دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه طراحی کاربردی

حل تحلیلی و عددی تیر ویسکوالاستیک تحت بار دینامیکی عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اوّل با در نظر گرفتن تغییر شکل های نسبتاً بزرگ

دانشجو:

زهره ملک حسینی

استاد راهنما:

دکتر حمیدرضا ایپک چی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم زهره ملک حسینی

تحت عنوان: حل تحلیلی و عددی تیر ویسکوالاستیک تحت بار دینامیکی عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با در نظر گرفتن تغییر شکلهای نسبتاً بزرگ

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر حمیدرضا ایپک‌چی			

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر اردشیر کرمی محمدی		نام و نام خانوادگی : دکتر مجید محمدی	
نام و نام خانوادگی : دکتر مهدی قناد کهتویی			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

با تحیّت و احترام

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

به جبران قطره‌ای از دریای محبّتشان

سپاس خدای منان را که همیشه بزرگترین همراه و یاور زندگیم بوده و توفیق علم آموزی به من عنایت نموده است

فرصتی است تا تقدیر کنم از کسانی که همیشه به آنها مدیونم؛ کسانی که همیشه همراهم بوده اند و دستم را برای رسیدن به اوج گرفته اند...

از خانواده ی مهربانم که همواره پشتوانه ی من بوده اند و پیش از هر چیز مرا اندیشیدن آموخته اند و از استاد گرانمایه ام جناب آقای دکتر حمیدرضا ایپکچی که راهنمون هایشان راهتوشه ی این نوشتار بوده است کمال تشکر و قدردانی را دارم.

سپاسگزار تمام اساتیدی هستم که از دانش و بینششان بهره برده ام.

به امید آنکه بخشی از زحمات آنان را سپاس گویم.

تعهد نامه

اینجانب **زهره ملک حسینی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **مهندسی مکانیک** دانشکده **مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **حل تحلیلی و عددی تیرویسکوالاستیک تحت بار دینامیکی عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با در نظر گرفتن تغییر شکلهای نسبتاً بزرگ** تحت راهنمائی دکتر حمیدرضا ایپک‌چی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.

چکیده

در این پایان‌نامه تحلیل ریاضی و عددی تیر ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد، تحت بار دینامیکی عرضی و بار محوری ارائه شده است. در استخراج معادلات، میدان جابه‌جایی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تخمین زده می‌شود. روابط تنش-کرنش از رابطه‌ی هوک و کرنش- جابه‌جایی از رابطه‌ی فن-کارمن تبعیت می‌کنند. معادلات حاکم بر حرکت تیر، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیر خطی با مشتقات جزئی و با ضرایب ثابت هستند که به یکدیگر کوپل بوده و به کمک اصل همیلتون تعیین شده‌اند. حل تحلیلی به کمک تئوری اغتشاشات و بسط مدهای نرمال تعیین شده است. همچنین مسأله به کمک نرم‌افزار انسیس نیز تحلیل شده است.

موارد بررسی شده در این تحلیل عبارتند از: تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر، تعیین پاسخ برحسب مکان و زمان، تعیین بار کمانش، بررسی تأثیر پارامترهای هندسی و ماده‌ی ویسکوالاستیک بر روی فرکانس و پاسخ و بار کمانش، بررسی دقت تئوری مرتبه اول در تعیین پاسخ و مقایسه نتایج با حل عددی.

کلمات کلیدی:

تیر ویسکوالاستیک، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تحلیل فرکانسی، تئوری اغتشاشات، خیز نسبتاً زیاد، روش اجزای محدود

فهرست مقاله‌های مستخرج از پایان‌نامه

- Determining natural frequencies and buckling load of a viscoelastic beam with moderately large deflection using first order shear deformation theory ; Mechanics of Time Dependent Material (submitted).

- Response determination of a viscoelastic beam with moderately large deflection under transverse dynamic load using first order shear deformation ; Engineering Mechanics, ASCE; (submitted).

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

علائم و اختصارات

انرژی جنبشی	T
انرژی کرنشی	U
بار عرضی گسترده	Q
بار محوری	P
پارامتر بی‌بعد کوچک	ε
پهنا	b
تنش‌های برشی	$\tau_{zy},\tau_{zx},\tau_{yx}$
تنش‌های نرمال	$\sigma_z,\sigma_y,\sigma_x$
توابع مجهول با بعد چرخش	u_1,w_1
چگالی	ρ
چگالی انرژی جنبشی	T^*
چگالی انرژی کرنشی	U^*
زمان رهایش	τ_i
ضریب پواسون	ν
ضریب تصحیح برشی	κ
ضریب ویسکوزیته	η
طول تیر	l
عمق تیر	h
فرکانس طبیعی	ω
کار انجام شده توسط بار عرضی گسترده	W_Q
کرنش‌های برشی	$\Upsilon_{zy}, \Upsilon_{zx}, \Upsilon_{xy},$
کرنش‌های نرمال	$\varepsilon_z,\varepsilon_x,\varepsilon_y$
ماتریس‌های ضرایب	$[B_i]$
مختصه‌های کارتزین	x,y,z
مدول الاستیسیته	E
مدول بالک (اتساعی)	K,K_0
مدول برشی	G_0
مدول تناسبی	α_i
مدول‌های ویسکوالاستیک	E_1,E_2
مقادیر ویژه	β_i
منتجه‌های تنش	N_x,M_x,P_x N_z,M_{xz},N_{xz}
مؤلفه‌های جابه‌جایی	u, v,w
مؤلفه‌های جابه‌جایی صفحه‌ی میانی	u_0,w_0
مؤلفه‌های کار بار محوری	W_{Px},W_{Py}
نرخ کرنش برشی	$\dot{\varepsilon}$

پیشگفتار

پایان‌نامه‌ی حاضر دارای ساختار کلی زیر است.

در فصل اول ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک و خصوصیات آنها پرداخته می‌شود. سپس معادلات بنیادین تنش-کرنش، مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک و فرضیات متداول در تحلیل تنش این مواد بیان می‌شود. در ادامه توضیح مختصری درباره‌ی اجزای سازه‌ای داده خواهد شد، سپس به معرفی سیستم‌های غیرخطی و تئوری‌های متداول در بررسی تیرها پرداخته و درنهایت مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه انجام می‌شود. در فصل دوم، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر استخراج می‌شود. این معادلات شامل مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند و به کمک اصل همیلتون تعیین می‌شوند. در فصل سوم، برای حل این معادلات، از تئوری اغتشاشات[۱] و بسط مدهای نرمال استفاده شده است. حل تحلیلی به کمک بسط مدهای نرمال انجام شده است و پاسخ و فرکانس طبیعی تیر تعیین می‌شوند. در فصل چهارم، حل عددی شامل حل مدال و حل دینامیکی مسأله‌ی مورد بررسی، ارائه خواهد شد. در فصل پنجم، به بیان نتایج مسأله پرداخته می‌شود. اثر پارامترهای مختلف مادی و هندسی بر رفتار سیستم مورد بررسی قرار خواهد گرفت. نتایج و پیشنهادها در فصل پایانی ارائه خواهد شد.

[1] Perturbatuion Theory

فصل اول

تاریخچه و مرور مقالات

۱-۱- مقدمه

جهت بررسی هر ماده‌ای آشنایی با ساختار، خصوصیات و رفتار آن، ضروری است. از این‌رو، در این فصل ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک و خصوصیات آنها پرداخته شده است. سپس معادلات بنیادین تنش-کرنش، مدل‌های رئولوژیکی مورد استفاده در مدل‌سازی مواد ویسکوالاستیک و فرضیات متداول در تحلیل تنش این مواد بیان شده است. در ادامه توضیح مختصری درباره‌ی اجزای سازه‌ای داده شده است. سپس به معرفی سیستم‌های غیرخطی و تئوری‌های متداول در بررسی تیر پرداخته و در نهایت مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه آورده شده است.

۱-۲- مواد ویسکوالاستیک

جامد الاستیک و سیال ویسکوز، دو نوع معمول از مواد ایده‌آلی می‌باشند که در حوزه‌ی مکانیک مورد بررسی قرار می‌گیرند. در جامد الاستیک، تغییر شکل بر اثر نیروی خارجی بعد از حذف نیرو قابل برگشت است؛ ولی در سیال ویسکوز، سیال تحت نیروی خارجی جریان پیدا می‌کند. پلیمرهای غیر-متبلور مانند پلاستیک‌ها و رزین‌های مصنوعی یک خصوصیات میانی بین جامد الاستیک و سیال ویسکوز را نشان می‌دهند. این شکل از مواد که هر دو خصوصیت شبه‌جامد و شبه‌سیالی را با هم دارند، ویسکوالاستیک نامیده می‌شوند. همچنین رفتار مواد متشکل از الیافی مانند ابریشم، رایون، سلولز و شیشه‌ها، سرامیک‌ها، بیومتریال[1]ها مثل پوست و ماهیچه‌ها و هم‌چنین فلزات در دماهای بالا می‌توانند با مدل‌های ویسکوالاستیک خطی مدل شوند[۱].

۱-۳- رفتار ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

رفتار بسیاری از جامدات، در کرنش‌های کوچک، با استفاده از قانون هوک در الاستیسیته‌ی خطی بیان می‌شود. برای مواد الاستیک در یک بعد، رابطه‌ی تنش σ با کرنش ε به صورت زیر است [۲].

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (۱-۱)$$

[1]Biomaterial

E مدول یانگ است که عکس کامپلینس[۱] J است $(E = \frac{1}{J})$.

برخلاف مواد الاستیک که تغییر شکل آن در اثر اعمال نیروی خارجی، بعد از حذف نیرو قابل برگشت است، یک سیال ویسکوز تحت اعمال بار خارجی جریان می‌یابد و از قانون زیر تبعیت می‌کند[۲].

$$\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \qquad (۱-۲)$$

η ویسکوزیته‌ی برشی[۲] سیال بوده و در حالت جریان پایا، به صورت نسبت تنش برشی τ به نرخ کرنش $\dot{\varepsilon}$ تعریف می‌شود.

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\varepsilon}} \qquad (۱-۳)$$

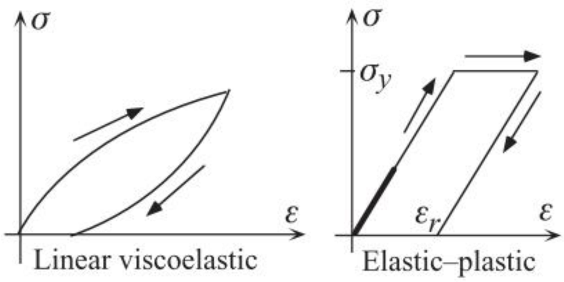
مواد ویسکوالاستیک، دارای خصوصیات الاستیک و ویسکوز به صورت ترکیبی می‌باشند (که لزوماً خطی نیستند).

سفتی[۳] مواد، اغلب با منحنی تنش-کرنش، که از اعمال یک نرخ ثابت کرنش به میله‌ای از جنس ماده-ی مورد نظر به‌دست می‌آید، نشان داده می‌شود. اگر ماده‌ی الاستیک خطی باشد، منحنی به صورت یک خط مستقیم است که شیب آن مدول الاستیسیته را نشان می‌دهد (خط پررنگ در شکل (۱-۱) (a). در یک تنش بزرگ (تنش تسلیم σ_y) ماده در آستانه‌ی تسلیم قرار می‌گیرد.

در یک ماده‌ی ویسکوالاستیک خطی، تغییرات تنش-کرنش خطی نبوده و شیب آن نیز در مقایسه با مواد الاستیک کمتر است (شکل (۱-۱) (b)). علت این پدیده در طی اعمال یک نرخ کرنش ثابت، حساس بودن ماده‌ی ویسکوالاستیک نسبت به زمان است. در جامد ویسکوالاستیک، کرنش پسماند[۴] سرانجام صفر خواهد شد. مواد الاستیک-پلاستیک نسبت به زمان و تغییرات آن حساس نیستند، اما دارای یک تنش آستانه‌ای[۵] (تنش تسلیم) می‌باشند که معمولاً اگر تنش از تنش تسلیم فراتر رود، بعد از برداشته شدن بار، یک کرنش پسماند باقی می‌ماند.

---
[1] Compliance
[2] Shear Viscosity
[3] Stiffness
[4] Residual Strain
[5] Threshold Stress

تست مواد ویسکوالاستیک، با اعمال یک کرنش یا تنش پله‌ای انجام می‌شود. پاسخ به کرنش پله‌ای، رهایش[1]تنش و پاسخ به تنش پله‌ای، خزش[2] می‌باشد[۳].



(a) (b)

شکل (۱-۱) منحنی تنش-کرنش برای (a) مواد ویسکوالاستیک خطی و (b) مواد الاستیک-پلاستیک ([۳])

برخی از پدیده‌هایی که در مواد ویسکوالاستیک اتفاق می‌افتد به شرح زیر است [۴]:

۱- اگر تنش ثابت باقی بماند؛ با گذشت زمان، کرنش افزایش می‌یابد (خزش).

۲- اگر کرنش ثابت باقی بماند؛ با گذشت زمان، تنش کاهش می‌یابد (رهایش).

۱-۴- معادلات حاکم بر مواد ویسکوالاستیک

بیان معادلات بنیادین تنش-کرنش در مواد ویسکوالاستیک، به دو شکل کلی انتگرالی و دیفرانسیلی امکان‌پذیر است، که در ادامه به بیان روش دیفرانسیلی پرداخته می‌شود.

معادله‌ی ساختاری برای یک ماده‌ی ایزوتروپیک که پاسخ آن به مشتقات تنش و کرنش نیز حساس است، به صورت کلی زیر نوشته می‌شود.

$$f(\sigma,\dot{\sigma},\ddot{\sigma},...,\varepsilon,\dot{\varepsilon},\ddot{\varepsilon},...)=0 \qquad (۱-۴)$$

که در آن، تنش و کرنش وابسته به زمان می‌باشند. شکل اوپراتوری معادله‌ی فوق به صورت زیر است.

$$P(D)\sigma_{ij}(t)=Q(D)\varepsilon_{ij}(t) \qquad (۱-۵)$$

که $P(D)$ و $Q(D)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

[1] Relaxation
[2] Creep

$$P(D)=\sum_{r=0}^{N}P^{r}\frac{\partial^{r}}{\partial t^{r}}$$
$$Q(D)=\sum_{r=0}^{N}Q^{r}\frac{\partial^{r}}{\partial t^{r}} \qquad (۶-۱)$$

$D=\frac{d}{dt}$ و P^r و Q^r ثابت می‌باشند و به مدل رئولوژیکی انتخابی وابسته‌اند.

جهت توصیف رفتار ویسکوالاستیک یک سیستم تحت کشش چند محوری، قسمت برشی[1] و اتساعی[2] تنش را از هم جدا می‌کنند. این قاعده به دلیل پاسخ متفاوت ماده‌ی ویسکوالاستیک به برش و اتساع (بالک) می‌باشد. با توجه به این نکته، مؤلفه‌های برش و اتساع را می‌توان به صورت زیر جدا کرد.

$$P_1\sigma_{ij}^{d}=Q_1\varepsilon_{ij}^{d}$$
$$P_2\sigma_{ii}=Q_2\varepsilon_{ii} \qquad (۷-۱)$$

بالانویس d معرف بخش انحرافی و P_1، P_2، Q_1 و Q_2 اپراتورهایی به شکل کلی زیر می‌باشند.

$$P_1=p_0+p_1\frac{\partial}{\partial t}+p_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\ldots+p_n\frac{\partial^n}{\partial t^n} \qquad (۸-۱)$$

G و K که به ترتیب مدول رهایش برش و بالک می‌باشند، به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$G=\frac{1}{2}\left(\frac{Q_1}{P_1}\right)$$
$$K=\frac{1}{3}\left(\frac{Q_2}{P_2}\right) \qquad (۹-۱)$$

رابطه‌ی مدول الاستیسیته و ضریب پواسون برحسب مدول رهایش بالک و برش به صورت زیر می‌باشد.

$$E=\frac{9KG}{3K+G}$$
$$\nu=\frac{3K-2G}{6K+2G} \qquad (۱۰-۱)$$

با جایگذاری مقادیر G و K بر حسب P و Q در عبارات فوق، مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به شکل اپراتوری به‌دست می‌آید([۵] و [۶]).

---
[1] Deviatoric
[2] Dilatational

۱-۵- فرضیات متداول در ویسکوالاستیسیته

از آنجا که جمع‌آوری اطلاعات وابسته به زمان برای خصوصیات مواد ویسکوالاستیک مشکل و زمان‌بر است، برای حل مسائل تحلیل تنش در این حوزه، اعمال فرض‌هایی بر روی خصوصیات ماده ضروری است. بنابراین اغلب برای ماده‌ی ویسکوالاستیک، یکی از خصوصیات مدول برش $G(t)$ یا مدول یانگ $E(t)$ تعریف می‌شود و مدول دیگر براساس یکی از فرضیات زیر تعیین می‌شود:

۱- تراکم‌ناپذیری: برای تغییر شکل‌های کوچک در حوزه‌ی مسائل الاستیک خطی، در حالت تراکم-ناپذیری، ضریب پواسون برابر با ۰.۵ یا مدول بالک بی‌نهایت است. تحت شرایط مشابه، برای یک ماده-ی تراکم‌ناپذیر ویسکوالاستیک، ضریب پواسون برابر با ۰.۵ و مدول بالک بی‌نهایت می‌باشد. بنابراین با وجود این شرط، کرنش‌های اتساعی صفر می‌باشد (تغییر حجم قابل صرف‌نظر باشد).

۲- الاستیک در اتساع(بالک): در این حالت مدول بالک، مقدار ثابت k_0 را داشته و $K(t) = k_0 H(t)$ می‌باشد، که $H(t)$ تابع پله‌ای[1] است. این فرض بر این اساس است که تغییرات مدول بالک نسبت به مدول برشی، با دما و زمان بسیار کم است. در این حالت ضریب پواسون، تابعی از زمان است. بنابراین، فرض رفتار الاستیک، برای ماده‌ی ویسکوالاستیک در اتساع، معمولاً فرض مناسبی است.

۳- هم‌زمانی[2] مدول بالک و برشی: در این حالت فرض می‌شود که نسبت مدول بالک به برشی مقدار ثابتی باشد، به طوری‌که $K(t) = c_1 G(t)$ که c_1 مقداری ثابت است. بنابراین در این حالت وابستگی زمانی این دو یکسان بوده و فقط مقادیر آنها متفاوت می‌باشد. صحت این فرض به شدت وابسته به دماست. در این حالت ضریب پواسون یک مقدار ثابت است [۶].

۱-۶- مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

مدل‌سازی پاسخ به تحریک مکانیکی مواد ویسکوالاستیک، توسط مواد الاستیک و ویسکوز، از قبیل فنر و دمپر انجام می‌شود. استفاده از این مدل‌های مکانیکی خطی، ساده‌ترین حالت جهت تفسیر رفتار

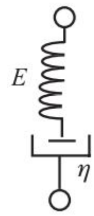
[1] Heaviside Step Function

[2] Synchronous

ویسکوالاستیسیته مواد می‌باشد. فنر رفتار ناگهانی(الاستیک) پاسخ و دمپر حالت تطبیقی (اتلافی) سیستم را شبیه‌سازی می‌کند[۷].

۱-۶-۱- مدل ماکسول[۱]

مدل ماکسول شامل فنر و دمپر سری است (شکل (۱-۲)).



شکل (۱-۲) مدل ماکسول ([۳])

رابطه‌ی کلی تنش و کرنش را برای این مدل، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \quad (۱-۱۱)$$

دو کمبود در مورد این مدل ساده وجود دارد. اول اینکه تحت شرایط تنش ثابت، یعنی:

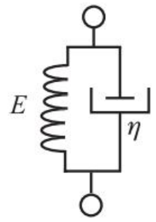
$$\frac{d\sigma}{dt} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{\sigma}{\eta} \quad (۱-۱۲)$$

جریان نیوتنی مشهود است ($\sigma = \eta \frac{d\varepsilon}{dt}$) و این موضوع با توجه به رفتار پیچیده‌ی خزش برای ماده‌ی ویسکوالاستیک درست نیست. دوم این‌که رفتار رهایش تنش را نمی‌توان به طور معمول با یک جمله نمایی کاهشی بیان کرد، چون لزوماً تنش در زمان بی‌نهایت به صفر میل نمی‌کند [۷].

۱-۶-۲- مدل کلوین-ویت[۲]

این مدل شامل یک فنر موازی با دمپر است (شکل (۱-۳)) و به خوبی رفتار خزشی را توصیف می‌کند. رابطه‌ی کلی تنش-کرنش در این مدل به صورت زیر است:

[1] Maxwell Model
[2] Kelvin-Voigt Model



شکل (۱-۳) مدل کلوین-ویت[۳]

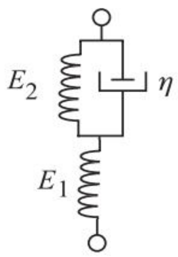
$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad (۱۳-۱)$$

با توجه به اینکه در کرنش ثابت دمپر عمل نمی‌کند، مدل کلوین نمی‌تواند رهایش تنش را تشریح کند [۷].

$$(\frac{d\varepsilon}{dt}) = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma = E\varepsilon \quad (۱۴-۱)$$

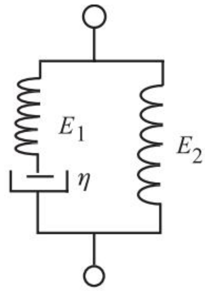
۱-۶-۳- جامد استاندارد خطی(مدل زنر)[1]

مدل ماکسول، رفتار رهایش تنش و مدل کلوین نیز فقط رفتار خزشی یک جامد ویسکوالاستیک را توصیف می‌کند، اما هیچ کدام برای ارائه رفتار عمومی جامد ویسکوالاستیک مناسب نیست، زیرا لازم است که مدل، هر دو رفتار رهایش تنش و خزش را با هم توصیف کند. آنچه که به طور معمول جامد استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلوین-ویت به صورت سری با فنر(شکل (۱-۴)) یا المان ماکسول موازی با فنر(شکل (۱-۵)) است.



شکل (۱-۴) اولین مدل جامد استاندارد خطی ([۳])

1 Standard Solid (Zener) Model



شکل (۱-۵) دومین مدل جامد استاندارد خطی([۳])

معادله‌ی بنیادین برای اولین مدل، به صورت زیر است:

$$(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2})\sigma+\frac{\eta}{E_1E_2}\dot{\sigma}=\varepsilon+\frac{\eta}{E_2}\dot{\varepsilon} \qquad (۱۵-۱)$$

با استفاده از آزمایش رهایش تنش، مدول رهایش با معادله‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$G(t)=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=\frac{E_1}{E_1+E_2}\left(E_2+E_1\exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)\right)\right) \qquad (۱۶-۱)$$

$$\tau=\frac{\eta}{E_1}$$

برای دومین مدل، معادله‌ی بنیادین به صورت زیر است:

$$\frac{\sigma}{\eta}+\frac{\sigma}{E_2}=\varepsilon\frac{E_1}{\eta}+\dot{\varepsilon}\left(1+\frac{E_1}{E_2}\right) \qquad (۱۷-۱)$$

مدول رهایش این مدل نیز به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$G(t)=E_1+E_2\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad (۱۸-۱)$$

توضیحات تکمیلی مدل‌های ویسکوالاستیک در پیوست الف آورده شده است ([۵]، [۷]،[۸]).

۱-۷- اجزای سازه‌ای

از لحاظ هندسه و شرایط بارگذاری، سازه‌ها را می‌توان به شش گروه کابل‌ها[۱]، میله‌ها[۲]، تیرها، غشاها[۳]، ورق‌ها[۴] و پوسته‌ها[۵] تقسیم‌بندی نمود.کابل‌ها ساده‌ترین سازه‌های یک بعدی هستند که تنها بار کششی را تحمل می‌کنند و قادر به تحمل بار فشاری و گشتاور خمشی نیستند. میله‌ها نیز سازه‌هایی

[1] Cables
[2] Rods
[3] Membranes
[4] Plates
[5] Shells

یک‌بعدی هستند که می‌توانند بارهای کششی، فشاری را تحمل کنند. تیرها سازه‌هایی هستند که یکی از ابعاد به مراتب بزرگ‌تر از دو بعد دیگر است و در معرض بارهای عرضی قرار دارند که باعث خمش آنها می‌گردد و قادر به تحمل نیروهای کششی، فشاری، خمشی، پیچشی و برش عرضی هستند [۹]. ورق‌ها سازه‌هایی دوبعدی با سختی خمشی محدود هستند که می‌توان آنها را شبیه به تیرها در دوبعد در نظر گرفت. هر سطح با یک ضخامت خاص می‌تواند یک ورق در نظر گرفته شود اگر ضخامت آن در مقایسه با عرض آن بسیار کم باشد. ورق‌ها قادر به تحمل نیروهای کششی، فشاری، خمشی، پیچشی، برش صفحه‌ای[1] و بارهای عرضی می‌باشند ([۹]،[۱۰]). غشا سازه‌ای دوبعدی است که می‌توان آن را تعمیم یافته‌ی کابل در دو بعد در نظر گرفت. غشا تنها می‌تواند نیروی کشش و برش صفحه‌ای را تحمل کند و قادر به تحمل خمش نمی‌باشد ([۹]، [۱۱]،[۱۰]). پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که دو بعد آنها به مراتب بزرگ‌تر از بعد سوم است و قادرند نیروهای خارج صفحه[2] را با ایجاد نیروهای صفحه‌ای تحمل کنند ([۹]،[۱۱]).

۱-۸- سیستم‌های غیرخطی[3]

سیستم‌های غیرخطی، سیستم‌هایی هستند که اصل جمع آثار در مورد آنها صادق نیست[۹]. سیستم هنگامی غیرخطی است که حاصلضرب متغیرهای وابسته و مشتقات آنها در معادلات حرکت، شرایط مرزی یا روابط سازگاری ظاهر شود. همچنین وجود ناپیوستگی در سیستم، باعث غیرخطی شدن معادلات می‌شود [۱۲]. بررسی مدل‌های خطی به‌تنهایی برای درک رفتار سیستم کافی نیست. زمانی که دامنه‌ی نوسانات بزرگ باشد و فرکانس‌های طبیعی وابسته به دامنه‌هایشان باشند، پاسخ‌های خطی نادرست هستند. مدل‌های خطی می‌تواند گمراه‌کننده باشد؛ زیرا ممکن است یک حل خطی پیش‌بینی کند که سیستم پایدار است در حالی‌که در واقعیت ناپایداراست [۱۳]. در نظر گرفتن رفتار غیرخطی در مدل‌سازی سازه‌های مهندسی باعث می‌شود مهارت و واقع‌نگری بیشتر در طراحی، تحلیل و کنترل

[1] In-plane
[2] Out-of-plane
[3] Nonlinearity

این سازه‌ها اعمال شود. عوامل متعددی سبب ایجاد رفتار غیرخطی می‌شوند که در ادامه توضیح داده خواهد شد ([۱۴]، [۱۵]، [۱۶]).

هندسه: این مشخصه در سیستم‌هایی با تغییر شکل‌های بزرگ و یا سیستم‌هایی که در اثر کمانش[1] خراب[2] می‌شوند، مهم است. در تیرها و ورق‌ها، عامل غیرخطی هندسی، ناشی از معادلات غیرخطی کرنش است که در آن جابه‌جایی عرضی با کرنش‌های محوری کوپل است. در نتیجه، کشیدگی صفحه‌ی میانی در تیر یا ورق رخ می‌دهد. برای مثال در میدان جابجایی ون-کارمن[3] (تغییر شکل‌های بزرگ)، عامل غیرخطی در مشتقات آن ظاهر می‌شود. این غیرخطی در انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شود.

جنس ماده: یکی دیگر از عوامل، جنس ماده است. در واقع این نوع از غیرخطی زمانی رخ می‌دهد که قانون هوک (رابطه‌ی خطی تنش-کرنش) برای ماده‌ی مورد نظر نامعتبر باشد، در این‌صورت جملات غیرخطی در معادلات ظاهر می‌گردد.

شرایط مرزی: جملات غیرخطی ممکن است در شرایط مرزی مسأله ظاهر شوند. برای مثال استفاده از فنر و دمپر غیرخطی در یک سیستم ممتد، باعث ایجاد جملات غیرخطی می‌شود.

بارگذاری: نوع بارگذاری اعمال شده بر روی سازه نیز، یکی دیگر از عوامل ظاهر شدن جملات غیرخطی در معادلات حرکت می‌باشد.

استهلاک: استهلاک اساساً یک پدیده‌ی غیرخطی است. زیرا نیروی استهلاک تابع غیرخطی از جابه-جایی و سرعت است. استهلاک ویسکوز خطی نوعی ایده‌آل‌سازی سیستم است. اصطکاک خشک و استهلاک هیسترسیس نمونه‌هایی از استهلاک غیرخطی می‌باشند.

اینرسی: غیرخطی اینرسی ناشی از وجود جملات غیرخطی سرعت و شتاب در معادلات حرکت است. انرژی جنبشی سیستم منشأ ایجاد غیرخطی‌های اینرسی است. جملات شتاب کریولیس و جانب مرکز

[1] Buckling
[2] Fail
[3] Von-Karman

نمونه‌هایی از این نوع غیرخطی می‌باشند.

۱-۹- تئوری‌های متداول در بررسی تیر

مهم‌ترین تئوری‌های تیر که امروزه کاربرد دارند عبارتند از: تئوری سه‌بعدی الاستیسیته، تئوری تیر اویلر- برنولی[1] و تئوری تیر تیموشنکو[2]. مشکل اساسی در تئوری الاستیسیته این است که تنها برای تعداد کمی از مسائل می‌تواند حل دقیق ارائه دهد؛ به همین دلیل این تئوری پرکاربرد نیست. تئوری تیر اویلر برنولی بر این فرض استوار است که صفحات سطح مقطع که پیش از تغییر شکل عمود بر تار خنثی هستند، پس از تغییر شکل نیز همچنان مسطح و عمود بر تار خنثی باقی خواهند ماند و هیچ کرنشی در این صفحات رخ نخواهد داد [۱۷]. به عبارت دیگر از تأثیرات اعوجاج و تغییر شکل برشی و همین‌طور از کرنش‌های عمودی عرضی چشم‌پوشی شده است. این فرضیات برای تیرهای باریک و بلند معتبر است. فرض عدم وجود برش عرضی بدین معناست که چرخش در سطح مقطع تنها به دلیل خمش ایجاد می‌شود. اما برای تیرهای ضخیم، مدهای فرکانس بالا و یا در تیرهای کامپوزیتی، برش عرضی قابل چشم‌پوشی نیست.

با وارد نمودن اثر تغییر شکل برشی در مدل تیر اویلر-برنولی، تیر تیموشنکو پدید می‌آید [۱۸]. در این تئوری، برای ساده‌سازی استخراج معادلات حرکت، فرض شده است که کرنش برشی در سطح مقطع یکنواخت خواهد بود و به جای آن یک ضریب تصحیح برشی در معادلات در نظر گرفته خواهد شد که این فاکتور علاوه بر پارامترهای جنس و هندسه به شرایط مرزی و نوع بارگذاری وابسته است [۱۹]. در حضور برش عرضی، چرخش در سطح مقطع ناشی از هر دو تغییر شکل خمشی و برشی عرضی خواهد بود.

درتئوری های مرتبه بالاتر علاوه بر عمود بودن از مستقیم بودن خطوط نیز صرف نظر شده است.

مدل تیر خطی برای تغییر شکل‌های کوچک مناسب است. اما زمانی که تغییر شکل‌ها نسبتاً بزرگ هستند، برای مدل‌سازی دقیق‌تر باید جملات غیرخطی مورد نیاز را نیز در مسأله وارد نمود. غیرممکن

[1] Euler-Bernoulli
[2] Timoshenko

است که بتوان یک تئوری سه‌بعدی بسیار کلی را با در نظر گرفتن تمامی جملات غیرخطی و اثرات ثانویه مانند اینرسی دورانی، تغییر شکل برشی، اعوجاج، استهلاک، تغییر شکل استاتیکی و غیره به کار برد. انتخاب جملات غیرخطی و اثرات ثانویه‌ای که قرار است از آنها چشم‌پوشی شود، به خواص تیر (ابعاد،جنس و غیره)، بارگذاری و شرایط مرزی وابسته است.

۱-۱۰- مروری بر مقالات انجام شده

ووجسیچ و واجسک [۲۰] یک روش حل برای ارتعاشات تیرهای ویسکوالاستیک یکسرگیردار با دامنه-ی نوسانات بالا ارائه کرده‌اند. مدل جامد استاندارد خطی برای توصیف رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است. به منظور گسسته‌سازی مسأله و تحلیل جابه‌جایی‌های بزرگ از روش المان محدود و برای به دست آوردن معادلات حرکت از معادلات لاگرانژ مرتبه دو استفاده شده است.

ما و همکاران [۲۱] روش جدیدی را براساس ترکیب اغتشاشات مدال[1]، برهم‌کنش مدها [2]و اغتشاشات ماتریسی[3] برای پاسخ غیرخطی تیر الاستیک با خیز نسبتاً زیاد، تحت بارگذاری نوسانی ارائه کرده‌اند. همچنین یک مثال عددی از کاربرد این روش ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که اغتشاشات مدال روش مؤثرتری در تحلیل این دسته از مسائل است.

فودا [۲۲] از روش مقیاس‌های چندگانه[4] برای تحلیل ارتعاش غیرخطی تیر با تکیه‌گاه ساده استفاده کرده است. در فرمول‌بندی، اثرات تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی دورانی بر رفتار ارتعاشات با دامنه‌ی بزرگ در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهد تأثیر برش و اینرسی دورانی در تیرهای نسبتاً ضخیم و کوتاه تحت ارتعاشات با دامنه‌ی بزرگ قابل توجه است. تغییر فرکانس‌های غیرخطی با پارامترهای مختلف نیز ارائه شده است.

چن و چنگ [۲۳] معادلات جزئی انتگرالی- دیفرانسیلی[5] حاکم بر رفتار دینامیکی تیرهای همگن

---
[1] Modal Perturbation
[2] Mode Superposition
[3] Matrix Perturbation
[4] Multiple-Scale
[5] Integro-Diffrential

ویسکوالاستیک را ارائه کرده‌اند. ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی تیرها از روابط غیرخطی لیدرمن[1] تبعیت می‌کند. در مورد تیرها با تکیه‌گاه‌های ساده، مدل ریاضی با روش گلرکین حل شده است.

لی [۲۴] به بررسی رفتار یک تیر یکسر گیردار با خیز زیاد از جنس ماده‌ی الاستیک غیرخطی لودویک[2] تحت بارگذاری ترکیبی، شامل بار عرضی گسترده‌ی یکنواخت و بار متمرکز عمودی در سر آزاد تیر، پرداخته است. هنگامی‌که مسأله شامل هر دو جمله‌ی غیرخطی هندسی و ماده باشد، معادلات حاکم، معادلات دیفرانسیلی غیرخطی پیچیده‌ای است که حل آن احتیاج به روش‌های عددی دارد. حل عددی با استفاده از روش رانج کوتای مرتبه پنج باچر[3] انجام شده است.

