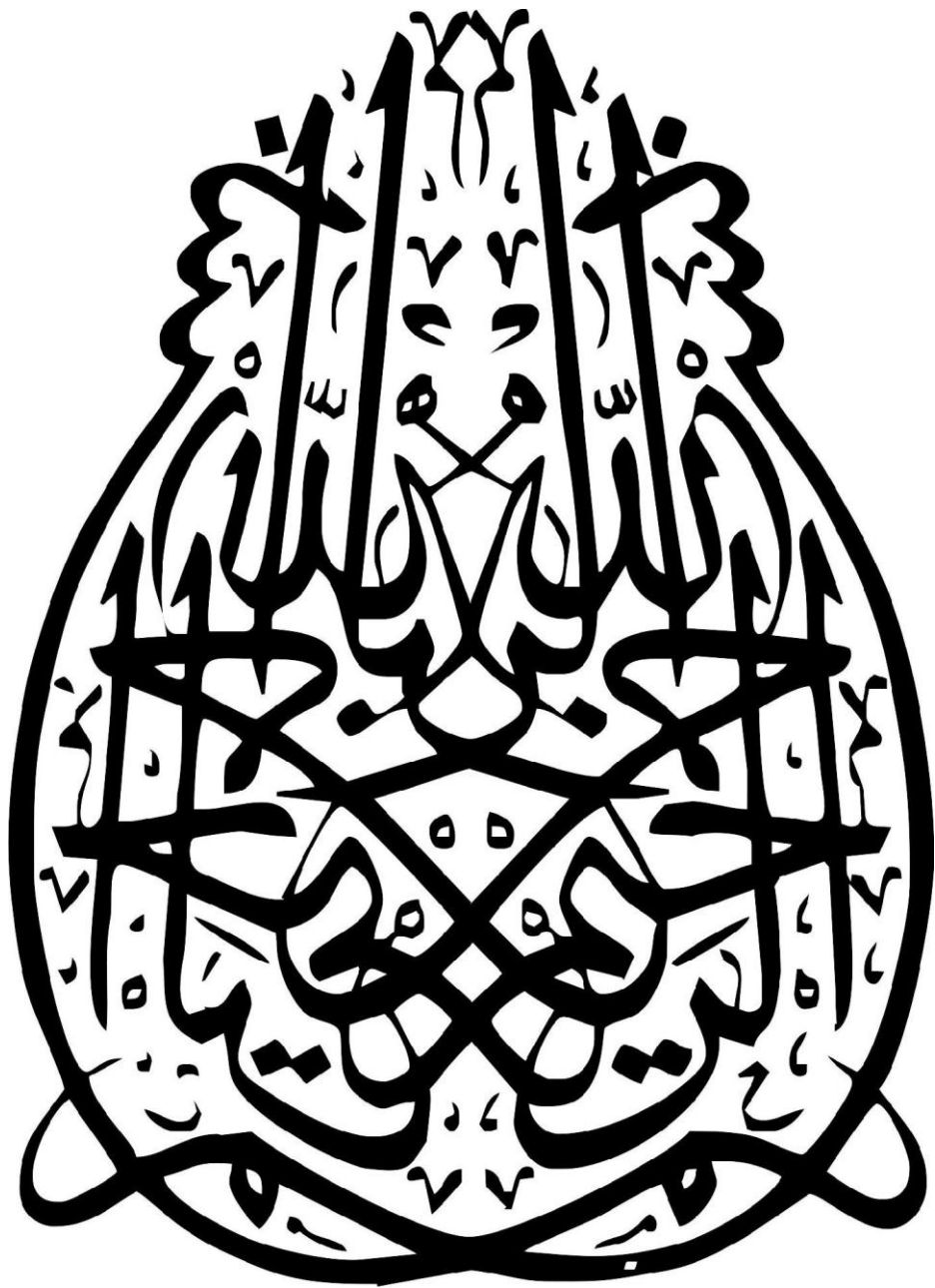






دانشکده عمران و معماری

گروه سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد

تحلیل حساسیت و بهینه سازی آیزوژئومتریک شکل سازه ها

مهدی جدیداسلام

استاد راهنما:

