



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات توانی خواص به کمک تئوری تغییر شکل برشی

محمد یوسفی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قناد کهتویی

بهمن ۱۳۹۱

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک

گروه مهندسی مکانیک جامدات

تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات توانی خواص به کمک تئوری تغییر شکل برشی

دانشجو: محمد یوسفی

استاد راهنما:

دکتر مهدی قناد کهنوی

پایان‌نامه‌ی ارشد جهت دریافت درجه‌ی کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: بهمن ۱۳۹۱

شماره: ۳۰۹۲/۱۵۹

تاریخ: ۹۲/۱/۲۷

ویرایش:

بسمه تعالی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

فرم صورتجلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی تحصیلی دوره‌ی کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه‌ی دفاع از پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد آقای محمد یوسفی دانشجوی رشته‌ی مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی تحت عنوان تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات توانی خواص به کمک تئوری تغییر شکل برشی که در تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۳۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

☐ مردود	☐ دفاع مجدد	☒ قبول (با درجه‌ی: امتیاز: ۱۸/۱۳)
--------------------------------	------------------------------------	---

۲- بسیار خوب (۱۸ - ۱۸/۹۹)

۱- عالی (۱۹ - ۲۰)

۴- قابل قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۵- نمره‌ی کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه‌ی علمی	امضا
۱- استاد راهنما	دکتر مهدی قناد کهتویی	استادیار	
۲- استاد مشاور	-	-	-
۳- نماینده‌ی شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر محمدباقر نظری	استادیار	
۴- استاد ممتحن	دکتر حمیدرضا ایپک‌چی	دانشیار	
۵- استاد ممتحن	دکتر مهدی گردویی	استادیار	

رئیس دانشکده: دکتر مهدی قناد کهتویی



تشکر و قدردانی

در این قسمت لازم است از زحمات کلیه افرادی که در رساندن من به این مرحله تلاش نموده‌اند تشکر نمایم. بیش از همه از پدر، مادر و سایر اعضای خانواده‌ام که همواره مشوق من بوده‌اند و بستر رشد و پیشرفت مرا فراهم نمودند تشکر می‌نمایم.

همچنین لازم است از استادان دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود که در این دوره‌ی تحصیلی در محضرشان بودم به ویژه آقای دکتر مهدی قناد که تویی که زحمت هدایت این پایان‌نامه را بر دوش کشیدند تشکر نمایم.

محمد یوسفی

تعهد نامه

اینجانب محمد یوسفی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته‌ی مهندسی مکانیک گرایش طراحی کاربردی دانشکده‌ی مهندسی مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات توانی خواص به کمک تئوری تغییر شکل برشی تحت راهنمایی دکتر مهدی قناد کهتویی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه‌ی مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آن‌ها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود. استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این تحقیق به تحلیل ترموالاستوپلاستیک استوانه‌های جدار کلفت ساخته شده از مواد ناهمگن با تغییرات توانی خواص با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و سوم که در معرض فشار داخلی و خارجی و بار حرارتی در حالت پایا قرار گرفته‌اند، پرداخته شده است. هدف بررسی تسلیم استوانه با در نظر گرفتن رفتار الاستوپلاستیک (الاستیک-پلاستیک کامل) و یافتن وضعیت تنش، کرنش و جابه‌جایی شعاعی استوانه است. ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری که ضخامت ثابتی دارند و از مواد ناهمگن با تغییرات توانی خواص ساخته شده‌اند و در معرض بار فشاری و حرارتی قرار دارند با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و اصل کار مجازی استخراج شده‌اند. روش حل این معادلات برای استوانه با دو سر گیردار و استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد بیان شده است. سپس روند بررسی تسلیم استوانه بر اساس معیارهای رانکین، ترسکا و فون میزز و اصلاح میدان‌های تنش، کرنش و جابه‌جایی محاسبه شده از حل الاستیک در نقاط تسلیم شده بیان شده است. همچنین حل چنین مساله‌ای به کمک روش اجزای محدود نیز در این پایان‌نامه بیان شده است. نتایج عددی برای استوانه‌ای خاص ارائه و با نتایج حاصل حل مساله به کمک نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus مقایسه شده است. در پایان مقایسه‌ای بین تئوری تغییر شکل برشی و روش اجزای محدود انجام شده است.

واژگان کلیدی: استوانه‌ی کلفت، ماده‌ی متغیر تابعی (FGM)، تئوری تغییر شکل برشی (SDT)، روش اجزای محدود (FEM)، الاستوپلاستیک، تسلیم.

فهرست مطالب

چکیده.....	و
فهرست شکل ها.....	ی
فهرست جدول ها.....	ص
فهرست علائم.....	ر
فصل ۱- مقدمه.....	۱
۱-۱- پوسته ها.....	۲
۱-۱-۱- انواع پوسته ها.....	۲
۱-۱-۲- تئوری های ارائه شده برای پوسته ها.....	۲
۲-۱- FGM ها.....	۷
۱-۲-۱- روش های ساخت FGM ها.....	۱۰
۲-۲-۱- توزیع خواص.....	۱۲
۳-۱- رفتار پلاستیکی مواد.....	۱۳
۱-۳-۱- روابط تنش- کرنش الاستیک.....	۱۴
۲-۳-۱- معیارهای تسلیم.....	۱۵
۳-۳-۱- روابط تنش- کرنش پلاستیک.....	۱۶
۴-۱- روش اجزای محدود.....	۲۱
۱-۴-۱- زیربرنامه ی UMAT.....	۲۲
۵-۱- نگاهی بر مطالعات گذشته.....	۲۲
۶-۱- جمع بندی.....	۲۶
فصل ۲- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه ی اول.....	۲۸
۱-۲- تئوری الاستیسیته ی مستوی.....	۲۹
۲-۲- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه ی اول.....	۳۰
۳-۲- استخراج روابط الاستیک.....	۳۲
۴-۲- اعمال شرایط مرزی.....	۴۰
۱-۴-۲- استوانه با دو سر گیردار.....	۴۱
۲-۴-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد.....	۴۲
۵-۲- بررسی جریان پلاستیک.....	۴۳
۱-۵-۲- معیارهای تسلیم.....	۴۴
۲-۵-۲- محاسبه ی تنش.....	۴۵

۴۷	۳-۵-۲- قانون جریان
۴۸	۴-۵-۲- محاسبه‌ی کرنش
۵۳	۶-۲- مطالعه‌ی موردی
۵۴	۱-۶-۲- ماده‌ی همگن ($n=m=0$)
۵۵	۲-۶-۲- ثابت ناهمگنی $n=m=1$
۵۷	۳-۶-۲- ثابت ناهمگنی $n=m=-1$
۵۷	۴-۶-۲- ثابت ناهمگنی $n=m=2$
۵۹	۵-۶-۲- ثابت ناهمگنی $n=m=-2$
۶۰	۷-۲- ارائه و مقایسه‌ی نتایج
۶۰	۱-۷-۲- استوانه با دو سر گیردار
۷۴	۲-۷-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد

فصل ۳- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول.. ۸۸

۸۹	۱-۳- ترموالاستیسیته
۹۲	۲-۳- استخراج روابط ترموالاستیک
۹۵	۳-۳- اعمال شرایط مرزی
۹۵	۱-۳-۳- استوانه با دو سر گیردار
۹۵	۲-۳-۳- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد
۹۶	۴-۳- بررسی جریان پلاستیک
۹۸	۵-۳- مطالعه‌ی موردی
۹۹	۱-۵-۳- ماده‌ی همگن ($n=m=l=0$)
۹۹	۲-۵-۳- ثابت ناهمگنی $n=m=l=1$
۱۰۰	۳-۵-۳- ثابت ناهمگنی $n=m=l=-1$
۱۰۱	۴-۵-۳- ثابت ناهمگنی $n=m=l=2$
۱۰۲	۵-۵-۳- ثابت ناهمگنی $n=m=l=-2$
۱۰۲	۶-۳- ارائه و مقایسه‌ی نتایج
۱۰۳	۱-۶-۳- استوانه با دو سر گیردار
۱۱۷	۲-۶-۳- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد

فصل ۴- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم.. ۱۳۲

۱۳۳	۱-۴- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم
۱۳۴	۲-۴- استخراج روابط ترموالاستیک
۱۴۱	۳-۴- اعمال شرایط مرزی

۱۴۱	۴-۳-۱- استوانه با دو سر گیردار.....
۱۴۲	۴-۳-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد.....
۱۴۵	۴-۴- بررسی جریان پلاستیک.....
۱۴۶	۴-۵- ارائه و مقایسه‌ی نتایج.....
۱۴۷	۴-۵-۱- استوانه با دو سر گیردار در غیاب بار حرارتی.....
۱۶۱	۴-۵-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در غیاب بار حرارتی.....
۱۷۴	۴-۵-۳- استوانه با دو سر گیردار در معرض بار حرارتی.....
۱۸۸	۴-۵-۴- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در معرض بار حرارتی.....
۲۰۱	فصل ۵- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک روش اجزای محدود.....
۲۰۲	۵-۱- تحلیل ترموالاستیک.....
۲۰۷	۵-۱-۱- جزء مثلثی خطی ۳ گره‌ای.....
۲۰۸	۵-۱-۲- جزء مستطیلی خطی ۴ گره‌ای.....
۲۰۹	۵-۲- بررسی جریان پلاستیک.....
۲۱۰	۵-۳- ارائه و مقایسه‌ی نتایج.....
۲۱۱	۵-۳-۱- استوانه با دو سر گیردار در غیاب بار حرارتی.....
۲۲۶	۵-۳-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در غیاب بار حرارتی.....
۲۴۱	۵-۳-۳- استوانه با دو سر گیردار در معرض بار حرارتی.....
۲۵۸	۵-۳-۴- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در معرض بار حرارتی.....
۲۷۴	فصل ۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری.....
۲۷۵	۶-۱- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری.....
۲۷۵	۶-۱-۱- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول.....
۲۷۶	۶-۱-۲- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول.....
۲۷۷	۶-۱-۳- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم.....
۲۷۷	۶-۱-۴- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم.....
۲۷۸	۶-۱-۵- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک روش اجزای محدود.....
۲۷۹	۶-۱-۶- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک روش اجزای محدود.....
۲۷۹	۶-۱-۷- نتایج کلی.....
۲۸۰	۶-۲- پیشنهادها.....
۲۸۱	مراجع.....

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱- نمای زیرساختار مواد همگن، مرکب لایه‌ای و FGM ۸
- شکل ۲-۱- برش طولی استخوان ران انسان [۴] ۹
- شکل ۳-۱- توزیع توانی خواص در جهت شعاع استوانه ۱۳
- شکل ۴-۱- نمودار تنش- کرنش برای مواد نرم و ترد ۱۴
- شکل ۵-۱- نمودار تنش- کرنش و سیستم دینامیکی معادل مدل‌های مواد [۸] ۱۸
- شکل ۱-۲- پروفیل استوانه‌ای جدار ثابت ۳۰
- شکل ۲-۲- پروفیل استوانه‌ای جدار ثابت تحت فشار داخلی و خارجی ۳۲
- شکل ۳-۲- نمایش نیروها و لنگرها بر روی المان استوانه‌ای ۳۵
- شکل ۴-۲- دستگاه مختصات تصویرگر فضایی تنش ۴۴
- شکل ۵-۲- نمایش هندسی معیارهای تسلیم رانکین، ترسکا و فون میزز ۴۵
- شکل ۶-۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک ۶۲
- شکل ۷-۲- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن ۶۲
- شکل ۸-۲- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۶۳
- شکل ۹-۲- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۶۴
- شکل ۱۰-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۶۴
- شکل ۱۱-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۶۵
- شکل ۱۲-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۶۵
- شکل ۱۳-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۶۶
- شکل ۱۴-۲- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۶۷
- شکل ۱۵-۲- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۶۷
- شکل ۱۶-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۶۸
- شکل ۱۷-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z=0$ ۶۸
- شکل ۱۸-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۶۹
- شکل ۱۹-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z=0$ ۶۹
- شکل ۲۰-۲- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۷۰
- شکل ۲۱-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۷۱
- شکل ۲۲-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۷۱
- شکل ۲۳-۲- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۷۲
- شکل ۲۴-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۷۳
- شکل ۲۵-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۷۳
- شکل ۲۶-۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک ۷۵
- شکل ۲۷-۲- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن ۷۶
- شکل ۲۸-۲- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۷۷
- شکل ۲۹-۲- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۷۷
- شکل ۳۰-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۷۸

- شکل ۲-۳۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۷۸
- شکل ۲-۳۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۷۹
- شکل ۲-۳۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۷۹
- شکل ۲-۳۴- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۸۰
- شکل ۲-۳۵- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۸۱
- شکل ۲-۳۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۸۱
- شکل ۲-۳۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z=0$ ۸۲
- شکل ۲-۳۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۸۲
- شکل ۲-۳۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۸۳
- شکل ۲-۴۰- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۸۴
- شکل ۲-۴۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۸۴
- شکل ۲-۴۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۸۵
- شکل ۲-۴۳- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۸۶
- شکل ۲-۴۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۸۶
- شکل ۲-۴۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۸۷
- شکل ۳-۱- پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت در معرض دما و فشار داخلی و خارجی ۹۰
- شکل ۳-۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک ۱۰۵
- شکل ۳-۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن ۱۰۶
- شکل ۳-۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۰۷
- شکل ۳-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۰۷
- شکل ۳-۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۰۸
- شکل ۳-۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۰۸
- شکل ۳-۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۰۹
- شکل ۳-۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۰۹
- شکل ۳-۱۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۱۱۰
- شکل ۳-۱۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۱۱۱
- شکل ۳-۱۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۱۱۱
- شکل ۳-۱۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۱۱۲
- شکل ۳-۱۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۱۱۲
- شکل ۳-۱۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۱۱۳
- شکل ۳-۱۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۱۴
- شکل ۳-۱۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۱۴
- شکل ۳-۱۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۱۵
- شکل ۳-۱۹- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۱۱۶
- شکل ۳-۲۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۱۱۶
- شکل ۳-۲۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۱۱۷
- شکل ۳-۲۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک ۱۱۹

- شکل ۳-۲۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن..... ۱۲۰
- شکل ۳-۲۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۲۱
- شکل ۳-۲۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۲۱
- شکل ۳-۲۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۲۲
- شکل ۳-۲۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۲۲
- شکل ۳-۲۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۲۳
- شکل ۳-۲۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۲۳
- شکل ۳-۳۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۲۴
- شکل ۳-۳۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۲۵
- شکل ۳-۳۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۲۵
- شکل ۳-۳۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۲۶
- شکل ۳-۳۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۲۶
- شکل ۳-۳۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۲۷
- شکل ۳-۳۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۲۸
- شکل ۳-۳۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۲۸
- شکل ۳-۳۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۲۹
- شکل ۳-۳۹- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۳۰
- شکل ۳-۴۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۳۰
- شکل ۳-۴۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۳۱
- شکل ۴-۱- پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت در معرض دما و فشار داخلی و خارجی..... ۱۳۴
- شکل ۴-۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک..... ۱۴۹
- شکل ۴-۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن..... ۱۴۹
- شکل ۴-۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۵۰
- شکل ۴-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۵۱
- شکل ۴-۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۵۱
- شکل ۴-۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۵۲
- شکل ۴-۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۵۲
- شکل ۴-۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۵۳
- شکل ۴-۱۰- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۵۴
- شکل ۴-۱۱- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۵۴
- شکل ۴-۱۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۵۵
- شکل ۴-۱۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۵۵
- شکل ۴-۱۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۵۶
- شکل ۴-۱۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۵۶
- شکل ۴-۱۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۵۷
- شکل ۴-۱۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۵۸
- شکل ۴-۱۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۵۸

- شکل ۴-۱۹- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۵۹
- شکل ۴-۲۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۶۰
- شکل ۴-۲۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۶۰
- شکل ۴-۲۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک..... ۱۶۲
- شکل ۴-۲۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن..... ۱۶۳
- شکل ۴-۲۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۶۴
- شکل ۴-۲۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۶۴
- شکل ۴-۲۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۶۵
- شکل ۴-۲۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۶۵
- شکل ۴-۲۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۶۶
- شکل ۴-۲۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۶۶
- شکل ۴-۳۰- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۶۷
- شکل ۴-۳۱- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۶۸
- شکل ۴-۳۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۶۸
- شکل ۴-۳۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۶۹
- شکل ۴-۳۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۶۹
- شکل ۴-۳۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۷۰
- شکل ۴-۳۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۷۱
- شکل ۴-۳۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۷۱
- شکل ۴-۳۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۷۲
- شکل ۴-۳۹- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۷۳
- شکل ۴-۴۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۷۳
- شکل ۴-۴۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۱۷۴
- شکل ۴-۴۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک..... ۱۷۶
- شکل ۴-۴۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن..... ۱۷۶
- شکل ۴-۴۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۷۷
- شکل ۴-۴۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۷۸
- شکل ۴-۴۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۷۸
- شکل ۴-۴۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۷۹
- شکل ۴-۴۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۷۹
- شکل ۴-۴۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۸۰
- شکل ۴-۵۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۸۱
- شکل ۴-۵۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۸۱
- شکل ۴-۵۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۸۲
- شکل ۴-۵۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۸۲
- شکل ۴-۵۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۸۳
- شکل ۴-۵۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۸۳

- شکل ۴-۵۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۸۴
- شکل ۴-۵۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۸۵
- شکل ۴-۵۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۸۵
- شکل ۴-۵۹- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۱۸۶
- شکل ۴-۶۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۱۸۷
- شکل ۴-۶۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۱۸۷
- شکل ۴-۶۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک ۱۸۹
- شکل ۴-۶۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن ۱۸۹
- شکل ۴-۶۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۹۰
- شکل ۴-۶۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۹۱
- شکل ۴-۶۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۹۱
- شکل ۴-۶۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۹۲
- شکل ۴-۶۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۱۹۲
- شکل ۴-۶۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۱۹۳
- شکل ۴-۷۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۱۹۴
- شکل ۴-۷۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۱۹۴
- شکل ۴-۷۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۱۹۵
- شکل ۴-۷۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۱۹۵
- شکل ۴-۷۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۱۹۶
- شکل ۴-۷۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۱۹۶
- شکل ۴-۷۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۹۷
- شکل ۴-۷۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۹۸
- شکل ۴-۷۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۱۹۸
- شکل ۴-۷۹- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۱۹۹
- شکل ۴-۸۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۲۰۰
- شکل ۴-۸۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۲۰۰
- شکل ۵-۱- پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت در معرض دما و فشار داخلی و خارجی ۲۰۲
- شکل ۵-۲- نمونه‌ای از شبکه‌بندی استوانه با جزء مستطیلی ۲۰۶
- شکل ۵-۳- جزء مثلثی ۳ گره‌ای ۲۰۷
- شکل ۵-۴- جزء مستطیلی ۴ گره‌ای ۲۰۸
- شکل ۵-۵- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی ۲۱۳
- شکل ۵-۶- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی ۲۱۴
- شکل ۵-۷- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلثی ۲۱۴
- شکل ۵-۸- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی ۲۱۵
- شکل ۵-۹- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۱۶
- شکل ۵-۱۰- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۱۶
- شکل ۵-۱۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۱۷

- شکل ۵-۱۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۱۷
- شکل ۵-۱۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۱۸
- شکل ۵-۱۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۱۸
- شکل ۵-۱۵- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۱۹
- شکل ۵-۱۶- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۲۲۰
- شکل ۵-۱۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۲۰
- شکل ۵-۱۸- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۲۲۱
- شکل ۵-۱۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۲۱
- شکل ۵-۲۰- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z=0$ ۲۲۲
- شکل ۵-۲۱- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۲۳
- شکل ۵-۲۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۲۳
- شکل ۵-۲۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۲۴
- شکل ۵-۲۴- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۲۵
- شکل ۵-۲۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۲۵
- شکل ۵-۲۶- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۲۶
- شکل ۵-۲۷- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی..... ۲۲۸
- شکل ۵-۲۸- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی..... ۲۲۹
- شکل ۵-۲۹- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلثی..... ۲۲۹
- شکل ۵-۳۰- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی..... ۲۳۰
- شکل ۵-۳۱- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۳۱
- شکل ۵-۳۲- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۳۱
- شکل ۵-۳۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۳۲
- شکل ۵-۳۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۳۲
- شکل ۵-۳۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۳۳
- شکل ۵-۳۶- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۳۳
- شکل ۵-۳۷- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۳۴
- شکل ۵-۳۸- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۲۳۵
- شکل ۵-۳۹- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۳۵
- شکل ۵-۴۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$ ۲۳۶
- شکل ۵-۴۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۳۶
- شکل ۵-۴۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۲۳۷
- شکل ۵-۴۳- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۳۸
- شکل ۵-۴۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۳۸
- شکل ۵-۴۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۳۹
- شکل ۵-۴۶- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۴۰
- شکل ۵-۴۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۴۰
- شکل ۵-۴۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۴۱

- شکل ۴۹-۵- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی..... ۲۴۵
- شکل ۵۰-۵- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی..... ۲۴۵
- شکل ۵۱-۵- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلثی..... ۲۴۶
- شکل ۵۲-۵- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی..... ۲۴۶
- شکل ۵۳-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۴۷
- شکل ۵۴-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۴۸
- شکل ۵۵-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۴۸
- شکل ۵۶-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۴۹
- شکل ۵۷-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۴۹
- شکل ۵۸-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۵۰
- شکل ۵۹-۵- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۵۱
- شکل ۶۰-۵- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۲۵۱
- شکل ۶۱-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۵۲
- شکل ۶۲-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۲۵۲
- شکل ۶۳-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۵۳
- شکل ۶۴-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۲۵۳
- شکل ۶۵-۵- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۵۴
- شکل ۶۶-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۵۵
- شکل ۶۷-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۵۵
- شکل ۶۸-۵- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۵۶
- شکل ۶۹-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۵۷
- شکل ۷۰-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن..... ۲۵۷
- شکل ۷۱-۵- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی..... ۲۶۱
- شکل ۷۲-۵- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی..... ۲۶۱
- شکل ۷۳-۵- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلثی..... ۲۶۲
- شکل ۷۴-۵- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی..... ۲۶۲
- شکل ۷۵-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۶۳
- شکل ۷۶-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۶۴
- شکل ۷۷-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۶۴
- شکل ۷۸-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۶۵
- شکل ۷۹-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$ ۲۶۵
- شکل ۸۰-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$ ۲۶۶
- شکل ۸۱-۵- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۶۷
- شکل ۸۲-۵- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۲۶۷
- شکل ۸۳-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۶۸
- شکل ۸۴-۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۲۶۸
- شکل ۸۵-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$ ۲۶۹

- شکل ۵-۸۶- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$ ۲۶۹
- شکل ۵-۸۷- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۷۰
- شکل ۵-۸۸- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۷۱
- شکل ۵-۸۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$ ۲۷۱
- شکل ۵-۹۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۲۷۲
- شکل ۵-۹۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۲۷۳
- شکل ۵-۹۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن ۲۷۳

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۱	مروری بر پژوهش‌های گذشته	۲۳
جدول ۱-۲	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)	۶۰
جدول ۲-۲	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۶۱
جدول ۳-۲	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)	۷۴
جدول ۴-۲	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۷۴
جدول ۱-۳	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)	۱۰۳
جدول ۲-۳	شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (mm)	۱۰۴
جدول ۳-۳	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۱۰۴
جدول ۴-۳	فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)	۱۰۵
جدول ۵-۳	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)	۱۱۷
جدول ۶-۳	شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (mm)	۱۱۷
جدول ۷-۳	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۱۱۸
جدول ۸-۳	فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)	۱۱۹
جدول ۱-۴	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)	۱۴۷
جدول ۲-۴	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۱۴۸
جدول ۳-۴	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)	۱۶۱
جدول ۴-۴	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۱۶۱
جدول ۵-۴	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۱۷۵
جدول ۶-۴	فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)	۱۷۵
جدول ۷-۴	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)	۱۸۸
جدول ۸-۴	فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)	۱۸۹
جدول ۱-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)	۲۱۱
جدول ۲-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)	۲۱۲
جدول ۳-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)	۲۱۲
جدول ۴-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)	۲۱۲
جدول ۵-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)	۲۲۶
جدول ۶-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)	۲۲۷
جدول ۷-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)	۲۲۷
جدول ۸-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)	۲۲۷
جدول ۹-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)	۲۴۲
جدول ۱۰-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)	۲۴۲
جدول ۱۱-۵	شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (mm)	۲۴۲
جدول ۱۲-۵	شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (mm)	۲۴۲
جدول ۱۳-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)	۲۴۳
جدول ۱۴-۵	فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)	۲۴۳

جدول ۵-۱۵- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa).....	۲۴۴
جدول ۵-۱۶- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa).....	۲۵۸
جدول ۵-۱۷- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa).....	۲۵۸
جدول ۵-۱۸- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (mm).....	۲۵۹
جدول ۵-۱۹- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (mm).....	۲۵۹
جدول ۵-۲۰- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa).....	۲۵۹
جدول ۵-۲۱- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa).....	۲۵۹
جدول ۵-۲۲- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa).....	۲۶۰

فهرست علائم

A	مساحت جزء
a, b, Q_{ij}, ρ_i	ثابت‌های هندسی استوانه
$[A], [B], [C]$	ماتریس‌های ضرایب دستگاه معادلات دیفرانسیل
$[B]$	ماتریس مشتق توابع شکل جزء
C_1, C_2	ثابت‌های رابطه‌ی جابه‌جایی لame
c_i	ثابت‌های پاسخ دستگاه معادلات دیفرانسیل
C_p	ظرفیت حرارتی ویژه‌ی استوانه
c_{T1}, c_{T2}	ثابت‌های معادله‌ی توزیع دما در استوانه
d, d_i	مقادیر ویژه‌ی حاصل از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل
$[D]$	وارون ماتریس ضرایب $[C]$
e	عدد نپر (۲/۷۱۸۲۸)
E	مدول الاستیسیته
$[E]$	ماتریس ضریب قانون هوک برای جزء
E_i	مدول الاستیسیته در سطح داخلی استوانه
E_t	مدول الاستیسیته مماسی
f	تابع تسلیم
$\vec{f}$	بردار نیروهای خارجی
$\{F\}$	شبه‌بردار نیروها
$\{F^p\}$	شبه‌بردار نیروهای فشاری
$\{F^{th}\}$	شبه‌بردار نیروهای حرارتی
G	مدول برشی
$[G]$	ماتریس ضرایب دستگاه معادلات مربوط به شرایط مرزی
G_p	مدول برشی پلاستیک
h	ضخامت استوانه
H	مدول پلاستیک
$\{H\}$	شبه‌بردار مقادیر دستگاه معادلات مربوط به شرایط مرزی
H_i^{th}	مقادیر حرارتی دستگاه معادلات مربوط به شرایط مرزی
k	ضریب هدایت حرارتی استوانه
K	ضریب تصحیح برش (۰/۸۳۳۳۳)
$[K]$	ماتریس سفتی
K, a, b, C	ثابت‌های معادلات مدل‌های مواد
l	ثابت ناهمگنی ضریب انبساط حرارتی
L	طول استوانه
m	ثابت ناهمگنی استحکام تسلیم
M	هر خاصیتی از ماده

هر خاصیتی از ماده در سطح داخلی استوانه	M_i
لنگرهای خمشی	M_x, M_θ, M_z
لنگر پیچشی	M_{xz}
ثابت ناهمگنی مدول الاستیسیته	n
ماتریس توابع شکل جزء	$[N]$
توابع شکل گره‌های جزء	N_i, N_j, N_k, N_m
بردار عمود بر سطح تسلیم	n_{ij}
نیروهای محوری	N_x, N_θ, N_z
تابع دستگاه معادلات دیفرانسیل	$[P]$
فشار داخلی استوانه	P_i
فشار خارجی استوانه	P_o
میزان تولید حرارت در استوانه	$\dot{q}$
نیروی برشی	Q_x
محور شعاعی استوانه	r
فاصله‌ی شعاعی مرکز جزء از محور میانی استوانه	$\bar{r}$
شعاع صفحه‌ی میانی استوانه	R
شعاع داخلی استوانه	r_i
فاصله‌ی شعاعی گره‌های جزء از محور میانی استوانه	r_i, r_j, r_k, r_m
شعاع خارجی استوانه	r_o
سطح استوانه	S
استحکام تسلیم	S_y
استحکام تسلیم در سطح داخلی استوانه	S_{yi}
زمان	t
دمای سطح داخلی استوانه	T_i
دمای سطح خارجی استوانه	T_o
دمای مرجع	T^*
بردار جابه‌جایی	$\vec{u}$
انرژی کرنشی	U
مؤلفه‌های به‌کار رفته در رابطه‌ی جابه‌جایی محوری FSDT	u, φ
مشتق اولین مؤلفه‌ی به‌کار رفته در رابطه‌ی جابه‌جایی محوری	u', u_0'
مؤلفه‌های به‌کار رفته در رابطه‌ی جابه‌جایی محوری SDT	u_i
جابه‌جایی شعاعی	U_r, U_z
جابه‌جایی محوری (طولی)	U_x
جابه‌جایی محیطی	U_θ
حجم استوانه	V
شبه‌بردارهای ویژه‌ی حاصل از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل	$\{v\}, \{v_i\}$
ماتریس شبه‌بردارهای ویژه‌ی حاصل از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل	$[V]$

کار نیروهای خارجی	W
مؤلفه‌های به‌کار رفته در رابطه‌ی جابه‌جایی شعاعی FSDT	w, ψ
مؤلفه‌های به‌کار رفته در رابطه‌ی جابه‌جایی شعاعی SDT	w_i
محور طولی استوانه	x
فاصله‌ی طولی مرکز جزء از ابتدای استوانه	$\bar{x}$
فاصله‌ی طولی گره‌های جزء از ابتدای استوانه	x_i, x_j, x_k, x_m
شبه‌بردار مولفه‌های به‌کار رفته در جابه‌جایی‌های در دستگاه معادلات دیفرانسیل	$\{v\}$
پاسخ عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل	$\{v_g\}$
پاسخ خصوصی دستگاه معادلات دیفرانسیل	$\{v_p\}, \{p\}$
فاصله از صفحه‌ی میانی استوانه در جهت شعاعی	z
ضریب انبساط حرارتی	α
ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی استوانه	α_i
کرنش برشی	γ_{xz}
کرنش برشی مکانیکی	γ_{xz}^m
کرنش	ε
شبه‌بردار کرنش‌ها	$\{\varepsilon\}$
کرنش‌های اصلی	$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$
کرنش‌های اصلی مکانیکی	$\varepsilon_1^m, \varepsilon_2^m, \varepsilon_3^m$
کرنش پلاستیک معادل	ε_{eq}^p
مولفه‌های میدان کرنش	ε_{ij}
مولفه‌های میدان کرنش کاهیده	ε_{ij}'
مولفه‌های میدان کرنش الاستیک	ε_{ij}^e
مولفه‌های میدان کرنش پلاستیک	ε_{ij}^p
مولفه‌های میدان کرنش حرارتی	ε_{ij}^{th}
شبه‌بردار کرنش‌های الاستیک	$\{\varepsilon^e\}$
شبه‌بردار کرنش‌های مکانیکی	$\{\varepsilon^m\}$
شبه‌بردار کرنش‌های پلاستیک	$\{\varepsilon^p\}$
کرنش شعاعی	$\varepsilon_r, \varepsilon_z$
شبه‌بردار کرنش‌های حرارتی	$\{\varepsilon^{th}\}$
کرنش حرارتی عمودی	ε^{th}
کرنش محوری (طولی)	ε_x
کرنش محوری (طولی) مکانیکی	ε_x^m
کرنش شعاعی مکانیکی	ε_z^m
کرنش محیطی	ε_θ
کرنش محیطی مکانیکی	ε_θ^m
اندیس سخت‌شوندگی	ζ
هر کدام از ثابت‌های ناهمگنی ماده	η

θ	محور محیطی استوانه
Θ	اختلاف دما با دمای مرجع
Θ_i	اختلاف دمای سطح داخلی استوانه با دمای مرجع
Θ_o	اختلاف دمای سطح خارجی استوانه با دمای مرجع
κ	نسبت استحکام تسلیم به تنش معادل
λ	ثابت لامه
λ, η	متغیرهایی در معادلات تئوری‌های جریان پلاستیک
μ	ثابت برشی معادلات
ν	نسبت پواسن
π	عدد پی (۳/۱۴۱۵۹)
ρ	چگالی استوانه
σ	تنش
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	تنش‌های اصلی
$\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*$	مقادیر تنش‌های اصلی اصلاح شده
σ_{eq}	تنش معادل
σ_{ij}	مولفه‌های میدان تنش
σ'_{ij}	مولفه‌های میدان تنش کاهیده
σ_r, σ_z	تنش شعاعی
σ_x	تنش محوری (طولی)
σ_θ	تنش محیطی
τ_{xz}	تنش برشی

فصل ۱- مقدمه

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

- ❖ پوسته‌ها
- ❖ FGM ها
- ❖ رفتار پلاستیکی مواد
- ❖ روش اجزای محدود
- ❖ نگاهی بر مطالعات گذشته
- ❖ جمع‌بندی

۱-۱- پوسته‌ها

پوسته‌ها سازه‌هایی خمیده هستند که ضخامت آن‌ها در برابر سایر ابعادشان کوچک است. پوسته‌ها فراوان‌ترین و متنوع‌ترین سازه‌هایی هستند که در اطرافمان مشاهده می‌شوند. از جمله پوسته‌های آشنا عبارتند از: حباب صابون، حباب لامپ، استخوان جمجمه‌ی سر، لاک و صدف جانوران، بدنه‌ی هواپیما، مخازن تحت فشار، لوله‌ها و پوسته‌ها که از لحاظ رفتاری در برابر نیروها و لنگرها، از مقاومت مطلوب ویژه‌ای برخوردارند. مطالعه‌ی این رفتارها و به کارگیری تئوری‌های مختلف از گذشته‌ی نه چندان دور تا به امروز مورد توجه دانشمندان زیادی قرار گرفته و به دلیل فراوانی کاربرد، همچنان ادامه دارد. از میان انواع پوسته‌ها، پوسته‌های استوانه‌ای، اهمیت ویژه‌ای دارند و همواره دانش‌پژوهان به دنبال اعمال تغییرات بر روی دیواره و ماده‌ی این دسته از پوسته‌ها بوده‌اند که بتوانند مقاومت آن‌ها را در برابر بارگذاری‌ها افزایش و وزن آن‌ها را کاهش دهند.

۱-۱-۱- انواع پوسته‌ها

پوسته‌ها از نظر هندسی عمدتاً به دو گروه پوسته‌های نازک و پوسته‌های کلفت تقسیم می‌شوند. برای مشخص شدن هندسه‌ی پوسته نیاز به مشخص شدن حالت سطح میانی و ضخامت آن است. پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن کمتر از 0.05 است پوسته‌ی نازک و پوسته‌ای که نسبت ضخامت به شعاع انحنای سطح میانی آن بیشتر از 0.05 است پوسته‌ی کلفت در نظر گرفته می‌شود.

۱-۱-۲- تئوری‌های ارائه شده برای پوسته‌ها

برای مدل‌سازی ریاضی و تحلیل پوسته‌های نازک و کلفت تئوری‌های مختلفی توسط دانشمندان ارائه شده است که هر کدام مزایا و معایبی دارد. در این بخش به معرفی برخی از این تئوری‌ها پرداخته می‌شود.

تئوری‌های این پوسته‌ها بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی بنا شده است. در حقیقت به دلیل کوچک بودن یک بعد نسبت به ابعاد دیگر تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی استفاده نمی‌شود و با ساده‌سازی روابط الاستیسیته روش‌های تحلیلی تقریبی برای حل این پوسته‌ها به دست می‌آید که دقت نتایج هر تئوری بستگی به درجه‌ی ساده‌سازی آن دارد. اولین فرضیات در مورد ورق‌ها توسط کیرشهف^۱ (۱۸۵۰) ارائه شد. ارون^۲ (۱۸۷۴) بر اساس فرضیات کیرشهف تئوری پوسته‌ها را معرفی کرد. لاو^۳ (۱۸۸۸) معادلات عمومی پوسته‌های نازک را ارائه کرد که به تئوری کلاسیک پوسته‌های نازک یا تئوری لاو-کیرشهف مشهور است. رایسنر^۴ (۱۹۱۲) تحلیل پوسته‌های حاصل از دوران متقارن محوری را با استفاده از فرضیات لاو ارائه نمود. فلوگه^۵ (۱۹۳۲) تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی دو را با لحاظ کردن خیزهای کوچک ارائه نمود که این معادلات به عنوان معادلات استاندارد پوسته‌های نازک شناخته می‌شوند و فقط در حالت‌های خاص قابل حل می‌باشند. بیرنه^۶ (۱۹۴۴) نظریات فلوگه را تکمیل کرد. با ساده‌سازی معادلات فلوگه تئوری پوسته‌ها با تقریب مرتبه‌ی صفر و یک حاصل می‌شود. نقدی (۱۹۵۷) تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک را فرمول بندی کرد. سندرز^۷ (۱۹۵۹) به فرمول‌بندی پوسته‌ها به کمک اصل کار مجازی پرداخت و نووژیلوف^۸ (۱۹۶۴) امکان ارائه‌ی نظریه‌ی پوسته‌ها را به شکل‌های مختلف نشان داد. در نهایت تئوری‌های عمومی ارائه شده برای پوسته‌های نازک را می‌توان به شکل زیر تقسیم‌بندی نمود:

1- Kirchhoff
 2- Aron
 3- Love
 4- Reissner
 5- Flugge
 6- Byrne
 7- Sanders
 8- Novozhilov

۱- تئوری غشایی (تئوری با تقریب مرتبه‌ی صفر): پوسته‌هایی که سختی خمشی خیلی کمی دارند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی نیستند، با این تئوری تحلیل می‌شوند؛

۲- تئوری خمشی (تئوری با تقریب مرتبه‌ی یک): پوسته‌هایی که سختی خمشی قابل توجهی داشته باشند و از نظر فیزیکی قادر به تحمل لنگرهای خمشی باشند، با این تئوری تحلیل می‌شوند؛

۳- تئوری فلوگه (تئوری با تقریب مرتبه‌ی دو).
برای تحلیل پوسته‌های نازک با تغییر شکل کم فرضیاتی در نظر گرفته می‌شود که این فرضیات در تئوری‌های غشایی و خمشی نیز در نظر گرفته می‌شوند. این فرضیات که به نام فرضیات لاو-کیرشهف مشهورند عبارتند از:

- ۱- نسبت ضخامت پوسته به شعاع انحنای سطح میانی خیلی کمتر از واحد است؛
- ۲- تغییر مکان‌ها در مقایسه با ضخامت پوسته کوچک هستند؛
- ۳- مقاطع مستوی عمود بر سطح میانی پوسته پس از بارگذاری و تغییر شکل، مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند که با این فرض می‌توان از کرنش‌های برشی و کرنش عمودی در سطوح موازی با سطح میانی صرف نظر نمود؛
- ۴- تنش عمود بر سطوح موازی با سطح میانی قابل چشم‌پوشی است.

۱-۱-۲-۲- تئوری‌های پوسته‌های کلفت

اولین بار لامه^۱ (۱۸۵۲) با استفاده از تئوری الاستیسیته‌ی دو بعدی^۲ حل دقیق استوانه‌های کلفت متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسان‌گرد را ارائه کرد.

1- Lamé
2- plane elasticity theory (PET)

گلرکین^۱ (۱۹۳۰) با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته روابط پوسته‌های کلفت را به دست آورد. ولاسف^۲ (۱۹۴۹) با استفاده از تئوری الاستیسیته خطی معادلات قابل حلی برای پوسته‌های کلفت ارائه کرد. نقدی (۱۹۵۶) با لحاظ اثر برش عرضی و اینرسی دورانی، تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های کلفت بنیان نهاد. میرسکی و هرمان^۳ (۱۹۵۸) با به کارگیری تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت را ارائه کردند. گرینسپن^۴ (۱۹۶۰) مقادیر ویژه‌ی استوانه‌های کلفت را با تئوری‌های مختلف پوسته‌های نازک و کلفت مقایسه نمود. بنابراین دو تئوری الاستیسیته‌ی مستوی (دو بعدی) و تغییر شکل برشی برای پوسته‌های کلفت مطرح شد.

۱-۱-۲-۱- تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

در تئوری الاستیسیته‌ی سه بعدی، ۱۵ معادله (سه معادله‌ی تعادل، شش معادله‌ی سینماتیک و شش معادله‌ی رفتاری) و ۱۵ مجهول (شش مولفه‌ی تانسور تنش متقارن، شش مولفه‌ی تانسور کرنش متقارن و سه مولفه‌ی جابه‌جایی) وجود دارد که منجر به حل دقیق مسأله می‌شود ولی حل این معادلات بسیار پیچیده و در بسیاری از موارد عملاً غیر ممکن است. با کمک فرضیاتی می‌توان تعداد این معادلات و تعداد مجهولات آن‌ها را کاهش داد و حل نمود. یک نمونه از این فرضیات ساده کننده منجر به شکل‌گیری تئوری الاستیسیته‌ی مستوی می‌شوند. در این تئوری فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر سطح میانی باقی می‌مانند. در حقیقت از تنش‌های برشی و کرنش‌های برشی بر روی سطوح موازی با صفحه‌ی میانی پوسته چشم‌پوشی می‌شود. این تئوری به تئوری کلاسیک استوانه‌های کلفت نیز مشهور است.

1- Galerkin
2- Vlassov
3- Mirsky & Hermann
4- Greenspon

با استفاده از بسط تیلور و تعریف جابه‌جایی هر نقطه به صورت مجموع جابه‌جایی سطح میانی و جابه‌جایی آن نقطه نسبت به سطح میانی می‌توان جابه‌جایی تئوری لامه را به صورت یک چندجمله‌ای نوشت. اگر فقط جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های کلفت به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی صفر نامیده می‌شود که مشابه تئوری خمشی در پوسته‌های نازک است. اگر دو جمله‌ی اول چندجمله‌ای در نظر گرفته شود تحلیل پوسته‌های کلفت به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول نامیده می‌شود که مشابه تئوری فلوگه در پوسته‌های نازک است. به همین ترتیب می‌توان تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی بالاتر را استخراج و فرمول‌بندی نمود. در این تئوری علاوه بر اثر نیروهای محوری، اثر برش، خمش، پیچش، اینرسی دورانی و میدان حرارتی را نیز می‌توان در نظر گرفت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول به تئوری مرتبه‌ی اول میرسکی-هرمان نیز شهرت دارد که تعمیم تئوری تیموشنکو^۱ در تیرها و همچنین تئوری میندلین^۲ در ورق‌ها است.

در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل مستوی باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند و این بدان معنی است که تنش و کرنش برشی در سطوح موازی صفحه‌ی میانی صفر در نظر گرفته نمی‌شوند. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی پس از تغییر شکل الزاماً مستوی و عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند.

در این تحقیق از تئوری‌های تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و سوم برای تحلیل استوانه‌ی مورد نظر استفاده می‌شود.

1- Timoshenko
2- Mindlin

۱-۲- FGM ها

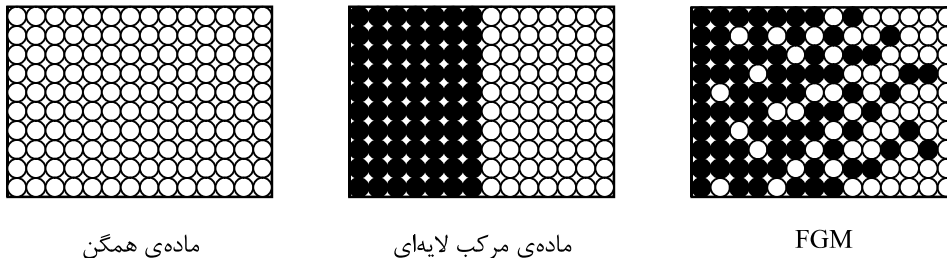
ماده‌ی همگن^۱ ماده‌ای است که خواص آن در تمام نقاطش یکسان است و ماده‌ی همسان‌گرد^۲ ماده‌ای است که خواص هر نقطه‌ی مادی آن در تمام جهت‌ها یکسان است. بیشتر موادی که در صنایع از آن‌ها استفاده می‌شود موادی همگن و همسان‌گرد می‌باشند. با پیشرفت سریع صنایع هوافضا، توربین‌ها، راکتورها و دیگر ماشین‌ها نیاز به موادی با مقاومت مکانیکی و حرارتی بالا به وجود آمده است. در صنایعی که سازه در مجاورت دماهای بسیار بالا قرار دارد استفاده از مواد همگن که خواسته‌های طراح را برآورده کنند مشکل است. در حرارت‌های زیاد فلزات و آلیاژهای فلزی به شدت در معرض اکسیداسیون، خوردگی، خزش و ... قرار می‌گیرند و این در حالی است که استفاده‌ی تنها از مواد با خواص ترمودینامیکی مطلوب همچون سرامیک‌ها بسیاری از خواص مورد نظر در طراحی مانند چقرمگی و استحکام بالا را برآورده نمی‌کنند. از این رو ایده‌ی مواد مرکب مطرح شد. این مواد از ترکیب دو یا چند ماده به وجود می‌آیند که خواص فیزیکی متفاوتی دارند. به عنوان مثال فلزات با پوشش عایق حرارتی^۳ پوشانده می‌شوند یا مواد نرم با الیاف مستحکم پوشانده می‌شوند. این مواد از دید میکروسکوپی ناهمگن و ناهمسان‌گرد هستند ولی از دید ماکروسکوپی (که در علم مکانیک با آن سر و کار داریم) موادی همگن ولی ناهمسان‌گرد هستند. تغییر ناگهانی مواد و در نتیجه خواص در مواد مرکب که موجب تغییر ناگهانی رفتار مواد به ویژه در مرز لایه‌ها می‌شود از اشکالات عمده‌ی آن‌هاست و باعث تمرکز تنش و ایجاد ترک و گسیختگی در مرز لایه‌ها در اثر بارگذاری هم‌زمان مکانیکی و حرارتی با دمای بالا می‌شود. با توجه به این مشکلات ساخت ماده‌ای مرکب که هم مقاومت حرارتی و مکانیکی بالا داشته و هم مشکلات ناشی از تغییرات ناگهانی خواص را نداشته باشد، ضرورت پیدا کرد و این بدان معنی است که نیاز به ماده‌ای با تغییرات تدریجی خواص در مقایس میکروسکوپی

1- homogeneous

2- isotropic

3- thermal barrier coating (TBC)

به وجود آمد. به این مواد اصطلاحاً FGM^۱ گفته می‌شود. مفهوم FGM اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن توسط نینو^۲ و همکارانش در یک پروژه‌ی ساخت فضاپیما در سازمان هوافضای ژاپن به عنوان ماده‌ای برای ساخت سپر حرارتی مطرح شد که نیاز به ترکیبی از مواد مختلف با توان تحمل درجه حرارت ۲۰۰۰ کلوین در سطح و تغییرات دمایی ۱۰۰۰ کلوین در ضخامت ۱۰ میلی‌متر بود. در سال ۱۹۸۶ مطالعات بر روی امکان ساخت این مواد در ژاپن آغاز شد و مرحله‌ی اول پروژه‌ای با نام «فناوری گسترش FGM» طی سال‌های ۱۹۸۷ تا ۱۹۸۹ اجرا و پس از دستیابی به هدف که ساخت قطعاتی به قطر ۳۰ میلی‌متر با خواص ذکر شده بود، در سال ۱۹۹۰ در سمپوزیومی در سندای به جهانیان ارائه شد. مرحله‌ی دوم این پروژه در سال‌های ۱۹۹۰ تا ۱۹۹۱ اجرا شد که نتیجه‌ی آن ساخت ورق‌های مربعی به ضلع ۳۰۰ میلی‌متر و نیم‌کره‌هایی به قطر ۵۰ میلی‌متر با خواص ذکر شده برای استفاده در ساخت دماغه‌ی فضاپیما بود که پس از آن دومین سمپوزیوم جهانی FGM در سال ۱۹۹۲ در سان‌فرانسیسکو برگزار شد. در سال‌های اخیر توجه بر روی FGM ها در اروپا به ویژه آلمان به شدت گسترش یافته است.

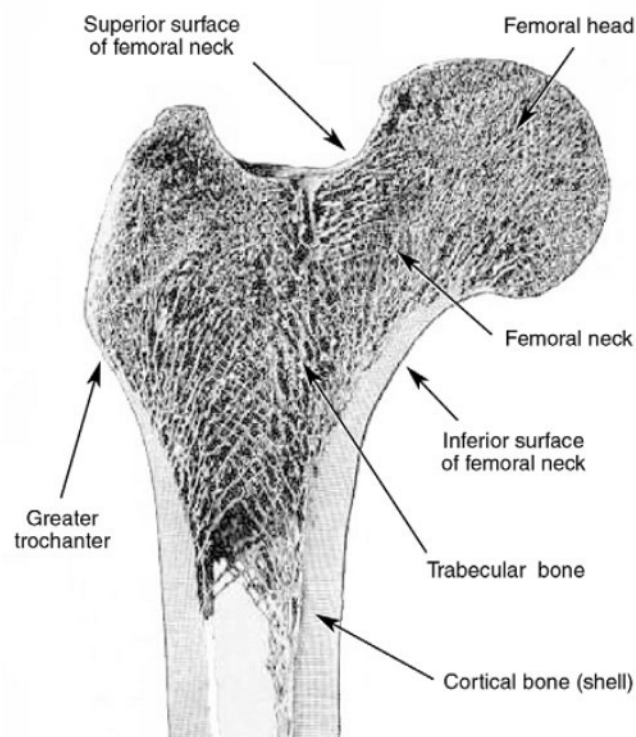


شکل ۱-۱- نمای زیرساختار مواد همگن، مرکب لایه‌ای و FGM

این مواد عموماً از مخلوط سرامیک و فلز و یا ترکیبی از فلزات مختلف ساخته می‌شوند. سرامیک به دلیل رسانش گرمایی کم مقاومت حرارتی بالایی دارد و فلز چکش‌خوار است و از شکستگی یا ترک به خاطر تنش حرارتی جلوگیری می‌کند. FGM ها در زمره‌ی مواد ناهمگن و

1- functionally graded material
2- Niino

همسان‌گرد قرار دارند که خصوصیات آن‌ها به‌طور پیوسته از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند. از مزایای FGM نسبت به مواد مرکب لایه‌ای، عدم گسستگی در محل اتصال لایه‌ها می‌باشد، زیرا همان‌طور که گفته شد در FGM ترکیب مواد پیوسته است. از این مواد می‌توان در صنایع هوایی، فضایی، نظامی، هسته‌ای، نیروگاهی، الکترونیکی، پزشکی و ... به عنوان پوشش بخش‌های مختلف هواپیماها و فضاپیماها، ساخت لوله‌ی توپ، راکتورها، مخازن، پوشش پردازنده‌ها، مواد دندان‌پزشکی و ارتوپدی استفاده کرد و صدها کاربرد متنوع دیگر برای آن‌ها متصور شد. استخوان ماده‌ای طبیعی است که سطح خارجی محکمی دارد و در مرکز آن بافتی نرم وجود دارد که این موجب تغییر تدریجی خواص از داخل به خارج استخوان می‌شود بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمگن است. خواص مکانیکی استخوان در جهت طولی با سایر جهات متفاوت است بنابراین استخوان ماده‌ای ناهمسان‌گرد نیز هست. در صورت صرف نظر از ناهمسان‌گردی استخوان می‌توان آن را FGM در نظر گرفت.



شکل ۱-۲- برش طولی استخوان ران انسان [۴]

بنا بر آنچه گفته شد ماده‌ی FG از ترکیب چند ماده به طوری ساخته می‌شود که خواص آن به طور تدریجی تغییر کند به همین دلیل می‌توان این مواد را به گونه‌ای ساخت که ویژگی‌های خاصی داشته باشند. پاره‌ای از این ویژگی‌ها بدین شرح می‌باشند:

- ۱- مقاومت زیاد در برابر گرادیان دمایی بالا؛
- ۲- مقاومت بالا در برابر بارهای مکانیکی؛
- ۳- کاهش اثر تمرکز تنش در نواحی دارای شکل هندسی خاص؛
- ۴- جلوگیری از ایجاد و یا رشد ترک.

۱-۲-۱- روش‌های ساخت FGM ها

امروزه برای ساخت مواد FG از روش‌های مختلفی استفاده می‌شود که به عملکرد، شرایط بارگذاری، شکل قطعه و نحوه‌ی توزیع خواص وابسته می‌باشند. معمولاً مواد FG به صورت پوششی بر روی سایر مواد پوشانده می‌شوند و یا قطعاتی تماماً FGM ساخته می‌شوند. تعدادی از این روش‌ها به شرح زیر می‌باشند:

۱-۲-۱-۱- ساخت پوشش FGM بر روی سطح مواد

یکی از روش‌های تهیه‌ی پوشش FGM بر روی سطح مواد ته‌نشینی بخار است که انواع مختلفی از جمله ته‌نشینی اسپاتر^۱، ته‌نشینی شیمیایی بخار^۲، ته‌نشینی فیزیکی بخار^۳ دارد. این روش ساختمان میکروسکوپی بسیار خوبی به وجود می‌آورد ولی فقط قادر به ایجاد پوشش‌های نازک است، به انرژی زیادی نیاز دارد و گازهای سمی تولید می‌کند. روش‌های دیگر تولید پوشش‌های FGM بر روی سطح مواد عبارتند از: پاشش پلاسما، ته‌نشینی بر روی الکتروود، الکترولیز، ته‌نشینی به کمک پرتو یون^۴،

1- sputter deposition

2- chemical vapor deposition (CVD)

3- physical vapor deposition (PVD)

4- ion beam assisted deposition (IBAD)

سنتز خود انتشار دما بالا^۱ و تمامی این روش‌ها کند و نیازمند انرژی زیاد می‌باشند بنابراین برای تولید قطعات تماماً FGM از نظر اقتصادی نامناسب می‌باشند.

۱-۲-۱-۲- تولید قطعات FGM

متالوژی پودر یکی از روش‌هایی است که برای تولید قطعات FGM به کار می‌رود و طی سه مرحله‌ی وزن و مخلوط کردن پودرها با توجه به توزیع خواص مورد نظر، ریختن مخلوط پودرها در قالب و فشرده کردن آن‌ها و سینتر کردن^۲ انجام می‌شود. روش متالوژی پودر منجر به ایجاد ساختار پله‌ای می‌شود. برای ایجاد ساختاری پیوسته بهتر است از روش گریز از مرکز استفاده کرد. در این روش مخلوط مواد در قالبی چرخان ریخته می‌شود که به دلیل چگالی نابرابر مواد مخلوط و وجود نیروی گریز از مرکز یک ماده‌ی FG به وجود می‌آید. یکی از اشکالات این روش این است که فقط قادر به تولید قطعات حاصل از دوران است و اشکال دیگر این روش عدم کنترل بر روی توزیع خواص است. ساخت جسم جامد به هر شکل^۳ روشی است که به کمک نرم‌افزارهای طراحی کامپیوتری (CAD) هندسه‌ی جسم را طراحی می‌کنند سپس به کمک روش‌های موجود پرینت سه بعدی اقدام به تولید قطعه به صورت لایه لایه با توزیع خواص مورد نظر می‌کنند. روش‌های پرینت به کمک لیزر از رایج‌ترین روش‌های ساخت FGM به کمک این روش است.

روش‌های مطرح شده، تمام روش‌های تولید مواد FG نیستند و روش‌های دیگری نیز برای این کار وجود دارد و هر روز محققان روش‌های جدیدی برای این منظور پیشنهاد می‌کنند.

1- self-propagating high-temperature synthesis (SHS)

2- sintering

3- solid freeform (SFF) fabrication method

۱-۲-۲- توزیع خواص

قبل از ساخت FGM باید مشخص شود که اجزای تشکیل دهنده به چه صورتی توزیع شده است، در بعضی مقاله‌ها هدف یافتن یک پروفیل با توجه به بهینه کردن یک کمیت است. در مواقع دیگر پروفیل توزیع مواد انتخاب می شود و یک پارامتر برای اهداف بهینه در آن در نظر گرفته می شود.

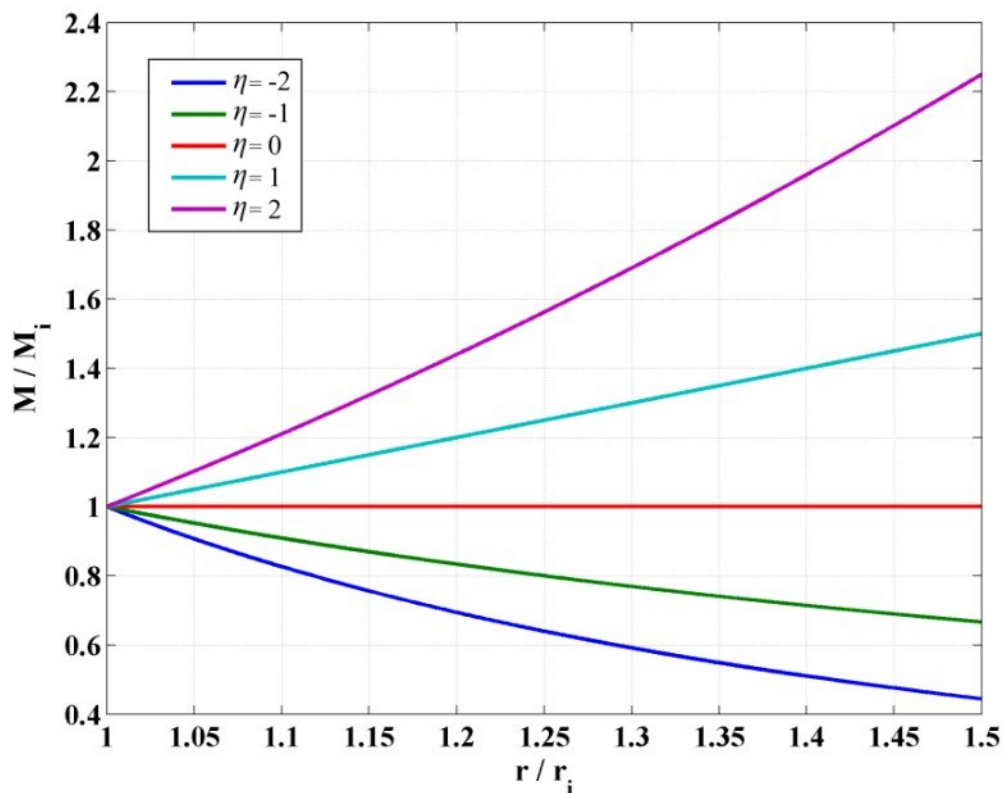
از آن جا که هدف در ساخت این مواد ایجاد یک تابع پیوسته از خواص در طول ماده است می توان توابع مختلفی را برای توزیع خواص در نظر گرفت. توابع رایج برای خواص مکانیکی و حرارتی، توانی و نمایی می باشند. توزیع توانی عموماً به صورت جهت مختصات مورد نظر به توان ثابت ناهمگنی ضرب در مقداری ثابت در نظر گرفته می شود و توزیع نمایی غالباً به صورت ثابتی ضرب در عدد نپر به توان ثابت ناهمگنی ضرب در جهت مختصات مورد نظر، در نظر گرفته می شود.

معمولاً تابع توزیع خواص برای مدول الاستیسیته، استحکام تسلیم، ضریب هدایت حرارتی و ضریب انبساط حرارتی در نظر گرفته می شود ولی نسبت پواسن در تمام نقاط ماده ثابت فرض می شود. علت این فرض تغییرات بسیار کوچک نسبت پواسن در مقابل مدول الاستیسیته است.

در این تحقیق توزیع خواص به صورت توانی در جهت شعاع استوانه به صورت رابطه ی (۱-۱) در نظر گرفته می شود:

$$M(r) = M_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^\eta \quad (1-1)$$

در رابطه ی فوق M خاصیت مورد نظر در هر نقطه از استوانه، M_i خاصیت مورد نظر در سطح داخلی استوانه، r شعاع استوانه، r_i شعاع داخلی استوانه و η ثابت ناهمگنی است. نمودار این توزیع خواص در جهت شعاع استوانه برای ثابت های ناهمگنی ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۲ به صورت شکل ۱-۳ است.

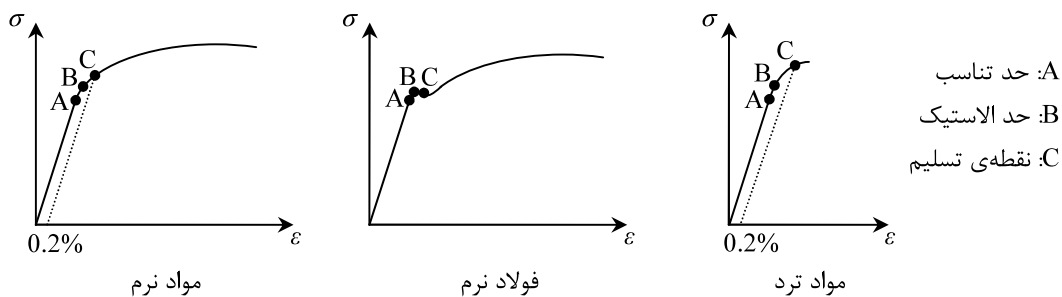


شکل ۱-۳- توزیع توانی خواص در جهت شعاع استوانه

۳-۱- رفتار پلاستیکی مواد

رابطه‌ی تنش و کرنش تا پیش از رسیدن به حد تناسب رفتاری خطی دارد و از قانون هوک تبعیت می‌کند. همچنین تا پیش از رسیدن به حد الاستیک در صورت حذف تنش ماده به وضعیت اولیه‌ی خود باز می‌گردد ولی با گذر از مقاومت تسلیم (حد الاستیک) مقداری از کار انجام شده در جسم به گرما تبدیل شده و تغییر شکلی دائمی در جسم به وجود می‌آید بنابراین با برداشتن تنش ماده به شکل اولیه‌ی خود باز نمی‌گردد. نقطه‌ی تسلیم موقعیتی از تنش و کرنش است که رفتار پلاستیک ماده آغاز شده است و در آن بدون افزایش تنش، کرنش زیاد می‌شود؛ برای موادی که چنین رفتاری را از خود نشان نمی‌دهند نقطه‌ی تسلیم تقاطع نمودار تنش-کرنش با خطی موازی قسمت الاستیک نمودار که از کرنش ۰/۲ درصد می‌گذرد در نظر گرفته می‌شود. تغییر شکل مواد تا پیش از مقاومت تسلیم که

قابل بازگشت است را تغییر شکل الاستیک و پس از آن که غیر قابل بازگشت به شکل اولیه است را تغییر شکل پلاستیک می‌نامند.



شکل ۱-۴- نمودار تنش-کرنش برای مواد نرم و ترد

برای تحلیل رابطه‌ی تنش و کرنش در نواحی الاستیک و پلاستیک تا پیش از شکست ماده به

موارد زیر نیاز داریم:

- ۱- روابط الاستیک تنش و کرنش؛
- ۲- شرایط تنش که شروع جریان پلاستیک را مشخص می‌کند (معیار تسلیم)^۱؛
- ۳- روابط تنش-کرنش پلاستیک یا روابط تنش-کرنش جزئی.

۱-۳-۱- روابط تنش-کرنش الاستیک

قانون هوک بر تنش و کرنش در حالت الاستیک حاکم است که تنش و کرنش را توسط رابطه‌ای خطی به کمک ماتریس سفتی یا نرمی به هم مرتبط می‌کند.

1- yielding criteria

۱-۳-۲- معیارهای تسلیم

معیار تسلیم وسیله‌ی سنجشی است که به کمک آن رسیدن ماده به نقطه‌ی تسلیم تشخیص داده می‌شود. معیارهای مختلفی بر اساس تئوری‌های مختلف ارائه شده‌اند که در این بخش فقط به معرفی آن‌ها پرداخته می‌شود:

۱- معیار رانکین: این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش اصلی توسط رانکین^۱ بیان

شد که بر اساس این تئوری تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش اصلی برابر مقاومت تسلیم کششی یا کمترین تنش اصلی برابر مقاومت تسلیم فشاری ماده شود؛

۲- معیار ترسکا: این معیار بر اساس تئوری بیشترین تنش برشی که توسط کلمب^۲

مطرح شده است، پیشنهاد گردیده و به نام‌های ترسکا^۳ و گست^۴ شناخته می‌شود. بر اساس این تئوری تسلیم زمانی آغاز می‌شود که بیشترین تنش برشی برابر مقاومت تسلیم برشی ماده شود؛

۳- معیار سنت و نانت^۵: این معیار که بر اساس تئوری بیشترین کرنش اصلی ارائه شده

است بیان می‌کند که تسلیم با رسیدن بیشترین کرنش اصلی به کرنش تسلیم کششی یا رسیدن کمترین کرنش اصلی به کرنش تسلیم فشاری آغاز می‌شود؛

۴- معیار بلترامی^۶: این معیار که بر اساس تئوری بیشترین انرژی کرنشی استوار است

زمان آغاز تسلیم را رسیدن انرژی کرنشی به حد مشخصی بیان می‌کند؛

1- Rankine
2- Colomb
3- Tresca
4- Guest
5- St. Venant
6- Beltrami

۵- معیار فون میزز-هنکی: این معیار بر اساس تئوری بیشترین انرژی کرنشی واپیچشی

استوار است. این تئوری توسط هابر^۱ پیشنهاد شد و فون میزز^۲ و هنکی^۳ آن را تکمیل

نمودند. این تئوری در صورت رسیدن انرژی کرنشی واپیچشی به حد مشخصی آغاز

تسلیم را خبر می‌دهد؛

۶- معیار فون میزز: این معیار بر اساس تئوری تنش برشی هشت‌وجهی استوار است و

بیان می‌کند که تسلیم زمانی آغاز می‌شود که تنش برشی هشت‌وجهی به مقدار

معینی برسد.

معیار فون میزز-هنکی و فون میزز روابط یکسانی دارند. در این تحقیق به بررسی معیارهای

تسلیم رانکین، ترسکا و فون میزز پرداخته می‌شود.

۱-۳-۳- روابط تنش-کرنش پلاستیک

در تحلیل پلاستیک نمی‌توان رابطه‌ی مشخصی بین تنش و کرنش ارائه داد زیرا تنش در حالت نهایی

به مسیر کرنش بستگی دارد از این رو روابط ارائه شده برای این منظور عمدتاً روابطی بین نمو تنش و

نمو کرنش (میزان افزایشی اندک در تنش و کرنش) می‌باشند و برای تحلیل این گونه مسائل باید به

تغییر تنش به طور تدریجی سپس محاسبه‌ی میزان تغییر در کرنش پرداخت و این عملیات را تا

رسیدن به وضعیت نهایی ادامه داد.

از آنجا که در این تحقیق فقط به بررسی بارگذاری اولیه که هیچ تنش پس‌ماندی در ماده

وجود ندارد پرداخته می‌شود می‌توان تنش را یک باره اعمال نمود و نمو تنش و کرنش را برابر کل

تنش و کرنش مورد نظر در نظر گرفت.

1- Haber

2- Von Misess

3- Henky

برای تحلیل رفتار مواد پیش از هر چیز نیاز به یک مدل ریاضی از ماده داریم. مدل‌های مختلفی برای مواد از نظر رابط‌های تنش و کرنش ارائه شده است که هر کدام در موارد خاصی کاربرد دارند. پاره‌ای از این مدل‌ها به شرح زیر می‌باشند:

- ۱- صلب^۱: تحت اثر هر مقدار نیرویی هیچ تغییر شکلی نمی‌دهد؛
- ۲- کاملاً الاستیک^۲: به طور کامل از قانون هوک تبعیت می‌کند؛
- ۳- صلب-کاملاً پلاستیک^۳: تا نقطه‌ای تسلیم صلب است از آن به بعد در تنش ثابت به صورت پلاستیک تغییر شکل می‌دهد؛
- ۴- صلب-سخت‌شونده با کار^۴: تا نقطه‌ای تسلیم صلب است از آن به بعد با خاصیت سخت‌شوندگی ناشی از کار خطی یا غیرخطی تغییر شکل پلاستیک می‌دهد؛
- ۵- الاستیک-کاملاً پلاستیک^۵ (الاستوپلاستیک): تا پیش از نقطه‌ای تسلیم رابط‌های تنش و کرنش خطی است پس از آن در تنش ثابت به صورت پلاستیک تغییر شکل می‌دهد؛
- ۶- الاستیک-سخت‌شونده با کار^۶: تا نقطه‌ای تسلیم تابع قانون هوک است بعد از آن با خاصیت سخت‌شوندگی ناشی از کار تغییر شکل پلاستیک می‌دهد؛
- ۷- ویسکوالاستیک^۷: خواص این مواد ترکیبی از خواص الاستیک و لزج است و تنش و یا کرنش در ماده به زمان نیز وابسته است.

1- rigid

2- elastic

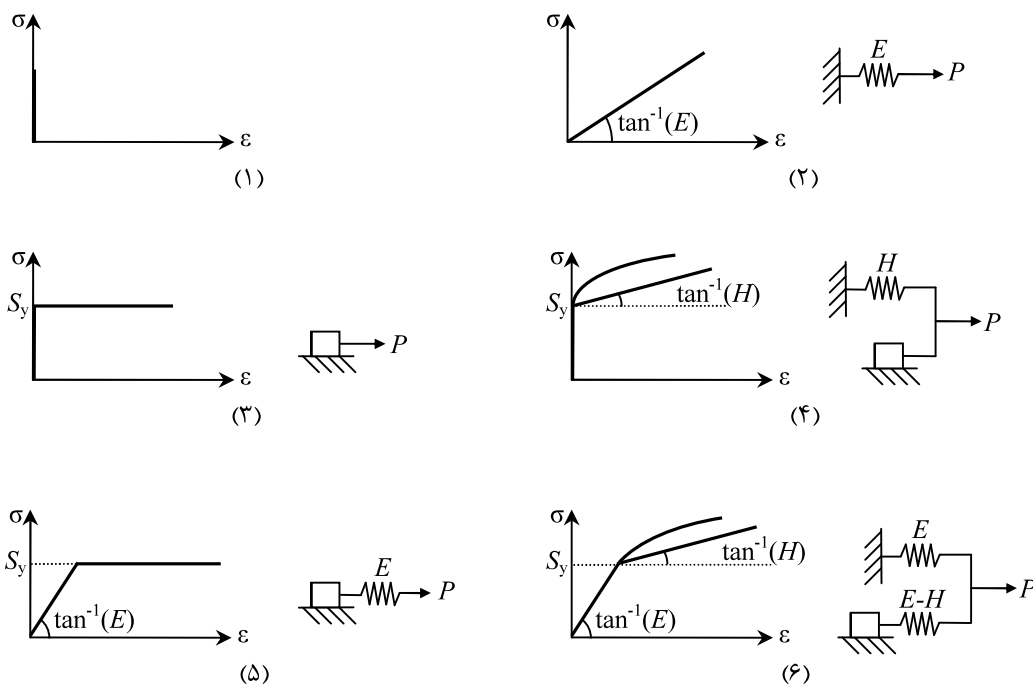
3- rigid-perfect plastic

4- rigid-work hardening

5- elastic-perfect plastic

6- elastic-work hardening

7- viscoelastic



شکل ۱-۵- نمودار تنش-کرنش و سیستم دینامیکی معادل مدل‌های مواد [۸]

معادلات مختلفی برای مدل کردن رفتار مواد از جمله عبارت لودویک^۱ (رابطه‌ی ۱-۲)، تخمین با دو خط راست (رابطه‌ی ۱-۳)، رابطه‌ی توانی (رابطه‌ی ۱-۴)، عبارت وس^۲ (رابطه‌ی ۱-۵)، عبارت سوئیفت^۳ (رابطه‌ی ۱-۶)، عبارت پراگر^۴ (رابطه‌ی ۱-۷) و فرمول رامبرگ-اسگود^۵ (رابطه‌ی ۱-۸) بیان شده است [۸-۶].

$$\sigma = S_y + H\varepsilon^\zeta \quad (۲-۱)$$

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leq S_y/E \\ S_y & \varepsilon \geq S_y/E \end{cases} \quad (۳-۱)$$

$$\sigma = K\varepsilon^\zeta \quad (۴-۱)$$

$$\sigma = (b - a)(1 - e^{-\zeta\varepsilon}) \quad (۵-۱)$$

1- Ludwik
2- Voce
3- Swift
4- Prager
5- Ramberg-Osgood

$$\sigma = C(a + \varepsilon)^{\zeta}, \quad 0 \leq n \leq 1. \quad (۶-۱)$$

$$\sigma = S_y \tanh(E_t \varepsilon / S_y) \quad (۷-۱)$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} = \frac{\sigma}{S_y} + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{S_y} \right)^{\zeta}, \quad \varepsilon_y = \frac{S_y}{E}. \quad (۸-۱)$$

۱-۳-۳-۲- قانون جریان

هر افزایش کرنش (نمو کرنش) در ناحیه‌ی پلاستیک حاصل یک بخش الاستیک که در باربرداری حذف می‌شود و یک بخش پلاستیک که پس از باربرداری باقی می‌ماند است. بخش الاستیک از قانون عمومی هوک به دست می‌آید و بخش پلاستیک تابع قانونی است که قانون جریان^۱ نامیده می‌شود. بر اساس این قانون نمو کرنش پلاستیک به صورت برداری در فضای نه بعدی در نظر گرفته می‌شود که در نقطه‌ی تنش مورد نظر عمود بر سطح معیار تسلیم بوده و جهت آن به سمت خارج است. قانون جریان بیان می‌کند که جهت تنش‌های اصلی و نمو کرنش‌های اصلی برای یک ماده‌ی همسان‌گرد یکسان می‌باشند. همچنین شرط عدم تغییر حجم پلاستیک در این قانون بیان می‌کند که مجموع نمو کرنش‌های عمودی پلاستیک باید برابر صفر باشد.

۱-۳-۳-۳- تئوری‌های جریان

تئوری‌های مختلفی بر اساس قانون جریان برای بیان رابطه‌ی بین نمو تنش و کرنش ارائه شده است که برخی از آن‌ها عبارتند از [۸]:

۱- قانون نیوتن^۲: این قانون رابطه‌ی بین تنش و کرنش در جریان لزج را بیان می‌کند؛

$$\sigma'_{ij} = 2\eta \frac{d\varepsilon'_{ij}}{dt} \quad (۹-۱)$$

1- flow rule
2- Newton

۲- معادله‌ی کلوین^۱: این رابطه برای مواد ویسکوالاستیک بیان شده است؛

$$\sigma'_{ij} = 2G\varepsilon'_{ij} + 2\eta \frac{d\varepsilon'_{ij}}{dt} \quad (10-1)$$

۳- معادله‌ی ماکسول^۲: این رابطه نیز برای مواد ویسکوالاستیک بیان شده است؛

$$\sigma'_{ij} + \frac{\eta}{G} \sigma'_{ij} = 2\eta \frac{d\varepsilon'_{ij}}{dt} \quad (11-1)$$

۴- تئوری سنت ونانت: در این تئوری از کرنش‌های الاستیک چشم‌پوشی شده است؛

$$\frac{\sigma'_{ij}}{d\varepsilon_{ij}} = \frac{2\lambda}{dt} \quad (12-1)$$

۵- تئوری پرانتل-رس^۳: این تئوری در اصلاح مشکل نادیده گرفتن کرنش‌های الاستیک

توسط تئوری سنت ونانت، ارائه شده است؛

$$d\varepsilon'_{ij} = \left(\frac{dt}{2\lambda}\right) \sigma'_{ij} + \frac{1}{2G} d\sigma'_{ij} \quad (13-1)$$

۶- تئوری هنکی: این تئوری تخمینی بین روابط تنش و کرنش کاهیده در تغییر

شکل‌های پلاستیک کوچک است؛

$$\sigma'_{ij} = 2G_p \varepsilon'_{ij} \quad (14-1)$$

۷- تئوری رز و اشینجر^۴؛

$$d\varepsilon'_{ij} = \frac{3}{2} \sigma'_{ij} \frac{d\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} + \frac{d\sigma'_{ij}}{2G}, \quad d\varepsilon_{ii} = \frac{1-2\nu}{E} d\sigma_{ii}. \quad (15-1)$$

۸- معادلات لوی-میزز^۵: در این معادلات کرنش‌های الاستیک وارد نشده‌اند و در مواردی

که جریان پلاستیک بدون مانع پیش می‌آید استفاده می‌شوند.

$$\frac{d\varepsilon_{ij}}{\sigma'_{ij}} = d\lambda \quad (16-1)$$

1- Kelvin

2- Maxwell

3- Prandtl-Reuss

4- Rose and Eichinger

5- Levy-Misses

در این تحقیق رفتار الاستیک- کاملاً پلاستیک برای ماده در نظر گرفته شده است و به کمک قانون جریان روابط مورد نیاز برای محاسبه کرنش‌های پلاستیک هر معیار تسلیم استخراج شده است.

۱-۴- روش اجزای محدود

امروزه روش اجزای محدود به یک روش قدرتمند برای حل عددی گسترده‌ی وسیعی از مسائل مهندسی تبدیل شده است. کاربردهای آن در محدوده‌ی وسیعی از یافتن تغییر شکل و تحلیل تنش در سازه‌ها تا تحلیل میدان شار حرارتی، جریان سیال، شار مغناطیسی و سایر مسائل جریان را تحت پوشش قرار می‌دهد. امروزه با پیشرفت تکنولوژی کامپیوتر به راحتی می‌توان مسائل پیچیده‌ای را به کمک این روش حل نمود. در این روش تحلیل، یک ناحیه‌ی پیچیده که مشخص کننده‌ی یک محیط پیوسته می‌باشد به شکل‌های هندسی ساده که اجزای محدود نامیده می‌شوند، تقسیم می‌شود. روابط حاکم و مشخصات مواد، روی این اجزاء مورد بررسی قرار می‌گیرند و مسائل به صورت نامعلوم در گوشه‌های هر جزء بیان می‌شوند. پس از فرایند جمع‌آوری با در نظر گرفتن نوع بارگذاری و قیود مجموعه‌ای از معادلات نتیجه می‌شود که حل این معادلات، رفتار تقریبی محیط پیوسته را به ما می‌دهد.

در این تحقیق علاوه بر حل مسأله به کمک نوشتن برنامه‌ی اجزای محدود در نرم‌افزار MATLAB، تحلیل اجزای محدود به کمک نرم‌افزار Abaqus. با در نظر گرفتن شبکه‌ای تشکیل شده از ۲۰ جزء در جهت شعاع و ۴۰۰ جزء در جهت طول استوانه، نیز انجام شده است. ابعاد این شبکه مقداری بهینه از نظر دقت محاسبات و زمان مورد نیاز برای حل مسأله می‌باشد.

۱-۴-۱- زیربرنامه‌ی UMAT

نرم‌افزار Abaqus یکی از قدرتمندترین نرم‌افزارهای در زمینه‌ی اجزای محدود است که قادر به تحلیل گستره وسیعی از مسائل در این زمینه می‌باشد. مدل‌سازی مواد FGM در نرم‌افزارهای اجزای محدود وجود ندارد بنابراین معمولاً پژوهشگران این مواد را به صورت تعداد محدودی لایه‌ی همگن در کنار یکدیگر مدل‌سازی می‌نمایند که مشکلاتی از جمله گسستگی خواص در مرز لایه‌ها در آن وجود دارد. یکی از ویژگی‌های منحصر به فرد نرم‌افزار Abaqus امکان استفاده از زیربرنامه‌های مختلف در موارد مختلف است. یکی از این زیربرنامه‌ها، زیربرنامه‌ی UMAT است که برای تعریف رفتار مکانیکی مواد در این نرم‌افزار کاربرد دارد. این زیربرنامه که به زبان Fortran نوشته می‌شود در تمام نقاط و مراحل تحلیل مسأله توسط نرم‌افزار فراخوانی می‌شود. از جمله پارامترهای ورودی به این زیربرنامه مختصات، دما و تغییرات کوچک کرنش در نقطه‌ی محاسبه، است که برنامه باید تنش‌ها و ماتریس ژاکوبی (مشتق جزئی تغییرات تنش نسبت به تغییرات کرنش) را در این نقطه محاسبه نماید. بنابراین به راحتی می‌توان مواد FGM را به کمک این زیربرنامه بدون نیاز به لایه لایه کردن جسم و با خواصی پیوسته در تمامی نقاط ماده مدل‌سازی نمود.

۱-۵- نگاهی بر مطالعات گذشته

مطالعه‌ی پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت همگن و همسان‌گرد قدمتی طولانی دارد و پژوهش‌گران زیادی در زمینه‌های مختلف و به کمک روش‌های مختلف اقدام به بررسی و مطالعه‌ی این پوسته‌ها کرده‌اند. ولی مطالعه بر روی پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت FGM موضوعی جدید است و طی چند سال اخیر به شدت مورد توجه دانش‌پژوهان قرار گرفته است. در ادامه سعی شده است به طور مختصر به بیان مطالعات گذشته در زمینه‌های مرتبط با این تحقیق پرداخته شود.

جدول ۱-۱- مروری بر پژوهش‌های گذشته

سال	پژوهشگر	نوع سازه	جنس سازه	توضیحات
۱۸۵۲	لامه	استوانه	همگن و همسان گرد	تحت بار فشاری، روش PET
۱۹۳۰	گلرکین	پوسته‌های جدار کلفت	همگن و همسان گرد	محاسبه‌ی روابط حاکم با استفاده از معادلات اساسی الاستیسیته
۱۹۴۹	ولاسف	پوسته‌های جدار کلفت	همگن و همسان گرد	ارائه‌ی معادلات قابل حل، تئوری الاستیسیته‌ی خطی
۱۹۵۶	نقدی و کوپر ^۱	-	-	بنیان نهادن تئوری تغییر شکل برشی با لحاظ کردن اثر برش عرضی
۱۹۵۸	میرسکی و هرمان	استوانه	همگن و همسان گرد	تحت بار فشاری، روش FSDT
۱۹۶۰	گرینس پن	استوانه	همگن و همسان گرد	مقایسه‌ی نتایج روش‌های مختلف تحلیل با یکدیگر
۱۹۸۴	نینو و همکاران	-	-	معرفی مواد FG به عنوان سپر حرارتی فضاپیما در سازمان هوافضای ژاپن
۱۹۹۲	فوکویی و یاماناکا ^۲	استوانه	FGM	تحت بار فشاری، روش PET، حل به کمک روش رونگه-کوتا
۱۹۹۴	اباتا و نودا ^۳	استوانه و کره	FGM	تحلیل تنش‌های حرارتی پایدار
۱۹۹۶	جهانیان	استوانه	همگن و همسان گرد	تحلیل تنش ترموالاستوپلاستیک
۱۹۹۹	هورگان و چان ^۴	استوانه	FGM	تحت بار فشاری، روش PET
۱۹۹۹	هورگان و چان	دیسک	FGM	تحلیل تنش به کمک معادلات لame
۱۹۹۹	اوتائو ^۵ و همکاران	استوانه	FGM	تعیین ترکیب بهینه‌ی مواد به کمک شبکه‌های عصبی، تحت بار حرارتی
۲۰۰۱	توتونچو و اوزترک ^۶	استوانه و کره	FGM	تحت بار فشاری، روش PET، اشتباه در بخش‌هایی از مقاله
۲۰۰۱	شابانا و نودا ^۷	-	FGM	تحلیل تنش‌های ترموالاستوپلاستیک
۲۰۰۲	ارکان و اراسلان ^۸	دیسک با کلفتی متغیر	همگن و همسان گرد	تحلیل الاستیک-پلاستیک، سخت‌شوندگی خطی

- 1- Naghdi & Cooper
2- Fukui & Yamanaka
3- Obata & Noda
4- Horgan & Chan
5- Ootao
6- Tutuncu & Ozturk
7- Shabana & Noda
8- Orcan & Eraslan

۲۰۰۲	اراسلان	دیسک با کلفتی متغیر	همگن و همسان گرد	تحلیل الاستیک-پلاستیک، سخت‌شوندگی غیرخطی، معیار فون میزز
۲۰۰۲	جباری و همکاران	استوانه	FGM	تنش‌های مکانیکی و حرارتی، بارهای متقارن محوری
۲۰۰۳	ایپک‌چی و همکاران	استوانه با کلفتی متغیر	همگن و همسان گرد	تحت بار فشاری، روش FSDT
۲۰۰۳	گاو ^۱	استوانه	همگن و همسان گرد	تحلیل الاستیک-پلاستیک، تحت بار فشاری، تئوری پلاستیسیته گرادیان کرنش
۲۰۰۳	جباری و همکاران	استوانه	FGM	تنش‌های مکانیکی و حرارتی، بارهای نامتقارن محوری
۲۰۰۳	اراسلان	دیسک با کلفتی متغیر	همگن و همسان گرد	بررسی تغییر شکل‌های الاستیک-پلاستیک
۲۰۰۳	اراسلان	دیسک	همگن و همسان گرد	بررسی تغییر شکل‌های الاستوپلاستیک، معیار ترسکا
۲۰۰۵	اراسلان و همکاران	دیسک با کلفتی متغیر	همگن و همسان گرد	حل الاستوپلاستیک، سخت‌شوندگی غیرخطی، تحت فشار خارجی
۲۰۰۵	اراسلان و اگول ^۲	دیسک سهموی	همگن و همسان گرد	بررسی تسلیم و جابه‌جایی‌های الاستوپلاستیک، در معرض فشار خارجی
۲۰۰۵	نقدآبادی و کردخیلی	ورق و پوسته	FGM	فرمول‌بندی اجزای محدود
۲۰۰۶	هونگجون ^۳ و همکاران	استوانه	FGM	حل دقیق با لایه‌های همگن
۲۰۰۶	اراسلان و آکیس ^۴	استوانه	FGM	تحت بار فشاری، تحلیل الاستیک-پلاستیک کرنش صفحه‌ای
۲۰۰۷	ژی‌فای ^۵ و همکاران	استوانه	FGM	روش چند لایه‌ای کردن استوانه
۲۰۰۷	توتونچو	استوانه	FGM	تحت بار فشاری، روش PET
۲۰۰۸	شاو ^۶	استوانه	FGM	تحلیل ترمومکانیکی
۲۰۰۹	پاراتاکاس و باریسیس ^۷	لوله‌ی دولایه	لایه‌های همگن و همسان گرد	تحلیل تنش

1- Gao

2- Akgul

3- Hongjun

4- Akis

5- Zhifei

6- Shao

7- Partaukas & Bareisis

۲۰۰۹	توتونچو	دیسک، استوانه و کره	FGM	تحت بار فشاری، روش PET و تابع متمم
۲۰۰۹	زمانی نژاد و همکاران	پوسته‌ی حاصل دوران	FGM	ارائه‌ی دستگاه معادلات سه بعدی بر اساس تحلیل تانسوری
۲۰۰۹	جباری و همکاران	استوانه	FGM	بررسی تنش‌های مکانیکی و حرارتی مقارن محوری
۲۰۰۹	ایپک‌چی	مخروط ناقص	همگن و همسان‌گرد	پاسخ الاستیک، روش FSDT
۲۰۰۹	قناد و همکاران	مخروط ناقص	همگن و همسان‌گرد	تحت بار فشاری، روش FSDT، حل به کمک تئوری اغتشاشات ^۱
۲۰۰۹	نمت‌الا ^۲ و همکاران	-	FGM	تحلیل الاستیک-پلاستیک دو بعدی
۲۰۱۰	قناد و همکاران	استوانه	FGM	تحت بار فشاری، روش PET
۲۰۱۰	قناد و زمانی نژاد	استوانه	همگن و همسان‌گرد	تحت بار فشاری، روش FSDT
۲۰۱۰	ایپک‌چی	مخروط با جدار متغیر	همگن و همسان‌گرد	تحلیل تنش، روش TSDT، حل به کمک تئوری اغتشاشات
۲۰۱۰	عارفی و رحیمی	استوانه	FGM	تحلیل ترموالاستیک، روش FSDT
۲۰۱۰	عیسوندزیبایی و همکاران	استوانه	FGM	مقایسه‌ی اثر شرایط مرزی بر ارتعاشات آزاد، روش TSDT
۲۰۱۰	افسار و گو ^۳	دیسک	FGM	تحلیل اجزای محدود میدان ترموالاستیک
۲۰۱۱	عابدی و همکاران	استوانه با کلفتی متغیر	FGM	تحلیل استاتیکی
۲۰۱۱	قناد و همکاران	استوانه	FGM	تحت بار فشاری، روش FSDT
۲۰۱۱	کلس و کانکر ^۴	استوانه و کره	FGM	حل گذرای هدایت حرارتی
۲۰۱۱	لطفیان و همکاران	دیسک	FGM	حل الاستیسیته، تحت بار شعاعی
۲۰۱۱	زمانی نژاد و همکاران	کره	FGM	حل دقیق و عددی تنش
۲۰۱۱	قربان‌پور و همکاران	استوانه‌ی چرخان	FGPM ^۵	بررسی اثر ناهمگنی بر رفتار الکتریکی، حراراتی و مکانیکی، تحت بار فشاری
۲۰۱۱	ازترک و گولگس ^۶	استوانه	FGM	تحلیل تنش الاستیک-پلاستیک

1- Petrutbaton Theory

2- Nemat-Alla

3- Afsar & Go

4- Keles & Conker

5- Functionally Graded Porous Materials

6- Gulgec

۲۰۱۲	تقوایی پور و همکاران	استوانه	FGM	ارائه‌ی المان جدید اجزای محدود
۲۰۱۲	بیات و همکاران	کره	FGM	حل تحلیلی و عددی، تحت بار فشاری و حرارتی
۲۰۱۲	عارفی و رحیمی	استوانه	FGM	بررسی اثر ناهمگنی و تکیه‌گاه‌ها بر رفتار ترموالاستیک
۲۰۱۲	زمانی‌نژاد و همکاران	کره	FGM	حل دقیق تنش و جابه‌جایی
۲۰۱۲	قناد و همکاران	استوانه	FGM	تعیین جابه‌جایی و تنش، حل به کمک تئوری اغتشاشات
۲۰۱۲	قربان‌پور و همکاران	کره	FGPM	بررسی رفتار الکتریکی، حرارتی و مکانیکی
۲۰۱۲	قناد و همکاران	مخروط ناقص	FGM	تحلیل الاستیک، تحت بار فشاری
۲۰۱۲	قناد و همکاران	استوانه	FGM	حل نیمه تحلیلی، تحت بار فشاری
۲۰۱۲	قناد و زمانی‌نژاد	کره	FGM	حل کامل الاستیک، تحت بار فشاری
۲۰۱۲	قناد و زمانی‌نژاد	استوانه	FGM	حل کامل الاستیک، تحت بار فشاری
۲۰۱۲	قناد و زمانی‌نژاد	استوانه	FGM	روش PET، شرایط مرزی مختلف
۲۰۱۳	قناد و همکاران	استوانه با کلفتی متغیر	FGM	بار فشاری، روش FSDT

۱-۶- جمع‌بندی

بررسی پوسته‌های استوانه‌ای به دلیل فراوانی کاربرد اهمیت زیادی دارد و ساخت پوسته‌ای استوانه‌ای از مواد FG که قادر به تحمل بار بیشتری نسبت پوسته‌ی همگن بوده و یا وزن کمتری نسبت به آن داشته باشد پیشرفت بزرگی در صنعت محسوب می‌شود. گاهی برای ساخت قطعات نیاز به شکل دادن به آن‌ها با استفاده از کار مکانیکی است همچنین از پارامترهای مهم در طراحی قطعات حد تسلیم و شکست آن‌هاست که این‌ها گویای ضرورت تحلیل پلاستیک مسائل می‌باشند. تئوری الاستیسیته‌ی مستوی تنش‌های برشی را نادیده می‌گیرد و به همین دلیل کاربرد آن در مواردی که شرایط مرزی گیردار وجود دارد منطقی نیست و باید برای تحلیل این گونه مسائل به سراغ روش‌های

دیگری از جمله تئوری تغییر شکل برشی برویم. از آن جا که تا کنون حلی تحلیلی با استفاده از روش انرژی برای تحلیل الاستوپلاستیک استوانه‌های جدار کلفت FGM با تغییرات توانی خواص تحت بار فشاری و حرارتی ارائه نشده است در این تحقیق سعی شده تا حلی برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت تحت بار فشاری و حرارتی با شرایط انتهایی مختلف به کمک معیارهای تسلیم رانکین، ترسکا و فون میزز ارائه شود. به منظور اطمینان از صحت نتایج، آن‌ها با نتایج حاصل از روش اجزای محدود مقایسه شده‌اند.

فصل ۲- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی

اول

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

- ❖ تئوری الاستیسیته‌ی مستوی
- ❖ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول
- ❖ استخراج روابط الاستیک
- ❖ اعمال شرایط مرزی
- ❖ بررسی جریان پلاستیک
- ❖ مطالعه‌ی موردی
- ❖ ارائه و مقایسه‌ی نتایج

در این فصل پس از معرفی و بیان روابط تئوری‌های الاستیسیته‌ی مستوی و تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، به استخراج معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ی جدار کلفت متقارن محوری ساخته شده از مواد FG با تغییرات توانی خواص تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی در شرایط مرزی مختلف بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول پرداخته شده و روش حل آن‌ها برای استوانه با دو سر گیردار و استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد ارائه شده است. سپس به مرور معیارهای تسلیم رانکین، ترسکا و فون میزز پرداخته شده و پس از بیان روابط و قوانین مورد نیاز برای تحلیل الاستوپلاستیک ماده نحوه‌ی به‌کارگیری آن‌ها در حل مسأله‌ی مورد نظر مطرح شده است. پس از آن به مطالعه‌ی موردی مسأله و بیان نتایج حاصل از حل آن پرداخته شده است که این نتایج با نتایج به‌دست آمده از حل مسأله به کمک نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus مقایسه شده است.

۱-۲- تئوری الاستیسیته‌ی مستوی

همان‌طور که در فصل اول ذکر شد این تئوری اولین بار توسط لامه در ۱۸۵۲ برای استوانه‌های کلفت متقارن محوری با جدار ثابت تحت فشار یکنواخت داخلی از ماده‌ی همگن و همسان‌گرد ارائه شد. در این تئوری فرض می‌شود که مقاطع مستوی و عمود بر محور مرکزی استوانه، پس از بارگذاری و تغییر شکل همچنان مستوی و عمود بر محور استوانه باقی می‌مانند. تنش‌ها و کرنش‌های برشی صفر می‌باشند و تنش و کرنش طولی مقادیر ثابتی دارند. تغییر مکان شعاعی فقط تابعی از شعاع است و به کمک روابط زیر به کرنش‌های شعاعی و محیطی مربوط می‌شود:

$$\varepsilon_r = \frac{dU_r}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r}. \quad (1-2)$$

معادله‌ی تعادل در غیاب نیروهای حجمی بدین صورت است:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (2-2)$$

از ترکیب روابط تنش-کرنش، (۱-۲) و (۲-۲) معادله‌ی دیفرانسیل زیر برای مواد همگن به‌دست می‌آید:

$$r^2 \frac{d^2 U_r}{dr^2} + r \frac{dU_r}{dr} - u_r = 0 \quad (۳-۲)$$

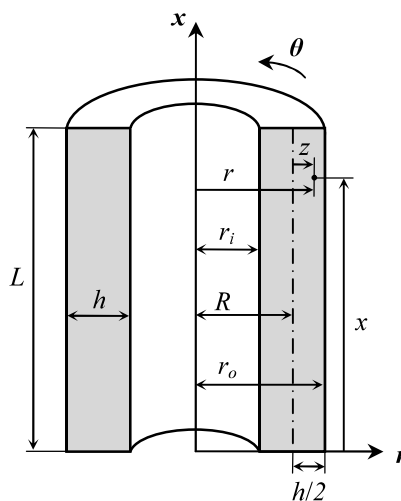
از حل معادله‌ی فوق جابه‌جایی شعاعی بصورت زیر به‌دست می‌آید:

$$U_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} \quad (۴-۲)$$

پس از محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی کرنش‌های به کمک روابط (۱-۲) و سپس به کمک روابط تنش-کرنش تنش‌ها قابل محاسبه می‌باشند.

۲-۲- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

اولین بار نقدی در ۱۹۵۶ تئوری تغییر شکل برشی را برای پوسته‌های کلفت بنیان نهاد و میرسکی و هرمان در ۱۹۵۸ از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در تحلیل ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت استفاده کردند. در این تئوری بر خلاف تئوری الاستیسیته‌ی مستوی از تنش و کرنش برشی چشم‌پوشی نمی‌شود. در این تئوری مقاطع مستوی و عمود بر سطح میانی استوانه پس از تغییر شکل مستوی باقی می‌مانند ولی الزاماً عمود بر سطح میانی باقی نمی‌مانند.



شکل ۱-۲- پروفیل استوانه‌ای جدار ثابت

مطابق شکل ۱-۲ موقعیت هر نقطه در استوانه به کمک فاصله‌ی آن از محور استوانه (r) که برابر مجموع شعاع صفحه‌ی میانی (R) و فاصله‌ی نقطه از صفحه‌ی میانی (z) است و فاصله‌ی آن از پایین استوانه (x) مشخص می‌شود. ضخامت استوانه h و طول آن L است.

$$r = R + z, \quad h = r_o - r_i. \quad (۵-۲)$$

$$-\frac{h}{2} \leq z \leq +\frac{h}{2}, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (۶-۲)$$

بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$U_r(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r} = C_1(R + z) + \frac{C_2}{R + z} \quad (۷-۲)$$

با توجه به شرط $|z/R| < ۱$ و به کمک بسط تیلور جابه‌جایی شعاعی استوانه بدین شکل قابل بازنویسی است:

$$\begin{aligned} U_r(r) &= C_1(R + z) + \frac{C_2}{R} \left(1 - \frac{z}{R} + \frac{z^2}{R^2} - \frac{z^3}{R^3} + \dots \right) \\ &= \left(C_1 R + \frac{C_2}{R} \right) + \left(C_1 - \frac{C_2}{R^2} \right) z + \frac{C_2}{R^3} z^2 - \frac{C_2}{R^4} z^3 + \dots \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

که به شکل ساده‌تر عبارت است از:

$$U_r(r) = w_0 + w_1 z + w_2 z^2 + w_3 z^3 + \dots \quad (۹-۲)$$

در رابطه‌ی فوق اگر z برابر صفر باشد جابه‌جایی صفحه‌ی میانی به دست می‌آید. با استفاده از تقریب مرتبه‌ی اول (تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول) جابه‌جایی‌ها برای استوانه‌ی متقارن محوری عبارتند از:

$$\begin{cases} U_x = u(x) + \varphi(x)z \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w(x) + \psi(x)z \end{cases} \quad (۱۰-۲)$$

بر اساس روابط سینماتیک کرنش‌ها در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}. \quad (۱۱-۲)$$

با جایگذاری روابط (۱۰-۲) در (۱۱-۲) کرنش‌ها به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{du}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}z \\ \varepsilon_\theta = \frac{w}{R+z} + \frac{\psi}{R+z}z \\ \varepsilon_z = \psi \\ \gamma_{xz} = \varphi + \frac{dw}{dx} + \frac{d\psi}{dx}z \end{cases} \quad (12-2)$$

با استفاده از روابط تنش-کرنش می‌توان میدان تنش را از روی کرنش‌ها محاسبه نمود:

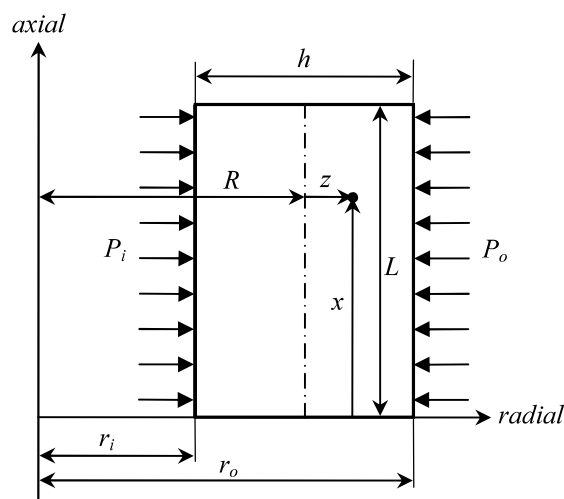
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \lambda E \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (13-2)$$

که در رابطه‌ی فوق:

$$\lambda = \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (14-2)$$

۳-۲- استخراج روابط الاستیک

در این بخش معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای جدار کلفت FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و اصل کار مجازی استخراج شده است.



شکل ۲-۲- پروفیل استوانه‌ای جدار ثابت تحت فشار داخلی و خارجی

همان‌طور که در فصل اول گفته شده در این تحقیق توزیع مدول الاستیسیته را به صورت

توانی نسبت به شعاع و نسبت پواسن را در تمام نقاط ماده ثابت در نظر می‌گیریم.

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n, \quad \nu = \text{cte.} \quad (15-2)$$

در رابطه‌ی فوق E_i مدول الاستیسیته در سطح داخلی استوانه و n ثابت ناهمگنی مدول

الاستیسیته است. به کمک رابطه‌ی (۵-۲) می‌توان رابطه‌ی (۱۵-۲) را به شکل زیر نوشت:

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i^n} (R + z)^n \quad (16-2)$$

بر اساس اصل کار مجازی تغییرات انرژی کرنشی با تغییرات کار نیروی خارجی برابر است:

$$\delta U = \delta W \quad (17-2)$$

انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی به کمک روابط زیر قابل محاسبه می‌باشند:

$$U = \iiint_V \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) dV \quad (18-2)$$

$$W = \iint_S (\vec{f} \cdot \vec{u}) dS \quad (19-2)$$

انتگرال اول بر روی حجم و انتگرال دوم بر روی سطح استوانه محاسبه می‌شوند. منظور از $\vec{f}$

نیروهای خارجی وارد بر سطح استوانه و منظور از $\vec{u}$ جابه‌جایی‌ها در سطح استوانه است. نیروهای وارد

بر سطح استوانه فشار داخلی و خارجی می‌باشند و از آنجا که این نیروها عمود بر سطح استوانه‌اند

حاصل ضرب داخلی آن‌ها در بردار جابه‌جایی سطوح داخلی و خارجی برابر مقدار آن‌ها در جابه‌جایی

شعاعی سطوح است. بنابراین:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xz} \gamma_{xz}) (R + z) dz dx d\theta \quad (20-2)$$

$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^L P_i U_z|_{r_i} r_i dx d\theta - \int_0^{2\pi} \int_0^L P_o U_z|_{r_o} r_o dx d\theta \quad (21-2)$$

تغییرات انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی عبارتند از:

$$\delta U = 2\pi \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) (R+z) dz dx \quad (22-2)$$

$$\delta W = 2\pi \int_0^L (P_i \delta U_z|_{r_i} r_i - P_o \delta U_z|_{r_o} r_o) dx \quad (23-2)$$

با جایگذاری روابط (22-2) و (23-2) در رابطه‌ی (17-2) داریم:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) (R+z) dz dx \\ &= \int_0^L (P_i r_i \delta U_z|_{z=-h/2} - P_o r_o \delta U_z|_{z=h/2}) dx \end{aligned} \quad (24-2)$$

به کمک روابط (10-2) و (12-2) رابطه‌ی فوق بدین شکل بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} & \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_x \left(\frac{d}{dx} \delta u + z \frac{d}{dx} \delta \varphi \right) + \frac{\sigma_\theta}{R+z} (\delta w + z \delta \psi) + \sigma_z \delta \psi \right. \\ & \quad \left. + \tau_{xz} \left(\delta \varphi + \frac{d}{dx} \delta w + z \frac{d}{dx} \delta \psi \right) \right] (R+z) dz dx \\ &= \int_0^L \left[P_i r_i \left(\delta w - \frac{h}{2} \delta \psi \right) - P_o r_o \left(\delta w + \frac{h}{2} \delta \psi \right) \right] dx \end{aligned} \quad (25-2)$$

با به‌کارگیری اصول حساب تغییرات چهار معادله به همراه هشت شرط مرزی از رابطه بالا

استخراج می‌شوند که به شکل ساده شده به صورت زیر می‌باشند:

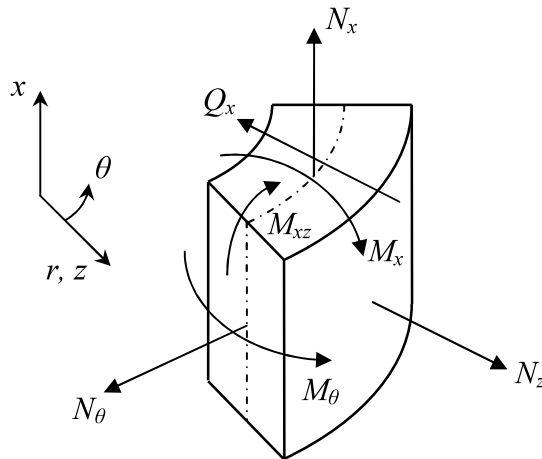
$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - R Q_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = P_o r_o - P_i r_i \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - R N_z = \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \end{cases}, \quad (26-2)$$

$$R[N_x \delta u + M_x \delta \varphi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0.$$

در روابط (۲۶-۲) نیروهای محوری، Q_x نیروی برشی، M_i لنگرهای خمشی و M_{xz} لنگر

پیچشی می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} N_x & M_x \\ N_\theta & M_\theta \\ N_z & M_z \\ Q_x & M_{xz} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_x(1+z/R) \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z(1+z/R) \\ \tau_{xz}(1+z/R) \end{bmatrix} [1 \quad z] dz \quad (27-2)$$



شکل ۳-۲- نمایش نیروها و لنگرها بر روی المان استوانه‌ای

با جایگذاری روابط (۲۷-۲) در چهار معادله‌ی اول (۲۶-۲) و تبدیل تنش‌ها به کرنش به کمک روابط تنش-کرنش (روابط ۱۳-۲) و تبدیل کرنش‌ها به جابه‌جایی‌ها به کمک روابط (۱۲-۲) و همچنین با وارد کردن توزیع توانی مدول الاستیسیته در معادلات (رابطه‌ی ۱۶-۲) به دستگاه ۴ معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به شکل زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} \tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \vec{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \vec{y} + \tilde{C} \vec{y} = \vec{F} \\ \vec{y} = \{u \quad \varphi \quad w \quad \psi\}^T \\ \vec{F} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \left\{ 0 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \end{cases} \quad (28-2)$$

ماتریس‌های ضرایب $[A_{ij}]$ ، $[B_{ij}]$ و $[C_{ij}]$ ماتریس‌های 4×4 می‌باشند که درایه‌های آن‌ها

مقادیری ثابت بوده و به کمک انتگرال‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$\mu = \frac{K}{2} (1 - 2\nu) \quad (29-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{11} = (1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} dz \\ A_{22} = (1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z^2 dz \\ A_{33} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} dz \\ A_{44} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z^2 dz \\ A_{12} = A_{21} = (1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z dz \\ A_{34} = A_{43} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z dz \end{array} \right. \quad (30-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B_{13} = -B_{31} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n dz \\ B_{14} = -B_{41} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n (R + 2z) dz \\ B_{23} = -B_{32} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n \left[z - \frac{\mu}{\nu} (R + z) \right] dz \\ B_{24} = -B_{42} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n \left[z^2 + \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) (R + z) z \right] dz \end{array} \right. \quad (31-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{22} = -\mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} dz \\ C_{33} = -(1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} dz \\ C_{44} = -\int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} [2z^2 + 2Rz + R^2(1 - \nu)] dz \\ C_{34} = C_{43} = -\int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} (\nu R + z) dz \end{array} \right. \quad (32-2)$$

سایر درایه‌های این ماتریس‌ها صفر می‌باشند. ثابت K که در ضریب μ وارد شده است ضریب

تصحیح برش است که در عبارات مربوط به تنش برشی وارد شده و برای پوسته‌های استوانه‌ای در

حالت استاتیکی برابر 0.833 (پنج ششم) در نظر گرفته می‌شود [۷۵]. همان‌طور که مشاهده می‌شود

ماتریس‌های $[A]$ و $[C]$ متقارن و ماتریس $[B]$ پادمتقارن می‌باشند.

دستگاه معادلات (۲۸-۲) پاسخی شامل دو بخش عمومی و خصوصی به شکل زیر دارد:

$$\vec{y} = \vec{y}_g + \vec{y}_p \quad (۳۳-۲)$$

از آن جا که $\{F_i\}$ تابعی از x نیست پاسخ خصوصی معادله نیز تابعی از x نیست و برداری

ثابت می باشد که با قرار دادن آن در معادله دو جمله ی اول که مشتق آن نسبت به x می باشد صفر

می شوند. بنابراین:

$$\tilde{C}\vec{y}_p = \vec{F} \Rightarrow \vec{y}_p = \tilde{C}^{-1}\vec{F} \quad (۳۴-۲)$$

با توجه به روابط (۳۲-۲) می توان دریافت که $[C]$ ماتریسی وارون ناپذیر است. برای رفع این

مشکل از اولین معادله ی مجموعه ی (۲۶-۲) نسبت به x انتگرال می گیریم و مشتق u نسبت به x را u'

می نامیم:

$$RN_x = c_7 \quad (۳۵-۲)$$

$$u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow u = \int u' dx + c_8 \quad (۳۶-۲)$$

پس از اعمال این تغییرات دستگاه معادلات (۲۸-۲) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} \tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \vec{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \vec{y} + \tilde{C} \vec{y} = \vec{F} \\ \vec{y} = \{u' \quad \varphi \quad w \quad \psi\}^T \\ \vec{F} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \end{cases} \quad (۳۷-۲)$$

که درایه های غیر صفر ماتریس های ضرایب به کمک روابط زیر قابل محاسبه اند:

$$\begin{cases} A_{22} = (1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z^2 dz \\ A_{33} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} dz \\ A_{44} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z^2 dz \\ A_{34} = A_{43} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z dz \end{cases} \quad (۳۸-۲)$$

$$\begin{cases} B_{12} = B_{21} = (1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z dz \\ B_{23} = -B_{32} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n \left[z - \frac{\mu}{\nu} (R + z) \right] dz \\ B_{24} = -B_{42} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n \left[z^2 + \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) (R + z) z \right] dz \end{cases} \quad (39-2)$$

$$\begin{cases} C_{11} = (1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} dz \\ C_{22} = -\mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} dz \\ C_{33} = -(1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} dz \\ C_{44} = - \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} [2z^2 + 2Rz + R^2(1 - \nu)] dz \\ C_{13} = -C_{31} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n dz \\ C_{14} = -C_{41} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n (R + 2z) dz \\ C_{34} = C_{43} = - \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} (\nu R + z) dz \end{cases} \quad (40-2)$$

دستگاه معادلات (۳۷-۲) نیز مشابه دستگاه معادلات (۲۸-۲) پاسخی شامل دو بخش عمومی

و خصوصی به شکل رابطه‌ی (۴۱-۲) دارد که پاسخ خصوصی آن برداری ثابت است و از رابطه‌ی

(۴۲-۲) به دست می‌آید:

$$\vec{y} = \vec{y}_g + \vec{y}_p \quad (41-2)$$

$$\vec{y}_p = \vec{p} = \tilde{C}^{-1} \vec{F} = \tilde{D} \vec{F} \quad (42-2)$$

مشاهده می‌شود که این بار $[C_{ij}]$ وارون پذیر است و پاسخ خصوصی معادله به راحتی محاسبه

می‌شود. برای به دست آوردن پاسخ عمومی معادله نیاز به حل قسمت همگن معادله می‌باشد. برای این

کار ابتدا عملگر دیفرانسیلی زیر را تعریف می‌نماییم:

$$\begin{cases} \tilde{P}(D) = \tilde{A}D^2 + \tilde{B}D + \tilde{C} \\ D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}. \end{cases} \quad (43-2)$$

بنابراین قسمت همگن معادله‌ی (۳۷-۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\tilde{P}(D)\vec{y} = \vec{0} \quad (۴۴-۲)$$

با در نظر گرفتن پاسخی به شکل رابطه‌ی (۴۵-۲) برای معادله‌ی فوق و جایگذاری آن در

معادله، به رابطه‌ی (۴۶-۲) می‌رسیم.

$$\vec{y}_g = \vec{v}e^{dx} \quad (۴۵-۲)$$

$$(d^2\tilde{A} + d\tilde{B} + \tilde{C})\vec{v}e^{dx} = \vec{0} \quad (۴۶-۲)$$

از آن جا که e^{dx} مخالف صفر می‌باشد رابطه‌ی (۴۶-۲) تبدیل به مساله‌ی مقدار ویژه‌ای به

شکل زیر می‌شود:

$$(d^2\tilde{A} + d\tilde{B} + \tilde{C})\vec{v} = \vec{0} \quad (۴۷-۲)$$

برای به دست آوردن مقادیر ویژه دترمینان ماتریس ضرایب را برابر صفر قرار می‌دهیم و

معادله‌ی حاصل را برای d حل می‌نماییم که حاصل آن چندین مقدار برای d است. سپس با

جایگذاری تک تک مقادیر ویژه در رابطه‌ی (۴۷-۲) بردار ویژه‌ی متناظر با هر مقدار ویژه به دست

می‌آید.

$$\det(d^2\tilde{A} + d\tilde{B} + \tilde{C}) = 0 \quad (۴۸-۲)$$

ماتریس فوق 4×4 و بزرگترین توان d ، ۲ است؛ بنابراین مساله‌ی فوق دارای هشت مقدار ویژه

می‌باشد. ولی دو عدد از این مقادیر ویژه صفر می‌باشند که برای راحتی کار از وارد کردن آن‌ها در

جواب معادله‌ی دیفرانسیل خودداری نموده و فقط شش مقدار ویژه‌ی دیگر را در نظر می‌گیریم.