ژو و همکاران[۲۵] معادلات حاکم بر رفتار شبه‌استاتیکی و دینامیکی تیرهای تیموشنکوی ویسکوالاستیک را ارائه کرده‌اند. ماده‌ی تشکیل‌دهنده‌ی تیرها از روابط سه‌بعدی مشتقات کسری[4] تبعیت می‌کند. در ادامه رفتار شبه‌استاتیکی تیر تحت بارگذاری پله‌ای تحلیل شده و نتایج تحلیلی آن ارائه شده است. سپس تأثیر پارامترهای مکانیکی ماده بر روی خیز بررسی شده است. همچنین توابع شکل مد برای تیر ویسکوالاستیک تیموشنکو با تکیه‌گاه‌های ساده و پاسخ دینامیکی تیر تحت یک تحریک دوره‌ای بدست آمده است. در نهایت تأثیر برش عرضی و اینرسی دورانی بر روی ارتعاشات تیر بررسی شده است.

وو کیم و هوان کیم [۲۶] به بررسی پایداری دینامیکی یک تیر کامپوزیتی با خواص ویسکوالاستیک تحت بار متحرک پرداخته‌اند. یک تیر کامپوزیتی یک جهته تحت نیروی متحرک برای تأثیر ویسکوالاستیسیته موجود در چسب‌های به کار رفته در اتصال لایه‌های کامپوزیتی روی بار بحرانی در نظر گرفته شده است. با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و با استفاده از اصل همیلتون معادلات استخراج می‌شود، سپس مسأله مقدار ویژه‌ی فرمول‌بندی شده را با استفاده از روش المان محدود حل نموده است.

---
[1] Leaderman
[2] Ludwick
[3] Butcher's Fifth Order Runge-Kutta
[4] Fractional Derivative

دادو و السادر[۲۷] به بررسی رفتار خیز بسیار زیاد تیرهای گیردار منشوری و غیرمنشوری، تحت بارگذاری‌های مختلف پرداخته‌اند. در فرمول‌بندی، زاویه‌ی چرخش تیر با یک چندجمله‌ای در موقعیت‌های مختلف در طول محور انحنای تیر تعریف شده است. ضرایب چندجمله‌ای با استفاده از مینیمم کردن انتگرال باقی‌مانده‌ی خطا در معادلات دیفرانسیل حاکم و با اعمال شرایط مرزی تیر به دست آمده است. نتایج به دست آمده برای بارگذاری و هندسه‌های مختلف با نتایج حاصل از نرم افزار MSC/NASTRAN مقایسه شده است.

چن و یانگ [۲۸] ارتعاشات و پایداری یک تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری را روی تکیه‌گاه‌های ساده به همراه فنرهای پیچشی، تحلیل کرده‌اند. همچنین روشی برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و توابع مودال با استفاده از شرایط مرزی تیر الاستیک متحرک با سرعت ثابت، پیشنهاد کرده و برای یک تیر تشکیل شده از مدل کلوین، با استفاده از روش بسط‌های چندگانه، اثر ویسکوالاستیسیته را بر ارتعاشات آزاد بررسی کرده‌اند. وقتی که سرعت محوری به صورت یک ارتعاش هارمونیک ساده حول سرعت متوسط ثابت در نظر گرفته شود، شرایط ناپایداری برای تیر ویسکوالاستیک متحرک محوری در تشدید[۱] پارامتریک مشاهده می‌شود. همچنین اثرات سختی قید، سرعت محوری متوسط و ویسکوالاستیسیته بر پاسخ به صورت عددی بررسی شده است.

فریرا و فسشار [۲۹] ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکو و ورق‌های میندلین[۲] را بررسی کرده‌اند. معادلات حرکت و شرایط مرزی تیرهای تیموشنکو و ورق‌های میندلین برای هندسه‌های مستطیلی و غیر مستطیلی ارائه شده است. برای این منظور از توابع شکل جدیدی به همراه روش شبه‌طیفی استفاده شده است. دقت نتایج در این روش برای تیرهای تیموشنکو بسیار بالاست.

کوکاترک و سیمسک [۳۰] به بررسی ارتعاشات عرضی تیر ویسکوالاستیک تحت بار فشاری خارج از مرکز و بار هارمونیک متمرکز متحرک[۳] براساس تئوری تیر اویلر- برنولی پرداخته‌اند. شرایط تکیه‌گاه‌ها

---

[1] Resonance
[2] Mindlin
[3] Concentrated Moving Harmonic Force

با استفاده از ضرایب لاگرانژ در فرمول انرژی سیستم در نظر گرفته شده است. در این مقاله خیز تیر به صورت چندجمله‌ای بیان شده است. با استفاده از معادلات لاگرانژ، مسأله به حل یک سیستم معادلات جبری تقلیل می‌یابد. نتایج شبیه‌سازی عددی برای مقادیر مختلف خروج از مرکز[1] مانند بار فشاری خارج از مرکز، فرکانس‌های تشدید و سرعت ثابت بار عرضی هارمونیک متحرک ارائه شده است. همگرایی نتایج نیز بررسی شده و اعتبار نتایج بدست آمده با مقایسه با حل‌های دقیق براساس تئوری تیر اویلر-برنولی برای موارد خاص بررسی شده، آورده شده است.

محمودی و همکاران [۳۱] به بررسی ارتعاشات آزاد یک تیر ویسکوالاستیک از نوع کلوین-ویت پرداخته‌اند. معادلات حاکم بر سیستم برای ارتعاشات با دامنه‌ی زیاد به کمک اصل همیلتون[2] تعیین شده است. با استفاده از روش بسط چندگانه، شکل مدها و فرکانس‌های طبیعی فرمول‌بندی شده است. نتایج فرمول‌بندی شده‌ی دامنه، فرکانس‌های غیرخطی و شکل مدها می‌تواند برای هر نوع شرایط مرزی استفاده شود. سپس روش گلرکین[3] برای جداسازی متغیرهای زمان و مکان مورد استفاده قرار گرفته است. معادلات حرکت، وجود جمله‌های دمپینگ غیرخطی، علاوه بر جملات غیر-خطی اینرسی و هندسی را نشان می‌دهد. وجود جمله‌های غیرخطی اینرسی وهندسی، باعث وابستگی فرکانس‌های طبیعی غیرخطی به دامنه‌ی ثابت ارتعاشات می‌شود. علاوه برآن، وابستگی شکل مدها به توان سوم دامنه‌ی وابسته به زمان نشان داده شده است. نتایج تحلیلی برای شرایط مرزی دو سر مفصل و یک سر مفصل و یک سر گیردار بدست آمده و با نتایج عددی مقایسه شده است.

ژونگ و لیائو [۳۲] ارتعاشات غیرخطی مرتبه بالای تیرهای تیموشنکو با مرزهای ثابت را بررسی کرده-اند. اثرات غیرخطی تغییر شکل محوری، انحنای خمشی و کرنش‌های برشی عرضی در نظر گرفته شده است. معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم با استفاده از روش SDQM[4] حل شده است. نسبت فرکانس‌های غیرخطی به خطی استخراج و تغییرات آنها با نسبت دامنه به شعاع ژیراسیون بررسی

[1] Eccentricity
[2] Hamilton's Principle
[3] Galerkin Method
[4] Spiline-Based Differential Quadrature Method

شده است. برخلاف یافته‌های شناخته شده برای فرکانس‌های اصلی غیرخطی تیرها، بعضی از فرکانس‌های غیرخطی مرتبه بالا با افزایش نسبت دامنه به شعاع ژیراسیون، کاهش می‌یابد.

لی[۳۳] به بررسی خیز زیاد یک تیر ویسکوالاستیک، تحت بار ترکیبی پرداخته است. مسأله شامل جمله‌های غیرخطی هندسی است و معادلات حاکم از نوع انتگرالی-دیفرانسیلی غیرخطی است که به طور معمول برای حل آن احتیاج به روش‌های عددی دارد. در این مقاله، حل عددی خیز زیاد تیر ویسکوالاستیک مخروطی تحت بار ترکیبی، شامل بار گسترده‌ی مثلثی و بار متمرکز عمودی در سر آزاد آن، با استفاده از روش رانج-کوتا محاسبه و جدول‌بندی شده است.

بانرجی و همکاران [۳۴] روش‌های شوتینگ[1] غیرخطی و تجزیه‌ی آدومین[2]را برای محاسبه‌ی خیز زیاد تیرهای گیردار، تحت بارگذاری دلخواه پیشنهاد داده‌اند. نتایج حاصله که تنها وابسته به بارگذاری انتهایی می‌باشد، با استفاده از انتگرال‌های بیضوی اعتبارسنجی شده است. روش شوتینگ غیرخطی نتایج عددی دقیقی می دهد، درحالی‌که روش تجزیه‌ی آدومین یک توصیف چندجمله‌ای برای شکل تیر به دست می‌دهد. در بارگذاری‌های بزرگ، حل‌های چندگانه با احتمال وقوع کمانش بحث شده است. به عنوان مثال، حل یک تیر یکسرگیردار تحت دو گشتاور متمرکز، با استفاده از هر دو روش آورده شده است. هر دو روش برای مکانیزم‌هایی که با استفاده از محرک‌های کوچک کار می‌کنند، بسیار مفید است.

بروجان و همکاران [۳۵] به بررسی خیز زیاد تیرهای یکسرگیردار الاستیک غیرخطی، ساخته شده از موادی که با تابع لودویک تعمیم یافته تعریف می‌شوند، پرداخته‌اند. یک فرمول‌بندی دقیق گشتاور-انحنا، که می‌تواند برای مطالعه‌ی تیرهایی با مقطع مستطیلی، با شرایط تکیه‌گاهی دلخواه به کار برده شود، آورده شده است. برخی از مزیت‌های مدل لودویک تعمیم یافته نیز نشان داده شده است. مثال-های عددی در نظر گرفته شده برای این نوع ماده، به خوبی رفتار غیرخطی این تیرها را نشان می‌دهد.

واز و کر[۳۶] به بررسی خیز زیاد یک تیر باریک، منشوری و گیردار ساخته شده از جنس ماده‌ی

[1] Shooting
[2] Adomain Decomposition Method

ویسکوالاستیک خطی، تحت بار مایل متمرکز وابسته به زمان پرداخته‌اند. مدل ماده‌ی ویسکوالاستیک به کار رفته، جامد استاندارد خطی می‌باشد. از سازگاری هندسی، تعادل نیروها و ممان‌ها و روابط تشکیل‌دهنده‌ی ویسکوالاستیک خطی، یک دستگاه معادلات مرتبه‌ی اول غیرخطی دیفرانسیلی-انتگرالی به‌دست آمده است که با استفاده از روش شوتینگ[1] همراه با الگوریتم رانج کوتای[2] مرتبه چهار به صورت عددی حل شده است. یک توصیف تحلیلی نیز برای تقسیم‌بندی انرژی تولیدی توسط نیروی خارجی به بخش‌های ذخیره شده و تلف شده بدست آمده است. همچنین یک مدل المان محدود در نرم‌افزار آباکوس[3] به منظور مقایسه و اعتبارسنجی فرمول‌های تحلیلی و عددی آورده شده است که نتایج برای منحنی‌های جابه‌جایی نسبت به زمان، شکل هندسی، بار نسبت به زمان، کل کار انجام شده توسط نیروهای خارجی برای دو مقطع از تیر بررسی شده است.

چن [۳۷] یک روش انتگرالی جدید برای حل مسائل تیرهای یکسرگیردار با خیز زیاد ارائه کرده است. این روش می‌تواند با استفاده از انتگرال گشتاور، برای تیرهایی با خواص مختلف و بارگذاری‌های مختلط به کار گرفته شود. این روش به طور عمومی به تکنیک‌های ساده‌ی عددی نیاز دارد، بنابراین برای کاربرد بسیار ساده می‌باشد.

کوکاترک و همکاران [۳۸] به آنالیز استاتیکی غیرخطی هندسی یک تیر یکسرگیردار تحت یک بار نقطه‌ای در سر آزاد آن پرداخته‌اند. ماده‌ی تشکیل دهنده‌ی تیر ایزوتروپیک و هایپرالاستیک در نظر گرفته شده است. در این مقاله، مدل المان محدود تیر با استفاده از مدل المان محدود لاگرانژین دو-بعدی پیوسته برای المان دوازده گره‌ای درجه دوم ساخته شده است. مسأله‌ی غیرخطی بیان شده، با استفاده از جابه‌جایی افزایشی(برپایه‌ی روش المان محدود) و روش نیوتن-رافسون[4] حل شده است.

قایش و همکاران [۳۹] یک حل تحلیلی تقریبی برای پاسخ دینامیکی غیرخطی یک تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده که یک جرم سنگین به آن متصل است، ارائه داده‌اند. برای رفتار

[1] Shooting Method
[2] Runge-Kutta
[3] Abaqus
[4] Newton-Raphson

تیر ویسکوالاستیک از مدل کلوین-ویت استفاده شده است. غیرخطی هندسی مربوط به کشیدگی صفحه‌ی میانی درنظر گرفته شده و با استفاده از قانون دوم نیوتن و بر اساس مدل رئولوژیکی کلوین-ویت که دو پارامتر برای اتلاف انرژی دارد، معادلات غیرخطی حرکت استخراج شده است. روش بسط-های چندگانه به طور مستقیم به منظور محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و پاسخ ارتعاشی سیستم بر روی معادلات حرکت اعمال شده است. با توجه به پدیده‌ی تشدید، قسمت محدودی از پاسخ به صورت تحلیلی فرمول‌بندی شده است. مطالعه‌ی موردی به بررسی تأثیر پارامترهای سیستم بر روی پاسخ پرداخته است.

ارن [۴۰] به محاسبه‌ی خیز زیاد تیرهای یکسر گیردار غیرخطی ساخته شده از مواد لودویک با مقطع مستطیلی تحت یک گشتاور در سر آزاد، با بکارگیری روش‌های تقریبی و عددی برای توابع حدسی چندجمله‌ای که شرایط مرزی را مشخص می‌کنند، پرداخته است. مناسب بودن نتایج تخمین در محاسبات، برای ثوابت یک و دو جمله‌ای و چندجمله‌ای‌های مرتبه دو و چهار، بدست آمده است.

ژانگ [۴۱] یک روش جدید برای تحلیل رفتار یک تیر غیرخطی نامحدود با خیز نسبتاً زیاد برپایه‌ی الاستیک[1] تحت بارهای خارجی متمرکز پیشنهاد کرده است. براساس تقریب ون-کارمن[2] برای هندسه‌ی غیرخطی، یک سیستم معادلات انتگرالی غیرخطی، متناظر با معادلات دیفرانسیل اصلی تیر غیرخطی(اویلر-برنولی، فن-کارمن)، برای تیر با خیز نسبتاً زیاد فرمول‌بندی شده است. از نقطه نظر مفهومی، فرمول‌بندی انتگرالی جدید، رفتار غیرخطی یک نیروی خارجی ساختگی بر روی تیر اویلر-برنولی خطی را پیشنهاد می‌دهد. در این روش از سیستم معادلات انتگرالی غیرخطی برای ایجاد یک روش نیمه‌تحلیلی برای حل استفاده شده است که از روش المان محدود و تئوری اغتشاشات به مراتب آسان‌تر است. همچنین برخلاف تئوری اغتشاشات، احتیاج به کوچک فرض کردن پارامترها ندارد. نتایج نشان می‌دهد این روش بسیار سریع همگرا شده و محدوده‌ی وسیعی از کاربردهای عملی حل را پوشش می‌دهد.

---
[1] Elastic Foundation
[2] Von-Karman

قایش [۴۲] به بررسی تحلیلی ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ویسکوالاستیک که به یک فنر غیرخطی متصل است، پرداخته است. معادلات حاکم بر حرکت، سازگار با شرایط مرزی مسأله با استفاده از قانون دوم نیوتن به دست آمده است. ماده‌ی تیر ویسکوالاستیک از مدل رئولوژیکی کلوین-ویت تشکیل شده است. به منظور حل، روش بسط چندگانه بکار گرفته شده است. اثر پارامترهای سیستم بر روی فرکانس طبیعی خطی و غیرخطی، پاسخ ارتعاشی و منحنی‌های فرکانس-پاسخ بررسی شده است.

تاری[۴۳] یک حل تحلیلی برای خیز زیاد تیرهای یکنواخت یکسر گیردار اویلر-برنولی الاستیک تحت بارگذاری در نوک تیر را ارائه داده است. هدف محاسبه‌ی اجزاء پارامتری زاویه‌ای، افقی و عمودی خیز در طول تیر با توجه به بارگذاری‌های موجود در نوک تیر است. معادله‌ی مشخصه‌ی خیز تیر معرفی شده و با به کارگیری بسط تیلور اتوماتیک[1]، حل خیز برای تیر اویلر-برنولی با شرایط مرزی و بارگذاری بیان شده، به دست آمده است. حل خیز به دست آمده با این روش، با نتایج حل عددی مقایسه شده و برای کل طول تیر معتبر است. این حل بسیار سازگار با شرایط بارگذاری‌های بزرگ و قابل اجرا برای تحلیل‌ها و سنتزهای مهندسی می‌باشد. به منظور به کارگیری این حل به عنوان ابزار تئوری، زاویه‌ی تیرها و رفتار خیز محوری برای بارگذاری ها در نوک تیر بررسی شده است.

سوهانی و ایپک‌چی [۴۴] معادلات حاکم بر ارتعاش تیر با خیز نسبتاً زیاد را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول[2] به دست آورده‌اند. این معادلات که دستگاهی از معادلات مشتقات جزئی غیر خطی است، با استفاده از تئوری اغتشاشات به صورت تحلیلی حل شده و فرکانس‌های طبیعی تیر و بار کمانش به دست آمده است. با انجام مطالعه‌ی پارامتری، اثر خواص مکانیکی و هندسی و همچنین تأثیر کرنش نرمال عرضی بر روی فرکانس‌های طبیعی بررسی شده است. همچنین فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش با استفاده از روش المان محدود به دست آمده و با نتایج تحلیلی مقایسه شده است.

[1] Automatic Taylor Expansion Technique(ATET)
[2] First Order Shear Deformation Theory

سوهانی [۴۵] به تحلیل ریاضی و عددی تیر با خیز نسبتاً زیاد، تحت بار دینامیکی عرضی و بار محوری پرداخته است. در استخراج معادلات، میدان جابه‌جایی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تخمین زده شده است. معادلات حاکم بر حرکت تیر، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی با مشتقات جزئی و با ضرایب ثابت هستند که به یکدیگر کوپل بوده و به کمک اصل همیلتون تعیین شده‌اند. برای تعیین پاسخ تیر، از بسط توابع ویژه استفاده شده است. همچنین مسأله به کمک یک نرم‌افزار المان محدود نیز تحلیل شده است.

۱-۱۱- جمع بندی

در این فصل، ابتدا به معرفی مواد ویسکوالاستیک، رفتار و ویژگی‌های این مواد، معادلات حاکم بر آنها و انواع مدل‌های موجود جهت تفسیر رفتار ویسکوالاستیسیته پرداخته شد. سپس انواع اجزای سازه‌ای و غیرخطی‌ها معرفی شد. سپس به معرفی تئوری‌های متداول در بررسی تیرها و در نهایت به مرور مقالات مرتبط با پایان‌نامه پرداخته شد. با توجه به مقالات مرور شده، تحلیل سازه‌ها با خیز نسبتاً زیاد بیشتر متوجه مواد الاستیک بوده است. در حالی‌که طیف بسیار گسترده‌ای از مواد پیرامون ما در حوزه‌ی ویسکوالاستیک قرار دارند و شناخت رفتار مکانیکی این مواد به دلیل رفتار متفاوت نسبت به مواد الاستیک از اهمیت بالایی برخوردار است. همچنین در اکثر مقالات به حل مسأله با استفاده از روش‌های عددی مانند اجزاء محدود پرداخته شده و کمتر مقاله‌ای مسأله را به صورت تحلیلی حل نموده است. در این پایان‌نامه، به صورت تحلیلی به بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری تیر ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد که در آن میدان جابه‌جایی به کار رفته، به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول تخمین زده شده است، پرداخته می‌شود.

فصل دوم

استخراج معادلات حرکت

۲-۱- مقدمه

در این فصل، ابتدا به استخراج معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیرهای الاستیک با خیز نسبتاً زیاد با استفاده از اصل همیلتون پرداخته شده است. سپس با در نظر گرفتن رفتار ماده‌ی تیر به صورت ویسکوالاستیک در برش و الاستیک در اتساع، معادلات استخراج شده برای حالت ویسکوالاستیک، تعمیم داده شده است. میدان جابه‌جایی، مطابق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول[1] است. برای استخراج معادلات حرکت، فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

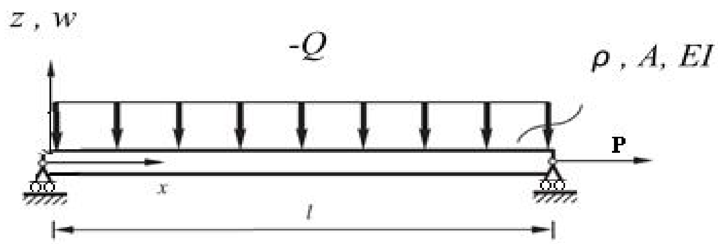
تیر همگن و همسانگرد است.

جابه‌جایی‌ها نسبتاً بزرگ هستند.

رابطه تنش-کرنش، خطی[2] است.

۲-۲- تعریف مسأله

تیری مطابق شکل (۲-۱) با طول l، پهنای b، عمق h و چگالی ρ مفروض است. تیر تحت بار محوری P و بار عرضی دینامیکی بر واحد طول $Q(x,t)$ قرار دارد. برای فرمول‌بندی از سیستم مختصات کارتزین (x,y,z) استفاده شده است که در آن xجهت محوری تیر، y در جهت پهنای تیر و z در راستای عمق تیر بوده و از صفحه‌ی میانی اندازه‌گیری می شود.



شکل (۲-۱) نمای شماتیک سازه

بر اساس تئوری تغییر شکل‌برشی مرتبه‌ی اول، میدان جابه‌جایی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

[1] First-order Shear Deformation Theory(FSDT)
[2]Small strain

$$u(\mathrm{x,z,t}) = u_0(\mathrm{x,t}) + \mathrm{z}u_1(\mathrm{x,t})$$
$$v(\mathrm{x,z,t}) = 0 \qquad (۲-۱)$$
$$w(\mathrm{x,z,t}) = w_0(\mathrm{x,t}) + \mathrm{z}w_1(\mathrm{x,t})$$

که در آن u، v و w به ترتیب سه مؤلفه جابه‌جایی در راستای محورهای مختصات x، yوz هستند. u_0 و w_0 دارای بعد طول بوده و معرف جابه‌جایی صفحه‌ی میانی می‌باشند. u_1 و w_1 توابعی بی‌بعد و مانند u_0 و w_0 مجهول هستند که باید تعیین شوند. با درنظر گرفتن حرکت به صورت صفحه‌ای، مؤلفه‌ی جابه‌جایی در راستای y، صفر خواهد بود. کرنش‌ها براساس روابط کرنش–جابه‌جایی فن-کارمن به صورت زیر است [۴۶].

$$\varepsilon_{\mathrm{x}} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{\mathrm{y}} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y} \qquad (۲-۲)$$
$$\varepsilon_{\mathrm{z}} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial z}$$

بر اساس میدان جابه‌جایی (۲-۱)، میدان کرنش به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2$$
$$\varepsilon_z = w_1 + \frac{1}{2}w_1^2 \qquad (۲-۳)$$
$$\gamma_{xz} = u_1 + (1 + w_1)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)$$
$$\varepsilon_y = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$$

۲-۳- محاسبه‌ی انرژی پتانسیل

چگالی انرژی کرنشی به شکل زیر تعریف می‌شود[۴۷].

$$U^* = \sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx} \qquad (۲-۴)$$

و تغییرات[۱] چگالی انرژی کرنشی U^* با جایگزینی مقادیر صفر برخی از مؤلفه‌های تنش، عبارت است از:

$$\delta U^* = \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} \qquad (۲-۵)$$

[1] Variation

با جایگذاری مؤلفه‌های میدان کرنش (۲-۳) در (۲-۵) نتیجه می‌شود.

$$\delta U^* = \begin{pmatrix} \sigma_x \left(\delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\,\delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z\, \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)\left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + z\,\delta \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \right) \\ +\sigma_z \left(\delta w_1 + w_1 \delta w_1 \right) + \tau_{zx} \begin{pmatrix} \delta u_1 + \left(1 + w_1\right)\left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + z\,\delta \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \\ + \delta w_1 \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + z\, \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} \qquad (۲-۶)$$

انرژی کرنشی U تیر با انتگرال‌گیری چگالی انرژی کرنشی بر روی حجم به دست می‌آید. المان حجم به صورت $dV = dx\,dy\,dz$ درنظر گرفته شده است و در آن محدوده‌ی تغییرات مؤلفه‌های محورهای مختصات به صورت $0 \le x \le l$، $-h/2 \le z \le h/2$ و $-b/2 \le y \le b/2$ می‌باشد.

$$\delta U = b \iint \begin{pmatrix} N_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + M_x \delta \frac{\partial u_1}{\partial x} + N_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x \frac{\partial w_0}{\partial x} \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ + M_x \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x \frac{\partial w_1}{\partial x} \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} + N_x \delta w_1 + N_x w_1 \delta w_1 \\ + N_{xz} \delta u_1 + N_{xz} \delta w_1 \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xz} \delta w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \\ + N_{xz} (1 + w_1) \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + M_{xz} (1 + w_1) \delta \frac{\partial w_1}{\partial x} \end{pmatrix} dx\,dz \qquad (۲-۷)$$

در انرژی کرنشی، منتجه‌های تنش به صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$\begin{aligned} &N_x = \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_x dz \qquad M_x = \int_{-h/2}^{-h/2} z\,\sigma_x dz \qquad P_x = \int_{-h/2}^{-h/2} z^2 \sigma_x dz \\ &N_{xz} = \kappa \int_{-h/2}^{-h/2} \tau_{xz} dz \quad M_{xz} = \kappa \int_{-h/2}^{-h/2} z\,\tau_{xz} dz \quad N_z = \int_{-h/2}^{-h/2} \sigma_z dz \\ &\kappa = \pi^2/12 \end{aligned} \qquad (۲-۸)$$

که در آن κ ضریب تصحیح برشی است [۴۸].

۲-۴- محاسبه‌ی انرژی جنبشی

چگالی انرژی جنبشی T^* عبارت است از:

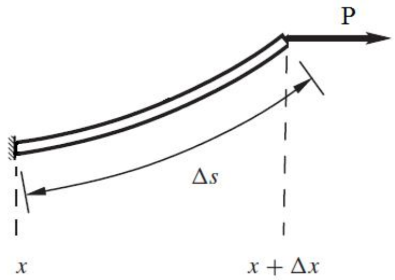
$$\mathrm{T}^* = \frac{1}{2} \rho \left[\left(\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}} \right)^2 \right] \qquad (۲-۹)$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی (۲-۱) و انتگرال‌گیری از چگالی انرژی جنبشی بر روی حجم، انرژی جنبشی T تیر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$T = \iiint T^{*} dx\,dy\,dz = \frac{1}{2}\rho b \int_0^l \left[h\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + h\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2 + \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)^2 \right] dx \qquad (۲-۱۰)$$

۲-۵- کار نیروهای خارجی

کار حاصل از نیروهای خارجی از دو قسمت، یکی مربوط به بار محوری و دیگری مربوط به تحریک دینامیکی عرضی تشکیل شده است. بار محوری P مطابق شکل (۲-۲)، به صورت افقی در یک لبه‌ی تیر وارد می‌شود. کار انجام شده توسط بار محوری به شکل زیر می‌باشد.



شکل (۲-۲) دیاگرام آزاد تیر تحت بار محوری

$$dW_{\mathrm{p}} = P(ds - dx) \qquad (۲-۱۱)$$

که در آن ds طول کمان بوده و براساس هندسه‌ی مسأله به صورت زیر تعیین می‌گردد.

$$ds = dx\sqrt{1+y'^2} = dx\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) \qquad (۲-۱۲)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۱۲) در (۲-۱۱) و انتگرال‌گیری از تغییرات آن در راستای طول، تغییرات کار ناشی از بار محوری W_P تعیین می‌گردد.

$$\delta W_P = \int_0^l P\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(\delta w_0)dx = \int_0^l\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_0\right)dx$$
$$= P\frac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0\Big|_0^l - \int_0^l P\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\delta w_0 dx \qquad (۲-۱۳)$$

برای تعیین کار حاصل از تحریک عرضی، کار هر یک از مؤلفه‌های آن تعیین می‌شود. نیروی گسترده‌ی $Q(x,t)$ بر لبه‌ی بالایی تیر یعنی $z = h/2$ وارد می‌شود و پس از تغییر شکل تیر، تحریک عرضی دارای مولفه‌ی $-Q\sin\theta$ در راستای x و مؤلفه‌ی $Q\cos\theta$ در راستای z می‌باشد، که θ زاویه‌ی مماس بر تیر با امتداد افقی است. با توجه به این که :

$$tg\theta = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$cos\,\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t\,g^2\theta}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dots \qquad (۱۴\text{-}۲)$$

$$sin\,\theta = \sqrt{1-cos^2\theta} = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^3 + \dots \approx \frac{\partial w}{\partial x}$$

کار انجام شده توسط این دو مؤلفه به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$W_Q = \begin{Bmatrix} -Q\,sin\,\theta \\ Q\,cos\,\theta \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}_{z=\frac{h}{2}} = -Qu\,sin\,\theta + Qw\,cos\,\theta \qquad (۱۵\text{-}۲)$$

با استفاده از روابط (۲-۱) و (۲-۱۴) و (۲-۱۵) تغییرات کار حاصل از تحریک عرضی W_Q تعیین می-

شود.

$$\begin{aligned} \delta W_Q = &-Q(u_0+zu_1)\delta\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+z\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+Q\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+z\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)\delta\left(w_0+zw_1\right) \\ &+Q\left(w_0+zw_1\right)\delta\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+z\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)-Q\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}+z\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\delta(u_0+zu_1) \end{aligned} \qquad (۱۶\text{-}۲)$$

با انتگرال‌گیری از این رابطه در راستای طول تیر، کار نیروی گسترده به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} &\int_0^l\left[\frac{\partial}{\partial x}(Qu_0)\delta w_0+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h}{2}u_0\right)\delta w_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h}{2}u_1\right)\delta w_0+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h^2}{4}u_1\right)\delta w_1\right. \\ &-Q\frac{\partial w_0}{\partial x}\delta u_0-Q\frac{h}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x}\delta u_1-Q\frac{h}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\delta u_0-Q\frac{h^2}{4}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\delta u_1 \\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_0+\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_0\frac{h}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h}{2}w_0\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\delta w_0 \\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h^2}{4}w_0\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\delta w_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h}{2}w_1\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_0+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h^2}{4}w_1\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_1 \\ &+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h^3}{8}w_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\delta w_1+\frac{\partial}{\partial x}\left(Q\frac{h^2}{4}w_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\delta w_0+Q\delta w_0+Q\frac{h}{2}\delta w_1 \\ &-\frac{1}{2}Q\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\delta w_0-\frac{1}{2}Q\frac{h}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\delta w_1-Q\frac{h}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\delta w_0 \\ &\left.-Q\frac{h^2}{4}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\delta w_1-Q\frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\delta w_0-Q\frac{h^3}{16}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\delta w_1\right]dx \\ &-\left[\frac{h}{2}Qu_1\delta w_0+\frac{h^2}{4}Qu_1\delta w_1+Qw_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_0+\frac{h^2}{4}Qw_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\delta w_1+\frac{h^2}{4}Qw_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\delta w_0\right. \\ &+\frac{h^2}{4}Qw_0\frac{\partial w_1}{\partial x}\delta w_1+\frac{h}{2}Qw_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\delta w_1+\frac{h}{2}Qw_0\frac{\partial w_1}{\partial x}\delta w_0+\frac{h}{2}Qw_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\delta w_0 \\ &\left.+\frac{h}{2}Qu_0\delta w_1+Qu_0\delta w_0\right]\Bigg|_0^l \end{aligned} \qquad (۱۷\text{-}۲)$$

۲-۶- تعیین معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون

معادلات حاکم بر حرکت تیر در بازه‌ی زمانی (t_1,t_2) باید اصل همیلتون را ارضا کنند. بر اساس اصل همیلتون [۴۹]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\mathrm{T} - \mathrm{U} + W_P + W_Q)dt = 0 \qquad (۲-۱۸)$$

با به کارگیری روابط (۲-۷)، (۲-۱۰)، (۲-۱۳) و(۲-۱۷) در اصل همیلتون، معادلات حرکت تیر الاستیک تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned}
&b\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho bh\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - f_1 = 0\\
&b\frac{\partial M_x}{\partial x} - bN_{xz} - \frac{\rho bh^3}{12}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - f_2 = 0\\
&b\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x} + M_x\frac{\partial w_1}{\partial x} + N_{xz}(1+w_1)\right) - \rho bh\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - f_3 = 0\\
&b\frac{\partial}{\partial x}\left(M_x\frac{\partial w_0}{\partial x} + P_x\frac{\partial w_1}{\partial x} + M_{xz}(1+w_1)\right) - bN_{xz}\frac{\partial w_0}{\partial x}\\
&-bM_{xz}\frac{\partial w_1}{\partial x} - bN_z(1+w_1) - \frac{\rho bh^3}{12}\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} - f_4 = 0
\end{aligned} \qquad (۲-۱۹)$$

f_1، f_2، f_3 و f_4 مؤلفه‌های ناشی از تحریک خارجی بوده و به شکل زیر تعیین می‌شوند.

$$f_1 = -Q\frac{\partial w_0}{\partial x} - Q\frac{h}{2}\frac{\partial w_1}{\partial x}, \quad f_2 = -Q\frac{h}{2}\frac{\partial w_0}{\partial x} - Q\frac{h^2}{4}\frac{\partial w_1}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
f_3 =& \frac{\partial}{\partial x}(Qu_0) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}(Qu_1) + \frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_0\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_1\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\\
&+\frac{h^2}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) + Q - \frac{1}{2}Q\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 - \frac{h}{2}Q\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - Q\frac{h^2}{8}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2 + P\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}
\end{aligned} \qquad (۲-۲۰)$$

$$\begin{aligned}
f_4 =& \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}(Qu_0) + \frac{h^2}{4}\frac{\partial}{\partial x}(Qu_1) + \frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_0\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + \frac{h^2}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_0\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) - Q\frac{h^3}{16}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\\
&+\frac{h^2}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_1\frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + \frac{h^3}{8}\frac{\partial}{\partial x}\left(Qw_1\frac{\partial w_1}{\partial x}\right) + Q\frac{h}{2} - \frac{1}{4}Qh\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2 - Q\frac{h^2}{4}\frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_1}{\partial x}
\end{aligned}$$

و در صورتی که نیروی گسترده‌ی $Q(x,t)$ قائم باقی بماند جملات مربوط به نیروهای خارجی به شکل زیر ساده خواهند شد.

