G1} و I_{G2}) در مدل سیستم لحاظ شوند و ضرایب اصطکاک لولاها (e و f) حذف شوند، پاسخ‌های دو خروجی سیستم مطابق شکل‌های (۴-۱۷) و (۴-۱۸) مشاهده می‌شوند.

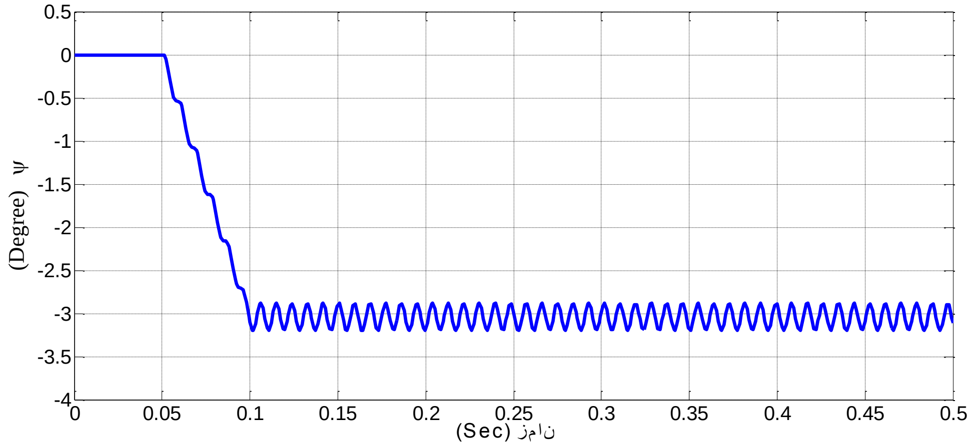


شکل(۴-۱۷) تغییرات ψ

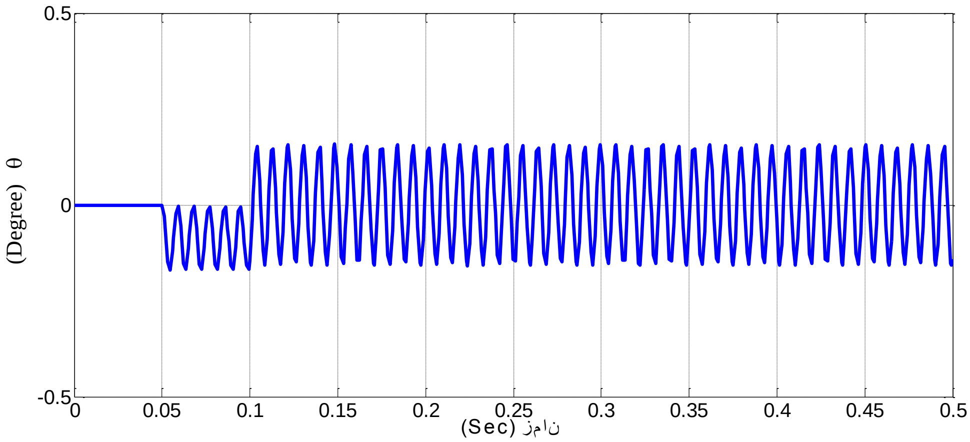


شکل(۴-۱۸) تغییرات θ

د) اگر مقادیر لختی‌های دورانی طوقه‌ها (I_{g1}، I_{g2}، I_{G1} و I_{G2}) و ضرایب اصطکاک لولاها (e و f) حذف شوند، پاسخ‌های دو خروجی سیستم مطابق شکل‌های (۴-۱۹) و (۴-۲۰) مشاهده می‌شوند.



شکل(۴-۱۹) تغییرات ψ



شکل(۴-۲۰) تغییرات θ

با مشاهده پاسخ‌های بدست آمده از آزمایشات الف تا د، تمایزی که در پاسخ‌ها وجود دارد در دامنه و میرایی نوسانات سینوسی ناخواسته‌ایی هست که در پاسخ‌ها وجود دارد، برای بررسی اثر ضرایب اصطکاکی لولاها و لختی‌های دورانی بر دامنه و میرایی این نوسانات ناخواسته، جدول (۴-۲) از نتایج آزمایشات الف تا د را تشکیل می‌دهیم.

جدول (۴-۲) بررسی اثر ضرایب اصطکاکی لولاها و لختی‌های دورانی بر دامنه و میرایی نوسانات ناخواسته سینوسی در پاسخ‌ها

آزمایش	شرایط آزمایش		مشخصات نوسانات ناخواسته موجود در پاسخ‌ها			
	ضرایب اصطکاکی لولاهای جهت‌دهی طوقه‌های خارجی و داخلی (بدون واحد)	لختی‌های دورانی طوقه‌ها (Kg.m²)	نوسانات در پاسخ خروجی ψ		نوسانات در پاسخ خروجی θ	
			دامنه	میرایی	دامنه	میرایی
الف	$e = 10 \times 1e-4$ $f = 10 \times 1e-4$	$I_{g1} = 25 \times 1e-6$ $I_{g2} = 25 \times 1e-6$ $I_{G1} = 35 \times 1e-6$ $I_{G2} = 35 \times 1e-6$	کم	دارد	کم	دارد
ب	$e = 10 \times 1e-4$ $f = 10 \times 1e-4$	$I_{g1} = 0$ $I_{g2} = 0$ $I_{G1} = 0$ $I_{G2} = 0$	زیاد	دارد	زیاد	دارد
ج	$e = 0$ $f = 0$	$I_{g1} = 25 \times 1e-6$ $I_{g2} = 25 \times 1e-6$ $I_{G1} = 35 \times 1e-6$ $I_{G2} = 35 \times 1e-6$	کم	ندارد	کم	ندارد
د	$e = 0$ $f = 0$	$I_{g1} = 0$ $I_{g2} = 0$ $I_{G1} = 0$ $I_{G2} = 0$	زیاد	ندارد	زیاد	ندارد

همچنین اگر مشابه آزمایشات انجام شده مجدداً این‌بار به ورودی i2، مطابق شکل (۴-۲) جریان اعمال کنیم جدولی مشابه جدول (۴-۲) با نتایجی یکسان بدست خواهد آمد. از جداول بدست آمده دو نتیجه مهم قابل مشاهده است که عبارتنداز:

۱) وجود لختی‌های دورانی طوقه‌ها (I_{g1}، I_{g2}، I_{G1} و I_{G2}) در مدل سیستم باعث کاهش دامنه نوسانات سینوسی ناخواسته در پاسخ‌ها می‌شود.

۲) اثر وجود ضرایب اصطکاک لولاهای (e و f) در مدل سیستم باعث میرا شدن نوسانات سینوسی ناخواسته در پاسخ‌ها می‌شود.

البته بدیهی است که افزایش بیش از اندازه‌ای این ضرایب و لختی‌های دورانی طوقه‌ها باعث تضعیف خواص صلبیت و حرکت تقدیمی در سازوکار جستجوگر خواهد داشت.

۴-۳- کنترل جستجوگر در مد پویش

هدف از کنترل جستجوگر در مد پویش آن است که بتوان محور راستای بینای جستجوگر (محور دوران ژیروسکوپ آزاد) را در کوتاه‌ترین زمان ممکن، در وضعیت مورد نظر قرار داد. راستای محور ژیروسکوپ آزاد جستجوگر به مقادیر زوایایψ و θ بستگی دارد که با تغییر مقدار جریان‌های ورودی i1 و i2 می‌توان این زوایا را کنترل کرد. باید دقت شود که هدف جستجوگر موشک در مد پویش، پیدا کردن هدفی خاص از یک فضای قابل دید توسط سامانه بینایی است نه ردگیری یک هدف.

از آنجایی‌که مدل به دست آمده برای جستجوگر، غیرخطی است، می‌توانیم جهت کنترل آن، از یک کنترل‌کننده غیرخطی استفاده کرد؛ اما در ابتدا از نتایج به دست آمده در بخش ۴-۳ و سایر پاسخ‌هایی که از مدل جستجوگر به دست آمده است. می‌توان به نتایجی مهم رسید که عبارتند از:

۱- نوسانات سینوسی، در خروجی هنگام تغییر ناگهانی در ورودی‌های i1 و i2 ظاهر می‌شوند. از نتایج بررسی پاسخ‌های سیستم مشاهده می‌شود که لختی‌های دورانی طوقه‌ها (I_{g1}، I_{g2}،

I_{G1} و I_{G2}) در مدل سیستم باعث کاهش دامنه نوسانات سینوسی ناخواسته در پاسخ‌ها می‌شود و وجود ضرایب اصطکاک لولاهای (e و f) در مدل سیستم باعث میرا شدن نوسانات سینوسی ناخواسته در پاسخ‌ها می‌شود.

۲- ورودی i1 نسبت به ورودی i2 تأثیر بسیار بیشتری بر تغییرات ψ دارد و همچنین ورودی i2 نسبت به ورودی i1 بیشترین تأثیر را بر مقدار θ، خواهد گذاشت. در نوعی ساده‌سازی، می‌توان مدل جستجوگر را به‌صورت دو سیستم ساده شده نیز تصور کرد به نحوی که در سیستم اول، i1 ورودی و ψ خروجی باشد و در سیستم دوم، i2 ورودی و θ خروجی آن باشد؛ و با توجه به پاسخ پله سیستم، در این حالت با صرف‌نظر از نوسانات سینوسی در پاسخ‌ها، مدل شبیه دو انتگرال گیر عمل می‌کند.

۳- به دلیل افت ناچیز سرعت دوران روتور نسبت به سپری شدن زمان عملکرد جستجوگر، پاسخ‌دهی مدل به ورودی یکسان که در زمان‌های متفاوت به مدل داده شده است یکسان است؛ یعنی می‌توان گفت سیستم تقریباً از نوع تغییرناپذیر با زمان است.