بنابراین پاسخ عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل (۳۷-۲) به شکل زیر می‌باشد:

$$\vec{y}_g = \sum_{i=1}^6 c_i \vec{v}_i e^{d_i x} \quad (۴۹-۲)$$

با قرار دادن روابط (۴۹-۲) و (۴۵-۲) در (۴۱-۲) پاسخ نهایی دستگاه معادلات دیفرانسیل

(۳۷-۲) عبارت است از:

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^6 c_i \vec{v}_i e^{d_i x} + \tilde{C}^{-1} \vec{F} \quad (50-2)$$

رابطه‌ی فوق به صورت زیر نیز قابل نوشتن است:

$$[V_{ij}] = [\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \quad \vec{v}_3 \quad \vec{v}_4 \quad \vec{v}_5 \quad \vec{v}_6] \quad (51-2)$$

$$\begin{cases} u' = \sum_{i=1}^6 c_i V_{1i} e^{d_i x} + p_1 \\ \varphi = \sum_{i=1}^6 c_i V_{2i} e^{d_i x} + p_2 \\ w = \sum_{i=1}^6 c_i V_{3i} e^{d_i x} + p_3 \\ \psi = \sum_{i=1}^6 c_i V_{4i} e^{d_i x} + p_4 \end{cases} \quad (52-2)$$

با انتگرال‌گیری از معادله‌ی اول روابط (51-2) مطابق رابطه‌ی (36-2) u محاسبه می‌شود:

$$u = \sum_{i=1}^6 \frac{c_i}{d_i} V_{1i} e^{d_i x} + p_1 x + c_8 \quad (53-2)$$

هشت ثابت c_1 تا c_8 (7) $\vec{p}$ ظاهر می‌شود) به کمک هشت شرط مرزی مسأله که در

رابطه‌ی (26-2) معرفی شدند، قابل محاسبه می‌باشند. سپس میدان‌های جابه‌جایی به کمک روابط

(10-2)، کرنش به کمک روابط (12-2) و تنش به کمک روابط (13-2) محاسبه می‌شوند.

۴-۲- اعمال شرایط مرزی

برای محاسبه‌ی ثابت‌های c_1 تا c_8 از شرایط مرزی باید یک دستگاه هشت معادله و هشت مجهول به

شکل رابطه‌ی (54-2) تشکیل داد و آن را حل نمود.

$$\tilde{G} \vec{c} = \vec{H} \quad (54-2)$$

۲-۴-۱- استوانه با دو سر گیردار

در استوانه با دو سر بسته‌ی مقید جابه‌جایی‌ها در دو انتها صفرند بنابراین شرایط مرزی به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ w \\ \psi \end{pmatrix}_{x=0} = \begin{pmatrix} u \\ \varphi \\ w \\ \psi \end{pmatrix}_{x=L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۵۵-۲)$$

به کمک روابط (۵۲-۲) و (۵۳-۲) مجموعه معادلاتی که پس از حل آن‌ها ثابت‌ها به صورتی

تعیین می‌شوند که شرایط مرزی فوق برقرار شوند قابل محاسبه خواهند بود.

درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=0$ عبارتند از:

$$\begin{cases} G_{1j} = V_{1j}/d_j \\ G_{ij} = V_{ij} \\ G_{i7} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} D_{i1} \\ G_{18} = 1 \end{cases}, \quad i = 2,3,4, \quad j = 1,2,3,4,5,6. \quad (۵۶-۲)$$

$$H_i = -(D_{i3}F_3 + D_{i4}F_4), \quad i = 2,3,4. \quad (۵۷-۲)$$

و درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=L$ عبارتند از:

$$\begin{cases} G_{5j} = V_{1j}e^{d_j L}/d_j \\ G_{ij} = V_{(i-4)j}e^{d_j L} \\ G_{57} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} D_{11}L \\ G_{i7} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} D_{(i-4)1} \\ G_{58} = 1 \end{cases}, \quad i = 6,7,8, \quad j = 1,2,3,4,5,6. \quad (۵۸-۲)$$

$$\begin{cases} H_5 = -(D_{13}F_3 + D_{14}F_4)L \\ H_i = -(D_{(i-4)3}F_3 + D_{(i-4)4}F_4) \end{cases}, \quad i = 6,7,8. \quad (۵۹-۲)$$

۲-۴-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد

در این حالت برای سر گیردار از روابط ارائه شده در قسمت قبل استفاده می‌کنیم. شرایط مرزی برای سر آزاد همان‌طور که در رابطه‌ی (۲-۲۶) معرفی شدند به صورت زیر است:

$$\begin{cases} N_x = 0 \\ M_x = 0 \\ Q_x = 0 \\ M_{xz} = 0 \end{cases} \quad (۲-۶۰)$$

با جایگذاری روابط (۲-۲۷) در روابط فوق و جایگذاری کرنش‌ها به‌جای تنش‌ها از رابطه‌ی

(۲-۱۳) در حاصل و جایگذاری روابط (۲-۱۲) در حاصل این شرط‌ها بر حسب جابه‌جایی‌ها به‌دست می‌آیند که از روی آن‌ها می‌توان دستگاه معادلات مورد نظر را تشکیل داد.

درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=0$ عبارتند از:

$$\begin{cases} G_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)(V_{1j} + d_j V_{2j} z) \\ \quad + \frac{\nu}{R+z} (V_{3j} + V_{4j} z) + \nu V_{4j}] z^{i-1} dz \\ G_{i7} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)D_{11} + \frac{\nu}{R+z} (D_{31} + D_{41} z) \\ \quad + \nu D_{41}] z^{i-1} dz \\ G_{(i+2)j} = \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} (V_{2j} + d_j V_{3j} + d_j V_{4j} z) z^{i-1} dz \\ G_{(i+2)7} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} D_{21} z^{i-1} dz \end{cases} \quad (۲-۶۱)$$

, $i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$\begin{cases} H_i = - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)(D_{13}F_3 + D_{14}F_4) + \frac{\nu}{R+z} (D_{33} \\ \quad \times F_3 + D_{34}F_4 + D_{43}F_3 z + D_{44}F_4 z) + \nu(D_{43}F_3 + D_{44}F_4)] z^{i-1} dz \\ H_{i+2} = - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} (D_{23}F_3 + D_{24}F_4) z^{i-1} dz \end{cases} \quad (۲-۶۲)$$

, $i = 1, 2.$

و درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=L$ عبارتند از:

$$\left\{ \begin{aligned} G_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)(V_{1j} + d_j V_{2j} z) \\ &\quad + \frac{\nu}{R+z} (V_{3j} + V_{4j} z) + \nu V_{4j}] e^{d_j L} z^{i-3} dz \\ G_{i7} &= \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)D_{11} + \frac{\nu}{R+z} (D_{31} + D_{41} z) \\ &\quad + \nu D_{41}] z^{i-3} dz \\ G_{(i+2)j} &= \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} (V_{2j} + d_j V_{3j} + d_j V_{4j} z) z^{i-3} dz \\ G_{(i+2)7} &= \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} D_{21} z^{i-3} dz \end{aligned} \right. \quad (63-2)$$

, $i = 3, 4, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$\left\{ \begin{aligned} H_i &= - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)(D_{13}F_3 + D_{14}F_4) + \frac{\nu}{R+z} (D_{33} \\ &\quad \times F_3 + D_{34}F_4 + D_{43}F_3 z + D_{44}F_4 z) + \nu(D_{43}F_3 + D_{44}F_4)] z^{i-3} dz \\ H_{i+2} &= - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} (D_{23}F_3 + D_{24}F_4) z^{i-3} dz \end{aligned} \right. \quad (64-2)$$

, $i = 3, 4.$

۵-۲- بررسی جریان پلاستیک

برای تحلیل پلاستیک یک ماده ابتدا باید ببینیم که ماده در نقطه‌ی مورد نظر تسلیم شده است یا خیر؛ برای این کار نیاز به معیار تسلیم داریم. همان‌طور که پیش‌تر گفته شد در این تحقیق از سه معیار تسلیم رانکین، ترسکا و فون میزز استفاده می‌شود. سپس به اصلاح مقادیر تنش به‌دست آمده از روابط الاستیک در نقاط تسلیم شده به کمک رفتار در نظر گرفته شده برای مواد (الاستوپلاستیک) می‌پردازیم و در پایان مقادیر کرنش به‌دست آمده از روابط الاستیک را در در نقاط تسلیم شده به کمک معیار تسلیم و قانون جریان اصلاح می‌نماییم.

۲-۵-۱- معیارهای تسلیم

روابط معیارهای تسلیم مورد نظر بر حسب تنش‌های اصلی با فرض مقاومت تسلیم یکسان در کشش و فشار به صورت زیر است:

$$\max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = S_y \quad (۶۵-۲)$$

$$\max(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|) = S_y \quad (۶۶-۲)$$

$$\max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = S_y \quad (۶۷-۲)$$

$$\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{2}S_y \quad (۶۸-۲)$$

رابطه‌ی (۶۵-۲) مربوط به معیار رانکین، روابط (۶۶-۲) و (۶۷-۲) مربوط به معیار ترسکا و

رابطه‌ی (۶۸-۲) مربوط به معیار فون میزز است. S_y استحکام تسلیم ماده در نقطه‌ی مورد نظر است

که توزیع آن در ماده‌ی FG را مشابه توزیع مدول الاستیسیته به صورت توانی در نظر می‌گیریم:

$$S_y = S_{yi} \left(\frac{r}{r_i} \right)^m = \frac{S_{yi}}{r_i^m} (R + z)^m \quad (۶۹-۲)$$

در رابطه‌ی فوق S_{yi} استحکام تسلیم سطح داخلی استوانه و m ثابت ناهمگنی استحکام تسلیم

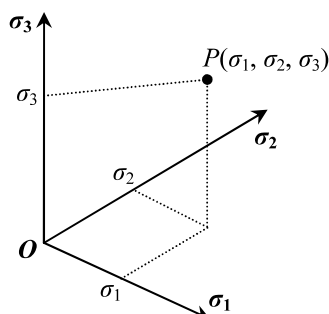
است که الزاماً با ثابت ناهمگنی مدول الاستیسیته (n) برابر نیست.

با در نظر گرفتن سه محور عمود بر هم $O\sigma_1$ ، $O\sigma_2$ و $O\sigma_3$ که هر یک از آن‌ها مربوط به یک

تنش اصلی است دستگاه مختصات فضای تنش را تشکیل تعریف می‌نماییم. اگر تنش‌های اصلی در یک

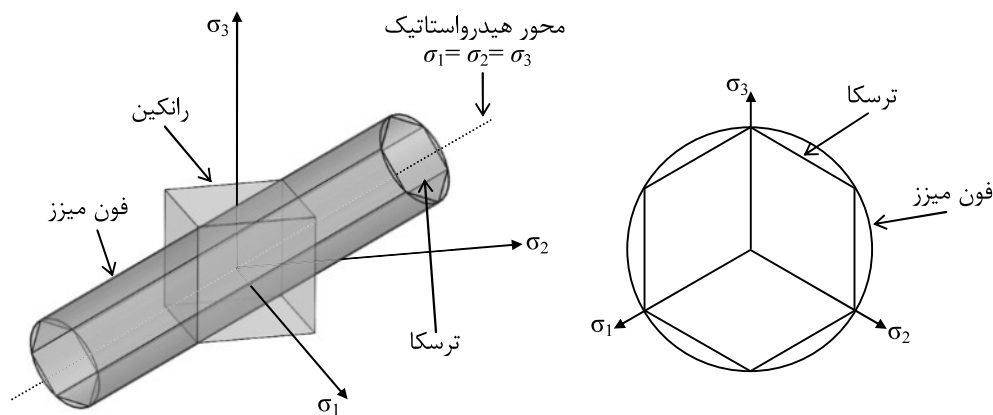
نقطه در جسمی برابر $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ باشد نقطه‌ی P با مختصات $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ در دستگاه مورد نظر

بیان‌گر وضعیت تنش نقطه‌ی انتخاب شده در جسم است.



شکل ۲-۴- دستگاه مختصات تصویرگر فضایی تنش

با توجه به تعریف دستگاه مختصات فوق می‌توان معیارهای تسلیم را به صورت یک رویه‌ی فضایی در این دستگاه نشان داد که قرار گرفتن نقطه‌ی تنش‌ها خارج از رویه به معنای تسلیم شدن نقطه می‌باشد. معیار رانکین به شکل مکعبی به ضلع $2S_y$ است که مرکز آن در مبدأ مختصات قرار دارد. معیار فون میزز استوانه‌ای به شعاع $\sqrt{2/3} S_y$ است که محور وسط آن در راستای بردار $(1, 1, 1)$ است. معیار ترسکا به شکل یک منشور با قاعده‌ی شش ضلعی محیط درون استوانه‌ی فون میزز است.



شکل ۲-۵- نمایش هندسی معیارهای تسلیم رانکین، ترسکا و فون میزز

۲-۵-۲- محاسبه‌ی تنش

طبق مدل الاستوپلاستیک تنش‌ها تا قبل از تسلیم ماده مطابق قانون هوک به صورت خطی نسبت به کرنش‌ها افزایش می‌یابند و پس از تسلیم در همان مقدار باقی می‌مانند. بنابراین برای یافتن تنش‌ها پس از تسلیم، کافی است خط واصل مبدأ فضای تنش به نقطه‌ی تنش‌های محاسبه شده از روابط الاستیک را رسم نموده و نقطه‌ی تقاطع آن با معیار تسلیم را به عنوان تنش‌های نهایی گزارش نماییم. با تغییر نام محورهای فضای تنش به x ، y و z معادله‌ی خط تنش‌ها بدین صورت بیان می‌شود:

$$\frac{x}{\sigma_1} = \frac{y}{\sigma_2} = \frac{z}{\sigma_3} = \kappa \quad (۲-۷۰)$$

از آنجا که x و σ_1 ، y و σ_2 و z و σ_3 هم‌علامت می‌باشند κ مقداری مثبت است. برای یافتن تقاطع خط فوق با معیار تسلیم مورد نظر کافی است x و y و z را از رابطه‌ی فوق استخراج و به جای σ_1 ، σ_2 و σ_3 در روابط مربوط به معیارهای تسلیم رانکین، ترسکا و فون میزز (۶۷-۶۸ و ۶۵-۶۸) جایگذاری نماییم:

$$\max(|\kappa\sigma_1|, |\kappa\sigma_2|, |\kappa\sigma_3|) = S_y \quad (۷۱-۲)$$

$$\max(\kappa\sigma_1, \kappa\sigma_2, \kappa\sigma_3) - \min(\kappa\sigma_1, \kappa\sigma_2, \kappa\sigma_3) = S_y \quad (۷۲-۲)$$

$$\sqrt{[(\kappa\sigma_1 - \kappa\sigma_2)^2 + (\kappa\sigma_2 - \kappa\sigma_3)^2 + (\kappa\sigma_3 - \kappa\sigma_1)^2]/2} = S_y \quad (۷۳-۲)$$

با توجه به مثبت بودن κ و تعریف تنش معادل معیار رانکین به صورت رابطه‌ی (۷۴-۲)، تنش معادل معیار ترسکا به صورت رابطه‌ی (۷۵-۲) و تنش معادل معیار فون میزز به صورت رابطه‌ی (۷۶-۲)، سه رابطه‌ی فوق به شکل رابطه‌ی (۷۷-۲) ساده می‌شوند.

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (۷۴-۲)$$

$$\sigma_{eq} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (۷۵-۲)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/2} \quad (۷۶-۲)$$

$$\kappa = S_y / \sigma_{eq} \quad (۷۷-۲)$$

پس از محاسبه‌ی κ از رابطه‌ی (۷۷-۲) و قرار دادن آن در رابطه‌ی (۷۰-۲) تنش‌های اصلی در نقطه‌ی تسلیم به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^*}{\sigma_2} = \frac{\sigma_3^*}{\sigma_3} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} \quad (۷۸-۲)$$

تنش‌های حاصل از حل الاستیک σ_x ، σ_θ ، σ_z و τ_{xz} می‌باشند. از آنجا که تنش‌های برشی $\tau_{\theta z}$ و $\tau_{x\theta}$ صفر می‌باشند یکی از تنش‌های اصلی است. دو تنش اصلی دیگر به کمک رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (۷۹-۲)$$

به طور خلاصه پس از محاسبه‌ی تنش‌های اصلی (σ_i) به کمک رابطه‌ی (۷۹-۲)، تنش معادل معیار مورد نظر را از روابط (۷۴-۲ تا ۷۶) محاسبه می‌کنیم و در صورت تسلیم ماده در این نقطه (بیشتر بودن تنش معادل از مقاومت تسلیم ماده) σ_i^* ها را از رابطه‌ی (۷۸-۲) محاسبه نموده و مقدار آن‌ها را جایگزین σ_i ها می‌کنیم. در پایان برای تبدیل تنش‌های اصلی اصلاح شده به $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z$ و τ_{xz} از دورانی عکس آن‌چه برای تبدیل $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z$ و τ_{xz} به تنش‌های اصلی استفاده شد، استفاده می‌کنیم.

۲-۵-۳- قانون جریان

هر افزایش کرنش (نمو کرنش) در ناحیه‌ی پلاستیک حاصل یک بخش الاستیک که در باربرداری حذف می‌شود و یک بخش پلاستیک که پس از باربرداری باقی می‌ماند است. بخش الاستیک از قانون عمومی هوک به دست می‌آید و بخش پلاستیک تابع قانونی است که قانون جریان نامیده می‌شود.

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (۸۰-۲)$$

نمو کرنش پلاستیک به صورت برداری در فضای نه بعدی در نظر گرفته می‌شود که در نقطه‌ی تنش مورد نظر عمود بر سطح معیار تسلیم بوده و جهت آن به سمت خارج است. با در نظر گرفتن n_{ij} به عنوان بردار عمود بر سطح تسلیم و به سمت خارج آن قانون جریان برای مواد بدون سخت‌شوندگی به صورت زیر است:

$$d\varepsilon_{ij}^p = n_{ij}d\lambda, \quad n_{ij}d\sigma_{ij} = 0. \quad (۸۱-۲)$$

$d\lambda$ یک ثابت اسکالر مثبت است و بیان‌گر اندازه‌ی بردار نمو کرنش می‌باشد. عبارت $n_{ij}d\sigma_{ij} = 0$ بیان می‌کند که نقطه‌ی تنش حین افزایش کرنش پلاستیک باید روی سطح تسلیم باقی بماند و این همان فرض ثابت ماندن تنش پس از گذر از نقطه‌ی تسلیم است که در بخش قبل به کمک آن تنش را محاسبه نمودیم. وقتی $n_{ij}d\sigma_{ij} < 0$ باشد در حالت باربرداری قرار داریم و نمو کرنش پلاستیک صفر است. از آنجا که n_{ij} بردار عمود بر سطح تسلیم است مولفه‌های آن با مشتقات جزئی تابع تسلیم نسبت به تنش‌ها متناسب است. بنابراین:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda \quad (۸۲-۲)$$

تابع تسلیم، تابعی است که در صورت بیشتر بودن از صفر بیان گر تسلیم شدن ماده در نقطه‌ی مورد نظر است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(\sigma_{ij}) = \sigma_{eq} - S_y \quad (۸۳-۲)$$

قانون جریان بیان می‌کند که جهت تنش‌های اصلی و نمو کرنش‌های اصلی برای یک ماده‌ی همسان گرد یکسان می‌باشند. همچنین شرط عدم تغییر حجم پلاستیک در این قانون بیان می‌کند که مجموع نمو کرنش‌های عمودی پلاستیک باید برابر صفر باشد که این به معنی صفر بودن مجموع کرنش‌های عمودی پلاستیک نیز می‌باشد.

$$d\varepsilon_{ii}^p = 0 \quad (۸۴-۲)$$

$$\varepsilon_{ii}^p = 0 \quad (۸۵-۲)$$

۲-۵-۴- محاسبه‌ی کرنش

در این بخش به محاسبه‌ی روابط جریان پلاستیک برای سه معیار رانکین، ترسکا و فون میزز در جهت تنش‌های اصلی می‌پردازیم. در جهت تنش‌های اصلی تنش‌های برشی صفر می‌باشند و از آنجا که جهت تنش‌های اصلی و کرنش‌های اصلی یکسان می‌باشند در این جهت کرنش‌های برشی نیز صفرند؛ بنابراین فقط نیاز به بررسی تنش‌ها و کرنش‌های عمودی است. ثابت $d\lambda$ که در رابطه‌ی (۲-۸۱ و ۸۲) ظاهر شده است را نمو کرنش پلاستیک معادل می‌نامیم و با $d\varepsilon_{eq}^p$ نمایش می‌دهیم.

۲-۵-۴-۱- معیار رانکین

تابع تسلیم این معیار از ترکیب رابطه‌ی (۲-۷۴) با رابطه‌ی (۲-۸۳) به دست می‌آید:

$$f(\sigma_{ij}) = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) - S_y \quad (۸۶-۲)$$

مشتقات جزئی تابع تسلیم فوق نسبت به تنش‌های اصلی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \begin{cases} 1 & |\sigma_i| > |\sigma_j| \geq |\sigma_k| \\ 0 & else \end{cases} \quad (۸۷-۲)$$

نمو کرنش‌های پلاستیک اصلی از ترکیب رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۸۲-۲) قابل محاسبه است:

$$d\varepsilon_i^p = \begin{cases} d\varepsilon_{eq}^p & |\sigma_i| > |\sigma_j| \geq |\sigma_k| \\ 0 & else \end{cases} \quad (۸۸-۲)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود بر اساس این معیار تنها یکی از کرنش‌های اصلی مخالف صفر می‌باشد که این ناقض شرط عدم تغییر حجم پلاستیک است؛ البته با این دید که اثر تنش‌های هیدرواستاتیک که عامل تغییر حجم در جسم می‌باشند در این معیار حذف نشده است این مساله زیاد دور از ذهن نبود. برای محاسبه‌ی مقدار نمو کرنش پلاستیک معادل به دلیل توازی بردار نمو کرنش پلاستیک و بردار عمود بر سطح تسلیم رابطه‌ای مشابه تنش معادل تسلیم تعریف می‌کنیم و ضریب آن را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مقدار آن در حالت تک‌محوره برابر $d\varepsilon_1$ شود:

$$d\varepsilon_{eq}^p = \max(|d\varepsilon_1^p|, |d\varepsilon_2^p|, |d\varepsilon_3^p|) \quad (۸۹-۲)$$

مولفه‌های نمو کرنش پلاستیک از تفاضل نمو کرنش‌های الاستیک که به کمک روابط تنش-کرنش از روی تنش‌های اصلاح شده در بخش ۲-۵-۲ به دست می‌آیند از کل نمو کرنش محاسبه شده به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_i^p &= d\varepsilon_i - d\varepsilon_i^e = \frac{d}{E} \{ [\sigma_i - \nu(\sigma_j + \sigma_k)] - [\sigma_i^* - \nu(\sigma_j^* + \sigma_k^*)] \} \\ &= d\varepsilon_i - \kappa d\varepsilon_i = (1 - \kappa) d\varepsilon_i \end{aligned} \quad (۹۰-۲)$$

با ترکیب روابط (۸۹-۲) و (۹۰-۲) رابطه‌ی (۹۱-۲) برای محاسبه‌ی نمو کرنش پلاستیک

معادل معیار رانکین به دست می‌آید:

$$d\varepsilon_{eq}^p = (1 - \kappa) \max(|d\varepsilon_1|, |d\varepsilon_2|, |d\varepsilon_3|) \quad (۹۱-۲)$$

۲-۴-۵-۲- معیار ترسکا

تابع تسلیم این معیار از ترکیب رابطه‌ی (۷۵-۲) با رابطه‌ی (۸۳-۲) به دست می‌آید:

$$f(\sigma_{ij}) = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - S_y \quad (۹۲-۲)$$

مشتقات جزئی تابع تسلیم فوق نسبت به تنش‌های اصلی به صورت زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \begin{cases} 1 & \sigma_i > \sigma_j \geq \sigma_k \\ -1 & \sigma_k \geq \sigma_j > \sigma_i \\ 0 & \sigma_j > \sigma_i > \sigma_k \end{cases} \quad (93-2)$$

نمو کرنش‌های پلاستیک اصلی از ترکیب رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۸۲-۲) قابل محاسبه است:

$$d\varepsilon_i^p = \begin{cases} d\varepsilon_{eq}^p & \sigma_i > \sigma_j \geq \sigma_k \\ -d\varepsilon_{eq}^p & \sigma_k \geq \sigma_j > \sigma_i \\ 0 & \sigma_j > \sigma_i > \sigma_k \end{cases} \quad (94-2)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود بر اساس این معیار تنها یکی از کرنش‌های اصلی صفر می‌باشد

و شرط عدم تغییر حجم پلاستیک نیز ارضا شده است. برای محاسبه‌ی مقدار نمو کرنش پلاستیک

معادل به دلیل توازی بردار نمو کرنش پلاستیک و بردار عمود بر سطح تسلیم رابطه‌ای مشابه تنش

معادل معیار تسلیم تعریف می‌کنیم و ضریب آن را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مقدار آن در حالت

تک‌محوره برابر $d\varepsilon_1$ شود:

$$d\varepsilon_{eq}^p = \frac{2}{3} \max(|d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p|, |d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p|, |d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p|) \quad (95-2)$$

با ترکیب روابط (۹۰-۲) و (۹۵-۲) داریم:

$$d\varepsilon_{eq}^p = \frac{2}{3} (1 - \kappa) \max(|d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2|, |d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3|, |d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1|) \quad (96-2)$$

از آنجا که هنوز روابط پلاستیک اعمال نشده‌اند به کمک روابط تنش-کرنش الاستیک

می‌توان رابطه‌ی فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{eq}^p &= \frac{2(1 - \kappa)}{3E} \max(|d\sigma_1 - \nu d\sigma_2 - \nu d\sigma_3 - d\sigma_2 + \nu d\sigma_3 + \nu d\sigma_1|, \\ &\quad |d\sigma_2 - \nu d\sigma_3 - \nu d\sigma_1 - d\sigma_3 + \nu d\sigma_1 + \nu d\sigma_2|, \\ &\quad |d\sigma_3 - \nu d\sigma_1 - \nu d\sigma_2 - d\sigma_1 + \nu d\sigma_2 + \nu d\sigma_3|) \\ &= \frac{2(1 - \kappa)(1 + \nu)}{3E} \max(|d\sigma_1 - d\sigma_2|, |d\sigma_2 - d\sigma_3|, |d\sigma_3 - d\sigma_1|) \\ &= \frac{2(1 - \kappa)(1 + \nu)}{3E} d\sigma_{eq} = \frac{(1 - \kappa)}{3G} d\sigma_{eq} \end{aligned} \quad (97-2)$$

۲-۵-۴-۳- معیار فون میزز

تابع تسلیم این معیار از ترکیب رابطه‌ی (۲-۷۶) با رابطه‌ی (۲-۸۳) به دست می‌آید:

$$f(\sigma_{ij}) = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/2} - S_y \quad (۲-۹۸)$$

با در نظر گرفتن $f = u^{0.5} - S_y$ مشتقات جزئی تابع تسلیم فوق نسبت به تنش‌های اصلی

به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \frac{\partial u / \partial \sigma_i}{2\sqrt{u}} = \frac{(\sigma_i - \sigma_j) - (\sigma_k - \sigma_i)}{2\sigma_{eq}} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \left[\sigma_i - \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_k) \right] \quad (۲-۹۹)$$

نمو کرنش‌های پلاستیک اصلی از ترکیب رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی (۲-۸۲) قابل محاسبه است:

$$d\varepsilon_i^p = \frac{d\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \left[\sigma_i - \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_k) \right] \quad (۲-۱۰۰)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود بر اساس این معیار هیچ یک از کرنش‌های اصلی صفر نمی‌باشد

و شرط عدم تغییر حجم پلاستیک نیز ارضا شده است. برای محاسبه‌ی مقدار نمو کرنش پلاستیک

معادل به دلیل توازی بردار نمو کرنش پلاستیک و بردار عمود بر سطح تسلیم رابطه‌ی مشابه تنش

معادل معیار تسلیم تعریف می‌کنیم و ضریب آن را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که مقدار آن در حالت

تک‌محوره برابر $d\varepsilon_1$ شود:

$$d\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{9}[(d\varepsilon_1^p - d\varepsilon_2^p)^2 + (d\varepsilon_2^p - d\varepsilon_3^p)^2 + (d\varepsilon_3^p - d\varepsilon_1^p)^2]} \quad (۲-۱۰۱)$$

با ترکیب روابط (۲-۹۰) و (۲-۱۰۱) داریم:

$$d\varepsilon_{eq}^p = (1 - \kappa) \sqrt{\frac{2}{9}[(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_2)^2 + (d\varepsilon_2 - d\varepsilon_3)^2 + (d\varepsilon_3 - d\varepsilon_1)^2]} \quad (۲-۱۰۲)$$

از آنجا که هنوز روابط پلاستیک اعمال نشده‌اند به کمک روابط تنش- کرنش الاستیک

می‌توان رابطه‌ی فوق را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{eq}^p &= \frac{2(1-\kappa)}{3\sqrt{2}E} [(d\sigma_1 - v d\sigma_2 - v d\sigma_3 - d\sigma_2 + v d\sigma_3 + v d\sigma_1)^2 + \\
 &\quad (d\sigma_2 - v d\sigma_3 - v d\sigma_1 - d\sigma_3 + v d\sigma_1 + v d\sigma_2)^2 + \\
 &\quad (d\sigma_3 - v d\sigma_1 - v d\sigma_2 - d\sigma_1 + v d\sigma_2 + v d\sigma_3)^2]^{0.5} \\
 &= \frac{2(1-\kappa)(1+v)}{3\sqrt{2}E} [|d\sigma_1 - d\sigma_2| + |d\sigma_2 - d\sigma_3| + |d\sigma_3 - d\sigma_1|]^{0.5} \\
 &= \frac{2(1-\kappa)(1+v)}{3E} d\sigma_{eq} = \frac{(1-\kappa)}{3G} d\sigma_{eq} \quad (۱۰۳-۲)
 \end{aligned}$$

پیش‌تر توضیح داده شده بود که در این تحقیق می‌توان کل بار را یک‌باره اعمال نمود و

به‌جای نمو تنش و کرنش از خود تنش و کرنش استفاده کرد. بنابراین برای محاسبه‌ی کرنش

پلاستیک از روی تنش‌ها و کرنش‌هایی که داریم ابتدا کرنش پلاستیک معادل برای معیار رانکین را از

رابطه‌ی (۱۰۴-۲) و کرنش پلاستیک معادل برای معیار ترسکا و فون میزز را از رابطه‌ی (۱۰۵-۲)

محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_{eq}^p = (1 - \sigma_{eq}/S_y) \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, |\varepsilon_3|) \quad (۱۰۴-۲)$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{eq} - S_y}{3G} \quad (۱۰۵-۲)$$

سپس برای محاسبه‌ی کرنش‌های اصلی پلاستیک برای معیارهای رانکین، ترسکا و فون میزز

به ترتیب از روابط (۱۰۶-۲ تا ۱۰۸) استفاده می‌کنیم.

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = \varepsilon_k^p = 0, \quad \sigma_i > \sigma_j \geq \sigma_k. \quad (۱۰۶-۲)$$

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = 0, \quad \varepsilon_k^p = -\varepsilon_{eq}^p, \quad \sigma_i > \sigma_j > \sigma_k. \quad (۱۰۷-۲)$$

$$\varepsilon_i^p = \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \left[\sigma_i - \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_k) \right] \quad (۱۰۸-۲)$$

ε_θ یکی از کرنش‌های اصلی است. برای یافتن دو کرنش‌های اصلی دیگر از روی کرنش‌های

محاسبه شده از حل الاستیک از رابطه‌ای مشابه رابطه‌ی (۷۹-۲) استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_z}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}}{2}\right)^2} \quad (۱۰۹-۲)$$

به کمک این رابطه کرنش‌های الاستیک محاسبه شده در نقاط تسلیم شده را اصلاح می‌کنیم:

$$\varepsilon_i^e = \kappa \varepsilon_i \quad (۱۱۰-۲)$$

برای تبدیل کرنش‌های اصلی الاستیک اصلاح شده و کرنش‌های اصلی پلاستیک محاسبه

شده به ε_x ، ε_θ ، ε_z و γ_{xz} (الاستیک و پلاستیک) از دورانی عکس آن‌چه برای تبدیل ε_x ، ε_θ ، ε_z و γ_{xz} به

کرنش‌های اصلی استفاده شد، استفاده می‌کنیم. کرنش کل برابر مجموع کرنش الاستیک و کرنش

پلاستیک است:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^p \quad (۱۱۱-۲)$$

بر اساس روابط کرنش-جابجایی می‌توان جابجایی شعاعی را محاسبه نمود:

$$U_z = (R + z)\varepsilon_\theta \quad (۱۱۲-۲)$$

۲-۶- مطالعه‌ی موردی

در این بخش با در نظر گرفتن مقدار برابر برای ثابت‌های n و m و برابر ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۲، توزیع مدول

الاستیسیته را مطابق رابطه‌ی (۱۶-۲)، ماتریس‌های ضرایب $[A_{ij}]$ ، $[B_{ij}]$ و $[C_{ij}]$ را مطابق روابط (۳۸-۲)

تا (۴۰)، بردار $\{F_i\}$ را مطابق رابطه‌ی (۳۷-۲) و توزیع تنش تسلیم ماده را مطابق رابطه‌ی (۶۹-۲)

محاسبه می‌کنیم. ثابت‌های به کار رفته در روابط بعدی عبارتند از:

$$\begin{cases} a = \ln \frac{R + h/2}{R - h/2} = \ln \frac{r_o}{r_i} \\ b = \frac{h}{(R - h/2)(R + h/2)} = \frac{r_o - r_i}{r_i r_o} \\ [Q_{ij}] = \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{i-3} z^{j-1} dz \end{cases} \quad (۱۱۳-۲)$$

که $[Q_{ij}]$ یک ماتریس 6×3 است و درایه‌های آن برابرند با:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} b & a - Rb & h - 2Ra + R^2b \\ a & h - Ra & -R(h + Ra) \\ h & 0 & \rho_3 - R^2h \\ Rh & \rho_3 - R^2h & \rho_4 - 2R\rho_3 + R^3h \\ \rho_3 & \rho_4 - R\rho_3 & \rho_5 - 2R\rho_4 + R^2\rho_3 \\ \rho_4 & \rho_5 - R\rho_4 & \rho_6 - 2R\rho_5 + R^2\rho_4 \end{bmatrix}, \quad \rho_j = \frac{r_o^j - r_i^j}{j}. \quad (114-2)$$

یکی از حالت‌های شرایط مرزی که بررسی می‌شود شرط مرزی دو سر گیردار است که

ماتریس‌های دستگاه معادلات ناشی از آن، از روابط (۵۶-۲ تا ۵۹) محاسبه می‌شوند. حالت دیگر در

$x = 0$ گیردار و در $x = L$ آزاد است که ثابت‌های مربوط به سمت گیردار از روابط (۵۶-۲) و (۵۷-۲) و

ثابت‌های مربوط به سمت آزاد از روابط (۱۱۵-۲) و (۱۱۶-۲) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{cases} G_{ij} = [(1 - \nu)(V_{1j}Q_{(n+4)(i-2)} + d_j V_{2j}Q_{(n+4)(i-1)}) \\ + \nu(V_{3j}Q_{(n+3)(i-2)} + V_{4j}Q_{(n+3)(i-1)}) + \nu V_{4j}Q_{(n+4)(i-2)}] e^{d_j L} \\ G_{i7} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} [(1 - \nu)D_{11}Q_{(n+4)(i-2)} \\ + \nu(D_{31}Q_{(n+3)(i-2)} + D_{41}Q_{(n+3)(i-1)}) + \nu D_{41}Q_{(n+4)(i-2)}] \quad (115-2) \\ G_{(i+2)j} = (V_{2j} + d_j V_{3j})Q_{(n+4)(i-2)} + d_j V_{4j}Q_{(n+4)(i-1)} \\ G_{(i+2)7} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} D_{21}Q_{(n+4)(i-2)} \end{cases}$$

, $i = 3, 4, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$

$$\begin{cases} H_i = -[(1 - \nu)(D_{13}F_3 + D_{14}F_4)Q_{(n+4)(i-2)} \\ + \nu(D_{33}F_3 + D_{34}F_4)Q_{(n+3)(i-2)} \\ + \nu(D_{43}F_3 + D_{44}F_4)(Q_{(n+3)(i-1)} + Q_{(n+4)(i-2)})] \quad (116-2) \\ H_{i+2} = -(D_{23}F_3 + D_{24}F_4)Q_{(n+4)(i-2)} \end{cases}$$

, $i = 3, 4.$

۲-۶-۱- ماده‌ی همگن ($n = m = 0$)

مدول الاستیسیته برابر است با:

$$E(z) = E_i = \text{const.} \quad (117-2)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب برابرند با:

$$\begin{cases} A_{22} = (1 - \nu) \frac{Rh^3}{12} \\ A_{33} = \mu Rh \\ A_{44} = \mu \frac{Rh^3}{12} \\ A_{34} = a_{43} = \mu \frac{h^3}{12} \end{cases} \quad (۱۱۸-۲)$$

$$\begin{cases} B_{12} = B_{21} = (1 - \nu) \frac{h^3}{12} \\ B_{23} = -B_{32} = -\mu Rh \\ B_{24} = -B_{42} = -(\mu - 2\nu) \frac{h^3}{12} \end{cases} \quad (۱۱۹-۲)$$

$$\begin{cases} C_{11} = (1 - \nu)Rh \\ C_{22} = -\mu Rh \\ C_{33} = -(1 - \nu)a \\ C_{44} = -(1 - \nu)R^2a \\ C_{13} = -C_{31} = \nu h \\ C_{14} = -C_{41} = \nu Rh \\ C_{34} = C_{43} = -[h - (1 - \nu)Ra] \end{cases} \quad (۱۲۰-۲)$$

$\{F_i\}$ برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{1}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2}(P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۱۲۱-۲)$$

تنش تسلیم برابر است با:

$$S_y(z) = S_{yi} = const. \quad (۱۲۲-۲)$$

۲-۶-۲- ثابت ناهمگنی $n=m=1$

مدول الاستیسیته برابر است با:

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i} (R + z) \quad (۱۲۳-۲)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب برابرند با:

$$\begin{cases} A_{22} = (1 - \nu) \left(\frac{R^2 h^3}{12} + \frac{h^5}{80} \right) \\ A_{33} = \mu \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \\ A_{44} = \mu \left(\frac{R^2 h^3}{12} + \frac{h^5}{80} \right) \\ A_{34} = A_{43} = \mu \frac{Rh^3}{6} \end{cases} \quad (124-2)$$

$$\begin{cases} B_{12} = B_{21} = (1 - \nu) \frac{Rh^3}{6} \\ B_{23} = -B_{32} = -\mu \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) + \nu \frac{h^3}{12} \\ B_{24} = -B_{42} = -(2\mu - 3\nu) \frac{Rh^3}{12} \end{cases} \quad (125-2)$$

$$\begin{cases} C_{11} = (1 - \nu) \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \\ C_{22} = -\mu \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \\ C_{33} = -(1 - \nu)h \\ C_{44} = -(1 - \nu)R^2 h - \frac{h^3}{6} \\ C_{13} = -C_{31} = \nu Rh \\ C_{14} = -C_{41} = \nu \left(R^2 h + \frac{h^3}{6} \right) \\ C_{34} = C_{43} = -\nu Rh \end{cases} \quad (126-2)$$

$\{F_i\}$ برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{r_i}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (127-2)$$

تنش تسلیم برابر است با:

$$S_y(z) = \frac{S_{yi}}{r_i} (R + z) \quad (128-2)$$

۲-۶-۳- ثابت ناهمگنی $n=m=-1$

مدول الاستیسیته برابر است با:

$$E(z) = \frac{E_i r_i}{(R+z)} \quad (۱۲۹-۲)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب برابرند با:

$$\begin{cases} A_{22} = (1-\nu) \frac{h^3}{12} \\ A_{33} = \mu h \\ A_{44} = \mu \frac{h^3}{12} \end{cases} \quad (۱۳۰-۲)$$

$$\begin{cases} B_{23} = -B_{32} = \nu(h - Ra) - \mu h \\ B_{23} = -B_{32} = \nu(h - Ra) - \mu h \end{cases} \quad (۱۳۱-۲)$$

$$\begin{cases} C_{11} = (1-\nu)h \\ C_{22} = -\mu h \\ C_{33} = -(1-\nu)b \\ C_{44} = 2(Ra - h) - (1-\nu)R^2b \\ C_{13} = -C_{31} = \nu a \\ C_{14} = -C_{41} = \nu(2h - Ra) \\ C_{34} = C_{43} = -a + (1-\nu)Rb \end{cases} \quad (۱۳۲-۲)$$

$\{F_i\}$ برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{1}{\lambda E_i r_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2}(P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۱۳۳-۲)$$

تنش تسلیم برابر است با:

$$S_y(z) = \frac{S_{yi} r_i}{(R+z)} \quad (۱۳۴-۲)$$

۲-۶-۴- ثابت ناهمگنی $n=m=2$

مدول الاستیسیته برابر است با:

$$E(z) = \frac{E_i}{r_i^2} (R+z)^2 \quad (۱۳۵-۲)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب برابرند با:

$$\begin{cases} A_{22} = (1 - \nu) \left(\frac{R^3 h^3}{12} + \frac{3Rh^5}{80} \right) \\ A_{33} = \mu \left(R^3 h + \frac{Rh^3}{4} \right) \\ A_{44} = \mu \left(\frac{R^3 h^3}{12} + \frac{3Rh^5}{80} \right) \\ A_{34} = A_{43} = \mu \left(\frac{R^2 h^3}{4} + \frac{h^5}{80} \right) \end{cases} \quad (۱۳۶-۲)$$

$$\begin{cases} B_{12} = B_{21} = (1 - \nu) \left(\frac{R^2 h^3}{4} + \frac{h^5}{80} \right) \\ B_{23} = -B_{32} = -\mu \left(R^3 h + \frac{Rh^3}{4} \right) + \nu \frac{Rh^3}{6} \\ B_{24} = -B_{42} = -\mu \left(\frac{R^2 h^3}{4} + \frac{h^5}{80} \right) + \nu \left(\frac{R^2 h^3}{3} + \frac{h^5}{40} \right) \end{cases} \quad (۱۳۷-۲)$$

$$\begin{cases} C_{11} = (1 - \nu) \left(R^3 h + \frac{Rh^3}{4} \right) \\ C_{22} = -\mu \left(R^3 h + \frac{Rh^3}{4} \right) \\ C_{33} = -(1 - \nu)Rh \\ C_{44} = -(1 - \nu)R^3 h - \frac{Rh^3}{3} \\ C_{13} = -C_{31} = \nu \left(R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \\ C_{14} = -C_{41} = \nu \left(R^3 h + \frac{5Rh^3}{12} \right) \\ C_{34} = C_{43} = -\left(\nu R^2 h + \frac{h^3}{12} \right) \end{cases} \quad (۱۳۸-۲)$$

$\{F_i\}$ برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{r_i^2}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۱۳۹-۲)$$

تنش تسلیم برابر است با:

$$S_y(z) = \frac{S_{yi}}{r_i^2} (R + z)^2 \quad (۱۴۰-۲)$$

۲-۶-۵- ثابت ناهمگنی $n=m=-2$

مدول الاستیسیته برابر است با:

$$E(z) = \frac{E_i r_i^2}{(R+z)^2} \quad (۱۴۱-۲)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب برابرند با:

$$\begin{cases} A_{22} = (1-\nu)(R^2a - Rh) \\ A_{33} = \mu a \\ A_{44} = \mu(R^2a - Rh) \\ A_{34} = A_{43} = \mu(h - Ra) \end{cases} \quad (۱۴۲-۲)$$

$$\begin{cases} B_{12} = B_{21} = (1-\nu)(h - Ra) \\ B_{23} = -B_{32} = -\mu a + \nu(a - Rb) \\ B_{24} = -B_{42} = -\mu(h - Ra) + \nu(2h - 3Ra + R^2b) \end{cases} \quad (۱۴۳-۲)$$

$$\begin{cases} C_{11} = (1-\nu)a \\ C_{22} = -\mu a \\ C_{33} = -(1-\nu)\frac{R}{h}b^2 \\ C_{44} = -2a + (1+\nu)Rb - (1-\nu)\frac{Rh}{4}b^2 \\ C_{13} = -C_{31} = \nu b \\ C_{14} = -C_{41} = \nu(2a - Rb) \\ C_{34} = C_{43} = -\nu b + (1-\nu)\frac{h}{4}b^2 \end{cases} \quad (۱۴۴-۲)$$

$\{F_i\}$ برابر است با:

$$\vec{F} = \frac{1}{\lambda E_i r_i^2} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2}(P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۱۴۵-۲)$$

تنش تسلیم برابر است با:

$$S_y(z) = \frac{S_{yi} r_i^2}{(R+z)^2} \quad (۱۴۶-۲)$$

۲-۷- ارائه و مقایسه‌ی نتایج

در این بخش با در نظر گرفتن مقدار برابر برای ثابت‌های n و m و برابر -۲ ، -۱ ، ۰ ، ۱ و ۲ ، نتایج عددی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای توخالی کلفت با شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰ میلی‌متر، طول $۰/۸$ متر، مدول الاستیسیته در سطح داخلی ۲۰۰ گیگاپاسکال، نسبت پواسن $۰/۳$ و استحکام تسلیم در سطح داخلی ۲۵۰ مگاپاسکال ارائه شده است. فشار یکنواخت داخلی آغاز تسلیم استوانه و فشار یکنواخت داخلی تسلیم سطح میانی در وسط طول استوانه محاسبه و ارائه شده است و سایر نتایج برای یک فشار داخلی خاص ارائه شده است. در تمام موارد دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد بررسی شده است. پاسخ تحلیلی با نوشتن برنامه‌ای در نرم‌افزار MATLAB و پاسخ روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار Abaqus با استفاده از جزء مستطیلی ۸ گره‌ای درجه‌ی ۲ (CAX8R) متقارن محوری و زیربرنامه‌ی UMAT محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۲-۷-۱- استوانه با دو سر گیردار

در جدول ۲-۱ فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x=L/2$) آغاز می‌شود ارائه شده است و در جدول ۲-۲ فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z=0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود ارائه شده است. فشار خارجی در این دو حالت صفر در نظر گرفته شده است. در تمام موارد تسلیم استوانه از سطح داخلی آن ($z=-h/2$) آغاز می‌شود.

جدول ۲-۱- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x=L/2$ (MPa)

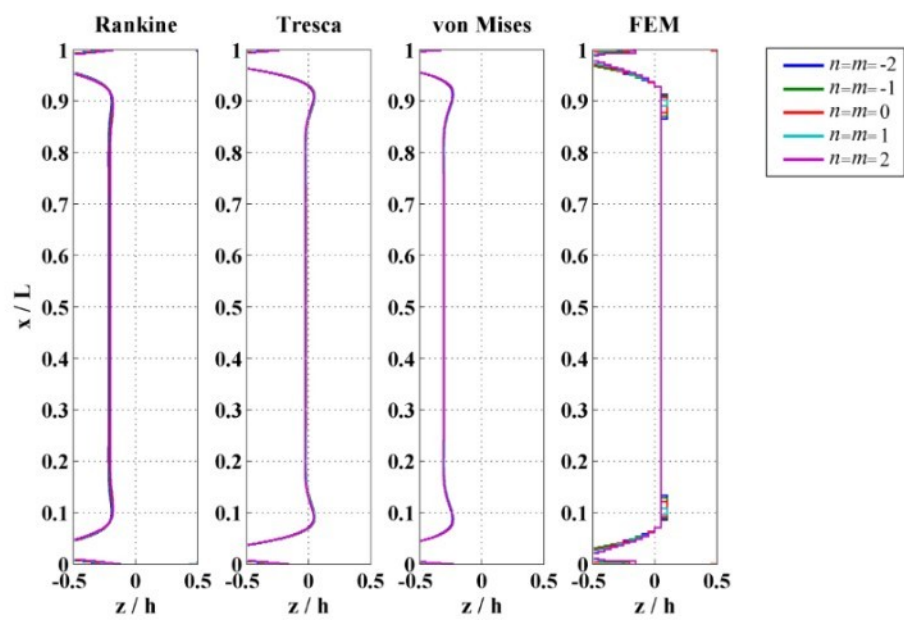
معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=-2$	۵۹/۵۷۴	۶۰/۹۴۳	۶۸/۲۲۷
$n=m=-1$	۷۰/۶۱۴	۷۲/۴۶۴	۸۱/۰۹۸
$n=m=0$	۸۴/۸۲۳	۸۷/۳۱۸	۹۷/۶۹۱
$n=m=1$	۱۰۳/۲۸۹	۱۰۶/۶۵۸	۱۱۹/۲۹۰
$n=m=2$	۱۲۷/۵۱۴	۱۳۲/۰۶۸	۱۴۷/۶۶۵

جدول ۲-۲- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x=L/2$ (MPa)

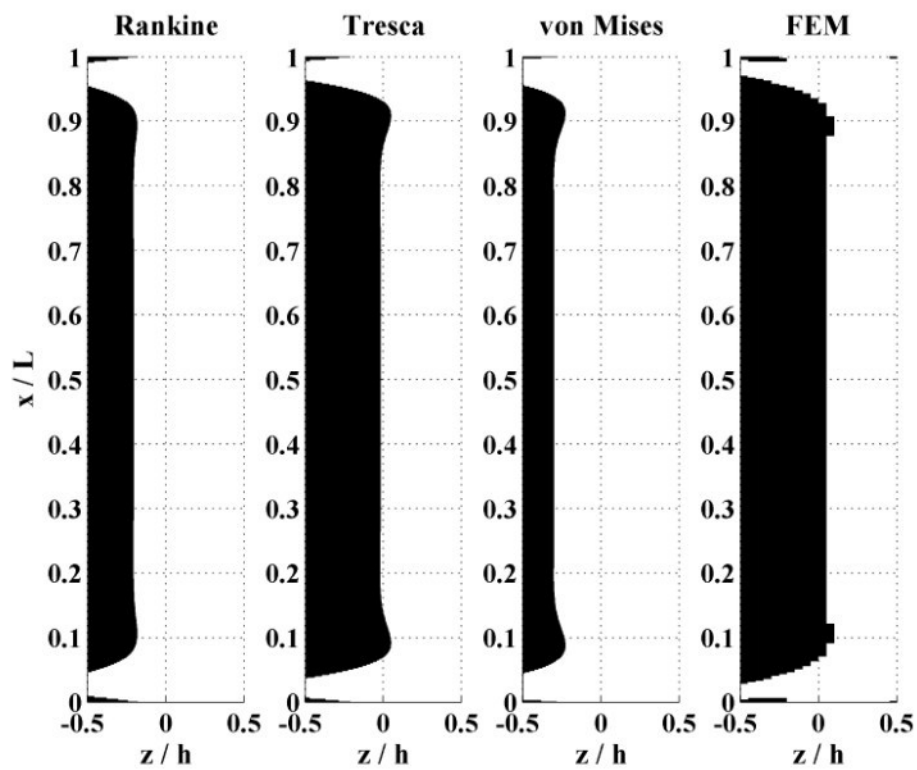
معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم افزار Abaqus	
۹۰/۵۵۷	۷۶/۱۷۹	۸۶/۶۹۸	۷۵/۳۶	$n=m=-2$
۱۰۷/۱۶۴	۹۰/۵۷۹	۱۰۳/۰۵۸	۸۹/۷۳	$n=m=-1$
۱۲۸/۵۱۹	۱۰۹/۱۴۸	۱۲۴/۱۴۹	۱۰۸/۱۵	$n=m=0$
۱۵۶/۲۴۴	۱۳۳/۳۱۷	۱۵۱/۳۸۱	۱۳۱/۹۴	$n=m=1$
۱۹۲/۵۹۲	۱۶۵/۰۷۹	۱۸۷/۳۹۷	۱۶۲/۹۰	$n=m=2$

همان طور که در جدول ها مشاهده می کنید با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می یابد. با توجه به نتایج جدول ۱-۲ می توان دریافت که معیار رانکین نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری در پیش بینی فشار آغاز تسلیم استوانه دارد. با توجه به نتایج جدول ۲-۲ می توان دریافت که معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری در پیش بینی فشار تسلیم سطح میانی دارد. همچنین مشاهده می شود که در هر دو مورد فوق با افزایش ثابت ناهمگنی از دقت نتایج کاسته می شود. نتایج معیار ترسکا برای فشار تسلیم سطح میانی برای تمام مقادیر ثابت های ناهمگنی از دقت قابل قبولی برخوردار است.

شعاع مرز ناحیه ی پلاستیک برای استوانه با ثابت های ناهمگنی مختلف در شکل ۲-۶ و تصویر مناطق تسلیم شده ی استوانه در شکل ۲-۷ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار برابر فشار تسلیم لایه ی میانی که به کمک نرم افزار Abaqus به دست آمده است در نظر گرفته شده است. مشاهده می شود که معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار بررسی شده دارد. همچنین ثابت ناهمگنی تاثیر چندانی بر روی شکل و شعاع ناحیه ی پلاستیک در فشار تسلیم لایه ی میانی ندارد و فقط بر روی میزان این فشار تاثیر می گذارد.

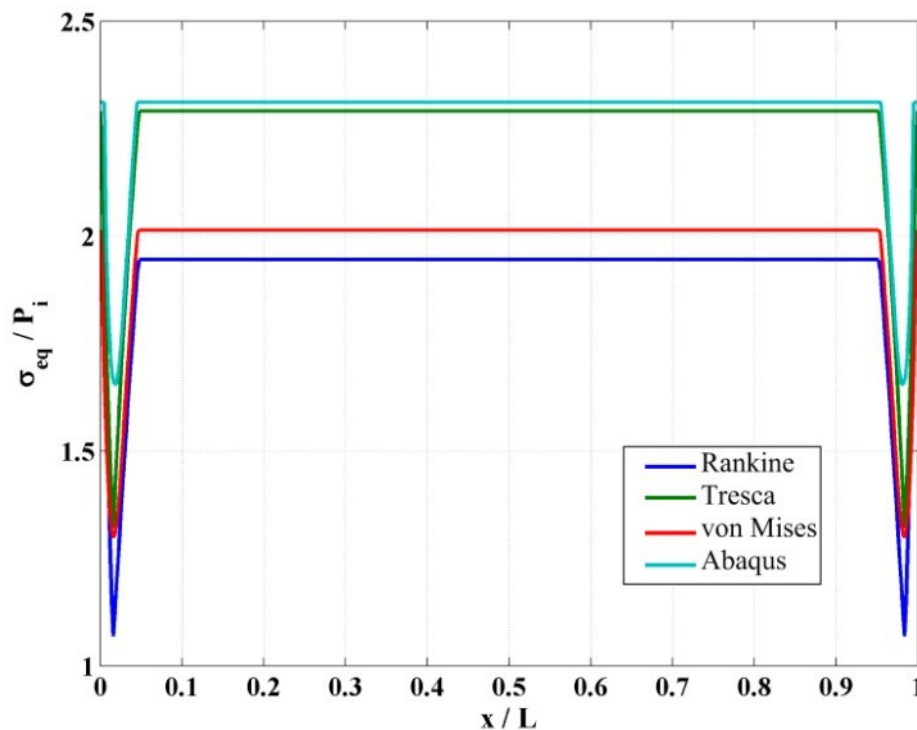


شکل ۲-۶- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

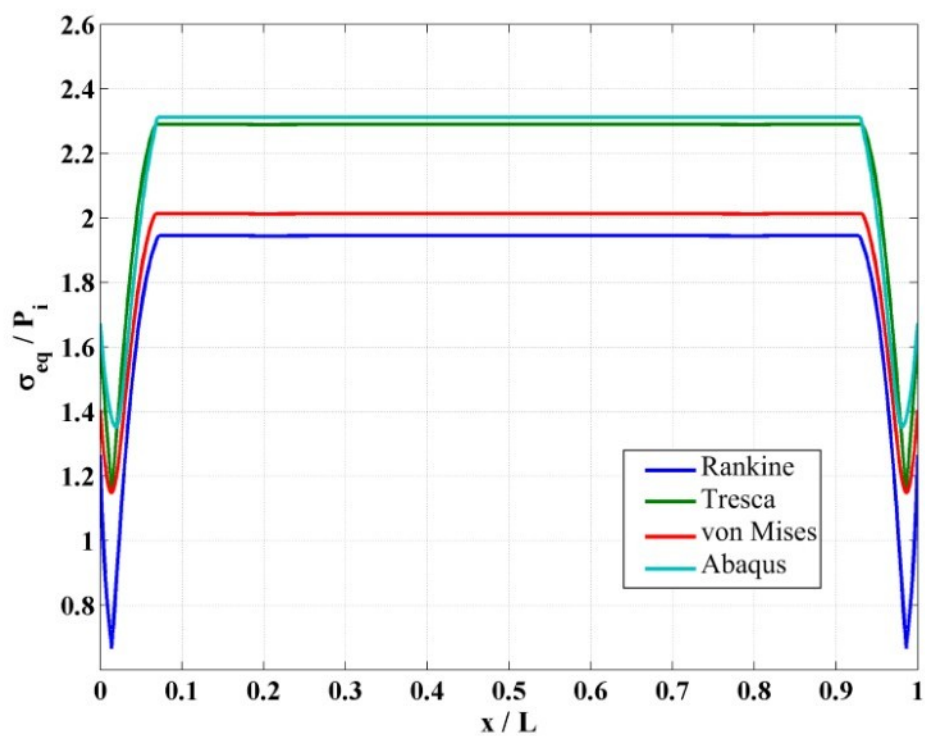


شکل ۲-۷- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

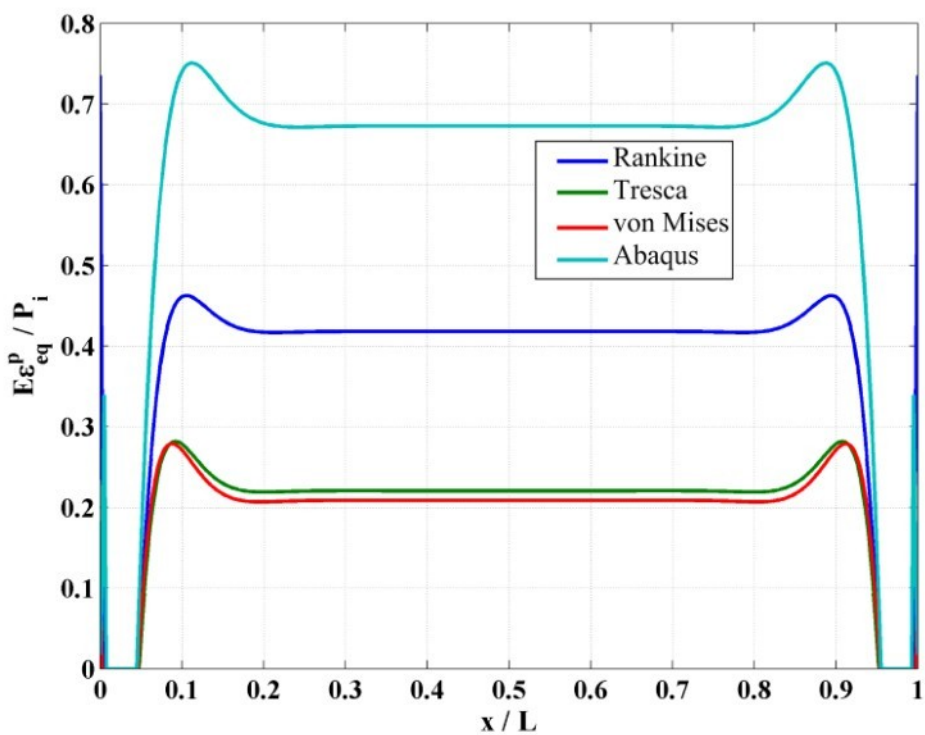
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۲-۲) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۸ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۹ آورده شده است. معیار ترسکا در هر دو حالت بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۱۰ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۱۱ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها در این دو حالت دقت قابل قبولی ندارند. برای $z = -h/4$ معیار رانکین بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۱۲ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۱۳ آورده شده است. این بار معیار ترسکا کمترین دقت را دارد و معیار رانکین دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



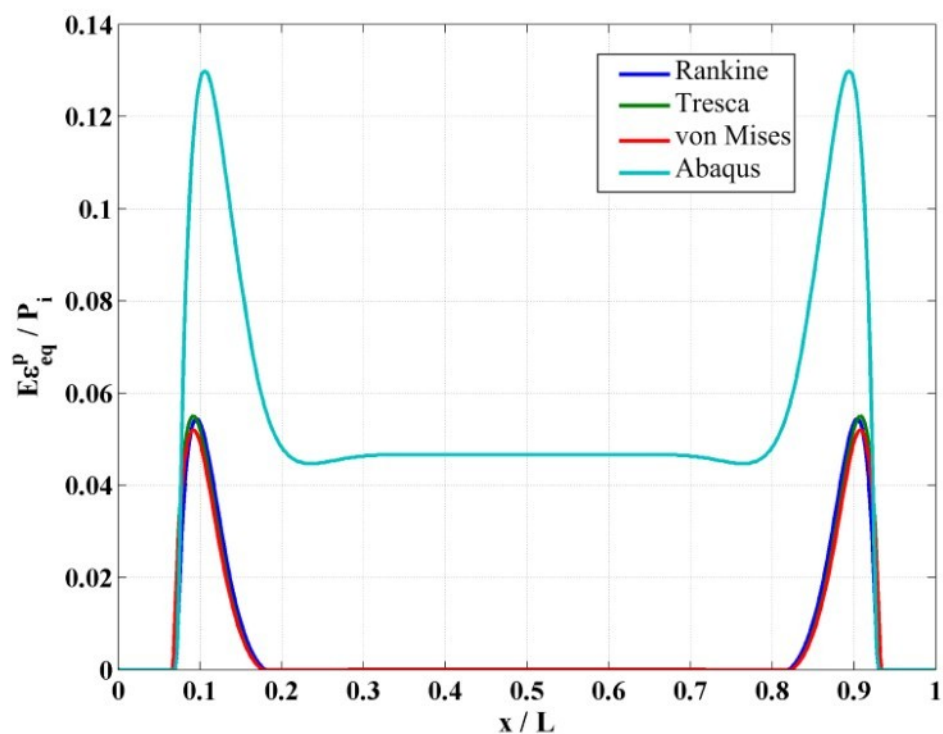
شکل ۲-۸- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z = -h/4$



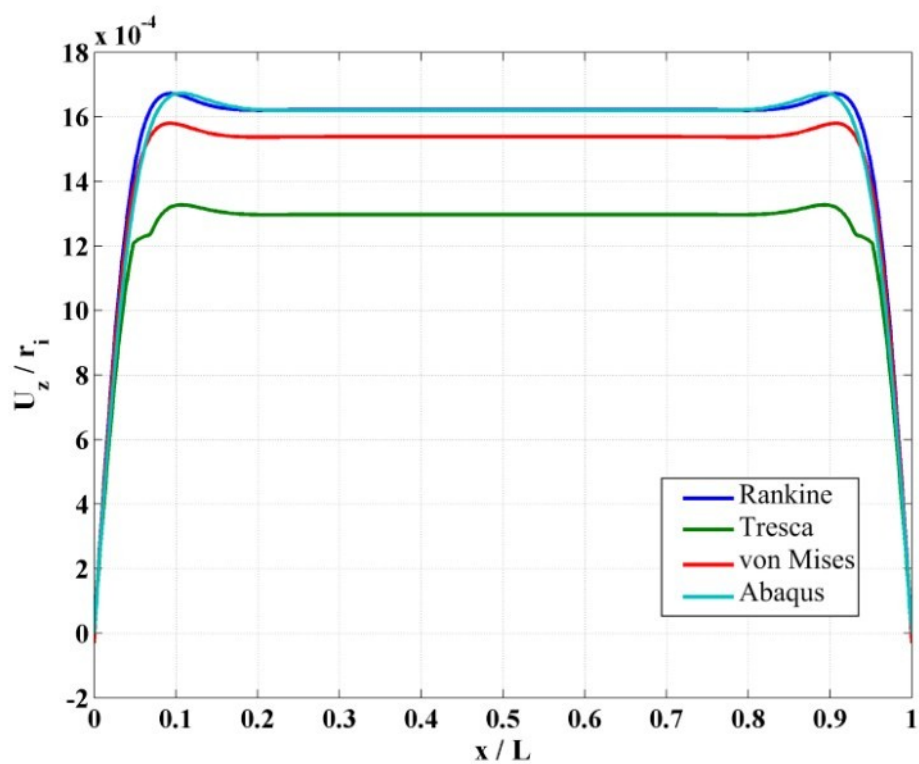
شکل ۹-۲- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



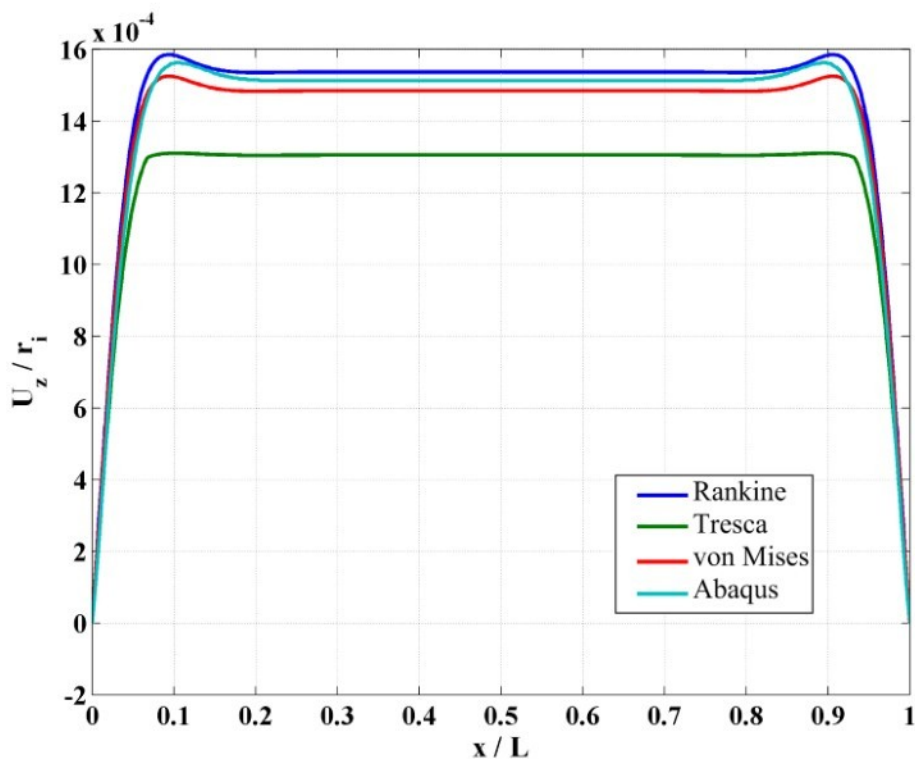
شکل ۱۰-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۱۱-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

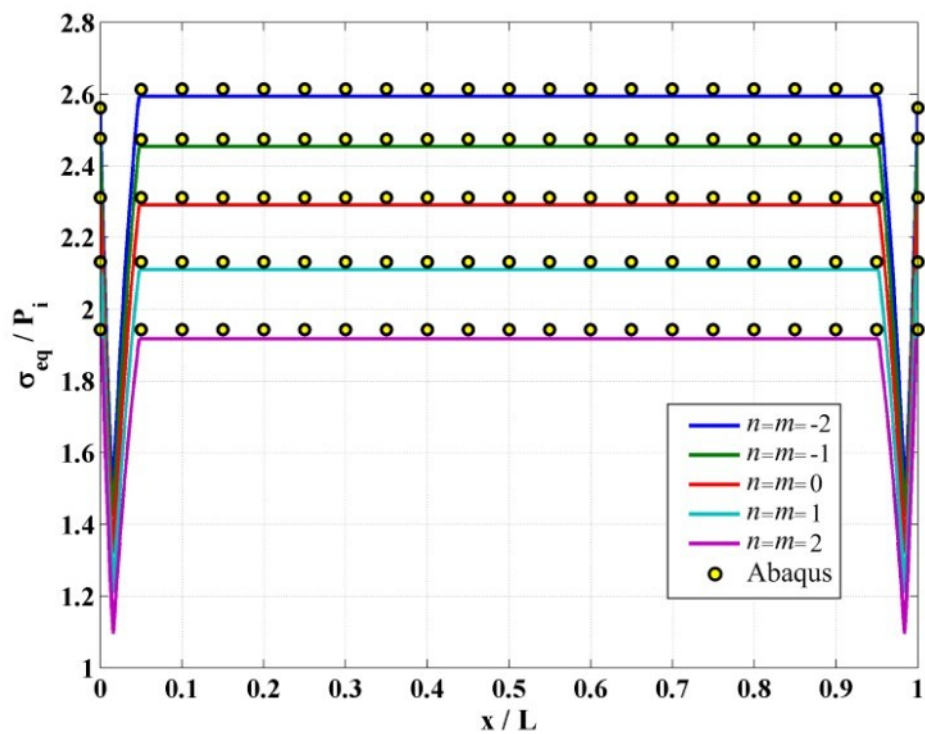


شکل ۱۲-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

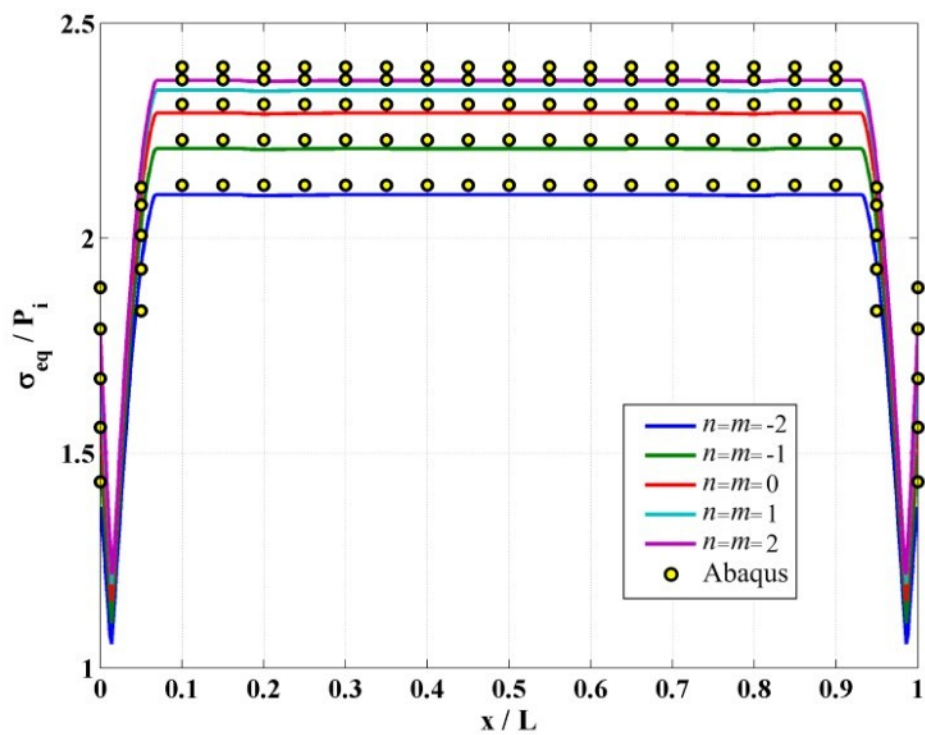


شکل ۲-۱۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

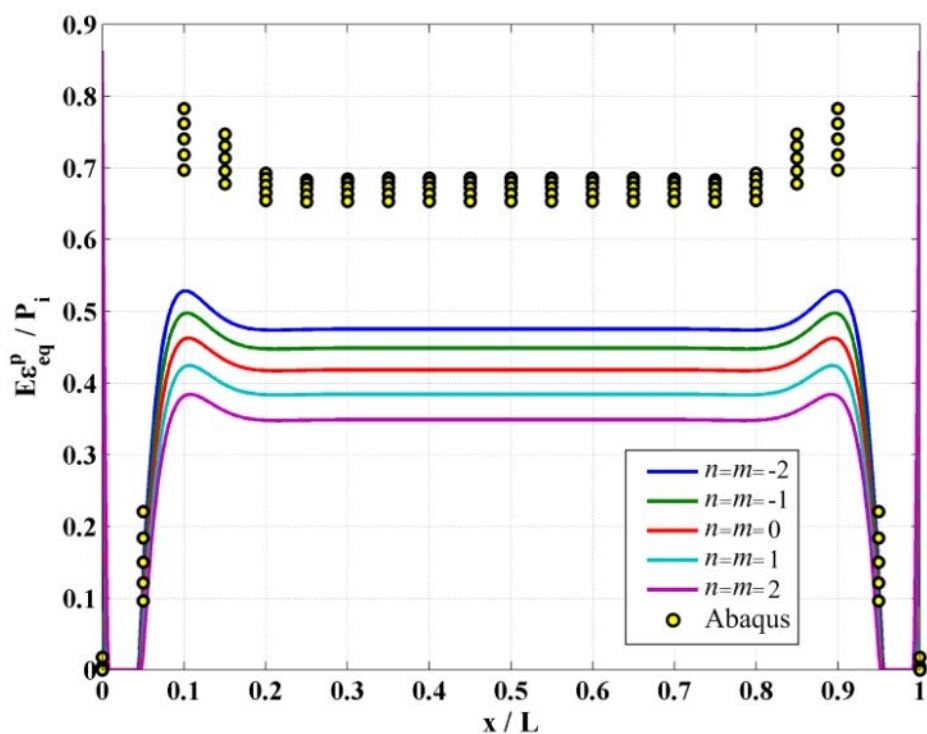
توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۱۴ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۱۵ مشاهده می‌نمایید. همان‌طور که می‌بینیم دقت این معیار در هر دو حالت برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف قابل قبول است. با پیشروی از $z = -h/4$ به سمت وسط استوانه از دقت نتایج کاسته می‌شود و این کاهش دقت با افزایش ثابت ناهمگنی افزایش می‌یابد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۱۶ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۱۷ آورده شده است. دقت نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف و همچنین در طول استوانه تقریباً یکسان است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۱۸ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۱۹ آورده شده است. هر چند کرنش پلاستیک معادل دقت کمی دارد ولی جابه‌جایی شعاعی دقت خوبی دارد. نتایج FSDT انطباق بیشتری با نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus در $z = -h/4$ نسبت به $z = 0$ دارند.



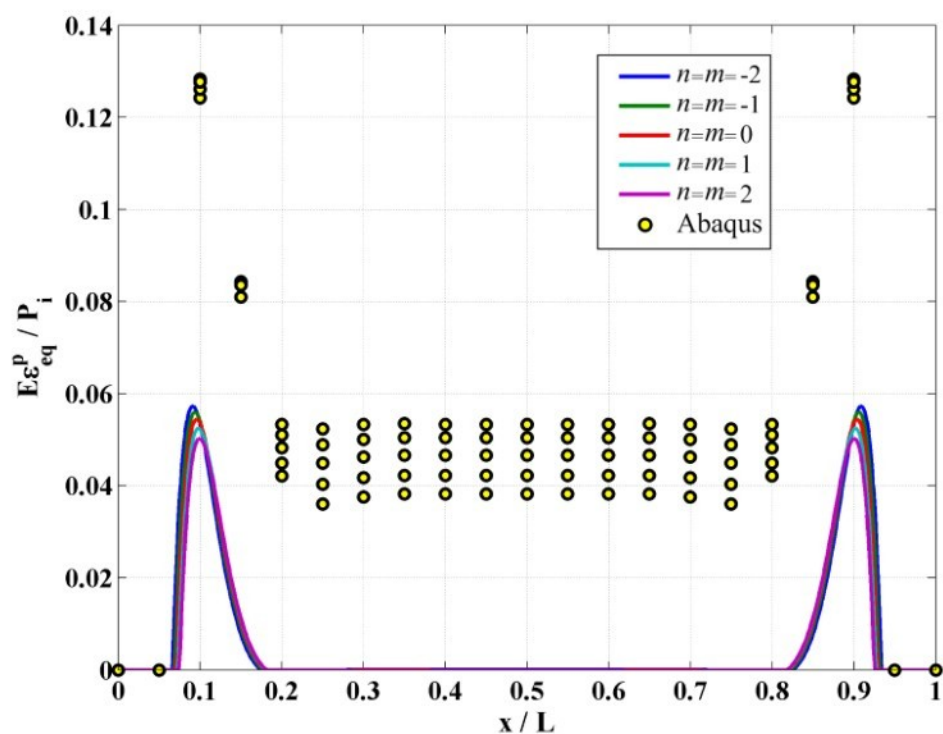
شکل ۲-۱۴- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



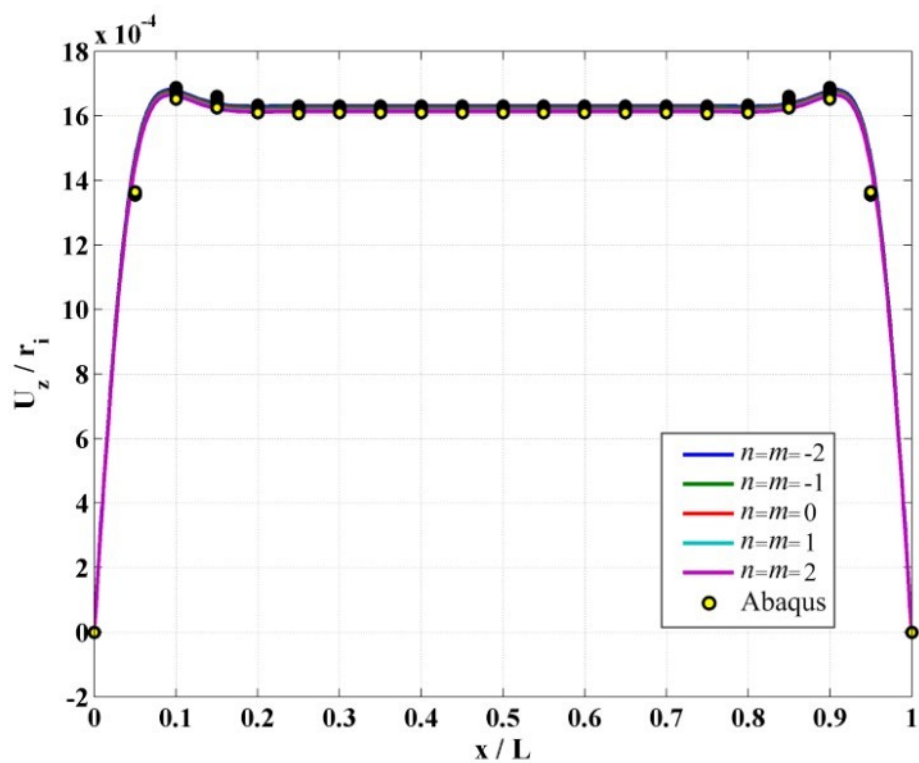
شکل ۲-۱۵- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = 0$



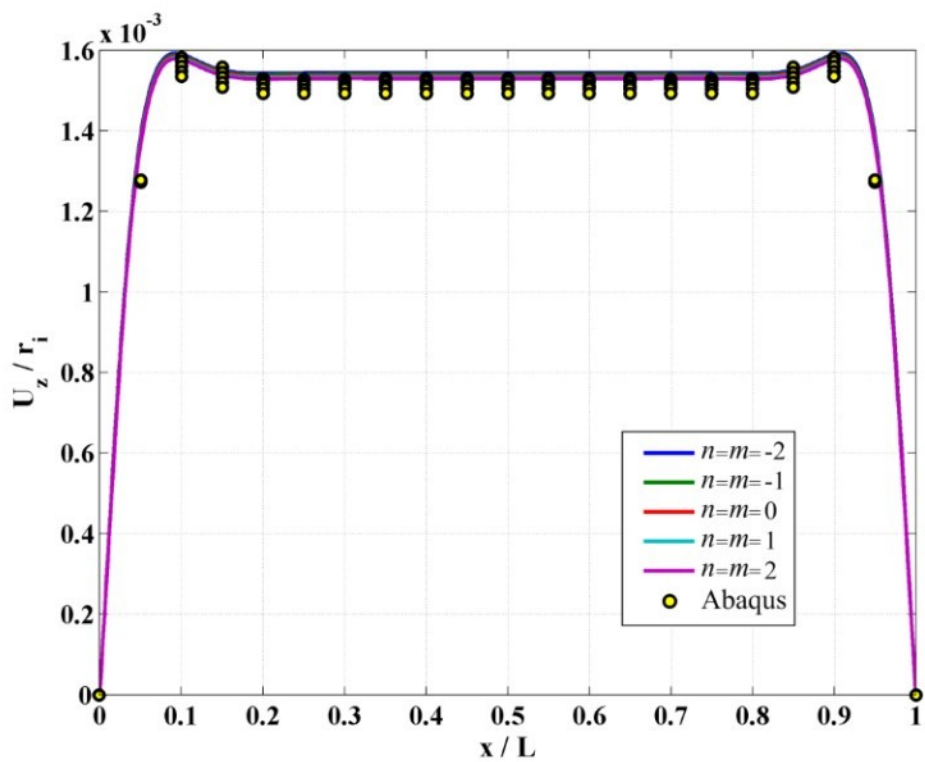
شکل ۲-۱۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z = -h/4$



شکل ۲-۱۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z = 0$

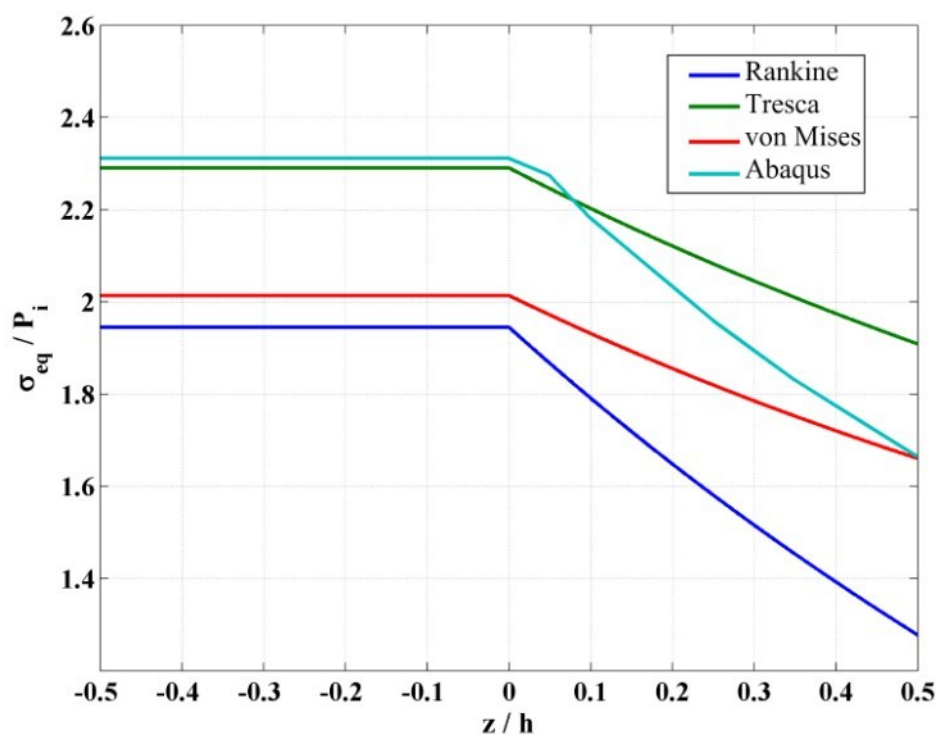


شکل ۲-۱۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z = -h/4$

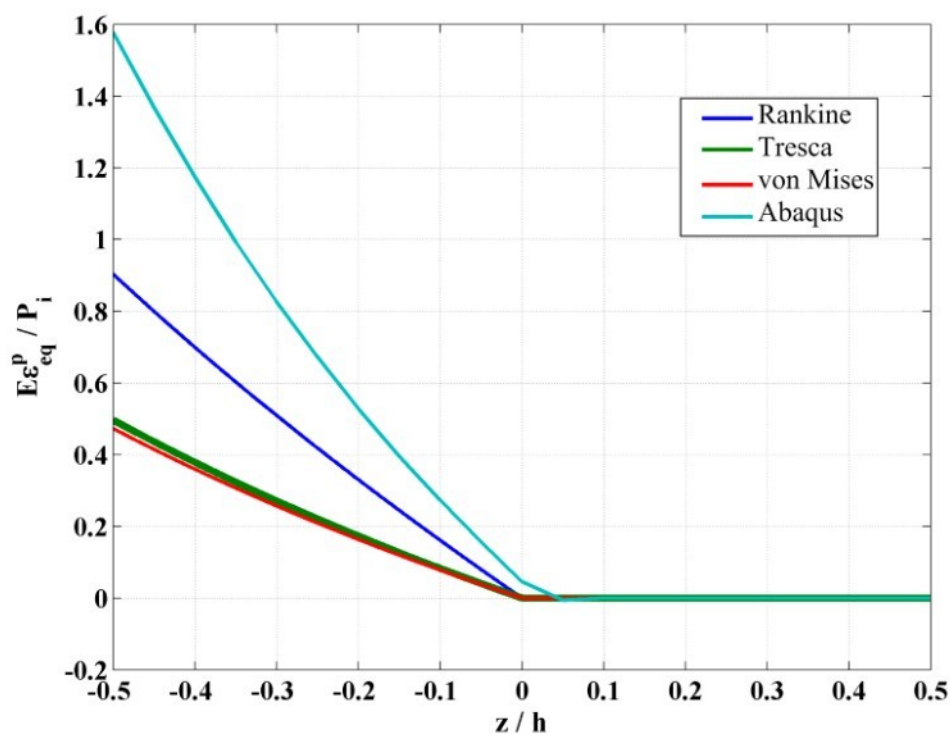


شکل ۲-۱۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z = 0$

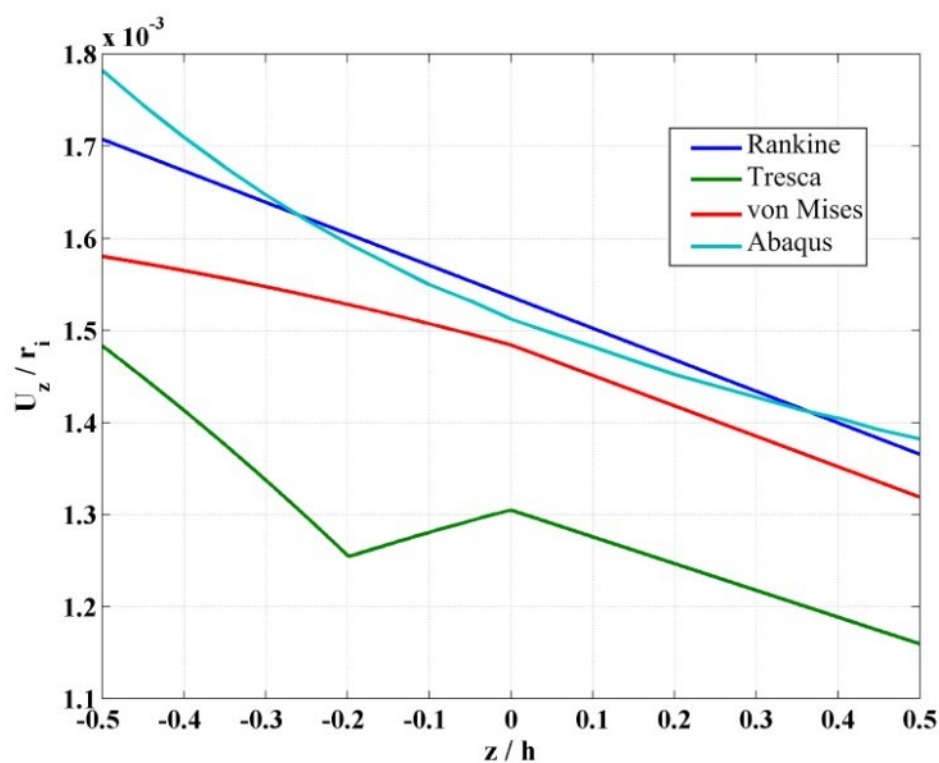
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۲-۲۰ آورده شده است. در نقاط تسلیم شده و اندکی پس از آن معیار ترسکا و در یک چهارم خارجی استوانه معیار فون میزز بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۲-۲۱ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها دقت قابل قبولی ندارند ولی معیار رانکین بیشترین دقت را در میان سه معیار دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۲-۲۲ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود معیار رانکین دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



شکل ۲-۲۰- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

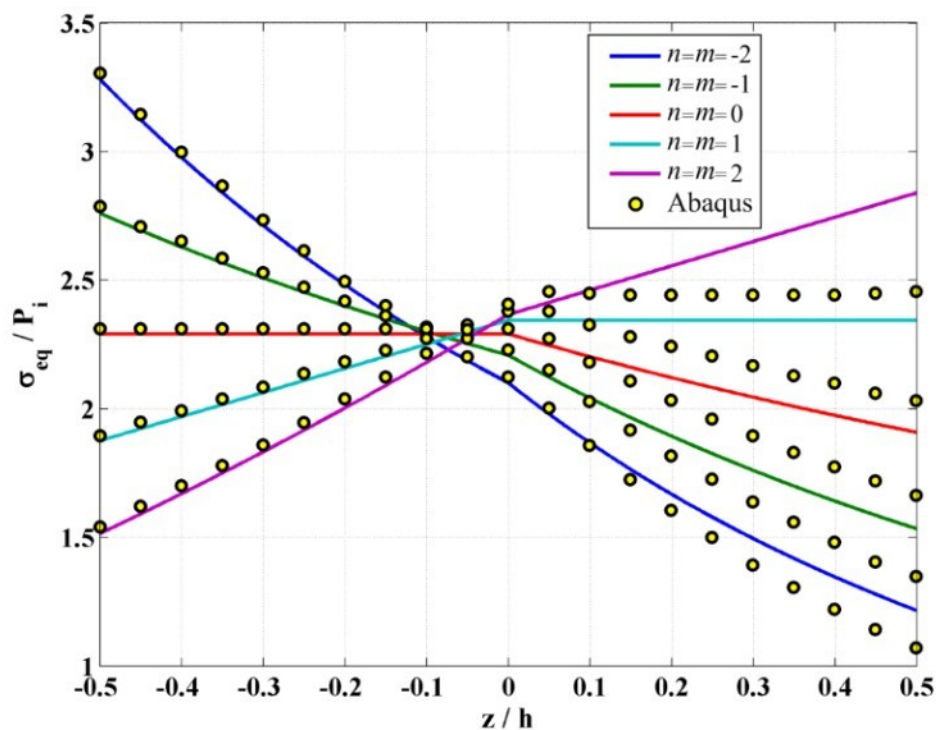


شکل ۲-۲۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

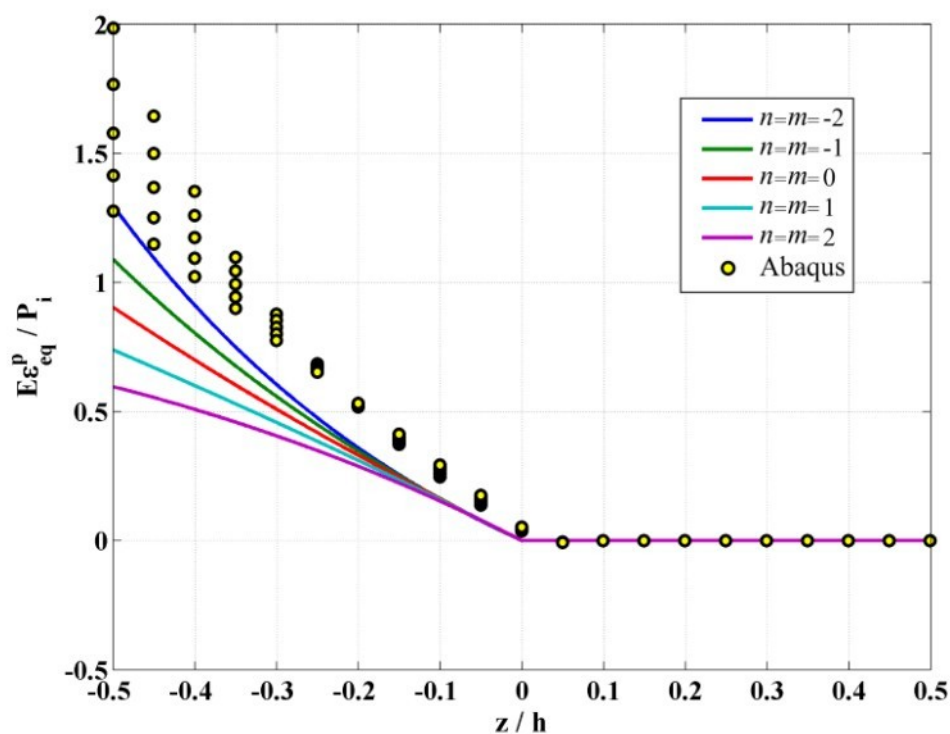


شکل ۲-۲۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

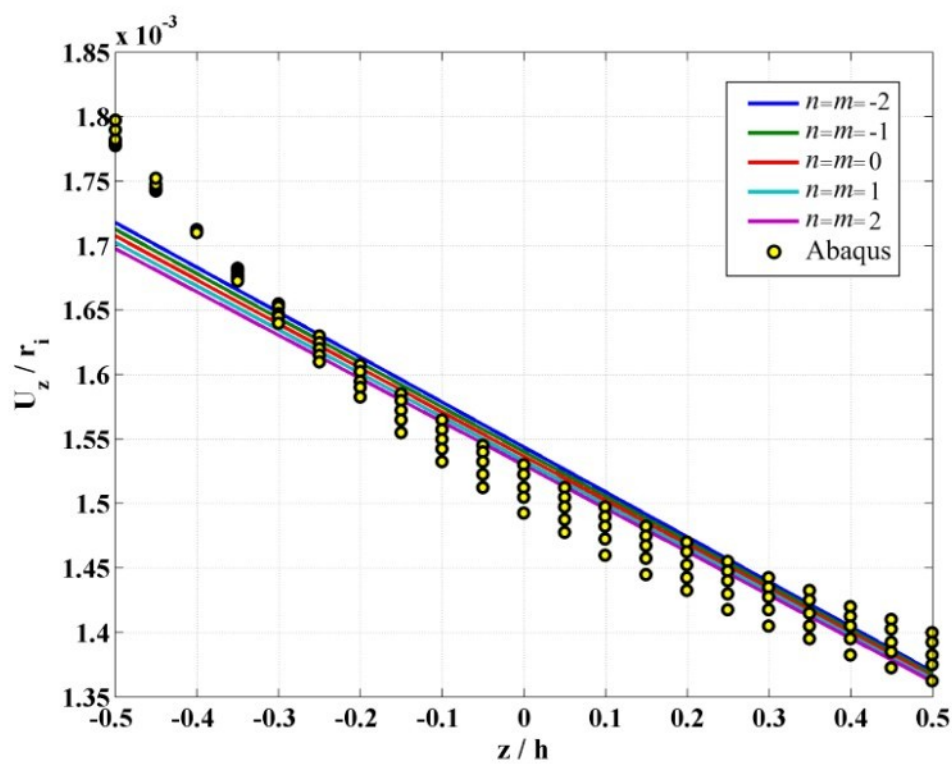
توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۲۳-۲ مشاهده می‌نمایید. این معیار برای سه چهارم داخلی استوانه برای تمام ثابت‌های ناهمگنی دقت خوبی دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۲۴-۲ آورده شده است. دقت نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر بیشتر است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۲۵-۲ آورده شده است. باز هم نتایج ارائه شده برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر دقیق‌ترند.



شکل ۲۳-۲- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۲-۲۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۲-۲۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۲-۷-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد

در جدول ۳-۲ فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود ارائه شده است و در جدول ۴-۲ فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود ارائه شده است. فشار خارجی در این دو حالت صفر در نظر گرفته شده است. در تمام موارد تسلیم استوانه از سطح داخلی آن ($z = -h/2$) آغاز می‌شود.

جدول ۳-۲- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus	
۵۹٫۵۷۴	۶۰٫۹۴۳	۶۵٫۱۳۷	۵۷٫۸۹	$n = m = -2$
۷۰٫۶۱۴	۷۲٫۴۶۴	۷۷٫۳۶۴	۶۷٫۵۴	$n = m = -1$
۸۴٫۸۲۳	۸۷٫۳۱۸	۹۳٫۱۱۲	۷۹٫۴۰	$n = m = 0$
۱۰۳٫۲۸۹	۱۰۶٫۶۵۸	۱۱۳٫۵۹۱	۹۳٫۹۳	$n = m = 1$
۱۲۷٫۵۱۴	۱۳۲٫۰۶۸	۱۴۰٫۴۷۲	۱۱۱٫۶۲	$n = m = 2$

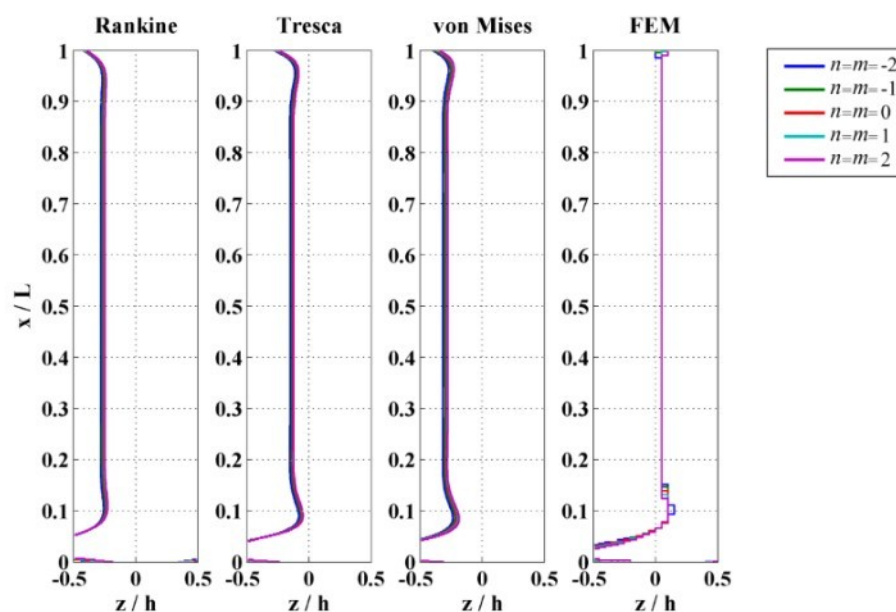
جدول ۴-۲- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus	
۹۰٫۵۵۷	۷۶٫۱۷۹	۸۲٫۵۸۵	۷۱٫۴۵	$n = m = -2$
۱۰۷٫۱۶۴	۹۰٫۵۷۹	۹۸٫۰۷۰	۸۵٫۴۴	$n = m = -1$
۱۲۸٫۵۱۹	۱۰۹٫۱۴۸	۱۱۸٫۰۱۱	۱۰۳٫۳۹	$n = m = 0$
۱۵۶٫۲۴۶	۱۳۳٫۳۱۹	۱۴۳٫۹۳۴	۱۲۶٫۶۲	$n = m = 1$
۱۹۲٫۵۹۵	۱۶۵٫۰۸۲	۱۷۷٫۹۵۷	۱۵۶٫۹۲	$n = m = 2$

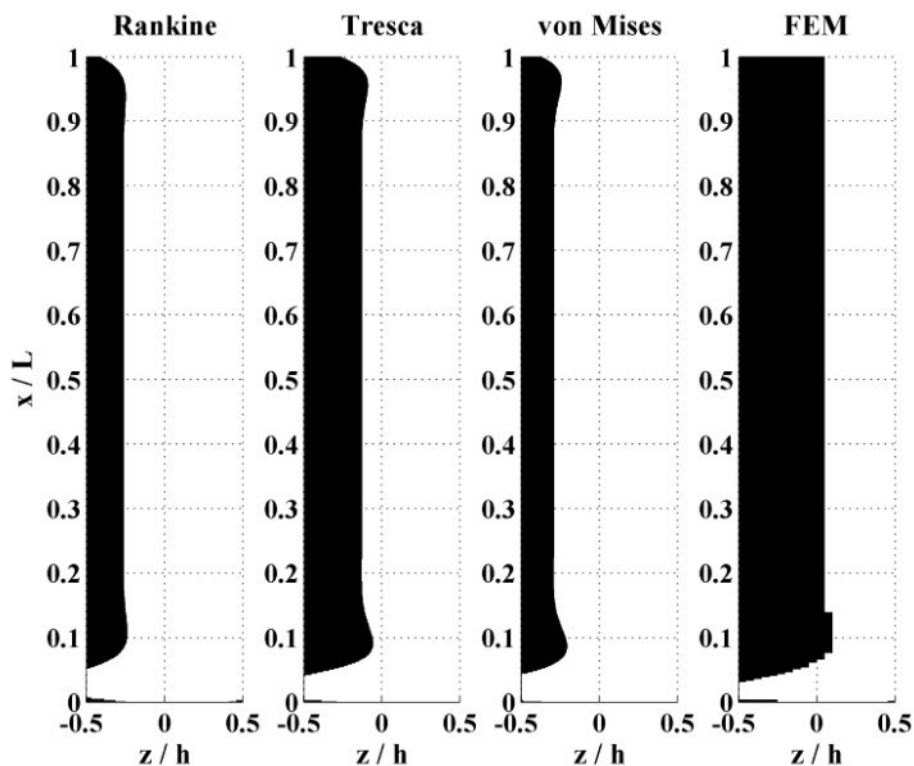
همان‌طور که در جدول‌ها مشاهده می‌کنید در این حالت نیز با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج جدول ۳-۲ می‌توان دریافت که معیار رانکین نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه دارد که با افزایش ثابت ناهمگنی از دقت نتایج آن کاسته می‌شود. با توجه به نتایج جدول ۴-۲ می‌توان دریافت که معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری در پیش‌بینی فشار تسلیم سطح میانی دارد.

لازم به ذکر است که نتایج معیارهای رانکین و ترسکا تفاوت چندانی با نتایج این دو معیار در استوانه با دو سر گیردار ندارد و این به معنی تاثیر بسیار کم شرط مرزی مورد نظر، بر روی نتیجه‌ی حاصل از این دو معیار در وسط طول استوانه است.

شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه با ثابت‌های ناهمگنی مختلف در شکل ۲-۲۶ و تصویر مناطق تسلیم شده‌ی استوانه در شکل ۲-۲۷ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار برابر فشار تسلیم لایه‌ی میانی که به کمک نرم‌افزار Abaqus به دست آمده است در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار بررسی شده دارد. همچنین ثابت ناهمگنی تاثیر چندانی بر روی شکل و شعاع ناحیه‌ی پلاستیک در فشار تسلیم لایه‌ی میانی ندارد و فقط بر روی میزان این فشار تاثیر می‌گذارد.