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = Q + P\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}, \quad f_4 = Q\frac{h}{2} \tag{۲-۲۱}$$

۲-۷- تعمیم معادلات استخراج شده به تیرهای ویسکوالاستیک [۵۰]

همان طور که در فصل اول بیان شد، مرسوم است جهت توصیف رفتار ماده‌ی ویسکوالاستیک یک سیستم، اثر مؤلفه‌ی برشی را از مؤلفه‌ی تغییر حجم خالص جدا کنند. زیرا بخش‌های انحرافی و حجمی تنش، رفتارهای رهایش متفاوتی را دنبال می‌کنند. در این پایان‌نامه رفتار ماده در بالک (اتساع)، الاستیک و در برش، ویسکوالاستیک در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تعیین معادلات حاکم در حوزه‌ی ویسکوالاستیک شامل مراحل زیر است.

۲-۷-۱- قانون تعمیم یافته‌ی هوک

روابط تنش-کرنش یک جسم جامد سه‌بعدی ایزوتروپیک الاستیک که از قانون هوک پیروی می‌کند، به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{xx} \\
\sigma_{yy} &= (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{\theta\theta} \\
\sigma_{zz} &= (K - \frac{2}{3}G)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) + 2G\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz}
\end{aligned} \tag{۲-۲۲}$$

۲-۷-۲- جایگزینی اوپراتورهای K و G ماده‌ی ویسکوالاستیک

مقادیر K و G به صورت اوپراتوری و مطابق روابط (۱-۹) است. با جایگزین کردن این مقادیر در معادلات فوق، روابط تنش-کرنش مواد ویسکوالاستیک به صورت اوپراتوری زیر بدست می‌آید [۵۰].

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{1}{3}\frac{Q_2P_1\varepsilon_{xx} + Q_2P_1\varepsilon_{yy} + Q_2P_1\varepsilon_{zz} + 2Q_1P_2\varepsilon_{xx} - Q_1P_2\varepsilon_{yy} - Q_1P_2\varepsilon_{zz}}{P_2P_1} \\
\sigma_{yy} &= \frac{1}{3}\frac{Q_2P_1\varepsilon_{xx} + Q_2P_1\varepsilon_{yy} + Q_2P_1\varepsilon_{zz} + 2Q_1P_2\varepsilon_{yy} - Q_1P_2\varepsilon_{xx} - Q_1P_2\varepsilon_{zz}}{P_2P_1} \\
\sigma_{zz} &= \frac{1}{3}\frac{Q_2P_1\varepsilon_{xx} + Q_2P_1\varepsilon_{yy} + Q_2P_1\varepsilon_{zz} + 2Q_1P_2\varepsilon_{zz} - Q_1P_2\varepsilon_{yy} - Q_1P_2\varepsilon_{xx}}{P_2P_1} \\
\sigma_{xz} &= \frac{Q_1\varepsilon_{xz}}{P_1}
\end{aligned} \tag{۲-۲۳}$$

که در آن K مدول بالک و G مدول برشی است.

۲-۷-۳- تعیین منتجه های تنش در حوزه‌ی ویسکوالاستیک

با توجه به این که مخرج مشترک تمامی چهار رابطه‌ی (۲-۲۳) ، اوپراتور P_2P_1 است. برای راحتی کار، حاصل‌ضرب منتجه‌های تنش (رابطه‌ی(۲-۸)) در این اوپراتور تعیین می‌شود. بدین ترتیب روابط بین منتجه‌های تنش با کرنش بدست می‌آید.

$$NN_x = P_1P_2N_x = \int_{-h/2}^{h/2} P_1P_2\sigma_x dz \tag{۲-۲۴}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی کرنش-جابه‌جایی، روابط بین منتجه‌های تنش (ضربدر اوپراتور P_2P_1) با جابه‌جایی تعیین می‌شود.

$$NN_x = \frac{1}{72}h\begin{pmatrix} \left(2h^2Q_1P_2 + h^2Q_2P_1\right)(\frac{\partial w_1}{\partial x})^2 + \left(12Q_2P_1 + 24Q_1P_2\right)(\frac{\partial w_0}{\partial x})^2 \\ + \left(24Q_2P_1 + 48Q_1P_2\right)(\frac{\partial u_0}{\partial x}) + \left(12Q_2P_1 - 12Q_1P_2\right){w_1}^2 \\ + \left(24Q_2P_1 - 24Q_1P_2\right)w_1 \end{pmatrix} \tag{۲-۲۵}$$

۲-۷-۴- انتخاب مدل ویسکوالاستیک

برای مدل‌سازی ویسکوالاستیک از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده شده است (شکل (۱-۴)) و رابطه‌ی تنش و کرنش آن مطابق رابطه‌ی (۱-۱۵) است. در این حالت اوپراتورهای P_1 و Q_1 در رابطه‌ی (۱-۷) به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} P_1 &= (\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}) + \frac{\tau}{G_1}D \\ Q_1 &= 2(1+\tau D) \end{aligned} \tag{۲-۲۶}$$

که $\tau = \frac{\eta}{G_2}$زمان رهایش وD اوپراتور مشتق زمانی $(D = \frac{\partial}{\partial t})$ می باشند. اوپراتورهای P_2 و Q_2 نیز به صورت زیر تعیین می‌شوند.

$$\begin{aligned} P_2 &= 1 \\ Q_2 &= 3K \end{aligned} \tag{۲-۲۷}$$

۲-۷-۵- تعیین معادلات براساس مدل انتخابی

براساس مدل انتخابی، مقادیر Q_1، Q_2، P_1 و P_2 تعیین می‌شوند. با جایگذاری این مقادیر در رابطه-

ی(۲-۲۴)، رابطه‌ی بین منتجه‌های تنش(ضربدر اوپراتور P_2P_1) با جابه‌جایی براساس مدل مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید.

$$NN_x = \frac{1}{72}h\begin{pmatrix} 2\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(h^2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial t}\right)+6\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial t}\right)+12\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial t}\right)\right) \\ +\left(3G_0^*+4\right)\left(h^2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2+24\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+12\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right) \\ +12\left(3G_0^*-2\right)\left(w_1^2+2w_1\right)+24\tau\left(3G_1^*-2\right)(1+w_1)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right) \end{pmatrix} \tag{۲-۲۸}$$

$$G_0^*=\frac{K}{G_1}+\frac{K}{G_2},\quad G_1^*=\frac{K}{G_1}$$

حال با ضرب هر چهار معادله‌ی (۲-۱۹) در اوپراتور P_2P_1 و قرار دادن منتجه‌های تنش ویسکوالاستیک، معادلات تیر ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\frac{h}{3}\begin{pmatrix} \frac{\tau}{3}\left(3G_1^*-2\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)+\frac{h^2}{12}\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\partial t}\right) \\ +\frac{h^2}{12}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+\left(3G_0^*-2\right)(1+w_1) \end{pmatrix}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)-\frac{h\rho}{K}\left(\tau G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^3}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\right)G_0^*\right) \\ &+\frac{h}{3}\begin{pmatrix} \left(3\tau G_1^*+3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ +4\tau\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial t}\right) \end{pmatrix}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+\frac{h}{3}\tau\left(4\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial t}\right)+3G_1^*\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial t}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \\ &+\frac{h}{3}\begin{pmatrix} \frac{h^2}{12}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) \\ +\left(3G_1^*-2\right)(1+w_1) \end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial t}\right)+\frac{h}{3}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)-\frac{h}{3}\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial t}\right)=0 \end{aligned} \tag{۲-۲۹}$$

$$h\begin{pmatrix}\frac{h^2}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)-\tau\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\\ +\frac{h^2}{36}\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\partial t}\right)-(1+w_1)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)-\frac{1}{12}\frac{h^3\rho}{K}\left(G_0^*\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_1\right)+G_1^*\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}u_1\right)\right)$$
$$+\frac{h^2}{36}\begin{pmatrix}\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial t}\right)\\ \left(3G_0^*\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+4\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)-h\left(\tau\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+u_1\right)+\frac{h^3}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right) \tag{۳۰-۲}$$
$$+\frac{h^2}{36}\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)-\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2\partial t}\right)+\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial t}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\right)-h\tau\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial t}\right)=0$$

$$+\begin{pmatrix}\frac{h\tau}{12}\left(3G_1^*+4\right)\begin{pmatrix}h^2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+4\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)\\ +12\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\end{pmatrix}\\ +\frac{h\tau}{3}\left(6G_1^*+4(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial t}\right)+\frac{h^3}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)$$
$$+\begin{pmatrix}\frac{h\tau}{3}\left(3G_1^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+(1+w_1)+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right)\frac{2}{3}h\tau w_1^2\\ +\frac{1}{48}h^3\tau G_1^*\left(6\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)^2+8\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2\right)+\frac{1}{2}h\tau\left(G_1^*+2\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial t}\right)$$
$$+\begin{pmatrix}\frac{h\tau}{3}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\\ +\frac{h}{12}\left(3G_0^*+4\right)\left(h^2\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+4\left(1+w_1\right)\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+\frac{4}{3}h\tau\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial t}\right) \tag{۳۱-۲}$$
$$+\frac{1}{3}h^3\tau\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\\ +\frac{1}{4}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\partial t}\right)+h\tau\left(\frac{h^2}{12}\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+G_1^*\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2\partial t}\right)$$
$$+\left(\frac{h^3}{12}\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+h\tau w_1\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial t}\right)+\frac{h^3}{12}\tau\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)$$

$$+h\begin{pmatrix}\frac{\tau}{3}\left(4+3G_1^*\right)\left((1+w_1)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial t}\right)\right)+1\\+\frac{1}{6}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2+3\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+2w_1+w_1^2\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)$$

$$+\frac{h\tau}{12}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\left(3G_1^*\left(2+h^2\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)\right)+16(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\\+2h^2\left(3G_1^*+2\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+(1+u_1)\\+\frac{1}{3}h^2\left(12\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+4\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)+3G_1^*\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial t}\right)$$

$$+\frac{h}{3}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)-\frac{h\rho}{K}\left(G_0^*\left(\frac{\partial w_0}{\partial t^2}\right)+\tau G_1^*\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}w_0\right)\right)-\frac{G_1^*\tau}{K}\left(\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)+P\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial t}\right)\right)$$

$$+h\left(u_1+\tau\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)+h\left(\tau\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)+1+w_1\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)-\frac{G_0^*}{K}\left(Q+P\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right)=0$$

$$-\frac{h}{6}\begin{pmatrix}\left(3G_0^*+4\right)(1+w_1)+6G_0^*w_1\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)\\-h^2\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)+\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+\frac{h^3\tau}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)-18w_1^2\right)$$

$$-\frac{1}{12}\frac{h^3\rho}{K}\left(G_0^*\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}\right)+\tau G_1^*\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial t^3}\right)\right)+\frac{h^3\tau}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2\partial t}\right)-\frac{h}{6}\left(3G_0^*+4\right)w_1^3$$

$$+h\left(\frac{h^2}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)-\left(\tau\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)+u_1\right)\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)+\frac{h}{3}\left(2(1+w_1)-G_0^*\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{h^3}{36}\left(\left(3G_0^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+3\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right)+\tau\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x\partial t}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) \quad (۳۲\text{-}۲)$$

$$-h\left(\frac{h}{3}\left(3G_1^*+4\right)(1+w_1)+2\tau w_1^2\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)-\frac{h}{3}\left(3G_0^*+4\right)w_1+\frac{h^3\tau}{72}6\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\partial t}\right)$$

$$+h^3\left(\frac{\tau}{72}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)+\frac{1}{72}\left(3G_0^*+4\right)(1+w_1)+\frac{h^2}{40}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{h}{K}\left(G_0^*Q+\tau G_1^*\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)\right)-\frac{h\tau}{3}\left(3G_1^*-2\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)$$

$$+h^3\begin{pmatrix}\frac{1}{12}+\frac{1}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(w_1+\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+\frac{1}{2}w_1^2\right)+\frac{1}{8}G_0^*\left(\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2+\frac{3}{20}h^2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\right)\\ +\frac{\tau}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial t}\right)+(1+w_1)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t}\right)\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)$$

$$+h\tau\begin{pmatrix}\left(\frac{h^3}{36}\left(3G_1^*+4\right)-u_1\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}\right)-\left(2hG_1^*+\frac{4}{3}(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\\ +\frac{h^3}{12}\left(3G_1^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\partial t}\right)$$

$$+\frac{h\tau}{36}\left(3G_1^*+4\right)\begin{pmatrix}h^2\begin{pmatrix}\left(\left(1+w_1\right)+\frac{1}{5}h^2\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\\ +3\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial t}\right)\\ +h^2\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)+3\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\right)\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial t}\right)+3\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial t}\right)\\ +\frac{h^2}{2}\left(\begin{pmatrix}\frac{9}{20}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x}\right)^2+3\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\\ +2\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)+w_1\right)+w_1^2\end{pmatrix}\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\partial t}\right)+h^2\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^2\partial t}\right)\end{pmatrix}=0$$

معادلات حاضر، یک دستگاه معادلات شامل چهار معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی است که به یکدیگر کوپل می‌باشند. با استفاده از اصل همیلتون علاوه بر معادلات حرکت، شرایط مرزی نیز به دست خواهد آمد. شرایط مرزی تیر براساس منتجه‌های تنش به صورت زیر خواهد بود.

$$N_x\delta u_0\Big|_0^l=0,\quad M_x\,\delta u_1\Big|_0^l=0,\quad \left(N_x\frac{\partial w_0}{\partial x}+Q_x(1+w_1)-P_x\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\delta w_0\Big|_0^l=0$$
$$\left(M_x\frac{\partial w_0}{\partial x}+P_x\frac{\partial w_1}{\partial x}+M_{xz}(1+w_1)\right)\delta w_1\Big|_0^l=0 \qquad (۳۳-۲)$$

از (۲-۳۳) شرایط مرزی مسأله را می‌توان تعیین نمود. مثلاً برای شرایط مرزی به صورت یک سر تکیه‌گاه ساده و طرف دیگر تکیه‌گاه گیردار، نتیجه می‌شود:

$$\begin{array}{l}u_0=0\quad at\quad x=0\quad;\quad N_x=0\quad at\quad x=l\quad;\quad w_0=0\quad at\quad x=0,l\\ u_1=0\quad at\quad x=0\quad;\quad M_x=0\quad at\quad x=l\quad;\quad w_1=0\quad at\quad x=0,l\end{array} \qquad (۳۴-۲)$$

۲-۸- معادلات تیر اویلر-برنولی و تیموشنکو در حالت ویسکوالاستیک

معادله‌ی (۲-۳۵)، معادله‌ی حالت الاستیک تیر اویلر-برنولی را نشان می‌دهد [۴۹].

$$EI\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right)+\rho A\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\right)-P\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (۲\text{-}۳۵)$$

با اعمال اوپراتورهای ویسکوالاستیک در معادله‌ی (۲-۳۵) ، معادله‌ی تیر اویلر –برنولی در حالت ویسکوالاستیک به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}kbh^3{G_1}^2\tau\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right)+2{G_1}^2(3G_0^*+1)\left(\rho A\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\right)-P\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\right)+\frac{3}{2}kbh^3\tau{G_1}^2\left(\frac{\partial^5 w_0}{\partial x^4\partial t}\right)\\&2\tau G(3K+G_1)\left(\rho A\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^3}\right)-P\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2\partial t}\right)\right)=0\end{aligned} \qquad (۲\text{-}۳۶)$$

معادله‌ی تیر تیموشنکو در حالت الاستیک به صورت زیر است [۴۹].

$$EI\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right)+\rho A\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\right)-\rho I\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial t^2}\right)+\frac{\rho I}{\kappa G}\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4}\right)-P\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)=0 \qquad (۲\text{-}۳۷)$$

معادلات تیر تیموشنکو در حالت ویسکوالاستیک را به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}&3\rho bh^3G_0^*{G_1}^2(3G_0^*+1)\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial t^4}\right)^2-\rho bh^3K{G_1}^2(3G_0^*(\kappa+3)+1)\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2\partial t^2}\right)\\&+9K^2bh^3\kappa{G_1}^2\left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\right)+12\rho\kappa A{G_1}^2(1+3G_0^*)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}\right)-12P\kappa A{G_1}^2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)=0\end{aligned} \qquad (۲\text{-}۳۸)$$

۲-۹- جمع بندی

در این فصل، ابتدا معادلات حاکم بر ارتعاشات تیر الاستیک با خیز نسبتاً زیاد براساس تئوری تغییر شکل برشی استخراج شده است. سپس با اعمال روش اوپراتوری برای مدل ویسکوالاستیک جامد استاندارد خطی، معادلات برای تیر ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد به دست آمده است. در معادلات حرکت، جملات غیرخطی هندسی مربوط به روابط کرنش-جابه‌جایی فن-کارمن ظاهر می‌شوند. معادلات به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای زمان و مکان هستند که به یکدیگر کوپل بوده و برای تعیین مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی باید به طور هم‌زمان حل شوند.

فصل سوم

حل تحلیلی

۳-۱- مقدمه

در فصل قبل، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر ویسکوالاستیک، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، استخراج شد. معادلات به صورت یک دستگاه معادله دیفرانسیل، شامل چهار معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای مکان و زمان بوده که به یکدیگر کوپل هستند. از آنجا که در تعیین حل این دستگاه معادلات از تئوری اغتشاشات استفاده می‌شود، نخست به بی‌بعد سازی معادلات پرداخته می‌شود. پس از بی‌بعد سازی در بخش اول، فرکانس‌های طبیعی سیستم تعیین شده و در قسمت بعد پاسخ به دست آمده است. همچنین روند تعیین بار کمانش توضیح داده شده است.

۳-۲- بی‌بعدسازی معادلات

پارامترهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{x}^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{t_0}, \quad u_0{}^* = \frac{u_0}{h_0}, \quad w_0^* = \frac{w_0}{h_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0} \qquad (۱-۳)$$

x^* و t^* به ترتیب مکان و زمان بی‌بعد، $u_0{}^*$ و w_0^* جابه‌جایی‌های بی‌بعد مؤلفه‌ی u_0و w_0 بوده و مؤلفه‌های جابه‌جایی u_1و w_1 نیز بی‌بعد هستند. h_0 و t_0 شاخص‌های ضخامت و زمان هستند که مقادیر آنها به صورت $h_0=h$ و $t_0=l/c$ درنظر گرفته شده است. c معرف سرعت موج بوده و به‌صورت $c = \sqrt{\dfrac{A}{\rho}}$ تعریف شده است.

با اعمال پارامترهای بی‌بعد فوق در معادلات (۲-۲۹) تا (۲-۳۲) پارامترهای بی‌بعد زیر نیز قابل تعریف است.

$$\beta = \frac{\tau}{t_0}, \quad e = \frac{\rho}{K_0}\left(\frac{h_0}{t_0}\right)^2, \quad \mathrm{P}^* = \frac{P}{K_0 h_0 b}, \quad Q^* = \frac{Q}{K_0 b \varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{h_0}{l} \qquad (۲-۳)$$

ε پارامتری کوچک است و به عنوان پارامتر اغتشاش در نظر گرفته می‌شود. در نهایت معادلات بی‌بعد شده، شامل چهار معادله‌ی دیفرانسیل جزئی غیرخطی کوپل به هم و به شکل زیر است.

$$\frac{\left(3G_1^*+4\right)\varepsilon h^*}{36}\left(\begin{array}{l}\varepsilon\beta h^*\left(\frac{\partial^3 u_0^{\ *}}{\partial t^*\partial x^{*2}}\right)+\varepsilon h^*\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^*\partial x^*}\right)+12\beta\left(\frac{\partial^2 w_0{}^*}{\partial t^*\partial x^*}\right)\\ +\varepsilon\beta\frac{h^*}{36}\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial t^*\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)+12\varepsilon\beta\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^3 w_0^{\ *}}{\partial t^*\partial x^{*2}}\right)\end{array}\right)$$

$$\left(3G_0^*+4\right)\varepsilon^2 h^*\left(+\frac{\varepsilon}{3}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}}\right)+\varepsilon\frac{h^{*2}}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)\right) \tag{۳-۳}$$

$$\frac{\varepsilon h^*}{3}\left(\beta\left(3G_1^*-2h^*\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+\left(3G_0^*-2\right)(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)-eG_0^*\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}}\right)-G_1^* h^*\beta e\left(\frac{\partial^3 u_0^*}{\partial t^{*3}}\right)$$

$$+\varepsilon h^*\beta\left(\frac{1}{3}\left(3G_1^*-2\right)(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^*\partial x^*}\right)=0$$

$$\varepsilon h^*\left(-\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{36}(4+3\beta)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{\varepsilon^2 h^{*2}\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)-h^*(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)$$

$$+\varepsilon h^{*3}\left(\frac{\varepsilon^2\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_0^*}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)+\frac{\varepsilon^2}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)-\varepsilon h^*\beta\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)$$

$$+\frac{\varepsilon^2 h^{*3}}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{\varepsilon^2 h^{*3}\beta}{36}\left(\varepsilon\left(4G_0^*+3G_1^*\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right) \tag{۴-۳}$$

$$+\frac{1}{9}\varepsilon^3 h^{*3}\beta\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)+\frac{\varepsilon^2 h^{*3}\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)-h^*\left(\frac{\partial u_1}{\partial t^*}\right)\beta-h^* u_1$$

$$-\frac{1}{12}h^{*3}e\left(G_0^*\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}}\right)+G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^{*3}}\right)\right)+\frac{1}{12}\varepsilon^3 h^{*3}\beta G_1^*\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^*\partial t^*}\right)=0$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{2}h^{*}\left(\begin{array}{l}
2\varepsilon\left(\dfrac{\partial w_{0}^{*}}{\partial x^{*}}\right)^{2}+\dfrac{\varepsilon\beta}{3}\left(3G_{1}^{*}+4\right)\left(\left(\dfrac{\partial^{2}u_{0}^{*}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)+\left(1+w_{1}\right)\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial t^{*}}\right)\right)\\
+\dfrac{1}{24}\left(3G_{0}^{*}+4\right)\left(8w_{1}+4w_{1}^{2}+8\varepsilon\left(\dfrac{\partial u_{0}^{*}}{\partial x^{*}}\right)+\varepsilon^{2}h^{*2}\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial x^{*}}\right)^{2}\right)\\
+\varepsilon^{2}\beta\left(3G_{1}^{*}+4\right)\left(\dfrac{\partial w_{0}^{*}}{\partial x^{*}}\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{0}^{*}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)-P^{*}G_{0}^{*}+1\\
+\dfrac{\varepsilon^{2}h^{*2}\beta}{12}\left(3\varepsilon G_{1}^{*}\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*2}}\right)+4\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)\right)\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial x^{*}}\right)
\end{array}\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{0}^{*}}{\partial x^{*2}}\right)\\
&+\varepsilon h^{*}\left(\begin{array}{l}
\dfrac{\left(3G_{1}^{*}+4\right)\beta}{12}\left(\begin{array}{l}
\left(h^{*2}\left(\dfrac{\partial^{3}}{\partial x^{*2}\partial t^{*}}w_{1}\right)+4\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial t^{*}}\right)\right)\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial x^{*}}\right)\\
+4\varepsilon^{2}\beta\left(\dfrac{\partial^{3}u_{0}^{*}}{\partial x^{*2}\partial t^{*}}\right)+4\varepsilon\beta\left(1+w_{1}\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)
\end{array}\right)\\
+\dfrac{1}{12}\left(3G_{0}^{*}+4\right)\left(\begin{array}{l}
2\varepsilon^{2}\left(\dfrac{\partial^{2}u_{0}^{*}}{\partial x^{*2}}\right)+4\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial x^{*}}\right)\\
+\varepsilon^{2}h^{*2}\left(\varepsilon\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial x^{*}}\right)+\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*2}}\right)
\end{array}\right)
\end{array}\right)\left(\dfrac{\partial w_{0}^{*}}{\partial x^{*}}\right)\\
&+\varepsilon h^{*}\left(\begin{array}{l}
w_{1}+\varepsilon\left(\dfrac{\partial u_{1}}{\partial x^{*}}\right)+\beta\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial t^{*}}\right)+\dfrac{\varepsilon^{2}h^{*2}\beta}{36}\left(3G_{1}^{*}+4\right)\left(\dfrac{\partial^{3}w_{1}}{\partial x^{*2}\partial t^{*}}\right)\\
+\dfrac{\varepsilon^{2}h^{*2}}{36}\left(3G_{0}^{*}+4\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*2}}\right)
\end{array}\right)\left(\dfrac{\partial u_{1}}{\partial x^{*}}\right)\\
&+\varepsilon h^{*3}\beta\left(\begin{array}{l}
\left(\dfrac{\partial u_{1}}{\partial t^{*}}\right)+u_{1}+\dfrac{\varepsilon^{2}h^{*2}}{36}\left(3G_{0}^{*}+4\right)\left(\dfrac{\partial^{2}u_{1}}{\partial x^{*2}}\right)+\dfrac{1}{3}\varepsilon^{3}\left(\dfrac{\partial^{2}w_{0}^{*}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*2}}\right)\\
+\dfrac{1}{4}\varepsilon^{3}G_{1}^{*}\left(\dfrac{\partial^{2}u_{0}^{*}}{\partial x^{*2}}\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)+\dfrac{\varepsilon^{2}}{36}\left(3G_{1}^{*}+4\right)\left(\dfrac{\partial^{3}u_{1}}{\partial x^{*2}\partial t^{*}}\right)
\end{array}\right)\left(\dfrac{\partial w_{1}}{\partial x^{*}}\right)\\
&+\varepsilon h^{*}\beta\left(u_{1}+\dfrac{1}{12}\varepsilon^{2}h^{*2}\left(\dfrac{\partial^{2}u_{1}}{\partial x^{*2}}\right)G_{1}^{*}+\dfrac{1}{9}\varepsilon^{2}h^{*2}\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*2}}\right)\right)\left(\dfrac{\partial^{2}w_{1}}{\partial x^{*}\partial t^{*}}\right)
\end{aligned}
\tag{۵-۳}
$$

$$+\varepsilon^2 h^*\beta\left(\frac{(3G_1^*+4)}{6}\left(3\varepsilon^2\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^2}\right)^2+2\varepsilon\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*}\right)+2w_1+\frac{\varepsilon^2 h^{*2}}{4}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)^2+w_1^2\right)+1\right)\left(\frac{\partial^3 w_0^*}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)$$

$$+\varepsilon\beta h^*\left(\frac{4}{3}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{\varepsilon}{3}\left((3G_1^*+4)(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)$$

$$+\varepsilon h^*\beta\left(1+w_1+\varepsilon^2 h^{*2}\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{12}G_1^*\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^*\partial t^*}\right)-h^* e\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial t^{*2}}\right)G_0^*$$

$$-\varepsilon^2 h^*\beta G_1^*(e+\frac{P^*}{h^*})\left(\frac{\partial^3 w_0^*}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)-G_0^* Q^*-\beta G_1^*\left(\frac{\partial Q^*}{\partial t^*}\right)=0$$

$$+\varepsilon h^{*3}\beta\begin{pmatrix}\frac{1}{36}(3G_1^*+4)\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{\varepsilon^3}{12}(3G_1^*+4)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}\right)\\ +\left(\frac{h^{*2}}{80}(3G_1^*+4)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{1}{12}G_1^*(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^*\partial t^*}\right)$$

$$+\frac{\varepsilon^2 h^{*3}}{72}\begin{pmatrix}+(3G_0^*+4)w_1^2+6+6G_0^*\left(1+\varepsilon\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*}\right)\right)+8w_1\\ +2\beta\left((3G_1^*+4)w_1+3G_1^*\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+6\varepsilon\beta G_1^*\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)\end{pmatrix}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)$$

$$+\frac{\varepsilon^2 h^{*3}\beta}{24}\left(8\varepsilon^2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)+2\varepsilon G_1^*\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*}\right)+w_1^2 G_1^*\right)\left(\frac{\partial^3 w_0^*}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right) \tag{۳-۶}$$

$$-\frac{1}{12}h^{*3}G_0^* e\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^{*2}}\right)-\frac{1}{12}h^{*3}\beta G_1^* e\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial t^{*3}}\right)-\frac{h^*}{6}(3G_0^*+4)(3w_1{}^2+w_1{}^3)$$

$$-\varepsilon h^*\beta G_1^* w_1\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)-h^*\left(\frac{4}{3}+G_0^*\left(1+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x^*}u_0^*\right)\right)\right)w_1$$

$$+\frac{\varepsilon^3 h^{*3}\beta}{36}\left(4\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^*}\right)+9\varepsilon G_1^*\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)\right)\left(\frac{\partial^3 w_0^*}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)$$

$$+\frac{\varepsilon h^*}{3}\left(2-3G_0^*+2w_1+2\beta\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*}\right)-\frac{1}{2}h^* G_0^* Q^*-\frac{1}{2}h^*\beta G_1^*\left(\frac{\partial Q^*}{\partial t^*}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&h^*\beta\left(\begin{array}{l}\frac{\varepsilon^2}{72}\left(3G_1^*+4\right)h^{*2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)^2-\frac{\varepsilon^2}{6}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)-\frac{1}{2}\left(4+3G_1^*\right)\left(2w_1+w_1^2\right)\\+\frac{1}{9}\varepsilon^2h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)-\left(1+\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial x^*}w_0^*\right)\right)G_1^*-\frac{4}{3}\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)\\
&+\frac{\varepsilon h^*}{36}\left(\begin{array}{l}+\varepsilon^2h^{*2}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^{*2}}\right)+3\varepsilon^2h^{*2}\beta G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)+36u_1-36\beta\left(\frac{\partial u_1}{\partial t^*}\right)\\+4\varepsilon^2h^{*2}\beta\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)-48\varepsilon\beta\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)\\
&+\frac{\varepsilon^2h^*}{24}\left(\begin{array}{l}-16\beta\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+\varepsilon^2h^{*2}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)-4\left(3G_0^*+4\right)w_1-14\\+\varepsilon^2h^{*2}\beta\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)^2\\
&+\varepsilon^2h^*\left(\begin{array}{l}\frac{1}{24}h^{*2}G_0^*+\frac{h^{*2}}{72}\left(3G_0^*+4\right)w_1+\frac{\varepsilon^2h^{*4}}{160}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)\\+\frac{1}{18}+\frac{1}{40}\varepsilon^2h^{*4}\beta\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)^2\\
&+\varepsilon h^{*3}\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^{*2}}\right)+\frac{1}{9}\varepsilon\left(\beta+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^*\partial t^*}\right)+\frac{\varepsilon^2\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_0^*}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)\\
&+\frac{\varepsilon h^*\beta}{9}\left(\varepsilon^2h^{*2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^{*2}}w_1\right)-9G_1^*+6\left(1+w_1\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)+\frac{3}{160}\varepsilon^2h^{*2}G_1^*\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)^2\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)\\
&+\varepsilon h^*\beta\left(\begin{array}{l}+\varepsilon\left(\frac{1}{4}\varepsilon^2h^{*2}G_1^*\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^{*2}}\right)-G_1^*\left(1+w_1\right)\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial x^*}\right)-u_1\\+\frac{\varepsilon^3h^{*2}}{12}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial x^*}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}\right)\frac{h^{*2}}{36}+\left(4+3\varepsilon^2G_1^*\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^{*2}}\right)\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^*\partial t^*}\right)\\
&+\frac{\varepsilon^2h^{*3}}{36}\left(\begin{array}{l}\left(3G_0^*+4\right)\left(3\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right)\right)\\+\beta\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X\partial t^*}\right)+12\beta\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial X}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial x^{*2}}\right)\\
&+\frac{\varepsilon^2h^{*3}\beta}{36}\left(7+\varepsilon\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial x^*}\right)+2w_1^2+3w_1G_1^*\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^{*2}\partial t^*}\right)=0
\end{aligned}
$$

G_0^* و G_1^* مدول‌های ویسکوالاستیک در حالت بی‌بعد هستند که در فصل قبل تعریف شده‌اند. این

معادلات با فرض این‌که نیروی گسترده‌ی Q قائم باقی بماند، محاسبه شده‌اند.

