دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه حرارت و سیالات

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

حل مستقیم و معکوس معادلات غیر فوریه‌ای

دانشجو:

غزل رجبی خراسانی

استاد راهنما

دکتر محمد حسن کیهانی

استاد مشاور

دکتر علی عباس نژاد

دی ماه ۱۳۹۲

دانشکده مکانیک

گروه حرارت و سیالات

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم غزل رجبی خراسانی

تحت عنوان: حل مستقیم و معکوس معادلات غیر فوریه‌ای

در تاریخ ....**۱۳۹۲/۱۱/۱۹**..... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
دکتر محمد حسن کیهانی		دکتر علی عباس نژاد	
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
دکتر محمد محسن شاه مردان			
دکتر محسن نظری		دکتر محمود چهارطاقی	
نام و نام خانوادگی:			

تقدیم به

پگاه و علیرضای عزیز که همواره یاور و مشوقم بوده و هستند.

و پدرم، که همیشه مرا باور داشته است.

تقدیر و تشکر

بعد از حمد و سپاس الهی، بر خود لازم میدانم تا از زحمات استاد راهنمای محترم جناب دکتر کیهانی و به ویژه استاد مشاور گرامی جناب دکتر عباس نژاد که من را در به انجام رسانیدن این پایان نامه راهنمایی کردند، تقدیر و تشکر نموده، از خداوند منان آرزوی سلامت و توفیق روزافزون برایشان دارم.

تعهد نامه

اینجانب .....غزل رجبی خراسانی........ دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته .....مکانیک گرایش تبدیل انرژی.... دانشکده .....مکانیک..... دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه ....حل مستقیم و معکوس معدالات غیر فوریه ای...... تحت راهنمائی......دکتر محمد حسن کیهانی.....متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

فرآیند انتقال حرارت معمولا توسط مدل های سهموی توصیف شده است. در برخی موارد، زمانی که ضرایب هدایت حرارتی به خودی خود به راه حل بستگی دارد، ساختار و خواص حل به طور قابل توجهی تغییر می کند. اگر زمان سپری شده فرآیند انتقال حرارت بسیار کوچک باشد، اندک اندک اینرسی اهمیت پیدا کرده و ماهیت موجی انتقال انرژی گرمایی روند غالب می شود. به عنوان مثال، پدیده های فیزیکی دخیل در فعل و انفعالات پالس لیزری فوق العاده کوتاه با مواد جامد، بسیار پیچیده می باشند. نشان داده شده است که مدل کلاسیک سهمی دو دما، که بر اساس قانون فوریه است، به اندازه کافی دقیق نیست. برای چنین مواردی، مدل هذلولی پیشنهاد شده است . چند استراتژی را می توان برای ساخت الگوریتم های عددی جهت یافتن راه حل های مدل های انتقال حرارت هذلولی استفاده نمود.

اگر شرایط مرزی (شار گرما یا توزیع دما) بر روی سطح به طور کامل به عنوان تابعی از زمان و مکان شناخته شده باشند (Well-posed)، توزیع دما در داخل شی را می توان با حل معادله انتقال حرارت تعیین نمود. اما با توجه به شرایط مرزی ناشناخته، بسیاری از موارد عملی انتقال حرارت را نمی توان به طور مستقیم (Ill-Posed) حل نمود. مسائل Ill-posed را می توان با تجزیه و تحلیل معکوس حل نمود. یک روش برای حل مسائل انتقال حرارت معکوس (IHCP) استفاده از تغییر درجه حرارت در داخل جسم جهت بدست آوردن مشتق شار حرارت سطحی و توزیع دما می باشد.

در این پایان نامه یک مسئله هدایت گرمایی معکوس تک بعدی با استفاده از روش گرادیان مزدوج (CGM) حل شده است. روش CGM بر اساس به حداقل رساندن مجموع مربعات اختلاف بین دمای اندازه گیری و درجه حرارت محاسبه شده می‌باشد. به منظور بدست آوردن درجه حرارت تجربی، از نتایج حاصل از روش تحلیلی با اضافه کردن یک توزیع نرمال خطا استفاده می شود. ثابت می شود روش فوق الذکر برای به دست آوردن درجه حرارت، به ویژه هنگامی که اندازه گیری مستقیم شار حرارتی سطح با توجه به وجود شرایط

کار دشوار میباشد، بسیار مفید و قدرتمند است، . ابتدا با استفاده از یک شار حرارتی معلوم در یکی از مرزهای جسم، اعتبار روش گرادیان مزدوج استفاده شده تایید و سپس با استفاده از این روش شار حرارتی که منجر به توزیع دمای مطلوب داخل جسم می‌شود، تخمین زده خواهد شد. برای بررسی کارایی و دقت این الگوریتم مسائل آزمون بررسی شده است. نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش استفاده شده قابلیت کنترل دمای مطلوب را حتی با وجود اغتشاش در داده های ورودی دارد.

کلمات کلیدی: آنالیز معکوس، هدایت حرارتی غیر فوریه، گرادیان مزدوج الحاقی

لیست مقالات مستخرج

۱. تخمین شار مرزی حرارتی با استفاده از روش گرادیان مزدوج جهت کنترل دمای سطح، ارسال شده برای مجله مهندسی مکانیک مدرس

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

نماد شناسی

ظرفیت گرمایی	c
تابع هدف	J
گرادیان تابع هدف	J'
هدایت گرمایی	k
جهت نزول	P
شار حرارتی سطحی	q
دمای محاسبه شده	T
تابع حساسیت	ΔT
دمای اندازه گیری شده	Y
علائم یونانی	
مقدار کوچک شرط همگرایی	ε
پخشندگی گرمایی	α
زمان آسایش حرارتی	τ
انحراف معیار استاندارد	σ
عدد تصادفی	ω
ضریب الحاقی	γ
گام جستجو	β
چگالی	ρ
بالانویس	
مقدار تخمین زده شده	$\wedge$

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه و تاریخچه

۱-۱ مقدمه

قانون فوریه مدت زمانی طولانی به عنوان قانون حاکم بر انتقال گرما، انتشار انرژی گرمایی در یک ماده از طریق فرآیند پخش را توصیف کرده است. این قانون به عنوان یک مدل قابل اطمینان برای پیش‌بینی دمای ماده و همچنین میزان انتشار گرما از محیط، شناخته شده و اعتبار آن توسط آزمایش‌های متعدد به اثبات رسیده است. اما تکنولوژی‌های جدید مانند پالس‌های کوتاه لیزر که از مرتبه پیکوثانیه هستند و روش‌های جدید ساخت که امکان تولید فیلم‌های بسیار نازک را برای کاربردهای الکترونیکی فراهم می‌کند، نیاز به مطالعه انتقال گرما در مقیاس‌های کوچک زمانی و مکانی را افزایش داده است.

این قانون در مواردی شبیه انتقال حرارت گذرا در بازه‌های زمانی خیلی کوچک، انتقال گرما در دماهای خیلی پایین نزدیک صفر مطلق مانند کاربردهای موجد سرما[۱]، در فرآیند پردازش مواد به کمک لیزر، تابش موجهای الکترومغناطیسی با شدت بالا، انتقال حرارت با نرخ زیاد در محیط‌های رقیق و انتقال حرارت در ساختارهایی در ابعاد میکرون نتایج غیرقابل قبولی را ارائه می‌نماید. علت این امر ناسازگاری مدل هدایت فوریه با فیزیک واقعی انتشار حرارت می‌باشد [۱]. کاتانئو[۲] [۲] و ورنوته[۳] [۳] در سال ۱۹۵۸ مدلی را ارائه دادند که بر محدود بودن سرعت انتشار حرارت استوار است. ساختار غیرهمگن ماده باعث ایجاد یک تأخیر در پاسخ بین شار گرما و گرادیان دما می‌گردد. این تأخیر می‌تواند نمایانگر زمان لازم برای انبارش انرژی جهت تبادل حرارت بین اجزا ساختاری ماده باشد. در طی این تأخیر، شار گرمایی به تدریج خود را با آنچه فوریه بیان می‌کند تطبیق می‌دهد [۴]. بنابراین جبهه موج در جایی قرار دارد که پاسخ به تحریک گرمایی[۴] شروع به آرام گرفتن می‌کند. در حالی که فوریه بر این باور است که شار حرارتی به طور خیلی ناگهانی و سریع خود را با تغییرات گرادیان دما منطبق می‌سازد [۴].

---

[۱] Cryogenic

[۲] Cattaneo

[۳] Vernotet

[٤] Thermal disturbance

از آنجا که اینگونه مسایل در دنیای صنعتی بسیار پرکاربرد می‌باشند، توجه به روشهای حل معادلات غیرفوریه‌ی ضروری می‌نماید و این پایان‌نامه در پنج بخش به این مهم پرداخته است. هدف از این پایان‌نامه بررسی و تخمین شار مجهول دما با کمک روش معکوس جهت بررسی و کنترل دمای سطح می‌باشد. در فصل اول به تاریخچه مطالعات انجام شده به روش‌های تجربی، تحلیلی و عددی درباره هدایت غیر فوریه در موارد مختلف و معادلات معکوس حرارتی پرداخته می‌شود. در فصل دوم مدل ریاضی مناسب به همراه شرایط مرزی و شرایط اولیه با توجه به فیزیک حاکم بر مسأله بیان شده است. بررسی روشهای بهینه سازی معادلات معکوس حرارتی در فصل سوم بحث می‌شود. روش مورد استفاده، تاریخچه و نیز نکاتی که باید برای حل مسئله در نظر گرفته شود در فصل چهارم خواهد آمد. نتایج حاصل از مدل عددی و صحت و دقت آن‌ها برای مثال‌های مختلف در فصل پنجم ارائه شده است. در ضمیمه پیوست۱ مدل خطی سازی کرنک-نیکلسون توضیح داده شده است.

ناتوانی قانون فوریه در بیان هدایت گرما تحت شرایط متفاوت باعث مطرح شدن مدل‌های متعددی گشت که به صورت عمده به دو گروه مدل‌های میکروسکوپیک و مدل‌های ماکروسکوپیک تقسیم‌بندی می‌گردد. مدل‌های انتقال گرمای میکروسکوپیک مانند مدل برهمکنش فنون و الکترون[۵] (مدل دو مرحله‌ای) برای بیان انتقال گرمایی میکروسکوپی بین فنون و الکترون [۵] مورد استفاده قرار می‌گیرد. فنون یک شبه ذره است که حرکت نوسانی ذرات در مواد را توجیه می‌کند. مدل پخش فنون نشان‌دهنده انتقال گرمای حاصل از برخورد فنون‌ها در یک میدان فنون خالص[۶] [۶] و مدل انتقال تابشی فنون مربوط به انتقال گرما در محیط‌های با ضخامت بسیار کوچک [۷] است. این مدل‌ها نتایج حل معادله انتقال نیمه کلاسیک بولتزمن[۷] هستند که توسط بسیاری از محققان به عنوان اساسی‌ترین معادله توصیف پدیده انتقال معرفی شده است و می‌تواند برای مقیلاس‌های زمانی و طولی بسیار کوتاه استفاده شون

[۵] Phonon-Electron Interaction Model

[۶] pure phonon field

[۷] Boltzmann

گردد. از جمله مدل‌های ماکروسکوپیک می‌توان به مدل هدایت گرمایی سهموی [۸] و هدایت هذلولی (موجی) کاتانوئه[۸][۲] و ورنوته[۹]، [۳]، مدل شار گرمایی ژوزف[۱۰] و پرزیوسی[۱۱] [۹] [۱۰] ، مدل گرتن-پیپکین[۱۲] [۱۱] و مدل فرکتل[۱۳] (الویریا[۱۴] و پیج[۱۵]) اشاره کرد.

نهایتاً مدل عمومی تأخیر فاز دوگانه[۱۶] سو[۱۷] [۱۲]و[۱۳] مطرح شد که ارتباط بین اثرات پدیده میکروسکوپیک و بیان ماکروسکوپیک آن را نشان می‌دهد. مدل پیشنهاد شده این توانایی را دارد که تمام مدل‌های مطرح شده تا به امروز را، با تنظیم دو متغیر تاخیر زمانی به کار گرفته شده، پوشش داده و در محدوده وسیعی از مقیاس‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی پاسخ‌های فیزیکی مطلوبی را ارائه دهد.

روش‌های تئوری و تجربی متفاوتی برای بررسی و تحلیل هدایت غیر فوریه مطرح شده است که هر کدام دارای ویژگی منحصر به فرد می‌باشند. مطالعات تجربی بیشتر در زمینه مشاهده هدایت غیرفوریه در مواد و همچنین اندازه‌گیری ثابت‌های تأخیر زمانی متمرکز شده است، که با توجه به محدودیت ناشی از عدم دقت وسایل اندازه‌گیری در مقیاس‌های زمانی و طولی مورد بحث، تعداد این مقالات محدود می‌باشد. در روش‌های تئوری، خصوصیات کامل پدیده تحت شرایط متفاوت را با صرف هزینه کمتر می‌توان بررسی کرد.

---

[۸] Cattaneo

[۹] Vernotte

[۱۰] Joseph

[۱۱] Preziosi

[۱۲] Gurtin-Pipkin

[۱۳] Fractel

[۱۴] Oliveria

[۱۵] Page

[۱۶] Dual Phase Lag

[۱۷] Tzou

۲-۱ مطالعات تجربی

اولین شواهد تجربی از وجود هدایت گرمای غیر فوریه در بعضی از مواد خاص در دمای بسیار کم به دست آمده است. پشکو[1] [۱۴] به صورت تجربی انتقال گرمای غیر فوریه را در مایع هلیوم بررسی کرد و سرعت انتشار موج گرمایی را در دمای ۱/۴ درجه کلوین حدود ۱۹ متر بر ثانیه تخمین زد، که مرتبه بزرگی این عدد از سرعت حرکت نور تحت همین شرایط کمتر است.

تا به امروز نتایج مشاهده شده توسط پشکو یکی از معتبرترین آزمایش‌های انجام شده در زمینه هدایت هذلولی است. او با توجه به شباهت بین امواج حرارتی و صوتی نام موج دوم[2] را برای این پدیده در نظر گرفت.

پدیده هدایت غیر فوریه در مواد دیگر نیز مانند کریستال (۲۰-۱۰ درجه کلوین) و بیسموت (۴-۱/۲ درجه کلوین) به ترتیب توسط جکسون[3] [۱۵] و نرایامورتی[4] [۱۶] بررسی شد (فنگمینگ جینگ[5] [۱۷]). .([۱۷]

شواهدی تجربی برای اثبات اعتبار انتقال گرمای هذلولی توسط کامنسکی[6] [۱۸]، میترا[7] و همکاران [۱۹] به ترتیب بر ماسه مرطوب و گوشت فرآوری شده، به دست آمد. کمی بعد، آزمایش‌های گرسمن[8] و همکاران [۲۰]، هرویگ[9] و همکاران [۲۱] نتایج کامنسکی و میترا را با چالش مواجه کرد.

---

[1] Peshkov

[2] Second Sound

[3] Jackson

[4] Narayanmurti

[5] Fangming Jiang

[6] Kaminski

[7] Mitra

[8] Grasmann

[9] Herwig

تناقضات ارائه شده در مقالات در مورد مشاهده رفتار غیر فوریه در مواد، روتزل[1] و همکاران [۲۲] را به بررسی تجربی این پدیده واداشت. آن‌ها مشاهده کردند در تمامی این آزمایش‌ها خواص ترمودینامیکی مواد مستقل از ثوابت تأخیر زمانی در نظر گرفته شده است و همچنین شرایط مرزی و اولیه به کار گرفته شده تأثیر بسیار زیادی بر نتایج دارد. بنابراین روش تجربی جدیدی را پیشنهاد کردند که در آن با اعمال نوسانات دمایی، ثوابت تأخیر زمانی و ضریب دیفیوژن به طور همزمان اندازه‌گیری می‌شوند. با استفاده از این روش، طیف آزمایشات گسترده‌ای با تغییر در متغیرهایی از قبیل نوع ماده، اندازه ذرات، فشار و درجه حرارت حاکم، انجام گرفت. نتایج به دست آمده نشان داد که به طور قطع رفتار هایپربولیکی هدایت گرمایی در گستره‌ای از حجم ماده قابل مشاهده است.

میترا و همکاران [۲۳] با تاباندن لیزر بر فانتوم بافت استوانه‌ای شکل چند لایه‌ای، به بررسی تجربی و عددی توزیع دما پرداخته‌اند. ویژگی این مطالعه، نتایج دقیق آزمایشگاهی به علت استفاده از تجهیزات پیشرفته می‌باشد. اندازه‌گیری دما در این مطالعه نشان می‌دهد که دقت نتایج حاصل از حل معادله هدایت هذلولی بسیار بیشتر از معادله هدایت فوریه می‌باشد.

سو و همکارانش [۱۳] مجموعه‌ای از آزمایش‌ها را برای تعیین ثوابت زمانی شار گرمایی و گرادیان دما انجام دادند که بر فیلم نازک طلا تحت تابش پالس لیزر با طول ۹۶ فمتو ثانیه در چند دمای متفاوت انجام گرفت. مقادیر به دست آمده محدوده ثوابت زمانی شار گرمایی و گرادیان دما را در گرمایش سریع مشخص می‌کند، اما وجود وابستگی ثوابت به دما در این نتایج مشخص نیست.

۱-۳ حل معادلات غیر فوریه

حل معادلات هدایت غیرفوریه یکی از موضوعاتی است که در سال‌های اخیر توجه محققان را به خود جلب کرده است. با این حال، علی‌رغم مطالعات زیادی که انجام شده، ساختار و رفتار پیچیده فیزیکی این پدیده هنوز به طور کامل شناخته نشده است. روش‌های تحلیلی و عددی زیادی همراه با شرایط

[1] Wilfried Roetzel

مرزی و اولیه گوناگون در این زمینه ارائه شده است. حل تحلیلی معادله هدایت غیرفوریه به مسائل خطی و حالت یک بعدی محدود شده ولی مسائلی که عملا با آن مواجه هستیم عموما با موادی با خواص فیزیکی غیرخطی و هندسه‌های پیچیده ارتباط دارند که در این موارد حل تحلیلی مدل هدایت غیرفوریه امکان‌پذیر نمی‌باشد و باید به روش‌های عددی روی آورد.

۱-۳-۱ روش‌های تحلیلی

با توجه به پیچیدگی مسأله، روش‌های تحلیلی تنها در حالت‌های خاص و شرایط مرزی ساده قابل استفاده هستند. با این حال اهمیت این روش‌ها در این است که معیار خوبی برای اثبات درستی و اعتبار روش‌های عددی، توسعه آن‌ها و تولید شبکه‌بندی مناسب می‌باشند. در این قسمت مروری اجمالی بر مطالعات تحلیلی مدل هدایت غیرفوریه انجام گرفته است. برای ساده کردن این بررسی مطالعات تحلیلی به دو دسته عمده هدایت هذلولی و هدایت تأخیر فاز دوگانه تقسیم می‌شوند.

۱-۳-۱- الف - هدایت هذلولی

ماورر[۱] و همکاران [۲۴] با استفاده از روش تبدیل لاپلاس به تحلیل انتقال گرما در میله‌ای با طول محدود پرداختند که به طور ناگهانی در معرض شار حرارتی قرار می‌گیرد. ساهو[۲] [۲۵] نیز هندسه و روش فوق را برای مطالعه خود انتخاب کرد با این تفاوت که وی شرط مرزی انتقال گرمای جابه‌جایی را در نظر گرفت.

با توجه به کاربردهای زیاد اعمال شار گرمایی تناوبی مانند مراحل نورد مواد نیمه رسانا، ازیسک[۳] و همکاران [۲۶] از روش انتگرال دوهامل برای به دست آوردن توزیع دما تحت این شرایط استفاده کردند.

---

۱ Maurer

۲ Sahoo

۳ Ozisik

جمبرونیک[1] و مجرنیک[2] [۲۷] به بررسی تحلیلی اثرات هدایت غیرفوریه در میله‌ای با طول محدود و تحت تابش یک پالس حرارتی، با استفاده از روش تبدیل لاپلاس پرداختند و پس از مقایسه با نتایج حاصل از حل مدل سهموی، به بحث درباره شرایط مکانی و زمانی پرداختند که هدایت غیرفوریه از اهمیت بیشتری برخوردار است.

مالینوسکی[3] [۲۸] راه حلی تحلیلی برای معادله موج گرمایی با در نظر گرفتن توابع مختلف برای چشمه حراراتی ارائه کرد. برای این منظور ابتدا معادلات را بی‌بعد کرده و به کمک اصل برهمنهش[4]، توزیع دما را برای هر حالت به دست آورد.

بارلت[5] [۲۹] انتشار موج گرمایی در صفحه‌ای دایره‌ای شکل و توخالی با شعاع بینهایت را به کمک تبدیل لاپلاس بررسی کرد. وی شرط مرزی شار گرمایی وابسته به زمان را برای شعاع داخلی صفحه در نظر گرفت و نتایج حل تحلیلی با ثوابت تأخیر زمانی مختلف را با نتایج توزیع دمای حاصل از هدایت فوریه مقایسه کرد.

فرایند هدایت گرمایی هذلولی در یک کره توخالی که هر دو سطح آن به طور ناگهانی دچار تغییر دما شده است، با استفاده از تبدیل لاپلاس توسط جینگ[6] [۱۷] بررسی شده است.

لواندوسکا[7] و مالینوسکی[8] [۳۰] از روش تبدیل لاپلاس برای به دست آوردن توزیع دما در یک صفحه نازک که از هر دو سمت در معرض گرمایش قرار دارد استفاده کردند. در این مطالعه گرما به صورت یک چشمه حرارتی وارد معادلات شده است.

---

[1] Gembarovic

[2] Majernik

[3] Malinowski

[4] Superposition

[5] Barletta

[6] Jiang

[7] Lewandowska

[8] Malinowski

سعدالدین و ترابی یک استوانه متقارن محوری [۳۱] و یک مکعب [۳۲] با ابعاد محدود را که تحت تابش شار گرمایی متغیر (تابع مکان) قرار داشتند، در نظر گرفتند. آنها معادلات استخراج شده را با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کرده و توزیع دما را برای چندین ثابت تأخیر زمانی به دست آوردند.

شیرمحمدی [۳۳] در مطالعه خود توزیع دمای گذرای یک بعدی در یک محیط کروی تو خالی را به صورت تحلیلی به دست آورده است. سطح داخلی کره مورد بررسی در دمای ثابت و سطح بیرونی آن تحت تابش شار تابع زمان قرار دارد. با توجه به وابستگی شرط مرزی به زمان از روش انتگرال دوهامل برای حل این مسأله استفاده شده است. وی توزیع دما، انتشار و انعکاس موج گرمایی را برای ثابت‌های تأخیر زمانی و پالس لیزر با طول متفاوت و همچنین اثر هندسه بر توزیع دما و مقایسه نتایج حاصل از مدل هذلولی و فوریه مطالعه کرده است. موسایی [۳۴] با استفاده از روش جداسازی متغیرها، توزیع دما را در کره‌ای توخالی با شرایط مرزی غیر وابسته به زمان مورد بررسی قرار داد.

۱-۳-۱- ب - هدایت تأخیر فاز دوگانه

آنتاکی[۱] [۳۵] برای به دست آوردن توزیع دما در یک میله نامحدود با دو شرط مرزی متفاوت از تبدیل سینوسی فوریه و تبدیل لاپلاس استفاده کرد. در بخش اول این مطالعه توزیع دما برای نمونه‌ای با شرط مرزی دما ثابت و با استفاده از این نتایج در بخش دوم توزیع دمای میله با شرط مرزی شار ثابت به دست آمده است.

مسأله هدایت گرمای گذرا توسط اراکی[۲] و تانگ[۳] [۳۶] با استفاده از تابع گرین و تبدیل انتگرال محدود[۴] برای میله‌ای متناهی که تحت تابش پالس لیزر قرار دارد، بررسی شده است. در این مطالعه نتایج حاصل از حل مدل‌های مختلف هدایت گرمایی که با تنظیم دو ثابت تأخیر زمانی به دست آمدند با هم مقایسه و ویژگی هر کدام از مدل‌ها به طور جداگانه بررسی شده است. همچنین توافق قابل قبولی بین نتایج

---

[۱] Antaki

[۲] Araki

[۳] Tang

[۴] Finite Integral Transform

حاصل از حل و داده‌های آزمایشگاهی بروسن[۱] و همکاران [۳۷] و اکرمن[۲] و گایر[۳] [۳۸] به خوبی نشان داده شده است.

انتقال گرمای یک بعدی در محیط نیمه بینهایت با هر دو شرط مرزی دیریشله[۴] و نیومن[۵] همراه با چشمه حرارتی متناوب را گیل[۶] و میراندا[۷] [۳۹] بررسی کرده‌اند. به این صورت که با حدس تابعی خاص و جایگذاری آن، معادلات به معادلات سهموی تبدیل شده و سپس به کمک روش انتگرال فوریه و اصل برهمنهش حل شده‌اند.

۱-۳-۲ روش‌های عددی

به طور کلی روش‌های عددی کمتر از روش‌های تحلیلی نیازمند فرضیات ساده‌کننده هستند و این باعث شده در دهه‌های اخیر محققان زیادی توجه خویش را به حل معادلات هدایت غیر فوریه و کاهش نوسانات ناخواسته ناشی از طبیعت حل عددی معادله هذلولی، معطوف کنند.

۱-۳-۲- الف - هدایت هذلولی

نمونه‌ای یک بعدی برای بررسی بازتاب موج گرمایی از مرز توسط کری[۸] و سای[۹] [۴۰] مطالعه شد. هدف اصلی این مطالعه، بررسی اثربخشی تکنیک عددی به کار گرفته شده برای بیان دقیق انتشار گرما تحت تأثیر شرایط مرزی گوناگون است. برای حل مسأله مورد نظر، روش المان محدود و روش‌های مختلف

---

[۱] Broson

[۲] Ackerman

[۳] Guyer

[۴] Dirichlet

[۵] Neumann

[۶] Gil

[۷] Miranda

[۸] Carey

[۹] Tsai

انتگرال‌گیری زمانی استفاده شده است. همچنین درباره تأثیر این روش بر نوسانات ناخواسته عددی، قبل و بعد از انعکاس موج و سرعت همگرایی عددی به طور مفصل توضیح داده شده است.

ازسیک[۱] و گلس[۲] [۲۶] توزیع دما در یک میله بینهایت را با استفاده از روش پیشگو-صحیح‌گر[۳] مک کورمک[۴] به دست آوردند. در نمونه مورد بررسی دمای سطح جسم به طور ناگهانی تغییر کرده است و همچنین این سطح با محیط از طریق تابش تبادل گرما انجام می‌دهد.

جی‌یالین[۵] و هان‌تاچن[۶] به بررسی هدایت هذلولی در دستگاه مختصات دکارتی [۴۱]، استوانه‌ای و کروی [۴۲] پرداختند. مشکل اصلی در رابطه با چنین مسائلی، جلوگیری از نوسانات عددی در مجاورت تغییرات شدید است. روش ارائه شده ترکیبی از تبدیل لاپلاس برای حوزه زمان و حجم کنترل برای دامنه فضا می‌باشد. با اعمال روش لاپلاس، عبارت وابسته به زمان که عامل اغتشاشات عددی است حذف می‌گردد. در پایان میدان دما به کمک تبدیل معکوس لاپلاس به دست آمده است. آن‌ها همچنین نشان دادند که استفاده از تابع تبدیل هایپربولیک، موجب پایداری حل و کاهش نوسانات در ناپیوستگی‌های شدید است.

چن آی هانگ[۷] و چین شان سای[۸] [۴۳] با استفاده از ترکیب روش‌های لاپلاس و تخمین ریمن - سام[۹] به تحقیق درباره حرکت موج گرمایی و اثرات نسبت خواص فیزیکی در جسمی دولایه‌ای و کروی شکل پرداختند.

---

[۱] Ozisik

[۲] Glass

[۳] Predictor-Corrector

[۴] MacCormack

[۵] Jae-Yuh Lin

[۶] Han-Taw Chen

[۷] Chen-I Hung

[۸] Chin-Shan Tsai

[۹] Riemann-sum

لیو[1] [۴۴] روش اختلاف محدود را برای بررسی انتقال حرارت زیستی با استفاده از دو مدل هدایت فوریه و هذلولی در پوستی متشکل از سه لایه با خواص فیزیکی و گرمایی متفاوت به کار برد و نتایج حاصل از مدل‌های مختلف را با هم مقایسه کرد. همچنین تشریح کرد که در چه شرایط دمایی اثرات حرکت موج‌گونه در انتشار گرما بر فرایند نفوذ غالب است.

لم[2] و یونگ[3] [۴۵] از الگوریتم تقسیم شار براساس طرح گودناو[4] جهت گسترش راه حل عددی از حالت یک بعدی برای بیان انتقال گرمای هذلولی در محیط مستطیلی استفاده کردند. آن‌ها روش استخراج معادلات و معیار پایداری را به طور مفصل شرح داده و نتایج حاصل از حل خود را با نتایج حل تحلیلی موجود برای اثبات اعتبار روش مذکور مقایسه کردند.

هان[5] و شن[6] [۴۶] روش صریح تی‌وی‌دی[7] را به صورت دوبعدی برای حل هدایت غیرفوریه در دستگاه مختصات عمومی ارائه دادند. دو شرط مرزی همرفت و تابش از سطح در این مطالعه مورد بررسی قرار گرفته است. برای همگرایی مسأله با شرط مرزی تابش از روش تکرار نیوتنی استفاده شده است.

بانرجی[8] و همکاران [۲۳] به صورت عددی و تجربی به بررسی توزیع دما در مواد مختلف از جمله نمونه‌هایی استوانه‌ای شکل از گوشت فرآوری شده (بولونیا)، فانتوم بافت و فیبر کامپوزیت، تحت تابش لیزر پالس کوتاه و لیزر با تابش پیوسته پرداختند. آن‌ها برای مدل کردن جذب لیزر در مواد از قانون بیر-لمبرت استفاده کرده‌اند. در این مطالعه سازگاری میان نتایج عددی و تجربی و تأثیر خصوصیات ترموفیزیکی و شرایط مرزی در توزیع دما نشان داده شده است. همچنین آن‌ها دریافتند که در صورت

---

[1] Liu

[2] Lam

[3] Yeung

[4] Godunov

[5] Han

[6] Shen

[7] TVD

[8] Banerjee

اعمال توان‌های خروجی یکسان، لیزرهای پالس کوتاه نسبت به لیزرهای پیوسته بیشینه دمای بیشتری را باعث می‌شوند.

پترسون[۱] و همکاران [۴۷] انتشار یک پالس گرمایی را در یک ماده چند لایه‌ای به کمک روش اختلاف محدود و انتگرال‌گیری زمانی به صورت ضمنی ارزیابی کردند. در مطالعه آن‌ها پایداری طرح ضمنی به طور کامل بررسی شده است. همچنین با تحلیل و آنالیز نتایج، می‌توان شرایطی را در طول آزمایش تعیین کرد که اثرات انتشار موج گرمایی قابل مشاهده باشد.

زگلی[۲] و ون وو[۳] [۴۸] با استفاده از روش المان محدود ناپیوسته گالرکین[۴] اثرات انواع چشمه‌های گرمایی را بر توزیع دما در یک میله مورد مطالعه قرار داده و مزیت استفاده از این روش را که عدم مشاهده نوسانات عددی ناخواسته است، گزارش کردند.

اثرات هدایت غیرفوریه بر پاسخ‌های دمایی یک محیط کروی که سطح آن در معرض تغییرات ناگهانی دما قرار می‌گیرد توسط سای[۵] و همکارانش [۴۹] مورد بررسی قرار گرفته است. آن‌ها از یک روش نیمه تحلیلی برای محاسبه توزیع دما و شار گرمایی در یک کره تو پر یک لایه‌ای و دولایه‌ای و یک کره تو خالی بهره بردند. در این مطالعه اثرات متغیرهای مختلف از جمله ثابت تأخیر زمانی و ضریب نفوذ گرما و همچنین نسبت درجه حرارت اعمال شده بر لایه‌های درونی و بیرونی کره توخالی، بر توزیع دما و انتشار گرما در ماده ارائه شده است.

در مطالعه موسایی و عاطفی [۵۰] کارایی چندین روش صریح و ضمنی برای مدل‌سازی معادله موج گرمایی با شرایط مرزی متفاوت بررسی شده است. آن‌ها دریافتند که شرایط مرزی تأثیر قابل توجهی بر نوسانات موجود در حل معادله انتقال گرمای هذلولی دارد. از این رو، با توجه به شرایط مرزی اعمال

[۱] Peterson

[۲] Xikui Li

[۳] Wenhua Wu

[۴] Galerkin

[۵] Tsai

شده بر مسأله، انتخاب روش انتگرال‌گیری زمانی برای افزایش دقت حل عددی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

مسأله هدایت گرمایی هذلولی در سیستم مختصات کروی با استفاده از روش تابع گرین هیبریدی توسط سرمن چن[۱] و چینگ چی چن[۲] [۵۱] حل شده است. این روش ترکیبی از تبدیل لاپلاس برای حوزه زمان، تابع گرین برای دامنه فضا و روش الگوریتم شتاب اپسیلون[۳] برای همگرایی سریع‌تر می‌باشد. حل سه نمونه مسأله مختلف نشان داده که در این روش نوسانات عددی ناخواسته دیده نمی‌شود و راه حل عددی پایدار است.

۱-۳-۲- ب - هدایت تأخیر فاز دوگانه

هانر[۴] [۵۲] با شبیه‌سازی یک بعدی موج گرمایی در ماده‌ای تحت تأثیر تابش پالسی و پویتسه اثرات ثابت زمانی و شرایط مرزی متفاوت را بر توزیع دما با استفاده از روش نیمه تحلیلی لاپلاس و حجم کنترل به دست آورده است. همچنین درباره نوسانات عددی و راه‌های کاهش آن‌ها در این مطالعه بحث شده است.

جون زانگ[۵] و جنیفر جی ژاوو[۶] [۵۳] شرایط پایداری روش عددی اختلاف محدود با طرح انتگرال‌گیری زمانی کرنک نیکلسون[۷] را در یک هندسه دوبعدی صفحه تخت مورد مطالعه قرار دادند.

حل مسأله کلاسیک انتقال گرما در میله جامد با طول نامحدود به کمک روش طرح تفاضل محدود و انتگرال‌گیری زمانی صریح، توسط سو و چو[۸] [۵۴] ارائه شده است. همچنین در این مطالعه برای تطابق

---

[۱] Tzer-Min Chen

[۲] Ching-Chih Chen

[۳] ε-algorithm acceleration

[۴] Honner

[۵] Jun Zhang

[۶] Jennifer J. Zhao

[۷] Crank-Nicolson

[۸] Chiu

بیشتر حل عددی با نتایج تجربی، وابستگی‌های ثابت‌های تأخیر زمانی نسبت به دما نیز بررسی شده است.

دای[1] و نصار[2] [۵۵] روش اختلاف محدود از نوع کرنک نیکلسون را با معرفی تابع واسطه برای حل معادله در بازه زمانی متناهی توسعه دادند. این طرح در دو مرحله انجام می‌شود. به این صورت که معادله تأخیر فاز دوگانه به یک سیستم از دو معادله تقسیم می‌شود. پس از آن معادلات گسسته شده با استفاده از روش کرنک نیکلسون به طور همزمان حل می‌گردند. این طرح بدون قید و شرط پایدار است و نوسانات ناخواسته عددی در نتایج دیده نمی‌شود. آن‌ها از این روش برای محاسبه توزیع دمای سه بعدی در یک قطعه فیلم نازک نیز استفاده کردند. علاوه بر این، آن‌ها طرح اختلاف محدود دو مرحله‌ای را در حجم کمتر با دقت بالاتر و پایداری بدون قید و شرط، برای حالت یک بعدی [۵۶] و سه بعدی [۵۷] در مختصات دکارتی توسعه دادند. برای معادلاتی که در حالت سه بعدی به طور ضمنی گسسته شده‌اند به کمک روش تکرار ریچاردسون[3]، تنها یک سیستم سه قطری خطی در هر تکرار حل شده است. همچنین دای و همکاران [۵۸] از همین روش برای بررسی انتقال گرما در یک کره با ابعاد میکروسکوپی نیز استفاده کردند.

اثر ثابت تأخیر زمانی گرادیان دما برای اولین بار بر پدیده انتقال و انعکاس ناشی از عبور پالس انرژی گرمایی از میان سطح مشترک یک ساختار دولایه‌ای با استفاده از روش شبکه بولتزمن توسط جنگ رانگ هو[4] و همکاران [۵۹] مورد مطالعه قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که در صورتی که ثابت تأخیر زمانی گرادیان دما در محیط اول کمتر باشد موجی با دامنه مثبت و به دنبال آن موجی با دامنه منفی از سطح مشترک دولایه بازتابانده می‌شود و برعکس.

---

[1] Dai

[2] Nassar

[3] Richardson Iteration Technique

[4] Jeng-Rong Ho

مدل انتقال گرمای تأخیر فاز دوگانه برای توصیف انتقال گرمای گذرا در یک جسم دوبعدی در مختصات دکارتی و استوانه‌ای به صورت عددی و با استفاده از روش تفاضل محدود توسط تانگ[1] و همکاران [۶۰] ارائه شده است. در این مطالعه نتایج حاصل از مدل‌های مختلف هدایت گرمایی که با تنظیم دو ثابت تأخیر زمانی به دست آمده‌اند با هم مقایسه شده است.

زانگ[2] و شن[3] [۶۱] به کمک روش عددی تی‌وی‌دی تعداد قابل توجهی از رفتار متفاوت هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه را نسبت به هدایت گرمایی فوریه مورد بررسی قرار دادند. در این مطالعه نمونه‌هایی که ثابت زمانی گرادیان دما در آن‌ها بیشتر از ثابت زمانی شار گرمایی است با استفاده از تحلیل مشتق زمانی عبارت نفوذ و همچنین فرایند انعکاس امواج گرمایی به طور کامل ارزیابی شده است.

روش حل نیمه تحلیلی برای انتقال گرمای گذرا در محیط‌های ترکیبی متشکل از چند لایه با استفاده از هدایت گرمایی تأخیر فاز دوگانه توسط رمدان[4] [۶۲] ارائه شده است. روش مورد استفاده برای محاسبه گرادیان دما، توزیع دما و شار گرمایی در محیط مسطح، استوانه‌ای و کروی دولایه به کار گرفته شده است. به علاوه در مورد اثرات در نظر گرفتن تفاوت در خاصیت‌های حرارتی و فیزیکی لایه‌ها و مقاومت تماسی بین آنها، هندسه محیط و شرایط مرزی وابسته به زمان بحث شده است.

تحقیقات اندکی در زمینه هدایت غیر فوریه در محیط بافت بیولوژیکی انجام گرفته است. با توجه به بزرگ بودن ثابت‌های تأخیر زمانی در بافت بیولوژیکی، رفتار هدایت غیرفوریه‌ای در بافت که به صورت تجربی نیز مشاهده شده، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. سو[5] و همکاران [۶۳] در مطالعه خود به جمع‌آوری تحقیقات انجام شده در زمینه انتقال گرمای غیر فوریه برای توسعه یک روش محاسباتی

---

[1] Tang

[2] Zhang

[3] Shen

[4] Ramadan

[5] Xu

پرداختند. در این بررسی رفتار غیرفوریه‌ای هدایت گرمایی و تنش‌های مکانیکی بافت پوست به صورت یک لایه‌ای و چند لایه‌ای با کمک روش اختلاف محدود مطالعه شده است.

جاونیچ[۱] و همکاران [۶۴] با در نظر گرفتن یک فانتوم[۲] استوانه‌ای شکل چند لایه تحت تابش لیزر، به بررسی تجربی و عددی توزیع دما پرداخته و اثرات تابش لیزر با پرتو موازی و متمرکز را بررسی کردند. توزیع دمای شعاعی و محوری به دست آمده برای فانتوم نشان می‌دهد که سطح منطقه تحت تأثیر گرما طی تابش پرتو متمرکز نسبت به منطقه آسیب دیده هنگام تابش پرتوهای موازی لیزر بسیار کمتر است. بنابراین در این مطالعه به این نتیجه رسیدند که استفاده از لیزرهای متمرکز در طول درمان سرطان می‌تواند باعث کاهش آسیب بافت سالم اطراف بافت سرطانی گردد.

کو-چی لیو[۳] و هان‌تاچن [۶۵] هایپرترمیای مغناطیسی در توموری کروی شکل را به کمک مجموعه‌ای از روش‌های تبدیل لاپلاس، استفاده از تابع واسطه و روشی عددی برای تبدیل معکوس لاپلاس بررسی کردند. در این مطالعه خواص فیزیکی متفاوتی برای بافت سالم و تومور در نظر گرفته شده و اثرات ثوابت تأخیر زمانی، گرمای ناشی از سوخت و ساز بدن و سرعت پرفیوژن خون بر توزیع دما بررسی شده است. سپس آن‌ها به توسعه تحقیقات آنتاکی [۶۶] در مورد وجود رفتار غیر فوریه‌ای هدایت گرما در بافت بیولوژیکی پرداخته و پس از اثبات این موضوع، به علت اهمیت ثوابت تأخیر زمانی در پیش‌بینی توزیع دما با استفاده از روش مهندسی معکوس، مقدار ثابت زمانی شار گرمایی و گرادیان دما را در چند نمونه بافت بیولوژیکی و فانتوم (نمونه دست‌ساز با خصوصیات شبیه به بافت بیولوژیکی) تخمین زدند [۶۷].

ژوو[۴] و همکارانش به بررسی بافت بیولوژیکی یک لایه‌ای تحت تابش لیزر به صورت یک بعدی در دستگاه مختصات دکارتی [۶۸] و به صورت دو بعدی در دستگاه مختصات استوانه‌ای [۶۹] پرداختند. در این

[۱] Jaunich

[۲] Fantom

[۳] Kuo-Chi Liu

[۴] Zhou

مطالعات، ابتدا شار گرمایی را با استفاده از روش حجم کنترل به دست آورده و سپس دما محاسبه می‌شود.

۱-۴ حل معکوس مسائل انتقال حرارت

توسعه کامپیوتر و ابزار محاسباتی، رشد روش های عددی را برای مدل سازی پدیده های فیزیکـی تـسریع کرده است. برای مدل سازی یک پدیده فیزیکی به یک مدل ریاضـی و یـک روش حـل نیـاز اسـت. مـدل سازی مسائل هدایت حرارتی نیز به مانند دیگر پدیده های فیزیکی با حل معادلات حاکم امکان پذیر است. برای حل مسائل هدایت حرارتی به اطلاعات زیر نیاز داریم:

۱. هندسه ناحیه حل

۲. شرایط اولیه

۳. شرایط مرزی (دما یا شار حرارتی سطحی)

۴. خواص ترموفیزیکی

۵. محل و قدرت ترمهای منبع در صورتی که وجود داشته باشند.

پس از حل معادلات حاکم توزیع دما در داخل ناحیه حل به دست مـی آیـد. ایـن نـوع مـسائل را مـسائل مستقیم حرارتی می گوئیم. روش های حل مسائل مستقیم از سال ها پیش توسعه یافته اند. این روش هـا شامل حل مسائلی با هندسه پیچیده و مسائل غیرخطی نیز می گردند. علاوه بر این پایداری و یکتایی این روش ها نیز بررسی شده است. روش های اولیه عمدتاً برمبنای حل های تحلیلی بوده اند. این روش ها بیشتر برای مسائل خطی و با هندسه های ساده قابل استفاده هـستند. بـرعکس، روش هـای عددی دارای این محدودیت نبوده و برای کاربردهای مهندسی بیشتر مورد توجه هستند. دسته دیگر از این مسائل که در دهه های اخیر مورد توجه قرار گرفته اند، مسائل معکوس حرارتی هستند. در این نوع از مسائل یک یا تعدادی از اطلاعات مورد نیاز برای حل مـستقیم، دارای مقـدار معلـومی نمـی باشند و ما قصد داریم از طریق اندازه گیری دما در یک یا چند نقطه از ناحیه مورد نظر، به تخمین مقادیر مجهول بپردازیم. به طور کلی می توان گفت که در مسائل مستقیم حرارتی، علت

(شار حرارتی، هندسه و...) معلـوم، و هـدف یافتن معلول (میدان دما) می باشد. اما در مسائل معکوس حرارتـی، معلـول (دمـا در بخـش هـا و یـا تمـام میدان)، معلوم می باشد، و هدف یافتن علت (شار حرارتی، هندسه و...) است.

۱-۴-۱ تاریخچه مسائل معکوس حرارتی

شروع تحقیقات بر روی موضوع انتقال حرارت معکوس را می توان دهـه ۱۹۵۰ دانـست. در همـین سـالها، مقاله ای روسی توسط شوماکوف[۱] [۷۰] در مورد مسائل انتقال حرارت معکوس به ثبت رسید. یکی از قدیمی ترین مقالات در این زمینه، توسط استولز[۲] [۷۱] گزارش شده است. نویسنده در این مقالـه، نرخ انتقال حرارت را در فرآیند آب دهی اجسام با هندسه ساده و محدود محاسبه کرده است. میرسپاسـی [۷۳] [۷۲] این کار را با روشی مشابه برای اجسام نیمه بی نهایت از طریـق عـددی و گرافیکـی انجـام داده است. آغاز سفرهای فضائی از اواخر دهه ۱۹۵۰ انگیزه مهمی برای گسترش کاربردها و تحقیقـات در زمینـهIHCP شد. به عنوان مثال محاسبه نرخ انتقـال حـرارت در اثـر گرمـایش آئرودینـامیکی بـر روی دماغـه موشکها و یا اجسامی که وارد جو زمین می شوند از قبیل نازل، شیپوره موشکها و... از جمله مباحث مـورد توجه بود. بِک[۳] طی مقالاتی [۷۵] [۷۴] در دهه ۱۹۶۰ مفاهیم و روش هایی را بـرای تخمـین شـار حرارتی از طریق اندازه گیری دما ارائه داد که در آنها امکان استفاده از گـام زمـانی کـوچکتری نـسبت بـه روش استولز امکان پذیر بود. . زیانگ[٤] [۷۶] مقایسه ای بین روش های موجود IHCP انجام داد و همچنین اثر دینامیکی ترموکوپل را بر محاسبات انتقال حرارت معکوس مورد تحلیل قرار داد. شیدفر هم در مقاله‌ای [۷۷] به بررسی تکنیکهای ریاضی حل IHCP پرداخت.

[۱] Shumakov

[۲] Stolz

[۳] Beck

[٤] Xiang

حالت دیگری از مسائل معکوس در حوزه تغییر فاز توسط مارکوارت[1] و همکارانش [۷۸] انجام شده‌است. در این پژوهشها مساله معکوس سه بعدی برای جوشش استخری با استفاده از داده های اندازه‌گیری شده بررسی شده است. یکی دیگر از روش های به کار گرفته شده برای حل مسائل معکوس، روش های بهینه سازی است. درمرجع [۷۹] تاریخچه و مجموعه ای از روش های بهینه سازی که در حل مسائل معکوس به کار می‌روند، آمده است. یکی از این روش ها روش گرادیان مزدوج است که به طور گسترده ای در مسائل بهینه سازی مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از نکاتی که در این روش حائز اهمیت است، نحوه محاسبه تابعی است که می خواهیم بهینه کنیم. روش های متعددی برای محاسبه گرادیان تابع هدف در روش‌گرادیان مزدوج وجود دارد. پارک وچانگ[2] [۸۰] دو روش مشتق گیری مستقیم و استفاده از معادله الحاقی برای محاسبه گرادیان درروش گرادیان مزدوج را با هم مقایسه کرده اند. در این مقاله نتیجه گرفته اند که اگر چه روش مشتق‌گیری معمولی آسان و دقیق است، اما مدت زمان بیشتری را برای محاسبه طلب می کند. در عوض بدست‌آوردن گرادیان از طریق تشکیل معادله الحاقی می تواند زمان محاسبه را کاهش دهد، هرچند که بدست آوردن روابط مورد نیاز، دارای پیچیدگی های ریاضی می باشد. جارنی[3] و دیگران[۸۱] مسأله انتقال حرارت هدایتی معکوس در حالت چند بعدی را با استفاده از روش گرادیان مزدوج و معادله الحاقی بررسی کرده اند. هوانگ[4] [۸۲] مسأله تخمین شار حرارتی را برای یک جسم سه بعدی، در حالتی که شار به صورت پیوسته روی مرز تغییر می کند را بررسی کرد. کوثری و همکاران [۸۳] [۸۴] نیز با استفاده از روش گرادیان مزدوج و میزان متغیر به بررسی مسائل معکوس هدایت و تشعشع حرارتی پرداخته اند. محمدیون و مولوی به بررسی مسائل هدایت معکوس با استفاده از روش گرادیان مزدوج [۸۵]

---

[1] Marquardt

[2] Park and Chung

[3] Jarny

[4] Huang

پرداختند. همچنین مهدوی و خلخالیان تخمین شار حرارتی دیواره سیلندر در یک موتور احتراق داخلی [۸۶] و تخمین شار حرارتی عبوری از گلوگاه نازل موتور موشک [۸۷] به روش گرادیان مزدوج را بررسی کرده اند. لی[۱]، چن[۲] و دیگران از روش گرادیان مزدون جهت تخمین شار در بافت زنده [۸۸] استفاده کرده اند.مقالات دیگری نیز در زمینه استفاده از روش گرادیان مزدوج در حل مسایل معکوس حرارتی و تخمین شار موجود میباشد[۹۲] [۹۱] [۹۰] [۸۹] . علاوه بر این چندین پایان نامـه در دانـشگاههای کـشور در زمینــه مــسائل‌انتقال حرارت معکوس انجام شده است [۹۳] [۹٤] [۹٥] [۹۶].

در این پایان‌نامه نیز تخمین شار مجهول حرارتی با کمک روش CGM و خطی سازی کرانک-نیکلسون جهت بررسی و کنترل دمای سطح بررسی شده است.

