بانام خالق یکتا

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد مکانیک - طراحی کاربردی

بررسی پاسخ دینامیکی تیر یک سرگیردار لزج با شرط انتهایی دمپر تحت بار رونده

استاد راهنما :

دکتر اردشیر کرمی محمدی

ارایه دهنده :

محمود سلمانی آرانی

شهریور ۱۳۸۶

تقدیم به

پدر و مادرم بهانه‌های وجود

و

همسرم آرامش وجود

با کمال تشکر و قدردانی از جناب آقای دکتر اردشیر کرمی محمدی

چکیده

در این پایان‌نامه، ارتعاشات تیر لزج یک سر گیردار اولر-برنولی با شرط انتهایی دمپر تحت بار رونده و پاسخ دینامیکی آن مورد بررسی قرار گرفته است.

معادلات حرکت سیستم با استفاده از روش اصل همیلتون تعمیم‌یافته بدست آمده و سپس با استفاده از روش جداسازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی، مساله مقدار مرزی حاصل شده است. معادلات جابجایی جانبی تیر یا شکل مودهای تیر با بدست آوردن مقادیر ویژه و توابع ویژه از حل عددی مساله مقدار ویژه نتیجه می‌شوند.

وجود میرایی لزج گسترده در طول تیر باعث می‌گردد تا شکل مساله متمایز از مسایل متداول موجود گشته، در نتیجه تحلیل مودال و روند حل معادلات، متفاوت از روشهای استفاده شده تاکنون باشد.

شرط خودالحاقی سیستم و تعامد توابع ویژه، از جمله ویژگیهایی است که مد نظر قرار گرفته، شرط تعامد توابع ویژه بدون استفاده از نمادگذاری پارامتری بدست آمده است.

پاسخ دینامیکی نیروی رونده تناوبی با سرعت ثابت، هم به صورت تحلیلی و هم عددی در کانون توجه این بررسی‌ها قرار دارند. در هر دو تحلیل، خصوصا زمانی که شرایط اولیه غیرصفر وارد معادلات می‌گردند، حل ضمنی معادلات پیچیده شده که با استفاده از زیرروالها در حل عددی آنها، جوابی مناسب و مورد سنجش فراهم آمده است.

ارایه دو مســـاله نمونه و حل گام به گام آنها به صـــورت عددی مطابق فرمولهای اســـتنتاجی، رهیافتی شـایســته به درک و فهم موضـوعات مطرح‌شـده می‌بخشـد که می‌توان با تغییر شرایط مرزی و اولیه، مشـخصات تیر و نوع بارگذاری مواردی مشابه و حتی متفاوت از این موضوع را مورد بررسی و محاسبه قرار داد.

فهرست مطالب

فصل چهارم - نتایج

فهرست جداول

فهرست شکل‌ها

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل اول

مقدمه، بررسی و کاربرد مساله

۱-۱ - مقدمه

یکی از عضوهای مهم کشسان در اکثر سازه‌های مهندسی تیرها می‌باشند. تیرها در بارگذاری‌های مختلف (استاتیکی- دینامیکی، طولی، عرضی، محوری) از خود خمش، پیچش و کمانش یا ترکیبی از اینها را نشان می‌دهند.

بررسی ارتعاشات تیرها که مدلهای ریاضی ارتعاش سیستم‌شان بوسیله پارامترهای پیوسته بیان می‌شود، تحت شرایط مرزی و شرایط اولیه گوناگون موضوعی درخور مطالعه می‌باشد، زیرا سیستم‌های گوناگون ارتعاشی در زمینه‌هایی چون مهندسی سازه، هواپیما، خودرو و غیره وجود دارند که می‌توان آنها را بوسیله تیر در شرایط مختلف مدل نمود.

البته از این مطلب نیز نمی‌توان صرفنظر نمود که وجود مولفه‌های گسسته مانند: جرم‌ها و فنرها در دنیای حقیقی، به همراه مولفه‌های پیوسته هم وجود دارند و خوشبختانه در موارد بسیار می‌توان آنها را به مولفه‌های پیوسته تبدیل نمود.

اولین قدم در بررسی ارتعاشات یک مدل مکانیکی، بدست‌آوردن مدل ریاضی (دینامیکی) و نوشتن معادلات حرکت می‌باشد. مدلهای مکانیکی در سیستمهای ارتعاشی به دو دسته عمده مدل پارامترهای گسسته یا منفرد[1] و پارامترهای پیوسته یا توزیع‌پذیر[2] تقسیم می‌گردند؛

سیستمهای گسسته مانند جرمها, فنرها و دمپرهای منفرد و سیستمهای پیوسته یا توزیع‌شده مانند تیرها، پی‌های الاستیک، جرم توزیع‌شده و... هستند؛ که سیستمهای گسسته قابل تبدیل به مولفه های پیوسته می‌باشند.

1- Discrete or Lumped-Parameter Models
2- Continuous or Distributed-Parameter Models

بســته به تعداد جرمهای متمرکز در سیستمهای گسسته تعداد درجات آزادی آنها مشخص می‌گردد. با این توصــیف ســیســتمهای پیوسته که جرم در آنها به صورت گسترده می‌باشد، دارای بی‌نهایت درجه آزادی می‌باشــند و می‌توان آنها را با افزایش و توزیع مولفه های پیوســته مانند ســیســتمهای گســسته تقریب زده، راه‌حلهای ساده‌تری بدست آورد.

اغلب در بررسی ارتعاشات تیرها ابتدا معادلات حرکت آنها به روش‌های گوناگون بدست می‌آیند. در زیر برخی از این روشها معرفی شده‌اند:

الف- اصل تعمیم‌یافته همیلتون:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V+\delta\overline{W}_{nc})dt=0 \qquad \delta w(x,t)=0\ ,\ \ t=t_1,t_2 \qquad (۱-۱)$$

ب- اصل کار مجازی

$$\delta\overline{W}=\sum_{i=1}^{N}F_i.\delta\, r_i=0 \qquad (۲-۱)$$

ج- اصل دالامبر تعمیم‌یافته

$$\sum_{i=1}^{N}(F_i-m_i\ddot{r}_i)\ .\ \delta\, r_i=0 \qquad (۳-۱)$$

د- روش لاگرانژ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}+\frac{\partial V}{\partial q_k}=Q_{knc} \qquad k=1,\ 2,\dots,\ n \qquad (۴-۱)$$

ه- قانون دوم نیوتن

$$F=\frac{d}{dt}(m\mathrm{v}) \qquad (۵-۱)$$

این معادلات در ســیســتم‌های پیوســته بایســت بوســیله شــرایط مرزی، که شــامل یک یا چند معادله دیفرانسیل جزیی می‌باشند، در نواحی و مرزهای سیستم ارضا گردند.

حل این معادلات دیفرانسـیل (تحلیل مودال) به صـورت همزمان، نیازمند حل مساله مقدار ویژه است که با حل آن مقادیر ویژه و توابع ویژه نامتناهی بدست می‌آیند. این دسته از توابع ویژه خاصیت تعامد دارند و با درنظرگرفتن خاصـیت خودالحاقی، می‌توان خاصیتی شبیه به تقارن ماتریس در سیستم‌های گسسته را در آنها نشان داد.

۱-۲ - بررسی ارتعاشات تیر

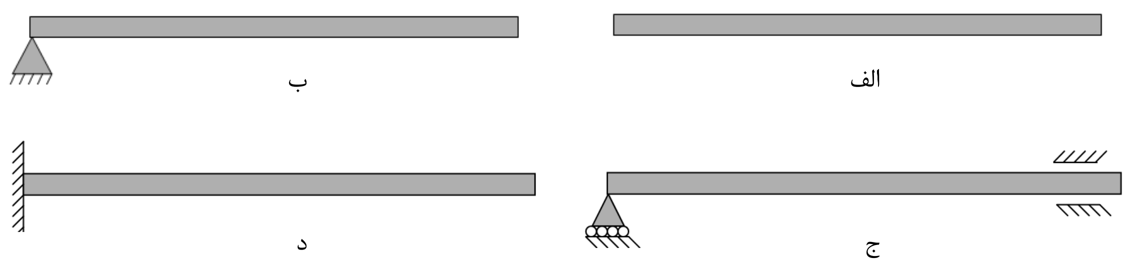
سـیسـتمهای ارتعاشی بسته به پاسخشان به تحریک ورودی، به سیستمهای خطی و غیرخطی تقسیم می‌گردند. پاسخ سیستمهای خطی در دو حوزه فرکانسی و زمانی قابل بررسی است.

بررســی حوزه فرکانســی وقتی صــورت می‌گیرد که تابع تحریک ورودی، تابعی دوره‌ای، هارمونیک یا تصادفی باشد. رهیافت حوزه زمانی نیز جهت بررسی توابع تحریک اولیه و دلخواه بکار می‌رود.

تحلیل ارتعاشات تیرها در سه حوزه تعمیم می‌یابد که عبارتند از:

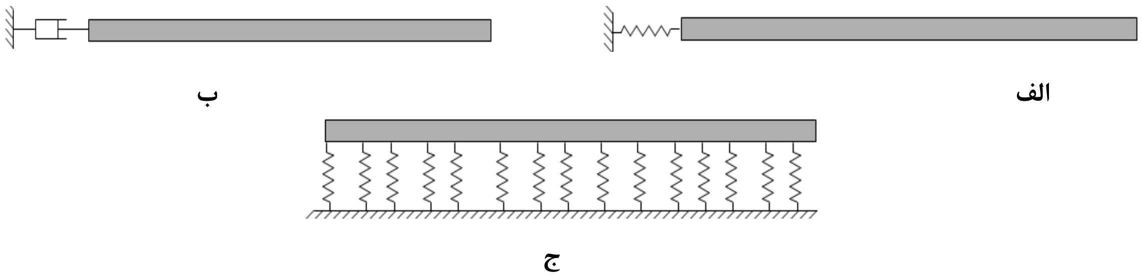
۱-۲-۱ - شرایط مرزی و شرایط اولیه گوناگون:

شـرایط مرزی تیرها به صورت آزاد، تکیه‌گاه ساده، لغزنده و درگیر را می‌توان در شکلهای زیر مشاهده نمود.



شکل ۱-۱- شرایط مرزی مختلف در سمت چپ تیرها : الف- آزاد ب- تکیه‌گاه ساده ج- لغزنده د- گیردار

وجود برخی مولفه‌های گسسته و پیوسته در مرزها را نیز می‌توان در شکل ۱-۲ مشاهده نمود. این مولفه‌ها و شرایط مرزی قبل به صورت معادلات دیفرانسیل جزیی در هر منطقه از تیر یا ناحیه‌ای از آن نوشته می‌شوند.



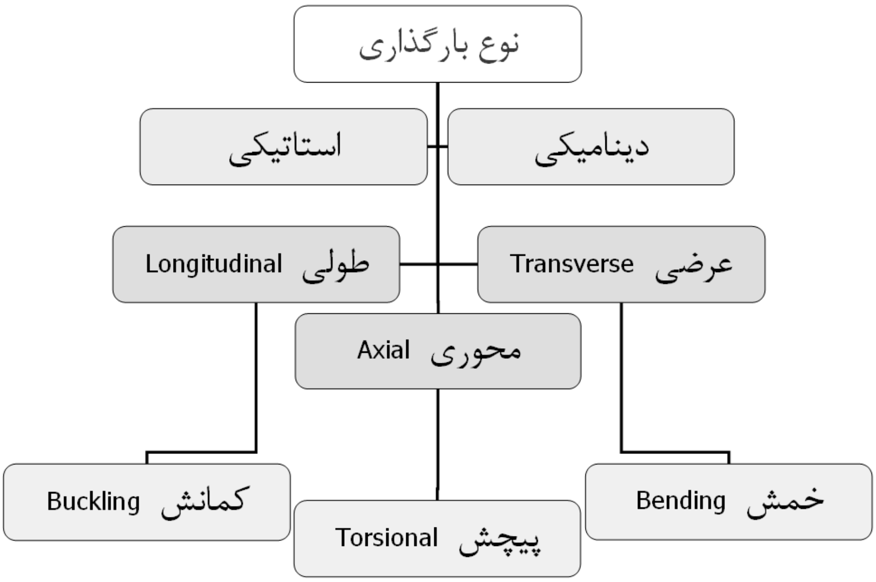
شکل ۱-۲- شرایط مرزی مختلف : الف- فنر ب- دمپر ج- پی کشسان

این شرایط در صورتی که برابر صفر باشند شرط مرزی همگن و در غیراین صورت شرط مرزی ناهمگن نامیده می شوند.

شرایط اولیه وجود جابجایی یا سرعت اولیه می‌باشد.

۱-۲-۲ - نیروها و بارهای درونی و برونی متفاوت:

نیروهای درونی مانند نیروهای تنشی و برشی و نیروهای برونی مانند نیروهای گسترده و متمرکز هستند، حال چه به صورت ثابت، متناوب، رونده یا ترکیبی از اینها اعمال شوند. تحلیل تیر نیز برحسب نوع بارگذاری و راستای نیرو صورت می‌گیرد. (شکل ۱-۳) گاهی نیز بر اثر حذف یک عضو ذخیره کننده یا تلف کننده انرژی می‌توان نیروی معادل یا مشتقات آن را به‌کار برد.



شکل ۱-۳- شرایط بارگذاری مختلف

۱-۲-۳ - نوع تیر از لحاظ شکل هندسی و خواص فیزیکی مختلف:

سطح مقطع، جرم، مدول کشسانی، گشتاور سطح و بسیاری از خواص هندسی و فیزیکی تیر می‌توانند در مقاطع مختلف تیر متفاوت بوده یا تابعی از طول تیر باشند.

مطالعه در یک یا ترکیبی از حوزه‌های یادشده در مقالات گوناگون و کاربردهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است که در فصل دوم نمونه‌هایی مطرح می‌گردد تا روند بررسی ارتعاشات تیر روشن و واضح‌تر گردد.

۱-۳ - بررسی مساله مقدار ویژه در سیستمهای پیوسته

همان‌گونه که در مقدمه بیان شد، ارضا نمودن شرایط مرزی، معادلات دیفرانسیلی بوجود می‌آورد که با حل آنها مساله مقدار ویژه حل شده و از آنجا توابع ویژه بدست می‌آیند. برای حل مساله مقدار ویژه در سیستمهای گسسته و پیوسته روشهای گوناگونی موجود است؛ به عنوان مثال روش توانی[۳]، روش ژاکوبی[۴]، روش کیوآر[۵] و... برای سیستمهای گسسته وجود دارند که از موضوع بحث خارج می‌باشد. در این نوشتار روشهای حل برای سیستمهای پیوسته مورد بررسی می‌باشند.

در ضمن استفاده‌نمودن از نمادگذاری پارامتری در نوشتن معادلات و شرایط مرزی کمک می‌کند تا بسیاری از سیستمهای ارتعاشی را به شکل ساده دسته‌بندی نمود و نتایج مربوط به یک گروه کلی از آنها را نیز به یک شکل نشان داد.

گام نخست در حل سیستمهای پیوسته، گسسته‌سازی معادلات آنها به روشهای گسسته‌سازی ناپیوسته و گسسته‌سازی سری می‌باشد. نمونه روش اول که در حل مسایل ارتعاشات پیچشی کاربرد دارد روش هولذر[۶] و نمونه روش دوم که در حل مسایل ارتعاشات خمشی کاربرد دارد، روش میکلستند[۷] می‌باشد. (روش هولذر را برای ارتعاشات عرضی تار و ارتعاشات محوری میله نیز می‌توان به کار برد.)

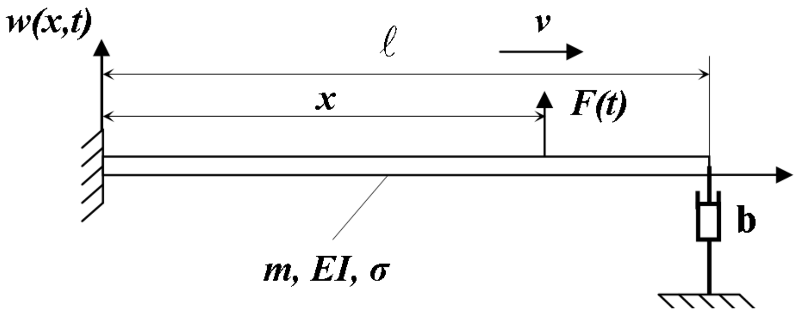
روشهای گسسته‌سازی سری بر دو پایه بنا نهاده شده است. اول اصول تغییرات[۸] و کمینه‌نمودن خارج قسمت رایلی[۹] است که با عنوان روش ریلی- ریتز[۱۰] بکار می‌رود. دوم بر پایه کمینه‌نمودن خطاهای حل تقریبی است که با عنوان روش وزنی مانده‌ها شناخته می‌شود و مهمترین آنها روش گالرکین[۱۱] می‌باشد. روش اول خاص سیستمهای خودالحاقی و روش دوم هم برای سیستمهای خودالحاقی و هم غیرخودالحاقی بکار می‌رود.

روش المان محدود نیز که روش تقریبی برای حل مسایل مقدار ویژه می‌باشد خود نسخه دیگری از روش ریلی- ریتز می‌باشد.

3- Power Method
4- Jacobi Method
5- QR Method
6- Holzer’s Method
7- Myklestand’s Method
8- Variational principles
9- Rayleigh’s Quotient
10- Rayleigh-Ritz Method
11- Galerkin’s Method

۴-۱ - بررسی مساله

مســاله‌ای که در اینجا بررسی می‌گردد ارتعاشات جانبی تیر اولر – برنولی به طول ℓ، صلبیت خمشی EI و جرم بر واحد طول m می‌باشد. تیر دارای میرایی تعمیم‌یافته و لزج خارجی با ضریب میرایی σ می‌باشد که قرار است با یک دمپر در انتهای تیر با ثابت میرایی b به طور لزج میرا گردد. نیروی $F(t)$ با سرعت ثابت v و فاصله x از سر تیر درحال حرکت بر آن وارد می‌شود. (شکل۱-۴)



شکل ۱-۴- تیر یکسرگیردار با بار رونده

بررســی پاسخ دینامیکی تیر یک سر گیردار با میرایی لزج که در انتهای آن یک دمپر وجود دارد، قبلاً در مرجع [۳] مورد بررسی قرار گرفته است.

در مقایســه تیر اولر- برنولی با تیر تیموشنکو می‌توان گفت که تیر تیموشنکو مدلی از تیر می‌باشد که دربردارنده اینرسی خمشی و اثرات تغییر شکل برشی می‌باشد.

بنابراین تغییر شــکل تیر شــامل دو جمله اســت که یکی بر اثر خمش و دیگری به علت برش بوجود آمده‌اند؛ یعنی شیب تغییر شکل در هر نقطه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}=\phi(x,t)+\theta(x,t) \qquad (۱-۶)$$

که در آن $\phi(x,t)$ زاویه گردش حاصل از خمش و $\theta(x,t)$ زاویه اعوجاج حاصل از برش می‌باشد.

انرژی جنبشی که حاصل گردش و جابجایی اجزای تیر می‌باشد برای تیر تیموشنکو به شکل زیر می‌باشد:

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell} m(x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^{\ell} J(x)\left[\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \qquad (۱-۷)$$

چون برش خالص رخ می‌دهد، اجزای تیر حین اعوجاج، چرخشی ندارند.

برای تیر اولر- برنولی انرژی جنبشی با در نظر گرفتن انرژی حاصل از چرخش اجزای تیر به شکل زیر می‌باشد:

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell} m(x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^{\ell} J(x)\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t\partial x}\right]^2 dx \qquad (۱-۸)$$

انرژی پتانسیل تیر تیمو شنکو را می توان بدین صورت بیان نمود:

$$V(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI(x)\left[\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^{\ell} k'GA(x)\theta^2(x,t)dx \qquad (۱-۹)$$

در عبارت فوق k' ضریب برشی تیموشنکو نام دارد و به شکل سطح مقطع تیر بستگی دارد. این ضریب برای مقطع دایره‌ای $\frac{9}{10}$ و برای مقطع مستطیلی برابر $\frac{5}{6}$ می‌باشد.[۱]

در فرمولهای فوق $m(x)$ جرم واحد طول، $A(x)$ سطح مقطع تیر، $I(x)$ و $J(x)$ به ترتیب ممان اینرسی سطح و جرم حول محوری عمود بر صفحه حرکت و گذرنده از مرکز جرم اجزای دیفرانسیلی تیر، E و G نیز به ترتیب مدول کشسانی و مدول برشی می‌باشند.

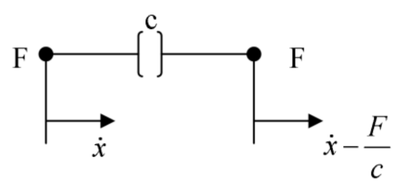
۱-۵ - کاربرد:

بررسی چنین تیری در مهندسی سازه مانند پلها و ریلهایی که از آنها خودرو یا لوکوموتیو عبور می‌کند (پل‌های راه‌آهن، پل‌هایی که از آنها قطارهای سریع می‌گذرند) و مهندسی ریل، مهم می‌باشد.

ارتعاشات تیغه و دیسک در توربینها، پره‌های انعطاف‌پذیر روتور، جاذبهای ارتعاشات دینامیکی، تسمه و زنجیر متحرک، نوارهای مغناطیسی، اره نواری، بسته‌بندی‌ها، دستگاه‌های کاغذگردان، پره‌های توربین، پره‌های روتور چرخبال، پروانه هواپیما و بازوی رباتها نمونه‌های دیگری از کاربرد و مدل‌سازی تیر مرتعش را نشان می‌دهند.

معمولا دمپرها جهت کاهش انتقال‌پذیری نیرو و جابجایی سازه‌های مختلف بکار می‌روند. خاصیت دمپر(بدون جرم) آن است که سرعت را تغییر می‌دهد (شکل ۱-۵).

در شکل زیر F نیرو، $\dot{X}$ سرعت و c ضریب میرایی می‌باشد.



شکل ۱-۵- تغییر سرعت توسط دمپر.

با کاهش انتقال‌پذیری نیرو و جابجایی سطح، نیروی مجاز کاهش می‌یابد و می‌توان سازه‌های سبکتر و ساده‌تری طراحی نمود. ضمنا در بسیاری از سیستمها مثل خودرو، هواپیما و ساختمانهای مرتفع، دمپرها همچنان یکی از قسمتهای بحرانی هستند.

منابع و مآخذ این فصل:

1. Leonard Meirovitch, Principles and Techniques of Vibrations, Prentice-Hall,New Jersey,1997.
2. Singiresu S. Rao, Mechanical Vibrations, Third Edition. Addison-Wesley, New York, 1995
3. M. Gurgoze, H. Erol, Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition. Journal of Sound and Vibration 298 (2006) 132–153.

فصل دوم

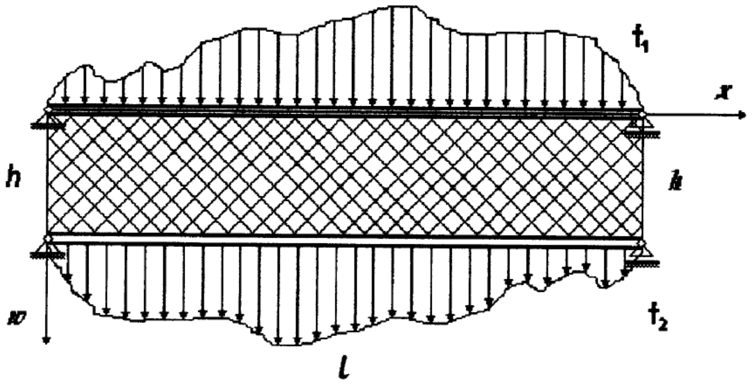
بررسی مقالات و تحقیقات انجام شده

۲-۱ – ارتعاشات عرضی واداشته سیستم دو تیر با تکیه‌گاه‌های ساده که با پی کشسانی به یکدیگر متصلند.[۱]

این مقاله به بررسی و تحلیل ارتعاشات عرضی واداشته و نامیرا در سیستمی متشکل از دو تیر که به وسیله یک ماده کشسان به یکدیگر وصل شده‌اند، می‌پردازد. بررسی ارتعاشات آزاد دو تیر که توسط لایه‌ای کشسان (لایه وینکر[۱۲]) به هم متصل شده‌اند و روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارند، قبلاً در مرجع

1- Winkler Layer

[۲] مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین ارتعاشات واداشته سیستم ساده‌ای که جسم الاستیک توسط دو سیم آویزان است، در



مرجع [۳، ۴، ۵] نشان داده شده است. تیرهایی که در ارتعاشات عرضی مورد بررسی قرار می‌گیرند عموما در چهار دسته مدل می‌شود:

الف. تیر اولر- برنولی[۱۳]، ب. تیر رایلی[۱۴]، ج. تیر برشی (فلوگه[۱۵])، د. تیر تیموشنکو[۱۶]

سیستمی که در این مقاله بررسی شده است شامل دو تیر همگن، منشوری و باریک است که در چهار انتها روی تکیه‌گاه ساده‌اند.(شکل ۲-۱)

معادلات دیفرانسیلی حاکم بر این جفت تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$K_1 w_1^{\mathrm{iv}} + m_1 \ddot{w}_1 + k(w_1 - w_2) = f_1(x,t), \tag{۱-۲}$$

$$K_2 w_2^{\mathrm{iv}} + m_2 \ddot{w}_2 + k(w_2 - w_2) = f_2(x,t), \tag{۲-۲}$$

2- Euler - Bernoulli
3- Rayleigh
4- Shear Beam (Flügge)
5- Timoshenko

شکل ۲-۱ – دو تیر با تکیه گاههای ساده که با پی کشسان به یکدیگر متصلند.

که در آنها:

$$K_i = E_i J_i, \quad m_i = \rho_i F_i, \quad \dot{w}_i = \partial w_i / \partial t, \quad w_i' = \partial w_i / \partial x, \quad i = 1, 2.$$

$$w_i(0, t) = w_i''(0, t) = w_i(l, t) = w_i''(l, t) = 0, \quad i = 1, 2.$$ (۲-۳)

حل مساله به روش جداسازی متغیرها و اعمال شرایط مرزی به شکل زیر در می‌آید:

$$w_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \sum_{i=1}^{2} \omega_{in}^{-1} \int_0^t H_{in}(s) \sin[\omega_{in}(t - s)] \, \mathrm{d}s,$$ (۲-۴)

$$w_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(k_n x) \sum_{i=1}^{2} a_{in} \omega_{in}^{-1} \int_0^t H_{in}(s) \sin[\omega_{in}(t - s)] \, \mathrm{d}s.$$ (۲-۵)

در این مقاله نیروهای دلخواهی که به سیستم اعمال می‌شوند و مورد بررسی قرار می‌گیرند، بدین شرحند:

الف- نیروهای هارمونیک ساکن که حالتی کلی از اعمال نیروهای توزیع شده دلخواه می‌باشد:

الف-۱- نیروی هارمونیک یکنواخت

$$f_1(x, t) = f \sin(pt)$$ (۲-۶-الف)

الف-۲- نیروی هارمونیک متمرکز

$$f_1(x, t) = F(t)\delta(x - 0.5l) = F \sin(pt)\delta(x - 0.5l)$$ (۲-۶-ب)

ب- نیروهای متمرکز رونده که با سرعتی ثابت از سمت چپ تیر به سمت راست در راستای تیر حرکت می‌کنند:

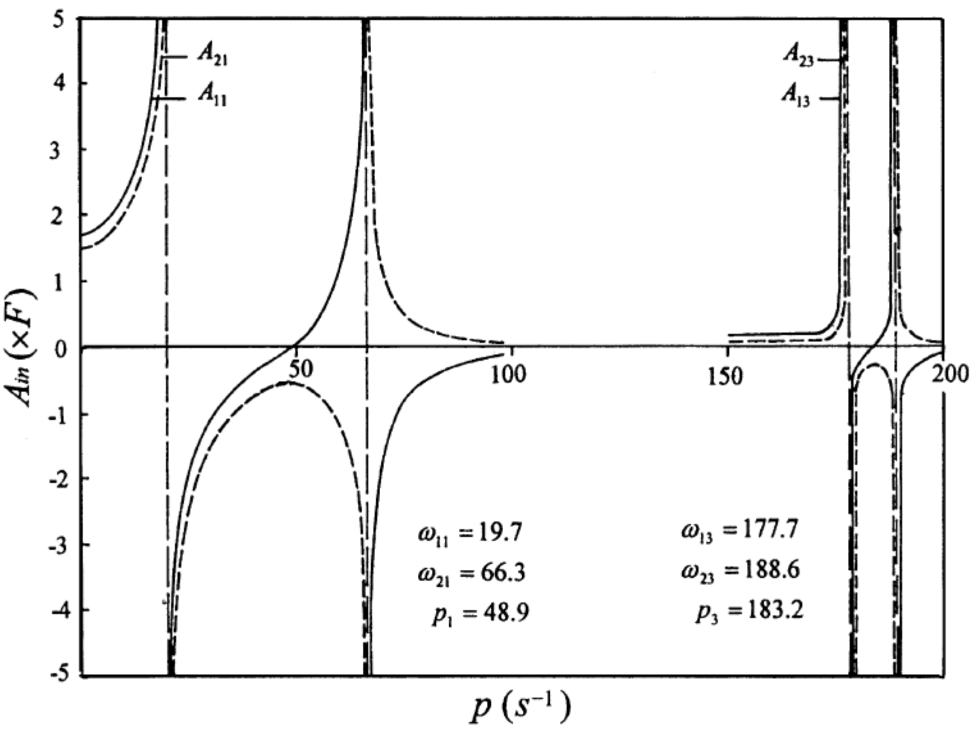
ب-۱- نیروی ثابت رونده

$$f_1(x,t) = F\delta(x - vt) \qquad (\text{۲-۷-الف})$$

ب-۲- نیروی هارمونیک رونده

$$f_1(x,t) = F\sin(pt)\delta(x - vt) \qquad (\text{۲-۷-ب})$$

نهایتا با ارایه مثالی که خواص هندسـی و فیزیکی دو تیر را برای سادگی یکسان در نظر گرفته است، حل عددی آن در حالت اعمال نیروی هارمونیک یکنواخت توزیعی (حالت الف-۱) انجام شده و نمودار تشدید آن ترسیم شده است. (شکل ۲-۲)



شکل ۲-۲ – نمودار تشدید دو تیر با بار هارمونیک یکنواخت در نزدیکی مود اول و سوم.

تشدید هنگامی رخ می‌دهد که فرکانس نیروی هارمونیک با یکی از فرکانسهای طبیعی سیستم مساوی شود:

$$p = \omega_{11}, \omega_{21}, \omega_{13}, \omega_{23} \qquad (۸-۲)$$

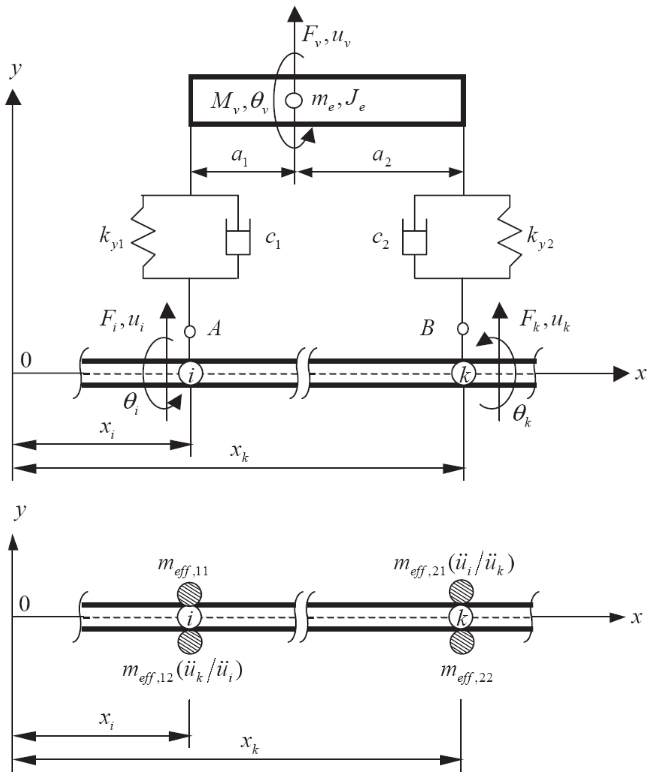
این نوع تیر نوع جدیدی از جاذب ارتعاشی سیستم دینامیکی پیوسته می‌باشد که می‌توان از آن جهت جلوگیری از ارتعاشات اضافی در سیستم‌های شامل تیر متناظر استفاده نمود.

در مورد جاذب‌های ارتعاشی دینامیکی پیوسته- که نقش مهمی در کاربردهای مهندسی دارند- در مراجع گوناگون مطالعات زیادی جهت انواع تیر[۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲] ، تار [۲، ۳، ۱۳] ، غشا [۱۳، ۱۴] ، صفحه‌ها [۱۳، ۱۵] و پوسته [۱۶] انجام شده است.

۲-۲ - تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهایی که تعدادی سیستم دو درجه آزادی جرم- فنر- دمپر را شامل می‌شوند(جرم معادل).[۱۷]

در این مقاله روشی برای جایگزین نمودن یک سیستم دو درجه آزادی جرم - فنر- دمپر با مجموعه جرمهای موثر معرفی شده است و می‌توان فرکانسهای طبیعی تیری که با این روش جرمهای معادل در آن جایگزین شده اند را بدست آورد. (شکل ۲-۳)

الف



ب

شکل ۲-۳ – الف- سیستم دو درجه آزادی جرم - فنر- دمپر و ب- سیستم معادل آن با جرمهای موثر

برای آنکه اعتبار این روش مشـــخص گردد، تمام نتایج محاســـبات از روش جرم موثر (EMM) با نتایج محاسـبات مرسوم اجزای محدود (FEM) مقایسه شده اند و نتیجه بسیار قابل قبول می‌باشد. از مزایای برجســته این روش آن است که با افزودن تعداد سیستمهای دو درجه آزادی نیاز به افزودن حافظه ای جهت محاســبات نمی‌باشـد.یکی از کاربردهای این روش بدست آوردن مشخصه های ارتعاشی می‌باشد که در طراحی ماشینها و سازه های مهندسی اهمیت بالایی دارد.

معادلات حرکت به روش نیوتن در ارتعاشات آزاد به صورت ماتریس زیر داده می‌شوند[۱۸]:

$$\begin{bmatrix} m_e & 0 \\ 0 & J_e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_v \\ \ddot{\theta}_v \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -c_1 & -c_2 \\ a_1 c_1 & -a_2 c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -(a_1 c_1 - a_2 c_2) \\ -(a_1 c_1 - a_2 c_2) & (a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_v \\ \dot{\theta}_v \end{Bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} -k_{y1} & -k_{y2} \\ a_1 k_{y1} & -a_2 k_{y2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{y1} + k_{y2} & -(a_1 k_{y1} - a_2 k_{y2}) \\ -(a_1 k_{y1} - a_2 k_{y2}) & (a_1^2 k_{y1} + a_2^2 k_{y2}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_v \\ \theta_v \end{Bmatrix} = 0.$$

(۲-۹)

با نوشتن کلیه متغیرها بر حسب مشتق دوم و فرض:

$$u_p = \ddot{u}_p / \bar{\omega}^2 \quad , \quad \dot{u}_p = \ddot{u}_p / \bar{\omega} \ (p = i, k, v), \qquad \theta_v = \ddot{\theta}_v / \bar{\omega}^2 \ ,$$
$$\dot{\theta}_v = \ddot{\theta}_v / \bar{\omega}. \qquad (۲-۱۰)$$

می‌توان معادله ماتریسی فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\{F_e\} = [m_{\text{eff}}]\{\ddot{u}_e\} \qquad (۲-۱۱)$$

که در آن:

$$\{F_e\} = [F_i \ \ F_k]^{\mathrm{T}}, \qquad (۲-۱۲)$$

$$\{\ddot{u}_e\} = [\ddot{u}_i \ \ \ddot{u}_k]^{\mathrm{T}}, \qquad (۲-۱۳)$$

$$[m_{\text{eff}}] = \begin{bmatrix} m_{\text{eff},11} & m_{\text{eff},12} \\ m_{\text{eff},21} & m_{\text{eff},22} \end{bmatrix} \qquad (۲-۱۴)$$

که $[m_{\text{eff}}]$تریس جرمی سیستم دو درجه آزادی جرم- فنر- دمپر می‌باشد و ضرایب آن به صورت زیراند:

$$m_{\text{eff},11} = X_1 + W_{11} X_1^2 - a_1 W_{21} X_1^2 - a_1 W_{12} X_1^2 + a_1^2 W_{22} X_1^2, \qquad (۲-۱۵\text{-الف})$$

$$m_{\text{eff},12} = W_{11} X_1 X_2 - a_1 W_{21} X_1 X_2 + a_2 W_{12} X_1 X_2 - a_1 a_2 W_{22} X_1 X_2,$$

(۲-۱۵-ب)

$$m_{\text{eff},21} = W_{11} X_1 X_2 + a_2 W_{21} X_1 X_2 - a_1 W_{12} X_1 X_2 - a_1 a_2 W_{22} X_1 X_2,$$

(۲-۱۵-ج)

$$m_{\mathrm{eff},22} = X_2 + W_{11}X_2^2 + a_2 W_{21}X_2^2 + a_2 W_{12}X_2^2 + a_2^2 W_{22}X_2^2 \quad \text{(۲-۱۵-د)}$$

که در آنها:

$$W_{11} = \left[-J_e - \frac{(a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2)}{\bar{\omega}} - \frac{(a_1^2 k_{y1} + a_2^2 k_{y2})}{\bar{\omega}^2}\right] \Big/ \Delta, \quad \text{(۲-۱۶-الف)}$$

$$W_{12} = -\left[\frac{(a_1 c_1 - a_2 c_2)}{\bar{\omega}} + \frac{(a_1 k_{y1} - a_2 k_{y2})}{\bar{\omega}^2}\right] \Big/ \Delta = W_{21}, \quad \text{(۲-۱۶-ب)}$$

$$W_{22} = \left[-m_e - \frac{(c_1 + c_2)}{\bar{\omega}} - \frac{(k_{y1} + k_{y2})}{\bar{\omega}^2}\right] \Big/ \Delta \quad \text{(۲-۱۶-ج)}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} -m_e - \dfrac{(c_1 + c_2)}{\bar{\omega}} - \dfrac{(k_{y1} + k_{y2})}{\bar{\omega}^2} & \dfrac{(a_1 c_1 - a_2 c_2)}{\bar{\omega}} + \dfrac{(a_1 k_{y1} - a_2 k_{y2})}{\bar{\omega}^2} \\ \dfrac{(a_1 c_1 - a_2 c_2)}{\bar{\omega}} + \dfrac{(a_1 k_{y1} - a_2 k_{y2})}{\bar{\omega}^2} & -J_e - \dfrac{(a_1^2 c_1 + a_2^2 c_2)}{\bar{\omega}} - \dfrac{(a_1^2 k_{y1} + a_2^2 k_{y2})}{\bar{\omega}^2} \end{vmatrix}.$$

(۲-۱۷)

$$X_1 = \frac{c_1}{\bar{\omega}} + \frac{k_{y1}}{\bar{\omega}^2}, \qquad X_2 = \frac{c_2}{\bar{\omega}} + \frac{k_{y2}}{\bar{\omega}^2}. \quad \text{(۲-۱۸-الف و ب)}$$

در این مقاله مساله مقدار ویژه توسط یک زیرروال EISPACK [۱۹] حل شده است (جدول ۲-۱).

