بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

تحلیل عددی و ریاضی استوانه جدار نازک تحت بار متحرک

دانشجو : فریبرز فرزان

استاد راهنما :

دکتر ایپکچی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

آبان ۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : طراحی کاربردی

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای/ خانم ....

تحت عنوان:

تحلیل عددی و ریاضی استوانه جدار نازک تحت بار متحرک

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

باتشکر ازتمامی اساتید دوران تحصیلم به ویژه دکتر ایپکچی که ازآنان بسیار آموخته ام و شاگردی شان تا ابد مایه ی مباهات من خواهدبود .

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

آبان ۱۳۸۷

چکیده

در این تحقیق، پاسخ دینامیکی یک استوانه جدارنازک به بار متحرک باروش ریاضی و عددی به دست آمده است .روش ریاضی شامل سری فوریه و حل موج است. درروش عددی از نرم افزار آباکوس برای تحلیل استفاده شده است .علاوه بر آن یک کد اجزای محدود برای تحلیل مساله فراهم شده است .تعیین جابجایی برحسب مکان و زمان، بررسی اثرسرعت بار متحرک و تغییرات پاسخها با ضخامت مخزن از جمله پارامترهایی است که در این روش ها مطالعه شده است که مقایسه نتایج هم خوانی خوبی را بین روش های مختلف نشان می دهد.

فصل اول :کلیات و مرور مطالب ۱
۱-۱-کلیات ۲
الف)تئوری غشایی ۴
ب) تئوری خمشی ۴
ج) تئوری تغییر شکل برشی ۴
۱-۲ مرور تحقیقات انجام شده در زمینه بار متحرک ۵
فصل دوم: روش های ریاضی تحلیل پوسته ها ۹
۲-۱ روش حل موج (روش هرمن میرسکی) ۱۰
تئوری مسئله ۱۲
اصل هامیلتون ۱۳
استخراج دستگاه معادلات ۲۰
حل معادلات ۲۲
پیوستگی ۲۸
بارگذاری ۳۱
بررسی دامنه ارتعاشات ۳۵
بررسی نتایج ۳۶
جمع بندی ۳۸
ضریب تصحیح برشی ۳۸
۲-۲ روش تحلیل با استفاده از سری فوریه ۴۳
تئوری و حل معادلات ۴۳
حل در منطقه تحت فشار(منطقه I) ۴۵
شرایط اولیه در منطقه I ۴۶

حل در منطقه II	۴۷
حالت تشدید	۴۸
مقایسه نسبت تغییر شکل دینامیکی به استاتیکی	۵۰
۲-۳ تحلیل مخزن استوانه ای جدار نازک تحت بارمتحرک با استفاده از روش انتگرال مختلط کارسون لاپلاس	۵۲
مقدمه	۵۲
تئوری مسئله	۵۲
انتخاب تعداد جملات سری	۵۶
حل نمونه	۵۸
فصل سوم- تحلیل عددی پوسته نازک تحت بار متحرک	۵۹
۳-۱ – تحلیل عددی پوسته های نازک تحت بار متحرک با روش گالرکین	۶۰
روش حل	۶۰
توضیحاتی در مورد برنامه ها	۶۵
۳-۲- روش تحلیل پوسته های نازک تحت بار متحرک به کمک نرم افزار	۷۱
معرفی کلی نرم افزار	۷۱
صورت مسئله	۷۲
انتخاب المان	۷۲
مش بندی	۷۳
تعریف بار	۷۴
شرایط مرزی	۷۵
فصل ۴ – بررسی نتایج	۷۶
نتایج در وجوه درونی و بیرونی پوسته	۷۹

دلایل خطا	۸۵
پیشنهادات	۸۵
ضمایم و پیوستها	۸۶
فهرست مراجع	۹۴
واژگان	۹۷

فصل اول

کلیات ومرور مطالب

۱-۱-کلیات

بارهای متحرک بارهایی هستند که مختصات مکان اثرشان با زمان متغیر است. این بارها به دو دسته گسترده ومتمرکز تقسیم می شوند. بارهای متمرکز با استفاده از تابع دلتای دیراک[۱] شبیه سازی میشوند:

[۲۸]

$$\delta(t)=\begin{cases}\lim\limits_{\varepsilon\longrightarrow 0}\dfrac{1}{\varepsilon} & -\dfrac{\varepsilon}{2}<t<\dfrac{\varepsilon}{2}\\ 0 & else\end{cases} \qquad (۱-۱)$$

تابع دیراک برای شبیه سازی بارهای ناگهانی و ضربه ها وبارهای متمرکز استفاده میشود.میتوان نشان داد[۲۸] :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1 \qquad (۲-۱)$$

بعنوان نمونه از این نوع بارگذاری میتوان از حرکت چرخ اتومبیل روی جاده یاچرخ قطار روی ریل نام برد.

برای بارهای گسترده از تابع پله ای یا هویساید[۲] استفاده میشود. این تابع باررا به شکل زیر تعریف میکند:

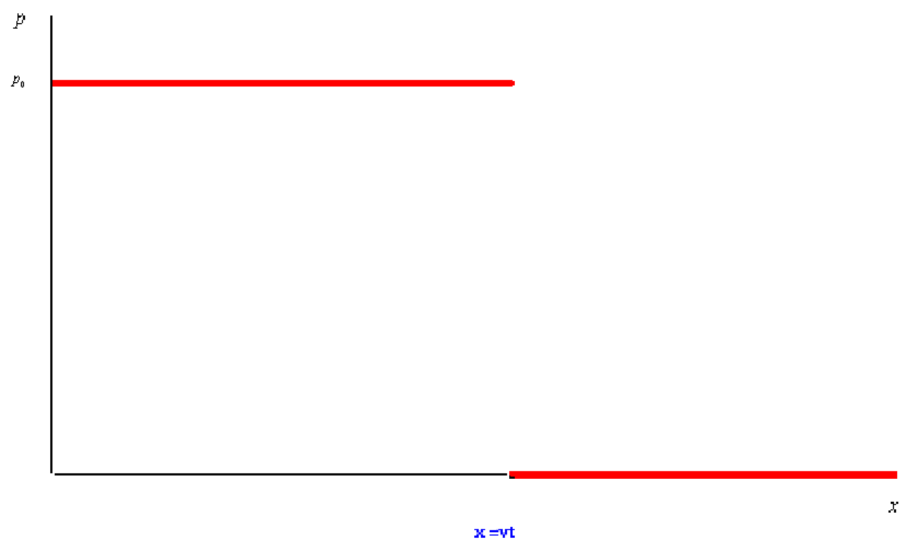
$$P=P_0\left[1-H\left(x-vt\right)\right] \qquad (۳-۱)$$

و مفهوم آن[۲۸]:

$$H(x-vt)=\begin{cases}0 & x>vt\\ 1 & x<vt\end{cases} \qquad (۴-۱)$$

۱ -DIRAC
۲ -HEAVISIDE

درشکل ۱-۱ تعریف تابع پله ای مشاهده میشود:



شکل۱-۱- تابع بارگسترده متحرک

پوسته[۱] را میتوان ورقی فرض کرد که دارای سطحی خمیده است که شرط $t \le \frac{R}{20}$ رادارااست که t ضخامت و R شعاع پوسته است.

فرضیات کیرشهف برای ورق وپوسته نازک الاستیک ،همگن وهمسانگرد مبتنی برهندسه تغییر شکل است وبصورت زیر بیان میشود:

۱- خیزسطح میانی درمقایسه با ضخامت ورق کوچک است بنابراین شیب سطح بسیارکوچک ومقدار مجذورشیب درمقایسه باواحد قابل صرفنظر است.

۲- صفحه میانی بعداز خمش بدون کرنش باقی میماند.

۳- مقاطع مسطحی که عمود برصفحه میانی هستند پس از خمش مسطح وعمود براین صفحه می مانند.بنابراین کرنشهای برشی درصفحات عمودبرصفحه میانی قابل صرفنظر کردن است.

الف)تئوری غشایی[۱] :

یک غشا می تواند مسطح یا خمیده باشد ومشابه ورقی است که قابلیت تحمل فشارعرضی رادارد. نیروهای غشایی کاملا مستقل از خمش درنظر گرفته می شود وآن را برای پوسته های مختلف از قبیل پوسته فلزی، بتن مسلح ، فیلم صابون و... میتوان بکار برد .

ب)تئوری خمشی[۱] :

نظریه خمشی غالبا از حل تئوری غشایی استفاده می کند که درنواحی دارای تاثیرات ناپیوستگی تصحیح شده است .درواقع هدف این نظریه آنالیز تنش ها وکرنش ها ی ناشی از نیروهای لبه ای و یا بارگذاری متمرکز است که با تئوری غشایی امکان پذیر نمی باشد .

ج) تئوری تغییر شکل برشی[۱] :

درورقهای ضخیم تنشهای برشی مهم هستند.درواقع این فرض که مقاطع مسطح عمودبرصفحه میانی پس از تغییر شکل همچنان عمودبرصفحه میانی می مانند درعمل صحیح نخواهدبود. بافرض اینکه خط عمود برصفحه میانی بصورت مورب درآمده وچرخش داشته باشد ولی همچنان راست باقی بماند میتوان تغییرشکل رابصورت $U = u + z\psi$ تقریب زد که درآن u تغییر مکان صفحه میانی درراستای محوری ، z درراستای ضخامت پوسته که مبدا آن برروی صفحه میانی قرار دارد ، ψ چرخش میباشد وU نیز تغییر شکل درجهت محوری است .

۱-۲ مرور تحقیقات انجام شده در زمینه بار متحرک

Alderheim , Baz [۱۸] دراین مقا له اثر جرم متحرک بریک تیربا مقاطع مختلف که بصورت ناگهانی تغییرمی کنند[۳] مورد تحلیل قرارداده است . علاوه بر نتایج تئوری نتایج تجربی نیز ارائه شده است . .همچنین الگویی جهت ترتیب بهینه قرار گرفتن ضخامتهای مختلف آورده شده است .

Michaltsos [٦]تیر با پهنای ثابت تحت بار متحرک با شتابهای مثبت ومنفی را بررسی کرده است. علاوه بربار تک محوره متمرکز ، بارهای دومحوره (برای مثال اتومبیل ها)نیز مطالعه شده است . همچنین اثر میرایی نیز درتیر درنظر گرفته شده است.

Wu , Chiang [۱۳]آنالیز دینامیکی یک قوس یا کمان تحت بار متحرک انجام شده است . این قوس دایره ای و دارای شکل یکنواخت است، بار به صورت نقطه ای می باشد . تحلیل به صورت المان محدود نیز انجام شده و نتایج تطابق قابل قبولی دارد.

Bilello , Bergman [۳] نوسانات در یک تیر آسیب دیده[۴] تحت اثر جرم متحرک بررسی شده است . نتایج به صورت ریاضی و عددی ارائه شده است. برای مدل سازی آسیب ها از فنرهای پیچشی استفاده شده است ، نتایج نشان می دهد که تطابق خوبی بین نتایج تحلیلی و تجربی وجود دارد .

---
[۳] -STEPPED
[٤] -DAMAGED

Renard et al [۱۲]یک سیستم با طول نا محدود متشکل از ورقی در تماس بایک مایع بررسی شده است. بار با سرعت ثابت مادون صوت از روی ورق عبور میکند. تحلیل ها به دو صورت ریاضی و عددی انجام شده است که در نهایت نتایج نشان دهنده همگرایی دو روش است .

Museros , Roderigo[۲۰] نوسانات تیر های با تکیه گاه ساده تحت بار متحرک با استفاده از دمپر های ویسکوز را بررسی کرده اند. هدف از این تحقیق یافتن راهکاری برای کاهش نوسانات تشدید در تیرها با تکیه گاه ثابت می باشد روش پیشنهاد شده ، استفاده از دمپر های ویسکوز که به تیر حامل بار و یک تیر کمکی زیرتیر اصلی وصل است می باشد. نتایج نشان می دهد که با استفاده از این روش نوسانات تشدید تیر به شدت کاهش خواهد یافت.

Lee et al [۴] راه حل تحلیلی برای نوسانات ناشی از حرکت ترن و منوریل ارائه داده اند . نتایج این بررسی نشان می دهدکه دلیل عمده نوسانات فاصله بین مرکز برش پل وبار ترن می باشد.

Abu-Hilal [۱۶] تیر دوبل(دو تایی) تحت بار متحرک با دامنه ثابت را بررسی کرده است . سیستم از دوتیر الاستیک همگن تشکیل شده که دارای تکیه گاه ثابت هستند و به صورت موازی بر روی یکدیگر قرار گرفته و با یک لایه ویسکو ا لاستیک به هم متصل شده ا ند . آثار سرعت حرکت بار، میرایی و الاستیسیته لایه ویسکو الاستیک، بر روی پاسخ تیرها بررسی شده است.

Yau , Yang [۱۱]شتاب عمودی تیر ساده در برابر بار های متوالی که با سرعت تشدید حرکت میکنند را بررسی کرده است . نتایج نشان می دهد که مکان شتاب ماکزیمم بسته به مود ارتعاش دارد و در نقطه وسط تیر اتفاق نمی افتد .

Ruzzene , Baz [۱۷] تحلیل دینامیکی پوسته های تقویت شده بارینگ را تحت بار متحرک مورد بررسی قرارداده ا ست که تحلیل شامل بحث تئوری و مباحث المان محدود می باشد . نتایج تحقیق نشان می دهد که تقویت پوسته ها سرعت بحرانی را افزایش می دهد.

Martinez-Castro et al [۲] تیر با پهنای متغیر تحت بار های متحرک را بررسی کرده است . در بررسی از دمپر های ویسکوزاستفاده شده است. بار با استفاده از تابع دیراک مدل سازی شده وعلاوه بر مدل ریاضی نتایج عددی نیز بررسی شده است که نتایج تئوری را تایید می کند.

Xia et al[۹] مکانیزم پدیده تشدید و شرایط پدید آورنده آن در سیستم های پل و قطار را بررسی کرده است . تحقیقات به سه شیوه تئوری ، تحلیل عددی و آ نالیز داده های تجربی انجام شده است . نتایج بیانگر این است که تشدید تحت تاثیر عرض پل، طول کل و همچنین چقرمگی پل ،نحوه قرار گیری چرخ های قطار و همین طور فرکانس طبیعی وسیله نقلیه می باشد . با استفاده از نتایج این تحقیق می توان سرعت منجربه تشدید را برای پل ها محاسبه کرد.

Ouyang , Wang [۸] مدل دینامیکی برای نوسانات تیر چرخان تحت بار سه بعدی که در جهت محوری حرکت می کندرا بررسی کرده است . در تحلیل ها ممان خمشی ایجاد شده توسط بخش محوری نیرو نیز در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می دهد ممان خمشی ناشی از بار محوری قابل ملاحظه بوده و باید در مسایل منظور شود.

Auerch [۱۵] میزان تا ثیربار متحرک بر نوسانات خاک و ریل راه آهن را بررسی کرده است. نتایج تحقیقات نشان میدهد که افزایش عرض مسیر و کاهش سرعت بار نوسانات خاک راکاهش میدهد .

Yang et al [۱۴] نوسانات اجباری و طبیعی تیر ناهمگن ترک دار تحت یک بار محوری و یک بار متحرک را بررسی نموده اند . بار محوری از نوع فشاری بوده ودهانه ترک بسته می شود و بار متحرک از نوع متمرکز است . نتایج بررسی نشان می دهد که نوسانات آزاد و پاسخ دینامیکی بیشتر تحت تاثیر بار محوری هستند تا لبه های ترک و همچنین تیرها با مدول یانگ کوچکتر نوسانات کمتر و تغییر شکل بیشتری دارند.

Chebli et al [۷] پاسخ دینامیکی ریل های تقویت شده با بالاست[۵] تحت بار ضربه را بررسی کرده اند. یک مدل سه بعدی برای ریل و خاک زیر آن ارائه شده و علاوه برآن نتایج تجربی حاصل از خطوط راه آهن واقعی نیز ارائه شده است .

۵ - BALLAST

فصل دوم

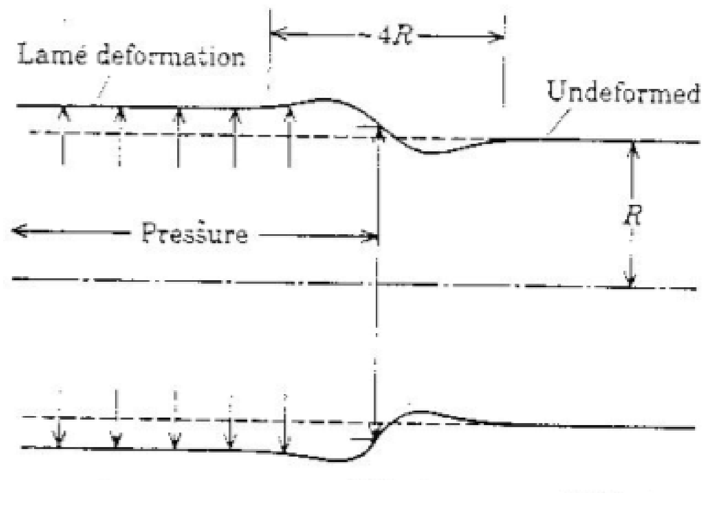
روش های ریاضی تحلیل پوسته ها

۲-۱- روش حل موج(روش هرمن - میرسکی[۱])

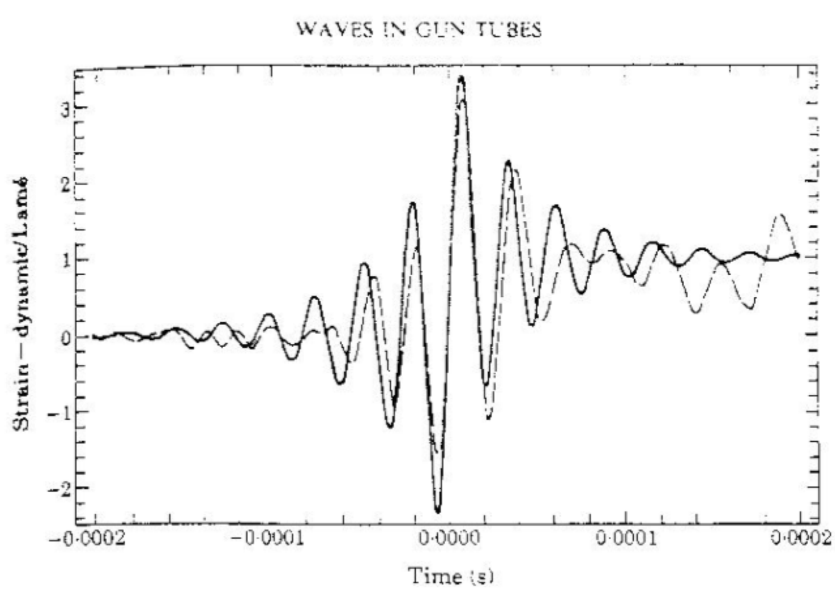
یکی از کاربردهای این روش ، بررسی حرکت گلوله ها در لوله می باشد . با توجه به اینکه محدوده اثر فشار در پشت گلوله با زمان در حال افزایش است می توان آن را یک بار متحرک گسترده دانست.

تجربه نشان میدهد که کرنشهای ایجاد شده در مخازن تحت بار متحرک با سرعت با لا تقریبا سه برابر بیشتر از آن چیزی است که درحالت استاتیکی وجود دارد. برای درک بهتر مسئله درشکل۲-۱ کرنشها در یک مخزن به طول ۶۰ میلیمتر نشان داده شده است.در شکل کرنش به شکل یک نوسان شدید درنزدیکی لحظه صفر(جایی که فشار در حل عبور از آن نقطه است)مشخص است. درشکل۲-۲ مقادیر کرنشها نسبت به مقدار استاتیکی ودر محدوده زمان کوچک نشان داده شده است . میزان تغییر شکل درجداره مخزن در منطقه تحت فشار به مقدار ماکزیمم میرسد . بصورت مشابه درقسمتی که هنوز فشار به آن وارد نمیشودپس از یک فاصله کوتاه مقدار تغییرشکل صفراست.کلیه این فرایند در محدوده ای تقریبا چهار برابرشعاع متوسط مخزن اتفاق می افتدکه در شکل ۲-۱ مشخص شده است .