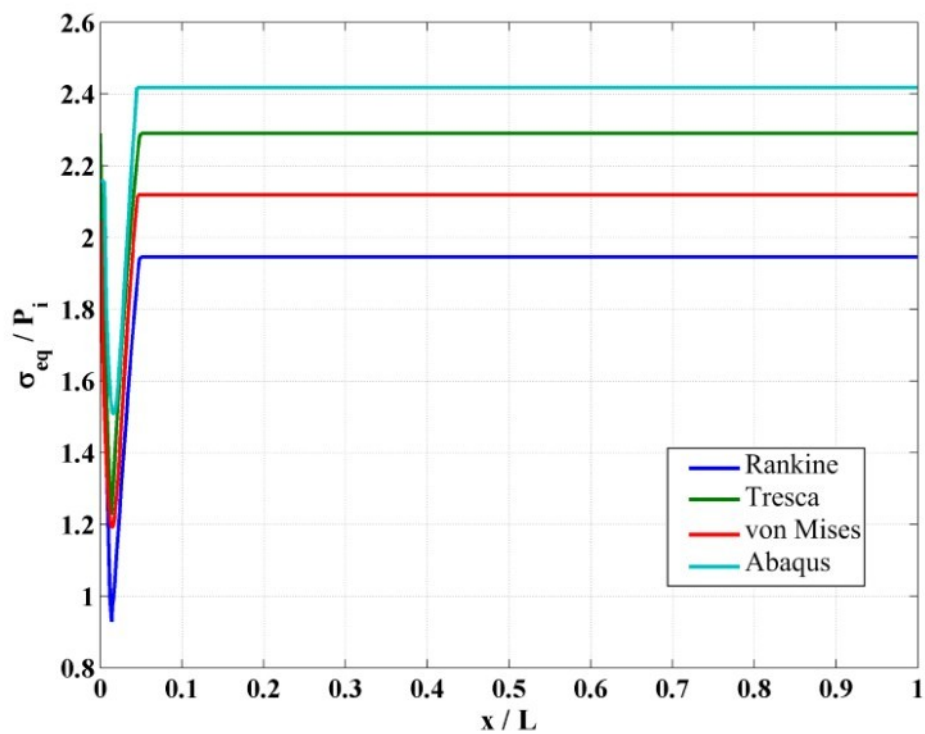


شکل ۲-۲۶- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

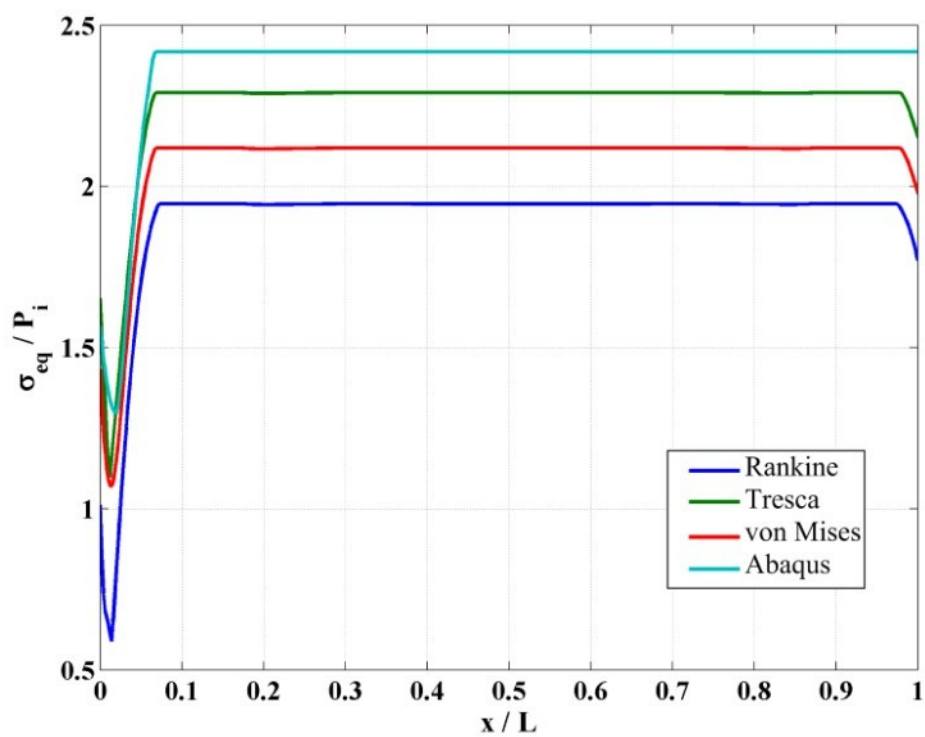


شکل ۲-۲۷- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

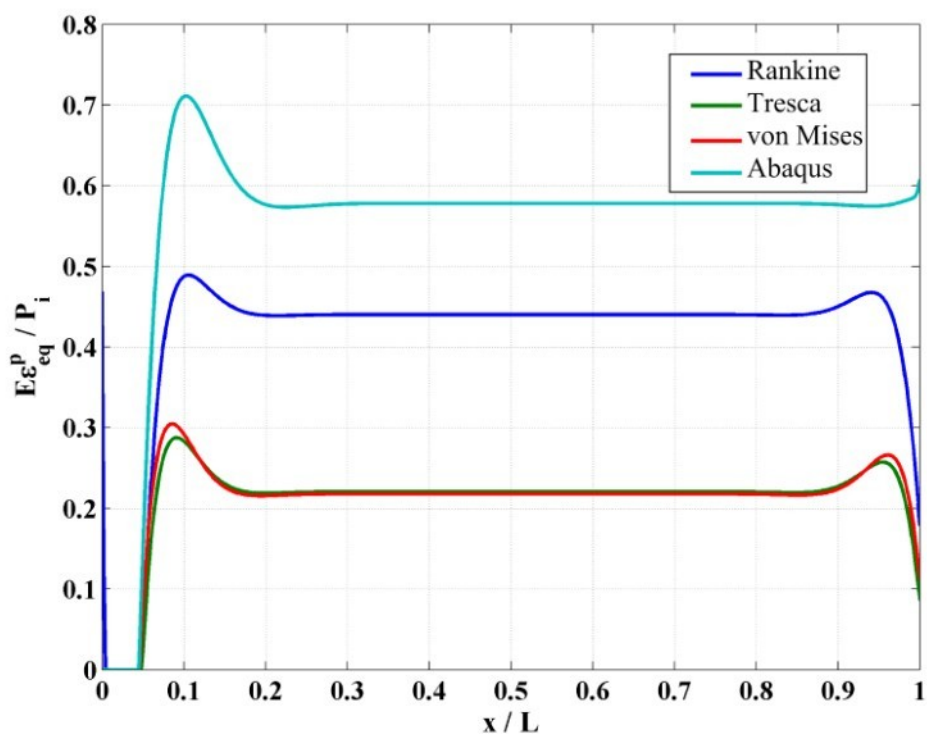
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۲-۴) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۲۸ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۲۹ آورده شده است. معیار ترسکا در هر دو حالت بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۳۰ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۳۱ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها در این دو حالت دقت قابل قبولی ندارند. برای $z = -h/4$ معیار رانکین بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۲-۳۲ و برای $z = 0$ در شکل ۲-۳۳ آورده شده است. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی معیار فون‌میزز دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



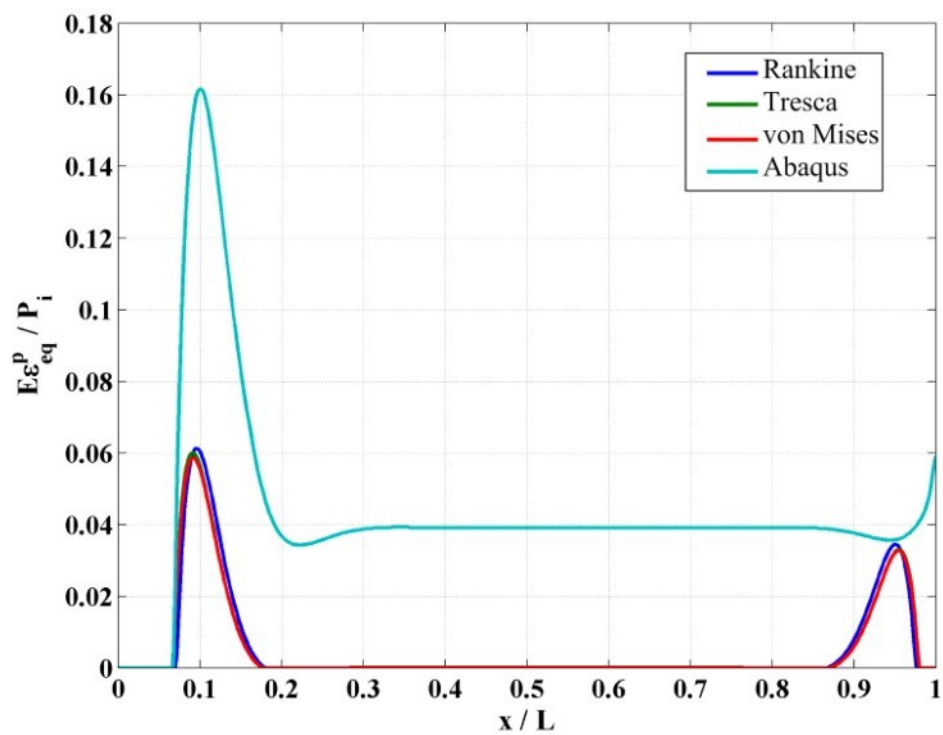
شکل ۲-۲۸- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



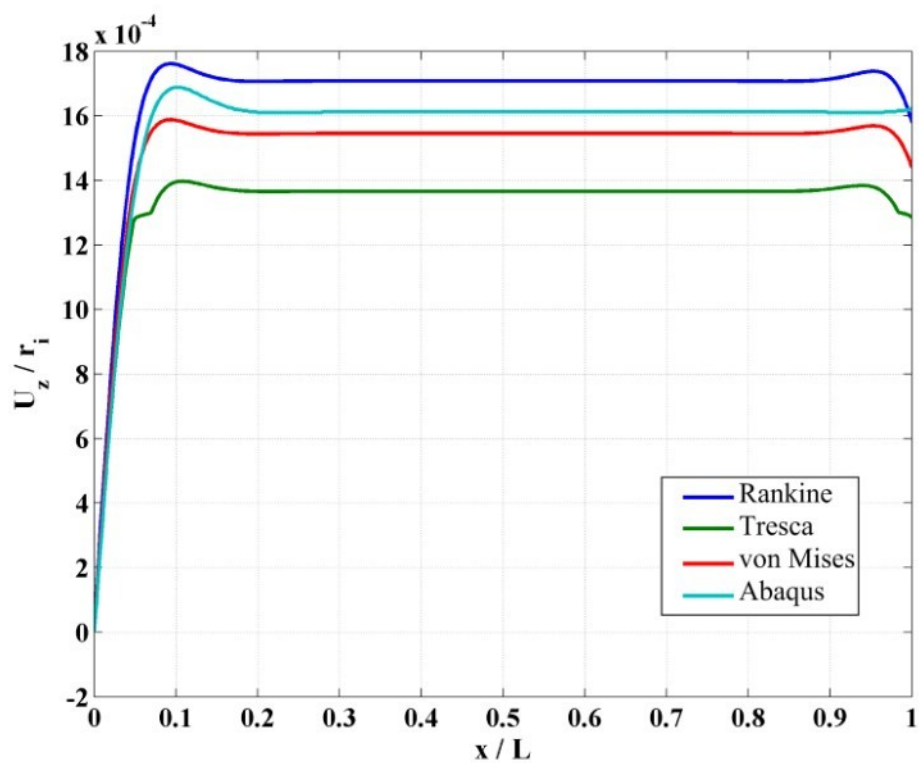
شکل ۲-۲۹- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



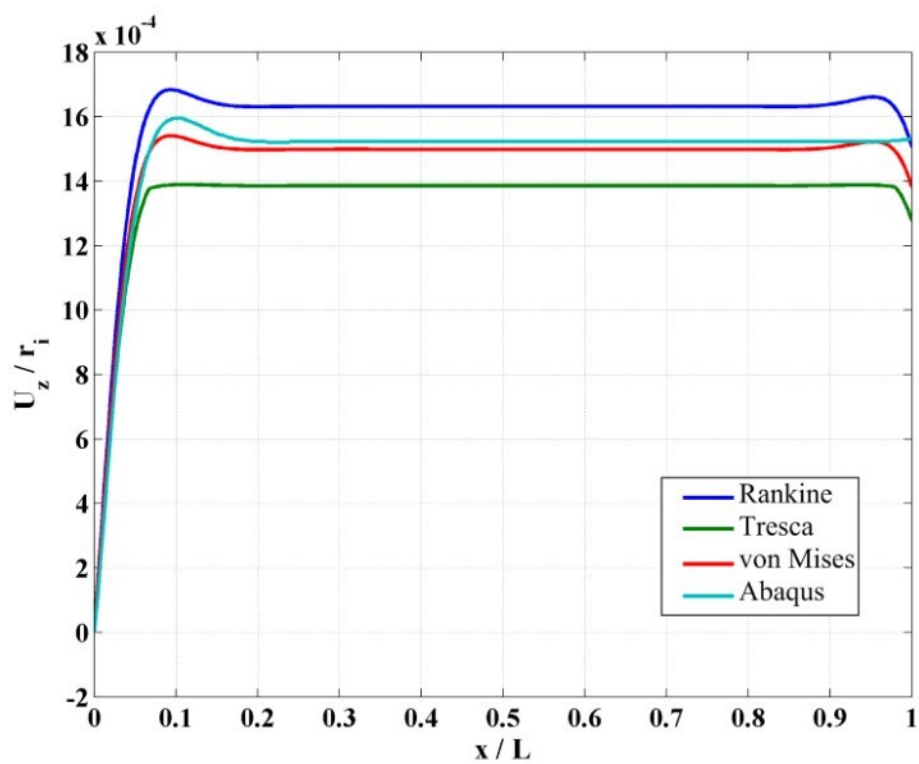
شکل ۲-۳۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۲-۳۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

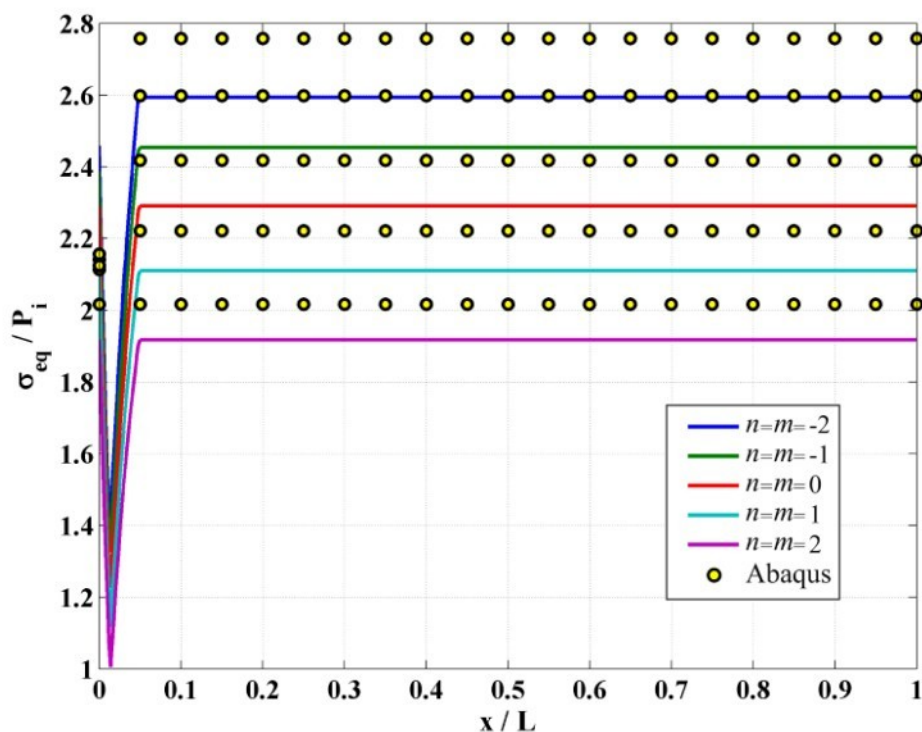


شکل ۲-۳۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

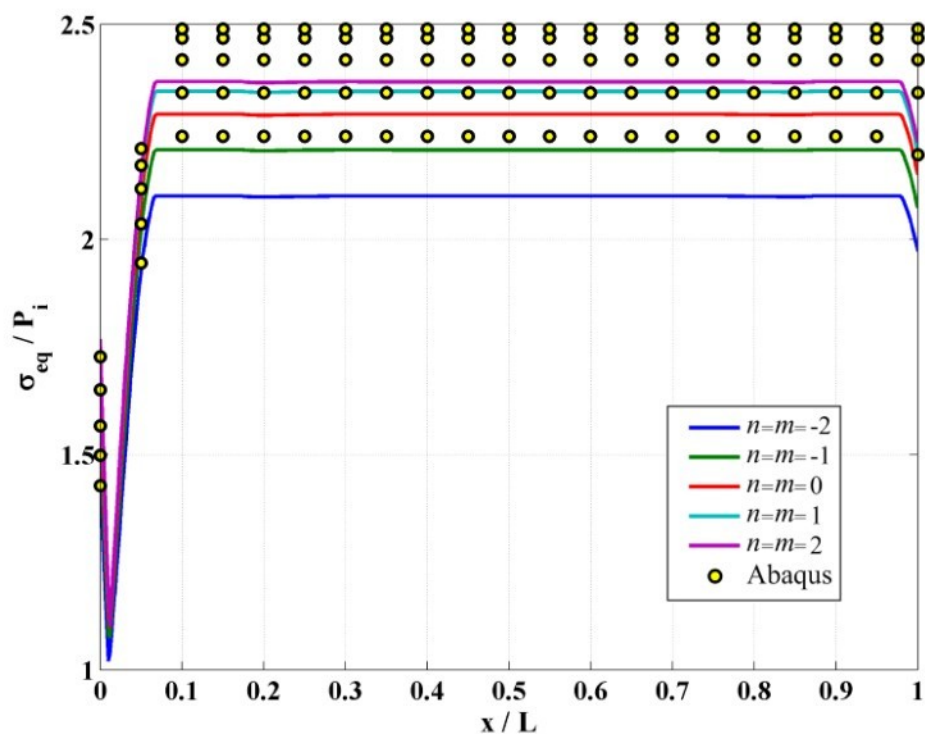


شکل ۲-۳۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

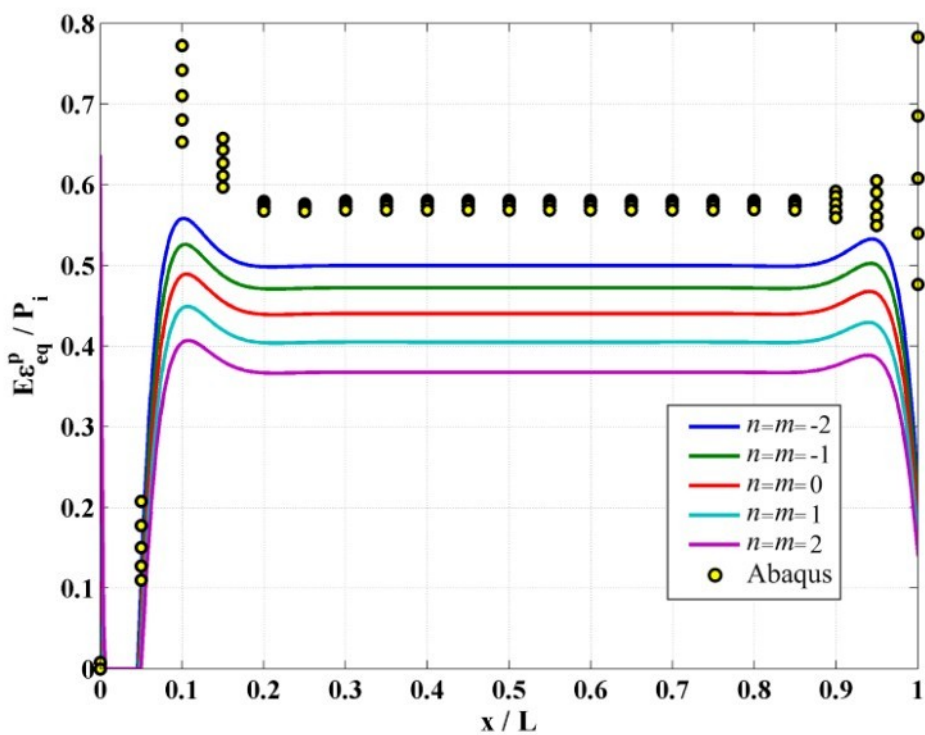
توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۳۴-۲ و برای $z = 0$ در شکل ۳۵-۲ مشاهده می‌نمایید. با پیشروی از $z = -h/4$ به سمت وسط استوانه نتایج دقیق‌تر می‌شوند. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳۶-۲ و برای $z = 0$ در شکل ۳۷-۲ آورده شده است. در $z = -h/4$ ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر از دقت بیشتری برخوردارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳۸-۲ و برای $z = 0$ در شکل ۳۹-۲ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده دقت خوبی دارد و دقت نتایج در وسط استوانه بیشتر از دقت نتایج در $z = -h/4$ است. همان‌طور که در نمودارهای این بخش دیده می‌شود در سر آزاد کرنش پلاستیک معادل و جابه‌جایی حاصل از حل تحلیلی برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف همگی به یک مقدار می‌رسند ولی نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus در سر آزاد به مقادیر مختلفی می‌رسند. دقت نتایج ارائه شده از روش FSDT برای استوانه با دو سر گیردار بیشتر از دقت نتایج برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد است.



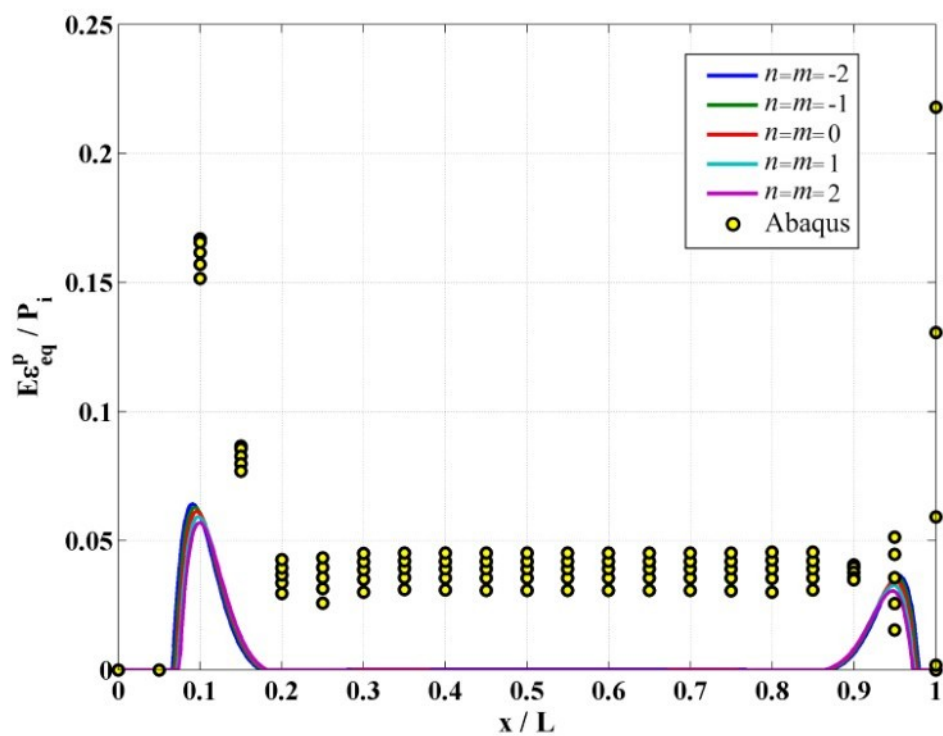
شکل ۳۴-۲- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



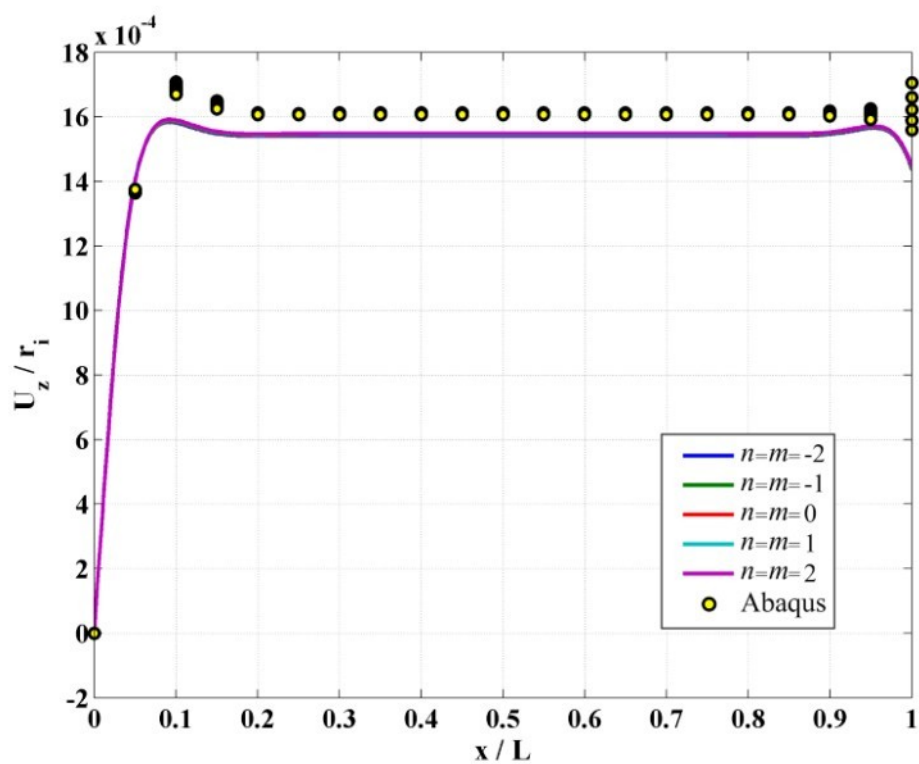
شکل ۲-۳۵- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$



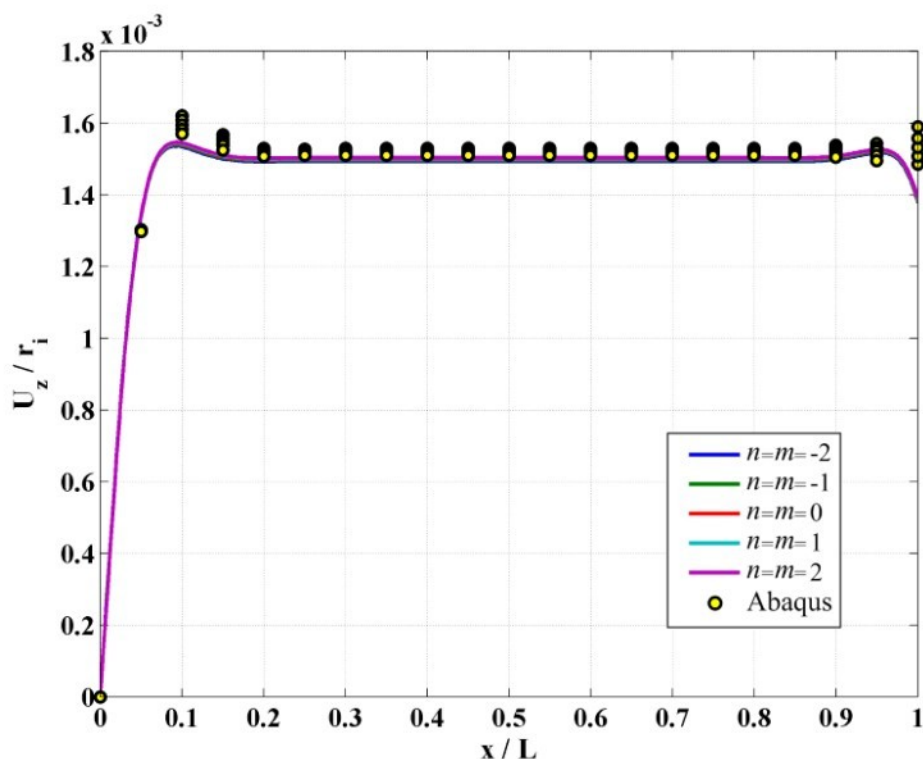
شکل ۲-۳۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z=-h/4$



شکل ۳۷-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین در طول استوانه برای $z = 0$

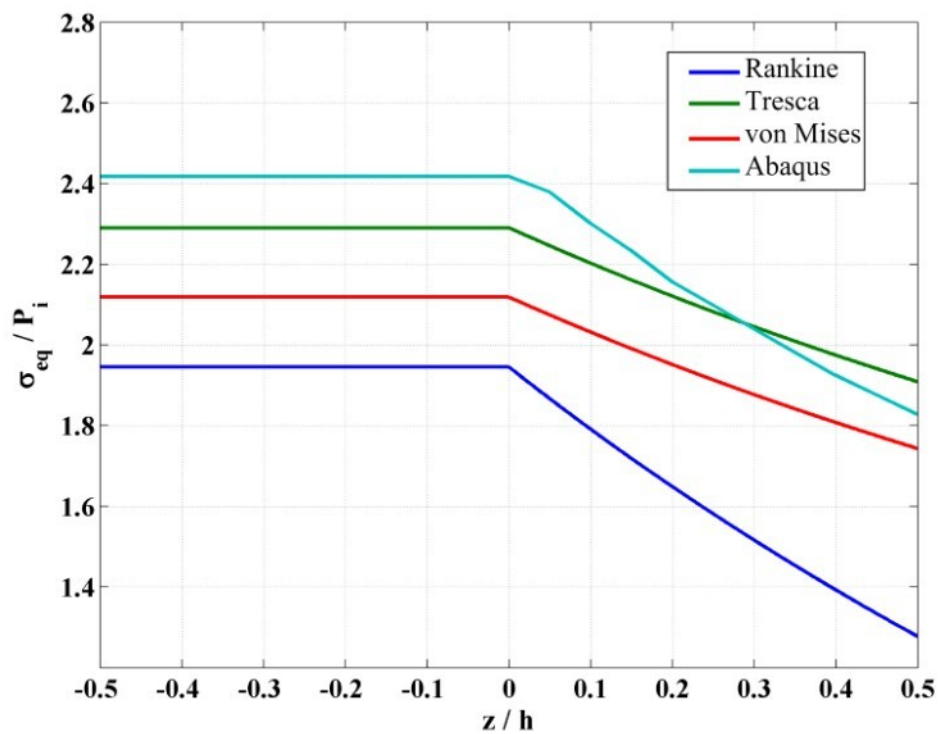


شکل ۳۸-۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$

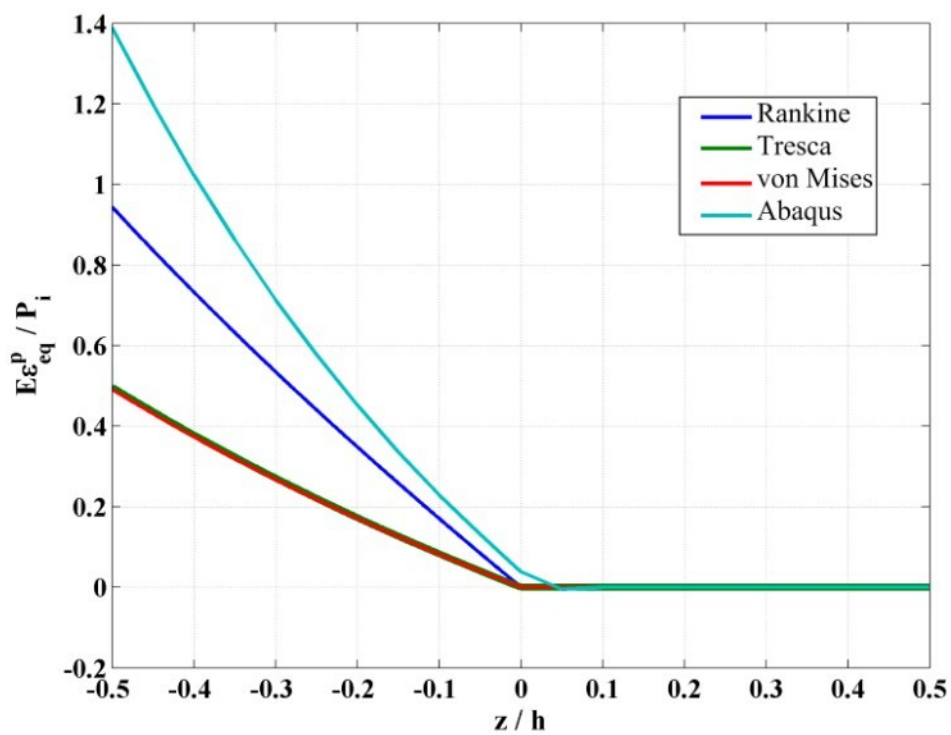


شکل ۲-۳۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

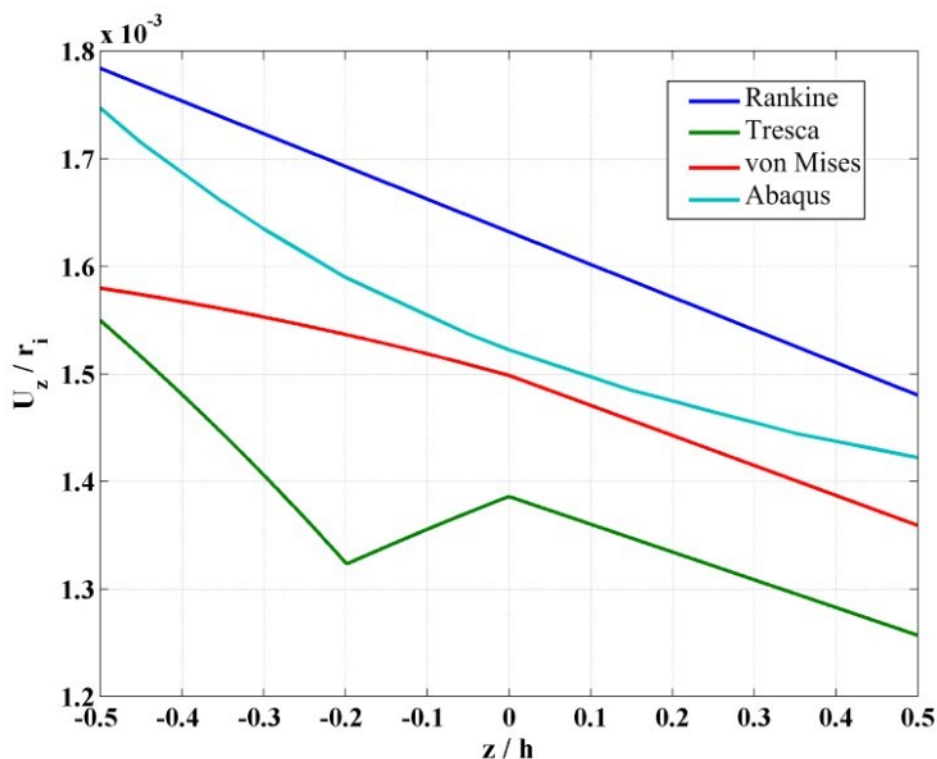
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۲-۴۰ آورده شده است. معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۲-۴۱ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها دقت قابل قبولی ندارند ولی معیار رانکین بیشترین دقت را در میان سه معیار دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۲-۴۲ آورده شده است. معیار فون میزز دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است البته در یک دهم داخلی استوانه معیار رانکین دقیق‌تر از سایر معیارهاست.



شکل ۴۰-۲- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

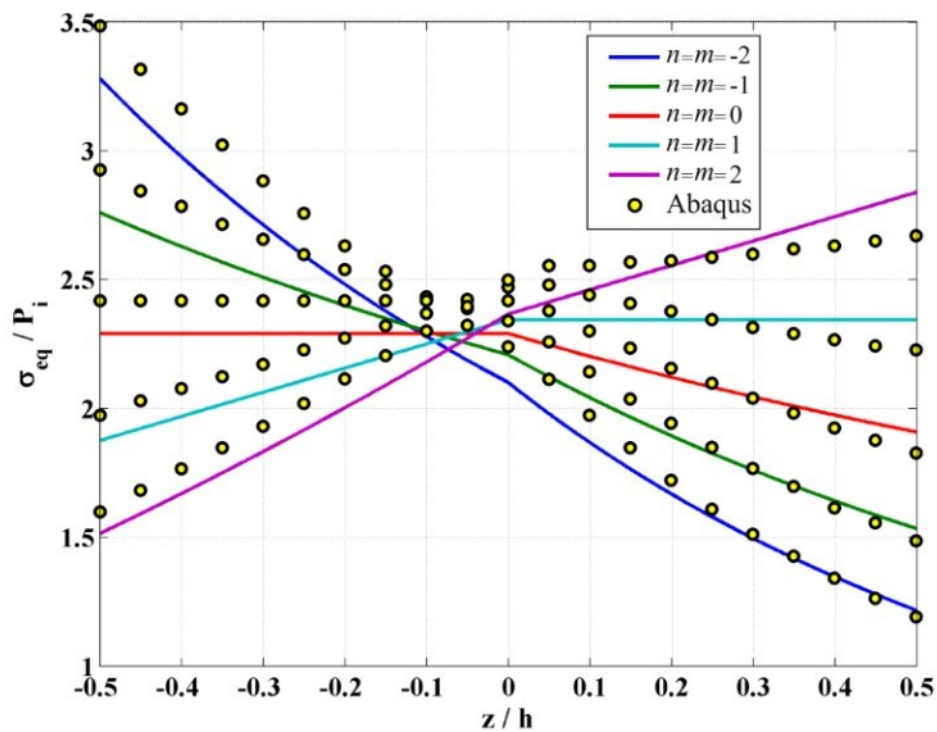


شکل ۴۱-۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

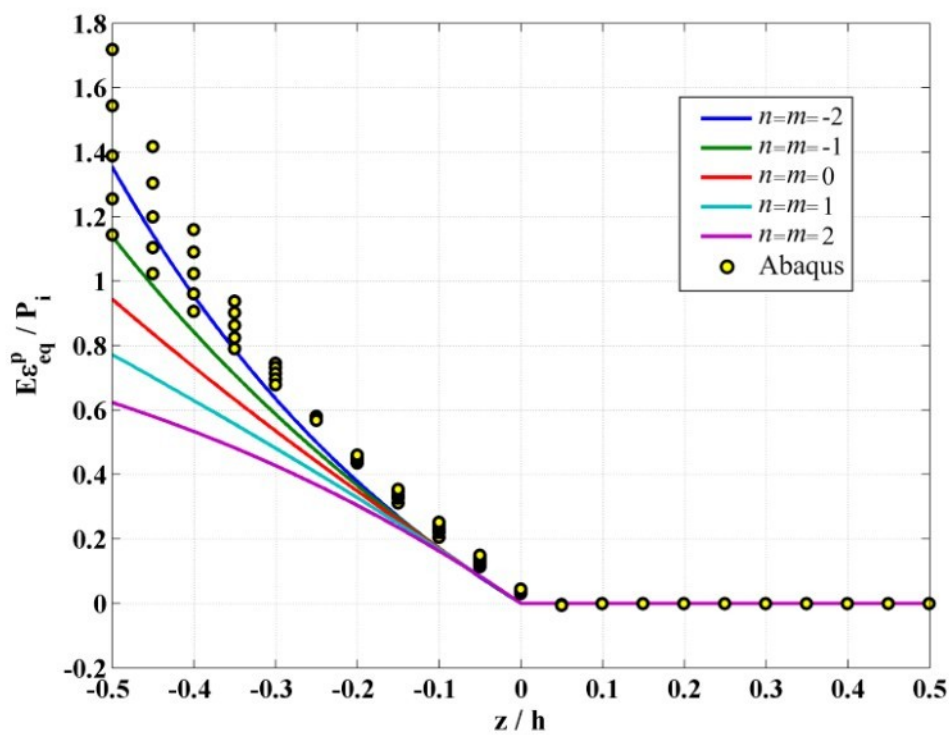


شکل ۲-۴۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

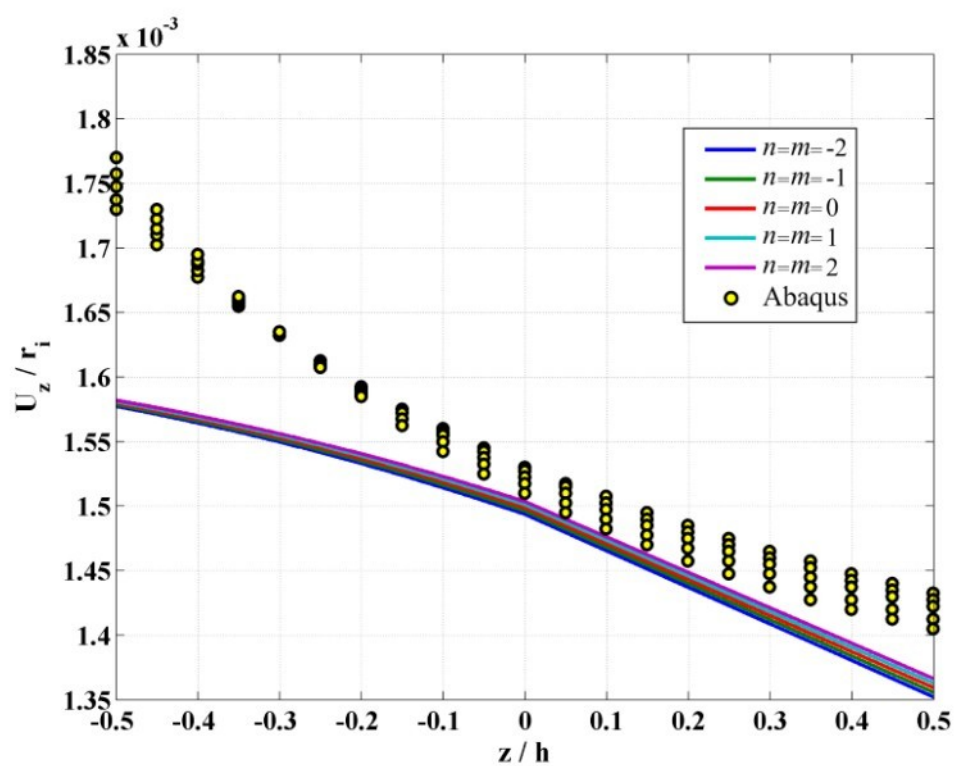
توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۲-۴۳ مشاهده می‌نمایید. این معیار برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک در یک چهارم خارجی دقت قابل قبولی دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۲-۴۴ آورده شده است. دقت نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر بیشتر است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۲-۴۵ آورده شده است. مشاهده می‌شود که دقت نتایج در نیمه‌ی خارجی استوانه بیشتر است.



شکل ۲-۴۳- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۲-۴۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۲-۴۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

فصل ۳- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به

کمک تئوری تغییر شکل برشی

مرتبه‌ی اول

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

- ❖ ترموالاستیسیته
- ❖ استخراج روابط ترموالاستیک
- ❖ اعمال شرایط مرزی
- ❖ بررسی جریان پلاستیک
- ❖ مطالعه‌ی موردی
- ❖ ارائه و مقایسه‌ی نتایج

در این فصل پس از نگاهی کوتاه بر ترموالاستیسیته، با استفاده از حل معادله‌ی انتقال حرارت در حالت پایا به یافتن توزیع دما در استوانه‌ای که در معرض درجه‌ی حرارت یکنواخت در سطوح داخلی و خارجی قرار دارد می‌پردازیم. سپس معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ی جدار کلفت متقارن محوری ساخته شده از مواد FG با تغییرات توانی خواص تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی در معرض دماهای ذکر شده بیان می‌شوند و روش حل آن‌ها برای استوانه با دو سر گیردار و استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد ارائه می‌شود. پس از آن به بیان روند تحلیل الاستوپلاستیک پرداخته می‌شود. در پایان به مطالعه‌ی موردی مسأله و بیان نتایج حاصل از حل آن و مقایسه‌ی آن‌ها با نتایج حاصل از حل مسأله به کمک نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus پرداخته شده است.

۳-۱- ترموالاستیسیته

وقتی به یک جسم کشسان انرژی گرمایی داده شود جسم منبسط می‌شود و با گرفتن این انرژی دوباره به شکل اول باز می‌گردد. گرما هیچ تنش‌ی در یک جسم آزاد به وجود نمی‌آورد ولی اگر قیدهایی مانع انبساط آزادانه‌ی جسم شوند تنش در جسم به وجود می‌آید. کرنش حرارتی یک کرنش عمودی بوده و در تمام جهت‌ها ایجاد می‌شود. کرنش حرارتی در یک جسم به کمک رابطه‌ی زیر قابل محاسبه است:

$$\varepsilon^{th} = \alpha \theta \quad (۱-۳)$$

در رابطه‌ی فوق α ضریب انبساط ماده است که برای یک جسم همسان‌گرد در تمام جهت‌ها و برای یک جسم همگن در تمام نقاط یکسان است. منظور از θ اختلاف دمای نقطه با دمای مرجع است که به صورت رابطه‌ی (۲-۳) تعریف می‌شود.

$$\theta = T - T^* \quad (۲-۳)$$

جابه‌جایی‌ها و کرنش‌ها به کمک روابط سینماتیک (روابط ۳-۳) برای یک استوانه‌ی متقارن محوری به یکدیگر وابسته‌اند. این کرنش‌ها ترکیبی از کرنش‌های مکانیکی و کرنش‌های حرارتی

می‌باشند. کرنش‌های مکانیکی با روابط تنش-کرنش (روابط ۳-۴ برای یک استوانه‌ای متقارن محوری)

به تنش‌ها مرتبط می‌شوند و کرنش‌های حرارتی از رابطه‌ی (۳-۱) محاسبه می‌شوند.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}. \quad (3-3)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \lambda E \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^m \quad (4-3)$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^m + \vec{\varepsilon}^{th} \quad (5-3)$$

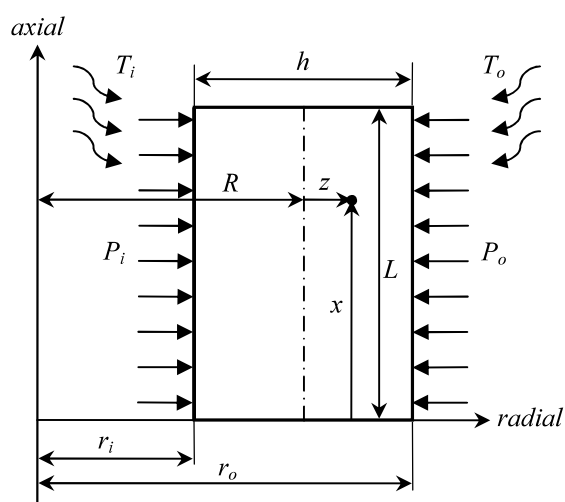
کرنش‌های حرارتی در یک استوانه‌ای متقارن محوری همسان‌گرد از این رابطه محاسبه

می‌شوند:

$$\vec{\varepsilon}^{th} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{th} = \alpha \theta \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6-3)$$

از ترکیب روابط (۳-۴ تا ۶) رابطه‌ی بین تنش‌ها و کرنش‌های کلی قابل محاسبه است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \lambda E \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\theta \\ \varepsilon_\theta - \alpha\theta \\ \varepsilon_z - \alpha\theta \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (7-3)$$



شکل ۳-۱- پروفیل استوانه‌ای جدار ثابت در معرض دما و فشار داخلی و خارجی

برای یافتن توزیع دما در استوانه (θ) باید معادله‌ی انتقال حرارت را برای استوانه در حالت پایا حل کنیم. معادله‌ی انتقال حرارت به صورت زیر است:

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (۸-۳)$$

در حالت پایا سمت راست رابطه‌ی فوق صفر می‌شود و با عدم وجود تولید حرارت در داخل جسم رابطه‌ی (۸-۳) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\vec{\nabla} \cdot (k \vec{\nabla} T) = 0 \quad (۹-۳)$$

در این تحقیق از تغییرات ضریب هدایت حرارتی (k) نسبت به شعاع که به دلیل ناهمگن بودن ماده به وجود می‌آید چشم‌پوشی می‌کنیم و آن را ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T = 0 \quad (۱۰-۳)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۲-۳) در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \theta = 0 \quad (۱۱-۳)$$

دما در کل سطح داخلی و خارجی استوانه یکسان، ضخامت استوانه در تمام نقاط ثابت و استوانه دارای تقارن محوری می‌باشد. بنابراین θ فقط تابعی از شعاع است:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\theta}{dr} \right) = 0 \quad (۱۲-۳)$$

از حل معادله‌ی فوق به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\theta(r) = c_{T1} \ln(r) + c_{T2} \quad (۱۳-۳)$$

با تقسیم r بر شعاع داخلی رابطه را نسبت به شعاع بی بعد می‌نماییم:

$$\theta(r) = c_{T1} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + c_{T2} \quad (۱۴-۳)$$

ثابت‌های رابطه‌ی فوق به کمک دمای سطوح داخلی و خارجی که به شکل رابطه‌ی (۱۵-۳) می‌باشند قابل محاسبه‌اند:

$$\theta(r_i) = T_i - T^*, \quad \theta(r_o) = T_o - T^*. \quad (۱۵-۳)$$

$$\Rightarrow c_{T1} = \frac{T_o - T_i}{a}, \quad c_{T2} = T_i - T^*. \quad (۱۶-۳)$$

بنابراین توزیع دما در استوانه به صورت زیر به دست می آید:

$$\theta(r) = \frac{T_o - T_i}{a} \ln\left(\frac{r}{r_i}\right) + T_i - T^* \quad (۱۷-۳)$$

این توزیع دما بر حسب z عبارت است از:

$$\theta(z) = \frac{T_o - T_i}{a} \ln\left(\frac{R+z}{r_i}\right) + T_i - T^* \quad (۱۸-۳)$$

۳-۲- استخراج روابط ترموالاستیک

در این بخش به بیان تغییرات به وجود آمده در روابط ارائه شده در بخش ۲-۳ به دلیل وجود بار حرارتی می پردازیم و روابط مورد نیاز برای حل ترموالاستیک پوسته‌ای استوانه‌ای جدار کلفت FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و اصل کار مجازی ارائه می شود.

در این تحقیق توزیع ضریب انبساط ماده مشابه توزیع مدول الاستیسیته و توزیع استحکام تسلیم به صورت تابعی توانی نسبت به شعاع در نظر گرفته می شود:

$$\alpha = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i}\right)^l = \frac{\alpha_i}{r_i^l} (R+z)^l \quad (۱۹-۳)$$

در رابطه‌ی فوق α_i ضریب انبساط خطی در سطح داخلی استوانه و l ثابت ناهمگنی ضریب انبساط است که الزاماً با ثابت ناهمگنی مدول الاستیسیته (n) و یا ثابت ناهمگنی استحکام تسلیم (m) برابر نیست.

با طی روندی مشابه بخش ۲-۳ به دستگاه معادلات دیفرانسیل حاکم بر استوانه می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} & \left[\sigma_x \left(\frac{d}{dx} \delta u + z \frac{d}{dx} \delta \varphi \right) + \frac{\sigma_\theta}{R+z} (\delta w + z \delta \psi) + \sigma_z \delta \psi \right. \\ & \left. + \tau_{xz} \left(\delta \varphi + \frac{d}{dx} \delta w + z \frac{d}{dx} \delta \psi \right) \right] (R+z) dz dx \quad (۲۰-۳) \\ & = \int_0^L \left[P_i r_i \left(\delta w - \frac{h}{2} \delta \psi \right) - P_o r_o \left(\delta w + \frac{h}{2} \delta \psi \right) \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{cases} R \frac{dN_x}{dx} = 0 \\ R \frac{dM_x}{dx} - RQ_x = 0 \\ R \frac{dQ_x}{dx} - N_\theta = P_o r_o - P_i r_i \\ R \frac{dM_{xz}}{dx} - M_\theta - RN_z = \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \end{cases}, \quad (21-3)$$

$$R[N_x \delta u + M_x \delta \varphi + Q_x \delta w + M_{xz} \delta \psi]_0^L = 0.$$

$$\begin{cases} \tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \vec{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \vec{y} + \tilde{C} \vec{y} = \vec{F}^P + \vec{F}^{th} = \vec{F} \\ \vec{y} = \{u \quad \varphi \quad w \quad \psi\}^T \\ \vec{F}^P = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \left\{ 0 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \\ \vec{F}^{th} = -(1+\nu) \frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+l} \theta(z) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ R+2z \end{Bmatrix} dz \end{cases} \quad (22-3)$$

در معادله‌ی فوق نیز مانند قبل ماتریس‌های ضرایب به کمک انتگرال‌های (۲-۳۰ تا ۳۲)

محاسبه می‌شوند. باز هم مشابه قبل به دلیل وارون‌پذیر نبودن $[C_{ij}]$ قادر به حل معادله‌ی فوق نیستیم

و نیاز به ایجاد تغییراتی در معادلات است. تغییرات مورد نیاز مشابه بخش ۲-۳ انتگرال‌گیری از اولین

معادله‌ی مجموعه‌ی (۲۱-۳) نسبت به x و قرار دادن u' به جای مشتق u نسبت به x است:

$$RN_x = c_7 \quad (23-3)$$

$$u' = \frac{du}{dx} \Rightarrow u = \int u' dx + c_8 \quad (24-3)$$

پس از اعمال این تغییرات دستگاه معادلات (۲۲-۳) به شکل زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \vec{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \vec{y} + \tilde{C} \vec{y} = \vec{F}^P + \vec{F}^{th} = \vec{F} \\ \vec{y} = \{u' \quad \varphi \quad w \quad \psi\}^T \\ \vec{F}^P = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \\ \vec{F}^{th} = -(1+\nu) \frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+l} \theta(z) \begin{Bmatrix} -(R+z) \\ 0 \\ 1 \\ R+2z \end{Bmatrix} dz \end{cases} \quad (25-3)$$

درایه‌های غیر صفر ماتریس‌های ضرایب به کمک روابط (۲-۳۸ تا ۴۰) قابل محاسبه‌اند.

مشابه آن چه که در بخش ۳-۲ مطرح شد دستگاه معادلات (۳-۲۵) پاسخی شامل دو بخش عمومی و خصوصی به شکل رابطه‌ی (۳-۲۶) دارد که پاسخ خصوصی آن از رابطه‌ی (۳-۲۷) و پاسخ عمومی آن پس از حل مسأله‌ی مقدار ویژه‌ی (۳-۲۸) به صورت رابطه‌ی (۳-۲۹) است.

$$\vec{y} = \vec{y}_g + \vec{y}_p \quad (۳-۲۶)$$

$$\vec{y}_p = \vec{p} = \tilde{C}^{-1} \vec{F} = \tilde{D} \vec{F} \quad (۳-۲۷)$$

$$(d^2 \tilde{A} + d \tilde{B} + \tilde{C}) \vec{v} = \vec{0} \quad (۳-۲۸)$$

$$\vec{y}_g = \sum_{i=1}^6 c_i \vec{v}_i e^{d_i x} \quad (۳-۲۹)$$

بنابراین پاسخ نهایی دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲-۲۵) عبارت است از:

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^6 c_i \vec{v}_i e^{d_i x} + \tilde{C}^{-1} (\vec{F}^P + \vec{F}^{th}) \quad (۳-۳۰)$$

رابطه‌ی فوق به صورت روابط زیر نیز قابل نوشتن است:

$$\begin{cases} u' = \sum_{i=1}^6 c_i V_{1i} e^{d_i x} + p_1 \\ \varphi = \sum_{i=1}^6 c_i V_{2i} e^{d_i x} + p_2 \\ w = \sum_{i=1}^6 c_i V_{3i} e^{d_i x} + p_3 \\ \psi = \sum_{i=1}^6 c_i V_{4i} e^{d_i x} + p_4 \end{cases} \quad (۳-۳۱)$$

$$u = \sum_{i=1}^6 \frac{c_i}{d_i} V_{1i} e^{d_i x} + p_1 x + c_8 \quad (۳-۳۲)$$

هشت ثابت c_1 تا c_8 (۷-۷) در $\vec{p}$ ظاهر می‌شود) به کمک هشت شرط مرزی مسأله که در

رابطه‌ی (۳-۲۱) معرفی شدند، قابل محاسبه می‌باشند. سپس میدان‌های جابه‌جایی به کمک روابط

(۲-۱۰)، کرنش به کمک روابط (۳-۳) و تنش به کمک روابط (۳-۷) محاسبه می‌شوند.

۳-۳- اعمال شرایط مرزی

برای محاسبه‌ی ثابت‌های c_1 تا c_8 از شرایط مرزی باید یک دستگاه ۸ معادله و ۸ مجهول به شکل رابطه‌ی (۳۳-۳) تشکیل داد و آن را حل نمود.

$$\tilde{G}\vec{c} = \vec{H} \quad (33-3)$$

درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ مشابه آن‌چه در بخش ۲-۴ گفته شده طبق رابط (۲-۵۶، ۵۸، ۶۱ و

۶۳) محاسبه می‌شوند. ولی به دلیل وجود بار حرارتی در این حالت تغییراتی در درایه‌های غیر صفر $\{H_j\}$ به وجود می‌آید که این درایه‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

۳-۳-۱- استوانه با دو سر گیردار

درایه‌های غیر صفر $\{H_j\}$ برای $x=0$ عبارتند از:

$$H_i = -(D_{i1}F_1^{th} + D_{i3}F_3 + D_{i4}F_4), \quad i = 2, 3, 4. \quad (34-3)$$

و درایه‌های غیر صفر $\{H_j\}$ برای $x=L$ عبارتند از:

$$\begin{cases} H_5 = -(D_{i1}F_1^{th} + D_{i3}F_3 + D_{i4}F_4)L \\ H_i = -(D_{i1}F_1^{th} + D_{(i-4)3}F_3 + D_{(i-4)4}F_4) \end{cases}, \quad i = 6, 7, 8. \quad (35-3)$$

۳-۳-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد

درایه‌های غیر صفر $\{H_j\}$ برای $x=0$ عبارتند از:

$$\begin{cases} H_i = - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)(D_{11}F_1^{th} + D_{13}F_3 + D_{14}F_4) \\ + \frac{\nu}{R+z} (D_{31}F_1^{th} + D_{33}F_3 + D_{34}F_4 + D_{41}F_1^{th}z + D_{43}F_3z \\ + D_{44}F_4z) + \nu(D_{41}F_1^{th} + D_{43}F_3 + D_{44}F_4) - (1+\nu)\frac{\alpha_i}{r_i^l} (R+z)^l \\ \left(\frac{T_o - T_i}{a} \ln\left(\frac{R+z}{r_i}\right) + T_i - T^* \right)] z^{i-1} dz \\ H_{i+2} = - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} (D_{21}F_1^{th} + D_{23}F_3 + D_{24}F_4) z^{i-1} dz \end{cases} \quad (36-3)$$

, $i = 1, 2.$

و درایه‌های غیر صفر $\{H_j\}$ برای $x=L$ عبارتند از:

$$\begin{cases} H_i = - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} [(1-\nu)(D_{11}F_1^{th} + D_{13}F_3 + D_{14}F_4) \\ + \frac{\nu}{R+z}(D_{31}F_1^{th} + D_{33}F_3 + D_{34}F_4 + D_{41}F_1^{th}z + D_{43}F_3z \\ + D_{44}F_4z) + \nu(D_{41}F_1^{th} + D_{43}F_3 + D_{44}F_4) - (1+\nu)\frac{\alpha_i}{r_i^l}(R+z)^l \\ \left(\frac{T_o - T_i}{a} \ln\left(\frac{R+z}{r_i}\right) + T_i - T^*\right)] z^{i-3} dz \\ H_{i+2} = - \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} (D_{21}F_1^{th} + D_{23}F_3 + D_{24}F_4) z^{i-3} dz \end{cases} \quad (37-3)$$

, $i = 3, 4.$

۳-۴- بررسی جریان پلاستیک

تحلیل پلاستیک کاملاً مشابه آن‌چه در بخش ۲-۵ مطرح شد انجام می‌شود. تنها تفاوت در این است که از کرنش مکانیکی (تفاضل کرنش حرارتی از کرنش کل) در روابط باید استفاده نمود. روند تحلیل پلاستیک به طور خلاصه به شرح زیر است.

σ_θ یکی از تنش‌های اصلی است؛ دو تنش اصلی دیگر به کمک رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (38-3)$$

تنش معادل معیار رانکین از رابطه‌ی (۳۹-۳)، تنش معادل معیار ترسکا از رابطه‌ی (۴۰-۳) و

تنش معادل معیار فون میزز از رابطه‌ی (۴۱-۳) محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (39-3)$$

$$\sigma_{eq} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (40-3)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/2} \quad (41-3)$$

در صورت بیشتر بودن مقدار تنش معادل از استحکام تسلیم که توزیع آن به صورت رابطه‌ی

(۴۲-۳) در نظر گرفته شده است آن نقطه تسلیم شده و تنش‌های اصلی آن به کمک رابطه‌ی (۴۳-۳)

اصلاح می‌شوند. سپس تنش‌های اصلی با دورانی عکس آن‌چه برای تبدیل $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z$ و τ_{xz} به تنش‌های اصلی استفاده شد، دوباره به $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z$ و τ_{xz} تبدیل می‌شوند.

$$S_y = S_{yi} \left(\frac{r}{r_i} \right)^m = \frac{S_{yi}}{r_i^m} (R + z)^m \quad (42-3)$$

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^*}{\sigma_2} = \frac{\sigma_3^*}{\sigma_3} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} \quad (43-3)$$

ε_θ^m یکی از کرنش‌های اصلی است؛ دو کرنش اصلی دیگر از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$\varepsilon_i^m = \frac{\varepsilon_x^m + \varepsilon_z^m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x^m - \varepsilon_z^m}{2} \right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}^m}{2} \right)^2} \quad (44-3)$$

کرنش پلاستیک معادل برای معیار رانکین را از رابطه‌ی (44-3) و کرنش پلاستیک معادل

برای معیار ترسکا و فون میزز را از رابطه‌ی (45-3) محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_{eq}^p = (1 - \sigma_{eq}/S_y) \max(|\varepsilon_1^m|, |\varepsilon_2^m|, |\varepsilon_3^m|) \quad (45-3)$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{eq} - S_y}{3G} \quad (46-3)$$

سپس کرنش‌های اصلی پلاستیک برای معیارهای رانکین، ترسکا و فون میزز را به ترتیب از

روابط (47-3 تا 49-3) محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = \varepsilon_k^p = 0, \quad \sigma_i > \sigma_j \geq \sigma_k. \quad (47-3)$$

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = 0, \quad \varepsilon_k^p = -\varepsilon_{eq}^p, \quad \sigma_i > \sigma_j > \sigma_k. \quad (48-3)$$

$$\varepsilon_i^p = \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \left[\sigma_i - \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_k) \right] \quad (49-3)$$

به کمک این رابطه کرنش‌های الاستیک محاسبه شده در نقاط تسلیم شده را اصلاح می‌کنیم:

$$\varepsilon_i^e = \kappa \varepsilon_i^m \quad (50-3)$$

در پایان برای تبدیل کرنش‌های اصلی الاستیک اصلاح شده و کرنش‌های اصلی پلاستیک

محاسبه شده به $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ و γ_{xz} (الاستیک و پلاستیک) از دورانی عکس آن‌چه برای تبدیل $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ و

γ_{xz} به کرنش‌های اصلی استفاده شد، استفاده می‌کنیم. کرنش کل برابر مجموع کرنش الاستیک،

کرنش پلاستیک و کرنش حرارتی است و جابه‌جایی شعاعی بر اساس روابط کرنش جابه‌جایی از روی کرنش محیطی محاسبه می‌شود:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^p + \vec{\varepsilon}^{th} \quad (51-3)$$

$$U_z = (R + z)\varepsilon_\theta \quad (52-3)$$

۳-۵- مطالعه‌ی موردی

در این بخش با در نظر گرفتن مقدار برابر برای ثابت‌های n ، m و l و برابر ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۲، توزیع ضریب انبساط حرارتی را مطابق رابطه‌ی (۱۹-۳) و $\vec{F}^P$ و $\vec{F}^{th}$ را مطابق روابط (۲۵-۳) محاسبه می‌کنیم. توزیع مدول الاستیسیته، ماتریس‌های ضرایب $[A_{ij}]$ ، $[B_{ij}]$ و $[C_{ij}]$ و توزیع تنش تسلیم ماده دقیقاً مشابه آن‌چه در بخش ۲-۶ مطرح شد، می‌باشند.

درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ مربوط به دستگاه معادلات شرایط مرزی مشابه بخش ۲-۶ قابل محاسبه‌اند. یکی از حالت‌های شرایط مرزی که بررسی می‌شود شرط مرزی دو سر گیردار است که درایه‌های غیر صفر $\{H_i\}$ برای آن از روابط (۳۴-۳) و (۳۵-۳) محاسبه می‌شوند. حالت دیگر در $x=0$ گیردار و در $x=L$ آزاد است که درایه‌های غیر صفر $\{H_i\}$ مربوط به سمت گیردار از رابطه‌ی (۳۴-۳) و درایه‌های غیر صفر آن مربوط به سمت آزاد از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} H_i = -[(1-\nu)(D_{11}F_1^{th} + D_{13}F_3 + D_{14}F_4)Q_{(n+4)(i-2)} \\ \quad + \nu(D_{31}F_1^{th} + D_{33}F_3 + D_{34}F_4)Q_{(n+3)(i-2)} \\ \quad + \nu(D_{41}F_1^{th} + D_{43}F_3 + D_{44}F_4)(Q_{(n+3)(i-1)} + Q_{(n+4)(i-2)})] + H_i^{th} \quad (53-3) \\ H_{i+2} = -(D_{21}F_1^{th} + D_{23}F_3 + D_{24}F_4)Q_{(n+4)(i-2)} \end{cases}, \quad i = 3, 4.$$

که:

$$H_i^{th} = (1+\nu)\frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (R+z)^{n+l+1} \left(c_{T1} \ln\left(\frac{R+z}{r_i}\right) + c_{T2} \right) z^{i-3} dz \quad (54-3)$$

, $i = 3, 4.$

۳-۵-۱- ماده‌ی همگن ($n=m=l=0$)

ضریب انبساط حرارتی برابر است با:

$$\alpha(z) = \alpha_i = \text{const.} \quad (۵۵-۳)$$

$\vec{F}^P$ برابر است با:

$$\vec{F}^P = \frac{1}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2}(P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۵۶-۳)$$

درایه‌های غیر صفر $\vec{F}^{th}$ برابرند با:

$$\begin{cases} F_1^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{2} [c_{T1} a r_o^2 + R h (2c_{T2} - c_{T1})] \\ F_3^{th} = -(1 + \nu) \alpha_i [c_{T1} a r_o + h (c_{T2} - c_{T1})] \\ F_4^{th} = -(1 + \nu) \alpha_i h \left(c_{T1} \frac{a r_o}{2} + R c_{T2} \right) \end{cases} \quad (۵۷-۳)$$

و H_i^{th} ها برابرند با:

$$\begin{cases} H_3^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{2} [c_{T1} a r_o^2 + R h (2c_{T2} - c_{T1})] \\ H_4^{th} = (1 + \nu) \alpha_i [c_{T1} a r_o^2 \left(\frac{r_o}{3} - \frac{R}{2} \right) + \frac{1}{3} (r_o^3 - r_i^3) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{3} \right) \\ \quad - \frac{R^2 h}{2} (2c_{T2} - c_{T1})] \end{cases} \quad (۵۸-۳)$$

۳-۵-۲- ثابت ناهمگنی $n=m=l=1$

ضریب انبساط حرارتی برابر است با:

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_i}{r_i} (R + z) \quad (۵۹-۳)$$

$\vec{F}^P$ برابر است با:

$$\vec{F}^P = \frac{r_i}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2}(P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۶۰-۳)$$

درایه‌های غیر صفر $\vec{F}^{th}$ برابرند با:

$$\begin{cases} F_1^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{4r_i} \left[c_{T1} a r_o^4 + (r_o^4 - r_i^4) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{4} \right) \right] \\ F_3^{th} = -(1 + \nu) \frac{\alpha_i}{3r_i} \left[c_{T1} a r_o^3 + (r_o^3 - r_i^3) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{3} \right) \right] \\ F_4^{th} = -(1 + \nu) \frac{\alpha_i}{r_i} \left[c_{T1} \frac{a r_o^3}{12} (2R + 3h) + \frac{1}{2} (r_o^4 - r_i^4) \right. \\ \quad \left. \times \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{4} \right) + \frac{R}{3} (r_o^3 - r_i^3) \left(\frac{c_{T1}}{3} - c_{T2} \right) \right] \end{cases} \quad (۶۱-۳)$$

و H_i^{th} ها برابرند با:

$$\begin{cases} H_3^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{4r_i} \left[c_{T1} a r_o^4 + (r_o^4 - r_i^4) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{4} \right) \right] \\ H_4^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{r_i} \left[c_{T1} a r_o^4 \left(\frac{r_o}{5} - \frac{R}{4} \right) + \frac{1}{5} (r_o^5 - r_i^5) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{5} \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{R}{4} (r_o^4 - r_i^4) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{4} \right) \right] \end{cases} \quad (۶۲-۳)$$

۳-۵-۳- ثابت ناهمگنی $n=m=l=-۱$

ضریب انبساط حرارتی برابر است با:

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_i r_i}{(R + z)} \quad (۶۳-۳)$$

$\vec{F}^P$ برابر است با:

$$\vec{F}^P = \frac{1}{\lambda E_i r_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۶۴-۳)$$

درایه‌های غیر صفر $\vec{F}^{th}$ برابرند با:

$$\begin{cases} F_1^{th} = (1 + \nu) \alpha_i r_i a \left(\frac{c_{T1}}{2} + c_{T2} \right) \\ F_3^{th} = (1 + \nu) \alpha_i r_i \left[c_{T1} \frac{a}{r_o} - b (c_{T1} + c_{T2}) \right] \\ F_4^{th} = -(1 + \nu) \alpha_i r_i \left[c_{T1} a \left(a + \frac{R}{r_o} \right) - b R (c_{T1} + c_{T2}) + 2 c_{T2} a \right] \end{cases} \quad (۶۵-۳)$$

و H_i^{th} ها برابرند با:

$$\begin{cases} H_3^{th} = (1 + \nu)\alpha_i r_i a \left(\frac{c_{T1}}{2} + c_{T2} \right) \\ H_4^{th} = (1 + \nu)\alpha_i r_i \left[c_{T1} a \left(r_o - \frac{R}{2} \right) + h(c_{T2} - c_{T1}) - R a c_{T2} \right] \end{cases} \quad (۶۶-۳)$$

۳-۵-۴- ثابت ناهمگنی $n=m=l=۲$

ضریب انبساط حرارتی برابر است با:

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_i}{r_i^2} (R + z)^2 \quad (۶۷-۳)$$

$\vec{F}^P$ برابر است با:

$$\vec{F}^P = \frac{r_i^2}{\lambda E_i} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۶۸-۳)$$

درایه‌های غیر صفر $\vec{F}^{th}$ برابرند با:

$$\begin{cases} F_1^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{6r_i^2} \left[c_{T1} a r_o^6 + (r_o^6 - r_i^6) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{6} \right) \right] \\ F_3^{th} = -(1 + \nu) \frac{\alpha_i}{5r_i^2} \left[c_{T1} a r_o^5 + (r_o^5 - r_i^5) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{5} \right) \right] \\ F_4^{th} = -(1 + \nu) \frac{\alpha_i}{r_i^2} \left[c_{T1} \frac{a r_o^5}{30} (4R + 5h) + \frac{1}{3} (r_o^6 - r_i^6) \right. \\ \left. \times \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{6} \right) + \frac{R}{5} (r_o^5 - r_i^5) \left(\frac{c_{T1}}{5} - c_{T2} \right) \right] \end{cases} \quad (۶۹-۳)$$

و H_i^{th} ها برابرند با:

$$\begin{cases} H_3^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{6r_i^2} \left[c_{T1} a r_o^6 + (r_o^6 - r_i^6) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{6} \right) \right] \\ H_4^{th} = (1 + \nu) \frac{\alpha_i}{r_i^2} \left[c_{T1} a r_o^6 \left(\frac{r_o}{7} - \frac{R}{6} \right) + \frac{1}{7} (r_o^7 - r_i^7) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{7} \right) \right. \\ \left. - \frac{R}{6} (r_o^6 - r_i^6) \left(c_{T2} - \frac{c_{T1}}{6} \right) \right] \end{cases} \quad (۷۰-۳)$$

۳-۵-۵- ثابت ناهمگنی $n=m=l=-2$

ضریب انبساط حرارتی برابر است با:

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_i r_i^2}{(R+z)^2} \quad (۷۱-۳)$$

$\vec{F}^P$ برابر است با:

$$\vec{F}^P = \frac{1}{\lambda E_i r_i^2} \left\{ c_7 \quad 0 \quad P_o r_o - P_i r_i \quad \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \right\}^T \quad (۷۲-۳)$$

درایه‌های غیر صفر $\vec{F}^{th}$ برابرند با:

$$\begin{cases} F_1^{th} = (1+\nu) \frac{\alpha_i r_i^2}{2} \left[-c_{T1} \frac{a}{r_o^2} + \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_o^2} \right) \left(c_{T2} + \frac{c_{T1}}{2} \right) \right] \\ F_3^{th} = -(1+\nu) \frac{\alpha_i r_i^2}{3} \left[-c_{T1} \frac{a}{r_o^3} + \left(\frac{1}{r_i^3} - \frac{1}{r_o^3} \right) \left(c_{T2} + \frac{c_{T1}}{3} \right) \right] \\ F_4^{th} = -(1+\nu) \alpha_i r_i^2 \left[c_{T1} \frac{a}{r_o^2} \left(\frac{R}{3r_o} - 1 \right) + \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_o^2} \right) \left(c_{T2} + \frac{c_{T1}}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{R}{3} \left(\frac{1}{r_i^3} - \frac{1}{r_o^3} \right) \left(c_{T2} + \frac{c_{T1}}{3} \right) \right] \end{cases} \quad (۷۳-۳)$$

و H_i^{th} ها برابرند با:

$$\begin{cases} H_3^{th} = (1+\nu) \frac{\alpha_i r_i^2}{2} \left[-c_{T1} \frac{a}{r_o^2} + \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_o^2} \right) \left(c_{T2} + \frac{c_{T1}}{2} \right) \right] \\ H_4^{th} = (1+\nu) \alpha_i r_i^2 \left[c_{T1} \frac{a}{r_o^2} \left(\frac{R}{2r_o} - 1 \right) + b(c_{T1} + c_{T2}) \right. \\ \left. - \frac{R}{2} \left(\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_o^2} \right) \left(c_{T2} + \frac{c_{T1}}{2} \right) \right] \end{cases} \quad (۷۴-۳)$$

۳-۶- ارائه و مقایسه‌ی نتایج

در این بخش با در نظر گرفتن مقدار برابر برای ثابت‌های n ، m و l و برابر ۲-، ۱-، ۰، ۱ و ۲، نتایج

عددی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای توخالی کلفت با شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰

میلی‌متر، طول ۰/۸ متر، مدول الاستیسیته در سطح داخلی ۲۰۰ گیگاپاسکال، نسبت پواسن ۰/۳،

استحکام تسلیم در سطح داخلی ۲۵۰ مگاپاسکال و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی $10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ارائه شده است. فشار یکنواخت داخلی آغاز تسلیم استوانه و فشار یکنواخت داخلی تسلیم سطح میانی برای دمای سطح داخلی ۱۰۰ درجه‌ی سلسیوس بیش از دمای مرجع و دمای سطح خارجی برابر با دمای مرجع در وسط طول استوانه محاسبه و ارائه شده است. سایر نتایج برای یک فشار و دمای خاص ارائه شده‌اند. در تمام موارد دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد بررسی شده است. پاسخ تحلیلی با نوشتن برنامه‌ای در نرم‌افزار MATLAB و پاسخ روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار Abaqus با استفاده از جزء مستطیلی ۸ گره‌ای درجه‌ی ۲ (CAX8R) متقارن محوری و زیربرنامه‌ی UMAT محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۳-۶-۱- استوانه با دو سر گیردار

در جدول ۱-۳ فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x=L/2$) آغاز می‌شود و در جدول ۲-۳ شعاع محل آغاز تسلیم ارائه شده است و در جدول ۳-۳ فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z=0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود ارائه شده است. فشار خارجی در این حالت‌ها صفر در نظر گرفته شده است.

جدول ۱-۳- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x=L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۴۴,۰۹۶	۴۷,۳۳۶	۶۱,۲۰
$n=m=l=-1$	۵۰,۳۹۰	۵۵,۱۶۷	۷۵,۱۸
$n=m=l=0$	۵۷,۱۴۳	۶۴,۵۷۱	۸۵,۲۵
$n=m=l=1$	۶۳,۵۳۱	۷۵,۴۲۶	۹۳,۱۶
$n=m=l=2$	۶۷,۶۴۰	۸۶,۸۱۵	۹۷,۲۰

جدول ۳-۲- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (mm)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۱۰
$n=m=l=-1$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۴۰
$n=m=l=0$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=1$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=2$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۶۰۰

جدول ۳-۳- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۶۳٫۱۷۶	۶۵٫۲۵۲	۶۱٫۴۸
$n=m=l=-1$	۸۸٫۱۰۷	۷۴٫۸۷۸	۷۶٫۳۲
$n=m=l=0$	۱۲۳٫۹۶۹	۸۵٫۲۷۴	۹۴٫۶۵
$n=m=l=1$	۱۷۶٫۰۲۳	۹۵٫۴۴۰	۱۲۳٫۵۹
$n=m=l=2$	۲۵۲٫۱۳۵	۱۰۲٫۸۳۶	۱۴۸٫۲۶

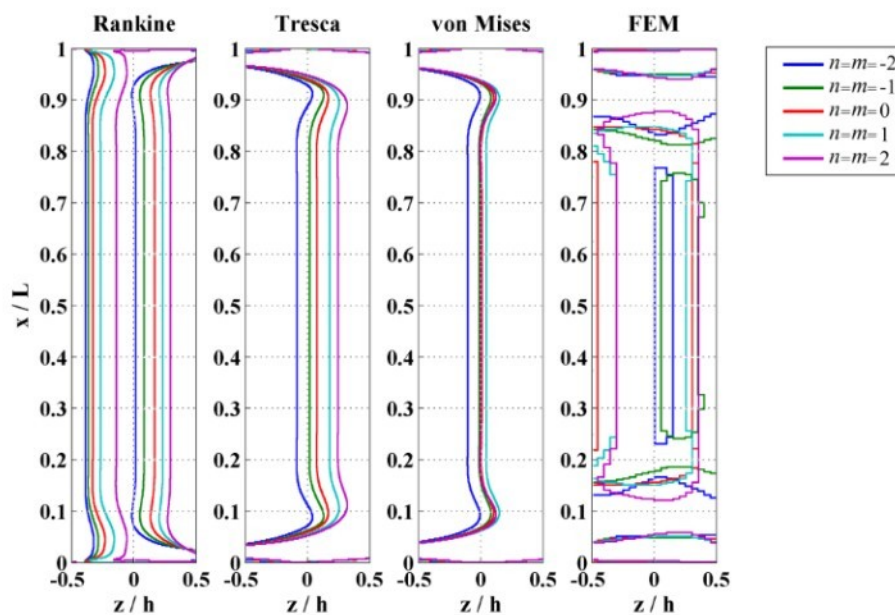
همان طور که در جدول ها مشاهده می کنید با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می یابد. در این حالت معیار رانکین قادر به پیش بینی فشار آغاز تسلیم استوانه نیست زیرا بار حرارتی اعمال شده خود به تنهایی باعث تسلیم سطح داخلی استوانه از نظر این معیار می شود. با توجه به نتایج جدول ۳-۱ و ۳-۲ می توان دریافت که تئوری تغییر شکل برشی مرتبه ی اول در پیش بینی فشار و محل آغاز تسلیم استوانه با دقت کافی ناکام است. با توجه به نتایج جدول ۳-۳ می توان دریافت که معیار فون ميزز نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری در پیش بینی فشار تسلیم سطح میانی دارد. همچنین مشاهده می شود که با افزایش ثابت ناهمگنی از دقت نتایج کاسته می شود.

شعاع مرز ناحیه ی پلاستیک برای استوانه با ثابت های ناهمگنی مختلف در شکل ۳-۲ و تصویر مناطق تسلیم شده ی استوانه در شکل ۳-۳ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار که برابر میانگین فشار آغاز تسلیم استوانه و فشار تسلیم لایه ی میانی حاصل از نرم افزار

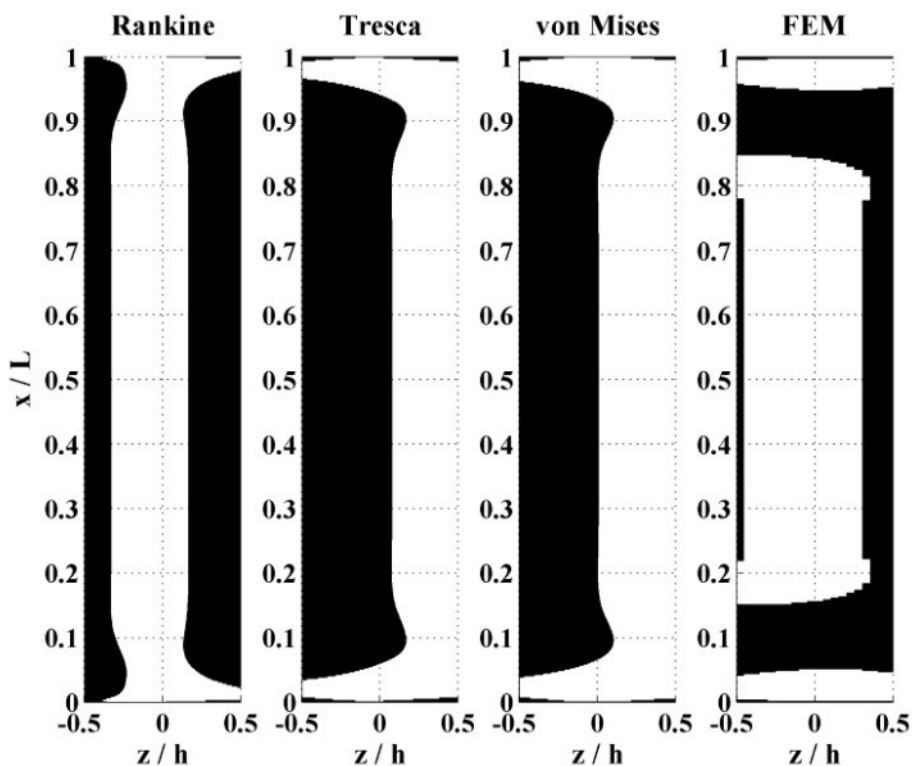
Abaqus در نظر گرفته شده است در جدول ۳-۴ آورده شده است. مشاهده می‌شود که نتیجه‌ی حاصل از هیچ‌کدام از معیارها مشابه نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus نیست. ولی شکل ناحیه‌ی پلاستیک از نظر معیار رانکین بیشترین شباهت را به شکل به‌دست آمده از Abaqus دارد.

جدول ۳-۴- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)

$n=m=l=2$	$n=m=l=1$	$n=m=l=0$	$n=m=l=-1$	$n=m=l=-2$
۱۲۲٫۷۳	۱۰۸٫۳۷	۸۹٫۹۵	۷۵٫۷۵	۶۱٫۳۴

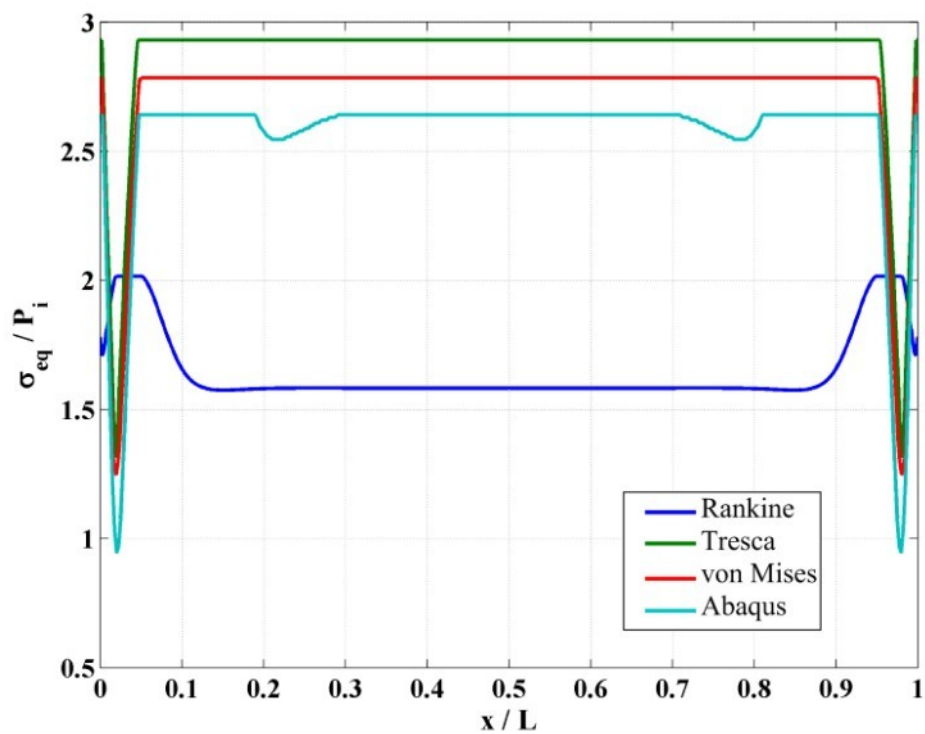


شکل ۳-۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

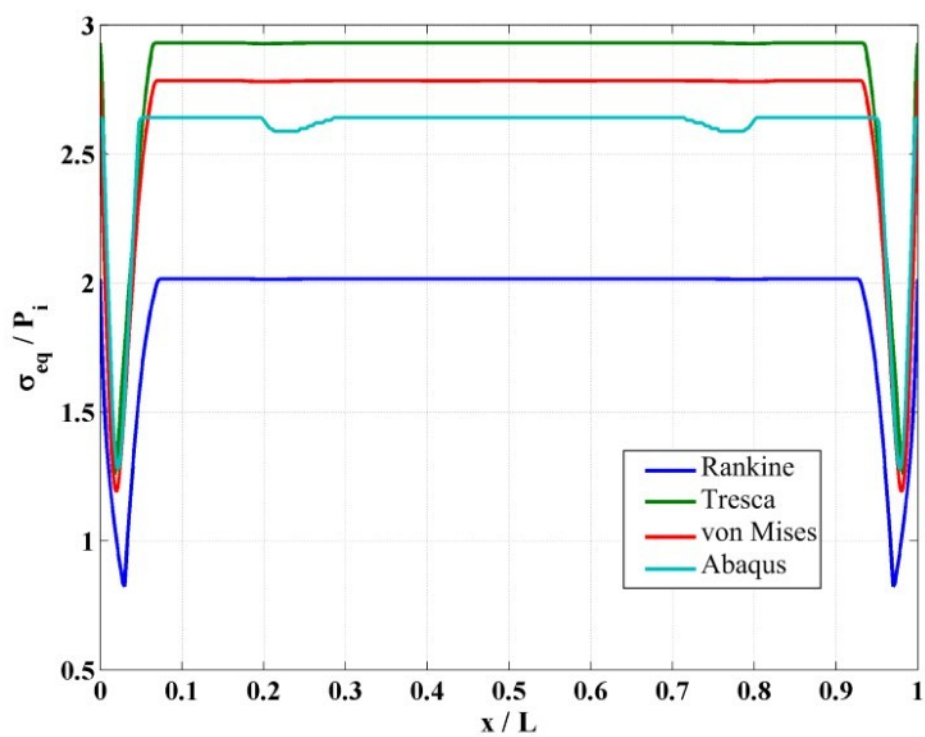


شکل ۳-۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

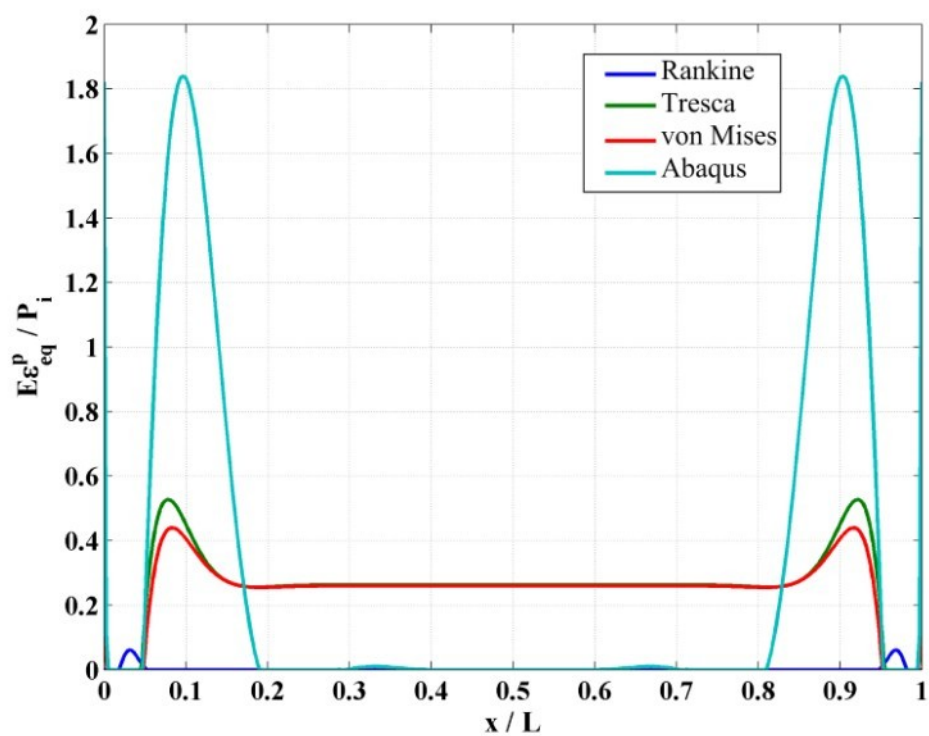
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۳-۳) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۴ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۵ آورده شده است. در هر دو حالت معیار فون میزز بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۶ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۷ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها در این دو حالت دقت قابل قبولی ندارند. برای $z = -h/4$ در وسط استوانه معیار رانکین بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۸ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۹ آورده شده است. معیار ترسکا در هر دو حالت دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



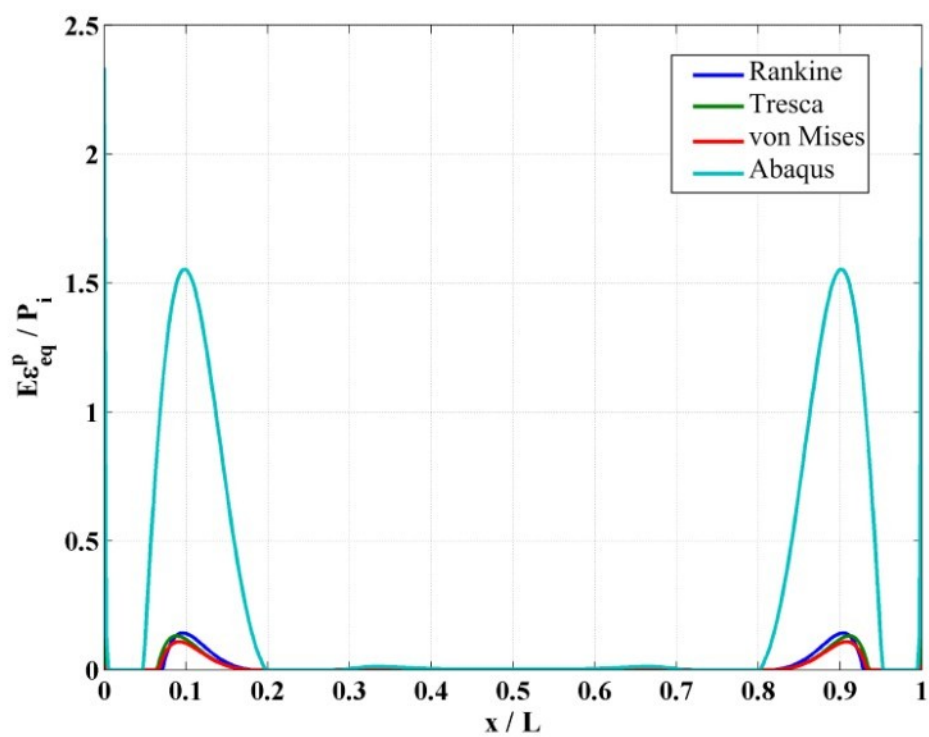
شکل ۳-۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



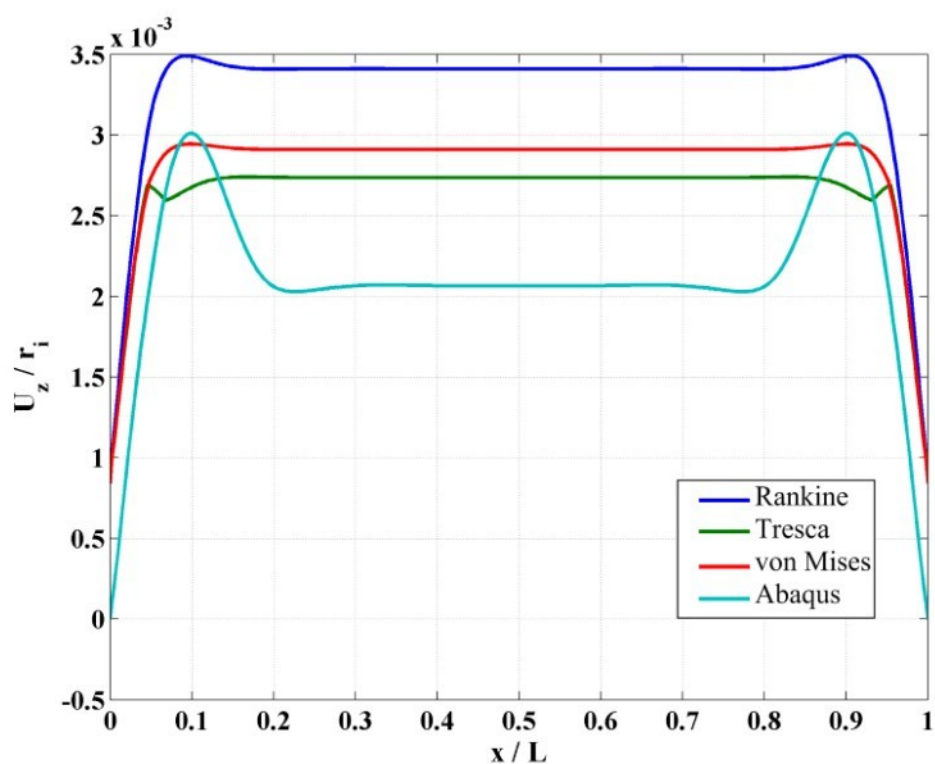
شکل ۳-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



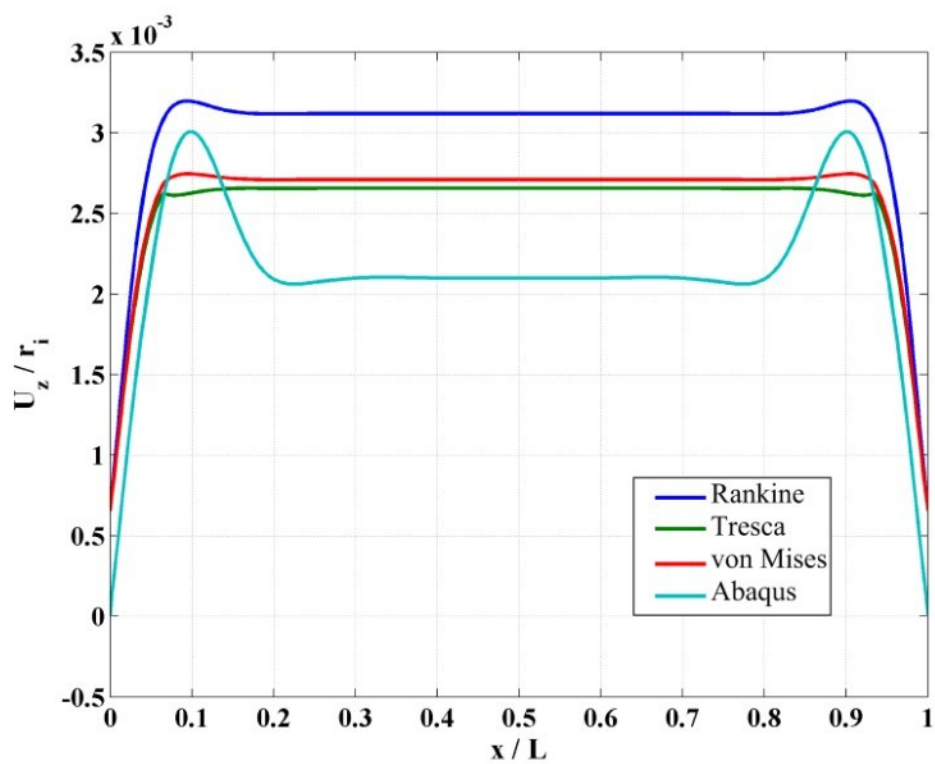
شکل ۳-۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۳-۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

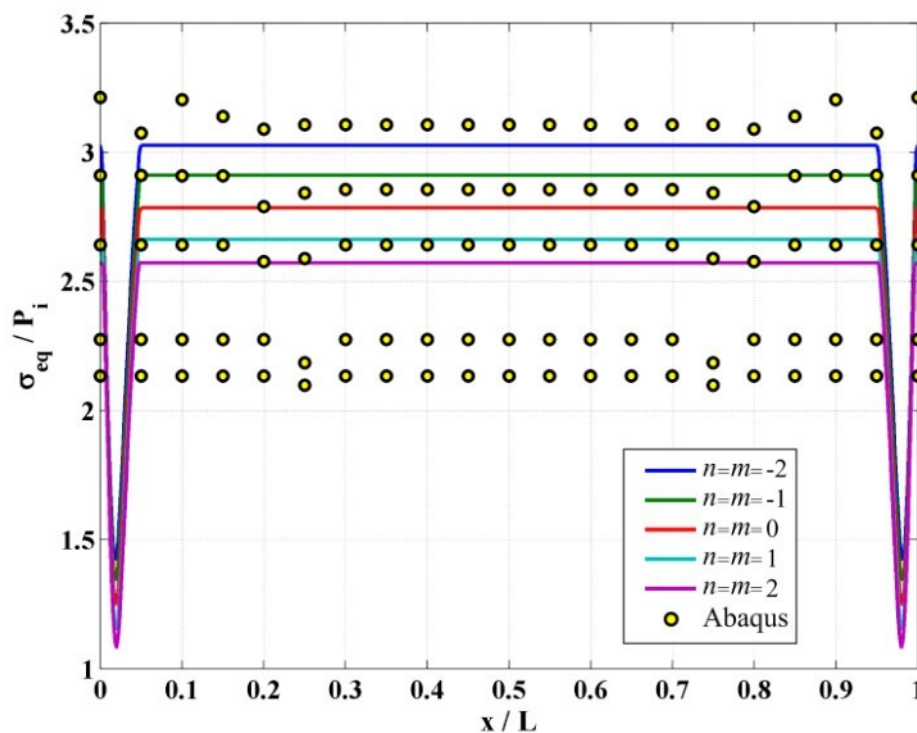


شکل ۳-۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n = m = 0$ و $z = -h/4$

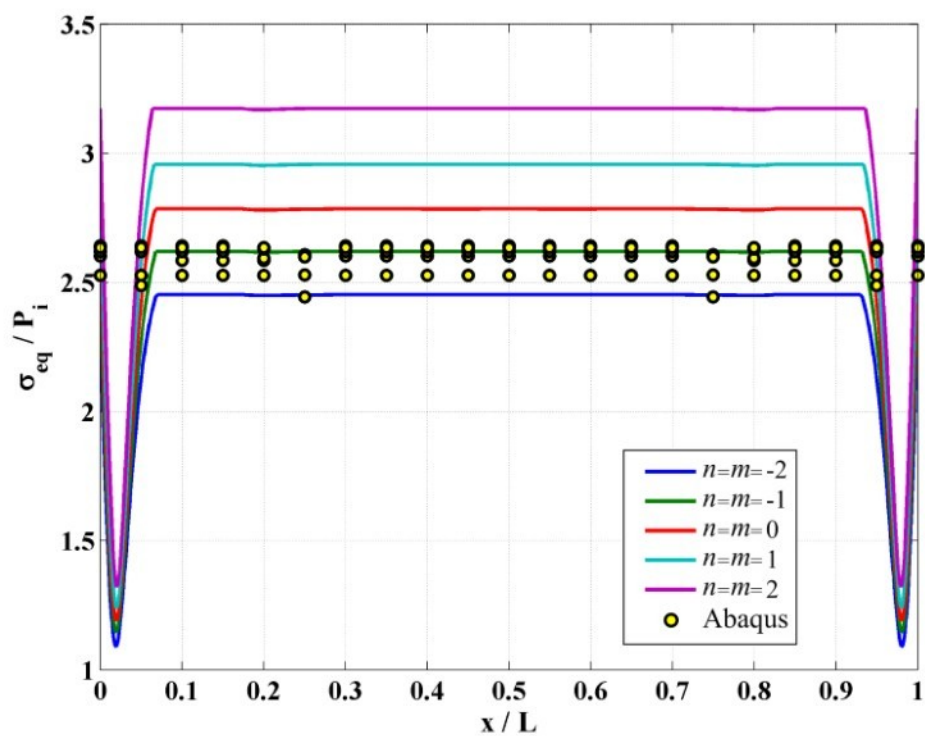


شکل ۳-۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n = m = 0$ و $z = 0$

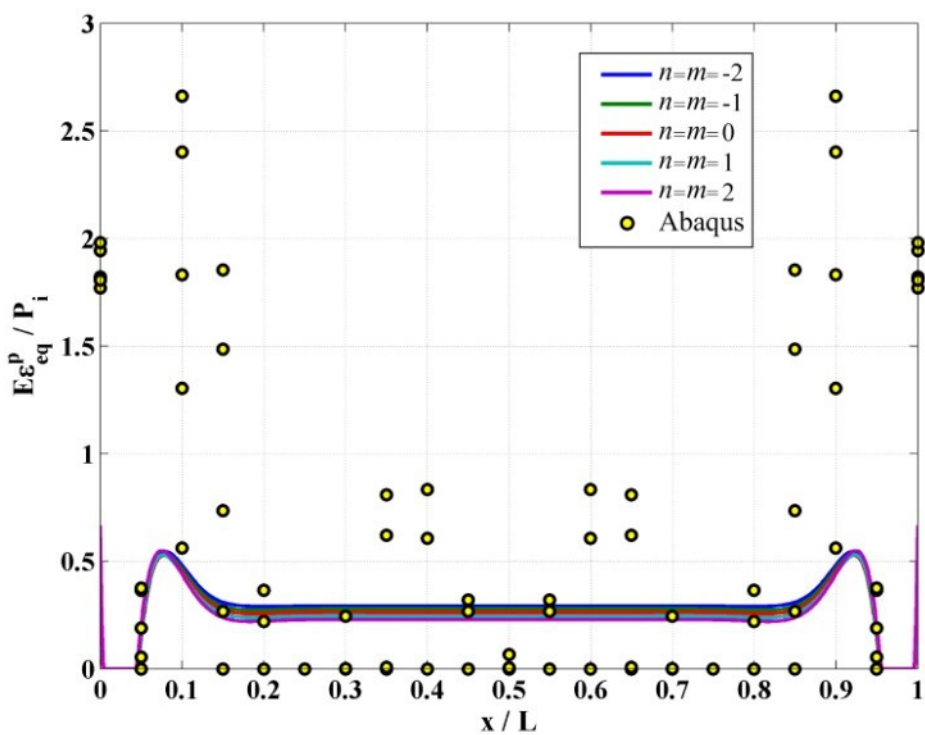
توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۱۰ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۱۱ مشاهده می‌نمایید. همان‌طور که می‌بینیم اثر ناهمگنی بر روی رفتار ماده در $z = -h/4$ کمتر و در $z = 0$ بیشتر از نرم‌افزار Abaqus پیش‌بینی شده است. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۱۲ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۱۳ آورده شده است. اختلاف زیادی بین نتایج حاصل از FSDT با نرم‌افزار Abaqus مشاهده می‌شود. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۱۴ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۱۵ آورده شده است. نتایج حاصل از Abaqus در هر دو حالت تقریباً یکسانند و نتایج حاصل از FSDT در لایه‌ی میانی انطباق بیشتری با آن‌ها دارند.



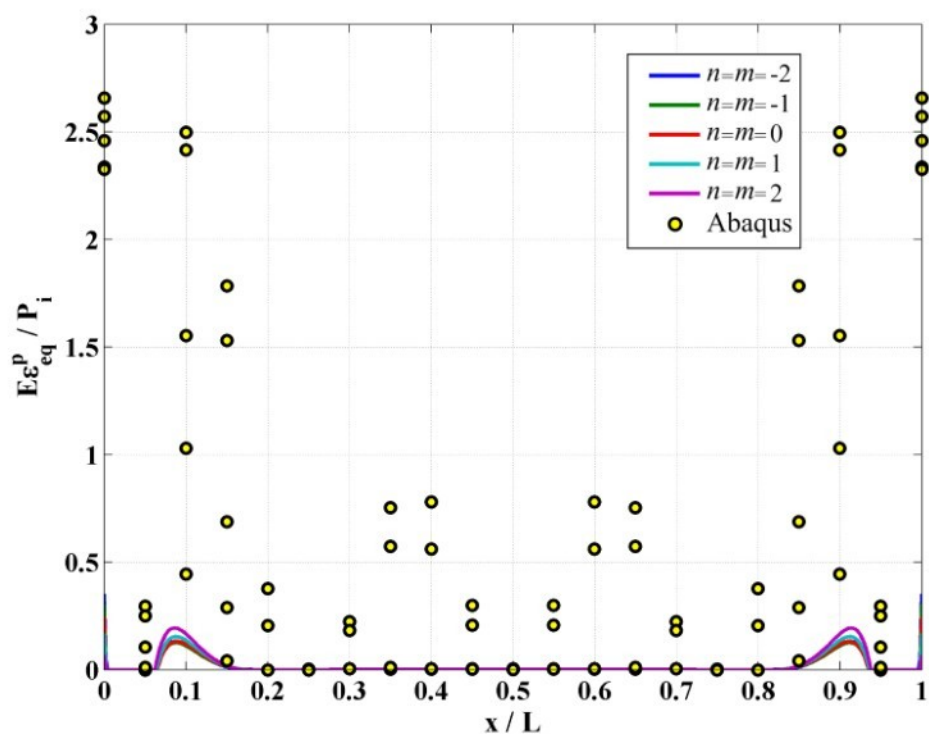
شکل ۳-۱۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



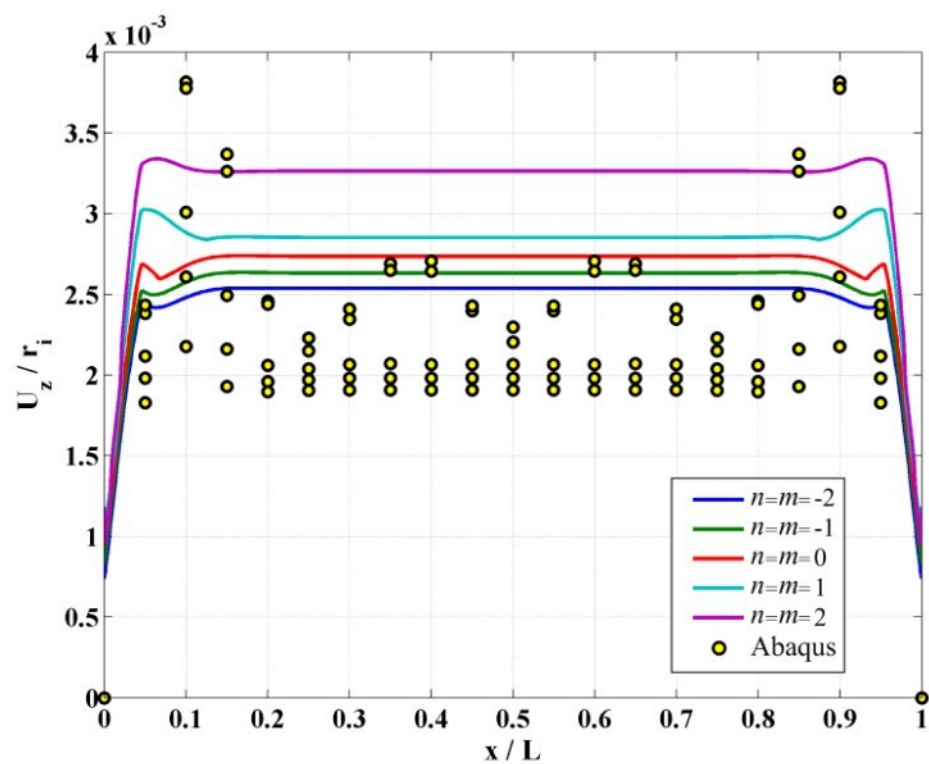
شکل ۳-۱۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$



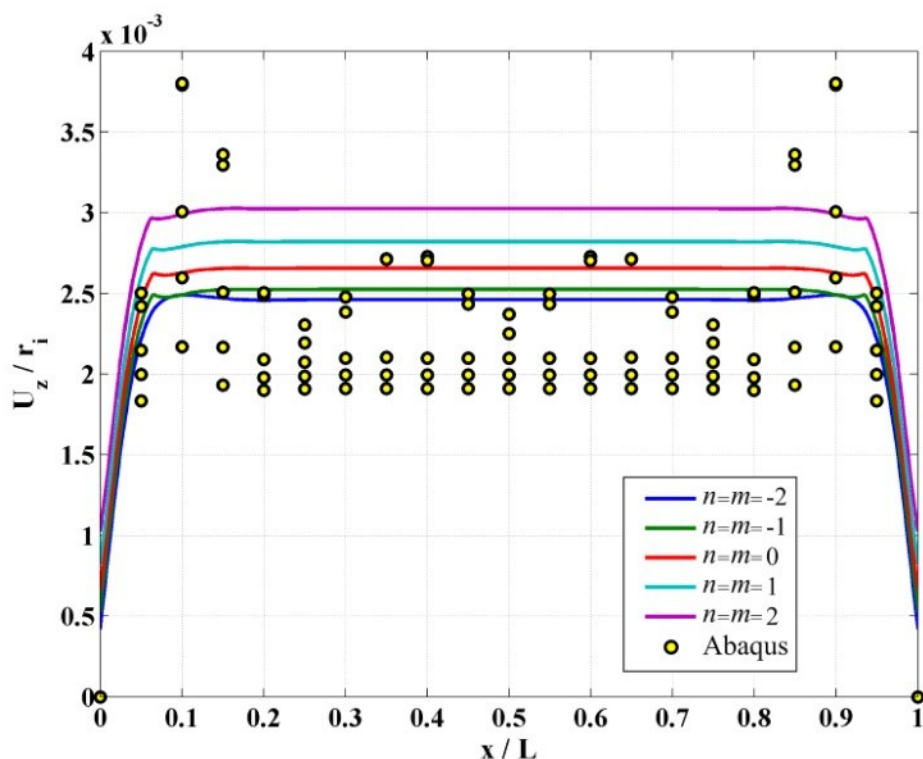
شکل ۳-۱۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$



شکل ۳-۱۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$

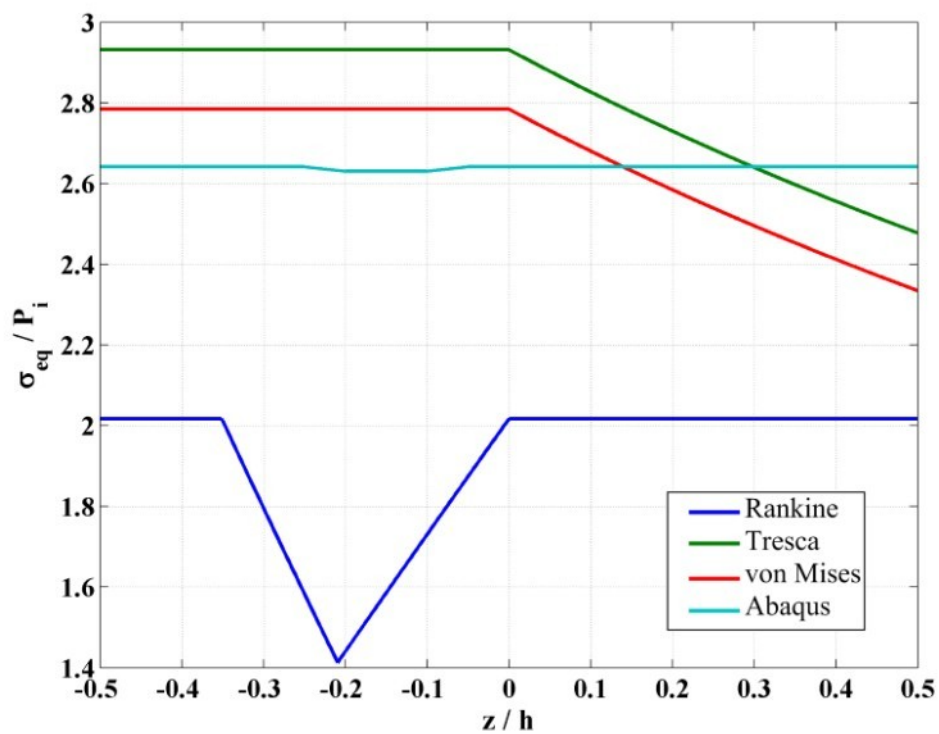


شکل ۳-۱۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$

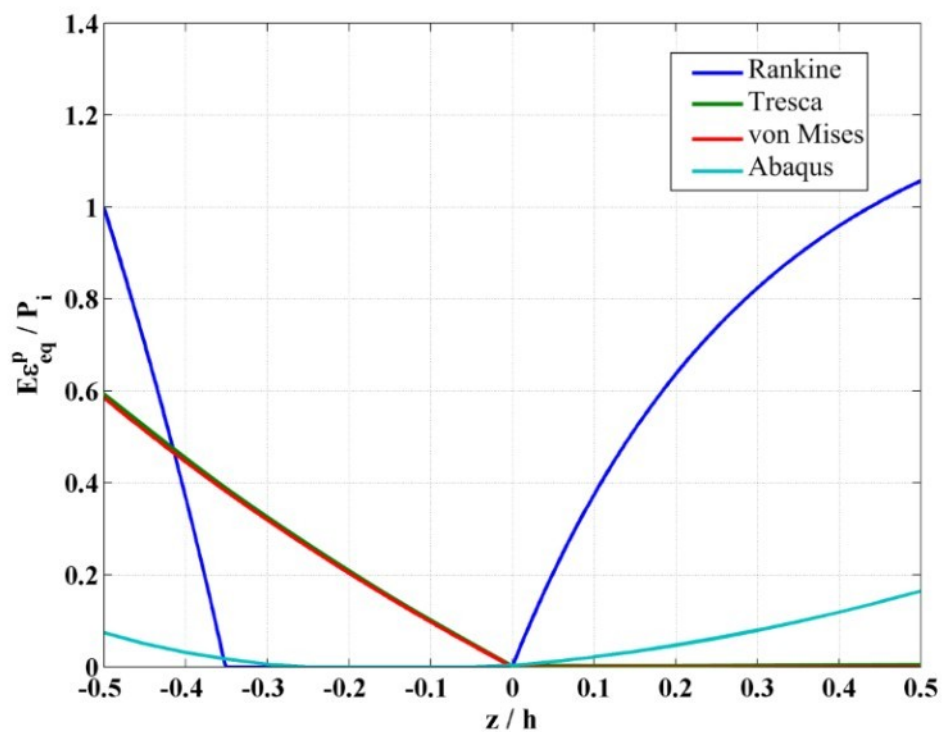


شکل ۳-۱۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = 0$

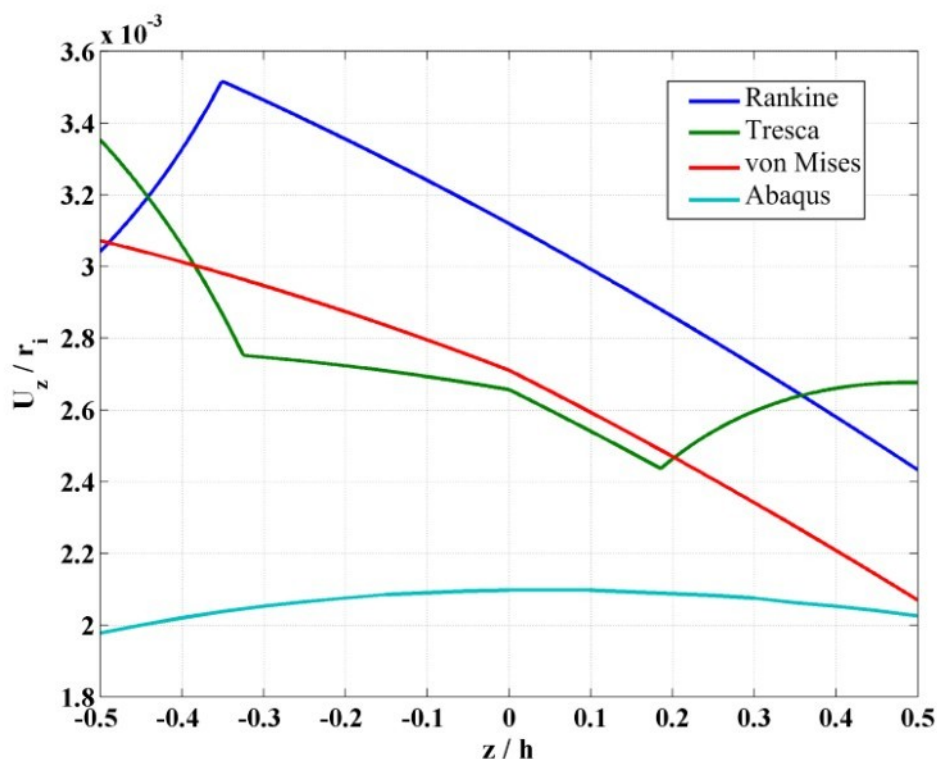
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۳-۱۶ آورده شده است. در حدود سه چهارم داخلی استوانه نقاط معیار فون میز و در یک چهارم خارجی آن معیار ترسکا بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۳-۱۷ آورده شده است. معیار رانکین در بخشی از شعاع دقت خوبی دارد و در سایر نقاط نیز رفتار آن شباهت بیشتری به منحنی حاصل از Abaqus دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۳-۱۸ آورده شده است. هیچ‌یک از معیارها نتیجه‌ای مشابه نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus را ارائه نکرده‌اند.



شکل ۳-۱۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

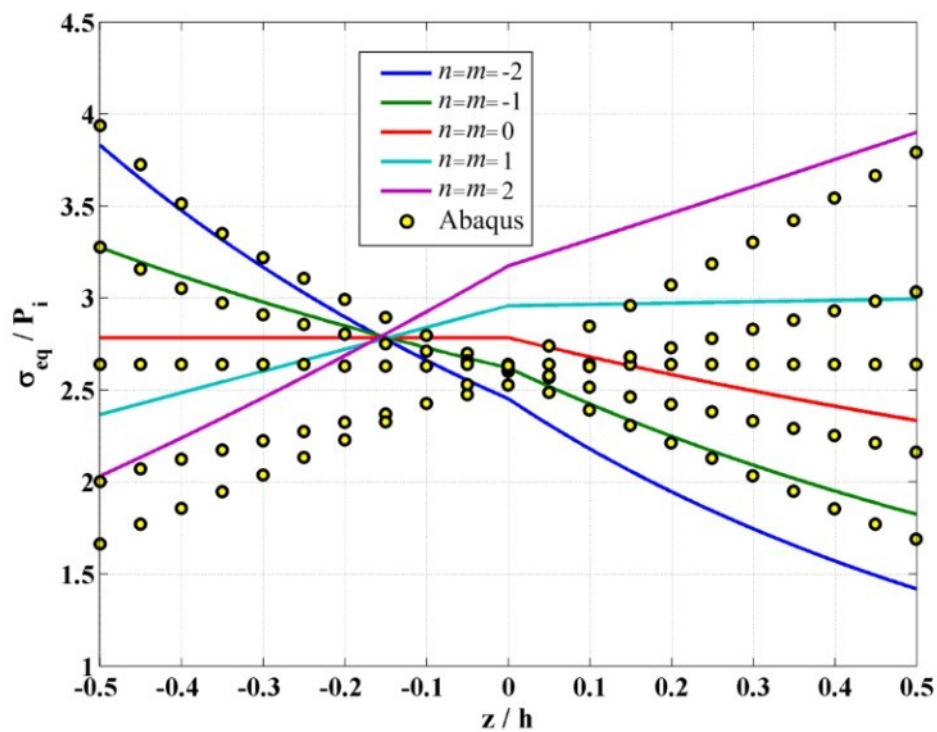


شکل ۳-۱۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

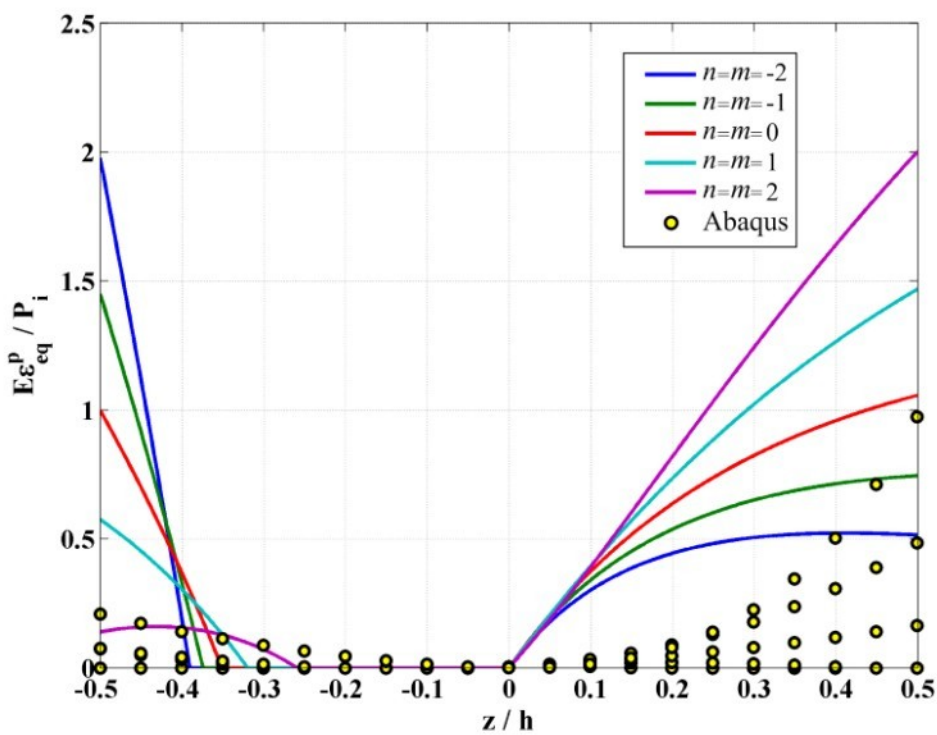


شکل ۳-۱۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

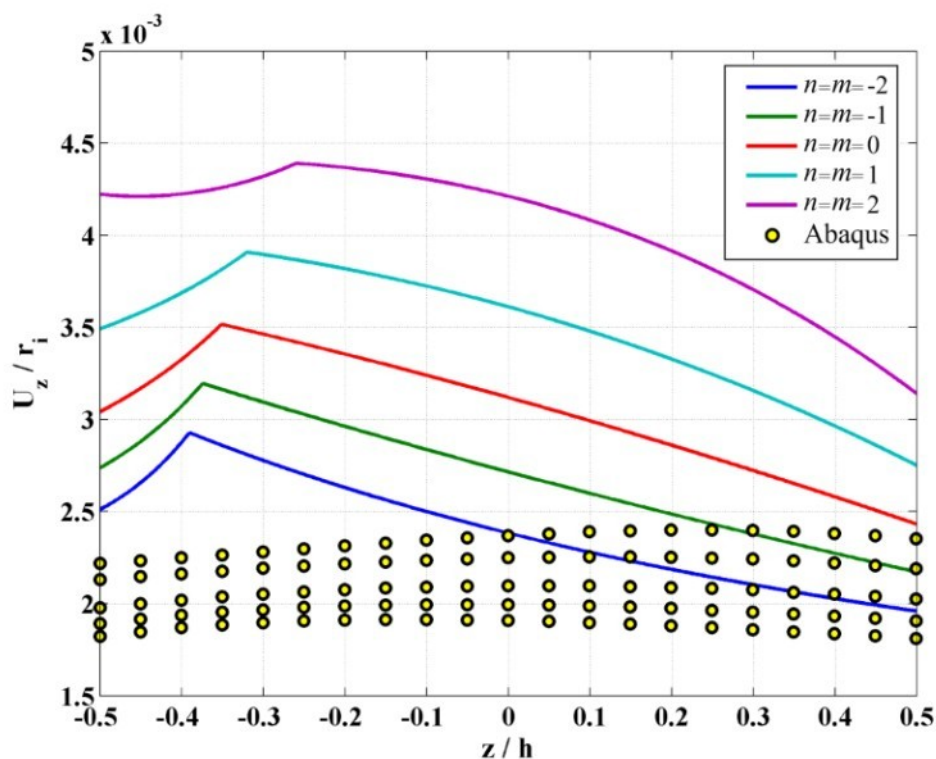
توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۳-۱۹ مشاهده می‌نمایید. این معیار برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر از دقت بیشتری برخوردار است. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۳-۲۰ آورده شده است. در نیمه‌ی داخلی استوانه نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگ‌تر و در نیمه‌ی خارجی آن برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر دقیق‌ترند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۳-۲۱ آورده شده است. نتایج ارائه شده برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر دقیق‌ترند.