۳-۳- تعیین فرکانس طبیعی

در تعیین فرکانس‌های طبیعی تیر، تحریک دینامیکی عرضی تأثیری بر مقدار فرکانس طبیعی نخواهد داشت. جهت یافتن فرکانس‌های طبیعی، با تعریف $X=\dfrac{x^*}{\varepsilon}$ در معادلات (۳-۳) تا (۳-۶) نتیجه می-شود.

$$\begin{aligned}
&\frac{(3G_1^*+4)h^*}{36}\left(\begin{aligned}&\beta h^*\left(\frac{\partial^3 u_0^{\,*}}{\partial t^*\partial X^2}\right)+h^*\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^*\partial X}\right)+12\,\beta\left(\frac{\partial^2 w_0^{\,*}}{\partial t^*\partial X}\right)\\&+\beta\,\frac{h^*}{36}\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial t^*\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)+12\,\beta\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^3 w_0^{\,*}}{\partial t^*\partial X^2}\right)\end{aligned}\right)\\
&\frac{(3G_0^*+4)h^*}{36}\left(12\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2}\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\right)\\
&\frac{h^*}{3}\left(\beta\left(3G_1^*-2h^*\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+\left(3G_0^*-2\right)(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)-eG_0^*\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial t^{*2}}\right)\\
&-G_1^*h^*\beta e\left(\frac{\partial^3 u_0^*}{\partial t^{*3}}\right)+\frac{h^*\beta}{3}\left(\left(3G_1^*-2\right)(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^*\partial X}\right)=0
\end{aligned} \qquad (۳-۷)$$

$$\begin{aligned}
&h^*\left(-\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+\frac{h^{*2}}{36}(4+3\beta)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)+\frac{h^{*2}\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)-h^*(1+w_1)\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)\\
&+h^{*3}\left(\frac{\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_0^*}{\partial X^2\partial t^*}\right)+\frac{1}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)-h^*\beta\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)\\
&+\frac{h^{*3}}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}\right)+\frac{h^{*3}\beta}{36}\left(\left(4G_0^*+3G_1^*\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\\
&+\frac{1}{9}h^{*3}\beta\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)+\frac{h^{*3}\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)-h^*\left(\frac{\partial u_1}{\partial t^*}\right)\beta-h^*u_1\\
&-\frac{1}{12}h^{*3}e\left(G_0^*\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}}\right)+G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial t^{*3}}\right)\right)+\frac{1}{12}h^{*3}\beta G_1^*\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)=0
\end{aligned} \qquad (۳-۸)$$

$$
\begin{aligned}
& h^*\left(\begin{aligned}
& 2\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)^2+\frac{\beta}{3}\left(3G_1^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)\right) \\
& +\frac{1}{24}\left(3G_0^*+4\right)\left(8w_1+4w_1^2+8\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial X}\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)^2\right) \\
& +\beta\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)-P^*G_0^*+1 \\
& +\frac{h^{*2}\beta}{12}\left(3G_1^*\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)+4\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)
\end{aligned}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}\right) \\
& +h^*\left(\begin{aligned}
& \frac{\left(3G_1^*+4\right)\beta}{12}\left(\begin{aligned}
& \left(h^{*2}\left(\frac{\partial^3}{\partial X^2\partial t^*}w_1\right)+4\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right) \\
& +4\beta\left(\frac{\partial^3 u_0^*}{\partial X^2\partial t^*}\right)+4\beta\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)
\end{aligned}\right) \\
& +\frac{1}{12}\left(3G_0^*+4\right)\left(\begin{aligned}
& 2\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2}\right)+4\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right) \\
& +h^{*2}\left(\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)
\end{aligned}\right)
\end{aligned}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right) \\
& +h^*\left(\begin{aligned}
& w_1+\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right)+\beta\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+\frac{h^{*2}\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right) \\
& +\frac{h^{*2}}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)
\end{aligned}\right)\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right) \\
& +h^{*3}\beta\left(\begin{aligned}
& \left(\frac{\partial u_1}{\partial t^*}\right)+u_1+\frac{h^{*2}}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right) \\
& +\frac{1}{4}G_1^*\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)+\frac{1}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)
\end{aligned}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right) \\
& +h^*\beta\left(u_1+\frac{1}{12}\varepsilon^2h^{*2}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}\right)G_1^*+\frac{1}{9}h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)
\end{aligned}
\qquad (۹-۳)
$$

$$+h^{*}\beta\left(\frac{\left(3G_1^{*}+4\right)}{6}\left(\begin{array}{l}3\left(\frac{\partial w_0^{*}}{\partial X^{2}}\right)^{2}+2\varepsilon\left(\frac{\partial u_0^{*}}{\partial X}\right)\\+2w_1+\frac{\varepsilon^{2}h^{*2}}{4}\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)^{2}+w_1^{2}\end{array}\right)+1\right)\left(\frac{\partial^{3}w_0^{*}}{\partial X^{2}\partial t^{*}}\right)$$

$$+\beta h^{*}\left(\frac{4}{3}\left(\frac{\partial^{2}u_0^{*}}{\partial X^{2}}\right)+\frac{1}{3}\left(\left(3G_1^{*}+4\right)\left(1+w_1\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\right)\left(\frac{\partial^{2}w_0^{*}}{\partial X\partial t^{*}}\right)$$

$$+h^{*}\beta\left(1+w_1+\frac{\varepsilon^{2}h^{*2}}{36}\left(3G_1^{*}+4\right)\left(\frac{\partial^{2}w_1}{\partial X^{2}}\right)\right)\left(\frac{\partial^{2}u_1}{\partial X\partial t^{*}}\right)-h^{*}e\left(\frac{\partial^{2}w_0^{*}}{\partial t^{*2}}\right)G_0^{*}$$

$$-h^{*}\beta G_1^{*}\left(e+\frac{P^{*}}{h^{*}}\right)\left(\frac{\partial^{3}w_0^{*}}{\partial X^{2}\partial t^{*}}\right)-G_0^{*}Q^{*}-\beta G_1^{*}\left(\frac{\partial Q^{*}}{\partial t^{*}}\right)=0$$

$$+h^{*3}\beta\left(\begin{array}{l}\frac{1}{36}\left(3G_1^{*}+4\right)\left(\frac{\partial^{2}u_0^{*}}{\partial X}\right)+\frac{1}{12}\left(3G_1^{*}+4\right)\left(\frac{\partial w_0^{*}}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^{2}w_0^{*}}{\partial X^{2}}\right)\\+\left(\frac{h^{*2}}{80}\left(3G_1^{*}+4\right)\left(\frac{\partial^{2}w_1}{\partial X^{2}}\right)+\frac{1}{12}G_1^{*}\left(1+w_1\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial^{2}w_1}{\partial X\partial t^{*}}\right)$$

$$+\frac{h^{*3}}{72}\left(\begin{array}{l}+\left(3G_0^{*}+4\right)w_1^{2}+6+6G_0^{*}\left(1+\left(\frac{\partial u_0^{*}}{\partial X}\right)\right)+8w_1\\+2\beta\left(\left(3G_1^{*}+4\right)w_1+3G_1^{*}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^{*}}\right)+6\beta G_1^{*}\left(\frac{\partial^{2}u_0^{*}}{\partial X\partial t^{*}}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial^{2}w_1}{\partial X^{2}}\right)$$

$$+\frac{h^{*3}\beta}{24}\left(8\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w_0^{*}}{\partial X}\right)+2G_1^{*}\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right)+w_1^{2}G_1^{*}\right)\left(\frac{\partial^{3}w_0^{*}}{\partial X^{2}\partial t^{*}}\right) \qquad (۱۰-۳)$$

$$-\frac{1}{12}h^{*3}G_0^{*}e\left(\frac{\partial^{2}w_1}{\partial t^{*2}}\right)-\frac{1}{12}h^{*3}\beta G_1^{*}e\left(\frac{\partial^{3}w_1}{\partial t^{*3}}\right)-\frac{h^{*}}{6}\left(3G_0^{*}+4\right)\left(3w_1^{\;2}+w_1^{\;3}\right)$$

$$-h^{*}\beta G_1^{*}w_1\left(\frac{\partial^{2}u_0^{*}}{\partial X\partial t^{*}}\right)-h^{*}\left(\frac{4}{3}+G_0^{*}\left(1+\left(\frac{\partial}{\partial X}u_0^{*}\right)\right)\right)w_1$$

$$+\frac{h^{*3}\beta}{36}\left(4\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right)+9G_1^{*}\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w_0^{*}}{\partial X}\right)\right)\left(\frac{\partial^{3}w_0^{*}}{\partial X^{2}\partial t^{*}}\right)$$

$$+\frac{\varepsilon h^{*}}{3}\left(2-3G_0^{*}+2w_1+2\beta\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^{*}}\right)\right)\left(\frac{\partial u_0^{*}}{\partial x^{*}}\right)-\frac{1}{2}h^{*}G_0^{*}Q^{*}-\frac{1}{2}h^{*}\beta G_1^{*}\left(\frac{\partial Q^{*}}{\partial t^{*}}\right)$$

$$h^*\beta\left(\begin{array}{l}\frac{1}{72}\left(3G_1^*+4\right)h^{*2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)^2-\frac{1}{6}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)-\frac{1}{2}\left(4+3G_1^*\right)\left(2w_1+w_1^2\right)\\+\frac{1}{9}h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)-\left(1+\left(\frac{\partial}{\partial X}w_0^*\right)\right)G_1^*-\frac{4}{3}\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)$$

$$+\frac{h^*}{36}\left(\begin{array}{l}h^{*2}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}\right)+3h^{*2}\beta G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)+36u_1-36\beta\left(\frac{\partial u_1}{\partial t^*}\right)\\+4h^{*2}\beta\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)-48\beta\left(1+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)$$

$$+\frac{h^*}{24}\left(\begin{array}{l}-16\beta\left(\frac{\partial w_1}{\partial t^*}\right)+h^{*2}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)-4\left(3G_0^*+4\right)w_1-14\\+h^{*2}\beta\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)^2$$

$$+h^*\left(\begin{array}{l}\frac{1}{24}h^{*2}G_0^*+\frac{h^{*2}}{72}\left(3G_0^*+4\right)w_1+\frac{h^{*4}}{160}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\\+\frac{1}{18}+\frac{1}{40}\varepsilon^2 h^{*4}\beta\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)^2$$

$$+h^{*3}\left(\frac{\varepsilon^2}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\beta+w_1\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)+\frac{\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_0^*}{\partial X^2\partial t^*}\right)\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)$$

$$+\frac{h^*\beta}{9}\left(h^{*2}\left(\frac{\partial^2}{\partial X^2}w_1\right)-9G_1^*+6\left(1+w_1\right)\right)\left(\frac{\partial^2 u_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)+\frac{3}{160}h^{*2}G_1^*\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)^2\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)$$

$$+h^*\beta\left(\begin{array}{l}+\left(\frac{1}{4}h^{*2}G_1^*\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)-G_1^*\left(1+w_1\right)\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)-u_1\\+\frac{h^{*2}}{12}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}\right)\frac{h^{*2}}{36}+\left(4+3G_1^*\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}\right)\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X\partial t^*}\right)$$

$$+\frac{h^{*3}}{36}\left(\begin{array}{l}\left(3G_0^*+4\right)\left(3\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w_0^*}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right)\right)\\+\beta\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X\partial t^*}\right)+12\beta\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial X}\right)\end{array}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0^*}{\partial X^2}\right)$$

$$+\frac{h^{*3}\beta}{36}\left(7+\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial u_0^*}{\partial X}\right)+2w_1^2+3w_1G_1^*\right)\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)=0$$

برای حل تقریبی معادلات فوق، از روش بسط مستقیم[1] در تئوری اغتشاشات استفاده می‌گردد. در ابتدا مؤلفه‌های دامنه‌ی ارتعاشات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_0^*(X,t^*;\varepsilon) &= \varepsilon\left(u_0\left(X,t^*\right)+\varepsilon u_1\left(X,t^*\right)\right)\\ u_1^*(X,t^*;\varepsilon) &= \varepsilon\left(u_2\left(X,t^*\right)+\varepsilon u_3\left(X,t^*\right)\right)\\ w_0^*(X,t^*;\varepsilon) &= \varepsilon\left(w_0\left(X,t^*\right)+\varepsilon w_1\left(X,t^*\right)\right)\\ w_1^*(X,t^*;\varepsilon) &= \varepsilon\left(w_2\left(X,t^*\right)+\varepsilon w_3\left(X,t^*\right)\right) \end{aligned} \qquad (۱۱\text{-}۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۱۱) در معادلات (۳-۷) تا (۳-۱۰)، معادلات براساس مرتبه‌های مختلف ε حاصل می‌شوند. جملات با کوچکترین مرتبه (مرتبه‌ی یک) عبارتند از:

$$\frac{h^*}{3}\left(\beta\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^*\partial X^2}\right)-\beta\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^*\partial X}\right)+\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)+\left(3G_0^*-2\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\right.$$
$$\left.+3\beta G_1^*\left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^*\partial X}\right)-3e\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial t^{*3}}\right)\right)-3eG_0^*\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^{*2}}\right)\right)=0$$

$$+h^{*3}\left(\frac{\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^*\partial X^2}\right)+\frac{1}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)-\frac{1}{12}\beta e\left(G_0^*\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial t^{*3}}\right)+G_1^*\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^{*2}}\right)\right)\right)$$
$$-h^*\left(\beta\left(\left(\frac{\partial u_2}{\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^*\partial X}\right)\right)+\left(u_2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\right)\right)=0$$

$$(۱۲\text{-}۳)$$

$$h^*\left(\beta\left(\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^*\partial X^2}\right)+\beta\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^*\partial X}\right)-eG_1^*\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^{*3}}\right)\right)-eG_0^*\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^{*2}}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)\right)$$
$$-P^*\left(G_0^*\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)-\beta G_1^*\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial t^*\partial X^2}\right)\right)=0$$

$$h^*\left(-\frac{\beta}{3}\left(3G_1^*+2\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^*\partial X}\right)-\frac{\beta}{3}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial t^*}\right)-\frac{1}{3}\left(3G_0^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\right)$$
$$-\frac{1}{12}h^{*3}\left(\beta e\left(G_1^*\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial t^{*3}}\right)-\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial t^*\partial X^2}\right)\right)+eG_0^*\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial t^{*2}}\right)-\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\right)=0$$

[1] Straight forward expansion

معادلات (۳-۱۲) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی است که دوبه‌دو مستقل از هم هستند. هر دستگاه را می‌توان به شکل ماتریسی:

$$\left[\overline{B_2}\right]\frac{d^2y^*}{dX^2}+\left[\overline{B_1}\right]\frac{dy^*}{dX}+\left[\overline{B_3}\right]y^*+\left[\overline{B_4}\right]\frac{dy^*}{dt^*}+\left[\overline{B_5}\right]\frac{d^2y^*}{dt^{*2}}+\left[\overline{B_6}\right]\frac{d^3y^*}{dt^{*3}}=\{0\} \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

نمایش داد که $\{y^*\}$ شامل توابع وابسته‌ی هر دستگاه و عناصر ماتریس‌های $\overline{B_1}$ تا $\overline{B_3}$، ضرایب جملات معادلات (۳-۱۲) است. با در نظر گرفتن حل به صورت:

$$\{y^*\}=\{V(X)\}e^{i\omega t^*} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

که در آن ω فرکانس طبیعی بی‌بعد است و جایگذاری رابطه‌ی(۳-۱۴) در (۳-۱۳) نتیجه می‌شود.

$$\left[\overline{B_2}\right]\frac{d^2V}{dX^2}+\left[\overline{B_1}\right]\frac{dV}{dX}+\left[\overline{B_0}\right]V=\{0\} \qquad \left[\overline{B_0}\right]=\left[\overline{B_3}\right]+i(\omega\left[\overline{B_4}\right]-\omega^3\left[\overline{B_6}\right])-\omega^2\left[\overline{B_5}\right] \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

پاسخ معادله‌ی (۳-۱۵) را که یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت است، می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\{V(X)\}=\{A\}e^{\beta X} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

$\{A\}$بردارهای ویژه و β مقادیر ویژه می باشند. با جایگذاری (۳-۱۶) در (۳-۱۵)، معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$\left[\beta^2\overline{B}_2+\beta\overline{B}_1+\overline{B}_0\right]\{A\}=\{0\} \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

شرط داشتن جواب غیرصفر برای معادله‌ی فوق این است که دترمینان ماتریس ضرایب صفر باشد.

$$\det\left(\beta^2 \overline{B}_2 + \beta \overline{B}_1 + \overline{B}_0\right) = 0 \qquad (۱۸-۳)$$

رابطه‌ی (۳-۱۸)، معادله‌ی تفرق[۱] است و از حل آن چهار مقدار ویژه β_j $(j = 1,2,3,4)$ تعیین می‌شود. به ازای هر مقدار ویژه، یک بردار ویژه وجود دارد که از معادله‌ی (۳-۱۷) به دست می‌آید. این مقادیر ویژه و بردارهای ویژه شامل عباراتی از ω هستند. پس از یافتن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، پاسخ کلی معادله‌ی (۳-۱۵) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\{V\} = \sum_{j=1}^{4} C_j \{A\}_j e^{\beta_j X} \qquad (۱۹-۳)$$

C_j ثابت است و از شرایط مرزی تعیین می‌شود. با اعمال شرایط مرزی در دو لبه، که در هر دو طرف تکیه‌گاه ساده فرض شده است، یک دستگاه معادله جبری به صورت $[ax]\{C\} = \{0\}$ حاصل می‌شود که $\{C\}$ شامل عناصر C_j است. شرط وجود جواب غیر صفر، صفر بودن دترمینان ماتریس ax است. این معادله یک رابطه‌ی جبری پیچیده بین ω و β_j است که مقادیر β_j نیز تابع ω است و از حل آن، مقادیر ω تعیین می‌شود. برای تعیین ω از روش‌های محاسبات عددی استفاده می‌شود. در این پایان‌نامه از الگوریتم تنصیف[۲] برای حل معادله‌ی فوق استفاده شده است. پس از تعیین مقادیر فرکانس طبیعی هر دستگاه، به کمک رابطه‌ی (۳-۱۷)، شکل مدها نیز تعیین می‌شود. برای ادامه‌ی حل به کمک معادلات مرتبه‌ی دوم، با جایگذاری (۳-۱۱) در معادلات (۳-۷) تا (۳-۱۰) معادلات مرتبه‌ی دو به صورت زیر حاصل می‌شوند.

[1] Dispersion
[2] Bisection

$$\frac{h^*\beta}{36}(3G_1^*+4)\left(\begin{array}{l} 12\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)+12\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial t^*}\right)+12\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\\ +h^{*2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial t^*}\right)+12\left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\end{array}\right)-h^*\beta e G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_2{}^*}{\partial t^{*3}}\right)$$
$$+\frac{h^*}{3}(3G_1^*-4)\left(w_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)\right)+\frac{h^*}{3}(3G_0^*-4)\left(w_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial w_3}{\partial X}\right)\right)$$
$$+\frac{h^*}{3}(3G_0^*+4)\left(\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\right)-h^* e G_0^*\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^{*2}}\right)=k_1 \quad (۲۰-۳)$$

$$\frac{h^{*3}\beta}{36}(3G_1^*+4)\left(\begin{array}{l} \left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial X^2\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial X^2}\right)\\ +\left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)+\left(\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\end{array}\right)$$
$$-\frac{h^{*3}\beta e}{12}\left(G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial t^{*3}}\right)+G_0^*\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^{*2}}\right)\right)-h^*\beta\left(\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial t^*}\right)\right)$$
$$-h^*\left(w_2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\left(\frac{\partial w_2}{\partial t^*}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)+u_3\right)=k_2 \quad (۲۱-۳)$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(3G_1^*+4)h^*\beta}{36}\left(\begin{array}{l}
12\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial X^2\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\left(\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial X^2\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)\right)\\
+12\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)+12\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial t^*}\right)\\
+12\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial t^*}\right)+12\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial t^*}\right)\\
+\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial w_2}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)
\end{array}\right)\\
&+\frac{h^*\beta}{36}(3G_0^*+4)\left(\begin{array}{l}
12\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)+12\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)+12\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\\
+12\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)
\end{array}\right)+h^*\beta\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial t^*}\right)\\
&+h^*\beta\left(w_2\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial X\partial t^*}\right)\right)+h^*\left(\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)+u_3\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(w_2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial t^*}\right)\right)\right)\\
&+h^*\beta\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial t^*}\right)+h^*\left(\frac{\partial u_3}{\partial X}\right)+h^*\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)-h^*e\left(\beta G_1^*\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial t^{*3}}\right)+G_0^*\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial t^{*2}}\right)\right)=k_3
\end{aligned}
\qquad (۳-۲۲)
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{h^*\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\begin{array}{l}
+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)+h^{*2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial t^*}\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\\
+h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)\left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial t^*}\right)\right)+\left(\frac{\partial w_2}{\partial t^*}\right)\left(h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)-36\right)\\
+h^{*2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial t^*}\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)+\left(\frac{\partial w_3}{\partial t^*}\right)\\
+h^{*2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial t^*}\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial t^*}\right)
\end{array}\right)\\
&+\frac{h^{*3}\left(3G_0^*+4\right)}{72}\left(\begin{array}{l}
\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\\
+\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)
\end{array}\right)-\frac{h^{*3}\beta}{12}G_1^*\left(\frac{\partial^3 w_3}{\partial t^{*3}}\right)-h^*u_3\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\\
&\frac{-h^*\beta}{3}\left(3G_0^*-4\right)\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)^2+w_3\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial t^*}\right)+w_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+\frac{3}{2}{w_2}^2+w_3\right)+\frac{h^{*3}\beta}{12}\left(\frac{\partial^3 w_3}{\partial X^2\partial t^*}\right)\\
&+\frac{h^*\beta}{36}\left(3G_1^*-4\right)\left(\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial t^*}\right)-u_2+\left(\frac{\partial w_2}{\partial t^*}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X\partial t^*}\right)\right)+\frac{h^*}{12}\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial X^2}\right)=k_4
\end{aligned}
\qquad (۳-۲۳)
$$

که در آن k_1 تا k_4 بخش‌های ناهمگن معادلات بوده و به صورت زیر هستند.

$$k_1=\frac{1}{36}h^*\begin{pmatrix}\left(72iG_1^*\beta\omega_1-24+36G_0^*-48i\omega_1\right)w_2\\+h^*\left(4+6iG_1^*h^*\beta\omega_1+3h^*G_0^*+8ih^*\beta\omega_1\right)\dfrac{d^2w_2}{dX^2}\end{pmatrix}\left(\frac{dw_2}{dX}\right)e^{2i\omega_1t^*}$$

$$+\frac{1}{36}h^*\left(96i\beta\omega_2+48+36G_0^*+72iG_1^*\omega_2\right)\frac{dw_0}{dX}\frac{d^2w_0}{dX^2}e^{2i\omega_2t^*} \tag{۲۴-۳}$$

$$k_2=\frac{1}{36}h^*\begin{pmatrix}h^{*2}\left(\left(4+3G_1^*\right)i\beta\left(\omega_1+\omega_2\right)+4+3G_0^*\right)\begin{pmatrix}\left(\dfrac{dw_1}{dX}\right)\left(\dfrac{d^2w_3}{dX^2}\right)\\+\left(\dfrac{dw_3}{dX}\right)\left(\dfrac{d^2w_1}{dX^2}\right)\end{pmatrix}\\-36\left(1+i\beta\left(\omega_2+\omega_1\right)\right)w_3\left(\dfrac{dw_1}{dX}\right)\end{pmatrix}e^{i(\omega_1+\omega_2)t^*} \tag{۲۵-۳}$$

$$k_3=\frac{1}{36}h^*\begin{pmatrix}-\begin{pmatrix}+48\left(1+i\beta\left(\omega_1+\omega_2\right)\right)\\+36\left(i\beta\left(\omega_1+\omega_2\right)G_1^*+G_0^*\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\left(\dfrac{dw_1}{dX}\right)\left(\dfrac{dw_3}{dX}\right)+\left(\dfrac{dw_1}{dX}\right)\left(\dfrac{d^2u_1}{dX^2}\right)\\+\left(\dfrac{du_1}{dX}\right)\left(\dfrac{d^2w_1}{dX^2}\right)+w_3\left(\dfrac{d^2w_1}{dX^2}\right)\end{pmatrix}\\-\begin{pmatrix}3h^{*2}\left(G_0^*+i\beta G_1^*\left(\omega_1+\omega_2\right)\right)\\+4h^{*2}\left(1-i\beta\left(\omega_1+\omega_2\right)\right)\end{pmatrix}\left(\left(\dfrac{dw_3}{dX}\right)\left(\dfrac{d^2u_3}{dX^2}\right)+\left(\dfrac{du_3}{dX}\right)\left(\dfrac{d^2w_3}{dX^2}\right)\right)\\-36\left(1+i\beta\left(\omega_1+\omega_2\right)\right)\left(u_3\left(\dfrac{dw_3}{dX}\right)+w_3\left(\dfrac{du_3}{dX}\right)\right)\end{pmatrix}e^{i(\omega_1+\omega_2)t^*} \tag{۲۶-۳}$$

$$k_4=\frac{1}{72}h^*\begin{pmatrix} -h^{*2}\begin{pmatrix}4i\beta\omega_1\left(4+3G_1^*\right)\\ +6G_0^*+8\end{pmatrix}\left(\left(\frac{d^2u_1}{dX^2}\right)\left(\frac{dw_3}{dX}\right)+w_3\left(\frac{d^2w_3}{dX^2}\right)+\left(\frac{d^2w_3}{dX^2}\right)\left(\frac{du_1}{dX}\right)\right)\\ +\left(i\beta\omega_1\left(144G_1^*-96\right)+72G_0^*-48\right)w_3\left(\frac{du_1}{dX}\right)\\ +\left(i\beta\omega_1\left(288+216G_1^*\right)+108G_0^*+144\right)w_3^{\,2}\\ -\left(6ih^{*2}\beta\omega_1G_1^*-4h^{*2}+3h^{*2}G_0^*+8i\beta\omega_1h^{*2}\right)\left(\frac{dw_3}{dX}\right)^2 \end{pmatrix}e^{2i\omega_1t^*}$$
$$-\frac{1}{72}h^*\begin{pmatrix} -h^{*2}\left(i\beta\omega_2\left(12G_1^*+16\right)+6G_0^*+8\right)\left(\left(\frac{d^2w_1}{dX^2}\right)\left(\frac{du_3}{dX}\right)+\left(\frac{d^2u_3}{dX^2}\right)\left(\frac{dw_1}{dX}\right)\right)\\ +\left(i\beta\omega_2\left(72G_1^*+96\right)+48+36G_0^*\right)\left(\frac{dw_1}{dX}\right)^2+\left(144i\beta\omega_2+72\right)u_3^{\,*}\left(\frac{dw_1}{dX}\right) \end{pmatrix}e^{2i\omega_2t^*} \qquad (۲۷-۳)$$

ω_1 فرکانس طبیعی دستگاه اول و ω_2 فرکانس طبیعی دستگاه دوم می‌باشد که از حل معادلات مرتبه‌ی یک حاصل شده‌اند. با دقت در بخش ناهمگن معادلات مشخص می‌شود که جمله‌های سکولار ظاهر نشده است و با حل معادلات مرتبه دو مقادیر فرکانس تغییر نخواهند کرد. اما در شکل مدهای مرتبط با هر فرکانس اعوجاج‌هایی وجود خواهد داشت. بررسی انجام شده نشان می‌دهد در رابطه‌ی (۳-۱۱)، اگر بسط تا مرتبه‌ی ε^3 ادامه یابد، در معادلات مرتبه ε^3، جملات سکولار ظاهر خواهد شد. در این صورت می‌توان وابستگی فرکانس به دامنه را با فرمول‌بندی مسأله با روش مقیاس‌های چندگانه تعیین کرد. این موضوع در پایان‌نامه بررسی نشده است.

۳-۴- تعیین پاسخ

در ادامه، روند تعیین پاسخ به کمک تئوری اغتشاشات و بسط توابع ویژه بیان خواهد شد.

۳-۴-۱- روش بسط توابع ویژه(مدهای نرمال) و مقیاس‌های چندگانه

برای حل معادلات (۳-۷) تا (۳-۱۰) از روش مقیاس‌های چندگانه در تئوری اغتشاشات استفاده شده است. حل معادلات به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} u_0(X,T_0,T_1;\varepsilon)&=\varepsilon\left(u_0\left(X,T_0,T_1\right)+\varepsilon u_1\left(X,T_0,T_1\right)\right)\\ u_1(X,T_0,T_1;\varepsilon)&=\varepsilon\left(u_2\left(X,T_0,T_1\right)+\varepsilon u_3\left(X,T_0,T_1\right)\right)\\ w_0(X,T_0,T_1;\varepsilon)&=\varepsilon\left(w_0\left(X,T_0,T_1\right)+\varepsilon w_1\left(X,T_0,T_1\right)\right)\\ w_1(X,T_0,T_1;\varepsilon)&=\varepsilon\left(w_2\left(X,T_0,T_1\right)+\varepsilon w_3\left(X,T_0,T_1\right)\right) \end{aligned} \qquad (۲۸-۳)$$

که $T_0=t^*$ و $T_1=\varepsilon t^*$است. با توجه به این تعریف‌ها، اپراتورهای مشتق زمانی به صورت زیر تعریف

می‌شوند.

$$\frac{\partial}{\partial t^*}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial t^{*2}}=\frac{\partial^2}{\partial {T_0}^2}+2\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial T_0\partial T_1} \qquad (۳-۲۹)$$
$$\frac{\partial^3}{\partial t^{*3}}=\frac{\partial^3}{\partial {T_0}^3}+3\varepsilon\frac{\partial^3}{\partial {T_0}^2\partial T_1}$$

با جایگذاری روابط (۳-۲۸) و (۳-۲۹) در معادلات(۳-۷) تا (۳-۱۰) و جداسازی معادلات براساس مرتبه‌های مختلف ε، معادلات مرتبه یک به صورت زیر نتیجه می‌شود.

$$\frac{1}{3}\left(3G_0^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)\right)+\frac{\beta}{3}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)-G_0^*e\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial {T_0}^2}\right)-\beta G_1^*e\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial {T_0}^3}\right)$$
$$+\frac{\beta}{3}\left(3G_1^*-4\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)=0$$

$$\frac{h^{*2}}{36}\left(3G_0^*+4\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)+\frac{h^{*2}}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)-\beta\left(\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial T_0}\right)\right)-\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)$$
$$-u_2^*-\frac{h^{*2}e\beta}{12}\left(G_1^*\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial {T_0}^3}\right)+G_0^*\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial {T_0}^2}\right)\right)=0$$

$$\left(h^*-P^*G_0^*\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)+\beta\left(h^*-G_1^*P^*\right)\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)-h^*eG_0^*\left(\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial {T_0}^2}\right)+\beta\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial {T_0}^3}\right)\right)+h^*\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right) \qquad (۳-۳۰)$$
$$+h^*\beta\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial T_0}\right)+\beta G_1^*\left(\frac{\partial Q^*}{\partial T_0}\right)+G_0^*Q^*=0$$

$$-\frac{1}{3}\left(3G_0^*+4\right)w_2-\beta G_1^*\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\frac{1}{12}h^{*2}eG_0^*\left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial {T_0}^2}\right)+\beta\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial T_0}\right)\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)$$
$$-\frac{\beta}{3}\left(3G_1^*+4\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)+\frac{1}{12}h^{*2}\beta\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)+\frac{1}{2}\beta G_1^*\left(\frac{\partial Q^*}{\partial T_0}\right)+\frac{1}{2}G_0^*Q^*=0$$

معادلات حاصل در مرتبه‌ی یک، دو دستگاه مستقل از هم بوده که حل دستگاه اول برای تیر با تکیه-گاه ساده به صورت زیر در نظر گرفته شده است.

$$u_2(X,T_0,T_1)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{1m}(T_0,T_1)\cos(\frac{m\pi X}{a})$$
$$w_0(X,T_0,T_1)=\sum_{m=1}^{\infty}A_{2m}(T_0,T_1)\sin(\frac{m\pi X}{a}) \quad (۳-۳۱)$$

و در آن $a=1/\varepsilon$ است.با جایگذاری حل به صورت روابط (۳-۳۱) در معادلات دوم وسوم دستگاه (۳-۳۰) معادلات به صورت زیر خواهند بود.

$$\sum_{m=1}^{\infty}P_{1m}\cos(m\pi X/a)=F_1$$
$$\sum_{m=1}^{\infty}P_{2m}\sin(m\pi X/a)=F_2 \quad (۳-۳۲)$$

که در آن P_{1m} و P_{2m} عباراتی برحسب $A_{1m}(T_0,T_1)$ و $A_{2m}(T_0,T_1)$ و مشتقات آنها و $F_1=0$ و $F_2=Q^*$ می‌باشند. براساس بسط نیم دامنه‌ی فوریه از روابط (۳-۳۲) می‌توان مقادیر P_{1m} و P_{2m} را به صورت زیر به دست آورد.

$$P_{1m}=\frac{2}{a}\int_0^a F_1\cos(\frac{m\pi X}{a})dX$$
$$P_{2m}=\frac{2}{a}\int_0^a F_2\sin(\frac{m\pi X}{a})dX \quad (۳-۳۳)$$

معادلات (۳-۳۳) دو معادله‌ی دیفرانسیل کوپل به هم هستند که حل عمومی آنها به صورت زیر است.

$$A_{1m}(T_0,T_1)=\sum_{j=1}^{6}a_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0}$$
$$A_{2m}(T_0,T_1)=\sum_{j=1}^{6}b_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0} \quad (۳-۳۴)$$

که α_j فرکانس‌های طبیعی مربوط به دستگاه اول (معادلات دوم و سوم) می‌باشد. روند حل برای دستگاه دوم شامل معادلات یک و چهار نیز به همین ترتیب است. در ادامه با در نظر گرفتن ضرایب ε^2، معادلات مرتبه‌ی دو به صورت زیر خواهند بود.

