بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مکانیک

گروه جامدات

گرایش طراحی کاربردی

تحلیل ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی در حالت کوپل‌شدگی با استفاده از نظریه غیرموضعی

دانشجو : محسن احمدی

استاد راهنما :

دکتر اردشیر کرمی محمدی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۹۲

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره (۶)

باسمه تعالی

فرم صورت جلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) نتیجه ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای محسن احمدی رشته مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان: **تحلیل ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی در حالت کوپل‌شدگی با استفاده از نظریه غیرموضعی**
که در تاریخ ۹۲/۱۱/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : خوب امتیاز ۱۷/۹۱) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)
۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر اردشیر کرمی محمدی	استادیار	
۲ـ استاد مشاور			
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	سید هادی نادری	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	ایرج ...		
۵ ـ استاد ممتحن	حبیب احمدی	استادیار	

رئیس دانشکده : امضاء

تشکر و قدردانی:

شایسته است از زحمات خالصانه استاد ارجمند جناب آقای **دکتر اردشیر کرمی محمدی** که در طول تحقیق و تدوین پایان نامه، اینجانب را حمایت و راهنمایی نموده‌اند وهم‌چنین از کمک‌ها و مشاوره‌های دوست عزیز جناب آقای **محمد عباسی** دانشجوی دوره دکترای دانشگاه صنعتی شاهرود کمال تشکر و قدردانی را نمایم.

تعهد نامه

اینجانب .....محسن احمدی....... دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته .....مهندسی مکانیک..... دانشکده ....مهندسی مکانیک.... دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه.... **تحلیل ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی در حالت کوپل‌شدگی با استفاده از نظریه غیرموضعی**....تحت راهنمائی.....دکتر اردشیر کرمی محمدی.....متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

میکروسکوپ نیرو اتمی (Atomic Force Microscopy)، که به آنها تیر AFM نیز گفته می‌شود، یکی از پرکاربردترین دستگاهها در تهیه و تحلیل نقشه و تصویر از سطوح بسیار ریز در حد نانو می‌باشد. در این پایان‌نامه رفتارهای ارتعاشاتی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی از طریق روش غیرموضعی مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است و نتایج حاصل از این روش با روش کلاسیک مقایسه شده است. به دلیل مشکلات ناشی از طراحی و ساخت این دستگاه اتصال نوک تیر دقیقا در وسط تیر کاری دشوار و تقریبا غیر ممکن می باشد. تیر مورد بررسی همگن می‌باشد. حالت مورد بررسی ارتعاش خمشی عمود بر محور تیر می‌باشد. زمانی که نوک دقیقا در مرکز تیر قرار نگیرد تیر علاوه بر ارتعاش خمشی، ارتعاش پیچشی نیز خواهد داشت که اصطلاحا به این حالت کوپل‌شدگی می‌گویند. در ابتدا در حالت کلاسیک با استفاده از اصل همیلتون معادله مشخصه و شرایط مرزی تیر AFM در حالاتی که نوک دقیقا در مرکز قرار می‌گیرد(حالت بدون کوپل‌شدگی) و همچنین حالتی که نوک در مرکز قرار نمی‌گیرد(حالت کوپل‌شدگی) به دست آمده است. در ادامه نیز با استفاده از روش غیرموضعی و به کارگیری اصل همیلتون معادله مشخصه و شرایط مرزی تیر AFM در حالت بدون کوپل‌شدگی و همچنین حالت کوپل‌شدگی به دست آمده است. پارامترهای فرکانس و حساسیت به دست آمده از این دو روش در نمودارهای جداگانه رسم شده است و نتایج حاصل با هم مقایسه شده‌اند. همچنین در این پایان‌نامه تاثیر مقدار فاصله نوک تیر از مرکز سطح مقطع تیر مورد بررسی قرار گرفته ونتایج نیز در نمودارهای جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: میکروسکوپ نیرو اتمی، فرکانس تشدید، حساسیت، سختی تماسی عمودی، نظریه غیرموضعی

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها و جداول

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مقدمه

نانومتر واحد بسیار بسیار کوچکی برای اندازه گیری طول است که در ابعـاد اتمـی و مولکـولی کـاربرد دارد. یک نانومتر فاصله‌ی بسیار کوچکی است و به عنوان مثال مولکول آب با آن سـنجیده مـی‌شـود. برای درک میزان کوچکی این واحد طول خوب است بدانیم که تار موی انسان حدوداً ۸۰ هزار نانومتر قطر دارد، بنابراین برای مشاهده پدیده‌ها و درک اثراتی که در این اندازه بسیار کوچک وجـود دارد نـه تنها به چشم غیرمسلح نمی‌توان تکیه کرد بلکه حتی از میکروسکوپ‌های معمولی که در آزمایشگاه‌هـا وجود دارند نیز، نمی‌توان استفاده کرد چراکه با این میکروسکوپ‌ها فقط تا ابعـاد "میکرومتـر" را مـی توان دید. به همین دلیل دانشمندان با پیشرفت علم و فنون به فکر ساختن وسایلی افتادند که بتوانند ابعاد اتمی را هم اندازه گیری کنند. وسایل زیادی با روش‌های مختلف برای این منظـور سـاخته شـده است که خیلی از آنها کامل شده نمونه های قبلی است. اما میکروسکوپ نیرو اتمـی جـزو جدیـدترین دستاوردهای دانشمندان در زمینه اندازه گیری در ابعاد و مقیاس نانو است کـه در پـاییز سـال ۱۳۶۳ یعنــی حــدود ۳۰ ســال پــیش توســط جــرد بینینــگ، کریســتوف جربــر و کوایــت ســاخته شــد. دستگاهی که بینینگ و همکارانش ساخته بودند از نظر عملکرد کاملاً مشابه میکروسـکوپ‌هـای نیـرو اتمی امروزی بود و در طی این بیست سال تنها دقت و روش حس نهایی اندازه‌ها پیشرفت کرده است. با این دستگاه می‌شد طول‌هایی تا حدود "۳۰۰ آنگستروم" یا "۳۰ نانومتر" را اندازه گرفت. با گذشت زمان این دستگاه کامل‌تر شد و امروزه می‌توان با دقتی بیش از ۵۰۰ برابر دقت میکروسکوپ بینینـگ سطوح مواد را مشاهده نمود.

می‌دانیم که تمامی اجسام هراندازه هم که به ظاهر صاف و صیقلی باشند، باز هم در سطح خود دارای پستی و بلندی و ناصافی‌هایی هستند. به عنوان مثال سطح شیشه بسیار بسیار صاف و صیقلی به نظر می‌رسد، اما اگر در مقیاس خیلی کوچک به آن نگاه کنیم، خواهیم دید که سطح شیشه پر از ناصافی-ها یا به عبارتی "دست انداز" است. کار میکروسکوپ نیرواتمی نشان دادن این ناصافی‌ها و اندازه‌گیری

عمق آنهاست. ثبت چگونگی قرارگیری و نشان دادن عمق و ارتفاعِ پستی و بلندی‌ها در یک سطح خاص از ماده را "توپوگرافی" می‌نامند.

۱-۲ نحوه کار میکروسکوپ نیرو اتمی

می‌دانیم که نیروهای بسیار کوچکی به صورت جاذبه و دافعه بین اتم‌های باردار وجود دارند، (درست مثل دو سر غیرهم‌نام آهنربا که باعث دفع و جذب می‌شوند.) چنین نیروهایی بین نوک میکروسکوپ و اتم‌های سطح ایجاد می‌گردد. با اندازه‌گیری نیروی بین اتم‌ها در نقاط مختلف سطح، می‌توان محل اتم‌ها روی آن را مشخص کرد.

میکروسکوپ نیرو اتمی از اجزا و قطعات مختلفی تشکیل شده است که مهم‌ترین بخش آن مجموعه "انبرک و نوک" می‌باشد و در واقع قسمت اصلی برای شناخت سطوح به شمار می‌آید. جنس انبرک معمولاً از سیلیسیم و نوک از یک تک اتم (معمولا اتم الماس) تشکیل شده است. انبرک می‌تواند شکل‌های متفاوتی داشته باشد از جمله تیرهای Vشکل، خنجری شکل، بازو مثلثی و تخته گونه.

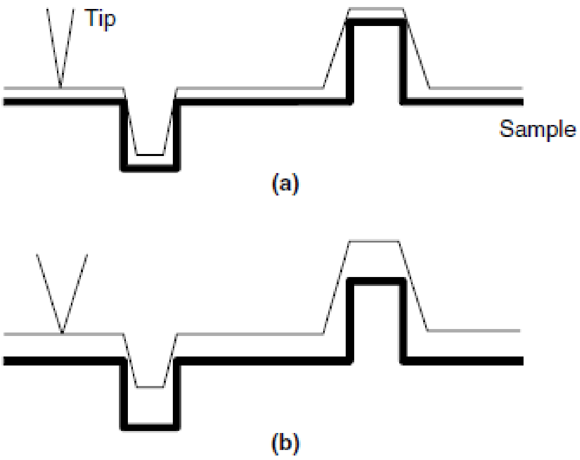
بسته به مود مورد استفاده AFM و خاصیت مورد اندازه گیری ازنوکهای مختلفی استفاده می شود.

جنس نوکها معمولا از سیلسیم یا نیترید سیلسیم می باشد. زمانی که فرایند اندازه گیری مستلزم وارد کردن نیروهای فوق العاده زیاد از جانب نوک به سطح باشد از نوکهای الماسی استفاده می شود.

از روکش هایی نظیر Cr-Au وPt برای محافظت از نوک در برابر شرایط خشن محیطی استفاده می شود. در اندازه گیری خواص مغناطیسی نقاط سطح از نوکهایی با روکش مواد فرو مغناطیس مانند Co،Ni،Fe استفاده می شود .

برای این‌که میکروسکوپ نیرو اتمی بتواند برجستگی‌ها و فرورفتگی‌ها را در ابعاد نانومتر حس کند لازم است نوک تیز انبرک ظرافت اتمی داشته باشد. همان‌طور که ما با دستکش کار نمی‌توانیم زبری یا نرمی یک سطح را حس کنیم. انواع شکل نوک عبارتند از: نوک مخروطی، نوک تخت، نوک کروی، نوک Tشکل ، نوک تیز.

پارامترهای هندسی نوک که نوع کارایی نوک و میزان دقت نتایج بدست آمده را تعیین می کنندعبارتند از: شکل، بلندی، نازکی(زاویه راس هرم فرضی منطبق بر نواحی نوک)، تیزی (شعاع دایره فرضی منطبق بر نوک).



شکل۱-۱مقایسه تیزی نوک‌های تیر میکروسکوپ نیرواتمی

شکل(۱-۱) به مقایسه تیزی نوک‌های تیر میکروسکوپ نیرو اتمی می‌پردازد. همانطور که از شکل مشخص است هر چقدر تیزی بیشتر باشد ، دقت بیشتراست.

نوک های T شکل برای نقشه برداری و آشکار سازی فرورفتگی های موجود در بخش های دیواره مانند (شبیه به دیوار) سطح نمونه به کار می رود. این در حالی است که نوک های نوک تیز این قابلیت را ندارند .از نوکهای تخت هم برای بررسی اصطکاک نواحی مختلف سطح استفاده می شود . چرا که آنچه در عمل به صورت اصطکاک نمایان می شود رفتار جمعی مجموعه از اتم های سطح است و نه یک نقطه به اندازه یک اتم. نوکهای کروی به دلیل سطح تماس بسیار بزرگی که با سطح نمونه مورد بررسی دارند نیروی وارد برواحد سطح بسیار ناچیزی به سطح وارد می کند،در نتیجه نمونه های بسیار نرم و حساس با این روش قابل بررسی می باشند.

از آنجا که تصاویر مربوط به اندازه‌های اتمی روی یک سطح با چشم غیرمسلح یا حتی مسلح به قوی-ترین عدسی‌ها قابل مشاهده نیست، به کمک ابزارهای پیشرفته، حرکات عرضی لمس شده توسط

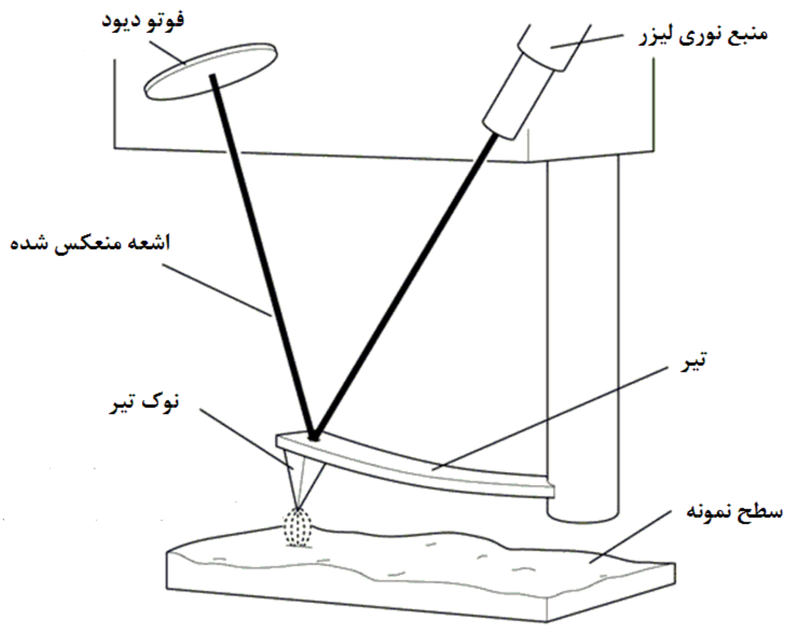
انبرک و نوک ویژه میکروسکوپ را به تصاویر ویدئویی تبدیل می‌کنند تا امکان مشاهده آرایش اتم‌های سطح، در صفحه رایانه امکان‌پذیر باشد.

درواقع کل فرآیند "جاروکردن سطح" به وسیله همان انبرک نوک‌دار صورت می‌گیرد. انبرک به راحتی در پستی و بلندی‌ها بالا و پایین می‌رود و انتهای آن هم به قسمتی متصل است که به جابجایی عرض انبرک بسیار حساس است و این تغییر فاصله‌ها را ثبت کرده و به علائمی تبدیل می‌کند که برای رایانه قابل فهم باشد. علائم گفته شده که "سیگنال" نام دارد توسط رایانه پردازش می‌شود تا نحوه قرار-گیری اتم‌ها در کنارهم، بر روی صفحه نمایشگر، نشان داده شود.

دو روش کلی برای جاروکردن سطح وجود دارد که عبارتند از روش تماسی و روش غیرتماسی. در روش تماسی که برای بیشتر سطوح کارایی دارد، نوک انبرک در فاصله‌ای بسیار بسیار کم از سطح قرار می‌گیرد و به محض رسیدن به پستی یا بلندی به دلیل جابجایی که در انبرک ایجاد می‌شود، امکان نمایش توپوگرافی برای رایانه فراهم می‌گردد. درواقع نیرویی که بین سطح و نوک انبرک وجود دارد، با نزدیک شدن این دو به هم زیاد شده و با دورشدنشان از هم، کم می‌شود، این مساله باعث مشاهده غیرمستقیم آرایش اتم‌ها می‌گردد.

روش غیرتماسی بیشتر برای سطوح کثیف و آلوده مورد استفاده قرار می‌گیرد، در این شیوه ابتدا انبرک را با نوسانی دقیق به تحرک در می‌آوریم و آن را روی سطح هدایت می‌کنیم. انبرک خاصیت ارتجاعی و فنری دارد و به راحتی در عرض بالا و پایین می‌شود. در این حالت نیرویی که بین سطح و نوک انبرک وجود دارد، در نوسان انبرک تأثیر می‌گذارد و به این وسیله آرایش اتمی سطح مشخص می‌شود.

البته اندازه‌گیری ساختارهای بسیار ریز که موجب جابجایی بسیار کوچکی در انبرک می‌شود، خود بحث مفصلی است که این کار امروزه به وسیله تغییر جهت انعکاس نوری که از یک منبع بالای انبرک روی آن می‌تابانند، مشاهده می‌شود.



شکل۱-۲ اصول کار تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

به این معنی که سطح انبرک به گونه‌ای صیقل داده می‌شود که توانایی بازتابش نور را به خوبی داشته باشد. منبع نوری اشعه مرئی را به قسمت صیقل داده شده می‌تاباند و گیرنده آن را دریافت می‌کند. به محض جابجایی عرضی انبرک، اشعه کمی منحرف می‌شود که باتوجه به میزان انحراف ثبت شده در دستگاه، دانشمندان نقشه پستی و بلندی(توپوگرافی) را دقیق‌تر ترسیم می‌کنند. شکل(۱-۲) نحوه کار تیر میکروسکوپ نیرو اتمی را نشان می‌دهد.

نکته دیگری که در مورد کارکرد میکروسکوپ نیرو اتمی باید بدانیم آن است که پستی‌ها و بلندی‌ها در هر سه محور طول و عرض و ارتفاع توسط این دستگاه گزارش می‌شود. در نمونه‌های ابتدایی چون امکان نشان دادن بعد ارتفاع در رایانه نبود، این کار با رنگ‌ها انجام می‌شد. به این صورت که رنگ‌های تیره برای عمق‌های کم و رنگ‌های روشن برای عمق‌های زیاد به کار می‌رفتند. اما امروزه با استفاده از نرم افزارهای سه بعدی دیداری می‌توان توپوگرافی سطح را در هر سه بعد نشان داد.

پس از معرفی میکروسکوپ نیرو اتمی و روش کار آن، خوب است بدانیم که بشر با اختراع این وسیله پیشرفت‌های بسیاری در علم مواد و شناخت سطوح پیدا کرده است که در بسیاری از صنایع از جمله الکترونیک، ارتباطات، خودرو، فضانوردی و انرژی تأثیرگذار بوده‌اند. درواقع اختراع میکروسکوپ نیرو اتمی فصل جدیدی در پیشرفت فناوری نانو و کاربردهای صنعتی آن می‌باشد[۲-۱].

۱-۳ پیشینه تحقیق

میکروسکوپ نیرو اتمی[1] در سال ۱۹۸۶ توسط بینینگ اختراع شد[۳]. این وسیله یکی ازپرکاربرد-ترین دستگاه‌ها در تهیه و تحلیل نقشه و تصاویر سه‌بعدی از سطوح بسیار ریز در حد نانو می باشد [۶-۴]. میکروسکوپ نیرو اتمی مدل پیشرفته میکروسکوپ جریان روبشی[2] می‌باشد که نقش بسزایی در تهیه تصاویر سه‌بعدی از سطوح اجسام، تعیین ویژگی‌های مکانیکی مواد و اندازه‌گیری نیروهای بین مولکولی ایفا نموده است[۸-۷]. این دستگاه همچنین در MEMS و NEMS نیز کاربردهای فراوانی دارد[۱۰-۹].

به دلیل مشکلات ناشی از طراحی و ساخت این دستگاه، اتصال نوک[3] تیر دقیقا در وسط سطح مقطع کاری بسیار دشوار می‌باشد. حالت مورد بررسی در این مقاله ارتعاش خمشی عمود بر محور تیر اولر-برنولی می‌باشد. زمانی که نوک دقیقا منطبق بر مرکز سطح مقطع نباشد تیر علاوه بر ارتعاش خمشی، ارتعاش پیچشی نیز خواهد داشت. بنابراین علاوه بر معادله حرکت ارتعاش خمشی، معادله حرکت ارتعاش پیچشی نیز خواهیم داشت. در ادامه خواهیم دید که در شرایط مرزی به دست آمده برای معادلات حرکت، پارامترهای مربوط به خمش و پیچش با هم در یک رابطه ظاهر می‌شوند و به عبارتی با یکدیگر کوپل(جفت) شده‌اند که به آن کوپل‌شدگی نیز می‌گویند.

---

[1] Atomic force microscope
[1] Scanning probe microscope
[2] tip

نظریه غیرموضعی توسط ارینگن پایه‌گذاری شده است. بیشتر نظریه‌های کلاسیک بر اساس روابط ساختاری می‌باشند که در آنها فرض براین است که تنش در یک نقطه از محیط پیوسته تابعی از کرنش‌ها در همان نقطه است. در صورتی‌که در نظریه غیرموضعی فرض براین است که تنش در یک نقطه از محیط پیوسته تابعی از کرنش‌ها در تمام نقاط محیط پیوسته می‌باشد. این قبیل نظریه‌ها شامل اطلاعاتی در مورد نیروهای بین اتمی می‌باشند[۱۳-۱۱]. پدیسون، ژانگ، وانگ و همکاران معادلات ساختاری الاستیسیته را برای مطالعه ارتعاش و کمانش لوله‌های در مقیاس نانو از جنس کربن، با استفاده از نظریه غیرموضعی به دست آورده‌اند[۱۶-۱۴]. ردی از روش غیرموضعی مدل‌هایی را برای نظریه‌های مختلف تیر از جمله تیر اولربرنولی، تیموشنکو، ردی و لوینسون به دست آوردند[۱۷]. ردی همچنین حل‌های تحلیلی را برای خمش، ارتعاش آزاد و کمانش از روش غیرموضعی ارائه کرده است. آنتونیو نیز یک مدل غیرموضعی را برای خمش تیر ارائه کرد[۱۸].

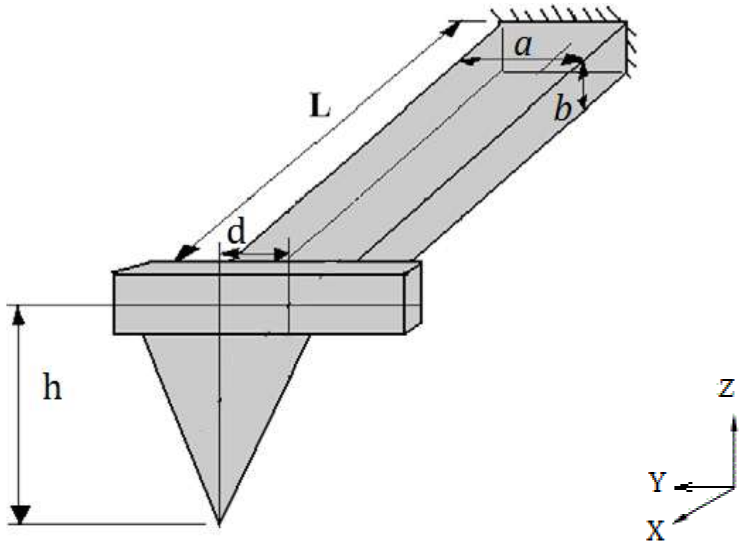
نوینسکی نظریه غیرموضعی را برای مطالعه ارتعاش طولی در یک میله دایروی به کار برد[۱۹]. کیانی و مهری با استفاده از نظریه غیرموضعی به مطالعه ساختار لوله‌های نانو تحت حرکت جزئی پرداختند[۲۰]. انصاری و سهمانی لوله‌های نانو از جنس کربن را برای شرایط مرزی مختلف بر اساس نظریه غیر موضعی تیرها بررسی کردند[۲۱]. همچنین کیانی و وانگ لوله‌های نانو از جنس کربن را با استفاده از روش غیرموضعی ارائه شده برای تیرهای ریلی و تیموشنکو، مطالعه کردند[۲۲]. لیم و همکاران نیز ارتعاشات پیچشی آزاد لوله‌های نانو را با استفاده از نظریه تنش غیرموضعی مطالعه کرد[۲۳].

با فرض اینکه تیر AFM و سطح نمونه موازی یکدیگرند تورنر و وین حساسیت مودهای ارتعاشی تیر AFM را بررسی کردند[۲۴]. چانگ مودهای ارتعاشی و خمشی تیر AFM مستطیل شکل را بررسی کرد[۲۵]. وو و همکاران تاثیر طول نوک و سختی تماسی جانبی و عمودی را روی پاسخ‌های ارتعاش خمشی تیر مستطیلی بررسی کردند[۲۶]. لی حساسیت خمشی تیرهای AFM، V شکل را با در نظرگرفتن شیب تیر و سختی تماسی جانبی و عمودی مطالعه کرد[۲۷]. با در نظر گرفتن اینرسی

دورانی و تغییرشکل برشی تیر و همچنین جرم و ممان اینرسی نوک تیر، مهدوی و فرشیدیانفر مدل کاملتری را برای AFM پیشنهاد کردند[۲۸]. چانگ حساسیت چهار مود اول خمش تیر AFM را با استفاده از سه پارامتر بی‌بعد بررسی کرد[۲۹]. رین‌استدلر و همکاران در سال ۲۰۰۳ معادلات حرکت ارتعاش خمشی و پیچشی در حالت کوپل‌شدگی را برای تیر میکروسکوپ نیرو اتمی به دست آوردند[۳۰]. سانگ و همکاران در سال ۲۰۰۶ کوپل‌شدگی مودهای مختلف تیر میکروسکوپ نیرو اتمی را بررسی کرده اند[۳۱]. چانگ و همکاران نیز در سال ۲۰۰۸ به بررسی کوپل‌شدگی مودهای خمشی و پیچشی تیر میکروسکوپ نیرو اتمی پرداخته اند[۳۲]. وانگ و همکاران در سال ۲۰۰۹ کوپل‌شدگی مودهای خمشی و پیچشی را در حالتی که نوک دقیقا منطبق بر مرکز سطح مقطع نیست، بررسی کرده اند[۳۳].

همانطور که گفته شد به دلیل مشکلات ناشی از طراحی و ساخت این دستگاه، اتصال نوک تیر دقیقا در وسط سطح مقطع کاری بسیار دشوار می‌باشد. حالت مورد بررسی ارتعاش خمشی عمود بر محور تیر می‌باشد. زمانی که نوک دقیقا منطبق بر مرکز سطح مقطع نباشد تیر علاوه بر ارتعاش خمشی، حول محور تیر نیز ارتعاش پیچشی خواهد داشت. بنابراین علاوه بر معادله حرکت خمشی، معادله حرکت پیچشی نیز خواهیم داشت. در ادامه خواهیم دید که در شرایط مرزی به دست آمده برای معادلات حرکت، پارامترهای مربوط به خمش و پیچش با هم در یک رابطه ظاهر می‌شوند و به عبارتی با یکدیگر کوپل(جفت) شده‌اند که به آن کوپل‌شدگی نیز می‌گویند. که این امر به خاطر همان فاصله d نوک از مرکز سطح مقطع می‌باشد. بنابراین معادلات حرکت حاکم بر سیستم فوق شامل دو معادله حرکت ارتعاش خمشی و معادله حرکت ارتعاش پیچشی می‌باشد.

لین و همکارانش در سال ۲۰۰۷ به بررسی اثر خروج از مرکز نوک تیر میکروسکوپ نیرو اتمی روی فرکانس تشدید پرداختند.



