
بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده مهندسی مکانیک

گروه تبدیل انرژی

بررسی تحلیلی و آزمایشگاهی سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در میان یک فاز مایع

دانشجو:

بهروز زارع وامرزانی

استاد راهنما:

دکتر محمود نوروزی

دکتر بهار دهقانی فیروزآبادی

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمستان ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

شماره :

تاریخ :

ویرایش :

فرم صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای **بهروز زارع وامرزانی** رشته **مهندسی مکانیک** گرایش **تبدیل انرژی** تحت عنوان **بررسی تحلیلی و آزمایشگاهی سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در میان یک فاز مایع**

که در تاریخ ۹۱/۱۱/۲۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹٫۵) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنما	۱- دکتر محمود نوروزی	استادیار	
	۲- دکتر بهار دهقانی فیروزآبادی	استاد	
۲ـ استاد مشاور	-	-	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر علی عباس‌نژاد	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر محمدمحسن شاهمردان	دانشیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر محسن نظری	استادیار	

رئیس دانشکده : دکتر مهدی قنّاد کهتوئی

دانشکده مکانیک

دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیم به

پدرم

و

مادرم

تشکر و قدردانی

ضمن سپاس بیکران از خداوند منّان، لازم می‌دانم از تمامی اساتیدی که در این مدت افتخار شاگردی ایشان را داشتم، به‌ویژه اساتید محترم، آقای دکتر محمود نوروزی و خانم دکتر بهار فیروزآبادی که با راهنمایی‌های مدبرانه، نظارت و سرپرستی این پایان‌نامه را به عهده داشتند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از زحمات مهندس میلاد امین‌زاده و مهندس بابک پیروزهاشمی که در انجام روند آزمایشگاهی تحقیق مرا یاری نمودند کمال تشکر را دارم.

تعهد نامه

اینجانب **بهروز زارع وامرزانی** دانشجوي دوره كارشناسي ارشد رشته مهندسي مكانيک- گرايش تبدیل انرژی دانشكده مهندسي مكانیک دانشگاه صنعتي شاهرود نويسنده پايان نامه با عنوان **" بررسی تحلیلی و آزمایشگاهی سقوط خزشی یک قطره ویسکوالاستیک در میان یک فاز مایع "** تحت راهنمائي دكتر **محمود نوروزی و بهار فیروزآبادی** متعهد ميشوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در بدست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده‌است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده‌است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده‌است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده‌است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1- Vamerzani, B.Z., Norouzi, M., Firoozabadi, B., “An Analytical Solution for Creeping Motion of a Viscoelastic Drop Falling through a Newtonian Fluid” J Non-Newtonian Fluid Mech.

چکیده

حرکت و شکل قطره در حال سقوط در فاز سیالی دیگر از اهمیت ویژه‌ای در دینامیک سیالات برخوردار است. اهمیت این موضوع را می‌توان در جداسازی سیالات به خصوص در زمینه‌های صنعت نفت و پترشیمی، تولید دارو (بویژه پنی سیلین)، ته‌نشینی مواد موجود در فاضلاب‌ها، نیروگاه‌ها (برج-های خنک کننده)، مبدل‌های حرارتی و ... مشاهده نمود. از بین کاربردهای گفته شده برای سقوط قطره در صنعت، بخشی از آنها در دسته سیالات ویسکوالاستیک قرار دارند. به عبارت دیگر، در بسیاری از موارد حرکت قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی، قطره نیوتنی در سیال ویسکوالاستیک و قطره ویسکوالاستیک در سیال ویسکوالاستیک مورد نظر است. این تحقیق برآن است که حرکت و شکل سقوط قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی را مورد بررسی قرار دهد. جریان مورد نظر خزشی بوده و روش‌های آزمایشگاهی و تحلیلی مد نظر می‌باشد. برای قطره نیوتنی در حال سقوط در فاز نیوتنی که دارای جریان خزشی باشد، شکل قطره کاملاً کروی می‌باشد. این در حالی است که، شکل قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در فاز نیوتنی با افزایش حجم قطره برای سیال ویسکوالاستیک مشخص و افزایش خاصیت الاستیک برای قطره‌ای با حجم مشخص از حالت کروی خارج می‌گردد. با افزایش حجم قطره شکل آن به قطره‌ای پهن شده تبدیل می‌شود تا اینکه در حجم معینی (حجم بحرانی) یک حفره در قسمت انتهایی قطره (در بالاترین نقطه قطره) پدیدار شده و باعث فرورفتن قطره به داخل خود در این قسمت می‌گردد.

تغییر شکل قطره، ناشی از نیروهایی است که در فصل مشترک دو سیال وارد می‌شود. نیروهای وارده بر قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال نیوتنی ساکن شامل نیروی وزن، کشش سطحی، فشار و تنش‌های ویسکوالاستیک است. در بین این نیروها کشش سطحی و تنش‌های ویسکوالاستیک نسبت به بقیه موارد دارای بیشترین تأثیر روی شکل قطره در حال سقوط می‌باشند. برای یک سیال ویسکوالاستیک مشخص به عنوان فاز قطره با خواص رئولوژی ثابت، افزایش حجم

سبب تولید حفره در قسمت انتهایی قطره می‌شود. برای قطرات به اندازه کافی کوچک شکل قطره کروی باقی می‌ماند چرا که در این حالت، نیروی کشش سطحی به عنوان نیروی غالب عمل کرده و این نیرو همواره سعی دارد تا قطره کرویت خود را حفظ کرده و کمترین مساحت ممکن را اشغال نماید. با افزایش حجم قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط، مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک به نیروی کشش سطحی غلبه کرده و باعث ایجاد حفره‌ای در قسمت انتهایی قطره می‌شود. این روند بر حرکت قطره نیز تأثیر دارد بطوریکه سرعت نهایی سقوط قطره ویسکوالاستیک در مقابل قطره نیوتنی با شرایط یکسان کاهش می‌یابد. در قسمت آزمایشگاهی تحقیق حاضر از روغن سیلیکون به عنوان سیال نیوتنی محیط و از محلول آب/گلیسیرین و پلیمر گزانتام به عنوان فاز قطره استفاده شده است. برای تولید قطرات با حجم‌های مختلف از نازل‌هایی با قطر متفاوت استفاده شده است. آنالیز تصاویر بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی به وسیله برنامه‌های پردازش تصویر صورت گرفته است. روش حل تحلیلی استفاده از حساب اغتشاشات می‌باشد. اعداد بی‌بعد دبورا De و مویینگی Ca به عنوان پارامترهای اغتشاشی در نظر گرفته شده‌اند. مدل شبه خطی اولروید-بی و غیرخطی گزیکس برای شبیه سازی حرکت و شکل قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط به‌کار گرفته شده است. با مقایسه نتایج حاصل از مشاهدات آزمایشگاهی و حل تحلیلی مشخص شده است که نتایج بدست آمده از هر دو مدل اولروید-بی و گزیکس نسبت به مطالعات پیشین بهتر بوده است. همچنین مشخص شده است که مدل غیر خطی گزیکس دارای تطابق بیشتری با نتایج آزمایشگاهی نسبت به مدل اولروید-بی می-باشد که در مورد شکل پایای قطره ویسکوالاستیک نسبت به حرکت آن مشهودتر است. همچنین در تحقیق حاضر مشخص شده است:

- حفره ایجادی با افزایش اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی رشد می‌کند که سرعت رشد آن برای عدد مویینگی نسبت به عدد دبورا بیشتر است.
- تغییرات نسبت ویسکوزیته k تأثیر زیادی روی شکل قطرات ندارد.

- افزایش نسبت ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک β باعث رشد حفره تولیدی در قطره می‌گردد.
- سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در مقابل قطره نیوتنی کاهش می‌یابد و با افزایش خاصیت الاستیک قطره روند کاهش آن تسریع می‌گردد.
- با افزایش ضریب تحرک برای مدل گزیکس سرعت سقوط قطره کاهش پیدا می‌کند.
- با افزایش خاصیت الاستیک قطره ویسکوالاستیک میدان‌های سرعت داخل قطره توسعه یافته و رشد می‌کنند.

فهرست

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست علائم

$Ca = \dfrac{\eta U_\infty}{\Gamma}$	عدد مویینگی
D	تانسور تغییر شکل
$De = \dfrac{\lambda U_\infty}{(k+1)R}$	عدد دبورا
$Ec = \dfrac{De}{Ca} = \dfrac{\lambda\Gamma}{(k+1)\eta R}$	عدد الاستو کاپیلاری
F	برآیند نیروها
F_D	نیروی درگ
F_B	نیروی حجمی
$k = \dfrac{\tilde{\eta}_0}{\eta}$	نسبت ویسکوزیته
n	بردار عمود بر سطح
$P = \dfrac{P^* R}{\eta U_\infty}$	فشار استاتیکی بی‌بعد
$\mathrm{Re} = \dfrac{\rho U_\infty R}{\eta}$	عدد رینولدز
r	جهت شعاعی دستگاه مختصات کروی
U_0	سرعت مرجع قطره
U_∞	سرعت مرجع سیال نیوتنی
$We = \lambda\dot{\gamma}$	عدد وازنبرگ
$\gamma_{(1)}$	نرخ برش مرتبه اول
$\gamma_{(2)}$	نرخ برش مرتبه دوم
η	ویسکوزیته سیال نیوتنی، pa.s
$\tilde{\eta}_0$	ویسکوزیته قطره در نرخ برش صفر، pa.s
λ_1	ثابت زمانی رهایی از تنش، s
λ_2	ثابت زمانی تاخیر، s
θ	جهت زاویه‌ای دستگاه مختصات کروی

α	ضریب تحرک
$\beta = \dfrac{\tilde{\eta}_{0,p}}{\tilde{\eta}_0}$	نسبت ویسکوزیته قطره
ρ	چگالی
τ	تانسور تنش سیال نیوتنی
$\tilde{\tau}$	تانسور تنش قطره
ψ	تابع جریان سیال نیوتنی
$\tilde{\psi}$	تابع جریان قطره
ζ	تابع تغییر شکل
Γ	کشش سطحی

فصل اول

مقدمه

مقدمه

در این فصل، مروری کوتاه بر مکانیک سیالات غیرنیوتنی خصوصاً سیالات ویسکوالاستیک صورت می-گیرد. در ابتدا تفاوت سیالات نیوتنی با سیالات غیرنیوتنی تشریح شده است.

۱-۱ طبقه‌بندی سیالات ویسکوالاستیک

سیال نیوتنی، سیالی است که تنش تسلیم (تنش برشی در نرخ برش صفر) نداشته باشد و تنش برشی آن با نرخ برش رابطه خطی داشته باشد. نسبت تغییرات تنش به نرخ برش که برای سیال نیوتنی همواره مقداری ثابت می‌باشد، ویسکوزیته نامیده می‌شود. بر مبنای این تعاریف سیال غیرنیوتنی به سیالی گفته می‌شود که حداقل یکی از شرایط سیال نیوتنی را نداشته باشد. این سیالات به سه گروه زیر تقسیم‌بندی می‌شوند:

- سیالات غیر نیوتنی مستقل از زمان
- سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان
- سیالات ویسکوالاستیک

در ادامه در رابطه با هر یک از گروه ها به صورت گذرا بحث می گردد.

۱-۱-۱ سیالات غیرنیوتنی مستقل از زمان

سیالاتی هستند که تنش برشی تنها تابعی غیرخطی از نرخ برش می‌باشد. این گروه از سیالات غیرنیوتنی به دو دسته سیالاتی دارا و فاقد تنش تسلیم تقسیم می‌شوند. در مواردی که دارای تنش تسلیم باشند شرط لازم برای جریان یافتن ماده این است که تنش به حد خاصی برسد و در تنش‌های کمتر از این مقدار مانند یک جامد عمل کرده و تنش را تحمل می‌کند. پلاستیک بینگهام یکی از

معروفترین موادی است که دارای تنش تسلیم می‌باشد. در واقع پلاستیک بینگهام یک سیال نیوتنی دارای تنش تسلیم است. خمیردندان یک مثال بسیار مناسب برای سیالات دارای تنش تسلیم می‌باشد که باید تنش برشی از حد مشخصی بیشتر شود برای آنکه جریان پیدا کند.

سیالاتی که فاقد تنش تسلیم هستند به نام سیالات نیوتنی تعمیم‌یافته معروف می‌باشند و به دو گروه تقسیم می‌شوند:

سیالات شبه‌پلاستیک[۱]

سیالات دایلاتنت[۲]

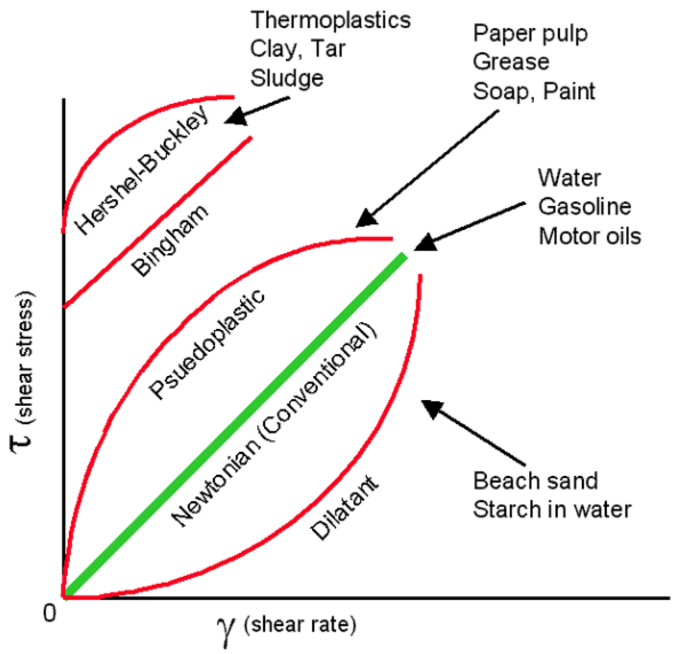
ویسکوزیته این مواد به‌صورت یک تابع از نرخ برش سیال می‌باشد. مدل‌های زیادی برای ارائه رابطه بین تنش و نرخ برش ارائه شده است. یکی از ساده‌ترین و پرکاربردترین این مدل‌ها، مدل توانی[۳] است که در آن تنش یک تابع از توان nام نرخ برش در نظر گرفته می‌شود [1]. یکی از اشکالات این مدل این است که، ویسکوزیته در نرخ برش صفر مقداری نامحدود می‌شود. البته عکس این قضیه نیز صادق است، یعنی ویسکوزیته در نرخ برش‌های بزرگ بسیار کوچک می‌شود. مدل‌های دیگری نیز مانند مدل کراس[۴]، مدل کاریو-یاسودا[5] و مدل راینر- فیلیپوف[۶] از جمله مدل‌های نیوتنی تعمیم‌یافته هستند که مشکل مدل توانی را ندارند. در این مدل‌ها، ویسکوزیته در نرخ برش صفر و در نرخ‌های برش بالا معمولا مقداری ثابت به‌دست می‌آید که آن‌ها را به‌ترتیب با (η_0) و (η_∞) نمایش می‌دهند. معمولا با افزایش ثابت‌های مدل‌های غیرنیوتنی، رفتار تنش وابسته به نرخ برش بهتر مدل می‌شود.

سیالات شبه‌پلاستیک، سیالاتی هستند که افزایش نرخ برش باعث کاهش ویسکوزیته آن‌ها می‌شود. سیالات دایلاتنت رفتاری عکس این حالت از خود نشان می‌دهند. در اکثر مدل‌های غیرنیوتنی

---

1. Pseudioplastic
2. Dilatant
3. Power-Law
4. Cross
5. Carreau-Yasuda
6. Reiner-Philippoff

سیالات شبه‌پلاستیک اندیس توانی کوچکتر از ۱ ($n<1$) و دایلاتنت‌ها اندیس توانی بزرگتر از ۱ ($n>1$) را دارا هستند. شایان ذکر است برای $n=1$ سیال رفتار نیوتنی از خود نشان می‌دهد. شکل (۱-۱) رفتار تنش در برابر نرخ برش را برای انواع سیالات نمایش می‌دهد.



شکل (۱-۱): منحنی های تنش برشی در برابر نرخ برش برای سیالات مستقل از زمان [۱]

۱-۱-۲ سیالات غیرنیوتنی وابسته به زمان

در بعضی از سیالات غیرنیوتنی، علاوه براینکه ویسکوزیته تابعی از شدت برش است، تابعی از زمان نیز می‌باشد. به عبارت دیگر، در این سیالات، در حین یک نرخ برش ثابت، ساختمان مولکولی ماده بطور مداوم در حال تغییر است و لذا مقدار ویسکوزیته و تنش برشی نیز تابعی از زمان خواهد بود. بطور کلی این مواد به دو دسته تیکسوتروپیک[1] و سیالات رئوپکتیک[2] (آنتی تیکسرترپیک[3]) تقسیم می‌شوند. در سیالات تیکسوتروپیک، چنانچه ماده در معرض یک شدت برش ثابت و دمای معین قرار داده شود، تنش برشی یک کاهش برگشت‌پذیر نسبت به زمان پیدا می‌کند. البته در نهایت ویسکوزیته به

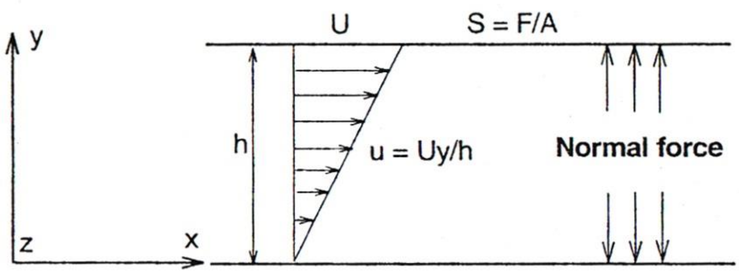
[1]. Thixotropic
[2]. Rheopectic
[3]. Antithixotropic

یک مقدار حدی میل خواهد کرد. سیالات رئوپکتیک مواد بسیار نادری هستند که رفتار آنها کاملاً عکس مواد تیکسوتروپیک می‌باشد.

۱-۱-۳ سیالات ویسکوالاستیک

۱-۳-۱-۱ معرفی سیالات ویسکوالاستیک

گروه سوم از سیالات غیرنیوتنی، سیالات ویسکوالاستیک هستند که همزمان خواص ویسکوز سیال و الاستیک جامد را دارا می‌باشند. معروفترین آزمایشی که در مورد رفتار سیال ویسکوالاستیک می‌توان به آن اشاره کرد، آزمایش جریان کوئت (جریان برشی ساده) می‌باشد. مطابق شکل (۱-۲) چنانچه یک سیال ویسکوالاستیک بین دو صفحه موازی قرارگیرد بطوریکه صفحه بالایی با سرعت U حرکت نماید، یک جریان برشی ساده ایجام می‌گردد. اگر صفحه متحرک بالایی ناگهان متوقف شود تنش به-طور آنی صفر نمی‌شود. این در حالی است که برای سیال نیوتنی تنش سریعا صفر می‌شود [۲]. در سیالات ویسکوالاستیک کاهش تنش برشی دارای بازه زمانی یا به عبارت دیگر دارای زمان آسودگی از تنش[1] می‌باشد. همچنین در سیالات ویسکوالاستیک پس از توقف صفحه بالایی در جریان برشی ساده، این صفحه کمی عقب برمی‌گردد این در حالی است که در سایر سیالات توقف صفحه بالایی آنی صورت می‌پذیرد. این بازگشت، به خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک برمی‌گردد.



شکل (۱-۲): طرح شماتیک جریان برشی ساده (جریان کوئت) [۲]

[1]. Rlaxation Time

خاصیت دیگر سیالات ویسکوالاستیک این است که این مواد دارای اختلاف تنشهای نرمال اول و دوم هستند. در جریان برشی ساده سیال نیوتنی، تنش‌های عمودی همواره مقداری ثابت و برابر فشار استاتیکی می‌باشند. این در حالی است که در جریان برشی ساده سیال ویسکوالاستیک، بین تنش‌های عمودی اختلاف وجود دارد. در جریان برش ساده، اگر جهت جریان را جهت x و راستای تغییرات سرعت را جهت y بنامیم، اختلاف تنش عمودی به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$N_1 = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \qquad (۱-۱)$$

حال، اگر جهت راستگرد عمود بر جهت‌های x و y را جهت z بنامیم، می‌توان اختلاف تنش عمودی دوم را نیز به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$N_2 = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \qquad (۱-۲)$$

ثابت‌های اختلاف تنش عمودی نیز بر اساس روابط (۱-۱) و (۱-۲) به‌دست می‌آیند [۱]:

$$\Psi_1 = \frac{N_1}{\dot{\gamma}^2} \qquad (۱-۳)$$

$$\Psi_2 = \frac{N_2}{\dot{\gamma}^2} \qquad (۱-۴)$$

که در آن، Ψ_1 و Ψ_2 ثابت‌های اختلاف تنش‌های اول و دوم و $\dot{\gamma}$ نرخ برش تعمیم یافته می‌باشد. همانطور که قبلاً اشاره شد ویسکوزیته در سیالات غیرنیوتنی تابعی از نرخ برش می‌باشد. بنابراین برای سیال ویسکوالاستیک می‌توان بر اساس تنش برشی و نرخ برش، ویسکوزیته را به‌دست آورد [۱]:

$$\eta = \frac{\sigma_{xy}}{\dot{\gamma}} \qquad (۱-۵)$$

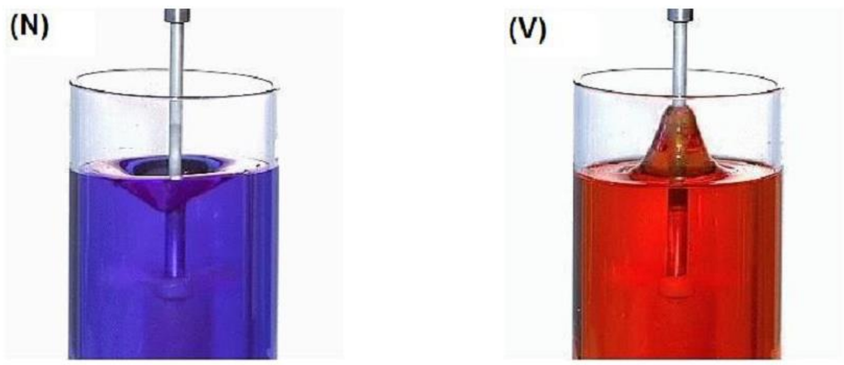
بر اساس روابط مذکور، ویسکوزیته، اختلاف تنش عمودی اول و دوم در سیال ویسکوالاستیک همگی تابعی از نرخ برش می‌باشد.

۱-۱-۳-۲ برخی رفتارهای سیال ویسکوالاستیک

در این بخش برخی از رفتارهای سیالات ویسکوالاستیک که متفاوت با سیالات دیگر بوده و ریشه در اختلاف تنش‌های نرمال و همچنین وجود حافظه در این سیالات دارد، معرفی می‌گردد.

- **تغییر شکل سطح آزاد یک سیال در حال چرخش**

هنگامی که یک سیال نیوتنی قرار گرفته در یک ظرف به وسیله یک میله چرخان شروع به هم‌زدن گردد یک تقعر متقارن محوری در ظرف تشکیل می‌گردد طوری‌که سطح سیال نزدیک دیواره به سمت بالا و در مرکز ظرف به سمت پایین هدایت می‌گردد که ناشی از نیروی گریز از مرکزی می‌باشد که از چرخیدن میله ناشی شده است. چنانچه این آزمایش را برای یک سیال ویسکوالاستیک تکرار کنیم نتیجه عکس سیال نیوتنی می‌گردد و تحدب در سطح آزاد سیال بوجود می‌آید و سیال ویسکوالاستیک سوق به بالاروی از میله را دارد که ناشی از اختلاف تنش‌های نرمال اول در این مواد است که می‌تواند به نیروی گریز از مرکز چیره شده و سبب بالاروی سیال از میله گردد. این پدیده در (۲-۳) به نمایش درآمده است.



شکل(۱-۳): اعمال چرخش به سیال نیوتنی(N)- سیال ویسکوالاستیک (V)

- **آماسیدگی جت**

هنگام خروج مواد ویسکوالاستیک از نازل این مواد میل زیادی به گسترش جانبی (تورم) دارند که از اختلاف تنش‌های نرمال اول ناشی می‌شود. در (۱-۴) این پدیده قابل مشاهده است.

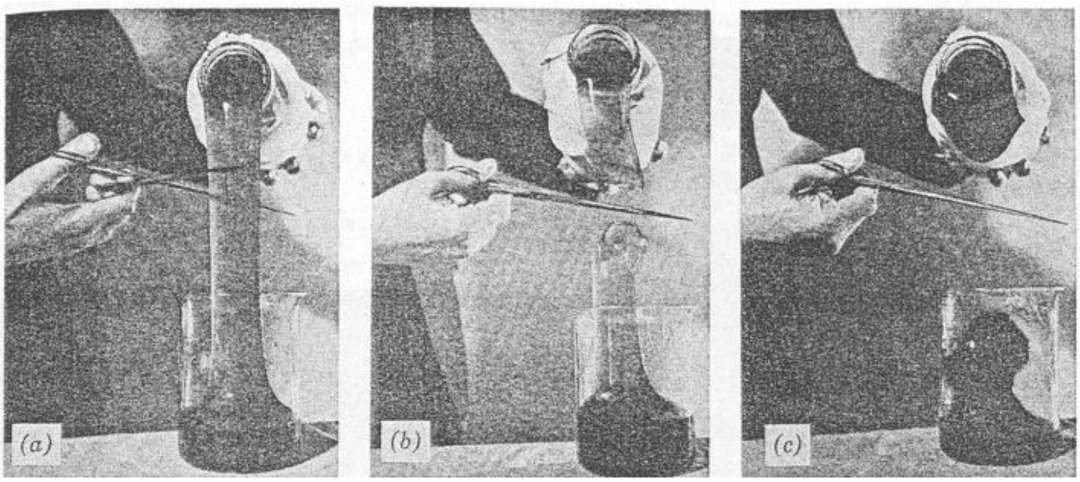
شکل (۱-۴): گسترش جانبی سیال ویسکوالاستیک در نزدیکی سر نازل

- **جریان یک سیال ویسکوالاستیک در یک کانال شیب‌دار**

اگر یک سیال نیوتنی در یک کانال باز شیب‌دار جریان داشته باشد سطح آزاد سیال تقریباً به شکل صفحه تخت می‌باشد. در حالی که برای سیال ویسکوالاستیک جریان یافته در این کانال، سطح آزاد آن به شکل محدب و رو به بالا در می‌آید.

- **بازگشت فنری**

مطابق (۱-۵) در صورتی‌که جریان یک سیال ویسکوالاستیک در حال خالی شدن از ظرفی بوسیله قیچی قطع گردد بخشی از سیال قسمت بالای قیچی دوباره به ظرف بازمی‌گردد که این پدیده ناشی از حافظه‌دار بودن سیالات ویسکوالاستیک می‌باشد.



شکل (۱-۵): بازگشت فنری سیال ویسکوالاستیک

علاوه بر موارد مطرح شده، سیالات ویسکوالاستیک دارای خواص دیگری هستند شامل: سیفون بدون لوله، جریان خروجی جت، جریان های ثانویه در مجاری غیرمدور، اثر آبلر[۱]، جریان‌های انقباضی[۲] و... [۱و۳].

۱-۱-۳-۳ پارامترهای مهم در جریان سیالات ویسکوالاستیک

معمولاً برای بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک، از دو عدد بی‌بعد دبورا[۳] و وایزنبرگ[۴] استفاده می-کنند. عدد دبورا، بر اساس نسبت زمان آسودگی از تنش به زمان مشخصه جریان تعریف می‌شود. بنابراین، برای یک زمان مشخصه معین (یا نسبت مقیاس طولی به مقیاس سرعت معین)، عدد دبورا در گازها و مایعات نیوتنی عدد بسیار کوچک و در جامدات الاستیک عدد بسیار بزرگی است. نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از ویسکوزیته سیال را نیز بصورت عدد وایزنبرگ نمایش می‌دهند [۱]. بنابراین، در یک سیال بخصوص، بالا بودن عدد وایزنبرگ به معنای غیرنیوتنی

---

۱. Uebler effect

2. Contraction flow

3. Deborah

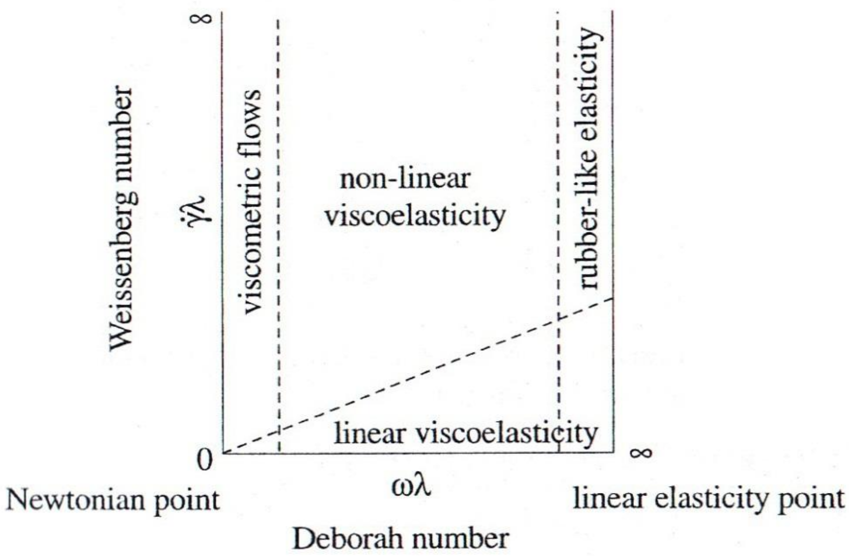
4. Weissenberg

بودن این سیال است. مسلم است که، اگر اعداد وایزنبرگ و دبورا برای یک ماده مشخص مقدار کوچک داشته باشند، ماده شانس جریان یافتن را پیدا می‌کند و بالعکس.

$$De = \lambda\omega = \lambda / T \tag{۶-۱}$$

$$Wi = \lambda\dot{\gamma} \tag{۷-۱}$$

که در آن، λ زمان مشخصه ماده (زمان آسودگی از تنش)، T زمان مشخصه جریان، ω فرکانس مشخصه جریان و $\dot{\gamma}$ نرخ برش جریان می‌باشد. معمولاً از دیاگرام پیپکین برای مشخص نمودن وضعیت ویسکوالاستیک ماده استفاده می‌شود. در شکل (۶-۱) این دیاگرام نشان داده شده است. مطابق شکل، محور افقی بر حسب عدد دبورا و محور قائم بر حسب عدد وایزنبرگ است. این دیاگرام ابزار مناسبی جهت انتخاب یک قانون پایه برای یک ماده مشخص است.



شکل (۱-۶): دیاگرام پیپکین

۱-۲ مروری بر تحقیقات گذشته

مقدمه

حرکت و شکل قطره در حال سقوط مخلوط نشدنی در یک فاز مایع از مسائل مبنا و پایه ای در دینامیک سیالات می‌باشد. در این قسمت، گزارشی از برخی مطالعات قبلی که در زمینه حل آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی پیرامون حرکت و شکل سقوط[۱]/برخاست[۲] یک قطره در فاز مایع دیگر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱-۲-۱ سقوط قطره نیوتنی در سیال نیوتنی

در این قسمت حرکت و شکل قطره نیوتنی در حال سقوط در سیال نیوتنی دیگر در مطالعات و تحقیقات پیشین مورد بررسی قرار گرفته است. حرکت و شکل قطره نیوتنی در سیال نیوتنی از اهمیت خاصی برخوردار است. اهمیت این موضوع در برجهای خنک کن[۳] نیروگاه ها، مبدل های تماس مستقیم و ... محسوس می‌باشد.

هادامار[۴] [۴] و ریبسیزنسکی[۵] [۵] سقوط خزشی قطره نیوتنی در یک سیال نیوتنی را به‌صورت تحلیلی بررسی نمودند. آنها شکل، سرعت نهایی[۶] و نیروی درگ وارده بر سطح قطره نیوتنی را محاسبه کردند. به سبب خزشی بودن جریان، جمله اینرسی از معادلات مومنتم حذف گردیده و تبدیل به معادلات استوکس[۷] می‌گردد. آنها دریافتند که شکل قطره در حال سقوط در غیاب اینرسی کاملاً کروی بوده و سرعت نهایی (سرعتی که در آن قطره شکل پایا گرفته باشد) با افزایش حجم قطره افزایش می‌یابد. رابطه زیر، معادله

---

1. falling
2. raising
3. cooling tower
4. Hadamard
5. Rybczynski
6. Terminal velocity
7. Stoke’s equation

سرعت نهایی سقوط قطره در فاز نیوتنی می باشد که این دو مرجع بدست آوردند.

$$U_{HR}=(\frac{2k+2}{9k+6})\frac{(\tilde{\rho}-\rho)gR^2}{\eta} \tag{۷-۱}$$

در رابطه بالا k نسبت ویسکوزیته قطره به ویسکوزیته سیال محیط، $\tilde{\rho}$ و ρ بترتیب چگالی قطره و سیال محیط، g شتاب گرانش، R شعاع معادل قطره و η ویسکوزیته سیال محیط می‌باشد.

تیلور و اکریوس[1] [۶] بصورت تحلیلی نشان دادند که در اعداد رینولدز[2] صفر و اعداد مویینگی[3] محدود قطره دقیقاً کروی باقی می‌ماند و فقط در اعداد رینولدز پایین شکل قطره کرویت خود را از دست داده و شکلی پهن شده[4] به خود می‌گیرد. در این مطالعه آنها از ضریب k که نسبت ویسکوزیته قطره به سیال محیط است، استفاده نکردند و تأثیرات آن را مورد بررسی قرار ندادند.

کو و لیل[5] [۷] به بررسی شکل قطره نیوتنی در حال بالا آمدن در سیال ساکن بی نهایت نیوتنی پرداختند. جریان ایجاد شده ناشی از برخاست قطره خزشی بوده و به تبع آن رینولدز بسیار کوچک $\mathrm{Re}\to 0$ می‌باشد. آنها در ابتدا یک تغییر شکل در قطره ایجاد کردند و شکل قطره را با گذشت زمان حین بالا آمدن مورد ارزیابی قرار دادند. در این مطالعه مشخص گردید، برای اعداد مویینگی محدود به ازای تغییر شکل‌های کوچک، شکل قطره ضمن برخاستن کروی باقی می‌ماند اما برای قطراتی که تغییر شکل اولیه آنها بیشتر بوده، تغییر شکل به صورت دائم و پیوسته ادامه می‌یابد. در صورتی که شکل ابتدایی دوکی مانند باشد تغییرات به سمت یک قطره کشیده با یک دنباله در انتها پیش روی می‌کند. این در حالی است که، اگر قطره در ابتدا شکل پهن شده داشته باشد قطره‌ای با یک حفره در قسمت انتهایی نتیجه کار خواهد بود. در این زمینه نظریه‌ای از سوی کوجیما و همکاران[6] [18] مبنی بر این که شکل کروی قطرات به ازای $Ca\to\infty$

---

[1]. Taylor and Acrivos

[2]. Reynols

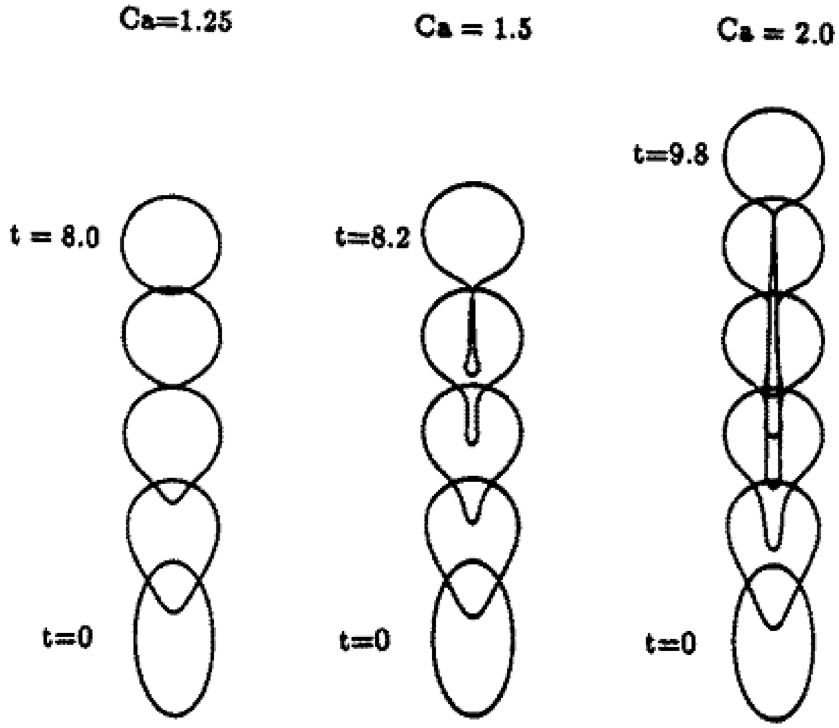
[3]. Capillary

[4]. oblate

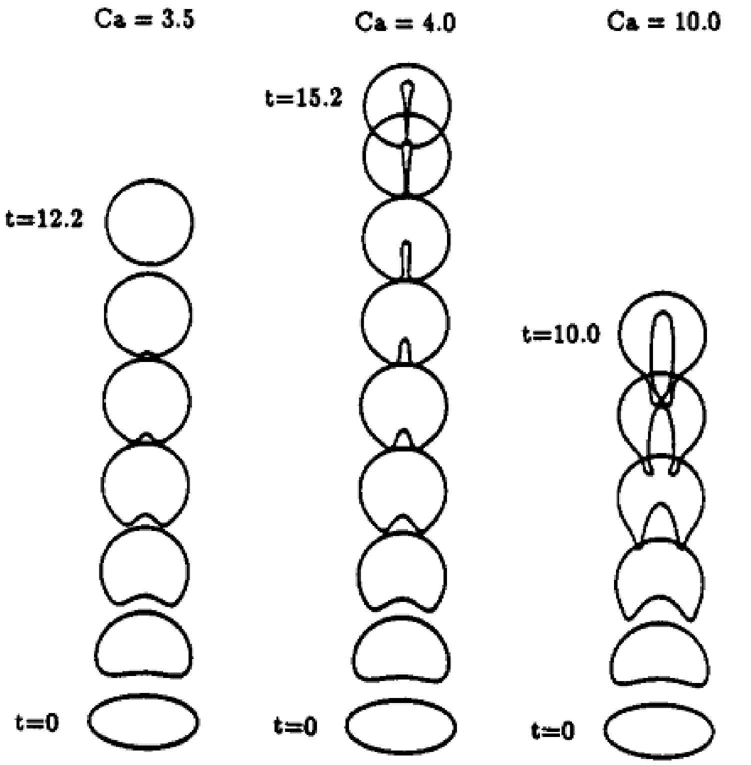
[5]. Koh and Leal

[6]. Kojima et al.

ناپایدار شده و کرویت خود را ازدست می‌دهد، وجود دارد. در شکل‌های (۱-۷) و (۱-۸) ارزیابی شکل قطرات با شرایط ذکر شده به نمایش درآمده است.



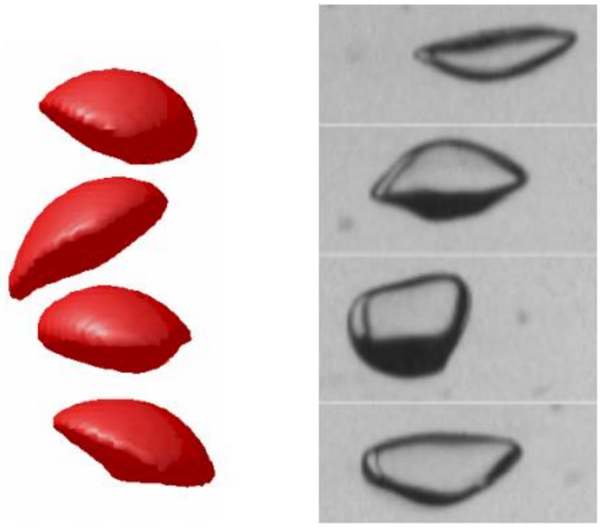
شکل (۱-۷): تغییر شکل قطرات دوکی مانند به ازای اعداد مویینگی متفاوت با گذشت زمان



شکل (۱-۸): تغییر شکل قطرات پهن شده به ازای اعداد مویینگی متفاوت با گذشت زمان

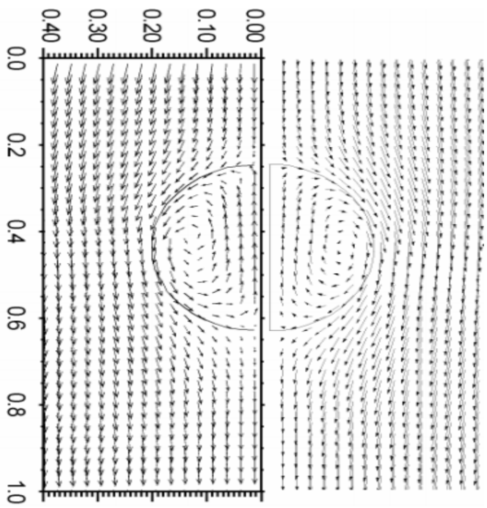
ماریو کوبه و همکاران[1] [۸] شبیه‌سازی عددی برخاستن حباب هوا در یک سیال نیوتنی را به انجام رسانیدند و با نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی که قبلاً صورت گرفته بود مقایسه نمودند. آنها دریافتند، به ازای اعداد مورتن[2] زیاد سرعت‌های برخاستن حباب‌ها و نسبت‌های وجه[3]، تطابق قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی که قبلاً صورت گرفته بود، دارند. اما به ازای اعداد مورتن پایین تفاوت زیادی بین مقادیر بدست آمده از حل عددی با نتایج آزمایشگاهی وجود دارد. عدد مورتن نسبت شتاب حاصل از گرانش به شتاب مولکولی سیال می‌باشد. عدد مورتن فقط تابع خواص سیال است. برای جریان خزشی $Re \to 0$ نتایج حاصل شده دارای تطابق مناسبی با حل تحلیلی بدست آمده توسط هادامارد [۴] و ریبزنسکی [۵] دیده می‌شود. شکل حباب هوا در حال بالا آمدن در آب بدست آمده از حل عددی و آزمایشگاهی را می‌توان در شکل (۱-۹) مشاهده نمود.

[1]. Koebe et al.
[2]. Morton number
[3]. aspect ratio



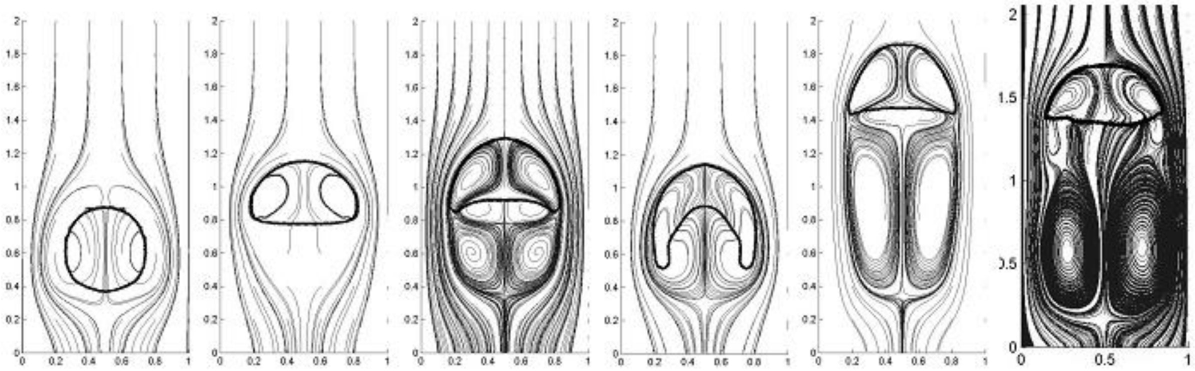
شکل (۱-۹): (سمت چپ) شبیه سازی عددی برخاست حباب هوا به قطر معادل *8mm* در آب- (سمت راست) شکل آزمایشگاهی حباب هوا به قطر معادل *6mm* در آب مقطر

شکل و پروفیل سرعت داخل و خارج حباب به ازای قطر معادل *4mm* در حال بالا آمدن در محلول آب/گلیسیرین با نسبت حجمی ۲:۹۸ با حل تحلیلی هادامارد [۴] و ریبزنسکی [۵] در شکل (۱-۱۰) مقایسه شده است. در اینجا حباب مورد نظر با سرعت $w_B = 2.71\frac{cm}{s}$ در حال بالا آمدن می‌باشد و عدد رینولدز $\mathrm{Re}_B = 0.29$ و نسبت وجه 0.985 را دارا است و فرض کروی بودن حباب برای مقایسه با حل تحلیلی منطقی می‌باشد.



