دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک

امیر صابری نسب

استاد راهنما:

مهدی قناد کهتویی

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه مکانیک جامدات

تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک

دانشجو: امیر صابری نسب

استاد راهنما:

مهدی قناد کهتویی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : مکانیک جامدات

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای امیر صابری نسب

تحت عنوان: تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
مهدی قناد کهتویی		-	–

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
مهدی گردویی			
محمدباقر نظری			

تقدیم اثر

این پایان نامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به:

محضر ارزشمند پدر و مادر دلسوز و مهربانم، به خاطر همه ی تلاشهای محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند و با مهربانی، چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.

به همسر عزیزم، که همواره همراه و همگام و مشوق من است.

به برادر مهربانم، که همیشه رفیق شفیق من بوده است.

و به آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند.

پروردگارا، حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر بفرما.

تشکر و قدردانی

شکر شایان، نثار ایزد منان، که توفیق را رفیق راهم ساخت تا این پایان نامه را به اتمام برسانم . از تمامی اساتید محترم دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود به‌ویژه استاد فاضل و اندیشمند جناب آقای دکتر مهدی قناد کهتویی به عنوان استاد راهنما که همواره اینجانب را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر را دارم.

تعهد نامه

اینجانب **امیر صابری نسب** دانشجوی دوره **کارشناسی ارشد** رشته **مهندسی مکانیک** دانشکده **مهندسی مکانیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم FGM با تغییرات توانی خواص مکانیکی به کمک تئوری کلاسیک** تحت راهنمائی **دکتر مهدی قناد کهتویی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این تحقیق به تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم ساخته شده از مواد همگن و مواد ناهمگن FG، با تغییرات توانی خواص مکانیکی که در معرض فشار داخلی و بار حرارتی در حالت پایا قرار گرفته‌اند با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی ، پرداخته شده است. هدف بررسی تسلیم استوانه با در نظر گرفتن رفتار الاستوپلاستیک (الاستیک- پلاستیک کامل) و یافتن وضعیت تنش، کرنش و جابه‌جایی شعاعی استوانه است. ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری که ضخامت ثابتی دارند و از مواد همگن و ناهمگن با تغییرات توانی خواص، ساخته شده‌اند و در معرض بار فشاری و حرارتی قرار دارند با استفاده از تئوری الاستیسیته مستوی در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای استخراج شده‌اند. سپس بر اساس معیارهای تسلیم ترسکا به‌صورت تحلیلی و معیار تسلیم فون میزز به‌صورت عددی با کمک نرم‌افزار المان محدود آباکوس به بررسی تسلیم استوانه و توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده پرداخته شده است. در نهایت برای ارزیابی بیشتر، به بررسی نتایج در یک استوانه همگن و FGM با مشخصاتی معلوم پرداخته شده است.

واژگان کلیدی: استوانه جدار ضخیم، ماده ناهمگن (FGM)، تئوری الاستیسیته مستوی (PET)، ماده الاستیک- پلاستیک کامل، معیار تسلیم ترسکا، معیار تسلیم فون میزز

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

الف) مقالات ارائه شده

۱- "*تحلیل الاستوپلاستیک مخزن استوانه‌ای جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی و خارجی*"، چهاردهمین کنگره ملی مهندسی شیمی ایران، ۲۵- ۲۷ مهر ماه ۱۳۹۱، دانشگاه صنعتی شریف.

۲- "*تحلیل الاستوپلاستیک کره جدار ضخیم تحت فشار ساخته شده از مواد ناهمگن FG*"، دوازدهمین کنفرانس هوافضای ایران، ۱- ۳ اسفند ماه ۱۳۹۱، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

ب) مقالات در دست داوری

1- “*Comparison between pressurized spherical and cylindrical shells yielding conditions made of homogeneous and nonhomogeneous (FG) materials*”, Journal of Solid Mechanics (JSM), Islamic Azad University- Arak Branch.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فهرست جدول‌ها

فهرست علائم و اختصارات

r,θ,z	محورهای مختصات در سیستم مختصات کروی
$\sigma_r,\sigma_\theta,\sigma_z$	تنش‌های اصلی
$\varepsilon_R,\varepsilon_\theta,\varepsilon_\phi$	کرنش‌های اصلی
$\vec{u}_i$	بردار جابجایی
μ,λ	ثابت‌های لامه
ν	نسبت پواسون
$\theta(R)$	توزیع دما در راستای شعاعی
θ_i,θ_o	دمای خارجی و دمای داخلی
E	مدول الاستیسیته
k	نسبت شعاع خارجی به داخلی
R	نسبت شعاع کره به شعاع داخلی
r_i	شعاع داخلی
r_o	شعاع خارجی
c_i	ثابت‌های پاسخ دستگاه معادلات دیفرانسیل
n_i	ثابت ناهمگنی
p_i,p_o	فشار خارجی و داخلی
α_i	ضریب انبساط حرارتی
K_i	ضریب هدایت حرارتی
$\varnothing_y$	تابع تسلیم
σ_y	تنش تسلیم
$(P_i)_{cr}$	فشار بحرانی
$\sigma_R^P,\sigma_\theta^P,\sigma_z^P$	تنش‌ها در ناحیه پلاستیک
$\sigma_R^e,\sigma_\theta^e,\sigma_z^e$	تنش‌ها در ناحیه الاستیک

$\varepsilon_R^P, \varepsilon_\theta^P, \varepsilon_z^P$	کرنش‌ها در ناحیه پلاستیک
$\varepsilon_R^e, \varepsilon_\theta^e, \varepsilon_z^e$	کرنش‌ها در ناحیه الاستیک
u_R^P	جابه‌جایی کل در ناحیه پلاستیک
u_R^e	جابه‌جایی کل در ناحیه الاستیک

فصل ۱

مقدمه

۱-۱- پوسته‌ها

پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. پوسته‌ها فراوان‌ترین و متنوع‌ترین سازه‌هایی هستند که در اطراف خود مشاهده می‌کنیم، از جمله پوسته‌های آشنا عبارتنداز: حباب صابون، حباب لامپ، جمجمه‌ی سر، لاک و صدف جانوران، بدنه‌ی هواپیما، مخازن تحت فشار، لوله‌ها و... پوسته‌ها از لحاظ رفتاری در برابر نیروها و لنگرها، از مقاومت مطلوب و ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه این رفتارها و به کارگیری تئوری‌های مختلف از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفته و به دلیل فراوانی کاربرد، همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای و کروی، اهمیت ویژه‌ای دارند و همواره دانش‌پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی دیواره و ماده‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر بارگذاری‌ها افزایش و وزن آنها را کاهش دهند.

۱-۱-۱- انواع پوسته‌ها [۱]

به‌طور کلی پوسته‌ها از ۳ دیدگاه هندسی، مادی و رفتاری به‌صورت زیر دسته‌بندی می‌شوند.

الف- از دیدگاه هندسی

پوسته جدار نازک[۱]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کمتر از ۱/۲۰ باشد.

پوسته جدار ضخیم[۲]: پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بیشتر از ۱/۲۰ باشد.

ب- از دیدگاه مادی

پوسته همگن[۳]: خواص مکانیکی ماده پوسته، در نقاط مختلف جسم یکسان است و تابع موقعیت نقاط نمی‌باشد.

پوسته ناهمگن[۴]: خواص مکانیکی ماده پوسته، در نقاط مختلف جسم یکسان نیست و تابع موقعیت نقاط می‌باشد.

---

[1] Thin Walled shell
[2] Thick Walled Shell
[3] Homogeneous Shell
[4] Inhomogeneous Shell

پوسته همسانگرد[1]: خواص مکانیکی ماده پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان است.

پوسته ناهمسانگرد[2]: خواص مکانیکی ماده پوسته، در جهات مربوط به هر نقطه، یکسان نیست.

ج- از دیدگاه رفتاری

پوسته با تغییر شکل‌های کوچک[3]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک است.(رفتار خطی از نظر هندسی)

پوسته با تغییر شکل‌های بزرگ[4]: جابه‌جایی هر نقطه از پوسته بین شرایط بارداری و بی‌باری، کوچک نیست.(رفتار غیر خطی از نظر هندسی)

پوسته با رفتار کشسان[5]: تغییر شکل‌ها بازگشت پذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی می‌کنند.(رفتار خطی از نظر مادی)

پوسته با رفتار مومسان[6]: تغییر شکل‌ها بازگشت ناپذیرند و روابط تنش- کرنش از قانون عمومی هوک پیروی نمی‌کنند.(رفتار غیر خطی از نظر مادی)

۱-۱-۲- تئوری‌های ارائه شده برای پوسته‌ها

برای مدل سازی ریاضی و تحلیل پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم تئورهای مختلفی توسط دانشمندان ارائه شده است که هر کدام مزایا و معایبی دارد. در این بخش به معرفی برخی از این تئوری‌ها پرداخته می‌شود.

۱-۱-۲-۱- تئوری‌های پوسته جدار نازک

تئوری‌های این پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته دو بعدی بنا شده است. در حقیقت به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود و با ساده‌سازی روابط

---

[1] Isotropic Shell
[2] Anisotropic Shell
[3] Small Deformation
[4] Large Deformation
[5] Elastic Behavior
[6] Plastic Behavior

الاستیسیته، روش‌های تحلیلی تقریبی برای حل این پوسته‌ها به‌دست می‌آید که دقت نتایج هر تئوری بستگی به درجه ساده‌سازی آن دارد. اولین فرضیات در مورد ورق‌ها توسط کیرشهف[1](۱۸۵۰) ارائه شد. ارون[2] (۱۸۷۴) بر اساس فرضیات کیرشهف تئوری پوسته‌ها را معرفی کرد. لاو[3] (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته جدار نازک را ارائه کرد که به تئوری کلاسیک پوسته‌های جدار نازک یا تئوری لاو- کیرشهف مشهور است. ریسنر[4] (۱۹۱۲) تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری را با استفاده از فرضیات لاو ارائه نمود. فلوگه[5] (۱۹۳۲) تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه نمود که این معادلات به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌هایجدار نازک شناخته می‌شوند و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. بیرنه[6] (۱۹۴۴) نظریات فلوگه را تکمیل کرد. با ساده‌سازی معادلات فلوگه تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی صفر و یک حاصل می‌شود. نقدی (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های جدار نازک را فرمول‌بندی کرد. سندرز[7] (۱۹۵۹) به فرمول‌بندی پوسته‌ها به کمک اصل کار مجای پرداخت و نووژیلف[8] (۱۹۶۴) امکان ارائه نظریه پوسته‌ها را به شکل‌های مختلف نشان داد. در نهایت تئوری‌های عمومی ارائه شده برای پوسته‌های جدار نازک را می‌توان به شکل زیر تقسیم‌بندی نمود:

۱- تئوری غشایی (تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر) : پوسته‌هایی که سختی خمشی خیلی کمی دارند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی نیستند، با این تئوری تحلیل می‌شوند؛

۲- تئوری خمشی (تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک) : پوسته‌هایی که سختی خمشی قابل توجهی داشته باشند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی باشند، با این تئوری تحلیل می‌شوند؛

---

[1] Kirchhoff
[2] Aron
[3] Love
[4] Reissner
[5] Flugge
[6] Byrne
[7] Sanders
[8] Novozhilov

۳- تئوری فلوگه (تئوری با تقریب مرتبه دو).

برای تحلیل پوسته‌های جدار نازک با تغییر شکل کم فرضیاتی در نظر گرفته می‌شود که این فرضیات در تئوری‌های غشایی و خمشی نیز در نظر گرفته می‌شوند. این فرضیات که به نام فرضیات لاو- کیرشهف مشهورند عبارتند از :

۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی خیلی کمتر از واحد است؛
۲- تغییر مکان‌ها در مقایسه با ضخامت پوسته کوچک هستند؛
۳- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته پس از بارگذاری و تغییر شکل، مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند که با این فرض می‌توان از کرنش‌های برشی و کرنش عمودی در سطح موازی با سطح میانی صرف نظر نمود؛
۴- تنش عمود بر سطوح موازی با سطح میانی قابل چشم پوشی است.

۱-۱-۲-۲- تئوری پوسته‌های جدار ضخیم

اولین بار لامه[1] (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی[2] حل دقیق استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسانگرد را ارائه کرد.

گلرکین[3] (۱۹۳۰) با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته روابط پوسته‌های جدار ضخیم را به دست آورد. ولاسف[4] (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستسیسته خطی معادلات قابل حلی برای پوسته‌های جدار ضخیم ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های جدار ضخیم بنیان نهاد. میرسکی و هرمان[5] (۱۹۵۸) با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول،

[1] Lame
[2] Plane elasticity theory(PET)
[3] Galerkin
[4] Vlassov
[1] Mirsky& Hermann

تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم را ارائه کردند. گرینس‌پن[۱] (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه-های جدار ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم مقایسه نمود. بنابراین دو تئوری الاستیسیته مستوی (دو بعدی) و تغییر شکل برشی برای پوسته‌های جدار ضخیم مطرح شد.

- تئوری الاستیسته مستوی

در تئوری الاستیسیته سه بعدی خطی، ۱۵ معادله (سه معادله تعادل، شش معادله سینماتیک و شش معادله رفتاری) و ۱۵ مجهول (شش مولفه تانسور تنش متقارن، شش مولفه‌ی تانسور کرنش متقارن و سه مولفه جابه‌جایی) وجود دارد که منجر به حل دقیق مسأله می‌شود ولی حل این معادلات بسیار پیچیده و در بسیاری از موارد عملاً غیر ممکن است. با کمک فرضیاتی می‌توان تعداد این معادلات و تعداد مجهولات آنها را کاهش داد و حل نمود. یک نمونه از این فرضیات ساده کننده منجر به شکل‌گیری تئوری الاستیسیته مستوی می‌شوند. در این تئوری فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند. در حقیقت تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی بر سطح موازی با صفحه‌ی میانی پوسته چشم‌پوشی می‌شود. این تئوری به تئوری کلاسیک استوانه‌های جدار ضخیم نیز مشهور است.

- تئوری تغییر شکل برشی

با استفاده از بسط تیلور و تعریف جابه‌جایی هر نقطه به صورت مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی می‌توان جابه‌جایی تئوری لامه را به صورت یک چند جمله‌ای نوشت. اگر فقط جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی صفر نامیده می‌شود که مشابه تئوری خمشی در پوسته‌های نازک است. اگر دو جمله‌ی اول چندجمله-ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های جدار ضخیم به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نامیده

[2] Greenspon

می‌شود که مشابه تئوری فلوگه در پوسته‌های نازک است. به همین ترتیب می‌توان تئوری‌های تغییر شکل مرتبه‌ی بالاتر را استخراج و فرمول‌بندی نمود. در این تئوری علاوه بر اثر نیروهای محوری ، اثر برش، خمش، پیچش، اینرسی دورانی و میدان حرارتی را نیز می‌توان در نظر گرفت. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به تئوری تغییر شکل برش مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان نیز شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو[1] در تیرها و همچنین تئوری میندلین[2] در ورق‌ها است.

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل مستوی باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند و این بدان معنی است که تنش و کرنش برشی در سطوح موازی صفحه‌ی میانی صفر در نظر گرفته می‌شوند. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی چس از تغییر شکل الزاماً مستوی و عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند.

در این تحقیق از تئوری الاستیسیته مستوی برای تحلیل استوانه مورد نظر استفاده می‌شود.

۱-۲- FGM ها

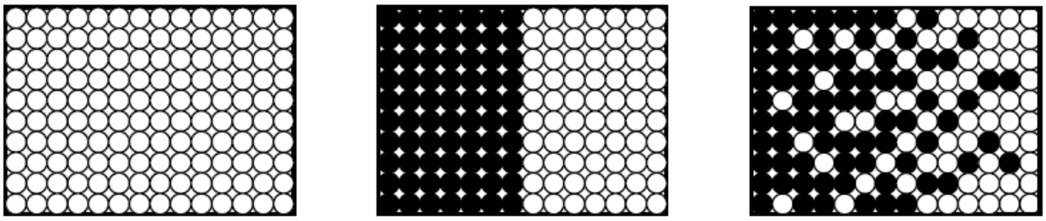
به‌طور کلی ماده‌ی همگن ماده‌ایست که خواص آن در تمام نقاط یکسان است و ماده‌ی همسانگرد ماده‌ایست که خواص هر نقطه‌ی مادی آن در تمام جهت‌ها یکسان است. بیشتر موادی که در صنایع از آنها استفاده می‌کنیم موادی همگن و همسانگرد می‌باشند. با پیشرفت سریع صنایع هوافضا، توربین‌ها، راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا به وجود آمده است. در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد استفاده از مواد همگن که خواسته‌های طراح را برآورده کنند مشکل است. در حرارت‌های زیاد فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون، خوردگی، خزش و... قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌کنند. از این رو ایده‌ی مواد مرکب

---

[1] Timoshenko
[2] Mindlin

مطرح شد. این مواد از ترکیب دو یا چند ماده به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوتی دارند. به عنوان مثال فلزات با پوشش عایق حرارتی[1] پوشانده می‌شوند یا مواد نرم با الیاف مستحکم پوشانده می‌شوند. این مواد از دید میکروسکوپی ناهمگن و ناهمسانگرد هستند. تغییر ناگهانی مواد و در نتیجه خواص در مواد مرکب که موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود از اشکالات عمده‌ی آن‌هاست و باعث تمرکز تنش و ایجاد ترک گسیختگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری هم‌زمان مکانیکی و حرارتی با دمای بالا می‌شود. با توجه به این مشکلات ساخت ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکلات ناشی از تغییرات ناگهانی خواص را نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد و این بدان معنی است که نیاز به ماده‌ای با تغییرات تدریجی خواص در مقیاس میکروسکوپی به وجود آمد. به این مواد اصطلاحاً FGM[2] گفته می‌شود. مفهوم FGM اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن توسط نینو[3] و همکارانش در یک پروژه ساخت فضاپیما در سازمان هوافضای ژاپن به عنوان ماده‌ای برای ساخت سپر حرارتی مطرح شد که نیاز به ترکیبی از مواد مختلف با توان حمل درجه حرارت ۲۰۰۰ کلوین در سطح و تغییرات دمایی ۱۰۰۰ کلوین در ضخامت ۱۰ میلی‌متر بود. در سال ۱۹۸۶ مطالعات بر روی امکان ساخت این مواد در ژاپن آغاز شد و مرحله‌ی اول پروژه‌ای با نام « فناوری گسترش FGM» طی سال‌های ۱۹۷۸ تا ۱۹۸۹ اجرا و پس از دست‌یابی به هدف که ساخت قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر با خواص ذکر شده بود، در سال ۱۹۹۰ در سمپوزیومی در سندای به جهانیان ارائه شد. مرحله دوم این پروژه در سال ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۱ اجرا شد که نتیجه‌ی آن ساخت ورق‌های مربعی به ضلع ۳۰۰ میلی‌متر و نیم کره‌هایی به قطر ۵۰ میلی‌متر با خواص ذکر شده برای استفاده در ساخت دماغه‌ی فضاپیما بود که پس از آن دومین سمپوزیوم جهانی FGM در سال ۱۹۹۲ در سان‌فرانسیسکو برگزار شد. در سالهای اخیر توجه بر روی FGM ها در اروپا، به ویژه آلمان به شدت گسترش یافته است.

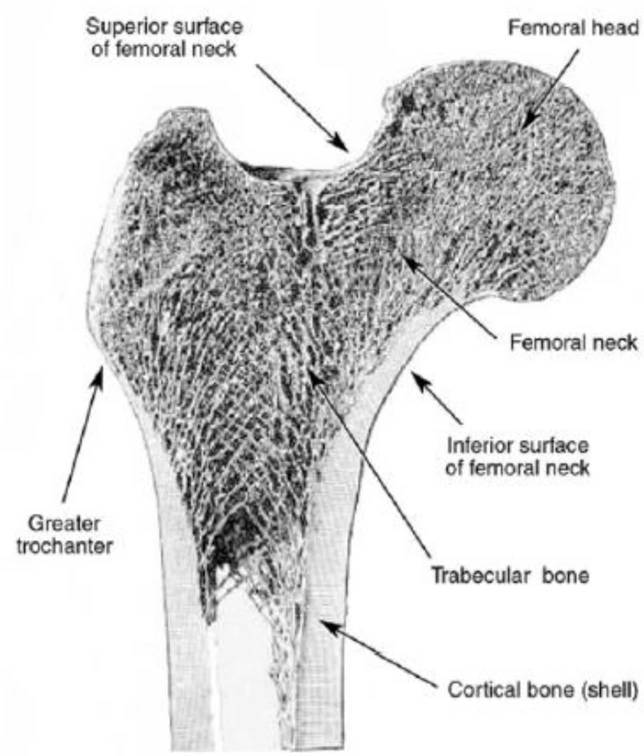
[1] Thermal barrier coating (TBC)
[2] Functionally Graded Material
[3] Niino



FGM   ماده‌ی مرکب لایه‌ای   ماده‌ی همگن

شکل۱-۱- نمای زیرساختار مواد همگن، مرکب لایه‌ای و FGM

این مواد عموماً از مخلوط سرامیک و فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته می‌شوند. سرامیک به دلیل رسانش گرمایی کم، مقاومت حرارتی بالایی دارد و فلز چکش‌خوار است و از شکستگی یا ترک به خاطر تنش حرارتی جلوگیری می‌کند. ماده FGM در زمره مواد ناهمگن و همسانگرد قرار دارند که خصوصیات آن‌ها به‌طور پیوسته از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند. از مزایای FGM نسبت به مواد مرکب لایه‌ای، عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشد، زیرا همانطور که گفته شد در FGM ترکیب مواد پیوسته است. از این مواد می‌توان در صنایع هوایی، فضایی، نظامی، هسته‌ای، نیروگاهی، الکترونیکی، پزشکی و... به عنوان پوشش بخش‌های مختلف هواپیماها و فضاپیماها، ساخت لوله‌ی توپ، راکتورها، مخازن، پوشش پردازنده‌ها، مواد دندانپزشکی و ارتوپدی استفاده کرد و صدها کاربرد متنوع دیگر برای آنها متصور شد. استخوان ماده‌ای طبیعی است که سطح خارجی محکمی دارد و در مرکز آن بافتی نرم وجود دارد که این موجب تغییر تدریجی خواص از داخل به خارج استخوان می‌شود بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمگن است. خواص مکانیکی استخوان در جهت طولی با سایر جهات متفاوت است بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمسانگرد نیز هست. در صورت صرف‌نظر از ناهمسانگردی استخوان می‌توان آن را FGM در نظر گرفت.



شکل ۱- ۲- برش طولی استخوان ران انسان[۲]

بنا بر آنچه گفته شد ماده‌ی FG از ترکیب چند ماده به طوری ساخته می‌شود که خواص آن به‌طور تدریجی تغییر کند به همین دلیل می‌توان این مواد را به گونه‌ای ساخت که ویژگی‌های خاصی داشته باشند. برخی از این ویژگی‌ها بدین شرح می‌باشند:

۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا؛

۲- مقاومت بالا در برابر بارهای مکانیکی؛

۳- کاهش اثر تمرکز تنش در نواحی دارای شکل هندسی خاص؛

۴- جلوگیری از ایجاد و یا رشد ترک.

۱-۲-۱- روش‌های ساخت FGM ها

امروزه برای ساخت مواد FG از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود که به عملکرد، شرایط بارگذاری، شکل قطعه و نحوه‌ی توزیع خواص وابسته می‌باشند. معمولا مواد FG به صورت پوششی بر روی سایر مواد پوشانده می‌شوند و یا قطعاتی تماما FGM ساخته می‌شوند. تعدادی از این روش‌ها به شرح زیر می‌باشد:

۱-۲-۱-۱- ساخت پوشش FGM بر روی سطح مواد

یکی از روش‌های تهیه‌ی پوشش FGM بر روی سطح مواد ته‌نشینی بخار است که انواع مختلفی از جمله ته‌نشینی اسپاتر[1]، ته‌نشینی شیمیایی بخار[2] و ته‌نشینی فیزیکی بخار[3] دارد. این روش ساختمان میکروسکوپی بسیار خوبی به‌وجود می‌آورد ولی فقط قادر به ایجاد پوشش‌های نازک است، به انرژی زیادی نیاز دارد و گازهای سمی تولید می‌کند. روش‌های دیگر تولید پوشش‌های FGM بر روی سطح مواد عبارتند از: پاشش پلاسما، ته‌نشینی بر روی الکترود، الکترولیز، ته‌نشینی به کمک پرتو یون[4]، سنتز خود انتقال دما بالا[5] و ... تمامی این روش‌ها کند و نیازمند انرژی زیاد می‌باشند، بنابراین برای تولید قطعات تماماً FGM از نظر اقتصادی نامناسب می‌باشند.

۱-۲-۱-۲- تولید قطعات FGM

متالوژی پودر یکی از روش‌هایی است که برای تولید قطعات FGM به‌کار می‌رود و طی سه مرحله‌ی وزن و مخلوط کردن پودرها با توجه به توزیع خواص مورد نظر، ریختن مخلوط پودرها در قالب و فشرده کردن آن‌ها و سینتر کردن[6] انجام می‌شود. روش متالوژی پودر منجر به ایجاد ساختار پله‌ای می‌شود. برای ایجاد ساختاری پیوسته بهتر است از روش گریز از مرکز استفاده کرد. در این روش مخلوط مواد در قالبی چرخان ریخته

[1] Sputter deposition
[2] Chemical vapor deposition (CVD)
[3] Physical vapor deposition (PVD)
[4] Ion beam assisted deposition (IBAD)
[5] Self-propagating high-temperature synthesis (SHS)
[6] Sintering

می‌شود که به دلیل چگالی نابرابر مواد مخلوط و وجود نیروی گریز از مرکز یک ماده‌ی FG به وجود می‌آید. یکی از اشکالات این روش این است که فقط قادر به تولید قطعات حاصل از دوران است و اشکال دیگر این روش عدم کنترل بر روی توزیع خواص است. ساخت جسم جامد به هر شکل[1] روشی است که به کمک نرم‌افزارهای طراحی کامپیوتری (CAD) هندسه‌ی جسم را طراحی می‌کنند سپس به روش کمک‌های موجود پرینت سه بعدی اقدام به تولید قطعه به صورت لایه لایه با توزیع خواص مورد نظر می‌کنند. روش‌های پرینت به کمک لیزر از رایج‌ترین روش‌های ساخت FGM به کمک این روش است.

روش‌های مطرح شده، تمام روش‌های تولید مواد FG نیستند و روش‌های دیگری نیز برای این کار وجود دارد وهر روز محققان روش‌های جدیدی برای این منظور پیشنهاد می‌کنند.

۱-۲-۲- توزیع خواص

قبل از ساخت FGM باید مشخص شود که اجزای تشکیل دهنده به چه صورتی توزیع شده است، دربعضی مقاله‌ها هدف یافتن یک پروفیل با توجه به بهینه کردن یک کمیت است. درمواقع دیگر پروفیل توزیع مواد انتخاب می‌شود و یک پارامتر برای اهداف بهینه در آن در نظر گرفته می‌شود.

از آنجا که هدف در ساخت این مواد ایجاد یک تابع پیوسته از خواص در طول ماده است می‌توان توابع مختلفی رابرای توزیع خواص در نظر گرفت. توابع رایج برای خواص مکانیکی و حرارتی، توانی و نمایی می‌باشند. توزیع توانی عموماً به صورت جهت مختصات مورد نظر به توان ثابت ناهمگنی ضرب در مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود و توزیع نمایی غالباً به صورت ثابتی در عدد نپر به توان ثابت ناهمگنی ضرب در جهت مختصات مورد نظر، در نظر گرفته می‌شود.

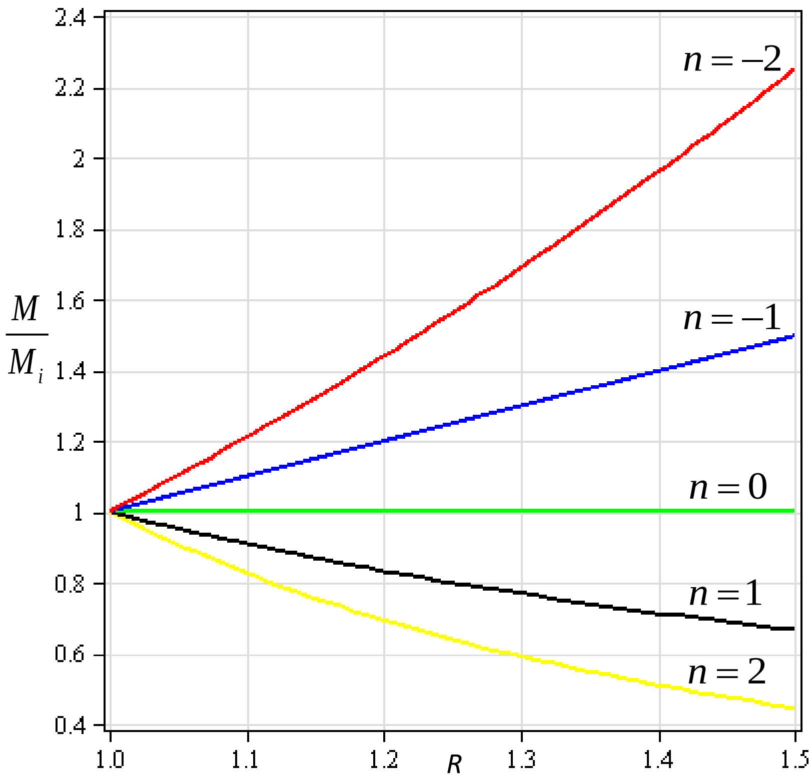
[1] Solid freeform (SFF) fabrication method

معمولاً تابع توزیع خواص برای مدول الاستیسیته، استحکام تسلیم، ضریب هدایت حرارتی و ضریب انبساط حرارتی در نظر گرفته می‌شود ولی نسبت پواسون در تمامی نقاط ماده ثابت فرض می‌شود. علت این فرض تغییرات بسیار اندک نسبت پواسون در مقابل مدول الاستیسیته است.

دراین تحقیق توزیع خواص به صورت توانی در جهت شعاع به صورت رابطه‌ی (۱-۱) درنظرگرفته می‌شود:

(۱-۱)

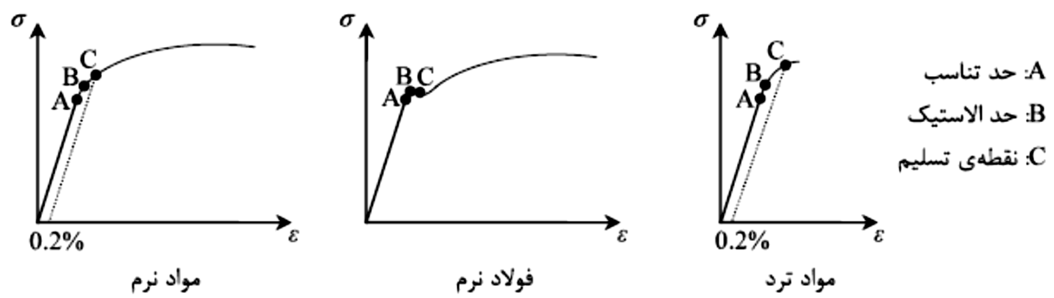
در رابطه‌ی فوق M خاصیت مورد نظر در هر نقطه از استوانه، M_i خاصیت مورد نظر در سطح داخلی استوانه، R نسبت شعاع استوانه به شعاع داخلی استوانه و n ثابت ناهمگنی است. نمودار این توزیع خواص در جهت توزیع شعاع استوانه برای ثابت‌های ناهمگنی ۲- ، ۱- ، ۰ ، ۱ و ۲ به‌صورت شکل (۱-۳) است.



شکل۱-۳- توزیع توانی خواص در جهت شعاع استوانه

۱-۳- رفتار پلاستیکی مواد

رابطه‌ی تنش و کرنش تا پیش از رسیدن به حد تناسب رفتاری خطی دارد و از قانون هوک تبعیت می‌کند. همچنین تا پیش از رسیدن به حد الاستیک در صورت حذف تنش ماده به وضعیت اولیه خود باز می‌گردد ولی با گذر از مقاومت تسلیم (حد الاستیک) مقداری از کار انجام شده در جسم به گرما تبدیل شده و تغییر شکل دائمی در جسم به وجود می‌آید بنابراین با برداشتن تنش ماده به شکل اولیه خود بازنمی‌گردد. نقطه‌ی تسلیم موقعیتی از تنش و کرنش است که رفتار پلاستیک ماده آغاز شده است و در آن بدون افزایش تنش، کرنش زیاد می‌شود؛ برای موادی که چنین رفتاری را از خود نشان نمی‌دهند نقطه‌ی تسلیم تقاطع نمودار تنش- کرنش با خطی موازی در قسمت الاستیک نمودار که از کرنش ۰/۲ درصد می‌گذرد در نظر گرفته می‌شود. تغییر شکل مواد تا پیش از مقاومت تسلیم که قابل بازگشت است را تغییر شکل الاستیک و پس از آن که غیر قابل بازگشت به شکل اولیه است را تغییر شکل پلاستیک می‌نامند.



شکل ۱-۴- نمودار تنش-کرنش برای مواد نرم و ترد

برای تحلیل رابطه‌ی تنش و کرنش در نواحی الاستیک و پلاستیک تا پیش از شکست ماده به موارد زیر نیاز داریم:

۱- روابط الاستیک تنش و کرنش.

۲- شرایط تنش که شروع جریان پلاستیک را خبر می‌دهد (معیار تسلیم).

۳- روابط تنش-کرنش پلاستیک یا روابط تنش-کرنش جزئی.

۱-۳-۱- روابط تنش - کرنش

همان‌طور که می‌دانیم قانون هوک بر تنش و کرنش در حالت الاستیک حاکم است که تنش و کرنش را توسط رابطه‌ای خطی به کمک ماتریس سفتی یا نرمی به هم مرتبط می‌کند.

۱-۳-۲- معیارهای تسلیم

معیار تسلیم وسیله‌ی سنجشی است که به کمک آن رسیدن ماده به نقطه‌ی تسلیم را تشخیص می‌دهیم. معیارهای مختلفی بر اساس تئوری‌های مختلف ارائه شده‌اند که در این بخش فقط به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود:

۱- معیار رانکین: این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش اصلی توسط رانکین[۱] بیان شد که بر اساس این تئوری، تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش اصلی برابر مقاومت تسلیم کششی یا کمترین تنش اصلی برابر مقاومت تسلیم فشاری ماده شود.

۲- معیار ترسکا: این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش برشی که توسط کلمب[۲] مطرح شده است، پیشنهاد گردیده و به نام‌های ترسکا[۳] و گست[۴] شناخته می‌شود. بر اساس این تئوری، تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش برشی برابر مقاومت تسلیم برشی ماده می‌شود.

۳-معیار سنت ونانت[5]: این معیار که بر اساس تئوری بیشترین کرنش اصلی ارائه شده است بیان می‌کند که تسلیم با رسیدن بیشترین کرنش اصلی به کرنش تسلیم کششی یا رسیدن کمترین کرنش اصلی به کرنش تسلیم فشاری آغاز می‌شود.

[1] Rankine
[2] Colomb
[3] Tresca
[4] Guest
[5] St. Venant

۴- معیار بلترامی[1]: این معیار بر اساس تئوری بیشترین انرژی کرنشی استوار است، زمان آغاز تسلیم را رسیدن انرژی کرنشی به حد مشخصی بیان می‌کند.

۵- معیار فون میزز-هنکی: این معیار بر اساس تئوری بیشترین کرنشی واپیچشی استوار است. این تئوری توسط هابر[2] پیشنهاد شد و فون میزز[3] و هنکی[4] آن را تکمیل نمودند. این تئوری در صورت رسیدن انرژی کرنشی واپیچشی به حد مشخصی آغاز تسلیم را خبر می‌دهد.

۶- معیار فون میزز: این معیار بر اساس تئوری تنش برشی هشت‌وجهی استوار است و بیان می‌کند که تسلیم زمانی آغاز می‌شود که تنش برشی هشت‌وجهی به مقدار معینی برسد.

معیار فون میزز-هنکی و فون میزز روابط یکسانی دارند.

در این تحقیق از معیارهای تسلیم ترسکا و فون میزز برای تحلیل شریط تسلیم استوانه استفاده شده است.

۱-۳-۲- روابط تنش- کرنش پلاستیک

در تحلیل پلاستیک نمی‌توان رابطه‌ی مشخصی بین تنش و کرنش ارائه داد زیرا تنش در حالت نهایی به مسیر کرنش بستگی دارد از این رو روابط ارائه شده برای این منظور عمدتاً روابطی بین تنش و نمو کرنش (میزان افزایشی اندک در تنش و کرنش) می‌باشد و برای تحلیل این‌گونه مسائل باید به تغییر تنش به طور تدریجی سپس محاسبه‌ی میزان تغییر در کرنش پرداخت و این عملیات را تا رسیدن به وضعیت نهایی ادامه داد.

از آنجا که در این تحقیق فقط به بررسی بارگذاری اولیه که هیچ تنش پس‌ماندی در ماده وجود ندارد پرداخته می‌شود می‌توان تنش را یک‌باره اعمال نمود و نمو تنش و کرنش را برابر کل تنش و کرنش مورد نظر گرفت.

---

[1] Beltrami
[2] Haber
[3] Von Misess
[4] Henky

۱-۳-۲-۱- مدل‌های مواد

برای تحلیل رفتار مواد پیش از هر چیز نیاز به یک مدل ریاضی از ماده داریم. مدل‌های مختلفی برای مواد از نظر رابطه‌ی تنش و کرنش ارائه شده است که هر کدام در موارد خاصی کاربرد دارند. پاره‌ای از این مدل‌ها به شرح زیر می‌باشند.

۱- صلب: تحت اثر هر مقدار نیرویی هیچ تغییر شکلی نمی‌دهد.

۲- کاملاً الاستیک: به طور کامل از قانون هوک تبعیت می‌کند.

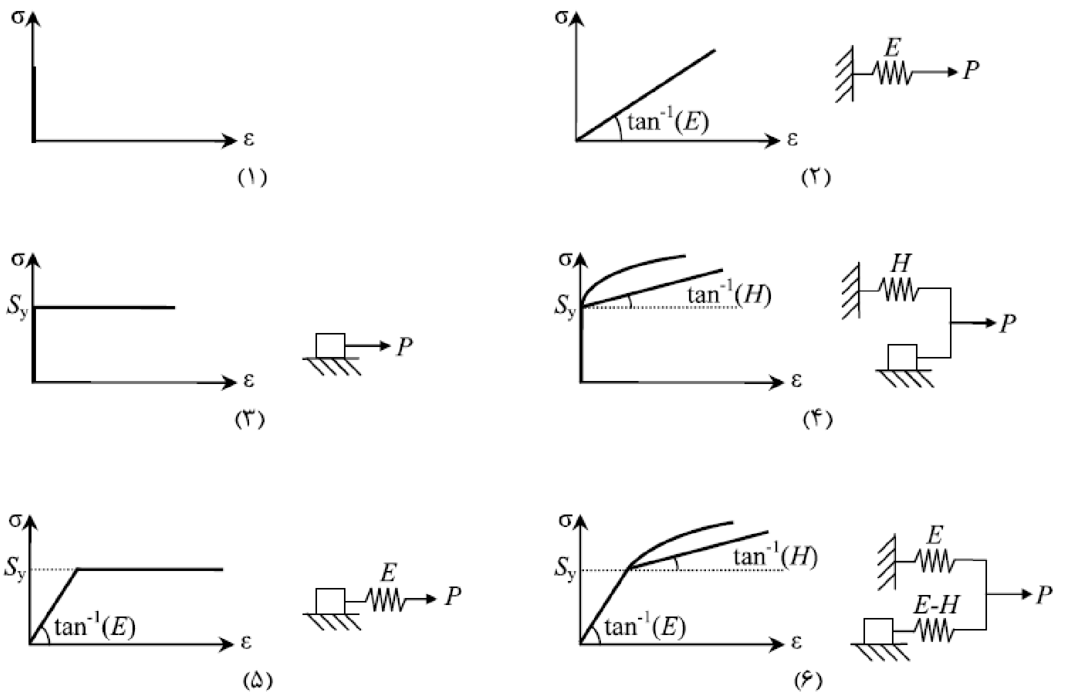
۳- صلب-کاملاً پلاستیک: تا نقطه‌ی تسلیم صلب است از آن به بعد در تنش ثابت به صورت پلاستیک تغییر شکل می‌دهد.

۴- صلب-سخت‌شونده با کار: تا نقطه‌ی تسلیم صلب است از آن به بعد با خاصیت سخت شوندگی ناشی از کار خطی یا غیر خطی تغییر شکل پلاستیک می‌دهد.

۵- الاستیک-کاملاً پلاستیک (الاستوپلاستیک): تا پیش از نقطه‌ی تسلیم رابطه‌ی تنش و کرنش خطی است پس از آن در تنش ثابت به صورت پلاستیک تغییر شکل می‌دهد.

۶- الاستیک-سخت‌شونده با کار: تا نقطه‌ی تسلیم تابع قانون هوک است بعد از آن با خاصیت سخت شوندگی ناشی از کار تغییر شکل پلاستیک می‌دهد.

۷- ویسکو الاستیک: خواص این مواد ترکیبی از خواص الاستیک و لزج است و تنش و یا کرنش در ماده به زمان نیز وابسته است.



شکل ۱-۵- نمودار تنش- کرنش و سیستم دینامیکی معادل مدل‌های مواد

۱-۳-۲-۲- قانون جریان

هر افزایش کرنش (نمو کرنش) در ناحیه‌ی پلاستیک حاصل یک بخش الاستیک که در باربرداری حذف می‌شود و یک بخش پلاستیک که پس از باربرداری باقی می‌ماند است. بخش الاستیک از قانون عمومی هوک به دست می‌آید و بخش پلاستیک تابع قانونی است که قانون جریان نامیده می‌شود. بر اساس این قانون نمو کرنش پلاستیک به صورت برداری در فضای نه بعدی در نظر گرفته می‌شود که در نقطه‌ی تنش مورد نظر عمود بر سطح معیار تسلیم بوده و جهت آن به سمت خارج است. قانون جریان بیان می‌کند که جهت تنش‌های اصلی و نمو کرنش‌های اصلی برای یک ماده‌ی همسانگرد یکسان می‌باشند. همچنین شرط عدم تغییر حجم پلاستیک در این قانون بیان می‌کند که مجموع نمو کرنش‌های عمودی پلاستیک باید برابر صفر باشد.

در این تحقیق رفتار الاستیک- کاملاً پلاستیک برای ماده در نظر گرفته شده است و به کمک قانون جریان روابط مورد نیاز برای محاسبه کرنش‌های پلاستیک مربوط به معیار تسلیم استخراج شده است.

۱-۴- روش اجزای محدود

امروزه روش اجزای محدود به یک روش قدرتمند برای حل عددی گستره وسیعی از مسائل مهندسی تبدیل شده است. با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر به راحتی می‌توان مسائل پیچیده‌ای را به کمک این روش حل نمود. در این روش تحلیل، یک ناحیه پیچیده که مشخص کننده یک محیط پیوسته می‌باشد به شکل‌های هندسی ساده که اجزای محدود نامیده می‌شوند، تقسیم می‌شود. روابط حاکم و مشخصات مواد، روی این اجزاء مورد بررسی قرار می‌گیرند و مسائل به‌صورت نامعلوم در گوشه‌های هر جزء بیان می‌شوند. پس از فرایند جمع‌آوری با در نظر گرفتن نوع بارگذاری و قیود، مجموعه‌ای از معادلات نتیجه می‌شود که حل این معادلات، رفتار تقریبی محیط پیوسته را به ما می‌دهد.

در این تحقیق، مسأله علاوه بر حل به‌صورت تحلیلی، به کمک نرم‌افزار آباکوس[1] از روش اجزای محدود نیز بررسی شده‌است. البته در نرم‌افزار آباکوس ماده FG تعریف نشده‌است، بنابراین برای مدل‌سازی این مواد از تعریف خواص مکانیکی و روابط رفتاری در زیربرنامه UMAT این نرم‌افزار استفاده شده‌است.

۱-۵- پیشینه‌ی پژوهش

تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای همگن و همسانگرد به روش‌های مختلف، همان‌گونه که بیان شد، دارای سابقه نسبتاً طولانی است و تحلیل استوانه‌های ناهمسانگرد به حدود نیم قرن پیش برمی‌گردد، ولی سابقه تحلیل استوانه‌های ناهمگن FG بویژه تحلیل الاستوپلاستیک این نوع پوسته‌ها، به کمتر از یک دهه می‌رسد، و در سال‌های اخیر به‌شدت مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. در ادامه سعی شده است به طور مختصر به بیان مطالعات گذشته در زمینه‌های مرتبط با این تحقیق پرداخته شود.