شکل۱-۳ نمایی از تیر مورد بررسی توسط لین

شکل(۱-۳) نمایی از تیر مورد بررسی توسط لین را نشان می‌دهد. لین به بررسی ارتعاش خمشی تیر فوق حول محور X، که دارای خروج از مرکز به اندازه d می‌باشد، پرداخت. مقادیر پارامترهای در نظر گرفته شده توسط لین به این‌صورت می‌باشد: $a = 45\mu m$ ، $b = 3.5\mu m$، $L = 200\mu m$، $h = 6\mu m$، $m_{tip} = 3.18 \times 10^{-18}$، $E = 70.3 \times 10^{9}\ pa$ و $\rho = 2.5 \times 10^{3}\ \dfrac{kg}{m^{3}}$

نتایج به دست آمده توسط لین در جدول زیر آمده است:

جدول۱-۱ مقادیر فرکانس به دست آمده برای فرکانس سه مود اول توسط لین

d(μm)	Mode 1	Mode 2	Mode 3
0	74.356	466.03	1305.024
4	74.356	466.03	1305.022
8	74.356	466.03	1305.017
12	74.356	466.03	1305.008
16	74.356	466.03	1304.996
20	74.356	466.029	1304.981

همانطور که از نتایج جدول(۱-۱) مشخص است برای مودهای اول و دوم افزایش فاصله نوک تیر از مرکز(d)، تاثیری بر مقادیر فرکانس به دست آمده ندارد اما در مود سوم افزایش d باعث کاهش فرکانس تشدید تیر میکروسکوپ نیرو اتمی می‌شود.

۱-۴ اهداف

هدف این تحقیق، تحلیل ارتعاشات تیر AFM با استفاده از نظریه غیرموضعی در دو حالت کوپل-شدگی و بدون کوپل‌شدگی و مقایسه این نتایج با حالت کلاسیک می‌باشد. ابتدا معادله مشخصه سیستم را برای هر حالت به دست می‌آوریم سپس به ازای سختی‌های متفاوت سطوح، پارامترهای فرکانس تشدید و حساسیت را در نمودارهای جداگانه مورد بررسی قرار می‌دهیم. هدف بعدی نیز بررسی عوامل موثر بر کوپل‌شدگی و تاثیر پارامترهای مختلف بر روی فرکانس و حساسیت تیر AFM می‌باشد.

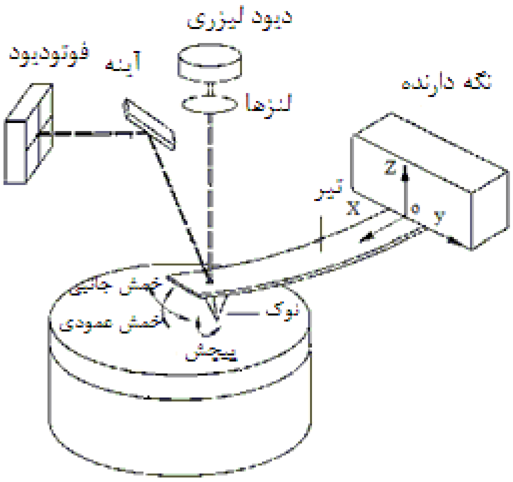
در فصل دوم به بررسی ارتعاشات تیر AFM در حالت کلاسیک می‌پردازیم و با استفاده از اصل همیلتون معادلات ارتعاشی حاکم بر تیر AFM را برای دو حالت کوپل‌شدگی و بدون کوپل‌شدگی به دست آورده و پس از به دست آوردن معادله مشخصه و حساسیت، نمودارهای فرکانس تشدید و حساسیت را به ازای سختی‌های متفاوت سطوح رسم کرده‌ایم. در فصل سوم موارد ذکر شده در فصل دوم را با استفاده از روش غیرموضعی به دست آوردیم ونتایج را با حالت کلاسیک مقایسه کرده‌ایم.

فصل دوم

ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

۲-۱ دینامیک تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

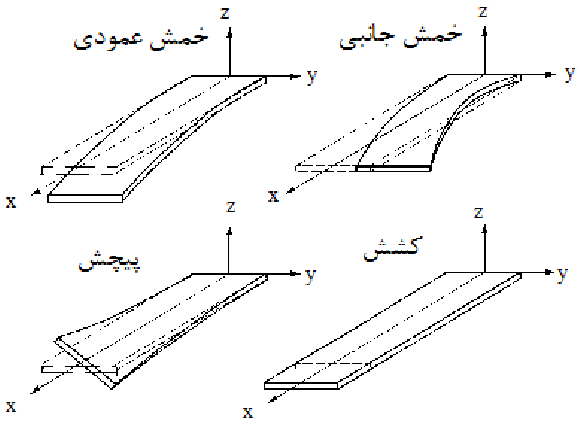
میکروسکوپ نیرو اتمی به طور گسترده در کاوش سطوح مقیاس نانو استفاده می‌شود. در دینامیک میکروسکوپ نیرو اتمی یک تیر میکرو به وسیله نگه‌دارنده (پایه) یا سطح نمونه ارتعاش می‌کند و نوک تیر در حال نوسان برای ایجاد تصویر روی صفحه نمایش به نزدیکی سطح نمونه آورده می‌شود. شکل(۲-۱) شکل شماتیک مجموع اثرات متقابل نوک تیر AFM با سطح نمونه را نشان می دهد[۳۱]. یک تیر لیزری روی سطح فوقانی تیر و نزدیک به نوک قرار دارد، نور منعکس شده به آینه تابیده و آینه نیز نور را به فوتودیود منتقل می‌کند. با اندازه‌گیری ولتاژ خروجی فوتودیود زوایای تغییر شکل عمودی و زوایای پیچش تیر اندازه‌گیری می‌شود. در دینامیک AFM اندازه گیریها با یکی از سه مود زیر انجام می‌پذیرد: ۱) مود تماسی، مود غیرتماسی و مود ضربه‌ای یا متناوب[۱]، که با TM نیز نمایش می‌دهند. ۲) مود تشدید پیچشی[۲] که با TR نیز نمایش می‌دهند. ۳) مود تحریک جانبی[۳] که با LE نیز نمایش می‌دهند[۳۱]. سه نوع مود دینامیکی بالا به مود انحراف تیر و مود تحریک تیر طبقه‌بندی می‌شوند.



شکل۲-۱ اجزای تیر AFM

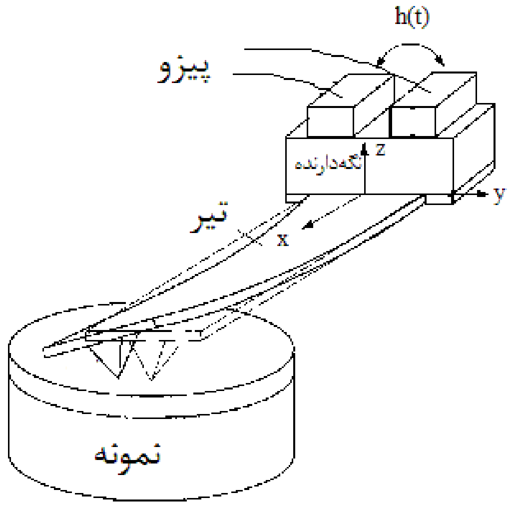
[1]tapping mode
[2] torsional resonance
[3]Lateral excitation

تیر AFM می‌تواند به صورت یک تیر سه‌بعدی با شرایط مرزی درگیر-آزاد مدل شود که انواع تغییر شکل‌های آن در شکل (۲-۲) نشان داده شده است[۳۱].



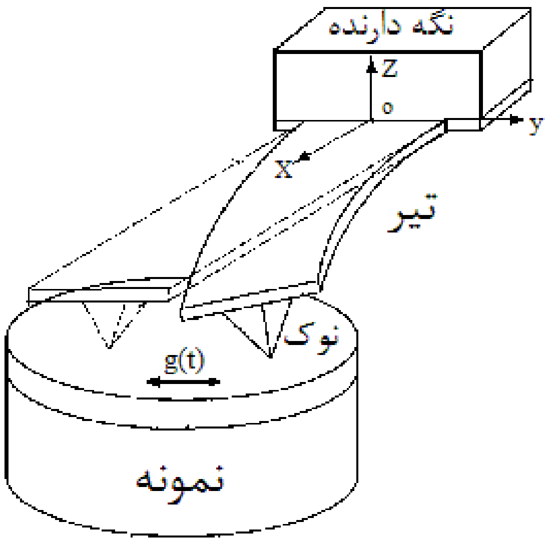
شکل۲-۲ انواع تغییرشکل‌های تیرAFM

این تغییر شکل‌ها عبارتند از: ۱) خمش عمودی(خمش حول محور y). ۲) خمش جانبی(خمش حول محورz). ۳)پیچش(حول محورx). ۴) کشش(در طول محورx). در مود تماسی،مود غیر تماسی و TM، خمش عمودی تغییر شکل غالب می‌باشد و در اکثر موارد تیر به وسیله حرکت هارمونیک عمودی نگه‌دارنده تحریک می‌شود.در مود TR دو پیزوالکتریک روی نگه‌دارنده تیر متصل‌اند و با ارتعاش خود باعث نوسان پیچشی تیر می‌شوند. تحت عکس‌العمل جانبی نوک و نمونه یک نیرو و یک گشتاور جانبی به تیر اعمال می‌شود. که در شکل(۲-۳) نشان داده شده است[۳۱].



شکل۲-۳ مود TR تیر AFM

در مود LE نوسان نمونه در جهت عمود بر محور طولی تیر باعث نوسان تیر می‌شود. که در شکل(۲-۴) نشان داده شده است[۳۱]. همانند مود TR، تیر در مود LE نیز دچار پیچش و خمش جانبی می‌شود.



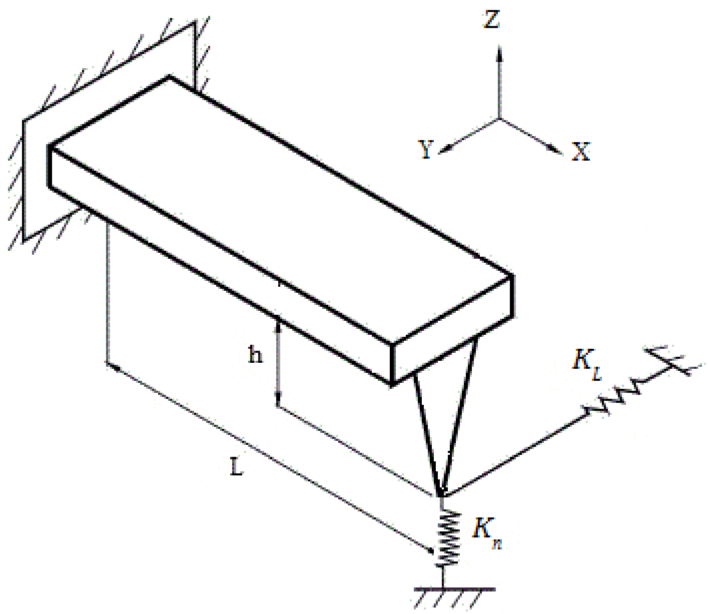
شکل۲-۴ مود LE تیر AFM

مود TM معمولا خواص عمودی سطح و مود TR و LE معمولا خواص صفحه‌ای(عرضی) سطح را اندازه می‌گیرند. هم‌چنین مودهای TR و LE برای به تصویر کشیدن خواص سطوح نسبت به مود TM

از امتیازات بیشتری برخوردار می‌باشند. در مودTM تیر به صورت عمود بر سطح نمونه ارتعاش می‌کند و نوک سطح نمونه را به صورت متناوب لمس می‌کند. در مودهای TRو LE نوک تیر به صورت عرضی(موازی با سطح نمونه) ارتعاش می‌کند و در مدت اندازه‌گیری نوک نزدیک به سطح نمونه باقی می‌ماند. سختی پیچشی و سختی خمشی جانبی تیر دو برابر بزرگتر از سختی خمشی عمودی تیر می‌باشند. بنابراین اکثر تغییرشکل‌ها در مودهای TR و LE در نمونه اتفاق می‌افتد و می‌توانند برای اندازه‌گیری سختی سطح مورد استفاده قرارگیرند. مودی که در این پایان نامه مورد بررسی قرار می-گیرد مود خمشی TM می‌باشد.

۲-۲ بررسی تیر AFM از روش کلاسیک در حالت بدون کوپل‌شدگی

سیستمی را بررسی می‌کنیم که در آن تیر AFM اولربرنولی بوده و نوک تیر دقیقا در مرکز قرار دارد. برای بررسی این سیستم ابتدا انرژی پتانسیل و جنبشی تیر را نوشته و سپس با استفاده از همیلتونین، معادله مشخصه و شرایط مرزی تیر را به دست می‌آوریم.

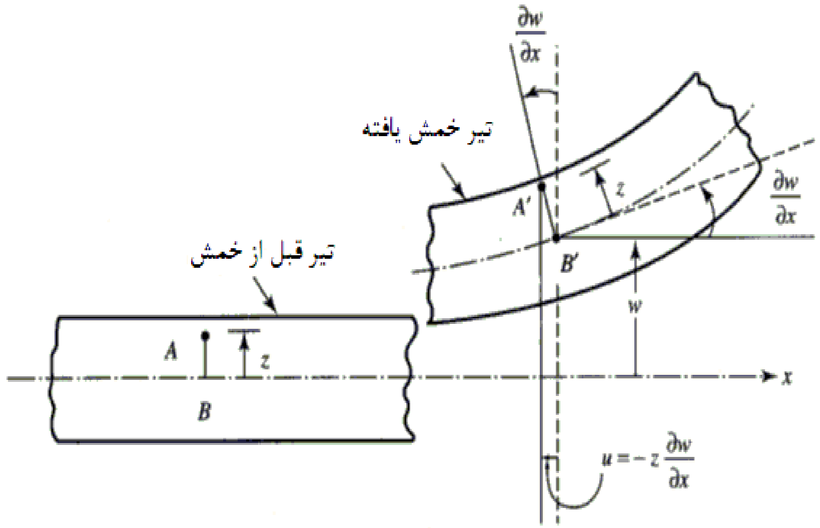


شکل۲-۵ شماتیکی از تیر AFM در تماس با سطح نمونه

شکل (۲-۵) شماتیکی از تیرAFM را نشان می‌دهد که در آن سختی تماسی عمودی و جانبی سطح مورد بررسی به ترتیب با استفاده از دو فنر خطی k_L و k_n مدل شده است. با استفاده از اصل هامیلتون، معادلات حاکم، شرایط مرزی و شرایط جابه‌جایی به دست می‌آیند.

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T(t)-V(t)+W_{nc}(t))dt=0 \qquad (۲-۱)$$

که $T(t)$ و $V(t)$ به ترتیب انرژی جنبشی و پتانسیل، $W_{nc}(t)$ کار نیروهای غیرپایستار اعمال شده بر سیستم می‌باشد. معنای فیزیکی اصل هامیلتون، حرکت حقیقی سیستم به ازای یک تغییرمکان مجازی دلخواه می‌باشد و بیان می‌دارد که انتگرال مجموع تغییرات انرژی سیستم و کار غیرپایستار ناشی از نیروهای غیرپایستار سیستم بر بازه زمانی $t_1 \le t \le t_2$ به ازای تغییر مکان مجازی دلخواه برابر صفر می‌باشد[۳۵].



شکل۲-۶ تیر قبل و بعد از خمش

شکل(۲-۶) تیر میکروسکوپ نیرو اتمی را قبل و بعد از خمش نشان می‌دهد.

با توجه به شکل(۲-۶) میدان‌های جابه‌جایی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم[۳۵]:

$$u=-z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad ، \quad v=0 \quad ، \quad w=w(x,t) \qquad (۲-۲)$$

که u، v و w جابه‌جایی به ترتیب در راستای x، y و z می‌باشند.

انرژی جنبشی برای خمش تیر AFM عبارت است از[۳۵] :

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \iint_A \rho(\frac{\partial w}{\partial t})^2 \, dA dx + \frac{1}{2} m_t (\frac{\partial w(L,t)}{\partial t})^2 \qquad (۳-۲)$$

که ρ، A و m_t به ترتیب چگالی، سطح مقطع تیر و جرم نوک می‌باشد. نوک تیر از نوع مخروطی شکل می‌باشد.

که:

$$A = \iint_A dA \qquad (۴-۲)$$

در نهایت انرژی جنبشی به صورت زیر می‌باشد:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^L \rho A(\frac{\partial w}{\partial t})^2 \, dx + \frac{1}{2} m_t (\frac{\partial w(L,t)}{\partial t})^2 \qquad (۵-۲)$$

انرژی کرنشی برای خمش تیر AFM عبارت است از[۳۵]:

$$V = \frac{1}{2}\iiint_v (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + \sigma_{yz}\varepsilon_{yz} + \sigma_{zx}\varepsilon_{zx}) dv + \frac{1}{2} K_n w^2(L,t) \qquad (۶-۲)$$

که کرنش‌ها در این حالت عبارتند از:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0 \qquad (۷-۲)$$

همچنین رابطه حاکم بین تنش-کرنش خطی می‌باشد یعنی:

$$\sigma_{ij} = E\varepsilon_{ij} \qquad (۸-۲)$$

بنابراین:

$$\sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -Ez\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0 \qquad (۹-۲)$$

با قرار دادن روابط (۲-۷) و (۲-۹) در رابطه (۲-۶) داریم:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L \iint_A Ez^2 (\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})^2 dAdx + \frac{1}{2}K_n w^2(L,t) \qquad (۱۰-۲)$$

که:

$$I = I_z = \iint_A z^2 dA \qquad (۱۱-۲)$$

بنابراین در نهایت انرژی پتانسیل سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L EI(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2})dx + \frac{1}{2}K_n w^2(L,t) \qquad (۱۲-۲)$$

که Eمدول یانگ و I ممان اینرسی سطح مقطع تیر حول محور y می‌باشد.

با توجه به اصل همیلتونین فرض می‌کنیم که تغییرات و دیفرانسیل نسبت به هم خاصیت جابه‌جایی داشته باشند. بنابراین تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial t}dxdt + m_t\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(L,t)}{\partial t}dt = \\
&\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta w\,|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dxdt + m_t\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta w\,|_{t_1}^{t_2} \qquad (۱۳-۲)\\
&-\int_{t_1}^{t_2} m_t\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dt
\end{aligned}$$

با توجه به این‌که $\delta w = 0$ در $t = t_1, t_2$ بنابراین:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dx dt - \int_{t_1}^{t_2} m_t \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dt \qquad (۱۴-۲)$$

همچنین تغییرات انرژی پتانسیل برابر است با:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \delta w(x,t)}{\partial x^2} dx dt + K_n\int_{t_1}^{t_2} w(L,t)\delta w(L,t) dt =$$
$$\int_{t_1}^{t_2} EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\Big|_0^L dt - \int_{t_1}^{t_2} EI\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\delta w\Big|_0^L + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}\delta w dx dt$$
$$+K_n\int_{t_1}^{t_2} w(L,t)\delta w(L,t) dt \qquad (۱۵-۲)$$

در نهایت با جایگذاری معادلات (۲-۱۴) و(۲-۱۵) در (۲-۱) خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T(t)-V(t)+W_{nc}(t))dt = -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dx dt - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}$$
$$\delta w dx dt - \int_{t_1}^{t_2} m_t\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dt - K_n\int_{t_1}^{t_2} w(L,t)\delta w(L,t) dt - \int_{t_1}^{t_2} EI\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial \delta w}{\partial x}\Big|_0^L dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2} EI(x)\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\delta w\Big|_0^L dt \qquad (۱۶-۲)$$

در نتیجه معادله حرکت سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad (۱۷-۲)$$

همچنین شرایط مرزی از رابطه(۲-۱۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$w|_{x=0} = 0 \quad ، \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big|_{x=L} = 0 \quad ، \quad EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\Big|_{x=L} = K_n w|_{x=L} + m_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\Big|_{x=L} \qquad (۱۸-۲)$$

با استفاده از روش آنالیز مودال و قرار دادن $w(x,t) = w(x)e^{i\omega t}$ معادله حرکت به صورت زیر می‌باشد:

$$EI\frac{d^4w(x)}{dx^4}-\rho Aw(x)=0 \qquad (۲-۱۹)$$

برای بی‌بعدسازی معادلات و شرایط مرزی پارامترهای بی‌بعد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X=\frac{x}{L}\quad ، \quad \tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\quad ، \quad \beta_n=\frac{K_nL^3}{EI}\quad ، \quad M_F=\frac{m_t}{\rho AL} \qquad (۲-۲۰)$$

برای بی‌بعدسازی معادله حرکت(۲-۱۷) با فرض $w(X,\tau)=W(X)e^{i\omega\tau}$ و استفاده از رابطه (۲-۲۰) داریم:

$$\frac{EI}{L^4}\frac{d^4w(X,\tau)}{dx^4}+\rho A\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{d^2w(X,\tau)}{d\tau^2}=0 \qquad (۲-۲۱)$$

پس از ساده کردن داریم:

$$\frac{d^4W(X)}{dX^4}-\omega^2W(X)=0 \qquad (۲-۲۲)$$

معادله مفسر معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma^4-\omega^2=0 \qquad (۲-۲۳)$$

بنابراین:

$$\gamma^4=\omega^2 \qquad (۲-۲۴)$$

که پاسخ معادله دیفرانسیل(۲-۲۲) به صورت زیر می‌باشد[۳۴]:

$$W(X)=B_1\cosh(\gamma X)+B_2\sinh(\gamma X)+B_3\cos(\gamma X)+B_4\sin(\gamma X) \qquad (۲-۲۵)$$

همچنین سه شرط مرزی اول بی بعد نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W(0)=0 \quad ، \quad \frac{dW}{dX}|_{X=0}=0 \quad ، \quad \frac{d^2W}{dX^2}|_{X=1}=0 \qquad (۲-۲۶)$$

چهارمین شرط مرزی بی‌بعد نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{EI}{L^3}\frac{d^3W}{dX^3}|_{X=1}=K_nW|_{X=1}+m_t\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{d^2W}{d\tau^2}|_{X=1}\rightarrow$$
$$\frac{d^3W}{dX^3}|_{X=1}=(\beta_n-M_F\omega^2)W|_{X=1} \qquad (۲-۲۷)$$

با اعمال شرایط مرزی فوق بر روی معادله(۲-۲۳) داریم:

$$B_1+B_3=0 \quad ، \quad B_1\cosh\gamma+B_2\sinh\gamma-B_3\cos\gamma-B_4\sin\gamma=0$$

$$B_2+B_4=0 \quad ، \quad B_1I_1+B_2I_2+B_3I_3+B_4I_4=0 \qquad (۲-۲۸)$$

که در آن:

$$I_1=[\gamma^3\sinh\gamma+(M_F\omega^2-\beta_n)\cosh\gamma] \quad ، \quad I_2=[\gamma^3\cosh\gamma+(M_F\omega^2-\beta_n)\sinh\gamma]$$

$$I_3=[\gamma^3\sin\gamma+(M_F\omega^2-\beta_n)\cos\gamma] \quad ، \quad I_4=[-\gamma^3\cos\gamma+(M_F\omega^2-\beta_n)\sin\gamma] \qquad (۲-۲۹)$$

رابطه (۲-۲۸) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh\gamma & \sinh\gamma & -\cos\gamma & -\sin\gamma \\ I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}=A\times\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix}=0 \qquad (۲-۳۰)$$

برای اینکه معادله فوق جواب غیر صفر داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب، (ماتریس A) مساوی صفر باشد:

$$C=det(A)=0 \qquad (۲-۳۱)$$

در نهایت معادله مشخصه سیستم برابر می‌شود با:

$$C = 2\gamma^3 + (2M_F\omega^2 - 2\beta_n) sinh\gamma\, cos\gamma + 2\gamma^3 cos\gamma\, cosh\gamma \\ + (2\beta_n - 2M_F\omega^2) cosh\gamma\, sin\gamma \qquad (۳۲-۲)$$

حساسیت ارتعاشات نوک تیر میکروسکوپ نیرواتمی، s بصورت مشتق فرکانس نسبت به سختی تماسی عمودی تعریف می‌شود:

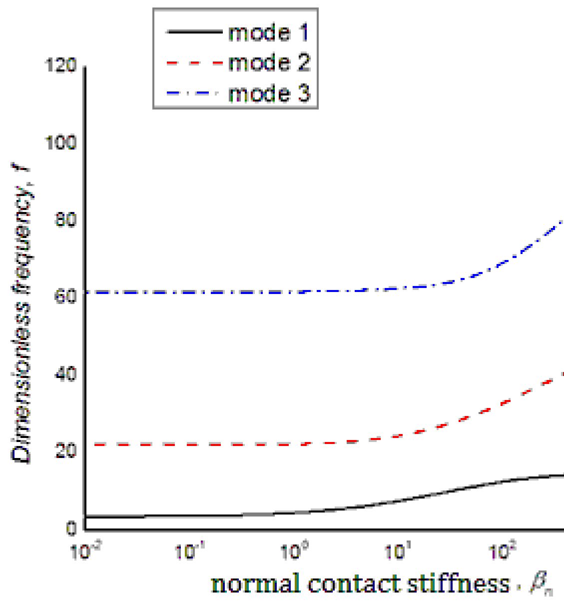
$$S = \frac{-\frac{\partial C}{\partial \beta_n}}{\frac{\partial C}{\partial \omega}} \qquad (۳۳-۲)$$

$$S = -\gamma(-2\, sinh\gamma\, cos\gamma + 2\, cosh\gamma\, sin\gamma) / (6\gamma^2 + (4\beta_n - 4M_F\omega^2) sinh\gamma\, sin\gamma \\ - 2\gamma^3 sin\gamma\, cosh\gamma + 6\gamma^2 cos\gamma\, cosh\gamma + 2\gamma^3 cos\gamma\, sinh\gamma) \qquad (۳۴-۲)$$

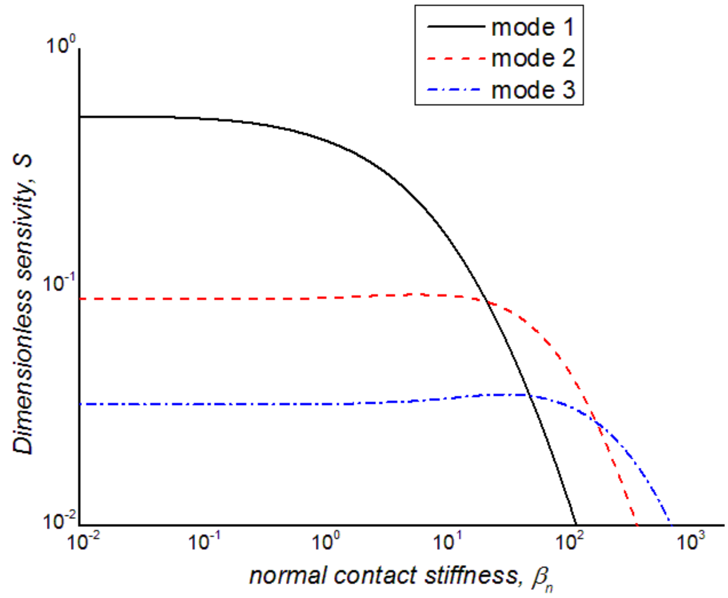
حال برای بررسی اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس تشدید و حساسیت، پارامترهای مواد و هندسه تیر را مطابق موارد ذکر شده در جدول صفحه بعد در نظر می‌گیریم:

جدول۲-۱ پارامترهای مختلف تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

مدول الاستیسیته $E(Gpa)$	150
مدول پیچشی $G(Gpa)$	64
چگالی جرمی $\rho(\frac{kg}{m^3})$	2300
طول نوک تیر $h(\mu m)$	15
طول تیر $L(\mu m)$	200
پهنای تیر $a(\mu m)$	40
عمق تیر $b(\mu m)$	5
جرم نوک $m_t(kg)$	3.15×10^{-18}



شکل۲-۷ فرکانس تشدید بی‌بعد سه مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n

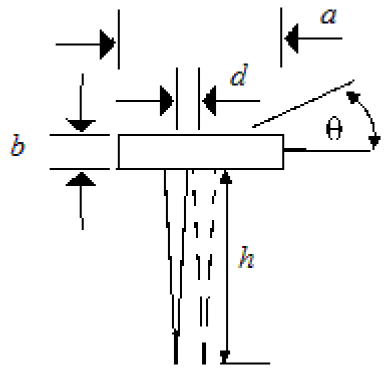


شکل۲-۸حساسیت بی‌بعد سه مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n

شکل(۲-۷) تغییرات در فرکانس تشدید سه مود اول تیر AFM را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n نشان می‌دهد. با نگاهی به این شکل می‌توان دریافت که فرکانس تشدید با افزایش سختی تماسی عمودی ابتدا روندی ثابت داشته و سپس به صورت ناگهانی افزایش یافته به طوری که به ازای مقادیر بسیار بالا از سختی تماسی عمودی به یک مقدار ثابت میل می‌نماید. همچنین شکل (۲-۸) تغییرات در حساسیت سه مود اول را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n نشان می‌دهد. همانطور که از شکل مشخص است در هر سه مود بیشترین مقدار حساسیت به ازای سختی‌های پایین می‌باشد و با افزایش سختی ابتدا حساسیت هر سه مود مقدار ثابتی دارند اما در سختی‌های بالاتر حساسیت به طور ناگهانی کاهش می‌یابد. همچنین می‌توان دریافت در سختی‌های پایین حساسیت مود اول از دو مود دیگر بیشتر است و با افزایش درجه مود حساسیت کمتر می‌شود اما این روند برای سختی‌های بالا عکس می‌شود و حساسیت مود اول از دو مود دیگر کمتر می‌باشد و با افزایش درجه مود حساسیت افزایش پیدا می‌کند.

