بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده : مهندسی مکانیک

گروه : جامدات

تحلیل ارتعاشات خطی و غیرخطی تشدیدکننده‌های MEMS با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک

دانشجو : نسیم آل‌علی

استاد راهنما:

دکتر اردشیر کرمی محمدی

رساله دکتری جهت اخذ درجه دکتری

دی ماه ۱۳۹۱

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

بسمه تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود
مدیریت تحصیلات تکمیلی
فرم شماره ۱۱

صورتجلسه دفاع از رساله دکتری (ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود آقای نسیم آل علی دانشجوی دکتری رشته مهندسی مکانیک ورودی مهرماه سال ۱۳۸۶ در تاریخ ۱۳۹۱/۱۰/۲۶ از رساله خود با عنوان : تحلیل ارتعاشات خطی و غیرخطی تشدیدکننده‌های MEMS با در نظر گرفتن میرایی ترموالاستیک دفاع و با اخذ ......۱۷٫۸۲...... به درجه : ...بسیار خوب... نائل گردید .

الف) درجه عالی : نمره ۲۰-۱۹ ☐	ب) درجه بسیار خوب : نمره ۱۸/۹۹ – ۱۷ ☑
ج) درجه خوب : نمره۱۶/۹۹– ۱۵ ☐	د) غیر قابل فبول و نیاز به دفاع مجدد دارد☐
ذ) رساله نیاز به اصلاحات دارد☐	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر اردشیر کرمی محمدی	استاد راهنما	استادیار	
۲	دکتر عبدالحسین فریدون	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۳	دکتر محمدرضا آشوری	استاد مدعو خارجی	~~استادیار~~ دانشیار	
۴	دکتر حمیدرضا ایپک چی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر امیر جلالی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۶	دکتر حبیب احمدی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید .

رئیس دانشکده و رئیس هیأت داوران :

تاریخ و امضاء

تشکر و قدر دانی

اکنون که به لطف ایزد منان این پایان نامه به پایان رسیده است بر خود واجب می دانم که از زحمات بی دریغ و راهنماییهای سودمند استاد ارجمندم جناب آقای دکتر کرمی محمدی که همواره نظرات مفیدشان در طول مدت تحصیل راه گشای اینجانب بوده صمیمانه قدر دانی نمایم .

اقرارنامه و واگذاری حقوق

اینجانب نسیم آل علی تأیید می نمایم که مطالب مندرج دراین پـایان نامه نتیجه تحقیقات خود بنده می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده‌ام. همچنین کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نو آوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

دی ماه و سال ۱۳۹۱

چکیده

در این پایان نامه، تشدیدکننده‌های میکروالکترومکانیکی را به شکل میکروتیر و میکروصفحه‌های حلقوی و مستطیلی تحت تأثیر بار الکتریکی مدل کرده‌ایم. در فصل دوم معادلات هدایت حرارتی را که می بایست با معادلات مکانیکی کوپل شوند، استخراج کرده‌ایم و همچنین معادله نیروی الکتریکی را با فرض خازنی بودن صفحات بدست آورده‌ایم. در فصل سوم مدل میکروتیر تشدید کننده را در دو حالت تیر اولر-برنولی و تیر اولر-برنولی با در نظر گرفتن کشش درونی ارائه داده‌ایم مدل اولر-برنولی با در نظر گرفتن کشش درونی برای محاسبه تغییر شکلهای بزرگ ناشی از نیروی الکترواستاتیکی کاربرد دارد. برای محاسبه میرایی ترموالاستیک آن ابتدا خیز استاتیکی آن محاسبه شده سپس با خطی سازی حول این خیز میرایی آن محاسبه شده است. نتیجه این محاسبات رفتار غیرخطی میرایی را بر حسب پارامترهای بی‌بعد نشان داده است. همچنین در انتهای این فصل میرایی ترموالاستیک غیرخطی را نیز با استفاده از روش DQ بدست آوردیم که جنبه جدید این پایان نامه نیز می باشد. در فصل چهارم برای محاسبه میرایی ترموالاستیک تشدیدکننده، از مدل میکروصفحه حلقوی با تئوری کیرشهف-لاو استفاده کردیم. معادله فرکانسی بدست آمده از این مدل را از دو روش خطی سازی و بدون خطی سازی حل کرده ایم و میرایی را در سه شرط مرزی گیردار-گیردار و گیردار- آزاد و گیردار- ساده محاسبه کرده و شعاع و صخامت بحرانی را نمایش داده-ایم. در فصل پنجم مدل میکروصفحه مستطیلی ارائه شده است. در این مدل از دو فرض کیرشهف و وان کارمن استفاده کرده‌ایم. در این فصل برای محاسبه میرایی از روش گالرکین استفاده کرده‌ایم. در مدل وان کارمن که برای تغییر شکلهای بزرگ استفاده می شود ابتدا خیز استاتیکی را بدست آورده‌ایم که این خیز را با روش اختلاف محدود نیز بدست آورده و با یک داده تجربی مقایسه کردیم. در پایان نیز میرایی ترموالاستیک را بر حسب پارامترهای بی بعد بررسی کرده ایم.

لیست مقالات

مجلات علمی پژوهشی

" **Thermoelastic Damping In Clamped-clamped Annular Microplate**", *Applied Mechanics and Materials* Vols. 110-116 (2012) pp 1870-1878

" **میرایی ترموالاستیک در میکروصفحه حلقوی تحت بار الکترواستاتیکی** " *مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس*، دوره ۱۲ شماره ۳ شهریور ۱۳۹۱ ص‌ص ۸۱-۹۴

کنفرانسی

" **Thermoelastic damping in clamped-clamped annular microplate** ", *2nd International Conference on Mechanical, Industrial, and Manufacturing Technologies (MIMT 2011, Singapore)*, February 26-28, 2011

مقالات فرستاده شده

"Effect of high electrostatic actuation on thermoelastic damping in thin rectangular microplate resonators" *sensors and actuators*

"Vibrational behavior of an electrically actuated micro-beam with thermoelastic damping" *journal of acoustics and vibration*

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

مقدمه

۱-۱- سیستمهای میکروالکترومکانیکی (MEMS)

سیستمهای میکروالکترومکانیکی (MEMS) به مجموعه‌ای از میکروسنسورها و عملگرهایی اطلاق می شوند که می‌توانند عوامل محیطی را احساس کنند و این قابلیت را دارند که در مقابل تغییرات محیطی واکنش نشان دهند که این امر با میکرومدار کنترل کننده انجام می شود. این سیستمها علاوه بر بسته‌های میکروالکترونیکی معمولی مثل آنتن‌های مجتمع جهت ارسال سیگنال، دارای بخشهای میکروالکترومکانیکی نظیر عملگرها و سنسورها می باشند. سیستمهای میکرو نسبت به سیستمهای ماکرو سریعتر ، با قابلیت اعتماد بیشتر، ارزانتر و قابلیت ایجاد عملکردهای پیچیده تری را فراهم می کنند [۱].

در واقع، مدارهای پیوستهٔ میکروالکترونیکی (IC) می‌توانند بعنوان مغز متفکر سیستمها باشند و MEMS با اضافه‌کردن «چشم» و «بازو»، این قدرت تفکر را توسعه می‌دهد تا این میکروسیستمها بتوانند محیط اطرافشان را حس کرده و کنترل نمایند. این حسگرها در ساده‌ترین حالت خود با کمک اندازه‌گیری پدیده‌های مکانیکی، گرمایی، زیستی، شیمیایی، نوری و مغناطیسی، اطلاعات را از محیط جمع‌آوری می‌کنند. پس از اخذ اطلاعات از حس‌کننده‌ها، دستگاههای الکترومکانیکی به کمک قدرت تصمیم‌گیری خود، محرکها را به پاسخ‌هایی چون: حرکت، جابجایی، تنظیم‌کردن، پمپ‌کردن و فیلترکردن وادار کرده، محیط را به سمت نتایج موردنظر هدایت می‌کنند. از آنجا که دستگاههای MEMS همانند ICها با تکنیکهای ساخت ناپیوسته ساخته می‌شوند، می‌توان سطح بسیار بالایی از کارکرد، اطمینان و پیچیدگی را با هزینه اندک بر روی تراشهٔ کوچک سیلیکونی شکل داد [۱].

۱-۲- میکروسازوکارها[1]

بیشتر سیستمهای میکروالکترومکانیکی از تعداد اندکی المانها و قطعات اساسی در ابعاد میکرو یا میکروسازوکار تشکیل شده‌اند. در ادامه توضیح مختصری از چند میکروسازوکار برجسته ارائه می‌شود.

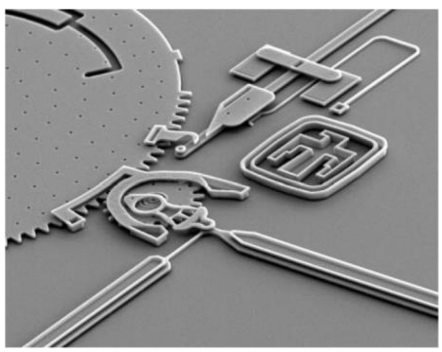
گودالها[2]، *شیارها*[3] *و کانالها* : با ترکیب کردن روشهای فتولیتوگرافی[4] و حکاکی عمیق[5] (مانند میکروماشین‌کاری حجمی، حکاکی KOH یا DRIE) و یا فرآیندهای رسوب‌گذاری با ضخامت بالا[6] (مانند روکش‌کاری[7]، میکرومدل‌سازی PDM و لیتوگرافی لایهٔ ضخیم[8])، به‌آسانی می‌توان گودالها، شیارها و کانالهای با هندسه‌های بسیار گوناگونی را ساخت. این میکروسازوکارها قطعات اصلی سیستمهای میکروالکترومکانیکیی هستند که اشیأ نسبتاً بزرگی (مانند رشته‌های نوری[9]، مقادیر نسبتاً زیاد سیال و سلولهای زیستی) را جابه جا می کنند یا نگه می دارند. [۲ و ۳]

میکروسازه های انعطاف پذیر : اولین سیستمهای میکروالکترومکانیکی که برای دست یافتن به حرکتهای پایدار و کنترل شده در مقیاس میکرو استفاده می شدند دارای میکروسازه‌های انعطاف پذیر بودند [۴]. با آنکه برخی از این میکروسازه‌های انعطاف پذیر بسیار پیچیده ساخته شده‌اند، اما در بیشتر این سیستمها از ترکیب المانهای انعطاف پذیر پایه مانند تیرهای یک سر گیردار و دوسر گیردار و غشاها و صفحات استفاده شده است. شایان ذکر است که میکروسازه های انعطاف پذیر می‌توانند دارای نسبت اضلاع بسیار زیاد باشند (مثل تیر یک سر گیردار با درازای ۱۰۰۰µm، پهنای ۱۰µm و ضخامت ۱ µm) که در سیستمهای ماکروسکوپی نادر هستند.

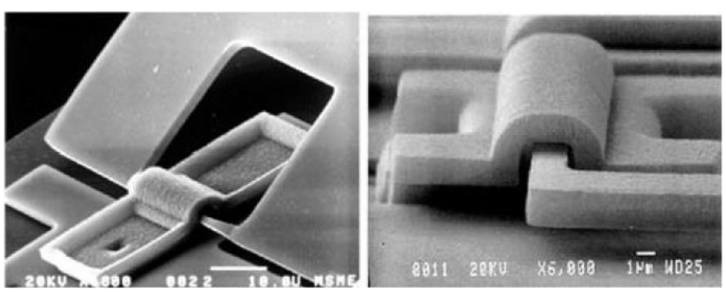
---

[1] Micromechanisms
[2] Pits
[3] Grooves
[4] Photolithography
[5] Deep Etching
[6] Thick-Deposition Processes
[7] Plating
[8] Thick deposition processes
[9] Optical Fibers

سطوح میکرویاتاقانی : به منظور دوران یا حرکت انتقالی سازه‌ها، به وجود سطوح میکرویاتاقانی (مانند یاتاقان لغزنده و رینگی[1]) نیاز است. برای مثال همان طور که در شکل ۱-۱ مشاهده می شود، رینگهای دورانی هم‌صفحه[2] امکان ارتقای میکروموتورها و مجموعه چرخدنده‌های پیچیده را فراهم آروده‌اند[۵ و ۶] و مفصلهای بیرون صفحه‌ای[3] امکان استفاده مؤثر میکروسازه‌های بلند در فضای بالای تراشه (شکل ۱-۲ را ببینید) را میسر می‌سازند [۷، ۸]. به سبب تلرانسهای نسبی بالا، عدم روانکاری کافی و مواد ضعیف سطح یاتاقانها، سیستمهای میکروالکترومکانیکی که دارای سطوح یاتاقانی می باشند، پس از کارکرد طولانی‌مدت دچار ساییدگی و شکست می‌شوند[۹]. تلاشهایی برای ارتقای مواد یاتاقان و روانکارها صورت گرفته که برخی از آنها هم موفقیت‌آمیز بوده است [۱۰].



شکل ۱-۱ سیستمهای میکروالکترومکانیکی با سطوح یاتاقانی دوار و چرخدنده‌های قفل شونده



شکل ۱-۲ میکروساختارهای مفصلی [۷]

---

1 Bearing hubs and sliders
2 In-plane rotary hub
3 Out-of-plane hinges

۱-۳- حسگرهای تشدید کننده[1]

حسگرهای تشدیدکننده بر اساس اندازه گیری فرکانس تشدید ارتعاشات مکانیکی میکروتیرها و میکرودیافراگمها ساخته شده‌اند . کرنش اعمال شده موجب تغییرات در فرکانس تشدیده شده (مانند سیم گیتار) که این مسأله باعث توانایی آنها در اندازه گیری ورودی فشار، شتاب، سرعت و دما می شود. میکرو سنسوری که بر این اساس ساخته می شود در اثر فشاری که به دیافراگم آن وارد می آید، فرکانس طبیعی آن تغییر کرده و سبب اندازه گیری پارامتر ورودی می گردد. با ثبت اطلاعات مربوط به تغییرات فرکانس طبیعی تشدید کننده اطلاعات فیزیکی که باعث تغییر کرنش شده اندازه گیری می شود.[۱]

همچنین تشدیدکننده ها ادواتی هستندکه بوسیله ولتاژ AC حول خیزی که توسط ولتاژ DC بوجود آمده است، نوسان و ارتعاش می کنند. میرایی ترموالاستیک نیز همچون فرکانس متأثر از ولتاژ DC می باشد. بنابراین آنچه در این پایان‌نامه مد نظر بوده تأثیر ولتاژ DC بر خیز و به دنبال آن بر میرایی ترموالاستیک بوده است. چرا که میرایی اثر زیادی بر حساسیت تشدیدکننده دارد. بنابراین بررسی این میرایی روی تشدیدکننده می‌تواند طراحان و سازندگان تشدیدکننده را در امر ساختن تشدیدکننده‌های بهینه یاری رساند.

۱-۴- میرایی ترموالاستیک

میرایی ترموالاستیک، ناشی از شار حرارتی بازگشت ناپذیری است که در اثر فشردگی و کشش سازه در حال ارتعاش بوجود می آید. سازه مرتعش هم کشیده و هم فشرده می شود، آن قسمت از سازه که فشرده

[1] Resonator Sensors

می شود گرمتر شده و قسمت دیگر که در حال کشش است خنکتر می شود. این اختلاف دما باعث ایجاد گرادیان حرارتی در سازه شده و این گرادیان حرارتی سعی می کند در سازه تعادل حرارتی ایجاد کند. انرژی بکار رفته در این تعادل حرارتی نمی تواند ذخیره شود (فرآیند بازگشت ناپذیر است) و موجب افزایش آنتروپی می شود، با افزایش آنتروپی اتلاف انرژی اتفاق می افتد. این اتلاف انرژی را با نام میرایی ترموالاستیک می شناسیم که در میکروتیرها و میکروصفحه ها اتفاق می افتد.[۱۱و ۱۲]

۱-۵- مروی بر کارهای گذشته

زنر [۱۳و۱۴] اولین کسی بود که میرایی ترموالاستیک را پیش بینی کرد و عبارتی برای ضریب کیفیت یک تیر ارائه داد. لیفشیتز و روکس [۱۵] تیری با سطح مقطع مستطیلی را با میرایی ترموالاستیک مدل کردند و عبارت دقیق‌تری نسبت به کار زنر برای ضریب کیفیت تیر بدست آوردند. همچنین آنان در کار خود آزمایشاتی در مورد ضریب کیفیت آرسناید ژرمانیم[1] و سیلیکون انجام دادند که نتایج آن را با حل خود مقایسه کردند. آنان در کار خود مشاهده کردند که ضریب کیفیت بعد از قله‌های دبای[2] با افزایش ابعاد سازه کاهش پیدا می کند.

سودیپتو و همکاران [۱۶] با در نظر گرفتن یک تحریک الکترواستاتیکی دلخواه مدل کلاسیک میرایی ترموالاستیک را بهبود دادند. مرتبه های بالای فرکانسهای تحریک که در نوسانات ناشی از طبیعت غیر خطی نیروی الکترواستاتیکی ظاهر می شوند نیز در مدل اصلاح شده در نظر گرفته شدند. آنان یک تیر با تغییر شکل بزرگ، میرایی فیلم فشاری و ترموالاستیک را در نظر گرفتند و با روش انرژی ضرایب کیفیت را برای حالتهای متفاوت محاسبه کردند. این نتایج تئوری را با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه کردند. آنان

[1] GaAs
[2] Debye Peaks

تغییرات کیفی و کمی در نتایج بدست آمده را با توجه به نیروی الکترواستاتیکی در مقایسه با کار زنر[۱۳و۱۴] نشان دادند.

نایفه و یونس [۱۱] مدلی برای میرایی ترموالاستیک یک میکروصفحه تحت بار الکترواستاتیکی ارائه دادند و ضرایب کیفیت را برای یک شکل مستطیلی و تحت شرایط مرزی متفاوت بدست آوردند. آنان معادلات کوپل شده را با جدا کردن معادله هدایت حرارتی از معادله ارتعاشی صفحه حل کردند. همچنین از روش اغتشاشات[1] برای بدست آوردن ضریب کیفیت در قالب یک عبارت تحلیلی استفاده کردند. آنان با حذف نیروی الکترواستاتیکی نیز ضریب کیفیت را بدست آوردند و آن را با کارهای قبلی مثل و زنر [۱۴و۱۳] و لیفشتز [۱۵] مقایسه کردند.

پرابهاکار و همکاران [۱۷] تئوری یک بعدی زنر و لیفشیتز برای میرایی ترموالاستیک تیر را بهبود بخشیدند. آنان این میرایی را به طور دو بعدی در مدل خود توسعه دادند. همچنین از روش تابع گرین[2] برای حل معادله دو بعدی هدایت حرارتی استفاده کردند و ضریب کیفیت ترموالاستیکی را بر حسب یک سری نامحدود محاسبه کردند. آنان اثرات هندسی تیر، نسبت طول به عرض تیر، فرکانس طبیعی، شکل مودهای خمشی و شرایط مرزی میکروتیر تشدید کننده ساخته شده از سیلیکون تک-کریستالی بر این میرایی را بررسی کردند. خطاهای تئوری یک بعدی با این مدل بین ۲ تا ۸۰ درصد بر حسب موردی که بررسی شده بود، محاسبه شد.

سان و همکاران [۱۸] بر روی میرایی ترموالاستیک یک صفحه مدور کار کردند. آنان به طور تحلیلی ضریب کیفیت یک میکروصفحه مدور را بدست آوردند و به بررسی آن بر حسب ابعاد و اندازه و شکل مود

---

[1] Perturbation
[2] Green’s Function

های آن پرداختند و همچنین عبارتی نیز برای ماکزیمم ضریب کیفیت برحسب ضخامت صفحه بدست آوردند.

یای و متین [۱۹] نیز فرمولبندی خاصی از اجزا محدود را برای میرایی ترموالاستیک میکروتیرهای تشدید کننده ارائه دادند. آنان پس از به کار بردن روش اغتشاشات در معادله حرکت دینامیکی تیر و هدایت حرارتی و ترموالاستیسیته به معادله مقدار ویژه خطی رسیدند که آن را به طور عددی با روش اجزا محدود برای تیر با تکیه گاههای ساده حل کردند. همچنین آنان نتایج عددی خود را با کارهای تحلیلی زنر [۱۳و۱۴] و لیفشیتز [۱۵] مقایسه کردند و نتایج خوبی را بدست آوردند. آنان مطالعه ای پارامتری بر روی ضریب کیفیت و فرکانس انجام دادند و تأثیر نوع ماده و هندسه تیر را بر روی ضریب کیفیت و فرکانس بررسی کردند.

رضازاده و همکاران [۲۰] معادلات ترموالاستیک میکروتیر خازنی یک تشدیدکننده را با مدل هدایت گرمایی غیرفوریه‌ای بدست آوردند. در این مطالعه آنان فرض کردند که هدایت گرمایی در دو راستای طولی و عرضی صورت می گیرد. ضریب کیفیت ترموالاستیک را در دو حالت از مدل هدایت حرارتی یعنی دو بعدی سهموی و یک بعدی هذلولی مورد مطالعه قرار دادند و نتایج را با مدل هدایت حرارتی یک بعدی سهموی مقایسه کردند و دریافتند که دو حالت مذکور با یک بعدی سهموی انطباق خوبی دارد. همچنین آنان تأثیر اندازه و ابعاد را بر ضریب کیفیت بررسی کردند و ضخامت بحرانی بدست آمده را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند. از طرفی تأثیر ولتاژ توقف[1] را بر ضریب کیفیت مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که ولتاژ توقف ضریب کیفیت را کاهش می دهد.

کومار و هاکو [۲۱] با ذکر این نکته که راه حلی برای کاهش میرایی ترموالاستیک وجود ندارد تأثیر نیروی محوری پسماند میکروتیر را بر این میرایی مورد بررسی قرار دادند. و به این نتیجه رسیدند که افزایش

[1] Pull-in Voltage

نیروی محوری هم باعث افزایش فرکانس طبیعی می شود و هم ضریب کیفیت را افزایش می دهد بنابراین آنان برای کنترل این میرایی تغییر در نیروی محوری را پیشنهاد داده‌اند.

دوول و همکاران [۲۲ و ۲۳] کاری آزمایشگاهی بر روی ژیروسکوپهای میکرو انجام دادند و اهمیت وجود میرایی ترموالاستیک را برای تشدید کننده‌های میکرومکانیکی نشان دادند. آنان همچنین مشاهده کردند که نوع طراحی و ماده به کار رفته، تأثیر به سزایی در این میرایی دارد. این آزمایشات در حالی انجام شد که تأثیر بقیه میرایی‌ها نظیر میرایی سیال را به حداقل رسانده بودند.

مندز و همکاران [۲۴] نیز با استفاده از شبیه سازی عددی میرایی ترموالاستیک تیر یک سرگیردار را با در نظر گرفتن ترمهای خطی و غیر خطی آن شبیه سازی عددی کرده و با یکدیگر مقایسه کردند. نتایج بدست آمده از فرض جابه جایی های بزرگ، سخت شوندگی (افزایش فرکانس) و کاهش زمان تأخیر برای دامنه نوسانات را نشان می دهد.

گو و رگرسون [۲۵] بر روی میرایی یک میکروتیر سیلیکونی کار کردند و متوجه شدند که مقدار این میرایی قابل توجه است و از میرایی سیال بیشتر است. تغییرات فرکانس را بر حسب ضخامت تیر بررسی کرده اند.

سان و همکاران [۲۶] میرایی ترموالاستیک میکروتیر تشدیدکننده‌ها را با دو روش تبدیل فوریه سینوسی محدود ترکیب شده با تبدیل لاپلاس و آنالیز مود نرمال[1] تحلیل کردند. فرکانس ارتعاشی برای سه حالت شرط مرزی شامل گیردار و ایزوترمال، تکیه گاه ساده و ایزوترمال ، تکیه گاه ساده و آدیاباتیک محاسبه شده است. نتایج نشان دادند که اگر اثر ترموالاستیسیته در نظر گرفته شود دامنه ارتعاش و ممان حرارتی کم شده و فرکانس ارتعاش افزایش می یابد. در این کار آنان یک ضخامت بحرانی برای میکروتیر محاسبه کردند که اگر از آن ضخامت دور شویم اثر میرایی تقلیل می یابد.

---

[1] Normal Mode Analysis

یانگ و همکاران [۲۷] تیر اولربرنولی را تحت میرایی فیلم فشاری و ترموالاستیک در نظر گرفتند. در این کار آنان برای تحلیل دینامیکی حالت گذرای تیر از روشهای عددی اجزا محدود و اختلاف محدود استفاده نمودند که بسیار وقت گیر بوده‌اند. بنابراین آنان از روش کارهیونن-لوو/گالرکین[1] برای بدست آوردن یک مدل ماکرو جهت غلبه بر ترمهای غیرخطی ناشی از ساختار دینامیکی و میرایی های فیلم فشاری و ترموالاستیکی استفاده کردند. همچنین نتایجی را که بدست آورده اند با اندازه گیری های آزمایشگاهی مقایسه کرده و انطباق قابل قبولی را مشاهده کردند.

پو لی و همکاران [۲۸] یک مدل تحلیلی برای میکروصفحه‌های مستطیلی با شرایط مرزی کاملاً گیردار و گیردار-تکیه‌گاه ساده ارائه دادند. ضریب کیفیت با محاسبه انرژی هدر رفته در هر سیکل ارتعاشی در واحد حجمی در میکروصفحه بدست آمده است. معادلات بدست آمده در این مقاله نشان می دهد که میرایی ترموالاستیک برای صفحه مستطیلی کاملاً گیردار و گیردار-تکیه‌گاه ساده یکسان می باشند. این مقاله برای سایر شرایط مرزی بر اساس روش ریلی در فرکانس پایه میرایی را تخمین زده است.

سلاجقه و همکاران [۲۹] میرایی ترموالاستیک میکروصفحه مدور را با در نظر گرفتن کرنشهای وان کارمن با روش میانگیری زمانی کنترویچ و روش اغتشاشات، محاسبه کردند. در این کار میرایی ترموالاستیک بر حسب خصوصیات مواد، دمای محیط، شعاع صفحه و ضخامت آن بررسی شده است. همچنین مدلهای خطی و غیرخطی نیز مقایسه شده اند.

سعیدی و همکاران [۳۰] نیز تأثیر نیرو محوری در میرایی ترموالاستیک یک میکروتیر را که تحت تأثیر یک نیروی الکترواستاتیکی دچار خمش بزرگ شده است را بررسی کرده است. برای این کار از روش المان محدود گالرکین استفاده کرده اند و معادله هدایت را به شکل دو بعدی در نظر گرفته اند. همچنین بررسیهای انجام شده در نزدیکی ولتاژ توقف صورت گرفته است. همچنین آنها مدل خطی و غیرخطی

[1] Karhunen-Loeve/Galerkin Technique

خود را با یکدیگر مقایسه کرده و به این نتیجه رسیده اند که نیروی محوری اهمیت خود را در مدل خطی نمی توان نشان دهد.

گو و همکاران [۳۱] نیز میرایی ترموالاستیک یک میکروتیر را بررسی کردند و تأثیر پارامترهای هندسی و حرارتی خود نشان داده اند. همچنین نشان داده اند که چنانچه معادله حرارت نافوریه را در نظر بگیریم از میرایی بحرانی لیفشیتز و زنر به میرایی بزرگتری می رسیم. همچنین معادلات خود را با روشهای عددی حل کرده است.

زمانیان و خادم [۳۲] کار قبلی خود را به این ترتیب ارتقا دادند که اثر نیروهای محوری ناشی از تغییر شکل بزرگ را در یک میکروتیر تشدید کننده در نظر گرفتند و از تئوری اغتشاشات میرایی ترموالاستیک را با در نظر گرفتن نیروهای الکتریکی محاسبه کردند. ایشان همچنین نشان داده اند که در نظر نگرفتن اثر کشش محوری و بسط نیروری الکتریکی باعث ایجاد خطا در محاسبه ولتاژ توقف می کند. همچنین ایشان تغییرات میرایی ترموالاستیک را بر حسب پارامترهای هندسی و خواص مواد نشان داده است.

سعیدی و همکاران [۳۳] نیز در کاری دیگر میرایی ترموالاستیک یک میکروتیر تشدید کننده را با در نظر گرفتن اثرات غیر خطی کشش محوری و دو لایه پیزوالکتریک در بالا و پایین میکروتیر، بدست آورده اند. همچنین ایشان معادله حرارت دو بعدی نافوریه را برای ادغام با معادله حرکت در نظر گرفته اند. همچنین ایشان میرایی را برحسب ضخامت لایه های پیزوالکتریک و میکروتیر و ولتاژ الکتریکی بررسی کرده اند.

مستورم و همکاران [۳۴] رفتارهای غیرخطی دینامیکی میکروتیر تشدید کننده دو سرگیردار را با مدلهای تحلیلی-عددی و روشهای آزمایشگاهی مورد بررسی قرار دادند. ایشان انطباق خوبی بین شبیه سازیها و نتایج آزمایشگاهها بدست آوردند. مدل ایشان شامل اثر میرایی ترموالاستیک و نیروی الکترواستاتیکی و اثرات غیرخطی هندسی می باشد. هم نتایج آزمایشگاهی و هم شبیه سازیها اثرات سخت شوندگی و نرم شوندگی غیرخطی دینامیکی را بر حسب پارامتر تحریک الکتریکی نشان می دهند.

بار دیگر یای [۳۵] میرایی ترموالاستیک را در ارتعاشات درون صفحه‌ای برای دیسک، حلقه و صفحات بیضوی مورد بررسی قرار داده است. او برای این کار از روش المان محدود کاهش یافته استفاده کرده است. برای بهبودی نتایج از توابع درون‌یابی درجه دوم استفاده کرده است. همچنین نتایج را با کار دیگران و نرم‌افزارهای تجاری مقایسه کرده است.

در پایان نیز آقایان دکتر جلالی و دکتر اسماعیل زاده خادم [۳۶] مقاله‌ای را ارائه دادند که در آن خیز و فرکانس طبیعی و ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک میکروصفحه ویسکوالاستیک تحت بار الکترواستاتیکی را بررسی کردند. میکروصفحه مورد بررسی شده نانوکامپوزیتی است که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده بود و با تئوری وان-کارمن و مدل ویسکوالاستیک کلوین-ویت معادلات غیرخطی حرکت آن را بدست آوردند. همچنین خواص نانوکاموپوزیت را از روش اشبای-موری-تاناکا بدست آوردند و ناپایداری توقف را نیز مورد بررسی قرار دادند. ایشان نشان دادند که میکروصفحه نانوکامپوزیتی هم خیز و هم فرکانس طبیعی را در میکروادوات افزایش می دهد، که در آن در مقایسه با میکروصفحه سلیکونی دارای خیز برابر و فرکانس ۱٫۴۵ برابر نوع سلیکونی آن می باشد که این مشخصات در میکروسوییچ ها مطلوب است. همچنین ایشان نشان دادند که میرایی ترموالاستیک در نانوکامپوزیت بسیار بزرگتر از نوع سیلیکونی آن است به همین دلیل نانوکامپوزیتها برای تشدید کننده‌ها مناسب نیستند. در کار ایشان نتایج مفیدی راجع به مشخصات ارتعاشی و استاتیکی نانوکامپوزیتها ارائه شده است.

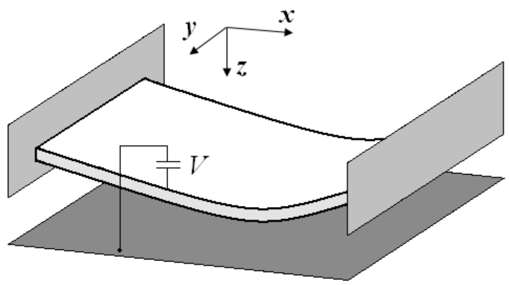
۱-۶- تعریف مسأله

ما تشدید کننده را به شکل یک خازن که از دو صفحه ثابت و انعطاف پذیر تشکیل یافته است، در نظر گرفته ایم (شکل ۱-۳). صفحه انعطاف پذیر که تحت اثر نیروی الکترواستاتیکی تغییر شکل یافته است را به سه شکل مدل کرده‌ایم:

۱- مدل میکروتیر

۲- مدل میکروصفحه حلقوی

۳- مدل میکروصفحه مستطیلی



شکل ۱-۳: شکل شماتیک و کلی تشدید کننده

فرضیاتی که برای سازه انعطاف پذیر تشدید کننده در نظر گرفته شدند به قرار زیر هستند:

ماده ایزوتروپ می باشد.

چگالی ثابت و یکنواخت است.

از اینرسهای راستاهای x و y به دلیل بزرگ بودن فرکانسها نسبت به فرکانس حرکت عرضی، صرف نظر شده است.

در تحریک الکترواستاتیکی طول و عرض صفحات خازن نسبت به فاصله بین صفحات، بزرگ فرض شده است تا خطوط نیرو به صورت موازی درآیند.

در مدل میکروتیر دو فرض تغییر شکلهای کوچک و بزرگ را با به کار بردن دو تئوریهای خطی و غیرخطی اولر-برنولی ارائه شده‌اند و در مدل میکروصفحه حلقوی و مدل تغییر شکل کوچک میکروصفحه مستطیلی از فرضیات کیرشهف استفاده شده است و در مدل تغییر شکل بزرگ میکروصفحه مستطیلی تنشهای وان-کارمن در نظر گرفته شده بودند.

همچنین هدف از این پایان نامه بدست آوردن میرایی ترموالاستیک و تأثیر نیروی الکترواستاتیکی بر این میرایی بوده است. برای بدست آوردن میرایی ترموالاستیک هم ابتدا فرکانسها را بدست می آوریم و از آنجا که این فرکانسها بدلیل وجود میرایی مختلط هستند با جدا کردن ترمهای حقیقی و موهومی این میرایی نیز محاسبه شده است. برای نیل به این هدف در میکروتیر از روش اختلاف محدود و روش DQ و در میکروصفحه نیز از روش گالرکین استفاده شده است. از روش DQ در واقع میرایی غیرخطی ترموالاستیک را محاسبه کرده ایم که جنبه جدید این پایان نامه می باشد.

فصل دوم

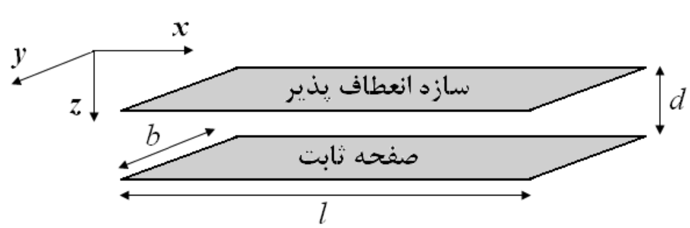
معادلات حرارت و بار الکتریکی

۲-۱- مقدمه

در این فصل نیروی الکترواستاتیکی را بررسی کرده‌ایم و از فرض خازنی صفحات استفاده کردیم به این شکل که میکروتیر یا میکروصفحه را قسمت فوقانی و انعطاف پذیر خازن در نظر گرفته‌ایم و در نهایت بر اساس این فرض برای نیروی الکترواستاتیکی رابطه‌ای ارائه داده‌ایم همچنین معادله هدایت را برای حالتی که با کرنشهای مکانیکی کوپل شده است را نیز مطرح کرده‌ایم.

۲-۲- نیروی الکترواستاتیکی

در MEMS و همچنین تشدید کننده‌ها رایج‌ترین روش اعمال نیرو، اعمال نیروی الکترواستاتیکی از طریق ایجاد میدان الکتریکی بین دو صفحه موازی یک خازن می باشد (شکل ۲-۱). فضای بین این دو صفحه را معمولاً هوا یا خلأ تشکیل می دهدکه به فاصله کوچک d از یکدیگر قرار دارند.



شکل ۲-۱: نمایش یک خازن با یک الکترود انعطاف پذیر

با این فرضیات، پتانسیل میدان الکترواستاتیکی ϕ بین صفحات یک خازن معادلات زیر را ارضا می کنند [۳۷]

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad (۱-۲)$$

$$\phi(x,y,d)=0,\ \ \phi(x,y,w)=V \tag{۲-۲}$$

که در آن $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ نمایانگر اپراتور لاپلاسین ، V ولتاژ اعمال شده و w خیز قسمت انعطاف پذیر خازن می باشد که می تواند میکروتیر یا میکروصفحه در نظر گرفته شود.

اگر طول و عرض صفحات خازن را نسبت به فاصله بین صفحات، بزرگ فرض کنیم، خطوط نیرو به صورت موازی درمی آیند و میدانهای فرینگینگ[1] نیز ناچیز خواهند شد. در این حالت، معادله (۲-۱) به شکل زیر کاهش پیدا می کند.[۳۸]

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \tag{۳-۲}$$

از حل معادله فوق برحسب شرایط مرزی (۲-۲) می توان به معادله زیر رسید.

$$\phi=\frac{V(z-d)}{w-d} \tag{۴-۲}$$

حال می توان نیروی الکترواستاتیکی بر واحد سطح را به شکل زیر محاسبه کرد. [۳۷]

$$F_e=-\frac{\varepsilon}{2}|\nabla\phi|^2 \tag{۵-۲}$$

که در آن ε ضریب گذردهی دی الکتریک ماده بین صفحات می باشد. بنابراین با جایگزینی (۲-۴) در (۲-۵) می توان نیروی الکترواستاتیکی صفحات موازی را محاسبه کرد.

$$F_e=\frac{\varepsilon V^2}{2(d-w)^2} \tag{۶-۲}$$

در نهایت نیروی الکترواستاتیکی بین دو صفحه تشدیدکننده به شکل زیر بدست می‌آید [۳۸]

[1] fringing

$$F_e = \frac{\varepsilon_0 \left(V_p + v(t)\right)^2}{2(d-w)^2} \tag{۲-۷}$$

که در آن $v(t)$ و V_P به ترتیب ولتاژ دینامیکی و استاتیکی می باشند و از آنجایی که فرض براین است که فاصله بین دو صفحه خازن خالی از هوا است، ε_0 ضریب گذردهی خلأ می‌باشد. همچنین رابطه فوق را می توان بر اساس بسط تیلور حول فاصله $w=0$ بنویسیم

$$F_e = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(V_p^2 + 2V_p v(t) + v(t)^2\right)\left[\frac{1}{d^2} + \frac{2}{d^3}w + \frac{3}{d^4}w^2 + \frac{4}{d^5}w^3 \ldots\right] \tag{۲-۸}$$

با فرض اینکه w و $v(t)$ مقادیر کوچکی دارند، رابطه فوق را می توان ساده کرد

$$F_e^L = \frac{\varepsilon_0 V_p^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon_0 V_p v(t)}{d^2} + \frac{\varepsilon_0 V_p^2}{d^3} w \tag{۲-۹}$$

معادله (۲-۹) شکل خطی سازی شده معادله (۲-۷) می باشد که در مدلهای خطی استفاده شده است.