[۱] -HERMANN-MIRSKY



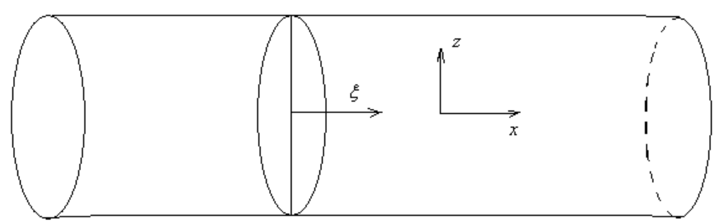
شکل۲-۱- مخزن تحت فشارداخلی[۱۹]



شکل۲-۲-دامنه کرنش نسبت به کرنش استاتیکی- خط چین پاسخ تجربی وخط پررنگ نتایج تئوری است[۱۹]

تئوری مسئله[۵,۱۰]

استوانه مفروض مسئله دارای شعاع درونیaوشعاع بیرونی bوضخامتhاست.این مخزن دارای شعاع صفحه میانی $R = {(a+b)}/{2}$ است ورابطه آن با شعاع هرنقطه مخزن بصورت $r = R + z$ میباشد.در حل مسئله مختصات استوانه ای درنظر گرفته میشود به شکلی که محور $\mathbf{x}$ درجهت محوراستوانه و $\mathbf{z}$ درجهت شعاع استوانه است.



شکل ۲-۳- مخزن استوانه ای ومختصات انتخاب شده

با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مقادیر زیر برای تغییر شکل در نظر گرفته میشود:

$$\begin{aligned} u_x &= u(x,t) + z\Psi_x(x,t) \\ u_z &= w(x,t) + z\Psi_z(x,t) \end{aligned} \qquad (۱-۲)$$

مقادیر کرنشها در مختصات استوانه ای بصورت زیر است:

$$
\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\
e_{\theta\theta} &= \frac{u_z}{R+z} = \frac{w}{R+z} + \frac{z\psi_z}{R+z} \\
\gamma_{x\theta} &= 0 \\
e_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
\gamma_{z\theta} &= 0 \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x + z\frac{\partial \psi_z}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{۲-۲}
$$

اصل هامیلتون[۲] :

اصل هامیلتون بیانگر این است که :

$$
\begin{aligned}
&\delta\int_{t1}^{t2} L dt = 0 \\
&\delta L = \delta T - \delta W + \delta W^*
\end{aligned}
\tag{۳-۲}
$$

که T انرژی جنبشی و Wکار انجام شده و W^* انرژی کرنشی است .

چگالی انرژی کرنشی بصورت زیر تعریف میشود:

$$2W^* = \sigma_{xx}e_{xx} + \sigma_{\theta\theta}e_{\theta\theta} + \sigma_{zz}e_{zz} + \sigma_{xz}\gamma_{xz} \tag{۴-۲}$$

[۲] -HAMILTON PRINCIPLE

که برای این مسئله:

$$2W^* = \sigma_{xx}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_x}{\partial x}\right) + \sigma_{\theta\theta}\left(\frac{w}{R+z} + \frac{z}{R+z}\psi_z\right) + \sigma_{zz}\psi_z + \sigma_{xz}\left(\psi_z + \frac{\partial w}{\partial x} + z\frac{\partial \psi_z}{\partial x}\right)$$

(۵-۲)

برای بدست آوردن انرژی کرنشی لازم است تا انتگرالگیری روی حجم انجام شود.المان حجم در مختصات استوانه ای $d\theta(R+z)drdz$ درنظر گرفته می شود:

$$\frac{W^*}{\pi} = \int_{-l/2}^{l/2} \begin{bmatrix} RN_{xx}\frac{\partial u}{\partial x} + RM_{xx}\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + N_{\theta\theta}w + M_{\theta\theta}\psi_z + RN_{xx}\psi_z + RQ_x\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \\ RM_{xz}\frac{\partial \psi_z}{\partial x} \end{bmatrix} dx \qquad (۶-۲)$$

که تغییرات آن:

$$\begin{aligned} \frac{\delta W^*}{\pi} = \int_{-l/2}^{l/2}\int \ [&RN_{xx}\delta\frac{\partial u}{\partial x} + RM_{xx}\delta\frac{\partial \psi_x}{\partial x} + N_{\theta\theta}\delta w + M_{\theta\theta}\delta\psi_z + RN_{xx}\delta\psi_z \\ &+ RQ_x\delta\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + RM_{xz}\delta\frac{\partial \psi_z}{\partial x}]dx \end{aligned} \qquad (۷-۲)$$

ودرآن:

$$N_{xx}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{xx}(1+z/R)dz \qquad M_{xx}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{xx}(1+z/R)zdz \qquad N_{\theta\theta}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\theta\theta}dz$$

$$M_{\theta\theta}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{\theta\theta}zdz \qquad M_{xz}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{xz}\left(1+z/R\right)zdz \qquad N_{zz}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{zz}\left(1+z/R\right)dz$$

$$Q_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_{xz}\left(1+z/R\right)dz$$

(۸-۲)

چگالی انرژی جنبشی به شکل زیر تعریف می شود:

$$T^*=1/2\left[\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2\right] \tag{۹-۲}$$

بنابراین انرژی جنبشی:

$$\frac{T}{\pi}=\int_{-h/2}^{h/2}\rho[Rh\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+Rh\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2+\frac{h^2}{6}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)+$$

(۱۰-۲)

$$\frac{h^3}{6}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t}\right)+\frac{Rh^3}{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)^2+\frac{Rh^3}{12}\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t}\right)^2]dx$$

وتغییرات آن:

$$\delta\frac{T}{2\pi}=\int_{-h/2}^{h/2}\rho[Rh\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+Rh\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)$$
$$+\frac{h^3}{12}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t}\right)+\frac{h^3}{12}\delta\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t}\right)+\frac{Rh^3}{12}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t}\right)+\frac{Rh^3}{12}\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial t}\right)\delta\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t}\right)]dx$$

(۱۱-۲)

اگر f_x مقدار نیرو درواحد سطح ودر جهت $\mathbf{x}$ وهمچنین f_y نیرو درواحد سطح در جهت $\mathbf{y}$باشد،تغییرات کار انجام گرفته را میتوان بدست آورد:

$$\delta W=\iint\left(f_x\delta u_x+f_z\delta u_z\right)ds \qquad (۱۲-۲)$$

حال با انتگرالگیری روی سطح پوسته می توان کار را بدست آورد. سطوح عبارتند ازسطوح استوانه ای $z=h/2, z=-h/2$ وهمچنین سطوح دایره ای $x=-l/2, x=l/2$.

بنابراین کار بدست می آید:

$$\delta W=2\pi R\int_{-l/2}^{l/2}\left(F_x\delta u+m_x\delta\psi_x+q\delta w+m_z\delta\psi_z\right)dx+$$
$$2\pi R\left[N_{xx}{}^{*}\delta u+M_{xx}{}^{*}\delta\psi_x+Q_x\delta w+M_{xz}{}^{*}\delta\psi_z\right] \qquad (۱۳-۲)$$

که درآن:

$$F_x = f_x\left(1+z/R\right) \qquad m_x = f_x z\left(1+z/R\right) \tag{۱۴-۲}$$
$$q = f_z\left(1+z/R\right) \qquad m_z = f_z z\left(1+z/R\right)$$

$$N_{xx}^{\ *} = \int_{-h/2}^{h/2} f_x(1+\frac{z}{R})dz \qquad M_{xx}^{\ *} = \int_{-h/2}^{h/2} f_x z(1+\frac{z}{R})dz \tag{۱۵-۲}$$
$$.Q_x^{\ *} = \int_{-h/2}^{h/2} f_z(1+\frac{z}{R})dz \qquad M_{xz}^{\ *} = \int_{-h/2}^{h/2} f_z z(1+\frac{z}{R})dz$$

باجایگذاری مقادیربدست آمده دراصل هامیلتون:

$$\begin{aligned}
\delta L = \int_{-l/2}^{l/2}\int_{t_1}^{t_2} 2\pi[&\left(-Rh\rho\ddot{u}-\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x+RN'_{xx}+RF_x\right)\delta u \\
-&\left(-\frac{\rho h^3}{12}\ddot{u}-R\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x-RQ_x+RM'_{xx}+Rm_x\right)\delta\psi_x + \\
&\left(-Rh\rho\ddot{w}-\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x-N_{\theta\theta}+RQ'_x+Rq\right)\delta w + \\
&\left(-R\frac{\rho h^3}{12}\ddot{\psi}_x-\frac{\rho h^3}{12}\ddot{w}-M_{\theta\theta}-RN_{zz}+RM'_{xz}+Rm_z\right)\delta\psi_z]dxdt \\
&+2\pi R[\left(N_{xx}^{\ *}-N_{xx}\right)\delta u+\left(M_{xx}^{\ *}-M_{xx}\right)\delta\psi_x+\left(Q^*{}_x-Q_x\right)\delta w \\
&+\left(M^*{}_{xz}-M_{xz}\right)\delta\psi_z\Bigg|_{x=-l/2}^{x=l/2}=0
\end{aligned} \tag{۱۶-۲}$$

بنابراین معادلات حرکت عبارتنداز:

$$N'_{xx} + F_x = \rho h\left(\ddot{u} + \frac{h^2}{12R}\ddot{\psi}_x\right) \tag{۲-۱۷}$$

$$M'_{xx} - Q_x + m'_x = \frac{\rho h^3}{12}\left(\ddot{\psi}_x + \frac{1}{R}\ddot{u}\right) \tag{۲-۱۸}$$

$$Q'_x - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + q = \rho h\left(\ddot{w} + \frac{h^2}{12R}\ddot{\psi}_z\right) \tag{۲-۱۹}$$

$$M'_{xz} - N_{zz} + \frac{M_{\theta\theta}}{R} + m_z = \frac{\rho h^3}{12}\left(\ddot{\psi}_x + \frac{1}{R}\ddot{w}\right) \tag{۲-۲۰}$$

بااستفاده از قانون هوک:

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu)e_{xx} + \lambda(e_{\theta\theta} + e_{zz}) \tag{۲-۲۱}$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu)e_{\theta\theta} + \lambda(e_{xx} + e_{zz}) \tag{۲-۲۲}$$

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)e_{zz} + \lambda(e_{xx} + e_{\theta\theta}) \tag{۲-۲۳}$$

$$\sigma_{zx} = \mu\gamma_{xz} \tag{۲-۲۴}$$

که درآن σ تنش عمودی، e کرنش، γ تغییرشکل برشی و λ,μ ضرایب لامه هستند.با قراردادن کرنشهای بدست آمده در عبارات (۲-۲۱ تا ۲-۲۴) وهمچنین قرار دادن آنها در عبارات مربوط به منتجه های تنش(۲-۱۷ تا۲-۲۰) و انتگرالگیری :

$$N_{xx}=(\lambda+2\mu)h\left(u'+\frac{h^2}{12R}\psi_x'\right)+\lambda h\left(\psi_z+\frac{w}{R}\right) \tag{۲۵-۲}$$

$$M_{xx}=\frac{(\lambda+2\mu)h^3}{12R}(u'+R\psi_x')+\frac{\lambda h^3}{6R}\psi_z \tag{۲۶-۲}$$

$$N_{\theta\theta}=(\lambda+2\mu)(\alpha w+\beta\psi_z)+\lambda h(u'+\psi_z) \tag{۲۷-۲}$$

$$M_{\theta\theta}=(\lambda+2\mu)(\beta w+\eta\psi_z)+\frac{\lambda h^3}{12}\psi_x' \tag{۲۸-۲}$$

$$N_{zz}=(\lambda+2\mu)h\psi_z+\lambda h\left(u'+\frac{w}{R}+\frac{h^2}{12R}\psi_x'\right) \tag{۲۹-۲}$$

$$Q_x=\kappa^2\mu h\left(\psi_x+w'+\frac{h^2}{12R}\psi_z'\right) \tag{۳۰-۲}$$

$$M_{xz}=\kappa^2\frac{\mu h^3}{12R}(\psi_x+w'+R\psi_z') \tag{۳۱-۲}$$

که درآن κ ضریب تصحیح برشی میباشد.

$$\sigma=\int_{-h/2}^{h/2}\frac{dz}{R+z}=\log\frac{1+h/2R}{1-h/2R} \tag{۳۲-۲}$$

$$\beta=\int_{-h/2}^{h/2}z\frac{dz}{R+z}=h-R\sigma \tag{۳۳-۲}$$

$$\eta=\int_{-h/2}^{h/2}z^2\frac{dz}{R+z}=\sigma R^2-Rh \tag{۳۴-۲}$$

استخراج دستگاه معادلات:

با قرار دادن منتجه های تنش در معادلات حرکت(۲-۱۷تا۲-۲۰)معادلات زیر حاصل می شود:

$$(\lambda+2\mu)h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}\right)+\lambda h\left(\frac{\partial\psi_z}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right)+F_x=\rho h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{h^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\right)$$

(۳۵-۲)

$$(\lambda+2\mu)\frac{h^3}{12R}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+R\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}\right)+\frac{\lambda h^3}{6R}\frac{\partial\psi_z}{\partial x}-\kappa^2\mu h\left(\psi_x+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{h^2}{12R}\frac{\partial\psi_z}{\partial x}\right)+m_x=$$
$$\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)$$

(۳۶-۲)

$$\kappa^2\mu h\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{h^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x^2}\right)-\frac{(\lambda+2\mu)}{R}(\alpha w+\beta\psi_z)+\lambda h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\psi_z\right)+q=$$
$$\rho h\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{u^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial t^2}\right)$$

(۳۷-۲)

$$\frac{\kappa^2\mu h^3}{12R}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+R\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x^2}\right)-(\lambda+2\mu)h\psi_z-\lambda h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R}+\frac{h^2}{12R}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right)+$$
$$\frac{(\lambda+2\mu)}{R}(\beta w+\mu\psi_z)+\frac{\lambda h^3}{12R}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+m_z=\frac{\rho h^3}{12}\left(\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$$

(۳۸-۲)

درنهایت دستگاه معادلات هرمن-میرسکی بامرتب نمودن معادلات ۲-۳۵تا۲-۳۸ بدست می آید :

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{12} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ -L_{13} & -L_{23} & L_{33} & L_{34} \\ -L_{14} & -L_{24} & L_{34} & L_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x,t) \\ \psi_x(x,t) \\ w(x,t) \\ \psi_z(x,t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_x/h \\ m_x/h \\ q/h \\ m_z/h \end{bmatrix} = 0$$

$$L_{11} = (\lambda + 2\mu)(\ )_{xx} - \rho(\ )_{tt} \tag{۳۹-۲}$$

$$L_{12} = L_{11}\frac{h^2}{12R}$$

$$L_{13} = \frac{\lambda}{R}(\ )_x$$

$$L_{14} = \lambda(\ )_x$$

$$L_{22} = L_{11}\,h^2/12 - \kappa^2\mu$$

$$L_{23} = -\kappa^2\mu(\ )_x$$

$$L_{24} = \left(2\lambda - \kappa^2\mu\right)\left(\frac{h^2}{12R}\right)(\ )_x$$

$$L_{33} = \kappa^2\mu(\ )_{xx} - (\lambda - 2\mu)\sigma/Rh - \rho(\ )_{tt}$$

$$L_{34} = \left(\kappa^2\mu h^2/12R\right)(\ )_{xx} - (\lambda + 2\mu)\frac{\beta}{Rh} - \lambda/R - \frac{\rho h^2}{12R}(\ )_{tt}$$

$$L_{44} = \frac{\kappa^2\mu h^2}{12}(\ )_{xx} - (\lambda + 2\mu)\left(1 + \frac{\eta}{Rh}\right)\frac{\rho h^2}{12}(\ )_{tt}$$

کــه درآن u,w جابجــایی صــفحه میــانی درجهــات شــعاعی ومحــوری ، ψ_x, ψ_zچــرخش حــول محورهـای شـعاعی ومحـوری، λ, μضـرایب لامـه،h ضـخامت پوسـته ،R شـعاع متوسـط ، κ ضـریب تصحیح برشی و ρ چگالی پوسته می باشد.

حل معادلات:

برای حل معادلات از روش حل موج با تغییر متغیر زیر استفاده می شود:

$$\begin{bmatrix} u \\ \psi_x \\ w \\ \psi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} e^{-i\alpha(x-Vt)} \qquad \text{و } \xi = x - Vt \tag{۴۰-۲}$$

با حل اولین معادله از دستگاه معادلات هرمن-میرسکی ومساوی صفر قرار دادن آن:

$$[(\lambda+2\mu)]\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{12R}\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} - \rho\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right] + \frac{\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \psi_z}{\partial x} = 0$$

(۴۱-۲)

با اعمال تغییر متغیر وتبدیل متغیرها به ξ:

$$\left[(\lambda+2\mu) - \rho V^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \left[\frac{h^2}{12R}(\lambda+2\mu) - \frac{\rho h^2 V^2}{12R}\right]\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} + \frac{\lambda}{R}\frac{\partial w}{\partial \xi} + \lambda\frac{\partial \psi_z}{\partial \xi} = 0$$

(۴۲-۲)

باانتگرالگیری نسبت به ξومساوی صفر قرار دادن آن ها :

$$\left((\lambda+2\mu)h - \rho h V^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}\right) + \lambda h\left(\psi_z + \frac{w}{R}\right) = C \tag{۴۳-۲}$$

که C ثابت انتگرال است.

با در نظر گرفتن :

$$N_{xx}=(\lambda+2\mu)h\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi}\right)+\lambda h\left(\psi_z+\frac{w}{R}\right) \qquad (۴۴\text{-}۲)$$

اگر مقدار سرعت از سرعت موج های طولی خیلی کوچکتر باشد:

$$V<<\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \qquad (۴۵\text{-}۲)$$

در این صورت $N_{xx}=C$ که با توجه به اینکه درراستای **x** تنش صفر است C=۰ .

