

In the name of God



Shahrood University of Technology  
Master of Science Thesis in Mechanical Engineering

## **Heat Conductivity Estimation in Cylindrical Shape with Inverse Method**

By:  
**Mahmood Matin**

Supervisor:  
**M.M. Shahmardan**

Adviser:  
**J. Maghrebi**

Winter-2008

به نام خدا



پایان نامه کارشناسی ارشد  
مهندسی مکانیک - تبدیل انرژی

## تعیین ضریب هدایت حرارتی قطعه مدور در حین عملیات حرارتی به روش حل معکوس

تهیه کننده : محمود متین

استاد راهنما : محمد محسن شاه مردان

استاد مشاور : جواد مغربی

زمستان ۸۶

چکیده

در این پایان نامه با استفاده از روش تفاضل محدود، به شبیه سازی معادله انتقال حرارت دو بعدی گذرا در یک میله استوانه ای پرداخته و با استفاده از روش معکوس گرادیان مزدوج و با فرض معلوم بودن دما در نقاط ترموکوپل به تخمین ضریب هدایت حرارتی جسم اقدام شده است. معادلات تفاضلی بکار رفته جهت شبیه سازی جملات دیفرانسیلی در محاسبه مشتقات مکانی اول و دوم، مرکزی مرتبه دوم و در محاسبه مشتقات زمانی پیشروی مرتبه اول می باشد. مقادیر ترموکوپل با اضافه کردن خطا به مقادیر بدست آمده از حل دقیق شبیه سازی شده است.

کلمات کلیدی: روش معکوس - روش گرادیان مزدوج - ضریب هدایت حرارت

## **ABSTRACT**

An inverse analysis is applied to estimate simultaneously the constant thermal conductivity coefficients for cylindrical materials by using the conjugate gradient methods. Simulated measured input temperature data are generated by adding errors to the exact temperatures. Direct problem solved by finite difference method.

### **Keywords:**

Inverse method, thermal conductivity, conjugate gradient method

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| فصل اول.....                                                        | ۲  |
| مقدمه.....                                                          | ۲  |
| ۱-۱- هدف پایان نامه.....                                            | ۲  |
| ۲-۱- رئوس مطالب.....                                                | ۳  |
| فصل دوم.....                                                        | ۴  |
| مبانی و مفاهیم اولیه مسائل معکوس هدایت حرارت.....                   | ۴  |
| ۱-۲- تعریف مسائل مستقیم و معکوس.....                                | ۴  |
| ۲-۲- روش های مجزاسازی مورد استفاده در مسائل معکوس هدایت حرارتی..... | ۵  |
| ۳-۲- روش های معکوس هدایت حرارتی.....                                | ۷  |
| ۴-۲- تقسیم بندی مسائل معکوس هدایت حرارتی.....                       | ۸  |
| ۵-۲- مشکلات حل مسائل معکوس هدایت حرارتی.....                        | ۱۰ |
| ۶-۲- معیارهای مقایسه روش های معکوس.....                             | ۱۲ |
| ۷-۲- مفهوم ضریب حساسیت.....                                         | ۱۴ |
| ۸-۲- کاربردهای روش های معکوس در مهندسی.....                         | ۱۶ |
| فصل سوم.....                                                        | ۲۱ |
| روش گرادیان مزدوج در حل مسائل معکوس.....                            | ۲۱ |
| ۱-۳- مسئله مستقیم.....                                              | ۲۳ |
| ۲-۳- مسئله معکوس.....                                               | ۲۳ |
| ۳-۳- فرآیند تکرار :.....                                            | ۲۳ |
| ۴-۳- معیار توقف.....                                                | ۲۶ |
| ۵-۳- الگوریتم روش گرادیان مزدوج.....                                | ۲۷ |
| فصل چهارم.....                                                      | ۲۸ |
| تعیین ضریب هدایت حرارتی قطعه مدور به روش حل معکوس.....              | ۲۸ |
| ۱-۴- مسئله مستقیم.....                                              | ۲۸ |
| ۱-۱-۴- توصیف فیزیک مسئله.....                                       | ۲۸ |
| ۲-۱-۴- توصیف ریاضی مسئله.....                                       | ۲۹ |
| ۳-۱-۴- آنالیز ابعادی و بی بعد سازی.....                             | ۳۲ |
| ۴-۱-۴- مجزاسازی.....                                                | ۳۴ |
| ۵-۱-۴- کد نویسی و اعتبار آن.....                                    | ۳۶ |
| ۲-۴- مسئله معکوس.....                                               | ۳۹ |
| فصل پنجم.....                                                       | ۴۱ |
| حل مسئله نمونه و بررسی نتایج.....                                   | ۴۱ |
| ۱-۵- فیزیک مسئله.....                                               | ۴۱ |
| ۲-۵- شبیه سازی ترموکوپل.....                                        | ۴۲ |
| ۳-۵- بررسی نتایج.....                                               | ۴۳ |
| ۴-۵- نتیجه گیری و پیشنهادات.....                                    | ۴۶ |
| مراجع.....                                                          | ۴۸ |
| پیوست ۱: کد کامپیوتری با MATLAB.....                                | ۴۹ |

# فصل اول

## مقدمه

### ۱-۱- مروری بر کارهای گذشته

#### ۱-۱- هدف پایان نامه

مسائل هدایت حرارتی را می توان به دو قسمت مستقیم و معکوس تقسیم نمود. در مسائل مستقیم که کاربرد بیشتری یافته اند، هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه و همچنین خواص ترموفیزیکی معلوم بوده و هدف محاسبه توزیع دما در داخل ناحیه مورد بررسی با استفاده از حل معادلات حاکم می باشد. در مسائل معکوس که اخیراً مورد توجه بیشتر قرار گرفته و کاربردهای زیادی نیز یافته اند، تعدادی از این اطلاعات نامعلوم بوده و هدف تخمین آنها با استفاده از دماهای اندازه گیری شده در داخل ناحیه حل می باشد. این نوع مسائل از نظر ریاضی بدخیم بوده و به شدت به خطاهای اندازه گیری حساس می باشند. استراتژی کلی در حل این مسائل ، مینیمم کردن

یک تابع هدف که معمولاً مجموع مربعات خطا انتخاب می شود، با استفاده از یک روش تکراری می باشد.

## ۱-۲- رئوس مطالب

در فصل دوم به مبانی و مفاهیم اولیه مسائل معکوس هدایت حرارتی پرداخته شده است. مفهوم مسئله مستقیم و معکوس و تفاوت بین آنها، تقسیم بندی مسائل معکوس هدایت حرارتی و روش های معکوس هدایت حرارتی در بخش های (۲-۳) و (۲-۴) بررسی خواهند شد. در بخش (۲-۵) مشکلات مسائل معکوس و راه حل آنها ارائه شده است. بعد از تعریف چند مفهوم کار بردی مانند ضریب حساسیت ، با ذکر کاربردهای روش های معکوس در مهندسی فصل دوم به پایان می رسد.

در فصل سوم روش گرادیان مزدوج را که یکی از سریع ترین و دقیق ترین روش ها در مسائل معکوس است، همراه با یک مثال گام به گام توضیح داده شده در آخر الگوریتم حل مسائل توسط روش گرادیان مزدوج در بخش (۳-۵) ارائه شده است.

در فصل چهارم موضوع اصلی پایان نامه یعنی تعیین ضریب هدایت حرارتی قطعه مدور روش حل معکوس انجام می شود. بخش (۴-۱) مربوط به مسئله مستقیم است که جزء لاینفک هر مسئله معکوس می باشد. تعریف فیزیک مسئله، توصیف ریاضی، بی بعد سازی و در نهایت مجزاسازی برای حل عددی معادله دیفرانسیل به روش تفاضل محدود از بخش های این فصل است. بخش (۴-۲) مربوط به مسئله معکوس است. در این بخش روابط ارائه شده در فصل سوم ، برای مسئله مورد نظر استخراج می شود.

در فصل پنجم حل مسئله نمونه با استفاده از برنامه کامپیوتری و بررسی نتایج حاصل از آن ارائه گردیده است. شایان ذکر است که داده های آزمایشگاهی با استفاده از روشی که در بخش (۵-۲) آورده شده است شبیه سازی می شوند. این نوع شبیه سازی در مسائل معکوس عمومی و مفید است.

## فصل دوم

### مبانی و مفاهیم اولیه مسائل معکوس هدایت حرارت

#### ۲-۱- تعریف مسائل مستقیم و معکوس

توسعه کامپیوترها، رشد روش های عددی برای مدل سازی پدیده های فیزیکی را تسریع کرده است. برای مدل سازی یک پدیده فیزیکی به یک مدل ریاضی و یک روش حل نیاز می باشد. فرمولاسیون های ریاضی معمولاً به صورت یک سری معادلات دیفرانسیل و یا روابط انتگرالی داده می شوند، که با حل آنها می توان پدیده فیزیکی را مدل سازی نمود. مدل سازی مسائل هدایت حرارتی نیز به مانند دیگر پدیده های فیزیکی با حل معادلات حاکم آن امکان پذیر می باشد. برای حل مسائل هدایت حرارتی اطلاعات زیر مورد نیاز است:

هندسه ناحیه حل

شرایط اولیه

شرایط مرزی

خواص ترموفیزیکی

و محل و قدرت ترمهای منبع اگر وجود داشته باشند.

بعد از حل معادلات حاکم، توزیع دما در داخل ناحیه حل به دست می‌آید. این نوع مسائل را مسائل مستقیم می‌گویند. روش‌های حل مسائل مستقیم از سال‌ها پیش توسعه یافته‌اند. این روش‌ها شامل روش‌های حل مسائلی با هندسه پیچیده و همچنین مسائل غیر خطی نیز می‌گردند. علاوه بر این پایداری و یکتائی جواب این روش‌ها نیز بررسی گردیده است. روش‌های اولیه عمدتاً بر مبنای حل‌های تحلیلی بوده‌اند. این روش‌ها بیشتر برای مسائل خطی و با هندسه‌های ساده قابل استفاده هستند. روش‌های عددی که عمدتاً با توسعه کامپیوترها توسعه یافته‌اند، دارای این محدودیت نبوده، بنابراین برای کاربردهای مهندسی بیشتر مورد توجه هستند.

دسته‌ای دیگر از مسائل که در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته‌اند، مسائل معکوس می‌باشند. در این نوع مسائل یک و یا تعدادی از اطلاعات مورد نیاز برای حل مستقیم، موجود نمی‌باشد. در عوض اطلاعات اضافی که معمولاً شامل دماهای اندازه‌گیری شده در داخل ناحیه حل بوده، معلوم هستند. این نوع مسائل را می‌توان به یافتن "علت" از طریق اندازه‌گیری "معلول" بیان کرد.

برای حل مسائل معکوس بطور کلی به دو ابزار زیر نیاز می‌باشد:

۱- یک روش مجزاسازی برای حل مسئله مستقیم

۲- یک روش معکوس، برای پایدار کردن مسئله بد وضع که معمولاً شامل یک روش تکراری برای مینیمم کردن یک تابع هدف می‌باشد.

## ۲-۲ - روش‌های مجزاسازی مورد استفاده در مسائل معکوس هدایت حرارتی

معادلات حاکم بر مسائل هدایت حرارت را میتوان به روش های عددی و یا تحلیلی حل نمود. روش های تحلیلی بیشتر مناسب برای مسائل خطی با هندسه ساده می باشند در حالیکه روش های عددی را میتوان برای مسائل غیرخطی و با هندسه پیچیده نیز استفاده کرد در ارزیابی یک روش عددی، معیارهای زیر مورد توجه می باشند.

۱- قابلیت اعمال روش به مسائلی با هندسه پیچیده و ابعاد اختیاری

۲- قابلیت اعمال روش به مسائل مرزی بدون محدودیت در انتخاب نوع و تعداد شرایط مرزی اعمال شده در طول مرز

۳- قابلیت اعمال روش به مسائل غیرخطی

۴- دقت و زمان کامپیوتری مورد نیاز روش

روش های عددی اصلی که در مسائل مختلف انتقال حرارت و مکانیک سیالات به کار میروند به شرح زیر می باشند:

• روش اختلاف محدود (FDM)

• روش المان های محدود (FEM)

• روش المان های مرزی (BEM)

هر یک از این سه روش کاملاً عمومی می باشند و هر یک از آنها را میتوان به عنوان مکمل روش های دیگر در نظر گرفت. در واقع در یک مسئله خاص ممکن است که یکی از این سه روش نسبت به روش های دیگر دارای امتیاز باشد. به عنوان مثال، گرچه روش المان های مرزی و المان های محدود به مسائل غیرخطی با خواص ترموفیزیکی تابع دما توسعه یافته اند ولی به نظر می رسد که روش اختلاف محدود برای این گونه مسائل مناسب تر می باشد و یا استفاده از روش اختلاف محدود در مسائلی با هندسه نامنظم ممکن است مشکل باشد. در هر سه روش ذکر شده نیاز به شبکه بندی به منظور حل معادلات حاکم می باشد ولی در روش المان های مرزی این شبکه بندی

فقط بر روی مرز صورت می گیرد. این مسئله باعث شده است که روش المان های مرزی نسبت به دو روش دیگر دارای امتیازات قابل توجه باشد.

## ۲-۳- روش های معکوس هدایت حرارتی

روش های معکوس هدایت حرارتی را می توان به دو دسته متوالی و تمام دامنه تقسیم نمود [۱]. در روشهای تمام دامنه که عمدتاً در کشور روسیه توسعه یافته اند ، تخمین به صورت همزمان برای تمام فاصله زمانی حل صورت می گیرد ولی در روش های متوالی، که عمدتاً در آمریکا توسعه پیدا نموده اند، تخمین به صورت گام به گام انجام می گردد. چندین مقاله در مورد مقایسه روشهای معکوس وجود دارد که از آن جمله می توان به مرجع [۲] اشاره نمود.

روشهای متوالی دارای امتیازات زیر نسبت به روش های تمام دامنه هستند.

۱- امکان خطی سازی در مسائلی که خواص ترموفیزیکی تابع دامنه هستند.

در این نوع مسائل می توان با محاسبه خواص ترموفیزیکی در دماهای گام زمانی قبلی مسئله را خطی سازی نمود.

۲- امکان استفاده از روش در مسائلی با زمان حقیقی

این کارائی به خصوص در مورد کاربردهای کنترلی از اهمیت زیادی برخوردار است.

۳- روش های متوالی معمولاً نیاز به زمان و حافظه کامپیوتری کمتری دارند.

مهمترین روش معکوس متوالی موجود، روش تخمین توابع متوالی می باشد. این روش ابتدا برای مسائل یک بعدی ارائه شد ولی بعداً استفاده از آن به مسائل دوبعدی نیز توسعه یافت [۳]. همچنین از این روش برای مسائل تخمین پارامتر و همچنین مسائل غیرخطی استفاده می شود. در مسائلی

که خطاهای اندازه گیری بالا می باشد، میتوان با ترکیب روش با روش تنظیم تیخونو پایداری حل را بهبود بخشید.