۴-۳-۱- خطی‌سازی معادلات حالت سیستم، حول نقطه کار و پیشنهاد کنترل‌کننده خطی مناسب

همان‌طور که در بخش ۴-۲-۴ اشاره شد، چرخش روتور جستجوگر در بازه زمانی عملکرد جستجوگر، افت محسوسی ندارد. بنابراین می‌توان فرض کرد که سرعت چرخش روتور تقریباً ثابت و برابر سرعت اولیه خواهد ماند. یعنی:

$$\dot{\varphi} \simeq \text{cte} \simeq \omega \quad \text{و} \quad \ddot{\varphi} \simeq 0 \qquad (۴-۲)$$

همچنین همان‌طور که در بخش ۴-۲-۴ اشاره شد، بازه‌ی تغییرات زاویه طوقه‌ها، محدود شده است. لذا به دلیل اندازه کوچک این تغییرات می‌توان جهت خطی‌سازی معادلات سیستم، توابع مثلثاتی را این‌گونه فرض نمود:

$$\sin(\theta) \simeq \theta \quad \text{و} \quad \cos(\theta) \simeq 1 \qquad -\pi/12>\theta>\pi/12 \tag{۴-۳}$$

و

$$\sin(\psi) \simeq \psi \quad \text{و} \quad \cos(\psi) \simeq 1 \qquad -\pi/12>\psi>\pi/12 \tag{۴-۴}$$

به این ترتیب، روابط زیر در معادلات حالت لحاظ خواهند شد:

$$x_6 \simeq cte \simeq \omega \quad \text{و} \quad \dot{x}_6 \simeq 0 \tag{۴-۵}$$

و

$$\sin(x_1) \simeq x_1 \quad \text{و} \quad \cos(x_1) \simeq 1 \qquad -\pi/12>x_1>\pi/12 \tag{۴-۶}$$

و

$$\sin(x_3) \simeq x_3 \quad \text{و} \quad \cos(x_3) \simeq 1 \qquad -\pi/12>x_3>\pi/12 \tag{۴-۷}$$

با جایگذاری روابط (۴-۵) تا (۴-۷) در رابطه‌ی (۳-۱۰۰)، و صرف‌نظر کردن از عبارات ناچیز دیگر به خاطر تغییرات کم زاویه‌ها به جهت خطی‌سازی، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} -I_R\dot{x}_2x_3 - I_Rx_2x_4 + I_Rwx_4x_3 - I_{g1}\dot{x}_2x_3 - (I_{g2} + I_r)\dot{x}_2x_3 \\ (I_r+I_{g2})\dot{x}_4 + I_Rwx_2 \\ -I_Rwx_4 + (I_{g1} + I_{g2} + I_r)\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ex_2x_3 - gw \\ -fx_4 - m\alpha\, i_1 \\ -ex_2 + m\beta\, i_2 \end{bmatrix} \tag{۴-۸}$$

به این ترتیب مدل فضای حالت خطی سیستم برابر است با:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -c_1 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c_3 & 0 & -c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & d_1 \\ 0 & 0 \\ -d_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{۴-۹}$$

که در رابطه‌ی (۴-۹):

$$
\begin{cases}
c_1 = \frac{e}{I_{g1}+I_{g2}+I_r} \cong 3.65 \\
c_2 = \frac{I_R w}{I_{g1}+I_{g2}+I_r} \cong 577.87 \\
c_3 = I_R w/\left(I_r+I_{g2}\right) \cong 635.89 \\
c_4 = f/\left(I_r+I_{g2}\right) \cong 4.02 \\
d_1 = m\beta/(I_{g1} + I_{g2} + I_r) \cong 153.28 \\
d_2 = m\alpha/\left(I_r+I_{g2}\right) \cong 168.67
\end{cases}
\qquad (۱۰-۴)
$$

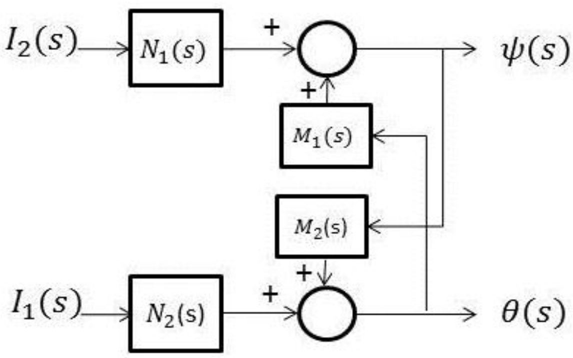
با تبدیل لاپلاس از رابطه‌ی (۴-۹) و جایگذاری $\psi(s)$، $\theta(s)$ به ترتیب به‌جای $X_1(s)$ و $X_3(s)$ خواهیم داشت:

$$
\begin{cases}
\psi(s) = M_1\theta(s) + N_1 I_2 \\
\theta(s) = M_2\psi(s) + N_2 I_1
\end{cases}
\qquad (۱۱-۴)
$$

در رابطه‌ی (۴-۱۱):

$$
\begin{cases}
M_1 = \frac{c_2 s}{s(s+c_1)} = \frac{577.87s}{s(s+3.65)} \\
M_2 = \frac{-c_3 s}{s(s+c_4)} = \frac{-635.89s}{s(s+4.02)} \\
N_1 = \frac{d_1}{s(s+c_1)} = \frac{153.28}{s(s+3.65)} \\
N_2 = \frac{-d_2}{s(s+c_4)} = \frac{-168.67}{s(s+4.02)}
\end{cases}
\qquad (۱۲-۴)
$$

دیاگرام بلوکی شکل (۴-۲۱)، روابط (۴-۱۱) را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۲۱) دیاگرام بلوکی سیستم رابطه‌ی (۴-۱۱)

در این دیاگرام بلوکی همان‌طور که مشاهده می‌شود سیستم مدل، به صورت یک سیستم دو ورودی-دوخروجی است. معمولاً برای کنترل سیستم‌هایی با بیش از یک‌ورودی و یک‌خروجی، از کنترل‌کننده‌هایی با ساختار پیچیده نظیر کنترل‌کننده‌های فضای حالت، LQR، H_∞، کنترل‌کننده فازی و ... استفاده می‌شود[۴۲و۴۴]. طراحی این نوع کنترل‌کننده‌ها عموماً زمان‌بر بوده و بار محاسباتی زیادی را به واحد کنترل تحمیل می‌نماید.

در مقابل این دسته از کنترل‌کننده‌ها، که به این منظور استفاده می‌شود، کنترل‌کننده‌های ساده و پرکاربرد PID وجود دارد. این کنترل‌کننده‌ها از نظر طراحی و پیاده‌سازی بسیار ساده و ارزان قیمت بوده و نیازمند به قدرت پردازشگر زیادی ندارند. این امر سبب فراگیر شدن کاربرد این کنترل‌کننده‌ها در بسیاری از زمینه‌های علمی و صنعتی شده است. با وجود این مزایا، کنترل‌کننده‌های PID تنها قابل استفاده بر روی سیستم‌های تک‌ورودی و تک‌خروجی می‌باشد. با این وجود چنانچه بتوان یک سیستم چندورودی-چندخروجی را با چند زیرسیستم ساده‌تر تک‌ورودی-تک‌خروجی جایگزین نمود، آنگاه می‌توان از کنترل‌کننده PID برای کنترل هر یک از سیستم‌ها استفاده نمود. به این منظور معادلات کلی سیستم را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}\psi(s)\\ \theta(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\\ G_{21} & G_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\end{bmatrix} \qquad (۱۳-۴)$$

که در رابطه‌ی (۴-۱۳) داریم:

$$\begin{cases} G_{11}=\frac{-d_2c_2}{s(s^2+(c_1+c_4)s+(c_1c_4+c_2c_3))}=\frac{-97472}{s(s^2+7.6657s+367470)}\\ G_{12}=\frac{d_1(s+c_4)}{s(s^2+(c_1+c_4)s+(c_1c_4+c_2c_3))}=\frac{153.28(s+4.02)}{s(s^2+7.6657s+367470)}\\ G_{21}=\frac{-d_2(s+c_1)}{s(s^2+(c_1+c_4)s+(c_1c_4+c_2c_3))}=\frac{-168.67(s+3.65)}{s(s^2+7.6657s+367470)}\\ G_{22}=\frac{-d_1c_3}{s(s^2+(c_1+c_4)s+(c_1c_4+c_2c_3))}=\frac{-97472}{s(s^2+7.6657s+367470)}\end{cases} \qquad (۱۴-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۱۴)، G_{12} و G_{21} در مقایسه با G_{11} و G_{22} ناچیزاند، می‌توان رابطه‌ی (۴-۱۳) را به فرم زیر تقریب‌زد.

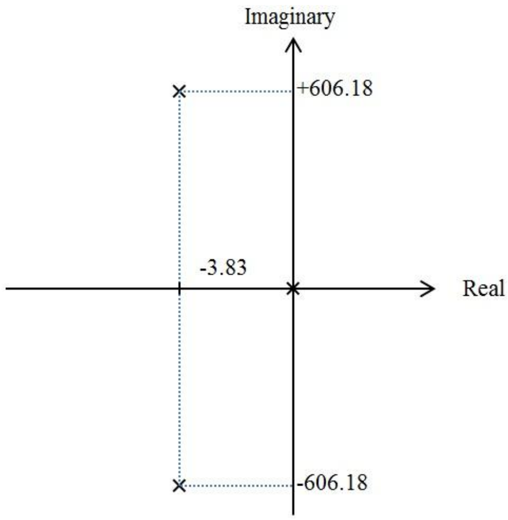
$$\begin{bmatrix}\psi(s)\\ \theta(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_{11} & 0\\ 0 & G_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_2\end{bmatrix} \tag{۴-۱۵}$$

از این رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\psi(s)=G_{11}I_1\\ \theta(s)=G_{22}I_2\end{cases} \tag{۴-۱۶}$$

ملاحظه می‌شود که سیستم دو ورودی- دو خروجی ابتدایی، با دو زیرسیستم ساده‌تر تک‌ورودی-تک‌خروجی تقریب زده شده است. که توابع تبدیل این دو سیستم، یعنی G_{11} و G_{22} تقریباً با هم برابراند در صورتی که هر یک از این زیرسیستم‌ها در حالت حلقه بسته پایدار باشند، آنگاه می‌توان برای آن‌ها کنترل‌کننده طراحی نمود، لذا در ادامه به بررسی اثبات پایداری این سیستم‌ها می‌پردازیم.