با استخراج مقادیر زیر از معادله اول:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\frac{-\lambda h\left(\psi_z+\frac{w}{R}\right)}{(\lambda+2\mu)h-\rho h V^2}-\frac{h^2}{12R}\frac{\partial \psi_x}{\partial \xi} \qquad (۴۶\text{-}۲)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=\frac{-\lambda h\left(\frac{\partial \psi_z}{\partial \xi}+\frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)}{(\lambda+2\mu)h-\rho h V^2}-\frac{h^2}{12R}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial \xi^2} \qquad (۴۷\text{-}۲)$$

بادرنظرگرفتن تبدیلات زیر:

$$(\ )_{tt}=V^2(\ )_{\xi\xi},(\ )_x=(\ )_\xi,(\ )_{xx}=(\ )_{\xi\xi}$$

وباجایگذاری در سه معادله دیگر:

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\right]\frac{h^2}{12}-\kappa^2\mu\psi_x-\kappa^2\mu\frac{\partial w}{\partial x}$$ (۴۸-۲)

$$+\left(2\lambda-\kappa^2\mu\right)\frac{h^2}{12R}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}=0$$

$$\kappa^2\mu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\kappa^2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-(\lambda+2\mu)\frac{\sigma}{Rh}w-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x^2}$$ (۴۹-۲)

$$-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}\psi_z-\frac{\lambda}{R}\psi_z-\frac{\rho h^2}{12R}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial t^2}=0$$

$$\left(\kappa^2\mu-2\lambda\right)\frac{h^2}{12R}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}w-\frac{\lambda}{R}w$$ (۵۰-۲)

$$-\frac{\rho h^2}{12R}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\kappa^2\mu h^2}{12}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial x^2}-(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{\eta}{Rh}\right)\psi_z-\frac{\rho h^2}{12}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial t^2}=0$$

با تبدیل مشتقات نسبت به x,t به مشتقات نسبت به ξوجایگذاری در معادلات :

$$\left(\lambda+2\mu-\rho V^2\right)\frac{h^2}{12}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial\xi^2}-\kappa^2\mu\psi_x-\kappa^2\mu\frac{\partial w}{\partial\xi}+\left(2\lambda-\kappa^2\mu\right)\frac{h^2}{12R}\frac{\partial\psi_z}{\partial\xi}=0$$ (۵۱-۲)

$$\kappa^2\mu\frac{\partial\psi_x}{\partial\xi}+\left(\kappa^2\mu-\rho V^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}-(\lambda+2\mu)\frac{\sigma}{Rh}w+\left(\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}-\frac{\rho h^2V^2}{12R}\right)\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\xi^2}$$ (۵۲-۲)

$$-\left[(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}+\frac{\lambda}{R}\right]\psi_z=0$$

$$\left(\kappa^2\mu-2\lambda\right)\frac{h^2}{12R}\frac{\partial\psi_x}{\partial\xi}+\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}w-\frac{\lambda}{R}w-\frac{\rho h^2V^2}{12R}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}$$ (۵۳-۲)

$$+\frac{\kappa^2\mu h^2}{12}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\xi^2}-(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{\eta}{Rh}\right)\psi_z-\frac{\rho h^2V^2}{12}\frac{\partial^2\psi_z}{\partial\xi^2}=0$$

با درنظر گرفتن حل موج :

$$\begin{bmatrix} \psi_x \\ w \\ \psi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} e^{-i\alpha\xi} \qquad (۵۴-۲)$$

وبا جایگزین کردن در معادلات :

$$\left(\rho V^2 - \lambda - 2\mu\right)\frac{h^2}{12}\alpha^2 A e^{-i\alpha\xi} - \kappa^2 \mu A e^{-i\alpha\xi} + \kappa^2 \mu i \alpha B e^{-i\alpha\xi} + \left(\kappa^2 \mu - 2\lambda\right)\frac{h^2}{12R} C i \alpha e^{-i\alpha\xi} = 0$$

(۵۵-۲)

$$\begin{aligned} &\left(2\lambda - \kappa^2 \mu\right)\frac{h^2}{12R} i\alpha A e^{-i\alpha\xi} - \frac{\kappa^2 \mu h^2}{12R}\alpha^2 B e^{-i\alpha\xi} - \left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\beta}{Rh} B e^{-i\alpha\xi} - \frac{\lambda}{R} B e^{-i\alpha\xi} \\ &+ \frac{\rho h^2 V^2}{12R}\alpha^2 B e^{-i\alpha\xi} - \frac{\kappa^2 \mu h^2}{12}\alpha^2 C e^{-i\alpha\xi} - \left(\lambda + 2\mu\right)\left(1 + \frac{\eta}{Rh}\right) C e^{-i\alpha\xi} \\ &+ \frac{\rho h^2 V^2}{12}\alpha^2 C e^{-i\alpha\xi} = 0 \end{aligned} \qquad (۵۶-۲)$$

$$\begin{aligned} &-\kappa^2 \mu i \alpha A e^{-i\alpha\xi} + \left(\rho V^2 - \kappa^2 \mu\right)\alpha^2 A e^{-i\alpha\xi} - \left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\sigma}{Rh} B e^{-i\alpha\xi} + \\ &\left(\frac{\kappa^2 \mu h^2}{12R} - \frac{\rho h^2 V^2}{12R}\right)\left(-\alpha^2 C e^{-i\alpha\xi}\right) - \left[\left(\lambda + 2\mu\right)\frac{\beta}{Rh} + \frac{\lambda}{R}\right] C e^{-i\alpha\xi} = 0 \end{aligned} \qquad (۵۷-۲)$$

با فاکتورگیری از ضرایب A,B,C :

$$\left\{\left[\left(\rho V^2-\lambda-2\mu\right)\frac{h^2}{12}\alpha^2-\kappa^2\mu\right]A+\kappa^2\mu i\alpha B+\left(\kappa^2\mu-2\lambda\right)\frac{h^2}{12R}i\alpha C\right\}e^{-i\alpha\xi} \quad (۵۸-۲)$$

$$\left\{\begin{matrix}\left[-\kappa^2\mu i\alpha+\left(\rho V^2-\kappa^2\mu\right)\alpha^2\right]A-(\lambda+2\mu)\frac{\sigma}{Rh}B+ \\ \left[\left(\frac{\rho h^2V^2}{12R}-\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\right)\alpha^2-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}-\frac{\lambda}{R}\right]C\end{matrix}\right\}e^{-i\alpha\xi} \quad (۵۹-۲)$$

$$\left\{\begin{matrix}\left[\left(2\lambda-\kappa^2\mu\right)\frac{h^2}{12R}i\alpha\right]A+\left[-\frac{\kappa^2\mu h^2}{12R}\alpha^2-(\lambda+2\mu)\frac{\beta}{Rh}-\frac{\lambda}{R}+\frac{\rho h^2V^2}{12R}\alpha^2\right]B \\ +\left[\frac{\rho h^2V^2}{12}\alpha^2-(\lambda+2\mu)\left(1+\frac{\eta}{Rh}\right)-\frac{\kappa^2\mu h^2}{12}\alpha^2\right]C\end{matrix}\right\}e^{-i\alpha\xi} \quad (۶۰-۲)$$

حال با صفر قرار دادن دترمینان ضرایب مقادیر α بدست خواهد آمد. جواب کلی معادله بصورت زیر است:

$$\begin{bmatrix}\psi_x\\ w\\ \psi_z\end{bmatrix}^{\mathrm{I}}=\sum_{j=1}^{3}a_j\begin{bmatrix}e_{j1}\\ e_{j2}\\ 1\end{bmatrix}e^{-i\alpha\xi}+\begin{bmatrix}\psi_x\\ w\\ \psi_z\end{bmatrix}^{1}_{p} \quad (۶۱-۲)$$

که e_j، j امین بردار ویژه نرمالیزه[۳] شده ماتریس ضرایب با توجه به مقدار α است.

برای جواب خصوصی معادله ازروش کرامر استفاده میشود:

$$(G(\alpha))\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -q/h \\ -m_z/h \end{bmatrix} \tag{۶۲-۲}$$

که مثلا در منطقه ۱ (جایی که فشار وجوددارد):

$$W_p{}^{\mathrm{I}} = \lim_{\alpha \longrightarrow 0} \left| \frac{\overline{G}(\alpha)}{G(\alpha)} \right| \tag{۶۳-۲}$$

[۳] -NORMALIZED EIGEN VECTOR

پیوستگی :

برای بدست آوردن مقدار a_j در جواب عمومی به طریق زیر عمل می شود:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & e_{21} & -e_{31} & e_{41} & -e_{51} & -e_{61} \\ -\alpha_1 e_{11} & -\alpha_2 e_{21} & -\alpha_3 e_{31} & \alpha_4 e_{41} & \alpha_5 e_{51} & \alpha_6 e_{61} \\ e_{12} & e_{22} & e_{32} & -e_{42} & -e_{52} & -e_{62} \\ -\alpha_1 e_{12} & -\alpha_2 e_{22} & -\alpha_3 e_{32} & \alpha_4 e_{42} & \alpha_5 e_{52} & \alpha_6 e_{62} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} & -e_{43} & -e_{53} & -e_{63} \\ -\alpha_1 e_{13} & -\alpha_2 e_{23} & -\alpha_3 e_{33} & \alpha_4 e_{43} & \alpha_5 e_{53} & \alpha_6 e_{63} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -w^{\mathrm{I}}{}_p \\ 0 \\ -\Psi^{\mathrm{I}}{}_{zp} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۶۴-۲)

بررسی نتایج نشان می دهد که روش هرمن-میرسکی در مورد این مسئله وبه طور کلی حالت هـایی که سرعت زیر سرعت بحرانی است دقت خوبی دارد.بنابراین این روش در مورد لوله سـلاح هـا دقیـق وقابل قبول است.نباید فراموش کرد که این روش تنها در $v < v_{cr}$ قابل استفاده است.بنابراین به توصیه محقق در مواردی که مخازن جدار ضخیم تحت بار با سرعت نزدیک به سـرعت بحرانـی وکمتـر از آن است بجای روش تبدیل فوریه[۴] بهتر است ازاین روش استفاده شود . با این وجود نا هماهنگی هایی در فرکانس امواج ناشی از پاسخ های تجربی در قیاس با جواب های تحلیلی دیده می شود کـه البتـه در مناطقی دور از منطقه حساس($\xi = 0$)هستند واز اعتبار روش کم نمی کنند.

Beltman [۲۲]با انتخاب میدان جابجایی بصورت :

(۶۵-۲)

$$u_x = u + z\psi$$
$$u_z = w$$

به تحلیل پوسته نازک تحت بار شوک پرداخته است .

[۴] -FOURIER TRANSFORMATION

معادلات حاکم عبارتنداز :

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} = \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = \rho h^3 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right) \qquad (۲-۶۶)$$
$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{N_{\theta\theta}}{R} + \Delta P = \rho h \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)$$

منتجه های تنش به شکل زیر هستند:

$$N_{xx} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{w}{R}\right] \qquad N_{\theta\theta} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{w}{R}\right] \qquad (۲-۶۷)$$

$$M_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad Q_x = \kappa G h \left[\psi + \frac{\partial w}{\partial x}\right]$$

κضریب تصحیح برشی ،Eمدول یانگ،hضخامت پوسته،Rشعاع متوسط پوسته، uجابجایی صفحه میانی درجهتx ،wجابجایی صفحه میانی درجهتz و ψچرخش حول محور x است.

با توجه به اینکه مسئله در جهت x فاقد تنش است ،از منتجه های تنش درراستای xمی توان صرفنظر کرد.همچنین برای جابجایی بجای مقادیر معمول از مقادیر بی بعد استفاده می شود:

$$u = \frac{U}{h}, w = \frac{W}{h}, \psi_x = \frac{1}{\sqrt{12}}\Psi_x, \eta = \frac{\sqrt{12}}{h}[x - vt] \qquad (۲-۶۸)$$

سایر مولفه های مسئله به صورت زیر تعریف می شوند[۲۲] :

پارامتر تحریک[5]:

$$\Lambda_j = \left(P_j - P_{atm}\right)\frac{R^2}{Eh^2} \qquad j = 1,2 \qquad (۶۹-۲)$$

که P_{atm} فشار هوای اطراف و P_j فشار در دو بخش مجزا دردرون لوله است.

سرعت انتشار موج طولی[6] :

$$v_d = \sqrt{\frac{E}{\rho\left(1-\upsilon^2\right)}} \qquad (۷۰-۲)$$

سرعت انتشار موج برشی[7]:

$$v_s = \sqrt{\frac{\kappa G}{\rho}} \qquad (۷۱-۲)$$

پارامتر ضخامت پوسته :

$$\beta = \frac{h}{\sqrt{12}\ R} \qquad (۷۲-۲)$$

جابجایی شعاعی w به دوبخش خمشی w_b و برشی w_s تقسیم می شود :

$$w = w_s + w_b$$
$$\psi_x = -\frac{\partial w_b}{\partial \eta} \qquad (۷۳-۲)$$

[5] -EXCITATION PARAMETER
[6] -DILATATIONAL WAVE VELOCITY
[7] -SHEAR WAVE VELOCITY

با جایگذاری این مقادیر درمعادلات ۲-۶۶ وانتگرالگیری نسبت به η معادله زیر حاصل می شود:

$$w_s = -\left(\frac{v_d}{v_s}\right)^2 \left[1-\left(\frac{v}{v_d}\right)^2\right]\left(\frac{\partial^2 w_b}{\partial \eta^2}\right) \tag{۷۴-۲}$$

بارگذاری[۲۲]:

بارگذاری در این مسئله به گونه ای است که در دو حالت ودو موقعیت دو بار متفاوت وجوددارد که برخلاف حالاتی که در مقالات هرمن- میرسکی ویا درمسئله تبدیل فوریه مشاهده شد به صفر نمیرسد.دراین حالت نیز میتوان از تابع پله ای برای تعریف بار استفاده کرد:

$$F(\eta) = \beta^2\left(1-\nu^2\right)\left\{\Lambda_1 + \left(\Lambda_2 - \Lambda_1\right)\left[1 - H(\eta)\right]\right\} \tag{۷۵-۲}$$

معادله حاکم بر مسئله عبارتست از :

$$A_4 \frac{\partial^4 w_b}{\partial \eta^4} + A_2 \frac{\partial^2 w_b}{\partial \eta^2} + A_0 w_b = F(\eta) \tag{۷۶-۲}$$

که ضرایب آن :

$$A_4 = \left[\left(\frac{v}{v_d}\right)^2 - 1\right]\left(\left(\frac{v}{v_s}\right)^2 - 1\right) \qquad A_2 = \left(\frac{v}{v_d}\right)^2\left[1+\beta^2\left(\frac{v_d}{v_s}\right)^2\right] - \beta^2\left(1-\nu^2\right)\left(\frac{v_d}{v_s}\right)^2$$

$$A_0 = \beta^2 - \frac{\beta^2 \nu^2}{\left(\frac{v}{v_d}\right)^2 - 1}$$

(۷۷-۲)

باتوجه به اینکه معادله دارای ضرایب ثابت است مقدار زیر جایگزین می شود :

$$w = \exp(\alpha\eta) \qquad (۷۸-۲)$$

با اعمال این تغییر متغیر معادله زیر حاصل می شود :

$$A_4\alpha^4 - A_2\alpha^2 + A_0 = 0 \qquad (۷۹-۲)$$

که α و شماره موج K از طریق معادله زیر مرتبط هستند:

$$K = \sqrt{12}\,\frac{\alpha}{ih} \qquad (۸۰-۲)$$

اگر دلتای معادله (۲ –۷۹) برابر صفر قرار داده شود،مقدار سرعت های بحرانی[۸] بدست می آیدزیرا باکمی تغییر درپارامترهای دلتا پاسخ ها تغییر اساسی خواهند یافت ونیاز به حل های متفاوت خواهند داشت که درادامه مشاهده خواهدشد :

$$A_2{}^2 - 4A_0A_4 = 0 \qquad (۸۱-۲)$$

با در نظر گرفتن جواب های بدست آمده برای سرعت بحرانی حالات مختلفی پیش می آیدکه دراین تحقیق تنها دو مورد آن مورد توجه است :

$\alpha = \pm n \pm im$ درحالت $0 < v < v_{c0}$

$\alpha = \pm im_1$ و $\alpha = \pm im_2$ در حالت $v_{c0} < v < v_{c1}$

که درآن v_{c0} سرعت بحرانی اول و v_{c1} سرعت بحرانی دوم است.

حالت اول $0 < v < v_{c0}$ (v سرعت از v_{c0} سرعت بحرانی کوچکتر است):

---

[۸] -CRITICAL VELOCITY

برای حل مسئله در دوبخش بررسی می شود. منطقه ۱ حالتی که درآن $\eta < 0$(منطقه تحت فشار)ومنطقه ۲ وقتی که $\eta > 0$(منطقه بدون فشار).

با درنظر گرفتن $\alpha = \pm n \pm im$ وقراردادن درمعاله وحل آن جواب زیرحاصل میشود:

در حالت $\eta < 0$:

$$w_b^{\mathrm{I}} = \Lambda_{1s} - (\Lambda_{2s} - \Lambda_{1s})\left\{1 + \frac{1}{8}\exp(n\eta)\left[-4\cos(m\eta) - 2\frac{n^2 - m^2}{nm}\sin(m\eta)\right]\right\} \qquad (۸۲\text{-}۲)$$

ودر حالت $\eta > 0$:

$$w_b^{\mathrm{II}} = \Lambda_{1s} - (\Lambda_{2s} - \Lambda_{1s})\left\{1 + \frac{1}{8}\exp(-n\eta)\left[4\cos(m\eta) - 2\frac{n^2 - m^2}{nm}\sin(m\eta)\right]\right\} \qquad (۸۳\text{-}۲)$$

که در آن ها:

$$\Lambda_{1s} = \beta^2(1 - v^2)\frac{\Lambda_1}{A_0} \qquad (۸۴\text{-}۲)$$

$$\Lambda_{2s} = \beta^2(1 - v^2)\frac{\Lambda_2}{A_0}$$

حالت دوم $v_{c0} < v < v_{c1}$ (v سرعت از v_{c1} سرعت بحرانی بزرگتر است):

دراین حالت مقادیر α به شکل $\alpha = \pm im_1$ و $\alpha = \pm im_2$ است.دراین حالت نیز همانند قبل دو منطقه $\eta < 0$ و $\eta > 0$ دارای حل جداگانه هستند.

بادر نظر گرفتن مقادیر α جوابهای زیر حاصل می شود:

$$\Lambda_{1s} = \beta^2\left(1-\nu^2\right)\frac{\Lambda_1}{A_0}$$

$$\Lambda_{2s} = \beta^2\left(1-\nu^2\right)\frac{\Lambda_2}{A_0}$$

$$w_b^{\ \mathrm{I}} = \Lambda_{1s} - \left(\Lambda_{2s} - \Lambda_{1s}\right)\left\{\left[1+\frac{m_2^{\ 2}}{m_1^{\ 2}-m_2^{\ 2}}\right]\cos(m\eta)\right\} \qquad (۸۵\text{-}۲)$$

$$w_b^{\ \mathrm{II}} = \Lambda_{1s} - \left(\Lambda_{2s} - \Lambda_{1s}\right)\left\{\left[\frac{m_1^{\ 2}}{m_1^{\ 2}-m_2^{\ 2}}\right]\cos(m\eta)\right\}$$

نتایج فرکانس ارتعاشات دردو حالت متفاوت بررسی می شوند. حالتی که سرعت کمتر ازسرعت بحرانی باشد که حالت زیر بحرانی[۹] نامیده می شود وحالتی که سرعت بیش از سرعت بحرانی باشد که حالت فوق بحرانی[۱۰] نامیده می شود.

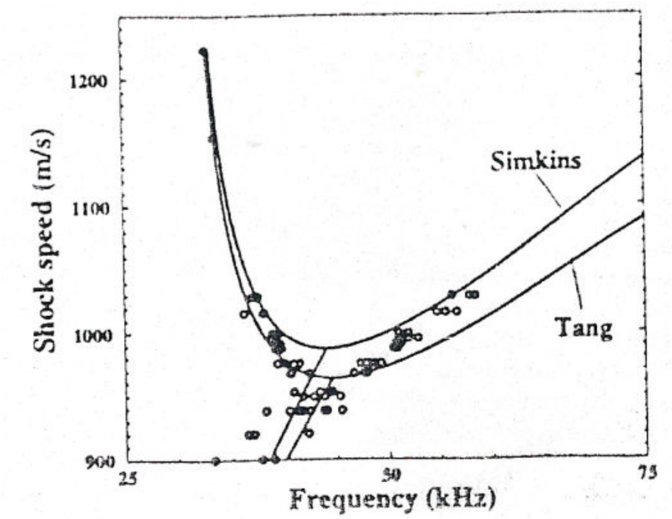
بررسی نتایج نشان میدهد که درحالت زیر بحرانی جواب های تجربی با پاسخ های تحلیلی حاصل از مدل های تانگ وسیمکینز تطابق ندارند،اما درحالتی که سرعت نزدیک به سرعت بحرانی یا فراتر از آن باشد دقت در پیش بینی فرکانس ها بیشتر است.

---

[۹] -SUBCRITICAL

[۱۰] -SUPERCRITICAL

شکل زیر نمایانگر تفاوت ها در جواب فرکانس ها در حالات مختلف ومقایسه آن با پاسخ های تحلیلی است:



۲-۴-فرکانس تجربی ارتعاشات همراه با مدل های تحلیلی تانگ وسیمکینز

بررسی دامنه ارتعاشات :

دربررسی دامنه ارتعاشات نسبت دامنه کرنش دینامیکی به کرنش استاتیکی برحسب سرعت تعیین می شود.