۲-۲- معادله هدایت

توزیع دما روی صفحه و تیر را می‌توان از معادله هدایت بدست آورد. [۳۹]

$$k\nabla^2 T + Q = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha_T T}{1-2\nu}\frac{\partial e}{\partial t} \tag{۲-۱۰}$$

که در آن e کرنش انبساطی ناشی از اثر حرارتی و مکانیکی، ρ چگالی جرمی، c_p ضریب ظرفیت گرمایی در فشار ثابت، T دما، α_T ضریب انبساط حرارتی، E مدول یانگ، ν ضریب پواسن، k هدایت حرارتی و Q شار حرارتی ورودی می باشد. برای نشان دادن و محاسبه e بر حسب جابه جایی ابتدا باید کرنش ε_{33}

را محاسبه کنیم چرا که به دلیل وجود اثر ترموالاستیکی، ε_{33} مخالف صفر می باشد بنابراین با توجه به اینکه تنش $\sigma_{33} \approx 0$ می باشد،[۱۱] داریم

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu\sigma_{22}) + \alpha_T(T - T_0) \tag{۲-۱۱}$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu\sigma_{11}) + \alpha_T(T - T_0) \tag{۲-۱۲}$$

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha_T(T - T_0) \tag{۲-۱۳}$$

که در آن T_0 دمای حالت تعادل می باشد. حال تنشهای σ_{11} و σ_{22} را از معادلات (۲-۱۱) و (۲-۱۲) بدست می آوریم

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{11} - \nu\varepsilon_{22} + (1+\nu)\alpha_T(T - T_0)\right] \tag{۲-۱۴}$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}\left[\varepsilon_{22} - \nu\varepsilon_{11} - (1+\nu)\alpha_T(T - T_0)\right] \tag{۲-۱۵}$$

بنابراین برای ε_{33} داریم

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{1-\nu}\left[-\nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + (1+\nu)\alpha_T(T - T_0)\right] \tag{۲-۱۶}$$

با توجه به آنچه که در معادلات (۲-۱۵) و (۲-۱۶) داریم، معادله زیر

$$e = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} \tag{۲-۱۷}$$

حال اگر u، v و w را جابه جایی های میکروتیر یا میکروصفحه در راستای x، y و z فرض کنیم کرنشهای ε_{11} و ε_{22} به شکل زیر می شوند

$$\varepsilon_{11} = u_x - zw_{xx} \qquad (۲- ۱۸)$$

$$\varepsilon_{22} = v_y - zw_{yy} \qquad (۲- ۱۹)$$

حال با در نظر گرفتن (۲-۱۸) و (۲-۱۹) در (۲-۱۶) و نتیجه آن در (۲-۱۷) داریم.

$$e = \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left[u_x + v_y - z(w_{xx} + w_{yy})\right] + \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_T (T - T_0) \qquad (۲-۲۰)$$

با قرار دادن (۲-۲۰) در (۲-۱۰) و حذف شار حرارتی ورودی داریم

$$k\nabla^2 T = \left[\rho c_p + \frac{E\alpha_T^2(1+\nu)T}{(1-\nu)(1-2\nu)}\right]\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha_T T}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left[u_x + v_y - z(w_{xx} + w_{yy})\right] \qquad (۲-۲۱)$$

اگر تغییرات دما زیاد بزرگ نباشد (۲-۲۱) را می توان به شکل زیر در نظر گرفت

$$k\nabla^2 T = \left[\rho c_p + \frac{E\alpha_T^2(1+\nu)T_0}{(1-\nu)(1-2\nu)}\right]\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{E\alpha_T T_0}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left[u_x + v_y - z(w_{xx} + w_{yy})\right] \qquad (۲-۲۲)$$

حال برای راحتی می توان با تعریف $\theta = T - T_0$ (۲-۲۲) را به شکل زیر نوشت

$$k\nabla^2 \theta = \left[\rho c_p + \frac{E\alpha_T^2(1+\nu)T_0}{(1-\nu)(1-2\nu)}\right]\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{E\alpha_T T_0}{1-2\nu}\frac{\partial}{\partial t}\left[u_x + v_y - z(w_{xx} + w_{yy})\right] \qquad (۲-۲۳)$$

از طرفی می توان ممان حرارتی و نیروی محوری حرارتی را به شکل زیر نوشت

$$N^T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \theta dz \qquad (۲-۲۴)$$

$$M^T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\theta dz \qquad (۲-۲۵)$$

همچنین در معادله فوق $\rho c_p >> \frac{E\alpha_T^2(1+\nu)T_0}{(1-\nu)(1-2\nu)}$ می باشد. مثلاً برای میکروصفحه سیلیکونی در دمای $T_0 = 300K$ ، داریم $\frac{E\alpha_T^2(1+\nu)T_0}{(1-\nu)(1-2\nu)} = 1443.7$ و $\rho c_p = 1662716.0$ [۱۱]. بنابراین معادله نهایی هدایت به شکل زیر می شود.

$$k\nabla^2\theta = \rho c_p \frac{\partial\theta}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[u_x + v_y - z(w_{xx} + w_{yy})\right] \tag{۲-۲۶}$$

که در آن

$$\beta = \frac{E\alpha_T}{1-2\nu} \tag{۲-۲۷}$$

مدول گرمایی می باشد. همچنین می توان با فرض لیفشیتز و روکاس و با نادیده گرفتن $\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$ و $\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}$ معادله (۲-۲۶) را به شکل زیر کاهش داد. [۱۵]

(۲-۲۸)

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \rho c_p \frac{\partial\theta}{\partial t} + \beta T_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[u_x + v_y - z(w_{xx} + w_{yy})\right]$$

معادله فوق برای محاسبه میرایی ترموالاستیک با معادلات ارتعاشات میکروصفحه غیرخطی (با در نظر گرفتن تنشهای وان-کارمن) کوپل خواهد شد و اگر معادله ارتعاشی میکروصفحه با فرض کیرشهف بدست آید معادله هدایت حرارتی به شکل زیر می شود

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \rho c_p \frac{\partial\theta}{\partial t} - \beta T_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[z(w_{xx} + w_{yy})\right] \tag{۲-۲۹}$$

همچنین برای بدست آوردن میرایی ترموالاستیک در میکروتیر معادله‌ای که با معادله ارتعاشی میکروتیر کوپل می شود به شکل زیر از معادله (۲-۲۹) ساده می شود

(۳۰-۲)

$$k\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}=\rho c_p\frac{\partial\theta}{\partial t}-\beta T_0\frac{\partial}{\partial t}\left[zw_{xx}\right]$$

فصل سوم

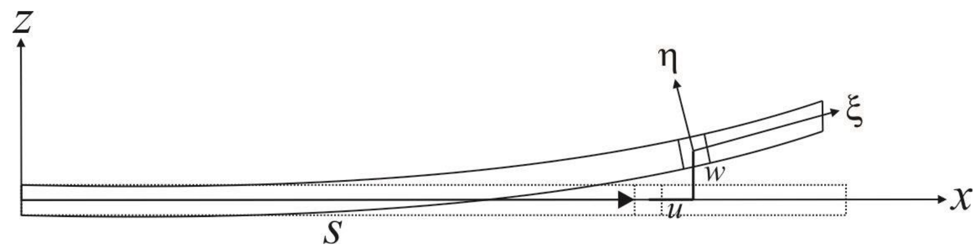
مدل میکروتیر

۳-۱- مقدمه

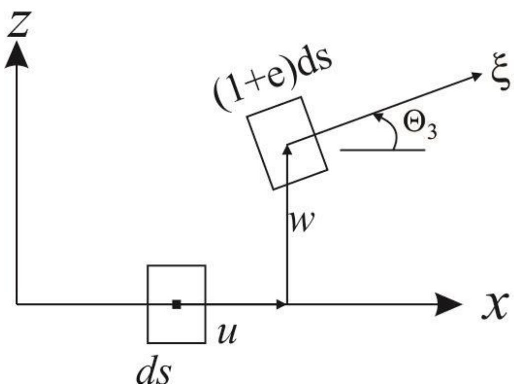
در این فصل تشدیدکننده را به عنوان یک میکروتیر مدل کرده‌ایم و از آنجا که برای نشان دادن اثر کشش درون صفحه‌ای نیاز به مدل تیر اولر-برنولی با کشش درون صفحه‌ای داریم بنابراین از این مدل، برای بدست آوردن میرایی ترموالاستیک استفاده کرده‌ایم. اثر کشش درون صفحه‌ای موقعی خود را نشان می-دهد که ولتاژ زیادی به تیر اعمال شود که در این صورت اختلاف زیادی با مدل تیر اولر-برنولی پیدا می کند که این مقایسه نیز انجام شده است. همچنین معادلات میکروتیر را بی‌بعد کردیم تا بررسی میرایی برحسب پارامترها به سهولت صورت گیرد. نتایجی که بدست آمده بسیار متفاوت است با آنچه در تیرهای اولر-برنولی قبلاً دیده بودیم.

۳-۲- معادله خیز تیر ترموالاستیک اولر-برنولی با در نظر گرفتن کشش درون صفحه‌ای

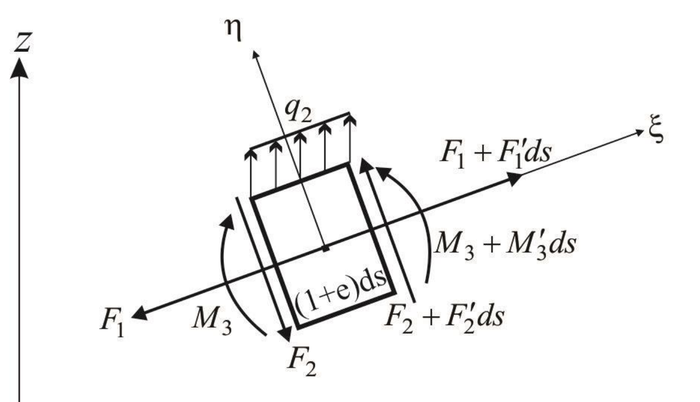
در اینجا تیر همگنی را فرض کرده ایم که سیستم مختصات، جابه جایی های المان و دیاگرام آزاد آن را در شکلهای ۳-۱، ۳-۲ و ۳-۳ نشان داده‌ایم که در آن s فاصله انتهای تیر تغییر شکل نیافته تا نقطه مرجع المان آن می باشد. در تئوری تیر اولر-برنولی صفحه سطح مقطع عرضی قبل و بعد از خمش همچنان بر محور تیر عمود و بدون تغییر شکل باقی می ماند که این فرض نیز در اینجا پابرجا می باشد. همچنین این فرض این نکته را بیان می کند که $\varepsilon_{12}=0$ می باشد. [۳۹]



شکل ۳-۱: سیستم مختصات تیر اولر-برنولی



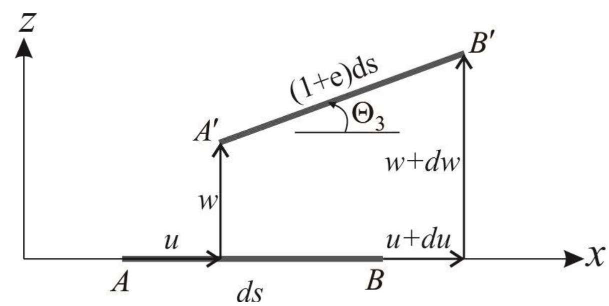
شکل ۳-۲: جابه‌جایی‌های المان تیر اولر-برنولی



شکل ۳-۳: دیاگرام جسم-آزاد المان تیر غیرخطی اولر-برنولی

در تئوری تیر اولر-برنولی غیرخطی نیز فرضهای اولر-برنولی همچنان برقرارند. از شکلهای ۳-۱ و ۳-۲ می توان رابطه‌ای با ماتریس انتقال $[T]$ بین مختصات کارتزین xyz و مختصات منحنی متعامد $\xi\eta\zeta$ برقرار کرد

$$\begin{Bmatrix}\mathbf{i}_1\\\mathbf{i}_2\\\mathbf{i}_3\end{Bmatrix}=[T]\begin{Bmatrix}\mathbf{i}_x\\\mathbf{i}_y\\\mathbf{i}_z\end{Bmatrix}\ ,\ \ [T]=\begin{bmatrix}\cos\Theta_3 & 0 & \sin\Theta_3\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\Theta_3 & 0 & \cos\Theta_3\end{bmatrix} \tag{۳-۱}$$



شکل ۳-۴: رابطه بین جابه‌جایی‌ها و زاویه چرخش

که در آن $\boldsymbol{i}_j$ بردارهای یکه در راستای محورهای ξ ، ζ و η و $\boldsymbol{i}_x, \boldsymbol{i}_y, \boldsymbol{i}_z$ بردارهای یکه در راستای محورهای x، y و z می‌باشند. از شکل ۳-۴ نیز چنین برمی‌آید که کرنش e و زاویه چرخش Θ_3 به شکل زیر بر حسب u' و w' بیان می‌شوند.

$$e=\sqrt{(1+u')^2+w'^2}-1,\ \ \cos\Theta_3=\frac{1+u'}{1+e},\ \ \ \sin\Theta_3=\frac{w'}{1+e} \tag{۳-۲}$$

حال می توان چرخشها را به شکل زیر نوشت

$$\rho_3=\mathbf{i}'_1.\mathbf{i}_3=[(\cos\Theta_3)'\mathbf{i}_x+(\sin\Theta_3)'\mathbf{i}_z].[-\sin\Theta_3\,\mathbf{i}_x+\cos\Theta_3\,\mathbf{i}_z]=\Theta'_3 \tag{۳-۳}$$

$$\rho_1=\mathbf{i}'_3.\mathbf{i}_2,\ \ \ \rho_2=\mathbf{i}'_2.\mathbf{i}_1 \tag{۳-۴}$$

که در آن ρ_1 چرخش حول محور ξ ، ρ_2 چرخش حول η و ρ_3 چرخش حول ζ می باشد. همچنین تعادل گشتاورها حول راستای z را می توان به شکل زیر نوشت (شکل ۳-۳ را ببینید)

$$M'_3 ds + F_2(1+e)ds = j_3 ds \ddot{\Theta}_3, \quad F_2 = -\frac{1}{1+e}\left(M'_3 - j_3\ddot{\Theta}_3\right) \tag{۵-۳}$$

که در آن j_3 ممان اینرسی می باشد که به شکل زیر تعریف می شود

$$j_3 = \int \rho z^2 dA \tag{۶-۳}$$

با توجه به شکل ۳-۳، با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان بدست آورد

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial s} ds + q_2 ds \mathbf{i}_z = m ds \mathbf{a} \tag{۷-۳}$$

که در آن

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i}_1 + F_2 \mathbf{i}_3 \tag{۸-۳}$$

نیروی برآیند وارد بر سطح مقطع می باشد و

$$\mathbf{a} = \ddot{u}\mathbf{i}_x + \ddot{w}\mathbf{i}_z \tag{۹-۳}$$

شتاب مرکز جرم المان است. حال با جایگزینی (۳-۱)، (۳-۸) و (۳-۹) در (۳-۷) داریم

$$[(F_1\cos\Theta_3)' - (F_2\sin\Theta_3)']\mathbf{i}_x + [(F_1\sin\Theta_3)' + (F_2\cos\Theta_3)']\mathbf{i}_z + q_2\mathbf{i}_z = m\ddot{u}\mathbf{i}_x + m\ddot{w}\mathbf{i}_z \tag{۱۰-۳}$$

با مساوی صفر قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}_x$ و $\mathbf{i}_z$ معادلات حرکت را به شکل زیر بدست می آوریم

$$(F_1\cos\Theta_3)' - (F_2\sin\Theta_3)' = m\ddot{u} \tag{۱۱-۳}$$

$$(F_1\sin\Theta_3)' + (F_2\cos\Theta_3)' + q_2 = m\ddot{w} \tag{۱۲-۳}$$

با استفاده از روش حساب تغییرات [۳۹]، شرایط مرزی را به شکل زیر مشخص می کنیم.

$$w = 0 \text{ یا } F_2 = 0$$

$$\Theta_3 = 0 \text{ یا } M_3 = 0 \quad (۱۳\text{-}۳)$$

$$u = 0 \text{ یا } F_1 = 0$$

در $s = 0, L$.

برای رسیدن به معادلات حرکت، به پیدا کردن ارتباط بین منتجه‌های تنش F_1 و F_2 و گشتاور M_3 با جابه‌جایی های u و w نیاز داریم. بنابراین ما سه معادله (۳-۵)، (۳-۱۱) و (۳-۱۲) داریم اما با دو مجهول u و w . برای حل مسأله، ما از معادله (۳-۵) برای ارتباط دادن منتجه تنش برشی با F_2 بر حسب M_3 و Θ_3 استفاده می‌کنیم. با اینکار، دو معادله (۳-۱۱) و (۳-۱۲) بر حسب دو متغیر مستقل u و w بدست آمدند. برای این منظور ما نیاز به محاسبه کرنشها داریم. بنابراین با برخی عملیات ریاضی، کرنشها را با در نظر گرفتن جابه‌جایی‌ها و چرخشهای بزرگ بدست می‌آوریم.

$$\epsilon_{11} = e - z\rho_3, \;\; \epsilon_{12} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad (۱۴\text{-}۳)$$

بنابراین تنش مرتبط با ϵ_{11} را با در نظر گرفتن اثر ترموالاستیکی بدست می آوریم.

$$\sigma_{11} = E(e - z\rho_3) - E\alpha\Delta T \quad (۱۵\text{-}۳)$$

با در نظر گرفتن اینکه تیر همگن است و خط مرجع از محور وسط تیر عبور می‌کند و با استفاده از (۳-۱۵) می توان نوشت

$$F_1 = \int \sigma_{11} dA = \int E(e - z\rho_3 - \alpha\Delta T) dA = EAe - E\alpha \int \Delta T dA \quad (۱۶\text{-}۳)$$

$$M_3 = -\int z\sigma_{11} dA = \int E(-ze + z^2\rho_3 + z\alpha\Delta T)dA = EI\rho_3 + E\alpha \int z\Delta T dA \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

M^T و N^T را به ترتیب گشتاور گرمایی و نیروی گرمایی محوری تعریف می کنیم

$$F_1 = EAe - N^T \qquad (۱۸\text{-}۳)$$

$$M_3 = EI\rho_3 + M^T \qquad (۱۹\text{-}۳)$$

بنابراین F_2 را با جایگزینی (۳-۱۹) در (۳-۵) و حذف برخی جملات غیرخطی ناشی از اینرسی دورانی، به خاطر کوچک بودن j_3، می توان بدست آورد.

$$F_2 = -\frac{1}{1+e}(EI\rho_3 + M^T)' \qquad (۲۰\text{-}۳)$$

با جایگزینی (۳-۲۰) در (۳-۱۱) و (۳-۱۲) و با استفاده از (۳-۱۸) و (۳-۱۹) می توان نوشت

$$[(EAe - N^T)\cos\Theta_3]' + \left[\frac{1}{1+e}(EI\rho_3 + M^T)'\sin\Theta_3\right]' = m\ddot{u} \qquad (۲۱\text{-}۳)$$

$$[(EAe - N^T)\sin\Theta_3]' - \left[\frac{1}{1+e}(EI\rho_3 + M^T)'\cos\Theta_3\right]' + q_2 = m\ddot{w} \qquad (۲۲\text{-}۳)$$

که در آن e ، Θ_3 و ρ_3 از طریق روابط (۳-۲) و (۳-۳) به u و w مرتبط هستند. با فرض اینکه u و w کوچک هستند می توانیم معادله (۳-۲) را بسط دهیم و روابط زیر را بدست آوریم.

$$e = u' + \frac{1}{2}w'^2 - \frac{1}{2}u'w'^2 + \cdots \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

$$\cos\Theta_3 = 1 - \frac{1}{2}w'^2 + u'w'^2 \qquad (۲۴\text{-}۳)$$

$$\sin\Theta_3 = w' - u'w' + u'^2w' - \frac{1}{2}w'^3 + \cdots \qquad (۲۵\text{-}۳)$$

$$\Theta_3 = tan^{-1}\left(\frac{v'}{1+u'}\right) = w' - u'w' + u'^2w' - \frac{1}{3}w'^3 + \cdots \qquad (۲۶\text{-}۳)$$

لازم به ذکر است که e در مقابل عدد یک کوچک است ($1 + e \approx 1$). حال با جایگزینی (۳-۳) و (۳-۲۳) تا (۳-۲۶) در (۳-۲۱) و (۳-۲۲)، و بسط نتایج حاصله با کوچک در نظر گرفتن u و w ، و نگه داشتن ترمهای با توان دو، و نادیده گرفتن ترمهای غیرخطی ناشی از اینرسی دورانی به دلیل کوچکی j_3 ، و در نظر گرفتن تیر یکنواخت در نهایت به روابط زیر می رسیم.

$$\left[EA\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right) - N^T\left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right)\right]' + [(EI(w' - u'w')'' + M^{T\prime})(w' - u'w')]' = m\ddot{u} \qquad (۲۷\text{-}۳)$$

$$[EAw'u' - N^T(w' - u'w')]' - \left[\left(EI(-u'w')'' + M^{T'}\right)\left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right)\right]' + q_2 = m\ddot{w} + EIw^{iv} \qquad (۲۸\text{-}۳)$$

برای تیر باریک و بلند اینرسی طولی $m\ddot{u}$ می‌تواند نادیده گرفته شود. از طرفی چون شعاع ژیراسیون $\sqrt{I/A}$ معمولاً کوچک است ترمهایی که در EI در سمت چپ معادله (۳-۲۷) و (۳-۲۸) ضرب شده‌اند را می توان حذف کرد.

$$\left[EA\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right) - N^T\left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right)\right]' + \left[M^{T'}(w' - u'w')\right]' = 0 \qquad (۲۹\text{-}۳)$$

$$EA(w'u')' - [N^T(w' - u'w')]' - \left(M^{T''}\left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right) + M^{T'}\left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right)'\right) + q_2 = m\ddot{w} + EIw^{iv} \qquad (۳۰\text{-}۳)$$

همچنین با حذف ترمهای با مرتبه‌های بالاتر داریم

$$\left[EA\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right) - N^T\right]' + (M^{T\prime}w')' = 0 \qquad (۳۱\text{-}۳)$$

$$EA(w'u')' - (N^Tw')' - M^{T''} + q_2 = m\ddot{w} + EIw^{iv} \qquad (۳۲\text{-}۳)$$

از معادله (۳-۳۱) می توانیم این نتیجه را بگیریم که

$$EA\left(u' + \frac{1}{2}w'^2\right) - N^T + M^{T'}w' = C_1 \qquad (۳۳\text{-}۳)$$

از (۳-۳۳) u' را می توانیم بدست بیاوریم

$$u' = \frac{1}{EA}\left(C_1 + N^T - {M^T}' w'\right) - \frac{1}{2}{w'}^2 \qquad (۳-۳۴)$$

بنابراین با انتگرالگیری داریم

$$u = \int_0^s \left[\frac{1}{EA}\left(C_1 + N^T - {M^T}' w'\right) - \frac{1}{2}{w'}^2\right] ds + C_2 \qquad (۳-۳۵)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی مفصلی داریم

$$u(0,t) = 0 \quad and \quad u(L,t) = LP(t) \qquad (۳-۳۶)$$

$$w = 0,\ w'' = 0 \quad at \quad s = 0, L \qquad (۳-۳۷)$$

که در آن $P(t)$ نیروی محوری وارد شده به تیر می باشد. با اعمال کردن (۳-۳۶) در (۳-۳۵) داریم

$$C_2 = 0 \qquad (۳-۳۸)$$

$$LP(t) = \int_0^L \left[\frac{1}{EA}(C_1 + N^T - M^{T\prime} w') - \frac{1}{2}w'^2\right] ds \qquad (۳-۳۹)$$

بنابراین می توانیم C_1 را بدست بیاوریم

$$C_1 = EAP(t) - \frac{1}{L}\int_0^L \left[\left(N^T - {M^T}' w'\right) - \frac{EA}{2}{w'}^2\right] ds \qquad (۳-۴۰)$$

با جایگزینی (۳-۴۰) و (۳-۳۴) در (۳-۳۲) داریم

$$EA\left(w'\left[\frac{1}{EA}\left(C_1 + N^T - {M^T}' w'\right) - \frac{1}{2}{w'}^2\right]\right)' - (N^T w')' - {M^T}'' + q_2 = m\ddot{w} + EIw^{iv} \qquad (۳-۴۱)$$

با حذف کردن برخی ترمهای مرتبه بالا در نهایت داریم

$$w''\left\{EAP(t)-\frac{1}{L}\int_0^L\left[\left(N^T-M^{T'}w'\right)-\frac{EA}{2}w'^2\right]ds\right\}+q_2=m\ddot{w}+EIw^{iv}+M^{T''} \qquad (۴۲\text{-}۳)$$

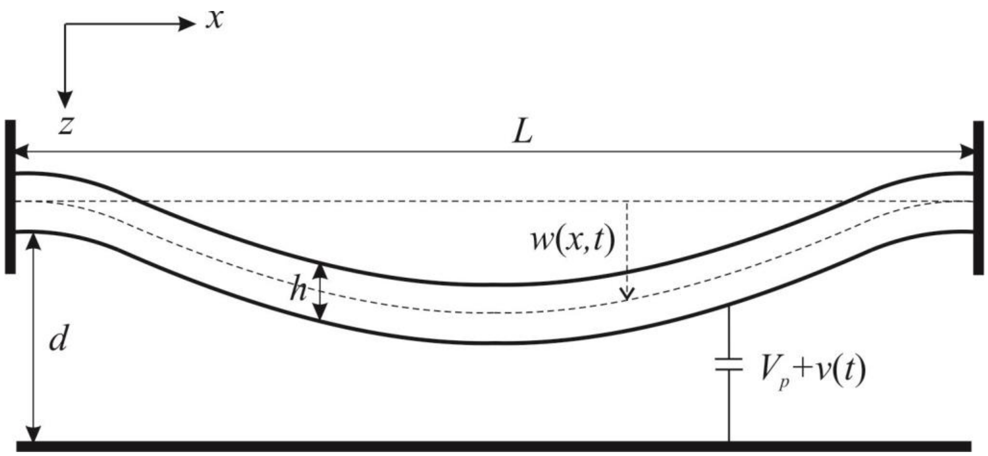
که در آن q_2 یک بار دلخواه است که در تشدیدکننده‌ها نیروی الکترواستاتیکی می‌باشد. معادله فوق می بایست با معادله هدایت کوپل شود تا بتوان از آن ضریب میرایی ترموالاستیک را محاسبه کرد.

۳-۳- مدل تیر اولر-برنولی تشدید کننده با در نظر گرفتن کشش درون صفحه‌ای

همان طور که در شکل ۳-۵ نشان داده شده است تشدید کننده را به شکل یک تیر دو سر گیردار مدل کرده‌ایم که یک نیروی الکتریکی سبب خمش این تیر شده است این نیروی الکتریکی از دو جزء تشکیل شده است یک جزء آن ناشی از ولتاژ DC است که آن را با V_p نمایش می دهیم و جزء دوم آن که دارای مقدار کمی می باشد ناشی از ولتاژ AC است که آن را با $v(t)$ نمایش می دهیم. همچنین نیروی الکتریکی در عرض تیر به طور یکنواخت وارد می شود. خیز تیر را با $w(x,t)$ نشان داده‌ایم که از معادله زیر بدست می آید.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 M^T}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left\{P(t)-\frac{1}{L}\int_0^L\left[\left(N^T-\frac{\partial M^T}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{EA}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]dx\right\}+\frac{1}{2}\epsilon b\frac{\left(V_p+v(t)\right)^2}{(d-w)^2} (۴۳\text{-}۳)$$

که در آن t، α_T، E، $P(t)$، L، b، d، ϵ و ρ به ترتیب زمان، ضریب انبساط حرارتی، مدول یانگ، نیروی محوری اعمال شده، طول، عرض، فاصله بین تیر و صفحه زیرین، ثابت دی‌الکتریک و چگالی می باشند. لازم به ذکر است که سطح مقطع تیر مستطیل شکل می‌باشد بنابراین $A=bh$ و $I=bh^3/12$ می شوند که در آن h ضخامت تیر می‌باشد.



شکل ۳-۵: مدل تشدید کننده به شکل تیر اولر-برنولی با در نظر کشش درون صفحه‌ای

همچنین معادله هدایت (۲-۳۰) با معادله (۳-۴۳) کوپل می‌شود. این دو معادله، معادلات اصلی حرکت تیر هستند که با آنها می توان اثر میرایی ترموالاستیک را نشان داد. حال برای راحتی و ساده سازی بیشتر، این معادلات را با استفاده از متغیرهای زیر بی‌بعد می‌کنیم.

$$\widehat{w}=\frac{w}{d}\,,\quad \hat{x}=\frac{x}{L}\,,\quad \hat{t}=\frac{t}{\bar{t}}\,,\quad \hat{z}=\frac{z}{h}\,,\quad \widehat{\theta}=\frac{\theta}{\bar{\theta}} \qquad (۳\text{-}۴۴)$$

که در آن $\bar{t}=\sqrt{\frac{\rho bhL^4}{EI}}$ و $\bar{\theta}=\frac{\beta T_0 dh^3}{\kappa\bar{t}L^2}$ می باشند. حال با جایگزینی (۳-۴۴) در (۲-۳۰) و (۳-۴۳) داریم

$$\frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial\hat{t}^2}+\frac{\partial^4\widehat{w}}{\partial\hat{x}^4}+\alpha_1\frac{\partial^2\widehat{M}^T}{\partial\hat{x}^2}=\frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial\hat{x}^2}\left\{\widehat{P}(t)-\int_0^1\left[\widehat{N}^T-\alpha_2\frac{\partial\widehat{M}^T}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\widehat{w}}{\partial\hat{x}}-\alpha_3\left(\frac{\partial\widehat{w}}{\partial\hat{x}}\right)^2\right]d\hat{x}\right\}+\alpha_4\frac{\left(V_p+v(t)\right)^2}{(1-\widehat{w})^2} \qquad (۳\text{-}۴۵)$$

$$\frac{\partial^2\widehat{\theta}}{\partial\hat{z}^2}=\alpha_5\frac{\partial\widehat{\theta}}{\partial\hat{t}}-\hat{z}\frac{\partial}{\partial\hat{t}}\left(\frac{\partial^2\widehat{w}}{\partial\hat{x}^2}\right) \qquad (۳\text{-}۴۶)$$

که در آن

$$\alpha_1=\frac{12\alpha_T\bar{\theta}L^2}{hd}\,,\quad \alpha_2=\frac{12\alpha_T\bar{\theta}d}{h}\,,\quad \alpha_3=\frac{6d^2}{h^2}\,,\quad \alpha_4=\frac{6\epsilon L^4}{Eh^3d^3}\,,\quad \alpha_5=\frac{\rho c_v h^2}{\bar{t}\kappa} \qquad (۳\text{-}۴۷)$$

$$\widehat{M}^T = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{z}\hat{\theta} d\hat{z}\ , \quad \widehat{N}^T = E\alpha_T b\bar{\theta}h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{\theta} d\hat{z}\ , \quad \widehat{P}(t) = \frac{L^2}{EI}P(t) \tag{۴۸-۳}$$

همچنین شرایط مرزی تیر به شکل زیر است

$$w(0,t) = w(L,t) = 0\ , \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(0,t)} = \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{(L,t)} = 0 \tag{۴۹-۳}$$

که اگر با متغیرهای (۳-۴۴) بی‌بعد شوند به شکل زیر بدست می آیند.

$$\widehat{w}(0,\hat{t}) = \widehat{w}(1,\hat{t}) = 0\ , \quad \left.\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \hat{x}}\right|_{(0,\hat{t})} = \left.\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \hat{x}}\right|_{(1,\hat{t})} = 0 \tag{۵۰-۳}$$

۳-۴- ارتعاشات تیر حول خیز استاتیکی

خیز میکروتیر شامل دو بخش می‌شود. بخش اول در اثر ولتاژ ثابت (DC) V_p بوجود می‌آید که آن را با $\widehat{w}_s(\hat{x})$ نمایش می‌دهیم و بخش دوم حول این خیز استاتیکی بوجود می‌آید که آن را با $\hat{v}(\hat{x},\hat{t})$ نمایش می‌دهیم.

$$\widehat{w}(\hat{x},\hat{t}) = \widehat{w}_s(\hat{x}) + \hat{v}(\hat{x},\hat{t}) \tag{۵۱-۳}$$

برای محاسبه خیز استاتیکی، میرایی از سیستم حذف شده و معادله (۳-۴۵) کوپل خود را با معادله (۳-۴۶) از دست می‌دهد و کلیه ترمهای حرارتی نیز حذف می‌شوند. بنابراین برای بدست آوردن خیز استاتیکی در شرایط مرزی دو سر گیردار می‌بایست معادله زیر را حل کرد.

$$\frac{d^4\widehat{w}_s}{d\hat{x}^4} = \frac{d^2\widehat{w}_s}{d\hat{x}^2}\left\{\widehat{P} + \int_0^1 \alpha_3 \left(\frac{d\widehat{w}_s}{d\hat{x}}\right)^2 d\hat{x}\right\} + \alpha_4 \frac{{V_p}^2}{(1-\widehat{w}_s)^2} \tag{۵۲-۳}$$

$$\widehat{w}_s(0) = \widehat{w}_s(1) = 0\ , \quad \left.\frac{d\widehat{w}_s}{d\hat{x}}\right|_{\hat{x}=0} = \left.\frac{d\widehat{w}_s}{d\hat{x}}\right|_{\hat{x}=1} = 0 \tag{۵۳-۳}$$

برای بدست آوردن معادله‌ای که حرکت ارتعاشی تیر را بیان کند می‌بایست (۳-۵۱) را در معادلات (۳-۴۵)، (۳-۴۶) جایگزین کرد.