روش متوالی دیگری که باید به آن اشاره نمود روش قدم زدن مکانی است. این روش دارای ویرایش های متعددی است ولی به اندازه روش تخمین توابع متوالی، کاربرد نیافته است. دو نوع روش تمام دامنه که کاربرد بیشتری یافته اند، روش تنظیم تیخونو و روش های تنظیم تکراری می باشند. این دو روش نسبت به روش تخمین توابع متوالی از پایداری بهتری برخوردار هستند. از میان روش های تنظیم تکراری، روش گرادیان های مزدوج دارای همگرایی سریع تر می باشد [۴]. ویرایش متوالی از این روش نیز ارائه گردیده است ولی نشان داده شده است که ویرایش متوالی این روش بیشتر امتیازاتش را از دست می دهد.

## ۲-۴- تقسیم بندی مسائل معکوس هدایت حرارتی

مسائل معکوس را می توان به روش های مختلف دسته بندی نمود. در یک روش تقسیم بندی،

مسائل معکوس را می توان به دو دسته زیر تقسیم کرد:

- مسائل تخمین پارامتر

- مسائل تخمین تابع

تقسیم بندی بالا یک تقسیم بندی کلی می باشد. این تقسیم بندی را برای مسائل معکوس هدایت

حرارتی می توان به تقسیم بندی زیر توسعه داد:

- مسائل تخمین شرط مرزی مجهول

- مسائل تخمین پارامتر

- مسائل تخمین شرط اولیه

- مسائل تخمین هندسه ناحیه حل

- مسائل دیگر

مسائل تخمین شرط مرزی، معمولاً شامل تخمین شار حرارتی مجهول بر حسب دماهای اندازه گیری شده در داخل ناحیه حل هستند. این نوع مسائل به شدت به خطاهای اندازه گیری حساس است. در حقیقت مسائل تخمین شرط مرزی نوعی مسئله تخمین تابع می باشند زیرا در این نوع مسائل شرط مرزی معمولاً تابع زمان و یا مکان است.

در توسعه روش های معکوس، عمدتاً تخمین شار حرارتی مورد توجه است. زیرا با تخمین شرط مرزی شار حرارتی می توان به راحتی دما و یا ضریب انتقال حرارت را نیز به دست آورد. این کار به وسیله حل مستقیم و با معلوم بودن دمای سیال در تماس با مرز انجام می شود. تعیین شرط مرزی دما، خود می تواند به عنوان یک مسئله معکوس مستقل انجام شود. ولی نشان داده شده است [۵،۶] که تخمین شار حرارتی از روی این دما مشکل بوده و به یک مسئله نیمه معکوس منجر می شود. بنابراین بیشترین توجه در مطالعات انجام شده بر روی تخمین شار حرارتی بوده است. تخمین ضریب جابجائی را می توان به دو روش انجام داد. در روش اول همانطوریکه قبلاً گفته شد، این تخمین می تواند از طریق محاسبه شار حرارتی انجام گیرد. راه دوم تخمین ضریب جابجائی به وسیله یک روش مستقل معکوس می باشد. در این روش مسئله، تبدیل به یک مسئله غیر خطی می گردد؛ زیرا می توان نشان داد که در مسائل تخمین ضریب جابجائی، ضریب حساسیت [۳] خود تابعی از جواب مسئله است. استفاده از این روش زمانی قابل توجیه است که بتوان با آن تعداد اجزا مجهول را کاهش داد.

مسائل تخمین پارامتر، شامل تخمین یک پارامتر است که بیانگر خواص فیزیکی یک سیستم حرارتی می باشد. در این نوع مسائل معمولاً تعداد پارامترهای تخمینی محدود هستند. حتی در مسائل غیر خطی، مثلاً تخمین ضریب هدایت حرارتی به صورت تابعی از دما، معمولاً حداکثر سه یا چهار پارامتر تخمین زده می شوند. این نوع مسائل معمولاً غیر خطی هستند؛ حتی اگر معادلات حاکم بر حل مستقیم آنها خطی باشند. پارامترهایی که معمولاً تخمین آنها مورد توجه هستند، ضریب هدایت حرارتی، جرم مخصوص، گرمای ویژه و ضریب نفوذ حرارتی می باشند.

مسائل تخمین شرط اولیه به ندرت مورد بررسی قرار گرفته اند زیرا این نوع مسائل کاربرد کمتری نسبت به دیگر مسائل معکوس دارند. در این نوع مسائل، تخمین شرط اولیه با کمک تعدادی دمای اندازه گیری شده مورد نظر می باشد. یکی از اولین کارهای گزارش شده در زمینه مسائل معکوس تخمین شرط اولیه بوده است که در آن کار تلاش شد دمای اولیه سطح زمین با استفاده از دمای فعلی آن تخمین زده شود.

زمانیکه هندسه حل کاملاً مشخص نمی باشد، مسئله مورد بررسی یک مسئله تخمین هندسه می باشد. از این دسته مسائل می توان به تخمین محل سطح جامد در یک ماده مذاب در حال انجماد با اندازه گیری دما اشاره کرد. مسئله دیگر می تواند تخمین محل یک سوراخ با اعمال شار حرارتی معلوم و اندازه گیری دما در چند نقطه باشد. دسته دیگر از مسائل معکوس شامل تعیین قدرت و محل یک ترم منبع می باشد.

## ۲-۵- مشکلات حل مسائل معکوس هدایت حرارتی

مشکل حل مسائل هدایت حرارتی معکوس بدوضع<sup>۱</sup> بودن آنها به مانند اکثر مسائل معکوس می باشد. در این قسمت دلایل بدوضع بودن این مسائل از نظر ریاضی شرح داده خواهد شد و سپس با یک مثال مشکلات حل مسائل معکوس هدایت حرارتی بیان می گردد.

مسائل مستقیم هدایت حرارتی خوش وضع<sup>۲</sup> می باشند. مفهوم مسائل خوش وضع اولین بار به وسیله هادامارد بیان گردید. طبق تعریف وی یک مسئله خوش وضع می باشد، اگر حل آن مسئله شرایط زیر را ارضا نماید:

۱- حل وجود داشته باشد.

۲- حل یکتا باشد.

۳- حل در برابر تغییرات کوچک در ورودی های حل پایدار باشد.

---

<sup>1</sup> Ill-Posed

<sup>2</sup> Well-Posed

در مسائل هدایت حرارتی وجود و یکتائی جواب مسئله با دلایل و تجربیات فیزیکی نشان داده شده است. مشکل موجود در مسائل معکوس عدم پیوستگی حل نسبت به ورودی‌ها یعنی دماهای اندازه گیری شده می‌باشد. به عبارتی مسائل معکوس دارای سومین شرط از شروط سه گانه بالا نیست. بنابراین خطاهای کوچک در اندازه گیری دما می‌تواند باعث ناپایداری حل مسئله گردد. اهمیت این حساسیت به این علت است که اندازه گیری دما همیشه با خطا همراه است. برای نشان دادن مشکلات حل مسائل معکوس یک جسم نیمه بینهایت با دمای اولیه صفر را در نظر بگیرید (شکل (۲-۱)). برای زمان  $t > 0$  جسم در معرض شار حرارتی پریودیک زیر قرار می‌گیرد.

$$q(t) = q_0 \cos \omega t, \quad (۲-۱)$$

که  $q_0$  و  $\omega$  به ترتیب دامنه و فرکانس شار حرارتی اعمال شده می‌باشد. بعد از گذشت شرایط گذرا و رسیدن به شرایط شبه پایا، توزیع دما در جسم به صورت زیر می‌باشد

$$T(x, t) = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \cos\left(\omega t - x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}} - \frac{\pi}{4}\right), \quad (۲-۲)$$

که در رابطه بالا  $\alpha$   $k$  به ترتیب ضریب نفوذ حرارتی و ضریب هدایت حرارتی می‌باشند. رابطه (۲-۲) نشان می‌دهد که پاسخ دمائی نسبت به شرط مرزی اعمال شده میرا گردیده و همچنین دارای تاخیر فاز می‌باشد. به عبارت دیگر پاسخ دمائی با تاخیر دریافت می‌شود. این دو اثر را به ترتیب تاخیر<sup>۱</sup> و میرائی<sup>۲</sup> می‌گویند که هر دو اثر با افزایش  $x$  یعنی عمق افزایش می‌یابند. از بررسی تاثیر تاخیر می‌توان به این نتیجه رسید که برای تخمین یک شار حرارتی که در زمان  $t$  اعمال می‌شود باید از دماهای زمان‌های آینده استفاده نمود. به این دلیل است که روش‌های مستقیمی که در آنها شرط مرزی اعمال شده در زمان  $t$  با استفاده از دماهای قرائت شده در همین زمان تخمین زده می‌شوند، ناپایدار هستند.

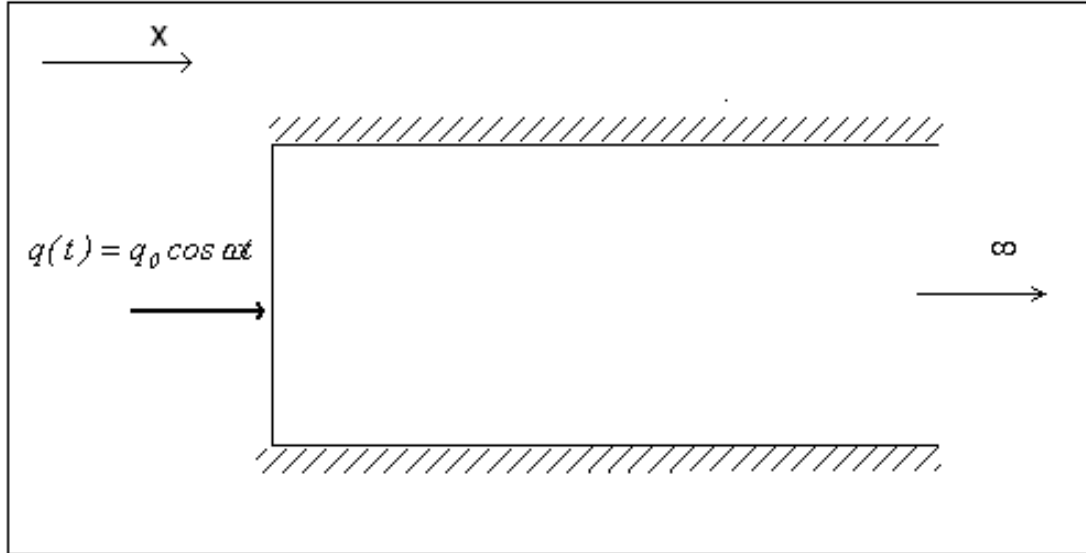
---

<sup>۱</sup>.Lagging

<sup>۲</sup>.Damping

برای بررسی اثر میرایی دامنه نوسانات دما در رابطه (۲-۲) را در نظر بگیرد

$$|\Delta T(x)| = \frac{q_0}{k} \sqrt{\frac{\alpha}{\omega}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \quad (۳-۲)$$



شکل (۱-۲) یک جسم نیمه بینهایت که در معرض یک شار حرارتی پریودیک قرار گرفته است.

مشاهده می شود که این دامنه نیز با افزایش عمق  $x$  و یا فرکانس نوسانات به صورت نمائی کاهش می یابد. به صورت معکوس اگر هدف تخمین شار حرارتی با استفاده از دماهای اندازه گیری شده باشد، در صورتی که خطائی در دامنه دمای اندازه گیری شده باشد، دامنه این خطا به صورت نمائی تشدید می گردد. این مسئله را می توان با نوشتن دامنه شار حرارتی بر حسب دامنه نوسانات دما مشاهده نمود.

$$q_0 = k |\Delta T(x)| \sqrt{\frac{\omega}{\alpha}} \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right) \quad (۴-۲)$$

به عبارتی یک خطای کوچک در اندازه گیری می تواند به خطاهای بزرگی در شار حرارتی تخمین زده شده منتهی گردد.

## ۲-۶- معیارهای مقایسه روش های معکوس

در دو دهه اخیر تعداد زیادی روش معکوس هدایت حرارتی به وسیله محققین ارائه شده است. برای مقایسه این روش‌ها، بک<sup>۱</sup> معیارهای زیر را پیشنهاد نمود. نکته اینکه در بسیاری از روش‌های معکوس هدایت حرارتی تمام معیارهای زیر موجود نمی‌باشد. بلکه این معیارها، مقیاسی برای بررسی روش‌های ارائه شده است.

۱- دما و یا شار حرارتی تخمین زده شده با استفاده از دماهایی بدون خطای اندازه‌گیری، دارای دقت بالایی باشند.

۲- روش باید نسبت به خطاهای اندازه‌گیری حساس نباشد.

۳- روش باید برای گامهای زمانی کوچک پایدار باشد. این مسئله این امکان را فراهم می‌نماید که در یک فاصله زمانی مشخص بتوان اطلاعات بیشتری را نسبت به حالتیکه گامهای زمانی بزرگ انتخاب می‌شوند به دست آورد.

۴- روش باید قابلیت استفاده از یک یا تعداد بیشتر دماسنج را داشته باشد.

۵- روش نباید محدودیت پیوسته بودن مشتق اول شار حرارتی را داشته باشد. به عنوان مثال روش باید امکان تخمین یک شار حرارتی پله ای و یا مثلثی را داشته باشد

۶- نباید در روش نیاز به داشتن زمان دقیق اعمال شار حرارتی مجهول را داشت.

۷- روش نباید محدود به هیچ تعداد مشخصی مشاهده باشد.

۸- روش باید قابل اعمال به دیواره‌های مرکب (چند جنسی) باشد.

۹- روش باید قابل اعمال به مسائلی با خواص ترموفیزیکی تابع دما باشد.

۱۰- روش باید قابل اعمال به مسائل با مقاومت تماس باشد.

۱۱- باید بتوان به سهولت روش را کامپیوتری نمود.

۱۲- زمان کامپیوتری مورد نیاز نباید خیلی بالا باشد.

---

<sup>1</sup> Beck

۱۳- استفاده کننده نباید نیازمند اطلاعات بسیار بالا در ریاضی به منظور درک و استفاده از روش را داشته باشد.

۱۴- روش باید قابلیت اعمال به انواع سیستمهای مختصات را داشته باشد.

۱۵- روش باید قابلیت اعمال به مسائلی که در آنها بیش از یک سطح فعال وجود دارد، داشته باشد.