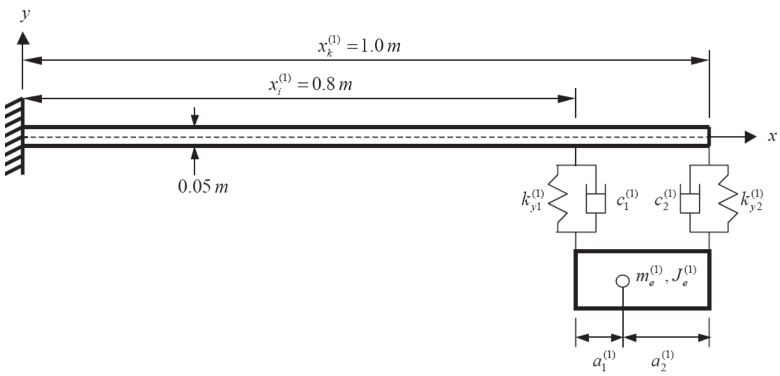
جدول ۲-۱ - اولین پنج مقدار ویژه برای تیر یک سرگیردار یکنواخت تحت میرا که یک سیستم دو درجه آزادی جرم- فنر- دمپر به آن متصل شده است.

Methods	Eigenvalues, $\bar{\omega}_j = \bar{\omega}_{jR} \pm \bar{i}\bar{\omega}_{jI}$ $(j = 1,\ldots,5)$ (rad/s)				
	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$
EMM[a]	5.8152E − 08 $\pm\bar{i}$**141.9959**	−7.7741E − 07 $\pm\bar{i}$**321.8164**	−2.5192E − 07 $\pm\bar{i}$**1524.2574**	−5.5330E − 06 $\pm\bar{i}$**3297.6357**	−4.9909E − 06 $\pm\bar{i}$**4276.0215**
FEM[b]	3.2644E − 08 $\pm\bar{i}$**141.9957**	−6.4717E − 08 $\pm\bar{i}$**321.8164**	−2.0643E − 07 $\pm\bar{i}$**1524.2575**	1.9360E − 07 $\pm\bar{i}$**3297.6358**	−1.3349E − 06 $\pm\bar{i}$**4276.0247**
Ref.[20]	141.5405	321.3685	1524.3220	3297.6410	4276.0260

a- Effective Mass Method

b- Finite Element Method

و نتایج آن با حل عددی اجزای محدود برای مساله نمونه (شکل زیر) ارایه شده در همین مقاله مقایسه شده اند.



شکل ۲-۴ – شکل مساله نمونه جرم - فنر- دمپر که به صورت عددی حل شده است.

پس از این مقایسه، تاثیر تغییر ثوابت فنر- ضریب میرایی- جرم توده ای ارایه شده است:

الف- اضافه نمودن ثابت فنر فرکانس طبیعی سیستم را بالا می‌برد.

ب- وجود میراکننده در تیر بارگذاری باعث می‌شود مقادیر ویژه مختلط باشند که قسمت حقیقی پارامتر کاهش و قسمت مختلط که فرکانس‌های طبیعی میراشونده را نشان می‌دهد، تغییر آنچنان نمی‌کند.

ج- تغییر در جرم توده ای فرکانس طبیعی را به طور قابل ملاحظه ای تغییر می‌دهد.

د- علاوه بر سه پارامتر جرم- فنر- دمپر، مکان اتصال سیستم دو درجه آزادی به تیر نیز مهم بوده و بر فرکانس طبیعی تیر بارگذاری تاثیر می‌گذارد.

۲-۳ - مشخصه‌های دینامیکی پره‌های انعطاف‌پذیر یک روتور با میرایی کولمب ناشی از اصطکاک لبه پره‌ها.[۲۱]

در توربوماشینهای با کارایی بالا، مساله اصطکاک یکی از مشکلات عمومی است. این اصطکاک بین اجزای روتور و استاتور با کم نمودن لقی مابین نوک تیغه ها و محفظه افزایش می‌یابد. عکس العمل دینامیکی تیغه ها و محفظه آنها طی اصطکاک، با طبیعت و مقدار میرایی که در سیستم ظاهر می‌گردد، بسیار تاثیرپذیر است. این میرایی می‌تواند به دو صورت *میرایی درونی* که حاصل اصطکاک مواد است- مثل خاصیت ارتجاعی و لزجتی که در محور و مواد تیغه ها است- و مشابه آن *میرایی خارجی*- مثل اصطکاک کولمب که در نوک تیغه ها یا دیگر اتصالات و در تکیه گاهها است- ظاهر گردد.

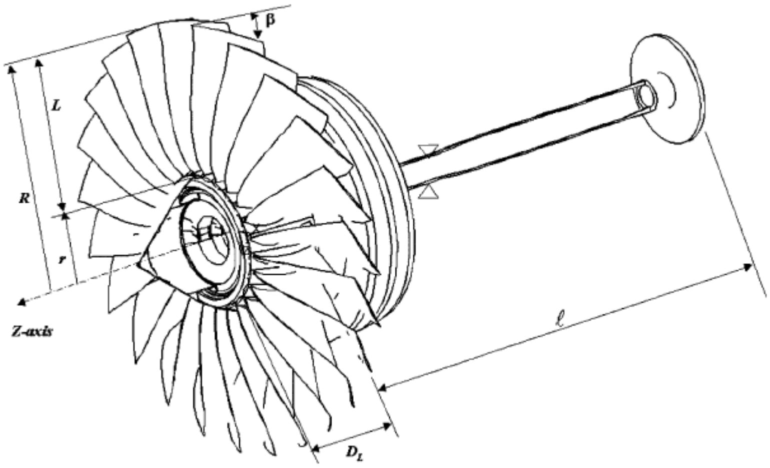
طبیعت ناپایستار سیستم میرا پیچیدگیهای زیادی را در مساله ایجاد می‌کند که با استفاده از برخی ساده سازیها و فرضیات، می‌توان معادلات حرکت را از حالت کوپل شده درآورد.

یکی از این ساده سازیها فرض میرایی غیریکنواخت است که با استفاده از آن می‌توان تحلیل مودال را انجام داد.

در روش اجزای محدود یک طریق معمول در نظرگرفتن ماتریس میرایی [C] به صورت ترکیب خطی از ماتریس جرم [M] و ماتریس سختی [K] به صورت زیر می‌باشد (میرایی تناسبی):

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K] \qquad (۱۹-۲)$$

رفتار تیغه ها مانند یک تیر یک سـرگیردار سـتونی به اندازه L می‌باشـد و تحت نیروی گریزازمرکز که توسـط روتور با اندازه سـرعت Ω تولید می‌شـود و نیروی اصـطکاکی F_a که در طول محوری تیر اعمال می‌شود قرار دارند.



شکل ۲-۵ – پره های روتور در توربوماشین که بوسیله تیر یک سرگیردار ستونی مدل می شوند.

تغییر شکل جانبی در فاصله s از ریشه تیغه در زمان t با $\eta(s,t)$ نمایش داده می‌شود و معادله حرکت در چهارچوب موجود نسـبت به چهارچوب مرجع که به تیغه های در حال گردش متصـل اسـت بدین صورت می‌گردد:

$$(EI)_b\eta_{,ssss} - (A)_b\sigma_{,s}\eta_{,s} - (A)_b\sigma\eta_{,ss} + (\rho A)_b\eta_{,tt} + C_t\eta_{,t}\delta(s-L) + K_{shaft}\eta\delta(s-0) = \mu F_a\cos\beta\delta(s-L),$$

(۲-۲۰)

که در آن:

$$\sigma(s) = \int_{s+r}^{R} (\rho)_b \Omega^2 \xi \,\mathrm{d}\xi + \frac{F_a}{(A)_b} = (\rho)_b \Omega^2 \frac{(R^2 - r^2 - 2rs - s^2)}{2} + \frac{(F_a)_j}{(A)_b},$$
$$\frac{\partial \sigma(s)}{\partial s} = -(\rho)_b \Omega^2 (s + r). \qquad (۲۱-۲)$$

مواد تیغه طوری در نظر گرفته می‌شوند که میرایی داخلی آن مقدار بحرانی زیر را داشته باشد:

$$C_c = \frac{L^2}{\pi^2} [EI\rho A]_{blade}^{1/2} \qquad (۲۲-۲)$$

به ازای هر میرایی لزج موجود در لبه تیغه ها) C_t (می‌توان ضـریب میرایی بی بعد) ζ_b (را به صـورت زیر تعریف نمود:

$$\zeta_b = \frac{C_t}{2C_c} \qquad (۲۳-۲)$$

شرایط مرزی برای هر تیغه و لبه آن (s=L) بدین شکل است:

$$\eta(0,t) = 0, \quad \eta'(0,t) = 0, \quad EI\eta''(L,t) = 0 \qquad (۲۴-۲)$$

$$EI\eta'''(L,t) - F_a\eta'(L,t) = \mu F_a \cos\beta \qquad (۲۵-۲)$$

و تغییر شکل جانبی برای تیغه j ام به صورت تابع شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$\eta(s,t) = (X_0(t))_j + \sum_{n=1}^{\infty} (X_n(t))_j (Y_n(s))_j \qquad (۲۶-۲)$$

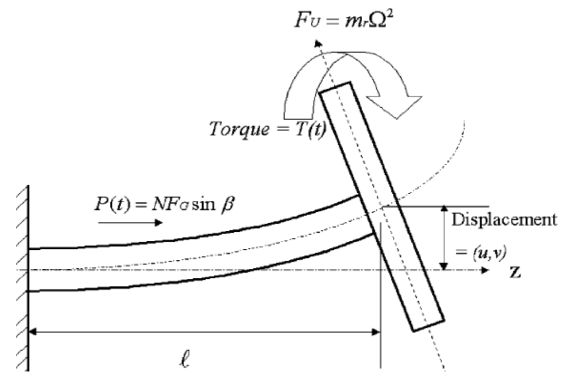
با استفاده از روش گالرکین معادلات حرکت ساده سازی و به صورت تحلیلی حل شده اند. فرکانسهای طبیعی بی بعد به ازای جرمهای مختلف دیسک M_D در جدول زیر آمده‌اند:

جدول ۲-۲ - فرکانسهای طبیعی بی بعد به ازای جرمهای مختلف دیسک

Disk-mass (M_D/Ms)	First flex	Second flex	Third flex	Fourth flex	Fifth flex	Sixth flex
0.00	3.5160	22.0351	61.7052	120.9317	199.9649	298.7559
0.10	2.9678	19.3563	55.5245	110.7328	185.4243	279.7140
0.25	2.4766	17.8520	53.0221	107.5703	181.7910	275.7414
0.50	2.0163	16.9018	51.7063	106.0816	180.1953	274.0769
0.75	1.7431	16.4846	51.1823	105.5178	179.6080	273.4753
1.00	1.5573	16.2505	50.9011	105.2217	179.3031	273.1653
2.00	1.1582	15.8613	50.4528	104.7583	178.8309	272.6872
3.00	0.9628	15.7201	50.2958	104.5986	178.6695	272.5239
4.00	0.8415	15.6472	50.2159	104.5176	178.5882	272.4415
5.00	0.7569	15.6026	50.1674	104.4687	178.5393	272.3917
6.00	0.6936	15.5727	50.1349	104.4359	178.5065	272.3579
7.00	0.6439	15.5511	50.1116	104.4124	178.4830	272.3334
8.00	0.6035	15.5348	50.0940	104.3948	178.4656	272.3154
9.00	0.5699	15.5220	50.0804	104.3810	178.4520	272.3008
10.00	0.5414	15.5119	50.0694	104.3700	178.4411	272.2888
15.00	0.4438	15.4810	50.0365	104.3368	178.4088	272.2525
35.00	0.2918	15.4455	49.9988	104.2980	178.3744	272.2000

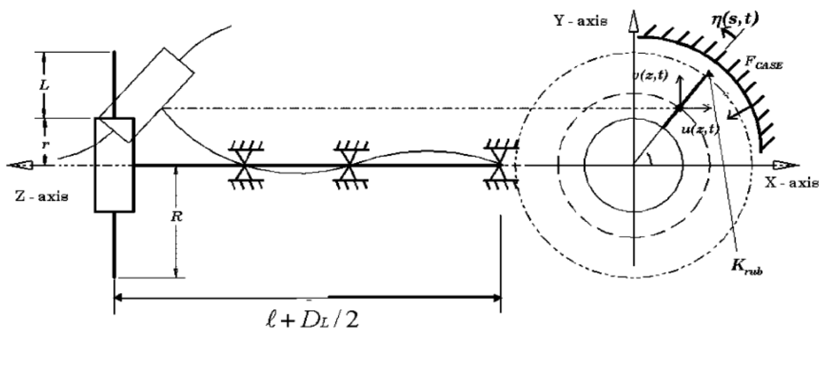
Non-dimensional frequency factor $\xi = \omega_n \ell^2 \sqrt{\frac{(\rho A)_s}{(EI)_s}}$; shaft mass '$M_s$' $= (\rho A \ell)_s$; frequency: $\omega_n = \frac{\xi}{\ell^2}\sqrt{\frac{(EI)_s}{(\rho A)_s}}$ rad/s; $\omega_n = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{\xi}{\ell^2}\sqrt{\frac{(EI)_s}{(\rho A)_s}}$ Hz.

و تغییر شکل مدهای دینامیکی روتور به صورت زیر می‌باشد:



الف

ب

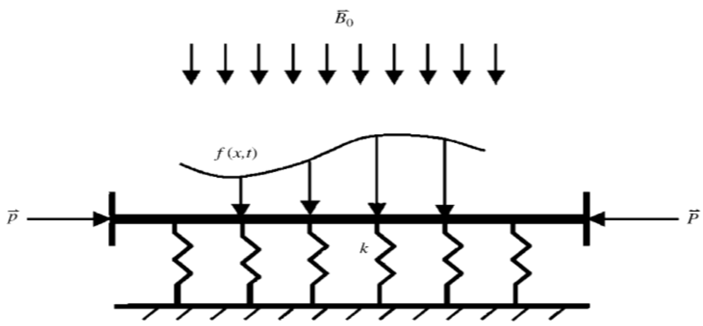


شکل ۶-۲ – الف- نیروهای خارجی و اولین تغییر شکل پیچشی محور یک سرگیردار با دیسک صلب

شکل ۶-۲ – ب- شکل مد با وجود تکیه گاههای مختلف

۲-۴ - تحلیل ارتعاشات تیر کشسان- مغناطیسی با شرایط مرزی گوناگون که نیروی محوری و خارجی بر آن اعمال شده است.[۲۲]

در این مقاله مدل فیزیکی تیری با شرایط مرزی کلی واقع در یک میدان مغناطیسی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. (شکل ۲-۷)



شکل ۲-۷ – مدل تیری روی پی کشسان تحت بار مغناطیسی

تیر از مواد کشسان(خطی) به عرض d، عمق h و طول L می‌باشد که نیروی $\mathbf{P} = (P_0 + P_1 \cos \Omega_2 t)\mathbf{i}$ تناوبی و محوری در راستای x و میدان مغناطیسی تناوبی $\mathbf{B}_0 = (B_m \cos \Omega_1 t)\mathbf{j}$ در جهت عرضی (نیروی خارجی عرضی) بر آن وارد می‌شود که میرایی لزج خطی در راستای y دارد و فنرهای خطی با ثابت k به آن وصل شده اند. با استفاده از اصل همیلتون [۲۳] معادله حرکت به شکل زیر در می‌آید:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C_d\frac{\partial y}{\partial t} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + ky + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x,t) + \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\int_0^x p\,\mathrm{d}\xi\right)\frac{\partial y}{\partial x}\right]$$

(۲-۲۷)

برای تحلیل این معادلات تغییر شـــکل تیر به صـــورت چندجمله ای های متعامد ویژه در راســـتای x درنظرگرفته شده است:

$$y(x,t) = \sum_n q_n(t)\phi_n(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L \tag{۲-۲۸}$$

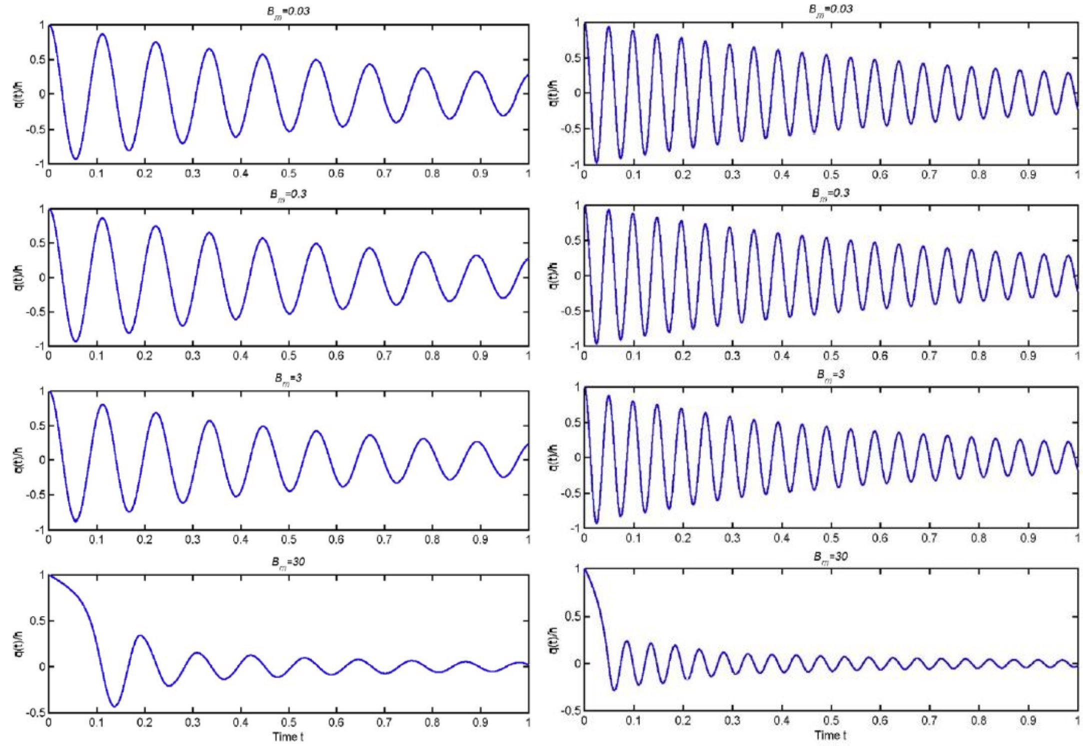
که $\phi_n(x)$ چند جمله ای مشخصه ایست که شرایط مرزی را ارضا می‌کند و بوسیله تابع وزنی $w(x)$ شرط تعامد زیر را ارضا می‌کند:

$$\int_0^L w(x)\phi_k(x)\phi_l(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{if } k \neq l, \\ \alpha_{kl} & \text{if } k = l \end{cases} \tag{۲-۲۹}$$

پس از جایگزاری و حل، دسته ای از معادلات غیرخطی مرتبه دو که به صورت ترکیبی از q_k و مشتقات آن هستند، بدست می‌آیند که به روش رنج‌کوتا قابل حل می‌باشند؛ نیز در حالت ارتعاشات اجباری روش رنج‌کوتا مرتبه چهار برای حل به کار می‌رود.

مساله نمونه حل شده این نوشتار ارتعاشات یک تیر فولادی کم کربن می‌باشد و ارتعاشات آزاد و میراشونده این تیر در حالات تکیه گاهی ساده و گیردار با اثرات مختلف نیروهای محوری، پی کشسان و میدان مغناطیسی بررسی شده است.

نتیجه آنکه با فرض تیر غیرقابل تعمیم، حرکت تیر در میدان مغناطیسی عرضی به سمت میرایی غیرخطی متمایل است که متناسب با مجذور بزرگنمایی و کمی هم کاهش صلبیت سیستم - که به طور خطی وابسته به بزرگنمایی می‌باشد- است. بنابراین تاثیر میدان مغناطیسی تنها کاهش تغییر شکل نیست بلکه فرکانس طبیعی سیستم را هم کاهش می‌دهد.



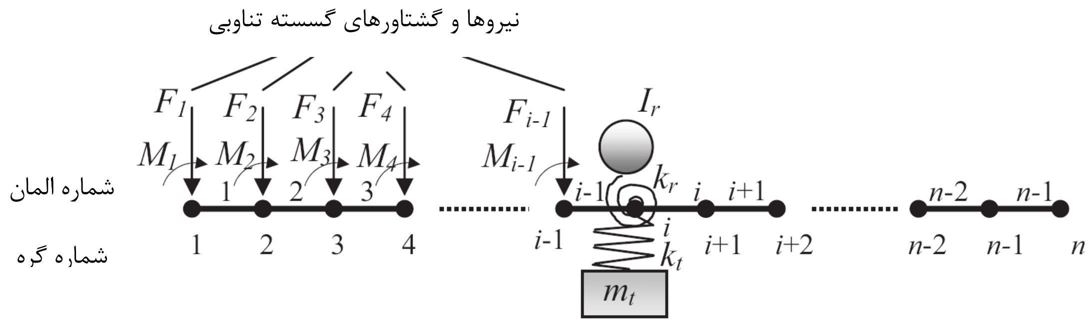
شکل ۲-۸ – تاثیر میدان مغناطیسی بر میرایی سیستم به ازای بزرگنمایی های مختلف میدان (B_m). تیر دو طرف تکیه گاه ساده (سمت چپ) و تیر در دو طرف ثابت (سمت راست)

تحت شـرایط پایدار هنگامیکه پارامترهای غیر تشـدید مدنظر گرفته شـوند، بیشـترین افزایش میدان مغناطیسی، بیشترین جابجایی و کاهش فرکانس طبیعی وجود دارد. ضمنا وقتی نیروی محوری بزرگ می‌شـود، جابجایی افزایش و فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. تاثیر پی کشسان نقش تثبیت کننده کل سیستم را دارد.

۲-۵ - طراحی جاذب ارتعاشـات دینامیکی برای جداسـازی ارتعاش تیرها تحت بارگذاری نقطه‌ای و ممتد.[۲۴]

در این مقاله اثرات یک جاذب ارتعاشی مناسب (یک جاذب دینامیکی ارتعاشات) برای جداسازی ارتعاش تیر تحت بارگذاری نقطه‌ای و ممتد در شرایط مرزی گوناگون بررسی شده است. جاذب دینامیکی متشکل از نوعی جاذب خطی و نوعی جاذب چرخشی است.

در این مقاله مساله به صورت حل عددی (المان محدود) و نیز انجام آزمایش بررسی شده است. مدل اجزای محدود به شکل زیر می‌باشد:



شکل ۲-۹ - مدل اجزای محدود جاذب ارتعاشات دینامیکی

و معادله آن تحت تحریک نیروی خارجی بدین شکل می‌باشد:

$$M\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+Ku(x,t)=f(x,t) \qquad (۲-۳۰)$$

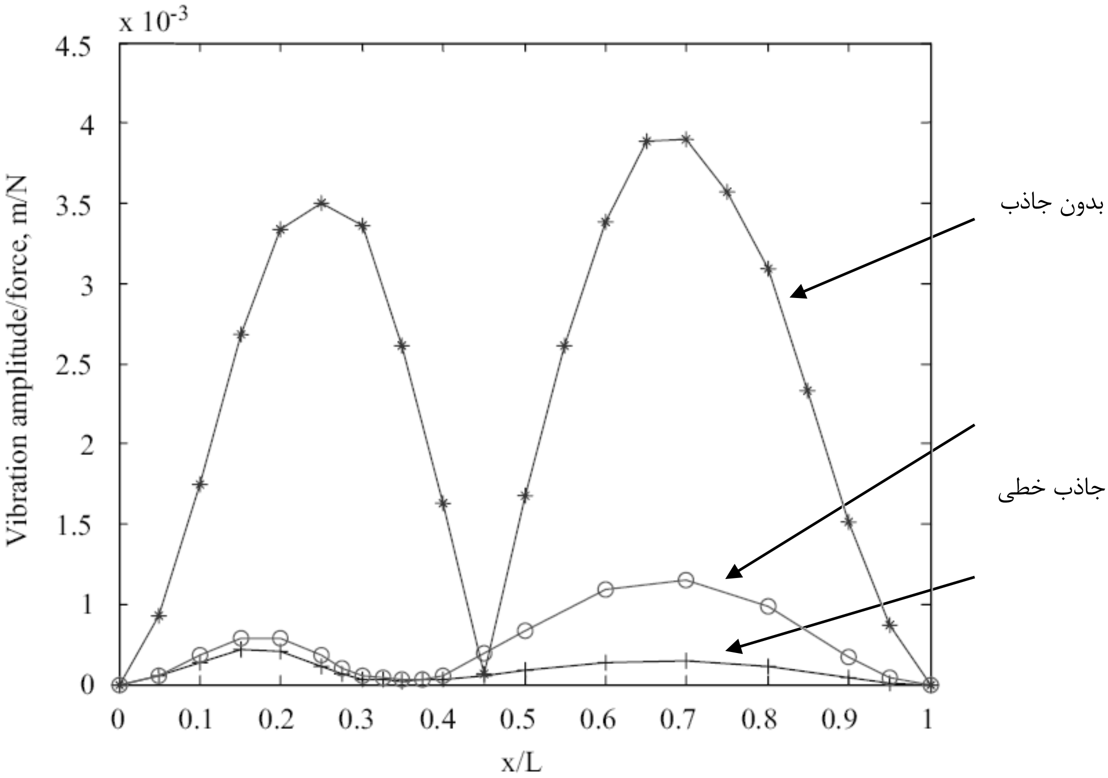
نتایج آزمایش تجربی و نیز حل عددی هر دو بر فرضیات نظری صحه می‌گذارند. نتایج حل عددی در سه حالت:

۱- بدون جاذب ارتعاشی،

۲- جاذب ارتعاش خطی

۳- جاذب ارتعاشی مرکب (خطی و چرخشی)

در شکل زیر نشان می‌دهد که کارآیی جاذب ارتعاشی مرکب در کاهش و جداسازی اندازه ارتعاشات از دو حالت دیگر بهتر است. البته بخشی که انتظار می‌رفت که بدون ارتعاشات باشد دارای ارتعاشاتی با دامنه بسیار کم می‌باشد.



شکل ۲-۱۰ – مقایسه کارآیی جاذب خطی و مرکب و بدون جاذب در کم نمودن دامنه ارتعاشی سیستم

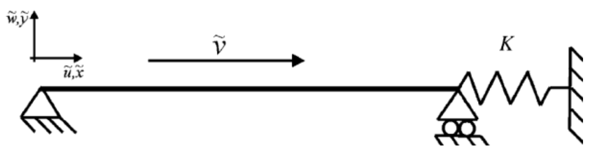
۲-۶ - خواص دینامیکی سیستم‌های رونده محوری[۱۷].[۲۵]

در بسیاری از تولیدات صنعتی اجزای لغزنده‌ای که برای انتقال مواد و نیرو به کار می‌روند در سیستم‌های رونده محوری جای دارند. تسمه و زنجیر متحرک، نوارهای مغناطیسی، اره نواری،

1- Axial Moving Systems

بســته‌بندی‌ها، دســتگاه‌های کاغذگردان برخی نمونه‌هایی هستند که حین انتقال محوری جرم در آنها ارتعاشات عرضی رخ می‌دهد.

در شــکل زیر نمونه آزمایشــی یک ســیســتم تســمه - پولی با کشش ثابت و پولی خارج از مرکز برای شبیه‌سازی قابل استفاده است.



شکل ۲-۱۱ - مدل دینامیکی سیستم تسمه - پولی

معادلات حرکت حاکم به صورت زیر می‌باشد[26,27]:

$$EI\tilde{w}^{\mathrm{IV}} + \rho A\ddot{\tilde{w}}(\tilde{x},\tilde{t}) + 2\rho A\tilde{v}\dot{\tilde{w}}'(\tilde{x},\tilde{t}) + \rho A\tilde{v}^2\tilde{w}''(\tilde{x},\tilde{t}) - \tilde{P}\tilde{w}''(\tilde{x},\tilde{t}) - EA\tilde{w}''(\tilde{x},\tilde{t})\left[\frac{1}{2}\frac{K}{Kl+EA}\int_0^{\ell}\tilde{w}'^2(\tilde{x},\tilde{t})\,\mathrm{d}\tilde{x} + \frac{1}{2}\frac{EA}{Kl+EA}\tilde{w}'^2(l,\tilde{t})\right] = \tilde{f}(\tilde{x},\tilde{t})$$

(۲-۳۱)

شرایط مرزی نیز بدین صورت است:

$$\tilde{w}(0,\tilde{t}) = \tilde{w}_0(\tilde{t}), \quad \tilde{w}(l,\tilde{t}) = 0,$$
$$\tilde{w}''(0,\tilde{t}) = \tilde{w}''(l,\tilde{t}) = 0$$

(۲-۳۲-الف و ب و ج)

معادلات به صـورت بی‌بعد و شـرط مرزی اول به شکل همگن در آورده شده‌اند. دینامیک سیستم‌های رونده محوری به شدت از سرعت محوری تأثیرپذیر است، بویژه پایداری پیکربندی تعادل راست ممکن

است از بین برود و چندگانگی نقاط تعادل ممکن است حین افزایش سرعت محوری زیاد شود، که این مسأله وابسته به مقادیر بحرانی سفتی پیچش و تنش اولیه است.

برای گسســتهسازی مدل و تحلیل عددی میزان جابجایی با استفاده از توابع کامل و شرایط مرزی به صـورت همگن طبق مرجع [۲۶، ۲۷، ۲۸] به صورت زیر در نظر گرفته شده است که خواص همگرایی خوبی دارد:

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{N} q_n(t)\sin\ n\pi x \qquad (۳۳-۲)$$

با استفاده از روش کالرگین[18] معادله دینامیک ابعادی زیر حاصل می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{K}(t)\mathbf{q}=\mathbf{N}(\mathbf{q},\mathbf{t}) \qquad (۳۴-۲)$$

و ثابت می‌شـود که سـیستم فوق همیلتونین[19] است وقتی میرایی و نیروی اجباری وجود ندارد. (ر.ک. ضمیمه [۲۵] صفحه ۶۰۶ الی ۶۰۸). مزیت فرمول‌بندی همیلتونین در این است که با استفاده از روش کالرگین می‌توان به معادلات دیفرانسیلی چندمرتبه‌ای دست یافت.

در این مقاله با بکارگیری سری‌های زمانی غیرخطی، ارتباط ابعادی و افزایش لیاپانوف اندازه‌گیری شده است.

تحلیـل ســـری‌هـای زمانی در حالت پراکنده ثابت می‌کند که بوســـیله مدل ابعادی کوچکی می‌توان معادلات اساسی دینامیکی را استخراج نمود. نهایتاً با تحلیل اطلاعات تجربی، برای بهبود اساسی، نحوه پردازش اطلاعات باید به روش‌های فیلترسازی غیرخطی بر پایه فنون جاسازی[20] سوق داده شود.

به طور خاص، پاســخهای تحت هارمونیک ســـیســـتمهای رونده محوری پراکنده از مدل یک بعدی و پاسـخهای شـبه تناوبی از مدل دو بعدی استنتاج می‌گردند؛ برعکس، پاسخهای تصادفی به یک مدل، گسیخته ابعادی کوچک وابسته اند.

18- Galerkin
19- Hamiltonian
20- Embeding

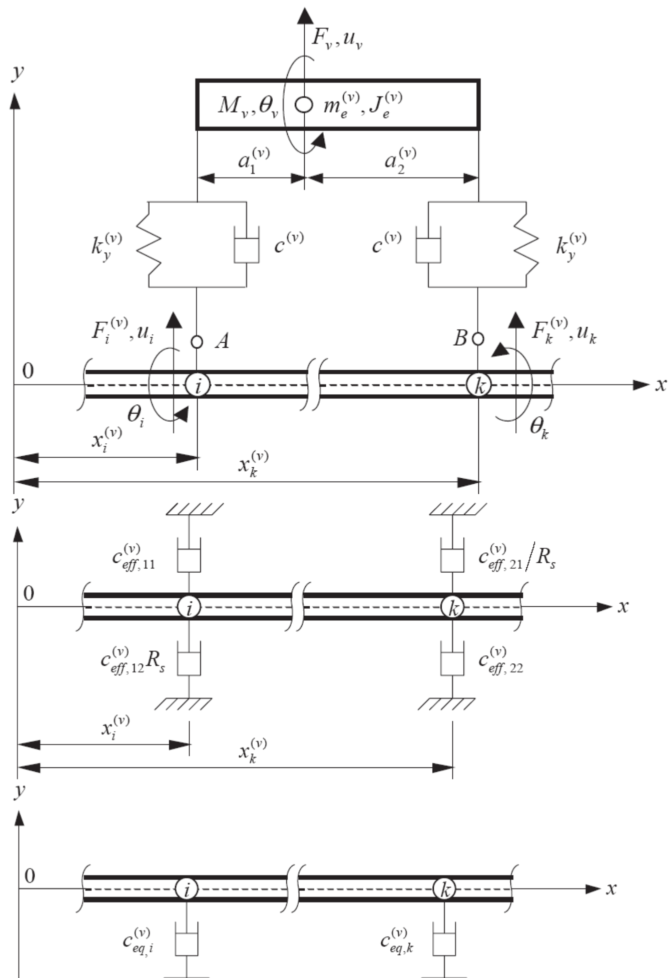
۲-۷ - روش اســتفاده از دمپر معادل جهت تحلیل ارتعاشات آزاد تیری که چندین سیستم دو درجه آزادی جرم- فنر- دمپر را شامل می‌شود.[۲۹]

موضوع این مقاله جایگزین نمودن اثر سیستم دو درجه آزادی جرم - فنر- دمپر با یک سری دمپرهای معادل می‌باشــد. جهت تایید قابلیت اعتماد نظریه ارایه شــده، تمام نتایج عددی که از روش دمپرهای معادل (EDM) بدســت می‌آید با روش معمول المان محدود (FEM) مقایســه شــده و نتایج قابل قبولی حاصل شده است.

همچنین روش دمپر معـادل انتخـابی متنوع جهـت جاذبهای ارتعاشـــی موثر ارایه می‌دهد، زیرا اثرات میرایی به خواص فیزیکی قطعات سـازنده بستگی دارد (مثل فنرها، دمپرها و جرمهای توده ای) و این مقاله می‌کوشد تا مساله توجه به مواد سازنده را مورد مطالعه قراردهد.

در این مقاله هر سـیستم دو درجه آزادی جرم - فنر- دمپر با چهار دمپر موثر و نهایتا یک جفت دمپر معادل جایگزین شده است.(شکل ۲-۱۲)

الف



ب

شکل ۲-۱۲ – الف- سیستم دو درجه آزادی جرم- فنر- دمپر، ب- سیستم معادل آن با ۴ دمپر موثر، ج- سیستم معادل آن با یک جفت دمپر

معادلات حرکت به روش نیوتن بدست آمده است و جابجایی های u_i, u_k, u_v و چرخش‌ها θ_v و مشتقاتشان برحسب مشتق اول نوشته و مرتب شده اند تا نیروهای وارد بر اجزای i ام و k ام به صورت زیر درآیند:

$$\begin{Bmatrix} F_i^{(v)} \\ F_k^{(v)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{(v)}_{\mathrm{eff},11} & c^{(v)}_{\mathrm{eff},12} \\ c^{(v)}_{\mathrm{eff},21} & c^{(v)}_{\mathrm{eff},22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{u}_k \end{Bmatrix} \tag{۳۵-۲}$$

که ضرایب ماتریس میرایی در مرجع [۲۹] موجود است.