۱-۴-۲ دسته بندی مسائل معکوس حرارتی

به دلیل کاربرد گسترده مسائل معکوس حرارتی در علوم و صنعت، توسعه دسته بندی ایـن گونـه مــسائل‌مهم است. در یک دسته بندی مسائل معکوس حرارتی به دو دسته زیر تقسیم می شود:

- مسائل تخمین پارامتر
- مسائل تخمین تابع

در مسائل تخمین پارامتر، هدف، تخمین پارامترها، ثابت ها و یا خواص ترموفیزیکی مانند رسانش گرمایی ویا ظرفیت گرمایی ویژه است. در حالی که در مسائل تخمین تـابع، هـدف، تخمـین یـک تـابع مانند شـارحرارتی سطحی و یا رسانش تماسی در سطح مشترک است که با زمان و یا مکان تغییر می کند. مسائل معکوس حرارتی را همچنین می توان با توجه به طبیعت مسأله به صورت زیر طبقه بندی نمود:

۱. مسائل معکوس هدایت حرارتی
۲. مسائل معکوس جابجایی(آزاد یا اجباری)

---

[۱] Lee

[۲] Chen

۳. مسائل معکوس تشعشع سطحی

۴. مسائل معکوس تشعشع در محیط های موثر در تشعشع

۵. مسائل معکوس هدایت و تشعشع همزمان

۶. مسائل معکوس جابجایی و هدایت همزمان

۷. مسائل معکوس تغییر فاز(ذوب یا انجماد)

یک دسته بندی دیگر برای مسائل معکوس هدایتی را می توان برپایه نوع مشخصه سببی تخمینی در نظر گرفت که در زیر معرفی شده است:

۱. مسائل تخمین پارامتر

۲. مسائل تخمین شرط مرزی

۳. مسائل تخمین شرایط اولیه

۴. مسائل تخمین هندسه ناحیه حل

۵. مسائل دیگر

مسائل تخمین پارامتر، شامل مسائلی می شوند که هدف آنها تخمین یک یا چند پارامتر است. این‌پارامترها معمولاً خواص فیزیکی یک جسم مانند ضریب هدایت حرارتی، چگالی، ظرفیت گرمائی ویژه،ضریب نفوذ حرارتی و... می باشند. این نوع از مسائل معمولاً غیرخطی هستند. مسائل تخمین شرط مرزی از پرکاربردترین مسائل مورد استفاده در مسائل معکوس هدایت حرارتی‌هستند، زیرا در اکثر مسائل، تخمین شار حرارتی سطحی از روی اندازه گیری دما در داخل جسم مورد توجه می‌باشد. در برخی مسائل از این نوع هم هدف یافتن شرط مرزی دما است. مسائل تخمین شرایط اولیه کمتر از دیگر مسائل مورد بررسی قرار گرفته اند، زیرا نسبت به دیگر مسائل‌معکوس کاربرد کمتری دارند. مسائل تخمین هندسه نیز هنگامی که هندسه ناحیه حل کاملاً مشخص نیست و یا به دنبال هندسه بهینه برای یک مسأله خاص باشیم، مطرح می شوند.

۱-۴-۳- محدوده کاربرد انتقال حرارت معکوس

با ظهور مواد مخلوط مدرن و وابستگی شدید خواص ترموفیزیکی آنها به دما و مکان، روشهای معمولی برای محاسبهٔ آنها راضی کننده نیستند. همچنین انتظارات عملیاتی صنعتی مدرن هر چه بیشتر و بیشتر پیچیده شده‌اند و یک محاسبهٔ دقیق در محل از خواص ترموفیزیکی تحت شرایط واقعی عملیات ضرورت پیدا کرد. شیوه انتقال حرارت معکوس(IHTP)[۱] می‌تواند جوابهای رضایت بخشی برای اینگونه حالات و مسایل بدست دهد.

سود عمده IHTP اینست که شرایط آزمایش را تا حد امکان به شرایط واقعی نزدیک می‌سازد.

کاربرد عمده تکنیک IHTP شامل محدوده‌های خاص زیر می‌باشند (در میان سایرین)

- محاسبه خواص ترموفیزیکی مواد به عنوان مثال؛ خواص ماده سپر حرارتی[۲] در طی ورودش به اتمسفر زمین و برآورد وابستگی دمایی ضریب هدایت قالب[۳] سرد در طی باز پخت استیل
- برآورد خواص تشعشعی بالک و شرایط مرزی در جذب[۴]، نشر[۵] و بازپخش[۶] مواد نیمه رسانا[۷]
- کنترل حرکت سطح مشترک جامد - مایع در طی جامدسازی[۸]
- برآورد شرایط ورود و شار حرارتی مرزی در جابجایی اجباری درون کانالها
- برآورد همرفت سطح مشترک بین سطوح متناوباً[۹] در تماس

---

۱ Inverse Heat Transfer Problems

۲ heat shield

۳ ingot

٤ Absorb

٥ Emitt

٦ Scatter

۷ Semi-transparen materials

۸ Solidification

۹ Periodically

- نظارت خواص تشعشعی سطوح بازتاب کنندۀ[1] گرم کننده‌ها و پنلهای برودتی[2]
- برآورد وابستگی دمایی ناشناخته ضریب هدایت سطوح مشترک بین ذوب و انجماد فلزات در طی ریخته‌گری[3]
- برآورد توابع واکنشی[4]
- کنترل و بهینه سازی عملیات پروراندن لاستیک[5]
- برآورد شکل مرزی اجسام[6]

برآورد اینگونه خواص از طریق تکنیک‌های رایج کاری به شدت دشوار یا حتی غیرممکن است. اگر چه با اعمال آنالیز انتقال حرارت معکوس، اینگونه مسایل نه تنها می‌توانند حل شوند، بلکه ارزش اطلاعات مطالعات افزوده شده و کارهای تجربی سرعت می‌گیرند.

۱-۴-۴ حل مسائل معکوس حرارتی

همان طور که قبلاً اشاره شد مسائل معکوس از دیدگاه ریاضی جزو دسته مسائل ناهنجارهستند. بنابراین برای حل این گونه مسائل می بایست روش های خاصی به کار گرفته شود. وجود جواب برای مسائل معکوس حرارتی را می توان با استدلال فیزیکی مسأله بررسی کرد. اما یکتایی‌جواب تنها برای تعدادی از مسائل به صورت ریاضی اثبات شده است. همچنین مسائل معکوس نسبت به‌خطاهای اندازه گیری و اغتشاشات در ورودی ها و داده های مسأله بسیار حساس هستند و به همین دلیل بایستی روش های خاصی را برای یافتن جواب این گونه مسائل به کار برد. برای حل این مشکل تیخونوف و آرسنین[7] [۹۷] روش منظم سازی را ارائه دادند که در آن به منظور کاهش اثر خطاهای ناشی از اندازه‌گیری

---

۱ Reflecting surfaces of heaters

۲ Cryogenic panels

۳ Casting

۴ Reaction function

۵ Curing

۶ Boundary shapes of bodies

۷ Tikhonov and Arsenin

دما، جمله هایی به معادله تخمین افزوده می شود. الیفانوف[1] [۹۸] نیز روش منظم سازی تکـراری را ارائـه داد که در آن بهبود جواب مسأله در یک روند تکراری و متوالی انجام می گیرد. در این روش معیـار توقـف روند تکرار براساس پایداری جواب نسبت به خطای موجود در داده های ورودی تعیین می شود.

۱-۴-۴-۱ طبقه بندی روش ها

روش هایی که برای حل مسائل معکوس هدایت به کار می روند به طرق مختلف طبقه بنـدی مـی‌شـوند. یک طبقه بندی مربوط به توانمندی روش برای حل مسائل اعم از مسائل غیرخطی و خطی است. به عنوان مثال روش تخمین تابع و منظم سازی را می توان برای مسائل غیرخطی نیز به کار برد، در حالی که روش‌هایی مانند تبدیل لاپلاس منحصراً برای مسائل خطی به کار می روند.

روش دیگر طبقه بندی براساس روش بدسـت آوردن جـواب معادلـه هـدایت حرارتـی اسـت، ماننـد روش‌دوهامل، تفاضل محدود، اجزای محدود و حجم محدود و... . روش دوهامل تنها برای مسائل خطی کـاربرد دارد در حالی که دیگر روش‌های ذکر شده در مسائل غیرخطی نیز می توانند استفاده شوند. دامنه زمانی در مسائل انتقال حرارت هدایت معکوس را می توان به عنوان معیاری بـرای طبقـه بنـدی در نظر گرفت. در این تقسیم بندی روش های IHCP به دو گروه تقسیم می شوند.

۱. روش های متوالی[2]

۲. روش های تمام دامنه[3]

این نوع تقسیم بندی مهم ترین نوع تقسیم بنـدی روش هـای IHCP اسـت. هرکـدام از روش هـای بـالادارای مزایا و معایب مربوط به خود هستند. در روش های متوالی، مولفه های شار حرارتی به شکل

[1] Alifanov

[2] Sequential Methods

[3] Whole domain methods

گام بـه‌گام و یکی پس از دیگری تخمین زده می شوند. دو روش از این دسته، یکی روش تطابق دقیق[1] یـا اسـتولز است و دیگری روش تخمین متوالی تابع[2] می باشد. در روش اول، دماهای بدست آمده از سنـسور برابـر بـا دماهای محاسبه شده قرار می گیرند و محاسبات انجام می شود. این روش از نظر محاسباتی بسیار سریع وآسان است اما مشکل آن، این است که نسبت به خطاهای اندازه گیری بسیار حساس و در نتیجـه ناپایـداراست. در روش دوم از چند دمای اندازه گیری شده در زمان های آینده نیز برای تخمین شـار حرارتـی در زمـان‌حال استفاده می شود. این روش که توسط بِک ارائه شـد بـرخلاف روش اول بـه خطاهـای انـدازه گیـری‌حساسیت کمتری دارد و می توان گام های زمانی کوچکتری را برای اندازه گیری دما به کار برد. اسـتفاده‌از گام های زمانی کوچک این امکان را به ما می دهد که اطلاعـات بیـشتری از تغییـرات شـار حرارتـی درطول زمان به دست آوریم.

روش تمام دامنه، روشی کارآمد است که از تمام دماهای اندازه گیری شده به طور همزمـان اسـتفاده مـی‌کند و تمام مولفه های شار حرارتی در زمان های مختلف را با یکدیگر و به طور همزمان تخمین مـی زنـد. این روش به خاطر امکان استفاده از گام های زمانی کوچـک مناسـب اسـت، امـا حجـم محاسـبات آن درمقایسه با روش مرحله ای خیلی بیشتر است. روش های بهینـه سـازی از دسـته روش هـای تمـام دامنــه‌هستند. طبقه بندی دیگری که برای حل مسائل معکوس هدایت به کار می روند، براسـاس ابعـاد مـسأله معکـوس‌است. اگر هدف مسأله تخمین تنها یک شار حرارتی باشد، مسأله یک بعدی اسـت. درروش دوهامـل ابعـادفیزیکی مسأله تأثیری در نحوه حل ندارد. بدین معنی که اگر هدف، تخمین تنها یک شـار حرارتـی باشـد، روال حل برای اجسام یک، دو و سه بعدی یکسان اسـت. اگـر هـدف تخمـین دو یـا چنـد شـارحرارتی بـااستفاده از روش دوهامل باشد، مسأله چند بعدی است. اگر از روش هایی همچون تفاضـل محـدود، اجـزاءمحدود یا... در مسائل غیرخطی استفاده شود، تعداد

---

۱ Seq. Methods

۲ Sp. Methods

مختصات فـضایی کـه بـرای تحلیـل فیزیکـی انتقـال‌حرارت هدایت در جسم به کار می رود، بعد مسأله را تعیین می کند.

تکنیک‌های حل مسایل می‌توانند بصورت زیر نیز طبقه بندی شوند، البته اینگونه تکنیک‌ها معمولاً نیازمند حل مستقیم مربوطه می‌باشد. البته ارائه روشهایی که مسایل معکوس را بدون ارتباط با مسایل مستقیم حل کنند بسیار دشوار است.

۱. روشهای معادلات انتگرالی[۱]

۲. روشهای تبدیل انتگرال[۲]

۳. روشهای حل سری[۳]

۴. روشهای چند جمله‌ای[۴]

۵. بزرگنمایی معادلات هدایت گرمایی[۵]

۶. روشهای عددی[۶] مثل تفاضل محدود، المان محدود و المان مرزی

۷. تکنیک‌های فضایی[۷] با اعمال فیلترینگ نویز اضافی مثل روش نرم کردن[۸]

۸. تکنیک فیلترینگ تکرار شونده[۹] [۹۹]

۹. تکنیک حالت پایدار[۱۰]

---

۱ Integral equation approach

۲ Integral transform techniques

۳ Series solution approach

٤ Polynomial approach

٥ Hyperbolization of the heat conduction equation

٦ Numerical methods

٧ Space marching techniques

٨ Mollification method

٩ Iterative filtering techniques

١٠ Steady-state techniques

۱۰. روش تابع مشخصه متوالی بک[۱]

۱۱. روش لوبنرگ - مارگارت[۲] برای مینیمم کردن نرم کوچکترین مربعات[۳]

۱۲. روش منظم سازی تیخونوف[۴]

۱۳. روش منظم سازی تکراری[۵] برآورد توابع و پارامترها

۱۴. الگوریتم ژنتیک[۶] [۱۰۰]

۱-۴-۴-۲ مشکلات حل مسایل انتقال حرارت معکوس

برای تشریح مشکلات اصلی حل مسایل انتقال حرارت معکوس، جامد نیمه بینهایت ($0<x<\infty$) در دمای اولیه صفر در نظر می‌گیریم. برای زمانهای $t>0$ سطح مرزی در $x=0$ تحت یک شار گرمایی متناوب به فرم $q(t)=q_0$ قرار گرفته است. جایی که q_0 و ω به ترتیب دامنه و فرکانس نوسان شار گرمایی هستند و t متغیر زمان است. بعد از گذشت حالت متغیر[۷]، توزیع دمایی شبه - ثابت[۸] در جامد با توزیع دمایی زیر بدست می‌آید:

$$T(x,t)=\frac{q_0}{k}\sqrt{\frac{\alpha}{w}}\exp\left(-z\sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right)\cos\left(wt-z\sqrt{\frac{w}{2\alpha}}-\frac{\pi}{4}\right) \qquad (۱-۱)$$

جایی که α پخشندگی حرارتی و k ضریب رسانایی حرارتی جامد هستند.

معادلهٔ بالا نشان می‌دهد که پاسخ دمایی دارای یک تاخیر فاز نسبت به شار اعمالی سطحی می‌باشد و این تأخیر برای مکانهای عمیق‌تر درون جسم واضحتر می‌باشد. در صورتی که این شار بتواند برآورد

---

[۱] Beck's sequential function specification method

[۲] Levenberg-Marquardt

[۳] Minimization of the least-squares norm

[۴] Tikhonov regularization approach

[۵] Iterative regularization methods

[۶] Genetic algorithms

[۷] Transients

[۸] Quasi-stationary temperature distribution

شود، این تأخیر دمایی نیاز به برداشت اطلاعات پس از اعمال شار حرارتی را آشکار می‌کند.

دامنهٔ نوسان دما در هر مکانی، $|\Delta T(x)|$، با قرار دادن $\cos(0)=1$ در معادله بدست می‌آید. لذا:

$$|\Delta T(x)| = \frac{q_\circ}{k}\sqrt{\frac{\alpha}{w}}\,\exp\left(-x\sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right) \qquad (۲-۱)$$

این معادله نشان می‌دهد که $|\Delta T(x)|$ به صورت توانی با افزایش عمق و با افزایش فرکانس تغییر می‌کند.

اگر دامنه شار حرارتی سطحی (q) بوسیله بکار بردن اندازه‌گیری مستقیم دما در نقاط داخلی اندازه گیری گردد آنگاه هر گونه خطای اندازه‌گیری $|\Delta T(x)|$ با عمق x و فرکانس ω بصورت توانی بزرگنمایی می‌شود، که به صورت معادله زیر نشان داده می‌شود:

$$q_\circ = k\,|\Delta T(x)|\,\sqrt{\frac{w}{\alpha}}\,\exp\left(x\sqrt{\frac{w}{2\alpha}}\right) \qquad (۳-۱)$$

برای تخمین شار حرارتی مرزی جانمایی یک سنسور در عمق x از سطح، جایی که دامنه نوسانات دما بسیار بزرگتر از خطاهای اندازه گیری‌اند، ضروری می‌باشد. در غیر اینصوررت تشخیص اینکه نوسانات دمایی در اثر شار حرارتی یا خطای اندازه‌گیری بوده غیرممکن خواهد بود، که منجر به عدم یگانگی جواب معادله خواهد شد.

از آنجا که خطاها در دقت روشهای معکوس بسیار مؤثراند، بک[۱] ([۱۰۱] [۷۴] [۷۵]) توصیفات اینگونه خطاها را به صورت ۸ نکته بیان نموده است.

۱. خطاها به مقدار اصلی اضافه می‌شوند $Y_i = T_i + \varepsilon_i$ که Y_i مقدار اندازه‌گیری شده، T_i مقدار واقعی و ε_i یک خطای رندوم می‌باشد.

۲. خطای دمایی دارای میانگین[۲] صفر می‌باشد. یعنی $E(\varepsilon_i)=0$. جایی که $E(0)$ یک عملگر

---

[۱] Beck

[۲] mean

اندازه است، آنگاه گفته می‌شود که خطا بدون پیش مقدار[1] است.

۳. خطا دارای انحراف[2] ثابت است، که عبارت است از

$$\sigma_i^{۲} = E\{[Y_i - E(Y_i)]^{۲}\} = \sigma^{۲} = \text{constant} \qquad (۴\text{-}۱)$$

که به معنای استقلال انحراف Y_i از اندازه‌گیری است.

۴. خطاهای مرتبط با اندازه گیری‌های مختلف ناهمبسته هستند. دو خطای اندازه‌گیری ε_i و ε_j (که $i \neq j$) ناهمبسته هستند اگر کوواریانس[3] ε_i و ε_j صفر باشد. یعنی

$$\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \equiv E\{[\varepsilon_i - E(\varepsilon_i)][\varepsilon_j - E(\varepsilon_j)]\} = ۰ \qquad i \neq j \qquad (۵\text{-}۱)$$

در این حالت خطاهای ε_i و ε_j هیچ تأثیری یا رابطه‌ای بر هم ندارند.

۵. خطاهای اندازه‌گیری دارای یک توزیع نرمال (گوسی)[4] است. با توجه به فرضیات ۲، ۳ و ۴ بالا توزیع احتمال ε_i بوسیله معادله زیر داده می‌شود

$$f(\varepsilon_i) = \frac{۱}{\sigma\sqrt{۲\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right) \qquad (۶\text{-}۱)$$

۶. پارامترهای معرفی کننده خطا مثل σ معلوم هستند.

۷. تنها متغیری که دارای خطاهای رندوم می‌باشد دمای اندازه‌گیری شده است. پارامترهای اندازه‌گیری شده مکانهای اندازه‌گیری شده، ابعاد جسم گرم شونده و تمامی کمیت‌هایی که در فرمول‌نویسی ظاهر شده‌اند به دقت[5] مشخص هستند.

اطلاعات پیشین کمیت‌ها جهت تخمین موجود نیست (می‌تواند پارامتر یا تابع باشند) اگر این اطلاعات موجود می‌بود می‌توانست جهت بهبود تخمین مقادیر بکار رود.

---

۱ unbiased

۲ variance

۳ covariance

٤ normal (Gaussian) distribution

٥ Accurately

۱-۴-۴-۳ ارزیابی روش های مسائل معکوس هدایت

به منظور ارزیابی روش های به کار گرفته شده در IHCP باید معیارهای زیر را در نظر گرفت:

۱. کمیت پیش بینی شده در صورتی که داده های اندازه گیری شده دارای دقت بـالایی باشـند، بایـستیدقیق باشد.

۲. روش می بایست نسبت به خطاهای اندازه گیری پایدار باشد (حساسیت نداشته باشد).

۳. روش می بایست دارای پایه های آماری باشد و اجازه دهد تا توزیع های آماری متنوعی برای خطاهـایاندازه گیری وجود داشته باشد.

۴. روش نباید نیازمند این باشد که داده های اندازه گیری از قبل هموار شده باشند.

۵. روش می بایست برای گام های زمانی کوچک پایدار باشد این عمل باعث دقت بهتر در تغییرات زمـانیکمیت مجهول می شود.

۶. روش می بایست امکان بهره گیری از چندین سنسور را در اختیار ما قرار دهد.

۷. روش نباید نیازمند مشتقات اول پیوسته مجهول باشد اگر چه روش باید قـادر باشـد تـا تـوابعی را کـه دارای ناپیوستگی هستند، بازیابی کند.

۸. دانستن زمان شروع دقیق کاربرد شار حرارتی سطح یا ترم چشمه مجهول نباید مورد نیاز باشد. معمـولاًزمان ابتدای اعمال شار حرارتی هم زمان با زمان اندازه گیری دما توسط سنسور نیـست. همچنـین زمـاندقیق تغییرات ناگهانی شار حرارتی نیز برای ما معلوم نیست.

۹. روش نباید به تعداد مشخصی از داده های اندازه گیری محدود باشد.

۱۰. روش می بایست قادر باشد تا در موقعیت های فیزیکـی پیچیـده شـامل جامـدهای مرکـب، مرزهـایمتحرک، خواص وابسته زمانی انتقال حرارت جابجایی یا تشعشعی، مدل های ترکیبـی از انتقـال حـرارت،مسائل چند بعدی و هندسه های غیرمتعارف عمل کند.

۱۱. روش می بایست جهت برنامه نویسی کامپیوتری ساده باشد.

۱۲. هزینه محاسبات می بایست متعادل باشند.

۱۳. روش نبایست به گونه ای باشد که کاربر برای بهره گیری از آن در اجسام با هندسه های مختلف نیازمند مهارت بالایی در ریاضیات باشد.

۱۴. روش می بایست قادر به گسترش به بیش از یک مجهول باشد.

۱-۴-۴-۴ تکنیک‌های حل مسایل انتقال حرارت معکوس

هدف اصلی این بخش معرفی تکنیکهایی جهت حل مسایل انتقال حرارت معکوس و روابط ریاضی موررد نیاز می‌باشد. اگر چه تکنیکهای زیادی موجود هستند، اما در اینجا به ذکر ۴ تکنیک قدرتمند بسنده می‌کنیم.

I. لونبرگ - مارکوت[۱] برای تخمین پارامترها

II. گرادیان مزدوج[۲] برای تخمین پارامترها

III. گرادیان مزدوج با مسئله اضافی[۳] برای تخمین پارامترها

IV. گرادیان مزدوج با مسئله اضافی برای تخمین توابع

این روشها معمولاً کافی، تطبیق‌پذیر، مستقیم و قدرتمند جهت غلبه بر مشکلات موجود در حل معادلات انتقال حرارت معکوس می‌باشند.

تکنیک I: این تکنیک یک روش تکراری برای حل مسایل کوچکترین مربعات تخمین پارامترهاست. این روش اولین بار در سال ۱۹۶۶ توسط لونبرگ [۱۰۲] ایجاد شد، سپس در سال ۱۹۶۳ مارکوارت [۱۰۳] همان تکنیک را با استفاده از روشی دیگر بدست آورد. حل مسایل معکوس به این روش، نیازمند محاسبه ماتریس حساسیت J می‌باشد. ماتریس حساسیت به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$j_{ij} = \frac{\delta T_i}{\delta p_i} \qquad (۱-۷)$$

[۱] Levenberg - Marquardt

[۲] Conjucnction gradient

[۳] Adjoint problem

جایی که:

$i = ۱, ۲, \ldots, N$

$j = ۱, ۲, \ldots, N$

$I =$ تعداد اندازه‌گیری

$N =$ تعداد پارامترهای نامعلوم

$T_i =$ دمای iام تخمین زده شده

$p_j =$ پارامتر jام نامعلوم

این ضریب حساسیت نقش مهمی را در تکنیکهای I تا III ایفا می‌کند. این روش برای حل معادلات خطی و غیرخطی بسیار موثر است. گر چه در مسایل غیرخطی با افزایش پارامترهای نامعلوم ممکن است حل ماتریس حساسیت به درازا بکشد.

تکنیک II روش گرادیان مزدوج در بهینه سازی را جهت تخمین پارامترها بکار می‌برد، که همانند تکنیک I نیازمند حل ماتریس حساسیت بوده که مخصوصاً در حالت غیرخطی وقتی تعداد پارامترها زیاد شوند کاری زمان‌بر است.

تکنیک‌های III و IV: روش گرادیان مزدوج در کوچک سازی را با مسئله اضافی بکار می‌برد [[۱۰۴]، [۱۰۵]، [۱۰۶]، [۱۰۷]]

روش III مخصوصاً برای مسایلی که جهت تخمین ضریب آزمایشی در تخمین توابع بکار برده میشوند مناسب است. مسئله اضافی در جهت کاهش نیاز به حل ماتریس حساسیت استفاده می‌شود.

تکنیک IV روشی برای تخمین توابع می‌باشد مخصوصاً وقتی که اطلاعات مقیاسی دربارهٔ فرم تابع کمیت نامعلوم در دسترس نباشد.

تکنیک‌های اول، سوم و چهارم بهمراه شرط توقف مناسب جهت تکرارهایشان؛ جزء دسته تکنیک‌های خطی سازی تکراری هستند.

فصل دوم : مدل ریاضی

۲-۱ مقدمه

فیزیک یکی از نتایج پیش‌بینی شده قانون فوریه این است که در طول فرایند انتشار گرما، اثر منبع گرمایی بلافاصله در همه جای محیط صرف نظر از فاصله تا منبع قابل مشاهده است. از آنجایی که انتقال گرما توسط حاملان انرژی مانند الکترون‌ها و فنون‌ها انجام می‌گیرد و سرعت انتشار آن‌ها از سرعت انتشار نور بسیار کم‌تر است، بنابراین غیرممکن است که پاسخ به شار گرمایی ناگهانی در یک بخش از ماده، بلافاصله در تمام نقاط دیگر آن احساس شود. این تناقض در نیم قرن گذشته توجه شدید محافل علمی را در بیان یک مدل مناسب برای توصیف سرعت محدود انتشار گرما به خود جلب کرده است.

دو مفهوم اساسی مسیر آزاد و زمان آزاد متوسط برای درک بهتر تناقضات قانون هدایت فوریه باید بررسی شود. مسیر آزاد متوسط[۱] را می‌توان به صورت میانگین جبری فاصله‌ای دانست که یک حامل انرژی بین دو برخورد متوالی با حامل‌های دیگر طی می‌کند. و زمان آزاد متوسط[۲] مدت زمان متوسطی است که در خلال این برخوردها سپری می‌گردد. البته مدت زمانی که این میانگین‌ها محاسبه می‌شوند باید به قدر کافی طولانی باشد تا مقادیر به دست آمده از نظر آماری معنادار باشد. زمان آزاد متوسط یا همان زمان آسایش[۳] برای فلزات از مرتبه پیکوثانیه و برای کریستال‌های دی‌الکتریک و عایق‌ها از مرتبه نانو تا پیکوثانیه می‌باشد. در سال‌های اخیر انتقال گرما در مقیاس میکروسکوپی با زمان پاسخ‌دهی از مرتبه نانوثانیه به علت قابل توجه بودن مقایس‌های مکانی و زمانی با مسیر آزاد متوسط و زمان آزاد متوسط، بسیار مورد بررسی قرار گرفته است.

بررسی انتقال گرمای غیر فوریه در فلزات و دی‌الکتریک‌ها زمینه مطالعه انتقال گرما در میحط‌های غیرهمگن از جمله بافت بیولوژیکی را فراهم نمود. در مبحث انتقال گرما در مواردی با ساختار درونی

---

۱ Mean Free Path

۲ Mean Free Time

۳ Relaxation Time

غیرهمگن مانند مواد بیولوژیکی، زمان مشخصه گرمایی را می‌توان به عنوان زمان لازم برای تجمع انرژی جهت انتقال گرما به نزدیک‌ترین المان در ماده تعریف کرد. علت این زمان مشخصه در یک سیستم بیولوژیکی می‌تواند عدم تعادل بین فازهای جامد و مایع، اثرات غشای سلولی به عنوان بخش ذخیره‌کننده انرژی و تأثیر اجزایی دانست که دائمادر حال تغییر ماهیت هستند. در واقع ثابت تأخیر زمانی شار گرمایی در ساختار درونی ماده غیرهمگن منعکس‌کننده تعامل انرژی در سطح تراز ساختار[4]ها است، در حالی که در موارد همگن، تعامل انرژی در سطح تراز مولکول‌ها اتفاق می‌افتد و طبیعی است که ثابت زمانی مربوط به مواد غیرهمگن ($10^{3}-10^{-3}$) بزرگتر از ثابت زمانی مربوط به مواد همگن ($10^{-8}-10^{-14}$) باشد. هنگامی که مدت زمان فرایند هدایت گرمایی از مرتبه زمان مشخص باشد، رفتار غیر فوریه‌ای در ماده قابل مشاهده است. کامنسکی[5] [۱۸] میزان این زمان مشخصه را برای گوشت در حدود ۳۰-۲۰ ثانیه تخمین زد. میترا[6] و همکاران [۱۰۸] برای اولین بار طبیعت هایپربولیکی هدایت گرمایی در مواد بیولوژیکی را با مقایسه داده‌های آزمایشگاهی و نتایج حاصل از حل معادلات غیرفوریه نشان دادند. آن‌ها نتایج چهار آزمایش مختلف با شرایط مرزی گوناگون را منتشر کردند.

۲-۲ *مدل‌های هدایت گرمایی*

مدل‌هایی که در این بخش ارائه گردیده مدل‌های ماکروسکوپیکی است که بیشتر از سایر مدل‌ها در توصیف انتقال گرما مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۲-۲-۱ مدل هدایت فوریه

مدل کلاسیک انتشار فوریه، رابطه بین شار گرمایی و گرادیان دما را در طی انتقال گرما با مقیاس ماکروسکوپی نشان می‌دهد. براساس نظریه انتقال گرمای کلاسیک (قانون فوریه)، شار گرمایی متناسب با گرادیان دما است که این قانون از رابطه زیر پیروی می‌کند.

---

٤ Level Structural

٥ Kaminski

٦ K.Mitra

$$q(\vec{r},t) = -k\nabla T(\vec{r},t) \tag{۱-۲}$$

که در آن $\mathbf{r}$ نشان‌دهنده بردار موقعیت، $\mathbf{t}$ زمان، $\mathbf{T}$ دما، $\mathbf{q}$ شار گرمایی در جسم و $\mathbf{k}$ بیان‌کننده ضریب هدایت گرمایی است. هنگامی که معادله فوق با قانون اول ترمودینامیک ادغام می‌شود، معادله سهموی هدایت گرمایی برای توصیف میدان دما به دست می‌آید.

اگر چه قانون فوریه یکی از بهترین مدل‌های شناخته شده در فیزیک است، اما فرضیات غیر منطقی فیزیکی در آن مشاهده می‌شود که مهمترین آن پیش‌بینی این مطلب است که هدایت گرما پدیده پخش است که در آن هر اغتشاش دما با سرعت بی‌نهایت در ماده انتشار می‌یابد. به عبارت دیگر قانون فوریه بیان می‌کند در صورتی که اغتشاش گرمایی در محل خاصی در جامد اعمال گردد، بلافاصله (در مقیاس‌های زمانی بسیار کوچک) در هر مکانی دیگر در ماده احساس می‌شود که این موضوع قانون نسبیت خاص را نقض می‌کند (سیملی[۷] و فرسموت[۸] [۱۰۹]).

ویژگی سهموی بودن قانون فوریه نشان می‌دهد که شار گرما هم‌زمان با ظهور گرادیان دما شروع شده و با قطع گرادیان دما جریان گرمایی نیز خاتمه می‌یابد. این مطلب نیز نقضی برای قانون علیت به شمار می‌رود. قانون علیت بیان می‌کند که دو پدیده علت و معلول نمی‌توانند در یک زمان اتفاق بیافتند بلکه از نظر زمانی علت باید بر معلول مقدم باشد [۱۰۹].

در ابتدا ایرادات وارده به قانون فوریه تنها جنبه نظری داشت. با توسعه علم و فن‌آوری و پژوهش در خصوص گازهای کم‌فشار، مهندسی برودتی، مهندسی هسته‌ای زلزله‌شناسی و همچنین دستاوردهای آزمایشگاهی جدید، نشان داده شد که تناقضات فراوانی در رابطه با تئوری سرعت نامحدود انتشار گرمایی وجود دارد.

---

[۷] Cimmelli

[۸] Frischmuth

۲-۲-۲ مدل هدایت موج گرمایی

ابتدا مکسول [۱۱۰] و سپس مورس[۹] و فشباچ[۱۰] [۱۱۱] به بررسی تناقضات قانون هدایت فوریه پرداختند. در شرایط اعمال شار گرمای گذرا برای مدت زمان بسیار کوتاه (به عنوان مثال، در کاربرد لیزر نانوثانیه)، هنگام استفاده از شار گرمایی با شدت بسیار بالا (مورر[۱۱] و تامپسن[۱۲] [۲٤])، و یا در دمای نزدیک به صفر مطلق [۱۰۹] و همچنین در مطالعه انتقال گرما در بازه‌های زمانی بسیار کوتاه (کیو[۱۳] و تی‌ان[۱۴]، [۱۱۲] و [۱۱۳]) قانون فوریه هنگام پیش‌بینی توزیع دما با مشکل روبه‌رو می‌شود. در این حالت سرعت نامحدود برای انتشار شار گرمایی منطقی به نظر نمی‌رسد. این موضوع الهام‌بخش جست و جو به منظور یافتن معادله جدیدی برای هدایت گرمایی گشت. در میان بسیاری از روابط ارائه شده مدل شار گرمایی اصلاح شده کاتانوئه[۱۵] [۲] و ورنوته[۱۶] [۳] با در نظر گرفتن سرعت محدود برای انتشار موج گرمایی بیش از بقیه مورد توجه قرار گرفت:

$$q(\vec{r},t+\tau_q)=-k\nabla T(\vec{r},t) \qquad (۲-۲)$$

در این معادله τ_q ثابت تأخیر زمانی برای شار گرما نام دارد که همیشه از نظر عددی مثبت است و از خصوصیات ماده به شمار می‌رود. برطبق این معادله گرادیان دما که در مکان **r** و زمان **t** وجود دارد باعث به وجود آمدن شار گرمایی در موقعیت **r** و زمان $t+\tau_q$ می‌شود. در این جا τ_q، زمان انتشار شار

---

[۹] Morse

[۱۰] Feshbach

[۱۱] Maurer

[۱۲] Thompson

[۱۳] Qiu

[۱٤] Tien

[۱۵] Cattaneo

[۱٦] Vernotte

گرمایی پس از اعمال گرادیان دما است. بنابراین τ_q نشان‌دهنده زمان تأخیر مورد نیاز برای ایجاد شار حرارتی (معلول) است هنگامی که گرادیان دما (علت) به طور ناگهانی اعمال شده است.

با ترکیب این عبارت و قانون اول ترمودینامیک، معادله‌ای از نوع هذلولی به دست می‌آید که رفتار نفوذ و موج‌گونه هدایت گرمایی را با هم ترکیب کرده و سرعت محدودی را برای انتشار گرما پیش‌بینی می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید (کاتانوئه [۲] و ورنوته [۳]):

$$V = \sqrt{\frac{k}{pc\tau_q}} \tag{۲-۳}$$

سه عامل موجب اهمیت رفتار موجی شکل انتشار گرما در معادله هدایت هذلولی می‌گردد. مقدار τ_q، نرخ تغییرات دما، و بازه زمانی بررسی پدیده. در شرایط زیر طبیعت موجی شکل سیگنال گرمایی از اهمیت بیشتری نسبت به طبیعت نفوذ برخوردار است.

$$\frac{\partial T}{\partial t} >> \frac{T_r}{2\tau_q}\exp(\frac{t}{\tau_q}) \tag{۲-۴}$$

در عبارت بالا τ_r بیان‌گر دمای مرجع است. با توجه به رابطه (۲-۴) ویژگی‌های موج‌گونه انتشار گرما در صورت بزرگ بودن ثابت τ_q یا عبارت $\frac{\partial T}{\partial t}$ و کوچک بودن زمان بررسی قابل توجه می‌شود.

۲-۲-۳ مدل تأخیر فاز دوگانه

به کمک آزمایش‌های متعددی می‌توان ثابت کرد که مدل هدایت هایپربولیک پیش‌بینی دقیق‌تری از توزیع دما نسبت به مدل فوریه ارائه می‌دهد. با این حال سو[۱۷] [۱۳] و ونگ[۱۸] نشان دادند که بعضی از نتایج حاصل از معادله موج گرمایی با نتایج تجربی سازگاری ندارد. مطالعات دقیق‌تر نشان می‌دهد که معادله هدایت هذلولی تنها اثرات پدیده گذرای سریع را در نظر می‌گیرد و در این معادله از تعامل

---

[۱۷] Tzou

[۱۸] Wang

میکروساختارها صرف نظر می‌شود. این دو اثر می‌توانند به خوبی توسط دو ثابت تأخیر زمانی شار گرمایی

$$q(\vec{r},t+\tau_q)=-k\nabla T(\vec{r},t+\tau_T) \tag{۵-۲}$$

و گرادیان دما در معادله تأخیر فاز دوگانه[۱۹] نشان داده شوند.

با توجه به این رابطه، تغییرات دما در موقعیت **r** و زمان $t+\tau_T$ متناسب با شار گرمایی در همان موقعیت و زمان $t+\tau_q$ می‌باشد. زمان تأخیر τ_T ناشی از برهم‌کنش میان میکروساختارها است.

برخلاف رابطه (۲-۲) که در آن شار گرمایی نتیجه گرادیان دما در یک فرایند گذرا است در معادله (۲-۵) این امکان وجود دارد که شار گرمایی و یا گرادیان دما علت و دیگری معلول باشد. برای موادی با $\tau_q > \tau_r$، شار گرمایی ناشی از گرادیان دما است در حالی که در موادی با $\tau_T > \tau_q$ قضیه برعکس است.

سو [۱۱۴]، سه ویژگی مهم این مدل را به صورت زیر مطرح می‌کند.

الف - شار گرمایی و گرادیان دما که در معادله مطرح شده، نشان‌دهنده پاسخ‌های محلی درون جسم جامد هستند و نباید با مقادیر مشخص شده در مرزها اشتباه گرفته شوند. اعمال شار گرمایی در مرز به معنای مقدم بودن شار گرمایی بر گرادیان دما نیست. این که کدام یک از بردارهای شار گرمایی با گرادیان دما بر هم مقدم باشند بستگی به ترکیبی از اثرات بار گرمایی اعمال شده، هندسه نمونه مورد بررسی و خواص ترموفیزیکی مواد دارد.

ب - سه زمان مشخصه در مدل تأخیر فاز دوگانه مطرح هستند. زمان $t+\tau_T$ که در آن گرادیان دما در حجم ماده ایجاد می‌شود، زمان $t+\tau_q$ که لحظه شروع شار گرمایی است و زمان **t** که مشخص‌کننده زمان انتقال گرمای گذرا است.

ج - دو ثابت تأخیر زمانی τ_q و τ_T مانند ضریب هدایت گرمایی، ضریب نفوذ گرمایی و غیره، از خواص ذاتی ترموفیزیکی مواد هستند.

---

۱۹ Dual Phase Lag

به طور کلی رژیم هدایت غیرفوریه شامل مقیاس کوچک طولی و مقیاس‌های زمانی کوتاه است. در مقیاس‌های کوچک طولی دیگر نمی‌توان خواص را با استفاده از ویژگی‌های توده[۲۰] ماده برآورد کرد و مقیاس‌های زمانی کوتاه، در مقایسه با ثابت‌های تأخیر زمانی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند.

۲-۳ معادلات ریاضی

در مدل فوریه فرض بی‌نهایت بودن سرعت انتشار حرارت در ماده بیانگر این است که بین شار حرارتی و گرادیان دما هیچگونه تأخیر زمانی وجود ندارد. به عبارت دیگر به محض ایجاد گرادیان دما، شار حرارتی نیز خود را با آن هماهنگ می‌کند. مدل هدایت هذلولی گرما که سرعت انتشار حرارت را محدود فرض می‌کند، این حقیقت را در بر دارد که بین گرادیان دما و شار حرارتی تأخیر وجود دارد. به عبارت دیگر مدت زمانی طول می‌کشد تا حرارت از یک طرف جسم به طرف دیگر آن انتقال یابد. رابطه بین شار حرارتی و گرادیان دما را می‌توان اینگونه نوشت [۴]:

$$q(x,t+\tau) = -k\nabla T(x,t) \tag{۲-۶}$$

که τ تحت عنوان زمان آرامش حرارتی نامیده می‌شود. τ جزء خواص ترمودینامیکی مواد دسته‌بندی می‌شود. اگر سمت چپ معادله (۲-۶) را بسط داده و از جملات مرتبه بالاتر از یک نسبت به τ صرف‌نظر نماییم، داریم:

$$q(x,t) + \tau\frac{\partial q(x,t)}{\partial t} = -k\nabla T(x,t) \tag{۲-۷}$$

از ترکیب معادله (۲) با معادله انرژی یعنی

$$\rho c_p \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = -\nabla q(x,t) \tag{۲-۸}$$

به معادله هدایت هذلولی می‌رسیم [۲]:

---

۲۰ Bulk Properties

$$\tau\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial T(x,t)}{\partial t}=\alpha\nabla^2 T(x,t) \qquad (۹-۲)$$

علت اینکه به این معادله هدایت هذلولی گفته می‌شود اینست که در دو طرف این معادله مشتقات مرتبه دوم دما ظاهر شده است. این معادله بیان کننده انتشار حرارت با سرعت محدود $V=(\frac{\alpha}{\tau})^{0.5}$ است، که α ضریب پخش حرارت است. تنها تفاوت معادله (۲-۹) با معادله کلاسیک هدایت حرارتی، جمله $\tau\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ است. اگر مقادیر τ در ماده‌ای خیلی کوچک باشد به طوری که بتوان از این ترم صرف نظر کرد، فرمول هدایت غیرفوریه‌ای به همان فرم کلاسیک تبدیل می‌شود. اما مقادیر τ در موارد مختلف بسیار متفاوت است. برای مواد همگن، مانند مایعات خالص، گازها و جامدهای دی الکتریک مقادیر τ در محدوده 10^{-12} تا 10^{-8} ثانیه می‌باشد. در موارد غیرهمگنی مانند شن و $NaHCO_3$، زمان آرامش حرارتی نزدیک به ۲۰ ثانیه است. زمان آرامش حرارتی در جامدات غیرهمگن به میزان زیادی به جزئیات ساختاری آنها وابسته است. مثلاً در شن این مقدار به متوسط قطر دانه‌های شن بستگی دارد[۱] .

۲-۳-۱ ماهیت و شکل جواب معادله هدایت هذلولی

معادله هدایت حرارتی هذلولی از دیدگاه ریاضی در قالب معادلات دیفرانسیل جزئی هذلولی دسته بندی می‌گردد. این نوع معادلات به فرم کلی زیر هستند [۱۱۵]:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}+k\frac{\partial W}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+bW+\Phi(x,t) \qquad (۱۰-۲)$$

اگر در این دسته از معادلات $b<0,\ k>0$ و $\Phi(x,t)=0$ باشد به معادله مشهوری در الکترونیک می‌رسیم که به معادله تلگراف معروف است. در حالت کلی جواب‌های بنیادین این معادله به فرم زیر است:

$$E(x,t)=\frac{1}{2a}H(at-|x|\exp(-\frac{kt}{2})I_{\circ}(c\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}}):b+\frac{1}{4}k^2>0 \qquad (۱۱-۲)$$

$$E(x,t)=\frac{1}{2a}H(at-|x|\exp(-\frac{kt}{2})\ J_{\circ}(c\sqrt{t^2-\frac{x^2}{a^2}})\ \ :b+\frac{1}{4}k^2>0 \qquad (۱۲-۲)$$

که $H(z)$ تابع پله واحد[۲۱] است، $J_{\circ}(z)$ تابع بسل و $I_{\circ}(z)$ تابع بس اصلاح شده می‌باشد [۱۱۵]. ظاهر شدن تابع پله در جوابهای بنیادین این معادله نشانی از ایجاد یک شوک یا یک جبهه تند موج در جواب است. بنابراین برای زمانهای کوتاه که هنوز تمام جسم حرارت را احساس نکرده است یک شوک تند در منحنی‌های نمایه دما دیده می‌شود.

۲-۳-۳ روشهای حل معادله هدایت حرارت هذلولی

برای حل معادله هدایت حرارت هذلولی کارهای زیادی هم به صورت تجربی و هم به صورت تحلیلی در این سالها انجام شده است. در سال ۲۰۰۱ میلادی دوهامل[۲۲] یک تبدیل انتگرالی محدود جدید برای بررسی و حل معادله هدایت غیرفوریه‌ای در مواد نامتجانس ارائه داده است. با توجه به اینکه این نوع هدایت حرارت بیشتر در مواد غیرهمگن مطرح است (τ در این مواد بزرگ است) و اینکه در بسیاری از موارد خواص نیز ثابت نیستند، لذا حل تحلیلی این معادله بسیار مشکل است. به این دلیل تاکنون بیشتر به روشهای حل عددی این معادله توجه شده است. اما حل عددی نیز خالی از اشکال نیست. بزرگترین مشکلی که در حل عددی این نوع مسائل وجود دارد ناپیوستگی‌های شدید در نمایه دما برای زمانهای کوتاه اولیه است. در این موارد، حل‌های عددی در نزدیکی ناپیوستگی‌ها به شدت دچار نوسان می‌گردند. در سال ۱۹۹۲ یک روش جدید برای حل عددی معادله هدایت حرارت هذلولی ارائه شد. حسن این روش این است که حل بدست آمده در نزدیکی ناپیوستگی‌ها دچار نوسان نمی‌شود. روش کلی حل به این صورت است که در ابتدا از معادله هدایت حرارت غیرفوریه‌ای تبدیل لاپلاس نسبت به زمان گرفته

---

۲۱ Heaviside unit step function

۲۲ Duhamel

می‌شود. این کار وابستگی زمانی معادله را از بین می‌برد. سپس معادله دیفرانسیل معمولی به دست آمده را از طریق عددی حل می‌نمایند. در پایان باید از جوابهای بدست آمده لاپلاس معکوس گرفت تا نمایه اصلی دما به دست آید. برای حل معادله دیفرانسیل بدست آمده از تبدیل لاپلاس، از طرفین معادله در فاصله $[x_{i-1/2}\ ,\ x_{i+1/2}]$ انتگرال‌گیری می‌شود. در واقع انتگرال‌گیری در طول حجم کنترل صورت می‌گیرد. این روش یک دیدگاه حجم محدود[۲۳] دارد. اما تمام نکته کار در اینجاست که باید نمایه دما را در داخل هر حجم کنترل به فرم سینوس هایپربولیک در نظر گرفت. علت این امر این است که معادله دیفرانسیل معمولی بدست آمده از تبدیل لاپلاس در حالت کلی به صورت زیر است:

$$\frac{d^2\theta}{d\eta^2}-\lambda^2\theta=0 \qquad ; \qquad (\eta_i \le \eta \le \eta_{i+1}) \tag{۱۳-۲}$$

که جواب این معادله به فرم سینوس هایپربولیک است. با انتگرال‌گیری از طرفین معادله دیفرانسیل معمولی به دست آمده از تبدیل لاپلاس و استفاده از این شکل نمایه دما در هر حجم کنترل، مساله تبدیل به حل یک دستگاه معادله سه قطری می‌شود که با روش **T. D. M. A** حل می‌گردد. در پایان باید از جوابها لاپلاس معکوس گرفت. البته این بخش کار هم چندان آسان نیست و نیازمند لاپلاس معکوس عددی است. از آنجا که در این روش ابتدا از تبدیل لاپلاس استفاده می‌گردد و سپس معادله به روش عددی حل می‌شود به این روش هیبرید یا روش ترکیبی می‌گویند. این راهکار تاکنون بهترین روش برای حل عددی معادله هدایت حرارت هذلولی بوده است. چرا که علاوه بر حذف نوسانات عددی محدودیتی در شرط مرزی مبنی بر خطی یا غیرخطی بودن آن ندارد[۱۱۶] .

۲-۳-۳ هدایت هذلولی با شرط مرزی جابجایی

آنتاکی در سال ۱۹۹۶ هدایت حرارت هذلولی را در یک صفحه نیمه بی‌نهایت تحت شرایط مرزی جابجایی مورد بررسی قرار داده است[۱۱۷] . معادله حاکم و شرایط مرزی به قرار زیر است:

---

[۲۳] Antaki

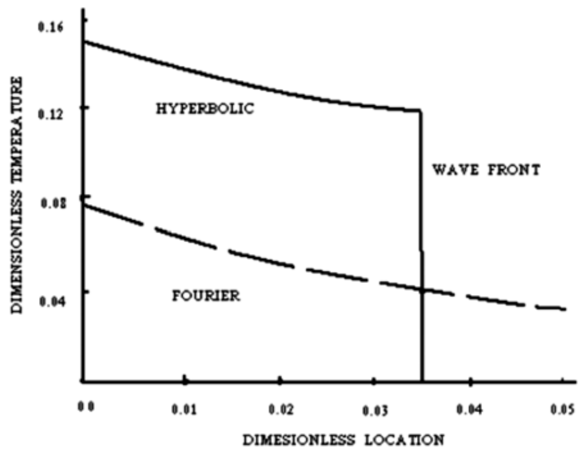
$$\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (۱۴-۲)$$

$$T(x,0) = T_0 \qquad (۱۵-۲)$$

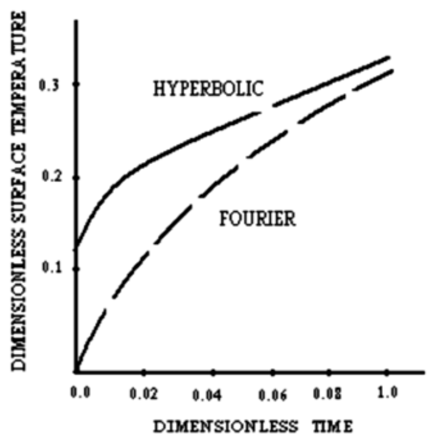
$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial x} = 0 \qquad (۱۶-۲)$$

$$T(\infty,t) = T_0 \qquad (۱۷-۲)$$

$$q(0,t) = h[T_\infty - T(0,t)] \qquad (۱۸-۲)$$



شکل ۲-۱هدایت هذلولی و سهموی با شرط مرزی جابه‌جایی حرارتی



شکل ۲-۲ همگرایی جوابهای معادلات هدایت حرارت هذلولی و سهموی با شرط مرزی جابه‌جایی حرارتی

او با استفاده از روش تبدیل لاپلاس و معکوس آن، این مسأله را به صورت تحلیلی حل نموده است. نتایج در شکلهای(۲-۱) و (۲-۲)آمده است (این نمودارها برای فرآورده‌های گوشتی رسم شده‌اند). نمودارها حاکی از این است که اگر یک صفحه ناگهان در معرض جابه‌جایی حرارتی قرار گیرد در لحظات اولیه نمایه دما با آنچه فوریه پیش بینی می‌کند کاملاً متفاوت است. اما با گذشت زمان نتایج این دو

مدل بر هم منطبق می‌گردند. در لحظات اولیه در مرز صفحه یک پرش دما[۱] دیده می‌شود. در این حالت حالت دماهای پیش بینی شده از طریق هدایت هذلولی بیشتر از چیزی است که فوریه پیش بینی می‌کند (در حالت سرمایش عکس این مطلب صحیح است). از نتایج این مسأله چنین برمی‌آید که در بررسی اثرات حرارت بر بافت بدن انسان باید اثرات هدایت غیرفوریه‌ای را در نظر گرفت. مخصوصاً در مورد اثرات لیزر و نفوذ آن در بافت بدن و میزان تخریب بافتهای مجاور این مسأله حائز اهمیت است [۱۱۷].