[1] Abaqus Software

۱-۵-۱- پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم همگن

اولین بار لامه[1] در سال ۱۸۵۲ با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی مستوی، حل دقیق پوسته‌های استوانه‌ای همگن را تحت فشار یکنواخت ارائه کرد [۳]. گلرکین[2] در سال ۱۹۳۰ روابط حاکم بر استوانه جدار ضخیم را با استفاده از روابط الاستیسیته به‌دست آورد. ولاسف[3] در سال ۱۹۴۹ با استفاده از تئوری الاستیسیته خطی، معادلات قابل حلی را برای پوسته‌های جدار ضخیم ارائه کرد. گریسپن[4] در ۱۹۶۰ مقادیر ویژه استوانه جدار ضخیم را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های جدار نازک و جدار ضخیم، محاسبه و با یکدیگر مقایسه نمود. جهانیان در ۱۹۹۶ تحلیل تنش ترموالاستوپلاستیک لوله جدار ضخیم با در نظر گرفتن سخت‌شوندگی غیرخطی را ارائه کرد[۴]. ارکان[5] و اراسلان در ۲۰۰۲ به بررسی الاستیک- پلاستیک دیسک‌های چرخان با ضخامت متغیر پرداختند و تنش‌ها را با در نظر گرفتن سخت‌شوندگی خطی [۵]، تغییر شکل‌های دیسک با ضخامت متغیر به‌صورت نمایی [۶] و تنش‌های دیسک با ضخامت متغیر به‌صورت خطی [۷] را به‌دست آوردند. اراسلان در ۲۰۰۲ به بررسی دیسک‌های دوار سوراخ‌دار با ضخامت متغیر با در نظر گرفتن سخت‌شوندگی غیر خطی به کمک معیار تسلیم فون میزز پرداخت[۸]. همچنین وی در ۲۰۰۳ تغییر شکل‌های الاستیک- پلاستیک دیسک‌های دوار سوراخ‌دار با ضخامت متغیر، با شرایط مرزی مختلف را به‌دست آورد[۹] و در همان سال تغییر شکل‌های الاستوپلاستیک دیسک‌های دوار سهموی به کمک معیار ترسکا را به‌دست آورد [۱۰]. ایپک‌چی و همکاران در سال ۲۰۰۳ معادلات استوانه‌های همگن و همسانگرد با جدتر متغیر را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، اسخراج و به کمک تئوری اغتشاشات[6] حل کردند [۱۱]. گائو[7] در ۲۰۰۳ تحلیل الاستیک- پلاستیک استوانه جدار ضخیم تحت فشار داخلی را به کمک تئوری پلاستیسیته گرادیان کرنش

---

[1] Lame
[2] Galerkin
[3] Vlassov
[4] Greesspon
[5] Orcan
[6] Perturbation Teory
[7] Gao

ارائه داد[۱۲]. قناد و همکاران در سال ۲۰۰۹ حل عمومی پوسته‌های مخروطی شکل ناقص جدار ضخیم همگن همسانگرد را بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول به کمک تئوری اغتشاشات ارائه نمودند [۱۳].

۱-۵-۱- پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم ناهمگن(FGM)

مواد FG توسط نینو[1] و همکاران در سال ۱۹۸۴ مطرح شد [۱۴]. فوکویی و یاماناکا[2] در ۱۹۹۲ روابط الاستیک حاکم بر لوله‌های جدار ضخیم FGM تحت فشار داخلی را به کمک معادلات لامه استخراج

و به روش عددی رانج-کوتا حل کردند [۱۵]. اباتا و نودا[3] در ۱۹۹۴ تنش‌های حرارتی پایدار را در استوانه و کره توخالی FGM اسخراج و ماده بهینه را به‌دست آوردند[۱۶]. هورگان و چان[4] در ۱۹۹۹ معادلات حاکم بر یک استوانه توخالی FGM در حالت کرنش صفحه‌ای با توزیع توانی مدول الاستیسیته در راستای شعاعی به کمک معادلات لامه استخراج و توزیع تنش را به‌دست آوردند [۱۷]. ترکیب بهینه مواد در استوانه توخالی FGM تحت بارهای حرارتی به کمک شبکه‌های عصبی در ۱۹۹۹ توسط اوتائو[5] و همکاران ارائه شد [۱۸]. توتونچو و ازترک[6] در ۲۰۰۱ حل دقیق مخازن تحت فشار استوانه‌ای و کروی جدار ثابت FGM را ارائه کردند که در مقاله ایشان نمودار و رابطه مربوط به تنش محیطی و نمودار تنش شعاعی اشتباه رسم شده است [۱۹].

جباری و همکاران تنش‌های حرارتی و مکانیکی در یک استوانه توخالی FGM با توزیع توانی خواص مکانیکی و حرارتی تحت بارهای متقارن را در سال ۲۰۰۲ [۲۰] و تحت بارهای نامتقارن محوری را در ۲۰۰۳ [۲۱] ارائه کردند. نقدآبادی و کردخیلی در ۲۰۰۵ یک فرمول‌بندی اجزای محدود برای تحلیل ورق‌ها و پوسته‌های FGM ارائه دادند [۲۲]. هونگجون و همکاران در ۲۰۰۶ حل دقیق استوانه‌های توخالی FGM با تغییرات خطی

[1] Niino
[2] Fukui & Yamanaka
[3] Obata & Noda
[4] Horgan & Chan
[5] Ootao
[6] Tutuncu & Ozturk

خواص مکانیکی در راستای شعاعی را با لایه‌های همگن ارائه نمودند [۲۳]. اراسلان و آکیس[1] در ۲۰۰۶ [۲۴] حل تحلیلی الاستیک- پلاستیک کرنش صفحه‌ای لوله تحت فشار FGM و در سال ۲۰۰۷ [۲۵] تحلیل الاستوپلاستیک استوانه چرخان FGM در حالت کرنش صفحه‌ای را ارائه کردند. ژیفای و همکاران در ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به‌صورت خطی و توانی، استوانه FGM را با روش چند لایه‌ای کردن استوانه، تحلیل و با حل توتونچو(۲۰۰۱) مقایسه کردند [۲۶]. توتونچو در ۲۰۰۷ مشابه مقاله پیشین ولی با در نظر گرفتن تغییرات مدول الاستیسیته به‌صورت نمایی، توزیع تنش‌ها را در یک استوانه ناهمگن به‌دست آوردند [۲۷]. شاو در ۲۰۰۸ تحلیل ترمومکانیکی استوانه‌های توخالی تشکیل شده از مواد FG با تغییرات نمایی خواص تحت بارهای مکانیکی و افزایش خطی دمای مرزی را با انتقال معادلات دیفرانسیل حاکم به حوزه لاپلاس و استفاده از روش حل به کمک سری‌ها، انجام دادند [۲۸]. قناد و همکاران در ۱۳۸۹حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری FGM را بر مبنای PET به ازای ریشه‌های حقیقی، مضاعف و مختلط در شرایط تنش صفحه‌ای، کرنش صفحه‌ای و استوانه بسته ارائه و اشتباه مقاله توتونچو(۲۰۰۱) را تصحیح نمودند [۲۹]. همچنین ایشان در همان سال بر مبنای FSDT معادلات حاکم بر استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری FGM را در حالت کلی استخراج کرده و سپس جابه‌جایی و تنش‌ها را برای استوانه با دو سر بسته و مقید، به‌صورت تحلیلی به‌دست آوردند و با نتایج ناشی از حل PET مقایسه کردند [۳۰]. نمت‌الا[2] و همکاران در ۲۰۰۹ تحلیل الاستیک- پلاستیک دو بعدی مواد FG تحت بار حرارتی را ارائه نمودند [۳۱]. توتونچو در ۲۰۰۹ توزیع میدان جابه‌جایی و مقادیر تنش مربوط به دیسک، استوانه و کره توخالی FGM با تغییرات توانی خواص ماده در راستای شعاع، تحت فشار داخلی با استفاده از روش PET و روش تابع متمم تعیین نمود [۳۲]. جباری و همکاران در ۲۰۰۹ به بررسی تنش‌های مکانیکی و حرارتی متقارن محوری در استوانه‌های جدار ضخیم کوتاه FGM پرداختند [۳۳]. قربان‌پور و همکاران در ۲۰۱۱ اثر ناهمگنی را بر روی

---

[1] Eraslan & Akis
[2] Nemat-Alla

رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی یک استوانه چرخان جدار ضخیم FGPM[1] با تغییرات توانی خواص تحت فشار داخلی و خارجی بررسی و معادلات حاصل را حل کردند [۳۴]. ازترک و گولگس[2] در ۲۰۱۱ به ارائه تحلیل تنش الاستیک- پلاستیک در استوانه FGM بلند با دو انتهای بسته در معرض تولید یکنواخت حرارت پرداختند[۳۵].

۱-۶- جمع‌بندی

بررسی پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل کاربرد فراوان، از اهمیت زیادی برخودار است. و ساخت پوسته‌ای استوانه‌ای از مواد FG که قادر به تحمل بار بیشتری نسبت به پوسته همگن بوده و یا وزن کمتری نسبت به آن داشته باشد پیشرفت بزرگی در صنعت محسوب می‌شود. بنابراین شرایط مختلف تحلیل استوانه‌های FGM باید مورد بررسی قرار گیرد. برای تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم همگن و ناهمگن با جدار ثابت، بارگذاری و شرایط انتهایی، به گونه‌ای که مسأله از حالت الاستیسیته دو بعدی خارج نشود، می‌توان از تئوری الاستیسیته مستوی استفاده کرد. ولی برای تحلیل استوانه‌های جدار ضخیم همگن و ناهمگن با جدار متغیر، روش مناسب، استفاده از تئوری تغییر شکل برشی است. از پارامترهای مهم دیگر در طراحی قطعات حد تسلیم و شکست آن‌ها است، از این‌رو تحلیل پلاستیک استوانه FGM ضرورت زیادی خواهد داشت. در این تحقیق سعی شده تا تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار ضخیم همگن و ناهمگن تحت بار فشاری و حرارتی در شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به کمک معیارهای تسلیم ترسکا و فون میزز ارائه شود.

[1] Functionally Graded Porous Materials
[2] Ozturk & Gulgec

فصل ۲

روابط اساسی

در این فصل روابط و فرضیات اساسی حاکم بر پوسته استوانه‌ای شامل روابط رفتاری، روابط سینماتیک، تئوری الاستیسیته مستوی و شرایط متقارن محوری بیان شده است. با کمک این روابط و فرضیات معادلات حاکم بر پوسته استوانه‌ای همگن و FGM برای بارگذاری‌های مختلف به‌دست آمده است. در این روابط خواص مکانیکی استوانه FG را به‌صورت تابعی توانی از شعاع استوانه در نظر می‌گیریم.

۲-۱- خواص مکانیکی ماده

خواص مکانیکی استوانه FG شامل مدول الاستیک، تنش تسلیم، ضریب انبساط حرارتی و ضریب هدایت حرارتی را به‌ترتیب به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} E(r)=E_i r^{n_1} \Rightarrow E(R)=E_i\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_1}=E_i R^{n_1} \\ \sigma_y(r)=\sigma_{y_i} r^{n_2} \Rightarrow \sigma_y(R)=\sigma_{y_i}\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_2}=\sigma_{y_i} R^{n_2} \\ \alpha(r)=\alpha_i r^{n_3} \Rightarrow \alpha(R)=\alpha_i\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_3}=\alpha_i R^{n_3} \\ K(r)=K_i r^{n_4} \Rightarrow K(R)=K_i\left(\dfrac{r}{r_i}\right)^{n_4}=K_i R^{n_4} \end{cases} \tag{۲- ۱}$$

در روابط بالا اگر ضرایب ناهمگنی صفر فرض شود، خواص ماده همگن که همگی ثابت هستند، بدست می‌آیند.

۲-۲- معادلات تعادل تنش در مختصات استوانه‌ای

معادله تعادل تنش در حالت کلی به‌صورت زیراست [۳۶].

$$\vec{\nabla}.\tilde{\sigma}+\vec{B}=\vec{0} \tag{۲- ۲}$$

که با بسط دادن این رابطه در مختصات استوانه‌ای، معادلات تعادل تنش در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\left(\sigma_r-\sigma_\theta\right)+B_r=0$$

$$\frac{\partial\tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}+B_\theta=0 \qquad (۲- ۳)$$

$$\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\theta z}}{\partial\theta}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}+B_z=0$$

۲-۳- روابط رفتاری (تنش- کرنش)

رابطه بین تنش و کرنش، برای مواد ارتجاعی خطی ایزوتروپیک، در حالت ترموالاستیک به‌صورت زیر است. [۳۷].

$$\sigma_{ij}=2\mu\varepsilon_{ij}+\lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right)\delta_{ij} \qquad (۲- ۴)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{-\lambda}{2\mu\left(3\lambda+2\mu\right)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}+\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right)\delta_{ij} \qquad (۲- ۵)$$

که در این روابط μ و λ ثابت‌های لامه هستند و به‌صورت زیر نوشته می‌شوند.

$$\lambda=\frac{\nu E\left(r\right)}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\ \mu=\frac{E\left(r\right)}{2\left(1+\nu\right)} \qquad (۲- ۶)$$

با نوشتن روابط تنش-کرنش در مختصات استوانه‌ای، داریم:

$$\begin{cases}\sigma_r=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z\right)+2\mu\varepsilon_r-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right)\\ \sigma_\theta=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z\right)+2\mu\varepsilon_\theta-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right)\\ \sigma_z=\lambda\left(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta+\varepsilon_z\right)+2\mu\varepsilon_z-\left(3\lambda+2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right)\\ \tau_{Rz}=\mu\gamma_{Rz}\quad,\ \tau_{R\theta}=\mu\gamma_{R\theta}\quad,\ \tau_{\theta z}=\mu\gamma_{\theta z}\end{cases} \qquad (۲- ۷)$$

$$
\begin{cases}
\varepsilon_r = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha(r)\theta(r) \\
\varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \alpha(r)\theta(r) \\
\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha(r)\theta(r) \\
\gamma_{rz} = \dfrac{1}{\mu}\tau_{rz}, \quad \gamma_{r\theta} = \dfrac{1}{\mu}\tau_{r\theta}, \quad \gamma_{\theta z} = \dfrac{1}{\mu}\tau_{\theta z}
\end{cases}
\tag{۲- ۸}
$$

۲-۴- روابط سینماتیک (تغییر مکان-کرنش)

رابطه کلی سینماتیک به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$
\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla}\vec{u} + \left(\vec{\nabla}\vec{u}\right)^T\right)
\tag{۲- ۹}
$$

معادلات سینماتیک برای حالت استوانه‌ای به‌صورت زیر ساده می‌شوند

$$
\begin{cases}
\varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\
\varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} \\
\varepsilon_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\
\gamma_{R\theta} = \left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} - \dfrac{u_\theta}{r}\right) \\
\gamma_{\theta z} = \left(\dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta}\right) \\
\gamma_{rz} = \left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right)
\end{cases}
\tag{۲- ۱۰}
$$

۲-۵- مسائل متقارن محوری[1]

مسأله متقارن محوری، مسأله‌ای است که در آن هندسه، بارگذاری، شرایط مرزی و خواص نیز متقارن باشد و در نتیجه میدان تغییر شکل و تنش، تقارن محوری داشته باشد. در اینجا نیز می‌توان با فرض توزیع بارهای حرارتی و مکانیکی در راستای شعاعی و متقارن در راستای مماسی، مسأله را متقارن محوری در نظر گرفت، بنابراین خواهیم داشت.

$$u_\theta = 0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = 0 \tag{۲- ۱۱}$$

با فرض تقارن محوری، معادلات سینماتیک، معادلات تعادل تنش و معادلات رفتاری، به‌ترتیب به‌صورت روابط زیر تبدیل می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \\ \gamma_{rz} = \left(\dfrac{\partial u_r}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial r}\right), \gamma_{r\theta} = 0 \ \ , \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \tag{۲- ۱۲}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{1}{r}\left(\sigma_r - \sigma_\theta\right) + B_r = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + B_z = 0 \end{cases} \tag{۲- ۱۳}$$

[1] Axisymmetric

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z\right) + 2\mu\varepsilon_r - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \sigma_\theta = \lambda\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z\right) + 2\mu\varepsilon_\theta - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \sigma_z = \lambda\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z\right) + 2\mu\varepsilon_z - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \tau_{rz} = \mu\gamma_{rz} \quad , \quad \tau_{r\theta} = \mu\gamma_{r\theta} = 0 \quad , \quad \tau_{\theta z} = 0 \end{cases} \tag{۲- ۱۴}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \gamma_{rz} = \dfrac{1}{\mu}\tau_{rz}, \quad \gamma_{r\theta} = 0 \ , \quad \gamma_{\theta z} = 0 \end{cases} \tag{۲- ۱۵}$$

۲-۶- تئوری الاستیسیته مستوی

در تئوری الاستیسیته مستوی (PET)[1] فرض می‌شود که مقاطع مستوی عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل، همچنان مستوی و عمود باقی می‌مانند. تغییر شکل‌های ایجاد شده نسبت به محور استوانه، متقارن می‌باشند و مقدارشان در امتداد طول استوانه تغییر نمی‌کند. تغییر مکان در امتداد محیط ثابت است ولی در راستای شعاعی تغییر می‌کند، به عبارت دیگر، جابه‌جایی شعاعی فقط تابع شعاع است. یعنی المان چرخش ندارد، لذا کرنش برشی γ_{rz} و تنش برشی τ_{rz} در نظر گرفته نمی‌شوند. این بدان معناست که محورهای استوانه‌ای، محورهای اصلی و تنش‌های عمودی، تنش‌های اصلی هستند. و همچنین تنش و کرنش طولی در راستای طول استوانه تغییر نمی‌کنند.

$$\gamma_{rz} = 0 \ , \ \tau_{rz} = 0 \ , \ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} = 0 \ , \ \frac{\partial\epsilon_z}{\partial z} = 0 \tag{۲- ۱۶}$$

تنش‌های اصلی:

$$\sigma_r \ , \quad \sigma_\theta \quad , \ \sigma_z \tag{۲- ۱۷}$$

---

[1] Plane Elasticity Theory (PET)

بنابراین با فرض تقارن محوری، معادلات سینماتیک (۲-۱۲)، معادلات تعادل تنش (۲-۱۳) و معادلات رفتاری (۲- ۱۴) و (۲- ۱۵)، به‌ترتیب به‌صورت روابط (۲- ۱۸ تا ۲۱) تبدیل می‌شوند.

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{u_r}{r} \end{cases} \tag{۲- ۱۸}$$

در غیاب نیروهای حجمی معادله تعادل تنش بی بعد شده به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R}\left(\sigma_R - \sigma_\theta\right) = 0 \tag{۲- ۱۹}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z\right) + 2\mu\varepsilon_r - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \sigma_\theta = \lambda\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z\right) + 2\mu\varepsilon_\theta - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \sigma_z = \lambda\left(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z\right) + 2\mu\varepsilon_z - \left(3\lambda + 2\mu\right)\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \end{cases} \tag{۲- ۲۰}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \end{cases} \tag{۲- ۲۱}$$

روابط تنش-کرنش را می‌توان به‌صورت ماتریسی زیر تعریف کرد.

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{pmatrix} = E\left(r\right)\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ -\alpha\left(r\right)\theta\left(r\right) \end{pmatrix} \tag{۲- ۲۲}$$

ضرایب A، B و C ثابت‌هایی هستند که با توجه به شرایط انتهایی استوانه به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

الف) استوانه با دو سر باز (تنش صفحه‌ای)

$$A = \frac{1}{1-\nu^2} \quad , \quad B = \frac{\nu}{1-\nu^2} \quad , \quad C = \frac{\nu}{1-\nu} \tag{۲- ۲۳}$$

ب) استوانه با دو سر بسته (کرنش صفحه‌ای)

$$\mathrm{A}=\frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mathrm{B}=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad C=\frac{\nu}{1-2\nu} \tag{۲-۲۴}$$

۲-۷- مساله انتقال حرارت

شکل کلی معادله هدایت حرارتی در مختصات استوانه‌ای به‌صورت زیر است [۳۸].

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k(r)r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(k(r)\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k(r)\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\dot{q}=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{۲-۲۵}$$

T: توزیع دما ، q: تولید حرارت ، ρ: چگالی، c: گرمای ویژه، k : هدایت حرارتی

با فرض مساله در شرایط حالت پایا، متقارن محوری، فاقد منبع حرارتی و توزیع دما فقط در جهت شعاع، رابطه توزیع دمای بی بعد شده در استوانه به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(k\left(R\right)R\frac{dT}{dR}\right)=0 \tag{۲-۲۶}$$

۲-۷-۱- استوانه همگن

در رابطه بالا اگر ضریب ناهمگنی $\mathrm{n}_4=0$ فرض شود، هدایت حرارتی مقدار ثابت K خواهد داشت. بنابراین توزیع دما در استوانه همگن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

از رابطه فوق انتگرال می‌گیریم.

$$T\left(R\right)=C_1+C_2\ln R \tag{۲-۲۷}$$

شرایط مرزی حرارتی در استوانه به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} r=r_i \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_i}{r_i}=1 \Rightarrow T=T_i \\ r=r_o \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_o}{r_i}=k \Rightarrow T=T_o \end{cases} \tag{۲-۲۸}$$

در این روابط r_i و r_o به‌ترتیب شعاع داخلی وخارجی استوانه توخالی هستند. با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = T_i \\ C_2 = \dfrac{T_o - T_i}{\ln k} \end{cases} \tag{۲- ۲۹}$$

با جایگذاری ثابت‌ها، داریم.

$$T\left(R\right) = \frac{T_i - T_o}{\ln k} \ln\left(\frac{k}{R}\right) + T_o \tag{۲- ۳۰}$$

تغییرات دما در استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\theta\left(R\right) = T\left(R\right) - T^* = \frac{\Delta\theta}{\ln k} \ln\left(\frac{R}{k}\right) + \theta_o \tag{۲- ۳۱}$$

که،

$$\theta_i = T_i - T^* \quad ,\theta_o = T_o - T^* \quad ,\Delta\theta = \theta_o - \theta_i$$

در رابطه بالا T^* دمای هوای محیط، θ_o اختلاف دمای سطح خارجی با دمای محیط، θ_i اختلاف دمای سطح داخلی با دمای محیط و $\Delta\theta$ اختلاف دمای سطح داخلی و خارجی می‌باشد.

۲-۷-۲- استوانه FGM

با جایگذاری $K\left(R\right) = K_i R^{n_4}$ در رابطه (۲- ۲۶) توزیع دمای بی بعد شده در استوانه ناهمگن FG به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dR}\left(k_i R^{n_4+1}\frac{dT}{dR}\right) = 0 \tag{۲- ۳۲}$$

از رابطه فوق انتگرال می‌گیریم.

$$T\left(R\right) = C_1\left(-\frac{1}{n_4}R^{-n_4}\right) + C_2 \tag{۲- ۳۳}$$

شرایط مرزی حرارتی در استوانه به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} r=r_i \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_i}{r_i}=1 \Rightarrow T=T_i \\ r=r_o \Rightarrow R=\dfrac{r}{r_i}=\dfrac{r_o}{r_i}=k \Rightarrow T=T_o \end{cases} \qquad (۲- ۳۴)$$

با اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند سپس با جایگذاری ثابت‌ها داریم.

$$T(R)=(T_o-T_i)\frac{1-R^{-n_4}}{1-k^{-n_4}}+T_i \qquad (۲- ۳۵)$$

تغییرات دما در استوانه FG به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\theta(R)=T(R)-T^*=\Delta\theta\frac{1-R^{-n_4}}{1-k^{-n_4}}+\theta_i \quad ,\theta_i=T_i-T^* \ ,\theta_o=T_o-T^* \ ,\Delta\theta=\theta_o-\theta_i \qquad (۲- ۳۶)$$

در رابطه بالا اگر دمای سطح خارجی برابر دمای محیط فرض شود $(\theta_o=0)$، تغییرات دما در استوانه FG را می‌توان به‌صورت زیر نوشت.

$$\theta(R)=\theta_i\left(\frac{R^{-n_4}-k^{-n_4}}{1-k^{-n_4}}\right) \qquad (۲- ۳۷)$$

۲-۸- معیارهای تسلیم

در این تحقیق برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه همگن و ناهمگن از معیارهای تسلیم ترسکا و فون میزز استفاده شده است.

۲-۸-۱- معیار تسلیم ترسکا

این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش برشی، پیشنهاد گردیده است. بر اساس این تئوری، تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش برشی برابر مقاومت تسلیم برشی ماده می‌شود. بنابراین با مشخص بودن تنش‌های اصلی، معیار ترسکا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$max(\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1)-max(\sigma_3,\sigma_2,\sigma_1)=\sigma_y \qquad (۲- ۳۸)$$

۲-۸-۲- معیار تسلیم فون میزز

این معیار بر اساس تئوری بیشترین کرنشی واپیچشی استوار است. این تئوری در صورت رسیدن انرژی کرنشی واپیچشی به حد مشخصی آغاز تسلیم را خبر می‌دهد. بنابراین با مشخص بودن تنش‌های اصلی، معیار فون میزز به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=2\sigma_y \tag{۲-۳۹}$$

فصل ۳

تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه جدار ضخیم همگن تحت فشار داخلی

در این فصل در ابتدا با استفاده از روابط اساسی توزیع تنش‌های الاستیک در استوانه جدار ضخیم همگن تحت اثر فشار داخلی و دمای داخلی به‌دست آمده است. سپس در ۳ حالت استوانه تحت فشار داخلی، استوانه تحت اثر دمای داخلی و استوانه تحت فشار و دمای داخلی، به کمک معیار تسلیم ترسکا و فون میزز استوانه مورد تحلیل الاستوپلاستیک قرار گرفته است.

۳-۱- توزیع تنش‌های الاستیک در استوانه همگن تحت اثر نیروهای مکانیکی و حرارتی

با جایگذاری روابط سینماتیک (۲-۱۸) در روابط رفتاری (۲-۲۲) سپس در رابطه تعادل (۲- ۱۹) و با صفر در نظر گرفتن ضرایب ناهگنی، معادله دیفرانسیلی ناویر برای جابجایی حاصل می‌شود.

$$u_R'' + \frac{1}{R}u_R' - \frac{1}{R^2}u_R = \frac{C}{A}\alpha\frac{d\theta}{dR} \tag{۳-۱}$$

پاسخ معادله دیفرانسیل (۳-۱) دارای دو حل عمومی و خصوصی به‌صورت زیر است.

$$u_R = u_g + u_p \tag{۳-۲}$$

حل عمومی معادله با انتگرال گیری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_g = C_1 R + \frac{C_2}{R} \tag{۳- ۳}$$

جواب خصوصی معادله را با کمک روش لاگرانژ به‌دست می‌آوریم. با استفاده از جواب عمومی رونسکین (W) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$y_1 = R \Rightarrow y_1' = 1 \quad , \quad y_2 = \frac{1}{R} \Rightarrow y_2' = \frac{-1}{R^2}$$

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R & \frac{1}{R} \\ 1 & \frac{-1}{R^2} \end{vmatrix} = \frac{-2}{R} \tag{۳- ۴}$$

$$u_P = -y_1 \int \frac{y_2\left(\frac{C}{A}\alpha\frac{d\theta}{dR}\right)}{w} dR + y_2 \int \frac{y_1\left(\frac{C}{A}\alpha\frac{d\theta}{dR}\right)}{w} dR$$

$$u_P = \frac{1}{R}\frac{C}{A}\alpha\int_1^k R\theta dR$$

بنابراین جابجایی برابر است با

$$u_R = C_1 R + \frac{C_2}{R} + \frac{1}{R}\frac{C}{A}\alpha\int_1^R R\theta dR \qquad (۳- ۵)$$

با جایگذاری رابطه (۳- ۵) در روابط سینماتیک (۲-۱۸) و سپس در رابطه رفتاری (۲-۲۲)، تنش‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R = E\left[(A+B)C_1 + (B-A)C_2 R^{-2} + \frac{(B-A)C}{A}\frac{\alpha}{R^2}\int_1^R R\theta dR\right] \qquad (۳- ۶)$$

$$\sigma_\theta = E\left[(A+B)C_1 + (A-B)C_2 R^{-2} + \frac{(A-B)C}{A}\frac{\alpha}{R^2}\int_1^R R\theta dR + \frac{(B-A)C}{A}\alpha\theta\right] \qquad (۳-۷)$$

شرایط مرزی سطح داخلی و خارجی استوانه تحت فشار داخلی، به‌صورت رابطه (۳- ۸) خواهد بود.

$$\begin{cases} r = r_i \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sigma_R = -P_i \\ r = r_o \Rightarrow R = k \;\Rightarrow\; \sigma_R = 0 \end{cases} \qquad (۳- ۸)$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه (۳- ۶) ضرایب C_1 و C_2 به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{P_i}{E(A+B)(k^2-1)} + \dfrac{(A-B)C\alpha}{(A+B)(k^2-1)A}\displaystyle\int_1^k R\theta dR \\ C_2 = \dfrac{k^2 P_i}{E(A-B)(k^2-1)} + \dfrac{C\alpha}{A(k^2-1)}\displaystyle\int_1^k R\theta dR \end{cases} \qquad (۳- ۹)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۳۱) در روابط (۳-۹)، (۳- ۶) و (۳-۷)، سپس جایگذاری روابط (۳-۹) در رابطه (۳-۶) و (۳-۷) داریم.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right) + \frac{(A-B)C}{A}\frac{E\alpha\Delta\theta}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right) + \ln\frac{k}{R}\right) \qquad (۳- ۱۰)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) + \frac{(A-B)C}{A}\frac{E\alpha\Delta\theta}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) + \ln\frac{k}{R} - 1\right) \qquad (۳-۱۱)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۲۳) در روابط (۳- ۱۰) و (۳-۱۱) توزیع تنش‌ها در شرایط تنش صفحه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\frac{E\alpha\Delta\theta}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۲-۳)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\frac{E\alpha\Delta\theta}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}-1\right) \quad (۱۳ -۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲- ۲۴) در روابط (۳-۱۰) و (۳-۱۱) توزیع تنش‌ها در شرایط کرنش صفحه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\frac{E\alpha\Delta\theta}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۴ -۳)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\frac{E\alpha\Delta\theta}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}-1\right) \quad (۱۵ -۳)$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu P_i}{k^2-1}+\frac{\nu E\alpha\Delta\theta}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{2\ln k}{k^2-1}+\frac{2}{\nu}\ln\frac{k}{R}-1\right)-E\alpha\theta_o \quad (۱۶ -۳)$$

۳-۲- تحلیل الاستوپلاستیک استوانه همگن با کمک معیار تسلیم ترسکا

برای تحلیل الاستوپلاستیک استوانه به کمک معیار تسلیم ترسکا، استوانه را در ۳ وضعیت، استوانه تحت فشار داخلی، استوانه تحت اثر دمای داخلی و استوانه تحت فشار و دمای داخلی در نظر می‌گیریم.

۳-۲-۱- تحلیل الاستوپلاستیک استوانه همگن تحت فشار داخلی

توزیع تنش‌ها در استوانه الاستیک کامل تحت فشار داخلی ($\Delta\theta = 0$) برای هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای طبق روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳) به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right) \quad (۱۷-۳)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) \quad (۱۸-۳)$$

۳-۲-۱-۱- تنش صفحه‌ای

با بررسی روابط (۳-۱۷) و (۳-۱۸)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر استوانه همگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای به‌صورت زیر است.

$$\sigma_R < (\sigma_z = 0) < \sigma_\theta \tag{۳- ۱۹}$$

الف) شروع تسلیم

بر اساس رابطه (۳-۱۹)، معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \tag{۳-۲۰}$$

در رابطه (۳-۲۰)، σ_y تنش تسلیم در استوانه است.

بر اساس رابطه (۳-۲۰)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Phi_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_y} \tag{۳-۲۱}$$

با توجه به رابطه (۳-۲۱) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۱۷ و ۱۸) در رابطه (۳-۲۱) در آغاز تسلیم، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{P_i}{k^2-1}\left(\frac{2k^2}{R^2}\right) = \sigma_y \tag{۳-۲۲}$$

با توجه به رابطه‌ی بالا ماکزیمم این عبارت در R=1 می‌باشد. بنابراین در استوانه تحت فشار داخلی تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود و فشار بحرانی تسلیم برابر است با :

$$\left(P_i\right)_{cr} = \frac{\left(k^2-1\right)\sigma_y}{2k^2} \tag{۳-۲۳}$$

اگردر استوانه $P_i > (P_i)_{cr}$ تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود.

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری روابط (۲-۲۳) در روابط (۳-۶) و (۳-۷) و همچنین جایگذاری رابطه (۳-۵) در روابط (۲-۱۸)، در شرایطی که استوانه فقط تحت فشار داخلی می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R^e = E\left[\frac{1}{1-\nu}C_1 - \frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2}\right] \tag{۳-۲۴}$$

$$\sigma_\theta^e = E\left[\frac{1}{1-\nu}C_1 + \frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2}\right] \tag{۳-۲۵}$$

$$\sigma_z^e = 0 \tag{۳-۲۶}$$

$$u_R^e = C_1R + \frac{1}{R}C_2 \tag{۳-۲۷}$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 - \frac{1}{R^2}C_2 \tag{۳-۲۸}$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 + \frac{1}{R^2}C_2 \tag{۳-۲۹}$$

ج) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده

با جایگذاری معیار ترسکا در رابطه تعادل، توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R^p = \sigma_y \ln R + C_3 \tag{۳-۳۰}$$

$$\sigma_\theta^p = \sigma_y\left(\ln R + 1\right) + C_3 \tag{۳-۳۱}$$

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک و پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p \quad , i = R,\theta,z \tag{۳-۳۲}$$

ε_i:کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک.

رابطه ساختاری الاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i,j,k = R,\theta,z \tag{۳-۳۳}$$

رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک برابر است با

$$\varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \tag{۳-۳۴}$$

رابطه بین کرنش کل و جابجایی همان روابط سینماتیک می‌باشد.

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود [۳۹].

$$\varepsilon_z^p = 0 \tag{۳-۳۵}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۳۵) در رابطه (۳-۳۴) داریم

$$\varepsilon_R^p = -\varepsilon_\theta^p \tag{۳-۳۶}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۳۳) در رابطه (۳-۳۲) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] \tag{۳-۳۷}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] \tag{۳-۳۸}$$

از مجموع دو رابطه (۳-۳۷) و (۳-۳۸) داریم

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta = \varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] \tag{۳-۳۹}$$

با جاگذاری روابط (۳-۳۰)، (۳-۳۱)، (۳-۳۶) و (۲-۱۸) در رابطه (۳-۳۹) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} = \frac{1}{E}(1-\nu)\left[\sigma_y\left(2\ln R + 1\right) + 2C_3\right] \tag{۳-۴۰}$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۳-۴۰)، جابجایی کل در ناحیه پلاستیک (u_R^p) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^p = \frac{(1-\nu)}{E} R\left[\sigma_y \ln R + C_3\right] + \frac{C_4}{R} \tag{۳-۴۱}$$

با جاگذاری روابط (۳-۳۰)، (۳-۳۱) و (۲-۱۸) در رابطه (۳-۳۸) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{u_R}{R} - \frac{1}{E}\left[\sigma_y\left((1-\nu)\ln R + 1\right) + (1-\nu)C_3\right] \tag{۳-۴۲}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۴۱) به جای u_R در رابطه (۳-۴۲)، کرنش شعاعی (ε_R^p) و کرنش محیطی (ε_θ^p) در ناحیه پلاستیک، به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_R^p = -\frac{\sigma_y}{E} + \frac{C_4}{R^2} \qquad (۳-۴۳)$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی با توجه به نحوه تسلیم استوانه به‌دست می‌آیند.

اگر در استوانه $P_i > (P_i)_{cr}$ باشد، استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۲۴ تا ۲۹)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۴۱ تا ۴۳)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^P\left(R=1\right) = \dfrac{-P_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^P\left(R=R_{ep}\right) = \sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\left(\sigma_z^e=0\right) - \dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y} = 1 \\ 4)u_R^P\left(R=R_{ep}\right) = u_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^e\left(R=k\right) = 0 \end{cases} \qquad (۳-۴۴)$$

۳-۲-۱-۲- کرنش صفحه‌ای

با بررسی روابط (۳-۱۴ تا ۱۶)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر استوانه همگن تحت فشار داخلی در حالت کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر است.

$$\sigma_R < \sigma_z < \sigma_\theta \qquad (۳-۴۵)$$

الف) شروع تسلیم

بر اساس رابطه (۳-۴۵)، معیار تسلیم ترسکا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \tag{۴۶-۳}$$

بر اساس رابطه (۳-۴۶)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Phi_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_y} \tag{۴۷-۳}$$

با توجه به رابطه (۳-۴۷) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۱۴ و ۱۵) در رابطه (۳-۴۷) در آغاز تسلیم، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{P_i}{k^2-1}\left(\frac{2k^2}{R^2}\right) = \sigma_y \tag{۴۸-۳}$$

با توجه به رابطه‌ی بالا ماکزیمم این عبارت در R=1 می‌باشد بنابراین در استوانه تحت فشار داخلی تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود و فشار بحرانی تسلیم برابر است با :

$$\left(P_i\right)_{cr} = \frac{\left(k^2-1\right)\sigma_y}{2k^2} \tag{۴۹-۳}$$

اگردر استوانه $P_i > (P_i)_{cr}$تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود.

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری روابط (۲-۲۴) در روابط (۳-۶) و (۳-۷) و همچنین جایگذاری رابطه (۳-۵) در روابط (۲-۱۸)، در شرایطی که استوانه فقط تحت فشار داخلی می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R^e = E\left[\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}C_1 - \frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2}\right] \tag{۵۰-۳}$$

$$\sigma_\theta^e = E\left[\frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)}C_1 + \frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2}\right] \tag{۵۱-۳}$$

$$\sigma_z^e = \frac{2\nu C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{۵۲-۳}$$

$$u_R^e = C_1 R + \frac{1}{R} C_2 \qquad (۵۳-۳)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 - \frac{1}{R^2} C_2 \qquad (۵۴-۳)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 + \frac{1}{R^2} C_2 \qquad (۵۵-۳)$$

ج) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده

با جایگذاری معیار ترسکا در رابطه تعادل، توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R^p = \sigma_y \ln R + C_3 \qquad (۵۶-۳)$$

$$\sigma_\theta^p = \sigma_y \left(\ln R + 1\right) + C_3 \qquad (۵۷-۳)$$

$$\sigma_z^p = \nu\left[\sigma_y \left(2\ln R + 1\right) + 2C_3\right] \qquad (۵۸-۳)$$

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک و پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p \quad , i = R, \theta, z \qquad (۵۹-۳)$$

ε_i: کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک.

روابط کرنش الاستیک به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i, j, k = R, \theta, z \qquad (۶۰-۳)$$

رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک برابر است با

$$\varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \qquad (۶۱-۳)$$

رابطه بین کرنش کل و جابجایی همان روابط سینماتیک می‌باشد.

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_z^p = 0 \qquad (۶۲-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۶۲) در رابطه (۳-۶۱) داریم.

$$\varepsilon_R^p = -\varepsilon_\theta^p \tag{۶۳-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۶۰) در رابطه (۳-۵۹) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] \tag{۶۴-۳}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] \tag{۶۵-۳}$$

از مجموع دو رابطه (۳-۶۴ و ۶۵) داریم

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta = \varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\left(1-\nu\right)\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - 2\nu\sigma_z\right] \tag{۶۶-۳}$$

با جاگذاری روابط (۳-۵۶ تا ۵۸) و (۲-۱۸) در رابطه (۳-۶۶) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} = \frac{1}{E}\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)\left[\sigma_y\left(2\ln R + 1\right) + 2C_3\right] \tag{۶۷-۳}$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۳-۶۷)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^p) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^p = \frac{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}{E} R\left[\sigma_y \ln R + C_3\right] + \frac{C_4}{R} \tag{۶۸-۳}$$

با جاگذاری روابط (۳-۵۶ تا ۵۸)، (۳-۶۸) و (۲-۱۸) در رابطه (۳-۶۵) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{u_R}{R} - \frac{1}{E}\left[\sigma_y\left(\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)\ln R + 1 - \nu^2\right) + \left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)C_3\right] \tag{۶۹-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۶۸) به جای u_R در رابطه (۳-۶۹)، کرنش شعاعی (ε_R^p) و کرنش محیطی (ε_θ^p) در ناحیه پلاستیک، به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_R^p = -\frac{\left(1-\nu^2\right)}{E}\sigma_y + \frac{C_4}{R^2} \tag{۷۰-۳}$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی با توجه به نحوه تسلیم استوانه به‌دست می‌آیند.

اگردر استوانه $P_i > (P_i)_{cr}$ باشد، استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۵۰ تا ۵۵)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۵۶ تا ۵۸) و (۳-۶۸ تا ۷۰)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

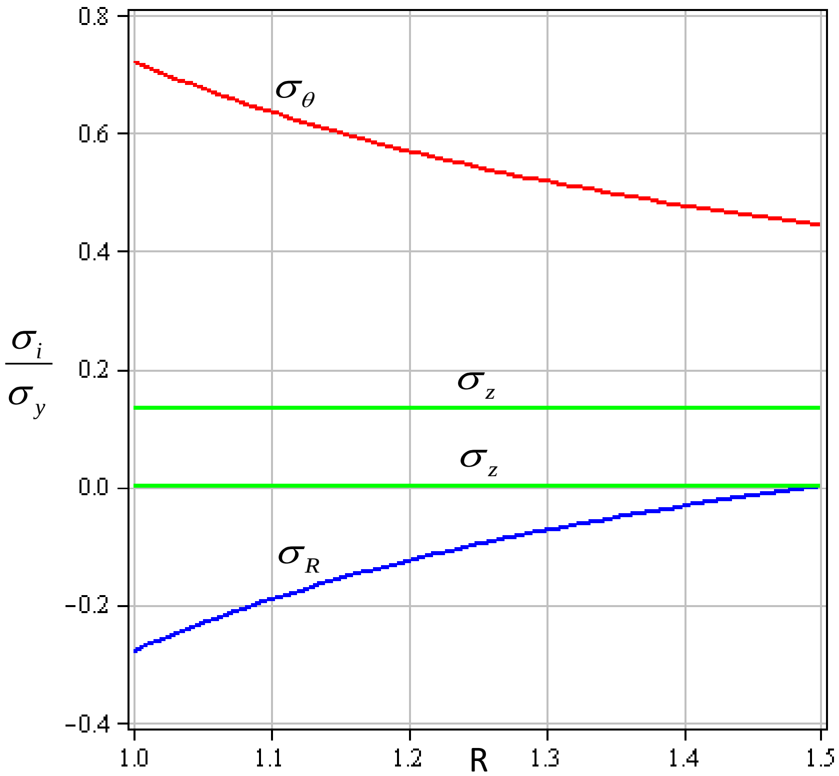
$$\begin{cases} 1)\sigma_R^P\left(R=1\right)=-\dfrac{p_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^P\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\left(\sigma_z^e=0\right)-\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 4)u_R^P\left(R=R_{ep}\right)=u_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^e\left(R=k\right)=0 \end{cases} \qquad (۳-۷۱)$$

۳-۲-۱-۳- مطالعه موردی

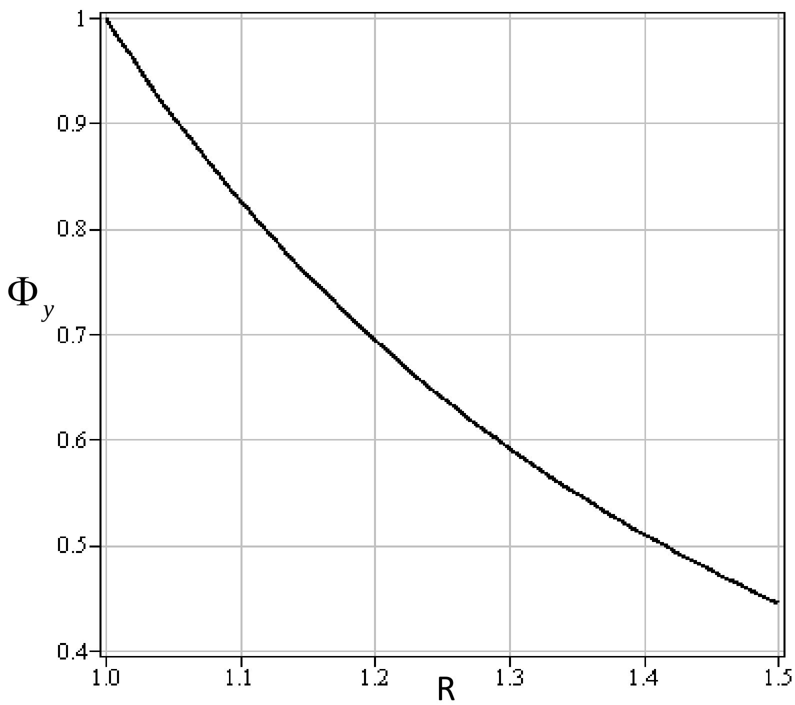
برای مطالعه موردی، یک استوانه همگن تحت فشار داخلی، با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی $r_i=۴۰\,mm$، شعاع خارجی $r_o=۶۰\,mm$، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $k=۱/۵$، مدول الاستیک $E_i=۲۰۰\,GPa$، تنش تسلیم $\sigma_{y_i}=۳۰۰\,Mpa$ و نسبت پواسون $\nu=۰/۳$ است.