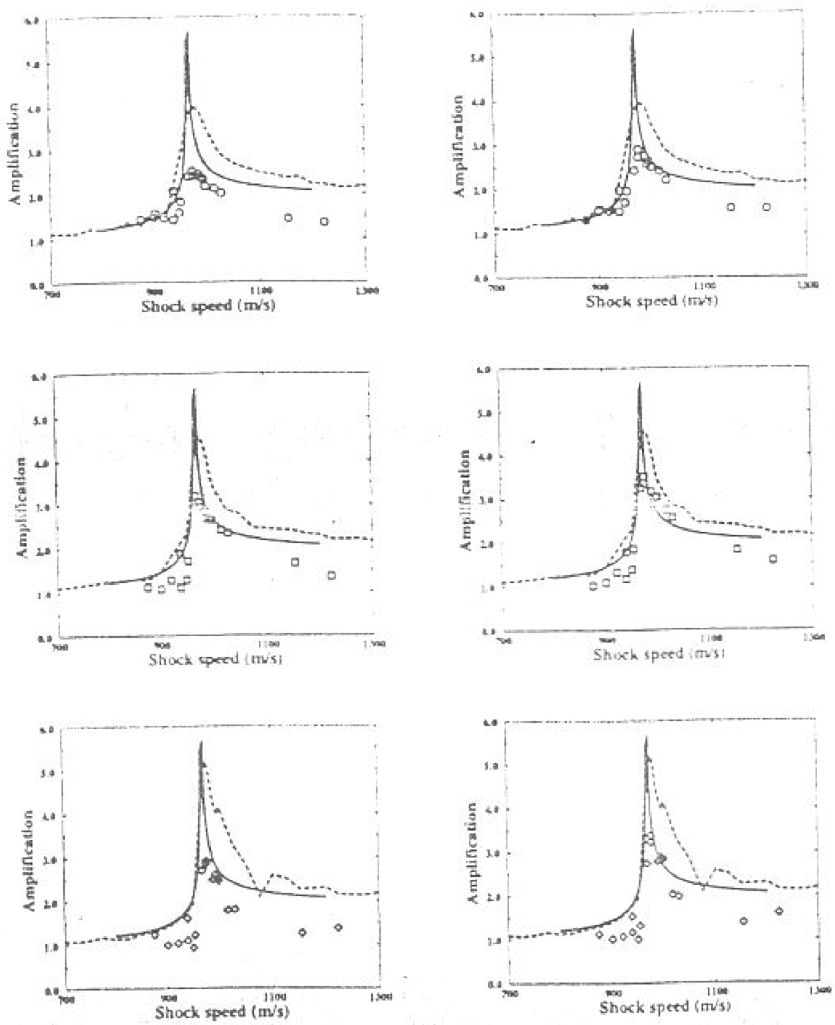
در حالت زیر بحرانی نسبت کرنش دینامیکی به کرنش استاتیکی تقریبا برابر ۱ است ،اما در سرعت های بالاتر ودر حالت فوق بحرانی این نسبت تقریبا برابر ۲ است.

در حالتی که سرعت خیلی نزدیک یا برابر سرعت بحرانی است مدل های تحلیلی و المان محدود پاسخهایی می دهند که خیلی بیشتر از نتایج تجربی است. دلیل این امر را شاید بتوان در نظر نگرفتن هیچ گونه میرایی در حالات تحلیلی یا المان محدود دانست.

بررسی نتایج:

در شکل بعد نتایج ضریب تقویت دینامیکی (نسبت ماکزیمم دامنه دینامیکی به حالت استاتیکی) به روشهای مختلف ارائه شده است. مقادیر ورودی مسئله بصورت زیر هستند:

R=۲۶.۰۹mm	$\rho = 2773 kg/m^3$
H=۱.۶۰۱mm	$\nu = 0.33$
L=۸۸۹mm	$E = 72 \times 10^9 N/m^2$
V=۹۹۹.۲ m/s	$p_1 = 6.8, p_2 = 18.5 kpa$



شکل۲-۵-نتایج تجربی بالا از کرنش سنج شماره ۱ خوانده شده اندوردیف وسط از کرنش سنج شماره ۲ ونتایج ردیف آخر از کرنش سن شماره ۳ بدست آمده است. ستون سمت چپ براساس پرش شوک اندازه گیری شده وستون سمت راست براساس فشار اندازه گیری شده است.خطوط پررنگ پاسخ های تحلیل ریاضی،خط چین ها پاسخ های روشهای المان محدود ونقاط توخالی نتایج تجربی هستند.

جمع بندی :

روش تحلیلی ارائه شده دراین تحقیق پاسخ های نسبتاً قابل قبولی ارائه می دهد اما پاسخ ها نسبت به متغیر ηارائه شده و غیر تناوبی است . راه حل ارائه شده برای استفاده کاربر بسیار آسان است و به راحتی می توان از آن استفاده کرد.

ضریب تصحیح برشی[۱۱] [۵]

معادلات حرکت حاکم بریک پوسته در مختصات استوانه ای ودر شرایط متقارن محوری[۱۲] به شکل زیر است :

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial z}+2\mu\frac{\partial\omega_\theta}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} \tag{۸۶-۲}$$

$$(\lambda+2\mu)\frac{\partial\Delta}{\partial x}-\frac{2\mu}{z}\frac{\partial(z\omega_\theta)}{\partial z}=\rho\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \tag{۸۷-۲}$$

که u_zجابجایی در جهت شعاعی و u_xجابجایی در جهت محوری است.همچنین Δانبساط و ω_θچرخش است وبصورت زیر تعریف می شود:

$$\Delta=\frac{1}{z}\frac{\partial(zu_z)}{\partial z}+\frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{۸۸-۲}$$

$$\omega_\theta=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial z}\right) \tag{۸۹-۲}$$

برای سطوح عاری از تنش های سطحی[۱۳] در $z=a, z=b$ می توان نوشت :

$$\lambda\Delta+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{۹۰-۲}$$

$$\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)=0$$

[۱۱] -SHEAR CORRECTION FACTOR
[۱۲] -AXISYMMETRIC
[۱۳] -TRACTION

(۹۱-۲)

تلفیق معادلات حرکت وشرایط مرزی به معادله مشخصه زیر می انجامد:

$$f(K)=K_{10}(\beta)K_{01}(\gamma)+K_{01}(\beta)K_{10}(\gamma)+\frac{8}{\pi^2\beta\gamma ab}+FK_{11}(\gamma)K_{00}(\beta)+\frac{1}{F}K_{11}(\beta)K_{00}(\gamma)$$
$$+\frac{(1+\overline{B})^2}{F\gamma^2 ab}K_{11}(\beta)K_{11}(\gamma)-\frac{1+\overline{B}}{\gamma ab}[aK_{11}(\gamma)K_{10}(\beta)+bK_{11}(\gamma)K_{01}(\beta)]-\frac{1+\overline{B}}{F\gamma ab}[aK_{11}(\beta)K_{10}(\gamma)$$
$$+bK_{11}(\beta)K_{01}(\gamma)]=0$$

(۹۲-۲)

که در آن:

$$K_{mn}=J_m(zb)Y_n(za)-J_n(za)Y_m(zb) \qquad \beta^2=\alpha^2\left(\frac{c^2}{{c_c}^2}-1\right)$$
$$\gamma^2=\alpha^2\left(\frac{c^2}{{c_s}^2}-1\right) \qquad \overline{B}=\frac{c}{2{c_s}^2}-1$$
$$F=\frac{\alpha^2\overline{B}^2}{\beta\gamma} \qquad {c_c}^2=\frac{(\lambda+2\mu)}{\rho}$$
$${c_s}^2=\frac{\mu}{\rho}$$
(۹۳-۲)

که درآنها α شماره موجY,J توابع بسل[۱۴] c سرعت فاز وL طول موج ،h ضخامت پوسته و c_sسرعت موج برشی و c_cسرعت موج طولی هستند. با فرض اینکه:

$$\delta=h/L,\ s=c/c_s$$ (۹۴-۲)

برای طول موجهای خیلی کوچک $\delta\longrightarrow\infty$ریشه معادله زیر برابر سرعت حد[۱۵] است[۲۱] :

$$\left(n^2-s^2\right)\left(1-s^2\right)=n\left(\frac{s^2}{2}-1\right)^2 \qquad 0<s<1$$ (۹۵-۲)

---
۱۴ -BESSEL FUNCTION
۱۵ -LIMITING VELOCITY

که درآن :

$$n^2 = 2(1-\nu)(1-2\nu) \tag{۲-۹۶}$$

معادلات حرکت برای پوسته استوانه ای جدارنازک بصورت زیر هستند[۲۱]:

$$\left[D\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \kappa^2 Gh - \rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi_x - \left[\kappa^2 Gh\frac{\partial}{\partial x}\right]w + \left[\frac{D}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho I}{R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u = 0 \tag{۲-۹۷}$$

$$-\left[\kappa^2 Gh\frac{\partial}{\partial x}\right]\psi_x + \left[\frac{E_p}{R^2} + \frac{D}{R^4} - \kappa^2 Gh\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]w + \left[E_p\frac{\nu}{R}\frac{\partial}{\partial x}\right]u = 0 \tag{۲-۹۸}$$

$$\left[\frac{D}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\rho I}{R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\psi_x + \left[E_p\frac{\nu}{R}\frac{\partial}{\partial x}\right]w + \left[E_p\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u = 0 \tag{۲-۹۹}$$

که درآن: $E_p = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$ $\qquad I = \dfrac{h^3}{12}$

با حذف تغییر شکل های برشی باید $\psi_x = -w'$ که با جایگذاری آن :

$$\left[D\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{D}{R^4} + \frac{E_p}{R^2} + \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \rho I\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial t^2}\right]w + \left[\frac{-D}{R}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{E_p\nu}{R}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho I}{R}\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\right]u = 0$$

$$\left[\frac{-D}{R}\frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{E_p\upsilon}{R}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\rho I}{R}\frac{\partial^3}{\partial x\partial t^2}\right]w + \left[E_p\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u = 0$$

(۲-۱۰۰)

همچنین برای پوسته های نازک :

$$D/R = 0 \qquad I/R = 0$$

برای حل به روش موج[۱۶] مقادیر زیردرمعادلات حرکت جایگزین میشود:

$$\psi_x(x,t) = \Psi e^{i(\omega t - \alpha x)} \qquad w(x,t) = We^{i(\omega t - \alpha x)} \qquad u(x,t) = Ue^{i(\omega t - \alpha x)} \tag{۱۰۱-۲}$$

که درآنαوωبه ترتیب شماره موج و فرکانس هستندوبا سرعت فاز c با روابط زیرمرتبط می شوند:

$$\omega = 2\pi c/L \quad , \quad \alpha = 2\pi/L$$

کهL طول موج است.با درنظر گرفتن $m = h/R, N = 1/1-\upsilon$ در معادلات تعادل پوسته استوانه ای،

معادله مشخصه زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\delta^2\left(2N - s^2\right)^2\left[4\pi^2\kappa^2\delta^2 - 4\pi^2 s^2\delta^2 - 2Nm^2\left(1-\frac{m^2}{12}\right)\right]\left(1-\frac{m^2}{12}\right) + \\ &\left(2N - s^2\right)\left[\frac{2N}{\pi^2}\kappa^2 m^2\left(1+\frac{m^2}{12}\right) - 4\kappa^2 s^2\delta^2 - \frac{4}{3}\nu\kappa^2 N\delta^2 m^2 - \frac{4}{3}\nu^2 N^2\delta^2 m^2\right] \\ &-4\frac{N^2\nu^2}{\pi^2}\kappa^2 m^2 = 0\end{aligned} \tag{۱۰۲-۲}$$

با حل این معادله سه ریشه برای s^2بدست میاید که کوچکترین آنها مد نظر است.برای موجها با طول موج زیاد $0 \longrightarrow \delta$ومعادله بصورت زیر است :

$$s^2 = \frac{2(1+\nu) + \dfrac{m^2}{6(1-\nu)}}{1+\dfrac{m^2}{12}} \tag{۱۰۳-۲}$$

که اگر m خیلی کوچک تر از ۱ باشد :

$$s^2 = 2(1+\nu) \tag{۱۰۴-۲}$$

---

[۱۶] -WAVE SOLUTION

همچنین برای طول موج های کوچک $\infty \longrightarrow \delta$:

$$\left(2N - s^2\right)\left(\kappa^2 - s^2\right) = 0 \qquad (۱۰۵-۲)$$

دراینجا تنها ریشه های معادله $s^2 = \kappa^2$ مورد بررسی قرار می گیرد.با قرار دادن κ=s درمعادله ۲- ۴۴:

$$\left[\left(n^2 - \kappa^2\right)\left(1 - \kappa^2\right)\right] = n\left(\frac{1}{2}\kappa^2 - 1\right)^2 \qquad 0 < \kappa < 1 \qquad (۱۰۶-۲)$$

بنابراین κ وابسته به مقادیر ν بوده وچون ν بین ۰ تا ۰.۵ تغییر می کند بنابراین:

$$0.86 < \kappa^2 < 0.91$$

۲-۲ - روش تحلیل بااستفاده از سری فوریه[۱۷]

پراوین .ج. بوتا[۱۸] سعی نموده با استفاده از اصل دالامبر[۱۹] برای پوسته ها روی بستر الاستیک[۲۰] رفتار مخازن جدارنازک را بررسی کند . در حل انجام شده همانند روش ها ی قبل، بار گسترده متحرک بوده و مدل ریاضی ارائه شده برای آن تابع پله ای یا هویساید است . همچنین علاوه بر حل معمول، حلی نیز برای حالت تشدید درنظر گرفته شده است . این حل تنها برای یک نقطه خاص که نقطه تکین[۲۱] می باشد ارائه شده وبرای سایر حالات از آن استفاده نمی شود.

تئوری وحل معادلات[۱۹]

معادله حرکت برای یک پوسته استوانه ای بصورت زیر است :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{Eh}{r^2}w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=f(x,t) \qquad (۱۰۷-۲)$$

E مدول یانگ ،w مقدار تغییرشکل در جهت شعاعی ،h ضخامت پوسته ،r شعاع مخزن،ρچگالی ماده مخزن، $f(x,t)$ بار اعمال شده وD صلبیت خمشی[۲۲] نامیده شده ومقدارآن $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$است.

x معرف راستای محور استوانه وt زمان است.

---

[۱۷] -FOURIER SERIES
[۱۸] -PRAVIN.G.BHUTA
[۱۹] -D'ALEMBERT PRINCIPLE
[۲۰] -ELASTIC FOUNDATION
[۲۱] -SINGULARITY
[۲۲] -FLEXURAL RIGIDITY

شرایط مرزی درنظر گرفته شده برای صفحه میانی پوسته :

$$w(0,t)=0 \quad , \quad w(l,t)=0$$
$$\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2}=0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w(l,t)}{\partial x^2}=0 \tag{۱۰۸-۲}$$

و بار بصورت تابع پله ای:

$$f(x,t)=f_0 u\left[t-\frac{x}{v}\right] \tag{۱۰۹-۲}$$

با استفاده از سری فوریه سینوسی بار به شکل زیردرنظر گرفته می شود:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{۱۱۰-۲}$$

تغییر شکل صفحه میانی نیز:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{۱۱۱-۲}$$

با بسط دادن عبارت نیروبرای حالتی که $t \le l/v$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2f_o}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi vt}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{۱۱۲-۲}$$

و اگر $t \ge l/v$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4f_o}{n\pi}\varepsilon(n)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{۱۱۳-۲}$$

وبا تعریف $p_n^{\,2}=\dfrac{D}{\rho h}\left(\dfrac{n\pi}{l}\right)^4+\dfrac{E}{\rho r^2}$ معادله(۲-۱۰۷) تبدیل به دو معادله می شود:

$$\frac{d^2a_n}{dt^2}+p_n^{\,2}a_n=\frac{1}{\rho h}\frac{2f_0}{n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi vt}{l}\right] \tag{۲-۱۱۴}$$

اگر $t\le\dfrac{l}{v}$

$$\frac{d^2b_n}{dt^2}+p_n^{\,2}b_n=\frac{1}{\rho h}\frac{4f_0\varepsilon(n)}{n\pi} \tag{۲-۱۱۵}$$

اگر $t\ge\dfrac{l}{v}$

ε (n) برای n های فرد برابر ۱ وبرای n های زوج برابر صفر است . با توجه به اینکه دو معادله متفاوت موجود است پس دو حل جداگانه مورد نیاز است :

حل درمنطقه تحت فشار(منطقه I) :

حل عمومی به همراه حل خصوصی معادله به شکل زیر است:

$$a_n=C_1\sin p_nt+C_2\cos p_nt+\frac{2f_0}{\rho hn\pi p_n^{\,2}}-\frac{2f_0\cos\left(\dfrac{n\pi vt}{l}\right)}{\rho hn\pi\left[p_n^{\,2}-\left(\dfrac{n\pi v}{l}\right)^2\right]} \tag{۲-۱۱۶}$$

که درآن: $n \neq \frac{lp_n}{\pi v}$, $t \leq \frac{l}{v}$

شرایط اولیه در منطقهI:

در حل معادله ودر جواب عمومی دو ثابت c_1 ,c_2 موجود است که با استفاده از شرایط اولیه زیر تعیین می شود:

$$w(x,0) = \frac{\partial w(x,0)}{\partial t} = 0 \tag{۲-۱۱۷}$$

با اعمال این شرایط جواب بصورت زیر درمی آید:

$$a_n = \frac{2f_0}{\rho h n \pi}\left[\frac{1}{p_n^{\ 2} - \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2} - \frac{1}{p_n^{\ 2}}\right]\cos p_n t + \frac{2f_0}{\rho h n \pi p_n^{\ 2}} - \frac{2f_0}{\rho h n \pi\left[p_n^{\ 2} - \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2\right]}\cos\frac{n\pi v t}{l}$$

(۲-۱۱۸)

که درآن: $t \leq \frac{l}{v}, n \neq \frac{lp_n}{\pi v}$

حل درمنطقه II:

برای حالتی که $t \geq \frac{l}{v}$ معادله بصورت :

$$\frac{d^2 b_n}{dt^2} + p_n{}^2 b_n = \frac{1}{\rho h}\frac{4 f_0 \varepsilon(n)}{n\pi} \qquad (۱۱۹\text{-}۲)$$

وپاسخ عمومی وخصوصی آن:

$$b_n = C_3 \sin p_n t + C_4 \cos p_n t + \frac{4 f_0 \varepsilon(n)}{\rho h n \pi p_n{}^2} \qquad (۱۲۰\text{-}۲)$$

برای بدست آوردن ضرایب c_3, c_4 شرایط مرزی زیر اعمال می گردد:

$$\begin{aligned} a_n\Big|_{t = l/v} &= b_n\Big|_{t = l/v} \\ \frac{da_n}{dt}\Big|_{t = l/v} &= \frac{db_n}{dt}\Big|_{t = l/v} \end{aligned} \qquad (۱۲۱\text{-}۲)$$

وپس از اعمال آن ها:

$$\begin{aligned} b_n = {} & \frac{2 f_0}{\rho h n \pi}\left[\frac{1}{p_n{}^2} - \frac{2\varepsilon(n)}{p_n{}^2} - \frac{\cos n\pi}{p_n{}^2 - \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2}\right]\cos\left[p_n\left(t - \frac{l}{v}\right)\right] + \\ & \frac{2 f_0}{\rho h n \pi}\left[\frac{1}{p_n{}^2 - \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2} - \frac{1}{p_n{}^2}\right]\cos p_n t + \frac{4 f_0 \varepsilon(n)}{\rho h n \pi p_n{}^2} \end{aligned} \qquad (۱۲۲\text{-}۲)$$

حالت تشدید[۲۳]:

اگر جواب های بدست آمده در مراحل قبل برای معادلات بررسی شود مشاهده می گرددکه در صورتی که $p_n = \frac{n\pi v}{l}$ این جابجایی ها تعریف نشده خواهند بود .بنابراین می توان این حالت را حالت تشدید فرض نمود. دراین صورت معادلات به شکل زیر در می آیند:

$$\frac{d^2 a^*_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 a^*_n = \frac{2f_0}{\rho h n\pi}\left[1-\cos\frac{n\pi vt}{l}\right] \qquad (۱۲۳\text{-}۲)$$

$$if \quad t \le l/v$$

$$\frac{d^2 b^*_n}{dt^2} + \left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2 b^*_n = \frac{4f_0\varepsilon(n)}{\rho h n\pi} \qquad (۱۲۴\text{-}۲)$$

$$if \quad t \ge l/v$$

با حل معادله اول:

$$a^*_n = C_5 \sin\frac{n\pi vt}{l} + C_6\cos\frac{n\pi vt}{l} + \frac{2f_0}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2} - \frac{f_0 t}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)}\sin\frac{n\pi vt}{l} \qquad (۱۲۵\text{-}۲)$$

$$n = lp_n/\pi v \quad , \quad t \le l/v$$

۲۳ -RESONANT MODE

وبا اعمال شرایط اولیه ۲- ۹۸وبدست آوردن ثوابت :

$$a^*_n = -\frac{2f_0}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2}\cos\frac{n\pi vt}{l} + \frac{2f_0}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2} - \frac{f_0 t}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)}\sin\frac{n\pi vt}{l} \qquad (۱۲۶\text{-}۲)$$

با حل معادله دوم نیز :

$$b^*_n = C_7\sin\frac{n\pi vt}{l} + C_8\cos\frac{n\pi vt}{l} + \frac{4f_0\varepsilon(n)}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2} \qquad (۱۲۷\text{-}۲)$$

وپس از اعمال شرایط مرزی :

$$b^*_n = -\frac{f_0}{\rho h\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi vt}{l} + \frac{2f_0}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2}\left[\frac{1}{\cos n\pi}(1-2\varepsilon(n))-1\right]\cos\frac{n\pi vt}{l}$$
$$+\frac{4f_0\varepsilon(n)}{\rho h n\pi\left(\frac{n\pi v}{l}\right)^2} \qquad (۱۲۸\text{-}۲)$$
$$n = {}^{lp_n}\!/_{\pi v} \quad , \quad t \ge {}^{l}\!/_{v}$$

بنابراین حل کلی معادله بصورت زیر است:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} + a^*_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \qquad (۱۲۹\text{-}۲)$$
$$(n \ne {}^{lp_n}\!/_{\pi v}), (n = {}^{lp_n}\!/_{\pi v})$$

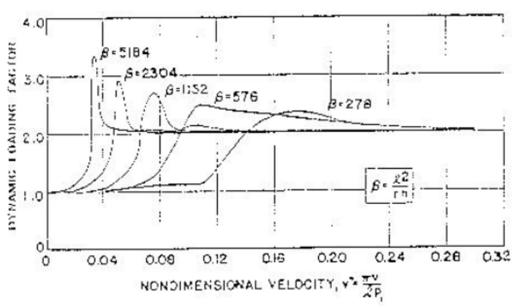
$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l}) + b^*_n(t)\sin(\frac{n\pi x}{l}) \qquad (۱۳۰\text{-}۲)$$
$$(n \ne {}^{lp_n}\!/_{\pi v}), (n = {}^{lp_n}\!/_{\pi v})$$

مقایسه نسبت تغییر شکل دینامیکی به استاتیکی[۱۹] :

با توجه به اینکه پاسخ های تحلیلی در قالب سری فوریه هستندوضرایب نیز بسته به زمان تغییر میکنند بدست آوردن حداکثر تغییر شکل درآنها تقریبا غیرممکن است .بنابراین بهتراست از روشهای عددی استفاده شود .