۱۶- روش باید دارای پایه آماری بوده و بتوان انواع فرضیات آماری را بر روی خطاهای اندازه گیری اعمال کرد

## ۲-۷- مفهوم ضریب حساسیت<sup>۱</sup>

ضریب حساسیت اولین بار به وسیله بک معرفی گردید و به عنوان مشتق متغیری که اندازه گیری می شود نسبت به متغیری که تخمین زده می شود، تعریف می گردد. این ضریب اهمیت زیادی در حل مسائل معکوس دارد و باعث ایجاد سهولت در حل مسائل معکوس می شود. علاوه بر این می توان با استفاده از آن مسئله معکوس را قبل از حل تحلیل نمود. دو نوع ضریب حساسیت تعریف می گردد.

۱- ضریب حساسیت نسبت به شرط مرزی که در فاصله زمانی نامحدودی اعمال گردد. که به آن ضریب حساسیت پله ای میگویند.

۲- ضریب حساسیت نسبت به شرط مرزی که در فاصله زمانی محدودی  $t_M - t_{M-1}$  اعمال گردد. که به آن ضریب حساسیت پالسی میگویند.

ضریب حساسیت پله ای نسبت به شار حرارتی به صورت زیر تعریف می شود

$$Z_{m,i}^k = \frac{\partial T_{m,i}}{\partial q_k}, \quad (2-5)$$

که در رابطه بالا  $m$  و  $i$  به ترتیب اندیسهای زمان و دماسنج و  $k$  اندیس مولفه شار حرارتی است.

---

<sup>1</sup>. Sensitivity Coefficient

معادلات حاکم، همچنین شرایط اولیه و مرزی برای یک مسئله خطی یک بعدی نمونه به صورت زیر است

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad 0 < x < 1 \quad (۶-۲)$$

$$-k \frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = q_1(t), \quad t > 0 \quad (۷-۲)$$

$$-k \frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = q_2(t) \quad t > 0 \quad (۸-۲)$$

$$T(x,0) = T_0(x) \quad 0 < x < 1 \quad (۹-۲)$$

روابط حاکم بر ضریب حساسیت نسبت به  $q_1(t)$  با مشتق گرفتن از روابط (۶-۲) تا (۹-۲) نسبت به  $q_1(t)$  به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial Z}{\partial t} \quad 0 < x < 1 \quad (۱۰-۲)$$

$$-k \frac{\partial Z(0,t)}{\partial x} = 1 \quad t > 0 \quad (۱۱-۲)$$

$$-k \frac{\partial Z(l,t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0 \quad (۱۲-۲)$$

$$Z(x,0) = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (۱۳-۲)$$

ضریب حساسیت پالسی نسبت به شار حرارتی به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$X_{m,i}^k = \frac{\partial T_{m,i}}{\partial q_k}, \quad (۲-۱۴)$$

که در رابطه بالا فرض بر این است که  $q_k$  شار حرارتی اعمال شده در فاصله زمانی  $t_M - t_{M-1}$  می‌باشد.

در این حالت معادلات حاکم برای محاسبه ضریب حساسیت پالسی با مشتق گرفتن از روابط (۶-۲) تا (۹-۲) به صورت زیر در می‌آید

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial X}{\partial t} \quad 0 < x < l \quad (۱۵-۲)$$

$$-k \frac{\partial X(0,t)}{\partial x} = 1 \quad t_{M-1} < t < t_M \quad (۱۶-۲)$$

$$-k \frac{\partial X(0,t)}{\partial x} = 0 \quad t < t_{M-1}, t > t_M \quad (۱۷-۲)$$

$$-k \frac{\partial X(l,t)}{\partial x} = 0 \quad t > 0 \quad (۱۸-۲)$$

$$X(x,0) = 0 \quad 0 < x < l \quad (۱۹-۲)$$

مشاهده می‌شود که محاسبه هر دو نوع ضریب حساسیت معادل مدل کردن یک شوک حرارتی می‌باشند. در مورد ضریب حساسیت پالسی، معادله حاکم مشابه یک مسئله هدایت حرارتی گذرا است که در آن یک شار حرارتی در فاصله زمانی  $t_M - t_{M-1}$  اعمال شده است. این تعبیر اهمیت زیادی دارد زیرا با محاسبه آن می‌توان فهمید شار حرارتی که در این فاصله زمانی اعمال می‌شود در چه فاصله زمانی به دماسنج می‌رسد. این مسئله می‌تواند به منظور آنالیز پایداری حل معکوس به کار برده شود.

نکته دیگر اینکه روابط بالا برای محاسبه ضریب حساسیت یک مسئله با خواص ترموفیزیکی ثابت می‌باشد. در یک مسئله غیر خطی این ضریب تابع دما می‌باشد. نکته دیگر که در ارتباط با ضریب حساسیت اهمیت دارد اینکه، در بسیاری از روش‌های معکوس از جمله روش تخمین توابع متوالی یک ماتریس  $[Z^T Z]^{-1}$  وارد روابط می‌شود. که  $Z$  ماتریس ضرایب حساسیت می‌باشد. هر چه مقدار دترمینان  $|Z^T Z|$  بزرگتر باشد، ماتریس را آسان‌تر می‌توان معکوس کرد. بنابراین پارامترهای حل باید به نحوی انتخاب گردند که این دترمینان برابر صفر نگردد.

## ۲-۸- کاربردهای روش‌های معکوس در مهندسی

در سال‌های اخیر روش‌های معکوس کاربردهای زیادی در صنایع یافته‌اند. محققین دانشگاهی و صنعتی مسائل مختلف مدل‌سازی، آنالیز و ایجاد روش‌های عددی جدید را مورد توجه قرار داده‌اند. با توجه به پیشرفت روش‌های اندازه‌گیری، کاربرد مسائل معکوس در صنعت و

دانشگاه رو به افزایش است. این روش ها علاوه بر مسائل مهندسی در مسائل مربوط به علوم طبیعی نیز کاربرد یافته اند.

کاربردهای روش های معکوس در مسائل حرارتی را به سه دسته زیر می توان تقسیم کرد.

۱- کاربرد در مسائل تعیین و شناخت

۲- کاربرد در مسائل طراحی

۳- کاربردهای کنترلی

متداول ترین کاربرد مسائل معکوس مربوط به دسته اول می باشد. این نوع مسائل شامل تحلیل و آنالیز داده های تجربی می باشد. در این دسته از مسائل هدف تعیین یک تابع و یا ثابت می باشد که اندازه گیری مستقیم آن مشکل و یا غیر عملی است. دسته دوم مسائل که شامل مسائل طراحی می باشد، معمولا شامل اندازه گیری نمی باشند. بلکه رسیدن به یک طراحی و یا بهینه سازی یک طرح از طریق مینیمم کردن یک تابع، تعریف کننده یک مسئله معکوس می باشد. به عنوان مثال می توان به مسئله استفان<sup>۱</sup> اشاره کرد. در بعضی مواقع انجماد با سرعتی خاص مورد نظر می باشد. با تعیین شرط مرزی مجهول می توان سرعت انجماد مورد نظر را تامین کرد. مسائل کنترلی سومین دسته از مسائل معکوس می باشند. در این نوع مسائل هدف تعیین علت (پارامتر کنترل کننده) با اندازه گیری یک متغیر می باشد. در بسیاری از مسائل از این نوع، باید یک مسئله معکوس را حل نمود.

یکی از متداول ترین کاربردهای مسائل معکوس تعیین شرط مرزی مجهول و یا تخمین یک پارامتر می باشد. به عنوان نمونه می توان به تعیین ضریب جابجائی اشاره نمود. تعیین این ضریب نیاز به تعیین دمای سطحی، دمای سیال و شار حرارتی با توجه به رابطه زیر دارد

$$q = h(T_s - T_a), \quad (2-20)$$

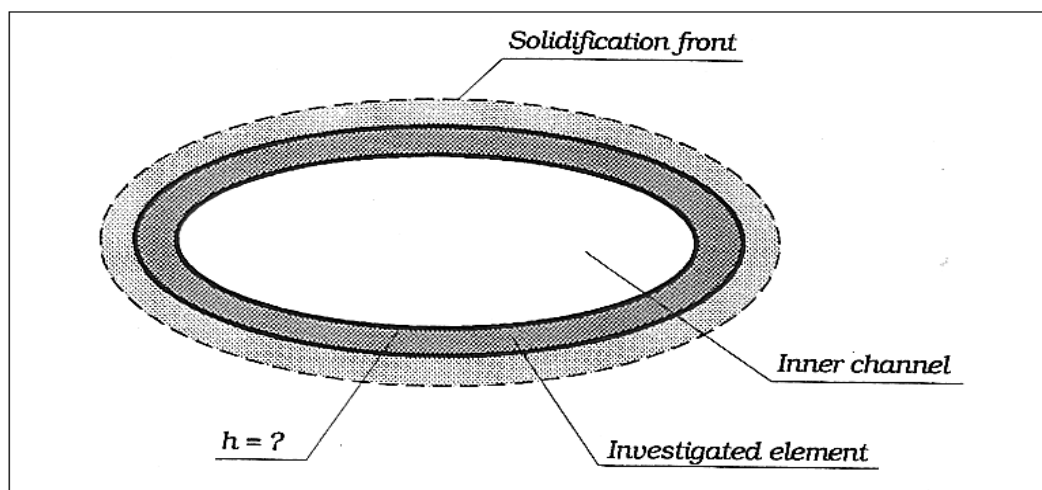
---

<sup>۱</sup>.Stefan

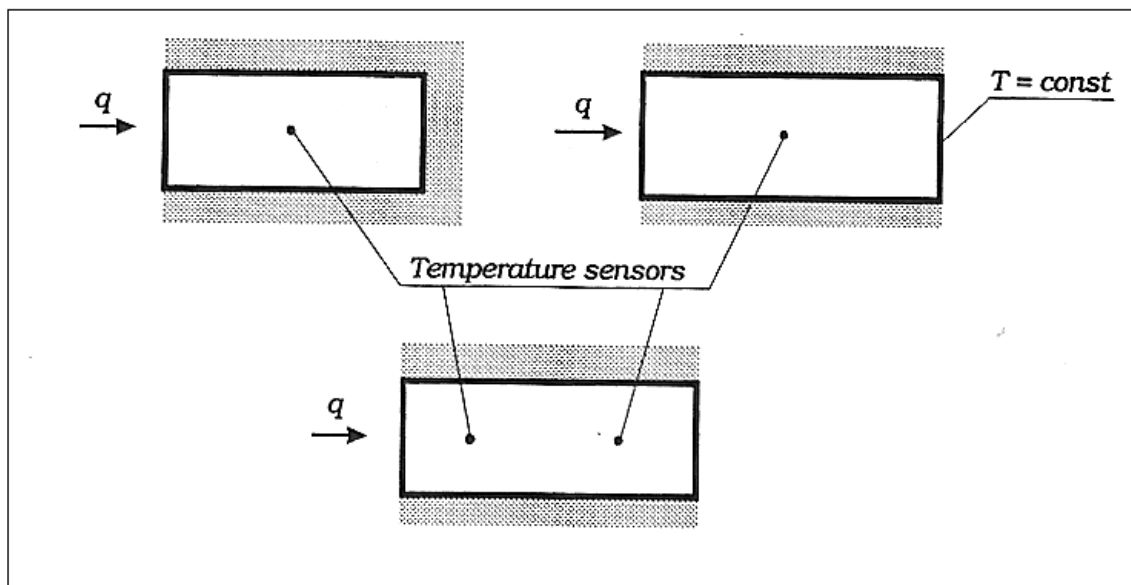
که  $T_s$  و  $T_a$  به ترتیب دماهای سطحی و سیال بوده و  $q$  شار حرارتی می‌باشد. تعیین ضریب حرارتی با استفاده از رابطه بالا نیاز به اندازه گیری دمای سطح دارد. دماهای اندازه گیری شده به وسیله دماسنجی که بر روی سطح قرار گرفته است، حاوی خطای بالائی است. این خطا در مواردی که سرعت سیال بالا می‌باشد، افزایش می‌یابد. راه مناسبتر برای محاسبه  $h$  استفاده از یک روش معکوس می‌باشد.

در مرجع [۴] یک روش برای تعیین ضریب انتقال حرارت زمانی که راهی برای قرار دادن دماسنج داخل جسم وجود ندارد ارائه گردیده است. در این روش جسم مورد نظر را در داخل یک فلز مایع با نقطه انجماد پائین غوطه ور میکنند. در نتیجه یک لایه از فلز روی جسم به وجود می‌آید. ضریب انتقال حرارت مجهول را می‌توان با حل یک مسئله استفان برای سطح خارجی به دست آورد. این روش برای اجسام بسیار نازک نیز کاربرد دارد. (شکل (۲-۲))

یکی دیگر از کاربردهای روش‌های معکوس، تخمین شار حرارتی می‌باشد. این دسته از مسائل بسیار نزدیک به تخمین ضریب انتقال حرارت هستند. در شکل (۲-۳) وسیله ای را که می‌توان از آن برای تعیین شار حرارتی استفاده کرد، نشان داده شده است. این وسیله از یک سیلندر نازک با دیواره های عایق تشکیل شده است که انتهای آن نیز می‌تواند عایق باشد. در صورتیکه انتهای آن عایق باشد، حداقل یک دماسنج و در صورتیکه عایق نباشد، دو دماسنج مورد نیاز است.

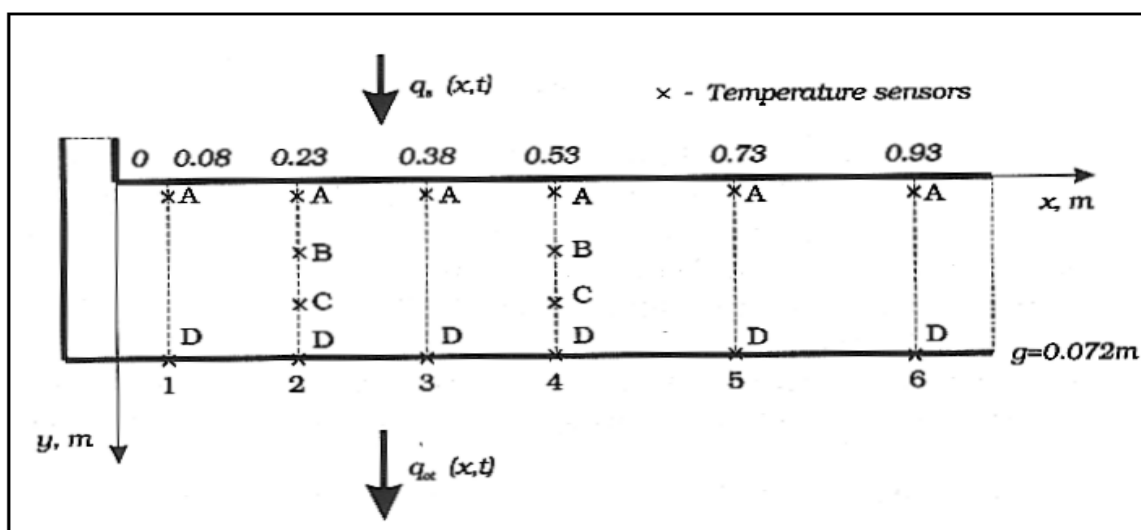


شکل (۲-۲) یک روش تجربی برای تعیین  $h$



شکل (۳-۲) وسیله تخمین شار حرارتی

مثال دیگر این کاربرد، تخمین شار حرارتی بر روی دیواره یک کوره است [۹]. در شکل (۲-۴) محل قرار گیری دماسنج نشان داده شده است. با فرض انتقال حرارت یک بعدی می توان شار حرارتی را به دست آورد. انتقال حرارت در داخل اجسام متخلخل کاربرد دیگر روش های معکوس است. مسائل مورد بررسی در اجسام متخلخل، تعیین شرط مرزی مجهول یا خواص ترموفیزیکی است.