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{t}^2}+\frac{\partial^4(\hat{w}_s(\hat{x})+\hat{v}(\hat{x},\hat{t}))}{\partial \hat{x}^4}+\alpha_1\frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2}=\frac{\partial^2(\hat{w}_s(\hat{x})+\hat{v}(\hat{x},\hat{t}))}{\partial \hat{x}^2}\left\{\hat{P}(t)-\int_0^1\left[\hat{N}^T-\alpha_2\frac{\partial \hat{M}^T}{\partial \hat{x}}\frac{\partial(\hat{w}_s(\hat{x})+\hat{v}(\hat{x},\hat{t}))}{\partial \hat{x}}-\alpha_3\left(\frac{\partial(\hat{w}_s(\hat{x})+\hat{v}(\hat{x},\hat{t}))}{\partial \hat{x}}\right)^2\right]d\hat{x}\right\}+\alpha_4\frac{(V_p)^2}{(1-(\hat{w}_s(\hat{x})+\hat{v}(\hat{x},\hat{t})))^2} \quad (۳-۵۴)$$

$$\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial \hat{z}^2}=\alpha_5\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial \hat{t}}-\hat{z}\frac{\partial}{\partial \hat{t}}\left(\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial \hat{x}^2}\right) \quad (۳-۵۵)$$

حال ترم آخر معادله که مربوط به نیروی الکتریکی است را حول خیز استاتیکی خطی‌سازی می‌کنیم.

$$\alpha_4\frac{V_p^2+2V_p v(t)+v^2(t)}{\left[\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)-\hat{v}(\hat{x},\hat{t})\right]^2}=\frac{\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^2}+\frac{2\alpha_4 V_P v(t)}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^2}+\frac{2\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^3}\hat{v}(\hat{x},\hat{t}) \quad (۳-۵۶)$$

با جایگزینی (۳-۵۶) در (۳-۵۴) و حذف ترمهای با مرتبه بالا داریم

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{t}^2}+\frac{\partial^4\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}^4}+\frac{\partial^4\hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}^4}+\alpha_1\frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2}=\frac{\partial^2\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\hat{P}(t)-\int_0^1\left[\hat{N}^T-\alpha_2\frac{\partial \hat{M}^T}{\partial \hat{x}}\left(\frac{\partial\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)-\alpha_3\left(\left(\frac{\partial\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^2+2\frac{\partial\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\frac{\partial\hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}}\right)\right]d\hat{x}\right\}+\frac{\partial^2\hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\hat{P}(t)+\int_0^1\alpha_3\left(\frac{\partial\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^2d\hat{x}\right\}+\frac{\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^2}+\frac{2\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^3}\hat{v}(\hat{x},\hat{t}) \quad (۳-۵۷)$$

معادله (۳-۵۲) را می توان از معادله (۳-۵۷) حذف کرد و در نهایت داریم

$$\frac{\partial^2 \hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{t}^2}+\frac{\partial^4\hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}^4}+\alpha_1\frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2}=\frac{\partial^2\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\int_0^1\left[-\hat{N}^T+\alpha_2\frac{\partial \hat{M}^T}{\partial \hat{x}}\frac{\partial\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}+2\alpha_3\frac{\partial\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\frac{\partial\hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}}\right]d\hat{x}\right\}+\frac{\partial^2\hat{v}(\hat{x},\hat{t})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\hat{P}(t)+\int_0^1\alpha_3\left(\frac{\partial\hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^2d\hat{x}\right\}+\frac{2\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^3}\hat{v}(\hat{x},\hat{t}) \quad (۳-۵۸)$$

همچنین شرط مرزی معادله (۳-۵۸) نیز به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\hat{v}(0,\hat{t})=\hat{v}(1,\hat{t})=0\,,\quad \left.\frac{\partial\hat{v}}{\partial \hat{x}}\right|_{(0,\hat{t})}=\left.\frac{\partial\hat{v}}{\partial \hat{x}}\right|_{(1,\hat{t})}=0 \quad (۳-۵۹)$$

بنابراین معادله (۳-۵۸) مدل خطی سازی شده حول خیزهای بزرگ استاتیکی در اثر اعمال بار الکترواستاتیکی می باشد. هم‌اکنون معادلات (۳-۵۸) و (۳-۵۵) را با فرض ارتعاشات هارمونیک حل می‌کنیم

$$\hat{v}(\hat{x},\hat{t}) = \sum R_n(\hat{x}) e^{i\Omega_n \hat{t}} \quad , \quad \hat{\theta}(\hat{x},\hat{z},\hat{t}) = \sum \Theta_n(\hat{x},\hat{z}) e^{i\Omega_n \hat{t}} \tag{۳-۶۰}$$

که در آن Ω_n فرکانس می‌باشد که به دلیل وجود میرایی مختلط بوده و دارای دو بخش موهومی λ_n و حقیقی ω_n می‌باشد و $R_n(\hat{x})$ و $\Theta_n(\hat{x},\hat{z})$ به ترتیب شکل مودهای nام ارتعاشی صفحه و دما می‌باشند. با جایگزینی (۳-۶۰) در (۳-۵۵)، (۳-۵۸) و (۳-۵۹) داریم

$$-\Omega_n^2 R_n(\hat{x}) + \frac{\partial^4 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^4} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \widehat{M}_n^T}{\partial \hat{x}^2} = \frac{\partial^2 \widehat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \left\{ \int_0^1 \left[-\widehat{N}_n^T + \alpha_2 \frac{\partial \widehat{M}_n^T}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \widehat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}} + 2\alpha_3 \frac{\partial \widehat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \frac{\partial R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right] d\hat{x} \right\} + \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \left\{ \hat{P} + \int_0^1 \alpha_3 \left(\frac{\partial \widehat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}} \right)^2 d\hat{x} \right\} + \frac{2\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\widehat{w}_s(\hat{x})\right)^3} R_n(\hat{x}) \tag{۳-۶۱}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_n(\hat{x},\hat{z})}{\partial \hat{z}^2} = i\Omega_n \alpha_5 \Theta_n(\hat{x},\hat{z}) - i\Omega_n \hat{z} \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \tag{۳-۶۲}$$

$$R_n(0) = R_n(1) = 0 \, , \quad \left.\frac{\partial R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right|_{\hat{x}=0} = \left.\frac{\partial R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right|_{\hat{x}=1} = 0 \tag{۳-۶۳}$$

که در آن

$$\widehat{M}_n^T = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \hat{z} \Theta_n(\hat{x},\hat{z}) d\hat{z} \, , \quad \widehat{N}_n^T = E\alpha_T b \bar{\theta} h \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Theta_n(\hat{x},\hat{z}) d\hat{z} \tag{۳-۶۴}$$

می باشند. برای حل معادله (۳-۶۲) به شرط مرزی نیاز داریم. شرط مرزی آن $\partial\Theta_n/\partial\hat{z} = 0$ در $\hat{z} = \pm 1/2$ می باشد. چرا که صفحات بالایی و پایینی هر دو آدیاباتیک می‌باشد و هیچ شار حرارتی از آنها عبور نمی کند. بنابراین حل (۳-۶۲) به شکل زیر می‌شود.

$$\Theta_n(\hat{x},\hat{z}) = \frac{1}{\alpha_5} \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \left(\hat{z} - \frac{\sin(N_n \hat{z})}{N_n cos(N_n/2)} \right) \tag{۳-۶۵}$$

که در آن

$$N_n = (1-i)\sqrt{\frac{\Omega_n \alpha_5}{2}} \tag{۳-۶۶}$$

با جایگزینی (۳-۶۵) در (۳-۶۴) داریم

$$\widehat{M}_n^T = C_n^T \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2} \tag{۳-۶۷}$$

$$\widehat{N}_n^T = \frac{E\alpha_T b\bar{\theta} h}{\alpha_5}\frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left[\frac{\hat{z}^2}{2}+\frac{\cos(N_n\hat{z})}{N_n^2 cos(N_n/2)}\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = 0 \tag{۳-۶۸}$$

که در آن

$$C_n^T = \frac{1}{12\alpha_5}[1+f(\Omega_n)] \tag{۳-۶۹}$$

$$f(\Omega_n) = \frac{24}{N_n^3}\left(\frac{N_n}{2} - tan\left(\frac{N_n}{2}\right)\right) \tag{۳-۷۰}$$

در اینجا می بایست قسمت حقیقی و موهومی C_n^T را جدا کرد برای این کار فرض زیر را به کار می گیریم.

$$N_n = N_n^R + iN_n^I \tag{۳-۷۱}$$

که در آن N_n^R و N_n^I قسمتهای حقیقی و موهومی N_n می‌باشند. همچنین می‌توان C_n^{TR} و C_n^{TI} را به عنوان قسمتهای حقیقی و موهومی C_n^T در نظر گرفت. بنابراین داریم

$$C_n^{TR} = Re\{C_n^T\} = \frac{1}{\alpha_5}\left[\frac{1}{12}+\frac{P}{(P^2+S^2)} - \frac{2\left[A\sin\left(N_n^R\right)+Bsinh\left(N_n^I\right)\right]}{(A^2+B^2)\left[\cos\left(N_n^R\right)+\cosh\left(N_n^I\right)\right]}\right] \tag{۳-۷۲}$$

$$C_n^{TI} = Im\{C_n^T\} = \frac{-1}{\alpha_5}\left[\frac{S}{(P^2+S^2)}+\frac{2\left[Asinh\left(N_n^I\right)-B\sin\left(N_n^R\right)\right]}{(A^2+B^2)\left[\cos\left(N_n^R\right)+\cosh\left(N_n^I\right)\right]}\right] \tag{۳-۷۳}$$

که در آن

$$A = N_n^{R3} - 3N_n^R N_n^{I2} \tag{۷۴-۳}$$

$$B = 3N_n^{R2} N_n^I - N_n^{I3} \tag{۷۵-۳}$$

$$P = N_n^{R2} - N_n^{I2} \tag{۷۶-۳}$$

$$S = 2N_n^R N_n^I \tag{۷۷-۳}$$

می باشند. حال (۳-۶۷) و (۳-۶۸) را در (۳-۶۱) جایگزین می کنیم

$$-\Omega_n^2 R_n(\hat{x}) + (1 + \alpha_1 C_n^T)\frac{\partial^4 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^4} = \frac{\partial^2 \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\int_0^1 \left[\alpha_2 C_n^T \frac{\partial \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^3 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^3} + 2\alpha_3 \frac{\partial \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\frac{\partial R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right] d\hat{x}\right\} + \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\hat{P} + \int_0^1 \alpha_3 \left(\frac{\partial \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^2 d\hat{x}\right\} + \frac{2\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^3} R_n(\hat{x}) \tag{۷۸-۳}$$

معادله فوق معادله‌ای مختلط است بنابراین شامل دو بخش حقیقی و موهومی می باشد.

$$[1 + \alpha_1 C_n^{TR}]\frac{\partial^4 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^4} = \frac{\partial^2 \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\int_0^1 \left[\alpha_2 C_n^{TR} \frac{\partial \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^3 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^3} + 2\alpha_3 \frac{\partial \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\frac{\partial R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right] d\hat{x}\right\} + \frac{\partial^2 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\hat{P}(t) + \int_0^1 \alpha_3 \left(\frac{\partial \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\right)^2 d\hat{x}\right\} + \left[\frac{2\alpha_4 V_P^2}{\left(1-\hat{w}_s(\hat{x})\right)^3} + \omega_n^2 - \lambda_n^2\right] R_n(\hat{x}) \tag{۷۹-۳}$$

$$\alpha_1 C_n^{TI}\frac{\partial^4 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^4} = \frac{\partial^2 \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}^2}\left\{\int_0^1 \left[\alpha_2 C_n^{TI} \frac{\partial \hat{w}_s(\hat{x})}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^3 R_n(\hat{x})}{\partial \hat{x}^3}\right] d\hat{x}\right\} + 2\omega_n \lambda_n R_n(\hat{x}) \tag{۸۰-۳}$$

حال پس از بدست آوردن فرکانسهای حقیقی و موهومی ω_n و λ_n می توان ضریب کیفیت ترموالاستیک را بدست آورد.

$$Q^{-1} = 2\left|\frac{\lambda_n}{\omega_n}\right| \tag{۸۱-۳}$$

۳-۵- مدل تیر اولر-برنولی تشدیدکننده

معادله خطی تشدید کننده شکل ۳-۵ به شکل زیر می باشد

$$\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^2 M^T}{\partial x^2}=\frac{\varepsilon b V_P^2}{2d^3}w \qquad (۸۲-۳)$$

که این می تواند با معادله (۲-۳۰) کوپل شود و چنانچه معادله فوق را با متغیرهای بی‌بعد (۳-۴۴) بی‌بعد کنیم داریم

$$\frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \hat{t}^2}+\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial \hat{x}^4}+\alpha_1\frac{\partial^2 \hat{M}^T}{\partial \hat{x}^2}=\alpha_4 V_P^2\hat{w} \qquad (۸۳-۳)$$

که این معادله نیز می بایست با (۳-۴۶) کوپل شود تا بتوان به ضریب کیفیت ترموالاستیک خطی رسید.

حال با اعمال ارتعاشات هارمونیک (۳-۶۰) و جایگزینی رابطه (۳-۶۷) در (۳-۸۳) به معادله زیر می‌رسیم

$$-(\Omega_n^2+\alpha_4 V_P^2)R_n+\left(\frac{\alpha_1}{12\alpha_5}[1+f(\Omega_n)]+1\right)\frac{\partial^4 R_n}{\partial x^4}=0 \qquad (۸۴-۳)$$

پاسخ معادله (۳-۸۴) به شکل زیر می‌شود

$$R_n(x)=C_1 sin(\gamma_n x)+C_2 cos(\gamma_n x)+C_3 sinh(\gamma_n x)+C_4 cosh(\gamma_n x) \qquad (۸۵-۳)$$

که در آن ضرایب C_1 تا C_4 از شرایط مرزی بدست می‌آیند که برای شرایط مرزی دو سرگیردار به ازای γ_n مشخص از جدول ۳-۱ بدست می‌آیند.

جدول ۳-۱: لیست ضرایب C_i و γ_n به ازای nهای مختلف در شرط مرزی دو سر گیردار

n	γ_n	C_1	C_2	C_3	C_4
1	4.7300	0.7008	-0.7133	-0.7008	0.7133

2	7.8532	-0.7074	0.7068	0.7074	-0.7068
3	10.9956	0.7071	-0.7071	-0.7071	0.7071

همچنین γ_n در معادله (۳-۸۵) به شکل زیر فرض شده است.

$$\gamma_n^4 = \frac{\Omega_n^2+\alpha_4 V_P^2}{\frac{\alpha_1}{12\alpha_5}[1+f(\Omega_n)]+1} \tag{۸۶-۳}$$

حال اگر بخواهیم Ω_n را بدست بیاوریم می‌بایست معادله (۳-۸۷) را به شکل زیر بنویسیم

$$\Omega_n^2 = \gamma_n^4\left[\frac{\alpha_1}{12\alpha_5}[1+f(\Omega_n)]+1\right]-\alpha_4 V_P^2 \tag{۸۷-۳}$$

معادله فوق یک معادله مختلط است که غیرخطی نیز می‌باشد. چنانچه معادله فوق را برحسب N_n حل کنیم قسمتهای حقیقی و موهومی آن را می توان به شکل زیر جدا کرد.

$$N_n^{R4}-6N_n^{R2}N_n^{I2}+N_n^{I4} = G-H\left[\frac{12P}{(P^2-S^2)}-\frac{24\left[A\sin(N_n^R)+B\sinh(N_n^I)\right]}{[A^2-B^2]\left[\cos(N_n^R)+\cosh(N_n^I)\right]}\right] \tag{۸۸-۳}$$

$$4N_n^{R3}N_n^I-4N_n^RN_n^{I3} = H\left[\frac{12S}{(P^2-S^2)}+\frac{24\left[A\sinh(N_n^I)-B\sin(N_n^R)\right]}{(A^2-B^2)\left[\cos(N_n^R)+\cosh(N_n^I)\right]}\right] \tag{۸۹-۳}$$

که در آن

$$G = -\gamma_n^4\alpha_5^2\left(1+\frac{\alpha_1}{12\alpha_5}\right)+\alpha_5^2\alpha_4V_P^2 \tag{۹۰-۳}$$

$$H = \frac{\gamma_n^4\alpha_5\alpha_1}{12} \tag{۹۱-۳}$$

پس از بدست آوردن N_n آنگاه می توان از (۳-۶۶) به Ω_n رسید و ضریب میرایی را از (۳-۸۱) بدست آورد.

برای حل معادلات (۳-۵۲)، (۳-۷۹) و (۳-۸۰) از روش اختلاف محدود[1] استفاده شده است.[۴۰] در این روش چون معادلات غیرخطی هستند حدس اولیه برای جواب بسیار مهم است که برای این کار از معادله (۳-۸۵) به عنوان حدس اولیه استفاده شده است. همچنین برای مدل اولر-برنولی بدست آوردن فرکانسها مستلزم حل کردن معادلات (۳-۸۸) و (۳-۸۹) می باشد که برای حل آنها از روش تکرار ساده استفاده شده است.

۳-۶- مقایسه مدل اولر-برنولی و اولر-برنولی با در نظر گرفتن کشش درون صفحه‌ای

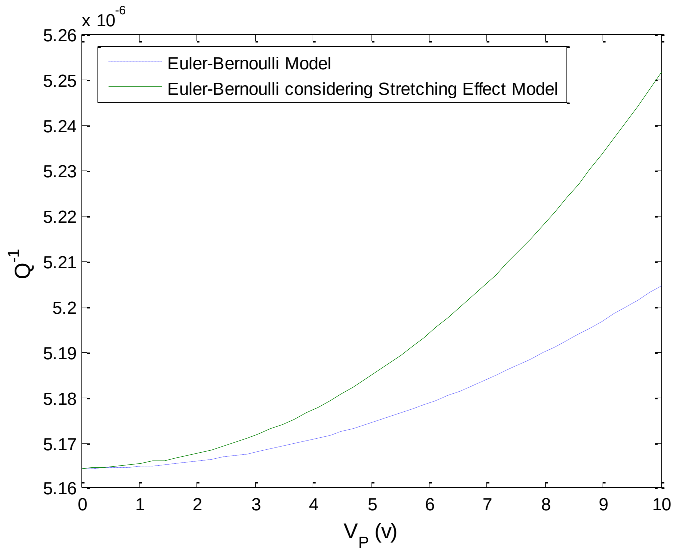
تشدید کننده‌ها بوسیله اعمال نیروی الکتریکی دچار خمش می‌شوند. در این راستا، در شکل ۳-۶ میرایی ترموالاستیک را بر حسب ولتاژ برای دو مدل اولر-برنولی و اولر-برنولی با در نظر گرفتن کشش درون صفحه‌ای برای یک میکروتیر سیلیکونی که خصوصیات آن در جدول ۳-۲ آورده شده است رسم گردیده است. همان طور که در شکل هم دیده می شود برای مقادیر پایین دو مدل بر یکدیگر انطباق دارند اما به تدریج که مقدار ولتاژ نیز افزایش پیدا می کند تفاوت این دو مدل نیز بیشتر می شود. بنابراین اگر بخواهیم خصوصیات و رفتارهای غیرخطی را ببینیم می بایست ولتاژ یا بطور کلی نیروی الکتریکی را افزایش دهیم.

جدول ۳-۲: خصوصیات میکروتیر سیلیکونی[۱۲]

$T_0\ (K)$	$E\ (GPa)$	$\rho\ (kg\ m^{-3})$	ν	$\kappa\ (Wm^{-1}K^{-1})$	$c_v (Jkg^{-1}K^{-1})$
293	165.9	2330	0.22	156	713
$\alpha_T (10^{-6}K^{-1})$	$\hat{P}$	$\varepsilon (C^2m^{-2}N^{-1})$	$d(\mu m)$	$L(\mu m)$	$b(\mu m)$

[1] Finite Difference

2.59	0	8.85×10^{-12}	2	700	5

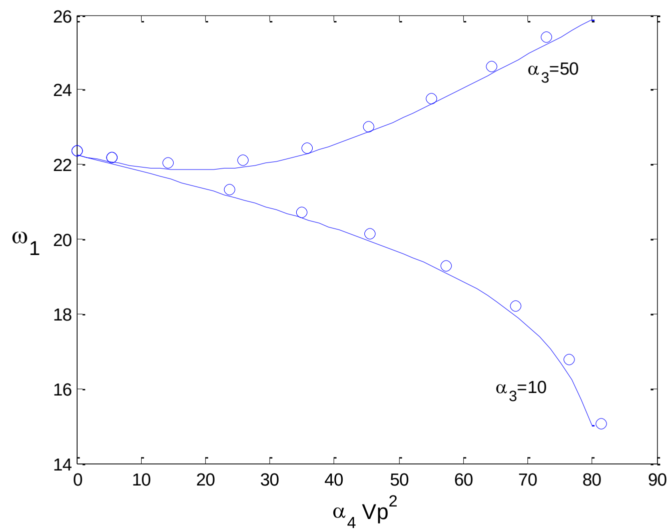


شکل ۳-۶: مقایسه مدل اولر-برنولی و اولر-برنولی با در نظر گرفتن کشش درون صفحه‌ای برحسب ولتاژ با در نظر گرفتن

$$h = 5\mu m$$

۳-۷- نتایج

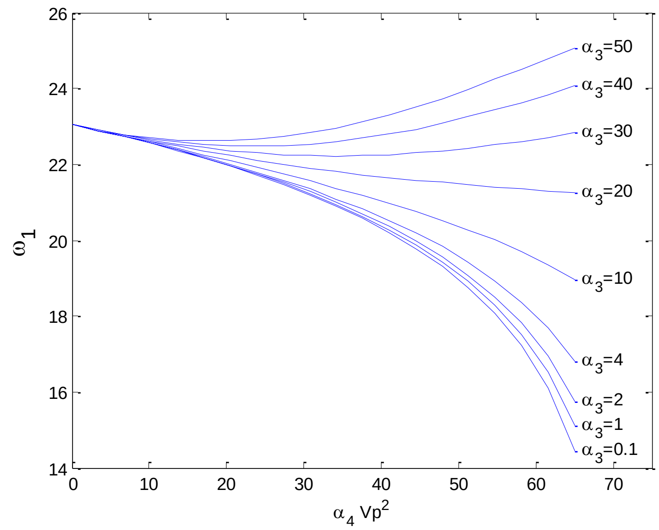
برای صحه گذاری روی مدل اولر-برنولی با کشش درون صفحه‌ای از کار نایفه[۴۱] استفاده شده است. در این کار فرکانس بر حسب نیروی الکتریکی رسم شده است. از طرفی چون اثر ترموالاستیک در این کار وجود ندارد α_1، α_2 ، α_5 و $\hat{P}$ مساوی صفر قرار داده شده‌اند. نتیجه این مقایسه در شکل ۳-۷ آورده شده است.



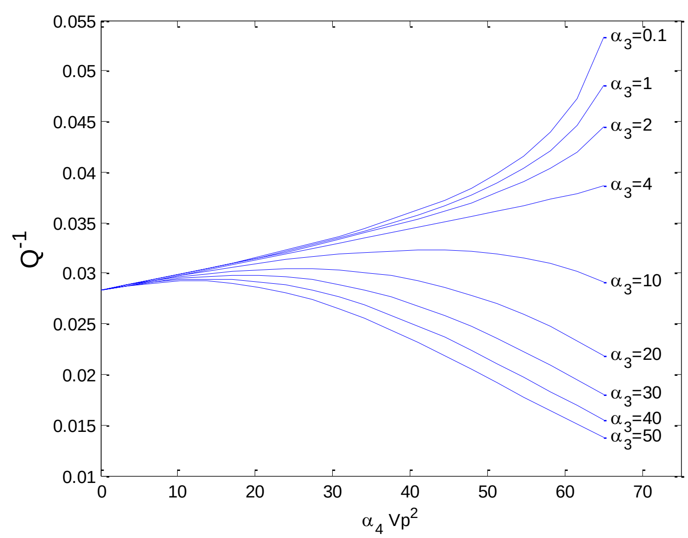
شکل ۳-۷: مقایسه مدل اولر-برنولی با کشش درون صفحه‌ای (-) و کار نایفه [۴۱] (o) با در نظر گرفتن $\alpha_3 = 10$ و $\alpha_3 = 50$

شکل ۳-۸ تغییرات فرکانس طبیعی را بر حسب نیروی الکتریکی به ازای α_3های متفاوت نشان می دهد. بقیه پارامترها نیز $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_5 = 1$ و $\hat{P} = 0$ در نظر گرفته شده‌اند. مقدار α_3 نیز از 0.1 تا 50 تغییر می‌کند. همان طور که در شکل دیده می‌شود رفتار میرایی به دو شکل وجود دارد برای مقادیر کمتر میرایی با افزایش نیروی الکتریکی کاهش می‌یابد و برای مقادیر بالاتر افزایش می‌آید. شکل ۳-۹ نیز تغییرات میرایی را برحسب نیروی الکتریکی نشان می‌دهد و همان رفتاری که در شکل ۳-۸ مشاهده شد در اینجا نیز تکرار شده است. این نشان می‌دهد که اثر کشش درون صفحه‌ای[1] که در تیر اولر-برنولی با کشش درون صفحه‌ای وجود دارد (که در مدل تیر اولر-برنولی وجود ندارد)، در مقادیر بالای α_3 غالب است و سبب افزایش فرکانس و میرایی ترموالاستیک می‌شود.

[1] Mid-plane stretching



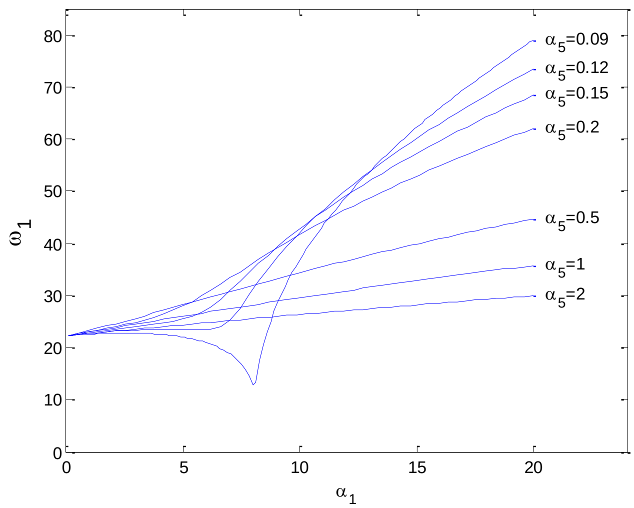
شکل ۳-۸: تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب نیروی الکتریکی به ازای α_3 مختلف



شکل ۳-۹: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب نیروی الکتریکی به ازای α_3 مختلف

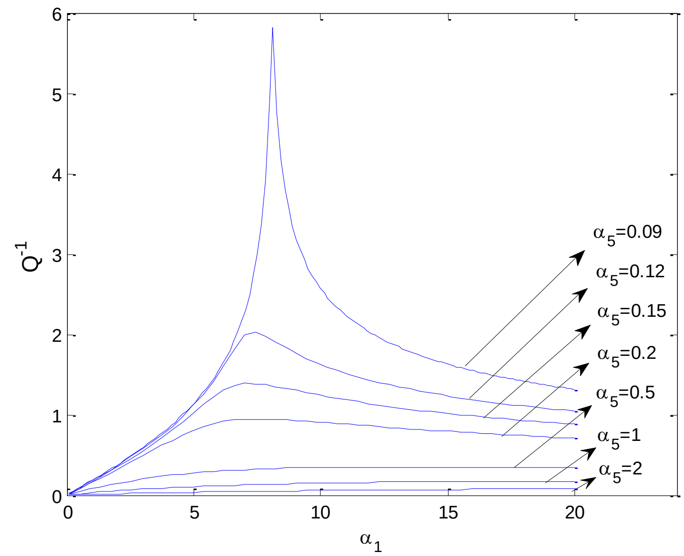
شکل ۳-۱۰ تغییرات فرکانس طبیعی را بر حسب α_1 با در نظر گرفتن $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ به ازای مقادیر مختلف α_5 نشان می‌دهد. همان طور که در این شکل دیده می‌شود، مقادیر α_5 دو جور رفتار را

ایجاد می‌کنند. برای برخی از مقادیر α_5 (برای مثال $\alpha_5 = 0.09$) فرکانس ابتدا کاهش سپس افزایش پیدا می‌کند و برای برخی دیگر از مقادیر α_5 (برای مثال $\alpha_5 = 2$) فرکانس نسبت به α_1 رفتاری شبه خطی از خود نشان می‌دهد.



شکل ۳-۱۰: تغییرات فرکانس طبیعی نسبت به α_1 به ازای مقادیر مختلف α_5

شکل ۳-۱۱ تغییرات میرایی ترموالاستیک را نسبت به α_1 به ازای مقادیر مختلف α_5 با در نظر گرفتن $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$ نشان می‌دهد. همان طور که در این شکل نیز دیده می شود، α_1 یک مقدار بحرانی دارد که به ازای آن میرایی ماکزیمم می‌شود. با توجه به (۳-۴۷)، α_5 و α_1 بیانگر تغییرات دما و گشتاور حرارتی می‌باشند. همچنین برای برخی مقادیر α_5 میرایی افزایش پیدا می‌کند بدون اینکه میرایی ماکزیمم شود. در جدول ۳-۳ برخی مقادیر بحرانی α_1 لیست شده است. این مقادیر برای طراحان و سازندگان تشدیدکننده‌ها که می‌بایست به میرایی توجه داشته باشند، مفید می باشند.



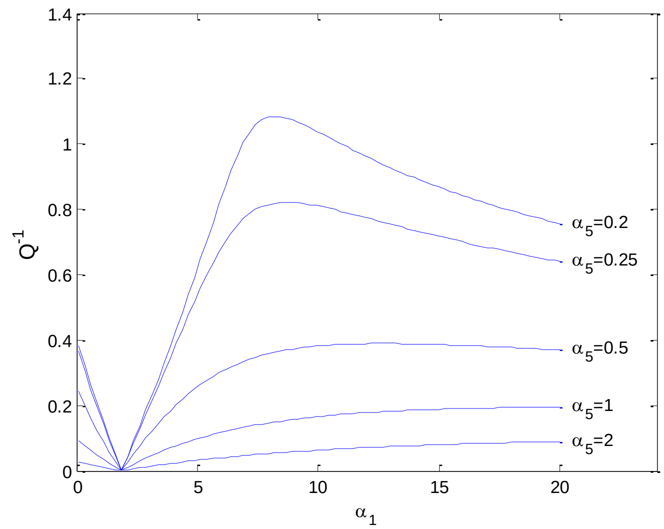
شکل ۳-۱۱: تغییرات میرایی ترموالاستیک در مقابل α_1 به ازای مقادیر مختلف α_5

جدول ۳-۳: لیست مقادیر بحرانی α_1 به ازای α_5 های مختلف

$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\boldsymbol{\alpha_5}$	$\boldsymbol{Q^{-1}}$
8.1217	0.09	5.8243
7.4102	0.12	2.0302
7.0041	0.15	1.3866
7.4102	0.2	0.9466
13.0959	0.5	0.3489

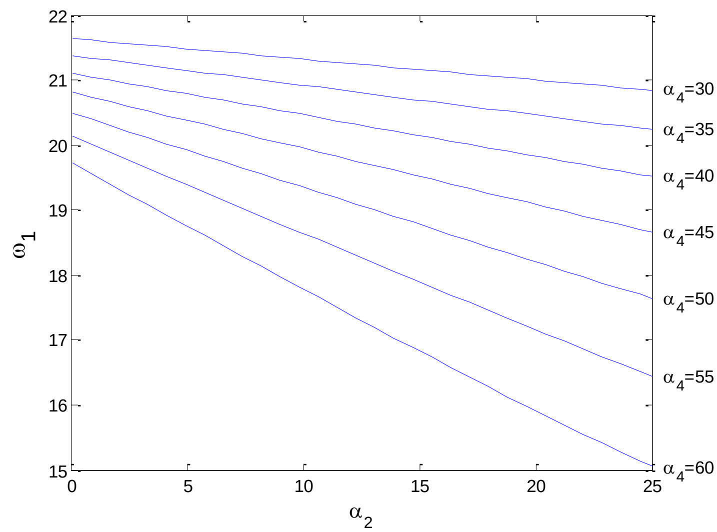
حال با در نظر گرفتن $\alpha_2 = \alpha_3 = 10, \alpha_4 = 50$ ترکیب اثرات کشش درون صفحه‌ای که منجر به تغییر شکل بزرگ می‌شود و میرایی ترموالاستیک در شکل ۳-۱۲ نشان داده شده است. در این شکل تغییرات میرایی ترموالاستیک را بر حسب α_1 نشان داده شده است. این شکل با شکل ۳-۱۱ متفاوت است چرا که در آن میرایی یک مقدار اولیه دارد و پس از آن تا مقدار صفر کاهش می‌یابد. این موضوع نشان می‌دهد که

با افزایش نیروی الکتریکی که موجب تغییر شکل بزرگ در میکروتیر می‌شود برای مقادیری از α_1 می توان به میرایی صفر رسید.



شکل ۳-۱۲: تغییرات میرایی بر حسب α_1 با در نظر گرفتن تغییر شکل بزرگ

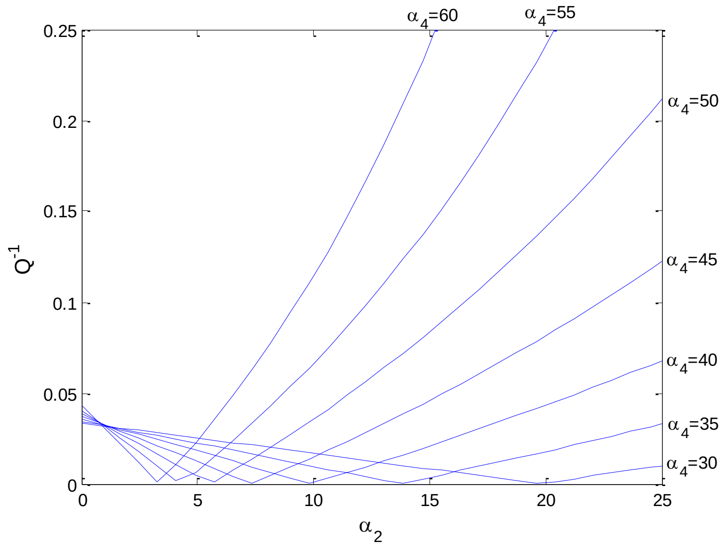
شکل ۳-۱۳ تغییرات فرکانس طبیعی را بر حسب α_2 و با در نظر گرفتن α_1=1, α_3=10, α_5=1, $\hat{P} = 0$ و به ازای مقادیر مختلف α_4 نشان می دهد. هر چقدر α_4 بیشتر شود فرکانس با آهنگ بیشتری کاهش می یابد. با توجه به (۳-۴۵) α_2 روی کوپلینگ تغییر شکل و اثر ترموالاستیک اثر دارد همچنین پارامتری است که از فرض تغییر شکل بزرگ تیر بدست آمده است بنابراین در بررسی های غیرخطی می تواند حائز اهمیت باشد. همچنین در شکل ۳-۱۴ تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب α_2 به ازای مقادیر مختلف α_4 نشان داده شده است. همان طور که نشان داده شده است میرایی ابتدا کاهش می‌یابد سپس افزایش می‌یابد که این خود بیان‌گر وجود یک مقدار بحرانی در α_2 است که آن را با α_2^c نمایش می‌دهیم که به ازای آن میرایی مینیمم می‌شود که این مقادیر به ازای α_4 های مختلف در جدول ۳-۴ ارائه داده‌ایم.



شکل ۳-۱۳: تغییرات فرکانس بر حسب α_2 به ازای α_4 های مختلف

جدول ۳-۴: مقادیر α_2^c به ازای α_4 های مختلف

α_2^c	α_4
19.5923	30
13.8782	35
9.7967	40
7.3478	45
5.7151	50
4.0825	55
3.2662	60

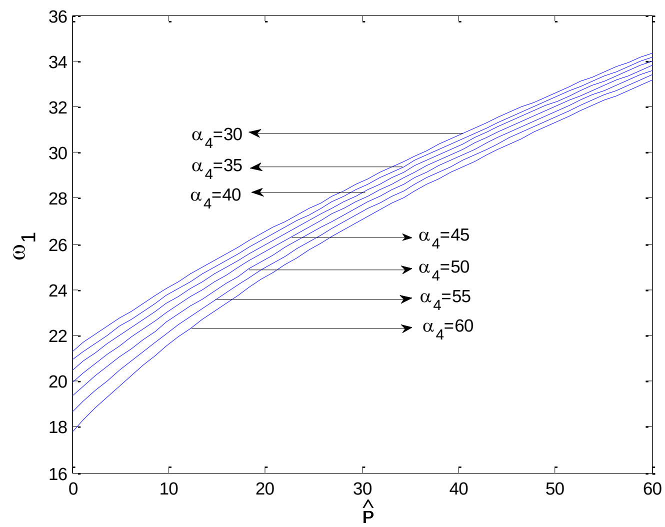


شکل ۳-۱۴: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب α_2 به ازای α_4 های مختلف

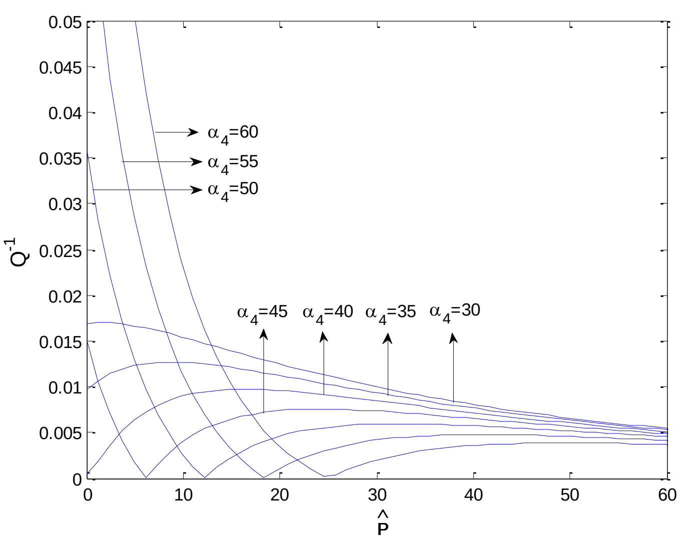
$\hat{P}$ بیانگر اثر کشش درون صفحه‌ای تیر می‌باشد که تأثیر آن روی فرکانس طبیعی و میرایی ترموالاستیک با در نظر گرفتن $\alpha_3 = \alpha_2 = 10$ و $\alpha_1 = \alpha_5 = 1$ به ترتیب در شکلهای ۳-۱۵ و ۳-۱۶ نمایش داده شده است. همان طور که در این شکلها نیز نشان داده شده است، چون $\hat{P}$ کشش درون صفحه ای را افزایش می‌دهد فرکانس طبیعی نیز افزایش می‌یابد. همچنین مطابق شکل ۳-۱۶ در مقادیر بالای α_4 میرایی ابتدا کاهش و سپس افزایش می یابد که این خود نشان دهنده وجود یک $\hat{P}$ بحرانی می باشد که آن را با $\hat{P}^c$ نشان می دهیم و مقادیر آن به ازای α_4 در جدول ۳-۵ لیست شده اند.

جدول ۳-۵: مقادیر α_2^c به ازای α_4 های مختلف

$\hat{P}^c$	α_4
6.1224	45
12.2449	50
18.3673	55
24.4898	60



شکل ۳-۱۵: تغییرات فرکانس طبیعی بر حسب $\hat{P}$ به ازای α_4 های مختلف



شکل ۳-۱۶: تغییرات میرایی ترموالاستیک برحسب $\hat{P}$ به ازای α_4 های مختلف

۳-۸- میرایی ترموالاستیک غیرخطی میکروتیر

در این قسمت میرایی ترموالاستیک را با استفاده از روش DQ [۴۶] بدست می آوریم. برای این کار معادله (۳-۴۵) که مدل غیرخطی میرایی ترموالاستیک است را با استفاده از روش DQ [۴۶] گسسته سازی می کنیم.

$$\frac{\partial^2}{\partial \hat{t}^2}\hat{w}_i + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(4)}\hat{w}_j + \alpha_1\left(\frac{\partial^2 M^T}{\partial \hat{x}^2}\right)_i = \frac{\alpha_4 V_p^2}{(1-\hat{w}_i)^2} + \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(2)}\hat{w}_j\right)\left(\hat{P} - \int_0^1 \left[\left(N^T\right)_i - \alpha_2\left(\frac{\partial M^T}{\partial \hat{x}}\right)_i\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)}\hat{w}_j\right) - \alpha_3\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)}\hat{w}_j\right)^2\right]dx\right) \quad (۳\text{-}۹۲)$$

که در آن

$$A_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M(x_j)} & i \neq j \\ -\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)} & i = j \end{cases} \quad (۳\text{-}۹۳)$$

$$M(x_i) = \prod_{j=1,\, j\neq i}^{N} (x_i - x_j) \quad (۳\text{-}۹۴)$$

$$A_{ij}^{(r)} = \begin{cases} r\left[A_{ij}^{(r-1)} A_{ij}^{(1)} \dfrac{A_{ij}^{(r-1)}}{(x_i - x_j)}\right] & i \neq j \\ -\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(r)} & i = j \end{cases} \quad (۳\text{-}۹۵)$$

حال با اعمال ارتعاشات هارمونیک در ترمهای خطی معادله (۳-۹۲) و به کار گیری روابط (۳-۶۷) و (۳-۶۸) داریم

$$-\Omega_n^2 R_i + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(4)} R_j + \alpha_1 C_i^T \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(4)} R_j = \frac{\alpha_4 V_p^2}{\left(1-\hat{w}_i\right)^2} +$$
$$\left(\sum_{i=1}^{N} A_{ij}^{(2)} R_j\right)\left(\hat{P} + \int_0^1 \left[\alpha_2 \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(3)} R_j\right)_i \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)} \hat{w}_j\right) + \alpha_3 \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)} \hat{w}_j\right)^2\right] dx\right) \tag{۹۶-۳}$$

همچنین نیروی الکترواستاتیکی را با توجه به رابطه (۲-۸) اعمال می کنیم.

(۹۷-۳)

$$-\Omega_i^2 R_i + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(4)} R_j + \alpha_1 C_i^T \sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(4)} R_j = \alpha_4 V_p^2 \left(2 + 3\hat{w}_i + 4\hat{w}_i^2\right) R_i +$$
$$\left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(2)} R_j\right)\left(\hat{P} + \int_0^1 \left[\alpha_2 \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(3)} \hat{w}_j\right)_i \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)} \hat{w}_j\right) + \alpha_3 \left(\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(1)} \hat{w}_j\right)^2\right] dx\right)$$

برای حل معادله فوق و بدست آوردن فرکانسهای غیرخطی از روش تکرار مستقیم که در [۴۶] ارائه شده است استفاده کرده‌ایم. پس از بدست آوردن فرکانسهای غیرخطی، میرایی را از رابطه (۳-۸۳) بدست می-آوریم. همچنین برای اعمال شرط مرزی دو سر گیردار، معادلات (۳-۵۰) را به شکل زیر گسسته سازی می کنیم.

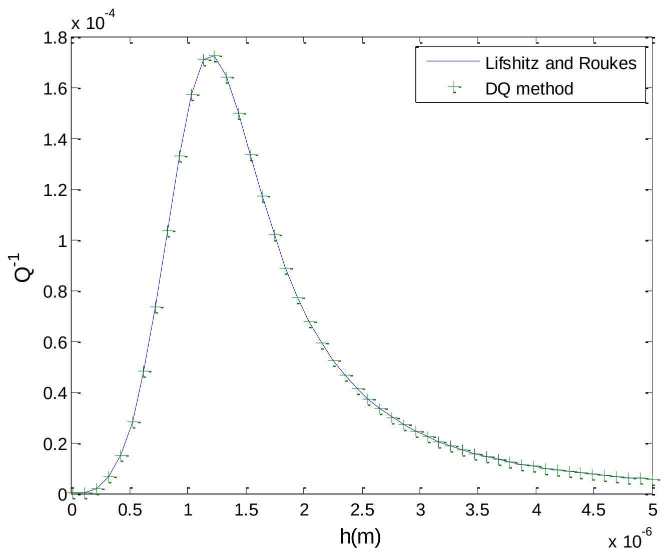
$$R_1 = R_N = 0$$
$$\sum_{j=1}^{N} A_{1j}^{(1)} R_j = \sum_{j=1}^{N} A_{Nj}^{(1)} R_j = 0 \tag{۹۸-۳}$$

برای صحه گذاری، بدون در نظر گرفتن اثرات ترموالاستیکی و الکتریکی، نسبت $\left(\omega/\omega_0\right)^2$ را محاسبه کرده و با نتایج موجود در [۴۷] مقایسه‌ای انجام شده است که این مقایسه در جدول ۳-۶ ارائه شده است. که در آن R شکل مود در وسط تیر و r نیز شعاع ژیراسیون می‌باشد.