با توجه به رابطه (۳-۲۳) فشار بحرانی تسلیم در این استوانه برابر است با $(P_i)_{cr}=۸۳/۳۳\mathrm{Mpa}$

شکل (۳-۱) توزیع تنش‌های الاستیک استوانه و شکل (۳-۲) تابع تسلیم در فشار $P_i=۸۳/۳۳\mathrm{Mpa}$ در شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱- توزیع تنش‌های الاستیک در استوانه همگن تحت فشار داخلی

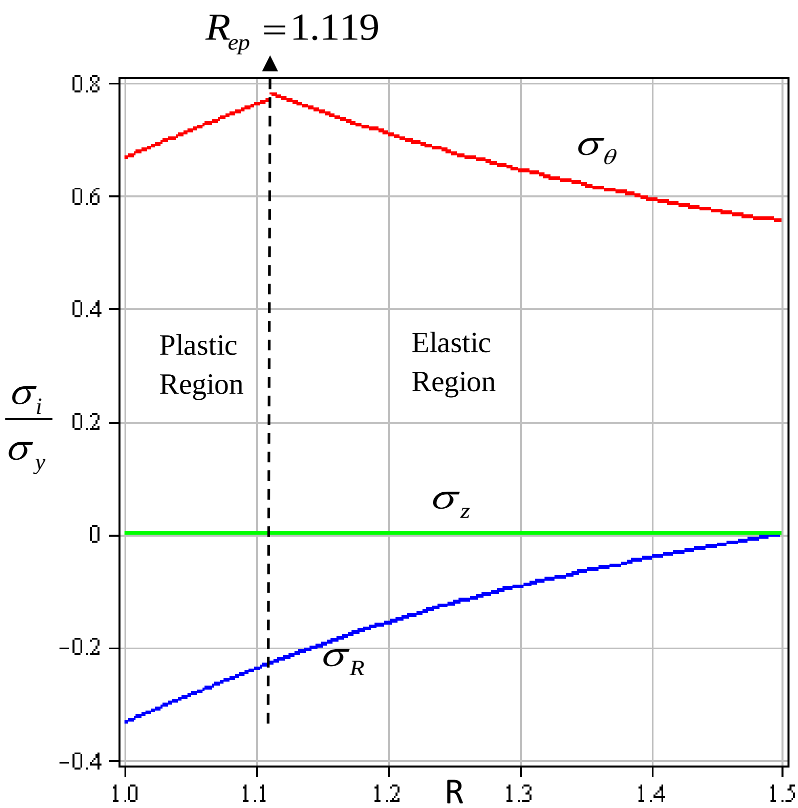


شکل ۳-۲- تابع تسلیم در استوانه همگن تحت فشار داخلی

با توجه به شکل (۳-۲) ، مشخص می‌شود که تابع تسلیم در سطح داخلی برابر یک است، بنابراین استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود.

با افزایش فشار استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود، شکل (۳-۳) توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک استوانه در فشار P_i =۱۰۰Mpa در شرایط تنش صفحه‌ای را نشان داده شده است. در این شرایط مجهولات از ۵ شرط رابطه (۳-۴۴) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

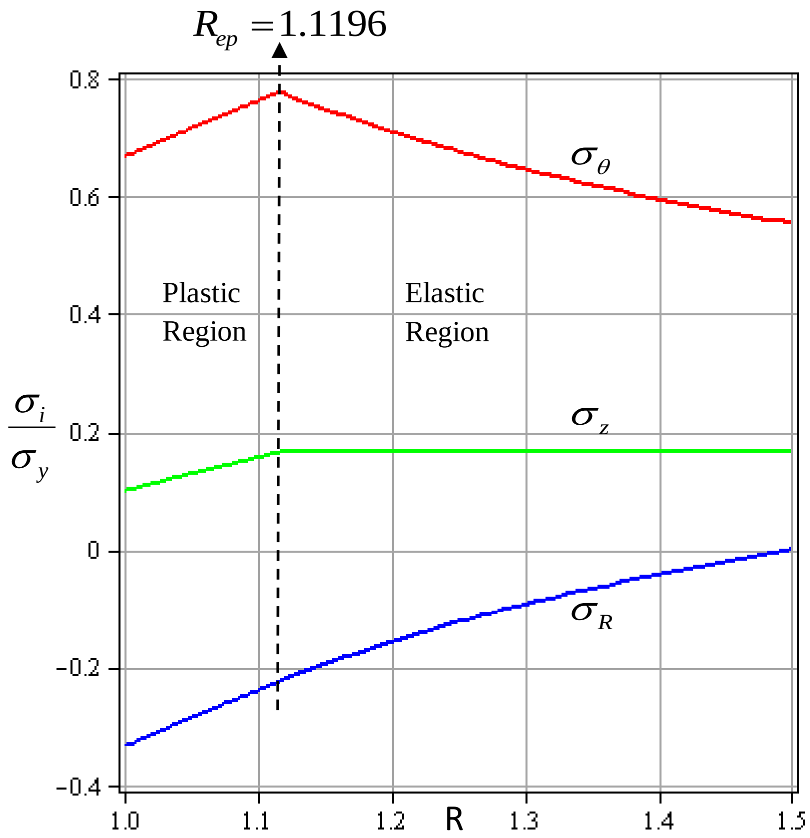
$$C_1=0.0002948\ ,\ C_2=0.0000019\ ,\ C_3=-0.3333\ ,\ C_4=0.000003\ ,\ R_{ep}=1.119$$



شکل ۳-۳- توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک در استوانه همگن
تحت فشار در حالت تنش صفحه‌ای

شکل (۳-۴) توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک استوانه در فشار P_i =۱۰۰Mpa در شرایط کرنش صفحه‌ای را نشان داده شده است. در این شرایط مجهولات از ۵ شرط رابطه (۳-۷۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$C_1=0.0002162\ ,\ C_2=0.00000194\ ,\ C_3=-0.3333\ ,\ C_4=0.0000027\ ,\ R_{ep}=1.1196$$



شکل ۳-۴- توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک در استوانه همگن
تحت فشار در حالت کرنش صفحه‌ای

۳-۲-۲- تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه همگن

۳-۲-۲-۱- تنش صفحه‌ای

توزیع تنش‌های ترموالاستیک در استوانه تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$)، طبق روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳)، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = -\frac{E\alpha\theta_i}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}\right) \qquad (۳\text{-}۷۲)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{E\alpha\theta_i}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}-1\right) \qquad (۳\text{-}۷۳)$$

با بررسی روابط (۳-۷۲) و (۳-۷۳)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر استوانه همگن تحت تنش حرارتی در حالت تنش صفحه‌ای به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \le R < R^1 \ \Rightarrow \sigma_\theta < \sigma_R < (\sigma_z = 0) \\ R^1 \le R < R^2 \Rightarrow \sigma_R < \sigma_\theta < (\sigma_z = 0) \\ R^2 \le R \le k \ \Rightarrow \ \sigma_R < (\sigma_z = 0) < \sigma_\theta \end{cases} \qquad (۳\text{-}۷۴)$$

در رابطه (۳-۷۴)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_R$ و R^2 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_z$ خواهد بود.

الف) شروع تسلیم

بر اساس رابطه (۳-۷۴)، معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_z - \sigma_\theta = \sigma_y \qquad (۳\text{-}۷۵)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در استوانه است. بر اساس رابطه (۵۲)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\Phi_y = \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{\sigma_y} \qquad (۳\text{-}۷۶)$$

با توجه به رابطه (۳-۷۶) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۷۲) و (۳-۷۳) در رابطه (۳-۷۶) و با توجه به این که تسلیم استوانه تحت اثر دمای داخلی از سطح داخلی آغاز می‌شود، رابطه زیر برقرار است.

$$\varnothing_y\left(R=1\right)=1\Rightarrow\frac{E\alpha\theta_i}{2\sigma_y\ln k}\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\ln k+\ln k-1\right)=1 \tag{۷۷-۳}$$

از رابطه (۳-۷۷)، اختلاف دمای بحرانی تسلیم سطح داخلی($(\theta_i)_{cr1}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(\theta_i\right)_{cr1}=\frac{2\sigma_y\ln k}{E\alpha\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\ln k+\ln k-1\right)} \tag{۷۸-۳}$$

اگردر استوانه $\theta_i > (\theta_i)_{cr1}$ تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود. با افزایش دما ممکن است استوانه از سطح خارجی نیز تسلیم شود. توضیحات بیشتر در ادامه بیان خواهد شد.

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری روابط (۲-۲۳) و (۲-۳۱) در روابط (۳-۵)، (۳-۶) و (۳-۷) و جایگذاری رابطه (۳-۵) در رابطه (۲-۱۸)، در شرایطی که استوانه فقط تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$) می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R^e=E\left[\frac{1}{1-\nu}C_1-\frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2}-\frac{\alpha\theta_i}{2\ln k}\frac{1}{R^2}\left(\frac{R^2-1}{2}-\ln k+R^2\ln\frac{k}{R}\right)\right] \tag{۷۹-۳}$$

$$\sigma_\theta^e=E\left[\frac{1}{1-\nu}C_1+\frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2}+\frac{\alpha\theta_i}{2\ln k}\frac{1}{R^2}\left(\frac{R^2-1}{2}-\ln k-R^2\ln\frac{k}{R}\right)\right] \tag{۸۰-۳}$$

$$\sigma_z^e=0 \tag{۸۱-۳}$$

$$u_R^e=C_1R+\frac{1}{R}C_2+\frac{\left(1+\nu\right)\alpha\theta_i}{2R\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2}-\ln k+R^2\ln\frac{k}{R}\right) \tag{۸۲-۳}$$

$$\varepsilon_R^e=C_1-\frac{1}{R^2}C_2-\frac{\left(1+\nu\right)\alpha\theta_i}{2R^2\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2}-\ln k+R^2\ln\frac{k}{R}\right) \tag{۸۳-۳}$$

$$\varepsilon_\theta^e=C_1+\frac{1}{R^2}C_2+\frac{\left(1+\nu\right)\alpha\theta_i}{2R^2\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2}-\ln k+R^2\ln\frac{k}{R}\right) \tag{۸۴-۳}$$

ج) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده

با توجه به وضعیت تنش‌ها در استوانه الاستیک کامل رابطه (۳-۷۴)، معیار ترسکا و رابطه بین کرنش‌ها، می‌توان توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده را به‌دست آورد.

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک، پلاستیک و حرارتی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p + \varepsilon_i^T \quad , i = R, \theta, z \tag{۳-۸۵}$$

ε_i: کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک و ε_i^T: کرنش حرارتی.

روابط کرنش الاستیک و کرنش حرارتی به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i, j, k = R, \theta, z \tag{۳-۸۶}$$

$$\varepsilon_i^T = \alpha\theta(R) \quad , i = R, \theta, z \tag{۳-۸۷}$$

رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک برابر است با

$$\varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \tag{۳-۸۸}$$

رابطه بین کرنش کل و جابجایی همان روابط سینماتیک می‌باشد.

۱- تنش‌ها در ناحیه پلاستیک بر اساس وضعیت $\sigma_\theta < \sigma_R < (\sigma_z = 0)$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_z - \sigma_\theta = \sigma_y \Rightarrow \sigma_\theta = -\sigma_y \tag{۳-۸۹}$$

بنابراین تنش محیطی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_\theta^{p1}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌باشد.

$$\sigma_\theta^{p1} = -\sigma_y \tag{۳-۹۰}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۹۰) در رابطه تعادل (۲-۱۹)، تنش شعاعی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_R^{p1}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R^{p1} = \frac{1}{R}C_3 - \sigma_y \tag{۳-۹۱}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_R^p = 0 \qquad (۳-۹۲)$$

با جایگذاری رابطه (۳- ۹۲) در رابطه (۳- ۸۸) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_z^p \qquad (۳-۹۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۸۶) و (۳- ۸۷) در رابطه (۳-۸۵) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta\left(R\right) \qquad (۳-۹۴)$$

روابط (۳-۹۰)، (۳-۹۱)، (۳- ۹۲) و (۲- ۱۸) را در رابطه (۳-۹۴) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{du_R}{dR} = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{R}C_3 - \left(1-\nu\right)\sigma_y\right] + \alpha\theta\left(R\right) \qquad (۳-۹۵)$$

با انتگرال گیری و جایگذاری رابطه (۲-۳۱) در رابطه (۳-۹۵)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p1})، به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p1} = \frac{1}{E}\left[C_3 \ln R - \left(1-\nu\right)\sigma_y R\right] + \frac{\alpha\theta_i}{\ln k}\left(R \ln\frac{k}{R} - \ln k + R - 1\right) + C_4 \qquad (۳-۹۶)$$

با جایگذاری روابط (۳-۸۶) و (۳-۸۷) در رابطه (۳-۸۵) داریم

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta\left(R\right) \qquad (۳-۹۷)$$

روابط (۳-۹۰)، (۳-۹۱)، (۲-۱۸) و (۲-۳۱) را در رابطه (۳-۹۷) جایگذاری می‌کنیم.

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{u_R}{R} - \frac{1}{E}\left[-\sigma_y - \nu\left(\frac{1}{R}C_3 - \sigma_y\right)\right] - \frac{\alpha\theta_i}{\ln k}\left(\ln\frac{k}{R}\right) \qquad (۳-۹۸)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۹۶) به جای u_R در رابطه (۳-۹۸)، کرنش محیطی(ε_θ^{p1}) و کرنش طولی (ε_z^{p1}) در ناحیه پلاستیک ، به‌دست می‌آید.

$$\varepsilon_\theta^{p1} = -\varepsilon_z^{p1} = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{R}C_3\left(\ln R + \nu\right)\right] + \frac{\alpha\theta_i}{R \ln k}\left(-\ln k + R - 1\right) + \frac{1}{R}C_4 \qquad (۳-۱۰۰)$$

۲- تنش‌ها در ناحیه پلاستیک بر اساس وضیعت $\sigma_R < \sigma_\theta < (\sigma_z = 0)$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_z - \sigma_R = \sigma_y \Rightarrow \sigma_R = -\sigma_y \qquad (۳-۱۰۱)$$

بنابراین تنش شعاعی در ناحیه پلاستیک (σ_R^{p2}) به‌صورت زیر به‌دست می‌باشد.

$$\sigma_R^{p2} = -\sigma_y \qquad (۳-۱۰۲)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۰۲) در رابطه تعادل (۲-۱۹)، تنش محیطی در ناحیه پلاستیک (σ_θ^{p2}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_\theta^{p2} = -\sigma_y \qquad (۳-۱۰۳)$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_\theta^p = 0 \qquad (۳-۱۰۴)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۰۴) در رابطه (۳-۸۸) داریم.

$$\varepsilon_R^p = -\varepsilon_z^p \qquad (۳-۱۰۵)$$

با جایگذاری روابط (۳-۸۶) و (۳-۸۷) در رابطه (۳-۸۵) داریم

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta(R) \qquad (۳-۱۰۶)$$

روابط (۳-۱۰۲)، (۳-۱۰۳)، (۳-۱۰۴) و (۲-۱۸) را در رابطه (۳-۱۰۶) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{u_R}{R} = \frac{1}{E}\left[-(1-\nu)\sigma_y\right] + \alpha\theta(R) \qquad (۳-۱۰۷)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۳۱) در رابطه(۳-۱۰۷)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p2})، به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p2} = \frac{1}{E}\left[-(1-\nu)\sigma_y R\right] + \frac{\alpha\theta_i}{\ln k}\left(R\ln\frac{k}{R}\right) \qquad (۳-۱۰۸)$$

با جایگذاری روابط (۳-۸۶) و (۳-۸۷) در رابطه (۳-۸۵) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۰۹-۳}$$

روابط (۳-۱۰۲)، (۳-۱۰۳) و (۲-۱۸) را در رابطه (۳-۱۰۹) جایگذاری می‌کنیم.

$$\varepsilon_R^p = \frac{du_R}{dR} - \frac{1}{E}\left[-\left(1-\nu\right)\sigma_y\right] - \alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۱۰-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۰۹) به جای u_R و رابطه (۳-۳۱) در رابطه (۳-۱۱۰)، کرنش شعاعی (ε_R^{p2}) و کرنش طولی (ε_z^{p2})، در ناحیه پلاستیک، به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_R^{p2} = -\varepsilon_z^{p2} = -\frac{\alpha\theta_i}{\ln k} \tag{۱۱۱-۳}$$

۳- تنش‌ها در ناحیه پلاستیک بر اساس وضعیت $\sigma_R < (\sigma_z = 0) < \sigma_\theta$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \tag{۱۱۲-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۱۲) در رابطه تعادل (۲-۱۹)، تنش محیطی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_\theta^{p3}\right)$ و تنش شعاعی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_R^{p3}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{p3} = \sigma_y \ln R + C_3 \tag{۱۱۳-۳}$$

$$\sigma_\theta^{p3} = \sigma_y\left(\ln R + 1\right) + C_3 \tag{۱۱۴-۳}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_z^p = 0 \tag{۱۱۵-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۱۵) در رابطه (۳-۸۸) داریم.

$$\varepsilon_R^p = -\varepsilon_\theta^p \tag{۱۱۶-۳}$$

با جایگذاری روابط (۳-۸۶) و (۳-۸۷) در روابط (۳-۸۵) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۱۷-۳}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta(R) \tag{۱۱۸-۳}$$

از مجموع دو رابطه (۳-۱۱۷ و ۱۱۸) داریم

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta = \varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[(1-\nu)\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] + 2\alpha\theta(R) \tag{۱۱۹-۳}$$

با جاگذاری روابط (۳-۱۱۳ و ۱۱۴)، (۳-۱۱۶) و (۲-۱۸) در رابطه (۳-۱۱۹) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} = \frac{1}{E}(1-\nu)\left[\sigma_y\left(2\ln R + 1\right) + 2C_3\right] + 2\alpha\theta(R) \tag{۱۲۰-۳}$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۳-۱۲۰) و جایگذاری رابطه (۲-۳۱)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p3}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p3} = \frac{(1-\nu)}{E}R^2\left[\sigma_y \ln R + C_3\right] + \frac{\alpha\theta_i}{\ln k}\left(\frac{1}{2}\left(R^2-1\right) - \ln k + R^2\ln\frac{k}{R}\right) + \frac{C_4}{R} \tag{۱۲۱-۳}$$

با جاگذاری روابط (۳-۱۱۳ و ۱۱۴)، (۲-۳۱) و (۲-۱۸) در رابطه (۳-۱۱۸) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p = \frac{u_R}{R} - \frac{1}{E}\left[\sigma_y\left((1-\nu)\ln R + 1\right) + (1-\nu)C_3\right] - \frac{\alpha\theta_i}{\ln k}\left(\ln\frac{k}{R}\right) \tag{۱۲۲-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۲۱) به جای u_R در رابطه(۳-۱۲۲)، کرنش شعاعی (ε_R^{p3}) و کرنش محیطی (ε_θ^{p3}) در ناحیه پلاستیک، به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}\varepsilon_\theta^{p3} = -\varepsilon_R^{p3} = \frac{1}{E}\left[(1-\nu)(R-1)\left(\sigma_y \ln R + C_3\right) - \sigma_y\right] + \\ \frac{\alpha\theta_i}{\ln k}\left(\frac{1}{2R}\left(R^2-1\right) - \frac{1}{R}\ln k + (R-1)\ln\frac{k}{R}\right) + \frac{C_4}{R^2}\end{aligned} \tag{۱۲۳-۳}$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی با توجه به نحوه تسلیم استوانه به‌دست می‌آیند.

اگر در استوانه $\theta_i > (\theta_i)_{cr1}$ باشد، استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۷۹ تا ۸۴)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۹۰،

۹۱، ۹۶ و ۱۰۰) و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=0 \\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\left(\sigma_z^{e}=0\right)-\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 4)u_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^{e}\left(R=k\right)=0 \end{cases} \tag{۱۲۴-۳}$$

با مشخص C_1 و C_2، تنش‌های الاستیک σ_R^e و σ_θ^e به‌دست می‌آیند. بنابراین از رابطه ترسکا در سطح خارجی $\frac{\sigma_\theta^e\left(R=k\right)-\sigma_R^e\left(R=k\right)}{\sigma_y}=1$ با فرض مجهول بودن θ_i و جایگذاری روابط (۳-۷۹ و ۷۸)، در رابطه ترسکا اختلاف دمای بحرانی تسلیم از سطح خارجی ($(\theta_i)_{cr2}$)به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{E}{\sigma_y}\left[\frac{2}{1+\nu}C_2k^{-2}+\frac{\alpha\theta_i}{2\ln k}\frac{1}{k^2}\left(k^2-1-2\ln k\right)\right]=1 \tag{۱۲۵-۳}$$

اختلاف دمای بحرانی تسلیم از سطح خارجی ($(\theta_i)_{cr2}$)برابر است با

$$\left(\theta_i\right)_{cr2}=\frac{\left(\dfrac{\sigma_y}{E}-\dfrac{2}{1+\nu}C_2k^{-2}\right)2k^2\ln k}{\alpha\left(k^2-1-2\ln k\right)} \tag{۱۲۶-۳}$$

بنابراین اگردر استوانه $(\theta_i)_{cr1} < \theta_i < (\theta_i)_{cr2}$ باشد، استوانه ازسطح داخلی تسلیم می‌شود. و اگر $(\theta_i)_{cr2} < \theta_i$ استوانه از سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود، به‌طوری‌که در شعاع $1 \le R \le R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \le R \le k$ ناحیه پلاستیک ۳ ($p3$) ایجاد می‌شود.

در صورت تسلیم شدن استوانه از سطح داخلی و خارجی، مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۷۹ تا ۸۴) و مجهولاتC_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط

به ناحیه پلاستیک ۱) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۹۰، ۹۱، ۹۶ و ۱۰۰) و مجهولات C_{33} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۳)، و C_{43} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۴) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۱۳، ۱۱۴، ۱۲۱ و ۱۲۳) و R_{ep1} (مرز بین ناحیه پلاستیک ۱ و الاستیک) و R_{ep2} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۳)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=0 \\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 3)\left(\sigma_z^{e}=0\right)-\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 4)\sigma_R^{P3}\left(R=K\right)=0 \\ 5)\sigma_R^{P3}\left(R=R_{ep2}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \\ 6)\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep2}\right)-\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 7)u_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 8)u_R^{P3}\left(R=R_{ep2}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \end{cases} \qquad (۱۲۷-۳)$$

۳-۲-۲-۲- کرنش صفحه‌ای

توزیع تنش‌های ترموالاستیک در استوانه تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$)، طبق روابط (۳-۱۱۴ تا ۱۱۶)، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R=-\frac{E\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}\right) \qquad (۱۲۸-۳)$$

$$\sigma_\theta=-\frac{E\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}-1\right) \qquad (۱۲۹-۳)$$

$$\sigma_z=-\frac{\nu E\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{2\ln k}{k^2-1}+\frac{2}{\nu}\ln\frac{k}{R}-1\right) \qquad (۱۳۰-۳)$$

با بررسی روابط (۳-۱۲۸ تا ۱۳۰)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر استوانه همگن تحت تنش حرارتی در حالت کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \le R < R^1 \ \Rightarrow \sigma_z < \sigma_\theta < \sigma_R \\ R^1 \le R < R^2 \Rightarrow \sigma_z < \sigma_R < \sigma_\theta \\ R^2 \le R \le k \ \Rightarrow \ \sigma_R < \sigma_z < \sigma_\theta \end{cases} \qquad (۱۳۱-۳)$$

در رابطه (۳-۱۳۱)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_R$ و R^2 شعاعی است که در آن $\sigma_R = \sigma_Z$ خواهد بود.

الف) شروع تسلیم

بر اساس رابطه (۳-۱۳۱)، معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_R - \sigma_z = \sigma_y \qquad (۱۳۲-۳)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در استوانه است. بر اساس رابطه (۳-۱۳۲)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\varnothing_y = \frac{\sigma_R - \sigma_z}{\sigma_y} \qquad (۱۳۳-۳)$$

با توجه به رابطه (۳-۱۳۳) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۱۲۸ و ۱۳۰) در رابطه (۳-۱۳۳) و با توجه به این‌که تسلیم استوانه تحت اثر دمای داخلی از سطح داخلی آغاز می‌شود، رابطه زیر برقرار است.

$$\varnothing_y \left(R = 1\right) = 1 \Rightarrow -\frac{E\alpha\theta_i}{2\left(1-\nu\right)\sigma_y \ln k}\left(\frac{2\left(1-k^2-\nu\right)}{k^2-1}\ln k + \nu\right) = 1 \qquad (۱۳۴-۳)$$

از رابطه (۳-۱۳۴)، اختلاف دمای بحرانی تسلیم سطح داخلی($(\theta_i)_{cr1}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(\theta_i\right)_{cr1} = \frac{-2\left(1-\nu\right)\sigma_y \ln k}{E\alpha\left(\frac{2\left(1-k^2-\nu\right)}{k^2-1}\ln k + \nu\right)} \qquad (۱۳۵-۳)$$

اگردر استوانه $\theta_i > (\theta_i)_{cr1}$ تسلیم از سطح داخلی آغاز می‌شود. با افزایش دما ممکن است استوانه از سطح خارجی نیز تسلیم شود. توضیحات بیشتر در ادامه بیان خواهد شد.

الف) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری روابط (۲-۲۴) و (۲-۳۱) در روابط (۳-۵ تا ۷)، و جایگذاری رابطه (۳-۵) در روابط (۲-۱۸)، در شرایطی که استوانه فقط تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$) می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R^e = E\left[\frac{C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2} - \frac{\alpha\theta_i}{2R^2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2} - \ln k + R^2\ln\frac{k}{R}\right)\right] \quad (۱۳۶\text{-}۳)$$

$$\sigma_\theta^e = E\left[\frac{C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{1}{1+\nu}C_2R^{-2} + \frac{\alpha\theta_i}{2R^2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2} - \ln k - R^2\ln\frac{k}{R}\right)\right] \quad (۱۳۷\text{-}۳)$$

$$\sigma_z^e = E\left[\frac{2\nu C_1}{(1+\nu)(1-2\nu)} - \frac{\alpha\theta_i}{(1-\nu)\ln k}\ln\frac{k}{R}\right] \quad (۱۳۸\text{-}۳)$$

$$u_R^e = C_1R + \frac{1}{R}C_2 + \frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{2(1-\nu)R\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2} - \ln k + R^2\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۳۹\text{-}۳)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1 - \frac{1}{R^2}C_2 - \frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{2(1-\nu)R^2\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2} - \ln k + R^2\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۴۰\text{-}۳)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1 + \frac{1}{R^2}C_2 + \frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{2(1-\nu)R^2\ln k}\left(\frac{R^2-1}{2} - \ln k + R^2\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۴۱\text{-}۳)$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده

با توجه به وضعیت تنش‌ها در استوانه الاستیک کامل رابطه، معیار ترسکا و رابطه بین کرنش‌ها، می‌توان توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده را به‌دست آورد.

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک، پلاستیک و حرارتی به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p + \varepsilon_i^T \quad , i = R,\theta,z \quad (۱۴۲\text{-}۳)$$

ε_i: کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک و ε_i^T: کرنش حرارتی.

روابط کرنش الاستیک و کرنش حرارتی به‌ترتیب به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i, j, k = R, \theta, z \tag{۱۴۳-۳}$$

$$\varepsilon_i^T = \alpha\theta\left(R\right) \quad , i = R, \theta, z \tag{۱۴۴-۳}$$

رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک برابر است با

$$\varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \varepsilon_z^p = 0 \tag{۱۴۵-۳}$$

رابطه بین کرنش کل و جابجایی همان روابط سینماتیک می‌باشد.

۱- تنش‌ها در ناحیه پلاستیک بر اساس وضیعت $\sigma_Z < \sigma_\theta < \sigma_R$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_R - \sigma_z = \sigma_y \tag{۱۴۶-۳}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_\theta^p = 0 \tag{۱۴۷-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۷۳) در رابطه (۳-۱۴۵) داریم.

$$\varepsilon_R^p = -\varepsilon_z^p \tag{۱۴۸-۳}$$

با جایگذاری روابط (۳-۱۴۳ و ۱۴۴) و (۱۲۰) در رابطه (۳-۱۴۲) داریم

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۴۹-۳}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۵۰-۳}$$

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۵۱-۳}$$

از رابطه (۳-۱۴۹) با توجه به شرایط کرنش صفحه‌ای دو رابطه زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_z = -E\,\varepsilon_z^p + \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - E\,\alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۵۲-۳}$$

$$\varepsilon_z^p = -\frac{1}{E}\sigma_z + \frac{\nu}{E}\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - \alpha\theta\left(R\right) \tag{۱۵۳-۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۵۲) در روابط (۳-۱۵۰ و ۱۵۱) دو رابطه زیر به‌ترتیب به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \left(-E\,\varepsilon_z^p + \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - E\,\alpha\theta(R)\right)\right)\right] + \alpha\theta(R) \qquad (۳-۱۵۴)$$

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \left(-E\,\varepsilon_z^p + \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - E\,\alpha\theta(R)\right)\right)\right] + \alpha\theta(R) \qquad (۳-۱۵۵)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۴۸) در رابطه (۳-۱۵۵) و ساده‌سازی، داریم.

$$\sigma_R = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\varepsilon_R + \frac{\nu(1+\nu)}{\left(1-\nu^2\right)}\sigma_\theta + \frac{(1-\nu)E}{\left(1-\nu^2\right)}\varepsilon_z^p - \frac{(1+\nu)E}{\left(1-\nu^2\right)}\alpha\theta(R) \qquad (۳-۱۵۶)$$

از جایگذاری رابطه (۳-۱۵۶ و ۱۴۷) در رابطه (۳-۱۵۴) و ساده‌سازی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_R - (1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۵۷)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۵۳ و ۱۵۷) در رابطه (۳-۱۵۶)، و ساده‌سازی، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R + \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_\theta + \varepsilon_R - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۵۸)$$

با استفاده از دو رابطه (۳-۱۵۸ و ۱۴۶)، روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_R = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_\theta + \varepsilon_R - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۵۹)$$

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_\theta + \varepsilon_R - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۶۰)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۱۸) در روابط (۳-۱۵۷، ۱۵۹ و ۱۶۰)، رابطه تنش‌ها در ناحیه پلاستیک برحسب جابجایی در ناحیه پلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{p1} = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{u}{R} + \frac{du}{dR} - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۶۱)$$

$$\sigma_\theta^{p1} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{u}{R} + \nu\frac{du}{dR} - (1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۶۲)$$

$$\sigma_z^{p1} = -\frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{u}{R} + \frac{du}{dR} - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۶۳)$$

از جایگذاری روابط (۳-۱۶۱ و ۱۶۲) در رابطه تعادل، معادله دیفرانسیلی زیر حاصل می‌شود.

$$R^2\frac{d^2u}{dR^2}+R\frac{du}{dR}+(2\nu-2)u(R)=2(1+\nu)\alpha R^2\frac{d\theta}{dR}-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)\sigma_y}{E}R \qquad (۱۶۵-۳)$$

با حل معادله دیفرانسیلی فوق و جایگذاری رابطه (۲-۳۱) در شرایطی که استوانه فقط تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی باشد، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p1}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p1}=C_3R^t+C_4R^{-t}-\frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{t\ln k}\left(\frac{R-R^t}{1-t}-\frac{R-R^{-t}}{1+t}+\left(R^{-t}-R^t\right)\ln k\right)+$$
$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)\sigma_y}{(t^2-1)E}R \quad , \qquad t=\sqrt{2(1-\nu)} \qquad (۱۶۶-۳)$$

و کرنش‌ها در ناحیه پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_R^{p1}=\frac{du_R^p}{dR} \quad , \quad \varepsilon_\theta^{p1}=\frac{u_R^p}{R} \qquad (۱۶۷-۳)$$

۲- تنش‌ها در ناحیه پلاستیک بر اساس وضیعت $\sigma_z<\sigma_R<\sigma_\theta$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_\theta-\sigma_z=\sigma_y \qquad (۱۶۸-۳)$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_R^p=0 \qquad (۱۶۹-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۶۹) در رابطه (۳-۱۴۵) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p=-\varepsilon_z^p \qquad (۱۷۰-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۶۹) در رابطه (۳-۱۵۵) و ساده‌سازی، داریم.

$$\sigma_\theta=-\frac{E}{\nu(1+\nu)}\varepsilon_R+\frac{(1-\nu^2)}{\nu(1+\nu)}\sigma_R+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z^p+\frac{E}{\nu}\alpha\theta(R) \qquad (۱۷۱-۳)$$

از جایگذاری رابطه (۳-۱۷۱) در رابطه (۳-۱۵۴) و ساده‌سازی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_R=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\varepsilon_\theta+(1-\nu)\varepsilon_R-(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۱۷۲-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۵۳ و ۱۷۲)، در رابطه (۳-۱۷۱) و ساده‌سازی، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_\theta+\sigma_z=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_R+\varepsilon_\theta-2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۱۷۳-۳)$$

با استفاده از دو رابطه (۳-۱۷۳ و ۱۶۸)، روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_R + \varepsilon_\theta - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۷۴)$$

$$\sigma_z = -\frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_R + \varepsilon_\theta - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۷۵)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۱۸) در روابط (۳-۱۷۲، ۱۷۴ و ۱۷۵)، رابطه تنش‌ها در ناحیه پلاستیک برحسب جابجایی در ناحیه پلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{p2} = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[\nu\frac{u}{R} + (1-\nu)\frac{du}{dR} - (1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۷۶)$$

$$\sigma_\theta^{p2} = \frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{du}{dR} + \frac{u}{R} - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۷۷)$$

$$\sigma_z^{p2} = -\frac{\sigma_y}{2} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{du}{dR} + \frac{u}{R} - 2(1+\nu)\alpha\theta(R)\right] \qquad (۳-۱۷۸)$$

از جایگذاری روابط (۳-۱۷۶ و ۱۷۷)، در رابطه تعادل، معادله دیفرانسیلی زیر حاصل می‌شود.

$$R^2\frac{d^2u}{dR^2} + R\frac{du}{dR} + \frac{1}{(2\nu-2)}u(R) = \frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\alpha R^2\frac{d\theta}{dR} + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\sigma_y}{E}R \qquad (۳-۱۷۹)$$

با حل معادله دیفرانسیلی فوق و جایگذاری رابطه (۳-۳۱) در شرایطی که استوانه فقط تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی باشد، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p2}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p2} = C_3R^t + C_4R^{-t} - \frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{2t(1-\nu)\ln k}\left(\frac{R-R^t}{1-t} - \frac{R-R^{-t}}{1+t} + \left(R^{-t}-R^t\right)\ln k\right)$$
$$-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)\sigma_y}{(t^2-1)E}R, \qquad t = \frac{1}{\sqrt{2(1-\nu)}} \qquad (۳-۱۸۰)$$

و کرنش‌ها در ناحیه پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_R^{p2} = \frac{du_R^p}{dR}, \quad \varepsilon_\theta^{p2} = \frac{u_R^p}{R} \qquad (۳-۱۸۱)$$

۳- تنش‌ها در ناحیه پلاستیک بر اساس وضعیت $\sigma_R < \sigma_z < \sigma_\theta$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \qquad (۱۸۲-۳)$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_z^p = 0 \qquad (۱۸۳-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۸۳) در رابطه (۳-۱۴۵) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p = -\varepsilon_R^p \qquad (۱۸۴-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۸۲) در رابطه تعادل (۲-۱۹)، تنش شعاعی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_R^{p3}\right)$ و تنش محیطی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_\theta^{p3}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{p3} = \sigma_y \ln R + C_3 \qquad (۱۸۵-۳)$$

$$\sigma_\theta^{p3} = \sigma_y \left(\ln R + 1\right) + C_3 \qquad (۱۸۶-۳)$$

با جایگذاری روابط (۳-۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۳) و (۲-۳۱) در رابطه (۳-۱۵۲) در شرایط کرنش صفحه‌ای، تنش طولی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_z^{p3}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_z^{p3} = \nu\sigma_y \left(2\left(\ln R + C_3\right) + 1\right) - \frac{E\alpha\theta_i}{\ln k}\ln\frac{k}{R} \qquad (۱۸۷-۳)$$

از مجموع دو رابطه (۳-۱۵۹ و ۱۵۱) داریم

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta = \varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\left(1-\nu\right)\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - 2\sigma_z\right] + 2\alpha\theta\left(R\right) \qquad (۱۸۸-۳)$$

با جاگذاری روابط(۳-۱۸۴، ۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷) و (۲-۱۸) در رابطه (۳-۱۸۸) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} = \frac{1}{E}\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)\left[\sigma_y \left(2\ln R + 1\right) + 2C_3\right] + 2\left(1+\nu\right)\alpha\theta\left(R\right) \qquad (۱۸۹-۳)$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۳-۱۸۹) و جایگذاری رابطه (۲-۳۱)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p3}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p3}=\frac{C_4}{R}+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}R^2\left(\sigma_y\ln R+C_3\right)+\frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{\ln k}\left(\frac{1}{2}\left(R^2-1\right)-\ln k+R^2\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۹۰-۳)$$

با جاگذاری روابط (۳-۱۸۵، ۱۸۶، ۱۸۷)، (۲-۱۷ و ۳۱) در رابطه (۳-۱۵۰) داریم.

$$\varepsilon_\theta^p=\frac{u_R}{R}-\frac{1}{E}\left[\sigma_y\left((1+\nu)(1-2\nu)\ln R+1\right)+(1+\nu)(1-2\nu)C_3\right]-\frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{\ln k}\left(\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۹۱-۳)$$

با جایگذاری رابطه (۳-۱۹۰) به جای u_R در رابطه (۳-۱۹۱)، کرنش شعاعی (ε_R^{p3}) و کرنش محیطی (ε_θ^{p3}) در ناحیه پلاستیک، به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_\theta^{p3}=-\varepsilon_R^{p3}=\frac{1}{E}\left[(1+\nu)(1-2\nu)(R-1)\left(\sigma_y\ln R+C_3\right)-\sigma_y\right]+\frac{(1+\nu)\alpha\theta_i}{\ln k}\left(\frac{1}{2R}\left(R^2-1\right)-\frac{1}{R}\ln k+(R-1)\ln\frac{k}{R}\right)+\frac{C_4}{R^2} \quad (۱۹۲-۳)$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی با توجه به نحوه تسلیم استوانه به‌دست می‌آیند.

اگردر استوانه $\theta_i > (\theta_i)_{cr1}$ باشد، استوانه ازسطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه الاستیک (e) ($1 \le R \le R_{ep}$) و پلاستیک(p) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۱۳۶ تا ۱۴۱)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک۱ (۳-۱۶۶)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}(R=1)=0 \\ 2)\sigma_R^{P1}(R=R_{ep})=\sigma_R^{e}(R=R_{ep}) \\ 3)\dfrac{\sigma_R^{e}(R=R_{ep})}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_z^{e}(R=R_{ep})}{\sigma_y}=1 \\ 4)u_R^{P1}(R=R_{ep})=u_R^{e}(R=R_{ep}) \\ 5)\sigma_R^{e}(R=k)=0 \end{cases} \tag{۱۹۳-۳}$$

با مشخص شدن C_1 وC_2، تنش‌های الاستیک σ_R^e و σ_θ^e به‌دست می‌آیند. بنابراین از رابطه ترسکا در سطح خارجی $\frac{\sigma_\theta^e(R=k)-\sigma_R^e(R=k)}{\sigma_y}=1$ با فرض مجهول بودن θ_i و جایگذاری روابط (۳-۱۳۶ و ۱۳۷) در رابطه ترسکا اختلاف دمای بحرانی تسلیم از سطح خارجی ($(\theta_i)_{cr2}$)به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{E}{\sigma_y}\left[\frac{2}{1+\nu}C_2k^{-2}+\frac{\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\ln k}\frac{1}{k^2}\left(k^2-1-2\ln k\right)\right]=1 \tag{۱۹۴-۳}$$

اختلاف دمای بحرانی تسلیم از سطح خارجی ($(\theta_i)_{cr2}$) برابر است با

$$(\theta_i)_{cr2}=\frac{\left(\frac{\sigma_y}{E}-\frac{2}{1+\nu}C_2k^{-2}\right)2(1-\nu)k^2\ln k}{\alpha\left(k^2-1-2\ln k\right)} \tag{۱۹۵-۳}$$

بنابراین اگردر استوانه $(\theta_i)_{cr1}<\theta_i<(\theta_i)_{cr2}$باشد، استوانه ازسطح داخلی تسلیم می‌شود. و اگر $(\theta_i)_{cr2}<\theta_i$استوانه ازسطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود به‌طوریکه در شعاع $1\le R\le R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R_{ep1}\le R\le R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2}\le R\le k$ ناحیه پلاستیک ۲ ($p2$) ایجاد می‌شود.