۲-۳-۴ هدایت هذلولی با شرط مرزی تابش

اوزیسیک[۲] و ویک[۳] در سال ۱۹۸۵ به بررسی هدایت حرارت هذلولی با شرط مرزی تابش پرداخته‌اند [۱۱۸]. این دو نفر هدایت هذلولی را برای یک صفحه نیمه بی‌نهایت $0 < x < \infty$ که در ابتدا در دمای T_0 قرار دارد مورد بررسی قرار دادند. در این مسأله شار حرارتی $f(t)$ روی سطح $x = 0$ اعمال می‌گردد و سطح $x = 0$ می‌تواند با محیطی با دمای T_∞ از طریق تابش تبادل حرارت نماید. آنها نتایج بدست آمده از حل عددی معادله هدایت هذلولی به همراه اثرات تشعشع روی سطح را با نتایج حل عددی معادله سهموی مقایسه نموده‌اند. نتایج کار این دو نفر در شکل (۲-۳) آمده است. که $\xi = \frac{\nu^2 t}{2\alpha}$، ν سرعت انتشار موج گرمایی در محیط است، t زمان و α ضریب پخش گرماست. منظور از α_s ضریب جذب سطح و α ضریب استفان بولتزمان است. N از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$N = \frac{k\beta}{n^2 \sigma T_r^3} \qquad (۲-۱۹)$$

$$T_r = \frac{\alpha f_r}{k\nu} \qquad (۲-۲۰)$$

---

۱ Temperature Jump

۲ Ozisik

۳ Vick

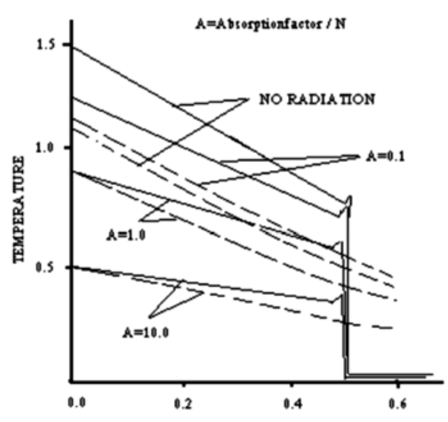
$$\beta = \frac{\nu}{\alpha} \qquad (۲۱-۲)$$

f_r شار مرجع روی سطح جسم و n ضریب انعکاس است. به بیانی دیگر می‌توان گفت که N نسبت هدایت به تابش است.

$$N = \frac{q_{conduction}}{q_{radiation}} \qquad (۲۲-۲)$$

در شکل شماره (۲-۳) دیده می‌شود که هر چه اثرات تابش نسبت به هدایت قوی‌تر باشد، دمایی که معادله هذلولی برای سطح قطعه پیش بینی می‌کند با سرعت بیشتری به سمت دمای پیش بینی شده توسط فوریه همگرا می‌گردد [۱۱۸]. افزایش ضریب جذب سطح جسم نیز همین اثر را اعمال می‌کند. همانطور که دیده می‌شود، در صورت نادیده گرفتن اثرات تابش روی سطح جسم، شیب پروفیلهای دمای بدست آمده از هدایت هذلولی و سهموی خیلی به هم نزدیک است، ولی با افزایش اثرات تشعشع روی سطح و نیز افزایش ضریب جذب سطح شیب منحنی‌ها کاملاً از یکدیگر متفاوت خواهد بود.

بنابراین در مواردی که اثرات تابش روی سطح خیلی قوی‌تر از هدایت است و نیز در مواردی که ضریب جذب سطح جسم خیلی زیاد است، دمای سطح جسم بعد از گذشت زمانهای کوتاه، با تقریب خوبی از همان معادله کلاسیک هدایت حرارتی بدست می‌آید.



شکل ۲-۳ اثرات شرط مرزی تابش بر هدایت هذلولی

۲-۳-۵ هدایت حرارت هذلولی با شرط مرزی نوسانی

در سال ۱۹۹۸ یوئن[۱] و لی[۲] در مقاله‌ای به بررسی اثرات هدایت غیرفوریه‌ای بر بازدهی سطوح گسترده تحت شرایط دمای پریودیک پایه پرداخته‌اند [۱۱۹]. آنها با استفاده از مدل هذلولی هدایت گرما در یک فین، توزیع دما و بازدهی آن را به صورت عددی بررسی نموده‌اند. در این مقاله هدایت هذلولی با استفاده از روش ترکیبی در یک فین با نوک آدیاباتیک به طول L و ضخامت b $(b / L << I)$ مورد بررسی قرار گرفته است. این فین به صفحه‌ای متصل است که دمای آن به صورت تابع زیر تغییر می‌کند:

$$T_b(t) = \bar{T}_b + (\bar{T}_b - T_m)A\cos(\hat{\omega}t) \quad ; \qquad t > 0 \qquad (۲-۲۳)$$

که $\bar{T}_b$ دمای متوسط پایه، T_m دمای اولیه، A دامنه و $\hat{\omega}$ فرکانس تغییرات دمای پایه است. فرض شده که فین تنها از طریق جابه‌جایی حرارت را به محیط با دمای ثابت T_e انتقال می‌دهد (از اثرات تابش صرف نظر شده است). از بررسی اثرات هدایت حرارت غیرفوریه‌ای بر بازدهی حرارتی یک سطح گسترده همراه با جابه‌جایی در شرایط کاری پریودیک این نتیجه بدست آمده است که اگر چه اثرات هدایت هذلولی در لحظات اولیه کار آن چشمگیرتر است، اما زمانی که فرکانس تغییرات دمای پایه زیاد است حتی بعد از گذشت مدت زمان طولانی نیز این اثرات باقی خواهند ماند [۱].

---

[۱] Yuen

[۲] Lee

فصل سوم : روش‌های بهینه‌سازی توابع

۳-۱ مقدمه

در این فصل به معرفی و بررسی روش‌هایی که برای بهینه‌سازی توابع استفاده می‌شوند، پرداخته می‌شود. ابتدا به تعریف مسأله بهینه‌سازی پرداخته و در ادامه مفاهیم مربوط به روند انجام فرآیند بهینه سازی در یک مسأله و همچنین انواع روش‌های مستقیم و غیرمستقیم بهینه‌سازی معرفی می‌شوند. از آنجا که در این پایان‌نامه از روش غیرمستقیم برای بهینه‌سازی استفاده گردیده، لذا بیشتر درباره این روش‌ها بحث شده است. در تمامی این روش‌ها محاسبه گرادیان تابع الزامی است، بنابراین بررسی خواص و نحوه محاسبه آن آورده شده است. در ادامه شرح مختصری از انواع روش‌های غیرمستقیم به همراه الگوریتم محاسباتی آنها بیان شده است.

۳-۲ مسائل بهینه‌سازی

یک مسأله بهینه‌سازی می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

تعیین بردار $\vec{X}=[x_1,x_2,...,x_n]$ به گونه‌ای که تابع $f(\vec{X})$ تحت شرایط زیر مینیمم شود.

$$\left| \begin{array}{ll} l_j(\vec{X})=\alpha & j=1,2,...,p \\ g_j(\vec{X})\leq\beta & j=1,2,...,r \end{array} \right. \quad (۳-۱)$$

که در آن $\vec{X}$ یک بردار n بعدی به نام بردار طراحی، $f(\vec{X})$ تابع هدف و $l_j(\vec{X})$ و $g_j(\vec{X})$ به ترتیب قیدهای برابری و نابرابری نامیده می‌شوند. در حالت کلی تعداد متغیرها n و تعداد قیود r یا p رابطه‌ای با هم ندارند. مسأله فوق یک مسأله بهینه‌سازی مقید نامیده می‌شود. در مسائلی که قیودی وجود ندارند با یک مسأله بهینه‌سازی نامقید روبرو هستیم.

نقطه X^* را مینیمم یا نقطه سکون تابع هدف $f(\vec{X})$ می‌نامیم اگر داشته باشیم:

$$\nabla f|_{X^*}=0 \quad (۳-۲)$$

شرط بالا یک شرط لازم است در صورتی که ماتریس هسین[۳] معین مثبت باشد آنگاه حتماً نقطه مینیمم

[۳] Hessian Matrix

نسبی خواهد بود. یعنی اگر داشته باشیم:

$$[H]_{X^*} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{X^*} \tag{۳-۳}$$

البته شرط بالا در صورتی صادق است که تابع $f(\vec{X})$ مشتق‌پذیر باشد.

۳-۳ دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی

روش‌های حل مسائل مینیمم‌سازی به دو دسته روش‌های جستجوی مستقیم و روش‌های کاهشی تقسیم می‌شوند. برای استفاده از روش‌های جستجوی مستقیم در محاسبه نقطه مینیمم، تنها به مقدار تابع هدف نیاز است و نیازی به مشتقات جزئی تابع نیست. بنابراین اغلب، روش‌های غیر گرادیانی یا روش‌های مرتبه صفر نامیده می‌شوند زیرا از مشتقات مرتبه صفر تابع استفاده می‌کنند. این روش‌ها بیشتر برای مسائلی کاربرد دارند که تعداد متغیرها کم و یا محاسبه مشتقات تابع مشکل می‌باشند و بطور کلی کارایی کمتری نسبت به روش‌های کاهشی دارند.

روش‌های کاهشی علاوه بر مقدار تابع به مشتقات اول و در برخی موارد به مشتقات مرتبه دوم تابع هدف نیز نیاز دارند، لذا این روش‌ها کارایی بیشتری نسبت به روش‌های جستجوی مستقیم دارند. روش‌های کاهشی همچنین روش‌های گرادیانی نیز نامیده می‌شوند. در این بین روش‌هایی که فقط به مشتق اول تابع هدف نیاز دارند، روش‌های مرتبه اول و آنهایی که به مشتق اول و دوم هر دو نیاز دارند، روش‌های مرتبه دوم نامیده می‌شوند. در جدول (۳-۱) روش‌هایی از هر دو دسته آمده است.

جدول ۳-۱ دسته‌بندی روش‌های بهینه‌سازی

روش‌های کاهشی	روش‌های جستجوی مستقیم
بیشترین کاهش	روش جستجوی تصادفی
گرادیان مزدوج	جستجوی شبکه
روش نیوتن	روش تک متغیر
روش لونبرگ - مارکورات	جستجوی الگو
میزان تغییر	

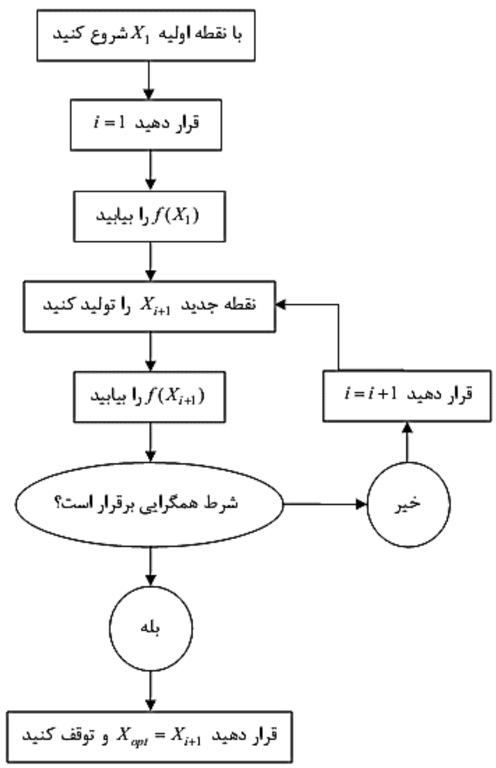
۳-۴ راه حل کلی

تمام روش‌های مینیمم‌سازی نامقید اساساً تکراری هستند و از این رو از یک حدس اولیه شروع می‌کنند و به شکل ترتیبی به سمت نقطه مینیمم پیش می‌روند. طرح کلی این روش‌ها در شکل (۳-۱) نشان داده شده است.

باید توجه شود تمام روش‌های مینیمم‌سازی نامقید:

۱. نیاز به نقطه اولیه X_1 برای شروع تکرار دارند.

۲. با یکدیگر تنها در نحوه تولید نقطه بعدی X_{i+1} از X_i تفاوت دارند.



شکل (۳-۱) نمودار روند بهینه‌سازی تابع هدف

۳-۵ نرخ همگرائی

روش‌های مختلف بهینه‌سازی، نرخ همگرایی مختلف دارند. به طور کلی یک روش، همگرایی از مرتبه p دارد اگر داشته باشیم:

$$\frac{\|X_{i+1}-X^*\|}{\|X_i-X^*\|^p}\le 1, \quad 1\ge 0, p\ge 1 \tag{۴-۳}$$

که X_i و X_{i+1} نقاط محاسبه شده در پایان تکرارهای i و i+۱ هستند. X^* نقطه بهینه و $\|X\|$ نشان‌دهنده طول یا نرم بردار X است که از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\|X\| = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_N^2} \tag{۵-۳}$$

اگر $p = 1$ و $0 \le 1 \le 1$ باشد، روش همگرای خطی (متناظر با همگرایی آهسته) و اگر $p = 2$ باشد، روش همگرای مرتبه دوم (متناظر با همگرایی سریع) نامیده می‌شود. یک روش بهینه‌سازی، همگرای فوق خطی است اگر:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\|X_{i+1}-X^*\|}{\|X_i-X^*\|^p}\to 0 \tag{۶-۳}$$

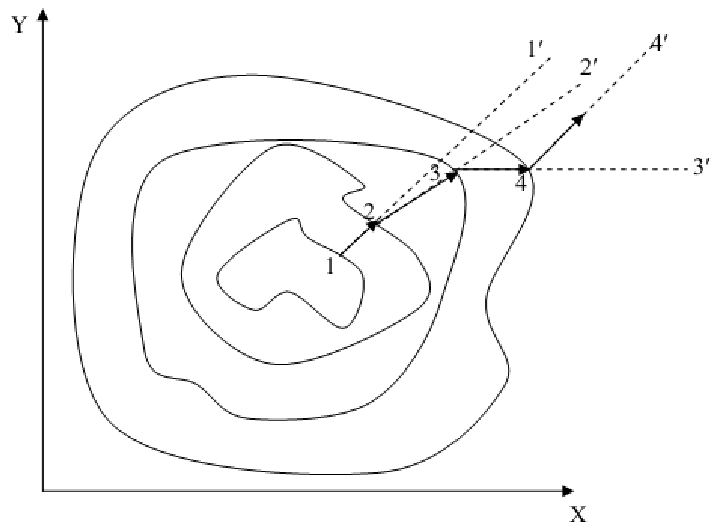
تعریف دیگری برای روش همگرایی مرتبه دوم وجود دارد: اگر یک روش مینیمم‌سازی با استفاده از روند دقیق ریاضی بتواند نقطه مینیمم یک تابع درجه دوم n متغیره را در n تکرار پیدا کند. روش همگرای مرتبه دوم نامیده می‌شود.

۳-۶ گرادیان تابع

گرادیان تابع، یک بردار n مولفه ایست که با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T \tag{۷-۳}$$

اگر از یک نقطه در فضای n بعدی در راستای گرادیان حرکت کنیم، مقدار تابع با سریع‌ترین نرخ افزایش می‌یابد. بنابراین جهت گرادیان، جهت بیشترین افزایش نیز نامیده می‌شود.



شکل (۳-۲) جهت‌های سریعترین افزایش

اما جهت بیشترین افزایش یک خاصیت محلی است و نه سراسری. این مطلب در شکل (۳-۲) نشان داده شده است. در این شکل، بردار گرادیان ∇f محاسبه شده در نقطه ۱، ۲، ۳ و ۴ به ترتیب در جهت‌های $11'$، $22'$، $33'$ و $44'$ قرار دارد. بنابراین در نقطه ۱ مقدار تابع در جهت $11'$ با سریع‌ترین نرخ افزایش می‌یابد و به همین ترتیب اگر به تعداد بی‌نهایت مسیر کوچک در جهت‌های سریع‌ترین افزایش حرکت کنیم، مسیر حرکت یک منحنی شبیه به منحنی ۴-۳-۲-۱ خواهد بود.

از آنجا که بردار گرادیان جهت بیشترین افزایش مقدار تابع را نشان می‌دهد، منفی بردار گرادیان جهت سریع‌ترین کاهش را نشان می‌دهد. بنابراین انتظار داریم روش‌هایی که از بردار گرادیان برای بهینه‌سازی استفاده می‌کنند نسبت به روش‌های دیگر سریع‌تر به نقطه مینیمم برسند. بنابراین دو قضیه زیر را بدون اثبات می‌آوریم.

۱. بردار گرادیان جهت سریع‌ترین افزایش را نشان می‌دهد.

۲. بیشترین نرخ تغییر تابع f در هر نقطه X^*، برابر اندازه بردار گرادیان در آن نقطه است.

۳-۶-۱ محاسبه گرادیان

محاسبه گرادیان نیاز به محاسبه مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_i}(i=1,2,...,n)$ دارد. سه حالت وجود دارد که

محاسبه گرادیان را مشکل می‌کند:

۱. تابع در تمامی نقاط مشتق‌پذیر است، اما محاسبه مولفه‌های بردار گرادیان غیرعملی است.

۲. رابطه‌ای برای مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ می‌توان بدست آورد، اما محاسبه آن نیازمند زمان محاسباتی زیادی است.

۳. گرادیان تابع در تمامی نقاط تعریف نشده باشد.

در مورد اول می‌توان از فرمول تفاضل محدود پیشرو برای تخمین مشتق جزئی استفاده کرد:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i . u_i) - f(X_m)}{\Delta x_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{۸-۳}$$

برای یافتن نتیجه بهتر می‌توان از فرمول اختلاف مرکزی محدود زیر استفاده کرد:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{X_m} = \frac{f(X_m + \Delta x_i . u_i) - f(X_m - \Delta x_i . u_i)}{2\Delta x_i} \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{۹-۳}$$

در روابط بالا Δx_i یک کمیت اسکالر کوچک و u_i برداری n بعدی است که مولفه i ام آن یک، و مابقی صفر هستند. در محاسبات، مقدار Δx_i را می‌بایست با دقت انتخاب نمود، زیرا کوچک بودن بیش از حد آن ممکن است اختلاف میان مقادیر محاسبه شده تابع در $(X_m + \Delta x_i . u_i)$ و $(X_m - \Delta x_i . u_i)$ را بسیار کوچک کرده، و موجب افزایش خطای گرد کردن شود و نتایج را با خطا همراه سازد. به همین ترتیب بزرگ بودن بیش از اندازه Δx_i نیز خطای برشی را در محاسبه گرادیان ایجاد می‌کند. در حالت دوم استفاده از فرمول‌های تفاضل محدود پیشنهاد می‌شود. برای حالت سوم با توجه به این نکته که گرادیان در تمام نقطه تعریف شده نیست، نمی‌توان از فرمول‌های تفاضل محدود استفاده کرد. بنابراین در این موارد مینیمم کردن فقط با استفاده از روش‌های مستقیم امکان‌پذیر است.

۳-۶-۲ تعیین طول گام بهینه در جهت کاهش تابع

در بیشتر روش‌های بهینه‌سازی، نیاز است که نقطه مینیمم در یک راستای مشخص را تعیین نمود. بنابراین لازم است نرخ تغییر تابع هدف از یک نقطه مانند $\overrightarrow{X_i}$، در راستای مشخصی مانند $\overrightarrow{S_i}$، نسبت

به پارامتری چون λ محاسبه شود. باید در نظر داشت که موقعیت هر نقطه در این راستا را می‌توان با توجه به نقطه X_i، به صورت $\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \lambda \vec{S}_i$ نشان داد. بنابراین نرخ تغییر تابع نسبت به این متغیر λ در راستای $\vec{S}_i$ را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial \lambda} \qquad (۱۰-۳)$$

که در رابطه فوق x_j مولفه j-ام $\vec{X}_i$ است. از طرفی داریم:

$$\frac{\partial x_j}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda}(x_{ij} + \lambda s_{ij}) = s_{ij} \qquad (۱۱-۳)$$

که x_{ij} و s_{ij} مولفه‌های j - ام $\vec{X}_i$ و $\vec{S}_i$ هستند. بنابراین نرخ تغییر تابع در راستای $\vec{S}_i$ برابر است با:

$$\frac{df}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} . s_{ij} = \nabla f^T . \vec{S}_i \qquad (۱۲-۳)$$

در صورتی که λ^* تابع f را در راستای $\vec{S}_i$ مینیمم کند، در نقطه $\vec{X}_i + \lambda^* . \vec{S}_i$ می‌توان نوشت:

$$\left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda^*} = \nabla f^T . \vec{S}_i = 0 \qquad (۱۳-۳)$$

بنابراین مینیمم تابع، در راستای $\vec{S}_i$، در نقطه $\vec{X}_i + \lambda^* . \vec{S}_i$ می‌باشد.

۳-۷ معیار همگرائی

معیارهای زیر می‌توانند برای بررسی همگرائی در محاسبات تکراری به کار روند:

در صورتی که تغییرات تابع در دو تکرار متوالی از مقدار معینی کوچک‌تر شود:

$$\left| \frac{f(\vec{X}_{i+1}) - f(\vec{X}_i)}{f(\vec{X}_i)} \right| \le \varepsilon_1 \qquad (۱۴-۳)$$

زمانی که مشتقات جزئی (گرادیان مولفه‌ها) به اندازه کافی کوچک شود:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \le \varepsilon_2 \qquad (۱۵-۳)$$

زمانی که تغییرات بردار مورد نظر در دو تکرار متوالی کوچک شود:

$$\left|\vec{X}_{i+1}-\vec{X}_i\right| \le \varepsilon_3 \qquad (۱۶-۳)$$

که ε_1، ε_2 و ε_3 مقادیر معین کوچکی در نظر گرفته می‌شوند.

۳-۸ روش کاهش سریع

استفاده از قرینه بردار گرادیان به عنوان جهت مینیمم‌سازی اولین بار توسط کوشی[٤] انجام گرفت. در این روش محاسبات از نقطه‌ای مانند X_1 شروع شده و طی فرآیندهای تکراری با حرکت در جهت سریع‌ترین نرخ کاهش، نهایتاً به نقطه مینیمم می‌رسد. مراحل مختلف این روش را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

۱. شروع محاسبات از یک نقطه X_1 دلخواه به عنوان اولین تکرار $(i=1)$

۲. یافتن جهت S_i به صورت $S_i=-\nabla f_i=-\nabla f(x_i)$

۳. محاسبه طول گام بهینه λ_1^* در جهت S_i و قرار دادن $X_{i+1}=X_i+\lambda_i^* S_i$ و یا $X_{i+1}=X_i-\lambda_i^*\nabla f_i$

۴. بررسی بهینه بودن نقطه X_{i+1} و پایان محاسبات در صورت مینیمم بودن این نقطه، در غیر این صورت قرار دادن $i=2$ و ادامه محاسبات از مرحله ۲.

۳-۹ روش گرادیان مزدوج

۳-۹-۱ جهت‌های مزدوج

فرض کنید A یک ماتریس متقارن $n \times n$ باشد. یک مجموعه از n بردار یا جهت $\{S_i\}$ مزدوج نامیده می‌شود اگر داشته باشیم:

$$S_i^T A S_j = 0,\ i \ne j,\ i=1,2,\ldots,n \quad j=1,2,\ldots,n \qquad (۱۷-۳)$$

مشاهده می‌شود که جهات متعامد حالت خاصی از جهات مزدوج هستند.

اگر f یک تابع درجه دوم مانند زیر باشد:

---

٤ Cochy

$$f = \frac{1}{2} X^T A + B^T X + C \qquad (۱۸-۳)$$

که به شکل ترکیبی در جهات مزدوج مینیمم شود، مینیمم تابع در n تکرار یا کمتر به دست می‌آید. سرعت همگرائی روش کاهش سریع را می‌توان با ترکیب جهت‌های کاهش تابع به میزان قابل توجهی افزایش داد. دراین صورت روش گرادیان مزدوج را بدست می‌دهد که در آن از جهت‌های مزدوج برای کاهش تابع استفاده می‌شود. روش‌های مینیمم‌سازی که از جهت‌های مزدوج بهره می‌برند، همگرائی مرتبه ۲ دارند. این خاصیت از این جهت دارای اهمیت بسیار است که می‌تواند این اطمینان را دهد که بتواند مینیمم یک تابع مرتبه دوم n متغیره را در n یا کمتر از n تکرار پیدا کند.

از آنجا که هر تابع دلخواهی را در نزدیکی نقطه بهینه، می‌توان با دقت خوبی به صورت یک تابع درجه دوم تقریب زد می‌توان از این روش انتظار داشت، که در تعداد تکرار کمتری نقطه مینیمم را پیدا کند. در این روش با محاسبه گرادیان مورد نظر می‌توان بعد از هر مینیمم سازی یک بعدی، یک جهت ترکیبی را بدست آورد. چگونگی ایجاد جهت‌های مزدوج و الگوریتم این روش در ادامه آورده شده است.

۳-۹-۲ شرح روش گرادیان مزدوج

توسعه الگوریتم این روش با انجام اصلاحاتی بر روی کاهش سریع انجام می‌گیرد و برای اعمال بر روی یک تابع درجه دوم مثل $f(X) = \frac{1}{2} X^T A + B^T X + C$ به گونه‌ای صورت می‌گیرد که جهات جدید به وجود آمده متقابلاً با هم مزدوج باشند، فرض کنید X_1 نقطه شروع فرآیند مینیمم‌یابی و اولین جهت جستجوی منطبق بر جهت سریع‌ترین نرخ کاهش باشد:

$$X_1 = -\nabla f_1 = -AX_1 - B \qquad (۱۹-۳)$$

$$X_2 = X_1 + \lambda_1^* S_1 \qquad (۲۰-۳)$$

$$S_1 = \frac{X_2 - X_1}{\lambda_1^*} \qquad (۲۱-۳)$$

λ_1^* مقدار تابع را در جهت S_1 مینیمم می‌کند بنابراین:

$$S_1^T \nabla f_1 |_{x_2} = 0 \quad (۲۲-۳)$$

به این ترتیب مقدار λ_1^* را می‌توان بدست آورد:

$$\lambda_1^* = \frac{-S_1^T (AX_1 + B)}{S_1^T AS_1} = -\frac{S_1^T \nabla f_1}{S_1^T AS} \quad (۲۳-۳)$$

جهت کاهش در مرحله دوم به صورت ترکیب خطی از S_1 و ∇f_2 در نظر گرفته می‌شود:

$$S_2 = -\nabla f_2 + \beta_2 S_1 \quad (۲۴-۳)$$

مقدار β_2 به گونه‌ای محاسبه می‌شود که S_1 و S_2 با تعریف زیر مزدوج شوند:

$$S_1^T AS_2 = 0 \quad (۲۵-۳)$$

با ترکیب روابط فوق می‌توان برای β_2 رابطه زیر را بدست آورد:

$$\beta_2 = \frac{-\nabla f_2^T \nabla f_2}{\nabla f_1^T S_1} = \frac{\nabla f_2^T \nabla f_2}{\nabla f_1^T \nabla f_1} \quad (۲۶-۳)$$

به همین ترتیب جهت کاهش بعدی را می‌توان از ترکیب خطی S_1 و S_2 و ∇f_3 بدست آورد:

$$S_3 = -\nabla f_3 + \beta_3 S_2 + \delta_3 S_1 \quad (۲۷-۳)$$

که مقادیر β_3 و δ_3 با مزدوج در نظر گرفتن S_3 نسبت به S_1 و S_2 بدست می‌آید. با استفاده از شرط $S_1^T AS_3 = 0$ مقدار $\delta_3 = 0$ بدست می‌آید. مقدار β_3 نیز به صورت زیر خواهد شد:

$$\beta_2 = \frac{\nabla f_3^T \nabla f_3}{\nabla f_2^T \nabla f_2} \quad (۲۸-۳)$$

و در نتیجه:

$$S_3 = -\nabla f_3 + \beta_3 S_2 \quad (۲۹-۳)$$

صورت کلی دو رابطه فوق را برای فرآیند تکرارپذیر می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$S_i = -\nabla f_i + \beta_i S_{i-1} \quad (۳۰-۳)$$

$$\beta_i = \frac{\nabla f_i^T \nabla f_i}{\nabla f_{i-1}^T \nabla f_{i-1}} \quad (۳۱-۳)$$

دو رابطه اخیر مسیر جستجوی کاهش تابع را ارائه می‌کنند.

۳-۹-۳ الگوریتم روش گرادیان مزدوج

الگوریتم روش تکراری گرادیان مزدوج را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

۱. شروع محاسبات با نقطه دلخواه. X_1

۲. قرار دادن اولین مسیر جستجوبه صورت $S_1=-\nabla f(X_1)=-\nabla f_1$.

۳. یافتن نقطه X_2 با توجه به $X_2=X_1+\lambda_1^* S_1$ که λ_1^* رابطه طول گام بهینه در مسیر S_1 می‌باشد.

۴. قرار دادن $i=2$ برای تکرار بعدی و انجام مرحله بعد.

۵. محاسبه $\nabla f_i=\nabla f(X_i)$ و قرار دادن:

$$S_i=-\nabla f_i+\frac{\|\nabla f_i\|^2}{\|\nabla f_{i-1}\|^2}S_{i-1} \tag{۳-۳۲}$$

۶. محاسبه طول گام بهینه λ_i^* در جهت S_i و یافتن نقطه جدید: $X_{i+1}=X_i+\lambda_i^* S_i$.

۷. بررسی نقطه X_{i+1} و پایان محاسبات در صورت بهینه بودن. در غیر این صورت با قرار دادن $i=i+1$ محاسبات از مرحله ۴ به بعد ادامه می‌یابد.

در این زمینه نکات زیر قابل توجه می‌باشند:

روش گرادیان مزدوج در اصل به عنوان روشی برای حل دستگاه معادلات خطی بنیان‌گذاری شده است و ازیسیک[5] در کتاب خود شرح کاملی از تکنیک‌های مختلف این روش ارائه داده است [۱۲۰]. از آنجائی که جهت‌های S_i استفاده شده در این روش با ماتریس A مزدوج هستند $(S_i^T A S_i=0)$، این فرآیند می‌بایست برای یک تابع مرتبه دوم در n تکرار یا کمتر از آن همگرا شود. این روش برای توابع مرتبه دوم ناهنجار به تعداد بیشتری تکرار برای همگرائی نیازمند است. علت این موضوع خطای تجمیعی گرد

---

۵ Ozisik

کردن است.

چون S_i از رابطه (۳-۳۰) بدست می‌آید، هر خطای ناشی از کم بودن دقت λ_i^* در محاسبه و خطای ناشی از گرد کردن تجمیعی در ترم S_{i-1} . $\frac{\|\nabla f_i\|^2}{\|\nabla f_{i-1}\|^2}$ به مرحله بعدی S_i نیز راه پیدا می‌کند و جهت کاهش S_i به صورت قابل توجهی توسط این خطاها، منحرف می‌شود. بنابراین لازم است تا بعد از هر m تکرار برخلاف مقدار موجود در الگوریتم، برابر با $-\nabla f_{m+1}$ قرار گیرد. این کار شروع مجدد نام دارد. فلچر - ریوز[۶] مقدار $m=n+1$ را برای شروع مجدد پیشنهاد دادند که n تعداد متغیرهای مجهول می‌باشد.

با وجود محدودیت‌های گفته شده، روش گرادیان مزدوج از لحاظ یافتن مسیرهای مزدوج کاهش بسیار مؤثرتر از روش کاهش سریع عمل می‌کند.

۳-۱۰ روش نیوتن

روش نیوتن را می‌توان برای مینیمم کردن توابع چند متغیره استفاده نمود. تقریب مرتبه دوم تابع f(X) در نقطه $X=X_i$ با استفاده از بسط سری تیلور به صورت زیر است:

$$f(X)=f(X_i)+\nabla f_i^T(X-X_i)+\frac{1}{2}(X-X_i)^T[J_i](X-X_i) \tag{۳-۳۳}$$

که $[J_i]=[J]_{X_i}$ ماتریس هسین نام دارد و شامل مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع f در نقطه X_i می‌باشد.

با مساوی صفر قرار دادن مشتقات در رابطه فوق برای محاسبه مینیمم تابع رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial X_j}=0, \quad j=1,2,\ldots,n \tag{۳-۳۴}$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود:

$$\nabla f=\nabla f_i+[J_i](X-X_i)=0 \tag{۳-۳۵}$$

---

۶ Fletcher and Reeves

در صورتی که $[J_i]$ غیر منفرد باشد، می‌توان از رابطه فوق تقریب بسیار خوبی (در نقطه $X=X_{i+1}$) به صورت زیر بدست آورد:

$$X_{i+1} = X_i - [J_i]^{-1} \nabla f_i \qquad (۳-۳۶)$$

با صرف نظر کردن از ترم‌های مرتبه دوم بالا در روابط (۳-۳۳) و (۳-۳۶) می‌توان از یک فرآیند تکراری برای محاسبه جواب X^* بهینه استفاده نمود.

می‌توان نشان داد که دنباله نقاط $X_1, X_2, ..., X_{i+1}$ در صورتی که نقطه شروع X_1 به اندازه کافی به X^* نزدیک شود و $[J_1]$ غیرمنفرد باشد، می‌تواند به جواب واقعی X^* همگرا شود. همچنین از آنجائی که در روش نیوتن از مشتقات مرتبه دوم تابع مورد نظر (به فرم ماتریس $[J_i]$) استفاده می‌شود، روش مرتبه دوم محسوب می‌شود. در ادامه نشان داده شده که با روش نیوتن می‌توان مینیمم یک تابع مرتبه دوم را با یک تکرار محاسبه نمود.

فرض کنید فرم تابع f به صورت زیر باشد:

$$f(X) = \frac{1}{2} X^T A X + B^T X + C \qquad (۳-۳۷)$$

مینیمم تابع f در نقطه زیر بدست می‌آید:

$$X^* = -[A]^{-1} B \qquad (۳-۳۸)$$

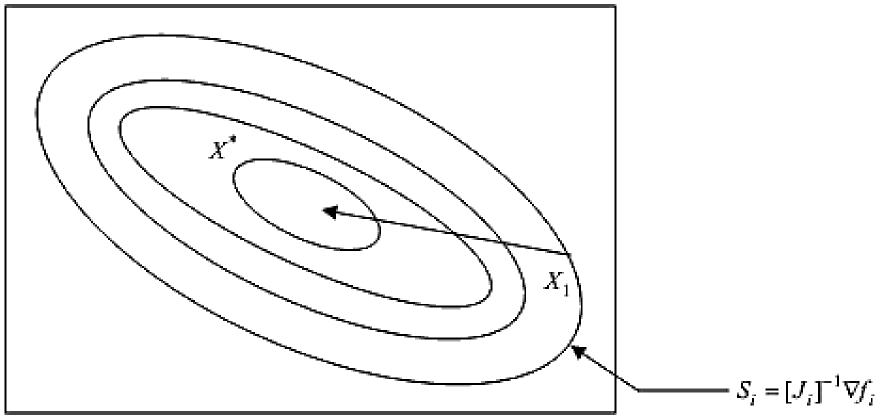
بنابراین روش تکراری با استفاده از رابطه (۳-۳۶) به صورت زیر خواهد شد:

$$X_{i+1} = X_i - [A]^{-1}([A] X_i + B) \qquad (۳-۳۹)$$

که X_i نقطه شروع در تکرار i ام می‌باشد. از رابطه فوق جواب دقیق به صورت زیر بدست می‌آید:

$$X_{i+1} = X^* = -[A]^{-1} B \qquad (۳-۴۰)$$

شکل زیر چگونگی انجام این کار را نشان میدهد.



شکل (۳-۳) مینیمم یک تابع درجه دوم در یک مرحله با روش نیوتن

در صورتی که f تابعی مرتبه دوم نباشد، ممکن است روش نیوتن واگرا شود. برای جلوگیری از این اتفاق رابطه (۳-۳۶) را می‌بایست به صورت زیر اصلاح نمود:

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* S_i = X_i - \lambda_i^* [J_i]^{-1} \nabla f_i \qquad (۴۱\text{-}۳)$$

که λ_i^* طول گام برای مینیمم کردن تابع در جهت $S=-[J_i]^{-1}\nabla f_i$ است. این اصلاح امتیازاتی را به دنبال خواهد داشت. اول اینکه این حالت در مقایسه با روش قبلی در تعداد تکرار کمتری نقطه مینیمم را پیدا می‌کند. دوم اینکه در این روش یافتن نقطه مینیمم برای همه حالات، در صورتی که فرمولاسیون اصلی در برخی موارد، نقطه مینیمم را پیدا کند، امکان‌پذیر می‌باشد. سوم اینکه، این روش منجر به پیدا کردن نقطه ماکزیمم یا عطف نخواهد شد. با توجه به امتیازات گفته شده، خصوصیات زیر باعث می‌شود این روش در عمل آنچنان موثر نباشد:

۱. در این روش لازم است ماتریس [J] با بعد $n \times n$ ذخیره شود.

۲. محاسبه درایه‌های ماتریس [J] بسیار مشکل و در مواردی غیرممکن می‌باشد.

۳. در هر مرحله به محاسبه مقدار $[J_i]^{-1}\nabla f_i$ نیاز است.

خصوصیات ذکر شده، این روش را در مورد توابع پیچیده با تعداد زیاد متغیر، غیرکاربردی می‌کند.

۳-۱۱ روش مارکارت - لونبرگ[۷]

روش کاهش سریع مقدار تابع را برای حالتی که بردار X_i از نقطه بهینه X^* دور باشد، کاهش می‌دهد، روش نیوتن در حالتی که بردار X_i به نقطه بهینه نزدیک باشد، از سرعت همگرائی بالائی برخوردار است. روش مارکارت روشی است که امتیازات هر دو روش گفته شده را در بردارد. این روش، درایه‌های قطری ماتریس هسین را به صورت زیر اصلاح می‌کند:

$$[\tilde{J}_i]=[J_i]+\alpha_i[I] \tag{۳-۴۲}$$

که $[I]$ ماتریس واحد و α_i مقدار ثابتی است که در این صورت، مثبت معین بودن ماتریس $[\tilde{J}_i]$ در صورتی که $[J_i]$ مثبت معین نباشد را تضمین می‌کند.

می‌توان اینگونه گفت که، وقتی α_i به اندازه کافی بزرگ باشد (از مرتبه 10^4)، ترم $\alpha_i[I]$ بر ترم $[J_i]$ غالب شده و معکوس ماتریس $[J_i]$ به صورت زیر خواهد شد:

$$[\tilde{J}_i]^{-1}=\left[[J_i]+\alpha_i[I]\right]^{-1}\approx\left[\alpha_i[I]\right]^{-1}=\frac{1}{\alpha_i}[I] \tag{۳-۴۳}$$

در این صورت جهت کاهش S_i به صورت زیر خواهد شد:

$$S_i=-[\tilde{J}_i]^{-1}\nabla f_i \tag{۳-۴۴}$$

S_i برای مقادیر بزرگ α_i همان جهت کاهش سریع است. در روش مارکارت، برای α_i در آغاز عملیات تکراری، مقدار بزرگی در نظر گرفته می‌شود و این مقدار در طول تکرارهای مختلف کاهش می‌یابد و نهایتاً به صفر می‌رسد بنابراین با کاهش α_i از یک مقدار بزرگ به صفر، جهت جستجو در این روش، از روش کاهش سریع در آغاز عملیات تا روش نیوتن در انتها تغییر می‌کند.

$$X_{i+1}=X_i+\lambda_i^*S_i=X_i-\lambda_i^*\left[[J_i]+\alpha_i[I]\right]^{-1}\nabla f_i \tag{۳-۴۵}$$

که λ_i^* را می‌توان از بخش جستجوی یک بعدی محاسبه نمود.

---

[۷] Marquardt-Levenberg

۳-۱۲ روش شبه نیوتن

همانگونه که تفاوت‌ها در مقدار تابع شامل اطلاعاتی دربارهٔ مشتق‌های اول هستند، تفاوت‌ها در مقدار گرادیان شامل اطلاعاتی دربارهٔ مشتق‌های دوم می‌باشند. از این ایده می‌توان در ساده کردن محاسبات J_i در روش نیوتن استفاده کرد. اگر X_i و X_{i+1} تقریب‌هایی برای کمینه باشند که در دو تکرار متوالی به دست آمده‌اند، با استفاده از رابطه (۳-۳۶) می‌توانیم بنویسیم:

$$g(X^*) = g(X_i + S) = g_i + J_i S \qquad (۳\text{-}۴۶)$$

وقتی که

$$X^* = X_i + S \qquad (۳\text{-}۴۷)$$

اگر نقطهٔ جدیدی را که از تکرار نیوتن به دست می‌آید، به جای X^* با X_{i+1} نشان دهیم، روابط (۳-۴۶) و (۳-۴۷) به صورت زیر در می‌آیند:

$$g_{i+1} - g_i = J_i S = J_i (X_{i+1} - X_i) \qquad (۳\text{-}۴۸)$$

با تعریف دو عبارت (۳-۴۹) و (۳-۵۰)

$$G_i = g_{i+1} - g_i \qquad (۳\text{-}۴۹)$$

$$S = X_{i+1} - X_i \qquad (۳\text{-}۵۰)$$

رابطه (۳-۴۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$G_i = J_i S_i \qquad (۳\text{-}۵۱)$$

یا در صورت غیر منفرد بودن J_i:

$$S_i = J_i^{-1} G_i \qquad (۳\text{-}۵۲)$$

روابط (۳-۵۱) و (۳-۵۲) به ما اجازه می‌دهند که از تفاوت‌های گرادیان در یافتن تقریب‌هایی برای ماتریس J_i یا معکوس آن J_i^{-1} استفاده کنیم.

برای بسط رابطه تکراری روش‌های شبه نیوتن، فرض کنید:

$$S_i = H_i G_i \ , \ i = 1, 2, ..., k \qquad (۵۳-۳)$$

وقتی که H_i تقریبی از J_i^{-1} در i امین گام است (می‌توانیم یک H_1 مناسب برای شروع فرآیند تکراری استفاده کنیم). اگر فرض کنیم که رابطه (۳-۵۳) در (k + 1) امین مرحله هم صادق باشد داریم:

$$S_{k+1} = H_{k+1} G_{k+1} = H_{k+1}(g_{k+2} - g_{k+1}) \qquad (۵۴-۳)$$

برای اینکه نقطه بدست آمده در انتهای (k + 1) امین گام (یعنی X_{k+2}) یک نقطه ایستایی باشد، بایستی $g_{k+2} = 0$ شود، و روابط (۳-۵۴) به رابطه زیر ساده می‌شوند:

$$S_{k+1} = -H_{k+1} g_{k+1} \qquad (۵۵-۳)$$

روشن است که فرض بالا به طور کلی درست نیست، و ممکن است که نقطه X_{k+1} تقریب بدی از یک نقطه ایستایی باشد. بنابراین از رابطه (۳-۵۵) به عنوان یک جهت جستجو استفاده و نقطه جدید X_{k+2} را بصورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$X_{k+2} = X_{k+1} + S_{k+1} \qquad (۵۶-۳)$$

که در آن،

$$S_{k+1} = -\lambda_{k+1}^{*} H_{k+1} g_{k+1} \qquad (۵۷-۳)$$

وقتی که λ_{k+1}^{*} طول گام کمینه‌سازی در امتداد جهت $-H_{k+1} g_{k+1}$ است. مبنای همه روش‌های شبه نیوتن بر روابط (۳-۵۶) و (۳-۵۷) است. تنها تفاوت آنها در شیوه ساختن H_k برای برقراری رابطه (۳-۵۳) و انتخاب λ^{*} در رابطه (۳-۵۷) است.

روش ساختن H_k نیاز به ارزیابی مشتق‌های دوم و تشکیل معکوس‌های ماتریس را کاملا مرتفع می‌سازد و باز هم دنباله تکرارها در نقطه کمینه X^{*} همگرا می‌شود. بعلاوه، می‌توان نشان داد که ماتریس H_k، که در هر تکرار بهبود می‌یابد، به J^{-1} همگرا می‌شود. در بخش بعد یک روش شبه نیوتن خاص را که توسط دیویدون، فلچر و پاول توسعه یافته است، بررسی خواهیم کرد.

۳-۱۲-۱ روش متریک متغیر DFP (روش دیویدون[۸] - فلچر[۹] - پاول[۱۰])

با معرفی روش متریک متغیر توسط دیویدون، روش‌های کاهشی توسعه قابل ملاحظه‌ای یافتند. این روش توسط فلچر و پاول در ۱۹۶۳ بسط یافت. این روش گسترده‌ترین روش بهینه‌سازی نامقید است و از مشتق‌هایی که فعلا موجود هستند استفاده می‌کند. شیوه تکراری این روش بصورت زیر است [۱۲۱]:

۱- از یک نقطه آغازین X_1 و یک ماتریس $n \times n$ مثبت معین متقارن H_1 شروع کنید. معمولا H_1 به عنوان ماتریس واحد I انتخاب می‌شود. شماره تکرار را $i=1$ قرار دهید.

۲- گرادیان تابع، ∇f_i را در نقطه X_i محاسبه و جهت جستجو را به صورت زیر انتخاب کنید:

$$S_i = -H_i \nabla f_i \tag{۳-۵۸}$$

۳- طول گام بهینه λ_i^* در جهت S_i را پیدا و نقطه جدید را به صورت زیر بدست آورید:

$$X_{i+1} = X_i + \lambda_i^* S_i \tag{۳-۵۹}$$

۴- نقطه جدید X_{i+1} را برای بهینگی آزمایش کنید. اگر X_{i+1} بهینه است، فرآیند تکراری را متوقف کنید، در غیر اینصورت به گام ۵ بروید.

۵- ماتریس H را بصورت زیر به هنگام کنید:

$$H_{i+1} = H_i + M_i + N_i \tag{۳-۶۰}$$

وقتی که

$$M_i = \lambda_i^* \frac{S_i S_i^T}{S_i^T Q_i} \tag{۳-۶۱}$$

$$N_i = -\frac{(H_i Q_i)(H_i Q_i)^T}{Q_i^T H_i Q_i} \tag{۳-۶۲}$$

و

---

۸ Davidon

۹ Fletcher

۱۰ Pawed

$$Q_i = \nabla f(X_{i+1}) - \nabla f(X_i) = \nabla f_{i+1} - \nabla f_i \qquad (۶۳-۳)$$

۶- شماره تکرار را $i=i+1$ قرار دهید و به گام ۲ بروید.

این روش که توسط دیویدون به عنوان یک روش متریک متغیر بررسی شد را می‌توان به عنوان یک روش شبه نیوتن و همچنین به عنوان روش گرادیان مزدوج در نظر گرفت. این روش بسیار نیرومند بوده و به سرعت همگرا می‌شود (چون یک روش گرادیان مزدوج است). همچنین در پیشرفت به سمت کمینه حتی در کمینه‌سازی توابع نامتمرکز و نامغشوش، بسیار پایدار و پیوسته است. پایداری این روش را می‌توان ناشی از این واقعیت دانست که اطلاعات بدست آمده در تکرارهای قبلی را از طریق ماتریس H_i با خود حمل می‌کند. می‌توان نشان داد که H_i همواره مثبت معین باقی می‌ماند و یک تقریب برای معکوس ماتریس مشتق‌های جزیی مرتبه دوم تابع هدف f خواهد بود. بعلاوه با رسیدن نقطه کمینه X^* ، H_i به ماتریس J^{*-1} همگرا می‌شود. طبیعت متریک متغیر و مثبت معین بودن ماتریس H_i را قبل از بررسی سایر مشخصات مهم این روش خواهیم دید.

برای پی بردن به اینکه چرا دیویدون - فلچر - پاول را یک روش متریک متغیر می‌نامند، ابتدا باید مفهوم متریک را بررسی کنیم. فاصله بین دو نقطه X_1 و X_2 در فضای n بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d^2 = (X_1 - X_2)^T A (X_1 - X_2) \qquad (۶۴-۳)$$

وقتی که A یک ماتریس مثبت معین متقارن از مرتبه n است و ماتریس متریک نامیده می‌شود. معمولا برای یافتن بین دو نقطه، A=I انتخاب می‌شود. چون A مثبت معین است، برای هر X_1، X_2 مخالف صفر، همواره فاصله d را مثبت بدست می‌آوریم. فرض کنید I ماتریس متریک رابطه (۳-۶۳) باشد. داریم:

$$d^2 = (X_1 - X_2)^T (X_1 - X_2) \qquad (۶۵-۳)$$

اگر از یک تبدیل (مقیاس‌بندی مجدد) متغیرها به صورت زیر استفاده می‌کنیم،

$$X = R\tilde{X} \qquad (۶۶-۳)$$

و آن را در رابطه (۳-۶۴) قرار دهیم، داریم:

$$d^2 = (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2)^T R^T R (\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2) \qquad (۳-۶۷)$$

بنابراین، مقیاس‌بندی مجدد متغیرها ماتریس متریک جدید $R^T R$ را در رابطه با سیستم مختصات قدیم معرفی می‌کنیم.