معادله حرکت برای تیر یکنواخت که p تعداد سیستم جرم- فنر- دمپر را شامل است به صورت زیر می‌باشد[۳۰، ۳۱]:

$$EI\,\frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + \bar{m}\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = \sum_{v=1}^{p} F_i^{(v)} \delta(x - x_i^{(v)}) + \sum_{v=1}^{p} F_k^{(v)} \delta(x - x_k^{(v)}) \tag{۳۶-۲}$$

و شکل معادله مقادیر ویژه در روش (EDM) به شکل ماتریسی زیر می‌باشد:

$$([\mathbf{A}] + \bar{\omega}^2[\mathbf{B}])\{\bar{q}\} = 0 \qquad (۳۷-۲)$$

و در روش (FEM) به صورت زیر:

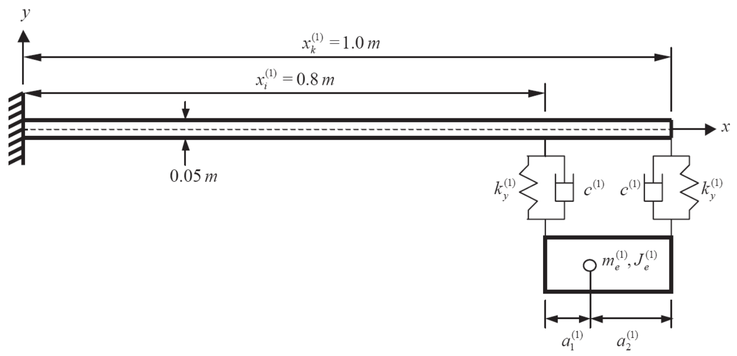
$$[\bar{\mathbf{M}}]\{\ddot{\mathbf{u}}(t)\} + [\bar{\mathbf{C}}]\{\dot{\mathbf{u}}(t)\} + [\bar{\mathbf{K}}]\{\mathbf{u}(t)\} = 0 \qquad (۳۸-۲)$$

که با زیرروال EISPACK [۳۲، ۳۳] حل می‌شـود. اولین پنج مقدار ویژه در جدول زیر نمایش داده شده اند:

جدول ۲-۳ - اولین پنج مقدار ویژه برای مساله نمونه حل شده

Methods	Eigenvalues, $\bar{\omega}_j = \bar{\omega}_{jR} \pm i\bar{\omega}_{jI}$ (rad/s)					CPU time (s)
	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	
[a]FEM	3.2644E−08 ± i141.9957	−6.4717E−08 ± i321.8164	−2.0643E−07 ± i1524.2575	1.9360E−07 ± i3297.6358	−1.3349E−06 ± i4276.0247	2.80
[a]EDM	−2.0654E−09 ± i143.4354	−5.0923E−07 ± i324.3061	−3.0539E−08 ± i1526.9813	−1.9980E−07 ± i3330.0138	−8.5621E−08 ± i4281.0267	1.32
Ref. 34	141.5405	321.3685	1524.3220	3297.6410	4276.0260	—

این مقادیر برای حل مساله نمونه در شکل ۲-۱۳ می‌باشد:



شکل ۲-۱۳ – شکل مساله نمونه جرم- فنر- دمپر که به صورت عددی حل شده است.

روش معادل‌ســـازی دمپر (EDM) از روش المان محدود (FEM) ســـریعتر بوده و مرتبه (order) معادله حرکت در این روش کمتر از (FEM) اسـت؛ مخصـوصـا در ارتعاشات واداشته که زمان بستگی به تعداد گام‌های انتخابی دارد. اثر افزودن ثابت فنر افزایش فرکانس طبیعی سیستم است و افزودن یک سیستم جرم - فنر- دمپر بـه انتهـای آزاد تیر فرکـانس طبیعی آنرا بطور قـابل ملاحظه ای کاهش می‌دهد. با افزودن ضـرایب میرایی نرخ زوال تیر بارگذاری افزایش می‌یابد اما تغییر محسوسی در فرکانس طبیعی ایجاد نمی‌کند. افزودن جرم توده ای کاهش فرکانس طبیعی را به دنبال دارد.

۲-۸ - جداســازی مودهای سازه‌ای با پارامترهای گسسته توسط حسگرهای پلی وینیلیدن دی‌فلوراید(PVDF)[۲۱]. [۳۵]

در بسـیاری از سازه های واقعی مانند پلها یا آسمانخراشها، فرکانس های اساسی ارتعاشی کمتر از یک هرتز هســـتنـد و معمولا جهـت کنترل مود یا مودهایی که از خطرات زلزله جلوگیری می‌کنند، کافی می‌باشند.

در این تحقیق تجربی یک مدل آسمانخراش بیست طبقه مورد بررسی قرار گرفته است که حسگرهای نازک PVDF به صـورت توزیعی به آن متصـل شـده اند. یک تحریک پایه ای بوسیله یک ماشین تکان

1- **Polyvinylidene defluoride (PVDF)**

دهنده به این سـازه در راسـتای x اعمال می‌شـود. فرآیند طراحی حسـگرهای PVDF طوری اسـت که مودهای مهم سیستم را مشاهده کند.

در این مقاله سـه بررسی تحلیلی، عددی و تجربی برای تحلیل مودال جهت طراحی حسگرهای توزیع پذیر بکار می‌رود.

در رهیافت تحلیلی معادله حرکت به صورت زیر می‌باشد:

$$M\ddot{X}+C\dot{X}+KX=Ev \qquad (۳۹-۲)$$

که v ورودی اغتشـاش و E مکان آن می‌باشد. با انتقال مختصات فیزیکی به مختصات مدال با استفاده از تبدیل زیر:

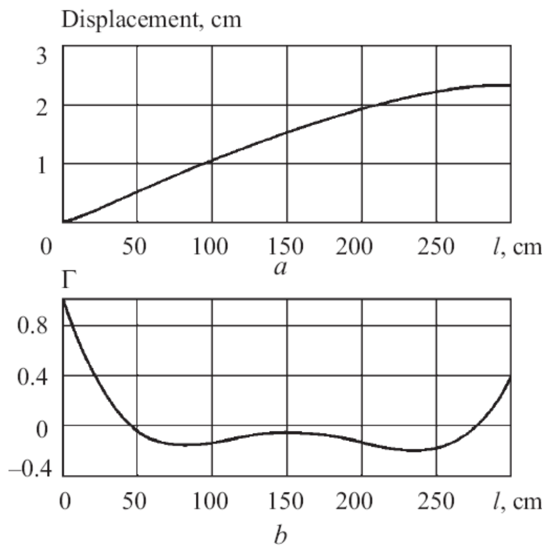
$$X(t)=\Phi\eta(t) \qquad (۴۰-۲)$$

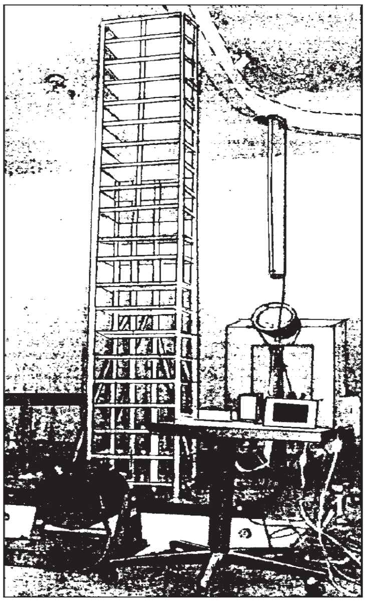
می‌توان معادله مدال را بدین صورت نوشت:

$$\ddot{\eta}+\Lambda\dot{\eta}+\Omega^2\eta=ev \qquad (۴۱-۲)$$

هر بردار مدال در نقاط جرمی بر شکل مود موردنظر عمود است. بنابراین با استفاده از بردارهای مودال می‌توان شـکل حسـگرها را یافت، اما به خاطر مشـکل بودن پیش بینی ضـریب سفتی و میرایی برای ساختمانهای خیلی بلند، رهیافت تحلیل در اینجا برای طراحی شکل حسگرها بکارنمی‌رود.

به روش عددی با اسـتفاده از روش اجزای محدود FEM با شـبکه بندی یک سـانتیمتری و فرض تیر آلومینیومی، مدل تحلیلی اجزای محدود در شکل زیر نشان داده شده است:

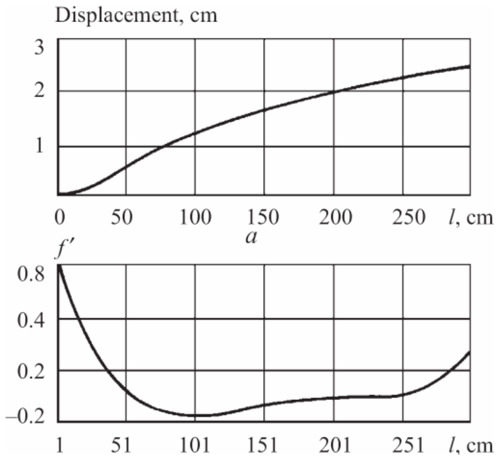




شکل ۲-۱۴ – مدل ساختمان بلند جهت قرار دادن حسگرهای PVDF (راست)

شکل مودها و نیروی وارده که توسط روش اجزای محدود بدست آمده است. (چپ)

به روش تجربی (شکل ۲-۱۴ راست) ساختمانی با ارتفاع سه متر که در هر ۱۵ سانتیمتر یک جرم قرار داده شده است و در هر یک سانتیمتر جابجایی اندازه گیری می‌شود، شکل مودها با اندازه گیری حسگرهای PVDF به شکل زیر می‌باشد:

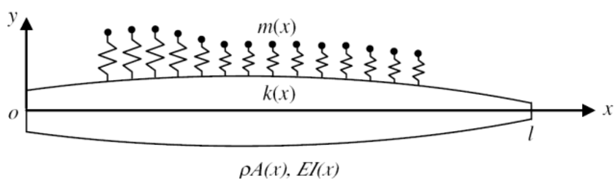


شکل ۲-۱۵ - شکل مودها و نیروی اندازه گیری شده توسط حسگرهای PVDF

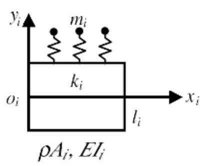
همانگونه که مشـاهده می‌گردد شـکل بدست آمده از روش عددی و تجربی تقریبا یکسانند و برای طراحی یک حسگر مودال اولین گام ساخت یک سازه هوشمند می‌باشد و نتیجه آنکه استفاده از حسگرهای نازک PVDF به صورت توزیعی دستاورد خوبی است تا به جای حسگر مودال استفاده شوند.

۲-۹ - مشخصه‌های دینامیکی تیر و سیستم ممتد جرم- فنر.[۳۶]

در این مقاله تیری با سـطح مقطع متغیر به همراه سـیسـتم جرم - فنرهای ممتد در نظر گرفته شده است.(شکل زیر)



الف



ب

شکل ۲-۱۶ - الف- تیر با سطح مقطع متغیر و جرم - فنرهای توزی شده در طول آن، ب- مدل جز کوچک آن

معادله دیفرانسیل حاکم بر یک جز کوچک به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{d^4 Y_i}{d\xi_i^4} - \lambda_i^4 \left[1 + \frac{\mu_i}{1 - (\omega/\bar{\omega}_i)^2}\right] Y_i = 0, \quad 0 < \xi_i < 1 \qquad (۲-۴۲)$$

با اســتفاده از ماتریس‌های تبدیل و اعمال شــرایط مرزی معادله مشــخصــه ســیستم در سه حالت زیر بدست می‌آید:

الف- ارتعاش آزاد تیر خالی

$$(\omega/\bar{\omega}_i)^2 > 1 + \mu_i \text{ or } (\omega/\bar{\omega}_i)^2 < 1 \qquad (۲-۴۳\text{-الف})$$

ب- حل همگن تیر استاتیکی روی پی کشسان

$$1 < (\omega/\bar{\omega}_i)^2 < 1 + \mu_i \qquad (۲-۴۳\text{-ب})$$

ج- حل همگن تیر استاتیکی

$$(\omega/\bar{\omega}_i)^2 = 1 + \mu_i \qquad (۲-۴۳\text{-ج})$$

نتایج تحلیل اولیه نشـــان می‌دهد که کوپلینگ ارتعاشـــات تیر و جرم - فنر ممتد در مرتبه‌های پایین جفتهای فرکانســـی، مخصـــوصـــا در جفت فرکانس اول، اتفاق می‌افتد، یعنی در مرتبه های بالا، تیر و سیستم جرم - فنر به طور مستقل در فرکانس‌های طبیعی خودشان ارتعاش می‌کنند.

در بخش بعد بررســـی پارامتری موضـــوع مطرح می‌گردد. در این بخش تیر و جرم - فنرهای ممتد به گروه‌هایی تقسیم‌بندی شده و در هر گروه فرکانس‌های طبیعی کوپلینگ و تاثیر کم و زیاد نمودن جرم - فنرهای ممتد و همچنین تأثیر نسبت جرم و سفتی فنر بررسی می‌گردد؛

و در بخش نهایی بررسی روی سیستم جرم - فنرهای ممتد و یکنواختی است که هر بار روی ۲ قطعه، ۳ قطعه و بیشتر، روی تیر اعمال می‌شوند. برخی نتایج این مقاله بدین شرح می‌باشند:

در هر جز شـکل مود جرم- فنر یکنواخت شـبیه شـکل مود تیر می‌باشـد؛ هرچند که امکان دارد اگر فرکانسهای طبیعی جرم- فنر در دو جز متفاوت باشند، شکل مود آن بین دو جز ناپیوسته باشد.

یک تیر با *n* تعداد جز جرم- فنر ممتد و *n* فرکانس طبیعی را می‌توان تقریبا با یک سـری سـیسـتم *n+1* درجه آزادی تخمین زد.

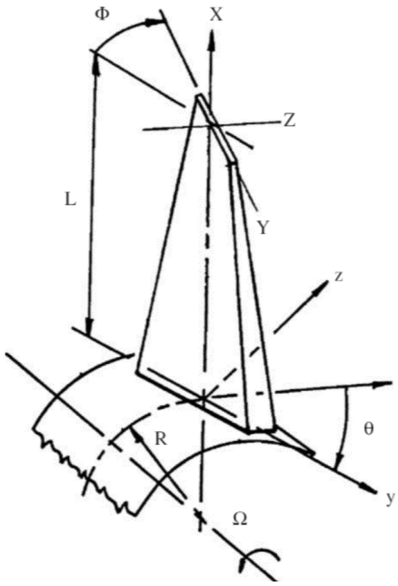
n تعداد جرم- فنر گسـسـته (یک سـیسـتم جرم- فنر ممتد) که به طور موازی به پایه جرم- فنرهای ممتد متصـل شـده اند، یک تیر را نشـان می‌دهد. بدینوسیله اصول نظریه ای برای تبدیل سیستمی با جرم- فنرهای ممتد به چندین سیستم گسسته مهیا می‌گردد. این نتیجه جهت ساده سازی و مطالعه سازه های مهندسی روشی قابل استفاده می‌باشد.

حل نیرو سیستم جرم- فنر ممتد قابل استفاده جهت مساله های دیگری نیز هست که از آن جمله تیر با پی کشسان و تیر با جرم صلب توزیعی می‌باشد.

۲-۱۰ - پیش‌بینی ارتعاشات تیرهای چرخشی میراشده با پیش‌تاب دلخواه.[۳۷]

تیرهـای چرخشـــی اهمیت بســـزایی در کاربردهای اجرایی از جمله پره های توربین، پره های روتور چرخبال، پروانه هواپیما و بازوی رباتها دارند.

در این مقاله ارتعاشات تحت میرا و ناپایداری تیر چرخشی با پیش تاب دلخواه، که بن آن با پی کشسان محدود شده بررسی شده است. مختصات و هندسه این تیر در شکل زیر نمایش داده شده است:



شکل ۲-۱۷ - پره توربین با پیش‌تاب که توسط تیری که بن آن پی کشسان است مدل شده است.

سرعت گردشی این تیر ثابت می‌باشد. پس از نوشتن معادلات حرکت و اعمال شرایط مرزی حرکت به دو بخش تناوبی و غیر تناوبی تقسیم شده است.

در حرکت تناوبی روابط مابین ضریب میرایی و نرخ زوال مودها، تعیین فرکانس حرکت و ارتباط آن با ضریب میرایی و اینرسی گردشی بررسی می‌شوند. در حرکت غیرتناوبی پایداری و عدم پایداری سیستم بررسی می‌شود. در این مطالعه اگر نرخ زوال بزرگتر از صفر شود سیستم پایدار است و اگر ضریب میرایی به سمت مقدار بحرانی خود افزایش یابد، فرکانس طبیعی میراشونده به سمت صفر می‌رود.

اگر فرکانس طبیعی میرایی برابر صـفر شـود و نرخ زوال کمتر از صفر، ناپایداری در واگرایی تیر تحت میرا رخ می‌دهد. به عبارت دیگر این ناپایداری وقتی رخ می‌دهد که ضـــریب ارتجاعی در بن تیر قابل چرخش یا انتقال، کمتر از مقدار بحرانی شود.

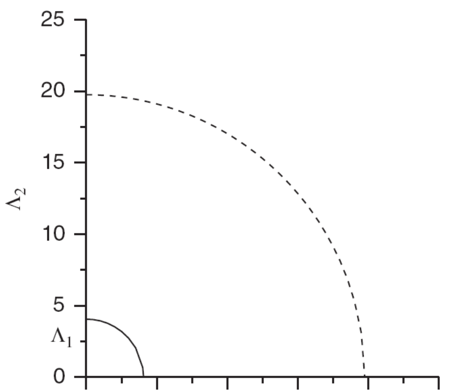
جدول ۲-۴ - فرکانس طبیعی میراشونده دو تیر پیش‌تابیده رایلی با زاویه های پیش‌تاب و نشست مختلف

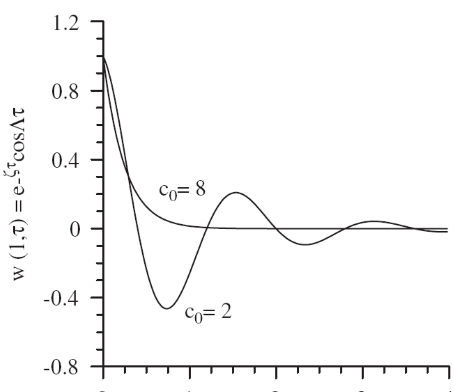
اولی به روش عددی ارایه شده و دومی به روش سیستمهای معمول

Φ (deg.)	$\theta_b = \theta_a$ (deg.)	$\Lambda_{b,1}$	$\bar{\Lambda}_{b,1}$	$\Lambda_{b,2}$	$\bar{\Lambda}_{b,2}$
5	0	3.8107	3.8107	21.7533	21.7533
	30	3.8105	3.8105	21.7754	21.7754
	60	3.8101	3.8101	21.8187	21.8187
	90	3.8099	3.8099	21.8399	21.8399
15	0	3.7176	3.7176	20.6714	20.6714
	30	3.7185	3.7185	20.8410	20.8410
	60	3.7203	3.7203	21.1867	21.1867
	90	3.7211	3.7211	21.3628	21.3628
25	0	3.5825	3.5825	18.8823	18.8823
	30	3.5852	3.5852	19.2392	19.2392
	60	3.5903	3.5903	20.0111	20.0111
	90	3.5927	3.5927	20.4287	20.4287

$\eta_a = 0.001,\ c_{0,a} = 0.01,\ c_{0,b} = 0.01,\ \alpha = 0.1,\ r = 0.1,\ B_{yy} = (1-0.1\xi)\cos^2\Phi\xi + 1000(1-0.1\xi)^3\sin^2\Phi\xi,\quad B_{zz} = 1000(1-0.1\xi)^3\cos^2\Phi\xi + (1-0.1\xi)\sin^2\Phi\xi,\ B_{yz} = (500(1-0.1\xi)^3 - 0.5(1-0.1\xi))\sin 2\Phi\xi.$

نتایج عددی نشـان می‌دهد که با افزایش زاویه نشـسـت فرکانسها افزایش می‌یابد. دو فرکانس و رابطه بین میرایی دو تیر پیش تابیده رایلی[۲۲] گردشـی در جدول فوق آمده اسـت. در شکل زیر تاثیر ضریب میرایی بر مقدار ویژه در تیر باریک پیش‌تابیده بدون در نظرگرفتن اینرسـی گردشـی نشـان داده شده است؛ افزایش ضریب میرایی، فرکانسهای اصلی را کاهش می‌دهد.





شکل ۲-۱۸ – تاثیر ضریب میرایی بر مقدار ویژه در تیر باریک با پیش‌تاب ____ برای مود اول --- برای مود دوم

الف- برای ضریب میرایی کوچک، ب- برای ضریب میرایی بزرگ

نتیجه دیگر این مطالعه آن است که تاثیر زاویه پیش‌تاب بر روی میرایی بحرانی و فرکانسها بسیار زیاد است. افزایش سرعت چرخش میرایی بحرانی را افزایش می‌دهد.

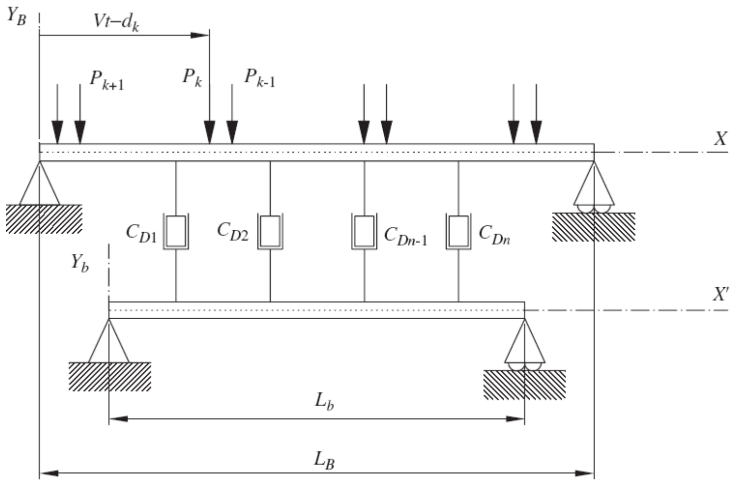
۲-۱۱ - کنترل ارتعاشات تیر با تکیه‌گاه ساده که تحت بارهای رونده قرار دارند با استفاده از دمپرهای لزج سیال[۲۳].[۳۸]

در این مقاله کاهش ارتعاشات تشدید در تیرهای با تکیه‌گاه ساده مانند پل‌های راه‌آهن بررسی می‌شود که علت آن افزایش ســـرعت در خطوط جدید و اســـتفاده مجدد از خطوط قدیمی جهت کاربردهای ترابری است. سیستم پخش نیرو از دو قسمت که به تیر متصل می‌شود تشکیل می‌شود:

۱- تیر کمکی با تکیه‌گاه ساده که زیر قسمت اصلی تیر جای داده می شود.

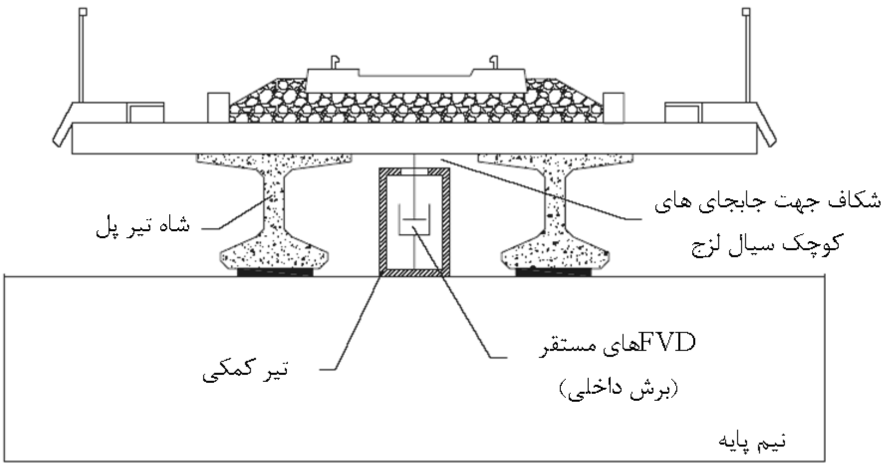
23- Fluid Viscous Dampers

۲- تعدادی FVD (دمپرهای لزج سـیال) که به تیر متصل می‌شود که اتصال، رابط حرکات عمودی تیر اصلی و کمکی با یکدیگر می‌باشند. (شکل ۲-۱۹):



شکل ۲-۱۹ – مدل تیر پل راه‌آهن (در زیر پل تیر کمکی به همراه دمپرهای لزج سیال می‌باشد)

در شـــکل زیر پیکربندی ممکن تیر کمکی و دمپرهای متصـــل به آن در یک ریل تک از خطوط پل راه‌آهن نشان داده شده است.



شکل ۲-۲۰ - پیکربندی تیر کمکی و دمپرهای لزج سیال در یک تک ریل پل راه‌آهن

معادلات حرکت برای تیر ساده تحت بارهای رونده (با چشم‌پوشی از اثر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی و در نظر گرفتن تقارن در مقطع ۷) به شکل زیر است:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=q(x,t) \qquad (۲-۴۴)$$

با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های سینوسی n امین فرکانس تیر به شکل زیر درمی‌آید:

$$\omega_n=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{m}} \qquad (۲-۴۵)$$

معادلات حرکت حاکم بر تیر کمکی و FVDهای متصله (N_D تعداد آنها را نشان می‌دهد) نیز به شکل زیر می‌باشد:

$$\ddot{\xi}_n^B(t)+2\zeta_n^B\omega_n^B\dot{\xi}_n^B(t)+\left(\omega_n^B\right)^2\xi_n^B(t)=\frac{-2}{m_BL_B}\sum_{i=1}^{N_D}\left[\sin\frac{n\pi\, x_{Di}}{L_B}\,C_{Di}\,\dot{y}_{\mathrm{rel},i}(t)\right]+f_n(t),$$

$$\ddot{\xi}_n^b(t)+2\zeta_n^b\omega_n^b\dot{\xi}_n^b(t)+\left(\omega_n^b\right)^2\xi_n^b(t)=\frac{2}{m_bL_b}\sum_{i=1}^{N_D}\left[\sin\frac{n\pi\, x'_{Di}}{L_b}\,C_{Di}\,\dot{y}_{\mathrm{rel},i}(t)\right], \qquad (۲-۴۶)$$

$$\dot{y}_{\mathrm{rel},i}(t)=\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{mod}}^B}\sin\frac{j\pi\, x_{Di}}{L_B}\,\dot{\xi}_j^B-\sum_{j=1}^{N_{\mathrm{mod}}^b}\sin\frac{j\pi\, x'_{Di}}{L_b}\,\dot{\xi}_j^b, \qquad (۲-۴۷)$$

$$f_n(t)=-\frac{2}{m_BL_B}\sum_{k=1}^{N_P}\left(H\left(t-\frac{d_k}{V}\right)-H\left(t-\frac{d_k+L_B}{V}\right)\right)P_k\sin\frac{n\pi(Vt-d_k)}{L_B} \qquad (۲-۴۸)$$

در این مقاله، تأکید بر کاهش پاسخ تشدید در تیر اصلی می‌باشد، بنابراین سیستم تحت بارهای گوناگون تناوبی تحلیل می‌گردد. در برخی کاربردهای خاص، تشدید با بارهای ثابت گذرنده رخ می‌دهد و این مشکل نوعی پل‌هایی است که از آنها قطارهای سریع می‌گذرند.

حداکثر بزرگنمایی تشدید به طور یکنواخت با ξ_D (نسبت میرایی مکمل) کاهش می‌یابد تا به مقدار حداقل خود برسد. و اگر ثابت دمپر مساوی صفر شود هیچ واکنشی بین دو تیر انجام نمی‌شود.

وقتی فرکانس‌های اصلی دمپر برابر شوند (η=1 نسبت فرکانسی) حداکثر پاسخ رخ می‌دهد. می‌توان مقادیر بهینه دمپر را از رابطه زیر باری مقاصد مختلف از جمله حرکت قطارهای سریع‌السیر بدست آورد.

$$\zeta^*_{D,A} = \frac{(\eta^2 - 1)\mu}{\sqrt{4 + 6\mu + 2\mu^2 + 2\mu\eta^2 + 3\mu^2\eta^2 + \mu^3\eta^2}},$$

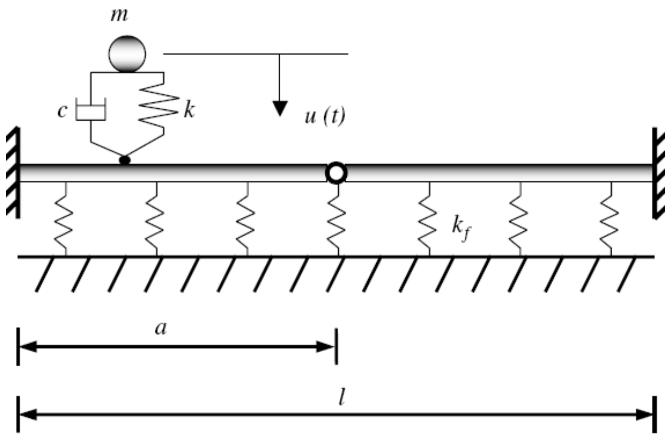
$$\zeta^*_{D,a} = \frac{(\eta^2 - 1)\mu}{\sqrt{4 + 2\mu + 6\mu\eta^2 + 3\mu^2\eta^2 + 2\mu^2\eta^4 + \mu^3\eta^4}} \qquad (۴۹-۲)$$

در نتیجه با تحلیل عددی درمی‌یابیم که پاسخ سیستم بدون رسیدن به حداکثر ظرفیت دمپر یا حداکثر نقش تسلیم تیرها می‌باشد و مقادیر بهینه‌ای از FVDها می‌توان بدست آورد که تشدید تیر اصلی (پل) را به حداقل می‌رسانند. نتایج این مقاله قابل استفاده برای سازه‌هایی است که اساساً رفتار تیر با تکیه‌گاه ساده دارند و برای ارتعاشات پیچشی یا رفتارهای سه‌بعدی پیچیده بایست مدل متفاوتی در نظر گرفت.

۲-۱۲ - تحلیل ارتعاش تیری با یک لولای میانی که نیروی تصادفی رونده با یک ارتعاشگر به آن اعمال می‌شود.[۳۹]

تحلیل ارتعاشات تیر با یک لولای داخلی، که یک اسیلاتور حرکت تصادفی بر آن اعمال می‌شود. تیر مورد نظر نیز دو سر گیردار با یک لولا در بین آن و پی ارتجاعی ممتد است که در نقطه‌ای از آن یک

اســیلاتور حرکت تصادفی متشکل از جرم - فنر - دمپر (با مقادیر اتفاقی) و سرعت و شتاب (تصادفی) بر آن اعمال می‌شود.



شکل ۲-۲۱ - تیر دو سر گیردار با لولای داخلی و پی کشسان تحت حرکت تصادفی

از این مدل می‌توان جهت شبیه‌سازی جاده، خودرو (قطار، ریل) و پی آن استفاده نمود.

معادله حرکت، معادله مشـخصـه، مقادیر ویژه و شـکل مودها محاسـبه شـده‌اند (آنالیز مودال و روش کالرگین Galerkin). معادله حرکت بدین شکل است:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4}+\rho\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2}+\zeta\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}+k_f w(x,t)=F(w,x,t) \qquad (۵۰-۲)$$

ارتعاشات یک بعدی سیستم با تیر یکنواختی که نیروی خارجی *F(w,x,t)* ، به خاطر عبور یک خودرو با سرعت متغیر، مدل شده است:

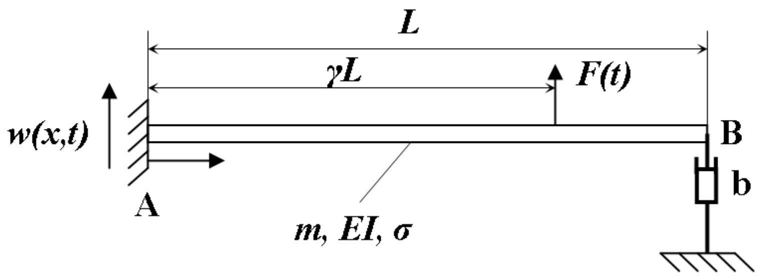
$$F(w,x,t)=f(w,t)\delta(x-\xi(t))W(t,t_f) \qquad (۵۱-۲)$$

روش بهبود یافته Perturbation برای حل معادلات دیفرانسـیل کوپل شـده حرکت با مقادیر تصـادفی (تعیین مشخصه‌های آماری خیز تیر) (توسط Muscolino) در نظر گرفته شده است که یک روش المان محدود آماری جهت تحلیل دینامیکی سیستم‌های خطی است.

نتایج این حل با شـبیه‌سـازی Monte Carlo مقایسه شده‌است. این نتایج جهت تعیین ایمنی و قابلیت اعتماد در تخمین سازه‌ها نقش مهمی ایفا می‌نماید (که به نظر بهتر از نتایج شبیه‌سازی Monte Carlo می‌باشند).

۲-۱۳ - پاسخ دینامیکی تیر یک سر گیردار با میرایی لزج که در انتهای آن یک دمپر وجود دارد.[۴۰]

در این مقاله تیر مورد نظر یک تیر اولر- برنولی[۲۴] است. منظور از تیر لزج وجود لزجت با ضریب میرایی σ تعمیم یافته در طول تیر می‌باشد، که لزجت آن با دمپر انتهایی میرا می‌شود.



شکل ۲-۲۲ - تیر لزج یک سرگیردار با دمپر انتهایی

۱- ر.ک. فصل اول، صفحه ۶ و ۷

به خاطر وجود نیروهای لزج میراشـونده از متغیرهای مختلط استفاده شده و جابجایی جانبی *w(x,t)* را بخش حقیقی مقدار مختلط *z(x,t)* در نظر گرفته شده است. معادله حرکت به شکل زیر می‌باشد:

$$m\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(EI\frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2})+\sigma\frac{\partial z(x,t)}{\partial t}=0 \quad (۵۲-۲)$$

برای حل معادله فوق حلی به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$z(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty} Z_s(x)\eta_s(t) \quad (۵۳-۲)$$

در این مساله شرایط مرزی عبارتند از:

$$z(0,t)=z'(0,t)=z''(L,t)=0 \quad (۵۴-۲)$$

$$EIz'''(L,t)=b\dot{z}(L,t) \quad (۵۵-۲)$$

برای حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها پاسخ به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$z(x,t)=Z(x)e^{\lambda t} \quad (۵۶-۲)$$

معادله مشخصه سیستم، دترمینان ماتریس زیر می‌باشد:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ e^{\bar{\beta}} & e^{-\bar{\beta}} & -e^{i\bar{\beta}} & -e^{-i\bar{\beta}} \\ (-1-\mu)e^{\bar{\beta}} & (1-\mu)e^{-\bar{\beta}} & (i-\mu)e^{i\bar{\beta}} & (-i-\mu)e^{-i\bar{\beta}} \end{vmatrix}=0 \quad (۵۷-۲)$$

با حل معادله فوق مقادیر ویژه بدست می‌آید. اولین و دومین شرط تعامد نیز به شکل زیر درمی‌آیند:

$$(\omega_m+\omega_n)\int_0^L mZ_mZ_n dx-bZ_m(L)Z_n(L)=0 \quad (۵۸-۲)$$

برای تعیین پاسخ فرکانسی سیستم، تیر با نیروی F(t) که در فاصله **γ**L از لبه گیردار برآن وارد می‌شود، تحریک می‌گردد.

با مســاوی صـفر قرار دادن دترمینان ماتریس سفتی دینامیکی سیستم مشخصه های ارتعاشی سیستم بدســت می‌آید. (تحت میرایی و فوق میرایی همزمان کجا اتفاق می‌افتند) و در مختصات اصلی شرایط تعامد، معادلات حرکت را جداسازی (Decoupling) می‌کند.