در صورت تسلیم شدن استوانه ازسطح داخلی و خارجی، مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۱۳۶ تا ۱۴۱) و مجهولاتC_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۶۶) و مجهولات C_{32} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۳)، و C_{42} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۳) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-

۱۹۰) و R_{ep1}(مرز بین ناحیه پلاستیک ۱ و الاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۲)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=0 \\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_z^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 4)\sigma_R^{P3}\left(R=K\right)=0 \\ 5)\sigma_R^{P3}\left(R=R_{ep2}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \\ 6)\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep2}\right)-\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 7)u_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 8)u_R^{P3}\left(R=R_{ep2}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \end{cases} \qquad (۱۹۶-۳)$$

با مشخص شدن C_1 و C_2، تنش‌های الاستیک σ_R^e و σ_θ^e به‌دست می‌آیند. بنابراین اگر $R_{ep1} < R^1$ باشد، توزیع تنش‌های الاستیک و پلاستیک به‌دست آمده قابل قبول‌اند. ولی اگر $R_{ep1} > R^1$ باشد، در شعاع $1 \le R \le R^1$ روابط ناحیه‌پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R^1 \le R \le R_{ep1}$ روابط ناحیه پلاستیک ۲ ($p2$)، در شعاع $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ روابط ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \le R \le k$ روابط ناحیه پلاستیک ۳ ($p3$) قابل قبول‌اند. در این حالت مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۱۳۶ تا ۱۴۱) و مجهولات C_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۶۶) و مجهولات C_{32} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲)، و C_{42} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۸۰)، مجهول C_{33} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۳) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۹۰) ، R_{ep1}(مرز بین ناحیه پلاستیک ۲ و الاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۳)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۱۰ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}(R=1)=0 \\ 2)\sigma_R^{P1}(R=R^1)=\sigma_\theta^{P1}(R=R^1) \\ 3)\sigma_\theta^{P1}(R=R^1)=\sigma_\theta^{P2}(R=R^1) \\ 4)\sigma_R^{P1}(R=R^1)=\sigma_R^{P2}(R=R^1) \\ 5)\sigma_\theta^{P2}(R=R_{ep1})=\sigma_\theta^{e}(R=R_{ep1}) \\ 6)\sigma_R^{P3}(R=K)=0 \\ 7)\sigma_R^{P3}(R=R_{ep2})=\sigma_R^{e}(R=R_{ep2}) \\ 8)\dfrac{\sigma_\theta^e(R=R_{ep1})-\sigma_z^e(R=R_{ep1})}{\sigma_y}=1 \\ 9)\dfrac{\sigma_\theta^e(R=R_{ep2})-\sigma_R^e(R=R_{ep2})}{\sigma_y}=1 \\ 10)u_R^{P2}(R=R_{ep1})=u_R^{e}(R=R_{ep1}) \end{cases} \qquad (۱۹۷-۳)$$

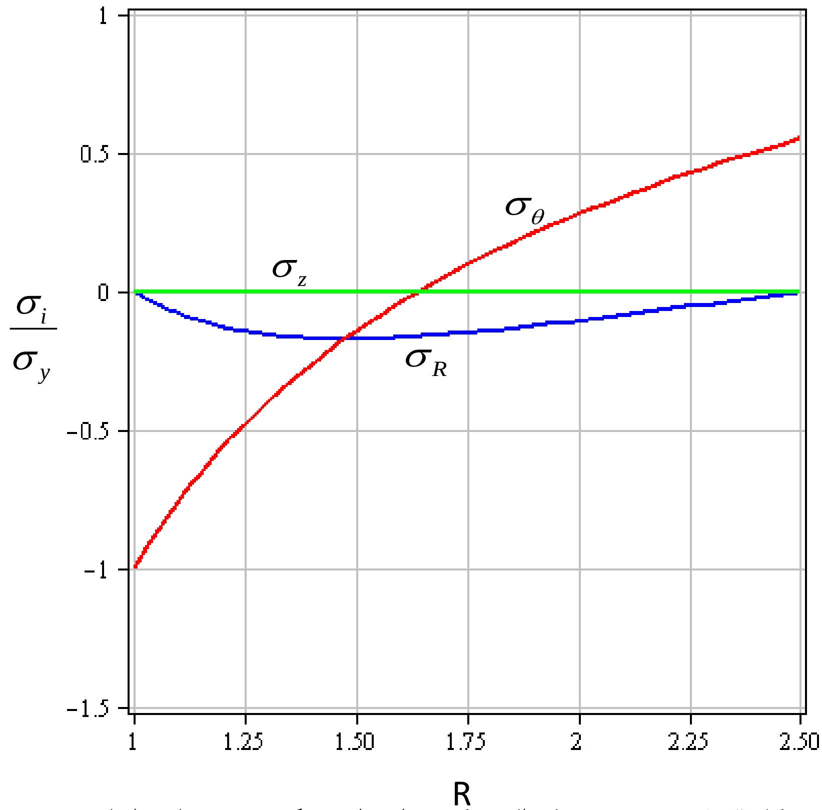
۳-۲-۲-۳- مطالعه موردی

برای مطالعه موردی، یک استوانه همگن تحت دمای داخلی، با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی $r_i=۴۰\ mm$، شعاع خارجی $r_o=۱۰۰\ mm$، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $k=۲/۵$، مدول الاستیک $E_i=۲۰۰\ GPa$، تنش تسلیم $\sigma_{y_i}=۳۰۰\ Mpa$ و نسبت پواسون $\nu=۰/۳$ است.

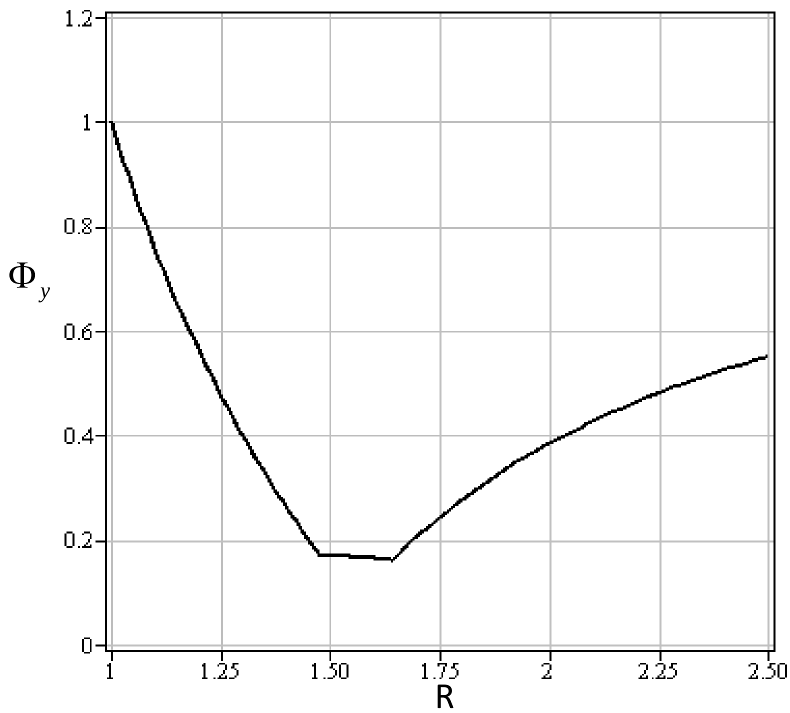
الف- تنش صفحه‌ای

با توجه به رابطه (۳-۷۸) دمای داخلی بحرانی تسلیم در این استوانه برابر است با $(\theta_i)_{cr1}=۱۹۳/۸۵c^{\circ}$.

شکل (۳-۵) توزیع تنش‌های الاستیک استوانه و شکل (۳-۶) تابع تسلیم در دمای داخلی $\theta_i=۱۹۳/۸۵c^{\circ}$ در شرایط تنش صفحه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۵- توزیع تنش‌های الاستیک در استوانه همگن تحت دمای داخلی

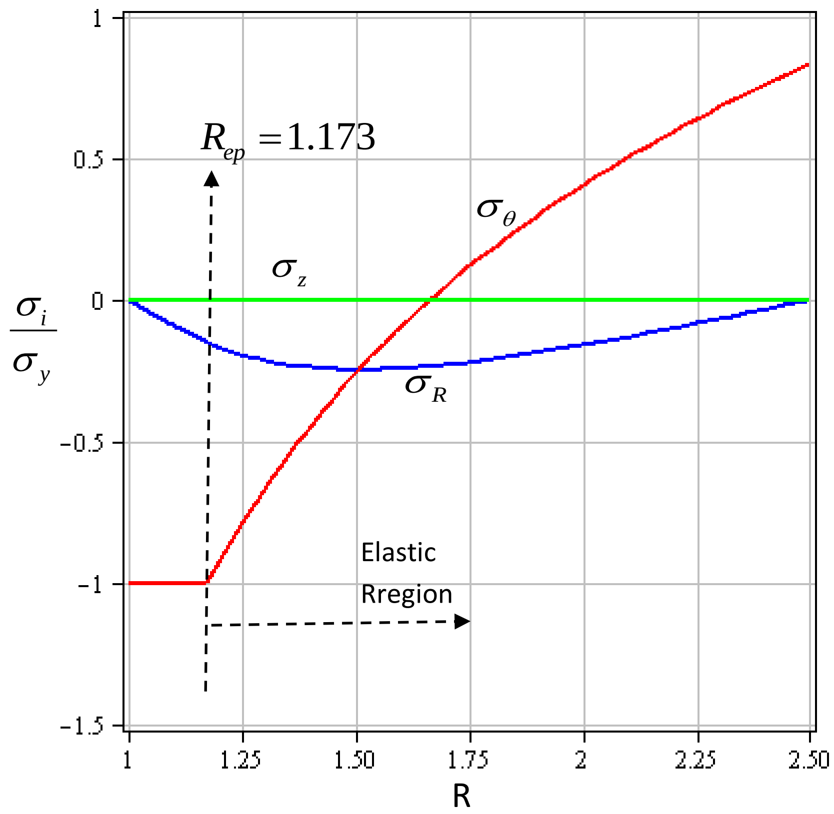


شکل ۳-۶- تابع تسلیم در استوانه همگن تحت دمای داخلی

همان طور که در شکل (۳-۶) مشخص است تابع تسلیم در سطح داخلی برابر یک است، بنابراین استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود.

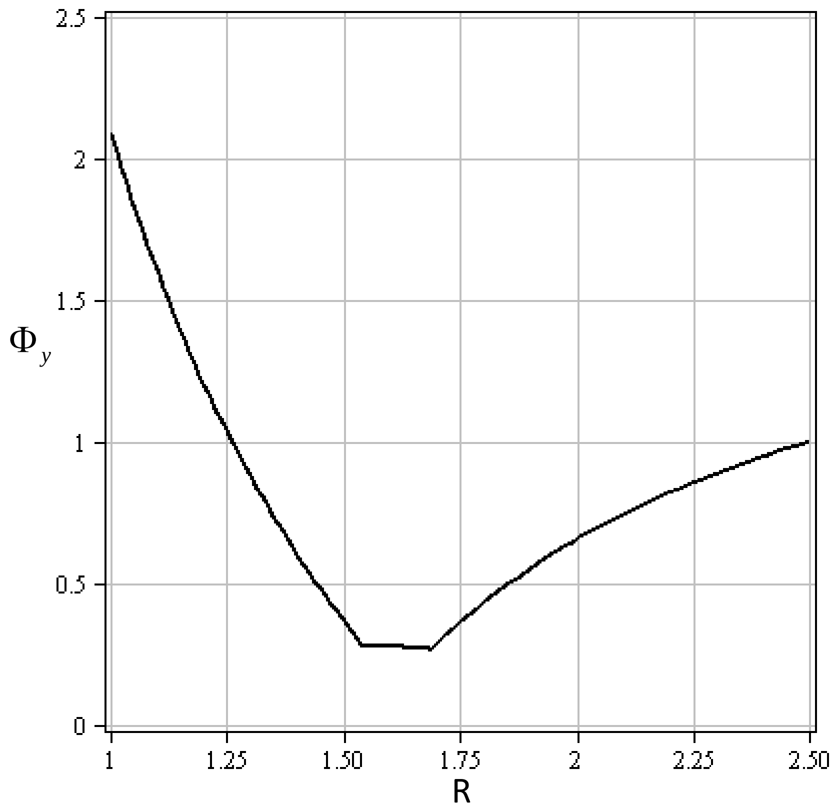
با افزایش دما، استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود. شکل (۳-۷) توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک استوانه در دمای $\theta_i = ۳۰۰ c^{\circ}$ در شرایط تنش صفحه‌ای را نشان داده شده است. در این شرایط مجهولات از ۵ شرط رابطه (۳-۱۲۴) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$C_1 = 0.0004375191998, C_2 = 0.0007146895227, C_3 = 1 \ , C_4 = 0.002228836427 \ , R_{ep} = 1.173407069$$



شکل ۳-۸- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن

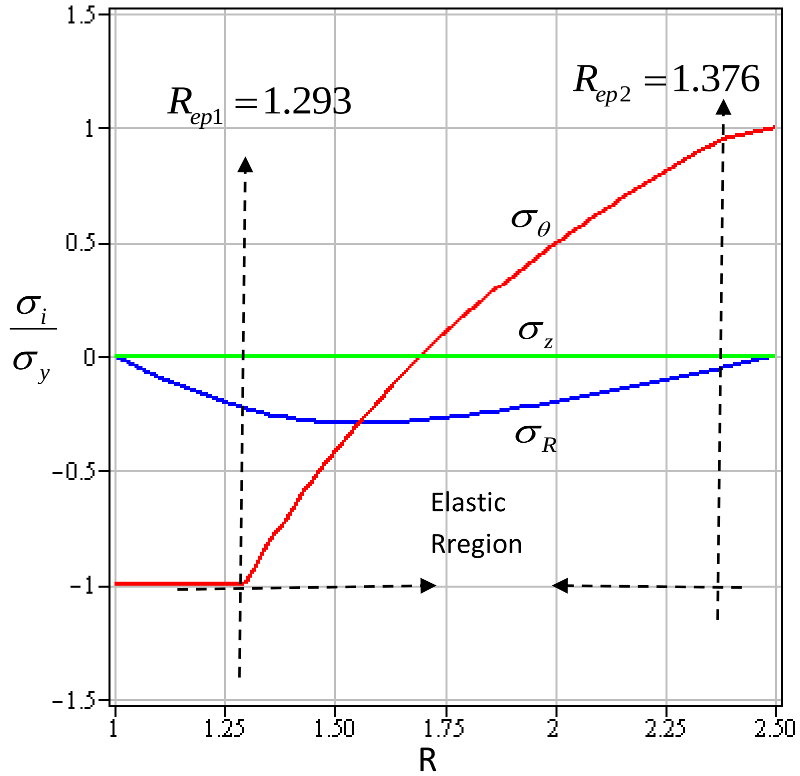
با جایگذاری C_2 در رابطه (۳-۱۲۶)، دمای تسلیم از سطح خارجی نیز برابر خواهد بود با $(\theta_i)_{cr2}$ =۳۶۹/۸c°. در این شرایط استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} =1.2615 تسلیم خواهد شد و سطح خارجی نیز در آستانه تسلیم قرار می‌گیرد. شکل (۳-۹) تابع تسلیم در این شرایط را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۹- تابع تسلیم در استوانه همگن تحت دما تسلیم شده از سطح داخلی و در آستانه تسلیم از سطح خارجی

با افزایش دما، استوانه از سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود. شکل (۳-۱۰) توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک استوانه در دمای θ_i =۴۰۰c° در شرایط تنش صفحه‌ای را نشان داده شده است. در این شرایط مجهولات از ۸ شرط رابطه (۳-۱۲۷) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

C_1=0.0005648533363,C_2=0.0007153700284, C_{31}=1 , $C_{32}=-0.9162907319$,C_{41}=0.002429524332
$C_{42}=-0.03167300239$, R_{ep1}=1.293022506, R_{ep2}=2.376012362

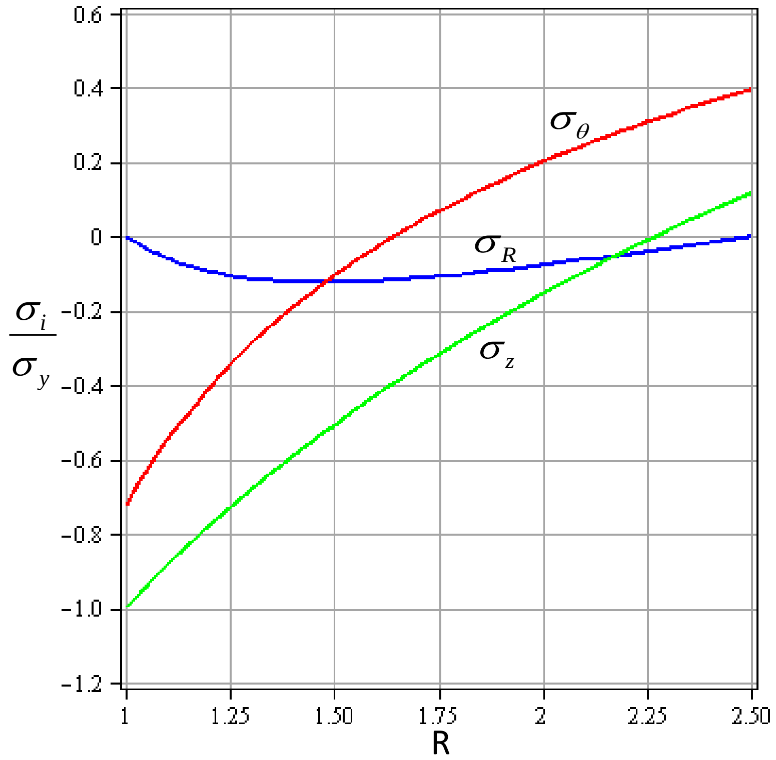


شکل ۳-۱۰- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن تسلیم شده از سطح داخلی وخارجی

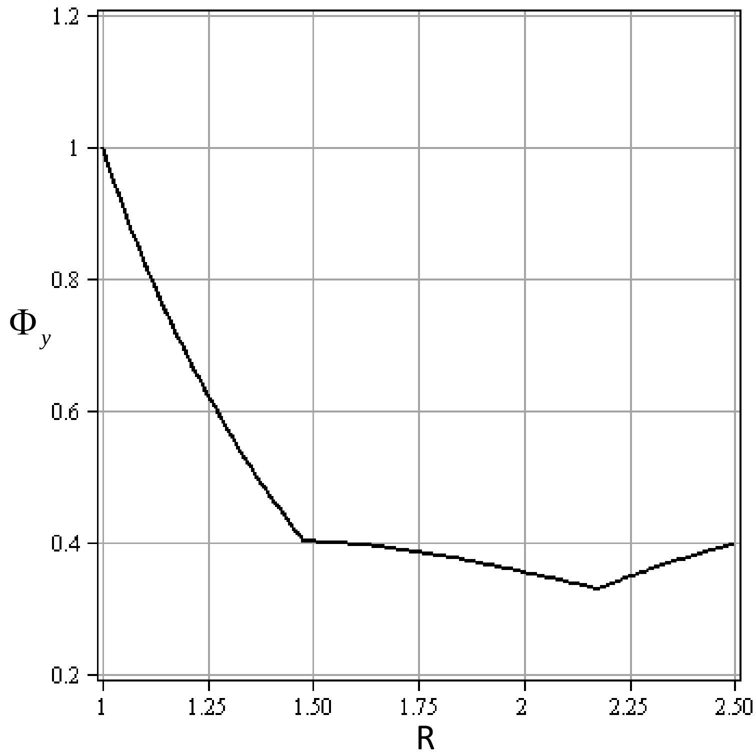
ب - کرنش صفحه‌ای

با توجه به رابطه (۳-۱۳۵) دمای داخلی بحرانی تسلیم در این استوانه برابر است با $(\theta_i)_{cr1}$ =۹۷/۹۳c°.

شکل (۳-۱۱) توزیع تنش‌های الاستیک استوانه و شکل (۳-۱۲) تابع تسلیم در دمای داخلی θ_i =۹۷/۹۳c° در شرایط کرنش صفحه‌ای را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱۱- توزیع تنش ترموالاستیک استوانه همگن در شرایط کرنش صفحه‌ای

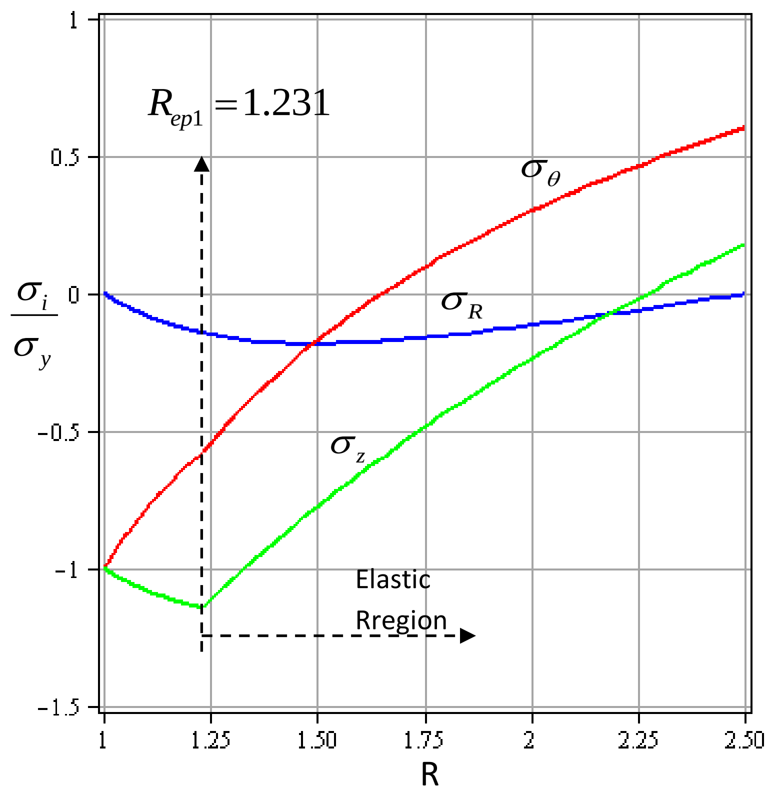


شکل ۳-۱۲- تابع تسلیم در استوانه همگن تحت دما در آستانه تسلیم و در شرایط کرنش صفحه‌ای

با توجه به شکل (۳-۱۲) مشخص می‌شود که تابع تسلیم در سطح داخلی برابر یک است، بنابراین استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود.

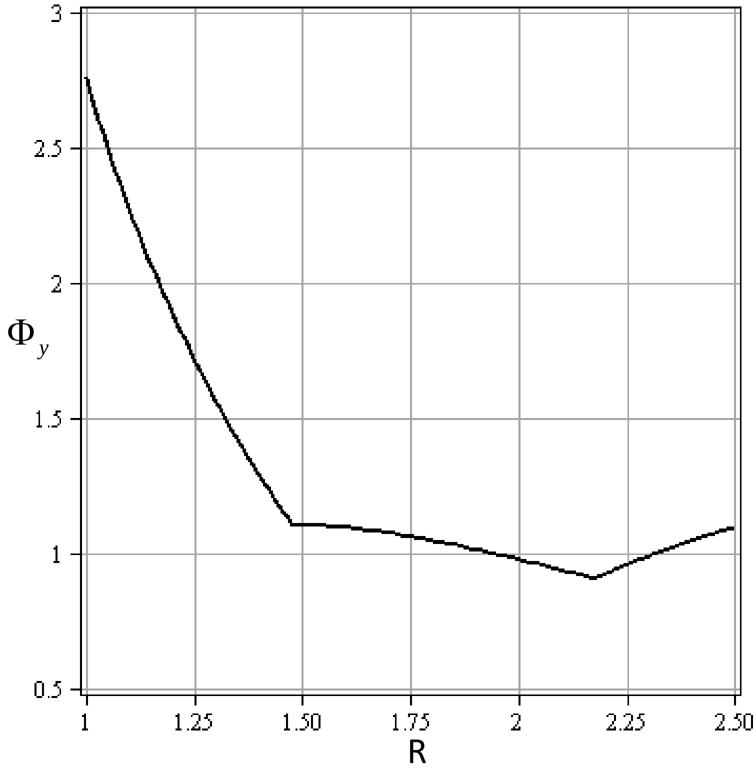
با افزایش دما، استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود. شکل (۳-۱۳) توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک استوانه در دمای $\theta_i = ۱۵۰ c^{\circ}$ در شرایط کرنش صفحه‌ای را نشان داده شده است. در این شرایط مجهولات از ۵ شرط رابطه (۳-۱۹۳) به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$C_1=0.0002352905289, C_2=0.0005595157057, C_3=-0.001944030847$$
$$C_4=0.0007430749852\ ,\ R_{ep}=1.231326955$$



شکل ۳-۱۳- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن در حالت کرنش صفحه‌ای تسلیم شده از سطح داخلی

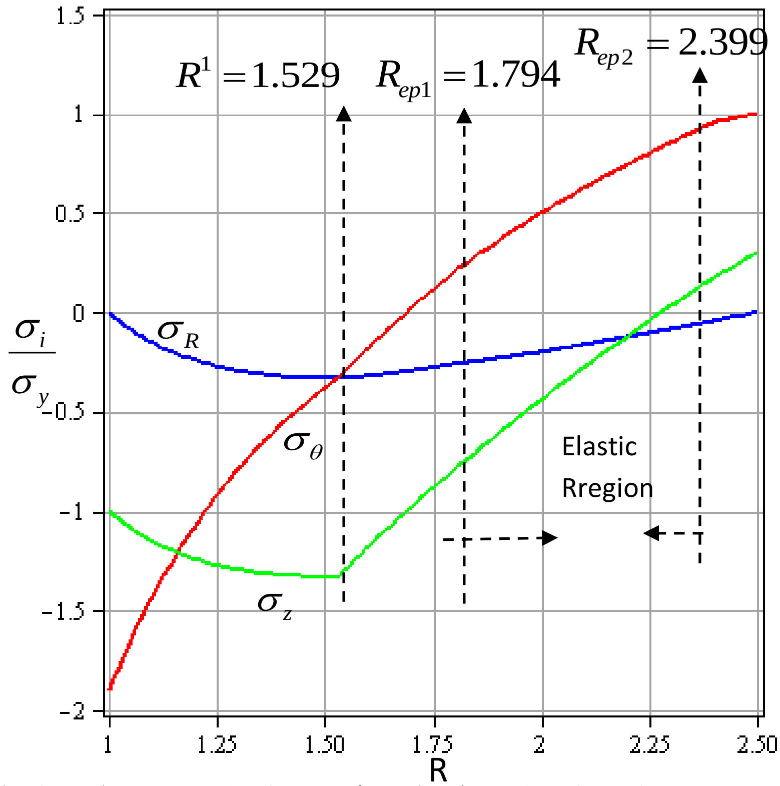
با توجه نمودار تابع تسلیم در دماهای بالاتر استوانه از سطح خارجی نیز تسلیم می‌شود. شکل (۳-۱۴) تابع تسلیم در دمای $(\theta_i)_{cr2}=$ ۲۷۰ c° را نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱۴- تابع تسلیم در استوانه همگن تحت دما تسلیم شده از سطح داخلی و خارجی

در این شرایط استوانه از سطح داخلی و خارجی با هر سه وضعیت معیار تسلیم می‌شود. و مجهولات از ۱۰ شرط رابطه (۳-۱۹۷) به‌دست می‌آیند.

$$C_1=0.0004118572216, C_2=0.0008112305905, C_{31}=-0.001923165201$$
$$C_{32}=-0.002696501683, C_{33}=-0.9162907319, C_{41}=0.0008068728682$$
$$C_{42}=0.001246776061, R^1=1.529200285, R_{ep1}=1.794636790$$
$$R_{ep2}=2.399622044$$



شکل ۳-۱۵- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن در حالت کرنش صفحه‌ای تسلیم از هر دو سطح

۳-۲-۳- تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه همگن تحت فشار

۳-۲-۳-۱- تنش صفحه‌ای

توزیع تنش‌های ترموالاستیک در استوانه تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$) و فشار داخلی، طبق روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳)، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)-\frac{E\alpha\theta_i}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}\right) \quad (۱۹۸-۳)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)-\frac{E\alpha\theta_i}{2\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}-1\right) \quad (۱۹۹-۳)$$

با بررسی روابط (۳-۱۹۸) و (۳-۱۹۹)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر استوانه همگن تحت تنش حرارتی و مکانیکی در حالت تنش صفحه‌ای با توجه به تغییرات فشار داخلی به‌صورت سه وضعیت زیر خواهد بود.

وضعیت ۱: در فشار $0 \le P_i < P_{i1}$ توزیع تنش‌ها به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \le R < R^1 \Rightarrow \sigma_\theta < \sigma_R < (\sigma_z = 0) \\ R^1 \le R < R^2 \Rightarrow \sigma_R < \sigma_\theta < (\sigma_z = 0) \\ R^2 \le R \le k \Rightarrow \sigma_R < (\sigma_z = 0) < \sigma_\theta \end{cases} \tag{۳-۲۰۰}$$

که P_{i1} از رابطه $\sigma_R(R = 1) = \sigma_\theta(R = 1)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{i1} = \frac{(k^2 - 1) E \alpha \theta_i}{4k^2 \ln k} \left(\frac{2k^2}{k^2 - 1} \ln k - 1 \right) \tag{۳-۲۰۱}$$

در رابطه (۳-۲۰۰)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_R$ و R^2 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_z$ خواهد بود.

وضعیت ۲: در فشار $P_{i1} \le P_i < P_{i2}$ توزیع تنش‌ها به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \le R < R^1 \Rightarrow \sigma_R < \sigma_\theta < (\sigma_z = 0) \\ R^1 \le R \le k \Rightarrow \sigma_R < (\sigma_z = 0) < \sigma_\theta \end{cases} \tag{۳-۲۰۲}$$

که P_{i2} از رابطه $\sigma_\theta(R = 1) = (\sigma_z = 0)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{i2} = \frac{(k^2 - 1) E \alpha \theta_i}{2(k^2 + 1) \ln k} \left(\frac{2k^2}{k^2 - 1} \ln k - 1 \right) \tag{۳-۲۰۳}$$

در رابطه (۳-۲۰۲)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_z$ خواهد بود.

وضعیت ۳: در فشار $P_{i2} \le P_i$ توزیع تنش‌ها به‌صورت زیر است.

$$\sigma_R < (\sigma_z = 0) < \sigma_\theta \tag{۳-۲۰۴}$$

الف) شروع تسلیم

با توجه به وضعیت توزیع تنش‌ها، معیار ترسکا و تابع تسلیم در هر استوانه تحت دما و فشار داخلی می‌توان چگونگی تسلیم را بررسی کرد.

وضعیت تنش‌ها در استوانه تحت تنش حرارتی و فشار داخلی در شرایط بحرانی تسلیم به‌صورت وضعیت ۱ و یا وضعیت ۳ خواهد بود.

در وضعیت ۱، معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_z - \sigma_\theta = \sigma_y \qquad (۲۰۵-۳)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در استوانه است. بر اساس رابطه (۳-۲۰۵)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\varnothing_y = \frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{\sigma_y} \qquad (۲۰۶-۳)$$

با توجه به رابطه (۳-۲۰۶) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۱۹۸ و ۱۹۹) در رابطه (۳-۲۰۶) و با توجه به این‌که اگر استوانه تحت اثر دما و فشار داخلی از سطح داخلی تسلیم شود، رابطه زیر برقرار است.

$$\varnothing_y\left(R=1\right)=1 \Rightarrow -\frac{\left(1+k^2\right)P_i}{\left(k^2-1\right)\sigma_y}+\frac{E\alpha\theta_i}{2\sigma_y \ln k}\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\ln k+\ln k-1\right)=1 \qquad (۲۰۷-۳)$$

از رابطه (۳-۲۰۷)، فشار بحرانی تسلیم از سطح داخلی ($(P_i)_{cr1}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(P_i\right)_{cr1}=\frac{\left(k^2-1\right)\sigma_y}{\left(k^2+1\right)}\left(-1+\frac{E\alpha\theta_i}{2\sigma_y \ln k}\left(\frac{2k^2}{k^2-1}\ln k-1\right)\right) \qquad (۲۰۹-۳)$$

در وضعیت ۳، معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \qquad (۲۱۰-۳)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در استوانه است. بر اساس رابطه (۳-۲۱۰)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\varnothing_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_y} \tag{۳-۲۱۱}$$

با توجه به رابطه (۳-۲۱۱) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۱۹۸ و ۱۹۹) در رابطه (۳-۲۱۱) و با توجه به این‌که اگر تسلیم استوانه تحت اثر دما و فشار داخلی از سطح داخلی آغاز می‌شود، رابطه زیر برقرار است.

$$\varnothing_y\left(R=1\right)=1 \Rightarrow \frac{2k^2 P_i}{\left(k^2-1\right)\sigma_y} - \frac{E\alpha\theta_i}{2\sigma_y \ln k}\left(\frac{2k^2}{k^2-1}\ln k - 1\right) = 1 \tag{۳-۲۱۲}$$

از رابطه (۳-۲۱۱)، فشار بحرانی تسلیم سطح داخلی ($(P_i)_{cr2}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(P_i\right)_{cr2} = \frac{\left(k^2-1\right)\sigma_y}{2k^2}\left(1 + \frac{E\alpha\theta_i}{2\sigma_y \ln k}\left(\frac{2k^2}{k^2-1}\ln k - 1\right)\right) \tag{۳-۲۱۳}$$

در وضعیت ۱ و ۳، معیار تسلیم ترسکا در سطح خارجی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \tag{۳-۲۱۴}$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در استوانه است. بر اساس رابطه (۳-۲۱۴)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\varnothing_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_y} \tag{۳-۲۱۵}$$

اگر تسلیم استوانه تحت اثر دما و فشار داخلی از سطح خارجی آغاز شود، با جایگذاری روابط (۳-۱۹۸ و ۱۹۹) در رابطه (۳-۲۱۵)، رابطه زیر برقرار است.

$$\varnothing_y\left(R=1\right)=1 \Rightarrow \frac{2P_i}{\left(k^2-1\right)\sigma_y} - \frac{E\alpha\theta_i}{2\sigma_y \ln k}\left(\frac{2}{k^2-1}\ln k - 1\right) = 1 \tag{۳-۲۱۶}$$

از رابطه (۳-۲۱۶)، فشار بحرانی تسلیم سطح خارجی($(P_i)_{cr3}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(P_i\right)_{cr3}=\frac{\left(k^2-1\right)\sigma_y}{2}\left(1+\frac{E\alpha\theta_i}{2\sigma_y\ln k}\left(\frac{2}{k^2-1}\ln k-1\right)\right) \tag{۳-۲۱۷}$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در دو ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در دو ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$) و فشار داخلی از روابط (۳-۷۹ تا ۱۲۳) به‌دست می‌آیند.

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط (۳-۷۹ تا ۱۲۳)، با توجه به نحوه تسلیم استوانه به‌دست می‌آیند.

با توجه به تابع تسلیم اگر استوانه طبق وضعیت ۱ از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم‌شود، دو ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۷۹ تا ۸۴)،C_3 وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۹۰ تا ۱۰۰)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\left(\sigma_z^{e}=0\right)-\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 4)u_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^{e}\left(R=k\right)=0 \end{cases} \tag{۳-۲۱۸}$$

با مشخص C_1 وC_2، تنش‌های الاستیک σ_R^e و σ_θ^e به‌دست می‌آیند. بنابراین اگر در سطح خارجی تابع تسلیم$1 \ge \frac{\sigma_\theta^e(R=k)-\sigma_R^e(R=k)}{\sigma_y}$ باشد استوانه از سطح خارجی نیز تسلیم می‌شود.

بنابراین اگر استوانه ازسطح داخلی و خارجی تسلیم شود، در شعاع $1 \leq R \leq R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R_{ep1} \leq R \leq R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \leq R \leq k$ ناحیه پلاستیک۲ ($p2$) ایجاد می‌شود.

در صورت تسلیم شدن استوانه ازسطح داخلی و خارجی، مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۷۹ تا ۸۴) و مجهولاتC_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۹۰ تا ۱۰۰) و مجهولات C_{32} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک وضعیت ۳)، و C_{42} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک وضعیت ۳) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۱۳ تا ۱۲۳) و R_{ep1}(مرز بین ناحیه پلاستیک ۱و الاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۲)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}(R=1)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 3)\left(\sigma_z^e=0\right)-\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 4)\sigma_R^{P3}(R=K)=0 \\ 5)\sigma_R^{P3}\left(R=R_{ep2}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \\ 6)\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep2}\right)-\sigma_R^e\left(R=R_{ep2}\right)}{\sigma_y}=1 \\ 7)u_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 8)u_R^{P3}\left(R=R_{ep2}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \end{cases} \tag{۳-۲۱۹}$$

۳-۲-۳-۲- کرنش صفحه‌ای

توزیع تنش‌های ترموالاستیک در استوانه تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$)، طبق روابط (۳-۱۴ تا ۱۶)، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right) - \frac{E\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1-\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}\right) \qquad (۲۲۰-۳)$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) - \frac{E\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{\ln k}{k^2-1}\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right)+\ln\frac{k}{R}-1\right) \qquad (۲۲۱-۳)$$

$$\sigma_z = \frac{2\nu P_i}{k^2-1} - \frac{\nu E\alpha\theta_i}{2(1-\nu)\ln k}\left(\frac{2\ln k}{k^2-1}+\frac{2}{\nu}\ln\frac{k}{R}-1\right) \qquad (۲۲۲-۳)$$

با بررسی روابط (۳-۲۲۰ تا ۲۲۲)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر استوانه همگن تحت تنش حرارتی و مکانیکی در حالت کرنش صفحه‌ای با توجه به تغییرات فشار داخلی به‌صورت سه وضعیت زیر خواهد بود.

وضعیت ۱: در فشار $0 \le P_i < P_{i1}$ توزیع تنش‌ها به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \le R < R^1 \Rightarrow \sigma_z < \sigma_\theta < \sigma_R \\ R^1 \le R < R^2 \Rightarrow \sigma_z < \sigma_R < \sigma_\theta \\ R^2 \le R \le k \Rightarrow \sigma_R < \sigma_z < \sigma_\theta \end{cases} \qquad (۲۲۳-۳)$$

که P_{i1} از رابطه $\sigma_R(R=1) = \sigma_\theta(R=1)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{i1} = \frac{(k^2-1)E\alpha\theta_i}{4(1-\nu)k^2\ln k}\left(\frac{2k^2}{k^2-1}\ln k - 1\right) \qquad (۲۲۴-۳)$$

در رابطه (۳-۲۲۳)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_\theta = \sigma_R$ و R^2 شعاعی است که در آن $\sigma_R = \sigma_z$ خواهد بود.

وضعیت ۲: در فشار $P_{i1} \le P_i < P_{i2}$ توزیع تنش‌ها به‌صورت زیر است.

$$\begin{cases} 1 \le R < R^1 \Rightarrow \sigma_z < \sigma_R < \sigma_\theta \\ R^1 \le R \le k \Rightarrow \sigma_R < \sigma_z < \sigma_\theta \end{cases} \qquad (۲۲۵-۳)$$

که P_{i2} از رابطه $\sigma_R(R=1) = \sigma_z(R=1)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$P_{i2}=\frac{\left(k^2-1\right)\nu E\alpha\theta_i}{2\left(1-2\nu-k^2\right)\left(1-\nu\right)\ln k}\left(\frac{2}{k^2-1}\ln k+\frac{2}{\nu}\ln k-1\right) \qquad (۳-۲۲۶)$$

در رابطه (۳-۲۲۵)، R^1 شعاعی است که در آن $\sigma_R = \sigma_Z$ خواهد بود.

وضعیت ۳: در فشار $P_{i2} \le P_i$ توزیع تنش‌ها به‌صورت زیر است.

$$\sigma_R < \sigma_z < \sigma_\theta \qquad (۳-۲۲۷)$$

الف) شروع تسلیم

در وضعیت ۱، استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود و معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_R-\sigma_z=\sigma_y \qquad (۳-۲۲۸)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در استوانه است. بر اساس رابطه (۳-۲۲۸)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\varnothing_y=\frac{\sigma_R-\sigma_z}{\sigma_y} \qquad (۳-۲۲۹)$$

با توجه به رابطه (۳-۲۳۰) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۲۲۰ و ۲۲۲) در رابطه (۳-۲۳۰) و با توجه به این‌که تسلیم استوانه تحت اثر دما و فشار داخلی از سطح داخلی$(R = 1)$ آغاز می‌شود، فشار بحرانی تسلیم از سطح داخلی($(P_i)_{cr1}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(P_i\right)_{cr1}=\frac{\left(k^2-1\right)\sigma_y}{1-2\nu-k^2}\left(1-\frac{\nu E\alpha\theta_i}{2\left(1-\nu\right)\sigma_y\ln k}\left(\frac{2\ln k}{k^2-1}+\frac{2}{\nu}\ln k-1\right)\right) \qquad (۳-۲۳۰)$$

ممکن است استوانه از سطح خارجی نیز تسلیم شود. توضیحات بیشتر در ادامه بیان خواهد شد.

در وضعیت ۳، استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود و معیار تسلیم ترسکا در سطح داخلی به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y \qquad (۲۳۱\text{-}۳)$$

در رابطه بالا، σ_y تنش تسلیم در استوانه است. بر اساس رابطه (۳-۲۳۱)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\varnothing_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_y} \qquad (۲۳۲\text{-}۳)$$

با توجه به رابطه (۳-۲۳۲) در شرایطی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۳-۲۲۰ و ۲۲۱) در رابطه (۳-۲۳۲) و با توجه به این‌که تسلیم استوانه از سطح داخلی آغاز می‌شود، فشار بحرانی تسلیم از سطح داخلی($(P_i)_{cr3}$) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(P_i\right)_{cr3} = \frac{\left(k^2-1\right)\sigma_y}{2k^2}\left(1+\frac{E\,\alpha\theta_i}{2\left(1-\nu\right)\sigma_y \ln k}\left(\frac{2k^2}{k^2-1}\ln k - 1\right)\right) \qquad (۲۳۳\text{-}۳)$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در دو ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در دو ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده تحت اثر تغییرات دمای سطح داخلی ($\theta_o = 0$) و فشار داخلی در شرایط کرنش صفحه‌ای از روابط (۳-۱۳۶ تا ۱۹۷) به‌دست می‌آید.

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط (۳-۱۳۶ تا ۱۹۷) با توجه به نحوه تسلیم استوانه به‌دست می‌آیند.

اگر استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۱۳۶ تا ۱۴۱)،C_3 وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۶۶)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$
\begin{cases}
1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\
2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\
3)\dfrac{\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_z^{e}\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_y}=1 \\
4)u_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right)=u_R^{e}\left(R=R_{ep}\right) \\
5)\sigma_R^{e}\left(R=k\right)=0
\end{cases}
\qquad (۲۳۴\text{-}۳)
$$

با مشخص C_1 وC_2، تنش‌های الاستیک σ_R^e و σ_θ^e به‌دست می‌آیند. بنابراین اگر در سطح خارجی تابع تسلیم $\frac{\sigma_\theta^e(R=k)-\sigma_R^e(R=k)}{\sigma_y} \geq 1$ باشد استوانه از سطح خارجی نیز تسلیم می‌شود.

بنابراین اگر استوانه ازسطح داخلی و خارجی تسلیم شود، در شعاع $1 \leq R \leq R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R_{ep1} \leq R \leq R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \leq R \leq k$ ناحیه پلاستیک ۲ ($p2$) ایجاد می‌شود.

در صورت تسلیم شدن استوانه ازسطح داخلی و خارجی، مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۱۳۶ تا ۱۴۱) و مجهولاتC_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۶۶) و مجهولات C_{32} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲)، و C_{42} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۳) مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۸۵ تا ۱۹۱) و R_{ep1}(مرز بین ناحیه پلاستیک ۱و الاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۳)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}(R=1)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^{P1}(R=R_{ep1})=\sigma_R^{e}(R=R_{ep1}) \\ 3)\dfrac{\sigma_R^{e}(R=R_{ep})}{\sigma_y}-\dfrac{\sigma_z^{e}(R=R_{ep})}{\sigma_y}=1 \\ 4)\sigma_R^{P3}(R=K)=0 \\ 5)\sigma_R^{P3}(R=R_{ep2})=\sigma_R^{e}(R=R_{ep2}) \\ 6)\dfrac{\sigma_\theta^{e}(R=R_{ep2})-\sigma_R^{e}(R=R_{ep2})}{\sigma_y}=1 \\ 7)u_R^{P1}(R=R_{ep1})=u_R^{e}(R=R_{ep1}) \\ 8)u_R^{P3}(R=R_{ep2})=u_R^{e}(R=R_{ep2}) \end{cases} \qquad (۲۳۵-۳)$$

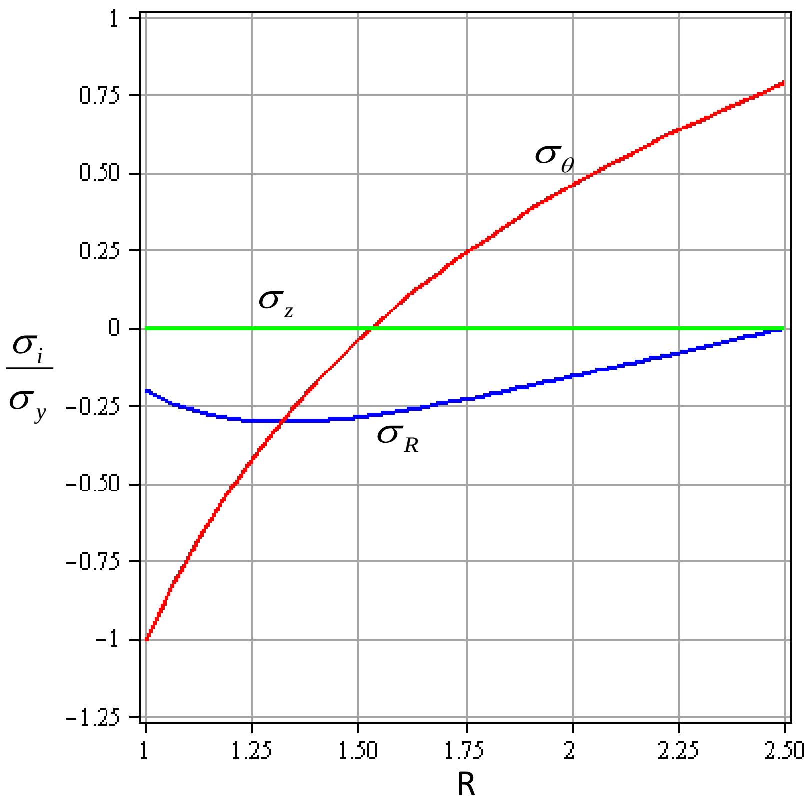
اگردر استوانه $P_i > (P_i)_{cr3}$ و $P_i > P_{i2}$ باشد، استوانه طبق وضعیت ۳ از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود و دو ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و الاستیک (e) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۳-۱۳۶ تا ۱۴۱)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۳-۱۸۵ تا ۱۹۱)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P3}(R=1)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^{P3}(R=R_{ep})=\sigma_R^{e}(R=R_{ep}) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^{e}(R=R_{ep2})-\sigma_R^{e}(R=R_{ep2})}{\sigma_y}=1 \\ 4)u_R^{P3}(R=R_{ep})=u_R^{e}(R=R_{ep}) \\ 5)\sigma_R^{e}(R=k)=0 \end{cases} \qquad (۲۳۶-۳)$$

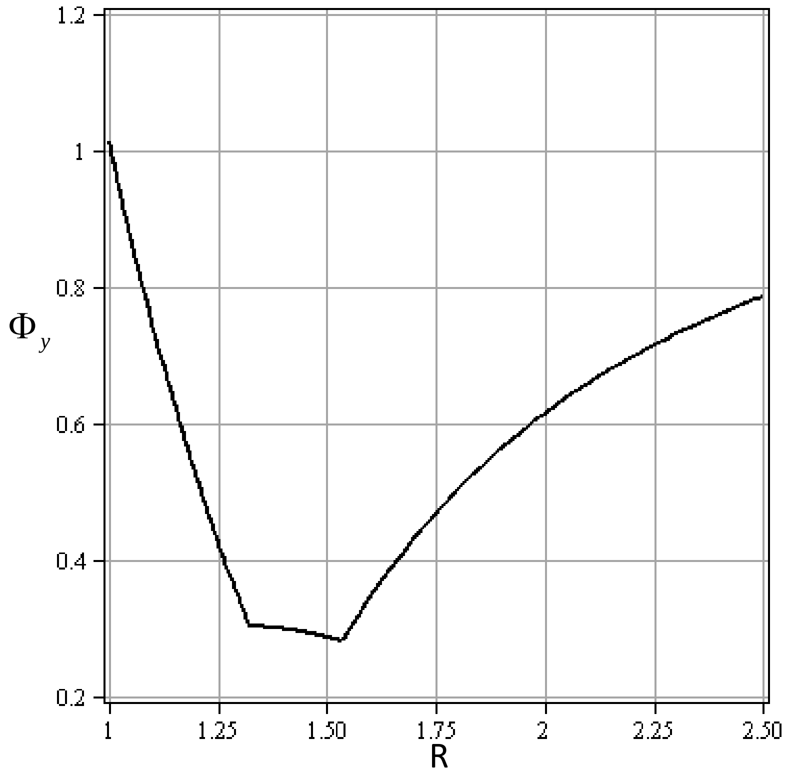
۳-۲-۳-۳- مطالعه موردی

برای مطالعه موردی، یک استوانه همگن تحت فشار و دمای داخلی در حالت تنش صفحه‌ای، با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی $r_i =۴۰\, mm$، شعاع خارجی $r_o =۶۰\, mm$، نسبت شعاع داخلی به شعاع خارجی $k =۲/۵$، مدول الاستیک $E_i =۲۰۰\, GPa$، تنش تسلیم $\sigma_{y_i} =۳۰۰\, Mpa$ و نسبت پواسون $\nu =۰/۳$ است.