۳-۲ بررسی تیر AFM از روش کلاسیک همراه با کوپل‌شدگی:

ما در این تحقیق سیستمی را بررسی می‌کنیم که نوک تیرAFM از مرکز سطح مقطع دارای فاصله d می‌باشد. شکل (۲-۹) سطح مقطع تیر AFM را در حالتی نشان می‌دهد که نوک به اندازه dاز مرکز سطح مقطع فاصله دارد.



شکل۲-۹ نمایی از سطح مقطع تیر

میدان جابه‌جایی برای پیچش سطح مقطع به صورت زیر داده می‌شود[۳۵]:

$$u_t = \beta\psi(y,z) \quad , \quad v_t = -\beta zx \quad , \quad w_t = \beta yx \qquad (۳۵-۲)$$

که u_t، v_tو w_t به ترتیب جابه‌جایی نقاط مختلف تیر در اثر پیچش در راستای محورهای x، yو z می‌باشند. $\psi(y,z)$ تابع انحراف(اعوجاج) می‌باشد که در ادامه درباره آن توضیحاتی داده می‌شود.

β پیچش بر واحد طول می‌باشد و با θ رابطه زیر را دارد:

$$\theta = \beta x \qquad (۳۶-۲)$$

همچنین میدان جابه‌جایی برای خمش سطح مقطع همانند رابطه به صورت زیر می‌باشد:

$$u_b = -z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad , \quad v_b = 0 \quad , \quad w_b = w(x,t) \qquad (۳۷-۲)$$

که u_b، v_bو w_b به ترتیب جابه‌جایی نقاط مختلف تیر در اثر خمش در راستای محورهای x، yو z می‌باشند.

بنابراین میدان جابه‌جایی کلی برای حالت کوپل‌شدگی از روابط(۲-۳۵) و(۲-۳۷) به صورت زیر می-باشد:

$$u=-z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}+\beta\psi(y,z) \quad ، \quad v=-\beta zx \quad ، \quad w=w(x,t)+\beta yx \tag{۲-۳۸}$$

انرژی جنبشی کلی سیستم در این حالت(کوپل‌شدگی) عبارت است از[۳۵]:

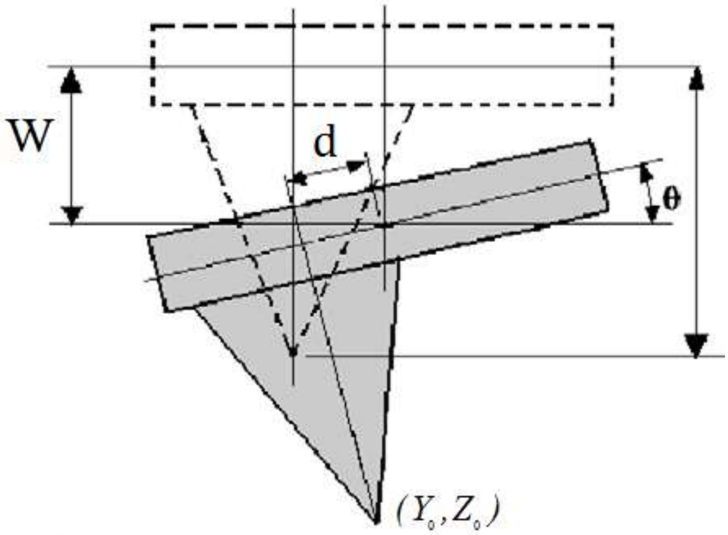
$$\begin{aligned}T=&\frac{1}{2}\iiint_v\rho[(\frac{\partial u_t}{\partial t})^2+(\frac{\partial v_t}{\partial t})^2+(\frac{\partial w_t}{\partial t})^2]dv+\frac{1}{2}\iiint_v\rho(\frac{\partial w_b}{\partial t})^2dv\\&+\frac{1}{2}m_t(\frac{\partial Z_0}{\partial t})^2+\frac{1}{2}I_{0x}(\frac{\partial\theta}{\partial t})^2+\frac{1}{2}I_{0y}(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial w}{\partial x}))^2\end{aligned} \tag{۲-۳۹}$$

که در رابطه فوق I_{0x}و I_{0y} ممان اینرسی نوک مخروطی شکل تیر AFM به ترتیب حول محور xو y است که به صورت زیر می‌باشد[۴۰]:

$$I_{0x}=\frac{3}{5}m_th^2+\frac{3}{20}m_tr^2+m_td^2 \tag{۲-۴۰}$$

$$I_{0y}=\frac{3}{5}m_th^2+\frac{3}{20}m_tr^2+m_tL^2 \tag{۲-۴۱}$$

r و h به ترتیب شعاع و ارتفاع نوک مخروطی و L طول تیر می‌باشد.



شکل۲-۱۰ نمایی از نوک تیر بعد از جابه جایی به اندازهW

شکل(۲-۱۰) نمایی از نوک تیر بعد از جابه جایی عرضی به اندازه W را نشان می‌دهد.

و Y_0 و Z_0 مختصات نوک تیر پس از جابه‌جایی کلی می‌باشند و از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$Y_0 = -\sqrt{h^2 + d^2}\,\theta(L,t) \tag{۴۲-۲}$$

$$Z_0 = w(L,t) - d\theta(L,t) \tag{۴۳-۲}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_0^L \iint_A \rho(y^2 + z^2)\left(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}\right)^2 dA dx + \frac{1}{2}\int_0^L \iint_A \rho\left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right)^2 dA dx \\ &+ \frac{1}{2} m_t\left(\frac{\partial(w(L,t) - d\theta(L,t))}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{0x}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2} I_{0y}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{۴۴-۲}$$

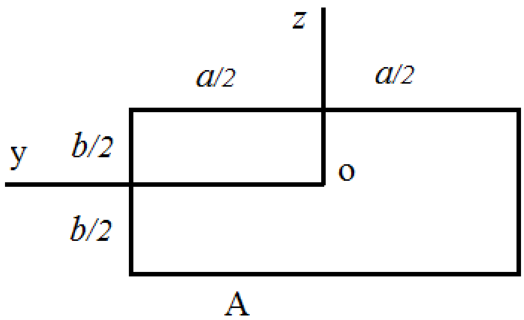
که $I_p = \iint_A (y^2 + z^2) dA$ ممان اینرسی قطبی می‌باشد. بنابراین انرژی جنبشی کلی سیستم در این حالت عبارت است از:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho I_p(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t})^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t})^2 dx+\frac{1}{2}m_t(\frac{\partial(w(L,t)-d\theta(L,t))}{\partial t})^2$$
$$+\frac{1}{2}I_{0x}(\frac{\partial\theta}{\partial t})^2+\frac{1}{2}I_{0y}(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial w}{\partial x}))^2$$

(۴۵-۲)

۲-۳-۱ پیچش تیر میکروسکوپ نیرو اتمی

برای به دست آوردن انرژی پتانسیل پیچشی تیرAFM از فرضیات ناویر که برای پیچش شفتهای غیرمدور ارائه شده است، استفاده می‌کنیم. بر اساس این فرضیات در هر نقطه‌یA از مرز یک مقطع مستطیلی تنش برشی در جهت عمود بر OA است. این تنش به مولفه‌های τ_{yx} و τ_{zx} تجزیه می‌شود.



شکل۲-۱۱سطح مقطع مستطیلی تیر میکروسکوپ نیرواتمی

شکل(۲-۱۱) سطح مقطع تیر میکروسکوپ نیرواتمی رانشان می‌دهد.

فرض می‌کنیم یک میله‌ی یکنواخت با سطح مقطع دلخواه داریم که تحت گشتاور انتهایی M قرار دارد. بر اساس فرضیات سنت و نان تغییر شکل در اثر پیچش شامل دو بخش است[۴۳]:

۱- چرخش مقطع شفت مشابه شفت دایره‌ای

۲- انحراف مقطع که برای تمام مقاطع یکسان است.

برای به دست آوردن روابط کرنش از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$$ (۴۶-۲)

بنابراین با توجه به رابطه(۲-۳۵)و(۲-۴۶) روابط میدان جابه‌جایی برای پیچش به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad ، \quad \varepsilon_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad ، \quad \varepsilon_{zz}=\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}-z\right) \quad ، \quad \varepsilon_{xz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)=\frac{1}{2}\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}+y\right) \qquad (۴۷-۲)$$

$$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}(-\beta x+\beta x)=0$$

همچنین تنش‌ها عبارتند از:

$$\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0$$

$$\tau_{xy}=G\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}-z\right) \quad ، \quad \tau_{xz}=G\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}+y\right) \qquad (۴۸-۲)$$

تابع تنش ϕ را به صورتی تعریف می‌کنیم که $\tau_{xy}=\frac{\partial \phi}{\partial z}$ و $\tau_{xz}=-\frac{\partial \phi}{\partial y}$ که $\phi=\phi(y,z)$

بنابراین:

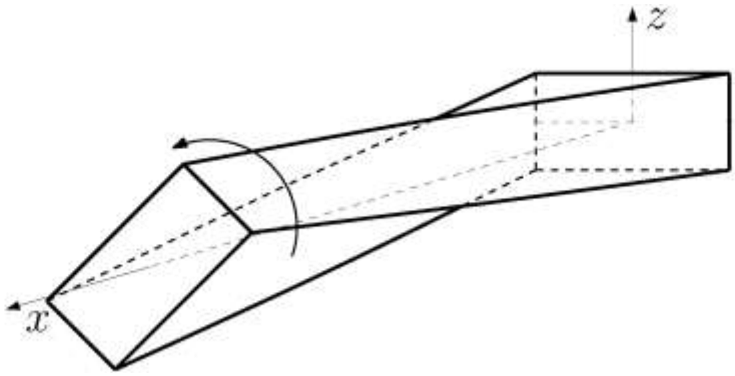
$$\tau_{xy}=G\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}-z\right)=\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad ، \quad \tau_{xz}=G\beta\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}+y\right)=-\frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (۴۹-۲)$$

با حذف ψ بین دو رابطه فوق نتیجه می‌شود:

$$G\beta\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}-1\right)=\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad ، \quad -G\beta\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}+1\right)=\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad (۵۰-۲)$$

بنابراین از دو رابطه فوق نتیجه می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=-2G\beta \qquad (۵۱-۲)$$



شکل۲-۱۲ تیر میکروسکوپ نیرواتمی در حال پیچش

شکل(۲-۱۲) تیرمیکروسکوپ نیرو اتمی را در حال پیچش نشان می‌دهد.

همچنین ϕ باید روی مرز ثابت باشد. برای مقاطع همبند ساده مثل یک میله توپر این ثابت اختیاری است و صفر فرض می‌شود. همچنین باید $M=2\iint\phi dydz$.

برای این سیستم تابع تنش را به صورت زیر در نظر می‌گیریم[۴۳]:

$$\phi(y,z)=G\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{a^2}{4}-y^2)+V(y,z) \qquad (۵۲-۲)$$

که $V=V(y,z)$ یک تابع دلخواه می‌باشد. با قرار دادن تابع تنش فوق در رابطه(۲-۵۱) داریم:

$$-2G\beta+\frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=-2G\beta \quad\rightarrow\quad \frac{\partial^2V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial z^2}=0 \qquad (۵۳-۲)$$

همچنین تابع ϕ باید شرایط مرزی را ارضا کند و روی مرز صفر باشد با توجه به شکل(۲-۱۰) داریم:

$$\phi=0 \quad at \quad y=\pm\frac{a}{2} \quad\rightarrow\quad V(\pm\frac{a}{2},z)=0 \qquad (۵۴-۲)$$

$$\phi=0 \quad at \quad z=\pm\frac{b}{2} \quad\rightarrow\quad V(y,\pm\frac{b}{2})=-G\beta(\frac{a^2}{4}-y^2) \qquad (۵۵-۲)$$

تابع V را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)cos(\frac{n\pi}{a}y) \qquad (۲-۵۶)$$

با قرار دادن رابطه فوق در رابطه(۲-۵۳) داریم:

$$-(\frac{n\pi}{a})^2 f_n(z)+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0 \qquad (۲-۵۷)$$

جواب معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$f=C_1\, sinh(\frac{n\pi}{a}z)+C_2\, cosh(\frac{n\pi}{a}z) \qquad (۲-۵۸)$$

تابع f در $z=\pm\frac{b}{2}$ زوج است بنابراین:

$$V=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, cosh(\frac{n\pi}{a}z)cos(\frac{n\pi}{a}y) \qquad (۲-۵۹)$$

از شرط مرزی رابطه (۲-۵۵) داریم:

$$V(y,\pm\frac{b}{2})=-G\beta(\frac{a^2}{4}-y^2)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n\, cosh(\frac{n\pi}{2a}b)cos(\frac{n\pi}{a}y) \qquad (۲-۶۰)$$

$$C_n\, cosh(\frac{n\pi}{2a}b)=\frac{2}{a}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}-G\beta(\frac{a^2}{4}-y^2)cos(\frac{n\pi}{a}y)dy \rightarrow$$

$$C_n=\frac{-16G\beta a^2(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3\pi^3\, cosh(\frac{n\pi b}{2a})} \qquad (۲-۶۱)$$

بنابراین تابع ϕبه صورت زیر به دست می‌آید:

$$\phi(y,z)=G\beta(\frac{a^2}{4}-y^2)-\frac{16G\beta a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{(\frac{n-1}{2})}cosh(\frac{n\pi z}{a})cos(\frac{n\pi}{a}y)}{n^3 cosh(\frac{n\pi b}{2a})} \qquad (۶۲-۲)$$

ممان پیچشی نیز از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M=2\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\phi(y,z)dydz=GJ\beta \qquad (۶۳-۲)$$

بنابراین J عبارت است از:

$$J=\frac{1}{3}ba^3K_1 \qquad (۶۴-۲)$$

جایی که:

$$K_1=(1-\frac{96}{\pi^5}(\frac{a}{b})\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^5}tanh(\frac{n\pi b}{2a})) \qquad (۶۵-۲)$$

برای به دست آوردن انرژی پتانسیل ناشی از پیچش از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$V_t=\frac{1}{2}\int_v(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dv \qquad (۶۶-۲)$$

از روابط(۲-۴۸) داریم:

$$V_t=\frac{1}{2}\int_v(\sigma_x\varepsilon_x+\tau_{xy}\varepsilon_{xy}+\tau_{xz}\varepsilon_{xz}+\tau_{yx}\varepsilon_{yx}+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{yz}\varepsilon_{yz}+\tau_{zx}\varepsilon_{zx}+ \qquad (۶۷-۲)$$

$$+\tau_{zy}\varepsilon_{zy}+\sigma_z\varepsilon_z)dv=\frac{1}{2}\int_v(2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}+2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz})dv$$

با توجه به اینکه زاویه پیچش کوچک است در رابطه تابع تنش به جای β می‌توان $d\beta$ قرار داد.

همچنین از رابطه(۲-۳۶) داریم:

$$d\beta=\frac{d\theta}{dx} \qquad (۶۸-۲)$$

بنابراین تابع تنش رابطه (۲-۶۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\phi(y,z)=G(\frac{\partial\theta}{\partial x})(\frac{a^2}{4}-y^2)-\frac{16Ga^2(\frac{\partial\theta}{\partial x})}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{(\frac{n-1}{2})}cosh(\frac{n\pi z}{a})cos(\frac{n\pi}{a}y)}{n^3 cosh(\frac{n\pi b}{2a})} \quad (۲\text{-}۶۹)$$

همچنین از روابط(۲-۴۷) و (۲-۴۹) مقادیر کرنش را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2G}(\frac{\partial\phi}{\partial z}) \quad , \quad \varepsilon_{xz}=\frac{-1}{2G}(\frac{\partial\phi}{\partial y}) \quad (۲\text{-}۷۰)$$

بنابراین با جایگزینی مقادیر تنش و کرنش در رابطه(۲-۶۷) داریم:

$$V_t=\frac{1}{2G}\int_0^L\iint_A[(\frac{\partial\phi}{\partial z})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial y})^2]dAdx=\frac{1}{2G}\int_0^L\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}[(\frac{\partial\phi}{\partial z})^2+(\frac{\partial\phi}{\partial y})^2]dzdydx \quad (۲\text{-}۷۱)$$

اگراز رابطه (۲-۶۹)عامل $G(\frac{\partial\theta}{\partial x})$ را جدا کنیم خواهیم داشت:

$$\phi(y,z)=G(\frac{\partial\theta}{\partial x})[(\frac{a^2}{4}-y^2)-\frac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{(-1)^{(\frac{n-1}{2})}cosh(\frac{n\pi z}{a})cos(\frac{n\pi}{a}y)}{n^3 cosh(\frac{n\pi b}{2a})}] \quad (۲\text{-}۷۲)$$

$$=G(\frac{\partial\theta}{\partial x})\phi'(y,z)$$

حال با جایگذاری تابع تنش فوق به ازای $n=1$ در رابطه(۲-۷۱) داریم:

$$V_t=\frac{1}{2}\int_0^L\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}G(\frac{\partial\theta}{\partial x})^2[(\frac{\partial\phi'}{\partial z})^2+(\frac{\partial\phi'}{\partial y})^2]dzdydx=\frac{1}{2}\int_0^L GJ(\frac{\partial\theta}{\partial x})^2dx \quad (۲\text{-}۷۳)$$

که:

$$J=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}[(\frac{\partial\phi'}{\partial z})^2+(\frac{\partial\phi'}{\partial y})^2]dzdy=\frac{1}{3}ba^3(1-\frac{96}{\pi^5}(\frac{a}{b})tanh(\frac{\pi b}{2a})) \quad (۲\text{-}۷۴)$$

بنابراین انرژی پتانسیل کل سیستم برای این حالت به صورت زیر می‌باشد[۴۱]:

$$V=\frac{1}{2}\int_{0}^{L}EI(\frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial x^{2}})^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{L}GJ(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x})^{2}dx+\frac{1}{2}K_{n}Z_{0}^{2}+\frac{1}{2}K_{L}Y_{0}^{2} \tag{۷۵-۲}$$

همچنین با جایگزینی Z_0 و Y_0 از روابط (۲-۴۲) و (۲-۴۳) در رابطه (۲-۷۵) انرژی پتانسیل کلی سیستم در حالت کوپل‌شدگی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}V=&\frac{1}{2}\int_{0}^{L}EI(\frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial x^{2}})^{2}dx+\frac{1}{2}\int_{0}^{L}GJ(\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x})^{2}dx+\frac{1}{2}K_{n}(w-d\theta)^{2}|_{x=L}\\&+\frac{1}{2}K_{L}(h^{2}+d^{2})\theta^{2}|_{x=L}\end{aligned} \tag{۷۶-۲}$$

بنابراین تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt=&-\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L}\rho I_{p}\frac{\partial^{2}\theta(x,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L}\rho A(x)\frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial t^{2}}\delta w dxdt\\&-m_{t}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}w(L,t)}{\partial t^{2}}\delta w dt-m_{t}d^{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}\theta(L,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dt-\int_{t_1}^{t_2}I_{0x}\frac{\partial^{2}\theta(x,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dt\\&+m_{t}d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}w(L,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dt+m_{t}d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}\theta(L,t)}{\partial t^{2}}\delta w dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{3}w}{\partial t^{2}\partial x}I_{0y}\delta(\frac{\partial w}{\partial x})dt\\&+\int_{0}^{L}\rho I_{p}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}\delta\theta|_{t_1}^{t_2}dx+\int_{0}^{L}\rho A\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta w|_{t_1}^{t_2}dx+m_{t}\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\delta w|_{t_1}^{t_2}\\&+m_{t}d^{2}\frac{\partial\theta(L,t)}{\partial t}\delta\theta|_{t_1}^{t_2}-m_{t}d\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\delta\theta|_{t_1}^{t_2}+m_{t}d\frac{\partial\theta(L,t)}{\partial t}\delta w|_{t_1}^{t_2}\\&+I_{0x}\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial t}\delta\theta|_{t_1}^{t_2}+I_{0y}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial w}{\partial x})\delta(\frac{\partial w}{\partial x})|_{t_1}^{t_2}\end{aligned} \tag{۷۷-۲}$$

از آنجا که $\delta\theta=\delta w=0$ در $t=t_1=t_2$ بنابراین:

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt=&-\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L}\rho I_{p}\frac{\partial^{2}\theta(x,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_{0}^{L}\rho A(x)\frac{\partial^{2}w(x,t)}{\partial t^{2}}\delta w dxdt\\&-m_{t}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}w(L,t)}{\partial t^{2}}\delta w dt-m_{t}d^{2}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}\theta(L,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dt-\int_{t_1}^{t_2}I_{0x}\frac{\partial^{2}\theta(x,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dt\\&+m_{t}d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}w(L,t)}{\partial t^{2}}\delta\theta dt+m_{t}d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{2}\theta(L,t)}{\partial t^{2}}\delta w dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^{3}w}{\partial t^{2}\partial x}I_{0y}\delta(\frac{\partial w}{\partial x})dt\end{aligned}$$

(۷۸-۲)

همچنین:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta V dt=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}\delta w dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L GJ\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}\delta\theta dxdt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big|_0^L dt-\int_{t_1}^{t_2}EI(x)\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\delta w\Big|_0^L dt+\int_{t_1}^{t_2}GJ\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\delta\theta\Big|_0^L dt$$
$$+K_n\int_{t_1}^{t_2}(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta w dt-K_n\int_{t_1}^{t_2}d(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta\theta dt$$
$$+K_L(h^2+d^2)\int_{t_1}^{t_2}\theta(L,t)\delta\theta dt$$

(۷۹-۲)

در نهایت با جایگذاری معادلات (۲-۷۸) و (۲-۷۹) در معادله (۲-۱) با توجه به این‌که $\delta W_{nc}(t)=0$ خواهیم داشت:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta(T(t)-V(t)+W_{nc}(t))dt=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho I_p\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\delta\theta dxdt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dxdt-m_t\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta w dt-m_t d^2\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2\theta(L,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}I_{0x}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt+m_t d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt+m_t d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2\theta(L,t)}{\partial t^2}\delta w dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}I_{0y}\delta(\frac{\partial w}{\partial x})dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}\delta w dxdt+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L GJ\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}\delta\theta dxdt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}EI(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big|_0^L dt+\int_{t_1}^{t_2}EI(x)\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x^3}\delta w\Big|_0^L dt$$
$$-\int_{t_1}^{t_2}GJ\frac{\partial\theta(x,t)}{\partial x}\delta\theta\Big|_0^L dt-K_n\int_{t_1}^{t_2}(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta w dt$$
$$+K_n\int_{t_1}^{t_2}d(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta\theta dt-K_L(h^2+d^2)\int_{t_1}^{t_2}\theta(L,t)\delta\theta dt$$

(۸۰-۲)

در نتیجه معادله حرکت ارتعاش خمشی و پیچشی سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \qquad (۸۱-۲)$$

$$GJ\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial x^2}=\rho I_p\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2} \qquad (۸۲-۲)$$

همچنین شرایط مرزی نیز به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$w|_{x=0}=0 \qquad (۸۳-۲)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0}=0 \qquad (۸۴-۲)$$

$$\theta|_{x=0}=0 \qquad (۸۵-۲)$$

$$(-I_{0y}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}+EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})|_{x=L}=0 \qquad (۸۶-۲)$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=L}=(K_n w-K_n d\theta+m_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-m_t d\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})|_{x=L} \qquad (۸۷-۲)$$

$$(GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}+m_t d^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-m_t d\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+K_L(h^2+d^2)\theta+K_n d^2\theta-K_n dw+I_{0x}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})|_{x=L}=0$$
(۸۸-۲)

بی‌بعدسازی معادله حرکت خمشی و دو شرط مرزی اول مشابه حالت قبل می‌باشد. برای بی‌بعدکردن معادله حرکت پیچشی و سایر شرایط مرزی، پارامترهای بی‌بعد $\tau=\frac{t}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$ ، $R=\frac{r}{L}$ و $H=\frac{h}{L}$، $\beta_t=\frac{K_L h^2 L}{GJ}$ ، $s=\frac{GJ}{EI}$، $e=\frac{AL^2}{I_p}$ را تعریف می‌کنیم. همچنین برای بی‌بعد کردن پارامتر D داریم:

$$D=\frac{d}{L}=\frac{d}{a}\times\frac{a}{L} \qquad (۸۹-۲)$$

از طرفی می‌دانیم $\frac{a}{L}=\frac{40\mu m}{200\mu m}=0.2$ بنابراین:

$$D=0.2(\frac{d}{a})=0.2\tilde{D} \qquad (۹۰-۲)$$

همچنین فرض می‌کنیم $\theta(X,\tau)=\theta(X)e^{i\omega\tau}$ بنابراین از رابطه (۲-۸۲)داریم:

$$\frac{GJ}{L^2}\frac{d^2\theta(X,\tau)}{dX^2}=\rho I_p\frac{EI_z}{L^4\rho A}\frac{d^2\theta(X,\tau)}{d\tau^2}$$ (۲-۹۱)