چنان که بعداً نشان داده خواهد شد، انتخاب‌های مختلف ماتریس متریک، به انواع مختلفی از روش‌های کاهشی می‌انجامد. بعلاوه، در یک روش کاهشی مشخص، لزومی ندارد که در همه تکرارها از یک ماتریس متریک استفاده کنیم. تغییر ماتریس متریک طی فرآیند تکرار را می‌توان معادل با مقیاس‌بندی مجدد متغیرها در پیشرفت فرآیند حل در نظر گرفت. روش دیویدون - فلچر - پاول دارای این جنبه متریک متغیر است. برای روشن‌تر شدن مطلب، مکان همه نقاط واقع در یک فاصله δ از یک نقطه X_i در یک فضای n بعدی را در نظر بگیرید. این مکان یک بیضیگون n بعدی با مرکز X_i (اگر $A=I$ باشد یک کره n بعدی خواهد بود) است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\delta^2 = (X - X_i)^T A (X - X_i) \qquad (۳-۶۸)$$

وقتی که X هر نقطه واقع بر بیضیگون است. به طور کلی، مقدار تابع هدف f(X) در نقاط مختلف X از این بیضیگون متفاوت خواهد بود. اجازه دهید نقطه مشخص $\tilde{X} = X_i + \Delta X$ واقع بر این بیضیگون را که در آن تابع هدف f(X) دارای کمینه باشد بررسی کنیم. بنابراین نقطه X در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\min_{\Delta x} \left\{ f(X_i + \Delta X)\big|_{\delta^2 = \Delta X^T A \Delta X} \right\} \qquad (۳-۶۹)$$

با استفاده از تقریب مرحله اول سری تیلور برای $f(X_i + \Delta X)$ حول نقطه X_i داریم:

$$f(X_i + \Delta X) \approx f(X_i) + \Delta X^T \nabla f_i \qquad (۳-۷۰)$$

وقتی که $\nabla f_i = \nabla f(X_i)$ چون $f(X_i)$ ثابت است، رابطه (۳-۶۹) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\min_{\Delta X} \left\{ \Delta X^T \nabla f_i \big|_{\delta^2 = \Delta X^T A \Delta X} \right\} \qquad (۳-۷۱)$$

بنابراین، برای یافتن کمینه $f(X_i + \Delta X)$، بایستی $\Delta X^T \nabla f_i$ را به شرط قید مساوی $\delta^2 = \Delta X^T A \Delta X$

کمینه‌سازی کنیم. این مسئله را می‌توان با روش مضارب لاگرانژ حل کرد. تابع لاگرانژ عبارت است از:

$$L(\Delta X,\beta)=\Delta X^T\nabla f_i+\beta\left[-\Delta X^T A\Delta X+\delta^2\right] \tag{۳-۷۲}$$

وقتی که β مضرب لاگرانژ است.

شرایط لازم باری کمینه مقید $\Delta X^T\nabla f_i$ عبارتند از:

$$\frac{\partial L}{\partial(\Delta X)}=\nabla f_i-2\beta A\Delta X=0 \tag{۳-۷۳}$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial\beta}-\Delta X^T A\Delta X-\delta^2=0 \tag{۳-۷۴}$$

از رابطه (۳-۷۳) داریم:

$$\Delta X_i=\frac{1}{2\beta}A^{-1}\nabla f_i \tag{۳-۷۵}$$

وقتی که مقدار ثابت β را می‌توان با حل همزمان معادلات (۳-۷۴) و (۳-۷۵) پیدا کرد. اگر هدف تعیین جهت تندترین کاهش موضعی S_i در نقطه X_i باشد، به آسانی می‌توان آن را از رابطه (۳-۷۴)، با حذف ثابت تناسب، به صورت زیر به دست آورد:

$$S_i=-A_i^{-1}\nabla f_i \tag{۳-۷۶}$$

می‌توان ثابت کرد که افزودن علامت منفی در رابطه (۶-۷۶) در واقع مربوط به جهت کمینه‌سازی است. برای این کار حاصلضرب زیر را در نظر بگیرید:

$$S_i^T\nabla f_i=-\nabla f_i^T(A_i^{-1})^T\nabla f_i \tag{۳-۷۷}$$

مشخص است که این حاصلضرب برای هر بردار گرادیان غیر صفر ∇f_i همواره منفی است. زیرا که معکوس ماتریس مثبت متقارن، مثبت معین است.

توجه شود که زیرنویس i به ماتریس متریک اضافه شده است، تا امکان تغییر آن را از تکراری به تکرار دیگر نشان دهد. همچنین اگر به ازای همه مقادیر i ، $A_i=I$ باشد، جهات جستجوی S_i بر جهات روش

تندترین کاهش منطبق خواهند بود. اگر رابطه (۳-۷۶) را با رابطه (۳-۵۸) مقایسه کنیم، می‌بینیم که ماتریس H_i در روش دیویدون - فلچر - پاول، را می‌توان به عنوان i امین تقریب برای معکوس ماتریس متریک A_i^{-1} در نظر گرفت. به همین دلیل روش متریک متغیر است.

می‌توان دید که مثبت معین بودن ماتریس H_i وابستگی زیادی به میزان دقت در محاسبه λ_i^* و بنابراین در محاسبه H_{i+1} دارد. پس اگر λ_i^* در هر تکرار به دقت محاسبه نشود، ماتریس H_{i+1} را به هنگام نکرده‌ایم. در این حالت دو امکان وجود دارد. امکان اول به دست آوردن یک مقدار بهتر λ_i^* با استفاده از تعداد برازش‌های بیشتر در روش کمینه‌سازی یک بعدی (تا وقتی که $S_{i+1}^T \nabla f_{i+1}$ تولید شده به اندازه کافی کوچک شود) است. اما این روش ممکن است به وقت محاسباتی زیادی نیازمندباشد. امکان دوم عبارت است از تعیین تعداد بیشینه‌ای از برازش‌ها در کمینه‌سازی یک بعدی و حذف به هنگام کردن H_i در صورتی که نتوان λ_i^* را حتی در تعداد زیادی برازش به طور دقیق پیدا کرد (یعنی اگر $S_{i+1}^T \nabla f_{i+1}$ زیاد باشد). در این حال:

$$H_{i+1} = H_i \qquad (۳-۷۸)$$

و

$$S_{i+1} = -H_{i+1} \nabla f_{i+1} \qquad (۳-۷۹)$$

در نظر می‌گیریم و مانند قبل ادامه می‌دهیم. سایر مشخصات روش:

اگر تابع هدف، یک تابع درجه دوم $f(X) = X^T A X + B^T X + C$ باشد، می‌توان نشان داد که روش دیویدون - فلچر - پاول دارای مشخصات زیر خواهد بود:

i. ماتریس H_i در نقطه بهینه به معکوس ماتریس هسین $f(X)$ همگرا می‌شود. یعنی:

$$H_{n+1} = A^{-1} \qquad (۳-۸۰)$$

ii. جهات تولید شده A مزدوج هستن. بنابراین

$$S_i^T A S_j = 0 \qquad i \neq j \qquad (۳-۸۱)$$

فصل چهارم : حل معادلات حاکم

۴-۱- مقدمه

قانون فوریه معمولاً برای انتقال حرارت هدایت در شاخه های مختلف علوم و مهندسی اعمال می‌شود. اغلب این مسایل با معادلات مدل سهموی توصیف و آنالیز می شوند، که بیانگر رابطه بین شار حرارتی و گرادیان دما می باشد.

تئوری معمول انتقال حرارت هدایتی، براساس قانون فوریه، دلالت بر پاسخ فوری به گرادیان دما کرده که منجر به یک معادله دیفرانسیل سهموی جهت تکامل دما می گردد. در مقابل، وقتی زمان آرامش[۱۱] در ساختار معادله توصیف کننده شار حرارتی به حساب می آید، آنگاه یک معادله هذلولی که منجر به سرعت محدود انتقال گرما می شود بدست می آید.

معادله هذلولی انتقال گرما امروزه مورد توجه فراوان قرار گرفته است، هم از جهت تئوریکال (آنالیز امواج گرمایی و سرعت محدود انتقال حرارت و غیره) و هم از جهت آنالیز مشکلات عملی مربوط به یک منبع سریع انرژی حرارتی (برای مثال، یک پالس لیزر یا یک انفجار حرارتی و غیره).

کاتانه [۲] و ورنوته [۳] مدل انتقال حرارت هذلولی را برای انتقال حرارت با سرعت انتشار محدود پیشنهاد دادند. این معادله اغلب جهت بررسی زمینه دمایی و مقدار انتقال حرارت مرتبط در حالت شار حرارتی گذرا در بازه بسیار کوتاه زمانی یا گرادیان بسیار زیاد دما برای دماهای بسیار پایین (نزدیک صفر مطلق) [۱۲۲]استفاده می شود. حال این معادله ممکن است با مشکلات ریاضی جهت بدست آوردن یک جواب قابل قبول روبرو شود. مشکلات ریاضی ممکن است بر اثر برخورد جبهه موج با مرز یا یک ناپیوستگی دیگر دمایی بوجود آیند. روشهای مختلف عددی ([۴۰]، [۲۶]، [۱۲۳]، [۱۲۴]، [۵۲]، [۱۲۵]، [۱۲۶]) تحت برنامه ها و تنظیمات مختلف برای حل مسایل هدایت گرمایی هذلولی پیشنهاد شده است. در مسایل هدایت گرمایی هذلولی مستقیم هدف بدست آوردن دما با داشتن شرط اولیه و مرزی، خواص ترموفیزیکی و تولید حرارت مشخص در نقاط داخلی یک منطقه می باشد. در مقابل، در حالت مسایل

۱۱ Relaxation time

معکوس حرارتی هذلولی، هدف شامل تعیین شار حرارتی سطحی براساس دانستن دمای اندازه گیری شده در مرزهاست.

مطالعات انجام گرفته در زمینه مسایل معکوس محدود به موارد ذکر شده در تاریخچه می باشد. چن[1] و چانگ[2] [۱۲۷] یک روش ترکیبی از روش تبدیل لاپلاس و روش تفاضل محدود به منظور برآورد دمای دمای سطح ناشناخته براساس دمای اندازه‌گیری شده ابداع و اعمال کردند. چن و دیگران ([۱۲۸] و [۱۲۹]) ابتدا از یک الگوریتم مشابه با ایده ترتیب در زمان[3] جهت برآورد دمای ناشناخته سطح در مسایل مسایل دوبعدی استفاده کرده و سپس از روش تبدیل لاپلاس به همراه روش کنترل تابع با شکل فانکشن هذلولی و نیز روش حداقل مربعات در یک مسئله یک بعدی هدایت حرارتی معکوس هذلولی جهت تخمین شرایط مرزی استفاده نمودند.

در سال ۲۰۰۵ یانگ[4] [۱۳۰] از روش اصلاح شده نیوتون – رافسون[5] به همراه مفهوم زمان آینده[6] جهت جهت بدست آوردن شار حرارتی مرزی در یک مسئله یک بعدی هذلولی استفاده نمود. اشکالات مشاهده شده بر حل معکوس معادلات ۴-۱-a تا ۴-۱-e بیانگر وجود همیشگی یک فاز خط بین شار دقیق و شار تخمینی؛ حتی وقتی که اندازه‌گیری دقیق (بدون خطا) در نظر گرفته شده باشد و نیز حساسیت بسیار بالای حل معکوس به اندازه گیری حتی وقتی که انحراف استاندارد انتخاب شده در مقایسه با دمای اندازه گیری بسیار کوچک باشد، می باشد.

تکنیک روش گرادیان مزدوج (CGM) توانایی های خود را برای حل انواع بسیاری از مشکلات مسایل معکوس نشان داده است. به عنوان مثال هوانگ[7] و چن[8] [۱۳۱] با استفاده از روش المان مرزی و CGM

---

۱ Chen

۲ Chang

۳ Sequential-in-time concept

۴ Yang

۵ Initial-in-time concept

۶ Future time

۷ Huang

۸ Chen

CGM شار حرارتی مرزی برای یک دامنه نامنظم را تخمین زدند. هوانگ و وانگ[1] [۱۳۲] از روش CGM جهت تخمین شار حرارتی سطحی در مسایل هدایت گرمایی ۳ بعدی استفاده کردند. هوانگ و چن [۱۳۳] از روشی مشابه در تخمین شار حرارتی سطحی در مسایل جابجایی گرمایی سه بعدی استفاده نمودند. هوانگ و چان[2] [۱۳۴] از روش CGM در مسایل معکوس دو بعدی تصویربرداری انتقال حرارت از یک محیط غیرهمگن استفاده نمودند. هوانگ [۱۳۵] روش CGM را برای مسایل معکوس ارتعاشی غیرخطی در تخمین نیروهای خارجی ناشناخته برای سیستم با پارامترهای وابسته به جابجایی اعمال کرد.

هدف از تحقیق حاضر مطالعه روش CGM در مسایل معکوس هذلولوی و کنترل دما در این گونه مسائل می‌باشد. دلیل استفاده از روش کرانک - نیکسون پایداری بالای روش و در نتیجه پرهیز از خطاهای قبلی و بهبود دقت حل معکوس می باشد [۱۳۰]. CGM همچنین یک روش تکرار منظم نامیده می‌شود، به این معنی که فرآیند مرتب سازی در طول فرآیندهای تکرارشونده انجام می شود و در نتیجه تعیین شرایط بهینه تنظیم در هر تکرار لازم نیست. CGM از قوانین اغتشاش[3] و تبدیل حل معکوس به حل سه مسئله مشتق شده است. این مسایل عبارتند از مستقیم، حساسیت و الحاقی که با جزئیات در ادامه ذکر خواهد شد.

۴-۲- مسئله مستقیم

برای نشان دادن روش توسعه عبارات استفاده شده در تعیین شار حرارتی سطحی ناشناخته در مسایل معکوس هذلولی، مسئله تیغه[4] زیر با ضخامت L و خواص فیزیکی ثابت در نظر گرفته می شود. دمای اولیه T_0 می باشد. وقتی $t>0$ باشد، شرط مرزی در $x=0$ عایق در نظر گرفته می شود، در حالی که شار حرارتی مجهول به مرز $x=L$ اعمال می شود.

[1] Wang
[2] Chin
[3] Perturbation
[4] Slab

فرمول ریاضی این مسئله هذلولی هدایت حرارتی به صورت زیر است:

$$K\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\tau\rho c\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}; \qquad 0<x<l \qquad t>0 \tag{a-۱-۴}$$

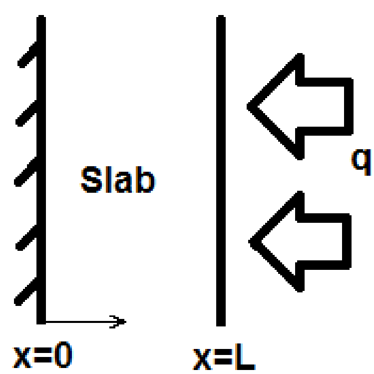
$$T(x,0)=T_0 \qquad 0<x<l \qquad t=0 \tag{b-۱-۴}$$

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial t}=0\ ; \qquad 0<x<l \qquad t=0 \tag{c-۱-۴}$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=0\ ; \qquad x=0 \tag{d-۱-۴}$$

$$k\frac{\partial T(l,t)}{\partial x}=q(l,t)+\tau\frac{\partial q(l,t)}{\partial t}\ ; \qquad x=l \qquad t>0 \tag{e-۱-۴}$$

در اینجا k و ρ و c و τ به ترتیب هدایت حرارتی، چگالی، ظرفیت گرمایی و زمان آرامش می‌باشند. راه حل این مسئله هدایت گرمایی هذلولی با استفاده از روش مشتق مرکزی (کرانک - نیکسون) در منبع [۴۰] حل شده است. حل مستقیم در حالتی که تمام شرایط مرزی شناخته شده باشند بدست می آید.



شکل ۴-۱- نمایی از شکل فیزیکی مسئله

۴-۳- مسئله معکوس

برای حل معکوس، شار حرارتی در $x=L$ نامعلوم فرض می شود، در حالی که سایر معادلات (a-۱-۴) تا (e-۱-۴) معلومند. همچنین دما در $x=0$ نیز معلوم در نظر گرفته می شود. می توان از دمای خوانده شده توسط سنسور در $x=0$ که با $Y(0,t)$ مشخص می شود نیز استفاده کرد. البته باید در

نظر داشت که این دما شامل خطای اندازه گیری می باشد. پس از آن مسئله معکوس می تواند به صورت "تخمین شار حرارتی مرزی مجهول $q(l,t)$ با استفاده از دمای اندازه گیری شده در $Y(0,t)$" توصیف گردد.

حل مسئله معکوس حاضر با کمینه شدن تابع هدف زیر بدست می آید :

$$J[q(l,t)] = \int_{t=0}^{t_f} [T(0,t) - Y(0,t)]^2 dt \qquad (۲-۴)$$

در اینجا $T(0,t)$ دمای تخمین زده شده در $x = ۰$ و زمان t می باشد در حالی که t_f زمان نهایی می‌باشد. این مقادیر از حل مسئله مستقیم که قبلاً اشاره شد با استفاده از شار حرارتی تخمینی به جای $q(,t)$ دقیق بدست می آید.

۴-۴- روش گرادیان مزدوج [۱] جهت مینمم سازی

اکنون فرایند تکرار زیر که براساس CGM [۱۳۶] بوده جهت مینیمم سازی تابع هدف $J[q((,t)]$ برای تخمین شار حرارتی مجهول $q(l,t)$ استفاده می شود.

$$q^{n+1}(l,t) = q^n(l,t) - \beta^n P^n(l,t) \qquad (۳-۴)$$

جایی که β^n گام جستجو در تکرار n تا n+۱ بوده و $P^n(l,t)$ جهت نزول (جهت جستجو) با عبارت زیر محاسبه می شود

$$P^n(l,t) = J'^n(l,t) + \gamma^n P^{n-1}(l,t) \qquad (۴-۴)$$

که $J'^n(l,t)$ جهت گرادیان الحاقی در تکرار n ام و $P^{n-1}(l,t)$ جهت نزول در تکرار $n-۱$ خواهد بود. ضریب الحاقی بصورت زیر تعریف می شود:

$$\gamma^n = \frac{\int_{t=0}^{t_f} (J'^n)^۲ dt}{\int_{t=0}^{t_f} (J'^{n-۱})^۲ dt} \; ; \quad \gamma^\circ = 0 \qquad (۵-۴)$$

---

[۱] Conjugate Gradient Method

باید در نظر گرفت که وقتی $\hat{\gamma} = 0$ باشد (برای هر n) در معادله (۴-۴) جهت نزول $\hat{P}(1,t)$ به جهت گرادیان تبدیل می شود. همگرایی پروسه تکرار بالا در مینیمم سازی تابع هدف J در منبع [۱۳۷] تضمین شده است.

برای شروع تکرار مطابق معادله (۴-۳) ، لازم است گام جستجو $\hat{\beta}$ و گرادیانتابع هدف $J'^{n}(l,t)$ محاسبه شود. به منظور توسعه عبارتی جهت تعیین این دو مقدار مسایل «حساسیت» و «الحاقی» مطابق شرح زیر ساخته می شوند.

۴-۴-۱- مسئله حساسیت و اندازه گام جستجو

مسئله حساسیت براساس مسئله مستقیم اصلی که طبق معادلات ۴-۱-a تا ۴-۱-e توصیف شد به روش زیر بدست می آید.

با فرض اینکه $q(l,t)$ تحت تلورانس Δq تغییر کند، T بصورت $T+\Delta T$ آشفته می شود. پس با جایگزینی q با $q+\Delta q$ و T با $T+\Delta T$ در معادله اصلی، و سپس تفریق عبارت بدست آمده از معادله اصلی و صرف نظر کردن از ترم های درجه دوم، مسئله حساسیت زیر برای تابع حساسیت ΔT بدست می آید.

$$K\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} = \tau\rho c\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial t^2} + \rho c\frac{\partial \Delta T}{\partial t} \;; \quad 0 < x < l \qquad t > 0 \tag{a-۶-۴}$$

$$\Delta T(x,0) = 0 \qquad 0 < x < l \qquad t = 0 \tag{b-۶-۴}$$

$$\frac{\partial \Delta T(x,0)}{\partial t} = 0 \qquad 0 < x < l \qquad t = 0 \tag{c-۶-۴}$$

$$\frac{\partial \Delta T((0,t)}{\partial x} = 0 \qquad x = 0 \qquad t > 0 \tag{d-۶-۴}$$

$$\frac{k\partial \Delta T(l,t)}{\partial x} = \Delta q(l,t) + \tau\frac{\partial \Delta q(l,t)}{\partial t} \qquad x = l \qquad t > 0 \tag{e-۶-۴}$$

از تکنیک گسسته سازی مرکزی کرنک - نیکلسون جهت حل این مسئله استفاده شده است. [۴۰]

تابع هدف $J(q^{n+1})$ برای تکرار $n+1$ با دوباره‌نویسی معادله (۴-۲) بدست می آید:

$$J(q^{n+1})=\int_{t=0}^{t_f}[T(0,t;q^n-\beta^n P^n)-Y(0,t)]^2 dt \qquad (۷-۴)$$

جایی که q^{n+1} با تابع معرفی شده در معادله (۴-۳) جایگزین شده است. اگر دمای $T(0,t;q^{n+1}-\beta^n P^n)$ با بسط تیلور خطی سازی شود معادله (۴-۷) بصورت زیر درخواهد آمد:

$$J(q^{n+1})=\int_{t=0}^{t_f}[T(0,t;q^n)-\beta^n \Delta T(0,t;P^n)-Y(0,t)]^2 dt \qquad (۸-۴)$$

که در آن $T(0,t;q^n)$ حل معادلهٔ مستقیم با استفاده از $q(l,t)$ تخمین زده شده در $x=0$ به جای شار حرارتی دقیق می باشد. تابع حساسیت $\Delta T(0,t;P^n)$ از حل معادله حساسیت (۴-۶) با جایگزینی $\Delta q=P^n$ در $x=0$ بدست می آید.

اندازه گام جستجو β^n نیز از مینیمم سازی تابع هدف داده شده با معادله (۴-۸) نسبت به β^n بدست می آید. که نتیجه بصورت زیر است:

$$\beta^n=\frac{\int_{t=0}^{t_f}[T(0,t)-Y(0,t)]\Delta T(0,t)dt}{\int_{t=0}^{t_f}[\Delta T(0,t)^2]dt} \qquad (۹-۴)$$

۴-۴-۲ مسئله الحاقی و معادله گرادیان

برای بدست آوردن مسئله الحاقی، معادلات ۴-۱ را در عملگر لاگرانژ (تابع الحاقی) $\lambda(x,t)$ ضرب کرده و بسط حاصل را در فضا و زمان مسئله انتگرال گرفته، سپس حاصل به طرف راست معادله (۴-۲) اضافه می شود. نتیجهٔ این کار بصورت بسط زیر برای تابع هدف $J(q(l,t))$ بدست می آید

$$J(q(l,t))=\int_{t=0}^{t_f}[T(0,t)-Y(0,t)]^2 dt+\int_{t=0}^{t_f}\int_{x=0}^{l}\lambda(x,t)[k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}-\tau\rho c\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}-\rho c\frac{\partial T}{\partial t}]dx\,dt \qquad (۱۰-۴)$$

متغیر ΔJ با جایگذاری متغیرهای ارتعاشی Δq و ΔT در معادله (۴-۱۰)، تفاضل بسط حاصل از معادله اولیه و صرف نظر کردن از ترمهای درجه دوم بدست می آید :

$$\begin{aligned}\Delta J[q(l,t)]&=\int_{t=0}^{t_f}2[\tau(0,t)-Y(0,t)]\Delta\tau(0,t)dt\\&+\int_{t=0}^{t_f}\int_{x=0}^{l}\lambda(x,t)[k\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2}-\tau\rho c\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial t^2}-\rho c\frac{\partial \Delta T}{\partial t}]dx\,df\end{aligned} \qquad (۱۱-۴)$$

در معادله (۴-۱۱)، انتگرال دو گانه به روش جداسازی و با در نظر گرفتن شرایط مرزی معادله حساسیت حل می شود. با ناپدید شدن انتگرال معادله الحاقی زیر جهت تعیین $\lambda(x,t)$ بدستت می آید:

$$k\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\tau\rho c\frac{\partial^2\lambda}{\partial t^2}+\rho c\frac{\partial\lambda}{\partial t}\;;\qquad 0<x<l \qquad t>0 \tag{a-۱۲-۴}$$

$$\lambda(x,t_f)=0 \qquad 0<x<l \qquad t=t_f \tag{b-۱۲-۴}$$

$$\frac{\partial\lambda(x,t_f)}{\partial t}=0 \qquad 0<x<l \qquad t=t_f \tag{c-۱۲-۴}$$

$$\frac{\partial\lambda(0,t)}{\partial x}=\frac{-2(T-Y)}{k} \qquad x=0 \qquad t>0 \tag{d-۱۲-۴}$$

$$\frac{\partial\lambda(l,t)}{\partial x}=0 \qquad x=l \qquad t>0 \tag{e-۱۲-۴}$$

این معادله با معادلات استاندارد مقدار اولیه تفاوت دارد زیرا شرایط مرزی بجای شرط مرزی اولیه $t=۰$ در $t=t_f$ هستند. اگر چه این معادله به سادگی با تغییر متغیر $\eta=t_f-t$ می تواند به یک معادله شرط اولیه استاندارد تبدیل شود. با روش گسسته سازی مرکزی کرنک - نیکلسون [۴۰] این معادله می تواند حل شود. در نهایت ترم انتگرالی زیر باقی خواهد ماند:

$$\Delta J=\int_{t=0}^{t_f}[\lambda(l,t)-\tau\lambda(l,t)\delta(t-0)-\tau\frac{\partial\lambda(l,t)}{\partial t}]\Delta q(l,t)dt \tag{۱۳-۴}$$

از تعریف آلفانوو[۲] [۱۳۸]، فرم بالا می تواند به صورت زیر خلاصه شود:

$$\Delta J=\int_{t=۰}^{t_f}J[q(l,t)\Delta q(l,t)dt \tag{۱۴-۴}$$

با مقایسه معادله (۴-۱۳) و (۴-۱۴)، بسط زیر برای گرادیان تابع هدف $J'[(q(l,t)]$ از تابع هدف $J[q(l,t)]$ قابل بدست آوردن است:

$$J'[q(l,t)]=\lambda(l,t)-\tau\lambda(l,t)\delta(l,t)\delta(t-۰)-\tau\frac{\partial\lambda(l,t)}{\partial t} \tag{۱۵-۴}$$

[۲] Alfanov

۴-۴-۳ شرط توقف

اگر مسئله دارای خطای اندازه گیری نباشد، شرط توقف سنتی بصورت زیر تعریف می شود:

$$J[q^{n+1}(l,t)] < \varepsilon \qquad (۴-۱۶)$$

که ε یک مقدار مشخص بسیار کوچک است. اگر چه دیتاهای دمای اندازه گیری شده حتماً دارای خطا هستند، به همین جهت ما انتظار برابر صفر بودن تابع هدف معادله (۴-۲) در مرحله تکرار نهایی را نخواهیم داشت. با استفاده از مشاهدات تجربی از قانون تفاوت به عنوان شرط توقف استفاده می کنیم. فرض می شود که باقیمانده دما تقریباً به صورت

$$T(0,t) - Y(0,t) \approx \delta \qquad (۴-۱۷)$$

تخمین زده شود. σ انحراف استاندارد اندازه گیری ثابت فرض می شود. با جایگزینی معادله (۴-۱۷) در معادله (۴-۲)محدوده توقف بصورت زیر بیان می گردد:

$$\varepsilon = \sigma^2 t_f \qquad (۴-۱۸)$$

سپس با کمک معادله توقف (۴-۱۶) و با جایگزینی ε از معادله (۴-۱۸) شرط توقف نهایی بدست می‌آید.

۴-۵- *روش محاسباتی*

روش محاسباتی توضیح داده شده در بالا برای حل این مسئله هدایت گرمایی هذلولی معکوس با استفاده CGM را می توان در گامهای زیر خلاصه کرد:

فرض می شود $q^n(l,t)$ در تکرار n ام مشخص است.

۱. حل معادله مستقیم برای بدست آوردن $T(x;t)$ از معادلات ۴-۱-a تا ۴-۱-e
۲. تست شرط توقف داده شده با معادله (۴-۱۶) با کمک ε از معادله (۴-۱۸). ادامه حل در صورت ارضا نشدن شرط
۳. حل معادله الحاقی برای بدست آوردن $\lambda(x,t)$ از معادلات (۴-۱۲-a) تا (۴-۱۲-e)
۴. محاسبه گرادیان تابع هدف J' از معادله (۴-۱۵) (شیب کاربردی)

۵. محاسبه ضریب مزدوج γ^n و جهت نزول P^n به ترتیب از معادلات (۴-۵) و (۴-۴)

۶. حل معادله حساسیت برای $\Delta T(x,t)$ با قرار دادن $\Delta q = P^n$ از معادلات (۴-۶-a) تا (۴-۶-e)

۷. محاسبه اندازه گام جستجو β^n از معادله (۴-۹)

۸. محاسبه مقدار تخمینی جدید برای q^{n+1} از معادله (۴-۳) و بازگشت به گام اول

فصل پنجم : نتایج

۵-۱- بحث و نتایج

هدف از این تحقیق نشان دادن اعتبار CGM در برآورد شار حرارتی مرزی $q(l,t)$ با دقت بالا و بدون هیچ اطلاعات قبلی از فرم تابع مقادیر ناشناخته، می باشد. ذکر این نکته ضروری می نماید قبل از شروع به حل مسئله معکوس، می بایست از صحت و دقت جواب های عددی مسئله مستقیم مطمئن شد، در غیر اینصورت کل حل معکوس بی فایده خواهد بود. جهت بررسی و نشان دادن میزان دقت CGM در پیش بینی شار حرارتی مرزی $q(l,t)$ ، سه مسئله جهت آزمایش با شرایط مرزی متفاوت در نظر گرفته شد.

به منظور مقایسه نتایج برای موقعیت های مربوط به خطاهای اندازه گیری تصادفی، خطای مجزا توزیع نرمال با میانگین و ثابت صفر و انحراف استاندارد در نظر گرفته شده است. شبیه سازی مقدار نادقیق داده های Y می تواند بصورت زیر بیان گردد.

$$Y = Y_{exact} + \omega\sigma \qquad (۵-۱)$$

که Y_{exact} ، حل دقیق مسئله مستقیم با شار حرارتی مرزی داده شده $q(l,t)$ ؛ σ انحراف استاندارد اندازه گیری و ω یک متغیر تصادفی در بازه ±۲/۷۶۷ می باشد که ۹۹٪ اعتماد را ایجاد می کند.

یکی از مزایای استفاده از CGM برای حل معکوس این است که حدس اولیه مقادیر ناشناخته می تواند بصورت دلخواه انتخاب شود. در تمامی موارد این مسائل، حدس اولیه شار حرارتی برابر صفر در نظر گرفته شده است.

$$q(l,t)_{initial} = 0 \qquad (۵-۲)$$

مقادیر زیر جهت مسائل در نظر گرفته شده اند:

$T_0 = ۲۰\,^{\circ}C\ ;\ l = ۰/۰۳۵m\ ;\ k = ۵۰wm^{-۲}\ ;\ \alpha = k/\rho c = ۰/۰۰۰۰۱۳۲۷\ m^{۲}s^{-۱}$

α ضریب پخش گرمایی ماده می باشد. همچنین پس از بررسی شرط استقلال از گره شبکه ۱۰۰ در۳۰۰ (به عبارت دیگر $\Delta x = ۰/۰۰۰۳۵$ و $\Delta t = ۲$) در نظر گرفته شد. در ادامه نتایج حاصل از محاسبه ۳ تست عددی جهت محاسبه $q(l,t)$ آورده شده است.[۸۹]

۵-۱-۱ تست عددی ۱

$$q(l,t)=\begin{cases}0 & 0\le t\le 9\\ 6\times10^{5}\sin[\dfrac{4\pi(t-l_0)}{580}] & 9<t<590\\ 0 & 590<t\le 600\end{cases} \qquad (۳-۵)$$

آنالیز ابتدایی با $\tau=۱$ و در نظر گرفتن $\sigma=0$ انجام می شود.

چون $\sigma=0$ می باشد، لذا محدوده توقف با توجه به مسئله و از مشاهدات عددی تجربی بی بعد $\varepsilon=1$ در نظر گرفته می شود. حل دقیق و تخمینی $q(l,t)$ بعد از ۲۴ تکرار در (شکل ۵-۳) نشان داده شده است.

می‌توان در شکل مشاهده کرد که شار حرارتی تخمین زده شده از دقت بسیار بالایی برخوردار است. دمای تخمین زده شده در $x=0$ در (شکل ۵-۱) رسم شده است. خطای وابسته متوسط برای شار حرارتی و دما به ترتیب $ERR1 = 2.06\,\%$ و $ERR2 = 0.001\,\%$ می باشد.

که تعریف خطای وابسته متوسط برای شار حرارتی و دما بصورت معادلات زیر است:

$$ERR1\% = \left[\sum_{J=1}^{M_1}\left|\frac{q(l,J)-\hat{q}(l,J)}{q(l,J)}\right|\right]\div M_1\times100\% \qquad (۴-۵)$$

$$ERR2\% = \left[\sum_{J=1}^{M_2}\left|\frac{T(0,J)-Y(0,J)}{Y(0,J)}\right|\right]\div M_2\times100\% \qquad (۵-۵)$$

که J اندیس زمان گسسته شده و $\hat{q}(l,J)$ و $T(0,J)$ بیانگر مقادیر تخمین زده شده شار حرارتی و دما می باشند.

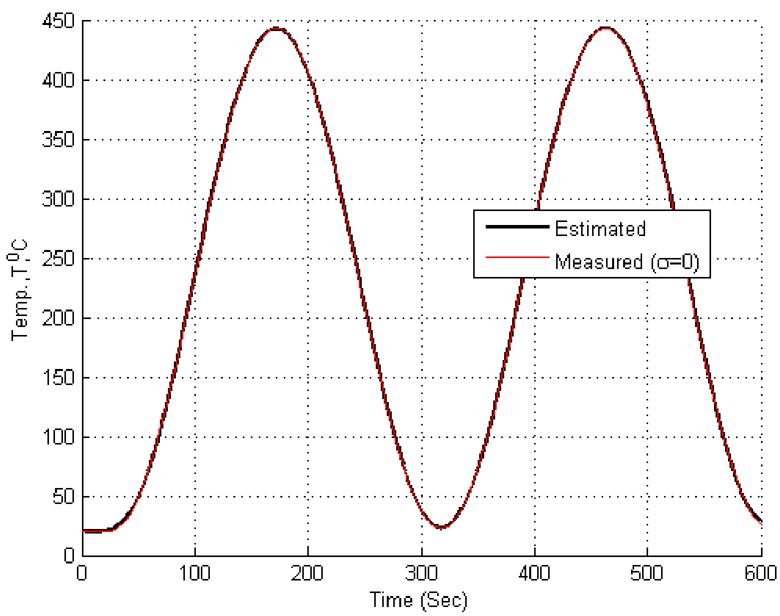
از مقادیر حدود صفر در محاسبه خطای وابسته متوسط جهت جلوگیری از خطای محاسباتی صرف نظر شده است. برای تست ۱ از نتایج تجربی $M_1=265$ و $M_2=275$ در نظر گرفته شده است.

اکنون به بررسی تأثیر خطای اندازه گیری می پردازیم. برای دما ابتدا خطای سنسور را $\sigma=10\,^{o}C$ (در حدود ۴/۵٪ میانگین دمای اندازه‌گیری شده) در نظر گرفته سپس با افزایش آن تا $\sigma=20\,^{o}C$ (حدود

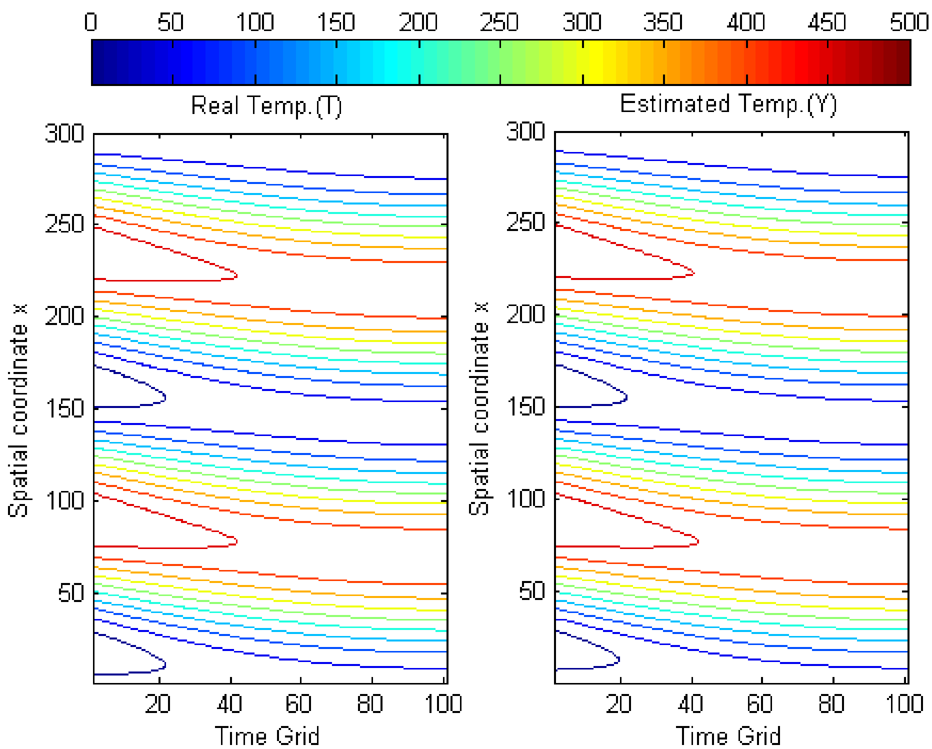
٩٪ میانگین دمای اندازه گیری شده) اثرات خطا را بررسی می کنیم. ε از معادله (۵-۱۶) بدست می آید. پس از ۱۱ تکرار نتایج حاصل برای $q(s_1,t)$ در شکل های ۵-۸ و ۵-۱۲ نمایش داده شده است. خطای میانگین مرتبط در شکل ۵-۵ برابر $ERR1 = 9.96\ \%$ و برای شکل ۵-۹ برابر $ERR1 = 8.29\ \%$ می باشد. توزیع دمای مربوط به حالات $\sigma = ۱۰$ و $\sigma = ۲۰$ به ترتیب در شکل‌های ۵-۵ تا ۵-۷ و ۵-۹ تا ۵-۱۱ نمایش داده شده اند.

لازم به ذکر است با توجه به نرخ زیاد شار و نیز برابر با صفر نبودن زمان آسایش، تمامی مثالهای ذکر شده در محدوده انتقال حرارت غیرفوریه‌ای قرار دارند.

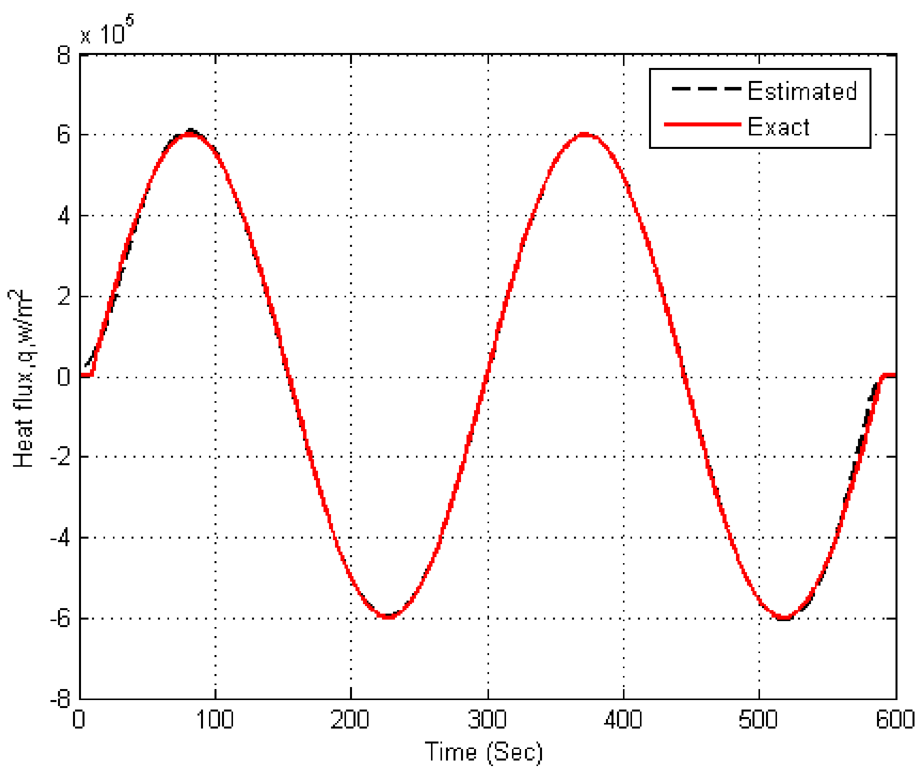
- نتایج نشان دهنده عدم حساسیت الگوریتم به خطاهای اندازه گیری و قابل اعتماد بودن حل معکوس در موارد مربوط به خطاهای اندازه گیری می باشد.



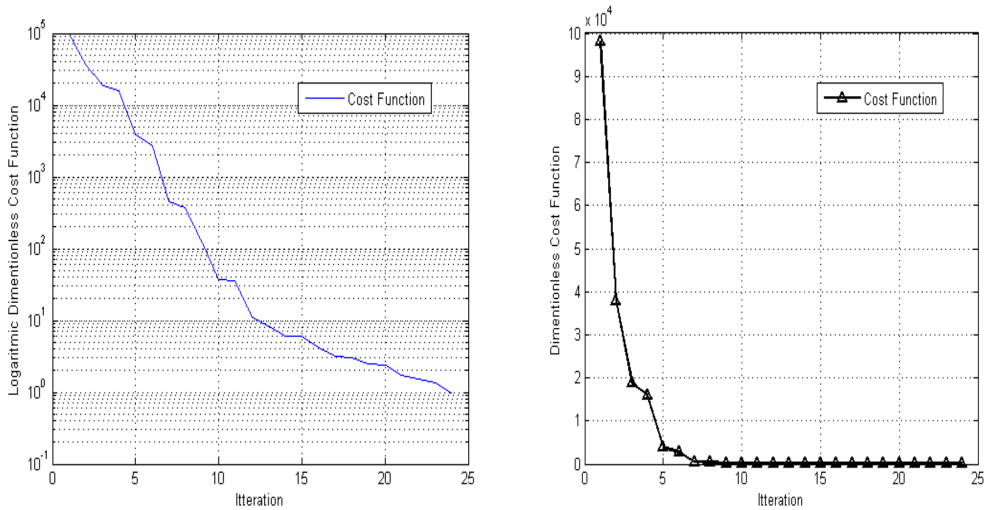
شکل ۵-۱ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۱ ، $\sigma = ۰$



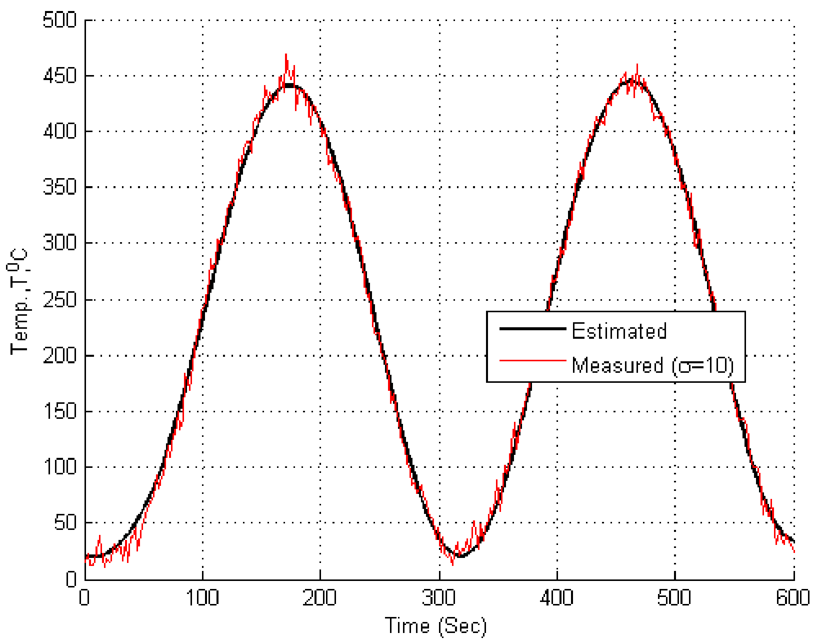
شکل ۵-۲ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۱ ، $\sigma = ۰،۱$



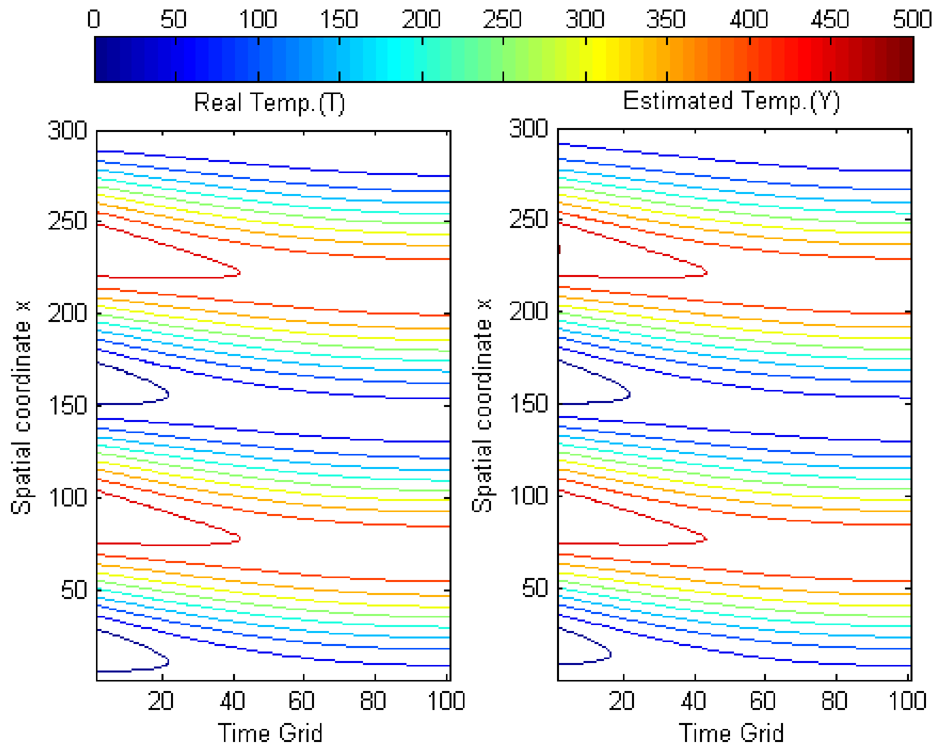
شکل ۵-۳ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۱ ، $\sigma = ۰،۱$



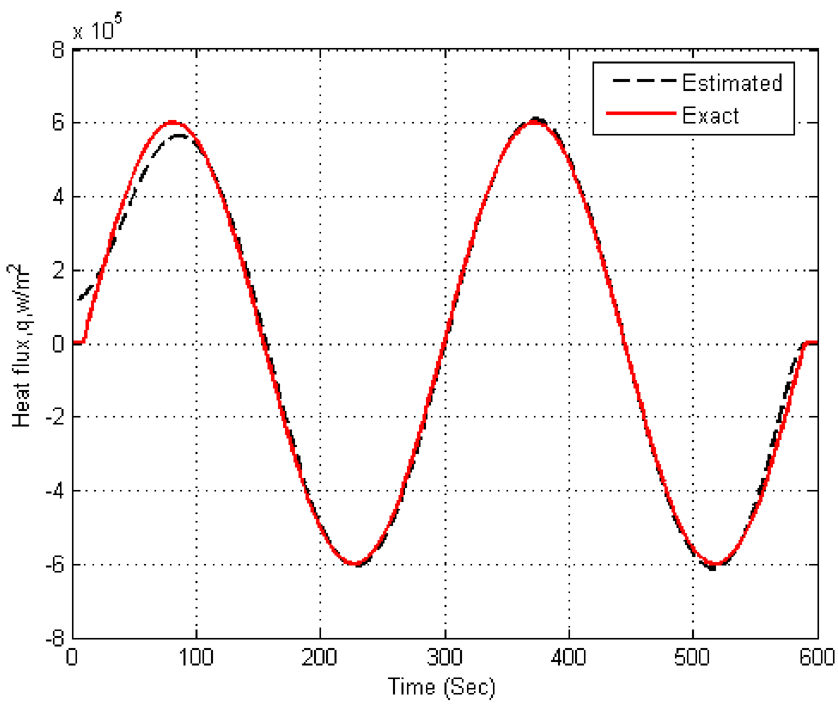
شکل ۵-۴ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۱ ، ۰ = σ ،الف - بی بعد، ب – لگاریتمی