بررسی نتایج عددی بیانگر این مطلب است که نسبت تغییرشکل دینامیکی به استاتیکی به متغیر پارامتر پوسته[۲۴] $\beta = \frac{l^2}{rh}$ وهمچنین سرعت بی بعد[۲۵] $v^* = \frac{\pi v}{l p_1}$ بستگی دارد.

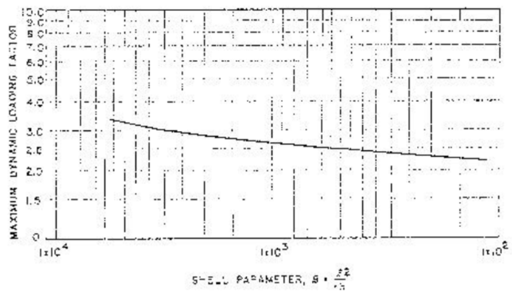
درشکل ۲-۵ نسبت دامنه تغییرشکل دینامیکی به استاتیکی درقبال تغییرات سرعت بی بعدوبرای مقادیر مختلف β رسم شده است.



شکل۲-۶-تغییرات نسبت دامنه دینامیکی به استاتیکی برحسب سرعت بی بعد

[۲۴] -SHELL PARAMETER
[۲۵] - NONDIMENSIONAL VELOCITY

همچنین درشکل۲-۶ میزان تغییرات ماکزیمم نسبت تغییرشکل دینامیکی به استاتیکی برحسب تغییرات پارامتر پوسته β رسم شده است.



شکل۲-۷-تغییرات نسبت دامنه دینامیکی به استاتیکی درمقابل تغییرات β

این دوشکل نشان می دهند که مقداربیشینه این نسبت می تواند هرعددی بزرگتراز ۲ باشد .

۲-۳- تحلیل مخزن استوانه ای جدار نازک تحت بار متحرک با استفاده از روش انتگرال مختلط کارسون لاپلاس

مقدمه :

دراین روش سعی براین است تا راه حلی ارائه شود که برای پوسته های استوانه ای تحت بار متحرک گسترده ودر حالتی که سرعت کمتراز سرعت بحرانی است قابل استفاده باشد . باتوجه به دقتی که معادله دالامبر دراین محدوده دارد ، می توان مبنای مسئله را بر اساس آن انتخاب نمود. برای حل مسئله از روش انتگرال مختلط کارسون –لاپلاس[۱] استفاده می شود. با استفاده از این تبدیل با کوتاهترین زمان وراه حل ممکن ،میتوان به جواب رسید واز محاسبات وقت گیر وپیچیده جلوگیری کرد. علاوه براین درانتها یک فرمول نهایی بصورت یک سری ارائه می شود که با رعایت آنچه در مورد سرعت وضخامت مخزن گفته شد در مسائل مختلف قابل استفاده است.

تئوری مسئله:

همان گونه که گفته شد برای شروع از اصل دالامبر استفاده می شودکه معادله(۲-۱۰۷) است .بارگذاری با استفاده از تابع پله ای وبصورت رابطه ۱-۳ است که درحالت $x-vt<0$ به شکل $P=P_0$ ودرحالت $x-vt>0$ بصورت $P=0$ خواهد بود.

حل درمنطقه I یا منطقه تحت فشار:

بادرنظر گرفتن بارگذاری تعریف شده معادله بصورت زیر خواهد بود:

---

[۱] -LAPLACE-CARSON

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\frac{Eh}{r^2}w+\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=f(x,t) \tag{۲-۱۳۱}$$

برای حل از سری فوریه سینوسی استفاده می شود زیرا باتوجه به شرایط مرزی و اینکه در طول صفر مقدار تغییرشکل صفراست از تبدیل سینوسی استفاده می شود[۲۸]

$$w^*=\int_0^l w\sin\frac{j\pi x}{l}dx$$
$$w=\frac{2}{l}\sum_{j=1}^{\infty}w^*\sin\frac{j\pi x}{l} \tag{۲-۱۳۲}$$

با اعمال تبدیل فوریه سینوسی دردوطرف معادله :

$$D\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 w^*(j,t)+\frac{Eh}{r^2}w^*(j,t)+\rho h\ddot{w}^*(j,t)=\frac{f_x l}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right] \tag{۲-۱۳۳}$$

حال تبدیل کارسون –لاپلاس که معروف به تبدیل انتگرال مختلط است وبصورت زیر تعریف می شود مورد استفاده قرار می گیرد [۲۸]:

$$V^*(j,p)=\int_0^\infty pV(j,t)e^{-pt}dt \tag{۲-۱۳۴}$$

وتبدیل معکوس آن:

$$V(j,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a_0-i\infty}^{a_0+i\infty}e^{pt}\frac{V^*(j,p)}{p}dp \tag{۲-۱۳۵}$$

برای شروع ابتدادر طرفین معادله تبدیل فوریه سینوسی را اعمال نموده وپس از آن طرفین در عبارت pe^{-pt} ضرب می شود.حاصل بصورت زیر خواهد بود:

$$D\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 pe^{-pt}w^*(j,t)+\frac{Eh}{r^2}pe^{-pt}w^*(j,t)+\rho hpe^{-pt}\ddot{w}^*(j,t)=\frac{pf_x lpe^{-pt}}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right]$$

(۱۳۶-۲)

حال با اعمال تبدیل کارسون – لاپلاس در طرفین معادله:

$$D\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4 V^*(j,p)+\frac{Eh}{r^2}V^*(j,p)+\rho hp^2V^*(j,p)=\frac{f_x l}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right] \qquad (۱۳۷-۲)$$

با فاکتورگیری از عامل مشترک $V^*(j,p)$ وباز نویسی عبارت:

$$V^*(j,p)=\frac{\frac{f_x l}{j\pi}\left[1-(-1)^j\right]}{D\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4+\frac{Eh}{r^2}+\rho hp^2} \qquad (۱۳۸-۲)$$

که آن را می توان بصورت زیر نیز نوشت:

$$V^*(j,p)=\frac{\frac{f_x l}{j\pi\rho h}\left[1-(-1)^j\right]}{\frac{D}{\rho h}\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4+\frac{Eh}{r^2\rho h}+p^2} \qquad (۱۳۹-۲)$$

بااعمال تبدیل معکوس کارسون-لاپلاس:

$$w=\sum_{j=1}^{\infty} {}^{2}\!/_{l} \quad \frac{\frac{f_x l}{j\pi\rho h}\left[1-(-1)^{j}\right]}{\frac{E}{r^2\rho}+\frac{D}{\rho h}\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4}\left[1-\cos\sqrt{\frac{E}{r^2\rho}+\frac{D}{\rho h}(\frac{j\pi}{l})^4}\times t\right]\sin({}^{j\pi x}\!/_{l})$$

(۱۴۰-۲)

انتخاب تعداد جملات سری :

با رجوع به مخرج کسر یعنی عبارت $j\pi\rho h\left[\frac{E}{r^2\rho}+\frac{D}{\rho h}\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4\right]$مشخص می شود که باتوجه به وجود توان۴ در عبارت $j\pi\rho h\,\frac{D}{\rho h}\left(\frac{j\pi}{l}\right)^4$ این عبارت دارای رشد بسیاربیشتری درمقایسه با $j\pi\rho h\,\frac{E}{r^2\rho}$ میباشد و با افزایش مقدار $\mathbf{j}$ درسری ، مخرج کسررا به شدت افزایش میدهد .

حال باتوجه به آنچه گفته شد ، در صورتی که تعداد ۱۰۰ جمله درنظر گرفته شود رشد مخرج کسربه اندازه 10^{10} خواهد بود. به همین دلیل جملات پس از ۱۰۰ جمله بسیار کوچک خواهند بود وقابل صرف نظر کردن هستند.

حل در منطقه II یا منطقه ای که موج فشار به آن نرسیده است:

دراین حالت نیز معادله دالامبر را می توان صادق دانست (معادله۲-۱۳۱) با این تفاوت که عبارت $f(x,t)$ برابر صفر خواهد بود.

دراین حالت معادله فاقد جواب خصوصی بوده وتنها دارای جواب عمومی است. این جواب عمومی به صورت زیر است:

$$w^{\mathrm{II}}=C_1\sin pt+C_2\cos pt \tag{۲-۱۴۱}$$

که درآن $p=\sqrt{\frac{E}{r^2\rho}+\frac{D}{\rho h}(\frac{j\pi}{l})^4}$ می باشد.

شرایط پیوستگی زیر باید درمرز جدایی منطقه Iازمنطقه IIصادق باشد :

$$w^{\mathrm{I}}\left(x,t=l/v\right)=w^{\mathrm{II}}\left(x,t=l/v\right)$$
$$\frac{\partial\left[w^{\mathrm{I}}\left(x,t=l/v\right)\right]}{\partial t}=\frac{\partial\left[w^{\mathrm{II}}\left(x,t=l/v\right)\right]}{\partial t} \qquad (۱۴۲\text{-}۲)$$

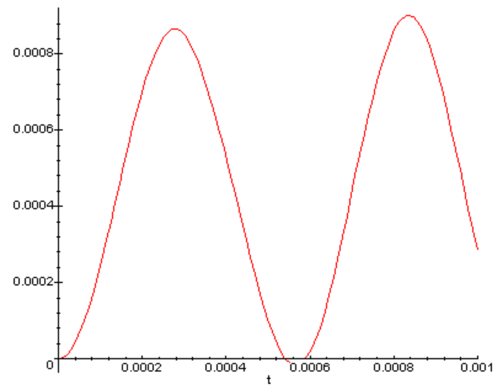
که با اعمال این شرایط مرزی پاسخ های زیر بدست می آید :

$$C_1=\frac{f_x l\left[-1+(-1)^j\right]\left\{-\cos\left(\frac{pl}{v}\right)+\cos\left(\frac{pl}{v}\right)^2+\sin\left(\frac{pl}{v}\right)^2\right\}}{\left[\cos\left(\frac{pl}{v}\right)^2+\sin\left(\frac{pl}{v}\right)^2\right]p^2 j\pi\rho h}$$
$$C_2=\frac{f_x l\left[-1+(-1)^j\right]\sin\left(\frac{pl}{v}\right)}{\left[\cos\left(\frac{pl}{v}\right)^2+\sin\left(\frac{pl}{v}\right)^2\right]p^2 j\pi\rho h} \qquad (۱۴۳\text{-}۲)$$

حل نمونه :

نمودار تغییر شکل شعاعی مخزن تحت بار متحرک درشکل زیر ودر فاصله ۰.۰۰۱ ثانیه پس از رسیدن موج فشار به محدوده $x = 20in$ مشاهده میشود.

$$h = 0.5, V = 72000in/\sec, l = 72in, \nu = 0.3, r = 18, E = 30\times10^{6}, f_x = 20, \rho = 7.332\times10^{-4}$$



شکل۲-۸- نمودار حاصل از روش سری و انتگرال مختلط
محور افقی زمان ومحور عمودی جابجایی شعاعی است

فصل سوم

تحلیل عددی پوسته نازک تحت بار متحرک

۳-۱- تحلیل عددی پوسته های نازک تحت بار متحرک با روش گالرکین

اگر چه روش های ریاضی همواره مهمترین مراجع در حل مسائل هستند اما روش های عددی امـروزه همپای روش های ریاضی گسترش یافته و اهمیتی ویژه دارد . ا همیت این روش ها بـویژه درمـواردی که حل ریاضی بدلایل خاص امکان پذیر نیست بیشتر است.

دراین بخش معادله دیفرانسیل حاکم بر پوسته استوانه ای (معادله دالامبر) با استفاده از روش گالرکین حل خواهد شد .

روش حل:

معادله حاکم بر مسئله ، معادله (۲-۱۰۷) است.مطابق آنچه در حل دینامیکی مسائل مرسوم است پاسخ مسئله بصورت زیر تقریب زده می شود:

$$w = \sum a_j(t)\phi_j(x) \qquad (۳-۱)$$

که درآن مقادیر تابع وزنی همان مقادیر توابع هرمیتی بادوگره که در مورد تیرها موجود است انتخاب میشود وبصورت زیر هستند[۲۴] :

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{4}\left(2 - 3\xi + \xi^3\right) \\
\phi_2 &= \frac{1}{4}\left(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3\right) \\
\phi_3 &= \frac{1}{4}\left(2 + 3\xi - \xi^3\right) \\
\phi_4 &= \frac{1}{4}\left(-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3\right)
\end{aligned} \qquad (۳-۲)$$

ابتدا با استفاده از روش گالرکین باقیمانده فرمول (۲-۱۰۷) مشخص میشود :

$$\int\left(D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{Eh}{r^2}w\right)\phi_i dx+\int\rho h\phi_i\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\int f\phi_i dx=0 \qquad (۳-۳)$$

که می توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$\int D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\phi_i dx+\int\frac{Ehw}{r^2}\phi_i dx+\int\rho h\phi_i\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\int f\phi_i dx=0 \qquad (۴-۳)$$

که درآن:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\phi_i &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\phi_i\right)-\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\frac{\partial\phi_i}{\partial x}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\phi_i\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\phi_i'\right)+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\phi_i\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\phi_i'\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3\phi_i}{\partial x^3}\\
&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\phi_i\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\phi_i'\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(w\frac{\partial^3\phi_i}{\partial x^3}\right)+w\frac{\partial^4\phi_i}{\partial x^4}
\end{aligned} \qquad (۵-۳)$$

بنابراین :

$$\begin{aligned}
\int D\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\phi_i dx &= D\left[\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\phi_i\right)-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\phi_i'\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2\phi_i}{\partial x^2}\right)-\left(w\frac{\partial^3\phi_i}{\partial x^3}\right)\right]_0^l\\
&+\int Dw\frac{\partial^4\phi_i}{\partial x^4}dx
\end{aligned} \qquad (۶-۳)$$

با توجه به شرایط مرزی باقیمانده بصورت زیر درمی آید :

$$\int Dw\frac{\partial^4\phi_i}{\partial x^4}dx+\frac{Eh}{r^2}\int w\phi_i dx+\rho h\int \phi_i\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\int f\phi_i dx=0 \qquad (۷-۳)$$

برای درک بهتر مسئله اگر باقیمانده بصورت $m\ddot{x}+kx=F$ درنظر گرفته شودبا استفاده از رابطه ۳-۱:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= \int \rho h\phi_j(x)\phi_i(x)dx \\ k_{ij} &= \int\left[D\frac{\partial^4\phi_j(x)}{\partial x^4}\phi_i(x)+\frac{Eh}{r^2}\phi_j(x)\phi_i(x)\right]dx \\ F_{ij} &= -\int f(x,t)\phi_i dx \end{aligned} \qquad (۸-۳)$$

با استفاده از تفاضل مرکزی[۲۳] :

$$\partial^2 a/\partial t^2=\frac{a_{j+1}-2a_j+a_{j-1}}{\Delta t^2} \qquad (۹-۳)$$

که Δtاندازه فاصله ای است که تقسیمات براساس آن انجام شده ، a_jمقدار تابع درهمان نقطه ای است که مشتق آن مدنظر است، a_{j+1}مقدار تابع دریک فاصله Δt جلوتر و a_{j-1}مقدار تابع در یک Δtعقب تر است.

دلیل ترجیح تفاضل مرکزی بر تفاضلات پیشرو وپسرودقت بالاتر آن است .زیرا در حالات پیشرو وپسروخطا $e=o(\Delta t)$است درحالیکه در صورت استفاده از تفاضل مرکزی خطا $e=o(\Delta t^2)$خواهدبود:

$$a_{-1}=a_0-\Delta t\,\dot{a}_0+\frac{\Delta t^2}{2}\ddot{a}_0 \qquad (۱۰-۳)$$

یک نکته مهم تعیین گام زمانی است که درواقع تقسیماتی است که برروی دوره تناوب مسئله صورت میگیرد تا پاسخ های صحیح وپایدار بدست بیاید. در واقع برای هر مسئله یک Δt_{cr}وجوددارد که تحت هرشرایطی باید گام زمانی از Δt_{cr} کوچکتر باشد . برای تعیین گام زمانی محققین مختلف پیشنهادهای متفاوتی دارند که برای مثال صدرنژاد[۲۴] مقدار $\frac{T}{\pi}$را پیشنهاد می کندکهTزمان یک ارتعاش یا همان دوره تناوب نوسان است اما بهتر است که حتی الامکان گام زمانی کوچکتر درنظر گرفته شود.درصورتی که مقدار گام زمانی بزرگتر از Δt_{cr}باشد پاسخ ها پایدار نبوده وبا تغییرات در تعداد المان ها ومش بندی مسئله پاسخ ها متفاوت خواهند بود وبه یک مقدار همگرا نخواهند بود.

با جاگذاری مقادیر مذکور در عبارت باقیمانده (۳-۷) و مرتب کردن آن ها :

$$\int \frac{\rho h}{\Delta t^2}\phi_i(x)\phi_j(x)a_{j+1}(t)dx = \int\left[-D\frac{\partial^4\phi_i(x)}{\partial x^4}\phi_j(x) - \frac{Eh}{r^2}\phi_i(x)\phi_j(x) + \frac{2\rho h}{\Lambda t^2}\phi_i(x)\phi_j(x)\right]a_j(t)dx$$
$$-\int \frac{\rho h}{\Delta t^2}\phi_i(x)\phi_j(x)a_{j-1}(t)dx + \int P[1 - H(x - vt)]$$

(۱۱-۳)

همان گونه که مشخص است اعمال تغییرات ذکرشده معادله را از شکل $m\ddot{x} + kx = F$ ساده کرده وبه شکل $ka = F$در خواهد آورد.

با توجه به آنچه گفته شد عبارات به شکل زیر تغییر می یابند :

$$k = \int \rho h \phi_i \phi_j dx \qquad (۱۲-۳)$$

بردار نیرو نیز به صورت زیر است :

$$\int\left[-D\frac{\partial^4\phi_i(x)}{\partial x^4}\phi_j(x)\Delta t^2-\frac{Eh}{r^2}\phi_i(x)\phi_j(x)\Delta t^2+2\rho h\phi_i(x)\phi_j(x)\right]a_j(t)dx$$
$$-\int\rho h\phi_i(x)\phi_j(x)a_{j-1}(t)dx+\int P[1-H(x-vt)]\Delta t^2\phi_i(x)dx \qquad (۱۳-۳)$$

به این ترتیب مسئله دینامیکی را میتوان مشابه حالات استاتیکی حل نمود . باتوجه به راه حل مزبور کد هایی با نرم افزار متلب[۲] نوشته شده اند که توضیحات آن درادامه ارائه می شود..