شکل (۲-۴) محفظه احتراق همراه با دماسنج ها

کاربردهای مختلف مسائل معکوس در زمینه متالورژی در مرجع [۵] بررسی شده است. این کاربردها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد.

۱- کنترل فرآیند گرم کردن یک جسم داخل کوره

۲- مدل‌سازی فرآیند سرد سازی فولاد به منظور رسیدن به دمای سطحی مورد نظر

۳- مدل‌سازی فرآیند کربنیزه کردن فولاد و بررسی نفوذ فولاد در کربن

۴- مدل کردن مسائل متالورژی پودر کردن

مثالهایی که در زمینه کاربرد روش‌های معکوس بررسی گردید نشان می‌دهد که بسیاری از آنها شامل تعیین یک شرط مرزی مجهول می‌باشد. در واقع تعیین خواص ترموفیزیکی که یکی دیگر از کاربردهای روش‌های معکوس است در بسیاری از مواقع با روش‌های دیگر امکان‌پذیر است. یکی دیگر از کاربردهای روش‌های معکوس تعیین قابلیت نفوذ یک جسم جامد است. نفوذ در یک جسم جامد بسیار کند صورت می‌گیرد و معمولاً به حالت پایدار نمی‌رسد. در این حالت نیز روش‌های معکوس می‌توانند به کار گرفته شوند. کاربردهای دیگری از روش‌های معکوس در مرجع [۵] بررسی شده است.

## فصل سوم

### روش گرادیان مزدوج در حل مسائل معکوس

در این فصل یک روش برای تخمین پارامتر مجهول ارائه شده است. گرادیان مزدوج<sup>۱</sup> یک روش تکرار قوی و ساده برای حل مسائل معکوس خطی و غیر خطی می باشد. در فرآیند تکرار در هر مرحله، اندازه گام مناسب در امتداد جهت شیب به منظور کمینه کردن تابع هدف محاسبه می شود. این روش شامل مراحل زیر است:

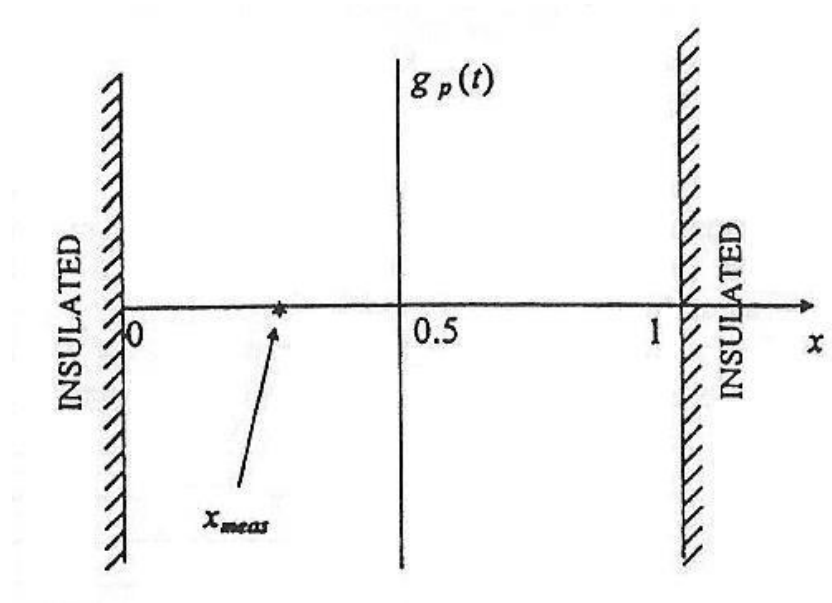
- مسئله مستقیم
- مسئله معکوس
- فرآیند تکرار
- ملاک توقف
- الگوریتم محاسبه

در زیر به شرح هر یک از مراحل نام برده با استفاده از یک مسئله نمونه می پردازیم.

---

<sup>۱</sup> . Conjugate Gradient Method

هدایت حرارت غیر دائم خطی در صفحه ای با ضخامت واحد بی بعد مفروض است. دمای اولیه صفحه صفر و مرزهای آن در  $x=0$  و  $x=1$  عایق می باشد. در زمان  $t > 0$ ، یک منبع حرارتی با توان  $g_p(t)$  بر واحد سطح، که در نقطه میانی  $x=0.5$ ، انرژی پخش می کند. (شکل ۱-۳)



شکل (۱-۳) - هندسه و مختصات صفحه با منبع حرارتی

مدل ریاضی مسئله به شکل بی بعد بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + g_p(t)\delta(x-0.5) = \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (الف-۱-۳)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (ب-۱-۳)$$

$$\frac{\partial T(1,t)}{\partial x} = 0 \quad x = 1, \quad t > 0 \quad (ج-۱-۳)$$

$$T(x,0) = 0 \quad t = 0, \quad 0 < x < 1 \quad (د-۱-۳)$$

که  $\delta(.)$  تابع دلتای دیراک می باشد.

### ۳-۱- مسئله مستقیم

موضوع مسئله مستقیم که در بالا شرح داده شد، تعیین توزیع دما  $T(x,t)$  با مشخص بودن منبع حرارتی  $g_p(t)$  می باشد.

### ۳-۲- مسئله معکوس

در مسئله معکوس، منبع حرارتی  $g_p(t)$  بعنوان مجهول و دماهای اندازه گیری شده در نقطه  $x = x_{mean}$ ، در زمان های  $t_i, i=1,2,\dots,I$ ، بعنوان معلوم در نظر گرفته می شوند. برای حل چنین مسئله ای تابع مجهول  $g_p(t)$  با استفاده از رابطه (۳-۲) خطی می شود:

$$g_p(t) = \sum_{j=1}^N P_j C_j(t) \quad (۳-۲)$$

که در آن  $C_j$ ، توابع معلوم و  $P_j$ ، پارامترهای مجهول هستند.

با توجه به رابطه (۳-۲) تخمین تابع  $g_p(t)$  با تخمین  $N$  پارامتر مجهول  $P_j$  معادل است. چنین تخمین پارامتری با کمینه کردن نرم حداقل مربعات<sup>۱</sup> حل می شود:

$$S(P) = [Y - T(P)]^T [Y - T(P)] \quad (۳-۳)$$

### ۳-۳- فرآیند تکرار :

روند تکرار در روش گرادیان مزدوج برای کمینه کردن  $S(P)$  طبق رابطه زیر است :

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k \quad (۴-۳)$$

در رابطه فوق  $\beta^k$ ، اندازه گام جستجو<sup>۲</sup> و  $d^k$ ، جهت شیب<sup>۳</sup> می باشد و بالا نویس  $k$  عدد تکرار است. جهت شیب از رابطه زیر محاسبه می شود:

---

<sup>۱</sup> . Least Squares Norm

<sup>۲</sup> . Search Step Size

<sup>۳</sup> . Direction Of Descent

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^k \quad (5-3)$$

عبارات متفاوتی برای ضریب  $\gamma$  موجود می باشد که از بین آنها رابطه **Polak-Ribiere** بصورت زیر :

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N \{ [\nabla S(P^k)]_j [\nabla S(P^k) - \nabla S(P^{k-1})]_j \}}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} \quad k=1,2,\dots \quad (6-3)$$

$$\gamma^0 = 0$$

و رابطه **Fletcher-Reeves** بصورت زیر :

$$\gamma^k = \frac{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^k)]_j^2}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^{k-1})]_j^2} \quad k=1,2,\dots \quad (7-3)$$

$$\gamma^0 = 0$$

می باشد.

در روابط (۶-۳) و (۷-۳)، عبارت  $[\nabla S(P^k)]_j$ ، مولفه  $j$  ام گرادیان مسیر<sup>۱</sup> در تکرار  $k$ ام است. گرادیان مسیر با مشتق گیری از رابطه (۳-۳) نسبت به پارامترهای مجهول  $P_j$  محاسبه می شود.

$$\nabla S(P^k) = -2(J^k)^T [Y - T(P^k)] \quad (8-3)$$

$J^k$ ، ماتریس حساسیت<sup>۲</sup> است که توسط رابطه زیر تعریف می شود:

$$J(P) = \left[ \frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T \quad (9-3)$$

بنابر این مولفه  $j$  ام گرادیان مسیر با رابطه صریح زیر قابل محاسبه است:

---

<sup>۱</sup> . Gradient Direction

<sup>۲</sup> . Sensitivity Matrix

$$[\nabla S(P^k)]_j = -2 \sum_{i=1}^I \frac{\partial T_i^k}{\partial P_j} [Y_i - T_i(P^k)] \quad j=1, \dots, N \quad (۱۰-۳)$$

روابط (۶-۳) و (۷-۳) برای مسائل خطی معادل یکدیگر می باشند، اما شواهد نشان می دهد که رابطه (۶-۳) برای مسائل غیر خطی همگرایی بهتری دارند.

اندازه گام جستجو  $\beta^k$  که در رابطه (۴-۳) ظاهر می شود با کمینه کردن تابع  $S(P^{k+1})$  نسبت به  $\beta^k$  تعیین می شود :

$$\min_{\beta^k} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k} [Y - T(P^{k+1})]^T [Y - T(P^{k+1})] \quad (۱۱-۳)$$

با جایگزین کردن  $P^{k+1}$  از رابطه (۴-۳) در رابطه (۱۱-۳) :

$$\min_{\beta^k} S(P^{k+1}) = \min_{\beta^k} [Y - T(P^k - \beta^k d^k)]^T [Y - T(P^k - \beta^k d^k)] \quad (۱۲-۳)$$

بردار دمای  $T(P^k - \beta^k d^k)$  را با بسط سری تیلور خطی کرده و سپس نسبت به  $\beta^k$  کمینه می کنیم:

$$\beta^k = \frac{\sum_{i=1}^I \left[ \left( \frac{\partial T_i}{\partial P^k} \right)^T d^k \right] [T_i(P^k) - Y_i]}{\sum_{i=1}^I \left[ \left( \frac{\partial T_i}{\partial P^k} \right)^T d^k \right]^2} \quad (۱۳-۳-الف)$$

که

$$\left( \frac{\partial T_i}{\partial P^k} \right)^T = \left[ \frac{\partial T_i}{\partial P_1^k}, \frac{\partial T_i}{\partial P_2^k}, \dots, \frac{\partial T_i}{\partial P_N^k} \right] \quad (۱۳-۳-ب)$$

توجه کنید که بردار معادله (۱۳-۳-ب) سطر  $i$ ام ماتریس حساسیت است. بنابراین ، رابطه (۱۳-۳-الف) به شکل ماتریسی بصورت زیر است:

$$\beta^k = \frac{[J^k d^k]^T [T(P^k) - Y]}{[J^k d^k]^T [J^k d^k]} \quad (۱۳-۳-ج)$$

برای توضیح بیشتر در مورد استخراج روابط (۱۳-۳-الف) و (۱۳-۳-ج) به پیوست مراجعه کنید.

بعد از محاسبه ماتریس حساسیت  $J^k$ ، گرادیان مسیر  $\nabla S(P^k)$ ، ضریب مزدوج  $\gamma^k$  و اندازه گام جستجو  $\beta^k$ ، فرآیند تکرار توسط رابطه (۳-۴) تا برقراری شرط توقف که بر اساس اصل اختلاف است، انجام می شود.

### ۳-۴- معیار توقف

فرایند تکرار داده شده توسط روابط (۳-۴) تا (۳-۷)، با اندازه گام جستجو  $\beta^k$ ، بدست آمده از رابطه (۳-۱۳) لزوماً روش گرادیان مزدوج پایداری را جهت کمینه کردن تابع هدف فراهم نمی کنند. زیرا دمای اندازه گیری شده ذاتاً شامل خطاهای تصادفی می باشد. بخاطر خصیصه بد وضع بودن مسائل معکوس، ممکن است در طول فرآیند کمینه کردن تابع هدف نوسانات بزرگی را در جواب ها مشاهده کنیم. به هر حال، با بکار بردن "اصل اختلاف"<sup>۱</sup> در تعیین معیار توقف، ممکن است روش گرادیان خوش وضع شود.

بر اساس "اصل اختلاف"، فرآیند تکرار وقتی متوقف می شود که شرط زیر برقرار باشد:

$$S(P^{k+1}) < \varepsilon \quad (۳-۱۴)$$

که مقدار تolerانس  $\varepsilon$  بگونه ای انتخاب می شود که منجر به حل پایدار گردد. در اینجا، وقتی باقیمانده بین مقادیر اندازه گیری شده و مقادیر تخمین زده شده هم مرتبه با بزرگی خطاهای اندازه گیری باشد، تکرار متوقف خواهد شد:

$$|Y(t_i) - T(x_{mean}, t_i)| \approx \sigma_i \quad (۳-۱۵)$$

که در رابطه فوق،  $\sigma_i$  انحراف استاندارد<sup>۲</sup> خطای اندازه گیری در زمان  $t_i$  است. برای انحراف استاندارد ثابت،  $\sigma_i = \sigma = \text{const}$ ، با قرار دادن رابطه (۳-۱۵) در رابطه (۳-۳) داریم:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^I \sigma_i^2 = I\sigma^2 \quad (۳-۱۶)$$

<sup>۱</sup> . Discrepancy Principle

<sup>۲</sup> . Standard Deviation

### ۳-۵- الگوریتم روش گرادیان مزدوج

دماهای اندازه گیری شده  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ ، در زمانهای  $i = 1, \dots, I$ ،  $t_i$  مفروض است.  $P^0$ ، حدس اولیه برای بردار مجهول  $P$  می باشد.  $k = 0$  قرار داده و سپس:

۱. حل مسئله مستقیم (۳-۱) با استفاده از  $P^k$  موجود و تعیین بردار دمای

$$T(P^k) = (T_1, T_2, \dots, T_I)$$

۲. بررسی صحت معیار توقف از رابطه (۳-۱۴) و ادامه در صورت عدم مصداق.