شکل (۱-۱۰): پروفیل و شکل یک حباب به قطر *4mm* در حال بالا آمدن در محلول آب/گلیسیرین

اسمولیانسکی و همکاران[1] [۹] شبیه‌سازی عددی دینامیک حباب گاز داخل سیال ویسکوز را انجام دادند و تأثیرات کشش سطحی و شکل حباب به ازای رژیم‌های مختلف جریان را بررسی کردند. آنها توانستند به خوبی شکل حباب بیضوی نامتقارن را به ازای اعداد رینولدز بالا با استفاده از روش عددی شبیه سازی کنند. شکل، خطوط سرعت، جریان داخل و خارج حباب در رژیم های مختلف جریان در شکل (۱-۱۱) به نمایش گذاشته شده است. مرتعش[2] شدن حباب گاز در اعداد رینولدز به اندازه کافی بزرگ زمانی که عدد ایتوس[3] تقریباً در محدوده ۱ تا ۱۰۰ می باشد اتفاق می‌افتد [۱۷]. عدد ایتوس نسبت نیروی گرانش به نیروی کشش سطحی می‌باشد.



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

شکل (۱-۱۱): شکل های مختلف حباب در حال بالا آمدن،

a)کروی $\mathrm{Re}=1, Eo=0.6$ – b) بیضوی $\mathrm{Re}=20, Eo=1.2$

– c) بیضوی پهن شده $\mathrm{Re}=35, Eo=125$ – d) دامنی مانند $\mathrm{Re}=55, Eo=875$

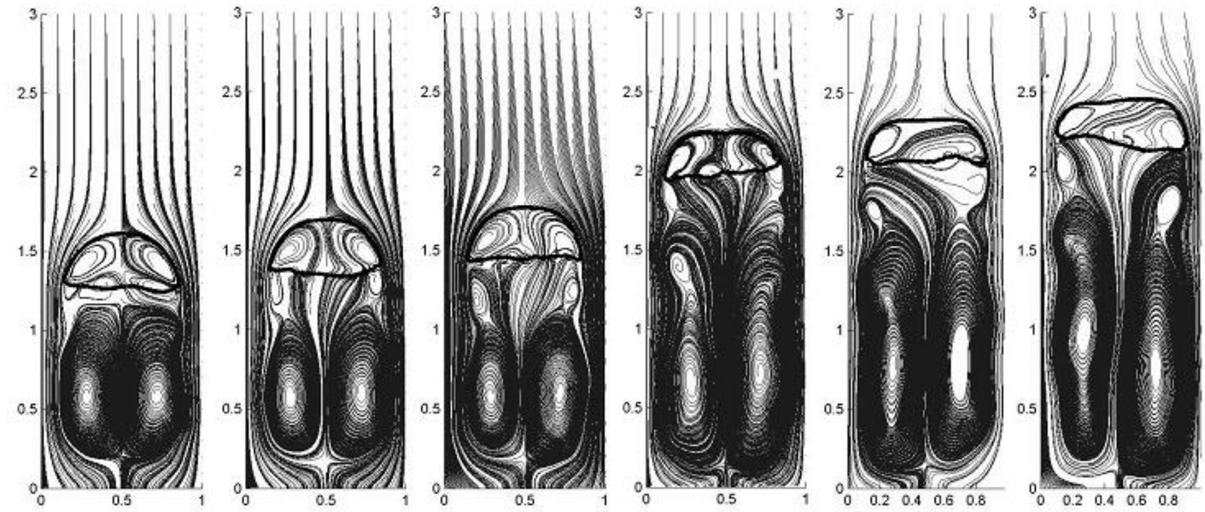
– e) کلاه مانند $\mathrm{Re}=94, Eo=115$ – f) لقمه ای $\mathrm{Re}=110, Eo=3.0, \frac{\rho_1}{\rho_2}=10^3, \frac{\mu_1}{\mu_2}=10^2$

همچنین اسمولیانسکی و همکاران [۹] شکل‌های مربوط به لقمه‌ای شدن حباب گاز که در سیال نیوتنی با ویژگی $\mathrm{Re}=110, Eo=3.0, \frac{\rho_1}{\rho_2}=10^3, \frac{\mu_1}{\mu_2}=10^2$ قرار گرفتند را به ازای ارتفاع‌های مختلف از مبدأ مورد نظر استخراج نمودند که در شکل (۱-۱۲) به نمایش گذاشته شده است.

[1]. Smolianski et al.

[2]. Wobbling

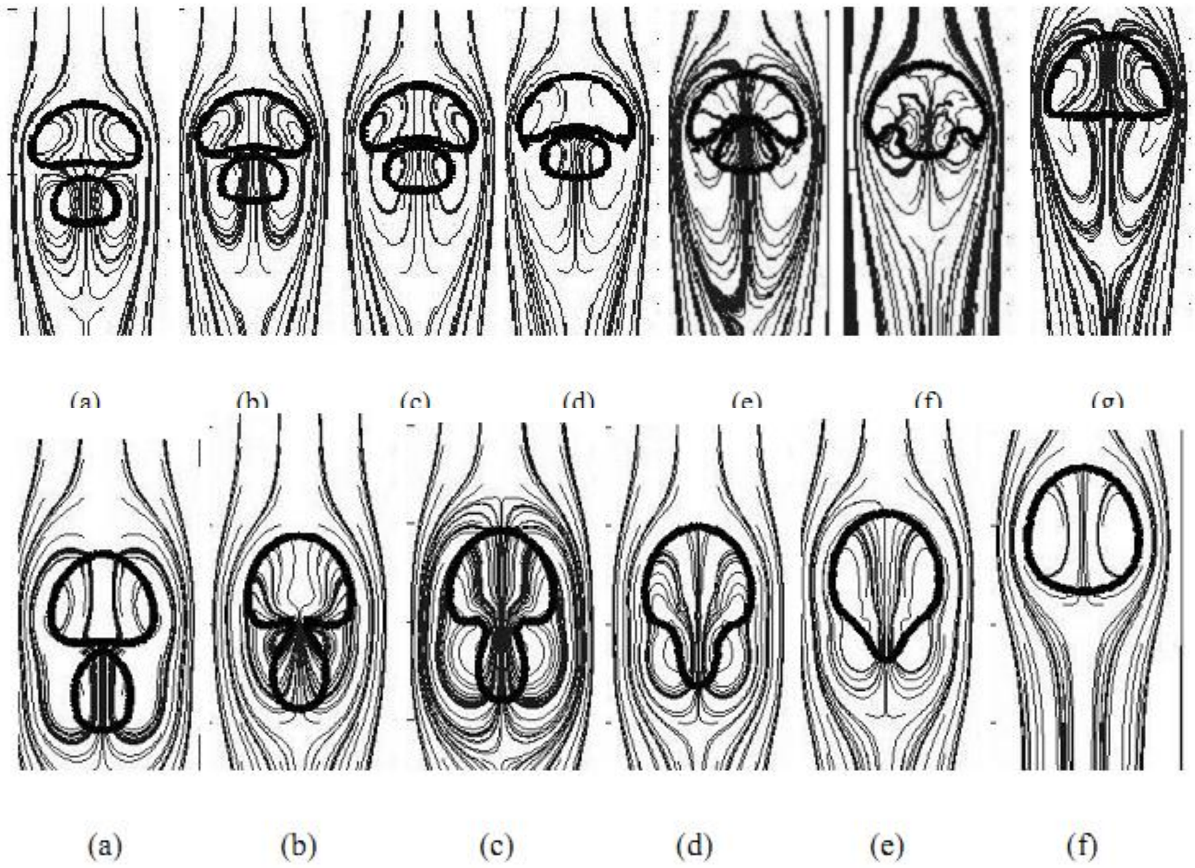
[3]. Eötvös



شکل (۱-۱۲): تغییر شکل حباب در ارتفاع های مختلف. $\mathrm{Re}=110, Eo=3.0, \frac{\rho_1}{\rho_2}=10^3, \frac{\mu_1}{\mu_2}=10^2, h=\frac{1}{80}$

با توجه به شکل بالا، حباب گاز برخاسته دائماً دستخوش تغییر شکل می‌باشد در نتیجه شکل آن ناپایدار شده و نامتقارن می‌گردد. همچنین جریان‌های ثانویه نامتقارنی بعد از حباب به دلیل لایه مرزی ناهمگنی که از قسمت‌های مختلف سطح حباب گاز جدا می‌شود، به وضوح قابل مشاهده است.

در شکل (۱-۱۳) ادغام دو حباب گاز در حال بالا آمدن با شکل‌های اولیه مختلف و تشکیل حباب جدید در فاصله مختلفی از مبدأ به نمایش در آمده است. در هر دو شکل، مکانیزم ادغام بدین صورت است که حباب بالایی تحت تأثیر حباب پایینی تغییر شکل می‌دهد و فاصله بین دو حباب کم می‌شود. هنگامی که حباب بالایی دیگر قادر به تغییر شکل نباشد، ضخامت فیلمی از سیال نیوتنی که بین دو حباب گیر افتاده است نازک شده و در نهایت حباب پایینی با حباب بالایی ادغام می‌گردد.



شکل(۱-۱۳): مکانیزم ادغام در حباب گاز و تشکیل حباب گاز جدید $\mathrm{Re} = 20, Eo = 1.2, \frac{\rho_1}{\rho_2} = 10^2, \frac{\mu_1}{\mu_2} = 10, h = \frac{1}{40}$.

۱-۲-۲ سقوط قطره ویسکوالاستیک در سیال ویسکوز

یکی از مسائل مهمی که در سالهای اخیر توجه بسیاری از پژوهشگران را در زمینه قطره به خود جلب نموده سقوط/ برخاست قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی است که موضوع اصلی این تحقیق می‌باشد.

مطالعات زیادی در زمینه سقوط قطره غیرنیوتنی در فاز ویسکوز انجام گردیده است. سوستارز و بلمونته[۱] [۱۰] سقوط قطره ویسکوالاستیک در فاز سیال نیوتنی را برای جریان خزشی به صورت آزمایشگاهی و تحلیلی بررسی کردند. آنها از محلول آب و گلیسیرین با درصد حجمی ۸۰:۲۰ و پلیمر گزانتام[۲]

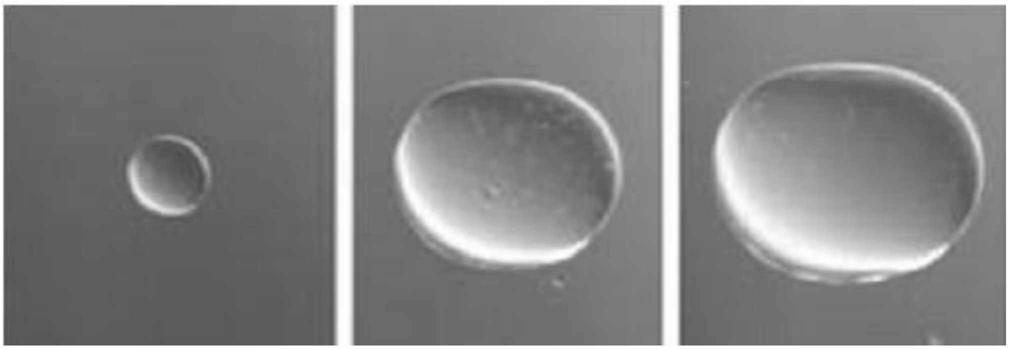
[1]. Sostarecz and Belmonte

[2]. Xantham

با درصد وزنی ۰/۱۶٪ به عنوان فاز قطره و از روغن پلی دیمتیل سیلوگزان[1] به عنوان فاز سیال ویسکوز در حل آزمایشگاهی بهره بردند.

سوستازر و بلمونته از تکنیک اغتشاش به عنوان روش حل تحلیلی برای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط و فاز نیوتنی بهره بردند. در این تحقیق اعداد دبورا و موییننگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند. همچنین، از مدل سیال مرتبه سه برای مدل‌سازی قطره ویسکوالاستیک به عنوان معادله ساختاری استفاده شده است.

در قسمت آزمایشگاهی این تحقیق مشخص گردید شکل قطره در حال سقوط به ازای حجم های به اندازه کافی کوچک ($volume \leq 0.01ml$) کاملاً کره گونه باقی می‌ماند. با افزایش حجم قطره یا همان قطر معادل قطره شکل قطره ناپایدار شده و کرویت خود را از دست می‌دهد و به شکل یک قطره پهن شده تبدیل می-گردد تصاویر بدست آمده از این آزمایش را می‌توانید در شکل (۱-۱۴) مشاهده نمایید.



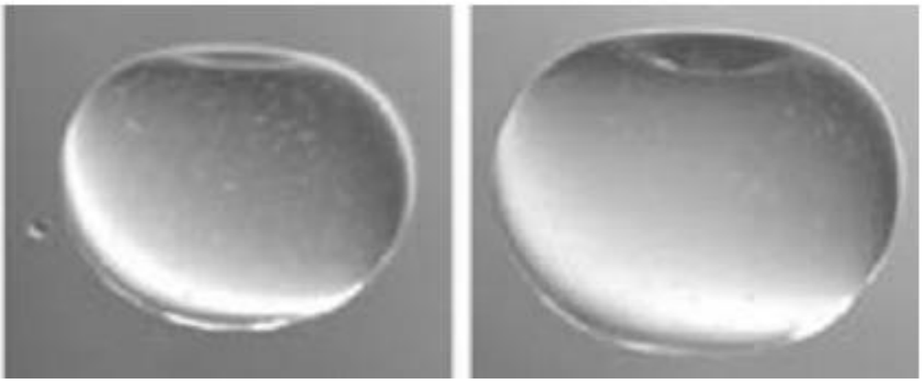
شکل (۱-۱۴): تغییر شکل قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط از شکل کروی به شکل پهن شده

با افزایش حجم قطره ($volume \geq 0.35$) یک گودی در قسمت بالایی قطره پدید می‌آید. این گودی به گونه-ای ایجاد می‌شود که قسمت بالایی قطره را به سمت داخل خود کشیده و یک حفره در قسمت فوقانی قطره ایجاد می‌نماید. با رشد حجم قطره این فرورفتگی افزایش می‌یابد و در نهایت به شکل گردابی[2] تبدیل می-

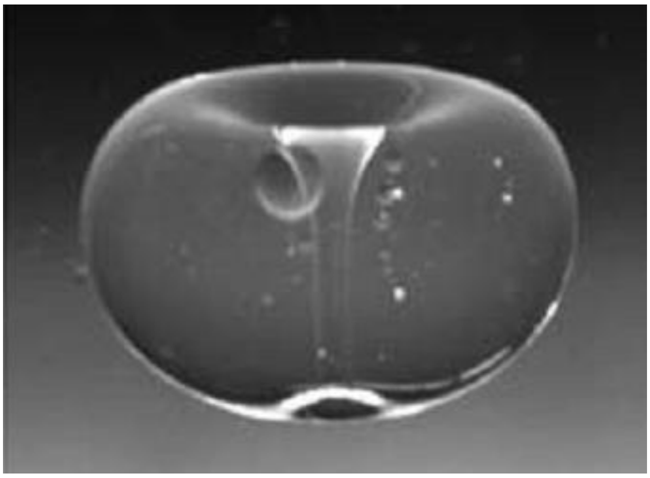
[1]. Polydimethilsiloxan

[2] .Toroidal

شود. در شکل‌های (۱-۱۵) و (۱-۱۶) بترتیب رشد فرورفتگی در قسمت فوقانی قطره و گردابی شدن قطره ویسکوالاستیک با افزایش حجم آن مشاهده می‌شود.

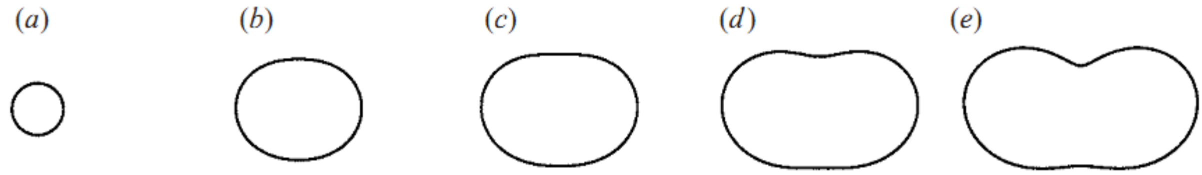


شکل (۱-۱۵): رشد فرورفتگی ایجاد شده با افزایش حجم قطره. سمت چپ $0.35ml$، سمت راست $0.52ml$



شکل (۱-۱۶): گردابی شدن قطره در حجم $7.0ml$

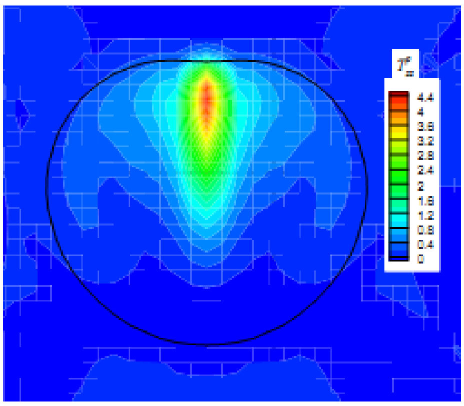
نتایج بدست آمده از حل تحلیلی تا زمانی که $De \le 1, Ca \le 1$ باشند دارای تطابق خوبی با نتایج حاصل از مشاهدات آزمایشگاهی است. چرا که، این اعداد به عنوان پارامترهای اغتشاشی معرفی گردیدند. نتایج بدست آمده از حل تحلیلی سوستارز و بلمونته [۱۰] در شکل (۱-۱۷) مشخص شده است.



شکل (۱-۱۷): شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با استفاده از مدل سیال مرتبه سه برای حجم‌های $a)0.01ml, b)0.12ml, c)0.21ml, d)0.35ml, e)0.52ml$

موخرجی و سرکار[1] [۱۱] ته نشینی قطره ویسکوالاستیک در یک سیال نیوتنی را به شکل عددی مورد بررسی قرار داند. آنها از روش front-tracking finite difference استفاده کردند و مشاهده نمودند که یک گودی در قسمت انتهایی قطره ایجاد می‌شود. این گودی نسبت به حالت کروی قطره نیوتنی باعث کاهش سرعت نهایی قطره و افزایش تنش‌های ویسکوالاستیک قطره در حال سقوط می‌گردد.

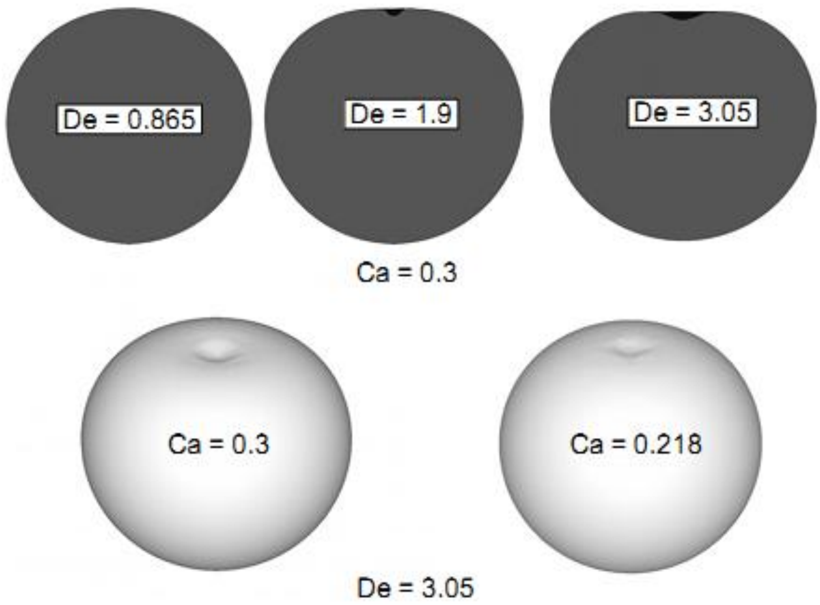
آنها هم چنین کانتور مؤلفه $\tau^{p}{}_{zz}$ تنش را برای قطره ویسکوالاستیک رسم کردند و نشان دادند به دلیل ایجاد تمرکز تنش در قسمت بالایی قطره یک گودی و حفره به سمت داخل قطره ایجاد می‌شود که در شکل (۱-۱۸) قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۱-۱۸): کانتور تنش ویسکوالاستیک $\tau^{p}{}_{zz}$ برای قطره در حال سقوط

[1]. Mukherjee and Sarkar

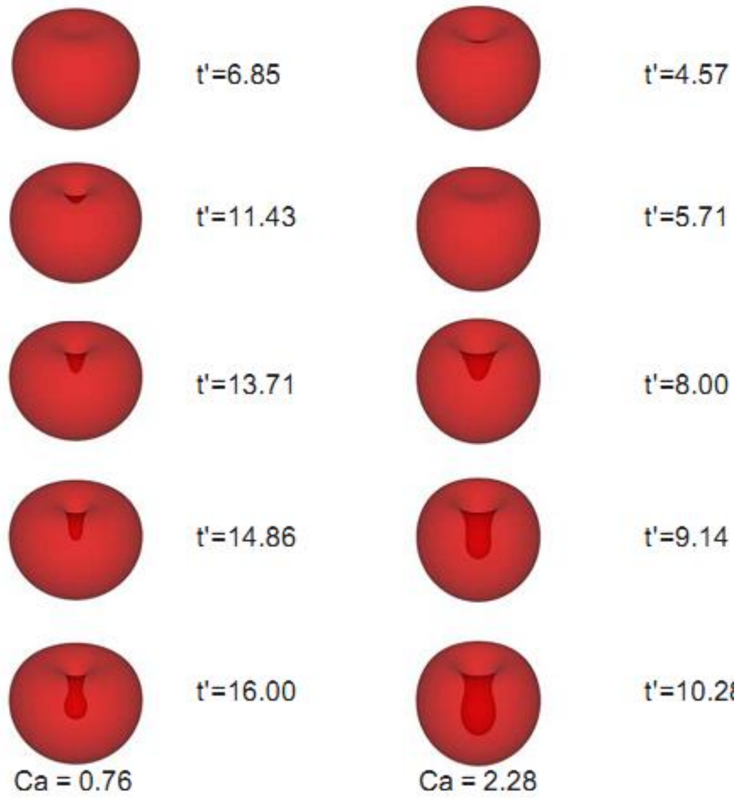
در این تحقیق مشخص گردید، قطره نیوتنی $(De = 0)$ در حال سقوط در فاز نیوتنی دیگر برای اعداد رینولدز محدود کاملاً کروی باقی می‌ماند. همچنین، آنها تأثیر تغییرات اعداد دبورا و مویینگی را روی شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط درون فاز نیوتنی به ازای عدد فرود[1] مشخص بررسی کردند که در شکل (۱-۱۹) نمایش داده شده است. عدد فرود نسبت نیروی اینرسی به نیروی جاذبه در حرکت یک سیال می‌باشد.



شکل (۱-۱۹): شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در $Fr = 0.34$

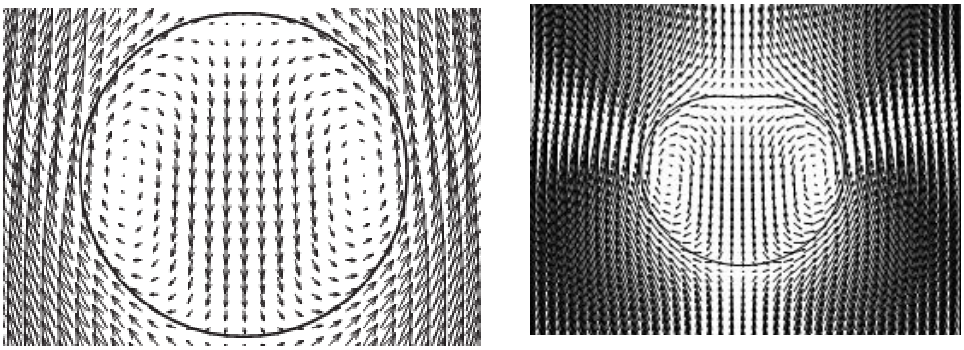
در این مطالعه شکل ناپایای قطره ویسکوالاستیک با تغییر عدد مویینگی به ازای عدد فرود مشخص بررسی شده است. شکل (۱-۲۰) شکل گیری و توسعه یافتن گودی ایجاد شده در قسمت بالایی قطره را با گذشت زمان به خوبی به تصویر کشیده است. همچنین، نشان می‌دهد در ابتدا گودی ایجاد شده ضعیف بوده و با حرکت قطره به سمت پایین رشد کرده چرا که با ته‌نشینی و حرکت رو به پایین قطره ویسکوالاستیک مؤلفه τ^{p}_{zz} افزایش می‌یابد و باعث افزایش فرورفتگی قطره به سمت داخل می‌گردد تا جایی که به حالت پایا رسیده و فرورفتگی ایجاد شده در قطره ثابت گردد.

[1]. Froude number



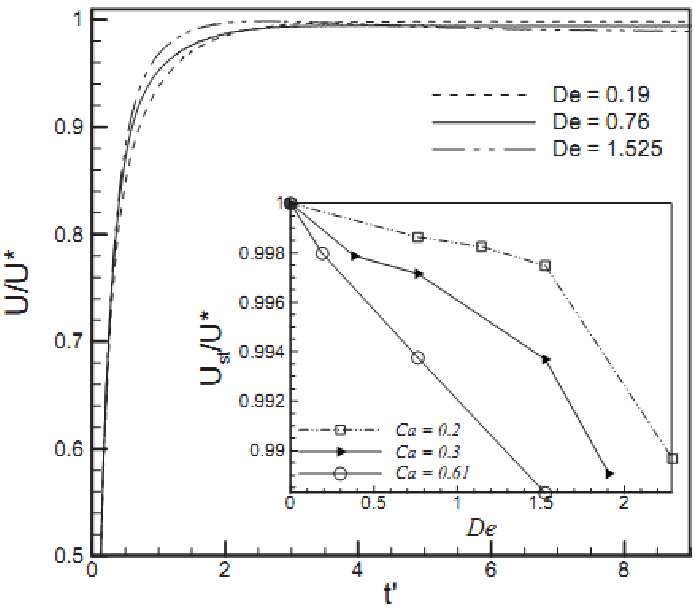
شکل (۱-۲۰): شکل ناپایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط به ازای تغییر عدد مویینگی و عدد فرو مشخص

همچنین، در این تحقیق بردارهای سرعت داخل قطره به نمایش درآمده است و بیان شده که برای قطره نیوتنی و ویسکوالاستیک تغییری در بردارهای سرعت آنها دیده نمی‌شود و تنها از لحاظ نحوهٔ تشکیل کمی متفاوت هستند که نتایج ما با این موضوع متفاوت بوده و در فصل (۵) کاملاً تشریح می‌گردد. در شکل (۱-۲۱) می‌توان بردارهای سرعت داخل قطره نیوتنی در حال سقوط در فاز نیوتنی و قطره ویسکوالاستیک در فاز نیوتنی بدست آمده از این تحقیق را مشاهده نمود. باید توجه داشت، بردارهای سرعت ترسیمی برای قطرات نیوتنی و ویسکوالاستیک دارای دو گردابه متقارن محوری می‌باشند.



شکل (۱-۲۱): بردارهای سرعت (سمت چپ) قطره نیوتنی در فاز نیوتنی در $Ca = 0.3, Fr = 0.34$ (سمت راست) قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط $Ca = 0.61, De = 1.52, Fr = 0.34$

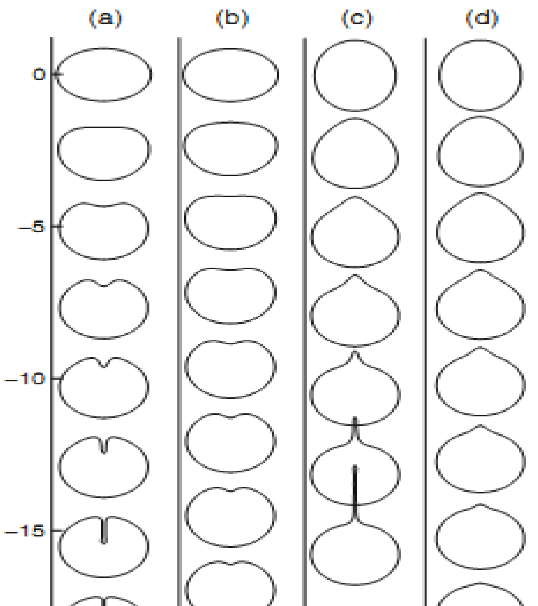
آنها به بررسی تغییرات سرعت گذرای سقوط قطره نسبت به زمان و سرعت نهایی قطره نسبت به عدد دبورا پرداختند که در شکل(۱-۲۲) قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۱-۲۲): تغییرات سرعت قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط نسبت به زمان برای $Ca = 0.61, Fr = 0.34$. شکل داخل، تغییرات سرعت پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط نسبت به عدد دبورا

ایرینا اسماگین و همکاران[1] [۱۲] ته نشینی قطره سیال بینگهام[2] تغییرپذیر در سیال نیوتنی بی‌نهایت با استفاده از روش معادله انتگرالی [۱۸] را مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که تغییرات شکل قطره به ازای اعداد مویینگی کم همانند شکل قطره نیوتنی در حال سقوط می‌باشد و توانستند محدوده بحرانی عدد مویینگی را برای ناپایداری شکل قطره و تبدیل قطره کروی به پهن و دوکی[3] شکل را بدست آورند.

نتایج بدست آمده از حل عددی این تحقیق مربوط به تغییر شکل قطرات در حال سقوط با شکل‌های اولیه متفاوت برای شرح دادن اثر تنش تسلیم با گذشت زمان در شکل (۱-۲۳) به نمایش گذاشته شده است.



شکل (۱-۲۳): بررسی شکل قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی با شکل ابتدایی پهن شده (a,b) و دوکی شکل (c,d) برای $\lambda = 1$ (a $Ca = 20, Bn = 0.05$; (b $Ca = 20, Bn = 0.15$; (c $Ca = 14, Bn = 0.05$; (d $Ca = 14, Bn = 0.1$ و $\Delta t = 10$

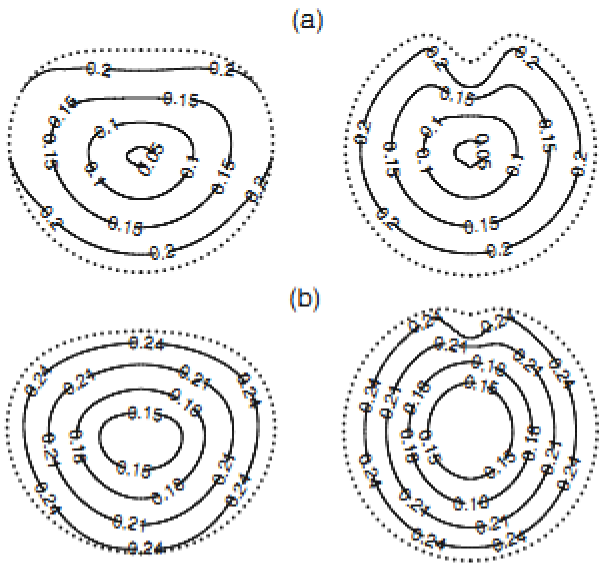
1. .Irina Smagin et al.
2. Bigham fluid
3. prolate

در شکل(a,b)، به‌ترتیب $Ca = 20, Bn = 0.05\ ,0.15$ می‌باشد، در حالی که در شکل (c,d) به‌ترتیب $Ca = 14, Bn = 0.05\ ,0.1$ قرار داده شده است. در شکل‌های بالا، λ معرف نسبت ویسکوزیته سیال قطره به سیال نیوتنی محیط می‌باشد.

یکی از نتایجی که براساس این شبیه‌سازی دینامیکی بدست آمده این است که، در قسمت عقب قطرات پهن شده اولیه (a,b) و دوکی شکل (c,d) با گذشت زمان یک حفره یا گودی تشکیل و رشد می‌کند و شکل قطرات پایدار و یا تغییر شکل‌ها توسعه پیدا می‌کند. با توجه به نتایج بدست آمده مشخص شده است که با افزایش نرخ ویسکوزیته، مقدار تغییر شکل و سرعت سقوط قطره کاهش می‌یابد.

در اعداد بینگهام به اندازه کافی کوچک، رفتار قطرات همانند یک قطره نیوتنی می‌باشد (a,c) و برای نسبت ویسکوزیته کم، قطرات سریع‌تر حرکت و تغییر شکل می‌دهند. در حالی که با افزایش عدد بینگهام سناریو بیان شده تغییر می‌کند و رفتار قطرات در حال سقوط به یک قطره نیوتنی با عدد مویینگی کم شبیه می‌شود (b,d).

در این تحقیق همچنین شکل و پروفیل تنش‌های ویسکوالاستیک موجود در قطره نسبت به گذشت زمان و تغییر عدد بینگهام محاسبه شده است که می‌توان در شکل (۱-۲۴) مشاهده نمود.



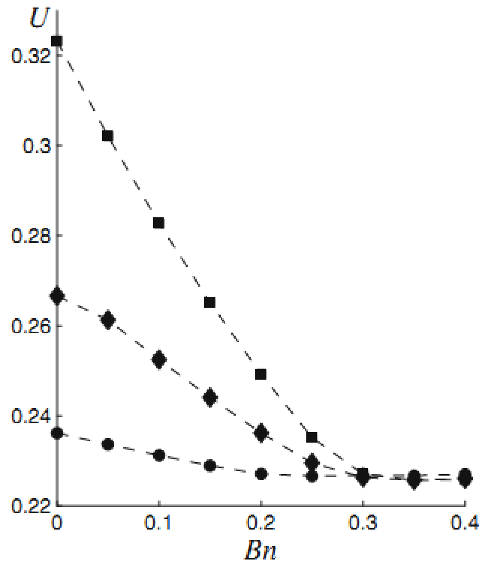
شکل (۱-۲۴): تغییرات تنش‌های ویسکوالاستیک در داخل قطره در حال سقوط با گذشت زمان

در شکل (۱-۲۴) ستون راست در $t = 10\sec$ و ستون چپ در $t = 80\sec$ محاسبه گردیدند. شکل (a) مربوط به قطره ای با $Ca = 20, Bn = 0.05$ است. عدد موویینگی به‌کار رفته در این شکل بحرانی است (بالاتر از آنکه قطره دوکی شکل پایدار شود). مشاهده می‌گردد، یک حفره در انتهای قطرات دائماً در حال رشد و توسعه می‌باشد.

پایداری سرعت سقوط قطره با تغییر عدد بینگهام به ازای نسبت ویسکوزیته مختلف λ و $Ca = 1$ در شکل (۱-۲۵) به نمایش گذاشته شده است. به ازای $Bn = 0$ برای تمامی نسبت ویسکوزیته‌ها پروفیل سرعت شبیه به قطره نیوتنی کروی شکل می‌باشد که رابطه آن را هادامارد [۴] و ریبسزینسکی [۵] به صورت زیر بیان نمودند:

$$U = \frac{2(1+\lambda)}{3(2+3\lambda)} \quad (۱-۸)$$

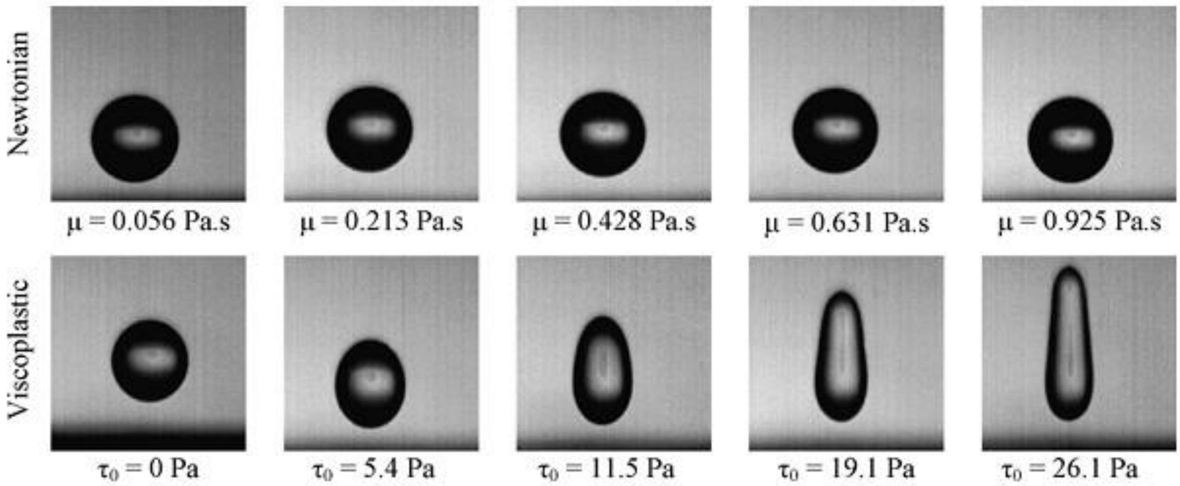
در این شکل مشاهده می‌گردد با فزایش عدد بینگهام (Bn) و نسبت ویسکوزیته (λ)، ویسکوزیته مؤثر قطره افزایش می‌یابد. هرچند که، به ازای $Bn \geq 0.3$ سرعت سقوط قطره پایدار شده و به مقداری نزدیک به سرعت ته نشینی یک جسم صلب در سیال نیوتنی نزدیک می‌شود.



شکل (۱-۲۵): پایداری سرعت قطره بر حسب عدد بینگهام برای $Ca = 1$. بترتیب مربع، لوزی و دایره دارند: $\lambda = 0.2, 1, 5$

جرمن و برتولا [1] [۱۳] در سال ۲۰۱۰ شکل قطره ویسکوالاستیک را که تحت نیروی گرانش، در حال سقوط آزاد بوده است به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند و نتایج بدست آمده را با قطره نیوتنی در حال سقوط مقایسه نمودند.

در شکل (۱-۲۶) شکل قطرات نیوتنی با ویسکوزیته‌های متفاوت و قطرات ویسکوپلاستیک به ازای روند افزایشی تنش تسلیم به نمایش گذاشته شده است. قطرات نیوتنی پس از رهایی از سر نازل سریع شکل کروی به خود می‌گیرند و از این طریق نیروی وارد بر سطح قطره ناشی از ویسکوزیته سیال کاهش پیدا می‌کند. این در حالی است که برای قطره ویسکوپلاستیک این روند تکرار نمی‌شود و هنگامی که تنش تسلیم سیال قطره بر نیروهای وارده بر سطح قطره غلبه می‌کند در تمام مدت سقوط شکل قطره دوکی باقی می‌ماند. نکته مهم این است که شکل دوکی مانند قطرات ویسکوپلاستیک ناشی از آیرودینامیک درگ وارد بر قطرات نمی‌باشد چرا که، به محض رهایی قطرات از سر نازل تنش تسلیم سیال، آنها را دوکی شکل می‌کند.



شکل (۱-۲۶): مقایسه شکل قطرات نیوتنی با ویسکوزیته های متفاوت با قطرات ویسکوپلاستیک در حال افزایش تنش تسلیم.[2]

[1] .G. German, V. Bertola

[2] .Yield Stress

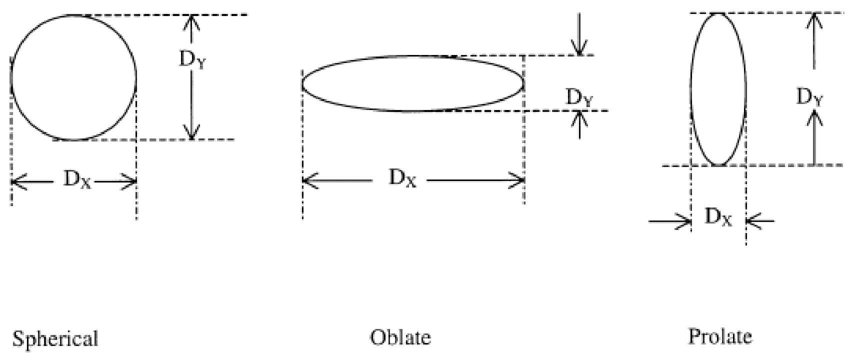
۱-۲-۳ سقوط قطره ویسکوز در سیال غیر نیوتنی

یکی دیگر از موضوعات مهم در حوزه سقوط قطره، ته نشینی قطره نیوتنی در سیال ویسکوالاستیک می-باشد.

در سال ۲۰۰۳ وانچو و همکاران[1] [۱۴] مطالعه‌ای روی حرکت قطره نیوتنی در یک سیال ساکن و بینهایت غیرنیوتنی به صورت آزمایشگاهی انجام دادند. شکل کلی قطرات حاصل از این تحقیق به سه دسته تقسیم بندی می‌شود که در شکل(۱-۲۷) نمایش داده شده است. اساس تعیین نوع شکل‌ها براساس عدد ایتوس قطرات مورد نظر بیان شده است. نتایج آزمایشگاهی حاصل از حرکت قطره نیوتنی در سیال غیرنیوتنی در شکل(۱-۲۸) آمده است. براین اساس دسته بندی شکل قطرات را می‌توانید در جدول (۱-۱) مشاهده نمود.

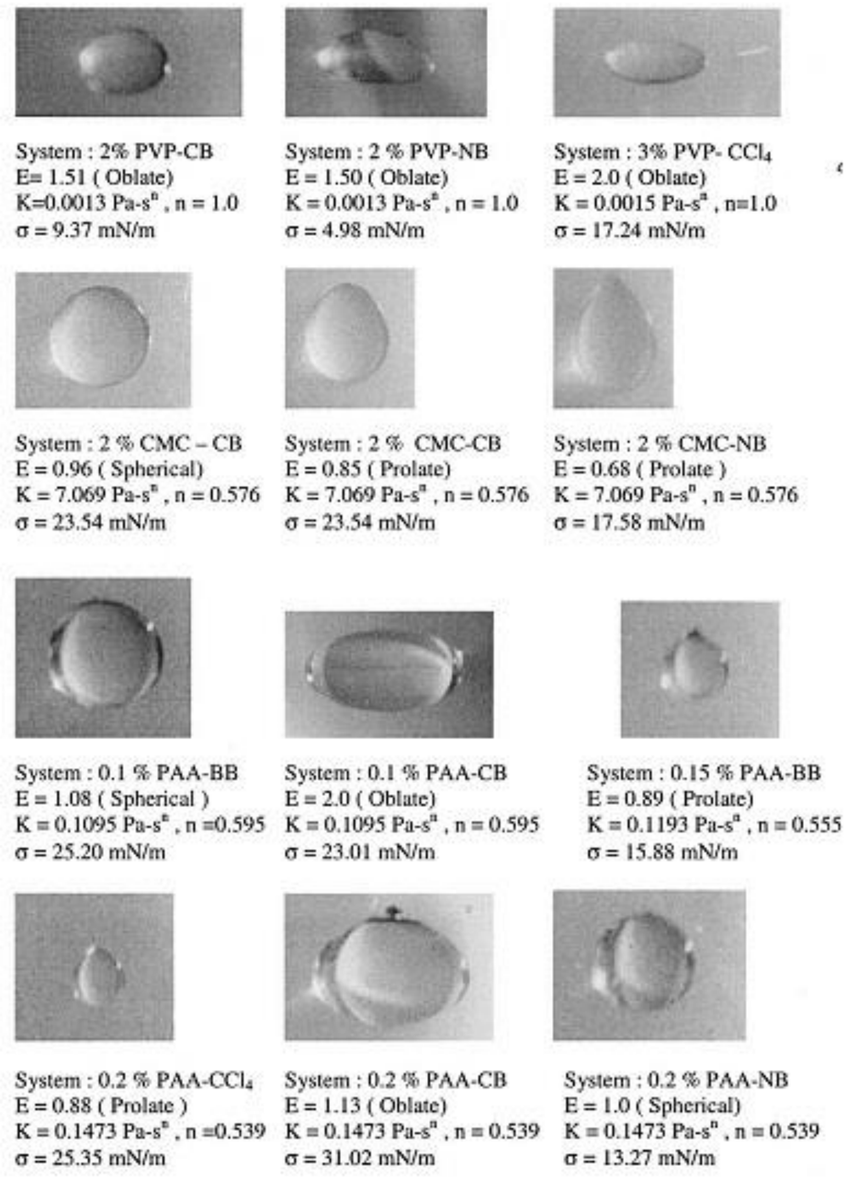
جدول(۱-۱). دسته بندی شکل قطرات نیوتنی در سیال غیرنیوتنی بر حسب عدد ایتوس

محدوده عدد ایتوس	شکل قطره	قطر معادل
$0.9 \le Eo \le 1.1$	کروی	$D_v = \frac{(D_x + D_y)}{2}$
$Eo > 1$	پهن شده	$D_v = (D_x)^{\frac{2}{3}} (D_y)^{\frac{1}{3}}$
$Eo < 1$	دوکی	$D_v = (D_x)^{\frac{1}{3}} (D_y)^{\frac{2}{3}}$



شکل (۱-۲۷): شکل کلی قطرات در حال سقوط/برخاست

[1]. Wanchoo et al.