که با ضرب طرفین معادله فوق در $\frac{L^2}{GJ}$ در نهایت داریم:

$$\frac{d^2\theta(X)}{dX^2}+\frac{\omega^2}{es}\theta(X)=0$$ (۲-۹۲)

همچنین معادله حرکت خمشی بی‌بعد مشابه حالت قبل به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^4W(X)}{dX^4}-\omega^2W(X)=0$$ (۲-۹۳)

شرط مرزی بی‌بعد سوم نیز به صورت زیر است:

$$\theta|_{X=0}=0$$ (۲-۹۴)

از رابطه(۲-۴۱) و(۲-۸۶) داریم:

$$(-(\frac{3}{5}m_th^2+\frac{3}{20}m_tr^2+m_tL^2)\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}+EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})|_{x=L}=0$$ (۲-۹۵)

با وارد کردن پارامترهای بی‌بعد داریم:

$$(-(\frac{3}{5}m_th^2\frac{1}{L}\frac{EI}{L^4\rho A}+\frac{3}{20}m_tr^2\frac{1}{L}\frac{EI}{L^4\rho A}+m_tL^2\frac{1}{L}\frac{EI}{L^4\rho A})\frac{\partial^3 w}{\partial \tau^2\partial X}+EI\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2})|_{x=L}=0$$

(۲-۹۶)

با ضرب طرفین معادله در $\frac{L^2}{EI}$ شرط مرزی چهارم بی‌بعد شده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^2W}{dX^2}|_{X=1}+(M_F+\frac{3}{20}M_FR^2+\frac{3}{5}M_FH^2)\omega^2\frac{dW}{dX}|_{X=1}=0$$ (۲-۹۷)

با اعمال پارامترهای بی‌بعد در رابطه(۲-۸۷) داریم:

$$EI\frac{1}{L^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}|_{x=L}=(K_n w-K_n d\theta-m_t\omega^2\frac{EI}{L^4\rho A}w+m_t\omega^2\frac{dEI}{L^4\rho A}\theta)|_{x=L} \qquad (۲-۹۸)$$

با ضرب طرفین معادله فوق در $\frac{L^3}{EI}$ شرط مرزی پنجم بی‌بعد شده در نهایت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^3W}{dX^3}|_{X=1}=(\beta_n-M_F\omega^2)W|_{X=1}+(M_F D\omega^2-\beta_n D)\theta|_{X=1} \qquad (۲-۹۹)$$

از رابطه(۲-۴۰) و (۲-۸۸) داریم:

$$\begin{aligned}&(GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}+m_t d^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-m_t d\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+K_L(h^2+d^2)\theta+K_n d^2\theta-K_n dw\\&+(\frac{3}{5}m_t h^2+\frac{3}{20}m_t r^2+m_t d^2)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})|_{x=L}\end{aligned} \qquad (۲-۱۰۰)$$

با اعمال پارامترهای بی‌بعد در رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned}&(GJ\frac{1}{L}\frac{d\theta}{dX}-m_t d^2\frac{EI}{L^4\rho A}\omega^2\theta+m_t d\frac{EI}{L^4\rho A}\omega^2 w+K_L h^2\theta+K_L d^2\theta+K_n d^2\theta-K_n dw\\&-\omega^2\theta(\frac{3}{5}m_t h^2\frac{EI}{L^4\rho A}+\frac{3}{20}m_t r^2\frac{EI}{L^4\rho A}+m_t d^2\frac{EI}{L^4\rho A}))|_{x=L}\end{aligned} \qquad (۲-۱۰۱)$$

با ضرب طرفین معادله فوق در $\frac{L}{GJ}$ شرط مرزی ششم بی‌بعد شده در نهایت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{d\theta}{dX}|_{x=1}=(\frac{M_F D^2\omega^2}{s}-\frac{\beta_t D^2}{H^2}-\frac{\beta_n D^2}{s}+\frac{3}{5}\frac{M_F H^2\omega^2}{s}+\frac{3}{20}\frac{M_F R^2\omega^2}{s}+\frac{M_F D^2\omega^2}{s}\\&-\beta_t)\theta|_{x=1}+(\frac{\beta_n D}{s}-\frac{M_F D^2\omega^2}{s})W|_{x=1}\end{aligned}$$

(۲-۱۰۲)

معادله مفسر معادله(۲-۹۳) مشابه حالت قبل به صورت زیر می‌باشد:

$$\gamma^4 - \omega^2 = 0 \tag{۱۰۳-۲}$$

بنابراین:

$$\gamma^4 = \omega^2 \tag{۱۰۴-۲}$$

که پاسخ معادله دیفرانسیل(۲-۹۳) به صورت زیر می‌باشد[۳۴]:

$$w(X) = B_1 \cosh(\gamma X) + B_2 \sinh(\gamma X) + B_3 \cos(\gamma X) + B_4 \sin(\gamma X) \tag{۱۰۵-۲}$$

معادله مفسر معادله حرکت(۲-۹۲) نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$p^2 + \frac{\omega^2}{es} = 0 \tag{۱۰۶-۲}$$

بنابراین:

$$p^2 = -\frac{\omega^2}{es} \tag{۱۰۷-۲}$$

حل معادله (۲-۹۲) به صورت زیر می‌باشد[۳۵]:

$$\theta(X) = C_1 \cos pX + C_2 \sin pX \tag{۱۰۸-۲}$$

حال با اعمال شش شرط مرزی بی‌بعد به دست آمده در معادلات (۲-۱۰۵) و(۲-۱۰۸) داریم:

$$\begin{aligned} &B_1 + B_3 = 0 \quad ، \quad B_1 I_1 + B_2 I_2 + B_3 I_3 + B_4 I_4 = 0 \\ &B_2 + B_4 = 0 \quad ، \quad B_1 I_5 + B_2 I_6 + B_3 I_7 + B_4 I_8 + C_2 I_9 = 0 \\ &C_1 = 0 \quad ، \quad B_1 I_{10} + B_2 I_{11} + B_3 I_{12} + B_4 I_{13} + C_2 I_{14} = 0 \end{aligned} \tag{۱۰۹-۲}$$

که ضرایب I عبارتند از:

$$I_1 = [\gamma \cosh\gamma + (M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \sinh\gamma] \qquad (۱۱۰-۲)$$

$$I_2 = [\gamma \sinh\gamma + (M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \cosh\gamma] \qquad (۱۱۱-۲)$$

$$I_3 = [-\gamma \cos\gamma + (M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \sin\gamma] \qquad (۱۱۲-۲)$$

$$I_4 = [-\gamma \sin\gamma + (M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \cos\gamma] \qquad (۱۱۳-۲)$$

$$I_5 = [\gamma^3 \sinh\gamma + (M_F \omega^2 - \beta_n)\cosh\gamma] \qquad (۱۱۴-۲)$$

$$I_6 = [\gamma^3 \cosh\gamma + (M_F \omega^2 - \beta_n)\sinh\gamma] \qquad (۱۱۵-۲)$$

$$I_7 = [\gamma^3 \sin\gamma + (M_F \omega^2 - \beta_n)\cos\gamma] \qquad (۱۱۶-۲)$$

$$I_8 = [-\gamma^3 \cos\gamma + (M_F \omega^2 - \beta_n)\sin\gamma] \qquad (۱۱۷-۲)$$

$$I_9 = [(\beta_n D - M_F D\omega^2)\sin p] \qquad (۱۱۸-۲)$$

$$I_{10} = [(\frac{\beta_n D}{s} - \frac{M_F D^2 \omega^2}{s})\cosh\gamma] \qquad (۱۱۹-۲)$$

$$I_{11} = [(\frac{\beta_n D}{s} - \frac{M_F D^2 \omega^2}{s})\sinh\gamma] \qquad (۱۲۰-۲)$$

$$I_{12} = [(\frac{\beta_n D}{s} - \frac{M_F D^2 \omega^2}{s})\cos\gamma] \qquad (۱۲۱-۲)$$

$$I_{13} = [(\frac{\beta_n D}{s} - \frac{M_F D^2 \omega^2}{s})\sin\gamma] \qquad (۱۲۲-۲)$$

$$I_{14} = [(\frac{M_F D^2 \omega^2}{s} - \frac{\beta_t D^2}{H^2} - \frac{\beta_n D^2}{s} + \frac{3}{5}\frac{M_F H^2 \omega^2}{s} + \frac{3}{20}\frac{M_F R^2 \omega^2}{s} + \frac{M_F D^2 \omega^2}{s} - \beta_t) \sin p - p \cos p] \quad (۱۲۳-۲)$$

معادله(۲-۱۰۹) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & 0 & 0 \\ I_5 & I_6 & I_7 & I_8 & 0 & I_9 \\ I_{10} & I_{11} & I_{12} & I_{13} & 0 & I_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (۱۲۴-۲)$$

برای اینکه معادله فوق جواب غیر صفر داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب، (ماتریس A) مساوی صفر باشد:

$$C = det(A) = 0 \quad (۱۲۵-۲)$$

در نهایت معادله مشخصه سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = I_3 I_{14}(I_6 - I_8) + I_3 I_9(I_{13} - I_{11}) + I_1 I_{14}(I_8 - I_6) + I_1 I_9(I_{11} - I_{13}) + I_{14} I_7(I_4 - I_2) + I_{14} I_5(I_2 - I_4) + I_9 I_{12}(I_2 - I_4) + I_9 I_{10}(I_4 - I_2)$$

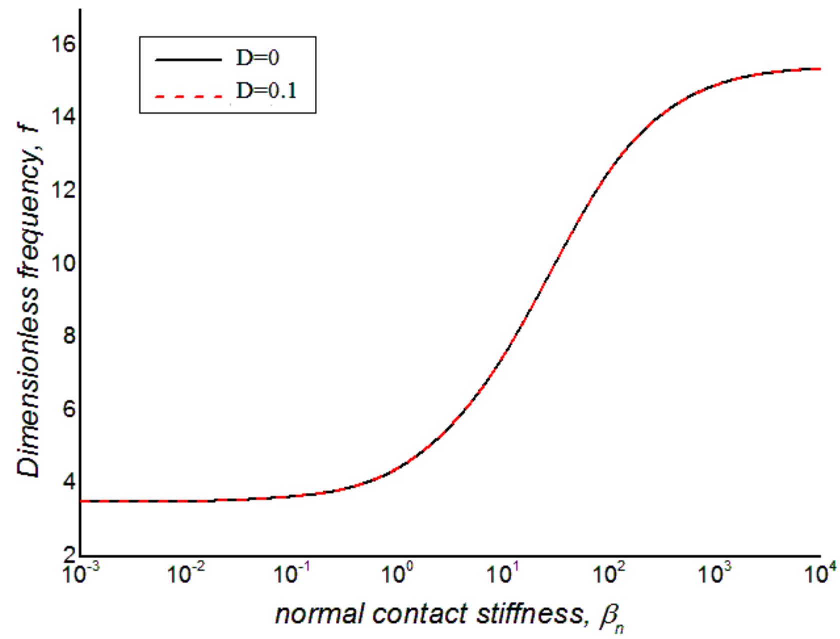
(۱۲۶-۲)

حساسیت نیز از رابطه(۲-۳۳) به صورت زیر به دست می‌آید:

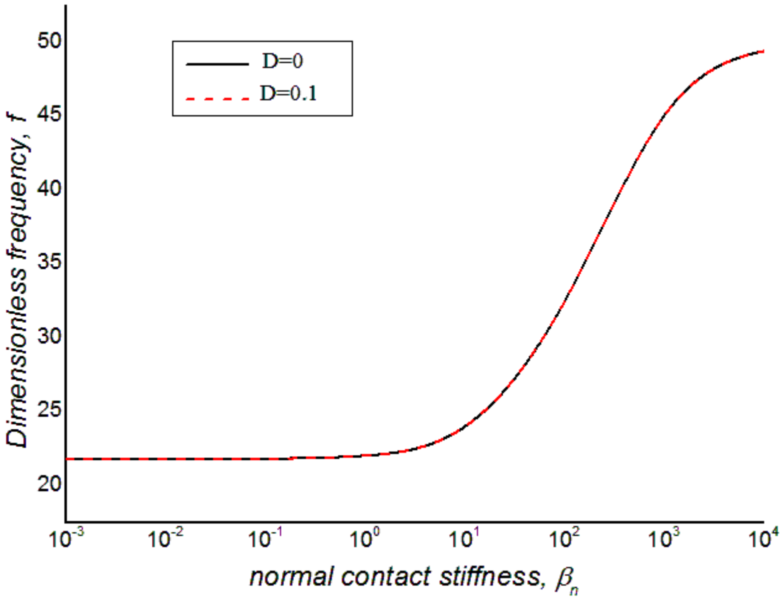
$$S = \frac{-\frac{\partial C}{\partial \beta_n}}{\frac{\partial C}{\partial \omega}} \quad (۱۲۷-۲)$$

حال برای بررسی اثر پارامترهای مختلف بر فرکانس تشدید و حساسیت،پارامترهای مواد و هندسه تیر را مطابق موارد ذکر شده در جدول(۲-۱) در نظر می‌گیریم. شکل‌های (۲-۱۳) تا (۲-۱۷) فرکانس

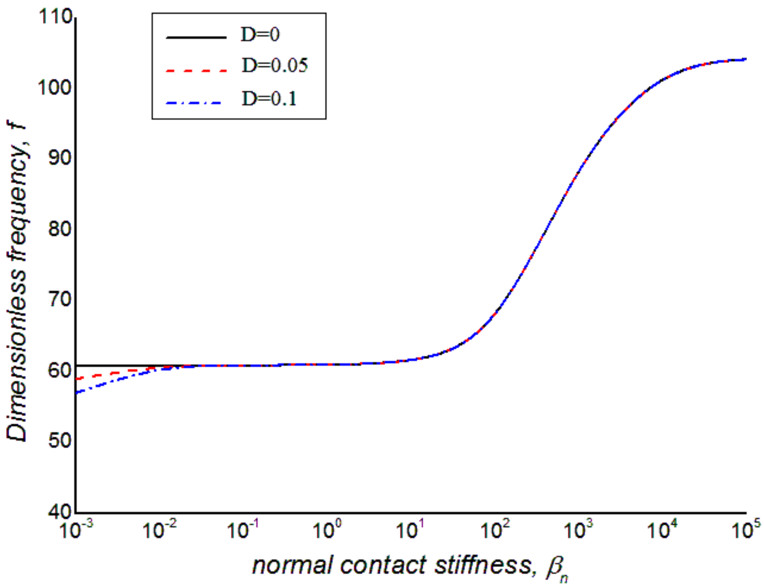
تشدید پنج مود اول تیرAFM را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n و به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد فاصله نوک از مرکز(D) نشان می‌دهد. همانطور که از شکل‌های(۲-۱۳)و (۲-۱۴) مشخص است پارامتر D بر روی فرکانس تشدید دو مود اول تاثیری ندارد است و برای هر دو مقدار $D=0$ و $D=0.1$، مقادیر فرکانس تشدید یکسان می‌باشند.



شکل۲-۱۳فرکانس تشدید بی‌بعد مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n



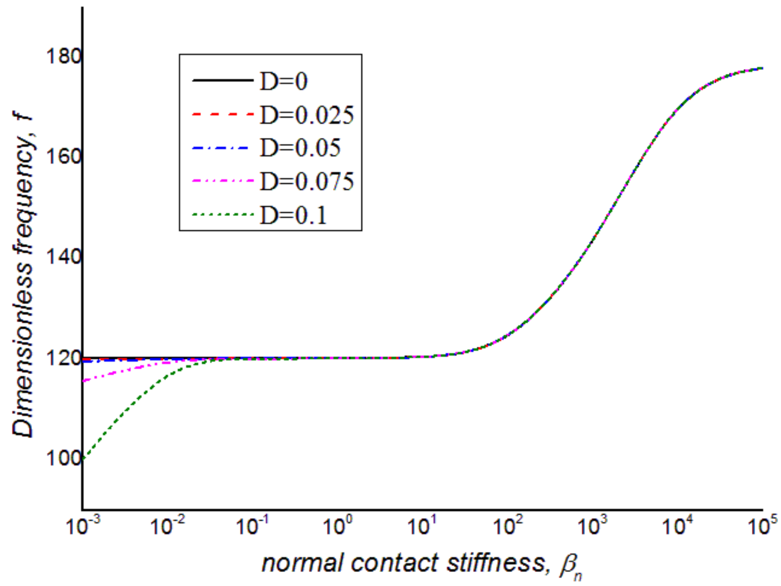
شکل۲-۱۴ فرکانس تشدید بی‌بعد مود دوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n



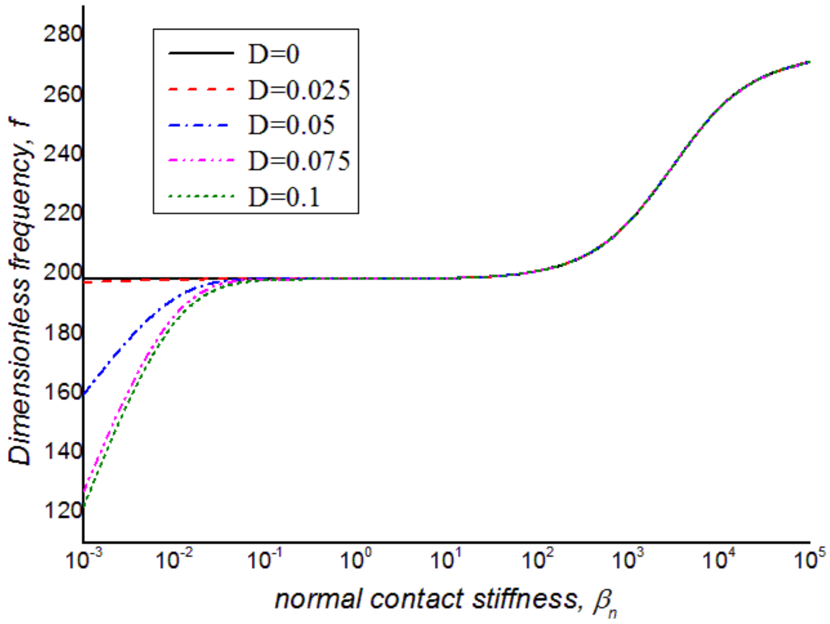
شکل۲-۱۵فرکانس تشدید بی‌بعد مود سوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n

از شکل‌های(۲-۱۵) تا (۲-۱۷) نیز مشخص است، تاثیر پارامتر D بر روی فرکانس تشدید با افزایش درجه مود قابل ملاحظه است. شکل(۲-۱۵) تغییرات فرکانس تشدید مود سوم را نشان می‌دهد. با دقت در این شکل می‌توان فهمید که در سختی‌های پایین(مواد نرم‌تر) با افزایش مقدار Dو به ازای سختی تماسی عمودی(β_n) یکسان، فرکانس تشدید کمتر می‌شود. اما با افزایش سختی رفته

اختلاف بین مقادیر فرکانس تشدید به دست آمده به ازای Dهای مختلف کمتر می‌شود، تا این‌که برای مقادیر بسیار بالای سختی این اختلاف به صفر می‌رسد. شکل(۲-۱۶)و (۲-۱۷) نیز تغییرات فرکانس تشدید را به ترتیب برای مود چهارم و پنجم نشان می‌دهد که روند این تغییرات مشابه مود سوم می‌باشد.

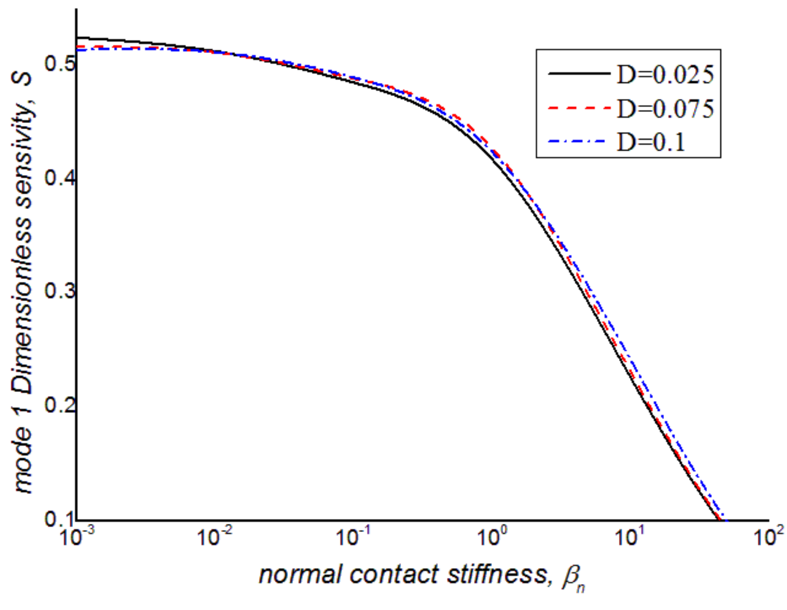


شکل۲-۱۶فرکانس تشدید بی‌بعد مود چهارم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n

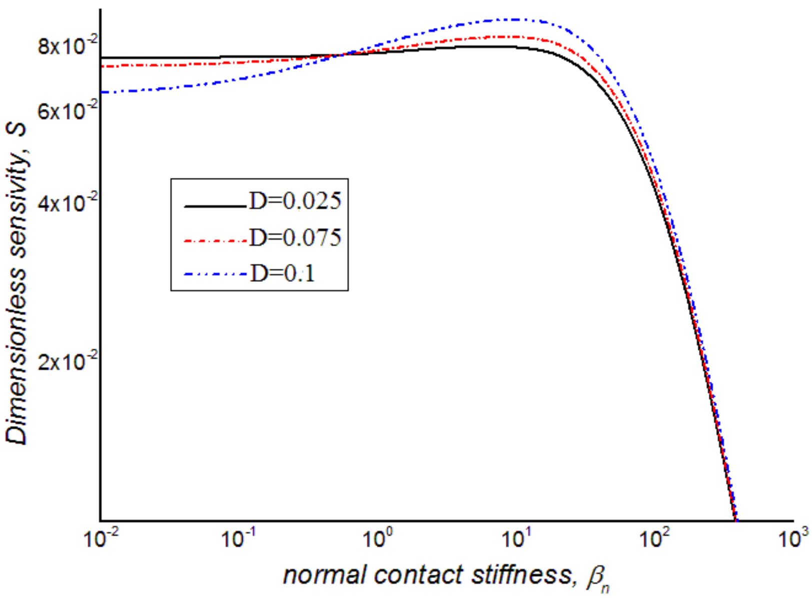


شکل۲-۱۷فرکانس تشدید بی‌بعد مود پنجم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n

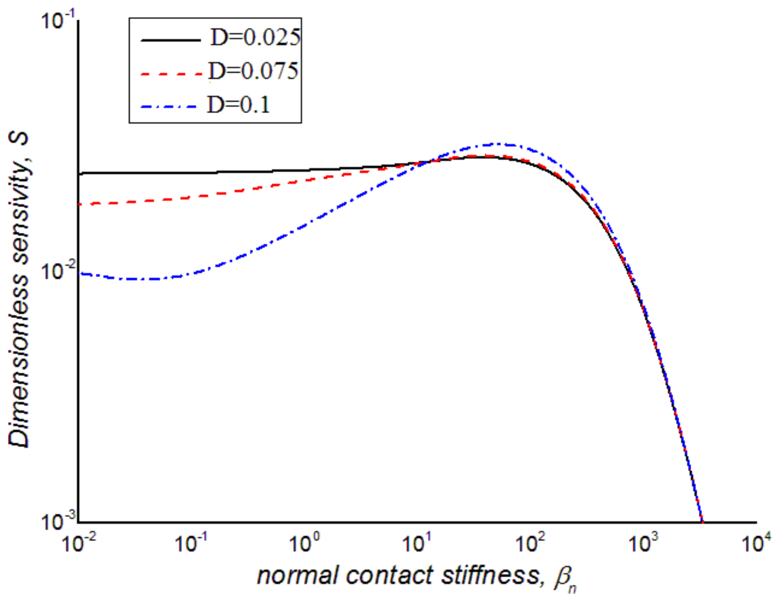
شکل‌های (۲-۱۸) تا (۲-۲۰) حساسیت سه مود اول تیر AFM را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n و به ازای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد فاصله نوک از مرکز(D) نشان می‌دهد. همانطور که از شکل(۲-۱۸) مشخص است برای مود اول در مقادیر سختی پایین، با افزایش مقدار پارامتر D، حساسیت کاهش پیدا می‌کند. ولی در ادامه با افزایش مقدار سختی، روند عکس می‌شود و برای سختی‌های بسیار بالا با افزایش پارامتر D، در یک سختی یکسان، حساسیت افزایش می‌یابد. تغییرات حساسیت مودهای دوم و سوم نیز به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی به ترتیب در شکل-های(۲-۱۹) و (۲-۲۰) نشان داده شده‌اند. روند این تغییرات مشابه مود اول می‌باشد با این تفاوت که در سختی‌های بسیار بالا افزایش پارامتر D تاثیری در مقدار حساسیت ندارد و حساسیت به ازای D های متفاوت یکسان است.