جدول ۳-۶: مقایسه نتایج مقاله [۴۷] با روش DQ برای مدل غیرخطی

R/r	روش FEM [۴۷]	روش DQ ($N=24$)
0.6	1.0216	1.0204
1	1.0598	1.0566
2	1.2382	1.2246

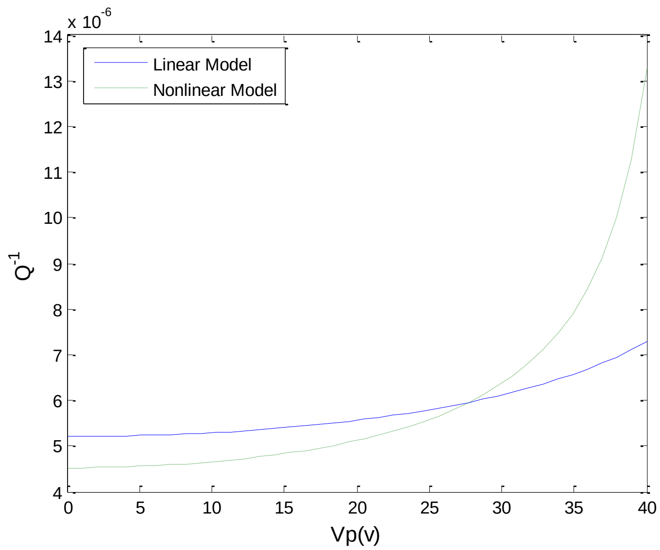
حال با توجه به میکروتیر جدول ۳-۲ نتایج روش DQ را برای میرایی ترموالاستیک با مدل لیفشیتز [۱۵] در شکل ۳-۱۷ مقایسه کرده‌ایم. این شکل نشان می دهد که میرایی خطی با روش DQ به درستی محاسبه می شود.



شکل ۳-۱۷: مقایسه روش DQ و مدل لیفشیتز در محاسبه میرایی ترموالاستیک

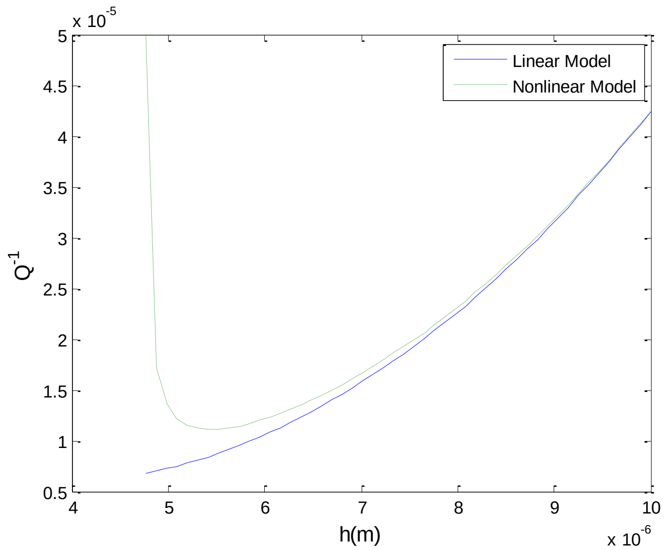
شکل ۳-۱۸ تغییرات میرایی ترموالاستیک را برای دو مدل خطی و غیرخطی برای میکروتیر جدول ۳-۲ بر حسب ولتاژ نشان می دهد و همان طور که مشاهده می شود تغییرات غیرخطی برای ولتاژهای بالا به وضوح نشان داده شده است. این شکل نشان می دهد که برای ولتاژهای بالا مدل خطی خطای بالایی دارد

و نمی تواند میرایی صحیح را به ما بدهد. بنابراین سعی شده است تغییرات میرایی برای دو مدل خطی و غیر خطی در ولتاژ بالا بر حسب پارامترهای میکروتیر بررسی و مقایسه شوند.

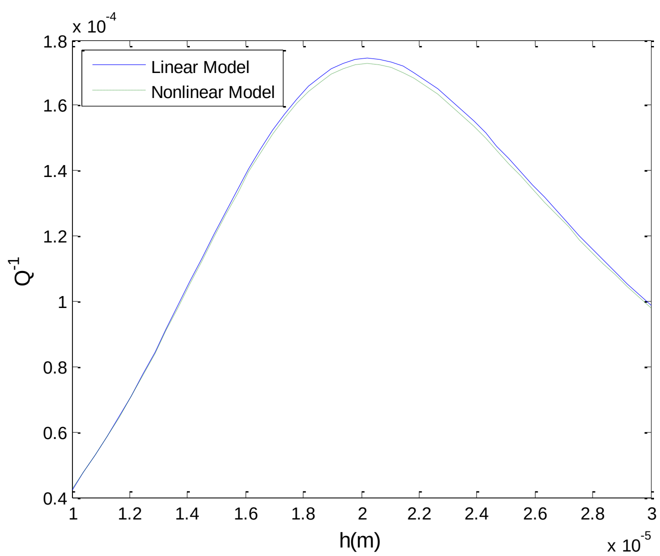


شکل ۳-۱۸: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ولتاژ در دو مدل خطی و غیرخطی برای $h = 5\mu m$

شکل ۳-۱۹ نیز تغییرات میرایی ترموالاستیک برای ضخامتهای کم به ازای $V_p = 40v$ را نشان می دهد. همان طور که مشاهده می شود در ضخامتهای کم میرایی به شدت افزایش پیدا می کند که این پدیده به خاطر مقدار زیاد ولتاژ می باشد که مدل خطی قادر به نشان دادن آن نیست. چنانچه مقدار ولتاژ کم شود مدل خطی و غیر خطی رفتار یکسانی را نشان خواهند داد. بنابراین افزایش ولتاژ که اثر غیرخطی کشیدگی درون صفحه ای میکروتیر را ایجاد می کند می تواند برای ضخامت تشدیدکننده محدودیت ایجاد کند. شکل ۳-۲۰ نیز تغییرات میرایی ترموالاستیک را برای ضخامتهای بالاتر نشان می دهد و همان طور که نشان داده شده است رفتار مدل خطی و غیرخطی در این حالت یکسان است و ضخامت بحرانی میکروتیر که در آن میرایی ماکزیمم است در هر دو مدل دیده می شود با این تفاوت که مقدار میرایی ماکزیمم در مدل غیر خطی کمتر است.



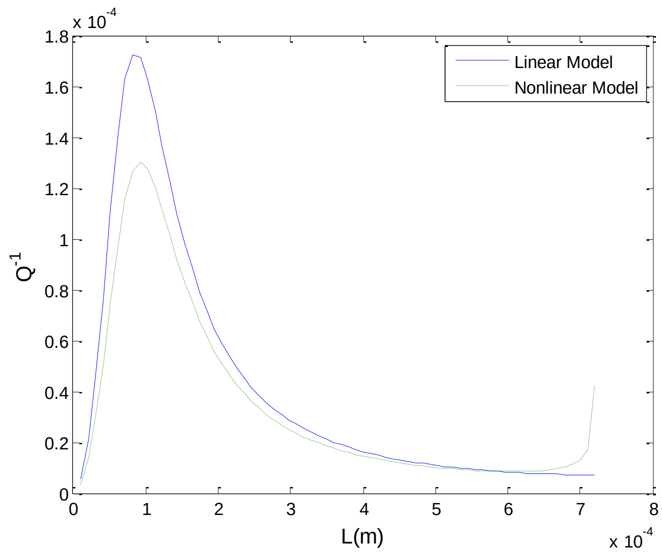
شکل ۳-۱۹: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت در دو مدل خطی و غیرخطی برای ضخامتهای کم



شکل ۳-۲۰: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت در دو مدل خطی و غیرخطی برای ضخامتهای زیاد

شکل ۳-۲۱ نیز تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب طول تیر و به ازای $V_p = 40v$ و $h = 5\mu m$ را نشان می دهد. همان طور که در شکل هم دیده می شود برای طول نیز می توان یک مقدار بحرانی تعریف

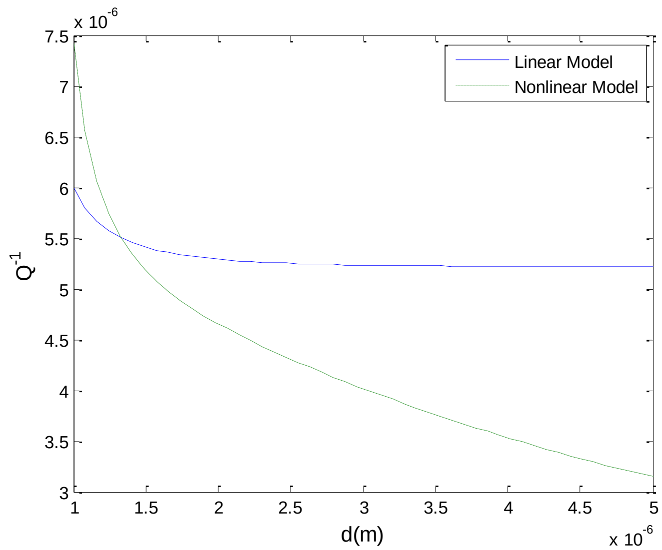
کرد که به ازای آن میرایی ماکزیمم است و این میرایی بحرانی در مدل غیرخطی کمتر است. در انتهای نمودار در مدل غیرخطی میرایی به طور ناگهانی افزایش پیدا می کند که در مدل خطی چنین اتفاقی نمی افتد که این قضیه در واقع محدودیت طول را نیز برای تشدید کننده ها در ولتاژهای بالا نشان می دهد که از یک حد مشخص نمی تواند افزایش پیدا کند.



شکل ۳-۲۱: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب طول در دو مدل خطی و غیرخطی

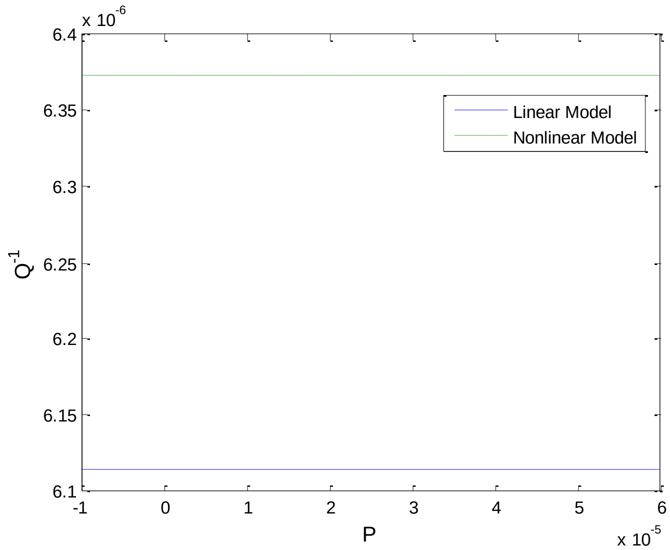
شکل ۳-۲۲ تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب فاصله خازنی، برای دو مدل خطی و غیرخطی، در حالت $V_p = 10v$ و $h = 5\mu m$ را نشان می دهد. همان طور که در این شکل مشاهده می شود رفتار این دو مدل با یکدیگر متفاوت است و مقادیر میرایی نیز کاملاً تفاوت دارند. مدل خطی بعد از یک کاهش ناگهانی تقریباً به یک مقدار مشخصی از میرایی میل می کند و مدل غیر خطی نیز یک کاهش سریع و بیشتر از مدل خطی دارد که این تفاوت به دلیل این است که نیروی الکترواستاتیکی در مدل غیرخطی بسیار دقیقتر مدل شده است و در آن تغییر شکلهای بزرگ نیز لحاظ شده است بنابراین این تفاوت آشکار بین

این دو مدل توجیه پذیر است. همچنین میرایی به طور کلی با افزایش فاصله خازنی تشدید کننده ها کاهش پیدا می کند که این روند در مدل غیرخطی شدیدتر است.



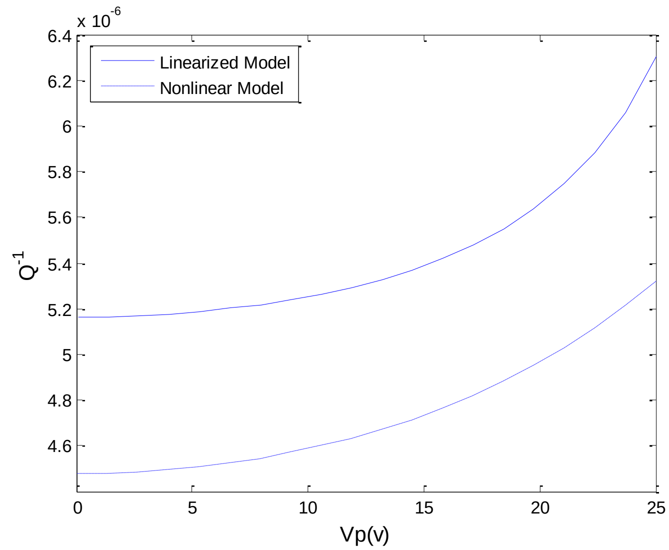
شکل ۳-۲۲: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب فاصله خازنی در دو مدل خطی و غیرخطی

شکل ۳-۲۳ تغییرات میرایی ترموالاستیک را بر حسب $\hat{P}$ در دو مدل خطی و غیرخطی برای حالت $V_p = 30v$ و $h = 5\mu m$ نشان می دهد. همان طور که در این شکل نشان داده شده است $\hat{P}$ تأثیر خاصی بر میرایی ندارد.



شکل ۳-۲۳: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب $\hat{P}$ در دو مدل خطی و غیرخطی

در بخش ۳-۴ ارتعاشات میکروتیر حول خیز ناشی از بار الکترواستاتیکی بررسی شد. در آنجا فرض شد که میکروتیر در اثر اعمال بار الکترواستاتیکی دچار خیز می شود سپس معادله ارتعاشی تیر غیرخطی حول این خیز خطی سازی شد. این فرض از آنجا نشأت گرفته که میکروتیر حول خیز استاتیکی دارای ارتعاشاتی کوچکی است که معادله حرکت آن در (۳-۵۸) ارائه شد. اما در این بخش ما فرض کردیم که ارتعاشات به طور کلی با دامنه بزرگ صورت می گیرند بنابراین بدون هیچ گونه خطی سازی فرکانسها را بدست آوردیم. شکل ۳-۲۴ مقایسه ای بین روش ارائه شده در بخش ۳-۴ با فرکانسهای غیرخطی بدست آمده از روش DQ ارائه داده است. همان طور که در این شکل نیز دیده می شود میرایی در مدل غیرخطی مقدار کمتری دارد.



شکل ۳-۲۴: تغییرات میرایی ترموالاستیک بر حسب ولتاژ در دو مدل غیرخطی و خطی سازی شده

فصل چهارم

مدل میکروصفحه حلقوی

۴-۱- مقدمه

در این فصل تشدیدکننده را به شکل یک صفحه حلقوی با فرضهای کیرشـهف مـدل کـردهایـم و میرایـی ترموالاستیک را بطور تحلیلی محاسبه نمودهایم. اما معادله فرکانس که یک معادله غیرخطی است، را یـک بار خطی سازی نمودهایم و یک بار آن را بدون خطی‌سازی و با روش عددی حل نمودهایم و آن دو را با هم مقایسه کردهایم. سیلیکون به عنوان مادهای که بسـیار در ادوات MEMS بـه کـار مـی‌رود دارای خـواص خطی می‌باشد و چنانچه ماده مورد نظر سیلیکون باشد نیازی به حل غیرخطی نیست.

۴-۲- تئوری صفحه کلاسیک حلقوی

برای بدست آوردن معادلات صفحه حلقوی از اصل توسعه یافته هامیلتون[1] استفاده کرده ایم [۳۹]

$$\int_0^t(\delta T-\delta\Pi+\delta W_{nc})dt=0 \qquad (۴-۱)$$

که در آن δW_{nc} بیانگر تغییرات انرژی ناپایستار می‌باشد که در مسائل مختلف، متفاوت است و بستگی به شکل مسأله دارد همچنین تغییرات انرژیهای جنبشی T و الاستیک Π به شکل زیر می باشند.

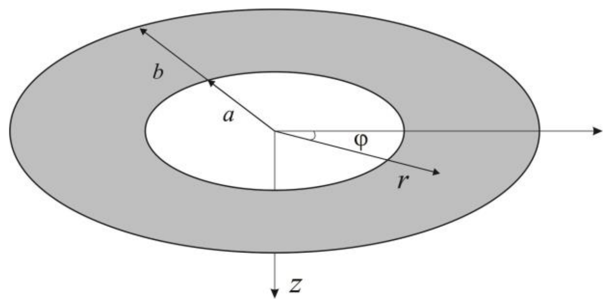
$$\delta T=-\iint\rho\ddot{\mathbf{D}}.\delta\mathbf{D}dAdz \qquad (۴-۲)$$

$$\delta\Pi=\iint(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11}+\sigma_{22}\delta\varepsilon_{22}+\sigma_{33}\delta\varepsilon_{33}+\sigma_{23}\delta\varepsilon_{23}+\sigma_{13}\delta\varepsilon_{13}+\sigma_{12}\delta\varepsilon_{12})dAdz \qquad (۴-۳)$$

که در آن ρ چگالی، A سطح صفحه مرجع تغییرشکل نیافته می‌باشد و $\mathbf{D}$ بردار جابه‌جایی یک نقطه دلخواه از المان صفحه می‌باشد و همچنین σ_{ij} و ϵ_{ij} تنش و کرنش وارد بر صفحه می‌باشند.

[1] Extended Hamilton Principal

صفحه‌ای به ضخامت h ، شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر گرفته شده است (شکل ۴-۱). مبدأ سیستم مختصات استوانه‌ای در مرکز میکروصفحه و محورهای (r,φ) را در صفحه خنثی تعریف کرده و z محور عمود بر این صفحه می‌باشد.



شکل ۴-۱: صفحه دایره ای که با سیستم مختصات قطبی تعریف شده است

با توجه به آنچه گفته شد، می توان بردار جابه جایی $\mathbf{D}$ را به شکل زیر نوشت.

$$\boldsymbol{D} = (u - zw_r)\mathbf{j}_1 + \left(v - \frac{z}{r}w_\varphi\right)\mathbf{j}_2 + w\mathbf{j}_3 \tag{۴-۴}$$

از رابطه (۴-۴) مشتقات لازم را می گیریم

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x} = (u_r - zw_{rr})\mathbf{j}_1 + \left(v_r - \frac{z}{r}w_{r\varphi} + \frac{z}{r^2}w_\varphi\right)\mathbf{j}_2 + w_r\mathbf{j}_3$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y} = \frac{1}{r}\left(u_\varphi - zw_{r\varphi} - v + \frac{z}{r}w_\varphi\right)\mathbf{j}_1 + \frac{1}{r}\left(v_\varphi - \frac{z}{r}w_{\varphi\varphi} + u - zw_r\right)\mathbf{j}_2 + \frac{1}{r}w_\varphi\mathbf{j}_3 \tag{۵-۴}$$

$$\frac{\partial D}{\partial z} = -w_r\mathbf{j}_1 - \frac{1}{r}w_\varphi\mathbf{j}_2$$

هم اکنون با توجه به (۴-۵) می توان کرنشها را بدست آورد.

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x}.\mathbf{j}_1 = u_r - zw_{rr}$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y}.\mathbf{j}_2 = \frac{1}{r}\left[v_\varphi + u - z\left(\frac{1}{r}w_{\varphi\varphi} + w_r\right)\right]$$

$$\epsilon_{12} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x}.\mathbf{j}_2 + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y}.\mathbf{j}_1 = v_r + \frac{1}{r}\left[u_\varphi - v - z\left(2w_{r\varphi} - \frac{2}{r}w_\varphi\right)\right] \tag{۶-۴}$$

$$\epsilon_{33} = \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0$$

حال می توان با محاسبه تغییرات **D** و مشتق آن، رابطه (۴-۲) را به شکل زیر نوشت

$$\delta T = -\int \left[(I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_r)\delta u + \left(I_0\ddot{v} - \frac{1}{r}I_1\ddot{w}_\varphi\right)\delta v + I_0\ddot{w}\delta w + (I_2\ddot{w}_r - I_1\ddot{u})\delta w_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}I_2\ddot{w}_\varphi - I_1\ddot{v}\right)\delta w_\varphi\right] r dr d\varphi = -\int \left\{(I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_r)\delta u + \left(I_0\ddot{v} - \frac{1}{r}I_1\ddot{w}_\varphi\right)\delta v + \left[I_0\ddot{w} - \frac{1}{r}(rI_2\ddot{w}_r - I_1 r\ddot{u})_r - \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}I_2\ddot{w}_\varphi - I_1\ddot{v}\right)_\varphi\right]\delta w\right\} r dr d\varphi - \int [I_2\ddot{w}_r - I_1\ddot{u}]_{r=a}^{r=b}\delta w r d\varphi - \int \left[\frac{1}{r}I_2\ddot{w}_\varphi - I_1\ddot{v}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\varphi_0}\delta w dr \tag{۷-۴}$$

که در آن

$$\{I_0 \quad I_1 \quad I_2\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho\{1 \quad z \quad z^2\} dz \tag{۸-۴}$$

این نکته را متذکر می شویم که چون صفحه میانی و مرجع یکسان هستند بنابراین $I_1 = 0$ می باشد.

با جایگزینی (۴-۶) در (۴-۳) داریم

$$\delta\Pi = \int \Big(N_1\delta u_r + \frac{1}{r}N_6\delta u_\varphi + \frac{1}{r}N_2\delta v_\varphi + N_6\delta v_r - M_1\delta w_{rr} - \frac{1}{r^2}M_2\delta w_{\varphi\varphi} - \frac{1}{r}M_6\delta w_{r\varphi} - \frac{1}{r}M_6\delta w_{\varphi r} + \frac{1}{r}N_2\delta u - \frac{1}{r}N_6\delta v - \frac{1}{r}M_2\delta w_r + \frac{2}{r^2}M_6\delta w_\varphi + Q_1\delta w_r + \frac{1}{r}Q_2\delta w_\varphi - Q_1\delta w_r - \frac{1}{r}Q_2\delta w_\varphi\Big) r dr d\varphi = -\int \Big\{\big[(rN_1)_r + N_{6\varphi} - N_2\big]\delta u + \big[N_{2\varphi} + (rN_6)_r + N_6\big]\delta v + \big[(rQ_1)_r + Q_{2\varphi}\big]\delta w - \big[(rM_1)_r + M_{6\varphi} - rQ_1 - M_2\big]\delta w_r - \frac{1}{r}\big[M_{2\varphi} + rM_{6r} - rQ_2 + 2M_6\big]\delta w_\varphi\Big\} dr d\varphi + \tag{۹-۴}$$

$$\int\left[N_1\delta u+N_6\delta v+\left(Q_1+\frac{1}{r}M_{6\varphi}\right)\delta w-M_1\delta w_r\right]_{r=a}^{r=b}rd\varphi+\int\left[N_6\delta u+N_2\delta v+(Q_2+M_{6r})\delta w-\frac{1}{r}M_2\delta w_\varphi\right]_{\phi=0}^{\varphi=\varphi_0}dr-2M_6\delta w|_{(r,\varphi)=(b,0),(a,\varphi_0)}^{(r,\varphi)=(a,0),(b,\varphi_0)}$$

که در آن با فرض اینکه صفحه ما ایزوتروپ باشد، داریم

$$\begin{Bmatrix}N_1\\N_2\\N_6\end{Bmatrix}=\frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&(1-\nu)/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_r\\(v_\varphi+u)/r\\(u_\varphi+rv_r-v)/r\end{Bmatrix}-\frac{1}{1-\nu}\begin{Bmatrix}N^T\\N^T\\0\end{Bmatrix} \quad (۱۰-۴)$$

$$\begin{Bmatrix}M_1\\M_2\\M_6\end{Bmatrix}=-D\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&(1-\nu)/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_{rr}\\(w_{\varphi\varphi}+rw_r)/r^2\\(2rw_{r\varphi}-2w_\varphi)/r^2\end{Bmatrix}-\frac{1}{1-\nu}\begin{Bmatrix}M^T\\M^T\\0\end{Bmatrix} \quad (۱۱-۴)$$

که در آن

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (۱۲-۴)$$

و E مدول یانگ و ν ضریب پواسون می باشد. با جایگزینی (۴-۹) و (۴-۱۰) در (۴-۱) و سپس صفر قرار دادن ضرایب δu ، δv ، δw ، δw_φ و δw_r به معادلات حرکت می رسیم

$$\frac{\partial N_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_6}{\partial\varphi}+\frac{N_1-N_2}{r}=I_0\ddot{u}-I_1\ddot{w}_r \quad (۱۳-۴)$$

$$\frac{\partial N_6}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial N_2}{\partial\varphi}+\frac{2N_6}{r}=I_0\ddot{v}-\frac{I_1}{r}\ddot{w}_\varphi \quad (۱۴-۴)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial Q_2}{\partial\varphi}+\frac{Q_1}{r}=I_0\ddot{w} \quad (۱۵-۴)$$

$$-\frac{\partial M_6}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial M_2}{\partial\varphi}-\frac{2M_6}{r}+Q_2=\frac{I_2}{r}\ddot{w}_\varphi-I_1\ddot{v} \quad (۱۶-۴)$$

$$\frac{\partial M_1}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_6}{\partial\varphi}+\frac{M_1-M_2}{r}-Q_1=I_1\ddot{u}-I_2\ddot{w}_r \quad (۱۷-۴)$$

حال شرایط مرزی را بدست آمده را می نویسیم

در راستای $r = a, b$ داریم:

$$\delta u = 0 \quad \text{یا} \quad N_1 \tag{۴-۱۸}$$

$$\delta v = 0 \quad \text{یا} \quad N_6 \tag{۴-۱۹}$$

$$\delta w = 0 \quad \text{یا} \quad Q_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial M_6}{\partial \varphi} \tag{۴-۲۰}$$

$$\delta w_r = 0 \quad \text{یا} \quad M_1 \tag{۴-۲۱}$$

در راستای $\varphi = 0, \varphi_0$ داریم:

$$\delta u = 0 \quad \text{یا} \quad N_6 \tag{۴-۲۲}$$

$$\delta v = 0 \quad \text{یا} \quad N_2 \tag{۴-۲۳}$$

$$\delta w = 0 \quad \text{یا} \quad Q_2 + M_{6r} \tag{۴-۲۴}$$

$$\delta w_\varphi = 0 \quad \text{یا} \quad M_2 \tag{۴-۲۵}$$

حال اگر فرض کیرشهف [۳۹] را برای صفحه در نظر بگیریم آنگاه داریم $I_1 = 0$، $I_2 = \frac{1}{12}\rho h^3$ و $I_3 = \rho h$ علاوه بر آن از ترمهای اینرسی دورانی نیز صرف نظر می‌کنیم. همچنین می بایست Q_1 و Q_2 را از معادلات (۴-۱۶) و (۴-۱۷) بدست بیاوریم و آن را در (۴-۱۵) قرار دهیم. بنابراین داریم

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial M_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_6}{\partial \varphi} + \frac{M_1 - M_2}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial M_6}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_2}{\partial \varphi} + \frac{2M_6}{r}\right) + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial M_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial M_6}{\partial \varphi} + \frac{M_1 - M_2}{r}\right) = I_0 \ddot{w} \tag{۴-۲۶}$$

با جایگزینی (۴-۱۱) به معادله حرکت صفحه مدور می‌رسیم

$$D\nabla^2\nabla^2 w + \frac{\nabla^2 M^T}{1-\nu} + \rho h \ddot{w} = 0 \tag{۴-۲۷}$$

که در آن

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) \tag{۴-۲۸}$$

حال اگر نیروی الکترواستاتیکی خطی سازی شده (۲-۹) را به (۴-۲۷) اضافه کنیم، داریم

$$D\nabla^4 w + D(1+\nu)\alpha_T \nabla^2 M^T + \rho h w_{tt} = \frac{\varepsilon_0 V_p^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon V_p v(t)}{d^2} + \frac{\varepsilon V_p^2}{d^3} w \qquad (۴-۲۹)$$

۴-۳- حل معادلات

معادلات اصلی (۴-۲۹) و (۲-۲۹) را با فرض هارمونیک بودن ارتعاشات می‌توان حل کرد. بنابراین $w(r,\varphi,t)$ و $\theta(r,\varphi,z,t)$ را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$w(r,\varphi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} R_{mn}(r) e^{i(\omega_{mn}t + m\varphi)} \quad \theta(r,\varphi,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \Theta_{mn}(r,z) e^{i(\omega_{mn}t + m\varphi)} \qquad (۴-۳۰)$$

که در آن ω_{mn} فرکانس و $R_{mn}(r)e^{im\varphi}$ و $\Theta_{mn}(r)e^{im\varphi}$ به ترتیب شکل مدهای mام مختلط ارتعاشی صفحه و دما می باشند. در این نمادگذاری $m = 0,1,2,...$ و $n = 1,2,3,...$ به ترتیب بیانگر عدد گره شعاعی و دایره‌ای می باشند. ω_{mn} کمیتی مختلط است که قسمت حقیقی آن به اثر کوپلینگ ترموالاستیکی و قسمت موهومی آن به میرایی ارتعاشات مرتبط می شود. با جایگذاری (۴-۳۰) در (۴-۲۹) و (۲-۲۹) داریم

$$D\nabla^{*4} R_{mn} + D(1+\nu)\alpha_T \nabla^{*2} M_{mn}^T - \rho h \omega_{mn}^2 R_{mn} = \frac{\varepsilon V_p^2}{d^3} R_{mn} \qquad (۴-۳۱)$$

$$\kappa \frac{\partial^2 \Theta_{mn}}{\partial z^2} = i\omega_{mn}\rho c_v \Theta_{mn} - i\omega_{mn}\beta T_0 z \nabla^{*2} R_{mn} \qquad (۴-۳۲)$$

که در آن

$$\nabla^{*2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \qquad (۴-۳۳)$$

$$M_{mn}^T = \tfrac{12}{h^3}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Theta_{mn}(r,z) z\,dz \qquad (۴-۳۴)$$

شرایط مرزی برای حل معادله (۴-۳۲) عبارتند از $\partial\Theta_{mn}/\partial z=0$ در $z=\pm h/2$، چرا که رویه‌های بالا و پایین میکروصفحه ایزوله در نظر گرفته شده و هیچ شار حرارتی از این رویه ها عبور نمی‌کند بنابراین حل (۴-۳۲) به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\Theta_{mn}(r,z)=\tfrac{\beta T_0}{\rho c_v}\nabla^{*2}R_{mn}\left(z-\frac{\sin(N_{mn}z)}{N_{mn}\cos(N_{mn}h/2)}\right) \tag{۴-۳۵}$$

که در آن

$$N_{mn}=(1-i)\sqrt{\frac{\omega_{mn}\rho c_v}{2\kappa}} \tag{۴-۳۶}$$

که i جذر ۱- می باشد. M^T_{mn} با به کار بردن (۴-۳۵) در (۴-۳۴) بدست می آید.

$$M^T_{mn}=C^T_{mn}\nabla^{*2}R_{mn} \tag{۴-۳۷}$$

که در آن

$$C^T_{mn}=\frac{\beta T_0}{\rho c_v}\left(1+f(\omega_{mn})\right) \tag{۴-۳۸}$$

$$f(\omega_{mn})=\frac{24}{N^3_{mn}h^3}\left(\frac{N_{mn}h}{2}-\tan\left(\tfrac{N_{mn}h}{2}\right)\right) \tag{۴-۳۹}$$

C^T_{mn} کمیتی مختلط است که دارای دو قسمت حقیقی و موهومی می‌باشد. متغیر ξ_{mn} به صورت زیر جهت سهولت کار تعریف شده

$$\xi_{mn}=h\sqrt{\frac{\omega_{mn}\rho c_v}{2\kappa}} \tag{۴-۴۰}$$

و می‌توان قسمت حقیقی و موهومی را به شکل زیر جدا کرد

$$C^{TR}_{mn}=\mathrm{Re}\{C^T_{mn}\}=\frac{\beta T_0}{\rho c_v}\left[1+\left(\frac{6}{\xi^3_{mn}}\right)\frac{\sin\xi_{mn}-\sinh\xi_{mn}}{\cos\xi_{mn}+\cosh\xi_{mn}}\right] \tag{۴-۴۱}$$

$$C^{TI}_{mn}=\mathrm{Im}\{C^T_{mn}\}=\frac{\beta T_0}{\rho c_v}\left(\frac{6}{\xi^3_{mn}}\right)\left[\xi_{mn}-\frac{\sin\xi_{mn}+\sinh\xi_{mn}}{\cos\xi_{mn}+\cosh\xi_{mn}}\right] \tag{۴-۴۲}$$

حال با جایگذاری (۴-۳۷) در (۴-۳۱) داریم

$$\nabla^2\nabla^2 R_{mn} - \gamma_{mn}^4 R_{mn} = 0 \qquad (۴۳-۴)$$

که در آن

$$\gamma_{mn}^4 = \frac{\rho h \omega_{mn}^2 + \dfrac{\varepsilon V_p^2}{d^3}}{D_{mn}^{\omega}} \qquad (۴۴-۴)$$

$$D_{mn}^{\omega} = D\big(1 + \Delta_D \big(1 + f(\omega_{mn})\big)\big) \qquad (۴۵-۴)$$

$$\Delta_D = \frac{(1+\nu)\alpha_T \beta T_0}{\rho c_v} \qquad (۴۶-۴)$$

حل معادله (۲۰) برای صفحه حلقوی به شکل زیر خواهد بود

$$R_{mn}(r) = C_1 J_m(\gamma_{mn} r) + C_2 Y_m(\gamma_{mn} r) + C_3 I_m(\gamma_{mn} r) + C_4 K_m(\gamma_{mn} r) \qquad (۴۷-۴)$$

که در آن ضرایب $C_j (j = 1,2,3,4)$ با اعمال شرایط مرزی به دست می‌آیند. همچنین فرکانس ارتعاشی صفحه حلقوی کوپل شده با اثر ترموالاستیک را می توان به شکل زیر بیان کرد.

$$\omega_{mn} = \sqrt{\omega_{0mn}^2 \left[1 + \Delta_D (1 + f(\omega_{mn}))\right] - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3}} \qquad (۴۸-۴)$$

که در آن ω_{0mn} فرکانس بدون اثر ترموالاستیک می باشد.

$$\omega_{0mn} = \gamma_{mn}^4 \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \qquad (۴۹-۴)$$

دو روش برای حل معادله فرکانسی (۴-۴۸) استفاده شده است. راه حلها بستگی به مقدار Δ_D دارد چنانچه این مقدار کوچک باشد می توان آن را نسبت به ω_{mn} خطی کرد در غیر این صورت باید با نگه داشتن ترمهای اصلی از روشهای حل عددی استفاده کرد.