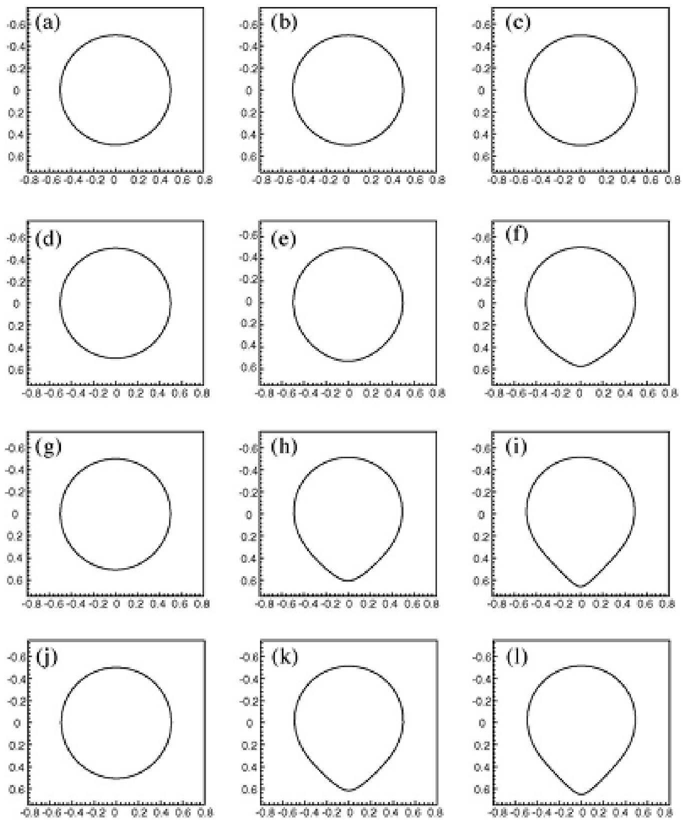


شکل (۱-۲۸): شکل قطرات با تغییر اعداد ایتوس، کشش سطحی

یو و همکاران[1] [۱۵] شبیه‌سازی عددی حرکت و شکل برخاستن قطره را با استفاده از روش حجم محدود انجام دادند. در این پژوهش، یکبار فرض شده که سیال محیط ویسکوالاستیک و قطره در حال برخاست، ویسکوز هستند و بار دیگر فرض ویسکوالاستیک بودن قطره و ویسکوز بودن سیال محیط مدنظر بوده است. مدل ساختاری استفاده شده برای فاز ویسکوالاستیک FENE-CR بوده است. در ادامه علامت 'T' برای سیال محیط و 't' برای قطره می‌باشد. تغییرات شکل پایای قطره نیوتنی در سیال محیط

[1]. You et al.

ویسکوالاستیک با تغییر اعداد دبورا و مویینگی در شکل (۱-۲۹) به نمایش درآمده است. مشخص است با افزایش اعداد دبورا و مویینگی شکل دوکی مانند قطره پیشروی کرده و دنباله انتهایی قطره بلندتر می‌گردد. شکل‌پذیری قطره وابسته به ضریب درگ (C_d) می‌باشد. با افزایش اعداد دبورا یا مویینگی ضریب درگ کاهش پیدا می‌کند و قطره قابلیت بیشتری برای تغییر شکل دارد. زیرا، با افزایش این اعداد خطوط جریان توسعه می‌یابد.

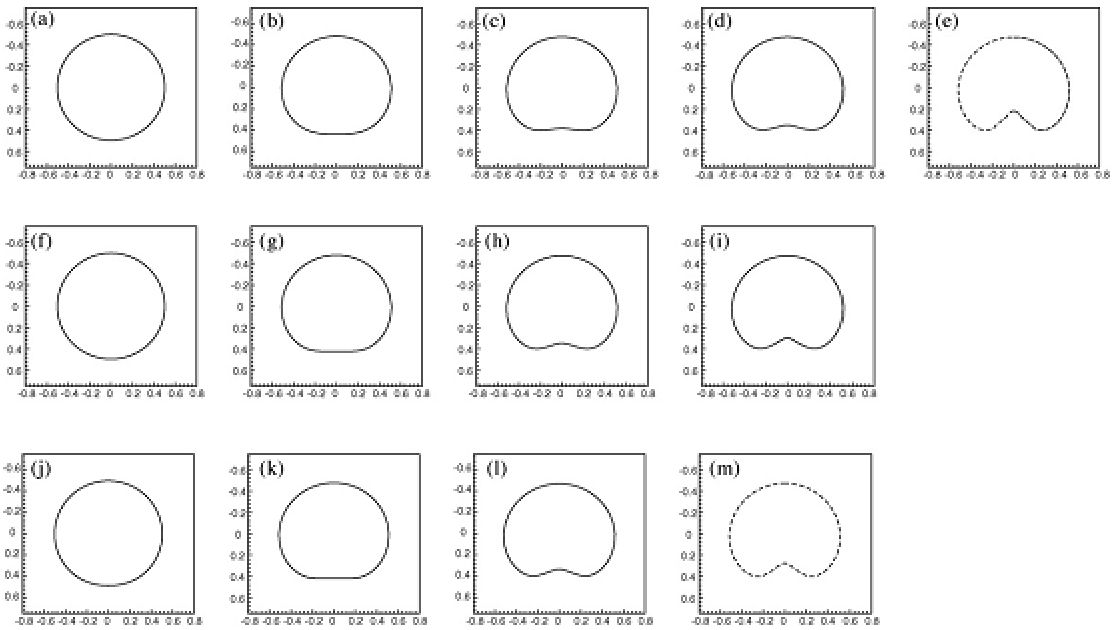


شکل (۱-۲۹): شکل پایای برخاست قطرات نیوتنی در سیال محیط FENE-CR

$$\mathrm{Re}_T = 0.38, D/D_t = 10, \alpha = 0.5, c = 0.3$$

$a)Ca_T = 0.0619, De_T = 0.190, C_d = 58.83; b)Ca_T = 0.619, De_T = 0.190, C_d = 58.80;$
$c)Ca_T = 1.24, De_T = 0.190, C_d = 58.78; d)Ca_T = 0.0618, De_T = 0.475, C_d = 58.68;$
$e)Ca_T = 0.624, De_T = 0.480, C_d = 57.94; f)Ca_T = 1.25, De_T = 0.482, C_d = 57.51;$
$g)Ca_T = 0.0626, De_T = 2.41, C_d = 57.49; h)Ca_T = 0.639, De_T = 2.46, C_d = 55.13;$
$i)Ca_T = 0.834, De_T = 2.47, C_d = 54.77; j)Ca_T = 0.0634, De_T = 4.88, C_d = 56.00;$
$k)Ca_T = 0.647, De_T = 4.98, C_d = 53.77; l)Ca_T = 0.779, De_T = 4.99, C_d = 53.44$

در شکل‌های بالا مقادیر α, c ضرایب ثابت مدل FENE-CR می‌باشند. یو و همکاران [۱۵] همچنین شکل پایای برخاست قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی را شبیه سازی نمودند که می‌توان در شکل (۱-۳۰) مشاهده نمود.



شکل (۱-۳۰): شکل پایای برخاست قطره FENE-CR در سیال نیوتنی با

$$\mathrm{Re}_T = 0.57, D / D_t = 10, \alpha = 0.5, c = 0.3$$

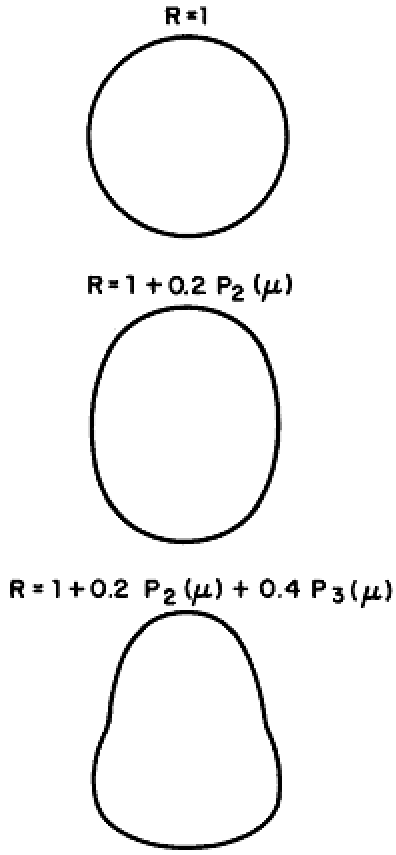
$$\begin{aligned}
&a)Ca_T = 0.0579, De_T = 0.322, C_d = 38.71; b)Ca_T = 0.565De_T = 0.226, C_d = 41.78;\\
&c)Ca_T = 1.12, De_T = 0.224, C_d = 42.65; d)Ca_T = 1.39, De_T = 0.223, C_d = 42.93;\\
&e)Ca_T = 2.77, De_T = 0.221, C_d = 42.93; f)Ca_T = 0.0583, De_T = 0.583, C_d = 39.24;\\
&g)Ca_T = 0.563, De_T = 0.563, C_d = 42.01; h)Ca_T = 1.11, De_T = 0.557, C_d = 42.96;\\
&i)Ca_T = 1.39, De_T = 0.555, C_d = 43.29; j)Ca_T = 0.0578, De_T = 1.16, C_d = 39.95;\\
&k)Ca_T = 0.561, De_T = 1.12, C_d = 42.29; l)Ca_T = 1.11, De_T = 1.11, C_d = 43.41;\\
&m)Ca_T = 1.39, De_T = 1.11, C_d = 43.41.
\end{aligned}$$

۱-۲-۴ سقوط قطره غیرنیوتنی در سیال غیرنیوتنی

در مورد شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک در سیال ویسکوالاستیک تحقیقاتی کمتری صورت گرفته است. در سال ۱۹۷۱ واگنر و اسلاتری[1] [۱۹] با استفاده از حل تحلیلی توانستند شکل پایای قطره

[1]. Wagner and Slattery

ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال ویسکوالاستیک محیط را بدست آورند. آن‌ها برای مدلسازی فاز قطره و سیال محیط از مدل سیال مرتبه سه برای هر دو فاز بهره بردند. روش حل آنها استفاده از تکنیک حساب اغتشاشات برای هر دو سیال قطره و محیط بوده است. نتایج بدست آمده از حل تحلیلی این تحقیق در شکل (۱-۳۱) قابل مشاهده می‌باشد.



شکل (۱-۳۱): شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال غیرنیوتنی

در شکل فوق، سه قطره در حال سقوط خزشی در سیال غیرنیوتنی به نمایش در آمده است، شکل اول از بالا مربوط به سقوط قطره نیوتنی می‌باشد در حقیقت در این شکل اولین جمله از حل تحلیلی به نمایش درآمده است، شکل دوم مربوط به زمانی است که جمله دوم از معادله مرز قطره بدست آمده از حل تحلیلی، تأثیر داده شده است و آخرین شکل سه جمله از حل تحلیلی را شامل می‌گردد. همانطور که می‌بینیم، هر چه تعداد جملات حساب اغتشاشات بیشتر شود دقت شکل تولیدی بیشتر می‌گردد. در شکل فوق توابع $P_2(\mu), P_3(\mu)$ بترتیب توابع لژاندر درجه دو و سه می‌باشند.

۱-۳ معرفی تحقیق حاضر

در این تحقیق شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال نیوتنی بصورت آزمایشگاهی و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در مشاهدات آزمایشگاهی از محلول آب/گلیسیرین و پلیمر گزانتام به عنوان سیال قطره و از روغن سیلیکون برای سیال نیوتنی محیط استفاده شده است. روش آزمایشگاهی عکس‌برداری با دوربین سرعت بالا و پردازش تصویر می‌باشد. در حل تحلیلی از مدل اولروید-بی و گزیکس برای شبیه سازی قطره ویسکوالاستیک و از مدل نیوتنی برای سیال محیط استفاده شده است. روش حل تحلیلی استفاده از حساب اغتشاشات برای هر دو سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک می‌باشد و اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفته‌اند. استفاده از مدل‌های ذکر شده برای قطره ویسکوالاستیک به دلیل دارا بودن زمان رهایی از تنش نسبت به تحقیقات صورت پذیرفته در گذشته بهتر می‌باشد. از کاربردهای سقوط قطره ویسکوالاستیک می‌توان به جداسازی سیالات مخلوط در صنعت نفت، مبدل‌های تماس مستقیم، ته‌نشینی املاح موجود در فاضلاب‌های صنعتی و خانگی و ... اشاره نمود. در این تحقیق، اثر تغییرات نسبت ویسکوزیته قطره β، نسبت ویسکوزیته دو سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک k، اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی روی شکل و حرکت قطره بررسی شده است. مشخص شده است که دلیل ایجاد حفره در قسمت انتهایی قطره وجود تمرکز مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک در آن نقطه می‌باشد و پارامترهای مؤثر بر آن مطالعه گردیده است. ضمناً میدان‌های سرعت داخلی قطره ویسکوالاستیک نمایش داده شده و تغییرات این میادین با تغییر پارامترهای مختلف بررسی شده است. هر چند تحقیقات زیادی روی شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک صورت گرفته است اما پژوهش حاضر نخستین تحقیقی محسوب می‌شود که توانسته شکل قطرات در حال سقوط را با مدل اولروید-بی و گزیکس بصورت تحلیلی شبیه‌سازی نماید. در این تحقیق تغییرات شکل و حرکت قطره نسبت به پارامترهای مختلف بررسی شده است. همچنین، مقادیر کمی میدان‌های سرعت داخل قطره برای نخستین بار ارائه و تغییرات آن نسبت به پارامترهای مختلف ارزیابی شده است.

فصل دوم

مشاهدات آزمایشگاهی

مقدمه

در این بخش مکانیزم آزمایش سقوط قطره غیرنیوتنی در فاز نیوتنی، تجهیزات، مواد اولیه مورد نیاز، چگونگی ساخت سیال قطره و محیط، تست‌های رئولوژی مورد نیاز مورد بررسی قرار می‌گیرد.

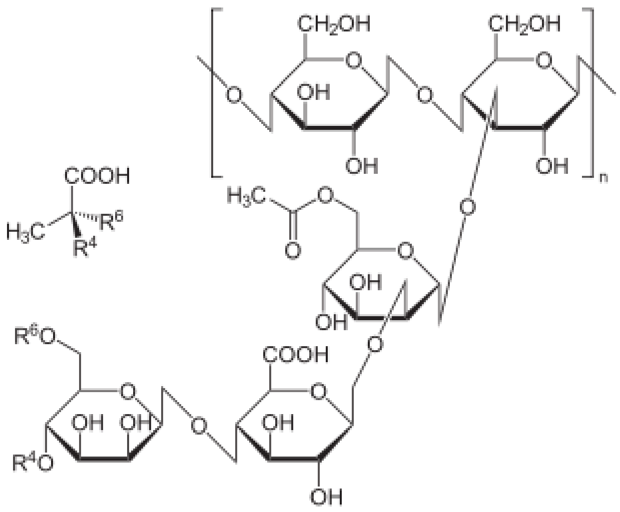
۲-۱ ساختار و مشخصات قطره ویسکوالاستیک و سیال محیط نیوتنی

در این قسمت به توضیح نحوه تولید قطره ویسکوالاستیک و فاز نیوتنی سیال محیط و برخی خواص آن می‌پردازیم. از محلول آب دوبار یونیزه شده (دیونیزه) و گلیسیرین با نسبت حجمی ۸۰:۲۰ و پلیمر گزانتام[1] با نسبت جرمی ۰/۰۸٪ به عنوان فاز قطره استفاده شده است. قطره ویسکوالاستیک شامل دو قسمت حلال نیوتنی (آب دیونیزه و گلیسیرین) و قسمت حل شونده پلیمری (گزانتام) می‌باشد. گزانتام یک پلی ساکارید با جرم مولکولی تقریبی 2×10^6 در دسته پلیمرهای با جرم مولکولی بالا دسته بندی می‌شود. فرمول شیمیایی این پلیمر در دما و فشار استاندارد $C_{35}H_{49}O_{29}(momomer)$ می‌باشد. این پلیمر غیر سمی بوده و آتش زا نمی‌باشد. از کاربردهای این پلیمر در صنایع تولید مواد غذایی (سس های مایونز، رب گوجه فرنگی، آدامس و ...)، پایدارکننده مواد (وسایل آرایش و بهداشتی)، شربت های شکلاتی و... می‌توان نام برد. این پلیمر از تخمیر گلوکز، ساکاروز و یا لاکتوز به وسیله باکتری زانتموناس کاپستریس[2] تولید می‌شود و در دسته پلیمرهای طبیعی طبقه بندی می‌شود. در شکل (۲-۱) ساختار مولکولی این پلیمر قابل مشاهده است.

---

[1]. Xantham Gum

[2]. Xanthomonas campestris bacterium



شکل (۲-۱): ساختار مولکولی پلیمر گزانتام گام در دمای $25^{\circ}c$ و فشار $100kPa$

برای ساخت محلول پلیمری فاز قطره نکات مهمی باید مورد توجه قرار گیرد در غیر این صورت، محلول بدست آمده همگن نمی‌باشد و با گذشت زمان دو فازی شده و قابل ترمیم نمی‌باشد [۱۹]. برای تولید محلول قطره ویسکوالاستیک پس از برداشتن حجم مشخصی از آب و گلیسیرین با نسبت حجمی۸۰:۲۰٪ حجمی در ظروف جداگانه، هر دو فاز به وسیله ترازو با دقت بالا وزن می‌شود و پلیمر گزانتام به اندازه ۰/۰۸٪ جرمی از مجموع وزن آب و گلیسیرین تهیه می‌شود.

برای ساخت فاز قطره نیاز به هم‌زن به جهت مخلوط سازی این سه ماده و تهیه محلولی همگن می‌باشد. از این‌رو، از هم‌زن مغناطیسی استفاده شده است. مکانیزم این هم‌زن این گونه می‌باشد که با قرار دادن یک عدد قرص مغناطیسی داخل بشر حاوی سیال مورد نظر و قرار دادن بشر روی دستگاه و پس از تنظیم آن به گونه‌ای که قرص در مرکز بشر قرار گیرد می‌توان با تنظیم سرعت زاویه‌ای قرص مورد نظر به سرعت مطلوب برای هم‌زدن دست پیدا کرد. هم‌زن مغناطیسی مورد استفاده در این تحقیق در شکل (۲-۲) نمایش داده شده است.

شکل (۲-۲): هم‌زن مغناطیسی مورد استفاده به جهت مخلوط کردن فازهای تشکیل دهنده قطره

طریقه ساخت فاز قطره به این صورت است که، ابتدا پلیمر گزانتام که مقدار بسیار کمی نسبت به فاز نیوتنی قطره دارد را در کف بشر مناسب قرار می‌دهیم، آب مقطر را به طور کامل به آن اضافه می‌کنیم و اجازه می‌دهیم ساعت‌ها با سرعت کم هم بخورد. پس از اینکه محلول شامل گزانتام و آب مقطر به شکل کاملاً همگن درآمد در چند مرحله گلیسیرین را به این محلول اضافه می‌کنیم این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا تمام گلیسیرین وارد بشر شود. یکی از ویژگی‌های پلیمر گزانتام این است که در مقابل نرخ برش مقاومت می‌کند و علاقه چندانی برای تغییر ندارد به همین جهت باید حداقل به مدت ۲۴ ساعت عملیات هم‌زدن ادامه یابد. پس از گذشت این مدت محلول تولیدی کاملاً همگن می‌شود و باید حداقل یک هفته استراحت نماید تا کاملاً پایدار شده و تنش‌های موجود در آن از بین رود. خصوصیات فیزیکی فاز قطره شامل: چگالی $\tilde{\rho}=1.20\dfrac{gr}{cm^3}$ و ویسکوزیته در نرخ برش صفر $\tilde{\eta}_0=9.5(pa.s)$ می‌باشد.

قطره ویسکوالاستیک در روغن سیلیکون[1] که یک سیال نیوتنی است، سقوط می‌کند. روغن سیلیکون دارای خصوصیات زیر می‌باشد.

- تغییرات کم خواص فیزیکی با تغییر دمای محیط

[1]. Silicon Oil

- قابلیت استفاده در گستره دمایی -40 تا $280^{\circ}c$
- حل نشدن در آب
- دارای کشش سطحی پایین
- آتش‌زایی کم
- گستردگی در محدوده ویسکوزیته $(0.65-10^{6}Cst)$

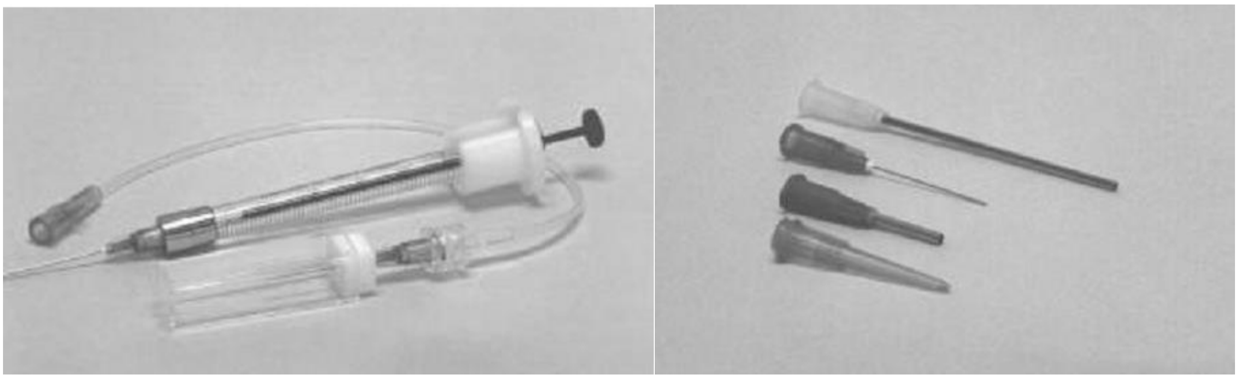
از کاربردهای روغن سیلیکون می‌توان به روان کننده، استفاده به عنوان سیال صنعتی به دلیل دارا بودن گستردگی ویسکوزیته در تلف کننده‌های انرژی (کمک فنرها)، کاربرد در صنایع بویژه در اتومبیل و اثاثیه منزل، کاربرد در وسایل الکتریکی و الکترونیکی به دلیل نارسانا و عایق بودن نسبت به جریان الکتریکی و ... اشاره کرد. در آزمایش صورت گرفته از دو روغن سیلیکون استفاده شده است که دارای چگالی $\rho=0.96\dfrac{gr}{cm^{3}}$ برای هر دو روغن و ویسکوزیته $\eta=0.45,0.83\ (pa.s)$ می‌باشند. این خواص بوسیله آزمایش نمونه مورد استفاده توسط پژوهشکده رنگ و پلیمر ایران و پژوهشکده شیمی و مهندسی شیمی ایران بدست آمده است.

۲-۲ نیروی کشش سطحی

نیروی کشش سطحی یکی از مهم‌ترین نیروهای وارد بر قطرات در حال سقوط است و مستقیماً روی شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک تأثیر می‌گذارد. البته باید متذکر شد که، روش‌هایی وجود دارد که می‌توان از طریق آن با داشتن کشش سطحی هر فاز با هوا مقدار کشش سطحی بین دو سیال را بدست آورد که اغلب به صورت یک رابطه تحلیلی می‌باشند. اما باید توجه داشت که، این روش‌ها محدودیت بسیار زیادی نسبت به خواص مواد مورد نظر دارند. چند نمونه از این روش‌ها برای بدست آوردن نیروی کشش سطحی بین قطره ویسکوالاستیک و روغن سیلیکون، مورد استفاده قرار گرفت اما نتوانست به نتیجه مطلوب برسد. در این تحقیق مقدار نیروی کشش سطحی بین دو سیال برای بدست آوردن عدد بی‌بعد و بسیار مهم مویینگی مورد نیاز می‌باشد که توسط پژوهشکده شیمی و مهندسی شیمی ایران اندازه‌گیری شده است. در این مجموعه با

استفاده از روش قطره معلق[1] و دستگاه اندازه گیری نوری زاویه تماس مدلOCA20 کمپانی Data physics نیروی کشش سطحی بین دو سیال محاسبه شده است که یکی از معروفترین روش‌ها برای محاسبه کشش سطحی بین دو سیال می‌باشد.

روش کار به این صورت است که، فاز سیال محیط که در اینجا نیوتنی می‌باشد را در یک سلول کوچک قرار می‌دهند و فاز قطره را در سرنگی با حجم مشخص می‌ریزند، سرنگ نامبرده دارای نازل‌هایی با قطر مختلف می‌باشد که قطر مناسب را با توجه به دو سیال قطره و محیط اختیار می‌کنند. منظور از اختیار نازل با قطر مناسب این است که بسته به نوع دو ماده باید قطره در سرنازل به گونه‌ای تشکیل گردد که دیواره سلول حاوی سیال محیط روی شکل قطره تأثیر نگذارد. در شکل (۲-۳) نمایی از این نازل‌ها، سرنگ و سلول مورد استفاده قابل مشاهده می‌باشد.



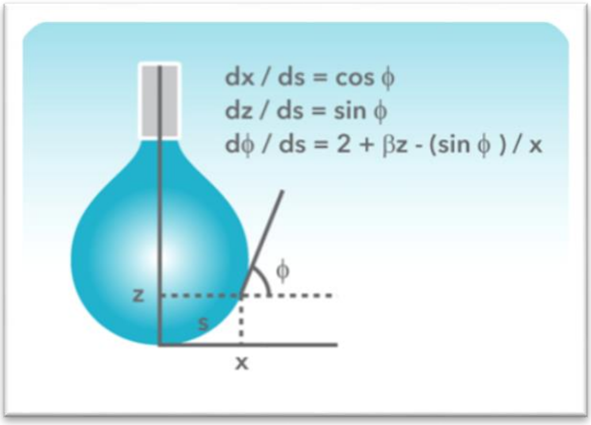
شکل (۲-۳): سرنگ، سلول و نازل‌های مورد استفاده در تست کشش سطحی بین دو سیال

یکی دیگر از بخش‌های دستگاه اندازه گیری کشش سطحی بین دو سیال "دستگاه اندازه گیری نوری زاویه تماس" می‌باشد. ضریب کشش سطحی با استفاده از رابطه زیر قابل محاسبه است.

$$\Gamma = \Delta\rho . g . \frac{{R_o}^2}{\beta} \qquad (۱-۲)$$

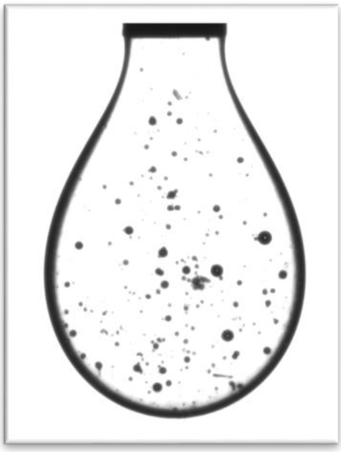
[1]. Pendant drop

در رابطه بالا، $\Delta\rho$ اختلاف چگالی دوسیال مورد تست، g شتاب گرانش، R_0 شعاع مرکز انحنای نوک قطره و β ضریب شکل قطره می‌باشد. نحوه محاسبه ضریب شکل را می‌توانید در شکل (۲-۴) مشاهده نمایید.



شکل (۲-۴): محاسبه ضریب شکل برای اندازه گیری کشش سطحی بین دو سیال

دستگاه اندازه گیری زاویه تماس یک دوربین با وضوح تصویر[1] بالا است که تصاویر مورد نظر را ضبط و توسط نرم افزار مجموعه، مقدار نیروی کشش سطحی را اندازه گیری می‌کند. در شکل (۲-۵) نمونه‌ای از تصویر قطره تشکیل شده در سر نازل برای محلول ۰/۰۸٪ گزانتام- آب/گلیسیرین در سیال نیوتنی روغن سیلیکون به نمایش درآمده است.



شکل(۲-۵): تشکیل قطره برای اندازه‌گیری نیروی کشش سطحی قطره ویسکوالاستیک ۰/۰۸٪ گزانتام و آب/گلیسیرین در روغن سیلیکون

[1]. Resulation

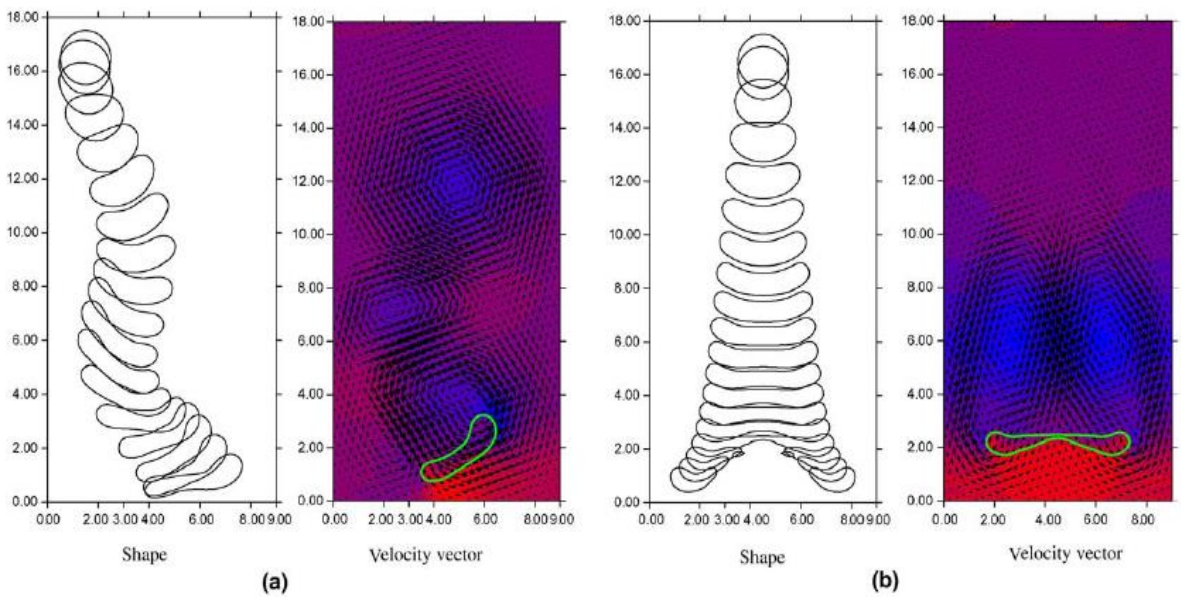
در شکل بالا ذرات سیاه رنگی داخل قطره نمایان شده است این ذرات پتاسیم پرمنگنات می‌باشد که برای عکس‌برداری با دوربین سرعت بالا در حین آزمایش به محلول قطره اضافه شده است. زیرا سیال ویسکوالاستیک فاز قطره شفاف و بی‌رنگ بوده همچنین روغن سیلیکون مورد استفاده به عنوان فاز نیوتنی، یک سیال کاملاً شفاف و بی‌رنگ می‌باشد. از این‌رو، عکس‌برداری دو سیال شفاف امکان‌پذیر نیست. بعلاوه، برای عکس‌برداری با دوربین سرعت بالا نیاز به نورپردازی مناسب می‌باشد که این مهم از طریق یک نورافکن 1KW تأمین می‌شود به همین جهت در صورتی که هیچ افزودنی برای مشخص شدن مرز بین قطره و سیال نیوتنی محیط به هر کدام از سیال‌ها اضافه نشود، عکس‌برداری و تشخیص فاز قطره از فاز سیال امکان‌پذیر نمی‌باشد.

در این تحقیق از پرمنگنات برای رنگ‌دار شدن فاز قطره استفاده شده است. دلیل استفاده از پرمنگنات خنثی بودن آن با فاز قطره می‌باشد به این صورت که خواص سیال قطره تغییرات چندانی نمی‌کند. تمامی نتایج آزمایش‌های بدست آمده در این تحقیق، اعم از ویسکوزیته سیال قطره، نیروی کشش سطحی بین دو سیال قطره و محیط، مدول‌های صلبیت فاز قطره و عملیات‌های دیگر آزمایشگاهی با نمونه واقعی به همراه مقدار اندگی پرمنگنات انجام شده است. نتیجه این کار باعث می‌شود که هنگام استفاده از مدل تحلیلی برای مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، داده‌های ورودی به عنوان خواص رئولوژی به روش تحلیلی مربوطه، کاملاً با ماده مورد استفاده در مشاهدات آزمایشگاهی برابری دارد.

۲-۳ اندازه بهینه سلول حاوی سیال نیوتنی

روغن سیلیکون مورد نظر به عنوان سیال نیوتنی در یک سلول پلکسی به ابعاد $10\times10\times50\,cm$ ریخته می‌شود. ابعاد بهینه سلول برای پایدار شدن قطره در حال سقوط/برخاست به شعاع معادل a برابر $13a\times13a\times18a$ می‌باشد [۱۱]. به جهت اطمینان از پایدار شدن شکل قطره در این تحقیق دوربین سرعت

بالا جهت عکسبرداری، در ارتفاع $40cm$ از لبه ابتدایی سلول قرار گرفته است. نکته قابل توجه در مورد پایداری قطره این است که زمان مورد نیاز برای پایداری شکل قطرات در حال سقوط کم می‌باشد و بعد از پیمودن فاصله کمی از لبه سلول شکل قطره ثابت می‌گردد. طبق رابطه بالا برای قطره‌ای با شعاع معادل $5mm$، تنها $9cm$ ارتفاع نیاز است که به شکل پایدار و سرعت نهایی خود برسد. اثر دیواره سلول بر شکل قطره هم نباید فراموش شود. زیرا، در صورتی که ابعاد سلول مورد استفاده کوچک و یا قطره در هنگام جدا شدن از نازل در کنار دیواره رها شود بر شکل و حرکت قطره تأثیر می‌گذارد [۲۰]. در شکل (۲-۶) می‌توانید اثر دیواره بر شکل و حرکت قطره با گذشت زمان را مشاهده نمایید.



شکل (۲-۶): اثر دیواره بر حرکت و شکل قطره در حال سقوط با $Re = 50, We = 50, \lambda_\rho = 1.125, \lambda_\mu = 50$.

a) موقعیت اولیه قطره نزدیک دیواره b) موقعیت اولیه قطره در مرکز سلول

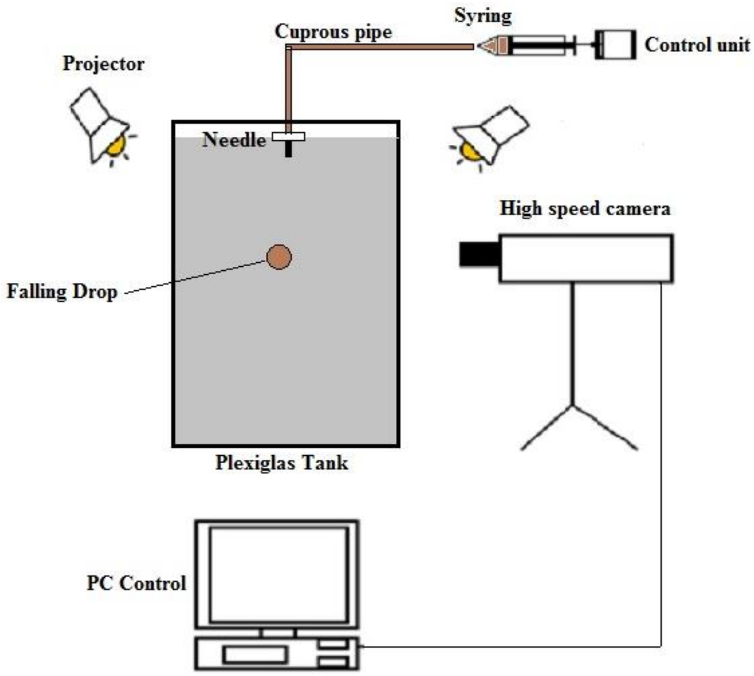
۲-۴ مکانیزم آزمایش

در این تحقیق حرکت قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط، خزشی $Re \ll 1$ فرض شده است، به همین جهت باید با توجه به سرعت نهایی قطره و اندازه‌گیری عدد رینولدز به ازای قطر معادل قطره

ویسکوالاستیک، این شرط برقرار باشد. در مورد سرعت قطره دو پارامتر اختلاف چگالی فاز قطره- سیال محیط و ویسکوزیته سیال محیط بسیار تأثیر گذار هستند. در تحقیق حاضر پارامتر اختلاف چگالی نمی-توانست زیاد تأثیرگذار باشد، چرا که روغن سیلیکون با اینکه دارای محدوده گسترده‌ای از لزجت می‌باشد ولی چگالی آنها تقریباً یکسان بوده و تفاوت زیادی باهم ندارند. این امر برای فاز قطره که سیال ویسکوالاستیک ما را شامل می‌شود هم صادق است. اما به راحتی می‌توان ویسکوزیته روغن سیلیکون را به عنوان سیال نیوتنی تغییر داد. برای دست یافتن به این مهم کافی‌است، ویسکوزیته مورد نظر که جریان خزشی را نتیجه دهد، تهیه نمود.

برای ثبت شکل‌ها و نحوه حرکت قطرات در حال سقوط از مکانیزم عکسبرداری با دوربین سرعت بالا[1] استفاده می‌شود. این کار در دانشگاه صنعتی شریف صورت گرفته است. دوربین سرعت بالای مورد استفاده قابلیت ذخیره حداکثر ۵۰۰۰ عکس در مدت زمان ۵ ثانیه به صورت سیاه و سفید را دارا بوده است. مکانیزم آزمایش به این شکل است که، یک دستگاه سیلندر و پیستون متصل به یک موتور الکتریکی حاوی سیال قطره ویسکوالاستیک با استفاده از لوله‌هایی مسی به نازلی در بالای سلول حاوی روغن سیلیکون به عنوان فاز نیوتنی محیط متصل می‌باشد. با استفاده از کلید متصل به منبع ذخیره و موتور الکتریکی می‌توان به کمک پیچ دنده‌ریزی که بین موتور و پیستون قرار دارد سیال ویسکوالاستیک را در لوله به جریان انداخت و با استفاده از نازل موجود در لبه ابتدایی سلول، می‌توان قطره مورد نظر را تولید کرد. با وجود نازل‌هایی با قطر متفاوت توانایی تولید قطرات با حجم‌های مختلف امکان‌پذیر می‌شود. شماتیک مکانیزم آزمایش در شکل (۲-۷) قابل مشاهده است.

[1]. High Speed Camera

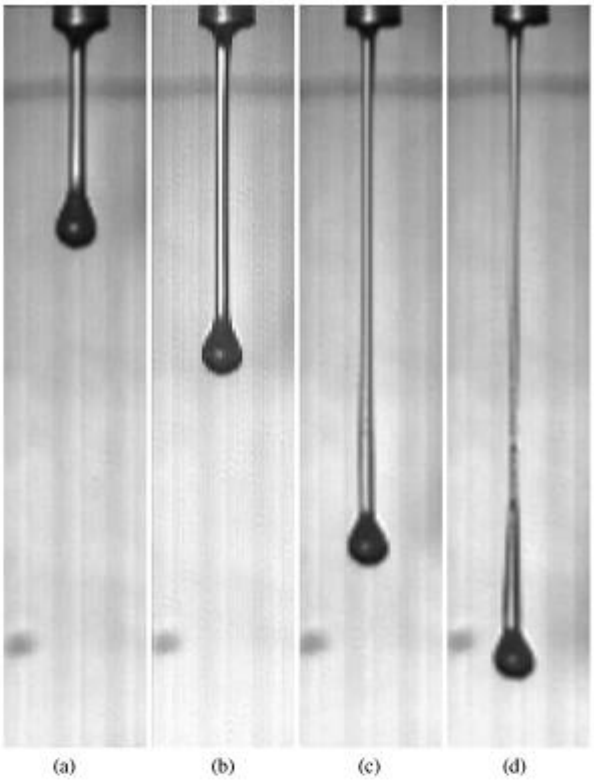


شکل (۲-۷): شماتیک مکانیزم آزمایش سقوط قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی

برای دست‌یابی به قطرات با قطر مختلف، از نازل‌هایی با قطر خروجی متفاوت استفاده شده است، حتی برای تولید قطرات با قطر بزرگ‌تر از بورت کمک گرفته شده است. نکته بسیار مهم در مورد مکانیزم آزمایش این است که باید سر نازل‌ها در سیال نیوتنی قرار داشته باشند. زیرا در صورتی که قطره ابتدا در هوای محیط رها و سپس وارد سلول شود تغییر فاز موجود سبب ایجاد تغییر شکل اولیه در قطره می‌گردد. از سوی دیگر، رها سازی قطره در فاز هوای محیط به دلیل اختلاف چگالی زیاد بین فاز قطره و هوا باعث سرعت گرفتن قطره شده و با فرورفتن در سیال نیوتنی مسأله تبدیل به سقوط قطره با سرعت وشکل اولیه می‌گردد.

نکته بسیار مهم دیگر در تولید قطرات این است که، سر نازل‌هایی که برای تشکیل قطرات استفاده می-شود باید کاملاً صاف باشد چرا که در صورت زاویه دار بودن سر نازل قطره تولیدی کاملاً کروی و متقارن نخواهد بود، بنابراین بر شکل پایای قطره تأثیر نامطلوب می‌گذارد و قطره تولیدی متقارن نمی‌گردد.