دکتر بهروز حسنی

استاد مشاور:

دکتر سید مهدی توکلی

شهریور ۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: عمران

گروه: سازه

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مهدی جدیداسلام

تحت عنوان:

تحلیل حساسیت و بهینه سازی آیزوژئومتریکی شکل سازه ها

در تاریخ
توسط کمیته ی تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و
با درجه
مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	امضاء	استاد راهنما	استاد مشاور
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

امضاء	امضاء	اساتید داور	نماینده تحصیلات تکمیلی
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

تقدیم به

مادرم که از شیرهی وجود خود ذره‌های زندگی و امید برایم آفرید.

و تقدیم به

پدرم که همواره دعای خیرش بدرقه‌ی راهم بوده و خواهد بود.

و تقدیم به

معلمان و **اساتیدی** که آگاهانه هرچه را گران به دست آورده بودند به

رایگان در اختیارم نهادند تا تفاوت راست و ناراست را بیاموزم.

تشکر و قدردانی

اکنون که آخرین کلمات را به این پایان نامه اضافه می‌کنم و دوران سخت آن را به خاطر می‌آورم، می‌دانم تشکری ساده از دکتر سید مهدی توکلی، که بی‌منت مرا در سپری کردن آن دوران یاری نمودند، کاری است ناچیز. اما از کوچکی اینچنین، بیش از این ساخته نیست.

همچنین از دکتر بهروز حسنی که راهنمایی‌هایشان به قدر تلاشی چند ماهه و شاید چند ساله ارزشمند بوده تشکر می‌نمایم.

از پروفیسور کریستر سونبرگ^۱ از موسسه فناوری رویال سوئد^۲ نیز به دلیل در اختیار نهادن کدهای کامپیوتریشان تشکری ویژه دارم.

همچنین از خانواده و دوستانی که بنده را در به ثمر رساندن این پایان نامه همراهی کردند متشکرم.

^۱ Krister Svanberg

^۲ Royal Institute of Technology

دانشجو تایید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان‌نامه نتیجه‌ی تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه‌ی حقوق مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان‌نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد.

شهریور ۹۱

چکیده

در این پایان نامه بهینه سازی شکل سازه ها به عنوان بخش مهمی از بهینه سازی سازه ها مورد بررسی قرار گرفته است. رویکرد مهمی که مورد توجه ویژه قرار گرفته، استفاده از روش تحلیل آیزوژئومتریك به عنوان روشی جدید است. این روش با تکیه بر تکنولوژی *CAD* به وجود آمده و از مفاهیم موجود در آن استفاده می کند. روش آیزوژئومتریك از نرزه ها که در علم هندسه جهت مدلسازی اشكال پیچیده به کار می روند، استفاده می کند. برای بهینه سازی روش های بسیاری قابل استفاده می باشند، که به دو دسته ی روش های بر پایه ی گرادیان و روش های مستقل از گرادیان تقسیم بندی می شوند. روش های بر پایه ی گرادیان علاوه بر خود توابع به مشتقات آن ها نیز جهت انجام بهینه سازی نیازمند هستند. از بین این روش ها روش مجانب های متحرک (*MMA*) برای این منظور انتخاب شده که روشی جدید و بسیار کارآمد است.

همانطور که اشاره شد تعیین مشتقات حساسیت در روش های بر پایه ی گرادیان امری اجتنابناپذیر است که البته در تسریع بخشیدن به روند انجام بهینه سازی نیز کمک شایانی می نماید. در نتیجه تعیین فرمولبندی این مشتقات بر پایه ی روش آیزوژئومتریك به عنوان بخش مهمی از این پایان نامه انجام گرفته است و این نتایج در برنامه کامپیوتری که در راستای اهداف این پایان نامه نوشته شده مورد استفاده قرار گرفته است. بهینه سازی دوبعدی شکل سازه ها با روش آیزوژئومتریك چندی قبل در سال ۲۰۰۸ توسط وال و همکاران انجام گرفته، اما ارائه فرمولبندی سه بعدی تحلیل حساسیت و انجام بهینه سازی سه بعدی شکل سازه ها که کاربردی گسترده در مسائل الاستیسیته دارد به عنوان دستاوردی جدید در این پایان نامه ارائه شده است. در پایان نیز تعدادی مسئله برای بررسی نتایج به دست آمده از پایان نامه ارائه شده است.