۴-۳-۱- حل معادله فرکانس بدون خطی‌سازی

حال می‌توان معادله (۴-۴۸) را بر حسب ξ_{mn} نوشت برای این کار باید روابط (۴-۳۶)، (۴-۳۹) و (۴-۴۰) را در (۴-۴۸) جایگزین کرد

$$B_1\xi_{mn}^4 = B_2 + \frac{B_3}{\xi_{mn}^3}\left[\frac{\sin\xi_{mn} - \sinh\xi_{mn}}{\cos\xi_{mn} + \cosh\xi_{mn}} + i\left(\xi_{mn} - \frac{\sin\xi_{mn} + \sinh\xi_{mn}}{\cos\xi_{mn} + \cosh\xi_{mn}}\right)\right] \tag{۵۰-۴}$$

که در آن

$$B_1 = \left(\frac{2\kappa}{h^2\rho c_v}\right)^2 \tag{۵۱-۴}$$

$$B_2 = \omega_{0mn}^2 + \omega_{0mn}^2\Delta_D - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3} \tag{۵۲-۴}$$

$$B_3 = 6\omega_{0mn}^2\Delta_D \tag{۵۳-۴}$$

ξ_{mn} یک عدد مختلط است، بنابراین می‌توان نوشت.

$$\xi_{mn} = \xi_{mn}^R + i\xi_{mn}^I \tag{۵۴-۴}$$

سپس با قراردادن از (۴-۵۴) در (۴-۵۰) و جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی، دو معادله بدست می‌آید

$$F_1T_1 - F_2T_2 = T_3 - \xi_{mn}^R T_2 - \xi_{mn}^I T_1 + T_6 \tag{۵۵-۴}$$

$$F_1T_2 + F_2T_1 = T_4 + \xi_{mn}^R T_1 - \xi_{mn}^I T_2 + T_5 \tag{۵۶-۴}$$

که در آن

(۵۷-۴)

$$F_1 = \frac{B_1}{B_3}\left({\xi_{mn}^R}^7 - 21{\xi_{mn}^R}^5{\xi_{mn}^I}^2 + 35{\xi_{mn}^R}^4{\xi_{mn}^I}^3 - 7\xi_{mn}^R{\xi_{mn}^I}^6\right) - \frac{B_2}{B_3}\left({\xi_{mn}^R}^3 - 3\xi_{mn}^R{\xi_{mn}^I}^2\right)$$

$$F_2 = \frac{B_1}{B_3}\left(7{\xi_{mn}^R}^6\xi_{mn}^I - 35{\xi_{mn}^R}^4{\xi_{mn}^I}^3 + 21{\xi_{mn}^R}^2{\xi_{mn}^I}^5 - {\xi_{mn}^I}^7\right) - \frac{B_2}{B_3}\left(3{\xi_{mn}^R}^2\xi_{mn}^I - {\xi_{mn}^I}^3\right) \tag{۵۸-۴}$$

$$T_1 = \cos\left(\xi_{mn}^R\right)\cosh\left(\xi_{mn}^I\right) + \cosh\left(\xi_{mn}^R\right)\cos\left(\xi_{mn}^I\right) \tag{۵۹-۴}$$

$$T_2 = \sin\left(\xi_{mn}^R\right)\sinh\left(\xi_{mn}^I\right) + \sinh\left(\xi_{mn}^R\right)\sin\left(\xi_{mn}^I\right) \quad (۶۰-۴)$$

$$T_3 = \sin\left(\xi_{mn}^R\right)\cosh\left(\xi_{mn}^I\right) - \sinh\left(\xi_{mn}^R\right)\cos\left(\xi_{mn}^I\right) \quad (۶۱-۴)$$

$$T_4 = \cos\left(\xi_{mn}^R\right)\sinh\left(\xi_{mn}^I\right) - \cosh\left(\xi_{mn}^R\right)\sin\left(\xi_{mn}^I\right) \quad (۶۲-۴)$$

$$T_5 = \sin\left(\xi_{mn}^R\right)\cosh\left(\xi_{mn}^I\right) + \sinh\left(\xi_{mn}^R\right)\cos\left(\xi_{mn}^I\right) \quad (۶۳-۴)$$

$$T_6 = \cos\left(\xi_{mn}^R\right)\sinh\left(\xi_{mn}^I\right) + \cosh\left(\xi_{mn}^R\right)\sin\left(\xi_{mn}^I\right) \quad (۶۴-۴)$$

با استفاده از رابطه (۴-۴۰) معادلات (۴-۵۵) و (۴-۵۶) حل شده و ω_{mn} و سپس ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک بدست می‌آیند.

$$Q^{-1} = 2\left|\frac{\mathrm{Im}(\omega_{mn})}{\mathrm{Re}(\omega_{mn})}\right| \quad (۶۵-۴)$$

۴-۳-۲- حل معادله فرکانس از روش خطی‌سازی

اگر Δ_D کوچک شود، معادله (۴-۴۸) را می توان با خطی سازی ساده کرد. با استفاده از بسط تیلور و نگه داشتن ترمهای اول و دوم معادله از شکل رادیکالی به خطی تبدیل می شود.

$$\omega_{mn} = \sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3}} + \frac{\omega_{0mn}^2 \Delta_D \left(1 + f(\omega_{0mn})\right)}{2\sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3}}} \quad (۶۶-۴)$$

در اینجا قسمتهای حقیقی و موهومی ω_{mn} جدا می شوند.

$$\mathrm{Re}\left(\omega_{mn}\right) = \sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3}} + \frac{\omega_{0mn}^2 \Delta_D}{2\sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3}}}\left(1 + \frac{6}{\left(\gamma_{mn}\Xi\right)^3}\frac{\sin\left(\gamma_{mn}\Xi\right) - \sinh\left(\gamma_{mn}\Xi\right)}{\cos\left(\gamma_{mn}\Xi\right) + \cosh\left(\gamma_{mn}\Xi\right)}\right) \quad (۶۷-۴)$$

$$\mathrm{Im}\left(\omega_{mn}\right) = \frac{\omega_{0mn}^2 \Delta_D}{\sqrt{\omega_{0mn}^2 - \frac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3}}}\frac{3}{\left(\gamma_{mn}\Xi\right)^3}\left(\gamma_{mn}\Xi - \frac{\sin\left(\gamma_{mn}\Xi\right) + \sinh\left(\gamma_{mn}\Xi\right)}{\cos\left(\gamma_{mn}\Xi\right) + \cosh\left(\gamma_{mn}\Xi\right)}\right) \quad (۶۸-۴)$$

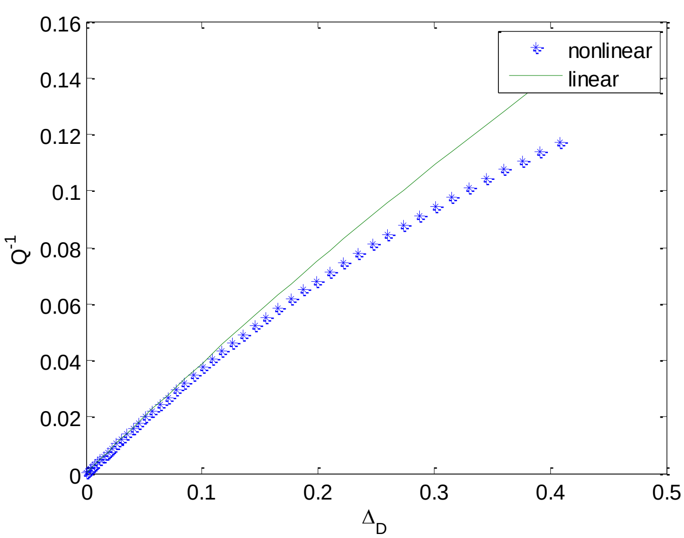
که در آن

$$\Xi = h\sqrt{\frac{\rho c_v}{2\kappa}}\sqrt[4]{\frac{D}{\rho h}} \tag{۶۹-۴}$$

بنابراین ضریب کیفیت میرایی ترموالاستیک را می توان به شکل زیر نوشت

$$Q^{-1} = \frac{\gamma_{mn}^4 \dfrac{3D\Delta_D}{2\rho h(\gamma_{mn}\Xi)^3}\left[\left(\gamma_{mn}\Xi - \dfrac{\sin(\gamma_{mn}\Xi)+\sinh(\gamma_{mn}\Xi)}{\cos(\gamma_{mn}\Xi)+\cosh(\gamma_{mn}\Xi)}\right)\right]}{\gamma_{mn}^4 \dfrac{D}{\rho h} - \dfrac{\varepsilon V_p^2}{\rho h d^3} + \gamma_{mn}^4 \dfrac{D\Delta_D}{2\rho h}\left(1 + \dfrac{6}{(\gamma_{mn}\Xi)^3}\dfrac{\sin(\gamma_{mn}\Xi)-\sinh(\gamma_{mn}\Xi)}{\cos(\gamma_{mn}\Xi)+\cosh(\gamma_{mn}\Xi)}\right)} \tag{۷۰-۴}$$

شکل ۴-۲ تغییرات میرایی ترموالاستیک نسبت به Δ_D و بدون بار الکتریکی را نشان می دهد. این شکل براساس مود اول در شرایط مرزی گیردار-گیردار رسم شده است. بر اساس این شکل می‌توان نتیجه گرفت که ساده‌تر این است که برای سیلیکون، راه حل خطی استفاده شود چرا که Δ_D برای سیلیکون بسیار کوچک است ($\Delta_D = 4.2760\times10^{-4}$ در دمای $T_0 = 293K$).



شکل ۴-۲: مقایسه حل خطی و غیرخطی میرایی ترموالاستیک

۴-۴- مطالعه موردی

سه مورد شرایط مرزی بررسی شده که در هر سه آنها لبه داخلی گیردار است. در اولی لبه بیرونی گیردار می باشد که آن را گیردار-گیردار می نامیم و در دومی لبه بیرونی آزاد می باشد که به آن گیردار-آزاد می گوییم و در سومی نیز لبه بیرونی تکیه گاه ساده است که آن را گیردار-ساده می نامیم.

۴-۴-۱- شرایط مرزی گیردار-گیردار

لبه های بیرونی و درونی گیردار هستند بنابراین شرایط مرزی با توجه به (۴-۲۰) و (۴-۲۱) به شکل زیر می شوند.

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a,b}=0,\ w\big|_{r=a,b}=0 \tag{۴-۷۱}$$

با جایگزین کردن (۴-۳۰) در (۴-۷۱) داریم

$$\left.\frac{dR_{mn}}{dr}\right|_{r=a,b}=0,\ R_{mn}\big|_{r=a,b}=0 \tag{۴-۷۲}$$

با جایگزینی (۴-۴۷) در شرایط فوق و با تعریف پارامترهایی که در زیر آورده شده اند

$$\Gamma_{mn}=\gamma_{mn}a \tag{۴-۷۳}$$

$$s=\frac{b}{a} \tag{۴-۷۴}$$

معادلات برای شرایط مرزی گیردار-گیردار بدست می آیند.

$$C_1J_m(\Gamma_{mn})+C_2Y_m(\Gamma_{mn})+C_3I_m(\Gamma_{mn})+C_4K_m(\Gamma_{mn})=0 \tag{۴-۷۵}$$

$$\begin{aligned}&C_1\left[-J_{m+1}(\Gamma_{mn})+\tfrac{m}{\Gamma_{mn}}J_m(\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}+C_2\left[-Y_{m+1}(\Gamma_{mn})+\tfrac{m}{\Gamma_{mn}}Y_m(\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}+\\&C_3\left[I_{m+1}(\Gamma_{mn})+\tfrac{m}{\Gamma_{mn}}I_m(\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}+C_4\left[-K_{m+1}(\Gamma_{mn})+\tfrac{m}{\Gamma_{mn}}K_m(\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}=0\end{aligned} \tag{۴-۷۶}$$

$$C_1J_m(s\Gamma_{mn})+C_2Y_m(s\Gamma_{mn})+C_3I_m(s\Gamma_{mn})+C_4K_m(s\Gamma_{mn})=0 \tag{۴-۷۷}$$

$$C_1\left[-J_{m+1}(s\Gamma_{mn})+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}J_m(s\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}+C_2\left[-Y_{m+1}(s\Gamma_{mn})+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}Y_m(s\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}+$$
$$C_3\left[I_{m+1}(s\Gamma_{mn})+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}I_m(s\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}+C_4\left[-K_{m+1}(s\Gamma_{mn})+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}K_m(s\Gamma_{mn})\right]\gamma_{mn}=0 \qquad (۷۸-۴)$$

برای محاسبه جواب غیر صفر، داریم

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix}=0 \qquad (۷۹-۴)$$

که در آن

$$A_{11}=J_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۰-۴)$$

$$A_{12}=Y_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۱-۴)$$

$$A_{13}=I_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۲-۴)$$

$$A_{14}=K_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۳-۴)$$

$$A_{21}=-J_{m+1}(\Gamma_{mn})+\frac{m}{\Gamma_{mn}}J_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۵-۴)$$

$$A_{22}=-Y_{m+1}(\Gamma_{mn})+\frac{m}{\Gamma_{mn}}Y_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۶-۴)$$

$$A_{23}=I_{m+1}(\Gamma_{mn})+\frac{m}{\Gamma_{mn}}I_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۷-۴)$$

$$A_{24}=-K_{m+1}(\Gamma_{mn})+\frac{m}{\Gamma_{mn}}K_m(\Gamma_{mn}) \qquad (۸۸-۴)$$

$$A_{31}=J_m(s\Gamma_{mn}) \qquad (۸۹-۴)$$

$$A_{32}=Y_m(s\Gamma_{mn}) \qquad (۹۰-۴)$$

$$A_{33}=I_m(s\Gamma_{mn}) \qquad (۹۱-۴)$$

$$A_{34}=K_m(s\Gamma_{mn}) \qquad (۹۲-۴)$$

$$A_{41}=-J_{m+1}\left(s\Gamma_{mn}\right)+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}J_m\left(s\Gamma_{mn}\right) \qquad (۹۳-۴)$$

$$A_{42}=-Y_{m+1}\left(s\Gamma_{mn}\right)+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}Y_m\left(s\Gamma_{mn}\right) \qquad (۹۴-۴)$$

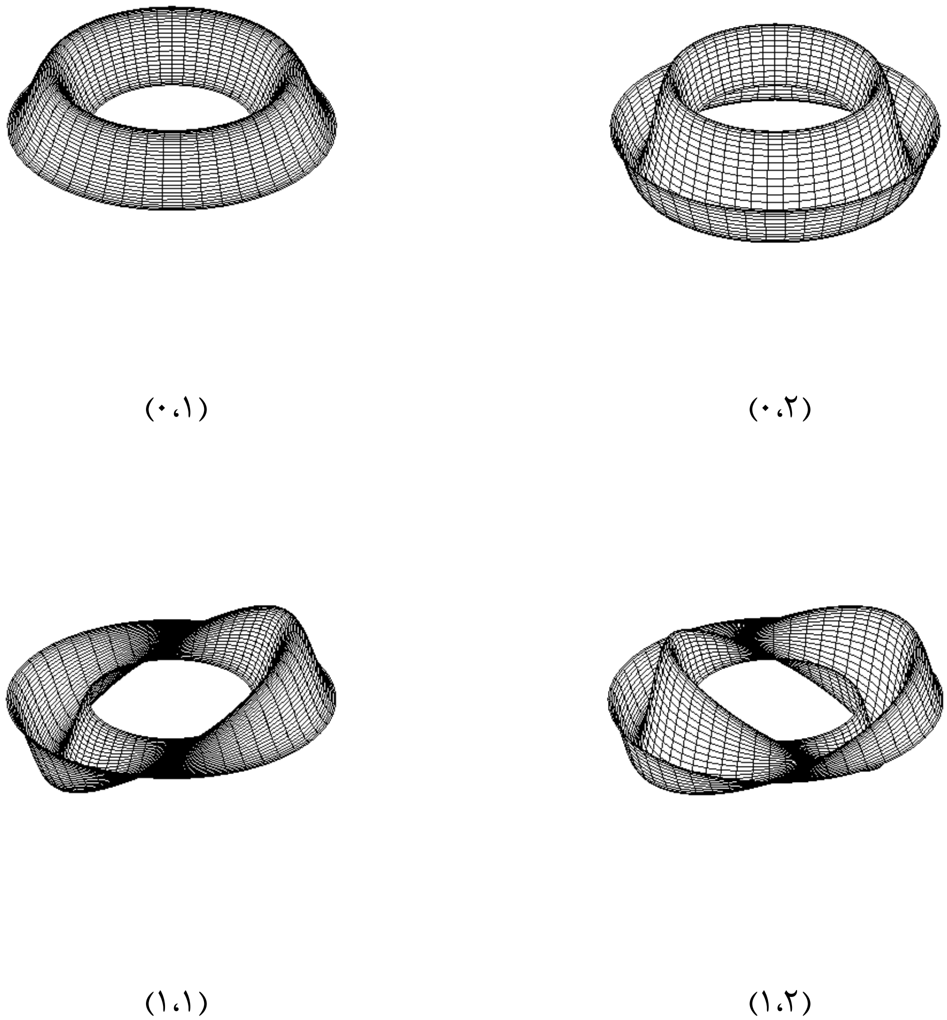
$$A_{43}=I_{m+1}\left(s\Gamma_{mn}\right)+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}I_m\left(s\Gamma_{mn}\right) \qquad (۹۵-۴)$$

$$A_{44}=-K_{m+1}\left(s\Gamma_{mn}\right)+\frac{m}{s\Gamma_{mn}}K_m\left(s\Gamma_{mn}\right) \qquad (۹۶-۴)$$

حال با فرض $s=2$ ، Γ_{mn} از (۴-۷۹) محاسبه شده است که این مقادیر برای $m=0,1$ و $n=1,2$ در جدول ۴-۱ لیست شده‌اند. همچنین شکل مدهای مرتبط نیز در شکل ۴-۳ نشان داده شده‌اند.

جدول ۴-۱: مقادیر Γ_{mn} برای شرط مرزی گیردار-گیردار و $s=2$

m	Γ_{m1}	Γ_{m2}
۰	۴/۷۲۳۶	۷/۸۴۷۷
۱	۴/۷۴۹۵	۷/۸۶۹۹



شکل ۴-۳: شکل مدهای (m,n) در شرایط گیردار-گیردار و $s = 2$

۴-۴-۲- شرط مرزی گیردار-آزاد

در این حالت شرط مرزی با توجه به (۴-۲۰) و (۴-۲۱) به شکل زیر نوشته می شود

$$w(a,\varphi,t)=0 \qquad (۴\text{-}۹۷)$$

$$\left.\frac{\partial w(r,\varphi,t)}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \qquad (۴\text{-}۹۸)$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)+\frac{M^T}{D(1-\upsilon)}\right]_{r=b}=0 \tag{۴-۹۹}$$

(۴-۱۰۰)

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\nabla^2 w\right)+\frac{(1-\upsilon)}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial \varphi}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{D(1-\upsilon)}\frac{\partial M^T}{\partial r}\right]_{r=b}=0$$

با جایگذاری (۴-۳۰) و (۴-۳۷) در معادلات فوق به معادلات زیر می رسیم

$$R_{mn}(a)=0 \tag{۴-۱۰۱}$$

$$\left.\frac{dR_{mn}(r)}{dr}\right|_{r=a}=0 \tag{۴-۱۰۲}$$

$$\left[\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{d^2R_{mn}}{dr^2}+\left(\nu+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{1}{r}\frac{dR_{mn}}{dr}-\left(\nu+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{m^2}{r^2}R_{mn}\right]_{r=b} \tag{۴-۱۰۳}$$

$$\left[\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{d^3R_{mn}}{dr^3}+\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{1}{r}\frac{d^2R_{mn}}{dr^2}-\left(1+m^2(2-\nu)+(m^2+1)\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{1}{r^2}\frac{dR_{mn}}{dr}+\left(m^2(3-\nu)+2m^2\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{R_{mn}}{r^3}\right]_{r=b}=0 \tag{۴-۱۰۴}$$

رابطه (۴-۴۷) می بایست در معادلات فوق جایگزین شود، که در این صورت معادلات حاصل می بایست حل غیر صفر داشته باشند و برای این کار، دترمینان زیر که ضرایب آن در ضمیمه آورده شده است، برابر صفر می‌شود.

$$\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{vmatrix}=0 \tag{۴-۱۰۵}$$

که در آن

$$B_{11}=J_m\left(\gamma_{mn}a\right) \tag{۴-۱۰۶}$$

$$B_{12}=Y_m\left(\gamma_{mn}a\right) \tag{۴-۱۰۷}$$

$$B_{13} = I_m(\gamma_{mn} a) \tag{۱۰۸-۴}$$

$$B_{14} = K_m(\gamma_{mn} a) \tag{۱۰۹-۴}$$

$$B_{21} = -J_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} J_m(\gamma_{mn} a) \tag{۱۱۰-۴}$$

$$B_{22} = -Y_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} Y_m(\gamma_{mn} a) \tag{۱۱۱-۴}$$

$$B_{23} = I_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} I_m(\gamma_{mn} a) \tag{۱۱۲-۴}$$

$$B_{24} = -K_{m+1}(\gamma_{mn} a) + \frac{m}{\gamma_{mn} a} K_m(\gamma_{mn} a) \tag{۱۱۳-۴}$$

$$\begin{aligned} B_{31} &= \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(-P_{14}\gamma_{mn} - \frac{mJ_m(\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn}(as)^2} + \frac{mP_{13}}{as}\right)\gamma_{mn} \\ &+ \frac{\gamma_{mn}}{as}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)P_{13} - \frac{m^2}{(as)^2}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)J_m(\gamma_{mn} as) \end{aligned} \tag{۱۱۴-۴}$$

$$\begin{aligned} B_{32} &= \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(-P_{11}\gamma_{mn} - \frac{mY_m(\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn}(as)^2} + \frac{mP_{10}}{as}\right)\gamma_{mn} \\ &+ \frac{\gamma_{mn}}{as}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)P_{10} - \frac{m^2}{(as)^2}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)Y_m(\gamma_{mn} as) \end{aligned} \tag{۱۱۵-۴}$$

$$\begin{aligned} B_{33} &= \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(P_8\gamma_{mn} - \frac{mI_m(\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn}(as)^2} + \frac{mP_7}{as}\right)\gamma_{mn} \\ &+ \frac{\gamma_{mn}}{as}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)P_7 - \frac{m^2}{(as)^2}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)I_m(\gamma_{mn} as) \end{aligned} \tag{۱۱۶-۴}$$

$$\begin{aligned} B_{34} &= \left(1 + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(-P_5\gamma_{mn} - \frac{mK_m(\gamma_{mn} as)}{\gamma_{mn}(as)^2} + \frac{mP_4}{as}\right)\gamma_{mn} \\ &+ \frac{\gamma_{mn}}{as}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)P_4 - \frac{m^2}{(as)^2}\left(\upsilon + \frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)K_m(\gamma_{mn} as) \end{aligned} \tag{۱۱۷-۴}$$

$$B_{41}=\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\gamma_{mn}\Bigg[-\gamma_{mn}\left(\gamma_{mn}P_{13}+\frac{(m+1)P_{12}}{\gamma_{mn}(as)^2}-\frac{(m+1)P_{14}}{as}\right)$$
$$+2\frac{mJ_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^3}-2\frac{mP_{13}}{(as)^2}+\frac{m}{as}\left(-\gamma_{mn}P_{14}-\frac{mJ_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_{13}}{as}\right)\Bigg] \tag{۱۱۸-۴}$$
$$+\frac{\gamma_{mn}}{as}\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(-\gamma_{mn}P_{14}-\frac{mJ_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_{13}}{as}\right)-\frac{\gamma_{mn}}{(as)^2}P_4P_{13}$$
$$+\frac{P_1J_m(\gamma_{mn}as)}{(as)^3}$$

$$B_{42}=\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\gamma_{mn}\Bigg[-\gamma_{mn}\left(\gamma_{mn}P_{10}+\frac{(m+1)P_{12}}{\gamma_{mn}(as)^2}-\frac{(m+1)P_{11}}{as}\right)$$
$$+2\frac{mY_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^3}-2\frac{mP_{10}}{(as)^2}+\frac{m}{as}\left(-\gamma_{mn}P_{11}-\frac{mY_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_{10}}{as}\right)\Bigg] \tag{۱۱۹-۴}$$
$$+\frac{\gamma_{mn}}{as}\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(-\gamma_{mn}P_{11}-\frac{mY_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_{10}}{as}\right)-\frac{\gamma_{mn}}{(as)^2}P_4P_{10}$$
$$+\frac{P_1Y_m(\gamma_{mn}as)}{(as)^3}$$

$$B_{43}=\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\gamma_{mn}\Bigg[\gamma_{mn}\left(\gamma_{mn}P_{7}+\frac{(m+1)P_{6}}{\gamma_{mn}(as)^2}-\frac{(m+1)P_{8}}{as}\right)$$
$$+2\frac{mI_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^3}-2\frac{mP_{7}}{(as)^2}+\frac{m}{as}\left(\gamma_{mn}P_{8}-\frac{mI_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_{7}}{as}\right)\Bigg] \tag{۱۲۰-۴}$$
$$+\frac{\gamma_{mn}}{as}\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(\gamma_{mn}P_{8}-\frac{mI_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_{7}}{as}\right)-\frac{\gamma_{mn}}{(as)^2}P_4P_{7}$$
$$+\frac{P_1I_m(\gamma_{mn}as)}{(as)^3}$$

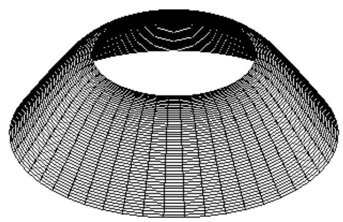
$$
\begin{aligned}
B_{44} &= \left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\gamma_{mn}\left[-\gamma_{mn}\left(-\gamma_{mn}P_3+\frac{(m+1)P_2}{\gamma_{mn}(as)^2}-\frac{(m+1)P_5}{as}\right)\right.\\
&\left.+2\frac{mK_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^3}-2\frac{mP_3}{(as)^2}+\frac{m}{as}\left(-\gamma_{mn}P_5-\frac{mK_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_3}{as}\right)\right]\\
&+\frac{\gamma_{mn}}{as}\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{D(1-\upsilon)}\right)\left(-\gamma_{mn}P_5-\frac{mK_m(\gamma_{mn}as)}{\gamma_{mn}(as)^2}+\frac{mP_3}{as}\right)-\frac{\gamma_{mn}}{(as)^2}P_4P_3\\
&+\frac{P_1K_m(\gamma_{mn}as)}{(as)^3}
\end{aligned}
\qquad (۱۲۱-۴)
$$

حال برای $s=2$ و برای $m=0,1$ و $n=1,2$ ، مقادیر γ_{mn} محاسبه شده‌اند که این مقادیر در جدول ۴-۲ لیست شده‌اند و شکل مدهای مرتبط با آنها نیز در شکل ۴-۴ آورده شده‌اند.

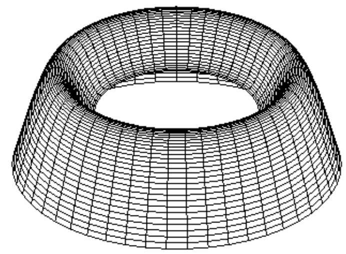
جدول ۴-۲: مقادیر γ_{mn} برای شرط مرزی گیردار-آزاد ، $s=2$ ، $a=500\mu m$ و $h=20\mu m$

m	γ_{m1}	γ_{m2}
۰	۳۷۶۵/۴۲	۹۳۷۳/۹۳
۱	۳۷۰۴/۸۸	۹۴۳۱/۲۱

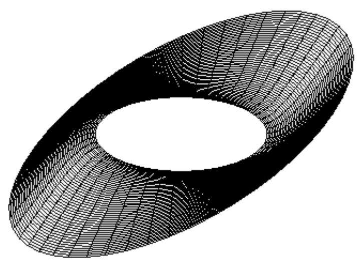
در شرط مرزی گیردار-آزاد، چون C_{mn}^{TR} خود تابع ضخامت است، لذا γ_{mn} نیز تابع ضخامت خواهد شد. شکل ۴-۵ وابستگی γ_{mn} به ضخامت را نشان می دهد. بر اساس این شکل این وابستگی بسیار کم می باشد بنابراین می توان از این وابستگی چشم پوشی کرد و در تمامی محاسبات مربوطه ضخامت را ثابت گرفت. ضخامتی که در اینجا در نظر گرفته شده است، $h=20\mu m$ می باشد.



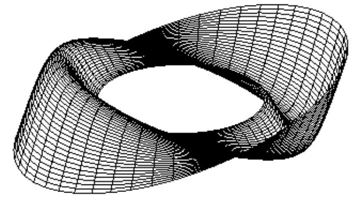
(۰،۱)



(۰،۲)

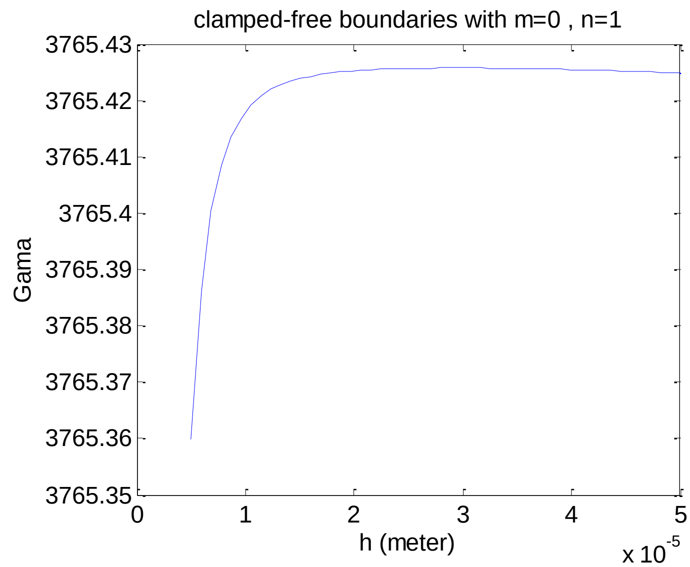


(۱،۱)

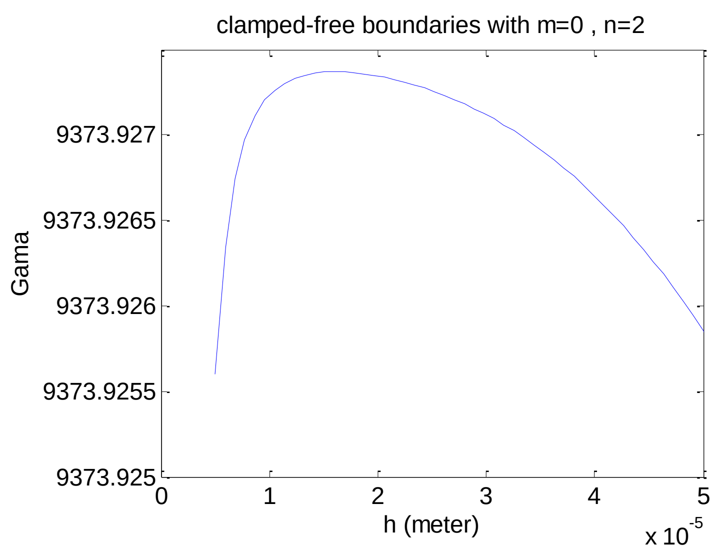


(۱،۲)

شکل ۴-۴: شکل مدهای (m,n) گیردار-آزاد برای $s = 2$، $a = 500\mu m$ و $h = 20\mu m$



(الف)



(ب)

شکل ۴-۵: وابستگی γ_{mn} به ضخامت الف) n=1 ب) n=2

۴-۴-۳- شرط مرزی گیردار ساده

در این حالت شرط مرزی با توجه به (۴-۲۰) و (۴-۲۱) به شکل زیر نوشته می شود

$$w(a,\varphi,t)=0 \tag{۴-۱۲۲}$$

$$\left.\frac{\partial w(r,\varphi,t)}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \tag{۴-۱۲۳}$$

$$w(b,\varphi,t)=0 \tag{۴-۱۲۴}$$

$$\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\upsilon\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right)+\frac{M^T}{D(1-\nu)}\right]_{r=b}=0 \tag{۴-۱۲۵}$$

با جایگذاری (۴-۳۰) و (۴-۳۷) در معادلات فوق به معادلات زیر می رسیم

(۴-۱۲۶)

$$R_{mn}(a)=0$$

$$\left.\frac{dR_{mn}(r)}{dr}\right|_{r=a}=0 \tag{۴-۱۲۷}$$

$$R_{mn}(b)=0 \tag{۴-۱۲۸}$$

(۴-۱۲۹)

$$\left[\left(1+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{d^2R_{mn}}{dr^2}+\left(\nu+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{1}{r}\frac{dR_{mn}}{dr}-\left(\nu+\frac{C_{mn}^{TR}}{(1-\nu)D}\right)\frac{m^2}{r^2}R_{mn}\right]_{r=b}=0$$

رابطه (۴-۴۷) می بایست در معادلات فوق جایگزین شود، که در این صورت معادلات حاصل می بایست حل غیر صفر داشته باشند و برای این کار، دترمینان زیر که ضرایب آن در ضمیمه آورده شده است، برابر صفر می‌شود.

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{vmatrix}=0 \tag{۴-۱۳۰}$$

که در آن

$$C_{ij} = B_{ij}\,(i=1,2,4),(j=1,2,3,4) \qquad (۱۳۱-۴)$$

$$C_{31} = -J_{m+1}(\gamma_{mn}as) + \frac{m}{\gamma_{mn}a} J_m(\gamma_{mn}as) \qquad (۱۳۲-۴)$$

$$C_{32} = -Y_{m+1}(\gamma_{mn}as) + \frac{m}{\gamma_{mn}a} Y_m(\gamma_{mn}as) \qquad (۱۳۳-۴)$$

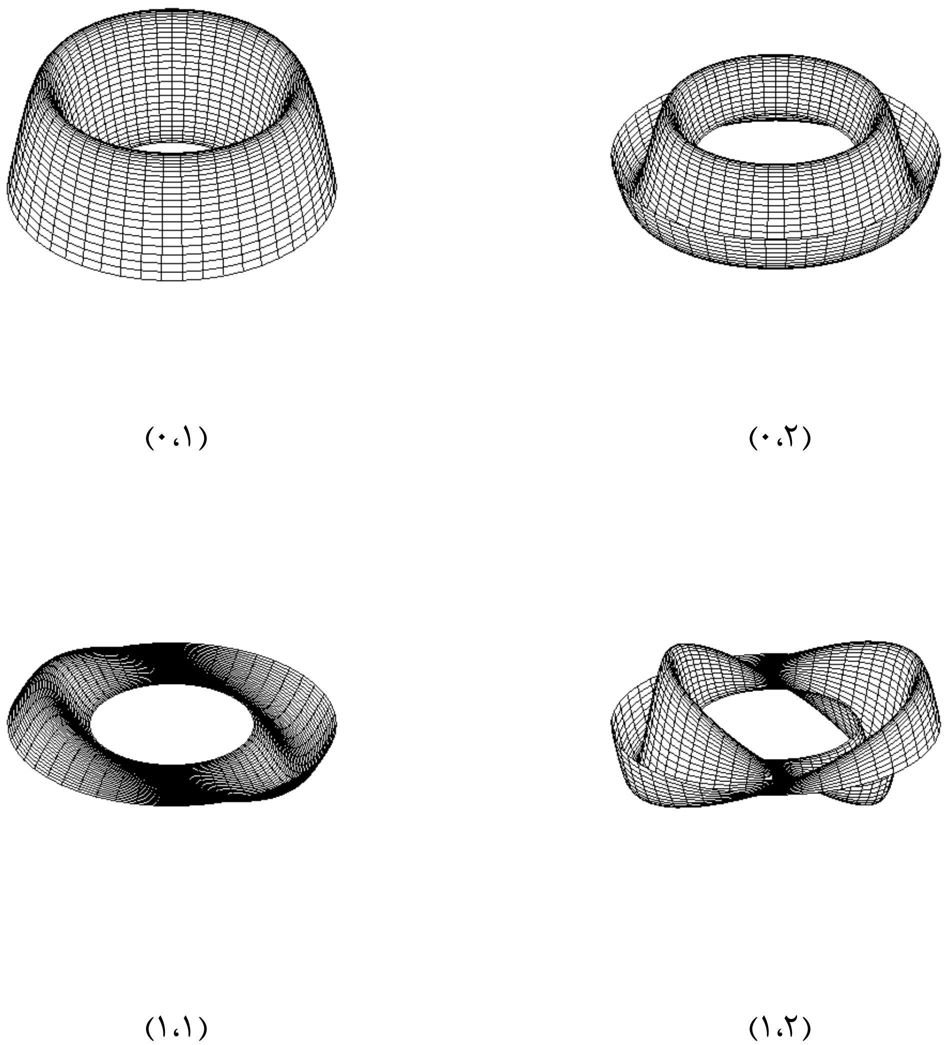
$$C_{33} = I_{m+1}(\gamma_{mn}as) + \frac{m}{\gamma_{mn}a} I_m(\gamma_{mn}as) \qquad (۱۳۴-۴)$$

$$C_{34} = -K_{m+1}(\gamma_{mn}as) + \frac{m}{\gamma_{mn}a} K_m(\gamma_{mn}as) \qquad (۱۳۵-۴)$$

حال برای $s=2$ و برای $m=0,1$ و $n=1,2$ ، مقادیر γ_{mn} محاسبه شده‌اند که این مقادیر در جدول ۴-۳ لیست شده‌اند و شکل مدهای مرتبط با آنها نیز در شکل ۴-۶ آورده شده‌اند.

جدول ۴-۳: مقادیر γ_{mn} برای شرط مرزی گیردار-آزاد ، $s=2$ ، $a=500\mu m$ و $h=20\mu m$

m	γ_{m1}	γ_{m2}
۰	۷۸۳۵/۱۸	۱۴۱۲۴/۰۸
۱	۷۹۰۷/۶۵	۱۴۱۷۶/۴۵



شکل ۴-۶: شکل مدهای (m,n) گیردار-ساده برای $s = 2$، $a = 500\mu m$ و $h = 20\mu m$

۴-۵- نتایج

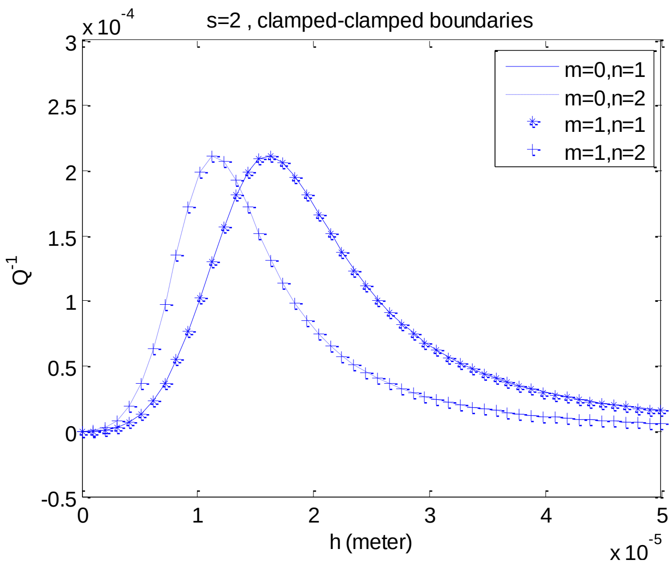
در این قسمت، تأثیر برخی پارامترهای هندسی نظیر ضخامت، شعاع، نوع شرط مرزی و بار الکتریکی روی میرایی ترموالاستیک بررسی شده است. در اینجا اثر میرایی ترموالاستیک برای سیلیکون بررسی شده، که خواص آن در جدول ۴-۴ آورده شده است. همچنین مقدار ثابت دی الکتریک و فاصله بین صفحات از مرجع [۱۱] گرفته شده است ($d = 1.2\mu m, \varepsilon = 8.85\times10^{-12}\ \frac{C^2}{m^2N}$). خواص مکانیکی و گرمایی سیلیکون تابع دما می‌باشد به همین دلیل این محاسبات در دمای ثابت $T = 293K$ انجام شده است.

جدول ۴-۴: خواص میکانیکی و گرمایی سیلیکون در دماهای مختلف [۱۲]

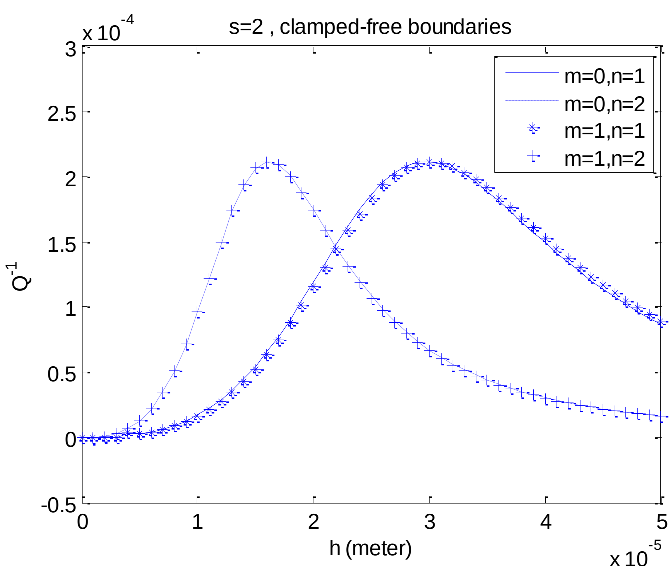
$T_0(K)$	۴۰۰	۲۹۳	۲۰۰	۱۶۰
$E(GPa)$	۱۶۳/۱	۱۶۵/۹	۱۶۶/۹	۱۶۸/۵
$\rho(Kgm^{-3})$	۲۳۲۷	۲۳۳۰	۲۳۳۰	۲۳۳۰
υ	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۲	۰/۲۲
$\kappa(Wm^{-1}K^{-1})$	۱۰۵	۱۵۶	۲۶۶	۳۷۵
$c_v(JKg^{-1}K^{-1})$	۷۸۵	۷۱۳	۵۵۷	۴۵۶
$\alpha_T(10^{-6}K^{-1})$	۳/۲۵۳	۲/۵۹	۱/۴۰۶	۰/۶۸۹

میرایی ترموالاستیک بر حسب ضخامت، برای $a = 500\mu m$ در سه نوع شرایط مرزی محاسبه شده که نتایج آن در شکل ۴-۷ نمایش داده شده است. مطابق این شکل میرایی اول افزایش و بعد از آن کاهش پیدا می کند بنابراین در اینجا یک میرایی ماکزیمم وجود دارد که در ضخامت بحرانی رخ می دهد. تغییرات ضخامت بحرانی بر حسب m بسیار کوچک است اما با افزایش n نیز افزایش پیدا می کند و دلیل

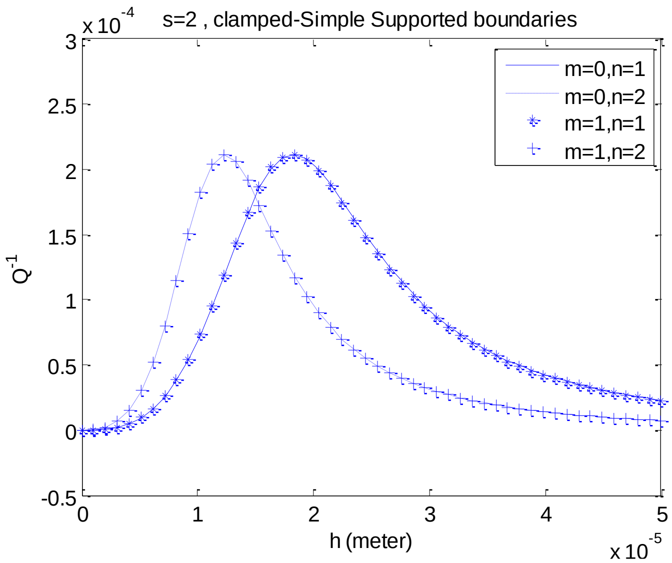
آن به مقدار γ_{mn} بستگی دارد که با m تغییر نمی کند بلکه بیشتر تابع مقدار n می‌باشد. همچنین ضخامت بحرانی به شرایط مرزی نیز بستگی دارد. با مقایسه ۴-۷(الف) ،۴-۷(ب) و ۴-۷ (ج) می توان این تفاوت را دید که در شرط مرزی گیردار-آزاد این میرایی بیشتر است.