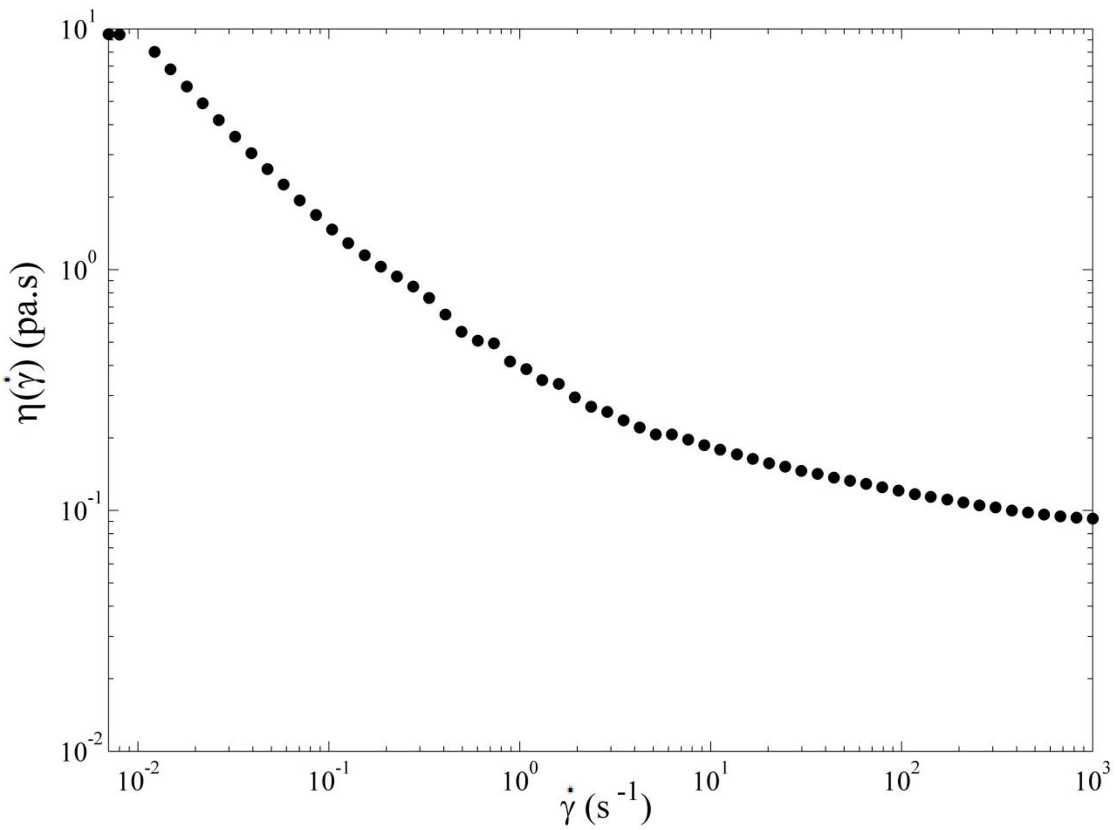
هرچه درصد گزانتام در محلول قطره بیشتر باشد قطره سخت‌تر از سر نازل رها می‌شود یعنی فیلامان[1] قطره بیشتر می‌شود. برای روشن‌تر شدن این قضیه باید اشاره داشت که با افزایش درصد پلیمر سیال ویسکوالاستیک خاصیت الاستیک سیال رشد می‌کند. این امر سبب بالا رفتن زمان رهایی از تنش λ شده و در پی آن قطره مورد نظر تا ارتفاع زیادی از سلول محتوی سیال نیوتنی به صورت دنباله‌دار پیش می‌رود و از نازل رها نمی‌شود [۲۱]. در شکل (۲-۸) رشته دنباله‌دار قطره ویسکوالاستیک در حال رها شدن از دهانه نازل به نمایش گذاشته شده است.



شکل (۲-۸): فیلامان قطره ویسکوالاستیک در a) $t = 0\,\text{s}$، b) $t = 1.492\,\text{s}$، c) $4.324\,\text{s}$، d) $t = 5.506s$

نمودار تغییرات ویسکوزیته محلول ۰/۰۸٪ گزانتام با آب/گلیسیرین با تغییر نرخ برش در شکل (۲-۹) قابل مشاهده است. مقادیر ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک بر حسب تغییرات تنش برشی در پژوهشکده رنگ و پلیمر ایران اندازه‌گیری شده است.

[1]. Filament



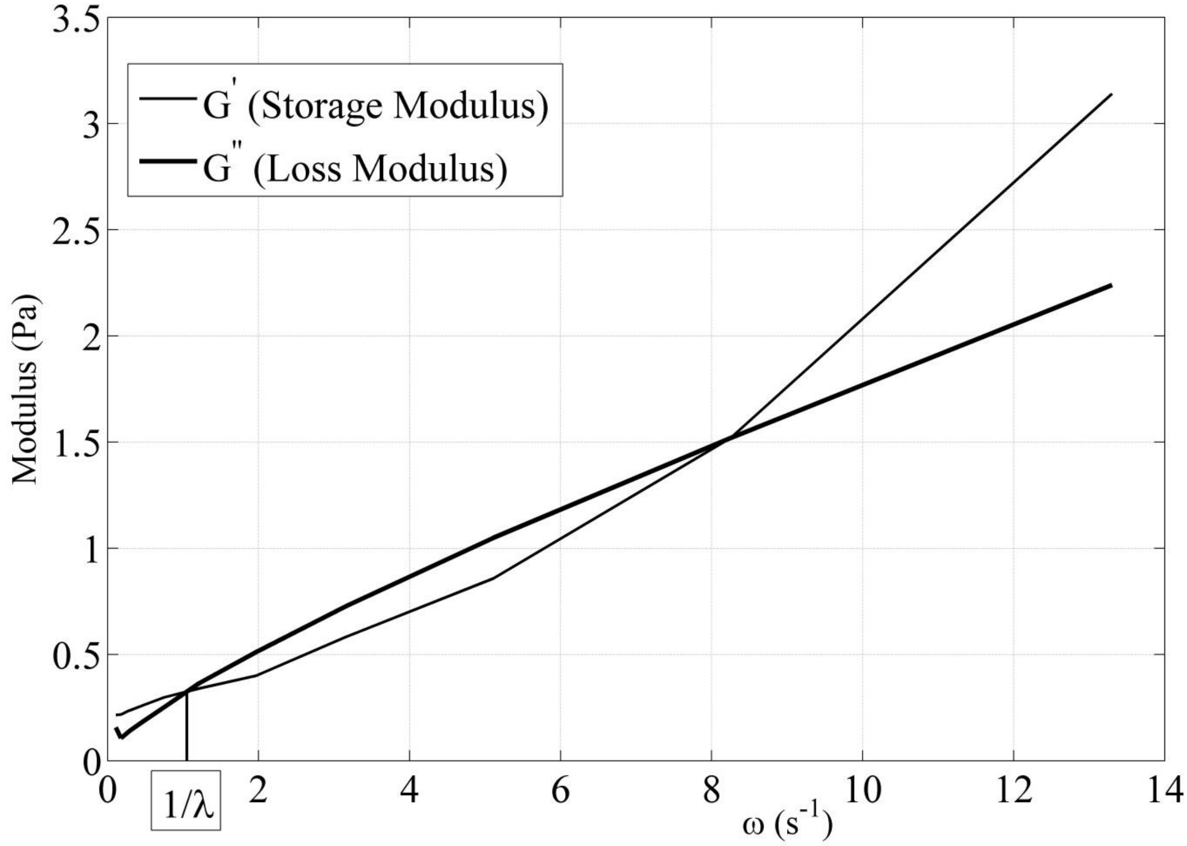
شکل (۲-۹): تغییرات ویسکوزیته سیال ۰/۰۸٪ گزانتام با آب/گلیسیرین بر حسب تغییر نرخ برش

۲-۵ زمان رهایی از تنش

یکی از مهمترین پارامترهای تأثیر گذار بر سقوط قطره ویسکوالاستیک زمان رهایی از تنش است. زمان رهایی از تنش زمانی است که معرف فاصله زمانی بین تنش اعمالی و تغییر شکل حاصل از آن است. یکی از راه‌های تخمین زمان رهایی از تنش تفسیر نتایج G', G'' براساس مدل ماکسول است. مدول‌های G', G''، مدول‌های مادی هستند که از آزمون نوسان حاصل می‌شوند. به این صورت که، با ترسیم نمودار تغییرات مدول‌های G', G'' بر حسب فرکانس اعمالی، اولین نقطه برخورد این مدول‌ها بر حسب فرکانس برابر با عکس زمان رهایی از تنش اول $\frac{1}{\lambda}$ می‌باشد. باید توجه داشت یک ماده دارای یک طیف رهایی از تنش می‌باشد نه یک زمان رهایی از تنش اما در اینجا ما فقط به اولین زمان رهایی از تنش برای محاسبه عدد دبورا بسنده کرده‌ایم.

در شکل (۲-۱۰) می‌توانید نقطه برخورد مدول‌های الاستیک و به تبعه آن، عکس مقدار رهایی از تنش

را مشاهده نمایید. برای قطره ویسکوالاستیک مورد آزمایش که حاوی ترکیب ۲۰:۸۰ آب و گلیسیرین و ۰,۰۸٪ پلیمر گزانتام می‌باشد، $\frac{1}{\lambda} = 1.0523 \ (s^{-1})$ است. از اینرو، زمان رهایی از تنش اول $\lambda = 0.9503 \ (s)$ می‌باشد. مدول‌های الاستیک $G^{'}, G^{''}$ قطره ویسکوالاستیک نسبت به تغییرات فرکانس در پژوهشکده رنگ و پلیمر ایران اندازه گیری شده است.



شکل (۲-۱۰): بدست آوردن زمان رهایی از تنش اول با استفاده از برخورد مدول‌های صلبیت

فصل سوم

معادلات حاکم

مقدمه

در این بخش معادلات حاکم بر جریان قطره ویسکوالاستیک و سیال محیط ویسکوز در دستگاه مختصات کروی برای هر دو سیال ارائه شده است. این دستگاه مختصات، جهت مطالعه جریان و شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط استفاده می‌شود. در تحقیق حاضر، همه متغیرهای جریان به‌صورت بی‌بعد بررسی شده‌اند.

۳-۱ پارامترهای بی بعد جریان

در این تحقیق از دستگاه مختصات کروی برای مطالعه جریان، تانسورهای تنش، بردارهای سرعت و فشار داخل و خارج قطره استفاده شده است. پارامترهای بی‌بعد مورد استفاده برای جریان داخلی (قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط) و جریان خارجی (سیال نیوتنی) شامل موارد زیر می‌باشد:

$$\tilde{\tau}^* = \frac{\tilde{\tau} R}{\tilde{\eta}_0 U_0}, \quad \tilde{u}^* = \frac{\tilde{u}}{U_0}, \quad \tilde{D}^* = \frac{\tilde{D} R}{U_0}, \quad \hat{d}^* = \frac{\hat{d} R}{U_0} \qquad \text{(۳-۱الف)}$$

$$\tau^* = \frac{\tau R}{\eta U_\infty}, \quad u^* = \frac{u}{U_\infty} \qquad \text{(۳-۱ب)}$$

در روابط بالا و در ادامه تحقیق علامت $\sim$ برای قطره ویسکوالاستیک و بدون علامت مربوط به سیال نیوتنی می باشد.

در پارامترهای بی‌بعد ذکر شده، R شعاع معادل قطره، U_0 سرعت مرجع مربوط به داخل قطره ویسکوالاستیک، $\tilde{\eta}_0$ ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک در نرخ برش صفر، $\tilde{D}$ تانسور تغییر شکل فاز قطره، $\hat{d}$ اپراتور تانسور مشتقات همرفتی و U_∞ سرعت نهایی قطره و سیال نیوتنی در مرز مشترک آنها می‌باشد.

در این تحقیق اعداد بدون بعد Re برای جریان نیوتنی خارجی و De و Ca برای جریان داخلی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho U_\infty R}{\eta} \qquad \text{(۳-۲)}$$

$$De = \frac{\lambda U_0}{R} = \frac{\lambda U_\infty}{(k+1)R} \tag{۳-۳}$$

$$Ca = \frac{\eta U_\infty}{\Gamma} \tag{۳-۴}$$

در روابط بالا k نسبت ویسکوزیته قطره در نرخ برش صفر به ویسکوزیته سیال خارجی می‌باشد. با استفاده از این عدد می‌توان بین سرعت مرجع جریان داخل قطره U_0 و سرعت نهایی U_∞ رابطه‌ای بوجود آورد که به صورت زیر می‌باشد:

$$U_0 = \frac{U_\infty}{(k+1)} \tag{۳-۵}$$

۳-۲ معادلات حاکم بر جریان و شرایط مرزی مربوطه

معادلات حاکم بر قطره ویسکوالاستیک و سیال ویسکوز شامل معادلات پیوستگی و مومنتم می‌باشد که در این تحقیق با فرض خزشی بودن جریان، معادلات مومنتم به معادلات استوکس[۱] تبدیل می‌شود.

معادلات پیوستگی و مومنتم برای قطره ویسکوالاستیک به شرح زیر است:

$$\nabla . \tilde{u} = 0 \tag{۳-۶}$$

$$\nabla \tilde{p} = \nabla . \tilde{\tau} + \tilde{\rho} g \tag{۳-۷}$$

در روابط بالا $\tilde{p}$ و $\tilde{u}$، به‌ترتیب، مقادیر فشار و سرعت قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط و $\tilde{\tau}$ تانسور تنش قطره ویسکوالاستیک می‌باشد.

معادلات پیوستگی و مومنتم برای سیال ویسکوز خارجی از قرار زیر است:

$$\nabla . u = 0 \tag{۳-۸}$$

[۱]. Stokes equation

$$\nabla p = \nabla.\tau + \rho g \qquad (۹-۳)$$

که در آن

$$\tau = 2\eta D = \eta(\nabla u + \nabla^T u) \qquad (۱۰-۳)$$

در رابطه بالا τ تانسور تنش و D تانسور تغییر شکل می‌باشد.

در تحقیق حاضر قطره پایای ویسکوالاستیک دارای تقارن محوری بوده و v_ϕ و $\frac{\partial}{\partial \phi}$ همواره صفر می‌باشد.

معادلات بی‌بعد حاکم بر جریان خارجی دائم سیال ویسکوز تراکم ناپذیر، شامل معادلات پیوستگی و مومنتوم در جهات r ، θ و ϕ به شکل زیر می‌باشند:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} = 0 \qquad (۳-۱۱\text{الف})$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tau_{rr}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta r}\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tau_{\phi r} - \frac{\tau_{\theta\theta}+\tau_{\phi\phi}}{r} + \frac{\rho g_r R^2}{\eta U_\infty} \qquad (۳-۱۱\text{ب})$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial\theta} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\theta}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta\theta}\sin\theta) + \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tau_{\phi\theta}\frac{(\tau_{\theta r}-\tau_{r\theta})-\tau_{\phi\phi}\cot\theta}{r} + \frac{\rho g_\theta R^2}{\eta U_\infty}\end{aligned} \qquad (۳-۱۱\text{ج})$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\phi} = \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tau_{r\phi}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{\theta\phi}\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tau_{\phi\phi} \\ + \frac{(\tau_{\phi r}-\tau_{r\phi})+\tau_{\phi\theta}\cot\theta}{r} + \frac{\rho g_\phi R^2}{\eta U_\infty}\end{aligned} \qquad (۳-۱۱\text{د})$$

برای فاز قطره شکل بی بعد معادلات پیوستگی و مومنتم کمی متفاوت بوده و به شکل زیر می‌باشد.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \tilde{v}_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{v}_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tilde{v}_\phi}{\partial\phi} = 0 \qquad (۳-۱۲\text{الف})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\tilde{\tau}_{rr}) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{\tau}_{\theta r}\sin\theta) + \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tilde{\tau}_{\phi r} - \frac{\tilde{\tau}_{\theta\theta}+\tilde{\tau}_{\phi\phi}}{r} + \frac{\tilde{\rho} g_r R^2}{\tilde{\eta}_0 U_0}\end{aligned} \qquad (۳-۱۲\text{ب})$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\theta}=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tilde{\tau}_{r\theta})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{\tau}_{\theta\theta}\sin\theta)+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tilde{\tau}_{\phi\theta}\frac{(\tilde{\tau}_{\theta r}-\tilde{\tau}_{r\theta})-\tilde{\tau}_{\phi\phi}\cot\theta}{r}+\frac{\tilde{\rho}g_\theta R^2}{\tilde{\eta}_0 U_0} \tag{۳-۱۲ج}$$

$$\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\phi}=\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}(r^3\tilde{\tau}_{r\phi})+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\tilde{\tau}_{\theta\phi}\sin\theta)+ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\tilde{\tau}_{\phi\phi}+\frac{(\tilde{\tau}_{\phi r}-\tilde{\tau}_{r\phi})+\tilde{\tau}_{\phi\theta}\cot\theta}{r}+\frac{\tilde{\rho}g_\phi R^2}{\tilde{\eta}_0 U_0} \tag{۳-۱۲د}$$

در روابط بالا $g_r = g$ و $g_\theta = g_\phi = 0$ و تانسور تنش برای جریان داخلی و خارجی، یک تانسور متقارن است. مقادیر تانسور تنش قطره ویسکوالاستیک با توجه به مدل مربوطه که در ادامه به آن می‌پردازیم حاصل می‌گردد.

شرایط مرزی وارده بر مسأله سقوط قطره به شکل زیر می‌باشد.

- مؤلفه‌های مماسی سرعت در فصل مشترک قطره ویسکوالاستیک و سیال ویسکوز صفر می‌باشند.

$$at: r=1 \rightarrow u_r = 0 \tag{۳-۱۳الف}$$

$$at: r=1 \rightarrow \tilde{u}_r = 0 \tag{۳-۱۳ب}$$

- مؤلفه‌های عمودی سرعت در فصل مشترک دو سیال دارای رابطه‌ای به شکل زیر هستند.

$$u_\theta = \frac{1}{k+1}\tilde{u}_\theta \tag{۳-۱۴}$$

در رابطه بالا ضریب $\frac{1}{k+1}$ ناشی از تفاوت بی‌بعد سازی جریان داخلی قطره با جریان خارجی نیوتنی می‌باشد.

- مؤلفه مماسی تانسور تنش سیال ویسکوالاستیک و سیال نیوتنی دارای رابطه‌ای به شکل زیر می‌باشند.

$$\tau_{r\theta} = \frac{k}{k+1}\tilde{\tau}_{r\theta}$$ (۱۵-۳)

۳-۳ معادله متشکله سیال ویسکوالاستیک

برای شبیه سازی شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در قسمت تحلیلی، از دو مدل اولروید-بی و گزیکس استفاده شده است. ابتدا به بیان مدل اولروید-بی می‌پردازیم و در ادامه مدل گزیکس را معرفی می‌کنیم.

مدل اولروید-بی جزء مدل‌های شبه خطی دسته بندی می‌شود و شکل ساختاری آن به صورت زیر می‌باشد [۱].

$$\tilde{\tau} + \lambda_1 \hat{d}\tilde{\tau} = \tilde{\eta}_0 (2\tilde{D} + 2\lambda_2 \hat{d}\tilde{D})$$ (۱۶-۳)

در رابطه بالا، $\tilde{\eta}_0$ ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک در نرخ برش صفر، λ_1 زمان رهایی از تنش، λ_2زمان تأخیر، D تانسور نرخ تغییر شکل و $\hat{d}$ اپراتور مشتق همرفتی می‌باشد که به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\hat{d}(\square) = (\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u}.\nabla)(\square) - \{(\nabla \tilde{u}^T)(\square) + (\square)(\nabla \tilde{u})\}$$ (۱۷-۳)

هنگامی که $\lambda_2 = 0$، معادله (۳-۱۵) به معادله ساختاری مکسول[۱](UCM) تبدیل می‌شود، اگر $\lambda_1 = 0$ تبدیل به مدل سیال مرتبه دو[۲] و اگر $\lambda_2 = \lambda_1 = 0$، مدل اولروید-بی به مدل نیوتنی با ویسکوزیته $\tilde{\eta}_0$ تغییر می‌یابد.

مدل اولروید-بی برای یک سیال ویسکوالاستیک می‌تواند از مدل UCM برای قسمت پلیمری محلول و مدل نیوتنی برای بخش ویسکوز حاصل گردد. در حقیقت، تنش ویسکوالاستیک قطره $\tilde{\tau}$ از دو قسمت تنش قسمت پلیمری $\tilde{\tau}_p$ و تنش حلال نیوتنی $\tilde{\tau}_s$ تشکیل شده است.

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_p + \tilde{\tau}_s$$ (۱۸-۳)

---

۱. Maxwell constitutive equation

2. Second Order Fluid

که

$$\tilde{\tau}_p + \lambda_1 \hat{d}\tilde{\tau}_p = 2\tilde{\eta}_{0,p}\tilde{D}$$ (۳-۱۹الف)

$$\tilde{\tau}_s = 2\tilde{\eta}_{0,s}\tilde{D}$$ (۳-۱۹ب)

در اینجا، $\tilde{\eta}_{0,p}$ ویسکوزیته قسمت پلیمری در نرخ برش صفر و $\tilde{\eta}_{0,s}$ ویسکوزیته قسمت حلال نیوتنی است و مجموع آن‌ها ویسکوزیته قطره در نرخ برش صفر را نتیجه می‌دهد. رابطه بین λ_2 و λ_1 به شکل زیر می‌باشد.

$$\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}_{0,p} + \tilde{\eta}_{0,s}$$ (۳-۲۰)

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 \tilde{\eta}_{s,0}}{\tilde{\eta}_0}$$ (۳-۲۱)

در نهایت با جایگذاری روابط بالا در معادله (۳-۱۵) مدل اولروید-بی به صورت زیر قابل نمایش است.

$$\tilde{\tau} + \lambda_1 \hat{d}\tilde{\tau} = \tilde{\eta}_0 (2\tilde{D} + 2\lambda_1 (1-\beta)\hat{d}\tilde{D})$$ (۳-۲۲)

در رابطه بالا $\beta = \frac{\tilde{\eta}_{0,p}}{\tilde{\eta}_0}$ که نسبت ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک نام دارد و حاصل تقسیم ویسکوزیته قسمت پلیمری سیال ویسکوالاستیک در نرخ برش صفر ($\tilde{\eta}_{0,p}$) به ویسکوزیته محلول در نرخ برش صفر ($\tilde{\eta}_0$) می‌باشد. در این تحقیق فرض شده است مدل اولروید-بی قادر است شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک را شبیه سازی نماید چرا که برخلاف مدل‌های ساختاری بسط تأخیری[1] (مدل مرتبه دو، مرتبه سه) دارای زمان رهایی از تنش برای سیال ویسکوالاستیک می‌باشد که برای تعریف عدد بی‌بعد دبورا De که به عنوان پارامتر اغتشاشی در روش حل می‌باشد، ضروری است. همانطور که قبلاً اشاره کردیم، این مدل جزء مدل‌های شبه خطی است و توابع ویسکومتریک شامل اختلاف تنش نرمال اول $\tilde{\Psi}_1$ و ویسکوزیته $\tilde{\eta}$ را ثابت و ضریب تنش نرمال دوم را صفر $\tilde{\Psi}_2 = 0$ بدست می‌آورد. هدف از این پژوهش، بدست آوردن حرکت و شکل سقوط خزشی قطره ویسکوالاستیک می‌باشد که به دلیل نزدیک صفر بودن عدد رینولدز دارای ویسکوزیته ثابت در نرخ برش صفر $\tilde{\eta}_0$ است که به خوبی با مدل اولروید-بی سازگار است.

---
[1]. Retarded-motion expansions

مدل گزیکس جزء مدل‌های غیر خطی شناخته می‌شود. این مدل بر مبنای دیدگاه مولکولی بدست آمده است [27]. امتیاز اصلی این مدل آن است که، قادر به ارائه رفتار پاورلو برای ویسکوزیته و ثابت‌های اختلاف تنش‌های نرمال است. شکل ساختاری این مدل به صورت زیر می‌باشد [۱].

(۳-۲۳الف)
$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_s + \tilde{\tau}_p$$

(۳-۲۳ب)
$$\tilde{\tau}_s = 2\tilde{\eta}_s \tilde{D}$$

(۳-۲۳ج)
$$\tilde{\tau}_p + \lambda_1 \tilde{\tau}_{p,(1)} + \frac{\alpha\lambda_1}{\tilde{\eta}_{p,0}}\{\tilde{\tau}_p . \tilde{\tau}_p\} = 2\tilde{\eta}_{p,0}\tilde{D}$$

شکل کلی مدل معرفی شده، متشکل از دو قسمت تنش پلیمری $\tilde{\tau}_p$ و تنش حلال نیوتنی $\tilde{\tau}_s$ برای فاز قطره ویسکوالاستیک می‌باشد. این مدل در جهات مختلفی برای ارائه رفتار الاستیک غیرهوکی و مدهای مختلف توسعه یافته است.

در فرم ساختاری مدل گزیکس، α ضریب حرکت تحرک[1] می‌باشد. این ضریب همواره کوچکتر یا مساوی یک می‌باشد$\alpha \leq 1$. اگر $\alpha = 0$ در این صورت، مدل گزیکس به مدل اولروید-بی تبدیل می‌شود. البته باید توجه داشت، مدل اولروید-بی معرفی شده در قسمت قبل، تنش‌های قطره ویسکوالاستیک شامل تنش پلیمری و نیوتنی را یکجا شبیه سازی می‌نمود اما اینجا این تنش‌ها جدا از هم ارائه گردیدند و برای این حالت خاص در صورت ترکیب آن‌ها با یکدیگر به شکل نهایی اولروید-بی دست می‌یابیم.

این مدل کاملاً غیرخطی بوده و جمله غیر خطی این مدل $\{\tilde{\tau}_p . \tilde{\tau}_p\}$ می‌باشد. از ویژگی‌های این مدل می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- مناسب برای مدل‌سازی محلول‌های رقیق پلیمری
- محاسبه تنش های نرمال اول و دوم متفاوت و غیر صفر

در مدل گزیکس اگر $\lambda_1 = 0, \alpha = 0$ معادله ساختاری تبدیل به مدل سیال نیوتنی می‌گردد.

---

[1]. Mobility Factor

شکل بی بعد این مدل برای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با توجه به پارامترهای بی‌بعد بیان شده در قسمت‌های قبل به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_s + \tilde{\tau}_p \quad \text{(۳-۲۴الف)}$$

$$\tilde{\tau}_s = 2(1-\beta)\tilde{D} \quad \text{(۳-۲۴ب)}$$

$$\tilde{\tau}_p + De\tilde{\tau}_{p,(1)} + De\frac{\alpha}{\beta}\{\tilde{\tau}_p.\tilde{\tau}_p\} = 2\beta\tilde{D} \quad \text{(۳-۲۴ج)}$$

در ساختار معادلات فوق، β مطابق تعریف در قسمت معرفی مدل اولروید-بی، نسبت ویسکوزیته قسمت پلیمری سیال ویسکوالاستیک در نرخ برش صفر ($\tilde{\eta}_{p,0}$) به ویسکوزیته کل سیال ویسکوالاستیک در نرخ برش صفر ($\tilde{\eta}_0 = \tilde{\eta}_{0,p} + \tilde{\eta}_{0,s}$) تعریف شده است و عدد دبورا نیز بر اساس معادله (۳-۳) تعریف می‌شود.

فصل چهارم

روش حل تحلیلی

مقدمه

در این فصل حل تحلیلی برای حرکت خزشی قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی ارائه می‌شود. در اینجا از روش حساب اغتشاشات جهت حل میدان جریان استفاده شده است. حل معادله استوکس برای هر دو جریان و بدست آوردن توابع جریان، پروفیل‌های سرعت، فشار و تانسورهای تنش در این بخش مورد بحث قرار می‌گیرد. روند بدست آوردن سرعت نهایی قطره و شکل پایای آن به صورت تحلیلی در این فصل انجام می‌شود. مدل‌های مورد استفاده برای فاز قطره همانطور که در بخش معادلات حاکم گفته شد، اولروید-بی و گزیکس است. در ابتدا یکبار روند حل برای مدل اولروید-بی بیان می‌شود سپس، همین روند برای مدل گزیکس به شکل خلاصه‌تر ارائه می‌گردد.

۴-۱ حساب اغتشاشات[1]

روش به‌کار گرفته شده برای حل تحلیلی معادلات حاکم بر هر دو سیال قطره و محیط، استفاده از تکنیک اغتشاشات می‌باشد. پارامترهای اغتشاشی، اعداد بدون بعد دبورا و موییینگی هستند. پروفیل‌های سرعت، فشار و تانسور تغییر شکل نسبت به عدد دبورا برای هر دو جریان سیال این چنین بسط[2] داده می‌شوند. تعداد جملات مورد استفاده برای حساب اغتشاشات به ازای هر کدام از پارامترهای اغتشاشی سه جمله (تا مرتبه دوم) می‌باشد.

برای جریان قطره ویسکوالاستیک:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + De\tilde{u}_1 + De^2\tilde{u}_2 \qquad (۴-۱)$$

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 + De\tilde{p}_1 + De^2\tilde{p}_2 \qquad (۴-۲)$$

$$\tilde{D} = \tilde{D}_0 + De\tilde{D}_1 + De^2\tilde{D}_2 \qquad (۴-۳)$$

یادآوری: در تمام طول این تحقیق علامت $\tilde{\ }$ برای نشان دادن فاز قطره و بدون این علامت سیال نیوتنی

[1]. Perturbation Analysis
[2] .Expansion

محیط است.

برای سیال محیط نیوتنی:

$$u = u_0 + Deu_1 + De^2 u_2 \tag{۴-۴}$$

$$p = p_0 + Dep_1 + De^2 p_2 \tag{۵-۴}$$

$$D = D_0 + DeD_1 + De^2 D_2 \tag{۶-۴}$$

اپراتور مشتق همرفتی $\hat{d}(\square)$ برای فاز قطره ویسکوالاستیک وابسته به پروفیل سرعت قطره بوده بنابراین، این اپراتور هم حول عدد بی‌بعد دبورا به صورت زیر بسط داده می‌شود.

$$\hat{d}_j(\square) = (\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{u}_j.\nabla)(\square) - \{(\nabla \tilde{u}_j^{\,T})(\square) + (\square)(\nabla \tilde{u}_j)\} \tag{۷-۴}$$

تانسور های تنش و پروفیل‌های جریان برای هر دو سیال قطره و محیط اطراف نسبت به عدد دبورا به شکل زیر بسط داده می‌شوند:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_0 + De\tilde{\tau}_1 + De^2 \tilde{\tau}_2 + O(De^3) \tag{۴-۸الف}$$

$$\tau = \tau_0 + De\tau_1 + De^2 \tau_2 + O(De^3) \tag{۴-۸ب}$$

$$\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0 + De\tilde{\psi}_1 + De^2 \tilde{\psi}_2 \tag{۴-۹الف}$$

$$\psi = \psi_0 + De\psi_1 + De^2 \psi_2 \tag{۴-۹ب}$$

همانطور که در معادلات (۴-۸) مشاهده می‌شود، با باز کردن مدل سیال ویسکوالاستیک و سیال نیوتنی محیط، جملات دیگری با مرتبه بالاتر از $O(De^3)$ وجود دارند که به آنها پرداخته نشده است. زیرا پارامترهای اغتشاشی اعدادی کوچک‌تر از مقدار واحد می‌باشند و با رشد مرتبه آنها به اعداد بسیار کوچک تبدیل می‌گردند به همین خاطر جملات بعدی حساب اغتشاشات کوچک و تأثیر ناچیزی را دارا می‌باشند.

۴-۲ حل به کمک مدل اولروید-بی

برای بدست آوردن جملات تنش معادلات (۴-۸) کافی است، معادلات (۴-۱) تا (۴-۷) را در شکل بی‌بعد مدل اولروید-بی برای فاز قطره در حال سقوط، و مدل نیوتنی برای سیال محیط جایگذاری شوند. شکل

بی‌بعد مدل اولروید-بی و سیال نیوتنی به‌ترتیب به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{\tau}+De\hat{d}\tilde{\tau}=2(\tilde{D}+De(1-\beta)\hat{d}\tilde{D})$$ (4-۱۰الف)

$$\tau=2D$$ (4-۱۰ب)

با جایگذاری و استخراج جملات هم‌مرتبه به شکل زیر داریم:

سیال ویسکوالاستیک:

$$\tilde{\tau}_0=2\tilde{D}_0$$ (۴-۱۱الف)

$$\tilde{\tau}_1=2\tilde{D}_1-2\beta\hat{d}_0\tilde{D}_0$$ (۴-۱۱ب)

$$\tilde{\tau}_2=2\tilde{D}_2-2\beta\hat{d}_0(\tilde{D}_1-\hat{d}_0\tilde{D}_0)-2\beta\hat{d}_1\tilde{D}_0$$ (۴-۱۱ج)

سیال نیوتنی محیط:

$$\tau_0=2D_0$$ (۴-۱۲الف)

$$\tau_1=2D_1$$ (۴-۱۲ب)

$$\tau_2=2D_2$$ (۴-۱۲ج)

باید توجه داشت برای سیال نیوتنی همواره شرط $\tau_i=2D_i$ برقرار می‌باشد.

روش حل به این شکل است که برای هر مرتبه و هر یک از سیالات قطره و محیط باید معادله استوکس یک‌بار حل شود. شکل معادله استوکس برای فاز قطره و سیال محیط در معادلات (۴-۶) و (۴-۸) آورده شده است.

با دارا بودن دو مجهول تانسور تنش و پروفیل فشار حل این معادله امکان‌پذیر نمی‌باشد به همین خاطر با استفاده از روش ورتیسیته[1]پروفیل فشار را از معادله استوکس حذف کرده و پروفیل خط جریان برای هر مرتبه و هر کدام از سیالات محاسبه می‌گردد. هاپل و برنر[2] [۲۲] در سال ۱۹۶۵ با استفاده از این روش معادله جریان را به شکل زیر بدست آوردند:

$$\psi(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n r^{-n}+B_n r^{2-n}+C_n r^{n+1}+D_n r^{n+3})Q_n(\mu)$$ (۴-۱۳)

در معادله بالا $\mu=\cos(\theta)$ و $Q_n(\mu)$ چند جمله‌ای Gegenbauer می‌باشد و با تابع لژاندر $(P_n(\mu))$ رابطه‌ای

1. Vorticity

2. Happel and Brenner

به شکل زیر دارد.

$$Q_n(\mu) = \int_{-1}^{\mu} P_n(s)ds \qquad (۱۴-۴)$$

در معادله (۴-۱۳) برای فاز قطره در حال سقوط $A_n = Bn = 0, n \geq 1$. به این دلیل که، اگر $r = 0$ باشد مقدار تابع جریان نامحدود می‌گردد و با شرط محدود بودن تابع جریان در مرکز قطره مغایرت دارد. ضمناً، برای فاز سیال محیط هم $D_n = 0, n \geq 1$ و $C_n = 0, n \geq 2$ می‌باشد. دلیل این قسمت عکس دلایل جریان داخلی می‌باشد به این صورت که در $r \to \infty$ باید تابع جریان $\psi \to 0$ و این شرط فقط با برقراری شرایط جاری قابل ارضا می‌باشد.

در این تحقیق لفظ "جریان داخلی" برای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط و "جریان خارجی" برای سیال نیوتنی محیط به کار می‌رود. صورت بی‌بعد معادله استوکس برای جریان داخلی و خارجی برای اولین جمله از حساب اغتشاشات به صورت زیر می‌باشد.

$$\nabla \tilde{p}_0 = \Delta \tilde{u}_0 + \frac{\rho g R^2}{\tilde{\eta}_0 U_0} \qquad (۴-۱۵\text{الف})$$

$$\nabla p_0 = \Delta u_0 + \frac{\rho g R^2}{\eta_0 U_\infty} \qquad (۴-۱۵\text{ب})$$

با حذف پروفیل فشار از معادله استوکس برای اولین جمله از حساب اغتشاشات جریان داخلی و خارجی به معادله زیر خواهیم رسید.

$$E^4 \tilde{\psi}_0 = 0 \qquad (۴-۱۶\text{الف})$$

$$E^4 \psi_0 = 0 \qquad (۴-۱۶\text{ب})$$

در روابط بالا اپراتور $E^4 \equiv E^2 E^2$ می‌باشد و E^2 به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$E^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \qquad (۱۷-۴)$$

باید توجه داشت، تمامی معادلات و اپراتورها باید در مختصات کروی برای هر دو سیال داخلی و خارجی به کار روند. با استفاده از شرایط مرزی گفته شده در معادلات (۳-۱۳) تا (۳-۱۵) پروفیل خط جریان معادلات (۴-۱۶الف) و (۴-۱۶ب) به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$\tilde{\psi}_0 = \frac{1}{2}(r^2 - r^4) Q_1(\mu) \qquad (۴-۱۸\text{الف})$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{2}(2r^2 - \frac{3k+2}{k+1}r + \frac{k}{k+1}\frac{1}{r})Q_1(\mu) \tag{۱۸-۴ب}$$

در معادلات بالا $\mu = \cos(\theta)$ می‌باشد. برای بدست آوردن پروفیل سرعت با استفاده از توابع جریان می‌توان از رابطه زیر بهره برد:

$$\tilde{u}_j(r,\theta) = (\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial \theta}, -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \tilde{\psi}_j}{\partial r}) \tag{۱۹-۴الف}$$

$$u_j(r,\theta) = (\frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial \psi_j}{\partial \theta}, -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \psi_j}{\partial r}) \tag{۱۹-۴ب}$$

مقادیر فشار برای هر دو جریان داخلی قطره ویسکوالاستیک وخارجی نیوتنی محیط را می‌توان با جایگذاری پروفیل سرعت بدست آمده، از توابع جریان محاسبه شده، برای هر مرتبه در معادله استوکس یافت. لازم به ذکر است، در ضمیمه الف تمامی پروفیل‌های سرعت، فشار و تانسورهای تنش برای هر مرتبه و هرکدام از جریان‌ها به صورت جداگانه برای مدل اولروید-بی آورده شده است.

گام بعدی در هر مرحله از حل، یافتن سرعت نهایی قطره می‌باشد. سرعت نهایی قطره در واقع سرعتی است که، سیال محیط و قطره در حالت پایا در فصل مشترک یکدیگر دارا هستند. برای بدست آوردن سرعت نهایی باید از برآیند نیروهای درگ[1] و حجمی[2] استفاده شود. برآیند نیروهای وارده بر قطره به صورت زیر می‌باشد.

$$F = F_D + F_B \tag{۲۰-۴}$$

در معادله بالا نیروی حجمی وارده بر قطره به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$F_B = \frac{4\pi R^2(\rho - \tilde{\rho})}{3\eta U_\infty} \tag{۲۱-۴}$$

برای محاسبه نیروی درگ وارده بر سطح قطره از تئوری پاین و پل[3] [۲۳] استفاده می‌شود که به صورت زیر بیان شده است.

$$F_D = 8\pi \lim_{r\to\infty}\frac{\psi_\infty - \psi(r,\theta)}{r\sin^2\theta} \tag{22-۴}$$

---

[1]. Drag Force
[2]. Buoyancy Force
[3]. Payne and Pell

در رابطه بالا $\psi_{\infty}=\frac{r^2\sin^2\theta}{2}$ و به آن خط جریانِ جریان آزاد می‌گویند [۲۳].

نکته حائز اهمیت برای بدست آوردن سرعت نهایی قطره این است که، برآیند نیروهای وارده بر سطح قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در حالت پایا برابر با صفر می‌باشد $F=0$.

با جایگذاری تابع جریان خارجی بدست آمده از معادله (۴-۱۸ب) در معادله (۲۲) نیروی درگ وارده از سیال نیوتنی بر قطره ویسکوالاستیک بدست می‌آید. با قرار دادن مقدار بدست آمده در معادله (۲۰) و صفر کردن نیروی برآیند، به دلیل پایا شدن شکل قطره، می‌توان سرعت نهایی قطره در حال سقوط در اولین مرتبه از حساب اغتشاشات را محاسبه کرد.

بنابراین، مقدار سرعت نهایی قطره در حال سقوط با مقدار بدست آمده از حل هادامارد [۴] و ریبسزینسکی [۵] برابر شده و به شکل زیر می‌باشد:

$$U_{\infty}\equiv U_{HR}=(\frac{2k+2}{9k+6})\frac{(\tilde{\rho}-\rho)gR^2}{\eta} \tag{۲۳-۴}$$

برای بدست آوردن شکل قطره ویسکوالاستیک، از معادله تعادل اختلاف تنش‌های نرمال قطره وسیال نیوتنی و نیروی کشش سطحی به شکل زیر استفاده می‌گردد [۳۴]:

$$n.(\tau-\tilde{\tau}).n-p+\tilde{p}=\Gamma(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) \tag{۲۴-۴}$$

در رابطه بالا n بردار عمود بر سطح قطره و R_2 و R_1 شعاع‌های مرکز انحنا سطح قطره می‌باشند. بوسیله معادله (۴-۲۴) می‌توان شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی را محاسبه نمود.

با قرار دادن پروفیل‌های فشار و تانسورهای تنش برای سیال داخلی و خارجی به ازای جمله اول حساب اغتشاشات به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\delta p=\frac{1}{Ca}(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}) \tag{۲۵-۴}$$

در رابطه بالا δp پرش فشار محیطی[1] می‌باشد که در مرتبه بعدی عدد دبورا محاسبه می‌شود. برای مرتبه بعدی حساب اغتشاشات همین روند تکرار می شود، یعنی داریم:

[1]. Jump Ambient Pressure

برای جریان داخلی (قطره ویسکوالاستیک):

$$\tilde{\tau}_1 = 2\tilde{D}_1 - 2\beta\hat{d}_0\tilde{D}_0 \qquad \text{(۴-۲۶الف)}$$

و جریان خارجی (سیال نیوتنی محیط):

$$\tau_1 = D_1 = (\nabla^T u_1 + \nabla u_1) \qquad \text{(۴-۲۷ب)}$$

معادله استوکس برای این دو جریان به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla\tilde{p}_1 = \Delta\tilde{u}_1 + f_1(\tilde{u}_0) \quad , \quad f_1(\tilde{u}_0) = -\nabla.(\beta\hat{d}_0\tilde{D}_0) \qquad \text{(۴-۲۸الف)}$$

$$\nabla p_1 = \Delta u_1 \qquad \text{(۴-۲۸ب)}$$

با حذف فشار از طریق به کارگیری روش ورتیسیته به معادلات زیر خواهیم رسید:

$$E^4\tilde{\psi}_1 = r\sin\theta[\nabla\times f_1(\tilde{u}_0)].\hat{e}_\phi = 0 \qquad \text{(۴-۲۹الف)}$$

$$E^4\psi_1 = 0 \qquad \text{(۴-۲۹ب)}$$

با حل معادلات (۴-۲۹الف) و (۴-۲۹ب) با استفاده از معادله (۴-۱۳) و با اعمال شرایط مرزی در فصل مشترک بین قطره ویسکوالاستیک و سیال نیوتنی محیط در $r(\theta)=1$ به معادلات جریان برای مرتبه اول دبورا یا دومین جمله حساب اغتشاشات به صورت زیر می‌رسیم:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{9k\beta}{10(k+1)}(r^3 - r^5)Q_2(\mu) \qquad \text{(۴-۳۰الف)}$$

$$\psi_1 = \frac{9k\beta}{10(k+1)^2}(\frac{1}{r^2} - 1)Q_2(\mu) \qquad \text{(۴-۳۰ب)}$$

در معادلات بالا $Q_2(\mu)$ از معادله (۴-۱۴) بدست می‌آید و برابر مقدار زیر می‌باشد:

$$Q_2(\mu) = \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta \qquad \text{(۴-۳۰ج)}$$

برای بدست آوردن سرعت نهایی قطره در قسمت قبل بیان شد که باید نیروی درگ وارد بر سطح قطره محاسبه شود و با صفر قرار دادن نیروی برآیند وارد بر قطره که شامل نیروی حجمی و درگ می‌باشد، سرعت نهایی قابل محاسبه است. با پیشروی حل در هر جمله به جریان سیال خارجی ψ جمله حل شده اضافه می‌گردد به عبارت دیگر تا به این مرحله $\psi = \psi_0 + De\psi_1$ می‌باشد. با قرار دادن تابع جریان بیان شده در معادله (۴-۲۲) به این نتیجه می‌رسیم که، نیروی درگ محاسبه شده نسبت به جمله قبلی تغییری نمی-

کند. با توجه به ثابت بودن نیروی حجمی وارده بر قطره نتیجه می‌شود، سرعت نهایی قطره در حال سقوط نسبت به جمله قبلی تغییری نداشته است.