[۲] -MATLAB

توضیحاتی درمورد برنامه ها:

۱- ابتدا باید مقادیر ورودی های مسئله مشخص شود. ورودی های برنامه عبارتند از:

مشخصات هندسی شامل : شعاع ، طول ، ضخامت

مشخصات جنس شامل : چگالی ، ضریب پواسون ، مدول یانگ

مشخصات بارگذاری : دامنه بار ، سرعت بار

دراین قسمت ورودی های مسئله پایان یافته ومرحله محاسبات آغاز می شود.

۲- صلبیت خمشی مشخص می شود $d = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

۳- گام زمانی مسئله مشخص می شود(deltaT) .

۴- درجه آزادی کل المان ها معین می شود n۱ .

۵-مقدار طول یک المان مشخص می شودle

۶- مقادیر مربوط به توابع شکل مشخص می شود($\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4$).

۷-دراین مرحله ماتریس سختی یک المان مشخص می شود.(k۱)

برای **i** از ۱تا۴

برای **j** از۱تا۴

$$k1(i,j) = -\rho h \int_0^{le} \phi_i \phi_j \, dx_0$$

۸- ماتریس K بامولفه های صفر وابعاد n۱ درn۱ تشکیل می شود.

درمراحل بعدی ماتریس سختی با نام K مونتاژمی شود.

۹-

برای i از۱تا۴

برای j از۱تا۴

$$K(i,j) = k1(i,j)$$

۱۰- دو عضو انتهایی قطراصلی و دو عضو مجاور عضو انتهایی تشکیل می شود.:

$$K(n1,n1) = k1(4,4)$$
$$K(n1-1,n1) = k1(3,4)$$
$$K(n1,n1-1) = k1(4,3)$$
$$K(n1-1,n1-1) = k1(3,3)$$

عناصرروی قطر اصلی وعناصربادوفاصله سطری ودو فاصله ستونی از قطراصلی تشکیل می شود.

برای i از ۳ تا ۲-n1

$$K(i,i) = (-1)^i \frac{[k1(4,4)+k1(2,2)]}{2} + \frac{k1(4,4)+k1(2,2)}{2} + (-1)^{i+1}\left[\frac{k1(3,3)+K(1,1)}{2}\right] + \left[\frac{k1(3,3)+k1(1,1)}{2}\right]$$

$$K(i,i+2) = (-1)^{i+1}\frac{k1(1,3)}{2} + \frac{1}{2}k1(1,3) + (-1)^i \frac{k1(2,4)}{2} + \frac{k1(2,4)}{2}$$

عناصرروی خطوط موازی قطر اصلی تشکیل می شود:

۱۱-برای i از ۳ تا ۲-n1 با پرش ۲

$$K(i+1,i) = k1(4,3) + k1(2,1)$$
$$K(i+2,i+1) = k1(3,2)$$
$$K(i,i+1) = k1(3,4) + k1(1,2)$$
$$K(i+1,i+2) = k1(2,3)$$

برای i از ۱ تا n1-۳

$$K(i,i+3) = (-1)^{i+1}\frac{k1(1,4)}{2} + \frac{k1(1,4)}{2}$$

$$K(i+3,i) = (-1)^{i+1}\frac{k1(4,1)}{2} + \frac{k1(4,1)}{2}$$

مونتاژ ماتریس سختی پایان یافته و باید بردار نیرو تشکیل شود. بردارنیروبه سه بخش تقسیم می شود. ابتدا دو ماتریس برای نیرو تعریف شده وسپس مراحلی طی می شود تا آن دو ماتریس به بردار تبدیل شده و با بخش سوم تشکیل بردارنیرو دهد.

-۱۲

برای i از ۱ تا ۴

برای j از ۱ تا ۴

$$f1(i,j) = \int_0^{le}(deltaT)^2 d\frac{\partial^4\phi(j)}{\partial x^4}\phi(i)dx_0 + \int_0^{le}(deltaT)^2\frac{Eh}{r^2}\phi(i)\phi(j)dx_0 - 2\int_0^{le}\rho h\phi(i)\phi(j)dx_0$$

$$f2(i,j) = \int_0^{le}\rho h\phi(i)\phi(j)dx_0$$

ماتریس صفر باابعاد۱n1در n1 بانام های F۱۱,F۲۲ تعریف می شود.درمراحل بعدبااستفاده از همان الگوریتم مطرح شده برای مونتاژ ماتریس K، ماتریس های F۱۱,F۲۲ نیز بااستفاده از ماتریس نیروی f۱,f۲ که برای یک المان تعریف شده اند مونتاژخواهند شد

پس از مونتاژماتریس های F۱۱,F۲۲ شرایط اولیه مسئله وارد می شودکه شامل :

$$W_0 = \dot{W}_0 = \ddot{W}_0 = 0$$
$$a_{-1} = a_0 - \Delta t\,\dot{a}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{a}$$

می باشند.

۱۳- همان گونه که پیش ازاین گفته شد بردار نیرو به سه بخش تقسیم می شوند که دو بخش آن F۱۱,F۲۲ قبلا مونتاژ شد و حال بخش سوم آرایه ای است که بانام he مشخص می شود.

۱۴- درمرحله بعد آرایه he بانام pe مونتاژ می شود به این ترتیب که ابتدا دوعنصر اول ودوعنصر انتهایی آرایه pe معین می شود.

$$pe(1) = he(1)$$
$$pe(2) = he(2)$$
$$pe(n1) = he(4)$$
$$pe(n1-1) = he(3)$$

۱۵- سایر اعضای آرایه pe متناوباً یک درمیان تکرار می شوند.

برای ip از ۳ تا n۱-۲ با گام ۲

$$pe(ip) = he(3) + he(1)$$
$$pe(ip+1) = he(4) + he(2)$$

آرایه pe۱ باحذف اعضای متناظر با تکیه گاه ها تشکیل می شود.در ماتریس های سختی K,F۱۱,F۲۲ نیز ۴ سطر وستون باتوجه به تکیه گاه ها حذف می شود.

آرایه های s۱,s۲ تشکیل می شود.

درانتها بردار نیروی کل با ضرب F۱۱,F۲۲ درs۱,s۲ وتفاضل آن با pe۱ بدست می آیدکه نام آن s۳ است.

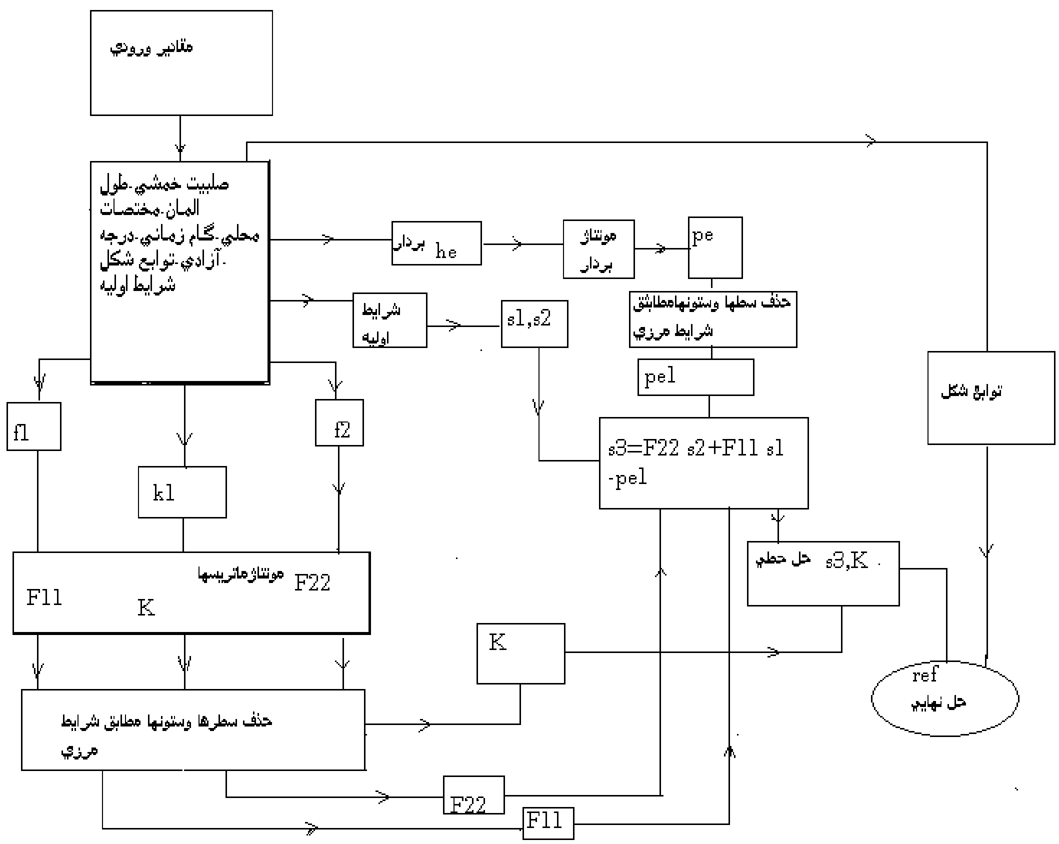
با حل دستگاه معادلات خطی Kو۳s وضرب پاسخ های بدست آمده در توابع هرمیتی جواب نهایی بدست می آید .

$$s1 = [c(1), d(1), e(1), f(1), h(1), i(1)]$$
$$s2 = [c(2), d(2), e(2), f(2), h(2), i(2)]$$

برای pt از ۱ تا $\frac{l2}{ve} \times deltaT$

$$s3 = F22 \times s2 + F11 \times s1 - pe1$$
$$sig = linearsolve(K, s3)$$
$$ref = \mathrm{sig}(1) \times \phi(3) + \mathrm{sig}(2) \times \phi(4) + \mathrm{sig}(3) \times \phi(1) + \mathrm{sig}(4) \times \phi(2)$$
$$+ \mathrm{sig}(5) \times \phi(3) + \mathrm{sig}(6) \times \phi(4)$$
$$\mathrm{s1} = \mathrm{s2}$$
$$\mathrm{s2} = \mathrm{sig}$$

درشکل ۳-۱ نمودارفلوچارت برنامه ارائه شده است:



شکل۳-۱- فلوچارت حل عددی مخزن استوانه ای تحت بار متحرک

۳-۲- روش تحلیل پوسته های نازک تحت بار متحرک به کمک نرم افزار

بدون شک استفاده از روشهای المان محدود امروزه بسیار گسترده تر از قبل است که مهمترین دلیل آن ظهور کامپیوترها است که توانایی انجام محاسبات طولانی وبا حجم زیاد را دراختیار محققان قرار می دهند. درحال حاضر علاوه بر نرم افزارهای ریاضی موجود که امکان نوشتن کد برای انجام محاسبات تکراری با مقادیرورودی های مختلف را فراهم می آورند نرم افزارهایی مختص روش های المان محدود نیزموجود است.

ازانواع ارزان قیمت این نرم افزارها همانند Adina،Algor تا انواع کارآمدتروگرانتر همانند AnsysوAbaqusوNastranو... این امکان را فراهم می آورند تا مهندسان براحتی از نتایج المان محدود بهره مند شوند.

معرفی کلی نرم افزار[۲۴,۲۳] :

آباکوس یک نرم افزار تجاری در حل مسائل المان محدود است که توسط شرکت Simulia که زیر مجموعه شرکت Dassault systemsاست طراحی شده است. آباکوس دارای سه هسته اصلی است .

Abaqus/Standard یک تحلیلگر چند منظوره وبرای مسائل استاتیکی وسایر مسائل مشابه بکار میرود.

Abaqus/Explicit برای حل مسائل المان محدود دینامیکی گذرا و بویژه غیر خطی و همچنین مسائل شبه استاتیکی بکار میرود.

Abaqus/cae شامل محیط هـای طراحـی (processing) ونمـایش خروجـی هـا (post processing) میباشد.

آباکوس قابلیت تحلیل مسائل در سازه های آکوستیک[۳]،پیزو الکتریک ،مسائل دمایی و... را داراست،اما مهمترین برتری این نـرم افـزار در محـیط هـای غیرخطـی و مـواد الاسـتومریک[۴](لاسـتیکی شـکل) است.همچنین توان محاسباتی بالای نرم افزار اجازه می دهد تا بتوان از المان های مختلف وبـا تعـداد نسبتا زیاد استفاده نمود.

صورت مسئله:

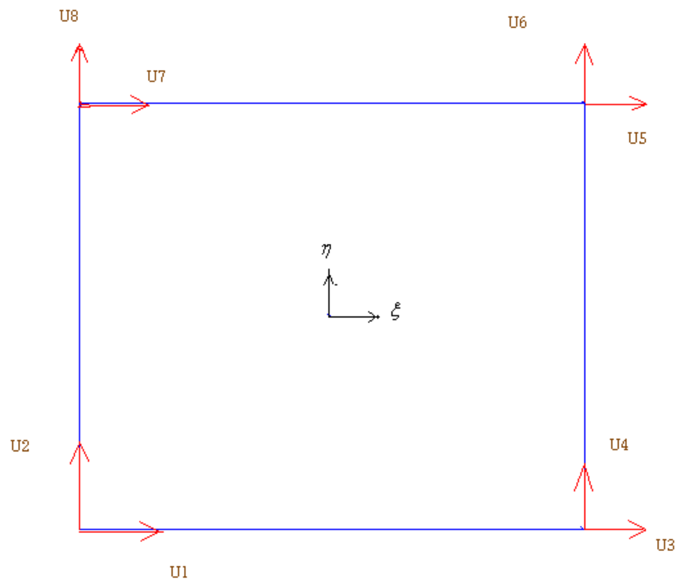
دراین بخش مخزن استوانه ای جدارنازک تحت بار متحرک با استفاده از نرم افزار مورد بررسی قرار خواهد گرفت .

جزییات روش تحلیل با آباکوس درضمیمه آورده شده است.

ا نتخاب المان:

برای مدل نمودن مسئله از تقارن محوری استفاده می شود که بدلیل تقارن هندسه و بار گذاری مسئله است.یکی از متداولترین نوع المان ها جزء چهار ضلعی است که در مقایسه با المان مثلثی دارای دقت بهتری است . دراین المان هرگره دارای دو درجه آزادی است و انواع بارهای متمرکز وگسترده و فشاری یا کششی را میتوان به این المان اعمال نمود. همچنین مش حاصل از المان چهارضلعی دارای هندسه بهتر ومنظم تری است.درشکل ۳-۲ المان چهار ضلعی مشاهده میشود:

[۳] -ACOUSTIC
[۴] -ELASTOMERIC

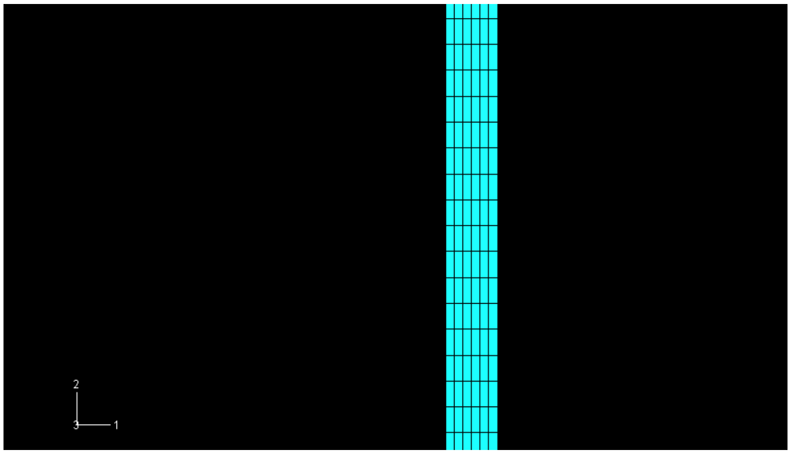


شکل ۳-۲- المان چهارضلعی با چهارگره

مش بندی:

در مش بندی علاوه بر توجه به تعداد المان ها،توجه به هندسه مش نیـز اهمیـت دارد . بـرای مثـال درمناطقی که تغییر شکل های ناگهانی که منجر به تمرکز تنش مـی شـوند وجـود دارد بهتراسـت از مش بندی ریزتر والمان های بیشتر استفاده شود ودرعین حال اندازه المان ها به گونـه ای باشـد کـه یکنواختی در اندازه وشکل المان ها درسایر مناطق حفظ شود.

برای انتخاب تعداد المان بهینه ،باید ابتدا ازتعداد المان های کم استفاده کرد وبه تدریج آن را افزایش داد و این کار تا جایی ادامه پیدا می کند که پاسخ ها به یک ثبات رسیده و تغییرات آن با تغییر تعداد المان ناچیز باشد.



شکل۳-۳-شبکه مش بندی مقطع مخزن

تعریف بار:

درمسئله مورد بررسی ، بار بصورت متحرک است .اما درنرم افزار چنین باری تعریف نشده است. اگرچه عدم تعریف بارمتحرک موجب ایجاد خطا خواهدشد،اما نتایج تجربی نشان میدهد تازمانی که سرعت خیلی زیاد نیست وبه سرعت بحرانی نزدیک نشده است تفاوت چندانی بین بارمتحرک وبار غیرمتحرک وجودندارد.[۲۱]

با این وجود با تقسیم بندی بار در فاصله های مختلف طول مخزن درزمانهای متوالی و استفاده از گزینه AMPLITUDE میتوان به حالت بار گذاری متحرک نزدیک شد . دراین روش زمان اعمال بار به تعدادی زیر بازه تقسیم شده وبا افزایش زمان سطح وسیعتری از مخزن تحت بار قرار گرفته ودر نهایت این کار تا آنجا ادامه میابد که بار تمام مخزن را فرا می گیرد .

شرایط مرزی:

رسم شکل درنرم افزار به گونه ای است که محورهای U_1,U_2 منطبق بر مقطع مخزن ومحور U_3 درجهت عمودبرسطح مقطع مخزن میباشد.

شرایط مرزی به گونه ای است که $U1 = U2 = 0$ وچرخش حول محور $U3$ نیز صفر میباشد. در واقع کلیه درجات آزادی مهار شده وشرایط مرزی مشابه [۲۲]خواهد بود .

فصل چهارم

بررسی نتایج

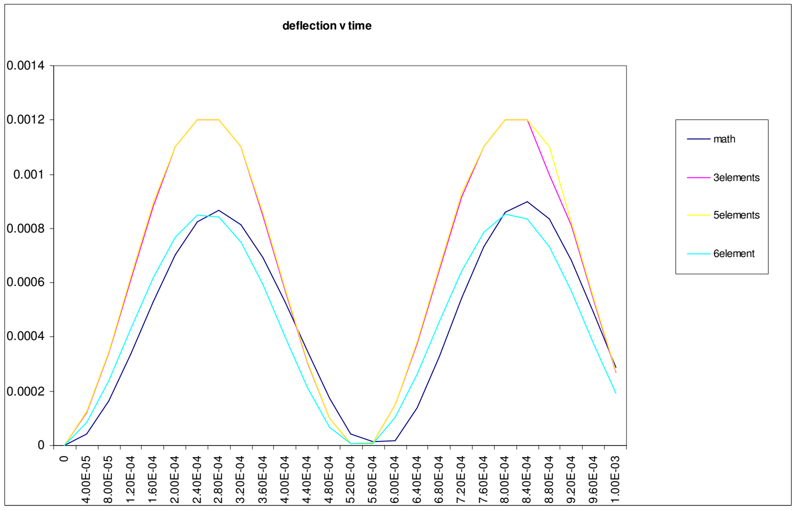
دراین بخش پاسخهای بدست آمده با روشهای ریاضی (روش سری)با روش های المان محدود و حل عددی مقایسه خواهند شد.

باتوجه به اینکه پاسخ های ریاضی درقالب سری بیان میشود وتعدادجملات نامتناهی است میبایست با یک تقریب خوب تعداد متناهی از جملات را در نظرگرفت .پاسخ ریاضی بدست آمده رابطه (۲-۱۴۰) است.

