دانشکده مهندسی مکانیک

گروه مکانیک جامدات

تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک

دانشجو: محمد داورپناه

استاد راهنما:

دکتر مهدی قناد کهتویی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : مکانیک جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد داورپناه

تحت عنوان: تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
مهدی قناد کهتویی		-	–

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء

تقدیم اثر

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:

محضر ارزشمند پدر و مادر دلسوز و مهربانم ، به خاطر همه ی تلاشهای محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند

و با مهربانی، چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.

به همسر عزیزم، که همواره همراه و همگام و مشوق من است.

و به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند.

پروردگارا، حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر بفرما.

تشکر و قدردانی

تشکر شایان، نثار ایزد منان، که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به اتمام برسانم . از تمامی اساتید محترم دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود به‌ویژه استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر مهدی قناد کهتویی به عنوان استاد راهنما که همواره اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر را دارم .

تعهد نامه

اینجانب **محمد داورپناه** دانشجوی دوره **کارشناسی ارشد** رشته **مهندسی مکانیک** دانشکده **مهندسی مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک** تحت راهنمائی **دکتر مهدی قناد کهتویی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این تحقیق با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی به تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد همگن و مواد ناهمگن FG، با تغییرات توانی خواص مکانیکی که در معرض فشار داخلی و بار حرارتی در حالت پایا قرار گرفته‌اند ، پرداخته شده است. هدف بررسی تسلیم کره با در نظر گرفتن رفتار الاستوپلاستیک (الاستیک- پلاستیک کامل) و یافتن وضعیت تنش، کرنش و جابه‌جایی شعاعی کره است. ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری که ضخامت ثابتی دارند و از مواد همگن و ناهمگن با تغییرات توانی خواص، ساخته شده‌اند و در معرض بار فشاری و حرارتی قرار دارند با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی در حالت کلی استخراج شده‌اند. سپس بر اساس معیارهای تسلیم ترسکا به‌صورت تحلیلی و معیار تسلیم فون میزز به‌صورت عددی با کمک نرم‌افزار المان محدود آباکوس به بررسی تسلیم کره و توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک و پلاستیک کره تسلیم شده پرداخته شده است. در نهایت برای ارزیابی بیشتر، به بررسی نتایج در یک کره همگن و FGM با مشخصاتی معلوم پرداخته شده است.

واژگان کلیدی: کره جدار ضخیم، ماده ناهمگن (FGM)، تئوری الاستیسیته مستوی (PET)، ماده الاستیک- پلاستیک کامل، معیار تسلیم ترسکا، معیار تسلیم فون میزز

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

الف) مقالات ارائه شده

۱- "*تحلیل الاستوپلاستیک کره جدار ضخیم تحت فشار ساخته شده از مواد ناهمگن FG*"، دوازدهمین کنفرانس هوافضای ایران، ۱- ۳ اسفند ماه ۱۳۹۱، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

ب) مقالات در دست داوری

1- "*Comparison between pressurized spherical and cylindrical shells yielding conditions made of homogeneous and nonhomogeneous (FG) materials*", Journal of Solid Mechanics (JSM), Islamic Azad University-Arak Branch.

فهرست مطالب

صفحه **عنوان**

فهرست شکل ها

عنوان **صفحه**

فهرست جدول ها

عنوان **صفحه**

فهرست علائم

محورهای مختصات در سیستم مختصات کروی	R,θ,ϕ
تنش‌های اصلی	$\sigma_R,\sigma_\theta,\sigma_\phi$
کرنش‌های اصلی	$\varepsilon_R,\varepsilon_\theta,\varepsilon_\phi$
بردار جابجایی	$\vec{u}_i$
ثابت‌های لامه	μ,λ
نسبت پواسون	ν
توزیع دما در راستای شعاعی	$\theta(R)$
دمای خارجی و دمای داخلی	θ_i,θ_o
مدول الاستیسیته	E
نسبت شعاع خارجی به داخلی	k
نسبت شعاع کره به شعاع داخلی	R
شعاع داخلی	r_i
شعاع خارجی	r_o
ثابت‌های پاسخ دستگاه معادلات دیفرانسیل	c_i
ثابت ناهمگنی	n_i
فشار خارجی و داخلی	p_i,p_o
ضریب انبساط حرارتی	α_i
ضریب هدایت حرارتی	K_i
تابع تسلیم	$\varnothing_y$
تنش تسلیم	σ_y
فشار بحرانی	$(P_i)_{cr}$
تنش‌ها در ناحیه پلاستیک	$\sigma_R^P,\sigma_\theta^P,\sigma_z^P$
تنش‌ها در ناحیه الاستیک	$\sigma_R^e,\sigma_\theta^e,\sigma_z^e$
کرنش‌ها در ناحیه پلاستیک	$\varepsilon_R^P,\varepsilon_\theta^P,\varepsilon_z^P$
کرنش‌ها در ناحیه الاستیک	$\varepsilon_R^e,\varepsilon_\theta^e,\varepsilon_z^e$
جابه‌جایی کل در ناحیه پلاستیک	u_R^P
جابه‌جایی کل در ناحیه الاستیک	u_R^e

فصل ۱

مقدمه

۱-۱-پوسته‌ها

پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. پوسته‌ها فراوان-ترین و متنوع‌ترین سازه‌هایی هستند که در اطراف خود مشاهده می‌کنیم، از جمله پوسته‌های آشنا عبارتنداز: حباب صابون، حباب لامپ، جمجمه‌ی سر، لاک و صدف جانوران، بدنه‌ی هواپیما، مخازن تحت فشار، لوله‌ها و .... پوسته‌ها از لحاظ رفتاری در برابر نیروها و لنگرها، از مقاومت مطلوب و ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه این رفتارها و به کارگیری تئوری‌های مختلف از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفته و به دلیل فراوانی کاربرد، همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته-های کروی شکل، اهمیت ویژه‌ای دارند و همواره دانش‌پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی دیواره و ماده‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر بارگذاری‌ها افزایش و وزن آنها را کاهش دهند.

۱-۱-۱- انواع پوسته‌ها [۱]

پوسته‌ها از نظر هندسی عمدتاً به دو گروه پوسته‌های جدار نازک و پوسته‌های جدار ضخیم تقسیم می‌شوند. برای مشخص شدن هندسه‌ی پوسته نیاز به مشخص شدن حالت سطح میانی و ضخامت آن است. پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کمتر از ۰/۰۵ است پوسته‌ی جدار نازک و پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بیشتر از ۰/۰۵ است پوسته جدار ضخیم در نظر گرفته می-شود.

۱-۱-۲- تئوری‌های ارائه شده برای پوسته‌ها

برای مدل سازی ریاضی و تحلیل پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم تئورهای مختلفی توسط دانشمندان ارائه شده است که هر کدام مزایا و معایبی دارد. در این بخش به معرفی برخی از این تئوری‌ها پرداخته می-شود.

۱-۱-۲-۱- تئوری‌های پوسته جدار نازک

تئوری‌های این پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته دو بعدی بنا شده است. درحقیقت به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود و با ساده‌سازی روابط الاستیسیته روش‌های تحلیلی تقریبی برای حل این پوسته‌ها به‌دست می‌آید که دقت نتایج هر تئوری بستگی به درجه ساده‌سازی آن دارد. اولین فرضیات در مورد ورق‌ها توسط کیرشهف[۱] (۱۸۵۰) ارائه شد. ارون[۲] (۱۸۷۴) بر اساس فرضیات کیرشهف تئوری پوسته‌ها را معرفی کرد. لاو[۳] (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته جدار نازک را ارائه کرد که به تئوری کلاسیک پوسته‌های جدار نازک یا تئوری لاو- کیرشهف مشهور است. ریسنر[۴] (۱۹۱۲) تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری را با استفاده از فرضیات لاو ارائه نمود. فلوگه[۵] (۱۹۳۲) تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه نمود که این معادلات به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های جدار نازک شناخته می‌شوند و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. بیرنه[۶] (۱۹۴۴) نظریات فلوگه را تکمیل کرد. با ساده‌سازی معادلات فلوگه تئوری پوسته‌-ها با تقریب مرتبه‌ی صفر و یک حاصل می‌شود. نقدی (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های جدار نازک را فرمول‌بندی کرد. سندرز[۷] (۱۹۵۹) به فرمول‌بندی پوسته‌ها به کمک اصل کار مجای پرداخت و نووژیلف[۸] (۱۹۶۴) امکان ارائه نظریه پوسته‌ها را به شکل‌های مختلف نشان داد. در نهایت تئوری‌های عمومی ارائه شده برای پوسته‌های جدار نازک را می‌توان به شکل زیر تقسیم‌بندی نمود:

۱- تئوری غشایی (تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر) : پوسته‌هایی که سختی خمشی خیلی کمی دارند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی نیستند، با این تئوری تحلیل می‌شوند؛

---

1 Kirchhoff
2 Aron
3 Love
4 Reissner
5 Flugge
6 Byrne
7 Sanders
8 Novozhilov

۲- تئوری خمشی (تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک) : پوسته‌هایی که سختی خمشی قابل توجهی داشته باشند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی باشند، با این تئوری تحلیل می‌شوند؛

۳- تئوری فلوگه (تئوری با تقریب مرتبه دو).

برای تحلیل پوسته‌های جدار نازک با تغییر شکل کم فرضیاتی در نظر گرفته می‌شود که این فرضیات در تئوری‌های غشایی و خمشی نیز در نظر گرفته می‌شوند. این فرضیات که به نام فرضیات لاو- کیرشهف مشهورند عبارتند از :

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی خیلی کمتر از واحد است؛

۲- تغییر مکان‌ها در مقایسه با ضخامت پوسته کوچک هستند؛

۳- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته پس از بارگذاری و تغییر شکل، مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند که با این فرض می‌توان از کرنش‌های برشی و کرنش عمودی در سطح موازی با سطح میانی صرف نظر نمود؛

۴- تنش عمود بر سطوح موازی با سطح میانی قابل چشم پوشی است.

۱-۱-۲-۲- تئوری پوسته‌های جدار ضخیم

اولین بار لامه[1] (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی[2] حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسان‌گرد را ارائه کرد.

گلرکین[3] (۱۹۳۰) با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته روابط پوسته‌های جدار ضخیم را بدست آورد. ولاسف[4] (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستسیسته خطی معادلات قابل حلی برای پوسته‌های جدار ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته-

1 Lame
2 Plane elasticity theory(PET)
3 Galerkin
4 Vlassov

های جدار ضخیم بنیان نهاد. میرسکی و هرمان[1] (۱۹۵۸) با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند. گرینس‌پن[2] (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌های جدار ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم مقایسه نمود. بنابراین دو تئوری الاستیسیته مستوی (دو بعدی) و تغییر شکل برشی برای پوسته‌های جدار ضخیم مطرح شد.

۱-۱-۲-۳- تئوری الاستیسته مستوی

در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله (سه معادله تعادل، شش معادله سینماتیک و شش معادله رفتاری) و ۱۵ مجهول (شش مولفه تانسور تنش متقارن، شش مولفه‌ی تانسور کرنش متقارن و سه مولفه جابه‌جایی) وجود دارد که منجر به حل دقیق مسأله می‌شود ولی حل این معادلات بسیار پیچیده و در بسیاری از موارد عملاً غیر ممکن است. با کمک فرضیاتی می‌توان تعداد این معادلات و تعداد مجهولات آنها را کاهش داد و حل نمود. یک نمونه از این فرضیات ساده کننده منجر به شکل‌گیری تئوری الاستیسیته مستوی می‌شوند. در این تئوری فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند. در حقیقت تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی بر سطح موازی با صفحه‌ی میانی پوسته چشم‌پوشی می‌شود. این تئوری به تئوری کلاسیک استوانه-های جدار ضخیم نیز مشهور است.

۱-۱-۲-۴- تئوری تغییر شکل برشی

با استفاده از بسط تیلور و تعریف جابه‌جایی هر نقطه به صورت مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی می‌توان جابه‌جایی تئوری لامه را به صورت یک چند جمله‌ای نوشت. اگر فقط جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی صفر نامیده می‌شود که مشابه تئوری خمشی در پوسته‌های نازک است. اگر دو جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی

1 Mirsky & Hermann
2 Greenspon

مرتبه‌ی اول نامیده می‌شود که مشابه تئوری فلوگه در پوسته‌های نازک است. به همین ترتیب می‌توان تئوری‌های تغییر شکل مرتبه‌ی بالاتر را استخراج و فرمول‌بندی نمود. در این تئوری علاوه بر اثر نیروهای محوری ، اثر برش، خمش، پیچش، اینرسی دورانی و میدان حرارتی را نیز می‌توان در نظر گرفت. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به تئوری تغییر شکل برش مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان نیز شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو[1] در تیرها و همچنین تئوری میندلین[2] در ورق‌ها است.

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل مستوی باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند و این بدان معنی است که تنش و کرنش برشی در سطوح موازی صفحه‌ی میانی صفر در نظر گرفته می‌شوند. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی چس از تغییر شکل الزاماً مستوی و عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند.

۱-۲- کاربرد پوسته‌های کروی

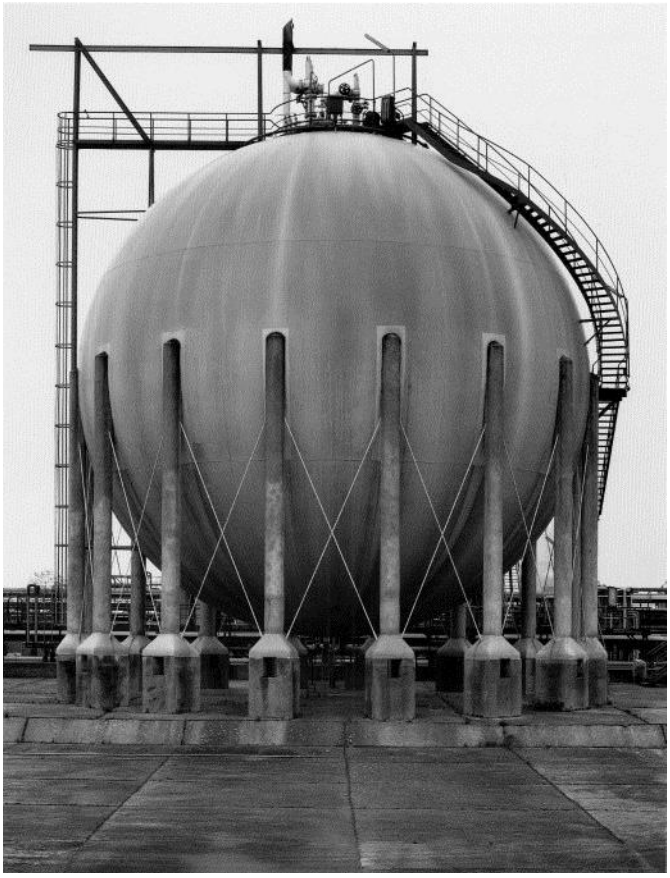
پوسته‌های کروی سازه‌های خمیده‌ای هستند که در برابر نیروها و لنگرهای وارد شده مطلوبیت ویژه‌ای دارند. در حال حاضر پوسته‌های ساخته شده از کامپوزیت‌ها کاربرد بسیاری در صنایع هوافضا دارند، اما این پوسته-های ساخته شده از کامپوزیت‌ها به‌دلیل تغییر ناگهانی ساختار ماده و درنتیجه تغییر ناگهانی در رفتار مواد، مسایل و نواقصی در پوسته به‌وجود می‌آید که تمرکز تنش و گسستگی در مرز لایه‌ها ایجاد می‌شود ولی پوسته‌های ساخته شده از مواد ناهمگن FG به‌دلیل تغییر تدریجی خواص مکانیکی، حرارتی و مغناطیسی کاربرد مطلوب‌تری نسبت به کامپوزیت‌ها دارند. از میان پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی بدلیل کاربردهای فراوانی که در زمینه‌های مختلف مهندسی و صنعت از قبیل زیردریایی‌ها، صنایع نظامی، کاربردهای ماوراء زمینی، سیلوها، لوله‌های نمونه بردار در کاربردهای عمرانی و راکتورهای تحت فشار آب و ... دارند، دارای اهمیت ویژه‌ای می‌باشند. به عنوان چند نمونه طبیعی می‌توان به هندسه‌ی کروی جمجمه‌ی

1 Timoshenko
2 Mindlin

انسان، هندسه‌ی کروی سیارات و ستاره‌ها و حتی پوسته‌ی سخت لاک‌پشت‌ها و ... اشاره کرد. در کاربردهای صنعتی، مخازن کروی از جمله تجهیزات ذخیره‌سازی سیالات بوده که در صنایع مختلف کاربرد فراوانی پیدا نموده است.

شکل هندسی مناسب پوسته‌ی کروی در تحمل فشارهای بالا از یک سو و نحوه ساخت آن از سوی دیگر کاربری این تجهیزات را تحت الشعاع قرار می‌دهد.

در صنایع نفت و گاز و پتروشیمی مخازن کروی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. ذخیره سازی گاز در دمای محیط تنها به روش متراکم سازی و مایع نمودن در فشار بالا امکان پذیر می‌باشد و مخازن کروی به دلیل هندسه مناسب قادر به تحمل این فشارهای بالا می‌باشند.در برخی موارد می‌توان از ترکیب پوسته‌های استوانه‌ای و کروی نیز استفاده کرد.



شکل۱-۱- کاربرد پوسته کروی در صنایع نفت و گاز و پتروشیمی

در صنایع ساختمانی نیز از شکل هندسی کره در توزیع مناسب نیروهای حجمی حاصل از وزن سازه در گنبدها، طاق‌ها و ... بسیار استفاده می‌شود. حتی امروزه نیز مهندسین از این ویژگی هندسی کره در توزیع مناسب نیروهای حجمی در طراحی ساختمان‌ها بهره می‌برند.

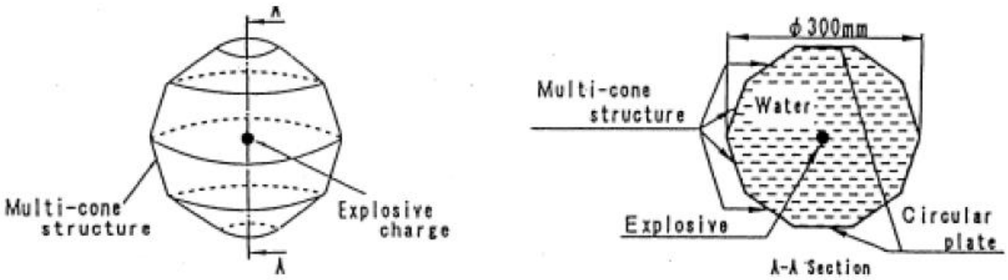
کره‌های چرخان نیز در کاربردهای مختلف از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. بررسی تغییر شکل سیاره‌ها از جمله کره‌ی زمین در اثر دوران توسط بسیاری از دانشمندان مورد بررسی قرار گرفته است. اخیراً مهندسان از مخازن کروی چرخان ساخته شده از مواد کامپوزیتی با سرعت‌های دورانی بالا در ماشین‌های پرنده استفاده کرده‌اند که وزن آن از بسیاری از ماشین‌های پرنده کمتر و قابلیت عمود پرواز بودن را دارد.

۱-۲-۱- معرفی چند روش ساخت پوسته‌های کروی

روش متداول ساخت مخازن کروی به صورت شکل‌دهی ورق‌های فولادی و برشکاری و مونتاژ و جوشکاری می‌باشد. شکل‌دهی ورق معمولا به وسیله دستگاه‌های پرس و استفاده از قالب‌های سنگین که دارای انحناء مناسب می‌باشد صورت می‌گیرد. پس از فرم‌دهی ورق‌ها اقدام به برش ورق‌های شکل داده شده جهت مونتاژ به یکدیگر می‌شود. به علت شکل کروی قطعات لبه ورق‌ها بایستی به صورت منحنی برش و پخ مناسب اعمال شود. این عملیات بسیار زمان‌بر و پر هزینه می‌باشد. در مخازن کروی با ضخامت بالا پس از اتمام مونتاژ و جوشکاری عملیات حرارتی به صورت درجا بر روی مخزن انجام می‌شود.

دیگر روش تولید این نوع مخازن روش انفجاری می‌باشد. در این روش که بر مبنای شکل‌دهی انفجاری می‌باشد. شکل‌دهی ورق‌ها نسبت به حالت قبل ساده‌تر بوده و حداکثر به صورت قطعات مخروطی مخزن کروی پیش‌فرم آماده می‌گردد سپس با کمک انفجاری کنترل شده بدون نیاز به قالب مخزن به شکل کره کامل در می‌آید. جهت ساخت پوسته های کروی شکل به روش شکل دهی انفجاری بدون قالب ، ساختار اولیهٔ پوسته ، ترکیبی از چند مخروط ناقص می باشد . طرح شماتیک یک چیدمان این ساختار که به ساختارهای چند مخروطی[1] شهرت دارند در شکل نمایش داده شده است .

[1] Multi-Cone Structures



شکل۱-۲- طرح شماتیک یک چیدمان از ساختارهای چند مخروطی

همانطور که از شکل۱-۲ پیداست در این حالت تعدادی مخروط ناقص از جنس فلز پایه تهیه شده است . سپس این ساختارهای مخروطی شکل به هم جوش داده شده و یک شبه کره تولید می گردد و با انفجار خرجی که در وسط این محفظهٔ شبه‌کروی قرار گرفته است و با انتقال انرژی موج ناشی از انفجار به این محفظه، ساختار آن به یک کره تبدیل می‌شود.

شکل۱-۳- مخزن ساخته شده به روش شکل‌دهی انفجاری

مزایای این روش را می‌توان به شرح زیر برشمرد:

۱- کاهش مراحل و زمان ساخت

۲- کاهش هزینه تمام شده

۳- عدم نیاز به عملیات حرارتی

۴- کاهش و سهولت عملیات جوشکاری

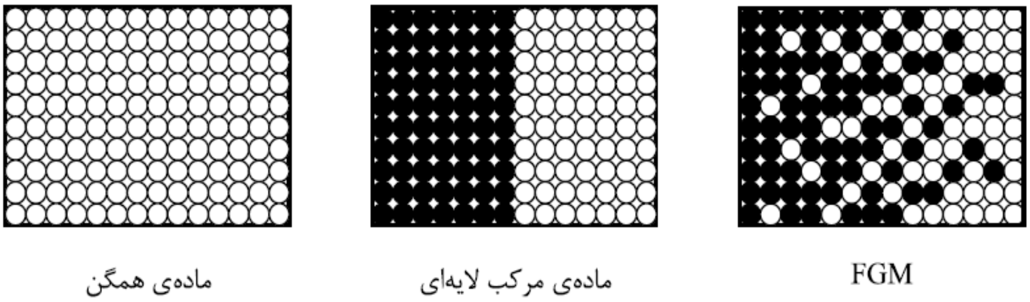
۵- امکان ساخت مخازن به صورت چند جداره

۱-۳- FGM ها

همانطور که می‌دانیم ماده‌ی همگن[1] ماده‌ایست که خواص آن در تمام نقاط یکسان است و ماده‌ی همسان-گرد[2] ماده‌ایست که خواص هر نقطه‌ی مادی آن در تمام جهت‌ها یکسان است. بیشتر موادی که در صنایع از آنها استفاده می‌کنیم موادی همگن و همسان‌گرد می‌باشند. با پیشرفت سریع صنایع هوافضا، توربین‌ها، راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا به وجود آمده است. در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد استفاده از مواد همگن که خواسته‌های طراح را برآورده کنند مشکل است. در حرارت‌های زیاد فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون، خوردگی، خزش و... قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی-کنند. از این رو ایده‌ی مواد مرکب مطرح شد. این مواد از ترکیب دو یا چند ماده به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوتی دارند. به عنوان مثال فلزات با پوشش عایق حرارتی[3] پوشانده می‌شوند یا مواد نرم با الیاف مستحکم پوشانده می‌شوند. این مواد از دید میکروسکوپی ناهمگن و ناهمسان‌گرد هستند. تغییر ناگهانی مواد و در نتیجه خواص در مواد مرکب که موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود از اشکالات عمده‌ی آن‌هاست و باعث تمرکز تنش و ایجاد ترک گسیختگی در مرز لایه‌ها در اثر

1 Homogeneous
2 Isotropic
3 Thermal barrier coating (TBC)

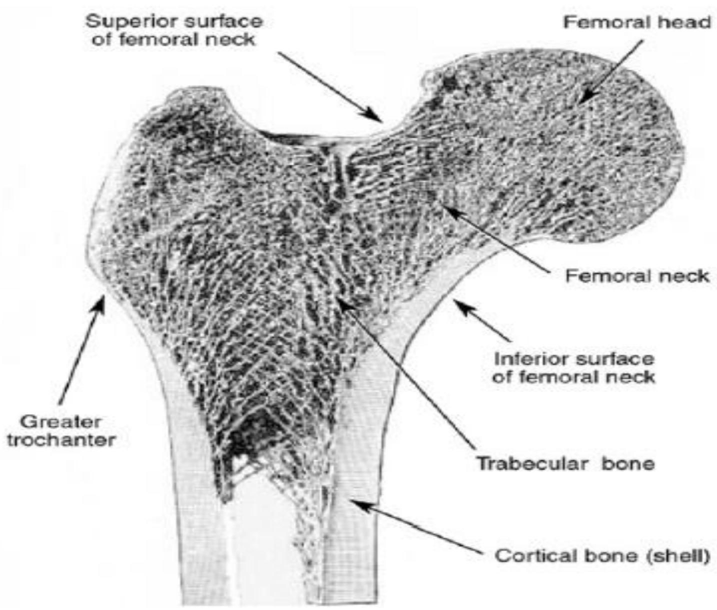
بارگذاری هم‌زمان مکانیکی و حرارتی با دمای بالا می‌شود. با توجه به این مشکلات ساخت ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکلات ناشی از تغییرات ناگهانی خواص را نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد واین بدان معنی است که نیاز به ماده‌ای با تغییرات تدریجی خواص در مقیاس میکروسکوپی به وجود آمد. به این مواد اصطلاحاً FGM[1] گفته می‌شود. مفهوم FGM اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن توسط نینو[2] و همکارانش در یک پروژه ساخت فضاپیما در سازمان هوافضای ژاپن به عنوان ماده‌ای برای ساخت سپر حرارتی مطرح شد که نیاز به ترکیبی از مواد مختلف با توان حمل درجه حرارت ۲۰۰۰ کلوین در سطح و تغییرات دمایی ۱۰۰۰ کلوین در ضخامت ۱۰ میلی‌متر بود. در سال ۱۹۸۶ مطالعات بر روی امکان ساخت این مواد در ژاپن آغاز شد و مرحله‌ی اول پروژه‌ای با نام « فناوری گسترش FGM» طی سال‌های ۱۹۷۸ تا ۱۹۸۹ اجرا و پس از دست‌یابی به هدف که ساخت قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر با خواص ذکر شده بود، در سال ۱۹۹۰ در سمپوزیومی در سندای به جهانیان ارائه شد. مرحله دوم این پروژه در سال ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۱ اجرا شد که نتیجه‌ی آن ساخت ورق‌های مربعی به ضلع ۳۰۰ میلی‌متر و نیم کره‌هایی به قطر ۵۰ میلی‌متر با خواص ذکر شده برای استفاده در ساخت دماغه‌ی فضاپیما بود که پس از آن دومین سمپوزیوم جهانی FGM در سال ۱۹۹۲ در سان‌فرانسیسکو برگزار شد. در سالهای اخیر توجه بر روی FGM ها در اروپا، به ویژه آلمان به شدت گسترش یافته است.



شکل ۱-۴- نمای زیرساختار مواد همگن، مرکب لایه‌ای و FGM

1 Functionally graded material
2 Niino

این مواد عموماً از مخلوط سرامیک و فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته می‌شوند. سرامیک به دلیل رسانش گرمایی کم مقاومت حرارتی بالایی دارد و فلز چکش‌خوار است و از شکستگی یا ترک به خاطر تنش حرارتی جلوگیری می‌کند. FGM ها در زمره‌ی مواد ناهمگن و همسان گرد قرار دارند که خصوصیات آن‌ها به‌طور پیوسته از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند. از مزایای FGM نسبت به مواد مرکب لایه‌ای، عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشد، زیرا همانطور که گفته شد در FGM ترکیب مواد پیوسته است. از این مواد می‌توان در صنایع هوایی، فضایی، نظامی، هسته‌ای، نیروگاهی، الکترونیکی، پزشکی و... به عنوان پوشش بخش‌های مختلف هواپیماها و فضاپیماها، ساخت لوله‌ی توپ، راکتورها، مخازن، پوشش پردازنده‌ها، مواد دندانپزشکی و ارتوپدی استفاده کرد و صدها کاربرد متنوع دیگر برای آنها متصور شد. استخوان ماده‌ای طبیعی است که سطح خارجی محکمی دارد و در مرکز آن بافتی نرم وجود دارد که این موجب تغییر تدریجی خواص از داخل به خارج استخوان می‌شود بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمگن است. خواص مکانیکی استخوان در جهت طولی با سایر جهات متفاوت است بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمسان‌گرد نیز هست. در صورت صرف‌نظر از ناهمسان‌گردی استخوان می‌توان آن را FGM در نظر گرفت.



شکل ۱- ۵- برش طولی استخوان ران انسان[۲]

بنا بر آنچه گفته شد ماده‌ی FG از ترکیب چند ماده به طوری ساخته می‌شود که خواص آن به‌طور تدریجی تغییر کند به همین دلیل می‌توان این مواد را به گونه‌ای ساخت که ویژگی‌های خاصی داشته باشند. برخی از این ویژگی‌ها بدین شرح می‌باشند:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا؛

۲- مقاومت بالا در برابر بارهای مکانیکی؛

۳- کاهش اثر تمرکز تنش در نواحی دارای شکل هندسی خاص؛

۴- جلوگیری از ایجاد و یا رشد ترک.

۱-۳-۱- روش‌های ساخت FGM ها

امروزه برای ساخت مواد FG از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود که به عملکرد، شرایط بارگذاری، شکل قطعه و نحوه‌ی توزیع خواص وابسته می‌باشند. معمولا مواد FG به صورت پوششی بر روی سایر مواد پوشانده می‌شوند و یا قطعاتی تماما FGM ساخته می‌شوند. تعدادی از این روش‌ها به شرح زیر می‌باشد:

۱-۱-۳-۱- ساخت پوشش FGM بر روی سطح مواد

یکی از روش‌های تهیه‌ی پوشش FGM بر روی سطح مواد ته‌نشینی بخار است که انواع مختلفی از جمله ته-نشینی اسپاتر[۱]، ته‌نشینی شیمیایی بخار[۲] و ته‌نشینی فیزیکی بخار[۳] دارد. این روش ساختمان میکروسکوپی بسیار خوبی به‌وجود می‌آورد ولی فقط قادر به ایجاد پوشش‌های نازک است، به انرژی زیادی نیاز دارد و گازهای سمی تولید می‌کند. روش‌های دیگر تولید پوشش‌های FGM بر روی سطح مواد عبارتند از: پاشش پلاسما، ته‌نشینی بر روی الکترود، الکترولیز، ته‌نشینی به کمک پرتو یون[۴]، سنتز خود انتقال دما بالا[۵] و ... تمامی این روش‌ها کند و نیازمند انرژی زیاد می‌باشند. بنابراین برای تولید قطعات تماماً FGM از نظر اقتصادی نامناسب می‌باشند.

---

1 Sputter deposition
2 Chemical vapor deposition (CVD)
3 Physical vapor deposition (PVD)
4 Ion beam assisted deposition (IBAD)
5 self-propagating high-temperature synthesis (SHS)

۱-۳-۱-۲- تولید قطعات FGM

متالوژی پودر یکی از روش‌هایی است که برای تولید قطعات FGM به‌کار می‌رود و طی سه مرحله‌ی وزن و مخلوط کردن پودرها با توجه به توزیع خواص مورد نظر، ریختن مخلوط پودرها در قالب و فشرده کردن آن-ها و سینتر کردن[1] انجام می‌شود. روش متالوژی پودر منجر به ایجاد ساختار پله‌ای می‌شود. برای ایجاد ساختاری پیوسته بهتر است از روش گریز از مرکز استفاده کرد. در این روش مخلوط مواد در قالبی چرخان ریخته می‌شود که به دلیل چگالی نابرابر مواد مخلوط و وجود نیروی گریز از مرکز یک ماده‌ی FG به وجود می‌آید. یکی از اشکالات این روش این است که فقط قادر به تولید قطعات حاصل از دوران است و اشکال دیگر این روش عدم کنترل بر روی توزیع خواص است.

ساخت جسم جامد به هر شکل[2] روشی است که به کمک نرم‌افزارهای طراحی کامپیوتری (CAD) هندسه‌ی جسم را طراحی می‌کنند سپس به روش کمک‌های موجود پرینت سه بعدی اقدام به تولید قطعه به صورت لایه لایه با توزیع خواص مورد نظر می‌کنند. روش‌های پرینت به کمک لیزر از رایج‌ترین روش‌های ساخت FGM به کمک این روش است.