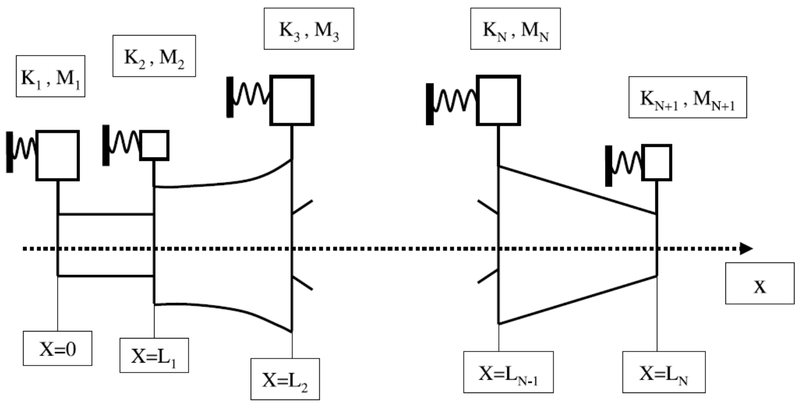
تابع پاسخ فرکانسی مختلط توسط فرمول بندی ماتریس کاهشی (Receptance) بدست آمده است:

$$\mathbf{H}(\Omega)=\mathbf{diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2+\mathrm{i}\sigma\Omega-\Omega^2}\right)\left[\mathbf{I}-\frac{\mathbf{a}(L)\mathbf{a}^{\mathrm{T}}(L)\mathbf{diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2+\mathrm{i}\sigma\Omega-\Omega^2}\right)}{\frac{mL}{\mathrm{i}d\Omega}+\mathbf{a}^{\mathrm{T}}(L)\mathbf{diag}\left(\frac{1}{\omega_i^2+\mathrm{i}\sigma\Omega-\Omega^2}\right)\mathbf{a}(L)}\right] \quad (۲-۵۹)$$

جهت تحلیل دینامیکی در حوزه زمان تابع پاسـخ ضـربه سـیستم بدست آمده است. با حل یک نمونه مسـاله مقدار مرزی (BVP) می‌توان رهیافتهای اسـتفاده شـده در این مقاله و حل عددی را مقایســه و تصدیق نمود.

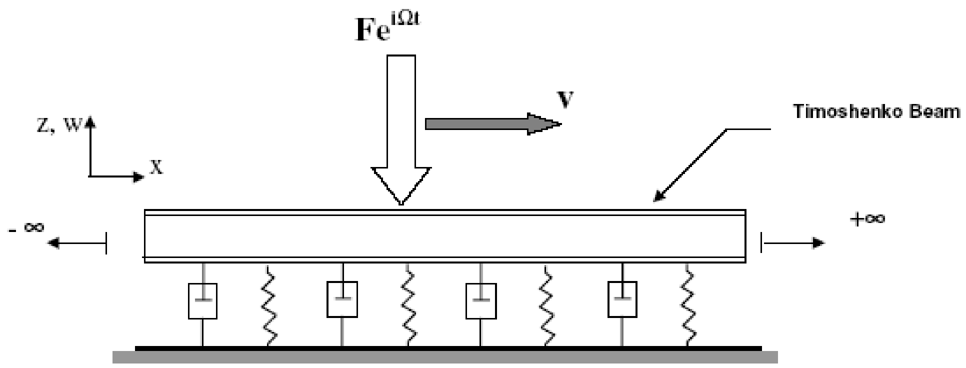
۲-۱۴ -تحلیل *n* گامه تیر رایلی با سطح مقطع هندسی پیچیده.[۴۱]

تیر مورد نظر در انتها متصل به یک جرم متمرکز و فنر می‌باشد:



شکل ۲-۲۳ - تیر رایلی با سطح مقطع هندسی پیچیده که به هر جز آن یک جرم و فنر متصل است.

با تقسیم آن به n قسمت و اینکه انتهای هر قسمت به یک جرم و فنر متصل است ارتعاشات طولی آن بررسی می‌شود و معادله حرکت از روش همیلتون به صورت زیر می‌باشد:



$$\rho(x)A(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial x}\left[E(x)A(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho(x)v^2(x)I(x)\frac{\partial^3 u}{\partial t^2\partial x}\right]=F(x,t) \qquad (۲-۶۰)$$

مقادیر ویژه برای دو تیر با سطح مقطع باریک شونده و سطح مقطع توانی، و تعامد توابع ویژه با استفاده از تابع سبز (Green) بدست آمده است.

۲-۱۵ - پاسخ تیرها روی پی ویسکوالاستیک غیرخطی به بارهای رونده هارمونیک.[۴۲]

در این مقاله پاسـخ تیرهای نامتناهی که پی آنها ویسکوالاستیک غیرخطی است با روش مستقیم حل پیشرو در حوزه فرکانس مطالعه شده‌اند که در مهندسی ریل کاربرد دارد. (شکل ۲-۲۴)

شکل ۲-۲۴ - تیر تیموشنکو روی پی ویسکوالاستیک غیرخطی تحت بار رونده هارمونیک

معادلات حرکت با اســتفاده از اصـل همیلتون و بکارگیری فرضـیه تیر تیموشنکو بدین صورت بدست می‌آید:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + k^* AG\left(\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\right) + P_{\mathrm{f}}(x,t) = -F\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\delta(x - vt), \qquad (۲-۶۱)$$

$$EI \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} - k^* AG\left(\phi(x,t) - \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right) = \rho I \frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} \qquad (۲-۶۲)$$

P_f نیروی القا شده توسط پی بر واحد طول تیر را نشان می‌دهد که برای پی غیرخطی بدین صورت در می‌آید:

$$P_{\mathrm{f}}(x,t) = k_{\mathrm{L}} w(x,t) + k_{\mathrm{NL}} w^3(x,t) + c\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} \qquad (۲-۶۳)$$

با استفاده از روش اغتشاش لیندستد - پونکار پاسخ تیر اینگونه بدست آمده است:

$$w^*(x,t) = w_0^*(x,t) + w_1^*(x,t)\varepsilon + w_2^*(x,t)\varepsilon^2 + \cdots, \qquad (۲-۶۴)$$

$$\phi(x,t) = \phi_0(x,t) + \phi_1(x,t)\varepsilon + \phi_2(x,t)\varepsilon^2 + \cdots \qquad (۲-۶۵)$$

برای یافتن پاسخ حالت ماندگار تیر تبدیل هم رتبه گالیله بکار رفته‌است:

$$s = x - vt \qquad (۲-۶۶)$$

شرایط مرزی تیر بی نهایت به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{cases} \mathrm{Limit}_{s\to\pm\infty} w_{\mathrm{st}}(s) = \mathrm{Limit}_{s\to\pm\infty} \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{st}}(s)}{\mathrm{d}s} \\ \qquad = \mathrm{Limit}_{s\to\pm\infty} \frac{\mathrm{d}^2 w_{\mathrm{st}}(s)}{\mathrm{d}s^2} = 0 \\ \mathrm{Limit}_{s\to\pm\infty} \phi_{\mathrm{st}}(s) = \mathrm{Limit}_{s\to\pm\infty} \frac{\mathrm{d}\phi_{\mathrm{st}}(s)}{\mathrm{d}s} = 0, \end{cases}$$

(۶۷-۲)

با اســتفاده از تبدیل فوریه مختلط و انتگرال کانولوشن، توابع سبز بدست می‌آیند که ضرایب این توابع برای تیرهای تیموشنکو و اولر- برنولی محاسبه و در جدولی تنظیم شده‌اند.

با استفاده از قضیه مقدار مانده‌ها می‌توان معادله حرکت را به شکل زیر نوشت:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + c\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + k_{\mathrm{L}} w(x,t) + k_{\mathrm{NL}} w^3(x,t) = -F\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}\delta(x - vt) \quad (۶۸\text{-}۲)$$

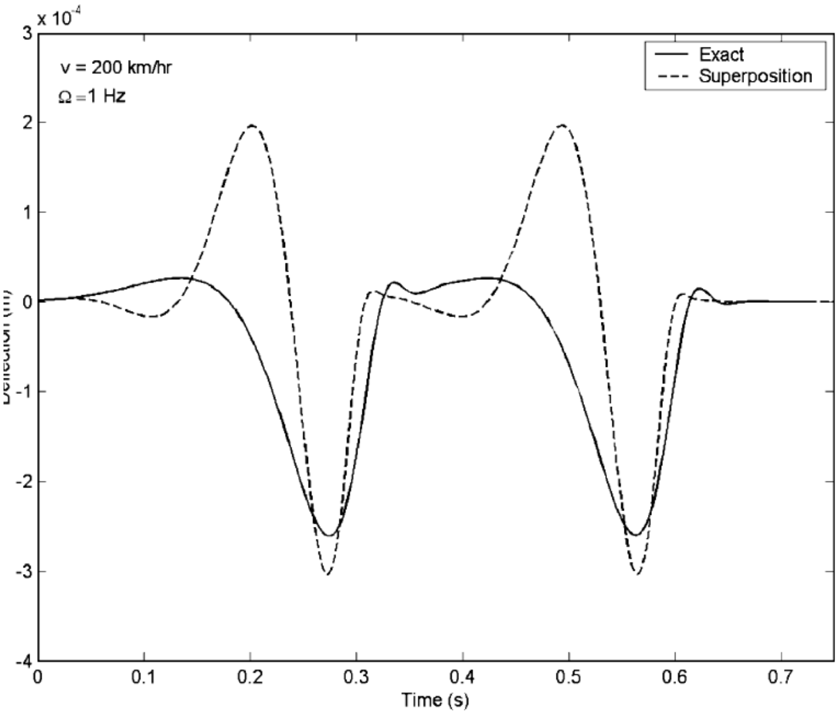
نتایج عددی با استفاده از خواص فیزیکی و هندسی ریلی که در جدول زیر لیست شده‌اند.

جدول ۲-۵ - خواص فیزیکی و هندسی جاده و ریل UIC60، [۴۳، ۴۴]

Item	Notation	Value
Rail		
Young's modulus (steel)	E	210 GPa
Shear modulus (steel)	G	77 GPa
Mass density	ρ	7850 kg/m^3
Cross sectional area	A	7.69×10^{-3} m^2
Second moment of area	I	30.55×10^{-6} m^4
Shear coefficient	k^*	0.40
Foundation		
Equivalent linear		
Stiffness	k	138.60 MN/m^2
Viscous damping	c	1732.50 kN s/m^2
Nonlinear		
Stiffness (linear part)	k_{L}	35.03 MN/m^2
Stiffness (nonlinear part)	k_N	4.01×10^8 MN/m^4
Viscous damping	c	1732.50 kN s/m^2
Moving load		
Load	F	65 kN

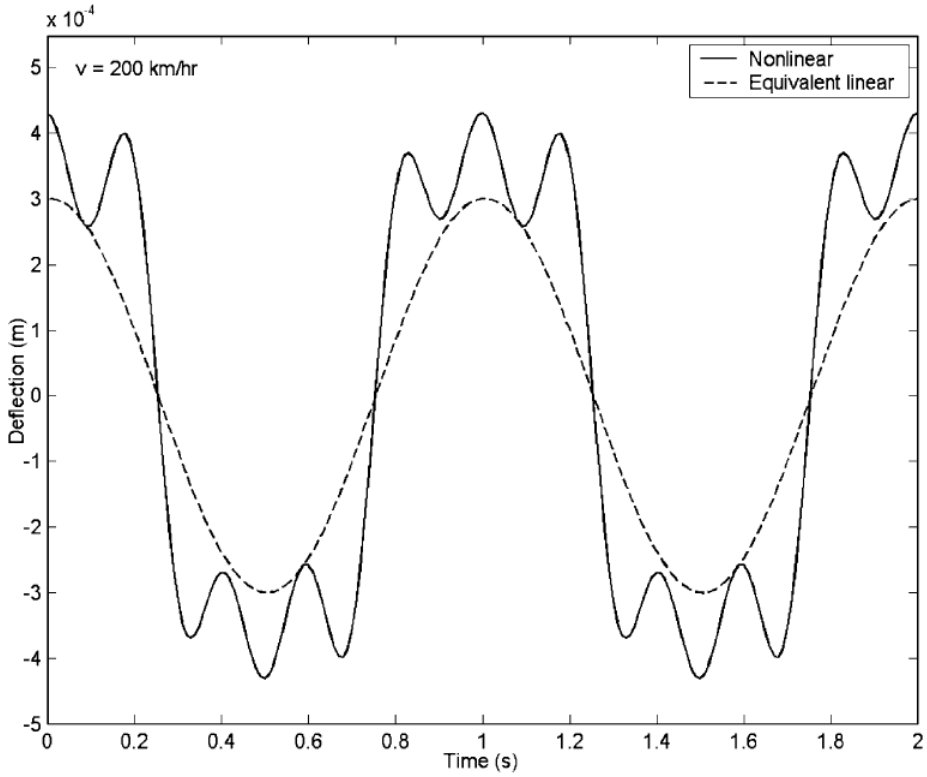
همچنین مقـادیر غیرخطی و خطی معـادل در پهنای فرکانســـی ۵۰-۰ هرتز در این جدول لیســـت شده‌اند.[۴۳، ۴۴]

به عنوان اولین مثال، تغییر شکل یک نقطه از تیر تیموشنکو وقتی دو بار مجزا به فاصله ۱۶ متر (مراکز بوژی) از آن می‌گذرد در نظر گرفته شـده است. حل تحلیلی و روش بر هم نهی در نمودار زیر مقایسه شده‌اند.

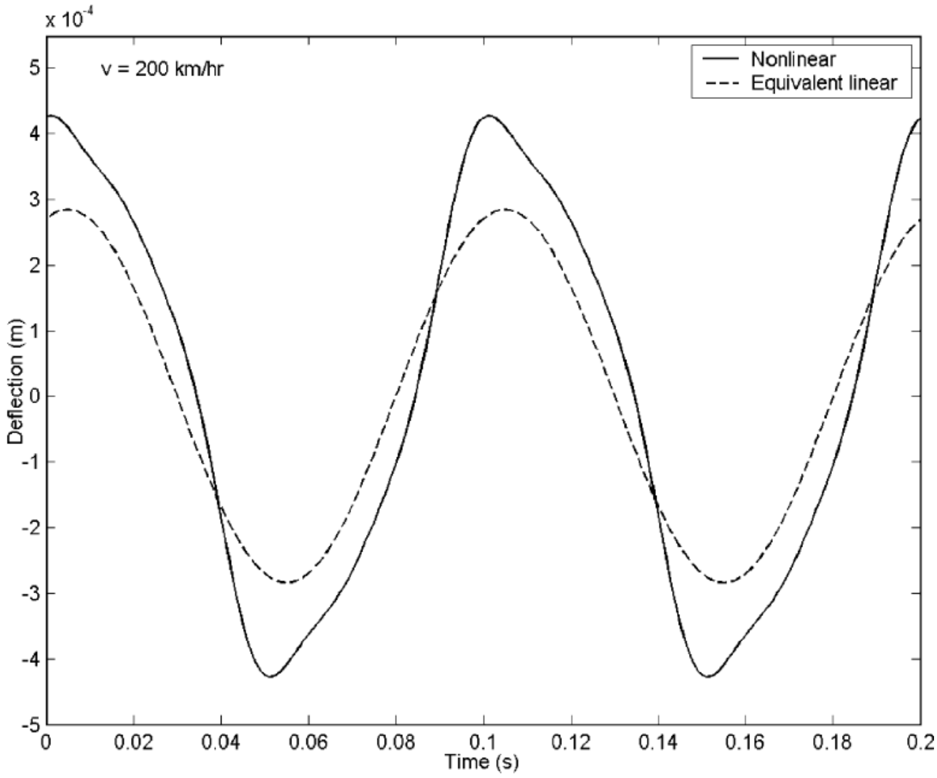


شکل ۲-۲۵ - جابجایی یک نقطه از تیر هنگام عبور دو بار پی در پی

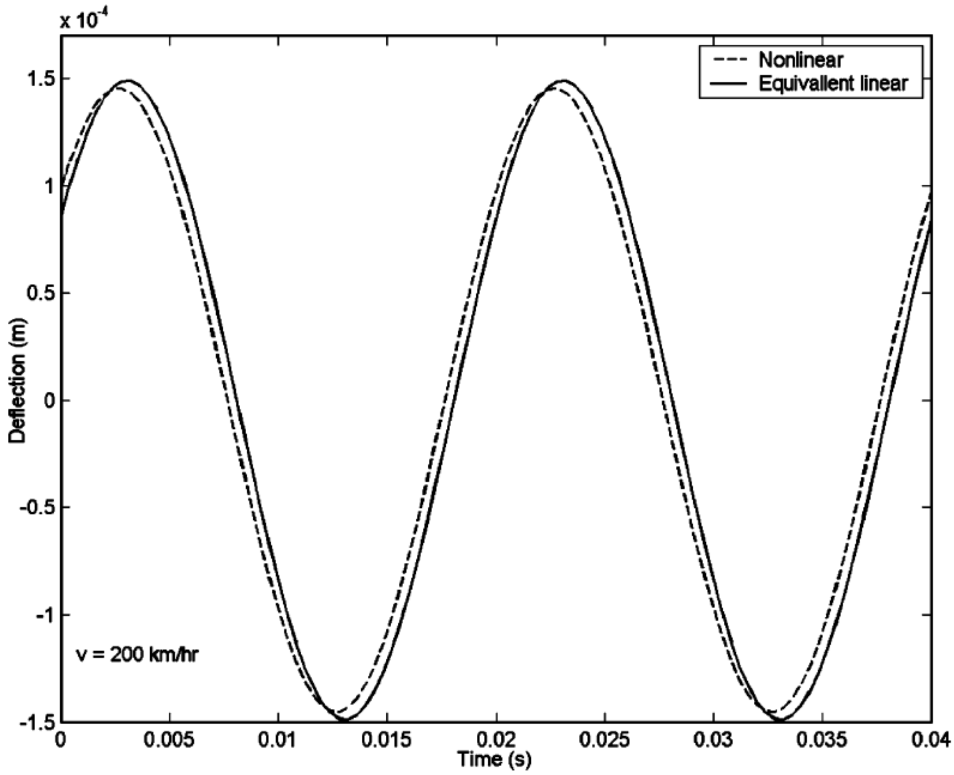
که مقایســه این دو روش نشـان می‌دهد که نقطه ماکســیمم تغییر شکل یکتا نیست اما تغییر شکل‌ها کاملاً متفاوتند. در این مقاله رفتار فوق هارمونیک و تأثیر فرکانس بر آن تغییر شــکل یک نقطه از تیر تیموشنکو در شکل‌های زیر نشان داده شده است.



شکل ۲-۲۶ - جابجایی یک نقطه از تیر تحت فشار ($\mathbf{\Omega}$=1 Hz)



شکل ۲-۲۷ - جابجایی یک نقطه از تیر تحت فشار (**Ω**=10 Hz)



شکل ۲-۲۸ - جابجایی یک نقطه از تیر تحت فشار (**Ω**=50 Hz)

این نتایج برای مدل خطی معادل هم در این شکل‌ها نشان داده شده‌اند.

از شـکل‌ها دیده‌می‌شود که بیشینه تغییر شکل مدل غیرخطی بیش از مدل معادل خطی است. اما در فرکانس‌های بالا (بزرگتر از 30 Hz) تقریباً یکسان هستند. نتایج دیگر این مقاله به شرح زیرند:

- به ازای فرکانس تحریک Ω فوق هارمونیک‌های 5Ω 2(n-1)× Ω Ω,3 , ... وجود دارد.
- یکی از موارد نامطلوب افزایش مقدار فرکانس با افزایش مقدار سـرعت بار می‌باشـد که در مقدار بیشینه پاسخ رخ می‌دهد.
- بزرگنمایی تمام هارمونیک‌های گشتاور خمشی در تیر اولی-برنولی بیش از تیر تیموشنکو می‌باشد. پس استفاده از تیر اولی-برنولی در طراحی ریل طبق استحکام دینامیکی و خستگی قابل قبول است.

- بزرگنمایی کلیه هارمونیک‌ها پاسخ در فرکانس‌های بالا (>30Hz) به مقدار سرعت بار وابسته نیست.

منابع و مآخذ این فصل:

1. Z. Oniszczuk, Forced transverse vibrations of an elastically connected complex simply supported double-beam system, Journal of Sound and Vibration 264 (2003) 273–286.
2. Z. Oniszczuk, Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system, Journal of Sound and Vibration 232 (2000) 387–403.
3. Z. Oniszczuk, Transverse vibrations of elastically connected double-string complex system. Part II: forced vibrations, Journal of Sound and Vibration 232 (2000) 367–386.
4. Z. Oniszczuk, Damped vibration analysis of an elastically connected double-string complex system, Journal of Sound and Vibration 264 (2003) 253–271, this issue.
5. Z. Oniszczuk, Dynamic vibration absorption in complex continuous systems, Machine Dynamics Problems 24 (2) (2000) 81–94.
6. J.C. Snowdon, Vibrations and Shock in Damped Mechanical Systems, Wiley, New York, 1968.
7. S.P. Timoshenko, D.H. Young, W. Weaver Jr., Vibration Problems in Engineering, Wiley, New York, 1974.
8. S.S. Rao, Mechanical Vibrations, Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.
9. J.P. Den Hartog, Mechanical Vibrations, McGraw-Hill, New York, 1956.
10. J.B. Hunt, Dynamic Vibration Absorbers, Mechanical Engineering Publications, London, 1979.
11. B.G. Korenev, L.M. Reznikov, Dynamic Vibration Absorbers. Theory and Technical Applications, Wiley, Chichester, 1993.
12. S. Kaliski, Vibrations and Waves in Solids, IPPT PAN, Warsaw, 1966 (in Polish).
13. Z. Oniszczuk, Vibration Analysis of Compound Continuous Systems with Elastic Constraints, Publishing House of Rzesz!ow University of Technology, Rzesz!ow, 1997 (in Polish).
14. Z. Oniszczuk, Transverse vibrations of elastically connected rectangular double-membrane compound system, Journal of Sound and Vibration 221 (1999) 235–250.
15. T. Aida, K. Kawazoe, S. Toda, Vibration control of plates by plate-type dynamic vibration absorbers, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Vibration and Acoustics 117 (1995) 332–338.
16. T. Aida, T. Aso, K. Nakamoto, K. Kawazoe, Vibration control of shallow shell structures using a shell-type dynamic vibration absorber, Journal of Sound and Vibration 218 (1998) 245–267.

17. Jia-Jang Wu, Free vibration analysis of beams carrying a number of two-degree-of-freedom spring-damper-mass systems, Finite Elements in Analysis and Design 40 (2004) 363–381
18. E.H. Dowell, on some general properties of combined dynamic systems, ASME J. Appl. Mech. 46 (1979) 206–209.
19. J.J. Wu, A.R. Whittaker, The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two-dof spring-mass systems, J. Sound Vib. 227 (2) (1999) 361–381.
20. B.S. Garbow, Matrix Eigensystem Routine—EISPACK Guide Extension, Springer, Berlin, 1997.
21. S.K. Sinha, Dynamic characteristics of a flexible bladed-rotor with Coulomb damping dueto tip-rub, Journal of Sound and Vibration 273 (2004) 875–919.
22. M.-F. Liu, T.-P. Chang, Vibration analysis of a magneto-elastic beam with general boundary conditions subjected to axial load and external force , Journal of Sound and Vibration 288 (2005) 399–411
23. H.L. Langhaar, Energy Methods in Applied Mechanics, Wiley, New York, 1962.
24. W.O. Wong, S.L. Tang, Y.L. Cheung, L. Cheng, Design of a dynamic vibration absorber for vibration isolation of beams under point or distributed loading, Journal of Sound and Vibration 301 (2007) 898–908
25. Francesco Pellicano, On the dynamic properties of axially moving systems , Journal of Sound and Vibration 281 (2005) 593–609
26. F. Pellicano, F. Vestroni, Non-linear dynamics and bifurcations of an axially moving beam, Journal of Vibration and Acoustics 122 (2000) 21–30.
27. F. Pellicano, F. Vestroni, Complex dynamics in high speed axially moving systems, Journal of Sound and Vibration 258 (1) (2002) 31–44.
28. F. Pellicano, G. Catellani, A. Fregolent, Parametric instability of belts: theory and experiments, Computers & Structures 82 (1) (2004) 81–91.
29. Jia-Jang Wu, Use of equivalent-damper method for free vibration analysis of a beamcarrying multiple two degree-of-freedom spring–damper–mass systems , Journal of Sound and Vibration 281 (2005) 275–293
30. J.S. Wu, H.M. Chou, Free vibration analysis of a cantilever beam carrying any number of elastically mounted pointed masses with the analytical-and-numerical-combined method, Journal of Sound and Vibration 213 (1998) 317–332.
31. J.J. Wu, A.R. Whittaker, The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple 2-dof spring–mass systems, Journal of Sound and Vibration 227 (2) (1999) 361–381.
32. B.S. Garbow, Matrix Eigensystem Routine-EISPACK Guide Extension, Springer, Berlin, 1977.
33. K.J. Bathe, Finite Element Procedure in Engineering Analysis, Prentice-Hall, Englewood-Cliffs, NJ, 1982.

34. J.S. Wu, D.W. Chen, Dynamic analysis of a uniform cantilever beam carrying a number of elastically mounted point masses with dampers, Journal of Sound and Vibration 229 (3) (2000) 549–578.
35. Yuksek and S. Sivrioglu, STRUCTURAL MODE FILTERING OF A DISCRETE-PARAMETER SYSTEM USING PVDF SENSORS , International Applied Mechanics, Vol. 42, No. 2, 2006
36. Ding Zhou, Tianjian Ji, Dynamic characteristics of a beam and distributed spring-mass system , International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 5555–5569
37. Shueei-Muh Lin, Jenn-Fa Lee, Sen-Yung Lee, Wen-Rong Wang , Prediction of vibration of rotating damped beams with arbitrary pretwist , International Journal of Mechanical Sciences 48 (2006) 1494–1504
38. P. Muserosa,_, M.D. Martinez-Rodrigo, Vibration control of simply supported beams under moving loads using fluid viscous dampers, Journal of Sound and Vibration 300 (2007) 292–315
39. T.-P. Chang, G.-L. Lin, E. Chang, Vibration analysis of a beam with an internal hinge subjected to a random moving oscillator. International Journal of Solids and Structures 43 (2006) 6398–6412
40. M. Gurgoze, H. Erol, Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition. Journal of Sound and Vibration 298 (2006) 132–153
41. Igor Fedotov, Ying Gai , Andrei Polyanin , Michael Shatalov , Analysis for an N-stepped Rayleigh bar with sections of complex geometry , Applied Mathematical Modelling xxx (2007) xxx–xxx
42. M.H. Kargarnovin, D. Younesian, D.J. Thompson, C.J.C. Jones, Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads. Computers and Structures 83 (2005) 1865–1877
43. Dahlberg T. Dynamic interaction between train and nonlinear railway model. In: Proc of Fifth Int Conf on Structural Dynamics. Munich; 2002.
44. Wu TX, Thompson DJ. The effects of track non-linearity on wheel/rail impact. Proc Inst Mech Eng Part F: J Rail Rapid Transit 2004; 218:1–12.

فصل سوم

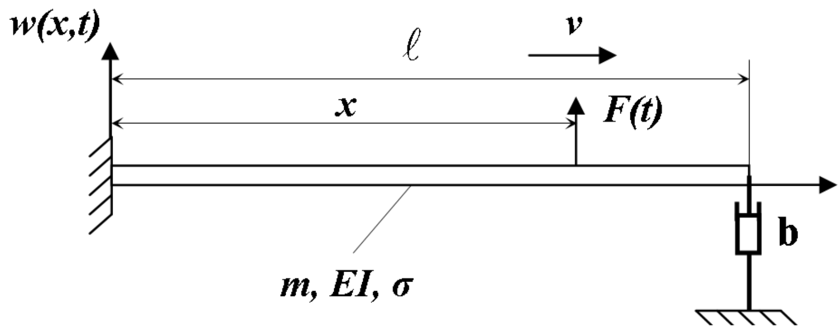
حل تحلیلی و عددی

۳-۱ - مقدمه

این فصل به بررسی حل تحلیلی و عددی مساله می‌پردازد. ابتدا فرضیاتی که برای مساله در نظر گرفته شده‌اند مرور خواهند شد. این فرضیات عبارتند از :

۳-۱- الف- تیر لزج، لزجت گســترده خارجی[۲۵] در طول تیر است و به صورت میرایی بر واحد طول σ درنظرگرفته می‌شود.

در شکل زیر جهت تغییر شکل تیر و نیروهای وارد بر آن نمایش داده شده‌اند:



شکل ۳-۱ - تیر یک سرگیردار لزج با دمپر در انتها تحت بار رونده

راســتای تیر محور x در نظر گرفته شــده اســت و همان گونه که در شــکل مشخص است جهت تغییر شــکل تیر $w(x,t)$ عمود بر این محور می‌باشــد. تیر در یک ســر خود (مبدا) گیردار است و در سر دیگر (انتها) به یک دمپر ســاده متصــل می‌باشــد. نیروی رونده $F(t)$ که با ســرعت ثابت v به ســمت راســت درحرکت است در فاصله x از مبدا وارد می‌شود.

۳-۱- ب- تیر مورد نظر یک تیر اولر برنولی است، یعنی حین خمش اعوجاجی ندارد و تغییر شکلهای برشی در آن منظور نمی‌گردد.

25- Distributed External Viscous Damping

بنابراین از جمله‌ای که شامل انرژی جنبشی حاصل از چرخش می‌باشد صرفنظر می‌شود که به صورت زیر می‌باشد:

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell} J(x)\left[\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t\partial x}\right]^2 dx \qquad (۱-۳)$$

که *J*(*x*) گشتاور اینرسی قطبی تیر بر واحد طول تیر می‌باشد.

در این تحلیل تنها انرژی جنبشی حاصل از تغییر مکان اجزای کوچک تیر است که در نظر گرفته می‌شود.

۳-۱- ج- نیروی محوری نیز مانند نیرویهای خارجی می‌تواند به تیر وارد شود که در این صورت جزو انرژی پتانسیل درخواهد آمد که به صورت زیر می‌باشد:

$$V(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell} P(x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx \qquad (۲-۳)$$

که *P*(*x*) نیروی محوری دلخواهی است که در راستای طولی تیر وارد می‌شود و در این تحلیل در نظر گرفته نمی‌شود.

۳-۲ - استخراج معادلات حرکت سیستم

با استفاده از اصل تعمیم یافته همیلتون می‌توان معادلات حرکت سیستم را بدست آورد:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V+\delta\overline{W}_{nc})dt=0 \qquad (۳-۳)$$

$$\delta w(x,t)=0 \quad , \quad t=t_1,t_2$$

انرژی جنبشی سیستم به صورت زیر در می‌آید:

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell} m(x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \qquad (۴-۳)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell} m(x)\frac{\partial w}{\partial t}\delta\frac{\partial w}{\partial t}dxdt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell} m(x)\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta w dxdt = \int_0^{\ell} m(x)(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t}\delta w dt)dx$$

$$= \int_0^{\ell} m(x)\left\{\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\Big|_{t_1}^{t_1} - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dt\right\}dx = -\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell} m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dxdt$$

و انرژی پتانسیل:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI(x)\left[\frac{\partial w^2(x,t)}{\partial x^2}\right]^2 dx \tag{۵-۳}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell} EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dxdt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^{\ell} EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\delta w dx\right)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\delta w\Big|_0^{\ell} - \frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta w\Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta w dx\right)dt$$

و کار نیروهای ناپایستار:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\overline{W}_{nc} dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^{\ell}\left\{f(x,v,t)\delta w - \sigma\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right\}dx - b\frac{\partial w(\ell,t)}{\partial t}\delta w\Big|_{x=\ell}\right)dt \tag{۶-۳}$$

که در آن:

$$f(x,v,t) = F(t)\delta(x-vt)\left\{H(t) - H(t-\frac{\ell}{v})\right\} \tag{۷-۳}$$

در معادله فوق δ تابع دیراک و H تابع هوی ساید می‌باشند:

$$\delta(x) = \begin{cases}\infty & x=0 \\ 0 & x\neq 0\end{cases} \quad , \quad H(x) = \begin{cases}1 & x>0 \\ 0 & x<0\end{cases} \tag{۸-۳}$$

جهت نیروی $F(t)$ رو به بالاست و نیروی لزجی و نیروی دمپر در جهت عکس وارد می‌شوند.

با جایگذاری در معادله همیلتون:

$$-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell} m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w dx dt-\int_{t_1}^{t_2}\left(EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial x}\delta w\Big|_0^{\ell}-\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta w\Big|_0^{\ell}+\right. \qquad (۹-۳)$$

$$\left.\int_0^{\ell}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta w dx\right)dt+\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^{\ell}\left\{f(x,v,t)\delta w-\sigma\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right\}dx-b\frac{\partial w(\ell,t)}{\partial t}\delta w\Big|_{x=\ell}\right)dt=0$$

یا پس از مرتب نمودن:

$$\begin{aligned}&\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell}\left(-m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]-\sigma\frac{\partial w}{\partial t}+f(x,v,t)\right)\delta w dx dt\\&+\int_{t_1}^{t_2}\left(-EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\delta\frac{\partial w}{\partial x}\Big|_0^{\ell}+\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]\delta w\Big|_0^{\ell}-b\frac{\partial w(\ell,t)}{\partial t}\delta w\Big|_{x=\ell}\right)dt=0\end{aligned} \qquad (۱۰-۳)$$

با متحد قرار دادن معادله فوق با صفر معادله حرکت و شرایط مرزی بدست می‌آیند:

معادله حرکت:

$$m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]+\sigma\frac{\partial w}{\partial t}-f(x,v,t)=0 \qquad (۱۱-۳)$$

شرایط مرزی:

$$@\, x=0: \quad w=0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \qquad (\text{۱۲-۳-الف})$$

$$@\, x=\ell: \quad Q=\frac{\partial}{\partial x}\left[EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right]-b\frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad , \quad M=EI(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \qquad (\text{۱۲-۳-ب})$$

در معادلات فوق M و Q به ترتیب گشتاور خمشی و نیروی برشی می‌باشند.

۳-۳ - تحلیل ارتعاشات آزاد سیستم

جابجایی جانبی *w(x,t)* در نظر گرفته شـده اسـت[۲۶]. همچنین مقادیر *m(x), EI(x)* ثابت در نظر گرفته می‌شود، بنابراین:

$$m(x) = m \qquad EI(x) = EI \tag{۱۳-۳}$$

معادله حرکت (۳-۱۰) به شکل زیر می‌شود:

$$m\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \sigma\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = 0 \tag{۱۴-۳}$$

و شرایط مرزی بدین شکل در می‌آید:

$$w(0,t) = w'(0,t) = w''(\ell,t) = 0 \tag{۱۵-۳ الف،ب}$$

$$EIw'''(\ell,t) = b\dot{w}(\ell,t)$$

برای حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها پاسخ به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(x,t) = Z(x)G(t) \tag{۱۶-۳}$$

و مشتقات آنها:

$$\begin{aligned}\dot{w}\ (x,t) &= Z(x)\dot{G}(t)\\ w'\ (x,t) &= Z'(x)G(t)\\ w''\ (x,t) &= Z''(x)G(t)\\ w'''\ (x,t) &= Z'''(x)G(t)\end{aligned} \tag{۱۷-۳}$$

$$w^{(IV)}(x,t) = Z^{(IV)}(x)G(t)$$

پس از جایگذاری در معادله (۳-۱۴) به صورت دیفرانسیلی زیر در می‌آید:

$$m\ddot{w}(x,t) + EIw^{(IV)}(x,t) + \sigma\dot{w}(x,t) = 0 \tag{۱۸-۳}$$

۱- در اینجا به خاطر وجود نیروهای لزج میراشـونده (میرایی لزج) می‌توان از متغیرهای مختلط اسـتفاده نمود؛ بنابراین جابجایی را می‌بایست، بخش حقیقی متغیر مختلط درنظرگرفت.

که با وارد کردن معادلات (۳-۱۷) به شکل زیر درمی‌آید:

$$mZ(x)\ddot{G}(t)+EIZ^{(IV)}(x)+\sigma Z(x)\dot{G}(t)=0 \qquad (۳-۱۹)$$

و پس از جداسازی:

$$-\frac{Z^{(IV)}(x)}{Z(x)}=\frac{1}{EI}\left(m\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)}+\sigma\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}\right) \qquad (۳-۲۰)$$

طرفین تساوی فوق را می‌توان مساوی مقداری منفی در نظر گرفت که معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$-\frac{Z^{(IV)}(x)}{Z(x)}=-\beta^4 \qquad (۳-۲۱)$$

$$\frac{1}{EI}\left(m\frac{\ddot{G}(t)}{G(t)}+\sigma\frac{\dot{G}(t)}{G(t)}\right)=-\beta^4 \qquad (۳-۲۲)$$

که اگر $G(t)$ به صورت زیر در نظر گرفته شود:

$$G(t)=Ae^{\lambda\ t} \qquad (۳-۲۳)$$

و مشتقات آن:

$$\dot{G}(t)=\lambda G(t) \qquad (۳-۲۴)$$

$$\ddot{G}(t)=\lambda^2 G(t)$$

معادله (۳-۲۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{EI}\left(m\lambda^2+\sigma\lambda\right)=-\beta^4 \qquad (۳-۲۵)$$

و از آنجا:

$$m\lambda^2+\sigma\ \lambda+EI\beta^4=0 \qquad (۳-۲۶)$$

یا

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2m}\left(-\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 - 4mEI\beta^4}\right) \qquad (۲۷-۳)$$

بنابراین پاسخ عمومی قسمت زمانی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} &G(t) = G_1 e^{\lambda_1 t} + G_2 e^{\lambda_2 t} \\ &G_1, G_2 = CONSTANT \end{aligned} \qquad (۲۸-۳)$$

مقادیر G_1, G_2 توسط اعمال شرایط اولیه تعیین می‌گردند.