حال باید به بررسی پاسخ های روش المان محدود و نتایج برنامه ها پرداخت. برنامه ها برای تعداد المان های سه وپنج و شش درطول انجام می شوند که شش المان پاسخ دقیقی ارائه می دهد.

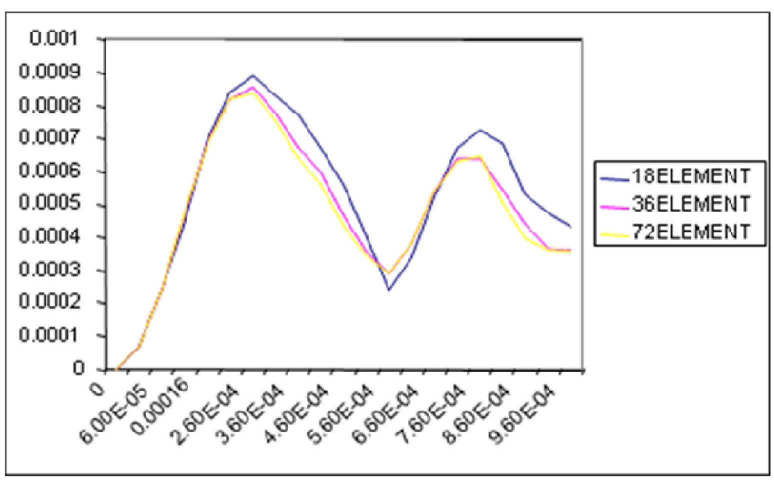
نتایج حاصل ازشبیه سازی با نرم افزارنیز با المان هایی با اندازه های متفاوت انجام شده است وباتوجه به اینکه تقسیم ضخامت پوسته به شش قسمت وطول مخزن به ۷۲ قسمت پاسخ های دقیقی ارائه میدهداز المان های کوچکتر صرفنظر می شود.

درشکل ۴-۱ میتوان نتایج حاصل از راه حل ریاضی رابا نتایج کدهای متلب درطول $x = 20in$ مقایسه کرد. نتایج ریاضی با نام math ونتایج متلب بسته به تعداد المان های درنظر گرفته شده نام گذاری شده اند :.



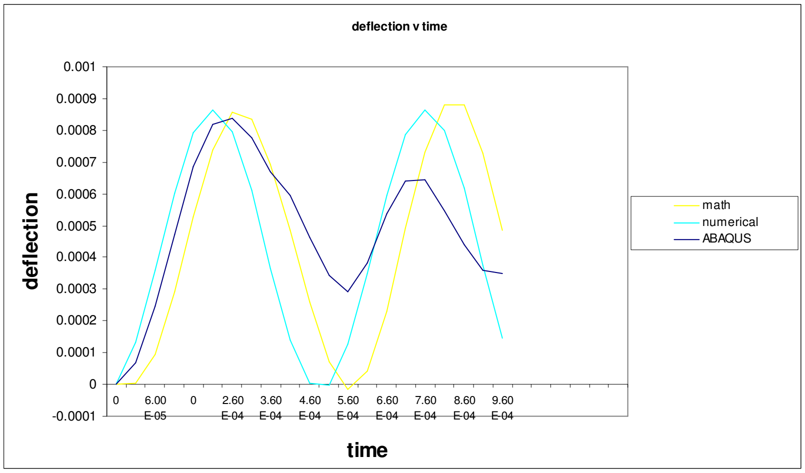
شکل ۴-۱-نتایج ریاضی درمقایسه با روشهای عددی با تعداد المان های متفاوت
محور افقی زمان ومحور عمودی معرف تغییر شکل شعاعی است.

همچنین در شکل۴-۲ نتایج حاصل از نرم افزارآباکوس درطول $x = 20in$ را میتوان مشاهده کرد . درشکل هرمنحنی مربوط به المانی با اندازه خاص است.



شکل ۴-۲- نتایج حل با نرم افزار به ازای المان ها با اندازه متفاوت

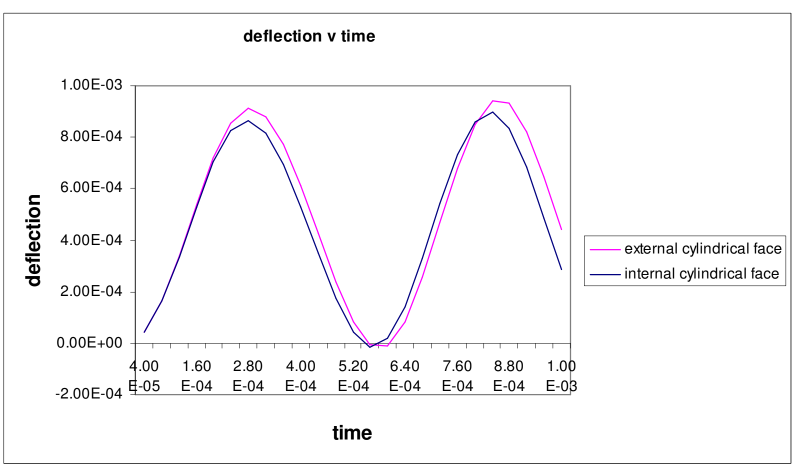
درشکل۴-۳ نتایج ریاضی ، عددی ونتایج حاصل از نرم افزاردریک نمودار مشاهده میشود:



شکل ۴-۳-نتایج ریاضی وعددی ونرم افزار

نتایج در وجوه درونی وبیرونی پوسته :

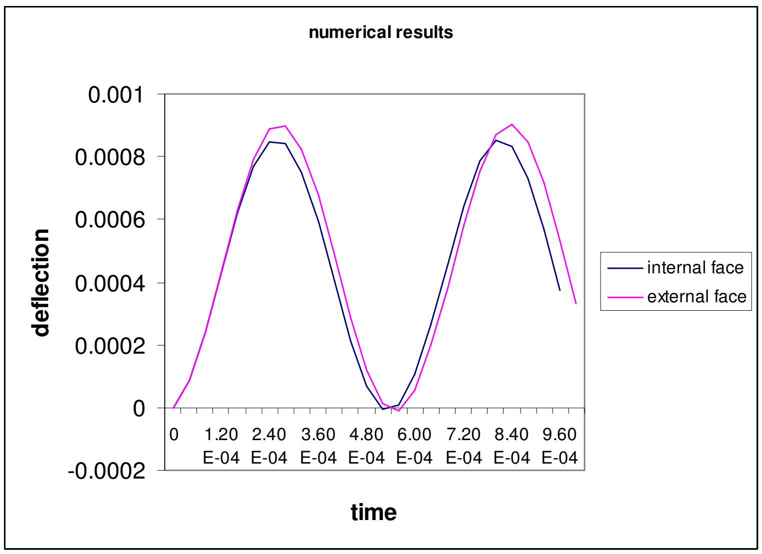
نتایج ریاضی برای وجوه درونی وبیرونی در $x = 20in$ با احتساب ۱۰۰ جمله از سری ۲-۱۴۰ به شکل زیر است:



شکل۴-۴- نتایج حل ریاضی برای وجوه درونی وبیرونی پوسته

همان گونه که مشاهده می شود تغییر شکل وجه خارجی بیش از وجه داخلی است با این وجود نتایج برروی وجوه نزدیک هستند بخصوص در لحظات ابتدایی وبیشترین تفاوت در مقادیر ماکزیمم ها است.

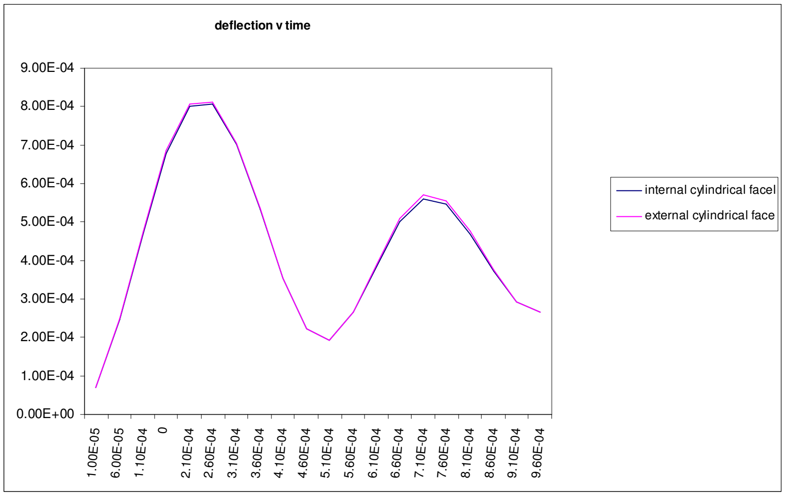
نتایج حاصل از برنامه ها وکدهای المان محدود با روش گالرکین بصورت زیر است :



شکل۴-۵-نتایج کدهای حل عددی برای وجوه داخلی وخارجی

نتایج شبیه به حل ریاضی هستند و جز در نقاط ماکزیمم در باقی نقاط تا حدود زیادی نزدیک هستند.

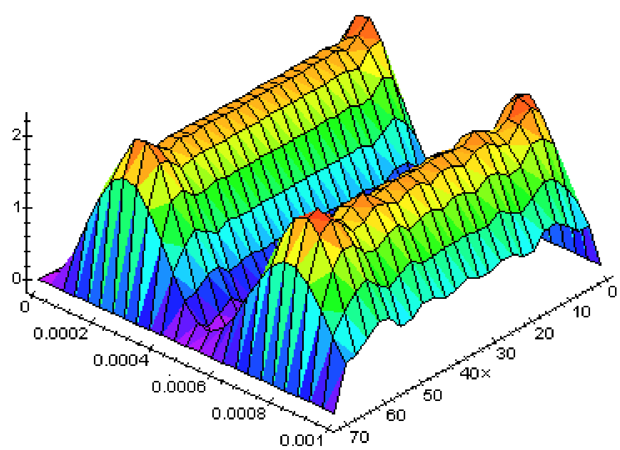
نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس به شکل زیر است :



شکل۴-۶-نتایج تحلیل با نرم افزار برای وجوه خارجی وداخلی پوسته

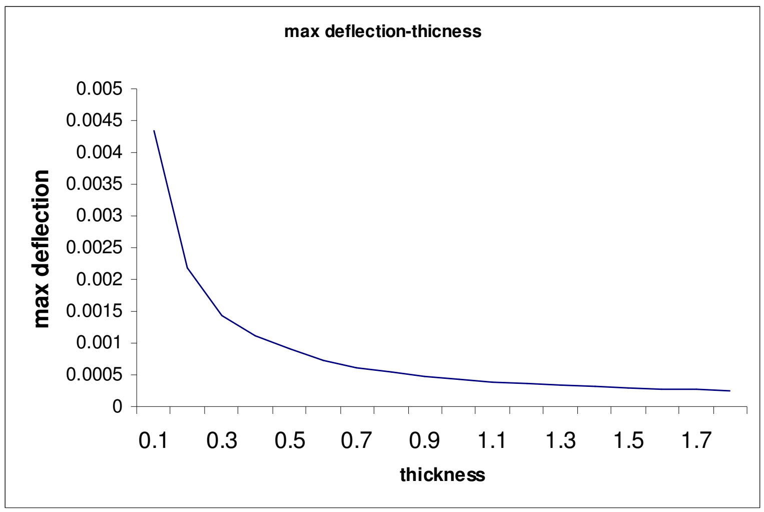
نتایج حاصل از نرم افزار برای وجوه درونی وبیرونی بسیار نزدیک هستند. همچنین پاسخهای حاصل از نرم افزار کوچکتر از پاسخ های روش ریاضی وروش گالرکین است.

درنمودار بعد تغییر شکلهای دینامیکی بدست آمده باروش ریاضی ، نسبت به تغییر شکل ناشی از بارگذاری با دامنه یکسان ودر شرایط استاتیکی رسم شده است:



شکل۴-۷- نمودارتغییرات ضریب تقویت دینامیکی با روش ریاضی

همان گونه که از شکل مشخص است میزان تغییر شکل دینامیکی حدودا دو برابر بیش از تغییر شکل استاتیکی است .همچنین میزان تغییرات ماکزیمم تغییر شکل با افزایش ضخامت در محدوده ضخامت ۰.۱ تا ۱.۸ اینچ در شکل ۴-۸ ارائه شده است:



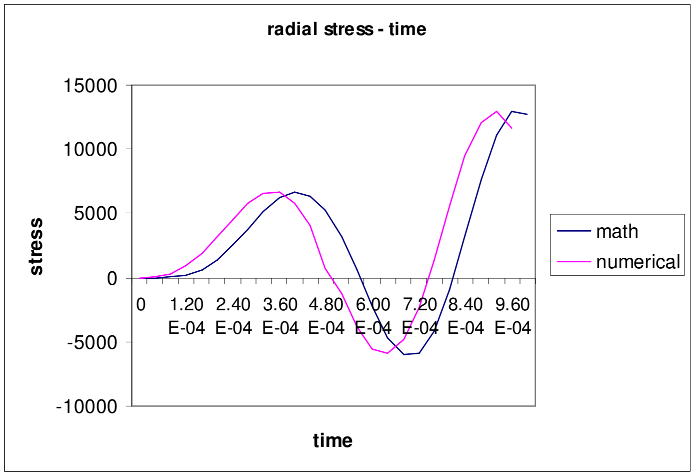
شکل ۴-۸- تغییرات ماکزیمم تغییرشکل نسبت به تغییرات ضخامت

میزان تغییرشکل با افزایش ضخامت کاهش میابد و هرچه ضخامت بیشتر شود از شیب منحنی تغییر شکل کاسته می شود ومنحنی شیب ملایمتری می یابد و پس از اینکه ضخامت به ۰.۹ اینچ می رسد روند تغییرات ملایم تر است.

بررسی نتایج درمورد تنش ها:

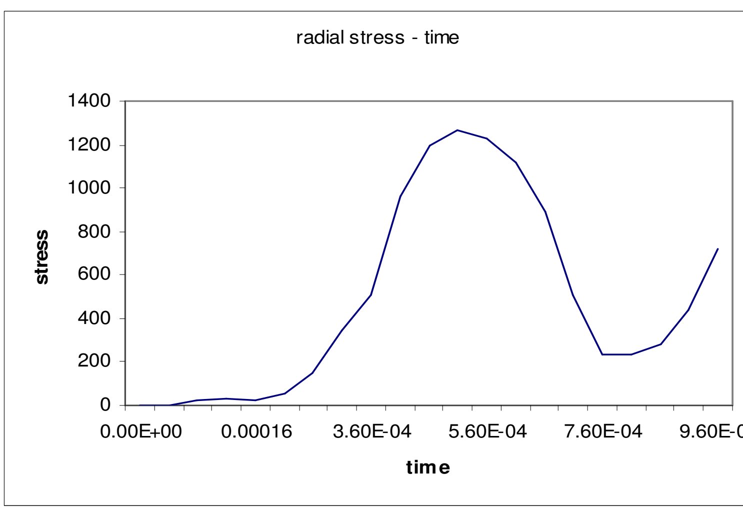
بررسی تنش ها ی شعاعی ومحیطی با روش تئوری ونتایج حاصل از کدها تطابق قابل قبولی دارند،اما نتایج حاصل از نرم افزار آباکوس بسیار متفاوت است. دربررسی تغییرشکل ها مشخص شد که نتایج نرم افزار برای سطوح درونی وبیرونی بسیار نزدیک هستند وشاید همین رابتوان دلیل این اختلاف دانست.

درشکل ۴-۹ نتایج تئوری وحل عددی برای تنش شعاعی مشاهده می شودکه تطابق خوبی دارند.



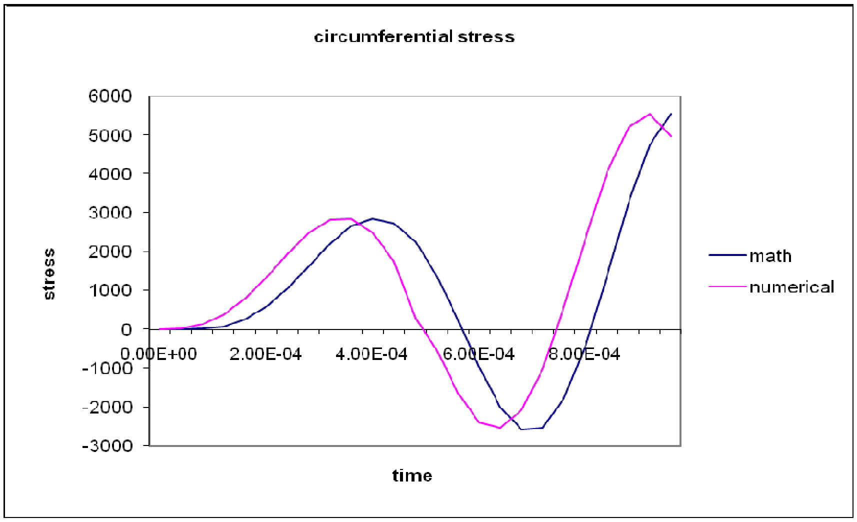
شکل۴-۹- نتایج تئوری و عددی تنش شعاعی

درشکل۴-۱۰نتایج نرم افزاربرای تنش شعاعی مشاهده می شود.



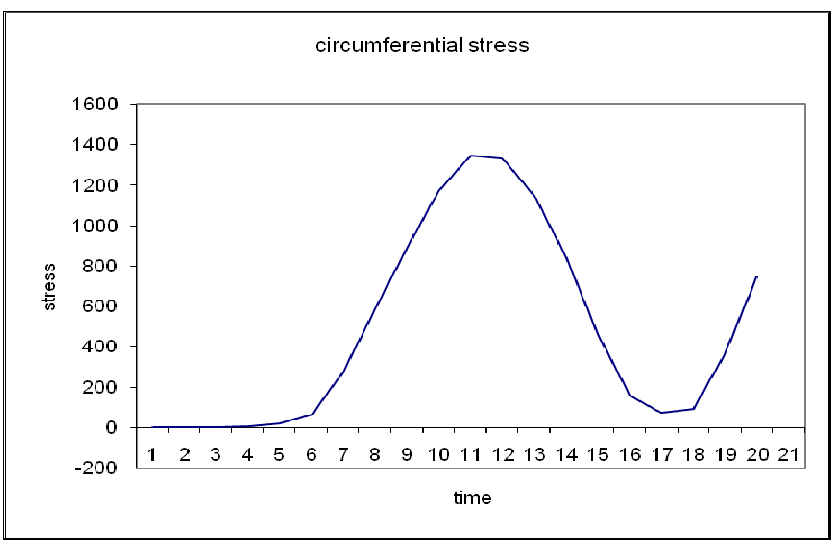
شکل۴-۱۰- تنش شعاعی بااستفاده از نرم افزار

درشکل۴-۱۱نتایج تئوری وحل عددی برای تنش محیطی مشاهده می شود.



شکل۴-۱۱- نتایج تئوری و عددی تنش محیطی

درشکل۴-۱۲نتایج نرم افزاربرای تنش محیطی مشاهده می شود.



شکل۴-۱۲- تنش محیطی بااستفاده از نرم افزار

دلایل خطا:

در تحلیل با نرم افزار تعریف بار متحرک ممکن نیست و ناچار بار بصورت ثابت درنظر گرفته میشود.هنگامی که بار متحرک است سرعت حرکت بار موجب ایجاد ارتعاش ودر نتیجه افزایش دامنه تغییر شکل می شود.

بنابراین دلیل تفاوت نتایج ریاضی ونتایج نرم افزار را میتوان ناشی ازعدم تعریف بار متحرک دانست.

پیشنهادات:

حل ارائه شده برای مخازن تحت بار متحرک تنها برای بارهای گسترده انجام شده است و به نظر میرسد بارهای متمرکز نیز باید بررسی شود. همچنین بررسی بارهای حجمی وبارهای ضربه ای وانفجاری نیز می تواند موردبررسی قرارگیردکه بررسی های بعمل آمده نشان می دهد رفتارمخازن تحت این نوع بارها تا حدودی متفاوت خواهند بود .