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\beta\left(3G_1^*+4\right)}{36}\begin{pmatrix} h^{*2}\left(\left(\dfrac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)\left(\dfrac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)\right)+12\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right) \\ +12\left(\dfrac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial X}\right)+\left(\dfrac{\partial^3 u_0}{\partial X^2\partial T_1}\right)+12\left(\dfrac{\partial^3 u_1}{\partial X^2\partial T_0}\right) \end{pmatrix} \\
&\frac{\beta\left(3G_1^*-4\right)}{3}\left(\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_1}\right)+w_2{}^*\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)\right)-\beta G_1^* e\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial T_0^3}\right) \\
&+\frac{1}{12}\left(3G_0^*+4\right)\left(3\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)+3\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\right)-3\beta G_1^* e\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial T_1\partial T_0^2}\right) \\
&+\frac{1}{3}\left(3G_0^*-4\right)\left(\left(\frac{\partial w_3}{\partial X}\right)w_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\right)-G_0^* e\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial T_0^2}\right)-2G_0^* e\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial T_1\partial T_0}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۳۵-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(3G_1^*+4\right)\frac{\beta h^{*2}}{36}\begin{pmatrix} \left(\left(\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\dfrac{\partial^3 u_3}{\partial X^2\partial T_0}\right)\right. \\ \left.+\left(\dfrac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)\left(\dfrac{\partial w_0}{\partial X}\right)+\left(\dfrac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)\left(\dfrac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\dfrac{\partial^3 u_2}{\partial X^2\partial T_1}\right)\right) \end{pmatrix} \\
&\left(3G_0^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\right)-\frac{1}{12}h^{*2}e\left(\beta G_1^*+G_0^*\right)\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial T_0^3}\right) \\
&-\beta\left(w_2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_1}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial T_1}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial T_0}\right)\right)-\left(\beta\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right) \\
&+\frac{1}{12}h^{*2}G_0^*\left(\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial X^2}\right)-2e\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial T_1\partial T_0}\right)\right)-u_3-\left(\frac{\partial w_1}{\partial X}\right)-\frac{1}{4}\beta h^{*2}G_1^* e\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial T_1\partial T_0^2}\right)=0
\end{aligned}
\tag{۳۶-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{h^*\beta}{36}\left(3G_1^*+4\right)\left(\begin{array}{l}
\left(h^{*2}\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)+12\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial T_0}\right)\\
+12\left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)+h^{*2}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)\\
+12\left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)+12h^{*2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)
\end{array}\right)\\
&+\frac{h^*}{3}\left(3G_0^*+4\right)\left(\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)+\frac{h^{*2}}{12}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\right)\\
&+h^*\beta\left(-G_1^*e\left(\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial T_0^{\,3}}\right)+3\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial T_0^{\,2}\partial T_1}\right)\right)+\frac{4}{3}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)\right)+h^*\left(\beta\left(\frac{\partial u_2}{\partial T_0}\right)+h^*u_2\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\qquad \text{(۳۷-۳)}\\
&+h^*\beta\left(\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial T_1}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial T_1}\right)\right)+h^*\beta\left(G_1^*\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)+u_2\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)\\
&+h^*\left(\left(\frac{\partial u_3}{\partial X}\right)-G_0^*e\left(\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial T_0^{\,2}}\right)+2\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial T_1\partial T_0}\right)\right)\right)-\beta G_1^*P^*\left(\left(\frac{\partial^3 w_1}{\partial X^2\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)\right)\\
&+h^*\left(+\beta\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)+w_2^{\,*}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)+\frac{1}{12}h^{*2}\beta G_1^*\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)\right)\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)+\left(h^*-P^*G_0^*\right)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial X^2}\right)\\
&+\frac{1}{9}\beta h^{*3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)+h^*\beta w_2^{\,*}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial T_0}\right)=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(3G_0^*+4\right)\left(\begin{aligned}&\frac{h^{*2}}{36}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)+\frac{h^{*2}}{72}\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial X}\right)\\
&+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)-\frac{1}{6}\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)^2+w_2\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)\end{aligned}\right)\\
&+\left(3G_1^*+4\right)\left(\begin{aligned}&\frac{h^{*2}}{36}\beta\left(\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)\\
&+\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^3 u_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^3 w_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial X\partial T_0}\right)\\
&+\left(\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial X^2\partial T_0}\right)\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial X}\right)+\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)+w_2\right)\left(\frac{\partial^3 w_2}{\partial X^2\partial T_0}\right)\end{aligned}\right)\\
&-\frac{\beta}{3}\left(\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial w_3}{\partial T_0}\right)+\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial T_1}\right)\right)-\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_1}\right)-\beta w_2\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)\end{aligned}\right)\\
&-\left(\beta\left(\frac{\partial u_2}{\partial T_0}\right)+u_2\right)\left(\frac{\partial w_0}{\partial X}\right)+\frac{1}{9}h^{*2}\left(G_0^*+1\right)w_2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X^2}\right)-\frac{1}{12}h^{*2}G_0^*e\left(\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial T_0^2}\right)+2\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial T_1\partial T_0}\right)\right)\\
&-\frac{1}{12}h^{*2}\beta G_1^*e\left(3\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial T_0^2\partial T_1}\right)+\left(\frac{\partial^3 w_3}{\partial T_0^3}\right)\right)+\frac{1}{12}h^{*2}\left(\left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial X^2}\right)+\beta\left(\frac{\partial^3 w_3}{\partial X^2\partial T_0}\right)\right)\\
&+\frac{2}{3}\left(3G_1^*+1\right)\left(\beta\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial X\partial T_0}+\left(\frac{\partial u_0}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial w_2}{\partial T_0}\right)\right)+w_2\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial X\partial T_0}\right)\right)-2w_2^2-\frac{4}{3}w_3\\
&+\frac{1}{12}h^{*2}\beta\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial X\partial T_0}\right)-\frac{1}{2}G_0^*\left(3w_2^2+2w_3\right)-\beta u_2^*\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial X\partial T_0}\right)=0
\end{aligned}
\qquad (۳۸\text{-}۳)
$$

برای حل معادلات دستگاه اول شامل معادلات دوم و سوم حل بخش همگن به صورت زیر است.

$$
\begin{aligned}
u_3(X,T_0,T_1)&=\sum_{m=1}^{\infty}A_{3m}(T_0,T_1)\cos\left(\frac{m\pi X}{a}\right)\\
w_1(X,T_0,T_1)&=\sum_{m=1}^{\infty}A_{4m}(T_0,T_1)\sin\left(\frac{m\pi X}{a}\right)
\end{aligned}
\qquad (۳۹\text{-}۳)
$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۳۹) به عنوان حل بخش همگن و استفاده از روابط (۳-۳۰) و (۳-۳۳) در معادلات (۳-۳۵) تا (۳-۳۸) معادلات به شکل زیر خواهند بود.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}P_{3m}\cos\left(\frac{m\pi X}{a}\right)=F_3\\
&\sum_{m=1}^{\infty}P_{4m}\sin\left(\frac{m\pi X}{a}\right)=F_4
\end{aligned}
\qquad (۴۰\text{-}۳)
$$

که در آن P_{3m} و P_{4m} عباراتی برحسب $A_{3m}(T_0,T_1)$ و$A_{4m}(T_0,T_1)$ و مشتقات آنها هستند. F_3 و F_4 عبارت‌هایی شامل جملات $e^{i\alpha_j T_0}$ (j=1..6) و$e^{i(\alpha_j+\alpha_k)T_0}$ (j=1..6),(k=1..6) و $\sin(\frac{m\pi X}{a})$ و $\cos(\frac{m\pi X}{a})$ هستند. P_{3m} و P_{4m} از روابط سری فوریه به شکل زیر به دست می‌آیند.

$$P_{3m} = \frac{2}{a}\int_0^a F_3 \cos(\frac{m\pi X}{a})dX$$
$$P_{4m} = \frac{2}{a}\int_0^a F_4 \sin(\frac{m\pi X}{a})dX \tag{۳-۴۱}$$

جملات $e^{i\alpha_j T_0}$ (j=1..6) برای دستگاه معادلات دوم و سوم جملاتی سکولار محسوب می‌شوند. قبل از تعیین حل خصوصی، سکولاریتی مسأله باید از بین برود. برای این منظور از شرط حل‌پذیری استفاده می‌شود [۵۱]. یک حل خصوصی فاقد جملات سکولار به شکل

$$A_{3m}(T_0,T_1) = \sum_{j=1}^{6} d_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0}$$
$$A_{4m}(T_0,T_1) = \sum_{j=1}^{6} g_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0} \tag{۳-۴۲}$$

در نظر گرفته می‌شود. با جایگذاری رابطه‌ی (۳-۴۲) در رابطه‌ی (۳-۴۱) نتیجه می‌شود.

$$\sum_{j=1}^{6} d_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0} = K_1$$
$$\sum_{j=1}^{6} g_j(T_1)e^{i\alpha_j T_0} = K_2 \tag{۳-۴۳}$$

K_1 و K_2 عبارت‌هایی شامل جملات $e^{i\alpha_j T_0}$ (j=1..6) و$e^{i(\alpha_j+\alpha_k)T_0}$ (j=1..6),(k=1..6) هستند. با صفر قرار دادن ضرایب جملات $e^{i\alpha_j T_0}$ (j=1..6)(جملات سکولار)، ضرایب $a_j(T_1)$ و $b_j(T_1)$ در معادلات (۳-۳۴) به‌دست می‌آیند. با جایگذاری ضرایب $a_j(T_1)$ و $b_j(T_1)$ به دست آمده در معادلات مرتبه‌ی دوم و حذف جملات سکولار، می‌توان معادلات مرتبه دو را حل کرد.

۳-۵- بار کمانش

جهت یافتن بارکمانش سیستم، پاسخ همگن دستگاه به صورت زیر فرض می‌شود:

$$u_2^*(X,t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1n} e^{\beta_n X}$$
$$w_0^*(X,t^*) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} e^{\beta_n X} \qquad (۴۴-۳)$$

با جایگذاری رابطه‌ی(۳-۴۴) در معادلات مرتبه یک معادلات (۳-۸) و (۳-۹) معادله‌ی مشخصه‌ی سیستم به دست خواهد آمد. از حل این معادله، β_nبرحسب P^* تعیین و سپس بردارهای ویژه سیستم محاسبه می‌شود. این مقادیر در معادله‌ی (۳-۴۴) جایگزین شده و شرط مرزی مسأله اعمال می‌شود. با در نظر گرفتن شرط غیر صفر بودن حل، مقادیر بار کمانش به دست می‌آید. برای تعیین بار کمانش، فقط دستگاه دوم و سوم حل می‌شود. روند تعیین مقادیر ویژه مشابه فرکانس‌های طبیعی می‌باشد.

۳-۶- جمع بندی

در این فصل، نخست به بی‌بعد سازی معادلات پرداخته شد. سپس روش تعیین فرکانس طبیعی بیان شد. با استفاده از بسط مدهای نرمال و روش مقیاس‌های چندگانه، حل تحلیلی به دست آمد و نحوه‌ی محاسبه بار کمانش نیز توضیح داده شد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل ارائه خواهد شد.

فصل چهارم

حل عددی

۴-۱- مقدمه

در این فصل حل عددی مسأله، شامل حل استاتیکی، مدال، کمانش و حل دینامیکی یا گذرا با استفاده از المان‌های دوبعدی و سه‌بعدی ارائه خواهد شد. برای حل اجزای محدود مسأله از نرم‌افزار انسیس[1] استفاده شده است. در ابتدای فصل به تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک با استفاده از سری پرونی پرداخته شده است. سپس المان‌های به کار رفته در تحلیل معرفی شده‌اند. در بخش بعد آنالیز حساسیت مش انجام شده و اندازه‌ی مش بهینه در مدل‌سازی دو و سه‌بعدی تعیین شده است. سپس به بیان مراحل حل استاتیکی مسأله، مراحل حل مدال و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها، حل کمانش و در نهایت به تعیین پاسخ به کمک حل دینامیکی پرداخته شده است.

۴-۲- تعیین خصوصیات ویسکوالاستیک براساس سری پرونی[۵۲]

برای تعیین خصوصیات ویسکو الاستیک ماده، از مدول رهایش بالک و برشی استفاده می شود. در نرم افزار انسیس این توابع را می‌توان بر حسب جملاتی از سری توانی پرونی به صورت زیر بیان کرد.

$$G = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)}$$
$$K = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)} \qquad (۴-۱)$$

G_∞, G_i مدول الاستیک برشی، K_i و K_∞ مدول الاستیک بالک، τ_i^G و τ_i^Kزمان رهایش برای هر کدام از اجزای سری پرونی است. با معرفی مدول های تناسبی[2] به شکل:

$$\alpha_i^G = \frac{G_i}{G_0}, \quad \alpha_i^K = \frac{K_i}{K_0} \qquad (۴-۲)$$

که در آن:

$$G_0 = G_\infty + \sum_{i=1}^{n_G} G_i, \quad K_0 = K_\infty + \sum_{i=1}^{n_K} K_i \qquad (۴-۳)$$

توابع رهایش و بالک را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد.

---
[1] Ansys 12
[2] Relative Moduli

$$G = G_0(\alpha_\infty^G + \sum_{i=1}^{n_G} \alpha_i^G e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^G}\right)})$$
$$K = K_0(\alpha_\infty^K + \sum_{i=1}^{n_K} \alpha_i^K e^{\left(\frac{-t}{\tau_i^K}\right)}) \qquad (۴-۴)$$

در اینجا G_0و K_0 به ترتیب مدول برشی و مدول بالک در بارگذاری سریع یا مدول آنی و G_∞ و K_∞ مدول مربوط به بارگذاری های کند یا مدول نهایی می باشد. تعداد جملات سری پرونی برای برش n_G و برای رفتار بالک n_K است که لازم نیست این دو مشابه باشند. این مطلب در مورد زمان‌های رهایش τ_i^G و τ_i^K نیز صادق است.

۴-۳- تعیین مدول رهایش برشی و بالک

براساس فرضیات فصل دوم، رفتار ماده در برش ویسکوالاستیک بوده و برای مدل‌سازی این رفتار از اولین مدل جامد استاندارد خطی استفاده می‌شود و مدول رهایش G به صورت تابعی از زمان تعیین می‌شود. همچنین رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته شده و بدین ترتیب مدول بالک K عددی ثابت و بدون وابستگی به زمان است.

۴-۳-۱- مدول رهایش برشی

یکی از بهترین روش‌های تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک در انسیس استفاده از سری پرونی است. روش‌های مختلفی برای تعیین این سری در انسیس وجود دارد. اولین روش این است که داده-های مدول رهایش برشی نسبت به زمان، که از آزمایش رهایش بدست آمده است را به طور مستقیم وارد انسیس شود. در این صورت نرم افزار سری پرونی را بر این داده‌ها منطبق می کند. انسیس در هنگام انطباق تابع نمایی بر داده‌ها، G_0 و G_∞را به ترتیب اولین و آخرین داده در نظر می گیرد و مقدار α_i ، τ_i را محاسبه می کند ولی بعد از آن، G_0و G_∞ را در حافظه نگه نمی‌دارد. از این رو دو مقدار مجهول (G_0و G_∞)، G_0 مدول آنی و با تعیین مدول الاستیک E و ضریب پواسونν، انسیس آن را براساس فرمول زیر محاسبه می کند.

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \qquad (۵-۴)$$

نکته دیگر این است که در داده‌های آزمایشگاهی، در صورتی که آخرین داده صفر باشد، مدول رهایش المان ماکسول به دست می‌آید.

روشی که در این تحلیل برای تعیین سری پرونی مورد استفاده قرار گرفته، این است که با توجه به این‌که در حل تحلیلی مسأله از مدل جامد استاندارد برای شبیه‌سازی رفتار برشی ماده استفاده شده است، ضرایب سری پرونی به صورت زیر تعیین گردیده است.

$$G(t) = G_\infty + G_i e^{\left[-\frac{t}{\tau_i^G}\right]} \quad (۶-۴)$$

که در آن:

$$G_\infty = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}, \quad G_i = \frac{G_1^2}{G_1 + G_2}, \quad \tau_i^G = \frac{\eta}{G_1 + G_2} \quad (۷-۴)$$

و مقدار مدول برشی آنی G_0 نیز با قرار دادن $t = 0$ در رابطه‌ی اول (۴-۴) به صورت زیر تعیین شده است.

$$G_0 = G_1 \quad (۸-۴)$$

در نتیجه ضرایب سری پرونی رابطه‌ی(۴-۴) از روابط (۴-۸)، (۴-۷) و(۴-۲) تعیین می شود.

حال ضرایب سری پرونی مورد نظر τ_i ، α_i به طور مستقیم وارد انسیس می‌شود ولی G_0 را نمی‌توان وارد انسیس کرد و همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، انسیس این مقدار را بر حسب مدول الاستیک E و ضریب پواسون υ محاسبه می کند.

۴-۳-۲- مدول بالک

با توجه به این‌که رفتار ماده در بالک الاستیک در نظر گرفته می‌شود، برای حالت بالک سری پرونی تعریف نمی‌شود و با وارد کردن مدول الاستیک و ضریب پواسون، انسیس مقدار مدول بالک را بر اساس رابطه‌ی زیر محاسبه می‌کند.

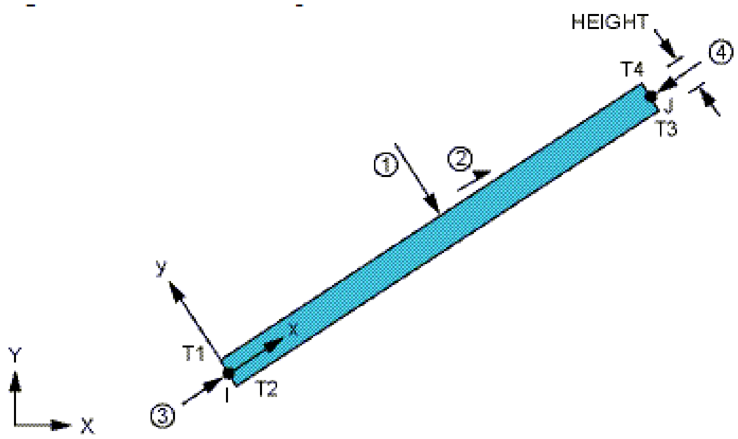
$$K = \frac{E}{3(1-2\upsilon)} \quad (۹-۴)$$

۴-۴- معرفی المان‌ها [۵۲]

به منظور تحلیل دوبعدی از المان Beam 189 وBeam 3 و در تحلیل سه‌بعدی از المان Solid 186 استفاده شده است که در ادامه مختصری در مورد این المان‌ها توضیح داده شده است.

۴-۴-۱- المان Beam3

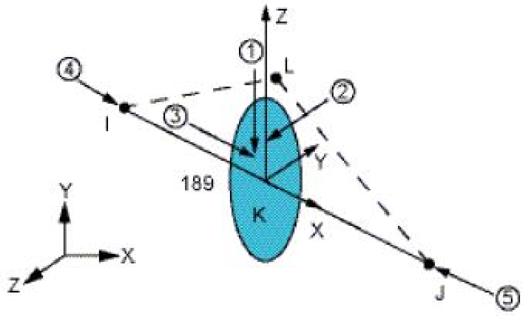
Beam3 المانی دوبعدی و تک‌محوره با قابلیت تحمل تنش، فشار و خمش است. این المان دارای دو گره و هر گره دارای سه درجه آزادی در هر گره است. دو درجه مربوط به حرکت انتقالی و یک درجه مربوط به حرکت دورانی می‌باشد. شکل (۴-۱) این المان را نشان می‌دهد. این المان قابلیت تحلیل مدال و همچنین خیزهای زیاد را دارا است.



شکل (۴-۱) المان Beam3

۴-۴-۲- المان Beam189

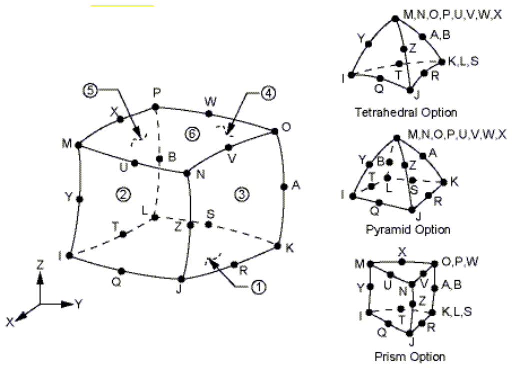
Beam189 المانی مناسب برای تحلیل تیرها اعم از تیرهای نازک و ضخیم می‌باشد. این المان به کمک چهارگره I,J,K,L تعریف می‌شودکه گره L جهت المان را مشخص می‌کند و تعریف آن اختیاری است (شکل (۴-۲)).



شکل (۴-۲) المان beam189

این المان براساس تئوری تیر تیموشنکو عمل می‌کند و تأثیرات تغییر شکل برشی نیز در آن در نظر گرفته شده است. Beam189 المانی با سه گره بوده و هر گره آن دارای شش درجه آزادی است که سه درجه مربوط به حرکت انتقالی و سه درجه مربوط به حرکت دورانی می‌باشد. این المان برای کاربردهای خطی، دوران‌های بزرگ و کرنش‌های غیرخطی مناسب است.

۴-۴-۳- المان Solid186



شکل (۴-۳) المان solid 186

این المان (شکل (۴-۳)) دارای ۲۰ گره است و هر گره دارای سه درجه آزادی می‌باشد. Solid186 امکان مدل کردن تأثیرات تغییر شکل‌های بزرگ، کرنش‌های بزرگ، پلاستیسیته، هایپرپلاستیسیته، خزش و پیش‌تنش را فراهم می‌کند. همچنین با فرمول‌بندی ترکیبی امکان مدل کردن تغییر شکل مواد الاستوپلاستیک تقریباً تراکم‌ناپذیر و هایپرالاستیک کاملاً تراکم‌ناپذیر را دارا است. فرمول‌بندی المان براساس تئوری سه‌بعدی الاستیسیته است.

۴-۵- تعیین مش بهینه

مشخصات تیر و خواص مکانیکی مطابق (جدول (۴-۱)) است [۵۳]. در مدل‌سازی به صورت دوبعدی،

خطی به طول یک متر مدل شده و سپس سطح مقطع تیر تعریف می‌شود. تکیه‌گاه به صورت ساده می‌باشد. پس از تعیین خواص مکانیکی و سطح مقطع، تیر مش‌بندی می‌شود.

جدول (۴-۱) مشخصات تیر

طول(m)	$l = 1$
عرض (m)	$b = 0.02$
ضخامت (m)	$h = 0.002$
مدول الاستیک(Pa)	$E = 25.5e7$
مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)	$E_1 = 9.8e7$ $E_2 = 2.45e7$
ضریب پواسون	$\nu = 0.3$
چگالی (kg/m^3)	$\rho = 7800$
بار محوری(N)	$P = 2500$

در این مسأله آنالیز حساسیت اندازه‌ی مش در حضور بار محوری انجام شده و مش بهینه برای المان Beam 189 تعیین گردیده است. برای این کار آنالیز مدال انجام شده و به ازای تعداد المان‌های مختلف، فرکانس طبیعی عرضی پنجم گزارش شده که نتیجه به قرار زیر است. براساس نتایج، مش بهینه به ازای ۴۹ المان حاصل می‌شود (جدول (۴-۲)).

جدول (۴-۲) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی به ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی دو بعدی (Hz)

تعداد المان	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۴۸	۴۹	۵۰	۱۰۰
فرکانس عرضی	۲۹۶.۸۶	۲۷۰.۸۴	۲۶۸.۹۸	۲۶۸.۸۶	۲۶۸.۸۵	۲۶۸.۸۵	۲۶۸.۸۴	۲۶۸.۸۴	۲۶۸.۸۴

در مدل‌سازی سه بعدی، به منظور افزایش دقت محاسبات، از مش‌بندی دستی[1] به جای مش‌بندی اتوماتیک[2] استفاده شده است. با توجه به نتایج گزارش شده در جدول (۴-۳)، مشاهده می‌شود که به ازای المان‌های بیش از ۱۵۰ تغییری در نتایج حاصل نشده، بنابراین مش بهینه در حالت سه‌بعدی

[1] Mapped
[2] Free

۱۵۰ عدد است.

جدول (۴-۳) مقادیر فرکانس طبیعی عرضی به ازای مش‌های مختلف در مدل‌سازی سه بعدی (Hz)

تعداد المان	۳۵	۵۰	۸۰	۱۰۰	۱۳۰	۱۴۰	۱۵۰	۱۸۰	۲۰۰
فرکانس عرضی	۲۷۰.۸۲	۲۷۰.۵۳	۲۷۰.۲۶	۲۷۰.۱۸	۲۶۹.۱	۲۶۹.۱	۲۶۸.۹	۲۶۸.۹	۲۶۸.۹

۴-۶- حل استاتیکی

از این روش برای تحلیل مدل‌های ساکن و مستقل از زمان استفاده می‌شود. در مدل‌سازی دوبعدی، پس از مش‌بندی، در مرحله بارگذاری ابتدا شرایط مرزی، تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است. بارگذاری به صورت بار محوری کششی درنظر گرفته شده است. پس از پایان مدل‌سازی، تنظیمات مربوط به حل انجام می‌گیرد. نوع حل، استاتیک بوده و برای درنظر گرفتن خیز بزرگ گزینه‌ی مربوط به حل خیز زیاد استاتیکی[1] انتخاب شده و گزینه‌ی مربوط به پیش‌تنش فعال می‌شود.

در مدل‌سازی سه‌بعدی، حجم ایجاد شده مش‌بندی می‌شود. شرایط مرزی بر روی دو سطح مقطع در طرفین اعمال شده و هر دو سطح در راستای محور z جابه‌جایی عرضی مقید شده اند. بارگذاری محوری به صورت کششی بر روی سطوح اعمال شده است. در مدل‌سازی سه‌بعدی، تنظیمات حل مشابه دوبعدی است و گزینه‌ی مربوط به خیز بزرگ فعال می‌باشد. روند ذکر شده در تحلیل استاتیکی، قبل از تحلیل کمانش، باید انجام شود.

۴-۷- حل کمانش [۵۴]

کمانش را می‌توان به صورت تغییر شکل ناگهانی سازه در اثر گذر بار از حد بحرانی تعریف نمود. کمانش حالت خاصی از ناپایداری در سازه‌هاست. با استفاده از این تحلیل، مقدار بار بحرانی و نیز تغییر شکل سازه پس از به وجود آمدن کمانش، مشخص می‌شود.

دو روش آنالیز کمانش خطی (مقادیر ویژه) و غیرخطی برای انجام آنالیز کمانش پیش‌بینی شده است. معمولاً پاسخ‌های روش غیرخطی از دقت بالاتری برخوردار است و برای طراحی توصیه می‌شود. در این روش با انجام آنالیز غیرخطی هندسی استاتیکی، نرم‌افزار بار را به تدریج افزایش می‌دهد تا سازه به

[1] Large displacement static

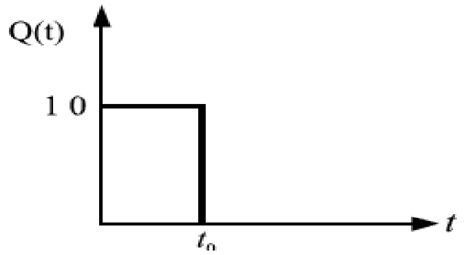
مرز ناپایداری برسد. روش آنالیز کمانش خطی محدود به مسائل خطی است و براساس روش‌های حل مسائل کلاسیک، مقادیر ویژه کمانش انجام می‌شود. همان‌طور که ذکر شد در تحلیل کمانش، ابتدا باید حل استاتیکی با فعال کردن گزینه مربوط به پیش‌تنش انجام شود.

۴-۸- حل مدال

از آنالیز مدال جهت تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مد آن، در فرکانس مورد نظر استفاده می‌شود. مقدار فرکانس طبیعی هر سازه بستگی به شکل، جنس و تکیه‌گاه‌های آن سازه دارد. در عین حال، مقدار بارگذاری‌ها و نوع آن نیز می‌تواند در مقدار فرکانس طبیعی مؤثر باشد. به همین دلیل نرم‌افزار دو نوع آنالیز مدال (بدون تنش و پیش تنش) را ارائه کرده است. در این پایان‌نامه به منظور بررسی اثر بار محوری بر روی فرکانس طبیعی سیستم از روش پیش‌تنش استفاده شده و در تنظیمات مربوط به حل گزینه پیش‌تنش فعال می‌شود.

۴-۹- حل دینامیکی

به کمک این تحلیل می‌توان به محاسبه‌ی پاسخ دینامیکی یک سازه تحت تأثیر بارگذاری‌های وابسته به زمان پرداخت. این تحلیل معمولاً مشکل‌تر از یک تحلیل استاتیکی است. چرا که برای محاسبات خود نیاز به امکانات سخت‌افزاری بیشتری داشته و حل مسأله به زمان بیشتری نیاز دارد. تحلیل مسأله‌ی وابسته به زمان با انتخاب نوع تحلیل، گذرا، انجام می‌شود. در این تحلیل از روش کامل[1] استفاده شده و نمودار نیروی وارد بر تیر نسبت به زمان متغیر بوده و روند تغییرات آن برحسب زمان مطابق شکل زیر می‌باشد.



شکل (۴-۴)   تغییرات زمانی نیروی گسترده

[1] Full Method

تغییرات نیرو برحسب زمان را می‌توان به دو قسمت مجزا تقسیم نمود. هریک از این قسمت‌ها یک مرحله‌ی بارگذاری[1] نامیده می‌شود. هنگام تحلیل المان محدود، هریک از مراحل بارگذاری، به بخش-های کوچک‌تر تقسیم می‌شوند. به این بخش‌ها گام‌های بارگذاری[2] گفته می‌شود. در تحلیلی دینامیکی شیوه‌های تغییر نیرو به دو صورت خطی[3] و پله‌ای[4] است.

هر یک از مراحل بارگذاری باید جداگانه تعریف و در فایل‌های مستقل ذخیره شوند. از نخستین مرحله‌ی بارگذاری شروع کرده و مقادیر کلیه نیروها، قیدها و... مشابه حالت استاتیکی تعریف می-شوند. پس از اتمام تعریف بارگذاری، باید لحظه‌ی پایان این مرحله از بارگذاری مشخص شود.

طول بازه‌ی زمانی، گام زمانی[5] نامیده می‌شود. بدیهی است با افزایش تعداد گام‌های بارگذاری، دقت تحلیل افزایش می‌یابد. اما از آنجا که این کاهش گام، منجر به افزایش زمان تحلیل مدل نیز می‌گردد، افزایش تعداد گام‌ها به هر مقدار دلخواه منطقی نیست. در واقع با توجه به دقت قابل قبول، برای تعداد گام‌های تحلیل، عدد بهینه‌ای وجود دارد.

در یک تحریک ایده‌آل که همه‌ی مدهای سازه تحریک می‌شوند، پاسخ تیر شامل همه فرکانس‌ها می‌باشد. اندازه‌ی گام‌های زمانی به صورت زیر تعیین می‌گردد .

$$timestep = {}^{1}\!/_{20f}$$

که در آن f بزرگترین فرکانس طبیعی مدنظر سازه است. گام‌های زمانی باید به گونه‌ای انتخاب شوند که ۲۰ نقطه‌ی مجزا در هر دوره‌ی بزرگترین فرکانس طبیعی ایجاد شود. لازم به تذکر است که پیش از تحلیل دینامیکی، باید تحلیل مدال به منظور شناخت رفتار دینامیکی سازه و تعیین فرکانس-های آن صورت گیرد.

[1] Load Step
[2] Loading Substeps
[3] Ramped
[4] Stepped
[5] Time Step

۴-۱۰- جمع بندی

در این فصل روند حل عددی دو بعدی و سه بعدی مسأله ارئه شد. در ابتدای فصل به چگونگی تعیین خصوصیات مواد ویسکوالاستیک (مدول رهایش برشی و بالک) براساس سری پرونی پرداخته شد. سپس المان‌های به کار رفته در تحلیل معرفی شد. در بخش بعد به بررسی حساسیت مش پرداخته شد و اندازه‌ی مش بهینه در دو مدل‌سازی دو و سه‌بعدی تعیین گردید. سپس به بیان مراحل حل استاتیکی مسأله، مراحل حل مدال و تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدها، حل کمانش و در نهایت به تعیین پاسخ به کمک حل دینامیکی پرداخته شد. در فصل پنجم نتایج حاصل از این فصل، ارائه خواهد شد.

فصل پنجم

بررسی نتایج

۵-۱- مقدمه

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته خواهد شد. محاسبات در محیط Maple13 انجام شده است. ابتدا نتایج مربوط به فرکانس طبیعی ارائه شده و تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس اول بررسی شده است سپس بار کمانش مسأله بررسی شده و در نهایت به بیان نتایج پاسخ کلی پرداخته شده است. جدول (۵-۱) مشخصات اولیه‌ی تیر می باشد.

جدول (۵-۱) مشخصات اولیه‌ی تیر

طول(m)	$l = 0.4$
عرض(m)	$b = 0.02$
ضخامت (m)	$h = 0.002$
مدول بالک (N/m^2)	$K = 2.12e8$
الاستیک مدول (Pa)	$E_1 = 9.8e7$ $E_2 = 2.45e7$
ضریب ویسکوزیته (Pa.s)	$\eta = 2.74e9$
ضریب پواسون	$\nu = 0.3$
چگالی (kg/m^3)	$\rho = 7800$

۵-۲- فرکانس طبیعی

ابتدا فرکانس‌های طبیعی برای حالت الاستیک بدون حضور بار محوری محاسبه و با نتایج مرجع [۴۵]مقایسه می‌شود. جدول (۵-۲) نشان می‌دهد که نتایج این پایان‌نامه در حالت الاستیک مطابقت خوبی با نتایج مرجع [۴۵] دارد.

جدول (۵-۲) فرکانس‌های طبیعی در حالت الاستیک

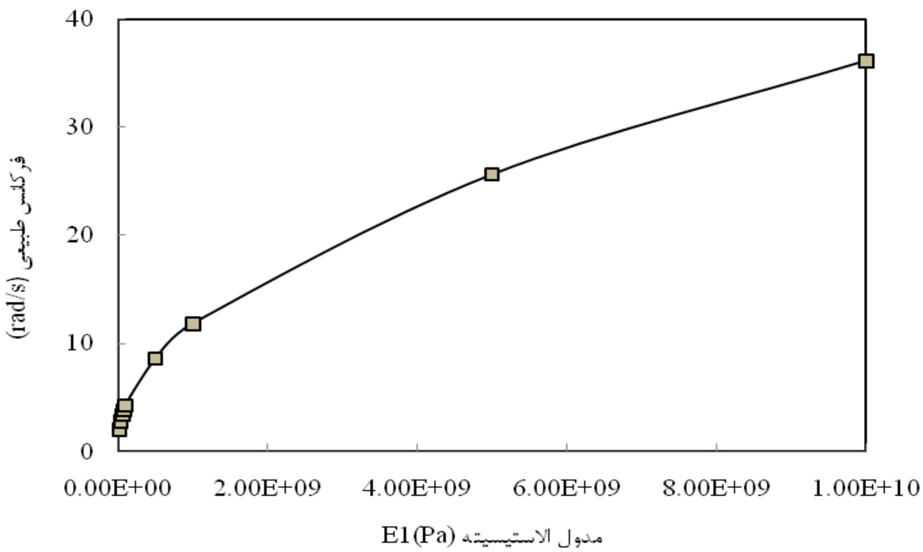
شماره مد	۱	۲	۳	۴	۵
نتایج کار حاضر	۱.۱۲۳	۴.۵۱۴	۱۰.۱۹۸	۱۸.۱۹۰	۲۸.۵۰۰
نتایج مرجع[۴۵]	۱.۸۵۷	۵.۰۱۸	۱۱.۵۵۱	۲۰.۴۵۳	۳۰.۷۱۸

تأثیر پارامترهای مختلف بر فرکانس طبیعی یک تیر ویسکوالاستیک با تکیه‌گاه‌های ساده، ارائه خواهد شد. در تئوری‌های خطی مانند تئوری تیر اویلر-برنولی و یا تیموشنکو، امکان محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی محوری (طولی) وجود ندارد؛ در حالی‌که با استفاده از معادلات استخراج شده بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، امکان تعیین فرکانس‌های محوری علاوه بر فرکانس‌های عرضی نیز وجود دارد. جدول (۵-۳) پنج فرکانس محوری اول را ارائه کرده است.

جدول (۵-۳) فرکانس‌های محوری حل تحلیلی (Hz)

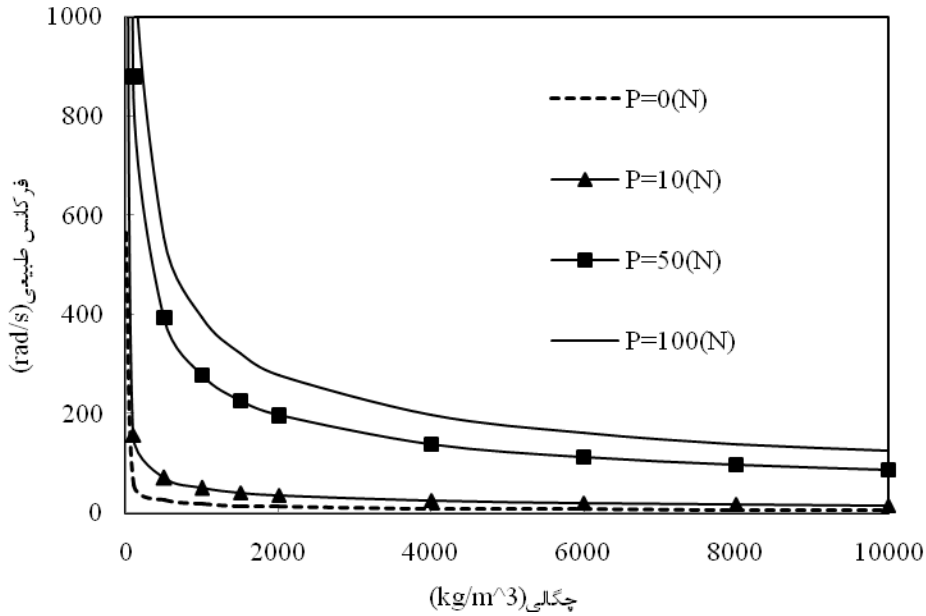
شماره مد	۱	۲	۳	۴	۵
نتایج تحلیلی	۲۳۵.۷۴۳	۴۷۱.۴۸۵	۷۰۷.۲۱۲	۹۴۲.۹۷۱	۱۱۷۸.۶۳۳

شکل(۵-۱) تغییرات فرکانس با مدول الاستیسته‌ی E_1 را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای مقادیر بزرگ E_1، یک افزایش ناگهانی در فرکانس طبیعی رخ می‌دهد؛ در حالی‌که در مقادیر کوچک E_1، تغییرات فرکانس قابل توجه نیست. هم‌چنین محاسبات نشان می‌دهد، با تغییر در ضریب ویسکوزیته η در محدوده‌ی ($1e5<\eta<1e11$) و مدول الاستیسیته‌ی E_2 در محدوده‌ی ($1e3<E_2<1e11$)، تغییری در فرکانس طبیعی مشاهده نمی‌شود.