شکل (۳-۱۶) توزیع تنش‌های الاستیک آستانه تسلیم و شکل (۳-۱۷) تابع تسلیم در استوانه تحت دمای داخلی $\theta_i =۲۵۰\, c^{\circ}$ را نشان می‌دهد، در این استوانه براساس روابط (۳-۲۲۴ و ۲۳۰) به ترتیب داریم، $P_{i1} =۱۶۲/۴۸ MPa$ و $(P_i)_{cr1} =۶۲/۶۱ MPa$.



شکل ۳-۱۶- توزیع تنش ترموالاستیک در استوانه همگن تحت فشار داخلی در حالت تنش صفحه‌ای

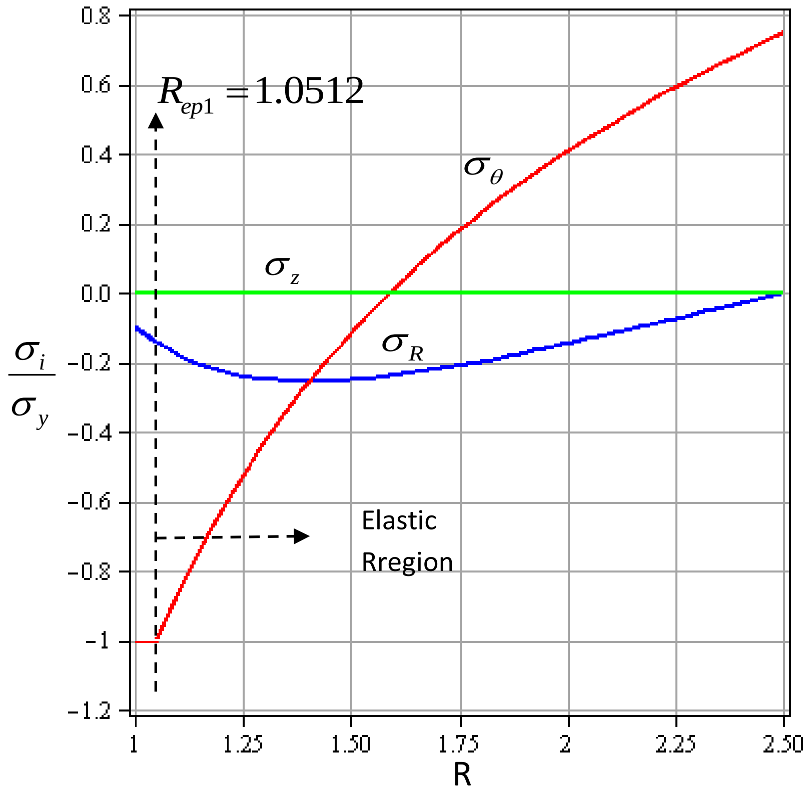


شکل ۳-۱۷- تابع تسلیم در آستانه تسلیم در استوانه همگن تحت فشار و دما
داخلی در حالت تنش صفحه‌ای

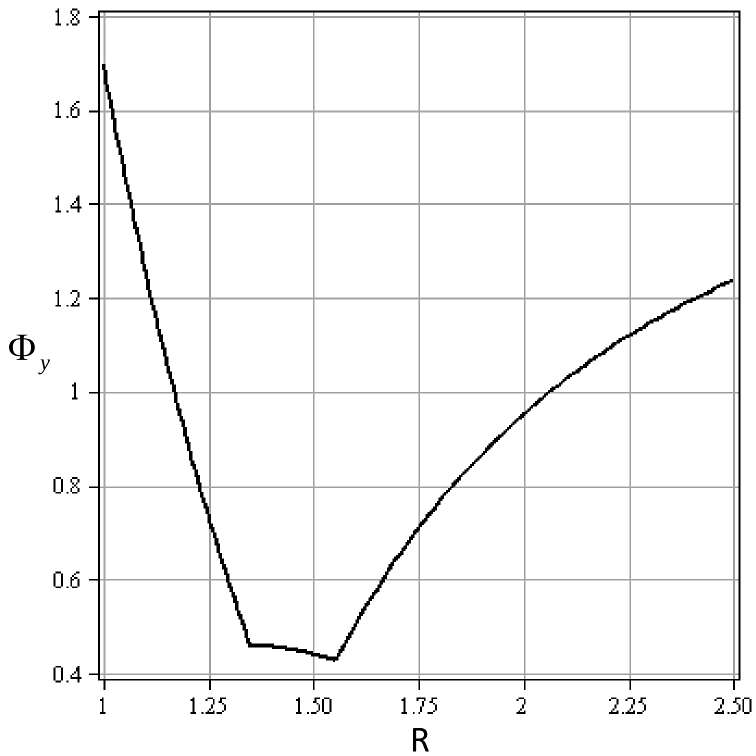
شکل (۳-۱۸) توزیع تنش‌های الاستوپلاستیک استوانه تسلیم شده از سطح داخلی در دمای $\theta_i =$۲۵۰c° و فشار $P_i =$۳۰ MPa را نشان می‌دهد.در این شرایط استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود. و مجهولات از ۵ شرط رابطه (۳-۲۳۴) به‌دست می‌آیند.

$$C_1=0.0003921731418, C_2=0.0009156277389, C_3=-0.1, C_4=0.002228836427, R_{ep}=1.051262224$$

شکل (۳-۱۹) تابع تسلیم در استوانه تحت دمای داخلی $\theta_i =$۴۰۰c° و فشار $P_i =$۸۰ MPa را نشان می‌دهد.



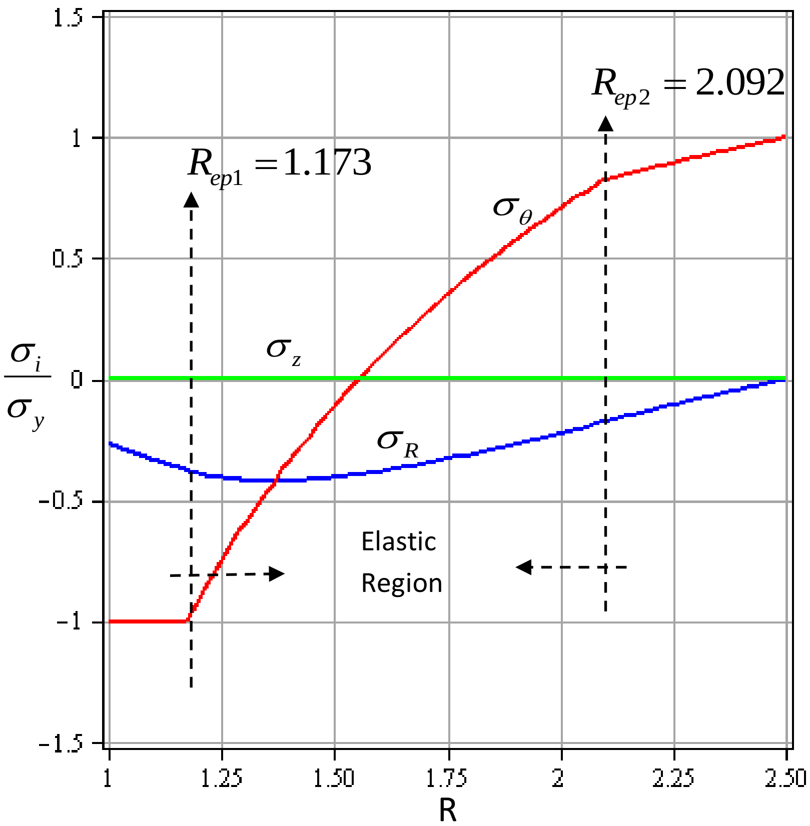
شکل ۳-۱۸- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن تسلیم شده از سطح داخلی در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۳-۱۹- تابع تسلیم در استوانه همگن تحت فشار و دما داخلی تسلیم شده از هر دو سطح در حالت تنش صفحه‌ای

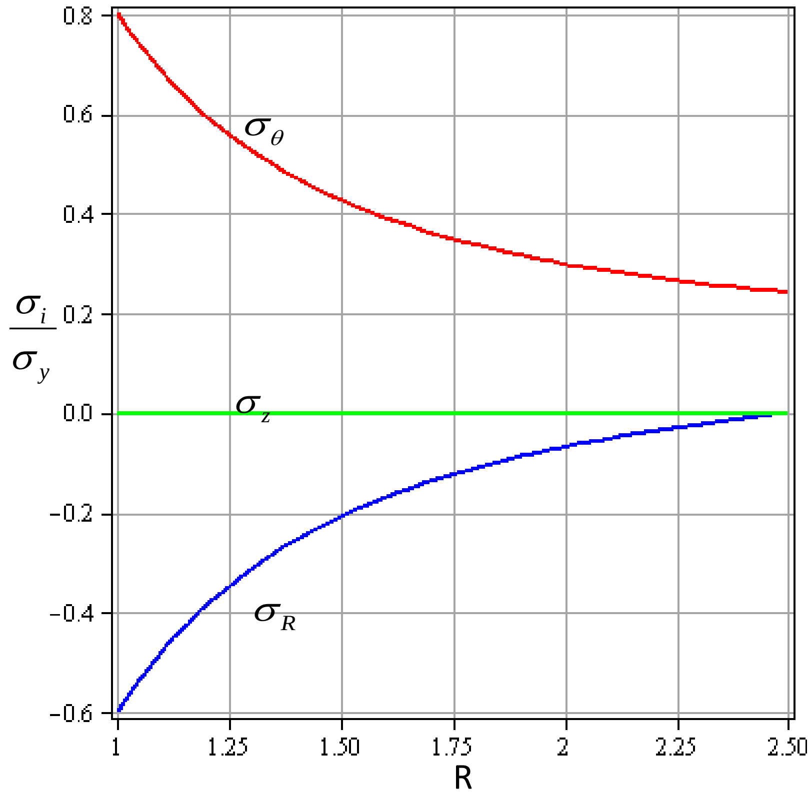
با توجه به نمودار تابع تسلیم، این استوانه از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود و مجهولات از ۸ شرط رابطه (۳-۲۳۵) به‌دست می‌آیند

$$C_1=0.0006645897740, C_2=0.001638543808,\ C_{31}=1\ ,\ C_{32}=-0.9162907319\ , C_{41}=0.001429522452$$
$$C_{42}=-0.01164200119,\ R_{ep1}=1.173580860,\ R_{ep2}=2.092007639$$

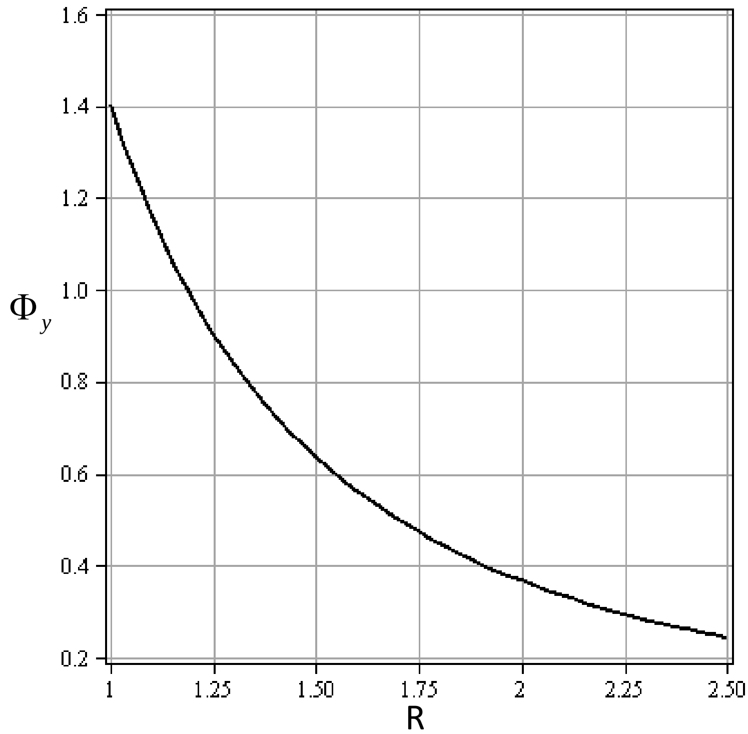


شکل ۳- ۲۰- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن تسلیم شده از هر دو سطح داخلی و خارجی در حالت تنش صفحه‌ای

شکل (۳-۲۱) توزیع تنش الاستیک و شکل (۳-۲۲) تابع تسلیم در استوانه تحت دمای داخلی $\theta_i =$۵c° و فشار $P_i =$۱۸۰ MPa را نشان می‌دهد.



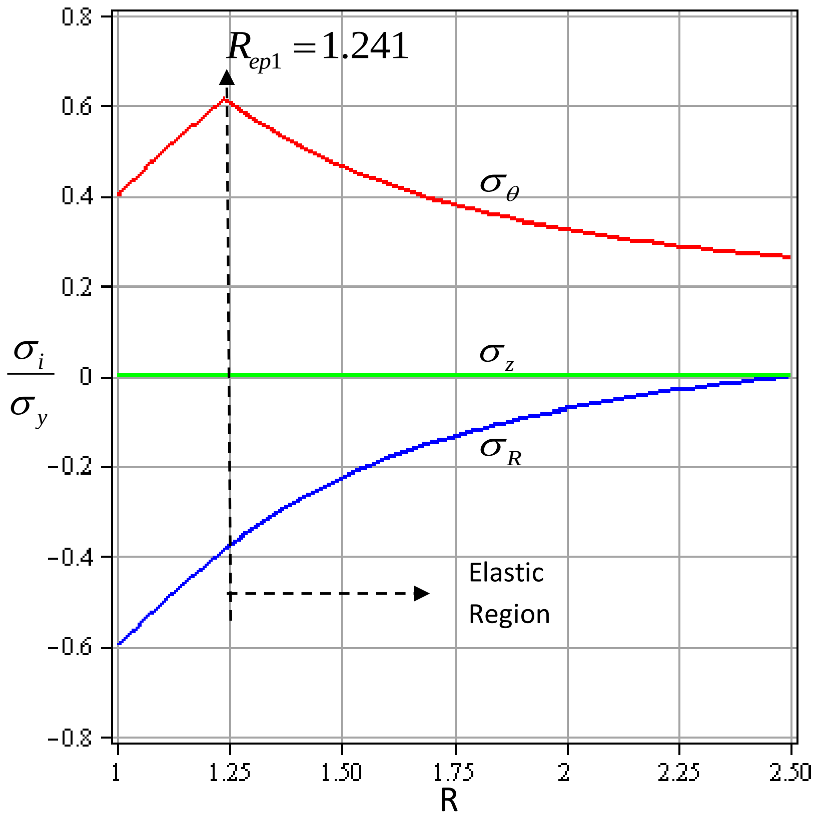
شکل ۳- ۲۱- توزیع تنش ترموالاستیک در استوانه همگن تحت فشار داخلی
در حالت تنش صفحه‌ای



شکل ۳-۲۲- تابع تسلیم در استوانه همگن تحت فشار و دمای داخلی تسلیم شده از سطح داخلی

با توجه به نمودار تابع تسلیم، این استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود و مجهولات از ۵ شرط رابطه (۳-۲۱۸) به‌دست می‌آیند.

$$C_1=0.0001380800218, C_2=0.00152998690, C_3=-0.016, C_4=0.0012346427, R_{ep}=1.24138084$$



شکل ۳- ۲۳- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن تسلیم شده از سطح داخلی در حالت تنش صفحه‌ای

۳-۳- تحلیل الاستوپلاستیک استوانه همگن با کمک معیار تسلیم فون میزز

برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه همگن تحت فشار داخلی و دمای داخلی، با کمک معیار فون میزز، از روش المان محدود توسط نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است.

مدل در نظر گرفته شده در نرم افزار برای استوانه یک المان مستطیلی است که با دوران آن حول محور z استوانه‌ای با شعاع داخلی ۴۰mm و شعاع خارجی ۶۰mm ایجاد می‌شود، و با استفاده از جزء مستطیلی

۸ گره‌ای درجه ۲ (CAX8R) متقارن محوری و زیر برنامه UMAT تحلیل انجام شده است. و خواص مکانیکی ماده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$E = 200\,GPa, \sigma_y = 300\,MPa, v = 0.3$$

شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای در مدل مستطیلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

الف) تنش صفحه‌ای $\Leftarrow$ $u_1 = u_R = 0, u_2 = u_z \neq 0, u_3 = u_\theta = 0$

ب) کرنش صفحه‌ای $\Leftarrow$ $u_1 = u_R = 0, u_2 = u_z = 0, u_3 = u_\theta = 0$

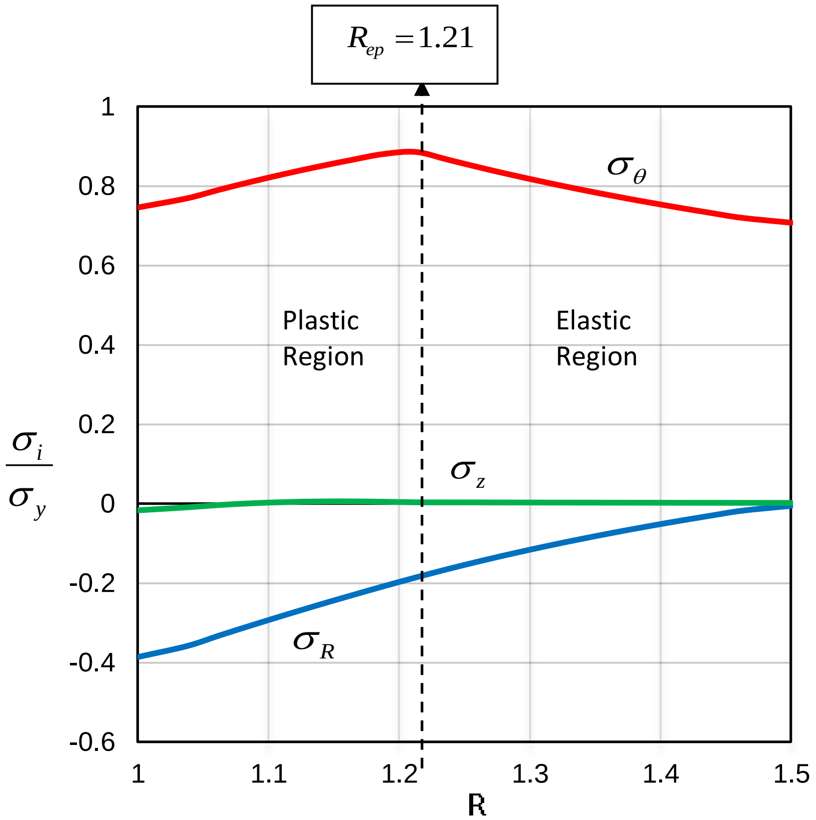
فشار و دمای بحرانی تسلیم در استوانه همگن براساس معیار فون میزز در دما و فشار داخلی مختلف، در جدول شماره (۳-۱) نشان داده شده است.

جدول ۳-۱- فشار بحرانی آغاز تسلیم در استوانه همگن بر اساس معیار فون میزز

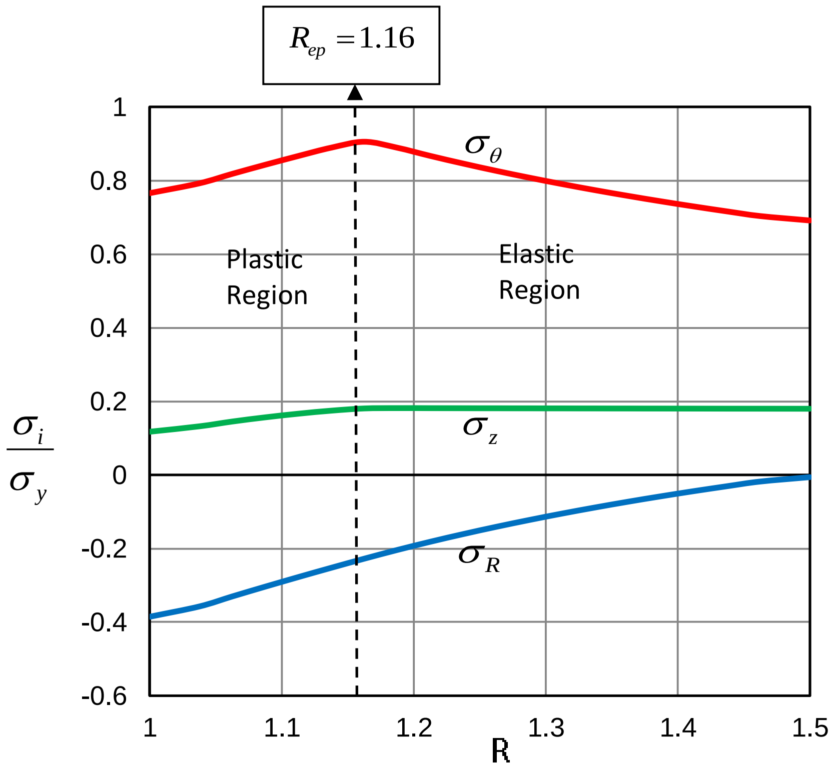
-------------	$\theta_i = 0c^\circ$	$\theta_i = 50c^\circ$	$P_i = 0$
تنش صفحه‌ای	$(P_i)_{cr} = 94.07MPa$	$(P_i)_{cr} = 112.72MPa$	$(\theta_i)_{cr} = 159.27c^\circ$
کرنش صفحه‌ای	$(P_i)_{cr} = 96.44MPa$	$(P_i)_{cr} = 111.49MPa$	$(\theta_i)_{cr} = 114.81c^\circ$

با افزایش فشار یا دما از حد بحرانی استوانه وارد ناحیه پلاستیک خواهد شد. با کمک نرم‌افزار آباکوس توزیع تنش‌ها در ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده را در ۳ حالت مختلف دما و فشار رسم می‌کنیم.

شکل‌های (۳-۲۴ و ۲۵) توزیع تنش‌ها در استوانه تحت فشار داخلی $P_i =$۱۲۰ MPa را در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. این استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم شده است.

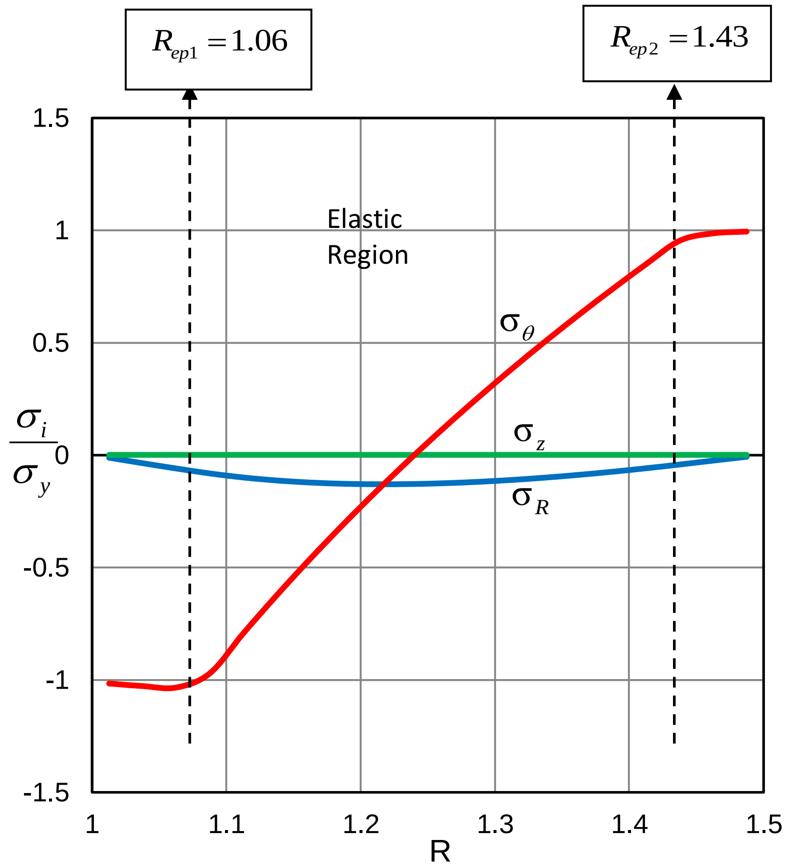


شکل ۳- ۲۴- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه همگن تنش صفحه‌ای تحت فشار داخلی از معیار فون میزز

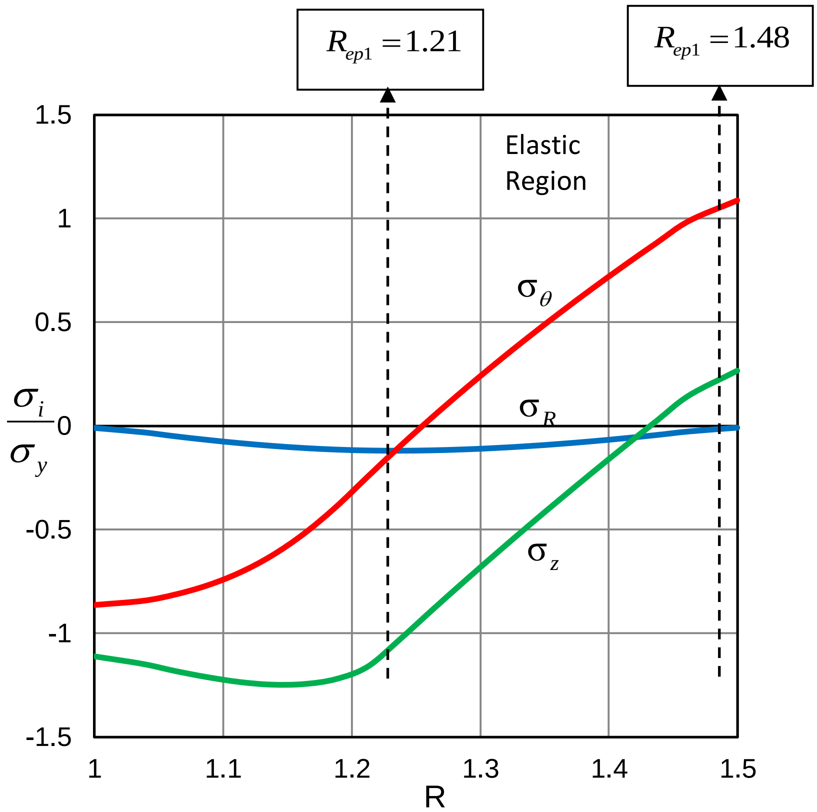


شکل ۳- ۲۵- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه همگن کرنش صفحه‌ای تحت فشار داخلی از معیار فون میزز

شکل (۳-۲۶ و ۲۷) توزیع تنش‌ها در استوانه تحت دمای $\theta_i = ۲۵۰ c^{\circ}$ را در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. این استوانه از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود. بنابراین در ناحیه بین R_{ep1} و R_{ep2} یک ناحیه الاستیک ایجاد می‌شود.

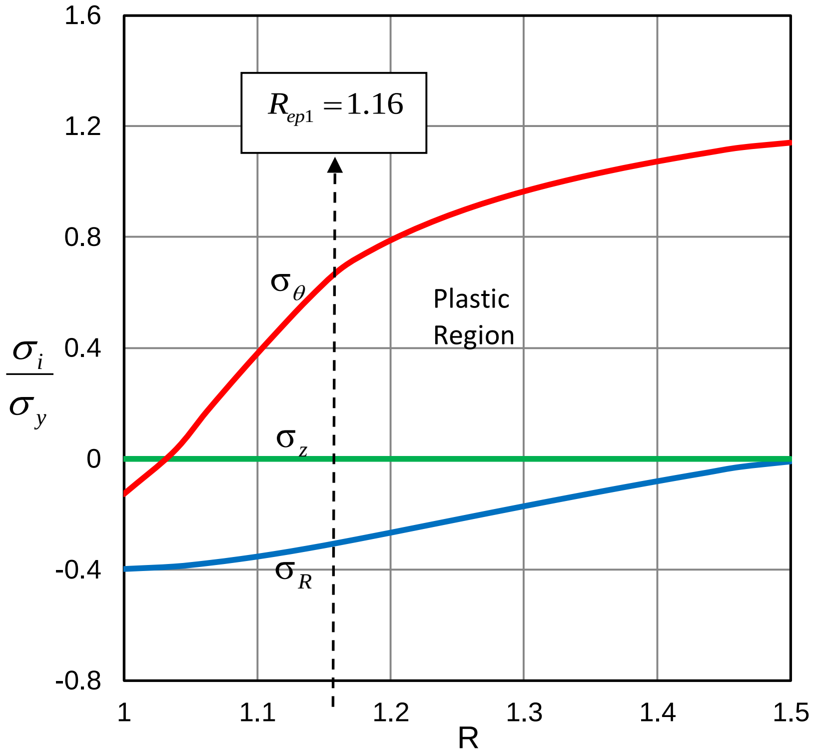


شکل ۳- ۲۶- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن تنش صفحه‌ای از معیار فون میزز

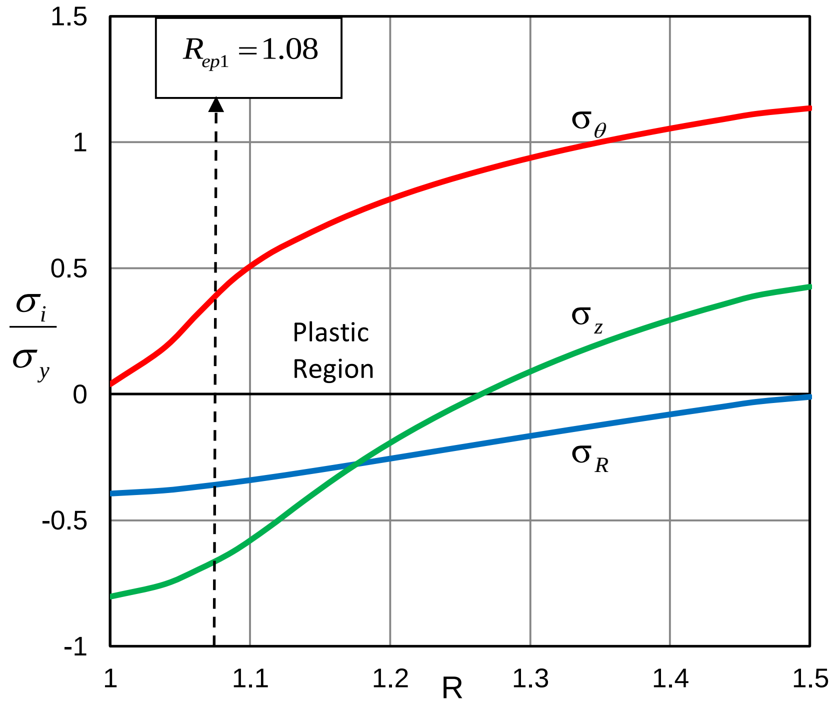


شکل ۳- ۲۷- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن کرنش صفحه‌ای از معیار فون میزز

شکل (۳-۲۸ و ۲۹) توزیع تنش‌ها در استوانه تحت دمای $\theta_i = ۲۵۰\, c^{\circ}$ و فشار داخلی $P_i = ۱۲۰\, MPa$ را در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، نشان می‌دهد. این استوانه از سطح خارجی تسلیم می‌شود.



شکل ۳- ۲۸- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن تنش صفحه‌ای تحت فشار داخلی از معیار فون میزز



شکل ۳- ۲۹- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه همگن کرنش صفحه‌ای تحت فشار داخلی از معیار فون میزز

فصل ۴

تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه جدار ضخیم ناهمگن FG تحت فشار داخلی

در این فصل در ابتدا با استفاده از روابط اساسی توزیع تنش‌های الاستیک در استوانه جدار ضخیم ناهمگن FG تحت اثر فشار داخلی و دمای داخلی به‌دست می‌آوریم. سپس در ۲ حالت استوانه تحت فشار داخلی و استوانه تحت فشار و دمای داخلی، به کمک معیار تسلیم ترسکا و فون میزز استوانه مورد تحلیل ترموالاستوپلاستیک قرار گرفته است.

۴-۱ توزیع تنش‌های الاستیک در استوانه FGM تحت اثر نیروهای مکانیکی و حرارتی

با جایگذاری روابط سینماتیک (۲-۱۸) در روابط رفتاری (۲-۲۲) سپس در رابطه تعادل (۲-۱۹)، معادله دیفرانسیلی زیر برای جابجایی حاصل می‌شود.

$$R^2 u_R'' + (n_1+1) R u_R' + \left(\frac{B}{A} n_1 - 1\right) u_R = \frac{C\alpha_i}{A} R^{n_3+1} \left((n_3+n_1)\theta(R) + R\,\frac{d\theta(R)}{dR} \right) \tag{۴-۱}$$

با جایگذاری رابطه توزیع دما در معادله دیفرانسیلی بالا داریم.

$$\begin{aligned} &R^2 u_R'' + (n_1+1) R u_R' + \left(\frac{B}{A} n_1 - 1\right) u_R = \\ &\frac{C\alpha_i\theta_i}{A\left(1-k^{-n_4}\right)} R^{n_3+1} \left((n_3+n_1-n_4) R^{-n_4} - (n_3+n_1) k^{-n_4} \right) \end{aligned} \tag{۴-۲}$$

پاسخ (۴-۲) دارای دو حل عمومی و خصوصی به‌صورت زیر است.

$$u_R = u_g + u_p \tag{۴-۳}$$

حل عمومی معادله به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

با فرض $\mathrm{u_R = R^m}$ و جایگذاری در رابطه (۴-۲) معادله مشخصه زیر حاصل می‌شود.

$$m^2 + n_1 m + \left(n_1 \frac{B}{A} - 1\right) = 0 \tag{۴-۴}$$

با توجه به مقادیر $\frac{B}{A}$ که به نسبت پواسون وابسته است، در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای، معادله مشخصه دارای ریشه‌های حقیقی است.

$$m_1 = -\frac{n_1}{2} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, m_2 = -\frac{n_1}{2} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}, \Delta = n_1^2 - 4\left(n_1 \frac{B}{A} - 1\right) \tag{۴-۵}$$

بنابراین حل عمومی معادله برابر است با

$$u_g = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} \tag{۴-۶}$$

جواب خصوصی معادله را با کمک روش لاگرانژ به‌دست می‌آوریم. با استفاده از جواب عمومی، رونسکین (W) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_P = \frac{R^{n_3+1}\left(F_1 R^{-n_4} - F_2\right)}{F}$$

$$F_1 = ((n_3+1+\frac{B}{A})n_1 + n_3^{\ 2} + 2n_3)D_1, F_2 = ((\frac{B}{A}+n_3-n_4+1)\mathrm{n}_1 + (n_3-n_4+2)(n_3-n_4))D_2 \tag{۴-۷}$$

$$F = ((\frac{B}{A}+n_3-n_4+1)\mathrm{n}_1 + (n_3-n_4+2)(n_3-n_4))((n_3+1+\frac{B}{A})n_1 + n_3^{\ 2} + 2n_3)$$

$$D_1 = \frac{C\alpha_i\theta_i}{A(1-k^{-n4})}(n_3+n_1-n_4), D_2 = \frac{C\alpha_i\theta_i}{A(1-k^{-n4})}(n_3+n_1)k^{-n4}$$

بنابراین جابجایی برابر است با

$$u_R = u_g + u_p = C_1 R^{m_1} + C_2 R^{m_2} + \frac{R^{n_3+1}\left(F_1 R^{-n_4} - F_2\right)}{F} \tag{۴-۸}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۸) در روابط سینماتیک (۲-۱۸) و سپس در رابطه رفتاری (۲-۲۲)، تنش‌ها به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R = E_i R^{n_1}\begin{pmatrix}\left(Am_1+B\right)C_1 R^{m_1-1} + \left(Am_2+B\right)C_2 R^{m_2-1} + \\ \dfrac{R^{n_3}}{F}(F_{11}R^{-n4} - F_{22}) - F_3 R^{n_3}(R^{-n4} - k^{-n4})\end{pmatrix} \tag{۴-۹}$$

$$F_{11} = F_1(A(n_3-n_4+1)+B), F_{22} = F_2(A(n_3+1)+B), F_3 = \frac{(A+2B)}{1-k^{-n4}}\alpha_i\theta_i$$

$$\sigma_\theta = E_i R^{n_1}\begin{pmatrix}\left(Bm_1+A\right)C_1 R^{m_1-1} + \left(Bm_2+A\right)C_2 R^{m_2-1} + \dfrac{R^{n_3}}{F}(F_1 R^{-n_4}(B(n_3-n_4+1)+A) - \\ F_2(B\left(n_3+1\right)+A)) - F_3 R^{n_3}(R^{-n_4} - k^{-n_4})\end{pmatrix} \tag{۴-۱۰}$$

شرایط مرزی سطح داخلی و خارجی استوانه تحت فشار داخلی ، به‌صورت رابطه زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} r = r_i \Rightarrow R = 1 \Rightarrow \sigma_R = -P_i \\ r = r_o \Rightarrow R = k \Rightarrow \sigma_R = 0 \end{cases} \tag{۱۱-۴}$$

با اعمال شرایط مرزی، در رابطه (۴-۹) ضرایب C_1 و C_2 برای استوانه الاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{1}{(Am_1+B)(k^{m_2-1}-k^{m_1-1})}\begin{pmatrix} \dfrac{-P_i k^{m_2-1}}{E_i} - \dfrac{k^{m_2-1}}{F}(F_{11}-F_{22}) + \\ F_3 k^{m_2-1}(1-k^{-n4}) + \dfrac{k^{n_3}}{F}(F_{11}k^{-n4}-F_{22})) \end{pmatrix} \\ C_2 = \dfrac{1}{(Am_2+B)(k^{m_2-1}-k^{m_1-1})}\begin{pmatrix} \dfrac{P_i k^{m_1-1}}{E_i} + \dfrac{k^{m_2-1}}{F}(F_{11}-F_{22}) - \\ F_3 k^{m_2-1}(1-k^{-n4}) - \dfrac{k^{n_3}}{F}(F_{11}k^{-n4}-F_{22}) \\ +(k^{m_2-1}-k^{m_1-1})(F_3(1-k^{-n4}) - \dfrac{1}{F}(F_{11}-F_{22})) \end{pmatrix} \end{cases} \tag{۱۲-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱۲) در روابط (۴-۹ و ۱۰)، توزیع تنش‌ها در شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \sigma_R = {} & \frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left(k^{m_2}R^{m_1} - k^{m_1}R^{m_2}\right) + \frac{E_i R^{n_1}(R^{m_2-1}-R^{m_1-1})}{\left(k^{m_2-1}-k^{m_1-1}\right)}(\frac{k^{m_2-1}}{F}(F_{11}-F_{22}) - \\ & F_3 k^{m_2-1}(1-k^{-n4}) - \frac{k^{n_3}}{F}(F_{11}k^{-n4}-F_{22})) + E_i R^{m_2+n_1-1}(F_3(1-k^{-n4}) - \\ & \frac{1}{F}(F_{11}-F_{22})) + E_i R^{n_3+n_1}(\frac{1}{F}(F_{11}R^{-n_4}-F_{22}) - F_3(R^{-n_4}-k^{-n4})) \end{aligned} \tag{۱۳-۴}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = {} & \frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1}-k^{m_2}}\left(\frac{Bm_1+A}{Am_1+B}k^{m_2}R^{m_1} - \frac{Bm_2+A}{Am_2+B}k^{m_1}R^{m_2}\right) + \\ & \frac{E_i R^{n_1}}{\left(k^{m_2-1}-k^{m_1-1}\right)}\left(\frac{Bm_2+A}{Am_2+B}R^{m_2-1} - \frac{Bm_1+A}{Am_1+B}R^{m_1-1}\right) \times \\ & (\frac{k^{m_2-1}}{F}(F_{11}-F_{22}) - F_3 k^{m_2-1}(1-k^{-n4}) - \frac{k^{n_3}}{F}(F_{11}k^{-n4}-F_{22})) + \\ & \frac{Bm_2+A}{Am_2+B}E_i R^{m_2+n_1-1}(F_3(1-k^{-n4}) - \frac{1}{F}(F_{11}-F_{22})) + \\ & E_i R^{n_3+n_1}(\frac{1}{F}(F_1 R^{-n_4}(B(n3-n4+1)+A) - F_2(B(n3+1)+A)) - F_3(R^{-n_4}-k^{-n4})) \end{aligned} \tag{۱۴-۴}$$

با جایگذاری روابط (۴-۱۳ و ۱۴) و (۲-۳۱) در رابطه (۲-۱۵) و سپس جایگذاری رابطه (۴-۲۴) در رابطه حاصل، توزیع تنش طولی در شرایط کرنش صفحه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - \frac{E_i \alpha_i \theta_i R^{n_1+n_3}}{\left(1-k^{-n_4}\right)}\left(R^{-n_4} - k^{-n_4}\right) \tag{۱۵-۴}$$

۴-۲- تحلیل الاستوپلاستیک استوانه FGM با کمک معیار تسلیم ترسکا

توزیع تنش‌ها در استوانه الاستیک کامل تحت فشار داخلی طبق روابط (۴-۱۳ و ۱۴) برای هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R = \frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(k^{m_2} R^{m_1} - k^{m_1} R^{m_2}\right) \tag{۱۶-۴}$$

$$\sigma_\theta = \frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(\frac{Bm_1 + A}{Am_1 + B} k^{m_2} R^{m_1} - \frac{Bm_2 + A}{Am_2 + B} k^{m_1} R^{m_2}\right) \tag{۱۷-۴}$$

تنش صفحه‌ای

$$\sigma_z = 0 \tag{۱۸-۴}$$

کرنش صفحه‌ای

$$\sigma_z = \frac{\nu P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(\left(\frac{Bm_1 + A}{Am_1 + B} + 1\right) k^{m_2} R^{m_1} - \left(\frac{Bm_2 + A}{Am_2 + B} + 1\right) k^{m_1} R^{m_2}\right) \tag{۱۹-۴}$$

۴-۲-۱- تحلیل الاستوپلاستیک استوانه FG تحت فشار داخلی

با بررسی روابط (۴-۱۶ و ۱۷)، مشخص می‌شود که وضعیت تنش‌ها در هر دو حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای برای استوانه FG تحت فشار داخلی به‌صورت زیر است.

$$\sigma_R < \sigma_z < \sigma_\theta \tag{۲۰-۴}$$

الف) شروع تسلیم

بر اساس رابطه (۵۱)، معیار تسلیم ترسکا به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\sigma_\theta - \sigma_R = \sigma_y\left(R\right) = \sigma_{yi} R^{n_2} \tag{۲۱-۴}$$

در رابطه بالا، σ_{yi} تنش تسلیم در سطح داخلی استوانه است. بر اساس رابطه (۴-۲۱)، تابع تسلیم زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\varnothing_y = \frac{\sigma_\theta - \sigma_R}{\sigma_{yi} R^{n_2}} \tag{۴-۲۲}$$

با توجه به رابطه (۴-۲۲) در هر شعاعی که تابع تسلیم برابر ۱ باشد، استوانه تسلیم خواهد شد. بنابراین با جایگذاری روابط (۴-۱۶ و ۱۷) در رابطه (۴-۲۲) در آغاز تسلیم، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\frac{P_i R^{n_1-1}}{k^{m_1} - k^{m_2}}\left(\left(\frac{Bm_1+A}{Am_1+B}-1\right)k^{m_2}R^{m_1} - \left(\frac{Bm_2+A}{Am_2+B}-1\right)k^{m_1}R^{m_2}\right) = \sigma_{yi} R^{n_3} \tag{۴-۲۳}$$

با توجه به تابع تسلیم و روابط تنش‌ها دو حالت تسلیم زیر را در پوسته فرض می‌کنیم:

۱- اگر پوسته از هر دو سطح داخلی و خارجی به‌طور همزمان تسلیم شود باید دو رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \varnothing_y\left(R=1\right)=1 \\ \varnothing_y\left(R=k\right)=1 \end{cases} \tag{۴-۲۴}$$

از این دو رابطه به‌طوری که $n_1 > 0$ باشد، پارامترهای $\left(n_2\right)_{cr1}$ و فشار بحرانی تسلیم از شعاع داخلی که $\left(P_i\right)_e$ نامیده می‌شود، به‌دست می‌آیند.

$$\left(n_2\right)_{cr} = \frac{Ln\left(\frac{k^{n_1+m_1+m_2-1}\left(\left(1-m_1\right)\left(Am_2+B\right)-\left(1-m_2\right)\left(Am_1+B\right)\right)}{\left(1-m_1\right)\left(Am_2+B\right)k^{m_2}-\left(1-m_2\right)\left(Am_1+B\right)k^{m_1}}\right)}{Ln\left(k\right)} \tag{۴-۲۵}$$

$$\left(P_i\right)_e = \frac{\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)\left(Am_1+B\right)\left(Am_2+B\right)\sigma_{yi}}{\left(A-B\right)\left(\left(1-m_1\right)\left(Am_2+B\right)k^{m_2}-\left(1-m_2\right)\left(Am_1+B\right)k^{m_1}\right)} \tag{۴-۲۶}$$

۲- اگر پوسته از شعاع $R = r_y$ که $1 < r_y < k$ تسلیم شود باید سه رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases} \varnothing_y\left(R=1\right)=\varnothing_y\left(R=k\right) \\ \varnothing_y\left(R=R_y\right)=1 \\ \dfrac{d}{dR}\left(\varnothing_y\left(R=R_y\right)\right)=1 \end{cases} \tag{۲۷-۴}$$

از این سه رابطه به‌طوری که $n_1 > 0$ باشد، پارامترهای $(n_2)_{cr1}$، $(P_i)_{ein}$ و R_y به‌دست می‌آیند که $(n_2)_{cr1}$ همان رابطه‌ی (۴-۲۵) می‌باشد. شعاع R_y و فشار بحرانی تسلیم از این شعاع که $(P_i)_{ein}$ نامیده می‌شود، از روابط (۴-۲۷) برای هر مسئله خاص با کمک روش‌های عددی به‌دست می‌آیند.