روش‌های مطرح شده، تمام روش‌های تولید مواد FG نیستند و روش‌های دیگری نیز برای این کار وجود دارد و هر روز محققان روش‌های جدیدی برای این منظور پیشنهاد می‌کنند.

۱-۳-۲- توزیع خواص

قبل از ساخت FGM باید مشخص شود که اجزای تشکیل دهنده به چه صورتی توزیع شده است، در بعضی مقاله‌ها هدف یافتن یک پروفیل با توجه به بهینه کردن یک کمیت است. در مواقع دیگر پروفیل توزیع مواد انتخاب می‌شود و یک پارامتر برای اهداف بهینه در آن در نظر گرفته می‌شود.

از آنجا که هدف در ساخت این مواد ایجاد یک تابع پیوسته از خواص در طول ماده است می‌توان توابع

---

1 sintering
2 Solid freeform (SFF) fabrication method

مختلفی را برای توزیع خواص در نظر گرفت. توابع رایج برای خواص مکانیکی و حرارتی، توانی و نمایی می باشند. توزیع توانی عموماً به صورت جهت مختصات مورد نظر به توان ثابت ناهمگنی ضرب در مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود و توزیع نمایی غالباً به صورت ثابتی در عدد نپر به توان ثابت ناهمگنی ضرب در جهت مختصات مورد نظر، در نظر گرفته می‌شود.

معمولاً تابع توزیع خواص برای مدول الاستیسیته، استحکام تسلیم، ضریب هدایت حرارتی و ضریب انبساط حرارتی در نظر گرفته می‌شود ولی نسبت پواسون در مقابل مدول الاستیسیته ثابت است.

در این تحقیق توزیع خواص به صورت توانی در جهت شعاع کره به صورت رابطه‌ی (۱-۱) درنظرگرفته می‌شود:

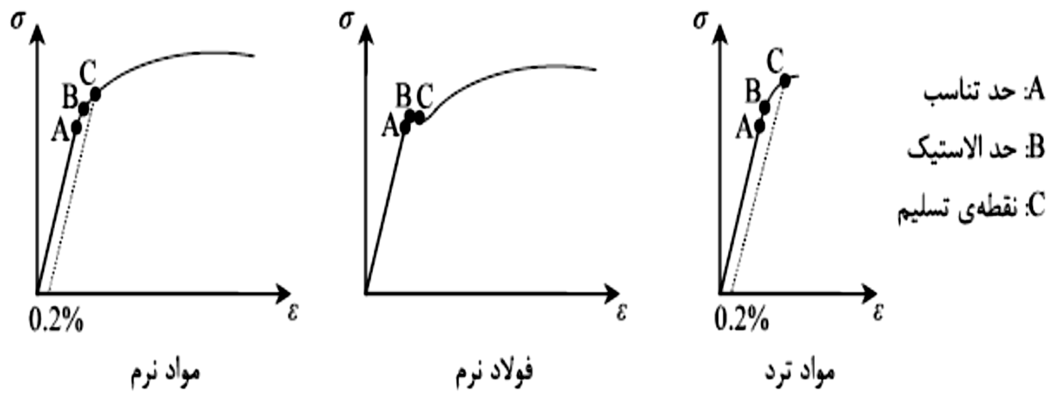
$$M\left(r\right)=M_i\left(\frac{r}{r_i}\right)^{\eta}$$

در رابطه‌ی فوق M خاصیت مورد نظر در هر نقطه از کره، M_i خاصیت مورد نظر در سطح داخلی کره، r_i شعاع داخلی کره و η ثابت ناهمگنی است.

۱-۴- رفتار پلاستیکی مواد

همان‌طور که می‌دانیم رابطه‌ی تنش و کرنش تا پیش از رسیدن به حد تناسب رفتاری خطی دارد و از قانون هوک تبعیت می‌کند. همچنین تا پیش از رسیدن به حد الاستیک در صورت حذف تنش ماده به وضعیت اولیه خود باز می‌گردد ولی با گذر از مقاومت تسلیم (حد الاستیک) مقداری از کار انجام شده در جسم به گرما تبدیل شده و تغییر شکل دائمی در جسم به وجود می‌آید بنابراین با برداشتن تنش ماده به شکل اولیه خود بازنمی‌گردد. نقطه‌ی تسلیم موقعیتی از تنش و کرنش است که رفتار پلاستیک ماده آغاز شده است و در آن بدون افزایش تنش، کرنش زیاد می‌شود؛ برای موادی که چنین رفتاری را از خود نشان

نمی‌دهند نقطه‌ی تسلیم تقاطع نمودار تنش- کرنش با خطی موازی در قسمت الاستیک نمودار که از کرنش ۰/۲ درصد می‌گذرد در نظر گرفته می‌شود. تغییر شکل مواد تا پیش از مقاومت تسلیم که قابل بازگشت است را تغییر شکل الاستیک و پس از آن که غیر قابل بازگشت به شکل اولیه است را تغییر شکل پلاستیک می‌نامند.



شکل ۱-۶- نمودار تنش-کرنش برای مواد نرم و ترد

برای تحلیل رابطه‌ی تنش و کرنش در نواحی الاستیک و پلاستیک تا پیش از شکست ماده به موارد زیر نیاز داریم:

۱- روابط الاستیک تنش و کرنش؛

۲- شرایط تنش که شروع جریان پلاستیک را خبر می‌دهد (معیار تسلیم)؛

۳- روابط تنش-کرنش پلاستیک یا روابط تنش-کرنش جزئی.

۱-۴-۱- روابط تنش و کرنش؛

همان‌طور که می‌دانیم قانون هوک بر تنش و کرنش در حالت الاستیک حاکم است که تنش و کرنش را توسط رابطه‌ای خطی به کمک ماتریس سفتی یا نرمی به هم مرتبط می‌کند.

۱-۴-۲- معیارهای تسلیم

معیار تسلیم وسیله‌ی سنجشی است که به کمک آن رسیدن ماده به نقطه‌ی تسلیم را تشخیص می‌دهیم. معیارهای مختلفی بر اساس تئوری‌های مختلف ارائه شده‌اند که در این بخش فقط به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود:

۱- معیار رانکین: این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش اصلی توسط رانکین[1] بیان شد که بر اساس این تئوری تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش اصلی برابر مقاومت تسلیم کششی یا کمترین تنش اصلی برابر مقاومت تسلیم فشاری ماده شود؛

۲- معیار ترسکا: این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش برشی که توسط کلمب[2] مطرح شده است، پیشنهاد گردیده و به نام‌های ترسکا[3] و گست[4] شناخته می‌شود. بر اساس این تئوری تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش برشی برابر مقاومت تسلیم برشی ماده می‌شود؛

۳- معیار سنت ونانت[5]: این معیار که بر اساس تئوری بیشترین کرنش اصلی ارائه شده است بیان می‌کند که تسلیم با رسیدن بیشترین کرنش اصلی به کرنش تسلیم کششی یا رسیدن کمترین کرنش اصلی به کرنش تسلیم فشاری آغاز می‌شود؛

۴- معیار بلترامی[6]: این معیار بر اساس تئوری بیشترین انرژی کرنشی استوار است زمان آغاز تسلیم را رسیدن انرژی کرنشی به حد مشخصی بیان می‌کند؛

۵- معیار فون میزز-هنکی: این معیار بر اساس تئوری بیشترین کرنشی واپیچشی استوار است. این تئوری توسط هابر[7] پیشنهاد شد و فون میزز[8] و هنکی[9] آن را تکمیل نمودند. این تئوری در صورت رسیدن انرژی کرنشی واپیچشی به حد مشخصی آغاز تسلیم را خبر می‌دهد؛

---

1 Rankine
2 Colomb
3 Tresca
4 Guest
5 St. Venant
6 Beltrami
7 Haber
8 Von Misess
9 Henky

۶- معیار فون میزز: این معیار بر اساس تئوری تنش برشی هشت‌وجهی استوار است و بیان می‌کند که تسلیم زمانی آغاز می‌شود که تنش برشی هشت‌وجهی به مقدار معینی برسد. معیار فون میزز-هنکی و فون میزز روابط یکسانی دارند.

۱-۴-۳- روابط تنش- کرنش پلاستیک

در تحلیل پلاستیک نمی‌توان رابطه‌ی مشخصی بین تنش و کرنش ارائه داد زیرا تنش در حالت نهایی به مسیر کرنش بستگی دارد از این رو روابط ارائه شده برای این منظور عمدتاً روابطی بین تنش و نمو کرنش (میزان افزایشی اندک در تنش و کرنش) می‌باشد و برای تحلیل این‌گونه مسائل باید به تغییر تنش به طور تدریجی سپس محاسبه‌ی میزان تغییر در کرنش پرداخت و این عملیات را تا رسیدن به وضعیت نهایی ادامه داد.

از آنجا که در این تحقیق فقط به بررسی بارگذاری اولیه که هیچ تنش پس‌مانده‌ی در ماده وجود ندارد پرداخته می‌شود می‌توان تنش را یکباره اعمال نمود و نمو و تنش و کرنش را برابر کل تنش و کرنش مورد نظر گرفت.

۱-۴-۳-۱- مدل‌های مواد

برای تحلیل رفتار مواد پیش از هر چیز نیاز به یک مدل ریاضی از ماده داریم. مدل‌های مختلفی برای مواد از نظر رابطه‌ی تنش و کرنش ارائه شده است که هر کدام در موارد خاصی کاربرد دارند. پاره‌ای از این مدل‌ها به شرح زیر می‌باشند:

۱- صلب: در واقع به جسمی که فاصله بین نقاط آن تغییر نکند، جسم صُلب گفته می‌شود؛

۲- کاملاً الاستیک: به طور کامل از قانون هوک تبعیت می‌کند؛

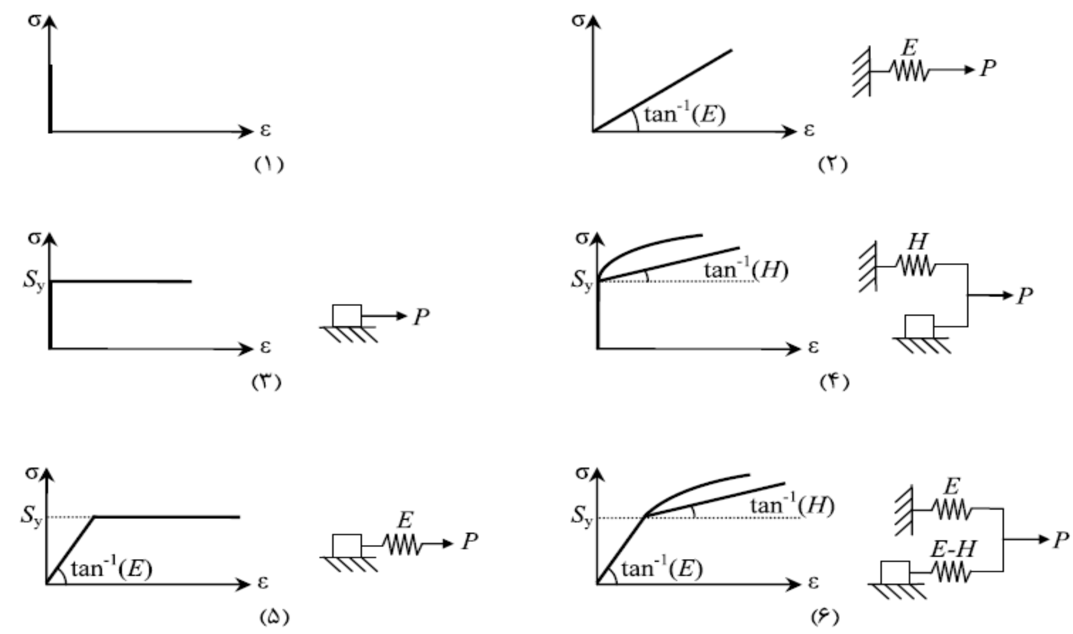
۳- صلب-کاملاً پلاستیک: تا نقطه‌ی تسلیم صلب است از آن به بعد در تنش ثابت به صورت پلاستیک تغییر شکل می‌دهد؛

۴- صلب-سخت شونده با کار: تا نقطه‌ی تسلیم صلب است از آن به بعد با خاصیت سخت شوندگی ناشی از کار خطی یا غیر خطی تغییر شکل پلاستیک می‌دهد؛

۵- الاستیک-کاملاً پلاستیک(الاستوپلاستیک): تا پیش از نقطه‌ی تسلیم رابطه‌ی تنش و کرنش خطی است پس از آن در تنش ثابت به صورت پلاستیک تغییر شکل می‌دهد؛

۶- الاستیک-سخت شونده با کار: تا نقطه‌ی تسلیم تابع قانون هوک است بعد از آن با خاصیت سخت شوندگی ناشی از کار تغییر شکل پلاستیک می‌دهد؛

۷- ویسکو الاستیک: خواص این مواد ترکیبی از خواص الاستیک و لزج است و تنش و یا کرنش در ماده به زمان نیز وابسته است.



شکل ۱-۷- نمودار تنش-کرنش و سیستم دینامیکی معادل مدل‌های مواد

۱-۴-۳-۲- قانون جریان

هر افزایش کرنش (نمو کرنش) در ناحیه‌ی پلاستیک حاصل یک بخش الاستیک که در باربرداری حذف می-شود و یک بخش پلاستیک که پس از باربرداری باقی می‌ماند است. بخش الاستیک از قانون عمومی هوک بدست می‌آید و بخش پلاستیک تابع قانونی است که جریان نامیده می‌شود. بر اساس این قانون نمو کرنش

پلاستیک به صورت برداری در فضای نه بعدی در نظر گرفته می‌شود که در نقطه‌ی تنش مورد نظر عمود بر سطح معیار تسلیم بوده و جهت آن به سمت خارج است. قانون جریان بیان می‌کند که جهت تنش‌های اصلی و نمو کرنش‌های اصلی برای یک ماده‌ی همسان‌گرد یکسان می‌باشند. همچنین شرط عدم تغییر حجم پلاستیک در این قانون بیان می‌کند که مجموع نمو کرنش‌های عمودی پلاستیک باید برابر صفر باشد.

۱-۵- روش اجزای محدود

امروزه روش اجزای محدود به یک روش قدرتمند برای حل عددی گستره وسیعی از مسائل مهندسی تبدیل شده است. با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر به راحتی می‌توان مسائل پیچیده‌ای را به کمک این روش حل نمود. در این روش تحلیل، یک ناحیه پیچیده که مشخص کننده یک محیط پیوسته می‌باشد به شکل‌های هندسی ساده که اجزای محدود نامیده می‌شوند، تقسیم می‌شود. روابط حاکم و مشخصات مواد، روی این اجزاء مورد بررسی قرار می‌گیرند و مسائل به‌صورت نامعلوم در گوشه‌های هر جزء بیان می‌شوند. پس از فرایند جمع‌آوری با در نظر گرفتن نوع بارگذاری و قیود، مجموعه‌ای از معادلات نتیجه می‌شود که حل این معادلات، رفتار تقریبی محیط پیوسته را به ما می‌دهد.

در این تحقیق، مسأله علاوه بر حل به‌صورت تحلیلی، به کمک نرم‌افزار آباکوس[1] از روش اجزای محدود نیز بررسی شده‌است. البته در نرم‌افزار آباکوس ماده FG تعریف نشده‌است، بنابراین برای مدل‌سازی این مواد از تعریف خواص مکانیکی و روابط رفتاری در زیربرنامه UMAT این نرم‌افزار استفاده شده‌است.

۱-۶- پیشینه‌ی پژوهش

بدلیل کاربردهایی که در بخش قبل بیان شد، مطالعه بر روی توزیع تنش در یک پوسته‌ی کروی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اولین بار لامه در سال ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حل دقیق پوسته‌های استوانه‌ای همگن را تحت فشار یکنواخت ارائه کرد [۳]. هوپکینسون[2] در سال ۱۸۷۹ تنش‌های

[1] Abaqus Software
2 Hopkinson

حرارتی در یک کره ایزوتروپ را بدست آورد[۴]. چوانک[1] و همکارانش در سال ۱۹۷۴ با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، رفتار ترموالاستیک در حال گذار کره‌های توخالی را بررسی نمودند[۵]. در همین زمینه راجو[2] در سال ۱۹۷۴ با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، رفتار ترموالاستیک کره‌های جدارنازک توخالی را بررسی نمودند[۶]. یک حل تحلیلی یک پوسته‌ی کروی تحت انتقال حرارت گذار به وسیله‌ی منبع حرارتی چرخان توسط تاکیوتی[3] در سال ۱۹۸۲ انجام شد [۷]. لیختنسکی[4] در ۱۹۸۰ تئوری الاستیسیته اجسام مرکب را پایه گذاری نمود[۸]. در پوسته‌های ساخته شده از اجسام مرکب، بدلیل تغییر ناگهانی در ساختار ماده، تغییرات ناگهانی در رفتار مواد ایجاد می‌شود. لذا تمرکز تنش و گسیختگی در مرز لایه‌ها ایجاد خواهد شد. از این رو مواد پیشرفته با تغییرات تدریجی خواص (مکانیکی، ترمودینامیکی، مغناطیسی) یا FGM در سال‌های اخیر مورد توجه بسیاری از مهندسین و دانشمندان قرار گرفته‌اند.

هدف محققین بررسی و مطالعه‌ی اثر ترکیب دو جنس مختلف در مواد FG بر روی تنش‌ها و طراحی بهینه-ی مخازن استوانه‌ای و کروی می‌باشند. از این‌رو مطالعات زیادی در این زمینه انجام شده است. برای نمونه تانیگاوا[5] در ۱۹۹۵ یک بررسی گسترده ای بر روی موارد مختلفی از مسائل ترموالاستیک و غیر الاستیک انجام داد. او یک لیست جامعی از مقالات گردآوری کرد که در آن مدل‌هایی برای تحلیل رفتار ترموالاستیک مواد FG ارائه شده است [۹].

اوباتا[6] در سال ۱۹۹۴ به مطالعه‌ی تنش‌های حرارتی در استوانه و کره‌های توخالی ساخته شده از مواد FG در شرایط انتقال حرارت پایدار پرداختند [۱۰]. حل دقیق مخازن استوانه‌ای و کروی تحت فشار ساخته شده از مواد توسط توتونچو[7] و همکارش در سال ۲۰۰۱ [۱۱] انجام شد. در این تحلیل تنش‌های شعاعی و محیطی در استوانه و کره‌ی تحت فشار داخلی، با توزیع توانی مدول الاستیسیته به ازای توان‌های مثبت و منفی بررسی شده است. تحلیل تنش‌های حرارتی تحت تأثیر انتقال حرارت یکنواخت در یک استوانه‌ی

1 Cheung
2 Rajo
3 Takeuti
4 Lekhnitskii
5 Tanigawa
6 Obata
7 Tutuncu

توخالی FGM توسط کیم[1] در ۲۰۰۲ ارائه شد [۱۲]. این تحلیل بر اساس روش چند لایه‌ای کردن استوانه با استفاده از تابع گرین انجام شد. شرایط مختلف بارگذاری حرارتی و بررسی ترکیب آنها در مطالعات ردی[2] و همکارانش در سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۰۳ ارائه شد [۱۳-۱۸]. آنها حل تئوری به همراه تحلیل المان محدود را برای استوانه‌ها، ورق‌ها و پوسته‌ها انجام دادند.

یو[3] و همکارانش در ۲۰۰۴ در کاری مشابه، به تحلیل مخازن کروی FG تحت فشار داخلی پرداختند[۱۹]. در این کار، با در نظر گرفتن لایه‌های همگن در جدار داخلی و خارجی کره، و لایه‌های ناهمگن FG در میانه، روابط مربوط به توزیع تنش ارائه شده است. یک کار تحلیلی دیگر برای یک مخزن کروی FGM تحت فشار در شرایط انتقال حرارت یک بعدی پایا توسط اسلامی و همکارانش در ۲۰۰۵ ارائه شد [۲۰]. وانگ[4] و همکارانش در ۲۰۰۶ به تحلیل اثر بارگذاری الکترومغناطیسی در پوسته‌های کروی پرداختند[۲۱].

در یک تحقیق جدید که توسط توتونچو در سال ۲۰۰۷ انجام شده است با فرض تغییرات نمایی در توزیع خواص مواد FG به تحلیل مخازن استوانه‌ای تحت فشار داخلی پرداخته شده است و توزیع تنش‌ها بدست آمده است[۲۲]. در همین زمینه توتونچو در سال ۲۰۰۹ یک روش جدیدی را برای تحلیل تنش در استوانه، دیسک و کره‌ی FGM ارائه دادند [۲۳]. در این کار تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در شرایطی که بارگذاری فشاری و متقارن می‌باشد، با استفاده از روش الاستیسیته‌ی مستوی و همچنین روش توابع کامپلیمنتری[5] انجام و با هم مقایسه شده‌اند.

تحلیل عددی ترموالاستیک کره‌های FG با استفاده از تئوری گرین لیندسی[6] توسط قوش[7] و همکارانش در سال ۲۰۰۹ ارائه شد [۲۴]. در این تحقیق سطوح داخلی و خارجی کره بدون فشار فرض شده و دما در جدار داخلی متغیر با زمان به صورت یک شوک حرارتی در نظر گرفته شده است، در حالی که دما در جدار

1 Kim
2 Reddy
3 You
4 Wang
5 Complementary Functions metod
6 Green-Lindsay theory
7 Ghosh

خارجی ثابت فرض شده است. در کاری دیگر، قربانپور و همکارانش در سال ۲۰۰۹ اثر میدان مغناطیسی و انتقال حرارت گذار را در کره‌های FGM بررسی کردند [۲۵]. ایشان در این کار فرض کردند که خواص مکانیکی به صورت تابعی توانی در راستای شعاع کره تغییر کند. قناد و همکارانش در سال ۲۰۰۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، یک حل عمومی برای استوانه‌های تحت فشار ناهمگن ارائه کردند [۲۶]. آنها در همین زمینه، با استفاده از تئوری اصلاح شده‌ی پوسته‌ها، تحلیل استوانه‌های ناهمگن تحت فشار را ارائه کردند [۲۷]. نمت‌الا[۱] و همکاران در ۲۰۰۹ تحلیل الاستیک- پلاستیک دو بعدی مواد FG تحت بار حرارتی را ارائه نمودند [۲۸]. توتونچو در ۲۰۰۹ توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره توخالی FGM با تغییرات توانی خواص ماده در راستای شعاع، تحت فشار داخلی با استفاده از روش PET و روش تابع متتم تعیین نمود [۲۹]. جباری و همکاران در ۲۰۰۹ به بررسی تنش‌های مکانیکی و حرارتی متقارن محوری در استوانه‌های جدار ضخیم کوتاه FGM پرداختند [۳۰]. تحلیل الاستوپلاستیک مخازن FG تحت فشار کروی در سال ۲۰۰۹ توسط آکیس[۲] انجام شد[۳۱]. در این تحقیق با فرض تغییر شکل‌های کوچک و با استفاده از معیار تسلیم ترسکا و با درنظر گرفتن حالت الاستیک پلاستیک کامل برای ماده، تنش‌های پلاستیک و فشار تسلیم بدست آمده است. بوریسو[۳] در سال ۲۰۱۰ حل کره‌های جدار ضخیم FG را تحت بارگذاری خارجی با استفاده از روش چند لایه‌ای ارائه کرده است [۳۲]. در این کار فشار داخلی یکنواخت فرض شده است. صادقیان و اختراعی طوسی در سال ۲۰۱۱ چگونگی تسلیم کره FGM را تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی بدست آوردند [۳۳]. آنها با درنظر گرفتن حالت الاستیک پلاستیک کامل برای ماده به بررسی اثر فشار و حرارت بر گسترش ناحیه پلاستیک پرداختند. بیات و همکاران در سال ۲۰۱۱ توزیع تنش‌ها در کره FGM تحت فشار و حرارت را بدست آوردند و نتایج تحلیلی و عددی را مقایسه کردند [۳۴]. ازترک و گولگس[۴] در ۲۰۱۱ به ارائه تحلیل تنش الاستیک- پلاستیک در استوانه FGM بلند با دو انتهای بسته در معرض تولید یکنواخت حرارت پرداختند[۳۵]. صادقیان و اختراعی طوسی در سال

---

1 Nemat-Alla
2 Tolga Akis
3 Borisov
4 Ozturk & Gulgec

۲۰۱۲ تحلیل الاستوپلاستیک استوانه FGM را تحت بارگذاری حرارتی بدست آوردند[۳۶]. آنها با درنظر گرفتن حالت الاستیک پلاستیک کامل برای ماده، به بررسی اثر حرارت بر سرعت و رشد ناحیه پلاستیک پرداختند.

فصل ۲

روابط اساسی

۲-۱- مقدمه

در این فصل روابط و فرضیات اساسی حاکم بر پوسته کروی شامل روابط رفتاری، روابط سینماتیک، تئوری الاستیسیته مستوی و شرایط متقارن محوری بیان شده است. با کمک این روابط و فرضیات معادلات حاکم بر پوسته کروی همگن و FGM برای بارگذاری‌های مختلف به‌دست آمده است.

۲-۲- خواص مکانیکی ماده

خواص مکانیکی کره FG شامل مدول الاستیک، تنش تسلیم، ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت حرارتی را به‌ترتیب به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} E(r)=E_i r^{n_1} \Rightarrow E(R)=E_i\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_1}=E_i R^{n_1} \\ \sigma_y(r)=\sigma_{y_i} r^{n_2} \Rightarrow \sigma_y(R)=\sigma_{y_i}\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_2}=\sigma_{y_i} R^{n_2} \\ \alpha(r)=\alpha_i r^{n_3} \Rightarrow \alpha(R)=\alpha_i\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_3}=\alpha_i R^{n_3} \\ K(r)=K_i r^{n_4} \Rightarrow K(R)=K_i\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_4}=K_i R^{n_4} \end{cases} \quad (۲- ۱)$$

در روابط بالا اگر ضرایب ناهمگنی صفر فرض شود، خواص ماده همگن بدست می‌آید.

۲-۲- معادلات تعادل تنش در مختصات کروی

اگر B نیروی حجمی باشد، معادله تعادل تنش در حالت کلی به‌صورت زیر است [۳۷].

$$\vec{\nabla}.\tilde{\sigma}+\vec{B}=\vec{0} \quad (۲- ۲)$$

که با بسط دادن این رابطه در مختصات کروی، معادلات تعادل تنش در مختصات کروی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial\phi}+\frac{1}{rSin\phi}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\left(2\sigma_r-\sigma_\phi-\sigma_\theta+\tau_{r\phi}Cot\phi\right)+B_r=0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\phi}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{\phi}}{\partial\phi}+\frac{1}{rSin\phi}\frac{\partial\tau_{\phi\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\left(\left(\sigma_\phi-\sigma_\theta\right)Cot\phi+3\tau_{r\phi}\right)+B_\phi=0 \qquad (۲- ۳)$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\phi\theta}}{\partial\phi}+\frac{1}{rSin\phi}\frac{\partial\sigma_{\theta}}{\partial\theta}+\frac{1}{r}\left(2\tau_{\phi\theta}Cot\phi+3\tau_{r\theta}\right)+B_\theta=0$$

۲-۳- روابط رفتاری (تنش- کرنش)

رابطه ساختاری تنش و کرنش برای ترموالاستیسیته خطی به‌صورت زیر است[۳۸].

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\theta\delta_{ij} \qquad (۲- ۴)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{-\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\delta_{ij}\sigma_{kk}+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}+\alpha\theta\delta_{ij} \qquad (۲- ۵)$$

که در این روابط μ و λ ثابت‌های لامه هستند و به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\lambda=\frac{\nu E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}$$

$$\mu=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \qquad (۲- ۶)$$

با نوشتن روابط تنش-کرنش در مختصات کروی، روابط به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

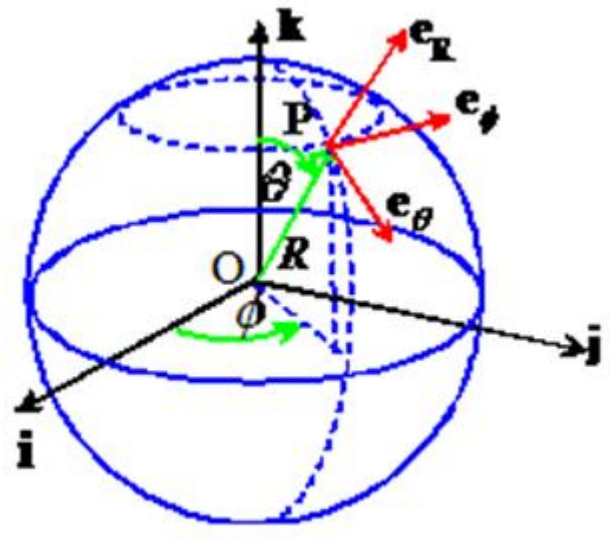
$$\begin{cases}\sigma_r=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi\right)+2\mu\varepsilon_r-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\theta\\ \sigma_\theta=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi\right)+2\mu\varepsilon_\theta-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\theta\\ \sigma_\phi=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi\right)+2\mu\varepsilon_\phi-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\theta\\ \tau_{r\theta}=\mu\gamma_{r\theta}\quad,\quad\tau_{r\phi}=\mu\gamma_{r\phi}\quad,\quad\tau_{\theta\phi}=\mu\gamma_{\theta\phi}\end{cases} \qquad (۲- ۷)$$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_r = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_\phi\right)\right] + \alpha\theta \\
\varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\phi\right)\right] + \alpha\theta \\
\varepsilon_\phi = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\phi - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha\theta \\
\gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{\mu}\tau_{r\theta}, \quad \gamma_{r\phi} = \dfrac{1}{\mu}\tau_{r\phi}, \quad \gamma_{\theta\phi} = \dfrac{1}{\mu}\tau_{\theta\phi}
\end{cases}
\tag{۲- ۸}
$$

۲-۴- روابط سینماتیک (تغییر مکان-کرنش)

$$
\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right) \tag{۲- ۹}
$$

معادلات سینماتیک برای حالت کروی به‌صورت زیر ساده می‌شوند.



شکل۲-۱- مختصات کروی

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{rSin\phi}\left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + Sin\phi u_r + Cos\phi u_\phi\right) \\ \varepsilon_\phi = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + u_r\right) \\ \gamma_{r\theta} = \left(\dfrac{1}{rSin\phi}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \\ \gamma_{\theta\phi} = \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{Sin\phi}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - Cot\phi u_\theta\right) \\ \gamma_{r\phi} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \phi} + \dfrac{\partial u_\phi}{\partial r} - \dfrac{u_\phi}{r}\right) \end{cases} \quad (۲- ۱۰)$$

۲-۵- مسائل متقارن محوری[1]

مسأله متقارن محوری، مسألهای است که در آن هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و خواص نیز متقارن باشد و در نتیجه میدان تغییر شکل و تنش، تقارن محوری داشته باشد. در اینجا نیز می‌توان با فرض توزیع بارهای حرارتی و مکانیکی در راستای شعاعی و متقارن در راستای مماسی، مسأله را متقارن محوری در نظر گرفت، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \ , \ u_\theta = u_\phi = 0 \ , \ \sigma_\theta = \sigma_\phi \quad (۲-۱۱)$$

با فرض تقارن محوری، معادلات سینماتیک، معادلات تعادل تنش و معادلات رفتاری به‌ترتیب به‌صورت روابط زیر تبدیل می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \dfrac{u_r}{r} \\ \gamma_{r\phi} = \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta\phi} = 0 \end{cases} \quad (۲- ۱۲)$$

[1] Axisymmetric

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial z}+\frac{2}{r}\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)+B_r=0 \qquad (۱۳-۲)$$

$$\begin{cases}\sigma_r=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi\right)+2\mu\varepsilon_r-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\theta \\ \sigma_\theta=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi\right)+2\mu\varepsilon_\theta-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\theta \\ \sigma_\phi=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_\phi\right)+2\mu\varepsilon_\phi-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\theta \\ \tau_{r\theta}=\mu\gamma_{r\theta} \quad , \quad \tau_{r\phi}=\mu\gamma_{r\phi} \quad , \quad \tau_{\theta\phi}=\mu\gamma_{\theta\phi}\end{cases} \qquad (۱۴-۲)$$

$$\begin{cases}\varepsilon_r=\frac{1}{E}\left[\sigma_r-2\nu\left(\sigma_\theta\right)\right]+\alpha\theta \\ \varepsilon_\theta=\varepsilon_\phi=\frac{1}{E}\left[\sigma_\theta(1-\nu)-\nu\left(\sigma_r\right)\right]+\alpha\theta\end{cases} \qquad (۱۵-۲)$$

۲-۶- تئوری الاستیسیته مستوی

در تئوری الاستیسیته مستوی (PET)[1] فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی پوسته، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور پوسته، متقارن می‌باشند و مقدارشان در امتداد طول پوسته تغییر نمی‌کند. تغییر مکان در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر، جابه‌جایی شعاعی فقط تابع شعاع است. یعنی المان چرخش ندارد. این بدان معناست که محورهای کره، محورهای اصلی و تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی هستند.

$$\gamma_{r\phi}=\gamma_{r\theta}=\gamma_{\theta\phi}=0 \qquad (۱۶-۲)$$

تنش‌های اصلی:

$$\sigma_R \quad , \quad \sigma_\theta \quad , \quad \sigma_\phi \qquad (۱۷-۲)$$

[1] Plane Elasticity Theory(PET)

بنابراین با فرض تقارن محوری، معادلات سینماتیک (۲- ۱۲)، معادلات تعادل تنش (۲- ۱۳) و معادلات رفتاری (۲- ۱۴) و (۲- ۱۵) به‌ترتیب به‌صورت روابط (۲- ۱۸) تا (۲- ۲۱) تبدیل می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} \end{cases} \tag{۲-۱۸}$$

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) + B_r = 0 \tag{۲-۱۹}$$

در غیاب نیروهای حجمی معادله تعادل تنش به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{2}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) = 0 \tag{۲-۲۰}$$

روابط تنش-کرنش را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر تعریف کرد.

$$\begin{pmatrix} \sigma_R \\ \sigma_\theta \end{pmatrix} = E\begin{bmatrix} A & 2B & C \\ B & A+B & C \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_R \\ \varepsilon_\theta \\ -\alpha\theta \end{pmatrix} \tag{۲-۲۱}$$

ضرایب A، B و C ثابت‌هایی هستند که با توجه به هندسه کره به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\mathrm{A} = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mathrm{B} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad C = \frac{1}{1-2\nu} \tag{۲-۲۲}$$

همچنین $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{r_i}}$ و $\mathrm{k} = \frac{\mathrm{r_o}}{\mathrm{r_i}}$ که $\mathrm{r_i}$ شعاع در سطح داخلی پوسته‌ی کروی و $\mathrm{r_o}$ شعاع خارجی می باشد.