در صورتی که مقدار زیر رادیکال $\sqrt{\sigma^2 - 4mEI\beta^4}$ در معادله (۳-۲۷) بزرگتر یا مساوی صفر باشد، از آنجا که هر دو ریشه منفی می‌باشند، پاسخ میرا می‌باشد؛ بنابراین این مقدار منفی بوده و هر دو جواب λ_1, λ_2 موهومی بوده و بخش حقیقی آنها منفی است:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{-\sigma}{2m} \pm i\sqrt{\frac{EI}{m}\beta^4 - \left(\frac{\sigma}{2m}\right)^2} \qquad (۲۹-۳)$$

و از آنجا:

$$G(t) = e^{\chi\, t}\left[(G_1 + G_2)\cos\psi\, t + i(G_1 - G_2)\sin\psi\, t\right] \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} &\chi = \frac{-\sigma}{2m} \\ &\psi = \sqrt{\frac{EI}{m}\beta^4 - \chi^2} \end{aligned} \qquad (۳-۳۱-الف-ب)$$

در معادلات فوق ψ فرکانسهای طبیعی تیر مورد نظر می‌باشد. با در نظرگرفتن:

$$\begin{aligned} &G_1 + G_2 = A\cos\phi \\ &i(G_1 - G_2) = A\sin\phi \end{aligned} \qquad (۳۲-۳)$$

معادله (۳-۲۳) به شکل زیر در می‌آید:

$$G(t) = Ae^{\chi\, t}\cos(\psi\, t - \phi) \qquad (۳۳-۳)$$

معادله (۳-۲۱) بدین شکل در می‌آید:

$$Z^{(IV)}(x)-\beta^4 Z(x)=0 \quad (۳-۳۴)$$

جواب عمومی معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$Z(x)=c_1\sin\beta x+c_2\cos\beta x+c_3\sinh\beta x+c_4\cosh\beta x \quad (۳-۳۵)$$

مقادیر c_i ها (*i=1...4*) ثوابت حقیقی هســـتند که با اعمال شـــرایط مرزی بدین صـــورت تعیین می‌گردند:

$$c_2+c_4=0$$

$$c_1+c_3=0$$

$$-c_1\sin\overline{\beta}-c_2\cos\overline{\beta}+c_3\sinh\overline{\beta}+c_4\cosh\overline{\beta}=0 \quad (۳-۳۶)$$

$$c_1(\mu\sin\overline{\beta}+\cos\overline{\beta})+c_2(\mu\cos\overline{\beta}-\sin\overline{\beta})+c_3(\mu\sinh\overline{\beta}-\cosh\overline{\beta})+c_4(\mu\cosh\overline{\beta}-\sinh\overline{\beta})=0$$ که

در آن :

$$\overline{\beta}=\beta\ell \quad , \quad (۳-۳۸)$$

$$\mu=\frac{b\lambda}{\beta^3 EI}=-\frac{b\beta}{m\lambda+\sigma} \quad (۳-۳۹)$$

پس از حل بر حسب c_1 بدست می‌آید:

$$C=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3 & c_4\end{bmatrix}^T= \quad (۳-۴۰)$$

$$\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{\sin\overline{\beta}+\sinh\overline{\beta}}{\cos\overline{\beta}+\cosh\overline{\beta}} & -1 & \dfrac{\sin\overline{\beta}+\sinh\overline{\beta}}{\cos\overline{\beta}+\cosh\overline{\beta}}\end{bmatrix}^T$$

معادله مشخصه سیستم، دترمینان ماتریس ضرایب معادلات (۳-۳۳) می‌باشد:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\bar{\beta} & -\cos\bar{\beta} & \sinh\bar{\beta} & \cosh\bar{\beta} \\ \mu\sin\bar{\beta}+\cos\bar{\beta} & \mu\cos\bar{\beta}-\sin\bar{\beta} & \mu\sinh\bar{\beta}-\cosh\bar{\beta} & \mu\cosh\bar{\beta}-\sinh\bar{\beta} \end{vmatrix} = 0$$

(۳-۴۱)

با حل معادله فوق مقادیر ویژه β_m بدست می‌آیند.

و با جایگزینی مقادیر c_i ها (*i=1...4*) از (۳-۳۴) در معادله (۳-۳۲) توابع ویژه به صـورت زیر بدست می‌آیند.

$$Z_m(x) = c_{1m}\sin\beta_m x + c_{2m}\cos\beta_m x + c_{3m}\sinh\beta_m x + c_{4m}\cosh\beta_m x$$

(۳-۴۲)

یا

$$Z_m(x) = c_m\left(\left(\sin\beta_m x - \sinh\beta_m x\right) - \frac{\sin\bar{\beta}+\sinh\bar{\beta}}{\cos\bar{\beta}+\cosh\bar{\beta}}\left(\cos\beta_m x - \cosh\beta_m x\right)\right)$$

(۳-۴۳)

به عنوان نمونه مثال زیر در اینجا مطرح می‌گردد:

مساله نمونه ۳-۱ :

فرکانســهای طبیعی تیر یک ســرگیردار لزج با دمپر لزج در انتها تحت شــرایط اولیه صــفر مطلوب می‌باشد؛ مشخصات نمونه تیر در جدول ۳-۱ آمده‌اند:

جدول ۳-۱- مشخصات تیر مساله نمونه ۳-۱

مشخصه	فرمول	مقدار	یکا
طول تیر	ℓ	1	m
جرم واحد طول تیر	m	0.675	Kg/m
سفتی پیچشی	EI	36458	Nm^2
ضریب میرایی لزج	σ	100	Kg/ms
ثابت میرایی	b	10	Kg/s

ابتدا توسط زیرروال ***EVP_beam_F.m*** که در MATLAB نوشته شده است مقادیر ویژه بدست می‌آید[۲۷]:

```
%          Eigen value problem - Free vibration
clc;clear;
%          Interpolation
BETA=0;
for m=[1:5]
    x1=m;x2=x1+1;x3=(x2+x1)/2;
    F1=F(x1);F2=F(x2);
    Error=1e-3;
    while abs(F(x3))>Error
        S=F1;
        x3=(x1*F2-x2*F1)/(F2-F1);
        if F1*F(x3)<0
            x2=x3;
            F2=F(x3);
            if S*F(x3)>0
                F1=F1/2;
            end
        else
            x1=x3;
```

۱- در این برنامه معادله مشخصه که یک معادله غیرخطی است توسط روش درون‌یابی اصلاح‌شده، حل شده‌است.[۱]

```
            F1=F(x3);
            if S*F(x3)>0
                F2=F2/2;
            end
        end
        S=F(x3);
    end
    BETA(m)=x3;sprintf('BETA(%d)= %1.4f\n',m,BETA(m))
end
```

پس از اجرا مقادیر ویژه تیر یا β_mها بدست می‌آیند:

```
BETA(1)= 1.8720

BETA(2)= 4.6939

BETA(3)= 7.8547

BETA(4)= 10.9955

BETA(5)= 14.1372
```

مقدار خطا ***Error=1e-3*** در نظرگرفته شـده است. تابع ***F(x)*** در این برنامه توسط زیر روال ***F.m*** تعریف شده است:

```
function F=F(beta)
L=1;%m
EI=36458.33;%
m=0.675;%Kg/m
b=10;%Kg/ms
sigma=100;%Kg/s
%--------------------------------------
Landa=.5/m*(-sigma+(sigma^2-4*m*EI*beta^4)^.5);
```

```
mio=b*Landa/EI/beta^3;

bL=beta*L;

AA=[0,           1,               0,                  1;

    1,           0,               1,             0;

   -sin(bL),              -cos(bL),           sinh(bL),        cosh(bL);

   mio*sin(bL)+cos(bL),mio*cos(bL)-sin(bL),mio*sinh(bL)-cosh(bL),mio*cosh(bL)-
sinh(bL)];

F=real(det(AA));
```

و از آنجا مقادیرفرکانسهای طبیعی تیر بدست می‌آیند:

$$\lambda_1,\lambda_2=\frac{1}{2m}\left\{-\sigma\pm i\sqrt{4mEI\beta^4-\sigma^2}\right\}=-74\pm i\sqrt{54012\beta^4-5476}$$

$$\chi=\frac{-\sigma}{2m}=-74$$

$$\psi=\sqrt{\frac{EI\beta^4}{m}-\chi^2}=\sqrt{54012\beta^4-5476}$$

با قرار دادن اولین مقدار ویژه در عبارات بالا:

$$\beta_1=1.8720$$

$$\chi_1=\frac{-\sigma}{2m}=-74$$

$$\psi_1=\sqrt{54012\beta^4-5476}=811.1$$

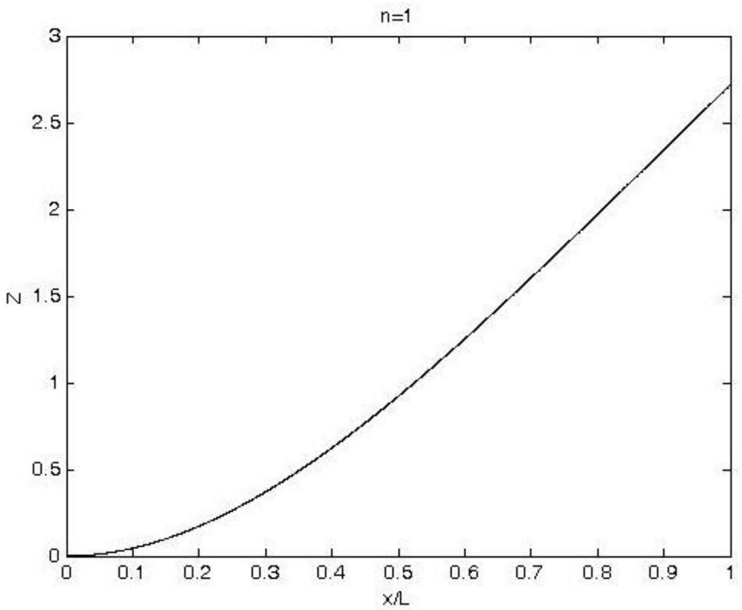
این اولین فرکـانس طبیعی تیر مورد نظر می‌بـاشــد کـه با $\omega_1=\sqrt{54012\beta^4}=814.4$ که فرکانس طبیعی همین تیر بدون وجود میرایی لزج در طول آن $(\sigma=0)$ می‌باشد، تفاوت اندکی دارد.

فرکانسهای طبیعی دیگر تیر و تیر بدون لزج در جدول ۳-۲ آمده‌اند:

جدول ۳-۲ - مقادیر ویژه، فرکانسهای طبیعی تیر ساده و تیر لزج درمودهای مختلف

m	β	ω	ψ	ω-ψ
1	*1.8720*	*814.4357*	*811.0669*	*3.3688*
2	*4.6939*	*5120.5050*	*5119.9703*	*0.5347*
3	*7.8547*	*14338.5203*	*14338.3293*	*0.1910*
4	*10.9955*	*28097.9798*	*28097.8823*	*0.0974*
5	*14.1372*	*46448.5257*	*46448.4667*	*0.0589*

شکل مودها نیز به عنوان مثال برای مود اول (n=1) به صورت زیر درمی‌آید:



شکل ۳-۲ - تغییر شکل تیر در مود اول

که تغییرات جانبی آن از معادله زیربدست می‌آید:

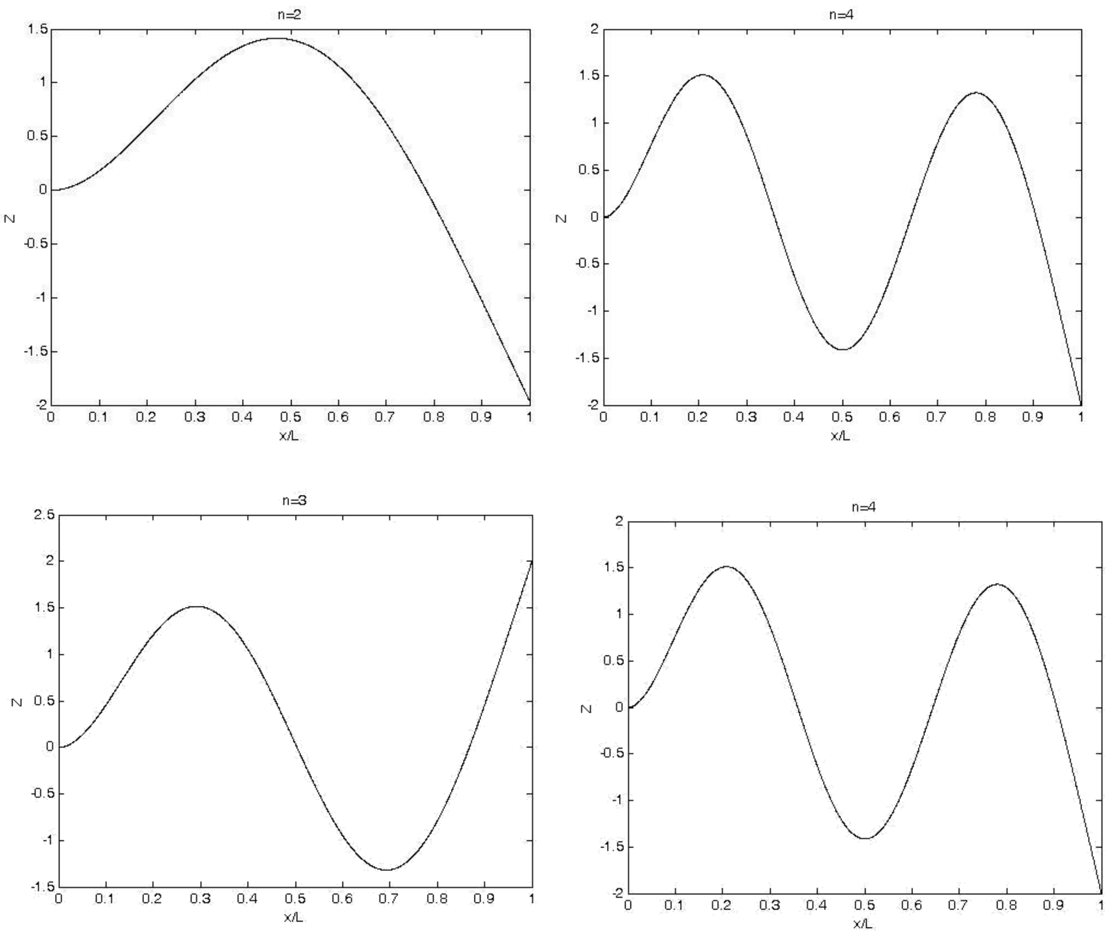
$$Z_1(x) = c_{11}\sin\beta_1 x + c_{21}\cos\beta_1 x + c_{31}\sinh\beta_1 x + c_{41}\cosh\beta_1 x$$

ضرایب بر حسب c_1 بدین صورت درمی‌آید:

$$C = [1 \quad -1.3622 \quad -1 \quad 1.3622]^T$$

$$Z_1(x) = (\sin 1.8720x - \sinh 1.8720x) - 1.3622(\cos 1.8720x - \cosh 1.8720x)$$

شکل مودهای دیگر نیز به همین ترتیب بدست می‌آید:



شکل ۳-۳ - نمودار تغییرات جانبی تیر مساله نمونه ۳-۱ در مودهای بالاتر

شکل مودها نیز توسط زیرروال **mode_shape.m** ترسیم شده‌اند:

```
%                    mode shape
clc;clear;
L=1;
```

```
BETA=[1.8720 4.6939 7.8547 10.9955 14.1372];
%------------------------
K(1:5)=0;
for p=1:5
    K(p)=(sin(BETA(p)*L)+sinh(BETA(p)*L))/(cos(BETA(p)*L)+cosh(BETA(p)*L));
    figure(p);
    for x=0:0.01:1
        z=(sin(BETA(p)*x)-sinh(BETA(p)*x))-K(p)*(cos(BETA(p)*x)-
cosh(BETA(p)*x));
        plot(x,z,'ko');
        title(['n=',num2str(p)])
        xlabel('x/L')
        ylabel('Z')
        hold on;
    end
end
```

۴-۳ - بررسی شرط خودالحاقی[۲۸]

معادله جابجایی جانبی تیر در نظر گرفته شده است:

$$Z^{(IV)}(x) - \beta^4 Z(x) = 0 \qquad (۴۴-۳)$$

این معادله در شکل اپراتوری به صورت زیر می‌شود:

$$LZ = \lambda MZ \qquad (۴۵-۳)$$

28- Self Adjoint

که L و M اپراتورهای دیفرانسیلی خطی همگن[۲۹] می‌باشند و به ترتیب اپراتور سفتی[۳۰] و اپراتور جرم[۳۱] نامیده می‌شوند و λ پارامتر نامیده می‌شود:

$$L=\frac{d^4}{dx^4}\ ,\ \ M=1\ ,\ \lambda=\beta^4 \qquad (۴۶-۳)$$

شرایط مرزی نیز بایست در معادلات زیر صدق کنند:

$$B_i Z=0 \quad , \quad B_i Z=\lambda C_i Z \qquad (۴۷-۳)$$

این شرایط در نواحی مرزی رخ می‌دهند و بدین شکل در می‌آیند:

$$@\ x=0 \quad : \quad B_1=1 \quad , \ B_2=\frac{d}{dx} \qquad C_1=C_2=0$$

$$@\ x=\ell \quad : \quad B_1=\frac{d^2}{dx^2} \quad , \ B_2=\beta\frac{d^3}{dx^3} \qquad C_1=0\ ,\ C_2=\mu \qquad (۴۸-۳)$$

که B_i و C_iها اپراتورهای مرزی دیفرانسیلی خطی و همگن[۳۲] هستند.

شرط خود الحاقی اپراتورهای L و M برای این سیستم به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_0^\ell uLv dx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\ell uB_i v dx=\int_0^\ell vLu dx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\ell vB_i u dx \qquad (۴۹-۳)$$

$$\int_0^\ell uMv dx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\ell uC_i v dx=\int_0^\ell vMu dx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\ell vC_i u dx \qquad (۵۰-۳)$$

که بدین صورت در می‌آیند:

$$\int_0^\ell uLv dx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\ell uB_i v dx=\frac{b\lambda}{EI}u(\ell)v(\ell)+\int_0^\ell\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}dx=\int_0^\ell vLu dx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^\ell vB_i u dx \qquad (۵۱-۳)$$

29- Linear Homogeneous Differential Operators
30- Stiffness Operator
31- Mass Operator
32- Linear Homogeneous Differential Boundary Operators

$$\int_0^{\ell} uMvdx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^{\ell} uC_i vdx=\int_0^{\ell} uvdx=\int_0^{\ell} vMudx+\sum_{i=1}^{2}\int_0^{\ell} vC_i udx \qquad (۵۲-۳)$$

همانگونه که دیده می‌شود اپراتور M و اپراتور L هر دو دارای خاصیت خودالحاقی می‌باشد، در نتیجه سیستم یا مساله مقدار مشخصه دارای خاصیت خودالحاقی می‌باشد.

۳-۵ - بررسی شرط تعامد

معادلات دیفرانسیل حاکم بر شکل مودهای Z_m و Z_n را می‌توان از معادله (۳-۳۴) به صورت زیر نوشت:

$$Z_n^{(IV)}(x)-\beta_n^4 Z_n(x)=0 \qquad (۵۳-۳)$$

$$Z_m^{(IV)}(x)-\beta_m^4 Z_m(x)=0 \qquad (۵۴-۳)$$

با ضرب معادله (۳-۵۳) در Z_m و معادله (۳-۵۴) در Z_n و انتگرالگیری از O تا L می‌توان دید:

$$\int_0^{\ell} Z_n^{(IV)} Z_m dx-\beta_n^4\int_0^{\ell} Z_n Z_m dx=0 \qquad (۵۵-۳)$$

$$\int_0^{\ell} Z_m^{(IV)} Z_n dx-\beta_m^4\int_0^{\ell} Z_m Z_n dx=0 \qquad (۵۶-۳)$$

با دو بار انتگرالگیری جز به جز معادلات (۳-۵۵) و (۳-۵۶) به معادلات زیر منجر می‌شود:

$$Z_n'''(\ell)Z_m(\ell)+\int_0^{\ell} Z_n'' Z_m'' dx-\beta_n^4\int_0^{\ell} Z_n Z_m dx=0 \qquad (۵۷-۳)$$

$$Z_m'''(\ell)Z_n(\ell)+\int_0^{\ell} Z_m'' Z_n'' dx-\beta_m^4\int_0^{\ell} Z_m Z_n dx=0 \qquad (۵۸-۳)$$

شرایط مرزی نیز بر این معادلات اعمال می‌شود و معادلات پس از بازنویسی بدین شکل در می‌آید:

$$\int_0^{\ell} Z_n'' Z_m'' dx+\frac{b\lambda_n}{EI} Z_n(\ell)Z_m(\ell)-\beta_n^4\int_0^{\ell} Z_n Z_m dx=0 \qquad (۵۹-۳)$$

$$\int_0^{\ell} Z_m'' Z_n'' dx+\frac{b\lambda_m}{EI} Z_m(\ell)Z_n(\ell)-\beta_m^4\int_0^{\ell} Z_m Z_n dx=0 \qquad (۶۰-۳)$$

که در آن :

$$\lambda_i = \chi_i \pm i\psi_i \qquad (۳-۶۱)$$

اگر معادله (۳-۶۰) از (۳-۵۹) کم شود:

$$-\frac{b}{EI}(\lambda_m - \lambda_n)Z_m(\ell)Z_n(\ell) + (\beta_m^4 - \beta_n^4)\int_0^\ell Z_m Z_n dx = 0 \qquad (۳-۶۲)$$

در صورتی که در معادله فوق $\lambda_n \neq \lambda_m$ باشد اولین شرط تعامد به شکل زیر در می‌آید:

$$(\lambda_m + \lambda_n)\int_0^\ell m Z_m Z_n dx - b Z_m(\ell) Z_n(\ell) = 0 \qquad (۳-۶۳)$$

یا:

$$\int_0^\ell m Z_m Z_n dx - \frac{bm}{EI(\beta_m^4 - \beta_n^4)} Z_m(\ell) Z_n(\ell) = 0 \qquad (۳-۶۴)$$

با ضرب معادله (۳-۵۹) در λ_m و معادله (۳-۶۰) در λ_n و کم نمودن این دو از هم معادله زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&-\lambda_m \int_0^\ell Z_n'' Z_m'' dx - \frac{b\lambda_n\lambda_m}{EI} Z_n(\ell) Z_m(\ell) + \beta_n^4 \lambda_m \int_0^\ell Z_n Z_m dx \\ &+ \lambda_n \int_0^\ell Z_m'' Z_n'' dx + \frac{b\lambda_m\lambda_n}{EI} Z_m(\ell) Z_n(\ell) - \beta_m^4 \lambda_n \int_0^\ell Z_m Z_n dx = 0\end{aligned} \qquad (۳-۶۵)$$

در صورتی که در معادله فوق $\lambda_n \neq \lambda_m$ باشد دومین شرط تعامد به شکل زیر در می‌آید:

$$\int_0^\ell EI Z_n'' Z_m'' dx + \lambda_m \lambda_n \int_0^\ell Z_m Z_n dx = 0 \qquad (۳-۶۶)$$

۳-۶ - تعیین پاسخ سیستم به بار رونده:

برای تعیین پاسخ سیستم، تیر با یک نیروی *F(t)* رونده با سرعت ثابت *v* که در فاصله *x* از لبه گیردار بر آن وارد می‌شود، تحریک می‌گردد.

معادله حرکت را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$EIw^{(IV)}(x,t)+m\ddot{w}(x,t)+\sigma\ \dot{w}(x,t)=F(t)\delta(x-vt)\left(H(t)-H(t-\frac{\ell}{v})\right) \qquad (۶۷-۳)$$

معادله فوق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Lw(x,t)+M\ddot{w}(x,t)+C\dot{w}(x,t)=f(x,t) \qquad (۶۸-۳)$$

که در آن:

$$L=EI\frac{d^4}{dx^4}\quad,\quad C=\sigma\quad,\quad M=m\quad,$$

$$f(x,t)=F(t)\delta(x-vt)\left(H(t)-H(t-\frac{\ell}{v})\right) \qquad (۶۹-۳)$$

معادله نیروی *F(t)* رونده با سرعت ثابت *v* را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$f(x,t)=\begin{cases}F(t)\delta(x-vt) & 0\le vt\le\ell\\ 0 & vt>\ell\end{cases} \qquad (۷۰-۳)$$

و شرایط مرزی در شکل اپراتوری بدین شکل می‌شوند:

$$@\ x=0\quad:\quad B_1=1\quad,\ B_2=\frac{d}{dx}\qquad\qquad C_1=C_2=0$$

$$@\ x=\ell\quad:\quad B_1=\frac{d^2}{dx^2}\quad,\ B_2=-\lambda EI\frac{d^3}{dx^3}\qquad\qquad C_1=0\ ,\ C_2=b \qquad (۷۱-۳)$$

برای حل معادله فوق حلی به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$w(x,t)=\sum_{s=1}^{\infty}Z_s(x)\eta_s(t) \qquad (۷۲-۳)$$

$\eta_s(t)$ مختصات تعمیم یافته[۳۳] و $Z_s(x)$ ها توابع ویژه و متعامد سیستم غیرمیرا هستند که با قرار دادن $\sigma=0$ در معادله (۶۸-۳) بدست می‌آیند و توسط چگالی جرمی نرمالیزه شده‌اند:

33- Generalized Coordinates

$$\int_0^{\ell} mZ_r(x)Z_s(x)dx = \delta_{rs} \qquad (۷۳-۳)$$

که δ_{rs} دلتای کرانکر[۳۴] نامیده می‌شود:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & r = s \\ 0 & r \neq s \end{cases} \qquad (۷۴-۳)$$

معادله (۳-۷۲) به صورت تقریبی زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(x,t) \approx \sum_{s=1}^{n} Z_s(x)\eta_s(t) \qquad n \to \infty \qquad (۷۵-۳)$$

با اعمال معادله فوق در معادله (۳-۶۸) و در نظرگرفتن معادله (۳-۷۰) عبارت زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{r=1}^{n}\left[EIZ_r^{IV}(x)\eta_r(t) + mZ_r(x)\ddot{\eta}_r(t) + \sigma\ Z_r(x)\dot{\eta}_r(t)\right] = \begin{cases} F(t)\delta(x-vt) & 0 \le vt \le \ell \\ 0 & vt > \ell \end{cases}$$

(۷۶-۳)

با ضرب طرفین معادله فوق در $Z_s(x)$ و انتگرال گیری در طول تیر معادله زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{r=1}^{n}\left[EI\eta_r(t)\int_0^{\ell} Z_r^{IV}(x)Z_s(x)dx + m\ddot{\eta}_r(t)\int_0^{\ell} Z_r(x)Z_s(x)dx + \sigma\ \dot{\eta}_r(t)\int_0^{\ell} Z_r(x)Z_s(x)dx\right] =$$

$$\begin{cases} \int_0^{\ell} F(t)\delta(x-vt)Z_s(x)dx & 0 \le vt \le \ell \\ 0 & vt > \ell \end{cases} \qquad (۷۷-۳)$$

از معادله (۳-۵۵) حاصل می‌شود:

$$\int_0^{\ell} Z_r^{(IV)}(x)Z_s(x)dx = \beta_r^4 \int_0^{\ell} Z_r(x)Z_s(x)dx \qquad (۷۸-۳)$$

با قرار دادن معادله بالا در معادله (۳-۷۷) معادله زیر حاصل می‌شود:

34- Kronecker Delta

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\left(EI\beta_r^4\eta_r(t)+m\ddot{\eta}_r(t)+\sigma\,\dot{\eta}_r(t)\right)\int_0^{\ell} Z_r(x)Z_s(x)dx\right]=\begin{cases}F(t)Z_s(vt) & 0\le vt\le \ell\\ 0 & vt>\ell\end{cases}$$

(۷۹-۳)

در عبارت اول معادله فوق $EI\beta_r^4 = m\lambda_r^2$ می‌باشد، بنابراین:

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\left(\lambda_r^2\eta_r(t)+\ddot{\eta}_r(t)+\frac{\sigma}{m}\dot{\eta}_r(t)\right)\int_0^{\ell} mZ_r(x)Z_s(x)dx\right]=\begin{cases}F(t)Z_s(vt) & 0\le vt\le \ell\\ 0 & vt>\ell\end{cases} \quad (۸۰-۳)$$

در معادله فوق هر گاه *r=s* باشد عبارت $\int_0^{\ell} mZ_r(x)Z_s(x)dx$ برابر یک و در غیر این صورت برابر صفر می‌شود، بنابراین:

$$\ddot{\eta}_s(t)+\frac{\sigma}{m}\dot{\eta}_s(t)+\lambda_s^2\eta_s(t)=\begin{cases}F(t)Z_s(vt) & 0\le vt\le \ell\\ 0 & vt>\ell\end{cases}=N_s(t) \quad (۸۱-۳)$$

معادله فوق را می‌توان به شکل زیر هم نوشت:

$$\ddot{\eta}_r(t)+\sum_{r=1}^{n}C_{rs}\dot{\eta}_s(t)+\omega_r^2\eta_r(t)=N_r(t) \qquad r,s=1,2,\dots,n \quad (۸۲-۳)$$

که ω_r فرکانسهای طبیعی سیستم تیر یک سرگیردار بدون میرایی لزج به شکل زیر می‌باشد.

$$\omega_i=\beta_i^{\,2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (۸۳-۳)$$

در معادله (۳-۸۲) نیروی مدال و ضریب میرایی به ترتیب از معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$N_r(t)=\int_0^{\ell} Z_r(x)F(t)\delta(x-vt)\left(H(t)-H(t-\frac{\ell}{v})\right)dx=\begin{cases}F(t)Z_s(vt) & 0\le vt\le \ell\\ 0 & vt>\ell\end{cases}$$

(۸۴-۳)

$$C_{rs} = \int_0^{\ell} Z_r(x)\sigma \; Z_s(x)dx \qquad (۸۵-۳)$$

معادله (۳-۸۲) یک دســتگاه معادلات دیفرانسیل با *n* معادله (بی نهابت) می‌باشد که با وجود میرایی، دســتگاه معادلات مدال می‌باشــد. برای حل این معادله ابتدا لازم است نوع میرایی مشخص شود که از نوع میرایی تناســبی (میرایی درونی و میرایی خارجی) یا میرایی ســاختاری می‌باشــد. بنابراین اپراتور میرایی *C* در حالات زیر در بررسی شده‌اند:

۳-۶-۱ - میرایی تناسبی[۳۵] :

در این حالت اپراتور میرایی *C* به صـــورت ترکیبی خطی از اپراتور ســـفتی *L* و اپراتور جرم *M* بیان می‌شود؛ یعنی:

$$C = \alpha L + \beta M \qquad (۸۶-۳)$$

که α و β ثوابت عددی (اسکالر) می‌باشند و معادله (۳-۸۵) به شکل زیر در می‌آید:

$$\sum_{s=1}^{n} C_{rs} = 2\zeta_r \omega_r \delta_{rs} \qquad (۸۷-۳)$$

و معادله (۳-۸۲) بدین شکل خلاصه می‌شود:

$$\ddot{\eta}_r(t) + 2\zeta_r \omega_r \dot{\eta}_r(t) + \omega_r^2 \eta_r(t) = N_r(t) \qquad (۸۸-۳)$$

شرایط اولیه به شکل زیر می‌باشد:

$$w(x,0) = w_0 \qquad (۸۹-۳)$$

$$\dot{w}(x,0) = v_0 \qquad (۹۰-۳)$$

و به همین ترتیب:

35- Proportional Damping

$$\eta_r(0)=\int_0^{\ell} MZ_r(x)w_0dx \qquad (۹۱-۳)$$

$$\dot{\eta}_r(0)=\int_0^{\ell} MZ_r(x)v_0dx \qquad (۹۲-۳)$$

پس حل معادله (۳-۸۸) به شکل زیر می‌باشد:

$$\eta_r(t)=\frac{1}{\omega_{dr}}\int_0^t N_r(t-\tau)e^{-\zeta_r\omega_r\tau}\sin\omega_{dr}t\ d\tau+\eta_{r0}(t)$$

r =1, 2, 3… n (۹۳-۳)

که در آن:

$$\eta_{r0}(t)=e^{-\zeta_r\omega_r t}\left[\eta_r(0)\left(\cos\omega_{dr}t+\frac{\zeta_r\omega_r}{\omega_{dr}}\sin\omega_{dr}t\right)+\frac{\dot{\eta}_r(0)}{\omega_{dr}}\sin\omega_{dr}t\right],$$

$$\omega_{dr}=\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2}$$ *r =1, 2, 3… n* (۹۴-۳)

و با قرار دادن معادله فوق در معادله (۳-۷۲) پاسخ به شکل زیر در می‌آید:

$$w(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}Z_r(x)\times\frac{1}{\omega_{dr}}\int_0^t N_r(t-\tau)e^{-\zeta_r\omega_r\tau}\sin\omega_{dr}\tau\ d\tau+\eta_{r0}(t) \qquad (۹۵-۳)$$

معادله فوق را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت که از خواص انتگرال کانولوشن می‌باشد:

$$w(x,t)=\sum_{r=1}^{\infty}Z_r(x)\times\frac{1}{\omega_{dr}}\int_0^t N_r(\tau)e^{-\zeta_r\omega_r(t-\tau)}\sin\omega_{dr}(t-\tau)\ d\tau+\eta_{r0}(t) \qquad (۹۶-۳)$$

در صورتی که شرایط اولیه صفر در نظرگرفته شود، مقدار $\eta_{r0}(t)$ برابر صفر می‌گردد.

میرایی تناسبی خود به دو بخش میرایی درونی[۳۶] و میرایی خارجی[۳۷] تقسیم می‌گردد.

36- Internal Damping
37- External Damping

میرایی خارجی حالتی است که اپراتور جرم یک تابع محض به صورت $M=m$ است، که m چگالی جرمی می‌باشد. در این حالت $\alpha=0$ و اپراتور جرم متناسب با چگالی جرمی m می‌باشد:

$$C=\beta m=\sigma \tag{۹۷-۳}$$

که σ تابع چگالی میرایی لزج می‌باشد. فرض فوق در این نوع میرایی لزج تعمیم یافته[۳۸]، حل مسایل بسیاری را آسان می‌کند.

میرایی درونی هنگامی فرض می‌شود که مواد از خود رفتار ویسکوالاستیک نشان می‌دهند.

یکی از عمومی ترین مدلهای ویسکوالاستیکی که مورد استفاده قرار می‌گیرد، مدل کلوین- ویت[۳۹] می باشد و به موجب آن تنش عمودی با کرنش و نرخ کرنش به شکل زیر رابطه دارد:

$$\sigma_N=E(\varepsilon+k\dot{\varepsilon})=E\left(\frac{\partial w}{\partial x}+k\frac{\partial^2 w}{\partial t\partial x}\right) \tag{۹۸-۳}$$

که E مدول یانگ و k ضریب ثابتی است که داده شده است.

در ارتعاشات تیر تحت خمش اولر- برنولی، با فرض ثابت ماندن صفحات خمش حین تغییر شکل، با در نظر گرفتن مدل کلوین- ویت دیده می‌شـود که گشــتاور خمشی توسط رابطه زیر با جابجایی خمشی در ارتباط است:

$$M(x,t)=EI(x)\left(\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}+k\frac{\partial^3 w}{\partial t\partial x^2}\right) \tag{۹۹-۳}$$

بنابراین می‌توان حالت خاصی از میرایی تناسبی را به شکل زیر بدست آورد:

$$C=kL=kEI\frac{d^4}{dx^4} \tag{۱۰۰-۳}$$

که در این حالت $\alpha=k$ و $\beta=0$ می‌باشد.