شکل ۳-۱۹- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۳-۲۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۳-۲۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۳-۶-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد

در جدول ۳-۵ فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود و در جدول ۳-۶ شعاع محل آغاز تسلیم ارائه شده است و در جدول ۳-۷ فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود ارائه شده است. فشار خارجی در این حالت‌ها صفر در نظر گرفته شده است.

جدول ۳-۵- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۴۱,۲۳۸	۴۵,۵۰۹	۶۵,۸۵
$n=m=l=-1$	۵۴,۲۱۶	۵۶,۷۷۳	۸۰,۲۳
$n=m=l=0$	۷۱,۱۵۷	۷۱,۳۸۸	۹۱,۰۰
$n=m=l=1$	۸۶,۸۵۵	۹۰,۶۰۵	۱۰۰,۷۲
$n=m=l=2$	۱۰۷,۵۹۷	۱۱۶,۱۵۴	۱۰۶,۱۴

جدول ۳-۶- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (mm)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۲۵
$n=m=l=-1$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۶۱
$n=m=l=0$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=1$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=2$	-	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۶۰۰

جدول ۳-۷- فشار داخلی آغاز تسليم سطح مياني در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۶۳٫۱۷۶	۶۱٫۳۲۰	۶۶٫۶۶
$n=m=l=-1$	۸۸٫۱۰۷	۷۶٫۱۳۴	۸۲٫۶۳
$n=m=l=0$	۱۲۳٫۹۶۹	۹۵٫۲۹۴	۱۰۳٫۵۳
$n=m=l=1$	۱۷۶٫۰۲۳	۱۲۰٫۴۰۲	۱۳۰٫۳۹
$n=m=l=2$	۲۵۲٫۱۳۵	۱۵۳٫۶۶۹	۱۶۴٫۴۲

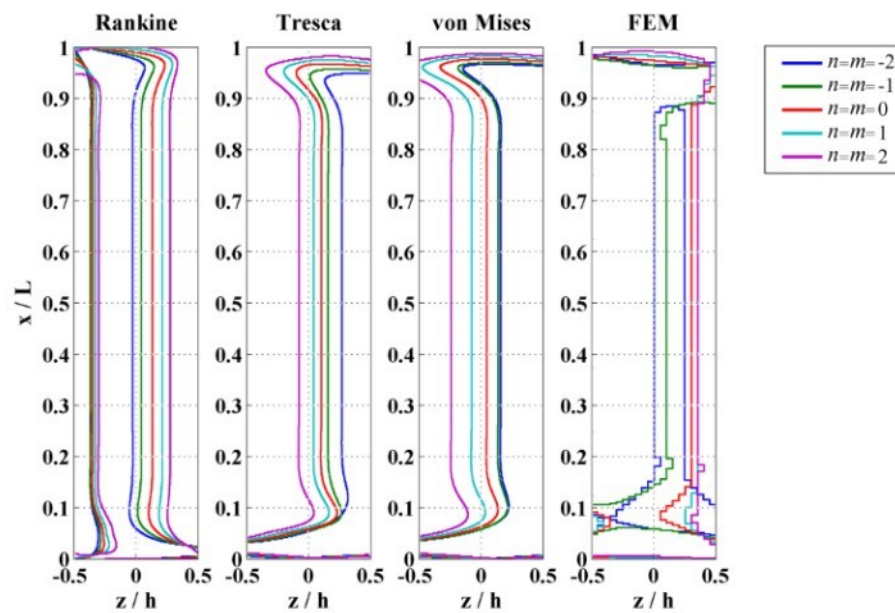
همان طور که در جدول ها مشاهده می کنید در این حالت نیز با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسليم استوانه افزایش می یابد. باز هم مشابه قسمت قبل در این حالت معيار رانکين قادر به پيش بينی فشار آغاز تسليم استوانه نیست. با توجه به نتایج جدول ۳-۵ می توان دریافت که معيار فون ميزز دقت بیشتری نسبت به معيار ترسکا (غير از ثابت ناهمگنی ۲) در پيش بينی فشار آغاز تسليم استوانه دارد که با افزایش ثابت ناهمگنی دقت نتایج بیشتر می شود. نتایج جدول ۳-۶ بيان گر ناتواني این تئوری در تعيين محل آغاز تسليم استوانه است. با توجه به نتایج جدول ۳-۷ می توان دریافت که در پيش بينی فشار تسليم سطح مياني معيار فون ميزز دقيق تر از دو معيار ديگر است.

شعاع مرز ناحیه ی پلاستیک برای استوانه با ثابت های ناهمگنی مختلف در شکل ۳-۲۲ و تصوير مناطق تسليم شده ی استوانه در شکل ۳-۲۳ آورده شده است. فشار يکنواخت داخلی برای این دو نمودار که برابر میانگین فشار آغاز تسليم استوانه و فشار تسليم لایه ی میانی حاصل از نرم افزار Abaqus در نظر گرفته شده است در جدول ۳-۸ آورده شده است. مشاهده می شود که نتیجه ی حاصل از هیچ کدام از معيارها مشابه نتایج حاصل از نرم افزار Abaqus نیست. ولی شکل ناحیه ی

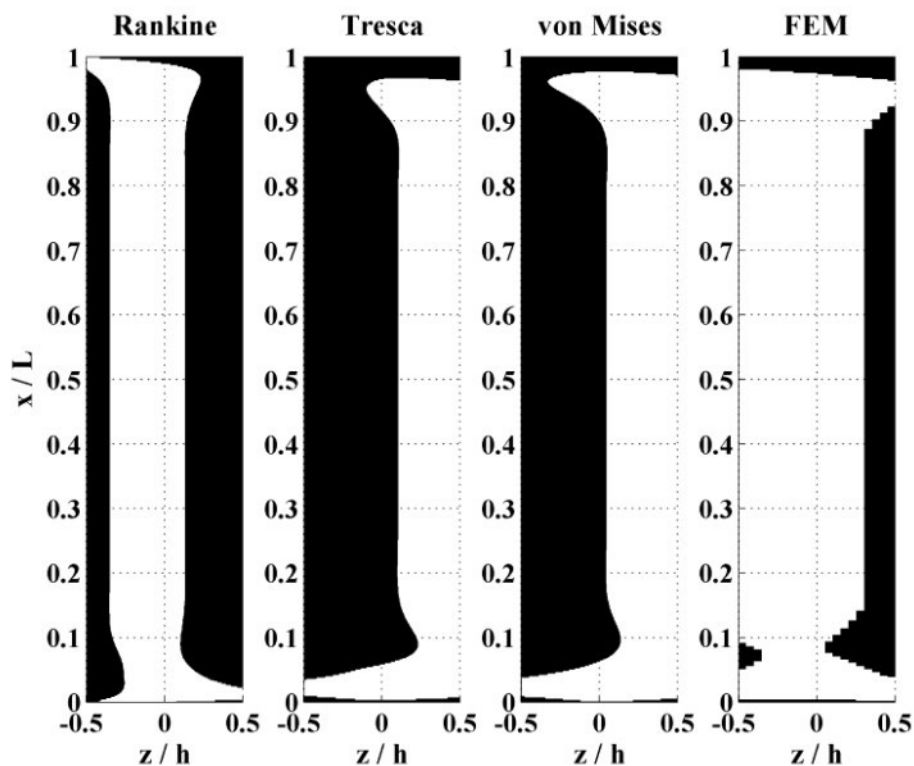
پلاستیک از نظر معیار رانکین بیشترین شباهت را به شکل به دست آمده از Abaqus در میان سه معیار دارد.

جدول ۳-۸- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)

$n=m=l=2$	$n=m=l=1$	$n=m=l=0$	$n=m=l=-1$	$n=m=l=-2$
۱۳۵٫۲۸	۱۱۵٫۵۵	۹۷٫۲۶	۸۱٫۴۳	۶۶٫۲۵

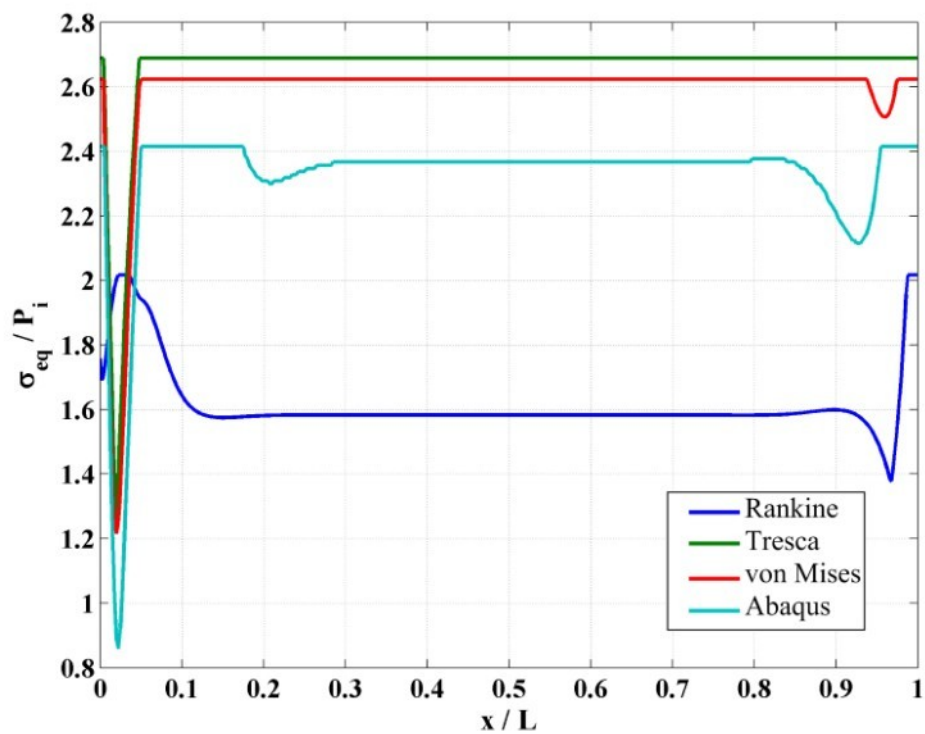


شکل ۳-۲۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

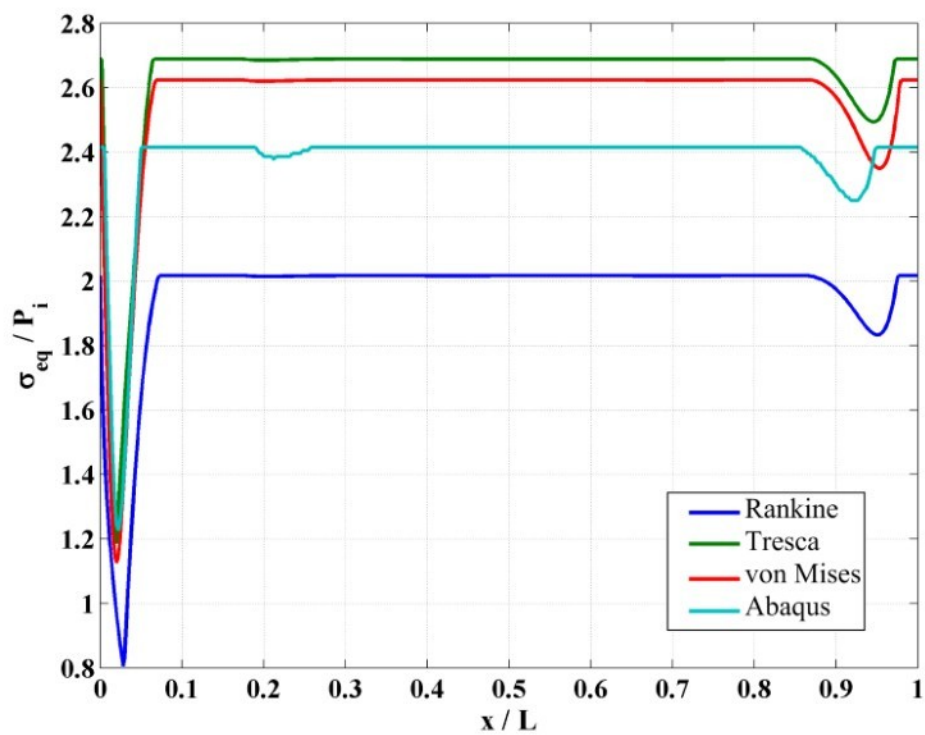


شکل ۳-۲۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

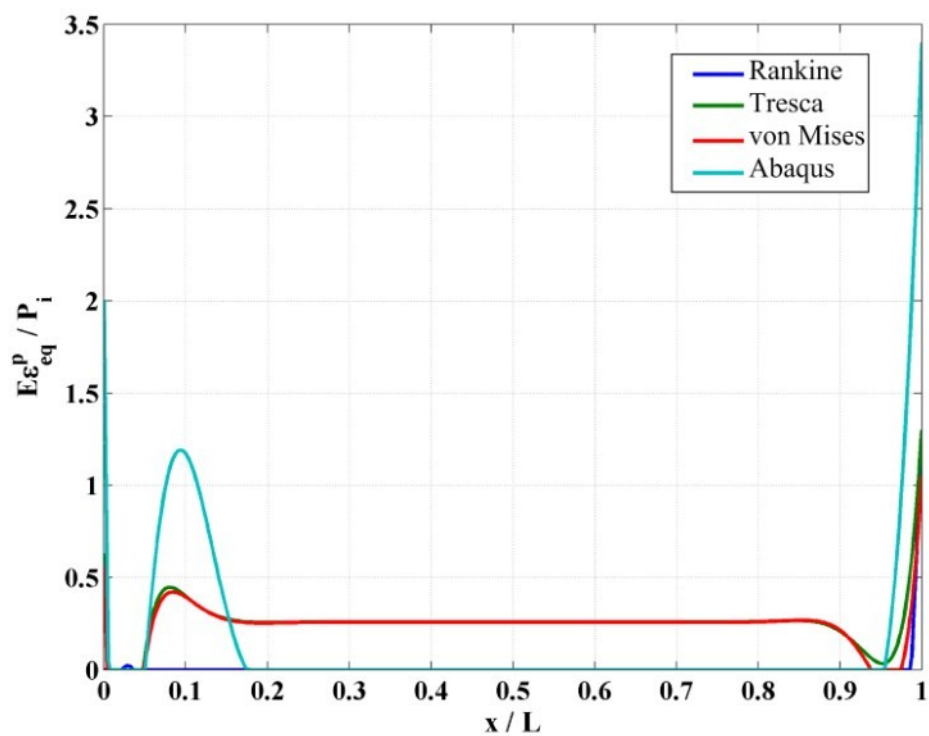
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۳-۷) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۲۴ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۲۵ آورده شده است. معیار فون میز در هر دو حالت بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۲۶ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۲۷ آورده شده است. معیار رانکین بهترین نتایج را ارائه نموده است. برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۲۷ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۲۸ آورده شده است. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی معیار ترسکا دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



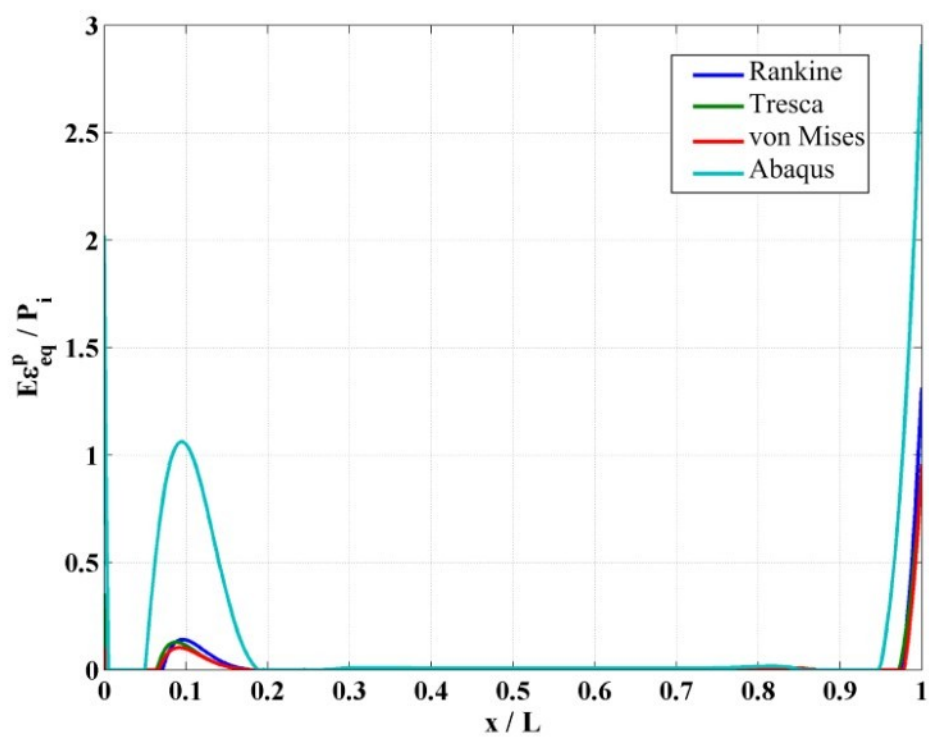
شکل ۳-۲۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



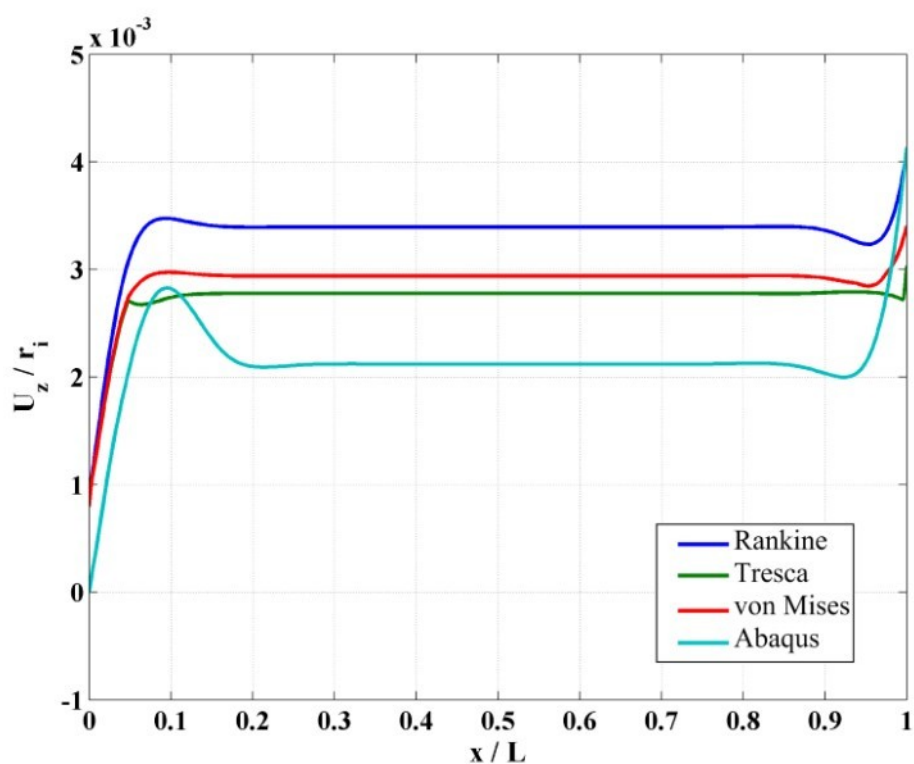
شکل ۳-۲۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



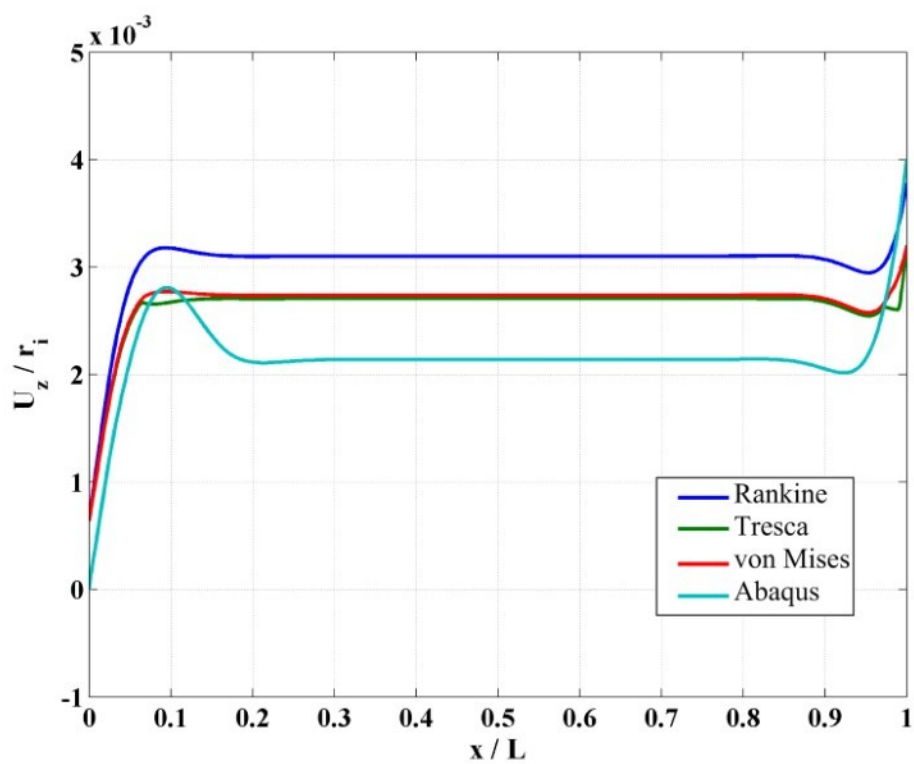
شکل ۳-۲۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۳-۲۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

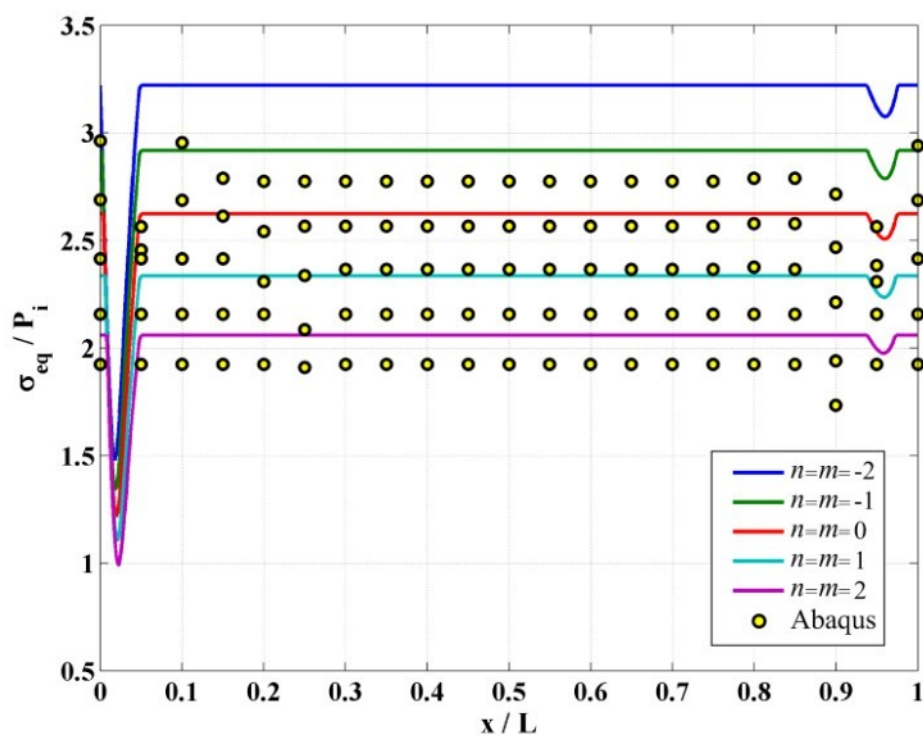


شکل ۳-۲۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

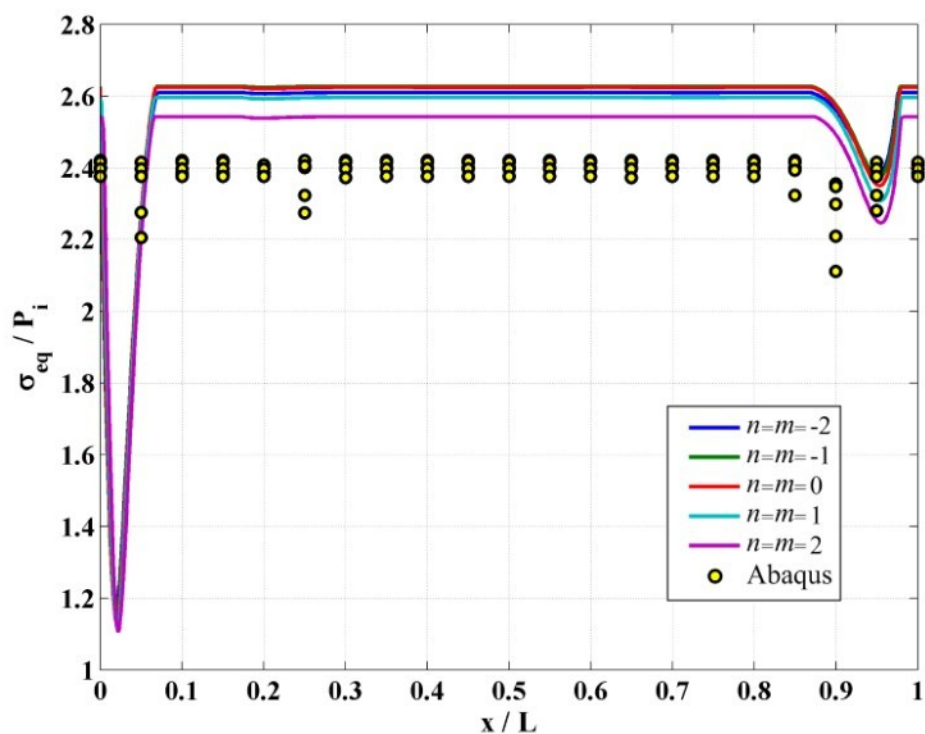


شکل ۳-۲۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

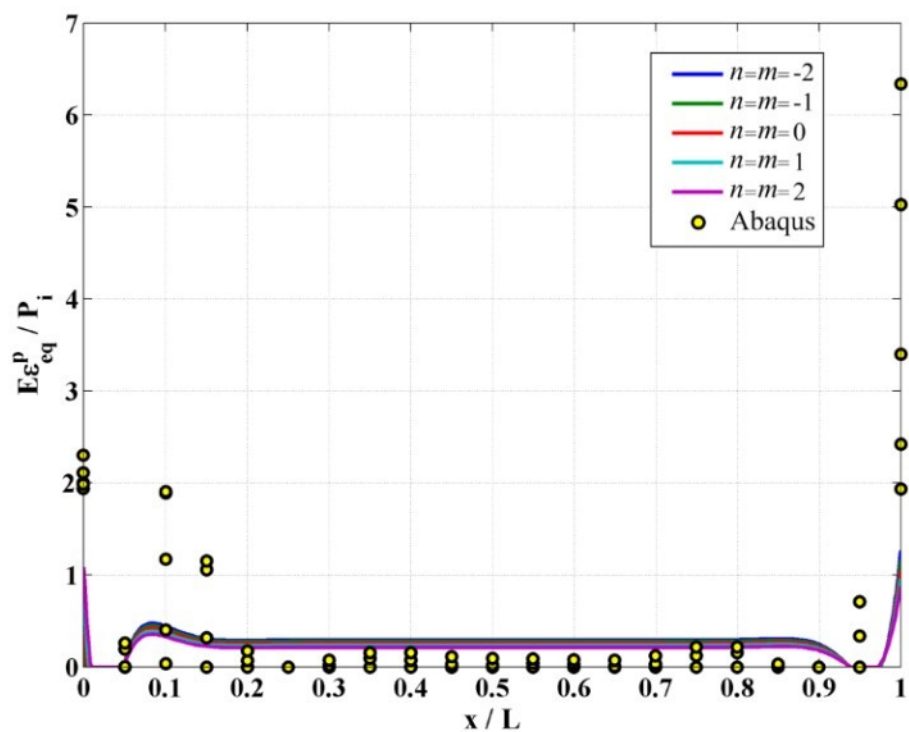
توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۳۰ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۳۱ مشاهده می‌نمایید. با پیشروی از $z = -h/4$ به سمت وسط استوانه نتایج دقیق‌تر می‌شوند. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۳۲ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۳۳ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳-۳۴ و برای $z = 0$ در شکل ۳-۳۵ آورده شده است. اثر ثابت ناهمگنی بر روی تغییر جابه‌جایی شعاعی استوانه از نظر FSDT بیش از Abaqus است همچنین این تغییر در $z = 0$ بیشتر از $z = -h/4$ است. جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده دقت خوبی دارد و دقت نتایج در وسط استوانه بیشتر از دقت نتایج در $z = 0$ است.



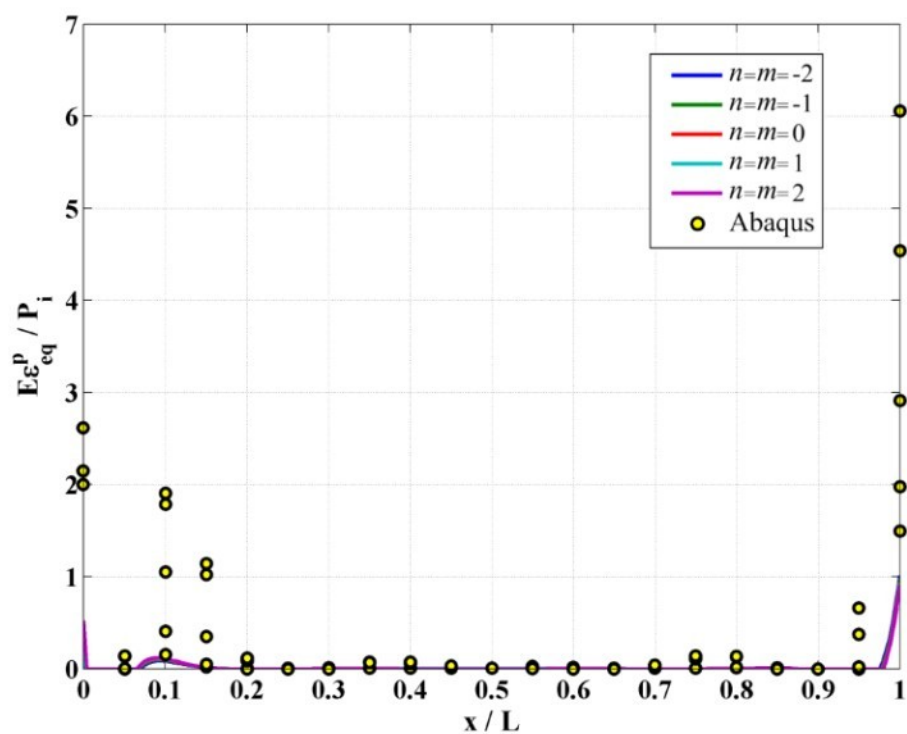
شکل ۳-۳۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



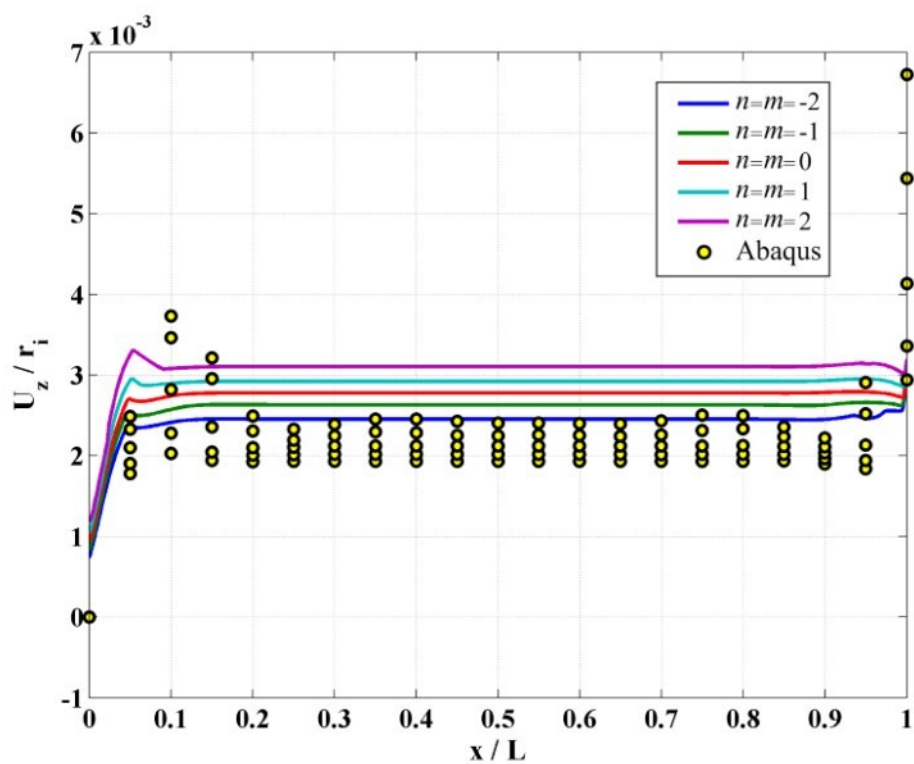
شکل ۳-۳۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$



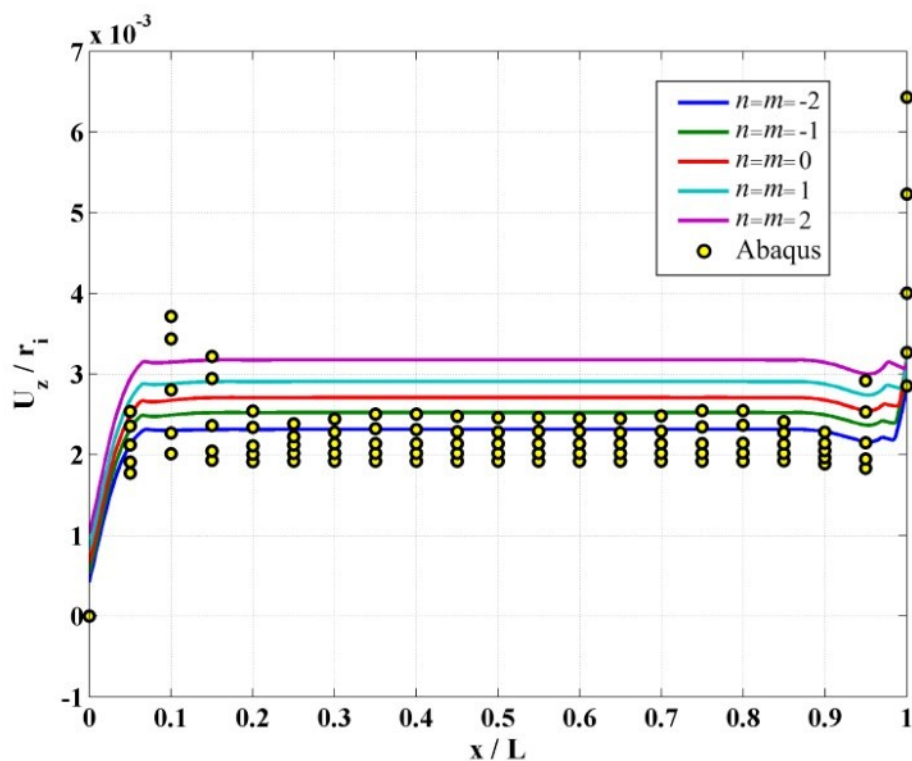
شکل ۳-۳۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$



شکل ۳-۳۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$

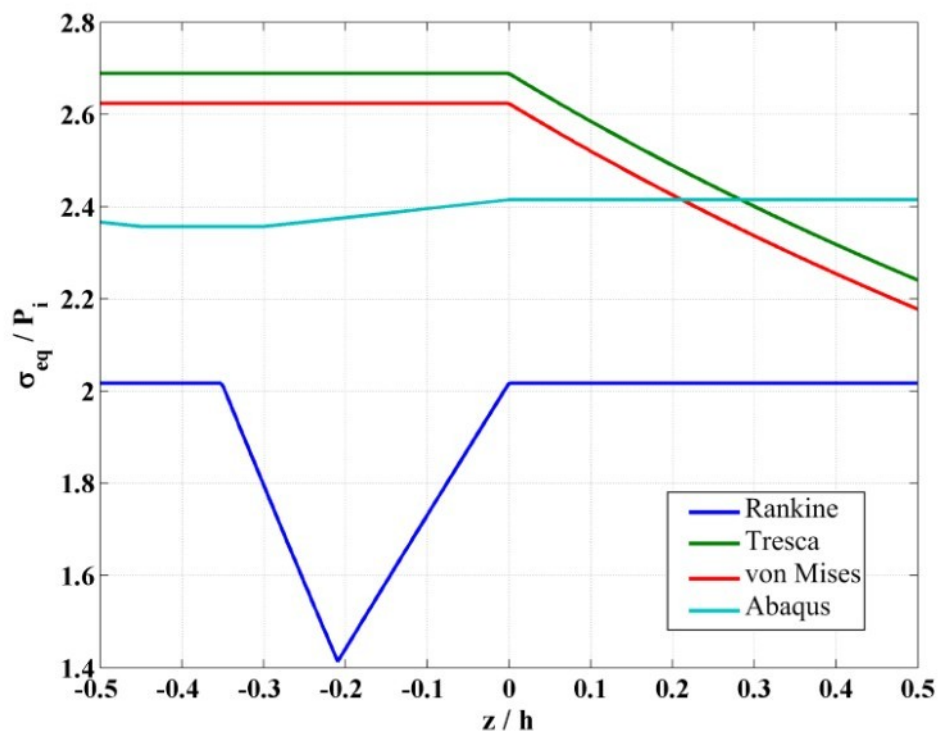


شکل ۳-۳۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$

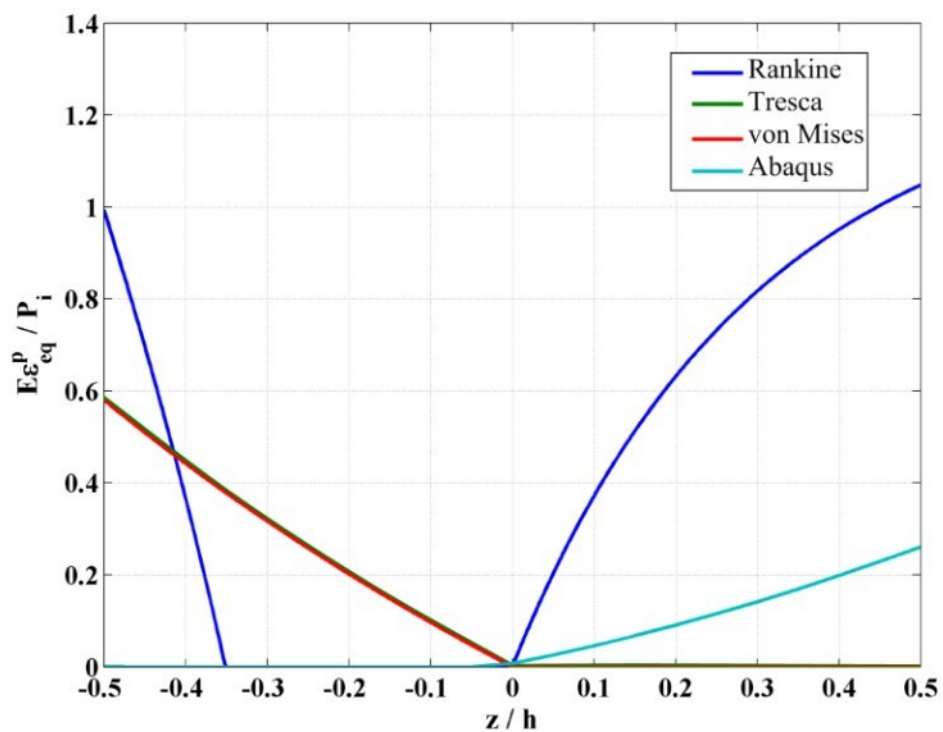


شکل ۳-۳۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$

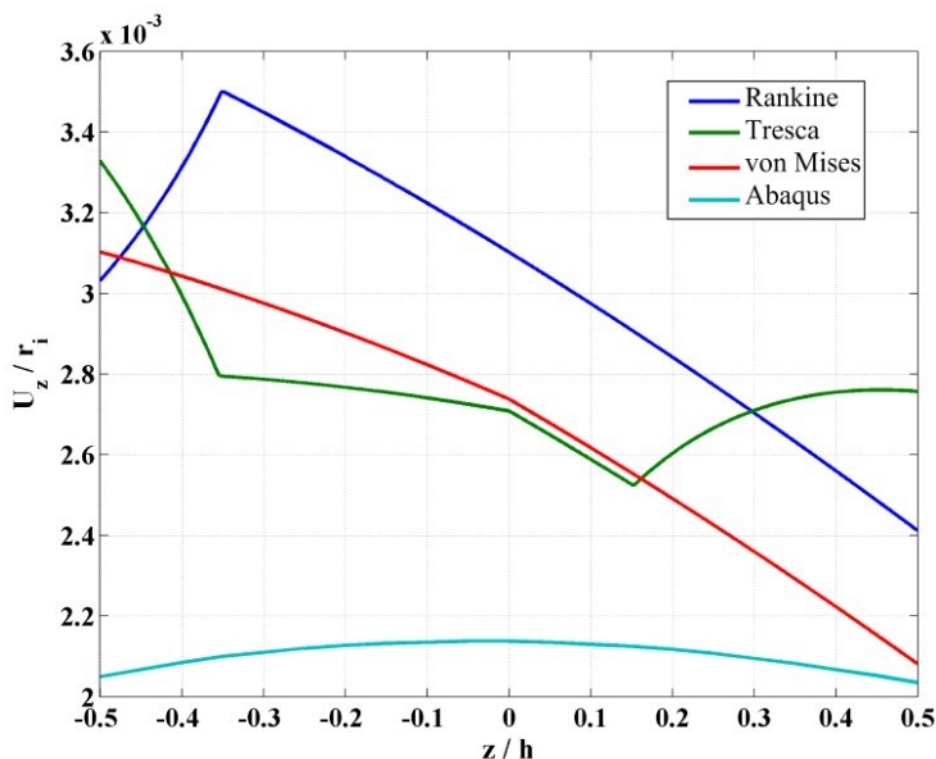
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۳-۳۶ آورده شده است. در بخشی از استوانه معیار فون میزز و در بخشی معیار ترسکا بیشترین دقت را دارند. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۳-۳۷ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها دقت قابل قبولی ندارند ولی معیار رانکین در بخشی از شعاع دقت خوبی دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۳-۳۸ آورده شده است. هیچ‌یک از معیارها دقت قابل قبولی ندارند.



شکل ۳-۳۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

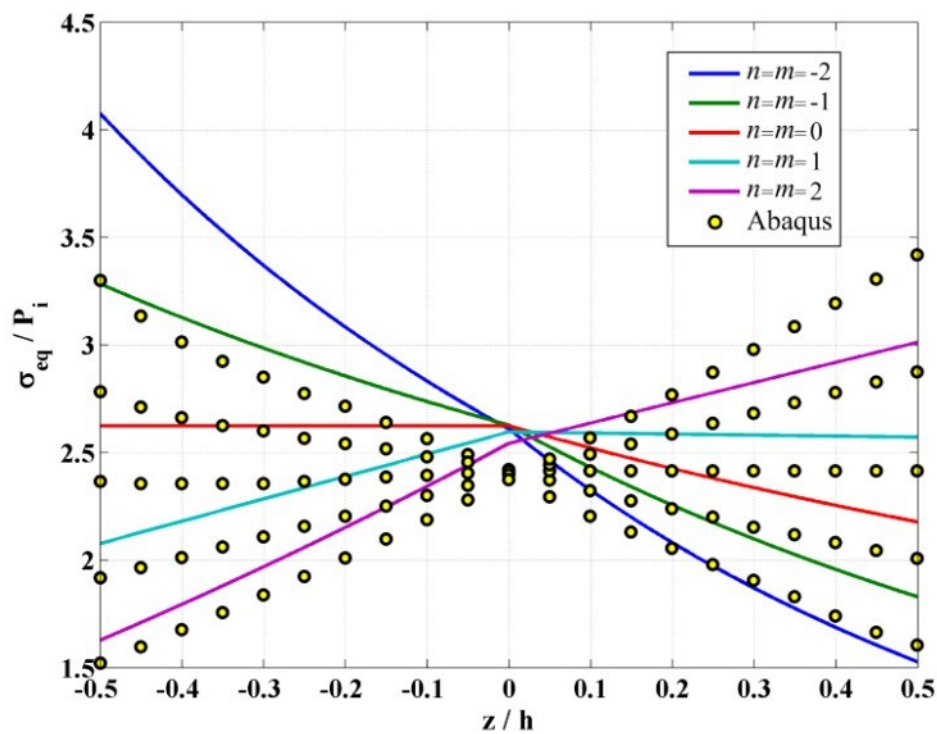


شکل ۳-۳۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

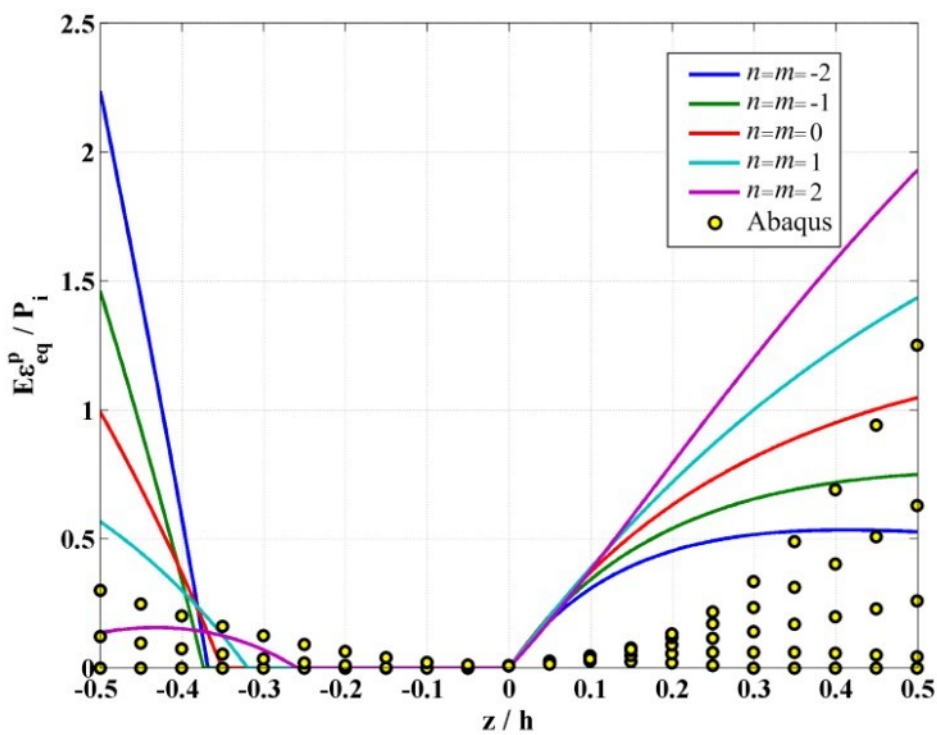


شکل ۳-۳۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

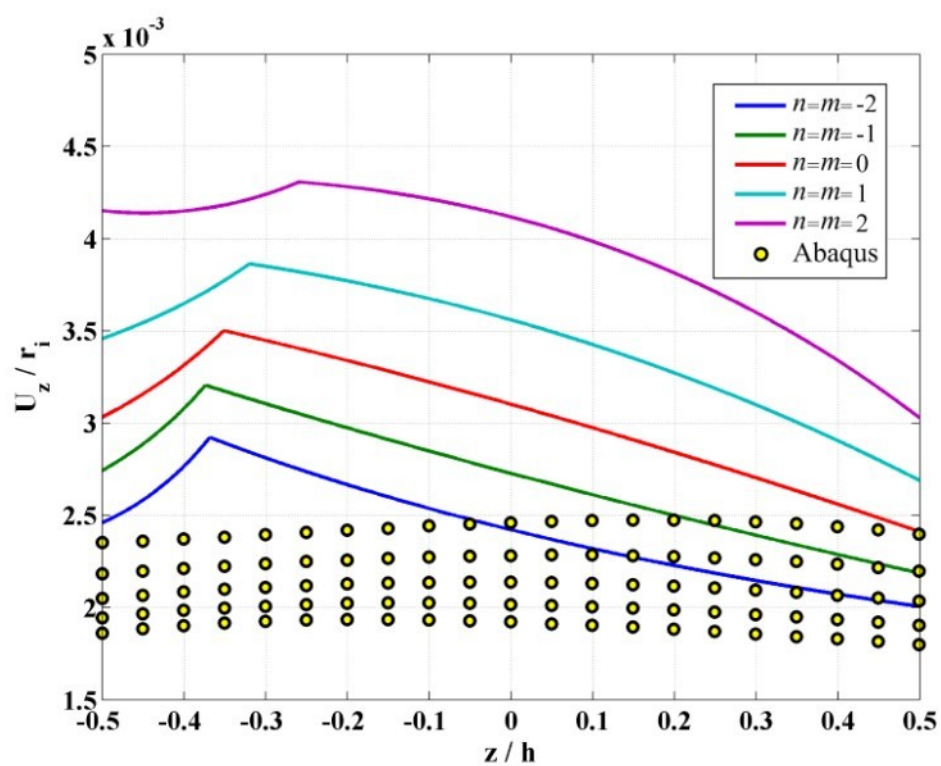
توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۳-۳۹ مشاهده می‌نمایید. در نیمه‌ی داخلی ثابت‌های ناهمگنی بزرگ و در نیمه‌ی خارجی ثابت‌های ناهمگنی کوچک دقیق‌ترند. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۳-۴۰ آورده شده است. بر اساس معیار رانکین در نیمه‌ی داخلی استوانه با افزایش ثابت‌های ناهمگنی کرنش پلاستیک معادل کاهش می‌یابد که این خلاف نتیجه‌ی حاصل از نرم‌افزار Abaqus است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۳-۴۱ آورده شده است. دقت نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر بیشتر است.



شکل ۳-۳۹- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۳-۴۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۳-۴۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

فصل ۴- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به

کمک تئوری تغییر شکل برشی

مرتبه‌ی سوم

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

- ❖ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم
- ❖ استخراج روابط ترموالاستیک
- ❖ اعمال شرایط مرزی
- ❖ بررسی جریان پلاستیک
- ❖ ارائه و مقایسه‌ی نتایج

در این فصل پس از بیان روابط تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم به استخراج معادلات حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت متقارن محوری ساخته شده از مواد FG با تغییرات توانی خواص تحت فشار یکنواخت داخلی و خارجی در معرض دمای داخلی و خارجی یکنواخت در شرایط مرزی مختلف بر اساس این تئوری پرداخته شده و روش حل آن‌ها برای استوانه با دو سر گیردار و استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد ارائه می‌شود. سپس روابط مورد نیاز برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک ماده و نحوه‌ی به‌کارگیری آن‌ها در حل مسأله‌ی مورد نظر مطرح شده است. پس از آن به بیان نتایج حاصل از حل آن پرداخته شده است که این نتایج با نتایج به‌دست آمده از حل مسأله به کمک نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus مقایسه شده است.

۴-۱- تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم

در فصل دوم دیدیم که بر اساس تئوری الاستیسیته‌ی مستوی و با استفاده از بسط تیلور جابه‌جایی شعاعی استوانه برابر است با:

$$u_r(r) = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + \dots \quad (۴-۱)$$

در فصل‌های دوم و سوم با استفاده از تقریب مرتبه‌ی اول عبارت فوق (تئوری میرسکی-هرمان مرتبه‌ی اول) به حل مسأله‌ی مورد نظر پرداختیم. در این فصل قصد داریم با استفاده از تقریب مرتبه‌ی سوم مسأله را حل نماییم:

$$\begin{cases} U_x = u_0(x) + u_1(x)z + u_2(x)z^2 + u_3(x)z^3 \\ U_\theta = 0 \\ U_z = w_0(x) + w_1(x)z + w_2(x)z^2 + w_3(x)z^3 \end{cases} \quad (۴-۲)$$

بر اساس روابط سینماتیک کرنش‌ها در حالت تقارن محوری عبارتند از:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{U_z}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x}. \quad (۴-۳)$$

با جایگذاری روابط (۲-۴) در (۳-۴) کرنش‌ها به شکل زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{du_0}{dx} + \frac{du_1}{dx}z + \frac{du_2}{dx}z^2 + \frac{du_3}{dx}z^3 \\ \varepsilon_\theta = \frac{w_0}{R+z} + \frac{w_1}{R+z}z + \frac{w_2}{R+z}z^2 + \frac{w_3}{R+z}z^3 \\ \varepsilon_z = w_1 + 2w_2z + 3w_3z^2 \\ \gamma_{xz} = u_1 + 2u_2z + 3u_3z^2 + \frac{dw_0}{dx} + \frac{dw_1}{dx}z + \frac{dw_2}{dx}z^2 + \frac{dw_3}{dx}z^3 \end{cases} \quad (۴-۴)$$

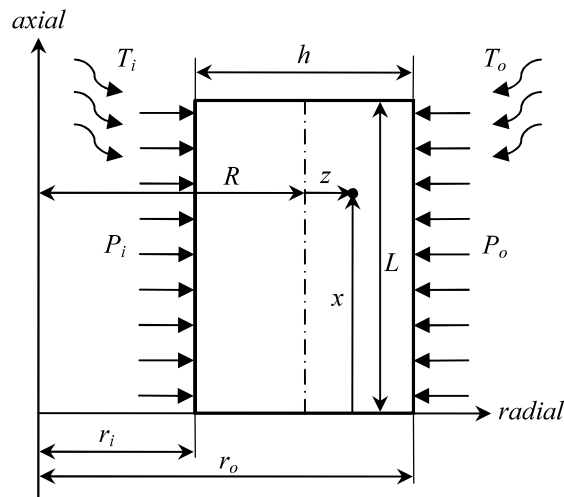
با استفاده از روابط تنش-کرنش و همچنین در نظر گرفتن توزیع دما در استوانه به صورت

رابطه‌ی (۶-۴) که در فصل قبل محاسبه شده بود، می‌توان تنش‌ها را از روی کرنش‌ها محاسبه نمود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \lambda E \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha\theta \\ \varepsilon_\theta - \alpha\theta \\ \varepsilon_z - \alpha\theta \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (۵-۴)$$

$$\theta(z) = \frac{T_o - T_i}{a} \ln\left(\frac{R+z}{r_i}\right) + T_i - T^* \quad (۶-۴)$$

۲-۴- استخراج روابط ترموالاستیک



شکل ۱-۴- پروفیل استوانه‌ای جدار ثابت در معرض دما و فشار داخلی و خارجی

در این بخش معادلات حاکم بر پوسته‌ی استوانه‌ای جدار کلفت FGM تحت فشار یکنواخت داخلی و

خارجی و در معرض دمای داخلی و خارجی در حالت پایا، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی

مرتبه‌ی اول و اصل کار مجازی استخراج شده است. توزیع مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی

مشابه قبل به صورت توانی انتخاب می‌شود و نسبت پواسن ثابت فرض می‌شود:

$$E = E_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^n = \frac{E_i}{r_i^n} (R+z)^n, \quad \nu = \text{cte.} \quad (7-4)$$

$$\alpha = \alpha_i \left(\frac{r}{r_i} \right)^l = \frac{\alpha_i}{r_i^l} (R+z)^l \quad (8-4)$$

مشابه بخش (۳-۲) به کمک اصل کار مجازی اقدام به محاسبه‌ی معادلات حاکم بر استوانه

می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_\theta \delta \varepsilon_\theta + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) (R+z) dz dx \\ = \int_0^L (P_i r_i \delta U_z|_{z=-h/2} - P_o r_o \delta U_z|_{z=h/2}) dx \end{aligned} \quad (9-4)$$

به کمک روابط (۲-۴) و (۴-۴) رابطه‌ی فوق بدین شکل بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_x \left(\frac{d}{dx} \delta u_0 + z \frac{d}{dx} \delta u_1 + z^2 \frac{d}{dx} \delta u_2 + z^3 \frac{d}{dx} \delta u_3 \right) \\ + \frac{\sigma_\theta}{R+z} (\delta w_0 + z \delta w_1 + z^2 \delta w_2 + z^3 \delta w_3) \\ + \sigma_z (\delta w_1 + 2z \delta w_2 + 3z^2 \delta w_3) \\ + \tau_{xz} (\delta u_1 + 2z \delta u_2 + 3z^2 \delta u_3 \\ + \frac{d}{dx} \delta u_0 + z \frac{d}{dx} \delta u_1 + z^2 \frac{d}{dx} \delta u_2 + z^3 \frac{d}{dx} \delta u_3)] \\ (R+z) dz dx \\ = \int_0^L [P_i r_i \left(\delta w_0 - \frac{h}{2} \delta w_1 + \frac{h^2}{4} \delta w_2 - \frac{h^3}{8} \delta w_3 \right) \\ - P_o r_o \left(\delta w_0 + \frac{h}{2} \delta w_1 + \frac{h^2}{4} \delta w_2 + \frac{h^3}{8} \delta w_3 \right)] dx \end{aligned} \quad (10-4)$$

با به‌کارگیری اصول حساب تغییرات هشت معادله به همراه شانزده شرط مرزی از رابطه بالا

استخراج می‌شوند که به صورت زیر می‌باشند:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \int_{-h/2}^{h/2} \frac{d\sigma_x}{dx} (R+z) dz = 0 \\
& \int_{-h/2}^{h/2} \left(\tau_{xz} - \frac{d\sigma_x}{dx} z \right) (R+z) dz = 0 \\
& \int_{-h/2}^{h/2} \left(2\tau_{xz} z - \frac{d\sigma_x}{dx} z^2 \right) (R+z) dz = 0 \\
& \int_{-h/2}^{h/2} \left(3\tau_{xz} z^2 - \frac{d\sigma_x}{dx} z^3 \right) (R+z) dz = 0 \\
& \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sigma_\theta}{R+z} - \frac{d\tau_{xz}}{dx} \right) (R+z) dz = P_i r_i - P_o r_o \\
& \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sigma_\theta}{R+z} z + \sigma_z - \frac{d\tau_{xz}}{dx} z \right) (R+z) dz = \frac{h}{2} (-P_i r_i - P_o r_o) \quad (11-4) \\
& \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sigma_\theta}{R+z} z^2 + 2\sigma_z z - \frac{d\tau_{xz}}{dx} z^2 \right) (R+z) dz \\
& \quad = \frac{h^2}{4} (P_i r_i - P_o r_o) \\
& \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{\sigma_\theta}{R+z} z^3 + 3\sigma_z z^2 - \frac{d\tau_{xz}}{dx} z^3 \right) (R+z) dz \\
& \quad = \frac{h^3}{8} (-P_i r_i - P_o r_o) \\
& \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\sum_{i=0}^3 (\sigma_x z^i \delta u_i + \tau_{xz} z^i \delta w_i) \right) (R+z) dz \right]^L = 0.
\end{aligned} \right.$$

۸ معادله‌ی اول (۱۱-۴) را می‌توان به کمک روابط تنش- کرنش، کرنش-جابه‌جایی و توزیع

مدول الاستیسیته به دستگاه ۸ معادله‌ی دیفرانسیل ناهمگن خطی با ضرایب ثابت به شکل زیر نوشت:

$$\begin{cases}
\tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \vec{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \vec{y} + \tilde{C} \vec{y} = \vec{F} \\
\vec{y} = \{u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3\}^T \\
\vec{F} = \vec{F}^P + \vec{F}^{th}
\end{cases} \quad (12-4)$$

ماتریس‌های ضرایب $[A_{ij}]$ ، $[B_{ij}]$ و $[C_{ij}]$ ماتریس‌های 8×8 می‌باشند که درایه‌های آن‌ها

مقادیری ثابت بوده و به کمک انتگرال‌های (۱۴-۴) تا (۱۶-۴) محاسبه می‌شوند.

$$\mu = \frac{K}{2} (1 - 2\nu) \quad (13-4)$$

$$\begin{cases} A_{ij} = (1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z^{i+j-2} dz, & i, j = 1, 2, 3, 4; \\ A_{ij} = \mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z^{i+j-10} dz, & i, j = 5, 6, 7, 8. \end{cases} \quad (۱۴-۴)$$

$$\begin{cases} B_{15} = -B_{51} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n dz \\ B_{16} = -B_{61} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n (R + 2z) dz \\ B_{17} = -B_{71} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n (2R + 3z) z dz \\ B_{18} = -B_{81} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n (3R + 4z) z^2 dz \\ B_{2i} = -B_{i2} = \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n [\nu(z + (R + z)(i - 5)) \\ - \mu(R + z)] z^{i-5} dz \\ B_{3i} = -B_{i3} = \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n [\nu(z + (R + z)(i - 5)) \\ - 2\mu(R + z)] z^{i-4} dz \\ B_{4i} = -B_{i4} = \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^n [\nu(z + (R + z)(i - 5)) \\ - 3\mu(R + z)] z^{i-3} dz \end{cases} \quad (۱۵-۴)$$

$i = 5, 6, 7, 8.$

$$\begin{cases} C_{ij} = -(i - 1)(j - 1)\mu \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n+1} z^{i+j-4} dz \\ C_{55} = -(1 - \nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} dz \\ C_{5k} = C_{k5} = \\ - \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} [(1 - \nu)z + (k - 5)\nu(R + z)] z^{k-6} dz \\ C_{kl} = C_{lk} = - \int_{-h/2}^{h/2} (R + z)^{n-1} [(k + l - 10)\nu(R + z)z \\ + (i - 5)(j - 5)(1 - \nu)(R + z)^2 + (1 - \nu)z^2] z^{k+l-12} dz \end{cases} \quad (۱۶-۴)$$

$i, j = 2, 3, 4, \quad k, l = 6, 7, 8.$

سایر درایه‌های این ماتریس‌ها صفر می‌باشند. در این فصل نیز مشابه فصل‌های قبل از ضریب

تصحیح برش $\frac{5}{6} (K)$ که از طریق رابطه‌ی (۴-۱۳) وارد معادلات می‌شود، استفاده می‌کنیم [۷۵].

$\{F_i\}$ را به دو قسمت نیروی حاصل از فشار و نیروی حاصل از بار حرارتی تقسیم می‌کنیم که عناصر غیر صفر آن‌ها به کمک روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} F_5^P = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} (P_o r_o - P_i r_i) \\ F_6^P = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \frac{h}{2} (P_o r_o + P_i r_i) \\ F_7^P = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \frac{h^2}{4} (P_o r_o - P_i r_i) \\ F_8^P = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \frac{h^3}{8} (P_o r_o + P_i r_i) \end{cases} \quad (۱۷-۴)$$

$$\begin{cases} F_5^{th} = -(1+\nu) \frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+l} \theta(z) dz \\ F_6^{th} = -(1+\nu) \frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+l} (R+2z) \theta(z) dz \\ F_7^{th} = -(1+\nu) \frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+l} (R+2z) \theta(z) z dz \\ F_8^{th} = -(1+\nu) \frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+l} (R+2z) \theta(z) z^2 dz \end{cases} \quad (۱۸-۴)$$

دستگاه معادلات (۱۲-۴) پاسخی شامل دو بخش عمومی و خصوصی به شکل زیر دارد:

$$\vec{y} = \vec{y}_g + \vec{y}_p \quad (۱۹-۴)$$

از آن‌جا که $\{F_i\}$ تابعی از x نیست پاسخ خصوصی معادله نیز تابعی از x نیست و برداری ثابت می‌باشد که با قرار دادن آن در معادله دو جمله‌ی اول که مشتق آن نسبت به x می‌باشند صفر می‌شوند. بنابراین:

$$\tilde{C} \vec{y}_p = \vec{F} \Rightarrow \vec{y}_p = \tilde{C}^{-1} \vec{F} \quad (۲۰-۴)$$

با توجه به روابط (۱۶-۴) می‌توان دریافت که $[C_{ij}]$ ماتریسی وارون‌ناپذیر است. برای رفع این

مشکل از اولین معادله‌ی مجموعه‌ی (۱۱-۴) نسبت به x انتگرال می‌گیریم و مشتق u_0 نسبت به x را u_0' می‌نامیم:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x (R+z) dz = c_{15} \quad (۲۱-۴)$$

$$u'_0 = \frac{du_0}{dx} \Rightarrow u_0 = \int u'_0 dx + c_{16} \quad (22-4)$$

پس از اعمال این تغییرات دستگاه معادلات (۱۲-۴) به شکل زیر در می آید:

$$\begin{cases} \tilde{A} \frac{d^2}{dx^2} \vec{y} + \tilde{B} \frac{d}{dx} \vec{y} + \tilde{C} \vec{y} = \vec{F} \\ \vec{y} = \{u'_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad w_3\}^T \\ \vec{F} = \vec{F}^P + \vec{F}^{th} \end{cases} \quad (23-4)$$

درایه‌هایی از ماتریس‌های ضرایب و بردارهای نیرو که مقدارشان با مقدار محاسبه شده از

روابط (۴-۱۴ تا ۱۸) متفاوت است از روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$A_{11} = A_{12} = A_{21} = A_{13} = A_{31} = A_{14} = A_{41} = 0 \quad (24-4)$$

$$\begin{cases} B_{12} = B_{21} = (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} z dz \\ B_{13} = B_{31} = (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} z^2 dz \\ B_{14} = B_{41} = (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} z^3 dz \\ B_{15} = B_{51} = B_{16} = B_{61} = B_{17} = B_{71} = B_{18} = B_{81} = 0 \end{cases} \quad (25-4)$$

$$\begin{cases} C_{11} = (1-\nu) \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+1} dz \\ C_{15} = -C_{51} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^n dz \\ C_{16} = -C_{61} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^n (R+2z) dz \\ C_{17} = -C_{71} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^n (2R+3z) z dz \\ C_{18} = -C_{81} = \nu \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^n (3R+4z) z^2 dz \end{cases} \quad (26-4)$$

$$F_1^P = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} c_{15} \quad (27-4)$$

$$F_1^{th} = (1+\nu) \frac{\alpha_i}{r_i^l} \int_{-h/2}^{h/2} (R+z)^{n+l+1} \theta(z) dz \quad (28-4)$$

دستگاه معادلات (۲۳-۴) نیز مشابه دستگاه معادلات (۱۲-۴) پاسخی شامل دو بخش عمومی و خصوصی به شکل رابطه‌ی (۲۹-۴) دارد که پاسخ خصوصی آن برداری ثابت است و از رابطه‌ی (۳۰-۴) به دست می‌آید:

$$\vec{y} = \vec{y}_g + \vec{y}_p \quad (۲۹-۴)$$

$$\vec{y}_p = \vec{p} = \tilde{C}^{-1} \vec{F} = \tilde{D} \vec{F} \quad (۳۰-۴)$$

مشاهده می‌شود که این بار $[C_{ij}]$ وارون‌پذیر است و پاسخ خصوصی معادله به راحتی محاسبه می‌شود. برای به دست آوردن پاسخ عمومی معادله نیاز به حل قسمت همگن معادله می‌باشد که مشابه آن چه در بخش ۲-۳ مطرح شد، تبدیل به مسالهی مقدار ویژه‌ای به شکل زیر می‌شود:

$$(d^2 \tilde{A} + d \tilde{B} + \tilde{C}) \vec{v} = \vec{0} \quad (۳۱-۴)$$

برای یافتن مقادیر ویژه دترمینان ماتریس ضرایب را برابر صفر قرار می‌دهیم (رابطه‌ی ۲۳-۴) و معادله‌ی حاصل را برای d حل می‌نماییم. سپس بردار ویژه‌ی متناظر با هر مقادیر ویژه به کمک رابطه‌ی (۳۱-۴) به دست می‌آوریم.

$$\det(d^2 \tilde{A} + d \tilde{B} + \tilde{C}) = 0 \quad (۳۲-۴)$$

ماتریس فوق 8×8 و بزرگترین توان d ، ۲ است؛ بنابراین مسالهی فوق دارای شانزده مقدار ویژه می‌باشد. ولی دو عدد از این مقادیر ویژه صفر می‌باشند که برای راحتی کار از وارد کردن آن‌ها در جواب معادله‌ی دیفرانسیل خودداری نموده و فقط چهارده مقدار ویژه‌ی دیگر را در نظر می‌گیریم. بنابراین پاسخ نهایی دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲۳-۴) به شکل زیر می‌باشد:

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{14} c_i \vec{v}_i e^{d_i x} + \tilde{C}^{-1} \vec{F} \quad (۳۳-۴)$$

رابطه‌ی فوق به صورت زیر نیز قابل نوشتن است:

$$\begin{cases} u'_0 = \sum_{i=1}^{14} c_i V_{1i} e^{d_i x} + p_1 \\ u_j = \sum_{i=1}^{14} c_i V_{(j+1)i} e^{d_i x} + p_{j+1}, \quad j = 1, 2, 3. \\ w_j = \sum_{i=1}^{14} c_i V_{(j+5)i} e^{d_i x} + p_{j+5}, \quad j = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \quad (34-4)$$

که $[V_{ij}]$ ماتریس بردارهای ویژه است. با انتگرال گیری از معادله ی اول روابط (34-4) مطابق

رابطه ی (22-4) u_0 محاسبه می شود:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{14} \frac{c_i}{d_i} V_{1i} e^{d_i x} + p_1 x + c_{16} \quad (35-4)$$

شانزده ثابت c_1 تا c_{16} در $\vec{p}$ ظاهر می شود) به کمک هشت شرط مرزی مسأله که در

رابطه ی (11-4) معرفی شدند، قابل محاسبه می باشند. سپس میدان های جابه جایی به کمک روابط

(2-4)، کرنش به کمک روابط (4-4) و تنش به کمک روابط (5-4) محاسبه می شوند.

3-4- اعمال شرایط مرزی

برای محاسبه ی ثابت های c_1 تا c_{14} از شرایط مرزی باید یک دستگاه 16 معادله و 16 مجهول به شکل

رابطه ی (36-4) تشکیل داد و آن را حل نمود.

$$\vec{G}\vec{c} = \vec{H} \quad (36-4)$$

3-4-1- استوانه با دو سر گیردار

در استوانه با دو سر بسته ی مقید جابه جایی ها در دو انتها صفرند بنابراین شرایط مرزی به صورت زیر

می باشند:

$$u_i|_{x=0} = u_i|_{x=L} = w_i|_{x=0} = w_i|_{x=L} = 0 \quad (37-4)$$

به کمک روابط (34-4) و (35-4) مجموعه معادلاتی که پس از حل آن ها ثابت ها به صورتی

تعیین می شوند که شرایط مرزی فوق برقرار شوند، قابل محاسبه خواهند بود.

درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=0$ عبارتند از:

$$\begin{cases} G_{1j} = V_{1j}/d_j \\ G_{ij} = V_{ij} \\ G_{i15} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} D_{i1} \\ G_{1,16} = 1 \end{cases}, \quad i = 2 - 8, \quad j = 1 - 14. \quad (38-4)$$

$$H_i = -(D_{i1}F_1^{th} + D_{i5}F_5 + D_{i6}F_6 + D_{i7}F_7 + D_{i8}F_8), \quad i = 2 - 8. \quad (39-4)$$

و درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=L$ عبارتند از:

$$\begin{cases} G_{9j} = V_{1j}e^{d_j L}/d_j \\ G_{ij} = V_{(i-8)j}e^{d_j L} \\ G_{9,15} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} D_{11}L \\ G_{i15} = \frac{r_i^n}{\lambda E_i} D_{(i-8)1} \\ G_{9,16} = 1 \end{cases}, \quad i = 10 - 16, \quad j = 1 - 14. \quad (40-4)$$

$$\begin{cases} H_9 = -(D_{11}F_1^{th} + D_{15}F_5 + D_{16}F_6 + D_{17}F_7 + D_{18}F_8)L \\ H_{i+8} = -(D_{i1}F_1^{th} + D_{i5}F_5 + D_{i6}F_6 + D_{i7}F_7 + D_{i8}F_8) \end{cases}, \quad i = 2 - 8. \quad (41-4)$$

۴-۳-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد

در این حالت برای سر گیردار از روابط ارائه شده در قسمت قبل استفاده می‌کنیم. شرایط مرزی برای

سر آزاد همان‌طور که در رابطه‌ی (۴-۱۱) معرفی شدند به صورت زیر است:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xz}^2 \\ \sigma_{xz}^3 \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xzz} \\ \tau_{xzz}^2 \\ \tau_{xzz}^3 \end{Bmatrix} (R+z) dz = \vec{0} \quad (42-4)$$

با نوشتن رابطه‌ی فوق بر حسب جابه‌جایی‌ها می‌توان دستگاه معادلات مورد نظر را تشکیل

داد.

درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=0$ عبارتند از:

$$\left\{ \begin{aligned} G_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [(1-\nu)(V_{1j} + d_j V_{2j}z + d_j V_{3j}z^2 + d_j V_{4j}z^3) \\ &\quad + \frac{\nu}{R+z}(V_{5j} + V_{6j}z + V_{7j}z^2 + V_{8j}z^3) \\ &\quad + \nu(V_{6j} + 2V_{7j}z + 3V_{8j}z^2)](R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ G_{i15} &= \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} [(1-\nu)D_{11} + \frac{\nu}{R+z}(D_{51} + D_{61}z + D_{71}z^2 \\ &\quad + D_{81}z^3) + \nu(D_{61} + 2D_{71}z + 3D_{81}z^2)](R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \quad (۴۳-۴) \\ G_{(i+4)j} &= \int_{-h/2}^{h/2} (V_{2j} + 2V_{3j}z + 3V_{4j}z^2 + d_j V_{5j} + d_j V_{6j}z \\ &\quad + d_j V_{7j}z^2 + d_j V_{8j}z^3)(R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ G_{(i+4)15} &= \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} (D_{21} + 2D_{31}z + 3D_{41}z^2)(R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ &, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 1 - 14. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} H_i &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [(1-\nu)(D_{11}F_1^{th} + D_{15}F_5 + D_{16}F_6 + D_{17}F_7 + D_{18}F_8) \\ &\quad + \frac{\nu}{R+z}((D_{51}F_1^{th} + D_{55}F_5 + D_{56}F_6 + D_{57}F_7 + D_{58}F_8) \\ &\quad + (D_{61}F_1^{th} + D_{65}F_5 + D_{66}F_6 + D_{67}F_7 + D_{68}F_8)z \\ &\quad + (D_{71}F_1^{th} + D_{75}F_5 + D_{76}F_6 + D_{77}F_7 + D_{78}F_8)z^2 \\ &\quad + (D_{81}F_1^{th} + D_{85}F_5 + D_{86}F_6 + D_{87}F_7 + D_{88}F_8)z^3 \\ &\quad + \nu((D_{61}F_1^{th} + D_{65}F_5 + D_{66}F_6 + D_{67}F_7 + D_{68}F_8) \\ &\quad + 2(D_{71}F_1^{th} + D_{75}F_5 + D_{76}F_6 + D_{77}F_7 + D_{78}F_8)z \quad (۴۴-۴) \\ &\quad + 3(D_{81}F_1^{th} + D_{85}F_5 + D_{86}F_6 + D_{87}F_7 + D_{88}F_8)z^2) \\ &\quad - (1+\nu)\frac{\alpha_i}{r_i^l}(R+z)^l\theta(z)](R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ H_{i+4} &= - \int_{-h/2}^{h/2} [(D_{21}F_1^{th} + D_{25}F_5 + D_{26}F_6 + D_{27}F_7 + D_{28}F_8) \\ &\quad + 2(D_{31}F_1^{th} + D_{35}F_5 + D_{36}F_6 + D_{37}F_7 + D_{38}F_8)z + 3(D_{41}F_1^{th} \\ &\quad + D_{45}F_5 + D_{46}F_6 + D_{47}F_7 + D_{48}F_8)z^2](R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ &, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \right.$$

و درایه‌های غیر صفر $[G_{ij}]$ و $\{H_j\}$ برای $x=L$ عبارتند از:

$$\left\{ \begin{aligned} G_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [(1-\nu)(V_{1j} + d_j V_{2j}z + d_j V_{3j}z^2 + d_j V_{4j}z^3) \\ &\quad + \frac{\nu}{R+z}(V_{5j} + V_{6j}z + V_{7j}z^2 + V_{8j}z^3) \\ &\quad + \nu(V_{6j} + 2V_{7j}z + 3V_{8j}z^2)](R+z)^{n+1}e^{d_j L}z^{i-1}dz \\ G_{i15} &= \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} [(1-\nu)D_{11} + \frac{\nu}{R+z}(D_{51} + D_{61}z + D_{71}z^2 \\ &\quad + D_{81}z^3) + \nu(D_{61} + 2D_{71}z + 3D_{81}z^2)](R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \quad (۴۵-۴) \\ G_{(i+4)j} &= \int_{-h/2}^{h/2} (V_{2j} + 2V_{3j}z + 3V_{4j}z^2 + d_j V_{5j} + d_j V_{6j}z \\ &\quad + d_j V_{7j}z^2 + d_j V_{8j}z^3)(R+z)^{n+1}e^{d_j L}z^{i-1}dz \\ G_{(i+4)15} &= \frac{r_i^n}{\lambda E_i} \int_{-h/2}^{h/2} (D_{21} + 2D_{31}z + 3D_{41}z^2)(R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ &, \quad i = 5, 6, 7, 8, \quad j = 1 - 14. \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} H_i &= - \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [(1-\nu)(D_{11}F_1^{th} + D_{15}F_5 + D_{16}F_6 + D_{17}F_7 + D_{18}F_8) \\ &\quad + \frac{\nu}{R+z}((D_{51}F_1^{th} + D_{55}F_5 + D_{56}F_6 + D_{57}F_7 + D_{58}F_8) \\ &\quad + (D_{61}F_1^{th} + D_{65}F_5 + D_{66}F_6 + D_{67}F_7 + D_{68}F_8)z \\ &\quad + (D_{71}F_1^{th} + D_{75}F_5 + D_{76}F_6 + D_{77}F_7 + D_{78}F_8)z^2 \\ &\quad + (D_{81}F_1^{th} + D_{85}F_5 + D_{86}F_6 + D_{87}F_7 + D_{88}F_8)z^3 \\ &\quad + \nu((D_{61}F_1^{th} + D_{65}F_5 + D_{66}F_6 + D_{67}F_7 + D_{68}F_8) \\ &\quad + 2(D_{71}F_1^{th} + D_{75}F_5 + D_{76}F_6 + D_{77}F_7 + D_{78}F_8)z \quad (۴۶-۴) \\ &\quad + 3(D_{81}F_1^{th} + D_{85}F_5 + D_{86}F_6 + D_{87}F_7 + D_{88}F_8)z^2) \\ &\quad - (1+\nu)\frac{\alpha_i}{r_i^l}(R+z)^l\theta(z)](R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ H_{i+4} &= - \int_{-h/2}^{h/2} [(D_{21}F_1^{th} + D_{25}F_5 + D_{26}F_6 + D_{27}F_7 + D_{28}F_8) \\ &\quad + 2(D_{31}F_1^{th} + D_{35}F_5 + D_{36}F_6 + D_{37}F_7 + D_{38}F_8)z + 3(D_{41}F_1^{th} \\ &\quad + D_{45}F_5 + D_{46}F_6 + D_{47}F_7 + D_{48}F_8)z^2](R+z)^{n+1}z^{i-1}dz \\ &, \quad i = 5, 6, 7, 8. \end{aligned} \right.$$

۴-۴- بررسی جریان پلاستیک

تحلیل پلاستیک کاملاً مشابه آن چه در بخش ۲-۵ مطرح شد انجام می شود. تنها تفاوت در این است که از کرنش مکانیکی (تفاضل کرنش حرارتی از کرنش کل) در روابط باید استفاده نمود. روند تحلیل پلاستیک به طور خلاصه به شرح زیر است.

σ_θ یکی از تنش های اصلی است؛ دو تنش اصلی دیگر به کمک رابطه ی زیر به دست می آیند:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (۴۷-۴)$$

تنش معادل معیار رانکین از رابطه ی (۴۸-۴)، تنش معادل معیار ترسکا از رابطه ی (۴۹-۴) و

تنش معادل معیار فون میزز از رابطه ی (۵۰-۴) محاسبه می شوند:

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (۴۸-۴)$$

$$\sigma_{eq} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (۴۹-۴)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/2} \quad (۵۰-۴)$$

در صورت بیشتر بودن مقدار تنش معادل از استحکام تسلیم که توزیع آن به صورت رابطه ی

(۵۱-۴) در نظر گرفته شده است آن نقطه تسلیم شده و تنش های اصلی آن به کمک رابطه ی (۵۲-۴)

اصلاح می شوند. سپس تنش های اصلی با دورانی عکس آن چه برای تبدیل σ_x ، σ_θ ، σ_z و τ_{xz} به

تنش های اصلی استفاده شد، دوباره به σ_x ، σ_θ ، σ_z و τ_{xz} تبدیل می شوند.

$$S_y = S_{yi} \left(\frac{r}{r_i}\right)^m = \frac{S_{yi}}{r_i^m} (R + z)^m \quad (۵۱-۴)$$

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^*}{\sigma_2} = \frac{\sigma_3^*}{\sigma_3} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} \quad (۵۲-۴)$$

ε_θ^m یکی از کرنش های اصلی است؛ دو کرنش اصلی دیگر از رابطه ی زیر محاسبه می شوند:

$$\varepsilon_i^m = \frac{\varepsilon_x^m + \varepsilon_z^m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x^m - \varepsilon_z^m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}^m}{2}\right)^2} \quad (۵۳-۴)$$

کرنش پلاستیک معادل برای معیار رانکین را از رابطه‌ی (۴-۵۴) و کرنش پلاستیک معادل

برای معیار ترسکا و فون میزر را از رابطه‌ی (۴-۵۵) محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_{eq}^p = (1 - \sigma_{eq}/S_y) \max(|\varepsilon_1^m|, |\varepsilon_2^m|, |\varepsilon_3^m|) \quad (۴-۵۴)$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{eq} - S_y}{3G} \quad (۴-۵۵)$$

سپس کرنش‌های اصلی پلاستیک برای معیارهای رانکین، ترسکا و فون میزر را به ترتیب از

روابط (۴-۵۶ تا ۴-۵۸) محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = \varepsilon_k^p = 0, \quad \sigma_i > \sigma_j \geq \sigma_k. \quad (۴-۵۶)$$

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = 0, \quad \varepsilon_k^p = -\varepsilon_{eq}^p, \quad \sigma_i > \sigma_j > \sigma_k. \quad (۴-۵۷)$$

$$\varepsilon_i^p = \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \left[\sigma_i - \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_k) \right] \quad (۴-۵۸)$$

به کمک این رابطه کرنش‌های الاستیک محاسبه شده در نقاط تسلیم شده را اصلاح می‌کنیم:

$$\varepsilon_i^e = \kappa \varepsilon_i^m \quad (۴-۵۹)$$

در پایان برای تبدیل کرنش‌های اصلی الاستیک اصلاح شده و کرنش‌های اصلی پلاستیک

محاسبه شده به $\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$ و γ_{xz} (الاستیک و پلاستیک) از دورانی عکس آن‌چه برای تبدیل $\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$ و

γ_{xz} به کرنش‌های اصلی استفاده شد، استفاده می‌کنیم. کرنش کل برابر مجموع کرنش الاستیک،

کرنش پلاستیک و کرنش حرارتی است و جابه‌جایی شعاعی بر اساس روابط کرنش جابه‌جایی از روی

کرنش محیطی محاسبه می‌شود:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^p + \vec{\varepsilon}^{th} \quad (۴-۶۰)$$

$$U_z = (R + z)\varepsilon_\theta \quad (۴-۶۱)$$

۴-۵- ارائه و مقایسه‌ی نتایج

در این بخش با در نظر گرفتن مقدار برابر برای ثابت‌های m, n و l و برابر ۲، ۱، ۰، ۱ و ۲، نتایج

عددی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای توخالی کلفت با شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰

میلی‌متر، طول ۰/۸ متر، مدول الاستیسیته در سطح داخلی ۲۰۰ گیگاپاسکال، نسبت پواسن ۰/۳،

استحکام تسلیم در سطح داخلی ۲۵۰ مگاپاسکال و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی $11.7 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$ ارائه شده است. فشار یکنواخت داخلی آغاز تسلیم استوانه و فشار یکنواخت داخلی تسلیم سطح میانی در غیاب بار حرارتی و برای دمای سطح داخلی ۱۰۰ درجه‌ی سلسیوس بیش از دمای مرجع در وسط طول استوانه محاسبه و ارائه شده است. سایر نتایج برای یک فشار و دمای خاص ارائه شده‌اند. در تمام موارد دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد بررسی شده است. پاسخ تحلیلی با نوشتن برنامه‌ای در نرم‌افزار MATLAB و پاسخ روش اجزای محدود به کمک نرم‌افزار Abaqus با استفاده از جزء مستطیلی ۸ گره‌ای درجه‌ی ۲ (CAX8R) متقارن محوری و زیربرنامه‌ی UMAT محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۴-۵-۱- استوانه با دو سر گیردار در غیاب بار حرارتی

در جدول ۴-۱ فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود ارائه شده است و در جدول ۴-۲ فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود ارائه شده است. فشار خارجی در این دو حالت در نظر گرفته نشده است. تسلیم استوانه از سطح داخلی آن ($z = -h/2$) آغاز می‌شود.

جدول ۴-۱- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)

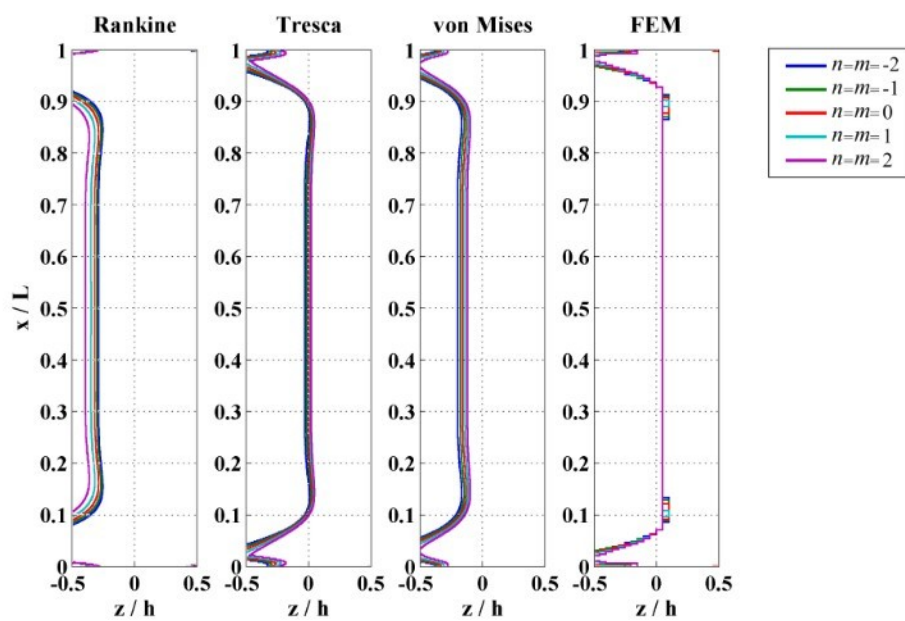
معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میز	نرم‌افزار Abaqus
$n = m = l = -2$	۵۱,۷۹۳	۵۹,۱۲۲	۶۰,۰۹
$n = m = l = -1$	۵۹,۹۰۸	۶۸,۵۲۹	۶۹,۷۰
$n = m = l = 0$	۶۹,۸۳۱	۸۰,۰۵۸	۸۱,۵۹
$n = m = l = 1$	۸۱,۹۶۲	۹۴,۱۷۸	۹۶,۰۰
$n = m = l = 2$	۹۶,۷۶۰	۱۱۱,۴۱۴	۱۱۳,۴۵

جدول ۴-۲- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x=L/2$ (MPa)

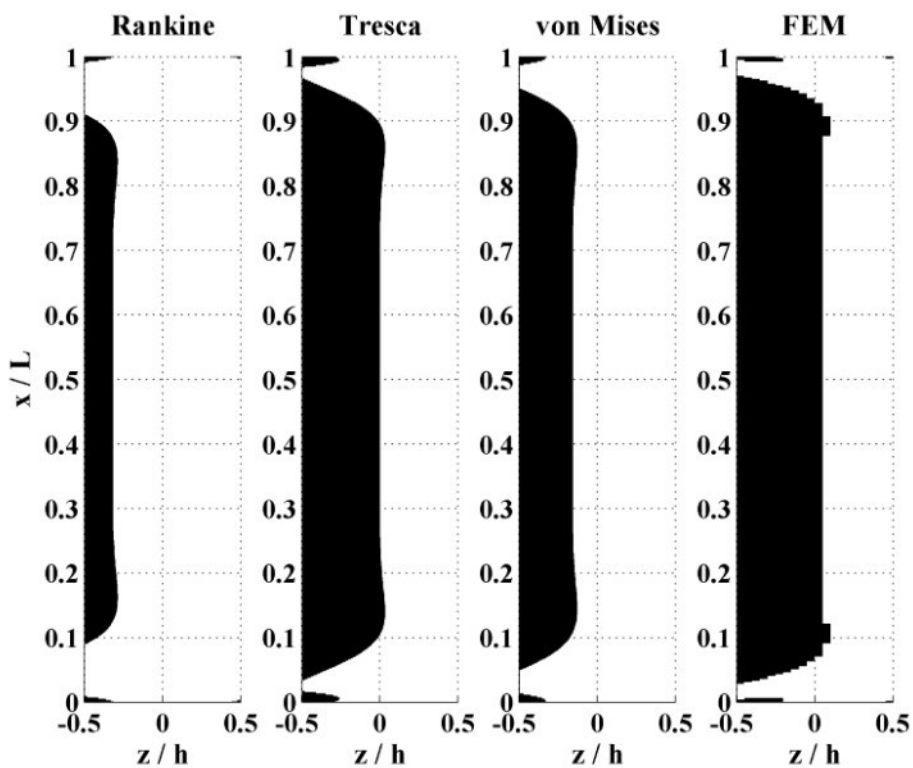
معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
۸۷,۷۸۱	۷۷,۲۳۴	۸۷,۵۶۴	۷۵,۳۶	$n=m=l=-2$
۱۰۵,۹۰۴	۹۰,۹۹۳	۱۰۳,۲۶۶	۸۹,۷۳	$n=m=l=-1$
۱۲۸,۱۰۷	۱۰۸,۵۳۲	۱۲۳,۳۰۵	۱۰۸,۱۵	$n=m=l=0$
۱۵۷,۲۲۳	۱۳۱,۰۷۳	۱۴۹,۰۹۰	۱۳۱,۹۴	$n=m=l=1$
۱۹۵,۸۳۷	۱۶۰,۲۵۰	۱۸۲,۵۱۳	۱۶۲,۹۰	$n=m=l=2$

همان طور که در جدول ها مشاهده می کنید با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می یابد. با توجه به نتایج جدول ۴-۱ می توان دریافت که معیار فون ميزز نسبت به دو معيار ديگر دقت بيشتري در پيش بينی فشار آغاز تسلیم استوانه دارد. با توجه به نتایج جدول ۴-۲ می توان دریافت که معيار ترسکا نسبت به دو معيار ديگر دقت بيشتري در پيش بينی فشار تسلیم سطح میانی دارد.

شعاع مرز ناحیه ی پلاستیک برای استوانه با ثابت های ناهمگنی مختلف در شکل ۴-۲ و تصویر مناطق تسلیم شده ی استوانه در شکل ۴-۳ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار برابر فشار تسلیم لایه ی میانی که به کمک نرم افزار Abaqus به دست آمده است در نظر گرفته شده است. مشاهده می شود که معيار ترسکا بيشتري دقت را در میان سه معيار بررسی شده دارد. همچنين ثابت ناهمگنی تاثیر چندانی بر روی شکل و شعاع ناحیه ی پلاستیک در فشار تسلیم لایه ی میانی ندارد و فقط بر روی میزان این فشار تاثیر می گذارد.

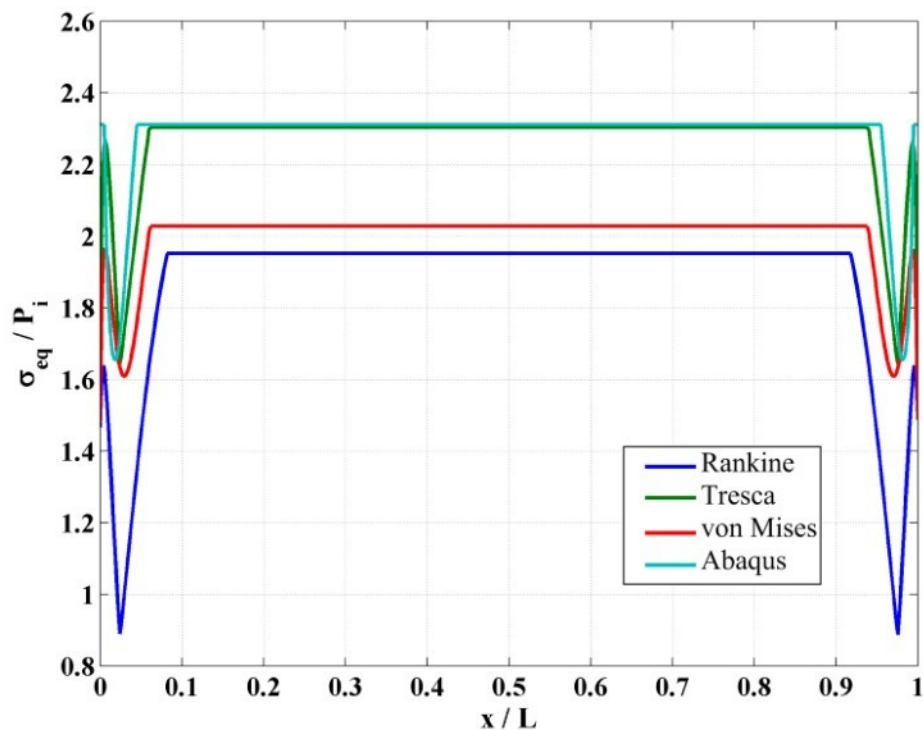


شکل ۴-۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

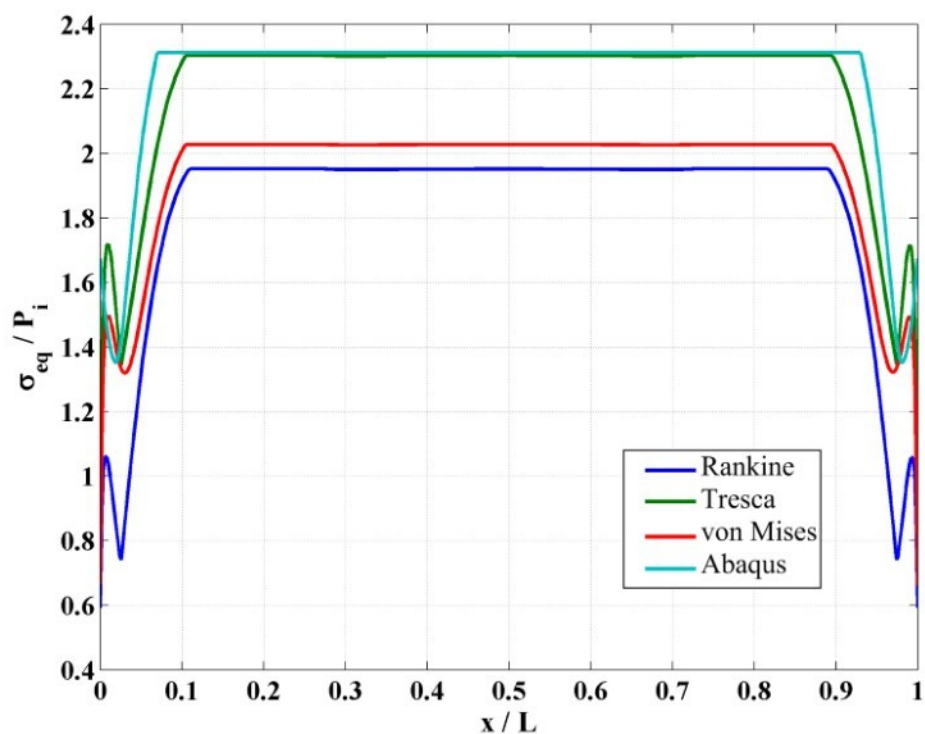


شکل ۴-۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

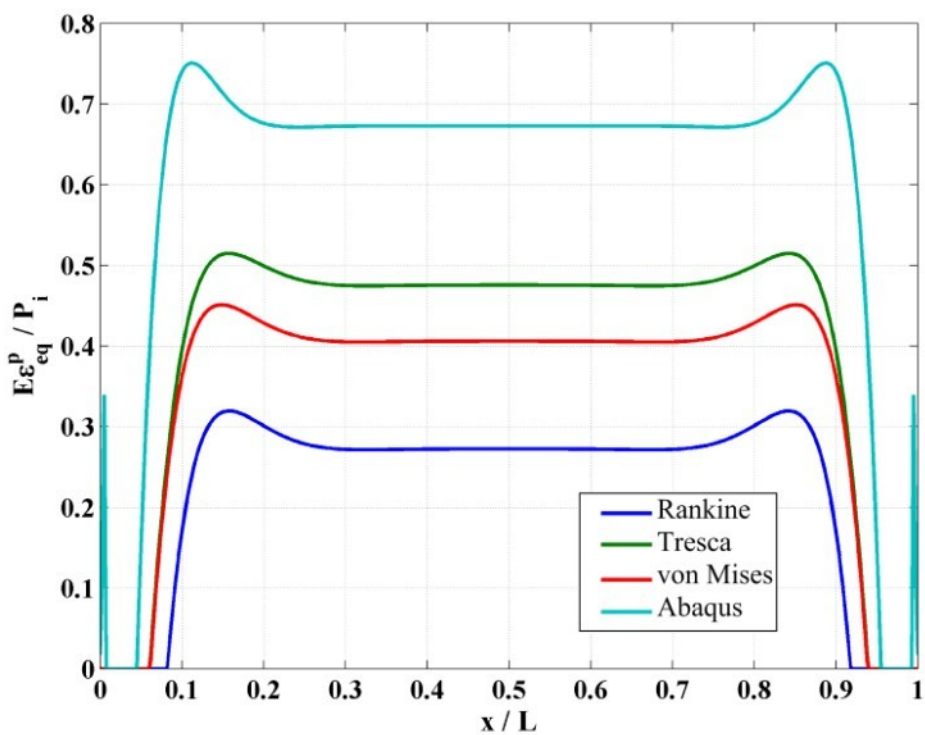
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۴-۲) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۴ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۵ آورده شده است. معیار ترسکا در هر دو حالت بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۶ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۷ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها در این دو حالت دقت قابل قبولی ندارند. برای $z = -h/4$ معیار ترسکا بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۸ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۹ آورده شده است. این بار معیار ترسکا کمترین دقت را دارد و معیارهای رانکین و فون میزز دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده‌اند.



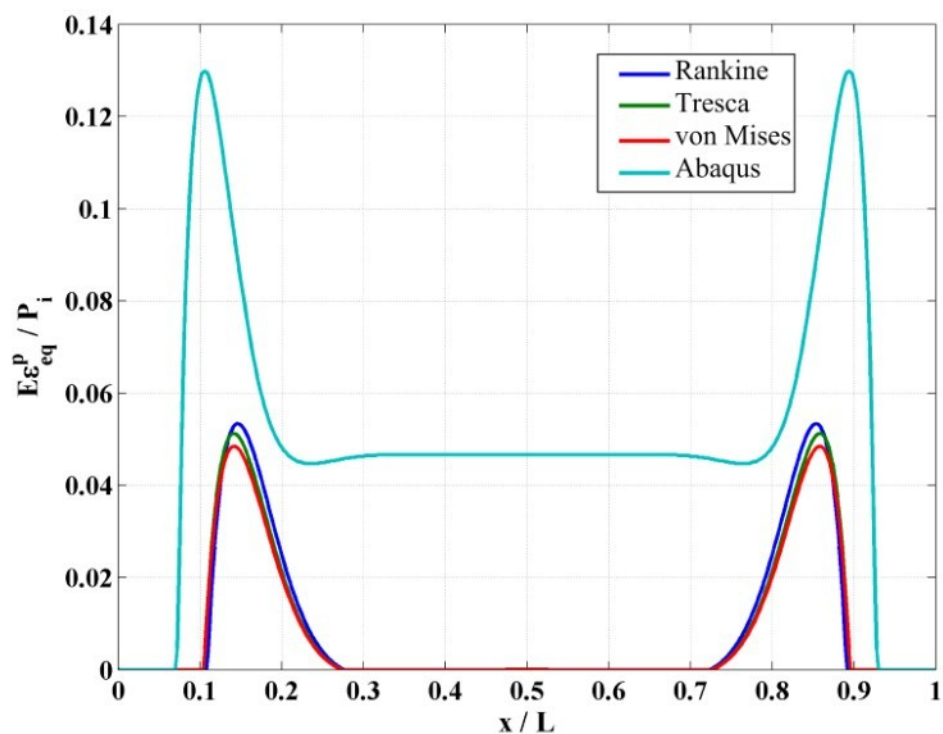
شکل ۴-۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z = -h/4$



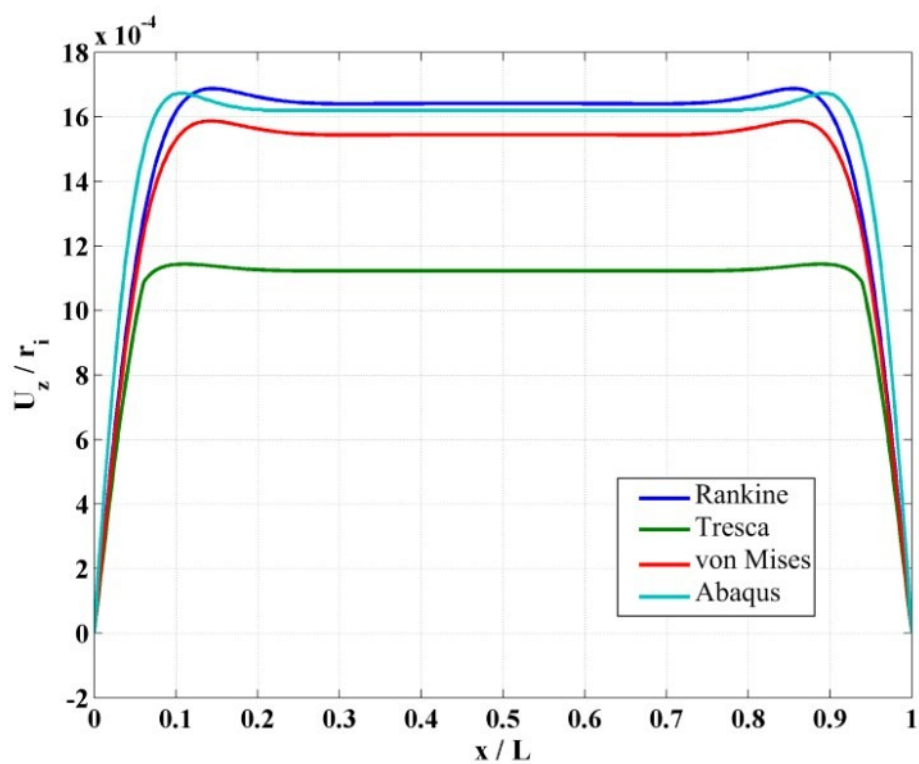
شکل ۴-۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



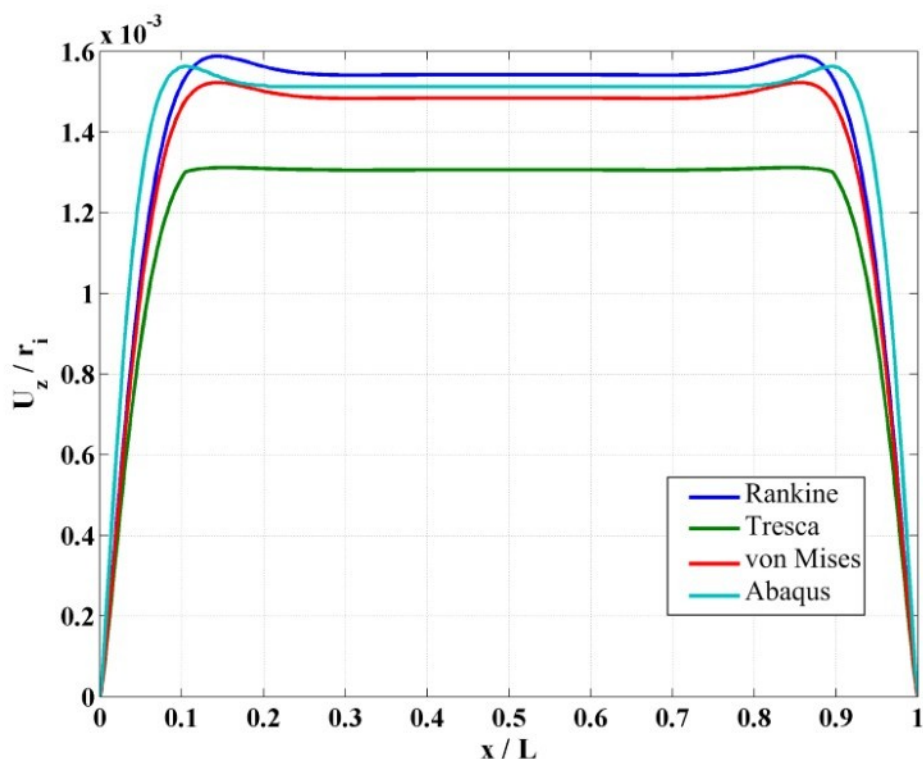
شکل ۴-۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۴-۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

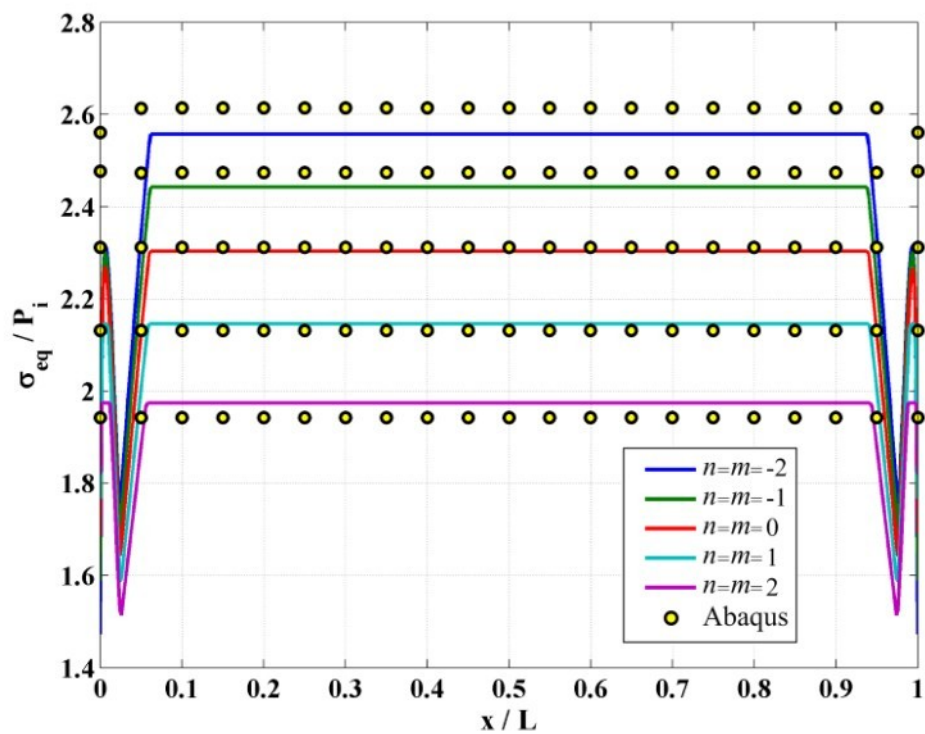


شکل ۴-۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

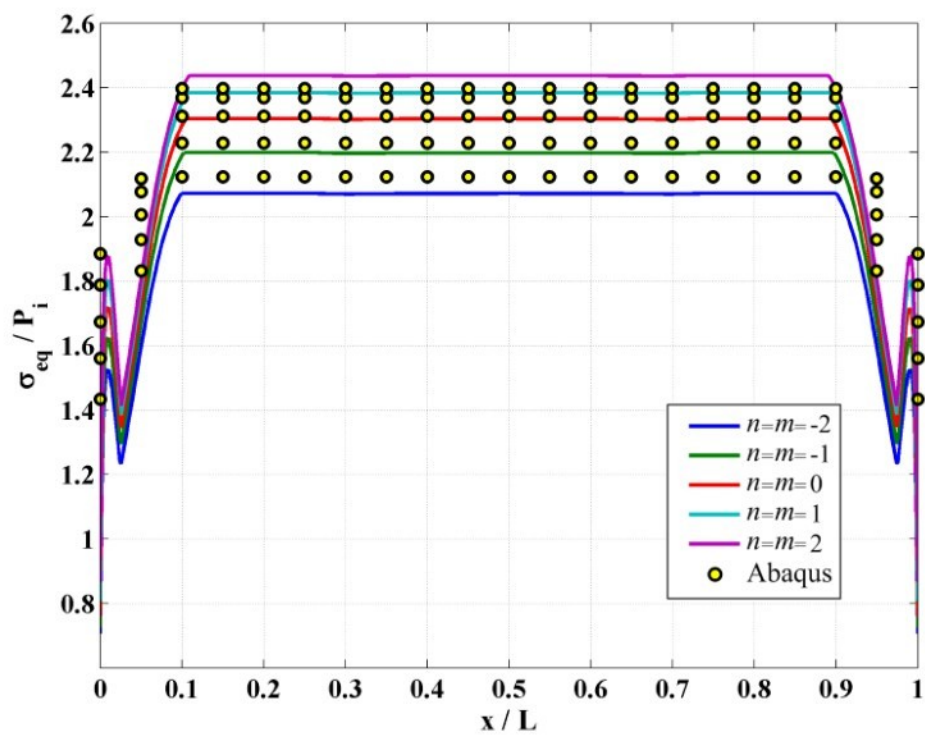


شکل ۹-۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

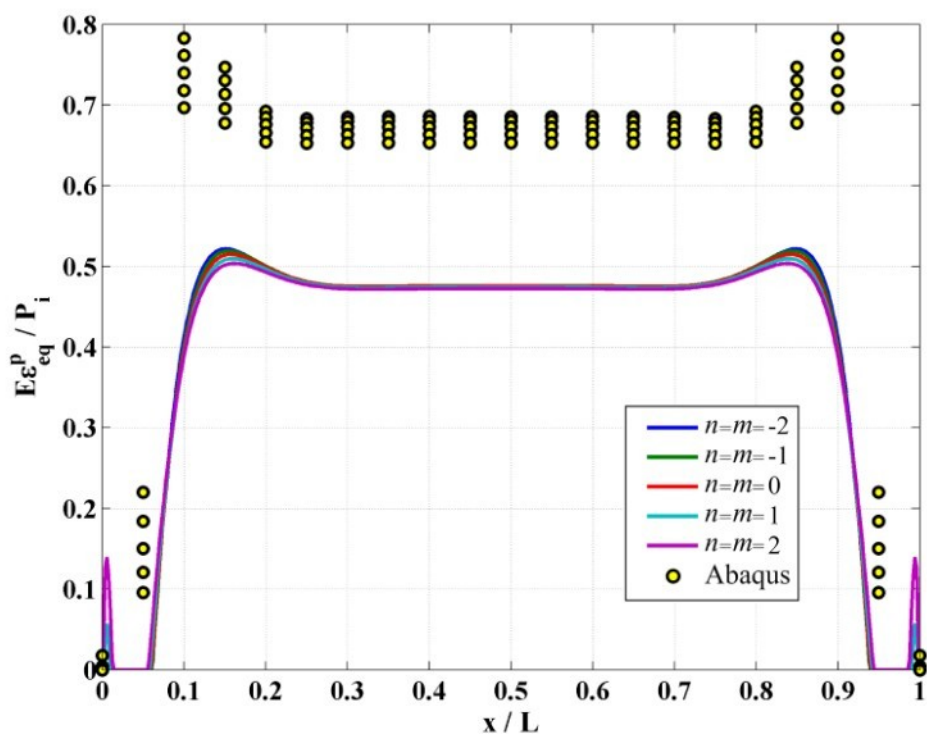
توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۱۰ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۱۱ مشاهده می‌نمایید. همان‌طور که می‌بینیم دقت این معیار در هر دو حالت برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف قابل قبول است. در ثابت‌های ناهمگنی نزدیک‌تر به صفر دقت بیشتر است. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۱۲ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۱۳ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۱۴ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۱۵ آورده شده است. هر چند کرنش پلاستیک معادل دقت کمی دارد ولی جابه‌جایی شعاعی دقت خوبی دارد. نتایج به‌دست آمده از معیار فون میزز انطباق بیشتری با نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus در $z = 0$ نسبت به $z = -h/4$ دارند. در وسط استوانه تغییر ثابت ناهمگنی تغییر بیشتری در میزان جابه‌جایی شعاعی نسبت به $z = -h/4$ به‌وجود می‌آورد.