۲-۷- مساله انتقال حرارت

شکل کلی معادله هدایت حرارتی در مختصات کروی به‌صورت زیر است [۳۹].

$$\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(kR^2\frac{\partial T}{\partial R}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(k\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{R^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(k\frac{\partial T}{\partial\phi}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{۲-۲۳}$$

T: توزیع دما ، q: تولید حرارت ، ρ: چگالی، c: گرمای ویژه، k : هدایت حرارتی

با فرض مساله در شرایط حالت پایا، متقارن محوری، فاقد منبع حرارتی و توزیع دما فقط در جهت شعاع، رابطه توزیع دما در کره به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(k\left(R\right)R^2\frac{dT}{dR}\right)=0 \tag{۲-۲۴}$$

۲-۷-۱- کره همگن

در رابطه بالا اگر ضریب ناهمگنی $n_4=0$ فرض شود، هدایت حرارتی مقدار ثابت k خواهد داشت. بنابراین توزیع دما درکره همگن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

اگر از رابطه (۲-۲۴) انتگرال‌گیری کنیم خواهیم داشت:

$$T\left(R\right)=C_1+\frac{C_2}{R} \tag{۲-۲۵}$$

شرایط مرزی حرارتی در کره به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} r=r_i \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_i}{r_i}=1 \Rightarrow T=T_i \\ r=r_o \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_o}{r_i}=k \Rightarrow T=T_o \end{cases} \tag{۲-۲۶}$$

در این روابط r_i و r_o به‌ترتیب شعاع داخلی وخارجی کره توخالی هستند. با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های C_{1T} و C_{2T} به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_{1T}=\dfrac{T_i-T_o k}{1-k} \\ C_{2T}=\dfrac{\left(T_o-T_i\right)k}{1-k} \end{cases} \tag{۲-۲۷}$$

با جایگذاری ثابت‌ها توزیع دما به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$T\left(R\right)=T_i-\left(T_i-T_o\right)\left(\frac{R-1}{k-1}\right)\left(\frac{k}{R}\right) \tag{۲-۲۸}$$

تغییرات دما در کره به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\theta(R)=T(R)-T^{*}=\Delta\theta\left(\frac{R-1}{k-1}\right)\left(\frac{k}{R}\right)+\theta_i \quad ,\theta_i=T_i-T^{*} \quad ,\theta_o=T_o-T^{*} \quad ,\Delta\theta=\theta_o-\theta_i \tag{۲-۲۹}$$

در رابطه بالا T^* دمای هوای محیط، θ_o اختلاف دمای سطح خارجی با دمای محیط ، θ_i اختلاف دمای سطح داخلی با دمای محیط و $\Delta\theta$ اختلاف دمای سطح داخلی و خارجی می‌باشد.

۲-۷-۲- کره FGM

با جایگذاری $k(R)=k_i R^{n_4}$ در رابطه (۲-۲۴) توزیع دما در کره ناهمگن FG به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(k_i R^{n_4+2}\frac{dT}{dR}\right)=0 \tag{۲-۳۰}$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق توزیع دما بدست می‌آید:

الف) $n_4 \neq -1$

در حالتی که $n_4 \neq -1$ با حل معادله انتقال حرارت می‌توان نوشت:

$$T(R)=C_{1T}R^{-(n_4+1)}+C_{2T} \tag{۲-۳۱}$$

پس از اعمال شرایط مرزی در معادله‌ی انتقال حرارت ثابت‌های C_{1T} و C_{2T} به صورت زیر بدست می-آیند.

شرایط مرزی حرارتی در کره به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} r=r_i \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_i}{r_i}=1 \Rightarrow T=T_i \\ r=r_o \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_o}{r_i}=k \Rightarrow T=T_o \end{cases} \tag{۲-۳۲}$$

با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های C_{1T} و C_{2T} به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$C_{1T}=\frac{T_i-T_o}{-\left(\dfrac{1}{k^{n_4+1}}-1\right)},C_{2T}=\frac{\dfrac{T_i}{k^{n_4+1}}-T_o}{\left(\dfrac{1}{k^{n_4+1}}-1\right)} \tag{۲-۳۳}$$

ب) $n_4=-1$

در حالتی که $n_4=-1$ با حل معادله انتقال حرارت می‌توان نوشت:

$$T\left(R\right)=C_{1T}\ln R+C_{2T} \tag{۳۴-۲}$$

که پس از اعمال شرایط مرزی در معادله‌ی انتقال حرارت ثابت‌های C_{1T} و C_{2T} به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$C_{1T}=\frac{T_o-T_i}{\left(\ln k\right)},C_{2T}=T_i \tag{۳۵-۲}$$

۲-۸- معیارهای تسلیم

در این تحقیق برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره همگن و ناهمگن از معیارهای تسلیم ترسکا و فون میزز استفاده شده است.

۲-۸-۱- معیار تسلیم ترسکا

این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش برشی، پیشنهاد گردیده است. بر اساس این تئوری، تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش برشی برابر مقاومت تسلیم برشی ماده می‌شود. بنابراین با مشخص بودن تنش‌های اصلی، معیار ترسکا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\max\left(\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1\right)-\min\left(\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1\right)=\sigma_y \tag{۳۶-۲}$$

۲-۸-۲- معیار تسلیم فون میزز

این معیار بر اساس تئوری بیشترین کرنشی واپیچشی استوار است. بنابراین با مشخص بودن تنش‌های اصلی، معیار فون میزز به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2=2\sigma_y \tag{۳۷-۲}$$

فصل ۳

تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی

در این فصل در ابتدا با استفاده از روابط اساسی توزیع تنش‌های الاستیک در کره جدار ضخیم همگن تحت اثر فشار و دمای داخلی بدست آمده است. سپس در ۳ حالت کره تحت فشار داخلی، کره تحت اثر دمای داخلی و کره تحت فشار و دمای داخلی، به کمک معیار تسلیم ترسکا و فون میزز، پوسته کروی مورد تحلیل الاستوپلاستیک قرار گرفته است.

۳-۱- توزیع تنش‌های الاستیک در کره تحت اثر نیروهای مکانیکی و حرارتی

با جایگذاری روابط سینماتیک (۲- ۱۸) در روابط رفتاری (۲- ۲۱) سپس در رابطه تعادل (۲- ۲۰)، معادله دیفرانسیلی زیر برای جابجایی حاصل می‌شود.

$$u_R'' + \frac{2}{R}u_R' - \frac{2}{R^2}u_R = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha\frac{d\theta}{dR} \qquad (۳-۱)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل (۳-۱) دارای دو حل عمومی و خصوصی به‌صورت زیر است.

$$u_R = u_g + u_p \qquad (۳-۲)$$

حل عمومی معادله با انتگرال گیری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_g = C_1 R + \frac{C_2}{R^2} \qquad (۳-۳)$$

جواب خصوصی معادله را با کمک روش لاگرانژ به‌دست می‌آوریم. با استفاده از جواب عمومی رونسکین (w) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y_1 = R \Rightarrow y_1' = 1 \quad , \; y_2 = \frac{1}{R^2} \Rightarrow y_2' = \frac{-2}{R^3}$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_1' \\ y_2 & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & 1 \\ \frac{1}{R^2} & \frac{-2}{R^3} \end{vmatrix} = \frac{-3}{R^2}$$

$$u_P = -y_1\int \frac{y_2\left(\frac{C}{A}\alpha\frac{d\theta}{dR}\right)}{w}dR + y_2\int \frac{y_1\left(\frac{C}{A}\alpha\frac{d\theta}{dR}\right)}{w}dR \qquad (۳-۴)$$

$$u_P = \frac{1}{R^2}\frac{C}{A}\alpha\int_1^k R^2\theta dR$$

بنابراین جابجایی برابر است با:

$$u_R = C_1 R + \frac{C_2}{R^2} + \frac{1}{R^2}\frac{C}{A}\alpha\int_1^R R^2\theta dR \quad (۵-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۵) در روابط سینماتیک (۳-۱۷) و سپس در رابطه رفتاری (۳-۲۰)، تنش‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R = E\left[(A+2B)C_1 + 2(B-A)C_2R^{-3} + \frac{2(B-A)C}{A}\frac{\alpha}{R^3}\int_1^R R^2\theta dR\right] \quad (۶-۳)$$

$$\sigma_\theta = E\left[(A+B)C_1 + (A-B)C_2R^{-3} + \frac{(A-B)C}{A}\frac{\alpha}{R^3}\int_1^R R^2\theta dR + \frac{(B-A)C}{A}\alpha\theta\right] \quad (۷-۳)$$

شرایط مرزی سطح داخلی و خارجی کره تحت فشار داخلی و خارجی، به‌صورت رابطه (۳-۸) خواهد بود.

$$\begin{cases} r = r_i \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \quad \sigma_R = -P_i \\ r = r_o \Rightarrow R = k \Rightarrow \quad \sigma_R = -P_o \end{cases} \quad (۸-۳)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه (۳-۶) ضرایب C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{\left(P_i - P_o k^3\right)}{E\,(A+2B)\left(k^3-1\right)} + \dfrac{(B-A)C\alpha}{(A+2B)\left(k^3-1\right)A}\displaystyle\int_1^k R^2\theta dR \\ C_2 = \dfrac{k^3\left(P_i - P_o\right)}{2E\,(A-B)\left(k^3-1\right)} + \dfrac{C\alpha}{A\left(k^3-1\right)}\displaystyle\int_1^k R^2\theta dR \end{cases} \quad (۹-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۲۸) در روابط (۳-۹)، (۳- ۶) و (۳-۷)، سپس جایگذاری روابط (۳-۹) در رابطه (۳- ۶) و (۳-۷) داریم.

$$\sigma_R = \frac{1}{k^3-1}\left[P_i\left(1-\frac{k^3}{R^3}\right) - P_o k^3\left(1-\frac{1}{R^3}\right)\right] + \frac{\alpha E T_i}{1-\nu}\frac{K}{k^3-1}\left((k+1) - \frac{k^2+k+1}{R} + \frac{k^2}{R^3}\right) \quad (۱۰-۳)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{k^3-1}\left[P_i\left(1+\frac{k^3}{2R^3}\right) - P_o k^3\left(1+\frac{1}{R^3}\right)\right] + \frac{\alpha E T_i}{1-\nu}\frac{K}{k^3-1}\left((k+1) - \frac{k^2+k+1}{2R} - \frac{k^2}{2R^3}\right) \quad (۱۱-۳)$$

۳-۲- تحلیل الاستوپلاستیک با کمک معیار تسلیم ترسکا

برای تحلیل الاستوپلاستیک کره به کمک معیار تسلیم ترسکا، کره را در ۳ وضعیت، کره تحت فشار داخلی، کره تحت اثر دمای داخلی و کره تحت فشار و دمای داخلی در نظر می‌گیریم.

۳-۲-۱- تحلیل الاستوپلاستیک کره همگن تحت فشار داخلی

توزیع تنش‌ها در کره الاستیک کامل تحت فشار داخلی طبق روابط (۳-۱۰) و (۳-۱۱) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^3 - 1}\left(1 - \frac{k^3}{R^3}\right) \quad (۱۲\text{-}۳)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^3 - 1}\left(1 + \frac{k^3}{2R^3}\right) \quad (۱۳\text{-}۳)$$

با بررسی روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر کره همگن تحت فشار داخلی به‌صورت زیر است:

$$\sigma_R < \sigma_\theta \quad (۱۴\text{-}۳)$$

الف) شروع تسلیم

بر اساس رابطه (۳-۱۴)، معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \quad (۱۵\text{-}۳)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در کره است. بر اساس رابطه (۳-۱۵)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Phi_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_y} \quad (۱۶\text{-}۳)$$

با توجه به رابطه (۳-۱۵) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، کره تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۱۲ و ۱۳) در رابطه (۳-۱۶) در آغاز تسلیم ، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{P_i}{k^3 - 1}\left(\frac{3k^3}{2R^2}\right) = \sigma_y \quad (۱۷\text{-}۳)$$

با توجه به رابطه‌ی بالا ماکزیمم این عبارت در $R=1$ می‌باشد بنابراین در کره تحت فشار داخلی تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود و فشار بحرانی تسلیم برابر است با :

$$\left(P_i\right)_{cr}=\frac{2\left(k^3-1\right)\sigma_y}{3k^3} \quad (۱۸-۳)$$

فشاری که کل ضخامت کره را تسلیم می‌کند در R=k اتفاق می‌افتد:

$$\left(P_i\right)_{ul}=\frac{2\left(k^3-1\right)\sigma_y}{k^3} \quad (۱۹-۳)$$

اگر در کره $P_i > (P_i)_{cr}$ تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود.

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک کره تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری روابط (۲-۲۱) در روابط (۳-۶) و (۳-۷) و همچنین جایگذاری رابطه (۳-۵) در روابط (۲-۱۷)، در شرایطی که فشار داخلی می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = E[(A+2B)C_1 - 2(A-B)R^{-3}\,C_2] \quad (۲۰-۳)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\emptyset = E[(A+2B)C_1 + (A-B)R^{-3}C_2] \quad (۲۱-۳)$$

$$u_R^e = C_1 R + \frac{1}{R^2}C_2 \quad (۲۲-۳)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 - \frac{2}{R^3}C_2 \quad (۲۳-۳)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 + \frac{1}{R^3}C_2 \quad (۲۴-۳)$$

ج) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک کره تسلیم شده

با جایگذاری معیار ترسکا در رابطه تعادل، توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک کره تسلیم شده به‌دست آورد.

$$\sigma_R^p = 2\sigma_y \ln R + C_3 \quad (۲۵-۳)$$

$$\sigma_\theta^p = \sigma_y\left(2\ln R + 1\right) + C_3 \quad (۲۶-۳)$$

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک و پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p \quad , i = R,\theta,\phi \quad (۲۷-۳)$$

ε_i: کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک.

روابط کرنش الاستیک به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i, j, k = R, \theta, \phi \tag{۳-۲۸}$$

رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک برابر است با

$$\varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\phi^p = 0 \tag{۳-۲۹}$$

رابطه بین کرنش کل و جابجایی همان روابط سینماتیک می‌باشد. با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای کره به‌صورت زیر نوشته می‌شود[۴۰].

$$\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\phi^p \tag{۳-۳۰}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۳۰) در رابطه (۳-۲۹) داریم:

$$\varepsilon_R^p = -2\varepsilon_\theta^p \tag{۳-۳۱}$$

با جایگذاری روابط (۳-۲۸) در روابط (۳-۲۷) داریم:

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_\phi\right)\right] \tag{۳-۳۲}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\phi\right)\right] \tag{۳-۳۳}$$

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_\phi^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\phi - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] \tag{۳-۳۴}$$

از مجموع سه رابطه (۳-۳۲و۳۳و۳۴) داریم:

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi = \varepsilon_R^p + 2\varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\left(1-2\nu\right)\left(\sigma_R + 2\sigma_\theta\right)\right] \tag{۳-۳۵}$$

با جاگذاری روابط (۳-۲۵)، (۳-۲۶)، (۳-۳۱) و (۲-۱۷) در رابطه (۳-۳۵) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{2u_R}{R} = \frac{\left(1-2\nu\right)}{E}\left[2\sigma_y\left(3\ln R + 1\right) + 3C_3\right] \tag{۳-۳۶}$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۳-۳۶)، جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک (u_R^p) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^p = \frac{\left(1-2\nu\right)}{E}R\left[2\sigma_y \ln R + C_3\right] + \frac{C_4}{R^2} \tag{۳-۳۷}$$

با جاگذاری روابط (۳-۲۵)، (۳-۲۶) و (۲-۱۷) در رابطه (۳-۳۳) داریم:

$$\varepsilon_\theta^p=\frac{u_R}{R}-\frac{1}{E}\left[\sigma_y\left((1+\nu)(1-2\nu)\ln R+1-\nu^2\right)+(1+\nu)(1-2\nu)C_3\right] \quad (۳-۳۸)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۳۷) به جای u_Rدر رابطه (۳-۳۸)، کرنش شعاعی (ε_R^p)و کرنش محیطی (ε_θ^p) در ناحیه پلاستیک، به‌دست می‌آیند.

$$-2\varepsilon_\theta^p=\varepsilon_R^p=-2\left(\frac{C_4}{R^2}-\frac{(1-\nu)}{E}\sigma_y\right) \quad (۳-۳۹)$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی با توجه به نحوه تسلیم کره به-دست می‌آیند.

اگردر کره $P_i>(P_i)_{cr}$ باشد، کره ازسطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه پلاستیک(p) ($1\le R\le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep}\le R\le k$) در کره ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۲۰) تا (۳-۲۴)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۳۷) تا (۳-۳۹)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

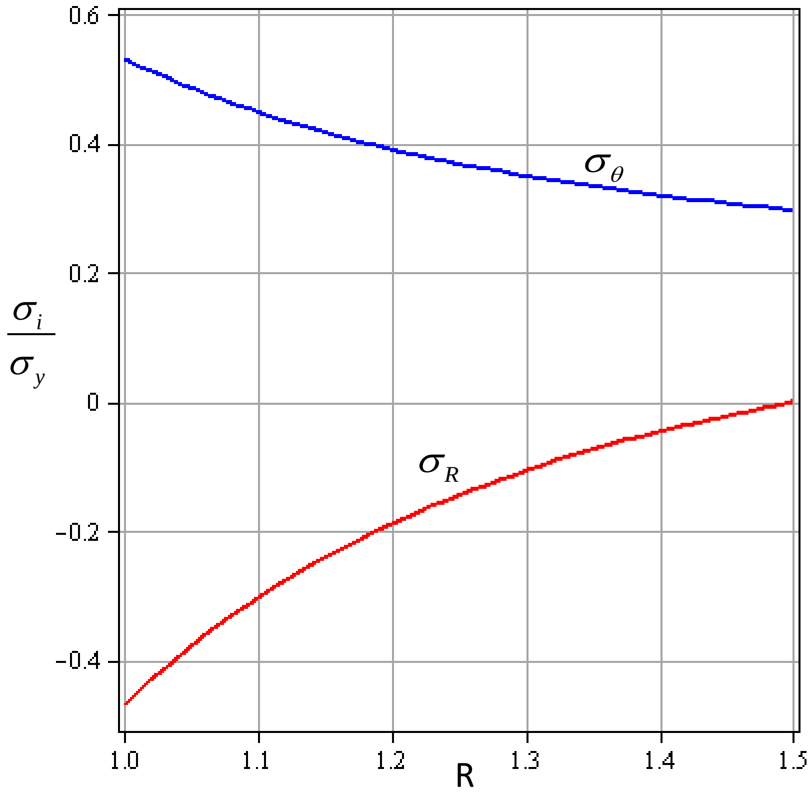
$$\begin{cases}1)\sigma_R^P(R=1)=-\dfrac{p_i}{\sigma_y}\\ 2)\sigma_R^P(R=R_{ep})=\sigma_R^e(R=R_{ep})\\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^e(R=R_{ep})}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_R^e(R=R_{ep})}{\sigma_y}=1\\ 4)u_R^P(R=R_{ep})=u_R^e(R=R_{ep})\\ 5)\sigma_R^e(R=k)=0\end{cases} \quad (۳-۴۰)$$

۳-۲-۱-۱- مطالعه موردی

برای مطالعه موردی، یک کره *FGM* با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی کره $r_i=$۴۰ mm، شعاع خارجی $r_o=$۶۰ mm، $k=$۱/۵، مدول الاستیک سطح داخلی $E_i=$۲۰۰ *GP*، تنش تسلیم سطح داخلی $\sigma_y=$۳۰۰ *Mpa*، نسبت پواسون $\nu=$۰/۳، *A*=۱/۳۴، *B*=۰/۵۷.

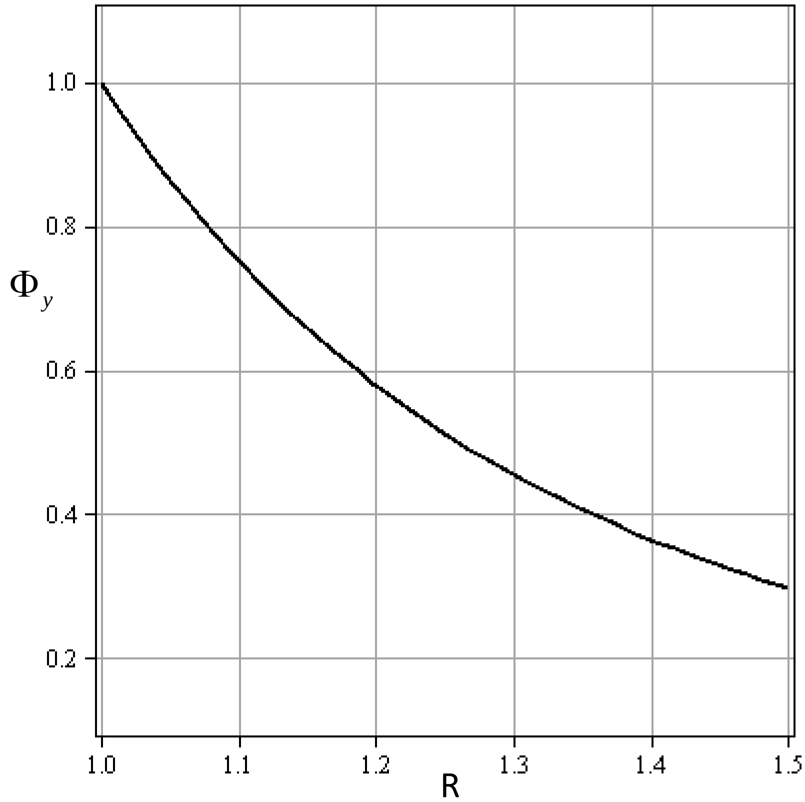
با توجه به رابطه (۳-۱۸) فشار بحرانی تسلیم در این کره برابر است با $(P_i)_{cr} =$۱۴۰/۷۴Mpa

شکل (۳-۱) توزیع تنش‌های الاستیک کره در فشار $P_i =$۱۴۰/۷۴Mpa را نشان می‌دهد. فشار بحرانی تسلیم برابر است با $(p_i)_e =$۱۴۰/۷۴Mpa.



شکل ۳-۱- توزیع تنش‌های الاستیک در کره همگن تحت فشار

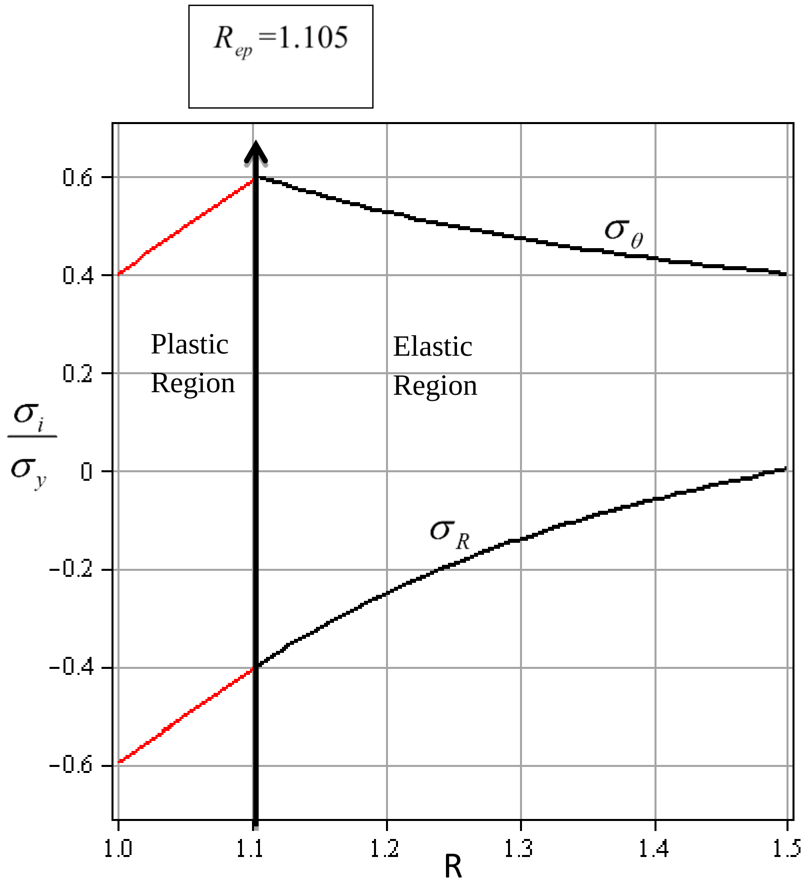
شکل (۳-۲) تابع تسلیم در شرایط بحرانی را نشان می‌دهد، همانطور که در این نمودار مشخص است تابع تسلیم در سطح داخلی برابر یک می‌باشد. بنابراین کره در آستانه تسلیم شدن از سطح داخلی می‌باشد.



شکل ۳-۲- تابع تسلیم در کره همگن تحت فشار

با افزایش فشار کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود. شکل (۳-۳) توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک کره در فشار Mpa ۱۸۰= $(p_i)_e$ نشان داده شده است. ثابت‌ها از پنج شرط رابطه‌ی (۳-۴۰) بدست می‌آیند:

$$C_1=0.000161\ ,\ C_2=0.000876\ ,\ C_3=-0.6\ ,\ C_4=0.000932\ ,\ R_{ep}=1.10514$$



شکل ۳-۳- توزیع تنشهای الاستوپلاستیک در کره همگن

تحت فشار

۳-۲-۲- تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره همگن

توزیع تنش‌های ترموالاستیک در کره تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$)، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = \frac{E\alpha\theta_i}{(1-\nu)} \cdot (\frac{k}{k^3-1})\left((k+1)-\left(\frac{k^2+k+1}{R}\right)+\left(\frac{k^2}{R^3}\right)\right) \tag{۴۱-۳}$$

$$\sigma_\theta = \sigma_\phi = \frac{E\alpha\theta_i}{(1-\nu)} \cdot (\frac{k}{k^3-1})\left((k+1)-\left(\frac{k^2+k+1}{2R}\right)-\left(\frac{k^2}{2R^3}\right)\right) \tag{۴۲-۳}$$

با بررسی روابط (۳-۴۱) و (۳-۴۲)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر کره همگن تحت تنش حرارتی به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \le R < R^1 \ \Rightarrow (\sigma_\theta = \sigma_\phi) < \sigma_R \\ R^1 \le R < k \ \Rightarrow \sigma_R < (\sigma_\theta = \sigma_\phi) \end{cases} \quad (۴۳-۳)$$

در رابطه (۳-۴۳)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_R$

الف) **شروع تسلیم**

بر اساس رابطه (۳-۴۳)، معیار تسلیم ترسکا در حالت کلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \pm\sigma_y \quad (۴۴-۳)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در کره است. بر اساس رابطه (۳-۴۴)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Phi_y = \frac{\sigma_R - \sigma_\theta}{\sigma_y} \quad (۴۵-۳)$$

با توجه به رابطه (۳-۴۵) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، کره تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۴۱) و (۳-۴۱) در رابطه (۳-۴۵) و با توجه به این‌که تسلیم کره تحت اثر دمای داخلی از سطح داخلی آغاز می‌شود، رابطه زیر برقرار است.

$$\Phi_y(R=1) = 1 \Rightarrow \frac{E\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\sigma_y}\left(\frac{k}{k^3-1}\right)\left(\frac{3k^2}{R^3} - \frac{k^2+k+1}{R}\right) = 1 \quad (۴۶-۳)$$

از رابطه (۳-۴۶)، اختلاف دمای بحرانی تسلیم سطح داخلی($(\theta_i)_{cr1}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$(\theta_i)_{cr} = \frac{2(1-\nu)\sigma_y \cdot (k^2+k+1)}{E\alpha(2k^2+k)} \quad (۴۷-۳)$$

اگردر کره $\theta_i > (\theta_i)_{cr}$ تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود. با افزایش دما ممکن است کره از سطح خارجی نیز تسلیم شود.

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک کره تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری روابط (۲-۲۱) و (۲-۲۷) در روابط (۳-۵ تا ۷)، و جایگذاری رابطه (۳-۵) در روابط (۲-۱۷)، در شرایطی که کره فقط تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$) می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R^e = E\left[(A+2B)C_1 - 2(A-B)C_2R^{-3} + \frac{C\alpha\theta_i}{A(k-1)}\left(\left(\frac{B-A}{R^3}\right)\left(\frac{k^3}{3} - k - \frac{2}{3}\right) + (A-1)\left(\frac{k}{R} - 1\right)\right)\right] \quad (۳-۴۸)$$

$$\sigma_\theta^e = E\left[(A+2B)C_1 + (A-B)C_2R^{-3} + \frac{C\alpha\theta_i}{A(k-1)}\left((B-1)\left(\frac{k}{R} - 1\right) - \left(\frac{B-A}{R^3}\right)\left(\frac{k^3}{3} - k - \frac{2}{3}\right)\right)\right] \quad (۳-۴۹)$$

$$u_R^e = C_1R + \frac{1}{R^2}C_2 + \frac{C\alpha\theta_i}{A(k-1)}\left(\frac{k}{2} - \frac{k}{2R^2} - \frac{R}{3} + \frac{1}{3R^2}\right) \quad (۳-۵۰)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 - \frac{2}{R^3}C_2 + \frac{C\alpha\theta_i}{A(k-1)}\left(\frac{k}{R^3} - \frac{2}{3R^3} - \frac{1}{3}\right) \quad (۳-۵۱)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 + \frac{1}{R^3}C_2 + \frac{k}{2} + \frac{C\alpha\theta_i}{A(k-1)}\left(\frac{k}{2R} - \frac{k}{2R^3} + \frac{1}{3R^3} - \frac{1}{3}\right) \quad (۳-۵۲)$$

ج) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک کره تسلیم شده

با توجه به وضعیت تنش‌ها در کره الاستیک کامل رابطه، معیار ترسکا و رابطه بین کرنش‌ها، می‌توان توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک کره تسلیم شده را به‌دست آورد.

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک، پلاستیک و حرارتی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p + \varepsilon_i^T \quad , i = R,\theta,\phi \quad (۳-۵۳)$$

ε_i: کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک و ε_i^T: کرنش حرارتی.

روابط کرنش الاستیک و کرنش حرارتی به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i,j,k = R,\theta,\phi \quad (۳-۵۴)$$

$$\varepsilon_i^T = \alpha\theta(R) \quad , i = R,\theta,\phi \quad (۳-۵۵)$$

رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک برابر است با

$$\varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_\phi^p = 0 \xrightarrow{\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\varnothing^p} \varepsilon_R^p = -2\varepsilon_\theta^p \quad (۳-۵۶)$$

رابطه بین کرنش کل و جابجایی همان روابط سینماتیک می‌باشد.