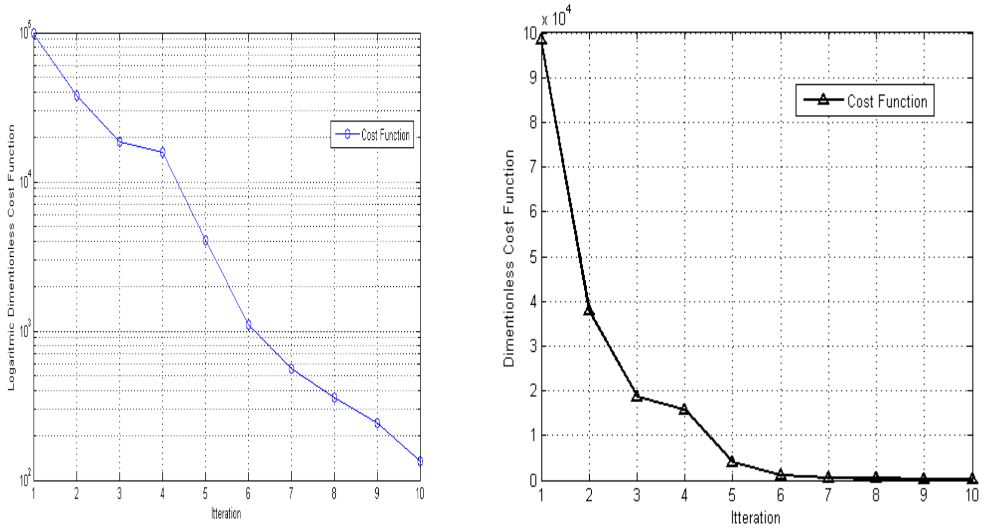
شکل ۵-۵ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۱ ،۱۰ = σ



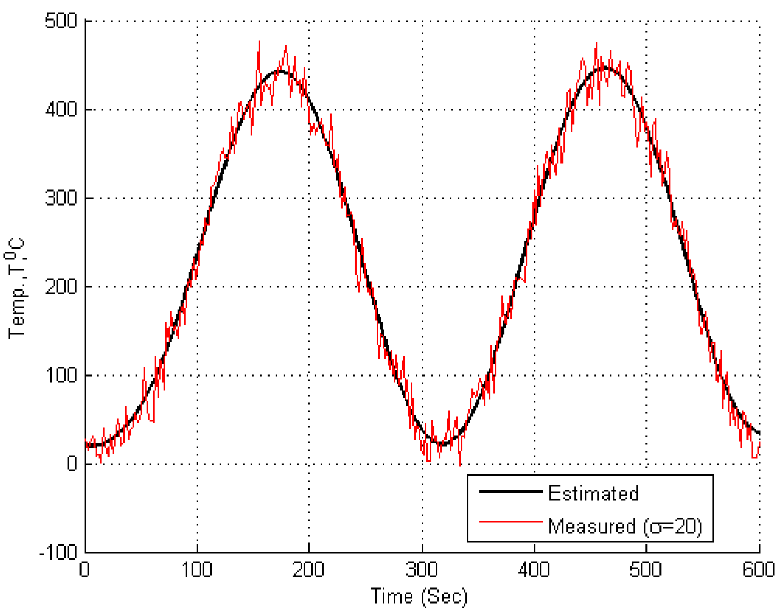
شکل ۵-۶ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۱، σ = ۱۰



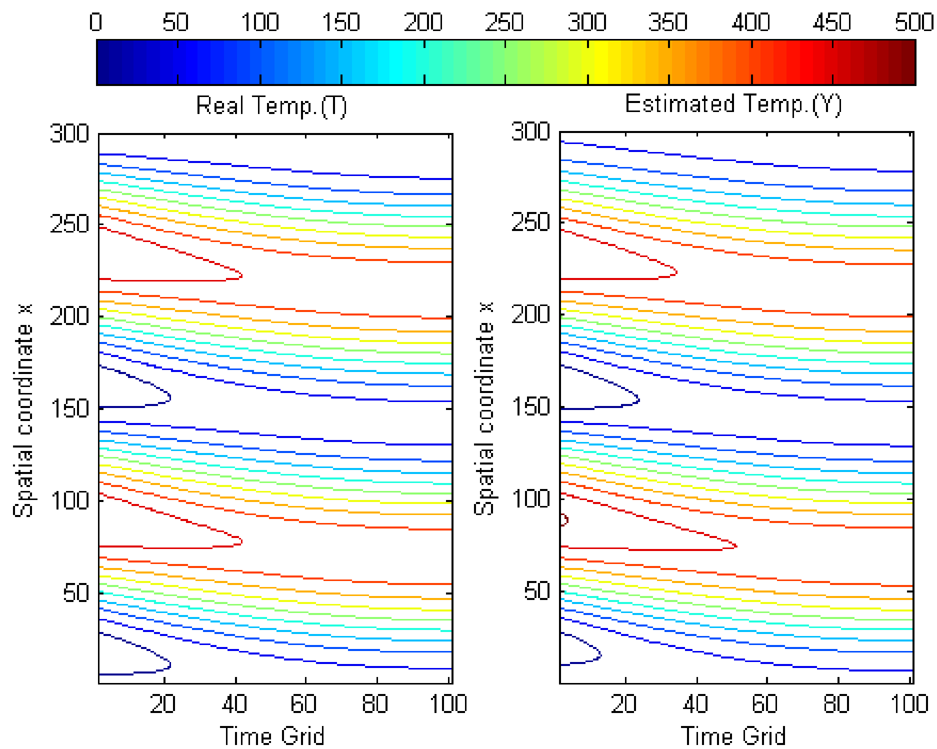
شکل ۵-۷ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۱، σ = ۱۰



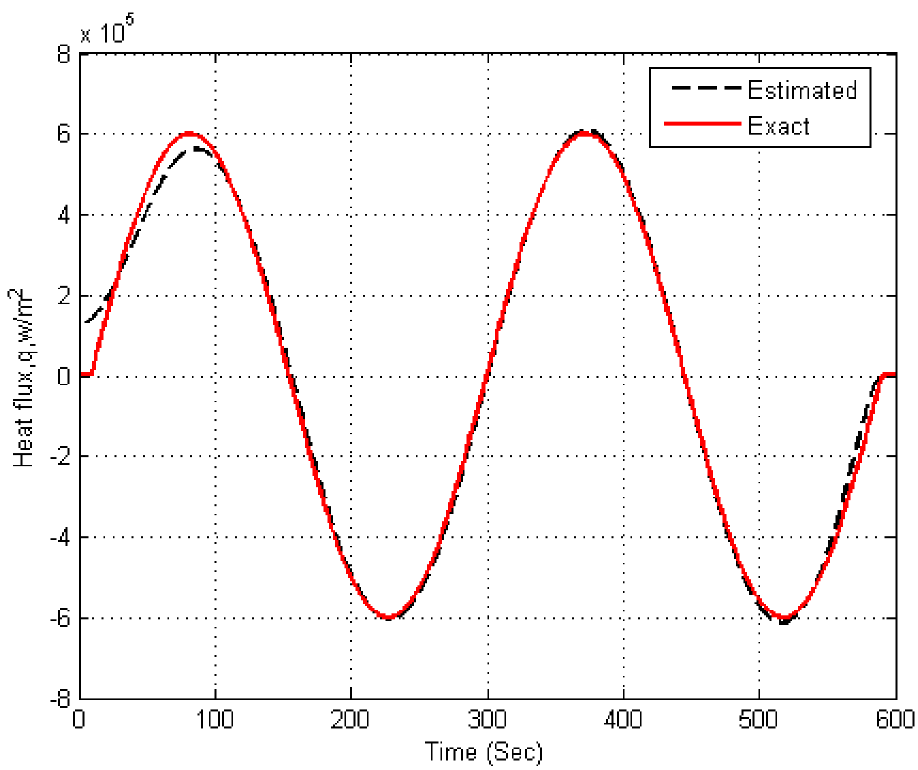
شکل ۵-۸ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۱ ، σ = ۱۰ ، الف - بی بعد، ب - لگاریتمی



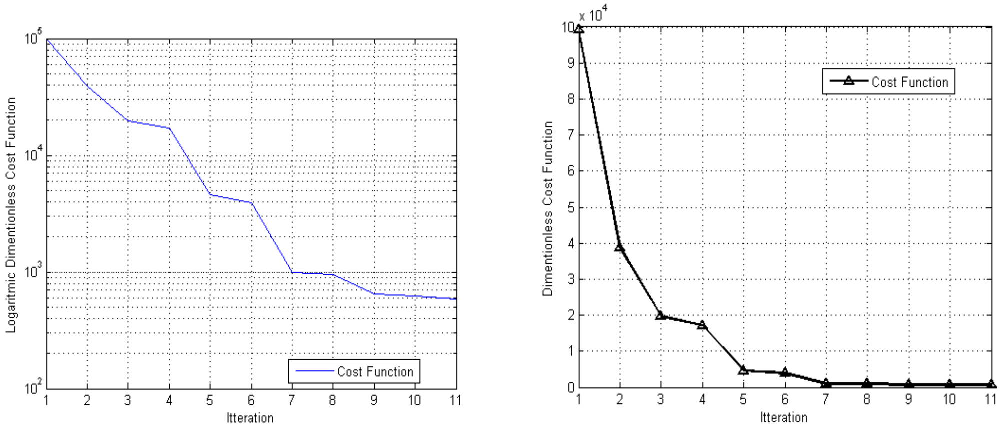
شکل ۵-۹ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۱، σ = ۲۰



شکل ۵-۱۰ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۱ ، ۲۰ = σ



شکل ۵-۱۱ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۱، ۲۰ = σ



شکل ۵-۱۲ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۱ ، ۲۰ = σ ، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی

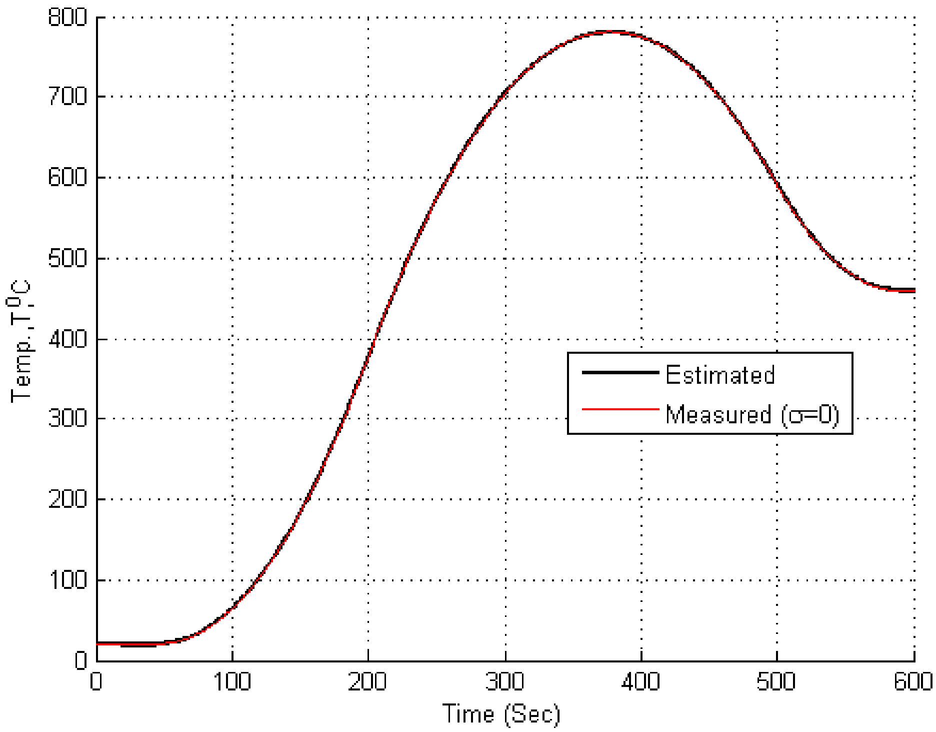
۵-۱-۲ تست عددی ۲

$$q(l,t)=\begin{cases} ۰ & ۰\le t\le ۳۰ \\ \frac{۳\times ۱۰^{۵}}{۷۵}t-\frac{۹۰\times ۱۰^{۵}}{۷۵} & ۳۰<t\le ۱۸۰ \\ -\frac{۵\times ۱۰^{۵}}{۱۵۰}t+\frac{۱۸۰۰\times ۱۰^{۵}}{۱۵۰} & ۱۸۰<t<۴۸۰ \\ \frac{۲\times ۱۰^{۵}}{۴۵}t-\frac{۱۱۴۰\times ۱۰^{۵}}{۴۵} & ۴۸۰<t\le ۵۷۰ \\ ۰ & ۵۷۰<t<۶۰۰ \end{cases} \qquad (۵-۶)$$

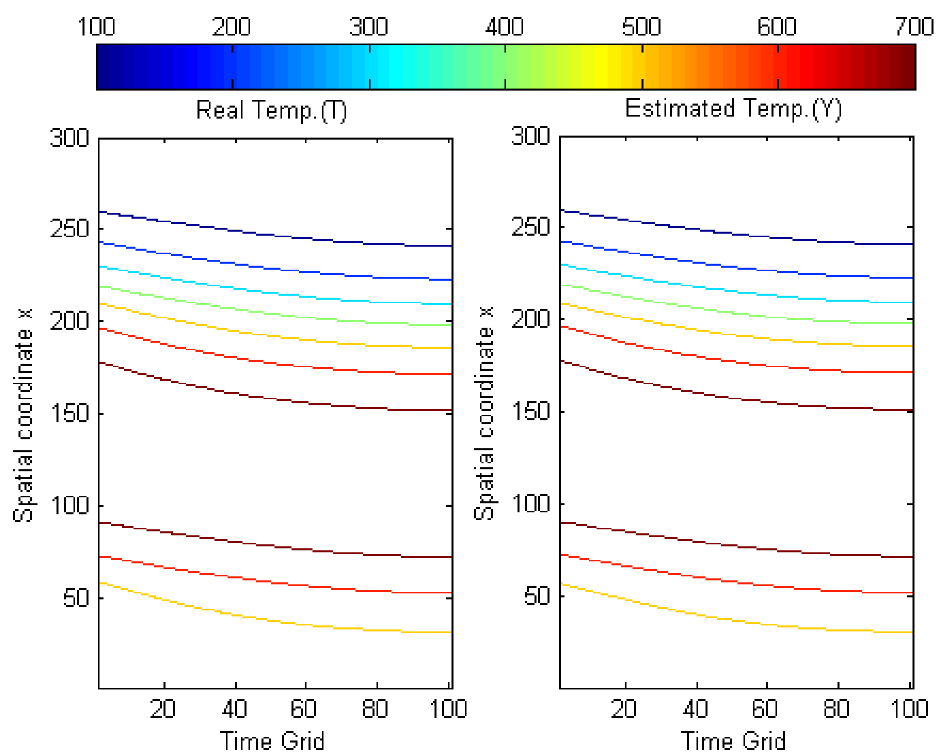
همانند تست ۱، با در نظر گرفتن $\tau=۱$ و $\sigma=0$ آنالیز را شروع می کنیم، محدوده توقف بی بعد $\varepsilon=0.75$ در نظر گرفته می شود. پس از ۲۷ تکرار $q(l,t)$ تخمینی بصورت شکل ۵-۱۵ بدست می آید. دمای دقیق و تخمینی در شکل ۵-۱۳ نمایش داده شده است. برای این حالت ERR۱ = ۱.۴۶ % و ERR۲ = ۰.۰۰۵۳ % بدست می آید. $M_۱$ و $M_۲$ به ترتیب برابر ۲۷۵ و ۲۹۰ در نظر گرفته شده است.

شکل های ۵-۱۹ و ۵-۲۳ ، نتایج شار تخمینی با در نظر گرفتن خطای $\sigma=10^{\circ C}$ و $\sigma=20^{\circ C}$ به ترتیب پس از ۱۲ و ۱۱ تکرار را نمایش می دهند خطای میانگین وابسته به ترتیب ERR۱ = ۸.۴۵٪ و ERR۱ = ۹.۳۴ % می باشد.

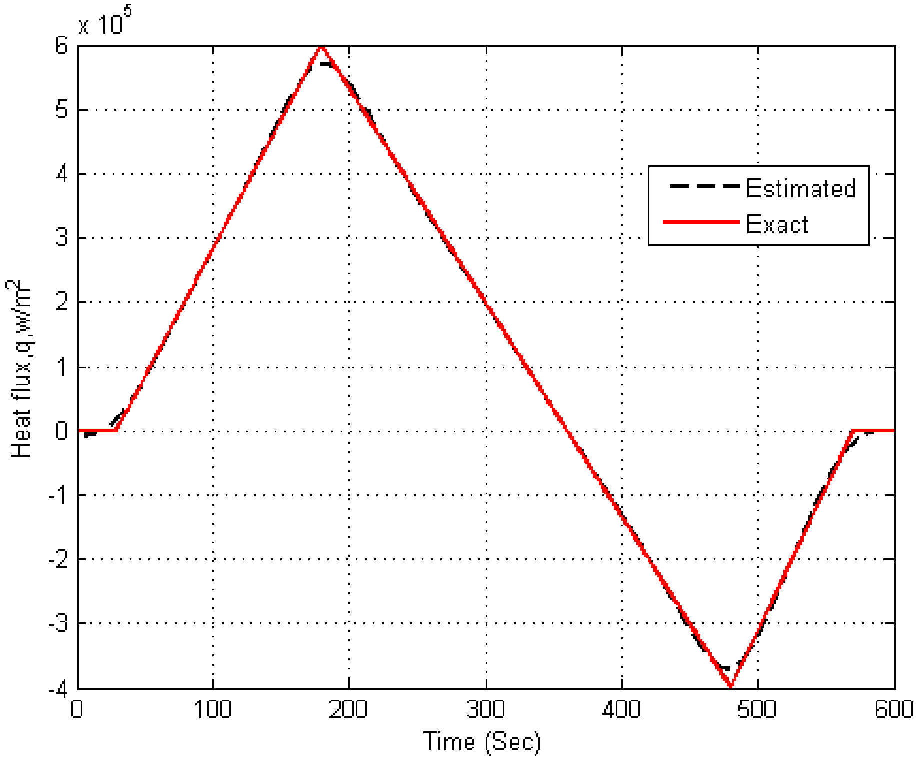
توزیع دما نیز برای حالات فوق الذکر به ترتیب در شکل های ۵-۱۷ و ۵-۲۱ آمده است.



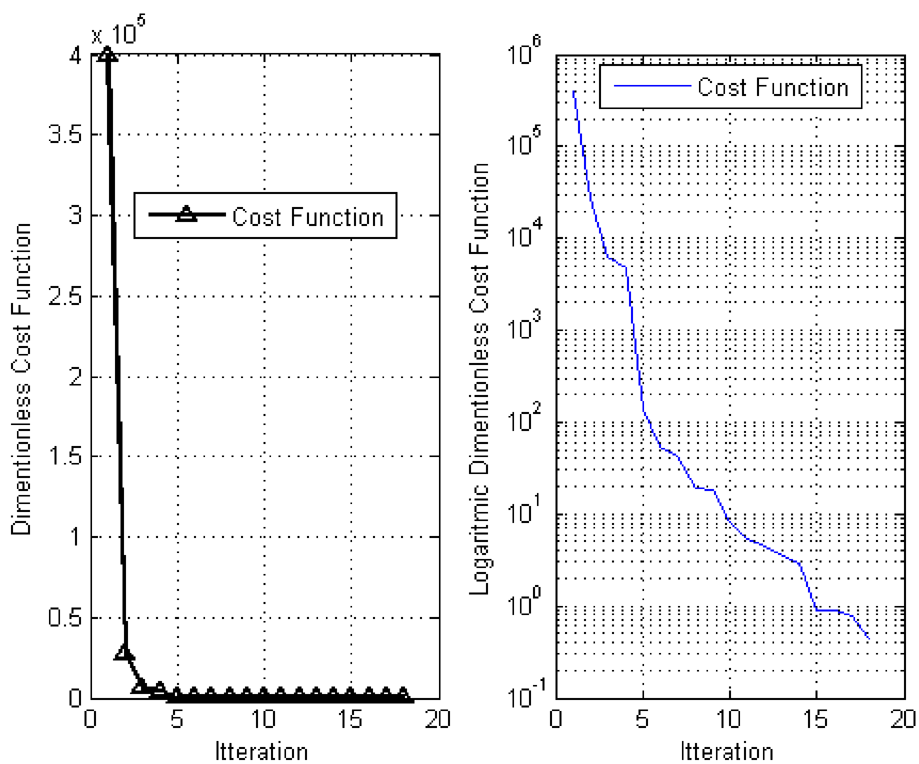
شکل ۵-۱۳ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۲ ، ۰ = σ



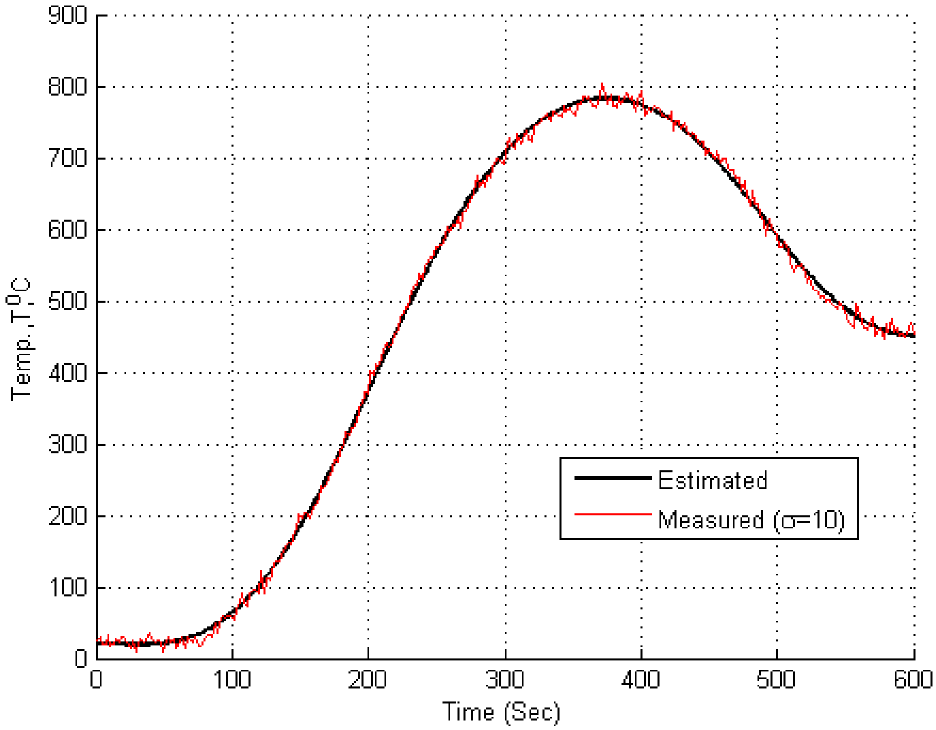
شکل ۵-۱۴ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۲ ، ۰ = σ



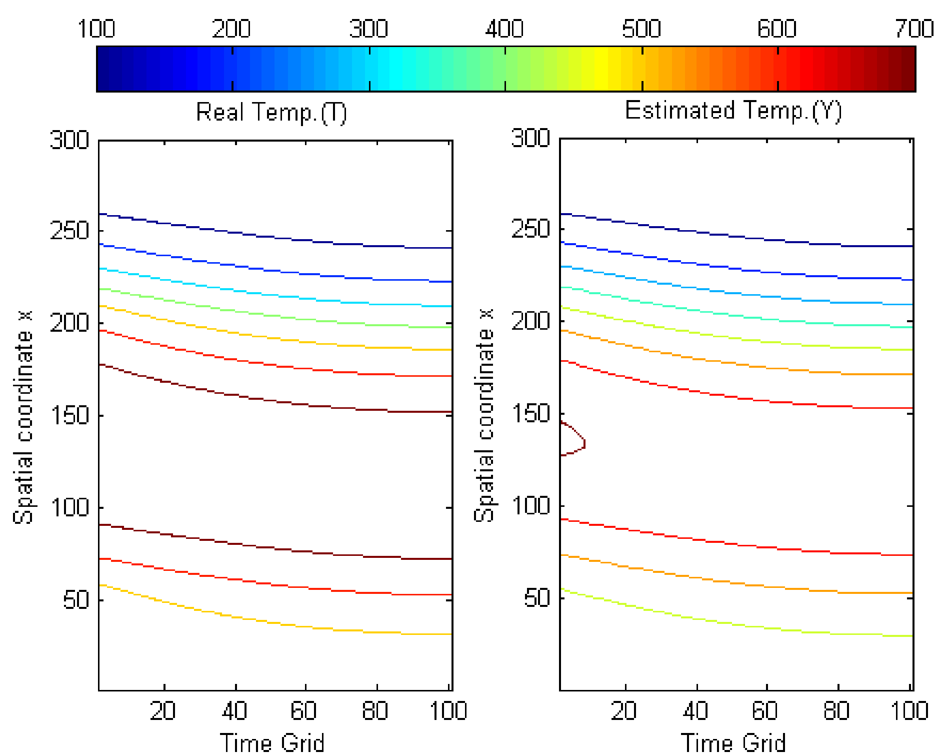
شکل ۵-۱۵ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۲، σ = ۰



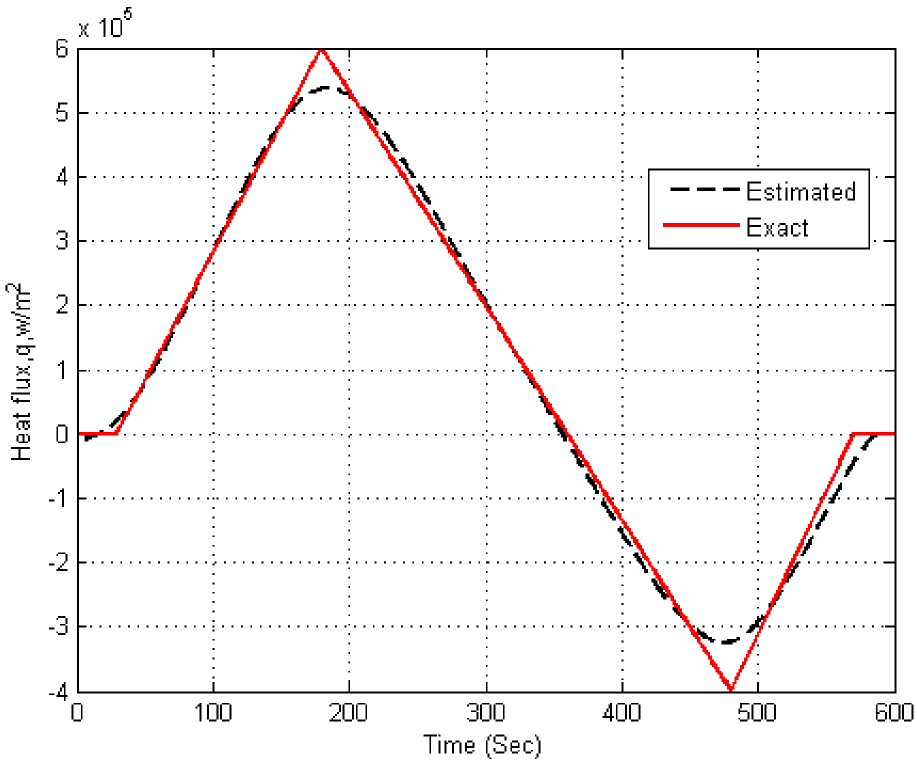
شکل ۵-۱۶ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۲ ، σ = ۰ ، الف - بی بعد، ب - لگاریتمی



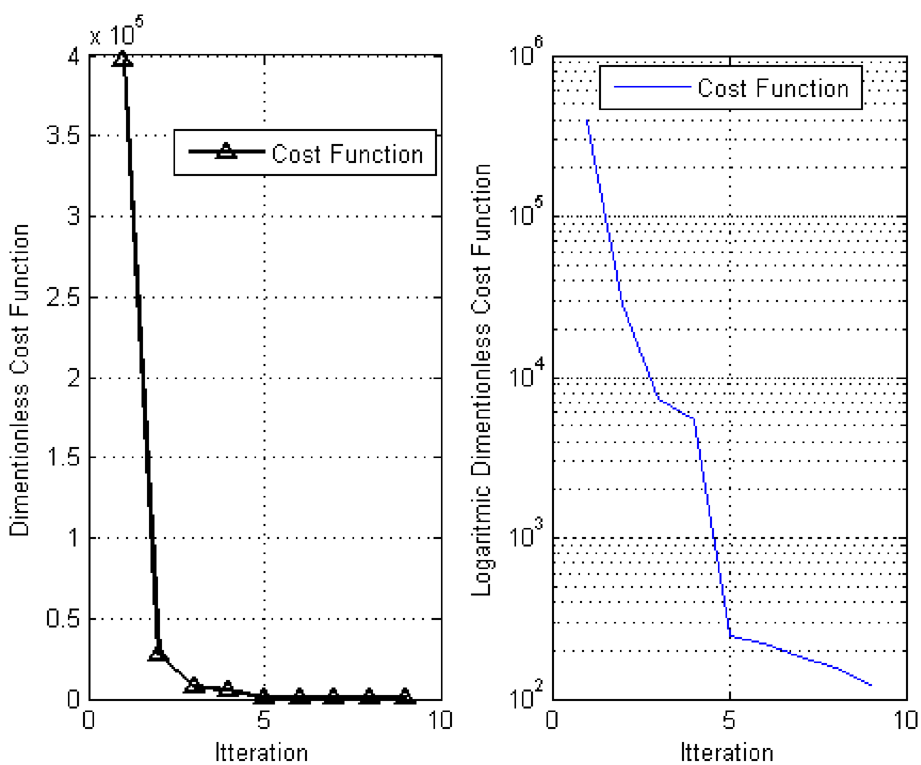
شکل ۵-۱۷ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۲ ،۱۰ = σ



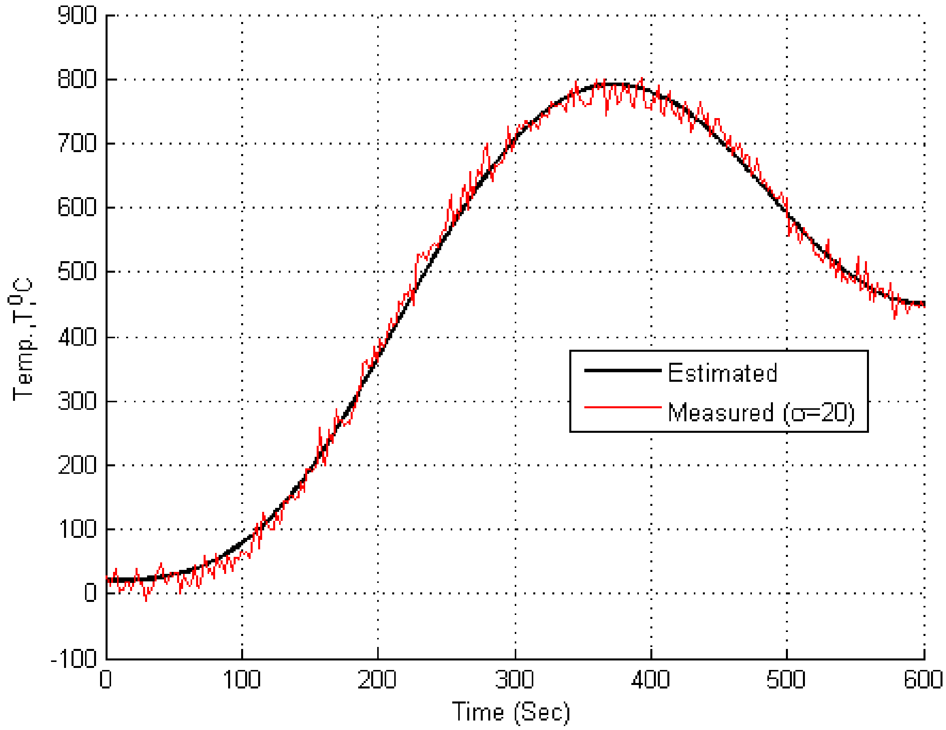
شکل ۵-۱۸ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۲ ، ۱۰ = σ



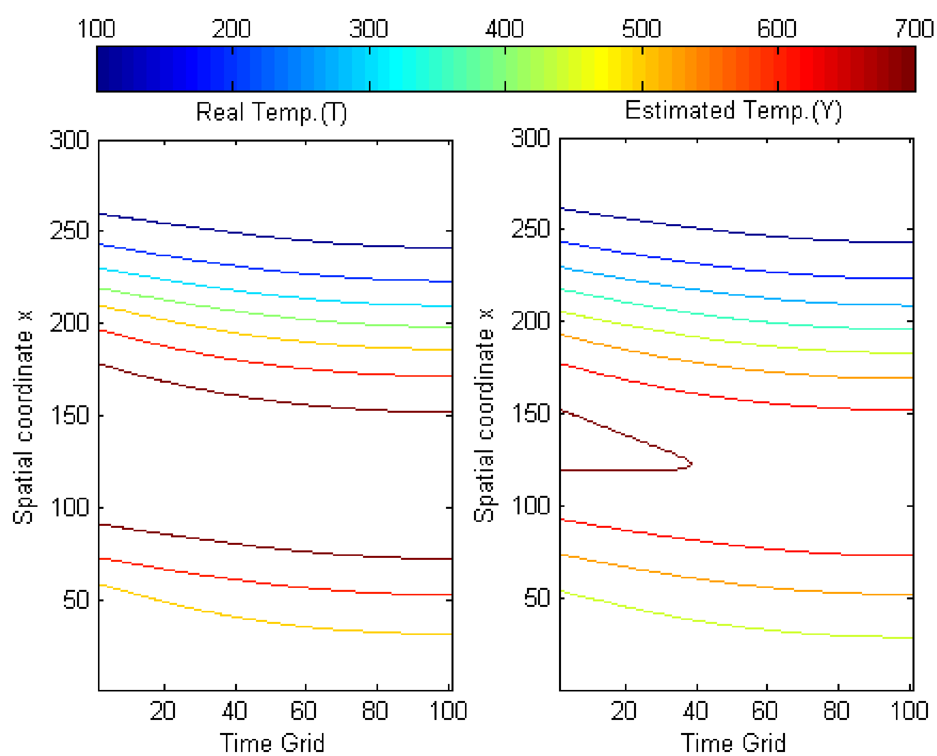
شکل ۵-۱۹ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۲، ۱۰ = σ



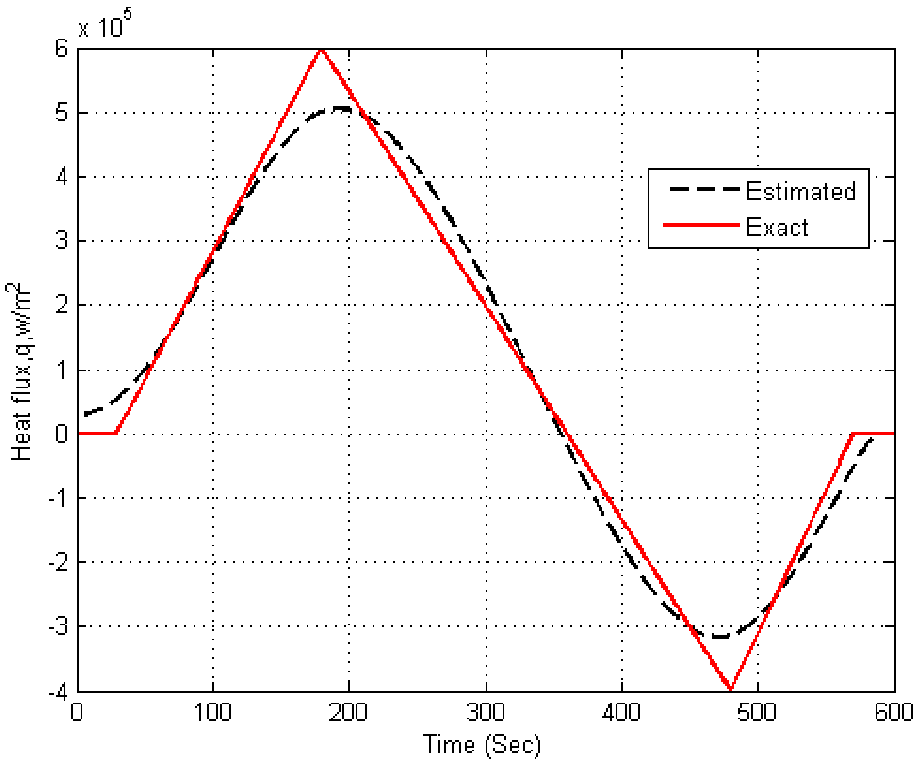
شکل ۵-۲۰ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۲ ، ۱۰ = σ ، الف - بی بعد، ب - لگاریتمی



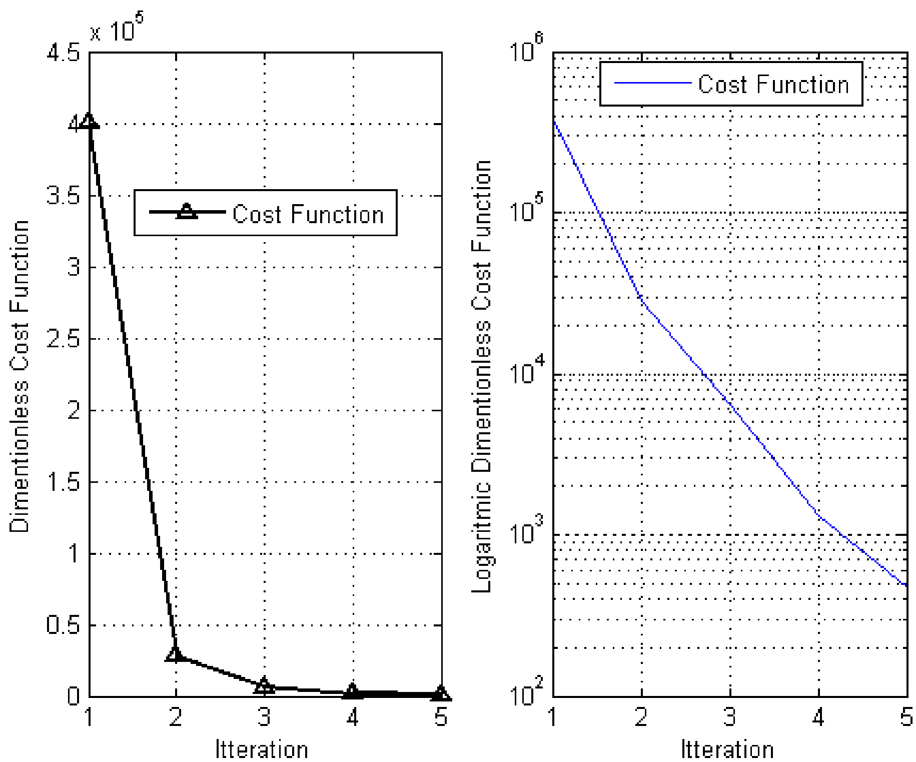
شکل ۵-۲۱ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۲ ، ۲۰ = σ



شکل ۵-۲۲ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۲ ، ۲۰ = σ



شکل ۵-۲۳ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۲، σ = ۲۰



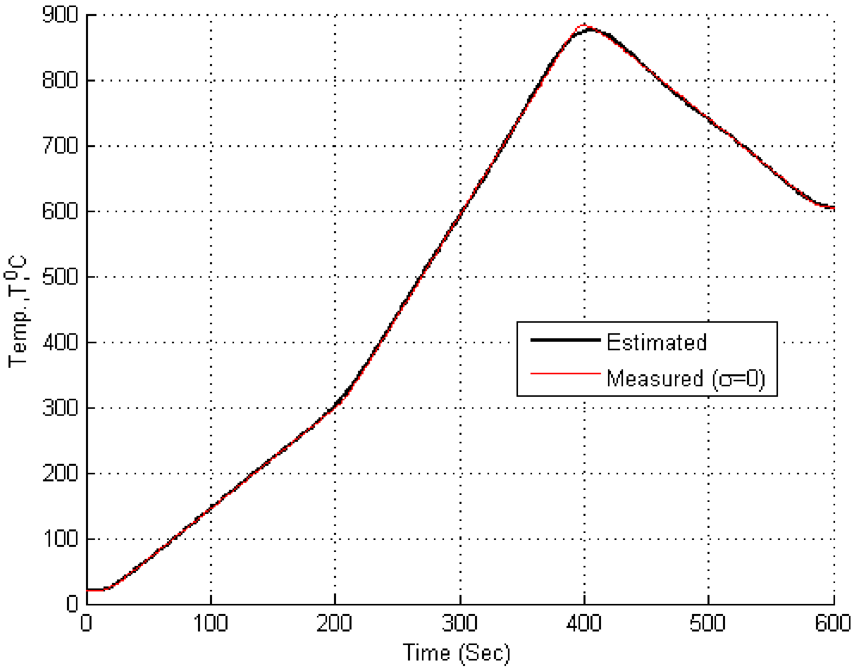
شکل ۵-۲۴ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۲ ، σ = ۲۰ ، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی

۵-۱-۳ تست عددی ۳

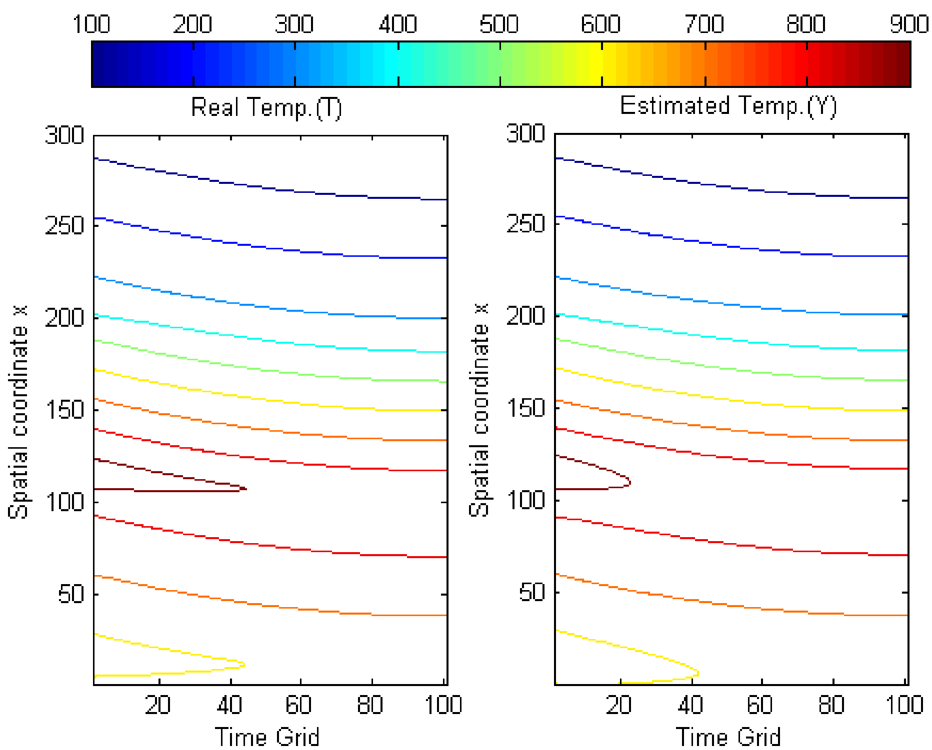
$$q(l,t)=\begin{cases} ۲\times ۱۰^{۵} & ۰\le t\le ۱۹۰ \\ ۴\times ۱۰^{۵} & ۱۹۰< t\le ۳۸۰ \\ -۲\times ۱۰^{۵} & ۳۸۰< t\le ۵۷۰ \\ ۰ & ۵۷۰< t\le ۶۰۰ \end{cases} \qquad (۷\text{-}۵)$$

مانند دو مثال قبل آنالیز را با $\tau=1$ و $\sigma=0$ وشرط توقف بی بعد ۱۲.۵ = ε شروع می کنیم. نتیجه حاصل از ۱۴ تکرار در شکل ۵-۲۷ آمده است. از شکل مشخص است که بجز در نقاط تیز ناپیوستگی تخمین به خوبی بدست آمده است. دمای دقیق و تخمینی در $x=0$ در شکل ۵-۲۵ نمایش داده شده است. با در نظر گرفتن $M_۱$ = ۲۸۵ و $M_۲$ = ۲۹۰ و ERR۱ = ۹.۴۴ % و ERR۲ = ۰.۰۰۱ % برای این حالت محاسبه می گردد.

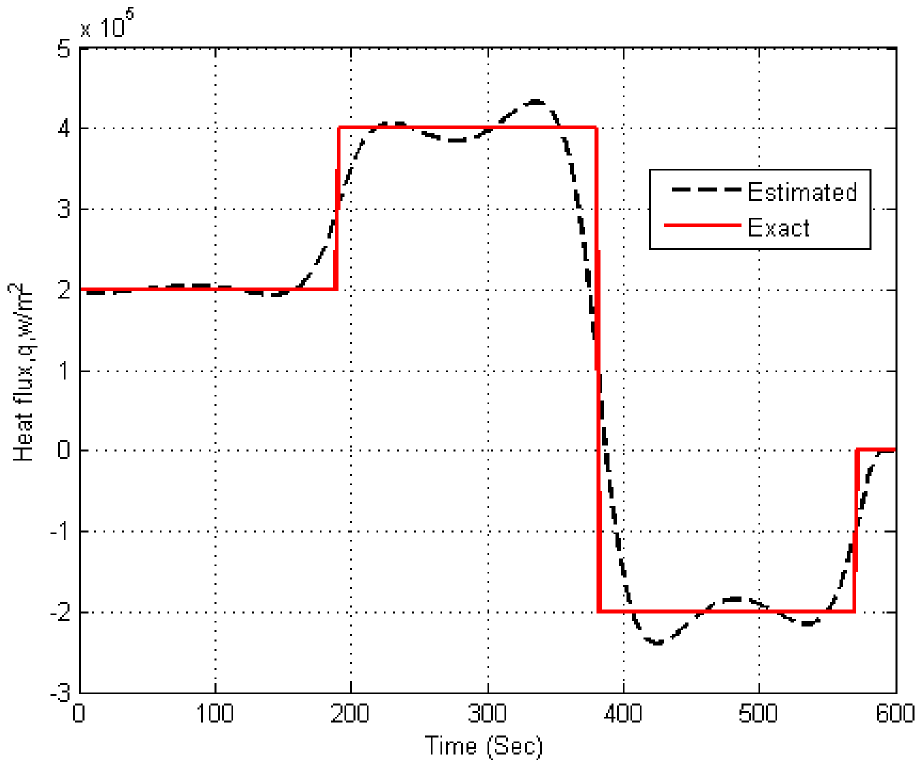
نتایج برای حالات $\sigma=10$ و $\sigma=20$ به ترتیب در شکل های ۵-۳۱ و ۵-۳۵ نمایش داده شده اند. پس از به ترتیب ۱۱ و ۸ تکرار خطای میانگین وابسته شار گرمایی به صورت ERR۱ = ۱۳.۶۰ % و ERR۱ = ۱۷.۹۰ % خواهد بود. توزیع دمای مربوطه نیز به ترتیب در شکل های ۵-۲۹ و ۵-۳۳ بیان شده است.