در اینجا فرض شده که قطره ویسکوالاستیک از حالت کروی $r(\theta)=1$ به حالت $r(\theta)=1+\zeta(\mu)$ که در آن $\mu=\cos(\theta)$ است، تغییر شکل دهد. برای تغییر شکل‌های کوچک ($\max|\zeta| \ll 1$)، قسمت کشش سطحی در معادله (۴-۲۴) را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۲۴]:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=2-2\zeta-\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}] \tag{۴-۳۱}$$

با جایگذاری معادله (۴-۳۱) در معادله (۴-۲۴) شکل معادله تنش نرمال به صورت زیر باز نویسی می‌شود.

$$n.(\tau-\frac{k}{k+1}\tilde{\tau}).n-p+\tilde{p}=2-2\zeta-\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}] \tag{۴-۳۲}$$

تابع ζ باید دو شرط مرزی زیر را ارضاء نماید:

$$\int_{-1}^{1}\zeta d\mu=0 \quad , \quad \int_{-1}^{1}\zeta\mu d\mu=0 \tag{۴-۳۳}$$

معادلات بالا صورت خطی شده این واقعیات هستند که، حجم قطره در خلال سقوط ثابت و تغییر نمی‌کند و مرکز جرم قطره همواره روی مبدأ مختصات قرار داشته باشد. با قرار دادن مقادیر تنش و فشار در معادله (۴-۳۲) داریم:

$$\delta p-4\alpha_2 DeP_2(\mu)=\frac{1}{Ca}(2-2\zeta-\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}]) \tag{۴-۳۴}$$

در معادله بالا مقادیر δp و α بصورت زیر قابل تعریف هستند:

$$\delta p=\frac{2}{Ca} \quad , \quad \alpha_2=\frac{\beta k(56k+114)}{80(k+1)^2} \tag{۴-۳۵}$$

با استفاده از معادله (۴-۳۳) داریم:

$$\zeta=-\alpha_2 DeCaP_2(\mu) \quad , \quad \mu=\cos\theta \tag{۴-۳۶}$$

مقادیر عدد موینگی Ca مربوط به زمانی است که کشش سطحی نیروی غالب بوده و شکل قطره را در حالت کروی حفظ و با تغییر شکل قطره مخالفت کرده و بر نیروهای دیگر وارده چیره می‌گردد. در مقابل، در حالتی که عدد دبورا صفر باشد، با توجه به خزشی بودن جریان خارجی، جمله اینرسی از معادلات مومنتم

حذف شده و جملات دارای توان غیر صفر از حساب اغتشاشات حذف گردیده و شکل قطره در حالت کروی باقی می‌ماند. زمانی که عدد دبورا از مقدار مشخصی فراتر رود، نیروی حاصل از تنش‌های ویسکوالاستیک بر نیروی کشش سطحی بین قطره و سیال محیط غلبه کرده و قطره شروع به تغییر شکل می‌کند [۴].

برای تأثیر تغییر شکل روی تابع جریان در سال ۱۹۷۲ جوزف و فوسدیک[1] [۲۵] حساب اغتشاشات دیگری استفاده کردند که به صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{(0)} + DeCa\tilde{u}^{(1)} \quad \text{(۴-۳۷الف)}$$

$$u = u^{(0)} + DeCau^{(1)} \quad \text{(۴-۳۷ب)}$$

مقادیر فشار و تانسورهای تنش و تغییر شکل همانند معادلات بالا بسط داده می‌شوند. تانسورهای تنش برای جریان داخلی پس از جداسازی جملات هم‌مرتبه به شکل زیر می‌باشند:

$$\tilde{\tau}^{(0)} = 2\tilde{D}^{(0)} \quad \text{(۴-۳۸الف)}$$

$$\tilde{\tau}^{(1)} = 2\tilde{D}^{(1)} \quad \text{(۴-۳۸ب)}$$

برای جریان خارجی همواره داریم:

$$\tau^{(i)} = 2D^{(i)} \quad \text{(۴-۳۸ج)}$$

در معادلات بالا $\tilde{u}^{(0)}$ و $u^{(0)}$ با توجه به معادلات (۴-۳۸الف) و(۴-۳۸ج) همان مقادیر محاسبه شده از اولین جمله حساب اغتشاشات $\tilde{u}_0$ و u_0 می‌باشند. در اینجا فرض شده است که اعدا دبورا De و مویینگی Ca هم‌مرتبه باشند. برای راحت شدن روند حل به جای استفاده از شرایط مرزی روی $r(\theta)=1+\zeta(\mu);\mu=\cos(\theta)$ از بسط تیلور شرایط مرزی در $r(\theta)=1$ استفاده نمودیم. شرایط مرزی بسط داده شده به صورت زیر بیان شده است:

$$u_r^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial u_{0,r}}{\partial r} - 3\alpha_2\cos\theta\sin\theta u_{0,\theta} = 0,$$

$$\tilde{u}_r^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial \tilde{u}_{0,r}}{\partial r} - 3\alpha_2\cos\theta\sin\theta \tilde{u}_{0,\theta} = 0,$$

---

[1]. Joseph and Fosdick

$$u_\theta^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial u_{0,\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta u_{0,r} =$$

$$\frac{1}{k+1}(\tilde{u}_\theta^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial \tilde{u}_{0,\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta \tilde{u}_{0,r})$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial \tau_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta(\tau_{0,rr} - \tau_{0,\theta\theta}) =$$

$$\frac{k}{k+1}(\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial \tilde{\tau}_{0,r\theta}}{\partial r} + 3\alpha_2 \cos\theta \sin\theta(\tilde{\tau}_{0,rr} - \tilde{\tau}_{0,\theta\theta})) \quad (۳۹-۴)$$

با استفاده از شرایط مرزی بیان شده و معادله (۴-۱۳) توابع جریان برای قطره ویسکوالاستیک وسیال نیوتنی به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\tilde{\psi}^{(1)} = \frac{\alpha_2}{5(k+1)}((4-2k)r^4 + (3k-3)r^2)Q_1(\mu) + \frac{6\alpha_2}{35}(5r^6 - 12r^4)Q_3(\mu) \quad (\text{۴-۴۰الف})$$

$$\psi^{(1)} = \frac{\alpha_2}{10(k+1)^2}((3k^2 - k + 8)r - \frac{3k^2 - 3k + 6}{r})Q_1(\mu) - \frac{3\alpha_2}{35(k+1)}(\frac{21k+18}{r} - \frac{21k+4}{r^3})Q_3(\mu) \quad (\text{۴-۴۰ب})$$

که در آن

$$Q_1(\mu) = -\frac{1}{2}\sin^2\theta \quad , \quad Q_3(\mu) = -\frac{1}{8}\sin^2\theta(5\cos^2\theta - 1) \quad (\text{۴-۴۰ج})$$

برای بدست آوردن تغییر شکل ناشی از این جمله باید $\tilde{\tau}^{(1)}$ و $\tau^{(1)}$ را بدست آورده و در معادله زیر قرار دهیم:

$$n.(\tau^{(1)} - \frac{k}{k+1}\tilde{\tau}^{(1)}).n = \tau_{rr}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial \tau_{0,rr}}{\partial r} - \alpha_2 \cos\theta \sin\theta \tau_{0,r\theta} - \frac{k}{k+1}(\tilde{\tau}_{rr}^{(1)} - \alpha_2 P_2(\cos\theta)\frac{\partial \tilde{\tau}_{0,rr}}{\partial r} - \alpha_2 \cos\theta \sin\theta \tilde{\tau}_{0,r\theta}) \quad (۴۱-۴)$$

با قرار دادن معادله (۴-۴۱) در معادله تنش نرمال (۴-۳۲) داریم:

$$-10\beta_3 DeCaP_3(\mu) = \frac{1}{Ca}(2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}]) \quad (\text{۴-۴۲الف})$$

که

$$\beta_3 = \frac{\alpha_2}{1400(k+1)^2}(430k^2 + 1305k + 870), \qquad \text{(۴-۴۲ب)}$$

با استفاده از شرایط مرزی معادله (۴-۳۳) و حل معادله (۴-۴۲الف) داریم:

$$\xi = -\beta_3 DeCa^2 P_3(\cos\theta) \qquad \text{(۴-۴۳)}$$

ادامه حل، مربوط به مرتبه دوم عدد دبورا $O(De^2)$ می‌باشد. معادلات حرکت برای جریان داخل و خارج به شکل زیر می‌باشند:

$$\nabla\tilde{p}_2 = \Delta\tilde{u}_2 + f_2(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1) \quad , \quad f_1(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1) = -\beta\nabla.[\hat{d}_1\tilde{D}_0 + \hat{d}_0(\tilde{D}_1 - \hat{d}_0\tilde{D}_0)] \qquad \text{(۴-۴۴الف)}$$

$$\nabla p_2 = \Delta u_2 \qquad \text{(۴-۴۴ب)}$$

با حذف فشار از معادلات بالا داریم:

$$E^4\tilde{\psi}_2 = r\sin\theta[\nabla\times f_2(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1)].\hat{e}_\phi = 140ar^2\sin^2\theta,$$

$$a = -\frac{3}{1400}\frac{\beta(21\beta k + 20k + 20)}{(k+1)} \qquad \text{(۴-۴۴الف)}$$

$$E^4\psi_2 = 0 \qquad \text{(۴-۴۴ب)}$$

با اعمال شرایط مرزی روی $r(\theta)=1$ معادلات جریان برای سیال قطره و محیط نیوتنی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{\psi}_2 = (a(r^6 - r^2) + C_1(r^2 - r^4))Q_1(\mu) + C_3(r^4 - r^6)Q_3(\mu) \qquad \text{(۴-۴۵الف)}$$

$$\psi_2 = A_1(\frac{1}{r} - r)Q_1(\mu) + A_3(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r})Q_3(\mu) \qquad \text{(۴-۴۵ب)}$$

که در معادلات بالا

$$A_1 = \frac{1}{150}\frac{k(45\beta + 45\beta k + 18\beta^2 k + 200ak + 200a)}{(k+1)^3},$$

$$A_3 = \frac{3}{175}\frac{k\beta(-95 - 95k + 177\beta k)}{(k+1)^3},$$

$$C_1=\frac{1}{150}\frac{(45\beta k^2+45\beta k+18\beta^2k^2+500ak^2+800ak+300a)}{(k+1)^2},$$

$$C_3=\frac{3}{175}\frac{k\beta(-95-95k+177\beta k)}{(k+1)^2} \qquad (۴۶-۴)$$

تا به اینجا تمامی جملات حساب اغتشاشات برای بدست آوردن توابع جریان، برای سیال قطره و محیط نیوتنی محاسبه شده است. برای محاسبه سرعت نهایی قطره در حال سقوط، تابع جریان سیال نیوتنی محیط را بصورت $\psi(r,\theta)=\psi_0+De\psi_1+DeCa\psi^{(1)}+De^2\psi_2$ در معادله (۴-۲۲) قرار می‌دهیم. نیروی کلی درگ وارده بر سطح قطره به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{F_D}{2\pi}=F_0+DeF_1+DeCaF^{(1)}+De^2F_2,$$

$$F_0=\frac{3k+2}{k+1},\quad F_1=0,\quad F^{(1)}=\frac{3k^2-k+8}{5(k+1)^2}\alpha_2\ ,$$

$$F_2=-\frac{1}{4}\frac{k(45\beta+18\beta^2k+45\beta k+200ak+200a)}{150(k+1)^2} \qquad (۴۷-۴)$$

سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با استفاده از بالانس نیروی حجمی وارده بر قطره و نیروی درگ کلی وارد شده بر سطح آن به صورت زیر محاسبه شده است:

$$U_\infty=\frac{2(\tilde{\rho}-\rho)gR^2}{3\eta(F_0+DeF_1+DeCaF^{(1)}+De^2F_2)} \qquad (۴۸-۴)$$

در معادله بالا اعداد دبورا De و مویینگی Ca خود تابعی از سرعت نهایی می‌باشند، از اینرو، برای بدست آوردن سرعت نهایی به ازای قطر مشخصی از قطره ویسکوالاستیک، باید معادله‌ای ضمنی حل گردد تا مقدار آن محاسبه شود. در چنین سرعت نهایی داریم:

$$\delta p-4\alpha_2DeP_2(\mu)-10\beta_3DeCaP_3(\mu)+10\alpha_3De^2P_3(\mu)$$

$$=\frac{1}{Ca}(2-2\zeta-\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}]) \qquad (۴-۴۹الف)$$

که در آن

$$\alpha_3 = \frac{\beta}{7000(k+1)^3}(-2831k^3 + 2865\beta k^3 - 11310k^2 + 14619\beta k^2 + 8070k + 1008\beta k + 385) \qquad (۴-۴۹ب)$$

شکل پایای متقارن قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با استفاده از حل معادله (۴-۴۹الف) به کمک شرایط مرزی بیان شده در معادله (۴-۳۳) به صورت زیر قابل نمایش می‌باشد.

$$r(\theta) = 1 + \zeta = 1 - \alpha_2 DeCaP_2(\cos\theta) - \beta_3 DeCa^2 P_3(\cos\theta) + \alpha_3 De^2 CaP_3(\cos\theta) \qquad (۴-۵۰)$$

مراحل گفته شده تا به اینجا حل تحلیلی شکل متقارن پایا و سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در فاز نیوتنی با استفاده از مدل شبه خطی اولرید-بی بوده است. در ادامه، همین روند به شکل خلاصه شده برای مدل گزیکس بیان می‌گردد.

۴-۳ حل به کمک مدل گزیکس

مراحل حل تحلیلی برای یافتن شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال نیوتنی محیط اطراف به کمک مدل غیرخطی گزیکس همانند مدل اولروید-بی بوده به همین جهت، برای کاهش موارد تکراری در این قسمت خلاصه‌ای از حل بیان می‌گردد و نحوه بدست آوردن معادلات و پارامترهای مختلف توضیح داده نمی‌شود.

صورت بی‌بعد مدل غیر خطی گزیکس و مدل خطی سیال نیوتنی به صورت زیر می‌باشد:

سیال ویسکوالاستیک قطره:

$$\tilde{\tau} = \tilde{\tau}_s + \tilde{\tau}_p \qquad (۴-۵۱الف)$$

$$\tilde{\tau}_s = 2(1-\beta)\tilde{D} \qquad (۴-۵۱ب)$$

$$\tilde{\tau}_p + De\tilde{\tau}_{p,(1)} + De\frac{\alpha}{\beta}\{\tilde{\tau}_p.\tilde{\tau}_p\} = 2\beta\tilde{D} \qquad (۴-۵۱ج)$$

برای سیال نیوتنی:

$$\tau_s = 2D \qquad (۴-۵۲)$$

با اعمال جملات حساب اغتشاشات در صورت بی‌بعد مدل‌های گفته شده برای سیال داخلی و خارجی،

همچنین، جداسازی جملات هم‌مرتبه از صورت کلی بدست آمده، داریم:

سیال ویسکوالاستیک:

$$\tilde{\tau}_{s,0} = 2(1-\beta)\tilde{D}_0 \quad \text{(۴-۵۳الف)}$$
$$\tilde{\tau}_{s,1} = 2(1-\beta)\tilde{D}_1 \quad \text{(۴-۵۳ب)}$$
$$\tilde{\tau}_{s,2} = 2(1-\beta)\tilde{D}_2 \quad \text{(۴-۵۳ج)}$$
$$\tilde{\tau}_{p,0} = 2\beta\tilde{D}_0 \quad \text{(۴-۵۴الف)}$$
$$\tilde{\tau}_{p,1} = 2\beta\tilde{D}_1 - 2\beta\hat{d}_0\tilde{D}_0 - 4\alpha\beta\{\tilde{D}_0.\tilde{D}_0\} \quad \text{(۴-۵۴ب)}$$
$$\tilde{\tau}_{p,2} = 2\beta\tilde{D}_2 - 2\beta(\hat{d}_0\tilde{D}_1 + \hat{d}_1\tilde{D}_0) + 2\beta\hat{d}_0^2\tilde{D}_0 + 4\alpha\beta\{\hat{d}_0(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0) - (\tilde{D}_0.\tilde{D}_1) - (\tilde{D}_1.\tilde{D}_0)\}$$
$$4\alpha\beta\{\tilde{D}_0.\hat{d}_0\tilde{D}_0 + \hat{d}_0\tilde{D}_0.\tilde{D}_0\} + 8\alpha^2\beta\{\tilde{D}_0.(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0) + (\tilde{D}_0.\tilde{D}_0).\tilde{D}_0\} \quad \text{(۴-۵۴ج)}$$

در معادلات بالا مشاهده می‌شود جمله پلیمری از جمله نیوتنی تشکیل دهنده سیال ویسکوالاستیک قطره، تفکیک شده است، با ترکیب این معادلات صورت بسط داده مدل گزیکس برای فاز قطره به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\tilde{\tau}_0 = 2\tilde{D}_0 \quad \text{(۴-۵۵الف)}$$
$$\tilde{\tau}_1 = 2\tilde{D}_1 - 2\beta\hat{d}_0\tilde{D}_0 - 4\alpha\beta\{\tilde{D}_0.\tilde{D}_0\} \quad \text{(۴-۵۵ب)}$$
$$\tilde{\tau}_2 = 2\tilde{D}_2 - 2\beta(\hat{d}_0\tilde{D}_1 + \hat{d}_1\tilde{D}_0) + 2\beta\hat{d}_0^2\tilde{D}_0 + 4\alpha\beta\{\hat{d}_0(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0) - (\tilde{D}_0.\tilde{D}_1) - (\tilde{D}_1.\tilde{D}_0)\}$$
$$4\alpha\beta\{\tilde{D}_0.\hat{d}_0\tilde{D}_0 + \hat{d}_0\tilde{D}_0.\tilde{D}_0\} + 8\alpha^2\beta\{\tilde{D}_0.(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0) + (\tilde{D}_0.\tilde{D}_0).\tilde{D}_0\} \quad \text{(۴-۵۵ج)}$$

سیال نیوتنی محیط:

$$\tau_0 = 2D_0 \quad \text{(۴-۵۶الف)}$$
$$\tau_1 = 2D_1 \quad \text{(۴-۵۶ب)}$$
$$\tau_2 = 2D_2 \quad \text{(۴-۵۶ج)}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، جمله اول مدل گزیکس کاملاً مشابه جمله اول مدل اولروید-بی می‌باشد. از اینرو، تمامی پارامترهای بدست آمده از حل مدل اولرید-بی، برای جمله اول مدل گزیکس صدق می‌کند. به همین خاطر از جمله دوم مدل گزیکس ادامه می‌دهیم و در انتها تأثیر جمله اول را اعمال می‌نماییم.

برای جمله دوم حساب اغتشاشات یا $O(De^1)$ معادله استوکس به صورت زیر می‌باشد:

$$\nabla\tilde{p}_1 = \Delta\tilde{u}_1 + f_1(\tilde{u}_0) \quad , \quad f_1(\tilde{u}_0) = -\beta\nabla.(\hat{d}_0\tilde{D}_0 + \alpha(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0)) \quad \text{(۴-۵۷الف)}$$

$$\nabla p_1 = \Delta u_1$$ (۴-۵۷ب)

با حذف پروفیل فشار از معادلات حرکت به روش ورتیسیته داریم:

$$E^4\tilde{\psi}_1 = r\sin\theta[\nabla\times f_1(\tilde{u}_0)].\hat{e}_\phi = 0$$ (۴-۵۸الف)

$$E^4\psi_1 = 0$$ (۴-۵۸ب)

با استفاده از شرایط مرزی روی سطح قطره $r(\theta)=1$، معادلات جریان برای قطره و سیال نیوتنی بصورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{3k\beta(3-\alpha)}{10(k+1)}(r^3 - r^5)Q_2(\mu)$$ (۴-۵۹الف)

$$\psi_1 = \frac{3k\beta(3-\alpha)}{10(k+1)^2}(\frac{1}{r^2} - 1)Q_2(\mu)$$ (۴-۵۹ب)

که

$$Q_2(\mu) = \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta$$ (۴-۵۹ج)

با توجه به اینکه، جمله دوم حساب اغتشاشات در اینجا هم تأثیری در سرعت نهایی بدست آمده از جمله اول ندارد، بدین ترتیب، سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط مشابه مقدار بیان شده در معادله (۴-۲۳) می‌باشد.

با استفاده از معادله تنش نرمال (۴-۳۲) برای محاسبه میزان تغییر شکل قطره، داریم:

$$\delta p - 4\alpha_2 DeP_2(\mu) = \frac{1}{Ca}(2 - 2\zeta - \frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}])$$ (۴-۶۰الف)

که در معادله بالا

$$\delta p = \frac{2}{Ca} \quad , \quad \alpha_2 = \frac{\beta k(56k + 114 - 38.7\alpha - 20.7k\alpha)}{80(k+1)^2}$$ (۴-۶۰ب)

با استفاده از شرایط مرزی معادله (۴-۳۳) جواب معادله (۴-۶۰الف) به صورت زیر می‌باشد:

$$\zeta = -\alpha_2 DeCaP_2(\mu) \quad , \quad \mu = \cos\theta$$ (۴-۶۰ج)

همانند مدل اولروید-بی، برای تأثیر شکل قطره $r=1+\zeta(\mu)$ در شرایط مرزی، یکبار حساب اغتشاشات را نسبت به اعداد بی‌بعد De و Ca پیاده‌سازی می‌نماییم. با توجه به اینکه، جداسازی جملات تانسور تنش

برای قطره و سیال نیوتنی کاملاً مشابه جملات بدست آمده از حل اولروید-بی می‌باشند، تمامی پارامترهای بدست آمده اعم از: معادلات جریان، معادلات فشار، معادله تنش نرمال و سرعت نهایی همانند مدل اولروید-بی بوده و برای جلوگیری از تکرار بیان نمی‌شود.

برای جمله سوم حساب اغتشاشات بر حسب عدد دبورا، معادله استوکس برای جریان داخلی (قطره ویسکوالاستیک) و جریان خارجی (سیال نیوتنی) به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\nabla\tilde{p}_2=\Delta\tilde{u}_2+f_2\left(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1\right)\\&f_1\left(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1\right)=\beta\nabla.[\hat{d}_0^2\tilde{D}_0+\alpha\{\hat{d}_0(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0)-(\tilde{D}_0.\tilde{D}_1)-(\tilde{D}_1.\tilde{D}_0)\}+\\&\alpha\{\tilde{D}_0.\hat{d}_0\tilde{D}_0+\hat{d}_0\tilde{D}_0.\tilde{D}_0\}+\alpha^2\{\tilde{D}_0.(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0)+(\tilde{D}_0.\tilde{D}_0).\tilde{D}_0\}-\\&(\hat{d}_0\tilde{D}_1+\hat{d}_1\tilde{D}_0)]\end{aligned} \quad \text{(۴-۶۱الف)}$$

$$\nabla p_2=\Delta u_2 \quad \text{(۴-۶۱ب)}$$

با حذف فشار از معادله حرکت داریم.

$$E^4\tilde{\psi}_2=r\sin\theta[\nabla\times f_2(\tilde{u}_0,\tilde{u}_1)].\hat{e}_\phi=-140ar^2\sin^2\theta, \quad \text{(۴-۶۲الف)}$$

$$\begin{aligned}&a=-\frac{3\beta}{5600}(80k+80-105k\alpha^2+14\beta k\alpha^2-70\beta k\alpha-105\alpha^2+\\&315k\alpha+315\alpha+84k\beta)/(k+1)\end{aligned}$$

$$E^4\psi_2=0 \quad \text{(۴-۶۲ب)}$$

با اعمال شرایط مرزی توابع جریان داخلی و خارجی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\tilde{\psi}_2=(a(r^6-r^2)+C_1(r^2-r^4))Q_1(\mu)+C_2(r^3-r^5)Q_2(\mu)+C_3(r^4-r^6)Q_3(\mu) \quad \text{(۴-۶۳الف)}$$

$$\psi_2=A_1(\frac{1}{r}-r)Q_1(\mu)+A_2(\frac{1}{r^2}-1)Q_2(\mu)+A_3(\frac{1}{r^3}-\frac{1}{r})Q_3(\mu) \quad \text{(۴-۶۳ب)}$$

در معادلات بالا داریم:

$$\begin{aligned}&A_1=\frac{1}{150}k(18\beta^2k-360\alpha^2\beta+540\alpha\beta+45\beta k+540\beta k\alpha+24\beta^2k\alpha^2-\\&78\beta^2k\alpha-360\beta k\alpha^2+45\beta+200ak+200a)/(k+1)^3,\end{aligned}$$

$$A_2 = 0$$

$$A_3 = \frac{3k\beta}{350}(354k\beta - 30\alpha^2 + 145\alpha - 190k + 145k\alpha +$$
$$32k\beta\alpha^2 - 214k\beta\alpha - 30k\alpha^2 - 190)/(k+1)^3$$

$$C_1 = \frac{1}{150}(18\beta^2k^2 + 45\beta k^2 + 500ak^2 + 540\beta k^2\alpha + 24\beta^2k^2\alpha^2 - 78\beta^2k^2\alpha -$$
$$360\beta k^2\alpha^2 + 800ak - 540\beta k\alpha - 360\beta k\alpha^2 + 45\beta k + 300a)/150(k+1)^2$$

$$C_2 = 0 \tag{۴-۶۳ج}$$
$$C_3 = \frac{3k\beta}{350}(354\beta k - 30\alpha^2 + 145\alpha - 190k + 145k\alpha + 32\beta k\alpha^2 -$$
$$214\beta k\alpha - 30k\alpha^2 - 190)/(k+1)^2$$

برای بدست آوردن سرعت نهایی کلی قطره کافی است، نیروی درگ وارده بر سطح قطره در فصل مشترک دو سیال با استفاده از معادله (۴-۲۲) را بدست آوریم، برای نایل شدن به این منظور باید $\psi = \psi_0 + De\psi_1 + DeCa\psi^{(1)} + De^2\psi_2$ قرار دهیم. نیروی درگ بدست آمده بصورت زیر خواهد بود.

$$\frac{F_D}{2\pi} = F_0 + DeF_1 + DeCaF^{(1)} + De^2F_2,$$

$$F_0 = \frac{3k+2}{k+1}, \quad F_1 = 0, \quad F^{(1)} = \frac{3k^2 - k + 8}{5(k+1)^2}\alpha_2\ ,$$

$$F_2 = -\frac{1}{600}k(18\beta^2k - 360\alpha^2\beta + 540\alpha\beta + 45\beta k + 540\beta k\alpha + 24\beta^2k\alpha^2 -$$
$$78\beta^2k\alpha - 360\beta k\alpha^2 + 45\beta + 200ak + 200a)/(k+1)^3, \tag{۴-۶۴}$$

با جایگذاری معادله (۴-۶۴) در معادله (۴-۲۰) سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک با استفاده از مدل گزیکس به شکل زیر قابل بیان می‌باشد:

$$U_\infty = \frac{2(\tilde{\rho} - \rho)gR^2}{3\eta(F_0 + DeF_1 + DeCaF^{(1)} + De^2F_2)} \tag{۴-۶۵}$$

توجه داشته باشید، با اینکه صورت کلی معادله سرعت نهایی مدل گزیکس همانند مدل اولروید-بی می‌باشد ولی ضرایب آنها متفاوت است.

با استفاده از معادله تنش نرمال (۴-۳۲) و حل آن با استفاده از شرایط مرزی معادله (۴-۳۳) داریم.

$$\delta p-4\alpha_2 DeP_2(\mu)-10\beta_3 DeCaP_3(\mu)+10\alpha_3 De^2 P_3(\mu)$$

$$=\frac{1}{Ca}(2-2\zeta-\frac{d}{d\mu}[(1-\mu^2)\frac{d\zeta}{d\mu}]) \tag{۴-۶۶الف}$$

در معادله بالا

$$\begin{aligned}\alpha_3 = &(2716k\beta\alpha-308k\beta\alpha^2+175\alpha^2-945\alpha-32280k-5376k\alpha^2+\\ &25495k\alpha-45240k^2+1540+58476\beta k^2-7495k^2\alpha^2+35555k^2\alpha-\\ &36580k^2\beta\alpha+5696k^2\beta\alpha^2-11420k^3-12332k^3\beta\alpha+1972k^3\beta\alpha^2\\ &+15648k^3\beta-1945k^3\alpha^2+9115k^3\alpha)/(14000(k+1)^3)\end{aligned} \tag{۴-۶۶ب}$$

شکل متقارن پایای قطره ویسکوالاستیک با استفاده از مدل گزیکس به صورت زیر قابل بین می‌باشد.

$$r(\theta)=1+\zeta=1-\alpha_2 DeCaP_2(\cos\theta)-\beta_3 DeCa^2 P_3(\cos\theta)+\alpha_3 De^2 CaP_3(\cos\theta) \tag{۴-۶۷}$$

فصل پنجم

نتایج و بحث

مقدمه

در این فصل، نتایج حاصل از مشاهدات آزمایشگاهی و حل تحلیلی از سقوط قطره ویسکوالاستیک در سیال ویسکوز ارائه می‌شوند. در قسمت آزمایشگاهی از روغن سیلیکون به عنوان سیال نیوتنی و محلول آب/گلیسیرین و پلیمر گزانتام به عنوان قطره ویسکوالاستیک استفاده شده است. روش حل تحلیلی که در فصل ۴ به صورت مفصل بیان شد، استفاده از حساب اغتشاشات برای هر دو جریان داخل و خارج بوده و اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند.

در این فصل ابتدا به مقایسه نتایج آزمایشگاهی و حل تحلیلی می‌پردازیم، برای این کار باید تصاویر بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی توسط برنامه پردازش تصویر نوشته شده، آنالیز گردند تا بتوان پارامترهای ورودی هر تصویر را برای حل تحلیلی بدست آورد. در ادامه به بررسی اثر تغییرات پارامترهای عدد مویینگی، دبورا، نسبت ویسکوزیته قطره به ویسکوزیته سیال نیوتنی k، نسبت ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک β روی شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط پرداخته می‌شود.

۵-۱ پردازش تصویر[1]

جهت بدست آوردن پارامترهایی از قبیل عدد رینولدز برای مشخص شدن خزشی بودن جریان و اعداد دبورا و مویینگی که به عنوان پارامترهای حساب اغتشاشات می‌باشند باید اطلاعاتی نظیر سرعت قطره و قطر معادل آن معلوم باشد. برای مشخص شدن صحت حل تحلیلی باید تصاویر بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی مربوط به سقوط قطرات با حجم‌های متفاوت با نتایج بدست آمده از حل تحلیلی مقایسه گردد. استخراج تصاویر از حل تحلیلی نیاز به وارد کردن پارامترهای مذکور دارد. بنابراین، روی هر قطره که به-صورت آزمایشگاهی بدست آمده باید پردازش تصویر صورت گیرد.

[1] . Image Processing

برنامه‌های نوشته شده به زبان متلب[1] می‌باشند. برای بدست آوردن حجم قطره‌ها از روش‌هایی که هوگلی[2] [۳۳] معرفی کرده، استفاده شده است. هدف در این روش‌ها بدست آوردن حجم قطره با استفاده از شکل دوبعدی آن می‌باشد. روند کار به این‌صورت است، ابتدا تصویری بدون وجود قطره به عنوان تصویر مرجع اختیار می‌شود. جهت دستیابی به این تصویر می‌توان یکی از عکس‌ها را انتخاب نمود و با استفاده از نرم افزارهای موجود کل قطره که در سیال نیوتنی محیط قرار دارد را سفید کرد، و یا اینکه یک عدد عکس از محیط نیوتنی سیال بدون وجود قطره تهیه کنیم. البته ذکر این نکته ضروری است که، زمانی که دوربین در حال عکس‌برداری می‌باشد بدون جابجا کردن آن باید تصویر مذکور را تهیه نمود یعنی نباید عکس‌برداری نسبت به مکان خاصی از سلول باشد و تصویر تهیه شده از مکان دیگری از سلول باشد. زیرا، در این صورت مرز قطره در هنگام آنالیز با سیال نیوتنی درست محاسبه نمی‌شود و در پی آن، نتایج بدست آمده از پردازش تصویر مورد نظر دقت کافی را ندارد.

برنامه‌های پردازش تصویر نوشته شده در ضمیمه ب موجود می‌باشد. برای پردازش تصویر نیاز به حداقل ۲۵ عدد از تصاویر ضبط شده توسط دوربین سرعت بالا می‌باشد. برای تعداد زیاد عکس محدودیتی وجود ندارد و باید دانست که هر چه تعداد عکس‌های ورودی بیشتر باشد نتایج حاصله دقیق‌تر است. باید توجه داشت عکس‌هایی که به برنامه داده می‌شود باید پشت سر هم باشند و نمی‌توان آن‌ها را متفرقه وارد نمود چرا که در اندازه گیری سرعت قطره خطا وارد می‌شود. دوربین سرعت بالا مورد استفاده ۵۰۰۰ عکس را در ۵ ثانیه ضبط می‌کند. از این‌رو، فاصله زمانی هر عکس ۰/۰۰۱ ثانیه بوده و محاسبه سرعت توسط برنامه مربوطه بر همین اصل پایدار است.

برنامه اول ضریب وضوح تشخیص مرز قطره و سیال نیوتنی را مشخص می‌کند به این‌صورت که با ارائه چندین تصویر و مقایسه آن‌ها با یکدیگر بهترین ضریب انتخاب و در برنامه دوم که محاسبه سرعت، حجم، قطر معادل و ... بر عهده آن می‌باشد، وارد می‌شود.

اجرای برنامه دوم نسبت به برنامه اول به مراتب مشکل‌تر و پیچیده‌تر می‌باشد. مکانیزم برنامه دوم به این-

---

[1]. Matlab

[2]. Hugli

صورت است که با تفریق تصویر مورد نظر از تصویر مرجع شکل قطره را تولید کرده و با انجام این کار برای تصاویر بعدی بواسطه محاسبه مکان هندسی مرکز قطره برای هر تصویر و مقایسه با تصویر قبلی بردارهای سرعت در جهت حرکت و عمود بر جهت حرکت را محاسبه می‌نماید. این واقعیت وجود دارد که قطره در حال سقوط مؤلفه سرعت در جهت عمود بر مسیر اصلی را دارا باشد البته مقدار این مؤلفه بسیار ضعیف بوده و این واقعیت در اثر عوامل زیادی از جمله: عمود نبودن دقیق نازل با سطح آزاد سیال نیوتنی، ساکن نبودن کامل سیال نیوتنی و ایجاد جریان‌هایی بسیار ضعیف در سیال نیوتنی ناشی از سقوط قطرات قبلی، وجود حباب هوا در سیال نیوتنی و ... است. خوشبختانه در مشاهدات آزمایشگاهی صورت گرفته در این تحقیق مؤلفه‌های عمود بر جریان اصلی بسیار ضعیف و براحتی قابل اغماض بودند.

پیچیدگی برنامه دوم نسبت به مورد ابتدایی به این صورت است که با پیشروی برنامه و پردازش هر یک از تصاویر امکان برهم‌خوردن مرز بین فاز قطره و سیال نیوتنی وجود دارد و احتمال وقوع این مشکل بسیار بالا است. درصد وقوع این مشکل در مورد قطرات بزرگتر که دارای سرعت بیشتری می‌باشند بسیار بالا بوده به گونه‌ای که با پردازش هر تصویر مرز بین دو فاز دچار اختلال شده و برای هر کدام از تصاویر با محدودیت‌هایی صورت گیرد که این کار بسیار دشوار است تا بتوان مرز هر تصویر را به درستی ایجاد نمود. این مشکل برای قطرات به اندازه کافی کوچک کمتر رخ می‌دهد یا به ازای هر چند تصویر باید اصلاحات صورت گیرد.

۵-۲ مقایسه نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی

در این قسمت صحت نتایج حل تحلیلی بوسیله مقایسه با مشاهدات آزمایشگاهی حاصل از تحقیق حاضر مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. روی هر یک از تصاویر آزمایشگاهی ارائه شده در این قسمت پردازش تصویر صورت گرفته و پارامترهای لازم برای حل تحلیلی استخراج شده است. همانطور که در فصل ۴ بیان شد، مدل‌های مورد استفاده برای شبیه سازی حرکت و شکل پایای قطره ویسکوالاستیک مدل شبه خطی اولروید-بی و مدل غیر خطی گزیکس می‌باشند که نتایج بدست آمده برای هر قطره از طریق این دو مدل

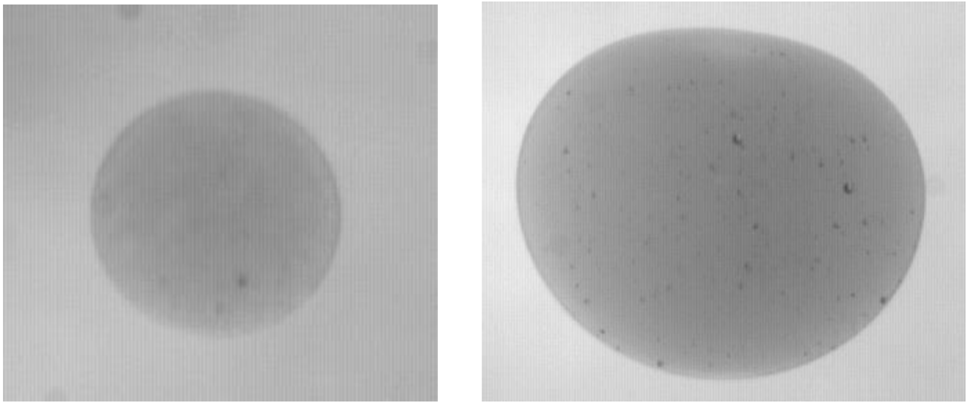
ارائه و با هم مقایسه می‌شوند.

نکته لازم در مورد مشاهدات آزمایشگاهی وجود تعداد محدودی از حباب‌های هوا در برخی از تصاویر بدست آمده می‌باشد. استراحت دادن به محلول پلیمری قطره برای خارج شده تمامی تنش‌های باقی مانده و حباب‌های هوای محبوس شده به هنگام هم زدن لازم و ضروری است. برخی از حباب‌های هوا به دلیل کوچک بودن و نیروی حجمی وارده از سوی سیال قطره قادر به خروج از سیال نمی‌باشند به گونه‌ای که حتی با گذشت زمان طولانی (بیشتر از یک هفته [۲۸]) قادر به خارج شدن از سیال قطره نمی‌باشند. از این‌رو وجود چنین حباب‌هایی نمی‌توانند روی شکل پایای قطره تأثیری داشته باشند و فقط روی برخی خواص اثر دارند. به همین جهت، تمامی خواص رئولوژی و سیالاتی لازم برای قطره و سیال نیوتنی با موادی که در آزمایشگاه برای ثبت تصاویر استفاده می‌شدند، گرفته شده است.

در شکل (۵-۱) نمونه‌ای از مشاهدات آزمایشگاهی و نتایج بدست آمده از حل تحلیلی برای حجم‌های مشابه به نمایش در آمده است.

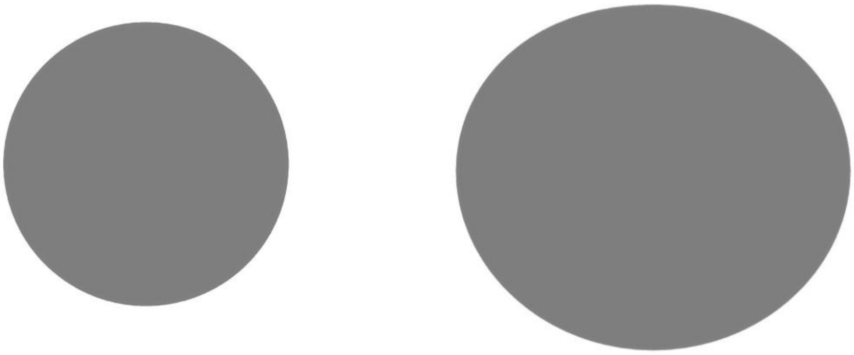
(الف) (ب)

مشاهدات آزمایشگاهی:



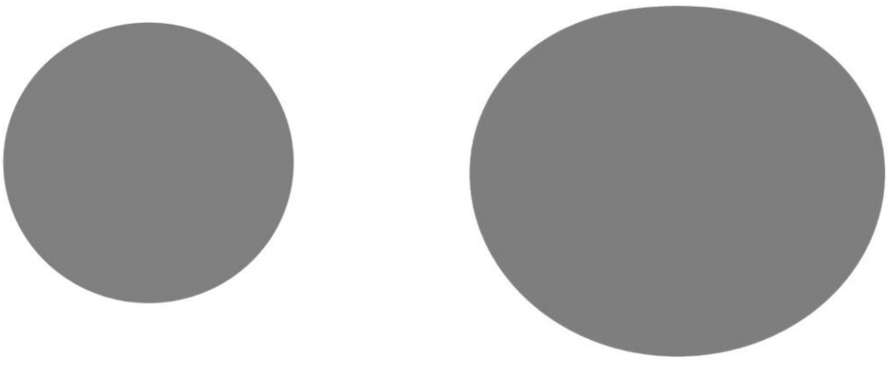
$U_\infty = 4.145 cm.s^{-1}$ $U_\infty = 0.61 cm.s^{-1}$

اولروید-بی:



$U_\infty = 4.41 cm.s^{-1}$ $U_\infty = 0.63 cm.s^{-1}$

گزیکس:



$U_\infty = 4.25 cm.s^{-1}$ $U_\infty = 0.625 cm.s^{-1}$

شکل (۵-۱): مقایسه شکل پایای بدست آمده از حل تحلیلی بواسطه بهره‌گیری از دو مدل اولروید-بی و گزیکس برای شبیه سازی قطره ویسکوالاستیک با مشاهدات آزمایشگاهی بدست آمده. الف) $vol = 0.11 ml$، ب) $vol = 1.115 ml$

در شکل (۵-۱) قطره ویسکوالاستیک که محلولی از آب/گلیسیرین با درصد حجمی ۲۰:۸۰ و ۰/۰۸٪ وزنی پلیمر گزانتام می‌باشد در روغن سیلیکون با لزجت $4.5P$ سقوط می‌کند. علت ذکر این موارد به این خاطر است که در ادامه شاهد تصاویری از شکل پایای قطره ویسکوالاستیک هستیم که در روغن سیلیکون با لزجت متفاوت سقوط می‌کند. در شکل (۵-۱الف) آزمایشگاهی، تغییر چندانی در شکل کروی قطره مشاهده نمی‌گردد. شکل پایای قطره در فاز سیال دیگر به نیروی گرانش، تانسورهای تنش بین دو سیال، پروفیل فشار هر دو سیال، شکل اولیه هنگام جدا شدن از نازل و نیروی کشش سطحی بین دو سیال بستگی دارد. در بین موارد نامبرده شده که روی شکل قطره می‌توانند تأثیر داشته باشند دو نیروی حاصل از تنش-های موجود در قطره و کشش سطحی نسبت به دیگر موارد از اهمیت بیشتری برخوردار هستند. برای قطره ویسکوالاستیک به اندازه کافی کوچک در حال سقوط در فاز نیوتنی مسلماً شرایط جریان خزشی به خوبی برقرار می‌باشد و عدد رینولدز با تقریب بسیار خوبی به صفر نزدیک است چرا که ویسکوزیته سیال نیوتنی بالا می‌باشد. در این حالت، نیروی کشش سطحی بر نیروهای دیگر خصوصاً تنش‌های ویسکوالاستیک غلبه می‌کند. کشش سطحی خاصیتی در مایعات است که باعث می‌شود لایه بیرونی آن‌ها به صورت ورقه‌ای ارتجاعی عمل کند، از سوی دیگر کشش سطحی را می‌توان مقدار کار لازم برای ایجاد واحد سطح مشترک جدید در نظر گرفت.

کشش سطحی با Γ نشان داده می‌شود، واحد استاندارد آن اِرگ بر سانتیمتر مربع (erg/cm^2) می-باشد که قابل تبدیل به واحدهای دیگر است . در اغلب موارد، کشش سطحی سعی دارد که مساحت مایع را کم نماید. رابطه محاسبه کشش سطحی به صورت زیر می‌باشد:

$\Gamma =$ (انرژی کشش / مولکول) (تعداد مولکولها / مساحت)

همانطور که در فصل (۲) بیان شد، کشش سطحی بین دو سیال در این تحقیق $30.3\times10^{-3}(N/m)$ اندازه گیری شده است. برای قطره در حال سقوط کشش سطحی همواره سعی در کروی نگه داشتن قطره دارد و در صورت کوچک بودن قطره به عنوان نیروی غالب این عمل را به خوبی انجام می‌دهد.