بنابراین با تحلیل شرایط بحرانی چهار حالت زیر در پوسته‌های استوانه‌ای ایجاد می‌شود:

الف) اگر n، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $P_i = (P_i)_e$: پوسته استوانه‌ای از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود.

ب) اگر $n_1 < 0$، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $P_i = (P_i)_{ein}$: پوسته استوانه‌ای از شعاع R_y تسلیم می‌شود به طوری که $1 < R_y < k$.

ج) اگر $n_2 > (n_2)_{cr}$: پوسته استوانه‌ای از سطح داخلی تسلیم می‌شود و فشار بحرانی تسلیم از رابطه‌ی $\varnothing_y\left(R=1\right)=1$ که همان رابطه‌ی (۲۴) می‌باشد به‌دست می‌آید.

د) اگر $n_2 < (n_2)_{cr}$: پوسته استوانه‌ای از سطح خارجی تسلیم می‌شود و فشار بحرانی تسلیم از رابطه‌ی $\varnothing_y\left(R=k\right)=1$ به‌دست می‌آید که به صورت زیر است:

$$\left(P_i\right)_{cr}=\frac{\left(k^{m_1}-k^{m_2}\right)\left(Am_1+B\right)\left(Am_2+B\right)\sigma_{yi}k^{n_2}}{k^{n_1+m_1+m_2-1}\left(A-B\right)\left(\left(1-m_1\right)\left(Am_2+B\right)-\left(1-m_2\right)\left(Am_1+B\right)\right)} \tag{۲۸-۴}$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک با جایگذاری رابطه (۲-۲۳) در روابط (۴- ۸ تا ۱۰)، و جایگذاری رابطه (۴-۸) در روابط (۲-۱۸)، در شرایطی که استوانه تحت فشار داخلی می‌باشد، به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_R^e = E_i R^{n_1}\left[\left(Am_1+B\right)C_1R^{m_1-1}+\left(Am_2+B\right)C_2R^{m_2-1}\right] \quad (۲۹-۴)$$

$$\sigma_\theta^e = E_i R^{n_1}\left[\left(Bm_1+A\right)C_1R^{m_1-1}+\left(Bm_2+A\right)C_2R^{m_2-1}\right] \quad (۳۰-۴)$$

$$u_R^e = C_1R^{m_1}+C_2R^{m_2} \quad (۳۱-۴)$$

$$\varepsilon_R^e = C_1m_1R^{m_1-1}+C_2m_2R^{m_2-1} \quad (۳۲-۴)$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1R^{m_1-1}+C_2R^{m_2-1} \quad (۳۳-۴)$$

تنش صفحه‌ای

$$\sigma_z^e = 0 \quad (۳۴-۴)$$

کرنش صفحه‌ای

$$\sigma_z^e = \nu\left(A+B\right)E_i R^{n_1}\left[\left(m_1+1\right)C_1R^{m_1-1}+\left(m_2+1\right)C_2R^{m_2-1}\right] \quad (۳۵-۴)$$

ج) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده

با کمک معادله تعادل تنش (۲-۱۹) و معیار ترسکا (۴-۲۱) توزیع تنش در محدوده پلاستیک استوانه الاستوپلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\sigma_R^P = \frac{1}{n_2}\sigma_{yi}R^{n_2}+C_3 \quad (۳۶-۴)$$

$$\sigma_\theta^P = \left(\frac{1}{n_2}+1\right)\sigma_{yi}R^{n_2}+C_3 \quad (۳۷-۴)$$

روابط بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک $\left(\varepsilon^e\right)$و پلاستیک $\left(\varepsilon^P\right)$ به‌صورت زیر است:

$$\varepsilon = \varepsilon^p + \varepsilon^e \quad (۳۸-۴)$$

همچنین رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک نیز به‌صورت زیر است:

$$\varepsilon_R^p+\varepsilon_\theta^p+\varepsilon_z^p = 0 \quad (۳۹-۴)$$

رابطه بین کرنش کل و کرنش‌های الاستیک و پلاستیک به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^p \quad , i = R, \theta, z \tag{۴۰-۴}$$

ε_i:کرنش کل، ε_i^e: کرنش الاستیک، ε_i^p: کرنش پلاستیک.

روابط کرنش الاستیک به‌صورت زیر می‌باشند.

$$\varepsilon_i^e = \frac{1}{E}\left[\sigma_i - \nu\left(\sigma_j + \sigma_k\right)\right] \quad , i, j, k = R, \theta, z \tag{۴۱-۴}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_z^p = 0 \tag{۴۲-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۴۲) در رابطه (۴-۳۹) داریم.

$$\varepsilon_R^p = -\varepsilon_\theta^p \tag{۴۳-۴}$$

با جایگذاری روابط (۴-۴۱) در روابط (۴-۴۰) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] \tag{۴۴-۴}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] \tag{۴۵-۴}$$

از مجموع دو رابطه (۴-۴۴ و ۴۵) و سپس جایگذاری رابطه (۲-۱۸) و (۴-۴۳) داریم

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} = \frac{\sigma_R + \sigma_\theta}{E_i\left(A+B\right)R^{n_1}} \tag{۴۶-۴}$$

بـا جـایگـذاری روابط تنش در نـاحیه پلاســـتیک در معادله بالا و حل معادله حاصـــل، جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک به‌دست می‌آید.

$$u_R^P = \frac{\sigma_{yi}}{E_i\left(A+B\right)}\left[\frac{n_2+2}{n_2\left(n_2-n_1+2\right)}R^{n_2-n_1+1} + \frac{2}{\left(2-n_1\right)}R^{1-n_1}C_3\right] + \frac{1}{R}C_4 \tag{۴۷-۴}$$

ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_4 در روابط توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی و شعاع ناحیه پلاستیک R_{ep} با توجه به نحوه تسلیم استوانه به‌دست می‌آیند.

اگر استوانه ازسطح داخلی تسلیم شود، یک ناحیه پلاستیک(p) $(1 \le R \le R_{ep})$ و یک ناحیه الاستیک(e) $(R_{ep} \le R \le k)$ در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 وC_2 مربوط به روابط ناحیه

الاستیک (۴-۲۹ تا ۳۴)، C_3 وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۴-۳۶ و ۴۷)،و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^P\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_{yi}} \\ 2)\sigma_R^P\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep}^{n_2} \\ 4)u_R^P\left(R=R_{ep}\right)=u_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^e\left(R=k\right)=0 \end{cases} \tag{۴-۴۸}$$

اگر استوانه ازسطح خارجی تسلیم شود، یک ناحیه الاستیک(e) ($1 \leq R \leq R_{ep}$) و یک ناحیه پلاستیک(p) ($R_{ep} \leq R \leq k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک، C_3 وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک ،و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۵ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^e\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_{yi}} \\ 2)\sigma_R^P\left(R=R_{ep}\right)=\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep}^{n_2} \\ 4)u_R^P\left(R=R_{ep}\right)=u_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^P\left(R=k\right)=0 \end{cases} \tag{۴-۴۹}$$

اگر استوانه ازسطح داخلی و خارجی تسلیم شود، در شعاع $1 \leq R \leq R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ ($p1$)، در شعاع $R_{ep1} \leq R \leq R_{ep2}$ ناحیه الاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \leq R \leq k$ ناحیه پلاستیک ۲ ($p2$) ایجاد می‌شود. و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک و مجهولات C_{31} (ضریب C_3 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و C_{41} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۱) و مجهولات C_{32} (ضریب C_3

مربوط به ناحیه پلاستیک ۲)، و C_{42} (ضریب C_4 مربوط به ناحیه پلاستیک ۲) و R_{ep1}(مرز بین ناحیه پلاستیک ۱و الاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک ۲)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{P1} = \frac{1}{n_2}\sigma_{yi} R^{n_2} + C_{31} \tag{۵۰-۴}$$

$$u_R^{P1} = \frac{r_i}{E_i\left(A+B\right)}\left[\frac{n_2+2}{n_2\left(n_2-n_1+2\right)} R^{n_2-n_1+1}\sigma_{yi} + \frac{2}{\left(2-n_1\right)} R^{1-n_1} C_{31}\right] + \frac{1}{R} C_{41} \tag{۵۱-۴}$$

$$\sigma_R^{P2} = \frac{1}{n_2}\sigma_{yi} R^{n_2} + C_{32} \tag{۵۲-۴}$$

$$u_R^{P2} = \frac{r_i}{E_i\left(A+B\right)}\left[\frac{n_2+2}{n_2\left(n_2-n_1+2\right)} R^{n_2-n_1+1}\sigma_{yi} + \frac{2}{\left(2-n_1\right)} R^{1-n_1} C_{32}\right] + \frac{1}{R} C_{42} \tag{۵۳-۴}$$

$$\begin{cases}
1)\sigma_R^{P1}\left(R=1\right) = -\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\
2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right) = \sigma_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\
3)\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}} - \dfrac{\sigma_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}} = R_{ep1}^{n_2} \\
4)\sigma_R^{P2}\left(R=K\right) = 0 \\
5)\sigma_R^{P2}\left(R=R_{ep2}\right) = \sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right) \\
6)\dfrac{\sigma_\theta^{e}\left(R=R_{ep2}\right) - \sigma_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right)}{\sigma_{yi}} = R_{ep2}^{n_2} \\
7)u_R^{P1}\left(R=R_{ep1}\right) = u_R^{e}\left(R=R_{ep1}\right) \\
8)u_R^{P2}\left(R=R_{ep2}\right) = u_R^{e}\left(R=R_{ep2}\right)
\end{cases} \tag{۵۴-۴}$$

اگر استوانه ازسطح از شعاع R_y تسلیم شود، در شعاع $1 \le R \le R_{ep1}$ ناحیه الاستیک ۱ ($e1$)، در شعاع $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ ناحیه پلاستیک (e) و در شعاع $R_{ep2} \le R \le k$ ناحیه الاستیک ۲ ($e2$) ایجاد می‌شود و مجهولات C_{11} و C_{21} مربوط به روابط ناحیه الاستیک۱، مجهولات C_{12} و C_{22} مربوط به روابط ناحیه الاستیک۲ و مجهولات C_3وC_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک و R_{ep1}(مرز بین ناحیه الاستیک

۱و پلاستیک) و R_{ep2}(مرز بین ناحیه پلاستیک و الاستیک ۲)، برای هر مساله به کمک روش‌های عددی از ۸ شرط زیر به‌دست می‌آیند.

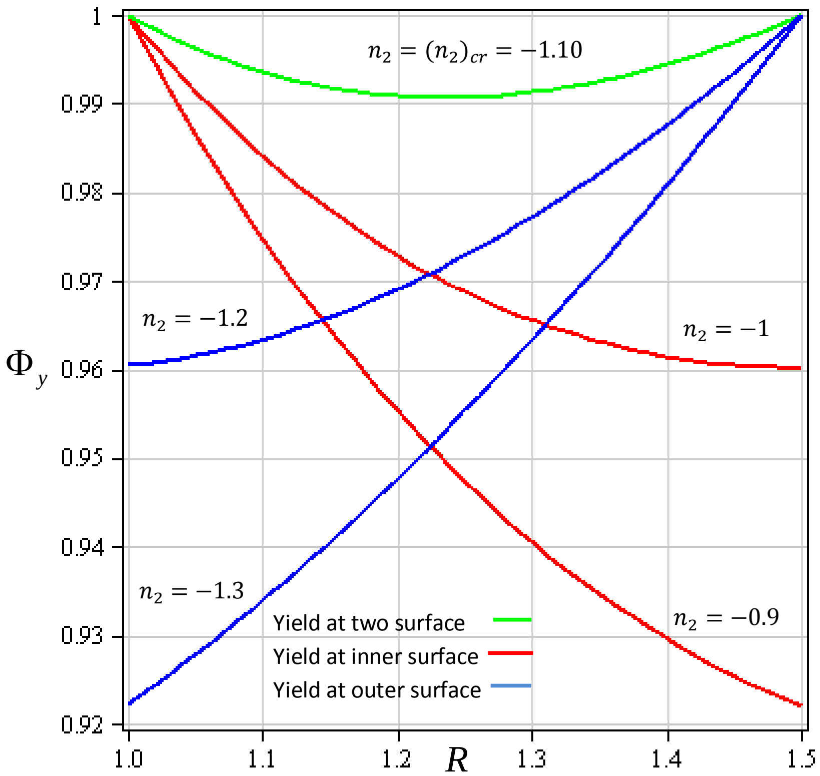
$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{e1}\left(R=1\right)=-\dfrac{P_i}{\sigma_y} \\ 2)\sigma_R^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)=\sigma_R^{P}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep1}^{n_2} \\ 4)\sigma_R^{e2}\left(R=K\right)=0 \\ 5)\sigma_R^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)=\sigma_R^{P}\left(R=R_{ep2}\right) \\ 6)\dfrac{\sigma_\theta^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)-\sigma_R^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)}{\sigma_{yi}}=R_{ep2}^{n_2} \\ 7)u_R^{e1}\left(R=R_{ep1}\right)=u_R^{P}\left(R=R_{ep1}\right) \\ 8)u_R^{e2}\left(R=R_{ep2}\right)=u_R^{P}\left(R=R_{ep2}\right) \end{cases} \tag{۵۵-۴}$$

۴-۲-۱-۱- مطالعه موردی

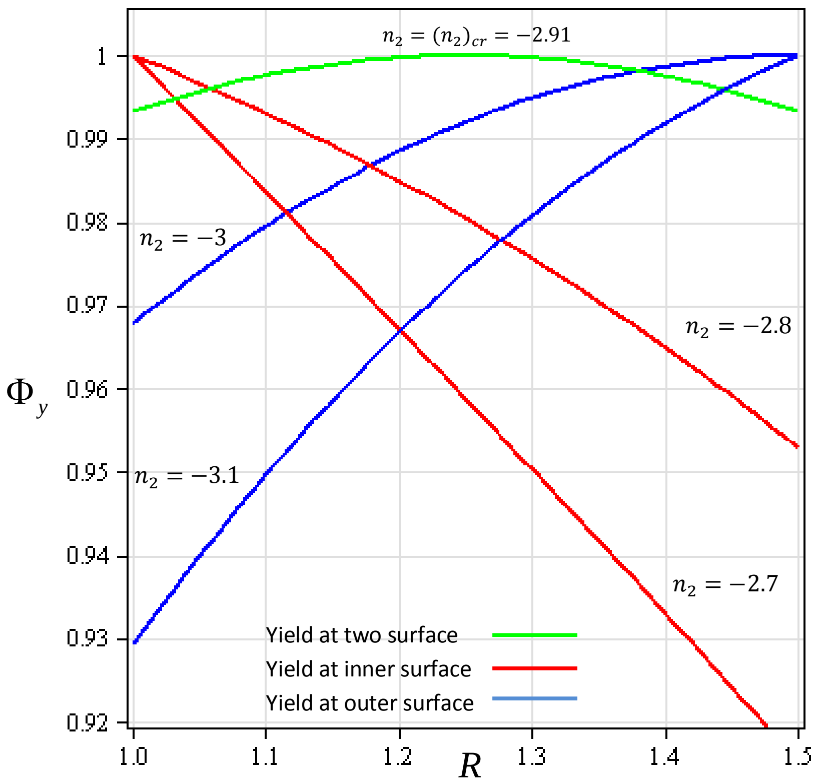
برای مطالعه موردی، یک استوانه FGM در شرایط کرنش صفحه ای، با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی استوانه $r_i=۴۰\,mm$، شعاع خارجی $r_o=۶۰\,mm$، $k=۱/۵$، مدول الاستیک سطح داخلی $E_i=۲۰۰\,GPa$، تنش تسلیم سطح داخلی $\sigma_{y_i}=۳۰۰\,MPa$ و نسبت پواسون $\nu=۰/۳$.

الف) شرایط بحرانی تسلیم

شکل (۴-۱) و (۴-۲)، تابع تسلیم ($\emptyset_y$) در استوانه با فرض $n_1=۱$ و $n_1=-۱$ برای مقادیر مختلف n_2 را نشان می‌دهد، با توجه به رابطه (۴-۲۵) به ترتیب $(n_2)_{cr}=-۱/۱۰$ و $(n_2)_{cr}=-۲/۹۱$ به‌دست می‌آید، در شکل (۴-۱) اگر $n_2=(n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشار $(p_i)_e=۹۷/۵۱\,MPa$در هر دو سطح داخلی و خارجی برابر با ۱ می‌باشد، بنابراین استوانه به‌طور همزمان از هر دو سطح تسلیم می‌شود. در شکل (۴-۲) اگر $n_2=(n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشار $(p_i)_e=۷۱/۱۳\,MPa$ در شعاع $r_y=۱/۲۴۸$ برابر با ۱ می‌باشد، بنابراین استوانه از این شعاع تسلیم می‌شود.



شکل۴-۱- تابع تسلیم استوانه FGM تحت فشار برای $n_1 = 1$ و مقادیر مختلف n_2



شکل۴-۲- تابع تسلیم استوانه FGM تحت فشار برای $n_1 = -1$ و مقادیر مختلف n_2

در هر دو شکل (۴-۱ و ۲)، اگر $n_2 > (n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشاری که از رابطه (۴-۲۵) بدست می‌آید در سطح داخلی برابر ۱ است، بنابراین استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود. اگر $n_2 < (n_2)_{cr}$ باشد تابع تسلیم در فشاری که از رابطه (۴-۲۸) بدست می‌آید در سطح خارجی برابر ۱ است بنابراین استوانه از سطح خارجی تسلیم می‌شود.

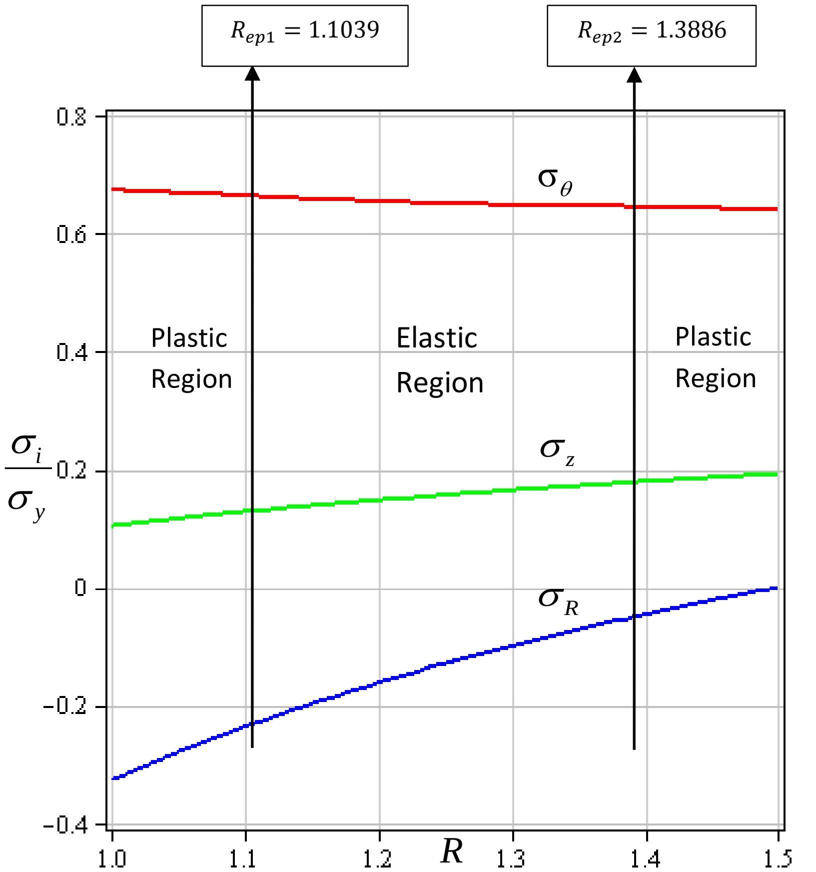
ب) توزیع تنش‌ها در استوانه الاستوپلاستیک

توزیع تنش‌ها در استوانه تسلیم شده (استوانه الاستوپلاستیک) با مشخصات ذکر شده، در چهار حالت مختلف در شکل‌های زیر نشان داده شده است.در این مثال‌ها تنش‌ها به‌صورت $\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{y_i}}\right)$ و جابه‌جایی به‌صورت $\left(\frac{u}{r_i}\right)$، بی‌بعد شده است.

شکل (۴-۳) توزیع تنش‌ها در استوانه الاستوپلاستیک با فرض $n_1 =$ ۱ ، $n_2 = (n_2)_{cr} =$ ۱/۱- و $P_i =$۹۸MPa را نشان می‌دهد. در این شرایط استوانه از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود بنابراین دو ناحیه پلاستیک و یک ناحیه الاستیک در استوانه ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \le R \le R_{ep1}$ ناحیه پلاستیک ۱ (P1)، در $R_{ep1} \le R \le R_{ep2}$ ناحیه الاستیک(e) و در $R_{ep2} \le R \le K$ ناحیه پلاستیک ۲ (P2) ایجاد می‌شود. مجهولات C_{31} مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک ۱، C_{32} مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک ۲، C_{41} مربوط به رابطه جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک ۱، C_{42} مربوط به رابطه جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک ۲، C_1 و C_2 مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک، R_{ep1} (مرز بین ناحیه پلاستیک۱ و ناحیه الاستیک) و R_{ep2} (مرز بین ناحیه الاستیک و ناحیه پلاستیک۲)، از ۸ شرط رابطه (۴-۵۴) بدست می‌آیند:

با توجه به شروط ذکر شده ثابت‌های موردنظر به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} C_1 = 0.000402, C_2 = 0.000716, C_{31} = 0.582124, C_{32} = 2.044780 \\ C_{41} = -7.87659, C_{42} = -7.87607, R_{ep1} = 1.1039, R_{ep2} = 1.3886 \end{Bmatrix}$$

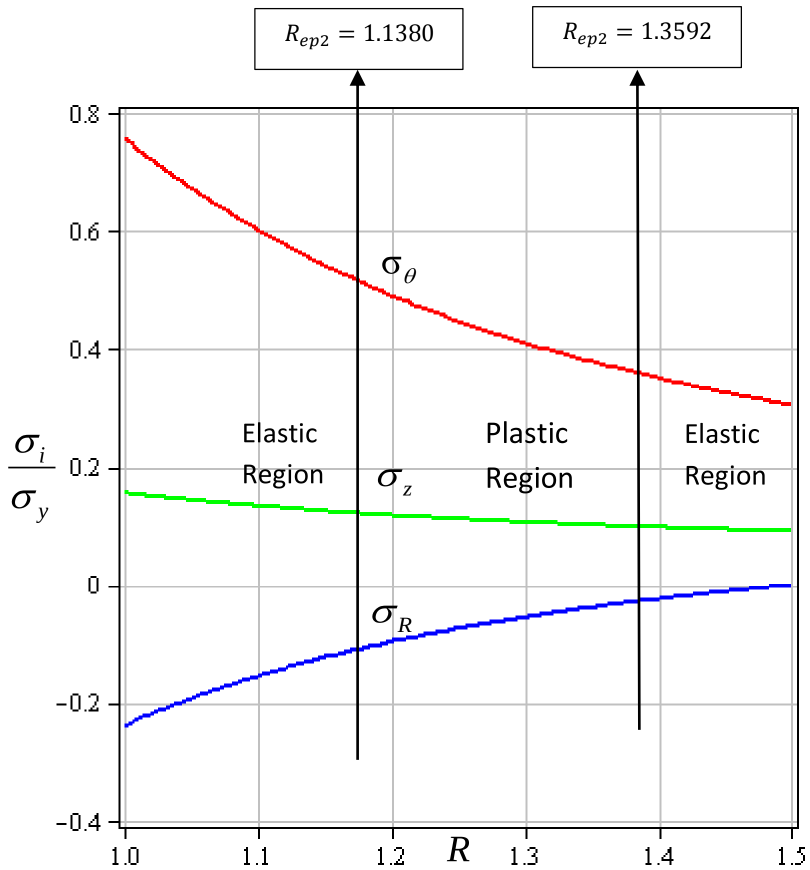


شکل۴ - ۳ - توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM تحت فشار تسلیم شده هر دو سطح

شکل (۴-۴) توزیع تنش‌ها در استوانه الاستوپلاستیک با فرض $n_1 =$ -۱، $n_2 = (n_2)_{cr} =$ -۲/۹۱۸۹ و $P_i =$۷۱/۲MPa را نشان می‌دهد. در این شرایط استوانه از شعاع $R_y =$۱/۲۴۸ تسلیم می‌شود بنابراین دو ناحیه الاستیک و یک ناحیه پلاستیک در استوانه ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \leq R \leq R_{ep1}$ ناحیه الاستیک ۱ ($e1$)، در $R_{ep1} \leq R \leq R_{ep2}$ ناحیه پلاستیک(P)و در $R_{ep2} \leq R \leq K$ ناحیه الاستیک ۲ ($e2$) ایجاد می‌شود. مجهولات C_3 مربوط به رابطه تنش در ناحیه پلاستیک، C_{11} و C_{21} مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک ۱، C_{12} و C_{22} مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک ۲، C_4 مربوط به

رابطه جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک ۱، R_{ep1} (مرز بین ناحیه الاستیک ۱ و ناحیه پلاستیک) و R_{ep2} (مرز بین ناحیه پلاستیک و ناحیه الاستیک۲)، از ۸ شرط رابطه (۴-۵۵) بدست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} C_{21} = 0.00110845, C_{11} = 0.00006401, C_{12} = 0.00006396 \\ C_{22} = 0.00110841 C_3 = 0.10497, C_4 = -2.45256 \\ R_{ep1} = 1.1380, R_{ep2} = 1.3592 \end{Bmatrix}$$

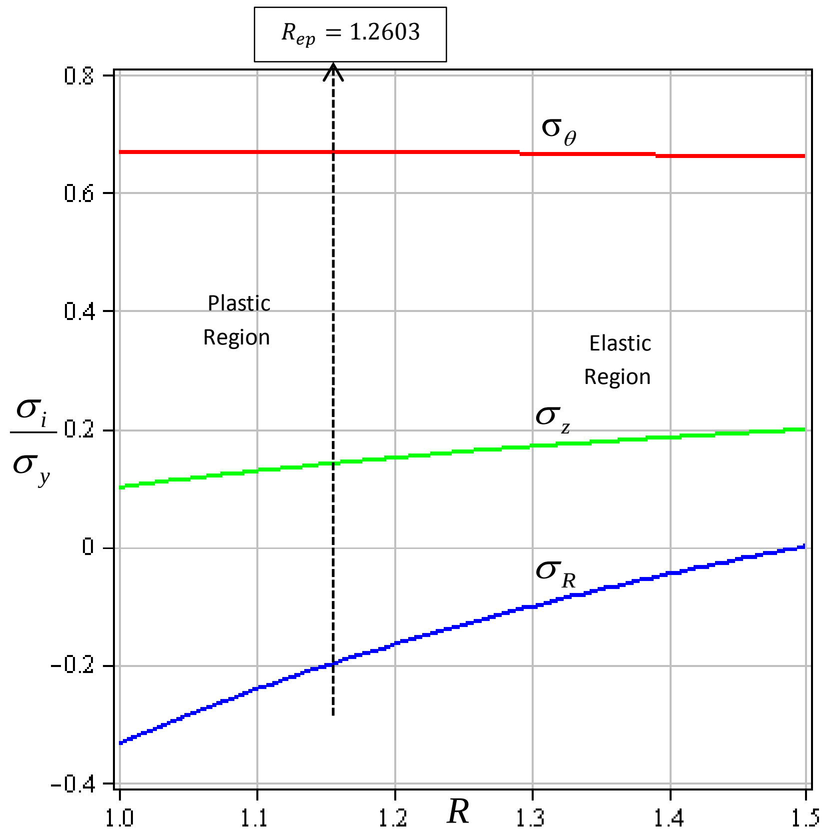


شکل۴-۴- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM تحت فشار تسلیم شده از شعاع $\mathbf{R_y}$ =۱/۲۴۸

شکل (۴-۵) توزیع تنش‌ها در استوانه الاستوپلاستیک با فرض $n_1 =$ ۱، $n_2 =$ -۱ و $P_i =$۹۹/۸MPa را نشان می‌دهد. در این شرایط استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود بنابراین یک ناحیه پلاستیک و یک ناحیه الاستیک در استوانه ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \leq R \leq R_{ep}$ ناحیه پلاستیک (P)، در $R_{ep} \leq R \leq K$ ناحیه الاستیک (e) ایجاد می‌شود. مجهولات C_3 مربوط به رابطه تنش

در ناحیه پلاستیک، C_1 و C_2 مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک، R_{ep} (مرز بین ناحیه پلاستیک و ناحیه الاستیک)، از ۴ شرط رابطه (۴-۴۸) بدست می‌آیند.

$$\{C_1 = 0.0004129, C_2 = 0.0007352, C_3 = 2.25, R_{ep} = 1.2603\}$$

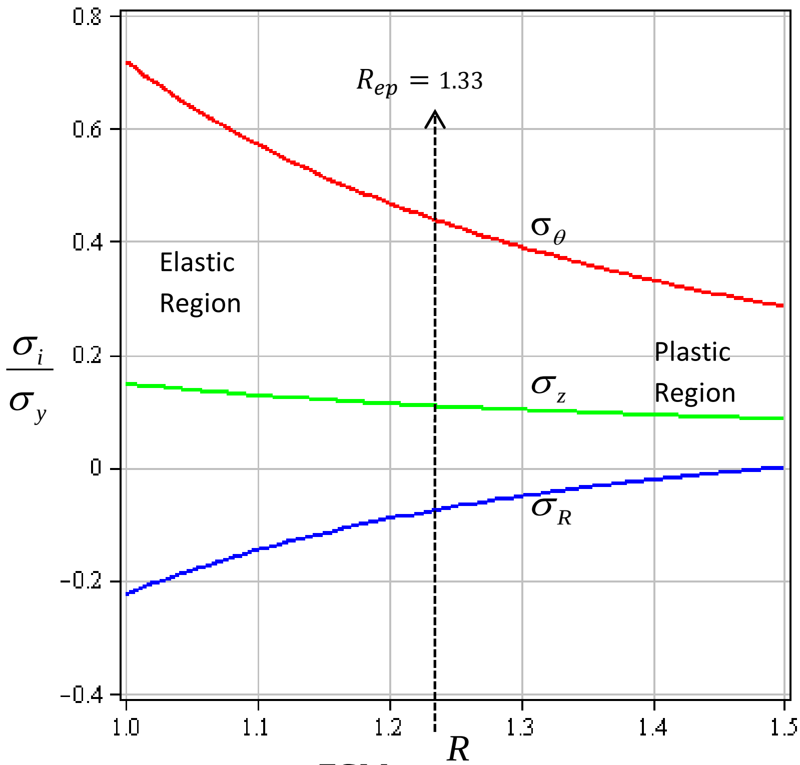


شکل۴-۵- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM تحت فشار تسلیم از سطح داخلی

شکل (۴-۶) توزیع تنش‌ها در استوانه الاستوپلاستیک با فرض $n_1 =$ -۱، $n_2 =$ -۴/۱ و $P_i =$۱۱۵MPa را نشان می‌دهد. در این شرایط استوانه از سطح خارجی تسلیم می‌شود بنابراین یک ناحیه الاستیک و یک ناحیه پلاستیک دراستوانه ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \le R \le R_{ep}$ ناحیه الاستیک (e)، در $R_{ep} \le R \le K$ ناحیه پلاستیک (P) ایجاد می‌شود. مجهولات C_3 مربوط به رابطه تنش

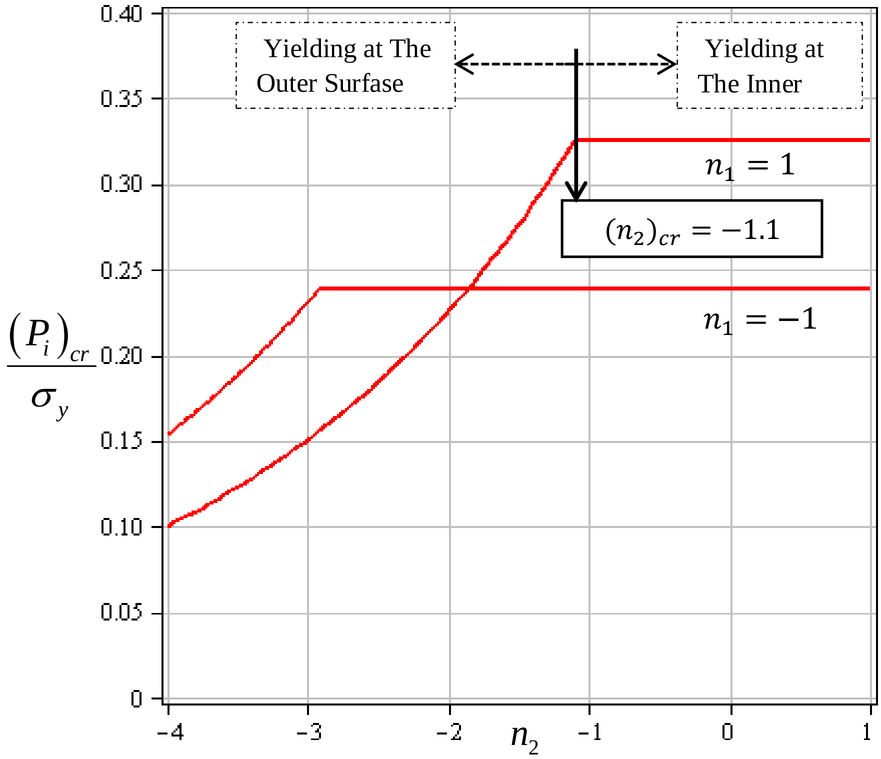
در ناحیه پلاستیک، C_1 و C_2 مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک، R_{ep} (مرز بین ناحیه پلاستیک و ناحیه الاستیک)، از 4 شرط رابطه (۴-۴۹) بدست می‌آیند.

$$\{C_1 = 0.00006089, C_2 = 0.0010521, C_3 = 0.09758, R_{ep} = 1.33\}$$



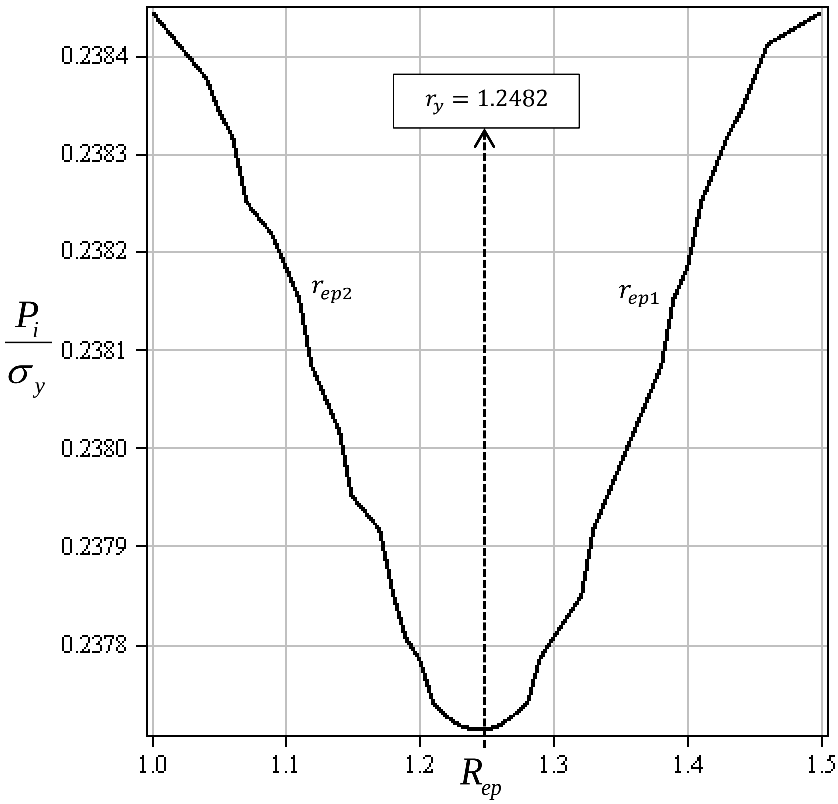
شکل۴-۶- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM تحت فشار تسلیم از سطح خارجی

شکل (۶-۷) فشار بحرانی تسلیم بر حسب n_2 برای $n_1 =$ ۱ و $n_1 =$ -۱ در استوانه را نشان می‌دهد.



شکل۴-۷- فشار بحرانی تسلیم بر حسب n_2 در استوانه FGM تحت فشار داخلی

شکل شماره (۴- ۸) تغییرات مرز ناحیه الاستیک ۱ و ناحیه پلاستیک (r_{ep1}) و مرز ناحیه الاستیک ۲ و ناحیه پلاستیک (r_{ep2}) در شرایطی که استوانه از شعاع r_y تسلیم می‌شود، را بر حسب تغییرات فشار ($\frac{(P_i)_{eIn}}{\sigma_{y_i}} \leq \frac{P_i}{\sigma_{y_i}} \leq \frac{(P_i)_{ul}}{\sigma_{y_i}}$) نشان می‌دهد.



شکل۴-۸-تغییرات مرز الاستوپلاستیک بر حسب فشار در استوانه FGM تحت فشار تسلیم شده از شعاع $\mathbf{R_y}$ =۱/۲۴۸

۴-۲-۲- تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه FG تحت فشار داخلی

در استوانه FG تحت فشار و دمای داخلی، وضعیت توزیع تنش‌ها در ناحیه الاستیک کامل به مقادیر پارامترهای ناهمگنی n_1، n_2، n_3 و n_4 وابسته است، با توجه به تغییرات این پارامترها در هر استوانه نمی‌توان وضعیت یکسانی را برای تنش‌ها در نظر گرفت بنابراین ممکن است وضعیت تنش‌ها به‌صورت یک یا چند وضعیت از ۶ وضعیت زیر باشد.

$$\sigma_k < \sigma_j < \sigma_i \rightarrow i, j, k = R, \theta, z \qquad (۵۶-۴)$$

با توجه به وضعیت تنش‌ها، معیار ترسکا و تابع تسلیم به‌صورت زیر خواهد بود.

$$\sigma_i - \sigma_k = \sigma_{yi} R^{n_2} \rightarrow \varphi_y = \frac{\sigma_i - \sigma_k}{\sigma_{yi} R^{n_2}}, i, j, k = R, \theta, z \qquad (۵۷-۴)$$

در هر مساله خاص با مشخص شدن توزیع تنش‌ها می‌توان معیار ترسکا، تابع تسلیم، شرایط بحرانی تسلیم و تحلیل الاستوپلاستیک را بررسی کرد.

الف) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه الاستیک به‌صورت زیر نوشته می‌شوند .

$$\sigma_R^e = E_i R^{n_1}\begin{pmatrix}\left(Am_1+B\right)C_1R^{m_1-1}+\left(Am_2+B\right)C_2R^{m_2-1}+\\ \dfrac{R^{n_3}}{F}(F_{11}R^{-n4}-F_{22})-F_3R^{n_3}(R^{-n4}-k^{-n4})\end{pmatrix} \tag{۵۸-۴}$$

$$F_{11}=F_1(A(n_3-n_4+1)+B), F_{22}=F_2(A(n_3+1)+B), F_3=\frac{(A+2B)}{1-k^{-n4}}\alpha_i\theta_i$$

$$\sigma_\theta^e = E_i R^{n_1}\begin{pmatrix}\left(Bm_1+A\right)C_1R^{m_1-1}+\left(Bm_2+A\right)C_2R^{m_2-1}+\dfrac{R^{n_3}}{F}(F_1R^{-n_4}(B(n_3-n_4+1)+A)-\\ F_2(B\left(n_3+1\right)+A))-F_3R^{n_3}(R^{-n_4}-k^{-n_4})\end{pmatrix} \tag{۵۹-۴}$$

$$u_R^e = C_1R^{m_1}+C_2R^{m_2}+\frac{R^{n_3+1}\left(F_1R^{-n_4}-F_2\right)}{F} \tag{۶۰-۴}$$

$$\varepsilon_R^e = C_1m_1R^{m_1-1}+C_2m_2R^{m_2-1}+\frac{R^{n_3}\left(\left(n_3-n_4+1\right)F_1R^{-n_4}-\left(n_3+1\right)F_2\right)}{F} \tag{۶۱-۴}$$

$$\varepsilon_\theta^e = C_1R^{m_1-1}+C_2R^{m_2-1}+\frac{R^{n_3}\left(F_1R^{-n_4}-F_2\right)}{F} \tag{۶۲-۴}$$

ب) توزیع تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک استوانه تسلیم شده

توزیع تنش‌ها، جابجایی و کرنش‌ها در ناحیه پلاستیک با توجه معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌آید.

معیار ترسکا در استوانه FG تحت فشار و دمای داخلی را با توجه به مقادیر مختلف ضرایب ناهمگنی می‌توان بصورت سه معیار تسلیم کلی زیر نوشت.

$$\begin{cases}1)\sigma_\theta-\sigma_R=\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\\ 2)\sigma_R-\sigma_z=\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\\ 3)\sigma_\theta-\sigma_z=\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\end{cases} \tag{۶۳-۴}$$

برای هر کدام از سه معیار تسلیم فوق می‌توان توزیع تنش‌ها در ناحیه پلاستیک را به‌دست آورد.

۱- برای معیار تسلیم $\sigma_\theta - \sigma_R = \pm\sigma_{yi} R^{n_2}$:

با جایگذاری معیار ترسکا در معادله تعادل تنش توزیع تنش در محدوده پلاستیک استوانه الاستوپلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R^{P1} = \frac{\pm\sigma_{yi}}{n_2} R^{n_2} + C_3 \tag{۴-۶۴}$$

$$\sigma_\theta^{P1} = \pm\sigma_{yi}\left(\frac{1}{n_2}+1\right) R^{n_2} + C_3 \tag{۴-۶۵}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_z^{p1} = 0 \tag{۴-۶۶}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۶۶) در رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک، داریم.

$$\varepsilon_R^{p1} = -\varepsilon_\theta^{p1} \tag{۴-۶۷}$$

از رابطه کرنش کل وکرنش‌های پلاستیک، الاستیک و حرارتی داریم.

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۴-۶۸}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۴-۶۹}$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۴-۷۰}$$

الف- تنش صفحه‌ای $(\sigma_z = 0)$

از مجموع دو رابطه (۴-۶۸ و ۶۹) در شرایط تنش صفحه‌ای داریم

$$\varepsilon_R + \varepsilon_\theta = \varepsilon_R^p + \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E(R)}\left[(1-\nu)\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] + 2\alpha(R)\theta(R) \tag{۴-۷۱}$$

با جاگذاری روابط (۴-۶۴، ۶۵ و ۶۷)، (۲-۱۸ و ۳۷) در رابطه (۴-۷۱) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR} + \frac{u_R}{R} = \frac{(1-\nu)}{E_i R^{n_1}}\left[\frac{n_2+2}{n_2}\left(\pm\sigma_{yi}\right) R^{n_2} + 2C_3\right] + \frac{2\alpha_i\theta_i R^{n_3}}{1-k^{-n_4}}\left(R^{-n_4} - k^{-n_4}\right) \tag{۴-۷۲}$$

با حل معادله دیفرانسیلی (۴-۷۲)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^{p1}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p1}=\frac{(1-\nu)}{E_iR^{n_1}}\left[\frac{1}{n_2}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2+1}+C_3R\right]+\frac{2\alpha_i\theta_iR^{n_3+1}}{1-k^{-n_4}}\left(\frac{R^{-n_4}}{n_3-n_4+2}-\frac{k^{-n_4}}{n_3+2}\right)+\frac{C_4}{R} \qquad (۷۳\text{-}۴)$$

با جاگذاری روابط (۴-۶۴، ۶۵ و ۷۳)، (۲-۳۷ و ۱۷) در رابطه (۴-۶۹) داریم.

$$\varepsilon_\theta^{p1}=\frac{\left(\pm\sigma_{yi}\right)}{E_iR^{n_1}}\left(-R^{n_2}\right)+\frac{\alpha_i\theta_iR^{n_3}}{1-k^{-n_4}}\left(\frac{n_3-n_4+4}{n_3-n_4+2}R^{-n_4}-\frac{n_3+4}{n_3+2}k^{-n_4}\right)+\frac{C_4}{R^2} \qquad (۷۴\text{-}۴)$$

ب- کرنش صفحه‌ای $\left(\varepsilon_z=0\right)$

از جایگذاری رابطه(۴-۶۶) در رابطه (۴-۷۰) در شرایط کرنش صفحه‌ای داریم.

$$\sigma_z^p=\nu\left(\sigma_R+\sigma_\theta\right)-E\left(R\right)\alpha\left(R\right)\theta\left(R\right) \qquad (۷۵\text{-}۴)$$

روابط (۴-۶۴ و ۶۵) را در رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم.

$$\sigma_z^{p1}=\nu\left(\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\left(\frac{2}{n_2}+1\right)+2C_3\right)-\frac{E_i\alpha_i\theta_iR^{n_1+n_3}}{1-k^{-n_4}}\left(R^{-n_4}-k^{-n_4}\right) \qquad (۷۶\text{-}۴)$$

از مجموع دو رابطه (۴-۶۸ و ۶۹) داریم

$$\varepsilon_R+\varepsilon_\theta=\varepsilon_R^p+\varepsilon_\theta^p+\frac{1}{E\left(R\right)}\left[(1+\nu)(1-2\nu)\left(\sigma_R+\sigma_\theta\right)\right]+2\alpha\left(R\right)\theta\left(R\right) \qquad (۷۷\text{-}۴)$$

با جاگذاری روابط (۴-۶۴، ۶۸، ۶۷) و (۲-۱۸ و ۳۷) در رابطه (۴-۷۷) می‌توان نوشت.

$$\frac{du_R}{dR}+\frac{u_R}{R}=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_iR^{n_1}}\left[\frac{n_2+2}{n_2}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2}+2C_3\right]+\frac{2\alpha_i\theta_iR^{n_3}}{1-k^{-n_4}}\left(R^{-n_4}-k^{-n_4}\right) \qquad (۷۸\text{-}۴)$$

با حل معادله دیفرانسیلی بالا، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_R^p) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p1}=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E_iR^{n_1}}\left[\frac{1}{n_2}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2+1}+C_3R\right]+\frac{2\alpha_i\theta_iR^{n_3+1}}{1-k^{-n_4}}\left(\frac{R^{-n_4}}{n_3-n_4+2}-\frac{k^{-n_4}}{n_3+2}\right)+\frac{C_4}{R} \qquad (۷۹\text{-}۴)$$

با جاگذاری روابط (۴-۶۴، ۶۵ و ۷۹)، (۲-۳۷ و ۱۸) در رابطه (۴-۶۹) داریم.

$$\varepsilon_\theta^{p1}=-\varepsilon_R^{p1}=\frac{\left(1-\nu^2\right)\left(\pm\sigma_{yi}\right)}{E_iR^{n_1}}\left(-R^{n_2}\right)+\frac{\alpha_i\theta_iR^{n_3}}{1-k^{-n_4}}\times$$
$$\left(\frac{\left(n_3-n_4+2\right)\left(1+\nu^2\right)+2}{n_3-n_4+2}R^{-n_4}-\frac{\left(n_3+2\right)\left(1+\nu^2\right)+2}{n_3+2}k^{-n_4}\right)+\frac{C_4}{R^2} \tag{۸۰-۴}$$

۱. برای معیار تسلیم $\sigma_R-\sigma_z=\pm\sigma_{yi}R^{n_2}$

الف- تنش صفحه‌ای $\left(\sigma_z=0\right)$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_z-\sigma_R=\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\Rightarrow\sigma_R=-\left(\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\right) \tag{۸۱-۴}$$

بنابراین تنش شعاعی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_R^p\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌باشد.

$$\sigma_R^{p2}=-\left(\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\right) \tag{۸۲-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۸۲) در رابطه تعادل (۲-۱۹)، تنش محیطی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_\theta^p\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_\theta^{p2}=\pm\left(n_2+1\right)\sigma_{yi}R^{n_2} \tag{۸۳-۴}$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_\theta^{p2}=0 \tag{۸۴-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۸۴) در رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک داریم.

$$\varepsilon_R^{p2}=-\varepsilon_z^{p2} \tag{۸۵-۴}$$

روابط (۴-۸۲، ۸۳، ۸۴) و (۲- ۱۸ و ۳۷) را در رابطه (۴-۶۹) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{u_R}{R}=\frac{\left(\pm\sigma_{yi}\right)}{E_iR^{n_1}}R^{n_2}\left(n_2+1-\nu\right)+\alpha\left(R\right)\theta\left(R\right) \tag{۸۶-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۲-۳۷) در رابطه(۴-۸۶)، جابه‌جایی در ناحیه پلاستیک $\left(u_R^{p2}\right)$، به‌دست می‌آید.

$$u_R^{p2}=\frac{n_2+1-\nu}{E_iR^{n_1-1}}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2}\left[-\left(1-\nu\right)\sigma_yR\right]+\frac{\alpha_i\theta_i}{1-k^{-n_4}}R^{n_3+1}\left(R^{-n_4}-k^{-n_4}\right) \tag{۸۷-۴}$$

از رابطه (۴-۶۹) داریم

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۸۸-۴}$$

روابط (۴-۸۲، ۸۳) و (۲-۱۸) را در رابطه (۴-۸۸) در شرایط تنش صفحه‌ای جایگذاری می‌کنیم.

$$\varepsilon_R^{p2} = \frac{du_R}{dR} - \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_R - \nu\sigma_\theta\right] - \alpha(R)\theta(R) \tag{۸۹-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۸۷) به جای u_R و رابطه (۲-۳۷) در رابطه (۴-۸۹)، کرنش شعاعی (ε_R^p) و کرنش طولی (ε_z^p)، در ناحیه پلاستیک، به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_R^{p2} = -\varepsilon_z^{p2} = \frac{\left(n_2\left(n_2+1\right) - \left(1-\nu\right)\right)}{E_i}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2-n_1} + \frac{\alpha_i\theta_i}{1-k^{-n_4}}R^{n_3}\left(\left(n_3-n_4\right)R^{-n_4} - \left(n_3\right)k^{-n_4}\right) \tag{۹۰-۴}$$

ب- کرنش صفحه‌ای $\left(\varepsilon_z = 0\right)$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_\theta^p = 0 \tag{۹۱-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۹۱) در رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک داریم.

$$\varepsilon_R^p = -\varepsilon_z^p \tag{۹۲-۴}$$

از رابطه کرنش کل وکرنش‌های پلاستیک، الاستیک و حرارتی داریم.

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۹۳-۴}$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_R + \sigma_z\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۹۴-۴}$$

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E(R)}\left[\sigma_R - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \alpha(R)\theta(R) \tag{۹۵-۴}$$

از رابطه (۴-۹۳) با توجه به شرایط کرنش صفحه‌ای دو رابطه زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_z = -E(R)\varepsilon_z^p + \nu\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - E(R)\alpha(R)\theta(R) \tag{۹۶-۴}$$

$$\varepsilon_z^p = -\frac{1}{E(R)}\sigma_z + \frac{\nu}{E(R)}\left(\sigma_R + \sigma_\theta\right) - \alpha(R)\theta(R) \tag{۹۷-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۹۶) در روابط (۴-۹۴ و ۹۵) دو رابطه زیر به‌ترتیب به‌دست می‌آیند.

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^p + \frac{1}{E(R)}\Big[\sigma_\theta - \nu\Big(\sigma_R + \big(-E(R)\varepsilon_z^p + \nu(\sigma_R+\sigma_\theta) - E(R)\alpha(R)\theta(R)\big)\Big)\Big] + \alpha(R)\theta(R) \qquad (۹۸\text{-}۴)$$

$$\varepsilon_R = \varepsilon_R^p + \frac{1}{E(R)}\Big[\sigma_R - \nu\Big(\sigma_\theta + \big(-E(R)\varepsilon_z^p + \nu(\sigma_R+\sigma_\theta) - E(R)\alpha(R)\theta(R)\big)\Big)\Big] + \alpha(R)\theta(R) \qquad (۹۹\text{-}۴)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۹۲) در رابطه (۴-۹۹) و ساده‌سازی، داریم.

$$\sigma_R = \frac{E(R)}{(1-\nu^2)}\varepsilon_R + \frac{\nu(1+\nu)}{(1-\nu^2)}\sigma_\theta + \frac{(1-\nu)E(R)}{(1-\nu^2)}\varepsilon_z^p - \frac{(1+\nu)E(R)}{(1-\nu^2)}\alpha(R)\theta(R) \qquad (۱۰۰\text{-}۴)$$

از جایگذاری رابطه (۴-۱۰۰) در رابطه (۴-۹۸) و ساده‌سازی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_\theta = \frac{E(R)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big[(1-\nu)\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_R - (1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\big] \qquad (۱۰۱\text{-}۴)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۹۷) و سپس رابطه (۴-۱۰۱)، در رابطه (۴-۱۰۰) و ساده‌سازی، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R + \sigma_z = \frac{E(R)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\big[2\nu\varepsilon_\theta + \varepsilon_R - 2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\big] \qquad (۱۰۲\text{-}۴)$$

با استفاده از دو رابطه (۴-۱۰۲) و (۴-۸۱)، روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_R = \frac{(\pm\sigma_{yi})R^{n_2}}{2} + \frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\big[2\nu\varepsilon_\theta + \varepsilon_R - 2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\big] \qquad (۱۰۳\text{-}۴)$$

$$\sigma_z = -\frac{(\pm\sigma_{yi})R^{n_2}}{2} + \frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\big[2\nu\varepsilon_\theta + \varepsilon_R - 2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\big] \qquad (۱۰۴\text{-}۴)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۱۸) در روابط (۴-۱۰۱، ۱۰۳ و ۱۰۴)، رابطه تنش‌ها در ناحیه پلاستیک برحسب جابجایی در ناحیه پلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_R^{p2} = \frac{(\pm\sigma_{yi})R^{n_2}}{2} + \frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{u}{R} + \frac{du}{dR} - 2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \qquad (۱۰۵\text{-}۴)$$

$$\sigma_\theta^{p2} = \frac{E(R)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[(1-\nu)\frac{u}{R} + \nu\frac{du}{dR} - (1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \qquad (۱۰۶\text{-}۴)$$

$$\sigma_z^{p2} = -\frac{\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2}}{2} + \frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{u}{R} + \frac{du}{dR} - 2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \qquad (۱۰۷-۴)$$

از جایگذاری روابط (۴-۱۰۵ و ۱۰۶) در رابطه تعادل و جایگذاری رابطه (۲-۳۷) ، معادله دیفرانسیلی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u}{dR^2} + (n_1+1)\frac{1}{R}\frac{du}{dR} + \left(2\nu(n_1+1)-2\right)\frac{u}{R^2} = \frac{2(1+\nu)\alpha_i\theta_i}{1-k^{-n_4}}R^{n_3-1}\times \\ &\left((n_1+n_3-n_4)R^{-n_4} - (n_1+n_3)k^{-n_4}\right) - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)(n_2+1)}{E_i}\left(\pm\sigma_{yi}\right)R^{n_2-n_1-1}\end{aligned} \qquad (۱۰۸-۴)$$

با حل معادله دیفرانسیلی فوق برای هر مساله خاص، جابجایی بر حسب ثابت‌های مجهول C_3 و C_4 در ناحیه پلاستیک (u_R^{p2}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید. و کرنش‌ها در ناحیه پلاستیک از روابط (۲-۱۸) به‌دست می‌آیند.

۲. برای معیار تسلیم $\sigma_\theta - \sigma_z = \pm\sigma_{yi}R^{n_2}$

الف- تنش صفحه‌ای $\sigma_z = 0$

در این حالت معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\sigma_\theta - \sigma_z = \Rightarrow \sigma_\theta = -\left(\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\right) \qquad (۱۰۹-۴)$$

بنابراین تنش محیطی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_\theta^p\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌باشد.

$$\sigma_\theta^{p3} = -\left(\pm\sigma_{yi}R^{n_2}\right) \qquad (۱۱۰-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱۰۸) در رابطه تعادل (۲-۱۹)، تنش شعاعی در ناحیه پلاستیک $\left(\sigma_R^{p1}\right)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_R^{p3} = \frac{1}{R}C_3 + \frac{R^{n_2}}{n_2+1}\left(\pm\sigma_{yi}\right) \qquad (۱۱۱-۴)$$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود

$$\varepsilon_R^p = 0 \qquad (۱۱۲-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱۱۲) در رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک، داریم.

$$\varepsilon_{\theta}^{p} = -\varepsilon_{z}^{p} \tag{۱۱۳-۴}$$

از رابطه (۴-۹۴) داریم

$$\varepsilon_{R} = \varepsilon_{R}^{p} + \frac{1}{E\left(R\right)}\left[\sigma_{R} - \nu\left(\sigma_{\theta} + \sigma_{z}\right)\right] + \alpha\left(R\right)\theta\left(R\right) \tag{۱۱۴-۴}$$

روابط (۴-۱۱۰، ۱۱۱ و ۱۱۲)و (۲-۱۸) را در رابطه (۴-۱۱۴) جایگذاری می‌کنیم.

$$\frac{du_{R}}{dR} = \frac{1}{E_{i}R^{n_{1}}}\left[\frac{1}{R}C_{3} + \left(\frac{1}{n_{2}+1} - \nu\right)\left(\pm\sigma_{yi}R^{n_{2}}\right)\right] + \alpha_{i}R^{n_{3}}\theta\left(R\right) \tag{۱۱۵-۴}$$

با انتگرال گیری و جایگذاری رابطه (۲-۳۷) در رابطه (۴-۱۱۵)، جابجایی در ناحیه پلاستیک (u_{R}^{p1})، به‌دست می‌آید.

$$u_{R}^{p3} = \frac{\left(\pm\sigma_{yi}\right)}{E_{i}R^{n_{1}}}\left[-\frac{C_{3}}{n_{1}} + \left(\frac{1}{n_{2}+1} - \nu\right)\frac{R^{n_{2}+1}}{n_{2}-n_{1}+1}\right] + \frac{\alpha_{i}\theta_{i}R^{n_{3}+1}}{1-k^{-n_{4}}}\left(\frac{R^{-n_{4}}}{n_{3}-n_{4}+1} - \frac{k^{-n_{4}}}{n_{3}+1}\right) + C_{4} \tag{۱۱۶-۴}$$

ب- کرنش صفحه‌ای $\varepsilon_{z} = 0$

با توجه به معیار ترسکا، قاعده جریان برای استوانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\varepsilon_{R}^{p} = 0 \tag{۱۱۷-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱۱۷) در رابطه تراکم ناپذیری پلاستیک داریم.

$$\varepsilon_{\theta}^{p} = -\varepsilon_{z}^{p} \tag{۱۱۸-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۹۷ و ۱۱۷) در رابطه (۴-۹۹) و ساده‌سازی، داریم.

$$\sigma_{\theta} = -\frac{E\left(R\right)}{\nu\left(1+\nu\right)}\varepsilon_{R} + \frac{\left(1-\nu^{2}\right)}{\nu\left(1+\nu\right)}\sigma_{R} + \frac{E\left(R\right)}{\left(1+\nu\right)}\varepsilon_{z}^{p} + \frac{E}{\nu}\alpha\left(R\right)\theta\left(R\right) \tag{۱۱۹-۴}$$

از جایگذاری رابطه (۴-۱۱۹ و ۱۱۸) در رابطه (۴-۹۸) و ساده‌سازی، رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$\sigma_{R} = \frac{E\left(R\right)}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\left[\nu\varepsilon_{\theta} + \left(1-\nu\right)\varepsilon_{R} - \left(1+\nu\right)\alpha\left(R\right)\theta\left(R\right)\right] \tag{۱۲۰-۴}$$

با جایگذاری رابطه (۴-۱۹۷) و سپس رابطه (۴-۱۲۰)، در رابطه (۴-۱۱۹) و ساده‌سازی، رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\sigma_\theta+\sigma_z=\frac{E(R)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_R+\varepsilon_\theta-2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \quad (۴-۱۲۱)$$

با استفاده از دو رابطه (۴-۱۲۱ و ۱۰۹)، روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\sigma_\theta=\frac{\sigma_y}{2}+\frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_R+\varepsilon_\theta-2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \quad (۴-۱۲۲)$$

$$\sigma_z=-\frac{\sigma_y}{2}+\frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\varepsilon_R+\varepsilon_\theta-2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \quad (۴-۱۲۳)$$

با جایگذاری رابطه (۲-۱۸) در روابط (۴-۱۲۰، ۱۲۲ و ۱۲۳)، رابطه تنش‌ها در ناحیه پلاستیک برحسب جابجایی در ناحیه پلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

(۴-۱۲۴)

$$\sigma_\theta^{p3}=\frac{\sigma_y}{2}+\frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{du}{dR}+\frac{u}{R}-2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \quad (۴-۱۲۵)$$

$$\sigma_z^{p3}=-\frac{(\pm\sigma_{yi})}{2}+\frac{E(R)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}\left[2\nu\frac{du}{dR}+\frac{u}{R}-2(1+\nu)\alpha(R)\theta(R)\right] \quad (۴-۱۲۶)$$

از جایگذاری روابط (۴-۱۲۴ و ۱۲۵) در رابطه تعادل، معادله دیفرانسیلی زیر حاصل می‌شود.

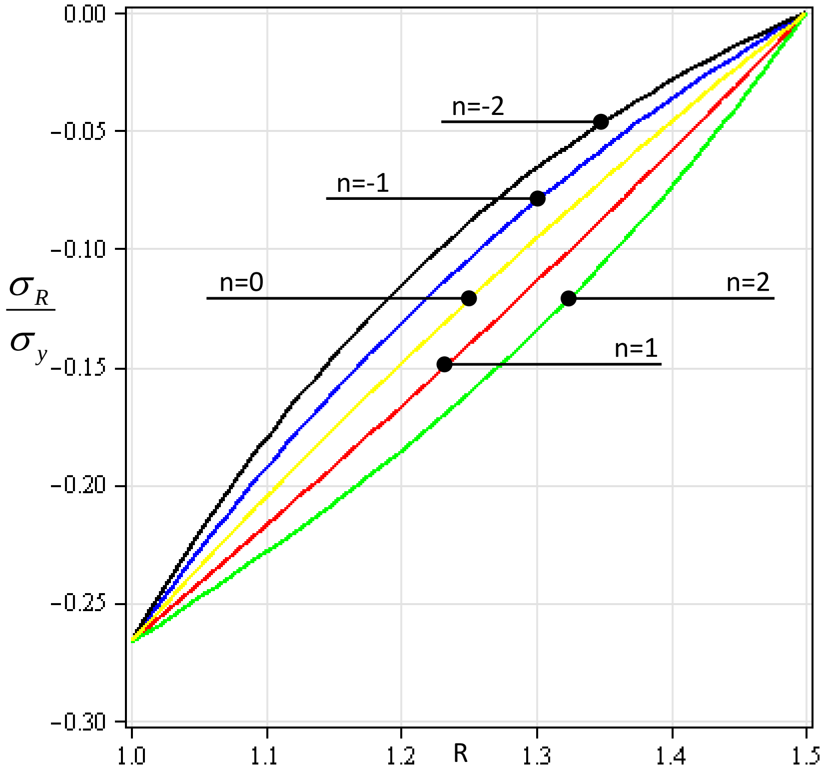
$$(1-\nu)\frac{d^2u}{dR^2}+(1-\nu)(n_1+1)\frac{1}{R}\frac{du}{dR}+\left(n_1\nu-\frac{1}{2}\right)\frac{u(R)}{R^2}=\frac{(1+\nu)\alpha_i\theta_i}{1-k^{-n_4}}R^{n_3-1}\times$$
$$\left((2n_1+2n_3-n_4)R^{-n_4}-2(n_1+n_3)k^{-n_4}\right)-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E_i}(\pm\sigma_{yi})R^{n_2-n_1-1} \quad (۴-۱۲۷)$$

با حل معادله دیفرانسیلی فوق برای هر مساله خاص، جابجایی بر حسب ثابت‌های مجهول C_3 و C_4 در ناحیه پلاستیک (u_R^{p3}) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

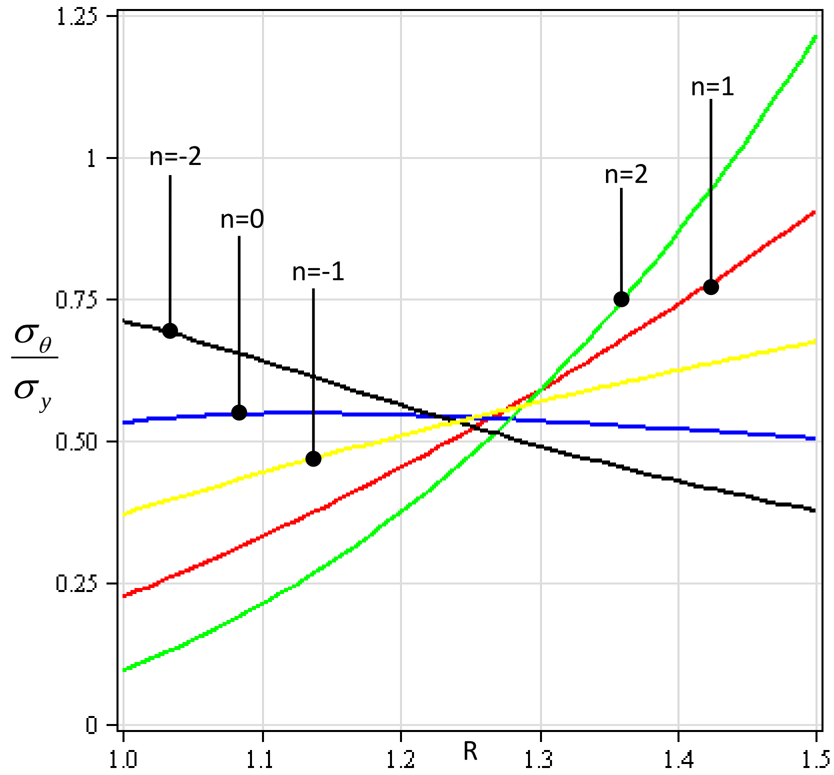
مطالعه موردی

برای مطالعه موردی، یک استوانه FGM در شرایط کرنش صفحه ای تحت دما و فشار داخلی، با مشخصات زیر را در نظر می‌گیریم. شعاع داخلی کره$r_i=$۴۰ mm، شعاع خارجی$r_o=$۶۰ mm، $k=$۱/۵، مدول الاستیک سطح داخلی $E_i=$۲۰۰ GP، تنش تسلیم سطح داخلی $\sigma_{y_i}=$۳۰۰ MPa، ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی $\alpha_i=$۱۲×۱۰$^{(-۶)}$، نسبت پواسون $\nu=$۰/۳ و ضرایب ناهمگنی به‌صورت زیر فرض می‌شوند. $n_1=n_2=n_3=n_4=n$.

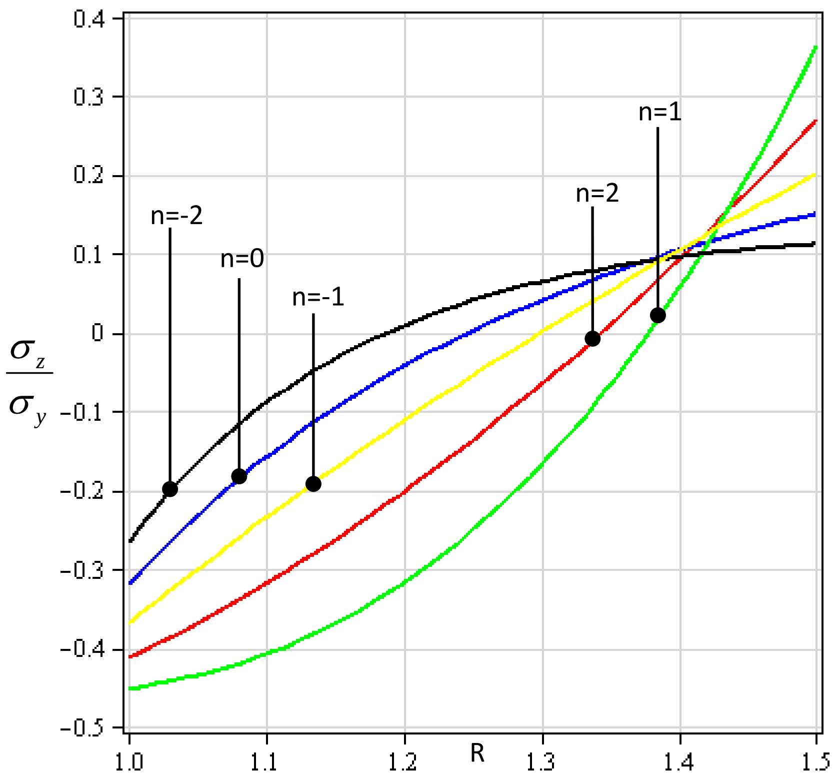
شکل‌های شماره (۴- ۹، ۱۰ و ۱۱) به‌ترتیب توزیع تنش شعاعی، محیطی و محوری الاستیک در استوانه تحت فشار داخلی $P_i = ۸۰ MPa$ و اختلاف دمای سطح داخلی با دمای محیط $\theta_i = ۵۰ c°$ در حالت کرنش صفحه‌ای، برای مقادیر مختلف n را نشان می‌دهند.



شکل ۴-۹- تنش شعاعی ترموالاستیک استوانه FGM تحت فشار برای مقادیر مختلف n

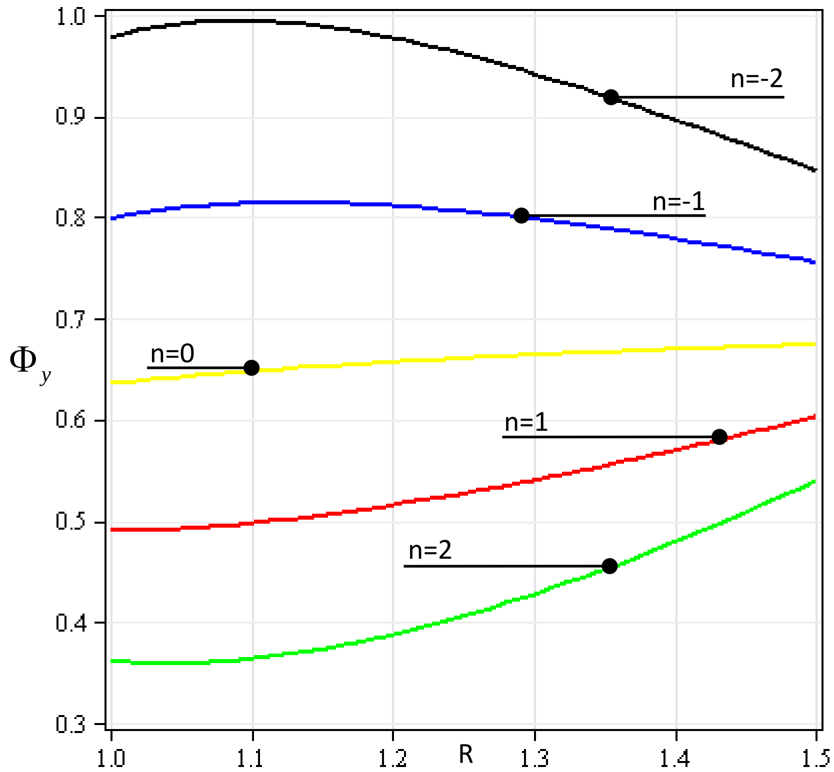


شکل ۴-۱۰- تنش محیطی ترموالاستیک استوانه FGM تحت فشار برای مقادیر مختلف n



شکل ۴-۱۱- تنش محوری ترموالاستیک استوانه FGM تحت فشار برای مقادیر مختلف n

با توجه به نمودارهای تنش‌های الاستیک، تنش شعاعی، تنش ماکزیمم و تنش محیطی، تنش مینیمم است. بنابراین تابع تسلیم برای شرایط بالا به‌صورت زیر رسم می‌شود.



شکل ۴-۱۲- تابع تسلیم استوانه FGM تحت دما و فشار داخلی برای مقادیر مختلف n

با توجه به شکل (۴-۱۲)، تابع تسلیم در هیچ نقطه‌ای برابر ۱ نیست، بنابراین در شرایط مذکور استوانه تسلیم نمی‌شود ولی با افزایش فشار داخلی استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود.

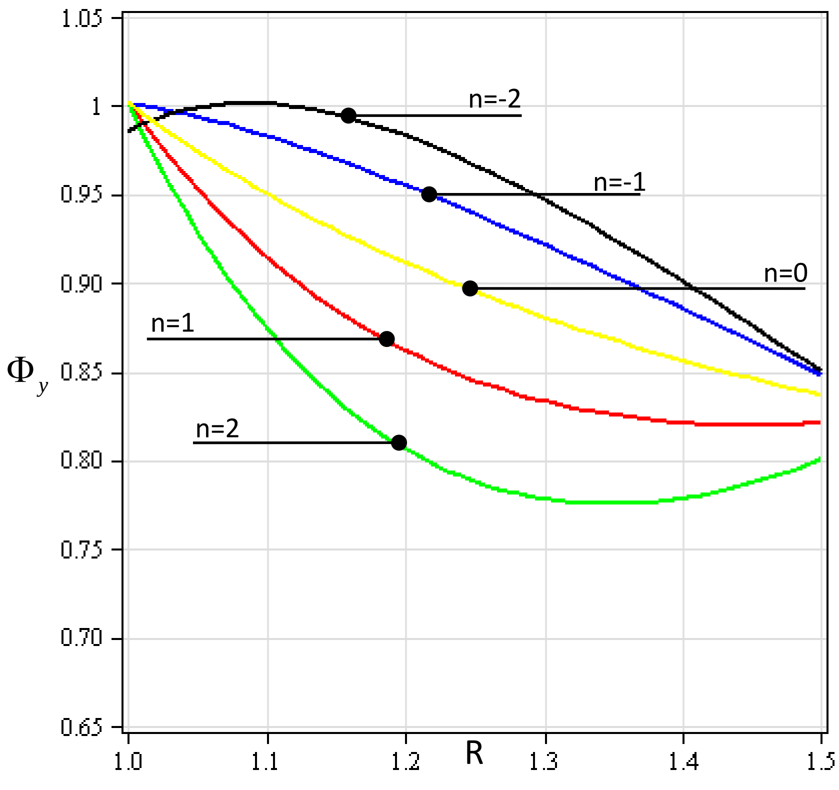
با استفاده از تابع تسلیم فشار بحرانی تسلیم در حالت به در جدول (۴-۱) فشار بحرانی تسلیم برای n مختلف نشان داده شده است.

جدول ۴-۱- فشار بحرانی تسلیم برای مقادیر مختلف n

n	$(P_i)_{cr}$
۲	۱۵۳/۵MPa
۱	۱۳۰MPa
۰	۱۱۰/۵MPa
-۱	۹۴/۵MPa
-۲	۸۰/۵MPa

با توجه به جدول مشخص می‌شود که برای مقادیر منفی n، فشار بحرانی تسلیم کمتر از مقادیر مثبت n است.

شکل (۴-۱۳)، ۵ تابع تسلیم برای مقادیر مختلف n را در فشار بحرانی بر اساس جدول ۱، نشان می‌دهد.



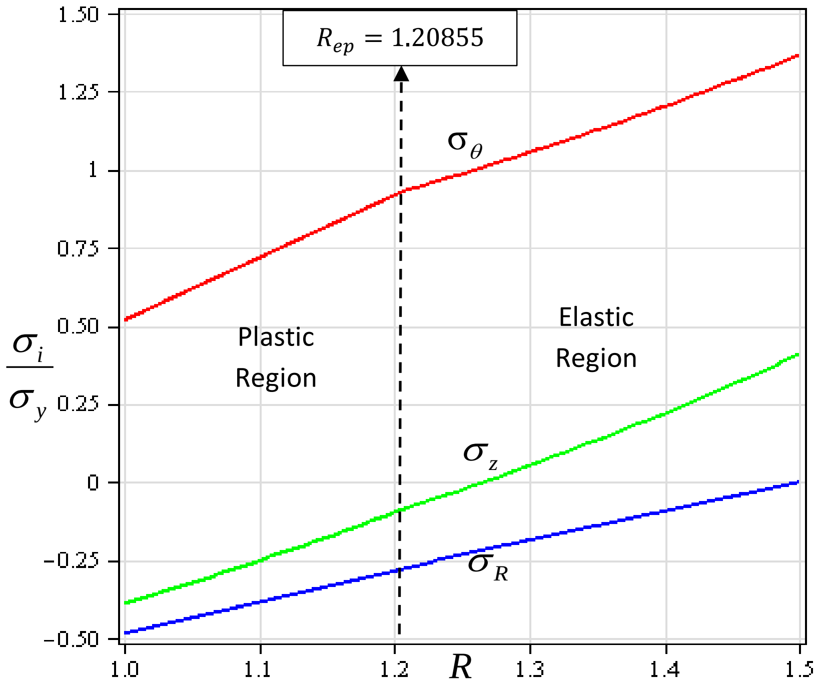
شکل ۴-۱۳- تابع تسلیم استوانه FGM تتحت دما و فشار داخلی در آستانه تسلیم، برای مقادیر مختلف n

در شکل شماره (۴-۱۳) نمودار تابع تسلیم در سطح داخلی برابر یک است بنابراین استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود.

شکل شماره (۴-۱۴) توزیع تنش‌ها در استوانه با در نظر گرفتن ۱ =n و فشار داخلی$P_i =$۱۴۵ MPa در این شرایط استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود و یک ناحیه پلاستیک(p) ($1 \le R \le R_{ep}$) و یک ناحیه الاستیک(e) ($R_{ep} \le R \le k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۴-۵۸ تا ۶۹)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۴-۶۴، ۶۵، ۷۶، ۷۹ و ۸۰)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، از ۵ شرط رابطه (۴-۱۲۸) به‌دست می‌آیند.

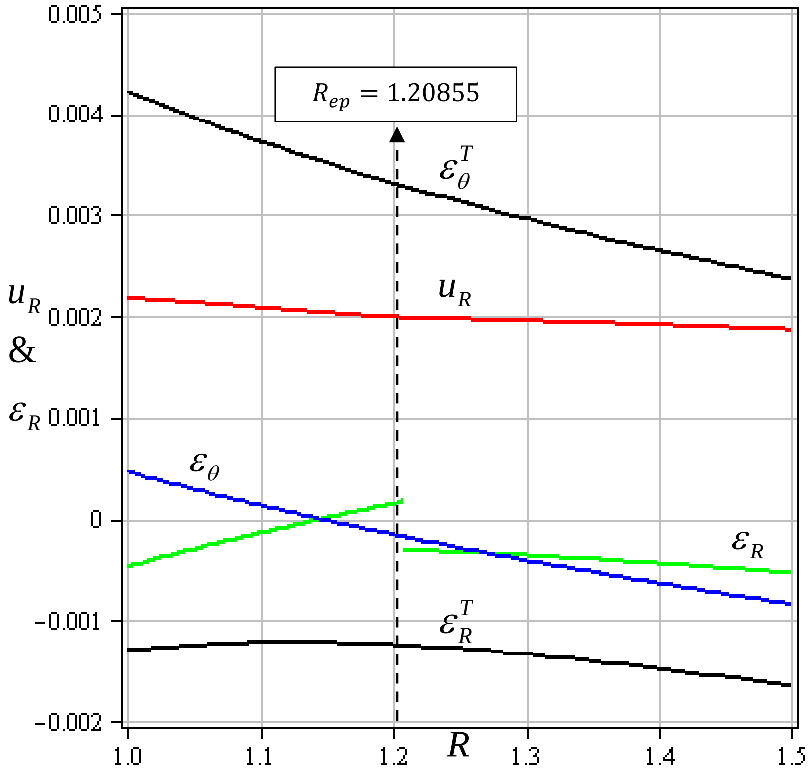
$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}(R=1) = -\dfrac{P_i}{\sigma_{yi}} \\ 2)\sigma_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right) = \sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}} - \dfrac{\sigma_R^e\left(R=R_{ep}\right)}{\sigma_{yi}} = R_{ep}^{n_2} \\ 4)u_R^{P1}\left(R=R_{ep}\right) = u_R^e\left(R=R_{ep}\right) \\ 5)\sigma_R^e(R=k) = 0 \end{cases} \qquad (۱۲۸-۴)$$

$$\begin{Bmatrix} C_1 = -0.0001535998163, C_2 = -0.0006812478816 \\ C_3 = -1.4833, C_4 = 0.001181858549, R_{ep2} = 1.20855 \end{Bmatrix}$$



شکل۴- ۱۴- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه FGM برای ۱ =n تسلیم شده از سطح داخلی

با مشخص شدن مجهولات، توزیع کرنش‌ها و جابه‌جایی کل در ناحیه الاستیک و پلاستیک به‌دست می‌آیند. شکل شماره (۴- ۱۵) توزیع کرنش‌های شعاعی، محیطی، محوری و کرنش کل (ε_i^T) و جابه‌جایی کل در استوانه با در نظر گرفتن ۱ =n و فشار داخلی P_i =۱۴۵ MPa را نشان می‌دهد.



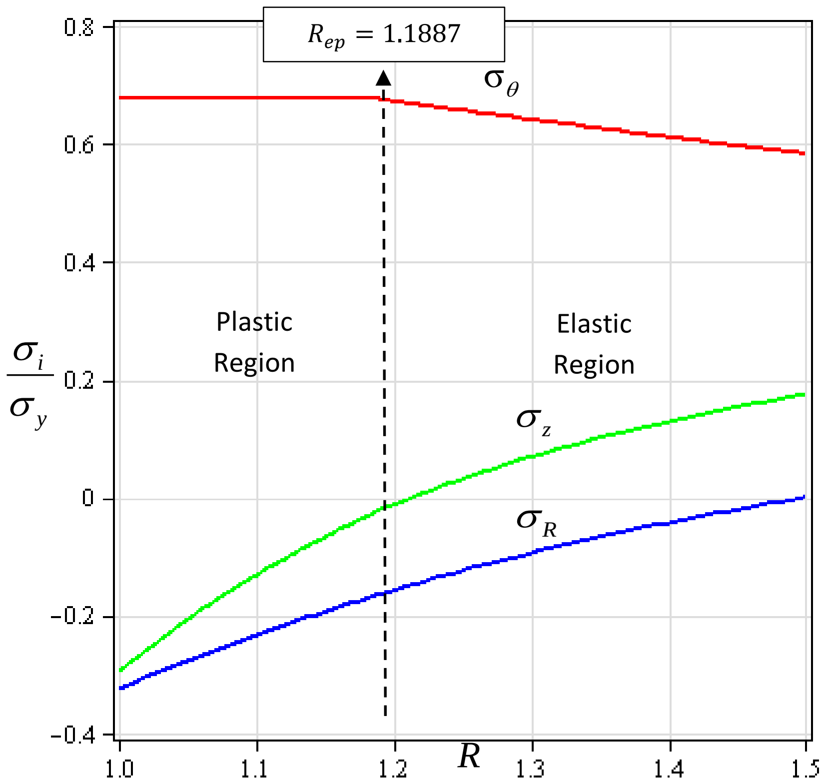
شکل ۴- ۱۵- کرنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه FGM ترموالاستوپلاستیک ۱ =n
تسلیم شده از سطح داخلی

شکل شماره (۴-۱۶) توزیع تنش‌ها در استوانه با در نظر گرفتن ۱- =n و فشار داخلی P_i =۹۷MPa را نشان می‌دهد. در این شرایط استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود و یک ناحیه پلاستیک(p) ($1 \leq R \leq R_{ep}$) و یک ناحیه الاستیک(e) ($R_{ep} \leq R \leq k$) در استوانه ایجاد می‌شود و مجهولات C_1 و C_2 مربوط به روابط ناحیه الاستیک (۴-۵۸ تا ۶۹)، C_3 و C_4 مربوط به روابط ناحیه پلاستیک (۴-۶۴، ۶۵، ۷۶، ۷۹ و ۸۰)، و R_{ep} (مرز بین ناحیه الاستیک و پلاستیک)، از ۵ شرط رابطه (۴-۱۲۸) به‌دست می‌آیند.

$$\begin{cases} 1)\sigma_R^{P1}(R=1)=-\dfrac{P_i}{\sigma_{yi}} \\ 2)\sigma_R^{P1}(R=R_{ep})=\sigma_R^{e}(R=R_{ep}) \\ 3)\dfrac{\sigma_\theta^{e}(R=R_{ep})}{\sigma_{yi}}-\dfrac{\sigma_R^{e}(R=R_{ep})}{\sigma_{yi}}=R_{ep}^{n_2} \\ 4)u_R^{P1}(R=R_{ep})=u_R^{e}(R=R_{ep}) \\ 5)\sigma_R^{e}(R=k)=0 \end{cases} \tag{۱۲۸-۴}$$

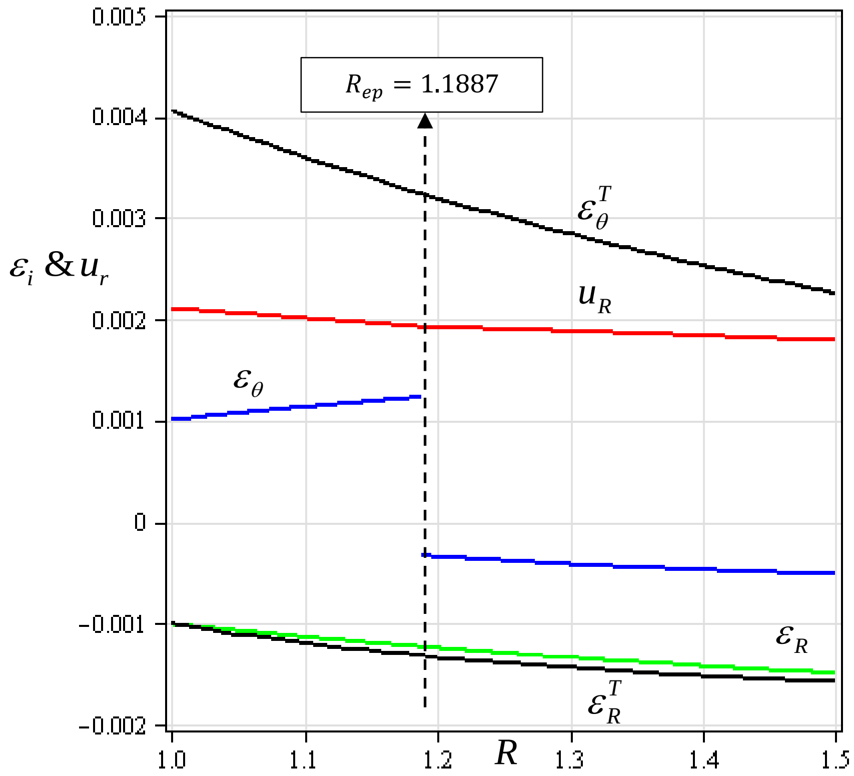
مجهولات به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} C_1=0.000211617655, C_2=-0.001363138710 \\ C_3=0.6766, C_4=0.0002946330792, R_{ep2}=1.1878 \end{Bmatrix}$$



شکل۴- ۱۶- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه FGM برای ۱- =n تسلیم شده از سطح داخلی

با مشخص شدن مجهولات، توزیع کرنش‌ها و جابه‌جایی کل در ناحیه الاستیک و پلاستیک به‌دست می‌آیند. شکل شماره (۴- ۱۷) توزیع کرنش‌های شعاعی، محیطی، محوری و کرنش کل (ε_i^T) و جابه‌جایی کل در استوانه با در نظر گرفتن ۱- =n و فشار داخلی P_i =۹۷ MPa را نشان می‌دهد.