۳. محاسبه ماتریس حساسیت  $J^k$ ، از رابطه (۳-۹).

۴. محاسبه گرادیان مسیر  $\nabla S(P^k)$ ، از رابطه (۳-۸) با استفاده از  $J^k$ ،  $Y$  و  $T(P^k)$ . سپس

محاسبه ضریب مزدوج  $\gamma^k$  از رابطه (۳-۶) یا (۳-۷).

۵. محاسبه جهت شیب  $d^k$  با استفاده از رابطه (۳-۵).

۶. محاسبه گام جستجو  $\beta^k$  با استفاده از رابطه (۳-۱۳) و مقادیر  $J^k$ ،  $Y$  و  $T(P^k)$  و  $d^k$ .

محاسبه  $P^{k+1}$  با استفاده از رابطه (۳-۴).

۷. جایگزین کردن  $k+1$  به جای  $k$  و رفتن به گام اول.

## فصل چهارم

### تعیین ضریب هدایت حرارتی قطعه مدور به روش حل معکوس

در این فصل به توصیف یک مسئله فیزیکی و شبیه سازی ریاضی آن با استفاده از معادلات دیفرانسیل و در نهایت حل آن با یک روش عددی می پردازیم

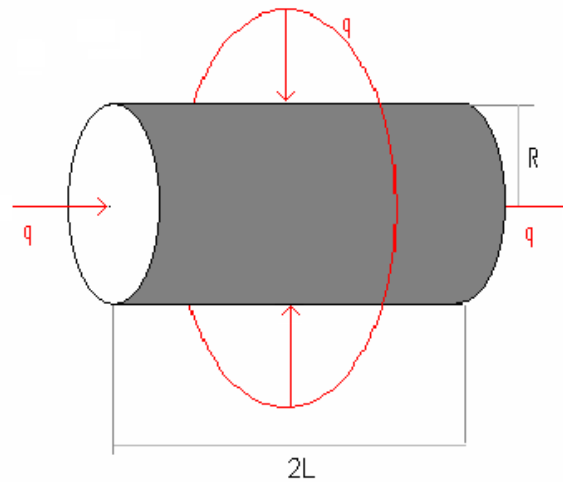
#### ۴-۱- مسئله مستقیم

از آنجاییکه حل مسئله مستقیم جزء لاینفک هر مسئله معکوس می باشد، لذا دقت این بخش بسیار حائز اهمیت است. دقت مسئله مستقیم خود به دو عامل وابسته است. یکی ایده آل سازی مسئله فیزیکی است که در نهایت منجر به یک معادله ریاضی قابل حل می شود، دوم روشی است که برای حل آن معادله مورد استفاده قرار می گیرد.

#### ۴-۱-۱- توصیف فیزیک مسئله

فرض کنید میله ای استوانه ای با طول  $2L$  و شعاع  $R$  و با دمای اولیه  $T_0$  طی یک عملیات حرارتی از لحظه  $t = 0$  در یک بازه زمانی محدود و با شار ثابت  $q$  حرارت داده می شود. هدف

مسئله مستقیم محاسبه توزیع دما در داخل میله و در هر لحظه می باشد. شکل (۱-۴) شماتیک هندسه و شرایط فیزیکی مسئله را بیان می کند.



شکل (۱-۴) شماتیک فیزیک مسئله

توصیف فیزیکی یک مسئله ، بیان یک رویداد با شرایط واقعی است. برای آنکه مسئله با زبان ریاضیات توصیف شود، نیاز به ساده سازی و فرضیات ایده آل سازی می باشد. اینکه دمای اولیه جسم بطور یکنواخت توزیع شده است و یا جسم با شار حرارتی ثابت حرارت داده می شود فرض هایی از این قبیل هستند.

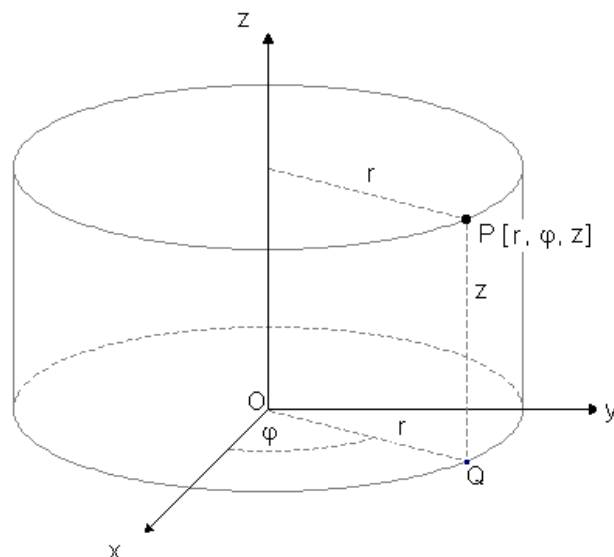
#### ۴-۱-۲- توصیف ریاضی مسئله

با توجه به توصیف فیزیکی مسئله می توان دریافت که با یک مسئله در زمینه انتقال حرارت مواجه هستیم. و از آنجائیکه قطعه یک میله استوانه ای است، دستگاه مختصات استوانه ای برای توصیف ریاضی بسیار مناسب می باشد.

صورت کلی معادله انتقال حرارت در دستگاه مختصات استوانه ای به شکل زیر است :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \left( kr \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۱-۴)$$

که در معادله فوق  $T$  دما،  $k$  ضریب هدایت حرارت،  $\rho$  چگالی جسم،  $c$  ظرفیت حرارتی،  $\dot{q}$  نرخ تولید یا جذب حرارت،  $t$  پارامتر مربوط به بعد زمان و  $r, \theta, z$  پارامترهای مربوط به بعد مکان در دستگاه استوانه ای و مطابق شکل (۱-۴) می باشند.



شکل (۲-۴) مختصات استوانه ای

معادله (۱-۴) با اعمال فرض های ایده آل سازی به شکل ساده تری در خواهد آمد. فرض های مسئله از این قرار است :

تولید یا جذب حرارت در جسم وجود ندارد

پارامترهای فیزیکی  $k, \rho, c$  ثابت و در کل جسم یکنواخت می باشند.

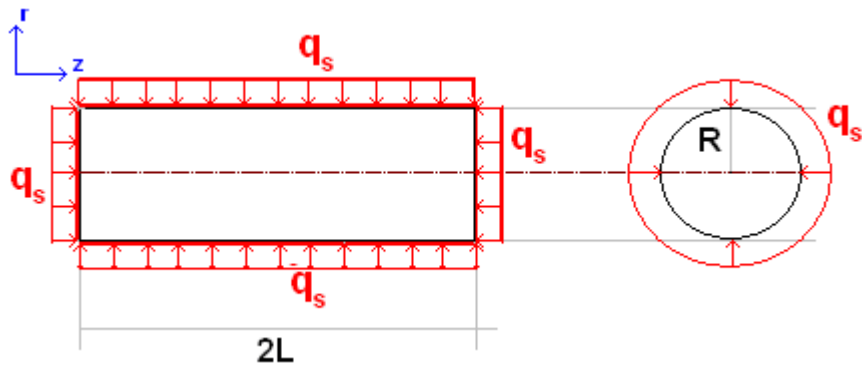
هندسه و شرایط مرزی جسم دارای تقارن محوری است

با اعمال فرضیات فوق معادله کلی، به معادله زیر تبدیل می شود:

$$k \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۲-۴)$$

معادله (۲-۴) یک معادله مرتبه دو و غیر دائم است که برای حل آن احتیاج به دو شرط مرزی در راستای شعاعی و دو شرط مرزی در راستای طولی و یک شرط اولیه می باشد.

به علت تقارن محوری، انتقال حرارت تنها در روی صفحه ای که از محور استوانه می گذرد بررسی می شود. نمای دو بعدی مسئله در شکل (۳-۴) نشان داده شده است.



شکل (۳-۴) نمای دو بعدی مسئله همراه با شرایط مرزی

شرایط مرزی و شرط اولیه بصورت زیر است:

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=0} = -q_s \quad (\bar{A}-3-4)$$

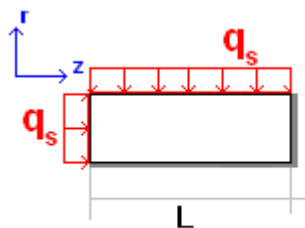
$$k \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=L} = q_s \quad (\text{ب}-3-4)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=0} = 0 \quad (\text{ج}-3-4)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \bigg|_{r=R} = q_s \quad (\text{د}-3-4)$$

$$T(r, z, 0) = T_0 \quad (4-4)$$

با توجه به شکل (۳-۴) می توان دریافت که نسبت به محور  $r$  و  $z$  تقارنی وجود دارد. بنابراین می توان فضای محاسباتی را محدودتر کرد:



شکل (۴-۴) فضای محاسباتی محدود شده

به این ترتیب شرایط مرزی (۳-۴) به صورت (۵-۴) اصلاح می شوند:

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \bigg|_{z=0} = -q_s \quad (\bar{A}-5-4)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=L} = 0 \quad (4-5-ب)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0 \quad (4-5-ج)$$

$$k \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R} = q_s \quad (4-5-د)$$

#### ۴-۱-۳- آنالیز ابعادی و بی بعد سازی

در جدول (۱-۴) پارامتر های فیزیکی و واحد آنها آورده شده است:

جدول (۱-۴) پارامتر های مسئله در واحد SI

| واحد              | پارامتر |
|-------------------|---------|
| $K$               | $T$     |
| $m$               | $r, z$  |
| $\frac{Kg}{m^3}$  | $\rho$  |
| $\frac{KJ}{Kg.K}$ | $c$     |
| $\frac{W}{m.K}$   | $k$     |
| $s$               | $t$     |
| $\frac{W}{m^2}$   | $q_s$   |

در جدول فوق  $K$  بیانگر واحد کلونین،  $m$  متر،  $Kg$  کیلوگرم،  $KJ$  کیلوژول،  $W$  وات،  $s$  ثانیه می باشد.

با استفاده از آنالیز ابعادی پارامترهای اصلی جدول (۴-۱) بصورت زیر بی بعد می شوند :

جدول (۴-۲) پارامترهای بی بعد

| پارامتر اصلی | پارامتر بی بعد                          |
|--------------|-----------------------------------------|
| $T$          | $T^* = \frac{T - T_0}{q_s L / k_{ref}}$ |
| $r$          | $r^* = r / L$                           |
| $z$          | $z^* = z / L$                           |
| $k$          | $k^* = k / k_{ref}$                     |
| $t$          | $t^* = k_{ref} t / \rho c L^2$          |

با قرار دادن پارامترهای بی بعد در معادله (۴-۲) و (۴-۵) به معادلات زیر می رسیم:

$$k^* \frac{1}{r^*} \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \right) + k^* \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (۴-۶)$$

$$k^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \bigg|_{z^*=0} = -1 \quad (\bar{۴-۷-۱})$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial z^*} \bigg|_{z^*=1} = 0 \quad (۴-۷-ب)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} \bigg|_{r^*=0} = 0 \quad (۴-۷-ج)$$

$$k^* \frac{\partial T^*}{\partial r^*} \bigg|_{r^*=R/L} = 1 \quad (۴-۷-د)$$

$$T^*(r^*, z^*, 0) = 0 \quad (۴-۸)$$

#### ۴-۱-۴- مجزاسازی

برای حل هر مسئله شرط مرزی به روش عددی، احتیاج به یک روش مجزاسازی است تا با استفاده از آن معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی آن به یک معادله جبری تبدیل شود. سپس با مشبندی کردن ناحیه مجهول، فضای پیوسته مجهول تبدیل به یک فضای گسسته می شود. با بازنویسی معادله دیفرانسیل مجزا شده به ازای هر مجهول، به یک دستگاه معادلات جبری می رسیم. که با حل آن تابع دیفرانسیل در ناحیه حل بصورت گسسته بدست می آید.

در اینجا از روش تفاضل محدود مرتبه دو برای گسسته سازی معادله دیفرانسیل استفاده می شود. عبارات  $\frac{\partial T}{\partial t}$ ،  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ ،  $\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$ ،  $\frac{\partial T}{\partial r}$  را که در معادله دیفرانسیل ظاهر می شوند با روابط زیر جایگزین می کنیم.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{T_{j+1} - 2T_j + T_{j-1}}{\Delta z^2} \quad (۹-۴)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{\Delta r^2} \quad (۱۰-۴)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta r} \quad (۱۱-۴)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T^{k+1} - T^k}{\Delta t} \quad (۱۲-۴)$$

لازم به ذکر است که در روابط فوق مشتق مکانی با تفاضل مرکزی مرتبه دو،  $O(h^2)$ ، و مشتق زمانی با تفاضل پیشروی مرتبه دو،  $O(h)$ ، مجزا می شوند.

با محاسبه تمامی مشتقات مکانی در زمان  $k+1$  با استفاده از روابط (۹-۴) تا (۱۲-۴) و جایگذاری آنها در معادله (۶-۴) و مرتب سازی به رابطه زیر می رسیم:

$$AT_{i+1,j}^{k+1} + BT_{i-1,j}^{k+1} + CT_{i,j+1}^{k+1} + DT_{i,j-1}^{k+1} + ET_{i,j}^{k+1} = FT_{i,j}^k \quad (۱۳-۴)$$

$$A = \frac{k}{2r_i \Delta r} + \frac{k}{\Delta r^2} \quad (۱۴-۴)$$

$$B = \frac{k}{\Delta r^2} - \frac{k}{2r_i \Delta r} \quad (۱۵-۴)$$

$$C = \frac{k}{\Delta z^2} \quad (۱۶-۴)$$

$$D = \frac{k}{\Delta z^2} \quad (۱۷-۴)$$

$$E = -\left(\frac{2k}{\Delta r^2} + \frac{2k}{\Delta z^2} + \frac{1}{\Delta t}\right) \quad (۱۸-۴)$$

$$F = -\frac{1}{\Delta t} \quad (۱۹-۴)$$

برای مجزا سازی شرایط مرزی باید مرتبه عبارات  $\frac{\partial T}{\partial r}$  و  $\frac{\partial T}{\partial z}$  از مرتبه دو،  $O(h^2)$ ، باشد. زیرا تمامی معادلات و جملات آنها باید هم مرتبه باشند. از آنجاییکه در روی مرزها به علت عدم تقارن در اطلاعات گره ها، نمی توان از تفاضل مرکزی استفاده کرد، باید از تفاضل پیشرو و پسروی مرتبه دو استفاده کرد. تعریف اپراتور  $D$  بر اساس اپراتور تفاضل پیشرو،  $\Delta$ ، و اپراتور تفاضل پسرو،  $\nabla$ ، بصورت زیر است :

$$D = \frac{1}{h} \left[ \Delta - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{\Delta^3}{3} - \dots \right] \quad (۲۰-۴)$$

$$D = \frac{1}{h} \left[ \nabla + \frac{\nabla^2}{2} + \frac{\nabla^3}{3} + \dots \right] \quad (۲۱-۴)$$

با احتساب دو جمله از بسط فوق خطای مرتبه دو بدست می آید. با اعمال این اپراتور بر تابع  $T$  :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{2h_r} [T_{i+1} - 3T_i - T_{i+2}] \quad (۲۲-۴)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{2h_r} [3T_i - 4T_{i-1} - T_{i-2}] \quad (۲۳-۴)$$

رابطه (۲۲-۴) تفاضل پیشرو و (۲۳-۴) تفاضل پسرو می باشد. بطور مشابه برای  $\frac{\partial T}{\partial z}$  :

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{2\Delta z} [T_{j+1} - 3T_j - T_{j+2}] \quad (۲۴-۴)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{2\Delta r} [3T_j - 4T_{j-1} - T_{j-2}] \quad (۲۵-۴)$$

با قرار دادن روابط (۲۲-۴) تا (۲۵-۴) در عبارت (۷-۴) :

$$T_{i,0} = \frac{4}{3}T_{i,1} - \frac{1}{3}T_{i+2} + \frac{2q\Delta z}{3k} \quad (۲۶-۴ \text{ الف})$$

$$T_{i,N} = \frac{4}{3}T_{i,N-1} - \frac{1}{3}T_{i,N-2} \quad (۲۶-۴ \text{ ب})$$

$$T_{0,j} = \frac{4}{3}T_{1,j} - \frac{1}{3}T_{2,j} \quad (۲۶-۴ \text{ ج})$$

$$T_{M,j} = \frac{4}{3}T_{M-1,j} - \frac{1}{3}T_{M-2,j} + \frac{2q\Delta r}{3k} \quad (۲۶-۴ \text{ د})$$

فرم رابطه (۱۳-۴) بصورت ضمنی می باشد. بعد از شبکه بندی ناحیه حل و نوشتن رابطه (۱۳-۴) برای هر گره یک دستگاه با ماتریس ضرائب پنج قطری به دست می آید. با حل دستگاه توزیع تابع  $T$  بصورت گسسته و در نقاط گره بدست می آید.