در شکل (۵-۱ب) بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی، تغییر شکل و ایجاد گودی در انتهای قطره مشهود می‌باشد. نیروی غالب در این حالت تنش‌های ویسکوالاستیک می‌باشد و با افزایش حجم قطره این

نیرو رشد می‌کند. با استفاده از پردازش تصویر حجم قطره ویسکوالاستیک مورد نظر محاسبه گردیده و با قرار دادن در معادله (۴-۴۸) برای مدل اولروید-بی و معادله (۴-۶۵) برای مدل گزیکس می‌توان سرعت نهایی سقوط قطره را به‌صورت تحلیلی محاسبه نمود. نکته بسیار مهم در روند حل توجه داشتن به مقدار عدد رینولدز برای جریان خارجی به ازای هر حجم قطره می‌باشد. در جدول (۵-۱) مقادیر قطر معادل قطره در حال سقوط و عدد رینولدز جریان خارجی بیان شده است.

جدول (۵-۱): مقادیر قطر معادل و عدد رینولدز قطرات شکل (۵-۱)

قطره	قطر معادل $D(cm)$	Re
الف	0.594	4×10^{-2}
ب	1.2866	0.63

با مقایسه نتایج بدست آمده مشخص می‌شود که، تطابق خوبی بین شکل‌های بدست آمده از حل تحلیلی با نتایج آزمایشگاهی وجود دارد. در صورت ساختاری بی‌بعد مدل اولروید و گزیکس ضریب نسبت ویسکوزیته β وجود دارد که با توجه به داده‌های بدست آمده از تست‌های رئولوژی این مقدار به صورت زیر محاسبه می‌شود.

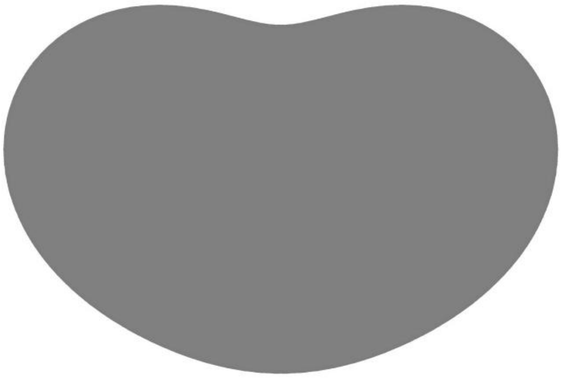
$$\beta=\frac{\tilde{\eta}_{0,p}}{\tilde{\eta}_0}=\frac{\tilde{\eta}_0-\tilde{\eta}_{0,s}}{\tilde{\eta}_0} \tag{۵-۱}$$

در رابطه بالا مقدار $\tilde{\eta}_0=9.5(pa.s)$ و $\tilde{\eta}_{0,s}=1.2(pa.s)$ می‌باشد با قرار دادن مقادیر ذکر شده در معادله (۵-۱) نسبت ویسکوزیته $\beta=0.905$ محاسبه می‌شود. در مدل ساختاری گزیکس α به عنوان ضریب تحرک موجود می‌باشد که برای محلول قطره مورد نظر $\alpha=0.42$ محاسبه می‌شود[۲۹].

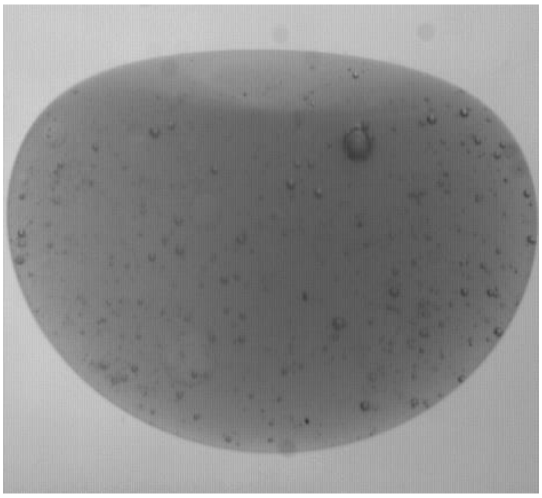
شکل (۵-۱) نشان دهنده تطابق مناسب نتایج آزمایشگاهی با حل تحلیلی می‌باشد. شکل (۵-۱ب) حجم بحرانی برای ایجاد حفره در قسمت انتهایی قطره می‌باشد. بدین صورت که، با افزایش حجم قطره حفره ایجاد شده در قسمت فوقانی قطره رشد و توسعه می‌یابد. در شکل (۵-۲) مقایسه‌ای بین نتایج بدست

آمده برای قطره‌ای با حجم بیشتر تکرار شده است.

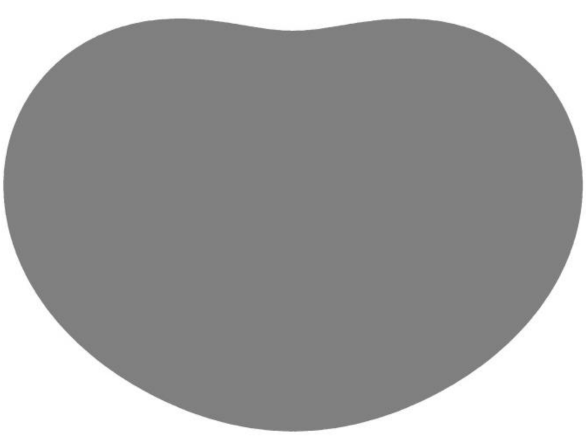
مدل اولروید-بی



آزمایشگاه



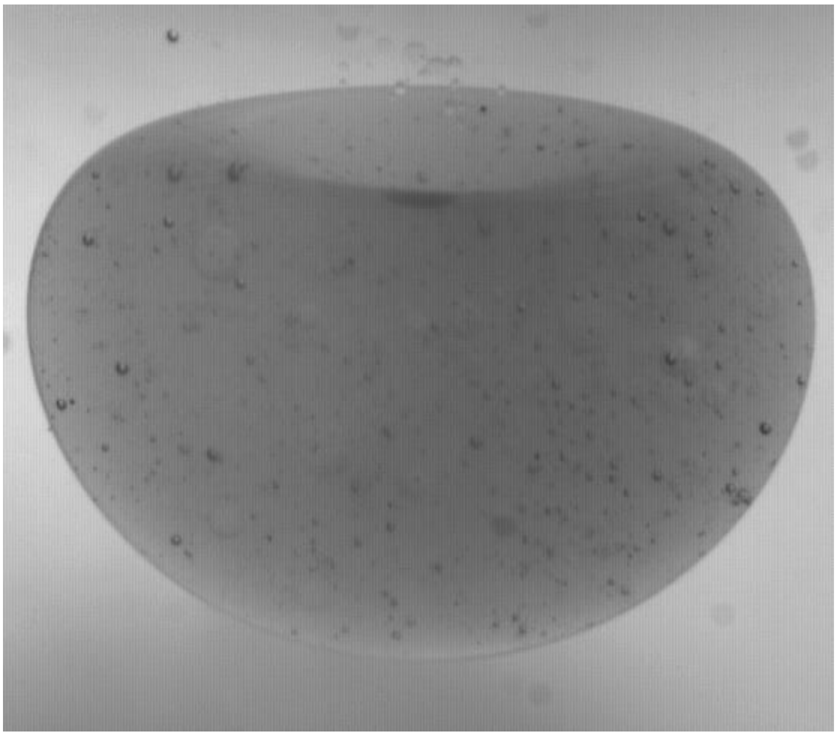
مدل گزیکس



شکل (۵-۲): مقایسه شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با حجم $3.83ml$ در روغن سیلیکون $4.5P$

در شکل (۵-۲) همانطور که مشاهده می‌شود مدل گزیکس شبیه سازی بهتری نسبت به مدل اولروید-بی به نمایش گذاشته است. برای هر دو مدل ارائه شده اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند. بنابراین، شرط $De << 1$ و $Ca << 1$ برای این پارامترها باید برقرار باشد. به ازای دور شدن این اعداد از شرایط گفته شده دقت حل پایین آمده و باعث بروز خطا می‌گردد. در مورد تصویر قطره شکل (۵-۲) باید بیان شود به دلیل حجم بالای قطره عدد مویینگی $Ca = 1.2$ بدست می‌آید.

بنابراین، ایجاد خطا در محاسبه شکل قطرات بواسطه حل تحلیلی امری طبیعی می‌باشد. افزایش حجم قطره باعث رشد مؤلفه شعاعی تنش ویسکوالاستیک خواهد شد و بر نیروی کشش سطحی موجود بین دو سیال غلبه خواهد کرد. مؤلفه شعاعی تنش ویسکوالاستیک میل زیادی برای فرو بردن انتهای قطره به سمت داخل دارد. بنابراین، با افزایش حجم قطره مقدار فرورفتگی ایجاد شده در انتهای قطره رشد خواهد کرد. در شکل (۵-۳) می‌توانید رشد حفره ایجاد شده در انتهای قطره را با افزایش حجم آن مشاهده نمایید.



شکل (۵-۳): رشد فرورفتگی با افزایش حجم قطره ویسکوالاستیک حاوی ۰/۰۸٪ گزانتام $vol = 4.7ml$ در سیلیکون $4.5P$

شکل (۵-۳) را نمی‌توان بصورت تحلیلی شبیه سازی و مقایسه نمود به این جهت که، به دلیل حجم زیاد قطره در حال سقوط عدد رینولدز تولید شده برای جریان خارجی بیشتر از مقدار واحد بوده از این‌رو، شرط خزشی بودن جریان برقرار نمی‌باشد. در این حالت نوع جریان، رینولدز پایین[1] می‌باشد که با فرض ناچیز بودن جمله اینرسی در معادلات حرکت ناسازگار و نادیده گرفتن آن می‌تواند باعث خطا گردد که مقدار آن هم ناچیز و قابل اغماض نمی‌باشد.

[1]. Low Reynolds

تا به این‌جا از روغن سیلیکون با ویسکوزیته $4.5P$ به عنوان سیال نیوتنی محیط استفاده شده است. برای خزشی بودن جریان در حجم‌های بالا می‌توان دو پارامتر ویسکوزیته و چگالی سیال نیوتنی را تغییر داد. بدین صورت که، هر چه اختلاف چگالی بین سیال نیوتنی و قطره ویسکوالاستیک کاهش یابد سرعت نهایی سقوط قطره کاهش پیدا کرده و شرایط جریان خزشی راحت‌تر برقرار می‌گردد. چرا که، یکی از پارامترهای مهم در تعیین میزان عدد رینولدز برای سنجش نوع جریان، سرعت نهایی قطره می‌باشد. از آنجا که فاز قطره تغییری ندارد تنها می‌توان به تغییر سیال نیوتنی محیط چشم داشت اما، همانطور که در فصل ۲ آورده شد یکی از خصوصیات روغن سیلیکون تغییر ناچیز چگالی آن به ازای ویسکوزیته‌های مختلف می‌باشد. تنها راه برای دست یافتن به این مهم تغییر ویسکوزیته سیال نیوتنی می‌باشد. خوشبختانه یکی از ویژگی‌های روغن سیلیکون گستردگی در لزجت است. هرچه ویسکوزیته سیال نیوتنی را افزایش دهیم سرعت نهایی قطره با ثابت ماندن قطر معادل آن کاهش پیدا می‌کند. البته باید توجه داشت، برای افزایش لزجت سیال نیوتنی محدودیت‌هایی وجود دارد. برای مثال در صورت افزایش بی‌رویه ویسکوزیته سیال نیوتنی حباب‌های هوای موجود در سیال که به هنگام پر کردن سلول وارد می‌شوند، نمی‌توانند با گذشت زمان از سیال خارج گردند در این‌صورت، روند عکس‌برداری دچار مشکل شده و عکس‌های بدست آمده کیفیت لازم را نخواهد داشت. از سوی دیگر با افزایش بیش از اندازه ویسکوزیته سیال، سیلیکون مشابه گریس غلیظ شده و سیالیت خود را از دست می‌دهد.

با استفاده از ترکیب دو روغن سیلیکون با ویسکوزیته‌های متفاوت می‌توان به ویسکوزیته مورد نظر دست پیدا کرد. با استفاده از همین روش ما توانستیم به ویسکوزیته $\eta = 0.83(pa.s)$ دست پیدا کنیم. برای این کار سیلیکون $4.5P$ را با سیلیکون $20P$ با نسبت جرمی ۱۲:۱ ترکیب شده است. در شکل (۵-۴) مقایسه شکل پایای قطره ویسکوالاستیک بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی و حل تحلیلی با استفاده از روغن سیلیکون بدست آمده (لزجت $0.83\,pa.s$) به عنوان سیال نیوتنی محیط صورت گرفته است.

آزمایشگاهی:

الف ب

اولروید-بی:

گزیکس:

شکل (۵-۴): شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در روغن سیلیکون $8.3P$ الف) $vol = 1.35\times10^{-3}ml$ ب) $vol = 0.235ml$

شکل‌های بدست آمده از حل تحلیلی تطابق بسیار خوبی با مشاهدات آزمایشگاهی بدست آمده دارند. مقادیر قطر معادل و عدد رینولدز قطرات موجود در شکل (۵-۴) را می‌توان در جدول (۵-۲) مشاهده نمود.

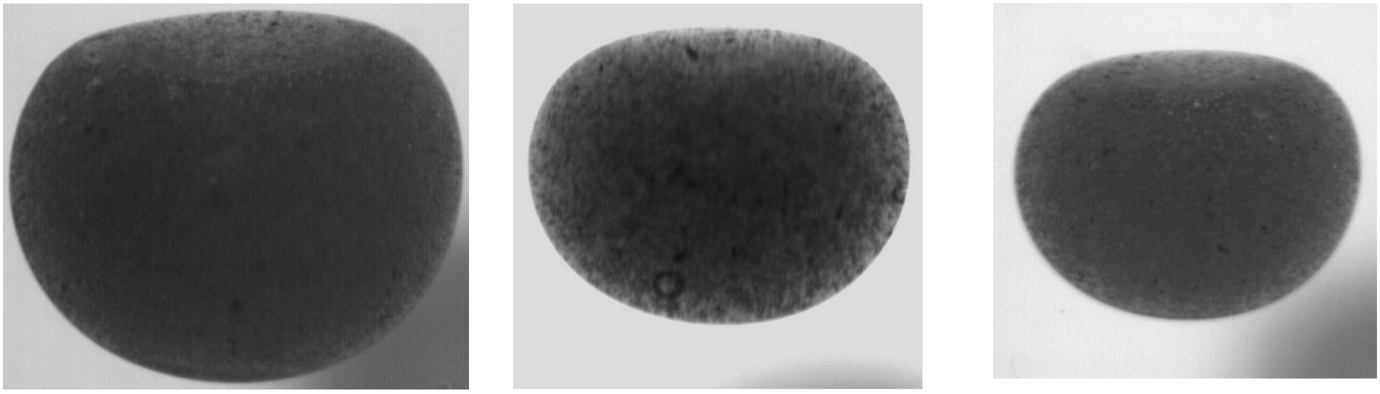
جدول (۵-۲): مقادیر قطر معادل و عدد رینولدز قطرات شکل (۵-۴)

قطره	**قطر معادل** $D(cm)$	Re
الف	0.137	0.8×10^{-4}
ب	0.766	0.036

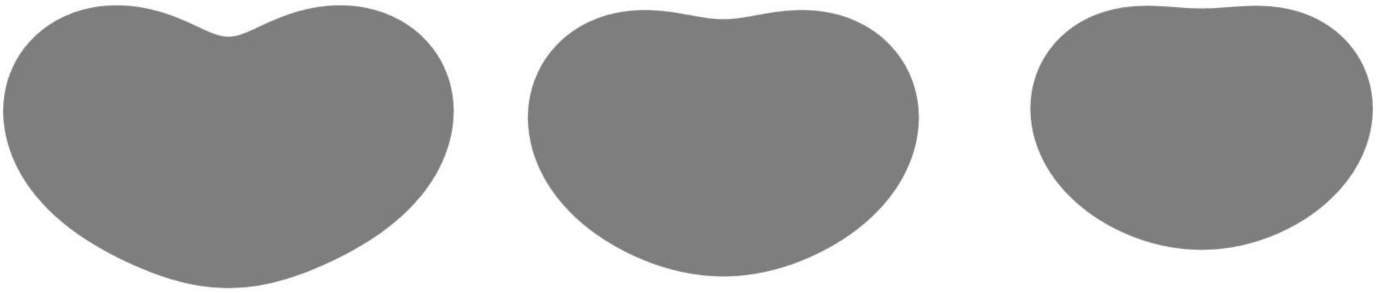
با افزایش حجم قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط حفره‌ای در قسمت انتهایی قطره ایجاد می‌شود. در شکل (۵-۵) تصاویر بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی و حل تحلیلی برای قطراتی با حجم بزرگ‌تر ارائه شده است.

آزمایشگاهی:

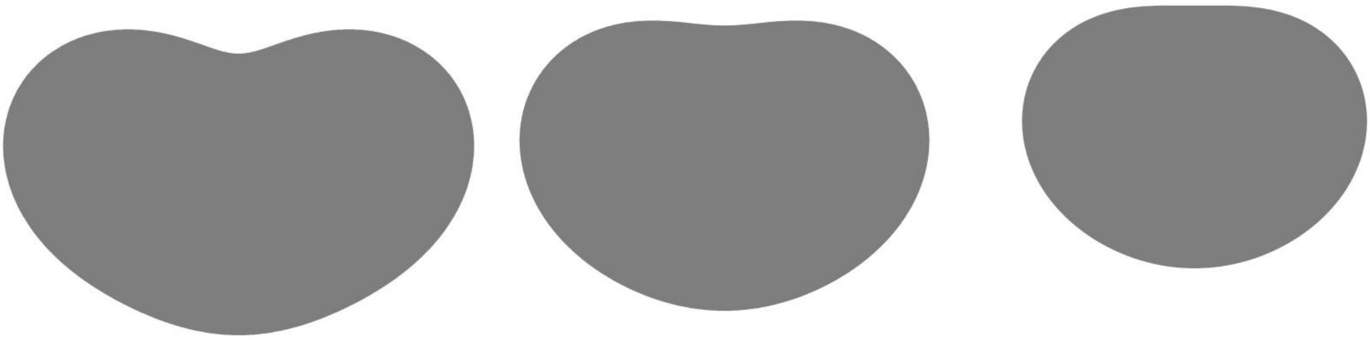
الف ب ج



اولروید-بی:



گزیکس:



شکل (۵-۵): شکل پایای قطره ویسکوالاستیک حاوی آب/گلیسیرین و ۰/۰۸٪ گزانتام در روغن سیلیکون $8.3P$ الف) $vol = 1.812ml$ ب) $vol = 2.443ml$ ج) $vol = 3.454ml$

شکل (۵-۵الف) بدست آمده از حل تحلیلی دارای تطابق خوبی برای هر دو مدل مورد استفاده با نتیجه آزمایشگاهی می‌باشد. در مورد شکل (۵-۵ب) تصویر بدست آمده از حل تحلیلی بوسیله مدل غیرخطی گزیکس شباهت بیشتری به نتیجه آزمایشگاهی دارد. اما شکل (۵-۵ج) کمی با مشاهده آزمایشگاهی خود تفاوت دارد. این اختلاف برای مدل اولروید-بی بیشتر از مدل گزیکس به چشم می‌خورد، زیرا با افزایش حجم قطره، قطر معادل و سرعت نهایی قطره در حال سقوط افزایش پیدا می‌کند. این دو پارامتر نقش اساسی در تعیین اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی که به عنوان پارامترهای اغتشاشی می‌باشند، دارند. از این‌رو، به جهت اینکه حل تحلیلی خطای کمی نسبت به مشاهدات آزمایشگاهی داشته باشد باید این مقادیر کوچکتر از مقدار واحد باشند. در مورد این محلول به عنوان قطره ویسکوالاستیک سرعت افزایش عدد مویینگی نسبت به عدد بی‌بعد دبورا که نشان دهنده خاصیت الاستیک سیال می‌باشد، بیشتر است. به عبارت دیگر، با افزایش حجم قطره ویسکوالاستیک عدد مویینگی نسبت به دبورا سریع‌تر رشد می‌کند. این امر برای قطرات با حجم زیاد باعث بروز خطا در حل تحلیلی می‌شود. برای مثال، شکل (۵-۵ج) دارای حجم $3.454ml$ می‌باشد. با محاسبه سرعت نهایی با استفاده از معادله (۴-۴۸) برای مدل اولروید-بی و معادله (۴-۶۵) برای گزیکس و قرار دادن این مقادیر در معادلات (۳-۳) و (۳-۴) مقدار عدد دبورا $De = 0.41$ و عدد مویینگی $Ca = 1.377$ برای مدل اولروید-بی و این مقادیر برای مدل گزیکس $De = 0.406$ و $Ca = 1.363$ بدست می‌آید. مشاهده می‌شود مقادیر دبورا و مویینگی برای هر دو مدل بسیار به هم نزدیک است چرا که، تنها عامل تأثیر گذار در این اعداد که با تغییر مدل می‌تواند تغییر کند سرعت نهایی بدست آمده از هر مدل است. مشاهده خواهد شد، نمودار سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک بدست آمده با استفاده از این دو مدل بسیار نزدیک به هم می‌باشد. عدد مویینگی محاسبه شده برای شکل (۵-۵ج) بیشتر از واحد بوده و ایجاد خطا در تولید شکل پایا توسط حل تحلیلی از این عدد ناشی می‌شود. پس می‌توان گفت، تا زمانی حل تحلیلی دارای خطای کمی می‌باشد که پارامترهای حساب اغتشاشات (اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی) دارای مقادیری کمتر از واحد باشند.

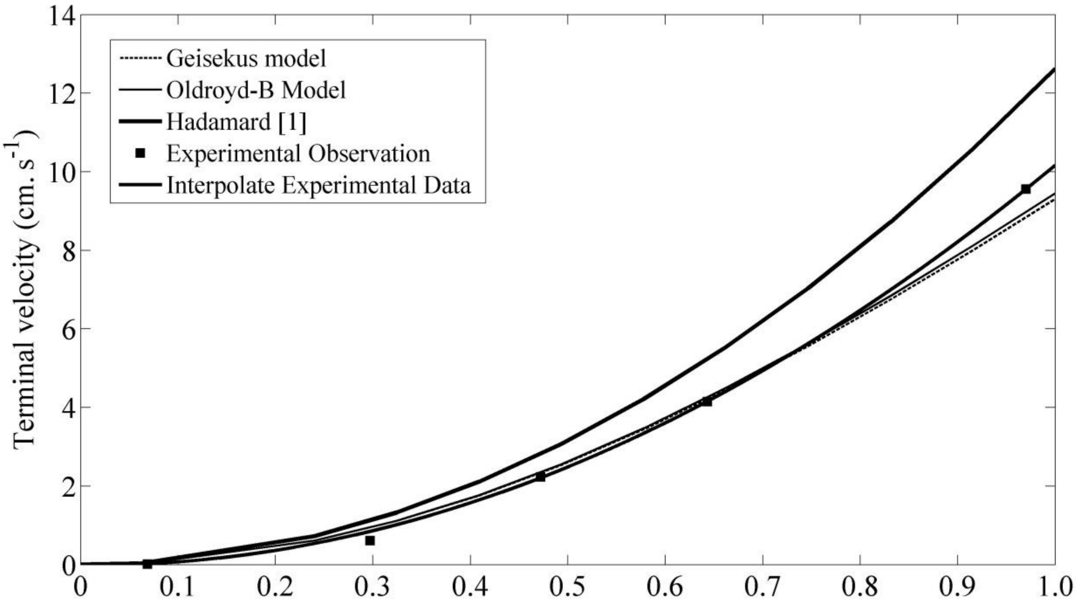
مشخصات قطر معادل قطرات و عدد رینولدز جریان خارجی موجود در شکل (۵-۵) در جدول (۵-۳) قابل مشاهده می‌باشد.

جدول (۵-۳): اندازه قطر معادل و عدد رینولدز جریان برای قطرات شکل (۵-۵)

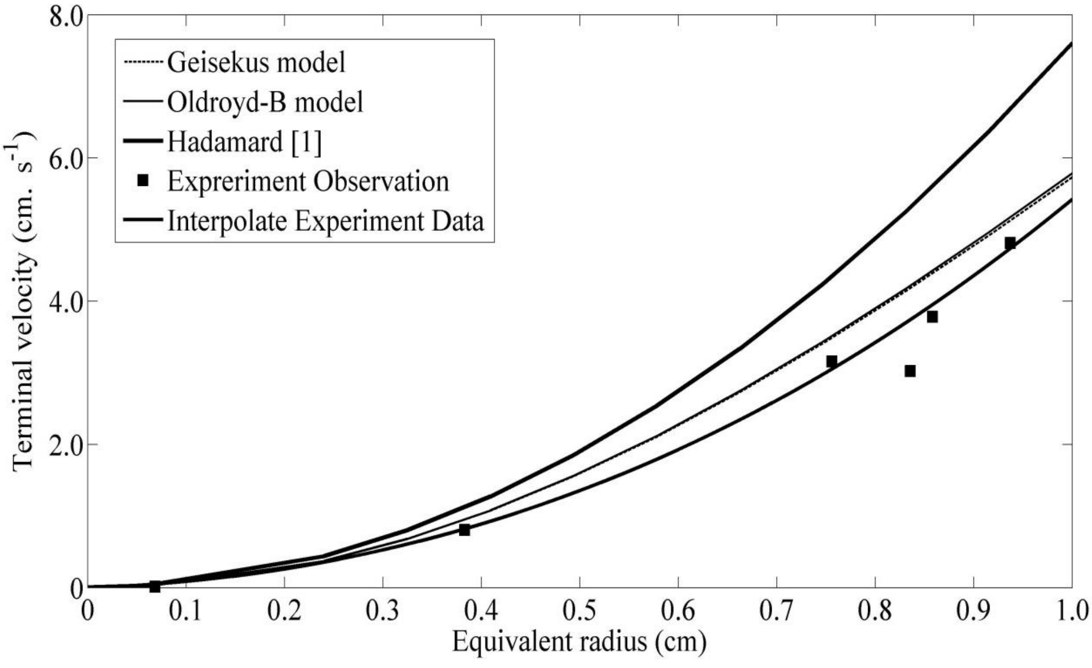
قطره	قطر معادل $D(cm)$	Re
الف	1.512	0.2803
ب	1.671	0.2961
ج	1.874	0.528

همانطور که پیش‌تر اشاره شد، سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط، سرعتی است که قطره در حالت پایای شکل خود بدست می‌آورد. این سرعت با افزایش فاصله قطره از لبه سلول حاوی سیال نیوتنی تغییر نمی‌کند و ثابت باقی می‌ماند. به‌طور کلی، هر چه حجم قطره کوچک‌تر باشد قطره سریع‌تر به شکل پایای خود رسیده و سرعت نهایی خود را زودتر بدست می‌آورد.

در شکل (۵-۶) نمودار سرعت نهایی قطره متقارن ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیلیکون $4.5 Poise$ با تغییرات شعاع معادل قطره رسم شده است. در این نمودار مقادیر بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی که به بوسیله برنامه پردازش تصویر بدست آمده است با مقادیر حاصل از حل تحلیلی با استفاده از دو مدل اولروید-بی و گزیکس مقایسه شده‌اند. همچنین شکل (۵-۷) سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک را در سیلیکون $8.3 Poise$ نشان می‌دهد.



شکل (۵-۶): سرعت نهایی بر حسب تغییر شعاع معادل قطرات در حال سقوط در سیلیکون $4.5Poise$



شکل (۵-۷): سرعت نهایی بر حسب تغییر شعاع معادل قطرات در حال سقوط در روغن سیلیکون $8.3Poise$

شکل (۵-۶) مربوط به سرعت نهایی قطره در حال سقوط در سیلیکون با ویسکوزیته $4.5P$می‌باشد و شکل (۵-۷) سرعت نهایی قطره در سیلیکون $8.3P$ را با تغییر شعاع معادل یا همان حجم قطره به نمایش گذاشته

است. مشاهده می‌شود با افزایش ویسکوزیته سیال نیوتنی محیط از 4.5 به $8.3P$ مقادیر سرعت با ثابت ماندن شعاع معادل قطره ویسکوالاستیک کاهش چشم‌گیری داشته است. مقادیر بدست آمده از حل تحلیلی حاضر بواسطه مدل‌های گزیکس و اولروید-بی اختلاف کمی نسبت به مقادیر آزمایشگاهی دارند و از حل تحلیلی بدست آمده توسط هادامارد [۴] بهتر حرکت قطره را نمایش داده‌اند. برای قطره در حال سقوط در سیلیکون $4.5P$ میانگین خطای سرعت نهایی قطره بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی با مدل ارولروید-بی و گزیکس به‌ترتیب، %6.0 و %5.95 و برای سیلیکون $8.3P$ به‌ترتیب، %2.6 و %2.59 می‌باشد. این اعداد نشان دهنده خطای پایین بین مشاهدات آزمایشگاهی و نتایج حاصل از حل تحلیلی می‌باشند. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج سرعت نهایی قطره بدست آمده، بوسیله مدل اولروید-بی در مقابل نتایج حاصل از مدل گزیکس بسیار نزدیک به یکدیگر هستند. این واقعیت در مقایر خطای بدست آمده مشخص است. با وجود اختلاف بسیار کم مقادیر سرعت نهایی قطره برای هر دو مدل، شکل قطرات تولیدی با استفاده از این مدل‌ها دارای اختلافاتی بایکدیگر می‌باشند.

۵-۳ تأثیر متغیرها در حرکت و شکل قطره ویسکوالاستیک

در این قسمت اثر متغیرهای α، k، β و اعداد بی‌بعد De و Ca روی شکل و حرکت قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط بررسی می‌شود.

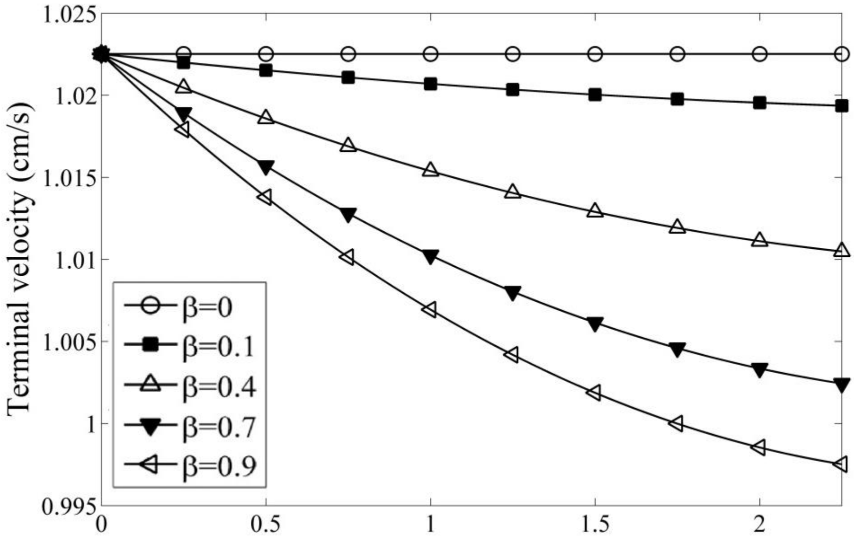
۵-۳-۱ الاستو-کاپیلاری[1]

ابتدا، تغییرات سرعت نهایی قطره برحسب عدد بی‌بعد الاستو-کاپیلاری Ec بررسی می‌گردد. این عدد جزء گروهای بی‌بعدی می‌باشد که برای یک هندسه تعریف شده فقط به خواص مکانیکی سیال وابسته است [۳۲]. عدد بی‌بعد الاستو-کاپیلاری به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد:

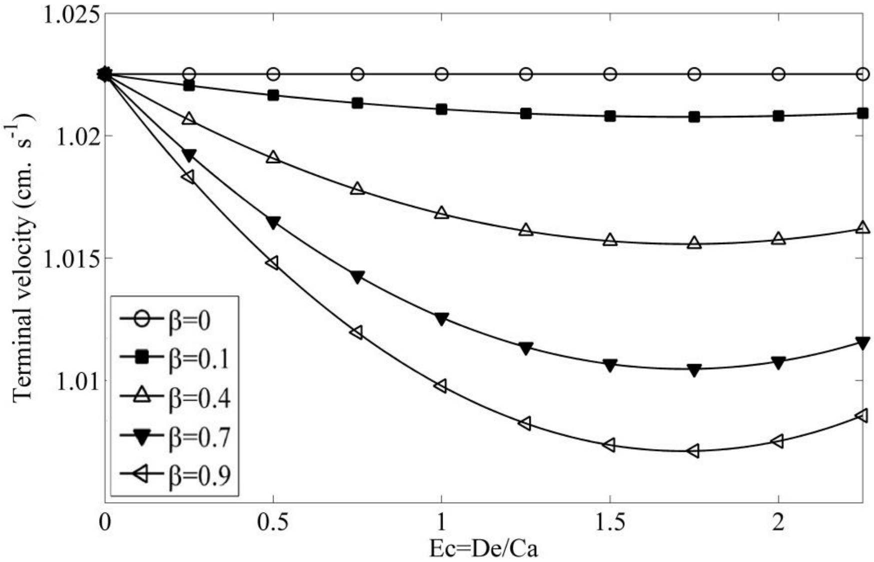
[1]. Elasto-Capillary

$$Ec=\frac{De}{Ca}=\frac{\lambda\Gamma}{(k+1)\eta R} \qquad (۲-۵)$$

شکل (۵-۸) و (۵-۹) نشان دهنده تغییرات سرعت نهایی قطره با تغییر عدد Ec با استفاده از مدل اولروید-بی و گزیکس می‌باشد.



شکل (۵-۸): تغییرات سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط دارای $R=0.4cm, k=30, \tilde{\rho}-\rho=0.29g.cm^{-3}$ $\eta=1pa.s$ بر حسب عدد Ec با استفاده از مدل اولروید-بی



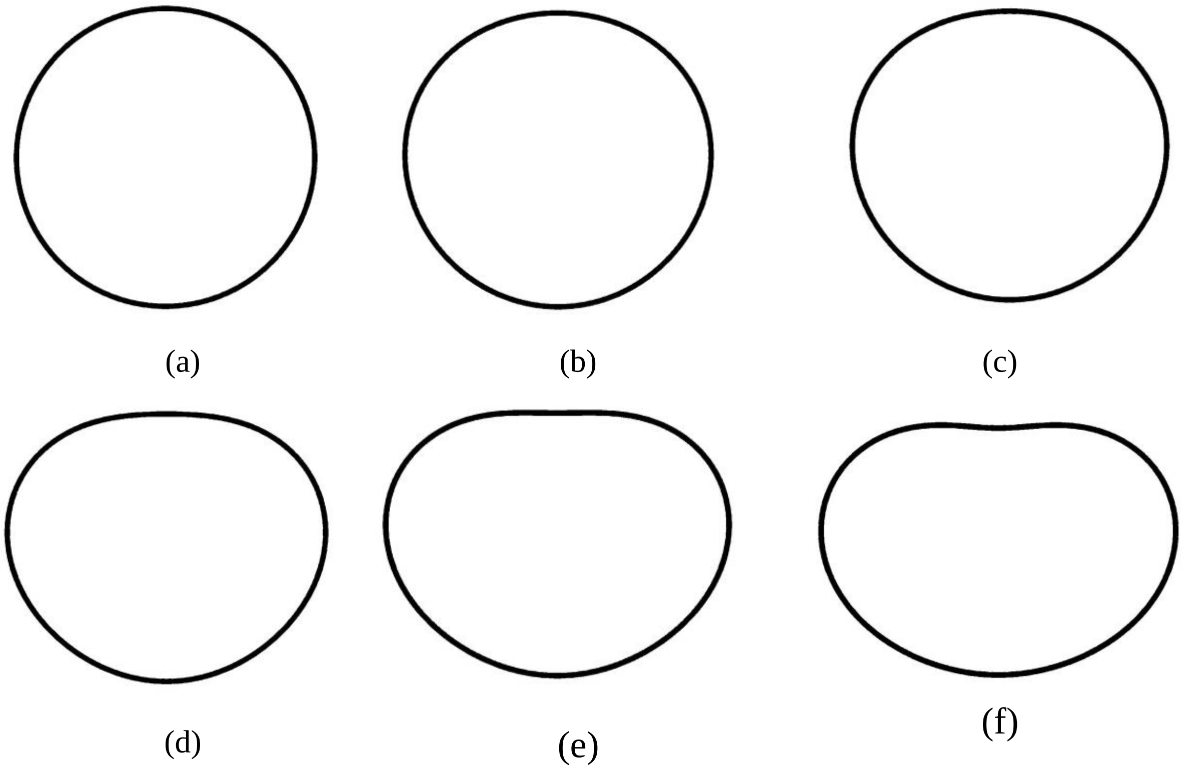
شکل (۵-۹): تغییرات سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط دارای $R=0.4cm, k=30, \tilde{\rho}-\rho=0.29g.cm^{-3}$ $\eta=1pa.s$ بر حسب عدد Ec با استفاده از مدل گزیکس

در شکل (۵-۸) و (۵-۹) مشاهده می‌شود به ازای قطره نیوتنی $\beta=0$، تغییرات سرعت نسبت به Ec صفر

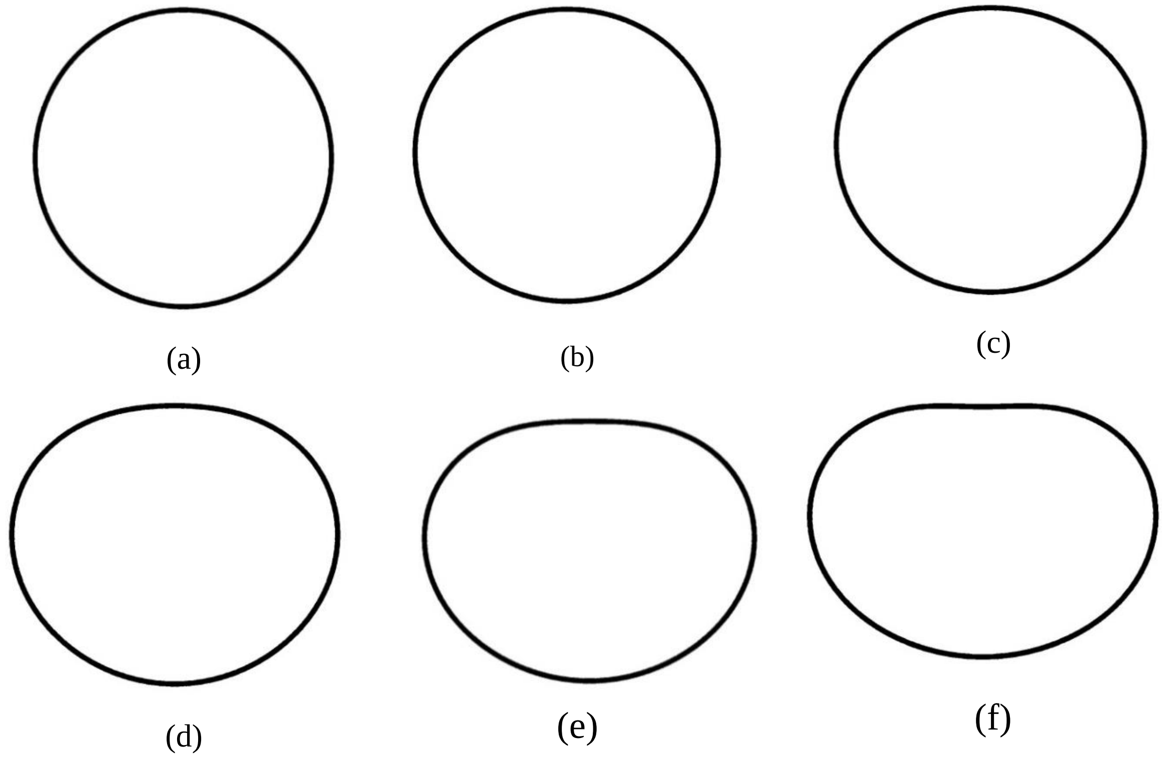
می‌باشد. چرا که در یک سیال نیوتنی، زمان آسودگی از تنش λ بسیار کوچک و با تقریب خوبی برابر صفر می‌باشد. از این‌رو، عدد دبورا که خاصیت الاستیک یک سیال را نشان می‌دهد برای یک سیال نیوتنی صفر است. با افزایش β، نرخ کاهش سرعت نهایی برای هر دو مدل افزایش می‌یابد.

۲-۳-۵ نسبت ویسکوزیته قطره β

یکی دیگر از پارامترهای متغیر تأثیر گذار در شکل پایای قطره نسبت ویسکوزیته قطره β می‌باشد. شکل (۵-۸) تأثیر تغییرات β روی شکل پایای متقارن قطره در حال سقوط را نشان می‌دهد.



شکل (۵-۱۰): تأثیر تغییرات β روی شکل پایای قطره دارای $De=0.5, Ca=0.8, k=30, \alpha=0.4$ با استفاده از مدل اولروید-بی مقادیر β بصورت $a) \beta=0, b) \beta=0.1, c) \beta=0.2, d) \beta=0.4, e) \beta=0.6, f) \beta=0.8$ می‌باشد.

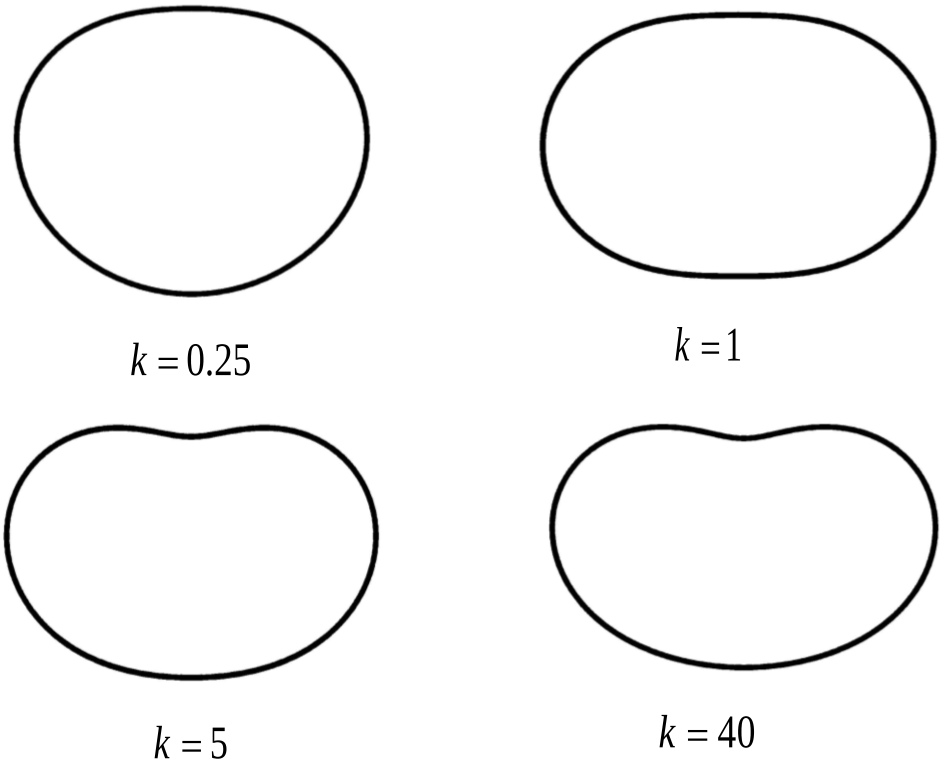


شکل (۵-۱۱): تأثیر تغییرات β روی شکل پایای قطره دارای $De=0.5, Ca=0.8, k=30, \alpha=0.4$ با استفاده از مدل گزیکس. مقادیر β بصورت $(a\ \beta=0, (b\ \beta=0.1, (c\ \beta=0.2, (d\ \beta=0.4, (e\ \beta=0.6, (f\ \beta=0.8$ می‌باشد.