38- Distributed Viscous Damping
39- Kelvin -Voigt

۳-۶-۲ - میرایی ساختاری[۴۰]:

رفتـار میرایی ســـاختاری را می‌توان مشـــابه میرایی لزجی در نظر گرفت که تابع تحریک آن تناوبی می‌باشد. در این حالت معادله (۳-۶۸) به شکل زیر در نظرگرفته می‌شود:

$$Lw(x,t)+M\ddot{w}(x,t)+\dot{w}(x,t)= f(x)e^{i\Omega t} \qquad (۳-۱۰۱)$$

که *f(x)* شـدت بزرگنمایی تابع تحریک است و معمولا مقداری مختلط می‌باشد و Ω فرکانس حرکت می‌باشد. پاسخ حالت ماندگار تناوبی است:

$$\dot{w}(x,t)=i\Omega w(x,t) \qquad (۳-۱۰۲)$$

بنابراین:

$$Lw(x,t)+i\Omega Cw(x,t)+M\ddot{w}(x,t)= f(x)e^{i\Omega t} \qquad (۳-۱۰۳)$$

در سـیسـتمهای گسسته ماتریس میرایی ساختاری متناسب با ماتریس سفتی بود؛ در اینجا نیز اپراتور میرایی *C* متناسب با اپراتور سفتی *L* می‌باشد:

$$C=\frac{\gamma}{\Omega}L \qquad (۳-۱۰۴)$$

که γ ضـریب میرایی ســاختاری اســت. با اعمال رابطه فوق در معادله (۳-۱۰۳) رابطه زیر حاصـل می‌گردد:

$$(1+i\gamma)Lw(x,t)+M\ddot{w}(x,t)= f(x)e^{i\Omega t} \qquad (۳-۱۰۵)$$

با درنظرگرفتن رابطه (۳-۷۲) و قرار دادن آن در معادله فوق، دســتگاه معادلات دیفرانســیل مدال به حالت مجزا[۴۱] بدست می‌آید:

$$\ddot{\eta}_r(t)+(1+i\gamma)\omega_r^2\eta_r(t)=N_r e^{i\Omega t} \qquad r=1, 2, 3... \quad (۳-۱۰۶)$$

40- Structural Damping
41- Decoupled

که ω_rها فرکانسهای طبیعی ارتعاشات نامیرا می‌باشند؛ نیروی مدال نیز به شکل ثوابت بزرگنمایی زیر می‌باشد:

$$N_r = \int_0^{\ell} Z_r(x) f(x) dx \qquad r=1, 2, 3... \qquad (۱۰۷-۳)$$

حل معادله (۳-۱۰۵) به شکل زیر می‌باشد:

$$\eta_r(t) = \frac{N_r e^{i\Omega t}}{(1+i\gamma)\omega_r^2 - \Omega^2} \qquad r=1, 2, 3... \qquad (۱۰۸-۳)$$

با قرار دادن معادله فوق در معادله (۳-۷۲) پاسخ به شکل زیر در می‌آید:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{N_r e^{i\Omega t}}{(1+i\gamma)\omega_r^2 - \Omega^2} Z_r(x) \qquad (۱۰۹-۳)$$

مساله نمونه ۳-۲ :

پاسخ فرکانسی تیر یک سرگیردار لزج با دمپر در انتها تحت بار رونده با سرعت ثابت، تحت شرایط زیرمطلوب می‌باشد؛

جدول ۳-۳ - مشخصات تیر مساله نمونه ۳-۲

یکا	مقدار	فرمول	مشخصه
m	1	ℓ	طول تیر
Kg/m	9.72	m	جرم واحد طول تیر
Nm^2	75600	EI	سفتی پیچشی
Kg/ms	100	σ	ضریب میرایی لزج
Kg/s	10	b	ثابت میرایی

m/s	2	v	سرعت بار رونده
m	0.01	w_0	جابجایی اولیه
m/s	1	v_0	سرعت اولیه
N	20	F	بزرگنمایی نیروی واداشته
1/s	π/6	p	فرکانس نیروی واداشته

پاسخ نیروی واداشته نسبت به نیروی هارمونیک رونده مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$F(t) = F\sin pt = 20\sin \pi\ t/6$$

مقادیر ویژه، ضرایب میرایی و فرکانسهای طبیعی تیر به صورت زیر می‌باشند:

جدول ۳-۴ - مقادیر ویژه، ضرایب میرایی و فرکانسهای طبیعی تیر مساله نمونه ۳-۲

R	β	Ω	ζ	ζ_d
1	*1.8720*	*309.0576*	*0.0166*	*309.0148*
2	*4.6939*	*1943.1013*	*0.0026*	*1943.0944*
3	*7.8547*	*5441.1033*	*0.0009*	*5441.1009*
4	*10.9955*	*10662.4678*	*0.0005*	*10662.4665*
5	*14.1372*	*17626.0326*	*0.0003*	*17626.0319*

در این تیر فرض می شـود که میرایی تناسـبی، از نوع میرایی خارجی یا میرایی لزج گسترده به شکل $C = \alpha L + \beta M$ می‌باشد:

$$\alpha = 0\ ,\quad \beta = \frac{\sigma}{m} = 10.3$$

به عنوان نمونه پاسخ سیستم در مود اول بدست آورده شده است:

$$\ddot{\eta}_1(t) + 10.3\dot{\eta}_1(t) + 95516.6\eta_1(t) = N_1(t)$$

$$N_1(t)=\int_0^{\ell} Z_1(x)F(t)\delta(x-vt)\left(H(t)-H(t-\frac{\ell}{v})\right)dx=\begin{cases}20\sin\pi\ t/6\,Z_1(2t) & 0\le t\le 0.5\\ 0 & t>0.5\end{cases}$$

$$N_1(t)=20\sin\pi\ t/6\left[(\sin 3.744t-\sinh 3.744t)-1.3622(\cos 3.744t-\cosh 3.744t)\right]$$

$0\le t\le 0.5$

$$\eta_1(0)=\int_0^1 MZ_1(x)w_0dx=0.1034$$

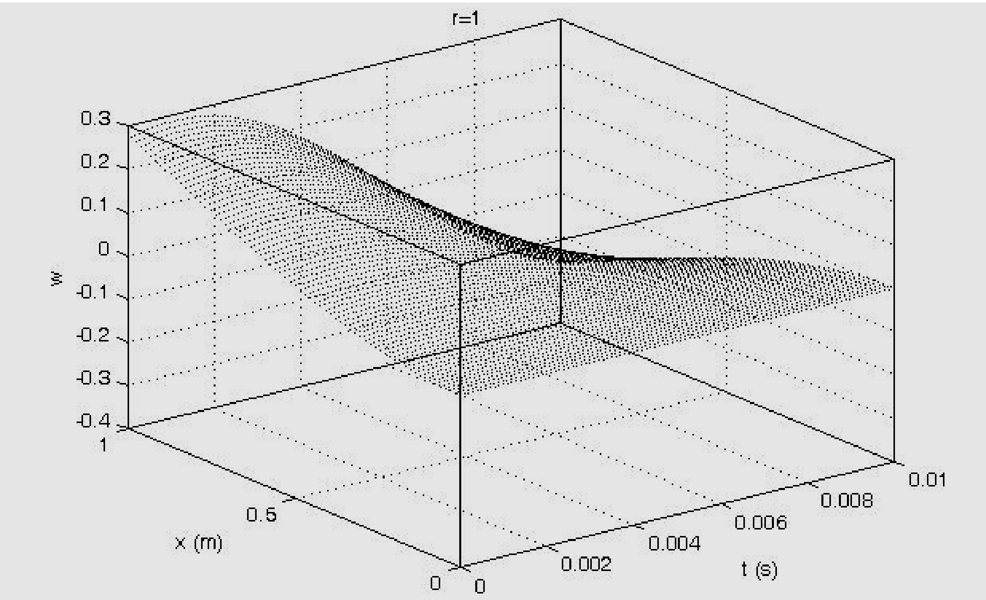
$$\dot{\eta}_1(0)=\int_0^1 MZ_1(x)v_0dx=10.3407$$

$$\eta_{10}(t)=e^{-5.1440\ t}\left(0.1034\cos 310t+0.0351\sin 310t\right)$$

$$\eta_1(t)=0.0032\int_0^t N_1(t-\tau)e^{-5.1440\ \tau}\sin 310t\ d\tau+\eta_{10}(t)$$

$$w_1(x,t)=0.0032\times Z_1(x)\times\int_0^t N_1(t-\tau)e^{-5.1440\ \tau}\sin 310t\ d\tau+\eta_{10}(t)$$

مقدار عبارت $w_1(x,t)$ به ازای x ها و t های مختلف در مود اول در جدول ۳-۵ آمده است.



شکل ۳-۴ - نمودار سه بعدی نمایش جابجایی تیر در زمانهای مختلف در مقاطع تیر در مود اول

مقدار انتگرال $\eta_1(t)$ به روش انتگرال‌گیری عددی رامبرگ[۴۲] حل شده است؛ شکل دیگر این معادله در زیر آمده است:

$$\eta_1(t) = 0.0032\int_0^t N_1(\tau)e^{-5.1440\ (t-\tau)} \sin 310(t-\tau)d\tau + \eta_{10}(t)$$

در نمودار شکل۳-۴ جابجایی تیر مورد نظر در زمانهای مختلف نسبت به نیروی رونده در مقاطع مختلف تیر نمایش داده شده است. در این نمودار مقدار تغییرات طول تیر $\Delta x = 0.01$ و تغییرات زمان $\Delta t = 0.0001$ در نظر گرفته شده است.

توسط زیر روال ***moving.m*** نمودار سه بعدی تغییرات جانبی تیر ترسیم شده است:

```
%---------------moving load-------------
clc;clear;
tic
L=1;%m
for r=1:5
    figure(r)
    for t=0:1e-4:1e-2
        sprintf('time=%.1f s\nt=%.4f',toc,t)
        for x=0:15e-3:L
            w=WW(x,t,r);
            plot3(t,x,w,'k')
            hold on
        end
    end
    title(['r=',num2str(r)])
    xlabel('t (s)')
    ylabel('x (m)')
```

42- Romberg

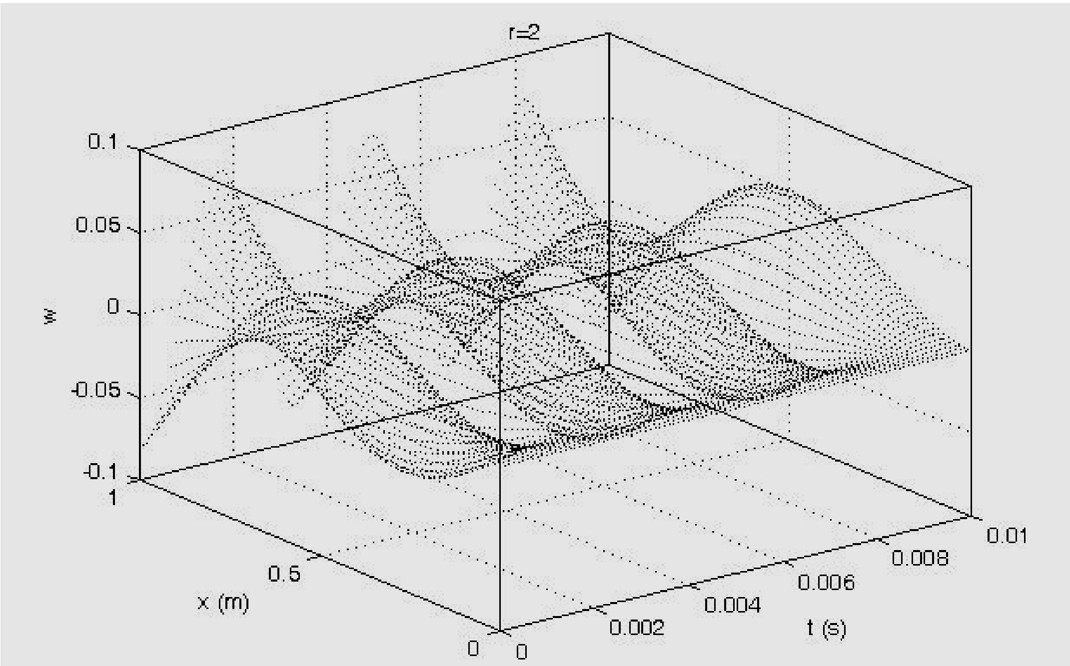
زیرروال ***romberg.m*** عملیات مربوط به این انتگرال‌گیری را انجام می‌دهد که در پیوست آمده است.

```
    zlabel('w')
end
toc
```

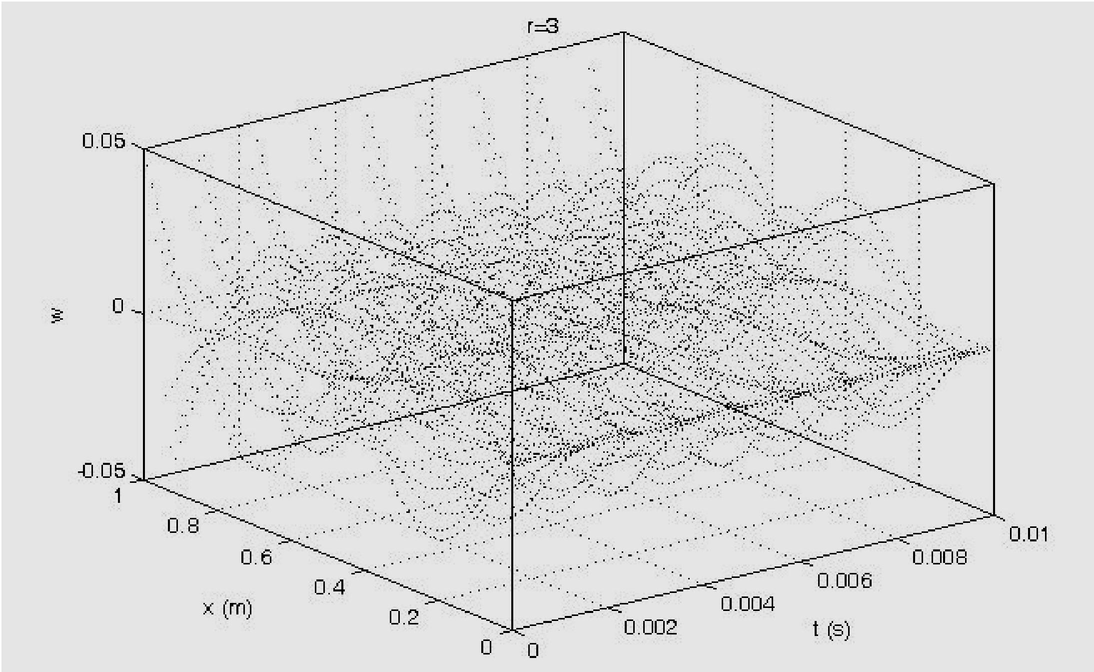
در زیرروال فوق زمان محاســبه هر جابجایی و کل زمان انجام عملیات به ثانیه محاسبه می‌گردد که به عنوان مثـال این زمـان برای مود اول برابر 5940 s می‌بـاشـــد. همچنین مقدار $\eta_r(t)$ به ازای مقادیر مختلف r توسط تابع ***etta.m*** و زیرروالهای دیگر محاسبه می‌شوند که در پیوست آمده‌اند.

در جداول ۳-۶ تا ۳-۹ این تغییرات در دیگر مودها نمایش داده شده‌اند.

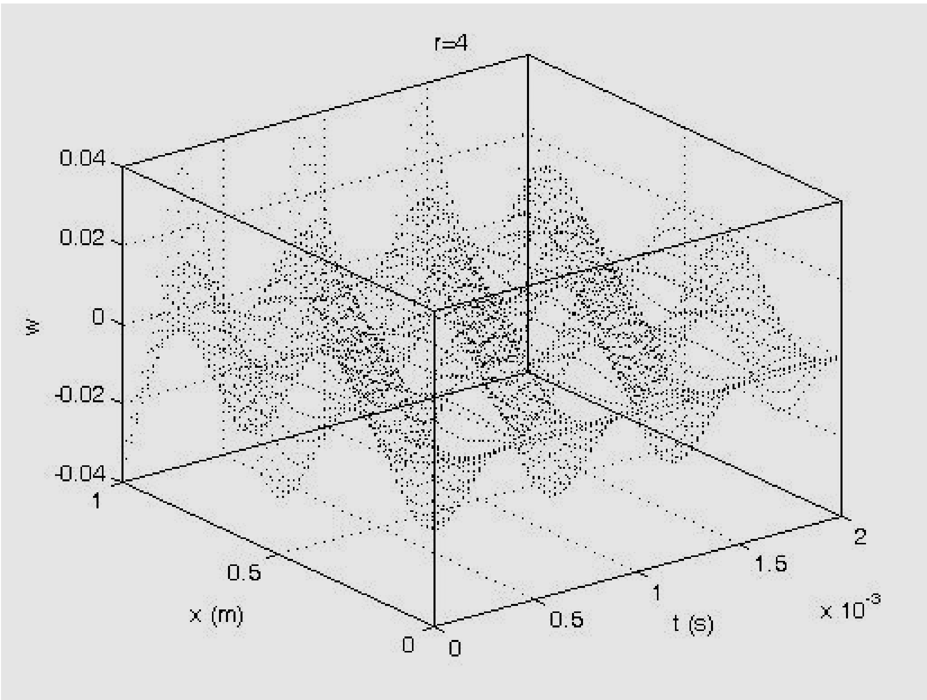
در نمودارهای شـــکل۳-۵ تا ۳-۸ جابجایی جانبی تیر در زمانهای مختلف نســـبت به نیروی رونده در مقاطع مختلف تیر و مودهای بالاتر نمایش داده شده‌اند.



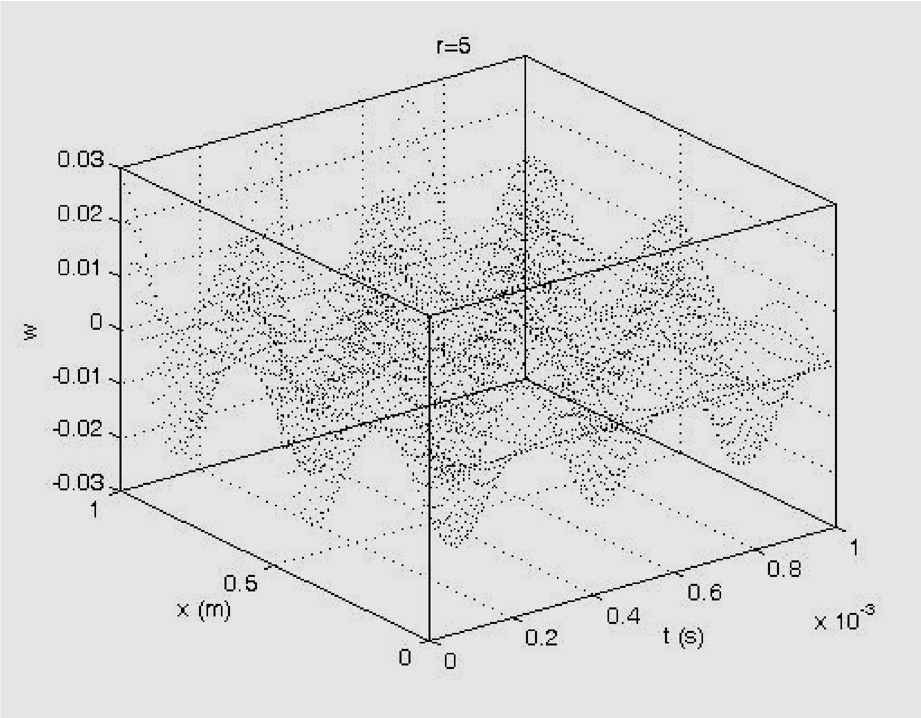
شکل ۳-۵ - نمودار سه بعدی نمایش جابجایی تیر در زمانهای مختلف در مقاطع تیر در مود دوم



شکل ۳-۶ - نمودار سه بعدی نمایش جابجایی تیر در زمانهای مختلف در مقاطع تیر در مود سوم



شکل ۳-۷ - نمودار سه بعدی نمایش جابجایی تیر در زمانهای مختلف در مقاطع تیر در مود چهارم



شکل ۳-۸ - نمودار سه بعدی نمایش جابجایی تیر در زمانهای مختلف در مقاطع تیر در مود پنجم

جدول ۳-۵ **–** تغییرات جانبی تیر به ازای مقادیر مختلف *x* و *t* در مود اول *r*=1

r=1								
x	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***
0	***0***	***0***	***0.2***	***0***	***0.017938***	***0.4***	***0***	***0.064574***
	0.001	***0***		***0.001***	***0.018841***		***0.001***	***0.067827***
	0.002	***0***		***0.002***	***0.017948***		***0.002***	***0.064612***
	0.003	***0***		***0.003***	***0.015361***		***0.003***	***0.0553***
	0.004	***0***		***0.004***	***0.011344***		***0.004***	***0.040837***
	0.005	***0***		***0.005***	***0.006291***		***0.005***	***0.022647***
	0.006	***0***		***0.006***	***0.000693***		***0.006***	***0.002495***
	0.007	***0***		***0.007***	***-0.004913***		***0.007***	***-0.017687***

	0.008	0		0.008	-0.009996		0.008	-0.035985
	0.009	0		0.009	-0.014079		0.009	-0.050682
	0.01	0		0.01	-0.016784		0.01	-0.060419
x	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***
0.6	0	0.12956	0.8	0	0.203877	1	0	0.281083
	0.001	0.136088		0.001	0.214149		0.001	0.295244
	0.002	0.129637		0.002	0.203999		0.002	0.28125
	0.003	0.110954		0.003	0.174598		0.003	0.240716
	0.004	0.081935		0.004	0.128934		0.004	0.177759
	0.005	0.045439		0.005	0.071504		0.005	0.098581
	0.006	0.005006		0.006	0.007878		0.006	0.010862
	0.007	-0.035488		0.007	-0.055844		0.007	-0.076991
	0.008	-0.0722		0.008	-0.113615		0.008	-0.15664
	0.009	-0.101687		0.009	-0.160016		0.009	-0.220612
	0.01	-0.121225		0.01	-0.190761		0.01	-0.263

جدول ۳-۶ - تغییرات جانبی تیر به ازای مقادیر مختلف *x* و *t* در مود دوم *r*=2

r=2								
x	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***
0	0	0	0.2	0	0.024488	0.4	0	0.055595
	0.001	0		0.001	-0.007638		0.001	-0.01734
	0.002	0		0.002	-0.018706		0.002	-0.04247
	0.003	0		0.003	0.021105		0.003	0.047915
	0.004	0		0.004	0.003233		0.004	0.007341
	0.005	0		0.005	-0.02323		0.005	-0.05274
	0.006	0		0.006	0.01362		0.006	0.030923
	0.007	0		0.007	0.01313		0.007	0.029809
	0.008	0		0.008	-0.022988		0.008	-0.052191
	0.009	0		0.009	0.00365		0.009	0.008287
	0.01	0		0.01	0.02011		0.01	0.045656
x	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***
0.6	0	0.047954	0.8	0	-0.005686	1	0	-0.081328
	0.001	-0.014957		0.001	0.001773		0.001	0.025367
	0.002	-0.036633		0.002	0.004343		0.002	0.062128
	0.003	0.04133		0.003	-0.0049		0.003	-0.070093
	0.004	0.006332		0.004	-0.000751		0.004	-0.010738
	0.005	-0.045492		0.005	0.005394		0.005	0.077152
	0.006	0.026673		0.006	-0.003162		0.006	-0.045236
	0.007	0.025712		0.007	-0.003049		0.007	-0.043607
	0.008	-0.045018		0.008	0.005338		0.008	0.076348
	0.009	0.007148		0.009	-0.000847		0.009	-0.012122
	0.01	0.039382		0.01	-0.004669		0.01	-0.066789

جدول ۳-۷ - تغییرات جانبی تیر به ازای مقادیر مختلف *x* و *t* در مود سوم *r*=3

r=3								
x	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***	***x***	***t***	***w(x,t)***
0	***0***	***0***	***0.2***	***0***	***0.029944***	***0.4***	***0***	***0.026052***
	0.001	***0***		***0.001***	***0.019411***		***0.001***	***0.016888***
	0.002	***0***		***0.002***	***-0.003914***		***0.002***	***-0.003405***
	0.003	***0***		***0.003***	***-0.024399***		***0.003***	***-0.021228***
	0.004	***0***		***0.004***	***-0.02846***		***0.004***	***-0.024761***
	0.005	***0***		***0.005***	***-0.013565***		***0.005***	***-0.011802***
	0.006	***0***		***0.006***	***0.010192***		***0.006***	***0.008867***
	0.007	***0***		***0.007***	***0.026932***		***0.007***	***0.023432***
	0.008	***0***		***0.008***	***0.025603***		***0.008***	***0.022276***
	0.009	***0***		***0.009***	***0.007272***		***0.009***	***0.006327***

x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)
	0.01	0		0.01	-0.015704		0.01	-0.013663
x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)
0.6	0	-0.023467	0.8	0	-0.019561	1	0	0.049532
	0.001	-0.015213		0.001	-0.012681		0.001	0.032109
	0.002	0.003067		0.002	0.002557		0.002	-0.006474
	0.003	0.019121		0.003	0.015939		0.003	-0.04036
	0.004	0.022304		0.004	0.018592		0.004	-0.047077
	0.005	0.010631		0.005	0.008862		0.005	-0.022439
	0.006	-0.007987		0.006	-0.006658		0.006	0.016859
	0.007	-0.021107		0.007	-0.017594		0.007	0.044551
	0.008	-0.020065		0.008	-0.016726		0.008	0.042352
	0.009	-0.005699		0.009	-0.004751		0.009	0.012029
	0.01	0.012307		0.01	0.010259		0.01	-0.025977

جدول ۳-۸ - تغییرات جانبی تیر به ازای مقادیر مختلف x و t در مود چهارم $r=4$

r=4								
x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)
	0	0		0	0.026654		0	-0.011158
	0.001	0		0.001	-0.008918		0.001	0.003733
	0.002	0		0.002	-0.020579		0.002	0.008615
	0.003	0		0.003	0.022216		0.003	-0.0093
	0.004	0		0.004	0.005915		0.004	-0.002476
0	0.005	0	0.2	0.005	-0.025837	0.4	0.005	0.010816
	0.006	0		0.006	0.010955		0.006	-0.004586
	0.007	0		0.007	0.018445		0.007	-0.007721
	0.008	0		0.008	-0.022843		0.008	0.009563
	0.009	0		0.009	-0.003394		0.009	0.001421
	0.01	0		0.01	0.024818		0.01	-0.010389
x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)	x	t	w(x,t)
	0	-0.011545		0	0.022738		0	-0.035359
	0.001	0.003863		0.001	-0.007608		0.001	0.01183
	0.002	0.008914		0.002	-0.017556		0.002	0.0273
	0.003	-0.009623		0.003	0.018952		0.003	-0.029471
	0.004	-0.002562		0.004	0.005046		0.004	-0.007847
0.6	0.005	0.011191	0.8	0.005	-0.022041	1	0.005	0.034274
	0.006	-0.004745		0.006	0.009345		0.006	-0.014533
	0.007	-0.007989		0.007	0.015735		0.007	-0.024468
	0.008	0.009895		0.008	-0.019487		0.008	0.030303
	0.009	0.00147		0.009	-0.002895		0.009	0.004502
	0.01	-0.01075		0.01	0.021171		0.01	-0.032922

جدول ۳-۹ - تغییرات جانبی تیر به ازای مقادیر مختلف *x* و *t* در مود پنجم *r*=5

r=5								
x	**t**	**w(x,t)**	**x**	**t**	**w(x,t)**	**x**	**t**	**w(x,t)**
0	0	0	0.2	0	0.018141	0.4	0	-0.019157
	0.001	0		0.001	0.006041		0.001	-0.006379
	0.002	0		0.002	-0.013865		0.002	0.014641
	0.003	0		0.003	-0.015368		0.003	0.016229
	0.004	0		0.004	0.003316		0.004	-0.003501
	0.005	0		0.005	0.017456		0.005	-0.018434
	0.006	0		0.006	0.008539		0.006	-0.009017
	0.007	0		0.007	-0.011495		0.007	0.012139
	0.008	0		0.008	-0.016236		0.008	0.017145
	0.009	0		0.009	0.000383		0.009	-0.000404
	0.01	0		0.01	0.016329		0.01	-0.017243
x	**t**	**w(x,t)**	**x**	**t**	**w(x,t)**	**x**	**t**	**w(x,t)**
0.6	0	0.019259	0.8	0	-0.016514	1	0	0.027504
	0.001	0.006413		0.001	-0.005499		0.001	0.009159

	0.002	-0.014719		0.002	0.012621		0.002	-0.02102
	0.003	-0.016315		0.003	0.01399		0.003	-0.023299
	0.004	0.00352		0.004	-0.003018		0.004	0.005027
	0.005	0.018532		0.005	-0.015891		0.005	0.026465
	0.006	0.009065		0.006	-0.007773		0.006	0.012946
	0.007	-0.012203		0.007	0.010464		0.007	-0.017428
	0.008	-0.017236		0.008	0.01478		0.008	-0.024615
	0.009	0.000406		0.009	-0.000349		0.009	0.00058
	0.01	0.017335		0.01	-0.014864		0.01	0.024756

۳-۷ - استخراج معادلات حرکت سیستم با تیر تیموشنکو:

در این قسـمت تبر معرفی شده در فرض ۳-۱- ب تیر تیموشنکو می‌باشد و فرضیات ۳-۱- الف و ۳-۱- ج همچنان پابرجا می‌باشند.

شیب خم تغییر شکل در نقطه x به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = \phi(x,t) + \theta(x,t) \qquad (۱۱۰-۳)$$

که در آن $\phi(x,t)$ و $\theta(x,t)$ به ترتیب زاویه گردش حاصل از خمش و زاویه اعوجاج حاصل از برش و $w(x,t)$ تغییر شکل کل می‌باشد.

انرژی جنبشی سیستم به صورت زیر در می‌آید:

$$V(t) = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} EI(x)\left[\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x}\right]^2 dx + k'GA(x)\theta^2 dx \qquad (۱۱۱-۳)$$

$$-\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ - EI(x)\frac{\partial \phi}{\partial x}\delta\phi\Big|_0^{\ell} - k'GA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \phi\right)\delta w\Big|_0^{\ell} + \right. \qquad (۱۱۲-۳)$$

$$+\int_0^{\ell}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k'GA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right)\right)\delta w+k'GA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\phi\right)\delta\phi+\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\delta\phi\right]dx\Bigg\}dt$$

و انرژی پتانسیل:

$$T(t)=\frac{1}{2}\int_0^{\ell}m(x)\left[\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx+J(x)\left[\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial t}\right]^2 dx \qquad (۱۱۳\text{-}۳)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta T dt=-\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{\ell}\left[m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w+J(x)\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\delta\phi\right]dxdt \qquad (۱۱۴\text{-}۳)$$

در دو معادله فوق $m(x)$ جرم واحد طول، $A(x)$ مساحت مقطع تیر، $I(x)$ و $J(x)$ به ترتیب ممان اینرسی سطح و جرم حول محوری عمود بر صفحه حرکت و گذرنده از مرکز جرم اجزای دیفرانسیلی تیر، E و G نیز به ترتیب مدول کشسانی و مدول برشی می‌باشند.

k' ضریب برشی تیر تیموشنکو نام دارد و به شکل سطح مقطع تیر بستگی دارد. این ضریب برای مقطع دایره‌ای $\frac{9}{10}$ و برای مقطع مستطیلی برابر $\frac{5}{6}$ می‌باشد.

ارتباط مابین ممان اینرسی سطح و جرم به شکل زیر می باشد:

$$J(x)=\frac{m(x)}{A(x)}I(x) \qquad (۱۱۵\text{-}۳)$$

کار نیروهای ناپایستار در معادله زیر نشان داده شده است:

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta\overline{W}_{nc}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_0^{\ell}\left\{f(x,t)\delta w-\sigma\frac{\partial w}{\partial t}\delta w\right\}dx-b\frac{\partial w(\ell,t)}{\partial t}\delta w\Big|_{x=\ell}\right)dt \qquad (۱۱۶\text{-}۳)$$

که در آن معادله نیروی $F(t)$ رونده با سرعت ثابت V به صورت زیر می باشد:

$$f(x,t)=\begin{cases}F(t)\delta(x-vt) & 0\le vt\le \ell\\ 0 & vt>\ell\end{cases} \qquad (۱۱۷\text{-}۳)$$

با استفاده از اصل تعمیم یافته همیلتون می‌توان معادلات حرکت سیستم را بدست آورد:

$$\int_{t_1}^{t_2}(\delta T-\delta V+\delta\overline{W}_{nc})dt=0 \qquad (۱۱۸\text{-}۳)$$

$$\delta w(x,t)=0 \quad , \qquad t=t_1,t_2$$

که معادله حرکت بدین شکل درمی آید:

$$\begin{cases} m(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\dfrac{\partial}{\partial x}\left[k'GA(x)\left(\phi-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\right]+\sigma\dfrac{\partial w}{\partial t}-f(x,t)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\dfrac{\partial \phi}{\partial x}\right)-k'GA(x)\left(\phi-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)-J(x)\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=0 \end{cases} \qquad (۱۱۹\text{-}۳)$$

و شرایط مرزی:

$$-EI(x)\frac{\partial \phi}{\partial x}\delta\phi\,\Big|_0^{\ell}=0 \qquad (۱۲۰\text{-}۳)$$

$$\left(k'GA(x)\left[\phi-\frac{\partial w}{\partial x}\right]-b\frac{\partial w}{\partial t}\right)\delta w\Big|_0^{\ell}=0 \qquad (۱۲۱\text{-}۳)$$

یا به صورت:

$$@\,x=0: \qquad w=0 \qquad , \qquad \phi=0 \qquad (۱۲۲\text{-}۳)$$

$$@\,x=\ell: \quad k'GA(x)\left(\phi-\frac{\partial w}{\partial x}\right)-b\frac{\partial w}{\partial t}=0 \quad , \quad M=EI(x)\frac{\partial \phi}{\partial x}=0 \qquad (۱۲۳\text{-}۳)$$

در معادله فوق M گشتاور خمشی می‌باشد و Q نیروی برشی به صورت زیر می‌باشد:

$$Q=-k'GA(x)\left(\phi-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (۱۲۴\text{-}۳)$$

مقادیر *m(x), EI(x), GA(x), J(x)* ثابت در نظر گرفته می‌شود، بنابراین:

$$m(x)=m \qquad EI(x)=EI \qquad (۱۲۵\text{-}۳)$$

$$J(x)=J \qquad GA(x)=GA \qquad (۱۲۶\text{-}۳)$$

و معادله حرکت (۳-۱۱۹) به شکل جدید زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} k'GA\left(\dfrac{\partial \phi}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+\sigma\dfrac{\partial w}{\partial t}+m\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=f(x,t) \\ -k'GA\left(\phi-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)+EI\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}-J\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}=0 \end{cases} \qquad (۱۲۷-۳)$$

و شرایط مرزی جدید:

$$@\,x=0\;: \qquad w=0 \quad , \quad \phi=0 \qquad (۱۲۸-۳)$$

$$@\,x=\ell\;: \qquad \phi-\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{b}{k'GA}\frac{\partial w}{\partial t} \quad , \quad \frac{\partial \phi}{\partial x}=0 \qquad (۱۲۹-۳)$$

معادلات در شکل پارامتری نیز بدین صورتند:

$$y(x,t)=\begin{bmatrix} w(x,t) \\ \phi(x,t) \end{bmatrix} \qquad (۱۳۰-۳)$$

$$Ly(x,t)+M\ \ddot{y}(x,t)+C\dot{y}(x,t)=f^*(x,t) \qquad (۱۳۱-۳)$$

$$L=k'GA\begin{bmatrix} -\dfrac{d^2}{dx^2} & \dfrac{d}{dx} \\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{EI}{k'GA}\dfrac{d^2}{dx^2}-1 \end{bmatrix},\quad M=\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & -k^2 m \end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad f^*=\begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

(۱۳۲-۳)

۳-۸ - بررسی ارتعاشات آزاد

برای حل با استفاده از روش جداسازی متغیرها پاسخ به شکل زیر در نظر گرفته شده است:

$$w(x,t)=W(x)e^{\lambda t} \qquad (۱۳۳-۳)$$

$$\phi(x,t)=\Phi(x)e^{\lambda t} \qquad (۱۳۴-۳)$$

پس از جایگذاری در معادله (۳-۱۲۷) به صورت دیفرانسیلی زیر در می‌آید:

$$\begin{cases}(m\lambda^2+\lambda\sigma)W+k'GA\left(\dfrac{d\Phi}{dx}-\dfrac{d^2W}{dx^2}\right)=0\\(J\lambda^2+k'GA)\Phi-EI\dfrac{d^2\Phi}{dx^2}-k'GA\dfrac{dW}{dx}=0\end{cases}\qquad (۳-۱۳۵- \text{الف، ب})$$

مقدار $\frac{d\Phi}{dx}$ از معادله (۳-۱۳۵- الف) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d\Phi}{dx}=\mu W+\frac{d^2W}{dx^2}\qquad (۳-۱۳۶)$$

که در آن:

$$\mu=-\frac{m\lambda^2+\lambda\sigma}{\kappa}\qquad (۳-۱۳۷)$$

و

$$\kappa=k'GA\qquad (۳-۱۳۸)$$

با مشتق‌گیری از آن:

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}=\mu\frac{dW}{dx}+\frac{d^3W}{dx^3}\qquad (۳-۱۳۹)$$

با قراردادن آن در معادله (۳-۱۳۵- ب) :

$$\varepsilon\Phi-(\mu\frac{dW}{dx}+\frac{d^3W}{dx^3})-\frac{\kappa}{EI}\frac{dW}{dx}=0\qquad (۳-۱۴۰)$$

که در آن:

$$\varepsilon=\frac{(J\lambda^2+\kappa)}{EI}\qquad (۳-۱۴۱)$$

از معادله فوق مقدار Φ بدست می‌آید، یعنی:

$$\Phi=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{d^3W}{dx^3}+(\mu+\frac{\kappa}{EI})\frac{dW}{dx}\right]\qquad (۳-۱۴۲)$$

با مشتق‌گیری از آن:

$$\frac{d\Phi}{dx}=\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{d^4W}{dx^4}+(\mu+\frac{\kappa}{EI})\frac{d^2W}{dx^2}\right] \qquad (۱۴۳-۳)$$

با قرار دادن معادله فوق در معادله (۳-۱۳۶) بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{d^4W}{dx^4}+(\mu+\frac{\kappa}{EI})\frac{d^2W}{dx^2}\right]=\mu W+\frac{d^2W}{dx^2} \qquad (۱۴۴-۳)$$

که در معادله فوق تنها تابع W و مشتقاتش وجود دارند.