واژه های کلیدی: تحلیل حساسیت، بهینه سازی شکل سازه ها، تحلیل آیزوژئومتریك

فهرست مطالب

فصل اول: کلیات ۱

- ۱-۱- مقدمه..... ۲
- ۲-۱- تاریخچه..... ۶
- ۳-۱- اهداف کلی پایان نامه..... ۸
- ۴-۱- برنامه کامپیوتری نوشته شده در راستای پایان نامه..... ۸
- ۵-۱- ساختار کلی پایان نامه..... ۹

فصل دوم: روش تحلیل آیزوژئومتریک ۱۰

- ۱-۲- مقدمه..... ۱۰
- ۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریک..... ۱۳
- ۳-۲- ب - اسپلاین ها و توابع نریز..... ۱۵
- ۱-۳-۲- بردارهای گرهی..... ۱۶
- ۲-۳-۲- توابع پایه..... ۱۷
- ۳-۳-۲- مشتقات توابع پایه ب- اسپلاین..... ۱۹
- ۴-۳-۲- منحنی ب - اسپلاین..... ۲۰
- ۵-۳-۲- سطوح ب - اسپلاین..... ۲۲
- ۶-۳-۲- احجام ب - اسپلاین..... ۲۳
- ۷-۳-۲- ب - اسپلاین های نسبی غیریکنواخت (NURBS)..... ۲۳
- ۸-۳-۲- مشتقات توابع پایه نریز..... ۲۵
- ۴-۲- نریز بعنوان پایه ای برای تحلیل..... ۲۶
- ۵-۲- روش آیزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزا محدود..... ۲۸
- ۶-۲- تحلیل آیزوژئومتریک مسائل تنش مسطح..... ۲۹

۲-۶-۱- فرمولبندی آیزوژنومتریک ۲۹

۲-۷- تحلیل آیزوژنومتریک مسائل سه بعدی الاستیسیته ۳۲

۲-۷-۱- فرمول بندی مسائل سه بعدی الاستیسیته ۳۲

فصل سوم: بهینه سازی سازه ها ۳۶

۳-۱- مقدمه ۳۷

۳-۲- تعاریف اولیه ۳۸

۳-۲-۱- متغیرهای طراحی ۳۸

۳-۲-۲- تابع هدف ۳۸

۳-۲-۳- قیدها ۳۹

۳-۳- فرم استاندارد مسئله ی بهینه سازی ۳۹

۳-۴- انواع روش های بهینه سازی سازه ها ۴۰

۳-۴-۱- تحذب ۴۱

۳-۴-۲- تابع محدب ۴۱

۳-۴-۳- مسئله ی بهینه سازی محدب و نتایج حاصل از آن ۴۲

۳-۴-۴- روش تشخیص تحذب و تقعر ۴۲

۳-۴-۵- معیار سیلوستر ۴۳

۳-۴-۶- شرایط کاروش-کان-تاکر (KKT) ۴۳

۳-۴-۷- دوگانگی لاگرانژ ۴۵

۳-۴-۸- تقریب برنامه ریزی خطی ترتیبی (SLP) ۴۶

۳-۴-۹- برنامه ریزی درجه دوم ترتیبی (SQP) ۴۷

۳-۴-۱۰- روش مجانب های متحرک (MMA) ۴۷

۳-۵- انواع مسائل بهینه سازی سازه ها ۵۰

۳-۵-۱- بهینه سازی ابعادی ۵۰

۵۱..... ۲-۵-۳- بهینه سازی توپولوژی

۵۴..... ۳-۵-۳- بهینه سازی شکل سازه‌ها

۶۱..... فصل چهارم: تحلیل حساسیت

۶۲..... ۱-۴- مقدمه

۶۴..... ۲-۴- روش‌های تعیین مشتقات حساسیت

۶۵..... ۱-۲-۴- روش عددی (تفاضل محدود).....