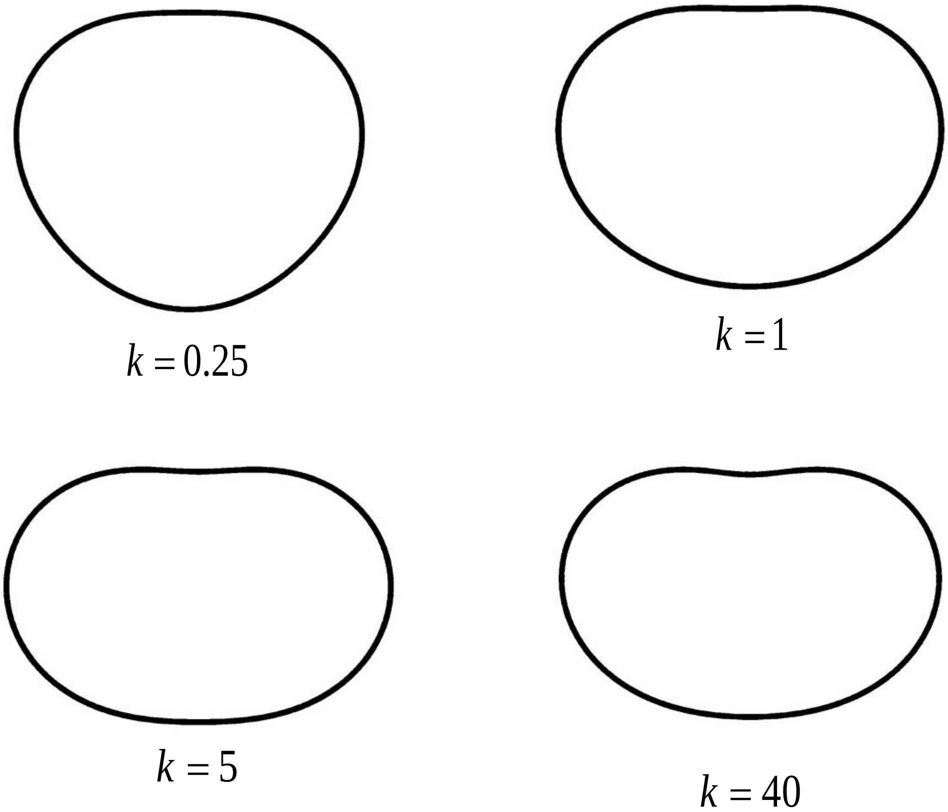
در شکل (۵-۱۰) و (۵-۱۱) در اولین شکل (a) برای هر دو مدل مشاهده می‌شود که شکل کاملاً کروی می‌باشد. زیرا زمانی که $\beta=0$ باشد یعنی ویسکوزیته قسمت پلیمری صفر $\tilde{\eta}_p=0$ است. به عبارت دیگر، قطره ما حاوی جمله پلیمری نبوده و نیوتنی می‌باشد. شکل پایای قطره نیوتنی در حال سقوط خزشی در سیال نیوتنی دیگر کاملاً کروی می‌باشد [۴ و ۵]. با افزایش نسبت ویسکوزیته سیال ویسکوالاستیک، قطره شکل کروی گونه خود را از دست می‌دهد. در ابتدا، قطره شکل پهن شده به خود می‌گیرد (شکل‌های (c) و (d)). این روند با افزایش نسبت ویسکوزیته ادامه پیدا کرده و تنش‌های ویسکوالاستیک پدید آمده در قطره، باعث فرو بردن قسمت انتهایی قطره به سمت داخل می‌گردند.

۵-۳-۳ نسبت ویسکوزیته k

یکی دیگر از متغیرهای تأثیر گذار در شکل قطره ویسکوالاستیک k، نسبت ویسکوزیته قطره در نرخ برش صفر به ویسکوزیته سیال نیوتنی، می‌باشد. شکل (۵-۱۲) و (۵-۱۳) اثر تغییرات k روی شکل متقارن و پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با استفاده از دو مدل اولروید-بی و گزیکس را نشان می‌دهد.



شکل (۵-۱۲): تأثیر نسبت ویسکوزیته قطره به سیال محیط k برای قطره‌ای دارای: $De = 0.9, Ca = 0.6, \beta = 0.8, \alpha = 0.4$ با استفاده از مدل اولروید-بی



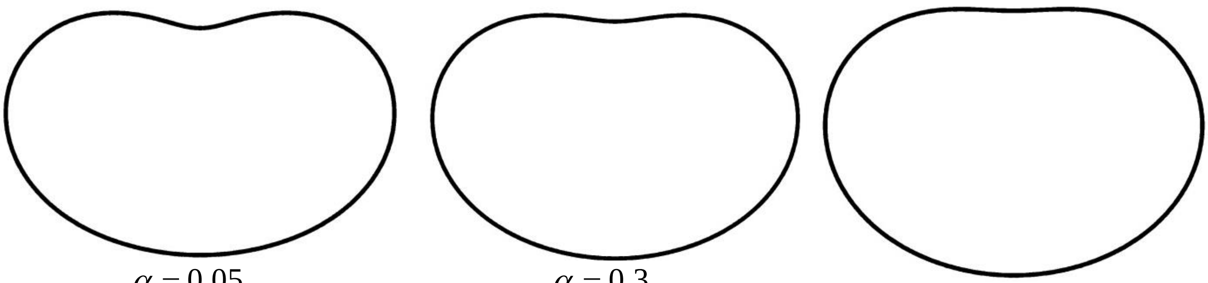
شکل (۵-۱۳): تأثیر نسبت ویسکوزیته قطره به سیال محیط k برای قطره‌ای دارای: $De = 0.9, Ca = 0.6, \beta = 0.8, \alpha = 0.4$ با استفاده از مدل گزیکس

در شکل (۵-۱۲) و (۵-۱۳) مشاهده می‌شود که نسبت ویسکوزیته به ازای $k > 1$ نمی‌تواند زیاد روی شکل پایای قطره تأثیر گذار باشد. به عبارت دیگر، تنها به ازای $k \leq 1$ شکل تولیدی با تغییر نسبت ویسکوزیته دارای تغییر محسوس می‌باشد و برای $k > 1$ تغییرات محسوس نمی‌باشد. زیرا، در تمامی جملات بدست آمده برای شکل قطره مرتبه k در صورت و مخرج کسرها یکسان می‌باشد به همین جهت تأثیر آن-چنانی به ازای مقادیر بزرگ‌تر از یک برای این متغیر در شکل قطره بدست آمده، مشاهده نمی‌شود.

۵-۳-۴ ضریب تحرک α

یکی دیگر از متغیرهایی که می‌تواند روی شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط تأثیر گذار باشد، ضریب پویایی α می‌باشد. این ضریب مختص مدل غیرخطی گزیکس بوده و تأثیر تغییرات این ضریب روی

شکل پایای متقارن قطره ویسکوالاستیک در شکل (۵-۱۴) به نمایش در آمده است. در صورتی که $\alpha = 0$ باشد، مدل گزیکس تبدیل به مدل شبه خطی اولروید-بی می‌گردد.



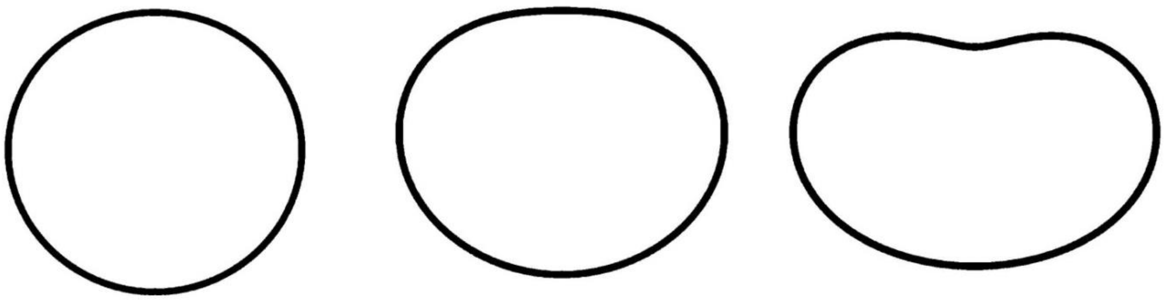
شکل (۵-۱۴): اثر ضریب پویایی روی شکل پایای متقارن قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط دارای $De = 0.6, Ca = 0.8$ $k = 30, \beta = 0.8, \Delta\rho = 60$ با استفاده از مدل گزیکس

مشاهده می‌شود با افزایش ضریب پویایی حفره ایجاد شده در قسمت انتهایی قطره ویسکوالاستیک کاهش یافته، به عبارت دیگر، با کاهش ضریت تحرک فرورفتگی در بالاترین نقطه قطره توسعه یافته و رشد می‌کند. چرا که با کاهش α ترم تنش عمود بر سطح قطره ویسکوالاستیک ($\tilde{\tau}_{rr}$) افزایش یافته و با غلبه بر نیروی کشش سطحی وارده باعث تغییر شکل و رشد گودی ایجاد شده در قطره می‌گردد.

۵-۳-۵ اعداد دبورا De و موییننگی Ca

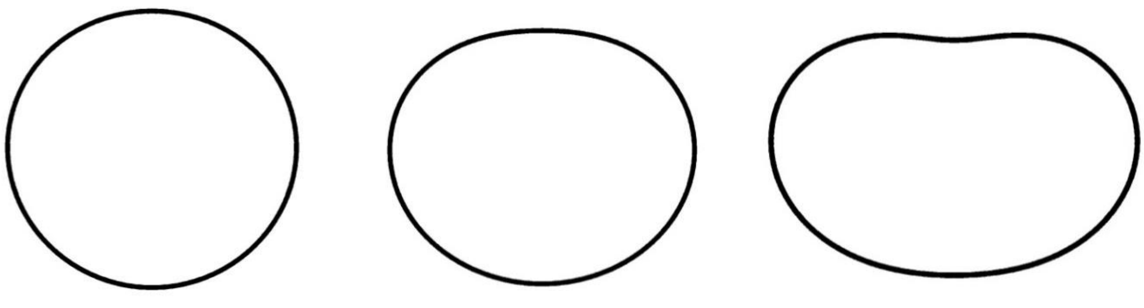
از متغیرهای مهم دیگری که می‌توانند نقش کلیدی در شکل قطره داشته باشند اعداد بی‌بعد دبورا De و موییننگی Ca می‌باشند. عدد دبورا نشان دهنده خاصیت الاستیک سیال می‌باشد. این عدد به صورت نسبت نیروی الاستیک به ویسکوز تعریف می‌شود. برای یک سرعت و قطر معادل مشخص، هر چه عدد دبورا افزایش پیدا کند نشان دهنده این واقیعت است که سیال مورد نظر دارای خاصیت الاستیک بیشتری می-باشد. این خاصیت با زمان آسودگی از تنش λ مشخص می‌شود. برای یک سیال ویسکوالاستیک مشخص به عنوان فاز قطره، روند افزایش دبورا با افزایش حجم قطره و در پی آن افزایش سرعت نهایی قطره امکان‌پذیر

می‌باشد. چرا که در این حالت، زمان آسودگی از تنش مقداری معلوم و ثابت می‌باشد. تأثیر عدد بی‌بعد دبورا در شکل قطرات در حال سقوط در شکل‌های (۵-۱۵) و (۵-۱۶) قابل مشاهده می‌باشند. عدد مویینگی Ca نماینده نیروی کشش سطحی در فصل مشترک دو سیال می‌باشد. این عدد با افزایش حجم و سرعت نهایی قطره و ثابت بودن ترکیب سیال قطره و محیط اطراف افزایش می‌یابد. شکل‌های (۵-۱۷) و (۵-۱۸) نشان دهنده اثر تغییرات عدد مویینگی روی شکل پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط می‌باشند.



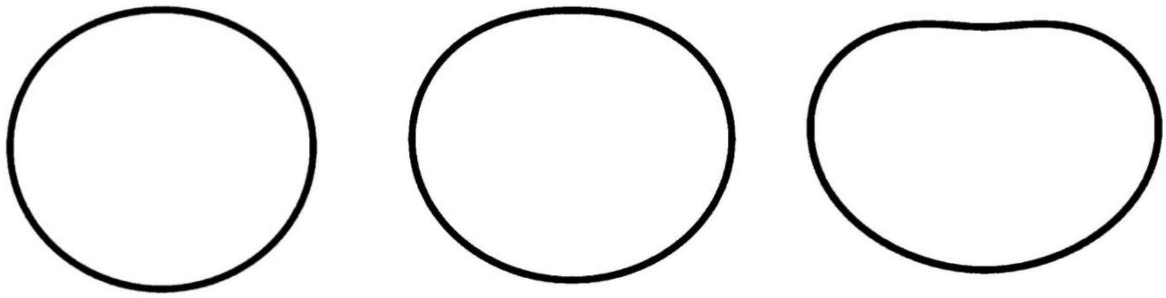
$Ca = 0.6, De = 0.1$ $\quad$ $Ca = 0.6, De = 0.4$ $\quad$ $Ca = 0.6, De = 0.9$

شکل (۵-۱۵): شکل متقارن پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با تغییر عدد دبورا De با استفاده از مدل اولروید-بی برای قطره‌ای با $k = 50, \beta = 0.8, \alpha = 0.4$



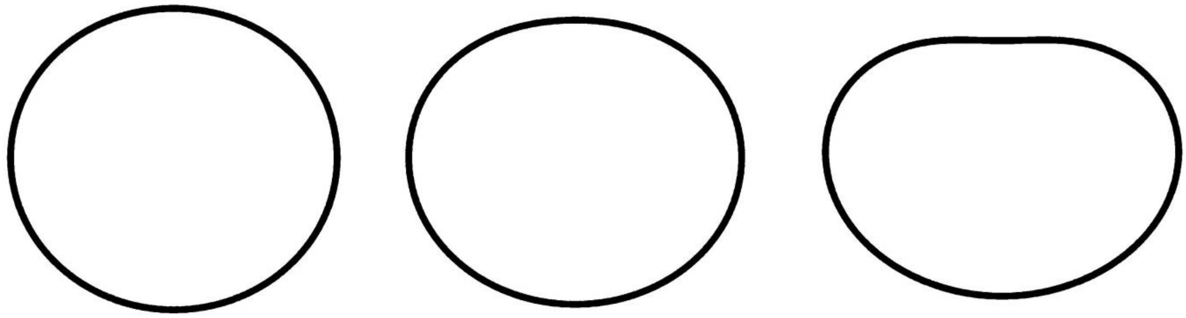
$Ca = 0.6, De = 0.1$ $\quad$ $Ca = 0.6, De = 0.4$ $\quad$ $Ca = 0.6, De = 0.9$

شکل (۵-۱۶): شکل متقارن پایای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط با تغییر عدد دبورا De با استفاده از مدل گزیکس برای قطره‌ای با $k = 50, \beta = 0.8, \alpha = 0.4$



$De = 0.5, Ca = 0.2$ $De = 0.5, Ca = 0.4$ $De = 0.5, Ca = 0.9$

شکل (۵-۱۷): شکل متقارن پایای قطره ویسکوالاستیک با تغییر عدد مویینگی Ca با استفاده از مدل اولروید-بی برای قطره-ای با $k = 50, \beta = 0.8, \alpha = 0.4$

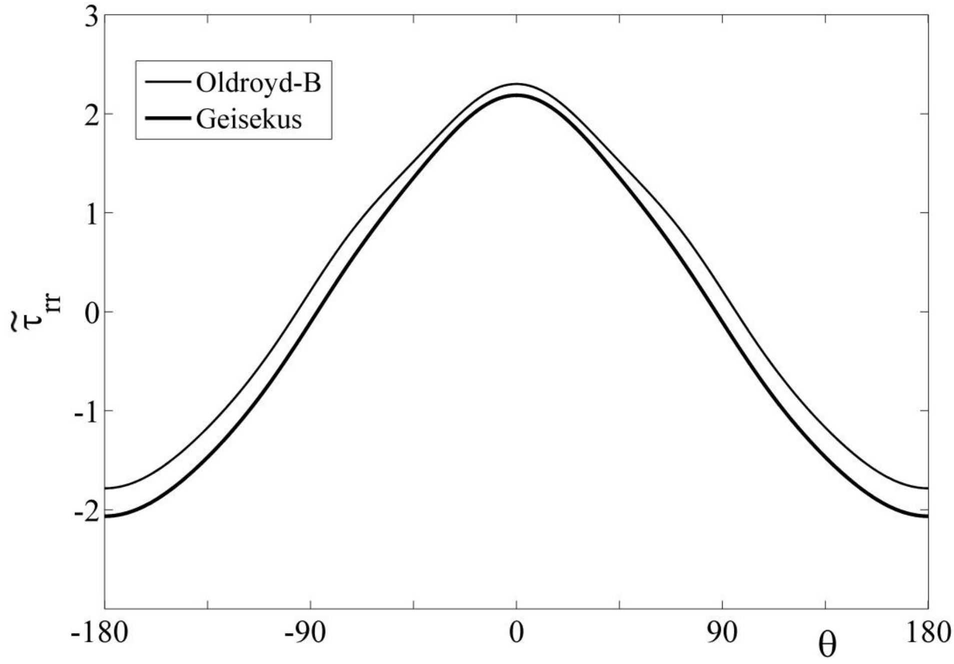


$De = 0.5, Ca = 0.2$ $De = 0.5, Ca = 0.4$ $De = 0.5, Ca = 0.9$

شکل (۵-۱۸): شکل متقارن پایای قطره ویسکوالاستیک با تغییر عدد مویینگی Ca با استفاده از مدل گزیکس برای قطره‌ای با $k = 50, \beta = 0.8, \alpha = 0.4$

با افزایش هر کدام از اعداد دبورا و موپینگی حفره ایجاد شده در انتهای قطره رشد خواهد کرد. مشاهده می-شود، روند توسعه حفره ایجادی با استفاده از مدل اولروید-بی نسبت به مدل گزیکس سریع‌تر می‌باشد. به عبارت دیگر، برای یک De و Ca مشخص، حفره تولیدی در قسمت بالایی قطره با استفاده از مدل اولروید-بی دارای عمق بیشتری نسبت به مدل گزیکس می‌باشد. دلیل اینکه با افزایش دبورا گودی ایجاد شده در بالای قطره رشد می‌کند به این صورت است که، با افزایش عدد دبورا در واقع خاصیت الاستیک سیال در مقابل خاصیت ویسکوز آن افزایش می‌یابد، هنگامی که دبورا صفر باشد قطره نیوتنی بوده و اثری از خاصیت الاستیک در آن وجود ندارد و قطره در حال سقوط خزشی، کاملاً کره گونه باقی می‌ماند. با افزایش

دبورا خاصیت الاستیک قطره رشد کرده و تنش‌های ویسکوالاستیک به وجود آمده افزایش می‌یابد. افزایش تنش‌های ویسکوالاستیک باعث غلبه بر نیروی کشش سطحی که میل به کروی نگه داشتن قطره دارد، می-شود و با ایجاد تمرکز تنش در قسمت انتهایی قطره یک حفره در آن ایجاد می‌کند. شکل (۵-۱۹) نشان دهنده توزیع تنش روی سطح قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط می‌باشد.

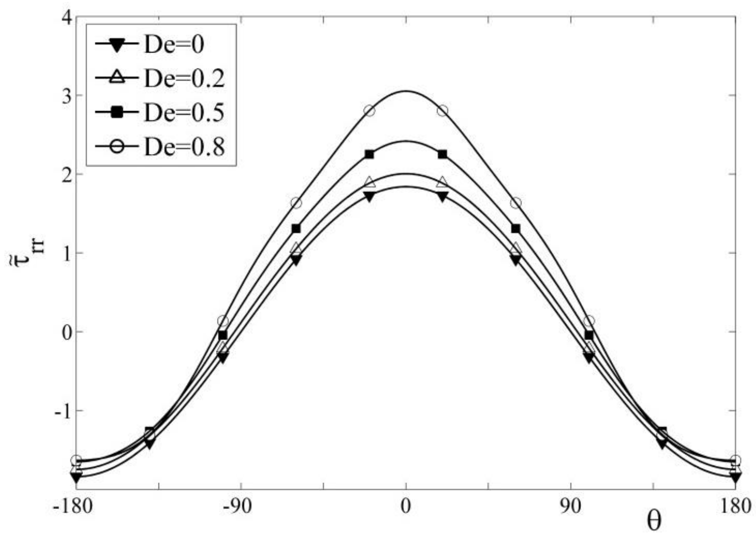


شکل (۵-۱۹): مقدار تنش $\tilde{\tau}_{rr}$ روی سطح قطره برای $De = 0.3, Ca = 0.6, k = 20, \beta = 0.905, \alpha = 0.42$

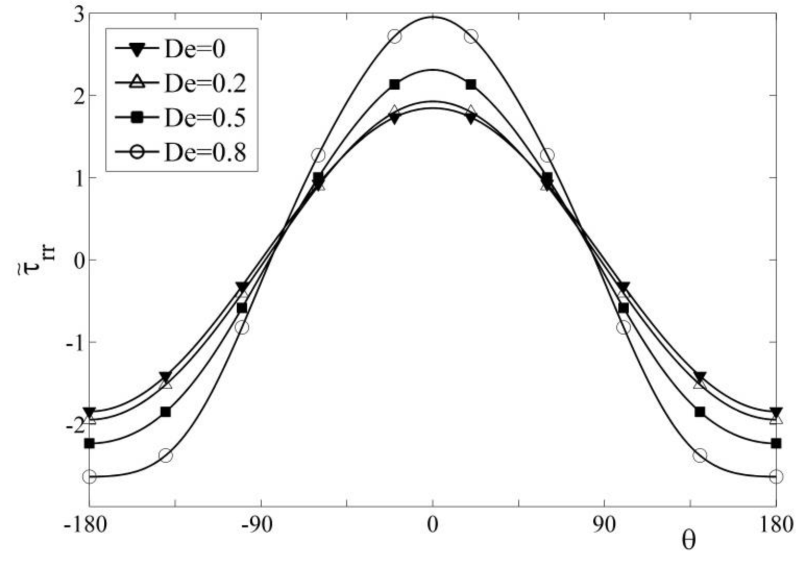
در شکل (۵-۱۹) مقدار بی‌بعد مؤلفه نرمال شعاعی تنش قطره ویسکوالاستیک $\tilde{\tau}_{rr}$ عمود بر سطح قطره برای هر دو مدل اولروید-بی و گزیکس رسم شده است. تغییر شکل قطره و ایجاد حفره در قسمت انتهایی آن از همین مؤلفه تانسور تنش قطره، ناشی می‌شود. مشاهده می‌گردد، مقدار بیشینه این مؤلفه در $\theta = 0$ یعنی در قسمت انتهایی قطره رخ می‌دهد. مقدار مؤلفه $\tilde{\tau}_{rr}$ بدست آمده از مدل اولروید-بی در $\theta = 0$ بیشتر از مقدار مشابه آن بوسیله مدل گزیکس می‌باشد به همین جهت، فرورفتگی ایجاد شده توسط مدل اولروید-بی دارای عمق بیشتری نسبت به مدل گزیکس می‌باشد.

۵-۴ پارامترهای تأثیر گذار بر مؤلفه نرمال شعاعی تنش ویسکوالاستیک

همانطور که قبلاً اشاره کردیم، عامل اصلی تغییر شکل قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در فاز نیوتنی، غلبه نیروی حاصل از مؤلفه نرمال شعاعی تنش ویسکوالاستیک ($\tilde{\tau}_{rr}$) بر نیروی کشش سطحی می‌باشد. برای قطرات به اندازه کافی کوچک، نیروی غالب که شکل پایای قطره در حال سقوط را مشخص می‌کند، کشش سطحی بین دو سیال می‌باشد. با افزایش حجم قطره تنش ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد و به عنوان نیروی غالب باعث ایجاد فرورفتگی در قمت انتهایی قطره می‌گردد. در شکل‌های (۵-۲۰) و (۵-۲۱) می‌توان اثر تغییرات عدد بی‌بعد دبورا بر $\tilde{\tau}_{rr}$ را برای هر دو مدل اولروید-بی و گزیکس مشاهده نمود.

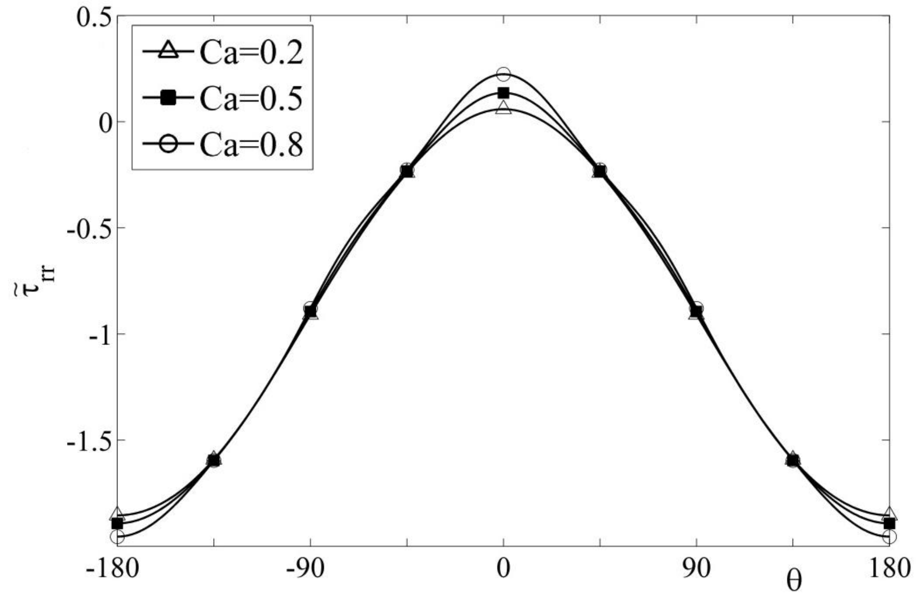


شکل (۵-۲۰): تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ روی سطح قطره با تغییر عدد بی‌بعد دبورا برای $Ca = 0.2, k = 12, \beta = 0.9, \alpha = 0.42, \Delta\rho = 60$ با استفاده از مدل اولرید-بی

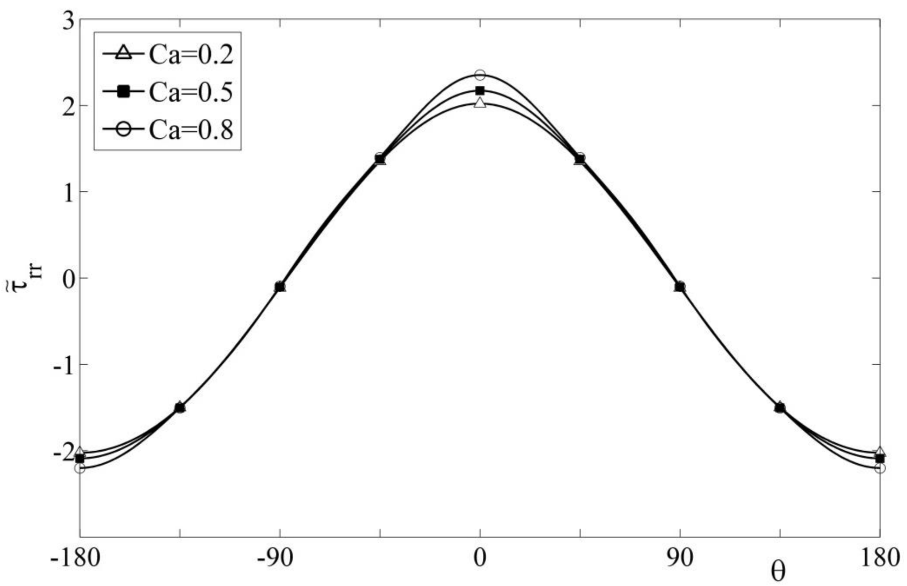


شکل (۵-۲۱): تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ روی سطح قطره با تغییر عدد بی‌بعد دبورا برای $Ca = 0.2, k = 12, \beta = 0.9, \alpha = 0.42, \Delta\rho = 60$ با استفاده از مدل گزیکس

در شکل‌های (۵-۲۱) و (۵-۲۲) مشاهده می‌گردد، با افزایش عدد دبورا میزان $\tilde{\tau}_{rr}$ در $\theta = 0^{\circ}$ افزایش می‌یابد. در واقع $\theta = 0^{\circ}$ همان قسمت انتهایی قطره می‌باشد که فرورفتگی در آنجا رخ می‌دهد. مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک که باعث تغییر شکل قطره می‌شود در این مکان دارای مقدار ماکزیمم می‌باشد. با افزایش عدد دبورا خاصیت الاستیک سیال قطره افزایش می‌یابد. همانطور که قبلاً اشاره کردیم، با افزایش عدد دبورا به ازای حجم مشخص، میزان فرورفتگی افزایش یافته و قطره بیشتر از حالت کروی فاصله می‌گیرد. در قسمت‌های قبل اشاره شده بود که فرورفتگی تولید شده بواسطه استفاده از مدل اولروید-بی نسبت به گزیکس بیشتر بوده است. با مقایسه نتایج بدست آمده می‌توان دریافت، مقدار افزایش ترم $\tilde{\tau}_{rr}$ برای مدل اولروید-بی در مقابل گزیکس بیشتر می‌باشد. هرچه مقدار مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک عمود بر سطح قطره بیشتر باشد، حفره ایجاد شده در انتهای قطره بیشتر توسعه می‌یابد و عمق فرورفتگی تولیدی افزایش پیدا می‌کند. یکی دیگر از پارامترهای مهم و تأثیر گذار بر مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک عدد مویینگی می‌باشد. در شکل‌های (۵-۲۲) و (۵-۲۳) می‌توان اثر تغییر عدد مویینگی روی مقدار $\tilde{\tau}_{rr}$ برای دو مدل اولروید-بی و گزیکس مشاهده نمود.

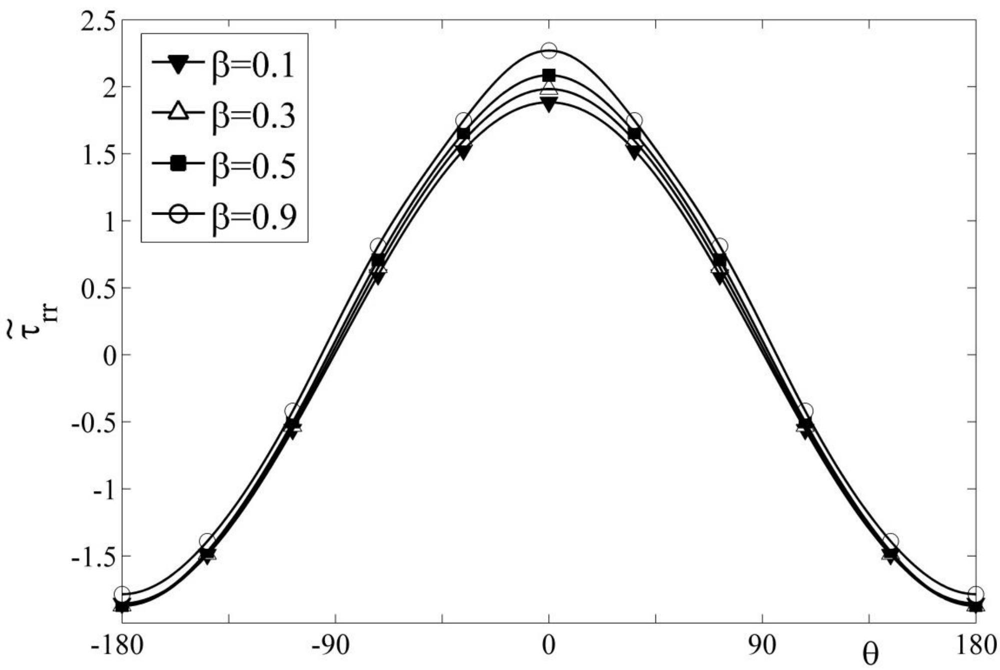


شکل (۵-۲۲): تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ روی سطح قطره با تغییر عدد مویینگی برای $De=0.2, k=12, \beta=0.9, \alpha=0.42, \Delta\rho=60$ با استفاده از مدل اولروید-بی

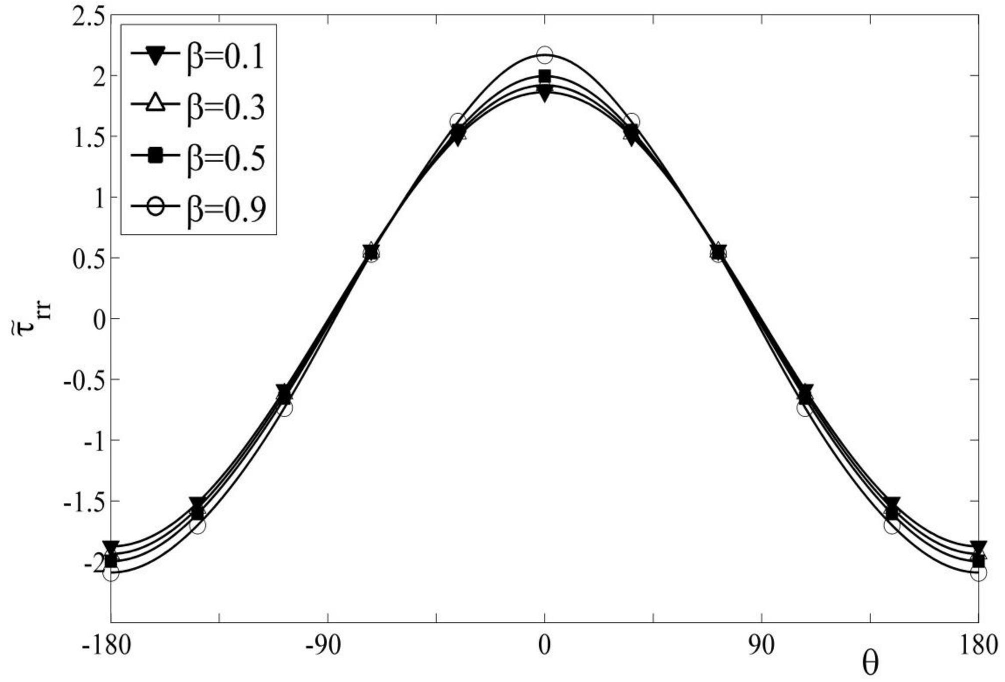


شکل (۵-۲۳): تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ روی سطح قطره با تغییر عدد مویینگی برای $De=0.2, k=12, \beta=0.9, \alpha=0.42, \Delta\rho=60$ با استفاده از مدل گزیکس

با توجه به شکل‌های بالا مشخص است، با افزایش عدد مویینگی مقدار مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک قطره افزایش می‌یابد. ترم مورد نظر تنش ویسکوالاستیک در سطح قطره ($\tilde{\tau}_{rr}$) با افزایش عدد مویینگی و ثابت بودن دیگر پارامترها در قسمت انتهایی قطره برای مدل گزیکس دارای مقدار بیشتری نسبت به اولروید-بی می‌باشد. از دیگر پارامترهایی که می‌توان اثر تغییرات آن را روی مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک قطره بررسی نمود نسبت ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک (β) می‌باشد. در شکل‌های (۵-۲۴) و (۵-۲۵) می‌توان اثر این پارامتر را روی $\tilde{\tau}_{rr}$ برای دو مدل اولروید-بی و گزیکس بصورت مجزا مشاهده کرد.



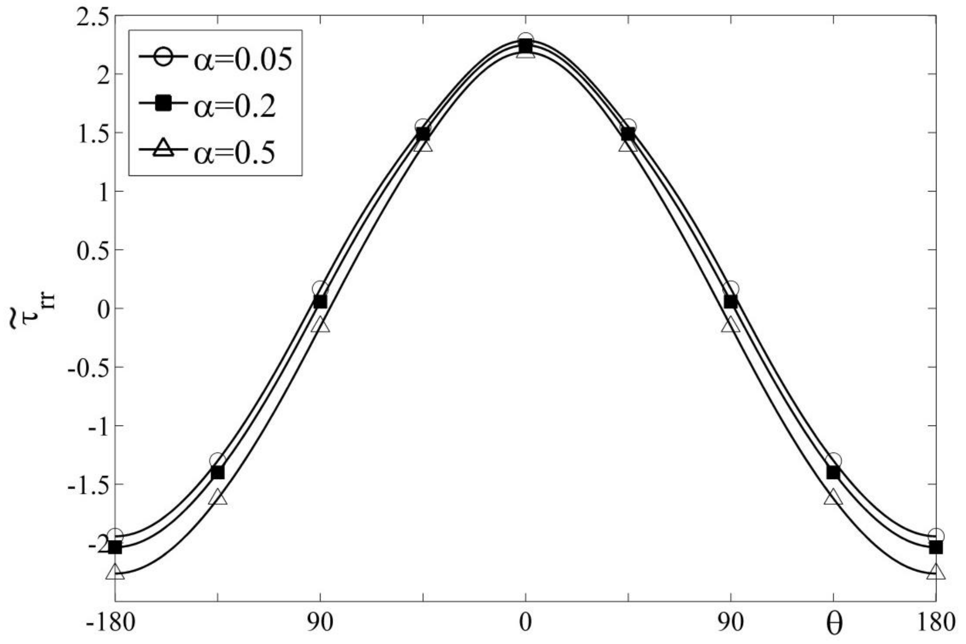
شکل (۵-۲۴): بررسی تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ با تغییر β برای قطره‌ای با $De=0.3, Ca=0.5, \alpha=0.42, k=12, \Delta\rho=60$ با استفاده از مدل اولروید-بی



شکل (۵-۲۵): بررسی تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ با تغییر β برای قطره‌ای با $De = 0.3, Ca = 0.5, \alpha = 0.42, k = 12, \Delta\rho = 60$ با استفاده از مدل گزیکس

با توجه به شکل‌های (۵-۲۴) و (۵-۲۵) با افزایش β مقدار مؤلفه نرمال تنش قطره ویسکوالاستیک در قسمت انتهایی قطره افزایش می‌یابد. زیرا افزایش نسبت ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک در واقع به این معنی می‌باشد که، ویسکوزیته قسمت پلیمری سیال ویسکوالاستیک در مقابل ویسکوزیته ترم نیوتنی سیال در حال افزایش است. به عبارت دیگر، سهم الاستیک قطره در حال رشد بوده و با رشد این ترم حفره تولید شده توسعه می‌یابد، چرا که مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک افزایش می‌یابد. با مقایسه مقادیر حاصله از دو مدل به کار رفته می‌توان دریافت، افزایش مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک در قسمت انتهایی قطره ($\theta = 0$) برای مدل اولروید-بی بیشتر از مدل گزیکس می‌باشد.

یکی دیگر از پارامترهای تأثیر گذار مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک قطره که مختص مدل گزیکس می‌باشد، ضریب تحرک (α) است. تغییرات $\tilde{\tau}_{rr}$ به ازای ضرایب مختلف تحرک در شکل (۵-۲۶) به نمایش گذاشته شده است.

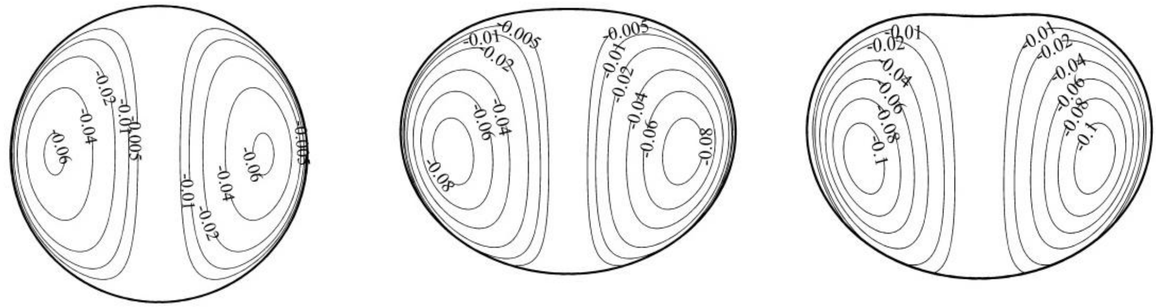


شکل (۵-۲۶): اثر ضریب تحرک (α) مدل گزیکس روی $\tilde{\tau}_{rr}$ برای قطره‌ای دارای $De = 0.6, Ca = 0.8$
$\beta = 0.8, \Delta\rho = 60, k = 30$

در شکل (۵-۲۶) مشاهده می‌گردد با افزایش α مقدار مؤلفه عمودی تنش ویسکوالاستیک موجود در سطح قطره کاهش پیدا می‌کند. کاهش مقدار $\tilde{\tau}_{rr}$ در قسمت انتهایی قطره باعث کاهش میزان فرورفتگی و حفره ایجادی می‌گردد. قبلاً اشاره شده بود که، به ازای مقادیر مشخصی از اعداد دبورا، مویینگی و نسبت ویسکوزیته قطره ویسکوالاستیک، حفره تولیدی برای مدل اولروید-بی دارای عمق بیشتری نسبت به مدل گزیکس می‌باشد. اگر $\alpha = 0$ در اینصورت، مدل گزیکس تبدیل به مدل اولروید-بی می‌شود. همانطور که در شکل (۵-۲۶) مشاهده می‌شود، با کاهش α نتایج حاصل از مدل گزیکس به مدل اولروید-بی نزدیکتر گردیده و مقدار $\tilde{\tau}_{rr}$ در قسمت انتهایی قطره ویسکوالاستیک رشد می‌کند.

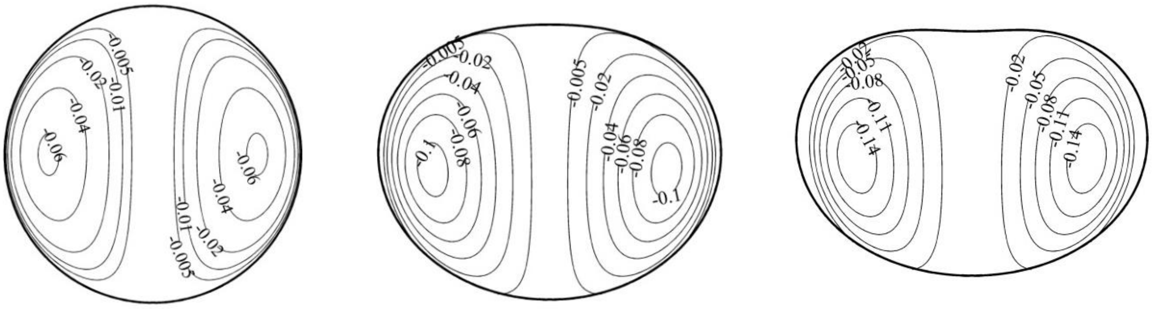
۵-۵ بردارهای سرعت داخل قطره

یکی‌دیگر از موارد مطالعه شده در این تحقیق، بررسی میدان سرعت داخل قطره با تغییر اعداد دبورا و مویینگی می‌باشد. شکل‌های (۵-۲۷) و (۵-۲۸) به بررسی اثر تغییر عدد دبورا روی میدان سرعت داخل قطره با استفاده از مدل اولروید-بی و گزیکس پرداختند. اثر تغییرات عدد مویینگی برای هر دو مدل مذکور روی میدان سرعت داخل قطره ویسکوالاستیک در شکل‌های (۵-۲۹) و (۵-۳۰) بررسی شده‌اند. با افزایش دبورا یا مویینگی مقادیر گردابه‌های داخل قطره تقویت شده و رشد می‌کند. بر خلاف نظر موخریجی و سرکار [۱۱] که عقیده به ثابت بودن مقادیر بردارهای سرعت داخل قطره با افزایش خاصیت الاستیک سیال داشتند. در این‌جا ثابت شد که، با افزایش خاصیت الاستیک قطره این مقادیر رشد خواهند داشت و تقویت می‌شوند. مقایسه بین مقادیر حاصله از هر دو مدل نشان دهنده این واقعیت است که، مقادیر بردارهای سرعت محاسبه شده توسط مدل گزیکس دارای مقدار بیشتری نسبت به مدل اولروید-بی به ازای اعداد دبورا و مویینگی یکسان می‌باشد.