ضمائم وپیوست ها:

الف- موج برشی[۲۹]:

حرکت زیر متشکل از امواج عرضی است .یعنی در حالی که اغتشاش در جهت e_1منتشر میشود حرکت ذره در جهت موازی e_2میباشد:

$$u_1 = 0, u_2 = \varepsilon \sin \frac{2\pi}{l}(x_1 - c_s t), u_3 = 0$$

درچنین حرکتی مولفه های کرنش عبارتند از:

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = E_{13} = E_{23} = 0, E_{12} = \frac{1}{2}\varepsilon\left(\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi}{l}(x_1 - c_s t)$$

مولفه های تنش:

$$T_{11} = T_{22} = T_{33} = T_{13} = T_{23} = 0$$
$$T_{12} = \mu\varepsilon\left(\frac{2\pi}{L}\right)\cos\frac{2\pi}{L}(x_1 - c_s t)$$

با قرار دادن این مقادیر در معادله حرکت:

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} = \rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

مقدار زیر بدست می آید:

$$c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

ب- موج طولی[۲۹]:

در حرکتی با مولفه های زیر هر ذره در راستای e_1نوسان می کند وجهت انتشار امواج وجابجایی ذرات موازی است.

$$u_1 = \varepsilon \sin \frac{2\pi}{L}(x_1 - c_c t), u_2 = 0, u_3 = 0$$

مولفه های کرنش عبارتند از:

$$E_{11} = \varepsilon \left(\frac{2\pi}{L} \right) \cos \frac{2\pi}{L}(x_1 - c_c t), E_{22} = E_{33} = E_{12} = E_{13} = E_{23} = 0$$

ومولفه های تنش:

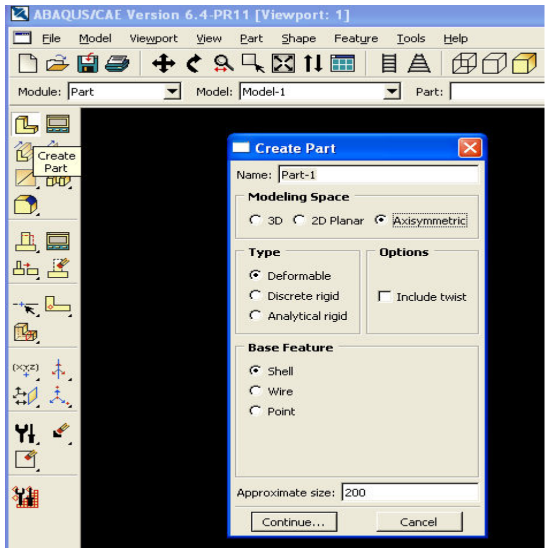
$$T_{11} = (\lambda + 2\mu)E_{11}, T_{22} = \lambda E_{11}, T_{33} = \lambda E_{11}, T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0$$

با قراردادن معادلات فوق در رابطه تعادل $\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$ رابطه زیر حاصل می شود:

$$c_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

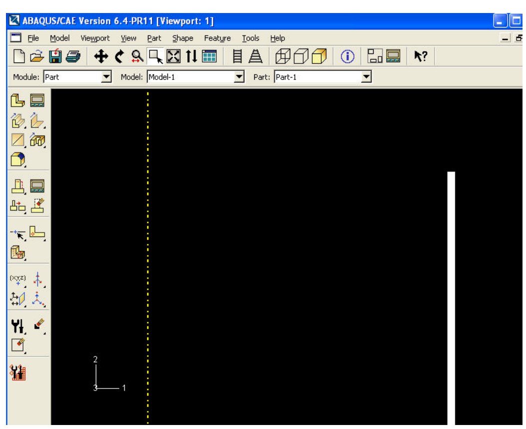
ج-مراحل تحلیل با نرم افزار آباکوس:

از زبانه ماژول گزینه part انتخاب میشود. در مرحله بعد گزینه های نشان داده شده انتخاب میشود:



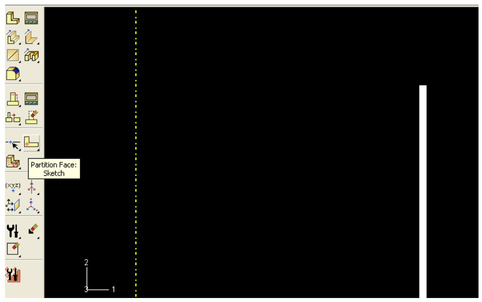
شکل ج -۱

سپس با استفاده از گزینه rectangle مقطع مخزن رسم میشود :



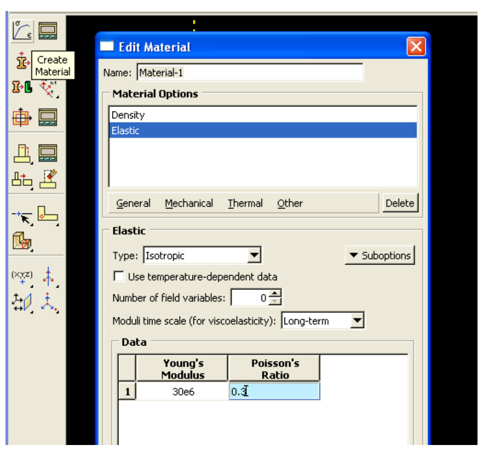
شکل ج-۲

با استفاده ازگزینه نشان داده شده طولی که قرار است نیرو برآن اعمال شود بـه ۲۰ قسـمت تقسـیم میشود :



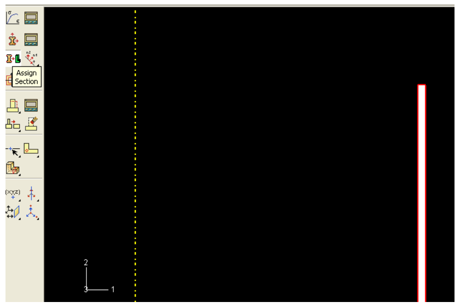
شکل ج-۳

با ورود به زبانه ماژول وانتخاب گزینه property مقادیر چگالی و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون وارد می شود:



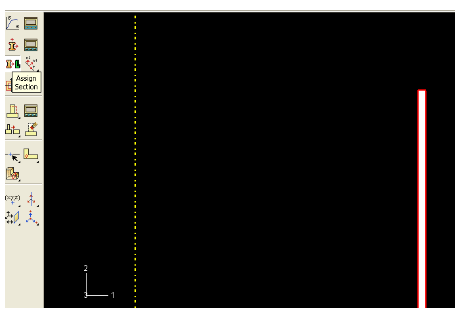
شکل ج-۴

سپس گزینه create section و assign section انتخاب می شود:



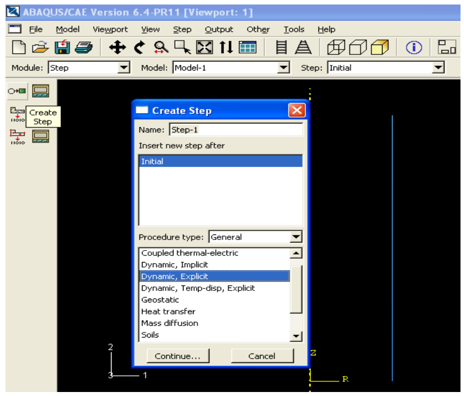
شکل ج-۵

پس از ورود به زبانه assembly گزینه های زیر انتخاب می شود:

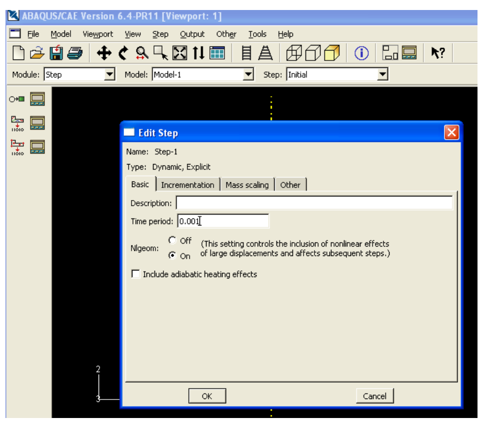


شکل ج-۶

در زبانه step گزینه های نمایش داده شده انتخاب می شود:

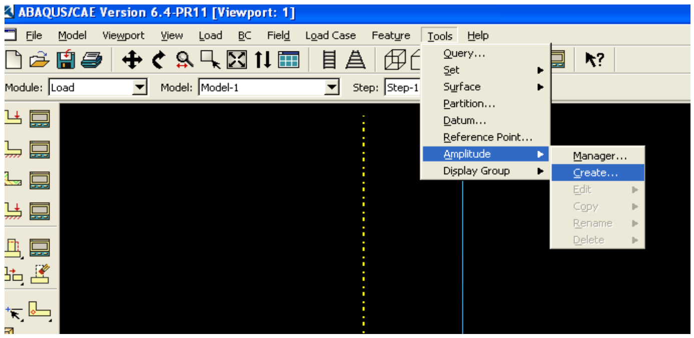


شکل ج -۷



شکل ج-۸

با ورود به زبانه load گزینه های زیر برای وارد کردن بار بصورت مراحل متوالی بررسی می شود :

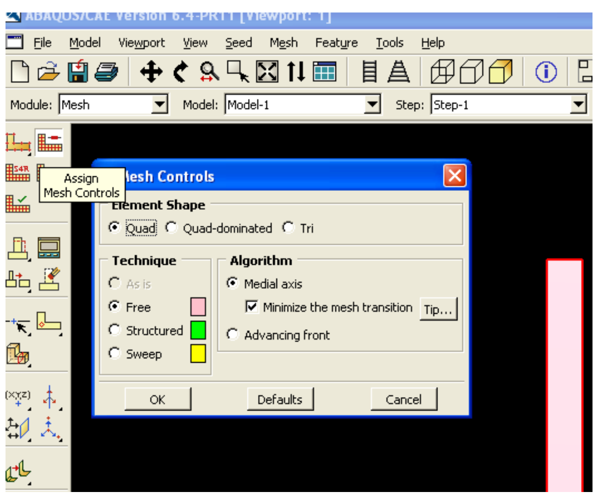


شکل ج-۹

درهربار مقداربار ۱۸تعریف شده و یک amplitudeجدید تعریف می شود و بار حاصله به یکی از ۱۸قسمت اعمال می شود.

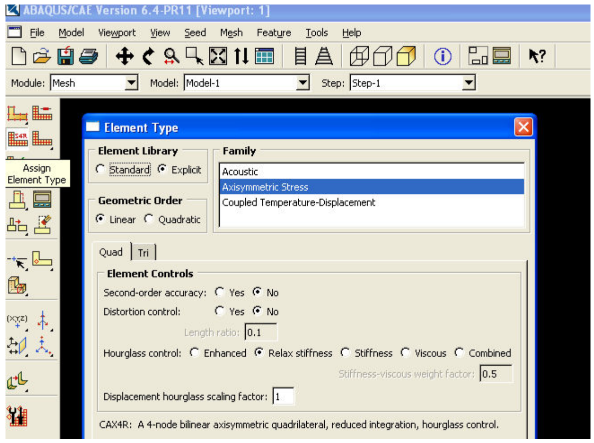
باورود به زبانه مش وگزینه   seed part instance طول وعرض مقطع مخزن به فواصل مساوی تقسیم می شود.

با انتخاب گزینه assign mesh controls نوع المان انتخاب می شود:



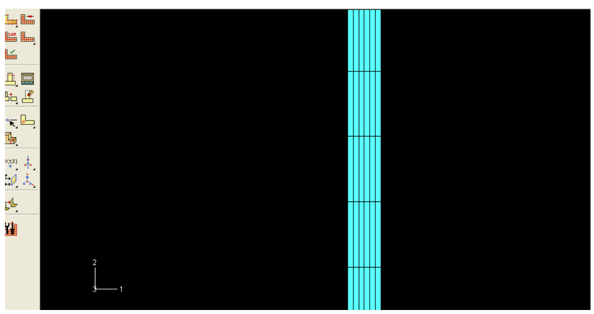
شکل ج -۱۰

با ورود به قسمتهای نشان داده شده تنظیمات زیر اعمال می گردد:



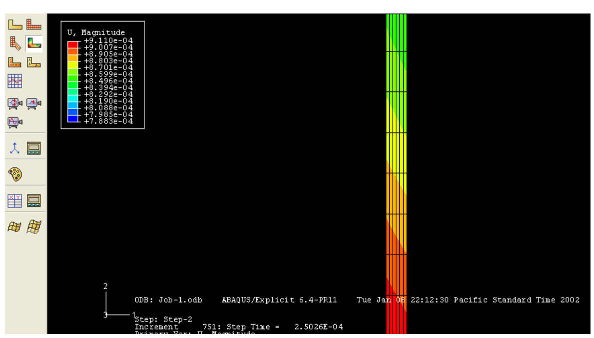
شکل ج-۱۱

با استفاده از گزینه mesh part instance شکل مش بندی خواهد شد.



شکل ج-۱۲

حال با ورود به گزینه job گزینه create انتخاب شده وابتدا گزینه write input وسپس گزینهsubmit انتخاب می شود. پس از مشاهده پیغام completed می توان از گزینه results نتایج را مشاهده کرد.



شکل ج-۱۳

فهرست مراجع

۱- A.C. Ugural , *Stresses in plates and shells* ,Mc Graw-Hill ,۱۹۸۱

۲- A.E.Martinez – Castro, P. Museros, A. Castillo-Linares , ۲۰۰٦ - Semi-analytic solution in the time domain for non-uniform multi-span Bernoulli–Euler beams traversed by moving loads. *Journal of sound and vibration*- ۲۹٤ , ۲۷۸-۲۹۷

۳- C.Bilello , L.A.Bergman , ۲۰۰۳ – Vibration of damaged beams under a moving mass : theory and experimental validation. *Journal of sound and vibration*- ۲۷٤ , ٥٦۷-٥۸۲

٤- C.H.Lee , M.Kawatani , C.W.Kim , N.Nishimura , Y.Kobayashi , ۲۰۰٦ – Dynamic response of a monorail steel bridge under a moving train . *Journal of sound and vibration*- ۲۹٤ , ٥٦۲-٥۷۹

٥- G. Hermann and I . Mirsky , ۱۹٥٦ -Three dimensional and shell theory analysis of axially symmetric motions of cylinders. *Journal of applied mechanics* ۷۸, ٥٦۳-٥٦۸

٦- G.T.Michaltsos , ۲۰۰۲ - Dynamic behaviour of a single- span beam subjected to loads moving with variable speeds. *Journal of sound and vibration*- ۲٥۸ , ۳٥۹-۳۷۲

۷- H.Chebli, D.Clouteau, L.Schmitt, ۲۰۰۸ - Dynamic response of high-speed ballasted railway tracks : ۳D periodic model and in situ measurements . *Soil dynamics and earthquake engineering*- ۲۸ , ۱۱۸-۱۳۱

۸- H.Ouyang , M .Wang , ۲۰۰۷- A dynamic model for a rotating beam subjected to axially moving forces . *Journal of sound and vibration*- ۳۰۸ , ٦۷٤-٦۸۲

۹- H.Xia , N.Zhang , W.W. Guo , ۲۰۰٦- Analysis of resonance mechanism and conditions of train–bridge system. *Journal of sound and vibration*- ۲۹۷ , ۸۱۰-۸۲۲

۱۰- I . Mirsky and G.Hermann , ۱۹٥۸ - Axially symmetric motions of thick cylindrical shells. *Journal of applied mechanics* - ۲٥ , ۹۷-۱۰۲

١١- J.D.Yau , Y.B.Yang , ٢٠٠٦- Vertical accelerations of simple beams due to successive loads traveling at resonant speed . *Journal of sound and vibration-* ٢٨٩ , ٢١٠-٢٢٨

١٢- J.Renard , A.Langlet , G. Girault, ٢٠٠٥ – Response of an infinite free plate – liquid system to a moving load : Theorical stationary response in subsonic case. *Journal of sound and vibration-* ٢٩٢ , ١٢٤-١٤٧

١٣- J.S.Wu , L.K.Chiang , ٢٠٠٢- Dynamic analysis of an arch due to a moving load. *Journal of sound and vibration-* ٢٦٩ , ٥١١-٥٣٤

١٤- J.Yang, Y.Chen , Y.Xiang, X.L . Jia , ٢٠٠٨ - Free and forced vibration of cracked inhomogeneous beams under an axial force and a moving load . *Journal of sound and vibration-* ٣١٢ , ١٦٦-١٨١

١٥- L.Auersch , ٢٠٠٨ - The effect of critically moving loads on the vibrations of soft soils and isolated railway tracks . *Journal of sound and vibration-* ٣١٠ , ٥٨٧-٦٠٧

١٦- M.Abu-Hilal , ٢٠٠٦- Dynamic response of a double Euler-Bernouli beam due to a moving constant load . *Journal of sound and vibration-* ٢٩٧ , ٤٧٧-٤٩١

١٧- M.Ruzzene , A. Baz , ٢٠٠٦- Dynamic stability of periodic shells with moving loads . *Journal of sound and vibration-* ٢٩٦ , ٨٣٠-٨٤٤

١٨- O.J.Alderheim , A .Baz , ٢٠٠١- Dynamic stability of stepped beams under moving loads . *Journal of sound and vibration-* ٢٥٠ , ٨٣٥-٨٤

١٩- P .G . Bhuta , ١٩٦٣ - Transient response of a thin elastic cylindrical shell to a moving shock wave . *Journal of the acoustical society of America* - ٨٦, ٢٥-٣٠

٢٠- P.Museros , M.D.Martinez-Rodrigo , ٢٠٠٦ - Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid viscous dampers.

Journal of sound and vibration- ٣٠٠ , ٢٩٢-٣١٥

٢١- T . E . Simkins ,١٩٩٤ - Amplification of flexural waves in gun tubes.Benet laboratories, Watervliet Arsenal, Watervliet New york ١٢١٨٩ U.S.A. *Journal of sound and vibration* - ١٧٢,١٤٥ – ١٥٤

٢٢- W.M. Beltman ,E.N. Burcsu, J.E.Shepherd,L.Zohal, ١٩٩٩-The structural response of cylindrical shells to internal shock loading . *Journal of pressure vessel technology* - ١٢١ , ٣١٥- ٣٢٢

٢٣- www.wikipedia.org

٢٤- www.simulia.com

۲۵- جرالد ، ویتلی - محاسبات عددی ۱۹۹۴- مترجم : علی محمد پورپاک – انتشارات مفید ۱۳۷۷

۲۶- سید امیرالدین صدرنژاد۱۳۸۰- مقدمه ای بر روش اجزائ محدود – انتشارات دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

۲۷- فردیناند بیر و راسل جانستون - مقاومت مصالح –مترجم : دکتر ابراهیم واحدیان – نشر علوم دانشگاهی ۱۳۸۲

۲۸- کلارنس ری وایلی و لوئیس سی برت - ریاضیات مهندسی پیشرفته
مترجم : سیامک کاظمی – موسسه انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف – ۱۹۸۵

۲۶- مایکل لی، دیوید رابین، ارهارد کرمپل- مقدمه ای بر مکانیک محیط های پیوسته
مترجم : دکترغلامحسین رحیمی –انتشارات دانشگاه تربیت مدرس ۱۳۷۲

Amplification factor	ضریب تقویت
Amplitude	دامنه
Axisymmetric	متقارن محوری
Backward difference	تفاضل پسرو
Central difference	تفاضل مرکزی
Circumferential	محیطی
Critical velocity	سرعت بحرانی
Concentrated force	بار متمرکز
D’Alembert principle	اصل دالامبر
Deflection	تغییر شکل
Dilatational wave	موج طولی
Dynamic response	پاسخ دینامیکی
External face	وجه بیرونی
Flexural rigidity	صلبیت خمشی
Forward difference	تفاضل پیشرو

Fourier series	سری فوریه
Impulsive load	بار ضربه ای
Internal face	وجه درونی
Membrane	غشا
Mesh	شبکه
Midplane	صفحه میانی
Moving load	بار متحرک
Node	گره
Nonlinear	غیرخطی
Numerical methods	روشهای عددی
Radial	شعاعی
Resonance	تشدید
Shear deformation	تغییر شکل شعاعی
Shear wave	موج برشی
Shell	پوسته
Shell parameter	پارامتر پوسته

Singularity	تکینی
Step function	تابع پله ای
Strain energy	انرژی کرنشی
Stress resultant	منتجه تنش
Thick walled cylinder	مخزن جدار ضخیم
Thin walled cylinder	مخزن جدار نازک
Transient response	پاسخ گذرا
Vibration	نوسان
Wave number	شماره موج
Wave solution	حل موج

Shahrood University of Technology

Faculty: Mechanical Engineering

Numerical and Mathematical Analysis of a thin-walled cylinder under moving loads

Fariborz Farzan

Supervisor:

Prof. H.Ipakchi

Nov-2008