(الف)



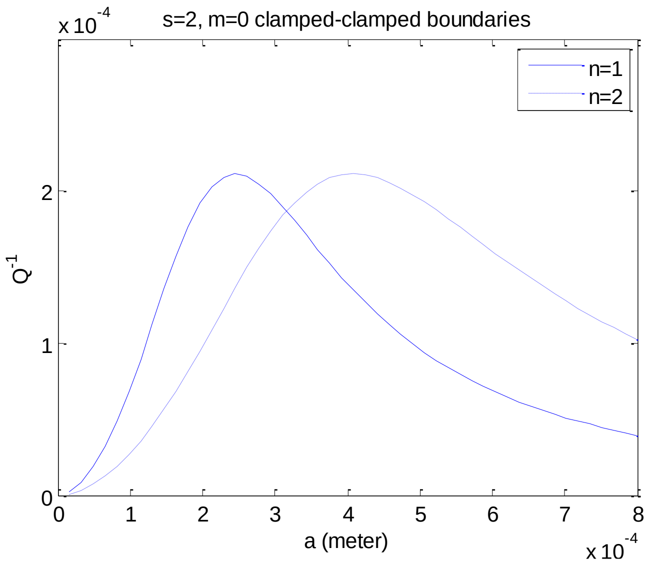
(ب)



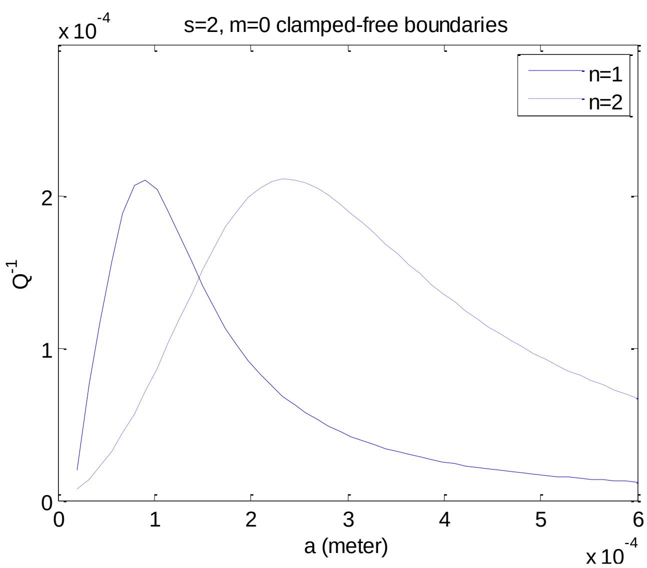
(ج)

شکل ۴-۷: میرایی ترموالاستیک با $a = 500\mu m$ و $V_p = 5v$ برای شرط مرزی (الف) گیردار-گیردار (ب) گیردار-آزاد (ج) گیردار-ساده

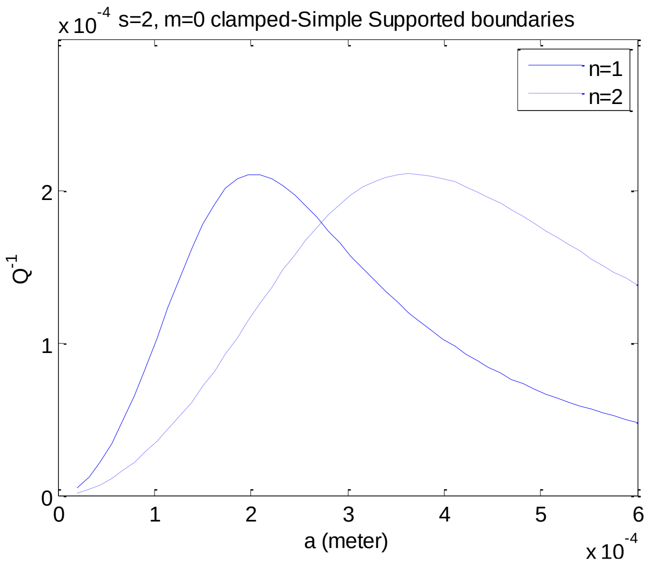
در اینجا نیز میرایی ترموالاستیک را برحسب شعاع a با در نظر گرفتن $h = 10\mu m$، $s = 2$، $V_p = 5v$ برای سه نوع شرایط مرزی گیردار-گیردار، گیردار-آزاد و گیردار-ساده در شکل ۴-۸ رسم شده است. همان طور که در این شکل دیده می شود در اینجا نیز یک شعاع بحرانی داریم که سبب شده میرایی ماکزیمم شود.


x 10^-4
s=2, m=0 clamped-clamped boundaries
n=1
n=2
Q^-1
0
1
2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
a (meter)
x 10^-4

(الف)


x 10^-4
s=2, m=0 clamped-free boundaries
n=1
n=2
Q^-1
0
1
2
0
1
2
3
4
5
6
a (meter)
x 10^-4

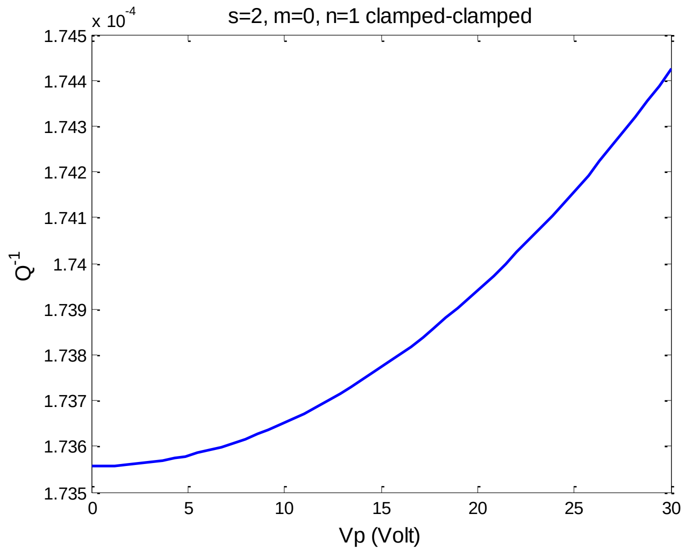
(ب)



(ج)

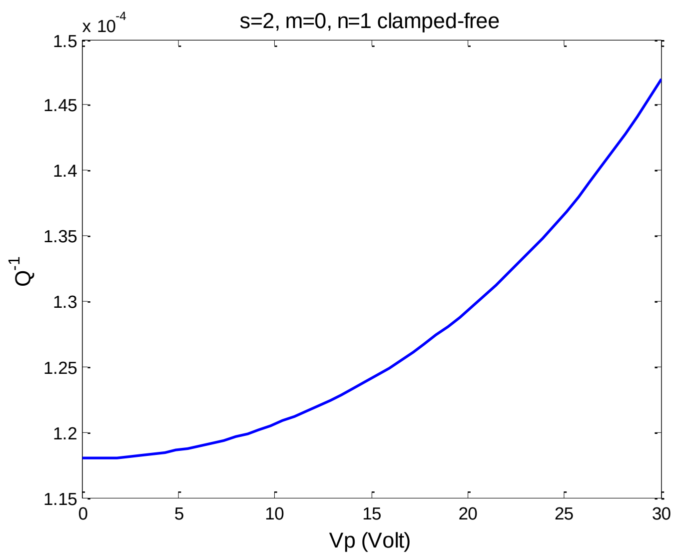
شکل ۴-۸: میرایی ترموالاستیک بر حسب شعاع

شکل ۴-۹ اثر تغییرات بار الکترواستاتیکی V_p بر میرایی ترموالاستیک را در مد اول نمایش می دهد. بر اساس این شکل، با افزایش بار الکتریکی میرایی ترموالاستیک نیز افزایش پیدا می کند. همچنین این افزایش برای شرایط مرزی گیردار- آزاد بیشتر از دو حالت گیردار-گیردار و گیردار-ساده می باشد. بنابراین نوع شرایط مرزی اهمیت زیادی برای میکروصفحاتی که تحت بار الکتریکی هستند دارد.



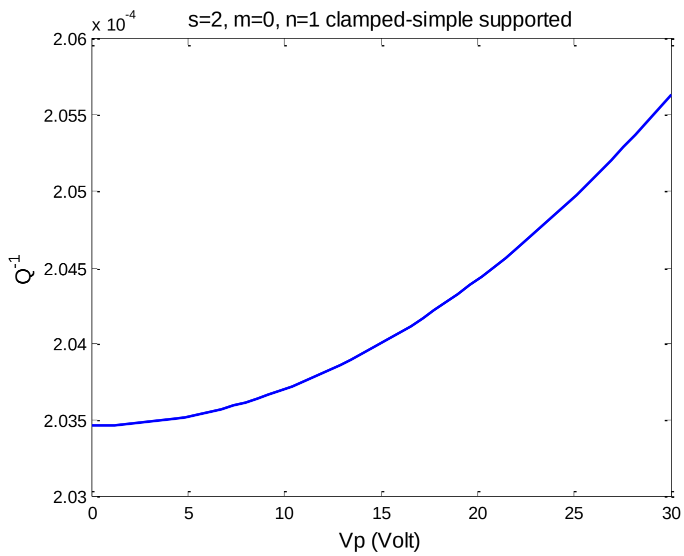
s=2, m=0, n=1 clamped-clamped
x 10^-4
1.745
1.744
1.743
1.742
1.741
1.74
1.739
1.738
1.737
1.736
1.735
Q^-1
0
5
10
15
20
25
30
Vp (Volt)

(الف)



s=2, m=0, n=1 clamped-free
x 10^-4
1.5
1.45
1.4
1.35
1.3
1.25
1.2
1.15
Q^-1
0
5
10
15
20
25
30
Vp (Volt)

(ب)



(ج)

شکل ۴-۹: میرایی ترموالاستیک برحسب بار الکتریکی با در نظر گرفتن $a = 500\mu m$ و $h = 20\mu m$ برای شرط مرزی (الف) گیردار-گیردار (ب) گیردار-آزاد (ج) گیردار-ساده

فصل پنجم

مدل میکروصفحه مستطیلی

۵-۱- مقدمه

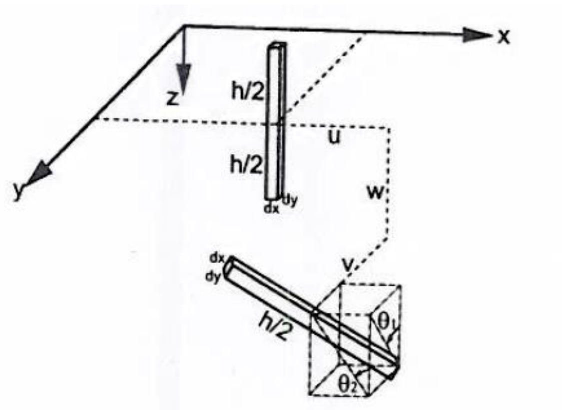
در این فصل تشدیدکننده به عنوان یک صفحه مستطیلی مدل شده است و برای این کار از دو مدل تغییر شکل کوچک و بزرگ استفاده کرده‌ایم و در این مدلها به محاسبه میرایی ترموالاستیک پرداخته‌ایم. روش حل در مدل صفحه با تغییر شکل بزرگ بدین شکل بوده است که ابتدا خیز استاتیکی محاسبه شد، سپس ارتعاشات حول این خیز بررسی شده و میرایی آن محاسبه گردیده است. روشی که برای حل معادلات انتخاب شده روش گالرکین بوده است. همچنین نتایج مدلهای با تغییر شکل بزرگ و کوچک با یکدیگر مقایسه شده و پارامترهایی که سبب رفتارهای غیرخطی شده بررسی گردیده است.

۵-۲- تئوری خطی صفحه مستطیلی

تئوری صفحه کلاسیک بر پایه فرضیات کیرشهف بنا نهاده شده است که در آن فرض می‌شود که سطح مقطعها قبل و بعد از تغییر شکل تخت و عمود بر صفحه مرجع باقی می مانند. به عبارت دیگر پیچشهای برشی در این تئوری صفر در نظر گرفته می شوند.

برای بدست آوردن معادلات حرکت صفحه مستطیلی، شکل مستطیلی را در ناحیه و ابعاد $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$ در نظر می گیریم. شکل ۵-۱ المان دیفرانسیلی صفحه را قبل و بعد از تغییر شکل نشان می دهد. همچنین ابعاد این المان را فرض می کنیم که $dx \times dy \times h$ باشد. از شکل ۵-۱ می توان جابه جایی های u_i مربوط به المان را به شکل زیر تعریف کرد. [۳۹]

$$u_1 = u - zw_x\,,\ \ u_2 = v - zw_y\,,\ \ u_3 = w \qquad (۱-۵)$$



شکل ۵-۱: المان صفحه بدون در نظر گرفتن تغییر شکلهای برشی [۳۹]

که در آن u ، v و w جابه‌جایی‌های مشاهده شده از دید نقطه مرجع، بر حسب سیستم مختصات x، y و z می باشند همچنین این جابه‌جایی ها از z مستقل می‌باشند. با توجه به این جابه‌جایی‌ها بردار جابه جایی را می توان به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\vec{D} = u_1 \hat{j}_1 + u_2 \hat{j}_2 + u_3 \hat{j}_3 \quad (۵-۲)$$

که در آن $\hat{j}_1$، $\hat{j}_2$ و $\hat{j}_3$ بردارهای یکه در راستای x، y و z می باشند. مشتق زمانی و وریيشن بردار $\vec{D}$ می شود

$$\ddot{\vec{D}} = (\ddot{u} - z\ddot{w}_x)\hat{j}_1 + (\ddot{v} - z\ddot{w}_y)\hat{j}_1 + \ddot{w}\hat{j}_3 \quad (۵-۳)$$

$$\delta\vec{D} = (\delta u - z\delta w_x)\hat{j}_1 + (\delta v - z\delta w_y)\hat{j}_1 + \delta w\hat{j}_3 \quad (۵-۴)$$

برای بدست آوردن معادلات حاکم بر صفحات، از اصل هامیلتون توسعه یافته استفاده می‌کنیم که رابطه آن در غیاب نیروهای حجمی به شکل زیر می‌شود.

$$\int_0^t \left(\delta T - \delta\Pi + \delta W_{nc}\right)dt = 0 \tag{۵-۵}$$

که در آن δW_{nc} وریيشن انرژیهای ناپایستار می باشد. همچنین T و Π انرژیهای جنبشی و الاستیک می باشند که به شکل زیر تعریف شده‌اند.

$$\delta T = -\int_z \int_A \rho \ddot{\vec{D}}.\delta\vec{D}dAdz \tag{۶-۵}$$

$$\delta\Pi = -\int_z \int_A \left(\sigma_{11}\delta\varepsilon_{11} + \sigma_{22}\delta\varepsilon_{22} + \sigma_{33}\delta\varepsilon_{33} + \sigma_{13}\delta\varepsilon_{13} + \sigma_{23}\delta\varepsilon_{23} + \sigma_{12}\delta\varepsilon_{12}\right)dAdz \tag{۷-۵}$$

که در آن ρ چگالی صفحه، A ناحیه صفحه مرجع قبل از خمش می‌باشد. همچنین σ_{ij} و ε_{ij} تنش و کرنش وارد بر ورق می‌باشند.

حال با جایگزینی (۵-۳) و (۵-۴) در (۵-۶) داریم

$$\begin{aligned}
&\delta T = -\int_A \left[\left(I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_x\right)\delta u + \left(I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_y\right)\delta v + I_0\ddot{w}\delta w + \left(I_2\ddot{w}_x - I_1\ddot{u}\right)\delta w_x + \left(I_2\ddot{w}_y - I_1\ddot{v}\right)\delta w_y\right]dA = \\
&-\int_A \left\{\left(I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_x\right)\delta u + \left(I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_y\right)\delta v + \left[I_0\ddot{w} - \left(I_2\ddot{w}_x - I_1\ddot{u}\right)_x - \left(I_2\ddot{w}_y - I_1\ddot{v}\right)_y\right]\delta w\right\}dA \\
&-\int_y \left[I_2\ddot{w}_x - I_1\ddot{u}\right]_{x=0}^{x=a}\delta w dy - \int_x \left[I_2\ddot{w}_y - I_1\ddot{v}\right]_{y=0}^{y=b}\delta w dx
\end{aligned} \tag{۸-۵}$$

که در آن I_i به شکل زیر تعریف شده‌اند

$$\left\{I_0, \quad I_1, \quad I_2\right\} = \int_z \rho\left\{1, \quad z, \quad z^2\right\}dz \tag{۹-۵}$$

قابل ذکر است چنانچه ρ ثابت و صفحه مرجع در وسط ورق باشد آنگاه $I_0 = \rho h$ ، $I_1 = 0$ و $I_2 = \frac{1}{12}\rho h^3$ خواهند شد.

حال با استفاده از روابط خطی کرنش- جابه‌جایی می توان کرنشهای خطی را به شکل زیر بدست آورد.

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = u_x - z w_{xx} \\
&\varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = v_y - z w_{yy} \\
&\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} = u_y + v_x - 2z w_{xy} \\
&\varepsilon_{33} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0
\end{aligned}
\tag{۱۰-۵}
$$

با جایگزینی (۵-۱۰) در (۵-۷) داریم

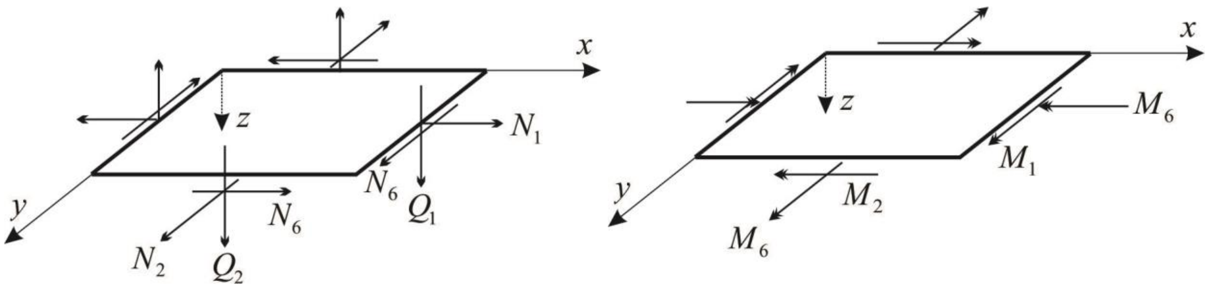
(۱۱-۵)

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi &= \int_A \int_z \left[\sigma_{11}\left(\delta u_x - z\delta w_{xx}\right) + \sigma_{22}\left(\delta v_y - z\delta w_{yy}\right) + \sigma_{12}\left(\delta u_y + \delta v_x - 2z\delta w_{xy}\right)\right] dA dz \\
&= \int_A \left[N_1 \delta u_x + N_2 \delta v_y + N_6\left(\delta u_y + \delta v_x\right) - M_1 \delta w_{xx} - M_2 \delta w_{yy} - 2M_6 \delta w_{xy}\right] dA \\
&= -\int_A \left\{\left(N_{1x} + N_{6y}\right)\delta u + \left(N_{2y} + N_{6x}\right)\delta v + \left[M_{1xx} + M_{2yy} + 2M_{6xy}\right]\delta w\right\} dA \\
&+ \int_y \left[N_1 \delta u + N_6 \delta v + \left(M_{1x} + 2M_{6y}\right)\delta w - M_1 \delta w_x\right]_{x=0}^{x=a} dy \\
&+ \int_x \left[N_6 \delta u + N_2 \delta v + \left(M_{2y} + 2M_{6x}\right)\delta w - M_2 \delta w_y\right]_{y=0}^{y=b} dx - 2M_6 \delta w\Big|_{(x,y)=(a.0),(0,b)}^{(x,y)=(0,0),(a,b)}
\end{aligned}
$$

مطابق شکل ۵-۲ M_i ممانهای وارد بر لبه های المان و N_i نیز نیروهای درون صفحه ای می باشند که به شکل زیر تعریف می‌شوند

$$
\{N_1, \quad N_2, \quad N_6\} = \int_z \{\sigma_{11}, \quad \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}\} dz \tag{۱۲-۵}
$$

$$
\{M_1, \quad M_2, \quad M_6\} = \int_z z\{\sigma_{11}, \quad \sigma_{22}, \quad \sigma_{12}\} dz \tag{۱۳-۵}
$$



(ب) (الف)

شکل ۵-۲: الف) ممانهای برایند ب) نیروهای برایند در یک المان ورق

برای ربط دادن کرنشهای صفحه میانی (u_x ، v_y و u_y+v_x) و قوسهای (w_{xx}، w_{yy} و w_{xy}) به M_i و N_i فرض می کنیم که $\varepsilon_{13}=\varepsilon_{23}=\sigma_{33}=0$ می باشند. (برای صفحات نازک فرض $\sigma_{33}=0$ از فرض $\varepsilon_{33}=0$ مناسب تر می باشد[۳۹]) بنابراین رابطه بین تنش و کرنش برای ورق ایزوتروپیک به شکل زیر می شود

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{11}\\ \varepsilon_{22}\\ \varepsilon_{12}\end{Bmatrix} \tag{۱۴-۵}$$

حال اگر (۵-۱۰) را در (۵-۱۴) به کار ببریم و اثر کرنش ترموالاستیک را نیز در آن اعمال کنیم، داریم

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{12}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-\nu)/2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x - zw_{xx}-\alpha_T\left(T-T_0\right)\\ v_y - zw_{yy}-\alpha_T\left(T-T_0\right)\\ u_y+v_x-2zw_{xy}\end{Bmatrix} \tag{۱۵-۵}$$

بنابراین با جایگزینی حاصل (۵-۱۵) در (۵-۱۲) و (۵-۱۳) خواهیم داشت

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_x \\ v_y \\ u_y + v_x \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ N^T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۱۶-۵}$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = -D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M^T \\ M^T \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{۱۷-۵}$$

که در آن

$$N^T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (T - T_0)dz \tag{۱۸-۵}$$

$$M^T = \frac{E\alpha_T}{1-\nu}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z(T - T_0)dz \tag{۱۹-۵}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{۲۰-۵}$$

که در آن $T(x,y,z,t)$ دمای سطح صفحه، E مدول الاستیسیته، α_T ضریب انبساط حرارتی، ν ضریب پواسون و T_0 دمای شرایط تعادل می باشد. حال با جایگزینی (۵-۱۱) و (۵-۸) در (۵-۵) و صفر قرار دادن هر کدام از ضرایب δw، δv و δu معادلات حرکت به شکل زیر در می آیند

$$N_{1x} + N_{6y} = I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_x \tag{۲۱-۵}$$

$$N_{6x} + N_{2y} = I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_y \tag{۲۲-۵}$$

$$M_{1xx} + 2M_{6xy} + M_{2yy} = I_0\ddot{w} - I_2(\ddot{w}_{xx} + \ddot{w}_{yy}) + I_1\ddot{u}_x + I_1\ddot{v}_y \tag{۲۳-۵}$$

و در ادامه نیز می توان شرایط مرزی زیر را بدست آورد:

در راستای $x=0,a$

(۲۴-۵) $\delta u=0$ یا N_1

(۲۵-۵) $\delta v=0$ یا N_6

(۲۶-۵) $\delta w=0$ یا $M_{1x}+2M_{6y}-I_1\ddot{u}+I_2\ddot{w}_x$

(۲۷-۵) $\delta w_x=0$ یا M_1

در راستای $y=0,b$

(۲۸-۵) $\delta u=0$ یا N_6

(۲۹-۵) $\delta v=0$ یا N_2

(۳۰-۵) $\delta w=0$ یا $M_{2y}+2M_{6x}-I_1\ddot{v}+I_2\ddot{w}_y$

(۳۱-۵) $\delta w_x=0$ یا M_2

حال در اینجا با توجه به (۵-۱۶) و (۵-۱۷) نیروهای درون صفحه ای و ممانها را بر حسب جابه جایی های u ، v و w می نویسیم

(۳۲-۵)
$$N_1=\frac{Eh}{1-\nu^2}\left[u_x+\upsilon v_y\right]-N^T$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\nu u_x + v_y\right] - N^T \qquad (۵-۳۳)$$

$$N_6 = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[u_y + v_x\right] \qquad (۵-۳۴)$$

$$M_1 = -D\left(w_{xx} + \nu w_{yy}\right) - M^T \qquad (۵-۳۵)$$

$$M_2 = -D\left(w_{yy} + \nu w_{xx}\right) - M^T \qquad (۵-۳۶)$$

$$M_6 = -D(1-\nu)w_{xy} \qquad (۵-۳۷)$$

با قرار دادن معادلات (۵-۳۲) تا (۵-۳۷) در (۵-۲۱) تا (۵-۲۳) معادلات حرکت صفحه به شکل زیر می شوند.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1-\nu^2}{Eh}\left[I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial N^T}{\partial x}\right] \qquad (۵-۳۸)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1-\nu^2}{Eh}\left[I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial N^T}{\partial y}\right] \qquad (۵-۳۹)$$

$$D\nabla^4 w + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T\nabla^2 w = I_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2 w) - \nabla^2 M^T \qquad (۵-۴۰)$$

لازم به ذکر است که معادلات فوق با یکدیگر کوپل نیستند لذا برای محاسبه میرایی ترموالاستیک فقط معادله (۵-۴۰) را در نظر می گیریم همچنین می توان از اثر غیرخطی اینرسی چرخشی نیز صرف نظر کرد، بنابراین می توان نوشت

$$D\nabla^4 w + I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T\nabla^2 w + \nabla^2 M^T = 0 \qquad (۵-۴۱)$$

حال به معادله فوق نیروی الکتریکی خطی (۲-۹) را اضافه می کنیم

$$D\nabla^4 w + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T \nabla^2 w + \nabla^2 M^T = \frac{\varepsilon_0 V_p^2}{2d^2} + \frac{\varepsilon_0 V_p v(t)}{d^2} + \frac{\varepsilon_0 V_p^2}{d^3} w \qquad (۴۲\text{-}۵)$$

۵-۳- تئوری صفحه غیرخطی مستطیلی

در این قسمت، ما معادلات و شرایط مرزی حاکم بر صفحات غیرخطی را با ترکیب تئوری خطی صفحات کلاسیک کیرشهف و فرضیات غیرخطی وان کارمن، بدست می آوریم. کرنشهای غیرخطی وان کارمن به شکل زیر تعریف می شوند.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= e_1 - z w_{xx} \\ \varepsilon_{22} &= e_2 - z w_{yy} \\ \varepsilon_{12} &= \gamma_6 - 2 z w_{xy} \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{23} = 0 \end{aligned} \qquad (۴۳\text{-}۵)$$

که در آن

$$\begin{aligned} e_1 &= u_x + \tfrac{1}{2} w_x^2 \\ e_2 &= v_y + \tfrac{1}{2} w_y^2 \\ \gamma_6 &= u_y + v_x + w_x w_y \end{aligned} \qquad (۴۴\text{-}۵)$$

با جایگزینی (۵-۴۳) و (۵-۴۴) در (۵-۷) داریم

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \int_A\int_z\Big[\sigma_{11}\big(\delta u_x + w_x\delta w_x - z\delta w_{xx}\big) + \sigma_{22}\big(\delta v_y + w_y\delta w_y - z\delta w_{yy}\big)\\ &+ \sigma_{12}\big(\delta u_y + \delta v_x + w_x\delta w_y + w_y\delta w_x - 2z\delta w_{xy}\big)\Big]dAdz = \int_A\Big[N_1\big(\delta u_x + w_x\delta w_x\big) + N_2\big(\delta v_y + w_y\delta w_y\big)\\ &+ N_6\big(\delta u_y + \delta v_x + w_x\delta w_y + w_y\delta w_x\big) - M_1\delta w_{xx} - M_2\delta w_{yy} - 2M_6\delta w_{xy}\Big]dA = -\int_A\Big\{\big(N_{1x} + N_{6y}\big)\delta u\\ &+ \big(N_{2y} + N_{6x}\big)\delta v + \Big[M_{1xx} + M_{2yy} + 2M_{6xy} + \big(N_1 w_x\big)_x + \big(N_2 w_y\big)_y + \big(N_6 w_x\big)_y + \big(N_6 w_y\big)_x\Big]\delta w\Big\}dA\\ &+ \int_y\Big[N_1\delta u + N_6\delta v + \big(M_{1x} + 2M_{6y} + N_1 w_x + N_6 w_y\big)\delta w - M_1\delta w_x\Big]_{x=0}^{x=a}dy\\ &+ \int_x\Big[N_6\delta u + N_2\delta v + \big(M_{2y} + 2M_{6x} + N_2 w_y + N_6 w_x\big)\delta w - M_2\delta w_y\Big]_{y=0}^{y=b}dx - 2M_6\delta w\Big|_{(x,y)=(a.0),(0,b)}^{(x,y)=(0,0),(a,b)}\end{aligned} \qquad (۴۵-۵)$$

که در آن

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \end{Bmatrix} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^T \\ N^T \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (۴۶-۵)$$

می باشد. حال با جایگزینی (۵-۴۵) و (۵-۸) در (۵-۵) و صفر قرار دادن هر کدام از ضرایب δw ،δv و δu معادلات حرکت برای صفحه غیرخطی به شکل زیر در می آیند

$$N_{1x} + N_{6y} = I_0\ddot{u} - I_1\ddot{w}_x \qquad (۴۷-۵)$$

$$N_{6x} + N_{2y} = I_0\ddot{v} - I_1\ddot{w}_y \qquad (۴۸-۵)$$

$$M_{1xx} + 2M_{6xy} + M_{2yy} + (N_1 w_x + N_6 w_y)_x + (N_6 w_x + N_2 w_y)_y = I_0\ddot{w} - I_2(\ddot{w}_{xx} + \ddot{w}_{yy}) + I_1\ddot{u}_x + I_1\ddot{v}_y \qquad (۴۹-۵)$$

و شرایط مرزی نیز همانند صفحه خطی بدست می آید. حال در اینجا نیروها و ممانهای درون صفحه ای را بر حسب جابه جایی ها می نویسیم.

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\Big[u_x + \tfrac{1}{2}w_x^2 + \nu\big(v_y + \tfrac{1}{2}w_y^2\big)\Big] - N^T \qquad (۵۰-۵)$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}\Big[\nu\big(u_x + \tfrac{1}{2}w_x^2\big) + v_y + \tfrac{1}{2}w_y^2\Big] - N^T \qquad (۵۱-۵)$$

(۵۲-۵)

$$N_6 = \frac{Eh}{2(1+\nu)}\left[u_y + v_x + w_x w_y\right]$$

$$M_1 = -D\left(w_{xx} + \nu w_{yy}\right) - M^T \qquad (۵۳-۵)$$

$$M_2 = -D\left(w_{yy} + \nu w_{xx}\right) - M^T \qquad (۵۴-۵)$$

$$M_6 = -D(1-\nu)w_{xy} \qquad (۵۵-۵)$$

با قرار دادن معادلات (۵-۵۰) تا (۵-۵۵) در (۵-۴۷) تا (۵-۴۹) معادلات حرکت صفحه غیرخطی با در نظرگرفتن نیروی الکترواستاتیکی (۲-۷) به شکل زیر می شود.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1-\nu^2}{Eh}\left[I_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial N^T}{\partial x}\right] \qquad (۵۶-۵)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1-\nu^2}{Eh}\left[I_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial N^T}{\partial y}\right] \qquad (۵۷-۵)$$

$$D\nabla^4 w + I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + N^T \nabla^2 w = I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla^2 w) - \nabla^2 M^T + \frac{Eh}{1-\nu^2}\left[\left(u_x + \tfrac{1}{2}w_x^2 + \nu(v_y + \tfrac{1}{2}w_y^2)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1-\nu)\left(u_y + v_x + w_x w_y\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(v_y + \tfrac{1}{2}w_y^2 + \nu(u_x + \tfrac{1}{2}w_x^2)\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] + \frac{\varepsilon_0\left(V_p + v(t)\right)^2}{2(d-w)^2} \qquad (۵۸-۵)$$

۴-۵- بی بعدسازی معادلات حرکت

برای بی بعدکردن معادلات حرکت و هدایت، متغیرهای زیر را به کار می‌بریم

$$\hat{x}=\frac{x}{a},\hat{y}=\frac{y}{b},\hat{z}=\frac{z}{h},\hat{w}=\frac{w}{d},\hat{u}=\frac{u}{\bar{u}},\hat{v}=\frac{v}{\bar{v}},\hat{t}=\frac{t}{\bar{t}},\hat{\theta}=\frac{\theta}{\bar{\theta}} \tag{۵-۵۹}$$

که در آن

$$\bar{u}=\frac{d^2}{a},\bar{v}=\frac{d^2}{b},\bar{t}=\frac{2ab}{h}\sqrt{\frac{3\rho}{E}},\bar{\theta}=\frac{\beta T_0 h^2 d^2}{\bar{t}\kappa b^2} \tag{۵-۶۰}$$

بنابراین معادلات حرکت (۵-۵۶) تا (۵-۵۸) و معادله هدایت (۲-۲۸) به شکل زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}&\alpha_1\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{x}^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{y}^2}+\alpha_1\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\\&\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}=(1-\nu^2)\alpha_2\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{t}^2}+(1+\nu)\alpha_3\frac{\partial\hat{N}^T}{\partial\hat{x}}\end{aligned} \tag{۵-۶۱}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_1^{-1}\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{y}^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_1^{-1}\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\\&\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}=(1-\nu^2)\alpha_4\frac{\partial^2\hat{v}}{\partial\hat{t}^2}+(1+\nu)\alpha_5\frac{\partial\hat{N}^T}{\partial\hat{y}}\end{aligned} \tag{۵-۶۲}$$

$$\begin{aligned}&\alpha_1\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4}+2\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^2\partial\hat{y}^2}+\alpha_1^{-1}\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{y}^4}+(1-\nu^2)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}^2}+(1+\nu)\hat{N}^T\left(\alpha_6\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_7\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right)=\\&(1-\nu^2)\frac{\partial^2}{\partial\hat{t}^2}\left(\alpha_2\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_4\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right)-(1+\nu)\left(\alpha_8\frac{\partial^2\hat{M}^T}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_9\frac{\partial^2\hat{M}^T}{\partial\hat{y}^2}\right)\\&+12\alpha_{10}^2\left[\left(\alpha_1\hat{u}_{\hat{x}}+\tfrac{1}{2}\alpha_1\hat{w}_{\hat{x}}^2+\nu(\hat{v}_{\hat{y}}+\tfrac{1}{2}\hat{w}_{\hat{y}}^2)\right)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}+(1-\nu)\left(\hat{u}_{\hat{y}}+\hat{v}_{\hat{x}}+\hat{w}_{\hat{x}}\hat{w}_{\hat{y}}\right)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right.\\&\left.+\left(\alpha_1^{-1}\hat{v}_{\hat{y}}+\tfrac{1}{2}\alpha_1^{-1}\hat{w}_{\hat{y}}^2+\nu(\hat{u}_{\hat{x}}+\tfrac{1}{2}\hat{w}_{\hat{x}}^2)\right)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right]+\alpha_{11}\frac{\left(V_p+v(t)\right)^2}{\left(1-\hat{w}\right)^2}\end{aligned} \tag{۵-۶۳}$$

$$\frac{\partial^2\hat{\theta}}{\partial\hat{z}^2}=\alpha_{12}\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{t}}+\frac{\partial}{\partial\hat{t}}\left[\alpha_1\hat{u}_{\hat{x}}+\hat{v}_{\hat{y}}-\frac{\hat{z}}{\alpha_{10}}(\alpha_1\hat{w}_{\hat{x}\hat{x}}+\hat{w}_{\hat{y}\hat{y}})\right] \tag{۵-۶۴}$$

که در آن

$$\alpha_1=\frac{b^2}{a^2},\alpha_2=\frac{h^2}{12a^2},\alpha_3=\frac{\alpha_T\bar{\theta}b^2}{d^2},\alpha_4=\frac{h^2}{12b^2},\alpha_5=\frac{\alpha_T\bar{\theta}a^2}{d^2},\alpha_6=\frac{12\alpha_T\bar{\theta}b^2}{h^2},\alpha_7=\frac{12\alpha_T\bar{\theta}a^2}{h^2}$$
$$,\alpha_8=\frac{12\alpha_T\bar{\theta}b^2}{dh},\alpha_9=\frac{12\alpha_T\bar{\theta}a^2}{dh},\alpha_{10}=\frac{d}{h},\alpha_{11}=\frac{\varepsilon_0 a^2b^2}{2d^3D},\alpha_{12}=\frac{\rho c_p h^2}{\bar{t}\kappa}=\frac{\rho c_p h^3}{2ab\kappa}\sqrt{\frac{E}{3\rho}} \tag{۶۵-۵}$$

و

$$\hat{N}^T=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\hat{\theta}d\hat{z},\hat{M}^T=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\hat{\theta}\hat{z}d\hat{z} \tag{۶۶-۵}$$

همچنین صفحه خطی (۵-۴۲) را می توان به شکل زیر بی‌بعد کرد

$$\alpha_1\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^4}+2\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{x}^2\partial\hat{y}^2}+\alpha_1^{-1}\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{y}^4}+(1-\nu^2)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}^2}+(1+\nu)\hat{N}^T\left(\alpha_6\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_7\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{y}^2}\right)$$
$$+(1+\nu)\left(\alpha_8\frac{\partial^2\hat{M}^T}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_9\frac{\partial^2\hat{M}^T}{\partial\hat{y}^2}\right)=\alpha_{11}\left[V_p^2+2V_pv(t)+V_p^2\hat{w}\right] \tag{۶۷-۵}$$

لازم به ذکر است که در ادامه خواهیم دید که در محاسبه میرایی ترموالاستیک پارامترهای α_3، α_5، α_6، α_7 حذف خواهند شد. حال می توان رابطه بین پارامترهای (۵-۶۵) را به شکل زیر نوشت

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_4}=\alpha_1,\frac{\alpha_8}{\alpha_9}=\alpha_1,\alpha_8=\bar{\alpha}\alpha_{10}\alpha_{12} \tag{۶۸-۵}$$

که در آن

$$\bar{\alpha}=\frac{12\alpha_T^2ET_0}{(1-2\nu)\rho c_p} \tag{۶۹-۵}$$

۵-۵- میرایی ترموالاستیک صفحه با تغییر شکل کوچک

برای بدست آوردن میرایی ترموالاستیک می بایست ارتعاشات هارمونیک را برای معادله (۵-۶۷) و معادله هدایت در نظر گرفت. معادله هدایت (۵-۶۴) برای صفحه با تغییر شکل کوچک می بایست به شکل زیر کاهش یابد.