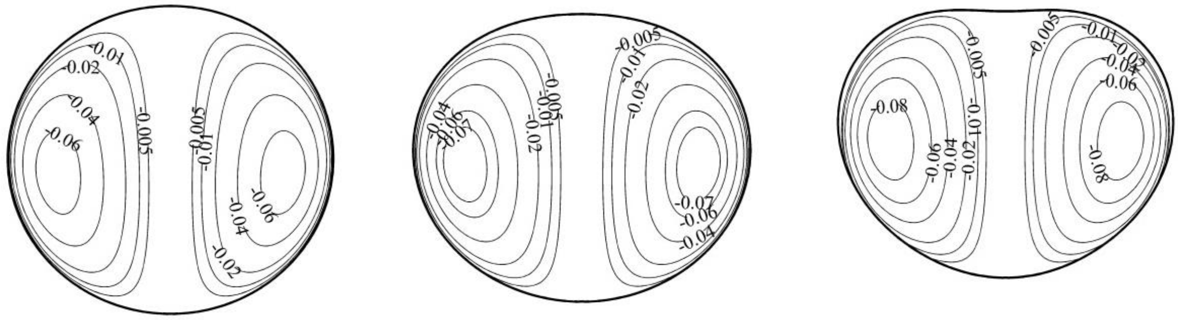
$Ca = 0.5, De = 0$ $\quad$ $Ca = 0.5, De = 0.5$ $\quad$ $Ca = 0.5, De = 0.8$

(۵-۲۷): تغییرات میدان سرعت داخل قطره نسبت به عدد دبورا با استفاده از مدل اولروید-بی به ازای $k = 30, \beta = 0.8, \alpha = 0.4$



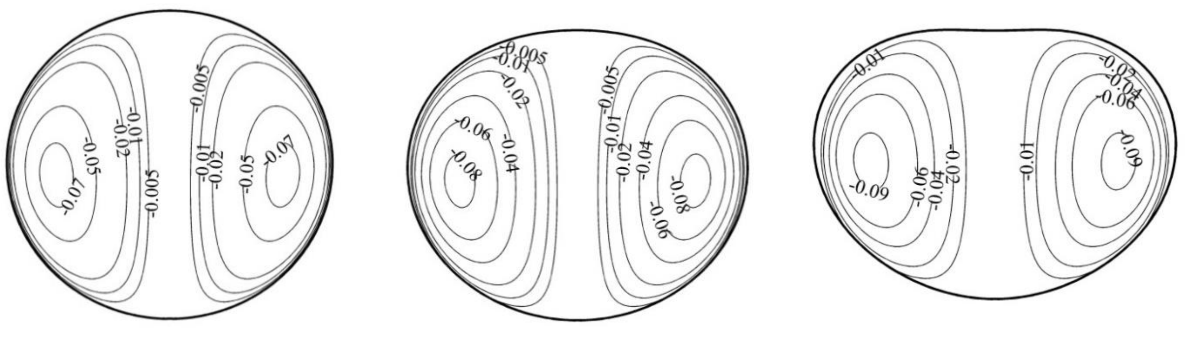
$Ca=0.5, De=0$ $\quad$ $Ca=0.5, De=0.5$ $\quad$ $Ca=0.5, De=0.8$

(۵-۲۸): تغییرات میدان سرعت داخل قطره نسبت به عدد دبورا با استفاده از مدل گزیکس به ازای $k=30, \beta=0.8, \alpha=0.4$



$Ca=0.2, De=0.3$ $\quad$ $Ca=0.6, De=0.3$ $\quad$ $Ca=1.1, De=0.3$

(۵-۲۹): تغییرات میدان سرعت داخل قطره نسبت به عدد مویینگی با استفاده از مدل اولروید-بی به ازای $k=30, \beta=0.8, \alpha=0.4$



$Ca=0.2, De=0.3$ $\quad$ $Ca=0.6, De=0.3$ $\quad$ $Ca=1.1, De=0.3$

(۵-۳۰): تغییرات میدان سرعت داخل قطره نسبت به عدد مویینگی با استفاده از مدل گزیکس به ازای $k=30, \beta=0.8, \alpha=0.4$

با توجه به شکل‌های (۵-۱۳) و (۵-۱۴) مشخص است، در داخل هر قطره دو گردابه متقارن وجود دارد که عکس جهت یکدیگر در حال چرخش می‌باشند. قدرت این گردابه‌ها با افزایش پارامترهای بدون بعد دبورا و مویینگی افزایش می‌یابند. بطوریکه در شکل (۵-۱۳) مشاهده می‌شود، با افزایش عدد دبورا از مقدار صفر تا 0.8 با ثابت بودن مویینگی ($Ca = 0.5$)، بردارهای سرعت برای مدل اولروید-بی 40% و برای مدل گزیکس 80% از لحاظ مقداری افزایش داشته است. این افزایش با ثابت بودن عدد دبورا ($De = 0.3$) و تغییر عدد مویینگی بین 0.2 تا 1.1 برای هر دو مدل اولروید-بی و گزیکس 20% می‌باشد. البته، با وجود اختلاف برابر، مقادیر محاسبه شده برای هر مدل متفاوت می‌باشد.

فصل ششم

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

۶-۱ نتیجه‌گیری

در این تحقیق شکل و حرکت خزشی سقوط قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی بصورت آزمایشگاهی و تحلیلی مورد بررسی قرار گرفته است. در قسمت آزمایشگاهی از روغن سیلیکون به عنوان سیال نیوتنی محیط استفاده شده است و قطره ویسکوالاستیک از دو بخش نیوتنی و پلیمری ساخته شده است. ترکیبات قطره ویسکوالاستیک شامل آب/گلیسیرین با نسبت حجمی ۲۰:۸۰ به عنوان قسمت نیوتنی و پلیمر گزانتام با نسبت وزنی ۰/۰۸٪ به عنوان قسمت پلیمری بوده است. برای ایجاد قطرات با حجم‌های مختلف از نازل-هایی با قطر متفاوت استفاده شده است. مشاهدات آزمایشگاهی نشان دادند که، به ازای حجم‌های به اندازه کافی کوچک قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط کاملاً کروی باقی می‌ماند زیرا در این حالت نیروی غالب بر شکل قطره، کشش سطحی بین دو سیال می‌باشد. با افزایش حجم قطره، شکل کروی قطره ویسکوالاستیک از بین رفته و قطره بصورت پهن شده در می‌آید. این روند با افزایش حجم قطره ادامه پیدا می‌کند و به ازای حجم مشخصی از قطره یک گودی در قسمت انتهایی آن ایجاد می‌گردد که با افزایش حجم، رشد و توسعه می‌یابد. چرا که با افزایش حجم قطره نیروی حاصل از مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک افزایش یافته و بر کشش سطحی موجود بین دو سیال غلبه می‌کند و باعث تغییر شکل قطره می‌گردد. در قسمت تحلیلی از حساب اغتشاشات برای هر دو جریان به عنوان روش حل استفاده شده است. اعداد بی‌بعد دبورا و مویینگی به عنوان پارامترهای اغتشاشی مورد استفاده قرار گرفتند. به دلیل خزشی بودن حرکت قطره، جمله اینرسی موجود در معادلات مومنتم حذف شده و به معادلات استوکس تبدیل می‌گردد. دستگاه مختصات مورد استفاده در تمام مسأله برای هر دو جریان داخل (قطره ویسکوالاستیک) و خارجی (سیال نیوتنی محیط) کروی می‌باشد. مدل‌های به کار برده شده برای سیال محیط، مدل نیوتنی و برای قطره ویسکوالاستیک مدل شبه خطی اولروید-بی و غیرخطی گزیکس می‌باشند. مقایسه نتایج بدست آمده از مشاهدات آزمایشگاهی و حل تحلیلی حاکی از آن است که حل تحلیلی تطابق خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد و نسبت به تحقیقات پیشین دارای دقت بیشتری می‌باشد. همچنین

مشخص شده است که، سرعت نهایی قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط نسبت به قطره نیوتنی کمتر می-باشد. صحت این نتیجه بصورت تحلیلی و آزمایشگاهی بررسی شده است.

با بررسی پارامترهای تأثیر گذار روی حرکت و شکل قطرات مشخص گردید که:

- با افزایش عدد دبورا (خاصیت الاستیک قطره) حفره ایجاد شده در قسمت انتهایی قطره رشد و توسعه می‌یابد و سرعت نهایی قطره کاهش پیدا می‌کند.
- تغییرات نسبت ویسکوزیته (k) روی شکل پایای قطرات به ازای $k \geq 1$ ناچیز و برای $k < 1$ مشهود می‌باشد.
- افزایش عدد مویینگی (Ca) باعث رشد حفره ایجاد شده می‌گردد.
- ماکزیمم مقدار مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک در قسمت انتهایی قطره قرار دارد.
- با افزایش نسبت ویسکوزیته قطره (β)، حفره تولیدی و مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک افزایش پیدا می‌کند.
- با افزایش مقدار ضریب تحرک مؤلفه نرمال تنش ویسکوالاستیک کاهش می‌یابد.
- با افزایش خاصیت الاستیک قطره میدان‌های سرعت داخل قطره رشد خواهند کرد.

۶-۲ پیشنهادات

می‌توان برای ادامه تحقیق در زمینه سقوط قطره در فاز دیگر، موضوعات زیر را بررسی نمود:

- بررسی عددی شکل گذرای قطره ویسکوالاستیک در حال سقوط در سیال نیوتنی
- بررسی تحلیلی شکل و حرکت پایای قطره ویسکوالاستیک در سیال ویسکوالاستیک
- بررسی تحلیلی شکل و حرکت پایای قطره نیوتنی در سیال ویسکوالاستیک
- بررسی عددی حرکت اینرسی قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتنی
- بررسی انتقال حرارت سقوط قطره ویسکوالاستیک در سیال نیوتن

ضمیمه الف

جزئیات حل شامل پروفیل‌های سرعت، مقادیر فشار و تانسورهای تنش به ازای هرمرتبه برای مدل اولروید-بی در این قسمت قرار دارد.

$$u_{r,0}=\frac{1}{2}(2-\frac{3k+2}{k+1}\frac{1}{r}+\frac{k}{k+1}\frac{1}{r^3})\cos\theta \qquad \text{(الف۱)}$$

$$\tilde{u}_{r,0}=\frac{1}{2}(r^2-1)\cos\theta \qquad \text{(الف۲)}$$

$$u_{\theta,0}=-\frac{1}{4}(4-\frac{3k+2}{k+1}\frac{1}{r}-\frac{k}{k+1}\frac{1}{r^3})\sin\theta \qquad \text{(الف۳)}$$

$$\tilde{u}_{\theta,0}=-\frac{1}{2}(2r^2-1)\sin\theta \qquad \text{(الف۴)}$$

$$\tau_0=\begin{bmatrix} \frac{3\cos\theta(-1+r^2)}{r^4} & -\frac{3}{4}\frac{\sin\theta(r^2+1)}{r^4}+\frac{3}{4}\frac{\sin\theta(r^2-1)}{r^4} & 0 \\ -\frac{3}{4}\frac{\sin\theta(r^2+1)}{r^4}+\frac{3}{4}\frac{\sin\theta(r^2-1)}{r^4} & -\frac{3}{2}\frac{\cos\theta(-1+r^2)}{r^4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2}\frac{\cos\theta(-1+r^2)}{r^4} \end{bmatrix} \qquad \text{(الف۵)}$$

$$\tilde{\tau}_0=\begin{bmatrix} 2r\cos\theta & -\frac{3}{2}r\sin\theta & 0 \\ -\frac{3}{2}r\sin\theta & -r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -r\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{(الف۶)}$$

$$u_{r,1}=-\frac{9}{20}\frac{\beta k}{(k+1)^2}(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^4})(3\cos^2\theta-1)$$

(الف۷)

$$\tilde{u}_{r,1}=\frac{9}{20}\frac{\beta k}{k+1}(r^3-r)(3\cos^2\theta-1) \qquad \text{(الف۸)}$$

$$u_{\theta,1}=\frac{9}{10}\frac{k\beta}{(k+1)^2 r^4}\sin\theta\cos\theta \qquad \text{(الف۹)}$$

$$\tilde{u}_{\theta,1}=\frac{9}{20}\frac{k\beta}{k+1}(-3r+5r^3)\sin\theta\cos\theta$$ (الف۱۰)

$$p_1=-\frac{9}{10}\frac{k\beta}{(k+1)^2}\frac{(3\cos^2\theta-1)}{r^3}$$ (الف۱۱)

$$\tilde{p}_1=-\frac{63}{20}\frac{k\beta}{k+1}r^2(3\cos^2\theta-1)$$ (الف۱۲)

$$\tau_{1,rr}=\frac{2(\frac{27}{5}\frac{k\beta\cos^2\theta}{(k+1)^2}(-1+\frac{r^2}{2})+\frac{9k\beta}{5(k+1)^2}(1-\frac{r^2}{2})}{r^5}$$

$$\tau_{1,r\theta}=\tau_{1,\theta r}=\frac{\sin\theta(\frac{9}{5}\frac{k\beta\cos\theta}{(k+1)^2}(-4+\frac{3}{2}r^2)}{r^5}$$ (الف۱۳)

$$\tau_{1,r\phi}=\tau_{1,\phi r}=0$$

$$\tau_{1,\theta\theta}=-\frac{9}{10}\frac{k\beta(-7\cos^2\theta+3r^2\cos^2\theta+3-r^2)}{(k+1)^2r^5}$$

$$\tau_{1,\theta\phi}=\tau_{1,\phi\theta}=0$$

$$\tau_{1,\phi\phi}=-\frac{9}{10}\frac{k\beta(-5\cos^2\theta+3r^2\cos^2\theta+1-r^2)}{(k+1)^2r^5}$$

$$\tilde{\tau}_{1,rr}=-\frac{1}{10}\beta(46kr^2\cos^2\theta-42k\cos^2\theta-15\cos^2\theta-35r^2\cos^2\theta$$

$$+14k+5-22kr^2+5r^2)/(k+1)$$

$$\tilde{\tau}_{1,r\theta}=\tilde{\tau}_{1,\theta r}=\frac{3}{10}\frac{\beta\cos\theta\sin\theta(-14k+14kr^2-5-10r^2)}{k+1}$$ (الف۱۴)

$$\tilde{\tau}_{1,r\phi}=\tilde{\tau}_{1,\phi r}=0$$

$$\tilde{\tau}_{1,\theta\theta}=\frac{1}{10}\beta(38kr^2\cos^2\theta-42k\cos^2\theta-15\cos^2\theta-25r^2\cos^2\theta$$

$$+4kr^2+40r^2+28k+10)/(k+1)$$

$$\tilde{\tau}_{1,\theta\phi}=\tilde{\tau}_{1,\phi\theta}=0$$

$$\tilde{\tau}_{1,\phi\phi}=\frac{1}{10}\frac{\beta(23kr^2\cos^2\theta+19kr^2-14k-5+10r^2+5r^2\cos^2\theta)}{k+1}$$

$$u_r^{(1)}=\frac{3}{140}\frac{\alpha_2}{k+1}(\frac{21k+18}{r}-\frac{21k+4}{r^3})(10\cos^2\theta-6)\sin\theta\cos\theta$$
$$-\frac{\alpha_2}{10(k+1)^2}(\frac{3k^2-k+8}{r}-\frac{3k^2-3k+6}{r^3})\cos\theta \quad \text{(الف۱۵)}$$

$$\tilde{u}_r^{(1)}=\frac{-\alpha_2}{5k+5}((4-2k)r^2+(3k-3))\cos\theta-\frac{3\alpha_2}{70}(5r^4-12r^2)(10\cos^2\theta-6)\sin\theta\cos\theta \quad \text{(الف۱۶)}$$

$$u_\theta^{(1)}=\frac{1}{20}\frac{\alpha_2}{(k+1)^2}(\frac{3k^2-k+8}{r}+\frac{3k^2-3k+6}{r^3})\sin\theta$$
$$-\frac{3}{280}\frac{\alpha_2}{(k+1)}(-\frac{21k+18}{r^3}+\frac{3(21k+4)}{r^5})\sin\theta(5\cos^2\theta-1) \quad \text{(الف۱۷)}$$

$$\tilde{u}_\theta^{(1)}=\frac{\alpha_2}{5(k+1)}((8-4k)r^2+(3k-3))\sin\theta+ \quad \text{(الف۱۸)}$$
$$\frac{3\alpha_2}{140}(30r^4-48r^2)\sin\theta(5\cos^2\theta-1)$$

$$p^{(1)}=\frac{1}{140}\frac{\alpha^2\cos^2\theta}{(k+1)^2r^4}(-112r^2+14r^2k-42r^2k^2+1350\cos^2\theta+2925k\cos^2\theta$$
$$+1575k^2\cos^2\theta-810-945k^2-1755k) \quad \text{(الف۱۹)}$$

$$\tilde{p}^{(1)}=-\frac{2}{7}\frac{\alpha_2 r\cos\theta}{k+1}(45r^2k\cos^2\theta+45r^2\cos^2\theta+28-27r^2-14k-27r^2k) \quad \text{(الف۲۰)}$$

$$\tau_{rr}^{(1)} = -\frac{1}{35}\alpha_2 \cos\theta(180+810r^2\cos^2\theta-360r^2-56r^4+945r^2k^2\cos^2\theta$$
$$-1116kr^2-504r^2k^2+1125k+945k^2+7kr^4-21k^2r^4-300\cos^2\theta$$
$$-1557k^2\cos^2\theta-1875k\cos^2\theta+1755kr^2\cos^2\theta)/(r^6(k+1)^2)$$
$$\tau_{r\theta}^{(1)} = \tau_{\theta r}^{(1)} = -\frac{9}{140}\alpha_2\sin\theta(-20r^2+520kr^2\cos^2\theta+280r^2k^2\cos^2\theta$$
$$-118kr^2+240r^2\cos^2\theta-525k^2\cos^2\theta-625k\cos^2\theta-42r^2k^2+125k$$
$$+105k^2+20-100\cos^2\theta)/(r^6(k+1)^2)$$
(الف۲۱)
$$\tau_{r\phi}^{(1)} = \tau_{\phi r}^{(1)} = 0$$
$$\tau_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{140}(540-990r^2-112r^4-2817kr^2-1323r^2k^2+3375k$$
$$+2835k^2+1890r^2\cos^2\theta-4095k^2\cos^2\theta-4875k\cos^2\theta+4095kr^2\cos^2\theta$$
$$+2205r^2k^2\cos^2\theta-780\cos^2\theta+14r^4k-42r^4k^2)\alpha_2\cos\theta/(r^6(k+1)^2)$$
$$\tau_{\theta\phi}^{(1)} = \tau_{\phi\theta}^{(1)} = 0$$
$$\tau_{\phi\phi}^{(1)} = \frac{1}{140}\alpha_2\cos\theta(180-420\cos^2\theta+1575r^2k^2\cos^2\theta+14kr^4-42k^2r^4$$
$$+2925kr^2\cos^2\theta-693r^2k^2-1647kr^2-112r^4+1125k+945k^2$$
$$+1350r^2\cos^2\theta-450r^2-2205k^2\cos^2\theta-2625k\cos^2\theta)/(r^6(k+1)^2$$

$$\tilde{\tau}_{rr}^{(1)} = -\frac{8}{35}\alpha_2 r\cos\theta(-45r^2+75r^2\cos^2\theta-90k\cos^2\theta-90\cos^2\theta$$
$$+75kr^2\cos^2\theta+47k+68-45r^2k)/(k+1)$$
$$\tilde{\tau}_{r\theta}^{(1)} = \tilde{\tau}_{\theta r}^{(1)} = \frac{3}{70}r\alpha_2\sin\theta(152+68k+375kr^2\cos^2\theta+375r^2\cos^2\theta$$
$$-75kr^2-75r^2-480k\cos^2\theta-480\cos^2\theta)/(k+1)$$
(الف۲۲)
$$\tilde{\tau}_{r\phi}^{(1)} = \tilde{\tau}_{\phi r}^{(1)} = 0$$
$$\tilde{\tau}_{\theta\theta}^{(1)} = \frac{1}{35}r\alpha_2\cos\theta(525kr^2\cos^2\theta+525r^2\cos^2\theta-405r^2-405r^2k$$
$$+548k+632-720k\cos^2\theta-720\cos^2\theta)/(k+1)$$
$$\tilde{\tau}_{\theta\phi}^{(1)} = \tilde{\tau}_{\phi\theta}^{(1)} = 0$$
$$\tilde{\tau}_{\phi\phi}^{(1)} = \frac{1}{35}r\alpha_2\cos\theta(45r^2+75r^2\cos^2\theta+75kr^2\cos^2\theta-172k-88+45kr^2)/(k+1)$$

$$u_{r,2} = \frac{1}{2}\frac{(5A_3\cos^2\theta-3A_3+2A_1r^2)}{r^5}(r^2-1)\cos\theta$$
(الف۲۳)

$$\tilde{u}_{r,2} = \frac{1}{2}(C_3 r^2(5\cos^2\theta - 3) - 2a(1+r^2) + 2C_1)(1-r^2)\cos\theta$$ (الف۲۴)

$$u_{\theta,2} = -\frac{1}{2}A_1(\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r})\sin\theta + \frac{1}{8}A_3(-\frac{3}{r^5}+\frac{1}{r^3})\sin\theta(5\cos^2\theta - 1)$$ (الف۲۵)

$$\tilde{u}_{\theta,2} = \frac{1}{2}(a(6r^4-2) + C_1(2-4r^2))\sin\theta + \frac{1}{8}C_3(4r^2-6r^4)\sin\theta(5\cos^2\theta-1)$$ (الف۲۶)

$$p_2 = -\frac{1}{700}\frac{\beta k}{(k+1)^3 r^4}(-42r^2\beta k - 170r^2 k - 170r^2 - 7152k\cos^2\theta - 7125\cos^2\theta$$
$$-7965\beta k + 13275\beta k\cos^2\theta + 4275 + 4275k)\cos\theta$$ (الف۲۷)

$$\tilde{p}_2 = \frac{1}{700}\frac{\beta r\cos\theta}{(k+1)^2}(-6720k\beta\cos^2\theta r^2 + 25140k^2r^2\beta\cos^2\theta - 13250k\cos^2\theta r^2$$
$$-15175k^2r^2\cos^2\theta + 1925r^2\cos^2\theta - 1470\beta k^2 - 425 - 14202\beta k^2 r^2 - 1890k\beta$$
$$+4914k\beta r^2 + 9420kr^2 + 1275k^2 + 9840k^2r^2 + 850k - 420r^2)$$ (الف۲۸)

$$\tau_{2,rr} = -\frac{1}{175}\beta k\cos\theta(-4275k - 4842\beta kr^2 + 7965\beta k + 2310kr^2$$
$$-4275r^2\cos^2\theta + 7965\beta kr^2\cos^2\theta + 85r^4 + 21\beta kr^4 - 4275r^2k\cos^2\theta$$
$$+7125\cos^2\theta - 13275\beta k\cos^2\theta + 2310r^2 + 7125k\cos^2\theta + 85kr^4$$
$$-4275)/(r^6(k+1)^3)$$
$$\tau_{2,r\theta} = \tau_{2,\theta r} = -\frac{3}{700}\beta k\sin\theta(-1425k - 1458\beta kr^2 + 2655\beta k$$
$$+590kr^2 - 3800r^2\cos^2\theta + 7080\beta kr^2\cos^2\theta - 3800r^2k\cos^2\theta +$$
$$7125\cos^2\theta - 13275\beta k\cos^2\theta + 590r^2 + 7125k\cos^2\theta - 1425)/(r^6(k+1)^3)$$ (الف۲۹)
$$\tau_{2,r\phi} = \tau_{2,\phi r} = 0$$
$$\tau_{2,\theta\theta} = \frac{1}{700}(-12825 - 12825k - 12339\beta kr^2 + 23895\beta k + 6045kr^2 + 170r^4$$
$$+42\beta kr^4 - 9975r^2k\cos^2\theta - 9975r^2\cos^2\theta + 18585\beta kr^2\cos^2\theta + 18525\cos^2\theta$$
$$+6045r^2 + 170kr^4 - 34515\beta k\cos^2\theta + 18525k\cos^2\theta)\beta k\cos\theta/(r^6(k+1)^3)$$
$$\tau_{2,\theta\phi} = \tau_{2,\phi\theta} = 0$$
$$\tau_{2,\phi\phi} = \frac{1}{700}\beta k\cos\theta(9975\cos^2\theta + 9975k\cos^2\theta + 7965\beta k - 18585\beta k\cos^2\theta$$
$$+170kr^4 - 7125r^2k\cos^2\theta - 7125r^2\cos^2\theta + 42\beta kr^4 + 13275\beta kr^2\cos^2\theta$$
$$-7029\beta kr^2 + 3195r^2 - 4275 + 170r^4 - 4275k + 3195kr^2)/(r^6(k+1)^3)$$

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\tau}_{2,rr} = \frac{1}{350} r\beta\cos\theta(-5070k + 4536\beta kr^2 + 504\beta k + 3930kr^2 \\
&-630\beta k\cos^2\theta - 6150kr^2\cos^2\theta - 8775r^2k^2\cos^2\theta - 11250\beta k^2\cos^2\theta \\
&-8208\beta k^2r^2 + 11790r^2k^2\beta\cos^2\theta - 9450\beta kr^2\cos^2\theta - 4075k^2 - 995 \\
&+5385r^2k^2 + 6960\beta k^2 - 1455r^2 + 2625\cos^2\theta + 8325k^2\cos^2\theta \\
&+2625r^2\cos^2\theta + 10950k\cos^2\theta)/(k+1)^2 \\
&\tilde{\tau}_{2,r\theta} = \tilde{\tau}_{2,\theta r} = -\frac{3}{700}\beta\sin\theta r(-1760k + 1680\beta kr^2 - 483\beta k + 925kr^2 \\
&-420\beta k\cos^2\theta - 3975r^2k\cos^2\theta - 5550r^2k^2\cos^2\theta - 7500\beta k^2\cos^2\theta \\
&-975\beta k^2r^2 + 7500r^2k^2\beta\cos^2\theta - 5775\beta kr^2\cos^2\theta - 1175k^2 + 1175r^2k^2 \\
&+975\beta k^2 - 250r^2 + 1750\cos^2\theta + 5550k^2\cos^2\theta + 1575r^2\cos^2\theta \\
&+7300k\cos^2\theta - 585)/(k+1)^2 \\
&\tilde{\tau}_{2,r\phi} = \tilde{\tau}_{2,\phi r} = 0 \\
&\tilde{\tau}_{2,\theta\theta} = -\frac{1}{350}\beta r\cos\theta(-11160k + 11088\beta kr^2 - 1323\beta k + 5715r^2k \\
&-11250\beta k^2\cos^2\theta - 3249\beta k^2r^2 + 10950k\cos^2\theta + 2100r^2\cos^2\theta \\
&-7775k^2 + 6705r^2k^2 + 8325k^2\cos^2\theta + 7215\beta k^2 - 990r^2 - 7875r^2k^2\cos^2\theta \\
&-5775r^2k\cos^2\theta + 2625\cos^2\theta + 10710r^2k^2\beta\cos^2\theta - 7875\beta kr^2\cos^2\theta \\
&-3385 - 630\beta k\cos^2\theta)/(k+1)^2 \\
&\tilde{\tau}_{2,\theta\phi} = \tilde{\tau}_{2,\phi\theta} = 0 \\
&\tilde{\tau}_{2,\phi\phi} = -\frac{1}{350}\beta r\cos\theta(-210k + 2898\beta kr^2 - 1953\beta k + 1365kr^2 + 4491\beta k^2r^2 \\
&+550k^2 + 255k^2r^2 - 4035\beta k^2 + 1110r^2 - 1425r^2k^2\cos^2\theta - 1425r^2k\cos^2\theta \\
&+2970r^2k^2\beta\cos^2\theta + 315\beta kr^2\cos^2\theta - 760)/(k+1)^2
\end{aligned}
\qquad \text{(الف۳۰)}
$$

ضمیمه ب

برنامه‌های مربوط به پردازش تصویر

۱-ب: برنامه تعیین وضوح تصویر

```
close all;
a = imread ('1_2020.bmp' );
for ii=-0.2:.01:.2
level= graythresh( a )+ii;
%convert refrence image to white and black(binary)image
ref_binary = im2bw( a,level );
imshow(ref_binary);
title (['level adjustment=', num2str(ii)]);
figure;

end;
```

۲-ب: برنامه پردازش تصویر

```
%______________________IMAGE PROCESSING
PROGRAMME___________________________%

%__________________________________________________________________________
__%


clc;
clear all;
close all;

%______________________importing and preparing data_________________________%


disp('Please check the given data , I mean File initial name, File initial number, Number of
Image and scale factor');
file_initial_number =  2019;

number_of_image = 30;
scale_factor= 2.72/600;

%first we must import a refrence image to MATLAB without any droplet

ref = imread ('ref.bmp' );
level= graythresh( ref )+.13;
```

```
%convert refrence image to white and black(binary)image
ref_binary = im2bw( ref,level );
%N represents number of image should be process%
N=number_of_image;
%_______________________ main
loop__________________________________________%

for kk=1:N

  kk
  if kk+file_initial_number< 100
    file_initial_name='1_00';
  else if kk+file_initial_number <1000
      file_initial_name ='1_0';
    else
      file_initial_name = '1_';
    end;
  end;

  %construction the name of file %
  file_name = [file_initial_name, num2str( file_initial_number+kk ) , '.bmp' ] ;
  if (kk == 21)|(kk == 22)|(kk == 47)|(kk == 95)
    file_name = [file_initial_name, num2str( file_initial_number+kk ) , '.png' ] ;
  end;

  import images to MATLAB
  image_matrix = imread( file_name );
  convert main image to white and black(binary)image

  level= graythresh( image_matrix )+0.13;

  %       level1= graythresh( ref )+.03;
  %       ref_binary = im2bw( ref,level1 );
  %    end;
  if (kk>220)
    level= graythresh( image_matrix )+.05;

  end;
  if (kk>160)
    level= graythresh( image_matrix )+.09;

  end;
  if (kk>240)
    level= graythresh( image_matrix )+.1;

  end;
  %convert refrence image to white and black(binary)image
  ref_binary = im2bw( ref,level );
  level= graythresh( image_matrix )+0.08;
end;
if (kk>20)&(kk<45)
```

```
    level=level+.02;

end;
if kk==12
    level=level+.02
end;

end;

level=level+.005;
end;

image_matrix_binary = im2bw( image_matrix,level );

%by subtracting main image from refrence image
%we remove redundant information in the image
drop_binary = ref_binary - image_matrix_binary ;
% now we filter noise that exist in image
drop_binary_filtered = medfilt2 (drop_binary);
% now we remove all the white holes with less than 15 pixel
drop_binary_filtered = bwareaopen( drop_binary_filtered,5);
% now we fill the white points in the drop.
drop_binary_filtered = imfill( drop_binary_filtered,'holes');
if (1<=kk<11)
    drop_binary_filtered(:,1:140)=0;
    drop_binary_filtered(:,550:800)=0;
    drop_binary_filtered(565:600,:)=0;
    drop_binary_filtered(339:342,446:589)=0;
    drop_binary_filtered(331:380,:)=0;
    drop_binary_filtered(513:570,277:346)=0;
    drop_binary_filtered(459:561,:)=0;
    drop_binary_filtered(271:376,513:576)=0;
    drop_binary_filtered(310:427,462:522)=0;
    drop_binary_filtered(295:350,489:527)=0;
    drop_binary_filtered(286:298,503:533)=0;
    drop_binary_filtered(301:350,482:500)=0;
end
if (kk>=11)

    drop_binary_filtered(167:372,551:740)=0;
    drop_binary_filtered(474:597,419:670)=0;
    drop_binary_filtered(138:210,560:650)=0;
    drop_binary_filtered(279:384,512:623)=0;
    drop_binary_filtered(315:361,470:623)=0;
    drop_binary_filtered(291:350,503:623)=0;
    drop_binary_filtered(300:370,494:623)=0;
    drop_binary_filtered(304:400,485:600)=0;
    drop_binary_filtered(340:499,434:722)=0;
end
if (kk<=229)
    drop_binary_filtered (1:375,:)=0;
```

```
end;
if (kk > 42)
   drop_binary_filtered(540:600,:)=0;
end;
drop_binary_filtered(535:600,:)=0;
if (kk>229 && kk<=461)
   drop_binary_filtered(1:200,:)=0;
end;
if (kk>229)
   drop_binary_filtered(410:600,:)=0;
end;
if (kk>461 && kk<500)
   drop_binary_filtered(1:50,:)=0;
end;
if (kk>470)
   drop_binary_filtered(230:600,:)=0;
end;
if (kk>295)
   drop_binary_filtered(260:600,:)=0;
end;
if (kk>389)
   drop_binary_filtered(160:600,:)=0;
end;
if (kk>410 && kk<497)
   drop_binary_filtered(1:60,:)=0;
end;
if (kk>468)
   drop_binary_filtered(70:600,:)=0;
end;

% we need some sample of modified images to check whether the images are reliabe or not
[ length , width ] = size( drop_binary_filtered ) ;
drop_binary_filtered = bwareaopen( drop_binary_filtered,5);
if (mod (kk,1)==0)
   figure;
   imshow(drop_binary_filtered);
   title (['Droplet in t=',num2str(kk), 'millisecond']);
   pause (.01);
   if mod (kk,100)==0 ;
      close all;

   end;
end;



%________________________finding radious and center____________________________%

% we count number of non-zeros elements in each row( or column)
%row(column) that has maximum number of non-zero element is row(column) of center point.
```

```
%number of non-zero elements in this row(column) is radious in X direction(Y direction)

row = zeros (1 , length ) ;
column = zeros ( 1 , width ) ;

for ii = 1:length
   for jj = 1:width
      if drop_binary_filtered( ii , jj ) ~ 0
         row( ii ) = row( ii ) + 1 ;
         column( jj ) = column( jj ) + 1;
      end;
   end;
end;
[ x_radius( kk ) , y_center( kk ) ] = max( row ) ;
[ y_radius( kk ) , x_center( kk ) ] = max( column ) ;
Area = pi/4 * (x_radius / scale_factor ).^2;


%____________calculating volume using hte methods presented in the paper " Drop volume
measurement by vision" ______________________

%_______________________________Method 1____________________________________%
volume1 = pi/6 * x_radius.^3*scale_factor^3;
%_______________________________Method 2____________________________________%
A_lateral = sum( row )*scale_factor^2;
volume2 = 2 / 3 * A_lateral .* x_radius * scale_factor;
%_______________________________Method 3____________________________________%
x = 0 ;
for ii = 1:length
   x= row( ii ) ^ 2 + x;
end;
volume3(kk) = pi/4 .* x .* scale_factor ^ 3;

end;
%_________________________process our data___________________________%
% now we are going to fit a proper curve to our date of y_center %

y_radius=y_radius*scale_factor;
x_radius=x_radius*scale_factor;
y_center=y_center*scale_factor;
x_center=x_center*scale_factor;
f1 = fittype( 'poly2' );
f2 = fittype( 'poly4' );
f3 = fittype( 'sin8');
curve1 = fit( transpose( 1:N ), transpose( y_radius ) , f1 );
curve2 = fit( transpose( 1:N ), transpose( x_radius ) , f2 );
curve3 = fit( transpose( 1:N ), transpose( y_radius ) , f3 );
curve4 = fit( transpose( 1:N ), transpose( x_radius ) , f3 );
figure;
hold on ;
plot( y_center,'b');
```

```
plot(curve1,'r');
plot(curve2,'g');
figure;
hold on;
plot(volume1);
legend('method1 : based on sphere');
plot(volume2,'g');
legend('method1 : based on ellipsoid');
plot(volume3,'r');
legend('method1 : based on integral');
title('Plot of volume alteration');
[mean(volume1) mean(volume2) mean(volume3);std(volume1) std(volume2) std(volume3)]
figure;
hold on;
plot(y_radius);
plot(curve3,'g');
title('Plot of y_radius alteration');
figure;
hold on;
plot(x_radius)
plot(curve4,'g');
title('Plot of x_radius alteration');
%
f3 = fittype( 'sin8');
curve1 = fit( transpose( 1:N ), transpose( y_center ) , f1 );
curve2 = fit( transpose( 1:N ), transpose( y_center ) , f2 );
curve3 = fit( transpose( 1:N ), transpose( y_radius ) , f3 );
curve4 = fit( transpose( 1:N ), transpose( x_radius ) , f3 );
[mean(volume1) mean(volume2) mean(volume3);std(volume1) std(volume2) std(volume3)]
figure;
hold on;
plot(y_center);
plot(curve1,'g');
title('Plot of y_radius alteration');
figure;
hold on;
plot(x_center)
plot(curve2,'g');
title('Plot of x_radius alteration');
```

مراجع:

[1] Bird, R.B., Armstrong, R.C., Hassager, O. (**1987**) "**Dynamics of Polymeric Liquids, fluid dynamics**" Vol. 1, 2nd Edn, Wiley, New York.

[۲] شیخی نارانی م، (۱۳۷۱) **"بررسی خواص، جریان و انتقال حرارت و اختلاط سیالات غیرنیوتنی"** چاپ اول، جهاد دانشگاهی صنعتی امیرکبیر،تهران.

[3] Tanner, R.I. (**2000**), "**Engineering Rheology**", Second Edition, Oxford University Press, London.

[4] Hadamard, J. (**1911**)," Mouvement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans unliquide" ***C. R. Acad. Sci. Paris*,152**, pp. 1735–1738.

[5] Rybczynski, W. (**1911**), "Uber die fortschreitende Bewegung einer flüssigen Kugel in einem zähen Medium" ***Bull. Acad. Sci. de Cracovie A*,** pp. 40–46.

[6] Taylor, T.D., Acrivos, A. (**1964**)," On the deformation and drag of a falling viscous drop at low Reynolds number" ***J Fluid Mech*,18**, pp. 466–476.

[7] Koh, C.J.,Leal, G.L. (**1989**)," The stability of drop shapes for translation at zero Reynolds number through a quiescent fluid" **Phys. F luids, A 1**, pp. 1309–1313.

[8] Koebe, M., Bothe, D.,Warnecke, H.J. (**2003**),"Direct numerical simulation of air bubble in water/glycerol mixture: shapes and velocity fields", **4th ASME conference**.

[9] Smolianski, A., Haario, H., Luukka, P.,"Computational Study of Bubble Dynamics" **To appear in the International Journal of Multiphase Flow**.

[10] Sostarez, M.C., Belmonte, A. (**2003**), "Motion and shape of a viscoelastic drop falling through a viscose fluid", ***J Fluid Mech*, 497**,pp. 235-252.

[11] Mukherjee, S., Sarkar, K. (**2011**)," Viscoelastic drop falling through a viscous medium", **J *Phys Fluids*,23**, 013101.

[12] Smagin, I., Pathak, M., Lavrenteva, O.M., Nir, A. (**2010**)," Motion and shape of an axisymmetric viscoplastic drop slowly falling through a viscous fluid" ***Rheol Acta*. DOI 10.1007/s00397-010-0478-1**.

[13] German, G., Bertola, V. (**2010**)," The free-fall of viscoplastic drops" **J.Non-Newtonian, 165**, pp. 825–828

[14] Wanchoo, R.K., Sharma, S.K., Gupta, R. (**2003**)," Shape of a Newtonian liquid drop moving through an immiscible quiescent non-Newtonian liquid" **Chemical Engineering and Processing ,42,** pp. 387 -393.

[15] You, R., Borhan, A., Haj-Hariri, H. (**2008**)," A finite volume formulation for simulating drop motion in a viscoelastic two-phase system in a viscoelastic two-phase system" **J *non-Newtonian Fluid Mech* 153**, pp. 109-129.

[16] Phan-Thien, N. (**2002**), "**Understanding Viscoelasticity**", First Edition, Springer, Berlin.

[17] Toose, E.M., van den Ende, D., Geurts, B.J., Kuerten, J.G.M.,Zandbergen, P.J. (**1996**), "Axisymmetric non-Newtonian dropstreated with a boundary integral method" **J Eng Math30**, pp, 131–150

[18] Clift, R.C., Grace, J.R., Weber, M.E. (**1978**), " **Bubbles, Drops and Particles**", Academic Press.

[19] Wagner, M.G., Slattery, J.C. **(1971)**," Slow flow of a non-Newtonian fluids past a droplet" ,**J AIChE 17**, pp, 1198-1207.
[20] Ni, M.J. (**2006**), "Direct simulation of falling droplet in a closed channel" **International Journal of Heat and Mass Transfer, 49**, pp. 366–376.
[21] Smolka, L.B., Belmonte, A. (**2003**)," Drop pinch-off and filament dynamics of wormlike micellar fluids", **J. Non-Newtonian Fluid Mech, 115**, pp. 1–25.
[22] Happel, J., Brenner, H. (**1965**) **" Low Reynolds Number Hydrodynamic"** Prentice-Hall.
[23] Payne, L.E., Pell, W.H. (**1960**)," The Stokes flow problem for a class of axially symmetric bodies" **J Fluid Mech 7**, pp, 329–342.
[24] Landau, L., Lifshitz, I. (**1959**)" **Fluid Mechanics**" Pergamon.
[25] Joseph, D.D., Fosdick, R.L. (**1972**)," The free surface on a liquid between cylinders rotating at different speeds speeds", Part 1. ***Arch. Rat. Mech. Anal* 49**, pp, 321–350.
[۲۶] نوروزی م.، (۱۳۸۸)، پایان‌نامه دکتری **"بررسی جریان و انتقال حرارت سیال ویسکوالاستیک در مجاری خمیده دارای مقطع مستطیلی و در حالت‌های ایستا و چرخان"** دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
[27] Giesekus, H. (**1982**), "A simple constitute equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility", **J. Non-Newtonian. Fluid, 2**, pp. 353-365.
[28] Smolka. L.B., Belmonte, A. (**2006**)," Charge screening effects on filament dynamics in xanthan gum solutions", **J. Non-Newtonian Fluid Mech, 137**, pp. 103–109.
[29] Bird, R. B., Steward, W. E., Lightfoot, E. N. (**1960**). " **Transport Phenomena**", First Edition, John Wiley.
[30] Whitcomb, P. J., Macosko, C. W. (**1978**)," Rheology of xanthan gum". **J. Rheol. 22**, pp, 493–505.
[31] Caswell, B., Schwarz, W.H. (**1962**)," The creeping motion of a non-Newtonian fluid past a sphere". **J Fluid Mech 13**, pp, 417-426.
[32] Mckinley, G.H. (**2005**)," Dimensionless groups for understanding free surface flows of complex fluids". ***Rheology Bulletin* 74**, pp, 6-9.
[33] Hugli, H., Gonzalez, J. (**2000**) ,"Drop volume measurement by vision", **SPIE 3966–11**, pp, 60–66.
[34] Batchelor, G. K. (**1967**)," **An Introducti on to Fluid Dynamics**" Cambridge University.

Abstrac

Generally, motion and shape of the drop falling under gravity in an immiscible fluid has become a benchmark problem in fluid dynamics and has a wide range of application in petroleum, medicine processing, metals extraction, power plant and heat exchanger. In this thesis, analytical and experimental for creeping motion of viscoelastic drop falling through a viscose Newtonian fluid is studied.

In experimentally, we used an immiscible drop of 0.08% Xanthan gum in 80:20 glycerol/water falling through 4.5 and 8.3 P Silicon oil. The analytical studies for both interior (viscoelastic drop) and exterior (Newtonian fluid) flows are obtained using the perturbation method. Here, the Oldroyd-B model and Geisekus model are used as the constitutive equation for viscoelastic drop and Newtonian model is used for viscose fluid. For a small enough falling drop, surface tension is dominate force and the shape is spherical. As the volume of the drop increased, the drop falls faster and the free surface deforms from its spherical shape in response to the viscoelastic stresses forces. At a critical drop volume, the free surface develops an inward dimple at its rear stagnation point. The deformation we observe is not due to inertia effect because, the motion of the drop falling is creeping and inertia is negligible. Analytical solution in estimating the Terminal velocity and drop shape have more adaption with experimental Results. In this research, effect of parameters such as Deborah number, Capillary number, viscosity ratio β and mobility factor on the motion and shape of the falling drop has been studied analytically. According to this study, by increasing the Deborah number the dimple at the rear end of the drop develop and increase also the Terminal velocity decrease.

Keyword: viscoelastic drop, creeping flow, Oldroyd-B, Geisekus, perturbation method, Deborah number, Capillary number

Shahrood University of Technology

Faculty of Mechanical Engineering

An analytical/experimental investigation of creeping viscoelastic drop falling through a liquid phase

Thesis

Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Master of Science (M.Sc)

Behrooz Zare-Vamerzani

Supervisors

Dr. M. Norouzi

Dr. B. Firoozabadi

Date: January 2013