که پس از ساده‌سازی:

$$\frac{d^4W}{dx^4}+\alpha\frac{d^2W}{dx^2}+\beta W=0 \qquad (۱۴۵-۳)$$

که در آن:

$$\alpha=\mu-\frac{J\lambda^2}{EI} \quad , \qquad \beta=-\mu\varepsilon \qquad (۱۴۶-۳)$$

و معادله مشخصه آن به شکل زیر می‌باشد:

$$r^4+\alpha r^2+\beta=0 \qquad (۱۴۷-۳)$$

و جوابهای آن بدین شکلند:

$$r_1 \ldots r_4=\pm\sqrt{\frac{-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-4\beta}}{2}} \qquad (۱۴۸-۳)$$

و پاسخ عمومی معادله (۳-۱۴۵) به شکل زیر می‌باشد:

$$W(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}+C_3e^{r_3x}+C_4e^{r_4x} \qquad (۱۴۹-۳)$$

شرایط مرزی از معادلات (۳-۱۲۸)، (۳-۱۲۹) و معادله (۳-۱۴۲) به قرار زیرند:

$$W(0)=0 \quad , \qquad \Phi(0)=0$$

$$\Phi'(L)=0 \qquad , \qquad \Phi(L)-W'(L)=\frac{b\lambda}{\kappa}W(L) \tag{۳-۱۵۰}$$

که پس از مرتب‌سازی بر حسب $W(x)$ به شکل زیر درمی‌آیند:

$$W(0)=0 \tag{۳-۱۵۱}$$

$$(\mu+\frac{\kappa}{EI})W'(0)+W'''(0)=0 \tag{۳-۱۵۲}$$

$$\mu W(L)+W''(L)=0 \tag{۳-۱۵۳}$$

$$W'''(L)+\alpha W'(L)-\frac{b\lambda\varepsilon}{\kappa}W(L)=0 \tag{۳-۱۵۴}$$

بـا قرار دادن معـادلات (۳-۱۵۱)، (۳-۱۵۲)، (۳-۱۵۳) و (۳-۱۵۴) در معـادله (۳-۱۴۹) معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$\Lambda_{11}C_1+\Lambda_{12}C_2+\Lambda_{13}C_3+\Lambda_{14}C_4=0 \tag{۳-۱۵۵}$$

$$\Lambda_{21}C_1+\Lambda_{22}C_2+\Lambda_{23}C_3+\Lambda_{24}C_4=0 \tag{۳-۱۵۶}$$

$$\Lambda_{31}C_1+\Lambda_{32}C_2+\Lambda_{33}C_3+\Lambda_{34}C_4=0 \tag{۳-۱۵۷}$$

$$\Lambda_{41}C_1+\Lambda_{42}C_2+\Lambda_{43}C_3+\Lambda_{44}C_4=0 \tag{۳-۱۵۸}$$

معادلات فوق در شکل ماتریسی بدین صورت درمی‌آیند:

$$\Lambda C=0 \tag{۳-۱۵۹}$$

که در آن ماتریسهای C و Λ به قرار زیرند:

$$C=\begin{bmatrix}C_1 & C_2 & C_3 & C_4\end{bmatrix}^T \tag{۳-۱۶۰}$$

$$\Lambda=\{\Lambda_{ij}\} \qquad i, j= 1, 2, 3, 4 \tag{۳-۱۶۱}$$

که مقادیر آن در پیوست آمده است.

دترمینان ماتریس Λ تابعی از λ می باشـد که وقتی برابر صــفر قرار گیرد معادله مشــخصــه بدســت می‌آید:

$$|\Lambda| = \Lambda^*(\lambda) = 0 \qquad (۱۶۲-۳)$$

مقادیر λ که بدین ترتیب بدســت خواهند آمد مقادیر ویژه می‌باشــند که جذر آن فرکانسهای طبیعی سیستم را بدست می‌دهد.

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n} \qquad n= 1, 2, 3, \ldots \qquad (۱۶۳-۳)$$

۳-۹ - بررسی شرط خودالحاقی

شرط خودالحاقی به صورت زیر می‌باشد:

$$\int_0^\ell U^T LVdx + \int_0^\ell U^T BVdx = \int_0^\ell V^T LUdx + \int_0^\ell V^T BUdx \qquad (۱۶۴-۳)$$

می‌توان متغیرهای U و V را به صورت زیر درنظر گرفت:

$$U = \begin{bmatrix} u \\ \phi \end{bmatrix} \quad , \quad V = \begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix} \qquad (۱۶۵-۳)$$

اپراتور ســفتی L قبلا توســط معادله (۳-۱۳۲) داده شــده اســت. اپراتور شــرط مرزی B به شــکل زیر می‌باشد:

$$@\, x = 0: \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , @\, x = \ell \quad : \quad B = \begin{bmatrix} \frac{b\lambda}{\kappa} + \frac{d}{dx} & -1 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix} \qquad (۱۶۶-۳)$$

ابتدا اولین عبارت سمت چپ معادله (۳-۱۶۴) بررسی می‌شود:

$$\int_0^\ell U^T LVdx = \kappa\int_0^\ell [u \quad \phi]\begin{bmatrix} -\dfrac{d^2}{dx^2} & \dfrac{d}{dx} \\ \dfrac{d}{dx} & \dfrac{EI}{k'GA}\dfrac{d^2}{dx^2}-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v \\ \theta \end{bmatrix}dx$$

$$= \kappa\int_0^\ell \left(-u\frac{d^2v}{dx^2}+u\frac{d\theta}{dx}+\phi\frac{dv}{dx}+\frac{EI}{\kappa}\phi\frac{d^2\theta}{dx^2}-\phi\theta\right)dx \qquad (۱۶۷\text{-}۳)$$

معادله (۳-۱۶۷) پس از اعمال شرایط مرزی بدین شکل در می‌آید:

$$= \kappa\left\langle u(\ell)\frac{dv}{dx}\bigg|_{x=\ell} + \int_0^\ell \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\phi\frac{dv}{dx}+u\frac{d\theta}{dx}-\frac{EI}{\kappa}\frac{d\phi}{dx}\frac{d\theta}{dx}-\phi\theta\right)dx\right\rangle$$

$$= \kappa\left\langle \left(\phi(\ell)+\frac{b\lambda}{\kappa}u(\ell)\right)v(\ell) + \int_0^\ell \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}-\theta\frac{du}{dx}-v\frac{d\phi}{dx}-\frac{EI}{\kappa}\frac{d\phi}{dx}\frac{d\theta}{dx}-\phi\theta\right)dx\right\rangle \qquad (۱۶۸\text{-}۳)$$

اکنون اولین عبارت طرف راست معادله (۳-۱۶۴) بررسی می‌شود:

$$\int_0^\ell V^T LUdx =$$

$$= \kappa\left\langle \left(\theta(\ell)+\frac{b\lambda}{\kappa}v(\ell)\right)u(\ell) + \int_0^\ell \left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}-\phi\frac{dv}{dx}-u\frac{d\theta}{dx}-\frac{EI}{\kappa}\frac{d\phi}{dx}\frac{d\theta}{dx}-\phi\theta\right)dx\right\rangle$$

عبارات دوم معادله (۳-۱۶۴) با یکدیگر برابرند:

$$\int_0^\ell U^T BVdx = \int_0^\ell V^T BUdx$$

ولی چون عبارات اول برابر نمی‌باشــند بنابراین اپراتور ســفتی L دارای خاصیت خود الحاقی نمی‌باشد و در نتیجه مقادیر ویژه و توابع ویژه حقیقی نمی‌باشند.

پیوست آ

مشتقات معادله (۳-۱۴۹) نیز بدین شکلند:

$$W'(x)=C_1r_1e^{r_1x}+C_2r_2e^{r_2x}+C_3r_3e^{r_3x}+C_4r_4e^{r_4x}$$

$$W''(x)=C_1{r_1}^2e^{r_1x}+C_2{r_2}^2e^{r_2x}+C_3{r_3}^2e^{r_3x}+C_4{r_4}^2e^{r_4x}$$

$$W'''(x)=C_1{r_1}^3e^{r_1x}+C_2{r_2}^3e^{r_2x}+C_3{r_3}^3e^{r_3x}+C_4{r_4}^3e^{r_4x}$$

$$W''''(x)=C_1{r_1}^4e^{r_1x}+C_2{r_2}^4e^{r_2x}+C_3{r_3}^4e^{r_3x}+C_4{r_4}^4e^{r_4x}$$

و درایه‌های ماتریس Λ به شکل زیر می‌باشند:

$$\Lambda_{11}=\Lambda_{12}=\Lambda_{13}=\Lambda_{14}=1$$

$$\Lambda_{21} = r_1^3 + (\mu + \frac{k}{EI})r_1 \quad , \quad \Lambda_{22} = r_2^3 + (\mu + \frac{k}{EI})r_2$$

$$\Lambda_{23} = r_3^3 + (\mu + \frac{k}{EI})r_3 \quad , \quad \Lambda_{24} = r_4^3 + (\mu + \frac{k}{EI})r_4$$

$$\bar{r}_1 = r_1 L \quad , \quad \bar{r}_2 = r_2 L$$

$$\bar{r}_3 = r_3 L \quad , \quad \bar{r}_4 = r_4 L$$

$$\Lambda_{31} = \left(\mu + r_1^2\right)e^{\bar{r}_1} \quad , \quad \Lambda_{32} = \left(\mu + r_2^2\right)e^{\bar{r}_2}$$

$$\Lambda_{33} = \left(\mu + r_3^2\right)e^{\bar{r}_3} \quad , \quad \Lambda_{34} = \left(\mu + r_4^2\right)e^{\bar{r}_4}$$

$$\Lambda_{41} = \left(r_1^3 + \alpha\ r_1 - \frac{b\varepsilon\lambda}{\kappa}\right)e^{\bar{r}_1}$$

$$\Lambda_{42} = \left(r_2^3 + \alpha\ r_2 - \frac{b\varepsilon\lambda}{\kappa}\right)e^{\bar{r}_2}$$

$$\Lambda_{43} = \left(r_3^3 + \alpha\ r_3 - \frac{b\varepsilon\lambda}{\kappa}\right)e^{\bar{r}_3}$$

$$\Lambda_{44} = \left(r_4^3 + \alpha\ r_4 - \frac{b\varepsilon\lambda}{\kappa}\right)e^{\bar{r}_4}$$

منابع و مآخذ این فصل:

[۱]- پورپاک علی محمد، محاسـبات عددی (آنالیز عددی کاربردی)، انتشـارات جهاد دانشگاهی (دانشگاه تهران) ، چاپ چهارم ، زمستان ۱۳۸۳.

2. C. Ray Wyliy & Louise C. Barrett, Advanced engineering mathematic, McGraw-Hill, 1985 (Vol.2).
3. Leonard Meirovitch, Principles and Techniques of Vibrations, Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
4. MATLAB help & documentation. © 1984-2006 the MathWorks, Inc.
5. M. Gurgoze, H. Erol, Dynamic response of a viscously damped cantilever with a viscous end condition. Journal of Sound and Vibration 298 (2006) 132–153.
6. M.H. Kargarnovin, D. Younesian, D.J. Thompson, C.J.C. Jones, Response of beams on nonlinear viscoelastic foundations to harmonic moving loads. Computers and Structures 83 (2005) 1865–1877
7. Singiresu S. Rao, Mechanical Vibrations, Third Edition. Addison-Wesley, New York, 1995.
8. William E. Boyce, Richard C. Diprima, Elementary differential equation and boundary value problems, Third Edition, John Wiley & Sons, 1977.

فصل چهارم

بررسی نتایج

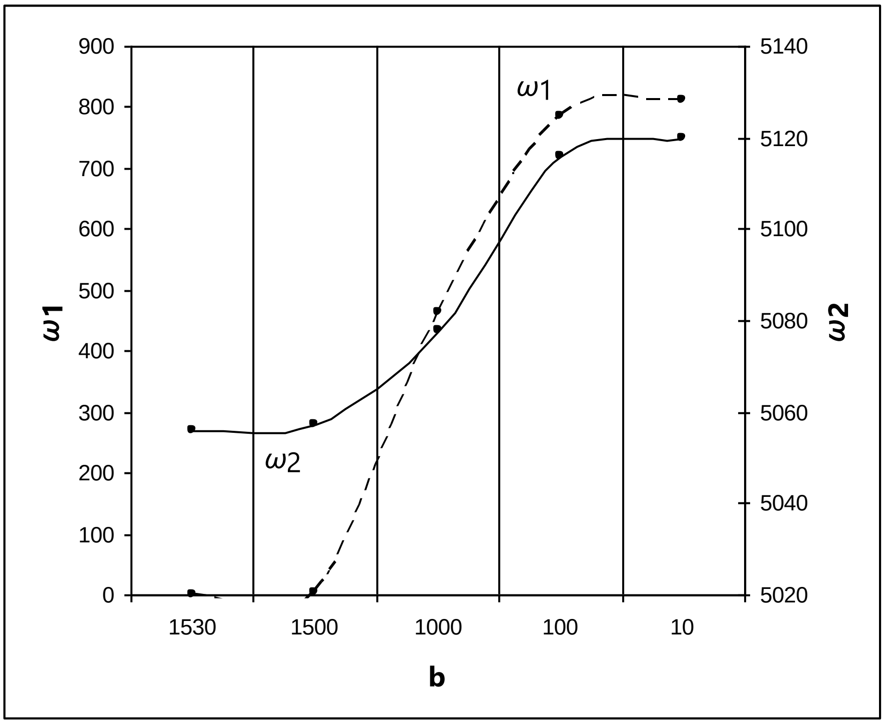
۴-۱ – تاثیر ثابت میرایی بر فرکانس طبیعی

در جدول زیر مقادیر فرکانس طبیعی اول و دوم به ازای مقادیر مختلف ثابت میرایی محاسبه شده‌اند.

جدول ۴-۱- فرکانس طبیعی اول و دوم به ازای مقادیر مختلف ثابت میرایی

b	10	100	1000	1500	1530
ω_1	811.06	786.29	462.95	2.82	1.01
ω_2	5119.97	5116.10	5077.94	5057.04	5055.79

با افزایش ثابت میرایی، میزان کاهش فرکانس طبیعی اول بیش از فرکانس‌های بالاتر می‌باشـــد و این مقدار به ازای ثابت میرایی برابر ۱۵۳۵ به صفر بسیار نزدیک می‌شود.



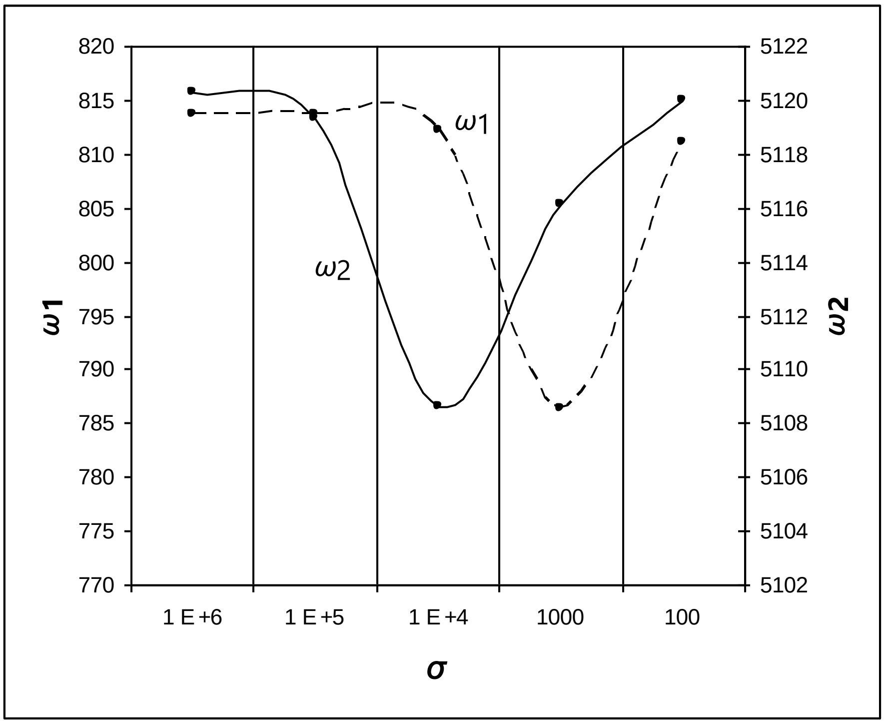
شکل ۴-۱- فرکانس طبیعی اول و دوم به ازای مقادیر مختلف ثابت میرایی

۴-۲- تاثیر ضریب میرایی لزج بر فرکانس طبیعی

جدول ۴-۲- فرکانس طبیعی اول و دوم به ازای مقادیر مختلف ضریب میرایی لزج

σ	100	1000	1 E +4	1 E +5	1 E +6
ω_1	811.06	786.29	812.14	813.62	813.76
ω_2	5119.97	5116.10	5108.59	5119.36	5120.28

همانگونه که از جدول (۴-۲) مشـــخص اســـت با افزایش ضـــریب میرایی لزج ابتدا مقدار فرکانس‌های طبیعی اول و دوم کاهش یافته و به مقدار کمینه خود می‌رســـد و ســـپس دوباره افزایش یافته و در مقادیر بالاتر تغییر چندانی نمی‌کند.



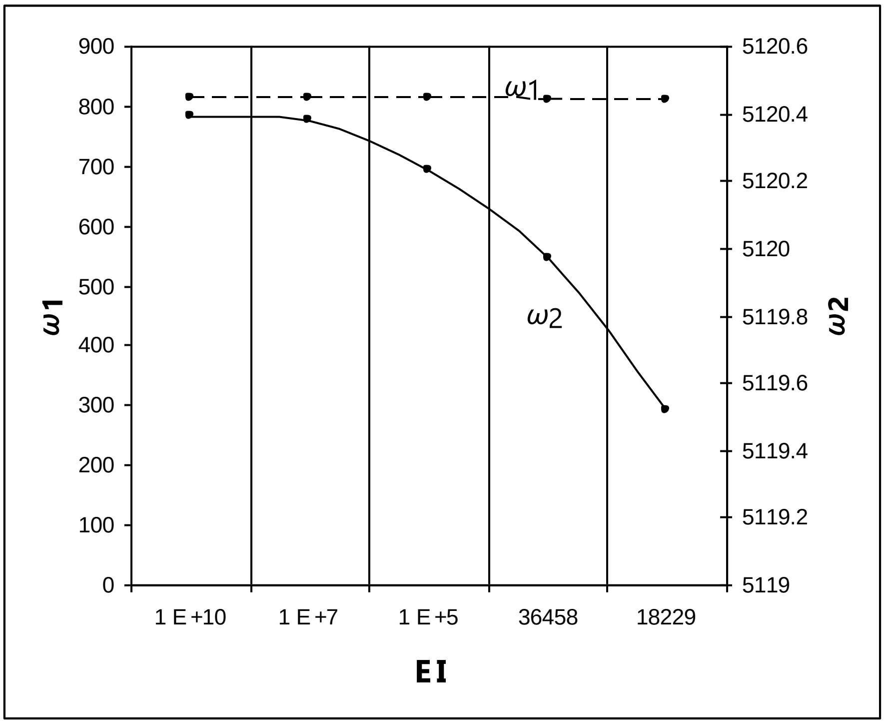
شکل ۴-۲- فرکانس طبیعی اول و دوم به ازای مقادیر مختلف ضریب میرایی لزج

۴-۳- تاثیر سفتی پیچشی بر فرکانس طبیعی

با افزایش سفتی پیچشی فرکانس طبیعی به میزان ناچیزی افزایش می‌یابد که می‌توان آنرا تقریبا ثابت فرض نمود.

جدول ۴-۳- فرکانس طبیعی اول و دوم به ازای مقادیر مختلف سفتی پیچشی

EI	18229	36458	1 E +5	1 E +7	1 E +10
ω_1	808.37	811.06	812.79	813.77	813.78
ω_2	5119.52	5119.97	5120.23	5120.38	5120.39



شکل ۴-۳- فرکانس طبیعی اول و دوم به ازای مقادیر مختلف سفتی پیچشی

همانگونه که از نمودارهای شکلهای (۴-۱) الی (۴-۳) دیده می‌شود، ثابت میرایی بیشترین تاثیر را بر فرکانسهای طبیعی سیستم می‌گذارد، بنابراین با تغییر دمپر انتهای تیر می‌توان تاثیر قابل توجهی در فرکانس طبیعی ایجاد نمود.

ضریب میرایی لزج تاثیر کمی بر فرکانسهای طبیعی سیستم دارد اما با تغییر لزجت تعمیم یافته تیر می‌توان فرکانسهای طبیعی را به مقادیر کمینه و یا بیشینه مورد نظر طراحی، نزدیک نمود.

۴-۴- تاثیر سرعت بر مقدار جابجایی

در این قسمت تاثیر سرعت بر میزان جابجایی انتهای آزاد تیر در سه مود اول طی زمانهای مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. مقادیر برای هشت سرعت در جداول (۴-۴) الی (۴-۶) و شکلهای (۴-۴) الی (۴-۹) نمایش داده شده‌اند.

در این بررسی‌ها مقادیر زیر با جدول (۳-۳) از مساله نمونه ۳-۲ متفاوت است و اندازه نیروی واداشته مقداری ثابت است.

جابجایی اولیه $w_0 = 0.01 \quad mm$

سرعت اولیه $v_0 = 0.01 \quad mm/s$

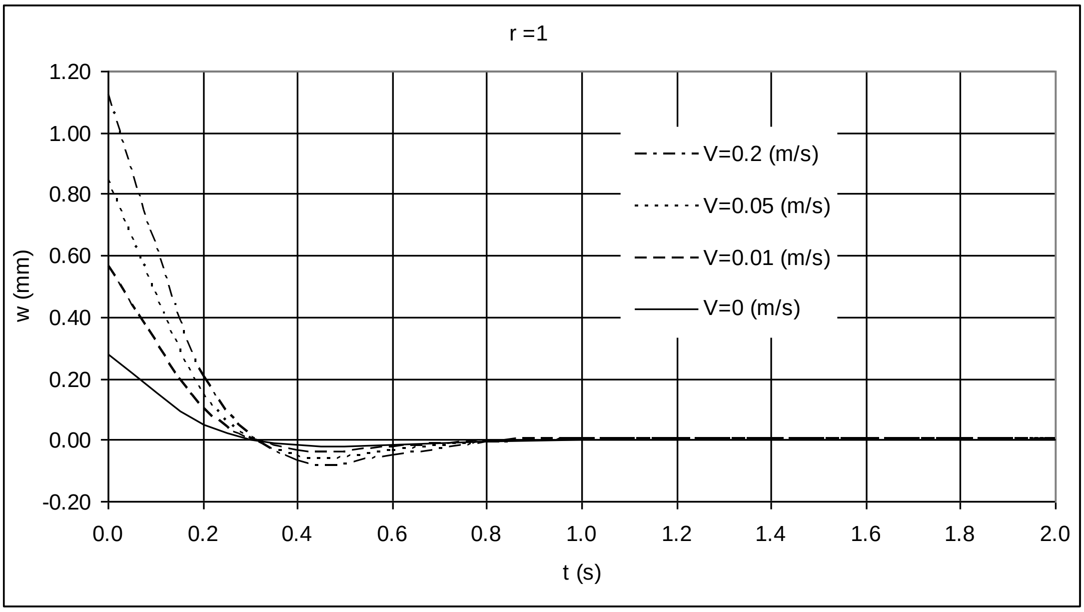
بزرگنمایی نیروی واداشته $F = 10 \quad GN$

همانگونه که از نمودار شـکلهای (۴-۴) الی (۴-۹) دیده می‌شود این جابجایی‌ها در هنگام شروع اولیه حرکت بار رونده قابل توجه می‌باشند و خصوصا در سرعتهای بالا سریعتر میرا می‌گردند.

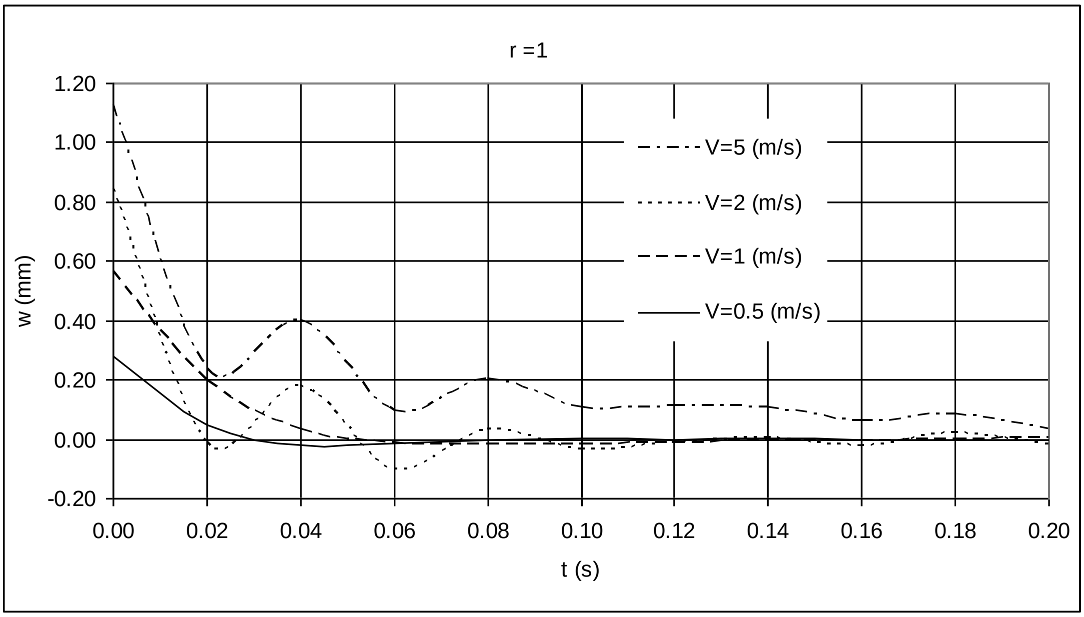
جدول ۴-۴- تغییرات جابجایی انتهایی تیر (x=L) به ازای مقادیر مختلف سرعت در مود اول

r=1											
V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)
0	0.00	0.28108	0.01	0.00	0.28108	0.05	0.00	0.28108	0.2	0.00	0.28108
	0.20	0.05011		0.20	0.05011		0.20	0.05011		0.20	0.05011
	0.40	-0.01744		0.40	-0.01744		0.40	-0.01744		0.40	-0.01744
	0.60	-0.01283		0.60	-0.01283		0.60	-0.01283		0.60	-0.01286
	0.80	-0.00250		0.80	-0.00250		0.80	-0.00251		0.80	-0.00254
	1.00	0.00072		1.00	0.00072		1.00	0.00072		1.00	0.00072
	1.20	0.00058		1.20	0.00058		1.20	0.00058		1.20	0.00055
	1.40	0.00012		1.40	0.00012		1.40	0.00013		1.40	0.00022
	1.60	-0.00003		1.60	-0.00003		1.60	-0.00007		1.60	-0.00060
	1.80	-0.00003		1.80	-0.00003		1.80	-0.00004		1.80	-0.00028
	2.00	-0.00001		2.00	-0.00001		2.00	-0.00001		2.00	-0.00001
V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)
0.5	0.00	0.28108	1	0.00	0.28108	2	0.00	0.28108	5	0.00	0.28108
	0.20	0.05011		0.10	0.14465		0.05	-0.20909		0.02	0.25174

	0.40	*-0.01745*		*0.20*	*0.05010*		*0.10*	*0.14465*		*0.04*	*0.22305*
	0.60	*-0.01301*		*0.30*	*0.00041*		*0.15*	*-0.09134*		*0.06*	*0.19544*
	0.80	*-0.00272*		*0.40*	*-0.01749*		*0.20*	*0.05009*		*0.08*	*0.16922*
	1.00	*0.00072*		*0.50*	*-0.01831*		*0.25*	*-0.02034*		*0.10*	*0.14465*
	1.20	*0.00039*		*0.60*	*-0.01288*		*0.30*	*0.00044*		*0.12*	*0.12188*
	1.40	*0.00063*		*0.70*	*-0.00668*		*0.35*	*0.01151*		*0.14*	*0.10101*
	1.60	*-0.00294*		*0.80*	*-0.00323*		*0.40*	*-0.01762*		*0.16*	*0.08210*
	1.80	*-0.00127*		*0.90*	*-0.00048*		*0.45*	*0.01914*		*0.18*	*0.06509*
	2.00	*-0.00001*		*1.00*	*0.00072*		*0.50*	*-0.01831*		*0.20*	*0.05004*



شکل ۴-۴- نمودار تغییرات جابجایی انتهایی تیر (*x=L*) به ازای مقادیر سرعتهای پایین در مود اول

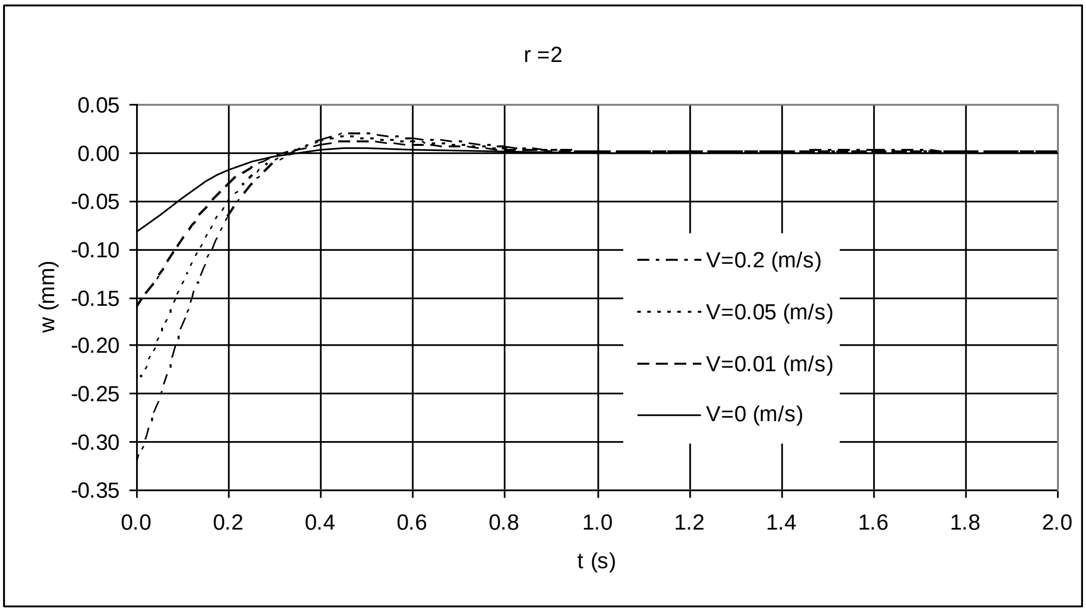


شکل ۴-۵- نمودار تغییرات جابجایی انتهایی تیر (*x=L*) به ازای مقادیر سرعتهای بالاتر در مود اول

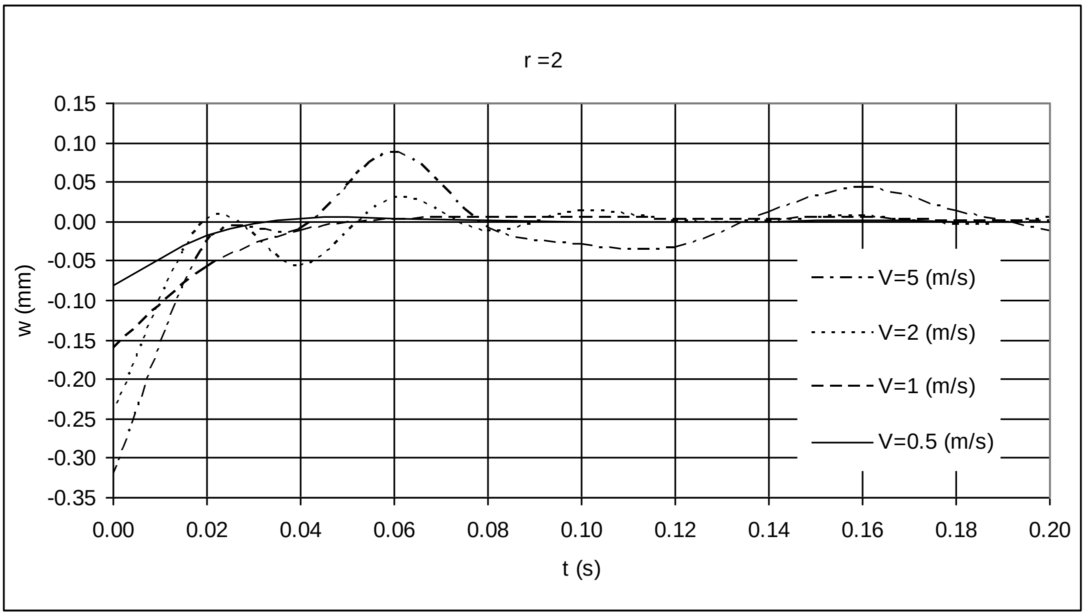
جدول ۴-۵- تغییرات جابجایی انتهای تیر($x=L$) به ازای مقادیر مختلف سرعت در مود دوم

r=2											
V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)
0	0.00	-0.08133	0.01	0.00	-0.08133	0.05	0.00	-0.08133	0.2	0.00	-0.08133
	0.20	-0.01710		0.20	-0.01710		0.20	-0.01710		0.20	-0.01710
	0.40	0.00317		0.40	0.00317		0.40	0.00317		0.40	0.00317
	0.60	0.00352		0.60	0.00352		0.60	0.00353		0.60	0.00360
	0.80	0.00108		0.80	0.00108		0.80	0.00109		0.80	0.00117
	1.00	0.00001		1.00	0.00001		1.00	0.00001		1.00	0.00001
	1.20	-0.00014		1.20	-0.00014		1.20	-0.00015		1.20	-0.00031
	1.40	-0.00006		1.40	-0.00006		1.40	-0.00009		1.40	-0.00047
	1.60	-0.00001		1.60	0.00000		1.60	0.00008		1.60	0.00103
	1.80	0.00000		1.80	0.00000		1.80	0.00002		1.80	0.00012
	2.00	0.00000		2.00	0.00000		2.00	0.00000		2.00	0.00000
V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)
0.5	0.00	-0.08133	1	0.00	-0.08133	2	0.00	-0.08133	5	0.00	-0.08133
	0.20	-0.01710		0.10	-0.04330		0.05	0.06111		0.02	-0.02933

	0.40	*0.00320*		*0.20*	*-0.01710*		*0.10*	*-0.04329*		*0.04*	*0.04520*
	0.60	*0.00389*		*0.30*	*-0.00267*		*0.15*	*0.02860*		*0.06*	*0.05624*
	0.80	*0.00143*		*0.40*	*0.00325*		*0.20*	*-0.01708*		*0.08*	*0.00347*
	1.00	*0.00001*		*0.50*	*0.00436*		*0.25*	*0.00864*		*0.10*	*-0.04329*
	1.20	*-0.00067*		*0.60*	*0.00339*		*0.30*	*-0.00280*		*0.12*	*-0.03382*
	1.40	*-0.00105*		*0.70*	*0.00195*		*0.35*	*-0.00107*		*0.14*	*0.01104*
	1.60	*0.00192*		*0.80*	*0.00156*		*0.40*	*0.00329*		*0.16*	*0.03542*
	1.80	*-0.00004*		*0.90*	*0.00036*		*0.45*	*-0.00416*		*0.18*	*0.01642*
	2.00	*0.00000*		*1.00*	*0.00001*		*0.50*	*0.00436*		*0.20*	*-0.01709*



شکل ۴-۶- نمودار تغییرات جابجایی انتهایی تیر (*x=L*) به ازای مقادیر سرعتهای پایین در مود دوم

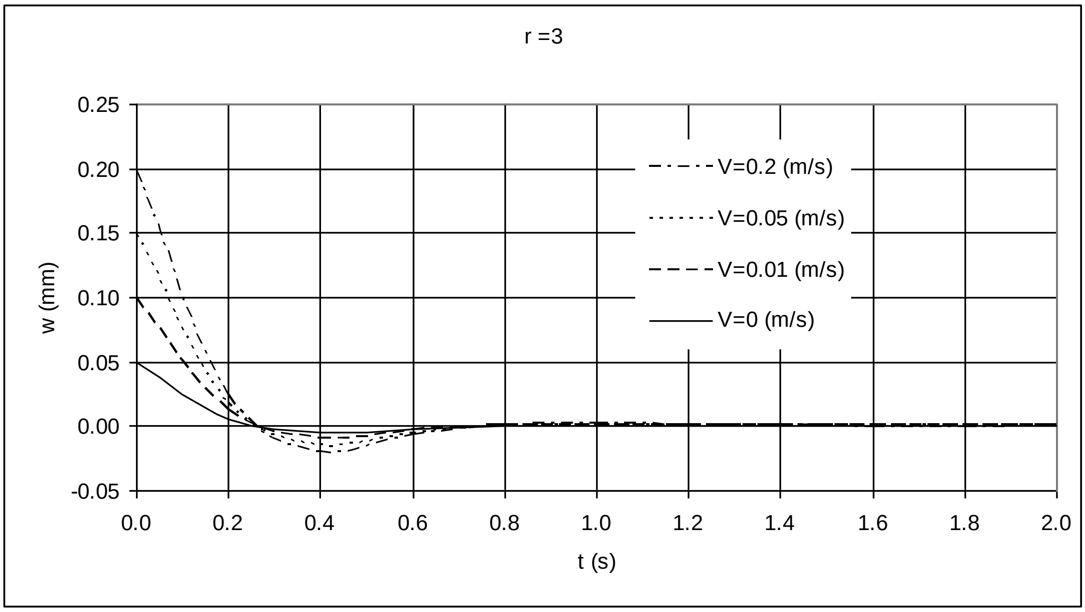


شکل ۴-۷- نمودار تغییرات جابجایی انتهایی تیر ($x=L$) به ازای مقادیر سرعتهای بالاتر در مود دوم