شکل ۲-۱۸ حساسیت مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n، به ازای مقادیر D متفاوت



شکل۲-۱۹حساسیت مود دوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n به ازای مقادیر Dمتفاوت

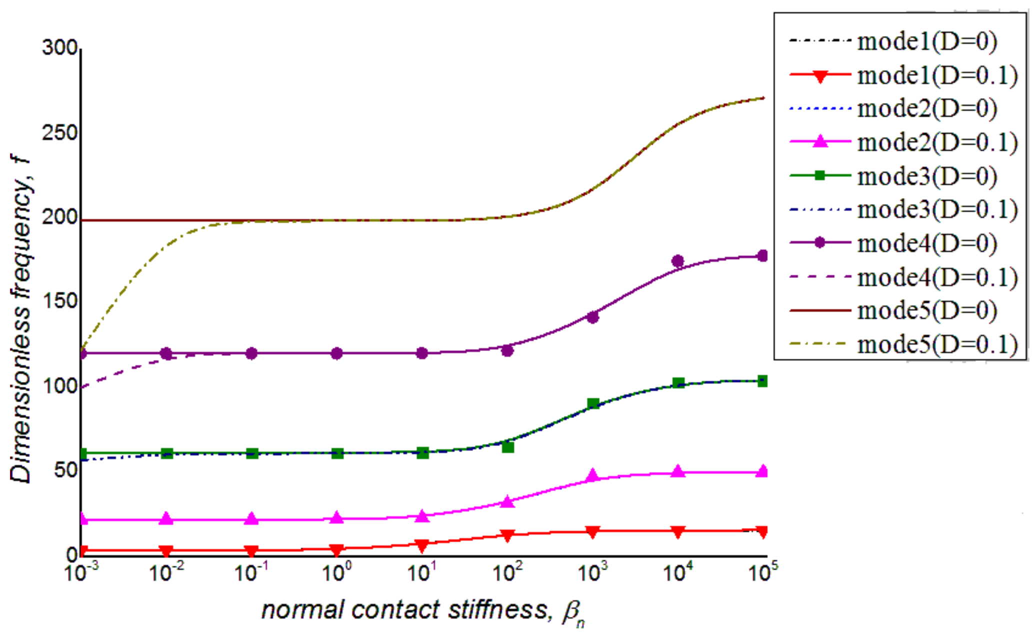


شکل۲-۲۰حساسیت مود سوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n به ازای مقادیر Dمتفاوت

۲-۳-۲ مقایسه نتایج

همانطور که از شکل(۲-۲۱) پیداست و در توضیحات شکل‌های(۲-۱۳)تا (۲-۱۷) نیز گفته شد، تغییرات در فرکانس تشدید مودهای اول و دوم به ازای مقادیر متفاوت D مشابه هم است و همانطور

که مشاهده می‌شود نمودار دو مود اول برای حالت بدون کوپل‌شدگی($D=0$) و حالت کوپل‌شدگی ($D=0.1$) منطبق بر هم می‌باشند. اما در مودهای سوم، چهارم و پنجم در مقادیر سختی پایین فرکانس تشدید حالت کوپل‌شدگی کمتر از فرکانس تشدید حالت بدون کوپل‌شدگی است. و رفته‌رفته با افزایش سختی و در مقادیر سختی بالا فرکانس تشدید حالت کوپل‌شدگی و بدون کوپل‌شدگی یکسان می‌شود.



شکل۲-۲۱ مقایسه فرکانس تشدید پنج مود اول به صورت تابعی از β_n در دو حالت کوپل‌شدگی و بدون کوپل‌شدگی

فصل سوم

بررسی ارتعاشات تیرمیکروسکوپ نیرواتمی با استفاده از روش غیرموضعی

۳-۱ معرفی روش غیرموضعی

بیشتر نظریه‌های کلاسیک بر اساس روابط ساختاری می‌باشند که در آنها فرض براین است که تنش در یک نقطه از محیط پیوسته تابعی از کرنش‌ها در همان نقطه است. در صورتی‌که در نظریه غیر موضعی فرض براین است که تنش در یک نقطه از محیط پیوسته تابعی از کرنش‌ها در تمام نقاط محیط پیوسته می‌باشد. این قبیل نظریه‌ها شامل اطلاعاتی در مورد نیروهای بین اتمی می‌باشند. نظریه غیرموضعی توسط ارینگن پایه‌گذاری شده است. ارینگن بیان کرد که تنش در نقطه x در یک محیط پیوسته الاستیک نه تنها به کرنش در نقطه x بلکه به کرنش‌ها در تمام نقاط دیگر محیط پیوسته بستگی دارد.

ارینگن تانسور تنش غیرموضعی σدر نقطه x را به صورت زیر بیان کرده است[۱۷]:

$$\sigma_{ij} = \int_{v} k(|x'-x|,\tau) t_{ij}(x') dx' \qquad (۳\text{-}۱)$$

که $t(x)$ تانسور تنش ماکروسکوپیک در نقطه x و تابع کرنل $k(|x'-x|,\tau)$ مدول غیرموضعی را بیان می‌کند $|x'-x|$ فاصله و τ ثابت ماده می‌باشد که به طولهای مشخصه داخلی و خارجی (از قبیل فاصله شبکه و طول موج) بستگی دارد. تنش ماکروسکوپیک t در نقطه x طبق رابطه زیر با کرنش رابطه دارد[۳۶]:

$$t(x) = C(x) : \varepsilon(x) \qquad \text{یا} \qquad t_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} \qquad (۳\text{-}۲)$$

C تانسور الاستیسیته مرتبه چهار است و : ضرب دو نقطه‌ای می‌باشد. ارینگن انتگرال روابط ساختاری را به شکل دیفرانسیلی زیر بیان کرد[۳۶]:

$$(1-\tau^2 l^2 \nabla^2)\sigma_{ij} = t_{ij} \quad ، \quad \tau = \frac{e_0 a}{l} \qquad (۳\text{-}۳)$$

در معادلات فوق σ_{ij}، t_{ij}، ε_{mn} به ترتیب، تنش غیرموضعی، تنش کلاسیک و کرنش کلاسیک می‌باشند. e_0 ثابت ماده و a و l به ترتیب طول مشخصه داخلی و خارجی می‌باشند. معادله فوق به صورت زیر نیز می‌تواند بیان شود.

$$\ell(\sigma_{ij})=t_{ij} \quad , \quad \ell=1-\mu\nabla^2 \quad , \quad \mu=e_0^2a^2 \tag{۴-۳}$$

با استفاده از معادلات(۳-۲) و(۳-۳) می‌توانیم منتجه‌های تنش را بر حسب جملات کرنش برای انواع مختلف تیر از جمله تیر اولربرنولی بیان کرد. در ادامه روابط منتجه‌های تنش و کرنش نظریه غیرموضعی را برای تیرهای ایزوتروپیک و همگن بیان می‌کنیم. با این فرض که رفتار غیرموضعی در جهت ضخامت قابل صرف نظر است.

میدان جابه‌جایی را به صورت زیر فرض می‌کنیم[۱۷]:

$$u_1=-z\frac{\partial w}{\partial x} \quad , \quad u_2=0 \quad , \quad u_3=w(x,t) \tag{۵-۳}$$

تنها کرنش غیر صفر تیر همانند رابطه(۲-۹) به صورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{۶-۳}$$

از رابطه (۳-۴) خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij}-\mu\nabla^2\sigma_{ij}=t_{ij} \quad , \quad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{۷-۳}$$

$$\sigma_{ij}-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial z^2}\right)=t_{ij} \tag{۸-۳}$$

از آنجا که رفتار غیرموضعی در جهت ضخامت قابل صرف نظر است[۳۶]، $\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\sigma_{ij}}{\partial z^2}=0$

بنابراین:

$$\sigma_{ij} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x^2} = t_{ij} \quad (۹-۳)$$

همچنین برای یک ماده الاستیک خطی همگن داریم[۳۷]:

$$t_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (۱۰-۳)$$

که δ_{ij} دلتای کرانیکر و λ مدول حجمی ماده می‌باشد.

بنابراین از روابط (۳-۹) و (۳-۱۰) خواهیم داشت:

$$\sigma_{ij} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial x^2} + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (۱۱-۳)$$

بنابراین از روابط(۳-۱۱) و(۳-۱۰) روابط زیر را نتیجه می گیریم[۱۷]:

$$\sigma_{xx} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \lambda \varepsilon_{xx} + 2G\varepsilon_{xx} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{xx} \quad (۱۲-۳)$$

همچنین می‌دانیم[۳۷]:

$$E = (\lambda + 2G) \quad (۱۳-۳)$$

بنابراین:

$$\sigma_{xx} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + E\varepsilon_{xx} \quad (۱۴-۳)$$

به طور مشابه از رابطه(۳-۱۱) داریم:

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + \lambda \varepsilon_{yy} \delta_{xz} + 2G\varepsilon_{xz} \quad (۱۵-۳)$$

که $\delta_{xz} = 0$ بنابراین:

$$\sigma_{xz} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + 2G\varepsilon_{xz} \qquad (۱۶-۳)$$

همچنین:

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \lambda \varepsilon_{zz}\delta_{xy} + 2G\varepsilon_{xy} \qquad (۱۷-۳)$$

که $\delta_{xy} = 0$ بنابراین:

$$\sigma_{xy} = \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + 2G\varepsilon_{xy} \qquad (۱۸-۳)$$

که E و G به ترتیب مدول یانگ و مدول برشی و λ ثابت لامه می‌باشد. روابط (۳-۱۴)، (۳-۱۶) و (۳-۱۸) روابط تنش غیرموضعی می‌باشند و به μ پارامتر غیر موضعی می‌گویند. هنگامی‌که μ برابر صفر باشد ما روابط ساختاری برای نظریه کلاسیک را خواهیم داشت.

۳-۲ بررسی تیر AFM از روش غیرموضعی در حالت بدون کوپل‌شدگی:

برای به دست آوردن معادله حرکت و شرایط مرزی تیر AFM با استفاده از نظریه غیرموضعی همانند حالت کلاسیک از همیلتونین استفاده می‌کنیم. اصل همیلتونین در این حالت به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U(t) + V(t) - T(t) + W_{nc})dt = 0 \qquad (۱۹-۳)$$

که U انرژی کرنشی، V انرژی پتانسیل، T انرژی جنبشی و W_{nc} کار نیروهای غیرپایستار می‌باشد. تغییرات انرژی کرنشی تیردر حالت کلی به صورت زیر می‌باشد[۳۵]:

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz})dAdx = \int_0^L (N\frac{d\delta u}{dx} - M_b \frac{d^2\delta w_b}{dx^2} - M_s \frac{d^2 \delta w_s}{dx^2} + Q\frac{d\delta w_s}{dx})dx$$

(۲۰-۳)

w_s و w_b به ترتیب اجزای جابه‌جایی عرضی برشی و خمشی می‌باشند. ε_x و γ_{xz} معرف کرنش طولی و برشی و N، Q، M_s و M_b منتجه‌های تنش هستند. N نیروی محوری، Q نیروی عرضی، M_s گشتاور برشی و M_b گشتاور خمشی است[۳۸]. در این مساله هیچ نیروی محوری، نیروی عرضی و گشتاور برشی نداریم. بنابراین معادله(۳-۲۰) به صورت زیر خلاصه می‌شود. برای راحتی M_b و w_b را با M و w نشان می‌دهیم.

$$\delta U=\int_0^L -M_b\delta\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}dx=-M\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_0^L+\int_0^L\frac{\partial M}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x}dx= \\ -M\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_0^L+\frac{\partial M}{\partial x}\delta w\Big|_0^L-\int_0^L\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\delta w dx \tag{۳-۲۱}$$

تغییرات انرژی پتانسیل سیستم ناشی از فنر عمودی به صورت زیر می‌باشد:

$$V=\frac{1}{2}K_n w^2(L,t) \tag{۳-۲۲}$$

بنابراین داریم:

$$\delta V=K_n w(L,t)\delta w \tag{۳-۲۳}$$

انرژی جنبشی مشابه قبل به صورت زیر است:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)\Big(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\Big)^2 dx+\frac{1}{2}m_t\Big(\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\Big)^2 \tag{۳-۲۴}$$

بنابراین تغییرات انرژی جنبشی به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta T=\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(x,t)}{\partial t}dxdt+m_t\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\frac{\partial \delta w(L,t)}{\partial t}dt= \\ \int_0^L \rho A(x)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta w\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dxdt+m_t\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\delta w\Big|_{t_1}^{t_2} \\ -\int_{t_1}^{t_2} m_t\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dt=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dxdt-\int_{t_1}^{t_2} m_t\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dt \tag{۳-۲۵}$$

با قرار دادن معادلات(۳-۲۱)، (۳-۲۳) و (۳-۲۵) در همیلتونین داریم:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(U(t)+V(t)-T(t)+W_{nc})dt=\int_0^t -M\frac{\delta dw}{dx}\Big|_0^L\ dt+\int_0^y\frac{\partial M}{\partial x}\delta w\Big|_0^L\ dt-\int_0^t\int_0^L\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\delta w dxdt$$

$$+K_n w(L,t)\delta w+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dxdt+\int_{t_1}^{t_2}m_t\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta w dt \qquad (۳-۲۶)$$

بنابراین معادله حرکت حاکم بر سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=0 \qquad (۳-۲۷)$$

همانطور که مشاهده می‌شود معادله حرکت سیستم بر حسب گشتاور خمشی M به دست آمده است.

در ادامه عملیاتی را انجام می‌دهیم تا M بر حسب جابه‌جایی عرضی، w به دست آید.

طبق نظریه غیر موضعی رابطه گشتاور به صورت زیر است[۱۷]:

$$M=\mu\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (۳-۲۸)$$

که در رابطه فوق $I=I_z=\int_A z^2 dA$ ممان اینرسی سطح مقطع می‌باشد.

اگر از طرفین رابطه فوق نسبت به x دو بار مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=\frac{1}{\mu}(M+EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}) \qquad (۳-۲۹)$$

با قرار دادن معادله فوق در رابطه(۳-۲۷) خواهیم داشت:

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\frac{1}{\mu}(M+EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})=0 \qquad (۳-۳۰)$$

از رابطه فوق M به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M = \rho A(x)\mu \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (۳-۳۱)$$

حال اگر از رابطه فوق نسبت به x دو بار مشتق بگیریم و حاصل را در رابطه (۳-۲۷) قراردهیم، معادله حرکت نهایی ارتعاش خمشی سیستم از روش غیرموضعی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - \rho A(x)\mu\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \qquad (۳-۳۲)$$

همچنین از رابطه (۳-۲۶)، چهار شرط مرزی به صورت زیر می‌باشند:

$$w|_{x=0} = 0 \quad ، \quad \frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0} = 0 \qquad (۳-۳۳)$$

$$M|_{x=L} = 0 \quad ، \quad m_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}|_{x=L} + \frac{\partial M}{\partial x}|_{x=L} + K_n w|_{x=L} = 0 \qquad (۳-۳۴)$$

که با قرار دادن رابطه(۳-۳۱) در (۳-۳۴) شرط مرزی سوم و چهارم در نهایت به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\rho A\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}|_{x=L} - EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}|_{x=L} = 0 \qquad (۳-۳۵)$$

$$m_t\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2} + \rho A\mu\frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x \partial t^2} - EI\frac{\partial^3 w(L,t)}{\partial x^3} + K_n w(L,t) = 0 \qquad (۳-۳۶)$$

پارامترهای بی‌بعد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$X = \frac{x}{L} \quad ، \quad t = \tau L^2\sqrt{\frac{\rho A}{EI_z}} \quad ، \quad \beta_n = \frac{K_n L^3}{EI_z} \quad ، \quad M_F = \frac{m_t}{\rho AL} \quad ، e = \frac{\mu}{L^2} \qquad (۳-۳۷)$$

برای بی‌بعدکردن معادله حرکت(۳-۳۲) با استفاده از رابطه(۳-۳۷) خواهیم داشت:

$$\frac{EI}{L^4}\frac{\partial^4 w(X,\tau)}{\partial X^4} - \frac{\rho A\mu}{L^2}\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^4 w(X,\tau)}{\partial X^2 \partial \tau^2} + \rho A\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^2 w(X,\tau)}{\partial \tau^2} = 0 \qquad (۳-۳۸)$$

با قرار دادن حل هارمونیک $w(X,\tau)=W(X)e^{i\omega\tau}$ در رابطه فوق و ضرب طرفین در $\frac{L^4}{EI}$ معادله حرکت بی‌بعد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{d^4W(X)}{dX^4}+e\omega^2\frac{d^2W(X)}{dX^2}-\omega^2W(X)=0 \tag{۳-۳۹}$$

شرایط مرزی بی‌بعد اول و دوم به صورت زیر می‌باشند:

$$W|_{X=0}=0 \quad , \quad \frac{dW}{dX}|_{X=0}=0 \tag{۳-۴۰}$$

با قرار دادن روابط بی‌بعد(۳-۳۷) در رابطه(۳-۳۵) برای به دست آوردن شرط مرزی بی‌بعد سوم داریم:

$$\rho A\mu\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}-\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2 w}{\partial X^2}=0 \tag{۳-۴۱}$$

با ضرب طرفین رابطه فوق در $\frac{L^2}{EI}$ داریم:

$$\frac{\mu}{L^2}\frac{d^2W}{d\tau^2}|_{X=1}-\frac{d^2W}{dX^2}|_{X=1}=(-\frac{\mu\omega^2}{L^2}W(X)-\frac{d^2W(X)}{dX^2})|_{X=1}=0 \tag{۳-۴۲}$$

در نهایت شرط مرزی سوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(e\omega^2W(X)+\frac{d^2W(X)}{dX^2})|_{X=1}=0 \tag{۳-۴۳}$$

همچنین با قرار دادن روابط بی‌بعد(۳-۳۷) در رابطه(۳-۳۶) برای به دست آوردن شرط مرزی بی‌بعد چهارم داریم:

$$(m_t\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+\frac{\rho A\mu}{L}\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial\tau^2}-\frac{EI}{L^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+K_n w)|_{x=L}=0 \tag{۳-۴۴}$$

با ضرب طرفین معادله فوق در $\frac{L^3}{EI}$ شرط مرزی بی‌بعد چهارم برابر است با:

$$[(M_F\omega^2-\beta_n)W(X)+e\omega^2\frac{dW(X)}{dx}+\frac{d^3W(X)}{dX^3}]\,|_{X=1}=0 \qquad (۳-۴۵)$$

معادله مفسر معادله حرکت(۳-۳۹) به صورت زیر است:

$$\gamma^4+e\omega^2\gamma^2-\omega^2=0 \qquad (۳-۴۶)$$

برای حل این معادله با در نظر گرفتن $\lambda=\gamma^2$ داریم:

$$\lambda^2+e\omega^2\lambda-\omega^2=0 \qquad (۳-۴۷)$$

ریشه‌های معادله فوق به صورت زیر می‌باشند:

$$\lambda_1=\frac{-e\omega^2+\sqrt{e^2\omega^4+4\omega^2}}{2} \quad ، \quad \lambda_2=-\frac{e\omega^2+\sqrt{e^2\omega^4+4\omega^2}}{2} \qquad (۳-۴۸)$$

بنابراین γ_1و γ_2 به صورت زیر می‌باشند.

$$\gamma_1=\sqrt{\frac{-e\omega^2+\sqrt{e^2\omega^4+4\omega^2}}{2}} \quad ، \quad \gamma_2=\sqrt{\frac{e\omega^2+\sqrt{e^2\omega^4+4\omega^2}}{2}} \qquad (۳-۴۹)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل(۳-۳۹) به صورت زیر می‌باشد:

$$W(X)=B_1\cosh(\gamma_1X)+B_2\sinh(\gamma_1X)+B_3\cos(\gamma_2X)+B_4\sin(\gamma_2X) \qquad (۳-۵۰)$$

با اعمال شرایط مرزی(۳-۴۰)، (۳-۴۲) و (۳-۴۵)در معادله فوق خواهیم داشت:

$$B_1+B_3=0 \quad ، \quad B_2\gamma_1+B_4\gamma_2=0$$

$$B_1I_1+B_2I_2+B_3I_3+B_4I_4=0 \quad ، \quad B_1I_5+B_2I_6+B_3I_7+B_4I_8=0 \qquad (۳-۵۱)$$

که ضرایب I عبارتند از:

$$I_1 = [(\gamma_1^2 + e\omega^2)\cosh\gamma_1] \quad ، \quad I_2 = [(\gamma_1^2 + e\omega^2)\sinh\gamma_1]$$

$$I_3 = [(-\gamma_2^2 + e\omega^2)\cos\gamma_2] \quad ، \quad I_4 = [(-\gamma_2^2 + e\omega^2)\sin\gamma_2]$$

$$I_5 = [(M_F\omega^2 - \beta_n)\cosh\gamma_1 + (e\omega^2\gamma_1 + \gamma_1^3)\sinh\gamma_1]$$

$$I_6 = [(M_F\omega^2 - \beta_n)\sinh\gamma_1 + (e\omega^2\gamma_1 + \gamma_1^3)\cosh\gamma_1]$$

$$I_7 = [(M_F\omega^2 - \beta_n)\cos\gamma_2 + (-e\omega^2\gamma_2 + \gamma_2^3)\sin\gamma_2]$$

$$I_8 = [(M_F\omega^2 - \beta_n)\sin\gamma_2 + (e\omega^2\gamma_2 - \gamma_2^3)\cos\gamma_2]$$

(۵۲-۳)

از رابطه (۳-۵۱) داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 \\ I_1 & I_2 & I_3 & I_4 \\ I_5 & I_6 & I_7 & I_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = 0$$

(۵۳-۳)

برای اینکه رابطه فوق جواب غیر صفر داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب، (ماتریس A)مساوی صفر باشد:

$$\begin{aligned} C = det(A) &= \gamma_1 I_3 I_8 - \gamma_1 I_4 I_7 + \gamma_2 I_2 I_7 - \gamma_2 I_3 I_6 - \gamma_1 I_1 I_8 + \gamma_2 I_1 I_6 + \gamma_1 I_4 I_5 - \gamma_2 I_2 I_5 \\ &= \gamma_1 (I_3 I_8 - I_4 I_7 - I_1 I_8 + I_4 I_5) + \gamma_2 (I_2 I_7 - I_3 I_6 + I_1 I_6 - I_2 I_5) \end{aligned}$$

(۵۴-۳)

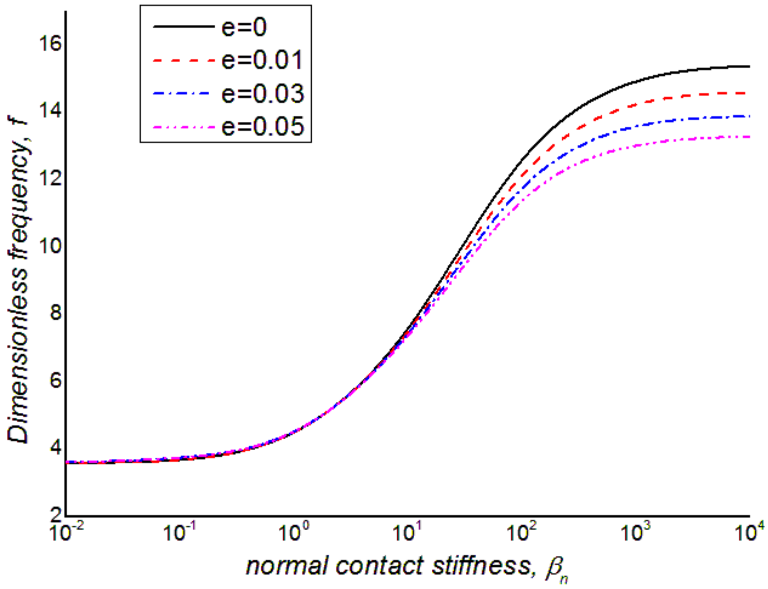
در نهایت معادله مشخصه سیستم برابر می‌شود با:

$$C=\gamma_2^4\gamma_1^2\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 - \gamma_2^3\beta_n\cos\gamma_2\sinh\gamma_1 + 2\gamma_2^3\,\gamma_1^3\cos\gamma_2\cosh\gamma_1 + \beta_n\gamma_1^3\cosh\gamma_1$$
$$\sin\gamma_2 - \gamma_2^2\gamma_1^4\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 - \mathrm{M_F}\omega^2\gamma_1^3\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 + \beta_n\,\gamma_1\,\gamma_2^2\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 + \mathrm{e}^2\omega^4$$
$$\gamma_1^2\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 + \mathrm{e}\,\omega^2\gamma_1^4\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 - \gamma_2\,\gamma_1^2\beta_n\sinh\gamma_1\cos\gamma_2 - \gamma_2^2\mathrm{e}^2\omega^4\,\sinh\gamma_1$$
$$\sin\gamma_2 + \mathrm{e}\,\omega^2\gamma_2^4\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 + \mathrm{M_F}\,\omega^2\gamma_2^3\cos\gamma_2\,\sinh\gamma_1 - \mathrm{M_F}\,\omega^2\gamma_1\gamma_2^2\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 \qquad (۵۵\text{-}۳)$$
$$+\mathrm{M_F}\,\omega^2\gamma_2\gamma_1^2\sinh\gamma_1\cos\gamma_2 - 2\,\mathrm{e}\,\omega^2\gamma_2^2\,\gamma_1^2\sinh\gamma_1\sin\gamma_2 + 2\,\mathrm{e}\,\omega^2\gamma_1\gamma_2^3\cos\gamma_2\cosh\gamma_1$$
$$-2\,\mathrm{e}^2\omega^4\gamma_1\gamma_2\cos\gamma_2\cosh\gamma_1 - 2\gamma_1^3\gamma_2\mathrm{e}\,\omega^2\cos\gamma_2\cosh\gamma_1 - 2\gamma_1\gamma_2^3\mathrm{e}\,\omega^2 + 2\mathrm{e}^2\omega^4\gamma_2\,\gamma_1$$
$$+2\,\gamma_1^3\gamma_2\mathrm{e}\,\omega^2 + \gamma_1\,\gamma_2^5 + \gamma_1{}^5\gamma_2$$

حساسیت نیز عبارت است از:

$$S=\frac{-\dfrac{\partial C}{\partial\beta_n}}{\dfrac{\partial C}{\partial\omega}} \qquad (۵۶\text{-}۳)$$

$$S=-(\,0.5\mathrm{e}\,\omega^2\gamma_2\cos\gamma_2\sinh\gamma_1 - 0.5\mathrm{e}\,\omega^2\gamma_2\cosh\gamma_1\sinh\gamma_1 + \gamma_2{}^{1.5}\cosh\gamma_1\sinh\gamma_1$$
$$-\gamma_2^{1.5}\sinh\gamma_1\cos\gamma_2 + \gamma_1\sqrt{(e^2\omega^4+4\omega^2\,)}\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 - 0.5\gamma_2\sqrt{(e^2\omega^4+4\omega^2\,)}$$
$$\cosh\gamma_1\sinh\gamma_1 - .05\sqrt{(e^2\omega^4+4\omega^2\,)}\gamma_2\cos\gamma_2\sinh\gamma_1\,)/(\,\sqrt{(e^2\omega^4+4\omega^2\,)} + \gamma_2^5$$
$$\gamma_1\mathrm{e}^3\omega^6 - 4\gamma_2\omega^2\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4)}\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 + 2\omega^2\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4)}\gamma_2\beta_n\mathrm{e}$$
$$\omega^2\gamma_1\cos\gamma_2\sinh\gamma_1 - 14\mathrm{M_F}\omega^2\gamma_2\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4)}\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 + \mathrm{e}^2\omega^4\gamma_2$$
$$\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4)}\sinh\gamma_2\cos\gamma_2 - 3\beta_n\gamma_2\mathrm{e}^2\omega^4\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 + 5\mathrm{M_F}\mathrm{e}^3\omega^6 \qquad (۵۷\text{-}۳)$$
$$\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4)}\cos\gamma_2\sinh\gamma_1 - 3\beta_n\mathrm{e}^2\omega^4\gamma_1\cos\gamma_2\sinh\gamma_1 - \gamma_2\mathrm{e}^2\omega^4$$
$$\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4)}\cosh\gamma_1\sin\gamma_2 + 16\mathrm{M_F}\omega^4\mathrm{e}\cos\gamma_2\sinh\gamma_2\sin\gamma_1 + \beta_n\mathrm{e}\omega^2$$
$$\gamma_2\sinh\gamma_1\gamma_1 + 4\beta_n\mathrm{e}\omega^2\cosh\gamma_1\cos\gamma_2\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4\,)} + 2\beta_n\gamma_1\gamma_2\sinh\gamma_1$$
$$\sin\gamma_2\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4\,)} + 24\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4\,)}\omega^2 - 6\cos\gamma_2\sinh\gamma_1\beta_n\gamma_1$$
$$\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4\,)} + 6\cosh\gamma_1\sin\gamma_2\beta_n\gamma_2\sqrt{\omega^2(\,e^2\omega^2+4\,)} + \sinh\gamma_2\cos\gamma_2\mathrm{e}^3\omega^6\gamma_1\,)$$