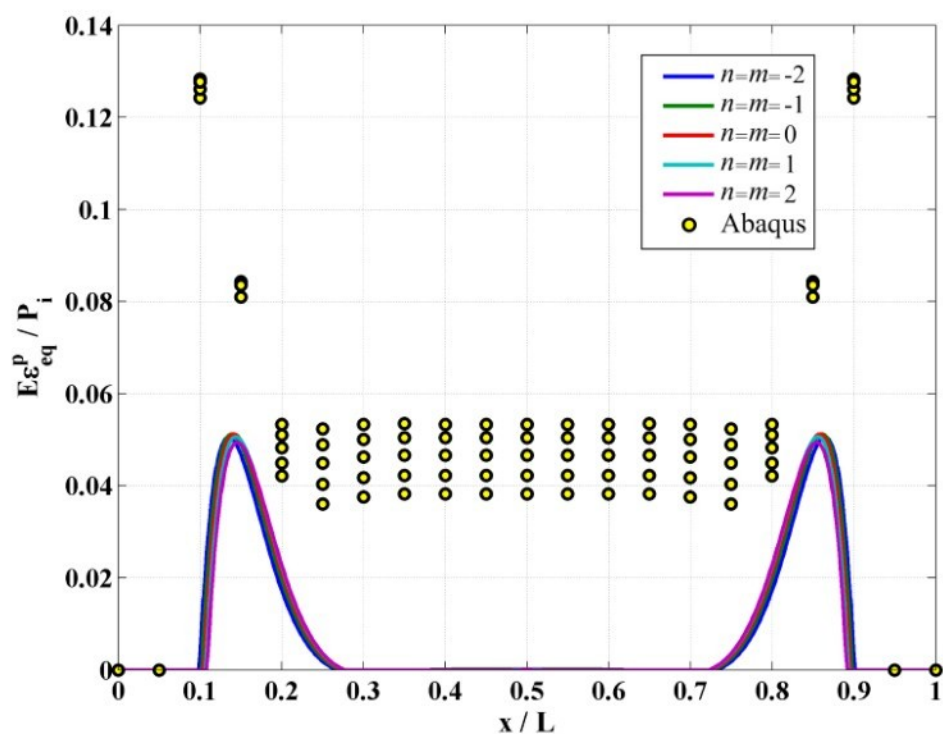
شکل ۴-۱۰- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



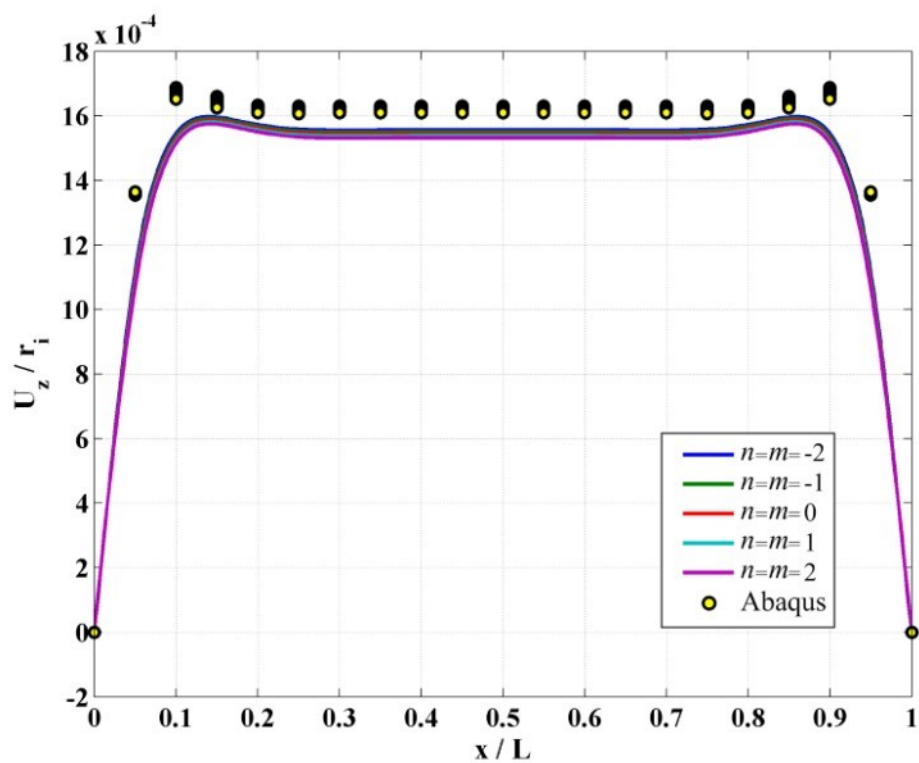
شکل ۴-۱۱- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = 0$



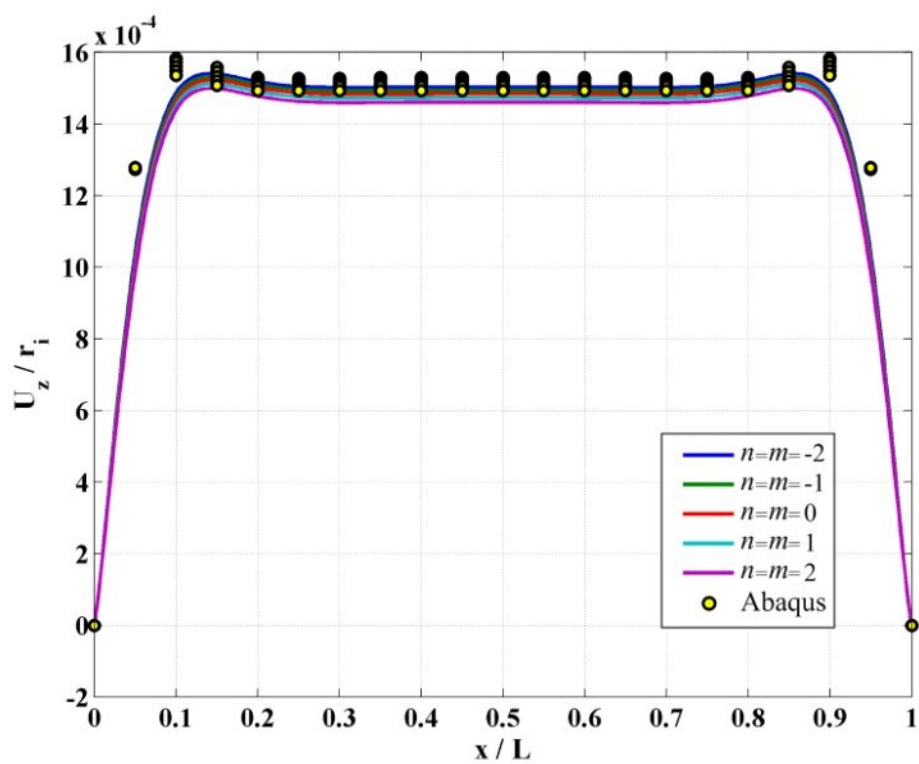
شکل ۴-۱۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



شکل ۴-۱۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = 0$

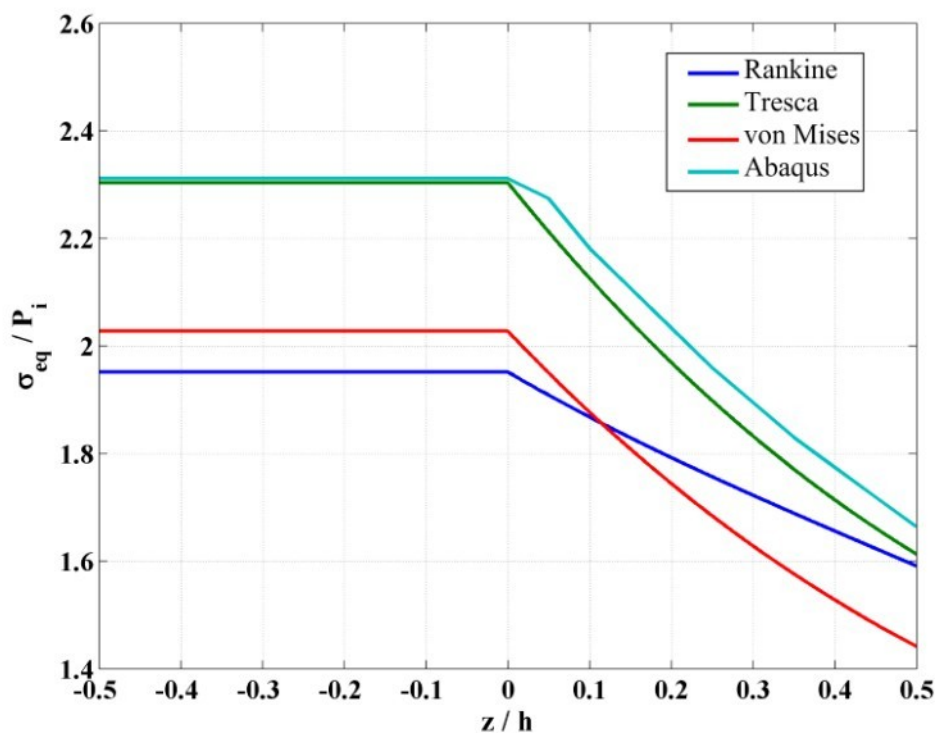


شکل ۴-۱۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$

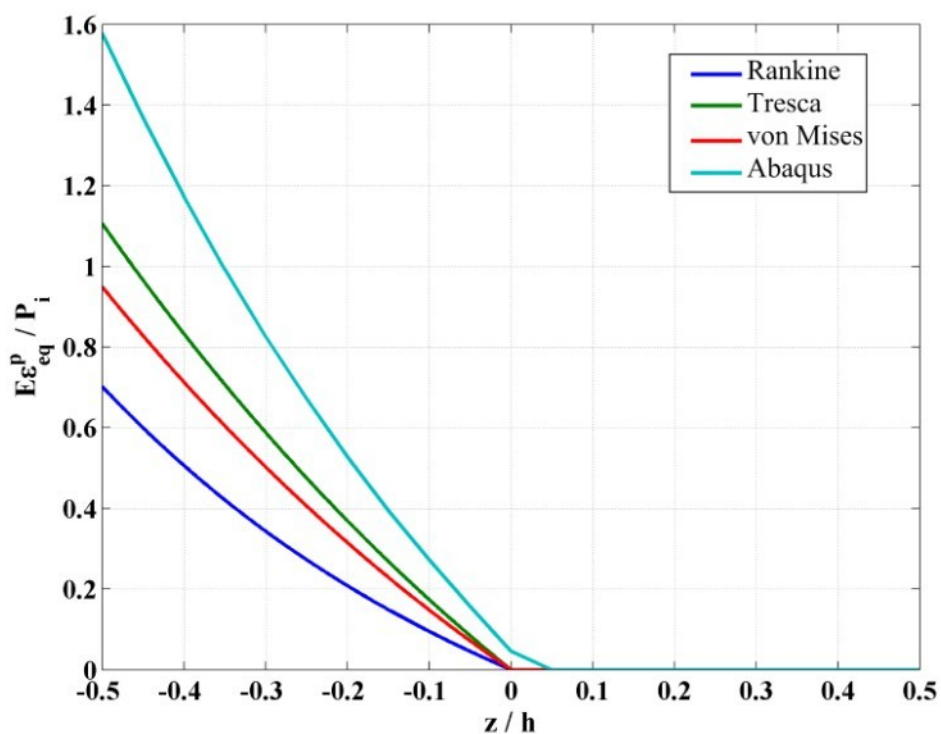


شکل ۴-۱۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

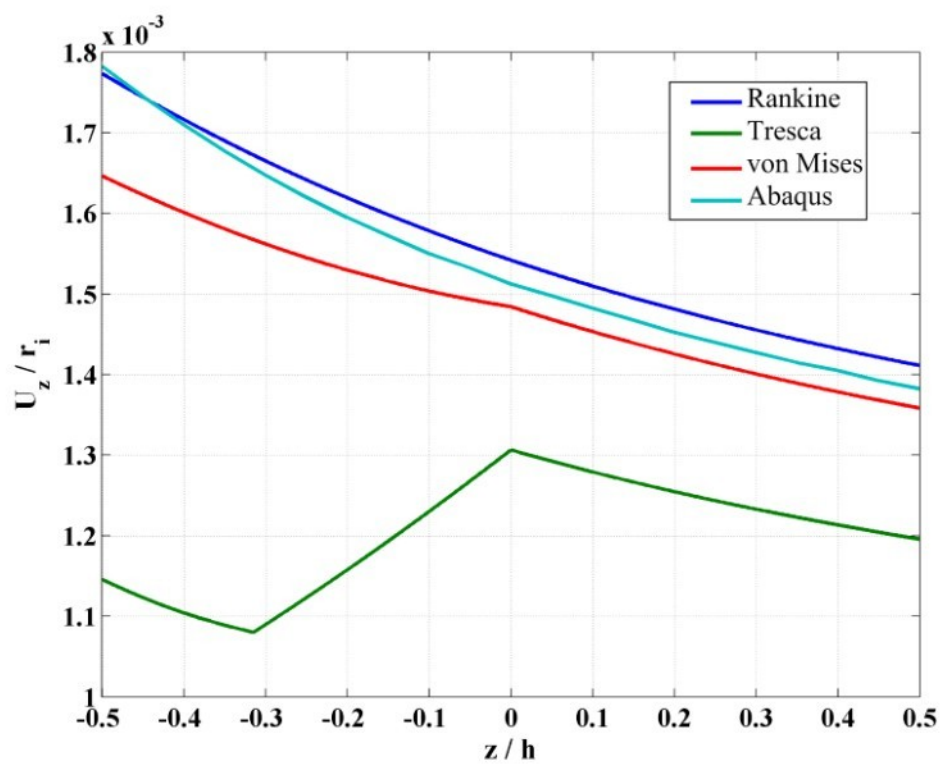
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۱۶ آورده شده است. معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار بررسی شده دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۴-۱۷ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها دقت قابل قبولی ندارند ولی باز هم معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقیق‌تر است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۱۸ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نواحی تسلیم شده معیار رانکین و در نواحی تسلیم نشده معیار رانکین و فون میزز دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده‌اند.



شکل ۴-۱۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

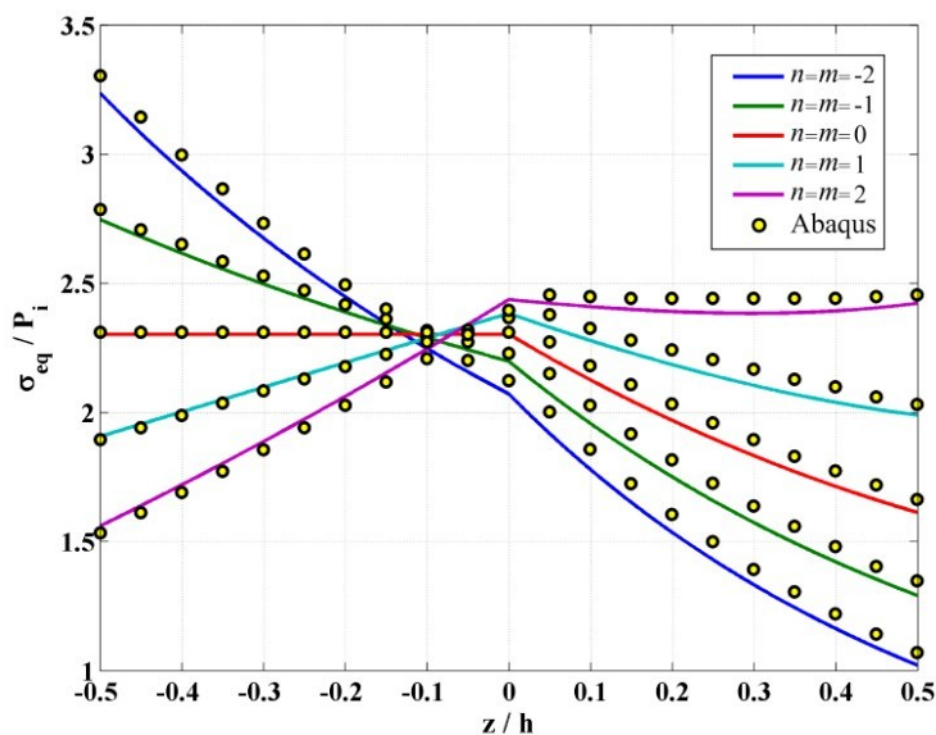


شکل ۴-۱۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

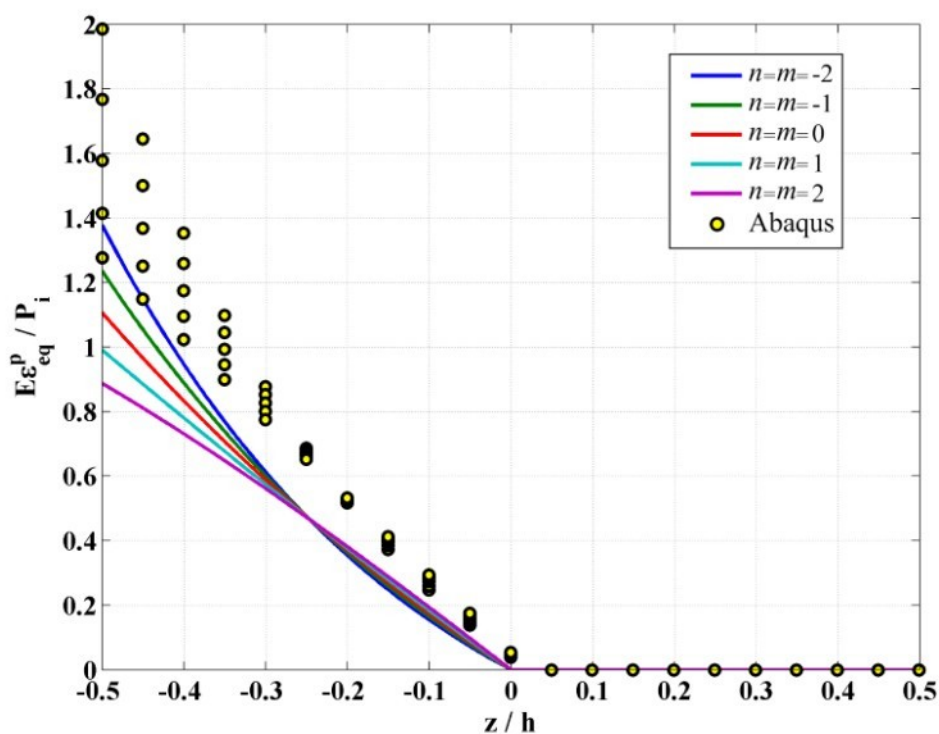


شکل ۴-۱۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

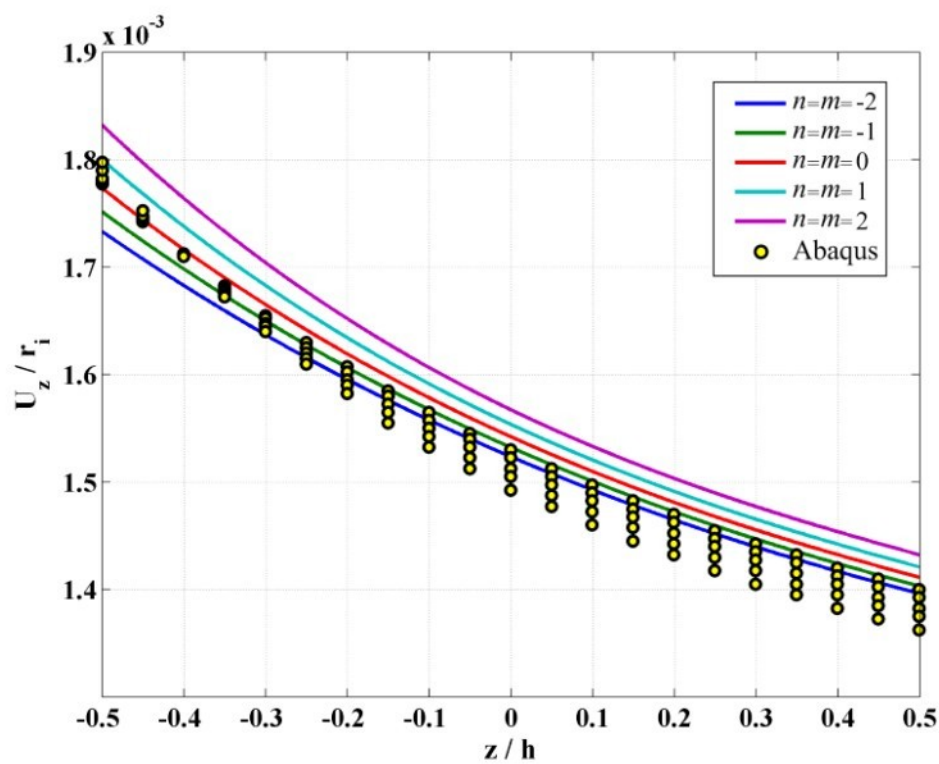
توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۴-۱۹ مشاهده می‌نمایید. این معیار برای تمام ثابت‌های ناهمگنی دقت تقریباً یکسانی دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۴-۲۰ آورده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش ثابت ناهمگنی در یک چهارم داخلی استوانه باعث کاهش کرنش پلاستیک معادل در سایر نقاط باعث افزایش کرنش پلاستیک معادل می‌شود. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۴-۲۱ آورده شده است. نتایج در نقاط تسلیم شده از دقت بیشتری برخوردارند.



شکل ۴-۱۹- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۴-۲۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۴-۲۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۴-۵-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در غیاب بار حرارتی

در جدول ۳-۴ فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود ارائه شده است و در جدول ۴-۴ فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود ارائه شده است. فشار خارجی در این دو حالت در نظر گرفته نشده است. تسلیم استوانه از سطح داخلی آن ($z = -h/2$) آغاز می‌شود.

جدول ۳-۴- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۶۴,۹۱۱	۵۱,۷۹۴	۵۷,۱۸۸	۵۷,۸۹
$n=m=l=-1$	۷۸,۰۹۷	۵۹,۹۰۹	۶۶,۵۱۸	۶۷,۵۴
$n=m=l=0$	۹۵,۶۰۶	۶۹,۸۳۱	۷۸,۰۱۹	۷۹,۴۰
$n=m=l=1$	۱۱۹,۲۸۴	۸۱,۹۶۳	۹۲,۱۹۲	۹۳,۹۳
$n=m=l=2$	۱۵۱,۹۷۸	۹۶,۷۶۰	۱۰۹,۶۰۱	۱۱۱,۶۲

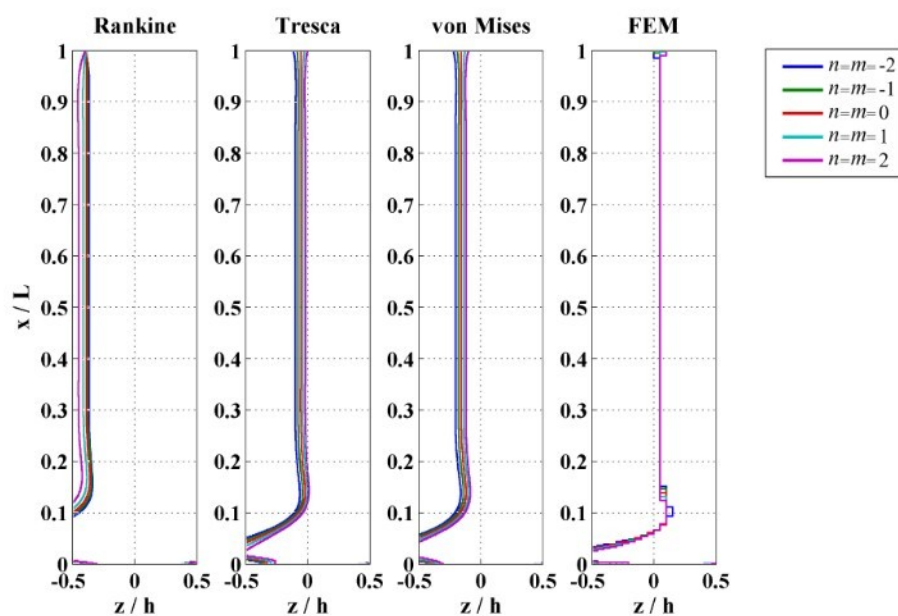
جدول ۴-۴- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۸۸,۷۸۲	۷۷,۲۳۵	۸۲,۱۶۷	۷۱,۴۵
$n=m=l=-1$	۱۰۵,۹۰۶	۹۰,۹۹۴	۹۷,۱۴۱	۸۵,۴۴
$n=m=l=0$	۱۲۸,۱۰۹	۱۰۸,۵۳۳	۱۱۶,۳۳۰	۱۰۳,۳۹
$n=m=l=1$	۱۵۷,۲۲۵	۱۳۱,۰۷۴	۱۴۱,۱۵۰	۱۲۶,۶۲
$n=m=l=2$	۱۹۵,۸۳۹	۱۶۰,۲۵۲	۱۷۳,۵۲۱	۱۵۶,۹۲

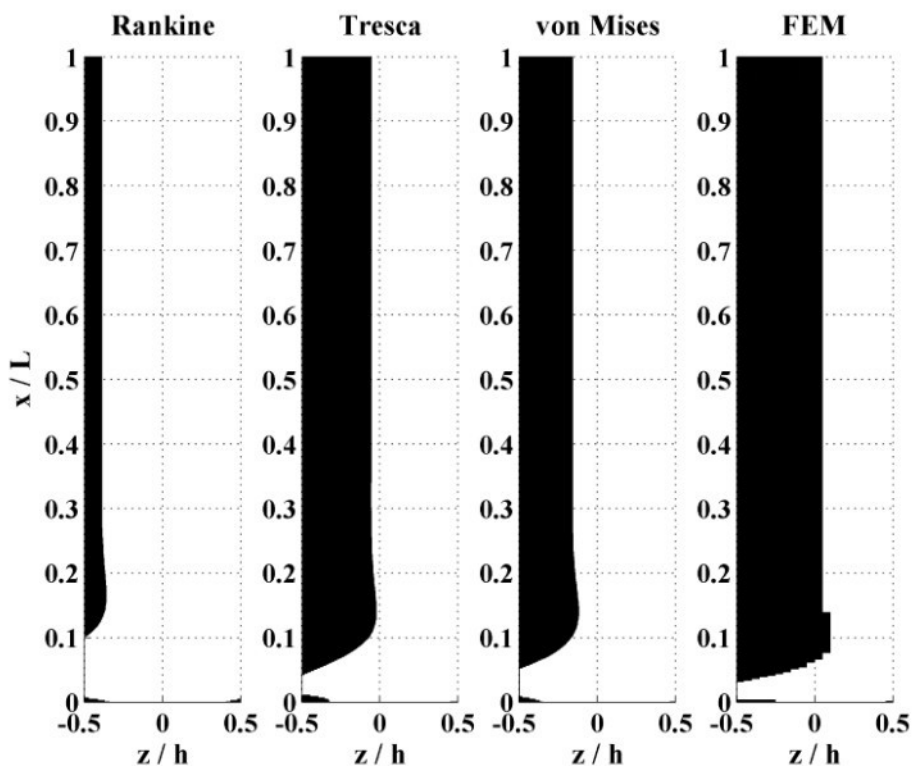
همان‌طور که در جدول‌ها مشاهده می‌کنید در این حالت نیز با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه افزایش می‌یابد. با توجه به نتایج جدول ۳-۴ می‌توان دریافت که معیار فون میز نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه دارد. با توجه به نتایج جدول ۴-۴ می‌توان دریافت که معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری در پیش‌بینی فشار تسلیم سطح میانی دارد. لازم به ذکر است که نتایج معیارهای رانکین و ترسکا تفاوت چندانی با نتایج این دو معیار در استوانه با دو سر گیردار ندارد و این به معنی تاثیر بسیار کم شرط

مرزی مورد نظر، بر روی نتیجه‌ی حاصل از این دو معیار در وسط طول استوانه است. نتایج ارائه شده برای فشار تسلیم لایه‌ی میانی که توسط معیار ترسکا ارائه شده دقت کمتری نسبت به همین نتایج برای استوانه با دو سر گیردار دارد.

شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه با ثابت‌های ناهمگنی مختلف در شکل ۴-۲۲ و تصویر مناطق تسلیم شده‌ی استوانه در شکل ۴-۲۳ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار برابر فشار تسلیم لایه‌ی میانی که به کمک نرم‌افزار Abaqus به دست آمده است در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار بررسی شده دارد. همچنین ثابت ناهمگنی تاثیر چندانی بر روی شکل و شعاع ناحیه‌ی پلاستیک در فشار تسلیم لایه‌ی میانی ندارد و فقط بر روی میزان این فشار تاثیر می‌گذارد.

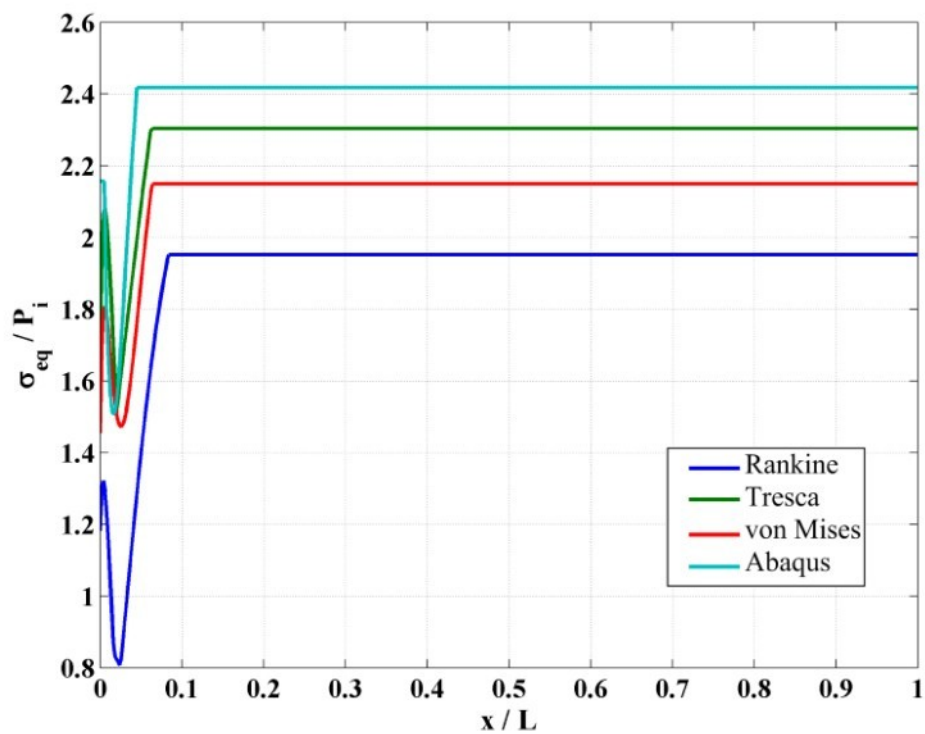


شکل ۴-۲۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

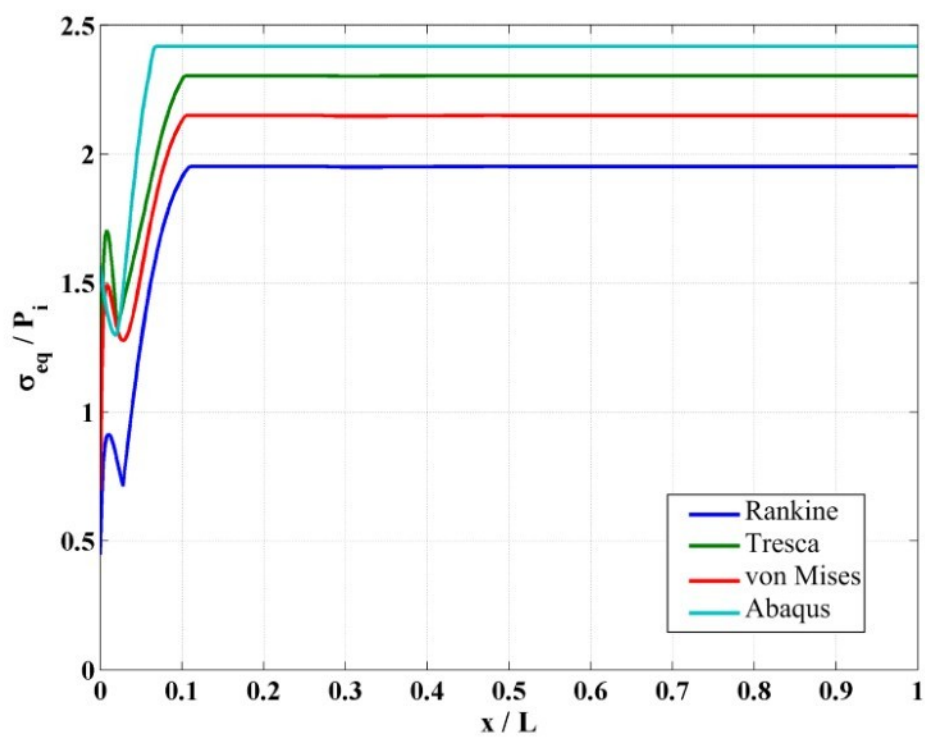


شکل ۴-۲۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

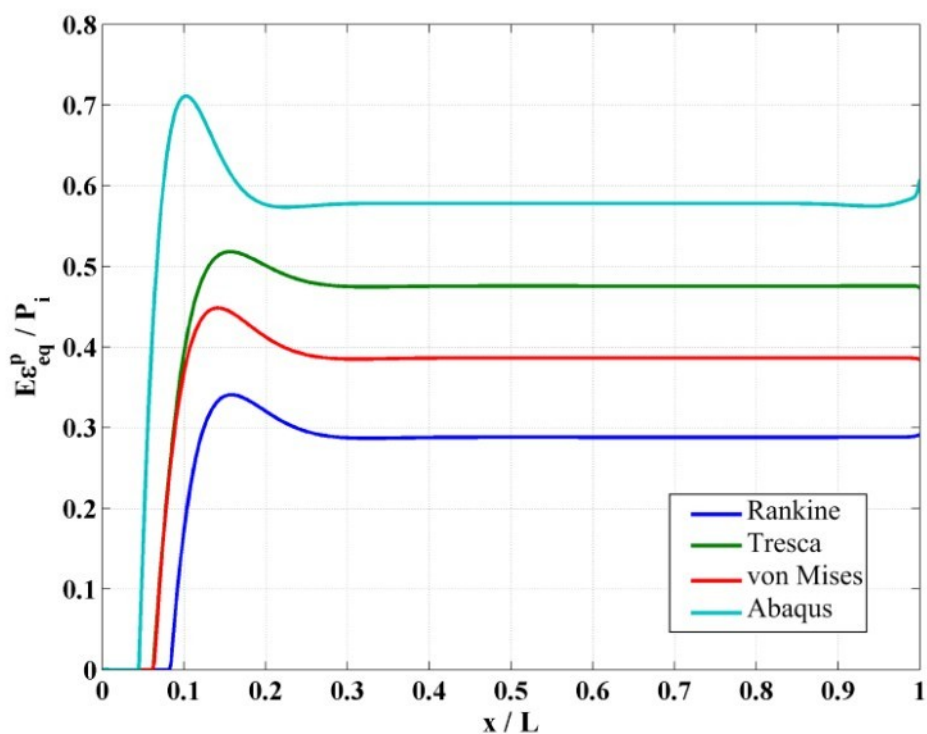
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۴-۴) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۲۴ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۲۵ آورده شده است. معیار ترسکا در هر دو حالت بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۲۶ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۲۷ آورده شده است. برای $z = -h/4$ معیار ترسکا بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۲۸ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۲۹ آورده شده است. دقیق‌ترین جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده در یک دهم ابتدای طول استوانه در سمت گیردار مربوط به معیار رانکین و در بقیه‌ی طول استوانه مربوط به معیار فون میزز است.



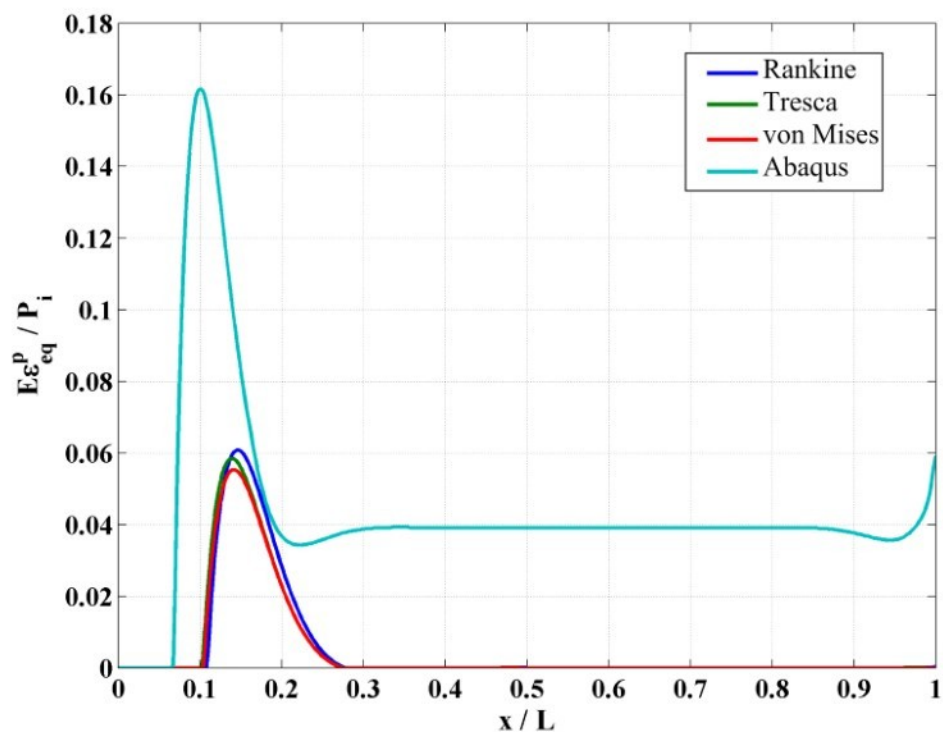
شکل ۴-۲۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



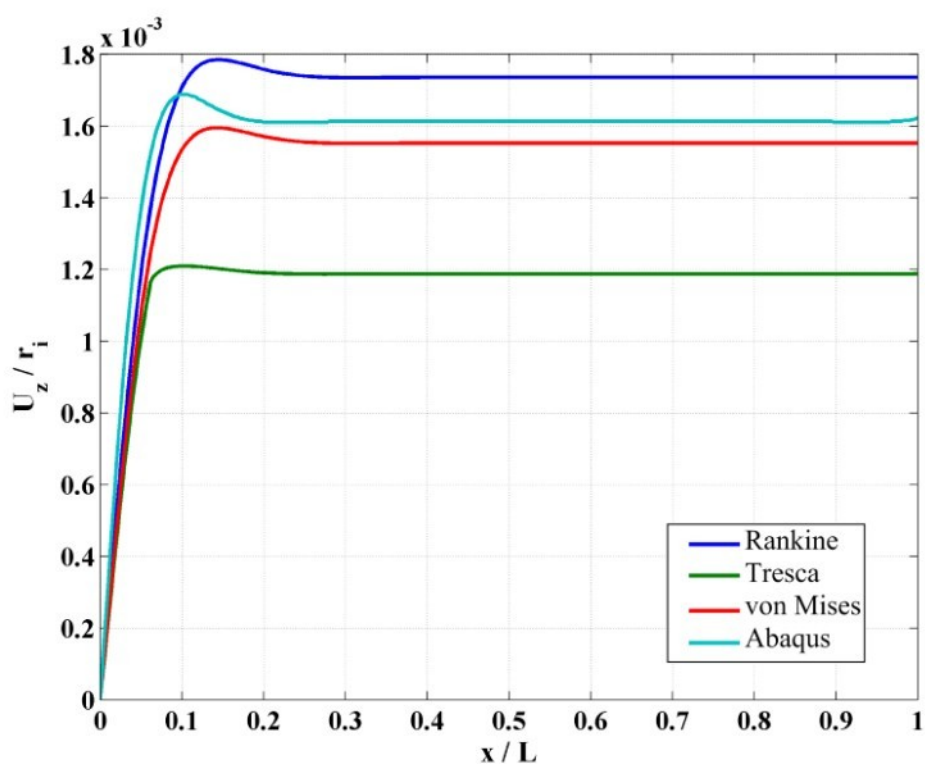
شکل ۴-۲۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



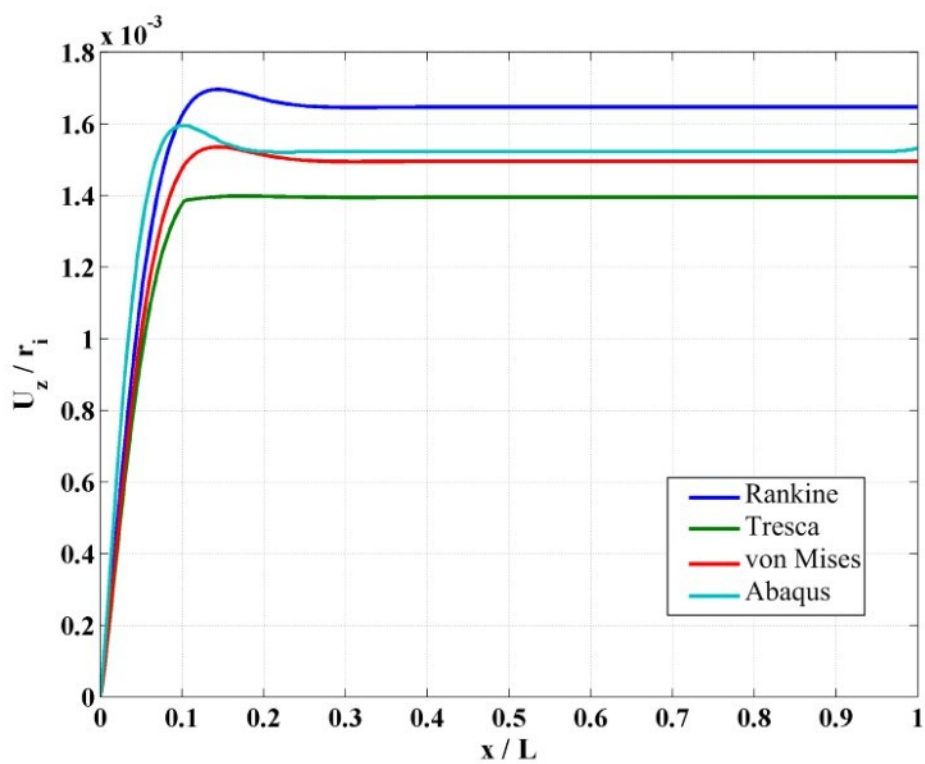
شکل ۴-۲۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۴-۲۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

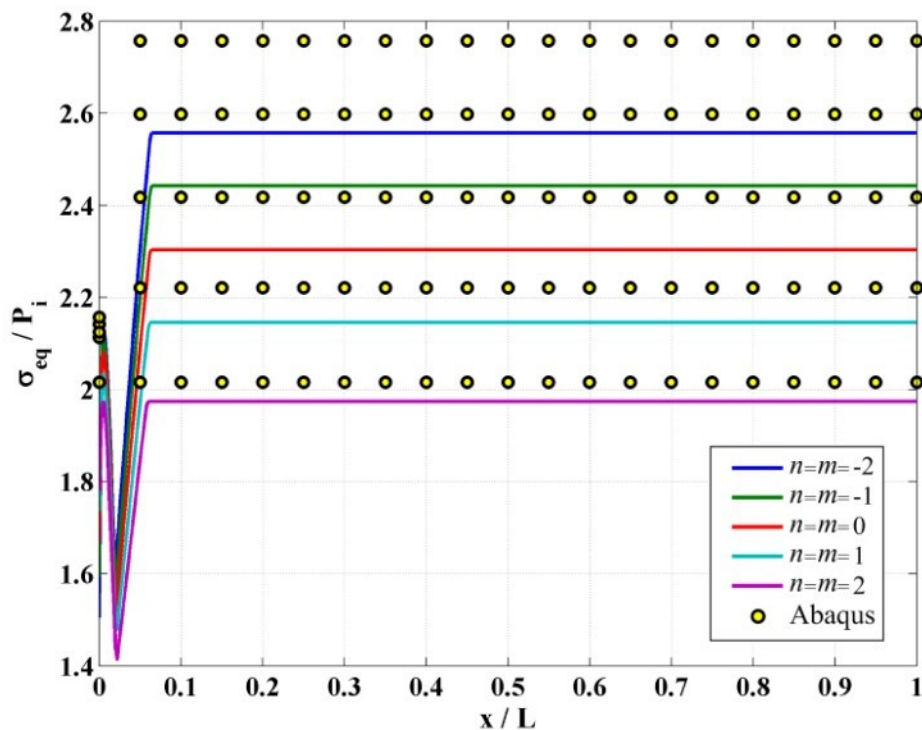


شکل ۴-۲۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

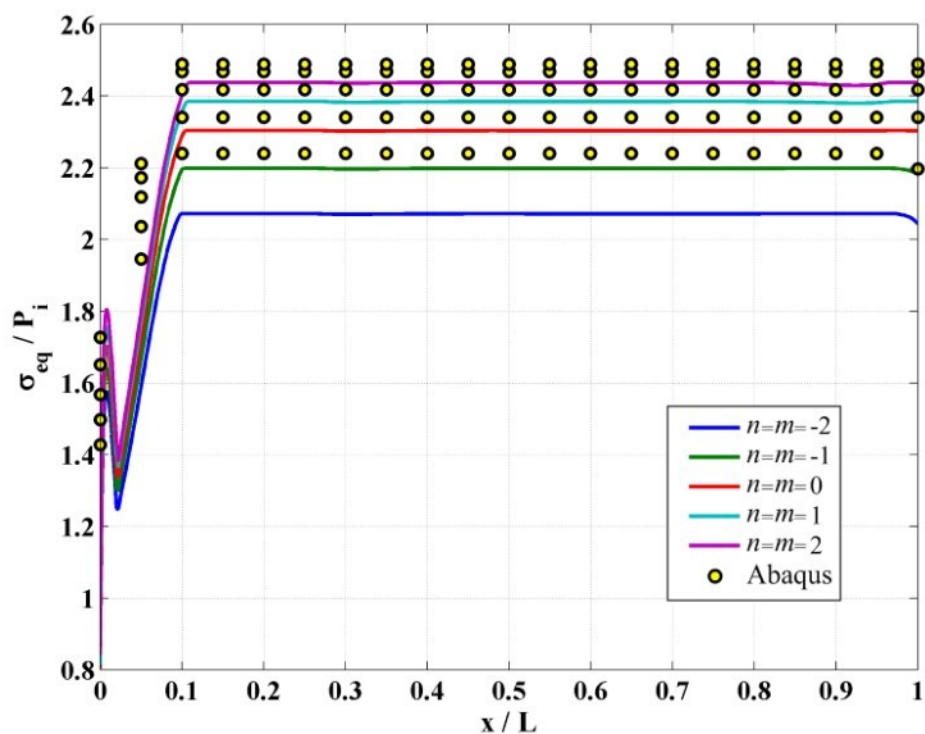


شکل ۴-۲۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

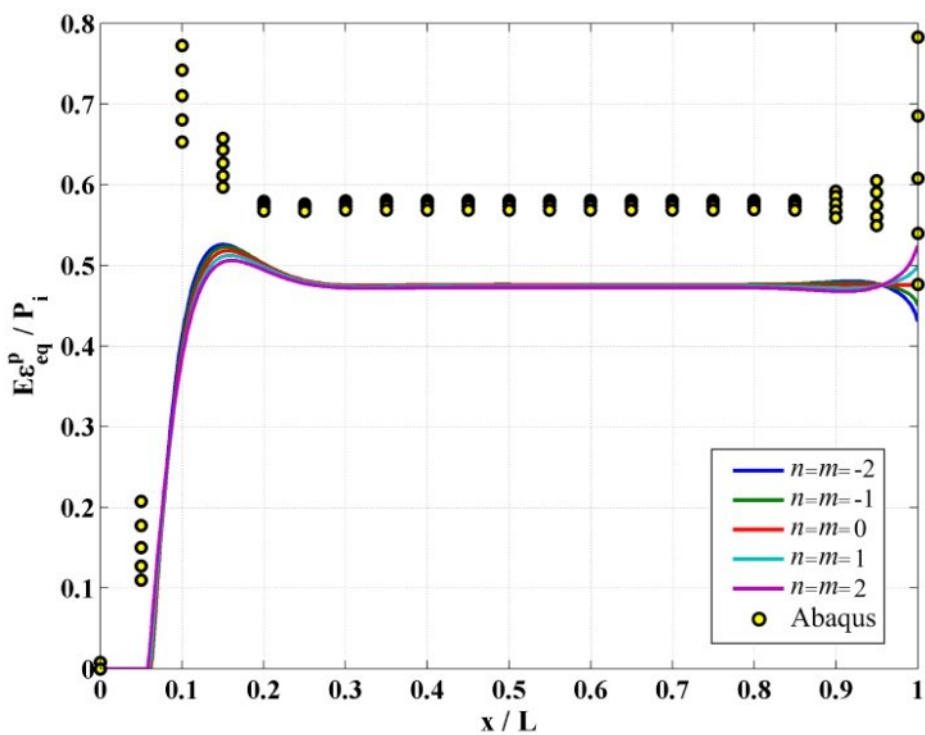
توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۳۰-۴ و برای $z = 0$ در شکل ۳۱-۴ مشاهده می‌نمایید. با افزایش ثابت ناهمگنی، تنش معادل در $z = -h/4$ کاهش و در وسط استوانه افزایش می‌یابد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳۲-۴ و برای $z = 0$ در شکل ۳۳-۴ آورده شده است. نتایج حاصل از TSDT اثر بسیار کم ثابت ناهمگنی بر روی کرنش پلاستیک در بیشتر طول استوانه را گزارش می‌نماید. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳۴-۴ و برای $z = 0$ در شکل ۳۵-۴ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده دقت خوبی دارد و دقت نتایج در وسط استوانه بیشتر از دقت نتایج در $z = -h/4$ است. همان‌طور که در نمودارهای این بخش دیده می‌شود کرنش پلاستیک معادل و جابه‌جایی حاصل از حل تحلیلی در سر آزاد به خوبی اثر تغییر ثابت‌های ناهمگنی را بر روی این مقادیر نشان می‌دهد.



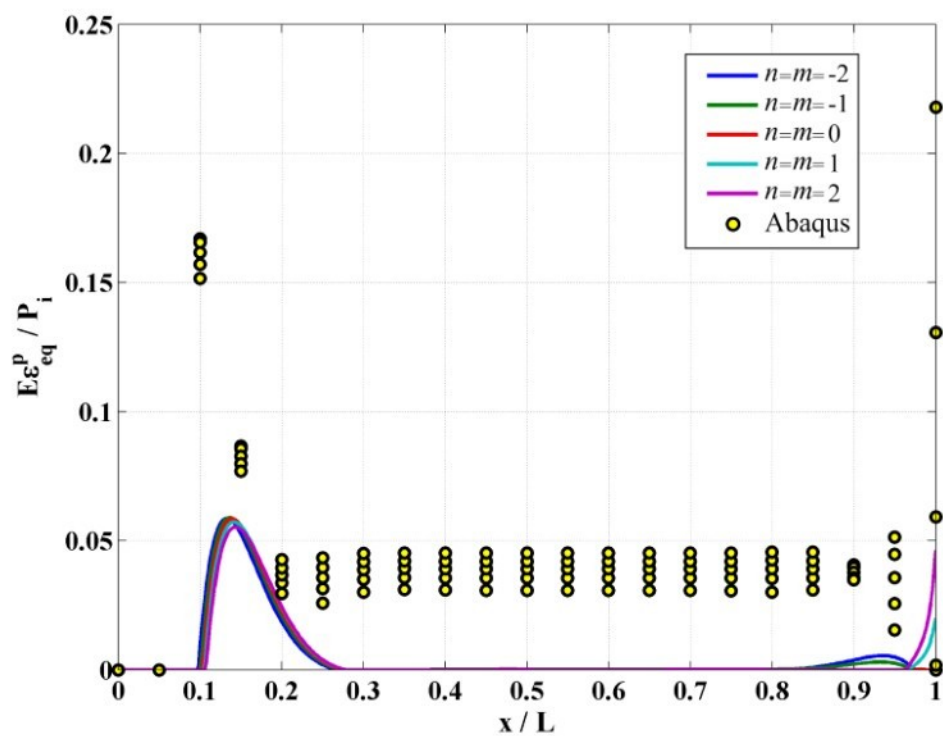
شکل ۳۰-۴- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



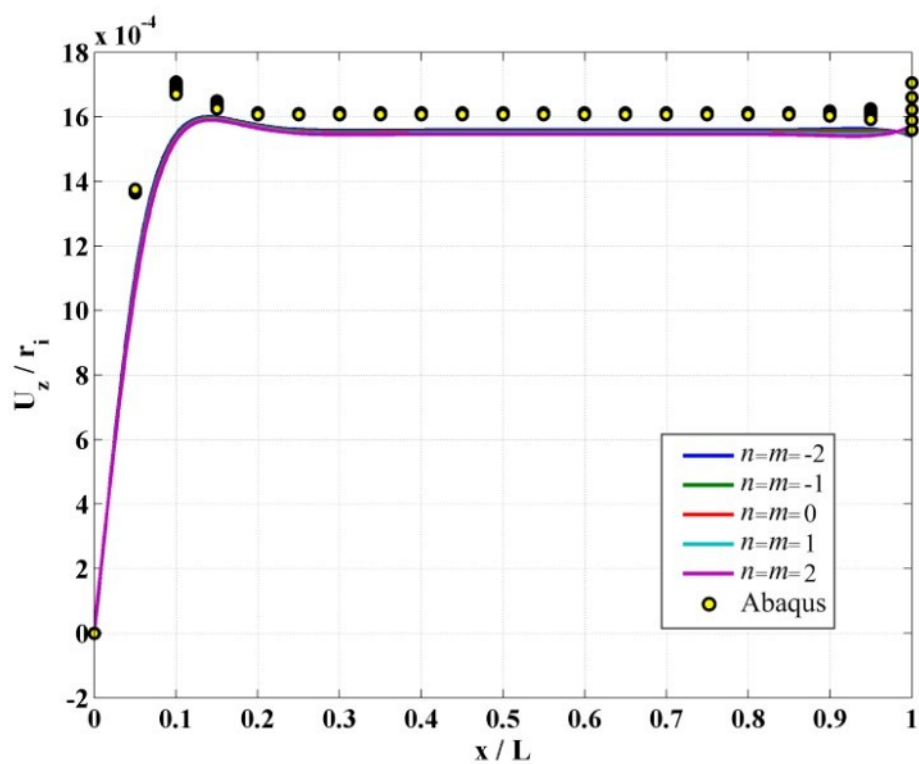
شکل ۴-۳۱- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$



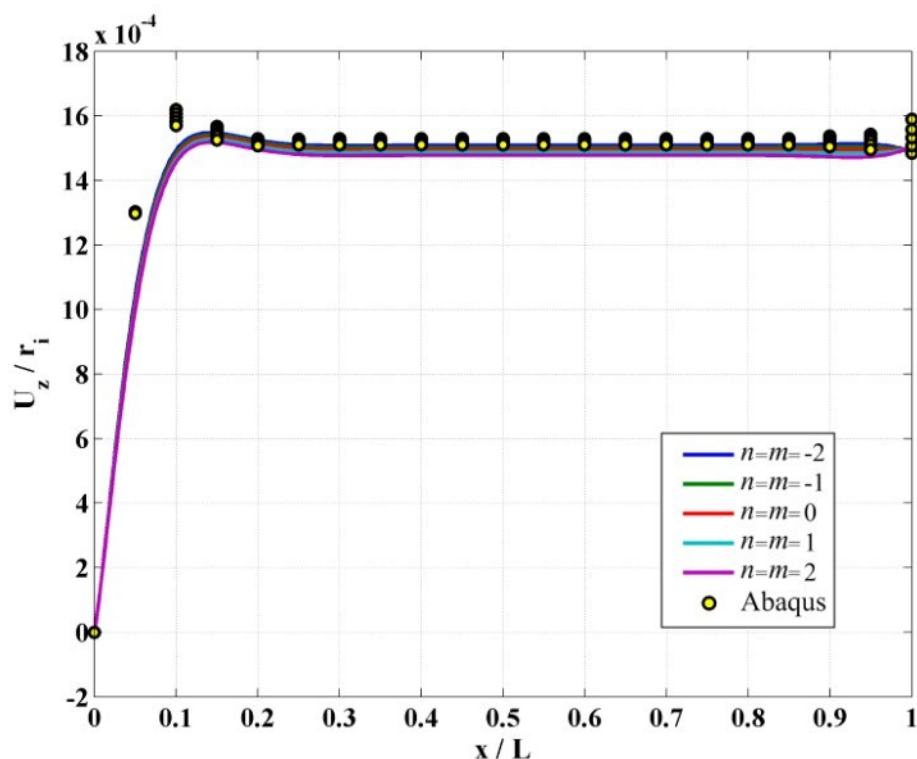
شکل ۴-۳۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$



شکل ۳۳-۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$

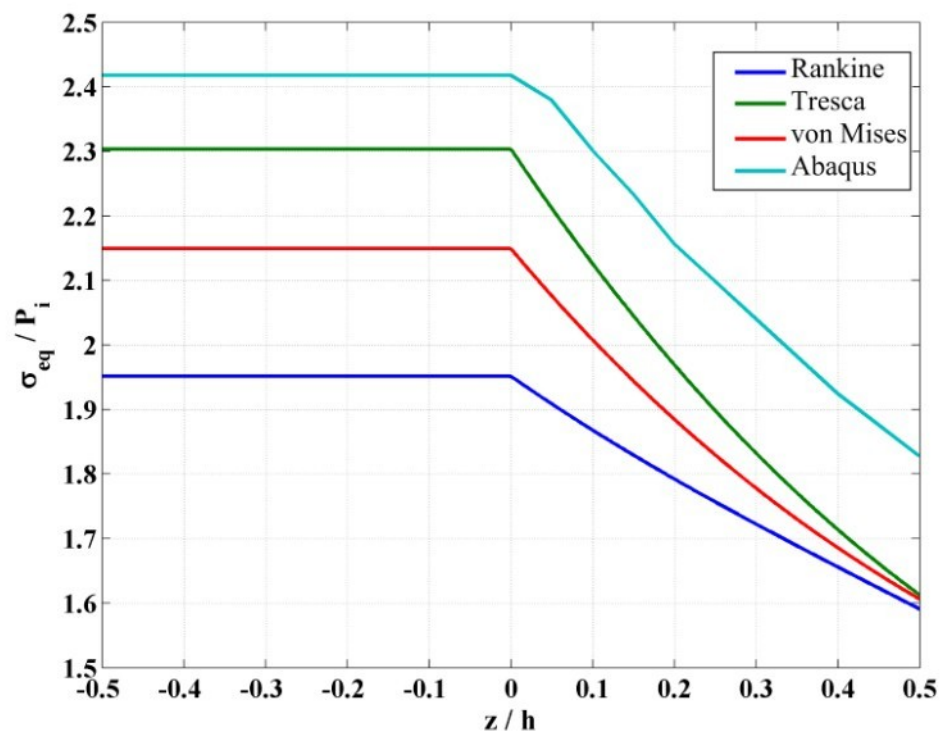


شکل ۳۴-۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=-h/4$

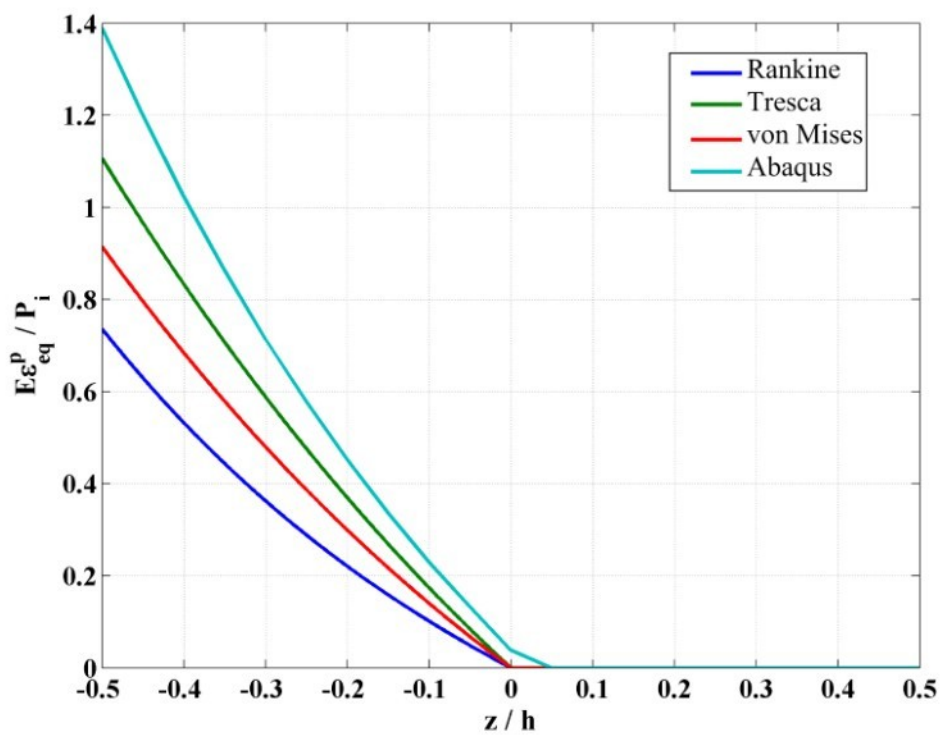


شکل ۴-۳۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

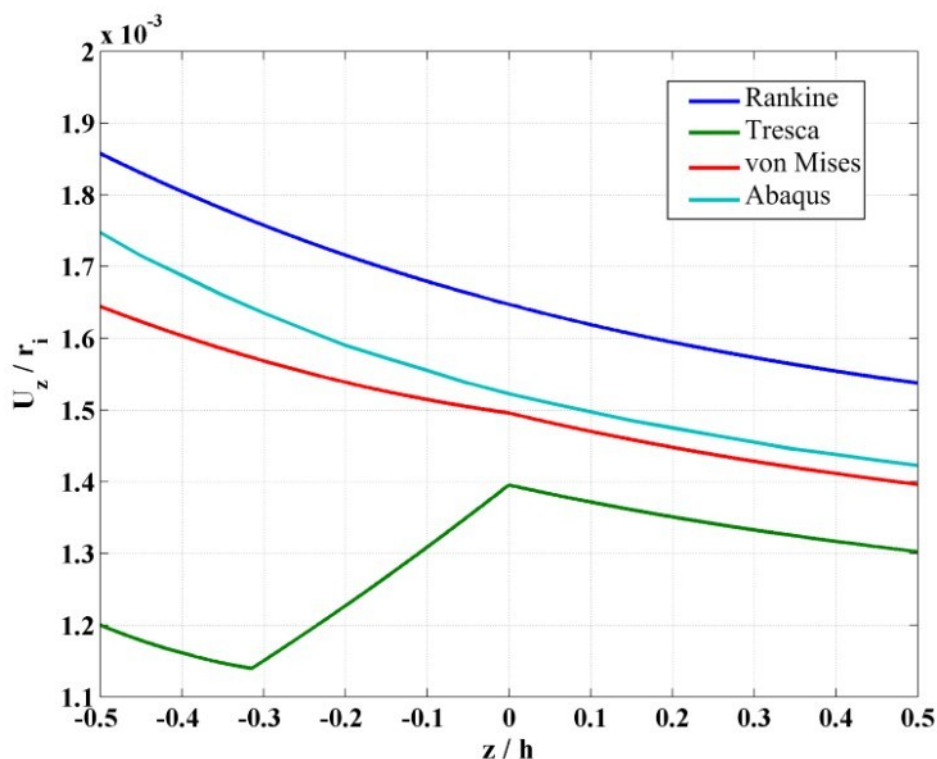
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۳۶ آورده شده است. معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۴-۳۷ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها دقت قابل قبولی ندارند ولی معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۳۸ آورده شده است. معیار فون میزز دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



شکل ۴-۳۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

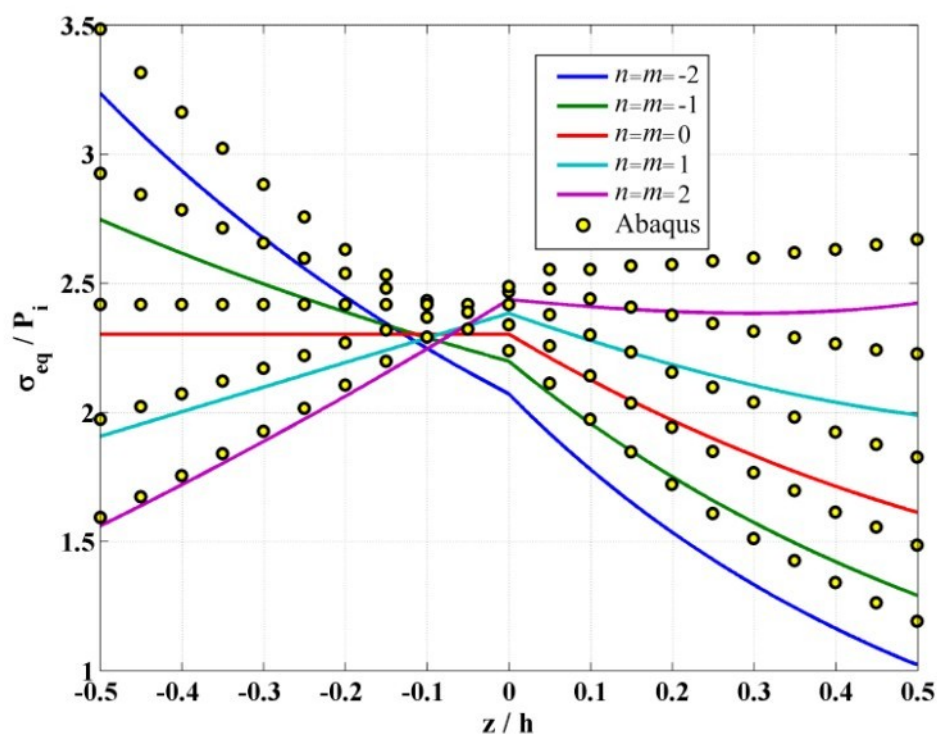


شکل ۴-۳۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

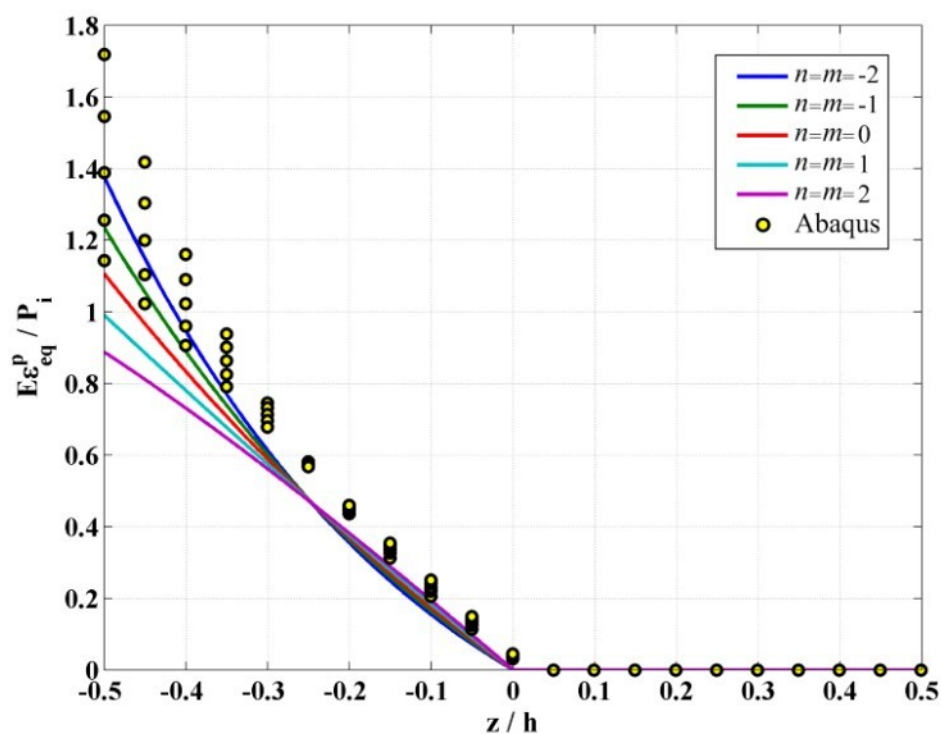


شکل ۴-۳۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

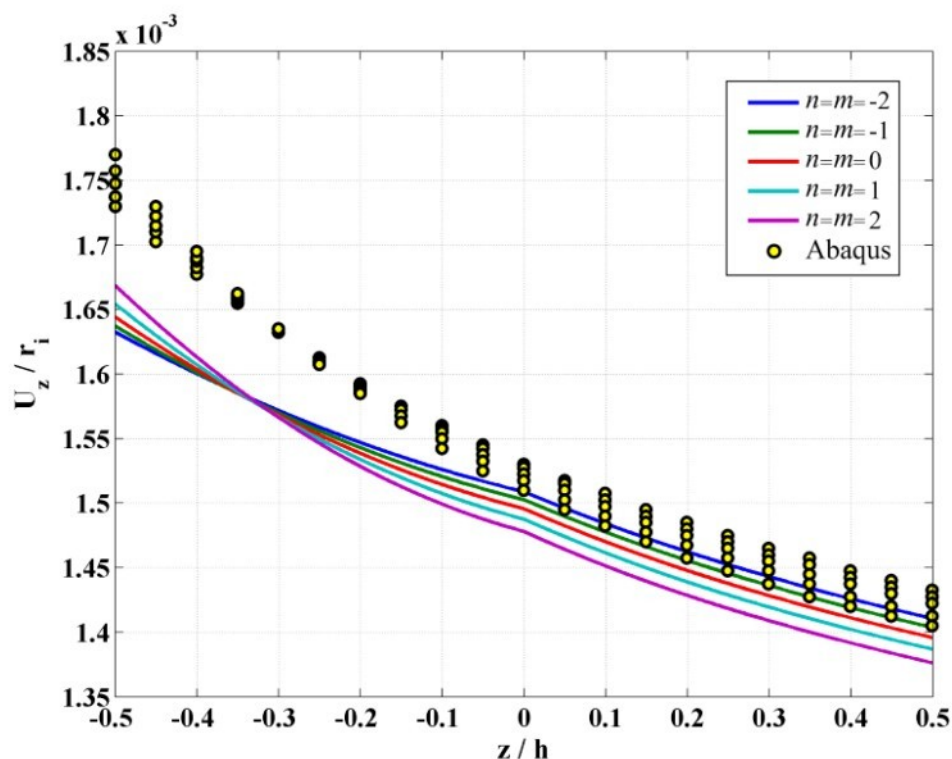
توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۴-۳۹ مشاهده می‌نمایید. این معیار برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگتر در نیمه‌ی داخلی استوانه دقیق‌تر است. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۴-۴۰ آورده شده است. نتایج دقت قابل قبولی ندارند ولی اثر تغییر ثابت ناهمگنی را به خوبی نشان داده‌اند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۴-۴۱ آورده شده است. مشاهده می‌شود که دقت نتایج در نیمه‌ی خارجی استوانه بیشتر است.



شکل ۴-۳۹- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۴-۴۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۴-۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۴-۵-۳- استوانه با دو سر گیردار در معرض بار حرارتی

در این بخش نتایج حل مسأله با در نظر گرفتن دمای سطح داخلی ۱۰۰ درجه‌ی سلسیوس بیش از دمای مرجع و دمای سطح خارجی برابر با دمای مرجع ارائه شده است. این بار حرارتی به تنهایی باعث تسلیم سطح داخلی استوانه از نظر تمام معیارها می‌شود بنابراین این تئوری در این حالت قادر به پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه نیست. فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) تسلیم می‌شود در جدول ۴-۵ ارائه شده است. فشار خارجی در این حالت در نظر گرفته نشده است.

جدول ۴-۵- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x=L/2$ (MPa)

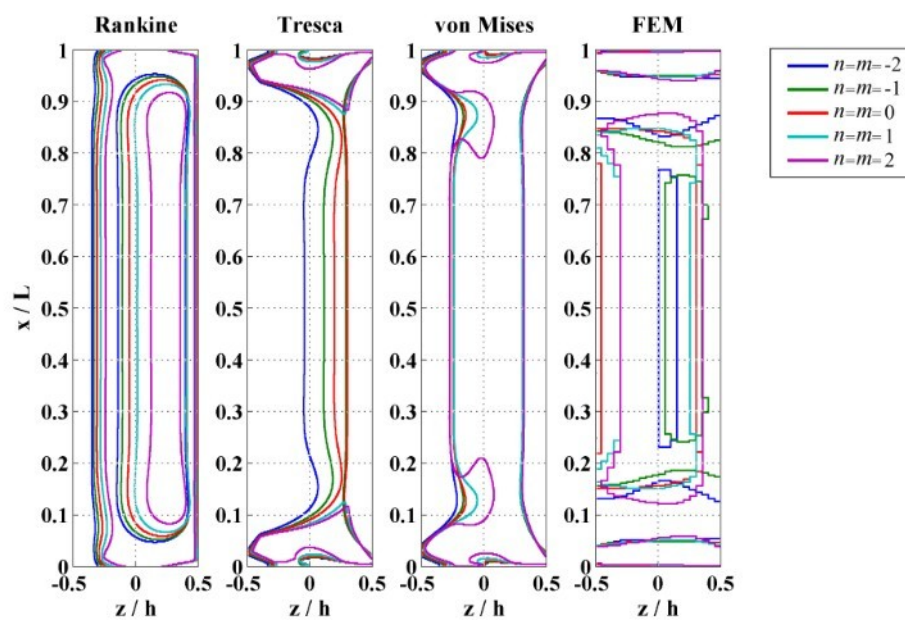
معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۳۵,۳۹۸	۶۲,۶۱۳	۷۷,۳۹۹	۶۱,۴۸
$n=m=l=-1$	۵۳,۰۳۹	۷۲,۲۵۰	۹۱,۲۱۶	۷۶,۳۲
$n=m=l=0$	۷۷,۷۰۴	۸۲,۹۳۲	۱۰۷,۷۱۱	۹۴,۶۵
$n=m=l=1$	۱۱۲,۲۱۶	۹۳,۸۵۳	۱۲۴,۷۳۷	۱۲۳,۵۹
$n=m=l=2$	۱۶۰,۱۳۳	۱۰۳,۰۲۲	۱۲۷,۵۶۷	۱۴۸,۲۶

باز هم با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه افزایش می یابد. در پیش بینی فشار آغاز تسلیم سطح میانی معیار ترسکا بیشترین دقت را در بین سه معیار برای ثابت های ناهمگنی کمتر از صفر دارد.

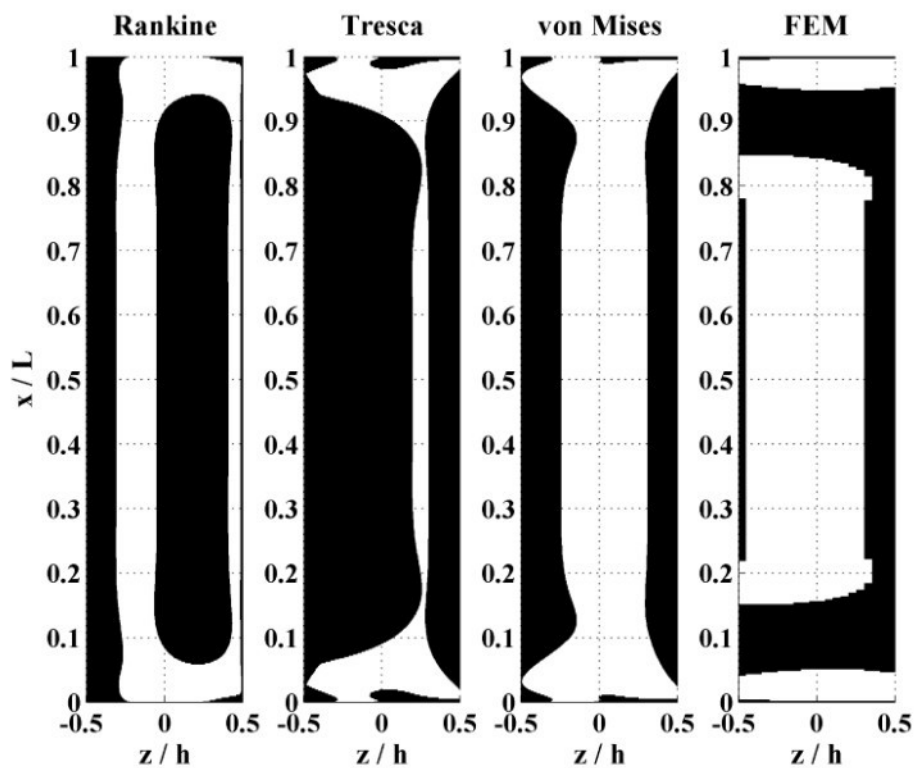
شعاع مرز ناحیه ی پلاستیک برای استوانه با ثابت های ناهمگنی مختلف در شکل ۴-۴۲ و تصویر مناطق تسلیم شده ی استوانه در شکل ۴-۴۳ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار که برابر میانگین فشار آغاز تسلیم استوانه و فشار تسلیم لایه ی میانی حاصل از نرم افزار Abaqus در نظر گرفته شده است در جدول ۴-۶ آورده شده است. مشاهده می شود که نتیجه ی حاصل از هیچ کدام از معیارها مشابه نتایج حاصل از نرم افزار Abaqus نیست. ولی شکل ناحیه ی پلاستیک از نظر معیار ترسکا و فون ميزز بیشترین شباهت را به شکل به دست آمده از Abaqus دارد.

جدول ۴-۶- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)

$n=m=l=-2$	$n=m=l=-1$	$n=m=l=0$	$n=m=l=1$	$n=m=l=2$
۶۱,۳۴	۷۵,۷۵	۸۹,۹۵	۱۰۸,۳۷	۱۲۲,۷۳

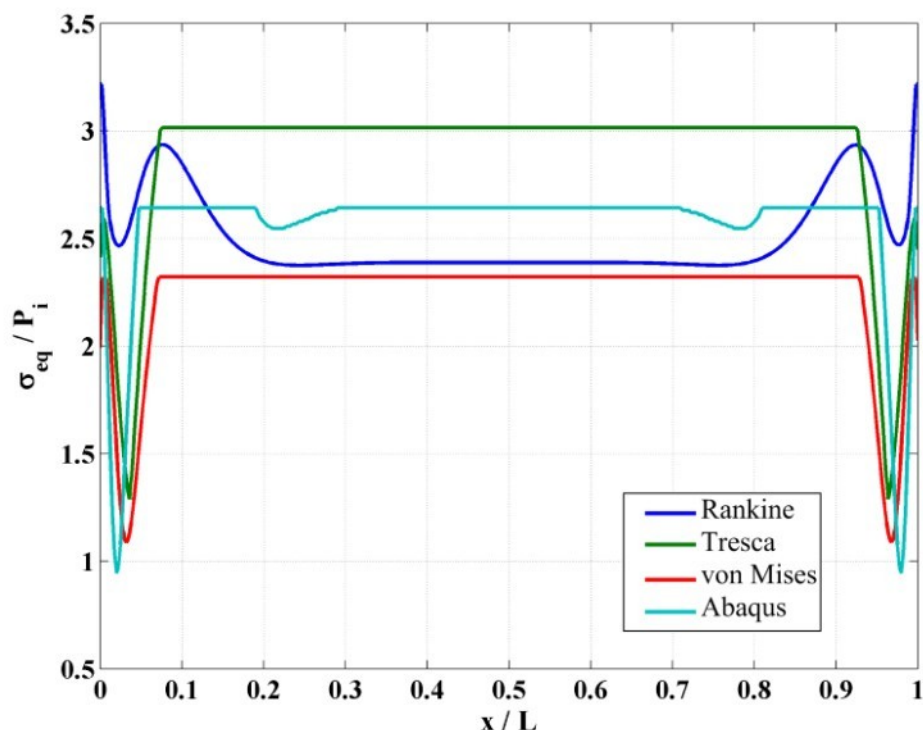


شکل ۴-۴۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

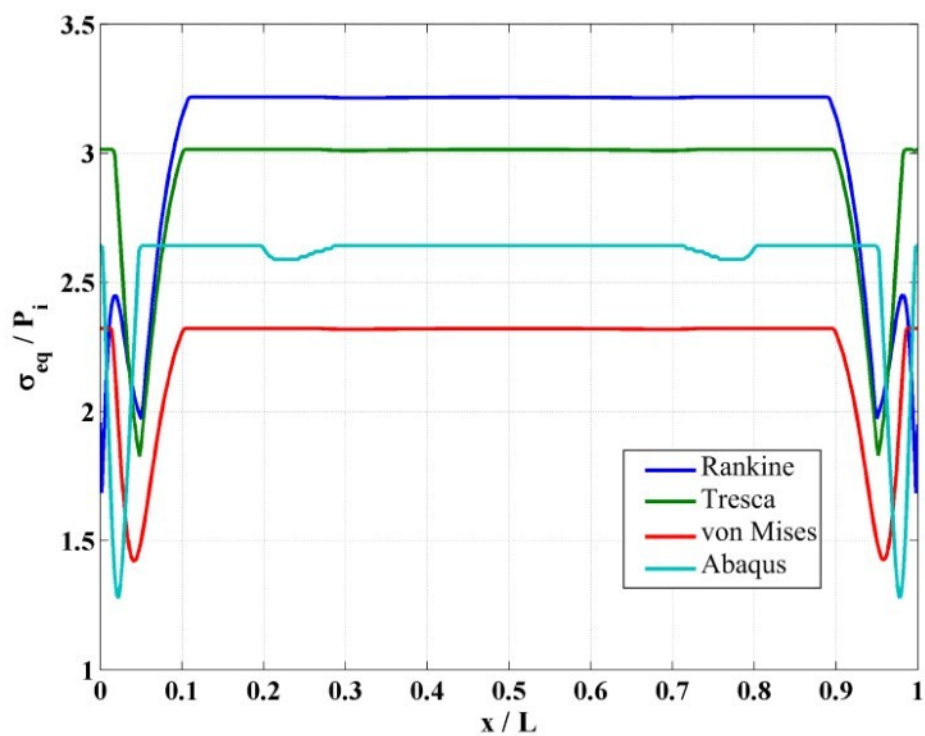


شکل ۴-۴۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

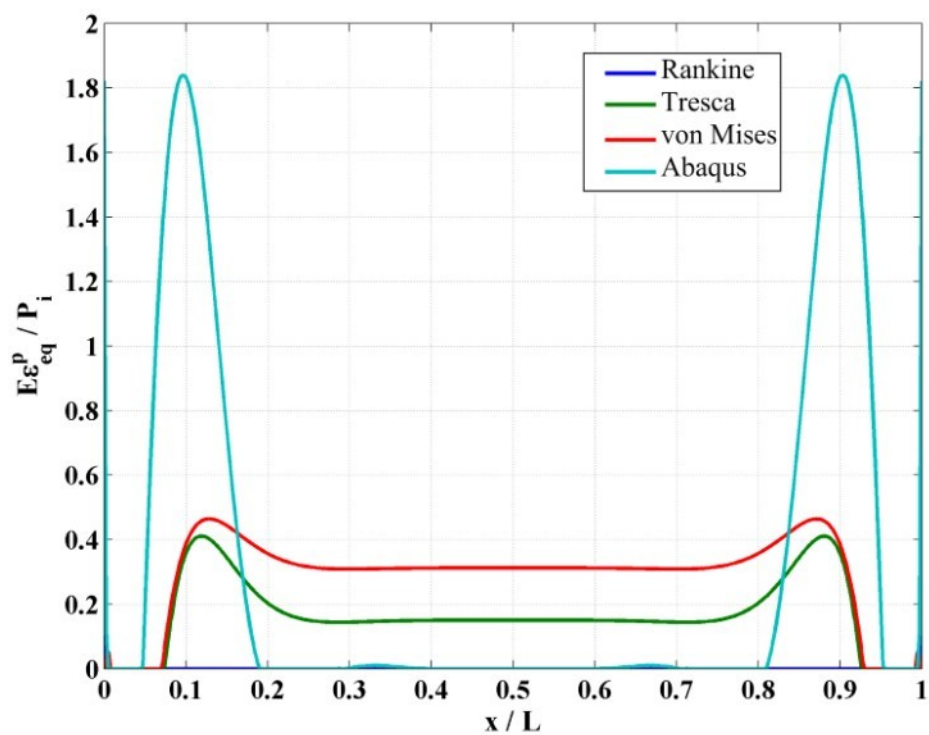
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۴-۵) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۴۴ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۴۵ آورده شده است. هر کدام از معیارها در بخشی از استوانه نتایج دقیق‌تری نسبت به دو معیار دیگر ارائه کرده‌اند. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۴۶ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۴۷ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها در این دو حالت دقت قابل قبولی ندارند. برای $z = -h/4$ در وسط استوانه معیار رانکین بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۴۸ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۴۹ آورده شده است. در بیشتر طول استوانه معیار ترسکا در $z = -h/4$ و معیار رانکین در $z = 0$ دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده‌اند.



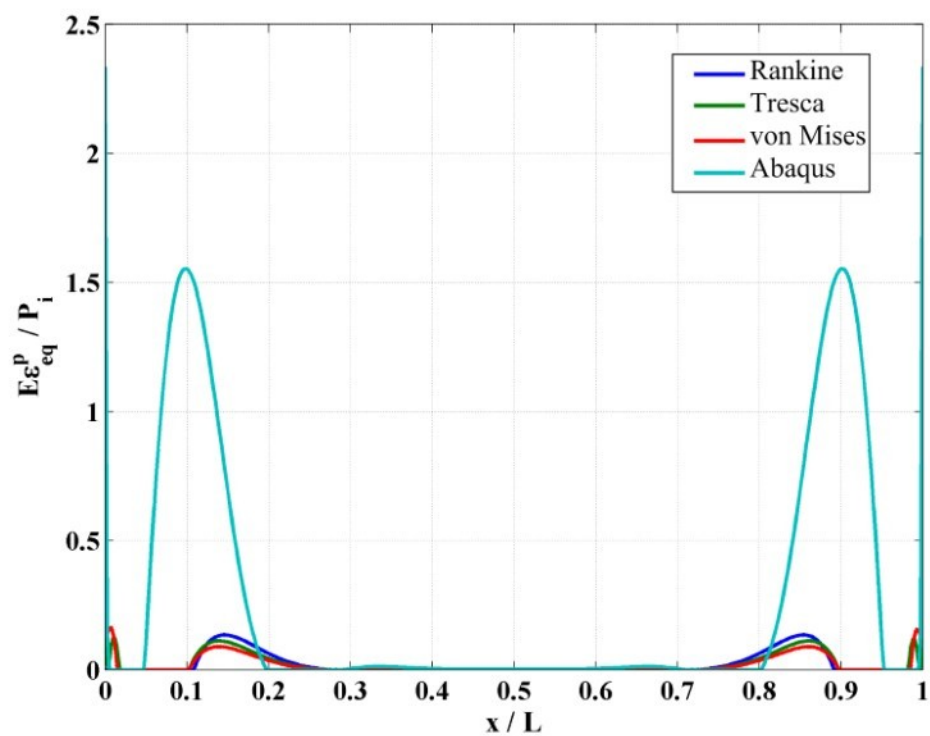
شکل ۴-۴۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z = -h/4$



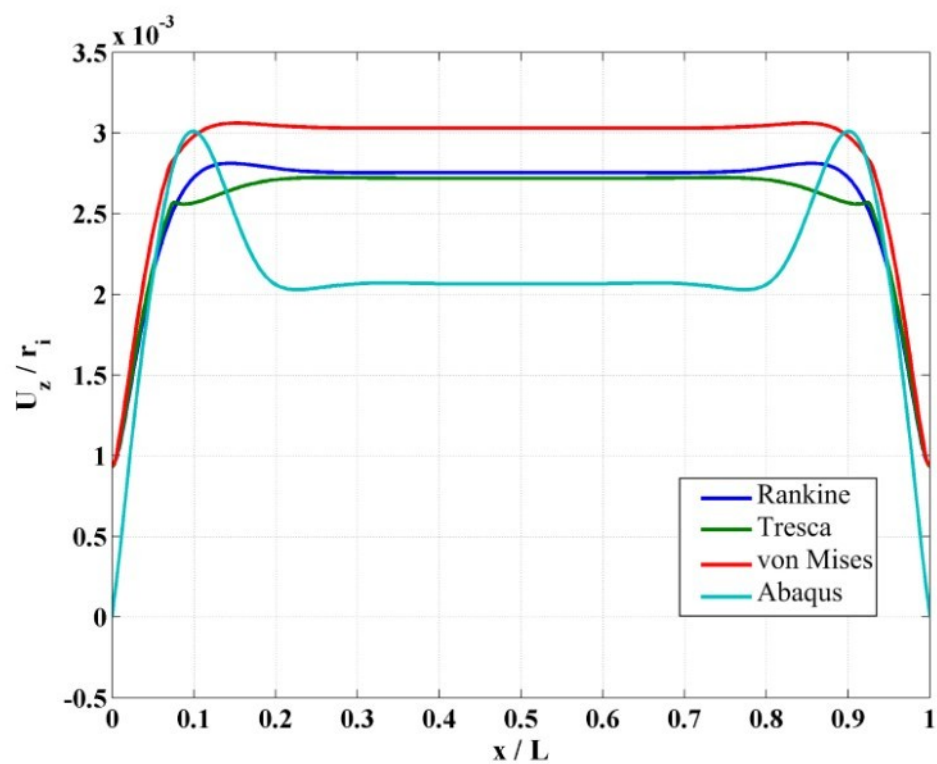
شکل ۴-۴۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



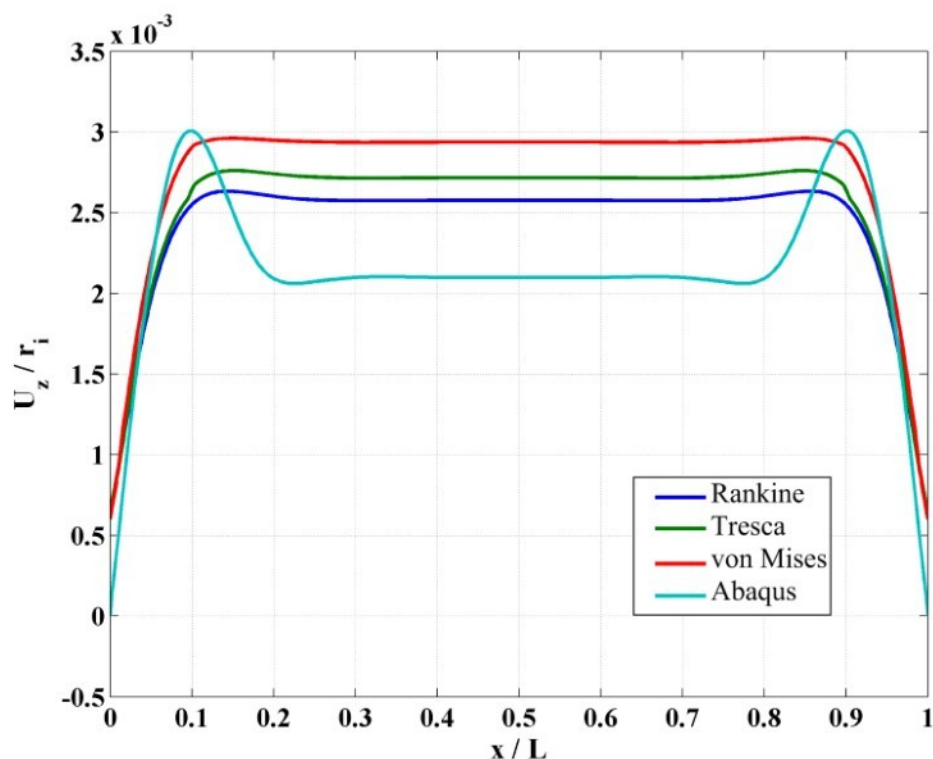
شکل ۴-۴۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۴-۴۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

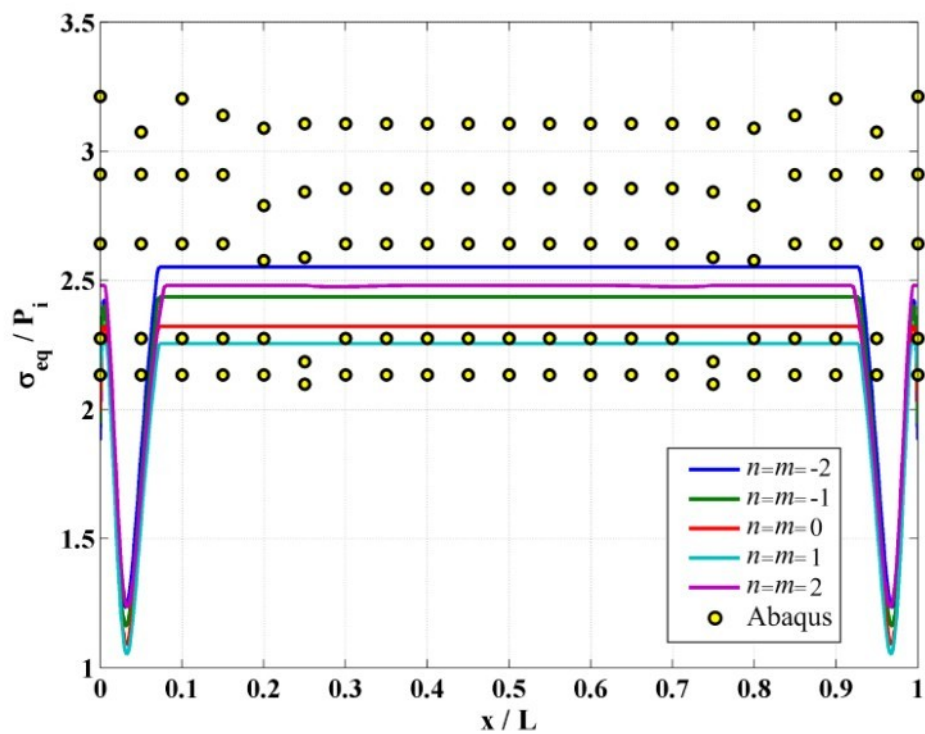


شکل ۴-۴۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

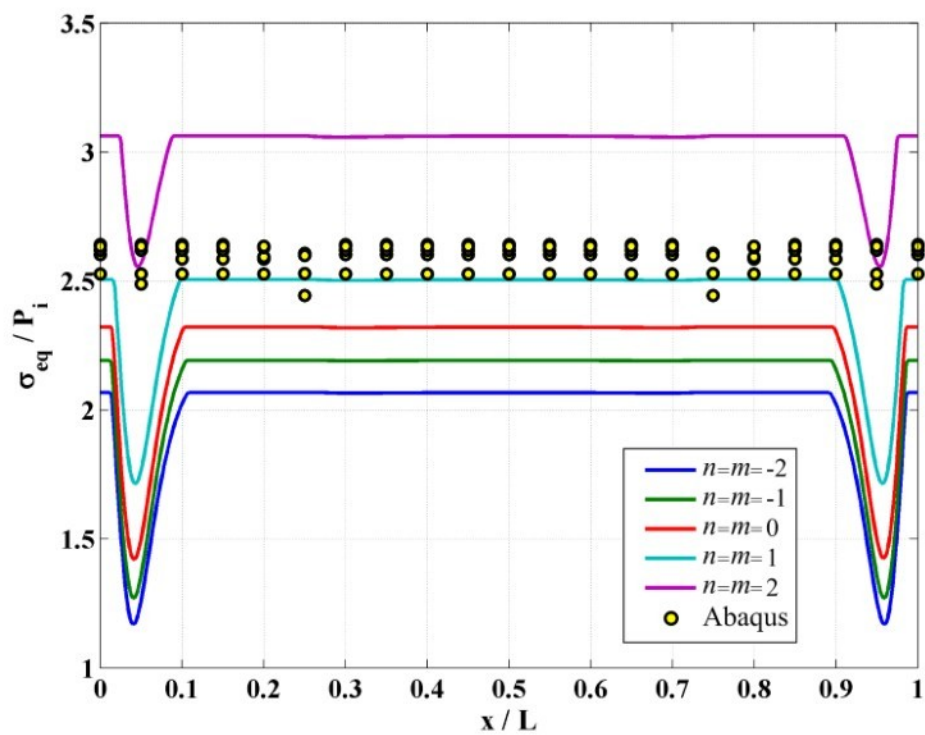


شکل ۴-۴۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

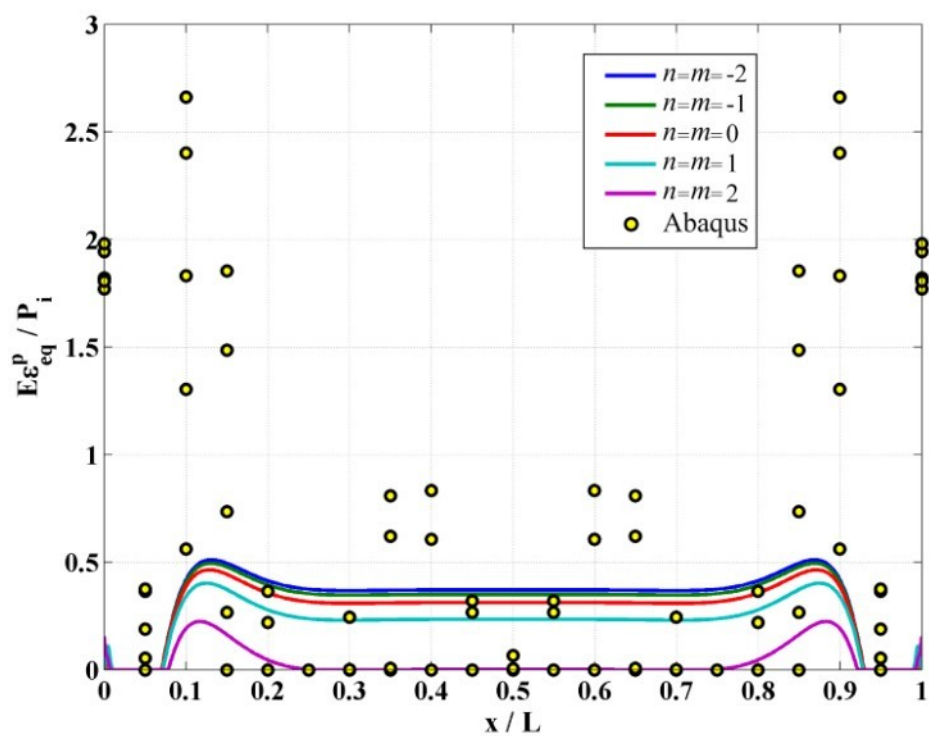
توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۵۰ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۵۱ مشاهده می‌نمایید. همان‌طور که می‌بینیم اثر ناهمگنی بر روی رفتار ماده در $z = -h/4$ کمتر و در $z = 0$ بیشتر از نرم‌افزار Abaqus پیش‌بینی شده است. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۵۲ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۵۳ آورده شده است. اختلاف زیادی بین نتایج حاصل از FSĐT با نرم‌افزار Abaqus مشاهده می‌شود. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۵۴ و جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z = 0$ در شکل ۴-۵۵ آورده شده است. نتایج حاصل از Abaqus در هر دو حالت تقریباً یکسانند و نتایج حاصل از TSĐT در لایه‌ی میانی انطباق بیشتری با آن‌ها دارند.



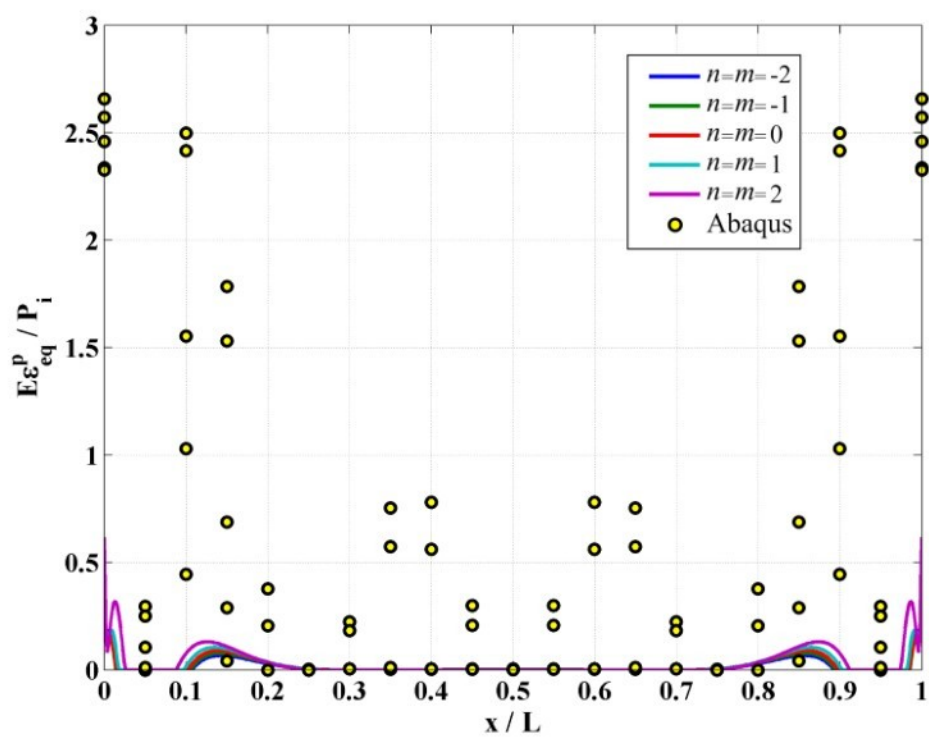
شکل ۴-۵۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



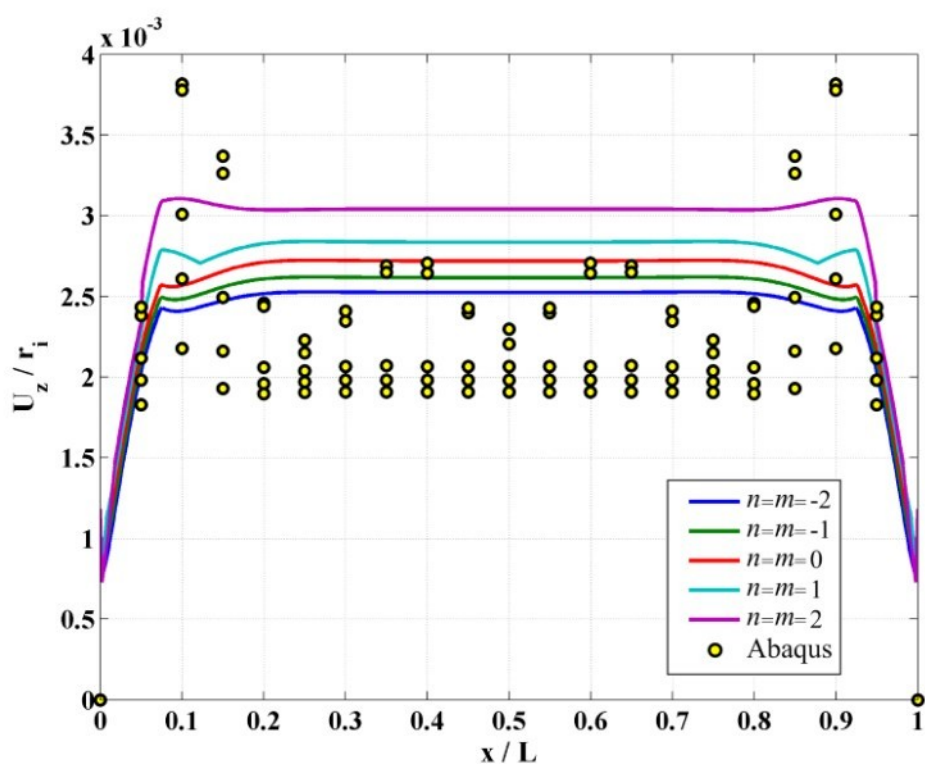
شکل ۴-۵۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$



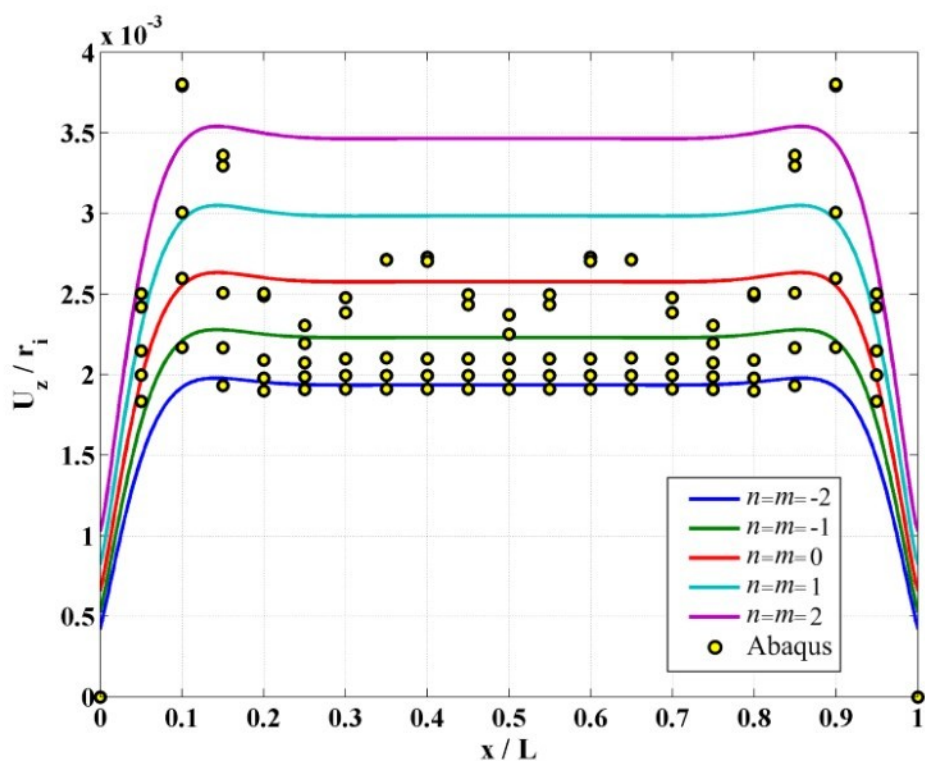
شکل ۴-۵۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



شکل ۴-۵۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

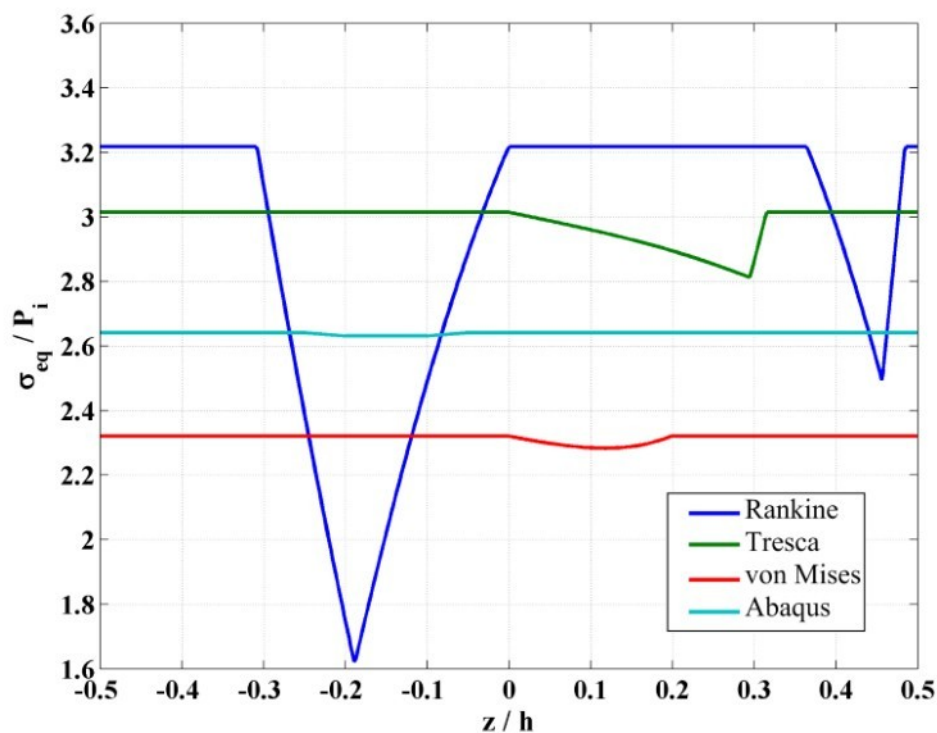


شکل ۴-۵۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$

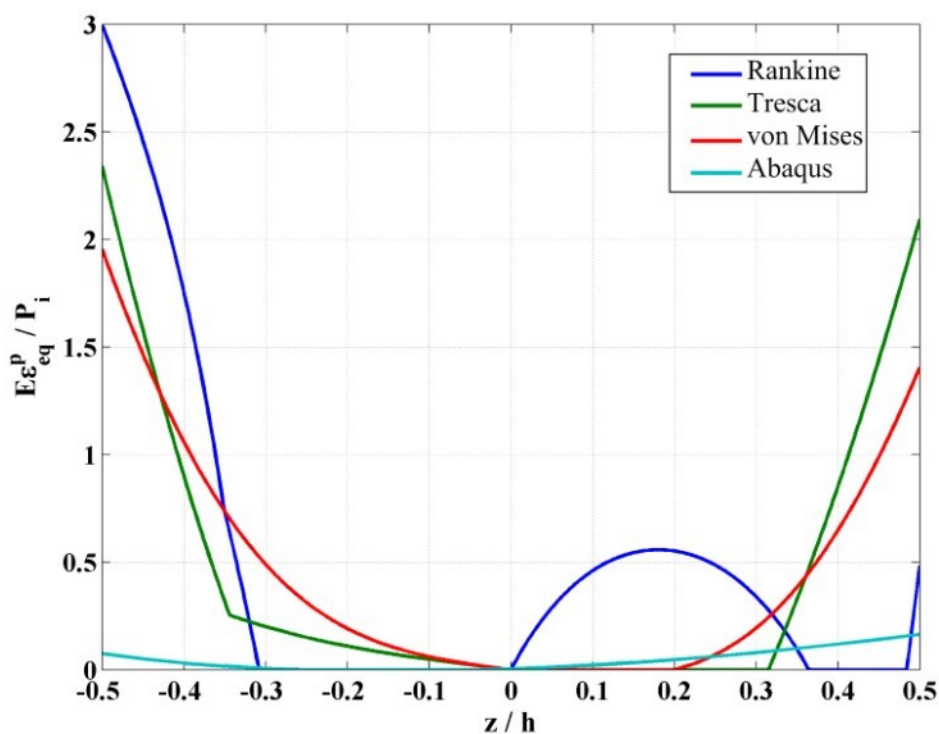


شکل ۴-۵۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z = 0$

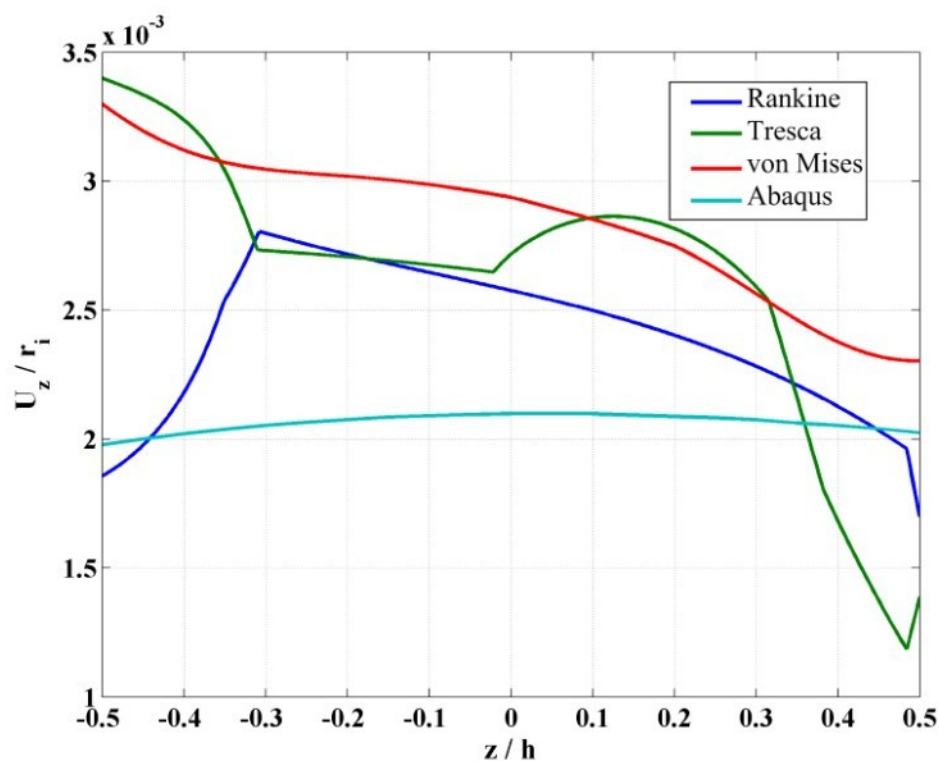
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۵۶ آورده شده است. معیار فون میزز بیشترین دقت را نسبت به دو معیار دیگر دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۴-۵۷ آورده شده است. معیار رانکین در بخشی از شعاع دقت خوبی دارد ولی منحنی حاصل از معیار فون میزز شباهت بیشتری به منحنی حاصل از Abaqus دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۵۸ آورده شده است. هیچ‌یک از معیارها نتیجه‌ای مشابه نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus را ارائه نکرده‌اند.