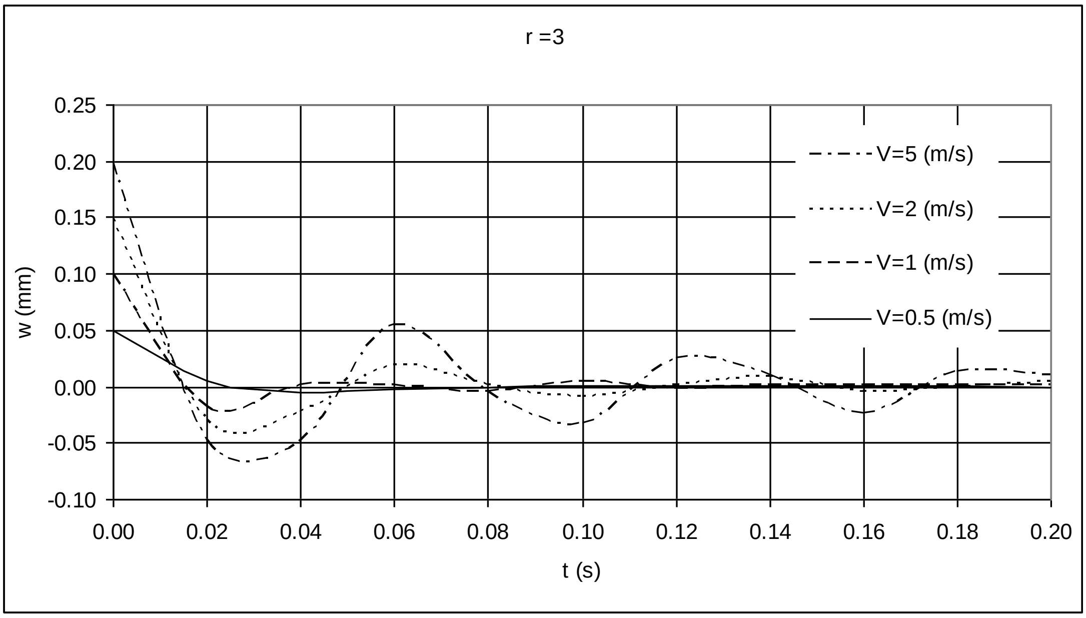
جدول ۴-۶- تغییرات جابجایی انتهای تیر ($x=L$) به ازای مقادیر مختلف سرعت در مود سوم

$r=3$											
V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)
0	0.00	0.04953	0.01	0.00	0.04953	0.05	0.00	0.04953	0.2	0.00	0.04953
	0.20	0.00595		0.20	0.00595		0.20	0.00595		0.20	0.00595
	0.40	-0.00490		0.40	-0.00490		0.40	-0.00490		0.40	-0.00491
	0.60	-0.00193		0.60	-0.00194		0.60	-0.00195		0.60	-0.00210
	0.80	0.00016		0.80	0.00016		0.80	0.00015		0.80	0.00005
	1.00	0.00029		1.00	0.00029		1.00	0.00029		1.00	0.00029
	1.20	0.00005		1.20	0.00005		1.20	0.00008		1.20	0.00034
	1.40	-0.00003		1.40	-0.00002		1.40	0.00007		1.40	0.00081
	1.60	-0.00001		1.60	-0.00002		1.60	-0.00015		1.60	-0.00109
	1.80	0.00000		1.80	-0.00001		1.80	-0.00015		1.80	-0.00083
	2.00	0.00000		2.00	0.00000		2.00	0.00000		2.00	0.00000
V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)	V (m/s)	t (s)	w (mm)
0.5	0.00	0.04953	1	0.00	0.04953	2	0.00	0.04953	5	0.00	0.04953
	0.20	0.00595		0.10	-0.02421		0.05	-0.01154		0.02	-0.01887

	0.40	-0.00494		0.20	0.00594		0.10	-0.02422		0.04	-0.02591
	0.60	-0.00248		0.30	0.00270		0.15	0.01819		0.06	0.03515
	0.80	-0.00014		0.40	-0.00498		0.20	0.00593		0.08	-0.00576
	1.00	0.00029		0.50	0.00377		0.25	-0.01368		0.10	-0.02422
	1.20	0.00039		0.60	-0.00185		0.30	0.00286		0.12	0.02318
	1.40	0.00035		0.70	0.00063		0.35	0.00687		0.14	0.00200
	1.60	0.00011		0.80	0.00019		0.40	-0.00489		0.16	-0.02041
	1.80	0.00068		0.90	-0.00018		0.45	-0.00176		0.18	0.01395
	2.00	0.00000		1.00	0.00029		0.50	0.00377		0.20	0.00596



شکل ۴-۸- نمودار تغییرات جابجایی انتهایی تیر (*x=L*) به ازای مقادیر سرعتهای پایین در مود سوم



شکل ۴-۹- نمودار تغییرات جابجایی انتهایی تیر (*x=L*) به ازای مقادیر سرعتهای بالاتر در مود سوم

۴-۵- تاثیر فرکانس نیروی واداشته بر میزان جابجایی

در این بخش بار رونده از نوع تناوبی و با فرکانس‌های مختلف در نظر گرفته شده است. بررسی‌های این بخش با در نظر گرفتن موارد زیر بدست آمده است:

۱- شرایط اولیه صفر در نظر گرفته شده است.

۲- بار رونده به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$F(t) = F_0 \sin(\omega_0 t) \qquad (۱-۴)$$

که در آن:

$$F_0 = 10 \ GN$$

۳- سرعت بار برای دو حالت مد نظر می‌باشد. (V_1= 0.2 *m/s* , V_2= 1 *m/s*)

۴- در دو سرعت مد نظر، فرکانس بار رونده ω_0 تغییر داده شده است و نمودار جابجایی در مودهای اول و دوم تیر نمایش داده شده‌اند.

ضریب میرایی **ζ** در اینجا کوچکتر از یک می‌باشد، بنابراین میرایی از نوع تحت میرا می‌باشد[1].

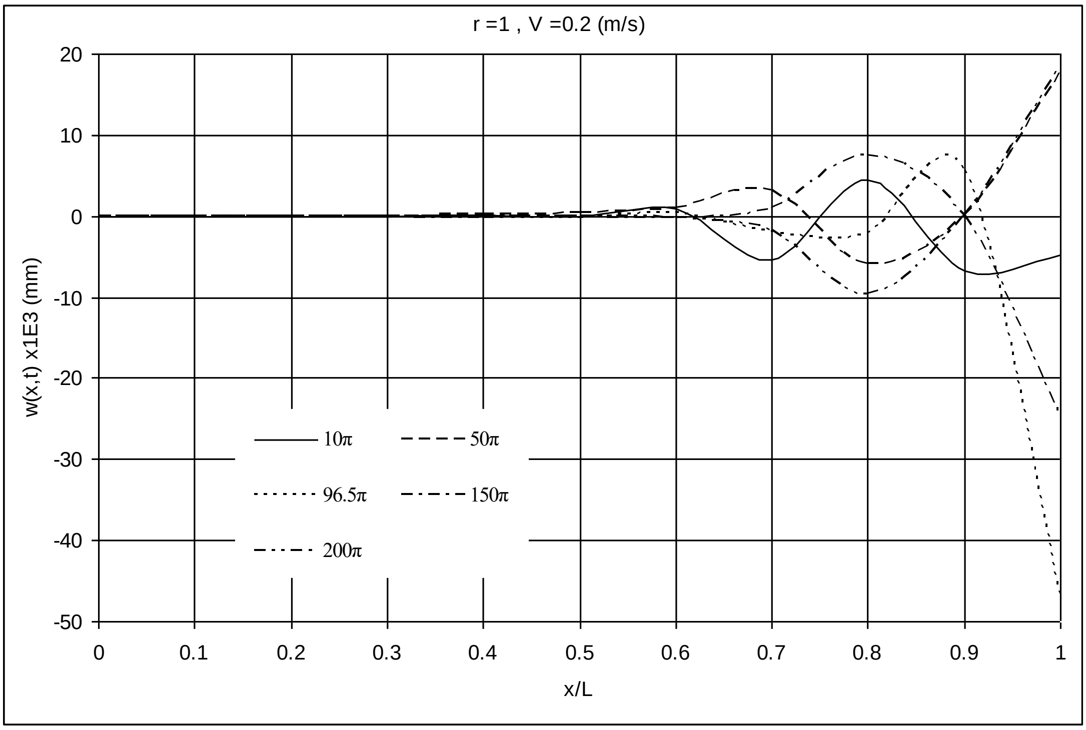
1- Underdamping

جهت بررســی مســاله تشــدید، بیشــترین مقدار جابجایی انتهای تیر برای هر فرکانس تحریک از فرکانس صفر تا π۴۵۰ هرتز روی نمودار (۴-۱۰) نمایش داده شده‌است.

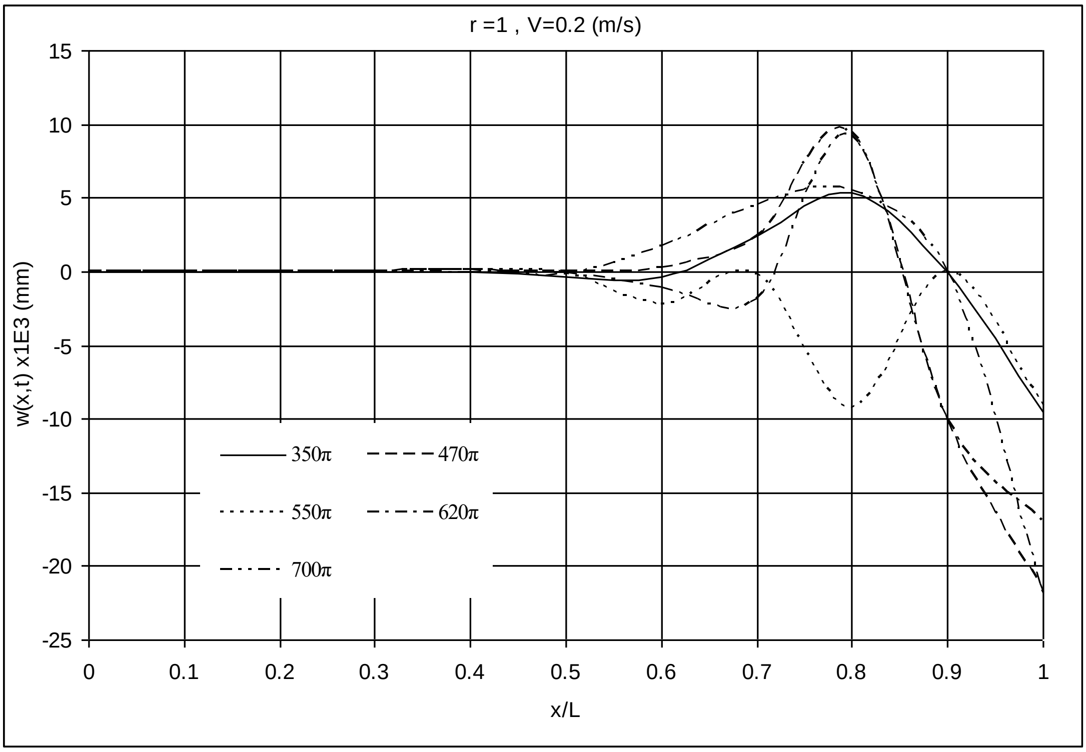
در نمودارهای (۴-۱۰) الی (۴-۱۳) ابتدا مقدار ســرعت V_1 در نظرگرفته شــده و در مود اول و دوم تاثیر حرکت بار رونده بر جابجایی تیر در مقاطع آن در فرکانسهای پایین و بالاتر نمایش داده شده است.

ســپس در نمودارهای (۴-۱۳) الی (۴-۱۷) مقدار سرعت V_2 در نظرگرفته شده و در مودهای اول و دوم تاثیر حرکت بار رونده بر جابجایی تیر در مقاطع آن نمایش داده شده است.

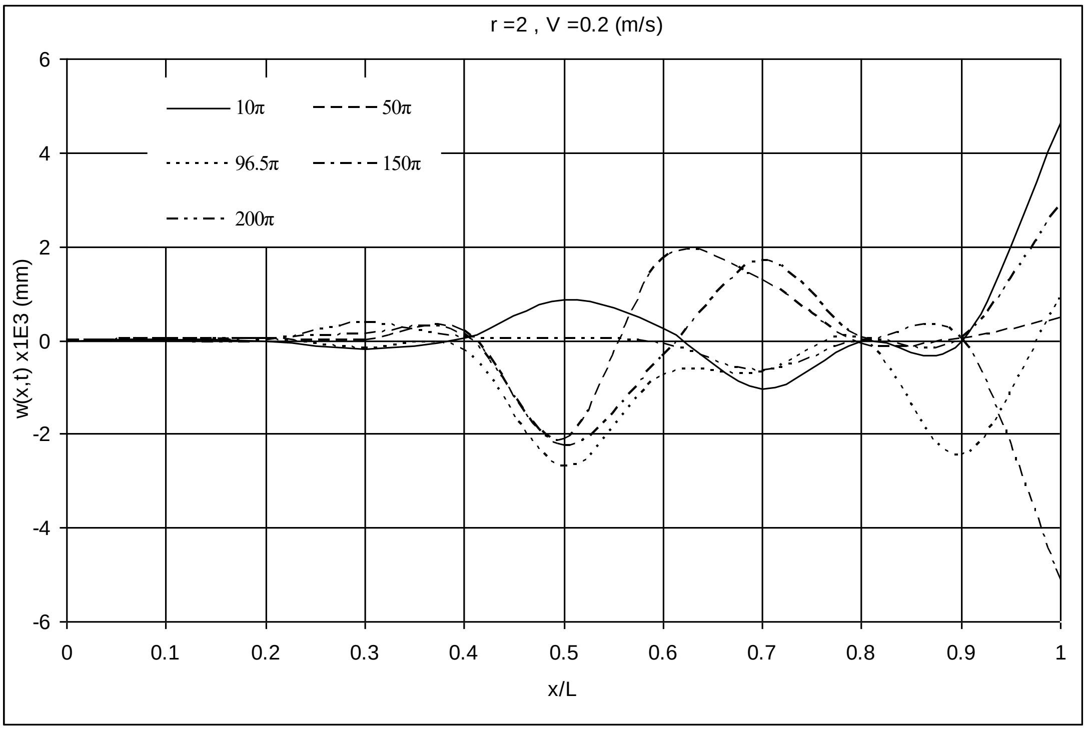
همــانگونــه کــه در تمــام این نمودارهــا دیده می‌شــود، هنگام خروج بار رونده از تیر (انتهای تیر) بیشترین جابجایی در آن رخ می‌دهد.



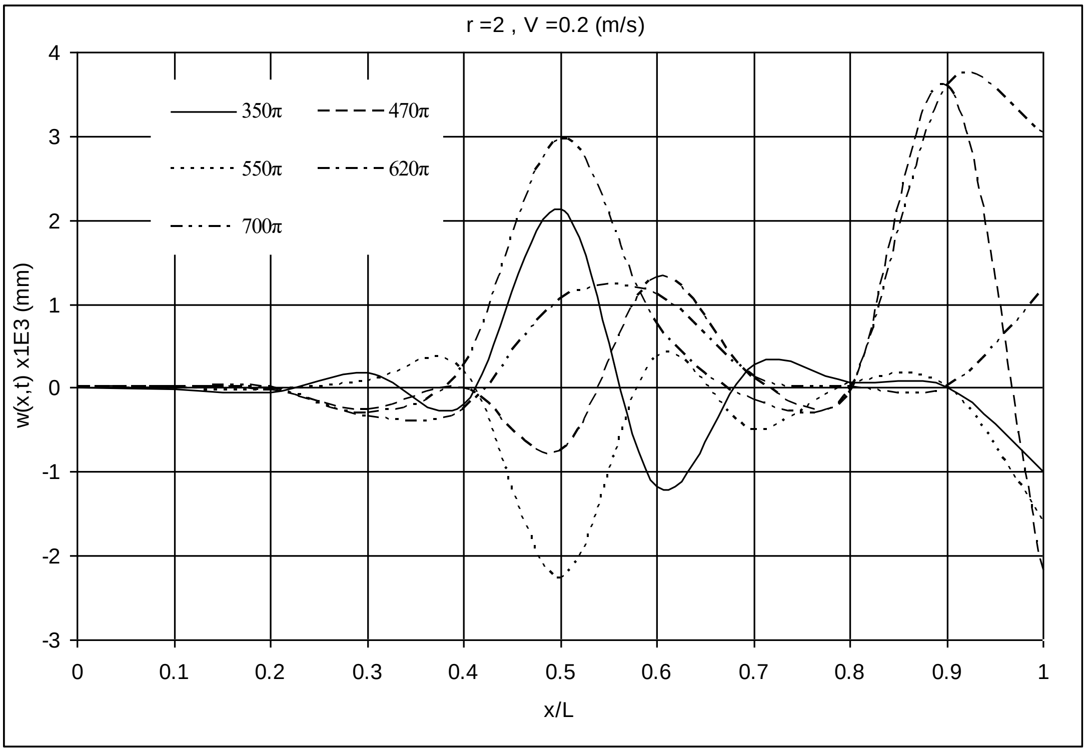
شکل ۴-۱۰- نمودار جابجایی تیر در سرعت V_1= 0.2 *m/s* به ازای مقادیر فرکانسهای پایین در مود اول



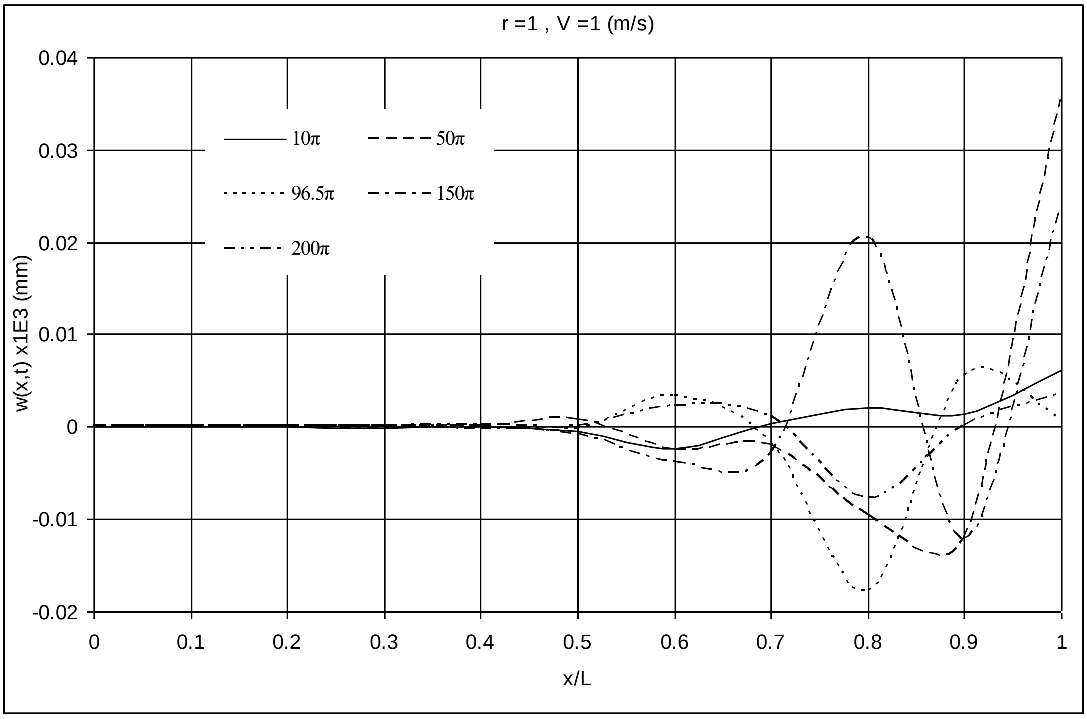
شکل ۴-۱۱- نمودار جابجایی تیر در سرعت $V_1= 0.2\ m/s$ به ازای مقادیر فرکانسهای بالاتر در مود اول



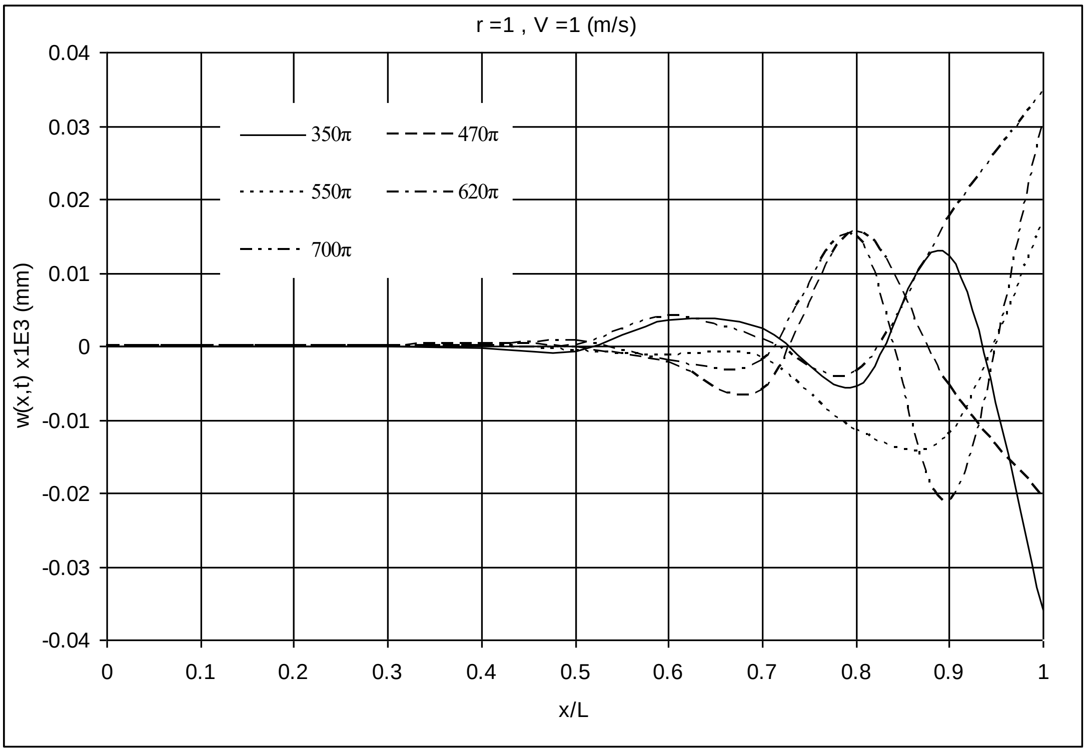
شکل ۴-۱۲- نمودار جابجایی تیر در سرعت $V_1= 0.2\ m/s$ به ازای مقادیر فرکانسهای پایین در مود دوم



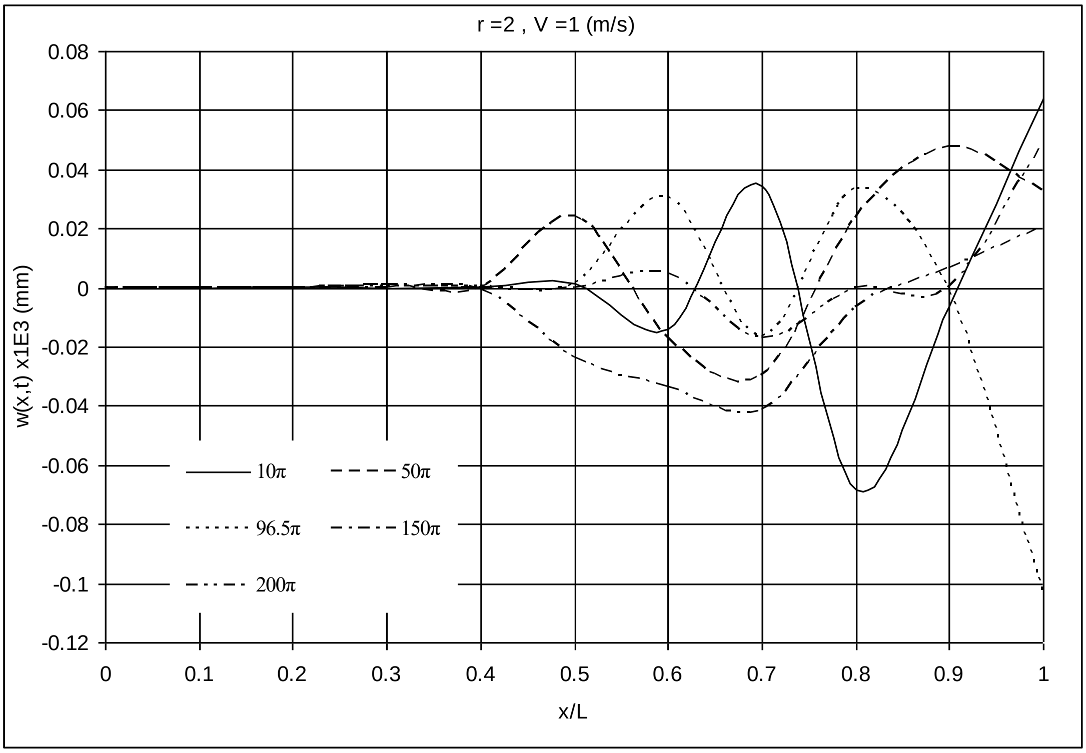
شکل ۴-۱۳- نمودار جابجایی تیر در سرعت $V_1= 0.2\ m/s$ به ازای مقادیر فرکانسهای بالاتر در مود دوم



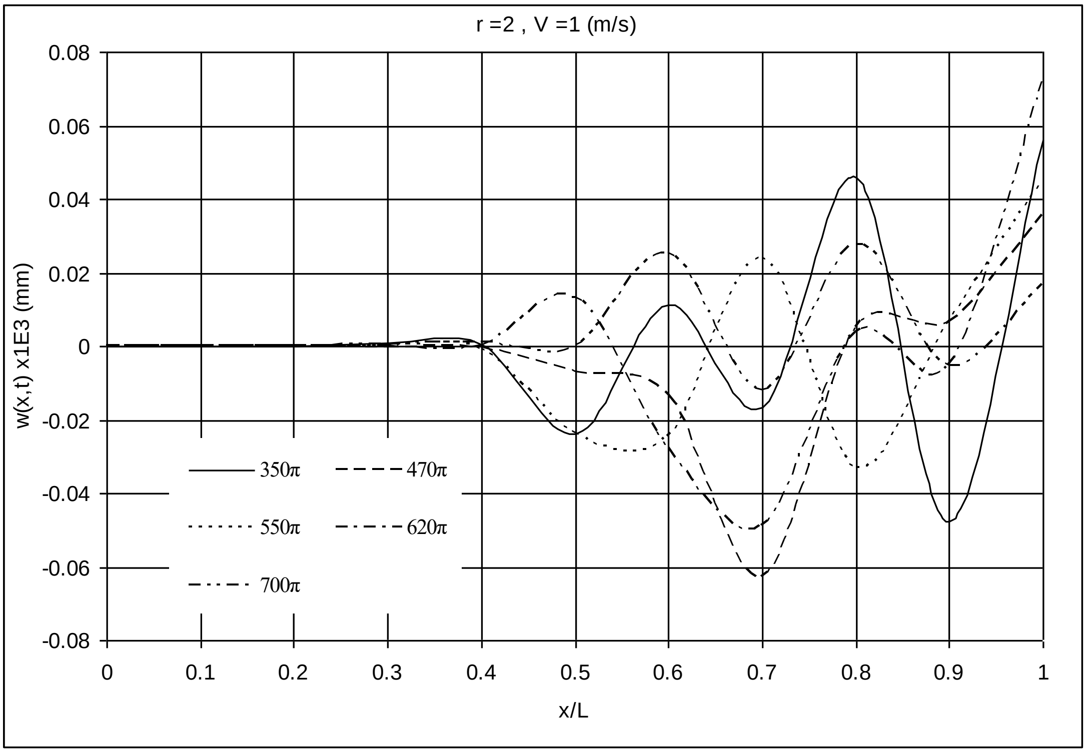
شکل ۴-۱۴- نمودار جابجایی تیر در سرعت V_2=1 *m/s* به ازای مقادیر فرکانسهای پایین در مود اول



شکل ۴-۱۵- نمودار جابجایی تیر در سرعت V_2=1 *m/s* به ازای مقادیر فرکانسهای بالاتر در مود اول



شکل ۴-۱۶- نمودار جابجایی تیر در سرعت V_2=1 *m/s* به ازای مقادیر فرکانسهای پایین در مود دوم



شکل ۴-۱۷- نمودار جابجایی تیر در سرعت V_2=1 *m/s* به ازای مقادیر فرکانسهای بالاتر در مود دوم

ضمیمه الف

زیرروال ***etta.m*** تابعی برای محاسبه مقدار عددی رابطه (۳-۹۳) می‌باشد:

```
function etta=etta(r,t)
global EI M sigma BETA wn xi wd L
L=1;%m
v=2;%m/s
EI=75600;%nm^2
M=9.72;%kg/m
sigma=100;%kg/s
BETA=[1.8720 4.6939 7.8547 10.9955 14.1372];
wn=BETA.^2*(EI/M)^.5;
xi=sigma/2/M./wn;
wd=wn.*(1-xi.^2).^.5;
syms ta
if t>=0 && t<=L/v
    etta=1/wd(r)*romberg(r,0,t)+KK(r,t);
else
    etta=KK(r,t);
end
%-------------------------
    function kk=KK(r,t)
    global wn xi wd
    syms x
    [etta0 Detta0]=ettaZ(r,x);
    kk=exp(-xi(r)*wn(r)*t)*...
        (etta0*(cos(wd(r)*t)+xi(r)*wn(r)/wd(r)*sin(wd(r)*t))...
        +Detta0/wd(r)*sin(wd(r)*t));
    %---------------------------------------
        function [etta0 Detta0]=ettaZ(r,x)
        global M L
```

```
W0=0.01;%m
V0=1;%m/s
syms x
etta0=eval(M*W0*int(ZZ(r,x),x,0,L));
Detta0=eval(M*V0*int(ZZ(r,x),x,0,L));
```

در زیرروال فوق تابع `ettaZ(r,x)` جهت محاسبه مقادیر $\eta_0(0)$ و $\dot{\eta}_0(0)$ می‌باشد؛

$$\eta_r(0)=\int_0^{\ell} MZ_r(x)w_0dx \qquad (۹۱-۳)$$

$$\dot{\eta}_r(0)=\int_0^{\ell} MZ_r(x)v_0dx \qquad (۹۲-۳)$$

تابع `KK(r,t)` جهت محاسبه $\eta_{r0}(t)$ می‌باشد؛

$$\eta_{r0}(t)=e^{-\zeta_r\omega_r t}\left[\eta_r(0)\left(\cos\omega_{dr}t+\frac{\zeta_r\omega_r}{\omega_{dr}}\sin\omega_{dr}t\right)+\frac{\dot{\eta}_r(0)}{\omega_{dr}}\sin\omega_{dr}t\right],$$

$$\omega_{dr}=\omega_r\sqrt{1-\zeta_r^2} \qquad r=1,2,3\ldots n \qquad (۹۴-۳)$$

تابع `etta(r,t)` جهت محاسبه $\eta_r(t)$ می‌باشد؛

$$\eta_r(t)=\frac{1}{\omega_{dr}}\int_0^t N_r(t-\tau)e^{-\zeta_r\omega_r\tau}\sin\omega_{dr}t\;d\tau+\eta_{r0}(t)$$

$$r=1,2,3\ldots n \qquad (۹۳-۳)$$

زیرروال **romberg.m** تابعی برای محاسبه عددی مقدار انتگرال رابطه فوق می‌باشد:

```
function quad=romberg(r,a,b)
n=5;tol=.1;
mm=1;h=b-a;err=1;jj=0;
ta=a;
f1=eval(char(tav(r,a)));
ta=b;
```

```
f2=eval(char(tav(r,b)));
R(1,1)=h*(f1+f2)/2;
while ((err>tol) && (jj<n)) || (jj<4)
    jj=jj+1;
    h=h/2;
    s=0;
    for p=1:mm
        x=a+h*(2*p-1);
        ta=x;
        f3=eval(char(tav(r,x)));
        s=s+f3;
    end
    R(jj+1,1)=R(jj,1)/2+h*s;
    mm=2*mm;
    for kk=1:jj
        R(jj+1,kk+1)=R(jj+1,kk)+(R(jj+1,kk)-R(jj,kk))/(4^kk-1);
    end
    err=abs(R(jj,jj)-R(jj+1,kk+1));
end
quad=R(jj+1,jj+1);
```

زیرروال **tav.m** تابعی برای محاسبه مقدار انتگرال کانولوشن رابطه (۳-۹۶) می‌باشد:

```
function tav=tav(r,t)
syms ta
tav=Fs(r,ta)*Gs(r,t-ta);
%----------------------------
    function N=Fs(r,t)
    v=2;%m/s
    N=FF(t)*ZZ(r,v*t);
    %------------------------
        function F=FF(t)
        F=20*sin(pi/6*t);
%----------------------------
    function GG=Gs(r,t)
```

```
EI=75600;%nm^2
M=9.72;%kg/m
sigma=100;%kg/s
BETA=[1.8720 4.6939 7.8547 10.9955 14.1372];
wn=BETA.^2*(EI/M)^.5;
xi=sigma/2/M./wn;
wd=wn.*(1-xi.^2).^.5;
GG=exp(-xi(r)*wn(r)*t)*sin(wd(r)*t);
```

تابع `Gs(r,t)` جهت محاسبه $e^{-\zeta_r \omega_r (t-\tau)} \sin \omega_{dr}(t-\tau)$ می‌باشد؛

تابع `FF(t)` جهت محاسبه $F(t) = F \sin pt = 20 \sin \pi\, t/6$ می‌باشد؛

تابع `Fs(r,t)` جهت محاسبه $F(t)Z_s(vt)$ می‌باشد؛ که مقدار $Z_r(x)$ توسط تابع `ZZ(r,x)` بدست می‌آید:

$$Z_m(x) = c_m\left((\sin \beta_m x - \sinh \beta_m x) - \frac{\sin \overline{\beta} + \sinh \overline{\beta}}{\cos \overline{\beta} + \cosh \overline{\beta}}(\cos \beta_m x - \cosh \beta_m x)\right)$$

(۴۳-۳)

```
function Z=ZZ(r,x)
L=1;%m
BETA=[1.8720 4.6939 7.8547 10.9955 14.1372];
K(r)=(sin(BETA(r)*L)+sinh(BETA(r)*L))/(cos(BETA(r)*L)+cosh(BETA(r)*L));
Z=sin(BETA(r)*x)-sinh(BETA(r)*x)-K(r)*(cos(BETA(r)*x)-cosh(BETA(r)*x));
```

تابع `tav(r,t)` جهت محاسبه رابطه زیر می‌باشد:

$$N_r(t-\tau)e^{-\zeta_r \omega_r \tau} \sin \omega_{dr} t$$

تابع `WW(x,t,r)` جهت محاسبه جابجایی تیر بکار می‌رود:

$$w(x,t) = \sum_{r=1}^{\infty} Z_r(x) \times \frac{1}{\omega_{dr}} \int_0^t N_r(t-\tau)e^{-\zeta_r \omega_r \tau} \sin \omega_{dr}\tau \, d\tau + \eta_{r0}(t) \qquad (۹۵\text{-}۳)$$

```
function Wxt=WW(x,t,r)
w=ZZ(r,x)*etta(r,t);
Wxt=w;
```

پایان

تهیه و تنظیم:

محمود سلمانی آرانی

Mahmoodarani@gmail.com

Abstract

This thesis concerns the study of vibrations of a viscous cantilever beam with a viscous end condition under moving load and its dynamic response.

The equations of motion are obtained by extended Hamilton's principle and the Eigen value problem develop by applying the boundary conditions and the separation theorem. The equation of lateral displacement or mode shape of beam is effectiveness of numerical solution of Eigen value problem. Modal analysis and procedure of solving equations is differing from existing common problems due to presence of distributed viscously damping.

The self-adjointness and orthogonality of eigen function is one of the considerable cases; The orthogonality of eigen function is obtained without parametric symbolization.

The dynamic response of harmonic moving load with constant velocity in analytical and either numerical solution is in center focus of consideration.

In both analyses, especially on non-zero initial condition, implicit solution will become complicated, appropriate solution and comparison is available with take advantage of subroutine.

Discussion about tow instance problems and step by step numerical solution of them according to obtained formulas, give a reasonable approach to understanding the tabled topics; by varying the boundary and initial conditions, beam characteristics and loading type, we would can inspect and calculate similar cases even different matters.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

M.Sc. Thesis

In Applied Mechanic

Dynamic Response of a Viscous Cantilever Beam with a Viscous end Condition under Moving Load

By:

Mahmood Salmani Arani

Supervisor:

Dr. Ardeshir Karami Mohammadi

Summer 2007