شکل(۴-۲۲) مکان قطب‌های رسم شده برای توابع تبدیل G_{11} و G_{22} را نشان می‌دهد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود در هر دوی این شکل‌ها، مکان قطب‌ها شامل یک قطب مزدوج در سمت چپ محور موهومی و یک قطب حقیقی روی مبدا صفحه s است در این شرایط در اصطلاح، سیستم حلقه باز در حاشیه پایداری قرار دارد.



شکل (۴-۲۲) مکان قطب‌های رسم شده برای توابع تبدیل G_{11} و G_{22}

اکنون می‌توان برای هر یک از زیرسیتم‌های بدست آمده، به صورت مستقل یک کنترل‌کننده PID طراحی نمود.

همان‌طور که در شکل (۴-۲۲) مشاهده می‌شود هر یک از زیرسیستم‌ها به دلیل آنکه دارای یک قطب روی مبدا صفحه‌ی S هستند به سیستم نوع یک معروف‌اند، بنابراین به دلیل اینکه سیستم از نوع یک است در طراحی کنترل‌کننده‌ی PID پیشنهادی، ضریب انتگرالگیر برابر صفر قرار داده شده و قانون کنترلی زیر برای کنترل‌کننده PD حاصل، بدست می‌آید.

$$\begin{cases} i_1 = k_{p1}(x_{1-desired} - x_1) + k_{D1}(\dot{x}_{1-desired} - \dot{x_1}) \\ i_2 = k_{p2}(x_{3-desired} - x_3) + k_{D2}(\dot{x}_{3-desired} - \dot{x_3}) \end{cases} \qquad (۴-۱۷)$$

که در رابطه‌ی (۴-۱۷):

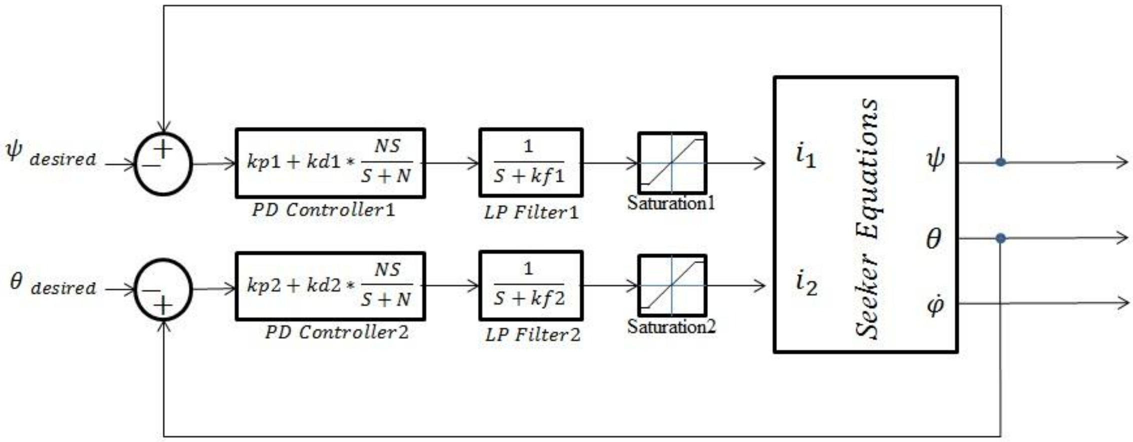
$x_{1\_desired}$: مقدار مطلوب خروجی $x_1 = \psi$ است.

$x_{3\_desired}$: مقدار مطلوب خروجی $x_3 = \theta$ است.

k_{D2}، k_{D1}، k_{p2} و k_{p1} : ضرایب عددی کنترل‌کننده هستند.

کنترل‌کننده PD، قسمتی از ساختمان یک کنترل‌کننده PID است. به‌طورکلی استفاده کنترل‌کننده PID، به دلیل ساده بودن و کارائی بالا، به‌طور وسیع در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرد. با تنظیم صحیح ضرایب این کنترل‌کننده، بسیاری از سیستم‌های غیرخطی قابل کنترل خواهند شد، در بسیاری دیگر از سیستم‌های غیرخطی که تابع تبدیل سیستم ممکن است با گذشت زمان عملکرد سیستم، تغییر کند (برای مثال: کنترل بالک‌های یک موشک که جرم موشک با سپری شدن زمان، تحت سوزش خرج پیش‌برنده کاهش می‌یابد)، از کنترل‌کننده‌های PID با جدولی از ضرایب مربوط به بازه‌های زمانی مشخص عملکرد سیستم، استفاده می‌شود.

شکل (۴-۲۳) نمای کلی از کنترل‌کننده‌های طراحی شده برای سیستم مورد بررسی را نشان می‌دهد.



شکل (۴-۲۳) نمای کلی از کنترل‌کننده طراحی شده برای سیستم

در شکل (۴-۲۳) کنترل کننده مشتق‌گیر داری یک قطب در S=-N و ضریب حقیقی N است که در این صورت می‌توان گفت که با طراحی کنترل‌کننده (که تحقق آن در سیستم عملی به صورت پیش‌فاز است.) حاشیه فاز سیستم حلقه بسته افزایش پیدا خواهد کرد و از دید مکان هندسی ریشه‌های قطب‌های سیستم حلقه بسته به سمت چپ صفحه موهومی جابجا شده‌اند و در نتیجه پایداری سیستم حلقه بسته تضمین خواهد شد. همچنین می‌توان گفت که طبق نظریه‌ی غیر مستقیم لیاپانوف، اگر تمامی مقادیر ویژه‌ی سیستم خطی شده حول نقطه‌ی تعادل، در سمت چپ محور موهومی باشند می‌توان گفت سیستم غیرخطی اصلی نیز حول این نقطه، پایدار است.

در بحث پایداری سیستم حلقه بسته، به سبب محدودیت جریان‌های قابل اعمال به ورودی سیستم، از یک بلوک محدودکننده جریان قبل از هر یک از ورودی‌های سیستم استفاده شده است، همچنین به منظور حذف اثر نویز در خروجی کنترل‌کننده‌های PD، همانطور که در شکل (۴-۲۳) نشان داده شده است، یک فیلتر پایین‌گذر پس از کنترل‌کننده‌ها قرار داده شده است.

با انتخاب مناسب ضرایب عددی موجود در سیستم کنترلی حلقه بسته شکل(۴-۲۳)، می‌توان مکان قطب‌های سمت راست محور موهومی را بهبود بخشید. این کار را می‌توان با استفاده از الگوریتم‌های

بهینه‌سازی، انجام داد. در این تحقیق از الگوریتم بهینه‌سازی TLBO به منظور به دست آوردن ضرایب مناسب، استفاده شده است.

۴-۳-۲- تنظیم ضرایب مناسب کنترل‌کننده، با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر آموزش و یادگیری[1]

روش‌های جدید برای طراحی کنترل‌کننده PID، روش‌های تکاملی هستند که بعضی از آن‌ها عبارت‌اند از: الگوریتم ژنتیکی پیوسته، الگوریتم ژنتیکی باینری، الگوریتم مورچه گسسته و پیوسته، الگوریتم پرندگان گسسته و پیوسته، الگوریتم استعماری و الگوریتم ملکه زنبورعسل.

استفاده از این روش‌ها در بهینه‌سازی ضرایب PID در[۵۰] و[۵۱] با تجربه موفقی همراه بوده است. لذا در این قسمت، مسئله طراحی کنترل‌کننده PD را به یک مسئله بهینه‌سازی تبدیل می‌کنیم و از الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر آموزش و یادگیری برای مینیمم‌سازی یک تابع هدف استفاده خواهیم کرد.