#### ۴-۱-۵- کد نویسی و اعتبار آن

در این قسمت با کمک یک تابع ریاضی که در معادله انتقال حرارت دو بعدی، در دستگاه مختصات استوانه ای و با فرض همگن بودن نمونه صدق کند و همچنین کلیه شرایط اولیه و مرزی را ارضا نماید به شبیه سازی مسئله می پردازیم.

همانطور که ذکر شد معادله دیفرانسیل حاکم بر مساله ، شرایط مرزی و شرایط اولیه مطابق رابطه (۲-۴) و (۳-۴) است. بنابر این نیازمند تابع ریاضی هستیم که این معادلات را ارضا نماید. برای این منظور تابع زیر را در نظر می گیریم:

$$T(z,r,t) = \beta r^2 + 4\beta t + e^{-t} \sin z + C \quad (۲۷-۴)$$

با فرض  $k=1, \rho=1, c=1$  , معادله (۲۷-۴) معادله (۲-۴) را ارضا می کند. با اعمال شرایط مرزی

بر معادله (۲۷-۴) داریم:

$$L = \pi / 2 \quad (۲۸-۴)$$

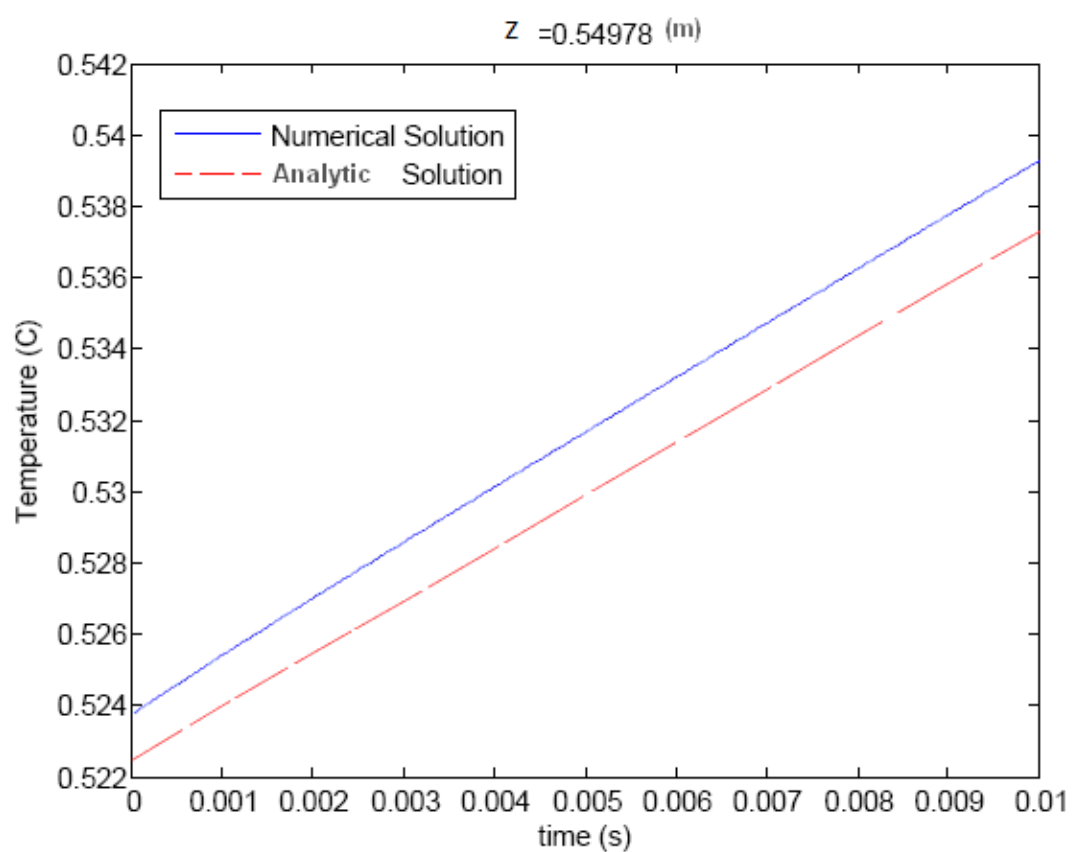
$$q_z = -e^{-t} \quad (۲۹-۴)$$

$$\beta = \frac{q}{2kR} \quad (۳۰-۴)$$

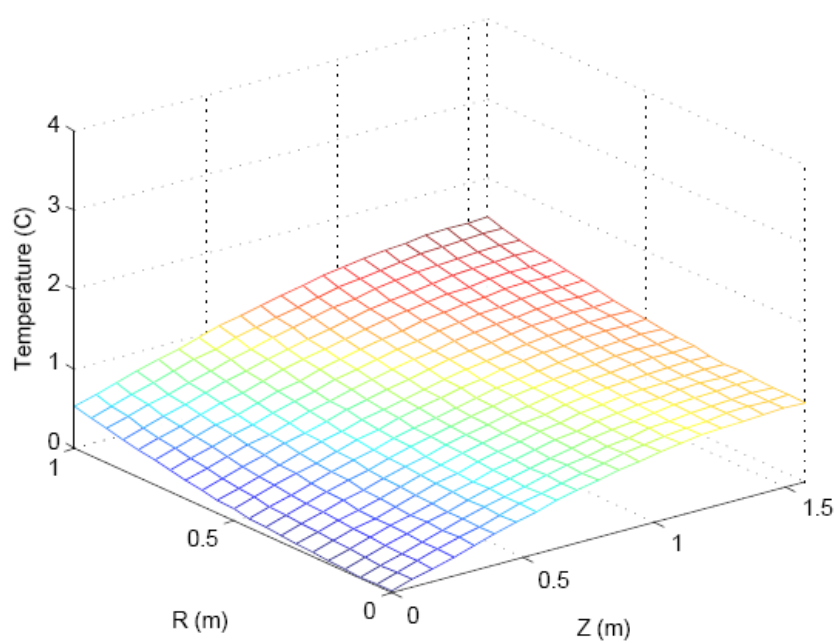
$C$  و  $\beta$  مقادیر ثابت هستند ، بطوریکه با مقدار دهی به ثابت  $C$  در واقع دمای گره ها در لحظه شروع و با مقدار دهی مثبت یا منفی به ثابت  $\beta$ ، شاهد افزایش یا کاهش دما با گذشت زمان خواهیم بود.

کد نویسی برای حل معادله مجزا شده با استفاده از نرم افزار **MATLAB** انجام شد که متن کد در پیوست آورده شده است.

شکل (۵-۴) نمودار مقایسه ای بین حل عددی و حل تحلیلی را نشان می دهد. خطای حل عددی در این حالت 0.3226 درصد محاسبه شده است. این گراف اعتبار خوبی برای حل عددی می باشد. شکل (۶-۴) توزیع دمای بدست آمده از حل عددی را در دامنه حل برای تمامی نقاط نشان می دهد.



شکل (۴-۵) مقایسه حل عددی و حل تحلیلی



شکل (۴-۶) نمایش توزیع دمای بدست آمده از حل عددی در زمان  $t = 0.01 \text{ sec}$

## ۴-۲- مسئله معکوس

هدف مسئله معکوس محاسبه تخمین ضریب هدایت حرارتی مجهول جسم با استفاده از دیگر پارامترهای معلوم مسئله مستقیم، با استفاده از روش گرادیان مزدوج که در فصل سوم توضیح داده شد.

فرض می کنیم که برای تخمین بردار مجهول  $P^T = [k]$  دماهای اندازه گیری شده توسط یک ترموکوپل که در داخل جسم و روی محور میله قرار دارد موجود می باشد. از فصل سوم مشخص است که تعداد دماهای اندازه گیری شده در هر لحظه ( $I$ ) باید بزرگتر یا مساوی با تعداد پارامترهای مجهول ( $N$ ) باشد یعنی  $I \geq N$ . از آنجاییکه تنها پارامتر مجهول مسئله  $k$  می باشد بنابراین  $N = 1$  خواهد بود و پارامترهای مسئله بصورت زیر تعریف می شوند :

$P = [k]$  بردار مجهول،  $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$  بردار دماهای اندازه گیری شده،  $T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$  بردار دماهای محاسبه شده.

تخمین پارامتر مجهول با کمینه کردن نرم حداقل مربعات حل انجام می شود. برای این منظور روش های گوناگونی در محاسبات عددی وجود دارد که هر کدام از آنها مزیتها و معایب خاص خود را دارند که با شرایط مسئله متغیر هستند. همانطور که در فصل دوم ذکر شد، روش گرادیان مزدوج جزو روش های تنظیم تکراری است و دارای همگرایی سریع تر می باشد به همین خاطر در اینجا از آن استفاده شده است.

با قرار دادن بردار  $T, Y$  در رابطه (۳-۳) داریم :

$$S(P) = \sum_{i=1}^{I=2} (Y_i - T_i)^2 \quad (۳-۴)$$

روند تکرار در روش گرادیان مزدوج برای کمینه کردن  $S(P)$  طبق رابطه (۳-۴) است .

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k \quad (۴-۳)$$

در رابطه فوق  $\beta^k$  ، اندازه گام جستجو و  $d^k$  ، جهت شیب از روابط (۳-۱۳) و (۳-۵) محاسبه می شوند.

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (۳-۵)$$

برای محاسبه ضریب  $\gamma$  طبق روابط (۳-۷) و (۳-۸) احتیاج به محاسبه ماتریس حساسیت می باشد. ماتریس حساسیت طبق رابطه (۳-۹) بصورت زیر تعریف می شود:

$$J^T(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial P_1} & \frac{\partial T_2}{\partial P_1} \end{bmatrix} \quad (۳۲-۴)$$

از آنجائیکه بردار مجهولات یک بعدی و  $P = [k]$  می باشد :

$$J^T(k) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial k} & \frac{\partial T_2}{\partial k} \end{bmatrix} \quad (۳۳-۴)$$

با قرار دادن رابطه (۴-۲۳) در رابطه (۳-۸) داریم :

$$\nabla S(P^k) = -2 \left( \frac{\partial T_1}{\partial k} [y_1 - T_1] + \frac{\partial T_2}{\partial k} [y_2 - T_2] \right) \quad (۳۴-۳)$$

با قرار دادن رابطه (۳-۲۴) در رابطه (۳-۷) :

$$\gamma^k = \frac{\left( \frac{\partial T_1^k}{\partial k} [y_1 - T_1(P^k)] + \frac{\partial T_2^k}{\partial k} [y_2 - T_2(P^k)] \right)^2}{\left( \frac{\partial T_1^{k-1}}{\partial k} [y_1 - T_1(P^{k-1})] + \frac{\partial T_2^{k-1}}{\partial k} [y_2 - T_2(P^{k-1})] \right)^2} \quad \begin{matrix} k=1,2,\dots \\ \gamma^0 = 0 \end{matrix} \quad (۳۵-۳)$$

با قرار دادن بردار  $T, Y$  در رابطه (۳-۱۳ الف) داریم :

$$\beta^k = \frac{\left[ \left( \frac{\partial T_1}{\partial k} \right) d^k \right] [T_1(P^k) - Y_1] + \left[ \left( \frac{\partial T_2}{\partial k} \right) d^k \right] [T_2(P^k) - Y_2]}{\left[ \left( \frac{\partial T_1}{\partial k} \right) d^k \right]^2 + \left[ \left( \frac{\partial T_2}{\partial k} \right) d^k \right]^2} \quad (۳۶-۳)$$

بعد از محاسبه روابط فوق، فرآیند تکرار توسط رابطه (۳-۴) تا برقراری شرط توقف، انجام می شود.

## فصل پنجم

### حل مسئله نمونه و بررسی نتایج

در این فصل با استفاده از الگوریتم ارائه شده در فصل قبل، حل یک مسئله با استفاده از داده های واقعی و بررسی نتایج آن ارائه شده است.