تنش‌ها در ناحیه پلاستیک بر اساس وضیعت $\sigma_R < \sigma_\theta$ یا $\sigma_\theta < \sigma_R$:

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \pm\sigma_y \tag{۵۷-۳}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای کره به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\varnothing^p \tag{۵۸-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۱۵۸) در رابطه (۱۲۱) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p = -2\varepsilon_R^p \tag{۵۹-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۵۷) در رابطه تعادل (۲-۱۷)، تنش شعاعی در ناحیه پلاستیک$\left(\sigma_R^{p3}\right)$ و تنش محیطی در ناحیه پلاستیک$\left(\sigma_\theta^{p3}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{p3} = \pm 2\sigma_y \ln R + C_3 \tag{۶۰-۳}$$

$$\sigma_\theta^{p3} = \sigma_\phi^{p3} = \pm\sigma_y \left(2\ln R + 1\right) + C_3 \tag{۶۱-۳}$$

از مجموع دو رابطه (۱۲۶) و (۱۲۷) داریم:

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\varphi = \varepsilon_R^p + 2\varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[(1-2\nu)\left(\sigma_R + 2\sigma_\theta\right)\right] + 3\alpha\theta(R) \tag{۶۲-۳}$$

با جاگذاری روابط(۳-۵۹)، (۳-۶۰)، (۳-۶۱)، (۳-۶۲) و (۲-۱۷) در رابطه (۳-۶۲) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + 2\frac{u_R}{R} = \frac{1}{E}(1-2\nu)\left[\pm 2\sigma_y \left(3\ln R + 1\right) + 3C_3\right] + 3\alpha\frac{T}{k-1}\left(\frac{k-R}{R}\right) \tag{۶۳-۳}$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۳-۶۳) و جایگذاری رابطه (۳-۳۳)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p3}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p3}=\frac{-C_4}{R^2}+\frac{1-2\nu}{2E\left(k-1\right)}\left[\pm 4R\sigma_y \ln R\left(k-1\right)+2RC_3\left(k-1\right)+\alpha E\,\theta_i\,\frac{\left(3k-2R\right)}{1-2\nu}\right] \tag{۶۴-۳}$$

با جاگذاری روابط (۳-۶۰)، (۳-۶۱)، (۳-۶۲)، (۲-۲۷) و (۲-۱۹) در رابطه (۳-۳۳) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p=\frac{u_R}{R}-\frac{1}{E}\left[\pm 2\sigma_y \ln R\left(1-2\nu\right)+\sigma_y\left(1-\nu\right)+\left(1-2\nu\right)C_3\right]-\frac{\alpha\theta_i}{\left(k-1\right)}\left(\frac{k-R}{R}\right) \tag{۶۵-۳}$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی با توجه به نحوه تسلیم کره به‌دست می‌آیند.

اگردر کره $\theta_i > (\theta_i)_{cr1}$ باشد، کره از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه الاستیک (e) $(1 \le R \le R_{ep})$ و پلاستیک(p) $(R_{ep} \le R \le k)$ در کره ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۴۸) تا (۳-۵۲)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۶۰) تا (۳-۶۵)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases}1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=0\\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right)\\ 3)\dfrac{\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}=1\\ 4)u_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep}\right)\\ 5)\sigma_R^{e}\left(R=k\right)=0\end{cases} \tag{۶۶-۳}$$

با مشخص شدن C_1 و C_2، تنش‌های الاستیک σ_R^e و σ_θ^e به‌دست می‌آیند. بنابراین از رابطه ترسکا در سطح خارجی $\frac{\sigma_\theta^e(R=k)-\sigma_R^e(R=k)}{\sigma_y}=1$ با فرض مجهول بودن θ_i و جایگذاری روابط (۳-۴۸) و (۳-۴۹) در رابطه ترسکا اختلاف دمای بحرانی تسلیم از سطح خارجی $((\theta_i)_{cr2})$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

اختلاف دمای بحرانی تسلیم از سطح خارجی $((\theta_i)_{cr2})$ برابر است با

$$(\theta_i)_{cr2} = \frac{(3C_2)}{\left(3k - \frac{2k^3}{3} + \frac{1}{3}\right)} \tag{۳-۶۷}$$

بنابراین اگردر کره$(\theta_i)_{cr1} < \theta_i < (\theta_i)_{cr2}$ باشد، کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود. و اگر $(\theta_i)_{cr2} < \theta_i$ کره از سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود به‌طوریکه در شعاع $1 \le R \le R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \le R \le k$ ناحیه پلاستیک ۲ ($p2$) ایجاد می‌شود.

در صورت تسلیم شدن کره از سطح داخلی و خارجی، مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۴۸) تا (۳-۵۲) و مجهولات C_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و مجهولات C_{32} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲)، و C_{42} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۶۰) تا (۳-۶۴) و R_{ep1}(مرز بین ناحیه پلاستیک ۱ و الاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۲)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

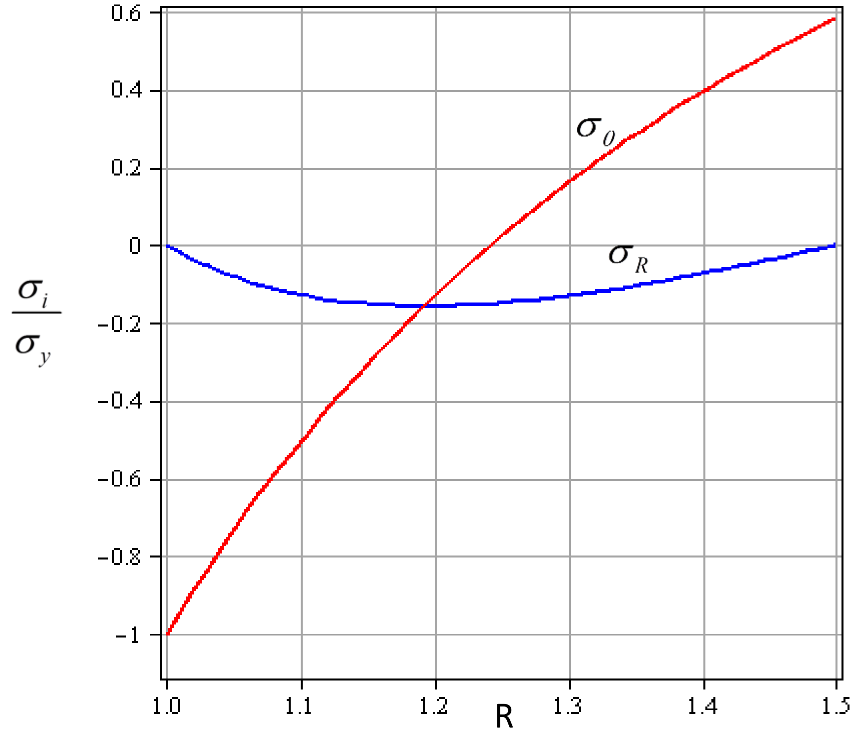
$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}(R=1)=0 \\ 2)\sigma_R^{P1}(R=R_{ep1})=\sigma_R^e(R=R_{ep1}) \\ 3)\dfrac{\sigma_R^e(R=R_{ep})}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_\theta^e(R=R_{ep})}{\sigma_y}=1 \\ 4)\sigma_R^{P3}(R=k)=0 \\ 5)\sigma_R^{P3}(R=R_{ep2})=\sigma_R^e(R=R_{ep2}) \\ 6)\dfrac{\sigma_\theta^e(R=R_{ep2})-\sigma_R^e(R=R_{ep2})}{\sigma_y}=1 \\ 7)u_R^{P1}(R=R_{ep1})=u_R^e(R=R_{ep1}) \\ 8)u_R^{P3}(R=R_{ep2})=u_R^e(R=R_{ep2}) \end{cases} \tag{۳-۶۸}$$

۳-۲-۲-۱- مطالعه موردی

برای مطالعه موردی، یک کره همگن تحت دمای داخلی، با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی $r_i = ۴۰ \, mm$، شعاع خارجی $r_o = ۶۰ \, mm$، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $k = ۱/۵$، مدول الاستیک $E_i = ۲۰۰ \, GP$، تنش تسلیم $\sigma_{y_i} = ۳۰۰ \, Mpa$ و نسبت پواسون $\nu = ۰/۳$ است.

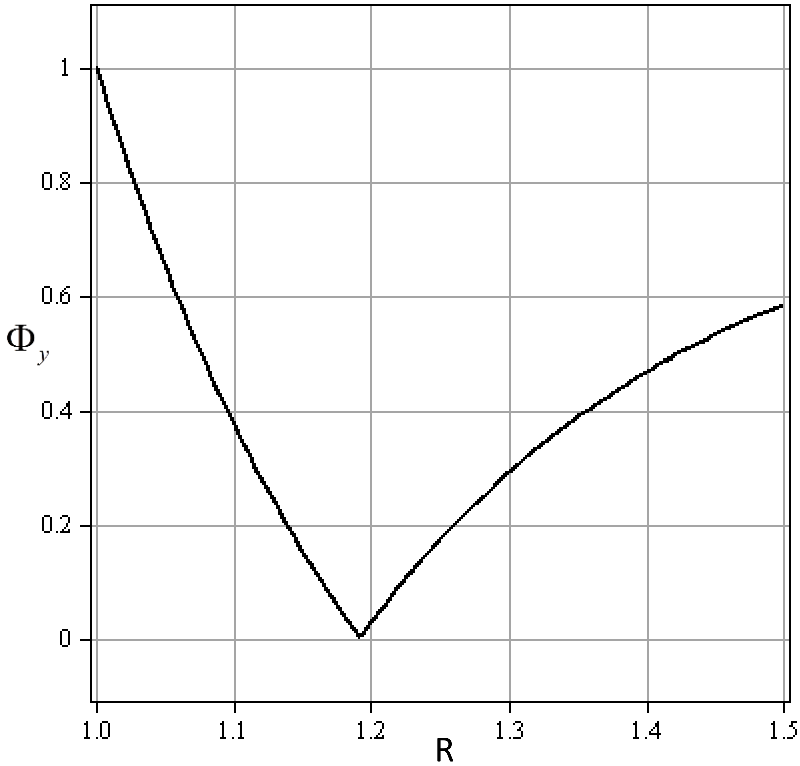
با توجه به رابطه (۳-۴۷) دمای داخلی بحرانی تسلیم در این کره برابر است با $(\theta_i)_{cr1} = ۱۳۸/۵۴ c^{\circ}$.

شکل (۳-۴) توزیع تنش‌های الاستیک کره در دمای داخلی $\theta_i = ۱۳۸/۵۴ c^{\circ}$ را نشان می‌دهد.



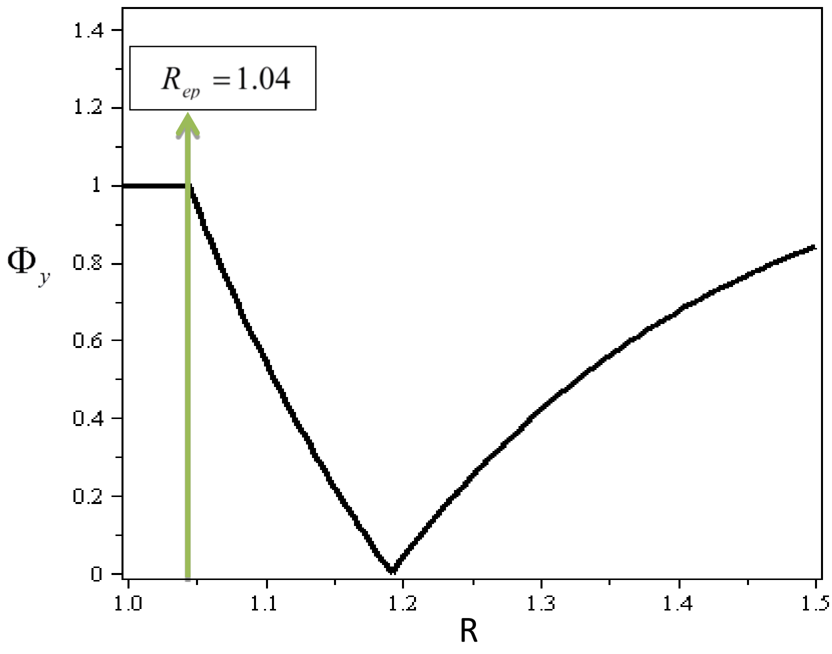
شکل ۳-۴- توزیع تنش‌های الاستیک در کره همگن تحت دمای داخلی

شکل (۳-۵) تابع تسلیم در شرایط بحرانی را نشان می‌دهد، همان طور که در این نمودار مشخص است تابع تسلیم در سطح داخلی برابر یک است، بنابراین کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود.



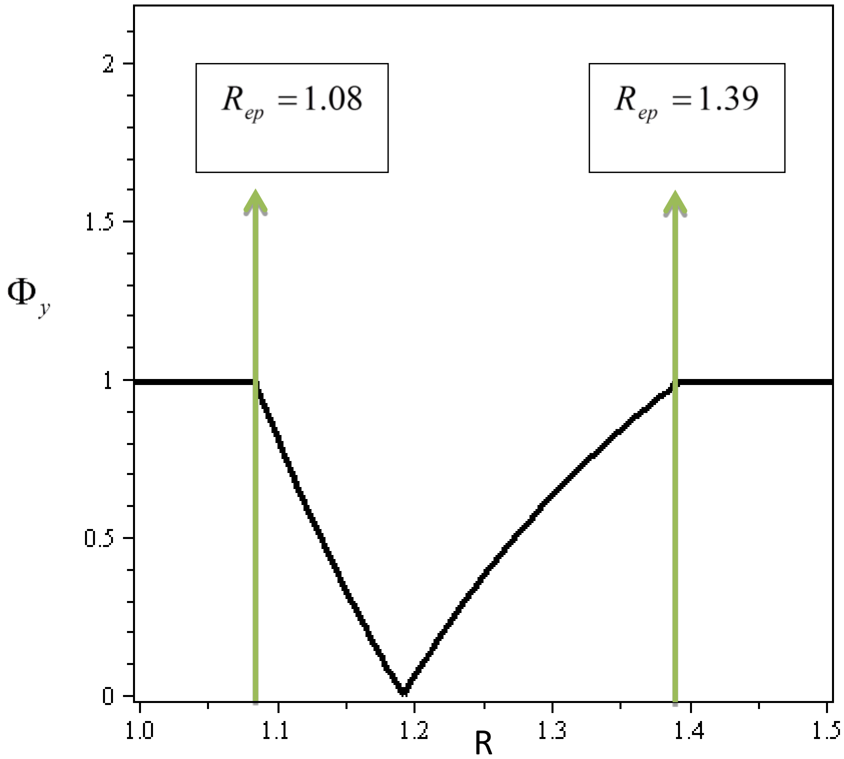
شکل ۳-۵- تابع تسلیم در کره همگن تحت دمای داخلی

با افزایش دما، کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود. شکل (۳-۶) تابع تسلیم کره در دمای $\theta_i = ۲۰۰ c^{\circ}$ را نشان می‌دهد.

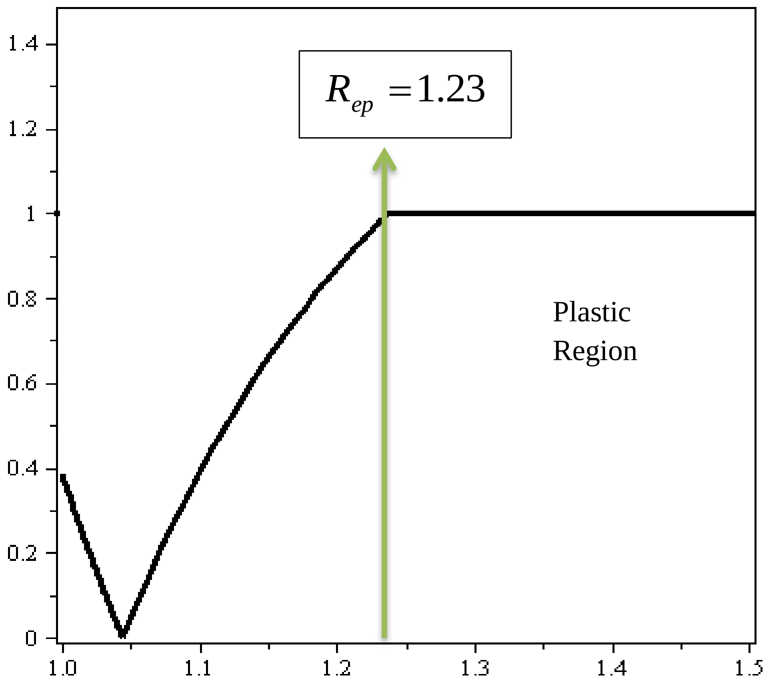


شکل ۳-۶- تابع تسلیم در کره همگن تحت دمای داخلی $\boldsymbol{\theta_i = ۲۰۰ c^{\circ}}$

با بالاتر رفتن دما اگر $(\theta_i)_{cr2} < \theta_i$ کره از سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود. شکل (۳-۷) تابع تسلیم در کره تحت دمای داخلی θ_i =۳۰۰c° را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۷- تابع تسلیم در کره همگن تحت دمای داخلی θ_i =۳۰۰c°



شکل ۳-۸- تابع تسلیم در کره همگن تحت دمای داخلی θ_i =۲۵۰c° و فشار داخلی P_i = ۲۰۰ Mpa

با توجه به نمودار (**شکل ۳-۸**)، کره از هر دو سطح خارجی تسلیم می‌شود و مجهولات از ۸ شرط رابطه (۳-۶۸) به‌دست می‌آیند.

۳-۲-۳- تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره همگن

توزیع تنش‌های ترموالاستیک در کره تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$)، طبق روابط (۳-۱۰) و (۳-۱۱) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^3-1}\left(1-\frac{k^3}{R^3}\right)+\frac{E\alpha\theta_i}{(1-\nu)}\left(\frac{k}{k^3-1}\right)\left((k+1)-\left(\frac{k^2+k+1}{R}\right)+\frac{k^2}{R^3}\right) \quad (۳-۶۹)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^3-1}\left(1+\frac{k^3}{2R^3}\right)+\frac{E\alpha\theta_i}{(1-\nu)}\left(\frac{k}{k^3-1}\right)\left((k+1)-\left(\frac{k^2+k+1}{2R}\right)-\frac{k^2}{2R^3}\right) \quad (۳-۷۰)$$

با بررسی روابط (۳-۶۹) و (۳-۷۰) مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر کره همگن تحت تنش حرارتی و مکانیکی با توجه به تغییرات فشار داخلی به‌صورت زیر خواهد بود.

در فشار $0 \leq P_{i1} < P_i$ توزیع تنش‌ها به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \leq R < R^1 \Rightarrow \sigma_\theta < \sigma_R \\ R^1 \leq R < K \Rightarrow \sigma_R < \sigma_\theta \end{cases} \quad (۳-۷۱)$$

که P_{i1} از رابطه $\sigma_R(R=1) = \sigma_\theta(R=1)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{i1} = \frac{-2E\alpha\theta_i}{3(1-\nu)k^2}\left(-k^2+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right) \quad (۳-۷۲)$$

در رابطه (۳-۷۱)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_R$

الف) شروع تسلیم

با توجه به وضعیت توزیع تنش‌ها،معیار ترسکا و تابع تسلیم در هر کره تحت دما وفشار داخلی می‌توان چگونگی تسلیم را بررسی کرد.

وضعیت تنش‌ها در کره تحت تنش حرارتی و فشار داخلی در شرایط بحرانی تسلیم به‌صورت وضعیت ۱ خواهد بود.

در وضعیت ۱، معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_R - \sigma_\theta = \pm\sigma_y \qquad (۳-۷۳)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در کره است. بر اساس رابطه (۳-۷۳)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Phi_y = \frac{\sigma_R - \sigma_\theta}{\sigma_y} \qquad (۳-۷۴)$$

با توجه به رابطه (۳-۷۵) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، کره تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۶۹) و (۳-۷۰) در رابطه (۳-۷۵) و با توجه به این‌که اگر کره تحت اثر دما و فشار داخلی از سطح داخلی تسلیم شود، رابطه زیر برقرار است.

$$\Phi_y\left(R=1\right)=1 \Rightarrow -\frac{\left(\frac{3k^3}{2}\right)P_i}{\left(k^3-1\right)\sigma_y} - \frac{E\alpha\theta_i}{\sigma_y\left(1-\nu\right)}\frac{k}{k^3-1}\left(-k^2+\frac{\mathrm{k}}{2}+\frac{1}{2}\right)=1 \qquad (۳-۷۵)$$

از رابطه (۳-۷۵)، فشار بحرانی تسلیم از سطح داخلی($(P_i)_{cr1}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(P_i\right)_{cr} = \frac{2\left(1-k^3\right)\sigma_y}{3k^3}\left(1+\frac{E\alpha\theta_i}{\sigma_y\left(1-\nu\right)}\frac{k}{k^3-1}\left(-k^2+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)\right) \qquad (۳-۷۶)$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در دو ناحیه الاستیک وپلاستیک کره تسلیم شده.

با توجه به تابع تسلیم اگر کره طبق وضعیت ۱ از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم‌شود، دو ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep} \le R \le k$) در کره ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه الاستیک ،و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$
\begin{cases}
1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\
2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\
3)\dfrac{\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}=1 \\
4)u_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\
5)\sigma_R^{e}\left(R=k\right)=0
\end{cases}
\tag{۷۷-۳}
$$

با مشخص C_1 و C_2، تنش‌های الاستیک σ_R^e و σ_θ^e به‌دست می‌آیند. بنابراین اگر در سطح خارجی تابع تسلیم $1 \geq \frac{\sigma_\theta^e(R=k)-\sigma_R^e(R=k)}{\sigma_y}$ باشد کره از سطح خارجی نیز تسلیم می‌شود.

۳-۳- تحلیل الاستوپلاستیک با کمک معیار تسلیم فون میزز

برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره همگن تحت فشار داخلی و دمای داخلی، با کمک معیار فون میزز، از روش المان محدود توسط نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. و خواص مکانیکی ماده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$E=200\,GPa,\sigma_y=300\,MPa,v=0.3$$

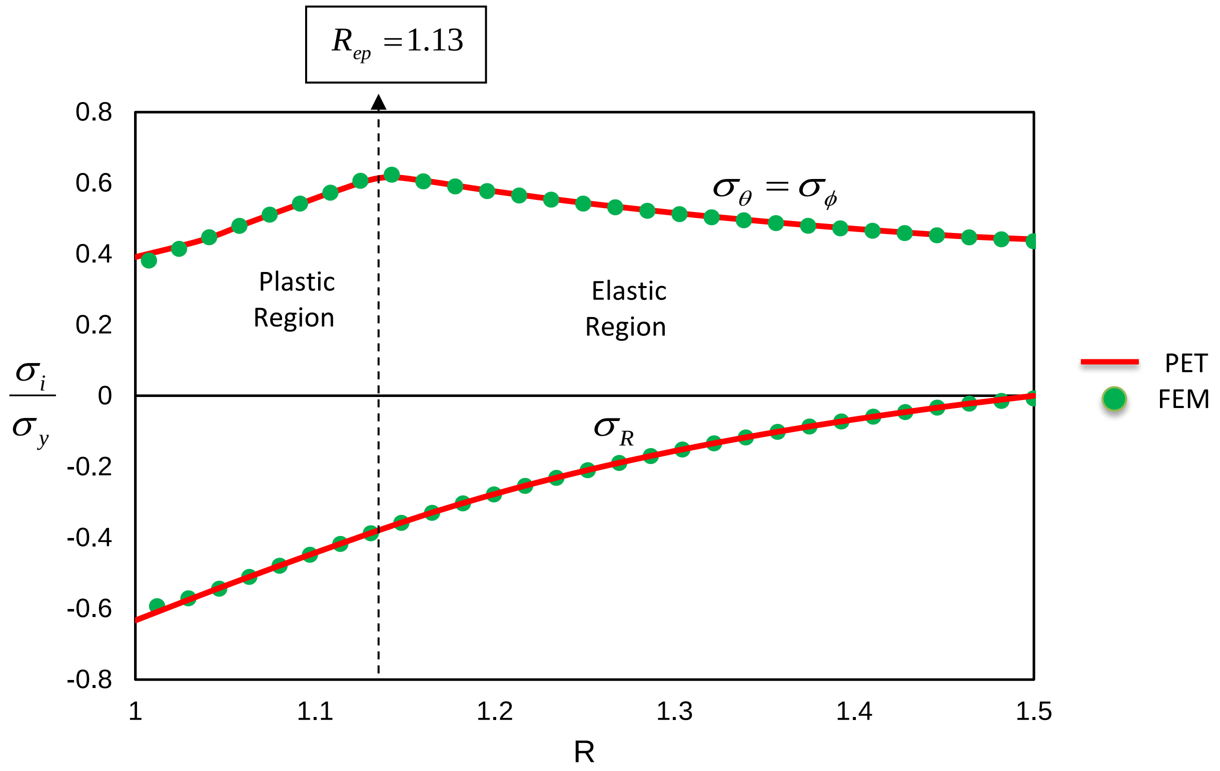
فشار و دمای بحرانی تسلیم در کره همگن براساس معیار فون میزز در دما و فشار داخلی مختلف، در جدول شماره (۳-۱) نشان داده شده است.

جدول ۳-۱- فشار بحرانی آغاز تسلیم در کره همگن بر اساس معیار فون میزز

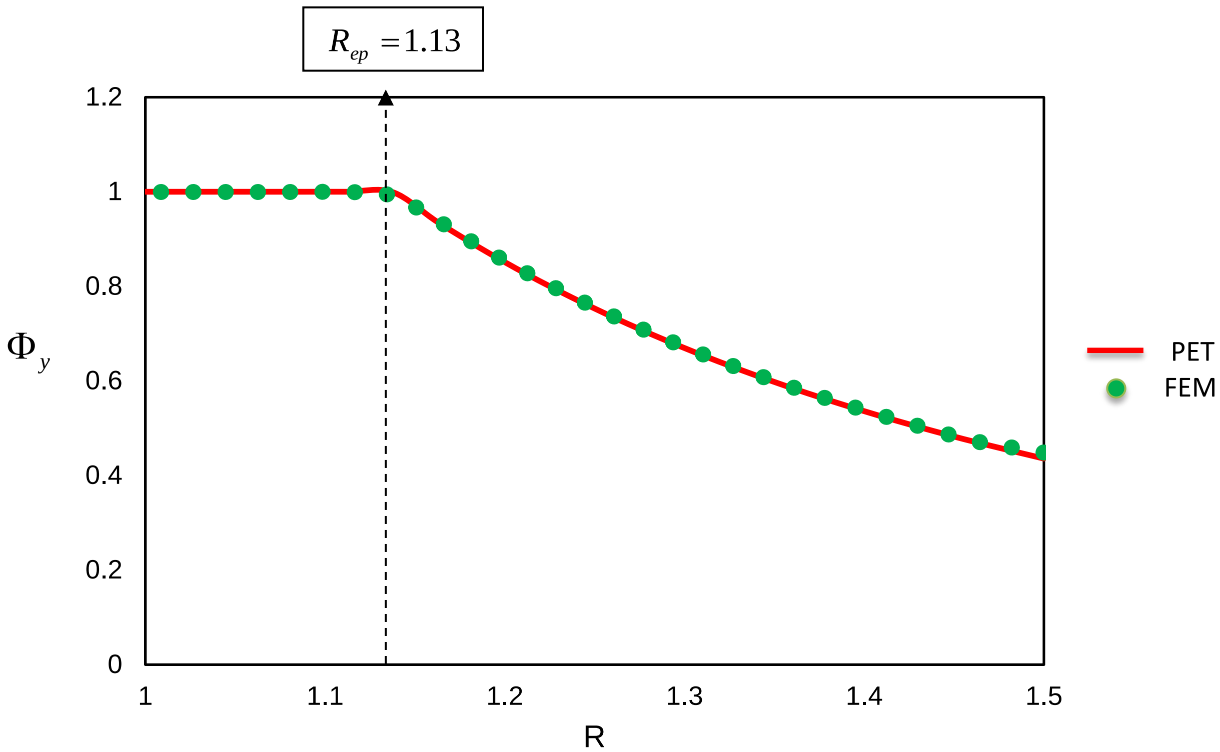
-------------	$\theta_i=0c^o$	$\theta_i=50c^o$	$P_i=0$
کره همگن	$\left(P_i\right)_{cr}=142.85\text{MPa}$	$\left(P_i\right)_{cr}=192.29\text{MPa}$	$\left(\theta_i\right)_{cr}=144.41\text{MPa}$

با افزایش فشار یا دما از حد بحرانی کره وارد ناحیه پلاستیک خواهد شد. با کمک نرم‌افزار آباکوس توزیع تنش‌ها در ناحیه الاستیک و پلاستیک کره تسلیم شده را در ۳ حالت مختلف دما و فشار رسم می‌کنیم.

شکل‌های (۳-۹) مقایسه توزیع تنش‌ها و شکل (۳-۱۰) مقایسه تابع تسلیم برای حل تحلیلی و نرم-افزاری در کره تحت فشار داخلی $P_i = ۱۹۰\, MPa$ را نشان می‌دهد. این کره از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم شده است.



شکل ۳- ۹- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره همگن تحت فشار داخلی

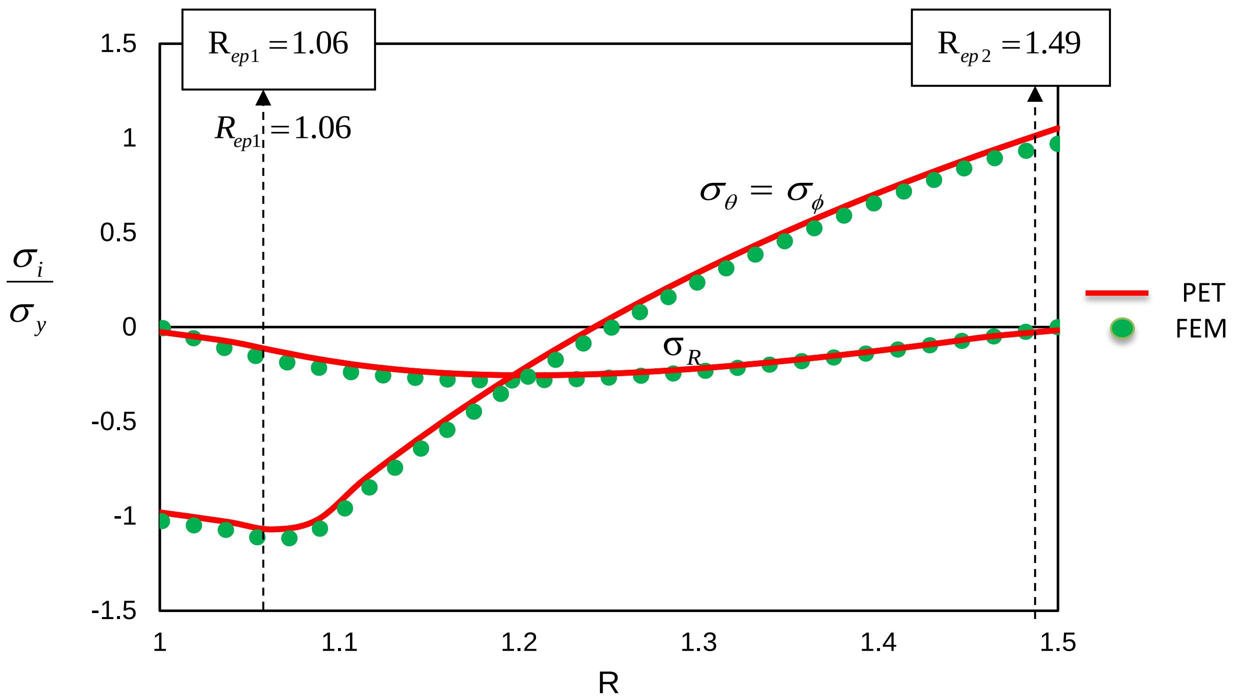


شکل ۳- ۱۰- تابع تسلیم در کره همگن تحت فشار داخلی

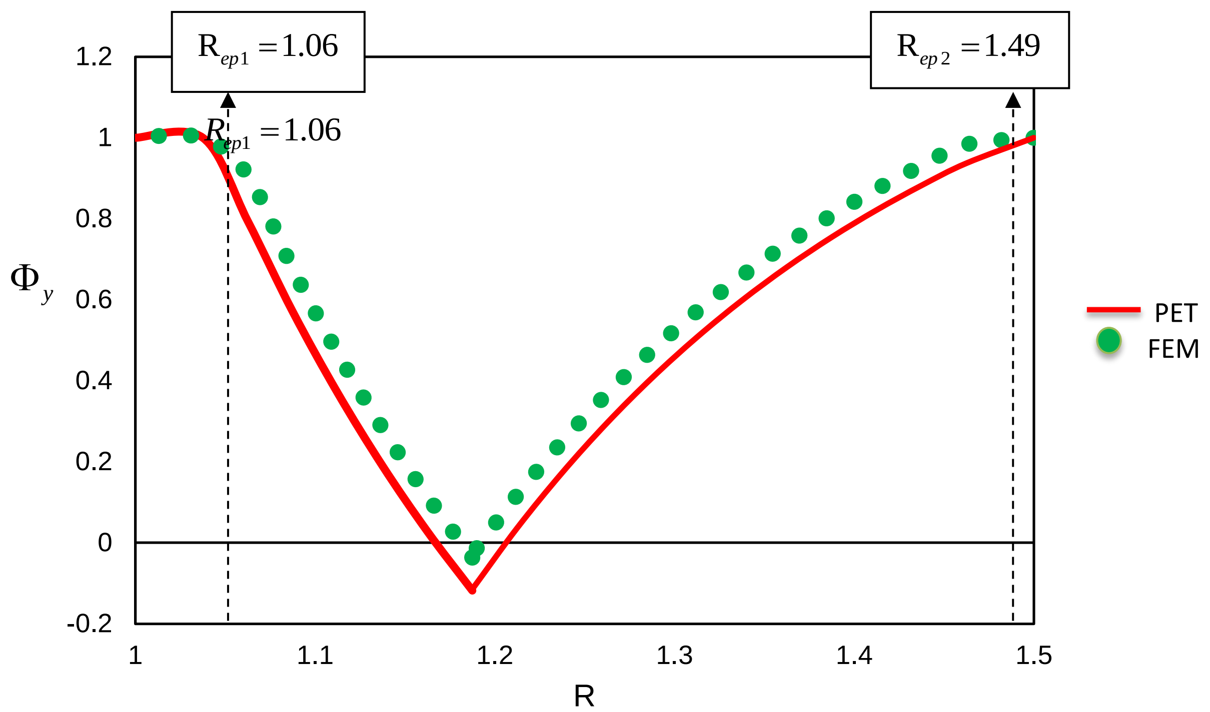
شکل (۳-۱۱) توزیع تنش‌ها و شکل (۳-۱۲) تابع تسلیم در کره تحت دمای $\theta_i = 250c^{\circ}$ را نشان می‌دهد. پوسته کروی تحت بارگذاری فوق از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود. بنابراین دو ناحیه پلاستیک بین R_{ep1} و R_{ep2} و یک ناحیه الاستیک ایجاد می‌شود.