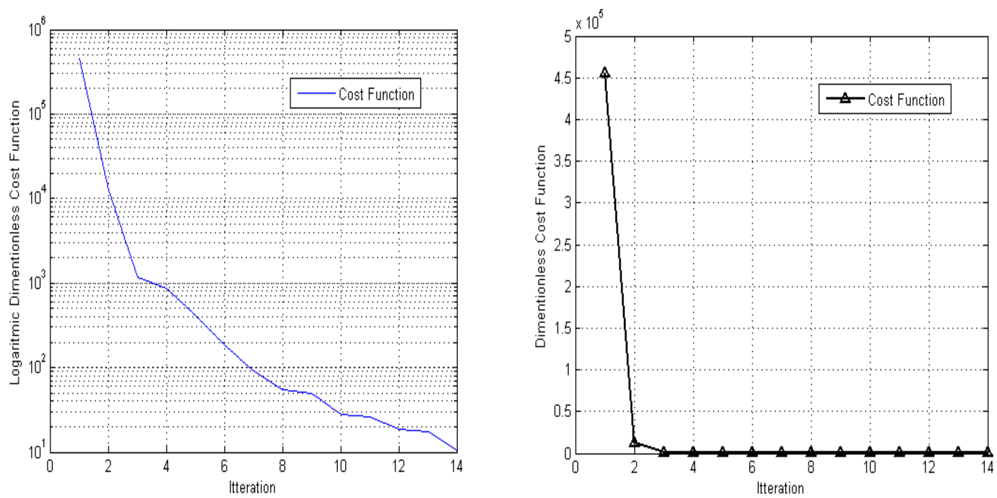
شکل ۵-۲۵ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۳، $\sigma = 0$



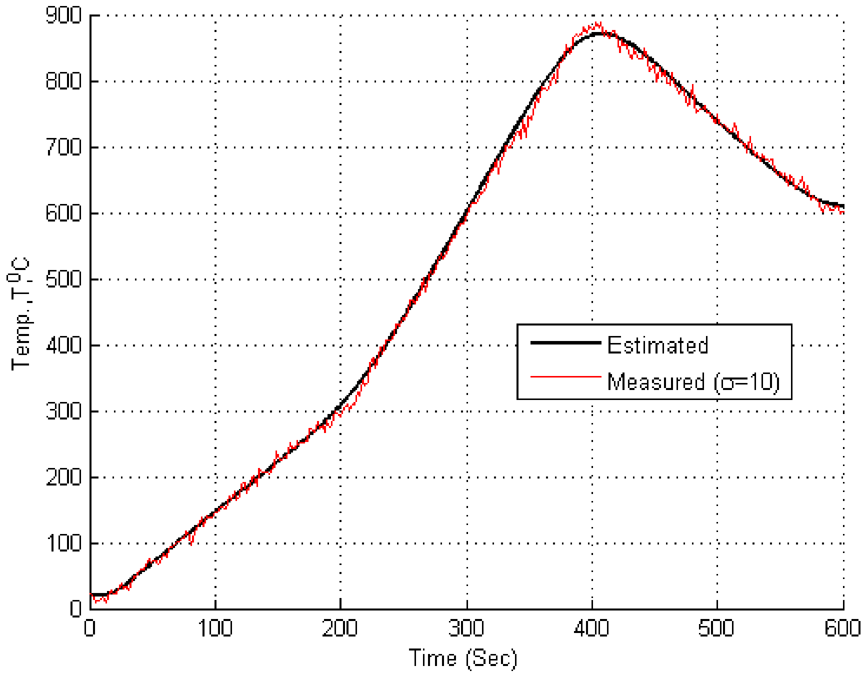
شکل ۵-۲۶ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۳ ، $\sigma = 0$



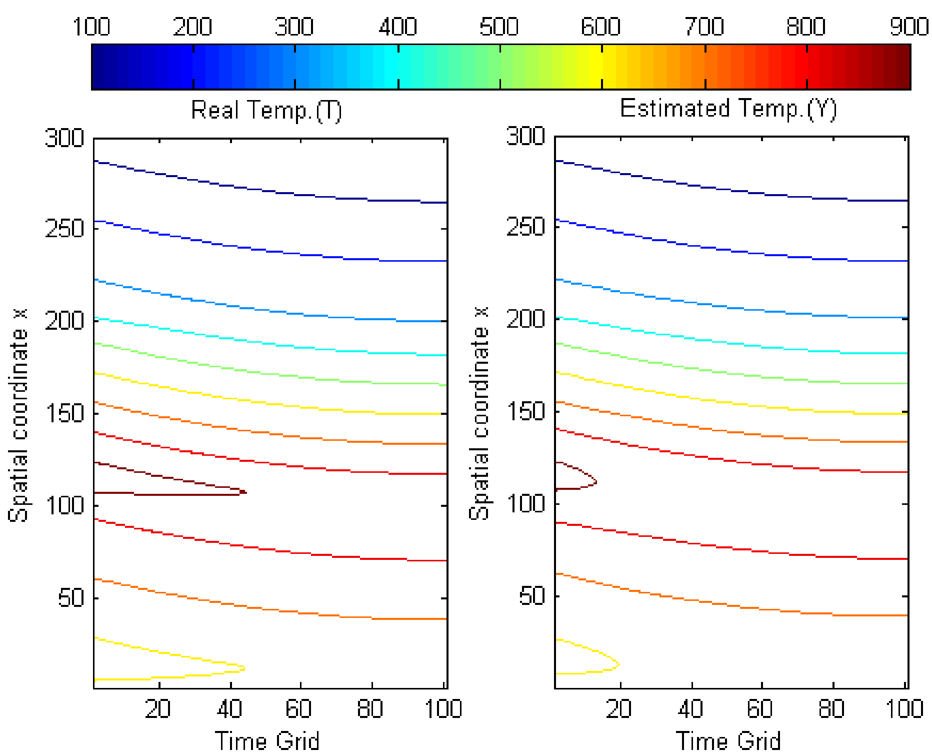
شکل ۵-۲۷ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۳ ، $\sigma = ۰$



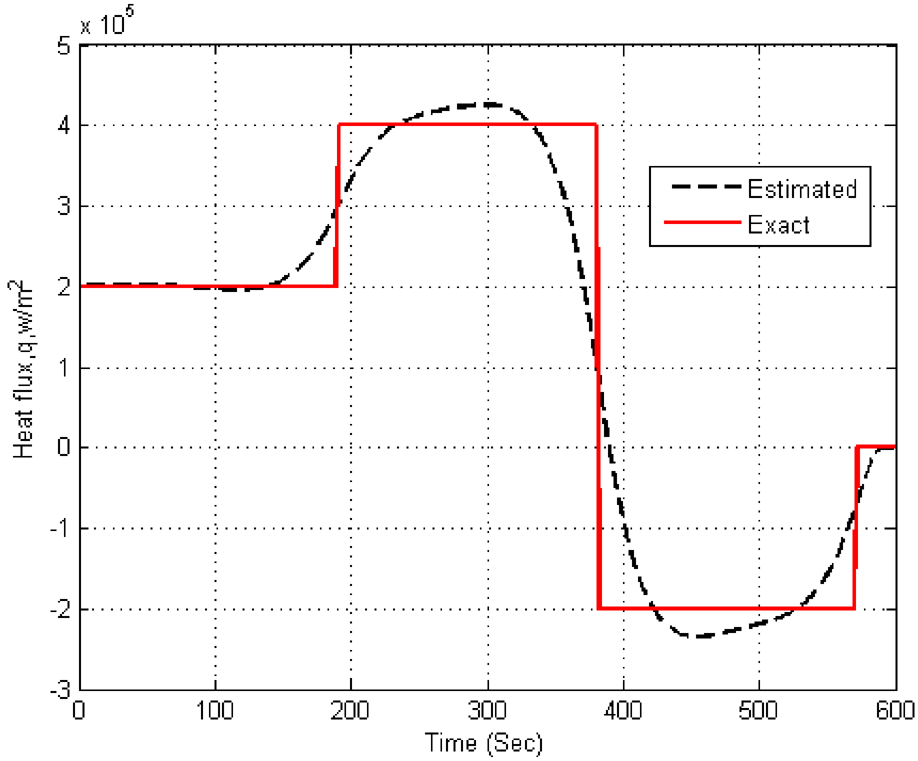
شکل ۵-۲۸ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۳ ، $\sigma = ۰$ ، الف - بی بعد، ب - لگاریتمی



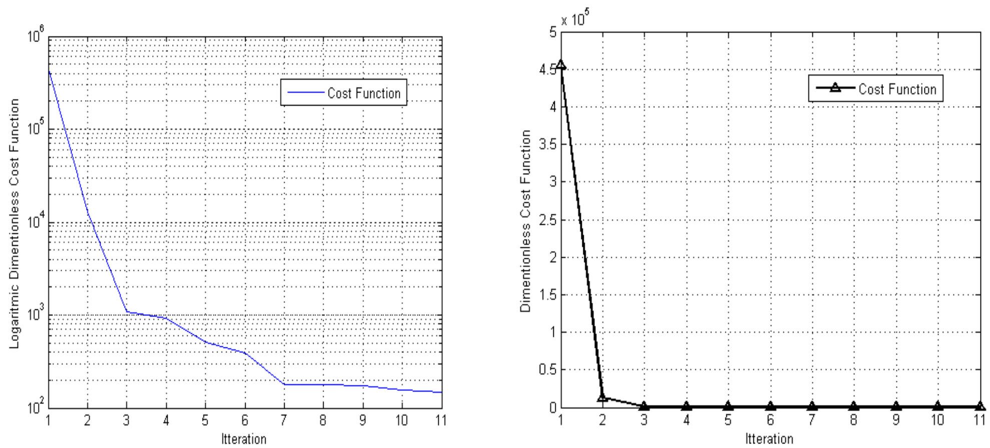
شکل ۵-۲۹ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۳ ،۱۰ = σ



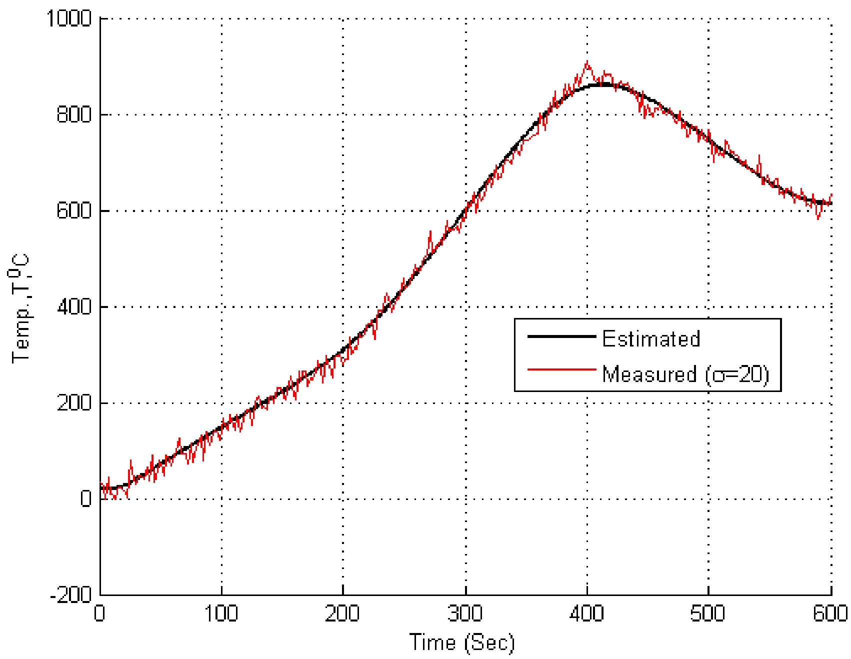
شکل ۵-۳۰ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۳ ،۱۰ = σ



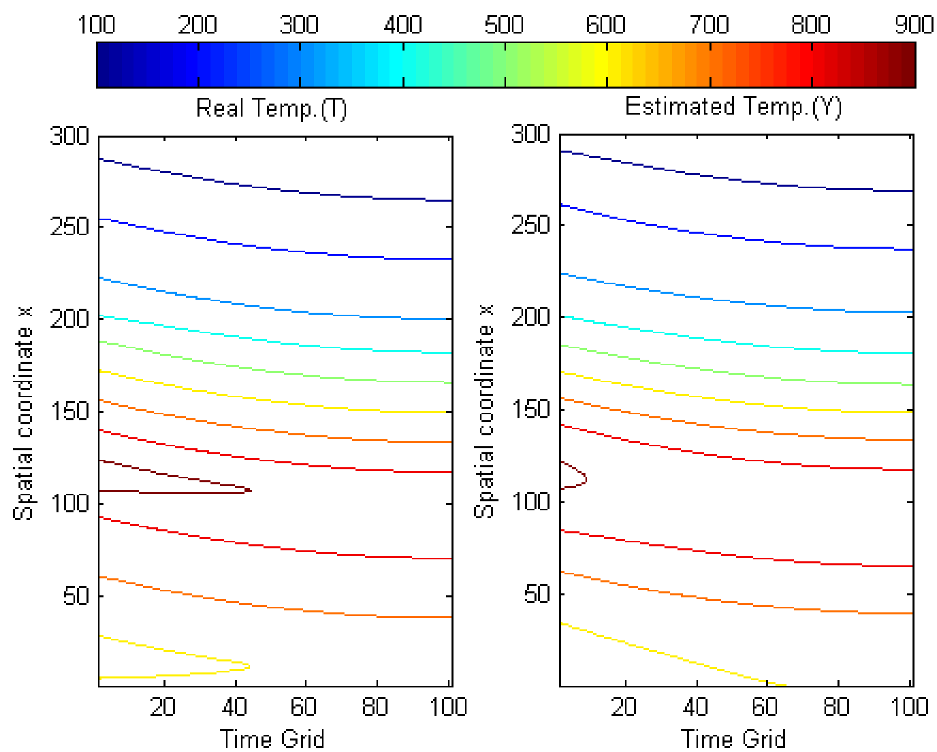
شکل ۵-۳۱ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۳، σ = ۱۰



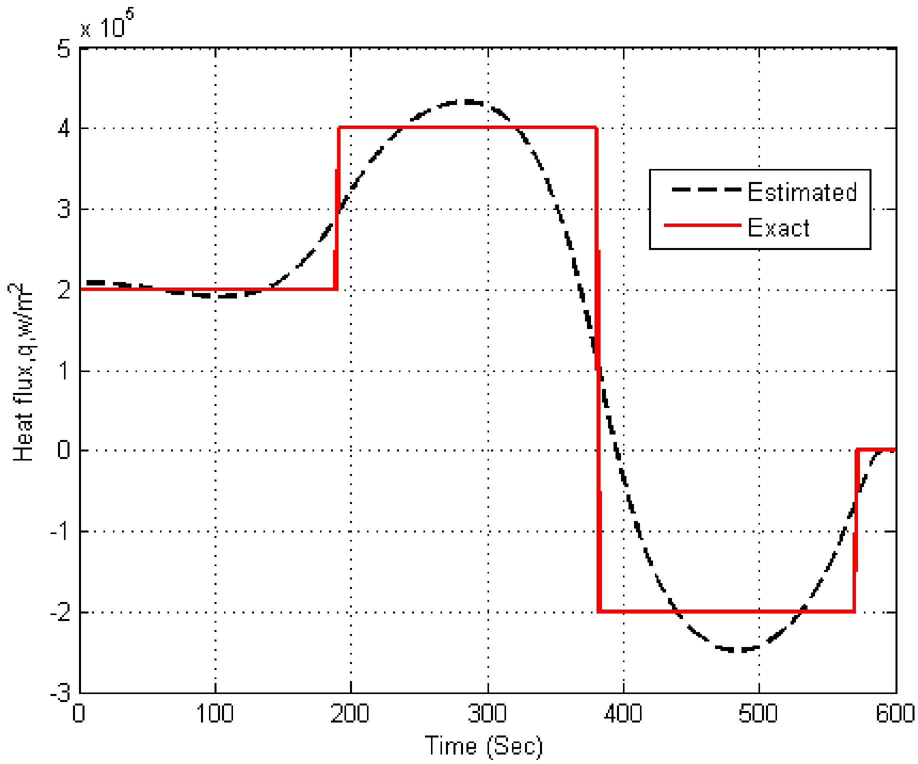
شکل ۵-۳۲ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۳ ، σ = ۱۰ ، الف - بی بعد، ب - لگاریتمی



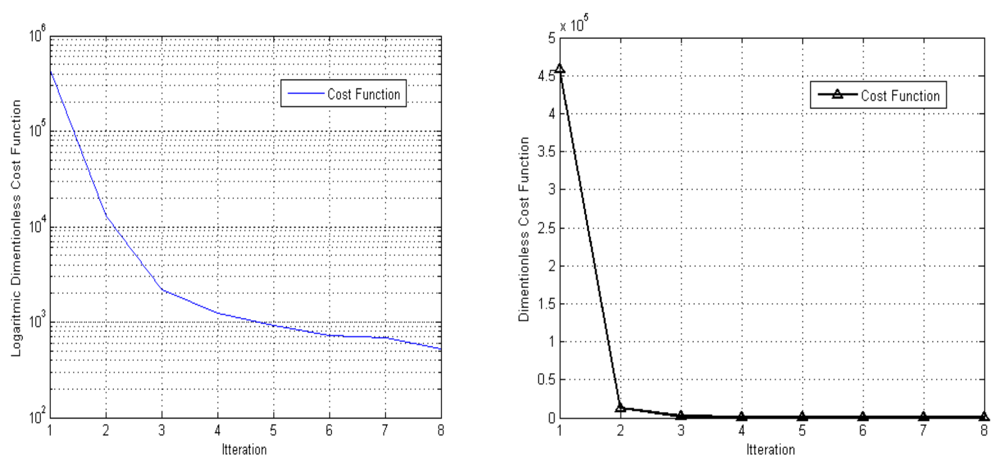
شکل ۵-۳۳ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، تست مثال ۳ ، ۲۰ = σ



شکل ۵-۳۴ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۳ ، σ=۲۰



شکل ۵-۳۵ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، تست مثال ۳، ۲۰ = σ



شکل۵-۳۶ – منحنی تغییرات تابع هدف ، تست مثال ۳ ، ۲۰ = σ ، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی

جدول ۵-۱ اطلاعات کلی مثال های عددی تست شده

	Sigma	تکرار	Epsilon	تابع هدف	٪ خطا تابع شار	٪ خطا تابع دما	M۱	M۲
آزمایش ۱	۰	۲۴	۴۰۰	۰,۹۶۱۶	۲,۰۷	۰,۰۰۱۱	۲۶۵	۲۷۵
	۱۰	۱۱	۶۰۰۰۰	۱۳۲,۲۲۹۳	۹,۹۶	۰,۰۰۸۶		
	۲۰	۹	۲۴۰۰۰۰	۵۴۲,۸۹۸۱	۸,۳۰	۰,۰۲۵۵		
آزمایش ۲	۰	۲۷	۳۰۰	۰,۴۷۱۷	۱,۴۷	۰,۰۰۵۳	۲۷۵	۲۹۰
	۱۰	۱۲	۶۰۰۰۰	۱۴۹,۳۳۷۱	۸,۴۶	۰,۰۴۱۲		
	۲۰	۱۱	۲۴۰۰۰۰	۵۶۹,۰۳۷۶	۹,۳۴	۰,۰۹۳۹		
آزمایش ۳	۰	۱۴	۵۰۰۰	۱۰,۳۴۵۴	۹,۴۴	۰,۰۰۱۰	۲۹۰	۲۸۵
	۱۰	۱۱	۶۰۰۰۰	۱۴۷,۴۴۲۲	۱۳,۶۰	۰,۰۱۴۲		
	۲۰	۸	۲۴۰۰۰۰	۵۲۷,۳۸۹۲	۱۷,۹۰	۰,۰۰۱۵		

بحث:

- با افزایش نویز از تعداد تکرارها و نیز دقت محاسبات کاسته شده است. به عبارت دیگر، با افزایش نویز و کاهش دقت تابع دما، افزایش خطا جهت تخمین شار حرارتی مشاهده می‌گردد. به نظر میرسد می‌توان با انتخاب شرط توقف کوچکتر تا اندازه ای بر دقت محاسبات افزود.
- همچنین در نمودارها در نقاط با شکستگی و شیب بالا، پایین بودن دقت تابع تخمینی مشخص است. در این نقاط تابع تخمینی بصورت منحنی هموار و بدون تغییرات شیب ناگهانی و شکستگی های شدید تخمین زده شده است. به عبارت بهتر به نظر میرسد مهمترین مشکل کد عدم توانایی تخمین دقیق تابع در نقاط شکستگی باشد.

۵-۲ کنترل دما

پس از آنکه در قسمت قبل از صحت محاسبات و نتایج کد نوشته شده اطمینان حاصل گردید، در این قسمت از تابع‌های دمایی مختلف در سطح به عنوان منبع ورودی داده برای کد استفاده گردیده است. هدف از این بخش بررسی کنترل دمای سطح و تخمین شار حرارتی مربوطه می‌باشد. همانند بالا مقادیر زیر جهت مسائل در نظر گرفته شده اند:

$T_{\cdot} = ۲۰^{\circ C} ; l = ۰/۰۳۵m ; k = ۵۰ wm^{-۲} \; ; \; \alpha = k / \rho c = ۰/۰۰۰۰۱۳۲۷ \; m^{۲}s^{-۱}$

α ضریب پخش گرمایی ماده می باشد. همچنین پس از بررسی شرط استقلال از گره شبکه ۱۰۰ در۳۰۰ (به عبارت دیگر $\Delta x = ۰/۰۰۰۳۵$ و $\Delta t = ۲$) در نظر گرفته شد. شرط توقف در این بخش بصورت $\varepsilon = ۱۰^{-۵}$ در نظر گرفته شده است. جهت شبیه‌سازی خطاهای سنسور از روش اضافه کردن اعداد رندوم که در بالا توضیح داده شد استفاده شده است. در ادامه نتایج حاصل از بررسی معکوس ۴ تابع دمایی متفاوت دمایی و نتایج تخمینی حاصل نشان داده شده است. جهت بررسی در مثال اول ابتدا از یک تابع سینوسی، سپس یک تابع خطی، در مثال سوم ترکیبی از دو حالت اول و دوم و در مثال چهارم تابع خطی با شکستگی شدید دمایی درنظر گرفته شد. تنها نکته‌ای که در لحاظ کردن توابع مد نظر قرار گرفت، پیوستگی دما در نقاط تغییر فرم تابع جهت جلوگیری از هرگونه واگرایی کد می‌باشد.

توابع دمایی استفاده شده در تست‌های آزمایشی زیر به ترتیب عبارتند از:

$$\text{Test ۱} \quad \begin{cases} Y=20 & 0 \le t<5 \\ Y=20+\sin(2\pi(t-5)/295) & 5 \le t \le 300 \end{cases} \tag{۶-۵}$$

$$\text{Test ۲} \quad \begin{cases} Y=20 & 0 \le t<50 \\ Y=0.04t+18 & 50 \le t \le 300 \end{cases} \tag{۷-۵}$$

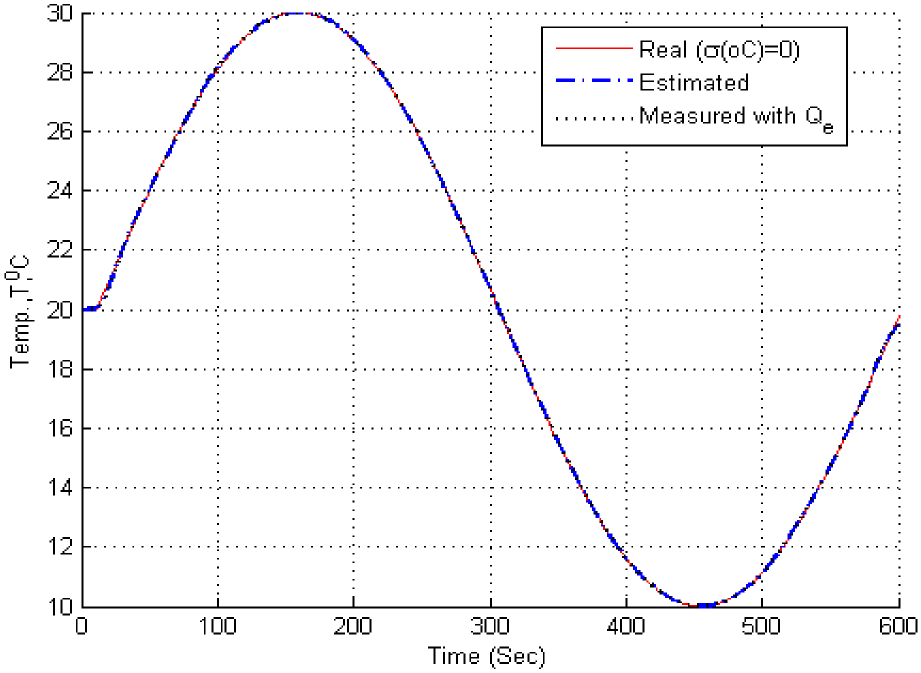
$$\text{Test ۳} \quad \begin{cases} Y=20 & 0 \le t<5 \\ Y=20+10\sin(\pi(t-5)/145) & 5 \le t \le 150 \\ Y= -0.025t+23.75 & 150<t \le 300) \end{cases} \tag{۸-۵}$$

$$\text{Test ۴} \quad \begin{cases} Y=20 & 0 \le t<50 \\ Y=0.4t & 50 \le t \le 100 \\ Y= -0.2t+60 & 100 \le t \le 250 \\ Y=10 & 250<t<300) \end{cases} \tag{۹-۵}$$

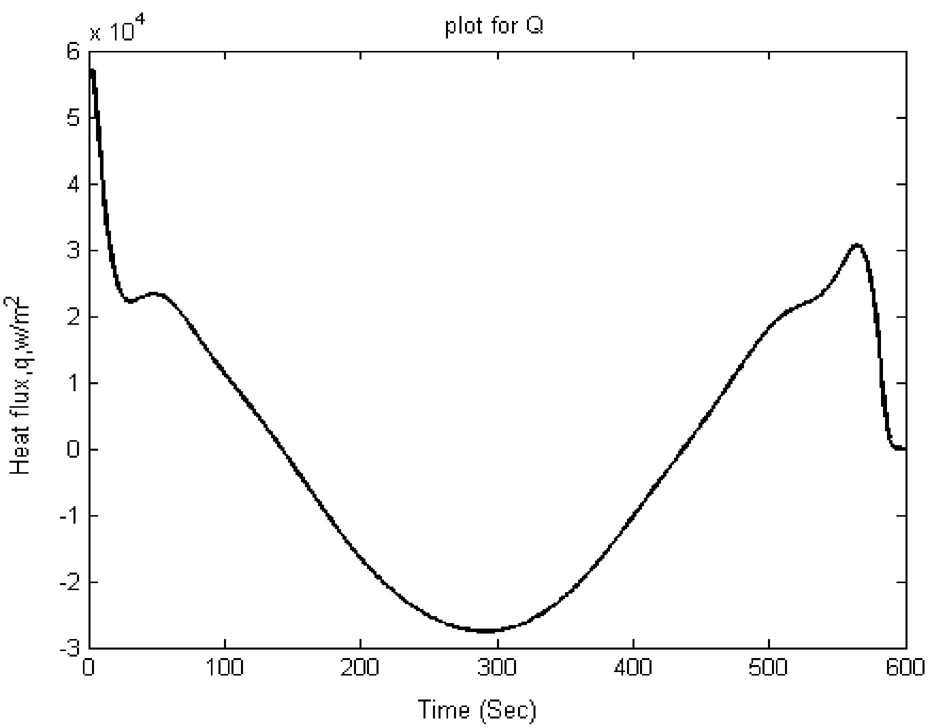
برای بررسی تأثیر خطای اندازه گیری، برای دما ابتدا خطای سنسور را ٪۵ میانگین دمای اندازه‌گیری شده در نظر گرفته سپس با افزایش آن تا ٪۱۰ میانگین دمای اندازه گیری شده اثرات خطا را بررسی

می‌شود. نمودارهای مربوط به حالت بدون نویز و حالت نویز ٪۵ در شکل‌های ۵-۳۷ تا ۵-۶۸ نشان داده شده است. بدلیل تشابه نمودارهای حالت نویز ٪۵ و حالت نویز ٪۱۰ از آوردن نمودارهای مربوط به حالت نویز ٪۱۰ پرهیز گردیده و تنها نتایج نهایی آن به همراه سایر نتایج در جدول ۵-۲ آمده است.

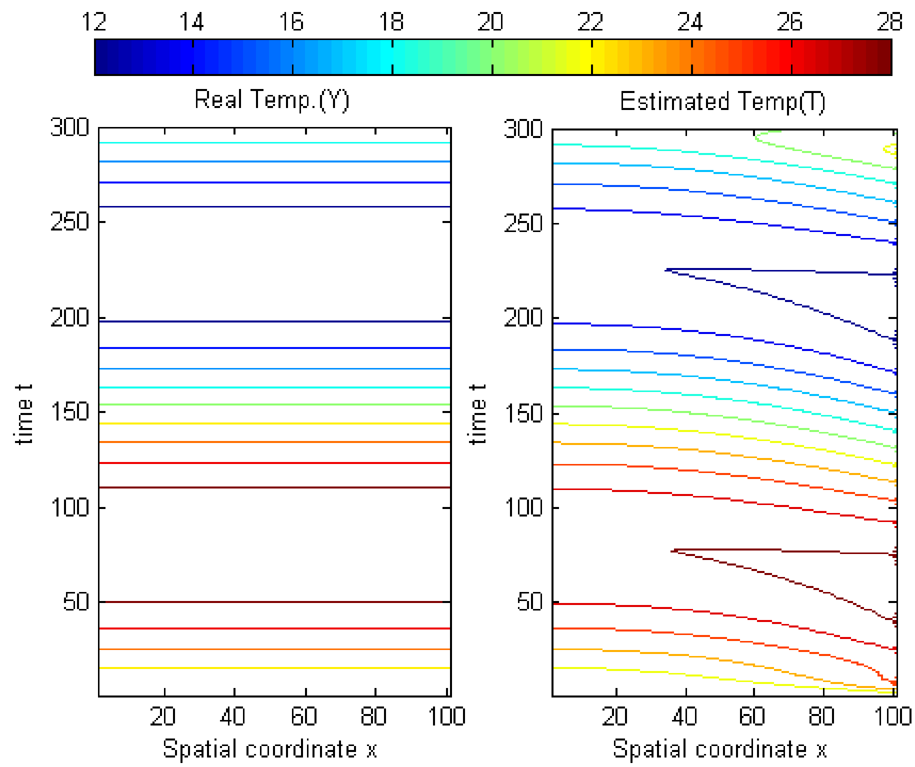
همانطور که در ادامه مشاهده خواهد شد، در حالت بدون نویز تخمین شار حرارتی از دقت بسیار خوبی برخوردار است اما با افزایش نویز و در نتیجه پایین آمدن دقت تابع ورودی از دقت تابع خروجی که همان تابع شار تخمینی می‌باشد نیز کاسته میشود. برای غلبه بر این مشکل میتوان از سنسورهای حساس‌تر و بیشتر و یا افزایش تکرار دفعات آزمایش بهره برد.



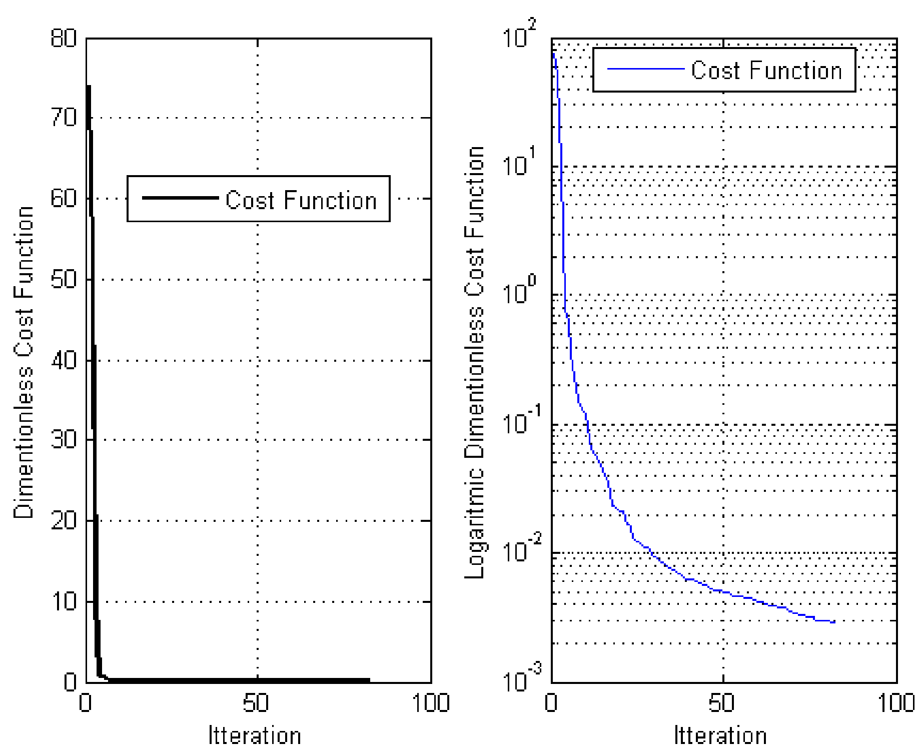
شکل ۵-۳۷ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۱ ، ۰ = σ



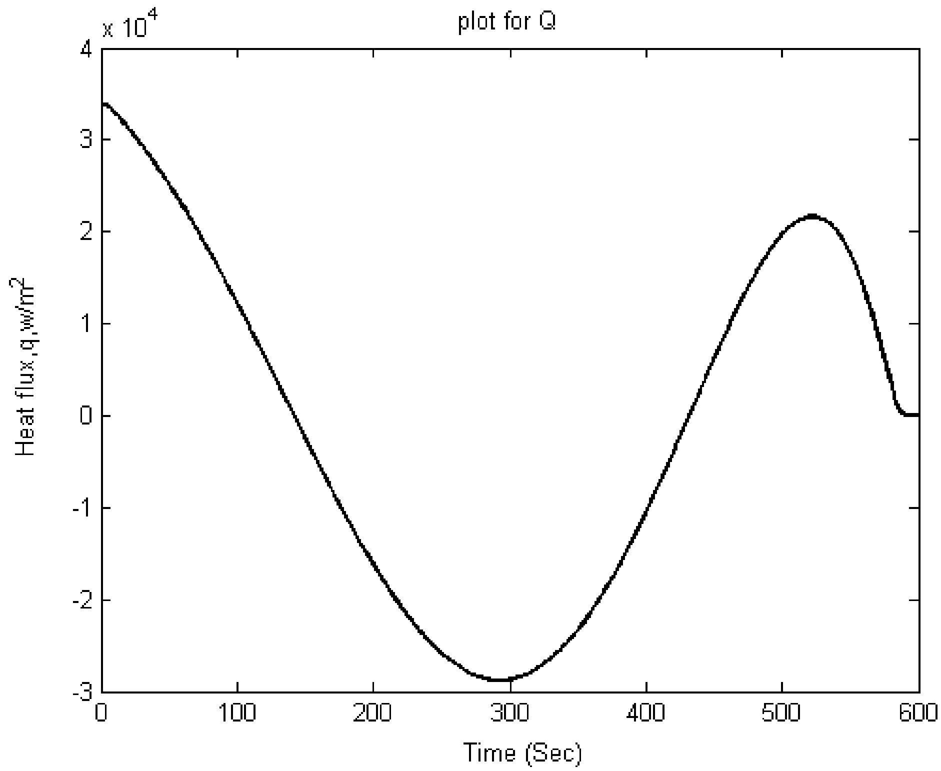
شکل ۵-۳۸ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۱ ، ۰ = σ



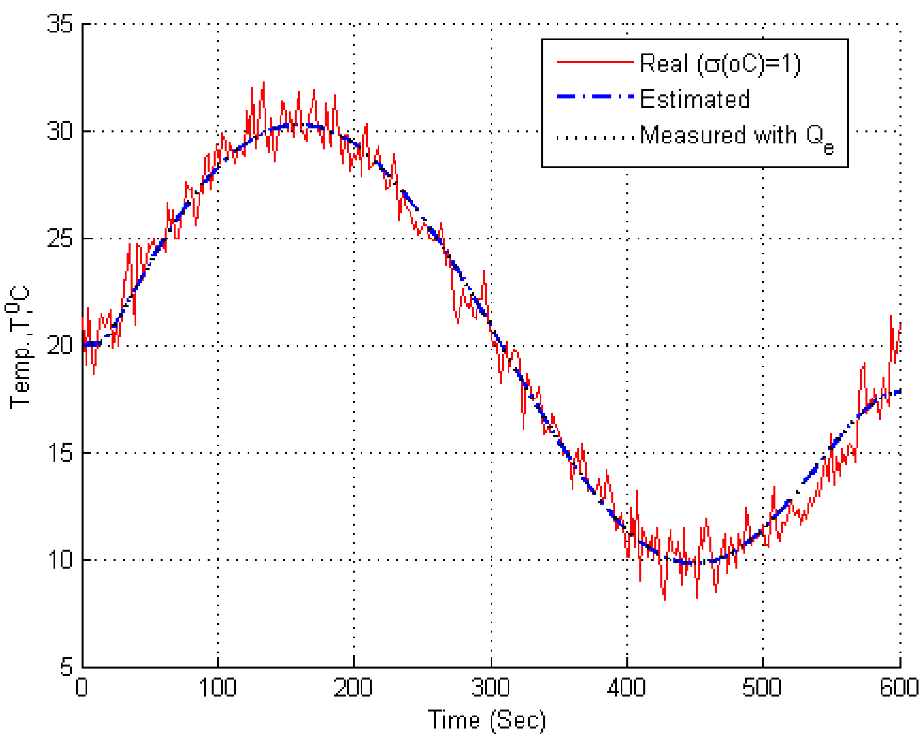
شکل ۵-۳۹ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، تست مثال ۱ ، σ= ۰



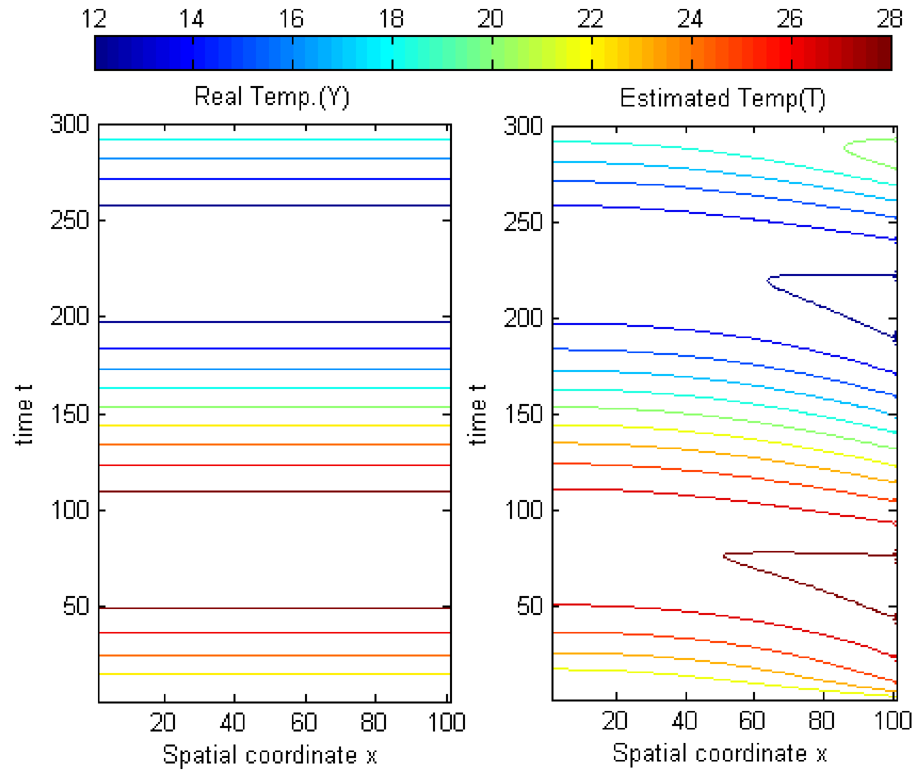
شکل۵-۴۰ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۱ ، σ = ۰ ، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی



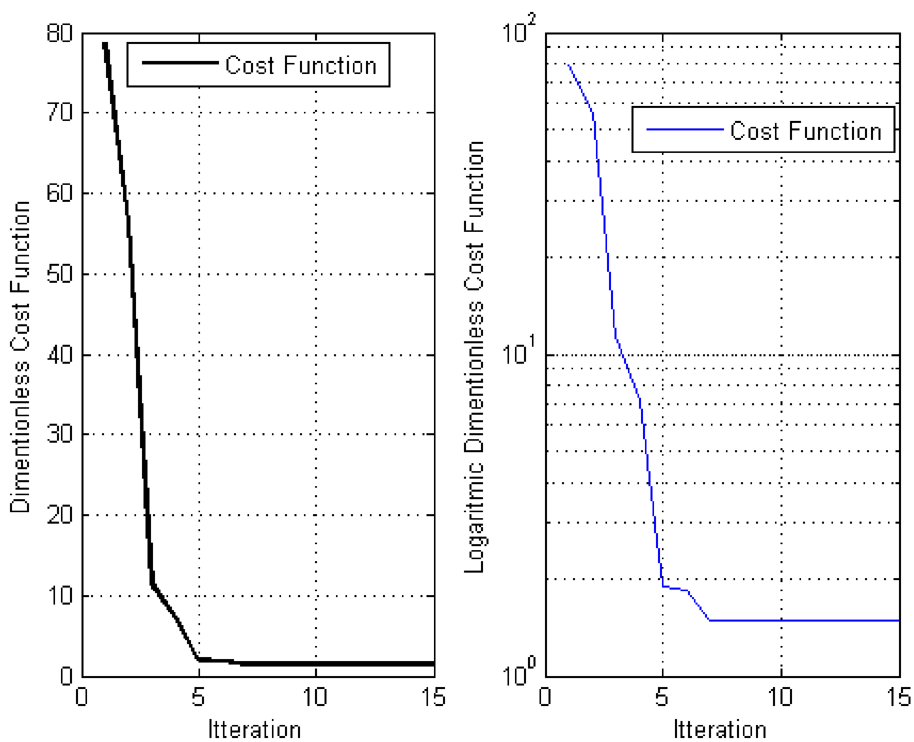
شکل ۵-۴۱ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۱ ، σ = ۵



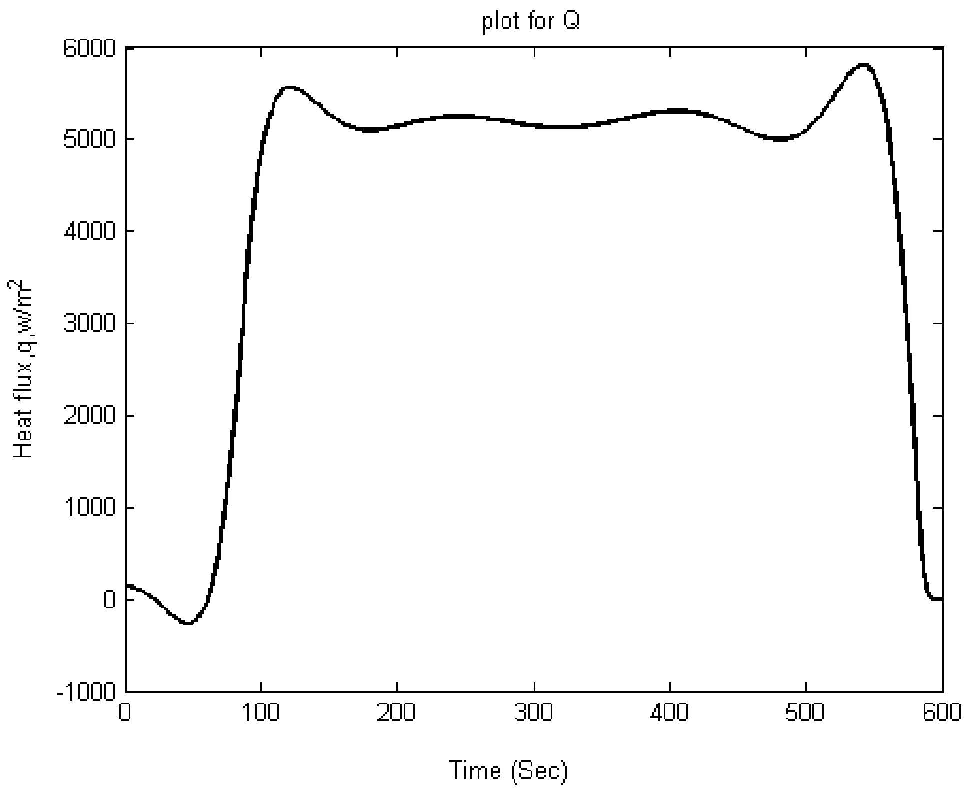
شکل ۵-۴۲ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۱ ، σ = ۵



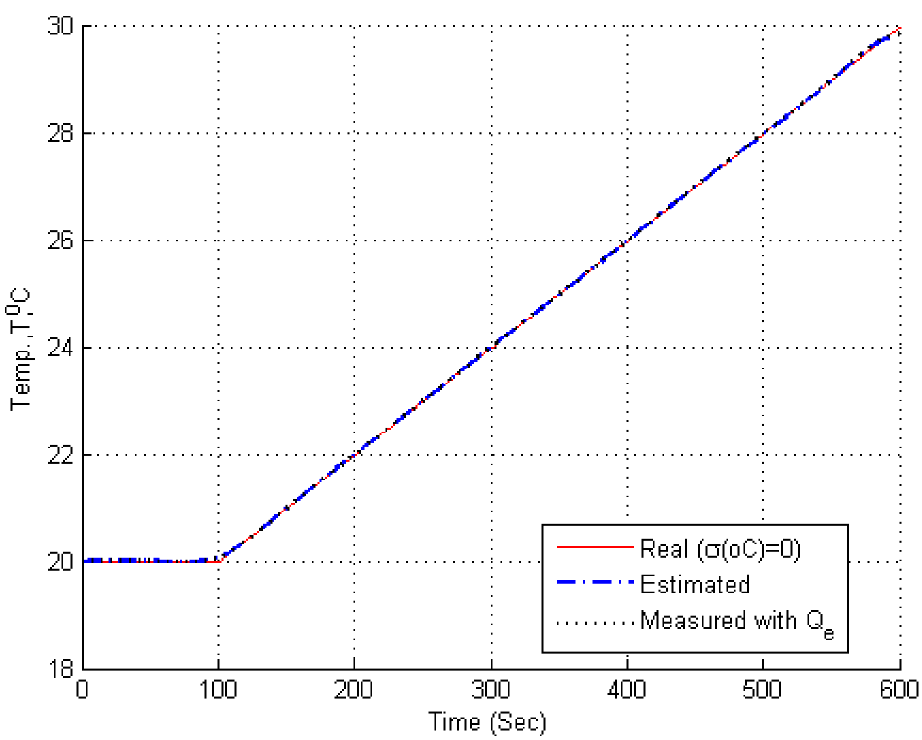
شکل ۵-۴۳ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، مثال ۱، σ = ۵



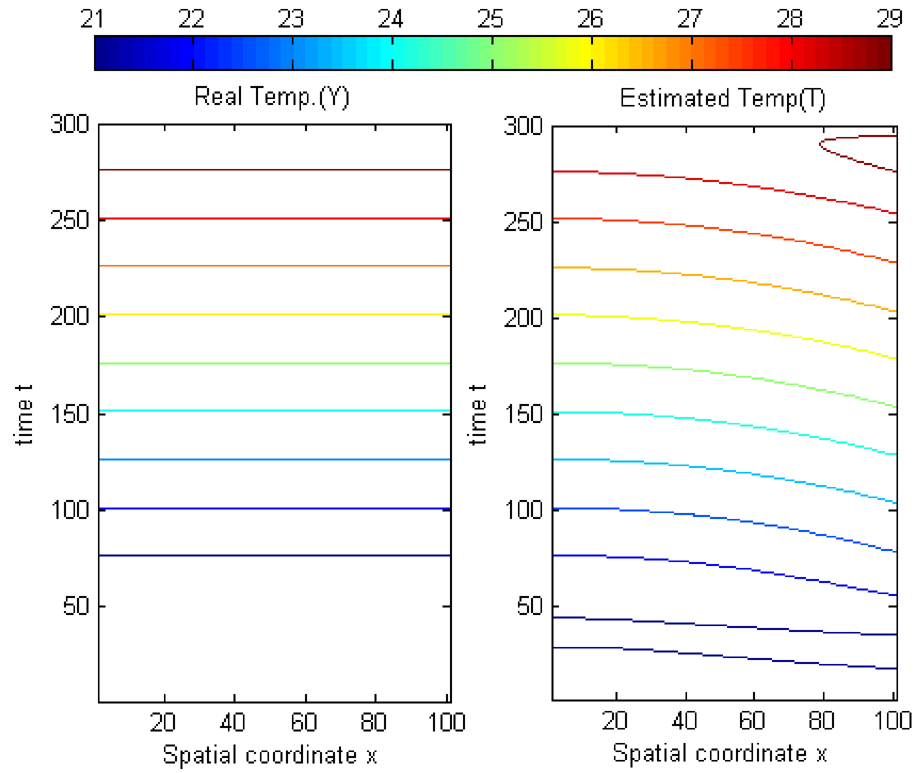
شکل۵-۴۴ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۱ ، σ = ۵، الف – بی بعد، ب – لگاریتمی



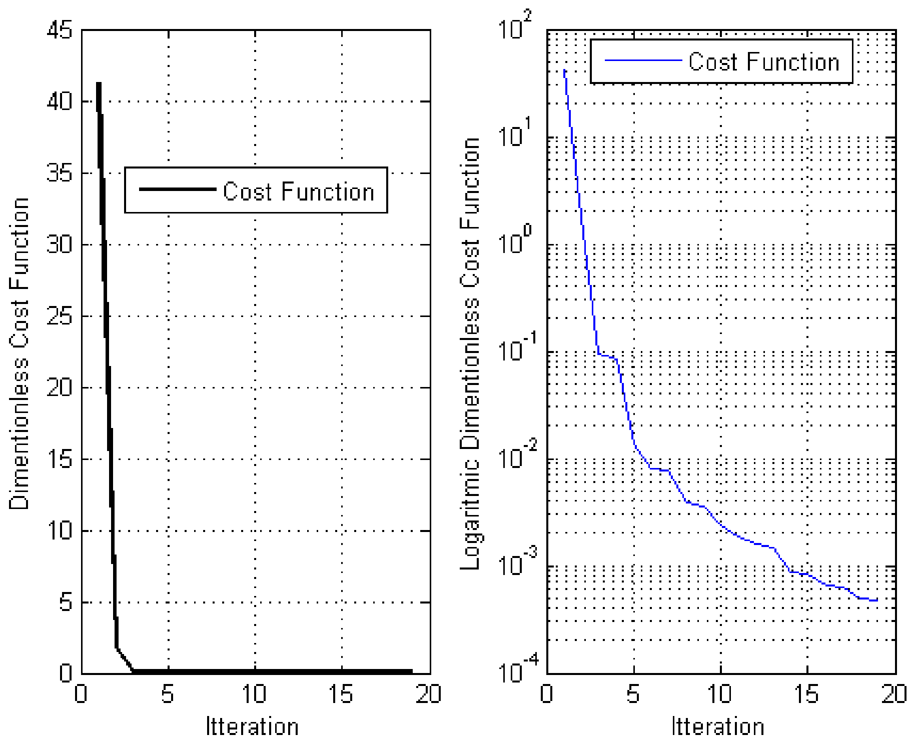
شکل ۵-۴۵ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۲ ، ۰ = σ



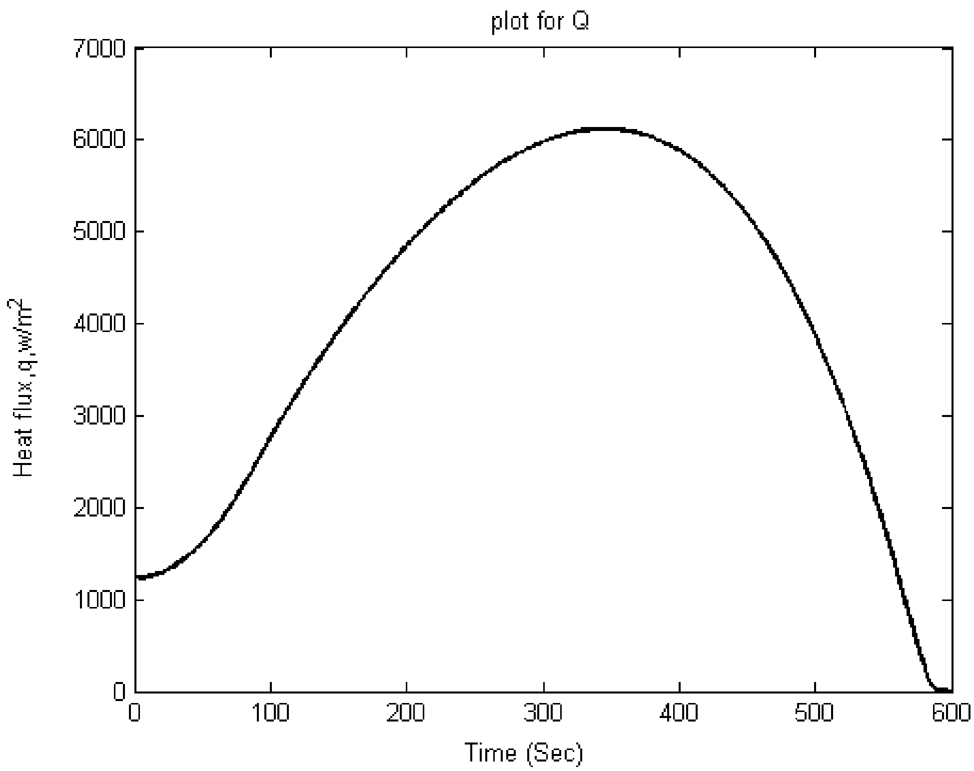
شکل ۵-۴۶ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۲ ، σ = ۰