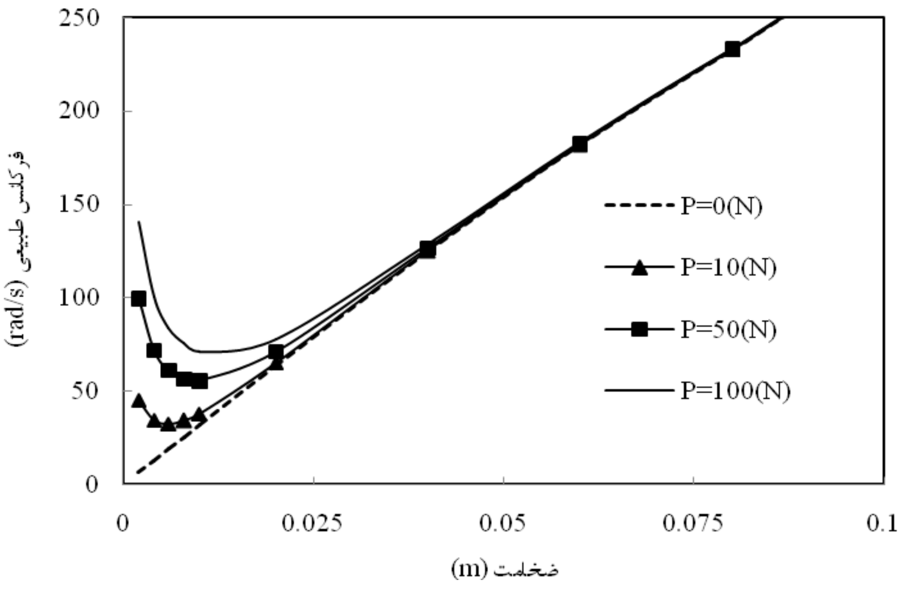
شکل(۵-۱) تأثیر مدول الاستیسیته E_1 بر فرکانس طبیعی ($\omega=a.E_1^b$,a=3E-4 , b=0.469)

شکل(۵-۲) اثر تغییر چگالی بر فرکانس طبیعی را به ازای بارهای محوری مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش چگالی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. در اینجا نیز همانند تمام روابط تحلیلی که از تئوری‌های مختلف به‌دست می‌آید، فرکانس با جذر چگالی رابطه‌ی عکس دارد.

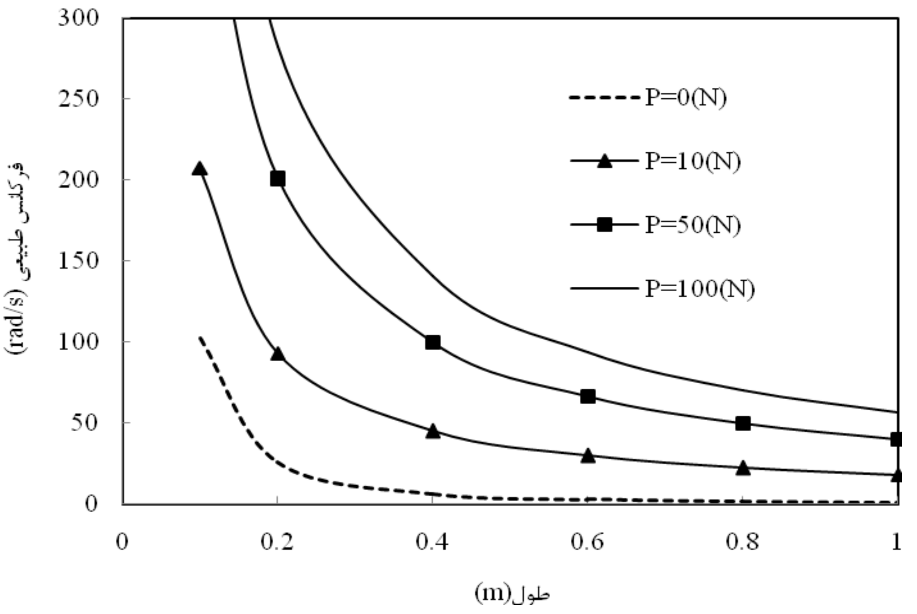


شکل(۵-۲) تأثیر چگالی بر فرکانس طبیعی به ازا ی بارهای محوری مختلف ($\omega=a.\rho^b$)
(برای P=0، a=564.9, b=-0.5 ؛ برای P=100 ، a=12435, b=-0.5)

شکل(۵-۳) تأثیر تغییرات ضخامت بر فرکانس طبیعی را به ازای بارهای محوری مختلف نشان می-دهد. افزایش ضخامت تیر باعث افزایش جرم آن خواهد شد که این افزایش جرم باعث کاهش در فرکانس طبیعی خواهد شد. از طرفی در غیاب بار محوری با افزایش ضخامت، فرکانس طبیعی افزایش یافته و این تغییرات با ضخامت همانند تیر اویلر-برنولی خطی است. در نظر گرفتن بار محوری رابطه-ی بین ضخامت و فرکانس طبیعی را تغییر می‌دهد و برای بار (N)۱۰۰ فرکانس با جذر ضخامت متناسب است علاوه بر آن، نمودار یک حداقل ضخامت را نشان می‌دهد که به ازای آن، فرکانس حداقل است. شکل(۵-۴) اثر طول بر فرکانس طبیعی را نشان می‌دهد. افزایش طول باعث کاهش فرکانس طبیعی خواهد شد. در حالت بدون بار، فرکانس با مجذور طول رابطه‌ی عکس دارد که مطابق با تئوری تیر اویلر برنولی می‌باشد. تغییرات فرکانس با طول، در طول‌های کوچک بسیار بیشتر است. در حضور بار محوری نیز همانند حالت بدون بار، فرکانس با افزایش طول کاهش می‌یابد؛ اما در این حالت کاهش فرکانس با طول رابطه‌ی عکس دارد.



شکل(۵-۳) تأثیر ضخامت بر فرکانس طبیعی به ازای بارهای محوری مختلف ($\omega=a.h^b$)
(برای P=0، a=3184, b=1 ؛ برای P=100، a=8.442, b=-0.49)



شکل(۵-۴)   تأثیر طول بر فرکانس طبیعی به ازای بارهای محوری مختلف (ω=a.l^b)
(برای P=0، a=1.024, b=-1.99 ؛ برای P=100، a=177.8, b=-1)

در جدول (۵-۴) مقایسه‌ی بین نتایج تحلیلی و عددی به ازای بارهای مختلف ارائه شده است. نتایج تحلیلی براساس تئوری‌های اویلر برنولی، تیموشنکو و تغییر شکل برشی مرتبه اول است. نتایج عددی نیز با نرم‌افزار انسیس و با به‌کارگیری المان سه‌بعدی Solid 189 به دست آمده است. در حل‌های تحلیلی نتایج اویلر برنولی، بیشترین اختلاف را با حل سه‌بعدی داشته و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، نزدیک‌ترین نتایج را دارد. با افزایش بار محوری میزان فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در واقع افزایش بار محوری، متناظر با افزایش سفتی[1] سازه می‌باشد.

جدول (۵-۴) مقایسه‌ی فرکانس‌ها با روش تحلیلی و عددی به ازای بارهای مختلف(Hz)

بار محوری	روش	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	مد پنجم
	تیر اویلر برنولی	۵.۳۳۵	۱۲.۴۲۷	۲۲.۴۵۳	۳۶.۰۸۰	۵۳.۶۰۲
۱۰ (N)	تیر تیموشنکو	۵.۳۷۶	۱۲.۷۱۹	۲۳.۱۸۷	۳۷.۲۷۷	۵۵.۱۸۰
	تئوری تغییر شکل برشی	۵.۴۷۱	۱۳.۳۴۶	۲۴.۹۴۹	۴۰.۸۲۲	۶۱.۱۵۷

[1] Stiffness

	انسیس سه‌بعدی	۶.۲۱۷	۱۴.۷۱۷	۲۶.۶۱۵	۴۲.۳۰۴	۶۱.۹۲۰
۵۰(N)	تیر اویلر برنولی	۱۱.۳۵۸	۲۳.۶۹۳	۳۷.۸۴۰	۵۴.۴۶۵	۷۴.۰۷۲
	تیر تیموشنکو	۱۱.۳۶۴	۲۳.۷۵۱	۳۸.۰۲۷	۵۴.۸۵۳	۷۴.۷۰۹
	تئوری تغییر شکل برشی	۱۱.۴۱۷	۲۴.۱۴۲	۳۹.۲۴۷	۵۷.۵۰۶	۷۹.۴۳۱
	انسیس سه‌بعدی	۱۲.۰۹۶	۲۵.۳۳۷	۴۰.۶۷۰	۵۸.۷۷۴	۸۰.۰۸۸
۱۰۰(N)	تیر اویلر برنولی	۱۵.۹۴۷	۳۲.۶۱۹	۵۰.۶۸۰	۷۰.۷۰۷	۹۳.۱۸۵
	تیر تیموشنکو	۱۵.۹۴۹	۳۲.۶۴۱	۵۰.۷۵۰	۷۰.۸۶۲	۹۳.۴۳۴
	تئوری تغییر شکل برشی	۱۵.۹۹۰	۳۲.۹۴۳	۵۱.۷۲۱	۷۳.۰۳۰	۹۷.۳۸۸
	انسیس سه‌بعدی	۱۶.۶۵۹	۳۴.۱۲۸	۵۳.۱۴۲	۷۴.۳۱۴	۹۸.۱۱۸
۵۰۰(N)	تیر اویلر برنولی	۳۵.۴۳۹	۷۱.۲۲۰	۱۰۷.۶۵۵	۱۴۵.۰۸۱	۱۸۳.۷۹۰
	تیر تیموشنکو	۳۵.۴۴۴	۷۱.۲۲۷	۱۰۷.۶۸۸	۱۴۵.۱۵۵	۱۸۳.۹۴۵
	تئوری تغییر شکل برشی	۳۵.۴۶۰	۷۱.۳۶۲	۱۰۸.۱۵۵	۱۴۶.۲۱۹	۱۸۵.۹۴۲
	انسیس سه‌بعدی	۳۶.۱۱۴	۷۲.۵۷۱	۱۰۹.۷۱۰	۱۴۷.۸۵۰	۱۸۷.۳۰۰
۱۰۰۰(N)	تیر اویلر برنولی	۵۰.۰۸۲	۱۰۰.۳۹۷	۱۵۱.۱۷۴	۲۰۲.۶۲۷	۲۵۵.۰۰۵
	تیر تیموشنکو	۵۰.۰۸۵	۱۰۰.۴۰۲	۱۵۱.۲۲۶	۲۰۲.۷۶۳	۲۵۵.۲۵۴
	تئوری تغییر شکل برشی	۵۰.۰۹۳	۱۰۰.۴۹۱	۱۵۱.۵۲۶	۲۰۳.۴۵۱	۲۵۶.۵۸۶
	انسیس سه‌بعدی	۵۰.۷۲۶	۱۰۱.۶۸۰	۱۵۳.۰۹۰	۲۰۵.۱۸۰	۲۵۸.۳۴۰

در جدول (۵-۵) نسبت l/h ضریب لاغری تعریف شده است. مقادیر کوچک این ضریب به معنای کوتاه و ضخیم بودن تیر است؛ و همان‌طور که از نتایج پیداست فرکانس‌های به‌دست آمده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، نسبت به نتایج به دست آمده از سایر تئوری‌ها به نتایج حل عددی سه-بعدی نزدیک‌تر است. فرکانس‌های حاصل از تئوری تیر اویلر برنولی اصلاً مناسب نبوده و برخلاف پیش‌بینی تئوری الاستیسیته برای نزدیک شدن رفتار تیر اویلر-برنولی به نتایج واقعی با افزایش l/h است، عمل می‌کند. با افزایش ضریب لاغری نتایج تئوری‌ها به هم نزدیک‌تر خواهد شد که این نشان-

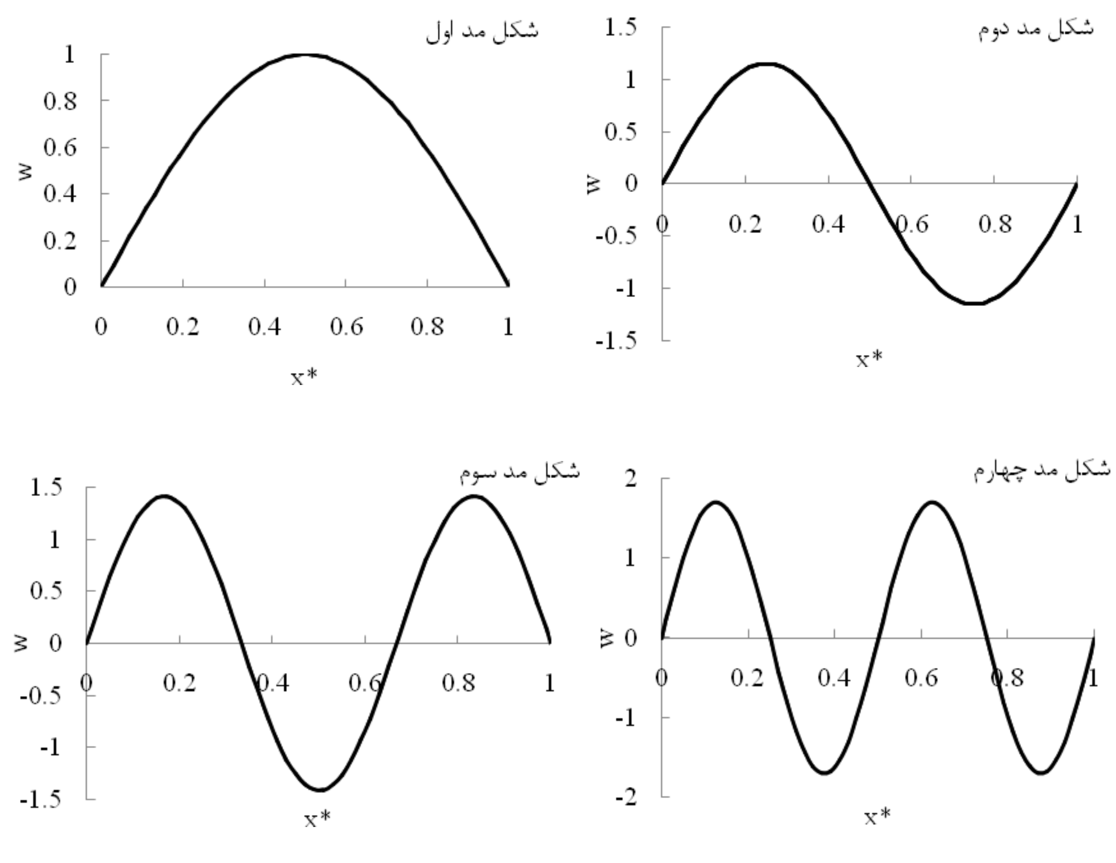
دهنده‌ی اهمیت پایین برش در تیرهای بلند و نازک است.

جدول (۵-۵) مقایسه‌ی فرکانس‌ها با روش تحلیلی و عددی به ازای ضرایب لاغری مختلف در حالت بدون بار (Hz)

l/h	روش	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	مد پنجم
۱۰	تیر اویلر برنولی	۶۳.۰۷۵	۲۷۴.۶۹۴	۶۴۶.۵۲۸	۱۰۱۸.۹۴۵	۱۴۷۸.۹۳۰
	تیر تیموشنکو	۷۴.۲۴۷	۲۹۴.۲۰۰	۶۲۵.۸۵۷	۱۰۳۹.۰۷۳	۱۵۰۷.۰۳۷
	تئوری تغییر شکل برشی	۸۱.۲۱۵	۳۱۷.۷۷۴	۶۶۳.۰۴۹	۱۰۷۹.۳۲۱	۱۵۴۳.۴۶۳
	انسیس سه‌بعدی	۱۲۹.۰۷۷	۳۸۳.۱۲۰	۷۴۲.۱۵۹	۱۱۶۸.۰۰۰	۱۶۴۱.۰۰۰
۲۰	تیر اویلر برنولی	۱۲.۶۱۴	۵۴.۹۳۹	۱۲۹.۳۰۶	۲۳۶.۱۹۹	۳۷۵.۷۹۸
	تیر تیموشنکو	۱۵.۴۶۸	۶۲.۱۰۴	۱۳۹.۹۸۳	۲۴۸.۸۵۱	۳۸۸.۱۳۱
	تئوری تغییر شکل برشی	۱۷.۰۲۳	۶۹.۰۹۱	۱۵۶.۸۱۷	۲۷۹.۹۰۹	۴۳۷.۵۷۷
	انسیس سه‌بعدی	۲۵.۸۶۹	۸۳.۷۵۸	۱۷۴.۶۰۰	۲۹۷.۹۶۰	۴۵۲.۹۹۰
۵۰	تیر اویلر برنولی	۶.۳۰۷	۲۷.۴۶۹	۶۴.۶۵۳	۱۱۸.۰۹۹	۱۸۷.۸۹۹
	تیر تیموشنکو	۷.۷۳۴	۳۱.۰۵۲	۶۹.۹۹۴	۱۲۴.۴۲۵	۱۹۴.۰۶۷
	تئوری تغییر شکل برشی	۸.۵۱۱	۳۴.۵۴۷	۷۸.۴۰۵	۱۳۹.۹۵۰	۲۱۸.۷۷۹
	انسیس سه‌بعدی	۱۲.۸۵۹	۴۱.۵۸۲	۸۶.۵۰۴	۱۴۷.۳۷۰	۲۲۳.۸۰۰
۱۰۰	تیر اویلر برنولی	۳.۱۵۴	۱۳.۷۳۵	۳۲.۳۲۶	۵۹.۰۵۰	۹۳.۹۴۶
	تیر تیموشنکو	۳.۸۶۹	۱۵.۶۵۷	۳۵.۱۴۱	۶۲.۶۵۵	۹۸.۱۲۵
	تئوری تغییر شکل برشی	۴.۲۵۹	۱۷.۳۲۴	۳۹.۴۵۴	۷۰.۷۴۷	۱۱۱.۲۱۶
	انسیس سه‌بعدی	۶.۴۴۲	۲۰.۸۷۳	۴۳.۵۶۲	۷۴.۵۲۵	۱۱۳.۷۶۰
۲۰۰	تیر اویلر برنولی	۰.۷۸۸	۳.۴۳۴	۸.۰۸۱	۱۴.۷۶۳	۲۳.۴۸۶
	تیر تیموشنکو	۰.۹۶۷	۳.۸۵۱	۸.۷۹۴	۱۵.۶۹۴	۲۴.۶۰۲
	تئوری تغییر شکل برشی	۱.۰۶۵	۴.۳۳۳	۹.۸۷۹	۱۷.۷۳۵	۲۷.۹۲۳
	انسیس سه‌بعدی	۱.۶۰۶	۵.۲۰۵	۱۰.۸۶۱	۱۸.۵۷۷	۲۸.۳۵۷

۴۰۰	تیر اویلر برنولی	۰.۱۹۷	۰.۸۵۸	۲.۰۲۰	۳.۶۹۱	۵.۸۷۲
	تیر تیموشنکو	۰.۲۴۲	۰.۹۷۳	۲.۱۹۹	۳.۹۲۶	۶.۱۵۵
	تئوری تغییر شکل برشی	۰.۲۶۶	۱.۰۸۴	۲.۴۷۱	۴.۴۳۷	۶.۹۸۸
	انسیس سه‌بعدی	۰.۴۰۰	۱.۲۹۹	۲.۷۱۱	۴.۶۳۶	۷.۰۷۵

شکل(۵-۵) چهار شکل مد مربوط به حرکت عرضی تیر با تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهد.



شکل(۵-۵) چهار شکل مد عرضی

در جدول (۵-۶) فرکانس‌های طبیعی عرضی براساس تئوری مرتبه اول به ازای شرایط مرزی مختلف ارائه شده است. مشابه یک تیر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی تیر با تکیه‌گاه ساده نسبت به دیگر حالات کوچک‌تر است. هم‌چنین با افزایش بار، فرکانس افزایش می‌یابد.

جدول (۵-۶) فرکانس طبیعی پنج مد اول برای تیر با تکیه‌گاه‌های مختلف به ازای بارهای محوری مختلف (Hz)

نیرو	نوع تکیه‌گاه	مد اول	مد دوم	مد سوم	مد چهارم	مد پنجم

	تکیه‌گاه ساده	۵۰.۰۹۳	۱۰۰.۴۹۱	۱۵۱.۵۲۶	۲۰۳.۴۵۱	۲۵۶.۵۸۶
P=۱۰۰۰(N)	یکسر گیر دار	۵۰.۷۹۹	۱۰۱.۹۰۲	۱۵۳.۶۴۲	۲۰۶.۳۰۵	۲۶۰.۱۴۶
	دو سر گیر دار	۵۱.۵۲۰	۱۰۳.۳۶۱	۱۵۵.۸۲۳	۲۰۹.۲۲۳	۲۶۳.۸۰۲
	تکیه‌گاه ساده	۱۰۰.۱۰۶	۲۰۰.۳۰۸	۳۰۰.۷۷۵	۴۰۱.۵۷۹	۵۰۲.۸۴۷
P=۴۰۰۰(N)	یکسر گیر دار	۱۰۰.۶۵۱	۲۰۱.۴۳۱	۳۰۲.۴۴۳	۴۰۳.۸۲۳	۵۰۵.۶۶۹
	دو سر گیر دار	۱۰۱.۲۱۲	۲۰۲.۵۵۳	۳۰۴.۱۱۰	۴۰۶.۰۰۴	۵۰۸.۳۶۳

۵-۳- تحلیل کمانش

در جدول (۵-۷) مقادیر بار کمانش به دست آمده از روش تحلیلی و حل عددی برا ی پنج مد کمانش آورده شده است.

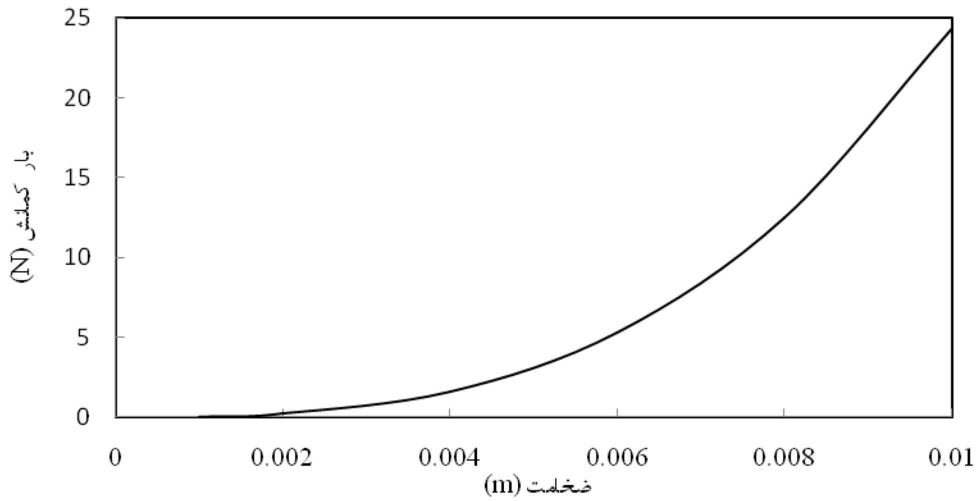
جدول (۵-۷) مقایسه‌ی بار کمانش با روش تحلیلی و عددی (N)

شماره مد	۱	۲	۳	۴	۵
تئوری برشی مرتبه اول	۰.۱۹۶	۰.۷۸۴	۱.۷۶۲	۳.۱۲۸	۴.۸۷۶
انسیس سه‌بعدی	۰.۲۱۰	۰.۸۴۰	۱.۸۹۲	۳.۲۴۸	۵.۲۷۰
تیموشنکو	۰.۱۸۰	۰.۷۲۰	۱.۵۸۶	۲.۷۷۳	۴.۱۲۸
انسیس دوبعدی	۰.۱۸۲	۰.۷۲۴	۱.۶۲۲	۲.۹۷۵	۴.۳۴۵

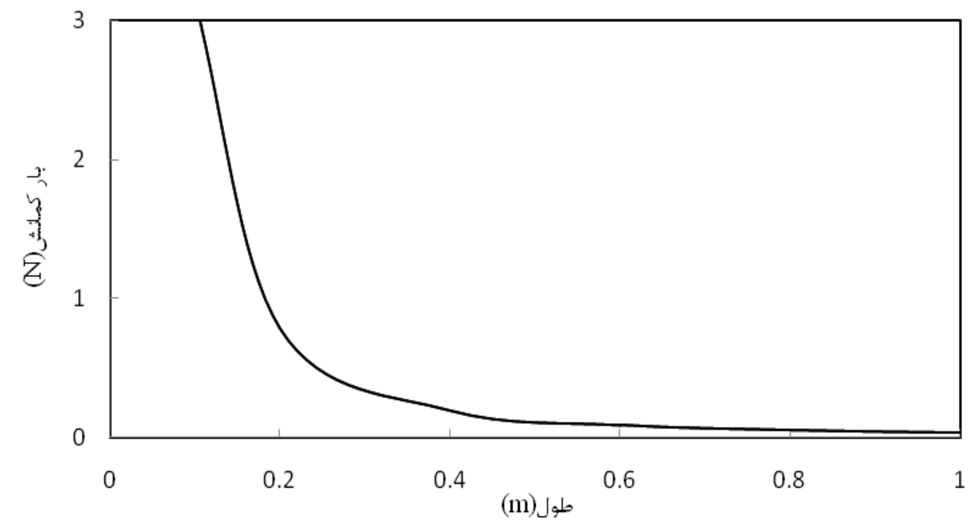
حل تحلیلی با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و تیموشنکو انجام شده است. در تئوری تیموشنکو، در رابطه‌ی (۲-۱)، مقادیر $u_0=w_1=0$ است. هم‌چنین رابطه‌ی تنش-کرنش نرمال یک‌بعدی است و از اثر پواسون صرف‌نظر می‌شود؛ در حالی‌که در تئوری تغییر شکل برشی، رابطه‌ی تنش-کرنش با روابط سه‌بعدی الاستیسیته تعریف شده است. نتایج تیر تیموشنکو و حل دوبعدی تیر اختلاف ناچیزی دارند؛ چون فرمول‌بندی حل عددی نیز براساس تئوری تیموشنکو است. بنابراین مقایسه‌ی نتایج حل تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با حل مبتنی بر المان دوبعدی، خطای بیشتری دارد. برای بررسی کامل‌تر مسأله، می‌توان نتایج حل تئوری برشی مرتبه اول را با حل عددی سه‌بعدی مقایسه نمود. جدول (۵-۷) نشان می‌دهد نتایج تئوری مرتبه اول برشی به حل عددی سه‌بعدی نزدیک‌تر از تئوری

تیموشنکو است.

شکل(۵-۶) اثر تغییر ضخامت بر بار کمانش را نشان می‌دهد. مطابق شکل با افزایش ضخامت بار کمانش افزایش می‌یابد و با توان سوم ضخامت رابطه‌ی مستقیم دارد که مشابه با تئوری ستون اویلر است. شکل(۵-۷) اثر طول بر بار کمانش را نشان می‌دهد. افزایش طول سبب کاهش بار کمانش با رابطه‌ی $1/l^2$ خواهد شد. این موضوع نیز با تئوری ستون اویلر هماهنگی دارد.



شکل(۵-۶) تأثیر ضخامت بر بار کمانش ($P=a.h^b$, a=2E7, b=2.998)



شکل(۵-۷) تأثیر طول بر بار کمانش ($P=a.l^b$, a=0.031, b=-2)

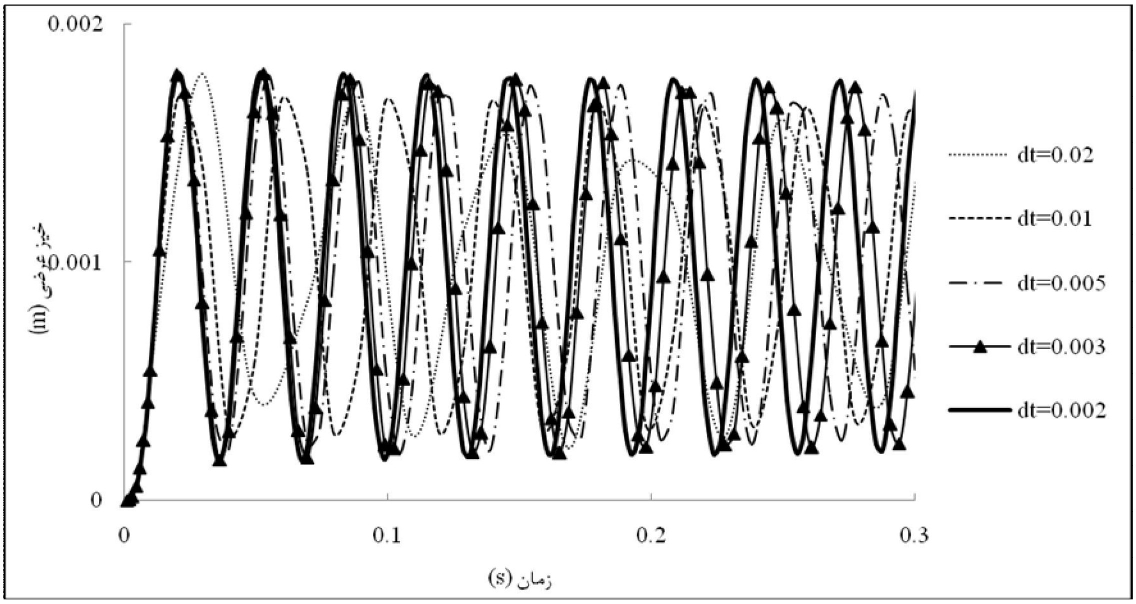
۵-۴- پاسخ

در این بخش به بررسی پاسخ تیر تحت بار عرضی پرداخته می‌شود. بار تعریف شده، یک بار عرضی گسترده با شدت ۱۰ N/m است که در مدت یک ثانیه بر تیر اثر می‌کند. . در محاسبه‌ی پاسخ، مشخصات تیر براساس مقادیر جدول (۵-۸) درنظر گرفته شده است.

جدول (۵-۸) مشخصات اولیه‌ی تیر

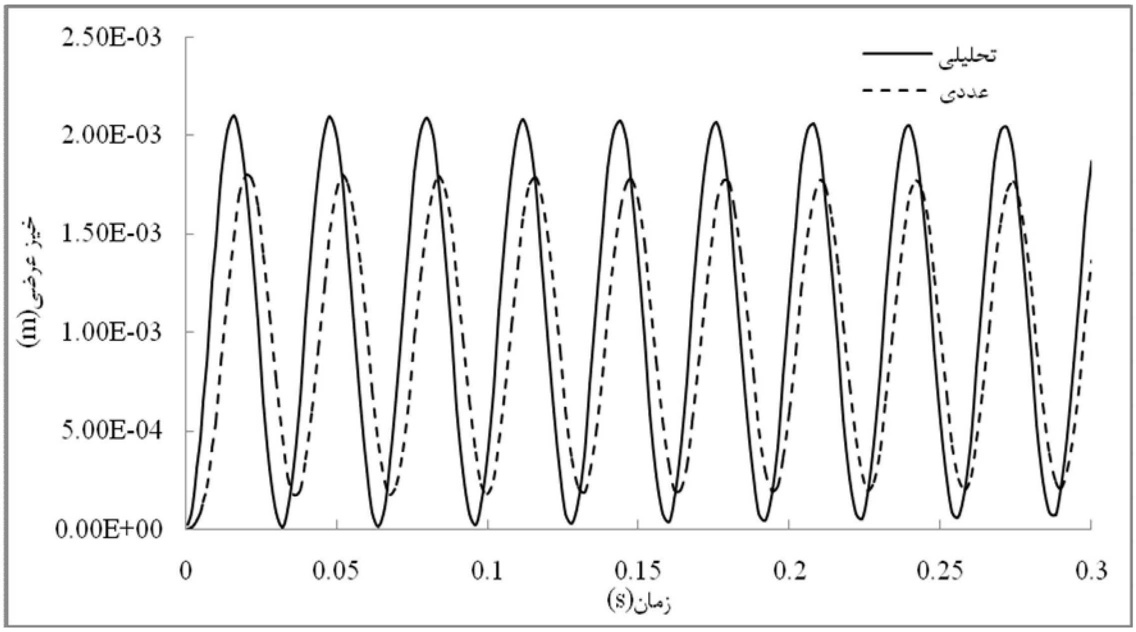
طول (m)	$l = 0.4$
عرض (m)	$b = 0.02$
ضخامت (m)	$h = 0.002$
مدول بالک (N/m^2)	$K = 2.12e11$
مدول‌های ویسکوالاستیک (Pa)	$E_1 = 9.8e10$ $E_2 = 2.45e10$
ضریب ویسکوزیته (Pa.s)	$\eta = 2.74e6$
ضریب پواسون	$\nu = 0.3$
چگالی (kg/m^3)	$\rho = 7800$

شکل(۵-۸) پاسخ عرضی تیر با روش عددی به ازای گام‌های زمانی مختلف را نشان می‌دهد. در این تحلیل از المان دوبعدی Beam3 استفاده شده است. مشاهده می‌شود که به ازای گام‌های زمانی ۰.۰۰۳ ثانیه تغییر چندانی در نتایج ایجاد نمی‌شود. از این‌رو گام زمانی ۰.۰۰۳ به عنوان گام زمانی بهینه انتخاب می‌شود.

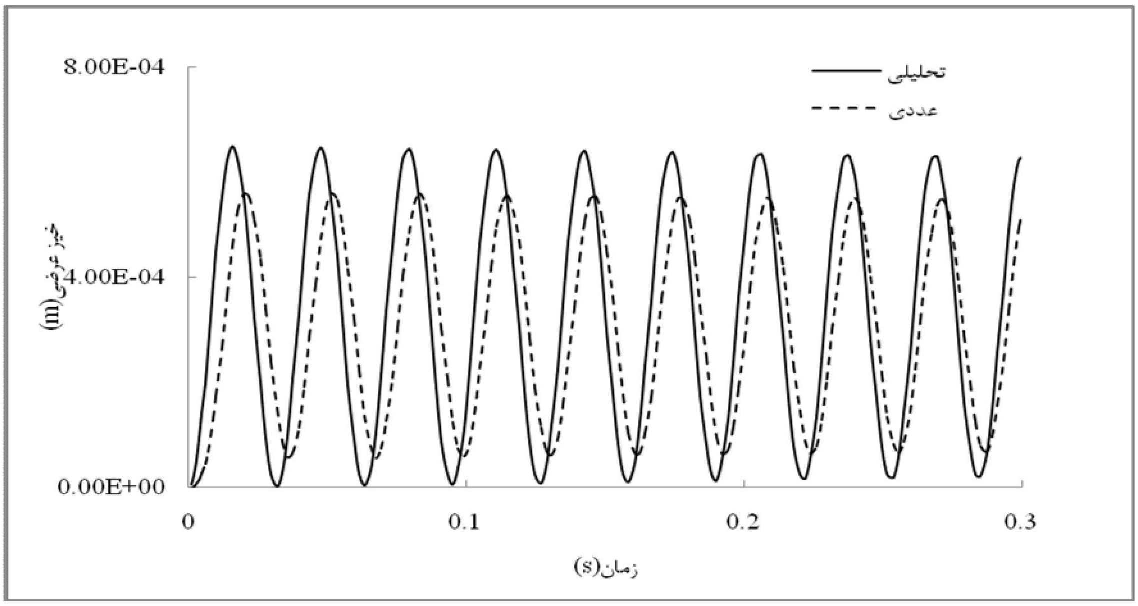


شکل(۵-۸) پاسخ عرضی تیر در $x^*=$ ۰.۵ به ازای گام‌های زمانی مختلف

شکل(۵-۹) و شکل(۵-۱۰) پاسخ عرضی مرکز تیر($x^*=$ ۰.۵) و نزدیک مرز ($x^*=$ ۰.۹) با حل تحلیلی و عددی را نشان می‌دهد. به منظور مقایسه‌ی بهتر نتایج، ۰.۳ ثانیه از زمان بارگذاری نشان داده شده است. تطابق فرکانس پاسخ هر دو روش خوب است. همچنین اختلاف دامنه‌ی نوسانات در نزدیک مرز یا نقاط دور از آن، مشابه است. درصد اختلاف پاسخ در دو روش، حدود ده درصد است.