با توجه به رابطه (۳-۷۶) برای یک دمای ثابت اگر فشار بیشتر از فشار بحرانی باشد تسلیم از سطح خارجی آغاز می‌شود و هر چقدر فشار بیشتر شود عمق ناحیه پلاستیک به سمت داخل بیشتر می‌شود. اگر فشار از مقدار فشار بحرانی کمتر شود، تسلیم به سمت سطح داخلی رفته و از سطح داخل پوسته تسلیم آغاز می‌شود.

حل تحلیلی با در نظر گرفتن فرضیات مساله حلی دقیق‌تر از حل عددی به روش المان محدود است. با این وجود نتایج نزدیکی قابل قبولی با یکدیگر دارندو علت اختلاف جزئی حل تحلیلی و عددی را می‌توان در نوع مش‌بندی و یا ساده سازی‌هایی که در حل تحلیلی درنظر گرفته شده است مثل صرفنظر از تنش برشی بیان نمود.

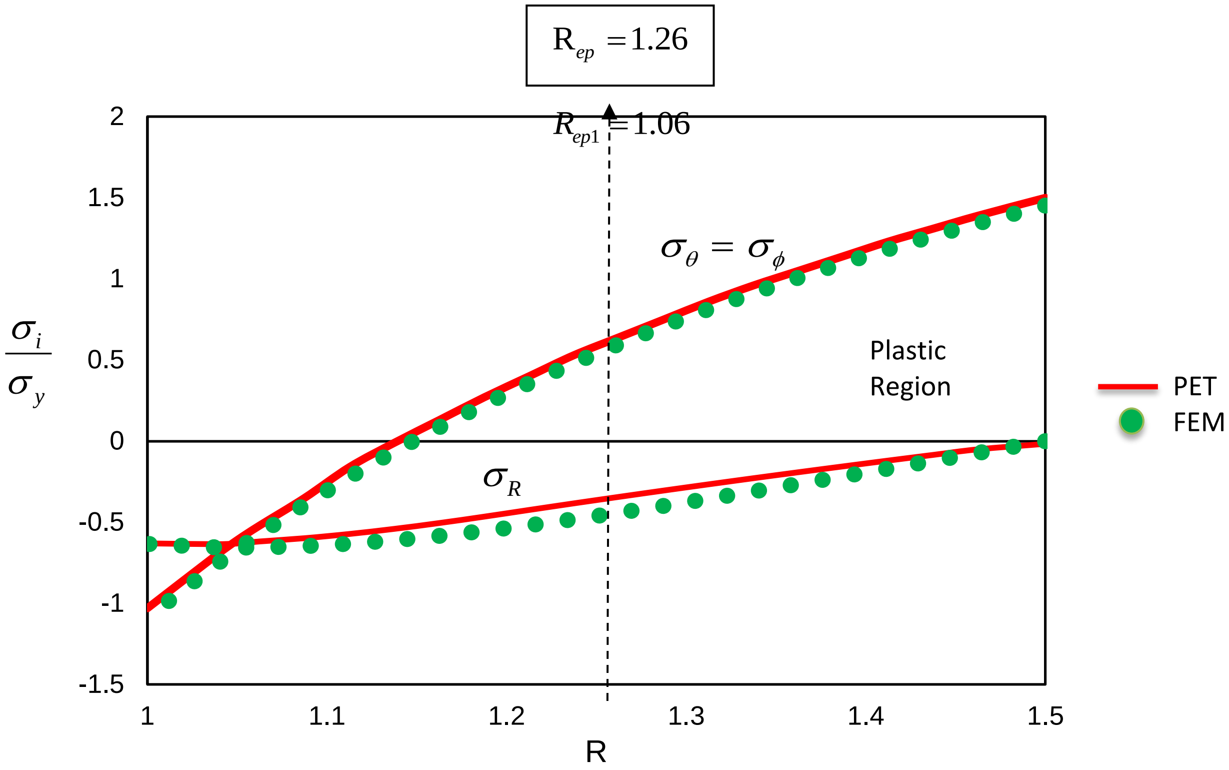


شکل ۳- ۱۱- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره همگن تحت دمای داخلی

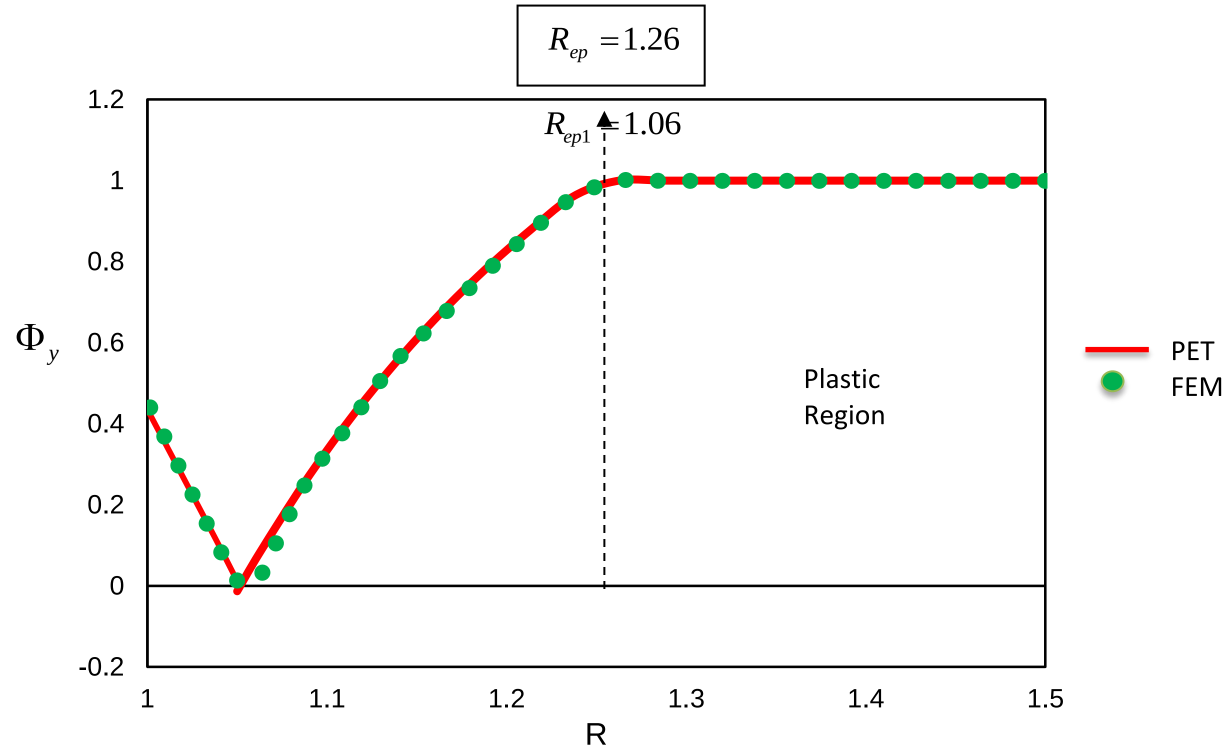


شکل ۳- ۱۲- تابع تسلیم در کره همگن تحت دمای داخلی

شکل (۳-۱۳) توزیع تنش‌ها و شکل (۳-۱۴) تابع تسلیم در کره تحت دمای $\theta_i = ۲۵۰ c^\circ$ و فشار داخلی $P_i = ۱۹۰ MPa$ را نشان می‌دهد. این کره از سطح خارجی تسلیم می‌شود.



شکل ۳- ۱۳- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره همگن تحت فشار و دمای داخلی



شکل ۳- ۱۴- تابع تسلیم در کره همگن تحت فشار و دمای داخلی

فصل ۴

تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره جدار ضخیم ناهمگن FG تحت فشار داخلی

در این فصل در ابتدا با استفاده از روابط اساسی توزیع تنش‌های الاستیک در کره جدار ضخیم ناهمگن FG تحت اثر فشار داخلی و دمای داخلی به‌دست می‌آوریم. سپس در ۲ حالت کره تحت فشار داخلی و کره تحت فشار و دمای داخلی، به کمک معیار تسلیم ترسکا و فون میزز کره مورد تحلیل ترموالاستوپلاستیک قرار گرفته است.

۴-۱- توزیع تنش‌های الاستیک در کره تحت اثر نیروهای مکانیکی و حرارتی

با جایگذاری $K(R)=K_i R^{n_4}$ در رابطه (۲-۲۹) توزیع دما در کره ناهمگن FG به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(k_i R^{n_4+2}\frac{dT}{dR}\right)=0 \quad (۴-۱)$$

از رابطه فوق انتگرال می‌گیریم و با جایگذاری روابط سینماتیک (۲-۱۷) در روابط رفتاری (۲-۱۸) سپس در رابطه تعادل (۲-۲۰)، معادله دیفرانسیلی زیر برای جابجایی حاصل می‌شود.

$$R^2 u_R''+\left(n_1+2\right)R u_R'+2\left(\frac{B}{A}n_1-1\right)u_R=\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha_i R^{n_3+1}\left(\left(n_3+n_1\right)\theta(R)+R\frac{d\theta(R)}{dR}\right) \quad (۴-۲)$$

با جایگذاری رابطه توزیع دما در معادله دیفرانسیلی بالا داریم.

الف) برای $n_4\neq -1$:

$$R^2 u_R''+\left(n_1+2\right)R u_R'+2\left(\frac{B}{A}n_1-1\right)u_R= \\ \frac{(1+\nu)\alpha_i\theta_i}{(1-\nu)\left(1-k^{n_4+1}\right)}\left(\left(n_4+1-n_3-n_1\right)k^{n_4+1}R^{n_3-n_4}+\left(n_3+n_1\right)R^{n_3+1}\right) \quad (۴-۳)$$

پاسخ (۴-۳) دارای دو حل عمومی و خصوصی به‌صورت زیر است.

$$u_R=u_g+u_p \quad (۴-۴)$$

حل عمومی معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

با فرض $u_R=R^m$ و جایگذاری در رابطه (۴-۳) معادله مشخصه زیر حاصل می‌شود.

$$m^2+(n_1+1)m+2\left(n_1\frac{B}{A}-1\right)=0 \quad (۴-۵)$$

با توجه به مقادیر $\frac{B}{A}$ که به نسبت پواسون وابسته است، معادله مشخصه دارای ریشه‌های حقیقی است.

$$m_1=-\frac{(n_1+1)}{2}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2},m_2=-\frac{(n_1+1)}{2}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2},\Delta=n_1^2+2n\left(1-4\frac{B}{A}\right)+9 \qquad (۶-۴)$$

بنابراین حل عمومی معادله برابر است با

$$u_g=C_1R^{m_1}+C_2R^{m_2} \qquad (۷-۴)$$

جواب خصوصی معادله را با کمک روش لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.با استفاده از جواب عمومی، رونسکین (W) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&u_P=CR^{n_3-n_4}+DR^{n_3+1}\\
&C=\alpha_i\frac{1+\nu}{1-\nu}(n_1+n_3-n_4-1)C_1^T\\
&D=\alpha_i\frac{1+\nu}{1-\nu}(n_1+n_3)C_2^T\\
&C_3=\frac{C}{(n_3-n_4+n_1)(n_3-n_4)+2\left(n_1\frac{B}{A}-1\right)}\\
&C_4=\frac{D}{(n_3+n_1+1)(n_3+1)+2\left(n_1\frac{B}{A}-1\right)}\\
&A=\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)},B=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}
\end{aligned} \qquad (۸-۴)$$

بنابراین جابجایی برابر است با:

$$u_R=u_g+u_p=C_1R^{m_1}+C_2R^{m_2}+C_3R^{n3-n4}+C_4R^{n3+1} \qquad (۹-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۹) در روابط سینماتیک (۲-۱۷) و سپس در رابطه رفتاری (۲-۱۸)، تنش‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&\sigma_R=\frac{E_iR^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix}C_1Q_1R^{m_1-1}+C_2Q_2R^{m_2-1}+C_3Q_3R^{n_3-n_4-1}\\+C_4Q_4R^{n_3}-(1+\nu)\alpha_iR^{n_3}T\,(R)\end{pmatrix}\\
&Q_1=2\nu+(1-\nu)m_1,Q_2=2\nu+(1-\nu)m_2\\
&Q_3=(n_3-n_4)(1-\nu)+2\nu,Q_4=(n_3+1)(1-\nu)+2B
\end{aligned} \qquad (۱۰-۴)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_i R^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} C_1 G_1 R^{m_1-1} + C_2 G_2 R^{m_2-1} + C_3 G_3 R^{n_3-n_4-1} \\ + C_4 G_4 R^{n_3} - (1+\nu)\alpha_i R^{n_3} T(R) \end{pmatrix}$$
$$G_1 = 1+\nu m_1, G_2 = 1+\nu m_2$$
$$G_3 = (n_3-n_4)\nu+1, G_4 = (n_3+1)\nu+1 \qquad (۴-۱۱)$$

شرایط مرزی سطح داخلی و خارجی کره تحت فشار داخلی ، به‌صورت رابطه زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} r = r_i \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sigma_R = -P_i \\ r = r_o \Rightarrow R = k \Rightarrow \sigma_R = 0 \end{cases} \qquad (۴-۱۲)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه (۴-۱۰) ضرایب C_1وC_2 برای کره الاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{Q_1\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)} \begin{pmatrix} \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)P_i k^{m_2}}{E_i} + C_3 Q_3 (k^{m_2} - k^{n_3-n_4}) + \\ C_4 Q_4 (k^{m_2} - k^{n_3+1}) - (1+\nu)\alpha_i \left(k^{m_2} T_i\right) \end{pmatrix} \\ C_2 = \dfrac{1}{Q_2\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)} \begin{pmatrix} \dfrac{-(1+\nu)(1-2\nu)P_i k^{m_1}}{E_i} - C_3 Q_3 (k^{m_1} - k^{n_3-n_4}) - \\ C_4 Q_4 (k^{m_1} - k^{n_3+1}) + (1+\nu)\alpha_i \left(k^{m_1} T_i\right) \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (۴-۱۳)$$

که با جایگذاری روابط (۴-۱۳) در روابط (۴-۱۱) و (۴-۱۰)، توزیع تنش‌ها به‌دست می‌آیند.

ب) برای $n_4 = -1$:

با جایگذاری روابط سینماتیک (۲-۱۷) در روابط رفتاری (۲-۱۸) سپس در رابطه تعادل (۲-۲۰)، معادله دیفرانسیلی زیر برای جابجایی حاصل می‌شود.

$$R^2 u_R'' + (n_1+2) R u_R' + 2\left(\frac{B}{A} n_1 - 1\right) u_R = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)} \alpha_i R^{n_3+1} \left((n_3+n_1)\theta(R) + R\frac{d\theta(R)}{dR} \right) \qquad (۴-۱۴)$$

با جایگذاری رابطه توزیع دما در معادله دیفرانسیلی بالا داریم.

$$R^2 u_R'' + (n_1+2) R u_R' + 2\left(\frac{B}{A} n_1 - 1\right) u_R = \frac{\alpha_i \theta_i}{\ln k} R^{n3+1} \left((n_3+n_1)(\ln k - \ln R) - 1 \right) \qquad (۴-۱۵)$$

پاسخ (۴-۱۵) دارای دو حل عمومی و خصوصی به‌صورت زیر است.

$$u_R = u_g + u_p \qquad (۴-۱۶)$$

حل عمومی معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

با فرض $u_R = R^m$ و جایگذاری در رابطه (۴-۱۵) معادله مشخصه زیر حاصل می‌شود.

$$m^2 + (n_1+1)m + 2\left(n_1\frac{B}{A} - 1\right) = 0 \qquad (۴\text{-}۱۷)$$

با توجه به مقادیر $\frac{B}{A}$ که به نسبت پواسون وابسته است، معادله مشخصه دارای ریشه‌های حقیقی است.

$$m_1 = -\frac{(n_1+1)}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, m_2 = -\frac{(n_1+1)}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \Delta = n_1^2 + 2n\left(1 - 4\frac{B}{A}\right) + 9 \qquad (۴\text{-}۱۸)$$

بنابراین حل عمومی معادله برابر است با

$$u_g = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} \qquad (۴\text{-}۱۹)$$

جواب خصوصی معادله را با کمک روش لاگرانژ به‌دست می‌آوریم.با استفاده از جواب عمومی، رونسکین (W) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&u_P = CR^{n_3+1}\ln R + DR^{n_3+1} \\
&C = \alpha_i \frac{1+\nu}{1-\nu}(n_1+n_3)\mathrm{C}_5 \\
&\mathrm{D} = \alpha_i \frac{1+\nu}{1-\nu}\left((n_1+n_3)\mathrm{C}_6 + \mathrm{C}_5\right) \\
&C_3 = \frac{C}{(n_3+n_1+1)(n_3+1) + 2\left(n_1\frac{B}{A} - 1\right)} \\
&C_4 = \frac{D}{(n_3+n_1+1)(n_3+1) + 2\left(n_1\frac{B}{A} - 1\right)} \\
&A = \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, B = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}
\end{aligned} \qquad (۴\text{-}۲۰)$$

بنابراین جابجایی برابر است با

$$u_R = u_g + u_p = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} + C_3 R^{n3+1}\ln R + C_4 R^{n3+1} \qquad (۴\text{-}۲۱)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۲۱) در روابط سینماتیک (۲-۱۷) و سپس در رابطه رفتاری (۲-۱۸)، تنش‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند

$$\sigma_R = \frac{E_i R^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix} C_1 Q_1 R^{m_1-1} + C_2 Q_2 R^{m_2-1} + C_3 Q_3 R^{n_3}\ln R \\ + C_4 Q_4 R^{n_3} - (1+\nu)\alpha_i R^{n_3} T\,(R) \end{pmatrix}$$
$$Q_1 = 2\nu + (1-\nu)m_1, Q_2 = 2\nu + (1-\nu)m_2 \qquad (۴-۲۲)$$
$$Q_3 = (n_3+1)(1-\nu) + 2\nu, \mathrm{Q}_4 = (\frac{\mathrm{C}}{D} + n_3 + 1)(1-\nu) + 2\nu$$

$$\sigma_\theta = \frac{E_i R^{n_1}}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{pmatrix} C_1 G_1 R^{m_1-1} + C_2 G_2 R^{m_2-1} + C_3 G_3 R^{n_3}\ln R \\ + C_4 G_4 R^{n_3} - (1+\nu)\alpha_i R^{n_3} T\,(R) \end{pmatrix}$$
$$G_1 = 1 + \nu m_1, G_2 = 1 + \nu m_2 \qquad (۴-۲۳)$$
$$G_3 = (n_3+1)\nu + 1, \mathrm{G}_4 = (\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{D}} + n_3 + 1)\nu + 1$$

شرایط مرزی سطح داخلی و خارجی کره تحت فشار داخلی ، به‌صورت رابطه زیرخواهد بود.

$$\begin{cases} r = r_i \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sigma_R = -P_i \\ r = r_o \Rightarrow R = k \Rightarrow \sigma_R = 0 \end{cases} \qquad (۴-۲۴)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه (۳۷) ضرایب C_1وC_2 برای کره الاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{Q_1\left(k^{m_2} - k^{m_1}\right)}\begin{pmatrix} -\dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)P_i k^{m_2}}{E_i} + C_3 Q_3 k^{n_3}\,\mathrm{lnk} \\ -C_4 Q_4 (k^{m_2} - k^{n_3+1}) - (1+\nu)\alpha_i \left(k^{n_3+1}\,\mathrm{lnk}\,C_5 + C_6\left(k^{n_3+1} - k^{m_2}\right)\right) \end{pmatrix} \\ C_2 = \dfrac{1}{Q_2\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)}\begin{pmatrix} \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)P_i k^{m_1}}{E_i} - C_3 Q_3 k^{n_3}\,\mathrm{lnk} \\ + C_4 Q_4 (k^{m_1} - k^{n_3+1}) + (1+\nu)\alpha_i \left(k^{n_3+1}\,\mathrm{lnk}\,C_5 + C_6\left(k^{n_3+1} - k^{m_1}\right)\right) \end{pmatrix} \end{cases} \qquad (۴-۲۵)$$

که با جایگذاری روابط (۴-۲۵) در روابط (۴-۲۲) و (۴-۲۳)، توزیع تنش‌ها به‌دست می‌آیند.

۴-۲- تحلیل الاستوپلاستیک کره FG تحت فشار داخلی

توزیع تنش‌ها در کره الاستیک کامل تحت فشار داخلی طبق روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$\sigma_R = \frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(k^{m_2} R^{m_1} - k^{m_1} R^{m_2}\right) \qquad (۴-۲۶)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(\frac{A + B\,(1+m_1)}{Am_1 + 2B} k^{m_2} R^{m_1} - \frac{A + B\,(1+m_2)}{Am_2 + B} k^{m_1} R^{m_2}\right) \qquad (۴-۲۷)$$

۴-۲-۱- تحلیل الاستوپلاستیک کره FG تحت فشار داخلی

با کمک معیار ترسکا و روابط تنش‌ها مربوط به کره‌ی الاستیک خطی می‌توان فشار بحرانی تسلیم و روابط تنش‌ها در ناحیه پلاستیک و الاستیک کره‌ی الاستوپلاستیک را بدست آورد.

با بررسی روابط و توزیع تنش‌ها برای کره$(\sigma_\theta > 0)$ و $(\sigma_R < 0)$ می‌باشد بنابراین $(\sigma_R < \sigma_\theta = \sigma_\phi)$ به‌صورت نشان داده شده می‌باشد و معیار ترسکا در کره‌ی FGM برابر است با:

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y(R) = \sigma_{yi} R^{n_2} \qquad (۴-۲۸)$$

الف) بررسی شرایط بحرانی تسلیم

تابع تسلیم را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Phi_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_{yi} R^{n_2}} \qquad (۴-۲۹)$$

با توجه به تابع تسلیم در هر شعاعی که $\emptyset_y = 1$ باشد کره از آن شعاع تسلیم خواهد شد.

با توجه به رابطه (۴-۲۹) در هر شعاعی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، کره تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۴-۲۶) و (۴-۲۷) در رابطه (۴-۲۹) در آغاز تسلیم، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}} \left(\left(\frac{A + B(1+m_1)}{Am_1 + 2B} - 1 \right) k^{m_2} R^{m_1} - \left(\frac{A + B(1+m_2)}{Am_2 + B} - 1 \right) k^{m_1} R^{m_2} \right) = \sigma_{yi} R^{n_3} \qquad (۴-۳۰)$$

با توجه به تابع تسلیم و روابط تنش‌ها دو حالت تسلیم زیر را در پوسته‌ی کروی فرض می‌کنیم:

(۱) اگر پوسته از هر دو سطح داخلی و خارجی به‌طور همزمان تسلیم شود باید دو رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \Phi_y(R=1) = 1 \\ \Phi_y(R=k) = 1 \end{cases} \qquad (۴-۳۱)$$

از این دو رابطه به‌طوری که $n_1 > 0$ باشد، پارامترهای $(n_2)_{cr}$[1] و فشار بحرانی تسلیم از شعاع داخلی که $(P_i)_e$ نامیده می‌شود، از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$(n_2)_{cr} = \frac{\ln\left(\frac{k^{n_1+m_1+m_2-1}\left((1-m_1)(Am_2+2B)-(1-m_2)(Am_1+2B)\right)}{(1-m_1)(Am_2+2B)k^{m_2}-(1-m_2)(Am_1+2B)k^{m_1}}\right)}{\ln(k)} \tag{۳۲-۴}$$

$$(p_i)_e = \frac{\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)(Am_1+2B)(Am_2+2B)\sigma_{y_i}}{(A-B)(1-m_1)(Am_2+2B)k^{m_2}-(1-m_2)(Am_1+2B)k^{m_1}} \tag{۳۳-۴}$$

(۲) اگر پوسته از شعاع $R = r_y$ که $1 < r_y < k$ تسلیم شود باید سه رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \varnothing_y (R=1) = \varnothing_y (R=k) \\ \varnothing_y (R=R_y) = 1 \\ \dfrac{d}{dR}\left(\varnothing_y (R=R_y)\right) = 0 \end{cases} \tag{۳۴-۴}$$

از این سه رابطه به‌طوری که $n_1 < 0$ باشد، پارامترهای $(n_2)_{cr}$ و $(P_i)_{ein}$ و r_y به‌دست می‌آیند که $(n_2)_{cr}$ همان رابطه‌ی (۴-۳۲) می‌باشد. شعاع r_y و فشار بحرانی تسلیم از این شعاع که $(P_i)_{ein}$ نامیده می‌شود، از روابط (۴-۳۴) برای هر مسئله خاص با کمک روش‌های عددی به‌دست می‌آیند.

بنابراین با تحلیل شرایط بحرانی چهار حالت زیر در پوسته‌های کروی ایجاد می‌شود:

الف) اگر $n_1 > 0$، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $p_i = (p_i)_e$: پوسته کروی از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود.

ب) اگر $n_1 < 0$، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $p_i = (p_i)_{ein}$: پوسته کروی از شعاع r_y تسلیم می‌شود که: $1 < r_y < k$.

ج) اگر $n_2 > (n_2)_{cr}$: پوسته کروی از سطح داخلی تسلیم می‌شود و فشار بحرانی تسلیم از رابطه‌ی $\varnothing_y(R=1) = 1$ که همان رابطه‌ی (۴-۳۳) می‌باشد به‌دست می‌آید.

---
[1] Critical

د) اگر $n_2 < (n_2)_{cr}$: پوسته کروی از سطح خارجی تسلیم می‌شود و فشار بحرانی تسلیم از رابطه‌ی $\emptyset_y(R = k) = 1$ به‌دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$(p_i)_{cr} = \frac{\left(k^{m_1} - k^{m_2}\right)\left(Am_1 + 2B\right)\left(Am_2 + 2B\right)\sigma_{y_i} k^{n_2}}{k^{n_1+m_1+m_2-1}\left(A - B\right)\left(\left(1-m_1\right)\left(Am_2 + 2B\right) - \left(1-m_2\right)\left(Am_1 + 2B\right)\right)} \qquad (۳۵\text{-}۴)$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک کره تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری روابط در شرایطی که فشار داخلی می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R^e = E_i R^{n_1}\left[\left(Am_1 + 2B\right)C_1 R^{m_1-1} + \left(Am_2 + 2B\right)C_2 R^{m_2-1}\right] \qquad (۳۶\text{-}۴)$$

$$\sigma_\theta^e = E_i R^{n_1}\left[\left(B(m_1+1) + A\right)C_1 R^{m_1-1} + \left(B(m_2+1) + A\right)C_2 R^{m_2-1}\right] \qquad (۳۷\text{-}۴)$$

$$u_R^e = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} \qquad (۳۸\text{-}۴)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 m_1 R^{m_1-1} + C_2 m_2 R^{m_2-1} \qquad (۳۹\text{-}۴)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 R^{m_1-1} + C_2 R^{m_2-1} \qquad (۴۰\text{-}۴)$$

ج) توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی در محدوده پلاستیک

با کمک معادله تعادل تنش (۲-۱۹) و معیار ترسکا (۴-۲۸) توزیع تنش در محدوده پلاستیک کره الاستوپلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_R^P = \frac{2\sigma_{yi}}{n_2} R^{n_2} + C_3 \qquad (۴۱\text{-}۴)$$

$$\sigma_\theta^P = \sigma_\phi^P = \left(\frac{2}{n_2} + 1\right)\sigma_{yi} R^{n_2} + C_3 \qquad (۴۲\text{-}۴)$$

روابط بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک (ε^e) و پلاستیک (ε^p) به‌صورت زیر است:

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e \tag{۴۳-۴}$$

و همچنین رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک نیز به‌صورت زیر است:

$$\varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \tag{۴۴-۴}$$

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک و پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p \quad , i = R, \theta, \phi \tag{۴۵-۴}$$

ε_i:کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک.

روابط کرنش الاستیک به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i, j, k = R, \theta, \phi \tag{۴۶-۴}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای کره به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\phi^p \tag{۴۷-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۴۷) در رابطه (۴-۴۴)داریم.

$$\varepsilon_R^p = -2\varepsilon_\theta^p \tag{۴۸-۴}$$

با جایگذاری روابط (۴-۴۶) در روابط (۴-۴۵) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_\phi\right)\right] \tag{۴۹-۴}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\phi = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\phi\right)\right] \tag{۵۰-۴}$$

از مجموع دو رابطه (۴-۴۹) و (۴-۵۰) و سپس با جایگذاری رابطه (۲-۱۷) و (۴-۴۸) داریم:

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{2u_R}{R} = \frac{\sigma_R + 2\sigma_\theta}{E_i\left(A + 2B\right)R^{n_1}} \tag{۵۱-۴}$$

با جایگذاری روابط تنش در ناحیه پلاستیک در معادله بالا و حل معادلـه حاصـل، جابـه‌جـایی در ناحیـه پلاستیک به‌دست می‌آید.

$$u_R^P = \frac{r_i}{E_i\left(A + B\right)}\left[\frac{2n_2 + 6}{n_2\left(n_2 - n_1 + 3\right)}R^{n_2 - n_1 + 1}\sigma_{y_i} + \frac{3}{\left(3 - n_1\right)}R^{1 - n_1}C_3\right] + \frac{1}{R^2}C_4 \tag{۵۲-۴}$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی و شعاع ناحیه پلاستیک R_{ep}با توجه به نحوه تسلیم کره به‌دست می‌آیند.