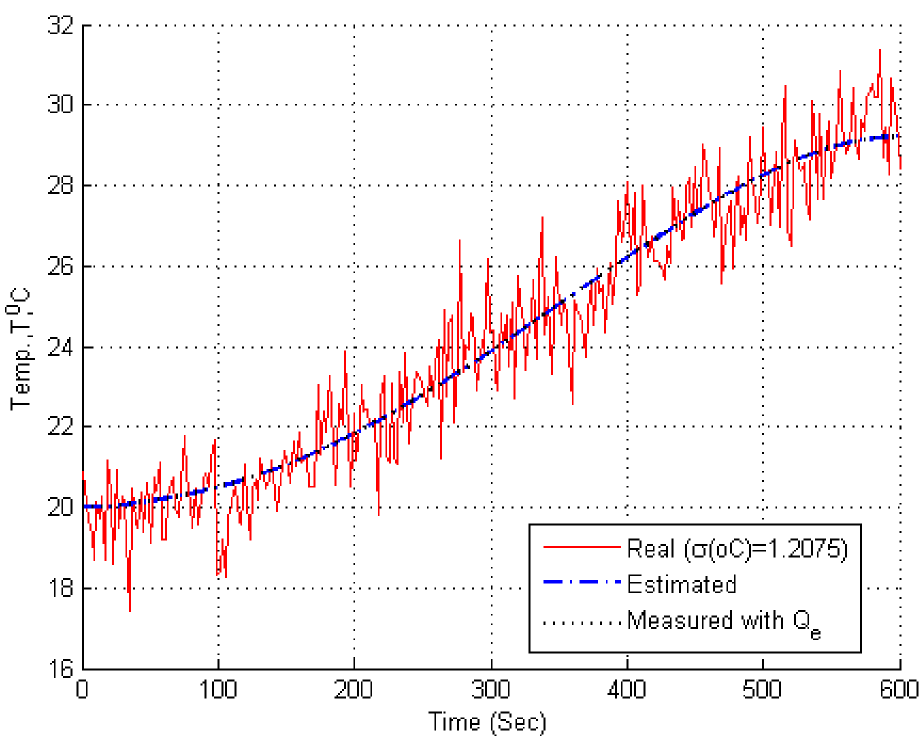
شکل ۵-۴۷ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، مثال ۲، σ = ۰



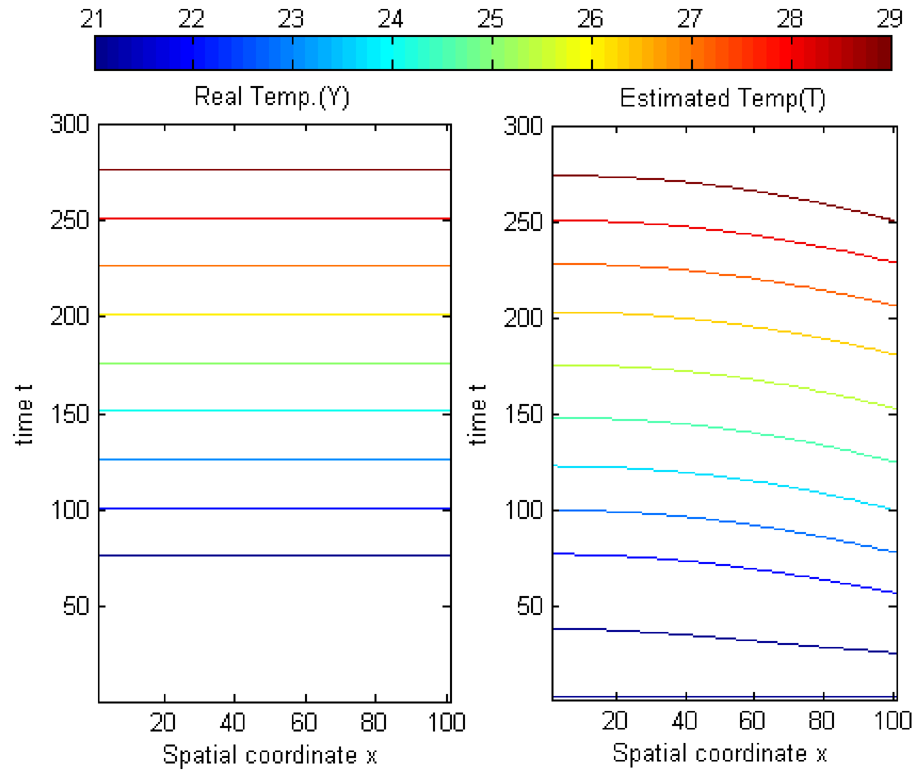
شکل۵-۴۸ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۲ ، σ = ۰ ، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی



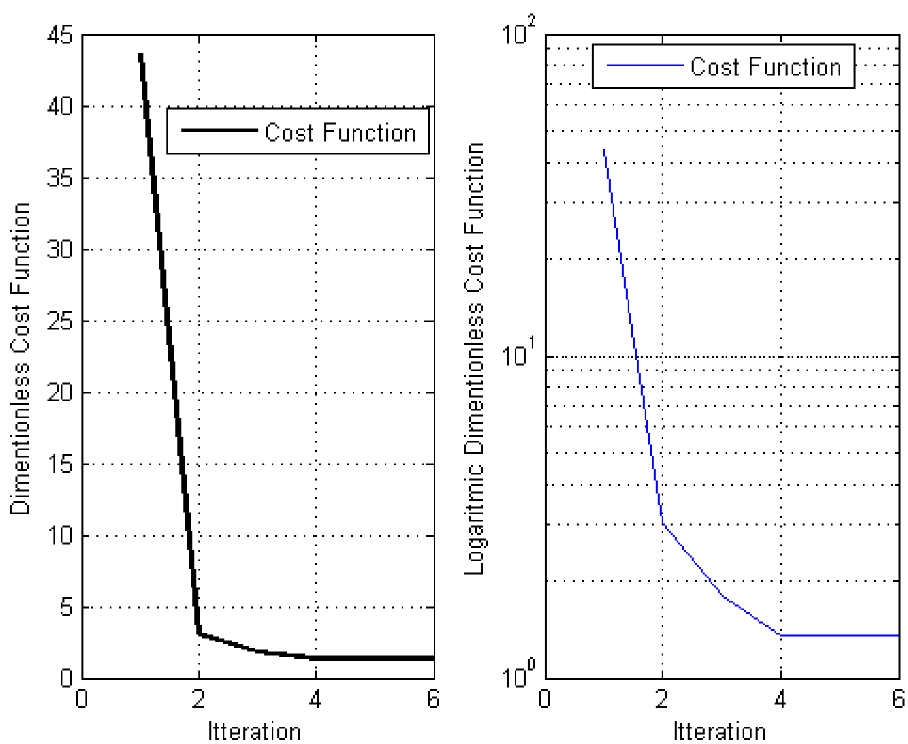
شکل ۵-۴۹ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۲ ، σ = ۵



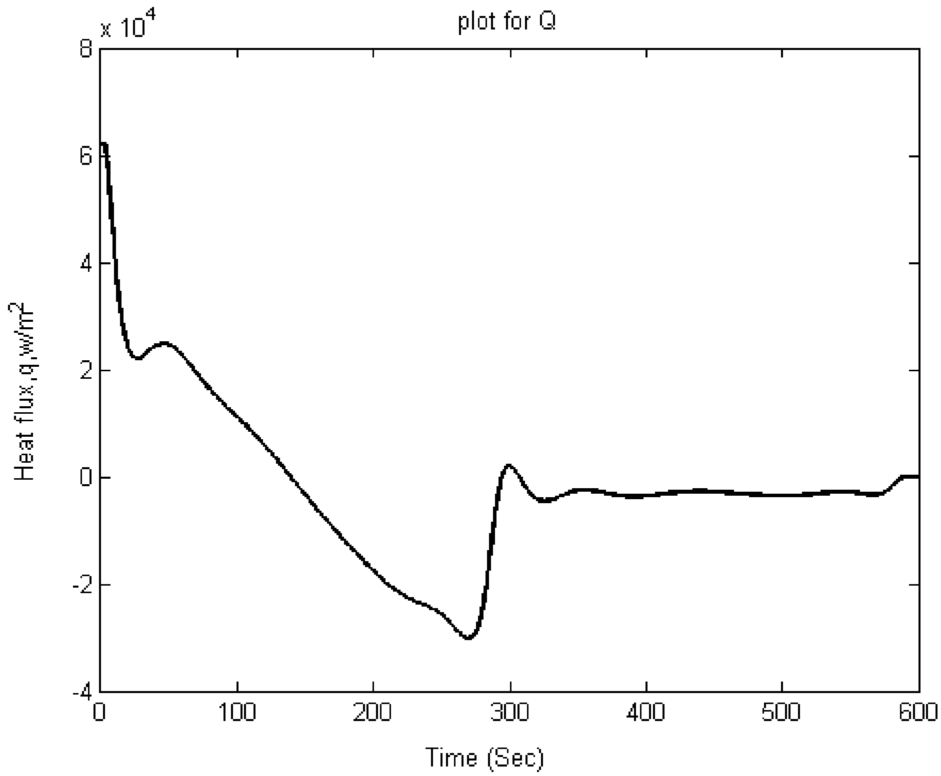
شکل ۵-۵۰ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۲ ، σ = ۵



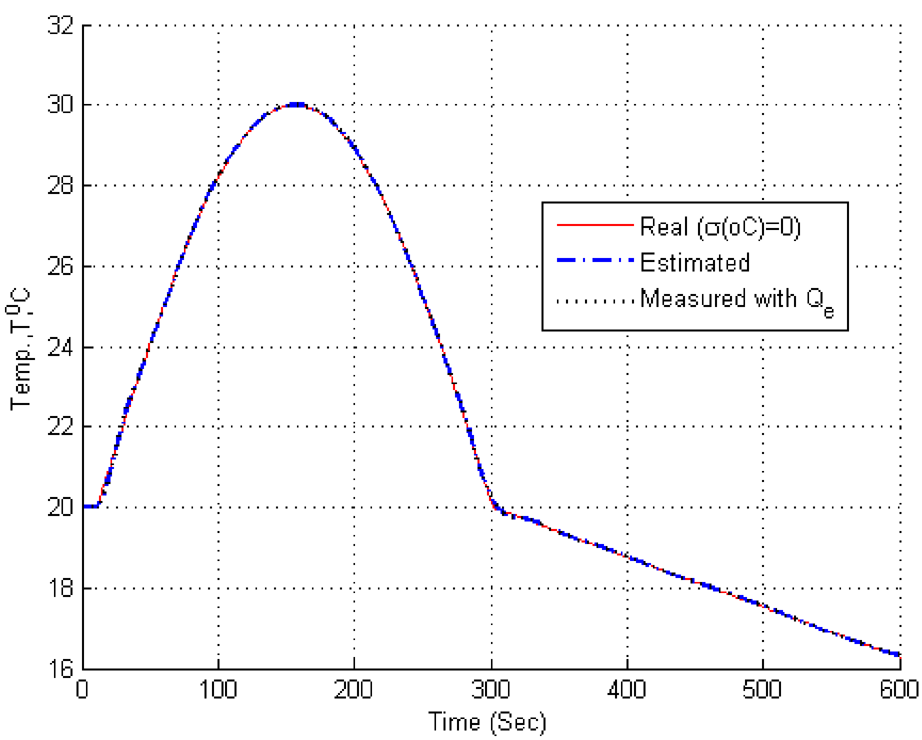
شکل ۵-۵۱ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، مثال ۲، σ = ۵



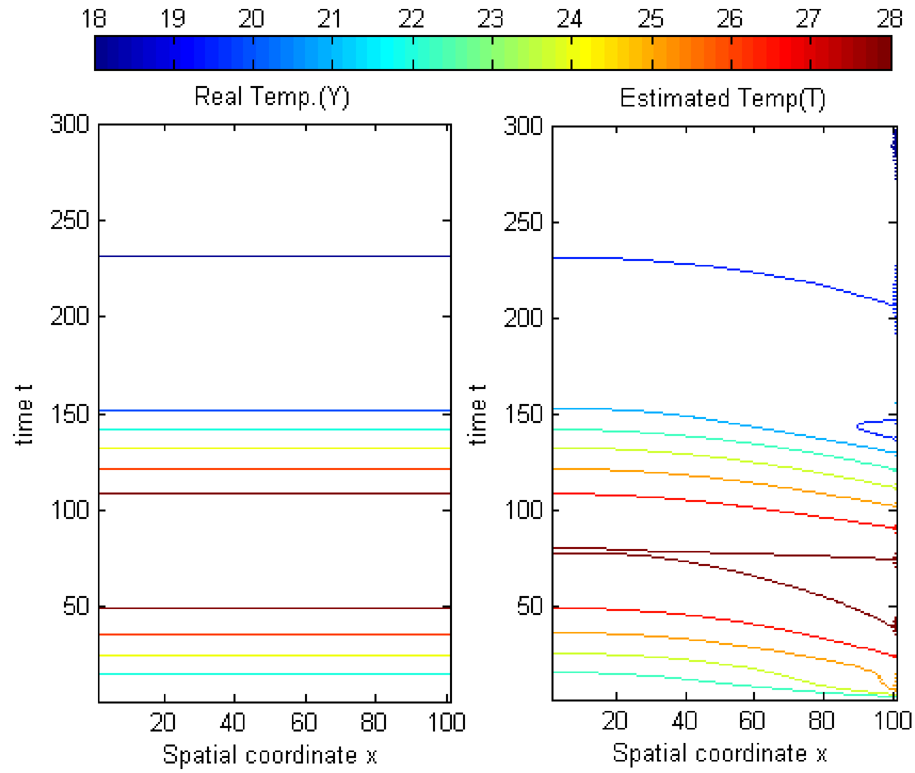
شکل۵-۵۲ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۲ ، σ = ۵، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی



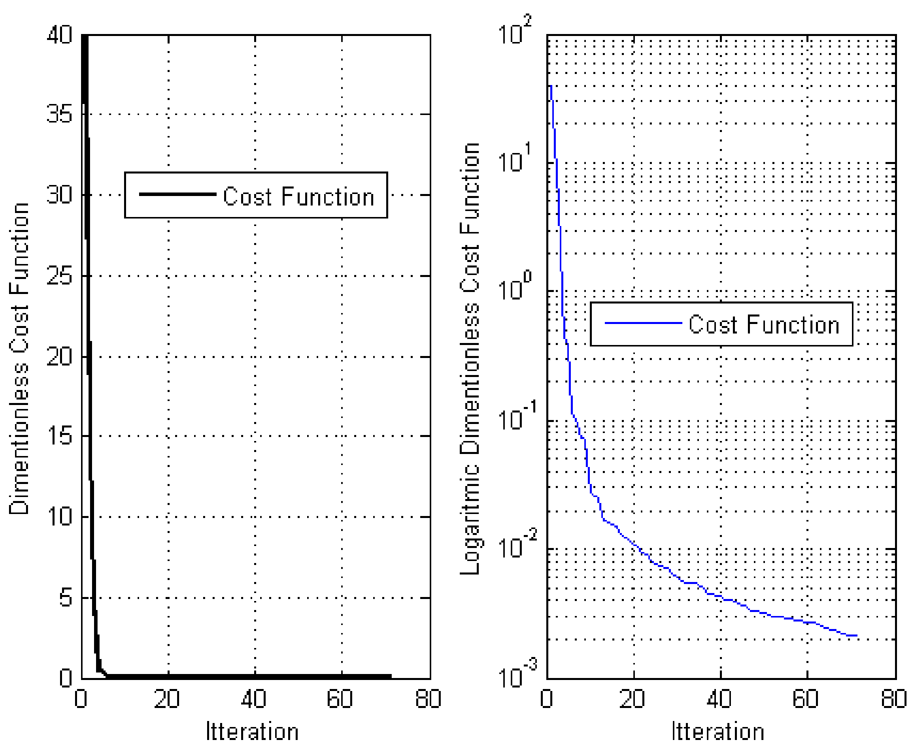
شکل ۵-۵۳ – مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۳ ، σ = ۰



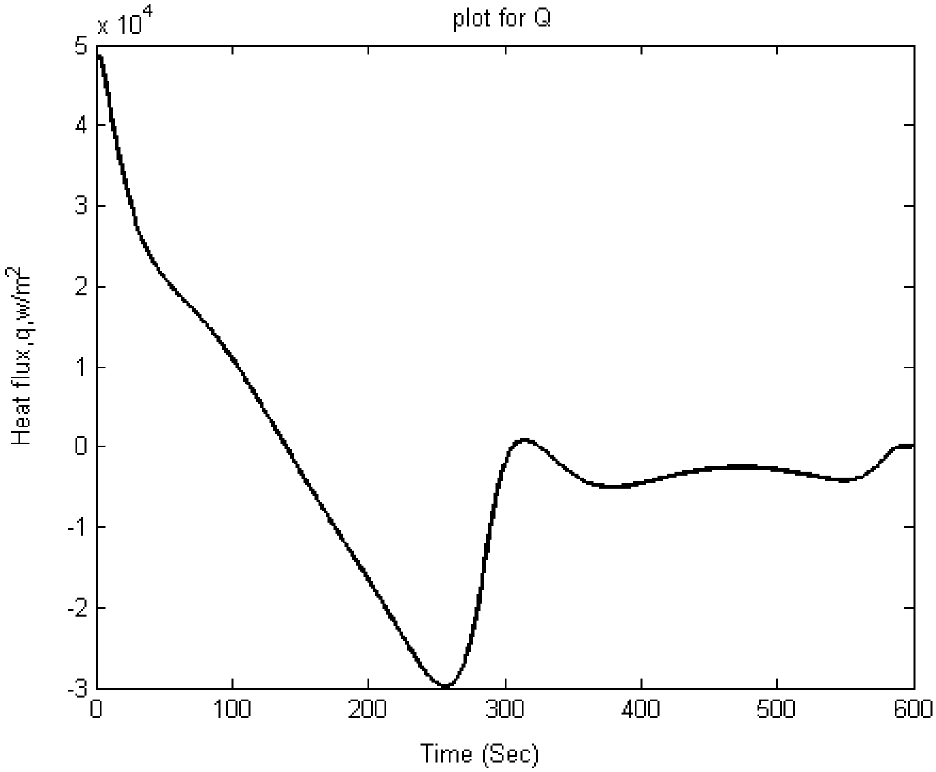
شکل ۵-۵۴ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۳ ، σ = ۰



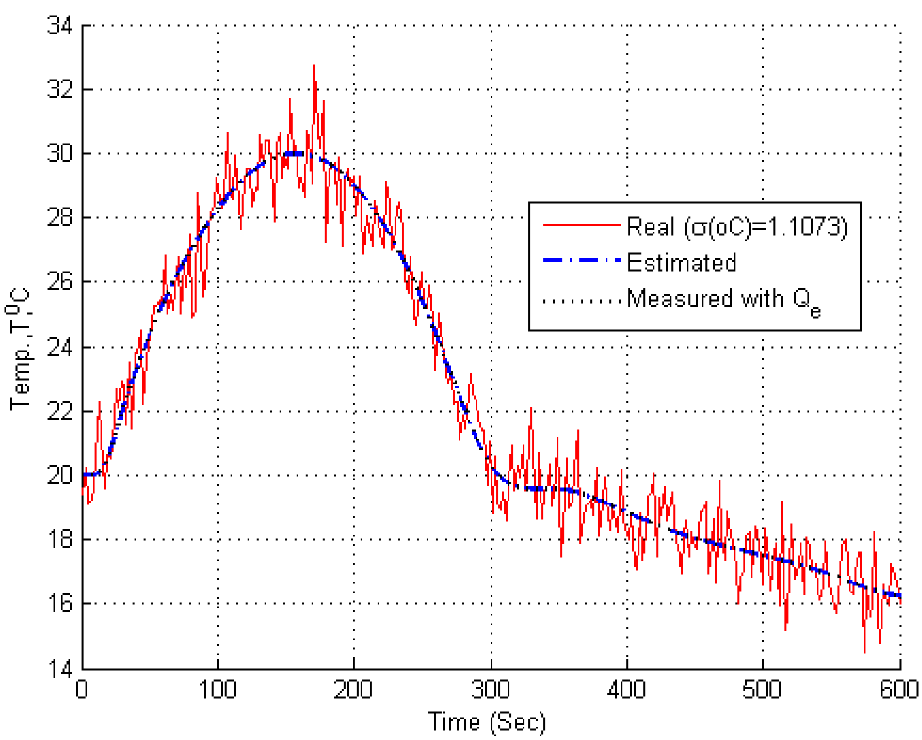
شکل ۵-۵۵ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، مثال ۳، σ = ۰



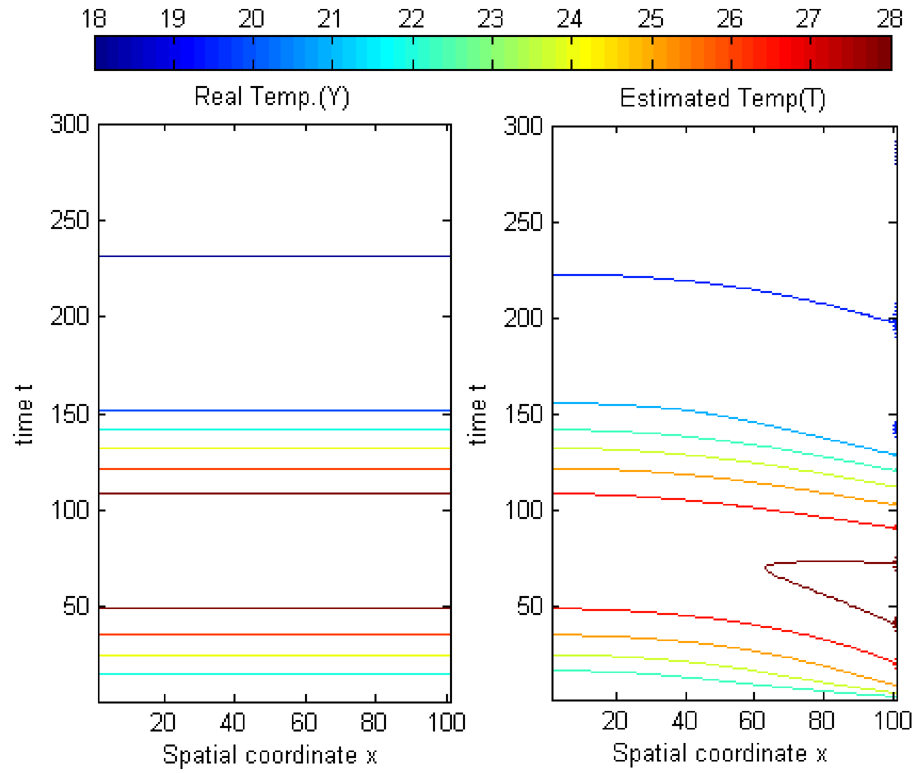
شکل۵-۵۶ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۳ ، σ = ۰، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی



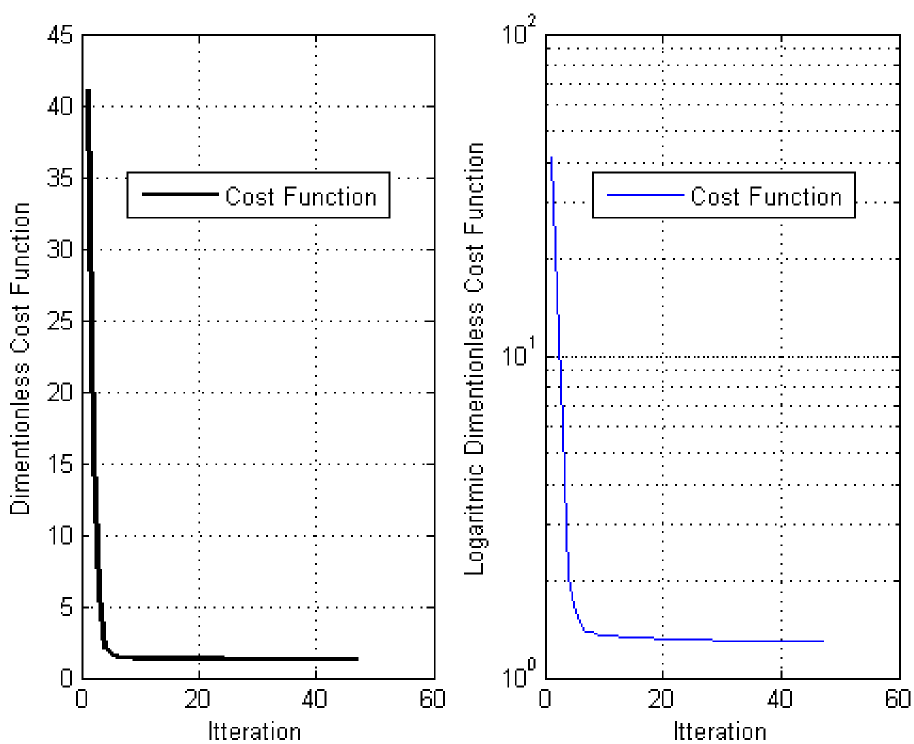
شکل ۵-۵۷– مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۳ ، σ = ۵



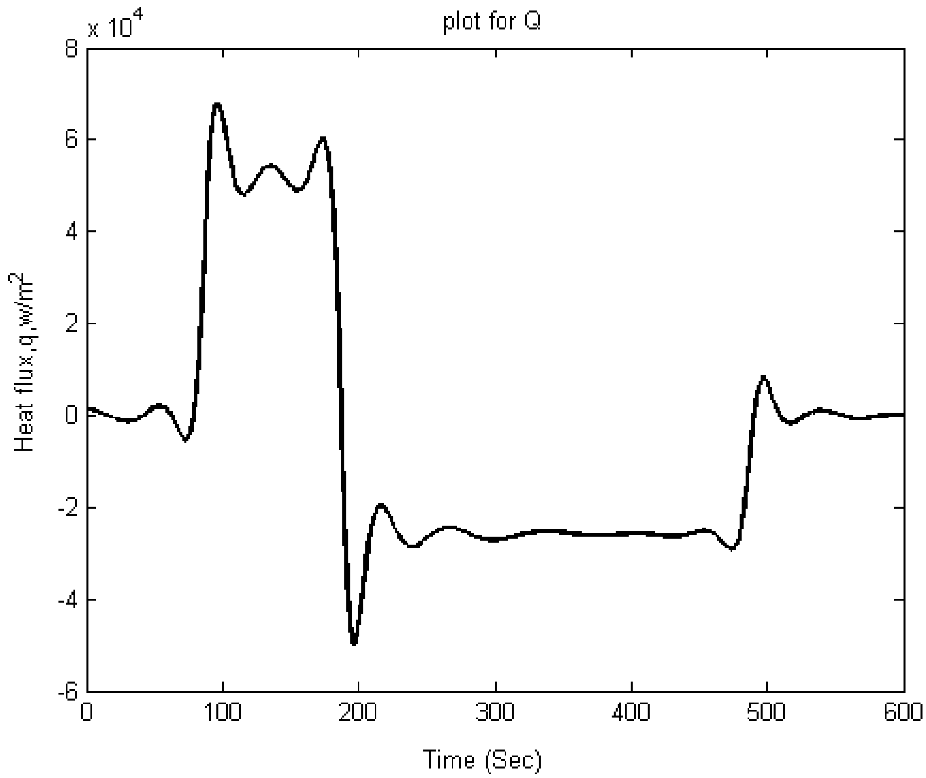
شکل ۵-۵۸ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۳ ، σ = ۵



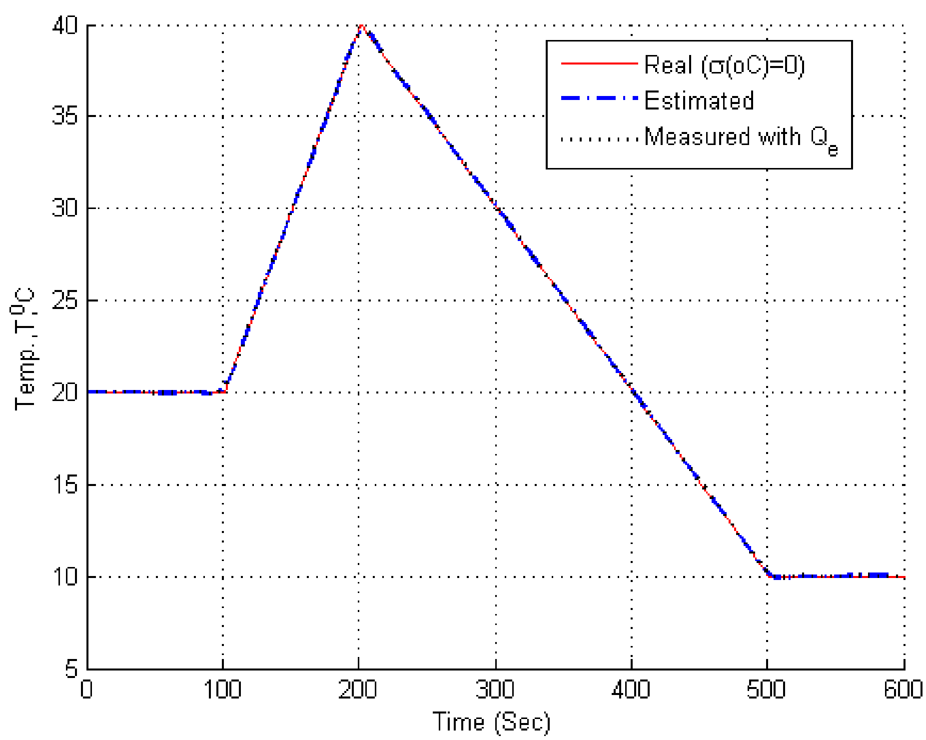
شکل ۵-۵۹ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، مثال ۳، σ = ۵



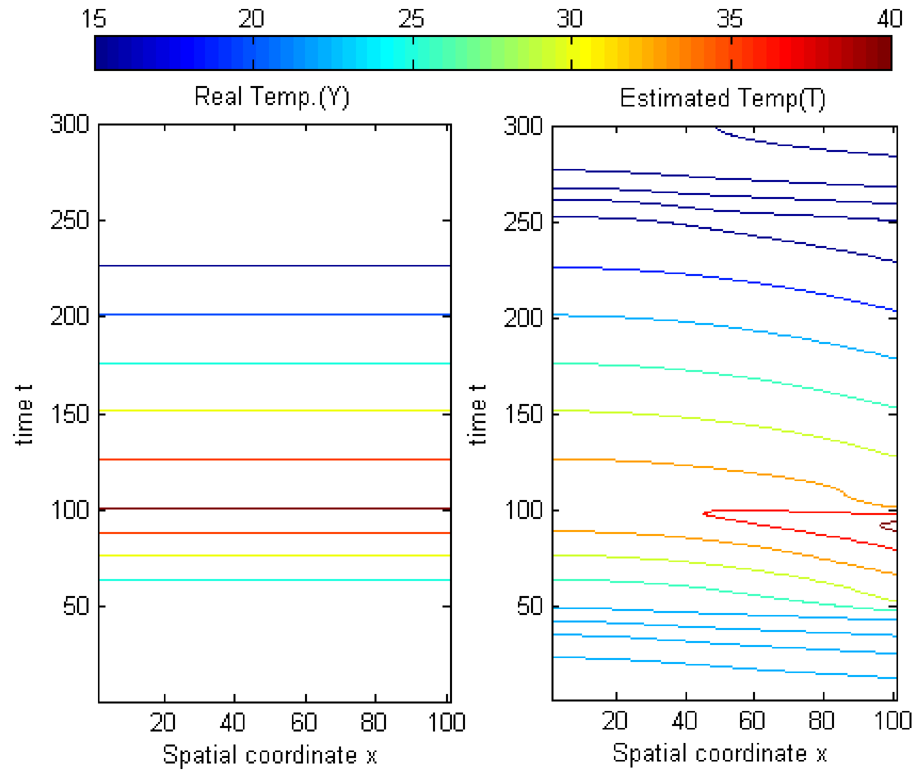
شکل۵-۶۰ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۳ ، σ = ۵ ، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی



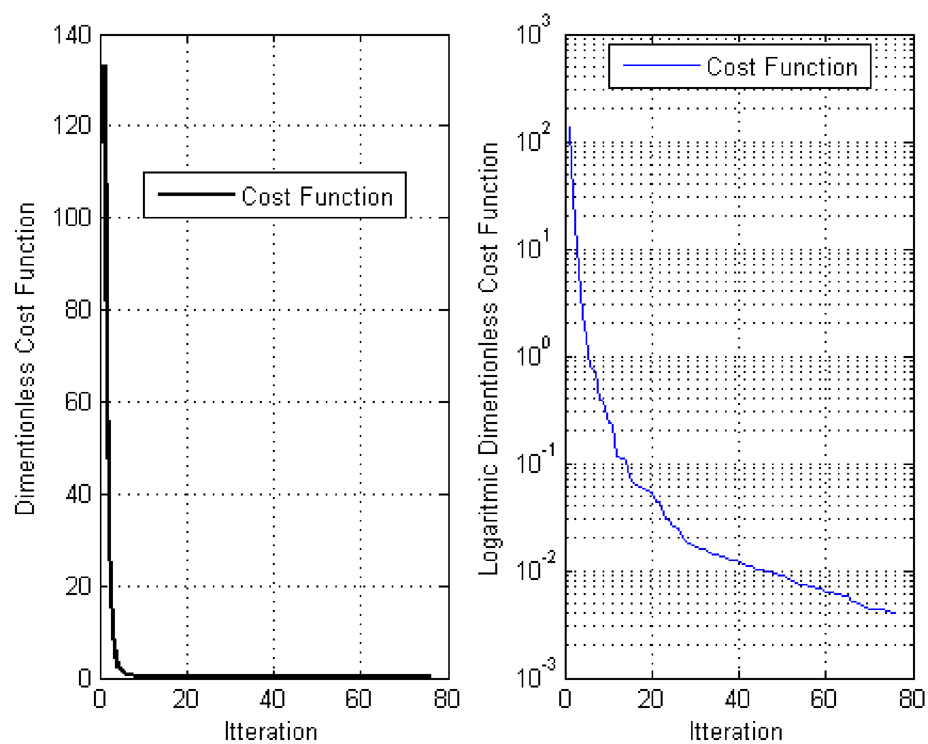
شکل ۵-۶۱– مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۴ ، $\sigma = 0$



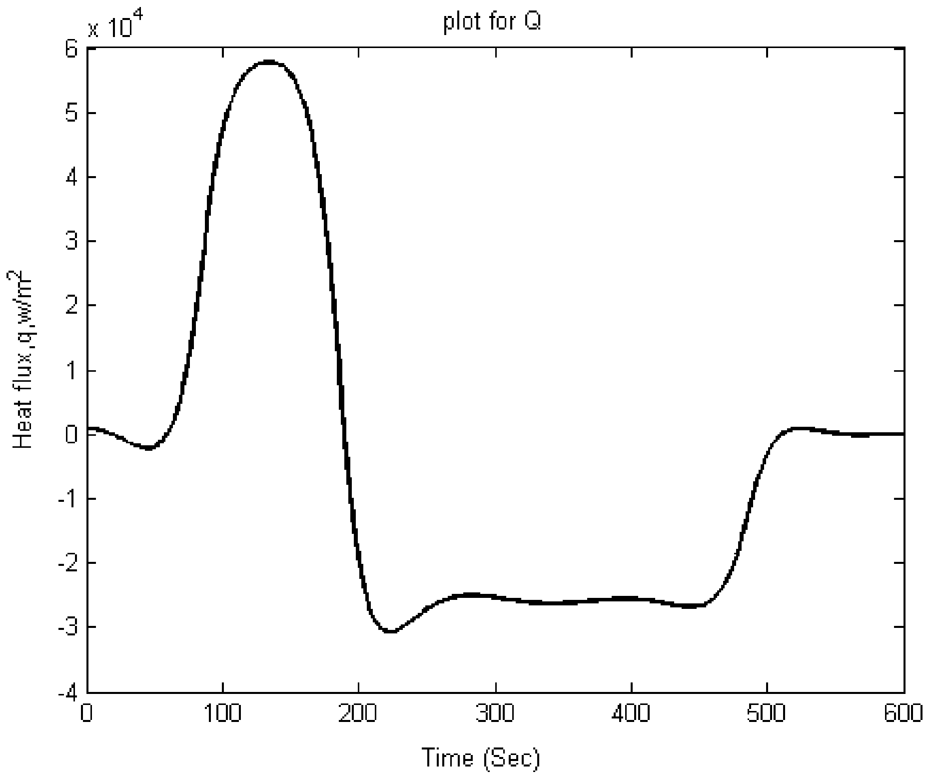
شکل ۵-۶۲ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۴ ، $\sigma = 0$



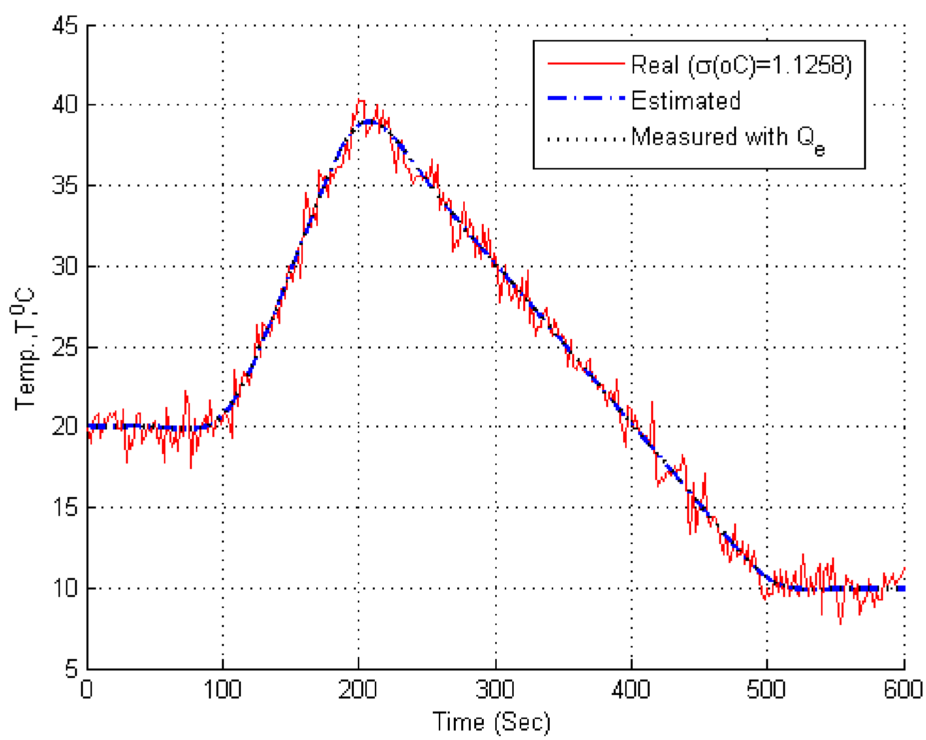
شکل ۵-۶۳ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، مثال ۴، $\sigma= \cdot$



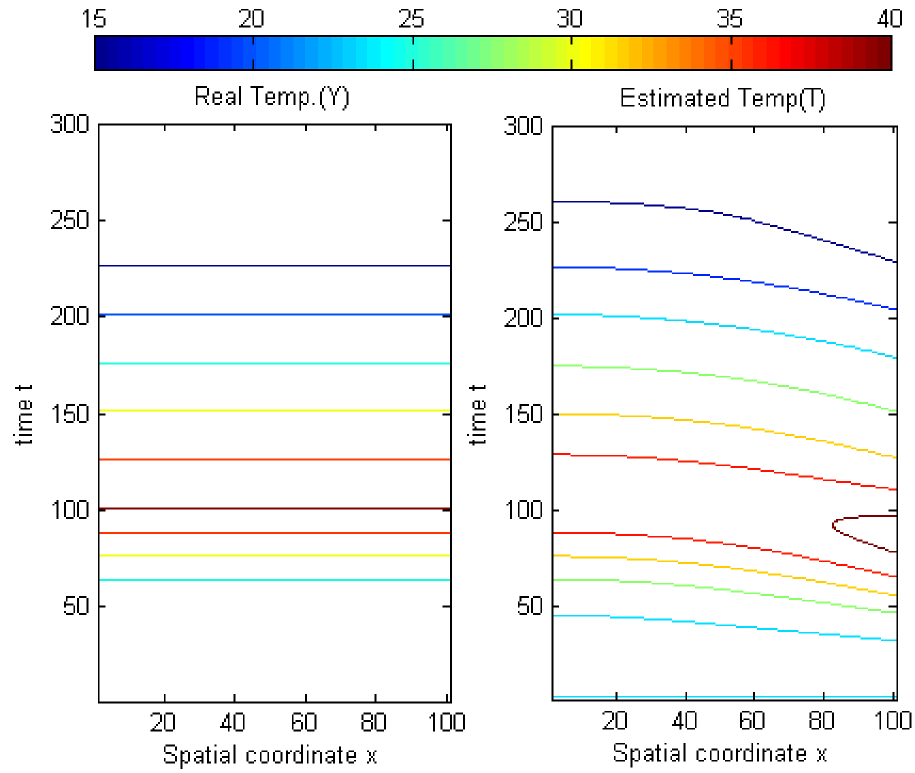
شکل۵-۶۴ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۴ ، $\sigma= \cdot$، الف – بی بعد، ب – لگاریتمی



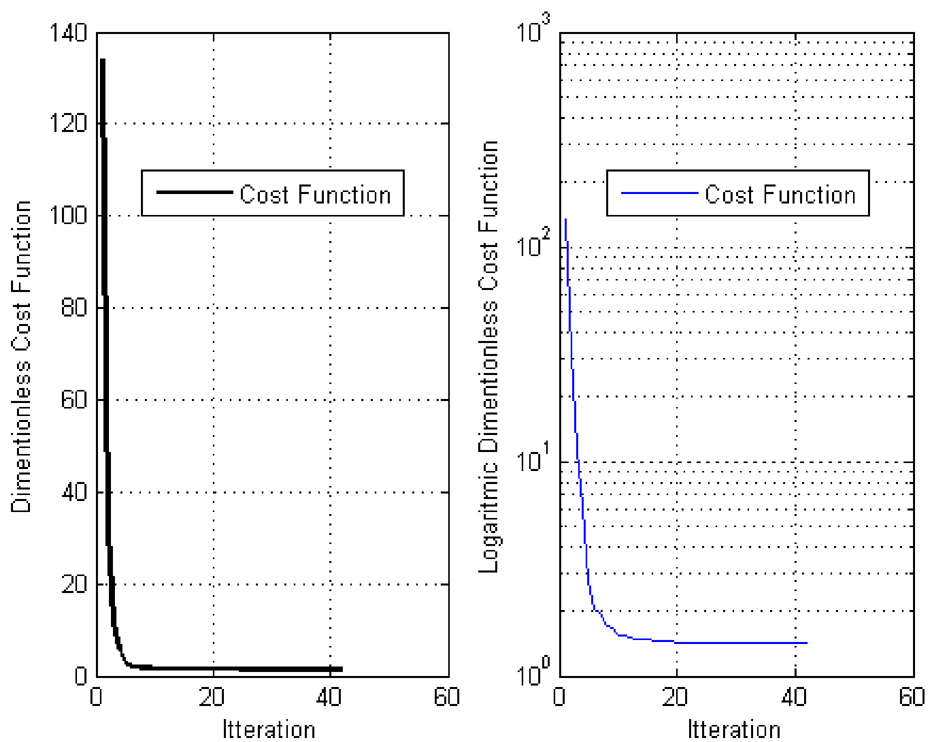
شکل ۵-۶۵– مقایسه شار حرارتی تخمینی و دقیق، مثال ۴ ، ۵ =σ



شکل ۵-۶۶ – مقایسه منحنی توزیع دمای تخمینی و دقیق، مثال ۴ ، σ = ۵



شکل ۵-۶۷ – منحنی کانتور برای دمای تخمین زده شده و دقیق ، مثال ۴، σ= ۵



شکل۵-۶۸ – منحنی تغییرات تابع هدف ، مثال ۴ ، σ= ۵، الف - بی بعد، ب – لگاریتمی

جدول ۵-۲ خلاصه اطلاعات کلی مثال های عددی تست شده

	٪ نویز	تکرار	Epsilon	تابع هدف	٪ خطا تابع دما
آزمایش ۱	۰	۸۲	۱۰E-۵	۰,۰۰۲۹۱۶	۰,۹۹۷۹
	۵	۲۵	۱۰E-۵	۰,۷۹۸۲۴۷	۱,۱۲۷۶
	۱۰	۱۱	۱۰E-۵	۴,۳۷۷۵۲۹	۴,۴۰۵۷
آزمایش ۲	۰	۱۹	۱۰E-۵	۰,۰۰۰۴۲	۰,۳۵۳۶
	۵	۱۲	۱۰E-۵	۱,۵۲۱۱۶۲	۲,۳۹۲۸
	۱۰	۶	۱۰E-۵	۷,۸۹۳۴۹۱	۱,۱۳۱۶
آزمایش ۳	۰	۷۱	۱۰E-۵	۰,۰۰۲۱۳۹	۰,۱۹۱۵
	۵	۳۲	۱۰E-۵	۰,۹۷۰۹۹۷	۳,۹۴۷۸
	۱۰	۶۸	۱۰E-۵	۵,۲۶۰۴۱۹	۲,۴۵۰۵
آزمایش ۴	۰	۷۶	۱۰E-۵	۰,۰۰۳۹۷۶	۰,۰۷۷۸
	۵	۱۵	۱۰E-۵	۱,۳۲۰۲۳۲	۰,۹۰۹۶
	۱۰	۲۴	۱۰E-۵	۴,۲۶۶۴۶۶	۲۲,۵۱۶۷

- ✓ نویز بر اساس درصدی از میانگین تابع دما محاسبه شده است.
- ✓ به علت استفاده از تابع خطای تصادفی، نتایج در هر بار اجرا در حد ۲٪ تغییر میکنند.

همانطور که از نتایج ذکر شده در جدول بالا و شکلهای ۵-۳۷ تا ۵-۶۸ مشخص است، نتایج تخمین شار در حالت بدون نویز با دقت بسیار خوبی بدست آمده است. با افزودن نویز به تابع دمایی، با نویز تا حدود ۵٪ میانگین تابع دما خطا بسیار خوب و قابل قبول می‌باشد، اما با افزایش نویز و پایین آمدن دقت تابع ورودی دما، دقت نتایج تخمینی نیز پایین آمده، با این حال همچنین نتایج نشان دهنده عدم حساسیت الگوریتم به خطاهای اندازه گیری و قابل اعتماد بودن حل معکوس در موارد مربوط به خطاهای اندازه گیری می باشد.

۵-۳ نتیجه‌گیری

در مواردی که شرایط مرزی در جسم به طور ناگهانی تغییر می‌کند هدایت حرارتی غیرفوریه‌ای حائز اهمیت است؛ زمانی اثرات هدایت غیرفوریه‌ای چشمگیر است که مقادیر τ بزرگ باشد و این به جنس

ماده بستگی دارد. در مواردی که سطح جسم ناگهان در معرض جابه‌جایی حرارتی قرار می‌گیرد، در لحظات اولیه جوابهای هدایت هذلولی و سهموی کاملاً از یکدیگر متمایزند اما بعد از گذشت زمانهای طولانی این دو جواب به سمت هم همگرا می‌شوند. در حالتی که شرط مرزی مسأله نوسانی است این دو جواب بر هم منطبق نخواهند شد. مخصوصاً اگر پریود نوسانات تحریک با زمان آرامش حرارتی هم مرتبه باشند، حتی بعد از گذشت زمانهای طولانی نیز اثرات هدایت غیرفوریه‌ای باقی خواهد ماند.

در بررسی اثرات هدایت هذلولی با در نظر گرفتن تابش در سطح این نتیجه بدست می‌آید که اگر اثرات تابش روی سطح خیلی قوی‌تر از هدایت باشد و نیز اگر ضریب جذب سطح جسم خیلی زیاد باشد، دمای سطح جسم حتی بعد از گذشت زمانهای کوتاه با تقریب خوبی از همان معادله کلاسیک هدایت حرارت بدست می‌آید. به عبارت دیگر، جوابهای این دو مدل خیلی سریع به سمت هم همگرا می‌شوند. از سوی دیگر در صورت نادیده گرفتن اثرات تابش روی سطح جسم، شیب نمایه‌های دمای بدست آمده از هدایت هذلولی و سهموی خیلی به هم نزدیک است. با افزایش اثرات تشعشع روی سطح و نیز افزایش ضریب جذب تابشی سطح، شیب منحنی‌ها کاملاً از یکدیگر متفاوت خواهند شد.

در فصل پنج؛ CGM با موفقیت جهت تخمین شار حرارتی مرزی گذرا در مسایل هدایت حرارت هذلولی معکوس با کمک شبیه سازی دمای خوانده شده در مرزها استفاده شد. سه مثال با شرایط شار حرارتی متفاوت به همراه خطای اندازه گیری حل گردید. نتایج بیانگر پایدار و منظم باقی ماندن CGM در قبال افزایش خطای اندازه گیری می باشد. نتایج حاصل از بکارگیری روش CGM ، هیچ حساسیت و خطایی را حتی در مواجهه با مقادیر خطای بزرگ اندازه گیری نشان ندادند.

نتایج نشان دهنده آن است که در توابع که دارای نقاط شکست و تغییر شیب زیاد و آنی هستند، در نقاط عطف تخمین تابع از دقت کمتری برخوردار بوده و لذا کد حاظر برای توابع دارای شیب ملایم‌تر و عاری از نقاط شکست مناسب‌تر است. می‌توان از ابزارهای نرم افزار متلب جهت کاهش خطای تخمین در نقاط تغییر استفاده نمود.

در ادامه؛ کد حاظر برای چهار تابع دمایی دلخواه و تخمین شار حرارتی مربوطه استفاده گردید. خطاهای

مربوطه نشان‌دهنده پایدار بودن کد برای توابع دمایی می‌باشد.