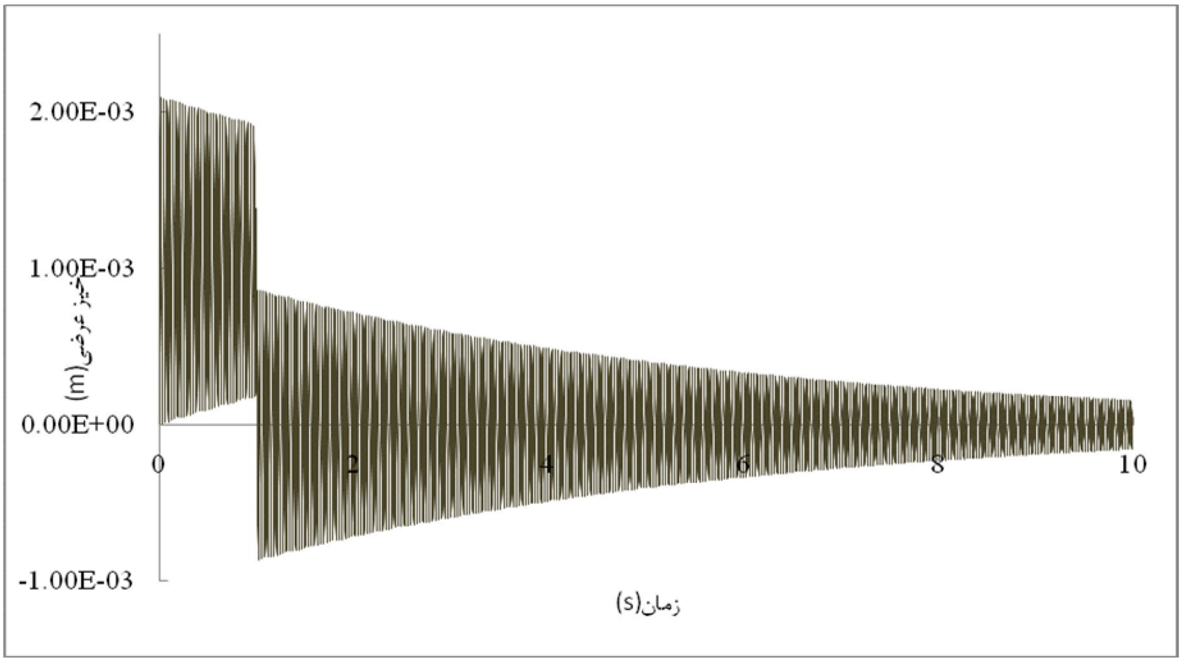


شکل(۵-۹) مقایسه پاسخ عرضی تیر در $x^*=$ ۰.۵



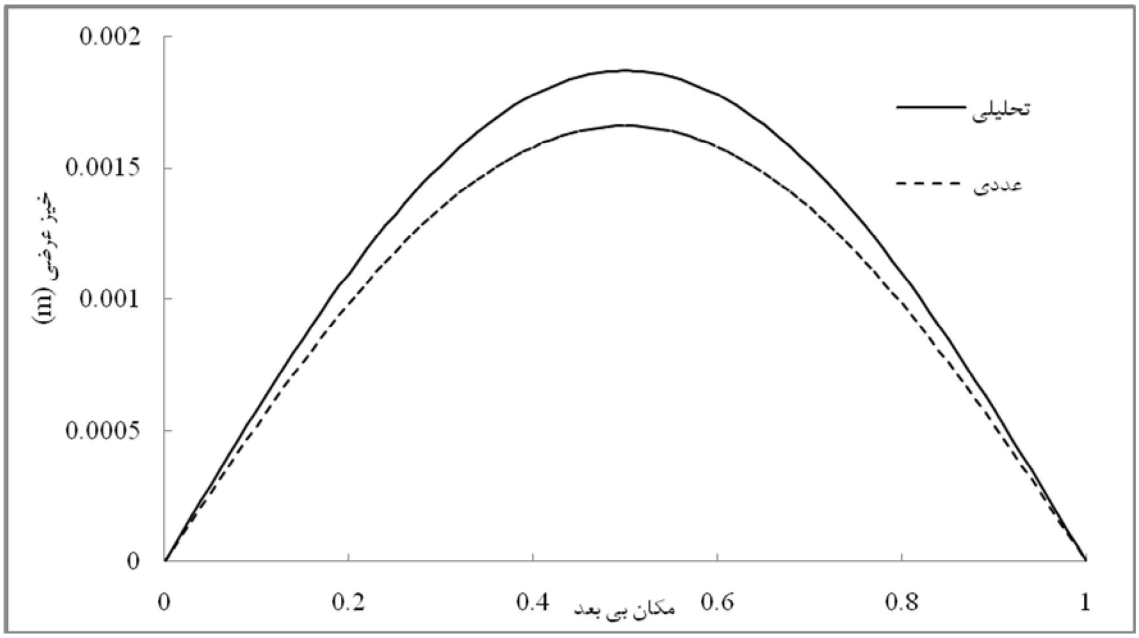
شکل(۵-۱۰)   مقایسه پاسخ عرضی تیر در ۰.۹ = x^*

شکل(۵-۱۱) پاسخ عرضی مرکز تیر با حل تحلیلی را نشان می‌دهد. در زمان اعمال بار، تیر حول خیز استاتیکی خود نوسان می‌کند و پس از حذف بار، حرکت نوسانی تیر حول صفر ادامه می‌یابد.



شکل(۵-۱۱)   پاسخ عرضی تیر در ۰.۵ = x^*

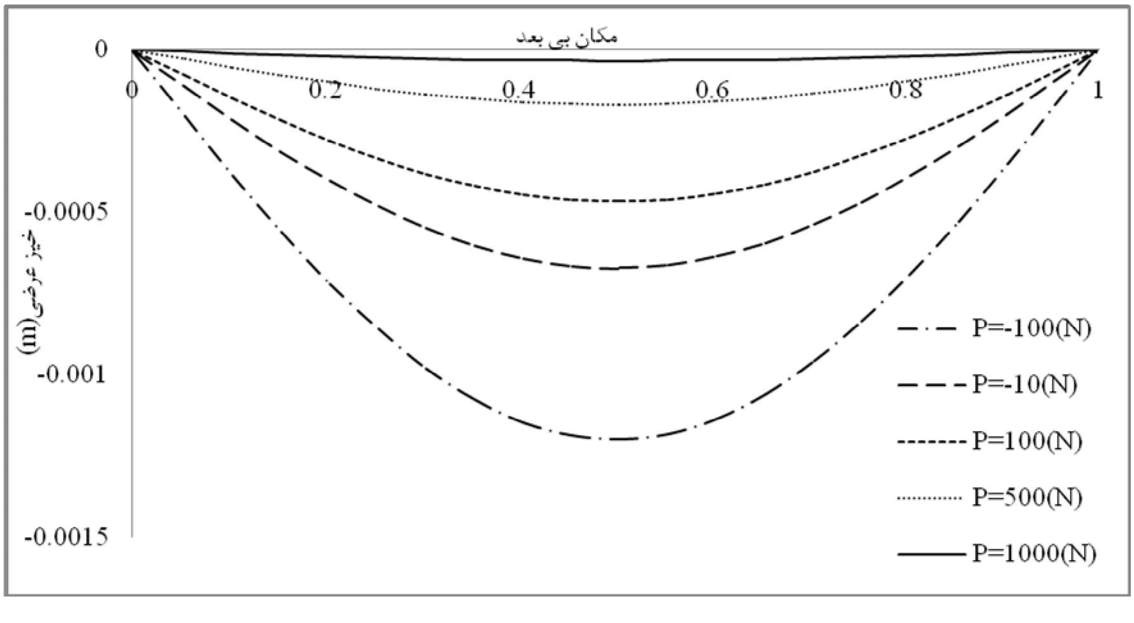
شکل(۵-۱۲) خیز عرضی تیر در زمان ۰.۳ ثانیه را نشان می‌دهد. مشابه شکل‌های (۵-۹) و (۵-۱۰)، حل تحلیلی، خیز را بزرگ‌تر از حل عددی نشان می‌دهد و درصد اختلاف نتایج نیز مشابه است.



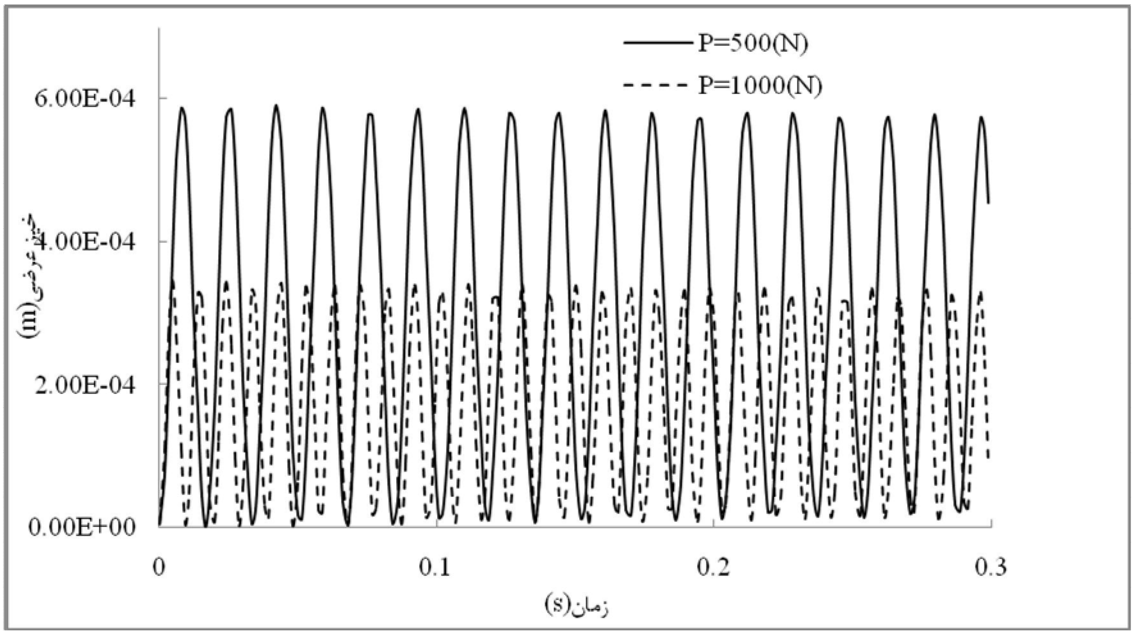
شکل(۵-۱۲) تغییر شکل عرضی تیر در t = ۰.۳ ثانیه

شکل(۵-۱۳) اثر بار محوری را بر روی حرکت عرضی نشان می‌دهد. با افزایش بار محوری کششی، خیز تیر کاهش یافته و با افزایش بار محوری فشاری، خیز عرضی به شدت افزایش می‌یابد. واضح است بار فشاری، می‌تواند سازه را به حالت کمانش نزدیک کند.

شکل(۵-۱۴) اثر بار را بر روی حرکت عرضی نشان می‌دهد. با افزایش بار محوری، خیز تیر کاهش یافته و فرکانس افزایش می‌یابد که با نتایج بخش فرکانس مطابقت دارد.



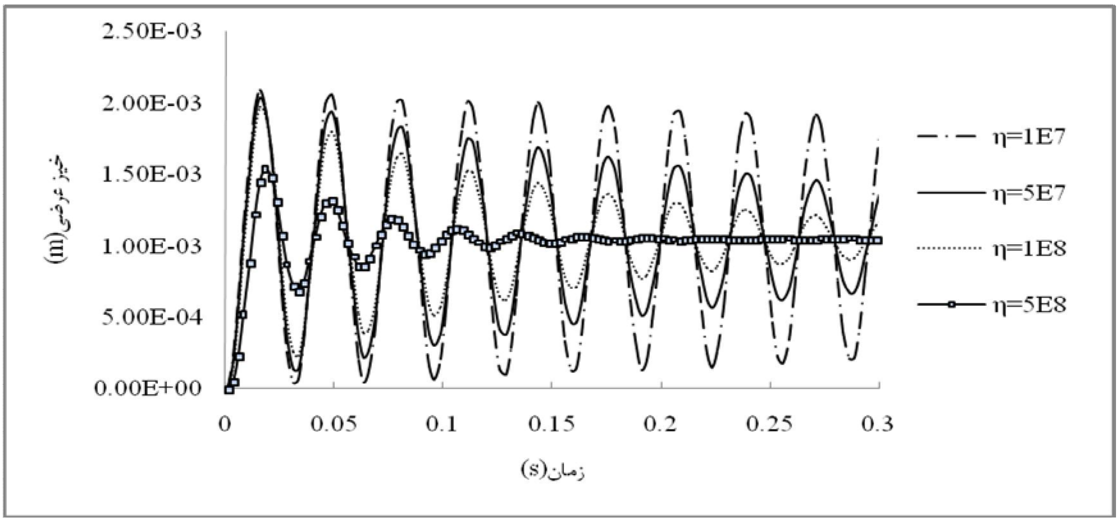
شکل(۵-۱۳) تغییر شکل عرضی تیر در t =۰.۵ به ازای بارهای محوری مختلف



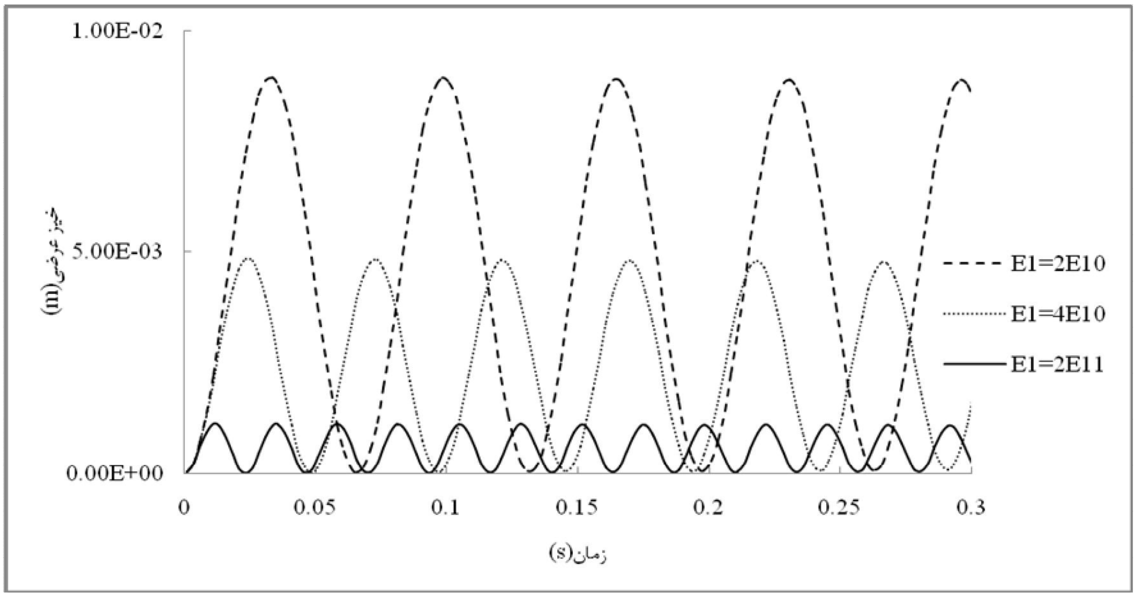
شکل(۵-۱۴) پاسخ عرضی تیر در ۰.۵ $= x^*$ به ازای بارهای محوری مختلف

شکل(۵-۱۵) تأثیر ضریب ویسکوزیته بر روی پاسخ را نشان می‌دهد. با افزایش ضریب ویسکوزیته، خیز عرضی کاهش یافته و پاسخ سریع‌تر میرا می‌شود.

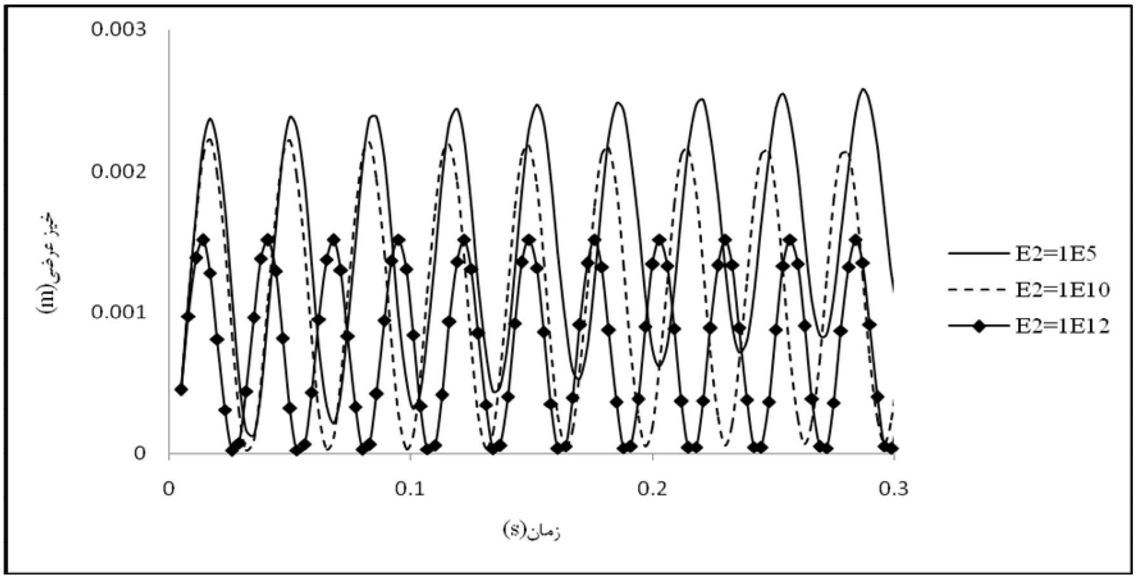
شکل(۵-۱۶) وشکل(۵-۱۷) به ترتیب پاسخ عرضی تیر در ۰.۵ $= x^*$ به ازای مدول الاستیک‌های مختلف (E_1) و (E_2) را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مدول الاستیک E_1 خیز عرضی کاهش یافته و فرکانس پاسخ افزایش می‌یابد. افزایش E_2 خیز عرضی را کاهش می‌دهد ولی فرکانس پاسخ را تغییر نمی‌دهد



شکل(۵-۱۵) پاسخ عرضی تیر در ۰.۵ = x^* به ازای ضریب ویسکوزیته‌های مختلف

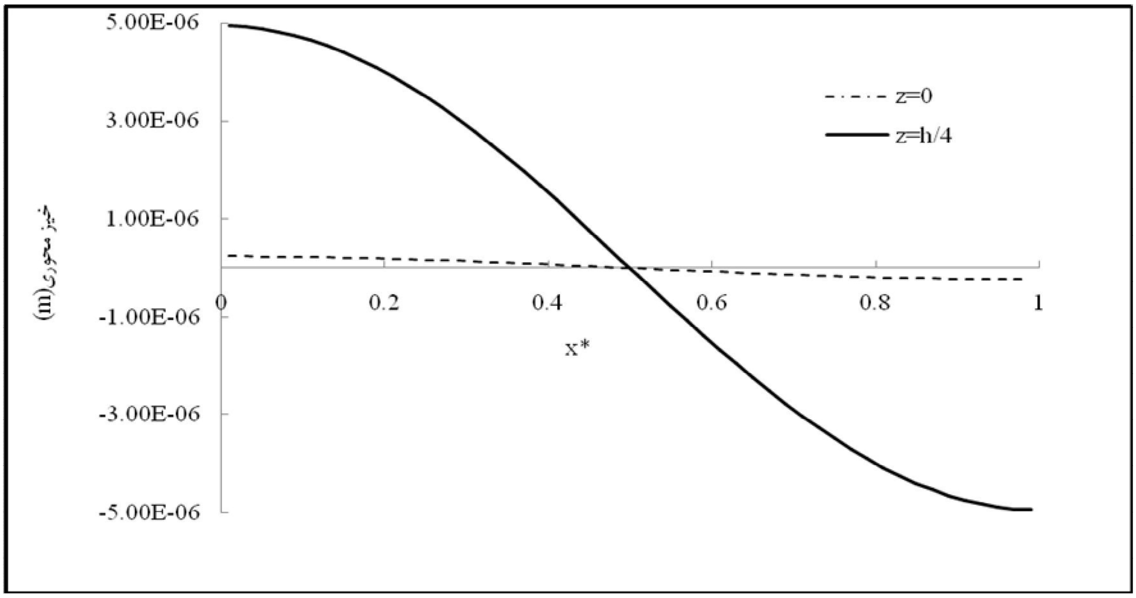


شکل(۵-۱۶) پاسخ عرضی تیر در ۰.۵ = x^* به ازای مدول الاستیک‌های مختلف (E_1)

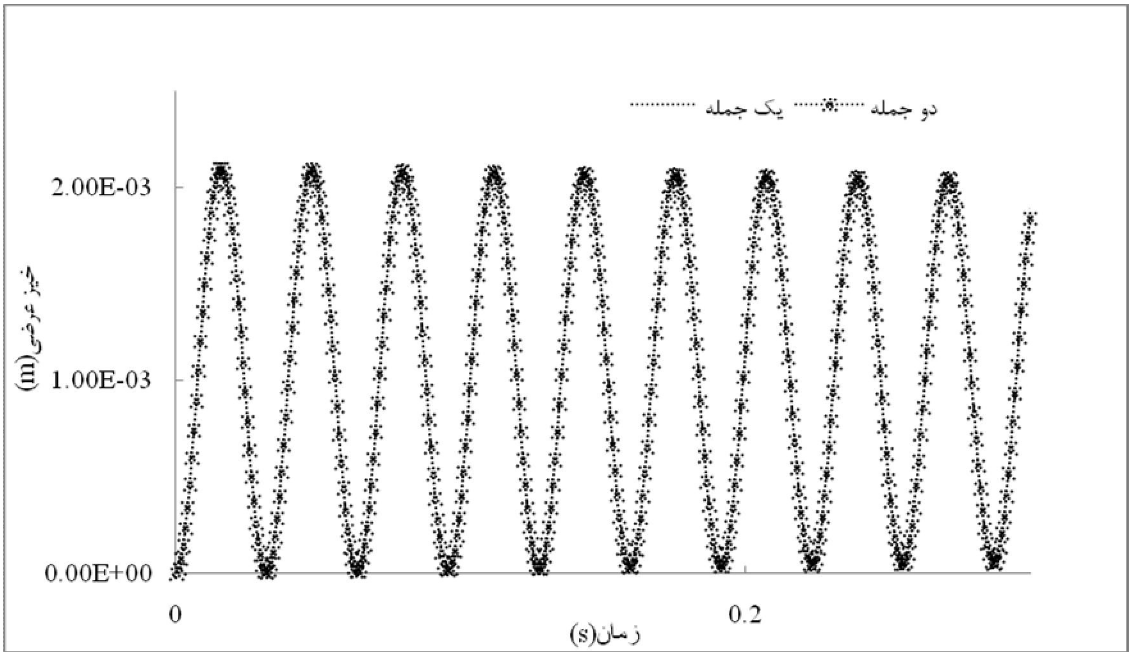


شکل(۵-۱۷) پاسخ عرضی تیر در $x^*=$ ۰.۵ به ازای مدول الاستیک‌های مختلف (E_2)

شکل(۵-۱۸) خیز محوری تیر به ازای z=0 و z=h/4 را نشان می‌دهد. در واقع این شکل، جابه‌جایی لایه‌های مختلف را نشان می‌دهد. شکل(۵-۱۹) تأثیر تعداد جملات بسط توابع ویژه بر پاسخ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل، پاسخ با در نظر گرفتن یک جمله از بسط (m=1) همگرا خواهد شد.



شکل(۵-۱۸) خیز محوری تیر در z=0 و z=h/4



شکل(۵-۱۹) تأثیر تعداد جملات بسط توابع ویژه بر همگرایی پاسخ

۵-۵- جمع‌بندی

در این فصل به بیان و بررسی نتایج حاصل از روش‌های ارائه شده در فصل‌های سوم و چهارم پرداخته شد. نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی، بار کمانش و پاسخ ارائه و حساسیت آنها به پارامترهای سیستم بررسی شد. همچنین مقایسه‌ای بین نتایج عددی و تحلیلی انجام شد.

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادها

۶-۱- مقدمه

در این پایان‌نامه به حل ریاضی و عددی تیر ویسکوالاستیک با خیز نسبتاً زیاد تحت بار دینامیکی عرضی پرداخته شد. در ابتدا، براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی تیر استخراج شد. این معادلات شامل مشتقات جزئی نسبت به متغیرهای مکان و زمان بوده و به کمک اصل همیلتون تعیین شدند. پس از بی‌بعد کردن معادلات، از تئوری اغتشاشات استفاده و روش مدهای نرمال، پاسخ سیستم به‌دست آمد. علاوه بر آن، فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش سیستم نیز تعیین شدند. همچنین حل عددی شامل حل مدال، کمانش و دینامیکی مسأله به کمک نرم‌افزار انسیس ارائه شد.

۶-۲- نتایج

نتایج این پایان‌نامه به صورت زیر قابل بیان است.

- با استفاده از معادلات استخراج شده براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، امکان تعیین فرکانس‌های محوری علاوه بر فرکانس‌های عرضی وجود دارد.
- مطابقت نتایج فرکانس در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول با تئوری سه‌بعدی الاستیسیته بیش از سایر تئوری‌هاست.
- براساس جدول‌های ارائه شده، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، بار کمانش و فرکانس را کمتر از نتایج تئوری سه‌بعدی نشان می‌دهد.
- با افزایش چگالی فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین فرکانس با جذر چگالی رابطه‌ی عکس دارد. این رابطه در تمام روابط تحلیلی که از تئوری‌های مختلف به‌دست می‌آید نیز وجود دارد.
- بدون در نظر گرفتن بار محوری، برای مقادیر بزرگ E_1، یک افزایش ناگهانی در فرکانس طبیعی رخ می‌دهد؛ در حالی‌که در مقادیر کوچک E_1 تغییرات فرکانس محسوس نیست.
- با تغییر در ضریب ویسکوزیته η در محدوده‌ی $(1e5<\eta<1e11)$ و مدول الاستیسیته‌ی E_2 در

محدوده‌ی ($1e3<E_2<1e11$)، تغییری در فرکانس طبیعی مشاهده نمی‌شود.

- با افزایش بار محوری، میزان فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد. در واقع افزایش بار محوری، متناظر با افزایش سفتی سازه است.
- در مقادیر کوچک l/h فرکانس‌های محاسبه شده با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به نتایج عددی سه‌بعدی نزدیک‌تر است و در این محدوده اختلاف نتایج اویلر برنولی با سایر تئوری‌ها زیاد است. با افزایش ضریب لاغری نتایج تئوری‌ها به هم نزدیک‌تر خواهد شد که این نشان‌دهنده‌ی اهمیت پایین برش در تیرهای بلند و نازک است.
- بار محوری رابطه‌ی بین ضخامت و فرکانس طبیعی را تغییر می‌دهد. در غیاب بار محوری این رابطه خطی است (مشابه تیر اویلر برنولی)؛ اما در حضور بار محوری فرکانس با جذر ضخامت متناسب است.
- در غیاب بار محوری، با افزایش طول فرکانس به صورت خطی کاهش می‌یابد (مشابه تیر اویلر برنولی)؛ اما با وجود بارگذاری فرکانس با مجذور طول کاهش می‌یابد.
- در بسط اغتشاشی انتخاب شده، فرکانس‌های سیستم خطی و غیرخطی تا مرتبه $\varepsilon^{۲}$ یکسان است.
- با افزایش ضخامت بار کمانش افزایش می‌یابد و بار با توان سوم ضخامت رابطه‌ی مستقیم دارد که با تئوری ستون اویلر سازگار است.
- افزایش طول سبب کاهش بار کمانش با رابطه‌ی $1/l^2$ خواهد شد. این موضوع نیز با تئوری ستون اویلر هماهنگی دارد.
- با افزایش بار محوری کششی، خیز تیر کاهش یافته و با افزایش بار محوری فشاری، خیز عرضی به شدت افزایش می‌یابد.
- با افزایش ضریب ویسکوزیته، خیز عرضی کاهش یافته و پاسخ سریع‌تر میرا می‌شود.
- با افزایش مدول الاستیسیته E_1 خیز عرضی کاهش یافته و فرکانس پاسخ افزایش می‌یابد.

- با افزایش مدول الاستیسیته E_2 خیز عرضی کاهش یافته ولی فرکانس پاسخ تغییری نمی‌کند.

۶-۳- پیشنهادها

جهت انجام مطالعه‌ی جامع‌تر در موضوع، موارد زیر قابل بررسی هستند:

- استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه‌ی بالاتر.
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار محوری وابسته به زمان.
- بررسی پاسخ سیستم تحت بار عرضی متغیر با مکان.
- بررسی اثر مدل‌های مختلف ویسکوالاستیک.
- در نظر گرفتن ماده به صورت FG .
- بررسی تغییرات فرکانس با دامنه.
- تعیین شکل مدها با حل معادلات مرتبه دو.
- بررسی مسأله، وقتی بار عرضی قائم باقی نماند.
- بررسی تیر ضخامت متغیر (فرکانس- پاسخ- کمانش).
- تعیین پاسخ برای شرایط مرزی مختلف.

پیوست الف

اصول ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

پیوست الف-اصول ویسکوالاستیسیته‌ی خطی

الف-۱- مقدمه

به طور معمول با انجام تست های ساده‌ی آزمایشگاهی می‌توان ویژگی‌های مواد را مشخص کرد. تعیین خصوصیات مکانیکی مواد ویسکوالاستیک مشابه مواد الاستیک، اغلب شامل تست کشش محوری می‌باشد. اگرچه تست‌های کشش ویسکوالاستیک زیادی وجود دارد، اما معمولاً فقط سه حالت خزش، رهایش تنش و پاسخ دینامیکی به بارگذاری سینوسی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۵].

الف-۱-۱- خزش

خزش یک تغییر شکل پیش‌رونده، در ماده‌ای تحت تنش ثابت می‌باشد. تست خزش شامل اندازه‌گیری کرنش وابسته به زمان $\varepsilon(t) = \delta(t)/L_0$، ناشی از تنش محوری ثابت می‌باشد. به عبارت دیگر، تنش σ را به صورت یک تابع پله با مقدار اولیه σ_0 فرض کنید که به صورت زیر بیان می‌شود.

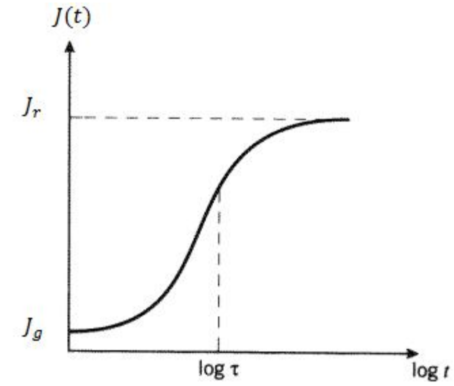
$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t) \qquad \text{(الف-۱)}$$

$H(t)$، تابع پله‌ی واحد هوی ساید[1]است. در این حالت اگر تنش a برابر شود، کرنش نیز a برابر می-شود. نسبت کرنش به مقدار تنش σ_0 کامپلینس[2] خزش نامیده شده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \qquad \text{(الف-۲)}$$

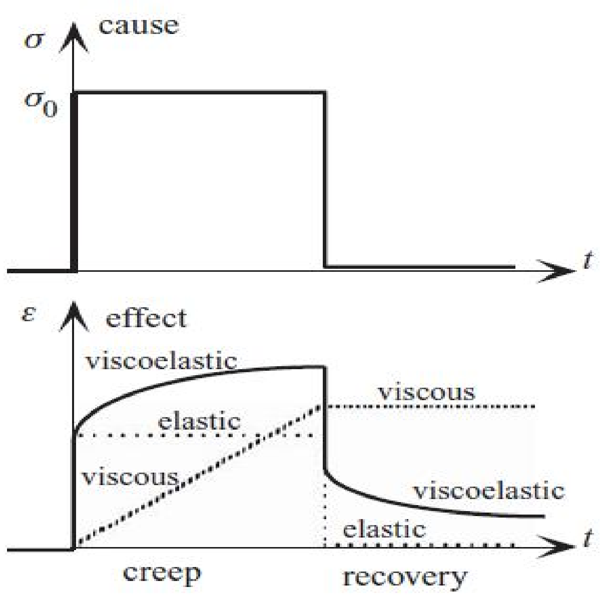
در مواد ویسکوالاستیک خطی، کامپلینس خزش مستقل از سطح تنش می‌باشد.

---
[1] Heaviside
[2] Compliance



شکل (الف-۱) تابع کامپلینس خزشی

در شکل (الف-۱) تابع کامپلینس خزش در مقابل لگاریتم زمان رسم شده است. نمودار از J_g (کامپلینس شیشه) شروع شده و در حالت تعادل به J_r(کامپلینس لاستیک) می‌رسد. در نمودار فوق نقطه‌ای که با $\log\tau$ نشان داده شده است، نقطه‌ی عطف نمودار می‌باشد. τ زمان رهایش در فرآیند خزش است.



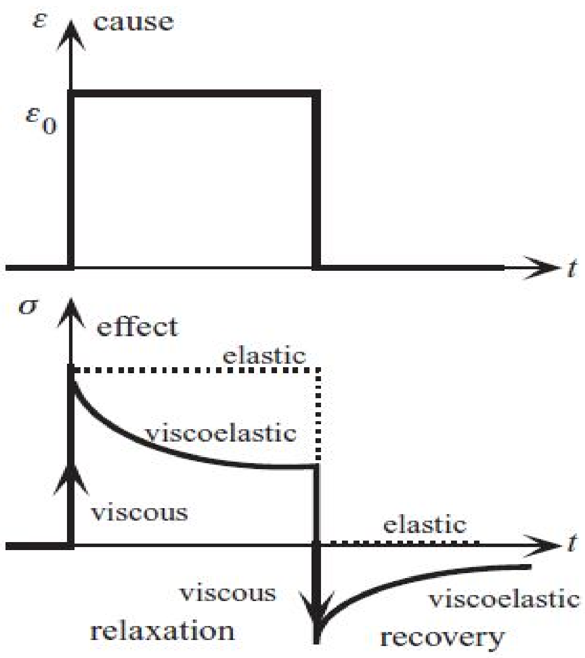
شکل (الف-۲) خزش و بازگشت

همان‌طور که در شکل (الف-۲) نمایش داده شده است، با برداشتن بار، کرنش به تدریج کاهش می‌یابد و به یک مقدار حدی می‌رسد که به آن پدیده‌ی بازگشت[1] گفته می‌شود.