اگر کره ازسطح داخلی تسلیم شود، یک ناحیه پلاستیک(p) ($1 \leq R \leq R_{ep}$) و یک ناحیه الاستیک (e) ($R_{ep} \leq R \leq k$) در کره ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۴-۳۶) تا (۴-۴۰)، C_3 وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۴-۴۱و۵۲)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^P\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_{yi}} \\ 2)\sigma_R^P\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep}^{n_2} \\ 4)u_R^P\left(R=R_{ep}\right)=u_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^e\left(R=k\right)=0 \end{cases} \tag{۵۳-۴}$$

اگر کره ازسطح خارجی تسلیم شود، یک ناحیه الاستیک(e) ($1 \leq R \leq R_{ep}$) و یک ناحیه پلاستیک(p) ($R_{ep} \leq R \leq k$) در کره ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک، C_3 وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط رابطه زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^e\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_{yi}} \\ 2)\sigma_R^P\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep}^{n_2} \\ 4)u_R^P\left(R=R_{ep}\right)=u_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^p\left(R=k\right)=0 \end{cases} \tag{۵۴-۴}$$

اگر کره ازسطح داخلی و خارجی تسلیم شود، در شعاع $1 \leq R \leq R_{ep1}$، ناحیه پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R_{ep1} \leq R \leq R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \leq R \leq k$ ناحیه پلاستیک ۲ ($p2$)

ایجاد می‌شود. مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک و مجهولاتC_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و مجهولات C_{32} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲)، و C_{42} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲) و R_{ep1}(مرز بین ناحیه پلاستیک ۱و الاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۲)،برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{P1} = \frac{2}{n_2}\sigma_{yi} R^{n_2} + C_{31} \tag{۵۵-۴}$$

$$u_R^{P1} = \frac{r_i}{E_i\left(A+2B\right)}\left[\frac{2n_2+6}{n_2\left(n_2-n_1+3\right)}R^{n_2-n_1+1}\sigma_{yi} + \frac{3}{\left(3-n_1\right)}R^{1-n_1}C_{31}\right] + \frac{1}{R^2}C_{41} \tag{۵۶-۴}$$

$$\sigma_R^{P2} = \frac{2}{n_2}\sigma_{yi} R^{n_2} + C_{32} \tag{۵۷-۴}$$

$$u_R^{P2} = \frac{r_i}{E_i\left(A+2B\right)}\left[\frac{2n_2+6}{n_2\left(n_2-n_1+3\right)}R^{n_2-n_1+1}\sigma_{yi} + \frac{3}{\left(3-n_1\right)}R^{1-n_1}C_{32}\right] + \frac{1}{R^2}C_{42} \tag{۵۸-۴}$$

$$\begin{cases}
1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right) = -\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\
2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right) = \sigma_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\
3)\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}} - \dfrac{\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}} = R_{ep1}^{n_2} \\
4)\sigma_R^{P2}\left(R=K\right) = 0 \\
5)\sigma_R^{P2}\left(R=R_{ep2}\right) = \sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \\
6)\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep2}\right) - \sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right)}{\sigma_{yi}} = R_{ep2}^{n_2} \\
7)u_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right) = u_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\
8)u_R^{P2}\left(R=R_{ep2}\right) = u_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right)
\end{cases} \tag{۵۹-۴}$$

اگر کره از سطحی از شعاع R_yتسلیم شود، در شعاع $1 \le R \le R_{ep1}$ ناحیه الاستیک ۱ ($e1$)، در شعاع $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ ناحیه پلاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \le R \le k$ ناحیه الاستیک ۲ ($e2$) ایجاد می‌شود و مجهولات C_{11} وC_{21} مربوط به روابط ناحیه الاستیک۱، مجهولات C_{12} وC_{22} مربوط به

روابط ناحیه الاستیک۲ و مجهولات C_3وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک و R_{ep1} (مرز بین ناحیه الاستیک ۱و پلاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه پلاستیک و الاستیک ۲)،برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{e1}\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)=\sigma_R^{P}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep1}^{n_2} \\ 4)\sigma_R^{e2}\left(R=K\right)=0 \\ 5)\sigma_R^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)=\sigma_R^{P}\left(R=R_{ep2}\right) \\ 6)\dfrac{\sigma_\theta^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)-\sigma_R^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep2}^{n_2} \\ 7)u_R^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)=u_R^{P}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 8)u_R^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)=u_R^{P}\left(R=R_{ep2}\right) \end{cases} \qquad (۶۰-۴)$$

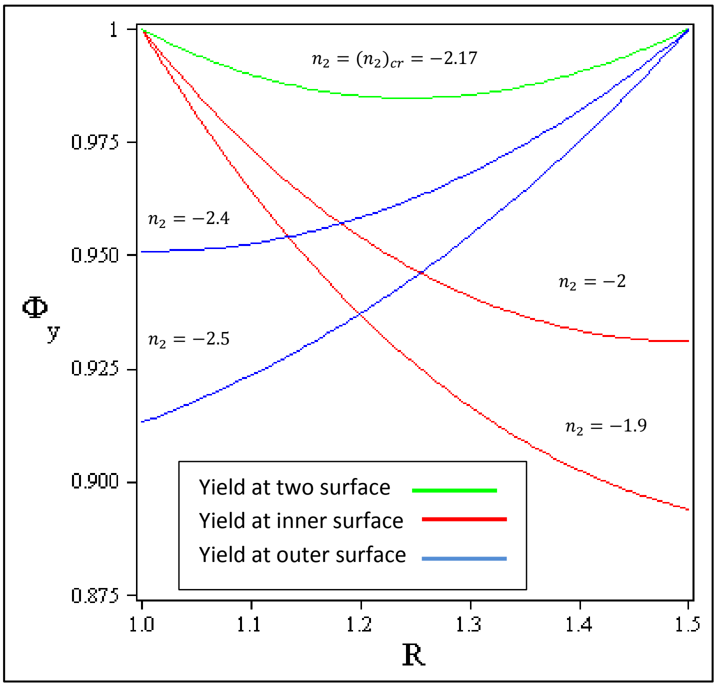
۴-۲-۱-۱- مطالعه موردی

برای مطالعه موردی، یک کره FGM با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی کره$r_i=$۴۰mm، شعاع خارجی$r_o=$۶۰mm،$k=$۱/۵، مدول الاستیک سطح داخلی $E_i=$۲۰۰GP، تنش تسلیم سطح داخلی$\sigma_{y_i}=$۳۰۰MPa و نسبت پواسون$\nu=$۰/۳.

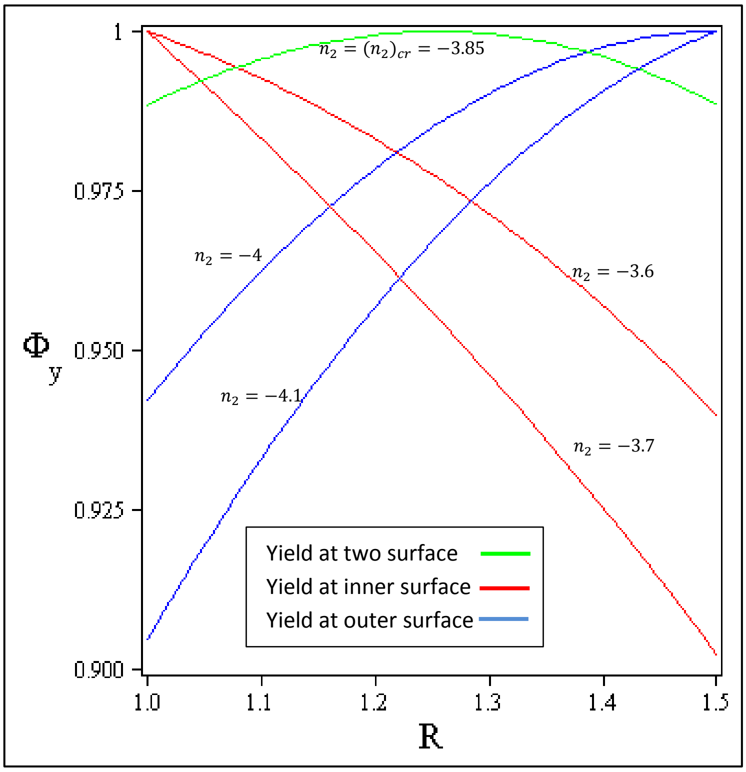
الف) شرایط بحرانی تسلیم

شکل (۴-۱) و (۴-۲) تابع تسلیم ($\emptyset_y$) در کره FGM با فرض $n_1=$ ۱ و $n_1=-$۱ برای مقادیر مختلف n_2 را نشان می‌دهد، با توجه به رابطه (۴-۳۲) به ترتیب $(n_2)_{cr}=-$۲/۱۷ و $(n_2)_{cr}=-$۳/۸۵، در شکل ۱ اگر $n_2=(n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشار $(p_i)_e=$ ۱۶۰/۰۲ Mpa در هر دو سطح داخلی و خارجی برابر با ۱ می‌باشد، بنابراین کره به‌طور همزمان از هر دو سطح تسلیم می‌شود. در

شکل (۴-۲) اگر $n_2 = (n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشار $(p_i)_e = ۱۲۳/۹۴\ Mpa$ در شعاع $r_y = ۱/۲۵$ برابر با ۱ می‌باشد، بنابراین کره از این شعاع تسلیم می‌شود.



شکل۴-۱- تابع تسلیم پوسته کروی برای $n_1 = 1$

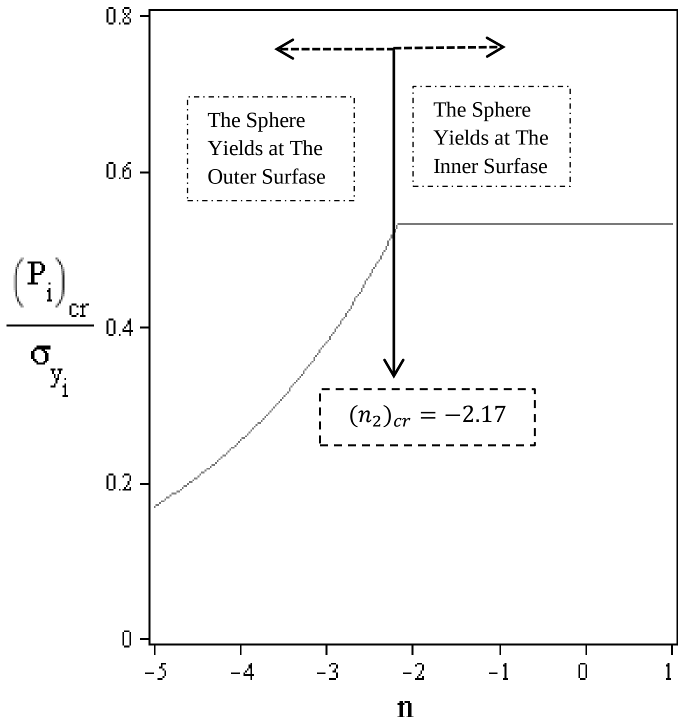


شکل۴-۲- تابع تسلیم پوسته کروی برای $n_1 = -1$

در هر دو شکل (۴-۱ و ۲)، اگر $n_2 > (n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشاری که از رابطه (۴-۳۳) بدست می‌آید در سطح داخلی برابر ۱ است، بنابراین کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود. اگر $n_2 < (n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشاری که از رابطه (۴-۳۵) بدست می‌آید در سطح خارجی برابر ۱ است بنابراین کره از سطح خارجی تسلیم می‌شود.

در شکل (۴-۳) تغییرات فشار بحرانی تسلیم بر حسب n_2 های مختلف برای پوسته کروی FGM با $n_1 = ۱$رسم شده است، با توجه به شکل و مشخص بودن $(n_2)_{cr}$ می‌توان نتیجه گرفت که برای $n_2 > (n_2)_{cr}$ کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود و فشار بحرانی تسلیم ثابت است و برای $n_2 < (n_2)_{cr}$ کره از سطح خارجی تسلیم می‌شود به‌طوریکه با کاهش n_2 فشار بحرانی تسلیم کاهش می‌یابد در نتیجه کره در فشارهای پایین‌تری تسلیم خواهد شد.

بنابراین برای اینکه کره در برابر تسلیم شدن فشار بیشتری را تحمل کند، مقدار بهینه برای n_2، مقادیر بزرگتر از $(n_2)_{cr}$ است.



شکل۴-۳- تغییرات فشار بحرانی پوسته‌ی کروی بر حسب n_2

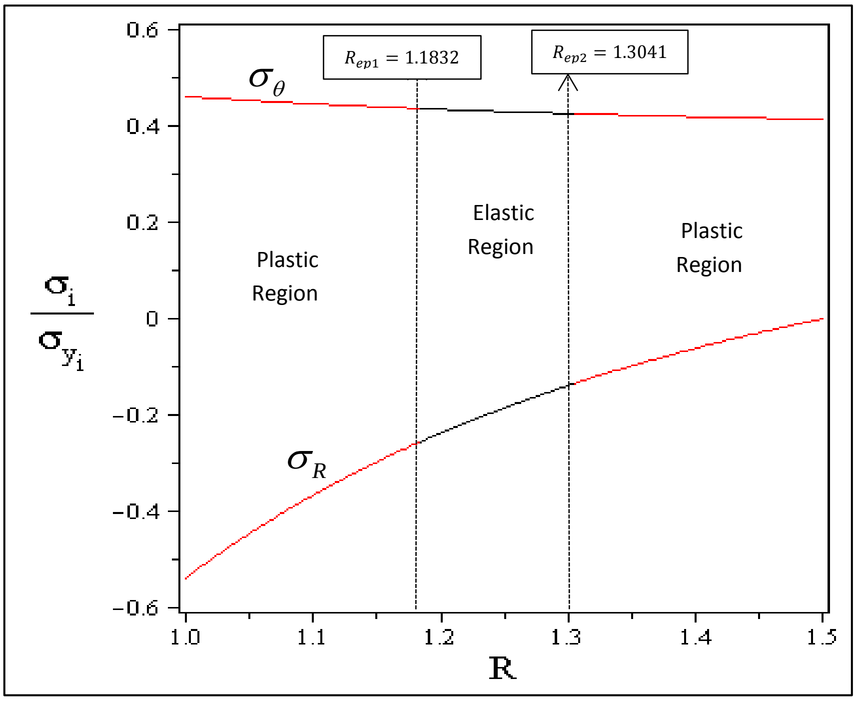
ب) توزیع تنش‌ها در کره الاستوپلاستیک

توزیع تنش‌ها در کره تسلیم شده (کره الاستوپلاستیک) با مشخصات ذکر شده، در چهار حالت مختلف در شکل‌های زیر نشان داده شده است. در این مثال‌ها تنش‌ها به‌صورت $\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{y_I}}\right)$ و جابه‌جایی به‌صورت $\left(\frac{u}{r_i}\right)$، بی‌بعد شده است.

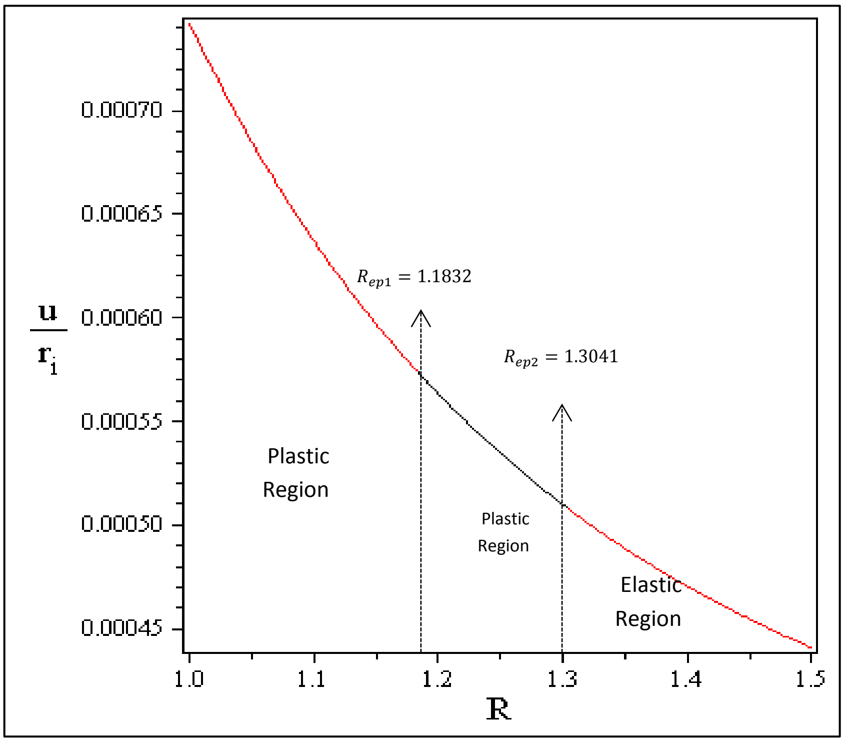
شکل (۴-۴) توزیع تنش‌ها و شکل (۴-۵) جابه‌جایی شعاعی در کره الاستوپلاستیک با فرض $n_1 = ۱$، $n_2 = (n_2)_{cr} = -۲/۷۶$ و $P_i = ۱۶۱/۶\ Mpa$ را نشان می‌دهد. در این شرایط کره از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود بنابراین دو ناحیه پلاستیک و یک ناحیه الاستیک در کره ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \le R \le R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ (*P1*)، در $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (*e*) و در $R_{ep2} \le R \le k$ ناحیه پلاستیک ۲ (*P2*) ایجاد می‌شود. مجهولات C_{31} مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک ۱، C_{32} مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک ۲، C_{41} مربوط به رابطه جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک ۱، C_{42} مربوط به رابطه جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک ۲، C_1 و C_2 مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک، R_{ep1} (مرز بین ناحیه پلاستیک۱ و ناحیه الاستیک) و R_{ep2} (مرز بین ناحیه الاستیک و ناحیه پلاستیک۲)، از ۸ شرط رابطه‌ی (۴-۵۹) بدست می‌آیند:

با توجه به شروط ذکر شده ثابت‌های موردنظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} C_1 = 0.0002, C_2 = 0.000539, C_{31} = 0.38037, C_{32} = 2.06874 \\ C_{41} = -3.631523, C_{42} = -3.631467, R_{ep1} = 1.1832, R_{ep2} = 1.3041 \end{Bmatrix}$$



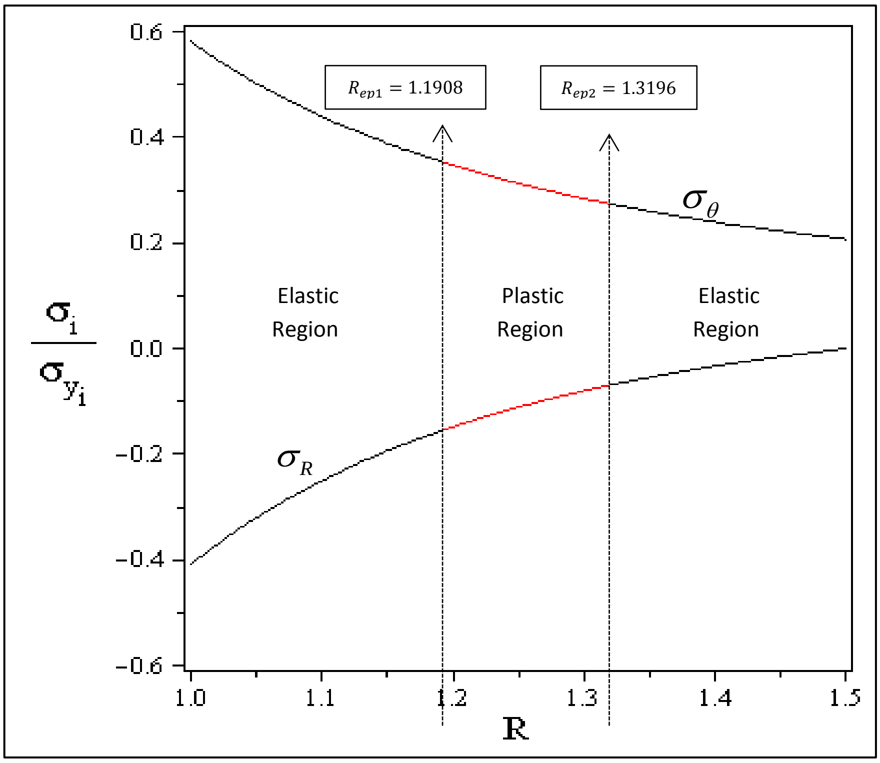
شکل۴-۴- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره تسلیم شده از سطح داخلی و خارجی



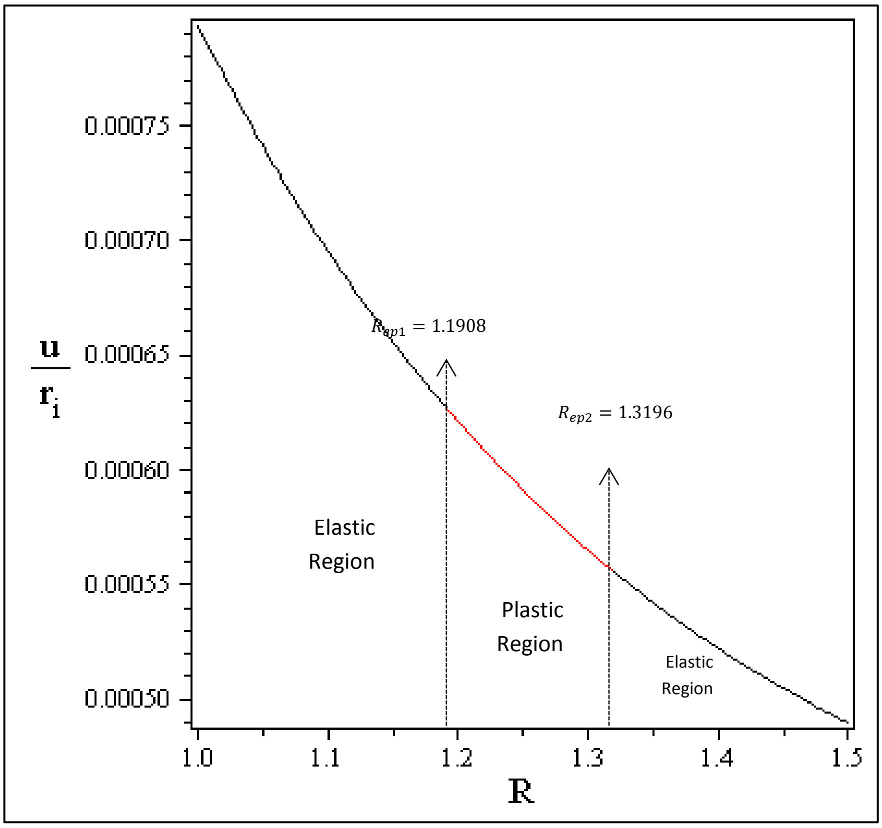
شکل۴-۵- جابه‌جایی در کره الاستوپلاستیک تسلیم شده از سطح داخلی و خارجی

شکل (۴-۶) توزیع تنش‌ها و شکل (۴-۷) جابه‌جایی شعاعی در کره الاستوپلاستیک با فرض $n_1 = -1$، $n_2 = (n_2)_{cr} = -3/853$ و $P_i = 122{,}6 Mpa$ را نشان می‌دهد. در این شرایط کره از شعاع $R_y = 1/255$ تسلیم می‌شود بنابراین دو ناحیه الاستیک و یک ناحیه پلاستیک در کره ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \le R \le R_{ep1}$ ناحیه الاستیک ۱ ($e1$)، در $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ ناحیه پلاستیک (P) و در $R_{ep2} \le R \le K$ ناحیه الاستیک ۲ ($e2$) ایجاد می‌شود. مجهولات C_3 مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک ، C_{11} و C_{21} مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک ۱، C_{12} و C_{22} مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک ۲، C_4 مربوط به رابطه جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک ۱، R_{ep1} (مرز بین ناحیه الاستیک۱ و ناحیه پلاستیک) و R_{ep2} (مرز بین ناحیه پلاستیک و ناحیه الاستیک۲)، از ۸ شرط رابطه (۴-۶۰) بدست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} C_{21} = 0.00073266, C_{11} = 0.00006068, C_{12} = 0.00006084 \\ C_{22} = 0.00073264 C_3 = 0.10906, C_4 = -1.78108 \\ R_{ep1} = 1.1908, R_{ep2} = 1.3196 \end{Bmatrix}$$



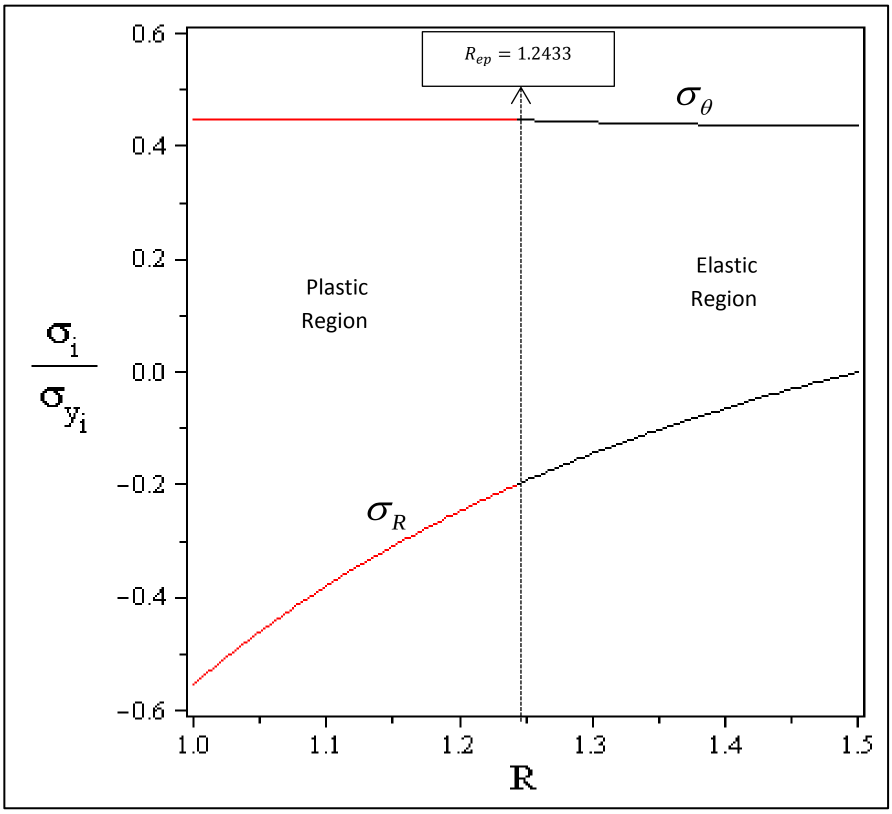
شکل۴-۶- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره تسلیم شده از شعاع $\mathbf{R_y = 1.255}$



شکل۴-۷- جابه‌جایی در کره الاستوپلاستیک تسلیم شده از شعاع $\mathbf{R_y = 1.255}$

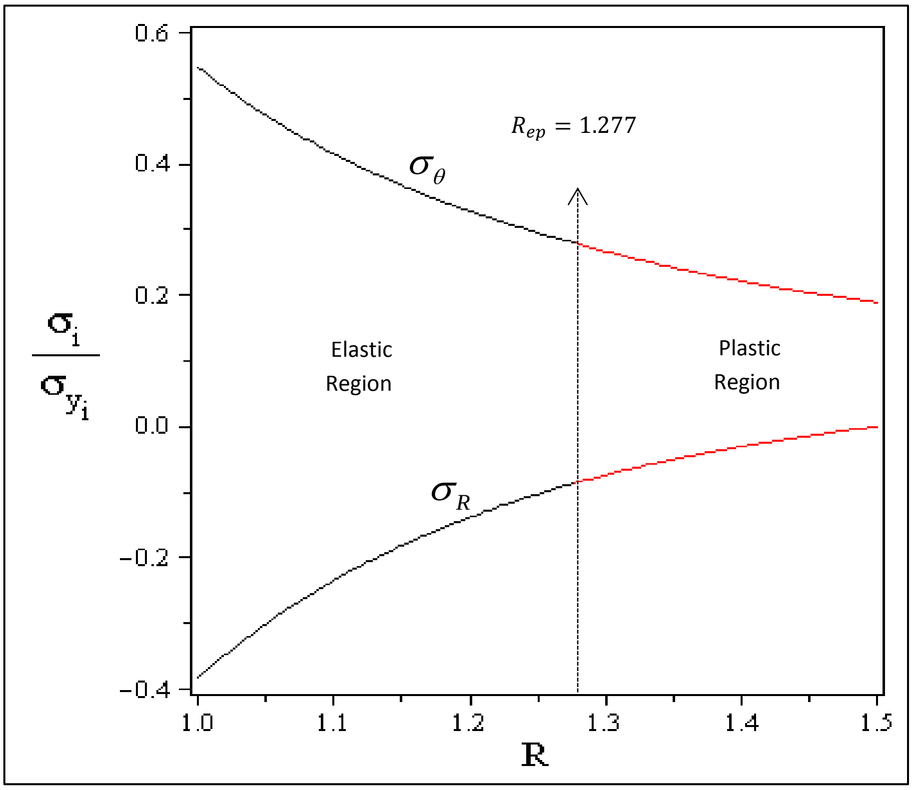
شکل (۴-۸) توزیع تنش‌ها در کره الاستوپلاستیک با فرض $n_1 = 1$، $n_2 = -2$ و $P_i =$۱۶۶MPa را نشان می‌دهد. در این شرایط کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود بنابراین یک ناحیه پلاستیک و یک ناحیه الاستیک در کره ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \leq R \leq R_{ep}$ ناحیه پلاستیک (P)، در $R_{ep} \leq R \leq K$ ناحیه الاستیک (e) ایجاد می‌شود. مجهولات C_3 مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک، C_1 و C_2 مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک، R_{ep} (مرز بین ناحیه پلاستیک و ناحیه الاستیک)، از 4 شرط زیر بدست می‌آیند:

$$\{C_1 = 0.0002048, C_2 = 0.0005617, C_3 = 0.4466, R_{ep} = 1.2433\}$$



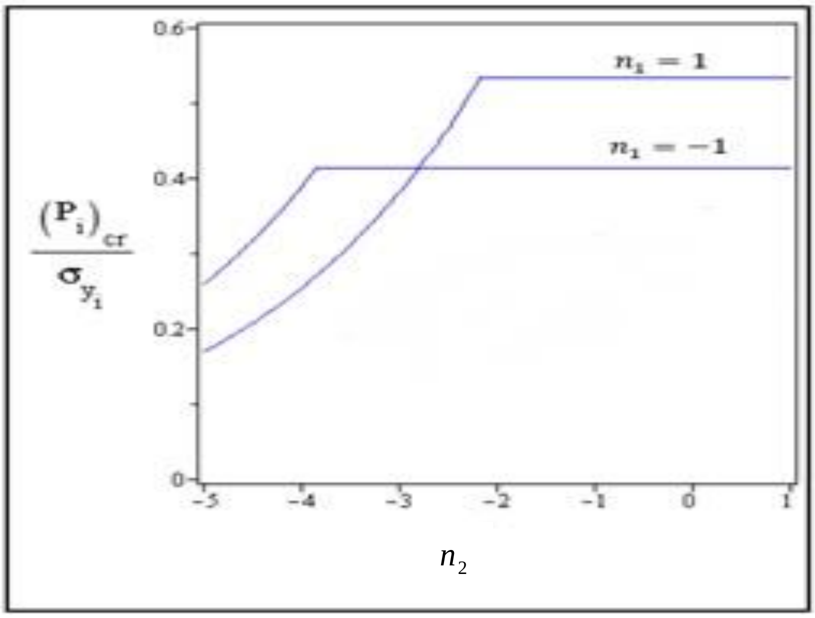
شکل۴-۸- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره تسلیم شده از سطح داخلی

شکل (۴-۹) توزیع تنش‌ها در کره الاستوپلاستیک با فرض $n_1 = -1$، $n_2 = -4.1$ و $P_i =$۱۱۵MPa را نشان می‌دهد. در این شرایط کره از سطح خارجی تسلیم می‌شود بنابراین یک ناحیه الاستیک و یک ناحیه پلاستیک در کره ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \leq R \leq R_{ep}$ ناحیه الاستیک (e)، در $R_{ep} \leq R \leq K$ ناحیه پلاستیک (P) ایجاد می‌شود. مجهولات C_3 مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک، C_1 و C_2 مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک، R_{ep} (مرز بین ناحیه پلاستیک و ناحیه الاستیک)، از 4 شرط زیر بدست می‌آیند:



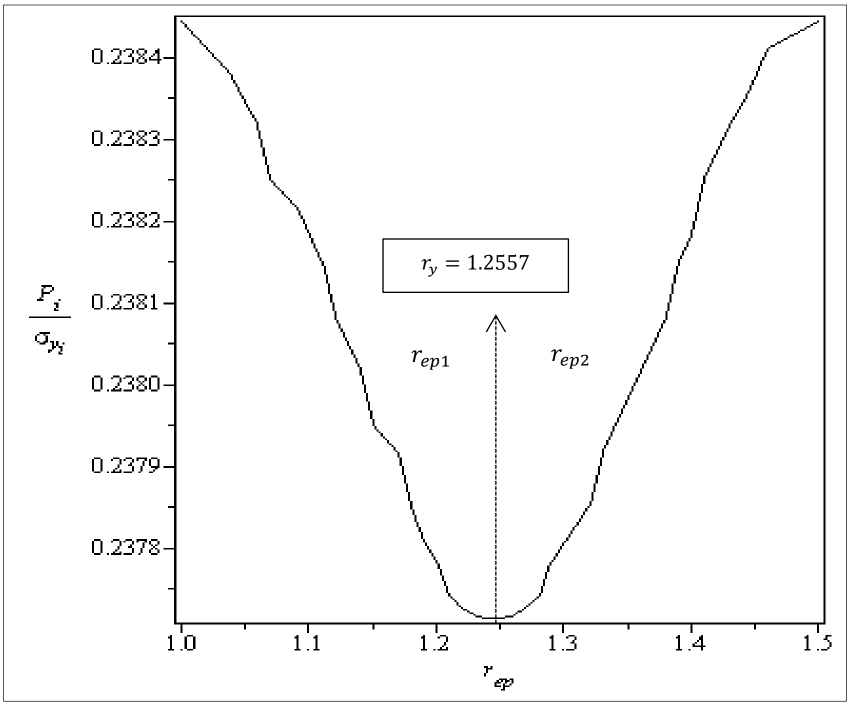
شکل۴-۹- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره تسلیم شده از سطح خارجی

شکل (۴-۱۰) فشار بحرانی تسلیم بر حسب n_2 برای $n_1 = 1$ و $n_1 = -1$ در کره را نشان می‌دهد.