شکل ۴-۵۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

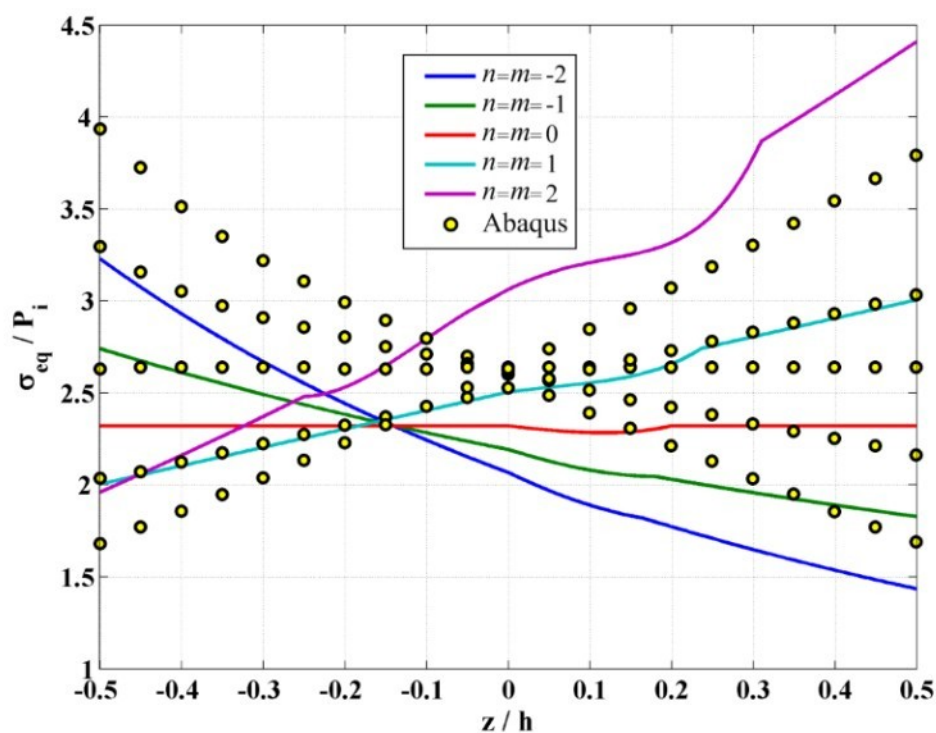


شکل ۴-۵۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

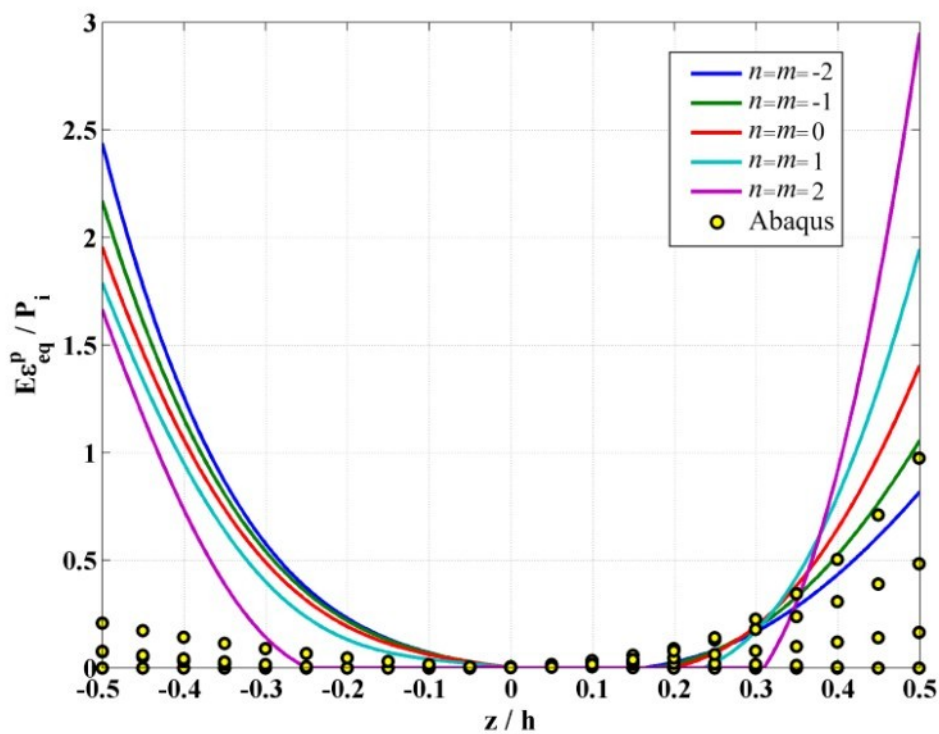


شکل ۴-۵۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

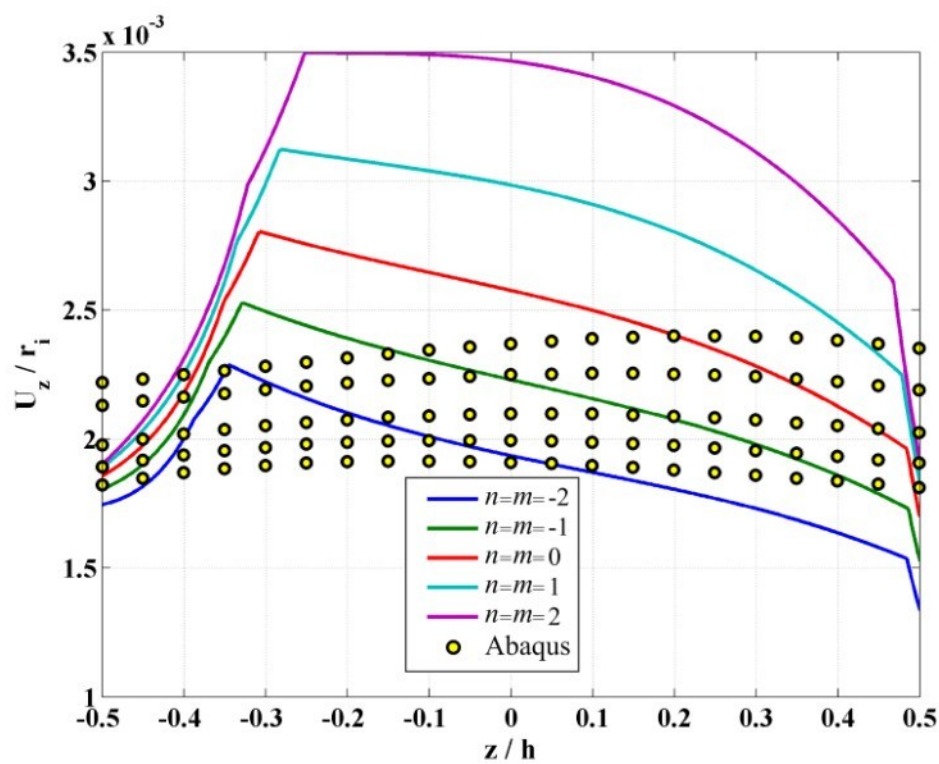
توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۵۹-۴ مشاهده می‌نمایید. فقط ثابت ناهمگنی ۱ از دقت قابل قبولی دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۶۰-۴ آورده شده است. در نیمه‌ی داخلی استوانه نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگ‌تر و در نیمه‌ی خارجی آن برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر دقیق‌ترند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۶۱-۴ آورده شده است. نتایج ارائه شده برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر دقیق‌ترند.



شکل ۵۹-۴- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۴-۶۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۴-۶۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۴-۵-۴- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در معرض بار حرارتی

در این بخش نتایج حل مسأله با در نظر گرفتن دمای سطح داخلی ۱۰۰ درجه‌ی سلسیوس بیش از دمای مرجع و دمای سطح خارجی برابر با دمای مرجع ارائه شده است. باز هم به دلیل تسلیم سطح داخلی استوانه در اثر بار حرارتی امکان پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه وجود ندارد. فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) تسلیم می‌شود در جدول ۴-۷ ارائه شده است. فشار خارجی در این حالت در نظر گرفته نشده است.

جدول ۴-۷- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی در $x = L/2$ (MPa)

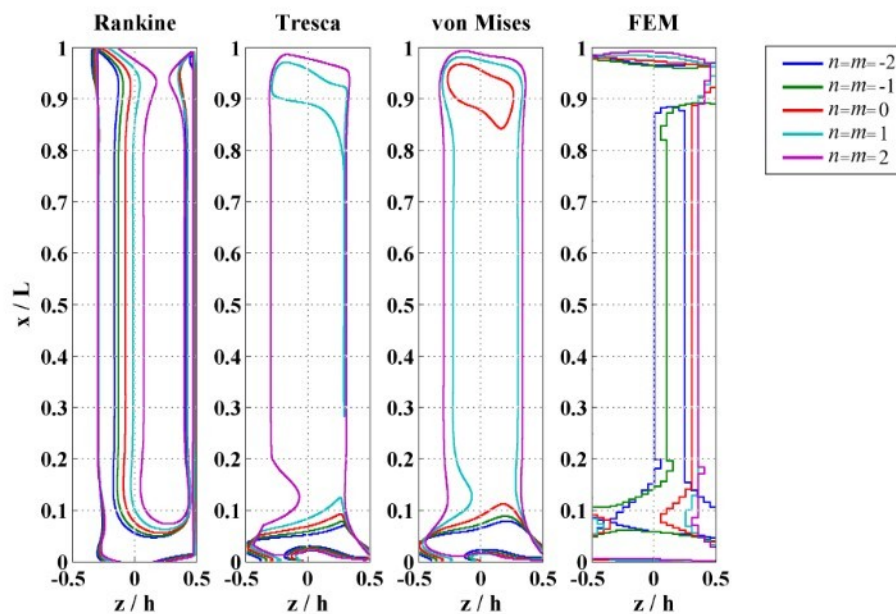
معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۳۵٫۴۰۰	۲۹٫۹۷۲	۴۰٫۲۳۳
$n=m=l=-1$	۵۳٫۰۴۱	۴۷٫۲۳۴	۶۲٫۲۵۲
$n=m=l=0$	۷۷٫۷۰۷	۷۱٫۲۸۵	۹۰٫۷۶۸
$n=m=l=1$	۱۱۲٫۲۲۰	۱۰۴٫۹۶۲	۱۲۹٫۲۲۸
$n=m=l=2$	۱۶۰٫۱۳۹	۱۵۲٫۰۵۳	۱۸۲٫۲۵۳

با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه افزایش می‌یابد. هیچ کدام از مقادیر گزارش شده غیر از برخی مقادیر مربوط به ثابت‌های ناهمگنی مثبت، دقت قابل قبولی ندارند. اختلاف چندانی بین مقادیر مربوط به معیار رانکین در جدول ۴-۵ و ۴-۷ مشاهده نمی‌شود.

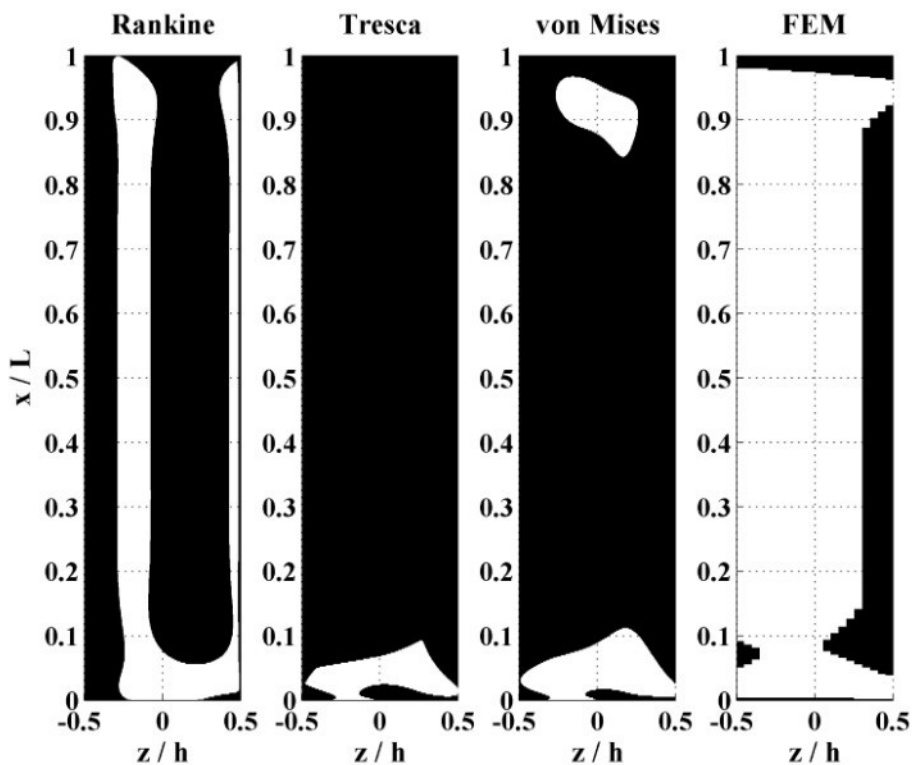
شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه با ثابت‌های ناهمگنی مختلف در شکل ۴-۶۲ و تصویر مناطق تسلیم شده‌ی استوانه در شکل ۴-۶۳ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار که برابر میانگین فشار آغاز تسلیم استوانه و فشار تسلیم لایه‌ی میانی حاصل از نرم‌افزار Abaqus در نظر گرفته شده است در جدول ۴-۸ آورده شده است. مشاهده می‌شود که نتیجه‌ی حاصل از هیچ‌کدام از معیارها مشابه نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus نیست.

جدول ۴-۸- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)

$n=m=l=2$	$n=m=l=1$	$n=m=l=0$	$n=m=l=-1$	$n=m=l=-2$
۱۳۵٫۲۸	۱۱۵٫۵۵	۹۷٫۲۶	۸۱٫۴۳	۶۶٫۲۵

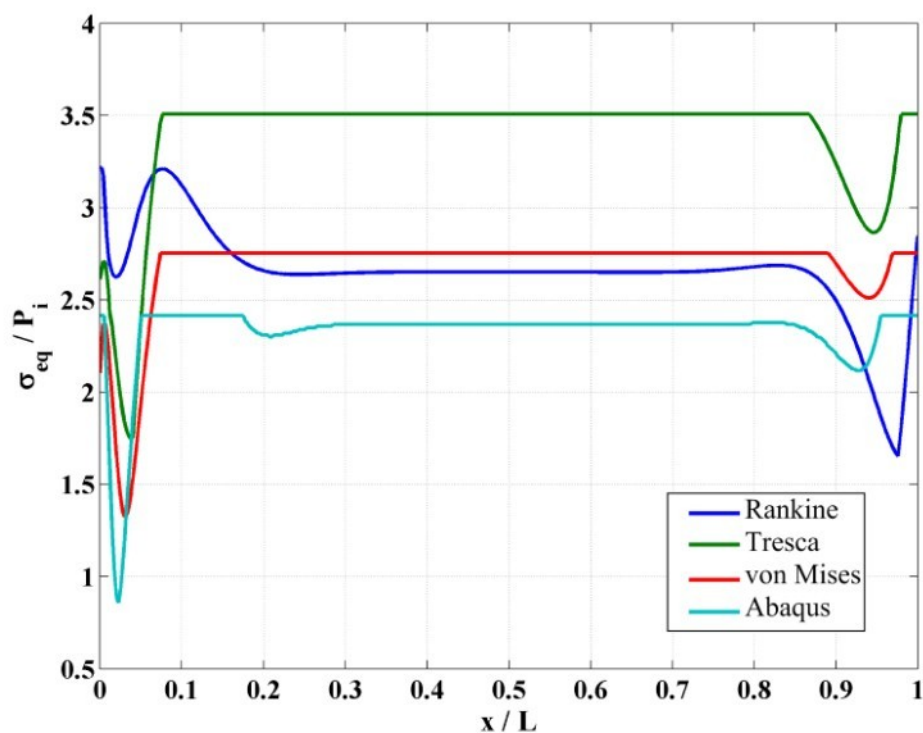


شکل ۴-۶۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک

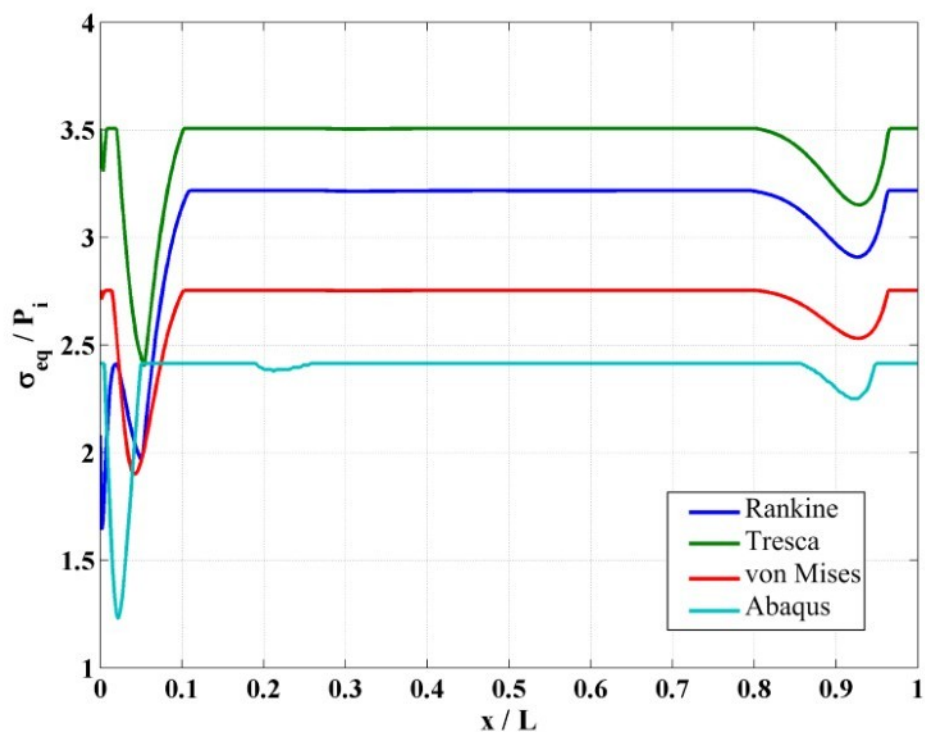


شکل ۴-۶۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن

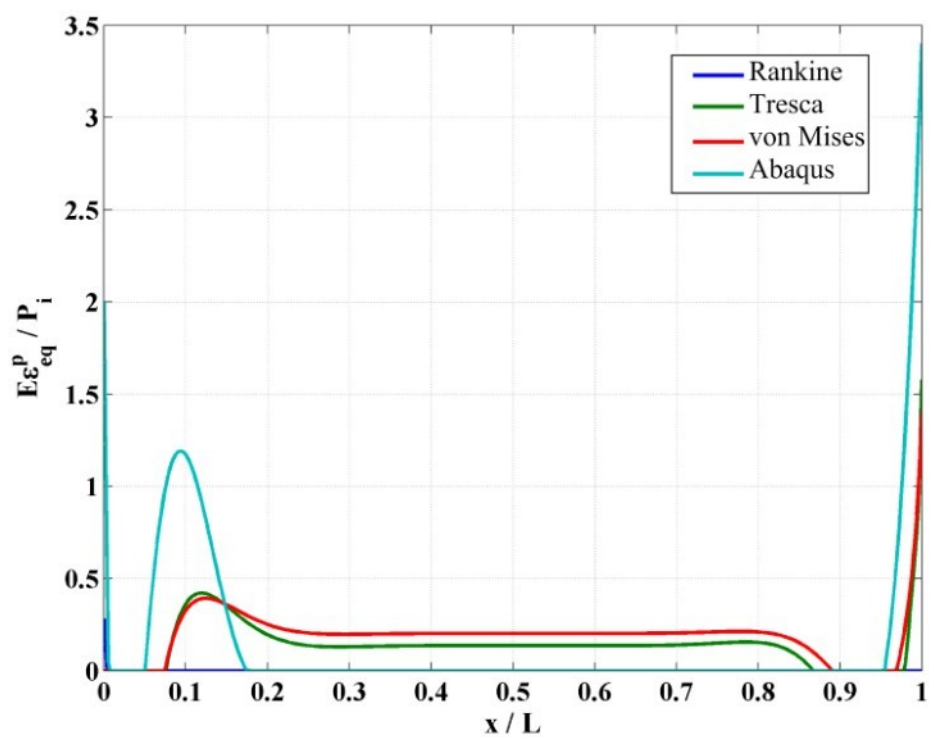
در ادامه نتایج برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۴-۷) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۶۴ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۶۵ آورده شده است. معیار فون میزز در $z = 0$ و در بعضی نقاط برای $z = -h/4$ بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۶۶ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۶۷ آورده شده است. برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۶۸ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۶۹ آورده شده است. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی معیار ترسکا در بیشتر طول استوانه دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



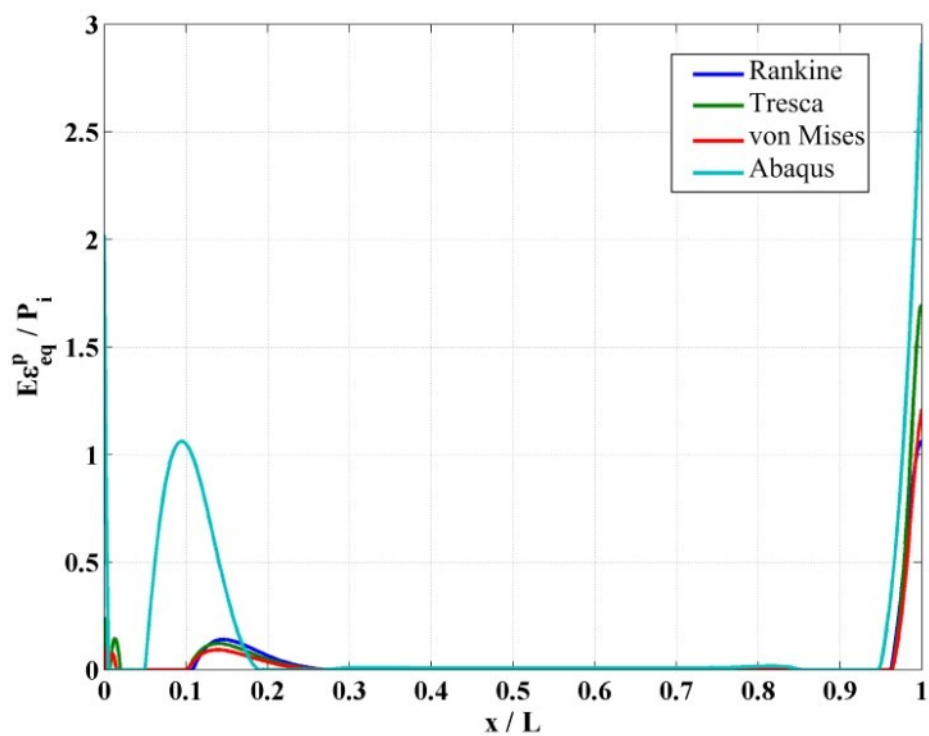
شکل ۴-۶۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z = -h/4$



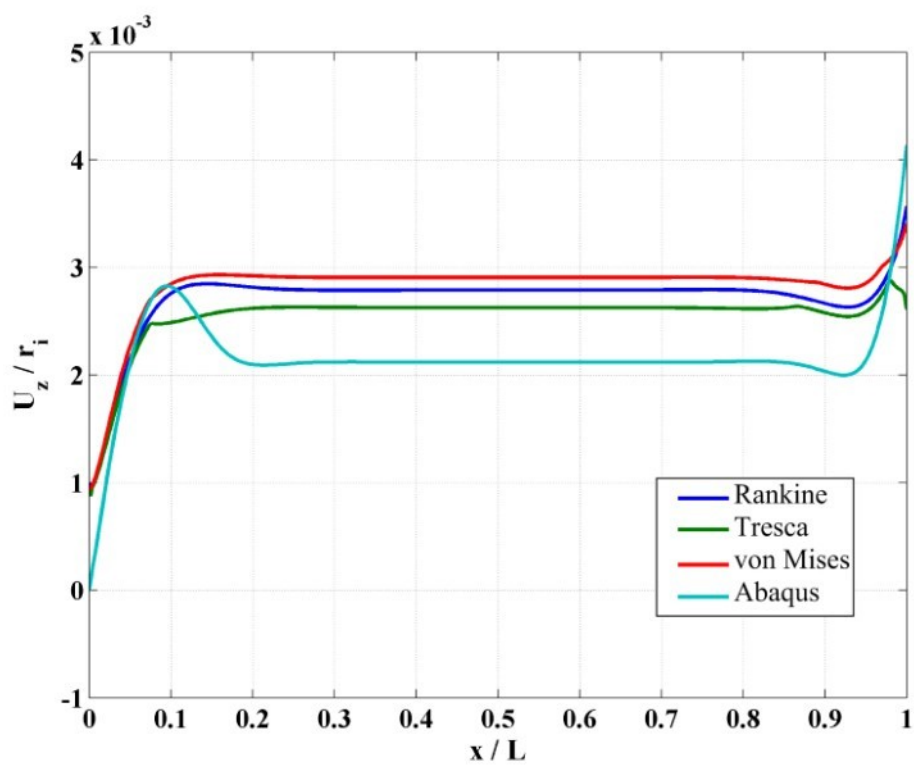
شکل ۴-۶۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



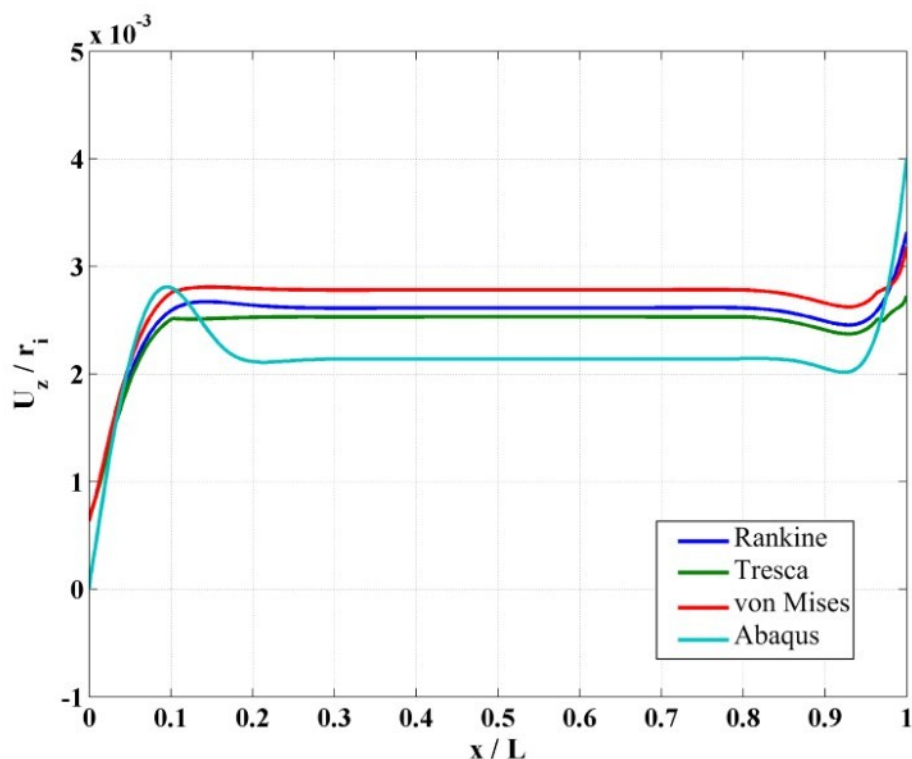
شکل ۴-۶۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۴-۶۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

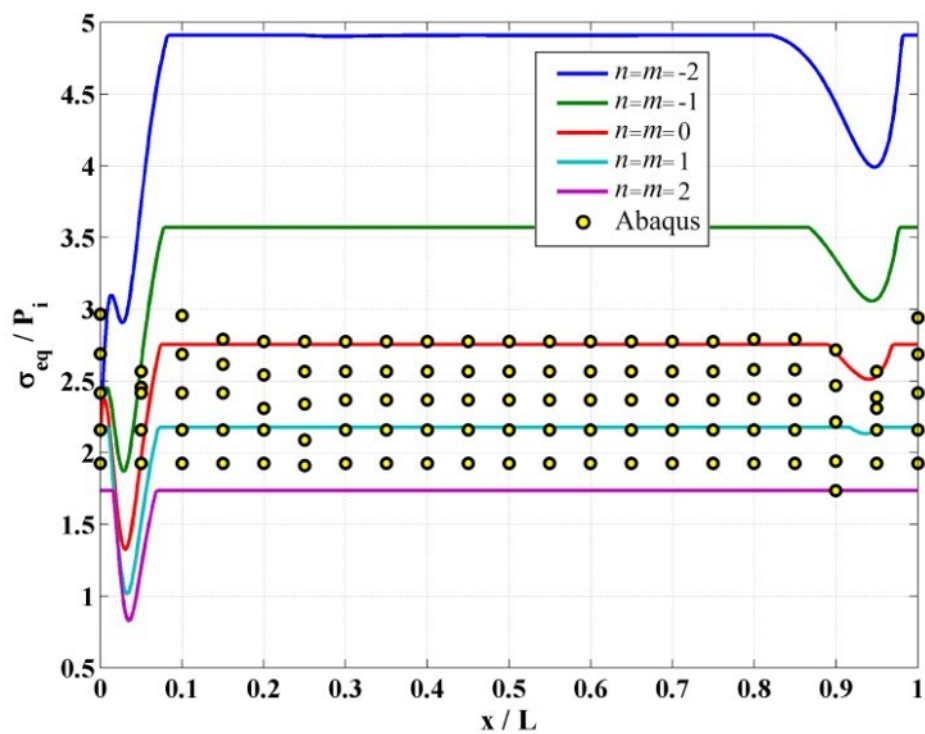


شکل ۴-۶۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

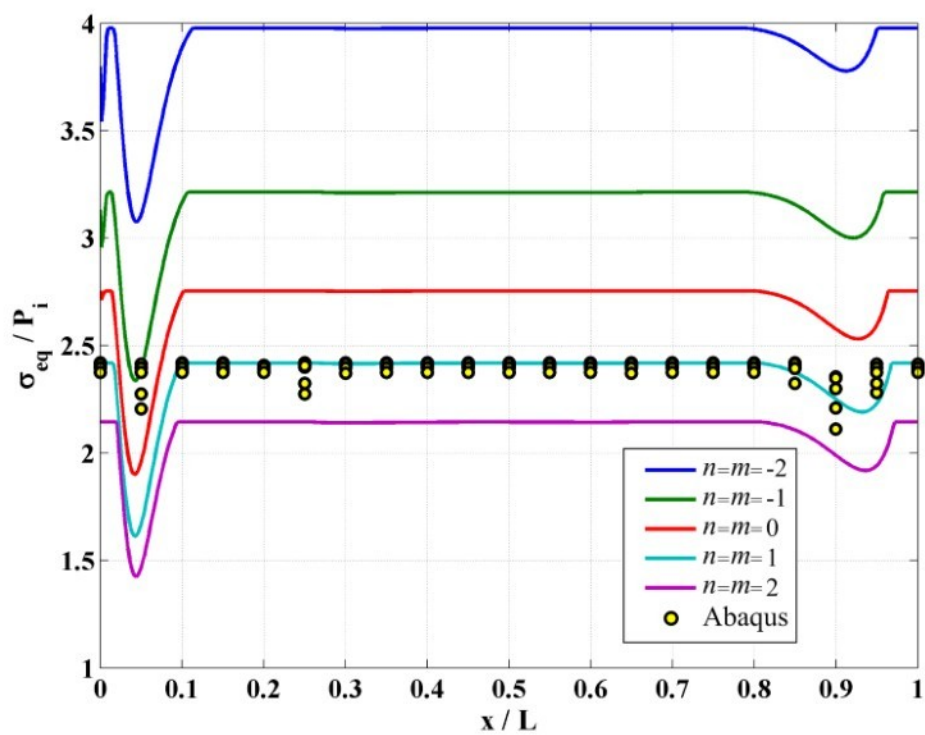


شکل ۴-۶۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

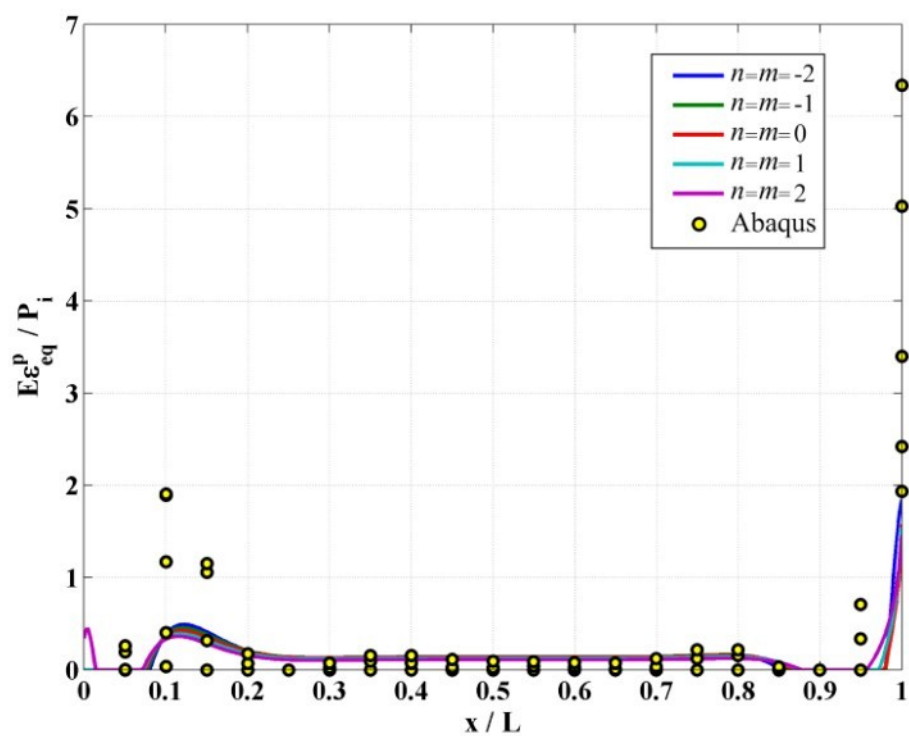
توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۷۰ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۷۱ مشاهده می‌نمایید. برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگتر نتایج دقیق‌تری ارائه شده است. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۷۲ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۷۳ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۴-۷۴ و برای $z = 0$ در شکل ۴-۷۵ آورده شده است. اثر ثابت ناهمگنی بر روی تغییر جابه‌جایی شعاعی استوانه از نظر TSĐT بیش از Abaqus است این تغییر در $z = 0$ بیشتر از $z = -h/4$ است. جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده برای ثابت‌های ناهمگنی کوچکتر دقت بیشتری دارد.



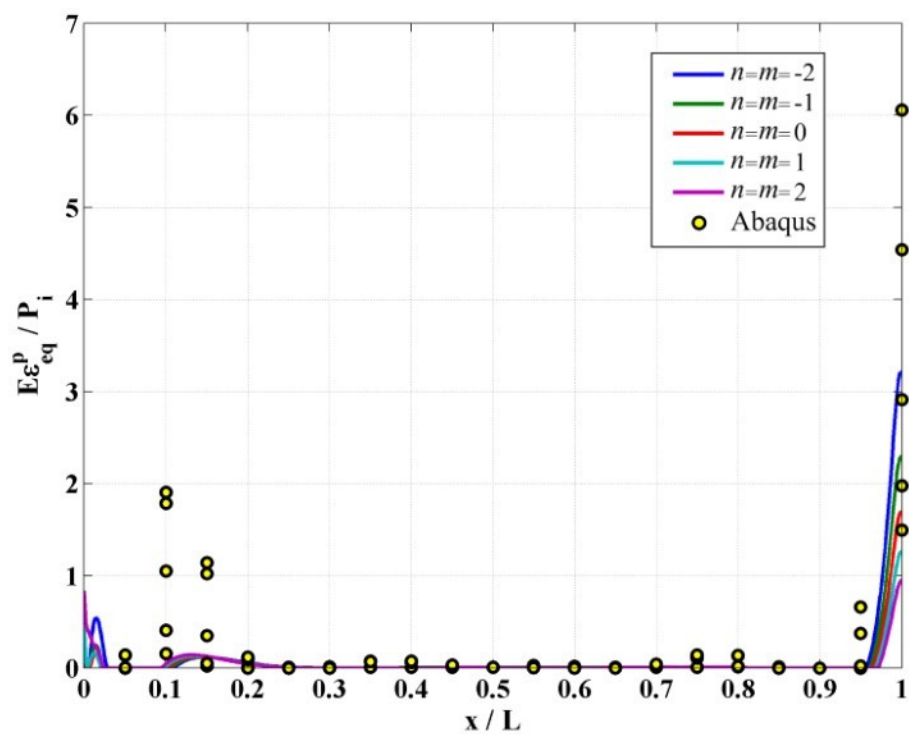
شکل ۴-۷۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



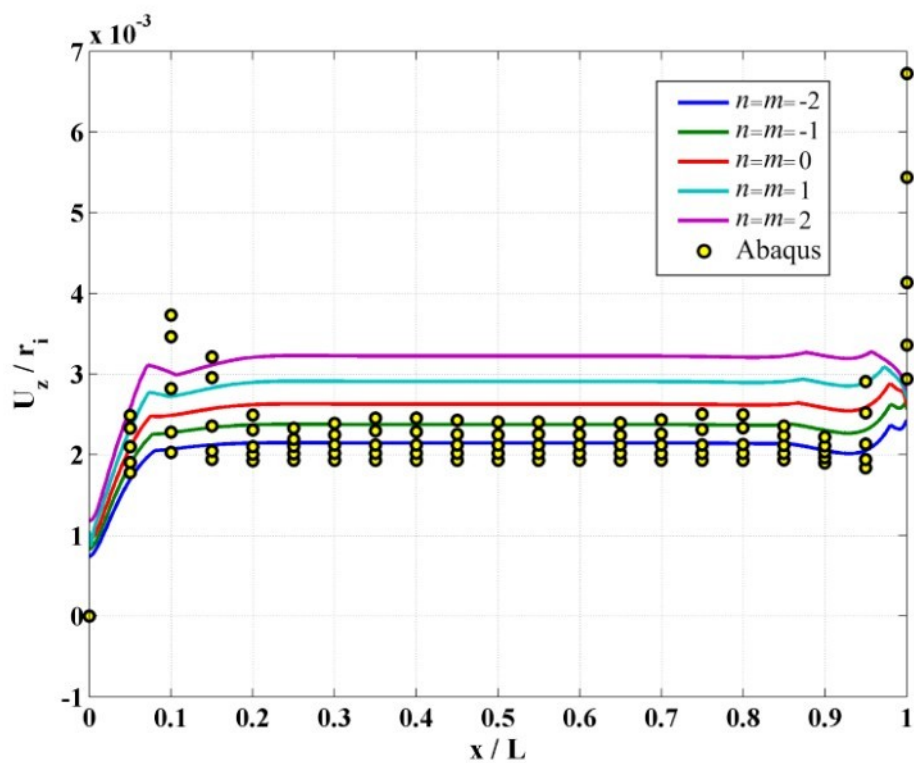
شکل ۴-۷۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$



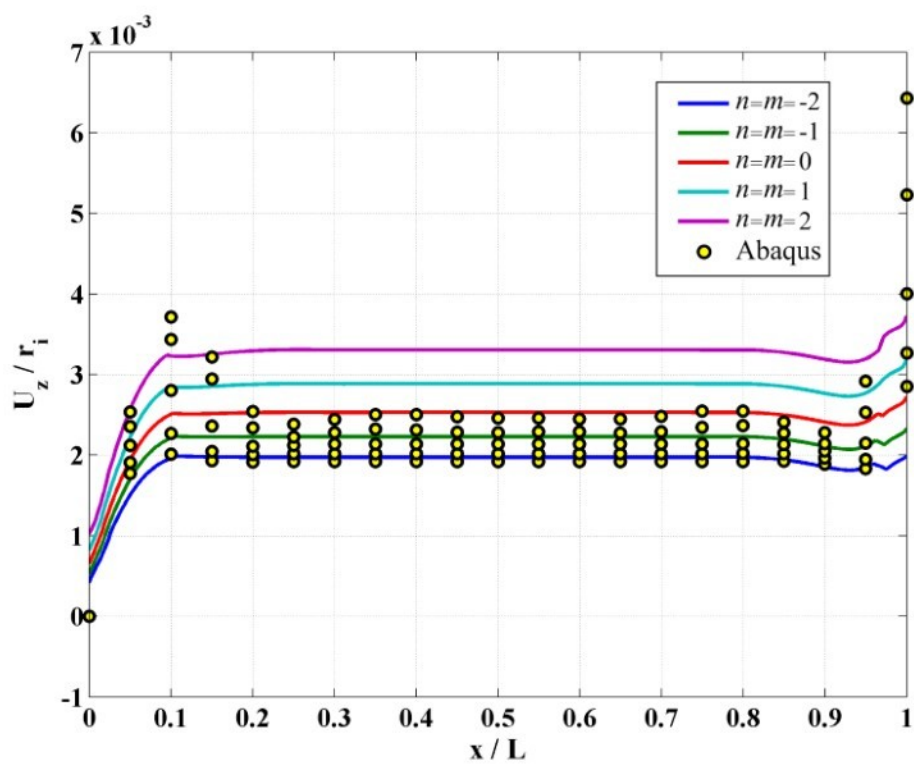
شکل ۴-۷۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



شکل ۴-۷۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = 0$

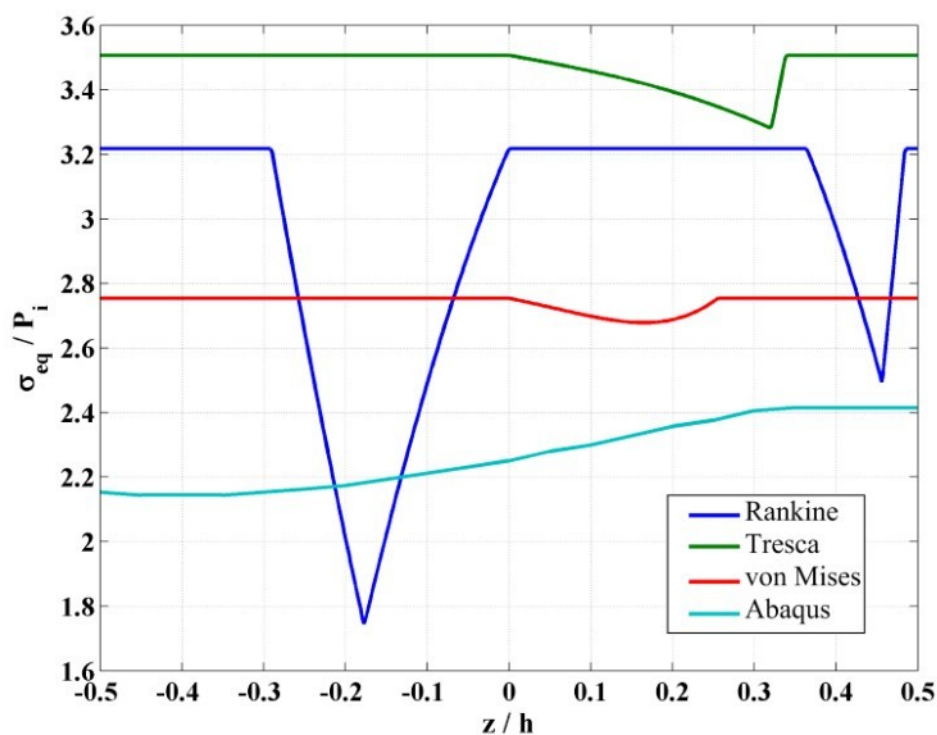


شکل ۴-۷۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$

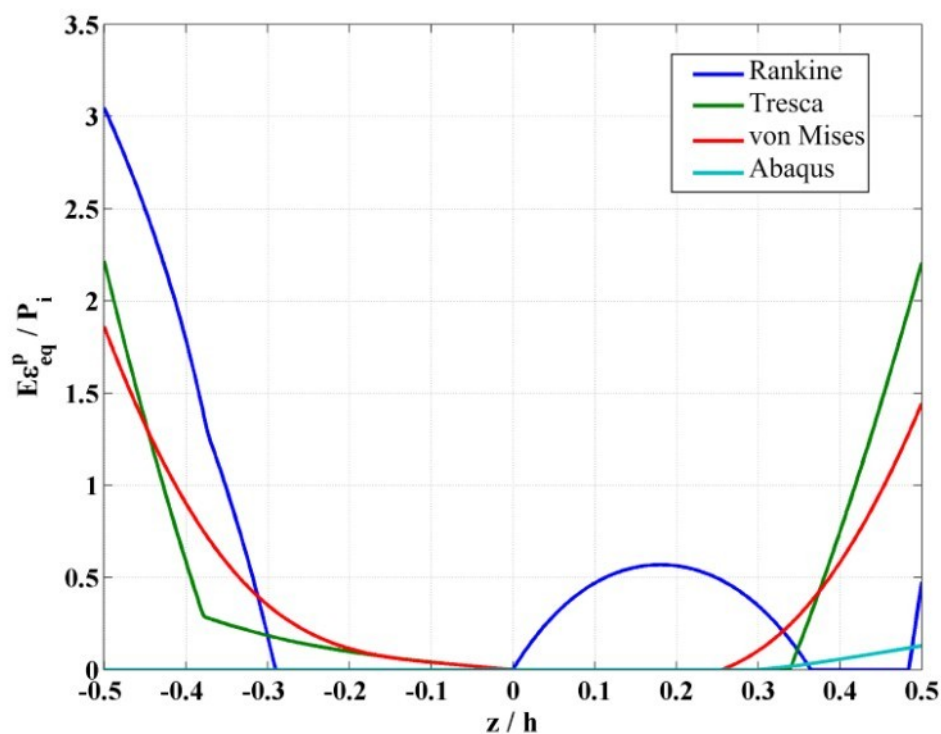


شکل ۴-۷۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = 0$

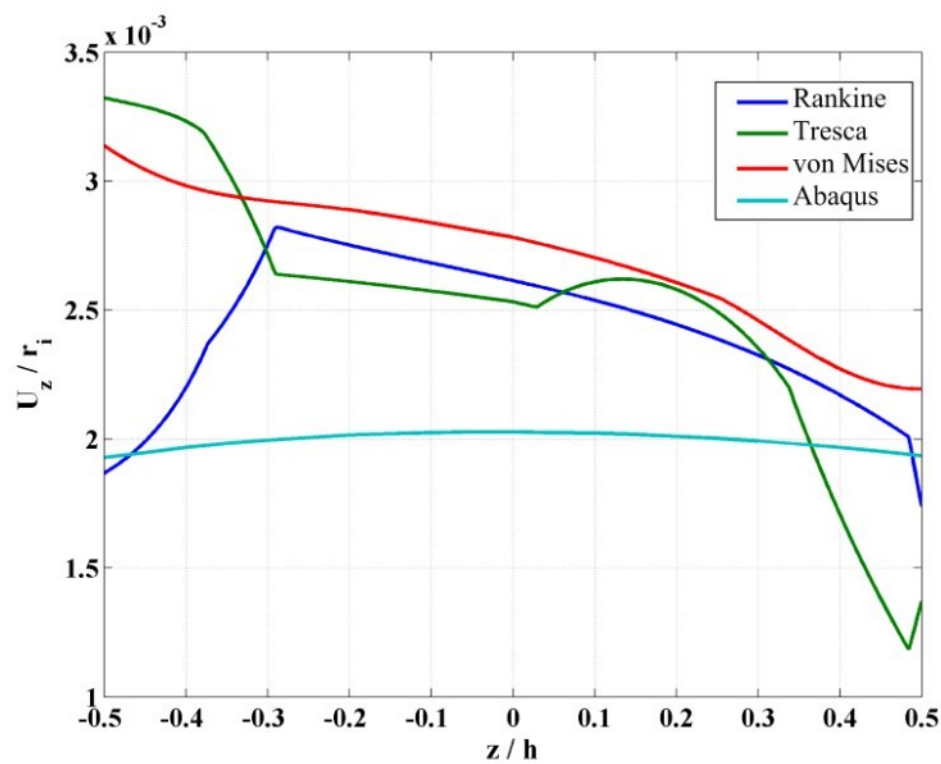
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۷۶ آورده شده است. معیار فون میزز بیشترین دقت را نسبت به دو معیار دیگر دارند. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۴-۷۷ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها دقت قابل قبولی ندارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۴-۷۸ آورده شده است. هیچ‌یک از معیارها دقت قابل قبولی ندارند ولی به طور میانگین معیار رانکین دقیق‌ترین معیار در بین سه معیار است.



شکل ۴-۷۶- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

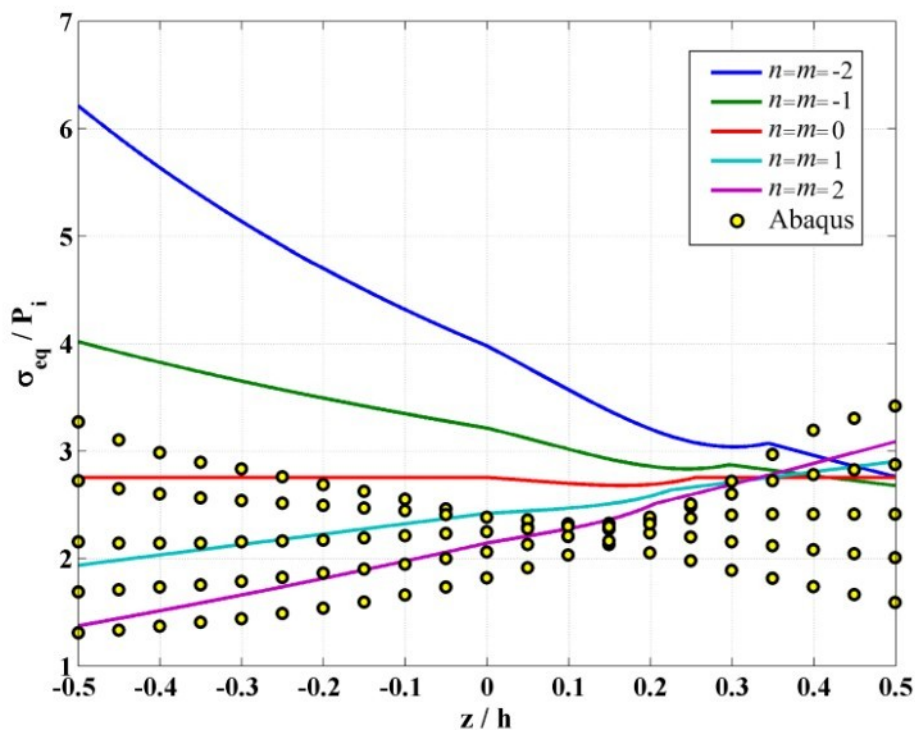


شکل ۴-۷۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

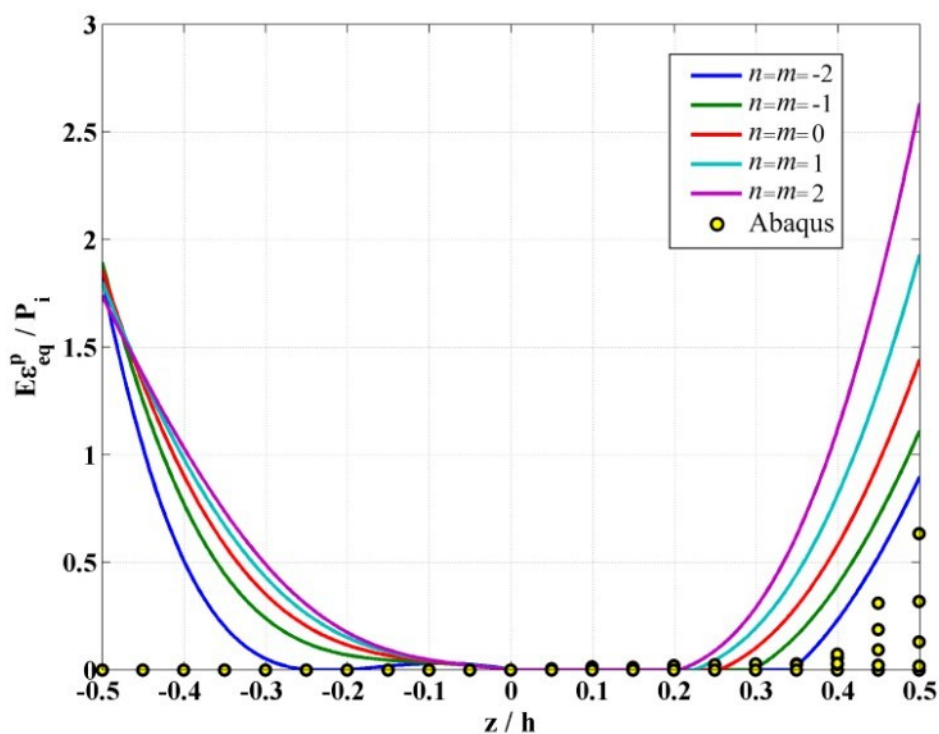


شکل ۴-۷۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

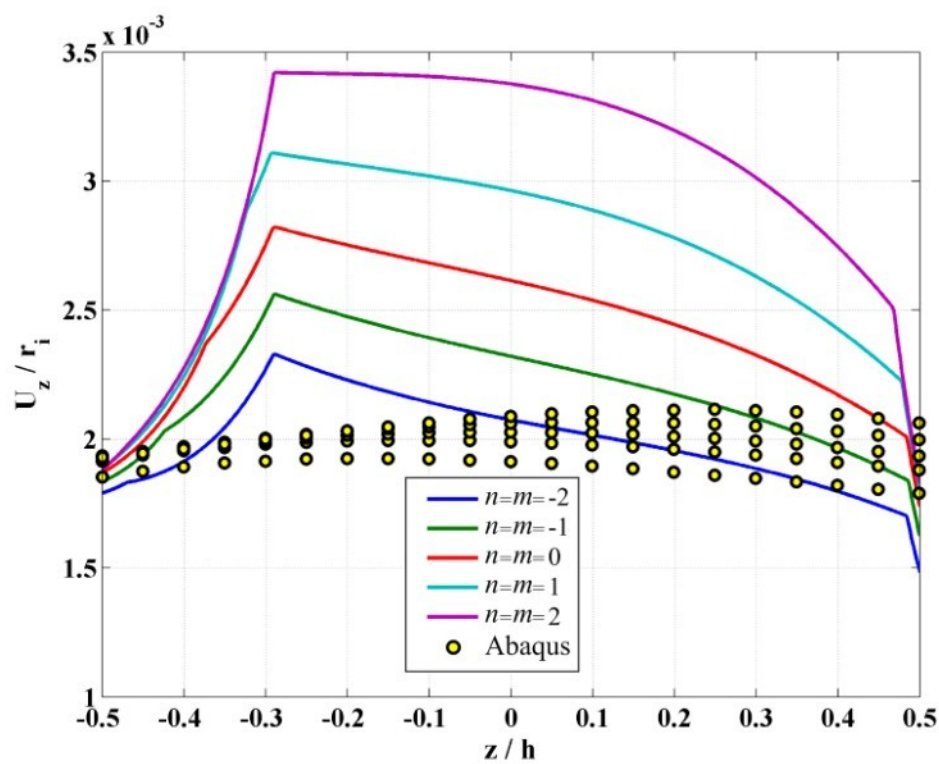
توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۷۹-۴ مشاهده می‌نمایید. نتایج ارائه شده برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگتر دقیق‌ترند. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۸۰-۴ آورده شده است. نتایج ارائه شده در نیمه‌ی خارجی استوانه برای ثابت‌های ناهمگنی کوچکتر دقت بیشتری دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانیکن نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۸۱-۴ آورده شده است. دقت نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک‌تر بیشتر است.



شکل ۷۹-۴- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۸-۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۸-۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

فصل ۵- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به

کمک روش اجزای محدود

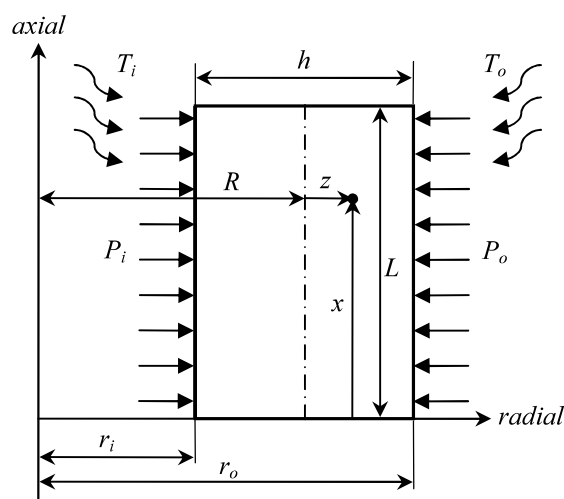
آنچه در این فصل می‌خوانیم:

- ❖ تحلیل ترموالاستیک
- ❖ بررسی جریان پلاستیک
- ❖ ارائه و مقایسه‌ی نتایج

روش اجزای محدود به یک روش قدرتمند برای حل عددی گسترده‌ی وسیعی از مسائل مهندسی از یافتن تغییر شکل و تحلیل تنش در سازه‌ها تا تحلیل میدان شار حرارتی، جریان سیال، شار مغناطیسی و سایر مسائل جریان تبدیل شده است. در این فصل روابط مورد نیاز برای حل مسأله به کمک روش اجزای محدود با استفاده از دو جزء خطی مثلثی سه گره‌ای و مستطیلی چهار گره‌ای بیان شده است. سپس روابط مورد نیاز برای تحلیل ترموالاستوپلاستیک ماده و نحوه‌ی به‌کارگیری آن‌ها در حل مسأله‌ی مورد نظر مطرح شده است. پس از آن به بیان نتایج حاصل از حل آن پرداخته شده است که این نتایج با نتایج به‌دست آمده از حل مسأله به کمک نرم‌افزار اجزای محدود Abaqus مقایسه شده است.

۵-۱- تحلیل ترموالاستیک

در این بخش روابط مورد نیاز برای حل الاستیک استوانه‌ی متقارن محوری جدار کلفت ساخته شده از مواد همگن در معرض فشار یکنواخت داخلی و خارجی و بار حرارتی ارائه می‌شود. این روابط بر پایه‌ی روش حل گلرکین استخراج شده‌اند.



شکل ۵-۱- پروفیل استوانه‌ی جدار ثابت در معرض دما و فشار داخلی و خارجی

به دلیل تقارن محوری استوانه فقط جابه‌جایی شعاعی و محوری داریم که تابعی از شعاع و طول می‌باشند و جابه‌جایی محیطی صفر است:

$$U_r = f(r, x), \quad U_\theta = 0, \quad U_x = g(r, x). \quad (۱-۵)$$

معادلات کرنش تغییر مکان به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{\partial U_r}{\partial r} \\ \varepsilon_\theta = \frac{U_r}{r} \\ \varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} \\ \gamma_{rx} = \frac{\partial U_r}{\partial x} + \frac{\partial U_x}{\partial r} \\ \gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta x} = 0 \end{cases} \quad (۲-۵)$$

بردار کرنش‌های کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{\varepsilon} = \{\varepsilon_r \quad \varepsilon_\theta \quad \varepsilon_x \quad \gamma_{rx}\}^T \quad (۳-۵)$$

بردار کرنش‌های کلی برابر مجموع کرنش‌های مکانیکی و حرارتی است:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^m + \vec{\varepsilon}^{th} \quad (۴-۵)$$

$$\vec{\varepsilon}^m = \{\varepsilon_r^m \quad \varepsilon_\theta^m \quad \varepsilon_x^m \quad \gamma_{rx}^m\}^T \quad (۵-۵)$$

$$\vec{\varepsilon}^{th} = \{\alpha\theta \quad \alpha\theta \quad \alpha\theta \quad 0\}^T \quad (۶-۵)$$

که α ضریب انبساط حرارتی جزء و θ اختلاف دمای جزء با دمای مرجع می‌باشد. ضریب انبساط حرارتی هر جزء با توجه به توزیع توانی در نظر گرفته شده برای آن به کمک رابطه‌ی (۷-۵) و دمای هر جزء بر اساس توزیع دمای به‌دست آمده در بخش ۱-۳ به کمک رابطه‌ی (۸-۵) قابل محاسبه است:

$$\alpha = \alpha_i \left(\frac{\bar{r}}{r_i} \right)^l \quad (۷-۵)$$

$$\theta = \frac{T_o - T_i}{a} \ln \left(\frac{\bar{r}}{r_i} \right) + T_i - T^* \quad (۸-۵)$$

$\bar{r}$ شعاع مرکز جزء است. بردار تنش و کرنش‌های مکانیکی با استفاده از قانون هوک با یکدیگر رابطه برقرار می‌کنند:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_x \\ \tau_{rx} \end{Bmatrix} = \tilde{E} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{rx} \end{Bmatrix}^m \quad (9-5)$$

$$\tilde{E} = \frac{E(r)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (10-5)$$

مقدار مدول الاستیسیتهی هر جزء از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$E = E_i \left(\frac{\bar{r}}{r_i} \right)^n \quad (11-5)$$

برای یافتن جابه‌جایی در هر نقطه از ضرب ماتریس توابع شکل جزء در بردار تغییر مکان

گره‌های جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{Bmatrix} U_r(r, x) \\ U_x(r, x) \end{Bmatrix} = \tilde{N} \vec{u} \quad (12-5)$$

کرنش‌ها از ضرب ماتریس مشتقات جزئی در بردار جابه‌جایی به‌دست می‌آیند که از ترکیب

آن با رابطه‌ی (9-5) داریم:

$$\vec{\varepsilon} = \tilde{B} \vec{u} \quad (13-5)$$

که $[B_{ij}]$ ماتریس مشتق توابع شکل جزء است:

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \tilde{N} \quad (14-5)$$

ماتریس سفتی هر جزء به صورت زیر محاسبه می‌شود که برای راحتی محاسبه‌ی انتگرال

مقدار آن را در مرکز جزء $(\bar{r}, \bar{x})$ محاسبه نموده‌ایم:

$$\tilde{K} = \int_V \tilde{B}^T \tilde{E} \tilde{B} dV = 2\pi A \bar{r} \bar{B}^T \bar{E} \bar{B} \quad (15-5)$$

در رابطه‌ی فوق A مساحت جزء، $\bar{E}$ ضریب قانون هوک برای جزء در مرکز آن و $\bar{B}$ ماتریس مشتق توابع شکل جزء در مرکز آن است. بردار نیروی ناشی از فشار داخلی و یا خارجی در استوانه بر روی اضلاع تحت فشار اجزاء عبارت است از:

$$\vec{F}^P = \int_{\Gamma} \bar{N}^T \begin{Bmatrix} P_r \\ P_x \end{Bmatrix} d\Gamma \quad (۱۶-۵)$$

که Γ سطح مورد نظر می‌باشد. از آن‌جا در این مسأله با فشار بر روی اضلاع عمود بر شعاع اجزاء سر و کار داریم و از اجزای خطی دارای دو گره در هر ضلع استفاده می‌کنیم؛ حاصل انتگرال فوق بدین شکل ساده می‌شود که نیمی از نیرو بر روی یک گره و نیم دیگر آن بر روی گره‌ی دیگر ضلع تحت فشار جزء قرار داده می‌شود.

بردار نیروی ناشی از تغییرات دما بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$\vec{F}^{th} = \int_V \bar{B}^T \bar{E} \bar{\epsilon}^{th} dV = 2\pi A \bar{r} \bar{B}^T \bar{E} \bar{\epsilon}^{th} \quad (۱۷-۵)$$

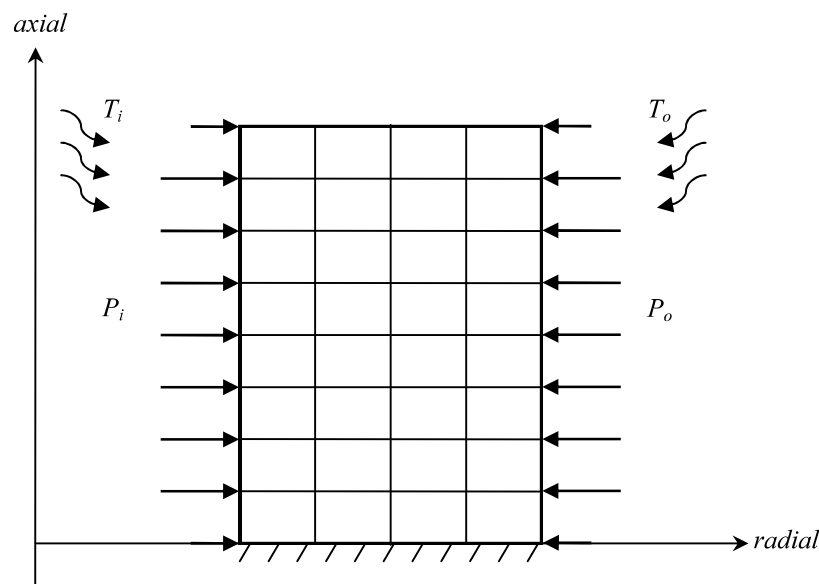
بردار نیروی کل برابر مجموع دو نیروی فوق است:

$$\vec{F} = \vec{F}^P + \vec{F}^{th} \quad (۱۸-۵)$$

پس از محاسبه‌ی ماتریس سفتی و بردار نیروی هر جزء با توجه به شبکه‌ی در نظر گرفته شده اقدام به ساخت ماتریس سفتی و بردار نیروی کل از روی ماتریس سفتی و بردار نیروی هر جزء می‌نماییم. مقدار مربوط به هر گره در ماتریس کل برابر مجموع مقدارهای مربوط به آن گره در ماتریس‌های اجزا است. نتیجه یک دستگاه معادلات خطی به شکل زیر است:

$$\bar{K} \vec{u} = \vec{F} \quad (۱۹-۵)$$

لازم به ذکر است که درایه‌های فرد بردار جابه‌جایی و نیرو مربوط به جهت شعاعی و درایه‌های زوج مربوط به جهت محوری می‌باشند.

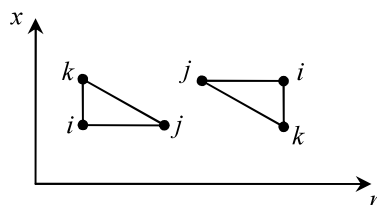


شکل ۵-۲- نمونه‌ای از شبکه‌بندی استوانه با جزء مستطیلی

شرایط مرزی بدین صورت اعمال می‌شوند که مقدار جابه‌جایی‌های معلوم در دستگاه معادلات فوق قرار داده می‌شوند و معادلاتی که مربوط به آن‌ها می‌باشند از دستگاه حذف می‌شوند. به عنوان مثال در صورت صفر بودن درایه‌ی سوم بردار جابه‌جایی ستون سوم ماتریس سفتی کل و سومین معادله‌ی مجموعه را حذف می‌نماییم. شرط مرزی سر گیردار به صورت صفر کردن جابه‌جایی شعاعی و محوری تمام گره‌های قرار گرفته در آن سطح و شرط مرزی سر آزاد بدون ایجاد هیچ تغییری بر روی دستگاه معادلات اعمال می‌شوند.

پس از اعمال شرایط مرزی و حل دستگاه معادلات، جابه‌جایی تک‌تک گره‌ها به دست می‌آید. سپس به کمک رابطه‌ی (۵-۱۳) کرنش‌های هر جزء محاسبه می‌شود. با کم کردن کرنش‌های حرارتی از کرنش‌های جزء کرنش‌های مکانیکی هر جزء به دست می‌آید سپس به کمک رابطه‌ی (۵-۹) تنش‌های جزء قابل محاسبه است.

۵-۱-۱- جزء مثلثی خطی ۳ گره‌ای



شکل ۵-۳- جزء مثلثی ۳ گره‌ای

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (۲۰-۵)$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{2A} [r_j x_k - r_k x_j + (x_j - x_k)r + (r_k - r_j)x] \\ N_j = \frac{1}{2A} [r_k x_i - r_i x_k + (x_k - x_i)r + (r_i - r_k)x] \\ N_k = \frac{1}{2A} [r_i x_j - r_j x_i + (x_i - x_j)r + (r_j - r_i)x] \end{cases} \quad (۲۱-۵)$$

$$\vec{u} = \{u_{2i-1} \quad u_{2i} \quad u_{2j-1} \quad u_{2j} \quad u_{2k-1} \quad u_{2k}\}^T \quad (۲۲-۵)$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_j - x_k & 0 & x_k - x_i & 0 & x_i - x_j & 0 \\ \frac{2AN_i}{r} & 0 & \frac{2AN_j}{r} & 0 & \frac{2AN_k}{r} & 0 \\ 0 & r_k - r_j & 0 & r_i - r_k & 0 & r_j - r_i \\ r_k - r_j & x_j - x_k & r_i - r_k & x_k - x_i & r_j - r_i & x_i - x_j \end{bmatrix} \quad (۲۳-۵)$$

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & r_i & x_i \\ 1 & r_j & x_j \\ 1 & r_k & x_k \end{vmatrix} \quad (۲۴-۵)$$

$$\bar{r} = (r_i + r_j + r_k)/3, \quad \bar{x} = (x_i + x_j + x_k)/3. \quad (۲۵-۵)$$

$$\vec{F}^P = P_i \pi r_i (x_k - x_i) \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^T \quad (۲۶-۵)$$

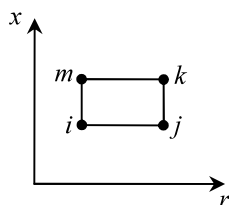
$$\vec{F}^P = P_o \pi r_o (x_k - x_i) \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^T \quad (۲۷-۵)$$

نیروی ناشی از فشار برای اجزای تشکیل‌دهنده دیواره‌ی داخلی از رابطه‌ی (۲۳-۵) و برای

اجزای تشکیل‌دهنده دیواره‌ی خارجی از رابطه‌ی (۲۴-۵) محاسبه می‌شود. این نیرو برای بقیه‌ی

اجزا صفر است.

۵-۱-۲- جزء مستطیلی خطی ۴ گره‌ای



شکل ۵-۴- جزء مستطیلی ۴ گره‌ای

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 & N_m \end{bmatrix} \quad (28-5)$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{A}(r_j - r)(x_m - x) \\ N_j = \frac{1}{A}(r - r_i)(x_m - x) \\ N_k = \frac{1}{A}(r - r_i)(x - x_i) \\ N_m = \frac{1}{A}(r_j - r)(x - x_i) \end{cases} \quad (29-5)$$

$$\vec{u} = \{u_{2i-1} \quad u_{2i} \quad u_{2j-1} \quad u_{2j} \quad u_{2k-1} \quad u_{2k} \quad u_{2m-1} \quad u_{2m}\}^T \quad (30-5)$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{A} \begin{bmatrix} x - x_m & 0 & x_m - x & 0 & x - x_i & 0 & x_i - x & 0 \\ \frac{AN_i}{r} & 0 & \frac{AN_j}{r} & 0 & \frac{AN_k}{r} & 0 & \frac{AN_m}{r} & 0 \\ 0 & r - r_j & 0 & r_i - r & 0 & r - r_i & 0 & r_j - r \\ r - r_j & x - x_m & r_i - r & x_m - x & r - r_i & x - x_i & r_j - r & x_i - x \end{bmatrix} \quad (31-5)$$

$$A = (r_j - r_i)(x_m - x_i) \quad (32-5)$$

$$\bar{r} = (r_i + r_j)/2, \quad \bar{x} = (x_i + x_m)/2. \quad (33-5)$$

$$\vec{F}^P = P_i \pi r_i (x_m - x_i) \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^T \quad (34-5)$$

$$\vec{F}^P = P_o \pi r_o (x_m - x_i) \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (35-5)$$

رابطه‌ی (۳۱-۵) مربوط به اجزای تشکیل‌دهنده‌ی دیواره‌ی داخلی و رابطه‌ی (۳۲-۵) مربوط

به اجزای تشکیل‌دهنده‌ی دیواره‌ی خارجی است و بردار نیروی ناشی از تنش‌های سطحی برای سایر

اجزا صفر می‌باشد.

۵-۲- بررسی جریان پلاستیک

تحلیل پلاستیک کاملاً مشابه آنچه در بخش ۵-۲ مطرح شد انجام می‌شود. با این تفاوت‌ها که در این‌جا که از کرنش مکانیکی (تفاضل کرنش حرارتی از کرنش کل) در روابط باید استفاده نمود و تنش‌ها و کرنش‌ها برای هر جزء محاسبه و بررسی می‌شوند. روند تحلیل پلاستیک به طور خلاصه به شرح زیر است.

σ_θ یکی از تنش‌های اصلی است؛ دو تنش اصلی دیگر به کمک رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آیند:

$$\sigma_i = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \quad (۵-۳۶)$$

تنش معادل معیار رانکین از رابطه‌ی (۵-۳۷)، تنش معادل معیار ترسکا از رابطه‌ی (۵-۳۸) و

تنش معادل معیار فون میزز از رابطه‌ی (۵-۳۹) محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_{eq} = \max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) \quad (۵-۳۷)$$

$$\sigma_{eq} = \max(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) - \min(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (۵-۳۸)$$

$$\sigma_{eq} = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]/2} \quad (۵-۳۹)$$

در صورت بیشتر بودن مقدار تنش معادل از استحکام تسلیم که مقدار آن برای هر جزء از

رابطه‌ی (۵-۴۰) به‌دست می‌آید، آن جزء تسلیم شده و تنش‌های اصلی آن به‌کمک رابطه‌ی (۵-۴۱)

اصلاح می‌شوند. سپس تنش‌های اصلی با دورانی عکس آن‌چه برای تبدیل σ_x ، σ_θ ، σ_z و τ_{xz} به

تنش‌های اصلی استفاده شد، دوباره به σ_x ، σ_θ ، σ_z و τ_{xz} تبدیل می‌شوند.

$$S_y = S_{yi} \left(\frac{\bar{r}}{r_i}\right)^m \quad (۵-۴۰)$$

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_1} = \frac{\sigma_2^*}{\sigma_2} = \frac{\sigma_3^*}{\sigma_3} = \frac{S_y}{\sigma_{eq}} \quad (۵-۴۱)$$

ε_θ^m یکی از کرنش‌های اصلی است؛ دو کرنش اصلی دیگر از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شوند:

$$\varepsilon_i^m = \frac{\varepsilon_x^m + \varepsilon_z^m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x^m - \varepsilon_z^m}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xz}^m}{2}\right)^2} \quad (۵-۴۲)$$

کرنش پلاستیک معادل برای معیار رانکین را از رابطه‌ی (۴۳-۵) و کرنش پلاستیک معادل

برای معیار ترسکا و فون میزر را از رابطه‌ی (۴۴-۵) محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_{eq}^p = (1 - \sigma_{eq}/S_y) \max(|\varepsilon_1^m|, |\varepsilon_2^m|, |\varepsilon_3^m|) \quad (۴۳-۵)$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \frac{\sigma_{eq} - S_y}{3G} \quad (۴۴-۵)$$

سپس کرنش‌های اصلی پلاستیک برای معیارهای رانکین، ترسکا و فون میزر را به ترتیب از

روابط (۴۵-۵ تا ۴۶-۵) محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = \varepsilon_k^p = 0, \quad \sigma_i > \sigma_j \geq \sigma_k. \quad (۴۵-۵)$$

$$\varepsilon_i^p = \varepsilon_{eq}^p, \quad \varepsilon_j^p = 0, \quad \varepsilon_k^p = -\varepsilon_{eq}^p, \quad \sigma_i > \sigma_j > \sigma_k. \quad (۴۶-۵)$$

$$\varepsilon_i^p = \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \left[\sigma_i - \frac{1}{2}(\sigma_j + \sigma_k) \right] \quad (۴۷-۵)$$

به کمک این رابطه کرنش‌های الاستیک محاسبه شده در اجزای تسلیم شده را اصلاح

می‌کنیم:

$$\varepsilon_i^e = \kappa \varepsilon_i^m \quad (۴۸-۵)$$

در پایان برای تبدیل کرنش‌های اصلی الاستیک اصلاح شده و کرنش‌های اصلی پلاستیک

محاسبه شده به $\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$ و γ_{xz} (الاستیک و پلاستیک) از دورانی عکس آن‌چه برای تبدیل $\varepsilon_z, \varepsilon_\theta, \varepsilon_x$ و

γ_{xz} به کرنش‌های اصلی استفاده شد، استفاده می‌کنیم. کرنش کل برابر مجموع کرنش الاستیک،

کرنش پلاستیک و کرنش حرارتی است و جابه‌جایی شعاعی بر اساس روابط کرنش-جابه‌جایی از روی

کرنش محیطی محاسبه می‌شود:

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\varepsilon}^e + \vec{\varepsilon}^p + \vec{\varepsilon}^{th} \quad (۴۹-۵)$$

$$U_z = (R + z)\varepsilon_\theta \quad (۵۰-۵)$$

۵-۳- ارائه و مقایسه‌ی نتایج

در این بخش با در نظر گرفتن مقدار برابر برای ثابت‌های n, m و l و برابر ۱، ۰، ۱ و ۲، نتایج

عددی برای یک پوسته‌ی استوانه‌ای توخالی کلفت با شعاع داخلی ۴۰ میلی‌متر، شعاع خارجی ۶۰

میلی‌متر، طول ۰/۸ متر، مدول الاستیسیته در سطح داخلی ۲۰۰ گیگاپاسکال، نسبت پواسن ۰/۳، استحکام تسلیم در سطح داخلی ۲۵۰ مگاپاسکال و ضریب انبساط حرارتی در سطح داخلی $10^{-6} / ^\circ\text{C}$ $117 \times$ ارائه شده است. فشار یکنواخت داخلی آغاز تسلیم استوانه و فشار یکنواخت داخلی تسلیم سطح میانی در غیاب بار حرارتی و برای دمای سطح داخلی ۱۰۰ درجه‌ی سلسیوس بیش از دمای مرجع در وسط طول استوانه محاسبه و ارائه شده است. سایر نتایج برای یک فشار و دمای خاص ارائه شده‌اند. در تمام موارد دو شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد بررسی شده است. پاسخ‌ها با نوشتن برنامه‌ای در نرم‌افزار MATLAB با در نظر گرفتن شبکه‌ای از اجزای خطی مثلثی و مستطیلی حاوی ۳۰ گره در جهت شعاعی و ۵۰ گره در طول استوانه و همچنین به کمک نرم‌افزار Abaqus با استفاده از جزء مستطیلی ۸ گره‌ای درجه‌ی ۲ (CAX8R) متقارن محوری و زیربرنامه‌ی UMAT محاسبه و با یکدیگر مقایسه شده‌اند.

۵-۳-۱- استوانه با دو سر گیردار در غیاب بار حرارتی

فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۱ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۲ ارائه شده است و فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۳ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۴ ارائه شده است. فشار خارجی در این چهار حالت در نظر گرفته نشده است. تسلیم استوانه از سطح داخلی آن ($z = -h/2$) آغاز می‌شود.

جدول ۵-۱- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۶۵/۵۱	۵۲/۲۸	۵۹/۷۲
$n=m=l=-1$	۷۸/۸۵	۶۰/۴۶	۶۹/۷۰
$n=m=l=0$	۹۵/۶۳	۷۰/۴۴	۸۰/۸۲
$n=m=l=1$	۱۲۰/۸۳	۸۲/۵۷	۹۴/۹۳
$n=m=l=2$	۱۵۴/۶۳	۹۷/۲۳	۱۲۰/۰۳

جدول ۵-۲- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۶۵,۴۰	۵۲,۹۶	۶۰,۴۲	۶۰,۰۹
$n=m=l=-1$	۷۸,۷۰	۶۱,۲۹	۷۰,۰۸	۶۹,۷۰
$n=m=l=0$	۹۶,۳۹	۷۱,۴۴	۸۱,۸۷	۸۱,۵۹
$n=m=l=1$	۱۲۰,۴۴	۸۳,۷۸	۹۶,۲۴	۹۶,۰۰
$n=m=l=2$	۱۵۳,۹۹	۹۸,۶۸	۱۱۳,۶۲	۱۱۳,۴۵

جدول ۵-۳- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۸۸,۳۸	۷۷,۰۱	۸۷,۴۳	۷۵,۳۶
$n=m=l=-1$	۱۰۵,۴۰	۹۰,۷۵	۱۰۳,۱۱	۸۹,۷۳
$n=m=l=0$	۱۲۷,۴۷	۱۰۸,۲۶	۱۲۳,۱۳	۱۰۸,۱۵
$n=m=l=1$	۱۵۶,۳۶	۱۳۰,۷۷	۱۴۸,۹۱	۱۳۱,۹۴
$n=m=l=2$	۱۹۴,۵۸	۱۵۹,۹۷	۱۸۲,۳۶	۱۶۲,۹۰

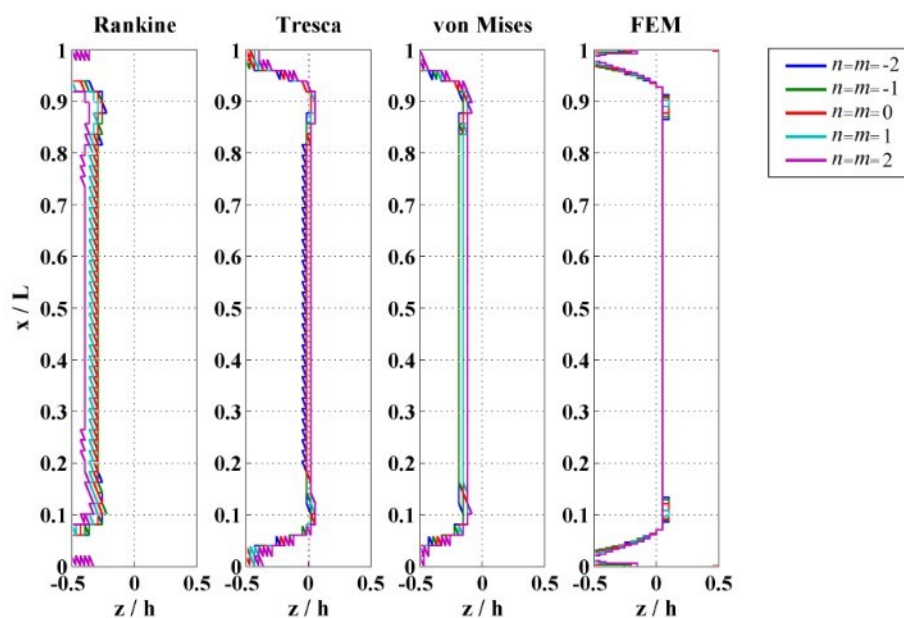
جدول ۵-۴- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۸۸,۷۹	۷۷,۱۹	۸۷,۶۴	۷۵,۳۶
$n=m=l=-1$	۱۰۵,۸۹	۹۰,۹۵	۱۰۳,۳۶	۸۹,۷۳
$n=m=l=0$	۱۲۸,۰۷	۱۰۸,۵۰	۱۲۳,۴۳	۱۰۸,۱۵
$n=m=l=1$	۱۵۷,۱۱	۱۳۱,۰۸	۱۴۹,۲۷	۱۳۱,۹۴
$n=m=l=2$	۱۹۵,۵۴	۱۶۰,۳۴	۱۸۲,۸۰	۱۶۲,۹۰

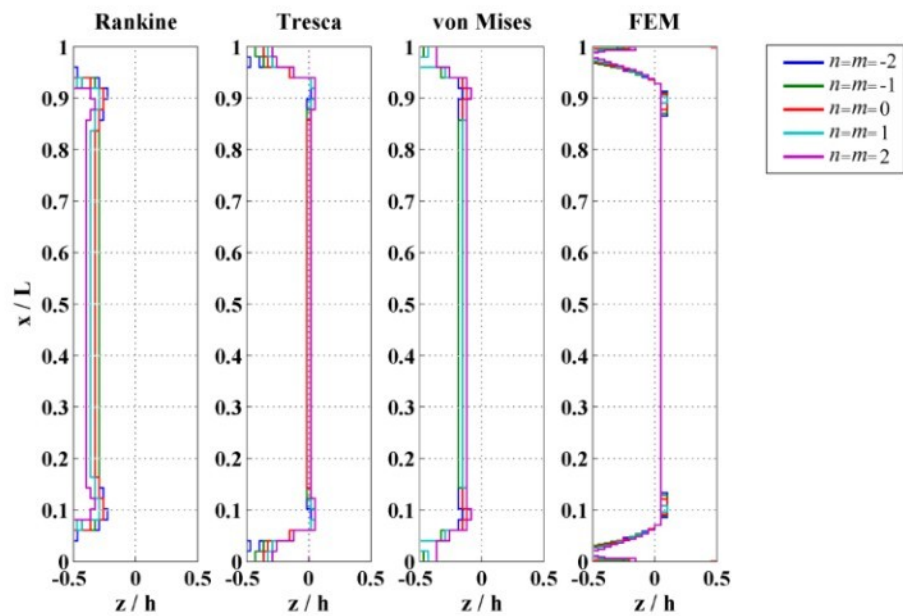
همان طور که در جدول ها مشاهده می کنید با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می یابد. با توجه به نتایج جدول ها می توان دریافت که در پیش بینی فشار آغاز تسلیم استوانه معیار فون ميزز بیشترین دقت و معیار رانکین کمترین دقت را دارد. در پیش بینی فشار آغاز تسلیم سطح میانی معیار ترسکا بیشترین دقت و معیار رانکین کمترین دقت را دارد. در تمام موارد معیار ترسکا مقادیر محافظ کارانه تری را ارائه می دهد. نتیجه ی به دست آمده از کاربرد اجزای مختلف اختلاف بسیار کمی با یکدیگر دارند و مقادیر حاصل از هر دو جزء به کار رفته از دقت

قابل قبولی برخوردارند. در مجموع جزء مستطیلی در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه و جزء مثلثی در پیش‌بینی فشار تسلیم سطح میانی دقت بیشتری دارد.

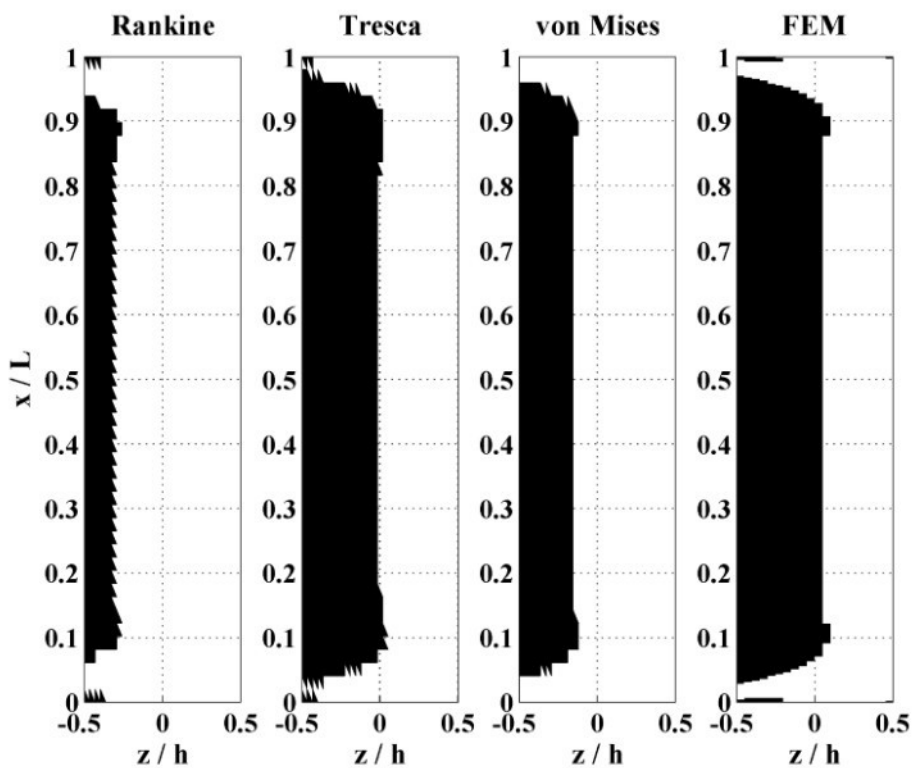
شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه با ثابت‌های ناهمگنی مختلف در شکل ۵-۵ و ۵-۶ و تصویر مناطق تسلیم شده‌ی استوانه در شکل ۷-۵ و ۸-۵ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار برابر فشار تسلیم لایه‌ی میانی که به کمک نرم‌افزار Abaqus به‌دست آمده است در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار بررسی شده دارد. همچنین ثابت ناهمگنی تاثیر چندانی بر روی شکل و شعاع ناحیه‌ی پلاستیک در فشار تسلیم لایه‌ی میانی ندارد و فقط بر روی میزان این فشار تاثیر می‌گذارد. نوع جزء به‌کار رفته تاثیر چندانی بر نتایج ندارد. جزء مثلثی اثر شرایط مرزی را در شکل ناحیه‌ی پلاستیک بهتر از جزء مستطیلی نمایش می‌دهد ولی جزء مستطیلی شکل یکنواخت‌تری ایجاد کرده است.



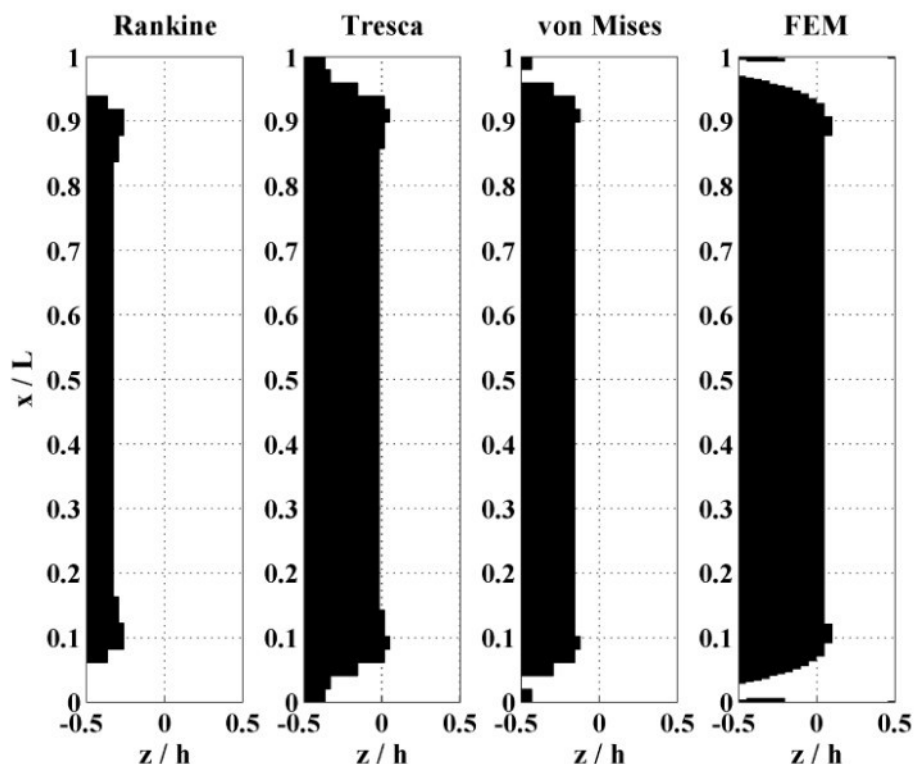
شکل ۵-۵- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی



شکل ۵-۶- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی

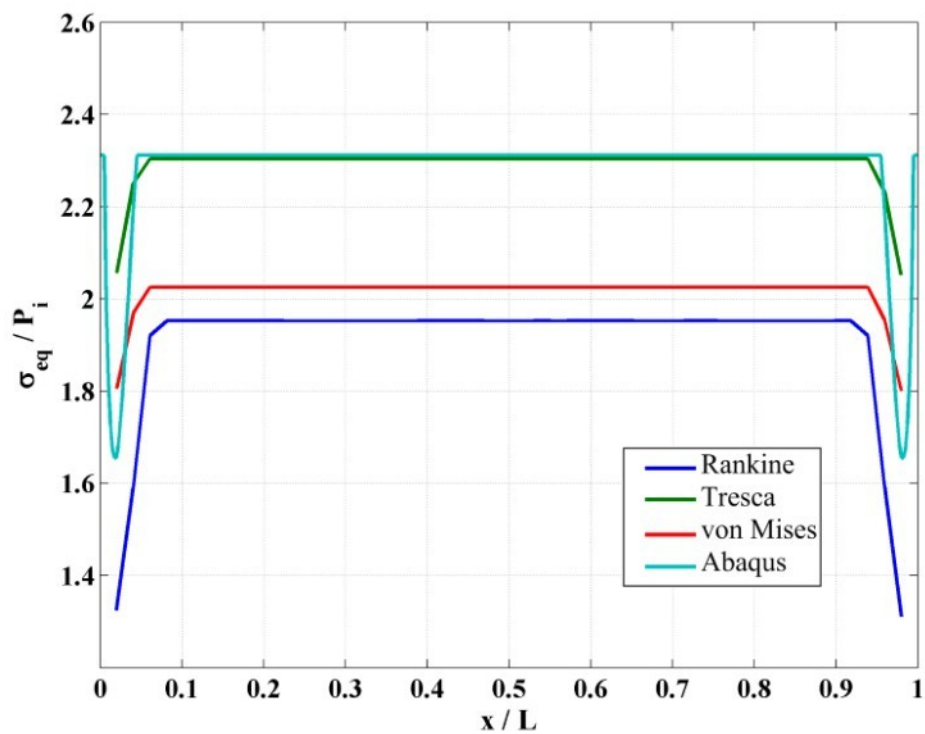


شکل ۵-۷- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلی

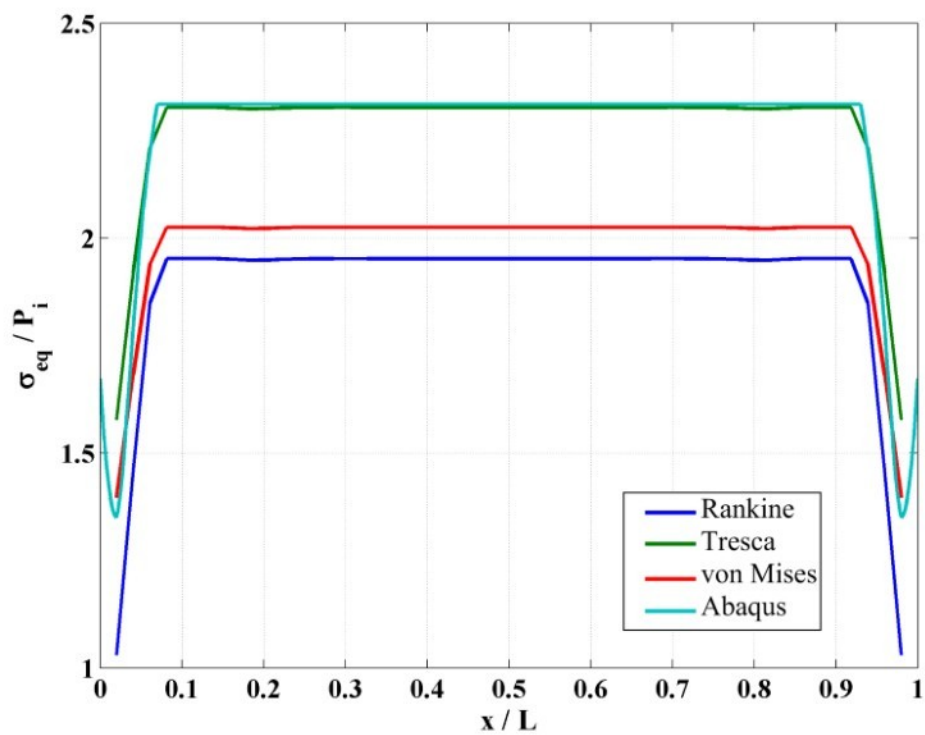


شکل ۵-۸- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی

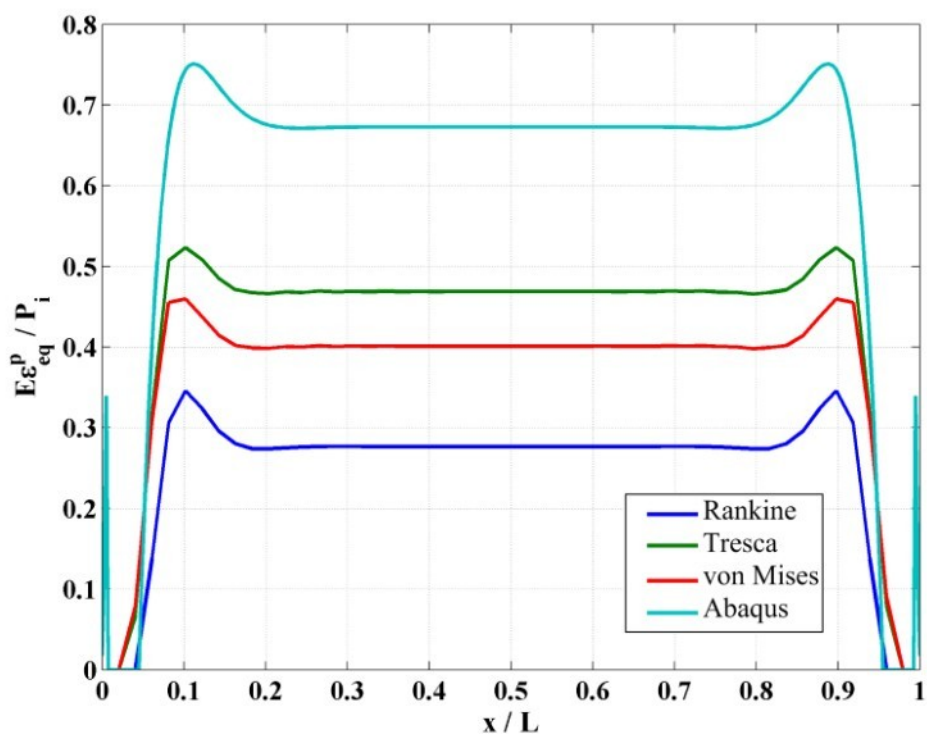
از آن‌جا که نوع جزء اثر قابل توجهی در نتایج ندارد در ادامه نتایج فقط با استفاده از جزء مستطیلی برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۵-۴) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۹ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۱۰ آورده شده است. معیار ترسکا در هر دو حالت بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۱۱ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۱۲ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها در این دو حالت دقت قابل قبولی ندارند. برای $z = -h/4$ معیار ترسکا بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۱۳ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۱۴ آورده شده است. این بار معیار ترسکا کمترین دقت را دارد و معیارهای رانکین و فون میز دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده‌اند.



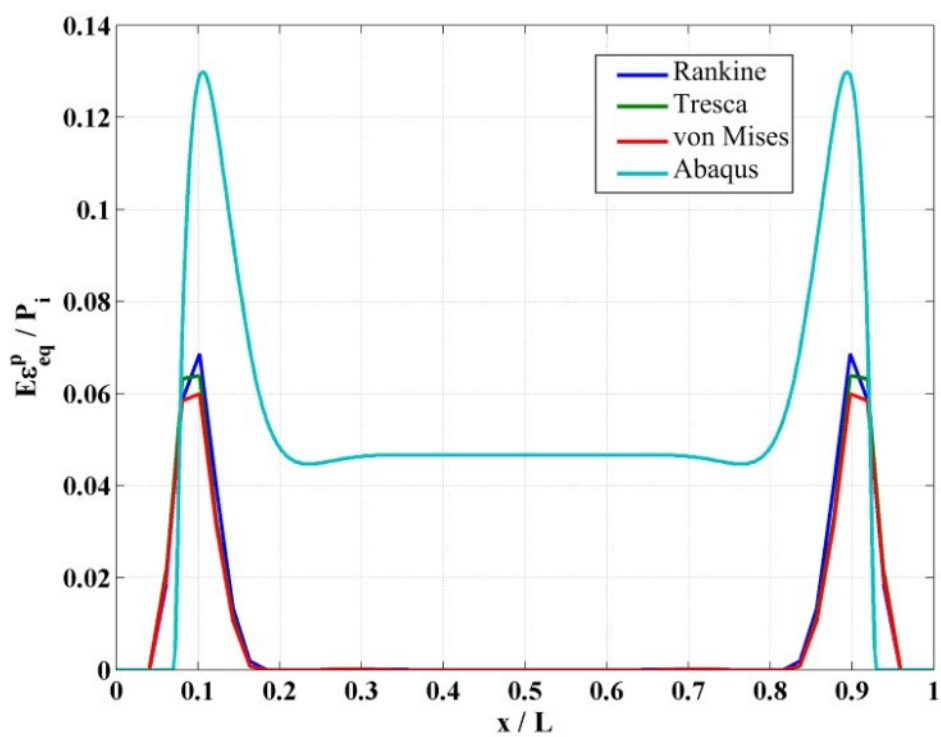
شکل ۵-۹- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



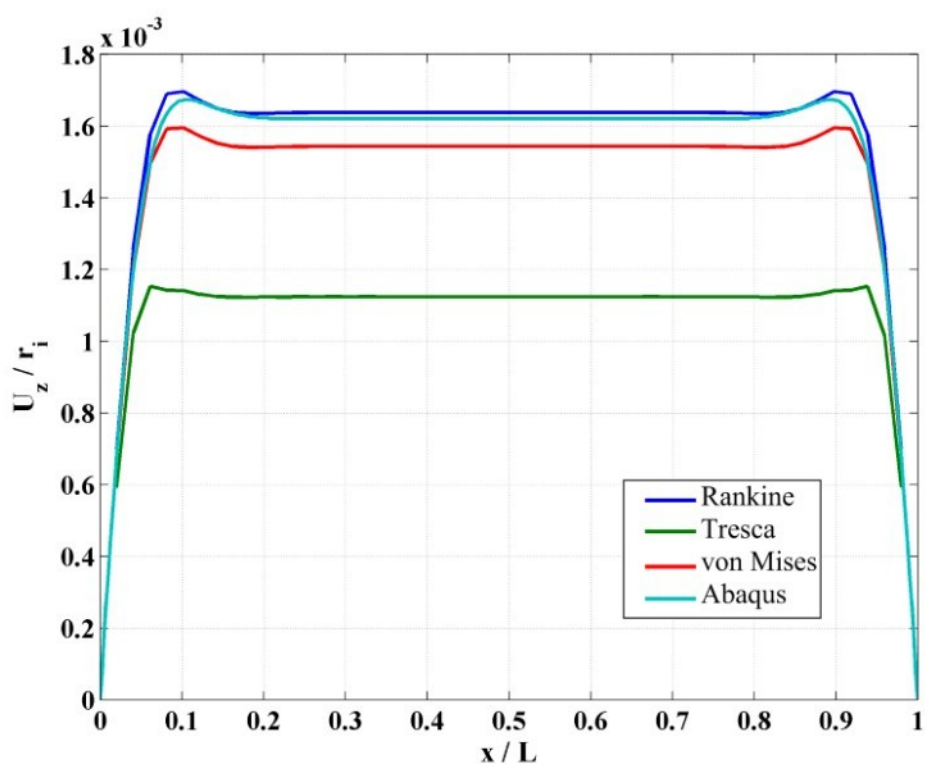
شکل ۵-۱۰- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



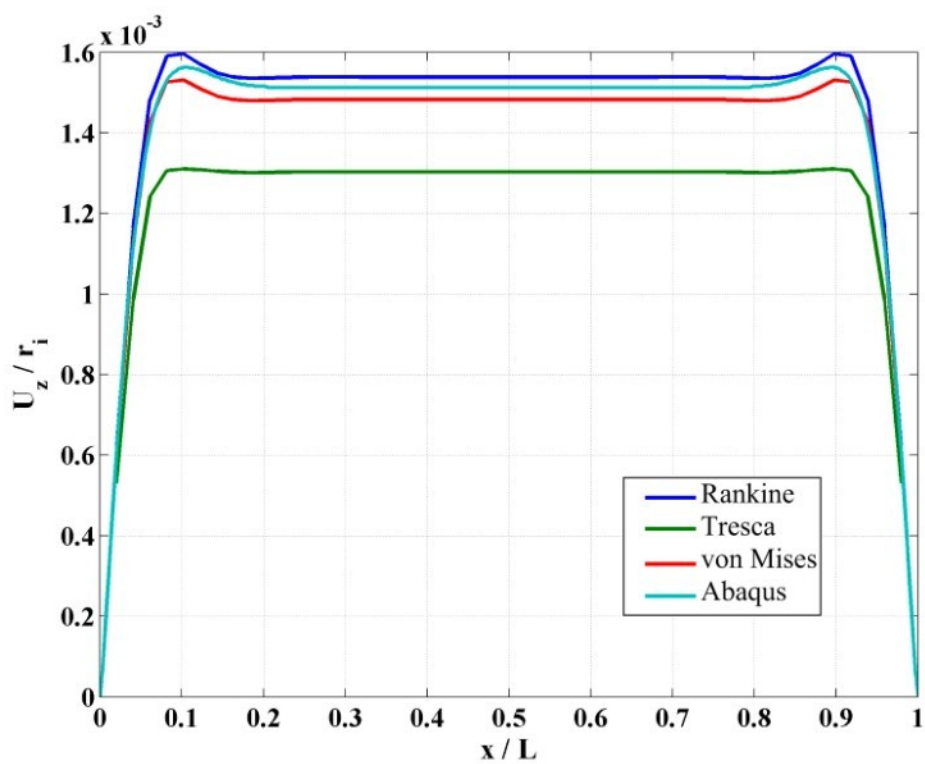
شکل ۵-۱۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۵-۱۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

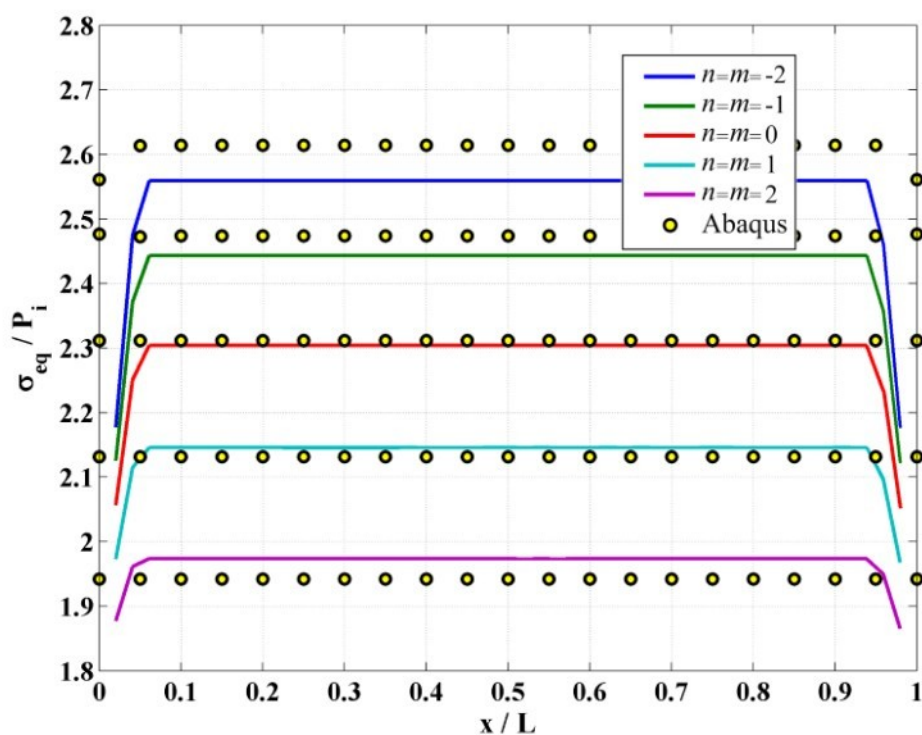


شکل ۵-۱۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

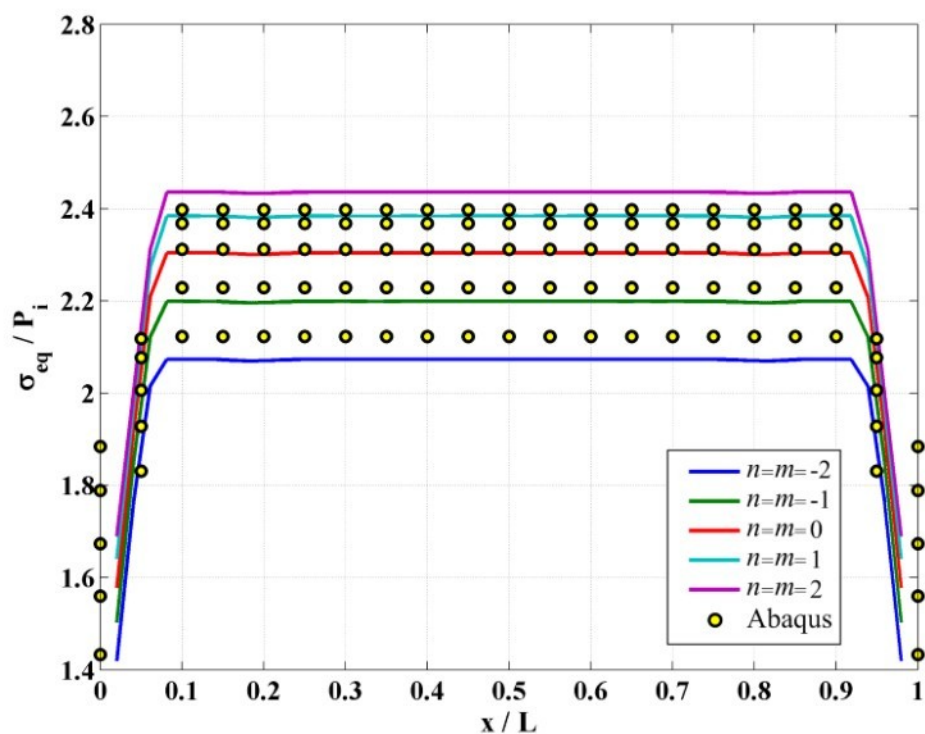


شکل ۵-۱۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

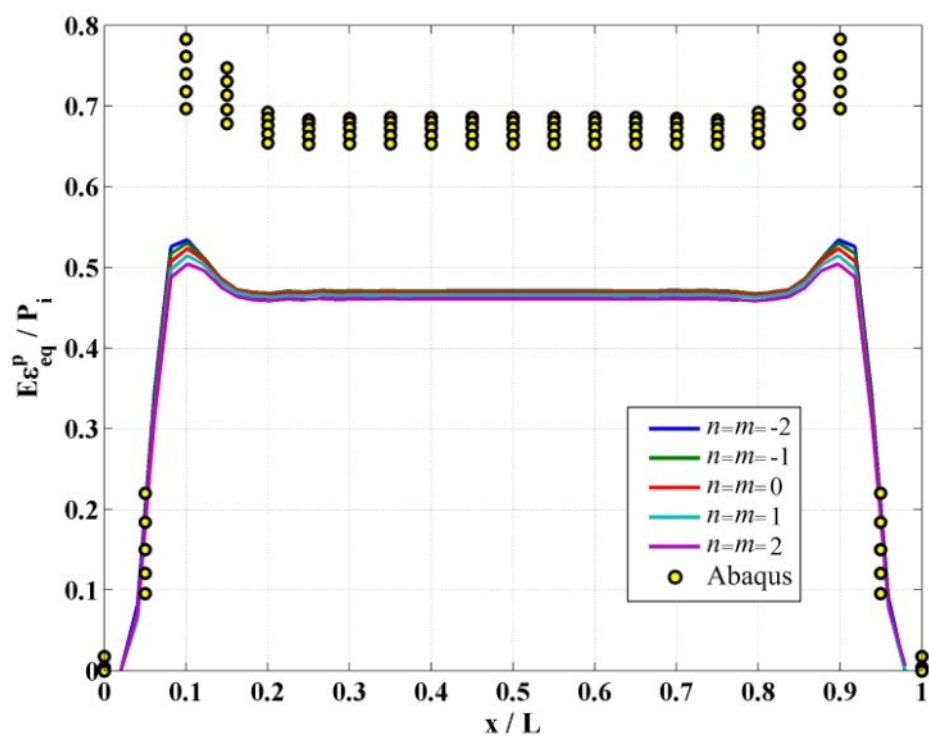
توزیع تنش معادل ترسکا در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۱۵ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۱۶ مشاهده می‌نمایید. همان‌طور که می‌بینیم دقت این معیار در هر دو حالت برای ثابت‌های ناهمگنی مختلف قابل قبول است. در ثابت‌های ناهمگنی نزدیک‌تر به صفر دقت بیشتر است. توزیع کرنش پلاستیک معادل ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۱۷ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۱۸ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۱۹ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۲۰ آورده شده است. هر چند کرنش پلاستیک معادل دقت کمی دارد ولی جابه‌جایی شعاعی برای تمام ثابت‌های ناهمگنی دقت خوبی دارد.