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial \hat{z}^2} = \alpha_{12}\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \hat{t}} - \frac{\hat{z}}{\alpha_{10}}\frac{\partial}{\partial \hat{t}}(\alpha_1 \hat{w}_{\hat{x}\hat{x}} + \hat{w}_{\hat{y}\hat{y}}) \tag{۵-۷۰}$$

معادلات (۵-۶۷) و (۵-۷۰) را با فرض هارمونیک بودن ارتعاشات می‌توان حل کرد. بنابراین $\hat{w}(\hat{x},\hat{y},\hat{t})$ و $\hat{\theta}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{t})$ را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$\hat{w}(\hat{x},\hat{y},\hat{t}) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} W_{mn}(\hat{x},\hat{y})e^{i\Omega_{mn}\hat{t}}, \hat{\theta}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{t}) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Theta_{mn}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})e^{i\Omega_{mn}\hat{t}} \tag{۵-۷۱}$$

که در آن Ω_{mn} فرکانس و $W_{mn}(\hat{x},\hat{y})$ و $\Theta_{mn}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ به ترتیب شکل مدهای m و nام مختلط ارتعاشی صفحه و دما می باشند. در این نمادگذاری $m=0,1,2,\dots$ و $n=0,1,2,\dots$ به ترتیب بیانگر عدد گره طولی و عرضی می باشند. Ω_{mn} کمیتی مختلط است که قسمت حقیقی آن ، ω_{mn}، به اثر کوپلینگ ترموالاستیکی و قسمت موهومی آن ، λ_{mn} ، به میرایی ارتعاشات مرتبط می شود. با جایگزینی (۵-۷۱) در (۵-۷۰) و (۵-۶۷) داریم

$$\begin{aligned}&\alpha_1\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2\partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1}\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{y}^4} - (1-\nu^2)\Omega_{mn}^2 W_{mn} + \\ &(1+\nu)e^{i\Omega_{mn}\hat{t}}\hat{N}_{mn}^T\left(\alpha_6\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_7\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2}\right) + (1+\nu)\left(\alpha_8\frac{\partial^2 \hat{M}_{mn}^T}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_9\frac{\partial^2 \hat{M}_{mn}^T}{\partial \hat{y}^2}\right) = \alpha_{11}V_p^2 W_{mn}\end{aligned} \tag{۵-۷۲}$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_{mn}}{\partial \hat{z}^2} = i\Omega_{mn}\alpha_{12}\Theta_{mn} - \frac{i\Omega_{mn}\hat{z}}{\alpha_{10}}\left(\alpha_1\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2}\right) \tag{۵-۷۳}$$

که در آن

$$\hat{N}_{mn}^T = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Theta_{mn} d\hat{z}, \hat{M}_{mn}^T = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \Theta_{mn} \hat{z} d\hat{z} \quad (۷۴-۵)$$

می‌باشند. شرایط مرزی برای حل معادله (۵-۷۳) عبارتند از $\partial\Theta_{mn}/\partial z = 0$ در $\hat{z} = \pm 1/2$، چرا که رویه-های بالا و پایین میکروصفحه ایزوله در نظر گرفته شده و هیچ شار حرارتی از این رویه ها عبور نمی‌کند بنابراین حل (۵-۷۳) به شکل زیر می‌شود.

$$\Theta_{mn}(x,y,z) = \frac{1}{\alpha_{10}\alpha_{12}} \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \right) \left(\hat{z} - \frac{\sin(N_{mn}\hat{z})}{N_{mn}\cos(N_{mn}/2)} \right) \quad (۷۵-۵)$$

که در آن

$$N_{mn} = (1-i)\sqrt{\frac{\Omega_{mn}\alpha_{12}}{2}} \quad (۷۶-۵)$$

چنانچه (۵-۷۵) را در (۵-۷۴) جایگزین کنیم و انتگرال حاصله را محاسبه کنیم به پاسخهای ذیل می رسیم

$$\hat{N}_{mn}^T = 0 \quad (۷۷-۵)$$

$$\hat{M}_{mn}^T = \frac{1}{\alpha_{10}\alpha_{12}} C_{mn}^T \left(\alpha_1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \right) \quad (۷۸-۵)$$

که در آن

$$C_{mn}^T = \frac{1}{12} - \frac{2}{N_{mn}^3} \left[\tan\left(\tfrac{N_{mn}}{2}\right) - \tfrac{N_{mn}}{2} \right] \quad (۷۹-۵)$$

می‌باشد. با جایگزینی (۵-۷۷) و (۵-۷۸) در (۵-۷۲) و همچنین با در نظر گرفتن روابط بین پارامترهای (۵-۶۸) داریم

$$\alpha_1 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{y}^4} - (1-\nu^2)\Omega_{mn}^2 W_{mn} + $$
$$+ (1+\nu)\overline{\alpha} C_{mn}^T \left[\alpha_1 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{y}^4} \right] = \alpha_{11} V_p^2 W_{mn} \quad (۸۰-۵)$$

برای حل معادله فوق از روش گالرکین[1] [۴۲] استفاده می‌کنیم. برای این کار فرض می‌کنیم $W_{mn} = \varphi_{mn}$ که در آن φ_{mn} شکل مود صفحه می‌باشد که با توجه به شرایط مرزی انتخاب می‌شود. در اینجا با توجه به اینکه $m = n = 1$ می‌باشد برخی از شکل مودهای مورد استفاده در جدول ۵-۱، با توجه به نوع شرط مرزی لیست شده‌اند[۴۳]. لازم به ذکر است که برای هر شرط مرزی نیز یک اختصار در نظر گرفته شده است.

حال در اینجا شکل وریشنال[2] معادله (۵-۸۰) را می نویسیم

$$\iint_A \left[L_1 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^4} + L_2 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + L_3 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^4} - \left((1-\nu^2)\Omega_{11}^2 + \alpha_{11} V_p^2\right)\varphi_{11} \right] \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y} = 0 \quad (۸۱-۵)$$

که در آن

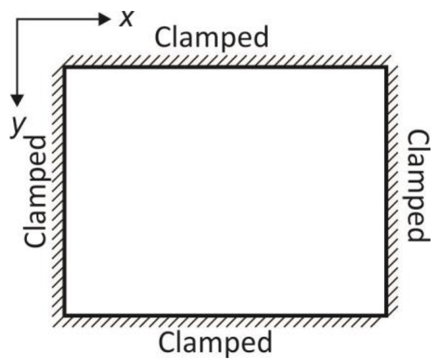
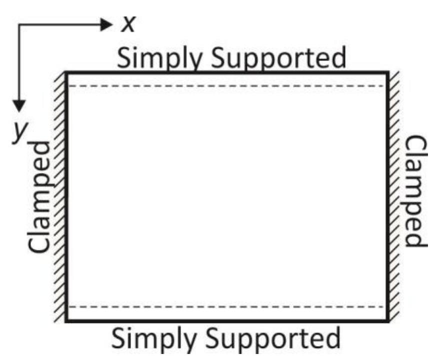
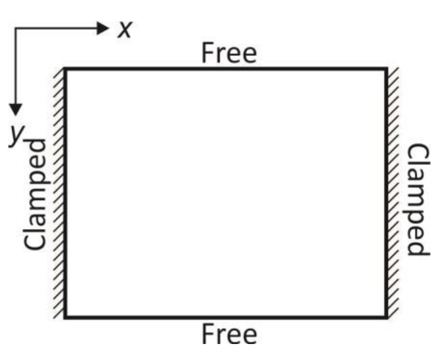
$$L_1 = \alpha_1 \left(1 + (1+\nu)\overline{\alpha} C_{11}^T\right) \quad (۸۲-۵)$$

$$L_2 = 2\left(1 + (1+\nu)\overline{\alpha} C_{11}^T\right) \quad (۸۳-۵)$$

$$L_3 = \alpha_1^{-1} \left(1 + (1+\nu)\overline{\alpha} C_{11}^T\right) \quad (۸۴-۵)$$

[1] Galerkin
[2] Variational Form

جدول ۵-۱ : لیست شرایط مرزی و اختصار آنها [۴۳]

	*CCCC*
	$\varphi_{11}=\left(\cos(2\pi\hat{x})-1\right)\left(\cos(2\pi\hat{y})-1\right)$
	$\psi_{11}=\sin(\pi\hat{x})\sin(\pi\hat{y})$
	*CSCS*
	$\varphi_{11}=\left(\cos(2\pi\hat{x})-1\right)\sin(\pi\hat{y})$
	$\psi_{11}=\sin(\pi\hat{x})\sin(\pi\hat{y})$
	*CFCF*
	$\varphi_{11}=\cos(2\pi\hat{x})-1$
	$\psi_{11}=\sin(\pi\hat{x})\cos(\pi\hat{y})$

می باشند. با فرض زیر

$$P_1 = \iint_A \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^4} \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \tag{۸۵-۵}$$

$$P_2 = \iint_A \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \tag{۸۶-۵}$$

$$P_3 = \iint_A \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^4} \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \tag{۸۷-۵}$$

$$P_4 = \iint_A \varphi_{11}^2 d\hat{x} d\hat{y} \tag{۸۸-۵}$$

می‌توان معادله (۵-۸۱) را به شکل زیر نوشت

$$L_1 P_1 + L_2 P_2 + L_3 P_3 - \left((1-\nu^2)\Omega_{11}^2 + \alpha_{11} V_p^2\right) P_4 = 0 \tag{۸۹-۵}$$

حال با حل معادله (۵-۸۹) و با بدست آوردن Ω_{11} و تفکیک قسمتهای حقیقی و موهومی آن می‌توان میرایی ترموالاستیک را برای مود اول به شکل زیر محاسبه کرد.

$$Q^{-1} = 2\left|\frac{\lambda_{11}}{\omega_{11}}\right| \tag{۹۰-۵}$$

۵-۶- خیز استاتیکی

صفحه مورد نظر در اثر اعمال بار الکترواستاتیکی V_p دچار خیزی می‌شود که این خیز می‌بایست محاسبه شود. از طرفی چون این خیز استاتیکی است، بنابراین میرایی ترموالاستیک مفهوم خود را از دست می

دهد بنابراین با حذف ترمهای دینامیکی و گرمایی از معادلات (۵-۶۱) تا (۵-۶۳) خیز استاتیکی محاسبه می‌شود.

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \hat{v}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \hat{y}^2} + \alpha_1 \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} = 0 \qquad (۵\text{-}۹۱)$$

$$\alpha_1^{-1} \frac{\partial^2 \hat{v}_s}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \hat{v}_s}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} = 0 \qquad (۵\text{-}۹۲)$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 \frac{\partial^4 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2\partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1}\frac{\partial^4 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^4} = 12\alpha_{10}^2 \Bigg\{ &\left[\alpha_1 \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\right)^2 + \nu\left(\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \\ &+ (1-\nu)\left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\right)\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \left[\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\right)^2 + \nu\left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2}\Bigg\} \\ &+ \alpha_{11}\frac{V_p^2}{(1-\hat{w}_s)^2}\end{aligned} \qquad (۵\text{-}۹۳)$$

که در آن $\hat{u}_s$ و $\hat{v}_s$ و $\hat{w}_s$ جابه جایی های استاتیکی می‌باشند. برای حل معادلات فوق ، از روش گالرکین-ولاسوف استفاده می‌کنیم [۴۲] برای این کار ابتدا فرض می‌کنیم

$$\hat{w}_s(\hat{x},\hat{y}) = \sum_m \sum_n W_{mn}^s \varphi_{mn}(\hat{x},\hat{y}) \qquad (۵\text{-}۹۴)$$

$$\hat{u}_s(\hat{x},\hat{y}) = \sum_m \sum_n U_{mn}^s \psi_{mn}(\hat{x},\hat{y}) \qquad (۵\text{-}۹۵)$$

$$\hat{v}_s(\hat{x},\hat{y}) = \sum_m \sum_n V_{mn}^s \psi_{mn}(\hat{x},\hat{y}) \qquad (۵\text{-}۹۶)$$

که در آن

$$\psi_{mn} = L_m^x L_n^y \quad \text{و} \quad \varphi_{mn} = T_m^x T_n^y \tag{۹۷-۵}$$

که در آن L_m^x و L_n^y، شکل مود mام و nام طولی میله و T_m^x و T_n^y، شکل مود mام و nام تیر اولر-برنولی می‌باشند. حال معادلات وریبشنال صفحه را با توجه به معادلات (۵-۹۲) تا (۵-۹۴) می نویسیم.

$$\iint_A \left[\alpha_1 \frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \hat{v}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \hat{y}^2} + \alpha_1 \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right] \delta \hat{u}_s d\hat{x} d\hat{y} = 0 \tag{۹۸-۵}$$

$$\iint_A \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial^2 \hat{v}_s}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \hat{u}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \hat{v}_s}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \right] \delta \hat{v}_s d\hat{x} d\hat{y} = 0 \tag{۹۹-۵}$$

$$\begin{aligned}\iint_A \Bigg[& \alpha_1 \frac{\partial^4 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1}\frac{\partial^4 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^4} - 12\alpha_{10}^2 \Bigg\{ \left[\alpha_1 \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\right)^2 + \nu\left(\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \\ & + (1-\nu)\left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\right)\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \left[\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\right)^2 + \nu\left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2}\Bigg\} \\ & - \alpha_{11}\frac{V_p^2}{(1-\hat{w}_s)^2}\Bigg] \delta \hat{w}_s d\hat{x} d\hat{y} = 0\end{aligned} \tag{۱۰۰-۵}$$

سپس سریهای (۵-۹۴) تا (۵-۹۶) را در معادلات (۵-۹۸) تا (۵-۱۰۰) جایگزین می کنیم

$$\begin{aligned}\sum_m \sum_n \iint_A \Bigg[& \alpha_1 U_{mn}^s \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)V_{mn}^s \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)U_{mn}^s \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \hat{y}^2} + \alpha_1\left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}}\right)\left(W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}^2}\right) + \\ & \frac{1}{2}(1+\nu)\left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}}\right)\left(W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}}\right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}}\right)\left(W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}^2}\right)\Bigg] \delta U_{ij}^s \psi_{ij} d\hat{x} d\hat{y} = 0\end{aligned} \tag{۱۰۱-۵}$$

$$\sum_m \sum_n \iint_A \left[\alpha_1^{-1} V_{mn}^s \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) U_{mn}^s \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu) V_{mn}^s \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_1^{-1} \left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}} \right) \left(W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \right) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{2}(1+\nu) \left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}} \right) \left(W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}} \right) \left(W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}^2} \right) \right] \delta V_{ij}^s \psi_{ij} \, d\hat{x} d\hat{y} = 0 \tag{۱۰۲-۵}$$

$$\sum_m \sum_n \iint_A \left[\alpha_1 W_{mn}^s \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}^4} + 2 W_{mn}^s \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} W_{mn}^s \frac{\partial^4 \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}^4} - \right.$$
$$-12\alpha_{10}^2 \left\{ \left[\alpha_1 U_{mn}^s \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2} \left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \nu \left(V_{mn}^s \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right) \right] W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}^2} \right.$$
$$+ (1-\nu) \left(U_{mn}^s \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \hat{y}} + V_{mn}^s \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \hat{x}} + W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}} W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}} \right) W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \tag{۱۰۳-۵}$$
$$\left. + \left[\frac{1}{\alpha_1} V_{mn}^s \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1} \left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \nu \left(U_{mn}^s \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(W_{mn}^s \frac{\partial \varphi_{mn}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right) \right] W_{mn}^s \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \right\}$$
$$\left. - \alpha_{11} \frac{V_p^2}{\left(1 - W_{mn}^s \varphi_{mn}\right)^2} \right] \delta W_{ij}^s \varphi_{ij} \, d\hat{x} d\hat{y} = 0$$

در سریهای (۵-۹۴) تا (۵-۹۶) فقط جمله اول را در نظر می گیریم و از بقیه صرف نظر می کنیم. به عبارت دیگر معادلات (۵-۱۰۱) تا (۵-۱۰۳) را به شکل زیر می نویسیم

$$\iint_A \left[\alpha_1 U_{11}^s \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) V_{11}^s \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu) U_{11}^s \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \alpha_1 \left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right) \left(W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} \right) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{2}(1+\nu) \left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right) \left(W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right) \left(W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} \right) \right] \psi_{11} \, d\hat{x} d\hat{y} = 0 \tag{۱۰۴-۵}$$

$$\iint_A \left[\alpha_1^{-1} V_{11}^s \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) U_{11}^s \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu) V_{11}^s \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_1^{-1} \left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right) \left(W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} \right) + \right.$$
$$\left. \frac{1}{2}(1+\nu) \left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right) \left(W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right) \left(W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} \right) \right] \psi_{11} \, d\hat{x} d\hat{y} = 0 \tag{۱۰۵-۵}$$

$$\iint_A \Bigg[\alpha_1 W_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^4} + 2W_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} W_{11}^s \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^4} -$$

$$-12\alpha_{10}^2 \Bigg\{ \Bigg[\alpha_1 U_{11}^s \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2}\left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \nu \left(V_{11}^s \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}\left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right) \Bigg] W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2}$$

$$+(1-\nu)\left(U_{11}^s \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + V_{11}^s \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right) W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \qquad (۱۰۶\text{-}۵)$$

$$+\left[\frac{1}{\alpha_1} V_{11}^s \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1}\left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \nu \left(U_{11}^s \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2}\left(W_{11}^s \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right) \right] W_{11}^s \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} \Bigg\}$$

$$-\alpha_{11} \frac{V_p^2}{\left(1 - W_{11}^s \varphi_{11}\right)^2} \Bigg] \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y} = 0$$

برای راحتی کار می‌توان پارامترهای زیر را به این شکل تعریف کرد.

$$A_1 = \iint_A \left[\alpha_1 \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{y}^2} \right] \psi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \qquad (۱۰۷\text{-}۵)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(1+\nu) \iint_A \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \psi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \qquad (۱۰۸\text{-}۵)$$

$$A_3 = \iint_A \left[\alpha_1 \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} \right] \psi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \qquad (۱۰۹\text{-}۵)$$

$$A_4 = \iint_A \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x}^2} \right] \psi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \qquad (۱۱۰\text{-}۵)$$

$$A_5 = \iint_A \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} \right] \psi_{11} d\hat{x} d\hat{y} \qquad (۱۱۱\text{-}۵)$$

(۱۱۲-۵)

$$A_6 = \iint_A \left[\alpha_1 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^4} \right] \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y}$$

$$A_7=-12\alpha_{10}^2\iint_A\left[\alpha_1\frac{\partial\psi_{11}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{x}^2}+(1-\nu)\frac{\partial\psi_{11}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\nu\frac{\partial\psi_{11}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{y}^2}\right]\varphi_{11}d\hat{x}d\hat{y} \qquad (۱۱۳\text{-}۵)$$

$$A_8=-12\alpha_{10}^2\iint_A\left[\nu\frac{\partial\psi_{11}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{x}^2}+(1-\nu)\frac{\partial\psi_{11}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial\psi_{11}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{y}^2}\right]\varphi_{11}d\hat{x}d\hat{y} \qquad (۱۱۴\text{-}۵)$$

$$\begin{aligned}A_9=-12\alpha_{10}^2\iint_A&\left\{\left[\frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\hat{x}}\right)^2+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\hat{y}}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{x}^2}+(1-\nu)\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right.\\&\left.+\left[\frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\hat{y}}\right)^2+\frac{\nu}{2}\left(\frac{\partial\varphi_{11}}{\partial\hat{x}}\right)^2\right]\frac{\partial^2\varphi_{11}}{\partial\hat{y}^2}\right\}\varphi_{11}d\hat{x}d\hat{y}\end{aligned} \qquad (۱۱۵\text{-}۵)$$

$$FE=\alpha_{11}V_p^2\iint_A\frac{\varphi_{11}d\hat{x}d\hat{y}}{\left(1-W_{11}^s\varphi_{11}\right)^2} \qquad (۱۱۶\text{-}۵)$$

حال با توجه به پارامترهای فوق معادلات (۵-۱۰۴) تا (۵-۱۰۶) را می توان به شکل زیر بازنویسی کرد

$$A_1U_{11}^s+A_2V_{11}^s+A_3W_{11}^{s2}=0 \qquad (۱۱۷\text{-}۵)$$

$$A_2U_{11}^s+A_4V_{11}^s+A_5W_{11}^{s2}=0 \qquad (۱۱۸\text{-}۵)$$

$$A_6W_{11}^s+A_7U_{11}^sW_{11}^s+A_8V_{11}^sW_{11}^s+A_9W_{11}^{s3}=FE \qquad (۱۱۹\text{-}۵)$$

و در پایان هم با حل همزمان معادلات (۵-۱۱۷) تا (۵-۱۱۹) و با بدست آوردن W_{11}^s ، U_{11}^s و V_{11}^s می توان خیز استاتیکی را از روابط (۵-۹۴) تا (۵-۹۶) بدست آورد.

برای حل معادلات (۵-۹۱) تا (۵-۹۳) می توان از روش عددی نیز استفاده کرد که برای این کار از گسسته سازی‌های زیر استفاده کرده‌ایم

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{12\Delta x}\left[-f(m+2,n)+8f(m+1,n)-8f(m-1,n)+f(m-2,n)\right] \qquad (۱۲۰\text{-}۵)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{12\Delta y}\left[-f(m,n+2)+8f(m,n+1)-8f(m,n-1)+f(m,n-2)\right] \tag{۱۲۱-۵}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{12\Delta x^2}\left[-f(m+2,n)+16f(m+1,n)-30f(m,n)+16f(m-1,n)-f(m-2,n)\right] \tag{۱۲۲-۵}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{12\Delta y^2}\left[-f(m,n+2)+16f(m,n+1)-30f(m,n)+16f(m,n-1)-f(m,n-2)\right] \tag{۱۲۳-۵}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{1}{144\Delta y\Delta x}&\{64\left[f(m+1,n+1)-f(m-1,n+1)+f(m-1,n-1)-f(m+1,n-1)\right]\\ &8[-f(m+1,n+2)-f(m+2,n+1)+f(m-2,n+1)+f(m-1,n+2)\\ &-f(m-2,n-1)-f(m-1,n-2)+f(m+2,n-1)+f(m+1,n-2)]\\ &+f(m+2,n+2)-f(m-2,n+2)+f(m-2,n-2)-f(m+2,n-2)\}\end{aligned} \tag{۱۲۴-۵}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}=\frac{1}{12\Delta y^2\Delta x^2}&\{72f(m,n)-38\left[f(m+1,n)+f(m-1,n)+f(m,n+1)+f(m,n-1)\right]\\ &+20\left[f(m+1,n+1)+f(m-1,n+1)+f(m-1,n-1)+f(m+1,n-1)\right]\\ &+2\left[f(m,n+2)+f(m,n-2)+f(m+2,n)+f(m-2,n)\right]\\ &-[f(m+2,n+1)+f(m+1,n+2)+f(m+2,n-1)+f(m+1,n-2)\\ &+f(m-1,n+2)+f(m-2,n+1)+f(m-1,n-2)+f(m-2,n-1)]\}\end{aligned} \tag{۱۲۵-۵}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}=\frac{1}{6\Delta x^4}&[-f(m+3,n)+12f(m+2,n)-39f(m+1,n)+56f(m,n)-39f(m-1,n)\\ &+12f(m-2,n)-f(m-3,n)]\end{aligned} \tag{۱۲۶-۵}$$

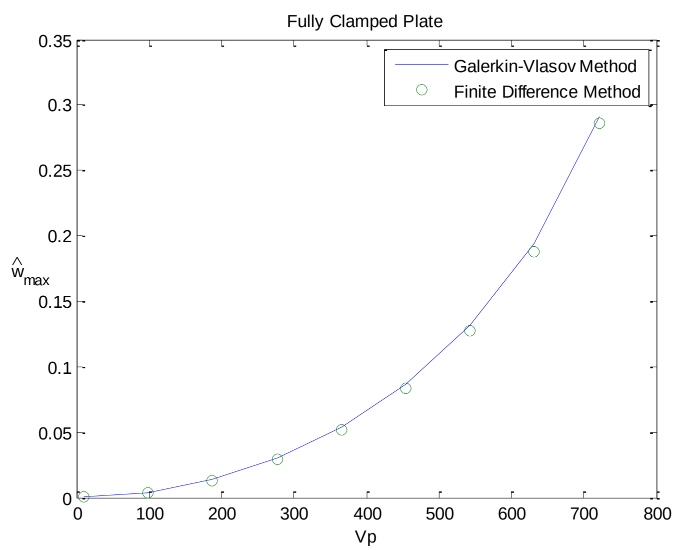
$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}=\frac{1}{6\Delta x^4}&[-f(m,n+3)+12f(m,n+2)-39f(m,n+1)+56f(m,n)-39f(m,n-1)\\ &+12f(m,n-2)-f(m,n-3)]\end{aligned} \tag{۱۲۷-۵}$$

که در آن f می تواند هر یک پارامترهای $\hat{u}$، $\hat{v}$ و $\hat{w}$ باشد. در شکل ۵-۳ مقایسه ای بین حل عددی و حل گالرکین-ولاسوف انجام شده است که در آن خیز ماکزمیم صفحه چهارطرف گیردار، با توجه به پارامترهایی که در جدول ۵-۲ آورده شده است، بر حسب ولتاژ V_p رسم شده است. همان طور که

مشاهده می‌شود اختلاف اندکی بین این دو حل وجود دارد بنابراین به دلیل طولانی بودن محاسبات عددی ما روش گالرکین- ولاسوف را انتخاب کرده‌ایم.

جدول ۵-۲: مقادیر و ضرایب بکار رفته در مقایسه روش عددی و گالرکین-ولاسوف

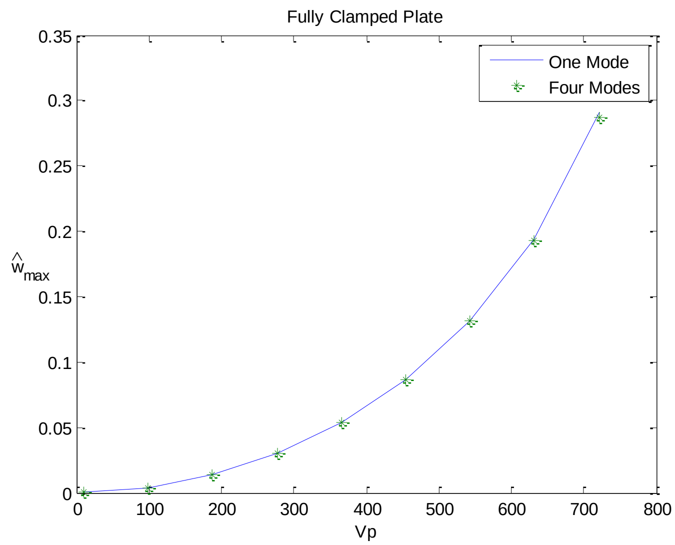
α_1	α_{10}	α_{11}	ν
۱	۰/۲۵	۰/۰۰۳	۰/۲۲



شکل ۵-۳: مقایسه روش عددی (اختلاف محدود) و روش گالرکین-ولاسوف برای خیز استاتیکی صفحه کاملاً گیردار

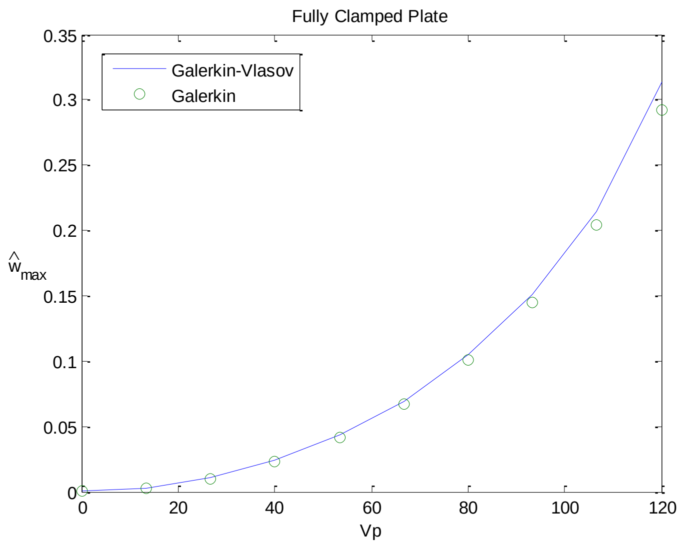
همچنین برای مقادیر جدول ۵-۱ روش گالرکین-ولاسوف برای دو حالت یک مود و چهار مود که در آن $m = n = 2$ فرض شده‌اند را در نظر گرفته‌ایم که این مقایسه در شکل ۵-۴ نشان داده شده است همان

طور که در این شکل نشان داده شده است اختلاف بسیار اندکی بین یک مود و چهار مود وجود دارد به همین دلیل در محاسبات خود به یک مود اکتفا کرده‌ایم.



شکل ۵-۴: مقایسه روش گالرکین-ولاسوف با فرض یک مود و چهار مود

همچنین خود روش گالرکین با شکل مدهای جدول ۵-۱ را می‌توان با روش گالرکین-ولاسوف مقایسه کرد که این مقایسه در شکل ۵-۵ آورده شده است.



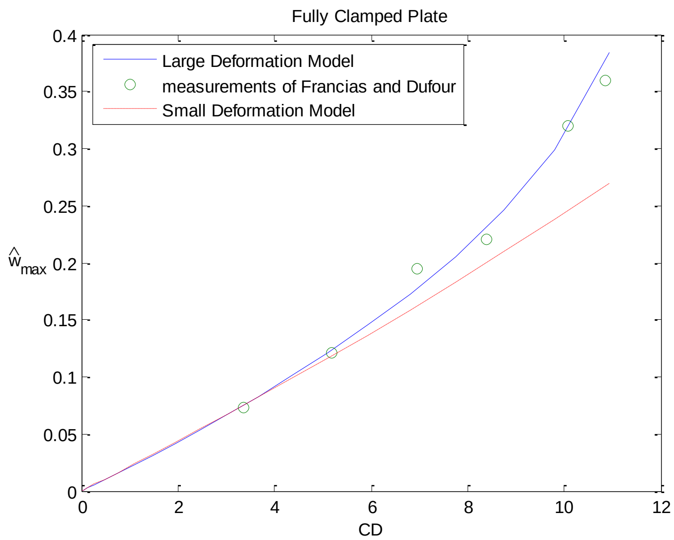
شکل ۵-۵: مقایسه روش گالرکین و گالرکین-ولاسوف بر حسب پارامترهای جدول ۵-۲

فرانسیس و دوفور نیز [۴۴] خیز مرکز مکیروصفحه کاملاً گیردار را تحت تأثیر نیروی الکترواستاتیکی اندازه گیری کرده‌اند که مشخصات آن در جدول ۵-۳ آورده شده است و این اندازه گیری را با روش گالرکین در شکل ۵-۶ مقایسه کرده‌ایم. که در آن CD به شکل زیر تعریف می شود

$$CD = \frac{\varepsilon_0 V_p^2 (ab)^2}{32 d^3 D} \qquad (۱۲۸-۵)$$

جدول ۵-۳: مقادیر هندسی و مکانیکی میکروصفحه فرانسیس و دفور [۴۴]

$a(\mu m)$	$b(\mu m)$	$d(\mu m)$	$h(\mu m)$	$D(GPa \times m^3)$	$\varepsilon_0 (C^2/m^2N)$	ν
1000	1000	5	20	178.14	8.85×10^{-12}	0.22



شکل ۵-۶: مقایسه مدلهای با تغییر شکل بزرگ و کوچک و اندازه گیرهای فرانسیس و دوفور

۵-۷- ارتعاشات حول خیز استاتیکی

اکنون که خیز استاتیکی را می توانیم محاسبه کنیم می بایست ارتعاشات حول این خیز را بررسی کنیم برای این کار می بایست معادلات (۵-۶۱) تا (۵-۶۳) را حول جابه جایی های $\hat{u}_s$ ، $\hat{v}_s$ و $\hat{w}_s$ خطی سازی کنیم.

$$\alpha_1 \frac{\partial^2 \hat{u}_d}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \hat{v}_d}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \hat{u}_d}{\partial \hat{y}^2} + \alpha_1\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_d}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_d}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}\partial \hat{y}}\right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_d}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial \hat{w}_d}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2}\right) \quad (۱۲۹-۵)$$
$$=(1-\nu^2)\alpha_2\frac{\partial^2 \hat{u}_d}{\partial \hat{t}^2} + (1+\nu)\alpha_3\frac{\partial \hat{N}^T}{\partial \hat{x}}$$

$$
\alpha_1^{-1}\frac{\partial^2\hat{v}_d}{\partial\hat{y}^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2\hat{u}_d}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2\hat{v}_d}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_1^{-1}\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{y}^2}\right)
$$

$$
+\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right)+\frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^2}\right)
$$

$$
=(1-\nu^2)\alpha_4\frac{\partial^2\hat{v}_d}{\partial\hat{t}^2}+(1+\nu)\alpha_5\frac{\partial\hat{N}^T}{\partial\hat{y}} \tag{۱۳۰-۵}
$$

$$
\alpha_1\frac{\partial^4\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^4}+2\frac{\partial^4\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^2\partial\hat{y}^2}+\alpha_1^{-1}\frac{\partial^4\hat{w}_d}{\partial\hat{y}^4}+(1-\nu^2)\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{t}^2}+(1+\nu)\hat{N}^T\left(\alpha_6\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_7\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{y}^2}\right)=
$$

$$
(1-\nu^2)\frac{\partial^2}{\partial\hat{t}^2}\left(\alpha_2\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_4\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{y}^2}\right)-(1+\nu)\left(\alpha_8\frac{\partial^2\hat{M}^T}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_9\frac{\partial^2\hat{M}^T}{\partial\hat{y}^2}\right)
$$

$$
+12\alpha_{10}^2\left\{\left[\alpha_1\frac{\partial\hat{u}_s}{\partial\hat{x}}+\frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\right)^2+\nu\left(\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\hat{y}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{x}^2}+\right.
$$

$$
\left[\alpha_1\frac{\partial\hat{u}_d}{\partial\hat{x}}+\alpha_1\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{x}}+\nu\left(\frac{\partial\hat{v}_d}{\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{y}}\right)\right]\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^2}
$$

$$
+(1-\nu)\left[\frac{\partial\hat{u}_d}{\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{v}_d}{\partial\hat{x}}+\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{x}}\right]\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+(1-\nu)\left[\frac{\partial\hat{u}_s}{\partial\hat{y}}+\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\hat{x}}+\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\right]\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}
$$

$$
+\left[\alpha_1^{-1}\frac{\partial\hat{v}_s}{\partial\hat{y}}+\frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\right)^2+\nu\left(\frac{\partial\hat{u}_s}{\partial\hat{x}}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\right)^2\right)\right]\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{y}^2}
$$

$$
\left.+\left[\alpha_1^{-1}\frac{\partial\hat{v}_d}{\partial\hat{y}}+\alpha_1^{-1}\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{y}}+\nu\left(\frac{\partial\hat{u}_d}{\partial\hat{x}}+\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{x}}\right)\right]\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{y}^2}\right\}
$$

$$
+\frac{2\alpha_{11}V_p^2}{(1-\hat{w}_s)^3}\hat{w}_d+\frac{2\alpha_{11}V_p}{(1-\hat{w}_s)^2}v(t) \tag{۱۳۱-۵}
$$

معادلات (۵-۱۲۹) تا (۵-۱۳۱) را با فرض هارمونیک بودن ارتعاشات می‌توان حل کرد. بنابراین $\hat{u}_d(\hat{x},\hat{y},\hat{t})$ ، $\hat{v}_d(\hat{x},\hat{y},\hat{t})$ ، $\hat{w}_d(\hat{x},\hat{y},\hat{t})$ و $\hat{\theta}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{t})$ را به شکل زیر می‌نویسیم.

$$
\begin{aligned}
&\hat{w}_d(\hat{x},\hat{y},\hat{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}W_{mn}(\hat{x},\hat{y})e^{i\Omega_{mn}\hat{t}},\hat{\theta}(\hat{x},\hat{y},\hat{z},\hat{t})=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\Theta_{mn}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})e^{i\Omega_{mn}\hat{t}}\\
&\hat{v}_d(\hat{x},\hat{y},\hat{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}V_{mn}(\hat{x},\hat{y})e^{i\Omega_{mn}\hat{t}},\hat{u}_d(\hat{x},\hat{y},\hat{t})=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}U_{mn}(\hat{x},\hat{y})e^{i\Omega_{mn}\hat{t}}
\end{aligned} \tag{۱۳۲-۵}
$$

که در آن Ω_{mn} فرکانس و $\Theta_{mn}(\hat{x},\hat{y},\hat{z})$ و $W_{mn}(\hat{x},\hat{y})$ ،$V_{mn}(\hat{x},\hat{y})$ ،$U_{mn}(\hat{x},\hat{y})$ به ترتیب شکل مدهای m و nام مختلط ارتعاشی طولی و عرضی صفحه ، خیز صفحه و دما می باشند. در این نمادگذاری $m=0,1,2,...$ و $n=0,1,2,,...$ به ترتیب بیانگر عدد گره طولی و عرضی می باشند. Ω_{mn} کمیتی مختلط است که قسمت حقیقی آن ، ω_{mn}، به اثر کوپلینگ ترموالاستیکی و قسمت موهومی آن ، λ_{mn} ، به میرایی ارتعاشات مرتبط می شود. با جایگزینی (۵-۱۳۳) در (۵-۱۳۰) تا (۵-۱۳۲) داریم

$$\begin{aligned}&\alpha_1\frac{\partial^2 U_{mn}}{\partial\hat{x}^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 U_{mn}}{\partial\hat{y}^2}+\alpha_1\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial W_{mn}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^2}\right)\\&+\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{\partial W_{mn}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right)+\frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial W_{mn}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{y}^2}\right)\\&=-\Omega_{mn}^2(1-\nu^2)\alpha_2 U_{mn}+(1+\nu)\alpha_3\frac{\partial\hat{N}_{mn}^T}{\partial\hat{x}}\end{aligned}\qquad(۱۳۳\text{-}۵)$$

$$\begin{aligned}&\alpha_1^{-1}\frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial\hat{y}^2}+\frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 U_{mn}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial\hat{x}^2}+\alpha_1^{-1}\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\hat{y}^2}+\frac{\partial W_{mn}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{y}^2}\right)\\&+\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}+\frac{\partial W_{mn}}{\partial\hat{x}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}\partial\hat{y}}\right)+\frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial\hat{w}_s}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial\hat{x}^2}+\frac{\partial W_{mn}}{\partial\hat{y}}\frac{\partial^2\hat{w}_s}{\partial\hat{x}^2}\right)\\&=-\Omega_{mn}^2(1-\nu^2)\alpha_4 V_{mn}+(1+\nu)\alpha_5\frac{\partial\hat{N}_{mn}^T}{\partial\hat{y}}\end{aligned}\qquad(۱۳۴\text{-}۵)$$