#### ۵-۱- فیزیک مسئله

قطعه ای استوانه ای با طول  $2L = 6cm$  و شعاع  $R = 2cm$  و مشخصات ترموفیزیکی

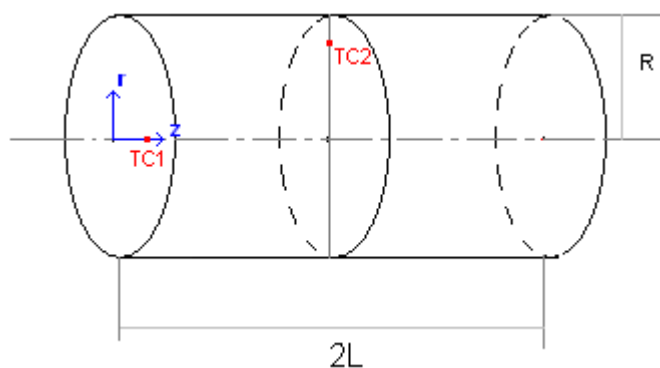
$C = 449 \frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$  ،  $\rho = 7870 \frac{kg}{m^3}$  ،  $k = 80.2 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}$  و با دمای اولیه  $T_0 = 20^\circ C$  طی عملیات

حرارتی از لحظه  $t = 0$  در یک بازه زمانی  $[0, t_f = 30]$  ثانیه و با شار ثابت  $q = 4 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$  گرم

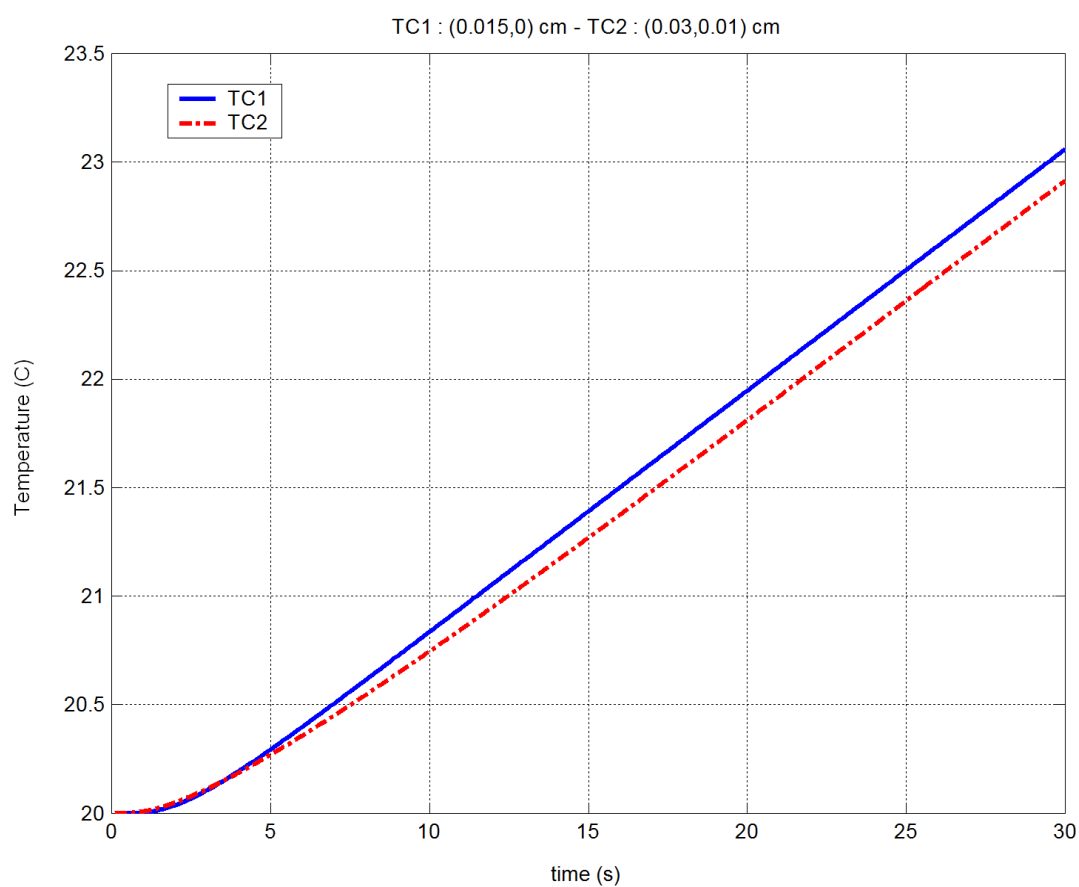
می شود. دو ترموکوپل به نام  $TC1$  و  $TC2$  مطابق شکل (۵-۱) به ترتیب در مختصات  $(1.5, 0)$  و  $(3, 1)$  قرار دارند.

داده های دقیق،  $Y_{exact}$ ، با استفاده از حل مسئله مستقیم و به روش تفاضل محدود ضمنی که در فصل چهار توضیح داده شد بر مبنای  $\Delta z = \Delta r = 1mm$  و  $\Delta t = 0.1$  محاسبه می شوند.

شکل (۵-۲) تغییرات دما با زمان را برای دو ترموکوپل نشان می دهد.



شکل (۱-۵) هندسه قطعه و مختصات ترموکوپل ها



شکل (۲-۵) تغییرات دما در نقاط ترموکوپل از حل دقیق

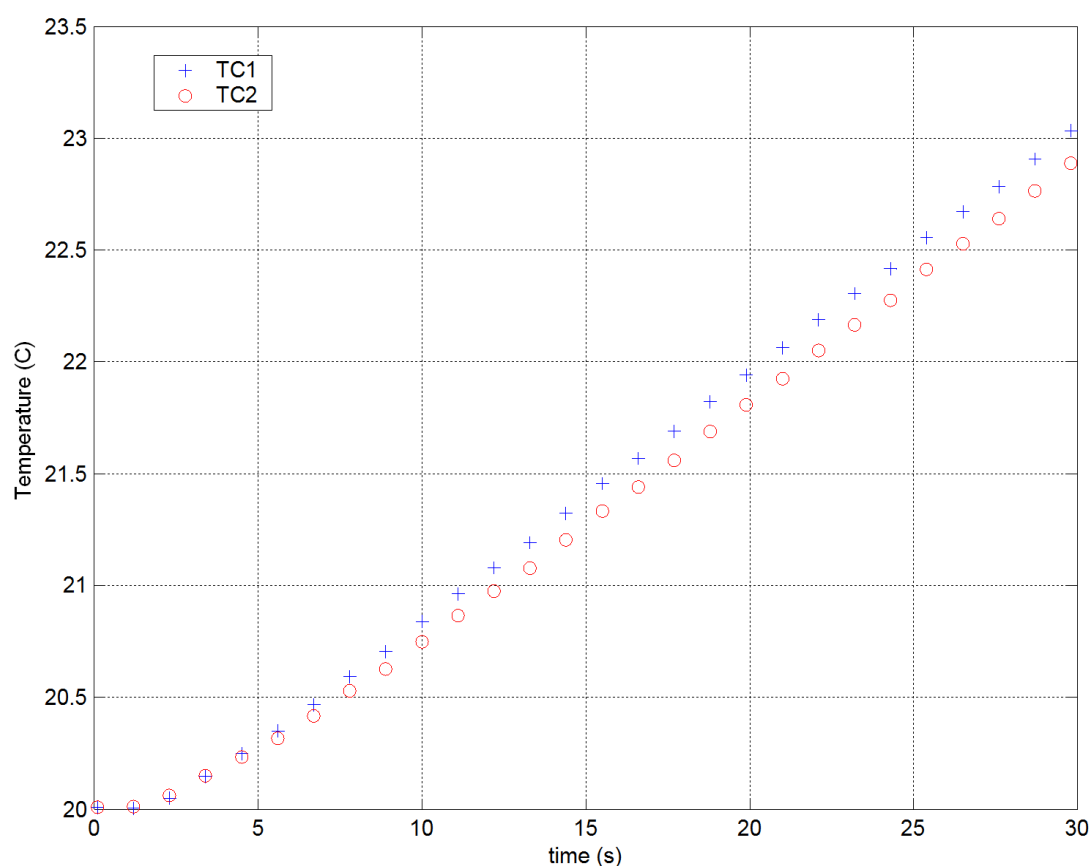
## ۲-۵- شبیه سازی ترموکوپل

دمای ترموکوپل با اضافه کردن ترم خطا،  $\omega\sigma$ ، به مقدار دقیق،  $Y_{exact}$ ، شبیه سازی می شود.

$$Y_{measured} = Y_{exact} + \omega\sigma \quad (۱-۵)$$

که  $\sigma$ ، انحراف استاندارد و  $\omega$  یک عدد تصادفی است. برای توزیع خطای نرمال،  $\omega$  در بازه  $-2.576 < \omega < 2.576$  قرار دارد. برای ایجاد اعداد تصادفی می توان از رویه *DRNNOR* از توابع کتابخانه ای *IMSL* استفاده کرد.

شکل (۳-۵) دما شبیه سازی شده ترموکوپل با روش فوق را برای بازه زمانی [0,30] ثانیه نمایش می دهد. ما از این مقادیر بعنوان داده های اندازه گیری شده استفاده خواهیم کرد.



شکل (۳-۵) دمای شبیه سازی شده در نقاط ترموکوپل

### ۳-۵- بررسی نتایج

داده های شبیه سازی شده در بخش قبل به منزله دماهای آزمایشگاهی خوانده شده توسط ترموکوپل ها می باشد. بنابراین در هر لحظه یک مقدار برای بردار  $Y$  وجود خواهد داشت. با استفاده از این مقدار باید مقدار ضریب هدایت حرارتی در هر لحظه از زمان تخمین زده شود.

جدول (۱-۵) خروجی برنامه کامپیوتری را برای تخمین ضریب هدایت حرارت در زمان

$t_f = 30 \text{ sec}$  و برای حدس اولیه کوچکتر و بزرگتر از مقدار دقیق نشان می دهد.

برنامه برای چهار حالت متفاوت اجرا شد. در حالت  $A$  و  $B$ ، مقدار  $\sigma = 0$  و در حالت  $C$  و  $D$

مقدار  $\sigma = 1$  است.  $\sigma = 0$  به منزله عدم وجود خطا در مقادیر خوانده شده از ترموکوپل می باشد

ولی در حالت  $\sigma = 1$  با توجه به رابطه (۱-۵) خطایی به اندازه  $w$  به مقادیر دقیق وارد می شود.

حالت  $A$  برای حدس اولیه کوچکتر از مقدار دقیق و حالت  $B$  برای حدس اولیه بزرگتر از مقدار

دقیق آورده شده است.

جدول (۱-۵) خروجی برنامه روش گرادیان مزدوج برای دو ترموکوپل (مقدار دقیق  $k = 80.2$ )

|   | Initial Guess | $\sigma$ | Iteration# | S         | k       |
|---|---------------|----------|------------|-----------|---------|
| A | K=20          | 0        | 1          | 16.6737   | 20      |
|   |               |          | 5          | 0.7616    | 10.1073 |
|   |               |          | 10         | 2.3128    | 52.3656 |
|   |               |          | 15         | 1.18e-5   | 80.1256 |
|   |               |          | 20         | 1.27e-5   | 80.279  |
|   |               |          | 25         | 1.59e-8   | 80.198  |
|   |               |          | 31         | 1.26e-9   | 80.2    |
| B | K=100         | 0        | 1          | 0.6558    | 100     |
|   |               |          | 5          | 0.07705   | 74.33   |
|   |               |          | 10         | 0.0325    | 84.2376 |
|   |               |          | 15         | 1.601e-5  | 86.1133 |
|   |               |          | 20         | 2.97e-6   | 80.1631 |
|   |               |          | 25         | 1.2526e-8 | 80.1983 |
|   |               |          | 27         | 1.21e-9   | 80.2001 |
| C | K=20          | 1        | 1          | 16.7322   | 20      |
|   |               |          | 5          | 13.0254   | 231.574 |
|   |               |          | 10         | 0.01511   | 83.052  |
|   |               |          | 15         | 0.00246   | 81.3468 |
|   |               |          | 20         | 0.00050   | 80.198  |
|   |               |          | 25         | 0.00085   | 80.34   |

|   |       |   |    |            |         |
|---|-------|---|----|------------|---------|
|   |       |   | 30 | 0.00044961 | 80.3563 |
|   |       |   | 32 | 0.0004496  | 80.3569 |
| D | K=100 | 1 | 1  | 0.6448     | 100     |
|   |       |   | 5  | 0.07459    | 74.5959 |
|   |       |   | 10 | 0.03279    | 84.3904 |
|   |       |   | 15 | 0.0004538  | 80.3119 |
|   |       |   | 20 | 0.0004521  | 80.3915 |
|   |       |   | 25 | 0.00044961 | 80.3567 |
|   |       |   | 30 | 0.0004496  | 80.3569 |

در ادامه همین مسئله برای یک ترموکوپل بررسی شد. در جدول (۲-۵) نتایج برای حدس اولیه  $k_0 = 100$  و به ازای  $\sigma = 0$  و  $\sigma = 1$  آورده شده است. مشاهده می شود با کاهش تعداد ترموکوپل ها، تعداد تکرار و درصد خطا افزایش می یابد.

جدول (۲-۵) خروجی برنامه روش گرادیان مزدوج برای یک ترموکوپل (مقدار دقیق  $k = 80.2$ )

|   | Initial Guess | $\sigma$ | Iteration# | S          | k       |
|---|---------------|----------|------------|------------|---------|
| B | K=100         | 0        | 1          | 0.3299     | 100     |
|   |               |          | 5          | 0.065142   | 72.6823 |
|   |               |          | 10         | 0.039598   | 86.5682 |
|   |               |          | 15         | 8.7793e-5  | 80.4904 |
|   |               |          | 20         | 1.4329e-6  | 80.2379 |
|   |               |          | 30         | 1.657e-8   | 80.205  |
|   |               |          | 33         | 1.3859e-9  | 80.2002 |
| D | K=100         | 1        | 1          | 0.30733    | 100     |
|   |               |          | 5          | 0.054768   | 73.8506 |
|   |               |          | 10         | 0.038228   | 87.1188 |
|   |               |          | 15         | 0.00024901 | 81.3114 |
|   |               |          | 20         | 4.6276e-8  | 80.8132 |
|   |               |          | 25         | 9.624e-9   | 80.8229 |
|   |               |          | 30         | 4.5013e-11 | 80.8201 |
|   |               |          | 34         | 1.0298e-12 | 80.8199 |

برای بررسی اثر تعدا ترموکوپل، نتایج برای تعداد سه و پنج ترموکوپل بدست آمد. طبق جدول (۳-۵) برای  $\sigma = 1$  مشاهده می شود که بر خلاف انتظار افزایش ترموکوپل منجر به افزایش خطا در جواب خواهد شد.

جدول (۳-۵) مقایسه مقادیر تخمینی نسبت به تعداد ترموکوپل (مقدار دقیق  $k = 80.2$ )

| تعداد ترموکوپل | k       |
|----------------|---------|
| ۱              | 80.8199 |
| ۲              | 80.3569 |
| ۳              | 80.4041 |
| ۵              | 80.4437 |

#### ۴-۵- نتیجه گیری و پیشنهادات

با توجه به داده ها در می یابیم که حدس اولیه بزرگتر همگرایی را سریع می کند ولی حدس کوچکتر همگرایی دقیق تری دارد. از نتایج مشاهده می شود که برای  $\sigma = 0$ ، درصد خطا تقریباً برابر صفر است. این بدین معنی است که اگر ترموکوپل ها هیچ خطایی در اندازه گیری نداشته باشند، مقدار تخمینی برابر با مقدار دقیق خواهد بود. اما برای  $\sigma = 1$  مقدار خطا برابر 0.2 درصد است.