الگوریتم بهینه‌سازی مبتنی بر آموزش و یادگیری برای اولین بار در سال ۲۰۱۱ ارائه گردید[۵۲]. این الگوریتم الهام گرفته‌شده از فرآیند آموزش و یادگیری در سیستم آموزشی و کلاس‌های درس است که در آن معلم سعی در انتقال دانش خود به دانش آموزان و دانشجویان و ارتقای سطح دانش آن‌ها داشته و دانشجویان نیز از طریق تعامل با یکدیگر در راستای این هدف تلاش می‌کنند. در طول کلاس‌های درس و بر طبق الگوی رایج و پذیرفته‌شده در اغلب سیستم‌های آموزشی، معلم سعی بر این دارد تا با یک ارزیابی از میانگین سطح علمی دانش‌آموزان کلاس، به‌گونه‌ای تدریس نماید که به‌صورت نسبی، مطالب بیان‌شده برای تمام آن‌ها مفید بوده و به یادگیری آن‌ها کمک کند،

[1] Teaching–Learning-Based Optimization

درصورتی‌که معلم ارائه‌ی مطالب آموزشی را با توجه به سطح آگاهی دانش‌آموزان ضعیف کلاس قرار دهد، موجب سرد شدن و بی‌انگیزگی دیگر دانش آموزان که در سطح بالاتر علمی قرار دارند می‌گردد و لذا آن‌ها بهره‌ی لازم را از کلاس نخواهند برد و در مجموع فرآیند انتقال مطالب درسی به‌کندی و با راندمان پایین صورت می‌گیرد، از طرف دیگر، درصورتی‌که معلم آگاهی و دانش دانش‌آموزان ممتاز را ملاک آموزش خود قرار دهد مطالب بیان‌شده برای بیشتر دانش آموزان کلاس که در سطح متوسط و یا پایین قرار دارند، گنگ و نامفهوم بوده و نه‌تنها بهره‌ای از این مطالب نخواهند برد، بلکه آن‌ها را بیشتر سردرگم می‌کند. بنابراین نحوه‌ی انتقال دانش باید به‌گونه‌ای باشد که طیف وسیعی از دانشجویان از آن بهره مناسب را برده و در مجموع باعث افزایش سطح علمی کل کلاس شود. به‌عبارت‌دیگر مطالب بیان‌شده در کلاس نباید به‌گونه‌ای ابتدایی، سطح پایین و کسل‌کننده باشد و نه آن‌چنان سطح بالا باشد که تنها تعداد محدودی از دانشجویان بتوانند از آن استفاده نمایند. در غیر آن صورت پس از اتمام کلاس درس، ممکن است بخشی از مطالب بیان شده برای عده‌ای از دانش آموزان به‌صورت کامل جا نیفتاده باشد و یا مبهم باشد؛ در نتیجه به منظور رفع این ابهامات و سوالات ایجاد شده و همچنین استفاده از اطلاعاتی که دیگر دانش آموزان به دست آورده‌اند، معمولا دو یا چند دانش آموز در دسته های جداگانه با یکدیگر به بحث و تبادل اطلاعات می‌پردازند تا از این طریق دانش خود را افزایش دهند[۵۳].

با الهام گیری از فرآیند ذکرشده، الگوریتم بهینه‌سازی TLBO، جهت حل مسائل بهینه‌سازی متنوع، معرفی‌شده است. مطابق آنچه بیان شد، این الگوریتم دارای دو مرحله آموزش معلم[۱] و مرحله‌ی آموزش دانش آموزان[۲] است. در مرحله‌ی آموزش معلم، ابتدا بهترین پاسخ به دست آمده در میان

[1] Teacher phase
[2] Learner phase

اعضای جمعیت (جمعیت، مجموعه‌ای از پاسخ‌های تصادفی تولیدشده در فضای جستجو می‌باشد که در طول مراحل بهینه‌سازی به سمت یافتن بهترین پاسخ برای تابع هدف موردنظر حرکت می‌کند) تا مرحله‌ی فعلی بهینه‌سازی به‌عنوان معلم انتخاب می‌شود. سپس میانگین موقعیت تمام اعضای جمعیت[1] را به‌عنوان ملاکی از سطح اطلاعات به دست آمده از تمام اعضای جمعیت، محاسبه می‌کنیم. حال تک‌تک اعضای جمعیت بایستی در جهت آموزش معلم که میانگین دانش کلاس را به‌عنوان مبنا برای آموزش قرار داده، حرکت کنند. به عبارتی دانش هر عضو باید از دانش میانگین کلاس به دانش معلم ارتقاء یابد. بدین منظور، به هنگام سازی موقعیت اعضای جمعیت با استفاده از معادله‌ی زیر صورت می‌گیرد:

$$X_i^{k+1} = X_i^k + \text{rand} \times (\text{Teacher} - \text{TF} \times \text{Mean}) \qquad (۱۸-۴)$$

که در رابطه‌ی (۴-۱۸):

k: شماره مرحله آموزش است.

X_i^{k+1}: موقعیت جدید مرحله‌ی k+1 ام دانش‌آموز شماره i ام است.

X_i^k: موقعیت مرحله‌ی k ام دانش‌آموز شماره i ام است.

rand: یک عدد تصادفی تولیدشده بر اساس توزیع نرمال بین صفر و یک است.

Teacher: موقعیت معلم است.

Mean: موقعیت میانگین کلاس است.

TF: ضریب آموزش بوده و به صورت تصادفی یک یا دو فرض می‌شود، که مقدار آن می‌تواند از تابع زیر انتخاب شود:

[1] Mean

$$TF = \mathrm{round}(1 + \mathrm{rand}) \quad (۱۹-۴)$$

پس از بهنگام سازی موقعیت در اثر آموزش معلم، تابع هدف به ازای پاسخ‌های جدید به دست آمده، محاسبه می‌شود. درصورتی‌که این مقدار، بهتر از مقدار تابع هدف به ازای پاسخ قبلی باشد (دانش پیشین دانش آموزان)، پاسخ جدید به‌عنوان موقعیت بعدی آن عضو جمعیت انتخاب می‌شود، در غیر این صورت پاسخ جدید تولیدشده حذف می‌گردد. این فرایند برای تمام اعضای جمعیت در مرحله‌ی آموزش معلم تکرار می‌گردد. پس‌ازاین مرحله، نوبت به مرحله‌ی آموزش دانش‌آموزان می‌رسد. در این مرحله، هر دانش‌آموز (j) درنتیجه‌ی تعامل با یک دانش‌آموز دیگر که به‌صورت تصادفی از بین اعضای جمعیت انتخاب‌شده، موقعیت خود را بروز رسانی می‌کند و بدین‌وسیله سعی می‌کند تا با استفاده از اطلاعات آن دانش‌آموز، سطح آگاهی و دانش خود را بالا ببرد، بروز رسانی موقعیت در این گام با استفاده از رابطه زیر صورت می‌گیرد:

$$X_i^{k+1} = X_i^k + \mathrm{rand} * (X_j^k - X_i^k) \quad (۲۰-۴)$$

درصورتی‌که تابع هدف به ازای موقعیت جدید، بهتر از تابع هدف پاسخ قبلی بود، پاسخ جدید به دست آمده به‌عنوان موقعیت بعدی آن دانش‌آموز انتخاب می‌گردد و در غیر این صورت نادیده گرفته می‌شود. لازم به ذکر است در بهنگام سازی موقعیت پاسخ‌ها، هرگاه پاسخی بهتر از معلم یافته شد با آن جایگزین می‌شود.

با اعمال دو مرحله‌ی آموزش معلم و دانش‌آموز به تمام اعضای جمعیت، یک گام از مراحل تکراری الگوریتم بهینه‌سازی پایان می‌یابد. سپس شرط همگرایی مسئله بهینه‌سازی چک می‌گردد و درصورتی‌که این شرط برآورده گردید، اجرای برنامه الگوریتم پایان یافته و آخرین موقعیت به دست آمده برای معلم، به‌عنوان پاسخ نهایی تعیین می‌گردد.

۴-۳-۳- بهینه‌سازی ضرایب کنترل‌کننده PD با استفاده از الگوریتم TLBO

مطابق شکل (۴-۲۳) که نمای کلی از کنترل‌کننده‌های طراحی شده برای سیستم جستجوگر در مد پویش را نشان می‌دهد، به منظور انجام بهینه‌سازی کنترل‌کننده‌های سیستم توسط الگوریتم TLBO، می‌توان تابع هدف را به طور کلی برآیندی از مجموع مربعات خطاهای پاسخ سیستم و مجموع مربعات سیگنال‌های خروجی کنترل‌کننده‌ها در طول زمان عملکرد سیستم، لحاظ نمود. بنابراین در این پایان-نامه، رابطه‌ی زیر در جهت انتخاب بهینه ضرایب کنترل‌کننده‌ها، مورد استفاده قرار گرفته است.

$$f_{cost} = \int_0^T [\sum(e)^2 + \sum(u)^2]\, dt \qquad (۲۱-۴)$$

که در رابطه‌ی (۴-۲۱):

$\sum(e)^2$: مجموع مربع تمام سیگنال‌های خطای واردشده به کنترل‌کننده‌ها است.

$\sum(u)^2$: مجموع مربع تمام سیگنال‌های خروجی کنترل‌کننده‌ها است.

T: زمان عملکرد سیستم است که ۶ ثانیه درنظر گرفته شده است.

در رابطه‌ی پیشنهادی (۴-۲۱)، به دلیل وجود اثر دو نوع سیگنال خطای خروجی از ورودی مطلوب (e) و سیگنال خروجی کنترل‌کننده (u)، ضمن توجه به کاهش خطا، به مینیمم‌سازی مصرف انرژی فرآیند کنترل نیز اهمیت داده خواهد شد.

بردار زیر ضرایب نشان داده شده برای کنترل‌کننده‌های شکل (۴-۲۳) را نشان می‌دهد:

$$K = [k_{p1}, k_{p2}, k_{d1}, k_{d2}, k_{f1}, k_{f2}\,] \qquad (۲۲-۴)$$

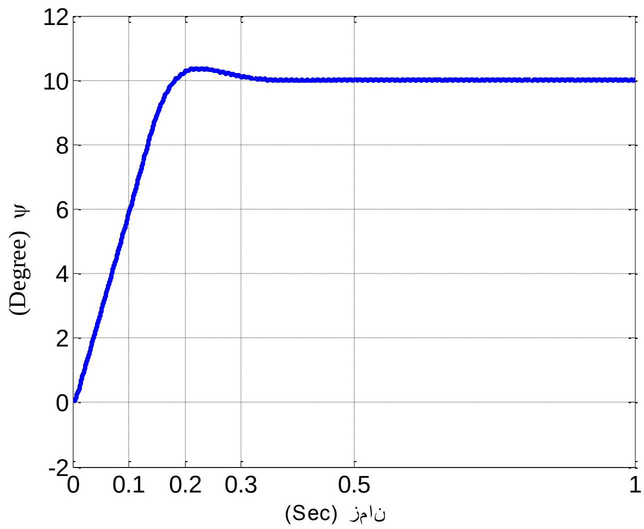
با در نظر گرفتن بردار ضرایب (۴-۲۲)، به عنوان متغییرهای هر عضو از جمعیت در الگوریتم TLBO، و اعمال ورودی‌های $\psi_d(t) = \theta_d(t) = 10 * u(t)$ به سیستم شکل (۴-۲۳)، ضرایب تنظیم کنترل کننده‌ها، با فرض ۳۰ جمعیت، ۲۰ مرحله آموزش و N=100، مطابق جدول ۴-۳ به دست آمده‌اند.