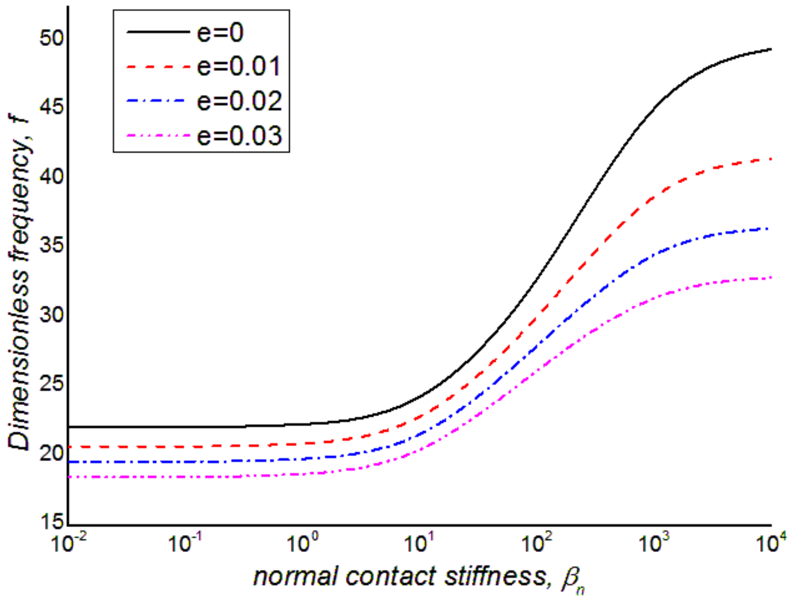


شکل۳-۱فرکانس تشدید بی‌بعد مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n به ازای مقادیر e متفاوت

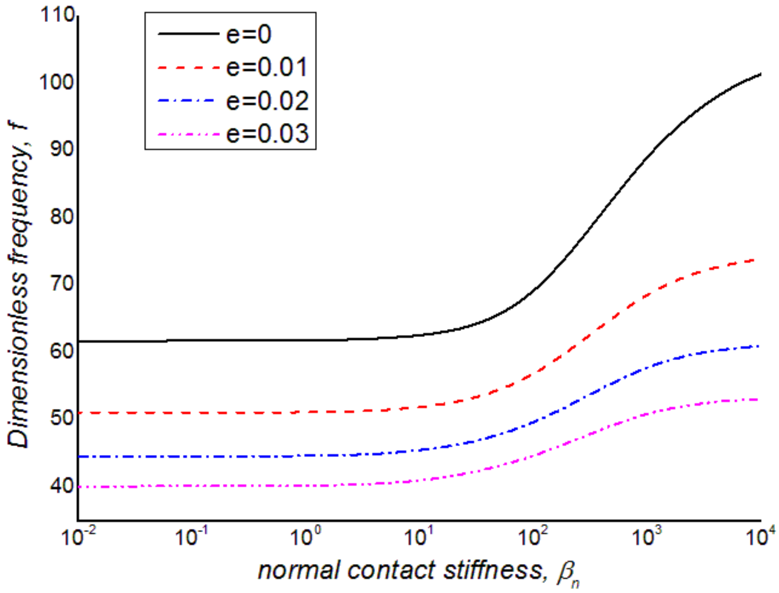
شکل (۳-۱) تغییرات در فرکانس تشدید مود اول را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n به ازای مقادیر مختلفی از پارامتر غیرموضعی، e نشان می‌دهد. با نگاهی به این دو شکل می‌توان دریافت که فرکانس تشدید به ازای تمام مقادیر e از یک نقطه ثابت در مقادیر بسیار کم از سختی تماسی عمودی، β_n آغاز شده و با افزایش سختی تماسی عمودی ابتدا روندی ثابت داشته و سپس به صورت ناگهانی افزایش یافته به طوری که به ازای مقادیر بسیار بالا از سختی تماسی عمودی به یک مقدار ثابت میل می‌نماید. برای تمامی مقادیر β_n، افزایش e باعث کاهش فرکانس تشدید می‌شود. به عبارتی فرکانس تشدید به‌دست آمده توسط نظریه غیرموضعی کمتر از مقدار متناظر به‌دست آمده از نظریه کلاسیک،$(e=0)$است. همچنین همانطور که در شکل (۳-۱) مشخص است، در مقادیر پایین β_n فرکانس تشدید مود اول به e بستگی ندارد و به ازای مقادیر مختلف e مقدار فرکانس تشدید یکسان می‌باشد.

شکل‌های شماره(۳-۲)، (۳-۳)و (۳-۴) به ترتیب تغییرات در فرکانس تشدید مودهای دوم، سوم و چهارم را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n به ازای مقادیر مختلفی از پارامتر غیرموضعی،

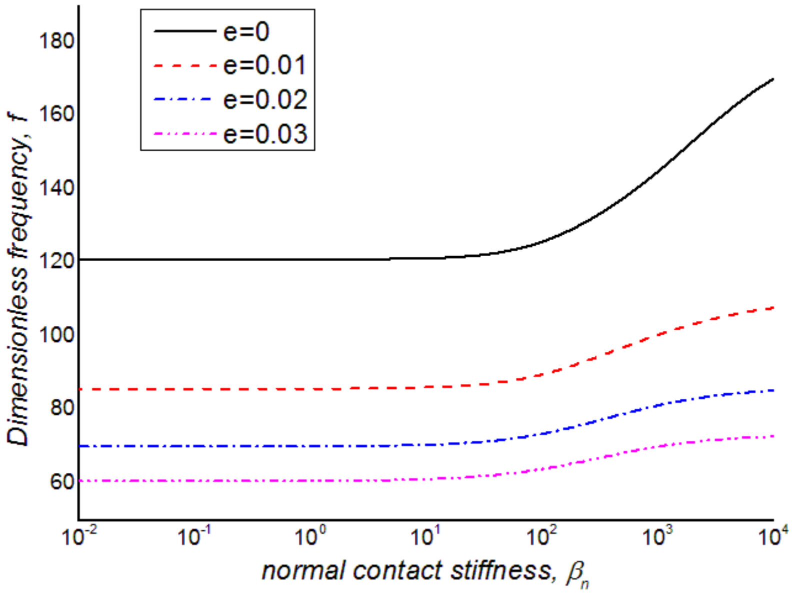
e نشان می‌دهند. روند تغییرات در فرکانس تشدید مودهای دوم، سوم و چهارم تقریبا مشابه مود اول می‌باشد با این تفاوت که در مودهای دوم، سوم و چهارم به ازای تمام مقادیر سختی تماسی عمودی با افزایش مقدار پارامتر غیرموضعی، e فرکانس تشدید کاهش می‌یابد.



شکل ۳-۲ فرکانس تشدید بی‌بعد مود دوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n به ازای مقادیر e متفاوت



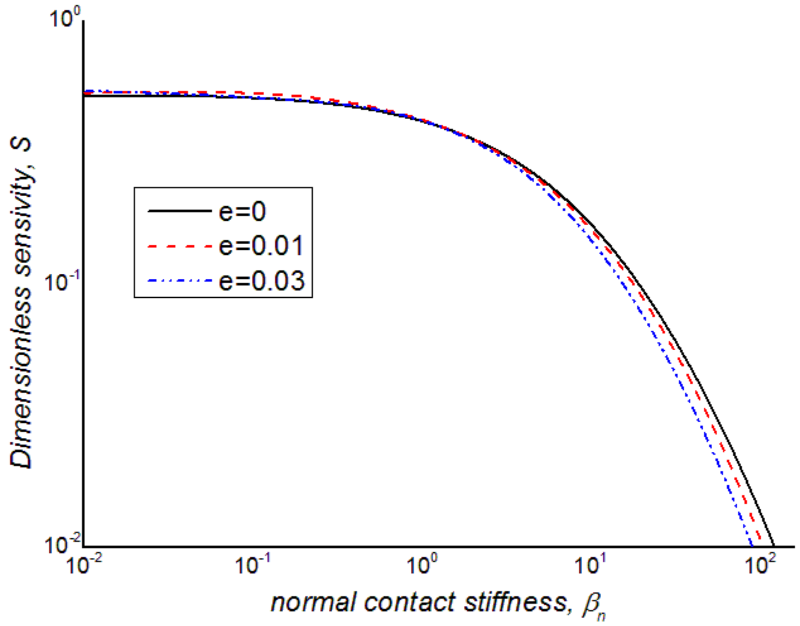
شکل۳-۳فرکانس تشدید بی‌بعد مود سوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_nبه ازای مقادیر e متفاوت



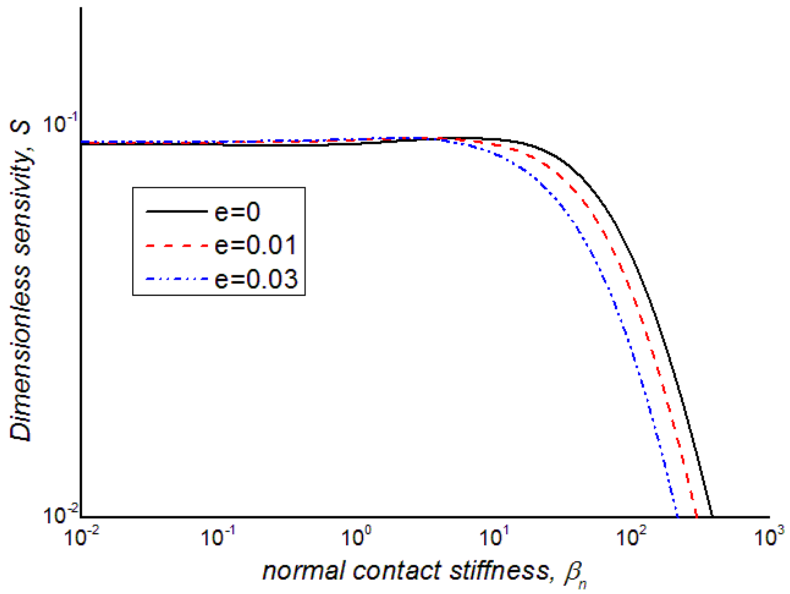
شکل۳-۴فرکانس تشدید بی‌بعد مود چهارم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_nبه ازای مقادیر e متفاوت

شکل‌های شماره(۳-۵) تا (۳-۸) به ترتیب تغییرات در حساسیت مودهای اول تا چهارم را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_nبه ازای مقادیر مختلفی از پارامتر غیرموضعی، eنشان می‌دهند.

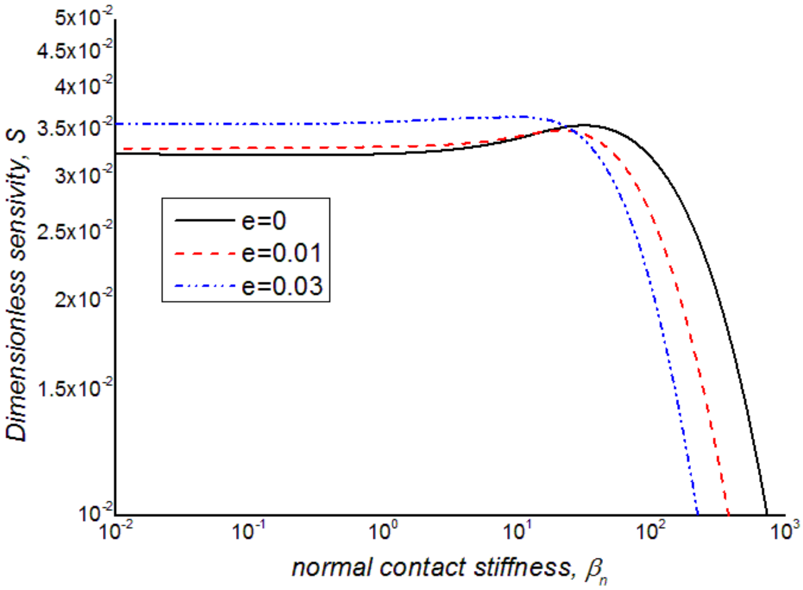
همانطور که در این شکل‌ها دیده می‌شود در مقادیر سختی کم(مواد نرم) با افزایش e حساسیت افزایش پیدا می‌کند و رفته‌رفته با افزایش مقادیر سختی این روند عکس می‌شود و با افزایش e مقدار حساسیت کمتر می‌شود.



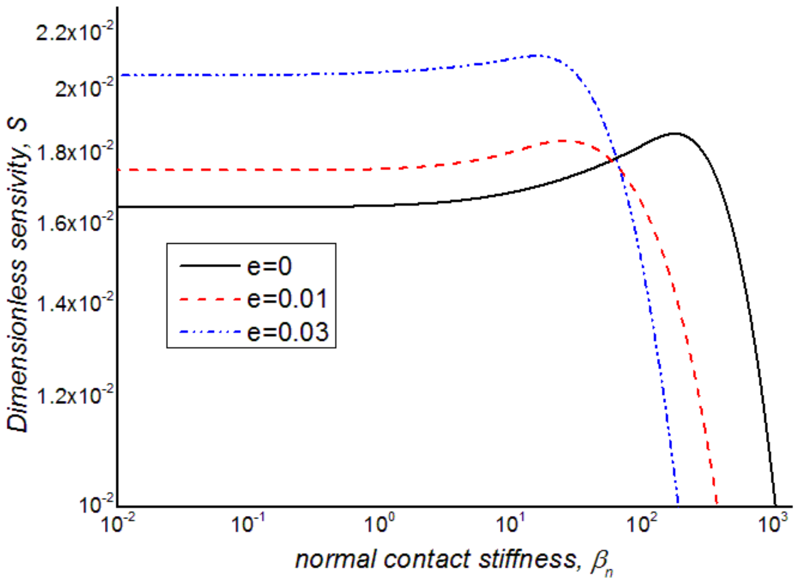
شکل۳-۵حساسیت مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر e متفاوت



شکل۳-۶حساسیت مود دوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر e متفاوت



شکل۳-۷حساسیت مود سوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر eمتفاوت



شکل۳-۸حساسیت مود چهارم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر eمتفاوت

۳-۳ بررسی تیر AFM از روش غیرموضعی در حالت کوپل‌شدگی:

در این حالت مشابه حالت کوپل‌شدگی کلاسیک علاوه بر ارتعاش خمشی، ارتعاش پیچشی نیز خواهیم داشت. برای به دست آوردن معادلات حرکت و شرایط مرزی از همیلتونین استفاده می‌کنیم.

میدان‌های جابه‌جایی برای خمش و پیچش مطابق روابط(۲-۳۵) و (۲-۳۷) به صورت زیر می‌باشد:

$$u_t = \beta\psi(y,z) \quad , \quad v_t = -z\beta x \quad , \quad w_t = y\beta x \tag{۳-۵۸}$$

$$u_b = -z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad , \quad v_b = 0 \quad , \quad w_b = w(x,t) \tag{۳-۵۹}$$

و میدان جابه‌جایی کلی به صورت زیر می‌باشد:

$$u = -z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} + \beta\psi(y,z) \quad , \quad v = -z\beta x \quad , \quad w = w(x,t) + y\beta x \tag{۳-۶۰}$$

انرژی کرنشی برای این حالت مشابه رابطه(۳-۲۱) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^L -M_b\delta\frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2}dx = -M\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_0^L + \int_0^L \frac{\partial M}{\partial x}\delta\frac{\partial w}{\partial x}dx = \\ &-M\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_0^L + \frac{\partial M}{\partial x}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\delta w dx \end{aligned} \tag{۳-۶۱}$$

همچنین انرژی پتانسیل ناشی از فنرهای k_n و k_L برابر است با:

$$V_k = \frac{1}{2}K_n(w-d\theta)^2\big|_{x=L} + \frac{1}{2}K_L(h^2+d^2)\theta^2\big|_{x=L} \tag{۳-۶۲}$$

انرژی پتانسیل ناشی از پیچش مشابه رابطه به صورت زیر می‌باشد[۳۵]:

$$V_t = \frac{1}{2}\int_v(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dv \tag{۳-۶۳}$$

از آنجا که $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = 0$ بنابراین:

$$V_t = \frac{1}{2}\int_v (\sigma_{ij}\varepsilon_{ij})dv = \frac{1}{2}\int_v (2\sigma_{xy}\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{xz}\varepsilon_{xz})dv \qquad (۶۴-۳)$$

از رابطه(۲-۷۰) کرنش‌ها به صورت زیر به دست آمدند:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\beta(\frac{\partial\psi}{\partial y} - z) = \frac{1}{2G}\frac{\partial\phi}{\partial z} \quad ، \quad \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\beta(\frac{\partial\psi}{\partial z} + y) = -\frac{1}{2G}\frac{\partial\phi}{\partial y} \qquad (۶۵-۳)$$

از رابطه(۲-۷۲) می‌دانیم $\frac{\partial\phi}{\partial z} = G\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial z})$ و $\frac{\partial\phi}{\partial y} = G\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial y})$ بنابراین:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial z}) \quad ، \quad \varepsilon_{xz} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial y}) \qquad (۶۶-۳)$$

از روابط (۳-۱۶)، (۳-۱۸) و (۳-۶۶) روابط تنش غیرموضعی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_{xy} = \mu\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x^2} + 2G\varepsilon_{xy} = \mu\frac{\partial^2\sigma_{xy}}{\partial x^2} + G\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial z})$$

$$\sigma_{xz} = \mu\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial x^2} + 2G\varepsilon_{xz} = \mu\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial x^2} - G\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial y})$$

(۶۷-۳)

با جایگزینی کرنش‌های به دست آمده از روابط(۳-۶۶) در رابطه (۳-۶۴) انرژی پتانسیل ناشی از پیچش سیستم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_t = \frac{1}{2}\int_v (\sigma_{xy}\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial z}) - \sigma_{xz}\frac{\partial\theta}{\partial x}(\frac{\partial\phi'}{\partial y}))dv \qquad (۶۸-۳)$$

رابطه فوق را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$V_t = \frac{1}{2}\int_0^L\int_A ((\frac{\partial\phi'}{\partial z})\sigma_{xy} - (\frac{\partial\phi'}{\partial y})\sigma_{xz})\frac{\partial\theta}{\partial x}dAdx \qquad (۶۹-۳)$$

با فرض:

$$R=\int_A ((\frac{\partial \phi'}{\partial z})\sigma_{xy}-(\frac{\partial \phi'}{\partial y})\sigma_{xz})dA \tag{۷۰-۳}$$

بنابراین انرژی پتانسیل کل سیستم برابر می‌شود با :

$$V=V_t+V_k=\frac{1}{2}\int_0^L R\frac{\partial \theta}{\partial x}dx+\frac{1}{2}K_n(w-d\theta)^2|_{x=L}+\frac{1}{2}K_L(h^2+d^2)\theta^2|_{x=L} \tag{۷۱-۳}$$

انرژی جنبشی سیستم در این حالت (روش غیرموضعی) همانند روش کلاسیک و رابطه(۲-۴۴) می‌باشد که قبلا به دست آمده است:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho I_p(\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t})^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L \rho A(x)(\frac{\partial w(x,t)}{\partial t})^2dx+\frac{1}{2}m_t(\frac{\partial(w(L,t)-d\theta(L,t))}{\partial t})^2$$
$$+\frac{1}{2}I_{0x}(\frac{\partial \theta}{\partial t})^2+\frac{1}{2}I_{0y}(\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial w}{\partial x}))^2$$

(۷۲-۳)

بنابراین تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta Vdt=\int_{t_1}^{t_2}R\delta\theta|_0^L\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{\partial R}{\partial x}\delta\theta dxdt+K_n\int_{t_1}^{t_2}(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta wdt$$
$$-K_n\int_{t_1}^{t_2}d(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta\theta dt+K_L(h^2+d^2)\int_{t_1}^{t_2}\theta(L,t)\delta\theta dt \tag{۷۳-۳}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta Tdt=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho I_p\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\delta\theta dxdt-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta wdxdt$$
$$-m_t\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta wdt-m_td^2\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2\theta(L,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt-\int_{t_1}^{t_2}I_{0x}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt$$
$$+m_td\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt+m_td\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2\theta(L,t)}{\partial t^2}\delta wdt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}I_{0y}\delta(\frac{\partial w}{\partial x})dt$$

(۷۴-۳)

با قراردادن روابط(۳-۶۱) ،(۳-۷۳) و(۳-۷۴)در اصل همیلتونین خواهیم داشت:

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(U(t)+V(t)-T(t)+W_{nc})dt=\int_0^t -M\delta(\frac{dw}{dx})|_0^L\ dt+\int_0^L\frac{\partial M}{\partial x}\delta w|_0^L\ dt-\int_0^t\int_0^L\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\delta w dx dt$$
$$\int_{t_1}^{t_2}R\delta\theta\ |_0^L\ dt-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\frac{\partial R}{\partial x}\delta\theta dx dt+K_n\int_{t_1}^{t_2}(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta w dt$$
$$-K_n\int_{t_1}^{t_2}d(w(L,t)-d\theta(L,t))\delta\theta dt+K_L(h^2+d^2)\int_{t_1}^{t_2}\theta(L,t)\delta\theta dt+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho I_p\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\delta\theta dx dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_0^L\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}\delta w dx dt+m_t\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta w dt+m_t d^2\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2\theta(L,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}I_{0x}\frac{\partial^2\theta(x,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt-m_t d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial t^2}\delta\theta dt-m_t d\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2\theta(L,t)}{\partial t^2}\delta w dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}I_{0y}\delta(\frac{\partial w}{\partial x})dt$$
(۷۵-۳)

که از رابطه فوق معادلات حرکت ارتعاش خمشی و پیچشی حاکم بر سیستم به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=0 \qquad (۷۶\text{-}۳)$$

$$-\rho I_p\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\frac{\partial R}{\partial x}=0 \qquad (۷۷\text{-}۳)$$

معادله حرکت ارتعاش خمشی مشابه روندی که در حالت بدون کوپل‌شدگی توضیح داده شد در نهایت مشابه رابطه(۳-۳۲) و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\rho A(x)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-\rho A(x)\mu\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^2\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}=0 \qquad (۷۸\text{-}۳)$$

اما برای به دست آوردن شکل نهایی معادله ارتعاش پیچشی روند زیر را انجام می‌دهیم.