شکل۴-۱۰- فشار بحرانی تسلیم بر حسب n_2

شکل شماره (۴-۱۱) تغییرات مرز ناحیه الاستیک۱ و ناحیه پلاستیک (r_{ep1}) و مرز ناحیه الاستیک۲ و ناحیه پلاستیک (r_{ep2})، را بر حسب تغییرات فشار ($\frac{(P_i)_{eIn}}{\sigma_{y_i}} \leq \frac{P_i}{\sigma_{y_i}} \leq \frac{(P_i)_{ul}}{\sigma_{y_i}}$) نشان می‌دهد.



شکل۴-۱۱- تغییرات مرزهای الاستیک و پلاستیک در اثر تغییر فشار

۴-۲-۲- تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره FG تحت فشار داخلی

در کره FG تحت فشار و دمای داخلی، وضعیت توزیع تنش‌ها در ناحیه الاستیک کامل به مقادیر پارامترهای ناهمگنی n_1،n_2، n_3 و n_4 وابسته است، با توجه به تغییرات این پارامترها در هر کره نمی‌توان وضعیت یکسانی را برای تنش‌ها در نظر گرفت بنابراین ممکن است وضعیت تنش‌ها به‌صورت زیر باشد.

$$\sigma_k = \sigma_j < \sigma_i \rightarrow i, j, k = R, \theta, \phi \qquad (۴\text{-}۶۱)$$

با توجه به وضعیت تنش‌ها، معیار ترسکا و تابع تسلیم به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_i - \sigma_j = \sigma_{yi} R^{n_2} \rightarrow \varphi_y = \frac{\sigma_i - \sigma_j}{\sigma_{yi} R^{n_2}}, i, j = R, \theta = \phi \qquad (۴\text{-}۶۲)$$

در هر مساله خاص با مشخص شدن توزیع تنش‌ها می‌توان معیار ترسکا، تابع تسلیم، شرایط بحرانی تسلیم و تحلیل الاستوپلاستیک را بررسی کرد.

الف) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک کره تسلیم شده.

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک برای هر دو حالت توزیع دما در زیر آورده شده است.

برای $n_4 \neq -1$:

$$\sigma_R^e = E_i R^{n_1} \begin{pmatrix} (Am_1 + 2B) C_1 R^{m_1 - 1} + (Am_2 + 2B) C_2 R^{m_2 - 1} + C_3 \left(A(n_3 - n_4) + 2B\right) R^{n_3 - n_4 - 1} \\ + C_4 \left(A(n_3 + 1) + 2B\right) R^{n_3} - (A + 2B) \alpha_i R^{n_3} T(R) \end{pmatrix} \qquad (۴\text{-}۶۳)$$

$$\sigma_\theta^e = E_i R^{n_1} \begin{pmatrix} \left(A + B(m1 + 1)\right) C_1 R^{m_1 - 1} + \left(A + B(m2 + 1)\right) C_2 R^{m_2 - 1} + \left(B(n_3 - n_4) + 1\right) C_3 R^{n_3 - n_4 - 1} \\ + \left(B(n_3 + 1) + 1\right) C_4 R^{n_3} - (A + 2B) \alpha_i R^{n_3} T(R) \end{pmatrix} \qquad (۴\text{-}۶۴)$$

$$u_R^e = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} + C_3 R^{n3 - n4} + C_4 R^{n3+1} \qquad (۴\text{-}۶۵)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 m_1 R^{m_1 - 1} + C_2 m_2 R^{m_2 - 1} + (n3 - n4) C_3 R^{n3 - n4 - 1} + (n3 + 1) C_4 R^{n3} \qquad (۴\text{-}۶۶)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 R^{m_1 - 1} + C_2 R^{m_2 - 1} + C_3 R^{n3 - n4 - 1} + C_4 R^{n3} \qquad (۴\text{-}۶۷)$$

$$n_4 = -1$$

$$\sigma_R^e = E_i R^{n_1} \begin{pmatrix} \left(Am_1 + 2B\right) C_1 R^{m_1 - 1} + \left(Am_2 + 2B\right) C_2 R^{m_2 - 1} + C_3 \left(A\left(n_3 + 1\right) + 2B\right) R^{n_3} \ln R \\ + C_4 \left(A\left(\frac{C}{D} + n_3 + 1\right) + 2B\right) R^{n_3} - \left(A + 2B\right) \alpha_i R^{n_3} T\left(R\right) \end{pmatrix} \quad (۶۸-۴)$$

$$\sigma_\theta^e = E_i R^{n_1} \begin{pmatrix} \left(A + B\left(m1 + 1\right)\right) C_1 R^{m_1 - 1} + \left(A + B\left(m2 + 1\right)\right) C_2 R^{m_2 - 1} + \left(B\left(n_3 + 1\right) + 1\right) C_3 R^{n_3} \ln R \\ + \left(B\left(\frac{C}{D} + n_3 + 1\right) + 1\right) C_4 R^{n_3} - \left(A + 2B\right) \alpha_i R^{n_3} T\left(R\right) \end{pmatrix} \quad (۶۹-۴)$$

$$u_R^e = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} + C_3 R^{n3+1} \ln R + C_4 R^{n3+1} \quad (۷۰-۴)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 m_1 R^{m_1 - 1} + C_2 m_2 R^{m_2 - 1} + C_3 \left(\left(n3 + 1\right) \ln R + 1\right) R^{n3} + C_4 \left(n3 + 1\right) R^{n3} \quad (۷۱-۴)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 R^{m_1 - 1} + C_2 R^{m_2 - 1} + C_3 R^{n3} \ln R + C_4 R^{n3} \quad (۷۲-۴)$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک کره تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه پلاستیک با توجه معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌آید.

معیار ترسکا در کره FG تحت فشار و دمای داخلی را با توجه به مقادیر مختلف ضرایب ناهمگنی می‌توان بصورت کلی زیر نوشت.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \pm \sigma_{yi} R^{n_2} \quad (۶۳-۴)$$

برای هر کدام از سه معیار تسلیم فوق می‌توان توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک را به‌دست آورد.

با جایگذاری معیار ترسکا در معادله تعادل تنش توزیع تنش در محدوده پلاستیک کره الاستوپلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R^p = \frac{\pm 2\sigma_{yi}}{n_2} R^{n_2} + C_3 \quad (۶۴-۴)$$

$$\sigma_R^P = \pm \sigma_{yi} \left(\frac{2}{n_2} + 1\right) R^{n_2} + C_3 \quad (۶۵-۴)$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای کره به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_\theta^p = \varepsilon_\phi^p \tag{۶۶-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۶۶) در رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک، داریم.

$$\varepsilon_R^p = -2\varepsilon_\theta^p \tag{۶۷-۴}$$

از رابطه کرنش کل وکرنش‌های پلاستیک، الاستیک و حرارتی داریم.

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_\phi\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۶۸-۴}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\phi\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۶۹-۴}$$

$$\varepsilon_\phi = \varepsilon_\phi^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_\phi - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۷۰-۴}$$

از مجموع سه رابطه (۴-۶۸ و ۷۰) داریم:

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta + \varepsilon_\phi = \varepsilon_R^p + 2\varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E(R)}\left[(1-2\nu)\left(\sigma_R + 2\sigma_\theta\right)\right] + 3\alpha(R)\theta(R) \tag{۷۱-۴}$$

الف) برای $n_4 \neq -1$:

با جاگذاری روابط (۴-۶۴، ۶۵ و ۶۷)، (۲-۱۸ و ۳۱) در رابطه (۴-۷۱) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{2u_R}{R} = \frac{(1-2\nu)}{E_i R^{n_1}}\left[\frac{2n_2+6}{n_2}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2} + 3C_3\right] + \frac{3\alpha_i\theta_i R^{n_3}}{1-k^{n_4+1}}\left(\frac{k^{n_4+1}}{R^{n_4+1}} - 1\right) \tag{۷۲-۴}$$

ب) برای $n_4 = -1$:

با جاگذاری روابط (۴-۶۴، ۶۵ و ۶۷)، (۲-۱۸ و ۳۴) در رابطه (۴-۷۱) می‌توان نوشت.

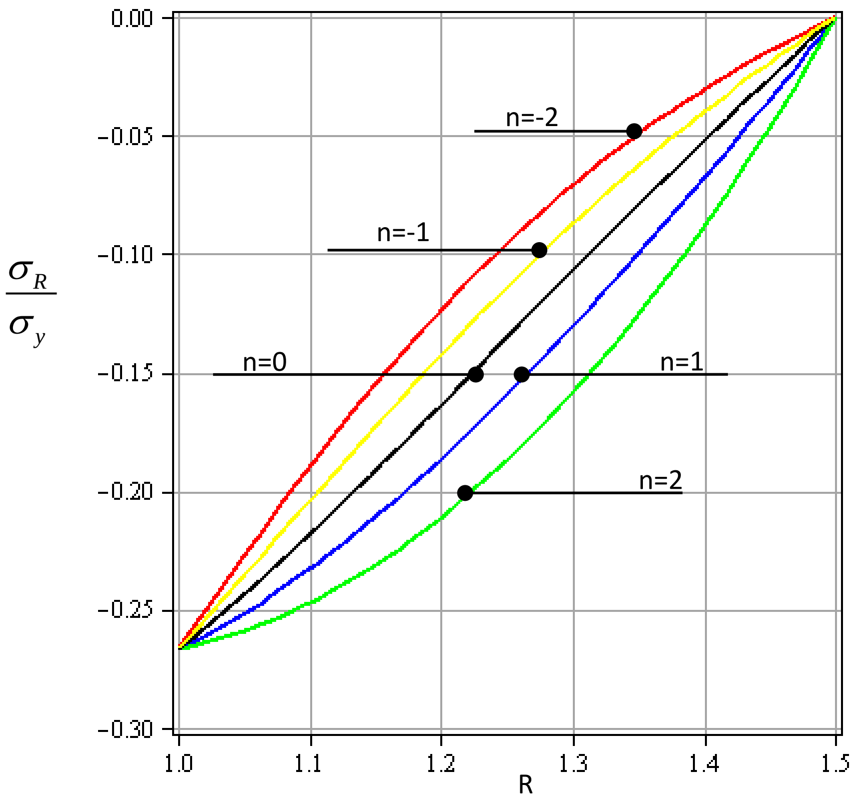
$$\frac{du_R}{dR} + \frac{2u_R}{R} = \frac{(1-2\nu)}{E_i R^{n_1}}\left[\frac{2n_2+6}{n_2}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2} + 3C_3\right] + 3\alpha_i\theta_i R^{n_3}\left(1 - \frac{\ln R}{\ln k}\right) \tag{۷۳-۴}$$

با حل معادلات دیفرانسیلی فوق برای هر مساله خاص، جابجایی بر حسب ثابت‌های مجهول C_3 و C_4 در ناحیه پلاستیک (u_R^{p3}) بدست می‌آید.

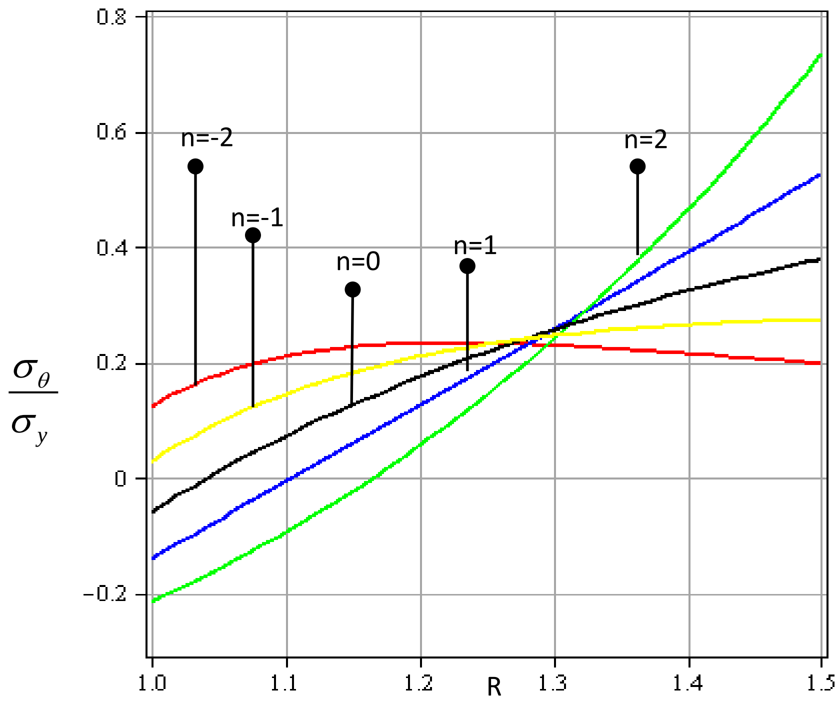
۴-۲-۳- مطالعه موردی

برای مطالعه موردی، یک کره FGM با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی کره $r_i =$۴۰mm، شعاع خارجی $r_o =$۶۰mm، $k =$۱/۵، مدول الاستیک سطح داخلی $E_i =$۲۰۰GP، تنش تسلیم سطح داخلی $\sigma_{y_i} =$۳۰۰MPa، ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی $\alpha_i = 12\times10^{-6}$، نسبت پواسون $\nu =$۰/۳ و ضرایب ناهمگنی به‌صورت زیر فرض می‌شوند. $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n$.

شکل‌های شماره (۴- ۱۲و ۱۳) به‌ترتیب توزیع تنش شعاعی و محیطی الاستیک در کره تحت فشار داخلی $P_i = 80MPa$ و اختلاف دمای سطح داخلی با دمای محیط $\theta_i = 50c^\circ$ برای مقادیر مختلف n را نشان می‌دهد.



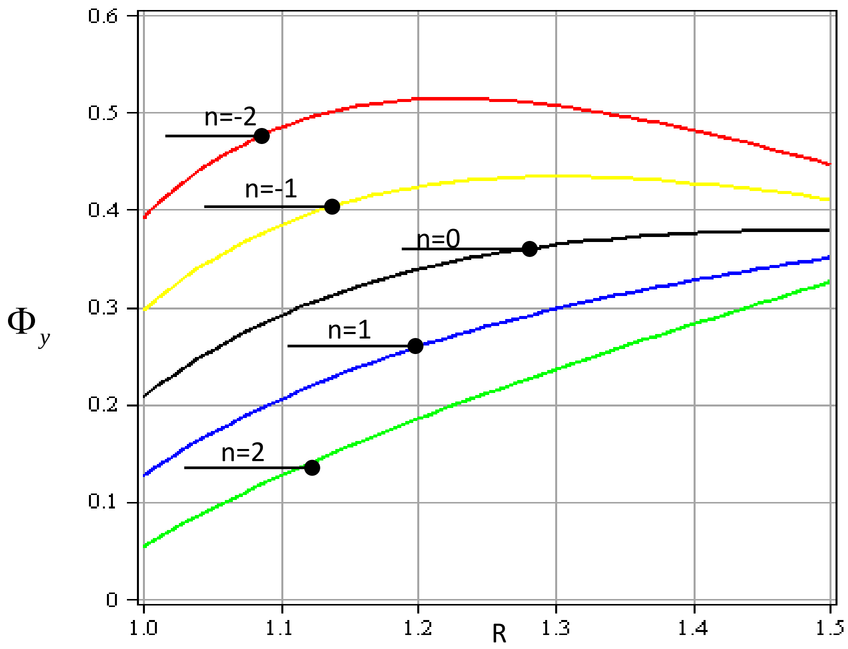
شکل ۴-۱۲- تنش شعاعی کره ناهمگن ترموالاستیک تحت فشار داخلی برای مقادیر مختلف n



شکل ۴-۱۳- تنش محیطی کره ناهمگن ترموالاستیک تحت فشار
داخلی برای مقادیر مختلف n

با توجه به نمودارهای تنش‌های الاستیک، تنش شعاعی، تنش ماکزیمم و تنش محیطی، تنش مینیمم است.

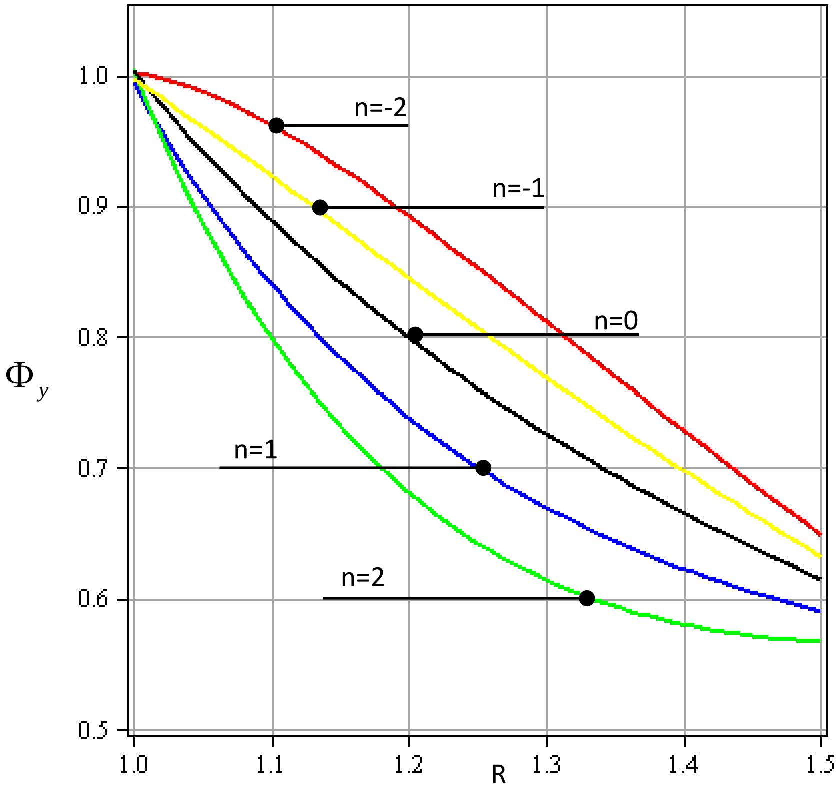
بنابراین تابع تسلیم برای شرایط بالا به‌صورت زیر رسم می‌شود.



شکل ۴-۱۴- تابع تسلیم کره ناهمگن ترموالاستیک تحت فشار
داخلی برای مقادیر مختلف n

با توجه به شکل ۴، تابع تسلیم در هیچ نقطه‌ای برابر ۱ نیست، بنابراین در شرایط مذکور کره تسلیم نمی‌شود ولی با افزایش فشار داخلی کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود.

شکل (۴-۱۵) تابع تسلیم برای مقادیر مختلف n را در فشار بحرانی بر اساس جدول ۱، نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۵- تابع تسلیم کره ناهمگن ترموالاستیک تحت فشار داخلی در آستانه تسلیم، برای مقادیر مختلف n

در شکل شماره (۴-۱۵) نمودار تابع تسلیم در سطح داخلی برابر یک است بنابراین کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود.

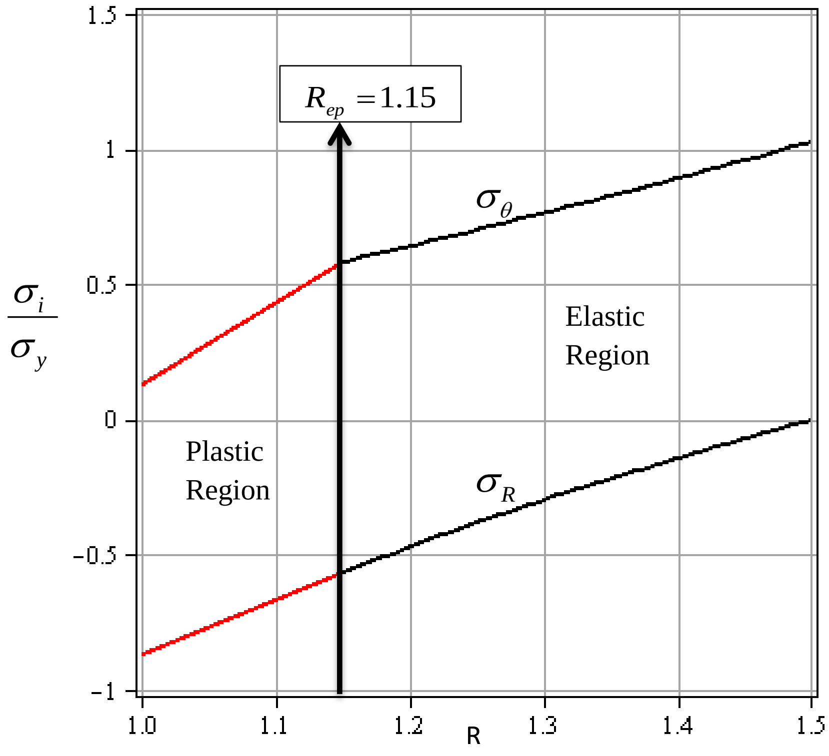
شکل شماره (۴-۱۶) توزیع تنش‌ها در کره با در نظر گرفتن $n=1$ و فشار داخلی $P_i = 260MPa$ و شکل شماره (۴-۱۷) توزیع تنش‌ها در کره با در نظر گرفتن $n=-1$ و فشار داخلی $P_i = 170MPa$ را نشان می‌دهد. در این شرایط یک ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و یک ناحیه الاستیک(e) ($R_{ep} \le R \le k$) در کره ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک برای $n=1$ و $n=-1$ به-

دست می‌آید و C_3 وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک برای $n=1$ و $n=-1$ به‌دست می‌آید. R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، از ۵ شرط رابطه زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_{yi}} \\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep}^{n_2} \\ 4)u_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^{e}\left(R=k\right)=0 \end{cases}$$

مجهولات به‌ترتیب به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

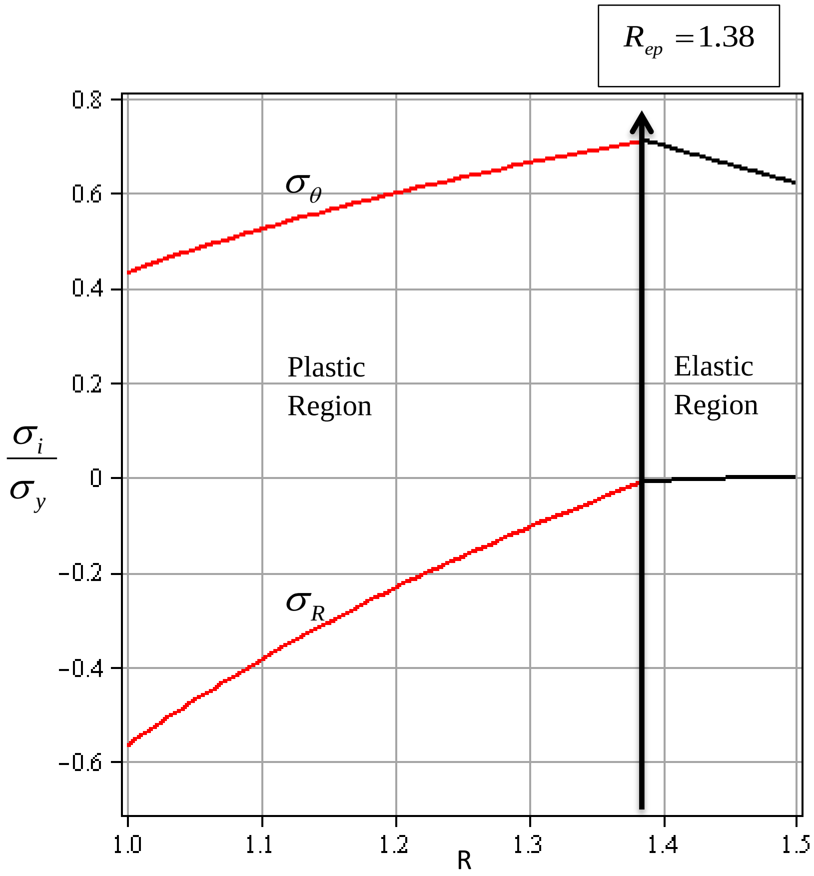
$$\begin{Bmatrix} C_1=0.001229097875, C_2=0.0004870495907 \\ C_3=\text{-}2.866666667, C_4=2.162405215, R_{ep}=1.150015321 \end{Bmatrix}$$



شکل۴- ۱۶- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در کره FGM تسلیم شده از سطح داخلی برای $n=1$

با توجه به شرط بالا مجهولات برای حالت $n=-1$ به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} C_1 = -0.0004526516047, C_2 = 0.0006092204956 \\ C_3 = 1.433333333, C_4 = -0.4669827989, R_{ep} = 1.386141234 \end{Bmatrix}$$



شکل۴- ۱۷- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در کره FGM تسلیم شده از سطح داخلی برای $n=-1$

۴-۳- تحلیل ترموالاستوپلاستیک با کمک معیار تسلیم فون میزز

برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک کره ناهمگن تحت فشار داخلی و دمای داخلی، با کمک معیار فون میزز، از روش المان محدود توسط نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است. و خواص مکانیکی در سطح داخلی ماده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$E_i = 200\,GPa, \sigma_{y_i} = 300\,MPa, v = 0.3$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n$$

فشار و دمای بحرانی تسلیم در کره ناهمگن FG، براساس معیار فون میزز(FEM) و معیار ترسکا (PET) در دما و فشار داخلی مختلف، برای مقادیر مختلف n، در جدول شماره (۴-۱) نشان داده شده است. در این جدول، واحد فشار، مگا پاسکال و واحد، دما درجه سانتیگراد است.

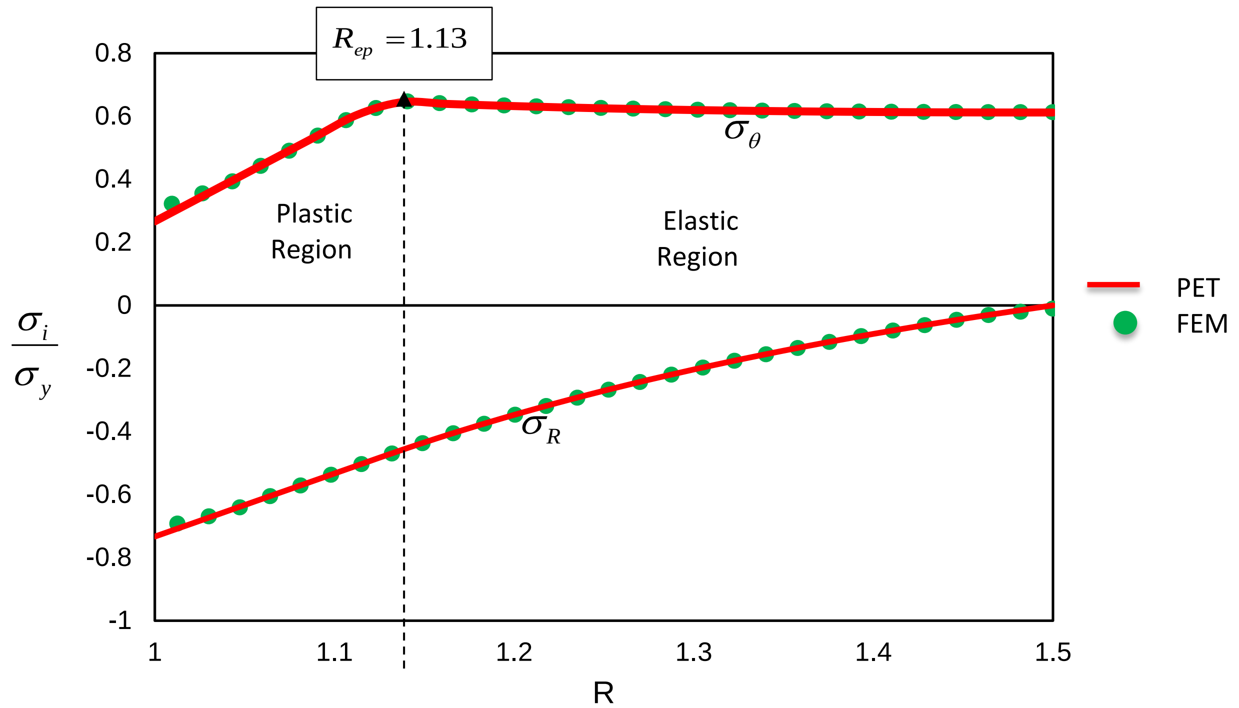
جدول ۴-۱- فشار و دمای بحرانی تسلیم در کره ناهمگن بر اساس معیار فون میزز و ترسکا

n	$(P_i)_{cr},(\theta_i=0c^\circ)$		$(P_i)_{cr},(\theta_i=50c^\circ)$		$(\theta_i)_{cr},(P_i=0)$	
	PET	FEM	PET	FEM	PET	FEM
۲-	۱۰۹	۱۱۰,۷۲	۱۴۴	۱۴۶,۲۱	۱۴۷	۱۵۵,۰۵
۱-	۱۲۲,۶۷	۱۲۵,۵۶	۱۶۵,۴۵	۱۶۷,۳۳	۱۴۲,۵	۱۴۹,۷۷
۰	۱۴۰,۷۴	۱۴۲,۸۵	۱۸۷,۴	۱۹۲,۲۹	۱۳۸,۵۴	۱۴۴,۴۱
۱	۱۶۰,۴	۱۶۲,۸۰	۲۲۰	۲۲۱,۴۳	۱۳۵	۱۳۹,۰۹
۲	۱۸۱,۸۸	۱۸۵,۴۶	۲۵۲,۱	۲۵۵,۰۳	۱۳۰	۱۳۳,۹۰

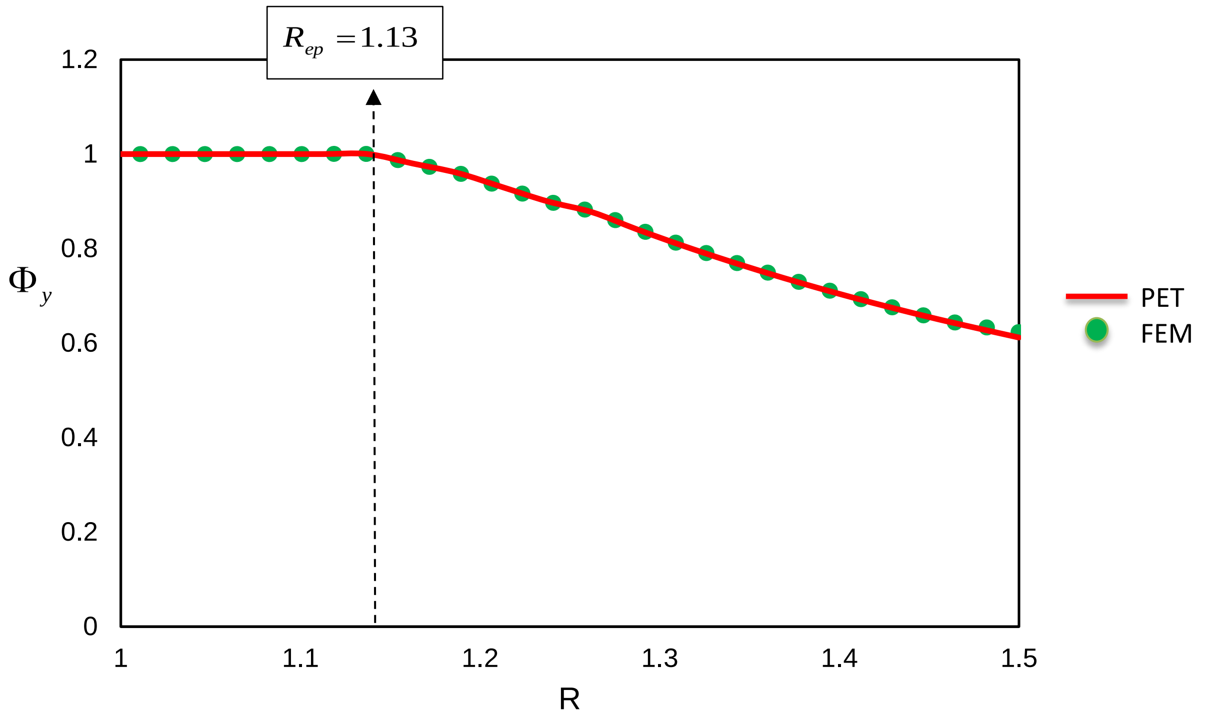
با افزایش فشار یا دما از حد بحرانی کره وارد ناحیه پلاستیک خواهد شد. با کمک نرم‌افزار آباکوس توزیع تنش‌ها در ناحیه الاستیک و پلاستیک کره تسلیم شده را در ۳ حالت مختلف دما و فشار برای مقادیر مختلف n رسم و با نتایج تحلیلی مقایسه می‌کنیم.

الف) کره FGM تحت فشار داخلی:

توزیع تنش‌ها در کره تحت فشار داخلی $P_i =۲۲۰ MPa$ برای مقدار $n=1$. این کره از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود.