جدول (۴-۳) ضرایب بدست آمده از الگوریتم TLBO برای کنترل‌کننده PD

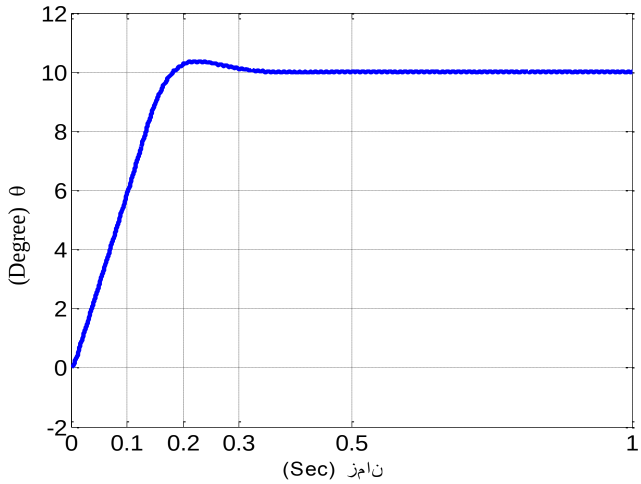
مقدار	ضرایب کنترل‌کننده PD
-۳۹	k_{p1}
-۳۹/۲	k_{p2}
-۰/۰۰۱	k_{d1}
-۰/۰۰۱	k_{d2}
۳۵	k_{f1}
۳۴	k_{f2}

از جدول ضرایب (۴-۳) می‌توان نتیجه گرفت که به دلیل به دست آمدن ضرایب k_{d1} و k_{d1} بسیار ناچیز، کنترل‌کننده تناسبی می‌تواند به جای کنترل‌کننده مشتق‌گیر-تناسبی استفاده شود.

با قرار دادن ضرایب به دست آمده جدول (۴-۳)، پاسخ خروجی‌های سیستم به ورودی‌های $\psi_d(t) = \theta_d(t) = 10 * u(t)$، در شکل (۴-۲۴) و شکل (۴-۲۵) نشان داده شده است.



شکل (۴-۲۴) پاسخ خروجی ψ



شکل (۴-۲۵) پاسخ خروجی θ

از دو شکل (۴-۲۴) و (۴-۲۵)، مشاهده می‌شود که به دلیل تقارن سیستم، حدود مشخصات زمانی پاسخ پله سیستم برای هر دو خروجی، مطابق جدول (۴-۴) به دست خواهد آمد.

جدول (۴-۴) مشخصه‌های زمانی پاسخ پله سیستم شکل (۴-۲۳) با ضرایب کنترل‌کننده‌های جدول (۴-۳)

مشخصه زمانی پاسخ پله	مقدار	واحد
t_r	۱۵۵	ms
t_p	۲۲۲	ms
t_s	۲۸۳	ms
Overshoot	۴/۵	%

با مقایسه نتایج بدست آمده در جدول (۴-۴)، با کنترل‌کننده‌های طرح شده مانند LQG/LQR، H_infinity [44]، می‌توان مشاهده کرد که سرعت پاسخ زمانی بدست آمده در این تحقق بهبود پیدا کرده است.

در ادامه بحث کنترل سیستم در مد پویش، به طراحی کنترل‌کننده‌ی بر مبنای خطی‌سازی ورودی و خروجی می‌پردازیم.

۴-۳-۴- طراحی کنترل‌کننده غیرخطی بر مبنای خطی سازی ورودی خروجی

با توجه به اینکه در سیستم مورد مطالعه هدف طراحی کنترل‌کننده‌ی است که خطای ردیابی در مد پویش را برای زوایای ψ و θ به صفر برساند؛ لذا کنترل‌کننده‌ی در این قسمت طراحی می‌شود که هدف فوق را محقق نماید، این کنترل‌کننده از نوع خطی ساز ورودی- خروجی است و طوری با تنظیم ورودی i1 و i2، دینامیک خروجی مورد نظر را خطی می‌نماید که خطای خروجی را به صفر برساند.

در روش فوق متغیرهای خروجی مورد نظر که قرار است مسیر خاصی را ردیابی نمایند در یک بردار حالت جدید قرار گرفته و با گرفتن مشتقات متوالی از این بردار سعی می‌کنیم اثر ورودی را در معادلات جدید ایجاد نماییم، سپس با تعریف ورودی مناسب سعی خواهد شد معادلات جدید به یک سری معادلات خطی تبدیل شود. در ادامه با طراحی یک کنترل‌کننده خطی می‌توان خطای ردیابی خروجی‌های مورد نظر را به صفر رساند.

برای انجام فرآیند فوق، متغیرهای خروجی زیر را به عنوان بردار خروجی مورد نظر انتخاب می‌نماییم:

$$y = \begin{bmatrix} \psi \\ \theta \end{bmatrix} \tag{۴-۲۳}$$

با مشتق‌گیری از معادله (۴-۲۳) و جایگذاری از معادلات حالت به معادله زیر می‌رسیم:

$$\dot{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} \tag{۴-۲۴}$$

همانطور که مشاهده می‌شود در معادله (۴-۲۴)، اثر از ورودی‌های سیستم نیست؛ لذا عمل مشتق‌گیری را بایستی تا زمانی انجام داد که اثر ورودی در هر دو معادله بدست آمده ظاهر شود؛ در نتیجه مشتق دوم معادله (۴-۲۳) بعد از جایگذاری از معادلات حالت بصورت زیر خواهدبود:

$$\ddot{y} = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 + g_1 * i_2 \\ f_2 + g_2 * i_1 + g_3 * i_2 \end{bmatrix} \tag{۴-۲۵}$$

همانطور که از معادلات (۴-۲۵) مشخص است اثر ورودی در هر دو معادله (۴-۲۵) دیده می‌شود، حال معادلات (۴-۲۵) را به شکل زیر مرتب می‌نماییم

$$\ddot{y} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \tag{۴-۲۶}$$

برای خطی سازی معادلات (۴-۲۶) ورودی‌های سیستم را بصورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & g_3 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{\psi}_d \\ \ddot{\theta}_d \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} \dot{\psi}_d - \dot{\psi} \\ \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \psi_d - \psi \\ \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{bmatrix} \right) \tag{۴-۲۷}$$

در رابطه‌ی (۴-۲۷) نباید مخرج رابطه در فرآیند کنترل، مقداری صفر بپذیرد، جهت بررسی این شرط باید ریشه‌های مخرج رابطه (۴-۲۷) را استخراج کرد لذا در بررسی سینگولاریتی رابطه‌ی (۴-۲۷) با جایگذاری روابط (۳-۱۰۵) الی (۳-۱۰۹) در رابطه‌ی (۴-۲۷)، ریشه‌های مخرج $-\pi/2$ یا $\pi/2$ خواهند بود. با توجه به آنکه بیشینه تغییر زاویه طوقه‌ها حدود $-\pi/3$ تا $\pi/3$ رادیان برای تمامی موشک‌ها انتخاب می‌شود، لذا در سازوکار جستجوگر این تحقیق امکان تحقق ریشه‌های رابطه‌ی (۴-۲۴) وجود ندارد و این به معنی عدم وجود نقطه تکین در رابطه‌ی (۴-۲۷) است.

همچنین نکته دیگر در استفاده از رابطه کنترلی (۴-۲۷) آن است که مقادیر g_1، g_2، g_3، f_1 و f_2 از مدل‌سازی جستجوگر استخراج شده‌اند(بخش۳-۸) بنابراین دقت مدل‌سازی‌ها در نتیجه کنترل تاثیرگذار است.

با جایگذاری کنترل‌کننده (۴-۲۷) در معادلات دینامیکی سیستم، فرم حلقه بسته دینامیک خروجی به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\psi}_d - \ddot{\psi} \\ \ddot{\theta}_d - \ddot{\theta} \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} \dot{\psi}_d - \dot{\psi} \\ \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} \psi_d - \psi \\ \dot{\theta}_d - \dot{\theta} \end{bmatrix} = 0 \tag{۴-۲۸}$$

با انتخاب مناسب ضرایب k_1، k_2 در معادلات (۴-۲۸)، خطای ردیابی با گذشت زمان بصورت مجانبی به سمت صفر میل خواهد کرد.

اعمال کنترل‌کننده (۴-۲۷) به سیستم مورد مطالعه باعث خواهد شد که خطای ردیابی زوایای ψ و θ به صفر میل نماید، در ادامه بعد از بهینه‌سازی ضرایب این کنترل‌کننده توسط الگوریتم TLBO، عملکرد کنترل‌کننده فوق با شبیه‌سازی سیستم بررسی شده است.