[1] Recovery

الف-۱-۲- رهایش تنش[1]

رهایش تنش، به معنای کاهش تدریجی تنش برای ماده‌ای تحت کرنش ثابت می‌باشد.اگر کرنش را به صورت یک تابع پله‌ی واحد به صورت $\varepsilon(t)=\varepsilon_0 H(t)$ فرض کنیم،تنش $\sigma(t)$در مواد ویسکوالاستیک به صورت نشان داده شده در شکل (الف-۳) کاهش می‌یابد.



شکل (الف-۳) رهایش تنش و بازگشت

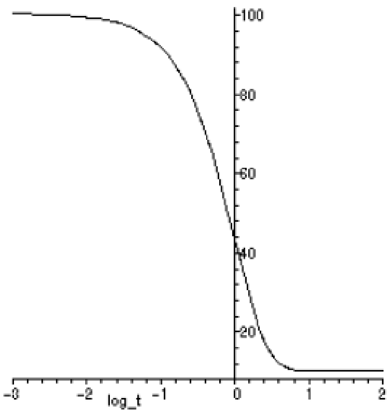
نسبت تنش به کرنش ε_0 ،مدول رهایش نامیده شده و به صورت زیر نمایش داده می‌شود.

$$E(t)=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \qquad \text{(الف-۳)}$$

در مواد خطی مدول رهایش مستقل از سطح کرنش بوده و $E(t)$ تنها تابعی از زمان می‌باشد. خزش و رهایش می‌توانند در تغییرشکل‌های برشی و یا بالک رخ دهند.تابع رهایش برای تنش برشی با $G(t)$ نشان داده می‌شود. برای تغییر شکل بالک،مدول الاستیک بالک B (یا K)نامیده می‌شود. تابع رهایش متناظر در بالک همانند مدول الاستیک بالک، $B(t)$نامیده می‌شود.اما در اینجا تنش لزوماً از نوع تنش هیدرواستاتیکی می‌باشد. فرق مشابهی نیز در بین کامپلینس‌های خزش وجود دارد. $J_G(t)$ برای

[1] Stress Relaxation

خزش در برش، $J_E(t)$برای خزش در کشش و $J_B(t)$ برای خزش در تغییر شکل بالک تعریف می‌شود.



شکل (الف-۴) تابع مدول رهایش تنش

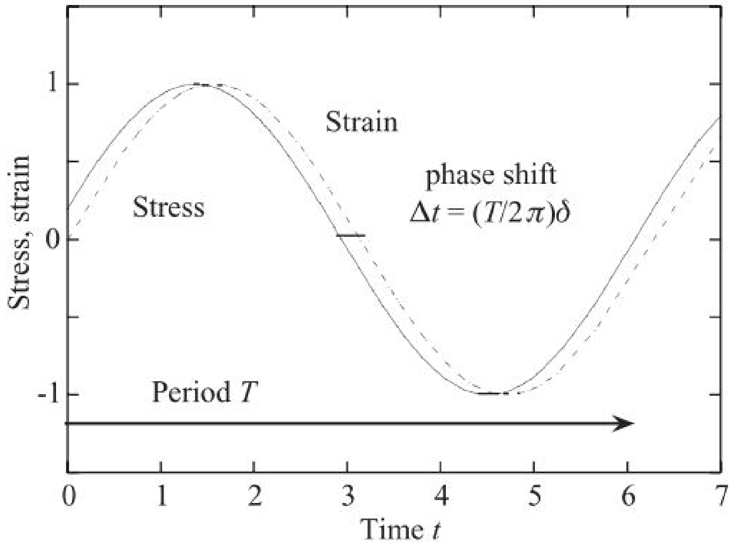
شکل (الف-۴) مدول رهایش را در مقابل لگاریتم زمان نشان می‌دهد. در این شکل $E_g = 100$ ،$E_r = 10$ و $\tau = 1$ می‌باشند.

خزش و رهایش هر دو مظهر یک مکانیسم مولکولی‌اند و انتظار می‌رود $E(t)$ و $J(t)$به هم مرتبط باشند. اما اگرچه در حالت کلی $E_r = \dfrac{1}{J_r}$ و $E_g = \dfrac{1}{J_g}$است،اما از آن $E(t) = \dfrac{1}{J(t)}$را نتیجه گرفت.به ویژه حرکت به سوی حالت تعادل در پاسخ رهایش سریعتر از خزش می‌باشد.

الف-۱-۳- پاسخ دینامیکی به بارگذاری سینوسی

تست‌های خزش و رهایش تنش برای مطالعه‌ی پاسخ مواد در زمان‌های طولانی (از چند دقیقه تا چند روز) مناسب می‌باشند، اما برای زمان‌های کوتاه‌تر (ثانیه یا کمتر)، پاسخ دقیقی ارائه نمی‌دهند. تست دینامیکی که در آن تنش (یا کرنش) حاصله از کرنش (یا تنش) سینوسی اندازه‌گیری می‌شود، اغلب برای یافتن پاسخ پلیمرها در بازه‌های کوتاه مدت مناسب می‌باشد. هنگامی که یک ماده‌ی ویسکوالاستیک تحت تنش متغیر سینوسی قرار می‌گیرد، سرانجام به یک حالت پایا می‌رسد که در آن کرنش حاصله نیز سینوسی، با همان فرکانس زاویه‌ای، اما با تأخیر فاز به اندازه‌ی زاویه‌ی δ می‌باشد. این تأخیر فاز مشابه تأخیر کرنش مشاهده شده در آزمایش خزش می‌باشد. همواره کرنش با فاز δ از تنش عقب می‌ماند، حتی اگر کرنش نسبت به تنش متغیر کنترل شده باشد (شکل (الف-۵)). در

بارگذاری سیکلی پدیده هیسترسیس رخ می‌دهد که منجر به اتلاف انرژی می‌شود. تفاوت رفتار ماده در حالت استاتیک و دینامیک نیز با این تست مشحص می‌شود.



شکل (الف-۵) بارگذاری دینامیکی

الف-۲- اصل جمع آثار بولتزمن

در یک سیستم ویسکوالاستیک که تحت بار قرار گرفته است، به علت تغییرات آنتروپی، پس از توقف اعمال بار، پاسخ سیستم متوقف نمی‌شود. یعنی تغییر شکل چنین ماده‌ای فقط به تنش اعمالی واقعی وابسته نمی‌باشد، بلکه به سابقه‌ی تنش تحمل شده توسط آن نیز مرتبط می‌باشد.

در حالت تنش ثابت، افزایش کرنش و در حالت کرنش ثابت، کاهش تنش مشاهده می‌شود. حال اگر تنش یا کرنش دارای سابقه‌ی زمانی عمومی باشند و یا تنش و کرنش با هم تغییر کنند، پاسخ‌های مربوط به اغتشاشات خطی مختلف را می‌توان با هم جمع کرد. این روش به اصل جمع آثار بولتزمن معروف است. بولتزمن این اصل را به صورت زیر بیان می‌کند:

تنشی که در فاصله‌ی زمانی tدر جسم ایجاد می‌شود، کاملاً به سابقه‌ی کرنش در فاصله‌ی $[0,t]$ بستگی دارد. همین مطلب برای کرنش نیز صادق است. بنابراین، پس از تقسیم سابقه‌ی بارگذاری به مجموعه‌ای از بارگذاری‌های پله‌ای و تعیین پاسخ برای هر بخش، برای بدست آوردن پاسخ کلی، تک تک پاسخ‌ها با هم جمع می‌شوند.

برای آزمایش رهایش، نمو تنش در زمان τ که $0 < \tau < t$، از نمو کرنش به صورت زیر بدست می‌آید:

$$d\sigma(\tau) = E(t-\tau)d\varepsilon(\tau) \tag{الف-۴}$$

تنش در زمان t با جمع کردن نموهای تنش زمان‌های قبلی، به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\sigma(\tau) = \int_0^t E(t-\tau)d\varepsilon(\tau) = \int_0^t E(t-\tau)\frac{\partial\varepsilon(\tau)}{\partial\tau}d\tau \tag{الف-۵}$$

مشابه این مطلب برای کرنش نیز برقرار است. برای آزمایش خزش، نمو کرنش در زمان τ برابر است با:

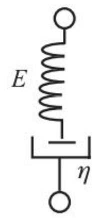
$$d\varepsilon(\tau) = D(t-\tau)d\sigma(\tau) \tag{الف-۶}$$

در رابطه‌ی فوق D کامپلینس خزش می‌باشد. بنابراین با کمک اصل فوق، اگر پاسخ سیستم به ورودی پله مشخص باشد، می‌توان پاسخ به هر ورودی دلخواه را نیز بدست آورد.

الف-۳- معرفی مدل‌های مکانیکی مواد ویسکوالاستیک

الف-۳-۱- مدل ماکسول

مدل ماکسول، شامل یک فنر و دمپر است که به صورت سری به یکدیگر متصل هستند.



شکل (الف-۶) مدل ماکسول

رابطه‌ی کلی تنش و کرنش را برای این مدل، می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\eta} \tag{الف-۷}$$

که نرخ کرنش از دو بخش تشکیل شده است. بخش اول، نرخ کرنش فنر، متناسب با مقدار تنش، همفاز و وابسته به نرخ تنش می‌باشد و بخش دوم، نرخ کرنش دمپر که فقط به مقدار لحظه‌ای تنش پاسخ می‌دهد. حال با استفاده از معادله‌ی (الف-۷)(الف-۷ (می‌توان پاسخ ماده را به تنش و کرنش پله‌ای ارزیابی کرد. به منظور حل این معادله، می‌توان آن را به صورت زیر به فضای لاپلاس منتقل نمود.

$$s\bar{\varepsilon}(s)-\varepsilon(0)=\frac{1}{E}\left[s\bar{\sigma}(s)-\sigma(0)\right]+\frac{1}{\eta}\bar{\sigma}(s)$$ (الف-۸)

حال با استفاده از این رابطه و براساس تست‌های خزش و رهایش، کامپلینس خزش و مدول رهایش برشی به صورت زیر تعیین می‌شوند.

برای محاسبه‌ی تابع کامپلینس خزش، پاسخ این مدل به تابع ورودی پله‌ای $\sigma(t)=\sigma_0 H(t)$ (شکل (الف-۷)(a)) با شرایط اولیه‌ی $\sigma(0)=\sigma_0$ و $\varepsilon(0)=\varepsilon_0$ به دست می‌آید.

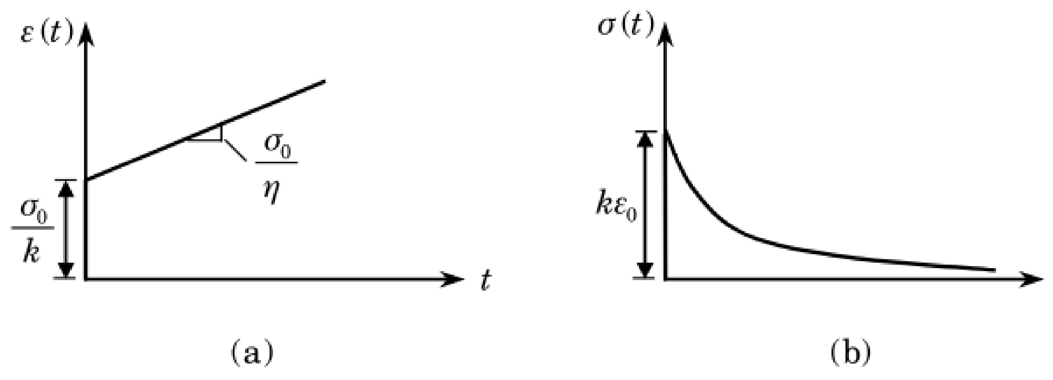
$$\bar{\varepsilon}(s)=\frac{\varepsilon_0}{s}+\frac{\sigma_0}{\eta s^2}$$ (الف-۹)

لاپلاس معکوس معادله‌ی فوق را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\varepsilon(t)=\sigma_0\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right),\quad E=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$$ (الف-۱۰)

چون در لحظه‌ی صفر فقط فنر عکس‌العمل دارد و دمپر تأثیری ندارد، در نتیجه تابع کامپلینس خزش به صورت زیر بدست می‌آید.

$$J(t)=\frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}=\left(\frac{1}{E}+\frac{t}{\eta}\right)$$ (الف-۱۱)



شکل (الف-۷) رفتار مدل ماکسول در آزمایش a)خزش، b)رهایش تنش

پاسخ این مدل به کرنش ورودی پله‌ای $\varepsilon(t)=\varepsilon_0 H(t)$ مطابق با شکل (الف-۷) (b) و در فضای لاپلاس به صورت زیر است.

$$\overline{\sigma}(s)=\frac{\eta}{E+\eta s}\sigma(0) \quad inverse\rightarrow \quad \sigma(t)=\sigma(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau=\frac{\eta}{E} \qquad \text{(الف-۱۲)}$$

این معادله نشان می‌دهد که تنش به صورت نمایی و با مشخصه‌ی زمانی ثابت $\tau=\frac{\eta}{E}$ کاهش می‌یابد که τ ثابت و از خواص ماده می‌باشد و زمان رهایش است.بنابراین مدول رهایش به صورت زیر است.

$$E=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma(0)}{\varepsilon_0}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad \text{(الف-۱۳)}$$

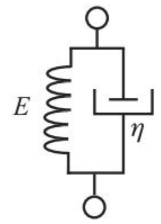
در مدل ماکسول دو کمبود مشاهده می‌شود:

۱- تحت شرایط تنش ثابت، $\frac{d\sigma}{dt}=0$،جریان نیوتنی مشهود است($\sigma=E\frac{d\varepsilon}{dt}$).این موضوع با توجه به رفتار پیچیده‌ی خزش برای ماده‌ی ویسکوالاستیک صحیح نمی‌باشد.

۲-رفتار رهایش تنش را نمی‌توان به طور معمول با یک ترم نمایی کاهشی بیان کرد.زیرا لزوماً تنش در زمان بی‌نهایت به صفر میل نمی‌کند.

الف-۳-۲-مدل کلوین- ویت

مدلی دیگر با درجه‌ی پیچیدگی مشابه با مدل ماکسول، مدل کلوین-ویت می‌باشد. این مدل شامل فنری الاستیک موازی با دمپری ویسکوز است.



شکل (الف-۸) مدل کلوین-ویت

در این مدل برخلاف مدل ماکسول، تنش‌های فنر و دمپر با هم جمع می‌شوند و اما کرنش‌ها برای فنر و دمپر با هم برابرند. برخلاف مدل ماکسول، در مدل کلوین بر اثر اعمال تنش ناگهانی، به دلیل موازی بودن فنر با دمپر، کرنش ناگهانی در همان لحظه مشاهده نمی‌شود. در حالیکه در مدل ماکسول به دلیل آزاد بودن، به صورت لحظه‌ای می‌توانست کرنشی متناسب با تنش اعمال شده‌ی ناگهانی از خود

بروز دهد. رابطه‌ی کلی تنش-کرنش در این مدل به صورت زیر است:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon} \quad \text{(الف-۱۴)}$$

که بخش اول تنش مربوط به فنر و بخش دوم تنشی متناسب با نرخ کرنش و مربوط به المان دمپر می‌باشد.

در آزمایش خزش، برای بررسی پاسخ مدل به تنش ورودی پله‌ای (شکل (الف-۹)(a))، با انتقال معادله‌ی (الف-۱۴) به فضای لاپلاس با شرط اولیه‌ی $\varepsilon(0) = 0$ خواهیم داشت:

$$\frac{\sigma_0}{s} = E\bar{\varepsilon}(s) + \eta\left[s\bar{\varepsilon}(s) - \varepsilon(0)\right] \rightarrow \bar{\varepsilon}(s) = \frac{\sigma_0}{s(E+\eta s)} \, inverse \;\; \rightarrow \varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \quad \text{(الف-۱۵)}$$

که $\tau = \frac{\eta}{E}$ زمان تأخیر[1] است و بیان‌کننده‌ی شدت تغییرات در جایی است که تغییر شکل رخ می‌دهد. در آزمایش خزش، جایگزین کردن E با $\frac{1}{J}$ که J کامپلینس فنر است، مناسب‌تر است.

$$\varepsilon(t) = J\sigma_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \text{(الف-۱۶)}$$

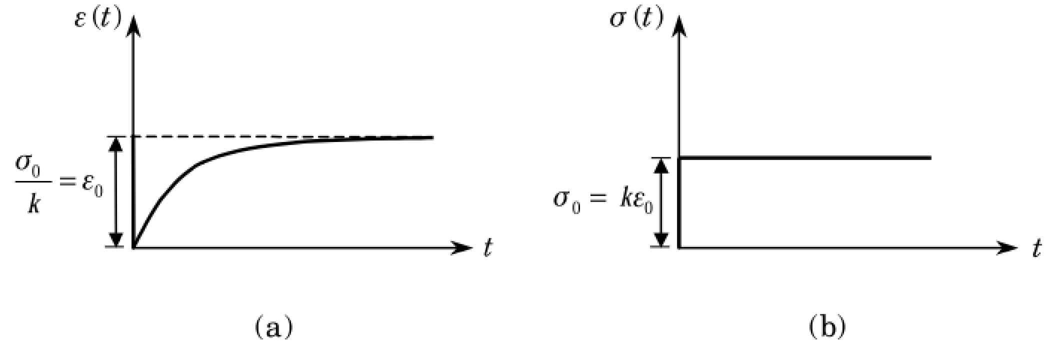
براساس رابطه‌ی فوق، تابع کامپلینس خزش به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$J(t) = J\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \quad \text{(الف-۱۷)}$$

با توجه به اینکه در کرنش ثابت دمپر عمل نمی‌کند، مدل کلوین نمی‌تواند رهایش تنش را تشریح کند.

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right) = 0 \rightarrow \quad \sigma = E\varepsilon_0 \quad \text{(الف-۱۸)}$$

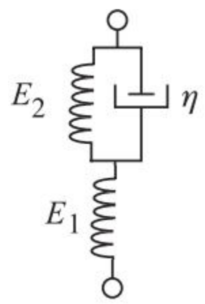
[1] Retardation time



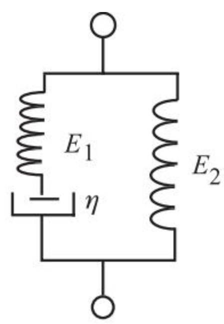
شکل (الف-۹) رفتار مدل کلوین در آزمایش a)خزش، b)رهایش تنش

الف-۳-۳-جامد استاندارد خطی(مدل زنر)

مدل ماکسول رفتار رهایش تنش و مدل کلوین نیز فقط رفتار خزشی یک جامد ویسکوالاستیک را توصیف می‌کند. اما هیچکدام برای ارائه‌ی رفتار عمومی جامد ویسکوالاستیک مناسب نیستند، زیرا لازم است که مدل هر دو رفتار رهایش تنش و خزش را با هم بیان کند. آنچه که به طور معمول جامد استاندارد سه المانی نامیده می‌شود، ترکیبی از المان کلوین-ویت به صورت سری با فنر(شکل (الف-۱۰)) و یا المان ماکسول موازی با فنر (شکل (الف-۱۱) می‌باشد.



شکل (الف-۱۰) مدل جامد استاندارد خطی نوع اول



شکل (الف-۱۱) مدل جامد استاندارد خطی نوع دوم

یکی از ویژگی‌های بارز این مدل، تقسیم‌بندی مشخص انواع کرنش در آن است. به طوری که کرنش الاستیک با المان الاستیک و کرنش ویسکوالاستیک با المان کلوین-ویت نشان داده می‌شود. در این مدل کرنش کل برابر با مجموع کرنش دو قسمت فنر و کلوین-ویت است.

معادله‌ی کلی تنش-کرنش برای این مدل به صورت زیر می‌باشد.

$$\left(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\right)\sigma+\frac{\eta}{E_1E_2}\dot{\sigma}=\varepsilon+\frac{\eta}{E_2}\dot{\varepsilon} \qquad \text{(الف-۱۹)}$$

پاسخ مدل جامد استاندارد خطی نوع اول به به تنش ورودی پله‌ای $\sigma(t)=\sigma_0 H(t)$ در فضای لاپلاس به صورت زیر است.

$$\bar{\varepsilon}(s)=\frac{\varepsilon(0)}{s+\tau^{-1}}+\frac{\sigma_0}{\eta}\left(1+\frac{E_2}{E_1}\right)\left(\frac{1}{s(s+\tau^{-1})}\right),\quad inv\rightarrow \varepsilon(t)=(\frac{\sigma_0}{E_1}+\frac{\sigma_0}{E_2}\left[1-\exp(-\frac{t}{\tau})\right] \qquad \text{(الف-۲۰)}$$

که $\frac{\eta}{E_2}=\tau$ می‌باشد. بنابراین تابع کامپلینس خزش به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J(t)=\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}\left[1-\exp(-\frac{t}{\tau})\right]=J_g+J_1\left[1-\exp(-\frac{t}{\tau})\right],\quad J_g=\frac{1}{E_1}\quad,\quad J_1=\frac{1}{E_2} \qquad \text{(الف-۲۱)}$$

پاسخ مدل جامد استاندارد خطی نوع اول به کرنش ورودی پله‌ای با شرط اولیه‌ی $\sigma(0)=\sigma_0$ را به فضای لاپلاس منتقل کرده و در نهایت مدول رهایش را به صورت زیر خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}G(t)&=\frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}=\frac{E_2}{1+E_2E_1}+\frac{E_1}{1+E_2E_1}\exp\left[-\frac{E_1}{\eta}(1+\frac{E_2}{E_1})t\right]\\&=\frac{E_1E_2}{1+E_1E_2}+\frac{E_1^2}{E_1+E_2}\exp\left[-(\frac{E_1+E_2}{\eta})t\right]\end{aligned} \qquad \text{(الف-۲۲)}$$

برای دومین مدل جامد استاندارد خطی رابطه‌ی کلی تنش-کرنش به صورت زیر است:

$$\sigma+\frac{\eta}{E_1}\dot{\sigma}=E_2\varepsilon+\frac{\eta}{E_1}(E_1+E_2)\dot{\varepsilon} \qquad \text{(الف-۲۳)}$$

بررسی پاسخ این مدل به تنش ورودی پله‌ای(آزمایش خزش):

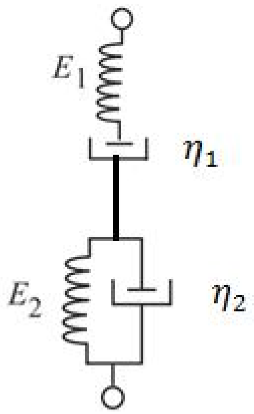
$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{E_1+E_2}\left[1+\frac{E_1}{E_2}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})\right]$$ (الف-۲۴)

بررسی پاسخ این مدل به کرنش ورودی پله‌ای(آزمایش رهایش):

$$\sigma(t)=\varepsilon_0\left[E_2+E_1e^{-\frac{t}{\tau}}\right]$$ (الف-۲۵)

که در آن $\tau=\frac{\eta}{E_1}$زمان رهایش می‌باشد.

الف-۳-۴-مدل برگرز

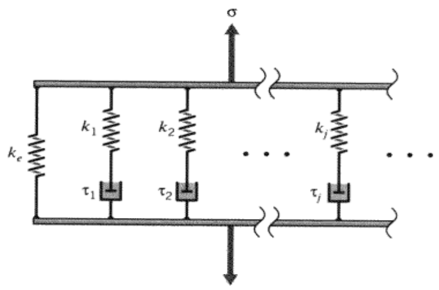


شکل (الف-۱۲) مدل برگرز

این مدل از ترکیب مدل ماکسول با کلوین-ویت(شکل (الف-۱۲)) به دست می‌آید. در این مدل، برای یک تنش ورودی، کرنش کل به صورت مجموع کرنش‌های هر قسمت می‌باشد. معادله‌ی بنیادین این مدل به صورت زیر است.

$$\sigma+\left[\frac{\eta_2}{E_2}+\eta_1(\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2})\right]\dot{\sigma}+\frac{\eta_1\eta_2}{E_1E_2}\ddot{\sigma}=\eta_1\dot{\varepsilon}+\frac{\eta_1\eta_2}{E_2}\ddot{\varepsilon}$$ (الف-۲۶)

الف-۳-۵-مدل ویچرت



شکل (الف-۱۳) مدل ویچرت

معمولاً پلیمرهای واقعی در زمان رهایش، با یک زمان رهایش که توسط مدل‌های بیان شده پیش‌بینی شد، رها نمی‌شوند؛ بلکه طول‌های مختلفی از بخش‌های مولکولی در رهایش شرکت می‌کنند و بخش-های ساده‌تر و کوتاه‌تر خیلی سریعتر از بخش‌های با طول بیشتر رها می‌شوند که این منجر به توزیعی در زمان رهایش می‌شود. برای رفع این مشکل، مهندسان مدل ویچرت راکه مطابق شکل (الف-۱۳) دارای تعداد زیادی مدل ماکسول موازی با یک فنر می‌باشد، پیشنهاد کرده‌اند.

در این مدل، تنش کل برابر با مجموع تنش تک تک قسمت‌های موازی است. با استفاده از رابطه‌ی تنش-کرنش مربوط به مدل ماکسول، رابطه‌ی تنش-کرنش این مدل در فضای لاپلاس به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\overline{\sigma}(s) = \overline{\sigma_e} + \sum_j \overline{\sigma_j} = [E_e + \sum_j \frac{E_j s}{(s + \frac{E_j}{\eta_j})} \qquad \text{(الف-۲۷)}$$

منابع

[1] Montgomery T.Sh., William J.M., (2005), "**Introduction to polymer viscoelasticity**", John Wiley & Sons, New York.

[2] Nhan P.T., (1956), "**Understanding viscoelasticity; basic of rheology** ", Springer, Berlin.

[3] Lakes R., (2009), "**Viscoelastic materials**", Cambridge university press, New York.

[4] Roylance D., (2001), "**Engineering viscoelasticity**", Cambridge University.

[5] Riande E., Diaz-Calleja R., Prolongo M.G., Masegosa R.M., Salom C., (2000), "**Polymer viscoelasticity; stress and strain in practice**", Marcel Dekker INC., NewYork.

[6] Brinson H.F., Brinson C.L., (2008), " **Polymer engineering science and viscoelasticity; an introduction**", Springer, New York.

[7] Christensen R.M., (1982), "**Theory of viscoelasticity: an introduction**", Academic Press, New York.

[8] Roderic S.L., (2000), "**Viscoelastic solids**", University of Washington.

[9] Nayfeh A.H., Pai P.F., (2004), **"Linear and nonlinear structural mechanics"**, John Willy & Sons, Hoboken, New Jersey.

[10] Hagedorn P., DasGupta A., (2007), **"Vibrations and waves in continous mechanical systems"**, John Willy & Sons, Hoboken, New Jersey.

[11] Ventsel E., Krauthammer T., (2001), **"Thin plates and shells: Theory, analysis, and applications"**, New York.

[12] Nishawala V.V., (2011), "**A study of large deflection of beams and plates**", Master Thesis, Mech depart, Rutgers, The State University of New Jersey.

[13] Malatkar P., (2003), "**Nonlinear vibrations of cantilever beams and plates**", Ph.D Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia.

[14] Evan-Iwanowski R.M., (1976), "**Resonance oscillations in mechanical systems**", Elsevier Science, London.

[15] Nayfeh A.H., Mook D.T., (1979), "**Nonlinear oscillations**", John Wiley & Sons, New York.

[16] Moon F.C., (1987), "**Chaotic Vibrations: An introduction for applied scientists and engineers**", John wiley & Sons, New York.

[17] Meirovitch L., (1970), "**Analytical methods in dynamics**" , McGraw-Hill, New York.

[18] Shames I.H., Dym C.L., (1985), "**Energy and finite element methods in structural mechanics**", McGrew-Hill, New York.

[19] Cowper G.R., (1966), "The shear coefficient in Timoshenko's beam theory", **Journal of Applied Mechanics**, 33, pp. 335-340.

[20] Wojciech .S., Adamiec-Wojcik I., (1993), "Nonlinear vibrations of spatial viscoelastic beams", **Acta Mechanica**, 98, pp. 15-25.

[21] Ma A.J., Chen S.H., Song D.T., (1995), "A new method of nonlinear response analysis for large deflection forced vibrations of beams", **Finite Elements In Analysis And Design**, 20, pp. 39-46.

[22] Foda M.A., (1999), "Influence of shear deformation and rotary inertia on nonlinear free vibration of a beam with pinned ends", **Computers And Structures**, 71, pp. 663-670.

[23] Chen L., Cheng C., (2000)., "Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic beams", **Applied Mathematics And Mechanics**, 21, pp. 53-61.

[24] Lee K., (2002), "Large deflections of cantilever beams of non-linear elastic material under a combined loading", **International Journal Of Non-Linear Mechanics**, 37, pp. 439-443.

[25] Zhu Z, Li G, Gheng C.,(2002), "Quasi-static and dynamical analysis for viscoelastic Timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation". **Applied Mathematics And Mechanics**, 23, pp. 36-51.

[26] Woo Kim T., Hwan Kim J.,(2004),"Dynamics stability of a composite cantilever beam with viscoelastic properties under a follower force", **International Committee on Composite Materials**, 1,pp. 181-212.

[27] Dado M., Al-Sadder S., (2005), "A new technique for large deflection analysis of non-prismatic cantilever beams", **Mechanics Research Communications**, 32, pp. 629-703.

[28] Chen L.Q., Yang X.D., (2006), "Vibration and stability of an axially moving viscoelastic beam with hybrid supports", **European J. Of Mechanics A/Solid**, 25, pp. 996-1008.

[29] Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E., (2006), "Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudo spectral method", **Journal Of Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering**, 196, pp.134-146.

[30] Kocaturk T., Simsek M., (2006), "Vibrations of viscoelastic beams subjected to eccentric compressive force and a concentrated moving harmonic force", **Journal Of Sound And Vibration**, 291 ,pp. 302-322.

[31] Mahmoodi S.N., Khadem S.E., Kokabi M., (2007), "Non-linear free vibration of Kelvin-Voigt viscoelastic beams", **International Journal Of Mechanical Sciences** , 49, pp.722-732

[32] Zhong H., Liao M., (2007), "Higher-order nonlinear vibration analysis of Timoshenko beams by the spline-based differential quadrature method", **Shock And Vibration**, 14, pp. 407-416.

[33] Lee K., (2007), "Large deflection of viscoelastic fiber beams", **Textile Research Journal**, 77, pp. 47-51.

[34] Banerjee A., Bhattacharya B., Mallik A.K., (2008), "Large deflection of cantilever beams with geometric non-linearity: analytical and numerical approaches", **International Journal Of Non-Linear Mechanics**, 45, pp. 366-376.

[35] Brojan M., Videnic T., Kosel F., (2009), "Large deflections of nonlinearly elastic non-prismatic cantilever beams made from materials obeying the generalized Ludwick constitutive law", **Mechanica**, 44, pp. 733-739.

[36] Vaz M.A., Caire M. ,(2010), "On the large deflections of linear viscoelastic beams", **International Journal Of Non-linear Mechanics**, 45, pp. 75-81.

[37] Chen L., (2010), "An integral approach for large deflection cantilever beams", **International Journal Of Non-Linear Mechanics**, 45, pp. 301-305

[38] Kocaturk T., Akbas S.D., Simsek M., (2010), "Large deflection static analysis of a cantilever beam subjected to a point load", **Journal Of Engineering Applied Sciences**, 2, pp. 1-13.

[39] Ghayesh M.H., Alijani F., Darabi M.A., (2011), "An analytical solution for nonlinear dynamic of a viscoelastic beam-heavy mass system", **Journal Of Mechanical Sciences And Technology**, 25, pp. 1915-1923.

[40] Eren I., (2011),"Various calculation methods for large deflections of nonlinear elastic material subjected to a moment", **International Journal Of Engineering And Applied Sciences**, 3, pp. 71-79.

[41] Jang T.S., (2012), "A new semi-analytical approach to large deflections of Bernoulli-Euler-v.Karman beams on a nonlinear elastic foundation: nonlinear analysis of infinite beams", **International Journal Of Mechanical Sciences**, 20, pp. 234-245.

[42] Ghayesh M.H., (2012), "Nonlinear dynamic response of a simply supported Kelvin-Voigt viscoelastic beam, additionally supported by a nonlinear spring", **Nonlinear Analysis: Real World Applicatins**,13, pp. 1319-1333.

[43] Tari H., (2013),"On the parametric large deflection study of Euler-Bernoulli cantilever beams subjected to combined tip point loading", **International Journal Of Non-Linear Mechanics**, 49, pp. 90-99.

[۴۴] سوهانی ف.، ایپک‌چی ح.ر.، (۱۳۹۲)، "بررسی ارتعاشات آزاد و کمانش تیر با خیز نسبتاً زیاد به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"، مجله مهندسی مکانیک مدرس(پذیرفته شده)

[۴۵] سوهانی ف.، (۱۳۹۲)، پایان نامه ارشد، "تحلیل ریاضی و عددی تیر با خیز نسبتاً زیاد تحت بار دینامیکی عرضی به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول"، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود.

[46] Amabili M., (2008), " **Nonlinear vibration and stability of shells and plates**", Cambridge University Press, New York.

[47] Boresi A.P., Chong K.P., (2000), "**Elasticity in engineering mechanics**", Second Edition, John Willy & Sons, New York.

[48] Wang C.M., Reddy J.N., Lee K.H., (2000), "**Shear deformable beams and plates, relationship with classical solutions**", Elsevier, Amesterdam.

[49] Rao S.S., (2007), "**Vibration of continuous system**", John Willey & Sons , New Jersey.

[50] Reddy J.N. , (2008), "**An Introduction to continuum mechanics with applications**", Cambridge University Press, New York.

[51] Nayfeh A.H., (1993), "**Introduction to perturbation techniques**", John Willy & Sons, New York.

[52] Ansys user manual

[53] Erol H., Sengel H.S., Sarioglu M.T., (2008), "Static analysis of viscoelastic beams through finite element method"**, Eng & Arch. Fac. Eskisehir Osmangazi University**, 3, pp. 21-37.

[۵۴] جاهد مطلق ح. ر.، نوبان م. ر.، اشراقی م. ا.، (۱۳۷۹)، "Ansys"، انتشارات دانشگاه علم و صنعت، تهران.

Abstract

In this research, mathematical and numerical analysis of viscoelastic beams with moderately large deflection under transverse and axial load are presented. These equation are derived using the first order shear deformation theory. The kinematic of problem is according to the von-Karman strain-displacement relation and Hook's law is used as the constitutive equation. These equation are which a system of coupled nonlinear partial differential equation with constant coefficients have been derived by using Hamilton's principle. The governing equation have been solved analytically whit the perturbation technique and eigenfunction expansion method. The response of the system, the buckling load and the natural frequencies, are determined for a given set of initial values. Finally, a parametric study is performed to investigate the effects of the various parameters such as thickness, density, length, modulus of viscosity and elasticity on the system response, natural frequencies, buckling load. The results are compared whit the numerical method too.

Keywords: Viscoelastic beam, First order shea defomation theory, Frequency analysis, Perturbation teqnique, Moderately large deflection, Finite elements method

Shahrood University of Technology
Faculty of Mechanical Engineering

Analytical and numerical analysis of a viscoelastic beam under dynamic load using first order shear deformation theory with moderately large deflection

Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of
Master of Science (M.Sc)
In Mechanical Engineering , Applied mechanics

Zohreh Malek-Hosseini

Supervisor:
Dr. Hamid Reza Eipakchi

2014