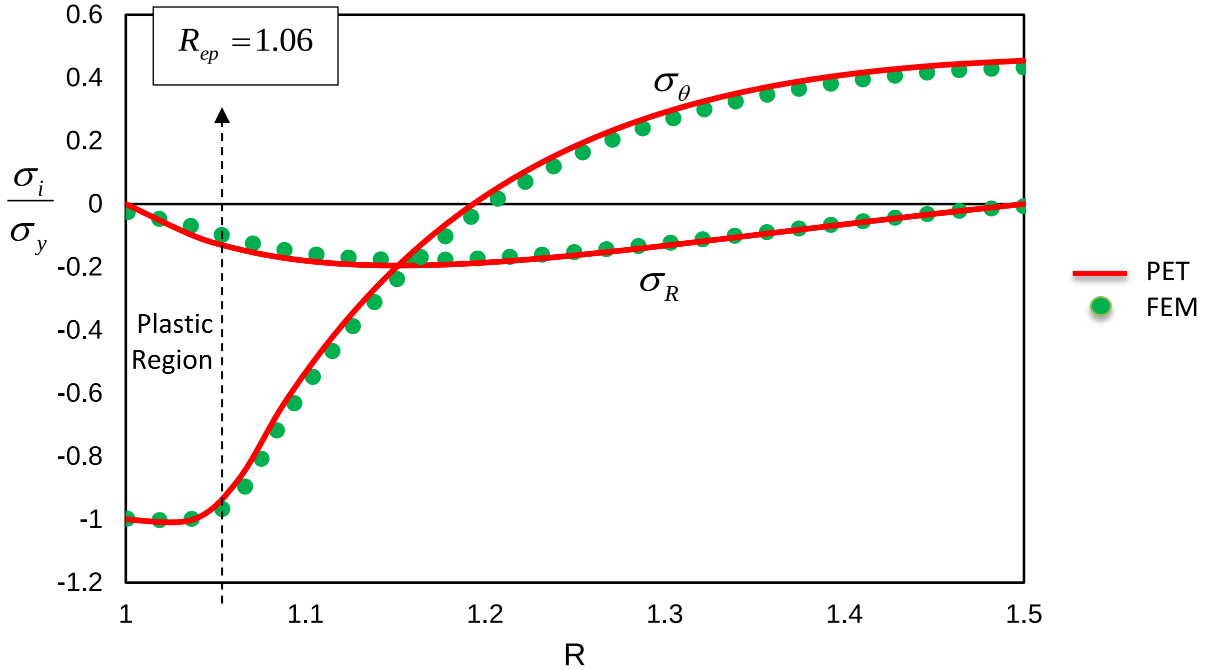
شکل ۴- ۱۸- توزیع تنش الاستوپلاستیک در کره FGM تحت فشار داخلی برای حالت $n=1$



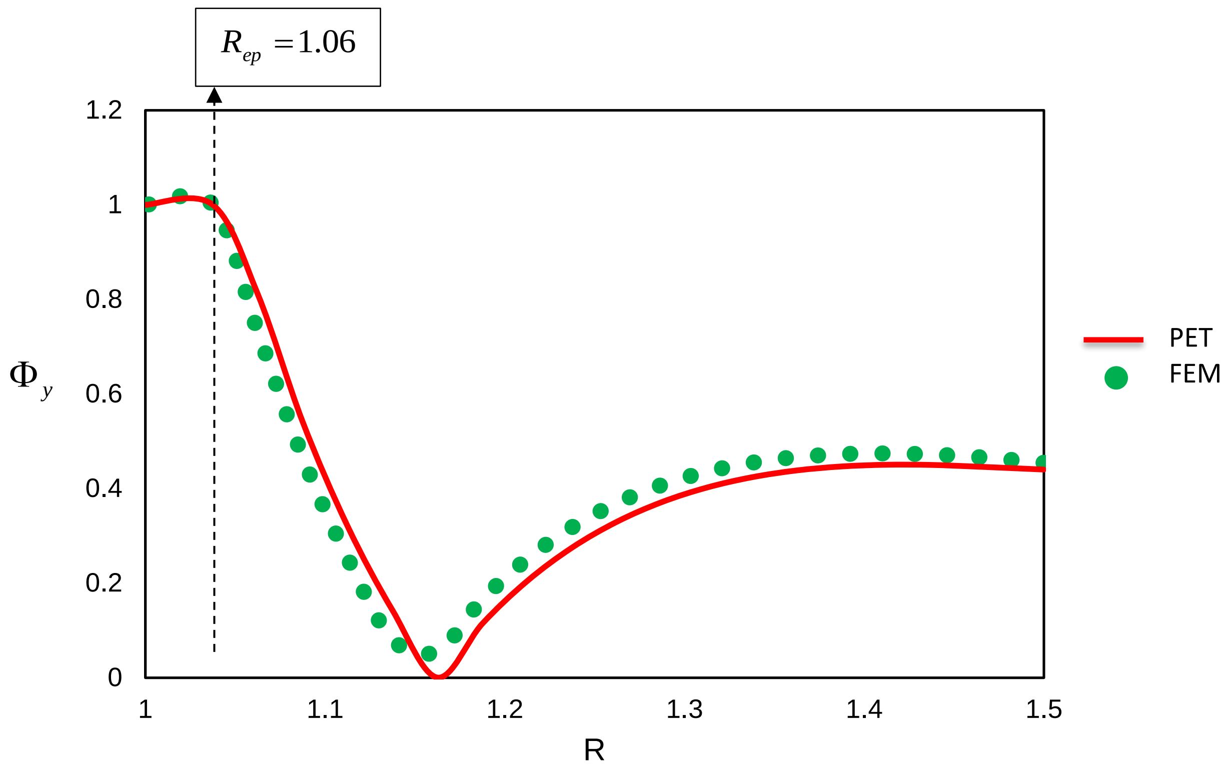
شکل ۴- ۱۹- تابع تسلیم در کره FGM تحت فشار داخلی برای حالت $n=1$

ب) کره FGM تحت دمای داخلی

توزیع تنش‌ها در کره تحت دمای $\theta_i = ۲۵۰ c^\circ$ با n= -۲ در شکل (۴-۱۸)، نشان داده شده است. این کره از سطح داخلی تسلیم می‌شود.



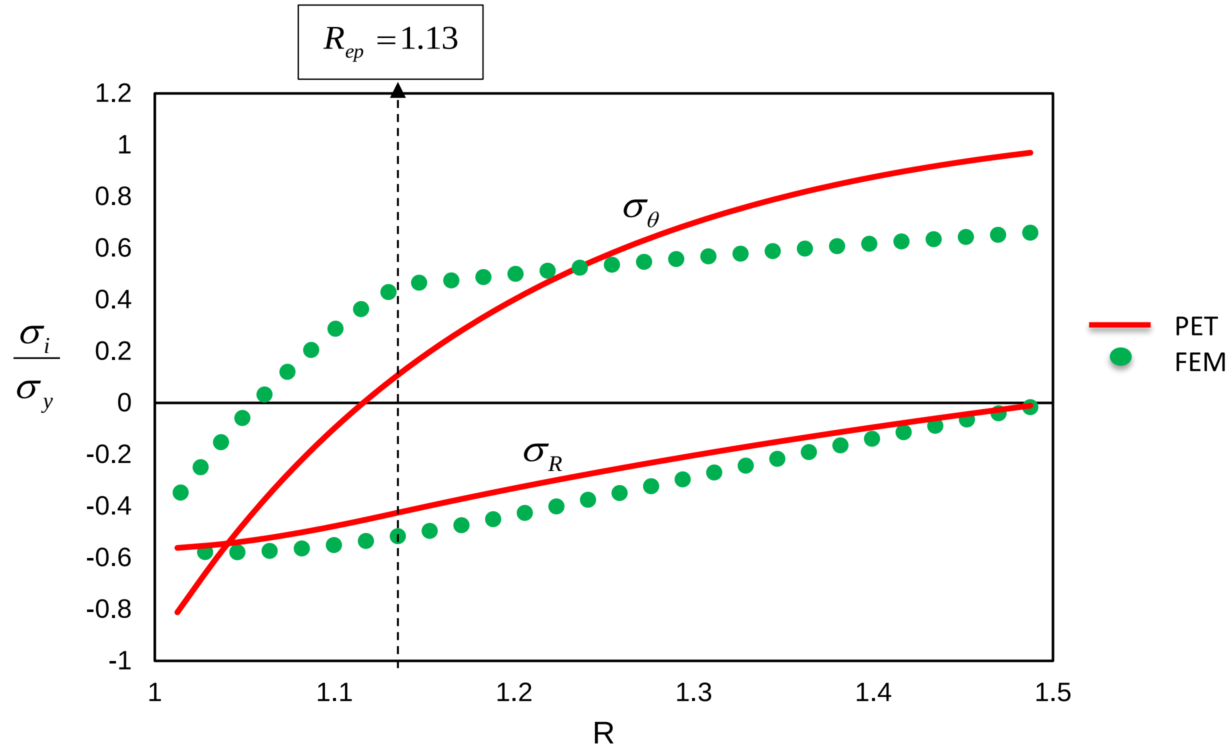
شکل ۴- ۲۰- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در کره FGM برای حالت $n=-2$



شکل ۴- ۲۱- تابع تسلیم ترموالاستوپلاستیک در کره FGM برای حالت $n=-2$

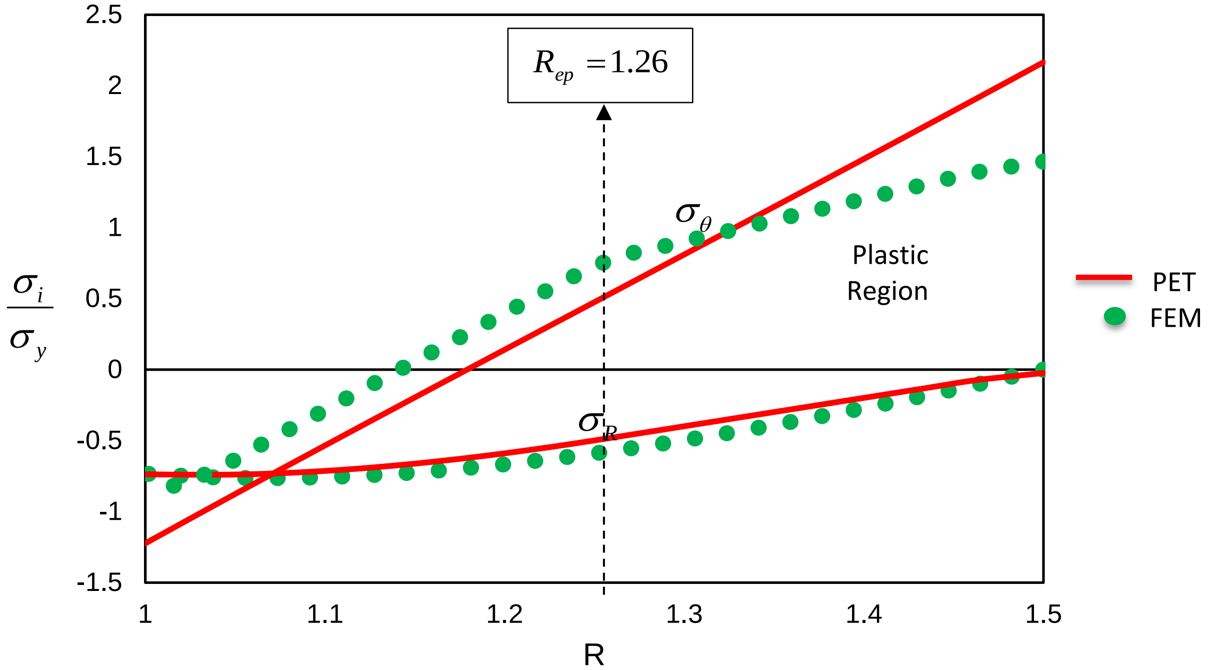
ج) کره FGM تحت فشار و دمای داخلی

توزیع تنش‌ها در کره FGM تحت دمای $\theta_i = ۲۵۰ c^{\circ}$ و فشار $P_i = ۱۷۰ MPa$ برای $n = -1$ و همان دما و فشار $P_i = ۲۲۰\ MPa$ برای $n = 1$ نشان داده شده است. پوسته کروی در هر دو حالت از سطح خارجی تسلیم می‌شود.



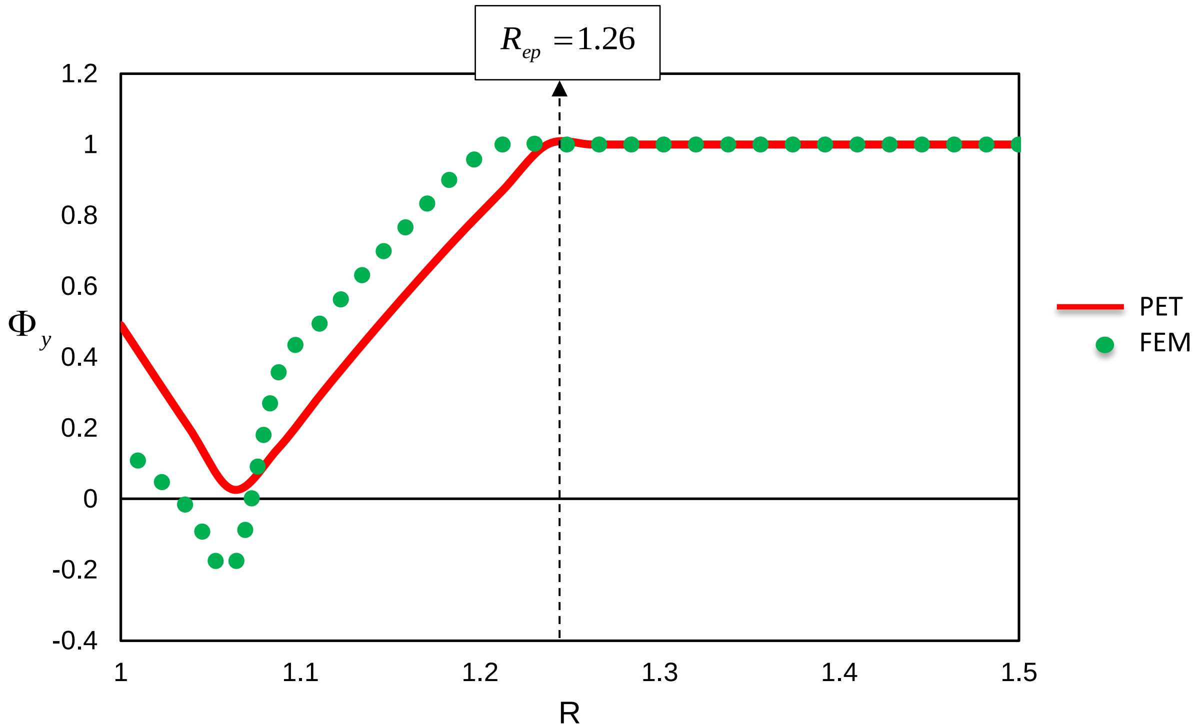
شکل ۴- ۲۲- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در کره FGM

تحت دما و فشار برای حالت $n = -1$



شکل ۴- ۲۳- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در کره FGM

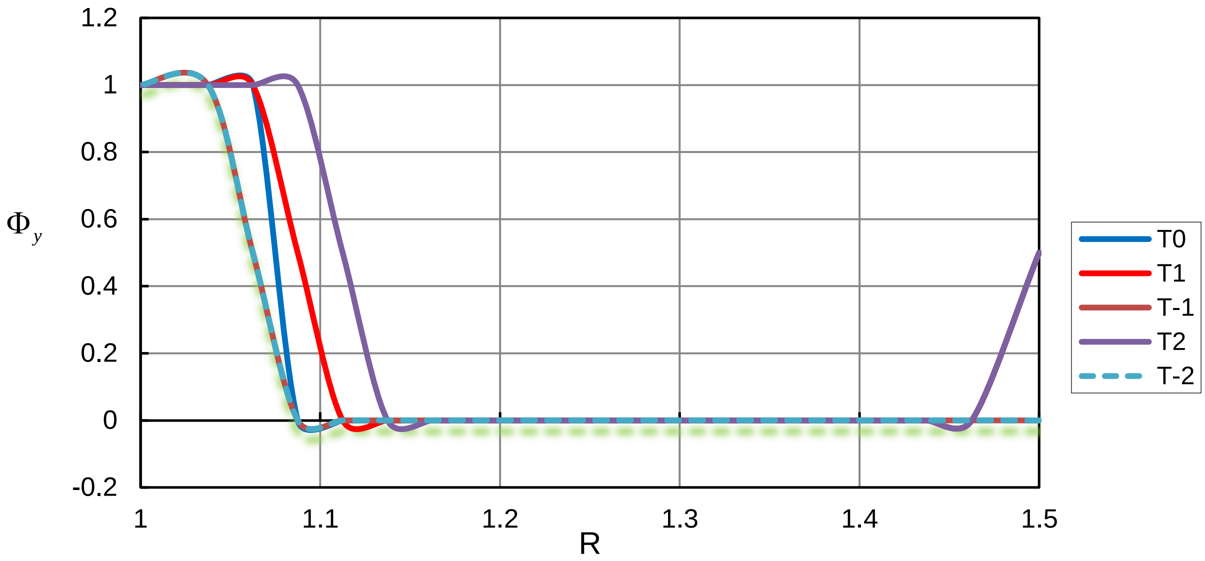
تحت دما و فشار برای حالت $n = 1$



شکل ۴- ۲۴- تابع تسلیم در کره FGM تحت دما و فشار

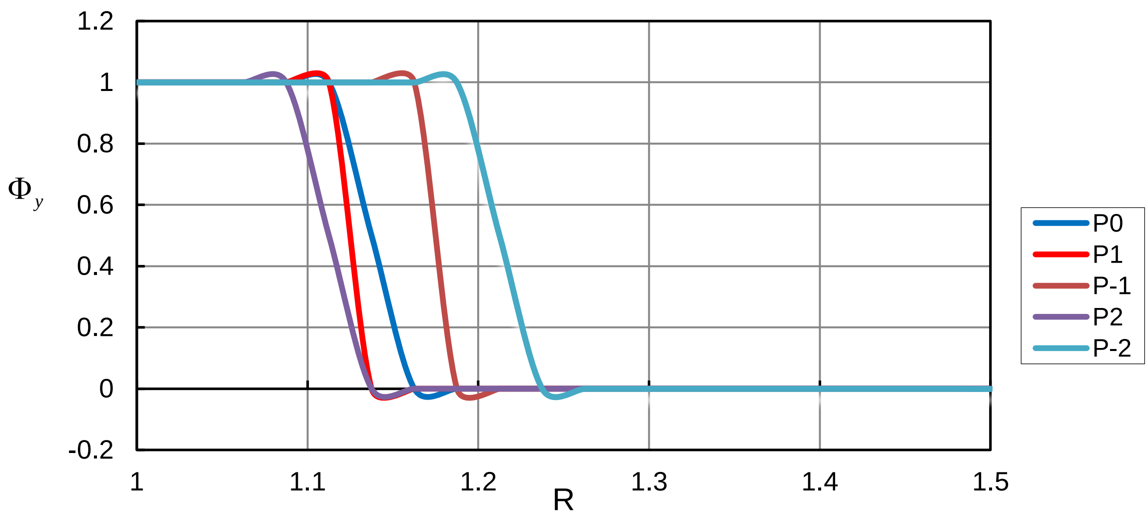
برای حالت $n = 1$

در نمودارهای زیر تنش تسلیم بر حسب شعاع کره (R) برای دو حالت مختلف رسم شده است. در شکل (۴-۲۵) دما صفر در نظر گرفته شده و تابع تسلیم برای فشارهای مختلف و برای n های مختلف در حالت تسلیم از سطح داخلی رسم شده است.



شکل ۴- ۲۵- تابع تسلیم در کره همگن و FGM تحت فشار
برای n های مختلف

در شکل (۴-۲۶) فشار صفر در نظر گرفته شده و تابع تسلیم برای دماهای مختلف و برای n های مختلف در حالت تسلیم از سطح داخلی رسم شده است.



شکل ۴- ۲۶- تابع تسلیم در کره همگن و FGM تحت دما
برای n های مختلف

فصل ۵

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در فصول قبلی این تحقیق، تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته‌های کروی جدار ضخیم همگن و ناهمگن ساخته شده از مواد FG با استفاده از روابط الاستیک حاصل از تئوری الاستیسیته مستوی و معیارهای تسلیم ترسکا و فون میزز، انجام شد. در این فصل به جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده از فصول قبل و بیان نتیجه‌ای که از این تحقیق به‌دست آمده است، پرداخته شده است و در پایان پیشنهادهایی برای سایر موضوعات مرتبط با این تحقیق مطرح شده است.

۵-۱- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این بخش مطالب فصول قبلی جمع‌بندی و نتایج حاصل بیان شده است.

۵-۱-۱- تحلیل الاستیک و ترموالاستیک کره همگن و ناهمگن FG

به‌طور کلی در تحلیل الاستیک پوسته‌های جدار ضخیم متقارن محوری، ۱۰ مجهول (۴ مؤلفه تنش، ۴ مؤلفه کرنش و ۲ مؤلفه جابه‌جایی) و ۱۰ معادله (۲ معادله تعادل، ۴ معادله سینماتیک و ۴ معادله رفتاری) داریم که حل همزمان آنها امکان ناپذیر است. در موقعیتی که تنش برشی و کرنش برشی صفر باشد (الاستیسیته مستوی)، تعداد مجهولات به ۸ مجهول می‌رسد (۳ مؤلفه تنش، ۳ مؤلفه کرنش و ۲ مؤلفه جابه‌جایی) و ۸ معادله (۲ معادله تعادل، ۳ معادله سینماتیک و ۳ معادله رفتاری) برای حل کره‌های جدار ضخیم متقارن محوری وجود دارد. که در این تحقیق، با استفاده از این ۸ معادله روابطه تنش، کرنش و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک کره همگن و FGM تحت فشار و دمای داخلی بدست آمد.

۵-۱-۲- تحلیل الاستوپلاستیک و ترمو الاستوپلاستیک کره‌های همگن و ناهمگن FG

با استفاده از روابط تنش‌ها در ناحیه الاستیک و با کمک معیار تسلیم ترسکا با فرض رفتار الاستیک-پلاستیک کامل، شرایط بحرانی تسلیم شامل فشار و یا دمای بحرانی آغاز تسلیم و شعاع نقطه شروع تسلیم و همچنین روابط تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک و پلاستیک کره تسلیم شده به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است و تاثیر ضرایب ناهمگنی در چگونگی تسلیم در کره FGM بررسی شد.

نتایج حاصل از بررسی تاثیر ضرایب ناهمگنی در چگونگی تسلیم در تحلیل الاستوپلاستیک کره FGM با کمک معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشند.

در این تحقیق روند کلی تحلیل الاستوپلاستیک کره جدارضخیم FGM تحت فشار ارائه و همچنین چگونگی تسلیم شدن کره در شرایط مختلف و ضرایب ناهمگنی بیان شد.

۱. اگر $n_1 > 0$، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $p_i = (p_i)_e$: پوسته کروی از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود.
۲. اگر $n_1 < 0$، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $p_i = (p_i)_{eIn}$: پوسته کروی از شعاع r_y تسلیم می‌شود که: $1 < r_y < k$
۳. اگر $n_2 > (n_2)_{cr}$: پوسته کروی از سطح داخلی تسلیم می‌شود.
۴. اگر $n_2 < (n_2)_{cr}$: پوسته کروی از سطح خارجی تسلیم می‌شود.
۵. برای اینکه پوسته کروی در برابر تسلیم شدن فشار بیشتری را تحمل کنند، مقدار بهینه برای n_2، باید بزرگتر از $(n_2)_{cr}$ است.
۶. اگر $n_1 > 0$، همواره فشار بحرانی تسلیم بیشتر از حالت همگن است.
۷. اگر $n_1 < 0$، همواره فشار بحرانی تسلیم کمتر از حالت همگن است.

با کمک نرم افزار المان محدود آباکوس که تحلیل الاستوپلاستیک با استفاده از معیار فون میزز با فرض رفتار الاستیک- پلاستیک کامل در **کره** ، را انجام می‌دهد، چگونگی تسلیم و توزیع تنش‌ها در **کره** تسلیم شده به‌دست آمد. که نتایج حاصل از این روش، شباهت قابل توجهی با نتایج حاصل از روش تحلیل به کمک معیار ترسکا دارد.

۵-۲- پیشنهادها

با توجه به تحلیل‌ها و ، جهت تعمیم تحلیل‌ها بررسی‌های انجام شده در این تحقیق و دستیابی به نتایج دقیق‌تر و جامع‌تر در تحلیل ترموالاستوپلاستیک **کره** FGM پیشنهادهای زیر ارائه می‌گردد:

- در نظر گرفتن توابع نمایی یا سهموی برای تغییرات خواص مکانیکی کره FGM .
- بررسی بر اساس شکل‌های هندسی مختلف از جمله، کره با ضخامت متغیر، مخروط واستوانه با مقطع بیضی.

- حل کره FGM تحت فشار غیر یکنواخت متغیر با زمان $p = p(\phi, t)$
- حل تحلیلی کره‌ی چرخان تحت کوپل حرارتی و فشاری.
- در نظر گرفتن رفتار پلاستیک ماده کره به‌صورت ویسکوالاستیک، کرنش سختی خطی یا غیر خطی به‌جای پلاستیک کامل.
- تحلیل مسأله در معرض بارگذاری‌های مختلف از جمله فشار خارجی، بار حرارتی غیر پایا، اعمال بار دینامیکی، گذرا و نیروهای حجمی (جسم دوار).
- بررسی رفتارهایی مانند خزش، خستگی، شکست، کمانش و ارتعاشات در ماده نیز توصیه می‌شود.

مراجع

[۱] قناد، مهدی، ۱۳۸۷، رساله دکتری، تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس.

[2] Voo L., Armand M., Kleinberger M. (2004); Stress Fracture Risk Analysis of the Human Femur Based on Computational Biomechanics, Johns Hopkins APL Technical Digest, Vol. 25, Nr. 3, pp. 223-230.

[3] Timoshenko S.P.; Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1976.

[4] Hopkinson, J., Thermal Stresses in a Sphere, Whose Temperature Is a Function of r Only, Mess. Math., Vol. 8, 1879, p. 168-175.

[5] Cheung J.B, Chen T.S, Thirumalai K. (1974); Transient thermal stresses in a sphere by local heating. J Appl. Mech. 41(4),pp. 930-934.

[6] Raju, p.p.(1975);On Shallow Shells of Transversely Isotropic Materials,Trans. ASME j. perssure Vessel Technology., vol,97(3)pp.185-191.

[7] Takeuti., Tanigawa Y. (1982); Transient thermal stresses of a hollow sphere due to rotating heat source, J. Therm. Stresses., vol. 5(3-4),pp. 283-298.

[8] Lekhnitskii S.G.(1981); Theory of Elasticity of an Anistropic Body, Moscow, Mir Pub.

[9] Tanigawa Y. (1995); Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. Appl Mech Rev; vol. 483, pp. 77-89.

[10] Obata, Y. and N. Noda, “Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material”, J. Thermal Stresses,1994, 17: 471-487.

[11] Tutuncu N., Ozturk M. (2001); Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels. Composites: Part B (Engineering), Nr. 32, pp. 683-686.

[12] Kim KS, Noda N. “ Green’s function approach to unsteady thermal stresses in an infinite hollow cylinder of functionally graded material”. Acta Mech, 2002,156,145–61.

[13] Praveen, G.N., REDDY, J.N., (1998). Nonlinear transient thermoelastic analysis of functionaly graded ceramic-metal plates. Int J solid Structure; vol. 35, pp.4457-76.

[14] Reddy, J.N., Chin, C.D., (1998). Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates. Int J solid Structure; vol. 21, pp.593-626.

[15] Praveen, G.N., Chin, C.D., Reddy, J.N., (1999). Thermoelastic analysis of a functionally graded ceramic- metal cylinder. ASCE J Eng Mech; vol. 125, pp.1259-67.

[16] Reddy, J.N., (2000). Analysis of functionally graded plates. Int J Number Meth Eng; vol. 47, pp. 663-84.

[17] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q., (2000). Three-dimensional thermomechanical deformations of functionally graded rectangular plates Eur J Mech A; Solid; vol, 20, pp. 841-60.

[18] Reddy, J.N., Cheng, Z.Q., (2003). Frequency of functionally graded plates with three-dimensional asymptotic approach. J Eng Mec; vol, 129, pp. 896-900.

[19] You, L.H.; Zhang, J.J.; You, X.Y., “Elastic anal-ysis of internally pressurized thick-walled spherical pressure vessels of functionally graded materials”, Inter-national Journal of Pressure Vessels and Piping, 2005, 82(5): 347-354.

[20] M.R. Eslami, M.H. Babaei, R. Poultangari, “Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere”, International Journal of Pressure Vessels and Piping, 2005, 82, pp. 522-527.

[21] Wang, H.M., Ding, HJ., (2006); Transient responses of a magneto electro-elastic hollow sphere for fully coupled spherically symmetric problem. European Journal of Mechanics A/Solids, vol,25, pp. 965-980.

[22] Tutuncu, N. (2007); Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, Journal of Engineering Structures, Nr. 29, pp. 2032-2035.
[23] Tutuncu, N., Temel, B., (2009); A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, Composite Structures.vol. 91, pp. 385-390.
[24] Ghosh, M. K., Kanoria, M., (2009); Analaysis of thermoelastic response in a functionally graded spherically isotropic hollow sphere based on Green-Lindsay theory, Acta Mech. Vol. 207, pp. 51-67.
[25] Ghorbanpour, A., Salari, M., Khademizadeh, H., Arefmanesh, A., (2009); Magnetothermoelastic transient response of a functionally graded thick hollow sphere subjected to magnetic and thermoelastic fields, Arch Appl Mech, vol. 79, pp. 481-497.
[۲۶] قناد، مهدی و رحیمی، غلامحسین و اسماعیل‌زاده خادم، سیامک (۱۳۸۹)؛ "حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ازمواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی" **مجله فنی و مهندسی مدرس**، ج ۱۰، ش ۳، ص‌ص ۳۱-۴۱.
[۲۷] قناد، مهدی و رحیمی، غلامحسین و اسماعیل‌زاده خادم، سیامک (۱۳۸۹)؛ "حل عمومی استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی" **مجله فنی و مهندسی مدرس**، ج ۱۰، ش ۴، صفحات ۱۳-۲۵.
[28] Nemat-Alla M., Ahmed K.I.E., Hassab-Allah I. (2009); Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading, **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 46, Nr. 14-15, pp. 2774-2786.
[29] Tutuncu N., Beytullah T. (2009); A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, **Composite Structures**, Vol. 91, Nr. 3, pp. 385-390.
[30] Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R. (2009); Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders, **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, Vol. 86, Nr. 5, pp. 296-306.
[31] Akis, T. 2009. Elastoplastic analysis of functionally graded spherical pressure vessels. Comput. Mater. Sci.46:545-554.
[32] Borisov, A.V., " Elastic analysis of multilayered thick-walled spheres under external load", Mechanika 4(84), 2010, 28-32.
[33] Sadeghian, M. H. Ekhteraei Toussi, 2011. Axisymmetric yielding of functionally graded spherical vessel under thermo-mechanical loding. Comput Mater Sci. 50:975-981.
[34] Bayat, Y., Ghannad, M., Torabi, H., (2011). Analytical and numerical Analysis for the FGM Thick Sphere under Combined Pressure and Temperature Loading. **Arch Appl Mech**., DOI 10.1007/s00419-011-0552-x.
[35] Ozturk, A., Gulgec, M. (2011); Elastic–plastic stress analysis in a long functionally graded solid cylinder with fixed ends subjected to uniform heat generation, **International Journal of Engineering Science**, Vol. 49, Nr. 10, 2011, pp. 1047-1061.
[36] Sadeghian, M. H. Ekhteraei Toussi, 2012. Elasto-Plastic Axisymmetric Thermal Stress Analysis of Functionally Graded Cylindrical vessel. Journal of Basic and Applied Scientific Research. 63:22-32.
[37] Timoshenko S.P., Goodier J.N. (1983); Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
[38] Timoshenko S.P. (1976); Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1976.
[39] Hetnarski R.B., Eslami M.R. (2009), Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications, Springer.
[40] Mendelson A. (1968), Plasticity: Theory and Application, Macmillan, New York.

Abstract

In this research thermoelastoplastic analysis of thick-walled spheres made of homogenous and nonhomogenous materials with power-varying properties using plane elasticity theory which is subjected to internal pressure and steady state thermal loading is carried out. The purpose is to check yielding of sphere by assuming elastic-perfectly plastic behavior and to find state of stress, strain and displacement of sphere. First, governing differential equation axisymmetric thick-walled spheres with constant thickness that are made of homogenous and nonhomogenous materials with power-varying properties and subjected to pressure and thermal loadings are derived by using plane elasticity theory. Then according to the Tresca yield criterion analytically and von Mises yield criterion numerically by using ABAQUS finite elements software, investigate yielding of sphere and stress, strain and displacement in elastic and plastic region of sphere. Finally, for the case study and survey equation, are considered a homogenous and FGM sphere with the specified parameters.

Kywords: Thick-walled sphere, Functionally Graded Material (FGM), Plane Elasticity Theory (PET), Elastic-perfectly plastic behavior, Tresca and Von mises yield criterion.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Thermo_elastoplastic analysis of FGM thick wall sphere with power-varying mechanical properties by using classical theory

Mohammad Davarpanah

Supervisor:

Mehdi Ghannad

September 2013