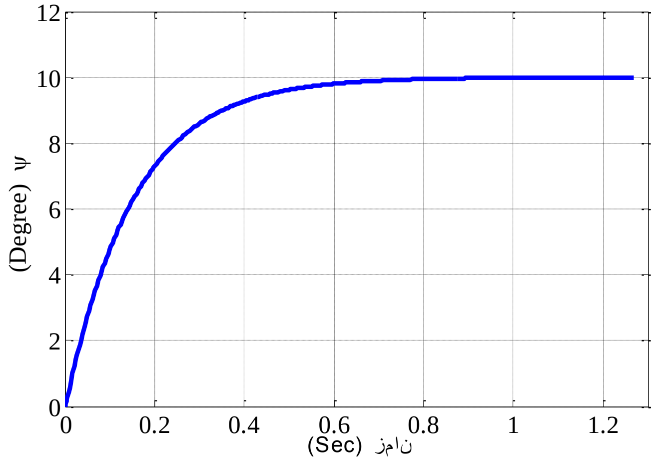
۴-۳-۵- بهینه‌سازی ضرایب کنترل‌کننده غیرخطی، با استفاده از الگوریتم TLBO

به کمک الگوریتم بهینه‌سازی TLBO، و در نظر گرفتن تابع هزینه رابطه‌ی (۴-۲۱)، ضرایب بهینه k_1 و k_2 در رابطه‌ی (۴-۲۸) را می‌توان تخمین زد. مطابق روند بهینه‌سازی که در بخش ۴-۳-۳ انجام گردید، به ازای ورودی‌های سیستم برابر با $\psi_d(t) = \theta_d(t) = 10 * u(t)$ ، ضرایب بهینه عبارتند از:

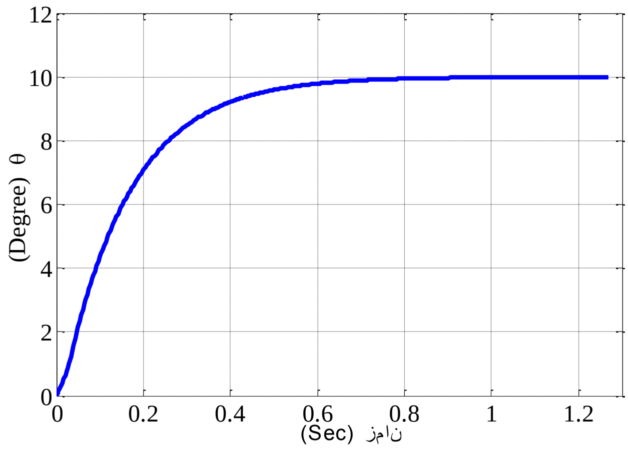
جدول (۴-۵) ضرایب بدست آمده از الگوریتم TLBO برای کنترل‌کننده غیرخطی

ضرایب کنترل‌کننده غیرخطی	مقدار
k_1	۹۳۸
k_2	۶۰۱۲

با قرار دادن ضرایب به دست آمده جدول (۴-۵) در مدل جستجوگر، پاسخ خروجی‌های سیستم به ورودی‌های $\psi_d(t) = \theta_d(t) = 10 * u(t)$، در شکل (۴-۲۶) و شکل (۴-۲۷) نشان داده شده است.



شکل (۴-۲۶) پاسخ خروجی ψ



شکل (۴-۲۷) پاسخ خروجی θ

از دو شکل (۴-۲۶) و (۴-۲۷)، مشاهده می‌شود که به دلیل تقارن سیستم، حدود مشخصات زمانی پاسخ پله سیستم برای هر دو خروجی، مطابق جدول (۴-۶) به دست خواهد آمد.

جدول (۴-۶) مشخصه‌های زمانی پاسخ پله ضرایب کنترل‌کننده غیرخطی جدول (۴-۵)

مشخصه زمانی پاسخ پله	مقدار	واحد
t_r	۳۷۰	ms
t_s	۵۹۰	ms
Overshoot	۰	%

۴-۴- پویش جستجوگر با الگوی گل رز[1]

در جستجوگرهایی که دارای سامانه‌ی بینایی نوری، مثل لیزر یا مادون قرمز هستند، به دلیل ملاحظات حساسیتی، میدان دید حس‌گرهای سامانه بینایی محدود است لذا برای افزایش ناحیه تماشای وسیع‌تر، حس‌گرهای سامانه بینایی جستجوگر بر سازوکاری طوقه دار مطابق شکل (۳-۱) نصب می‌شوند، حال اگر راستای مرکز سامانه‌ی بینایی را تحت الگوهای خاص حرکتی، به واسطه سازوکار طوقه‌ها در تمام فضای قابل مشاهده جستجوگر حرکت دهیم، در این‌صورت اگرچه حس‌گر سامانه‌ی بینایی میدان دید کوچکی دارد، اما به نوعی میدان دید قابل مشاهده جستجوگر به کمک حرکت در راستای سامانه بینایی، بیشتر خواهد شد. الگوی حرکتی یاد شده بر اساس میدان دید سامانه بینایی و فضای قابل دید جستجوگر طراحی می‌شود. یکی از الگوهای معروف که سامانه بینایی جستجوگرها با آن پویش می‌شوند، الگوی گل رز است[۵۴]. الگوی گل رز در دستگاه کارتزین، مطابق روابط (۴-۲۹) و (۴-۳۰) تشکیل می‌شود.

$$x = \frac{\delta}{2}\left(\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right) \qquad (۲۹-۴)$$

$$y = \frac{\delta}{2}\left(\sin(2\pi f_1 t) - \sin(2\pi f_2 t)\right) \qquad (۳۰-۴)$$

در دو رابطه‌ی (۴-۲۹) و (۴-۳۰):

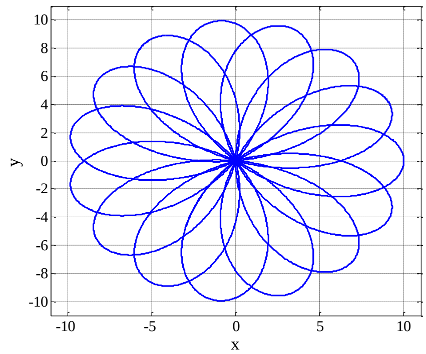
t: زمان روند تشکیل الگوی گل رز است.

متغیرهای δ، f_1 و f_2: تعیین‌کننده تعداد و اندازه گلبرگ‌ها و سرعت تشکیل آن‌هاست.

---

[1] Rosette Pattern

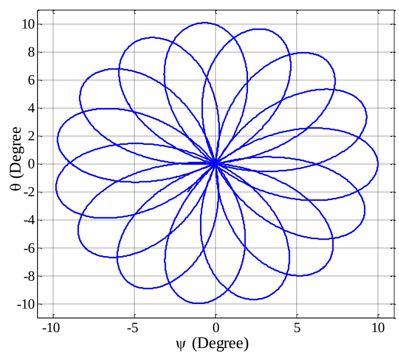
تنوع جستجوگرها، و متغیر بودن میدان دید سامانه بینای جستجوگرها، باعث تنوع در الگوهای پویشی شده است. لذا در این تحقیق برای نمونه، یک الگوی گل رز با زمان تشکیل ۸ ثانیه را با انتخاب متغیرهای ۱۰=δ، ۱/۳۷۵= f_1 و ۰/۵= f_2 مطابق شکل (۴-۲۸) درنظر گرفته‌ایم.



شکل (۴-۲۸) الگوی گل رز با متغیرهای ۱۰=δ، ۱/۳۷۵=f_1 و ۰/۵= f_2

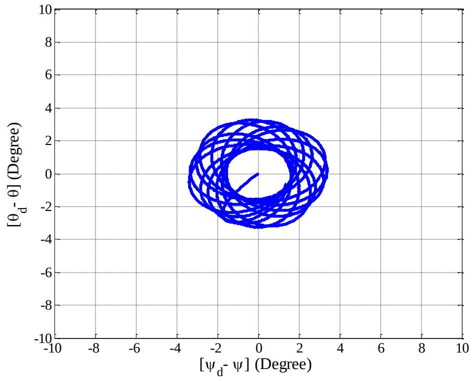
۴-۴-۱- ارزیابی سیستم کنترل‌کننده PD بخش ۴-۳-۳، با ضرایب به دست آمده از روش الگوریتم TLBO در مد پویش الگوی گل رز

اگر ورودی‌های x و y الگوی گل رز مربوط به شکل (۴-۲۸) را به‌عنوان دو ورودی $\psi_d(t)$ و $\theta_d(t)$ سیستم جستجوگر کنترل شده شکل (۴-۲۳) در نظر بگیریم، و ضرایب کنترل‌کننده‌های PD، ضرایب بهینه به دست آمده از روش الگوریتم TLBO (جدول ۴-۳) باشند. آنگاه پاسخ پویش سیستم به شکل (۴-۲۹) بدست خواهد آمد.



شکل (۴-۲۹) پاسخ سیستم کنترل‌کننده PD بخش ۴-۳-۳، با ضرایب به دست آمده از روش الگوریتم TLBO در مد پویش الگوی گل رز

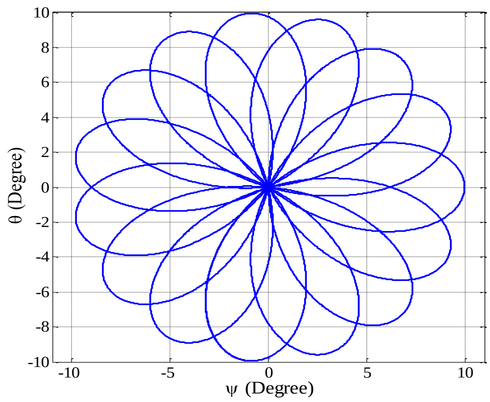
پاسخ خطای پویش سیستم نیز به شکل (۴-۲۹) بدست خواهد آمد.