شکل ۴- ۱۷- کرنش‌ها و جابه‌جایی در استوانه FGM ترموالاستوپلاستیک برای ۱- =n
تسلیم شده از سطح داخلی

۴-۳- تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه FGM با کمک معیار تسلیم فون میزز

برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه ناهمگن تحت فشار داخلی و دمای داخلی، با کمک معیار فون میزز، از روش المان محدود توسط نرم‌افزار آباکوس استفاده شده است.

مدل هندسی در نظر گرفته شده در نرم افزار، یک المان مستطیلی متقارن محوری به ابعاد ۴۰mm*۶۰mm می‌باشد که با استفاده از جزء مستطیلی ۸ گره‌ای درجه ۲ (CAX8R) متقارن محوری و

زیر برنامه UMAT تحلیل انجام شده است. و خواص مکانیکی ماده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود، و ماده FGM با برنامه‌نوسی به کمک نرم‌افزار فرترن و لینک کردن آن با نرم‌افزار آباکوس مدل شده است. و خواص مکانیکی در سطح داخلی ماده به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$E_i = 200\,GPa, \sigma_{y_i} = 300\,MPa, v = 0.3$$
$$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n$$

شرایط تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای در مدل مستطیلی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

الف) تنش صفحه‌ای $\Longleftarrow$ $u_1 = u_R = 0, u_2 = u_z \neq 0, u_3 = u_\theta = 0$

ب) کرنش صفحه‌ای $\Longleftarrow$ $u_1 = u_R = 0, u_2 = u_z = 0, u_3 = u_\theta = 0$

فشار و دمای بحرانی تسلیم در استوانه ناهمگن FG، براساس معیار فون میزز(FEM) و معیار ترسکا (PET) در دما و فشار داخلی مختلف، برای مقادیر مختلف n، در جدول شماره (۴-۲) و (۴-۳) نشان داده شده است. در این جداول، واحد فشار، مگا پاسکال و واحد، دما درجه سانتیگراد است.

الف) تنش صفحه‌ای

جدول ۴-۲- فشار و دمای بحرانی تسلیم در استوانه ناهمگن بر اساس معیار فون میزز و ترسکا در حالت تنش صفحه‌ای

n	$(P_i)_{cr}, (\theta_i = 0c^\circ)$		$(P_i)_{cr}, (\theta_i = 50c^\circ)$		$(\theta_i)_{cr}, (P_i = 0)$	
	PET	FEM	PET	FEM	PET	FEM
-۲	۶۲,۷	۶۸,۷۰	۷۹	۸۰,۵۰	۱۸۴,۳	۱۶۴,۹۱
-۱	۷۲,۵	۸۰,۰۹	۹۱,۸	۹۴,۸۵	۱۸۲,۸	۱۶۲,۰۸
۰	۸۳,۳۳	۹۴,۰۷	۱۰۲,۴	۱۱۲,۷۲	۱۷۹,۶	۱۵۹,۲۷
۱	۹۷	۱۱۱,۱۴	۱۲۴,۶	۱۳۴,۹۹	۱۷۶	۱۵۶,۴۹
۲	۱۱۳,۴	۱۳۱,۸۵	۱۴۵,۹	۱۶۲,۴۶	۱۷۳	۱۵۳,۷۶

ب) کرنش صفحه‌ای

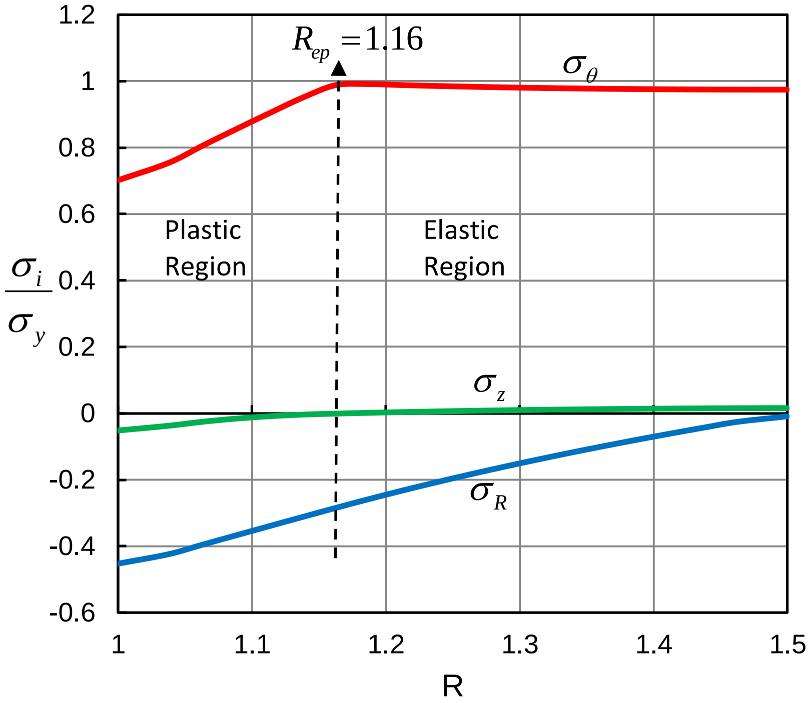
جدول ۴-۳- فشار و دمای بحرانی تسلیم در استوانه ناهمگن بر اساس معیار فون میزز و ترسکا در حالت کرنش صفحه‌ای

n	$(P_i)_{cr}, (\theta_i = 0c^\circ)$		$(P_i)_{cr}, (\theta_i = 50c^\circ)$		$(\theta_i)_{cr}, (P_i = 0)$	
	PET	FEM	PET	FEM	PET	FEM
-۲	۶۲/۲	۷۱/۱۲	۸۰/۱	۸۲/۲۲	۱۰۴/۹	۱۱۶/۹۴
-۱	۷۲	۸۲/۵۱	۹۴/۵	۹۴/۱۵	۱۰۴	۱۱۵/۸۹
۰	۸۳/۳۳	۹۶/۴۴	۱۱۰/۵	۱۱۱/۴۹	۱۰۳/۲	۱۱۴/۸۱
۱	۹۷	۱۱۳/۳۵	۱۳۰	۱۳۳/۰۸	۱۰۲	۱۱۳/۷۴
۲	۱۱۵	۱۳۳/۷۸	۱۵۳/۵	۱۵۹/۷۹	۱۰۰/۸	۱۱۲/۶۷

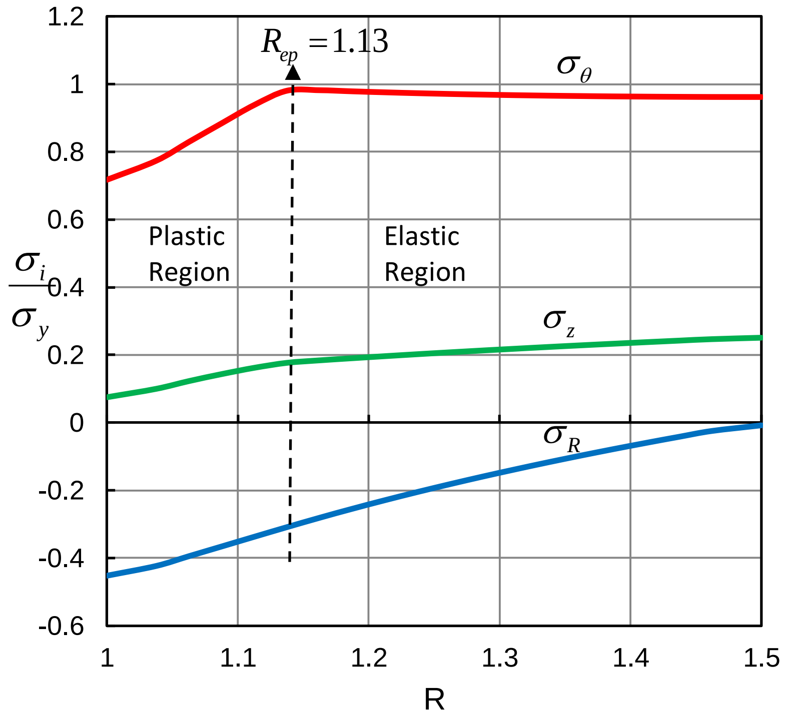
با افزایش فشار یا دما از حد بحرانی استوانه وارد ناحیه پلاستیک خواهد شد. با کمک نرم‌افزار آباکوس توزیع تنش‌ها در ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده را در ۳ حالت مختلف دما و فشار برای مقادیر مختلف n رسم می‌کنیم.

الف) استوانه FGM تحت فشار داخلی

توزیع تنش‌ها در استوانه تحت فشار داخلی $P_i = ۱۴۰\, MPa$ برای مقدار $n = 1$ در حالت تنش صفحه‌ای در شکل (۴-۱۸) و در حالت کرنش صفحه‌ای در شکل (۴-۱۹)، نشان داده شده است. این استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود.



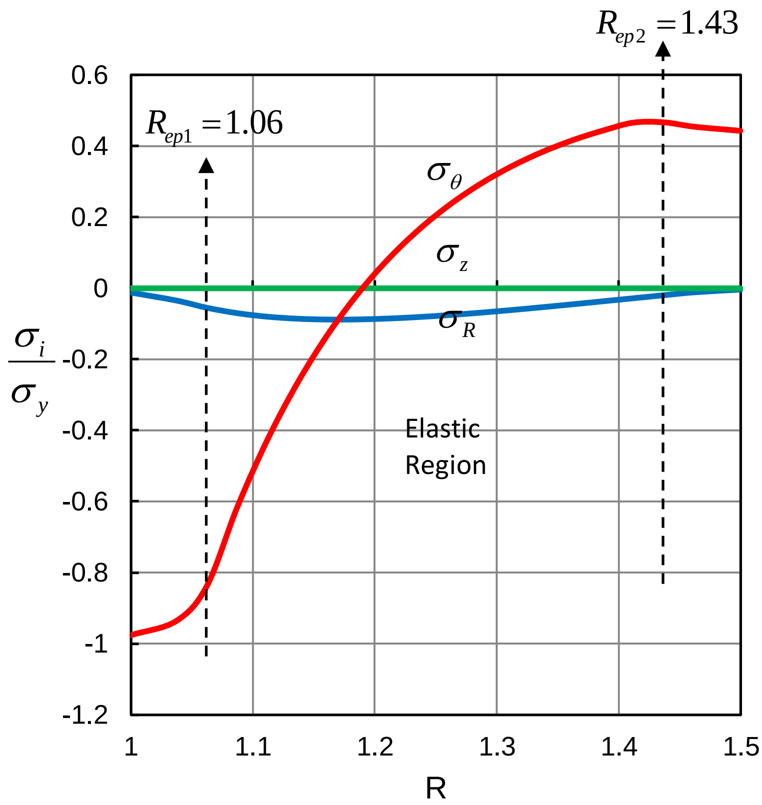
شکل ۴- ۱۸- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM تنش صفحه‌ای
تحت فشار با n= ۱ از معیار فون میزز



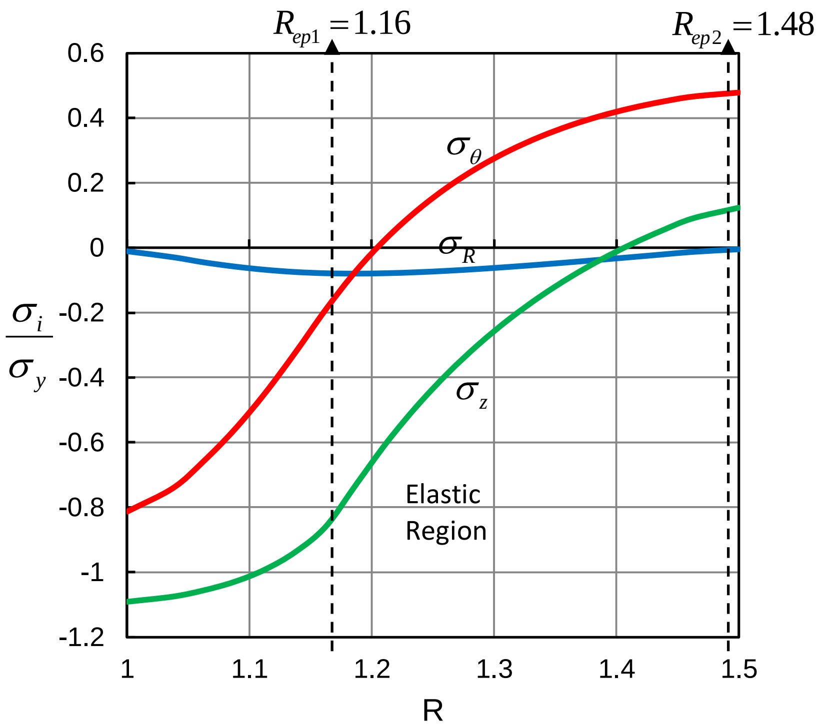
شکل ۴- ۱۹- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM کرنش صفحه‌ای
تحت فشار با n= ۱ از معیار فون میزز

ب) استوانه FGM تحت دمای داخلی

توزیع تنش‌ها در استوانه تحت دمای $\theta_i = ۲۵۰\, c^{\circ}$ با n= -۲ در شکل (۴-۲۰) برای حالت تنش صفحه‌ای و در شکل (۴- ۲۱) برای حالت کرنش صفحه‌ای، نشان داده شده است. این استوانه از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود.



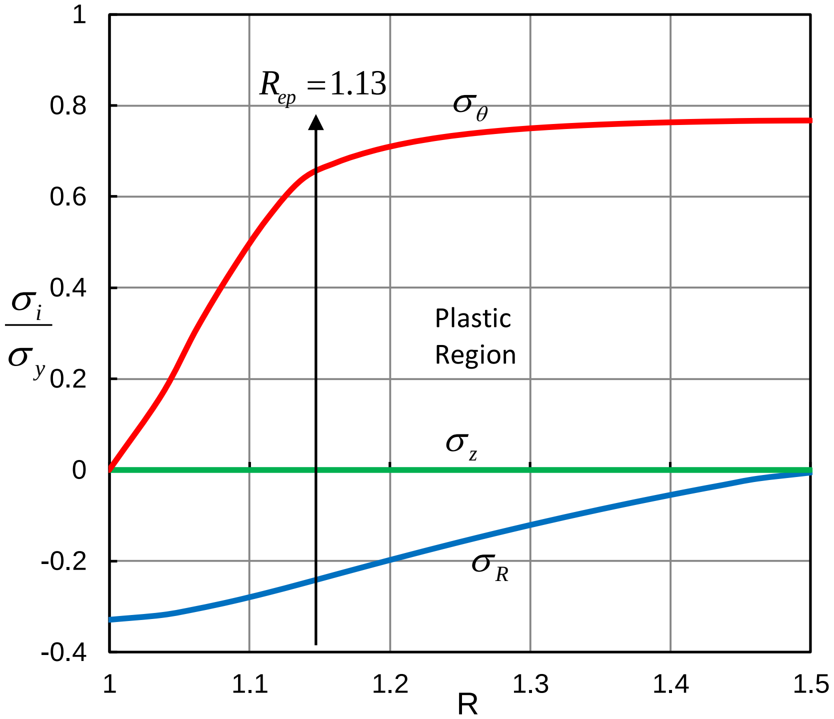
شکل ۴- ۲۰- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه FGM تنش صفحه‌ای
با n= -۲ از معیار فون میزز



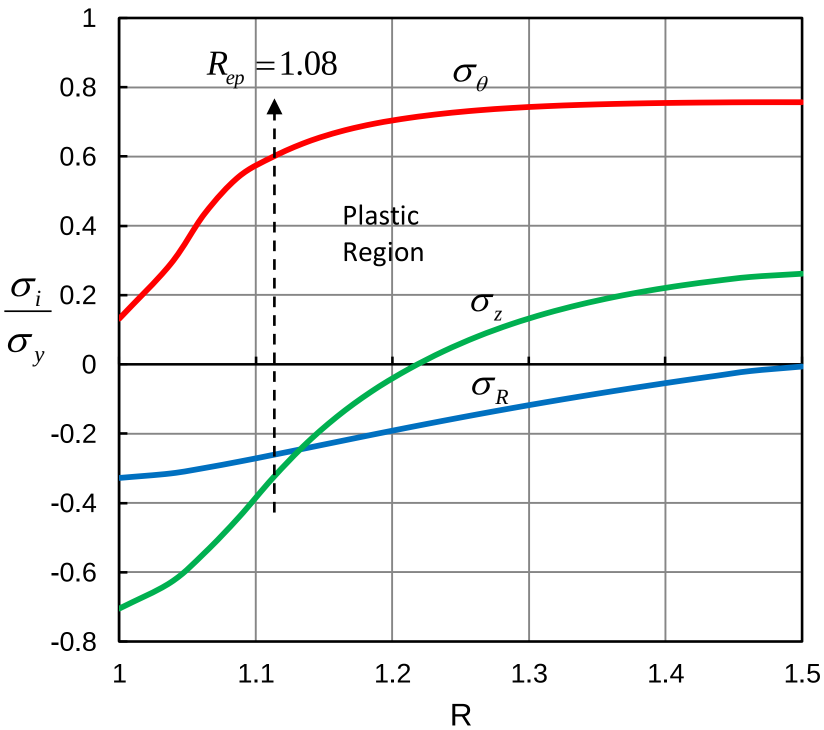
شکل ۴- ۲۱- توزیع تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه FGM کرنش صفحه‌ای
با n= -۲ از معیار فون میزز

ج) استوانه FGM تحت فشار و دمای داخلی

توزیع تنش‌ها در استوانه FGM تحت دمای $\theta_i = ۲۵۰\, c^{\circ}$ و فشار $P_i = ۱۰۰\, MPa$ برای $n=-1$ در حالت تنش صفحه‌ای در شکل (۴-۲۲) و در حالت کرنش صفحه‌ای در شکل (۴-۲۳)، نشان داده شده است. این استوانه از سطح خارجی تسلیم می‌شود.



شکل ۴- ۲۲- تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه FGM تنش صفحه‌ای تحت فشار با ۱- =n از معیار فون میزز



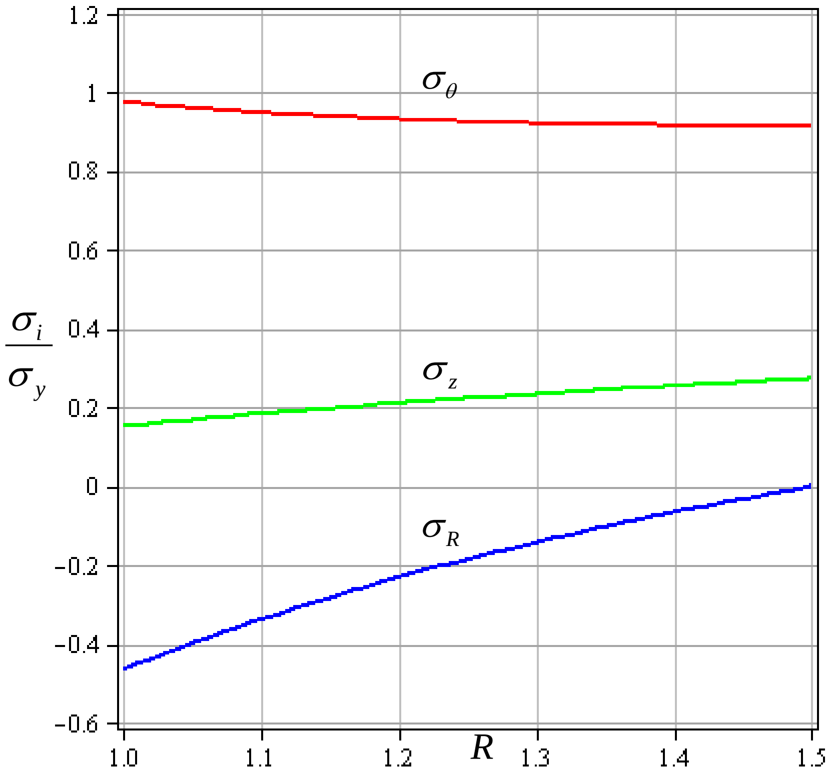
شکل ۴- ۲۳- تنش ترموالاستوپلاستیک در استوانه FGM کرنش صفحه‌ای تحت فشار با ۱- =n از معیار فون میزز

۴-۴- مقایسه نتایج حاصل از معیار تسلیم فون میزز و ترسکا

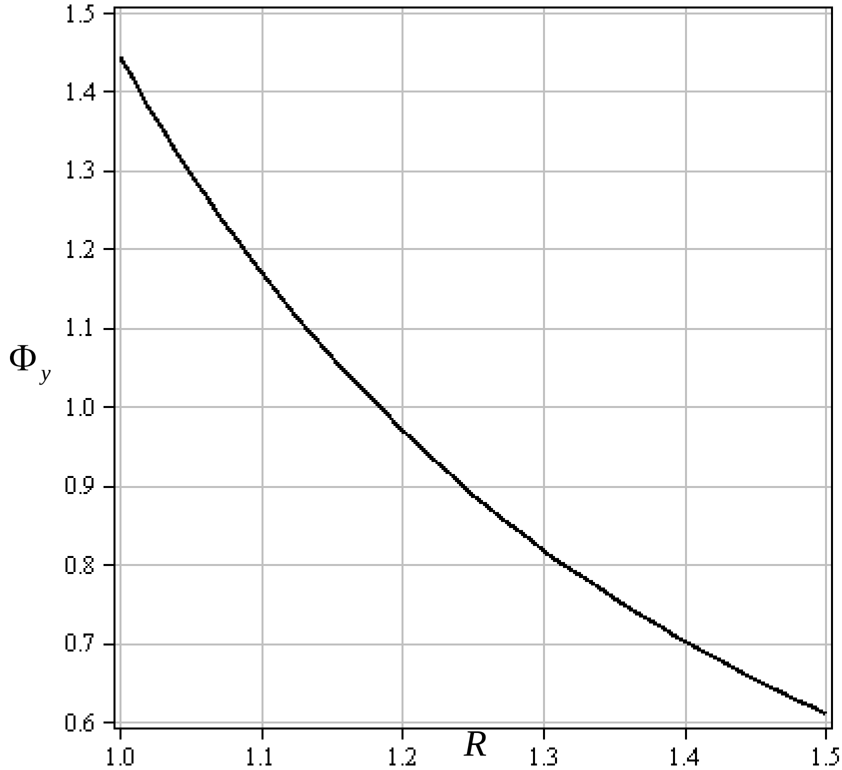
در این بخش برای بررسی تطابق نتایج حاصل از تحلیل به کمک معیار ترسکا و نتایج حاصل از تحلیل به کمک معیار فون میزز که توسط نرم‌افزار آباکوس انجام شده است، یک استوانه FGM تحت فشار داخلی P_i =۱۴۰ MPa برای مقدار $n_1 = n_2 = 1$ در حالت کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است

۴-۴-۱- معیار ترسکا

در استوانه مذکور با فرض $n_1 = 1$ با توجه به مطالب بخش ۴-۲-۱ و رابطه (۴-۲۵)، ۱/۰۱-= $(n_2)_{cr}$،
بنابراین اگر $(n_2)_{cr}$ >۱= n_2 باشد، استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود.
شکل (۴-۲۴) توزیع تنش الاستیک و شکل (۴-۲۵) تابع تسلیم در این استوانه تحت فشار ۱۳۰ مگا پاسکال را نشان می‌دهد.



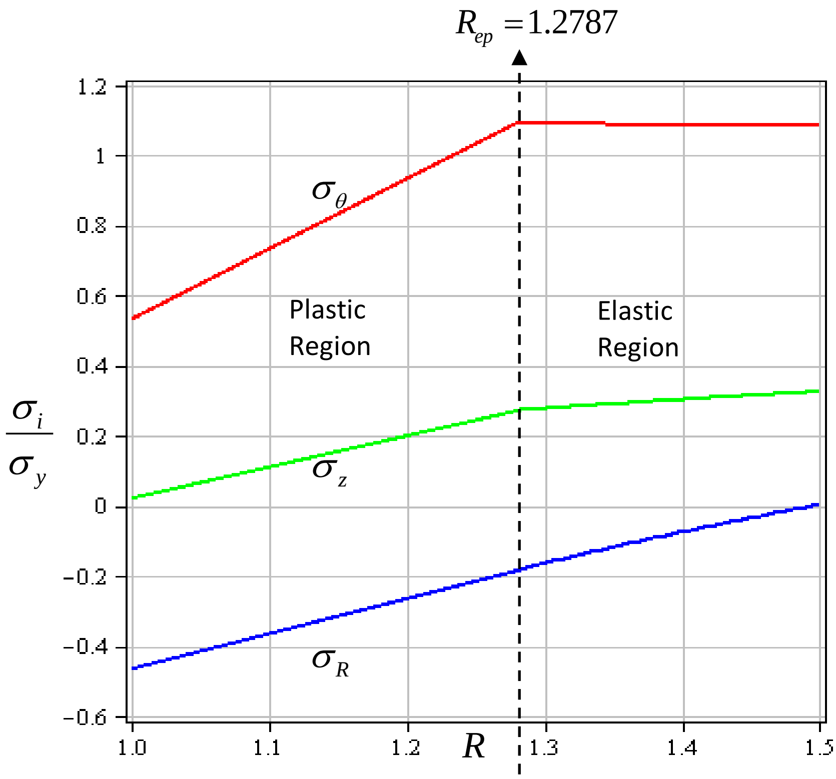
شکل ۴- ۲۴- توزیع تنش الاستیک در استوانه FGM کرنش صفحه‌ای تحت فشار از معیار ترسکا



شکل ۴-۲۵- تابع تسلیم در استوانه FGM کرنش صفحه‌ای
تحت فشار از معیار ترسکا

شکل (۴-۲۶) توزیع تنش‌ها در این استوانه الاستوپلاستیک را نشان می‌دهد. در این شرایط استوانه از سطح داخلی تسلیم می‌شود بنابراین یک ناحیه پلاستیک و یک ناحیه الاستیک در استوانه ایجاد می‌شود به‌طوری که در محدوده $1 \leq R \leq R_{ep}$ ناحیه پلاستیک (P)، در $R_{ep} \leq R \leq K$ ناحیه الاستیک(e) ایجاد می‌شود. مجهولات C_1 و C_2 مربوط به رابطه تنش در ناحیه الاستیک، R_{ep} (مرز بین ناحیه پلاستیک و ناحیه الاستیک)، از 4 شرط رابطه (۴-۴۸) بدست می‌آیند.

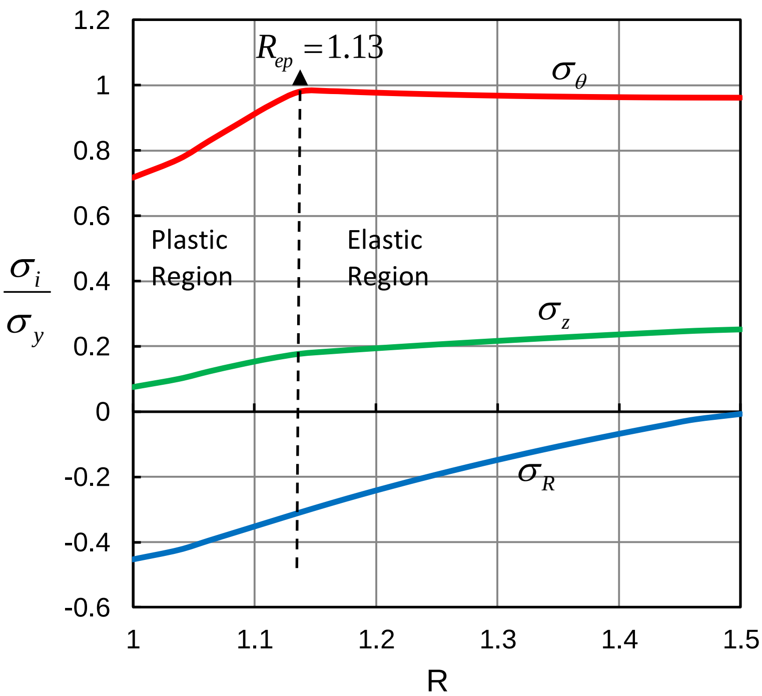
$$C_1 = 0.0008658039037, C_2 = 0.001824265607, R_{ep} = 1.2787$$



شکل ۴- ۲۶- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM تحت فشار داخلی از معیار ترسکا

۴-۴-۲- معیار فون میزز

توزیع تنش‌ها در استوانه تحت فشار داخلی $P_i = ۱۴۰\text{MPa}$ برای مقدار $n=۱$ در حالت کرنش صفحه‌ای در شکل (۴-۲۷)، نشان داده شده است. این استوانه از سطح داخلی تا شعاع R_{ep} تسلیم می‌شود.



شکل ۴- ۲۷- توزیع تنش الاستوپلاستیک در استوانه FGM تحت فشار داخلی از معیار فون میزز

فصل ۵

جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در فصول قبلی این تحقیق، تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار ضخیم همگن و ناهمگن ساخته شده از مواد FG با استفاده از روابط الاستیک حاصل از تئوری الاستیسیته مستوی و معیارهای تسلیم ترسکا و فون میزز، انجام شد. در این فصل به جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده از فصول قبل و بیان نتیجه‌ای که از این تحقیق به‌دست آمده است، پرداخته شده است و در پایان پیشنهادهایی برای سایر موضوعات مرتبط با این تحقیق مطرح شده است.

۵-۱- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این بخش مطالب فصول قبلی جمع‌بندی و نتایج حاصل بیان شده است.

۵-۱-۱- تحلیل الاستیک و ترموالاستیک استوانه‌های همگن و ناهمگن FG

به‌طور کلی در تحلیل الاستیک پوسته‌های جدار ضخیم متقارن محوری، ۱۰ مجهول (۴ مؤلفه تنش، ۴ مؤلفه کرنش و ۲ مؤلفه جابه‌جایی) و ۱۰ معادله (۲ معادله تعادل، ۴ معادله سینماتیک و ۴ معادله رفتاری) داریم که حل همزمان آنها امکان ناپذیر است. در موقعیتی که تنش برشی و کرنش برشی صفر باشد (الاستیسیته مستوی)، تعداد مجهولات به ۸ مجهول می‌رسد (۳ مؤلفه تنش، ۳ مؤلفه کرنش و ۲ مؤلفه جابه‌جایی) و ۸ معادله (۲ معادله تعادل، ۳ معادله سینماتیک و ۳ معادله رفتاری) برای حل استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری وجود دارد. که در این تحقیق، با استفاده از این ۸ معادله روابطه تنش، کرنش و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک استوانه همگن و FGM تحت فشار و دمای داخلی در حالت تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای به دست آمد.

۵-۱-۲- تحلیل الاستوپلاستیک و ترمو الاستوپلاستیک استوانه‌های همگن و ناهمگن FG

با استفاده از روابط تنش‌ها در ناحیه الاستیک و با کمک معیار تسلیم ترسکا با فرض رفتار الاستیک-پلاستیک کامل، شرایط بحرانی تسلیم شامل فشار و یا دمای بحرانی آغاز تسلیم و شعاع نقطه شروع تسلیم و همچنین

روابط تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی در ناحیه الاستیک و پلاستیک استوانه تسلیم شده به‌صورت تحلیلی به‌دست آمده است و تاثیر ضرایب ناهمگنی در چگونگی تسلیم در استوانه FGM بررسی شد.

نتایج حاصل از بررسی تاثیر ضرایب ناهمگنی در چگونگی تسلیم در تحلیل الاستوپلاستیک استوانه FGM با کمک معیار ترسکا به‌صورت زیر می‌باشند.

الف) اگر $n_1 > 0$، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $P_i = (P_i)_e$: پوسته استوانه‌ای از هر دو سطح داخلی و خارجی تسلیم می‌شود.

ب) اگر $n_1 < 0$، $n_2 = (n_2)_{cr}$ و $P_i = (P_i)_{ein}$: پوسته استوانه‌ای از شعاع R_y تسلیم می‌شود به طوری که $1 < R_y < k$.

ج) اگر $n_2 > (n_2)_{cr}$: پوسته استوانه‌ای از سطح داخلی تسلیم می‌شود و فشار بحرانی تسلیم از رابطه‌ی $\Phi_y(R=1)=1$ به‌دست می‌آید.

د) اگر $n_2 < (n_2)_{cr}$: پوسته استوانه‌ای از سطح خارجی تسلیم می‌شود و فشار بحرانی تسلیم از رابطه‌ی $\Phi_y(R=k)=1$ به‌دست می‌آید که به صورت زیر است.

با کمک نرم افزار المان محدود آباکوس که تحلیل الاستوپلاستیک با استفاده از معیار فون میزز با فرض رفتار الاستیک- پلاستیک کامل در استوانه، را انجام می‌دهد، چگونگی تسلیم و توزیع تنش‌ها در استوانه تسلیم شده به‌دست آمد. که نتایج حاصل از این روش، شباهت قابل توجهی با نتایج حاصل از روش تحلیل به کمک معیار ترسکا دارد.

۵-۲- پیشنهادها

با توجه به تحلیل‌ها و ، جهت تعمیم تحلیل‌ها بررسی‌های انجام شده در این تحقیق و دستیابی به نتایج دقیق‌تر و جامع‌تر در تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه FGM پیشنهادهای زیر ارائه می‌گردد:

- استفاده از تئوری‌ها دیگر مانند تئوری تغییر شکل برشی برای تحلیل الاستیک به‌جای تئوری الاستیسیته مستوی.
- در نظر گرفتن توابع نمایی یا سهموی برای تغییرات خواص مکانیکی استوانه FGM به‌جای تابع توانی.
- بررسی بر اساس شکل‌های هندسی مختلف از جمله، استوانه با ضخامت متغیر، استوانه با مقطع بیضوی، مخروط وکره.
- در نظر گرفتن رفتار پلاستیک ماده استوانه به‌صورت ویسکوالاستیک، کرنش سختی خطی یا غیر خطی به‌جای پلاستیک کامل.
- تحلیل مسأله در معرض بارگذاری‌های مختلف از جمله فشار خارجی، بار حرارتی غیر پایا، اعمال بار دینامیکی، گذرا و نیروهای حجمی (جسم دوار).
- بررسی رفتارهایی مانند خزش، خستگی، شکست، کمانش و ارتعاشات در ماده نیز توصیه می‌شود.

مراجع

[۱] قناد، مهدی، ۱۳۸۷، رساله دکتری، تحلیل الاستیک استوانه‌های جدار ضخیم با ضخامت متغیر از مواد ناهمگن FG تحت فشار داخلی، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت مدرس.

[2] Voo L., Armand M., Kleinberger M. (2004); Stress Fracture Risk Analysis of the Human Femur Based on Computational Biomechanics, **Johns Hopkins APL Technical Digest**, Vol. 25, Nr. 3, pp. 223-230.

[3] Timoshenko S.P.; **Strength of Materials**: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1976.

[4] Jahanian S. (1996), Thermoelastoplastic Stress Analysis of a Thick-Walled Tube of Nonlinear Strain Hardening, **Journal of Mechanical Design**, Vol. 11, pp. 340-346.

[5] Orcan Y., Eraslan A.N. (2002); Elastic-plastic stresses in linearly hardening rotating solid disks of variable thickness, **Mechanics Research Communications**, Vol. 29, Nr. 4, 2002, pp. 269-281.

[6] Eraslan A.N., Orcan Y. (2002);Elastic-plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness, **Mechanics of Materials**, Vol. 34, pp. 423-432.

[7] Eraslan A.N., Orcan Y. (2002);On the rotating elastic-plastic solid disks of variable thickness having concave profiles, **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 44, pp. 1445-1466.

[8] Eraslan A.N. (2002);Von mises yield criterion and nonlinearly hardening variable thickness rotating annular disks with rigid inclusion, **Mechanics Research Communications**, Vol. 29, Nr. 5, 2002, pp. 339-350.

[9] Eraslan A.N. (2003); Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions, **International Journal of Mechanical Sciences**, Vol. 45, Nr. 4, pp. 643-667.

[10] Eraslan A.N. (2003);Elastoplastic deformations of rotating parabolic solid disks using Tresca's yield criterion, **European Journal of Mechanics - A/Solids**, Vol. 22, Nr. 6, pp. 861-874.

[11] Eipakchi H.R., Rahimi G.H., Esmaeilzadeh Khadem S. (2003); Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to non-uniform internal pressure, **Journal of Structural Engineering and Mechanics**, Vol. 6, Nr. 16, pp. 731-748.

[12] Gao X., Gao L. (2003) Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory, **International Journal of Solids and Structures**, Nr. 40, pp. 6445–6455.

[13] Ghannad M., Zamani Nejad M., Rahimi G. H. (2009); Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory, **Journal of E Mechanika**, Vol. 79, Nr. 5, pp. 13-20.

[14] Koizumi M. (1997); FGM activities in Japan. **Composites: Part B (Engineering)**, Nr. 28, pp. 1-4.

[15] Fukui Y., Yamanaka N. (1992); Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure. **JSME**, Series I: Solid Mechanics, Vol. 4, Nr. 35, pp. 379-385.

[16] Obata Y. & Noda N. (1994); Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material, **Journal of Thermal Stresses**, Nr. 17, pp. 471-487.
[17] Horgan C.O., Chan A.M. (1999); The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials. **Journal of Elasticity**, Nr. 55, pp. 43-59.
[18] Ootao Y., Tanigawa Y., Nakamura T. (1999); Optimization of material composition of FGM hollow circular cylinder under thermal loading: a neural network approach. **Composites: Part B (Engineering)**, Vol. 30, Nr. 4, pp. 415-422.
[19] Tutuncu N., Ozturk M. (2001); Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels. **Composites: Part B (Engineering)**, Nr. 32, pp. 683-686.
[20] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. (2002); Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. **International Journal of Pressure Vessel and Piping**, Vol. 79, pp. 493-497.
[21] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. (2003); General solution for mechanical and thermal stresses in a nonaxisymmeteic steady-state loads, **Journal of Applied Mechanics**; Nr. 70, pp. 111-118.
[22] Naghdabadi R., Kordkheili S.A.H. (2005); A finite element formulation for analysis of functionally graded plates and shells, **Archive of Applied Mechanics**; Vol. 74, Nr. 5-6, pp. 375-386.
[23] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z. (2006); Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders,**Mechanics Research Communications**, Nr. 33,pp. 681-691.
[24] Eraslan A.N., Akis T. (2006); Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic–plastic pressurized tube, **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, Vol. 83, Nr. 9, pp. 635-644.
[25] Eraslan A.N., Akis T. (2007); Exact solution of rotating FGM shaft problem in the elastoplastic state of stress, **Arch ApplMech**, Vol. 77, pp. 745–765.
[26] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X. (2007); Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, **Journal of Composite Structures**, Nr. 79, pp. 140-147.
[27] Tutuncu N. (2007); Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, **Journal of Engineering Structures**, Nr. 29, pp. 2032-2035.
[28] Shao Z.S., Ma G.W. (2008); Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature, **Journal of Composite Structures**, Nr. 83, pp. 259-265.
[۲۹] قناد، مهدی و رحیمی، غلامحسین و اسماعیل‌زاده خادم، سیامک (۱۳۸۹)؛ "حل عمومی استوانه‌های جدار ضخیم متقارن محوری ازمواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی" **مجله فنی و مهندسی مدرس**، ج ۱۰، ش ۳، ص‌ص ۳۱-۴۱.
[۳۰] قناد، مهدی و رحیمی، غلامحسین و اسماعیل‌زاده خادم، سیامک (۱۳۸۹)؛ "حل عمومی استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری تغییرشکل برشی" **مجله فنی و مهندسی مدرس**، ج ۱۰، ش ۴، صفحات ۱۳-۲۵.
[31] Nemat-Alla M., Ahmed K.I.E., Hassab-Allah I. (2009); Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading, **International Journal of Solids and Structures**, Vol. 46, Nr. 14-15, pp. 2774-2786.

[32] Tutuncu N., Beytullah T. (2009); A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, **Composite Structures**, Vol. 91, Nr. 3, pp. 385-390.
[33] Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R. (2009); Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders, **International Journal of Pressure Vessels and Piping**, Vol. 86, Nr. 5, pp. 296-306.
[34] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosallaie Barzoki A.A. (2011); Effect of material in-homogenity on elec. thermo-mechanical behaviors of functionally graded piezoelectric rotating shaft; **Journal of Applied Mathematical Modeling**, Vol. 6, Nr. 35, pp. 2771-2789.
[35] Ozturk, A., Gulgec, M. (2011); Elastic–plastic stress analysis in a long functionally graded solid cylinder with fixed ends subjected to uniform heat generation, **International Journal of Engineering Science**, Vol. 49, Nr. 10, 2011, pp. 1047-1061.
[36] Timoshenko S.P., Goodier J.N. (1983); **Theory of Elasticity**, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
[37] Timoshenko S.P. (1976); **Strength of Materials**: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1976.
[38] Hetnarski R.B., Eslami M.R. (2009), **Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications**, Springer.
[39] Mendelson A. (1968), **Plasticity**: Theory and Application, Macmillan, New York.

Abstract

In this research thermoelastoplastic analysis of thick-walled cylinders made of homogenous and nonhomogenous materials with power-varying properties using plane elasticity theory which is subjected to internal pressure and steady state thermal loading is carried out. The purpose is to check yielding of cylinder by assuming elastic-perfectly plastic behavior and to find state of stress, strain and displacement of cylinder. First, governing differential equation axisymmetric thick-walled cylinders with constant thickness that are made of homogenous and nonhomogenous materials with power-varying properties and subjected to pressure and thermal loadings are derived by using plane elasticity theory at the plane stress and plane strain condition. Then according to the Tresca yield criterion analytically and von Mises yield criterion numerically by using ABAQUS finite elements software, investigate yielding of cylinder and stress, strain and displacement in elastic and plastic region of cylinder. Finally, for the case study and survey equation, are considered a homogenous and FGM cylinder with the specified parameters.

Kywords: Thick-walled Cylinder, Functionally Graded Material (FGM), Plane Elasticity Theory (PET), Elastic-perfectly plastic behavior, Tresca and Von mises yield criterion.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Thermo-elastoplastic analysis of FGM thick wall cylinder with power-varying mechanical properties by using classical theory

Amir Saberi Nasab

Supervisor:

Mehdi Ghannad Kahtooei

September 2013