درنهایت؛ از مجموعه بحث های ارائه شده می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از گرادیان مزدوج امتیازات زیر را به همراه دارد:

۱. عدم حساسیت روش به حدس اولیه دقیق برای مقادیر مجهول
۲. نرخ همگرایی زیاد
۳. عدم نیاز به فرضیاتی برای فرم تابع مجهول
۴. زمان کوتاه برای انجام محاسبات

پیشنهادات برای کارهای آینده

به نظر میرسد می‌توان این تحقیق را در زمینه های مختلف ادامه داد. به عنوان مثال می‌توان به پیشنهادات زیر اشاره نمود:

۱. بررسی شرایط مرزی مختلف
۲. بررسی اثرات تغییرات ضریب دمایی با دما
۳. بررسی اثرات خواص فیزیکی غیر ثابت
۴. بررسی اثر استفاده از چند حسگر در آزمایشات
۵. استفاده از روشهای بهینه سازی برای کاهش خطای ذاتی روش در لبه‌های تیز مانند Mollification و Wavelet

ضمیمه.۱ –گسسته سازی به روش کرانک–نیکلسون[۳]

[۳] Crank–Nicolson

پس از تشکیل دادن ماتریس صفر $N\times ۱+M$ را برای Y_{Total}، مقادیر سطر ابتدایی ماتریس از شرط مرزی $(۵-۱-b)$ و سطر دوم از شرط $(۵-۱-c)$ بدست می‌آیند. لازم به ذکر است جهت رشد زمان از سطر پایین به سمت بالاست.

$$Y_{Total}=\begin{bmatrix} \cdot & \cdots & o \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ T_{\cdot} & \cdots & T_{\cdot} \\ T_{\cdot} & \cdots & T_{\cdot} \end{bmatrix}_{N\times M+۱} \qquad (۱\text{-}۱.\text{App})$$

اکنون از معادله $(۵-۱-a)$ داریم:

$$k\frac{\partial^{۲}Y}{\partial x^{۲}}=\tau\rho c\frac{\partial^{۲}Y}{\partial t^{۲}}+\rho c\frac{\partial Y}{\partial t} \qquad (۲\text{-App.}۱)$$

با استفاده از روش کرانک-نیکلسون مرکزی برای گسسته سازی [۱۳۹] خواهیم داشت:

$$\frac{k}{۲\Delta x^{۲}}\left[Y_{i+۱}^{j+۱}-۲Y_{i}^{j+۱}+Y_{i-۱}^{j+۱}+Y_{i+۱}^{j}-۲Y_{i}^{j}+Y_{i-۱}^{j}\right]=\frac{\tau\rho c}{\Delta t^{۲}}\left[Y_{i}^{j+۱}-۲Y_{i}^{j}+Y_{i}^{j-۱}\right]+\frac{\rho c}{\Delta t}\left[Y_{i}^{j+۱}-Y_{i}^{j}\right] \qquad (۳\text{-App.}۱)$$

در اینجا زیرنویس i برای مکانها و بالانویس j برای زمانهای مختلف بکار رفته است.

$$\left[Y_{i+۱}^{j+۱}-۲Y_{i}^{j+۱}+Y_{i-۱}^{j+۱}+Y_{i+۱}^{j}-۲Y_{i}^{j}+Y_{i-۱}^{j}\right]=\frac{۲\Delta x^{۲}\tau\rho c}{k\Delta t^{۲}}\left[Y_{i}^{j+۱}-۲Y_{i}^{j}+Y_{i}^{j-۱}\right]+\frac{۲\Delta x^{۲}\rho c}{k\Delta t}\left[Y_{i}^{j+۱}-Y_{i}^{j}\right] \qquad (۴\text{-App.}۱)$$

با در نظر گرفتن $\alpha=\frac{\rho c}{k}$ و نیز $\gamma=\frac{۲\tau\Delta x^{۲}}{\alpha\Delta t^{۲}}$ و $\lambda=\frac{۲\Delta x^{۲}}{\alpha\Delta t}$ خواهیم داشت:

$$\left[Y_{i+۱}^{j+۱}-۲Y_{i}^{j+۱}+Y_{i-۱}^{j+۱}+Y_{i+۱}^{j}-۲Y_{i}^{j}+Y_{i-۱}^{j}\right]=\lambda\left[Y_{i}^{j+۱}-۲Y_{i}^{j}+Y_{i}^{j-۱}\right]+\gamma\left[Y_{i}^{j+۱}-Y_{i}^{j}\right] \qquad (۵\text{-App.}۱)$$

پس از ساده سازی معادله بالا بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$Y_{i+۱}^{j+۱}-[۲+\lambda+\gamma]Y_{i}^{j+۱}+Y_{i-۱}^{j+۱}=-Y_{i+۱}^{j}+۲Y_{i}^{j}-Y_{i-۱}^{j}+\lambda\left[-۲Y_{i}^{j}+Y_{i}^{j-۱}\right]-\gamma Y_{i}^{j} \qquad (۶\text{-App.}۱)$$

در ابتدا حل را برای حالت j ثابت، یعنی حل در یک نقطه زمانی خاص و در مکانهای مختلف و اعمال آن با کمک دستور for برای N-۲ نقطه، و سپس برای حالت i ثابت در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \ddots\ ۱ & -[۲+\lambda+\gamma] & ۱\ \vdots \\ \vdots\ ۱ & -[۲+\lambda+\gamma] & ۱\ \ddots \end{bmatrix}_{(M+۱)\times(M+۱)}\begin{bmatrix}\cdots & Y_{i-۱}^{j+۱} & Y_{i}^{j+۱} & Y_{i+۱}^{j+۱} & \cdots\end{bmatrix}_{۱\times(M+۱)}=\begin{bmatrix}\vdots \\ RHS \\ \vdots\end{bmatrix}_{(M+۱)\times ۱} \qquad (۷\text{-App.}۱)$$

به عبارت دیگر AY = B خواهد بود. برای بدست آوردن سطر ابتدایی و انتهایی ماتریسهای A و B فوق معادلات شرط مرزی $(۵-۱-d)$ و $(۵-۱-e)$ را برای معادله$(۵-۱-a)$ اعمال می‌کنیم.

از شرط مرزی $(e-۱-۵)$ یعنی برای $x=l$ داریم:

$$k\frac{\partial Y(l,t)}{\partial x}=q(l,t)+\tau\frac{\partial q(l,t)}{\partial t} \tag{۸-App.۱}$$

مطابق آنچه پیش از این گفته شد، از روش کرانک نیکلسون مرکزی خواهیم داشت:

$$\frac{k}{۴\Delta x}[Y_{i+۱}^{j+۱}-Y_{i-۱}^{j+۱}+Y_{i+۱}^{j}-Y_{i-۱}^{j}]=q^{j-۱}+\tau\frac{q^{j}-q^{j-۱}}{\Delta t} \tag{۹-App.۱}$$

$$[Y_{i+۱}^{j+۱}-Y_{i-۱}^{j+۱}+Y_{i+۱}^{j}-Y_{i-۱}^{j}]=\frac{۴\Delta x}{k}q^{j-۱}+\frac{۴\tau\Delta x}{k\Delta t}\frac{q^{j}-q^{j-۱}}{\Delta t} \tag{۱۰-App.۱}$$

با در نظر گرفتن $\lambda_2=\frac{۴\tau\Delta x}{k\Delta t}$ و $\lambda_1=\frac{۴\Delta x}{k}$ معادله فوق بصورت زیر ساده سازی می‌شود:

$$[Y_{i+۱}^{j+۱}-Y_{i-۱}^{j+۱}+Y_{i+۱}^{j}-Y_{i-۱}^{j}]=\lambda_1 q^{j-۱}+\lambda_2(q^{j}-q^{j-۱}) \tag{۱۱-App.۱}$$

پس از مرتب سازی برای $Y^{j+۱}$:

$$Y_{i+۱}^{j+۱}-Y_{i-۱}^{j+۱}=-Y_{i+۱}^{j}+Y_{i-۱}^{j}+\lambda_1 q^{j-۱}+\lambda_2(q^{j}-q^{j-۱}) \tag{۱۲-App.۱}$$

لذا سطر آخر ماتریس B برابر با سمت راست معادله فوق و سطر آخر ماتریس A برابر
$[۰\ \ \cdots\ \ -۱\ \ ۰\ \ ۱]$ خواهد بود.

از شرط مرزی $d-۱-۵$ یعنی برای $x=۰$ داریم:

$$\frac{\partial Y(۰,t)}{\partial x}=۰ \tag{۱۳-App.۱}$$

مطابق آنچه پیش از این گفته شد:

$$\frac{۱}{۲}[\frac{Y_{i+۱}^{j+۱}-Y_{i-۱}^{j+۱}}{۲\Delta x}+\frac{Y_{i+۱}^{j}-Y_{i-۱}^{j}}{۲\Delta x}]=۰ \tag{۱۴-App.۱}$$

$$Y_{i+۱}^{j+۱}-Y_{i-۱}^{j+۱}=-Y_{i+۱}^{j}+Y_{i-۱}^{j} \tag{۱۵-App.۱}$$

لذا سطر اول ماتریس B برابر با سمت راست معادله فوق و سطر اول ماتریس A برابر
$[-۱\ \ ۱\ \ \ldots\ \ ۰]$ خواهد بود.

لذا ماتریس های A و B بصورت زیر خواهند بود:

$$A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ & \ldots & & ۰ \\ \vdots & ۱ & -(۲+\lambda+\gamma) & ۱ & \vdots \\ ۰ & \ldots & -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \tag{۱۶-App.۱}$$

$$B = \begin{bmatrix} -Y_{i+١}^{j} + Y_{i-١}^{j} \\ \vdots \\ -Y_{i+١}^{j} + ٢Y_{i}^{j} - Y_{i-١}^{j} + \lambda\left[-٢Y_{i}^{j} + Y_{i}^{j-١}\right] - \gamma Y_{i}^{j} \\ \vdots \\ = -Y_{i+١}^{j} + Y_{i-١}^{j} + \lambda_1 q^{j-١} + \lambda_2 (q^{j} - q^{j-١}) \end{bmatrix} \qquad (١٧\text{-App.}١)$$

منابع و مراجع

[١] J. Lin, "The non-fourier effect on the fin performance under periodic thermal conditions," *Applied mathematical modeling,* vol. ٢٢, pp. ٦٢٩-٦٤٠, ١٩٩٨.

[٢] C. Cattaneo, "A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation," *Comput rendus,* vol. ٢٤٧, pp. ٤٣١-٤٣٣, ١٩٥٨.

[٣] P. Vernotte, "Lesparadoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur," *Compute rendus,* vol. ٢٤٦, pp. ٣١٥٤-٣١٥٥, ١٩٥٨.

[٤] Quaresma, J.N.N., Macedo, E.N., Barbosa Da Cruz, N.G., "Hybrid solution in hyperbolic heat conduction," *Proceeding of the ٣ed International Conference on Computational Heat and Mass Transfer federal university of Rio de Janerio Brazil,* vol. October , pp. ٢٢-٢٦, ٢٠٠٢.

[٥] Anisimov,S I., Kapeliovich, B.L., and Perel'man, T. L., "ElectronEmission from metal surface exposed to ultra short laser pulse," *Sov. phys. JETP,* vol. ٣٩, pp. ٣٧٥-٣٧٧, ١٩٧٤.

[٦] Guyer, R.A., and Krumhansl, J.A., "Solution of the linearized boltzmann equation," *Physical review,* vol. ١٤٨, pp. ٧٦٦-٧٧٨, ١٩٦٦.

[٧] A. Majumdar, "Role of fractal geometry in the study of thermal phenomena," *Annual review of heat transfer,* vol. IV, pp. ٥١-١١٠, ١٩٩٢.

[٨] Fourier, D., and Boccara, A.C., "Heterogeneousmedia and rough surface: A fractal approach for heat diffusion studies," *Physica A,* vol. ١٥٧, pp. ٥٨٧-٥٩٢, ١٩٨٩.

[٩] Joseph, D.D. and Preziosi, L., "Addendum paper heat waves," *Review of moder physics,* vol. ٦٢, pp. ٣٧٥-٣٩١, ١٩٩٠.

[١٠] Joseph, D.D. and Perziosi, L., "Heat waves," *Review of modern physics,* vol. ٦١, pp. ٤١-٧٣, ١٩٨٩.

[١١] Gurtin, M.E., and Pipkin, A.C, "A general theory of heat conduction with finite wave speeds," *Arch. Rat. Mech. Anal.,* vol. ٣٣, pp. ١١٣-١٢٦, ١٩٦٨.

[١٢] D. Tzou, Macro-to-micro scale heat transfer,the lagging behavior, Washington D.C: Taylor and Francis, ١٩٩٦.

[١٣] D. Tzou, "The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating," *Internation journal of heat and mass transfer,* vol. ٣٨, pp. ٣٢٣١-٣٢٤٠, ١٩٩٥.

[١٤] V. Peshkov, "Determination of the velocity of propagation of the second sound in Helium II," *Journal of physics USSR,* vol. ١٠, pp. ٣٨٩-٣٩٨, ١٩٤٦.

[١٥] Jackson, H.E., and Walker, C.T., "Thermal conductivity, Second sound, and phonon phonon interaction in NaF," *Phys rev,* vol. ٣, pp. ١٤٢٨-١٤٣٩, ١٩٧١.

[١٦] Narayanamurty, V., Dynes, R.C., "Observation of second sound in bismuth," *Phys. Rev. Lett.,* vol. ٢٨, pp. ١٤٦١-١٤٦٤, ١٩٧٢.

[١٧] F. Jiang, "Solution and analysis of hyperbolic heat propagation in hollow spherical objects," *Heat and Mass transfer,* vol. ٤٢, pp. ١٠٨٣-١٠٩١, ٢٠٠٦.

[١٨] W. Kaminiski, "Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non homogeneous inner structure," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ١١٢, pp. ٥٥٥-٥٦٠, ١٩٩٠.

[١٩] Mitra, K., Kumar, S., Vedavarz, S., Moallemi, M.K., "Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat," *ASME journal of heat transfer,* vol. ١١٧, pp. ٥٦٨-٥٧٣, ١٩٩٥.

[٢٠] Grassmann, A., Peters, F., "Experimental investigation of heat conduction in wet sand," *Heat and Mass transfer,* vol. ٣٥, pp. ٢٨٩-٢٩٤, ١٩٩٩.

[٢١] Herwig, H., Beckert, K., "Experimental evidence about the controversy concerning fourier or non-fourier heat conduction in materials with the nonhomogeneous inner structur," *Heat and Mass transfer,* vol. ٣٦, pp. ٣٨٧-٣٩٢, ٢٠٠٢.

[٢٢] Roetzel, W., Putra, N., Das, S.k., "Experimental and analysis for non-fourier conduction in material with non-homogeneous inner structur," *Int. J.Termal Sci,* vol. ٤٢, pp. ٥٤١-٥٥٢, ٢٠٠٣.

[٢٣] Banerjee, A., Ogale, A., Das, C., Mitra, K., Subramanian, C., "Temperature distribution in different materials due to short pulse laser irradiation," *Heat transfer and engineering ,* vol. ٢٦, no. ٨, p. ٤١, ٢٠٠٥.

[٢٤] Maurer, M.J., Thompson, H.A., "Non-fourier effects at high heat flux," *ASME journal of heat transfer, Series C,* vol. ٩٥, pp. ٢٨٤-٢٨٦, ١٩٧٣.

[٢٥] R. Sahoo, "Propagation of thermal waves with lateral heat transfer," *Heat transfer,* vol. ٣٤, pp. ٢٠٣-٢١٢, ١٩٩٤.

[٢٦] Glass, D.E., Ozisik, M.N., Mcrae, D.S., and Vick, B., "Hyperbolic heat conduction with temperature-dependent thermal conductivity," *J. Appl. Phys.,* vol. ٥٩, pp. ١٨٦١-١٨٦٥, ١٩٨٦.

[٢٧] Gembarovic, J., Majernic, V., "Non-fourier propagation of heat pulses in finite medium," *Int. j. Heat and Mass transfer,* vol. ٣١(٥), pp. ١٠٧٣-١٠٨٠, ١٩٨٨.

[٢٨] L. Malinowski, "A relaxation model for heat conduction and generation," *J. Phys. D: Appl.,* vol. ٢٦, pp. ١١٧٦-١١٨٠, ١٩٩٣.

[٢٩] A. Barletta, "Hyperbolic propagation of an axisymetric thermal signal in an infinite solid medium," *Int. J. Heat Mass transfer,* vol. ٣٩(١٥), pp. ٣٢٦١-٣٢٧١, ١٩٩٦.

[٣٠] Lewandowska, M., Malinowsky, L., "An analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for the case of a finite medium symmetrically heated on both sides," *Int. Commun. Heat Mass transf.,* vol. ٣٣, pp. ٦١-٦٩, ٢٠٠٦.

[٣١] Torabi, M., Saedodin, S., "Analytical and Numerical Solutions of Hyperbolic heat Conduction in Cylindrical Coordinates," *Journal of thermophysics and heat transfer,* Vols. ٢٥, No. ٢, pp. ٢٣٩-٢٥٣, ٢٠١١.

[٣٢] Torabi, M., saedodinS., "Analytical solution of non-Fourier heat conduction in a cuboid solid under space-dependent heat flux boundary condition," in *International symposium series on tools and methods of competitiv engineering TMCE*, ٢٠١٠.

[٣٣] R. Shirmohammadi, "Temprature transient in spherical medium irradiated by laser pulse," *Int. Commun. Heat Mass transfer,* vol. ٣٥, pp. ١٠١٧-١٠٢٣, ٢٠٠٨.

[٣٤] A. Moosaie, "Axisymmetric non-fourier temperature field in a hollow sphere," *Arch. Appl. Mech.,* vol. ٧٩, pp. ٦٧٩-٦٩٤, ٢٠٠٩.

[٣٥] P. Antaki, "Solution for non-fourier dual phase lag heat conduction in a semi-infinite slab with surface heat flux," *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. ٤١, pp. ٢٢٥٣-٢٢٥٨, ١٩٩٨.

[٣٦] Tang, D.W., Araki, N., "Wavy, Wavelike, Diffusive thermal responses of finite rigid slabs to high-speed heating of laser-pulses," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ٢٥, pp. ٨٥٥-٨٦٠, ١٩٩٩.

[٣٧] Brorson, S.D., fujimoto, J.G., Ippen, E.P, "Femtosecond electron heat-transport dynamics in thin gold film," *Phys. Rev. Lett,* vol. ٥٩, pp. ١٩٦٢-١٩٦٥, ١٩٨٧.

[٣٨] Ackerman, C.C., Guyer, R.A., "Temperature pulses in dielectric solids," *Annals of phys,* vol. ٥٠, pp. ١٢٨-١٨٥, ١٩٦٨.

[٣٩] Ordonez-Miranda, J., Alvarado-Gil, J.J., "Exact solution of the dual-ohase-lag heat conduction model for a one-dimentional system excited with a periodic heat Source," *Mech Res Commun,* vol. ٣٧, pp. ٢٧٦-٢٨١, ٢٠١٠.

[٤٠] Carey, G.F., tai, M., "Hyperbolic heat transfer with reflection," *Numerical heat transfer,* vol. ٥, pp. ٣٠٩-٣٢٧, ١٩٨٢.

[٤١] Han-Taw, C., Jae-Yuh, L, "Numerical analysis for hyperbolic heat onduction," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ٣٦, pp. ٢٨٩١-٢٨٩٨, ١٩٩٣.

[٤٢] Chen, H.T., Lin, J.Y., "Analysis of two-dimensional hyperbolic heat conduction problems," *Int. J. Heat Mass transfer,* vol. ٣٧, pp. ١٥٣-١٦٤, ١٩٩٤.

[٤٣] Tsai, C.S., Hung, C.I., "Thermal wave propagation in a bi-layered composite sphere due to sudden temperature change on the outer surface," *Int. J. Heat Mass transfer,* vol. ٤٦, pp. ٥١٣٧-٥١٤٤, ٢٠٠٣.

[٤٤] J. Liu, "Preliminary survey on the mechanism of the wave-like behaviors of heat transfer in living tissues," *Forschung im ingenieurwesen,* vol. ٦٦, pp. ١-١٠, ٢٠٠٠.

[٤٥] Lam, T.T., Yeung, W.K., "A numerical scheme for non-fourier heat conduction, part II: Two-dimensional problem formulation and verification," *Numerical heat transfer, Part B,* vol. ٤١, pp. ٥٤٣-٥٦٤, ٢٠٠٢.

[٤٦] Shen, W., Han, S., "A numerical solution of two-dimentional hyperbolic heat conduction with nonlinear boundary condition," *Heat and Mass transfer journal,* vol. ٣٩, pp. ٤٩٩-٥٠٧, ٢٠٠٣.

[٤٧] Li, J., Cheng, P., Peterson, G.P., Xu, J.Z., "Rapid transient heat conduction in multi layer material with pulsed heating boundary," *Numerical heat transfer -A,* vol. ٤٧, ٢٠٠٥.

[٤٨] Wu, W., Li, X., "Application of the time discontibuous galerkin finite element method to heat wave simulation," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ٤٩, no. ٩-١٠, pp. ١٦٧٩-١٦٨٤, ٢٠٠٦.

[٤٩] Tsai, C.S., Lin, Y.C., C.I. Hung, "A study on the non-fourier effects in spherical media due to sudden temperature change on the surfaces," *Heat Mass transfer,* vol. ٤١, pp. ٧٠٩-٧١٦, ٢٠٠٥.

[٥٠] Atefi, G., Moosaie, A., "A comparativa study on various time integration schemes for heat wave simulation," *Computational mechanics,* vol. ٤٣, pp. ٦٤١-٦٤٩, ٢٠٠٩.

[٥١] Chen, C.C., Chen, T.M., "Numerical solution for the hyperbolic heat conduction problems in the radial-spherical coordinate system using a hybrid green's function method," *International journal of thermal sciences ,* vol. ٤٩, pp. ١١٩٣-١١٩٦, ٢٠١٠.

[٥٢] M. Honner, "Heat wave simulation," *Comput. Math. Appl.,* vol. ٣٨, pp. ٢٣٣-٢٤٣, ١٩٩٩.

[٥٣] Zhang, J., Zhao, J.J., "Unconditional stable finite difference scheme and iterative solution of ٢D microscale heat transport equation," *Journal of computational physics,* vol. ١٧٠, pp. ٢٦١-٢٧٥, ٢٠٠١.

[٥٤] Tzou, D.Y., Chiu, K.S., "Temperature-dependent thermal lagging in ultrafast laser heating," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ٤٤, pp. ١٧٢٥-١٧٣٤, ٢٠٠١.

[٥٥] Dai, W., Nassar, R., "A finite difference method for solving the heat transport equation at the microscale," *Numer. Methods partial differentialequation,* vol. ١٥, pp. ٦٩٨-٧٠٨, ١٩٩٩.

[٥٦] Dai, W., Nassar, R., "A compact finite difference scheme for solving a one-dimentional heat transport equation at the micro-scale," *Journal of computational and applied mathematics,* vol. ١٣٢, pp. ٤٣١-٤٤١, ٢٠٠١.

[٥٧] Dai, W., Nassar, R., "A finite difference scheme for solving a three dimensional heat transport equation in thin film with micro-scale thickness," *International journal for numerical methods in engineering,* vol. ٥٠, pp. ١٦٦٥-١٦٨٠, ٢٠٠١.

[٥٨] Dai, W., Shen, L., Nassar, R.,Zhu, T., "A stable and convergent tree-level finite difference scheme for solving a dual-phase-lagging heat transport equation in spherical coordinates," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ٣٥, pp. ٤٤٧-٤٦٢, ٢٠٠٤.

[٥٩] Ho, J.R., Kuo, C.P., Jiang, W.S., "Study of heat transfer in multilayered structure within the framework of dual-phase-lag heat conduction model using lattice boltzmann method," *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. ٤٦, pp. ٥٥-٦٩, ٢٠٠٣.

[٦٠] Han, P., Tang, D.W., Zhou, L.P, "Numerical analysis of two-dimensional lagging thermal behavior under short-pulse-laser heating on surface," *Int. J. Eng. Sci.,* vol. ٤٤, pp. ١٥١٠-١٥١٩, ٢٠٠٦.

[٦١] Shen,B., Zhang, P., "Notable physical anomalies manifested in non-fourier heat conduction under the dual-phase-lag model," *International journal of heat and mass transfer ,* vol. ٥١, pp. ١٧١٣-١٧٢٧, ٢٠٠٨.

[٦٢] K. Ramadan, "Semi-analytical solution for the dual phase lag heat conduction in multilayered media," *International journal of thermal sciences,* vol. ٤٨(١), pp. ١٤-٢٥, ٢٠٠٩.

[٦٣] Xu, F., Seffen, K.A., Liu, T.J., "Non-fourier analysis of skin biothermomechanics," *International Journal of heat and mass transfer ,* vol. ٥١, pp. ٢٢٣٧-٢٢٥٩, ٢٠٠٨.

[٦٤] Jaunich, M., Raje, S., Ki, K., Mitra, K., Guo, Z., "Bioheat transfer analysis during short pulse laser irradiation of tissue," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ٥١, no. ٢٣-٢٤, pp. ٥٥١١-٥٥٢١, ٢٠٠٨.

[٦٥] Liu, K.C., Chen, H.T., , "Analysis for dual-phase-lag bio-heat transfer during magnetic hyperthermia treatment," *Int. J . Heat Mass Transf.,* vol. ٥٢, pp. ١١٨٧-١١٩٢, ٢٠٠٩.

[٦٦] P. Antaki, "New interpretation of non-fourier heat conduction in processed meat," *ASME J.Heat transfer,* vol. ١٢٧, pp. ١٨٩-١٩٣, ٢٠٠٥.

[٦٧] Liu, K.C., Chen, H.T., "Investigation for the dual phase lag behavior of bio-heat transfer," *International journal of thermal sciences,* vol. ٤٩, pp. ١١٣٨-١١٤٦, ٢٠١٠.

[٦٨] Zhou, J., Chen, J.K., Zhang, Y., "Dual-phase lag effects on thermal damage to biological tissues caused by laser irradiation," *Computers in biology and medicine,* vol. ٣٩, pp. ٢٨٦-٢٩٣, ٢٠٠٩.

[٦٩] Zhou, J., Zhang, Y., ChenJ.K., "An axisymmetric dual-phase-lag bioheat model for laser heating of living tissues," *Int. J. Thermal Sci.,* vol. ٤٨, pp. ١٤٧٧-١٤٨٥, ٢٠٠٩.

[٧٠] N. Shumakov, "A Method for Experimental Study of the Process of Heating in Solid Body," *Soviet Physics Technical Physics,* vol. ٢, pp. ٧٧١-٧٨١, ١٩٥٧.

[٧١] G. Stolz, "Numerical solutions to an inverse problem of heat conduc-tion for simple shapes," *ASME Journal of Heat Transfer ,* vol. ٨٨, pp. ٢٠-٢٦, ١٩٦٠.

[۷۲] T. Mirsepassi, "Heat-Transfer Charts for Time-Variable Boundary Conditions," *British Chemical Engineering,* vol. ٤, pp. ۱۳۰-۱۳٦, ۱۹٥۹.

[۷۳] T. Mirsepassi, "Graphical Evaluation of a Convolution Integral," *Mathematical Tables Other Aides Computation,* vol. ۱۳ , pp. ۲۰۲-۲۱۲, ۱۹٥۹ .

[۷٤] J. V. Beck, "Criteria for Comparison of Methods of Solution of the Inverse Heat Conduction Problems," *Nucl. Eng. Design,* vol. ٥۳, pp. ۱۱-۲۲, ۱۹۷۹.

[۷٥] Beck, J.V., Blackwell, B., St.Clair, C.R., Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, New York: Wiley Interscience, ۱۹۸٥.

[۷٦] X. Xiang, *Improvement of heat flux and heat conductance estimation with application to metal casting,* in Mechanical Engineering Department, Mississippi state university: Mississippi, ۲۰۰۳.

[۷۷] Shidfar, A., G.R. Karamali, and J. Damirchi, "An Inverse Heat Conduction Problem with a Nonlinear Source Term," *Nonlinear Analysis,* vol. ٦٥, pp. ٦۱٥-٦۲۱., ۲۰۰٦.

[۷۸] D. Marquardt, "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters," *J. Soc. Ind. Appl. Math,* vol. ۱۱, pp. ٤۳۱-٤٤۱, ۱۹٦۳.

[۷۹] M. N. Ozisik., H. R. B. Orlande, Inverse Heat Transfer-Fundamentals and Applications, New York: Taylor & Fransic, ۲۰۰۰.

[۸۰] Park, H.M., O.Y. Chung, "Comparison of Various Conjugate Gradient Methods for Inverse Heat Transfer Problems," *Chemical Engineering Communications,* vol. ۱۷٦(۱), pp. ۲۰۱ - ۲۲۸, ۱۹۹۹.

[۸۱] Jarny, Y., M.N. Ozisik and J.P. Bardon, "A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* vol. ۳٤, pp. ۳۳۸۷-۳٤۰۸, ۱۹۹۱.

[۸۲] Huang, C.-H., S.-P. Wang, "A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method," *International Journal of Heat and Mass Transfer,* vol. ٤۲(۱۸) , pp. ۳۳۸۷-۳٤۰۳, ۱۹۹۹.

[۸۳] Kowsary, F., Behbahaninia, A. and Pourshaghaghy, A., "Transient heat flux function estimation utilizing the variable metric method," *International Communications in Heat and Mass Transfer,* vol. ۳۳(٦), pp. ۸۰۰-۸۱۰, ۲۰۰٦.

[۸٤] Kowsary, F., K. Pooladvand, and A. Pourshaghaghy, "Regularized variable metric method versus the conjugate gradient method in solution of radiative boundary design problem," *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer,* vol. ۱۰۸(۲), pp. ۲۷۷-۲۹٤., ۲۰۰۷.

[۸٥] محمدیون، محمد، حمید محمدیون، و حسین مولوی" ,استفاده از روش گرادیان مزدوج با مسئله الحاقی برای حل مسأله هدایت حرارتی معکوس in" ,*هفتمین همایش انجمن هوافضای ایران* ,تهران ,۱۳۸٦ .

[۸٦] " استفاده از روش گرادیان مزدوج با مساله الحاقی جهت تخمین شار حرارتی دیواره سیلندر در یک موتور احتراق داخلی," in *ششمین همایش موتورهای درونسوز*, تهران, ۱۳۸۸.

[۸۷] "تخمین شار حرارتی عبوری از گلوگاه نازل موتور موشک به روش گرادیان مزدوج با مساله الحاقی," in *ششمین کنفرانس سالانه دانشجویی مهندسی مکانیک*, تهران, ۱۳۸۷.

[۸۸] Haw-Long Lee, Tien-Hsing Lai, Wen-Lih Chen, Yu-Ching Yang, "An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux of a living skin tissue," *Applied Mathematical Modelling,* vol. ۳۷, no. ٥, pp. ۲٦۳۰-۲٦٤, ۲۰۱۳.

[۸۹] Cheng-Hung Huang and Hsin-Hsien Wu, "An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux by the conjugate gradient method," *Phys. D: Appl. Phys,* vol. ۳۹, p. ٤۰۸۷, ۲۰۰٦.

[۹۰] C.-H. Huang, C.-C. Tsai, "An inverse heat conduction problem of estimating boundary fluxes in an irregular domain with conjugate gradient method," *eat and Mass Transfer,* vol. ۳٤, no. ۱, pp. ٤۷-٥٤, ۱۹۹۸.

[۹۱] M. Chy, "A Conjugate Gradient Method for the Solution of the Inverse Heating Problem in Thermoforming," in *Industry Applications Society Annual Meeting (IAS)*, Houston, TX, ۲۰۱۰.

[۹۲] H. Zhenghong, "The Study on the Inverse Problems for Non-Fourier Heat Conduction Equation (I) (II) (III)," National Science Council.

[۹۳] ع. ن. ع., *کنترل سطح مشترک جامد-مایع در فرایند انجماد با استفاده از روش های انتقال حرارت معکوس,* دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود, ۱۳۸۹.

[۹٤] س. ع., *شبیه سازی فرایندهای انجماد فلزات با استفاده از روش انتقال حرارت معکوس به منظور تخمین ضریب انتقال حرارت رسانشی مشترک*, دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود, ۱۳۸٦.

[۹٥] پ. ع, *حل مسائل انتقال حرارت معکوس با استفاده از روش میزان متغیر (Variable Metric Method),* دانشکده مکانیک، دانشگاه تهران, ۱۳۸۹.

[۹٦] ج. ق. م., *استفاده از روش متریک متغیر برای حل مسائل معکوس حرارتی در انجماد فلزات,* دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود, ۱۳۸۹.

[۹۷] Tikhonov, A.N. and V.Y. Arsenin, Solution of Ill-Posed Problems, Washington DC: Winston & Sons., ۱۹۷۷.

[۹۸] ۰. M. Alifanov, "Solution of an Inverse Problem of Heat-Conduction by Iterative Methods," *J Eng. Phys.,* vol. ۲٦, pp. ٤۷۱-٤۷٦, ۱۹۷٤.

[۹۹] Matsevityi, Y.M. and Multanoviskii, A.V., "Pointwise Identification of Thermophysical Characteristics," *J. Eng. Phys.,* vol. ٤۹(٦), pp. ۱۳۹۲-۱۳۹۷, ۱۹۸٦.

[۱۰۰] D. Goldberg, Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning,, MA: Addison Wesley, Reading, ۱۹۸۹.

[١٠١] Beck, J. V. and Arnold, K. J., Parameter Estimation in Engineering and Science, New York: Wiley Interscience, ١٩٧٧.

[١٠٢] K. Levenberg, "A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares," *Quart. Appl. Math.,* vol. ٢, pp. ١٦٤-١٦٨, ١٩٤٤.

[١٠٣] D. Marquardt, "An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters," *J. Soc. Ind. Appl. Math,* vol. ١١, pp. ٤٣١-٤٤١, ١٩٦٣.

[١٠٤] M. Ozisik, Heat Conduction, ٢nd ed., New York: Wiley, ١٩٩٣.

[١٠٥] M. R. a. S. E. Hestenes, "Methods of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems," *J Res. NBS,* vol. ٤٩, pp. ٤٠٩-٤٣٦, ١٩٥٢.

[١٠٦] Jamy, Y., Ozisik, M. N. and Bardon J. P., "A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction," *Int. J Heat and Mass Transfer,* vol. ٣٤, pp. ٢٩١١-٢٩١٩, ١٩٩١.

[١٠٧] F. S. Beckman, "The Solution of Linear Equation by Conjugate Gradient Method," in *Mathematical Methods for Digital Computer*, A. R. a. H. S. Wilf(eds.), Ed., New York, Wiley, ١٩٦٠.

[١٠٨] Mitra, K., Kumar, S., Vedavarez, S., Moallemi, M.K., "Experimental evidence of hyperbolic heat conduction in processed meat," *ASME journal of heat transfer,* vol. ١١٧, pp. ٥٦٨-٥٧٣, ١٩٩٥.

[١٠٩] Cimmelli, V.A., Frischmuth, K., "Hyperbolic heat conduction at cryogenic temperatures," *Reniconti del circolo matematico di palermo , II,* vol. ٤٥, pp. ١٣٧-١٤٥, ١٩٩٦.

[١١٠] J. Maxwell, "On the dynamic theory of gases," *philosophical transaction R. Soc. lonson,* vol. ١٥٧, pp. ٤٩-٨٨, ١٨٦٧.

[١١١] Morse, P.M., Fechbach, H., Methods of thorical physics, New York: McGrew-Hill, ١٩٥٣, p. ٨٦٥.

[١١٢] Qiu, T.Q., Tien, C.L., "Short-pulse laser heating on metals," *International journals of heat and mass transfer,* vol. ٣٥, pp. ٧١٩-٧٢٦, ١٩٩٢.

[١١٣] Qiu, T.Q., Tien, C.L., "Heat transfer mechanism during short-pulse laser heating of metals," *ASME journal of heat transfer,* vol. ١١٥, pp. ٨٣٥-٨٤١, ١٩٩٣.

[١١٤] D. Tzou, "The generalized lagging response in small-scale and high-rate heating," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ٣٨, pp. ٣٢٣١-٣٢٤٠, ١٩٩٥.

[١١٥] A. D.Polyanin, Handbook of linear partial differential equations for engineering and scientists, Chapman & Hall, ١٩٩١.

[١١٦] Lin, J.Y., Chen, H.T, "Numerical analysis for hyperbolic heat conduction," *Int.J.Heat and Mass Transfer,* vol. ٣٦, pp. ٢٨٩١-٢٨٩٨, ١٩٩٣.

[١١٧] P. Antaki, "Analysis of hyperbolic heat conduction in a semi infinite slab with surface convection," *Int. J. Heat and Mass transfer,* vol. ٤٠, pp. ٣٢٤٧-٣٢٥٠, ١٩٩٧.

[١١٨] Glass, D.E., Ozisik, M.N. , "Hyperbolic heat conduction with surface radiation," *Int .J. Heat and Mass Transfer,* vol. ٢٨, pp. ١٨٢٣-١٨٣٠, ١٩٨٥.

[١١٩] J. Lin, "The nonfourier effect on the fin performance under periodic thermal conditions," *Applied mathematical modeling,* vol. ٢٢, pp. ٦٢٩-٦٤٠, ١٩٩٨.

[١٢٠] Osman, A.M., Dowding, K. J. and Beck, J. V., "Numerical Solution of the General Two-dimensional Inverse Heat Conduction Problem," *ASME J. Heat Transfer,* vol. ١١٩, pp. ٣٨-٤٤, ١٩٩٧.

[١٢١] ٠. M. a. M. V. V. Alifanov, "Detennining Thennal Loads from the Data of Temperature Measurements in a Solid," *High Temperature,* vol. ٢١(٥), pp. ٧٢٤-٧٣٠, ١٩٨٣.

[١٢٢] Ozisik, M.N., Tzou, D.Y, "On the wave theory in heat conduction," *ASME J. Heat Transfer,* vol. ١١٦ , p. ٥٢٦–٣٥, ١٩٩٤.

[١٢٣] Sadd ،M.H. ،Cha ،C.Y., "Axisymmetric non-Fourier temperature in cylindrically bounded domains," *Int. J.Nonlinear Mech,* vol. ١٧ , p. ١٢٩–٣٦, ١٩٨٢ .

[١٢٤] Barletta ،A. ،Zanchini ،E., "A thermal potential formulation of hyperbolic heat conduction," *ASME J. Heat Transfer. ,* vol. ١٢١ , p. ١٦٦–١٦٩, ١٩٩٩.

[١٢٥] Lin, J.Y., Chen, H.T., "Numerical solution of hyperbolic heat conduction in cylindrical and spherical systems," *Appl. Math. Modelling,* vol. ١٨, p. ٣٨٤–٣٩٠, ١٩٩٤.

[١٢٦] Chen, H.T., Liu, K.C., "Analysis of non-Fickian diffusion problem in a composite medium," *Comput. Phys. Commun.,* vol. ١٥٠, p. ٣١–٤٢, ٢٠٠٣.

[١٢٧] Chen, H.T., Chang, S.M. , "Application of the hybrid method to inverse heat-conduction problem," *Int. J. Heat Mass Transfer ,* vol. ٣٣ , p. ٦٢١–٦٢٨, ١٩٩٠.

[١٢٨] H. L. S. W. H. F. L. Chen, "Estimation of surface temperature in two-dimensional inverse heat conduction problems," *Int. J. Heat and Mass Transfer,* vol. ٤٤, p. ١٤٥٥–١٤٦٣, ٢٠٠١.

[١٢٩] Chen, H.T., Peng, S.Y., Yang, P.C., Fang, L.C., "Numerical method for hyperbolic inverse heat conduction problems," *Int. Commun. Heat Mass Transfer,* vol. ٢٨, p. ٨٤٧–٨٥٦, ٢٠٠١.

[١٣٠] Y. C. Y., "Direct and inverse solutions of hyperbolic heat conduction problems," *J. Thermophys. Heat Transfer,* p. ١٩٢١٧–١٩٢٢٥, ٢٠٠٥.

[١٣١] H. C. H. a. C. C. W, "A boundary element based inverse-problem in estimating transient boundary conditions with conjugate gradient method," *Int. J. Numer. Methods Engineering. ,* vol. ٤٢ , p. ٩٤٣–٩٦٥, ١٩٩٨ .

[١٣٢] H. C. H. a. W. S. P, "A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method," *Int. J. Heat Mass Transfer ,* vol. ٤٢ , p. ٣٣٨٧–٣٤٠٣, ١٩٩٩ .

[١٣٣] C. C. W. Huang, "A three-dimensional inverse forced convection problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method," *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. ٤٣ , p. ٣١٧١–٣١٨١, ٢٠٠٠ .

[١٣٤] C. C. S. Huang, "A two-dimensional inverse problem in imaging the thermal conductivity of a non-homogeneous medium," *Int. J. Heat Mass Transfer ,* vol. ٤٣ , p. ٤٠٦١–٤٠٧١, ٢٠٠٠ .

[١٣٥] C. Huang, "A nonlinear inverse vibration problem of estimating the external forces for a system with displacement-dependent parameters," *J. Sound Vib. ,* vol. ٢٤٨ , p. ٧٨٩–٨٠٧, ٢٠٠١.

[١٣٦] O. Alifanov, Inverse heat transfer problems, Berlin: Springer, ١٩٩٤.

[١٣٧] Lasdon, L.S., Mitter, S.K., Warren, A.D. , "The conjugate gradient method for optimal control problem," *IEEE Trans. Automat. Control ,* Vols. AC-١٢, p. ١٣٢–١٣٨, ١٩٦٧ .

[١٣٨] O. Alifanov, Inverse Heat Transfer Problems, New York: Springer-Verlag, ١٩٩٤.

[١٣٩] "Wikipedia, the free encyclopedia," [Online]. Available: http://en.wikipedia.org/wiki/Crank–Nicolson٪٢٠method٪٢٠-٪٢٠Wikipedia,٪٢٠the٪٢٠free٪٢٠encyclopedia.htm.

[١٤٠] BANERJEE, A., OGALE,A.A., DAS,C., MITRA, K., SUBRAMANIAN, C., "Temperature Distribution in Different Materials Due to Short Pulse Laser Irradiation," *Taylor and Francis Inc.,* vol. ٢٦(٨), p. ٤١–٤٩, ٢٠٠٥.

[١٤١] W. Kaminki, "Hyperbolic heat conduction equation for materials with a non homogeneous inner structure," *International journal of heat and mass transfer,* vol. ١١٢, pp. ٥٥٥-٥٦٠, ١٩٩٠.

[١٤٢] Maurer, M.J., Thompson, H.A., "Non-fourier effects at high heat flux," *ASME journal of heat transfer,* vol. ٩٥, no. Series C, pp. ٢٨٤-٢٨٦, ١٩٧٣.

[١٤٣] Joao N.N. Quaresma, Emanuel N. Macedo, Ntonio G. Barbosa Da Cruz, "Hybrid solution in hyperbolic heat conduction," in *Proceeding of the ٣'ed International Conference on Computational Heat and Mass Transfer federal university of Rio de Janerio Brazil*, October ٢٠٠٢, pp. ٢٢-٢٦.

[١٤٤] J. W. Daniel, The Approximate Minimization ofFunctionals, Englewood Cliffs: Prentice-Hall Inc, ١٩٧١.

[١٤٥] Fletcher, R. and Reeves C. M., "Function Minimization by Conjugate Gradients," ,," *Computer J.,* vol. ١٩٦٤, pp. ١٤٩-١٥٤, ٧.

[١٤٦] Kammerer, W.I., Nashed, M.Z., "On the Convergence of the Conjugate Gradient Method for Singular Linear Operator Equations," *J. Num. Anal,* vol. ٩, pp. ١٦٥-١٨١, ١٩٧٢.

[١٤٧] "Math Library Version ١,٠,," in *IMSL Library Edition ١٠,٠. User's Manual*, Houston, TX, IMSL, ١٩٨٧ .

[١٤٨] M. J. Maurer, "Relaxation Model for Heat Conduction in Metals," *J. Appl. Phys,* vol. ٤٠, no. ١٣, pp. ٥١٢٣-٥١٣٠, Dec. ١٩٦٩.

[١٤٩] M. Chester, "Second Sound in Solids," *Phys. Rev,* vol. ١٣١, pp. ٢٠١٣-٢٠١٥, ١٩٦٣.

[١٥٠] Liu, J., Lu, W.Q. , "Dual reciprocity boundary element method for solving thermal wave model of bioheat transfer," *Space Medici ne & Medical Engineering,* vol. ١٠ (٦), p. ٣٩١–٣٩٥, ١٩٩٧.

[١٥١] Lu, W.Q., Liu, J., Zeng, Y., "Simulation of the thermal wave propagation in biological tissues by the dual reciprocity boundary element method," *Engineering Analysis with Boundary Elements,* vol. ٢٢ (٣), p. ١٦٧–١٧٤, ١٩٩٨.

[١٥٢] Lu, W.Q., Liu, J., Zeng, Y., "Extension of the dua l reciprocity boundary element method to simulate thermal wave propagation in biological tissue," *Journal of Engi neering Thermophysics,* vol. ١٩ (٦) , p. ٧٢٨ –٧٣١, ١٩٩٨.

[١٥٣] Ahmadikia, H., Fazlali, R., Moradi, A. , "Analytical solution of the parabolic and hyperbolic heat transfer equations with constant and transient heat flux conditions on skin tissue," *International Communications in Heat and Mass Transfer,* vol. ٣٩ , p. ١٢١–١٣٠, ٢٠١٢.

[١٥٤] H. Weyma, "Finite Speed of Propagation in Heat Conduction Diffusion and Viscous Shear Motion,," *Am. J. Phys.,* vol. ٣٥, no. ٦, pp. ٤٨٨-٤٩٦, June ١٩٦٧.

[١٥٥] V. Bubnov, "Wave Concepts in the Theory of Heat,," *Int. J. Heat Mass Transfer,,* vol. ١٩, pp. ١٧٥-١٨٤, ١٩٧٦.

[١٥٦] Luikov, A.V., Bubnov, V.A., Soloviev, I.A., "On Wave Solutions of the Heat Conduction Equation," *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. ١٩, pp. ٢٤٥-٢٤٨, ١٩٧٦.

[١٥٧] S. Sieniutycz, "The Wave Equations for Simultaneous Heat and Mass Transfer in Moving Media-Structure Testing,Time-Space Transformation and Variational Approach," *Int. J. Heat Mass-Transfer,* vol. ٢٢, pp. ٥٨٥-٥٩٨, ١٩٧٩.

[١٥٨] Morse, P.M., Feshbach, H., Methods of Theoretical Physics, New York: McGraw-Hill, ١٩٥٣, p. ٨٦٥.

[١٥٩] Liu, J., Ren, Z., Wang, C., "Interpretation of living tissue's temperatu re oscillations by thermal wave theory," *Chinese Science Bulletin,* vol. ٤٠, p. ١٤٩٣ – ١٤٩٥, ١٩٩٥.

[١٦٠] M. Maurer, "Relaxation Model for Heat Conduction in Metals," *J. Appl. Phys.,* vol. ٤٠, no. ١٣, pp. ٥١٢٣-٥١٣٠, Dec ١٩٦٠.

[١٦١] M. Chester, "Second Sound in Solids," *Phys. Rev.,* vol. ١٣١, pp. ٢٠١٣-٢٠١٥, ١٩٦٣.

[١٦٢] V. Bubnov, "Wave Concepts in the Theory of Heat," *Int. J. Heat Mass Transfer,* vol. ١٩, pp. ١٧٥-١٨٤, ١٩٧٦.

[١٦٣] V. Arpaci, Conduction Heat Transfer, Addisson Wesley Publication, ١٩٦٦.

[١٦٤] M. S. A. Abramowitz, Handbook of Mathematical Functions, New York: Dover, ١٩٧٢, p. ١٠٢٦ –١٠٢٧.

[١٦٥] Baumeister, K.J., Hamill, T.D., "Hyperbolic Heat Conduction Equations a Solution for the Semi-infinite Body Problem," *J. Heat Transfer,* vol. ٩١, pp. ٥٤٣-٥٤٨, Nov. ١٩٦٩.

Abstract

The process of heat transfer usually described by parabolic models. In some cases, when heat conductivity coefficients depend on the solution itself, the structure and properties of the solution changes significantly. If the elapsed time of heat transport process is very small the inertia starts to be important and the wave nature of the heat energy transport becomes a dominant process. For example, the physical phenomena involved in ultra-short laser pulse interactions with solids are very complex. It is shown that the classical parabolic two temperature model, which is based on Fourier's law, is not sufficiently accurate. For such cases, hyperbolic model has been suggested. Several strategies can be applied to construct numerical algorithms for finding solutions of the hyperbolic heat transport models.

If the boundary conditions (heat flux or temperature distribution) on the surface are entirely known as a function of time and location, then temperature distribution inside the object can be determined by solving the heat transfer equation. This kind of problems called Well-posed. But many practical cases of heat transfer cannot be solved directly due to unknown boundary conditions (Ill-posed). Ill-posed problems can be solved by inverse analyses. One Procedure to solve Inverse heat transfer problem (IHCP) is to derive surface heat flux and temperature distribution from temperature's change inside subject.

In this thesis IHCP are solved by applying Conjugate Gradient Method (CGM). CGM method is based on minimizing the sum of squared difference between the measured temperature and the calculated temperature. In order to demonstrate the experimental temperature, results of analytical method with adding a normal distribution are used. The method proves to be very useful and powerful especially when a direct measurement of surface heat flux and temperature is difficult to obtain, owing to several working condition. The thesis reviewed here, discussed one dimensional inverse heat conduction problem. Procedure, criteria, methods and important results of other investigation are briefly discussed. The results indicate that the method used to control the desired temperature is very efficient even when input data are disturbed. The efficiency and accuracy of such algorithms are investigated by solving test problems.

Keyword: Inverse heat transfer, IHCP, Conjugate Gradient Method, CGM, Non-fourier heat transfer

Shahrood University of Technology

Department of Mechanical Engineering

Direct and Inverse Solution of Non-Fourier Problems

Ghazal Rajabi Khorasani

Supervisor(s):

Dr. Mohammad Hassan Kayhani

Date: ۱۳۹۲