شکل (۴-۳۰) خطای سیستم کنترل‌کننده PD بخش ۴-۳-۳، با ضرایب به دست آمده از روش الگوریتم TLBO در مد پویش الگوی گل رز

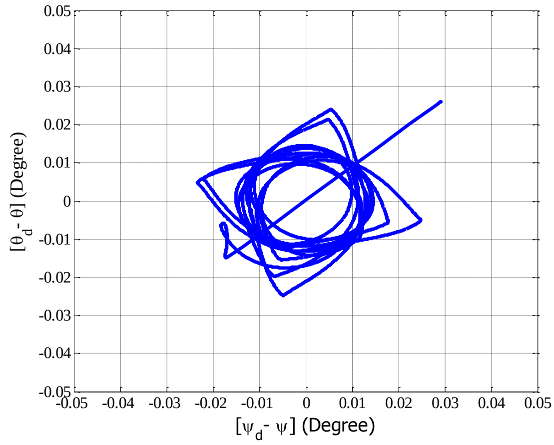
۴-۴-۲- ارزیابی سیستم کنترل‌کننده غیرخطی بخش ۴-۳-۵، با ضرایب به دست آمده از روش الگوریتم TLBO در مد پویش الگوی گل رز

اگر ورودی‌های x و y الگوی گل رز مربوط به شکل (۴-۲۸) را به‌عنوان دو ورودی $\psi_d(t)$ و $\theta_d(t)$، سیستم جستجوگر کنترل شده غیرخطی بخش ۴-۳-۵ در نظر بگیریم و ضرایب کنترل‌کننده غیرخطی، ضرایب بهینه به دست آمده از روش الگوریتم TLBO (جدول ۴-۵) باشند. آنگاه پاسخ پویش سیستم به شکل (۴-۳۱) انجام می‌پذیرد.



شکل (۴-۳۱) پاسخ سیستم کنترل‌کننده غیرخطی بخش ۴-۳-۵، با ضرایب به دست آمده از روش الگوریتم TLBO در مد پویش الگوی گل رز

و خطای پاسخ پویش سیستم به شکل (۴-۳۲) بدست خواهد آمد.



شکل (۴-۳۲) خطای سیستم کنترل‌کننده غیرخطی بخش ۴-۳-۵، با ضرایب به دست آمده از روش الگوریتم TLBO در مد پویش الگوی گل رز

شکل(۴-۳۲)، پاسخ تفاضل ورودی به خروجی سیستم جستجوگر همراه با کنترل‌کننده غیرخطی را در تمام زمان ردیابی پویش با الگوی گل رز طرح شده را نشان می‌دهد.

۴-۵- نتیجه‌گیری

با تقریب خطی که در این فصل حول نقطه کار جستجوگر انجام شد و با بررسی پایداری سیستم خطی، طبق نظریه‌ی غیر مستقیم لیاپانوف، نشان داده شد که سیستم غیرخطی نیز حول نقطه کار می‌تواند پایدار باشد.

بعد از پیشنهاد کنترل‌کنندهPD و غیرخطی، و بدست آوردن ضرایب بهینه این کنترل‌کننده‌ها با استفاده از یک تابع هزینه بر اساس مینیمم‌سازی خطا و مصرف انرژی، این کنترل‌کننده‌ها به کمک الگوی گل رز ارزیابی گردیدند. که نتیجه آن با توجه به خطای ردیابی این دو کنترل‌کننده، نشان داده شد. خطای‌های ردیابی در کنترل‌کننده غیرخطی (شکل (۴-۳۲))، در مقایسه با خطای ردیابی در کنترل‌کننده PD (شکل (۴-۳۱))، حدود ۱۰۰ برابر کوچک‌تر است. و می‌توان نتیجه گرفت کنترل‌کننده غیرخطی نسبت به کنترل‌کننده PD خیلی دقیق‌تر الگوی گل رز را ردیابی کرده است.

فصل پنجم:

نتیجه‌گیری

۵-۱- نوآوری تحقیق

تحقیق در این پایان‌نامه بر اساس مدل‌سازی و طراحی سیستم کنترل جستجوگر ژیروسکوپ آزاد با عملگر الکترومغناطیسی در مد پویش انجام گردید، با این تفاوت که در کارهای قبلی با صرف‌نظر از اثر طوقه‌های داخلی و خارجی و همچنین گشتاور اصطکاکی لولاهای جستجوگر، معادلات دینامیکی جستجوگر استخراج شده است؛ اما در این تحقیق ضمن در نظر گرفتن اثر این طوقه‌ها و همچنین گشتاورهای اصطکاکی لولاها، معادلات دینامیکی، جهت حصول اطمینان به دو روش نیوتن و لاگرانژ استخراج گردیده. همچنین برای جهت‌دهی محور سامانه بینایی، در یک پرتابه‌ی واقعی، سازوکار الکترومغناطیسی مشاهده شده، و در این تحقیق نیز بکار گرفته شده. در ادامه و در بحث کنترل در مد پویش، چند کنترل‌کننده پیشنهاد گردیده و توسط الگوریتم بهینه‌سازی TLBO، ضرایب این کنترل‌کننده‌ها بهینه‌سازی شده است.

۵-۲- نتایج

در فصل سوم این تحقیق معادلات جستجوگر به دست آمد، با شبیه‌سازی این معادلات در فصل چهارم، خواص ژیروسکوپی جستجوگر شامل صلبیت، حرکت تقدیمی و رقص محوری مشاهده گردید؛ و این نتایج نشان‌دهنده اعتبار مدل‌سازی‌ها و مقدمه‌ای برای طراحی کنترل‌کننده شده است، همچنین در این فصل اثر ضرایب اصطکاکی لولاها و لختی‌های دورانی طوقه‌ها بر ایجاد نوسانات ناخواسته سینوسی در پاسخ‌ها بررسی شده است.

در ادامه با توجه به غیرخطی بودن معادلات مدل جستجوگر، نیاز به طراحی یک کنترل‌کننده غیرخطی بود، اما ابتدا با خطی‌سازی معادلات جستجوگر حول نقطه‌ی کار، کنترل‌کننده PD، پیشنهاد گردید. و بعد از آن با طراحی کنترل‌کننده غیرخطی بر مبنای خطی‌سازی ورودی خروجی سعی در

کنترل بهتر جستجوگر شده است. همچنین با در نظر گرفتن مینیمم‌سازی خطا و انرژی ضرایب کنترل‌کننده‌ها بهینه‌سازی گردیده شده است.

۵-۳- پیشنهادات

در ادامه این تحقیق می‌توان موضوعات زیر را ادامه داد:

- بررسی مباحث کنترل در مد ردگیری جستجوگر و می‌توان با در نظر گرفتن مدل کامل پرتابه یا موشک مجهز به این جستجوگر، به طراحی کنترل‌کننده‌هایی برای کنترل در هر دو مد پویش و ردگیری پرداخت.

- همچنین با طراحی و ساخت این جستجوگر در محیط آزمایشگاهی می‌توان نتایج به دست آمده از این تحقیق را مورد بررسی و اعتبار سنجی عملیاتی قرار داد.

- بررسی کنترل‌کننده‌های دیگر برای مدل الکترومغناطیسی در مد پویش.

منابع

[1] Garnell P. G, (1980), “**Guided Weapon Control Systems”, Vol.1,** Brassey's Defence Publisher, 1, **England, pp.46.**

[2] Siouris G. M., (2004), “**Missile Guidance and Control Systems”, Vol.1,** Springer-Verlog Publisher, 1, **USA, pp.46.**

[3] Bruce G. and William B.,(**2000), "The Future of Anti-Aircraft Imaging Infrared Seeker Missile Threats",** Georgia Tech Research Institute Signature Technology Laboratory**,** pp457-465.

[4] yanushevsky R., (2008), “**Modern Missile Guidance”**, **Vol.1,** Taylor & Francis Group,1, Boca Raton, pp.1.

[5] Ekstrand B., (2001), **"Tracking Filters and Models for Seeker Applications",** IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, Vol.37, No.3, pp.965-977.

[6] M R Ananthasayanam, A K Sarkar, A Bhattacharya, P K Tiwari, P Vora," (2005), **Nonlinear Observer State Estimation From Seeker Measurements and Seeker-Radar Measurements Fusion"**, in AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit, San Francisco, California, 15 – 18 August 2005, AIAA 2005-6066.

[7] P G Bhale, P N Diwedi, P Kumar,A Bhattacharya, (2006), "**Estimation of ballistic coefficient of reentry vehicle with divided difference filtering using noisy rf seeker data**", in Industrial Technology, 2006. ICIT 2006. IEEE International Conference on, Dec. 2006, pp. 1087 1092.

[8] M R Ananthasayanam, A K Sarkar, P Vora, A Bhattacharya, P K Tiwari, (2006), **"Observer State Estimation in Cartesian and Polar Frame From Noisy Seeker Measurements Using EKF and UKF"**, in AIAA Conference on Guidance, Control and Navigation, July-August 2006.

[9] A M Tapas, N Prabhakar, V Srinivas Rao, "**Adaptive Estimation of Line of Sight Rate Measurement from a Radio Frequency Seeker**", Defence Science Journal, vol. 55, no. 3, July 2005, pp. 307–312.

[10] P Vora, P K Tiwari, R N Bhattacharjee, (2005), "**Radio Frequency Seeker Modelling and Seeker Filter Design**", Defence Science Journal, vol. 55, no. 3, July 2005, pp. 337–348.

[11] P N Divedi, A Bhattacharya,P Bhale, (2005), **"Fast Convergence of Ballistic Coefficient to Estimate Re-entry Vehicle Acceleration using EKF from Noisy RF Seeker Data**", Proceedings of National Systems Conference, India, 2005.

[12] A K Bhattacharyya, Shrabani Bhattacharya, Tanushree Garai, Siddhartha Mukhopadhyay, (2008), **"Noise Modelling of RF Seeker for Homing Guidance Applications",** Proceedings of ICAS 2008, February 2008, Hyderabad, India, pp. 255–261.