تعداد ترموکوپل ها همواره باید بزرگتر یا مساوی با تعداد مجهولات مسئله باشد. بر خلاف انتظار افزایش تعداد ترموکوپل ها منجر به تخمین دقیق تر نخواهد شد. برای  $\sigma = 0$ ، افزایش تعداد ترموکوپل در دقت مسئله تاثیر قابل توجهی ندارد ولی همگرایی را تسریع خواهد کرد. برای  $\sigma = 1$ ، افزایش تعداد ترموکوپل دقت را کاهش می دهد زیرا با این کار خطای بیشتری وارد محاسبات می شود.

مسئله ای که در این پایان نامه بررسی شد محدود به یک شکل هندسی و شرایط مرزی خاص بود. می توان همین مسئله را برای مواد مختلف با خواص و رفتار متفاوت بررسی کرد. تخمین ضریب پخش ، چگالی و ظرفیت گرمایی جزو مسائلی هستند که می توانند برای یک شرایط حرارتی خاص مورد بررسی قرار گیرند.

## مراجع

- (1) OZISIK M. , ORLANDE H. R. B., Inverse Heat Transfer , Taylor & Francis (2000) .
- (2) Beck J. V, Blackwell B., HAJI – Sheikh , Comparison Of Some Inverse Heat Conduction Methods Using Experimental Data , International Journal Of Heat and Mass Transfer , Vol. 39, No . 17, 3649 – 3657 (1996)
- (3) Beck J. V., LIKOUHI B. , Clair St., Inverse Heat Conduction : III – Posed problems , Wiley Inverse , New York (1985).
- (4) Alifanov, O. M. , Inverse Heat Transfer Problems , Springer – Verlag , New York ( 1994 ) .
- (5) Kurpisz K., Nowak A.J., Inverse Thermal Problems , Computatinal Mechanics Publication , USA (1995) .
- (6) Kozdba, L. A. Krukovsky, P. G., Methods for Solving Inverse Heat Transfer problems , Naukova Dumka , Kiev 1982 ( in Russian ) .
- (7) Sawaf, B. and Ozisik, M. N. , "Determining The Constant Thermal Conductivities Of Orthotropic Materials by Inverse Analysis", Int. Com. Heat and Mass Transfer,22,201-211,1995

## پیوست ۱ : کد کامپیوتری با MATLAB

```
%1. Conjugate Gradient Method with Fletcher-Reeves (or Polak-Ribiere)
% to find a vector x that gives a MINIMUM of a function (a scalar).
%2. Ideas taken from J.R. Shewchuk and Numerical Recipes.

%put initial guess here (x is an n-dimensional vector).
%x=[-2 ; -3];
clc
clear
x=[100];

[F] = func(x);
[F_prime] = dfunc(x);

%From here in this m-file, I usually follow the notations in the 'pseudocode' of
B4
%in Shewchuk's note.

r=-1.*F_prime;
d=r;
%g is for use in Polak-Ribiere
g=r;
delta_new=r'*r;
delta_0=delta_new;
fp = F;
%ftol is a convergence tolerance
ftol=1.e-7;
ITERMAX = 10000;
%Don't worry too much about this
EPS=1.e-10;

for iter = 1 : ITERMAX
%disp(strcat('cg-',num2str(x)))
%Doing the line search here. First bracket a minimum, then use Golden section
to find it.
%Not using Newton-Raphson as in Shewchuk. So you don't need the second
derivative.
[ax,bx,cx,fa,fb,fc] = func_mnbrak(0,1,x,d);
[xt,golden] = func_golden(ax,bx,cx,x,d);
%To recover vector x, which is along d at xt away from initial x.
x = x + xt.*d;
%The function value at x is golden as returned by func_golden.
F = golden;
```

```

[F_prime] = dfunc(x);

r = -1.*F_prime;
delta_old = delta_new;
%This is Fletcher-Reeves
delta_new = r'*r;
%This is Polak-Ribiere
% delta_new = (F_prime+g)'*F_prime;
beta = delta_new/delta_old;
d = r + beta * d ;
g = r;
if r'*d <= 0
    d=r;
end
%this convergence criterion is taken from NR.
if 2.*abs(F-fp) < ftol.*(abs(F)+abs(fp)+EPS)
    iter
    x
    F
    break;
end
fp = F;

end

```

**func.m**

```

function [f_out] = func(x)
%give your own function here. it is a scalar output

%example function f_out = cos(x(1)).*cos(x(2));

%another example function cos x(1)cos x(2)exp(-sqrt(x(1)^2+x(2)^2)/4)

%f_out = cos(x(1)).*cos(x(2)).*exp(-(x(1).^2+x(2).^2)^0.5/4);
I=3;
k=x;
%Y=[99.3982;98.4812;97.3970];
%Y=[25.3231;25.2874];
%Y=[25.3031;25.2974];
%Y=[25.3231];
Y=[25.3031;25.2974;25.5268];
%Y=[25.3031;25.2974;25.5168;25.3933;25.5108];
T=fun(k);
T=T';
S=(Y-T)'*(Y-T);

```

```
f_out = S;
```

```
%here I try to maximise the function  
%f_out = -1.*f_out;  
disp(strcat(num2str(S),'|',num2str(x)))
```

**dfunc.m**

```
function [f_prime_out] = dfunc(x)  
% %give your own derivative here. it is a vector output in  
% % f_prime_out=(del/del(x1) del/del(x2) ... etc)'  
%  
% %f_prime_out(1) = -sin(x(1)).*cos(x(2));  
% %f_prime_out(2) = -cos(x(1)).*sin(x(2));  
%  
% expf = exp(-((x(1)^2+x(2)^2)^0.5)/4);  
% ss = -((x(1)^2+x(2)^2)^0.5)/4;  
%  
% %see func.m for function definition  
% %del func/del x(1)  
% f_prime_out(1) = cos(x(2)).*(-sin(x(1)).*expf-cos(x(1)).*expf.*ss.*x(1));  
% %del func/del x(2)  
% f_prime_out(2) = cos(x(1)).*(-sin(x(2)).*expf-cos(x(2)).*expf.*ss.*x(2));  
%  
% %here I tried to maximise the function  
% f_prime_out = -1.*f_prime_out';  
k=x;  
e=1e-5;  
%Y=[99.3982;98.4812;97.3970];  
%Y=[25.3231;25.2874];  
%Y=[25.3031;25.2974];  
%Y=[25.3231];  
%Y=[25.3231;25.2874;25.5368];  
Y=[25.3031;25.2974;25.5268];  
%Y=[25.3031;25.2974;25.5168;25.3933;25.5108];  
J=[0;0;0];  
T=fun(k);  
J=(fun(k+e)-fun(k-e))./(2*e);  
J=J';  
T=T';  
DS=-2*J'*(Y-T);
```

```
f_prime_out(1)=DS;
```

**func\_mnbrak.m**

```
function [ax,bx,cx,fa,fb,fc] = func_mnbrak(ax,bx,x_in,d_in)
```

```
%1. Uses a user-defined func.m
```

%2. To bracket a minimum from initial guess of ax and bx; see p.393 in Numerical Recipes F77.  
 %3. I added axt=x\_in+ax.\*d\_in, etc, for use in multidimensional conjugate gradient  
 % calculation, where the search direction is d. In NR, this step is  
 % performed by the function f1dim on p.413.  
 %4. If you are following us, the outputs from these function are all scalars.  
 %5. Nothing too interesting here, unless you are hunting a bug.

GOLD=1.618034;  
 GLIMIT=100.;  
 TINY=1.e-20;

axt=x\_in+ax.\*d\_in;  
 [fa]=func(axt);  
 bxt=x\_in+bx.\*d\_in;  
 [fb]=func(bxt);

if fb > fa  
   dum=ax;  
   ax=bx;  
   bx=dum;  
   dum=fb;  
   fb=fa;  
   fa=dum;  
end

%first guess for c  
 cx=bx+GOLD.\*(bx-ax);  
 cxt=x\_in+cx.\*d\_in;  
 [fc]=func(cxt);

while fb >= fc

  r=(bx-ax).\*(fb-fc);  
  q=(bx-cx).\*(fb-fa);  
  u=bx-((bx-cx).\*q-(bx-ax).\*r)./(2.\*abs(max(abs(q-r),TINY)).\*sign(q-r));  
  ulim=bx+GLIMIT.\*(cx-bx);  
  if (bx-u).\*(u-cx) > 0.  
    ut=x\_in+u.\*d\_in;  
    [fu]=func(ut);  
    if fu < fc  
      ax=bx;  
      fa=fb;  
      bx=u;  
      fb=fu;  
      break;  
    elseif fu > fb

```

        cx=u;
        fc=fu;
        break;
    end
    u=cx+GOLD.*(cx-bx);
    ut=x_in+u.*d_in;
    [fu]=func(ut);
elseif (cx-u).*(u-ulim) > 0.
    ut=x_in+u.*d_in;
    [fu]=func(ut);
    if fu < fc
        bx=cx;
        cx=u;
        u=cx+GOLD.*(cx-bx);
        fb=fc;
        fc=fu;
        ut=x_in+u.*d_in;
        [fu]=func(ut);
    end
elseif (u-ulim).*(ulim-cx) >= 0
    u=ulim;
    ut=x_in+u.*d_in;
    [fu]=func(ut);
else
    u=cx+GOLD.*(cx-bx);
    ut=x_in+u.*d_in;
    [fu]=func(ut);
end
ax=bx;
bx=cx;
cx=u;
fa=fb;
fb=fc;
fc=fu;
end

```

**func\_golden.m**

**function [xmin,golden] = func\_golden(ax,bx,cx,x\_in,d\_in)**

**%1. Given bracket points ax, bx, cx, this function finds the minimum with tol;  
 % return independent variable as xmin (a scalar!) and function value as golden.  
 % See NR F77, p.394  
 %2. Uses a user-defined func.m  
 %3. I added x1t=x\_in+x1.\*d\_in, etc, for the use of multidimensional conjugate  
 % gradient method. This step is performed by f1dim in NR on p.413.  
 %4. Like in func\_mnbrak.m the outputs from this function are again scalars.  
 %5. You may want to change tol here.**

```

tol=1.e-7;
R=0.61803399;
C=1.-R;

x0=ax;
x3=cx;
if abs(cx-bx) > abs(bx-ax)
    x1=bx;
    x2=bx+C.*(cx-bx);
else
    x2=bx;
    x1=bx-C.*(bx-ax);
end
x1t=x_in+x1.*d_in;
[f1]=func(x1t);
x2t=x_in+x2.*d_in;
[f2]=func(x2t);

while abs(x3-x0) > tol.*(abs(x1)+abs(x2))
    if f2 < f1
        x0=x1;
        x1=x2;
        x2=R.*x1+C.*x3;
        f1=f2;
        x2t=x_in+x2.*d_in;
        [f2]=func(x2t);
    else
        x3=x2;
        x2=x1;
        x1=R.*x2+C.*x0;
        f2=f1;
        x1t=x_in+x1.*d_in;
        [f1]=func(x1t);
    end
end

if f1 < f2
    golden=f1;
    xmin=x1;
else
    golden=f2;
    xmin=x2;
end

fum.m
function h=fun(k)
%disp(strcat('fun-',num2str(k)))
% Physical Parameter
R=0.01;%m

```

```

L=0.01;%m
%k=80.2;% W/m.k Iron(Fe)
c=449;%J/kg.k
q=4e3;%W/m^2
ro=7870;%kg/m^3
T0=20;
% Calcucation Domain
n=11;
m=11;
i=1:n;
j=1:m;
hz=L/(m-1);
hr=R/(n-1);
z=(j-1)*hz;
r=(i-1)*hr;
T=ones(n,m).*(T0);
dt=0.1;
tf=30;
maxitr=floor(tf/dt);
tc1=[1 6];
tc2=[6 m];
tc3=[6 1];
%tc4=[6 6];
%tc5=[n 6];
% Implicit Method
for time=1:maxitr
for i=1:n
    for j=1:m
        if (i==1 | i==n) | (j==1 | j==m)
            if j==m
                T(i,j)=T(i,j-1);
            end
            if i==1
                T(i,j)=T(i+1,j);
            end
            if j==1
                T(i,j)=T(i,j+1)+q*hz/k;
            end
            if i==n
                T(i,j)=T(i-1,j)+q*hr/k;
            end
        end
        A(i,j)=0;
        B(i,j)=0;
        C(i,j)=0;
        D(i,j)=0;
        E(i,j)=0;
        else

            A(i,j)=k/(2*r(i)*hr)+k/hr^2;
            B(i,j)=-k/(2*r(i)*hr)+k/hr^2;

```

```

        C(i,j)=k/hz^2;
        D(i,j)=k/hz^2;
        E(i,j)=-2*k/hr^2-2*k/hz^2-ro*c/dt;
    end
    F(i,j)=-ro*c*T(i,j)/dt;
    %-----Modify
end
end
inx=0;
M=zeros((n-2)*(m-2));
for i=2:n-1
    for j=2:m-1
        ii=i-1;
        jj=j-1;
        inx=inx+1;
        M(inx,(ii-1)*(m-2)+jj)=E(i,j);
        if(i~=2)
            M(inx,(ii-2)*(m-2)+jj)=B(i,j);
        else
            F(i,j)=F(i,j)-B(i,j)*T(i-1,j);
        end
        if(i~=n-1)
            M(inx,(ii)*(m-2)+jj)=A(i,j);
        else
            F(i,j)=F(i,j)-A(i,j)*T(i+1,j);
        end
        if(j~=2)
            M(inx,(ii-1)*(m-2)+jj-1)=D(i,j);
        else
            F(i,j)=F(i,j)-D(i,j)*T(i,j-1);
        end
        if(j~=m-1)
            M(inx,(ii-1)*(m-2)+jj+1)=C(i,j);
        else
            F(i,j)=F(i,j)-C(i,j)*T(i,j+1);
        end
        Y(inx)=F(i,j);
    end
end
end
X=inv(M)*Y';
X=reshape(X,m-2,n-2);X=X';
for i=1:n-2
    for j=1:m-2
        T(i+1,j+1)=X(i,j);
    end
end
end
tc(time,1)=time*dt;
tc(time,2)=T(tc1(1),tc1(2)); % TC1
tc(time,3)=T(tc2(1),tc2(2)); % TC2
tc(time,4)=T(tc3(1),tc3(2)); % TC3

```

```

% tc(time,5)=T(tc4(1),tc4(2));% TC4
% tc(time,6)=T(tc5(1),tc5(2));% TC5
[Xx,Yy]=meshgrid(z,r);
end
h(1)=tc(end,2);
h(2)=tc(end,3);
h(3)=tc(end,4);
% h(4)=tc(end,5);
% h(5)=tc(end,6);

```