(۱۳۵-۵)

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{y}^4} - \Omega_{mn}^2 (1-\nu^2) W_{mn} + (1+\nu) \hat{N}_{mn}^T \left(\alpha_6 \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_7 \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right) = \\
&- \Omega_{mn}^2 (1-\nu^2) \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_4 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \right) - (1+\nu) \left(\alpha_8 \frac{\partial^2 \hat{M}_{mn}^T}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_9 \frac{\partial^2 \hat{M}_{mn}^T}{\partial \hat{y}^2} \right) \\
&+ 12\alpha_{10}^2 \left\{ \left[\alpha_1 \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \right. \\
&\left[\alpha_1 \frac{\partial U_{mn}}{\partial \hat{x}} + \alpha_1 \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} + \nu \left(\frac{\partial V_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \\
&+ (1-\nu) \left[\frac{\partial U_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V_{mn}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\
&+ (1-\nu) \left[\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right] \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\
&+ \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \\
&\left. + \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial V_{mn}}{\partial \hat{y}} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} + \nu \left(\frac{\partial U_{mn}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right\} + \frac{2\alpha_{11} V_p^2}{(1-\hat{w}_s)^3} W_{mn}
\end{aligned}
$$

حال با قرار دادن معادلات (۵-۷۷) و (۵-۷۸) در (۵-۱۳۳) تا (۵-۱۳۵) و همچنین روابط بین پارامترهای (۵-۶۸) داریم

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{\partial^2 U_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 U_{mn}}{\partial \hat{y}^2} + \alpha_1 \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(1+\nu) \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right) \\
&= -\Omega_{mn}^2 (1-\nu^2) \alpha_2 U_{mn}
\end{aligned}
\qquad (۱۳۶\text{-}۵)
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1^{-1} \frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu) \frac{\partial^2 U_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu) \frac{\partial^2 V_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_1^{-1} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right) \\
&+ \frac{1}{2}(1+\nu) \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \right) \\
&= -\Omega_{mn}^2 (1-\nu^2) \alpha_4 V_{mn}
\end{aligned}
\qquad (۱۳۷\text{-}۵)
$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1}\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{y}^4} - \Omega_{mn}^2 (1-\nu^2) W_{mn} = -\Omega_{mn}^2 (1-\nu^2)\alpha_2 \left(\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_1^{-1}\frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \right) \\
&-(1+\nu)\bar{\alpha} C_{mn}^T \left[\alpha_1 \frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1}\frac{\partial^4 W_{mn}}{\partial \hat{y}^4} \right] \\
&+12\alpha_{10}^2 \left\{ \left[\alpha_1 \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x}^2} + \right. \\
&\left[\alpha_1 \frac{\partial U_{mn}}{\partial \hat{x}} + \alpha_1 \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} + \nu \left(\frac{\partial V_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \\
&+(1-\nu)\left[\frac{\partial U_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial V_{mn}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\
&+(1-\nu)\left[\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right] \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\
&+\left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial \hat{y}^2} \\
&\left. +\left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial V_{mn}}{\partial \hat{y}} + \alpha_1^{-1}\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{y}} + \nu \left(\frac{\partial U_{mn}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial W_{mn}}{\partial \hat{x}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right\} + \frac{2\alpha_{11} V_p^2}{(1-\hat{w}_s)^3} W_{mn}
\end{aligned} \qquad (۱۳۸\text{-}۵)
$$

حال برای $m = n = 1$ و در نظر گرفتن $W_{mn} = \varphi_{mn}$ و $U_{mn} = V_{mn} = \psi_{mn}$ می‌توان شکل وریِیشنال معادلات (۵-۱۳۶) تا (۵-۱۳۸) را به شکل زیر نوشت.

$$
\begin{aligned}
&\iint_A \left[\alpha_1 \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \alpha_1 \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \right) \right. \\
&+\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right) \\
&\left. +\Omega_{11}^2 (1-\nu^2)\alpha_2 \psi_{11} \right] \psi_{11} d\hat{x} d\hat{y} = 0
\end{aligned} \qquad (۱۳۹\text{-}۵)
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_A \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)\frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{1}{2}(1-\nu)\frac{\partial^2 \psi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \alpha_1^{-1} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \right) \right. \\
&+\frac{1}{2}(1+\nu)\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu)\left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}}\frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \right) \\
&\left. +\Omega_{11}^2 (1-\nu^2)\alpha_4 \psi_{11} \right] \psi_{11} d\hat{x} d\hat{y} = 0
\end{aligned} \qquad (۱۴۰\text{-}۵)
$$

$$
\begin{aligned}
&\iint_A \Bigg[\alpha_1 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^4} + \Omega_{11}^2 (1-\nu^2) \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} - \varphi_{11} \right) \\
&+ (1+\nu)\overline{\alpha} C_{mn}^T \left[\alpha_1 \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2 \partial \hat{y}^2} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial^4 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^4} \right] \\
&-12\alpha_{10}^2 \Bigg\{ \Bigg[\alpha_1 \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right) \Bigg] \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \\
&\left[\alpha_1 \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \alpha_1 \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} + \nu \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \\
&+ (1-\nu) \left[\frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} + (1-\nu) \left[\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right] \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\
&+ \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} \\
&+ \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} + \nu \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \Bigg\} - \frac{2\alpha_{11} V_p^2}{(1-\hat{w}_s)^3} \varphi_{11} \Bigg] \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y} = 0
\end{aligned}
\tag{۱۴۱-۵}
$$

برای راحتی کار نیز متغیرهای زیر را تعریف می‌کنیم

$$
P_5 = (1-\nu^2) \iint_A \left(\alpha_2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} - \varphi_{11} \right) \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y}
\tag{۱۴۲-۵}
$$

$$
\begin{aligned}
P_6 = &\iint_A \Bigg[-12\alpha_{10}^2 \Bigg\{ \Bigg[\alpha_1 \frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 \right) \Bigg] \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x}^2} + \\
&\left[\alpha_1 \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \alpha_1 \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} + \nu \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x}^2} \\
&+ (1-\nu) \left[\frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\
&+ (1-\nu) \left[\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right] \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{x} \partial \hat{y}} \\
&+ \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{v}_s}{\partial \hat{y}} + \frac{1}{2\alpha_1} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \right)^2 + \nu \left(\frac{\partial \hat{u}_s}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \right)^2 \right) \right] \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \hat{y}^2} \\
&+ \left[\alpha_1^{-1} \frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{y}} + \alpha_1^{-1} \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{y}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{y}} + \nu \left(\frac{\partial \psi_{11}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{w}_s}{\partial \hat{x}} \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \hat{x}} \right) \right] \frac{\partial^2 \hat{w}_s}{\partial \hat{y}^2} \Bigg\} - \frac{2\alpha_{11} V_p^2}{(1-\hat{w}_s)^3} \varphi_{11} \Bigg] \varphi_{11} d\hat{x} d\hat{y}
\end{aligned}
\tag{۱۴۳-۵}
$$

در نهایت نیز برای بدست آوردن میرایی ترموالاستیک فرکانسهای حقیقی و موهومی را از معادله زیر بدست می‌آرویم سپس با استفاده از رابطه (۵-۹۰) میرایی را محاسبه می‌کنیم.

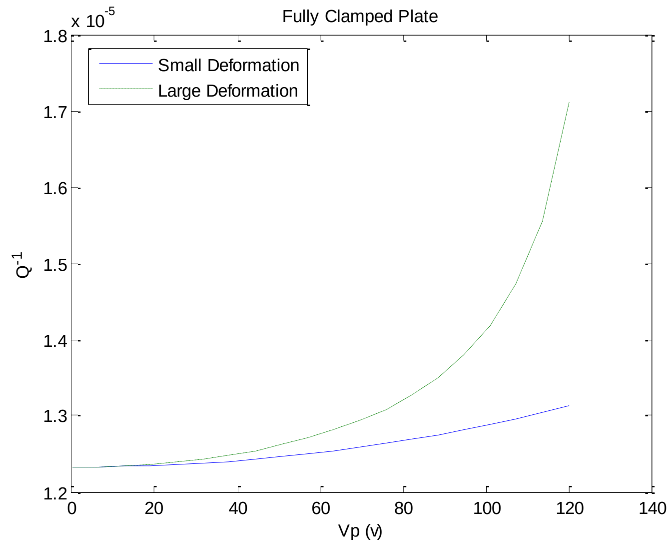
$$L_1 P_1 + L_2 P_2 + L_3 P_3 + \Omega_{11}^2 P_5 + P_6 = 0 \qquad (۱۴۴-۵)$$

۵-۸- عامل غیرخطی در میرایی ترموالاستیک

مهمترین عامل غیرخطی در میرایی ترموالاستیک، نیروی الکترواستاتیکی می باشد که به دو پارامتر V_p و α_{11} بستگی دارد. برای نشان دادن این تأثیر، میرایی را بر حسب ولتاژ برای دو مدل تغییر شکل بزرگ و کوچک در یک میکروصفحه سیلیکونی که مشخصات آن در جدول ۵-۴ آورده شده است، را در شکل ۵-۷ رسم کرده‌ایم. همان طور که در این شکل دیده می شود اختلاف زیادی بین میرایی مدل تغییر شکل بزرگ و کوچک در مقادیر بالای ولتاژ وجود دارد.

جدول ۵-۴: مشخصات میکروصفحه سیلیکونی برای مقایسه اثر غیرخطی نیروالکترواستاتیکی

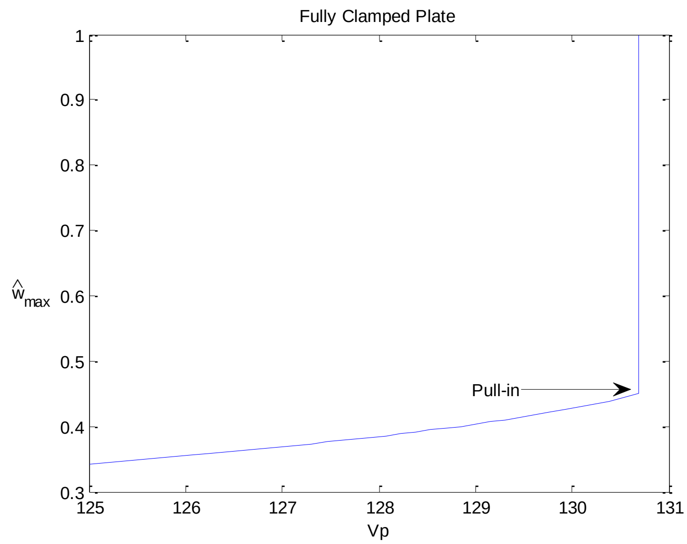
$h(\mu m)$	$d(\mu m)$	$a(\mu m)$	$b(\mu m)$	$T_0(K)$	$\kappa(Wm^{-1}K^{-1})$
1.5	1.2	200	100	300	148
$c_p(Jkg^{-1}K^{-1})$	$\alpha_T(10^{-6}K^{-1})$	$E(Gpa)$	υ	$\rho(kgm^{-3})$	$\varepsilon_0(C^2m^{-2}N^{-1})$
712	2.6	170	0.25	2330	8.85×10^{-12}



شکل ۵-۷: مقایسه اثر غیرخطی نیروی الکترواستاتیکی در دو مدل تغییر شکل بزرگ و کوچک

در میکروتیرها و میکروصفحاتی که تحت نیروی الکترواستاتیکی قرار دارند ولتاژ الکترواستاتیکی اعمال شده حد بالایی دارد که بیشتر از آن مقدار تعادل نیروی الکترواستاتیکی و نیروی الاستیک صفحه یا تیر به هم می خورد و سبب می شود که تیر یا صفحه با صفحه ساکن زیرین تماس پیدا کند و موجب خرابی سیستم مورد نظر شود.[۴۵] این پدیده موسوم به ناپایداری توقف[۱] است و به آن ولتاژ بحرانی، ولتاژ توقف نیز می گویند که در اینجا آن را به نماد V_M نمایش می دهیم. بنابراین هر چه قدر ولتاژ اعمال شده به ولتاژ توقف نزدیکتر باشد خواص غیرخطی صفحه بیشتر نمایان می شود. برای محاسبه این ولتاژ می بایست بیشترین ولتاژی که در آن خیز $\hat{w}_s$ کمتر از یک می شود را بدست آورد. مثلاً برای مکیروصفحه ای که مشخصات آن در جدول ۵-۲ لیست شده است با توجه به شکل ۵-۸، ولتاژ توقف به اندازه 137.7 ولت بدست آمده است. همان طور که در شکل نیز دیده می شود پس از اینکه خیز مرکز میکروصفحه به 0.45 می رسد ناپایداری توقف اتفاق افتاده و به طور ناگهانی خیز افزایش پیدا می کند.

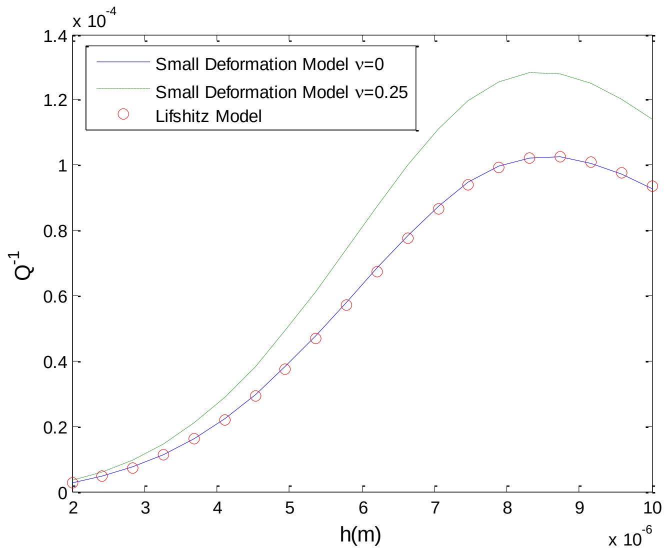
[1] Pull-in instability



شکل ۵-۸: نحوه محاسبه ولتاژ توقف

۵-۹- نتایج

برای صحه گذاری روی نتایج بدست آمده از مدل لیفشیتز [۱۵] استفاده کرده‌ایم. لیفشیتز میرایی ترموالاستیک را برای تیر اولربرنولی دو سر گیردار بدست آورد. لذا برای مقایسه، میرایی ترموالاستیک میکروصفحه سیلیکونی که مشخصات آن در جدول ۵-۴ آورده شده است را یکبار با $\nu = 0$ و یک بار با $\nu = 0.25$ و بدون نیروی الکترواستاتیکی ($V_p = 0$) و با شرایط مرزی $CFCF$ در شکل ۵-۹ آورده‌ایم. همان طور که در این شکل دیده می‌شود در حالتی که $\nu = 0$ می باشد میرایی ترموالاستیک انطباق کاملی با مدل لیفشیتز دارد که این خود بیانگر صحت مدل می‌باشد.



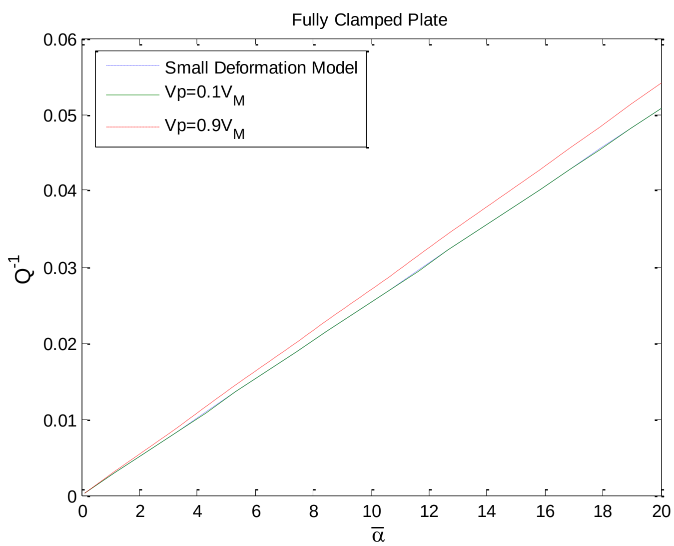
شکل ۵-۹: مقایسه مدل تغییر شکل کوچک با مدل لیفشیتز

در شکل ۵-۱۰ تأثیر $\overline{\alpha}$، روی میرایی ترموالاستیک میکروصفحه‌ای که مشخصات آن در جدول ۵-۴ آورده شده است را نشان داده‌ایم. همان طور که در شکل دیده می‌شود میرایی ترموالاستیک مدل تغییر شکل بزرگ در دو حالت $V_p = 0.1V_M$ و $V_p = 0.9V_M$ محاسبه شده و با مدل تغییر شکل کوچک مقایسه شده است. مطابق آنچه در این شکل نشان داده شده است بین مدل تغییر شکل کوچک و تغییر شکل بزرگ با $V_p = 0.1V_M$ انطباق کاملی وجود دارد که این خود بیان می کند که این دو مدل یکدیگر را تأیید می کنند همچنین دیده می‌شود که مدل تغییر شکل بزرگ با $V_p = 0.9V_M$ اختلاف واضحی وجود دارد که این اختلاف به خاطر تأثیر تغییر شکلهای بزرگ است. $\overline{\alpha}$ پارامتری است که کاملاً تابع خواص حرارتی و مکانیکی ماده می باشد بنابراین همان طور که در شکل هم دیده می شود چنانچه این خواص به گونه ای سبب افزایش مقدار $\overline{\alpha}$ شوند موجب می شود که میرایی به طور غیرخطی تغییر کند اما $\overline{\alpha}$ برای سیلیکون در دمای ۳۰۰ درجه مقدار بسیار اندکی است ($\overline{\alpha} = 0.005$) بنابراین می توانیم این نتیجه را

بگیریم که برای سیلیکون میرایی ترموالاستیک در هردو مدل تغییر شکل بزرگ و کوچک مقدار نزدیکی دارند.

جدول ۵-۵: مشخصات میکروصفحه دلخواه

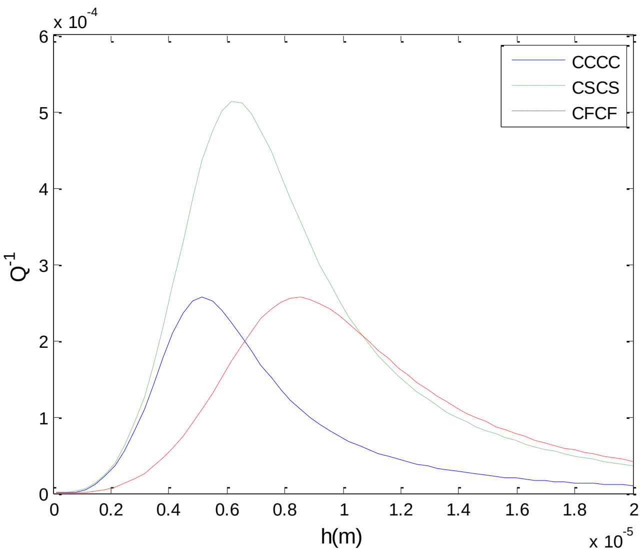
ν	α_{12}	α_{11}	α_{10}	α_2	V_M
0.25	1	1	1	0.1	10.0899



شکل ۵-۱۰: میرایی ترموالاستیک بر حسب $\bar{\alpha}$

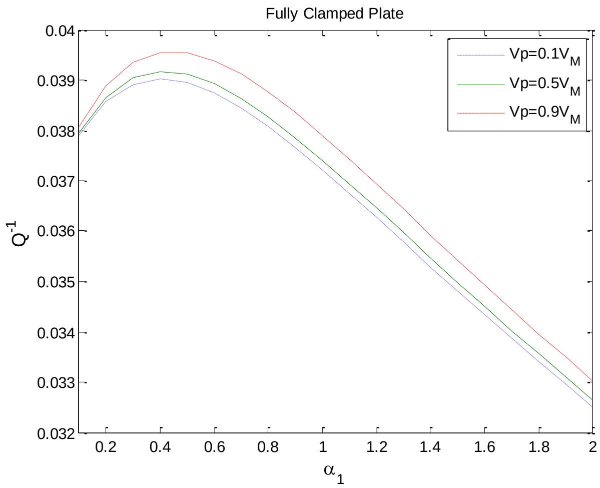
حال میرایی ترموالاستیک میکروصفحه‌ای که مشخصات آن در جدول ۵-۴ لیست شده است را بر حسب ضخامت و ولتاژ صفر در شرایط مرزی مختلف بررسی می کنیم. در میرایی ترموالاستیک ضخامت بحرانیی

وجود دارد[۱۲] که در اینجا نیز دیده می شود(شکل ۵-۱۱). همچنین برای بررسی این میرایی از مدل خطی استفاده شده است.



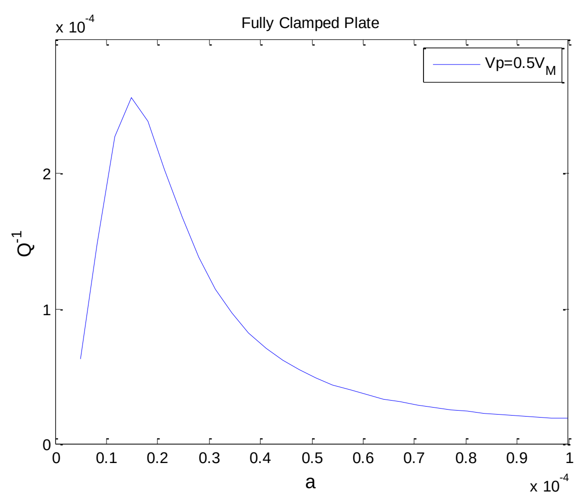
شکل ۵-۱۱: میرایی ترموالاستیک از مدل با تغییر شکل کوچک در شرایط مرزی مختلف

حال با توجه به مشخصات جدول ۵-۵ میرایی ترموالاستیک میکروصفحه را برحسب α_1 بررسی می کنیم. همان طور که در شکل ۵-۱۲ نیز نشان داده شده است α_1 نیز یک مقدار بحرانی دارد که به ازای آن میرایی ماکزیمم می شود که در اینجا برای این حالت دارای مقدار 0.4 می باشد.



شکل ۵-۱۲: میرایی ترموالاستیک برحسب α_1

شکل ۵-۱۳ میرایی ترموالاستیک را بر حسب a برای میکروصفحه جدول ۵-۴ نشان می دهد همان طور که ملاحظه می شود برای ابعاد هندسی من جمله طول میکروصفحه نیز یک مقدار بحرانی وجود دارد که در آن میرایی ماکزیمم می شود.



شکل ۵-۱۳: میرایی ترموالاستیک برحسب a

فصل ششم

نتیجه گیری

۶-۱-مقدمه

در این فصل به نتیجه گیری از فصلهای قبلی پرداخته‌ایم. فصلهایی که می توان از آنها نتیجه گیری کرد شامل فصول سوم، چهارم و پنجم می‌باشند که در آنها مدلهایی از تشدید کننده ارائه شده است.

۶-۲- مدل تیر

در فصل سوم ما مدلی از تشدیدکننده ارائه دادیم که دو اثر میرایی ترموالاستیک و کشش درون صفحه ای را در آن نظر گرفته ایم. معادلات این مدل را بی‌بعد کردیم و از این بی‌بعدسازی پارامترهایی بدست آوردیم که تأثیر این پارامترها را بر میرایی ترموالاستیک و فرکانس بررسی کردیم.

نتایج نشان دادند که هر جا اثر کشش درون صفحه‌ای افزایش پیدا می‌کرد فرکانس افزایش و میرایی کاهش پیدا می‌کرد. اثر کشش درون صفحه‌ای نیز با کشش اولیه، $\hat{P}$ و پارامتر α_3 افزایش پیدا می کند. همچنین هر گاه ضریب آهنگ دما، α_5 ، افزایش پیدا می‌کرد میرایی ترموالاستیک نیز کاهش پیدا می کرد ولی فرکانس طبیعی ابتدا افزایش و بعد کاهش پیدا می‌کرد. همچنین در این بین نیز α_1 یک مقدار بحرانی دارد که به ازای آن میرایی ماکزیمم می شود که این خود می‌تواند مورد توجه سازندگان باشد. از طرفی هنگامی که اثر تغییر شکل را افزایش می دادیم مشاهده می‌کردیم که میرایی تا صفر کاهش پیدا می‌کرد و سپس افزایش می‌یافت که این نکته نیز می‌تواند برای کم کردن میرایی مورد توجه سازندگان واقع شود.

۶-۳- مدل صفحه حلقوی

در این فصل، مدلی خطی از میرایی ترموالاستیک در میکروصفحات تشدیدکننده‌های تحت بار الکتریکی ارائه شد. در نتایج بدست آمده، شعاع و ضخامت بحرانی بدست آمد که در آنها میرایی ماکزیمم می شود. بنابراین بررسی این ابعاد به دلیل تأثیری که میرایی روی کارایی تشدید کننده ها می گذارد اهمیت پیدا می کند. شعاع بحرانی و ضخامت بحرانی میکروصفحه حلقوی به نوع ماده، ابعاد میکروصفحه و شرایط مرزی بستگی دارد. بار الکتریکی نیز بر این میرایی اثر می گذارد به طوری که تغییرات میرایی در حالت گیردار- آزاد بیشتر از دو حالت دیگر می باشد.

۶-۴- مدل صفحه مستطیلی

در این فصل، ما مدل میکروصفحه‌ای تشدیدکننده را ارائه کردیم. معادلات صفحه را با فرض کرنشهای وان کارمن بدست آوردیم. سپس معادلات حاصل را بی‌بعد کردیم و با روش گالرکین قسمت استاتیکی و دینامیکی معادلات را حل کردیم و میرایی ترموالاستیک را محاسبه کردیم.

بین مدل با تغییر شکل بزرگ و کوچک مقایسه‌ای انجام شد و در آن معلوم شد که هنگامی که ولتاژهای زیاد به میکروصفحه وارد می شود اختلاف زیادی بین میرایی در آنها پدید می‌آید به خصوص وقتی که ولتاژ نزدیک به ولتاژ توقف باشد. شرط مرزی نیز تأثیر زیادی بر میرایی ترموالاستیک دارد و از آنجایی که تنوع شرط مرزی‌ها در صفحه مستطیلی زیاد است بنابراین این تأثیر بیشتر خودش را نشان می دهد.

۶-۵- پیشنهادات

در ادامه این موضوع کارهای متعددی می توان انجام داد. همچنین می توان از روشهای حساب اغتشاشات و المان محدود نیز بهره برد. از جمله کارهایی که می توان در ادامه این رساله انجام داد بحثهای مختلف ارتعاشات غیرخطی مثل نظیر بحث وجود یا عدم وجود آشوب در این ارتعاشات و همچنین سخت شوندگی و نرم شوندگی میکروصفحه ها و میکروتیرها می باشد. همچنین می توان معادله حرارت را با شرط مرزی های متنوع تری حل کرد و ساده سازی های کمتری انجام داد.

منابع

[1] Vijay K. Vardan, K. J. Vinoy and S. Gopalakrishnan (**2006**), "**Smart Material Systems and MEMS: Design and Development Methodologies**", John Wiley & Sons, pp. **53**.

[2] Kovacs G. T. A. (**1998**) "**Micromachined Transducers Sourcebook**". Boston, MA: McGraw-Hill.

[3] Petersen K. E. (**1982**) "Silicon as a mechanical material". **Proc. IEEE 70** pp **420–457.**

[4] Nathanson H. C., Newell W. E., Wickstrom R. A. and Davis J. R. J. (**1967**) "The resonant gate transistor" **IEEE Trans. Electron Devices 14** pp **117.**

[5] Fan L-S, Tai Y-C and Muller R. S. (**1988**) "Integrated movable micromechanical structures for sensors and actuators" **IEEE Trans. Electron Devices 35** pp **724–30.**

[6] Sniegowski J. J. and Garcia J. (**1996**) "Surface-micro-machined gear trains driven by an on-chip electrostatic microengine" **IEEE Electron Device Lett. 17** pp **366–368.**

[7] Pister K. S. J., Judy M. W., Burgett S. R. and Fearing R. S. (**1992**) "Microfabricated hinges" **Sensors and Actuators A 33** pp **249–256.**

[8] Wu M. C. (**1997**) "Micromachining for optical and optoelectronic systems" **Proc. IEEE 85** pp **1833–1856.**

[9] Deng K, Dhuler V. R., Mehregany M. and Jansen E. W. (**1993**) "Measurement of micromotor dynamics in lubricating fluids" **Proc. Micro Electro Mechanical Systems (Fort Lauderdale, FL, 1993)** pp **260–4.**

[10] Houston M. R., Maboudian R. and Howe R. T. (**1996**) "Self-assembled monolayer films as durable anti-stiction coatings for polysilicon microstructures" **Technical Digest Solid-State Sensor and Actuator Workshop (Hilton Head Island, SC, 1996)** pp **42–7.**

[11] Ali H. Nayfeh, Mohammad I. Younis. (**2004**) "Modeling and simulations of thermoelastic damping in microplates" **J. Micromech. Microeng. 14** pp **1711–1717**.

[12] Yuxin Sun and Masumi Saka. (**2010**) "Thermoelastic damping in micro-scale circular plate resonators" **Journal of Sound and Vibration 329**, pp **328–337**.

[13] C. Zener. (**1937**) "Internal friction in solids I. Theory of internal friction in reeds" **Physical Review, Volume 32,** pp **230-235**.

[14] C. Zener. (**1938**) "Internal friction in solids II. General theory of thermoelastic internal friction" **Physical Review, Volume 53,** pp **90-99**.

[15] R. Lifshitz, M. L. Roukes. (**2000**) "Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems" **Physical Review B Volume 61, Number 8,** pp **5600-5609**.

[16] Sudipto K. De, N. R. Aluru. (**2006**) "Theory of thermoelastic damping in electrostatically actuated microstructures" **Physical Review B 74, 144305**, pp **1-13**.

[17] S. Prabhakar, S. Vengallatore. (**2008**) "Theory of thermoelastic damping in micromechanical resonators with two-dimensional heat conduction" **Journal of Microelectromechanical Systems Vol. 17, No. 2,** pp **494-502**.

[18] Yuxin Sun, Hironori Tohmyoh. (**2009**) "Thermoelastic damping of the axisymmetric vibration of circular plate resonators" **Journal of Sound and Vibration 319,** pp **392–405**.

[19] Yun-Bo Yi, Mohammad A. Matin. (**2007**) “Eigenvalue Solution of Thermoelastic Damping in Beam Resonators Using a Finite Element Analysis” **Journal of Vibration and Acoustics Vol. 129,** pp **478-483**.

[20] Ghader Rezazadeh, Armin Saeedi Vahdat, Seyed-Mehdi Pesteii, BahmanFarzi. (**2009**) “Study of Thermoelastic Damping in Capacitive Micro-beam Resonators Using Hyperbolic Heat Conduction Model” **Sensors & Transducers Journal Volume 108, Issue 9**, pp **54-72**.

[21] S. Kumar, M.A. Haque. (**2008**) “Reduction of thermo-elastic damping with a secondary elastic field” **Journal of Sound and Vibration 318,** pp **423–427**.

[22] Amy Duwel, Marcie Weinstein, John Gorman, Jeff Borenstein, Paul Ward. (**2002**) “Quality factors of mems gyros and the role of thermoelastic damping” **Proceedings of the 15th IEEE International Conference on Microelectromechanical Systems (MEMS),** pp **214-219**.

[23] Amy Duwel , John Gorman, Marcie Weinstein, Jeff Borenstein, Paul Ward. (**2003**) “Experimental study of thermoelastic damping in MEMS gyros” **Sensors and Actuators A 103**, pp **70-75**.

[24] C. Mendez, S. Paquay, I. Klapka, J.-P.Raskin. (**2009**) “Effect of geometrical nonlinearity on MEMS thermoelastic damping” **Nonlinear Analysis: Real World Applications 10,** pp **1579–1588**.

[25] F.L. Guo, G.A. Rogerson. (**2003**) ”Thermoelastic coupling effect on a micro-machined beam resonator” **Mechanics Research Communications 30,** pp **513–518**.

[26] Yuxin Sun, Daining Fang, Ai KahSoh. (**2006**) “Thermoelastic damping in micro-beam resonators” **International Journal of Solids and Structures 43**, pp **3213–3229**.

[27] Yao-Joe Yang, Szu-Yuan Cheng and Kuo-YehShen. (**2004**) “Macromodeling of coupled-domain MEMS devices with electrostatic and electrothermal effects” **Journal of Micromechanics and Microengineering 14**, pp **1190–1196**.

[28] Pu Li, Yuming Fang and Rufu Hu. (**2012**) "Thermoelastic damping in rectangular and circular microplate resonators " **Journal of Sound and Vibration 331**, pp **721–733.**

[29] S. Salajeghe, S.E. Khadem and M. Rasekh (**2012**) "Nonlinear analysis of thermoelastic damping in axisymmetric vibration of micro circular thin-plate resonators" **Applied Mathematical Modelling 36,** pp, **5991–6000.**

[30] Armin Saeedi Vahdat and Ghader Rezazadeh (**2011**) "Effects of axial and residual stresses on thermoelastic damping in capacitive micro-beam resonators " **Journal of the Franklin Institute 348,** pp, **622–639.**

[31] F.L. Guo, G.Q. Wang and G.A. Rogerson (**2012**) "Analysis of thermoelastic damping in micro- and nanomechanical resonators based on dual-phase-lagging generalized thermoelasticity theory" **International Journal of Engineering Science 60**, pp, **59–65**.

[32] M. Zamanian, S.E. Khadem (**2010**) "Analysis of thermoelastic damping in microresonators by considering the stretching effect " **International Journal of Mechanical Sciences 52**, pp, **1366–1375**.

[33] Armin Saeedi Vahdat, Ghader Rezazadeh and Goodarz Ahmadi (**2012**) "thermoelastic damping in a micro-beam resonator tunable with piezoelectric layers" **Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 25, No. 1**, pp, **73-81**.

[34] R.M.C. Mestrom, R.H.B. Fey, K.L. Phan, H. Nijmeijer, (**2010**)" Simulations and experiments of hardening and softening resonances in a clamped–clamped beam MEMS resonator" **Sensors and Actuators A 162**, pp, **225–234.**

[35] Yun-Bo Yi (**2010**) "Finite Element Analysis of Thermoelastic Damping in Contour-Mode Vibrations of Micro- and Nanoscale Ring, Disk, and Elliptical Plate Resonators" **Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 132/ 041015**, pp, **1-7**.

[36] A. Jalali and S. E. Khadem, (**2012**) "Pull-In Analysis of a Nonlinear Viscoelastic Nanocomposite Microplate Under an Electrostatic Actuation" **Journal of Mechanics**, Volume 28, Issue 01, pp **179-189**.

[37] Jackson, J. D. (**1962**). "**Classical electrodynamics**" John Wiley & Sons pp **70**.

[38] R. C. Batra, M. Porfiri and D. Spinello. (**2007**) "Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems" **Smart Materials And Structures 16**, pp **23–31**.

[39] Ali H. Nayfeh and P.Frank Pai (**2004**), "**Linear and Nonlinear Structural Mechanics**" John Wiley & Sons, pp **371-417**.

[40] Endre S¨uli and David F. Mayers. (**2003**) "**An Introduction to Numerical Analysis**" **cambridge university press**, pp **361-380**.

[41] Abdel-Rahman E. M., Younis M. I. and Nayfeh A. H. (**2002**) "Characterization of the mechanical behavior of an electrically actuated microbeam" **Journal of Micromechanics and Microengineering 12,** pp **759–766**

[42] Rudolph Szilard (**2004**) "**Theories and Applications of Plate Analysis**" John Wiley & Sons, pp **196-206**.

[43] Arthur W. Leissa (**1969**) "**Vibration of Plates**" Washington, DC:NASA, pp **43-44**.

[44] O.Francais and I. Dufour (**1999**) "Normalized ABACUS for the global behavior of diaphragms: pneumatic, electrostatic, piezoelectric or electromagnetic actuation" **Journal of Modeling and Simulation of Microsystems Vol. 1, No. 2**, pp **149-160**.

[45] Fargas Marques A, Costa Castello R and Shkel A M. (**2005**) "Modeling the electrostatic actuation of MEMS: state of the art" **Technical Report**, pp **1-33**.

[46] P. Malekzadeh, A.R. Vosoughi, **(2009)** "DQM large amplitude vibration of composite beams on nonlinear elastic foundations with restrained edges " **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,** Vol. 14, pp. **906–915.**

[47] B. S. Sarma and T. K. Varadan, (**1983**) "Lagrange-Type Formulation for Finite Element Analysis of Non-Linear Beam Vibrations" **Journal of sound and vibration,** Vol. 86, pp. **61-70**.

Abstract

In this thesis, we modeled the MEMS resonator as microbeam, annular microplate and rectangular microplate. In chapter two, we derive electrostatic equation and conduction equation that should be coupled with motion equation. In chapter three, we present two cases of models: Euler- Bernoulli and Euler-Bernoulli considering stretching effect. In the second one which is used in large deformations, we calculated the static deflection due to electrostatic load then we linearized the equation of motion around the deflection. The results show the nonlinear behavior of thermoelastic damping. In the end of this chapter the thermoelastic damping is obtained by DQ method. In the chapter four, we present an annular microplate model. The equation of motion is derived by using Kirchhoff–Love theory. The obtained frequency equation is solved by two approaches: with linearization and without linearization. The quality factor of thermoelastic damping is calculated by considering clamped-clamped, clamped-simply supported and clamed-free boundary conditions. In the results, the critical radius is shown. In the chapter five, we present the rectangular microplate model. For driving the equations of motion, we used the von-Karman and Kirchhoff theories. In the large deformation model, the static deflection is calculated and then we linearized the equation of motion around the deflection. The thermoelastic damping is illustrated against the dimensionless parameters.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

Linear and Nonlinear Vibration of MEMS Resonators with Thermoelastic Damping

Supervised By:

Ardeshir Karami Mohamadi

By:

Nassim AleAli

Jan 2013