[13] D. H. Titterton, (2006), **"Development of Infrared Countermeasure Technology and Systems"** , Springer Berlin / Heidelberg, 2006.

[14] C. Kopp, (1982), **"Heat-Seeking Missile Guidance"**, Australian Aviation.

[15] S.P. Mahulikar et al, (2008), **"Infrared Signature Studies of Airborne Targets"**, Proceedings of the International Conference on Aerospace Science and Technology.

[16] R. D. Hudson, (1969), **"Infrared system engineering"**, Wiley, 1969.

[17] M. Harshavardhan, **" Hide and Seekr The Art of Stealth"**, Aerospace Engineering Association, vol. 1, issue 1.

[18] Barbara Stuart, (2004), **"Infrared spectroscopy: fundamentals and application"**, Wily, 2004.

[۱۹] عاروان م، (۱۳۸۶)، رساله دکتری، "مدل‌سازی جستجوگر الکترواپتیکی و تخمین نرخ چرخش خط دید در حضور اغتشاش"، دانشکده مهندسی برق، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.

[20] NASA, (1997), **"Space Vehicle Gyroscope Sensor Applications"**, Virginia.

[21] Song T. L. and Um T. Y., (1996), "**Practical Guidance for Homing Missiles with Bearings-Only Measurements",** IEEE Trans. Aerospace and Electronic. Systems, Vol.32,pp.434–444.

[22] Lin C. F., (1991), "**Modern Navigation Guidance and Control Processing",** Prentice-Hall.

[23] Nesline F. W. and Zarchan P., (1985), "**Line of Sight Reconstruction for Faster Homing Guidance",** Journal of Guidance, Vo1.8, No.1.

[24] Rudin R. T., (1993), "**Strapdown Stabilization for Imaging Seekers**", Proc. AIAA SDIO 2nd Annu. Interceptor Technol. Conf., Albuquerque, NM.

[25] Waldmann J., (2002), **"Integration of Imaging Seeker Control in a Visually Guided Missile".**

[26] Smith B. J., Chrenk W. J., Gass W. B. and Shtessel Y. B., (1999), "**Sliding Mode Control in a Two Axis Gimbal System",** Aerospace Conference, 1999. Proc. 1999 IEEE, Vol.5,

4706-13.

[27] Lin C. L. and Hsiao Y. H., (2001), "**Adaptive Feedforward Control for Disturbance Torque Rejection in Seeker Stabilizing Loop",** IEEE Trans. on Control System Technology, Vol.9, No.1.

[28] Bhattacharya R. N., Rao T. V., Sabdou S. and Ghoghal T. K., (2002), "**Control Structures and Properties of Missile Seekers",** Journal of Institue of Engineers (India).

[29] Ekstrand B., (2001), **"Tracking Filters and Models for Seeker Applications",** IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, Vol.37, No.3, pp.965-977.

[30] Perona B. J., Yarbrough C. and Prill S. (2000), "**Opto-Mechanical Design of Primary Mirror Assembly for Free Gyro Stabilized Seeker**" ب **Proc**. of SPIE Vol.4093, pp.115-126.

[31] Ekstrand B. (2001), "**Equations of Motion for a Two-Axes Gimbal System**" IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, Vol.37, No.3, pp.1083-1091.

[32] Huhai J., Hongguang J., Qun W., (2012), "**Analysis of zenith pass problem and tracking strategy",** Aerospace Science and Technology 23, pp345–351.

[33] Nordman T.,(2004), M.S. thesis, "**Modelling of Gyro in an IR Seeker for Real-time Simulation,**" , Sweden.

[34] Stanley A. White, (1974), "**Dynamics of a Solenoidal-Torqued Gyro-Stabilized Seeker Assembly for Guidance and Tracking**", IEEE Trans. On Aerospace and Electronic Systems, VOL. AES-10, 1.

[35] Mckerley C. W. (1996), "**A Model for a Two Degree of Freedom Coupled Seeker with Mass Imbalance**" Southeastcon '96. Bringing Together Education, Science and Technology., Proc. of the IEEE, 8711-14.

[36] j.peraire, s.windnall, (2008), "**3D Rigid Body Dynamics Tops and Gyroscopes", MIT,** pp 1-10, USA.

[۳۷] رضائی ع،(۱۳۸۶)، "استفاده از الگوریتم ژنتیک در موشک‌های هدایت‌شونده"، مجله علمی- پژوهشی مهندسی مکانیک مجلسی، شماره ۲، دوره ۱، ص‌ص ۶۵-۷۲.

[38] aingfang. , yangliang w., zhongyu g.,yunheT., (1997), "**Design of a Magnetic Torquing system for an ESG. North Finder",** IEEE TRANS ACTIONS ON MAGNETICS, 33, 5.

[39] Edwan.E, Enedlik.S, Loffeld, (2011), "**constrained angular motion estimation in a gyro free IMU**", IEEE Trans Aerosp, Electon. Syst, 47, pp 596-610.

[40] schopp P., klingheil L, peters C., Maanoli Y., (2010), "**Design geometry evaluation, and calibration of a gyroscope-free inertial measyrment unit",**Actuat.A.Phys. 162, pp 379-387.

[41] Waggoner, B.A, (2003), M.S, **"Comparison of Gyroscope Digital Models for an Electro-Optical/Infrared Guided Missile Simulation"**, Rose-Hulman Institute of Technology.

[42] Hwang H. Y. and Schmitendorf W. E., **Robust** H **Stabilizing Controllers for a Seeker Scan Loop System,** Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol.19, No.5, pp.1081-1087, Sept.-Oct. 1996.

[43] Lee H. P. and Hwang H. Y., (1997), **"Design of Two Degree-of-freedom Robust Controllers for a Seeker Scan Loop System",** Internatinal Journal of Control. Vol.66, No.4, pp.517-537,. 1997.

[44] Lee H. P., (1998), **"Scan Loop Control Design for a Spin Stablized Seeker",** IEE Proc. Of Control Theory Application, Vol.145, No.2, pp.119-126,. 1998.

[45] Schmitendorf W. E., Kao Y. K. and Hwang H. Y., **"(1999), "Robust Tracking Controller for a Seeker Scan Loop",** IEEE Trans. on Control System Technology, Vol.7, No. 2, pp.282-288., March 1999.

[46] Lee H. P. and Schmididt D.K., (2002), **"Robust Two Degree-of-freedom** H **Control of a Seeker Scan Loop System",** IEE Proc.of Control Theory Application, Vol.149, No.2, pp.149-156,. 2002.

[۴۷] ازگلی س، عاروان م، (۱۳۸۹) "مدل‌سازی و شبیه‌سازی سامانه‌های متحرک" جلداول، چاپ اول، انتشارات یا مهدی(عج)، تهران.

[۴۸] ام. آ. پاولوفسکی، (۱۳۸۲) "تئوری ژیروسکوپ‌ها" جلداول، براتعلی نیک‌خواه وکریم چگینی، چاپ اول، انتشارات مکعب، تهران، ص ۷

[49] D. Halliday R. Resnick, J. Walker, (2011), "**Fundamentals of physics**", Vol.1, R.R.Donnelley, Jefferson city.

[50] Azizi N. and , Kardehi Moghaddam R.,(2013), " **Permanent Magnet Brushless DC Motor optimal design and determination of optimum PID controller parameters for the purpose of speed control by using the TLBO optimization algorithm**",Vol 1 (11).

[51] Kai-Lin Wang , Hui-Bin Wang, Li-Xia Yu, Xue-Yu Ma, Yun-Sheng Xue, (2013), **"Toward Teaching-Learning-Based Optimization Algorithm for Dealing with Real arameter Optimization Problems",** ICCSEE, pp606-609,paris

[52] R.V. Rao , V.J. Savsani, D.P. Vakharia, (2011), "**Teaching–Learning-Based Optimization: An optimization method for continuous non-linear large scale problems**", Department of Mechanical Engineering, S.V. National Institute of Technology, Surat 395 007.

[۵۳] باوفا ف، (۱۳۹۲)، پایان‌نامه ارشد، " بررسی تاثیر منابع انرژی تجدید پذیر بر ماده‌ی ورود و خروج نیروگاه‌ها با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی"، دانشکده مهندسی برق و الکترونیک، دانشگاه صنعتی شیراز.

[54] Richard P. Birchenall, Mark A. Richardson, Brian Butters, Roy Walmsley, (2011), "**Modelling an advanced ManPAD with dual band detectors and a rosette scanning seeker head**", Infrared Physics & Technology.

Abstract

In this thesis, desinging and modeling of free gyroscope seeker in scan mode have been studied.the seeker includes a permanent magnat rotor that has symmetric dipole.the advantage of the mechanism is possibility installation of more coils.these coils are used as magnatic torque genrators to change rotor direction of free gyroscope with more resulation nessecery to check optical system position in the search mode because direction is the man goal in this situation.

In this thesis, it is proposed a new dynamic equation of free gyroscope seeker based on effect of magnet tourqe on permanent magnet rotor. Also, the other main goal is proposed a control strategy for magnetic actuatore current to direct optical axes.

Keywords: Free Gyroscope Seeker, Scan mode, Electromagnetic Torque, Rotor, Dynamical Modeling, Gimbal, Controller

University of Shahrood

Faculty of Engineering Mechanic

Department of Mechatronic

modeling and control system design free gyroscope seeker with electromagnetic actuator in scanning mode

Supervisor:

Habib ahmadi

Advisor:

Mohamad reza arvan

Prepared by:

Mohamad kafrashi

A Thesis Submitted as a Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science Mineral Processing (M. Sc.)

june 2014