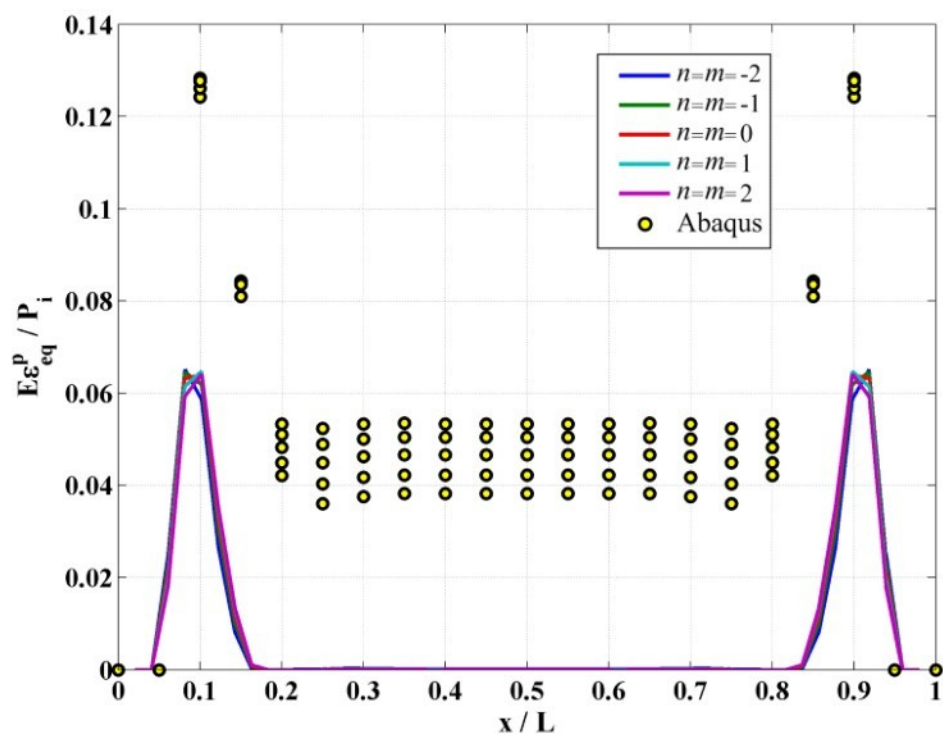
شکل ۵-۱۵- توزیع تنش معادل ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



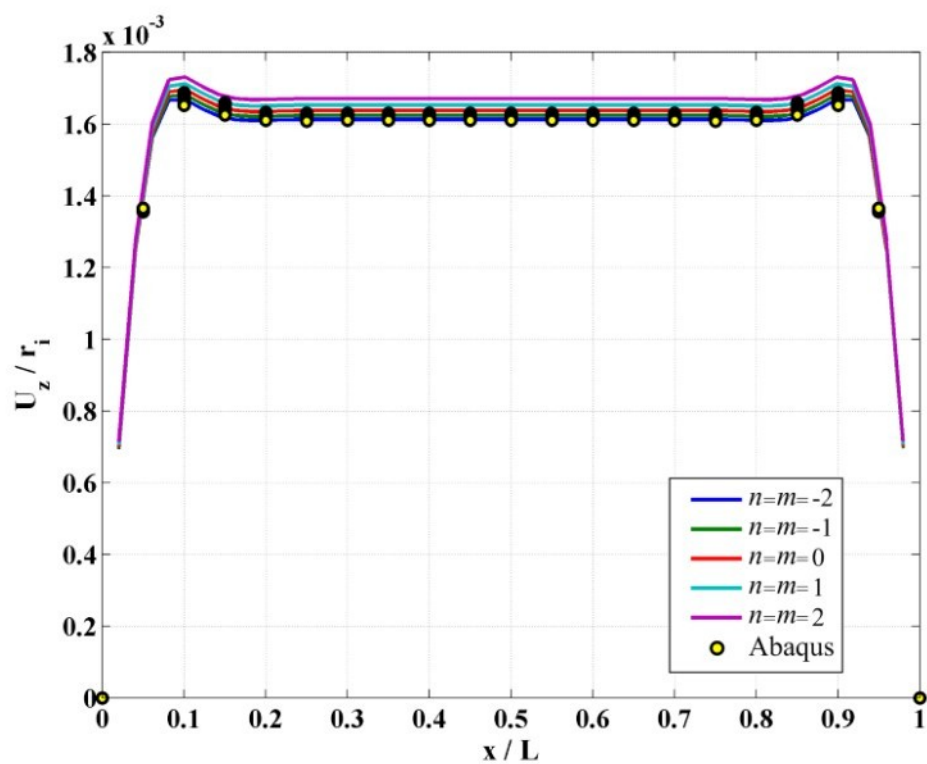
شکل ۵-۱۶- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$



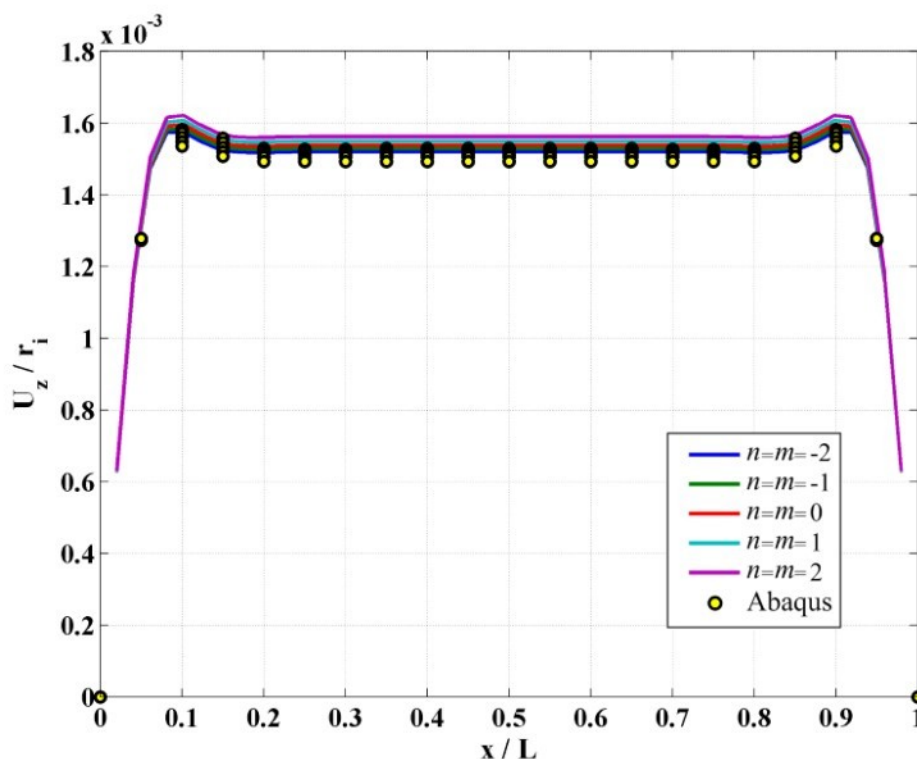
شکل ۵-۱۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$



شکل ۵-۱۸- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$

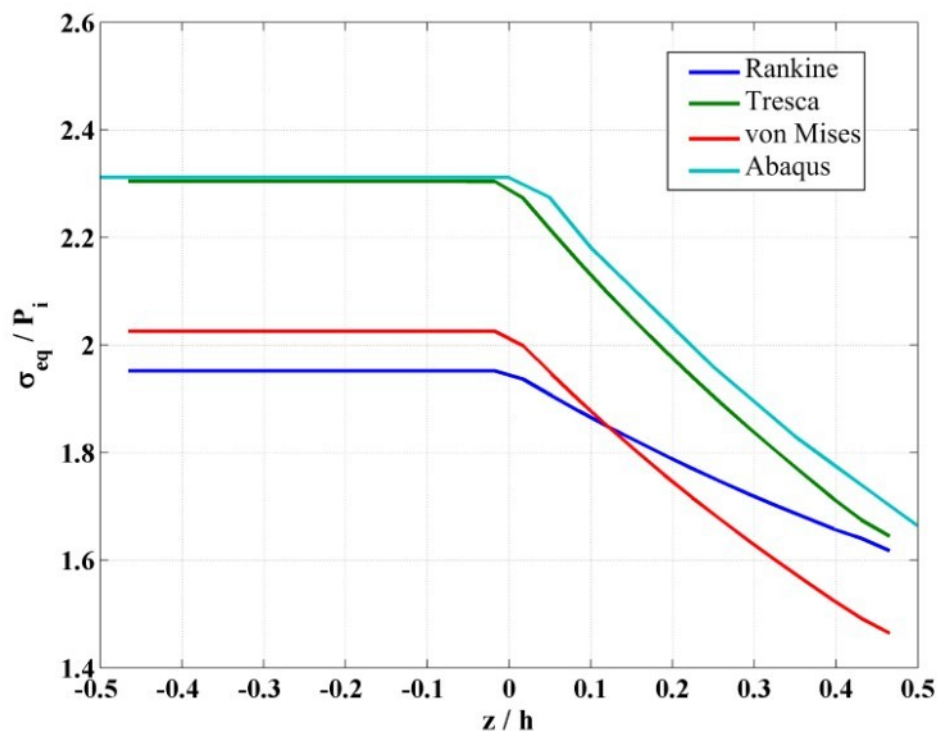


شکل ۵-۱۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z=-h/4$

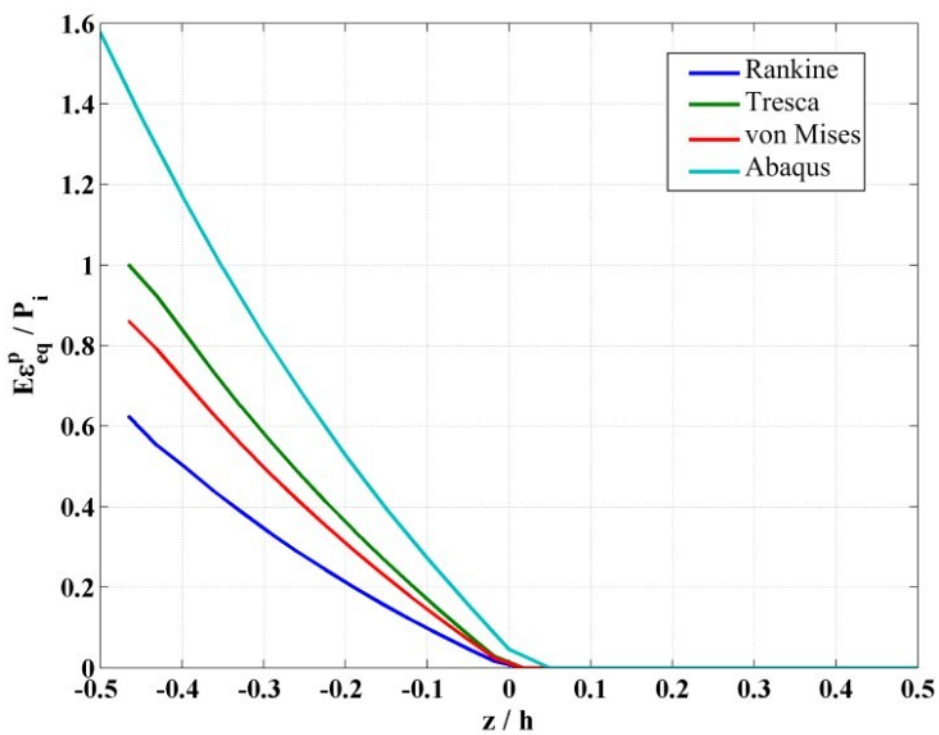


شکل ۵-۲۰- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین در طول استوانه برای $z = 0$

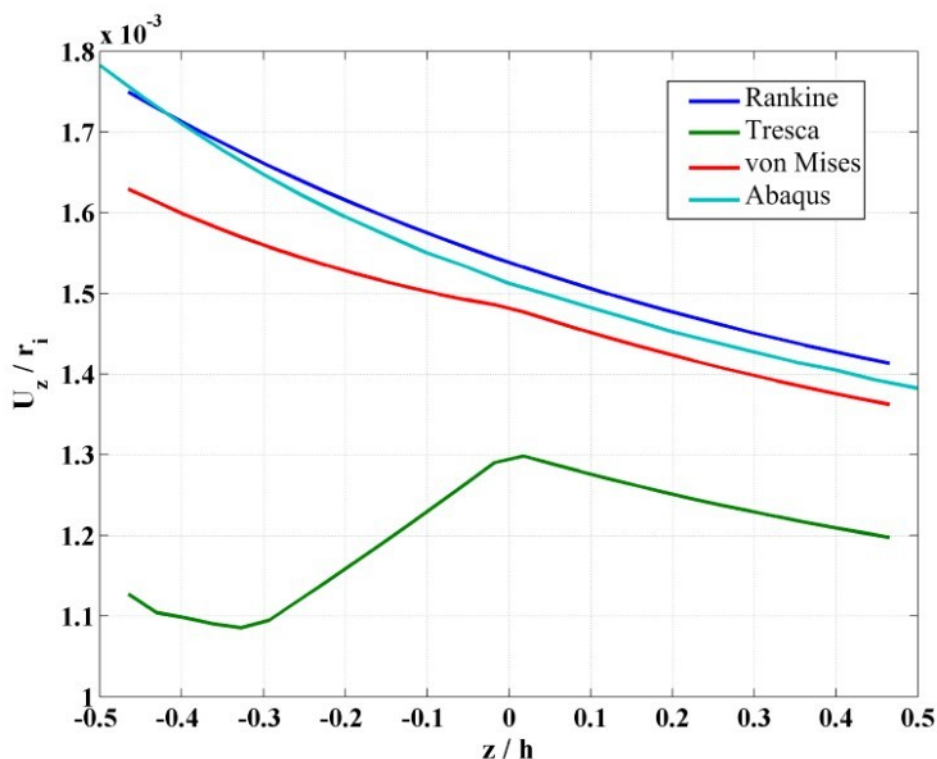
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۵-۲۱ آورده شده است. معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار بررسی شده دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۵-۲۲ آورده شده است. باز هم معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقیق‌تر است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۵-۲۳ آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نواحی تسلیم شده معیار رانکین و در نواحی تسلیم نشده معیار رانکین و فون میز دقت‌ترین نتایج را ارائه کرده‌اند.



شکل ۵-۲۱- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

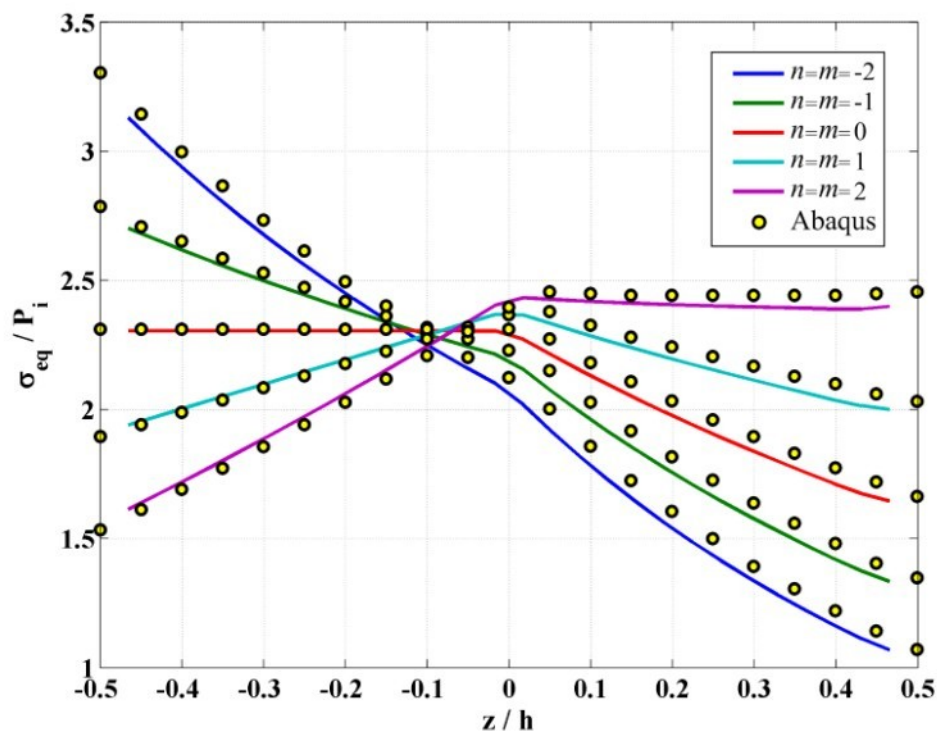


شکل ۵-۲۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

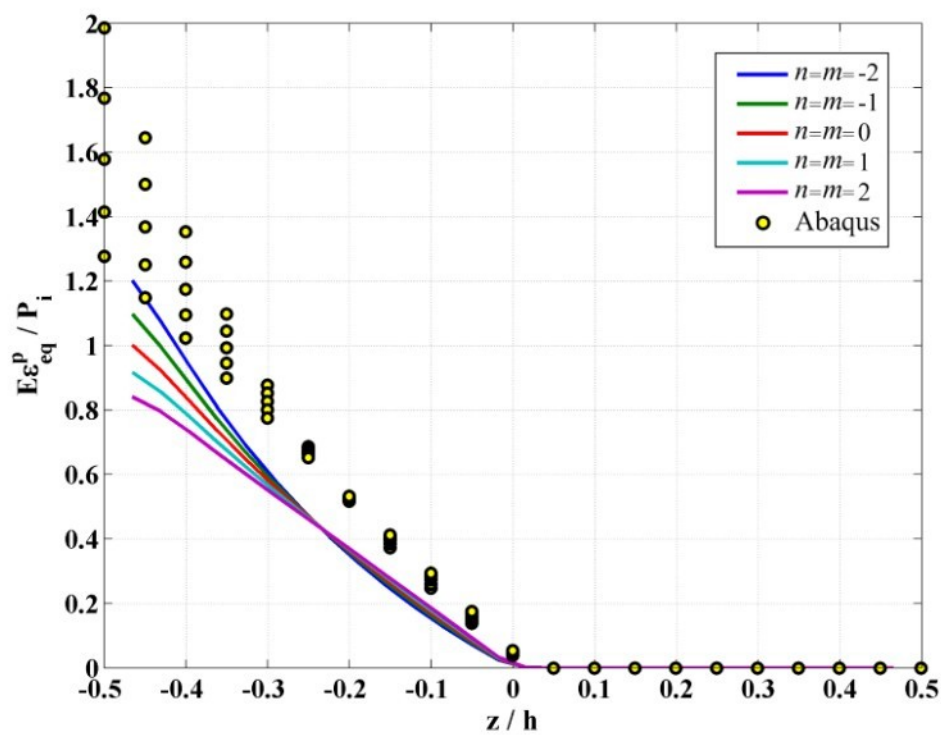


شکل ۵-۲۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

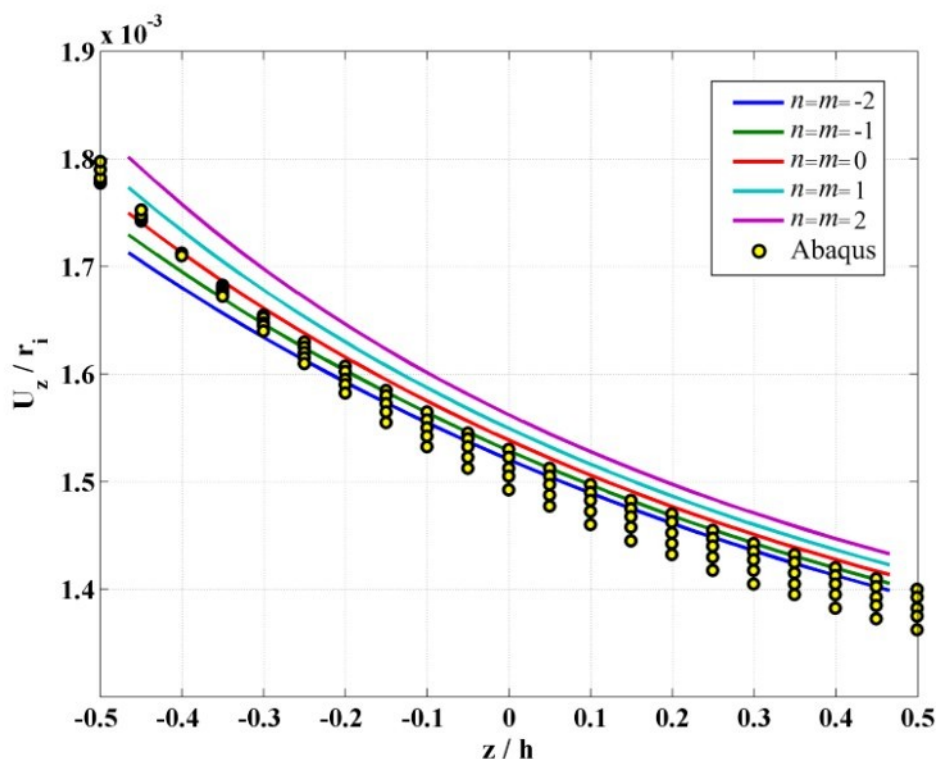
توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۵-۲۴ مشاهده می‌نمایید. این معیار برای تمام ثابت‌های ناهمگنی دقت خوبی دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۵-۲۵ آورده شده است. مشاهده می‌شود که افزایش ثابت ناهمگنی در یک چهارم داخلی استوانه باعث کاهش کرنش پلاستیک معادل در سایر نقاط باعث افزایش کرنش پلاستیک معادل می‌شود. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۵-۲۶ آورده شده است. نتایج در نقاط تسلیم شده از دقت بیشتری برخوردارند.



شکل ۵-۲۴- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۵-۲۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۵-۲۶- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار رانکین نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۵-۳-۲- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در غیاب بار حرارتی

فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۵ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۶ ارائه شده است و فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۷ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۸ ارائه شده است. فشار خارجی در این چهار حالت در نظر گرفته نشده است. تسلیم استوانه از سطح داخلی آن ($z = -h/2$) آغاز می‌شود.

جدول ۵-۵- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۵۲٫۲۸	۵۷٫۵۵	۵۷٫۸۹
$n=m=l=-1$	۶۰٫۴۶	۶۷٫۰۴	۶۷٫۵۴
$n=m=l=0$	۷۰٫۴۴	۷۸٫۶۹	۷۹٫۴۰
$n=m=l=1$	۸۲٫۵۷	۹۲٫۹۳	۹۳٫۹۳
$n=m=l=2$	۹۷٫۲۰	۱۱۰٫۲۲	۱۱۱٫۶۲

جدول ۵-۶- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۶۵٫۸۱	۵۲٫۴۶	۵۷٫۷۷	۵۷٫۸۹
$n=m=l=-1$	۷۹٫۲۳	۶۰٫۶۸	۶۷٫۳۰	۶۷٫۵۴
$n=m=l=0$	۹۷٫۱۱	۷۰٫۷۰	۷۹٫۰۰	۷۹٫۴۰
$n=m=l=1$	۱۲۱٫۴۵	۸۲٫۸۷	۹۳٫۳۱	۹۳٫۹۳
$n=m=l=2$	۱۵۵٫۴۷	۹۷٫۵۷	۱۱۰٫۶۸	۱۱۱٫۶۲

جدول ۵-۷- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۸۸٫۳۸	۷۷٫۰۱	۸۱٫۵۵	۷۱٫۴۵
$n=m=l=-1$	۱۰۵٫۴۰	۹۰٫۷۵	۹۶٫۶۷	۸۵٫۴۴
$n=m=l=0$	۱۲۷٫۴۷	۱۰۸٫۲۶	۱۱۶٫۰۱	۱۰۳٫۳۹
$n=m=l=1$	۱۵۶٫۳۶	۱۳۰٫۷۷	۱۴۰٫۹۵	۱۲۶٫۶۲
$n=m=l=2$	۱۹۴٫۵۸	۱۵۹٫۹۷	۱۷۳٫۴۱	۱۵۶٫۹۲

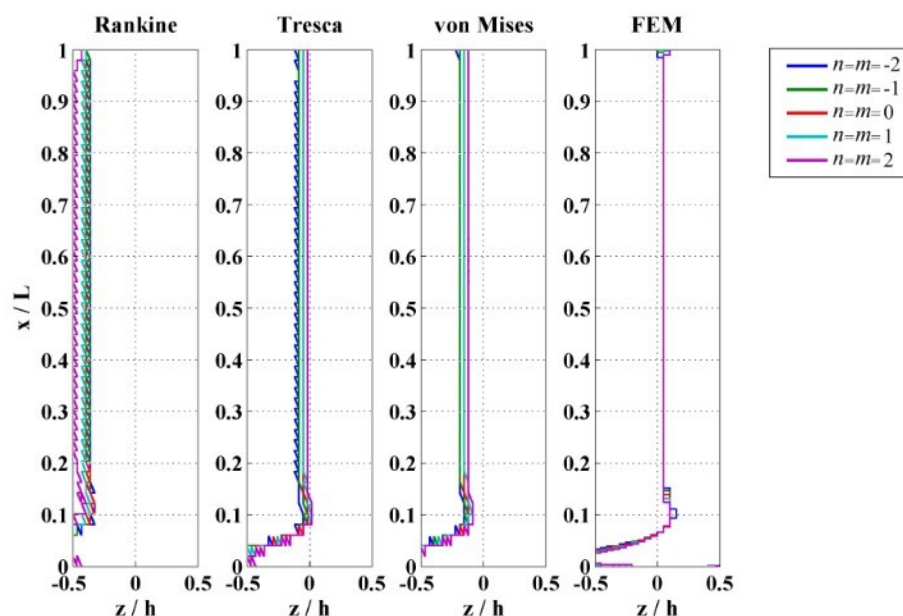
جدول ۵-۸- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۸۸٫۷۹	۷۷٫۱۹	۸۱٫۷۵	۷۱٫۴۵
$n=m=l=-1$	۱۰۵٫۸۹	۹۰٫۹۵	۹۶٫۹۰	۸۵٫۴۴
$n=m=l=0$	۱۲۸٫۰۷	۱۰۸٫۵۰	۱۱۶٫۲۹	۱۰۳٫۳۹
$n=m=l=1$	۱۵۷٫۱۱	۱۳۱٫۰۸	۱۴۱٫۳۰	۱۲۶٫۶۲
$n=m=l=2$	۱۹۵٫۵۴	۱۶۰٫۳۴	۱۷۳٫۸۴	۱۵۶٫۹۲

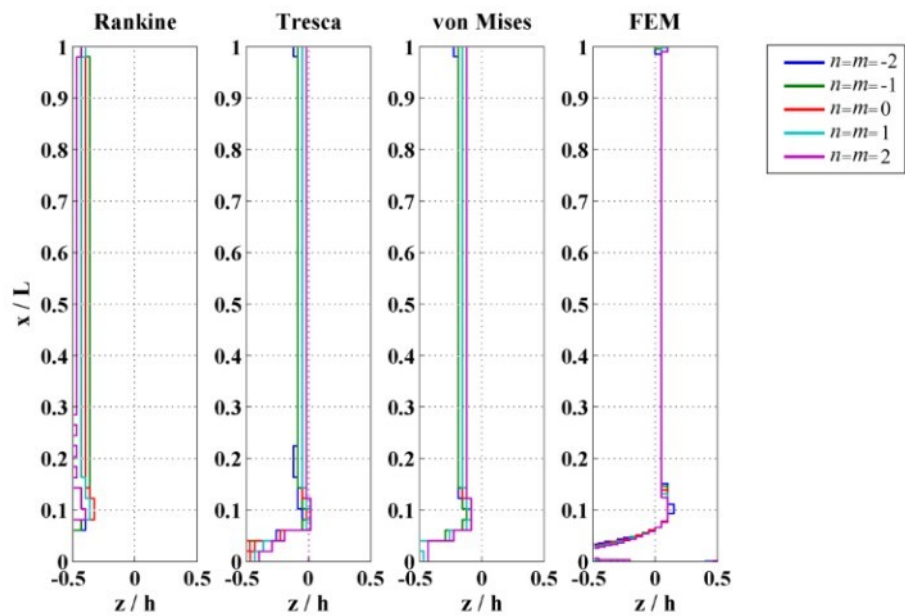
همان طور که در جدول ها مشاهده می کنید با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می یابد. با توجه به نتایج جدول ها می توان دریافت که در پیش بینی فشار آغاز تسلیم استوانه معیار فون ميزز بیشترین دقت و معیار رانکین کمترین دقت را دارد. در پیش بینی فشار آغاز تسلیم سطح میانی معیار ترسکا بیشترین دقت و معیار رانکین کمترین دقت را دارد. در تمام موارد معیار ترسکا مقادیر محافظ کارانه تری را ارائه می دهد. نتیجه ی به دست آمده از کاربرد اجزای مختلف اختلاف بسیار کمی با یکدیگر دارند. در مجموع جزء مستطیلی در پیش بینی فشار آغاز

تسلیم استوانه و جزء مثلثی در پیش‌بینی فشار تسلیم سطح میانی دقت بیشتری دارد. در ضمن از مقایسه‌ی جدول‌های این بخش و بخش قبل می‌توان دریافت که با آزاد شدن یک سر استوانه از دقت نتایج ارائه شده برای فشار تسلیم سطح میانی کاسته شده است.

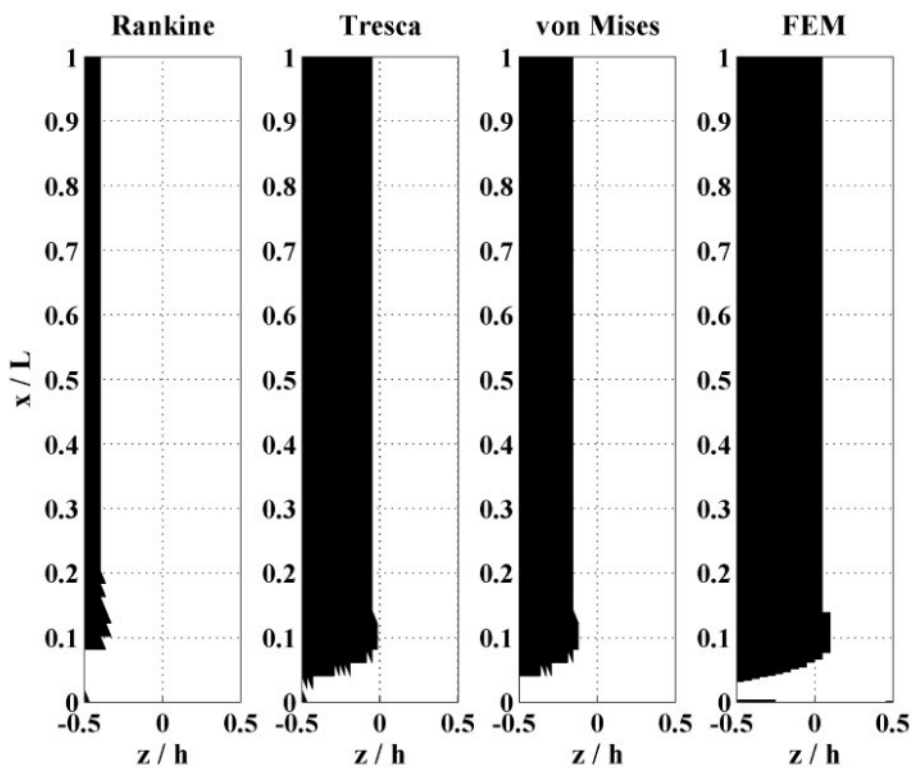
شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه با ثابت‌های ناهمگنی مختلف در شکل ۵-۲۷ و ۵-۲۸ و تصویر مناطق تسلیم شده‌ی استوانه در شکل ۵-۲۹ و ۵-۳۰ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار برابر فشار تسلیم لایه‌ی میانی که به کمک نرم‌افزار Abaqus به‌دست آمده است در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌شود که معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار بررسی شده دارد. همچنین ثابت ناهمگنی تاثیر چندانی بر روی شکل و شعاع ناحیه‌ی پلاستیک در فشار تسلیم لایه‌ی میانی ندارد و فقط بر روی میزان این فشار تاثیر می‌گذارد. نوع جزء به‌کار رفته تاثیر چندانی بر نتایج ندارد. جزء مثلثی اثر شرایط مرزی را در شکل ناحیه‌ی پلاستیک بهتر از جزء مستطیلی نمایش می‌دهد ولی جزء مستطیلی شکل یکنواخت‌تری ایجاد کرده است.



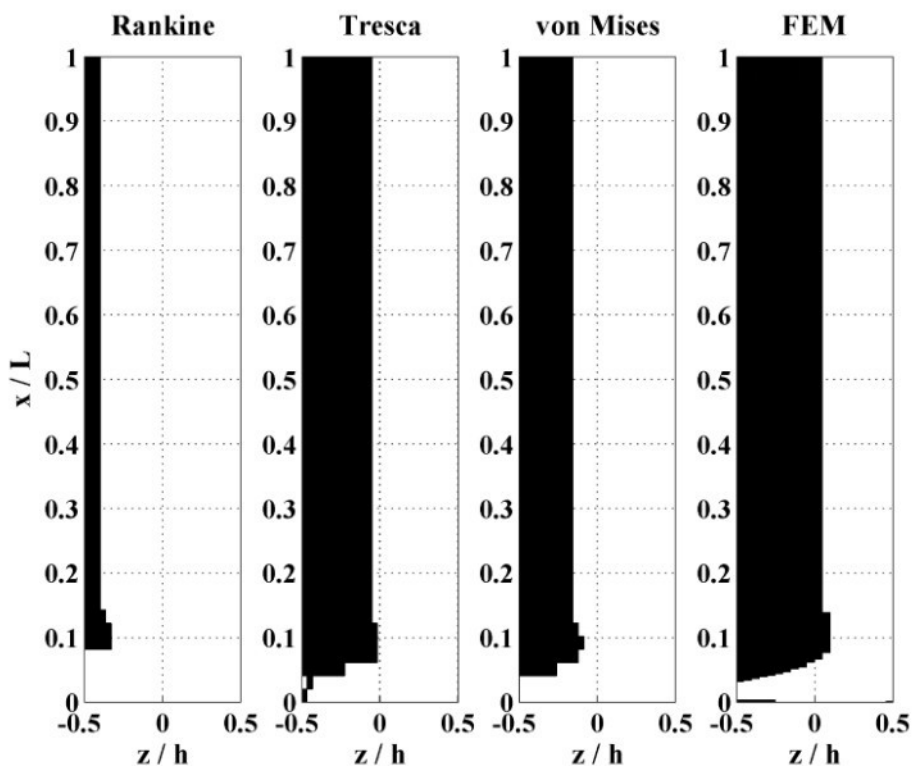
شکل ۵-۲۷- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی



شکل ۵-۲۸- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی

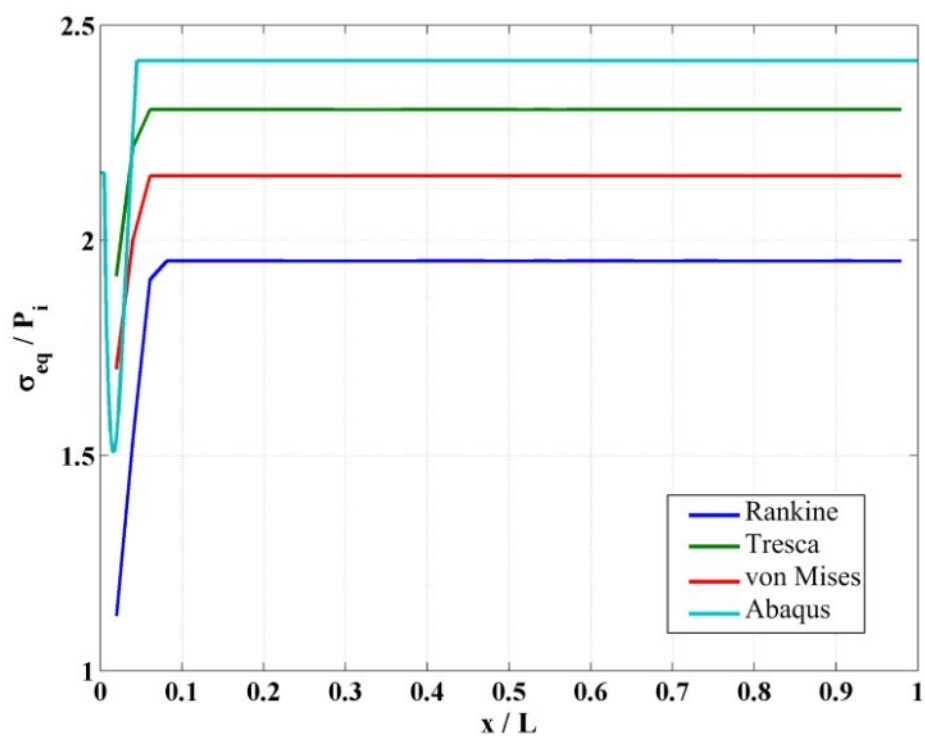


شکل ۵-۲۹- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلی

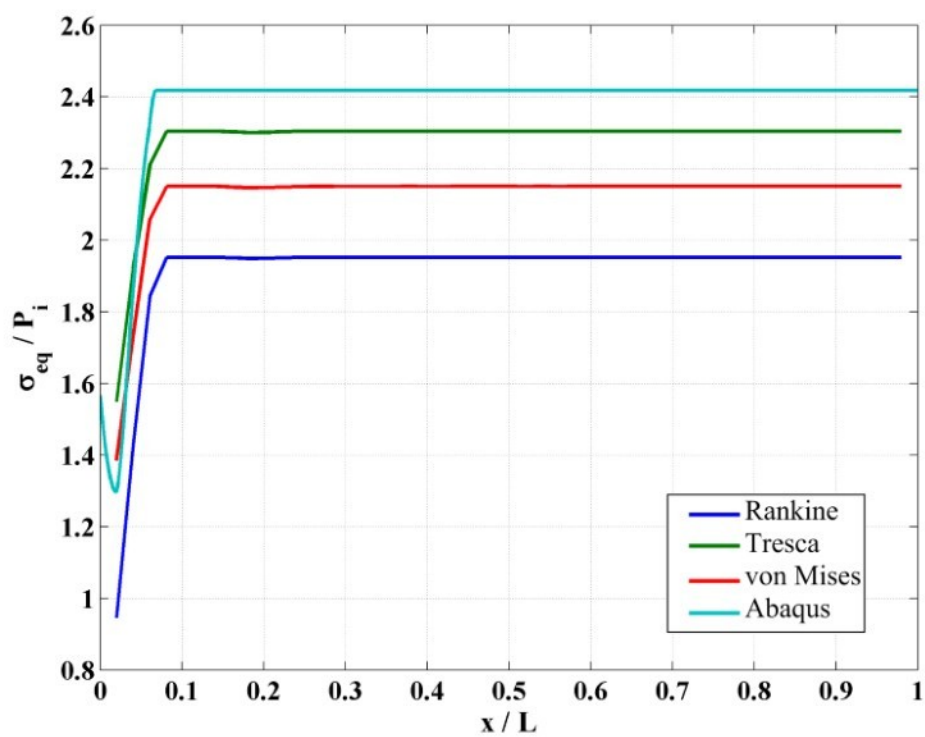


شکل ۵-۳۰- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی

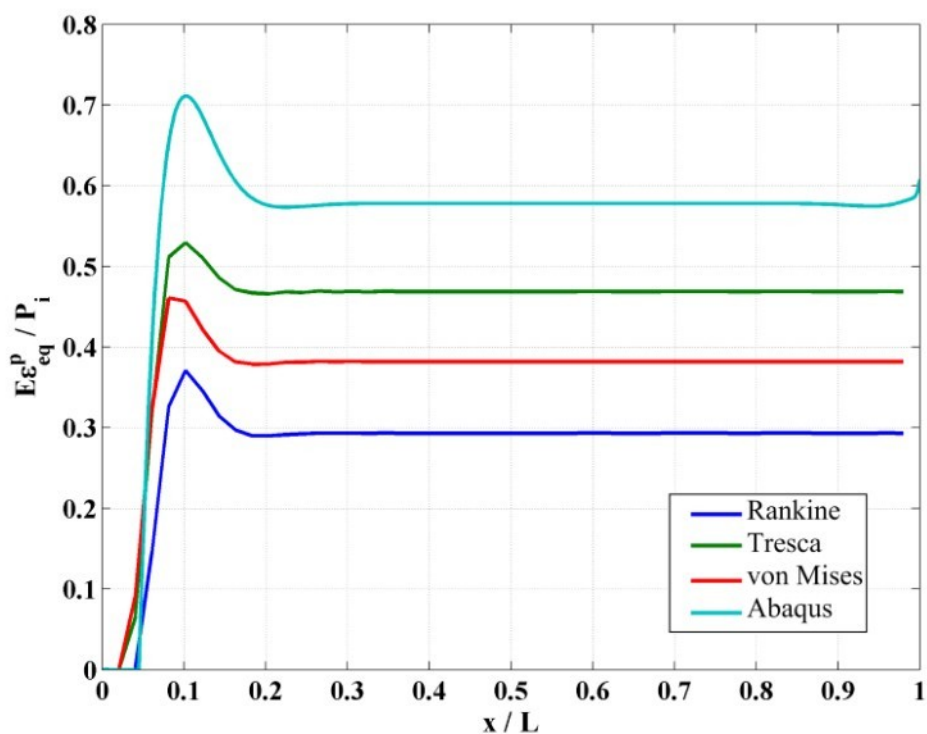
از آن‌جا که نوع جزء اثر قابل توجهی در نتایج ندارد در ادامه نتایج فقط با استفاده از جزء مستطیلی برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۵-۸) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۳۱ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۳۲ آورده شده است. معیار ترسکا در هر دو حالت بیشترین دقت را دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۳۳ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۳۴ آورده شده است. برای $z = -h/4$ معیار ترسکا بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۳۵ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۳۶ آورده شده است. دقیق‌ترین جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده مربوط به معیار فون میزز است.



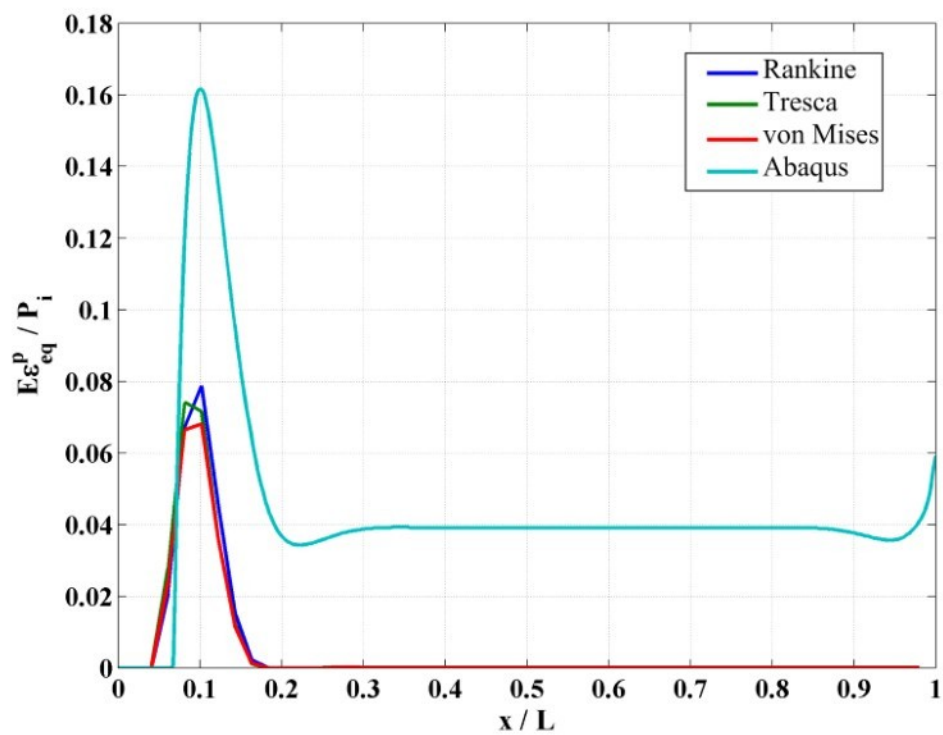
شکل ۵-۳۱- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



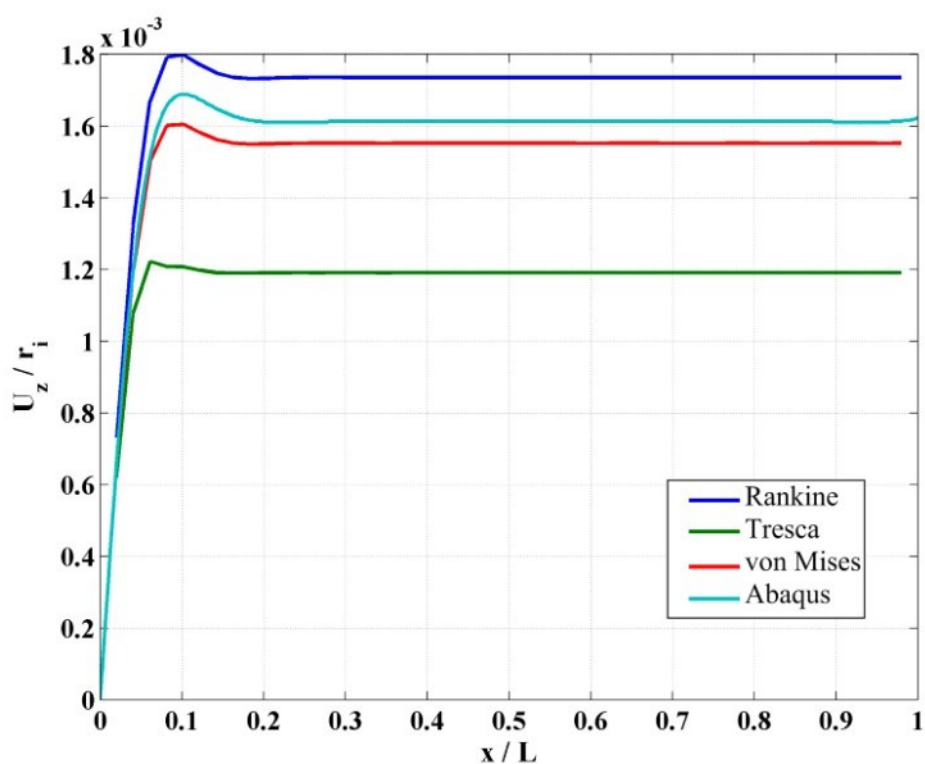
شکل ۵-۳۲- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



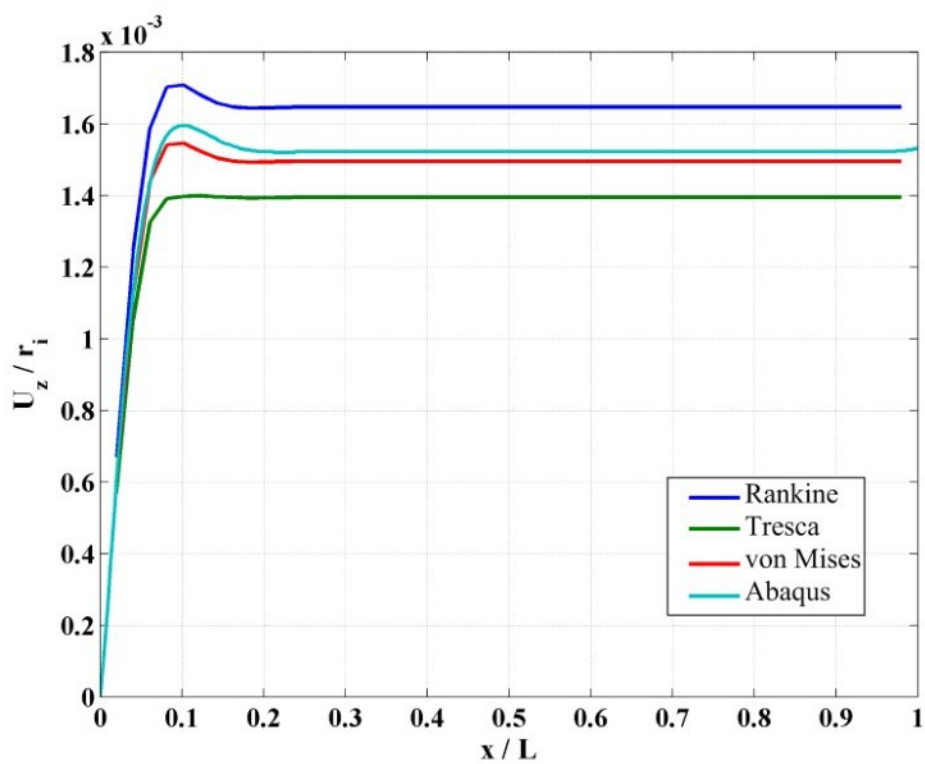
شکل ۵-۳۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۵-۳۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

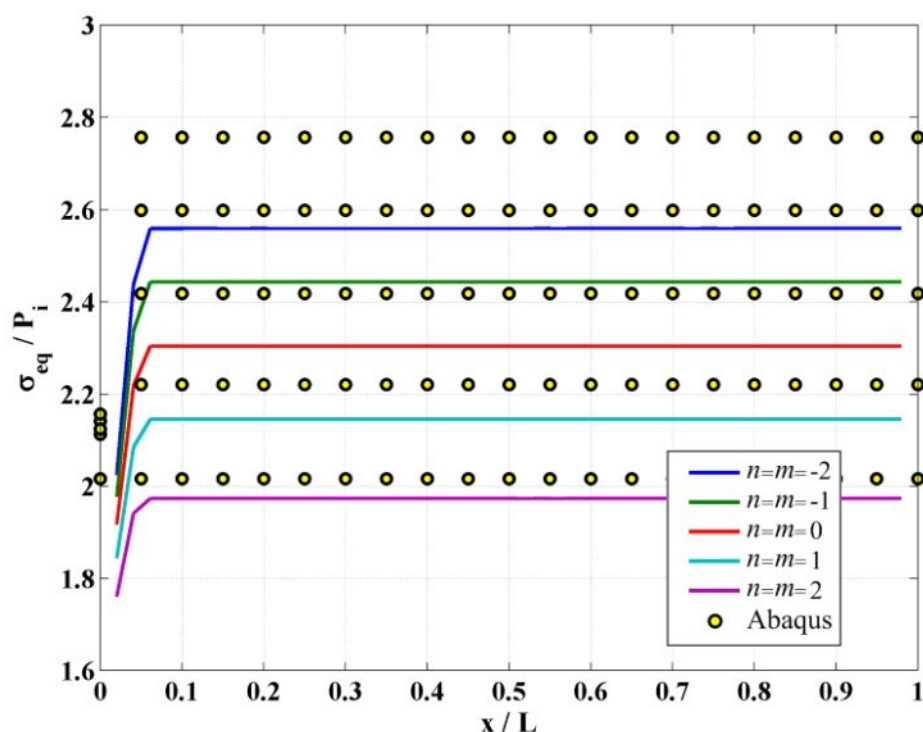


شکل ۵-۳۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

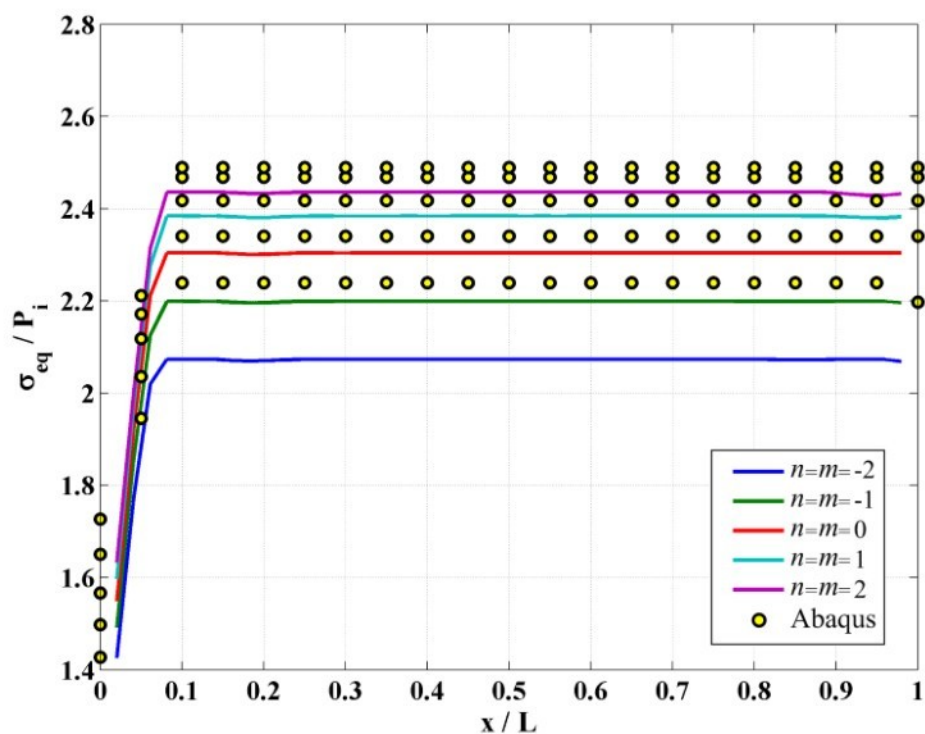


شکل ۵-۳۶- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

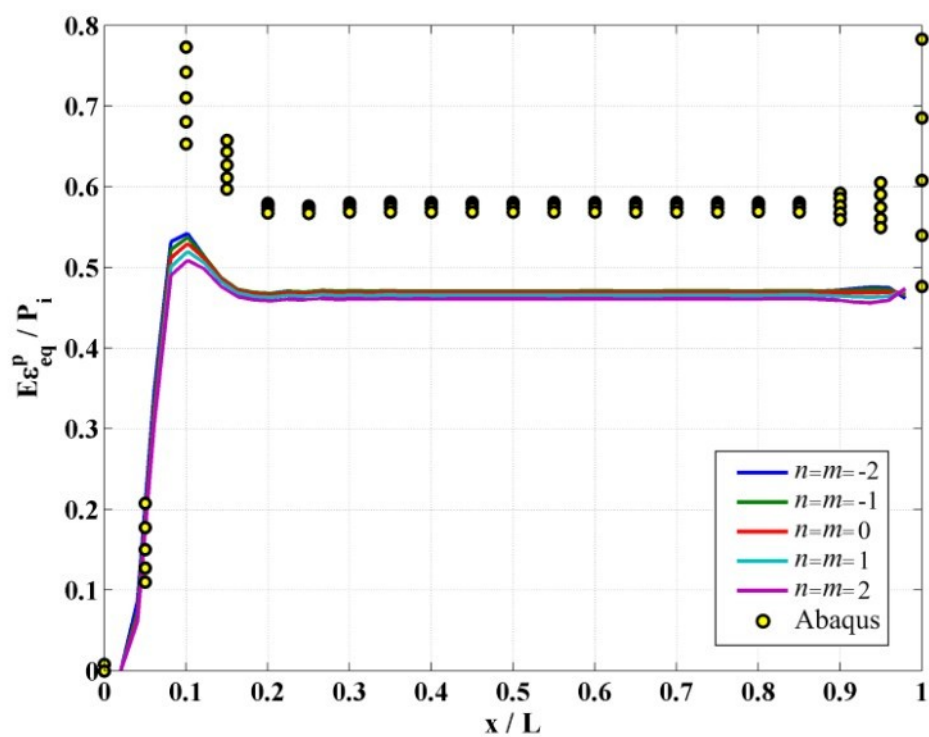
توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۳۷-۵ و برای $z = 0$ در شکل ۳۸-۵ مشاهده می‌نمایید. با افزایش ثابت ناهمگنی، تنش معادل در $z = -h/4$ کاهش و در وسط استوانه افزایش می‌یابد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۳۹-۵ و برای $z = 0$ در شکل ۴۰-۵ آورده شده است. ثابت ناهمگنی اثر بسیار کمی بر روی مقدار کرنش پلاستیک در بیشتر طول استوانه دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۴۱-۵ و برای $z = 0$ در شکل ۴۲-۵ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی محاسبه شده دقت خوبی دارد و دقت نتایج در وسط استوانه بیشتر از دقت نتایج در $z = -h/4$ است.



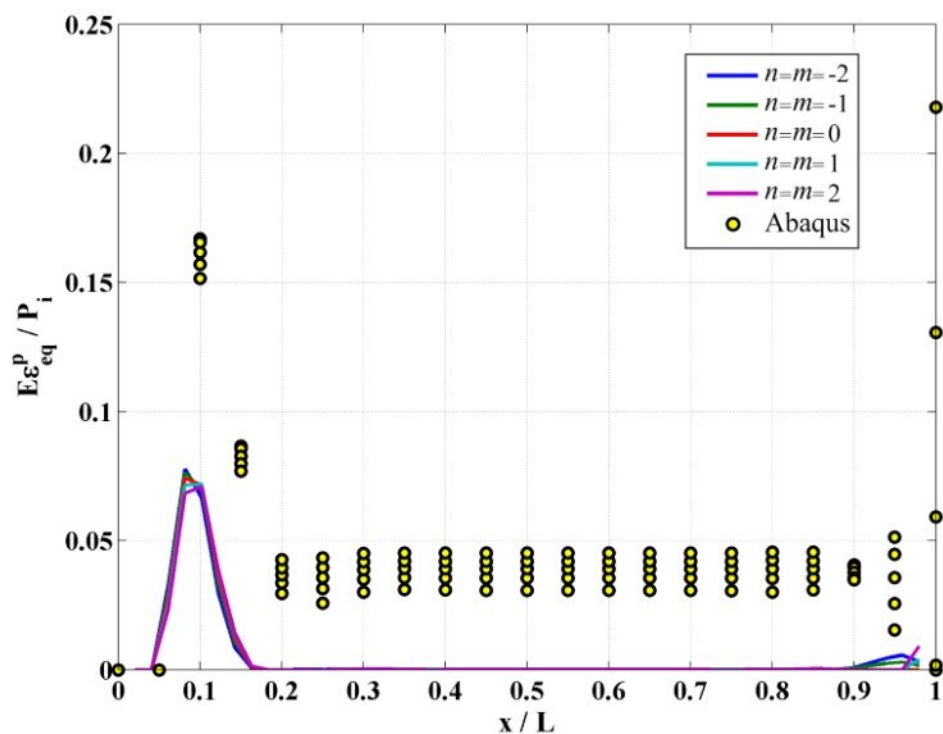
شکل ۳۷-۵- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = -h/4$



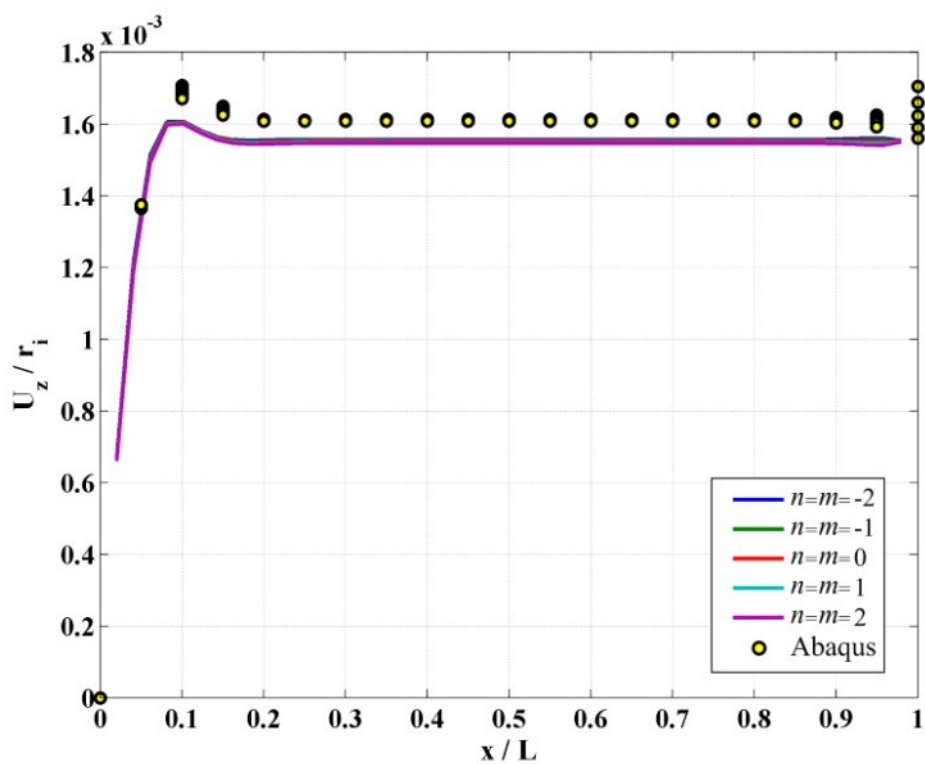
شکل ۵-۳۸- توزیع تنش معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=0$



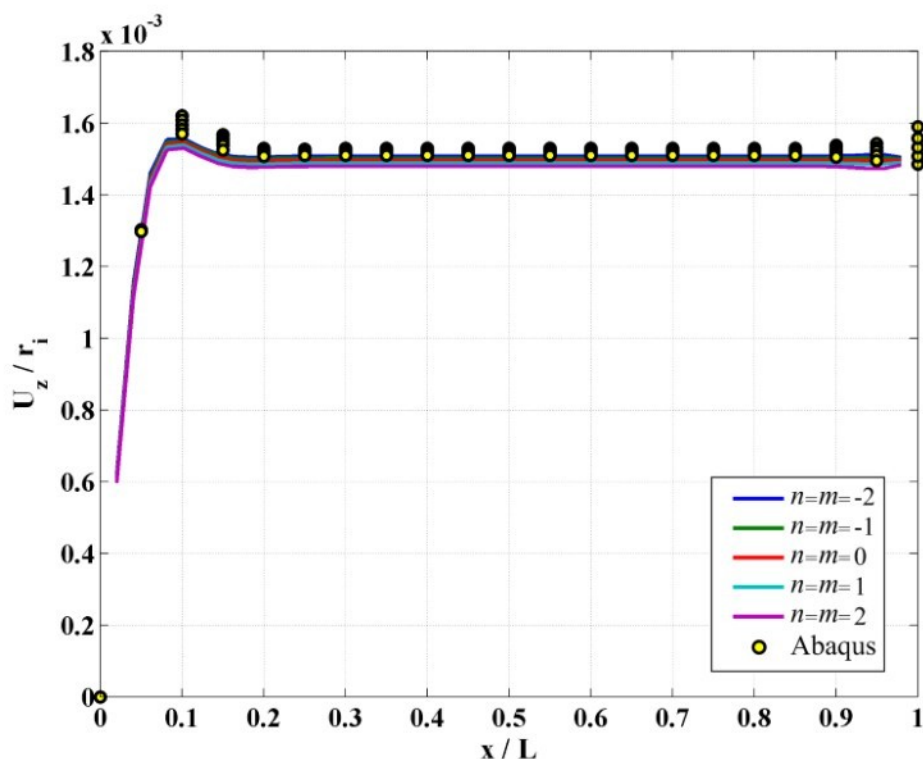
شکل ۵-۳۹- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z=-h/4$



شکل ۵-۴۰- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا در طول استوانه برای $z = 0$

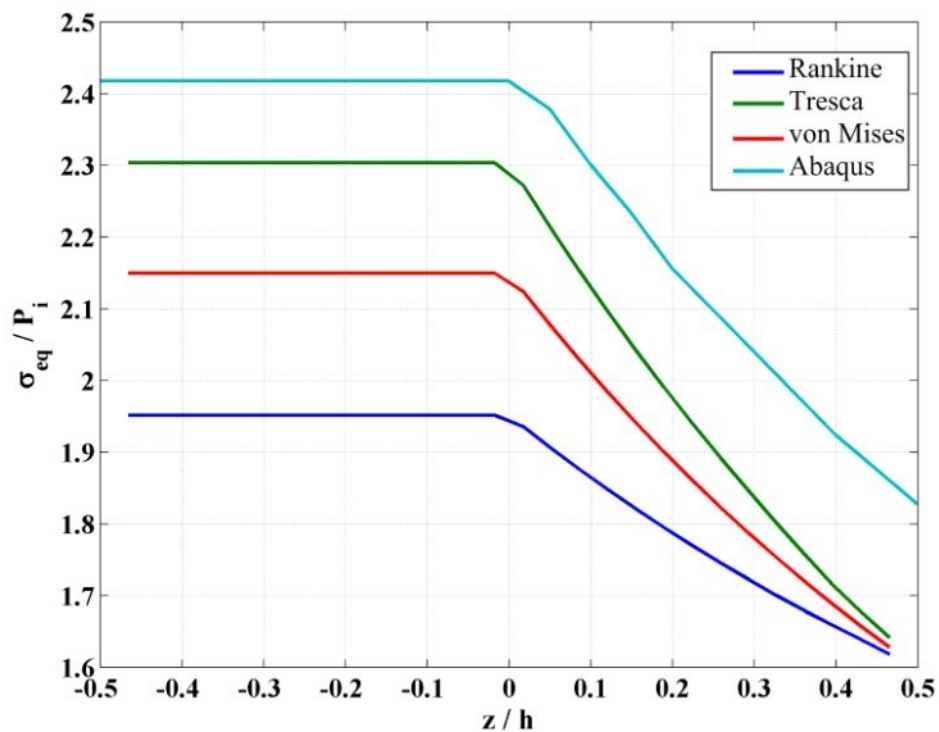


شکل ۵-۴۱- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$

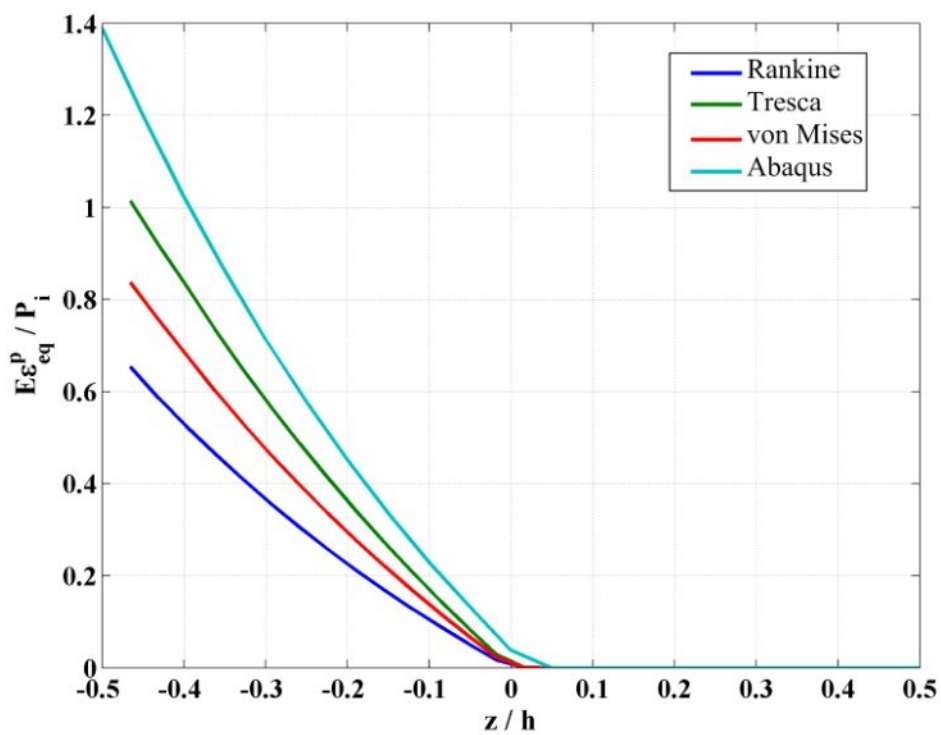


شکل ۵-۴۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z=0$

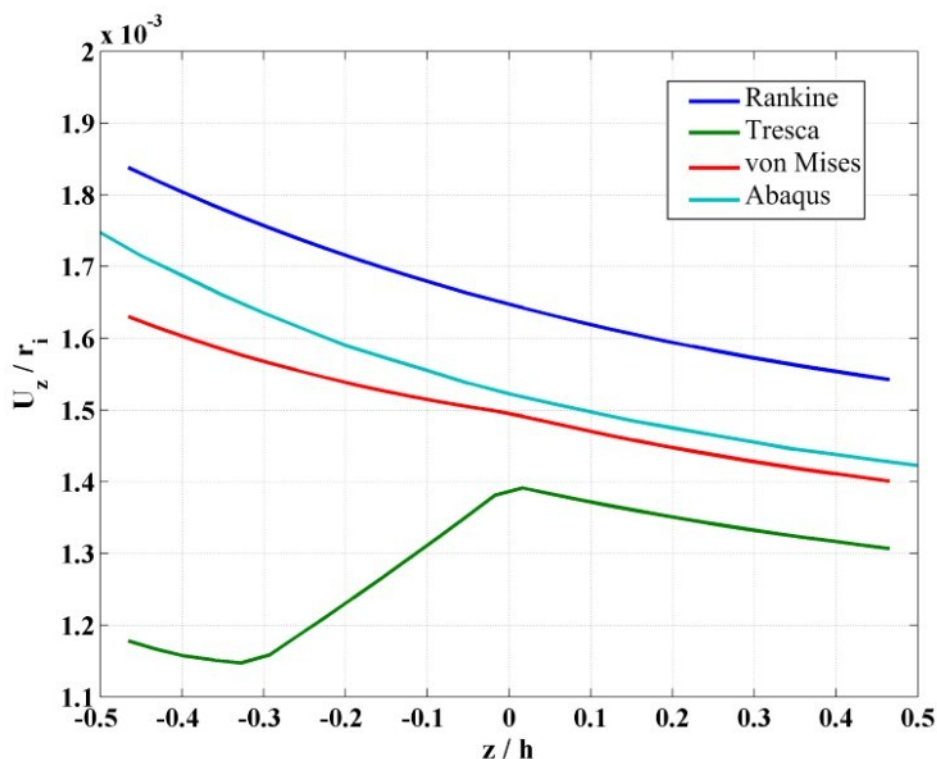
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۵-۴۳ آورده شده است. معیار ترسکا نسبت به دو معیار دیگر دقت بیشتری دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۵-۴۴ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها دقت قابل قبولی ندارند ولی معیار ترسکا بیشترین دقت را در میان سه معیار دارد. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۵-۴۵ آورده شده است. معیار فون میزز در تمام مناطق دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



شکل ۵-۴۳- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

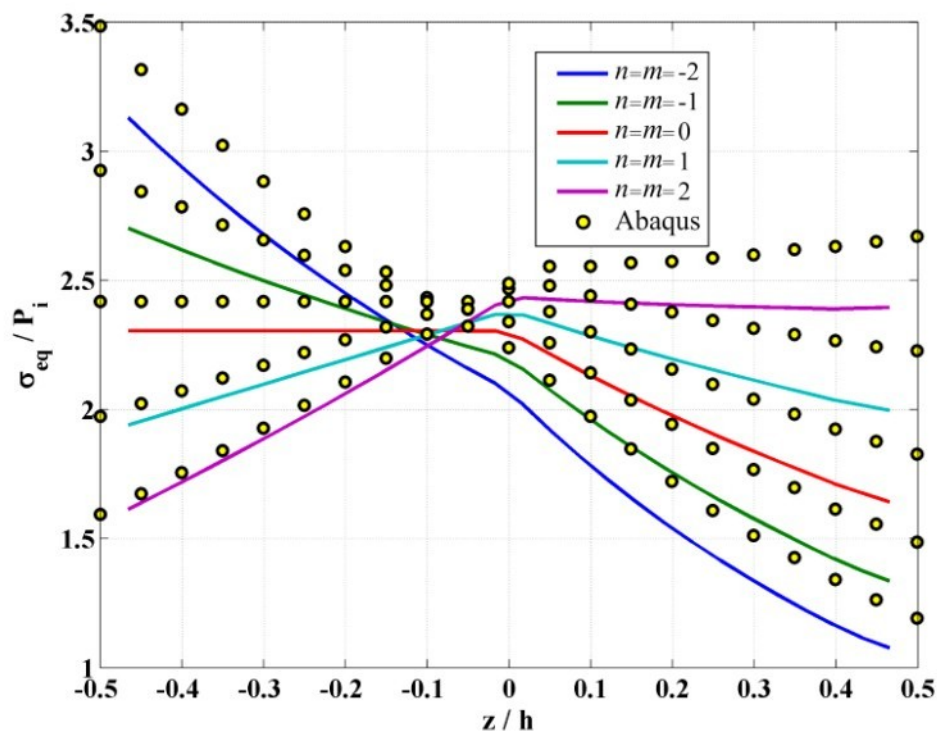


شکل ۵-۴۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

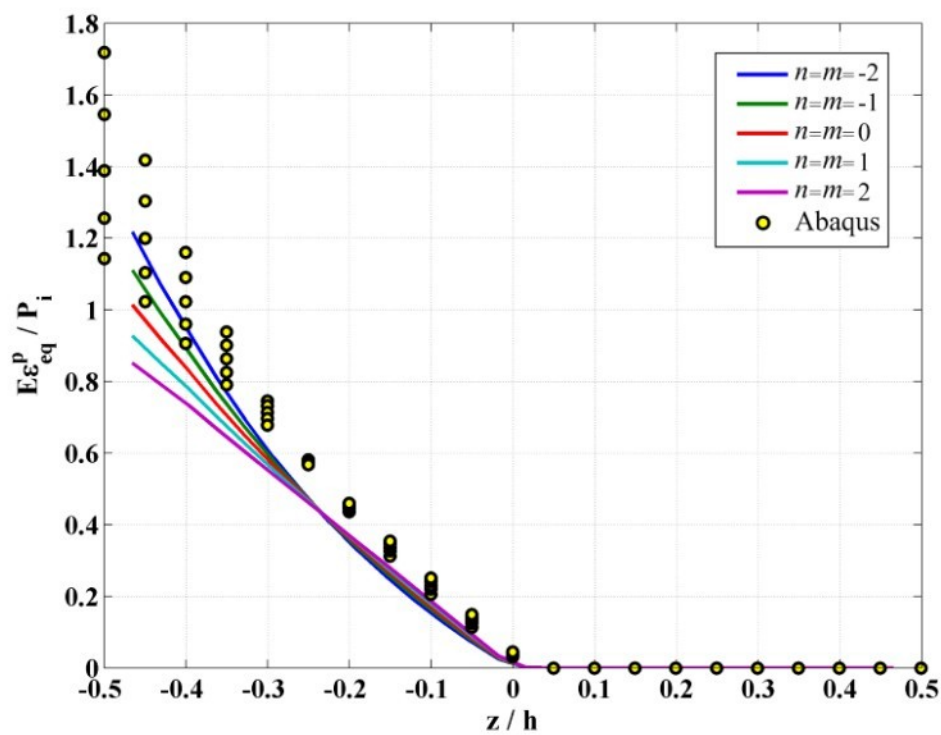


شکل ۵-۴۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

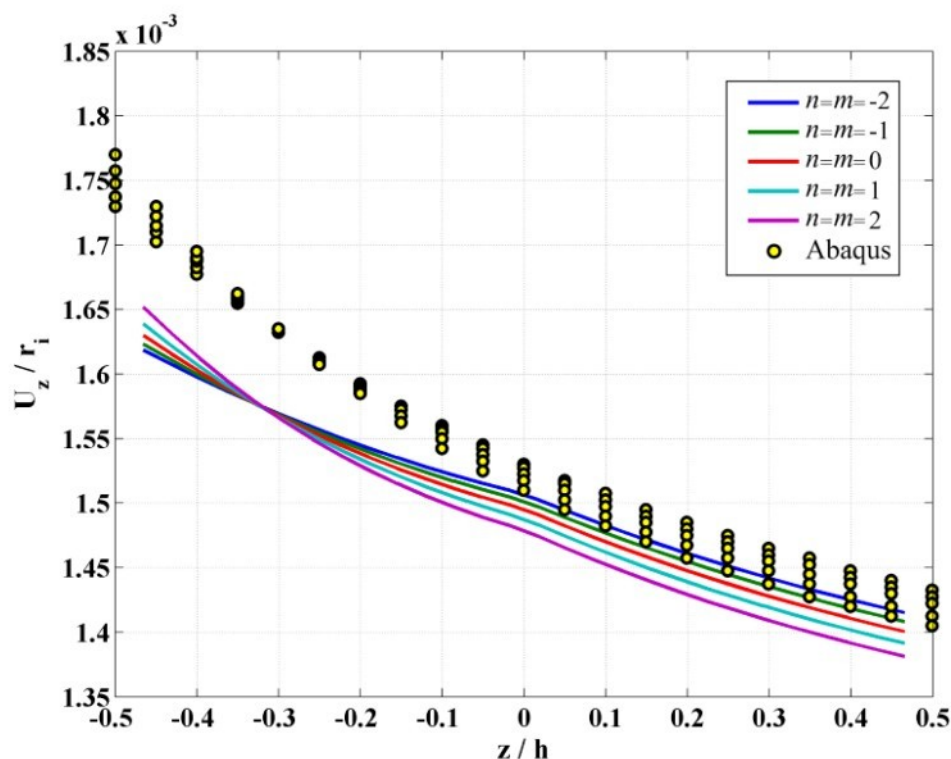
توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۵-۴۶ مشاهده می‌نمایید. این معیار برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگتر در نیمه‌ی داخلی استوانه دقیق‌تر است. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۵-۴۷ آورده شده است. نتایج دقت قابل قبولی ندارند ولی اثر تغییر ثابت ناهمگنی را به خوبی نشان داده‌اند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۵-۴۸ آورده شده است. مشاهده می‌شود که دقت نتایج در نیمه‌ی خارجی استوانه بیشتر است.



شکل ۵-۴۶- توزیع تنش معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۵-۴۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار ترسکا نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۴۸-۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۵-۳-۳- استوانه با دو سر گیردار در معرض بار حرارتی

در این بخش نتایج حل مسأله با در نظر گرفتن دمای سطح داخلی ۱۰۰ درجه‌ی سلسیوس بیش از دمای مرجع و دمای سطح خارجی برابر با دمای مرجع ارائه شده است. فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۹ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۱۰ ارائه شده است و شعاع سطحی که تسلیم از آن آغاز می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۱۱ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۱۲ ارائه شده است. فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۱۳ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۱۴ ارائه شده است. فشار خارجی در این حالت‌ها در نظر گرفته نشده است.

جدول ۵-۹- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۵۵٫۳۱	۵۰٫۰۸	۶۰٫۷۴	۶۱٫۲۰
$n=m=l=-1$	۶۱٫۳۰	۵۸٫۲۱	۷۲٫۸۵	۷۵٫۱۸
$n=m=l=0$	۶۶٫۶۱	۶۶٫۶۲	۸۴٫۳۸	۸۵٫۲۵
$n=m=l=1$	۶۹٫۳۳	۷۰٫۳۶	۹۱٫۶۲	۹۳٫۱۶
$n=m=l=2$	۶۵٫۶۳	۶۸٫۷۴	۹۴٫۲۷	۹۷٫۲۰

جدول ۵-۱۰- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۵۶٫۲۷	۵۰٫۵۹	۶۰٫۹۷	۶۱٫۲۰
$n=m=l=-1$	۶۲٫۷۴	۵۸٫۸۷	۷۳٫۷۴	۷۵٫۱۸
$n=m=l=0$	۶۸٫۸۷	۶۵٫۲۲	۸۳٫۵۹	۸۵٫۲۵
$n=m=l=1$	۷۳٫۱۲	۶۸٫۶۳	۹۰٫۷۰	۹۳٫۱۶
$n=m=l=2$	۷۲٫۲۲	۶۶٫۵۳	۹۳٫۲۰	۹۷٫۲۰

جدول ۵-۱۱- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلی در $x=L/2$ (mm)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۰۷	۰٫۰۵۱۰
$n=m=l=-1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۳۷	۰٫۰۵۴۰
$n=m=l=0$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰

جدول ۵-۱۲- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (mm)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۳۴	۰٫۰۵۱۰
$n=m=l=-1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۴۰۰	۰٫۰۵۴۰
$n=m=l=0$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰

جدول ۵-۱۳- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۷۱٫۲۹	۵۷٫۶۷	۶۰٫۶۸	۶۱٫۴۸
$n=m=l=-1$	۹۲٫۰۸	۷۳٫۸۴	۷۴٫۳۴	۷۶٫۳۲
$n=m=l=0$	۱۲۱٫۴۸	۸۵٫۳۱	۹۱٫۷۵	۹۴٫۶۵
$n=m=l=1$	۱۶۳٫۶۵	۹۵٫۴۶	۱۱۳٫۰۳	۱۲۳٫۵۹
$n=m=l=2$	۲۲۴٫۹۱	۱۰۳٫۳۱	۱۳۶٫۳۷	۱۴۸٫۲۶

جدول ۵-۱۴- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۷۱٫۹۱	۵۷٫۸۵	۶۱٫۰۸	۶۱٫۴۸
$n=m=l=-1$	۹۲٫۸۹	۷۴٫۰۶	۷۴٫۸۶	۷۶٫۳۲
$n=m=l=0$	۱۲۲٫۵۴	۸۶٫۵۰	۹۲٫۴۲	۹۴٫۶۵
$n=m=l=1$	۱۶۴٫۹۷	۹۶٫۹۶	۱۱۴٫۰۱	۱۲۳٫۵۹
$n=m=l=2$	۲۲۶٫۴۴	۱۰۵٫۲۹	۱۳۷٫۹۴	۱۴۸٫۲۶

همان طور که در جدول ها مشاهده می کنید با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می یابد. البته معیارهای رانکین و ترسکا برای ثابت ناهمگنی ۲ فشار آغاز تسلیم کمتری از ثابت ناهمگنی ۱ گزارش می نمایند. با توجه به نتایج جدول ها می توان دریافت که در پیش بینی فشار و محل آغاز تسلیم استوانه معیار فون میزز بیشترین دقت و معیار ترسکا کمترین دقت را دارد. در پیش بینی فشار آغاز تسلیم سطح میانی معیار فون میزز بیشترین دقت و معیار رانکین کمترین دقت را دارد. جزء مستطیلی در پیش بینی فشار آغاز تسلیم ثابت های ناهمگنی کمتر از ۰ و فشار تسلیم سطح میانی دقیق تر و جزء مثلثی در پیش بینی فشار آغاز تسلیم سایر ثابت های ناهمگنی و محل آغاز تسلیم استوانه دقیق تر است.

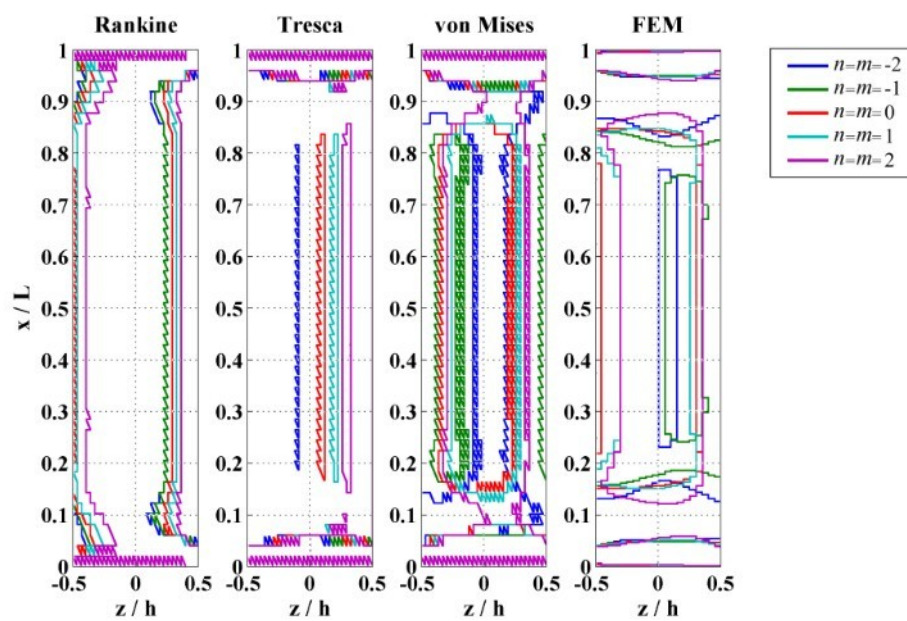
لازم به ذکر است که سطح داخلی استوانه در بیشتر موارد (معیارهای رانکین، ترسکا و گاهی فون میزز) فقط در اثر بار حرارتی (فشار داخلی صفر) تسلیم می شود و با افزایش فشار داخلی از ماده ی تسلیم شده کاسته می شود و سطح داخلی کاملاً الاستیک می شود. سپس با افزایش فشار

داخلی دوباره تسلیم استوانه آغاز می‌شود. مقادیر ارائه شده در جدول‌های ۵-۹ تا ۵-۱۲ مربوط به تسلیم دوباره‌ی استوانه می‌باشند.

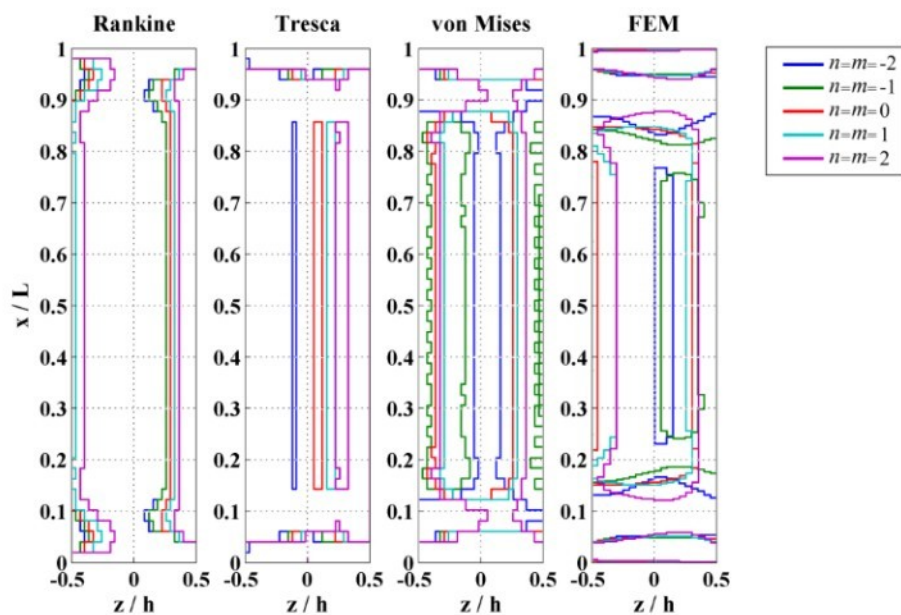
شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه با ثابت‌های ناهمگنی مختلف در شکل ۵-۴۹ و ۵-۵۰ و تصویر مناطق تسلیم شده‌ی استوانه در شکل ۵-۵۱ و ۵-۵۲ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار که برابر میانگین فشار آغاز تسلیم استوانه و فشار تسلیم لایه‌ی میانی حاصل از نرم‌افزار Abaqus در نظر گرفته شده است در جدول ۵-۱۵ آورده شده است. مشاهده می‌شود که نتیجه‌ی حاصل از معیار فون میزز بیشترین شباهت را به نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus دارد. ولی می‌توان دریافت که با تغییر فشار داخلی وارد شده به استوانه شکل ناحیه‌ی پلاستیک هر کدام از معیارها می‌تواند به شکل به‌دست آمده از نرم‌افزار Abaqus نزدیک شود. نوع جزء به‌کار رفته تاثیر چندانی بر نتایج ندارد. جزء مثلثی اثر شرایط مرزی را در شکل ناحیه‌ی پلاستیک بهتر از جزء مستطیلی نمایش می‌دهد ولی جزء مستطیلی شکل یکنواخت‌تری ایجاد کرده است.

جدول ۵-۱۵- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)

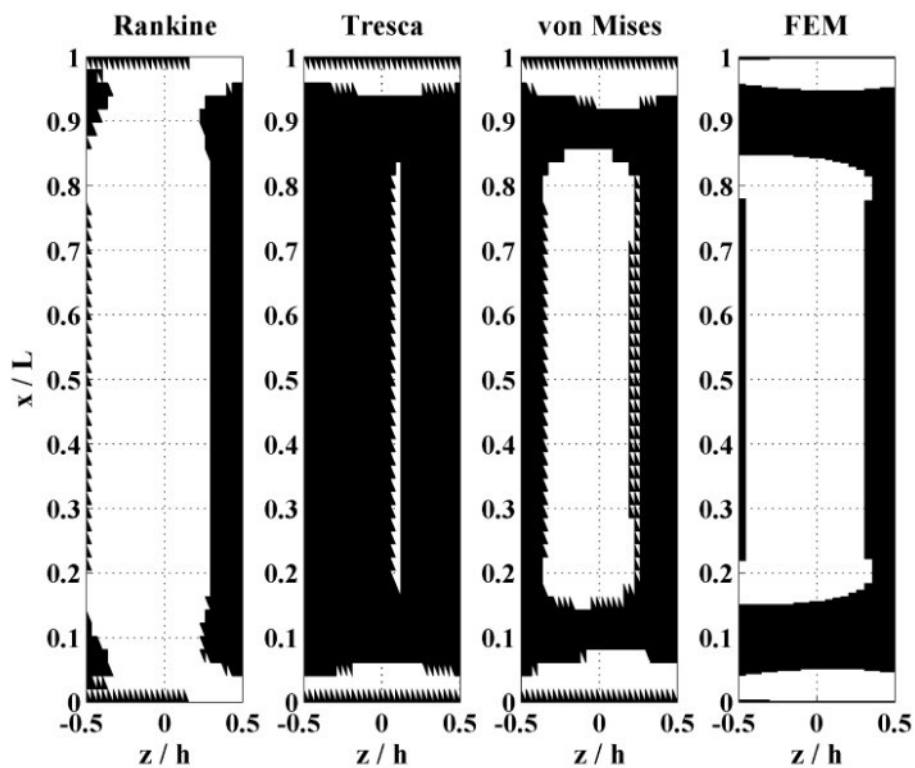
$n=m=l=2$	$n=m=l=1$	$n=m=l=0$	$n=m=l=-1$	$n=m=l=-2$
۱۲۲٫۷۳	۱۰۸٫۳۷	۸۹٫۹۵	۷۵٫۷۵	۶۱٫۳۴



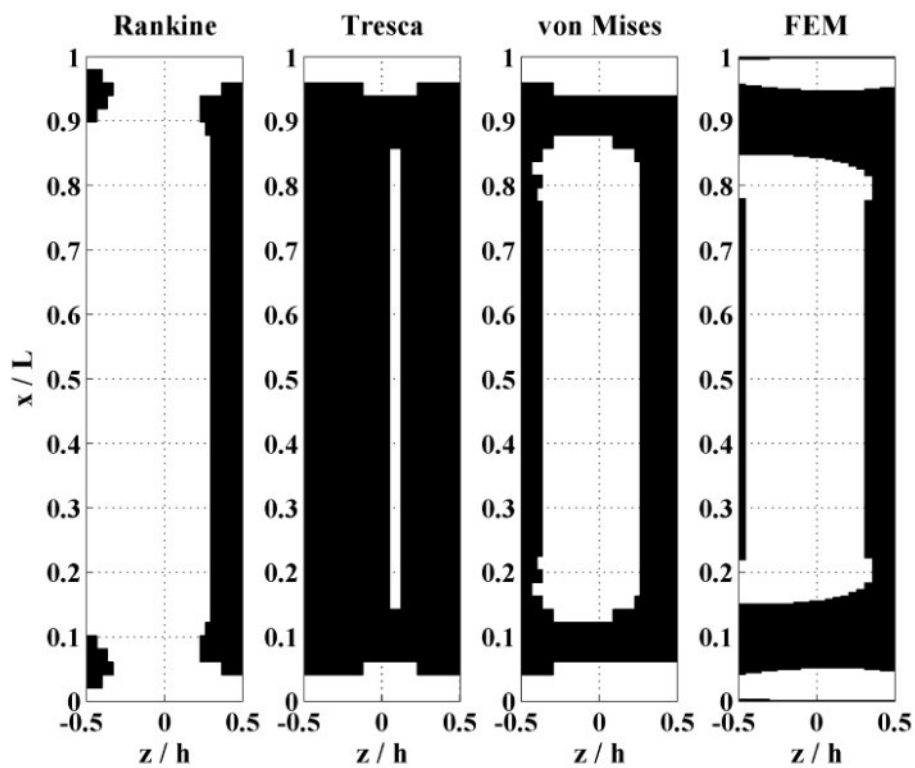
شکل ۵-۴۹- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی



شکل ۵-۵۰- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی

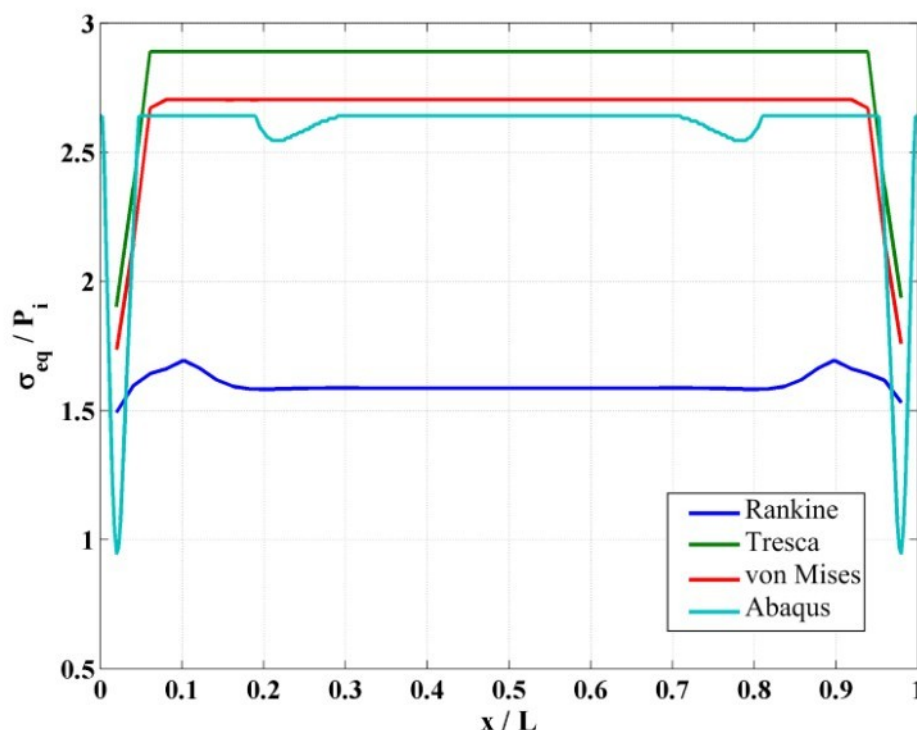


شکل ۵-۵۱- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلی

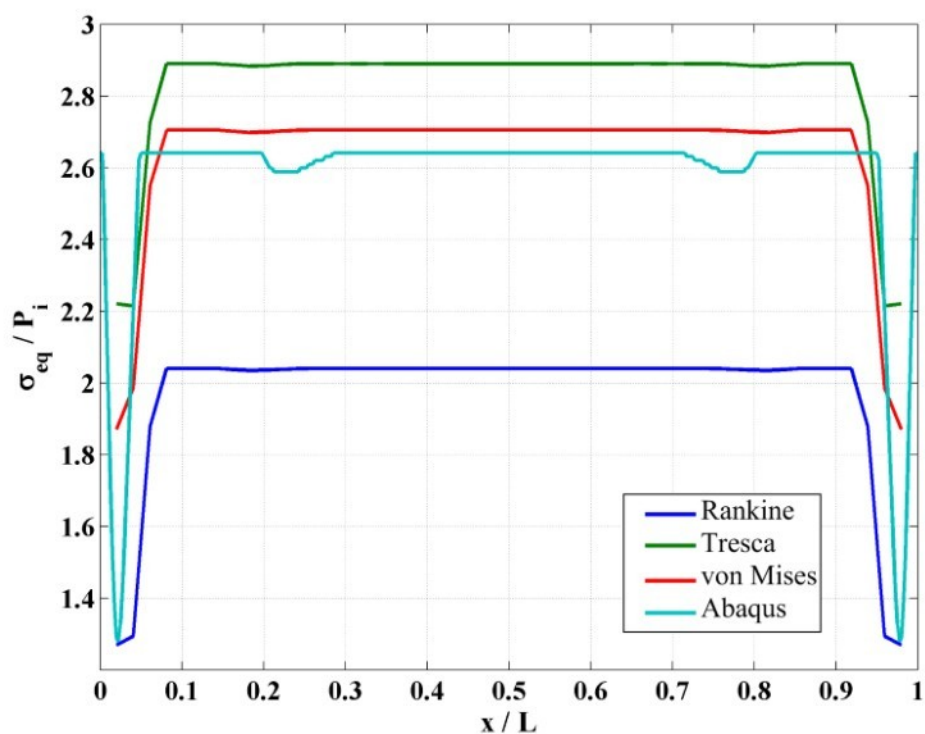


شکل ۵-۵۲- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی

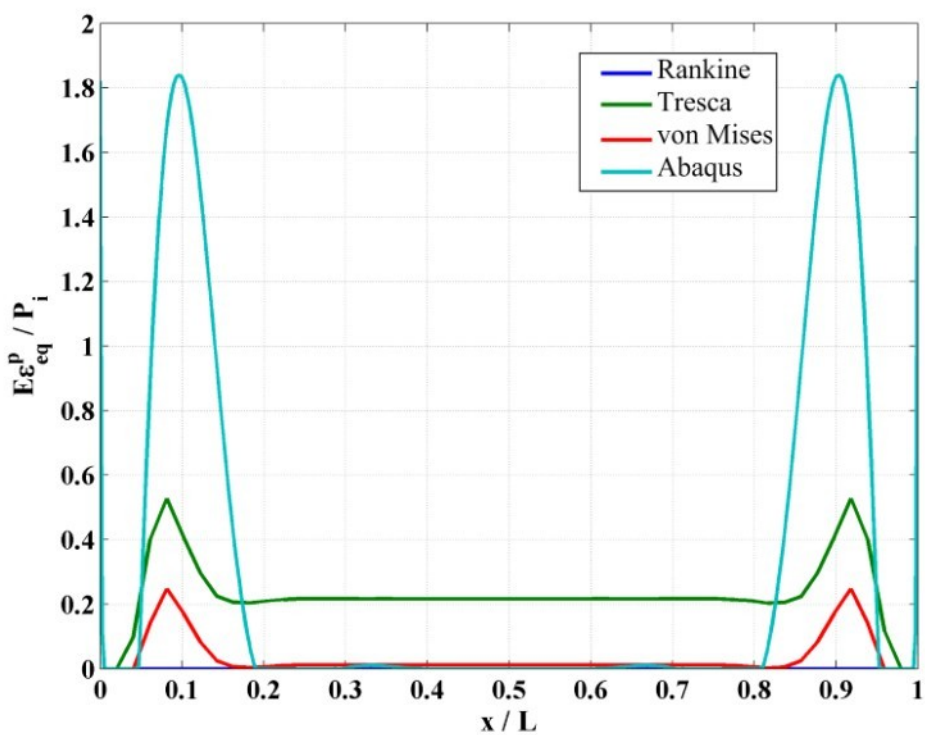
از آن جا که نوع جزء اثر قابل توجهی در نتایج ندارد در ادامه نتایج فقط با استفاده از جزء مستطیلی برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۵-۱۴) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۵۳ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۵۴ آورده شده است. معیار فون میزز نتایج دقیق‌تری نسبت به دو معیار دیگر ارائه کرده‌اند. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۵۵ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۵۶ آورده شده است. هیچ‌کدام از معیارها در این دو حالت دقت قابل قبولی ندارند. برای $z = -h/4$ در وسط استوانه معیار رانکین بیشترین دقت و برای سطح میانی هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۵۷ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۵۸ آورده شده است. در بیشتر طول استوانه معیار فون میزز دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



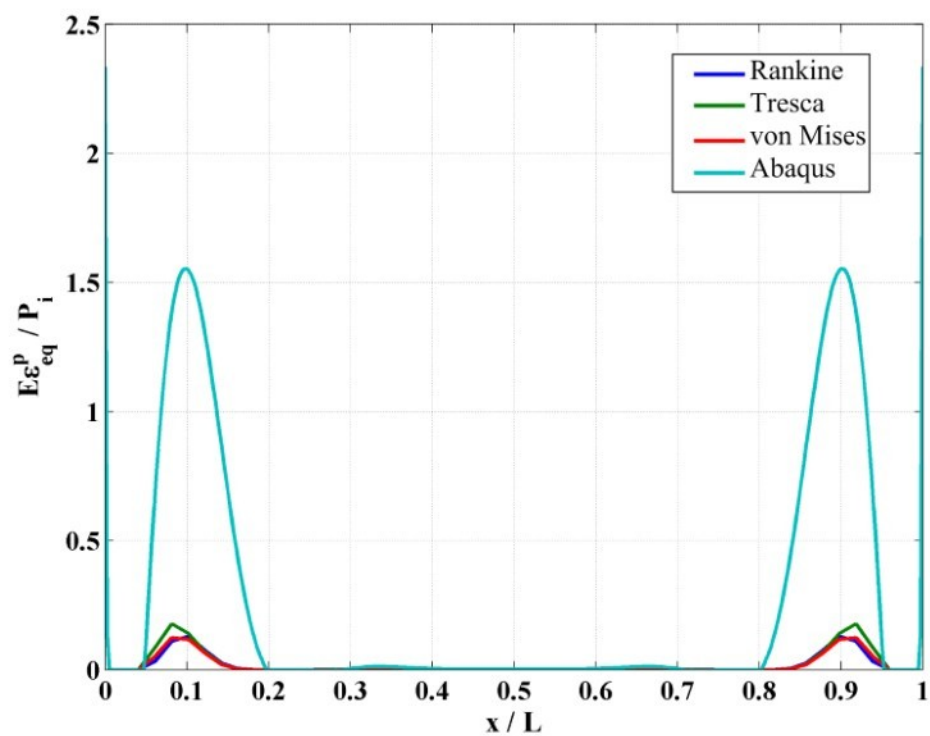
شکل ۵-۵۳- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z = -h/4$



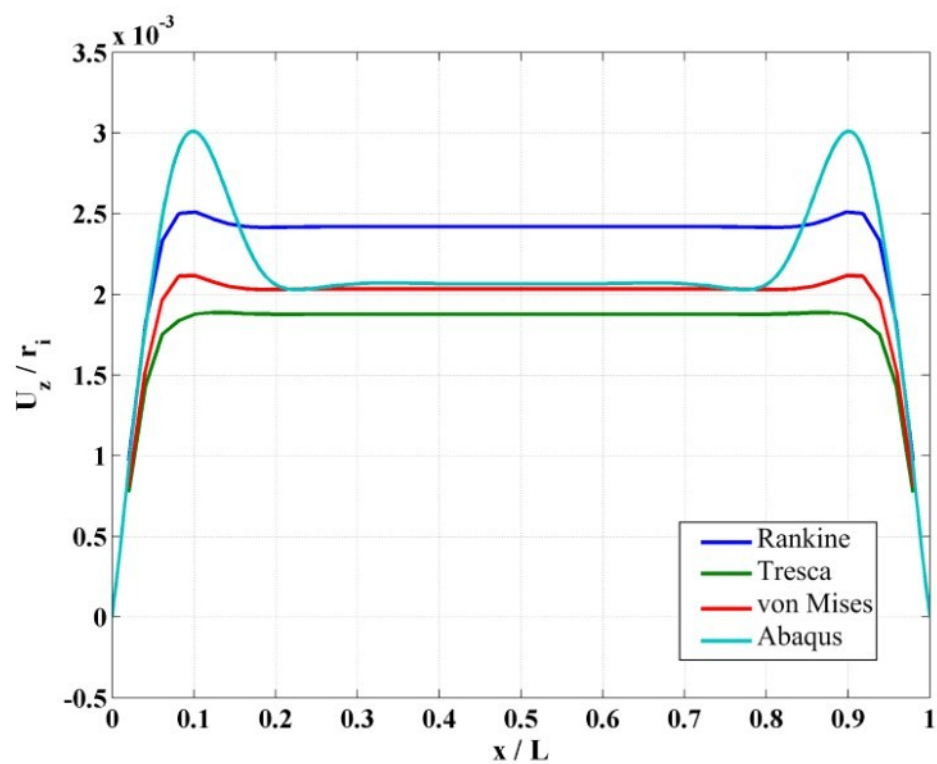
شکل ۵-۵۴- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



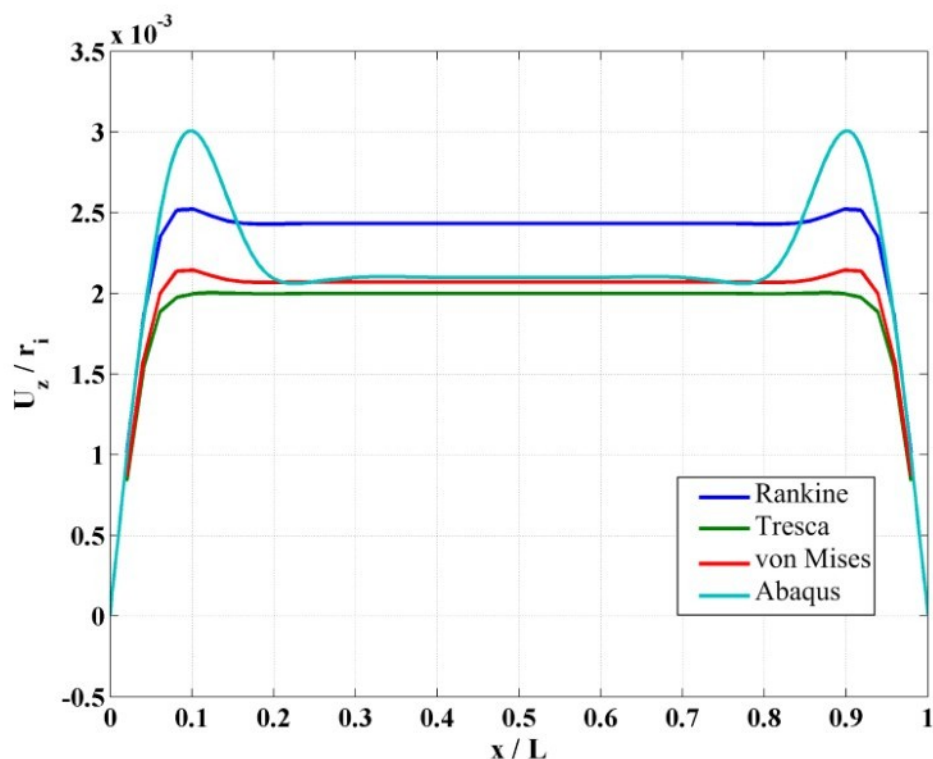
شکل ۵-۵۵- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۵-۵۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

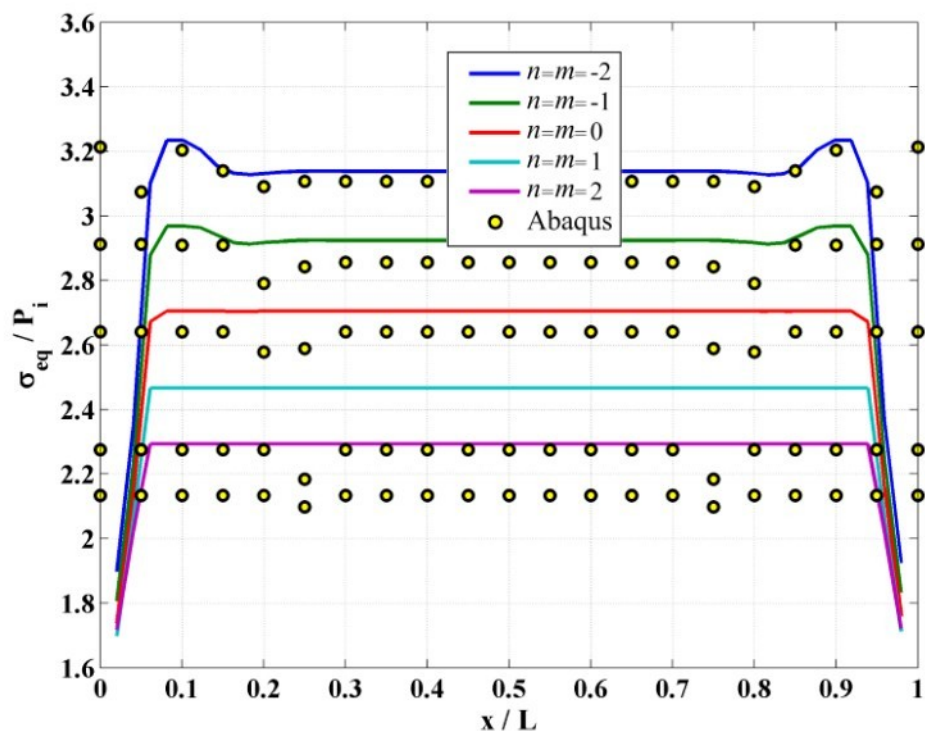


شکل ۵-۵۷- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

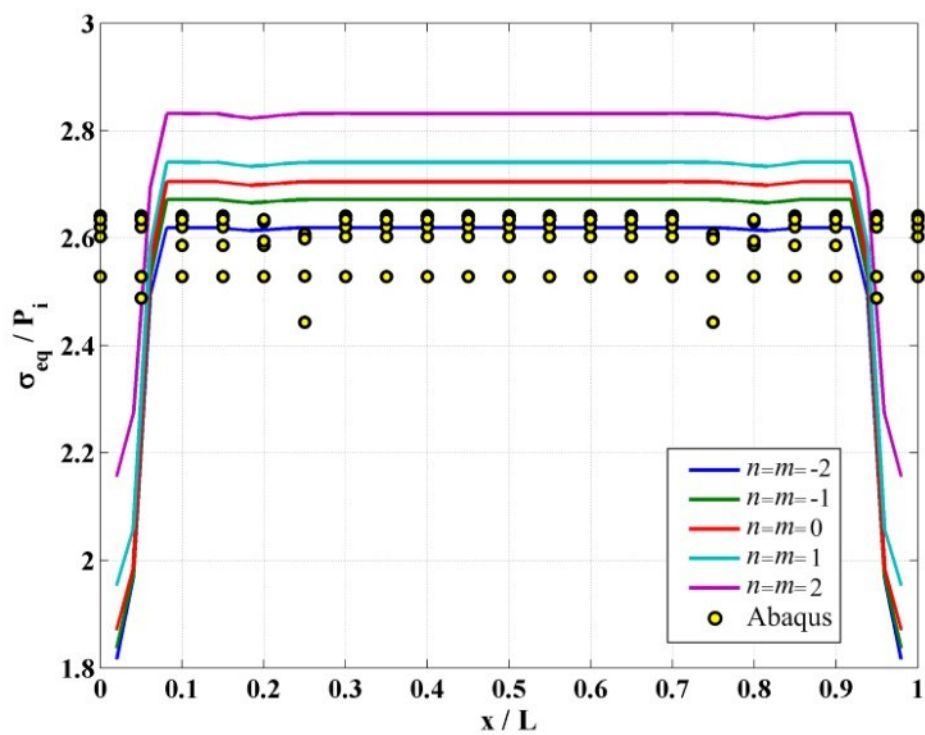


شکل ۵-۵۸- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

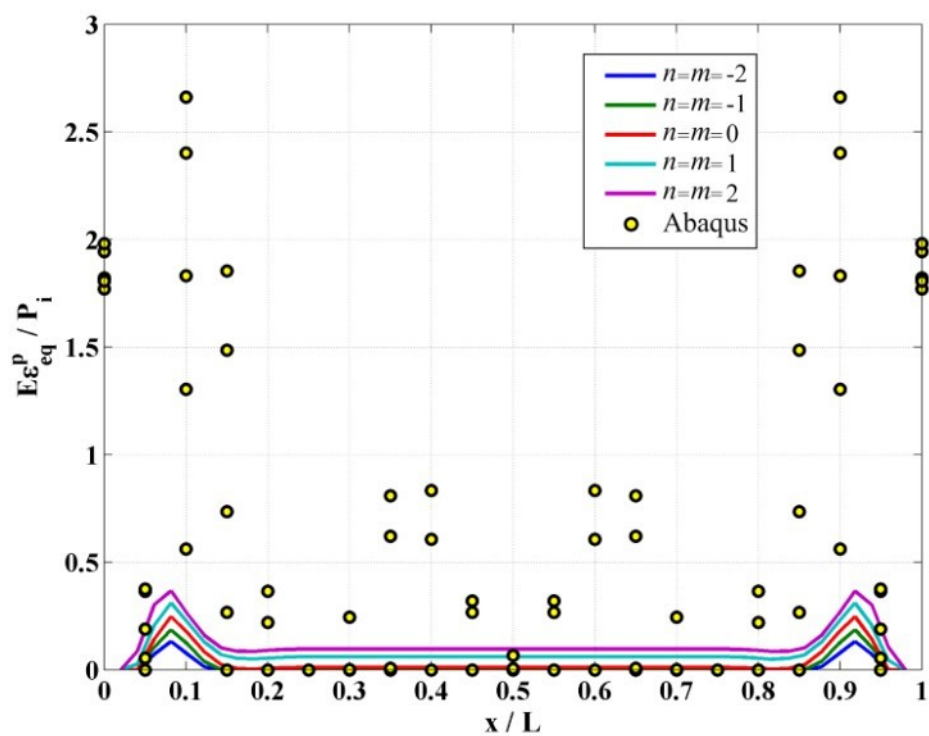
توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۵۹ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۶۰ مشاهده می‌نمایید. نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگتر خطای بیشتری دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۶۱ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۶۲ آورده شده است. اختلاف زیادی بین نتایج حاصل از FEM با نرم‌افزار Abaqus مشاهده می‌شود. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۶۳ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۶۴ آورده شده است. نتایج برای ثابت‌های ناهمگنی کوچک دقت خوبی دارند.