با مشتق گیری از رابطه (۳-۷۰) داریم:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\int_A(\frac{\partial\phi'}{\partial z}\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}-\frac{\partial\phi'}{\partial y}\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x})dA \qquad (۷۹\text{-}۳)$$

از رابطه (۳-۷۷) و(۳-۷۹) داریم:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \rho I_p \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \int_A \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \phi'}{\partial y} \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} \right) dA \qquad (۸۰-۳)$$

با مشتق گرفتن نسبت به x از رابطه فوق داریم:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \rho I_p \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^2 \partial x} = \int_A \left(\frac{\partial \phi'}{\partial z} \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} \right) dA \qquad (۸۱-۳)$$

از طرفی با جایگزینی معادل σ_{xy}و σ_{xz}از روابط(۳-۶۷) در رابطه (۳-۷۰) داریم:

$$\begin{aligned} R &= \int_A [(\mu \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z}) \frac{\partial \phi'}{\partial z} - (\mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial y}) \frac{\partial \phi'}{\partial y}] dA = \\ & \int_A [(\mu \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} \frac{\partial \phi'}{\partial z} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} \frac{\partial \phi'}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi'}{\partial y}] dA \end{aligned} \qquad (۸۲-۳)$$

با قرار دادن رابطه(۳-۸۱) در رابطه فوق داریم:

$$R = \mu \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \int_A [\frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial \phi'}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \phi'}{\partial y}] dA = \mu \rho I_p \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^2 \partial x} + G \frac{\partial \theta}{\partial x} \int_A [(\frac{\partial \phi'}{\partial z})^2 + (\frac{\partial \phi'}{\partial y})^2] dA$$

(۸۳-۳)

با توجه به رابطه(۲-۷۳) در نهایت مقدار R به صورت زیر به دست می‌آید:

$$R = \mu \rho I_p \frac{\partial^3 \theta}{\partial t^2 \partial x} + GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad (۸۴-۳)$$

بنابراین:

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \mu \rho I_p \frac{\partial^4 \theta}{\partial t^2 \partial x^2} + GJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \qquad (۸۵-۳)$$

با قرار دادن معادله فوق در رابطه(۳-۷۷)، معادله حرکت نهایی ارتعاش پیچشی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$-\rho I_p \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}+\mu\rho I_p \frac{\partial^4\theta}{\partial t^2\partial x^2}+GJ\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}=0 \qquad (۸۶-۳)$$

همچنین از رابطه(۳-۷۵) شرایط مرزی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$w|_{x=0}=0 \qquad (۸۷-۳)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}|_{x=0}=0 \qquad (۸۸-۳)$$

$$\theta|_{x=0}=0 \qquad (۸۹-۳)$$

$$(-I_{0y}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}+M)|_{x=L}=0 \qquad (۹۰-۳)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}|_{x=L}=(K_n w-K_n d\theta+m_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-m_t d\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})|_{x=L} \qquad (۹۱-۳)$$

$$(R+m_t d^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-m_t d\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+K_L(h^2+d^2)\theta+K_n d^2\theta-K_n dw+I_{0x}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})|_{x=L} \qquad (۹۲-۳)$$

که با جایگزینی مقادیر M و Rاز روابط(۳-۳۱) و (۳-۸۴) سه شرط مرزی آخر در نهایت به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$(-I_{0y}\frac{\partial^3 w}{\partial t^2\partial x}+\rho A(x)\mu\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}-EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})|_{x=L}=0 \qquad (۹۳-۳)$$

$$(\rho A(x)\mu\frac{\partial^3 w(x,t)}{\partial x\partial t^2}-EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3})|_{x=L}=(K_n w-K_n d\theta+m_t\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-m_t d\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})|_{x=L} \qquad (۹۴-۳)$$

$$\begin{aligned}&(\mu\rho I_p\frac{\partial^3\theta}{\partial t^2\partial x}+GJ\frac{\partial\theta}{\partial x}+m_t d^2\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}-m_t d\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+K_L(h^2+d^2)\theta\\&+K_n d^2\theta-K_n dw+I_{0x}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2})|_{x=L}\end{aligned} \qquad (۹۵-۳)$$

و معادله حرکت بی‌بعد نیز مشابه حالت بدون کوپل‌شدگی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^4W(X)}{dX^4}+e\omega^2\frac{d^2W(X)}{dX^2}-\omega^2W(X)=0 \tag{۹۶-۳}$$

برای بی‌بعدکردن معادله پیچش(۳-۸۶) با استفاده از رابطه(۳-۳۷) داریم:

$$-\rho I_p\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}+\frac{\mu\rho I_p}{L^2}\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^4\theta}{\partial\tau^2\partial X^2}+\frac{GJ}{L^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial X^2}=0 \tag{۹۷-۳}$$

که با فرض $\theta(X,\tau)=\theta(X)e^{i\omega\tau}$ و ضرب معادله فوق در $\frac{L^2}{GJ}$داریم:

$$-\rho I_p\frac{EIL^2\omega^2}{GJL^4\rho A}\theta(X)-\frac{L^2\mu\rho I_p}{L^2GJ}\frac{EI}{L^4\rho A}\omega^2\frac{d^2\theta}{dX^2}+\frac{d^2\theta}{dX^2}=0 \tag{۹۸-۳}$$

پس از ساده کردن معادله فوق معادله حرکت ارتعاش پیچشی بی‌بعد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\omega^2}{rs}\theta(X)+(1-e\frac{\omega^2}{rs})\frac{d^2\theta}{dX^2}=0 \tag{۹۹-۳}$$

برای بی‌بعد کردن شرط مرزی(۳-۹۳) با جایگزینی I_{0y} از رابطه(۲-۴۰) و همچنین استفاده از روابط بی‌بعد(۳-۳۷) داریم:

$$(-(\frac{3}{5}m_th^2+\frac{3}{20}m_tr^2+m_tL^2)\frac{\partial^3w}{\partial t^2\partial x}-EI\frac{\partial^2w}{\partial x^2}+\rho A(x)\mu\frac{\partial^2w(x,t)}{\partial t^2})|_{x=L}=0 \tag{۱۰۰-۳}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}&-(\frac{3}{5}m_th^2\frac{1}{L}\frac{EI}{L^4\rho A}+\frac{3}{20}m_tr^2\frac{1}{L}\frac{EI}{L^4\rho A}+m_tL^2\frac{1}{L}\frac{EI}{L^4\rho A})\frac{\partial^3w}{\partial\tau^2\partial X}\\&+\rho A\mu\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^2w}{\partial\tau^2}-\frac{EI}{L^2}\frac{\partial^2w}{\partial X^2}=0\end{aligned} \tag{۱۰۱-۳}$$

با فرض $w(X,\tau)=W(X)e^{i\omega\tau}$ و $\theta(X,\tau)=\theta(X)e^{i\omega\tau}$ با ضرب طرفین رابطه فوق در $\frac{L^2}{EI}$ داریم:

$$(M_F+\frac{3}{20}M_FR^2+\frac{3}{5}M_FH^2)\omega^2\frac{dW}{dX}|_{X=1}+\frac{\mu}{L^2}\frac{d^2W}{d\tau^2}|_{X=1}-\frac{d^2W}{dX^2}|_{X=1}=0 \qquad (۱۰۲\text{-}۳)$$

در نهایت شرط مرزی چهارم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(M_F+\frac{3}{20}M_FR^2+\frac{3}{5}M_FH^2)\omega^2\frac{dW}{dX}|_{X=1}-(e\omega^2W(X)+\frac{d^2W(X)}{dX^2})|_{X=1}=0 \qquad (۱۰۳\text{-}۳)$$

برای بی‌بعدکردن شرط مرزی پنجم به دست آمده نیز با اعمال پارامترهای بی‌بعد در(۳-۹۴) داریم:

$$\begin{aligned}&(\frac{\rho A\mu}{L}\frac{EI}{L^4\rho A}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial\tau^2}-EI\frac{1}{L^3}\frac{\partial^3 w}{\partial x^3})|_{x=L}=(K_nw-K_nd\theta-m_t\omega^2\frac{EI}{L^4\rho A}w\\&+m_t\omega^2\frac{dEI}{L^4\rho A}\theta)|_{x=L}\end{aligned} \qquad (۱۰۴\text{-}۳)$$

با ضرب طرفین معادله فوق در $\frac{L^3}{EI}$ شرط مرزی پنجم بی‌بعد شده در نهایت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(-e\omega^2\frac{dW(X)}{dx}-\frac{d^3W}{dX^3})|_{X=1}=(\beta_n-M_F\omega^2)W|_{X=1}+(M_FD\omega^2-\beta_nD)\theta|_{X=1} \qquad (۱۰۵\text{-}۳)$$

برای بی‌بعدکردن شرط مرزی ششم نیز با اعمال پارامترهای بی‌بعد در رابطه(۳-۹۵) داریم:

$$\begin{aligned}&(-\mu I_p\frac{\omega^2EI}{L^4\rho AL}\frac{d\theta}{dX}+GJ\frac{1}{L}\frac{d\theta}{dX}-m_td^2\frac{EI}{L^4\rho A}\omega^2\theta+m_td\frac{EI}{L^4\rho A}\omega^2w+K_Lh^2\theta+K_Ld^2\theta\\&+K_nd^2\theta-K_ndw-\omega^2\theta(\frac{3}{5}m_th^2\frac{EI}{L^4\rho A}+\frac{3}{20}m_tr^2\frac{EI}{L^4\rho A}+m_td^2\frac{EI}{L^4\rho A}))|_{x=L}\end{aligned}$$

(۱۰۶-۳)

که با ضرب طرفین معادله فوق در $\frac{L}{EI}$ شرط مرزی ششم بی‌بعد شده در نهایت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$(s-\frac{e}{r}\omega^2)\frac{d\theta}{dX}|_{x=1}+(-M_F D^2\omega^2+\beta_t s+\frac{\beta_t s D^2}{H^2}+\beta_n D^2-\frac{3}{5}M_F H^2\omega^2-\frac{3}{20}M_F R^2\omega^2$$
$$-M_F D^2\omega^2)\theta|_{x=1}+(-\beta_n D+M_F D\omega^2)W|_{x=1}$$

(۱۰۷-۳)

مشابه قبل جواب معادله ارتعاش خمشی بی‌بعد(۳-۹۶) به صورت زیر می‌باشد:

$$W(X)=B_1\cosh(\gamma_1 X)+B_2\sinh(\gamma_1 X)+B_3\cos(\gamma_2 X)+B_4\sin(\gamma_2 X) \qquad (۱۰۸-۳)$$

که γ_1 و γ_2 نیز در رابطه (۳-۴۹) به دست آمدند.

معادله مفسر معادله ارتعاش پیچشی (۳-۹۹) نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$(1-e\frac{\omega^2}{rs})p^2+\frac{\omega^2}{rs}=0 \qquad (۱۰۹-۳)$$

بنابراین p^2 عبارت است از :

$$p^2=\frac{-\frac{\omega^2}{rs}}{(1-e\frac{\omega^2}{rs})}=\frac{\omega^2}{e\omega^2-rs} \qquad (۱۱۰-۳)$$

همچنین پاسخ معادله حرکت(۳-۹۹) نیز به صورت زیر است:

$$\theta(X)=C_1\cos pX+C_2\sin pX \qquad (۱۱۱-۳)$$

حال مشابه حالات قبل با اعمال شش شرط مرزی بی‌بعد به دست آمده درمعادلات (۳-۱۰۸) و (۳-۱۱۱)داریم:

$$\begin{aligned}
&B_1+B_3=0 \quad ، \quad B_2\gamma_1+B_4\gamma_2=0\\
&B_1I_1+B_2I_2+B_3I_3+B_4I_4=0 \quad ، \quad B_1I_5+B_2I_6+B_3I_7+B_4I_8+C_2I_9=0 \qquad (۱۱۲-۳)\\
&C_1=0 \quad ، \quad B_1I_{10}+B_2I_{11}+B_3I_{12}+B_4I_{13}+C_2I_{14}=0
\end{aligned}$$

که ضرایب I عبارتند از :

$$I_1 = (M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \gamma_1 \sinh \gamma_1 - (e\omega^2 + \gamma_1^2)\cosh \gamma_1$$

$$I_2 = (M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \gamma_1 \cosh \gamma_1 - (e\omega^2 + \gamma_1^2)\sinh \gamma_1$$

$$I_3 = -(M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \gamma_2 \sin \gamma_2 - (e\omega^2 - \gamma_2^2)\cos \gamma_2$$

$$I_4 = (M_F + \frac{3}{20} M_F R^2 + \frac{3}{5} M_F H^2)\omega^2 \gamma_2 \cos \gamma_2 - (e\omega^2 + \gamma_2^2)\sin \gamma_2$$

$$I_5 = -(e\omega^2 \gamma_1 + \gamma_1^3)\sinh \gamma_1 + (M_F \omega^2 - \beta_n)\cosh \gamma_1$$

$$I_6 = -(e\omega^2 \gamma_1 + \gamma_1^3)\cosh \gamma_1 + (M_F \omega^2 - \beta_n)\sinh \gamma_1$$

$$I_7 = (e\omega^2 \gamma_2 - \gamma_2^3)\sin \gamma_2 + (M_F \omega^2 - \beta_n)\cos \gamma_2$$

$$I_8 = (-e\omega^2 \gamma_2 + \gamma_2^3)\cos \gamma_2 + (M_F \omega^2 - \beta_n)\sin \gamma_2$$

$$I_9 = (\beta_n D - M_F D \ \omega^2)\sin p$$

$$I_{10} = (M_F D\omega^2 - \beta_n D)\cosh \gamma_1$$

$$I_{11} = (M_F D\omega^2 - \beta_n D)\sinh \gamma_1$$

$$I_{12} = (M_F D\omega^2 - \beta_n D)\cos \gamma_2$$

$$I_{13} = (M_F D\omega^2 - \beta_n D)\sin \gamma_2$$

$$I_{14} = (-M_F D^2 \omega^2 + \beta_t s + \frac{\beta_t s D^2}{H^2} + \beta_n D^2 - \frac{3}{5} M_F H^2 \omega^2 - \frac{3}{20} M_F R^2 \omega^2 - M_F D^2 \omega^2)\sin p + (s - \frac{e}{r}\omega^2)p \cos p \qquad (۱۱۳\text{-}۳)$$

رابطه (۳-۱۱۲) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & 0 & 0 \\ I_5 & I_6 & I_7 & I_8 & 0 & I_9 \\ I_{10} & I_{11} & I_{12} & I_{13} & 0 & I_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = A \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad (۱۱۴\text{-}۳)$$

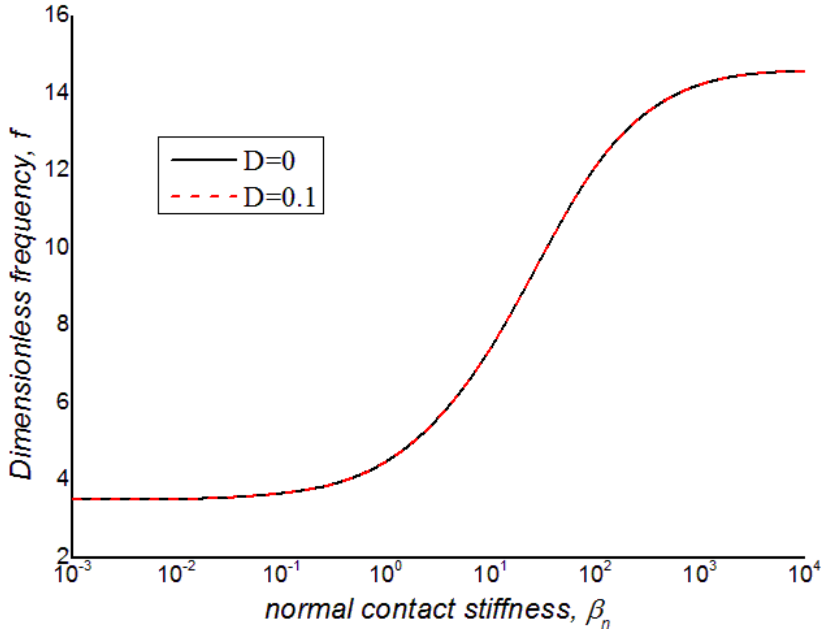
مشابه قبل برای اینکه معادله فوق جواب غیر صفر داشته باشد باید دترمینان ماتریس ضرایب، (ماتریس A) مساوی صفر باشد بنابراین معادله مشخصه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} C = det(A) = {} & \gamma_1(-I_3 I_{14} I_8 + I_3 I_9 I_{13} + I_1 I_{14} I_8 - I_1 I_9 I_{13} + I_{14} I_7 I_4 - I_{14} I_5 I_4 \\ & - I_9 I_{12} I_4 + I_9 I_{10} I_4) + \gamma_2(I_3 I_{14} I_6 - I_3 I_9 I_{11} - I_1 I_{14} I_6 + I_1 I_9 I_{11} - I_{14} I_7 I_2 + \\ & I_{14} I_5 I_2 + I_9 I_{12} I_2 - I_9 I_{10} I_2) \end{aligned} \qquad (۱۱۵\text{-}۳)$$

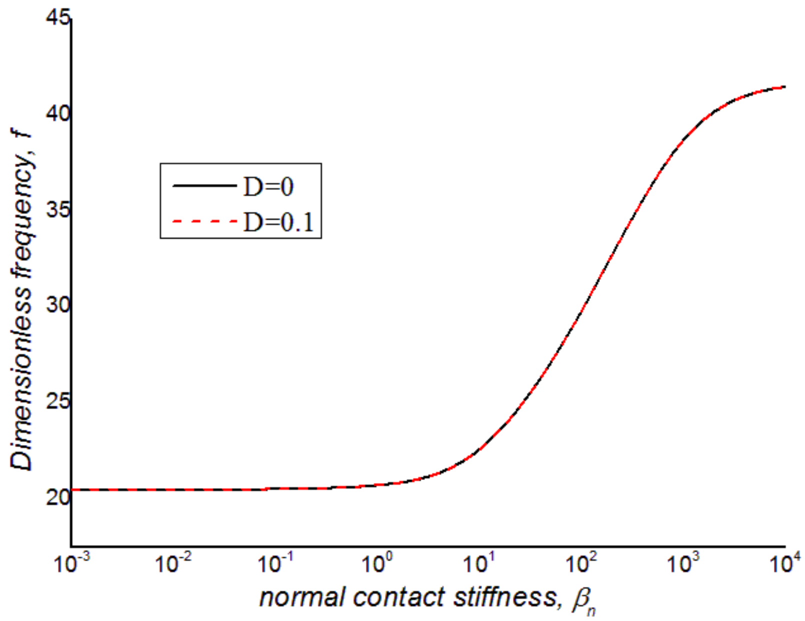
حساسیت نیز در این حالت مشابه حالت قبل از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$S = \frac{-\dfrac{\partial C}{\partial \beta_n}}{\dfrac{\partial C}{\partial \omega}} \qquad (۱۱۶\text{-}۳)$$

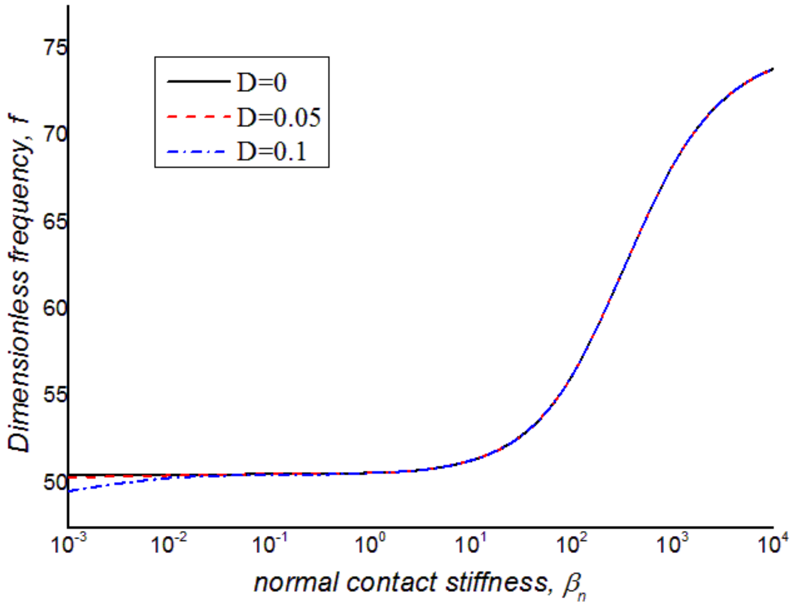
شکل‌های (۳-۹) تا (۳-۱۳) به ترتیب تغییرات در فرکانس تشدید مودهای اول تا پنجم را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی، β_n به ازای مقادیر مختلفی از پارامتر D برای $e = 0.01$ نشان می‌دهند. وبرای مقادیر عددی داده شده در جدول (۲-۱) رسم شده‌اند.



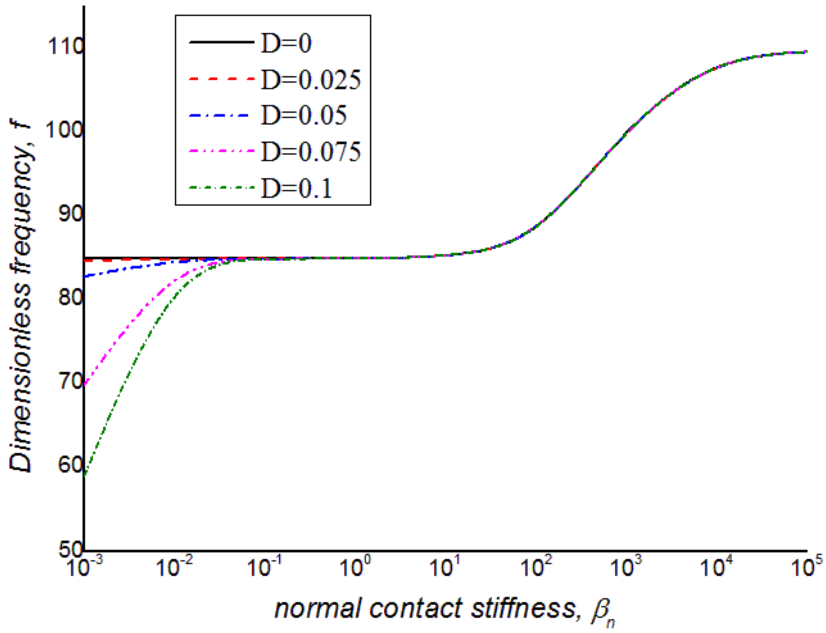
شکل۳-۹فرکانس تشدید بی‌بعد مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n به ازای مقادیر D متفاوت



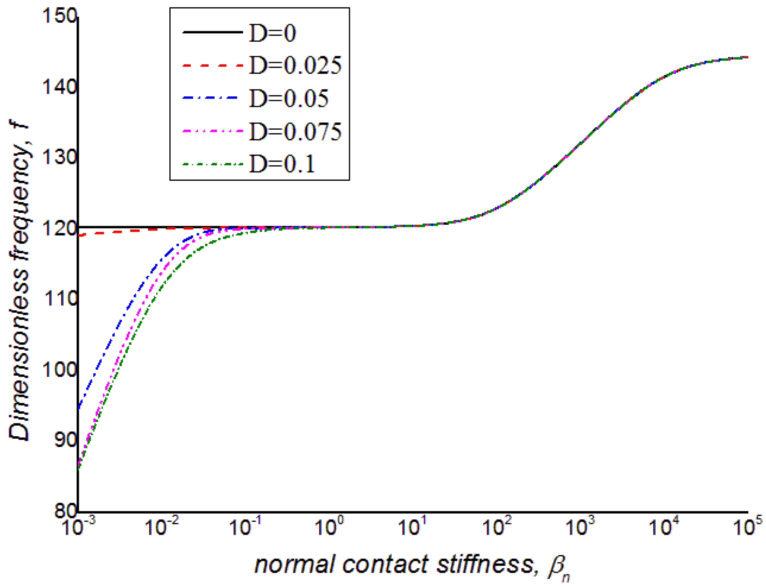
شکل۳-۱۰فرکانس تشدید بی‌بعد مود دوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n به ازای مقادیر D متفاوت



شکل۳-۱۱فرکانس تشدید بی‌بعد مود سوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n به ازای مقادیر D متفاوت

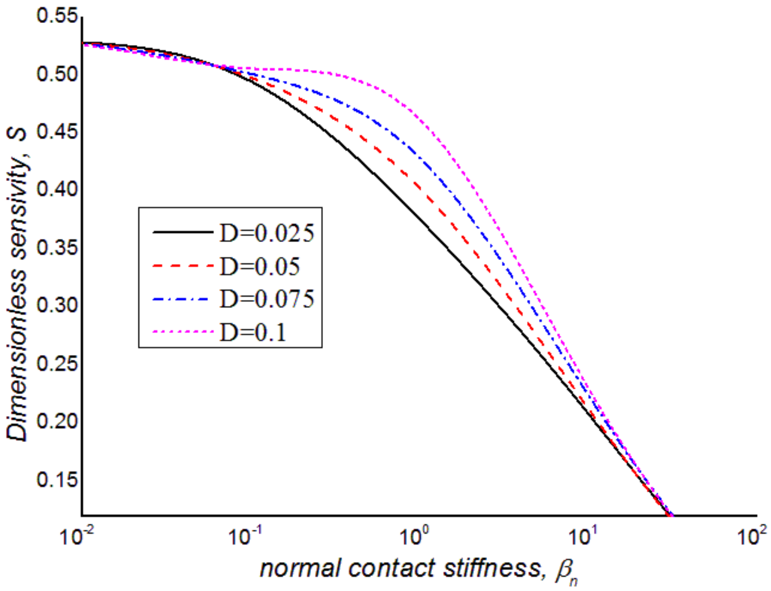


شکل۳-۱۲فرکانس تشدید بی‌بعد مود چهارم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n به ازای مقادیر D متفاوت



شکل۳-۱۳فرکانس تشدید بی‌بعد مود پنجم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n به ازای مقادیر D متفاوت

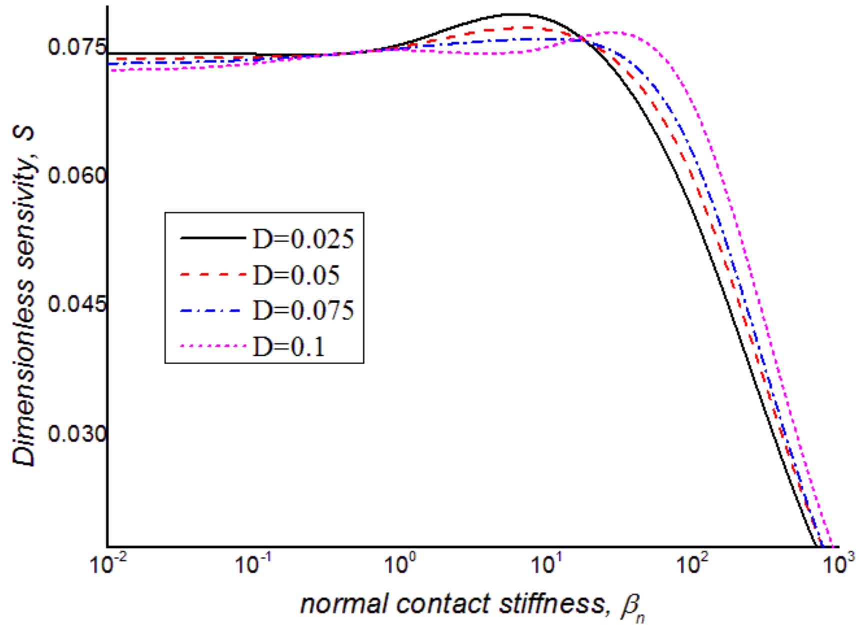
همانطور که از شکل(۳-۹)و(۳-۱۰) مشخص است تاثیر تغییرات D برروی فرکانس تشدید مود اول و دوم تقریبا ناچیز است. اما با نگاهی به شکل‌های(۳-۱۱)، (۳-۱۲) و (۳-۱۳) که به ترتیب برای مودهای دوم، سوم و چهارم رسم شده‌اند، مشاهده می‌کنیم در همه تاثیر پارامتر D قابل ملاحظه است.با دقت در این اشکال می‌توان فهمید که در سختی‌های پایین(مواد نرم‌تر) با افزایش مقدار D، به ازای سختی تماسی عمودی(β_n) یکسان، فرکانس تشدید کمتر می‌شود. اما با افزایش سختی رفته رفته اختلاف بین مقادیر فرکانس تشدید به دست آمده به ازای D های مختلف کمتر می‌شود، تا اینکه برای مقادیر بسیار بالای سختی این اختلاف به صفر می‌رسد.



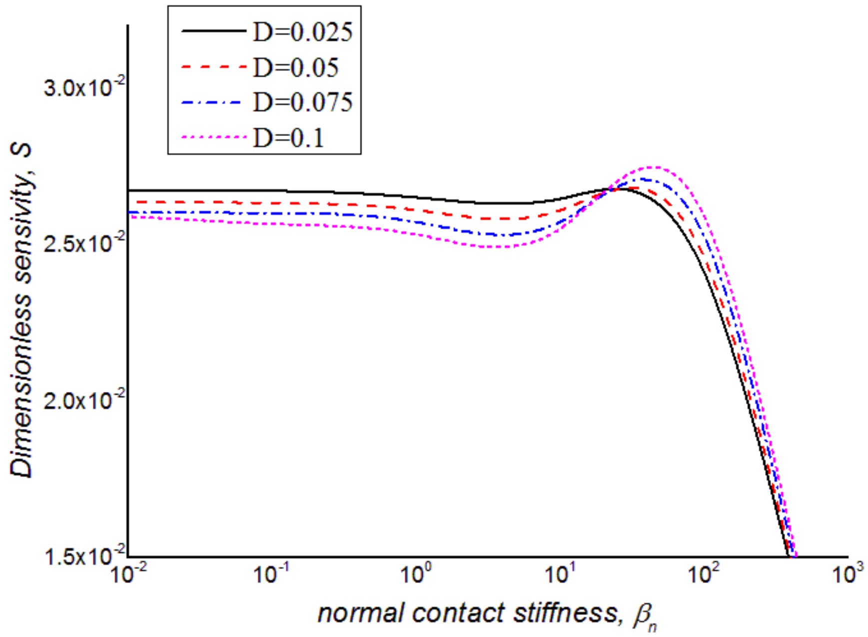
شکل۳-۱۴حساسیت مود اول به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر D متفاوت

شکل(۳-۱۴) حساسیت مود اول را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر D متفاوت، برای $e=0.01$ نشان می‌دهد. این شکل نشان می‌دهد که در بازه $10^{-2} < \beta_n < 10^{-1}$ با افزایش پارامتر D،حساسیت کاهش می‌یابد. البته این کاهش بسیار ناچیز می‌باشد. اما برای سختی‌های بالاتر $\beta_n > 10^{-1}$ نتیجه عکس می‌شود و با افزایش پارامتر D، حساسیت افزایش می‌یابد.