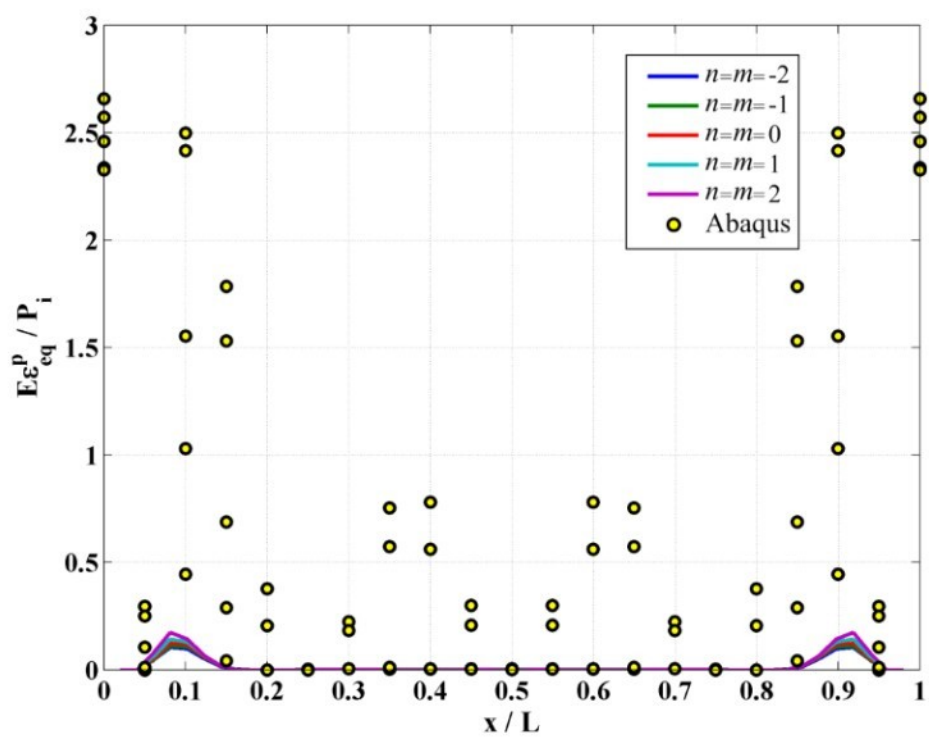
شکل ۵-۵۹- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



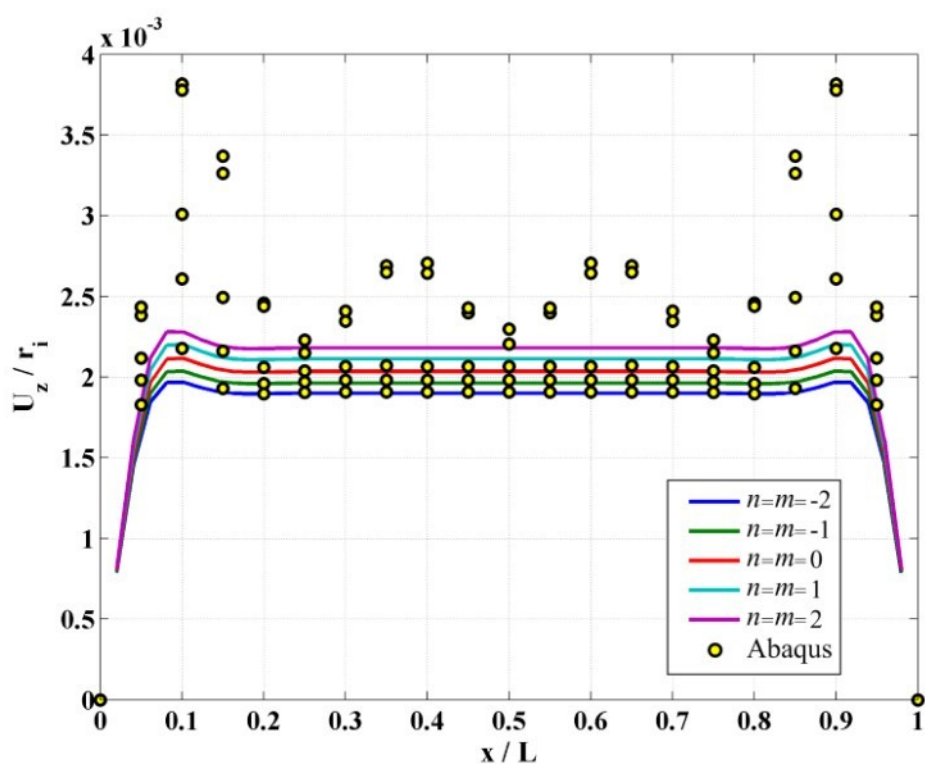
شکل ۵-۶۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$



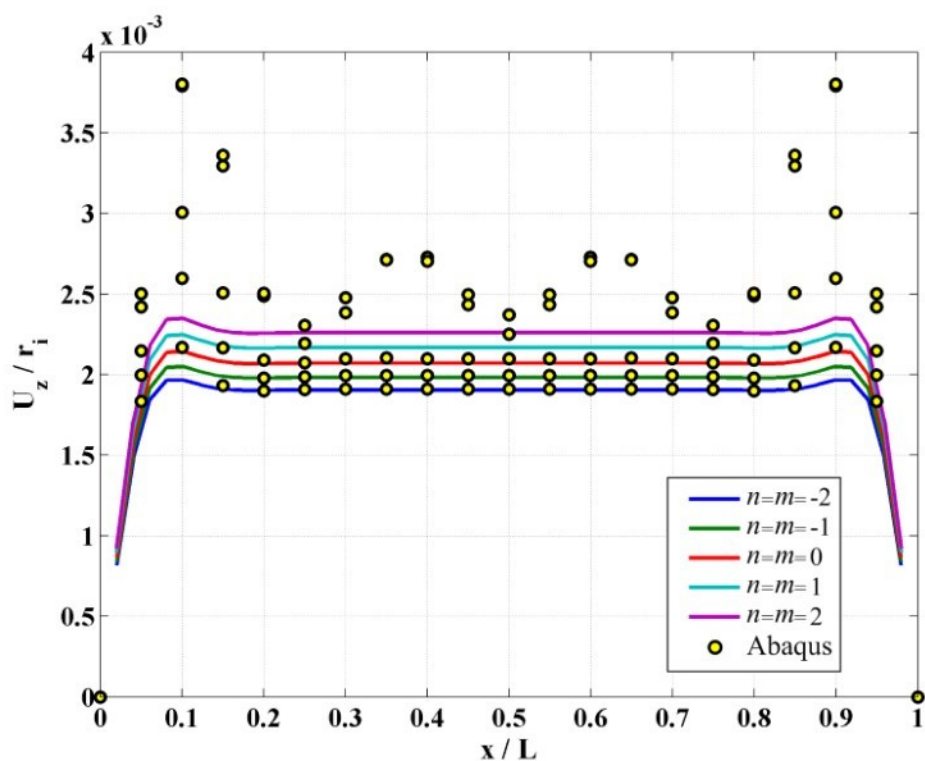
شکل ۵-۶۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



شکل ۵-۶۲- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

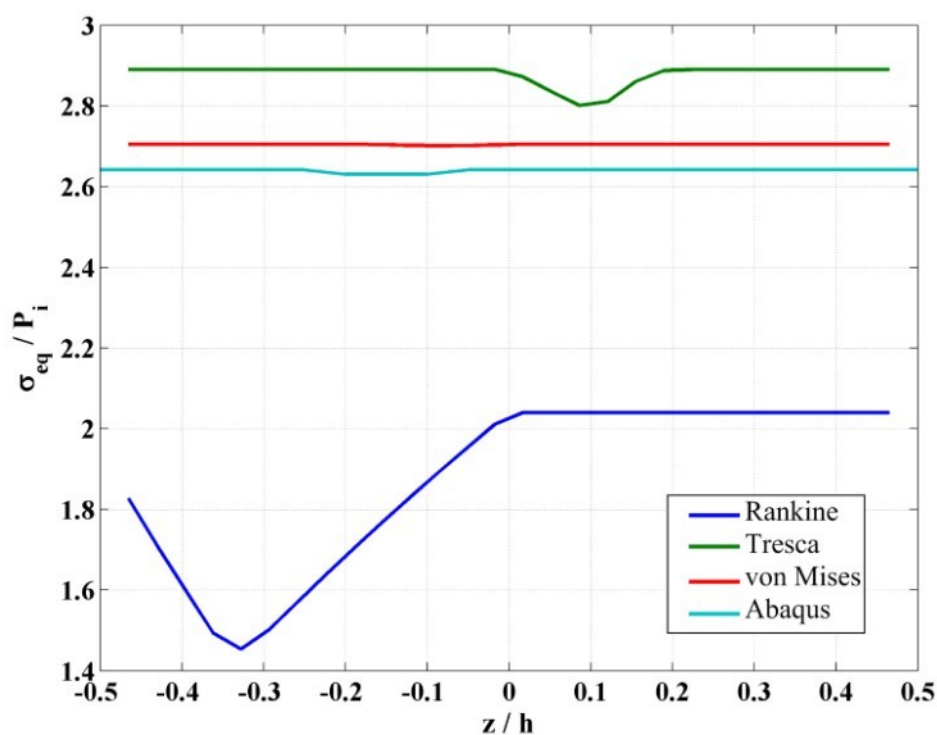


شکل ۵-۶۳- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$

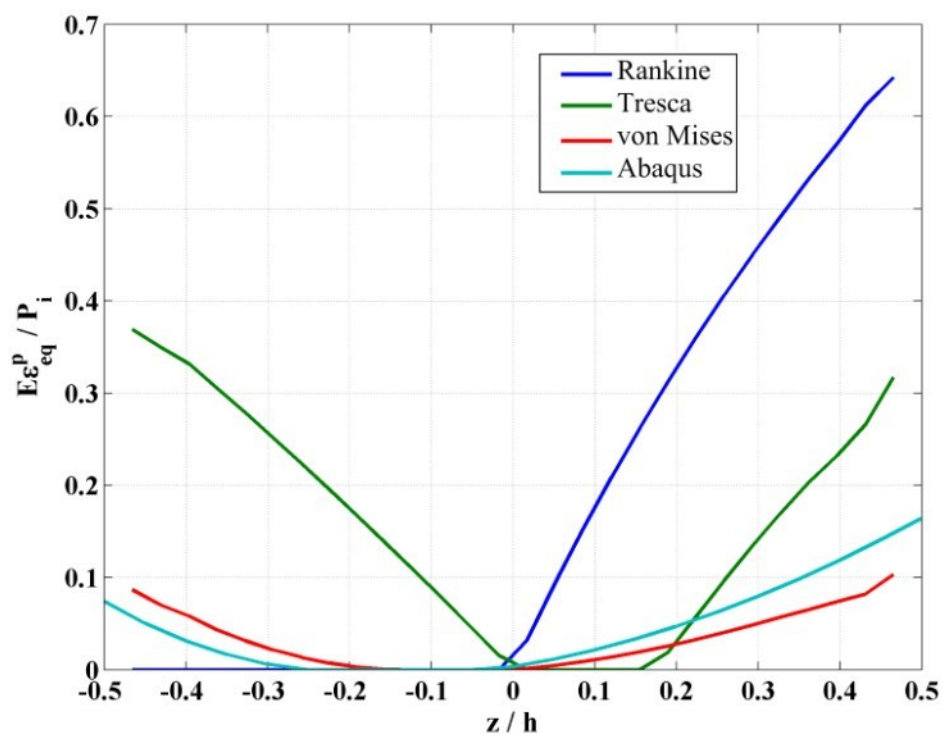


شکل ۵-۶۴- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

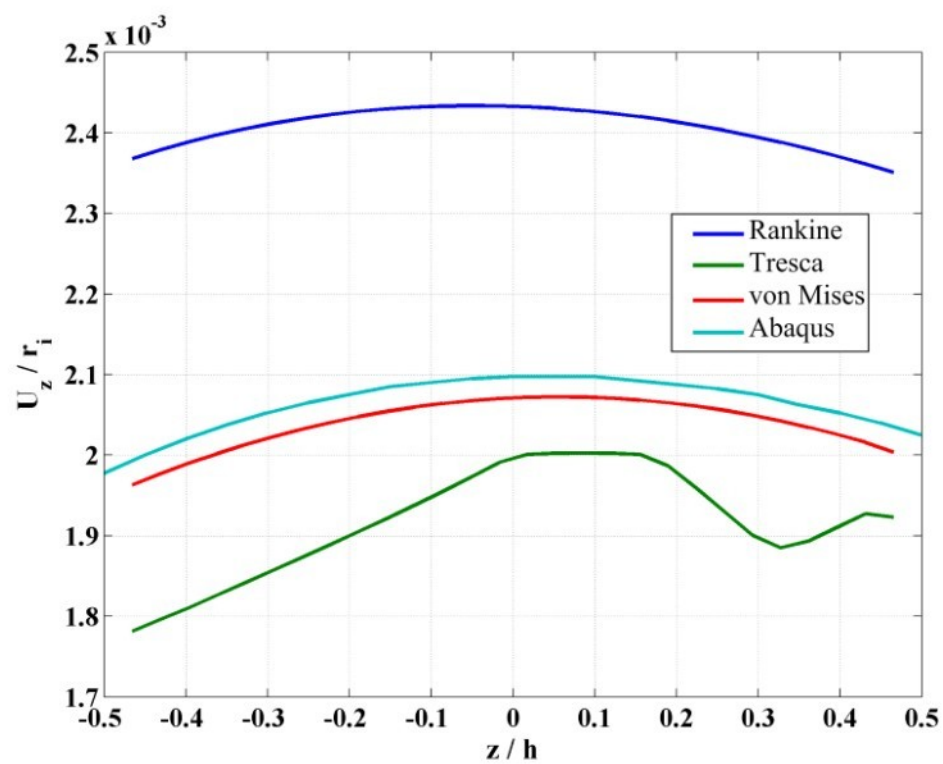
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۵-۶۵ آورده شده است. معیار فون میزز بیشترین دقت را نسبت به دو معیار دیگر دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۵-۶۶ آورده شده است. معیار فون میزز در بیشتر مناطق دقیق‌تر از دو معیار دیگر است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۵-۶۷ آورده شده است. باز هم معیار فون میزز دقیق‌ترین نتایج را در میان سه معیار بررسی شده ارائه نموده است.



شکل ۵-۶۵- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

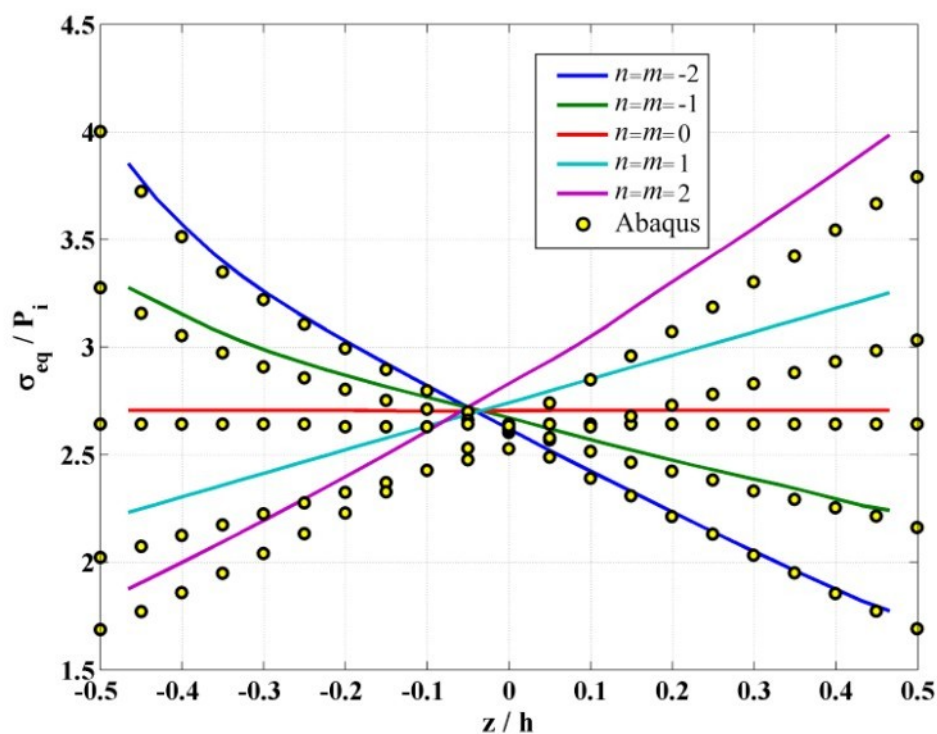


شکل ۵-۶۶- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

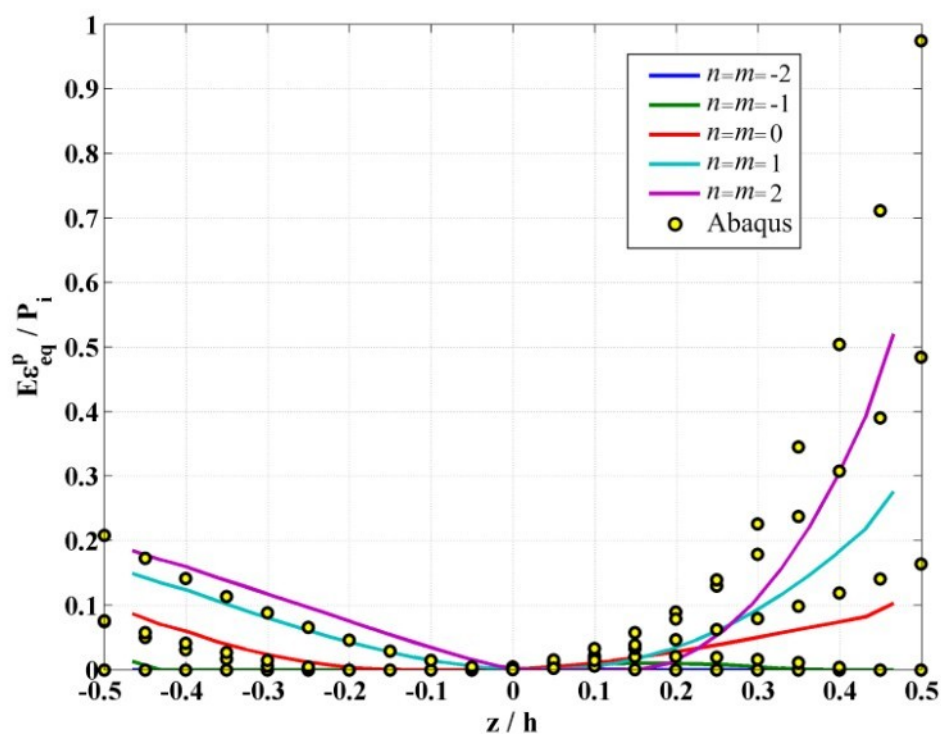


شکل ۵-۶۷- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

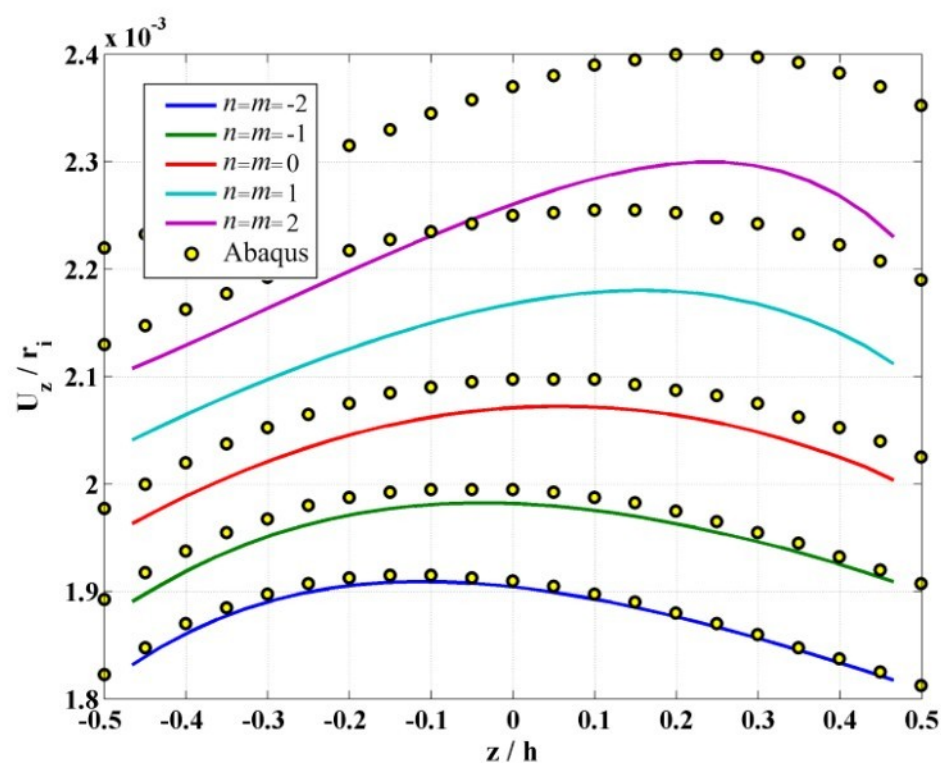
توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۶۸-۵ مشاهده می‌نمایید. ثابت‌های ناهمگنی کوچکتر از دقت بیشتری برخوردارند. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۶۹-۵ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۷۰-۵ آورده شده است. با افزایش ثابت ناهمگنی از دقت نتایج کاسته می‌شود.



شکل ۶۸-۵- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۵-۶۹- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۵-۷۰- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

۵-۳-۴- استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد در معرض بار حرارتی

در این بخش نتایج حل مسأله با در نظر گرفتن دمای سطح داخلی ۱۰۰ درجه‌ی سلسیوس بیش از دمای مرجع و دمای سطح خارجی برابر با دمای مرجع ارائه شده است. فشار داخلی که در آن تسلیم استوانه در میانه‌ی طول آن ($x = L/2$) آغاز می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۱۵ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۱۶ ارائه شده است و شعاع سطحی که تسلیم از آن آغاز می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۱۷ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۱۸ ارائه شده است. فشار داخلی که در آن سطح میانی استوانه ($z = 0$) در میانه‌ی طول آن تسلیم می‌شود با استفاده از جزء مثلثی در جدول ۵-۱۹ و با استفاده از جزء مستطیلی در جدول ۵-۲۰ ارائه شده است. فشار خارجی در این حالت‌ها در نظر گرفته نشده است.

جدول ۵-۱۶- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۵۵٫۳۱	۵۲٫۹۸	۶۵٫۸۵
$n=m=l=-1$	۶۱٫۳۰	۶۰٫۸۵	۸۰٫۲۳
$n=m=l=0$	۶۶٫۶۱	۶۶٫۶۲	۹۱٫۰۰
$n=m=l=1$	۶۹٫۳۳	۷۰٫۳۶	۱۰۰٫۷۲
$n=m=l=2$	۶۵٫۶۳	۶۸٫۷۵	۱۰۶٫۱۴

جدول ۵-۱۷- فشار داخلی آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x = L/2$ (MPa)

معیار رانکین	معیار ترسکا	معیار فون میزز	نرم‌افزار Abaqus
$n=m=l=-2$	۵۵٫۶۲	۵۳٫۱۶	۶۶٫۰۸
$n=m=l=-1$	۶۱٫۹۸	۶۱٫۰۲	۸۰٫۳۴
$n=m=l=0$	۶۷٫۹۶	۶۶٫۸۴	۹۰٫۷۰
$n=m=l=1$	۷۱٫۹۹	۷۰٫۶۴	۹۹٫۵۱
$n=m=l=2$	۷۰٫۷۶	۶۹٫۱۱	۱۰۲٫۹۸

جدول ۵-۱۸- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مثلثی در $x=L/2$ (mm)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۵۵۵	۰٫۰۵۲۴	۰٫۰۵۲۲
$n=m=l=-1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۵۶۹	۰٫۰۵۶۱
$n=m=l=0$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰

جدول ۵-۱۹- شعاع سطح آغاز تسلیم استوانه با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (mm)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۵۵۹	۰٫۰۵۲۷	۰٫۰۵۲۲
$n=m=l=-1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۵۶۹	۰٫۰۵۶۱
$n=m=l=0$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=1$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰
$n=m=l=2$	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰	۰٫۰۶۰۰

جدول ۵-۲۰- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مثلثی در $x=L/2$ (MPa)

معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۷۱٫۲۹	۵۷٫۶۷	۶۶٫۵۸	۶۶٫۶۶
$n=m=l=-1$	۹۲٫۰۸	۷۳٫۸۴	۸۳٫۰۳	۸۲٫۶۳
$n=m=l=0$	۱۲۱٫۴۸	۹۶٫۴۹	۱۰۵٫۳۶	۱۰۳٫۵۳
$n=m=l=1$	۱۶۳٫۶۵	۱۲۸٫۵۶	۱۳۵٫۹۳	۱۳۰٫۳۹
$n=m=l=2$	۲۲۴٫۹۱	۱۷۴٫۴۰	۱۷۸٫۱۰	۱۶۴٫۴۲

جدول ۵-۲۱- فشار داخلی آغاز تسلیم سطح میانی با استفاده از جزء مستطیلی در $x=L/2$ (MPa)

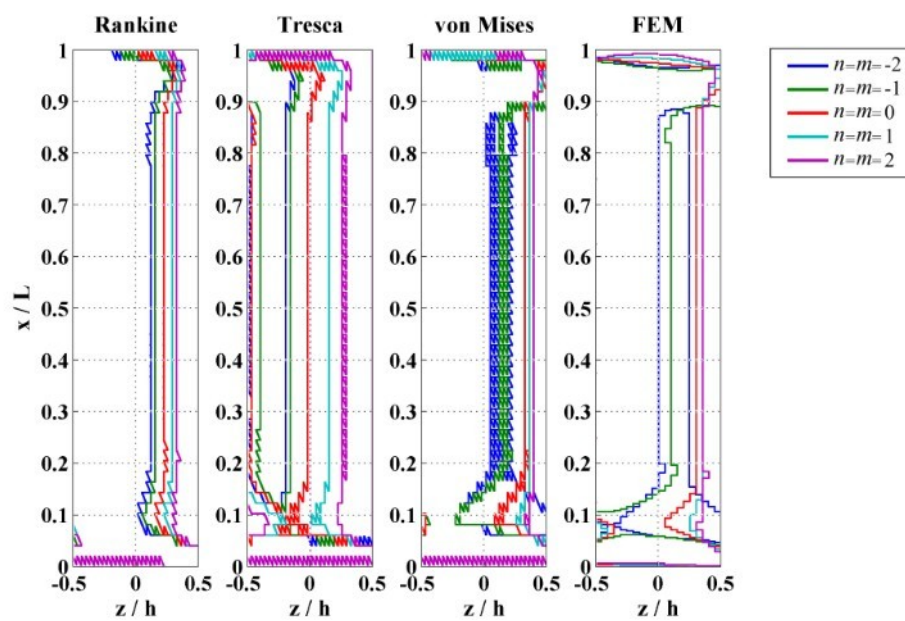
معيار رانکين	معيار ترسکا	معيار فون ميزز	نرم افزار Abaqus	
$n=m=l=-2$	۷۱٫۹۱	۵۷٫۸۵	۶۶٫۷۹	۶۶٫۶۶
$n=m=l=-1$	۹۲٫۹۰	۷۴٫۰۶	۸۳٫۲۷	۸۲٫۶۳
$n=m=l=0$	۱۲۲٫۵۴	۹۶٫۷۴	۱۰۵٫۶۴	۱۰۳٫۵۳
$n=m=l=1$	۱۶۵٫۹۷	۱۲۸٫۸۶	۱۳۶٫۲۸	۱۳۰٫۳۹
$n=m=l=2$	۲۲۶٫۴۴	۱۷۴٫۷۸	۱۷۸٫۵۲	۱۶۴٫۴۲

همان‌طور که در جدول‌ها مشاهده می‌کنید با افزایش ثابت ناهمگنی فشار مورد نیاز برای تسلیم استوانه نیز افزایش می‌یابد. البته معیارهای رانکین و ترسکا برای ثابت ناهمگنی ۲ فشار آغاز تسلیم کمتری از ثابت ناهمگنی ۱ گزارش می‌نمایند. با توجه به نتایج جدول‌ها می‌توان دریافت که در پیش‌بینی فشار و محل آغاز تسلیم استوانه معیار فون میزز بیشترین دقت را دارد. در پیش‌بینی آغاز تسلیم استوانه در بیشتر موارد معیار ترسکا کمترین دقت و در پیش‌بینی محل آغاز تسلیم استوانه معیار رانکین کمترین دقت را دارد. در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم سطح میانی برای ثابت‌های ناهمگنی بیشتر از صفر معیار ترسکا و برای سایر ثابت‌های ناهمگنی معیار فون میزز بیشترین دقت را دارد. جزء مستطیلی در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم ثابت‌های ناهمگنی بیشتر از صفر دقیق‌تر و جزء مثلثی در سایر موارد دقیق‌تر است.

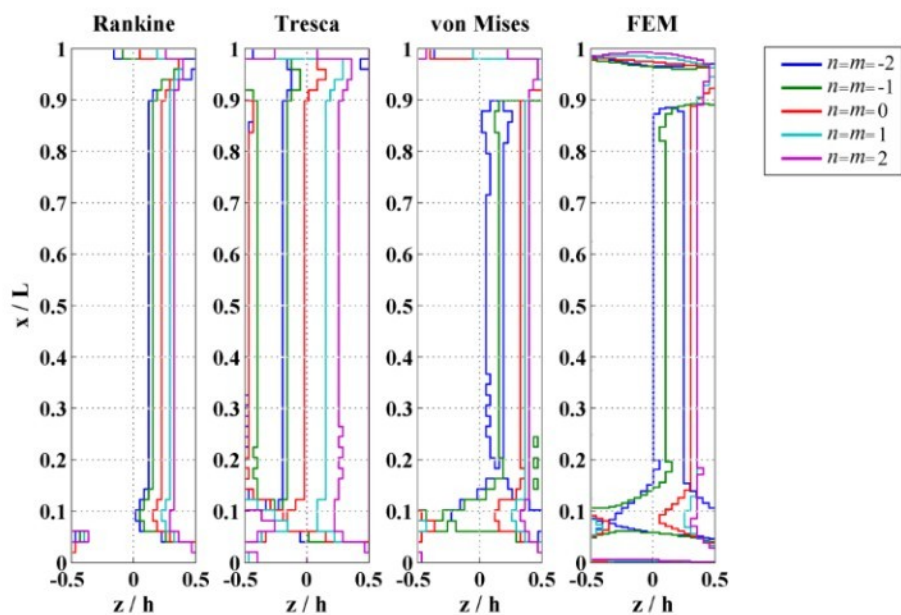
شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک برای استوانه با ثابت‌های ناهمگنی مختلف در شکل ۵-۷۱ و ۵-۷۲ و تصویر مناطق تسلیم شده‌ی استوانه در شکل ۵-۷۳ و ۵-۷۴ آورده شده است. فشار یکنواخت داخلی برای این دو نمودار که برابر میانگین فشار آغاز تسلیم استوانه و فشار تسلیم لایه‌ی میانی حاصل از نرم‌افزار Abaqus در نظر گرفته شده است در جدول ۵-۲۲ آورده شده است. مشاهده می‌شود که نتیجه‌ی حاصل از معیار فون میزز بیشترین شباهت را به نتایج حاصل از نرم‌افزار Abaqus دارد. ولی می‌توان دریافت که با تغییر فشار داخلی وارد شده به استوانه شکل ناحیه‌ی پلاستیک هر کدام از معیارها می‌تواند به شکل به‌دست آمده از نرم‌افزار Abaqus نزدیک شود. نوع جزء به‌کار رفته تاثیر چندانی بر نتایج ندارد. جزء مثلثی اثر شرایط مرزی را در شکل ناحیه‌ی پلاستیک بهتر از جزء مستطیلی نمایش می‌دهد ولی جزء مستطیلی شکل یکنواخت‌تری ایجاد کرده است.

جدول ۵-۲۲- فشار داخلی اعمال شده بر استوانه (MPa)

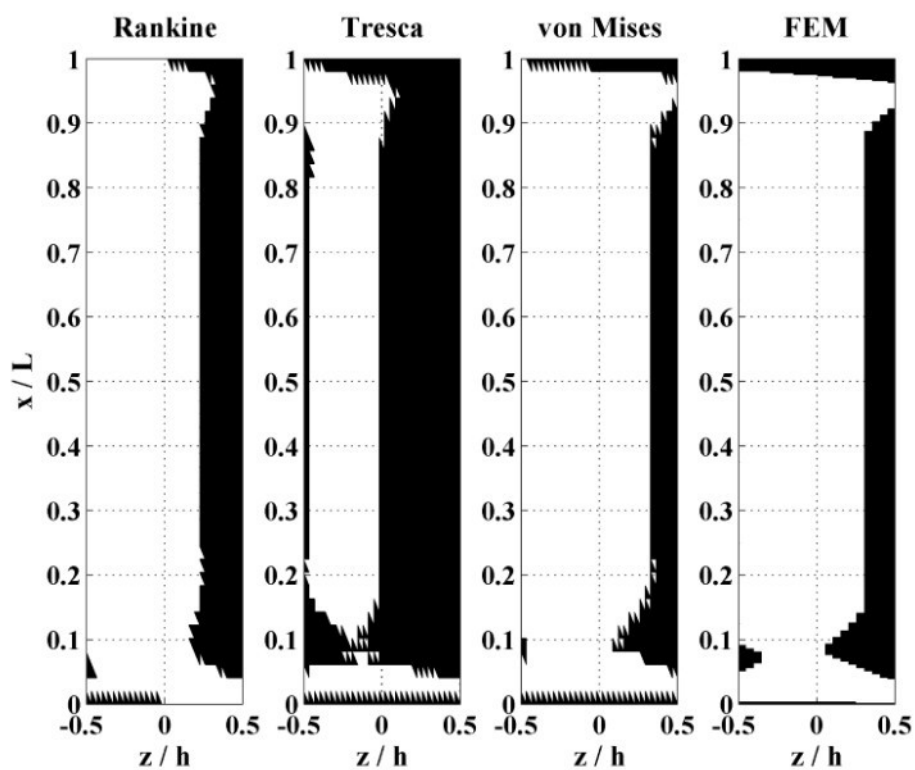
$n=m=l=2$	$n=m=l=1$	$n=m=l=0$	$n=m=l=-1$	$n=m=l=-2$
۱۳۵٫۲۸	۱۱۵٫۵۵	۹۷٫۲۶	۸۱٫۴۳	۶۶٫۲۵



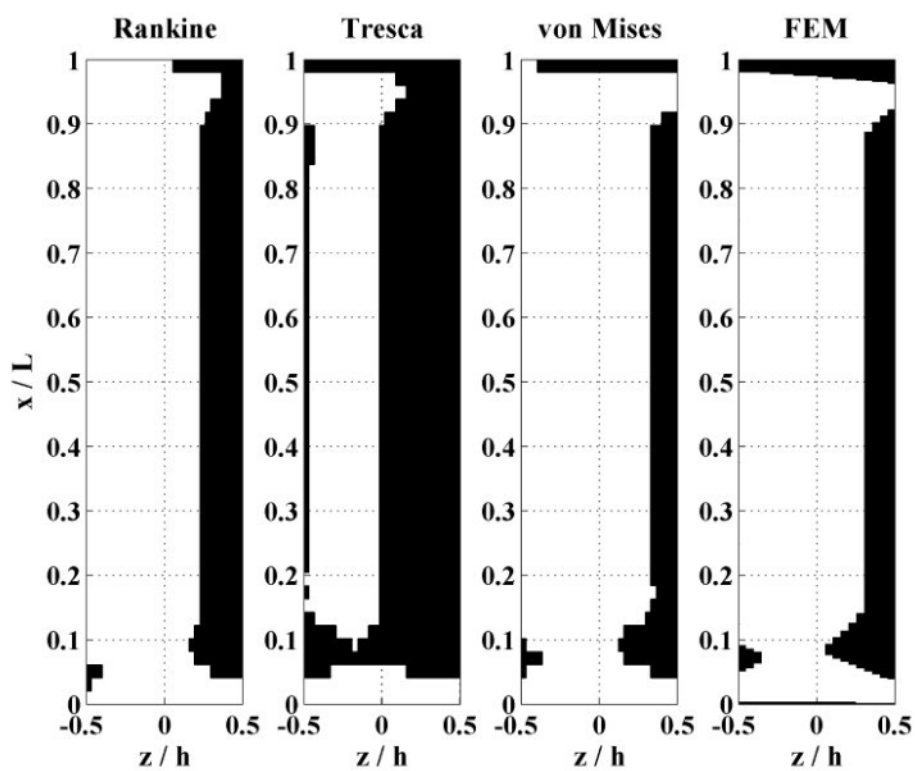
شکل ۵-۷۱- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مثلثی



شکل ۵-۷۲- شعاع مرز ناحیه‌ی پلاستیک به‌دست آمده از جزء مستطیلی

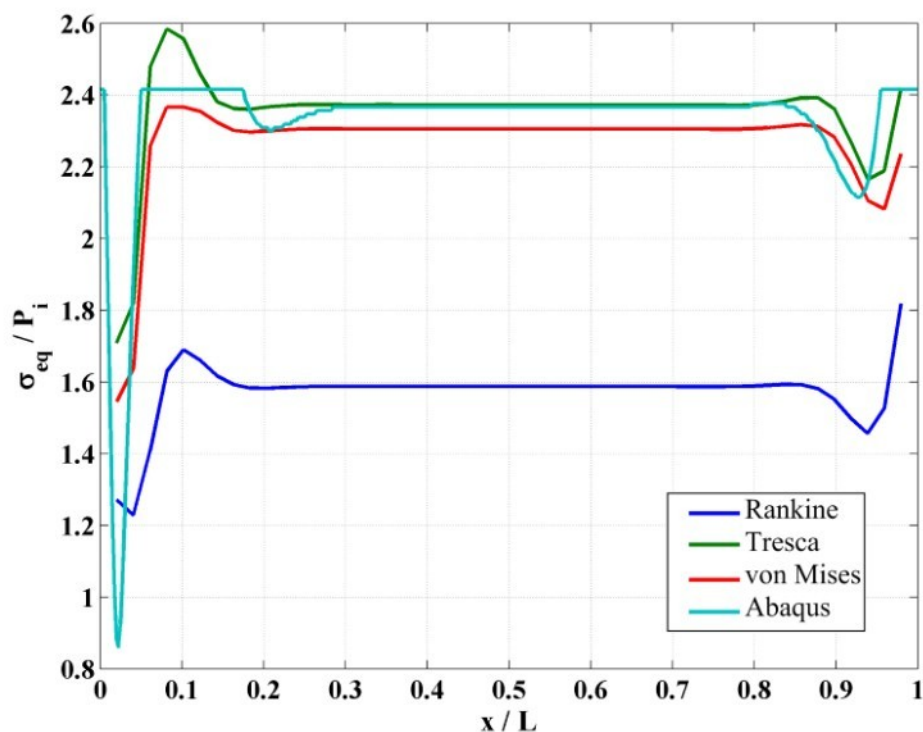


شکل ۵-۷۳- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مثلثی

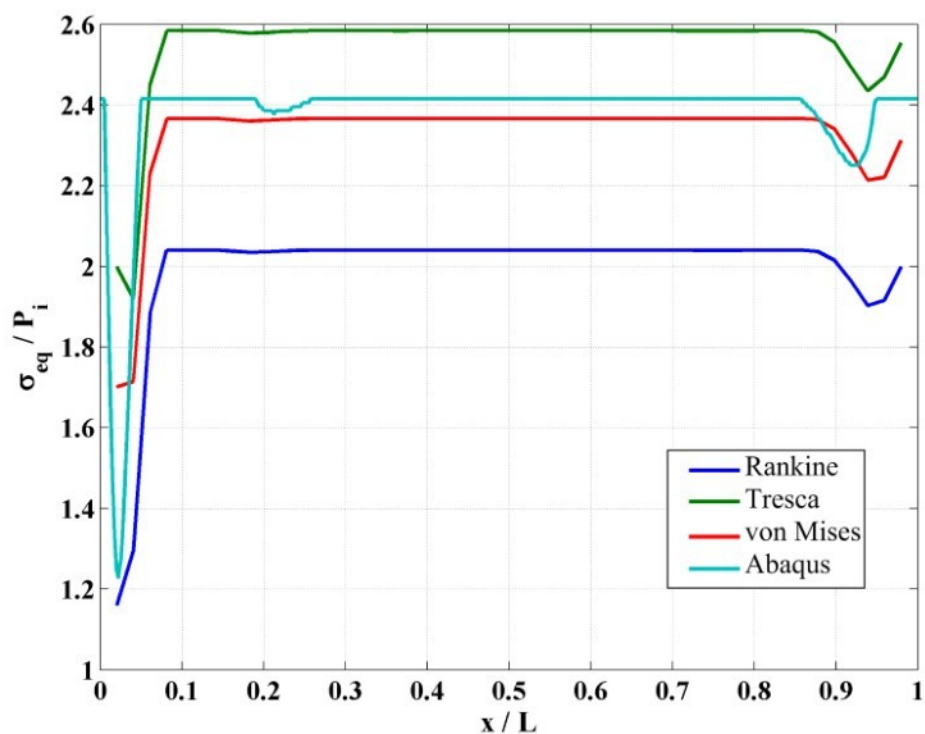


شکل ۵-۷۴- مناطق تسلیم شده‌ی استوانه‌ی همگن به‌دست آمده از جزء مستطیلی

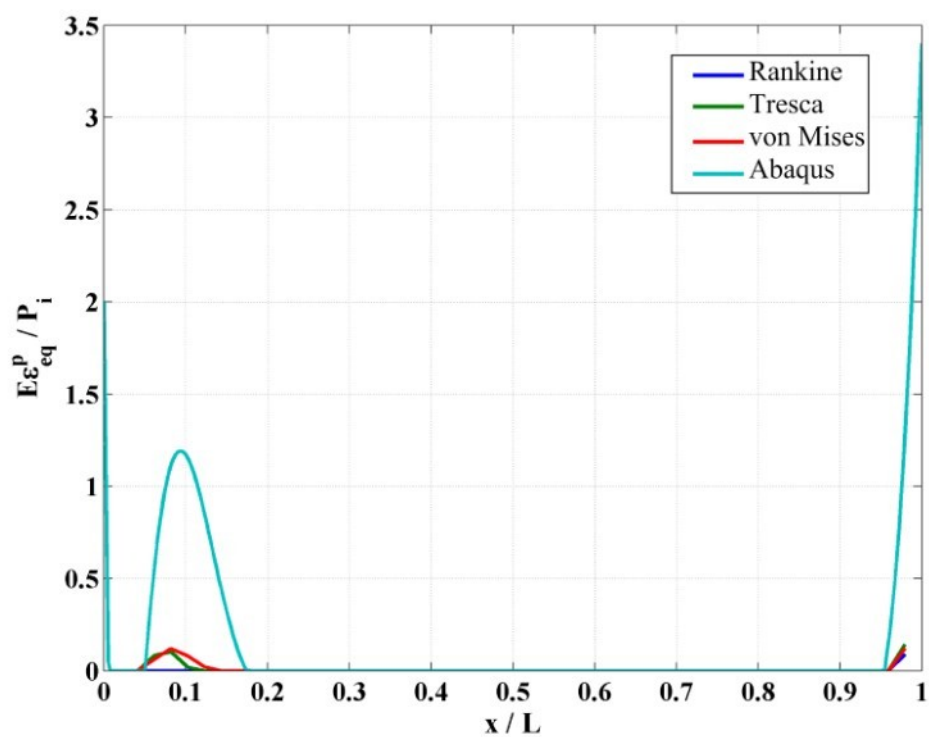
از آن جا که نوع جزء اثر قابل توجهی در نتایج ندارد در ادامه نتایج فقط با استفاده از جزء مستطیلی برای فشار یکنواخت داخلی تسلیم لایه‌ی میانی (جدول ۵-۲۱) برای هر معیار و برای هر ثابت ناهمگنی محاسبه و ارائه شده‌اند. توزیع تنش معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۷۵ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۷۶ آورده شده است. معیار فون میزز در $z = 0$ و در بعضی نقاط برای $z = -h/4$ بیشترین دقت را دارد. در $z = -h/4$ معیار ترسکا بیشترین دقت را در طول استوانه دارد. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۷۷ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۷۸ آورده شده است. هر سه معیار تقریباً دقت مشابهی دارند. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۷۹ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۸۰ آورده شده است. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی معیار فون میزز در بیشتر طول استوانه دقیق‌ترین نتایج را ارائه کرده است.



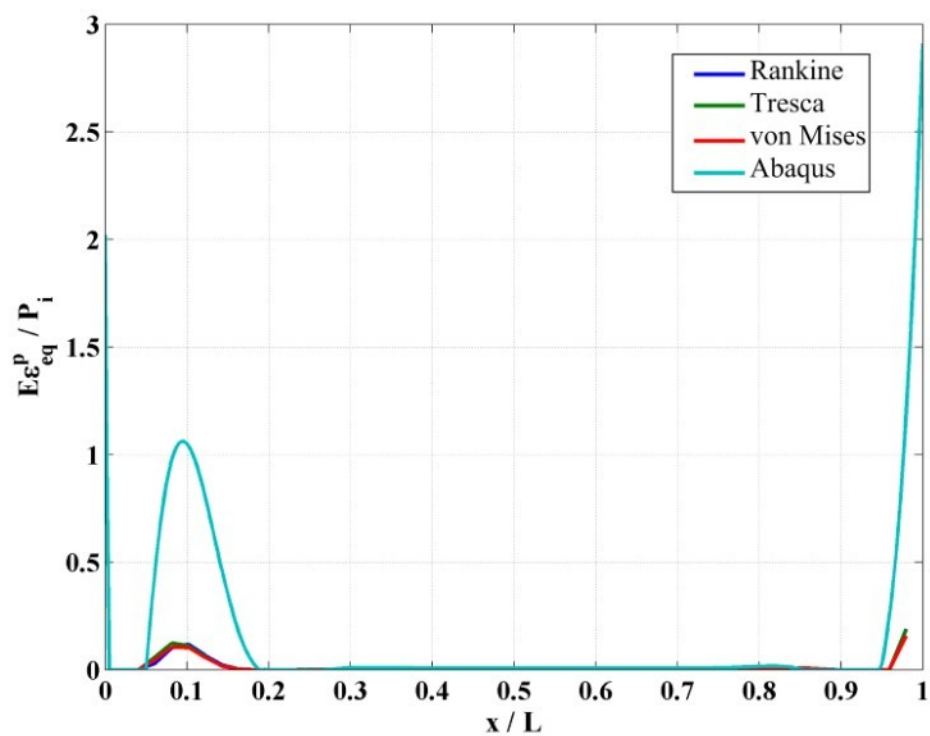
شکل ۵-۷۵- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z = -h/4$



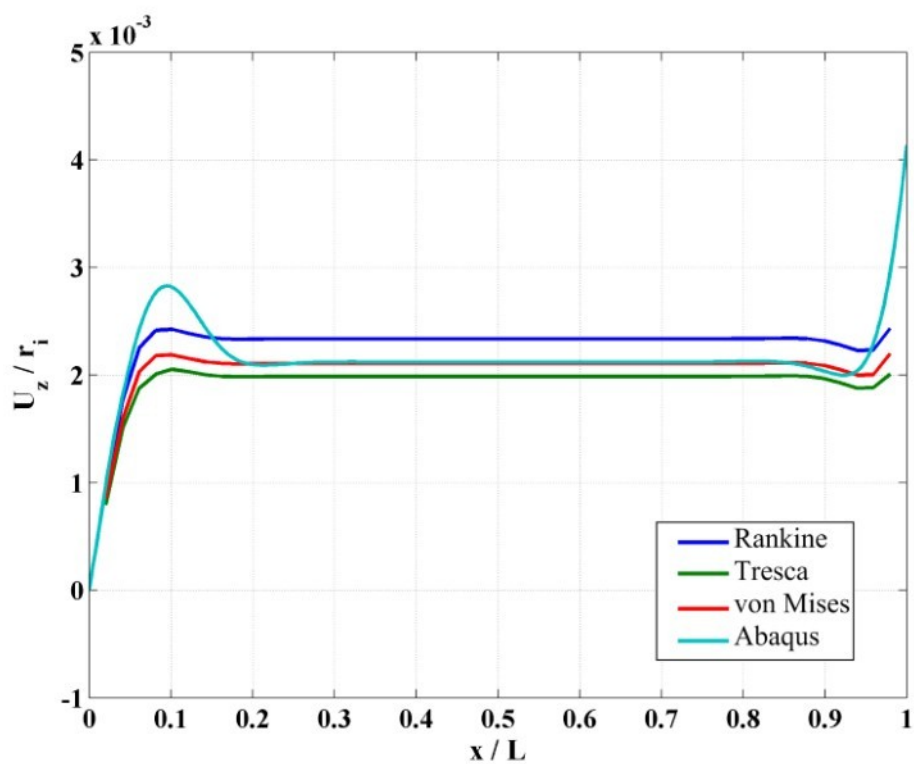
شکل ۵-۷۶- توزیع تنش معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$



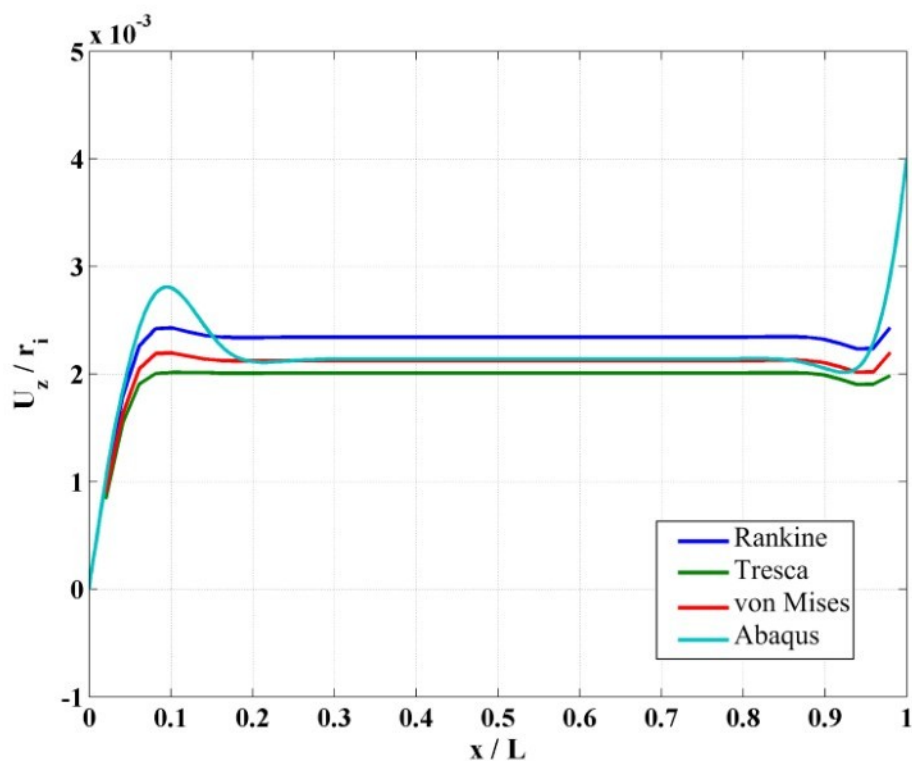
شکل ۵-۷۷- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$



شکل ۵-۷۸- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

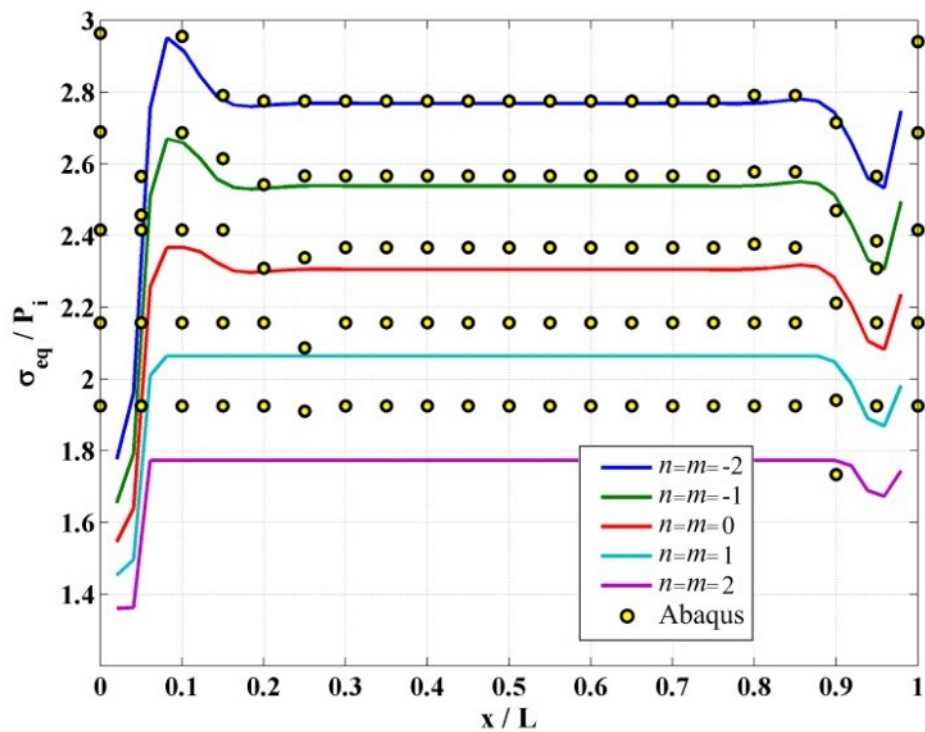


شکل ۵-۷۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=-h/4$

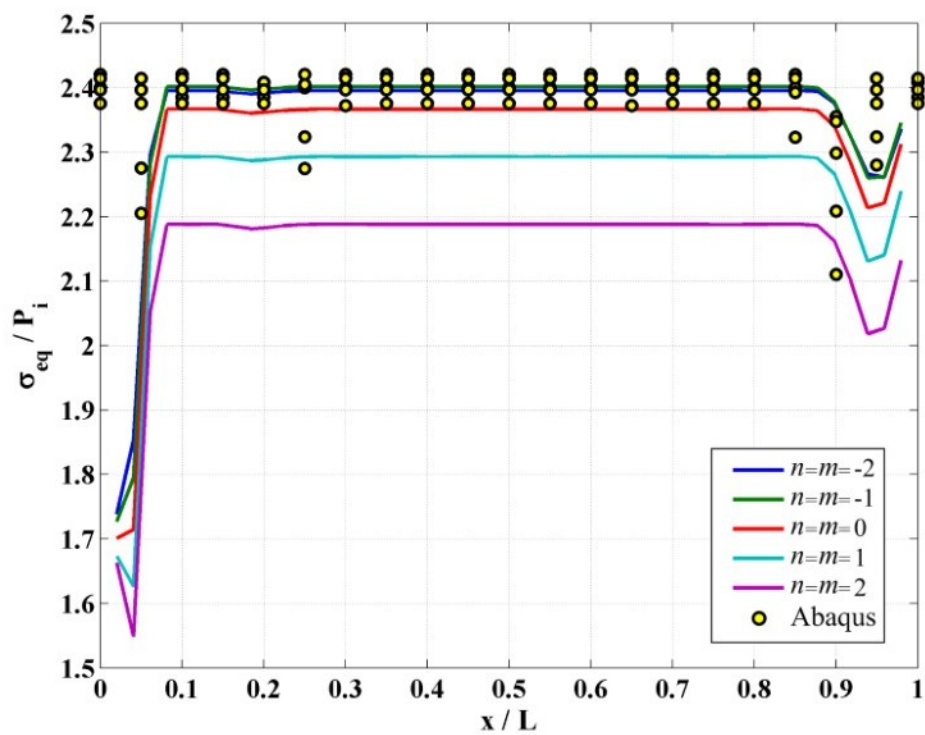


شکل ۵-۸۰- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار در طول استوانه برای $n=m=0$ و $z=0$

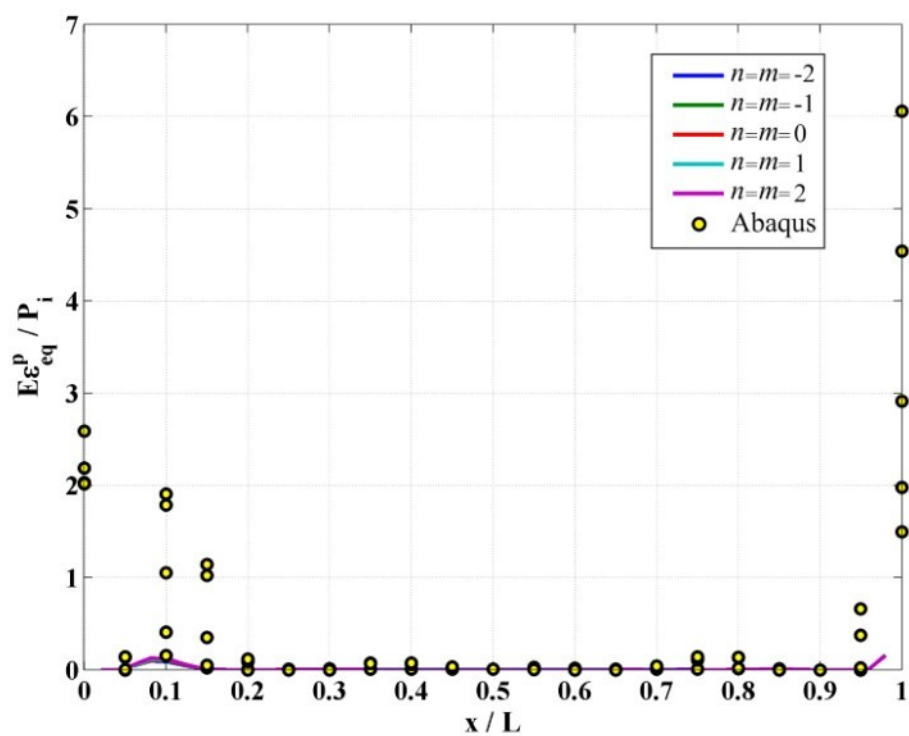
توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه را برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۸۱ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۸۲ مشاهده می‌نمایید. با افزایش ثابت‌های ناهمگنی دقت نتایج کمتر می‌شود. نتایج در $z = -h/4$ دقیق‌ترند. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۸۳ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۸۴ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$ در شکل ۵-۸۵ و برای $z = 0$ در شکل ۵-۸۶ آورده شده است. نتایج برای تمام ثابت‌های ناهمگنی در بیشتر طول استوانه دقت خوبی دارند.



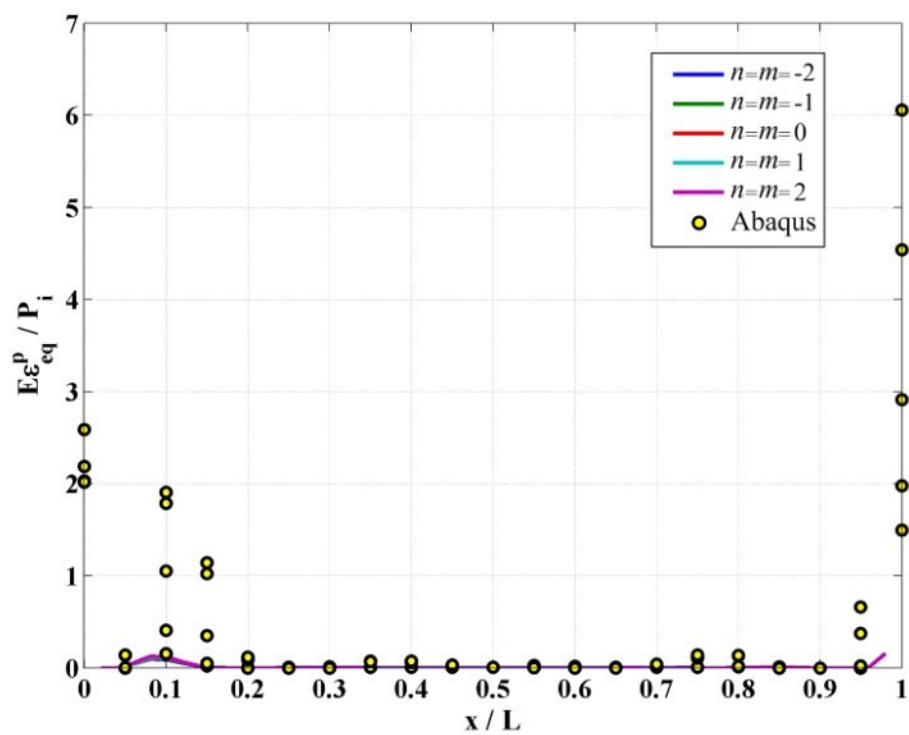
شکل ۵-۸۱- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



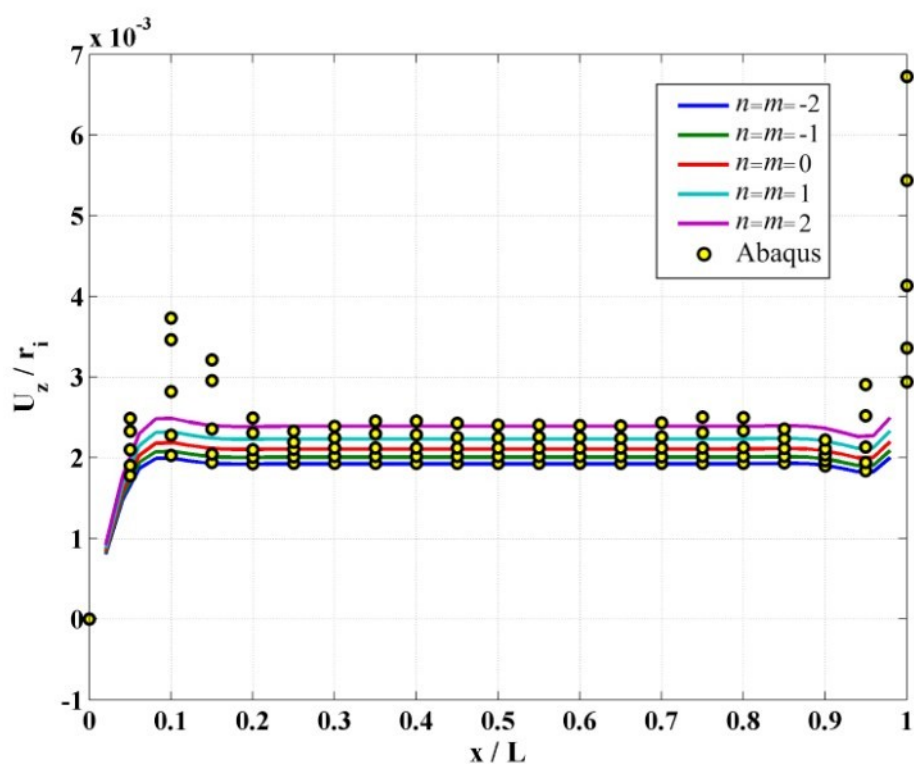
شکل ۵-۸۲- توزیع تنش معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$



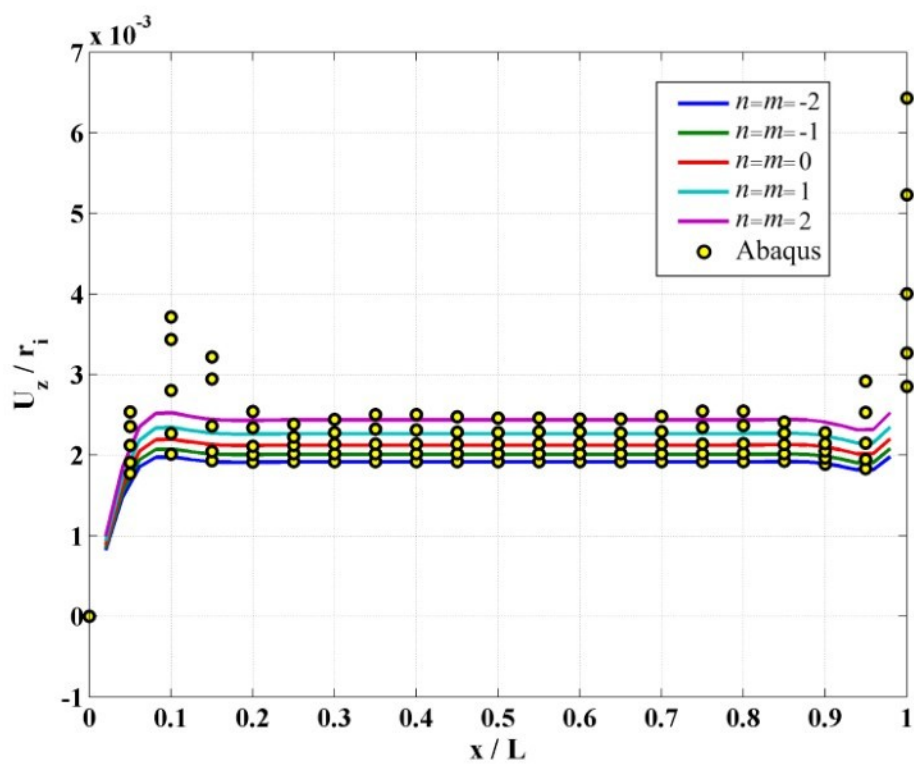
شکل ۵-۸۳- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$



شکل ۵-۸۴- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

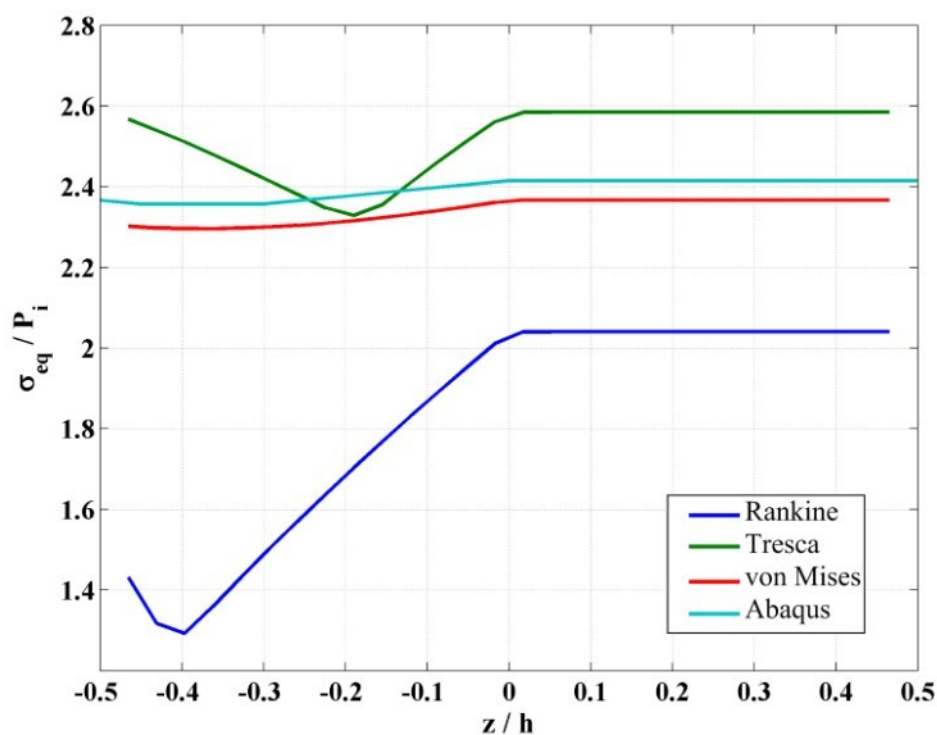


شکل ۵-۸۵- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = -h/4$

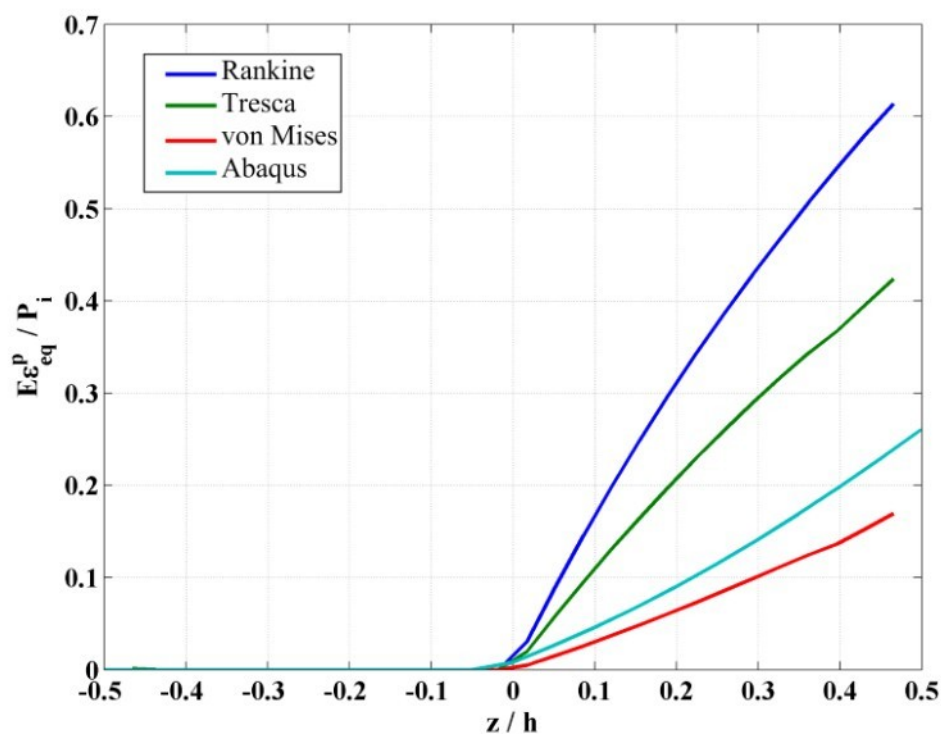


شکل ۵-۸۶- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز در طول استوانه برای $z = 0$

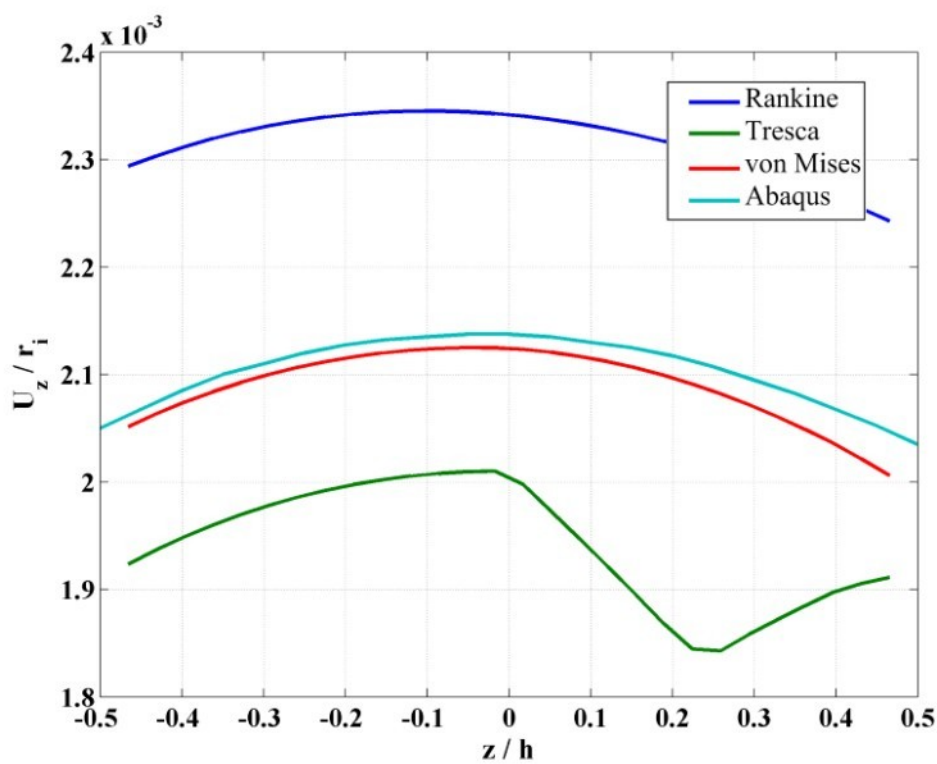
توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۸۷-۵ آورده شده است. معیار فون میزز بیشترین دقت را نسبت به دو معیار دیگر دارند. توزیع کرنش پلاستیک معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر برای در شکل ۸۸-۵ آورده شده است. معیار فون میزز دقیق‌تر از دو معیار دیگر است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن به ازای ثابت ناهمگنی صفر در شکل ۸۹-۵ آورده شده است. باز هم معیار فون میزز در میان سه معیار بررسی شده دقیق‌تر است.



شکل ۸۷-۵- توزیع تنش معادل هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

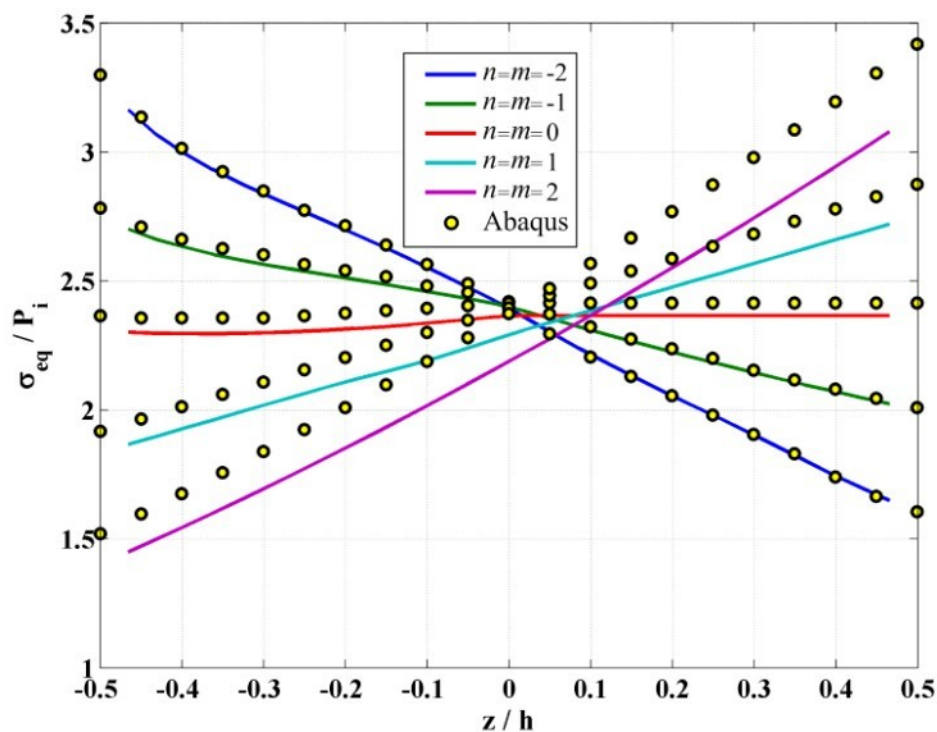


شکل ۵-۸۸- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیارها نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

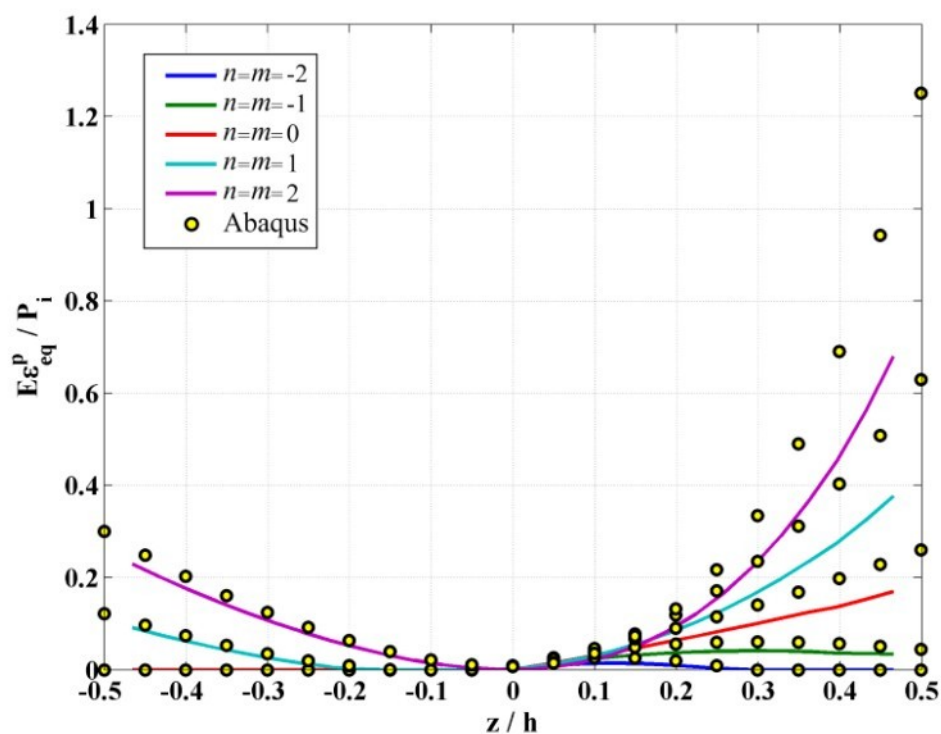


شکل ۵-۸۹- جابه‌جایی شعاعی حاصل از هر معیار نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن برای $n=m=0$

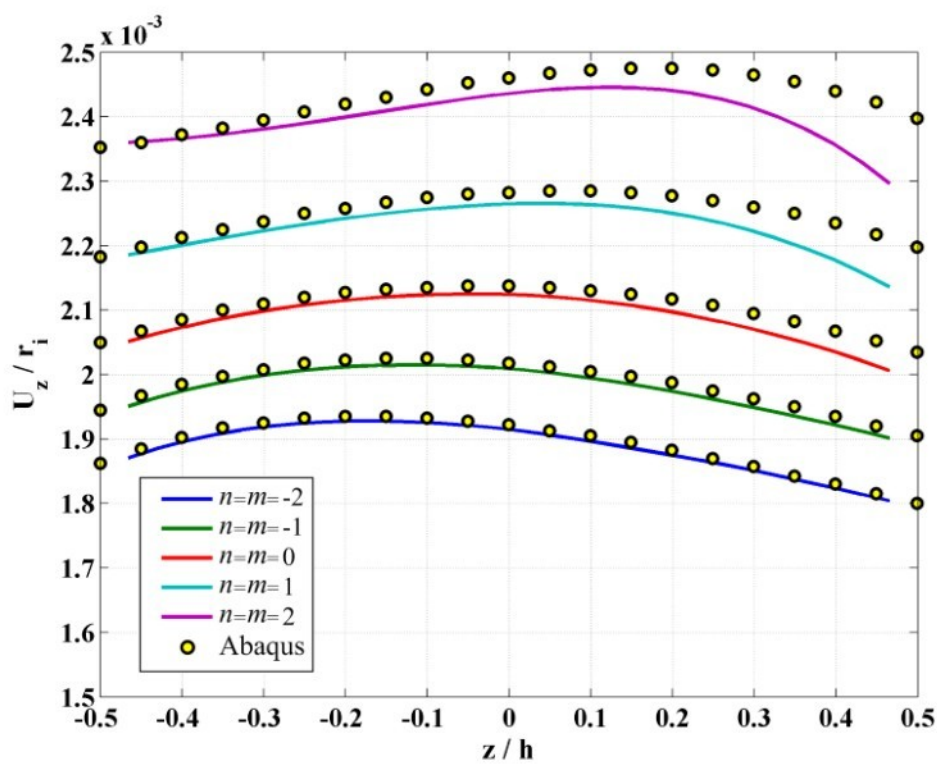
توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن را در شکل ۵-۹۰ مشاهده می‌نمایید. نتایج ارائه شده برای ثابت‌های ناهمگنی کوچکتر دقیق‌ترند. توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۵-۹۱ آورده شده است. جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن در شکل ۵-۹۲ آورده شده است. نتایج ارائه شده برای ثابت‌های ناهمگنی کوچکتر دقت بیشتری از نتایج ارائه شده برای ثابت‌های ناهمگنی بزرگتر دارند.



شکل ۵-۹۰- توزیع تنش معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۵-۹۱- توزیع کرنش پلاستیک معادل معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن



شکل ۵-۹۲- جابه‌جایی شعاعی حاصل از معیار فون میزز نسبت به شعاع استوانه در میانه‌ی طول آن

فصل ۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

❖ جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

❖ پیشنهادها

در چهار فصل قبل روابط مربوط به تحلیل الاستوپلاستیک و ترموالاستوپلاستیک پوسته‌های استوانه‌ای جدار کلفت ساخته شده از مواد ناهمگن با تغییرات توانی خواص در جهت شعاع استوانه به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم و روش اجزای محدود با استفاده از دو جزء خطی مثلثی سه گره‌ای و مستطیلی چهار گره‌ای استخراج و ارائه شدند و روش حل آن‌ها برای استوانه با دو سر گیردار و استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد مطرح شد. پس نتایج عددی برای ثابت‌های ناهمگنی ۱-، ۰-، ۱ و ۲ برای استوانه‌ای با طول، شعاع و خواص مشخص محاسبه و با نتایج حل مسأله به کمک نرم‌افزار Abaqus مقایسه شدند. در این فصل به جمع‌بندی نتایج به‌دست آمده از فصول قبل و بیان نتیجه‌ای که از این تحقیق به‌دست آمده است پرداخته شده و در پایان پیشنهادهایی برای سایر موضوعات تحقیق در این زمینه مطرح شده است.

۱-۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

پیش از هر چیز لازم به ذکر است که نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار Abaqus به عنوان مرجعی برای محاسبه‌ی خطا در نظر گرفته شده‌اند. ولی روش به‌کار رفته در این نرم‌افزار نیز دقیق نبوده و مقداری خطا از جمله خطای ساده‌سازی روابط به‌کار رفته، خطای تبدیل جسم به اجزای نامحدود، خطای ساده‌سازی محاسبات عددی، خطای محاسبات عددی و ... دارد. بنابراین بیان خطا و اختلاف نتایج با نتایج روش اجزای محدود بیانگر دقیقاً همان میزان خطا با واقعیت نیست.

۱-۱-۶- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه معیار رانکین دقیق‌تر از معیارهای ترسکا و فون میزز است و در پیش‌بینی فشار تسلیم سطح میانی استوانه معیار ترسکا دقیق‌تر از معیارهای رانکین و فون میزز است. معیار ترسکا در محاسبه‌ی تنش معادل در استوانه نتایج دقیق‌تری را در بین سه معیار بررسی شده ارائه کرده است. هیچ‌کدام از معیارها در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل دقیق نیستند. معیار

رانکین در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل استوانه دقیق‌تر از معیارهای دیگر است. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی استوانه معیار رانکین برای استوانه با دو سر گیردار و معیار فون میزز برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد دقیق‌تر از معیارهای دیگر است.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول قادر به نمایش اثر ثابت ناهمگنی بر روی کرنش پلاستیک معادل و جابه‌جایی شعاعی در سر آزاد استوانه نیست. تنش معادل و جابه‌جایی شعاعی در استوانه با دو سر گیردار دقیق‌تر از استوانه با دو سر آزاد است.

۶-۱-۲- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول

در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه با دو سر گیردار و تسلیم سطح میانی آن استفاده از معیار فون میزز دقت بیشتری را در نتایج به‌وجود می‌آورد. هیچ‌کدام از معیارها قادر به پیش‌بینی درست محل آغاز تسلیم استوانه نیستند.

معیار فون میزز در محاسبه‌ی تنش معادل در استوانه نتایج دقیق‌تری را در بین سه معیار بررسی شده ارائه کرده است. هیچ‌کدام از معیارها در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل دقیق نیستند. ولی معیار ترسکا برای استوانه با دو سر گیردار و معیار فون میزز برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد دقت بیشتری از دو معیار دیگر دارد. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی استوانه معیار ترسکا برای استوانه با دو سر گیردار و معیار فون میزز برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد دقیق‌تر از معیارهای دیگر است.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول در استوانه‌ای که در معرض بار حرارتی است میزان اثر ثابت ناهمگنی بر تنش معادل، کرنش پلاستیک معادل و جابه‌جایی شعاعی در طول استوانه را به خوبی پیش‌بینی نمی‌کند. نتایج ارائه شده نسبت به شعاع استوانه دقت قابل قبولی ندارند.

به طور کلی نتایج حاصل از FSDT در استوانه‌ای که در معرض بار حرارتی است تفاوت زیادی با نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار Abaqus برای همان استوانه دارد.

۶-۱-۳- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم

در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه معیار فون میزز دقیق‌تر از معیارهای رانکین و ترسکا است و در پیش‌بینی فشار تسلیم سطح میانی استوانه معیار ترسکا دقیق‌تر از معیارهای رانکین و فون میزز است. معیار ترسکا در محاسبه‌ی تنش معادل در استوانه نتایج دقیق‌تری را در بین سه معیار بررسی شده ارائه کرده است. هیچ‌کدام از معیارها در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل دقیق نیستند. معیار ترسکا در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل استوانه دقیق‌تر از معیارهای دیگر است. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی استوانه رانکین و معیار فون میزز برای استوانه با دو سر گیردار و معیار فون میزز برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد دقیق‌تر از معیارهای دیگر است.

بر خلاف FSDT، تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم قادر به نمایش اثر ثابت ناهمگنی بر روی کرنش پلاستیک معادل و جابه‌جایی شعاعی در سر آزاد استوانه می‌باشد. تنش معادل و اثر ثابت ناهمگنی بر آن در استوانه با دو سر گیردار دقیق‌تر از استوانه با دو سر آزاد است.

۶-۱-۴- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم

هیچ‌کدام از معیارها قادر به پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه در مسأله‌ی در نظر گرفته شده نبودند زیرا بار حرارتی اعمال شده خود به تنهایی باعث تسلیم بخش کوچکی از استوانه در سطح داخلی آن شده است. فشار تسلیم سطح میانی محاسبه شده برای استوانه با دو سر گیردار دقیق‌تر از فشار تسلیم سطح میانی محاسبه شده برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد است.

معیار فون میزز در محاسبه‌ی تنش معادل در استوانه نتایج دقیق‌تری را در بین سه معیار بررسی شده ارائه کرده است. هیچ‌کدام از معیارها در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل دقیق نیستند. معیار فون میزز برای استوانه با دو سر گیردار و معیار ترسکا برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد دقت بیشتری از دو معیار دیگر دارد. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی استوانه معیارهای رانکین و

فون میز برای استوانه با دو سر گیردار و معیار ترسکا برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد دقیق‌ترند.

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی سوم در استوانه‌ای که در معرض بار حرارتی است میزان اثر ثابت ناهمگنی بر تنش معادل و جابه‌جایی شعاعی را در طول استوانه را به خوبی پیش‌بینی نمی‌کند. نتایج ارائه شده نسبت به شعاع استوانه دقت قابل قبولی ندارند.

۶-۵- تحلیل الاستوپلاستیک به کمک روش اجزای محدود

کاربرد اجزای مثلثی و مستطیلی تاثیر چندانی در دقت نتایج ندارد ولی از آن‌جا که به‌جای هر جزء مستطیلی دو جزء مثلثی قرار می‌گیرد نتایج به‌دست آمده از کاربرد اجزای مثلثی دقت و ظرافت بیشتری از نتایج حاصل از کاربرد اجزای مستطیلی دارند.

در پیش‌بینی فشار آغاز تسلیم استوانه معیار فون میزز دقیق‌تر از معیارهای ترسکا و رانکین است و در پیش‌بینی فشار تسلیم سطح میانی استوانه معیار ترسکا دقیق‌تر از معیارهای رانکین و فون میزز است.

معیار ترسکا در محاسبه‌ی تنش معادل در استوانه نتایج دقیق‌تری را در بین سه معیار بررسی شده ارائه کرده است. هیچ‌کدام از معیارها در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل دقیق نیستند. معیار ترسکا در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل استوانه دقیق‌تر از معیارهای دیگر است. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی استوانه معیار رانکین برای استوانه با دو سر گیردار و معیار فون میزز برای استوانه با یک سر گیردار و یک سر آزاد دقیق‌تر از معیارهای دیگر است.

تنش معادل، جابه‌جایی شعاعی و میزان اثر ثابت ناهمگنی بر تنش معادل در استوانه با دو سر گیردار دقیق‌تر از استوانه با دو سر آزاد است.

۶-۱-۶- تحلیل ترموالاستوپلاستیک به کمک روش اجزای محدود

در پیش‌بینی فشار و محل آغاز تسلیم استوانه و فشار تسلیم سطح میانی آن معیار فون میزز دقت بیشتری را در میان سه معیار بررسی شده داراست.

معیار فون میزز در محاسبه‌ی تنش معادل در استوانه نتایج دقیق‌تری را در بین سه معیار بررسی شده ارائه کرده است. البته در بخشی از طول استوانه در $z = -h/4$ معیار ترسکا تنش معادل دقیق‌تری را پیش‌بینی نموده است. هیچ‌کدام از معیارها در محاسبه‌ی کرنش پلاستیک معادل دقیق نیستند. ولی معیار فون میزز دقت بیشتری از دو معیار دیگر دارد. در محاسبه‌ی جابه‌جایی شعاعی استوانه معیار فون میزز دقیق‌تر از معیارهای دیگر است.

ثابت‌های ناهمگنی بزرگتر دقت کمتری نسبت به ثابت‌های ناهمگنی کوچکتر دارند.

۶-۱-۷- نتایج کلی

مهم‌ترین نتیجه‌ای که از این تحقیق می‌توان گرفت در مورد اثر ثابت ناهمگنی بر مقاومت ماده است و همان‌طور که در تمام فصول دیده شد افزایش ثابت ناهمگنی باعث افزایش توان تحمل بار استوانه می‌شود. البته با افزایش ثابت ناهمگنی دقت نتایج محاسبه شده کاهش می‌یابد.

تسلیم استوانه‌ای در معرض فشار داخلی است در غیاب بار حرارتی از داخل آن آغاز می‌شود ولی در حضور بار حرارتی امکان آغاز تسلیم از هر نقطه‌ی آن وجود دارد. با فاصله گرفتن از دو انتهای استوانه اثر شرایط مرزی بسیار کم می‌شود. نتایج در سطح میانی استوانه دقت بیشتری دارند.

هیچ‌کدام از مقادیر محاسبه شده برای کرنش پلاستیک معادل دقت قابل قبولی ندارند ولی شکل منحنی‌های حاصل نشان می‌دهد که با در نظر گرفتن یک ضریب تصحیح می‌توان دقت این نتایج را بالا برد. نتایج به‌دست آمده از روش اجزای محدود بیشتر از نتایج به‌دست آمده از تئوری تغییر شکل برشی به نتایج حاصل از Abaqus نزدیک است که این نتیجه منطقی است زیرا نرم‌افزار Abaqus نیز از روش اجزای محدود برای حل مسأله استفاده می‌کند. نتایج حاصل از تئوری تغییر

شکل برشی مرتبه‌ی سوم بدون در نظر گرفتن بار حرارتی انطباق بسیار خوبی بر نتایج به‌دست آمده از روش اجزای محدود دارد.

در حل یک مسأله به کمک تئوری تغییر شکل برشی بهتر است از تئوری مرتبه‌ی سوم استفاده شود. در صورت استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول بهتر است این کار با احتیاط بیشتری انجام شود. در صورت استفاده از تئوری تغییر شکل برشی برای استوانه‌ای که در معرض بار حرارتی قرار دارد بهتر است از ضریب اطمینان بزرگتری استفاده نمود.

۶-۲- پیشنهادها

از جمله تحقیقاتی که در ادامه در این زمینه پیشنهاد می‌شود می‌توان بررسی شکل‌های هندسی مختلف از جمله استوانه با ضخامت ثابت، استوانه با ضخامت متغیر، مخروط و کره؛ در معرض بارگذاری‌های مختلف از جمله فشار داخلی و خارجی، بار حرارتی پایا و غیر پایا و نیروهای حجمی (مانند جسم دوار)؛ در شرایط مرزی مختلف از جمله دو سر گیردار، یک سر گیردار یک سر آزاد، تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای؛ بر اساس تئوری‌های مختلف از جمله الاستسیسته‌ی مستوی و تئوری تغییر شکل برشی؛ ساخته شده از مواد ناهمگن با تغییرات توانی یا نمایی خواص با در نظر گرفتن رفتار مختلف برای مواد از جمله الاستوپلاستیک، الاستیک-سخت‌شونده با کار خطی و غیر خطی و ویسکوالاستیک اشاره نمود.

همچنین بررسی سایر رفتارهای استاتیکی و دینامیکی مواد مانند خزش، خستگی، کماتش، ارتعاش و انتشار امواج در ماده نیز توصیه می‌شوند.

مراجع

- [1] Ugural A.C.; Stresses in plates and shells, McGraw Hill, Boston, 1999.
- [۲] شاکری، محمود؛ مقاومت پیسشرفته و الاستیسیته کاربردی، چاپ چهارم، انتشارات دانشگاه صنعتی امیر کبیر، تهران، ۱۳۸۶.
- [۳] قارونی، حامد؛ ۱۳۹۰، پایان‌نامه‌ی ارشد، تحلیل ترموالاستیک استوانه‌های چرخان جدار کلفت FGM با تغییرات نمایی مدول الاستیسیته به کمک تئوری تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول، دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
- [4] Voo L., Armand M., Kleinberger M. (2004); Stress Fracture Risk Analysis of the Human Femur Based on Computational Biomechanics, Johns Hopkins APL Technical Digest, Vol. 25, Nr. 3, pp. 223-230.
- [5] Rasheedat M.M., Esther T. (2012); Functionally Graded Material: An Overview, WCE 2012, London, UK.
- [۶] جانسون، ویلیام و ملور، پیتر ب.؛ پلاستیسیته، ترجمه‌ی کارن ابری‌نیا، چاپ اول، انتشارات یا مهدی (عج)، تهران، ۱۳۷۸.
- [7] Chakrabarty J.; Applied Plasticity, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [8] Singh S.; Theory of Plasticity and Metal Forming Processes, 3rd ed., Khanna Publishers, Delhi, 2003.
- [۹] چاندراپاتلا و بیلیگوندو؛ مقدمه‌ای بر روش اجزای محدود در مهندسی، ترجمه‌ی علی قدوسیان و مازیار رضائی، انتشارات دانشگاه سمنان، سمنان، ۱۳۸۶.
- [۱۰] سگرلیند، لاری ج.؛ تحلیل اجزای محدود کاربردی، ترجمه‌ی محمدرضا شریعتی و محمود فرزین، مرکز نشر دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ۱۳۷۹.
- [11] Timoshenko S.P.; Strength of Materials: Part II (Advanced Theory and Problems), 3rd ed., Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1976.
- [12] Ugural A.C., Fenster S.K.; Advanced Strength and Applied Elasticity, 4th ed., Prentice Hall, New Jersey, 2003.
- [13] Naghdi P.M., Cooper R.M. (1956); Propagation of elastic waves in cylindrical shells including the effects of transverse shear and rotary inertia, Journal of Acoustical Science America, Vol. 28, Nr. 1, pp. 56-63.
- [14] Mirsky I., Hermann G. (1958); Axially motions of thick cylindrical shells, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 97-102.
- [15] Greenspon J.E. (1960); Vibration of a thick-walled cylindrical shell, comparison of the exact theory with approximate theories, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 32, No. 5, pp. 571-578.
- [16] Koizumi M. (1997); FGM activities in Japan. Composites: Part B (Engineering), Nr. 28, pp. 1-4.
- [17] Fukui Y., Yamanaka N. (1992); Elastic analysis for thick-walled tubes of functionally graded material subjected to internal pressure. JSME, Series I: Solid Mechanics, Vol. 4, Nr. 35, pp. 379-385.
- [18] Obata Y. & Noda N. (1994); Steady thermal stresses in a hollow circular cylinder and a hollow sphere of a functionally gradient material, Journal of Thermal Stresses, Nr. 17, pp. 471-487.

- [19] Jahanian S. (1996); Thermoelastoplastic Stress Analysis of a Thick-Walled Tube of Nonlinear Strain Hardening, *Journal of Mechanical Design*, Vol. 11, pp. 340-346.
- [20] Horgan C.O., Chan A.M. (1999); The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials. *Journal of Elasticity*, Nr. 55, pp. 43-59.
- [21] Horgan C.O., Chan A.M. (1999); The stress response of functionally graded isotropic linearly elastic rotating disks, *Journal of Elasticity*, Nr. 55, pp. 219-230.
- [22] Ootao Y., Tanigawa Y., Nakamura T. (1999); Optimization of material composition of FGM hollow circular cylinder under thermal loading: a neural network approach. *Composites: Part B (Engineering)*, Vol. 30, Nr. 4, pp. 415-422.
- [23] Tutuncu N., Ozturk M. (2001); Exact solution for stresses in functionally graded pressure vessels. *Composites: Part B (Engineering)*, Nr. 32, pp. 683-686.
- [24] Shabana Y.M., Noda N. (2001); Thermo-elasto-plastic stresses in functionally graded materials subjected to thermal loading taking residual stresses of the fabrication process into consideration, *Composites: Part B*, Vol. 32, pp. 111-121.
- [25] Orcan Y., Eraslan A.N. (2002); Elastic-plastic stresses in linearly hardening rotating solid disks of variable thickness, *Mechanics Research Communications*, Vol. 29, Nr. 4, 2002, pp. 269-281.
- [26] Eraslan A.N., Orcan Y. (2002); Elastic-plastic deformation of a rotating solid disk of exponentially varying thickness, *Mechanics of Materials*, Vol. 34, pp. 423-432.
- [27] Eraslan A.N., Orcan Y. (2002); On the rotating elastic-plastic solid disks of variable thickness having concave profiles, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 44, pp. 1445-1466.
- [28] Eraslan A.N. (2002); Von mises yield criterion and nonlinearly hardening variable thickness rotating annular disks with rigid inclusion, *Mechanics Research Communications*, Vol. 29, Nr. 5, 2002, pp. 339-350.
- [29] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. (2002); Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads. *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, Vol. 79, pp. 493-497.
- [30] Eipakchi H.R., Rahimi G.H., Esmailzadeh Khadem S. (2003); Closed form solution for displacements of thick cylinders with varying thickness subjected to non-uniform internal pressure, *Journal of Structural Engineering and Mechanics*, Vol. 6, Nr. 16, pp. 731-748.
- [31] Gao X., Gao L. (2003) Elasto-plastic analysis of an internally pressurized thick-walled cylinder using a strain gradient plasticity theory, *International Journal of Solids and Structures*, Nr. 40, pp. 6445-6455.
- [32] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M.R. (2003); General solution for mechanical and thermal stresses in a nonaxisymmetric steady-state loads, *Journal of Applied Mechanics*; Nr. 70, pp. 111-118.
- [33] Eraslan A.N. (2003); Elastic-plastic deformations of rotating variable thickness annular disks with free, pressurized and radially constrained boundary conditions, *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 45, Nr. 4, pp. 643-667.
- [34] Eraslan A.N. (2003); Elastoplastic deformations of rotating parabolic solid disks using Tresca's yield criterion, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 22, Nr. 6, pp. 861-874.

- [35] Eraslan A.N., Orcan Y., Güven U. (2005); Elastoplastic analysis of nonlinearly hardening variable thickness annular disks under external pressure, *Mechanics Research Communications*, Vol. 32, Nr. 3, pp. 306-315.
- [36] Eraslan A.N., Akgul F. (2005); Yielding and Elastoplastic Deformation of Annular Disks of a Parabolic Section Subject to External Compression, *Turkish Journal of Engineering Environment Science*, Vol. 29, pp. 51-60.
- [37] Naghdabadi R., Kordkheili S.A.H. (2005); A finite element formulation for analysis of functionally graded plates and shells, *Archive of Applied Mechanics*; Vol. 74, Nr. 5-6, pp. 375-386.
- [38] Hongjun X., Zhifei S., Taotao Z. (2006); Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders, *Mechanics Research Communications*, Nr. 33, pp. 681-691.
- [39] Eraslan A.N., Akis T. (2006); Plane strain analytical solutions for a functionally graded elastic-plastic pressurized tube, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 83, Nr. 9, pp. 635-644.
- [40] Zhifei S., Taotao Z., Hongjun X. (2007); Exact solutions of heterogeneous elastic hollow cylinders, *Journal of Composite Structures*, Nr. 79, pp. 140-147.
- [41] Tutuncu N. (2007); Stresses in thick-walled FGM cylinders with exponentially-varying properties, *Journal of Engineering Structures*, Nr. 29, pp. 2032-2035.
- [42] Shao Z.S., Ma G.W. (2008); Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature, *Journal of Composite Structures*, Nr. 83, pp. 259-265.
- [43] Partaukas N., Bareisis J. (2009); The stress state in two-layer hollow cylindrical bars, *Mechanika. Kaunas: Technologija*; Vol. 75, Nr. 1, pp 5-12.
- [44] Tutuncu N., Beytullah T. (2009); A novel approach to stress analysis of pressurized FGM cylinders, disks and spheres, *Composite Structures*, Vol. 91, Nr. 3, pp. 385-390.
- [45] Zamani Nejad M., Rahimi G. H., Ghannad M. (2009); Set of field equations for thick shell of revolution made of functionally graded materials in curvilinear coordinate system, *Journal of E Mechanika*; Vol. 77, Nr. 3, pp. 18-26.
- [46] Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R. (2009); Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick short length FGM cylinders, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 86, Nr. 5, pp. 296-306.
- [47] Eipakchi H.R., Esmailzadeh Kh. S., Rahimi G.H. (2009); Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory, *Journal of Mechanika*, Vol. 5, Nr. 79, pp. 13-20.
- [48] Ghannad M., Zamani Nejad M., Rahimi G. H. (2009); Elastic solution of axisymmetric thick truncated conical shells based on first-order shear deformation theory, *Journal of E Mechanika*, Vol. 79, Nr. 5, pp. 13-20.
- [49] Nemat-Alla M., Ahmed K.I.E., Hassab-Allah I. (2009); Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 46, Nr. 14-15, pp. 2774-2786.

[۵۰] قناد، مهدی و رحیمی، غلامحسین و اسماعیلزاده خادم، سیامک (۱۳۸۹)؛ "حل عمومی استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری الاستیسیته‌ی مستوی" مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس، ج ۱۰، ش ۳، صص ۳۱-۴۱.

- [51] Ghannad M., Zamani Nejad M. (2010); Elastic analysis of pressurized thick hollow cylindrical shells with clamped-clamped ends, *Journal of E Mechanika*, Vol. 85, Nr. 5, pp. 1392-1207.
- [52] Eipakchi H.R. (2010); Third-order shear deformation theory for stress analysis of a thick conical shell under pressure, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 1, Nr. 5, pp. 1-17.
- [۵۳] عارفی، محمد و رحیمی، غلامحسین (۱۳۸۹)؛ "آنالیز ترموالاستیک سیلندر جدار ضخیم FG تحت فشار با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول" نشریه‌ی پژوهشی مهندسی مکانیک ایران، ج ۱۲، ش ۲، صص ۱۱۳-۱۳۲.
- [۵۴] عیسوندزیبایی، محمدرضا و ستاره، محمد و جهانی، علی (۱۳۸۹)؛ "مقایسه اثرات شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد برای ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای FGM با رینگ تقویت شده، بر اساس تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی" *مجله‌ی مکانیک هوافضا (دینامیک، ارتعاشات و کنترل)*، ج ۶، ش ۳، صص ۲۵-۳۸.
- [55] Afsar A.M., Go J. (2010); Finite element analysis of thermoelastic field in a rotating FGM circular disk, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 34, pp. 3309-3320.
- [56] Abedi A., Zamani Nejad M., Lotfian M.H., Ghannad M. (2011); Static analysis of parabolic FGM solid cylinders, *Journal of Basic. Applied Scientific Researchs*, Vol. 1, Nr. 11, pp. 2339-2345.
- [۵۷] قناد، مهدی و رحیمی، غلامحسین و اسماعیل‌زاده خادم، سیامک (۱۳۸۹)؛ "حل عمومی استوانه‌های جدار کلفت متقارن محوری از مواد ناهمگن FG بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی" *مجله‌ی فنی و مهندسی مدرس*، ج ۱۰، ش ۴، صفحات ۱۳-۲۵.
- [58] Keles I., Conker C. (2011); Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 30, Nr. 3, pp. 449-455.
- [59] Lotfian M.H., Zamani Nejad M., Abedi A., Ghannad M. (2011); An elasticity solution for functionally graded hollow disks under radially symmetry loads, *Journal of Basic. Applied Scientific Researchs*, Vol. 1, Nr. 11, pp. 2435-2441.
- [60] Zamani Nejad M., Abedi M., Lotfian M.H., Ghannad M. (2011); Exact and numerical solutions for stresses in pressurized FGM solid sphere with parabolic varying properties, *American Journal of Scientific Researchs*, Nr. 32, pp. 82-89.
- [61] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosallaie Barzoki A.A. (2011); Effect of material in-homogeneity on elec. thermo-mechanical behaviors of functionally graded piezoelectric rotating shaft; *Journal of Applied Mathematical Modeling*, Vol. 6, Nr. 35, pp. 2771-2789.
- [62] Ozturk, A., Gulgec, M. (2011); Elastic-plastic stress analysis in a long functionally graded solid cylinder with fixed ends subjected to uniform heat generation, *International Journal of Engineering Science*, Vol. 49, Nr. 10, 2011, pp. 1047-1061.
- [63] Taghvaeipour A., Bonakdar M., Ahmadian M.T. (2012); Application of a new cylindrical element formulation in finite element structural analysis of FGM hollow cylinders, *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol. 50, pp. 1-7.

- [64] Bayat Y., Ghannad M., Torabi H. (2012); Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading, *Archieve of Applied Mechanics*, Nr. 82, pp. 229-242.
- [65] Arefi M., Rahimi G.H. (2010); The effect of nonhomogeneity and end supports on the thermo elastic behavior of a clamped–clamped FG cylinder under mechanical and thermal loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 96-97, pp. 30-37.
- [66] Zamani Nejad M., Abedi M., Lotfian M.H., Ghannad M. (2012); An exact solution for stresses and displacements of pressurized FGM thick-walled spherical shells with exponential-varying properties, *Journal of Mechanical Science Technology*, Vol. 26, Nr. 12, pp. 1-7.
- [67] Ghannad M., Rahimi G.H., Zamani Nejad M. (2012); Determination of displacements and stresses in pressurized thick cylindrical shells with variable thickness using perturbation technique, *MECHANIKA*, Vol. 18, Nr. 1, pp. 14-21.
- [68] Ghorbanpour Arani A., Kolahchi R., Mosallaie Barzoki A.A., Loghman A. (2012); Electro-thermo-mechanical behaviors of FGPM spheres using analytical method and ANSYS software, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, Nr. 1, pp. 139-157.
- [69] Ghannad M., Zamani Nejad M., Rahimi G.H., Sabouri H. (2012); Elastic analysis of pressurized thick truncated conical shells made of functionally graded materials, *Structural Engineering Mechanics*, Vol. 43, Nr. 1, pp. 105-126.
- [70] Ghannad M., Jabbari M., Zamani Nejad M. (2012); A semi-analytical solution for elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness using disk form multilayers, *Science Series Data Report*, Vol. 4, Nr. 4, pp. 11-25.
- [71] Ghannad M., Zamani Nejad M. (2012); Complete closed-form solution for pressurized heterogeneous thick spherical shells, *MECHANIKA*, Vol. 18, Nr. 5, pp. 508-516.
- [72] Ghannad M., Zamani Nejad M. (2012); Complete elastic solution of pressurized thick cylindrical shells made of heterogeneous functionally graded materials, *MECHANIKA*, Vol. 18, Nr. 6, pp. 640-649.
- [73] Ghannad M., Zamani Nejad M. (2012); Elastic analysis of heterogeneous thick cylinders subjected to internal or external pressure using shear deformation theory, *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 9, Nr. 6, pp. 117-136.
- [74] Ghannad M., Rahimi G.H., Zamani Nejad M. (2013); Elastic analysis of pressurized thick cylindrical shells with variable thickness made of functionally graded materials, *Composites: Part B*, Nr. 45, pp. 388-396.
- [75] Vlachoutsis S. (2003); Shear correction factors for plates and shells, *International Journal of Numerical Mathematics in Engineering*, Nr. 33, pp. 1537-1552.

Abstract

In this research thermoelastoplastic analysis of thick-walled cylinders made of nonhomogenous materials with power-varying properties using first-order and third-order shear deformation theory which is subjected to internal and external pressure and steady state loading is carried out. The aim is to check yielding of cylinder by assuming elastoplastic (elastic-perfectly plastic) behavior and to find state of stress, strain and radial displacement of cylinder. First differential equations governing axisymmetric thick-walled cylinders with constant thickness that are made of nonhomogenous materials with power-varying properties and subjected to pressure and thermal loadings are derived using shear deformation theory and virtual work principle. Method of solving these equations for cylinder with clamped-clamped and clamped-free ends is expressed. Then the procedure of checking cylinder yield using Rankine, Tresca and von Mises criteria and correction of stress, strain and displacement fields obtained by elastic solution in yielded regions is expressed. Also the solution of same problem using finite element method is expressed in this thesis. Numerical results are presented for a special cylinder and compared with results obtained by solving problem using Abaqus FEM software. Finally a comparison between shear deformation theory and finite element method is made.

Keywords: thick cylinder, functionally graded material (FGM), shear deformation theory (SDT), finite element method (FEM), elastoplastic, yielding.



Shahrood University of Technology
Mechanical Engineering Faculty

**Thermoelastoplastic analysis of FGM
thick cylinders with power-varying
properties using shear deformation
theory**

Mohammad Yousefi

Supervisor:
Ph.D. Mehdi Ghannad

Febraury 2013