شکل(۳-۱۵) نیز تغییرات حساسیت مود دوم را به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی برای مقادیر D متفاوت نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است در سختی‌های پایین ($\beta_n < 10^{1.5}$)، با افزایش پارامتر D حساسیت کاهش می‌یابد، اما در مقادیر سختی بالاتر نتیجه عکس می‌شود و با افزایش پارامتر D حساسیت افزایش پیدا می‌کند.



شکل۳-۱۵حساسیت مود دوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر D متفاوت



شکل۳-۱۶حساسیت مود سوم به صورت تابعی از سختی تماسی عمودی β_n، به ازای مقادیر D متفاوت

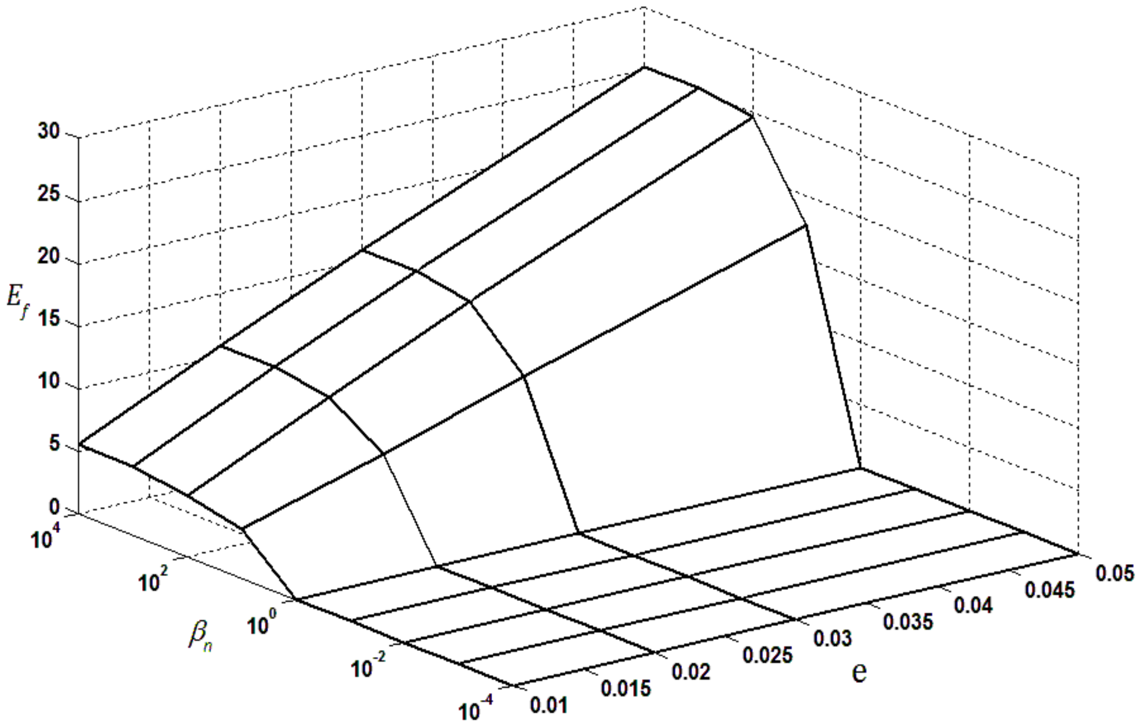
شکل(۳-۱۶) تغییرات حساسیت را برای مود سوم نشان می‌دهد. همانند مود دوم با دقت در این شکل می‌توان فهمید که در سختی‌های پایین، با افزایش پارامتر D حساسیت کاهش می‌یابد، اما در مقادیر سختی بالاتر نتیجه عکس می‌شود و با افزایش پارامتر D حساسیت افزایش پیدا می‌کند.

۳-۴ درصد خطای نسبی

برای مقایسه بهتر بین نتایج بدست آمده از دو نظریه کلاسیک $(e=0)$ و نظریه غیرموضعی $(e=0.01,0.02,\ldots,0.05)$، درصد خطای نسبی بین فرکانس به‌دست آمده از هر روش به ازای $D=0.1$ به صورت زیر ارائه شده است:

$$E_f=\left|\frac{\omega_{Classic}-\omega_{nonlocal}}{\omega_{nonlocal}}\right|\times 100\% \qquad (۳-۱۱۷)$$

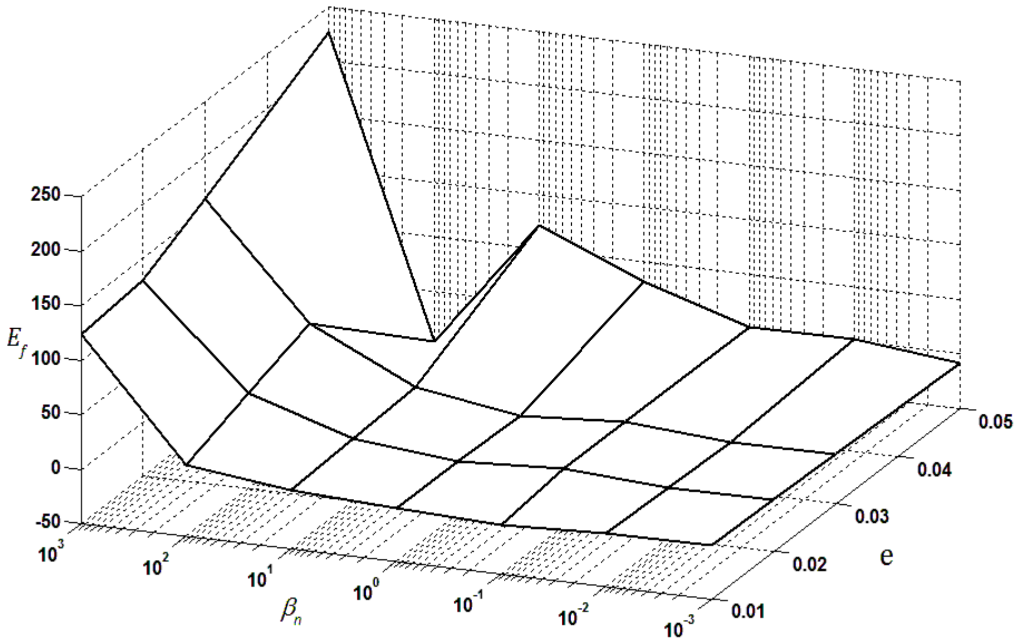
که در آن $\omega_{Classic}$ و ω_{nonloc} به ترتیب بیانگر فرکانس تشدید به دست آمده از نظریه کلاسیک و نظریه غیرموضعی می‌باشند.



شکل۳-۱۷درصد خطای نسبی مود اول بین فرکانس به‌دست آمده ازدو روش کلاسیک و غیرموضعی با $D = 0.1$

شکل (۳-۱۷) درصد خطای نسبی بین فرکانس به‌دست آمده از دو روش مذکور را برای مود اول به صورت تابعی از β_n و e نشان می‌دهد. همانطور که از شکل پیداست برای مقادیر سختی پایین ($\beta_n < 10^0$)درصد خطای نسبی با افزایش e ثابت و برابر با صفر می‌باشد اما برای مقادیر سختی بالا ($\beta_n > 10^0$)با افزایش e درصد خطای نسبی افزایش پیدا می‌کند تا اینکه به ازای $\beta_n = 10^4$ و $e = 0.05$، E_f به حداکثر مقدار خود یعنی ۲۵ می‌رسد.

شکل (۳-۱۸) نیز E_f را برای مود دوم نشان می‌دهد که برای تمامی مقادیر سختی با افزایش e درصد خطای نسبی افزایش پیدا می‌کند. البته روند افزایشی E_f برای سختی‌های بالا نسبت به سختی‌های پایین بیشتر می‌باشد. در این حالت نیز مشابه حالت قبل E_f به ازای $\beta_n = 10^4$ و $e = 0.05$ ، به حداکثر مقدار خود یعنی ۷۸ می‌رسد.

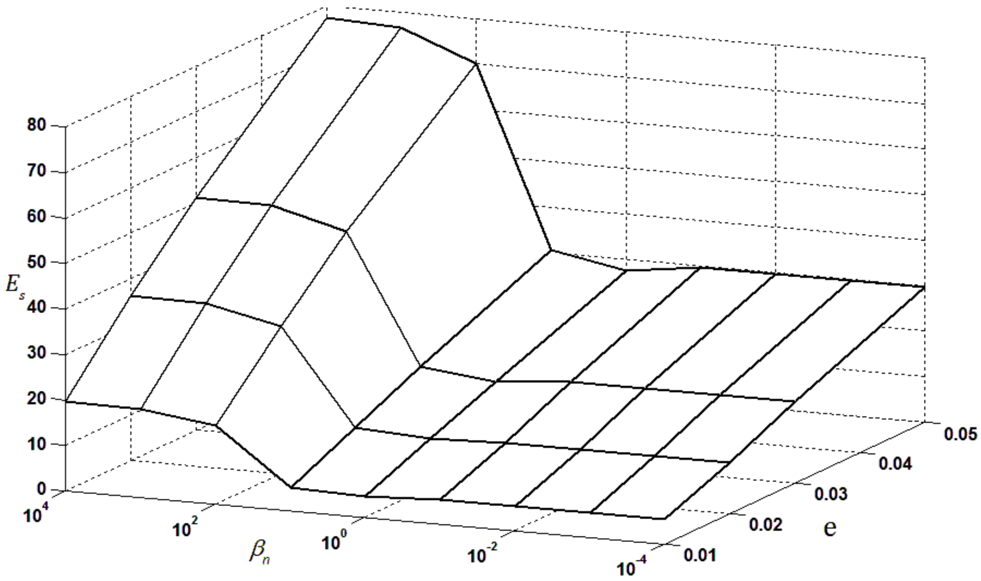


شکل۳-۱۸درصد خطای نسبی مود دوم بین فرکانس به‌دست آمده ازدو روش کلاسیک و غیرموضعی با $D = 0.1$

همچنین درصد خطای نسبی بین حساسیت به‌دست آمده از هر روش به ازای $D = 0.1$ به صورت زیر می‌باشد:

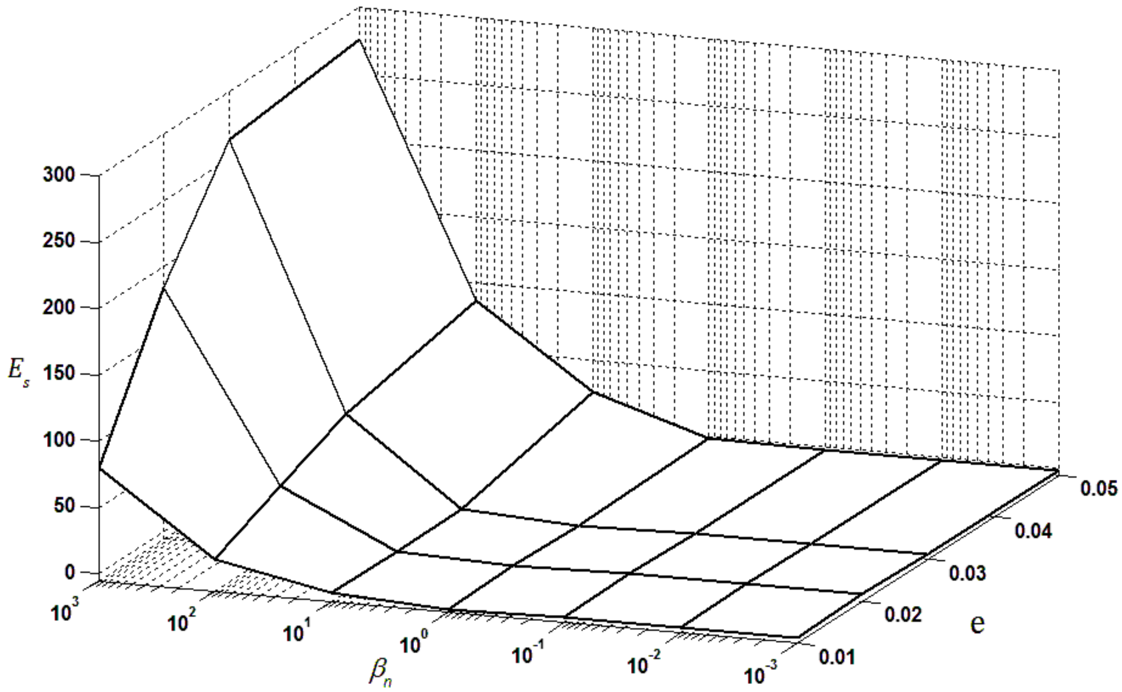
$$E_s = \frac{S_{Classic} - S_{nonlocal}}{S_{nonlocal}} \times 100\% \qquad (۳-۱۱۸)$$

که در آن $s_{Classic}$ و s_{nonlo} به ترتیب بیانگر حساسیت به دست آمده از نظریه کلاسیک و نظریه غیرموضعی می‌باشند.



شکل۳-۱۹درصد خطای نسبی مود اول بین حساسیت به‌دست آمده ازدو روش کلاسیک و غیرموضعی با $D = 0.1$

شکل(۳-۱۹) درصد خطای نسبی بین حساسیت به‌دست آمده از دو روش مذکور را برای مود اول به صورت تابعی از β_n و e نشان می‌دهد. همانطور که مشخص است در $\beta_n = 10^2$ و $e = 0.05$ مقدار E_f منفی می‌باشد ولی در سایر نقاط E_f مثبت می‌باشد. همچنین با افزایش e روند افزایشی E_f در سختی-های بالا نسبت به سختی‌های پایین بیشتر می‌باشد. بیشترین مقدار E_f برابر ۲۳۰ است که در $e = 0.05$ و $\beta_n = 10^4$ رخ داده است.



شکل۳-۲۰درصد خطای نسبی مود دوم بین حساسیت به‌دست آمده از دو روش کلاسیک و غیرموضعی با $D = 0.1$

درصد خطای نسبی حساسیت برای مود دوم نیز که در شکل (۳-۲۰) نشان داده شده است برای مقادیر سختی پایین صفر می‌باشد و برای سختی‌های بالا با افزایش eروند افزایشی داشته و مشابه حالت قبل در $e = 0.05$و $\beta_n = 10^4$به حداکثر مقدار خود یعنی ۲۷۰ می‌رسد.

فصل چهارم

نتیجه‌گیری و پیشنهادها برای مطالعات آینده

۴-۱ نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه ارتعاشات تیر یکسرگیردار دارای سطح مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار گرفت. ارتعاشات خمشی تیر در حالتی که نوک دقیقا در مرکز تیر قرار دارد با استفاده از دو روش کلاسیک و غیرموضعی بررسی شد. همچنین ارتعاشات خمشی برای حالتی که نوک دقیقا در مرکز تیر قرار ندارد با استفاده از دو روش فوق تحلیل و بررسی شد. در هر دو حالت با نوشتن تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل تیر و با استفاده از اصل همیلتونین معادلات حرکت و شرایط مرزی را به دست آوردیم. در ادامه نیز معادلات مشخصه و معادلات مربوط به حساسیت استخراج و رابطه‌ای کلی برای فرکانس تشدید و حساسیت ارائه شد. با رسم نمودارهای مربوط به هر حالت، به تحلیل فرکانس تشدید و حساسیت پرداختیم. تأثیر پارامتر هندسی D بر فرکانس تشدید و حساسیت ارتعاشات خمشی تیر میکروسکوپ نیرواتمی بر مبنای هر دو نظریه کلاسیک و غیرموضعی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که تاثیر این پارامتر در هر دو روش کلاسیک و غیرموضعی قابل ملاحظه می‌باشد. از نتایج به دست آمده از روش کلاسیک در حالت کوپل‌شدگی مشخص شد که تاثیر پارامتر D بر روی فرکانس تشدید دو مود اول تقریبا ناچیز است اما در مودهای سوم، چهارم و پنجم در مقادیر سختی پایین، با افزایش مقدار D فرکانس تشدید کاهش پیدا می‌کند. در ادامه در فصل سوم به بررسی حالت کوپل‌شدگی با استفاده از روش غیرموضعی پرداختیم. هر چند حجم معادلات بالا و محاسبات با استفاده از این روش بسیار پیچیده بود اما نتایج خوبی به دست آمد.

با رسم نمودارهای فرکانس تشدید پنج مود اول به ازای سختی تماسی عمودی متفاوت و برای مقادیر D متفاوت ، مشخص شد در حالت غیرموضعی نیز همانند حالت کلاسیک تاثیر پارامتر D بر روی فرکانس تشدید دو مود اول تقریبا ناچیز است اما در مودهای سوم، چهارم و پنجم در مقادیر سختی پایین، با افزایش مقدار D فرکانس تشدید کاهش پیدا می‌کند.

بنابراین در نظرگرفتن پارامتر D و لحاظ کردن آن در محاسبات باعث می‌شود که فرکانس تشدید و حساسیت به‌دست آمده به مقدار واقعی خود نزدیکتر شوند. همچنین نتایج نشان می‌دهد در یک (D) یکسان با افزایش مقدار پارامتر غیرموضعی (e)، فرکانس تشدید مود اول به ازای مقادیر سختی بالا و فرکانس تشدید مود دوم،سوم و چهارم به ازای تمامی مقادیر سختی،کاهش پیدا می‌کند.

همچنین مشاهده کردیم در حالت کلی، در شرایطی که اختلاف بین دو نظریه کلاسیک و غیرموضعی قابل ملاحظه است، استفاده از نتایج حاصل از نظریه غیرموضعی، به علت دقت بالاتر نسبت به نظریه کلاسیک توصیه می‌شود.

۴-۲ مطالعات آینده

در آینده می‌توان با استفاده از روش‌های دقیقتر نسبت به روش غیرموضعی از جمله روش گرادیان کرنش[1] و روش تنش-کوپل[2] به بررسی ارتعاشات تیر میکروسکوپ نیرواتمی در حالت کوپل‌شدگی پرداخت. همچنین در آینده می‌توان حالت کوپل‌شدگی را برای سایر مودهای تیرمیکروسکوپ نیرو اتمی از جمله مود خمش جانبی مورد بررسی قرار داد.

---

[1] strain gradient
[2] couple stress

مراجع و منابع

[1] Alexander S., Hellemans L., Marti O., Schneir J., Elings V., Hansma P.K., Longmiro M. and Gurley J., (1989) "An atomic-resolution atomic-force microscope implemented using an optical lever" *J. Appl. Phys.* 65(1), pp 164-167.

[2] Baselt D., (1993), Ph.D. thesis, "How AFM works from The tip-sample interaction in atomic force microscopy and its implications for biological applications ", California Institute of Technology.

[3] Binnig G. , Quate C.F. and Gerber C., (1986) "Atomic force microscope" *Phys. Rev.Lett*. 56, pp 930-933.

[4] Holmberg K. and Matthews A., (1994)"Coatings Tribology: Properties, Techniques and Applications in Surface Engineering" *Elsevier*, New York.

[5] Liu H. and Bhushan B., (2004) "Nanotribological characterization of digital micromirror devices using an atomic force microscope" *J.Ultramicroscopy*, 100, pp 391–412.

[6] Farshidianfar A., Mahdavi M.H. and Dalir H., (2009)"Flextural Vibration of Atomic Force Microscope Cantilever with Dimensional Effects", *Amirkabir Mechanical Engineering*, Vol. 41, No. 1.

[7] Mazeran P.E. and Loubet J.L., (1999) "Normal and lateral modulation with a scanning force microscope, an analysis: implication in quantitative elastic and friction imaging". *Tribology Letters*, pp 1573.

[8] Garcia R. and Perez R., (2002) "Dynamic atomic force microscopy methods". *Surface Science Report* 47, pp 197.

[9] Chang W.J., Fang T.H. and Weng C.I., (2004) "Inverse determination of the cutting force on nanoscale processing using atomic force microscopy" *J. Nanotechnology*, 15, pp 427–430.

[10] Davis Z.J., Abadal G., Hansen O., Borise X., Barniol N., Perez-Murano F. and Boisen A., (2003) "AFM lithography of aluminum for fabrication of nanomechanical systems", *J. Ultramicroscopy*, 97, pp 467–472.

[11] Eringen A.C., (1972)"Nonlocal polar elastic continua". *International Journal of Engineering Science*, 10, pp 1–16.

[12] Eringen A.C., (1983)"On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves" *Journal of Applied Physics*, 54, pp 4703–4710.

[13] Eringen A.C. and Edelen D.G.B., (1972) "On nonlocal elasticity". *International Journal of Engineering Science,* 10, pp 233–248.

[14] wang C.M., Zhang Y.Y., Ramesh S.S. and Kitipornchai S., (2006) "Buckling analysis of micro- and nano-Rods/tubes based on nonlocal Timoshenko beam theory" *J.phys . D:Appl*. Phys. 39,pp 3904-3909.

[15] Peddieson J., Buchanan G.R. and McNitt R.P., (2003)"Application of nonlocal continuum models to nanotechnology" *International Journal of Engineering Science.* 41, pp 305–312.

[16] Zhang Y.Q., Liu G.R. and Xie X.Y., (2005)"Free transverse vibrations of double-walled carbon nanotubes using a theory of nonlocal elasticity" *Phys. Rev*. B 71.

[17] Reddy J.N., (2007)"Nonlocal theories for buckling bending and vibration of beams" *International Journal of Engineering Science*, 45, pp 288–307.

[18] Anthoine A., (2000) "Effect of couple-stresses on the elastic bending of beams" *International Journal of Solids and Structures*. 37,pp 1003–1018.

[19] Nowinski J.L., (1984) "On a nonlocal theory of longitudinal waves in an elastic circular bar" *Acta Mech*, 52, pp 189-200.

[20] Kiani K. and Mehri B., (2010) "Assessment of nanotube structures under a moving nanoparticle using Nonlocal beam theories". *J. sound and vib*. 329, pp 2241-2264.

[21] Ansari R. and Sahmani S., (2012) "Small scale effect on Vibrational responseof single-walled Carbon nanotubes With different boundary conditions based on nonlocal beam models" *J.Commun Nonlinearsci nummer simulate,*17, pp 1965-1979.

[22] Kiani K. and Wang Q., (2012) "On the interaction of a single-walled carbon nanotube with a moving nanoparticle using nonlocal Rayleigh, Timoshenko, and higher-order beam theories"*European Journal of Mechanics A/Solids* , 31, pp 179-202.

[23] Lim C.W., Li C. and Yu J.L., (2012) "Free torsional vibration of nanotubes based on nonlocal stress theory" *Journal of Sound and Vibration*, 331, pp 2798–2808.

[24] Turner J.A. and Wiehn J.S., (2001) "Sensitivity of flexural and torsional vibration modes of atomic force microscope cantilevers to surface stiffness variations" *J. Nanotechnology*, 12, pp 322–330.

[25] Chang W.J., (2002) "Sensitivity of vibration modes of atomic force microscope cantilevers in continuous surface contact", *J. Nanotechnology,* 13, pp 510-514.

[26] Wu T.S., Chang W.J. and Hsu J.C., (2004)"Effect of tip length and normal and lateral contact stiffness on the flexural vibration responses of atomic force microscope cantilevers", *J. Microelectronic Engineering*, 71, pp 15-20.actuated microplates”, *J. Micromech. Microeng.* 14, pp 900–906.

[27] Lee H.L., Chang W.J. and Yang Y.C., (2005) "Flexural sensitivity of a V-shaped cantilever of an atomic force microscope" *J. Materials Chemistry and Physics,* 92, pp 438–442.

[28] Mahdavi M.H., Farshidianfar A., Tahani M., Mahdavi S. and Dalir H., (2008), "A more comprehensive modeling of atomic force microscope cantilever", *J. Ultramicroscopy*, 109, pp 54–60**.**

[29] Chang W.J., Lee H.L. and Chen T.Y.F., (2008), "Study of the sensitivity of the first four flexural modes of an AFM cantilever with a sidewall probe", *J. Ultramicroscopy*, 108, pp 619–624.

[30] Reinstaedtler M., (2003) "Imaging of flexural and torsional resonance modes of atomic force microscopy cantilevers using optical interferometry", pp 532–535.

[31] Song Y. and Bhushan B., (2006) "Coupling of cantilever lateral bending and torsion in torsional resonance and lateral excitation modes of atomic force microscopy" *journal of Applied physics*, 99, 094911.

[32] Chang W.J. and Lee H.L., (2008)"Coupled lateral bending–torsional vibration sensitivity of atomic force microscope cantilever", pp 707-711.

[33] Wang W.R. and Lin S.M., (2009) "Frequency shifts and analysis of AFM accompanying with coupled flexural–torsional motions" *International Journal of Solids and Structures* ,46, pp 4231–4241.

[34] Hagedorn P., (2007), "*Vibrations and Waves in Countinous Mechanical systems*", pp 124.

[35] Singiresu S.Rao., (2007), "Vibration of Continuous Systems", University of Miami ,pp.274.

[36] Reddy J.N., (2010) "Nonlocal nonlinear formulations for bending of classical and shear deformation theories of beams and plates", *International Journal of Engineering Science*, 48, pp 1507-1518.

[37] Lai W.M., Krempl E. and Rubin D., (2010) "*Introduction to Continuum Mechanics*", 4th edition.

[38] Thai H.T., (2012) "A nonlocal beam theory for bending, buckling, and vibration of nanobeams", *International Journal of Engineering Science* ,52 , pp 56–64.

[39] Kahrobaiyan M.H., (2011)"Torsion of Strain gradient bars", *International Journal of Engineering Science,* 49 , pp 856-866.

[40] Meriam L.G. and Kraige L.G.(2003) "*Dynamics*",Mahjoob S., 5th Edition, Sepahan, Tehran, pp 774.

[41] Gorman D. J. (1975) "*Free Vibration Analysis of Beams and Shafts*" _John Wiley, New York.

[42] Timoshenko S. and Goodier J.N.(1951)*"Theory of Elasticity"* McGraw-Hill Book company, New York.

[43]Boresi A.p. and Chong K.p.(2000)*"Elasticity in engineering mechanics"*,second edition, University of Wyoming.

Abstract

Atomic Force Microscope (AFM) is one of the powerful and useful tools in nanoscale science with applications from surface topography and characterization differents material. In this paper Vibrations of Cantilever beam is Considered, which tip isn't matching on the center of cross-sectional exactly.The Equation of motion and boundary conditions are considered using nonlocal theory and Hamiltons principle.The General formulation for resonance frequency and sensivity is obtained. The comparison of the present results and The state which The tip matches on the center of cross-sectional exactly is presented.The Results show that the effect of distance from center of cross-sectional is very important and should be considered for achiving The better results.

Keywords
Atomic Force Microscope, Analysis of resonance frequency, sensivity, normal contact stiffness, nonlocal theory.

Shahrood University of Technology

Faculty of mechanical engineering

Vibration Analysis of Atomic Force microscope cantilever, in the coupled state, using nonlocal theory

Mohsen ahmadi

Supervisor: Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

January 2014