۶۶..... ۲-۲-۴- روش تحلیلی.....

۶۶..... ۱-۲-۲-۴- روش تحلیلی مستقیم.....

۶۷..... ۲-۲-۲-۴- روش تحلیلی الحاقی

۶۸..... ۳-۲-۲-۴- مقایسه‌ی روش مستقیم و الحاقی

۶۸..... ۴-۲-۲-۴- محاسبه‌ی شبه بار در حالت دوبعدی

۷۱..... ۵-۲-۲-۴- حساسیت‌ها و محاسبه‌ی شبه بار در حالت سه بعدی

۷۳..... ۳-۲-۴- روش نیمه تحلیلی

۷۵..... فصل پنجم: مثال‌های عددی

۷۶..... ۱-۵- مقدمه

۷۶..... مسئله ۱-۵: تیر طره

۸۰..... مسئله ۲-۵: صفحه سوراخدار

۸۳..... حل مسئله ۵-۲ با تعداد زیردامنه‌های بیشتر

۹۱..... مسئله ۴-۵: تیر دو سر گیردار سه بعدی

۹۴..... مسئله ۵-۵: مکعب

۹۸..... فصل ششم: نتایج و پیشنهادات

۹۹..... ۱-۶- مقدمه

۹۹.....۶-۲- نتایج.....

۱۰۱.....۶-۳- پیشنهادات.....

۱۰۳.....پیوست: راهنمای برنامه کامپیوتری.....

۱۰۴.....محیط کلی برنامه.....

۱۰۵.....فایل ورودی.....

۱۰۸.....فایل خروجی.....

۱۱۰.....مراجع.....

فهرست اشکال

- شکل (۱-۱): تعامل بین مدل تحلیل، طراحی و بهینه‌سازی..... ۵
- شکل (۱-۲): بار کمانش پوسته‌ی نازک به ازای نقص‌های هندسی ۱٪، ۱۰٪ و ۵۰٪..... ۱۲
- شکل (۲-۲): شمای کلی مفهوم نرېز برای سطحی با یک المان..... ۱۵
- شکل (۱-۲): مجموعه‌ی محدب و غیرمحدب..... ۴۱
- شکل (۲-۳): تابع محدب اکید (چپ)، تابع محدب (وسط)، تابع غیرمحدب (راست)..... ۴۲
- شکل (۳-۳): یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ابعادی که برای بهینه‌سازی سطح مقطع اعضای خرپا فرمولبندی شده..... ۵۱
- شکل (۴-۳): بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا..... ۵۲
- شکل (۵-۳): بهینه‌سازی توپولوژی یک تیر ساده..... ۵۳
- شکل (۶-۳): مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با یافتن تابع $\eta(X)$ که شکل تیر را مشخص می‌کند..... ۵۴
- شکل (۷-۳): استفاده از گره‌های اجزا محدود به عنوان متغیرهای طراحی (الف) طرح اولیه (ب) طرح بهینه..... ۵۶
- شکل (۸-۳): استفاده از گره‌های اجزا محدود به عنوان متغیرهای طراحی در بهینه‌سازی ابعادی..... ۵۷
- شکل (۱-۵): طرح اولیه مسئله تیر طره..... ۷۷
- شکل (۲-۵): طرح بهینه مسئله تیر طره..... ۷۷
- شکل (۳-۵): روند بهینه‌سازی شکل تیر طره..... ۷۸
- شکل (۴-۵): کانتورهای تنش فون میزس برای طرح بهینه مسئله تیر طره..... ۷۸
- شکل (۵-۵): طرح اولیه مسئله صفحه سوراخدار..... ۸۰
- شکل (۶-۵): روند بهینه‌سازی صفحه سوراخدار..... ۸۱
- شکل (۷-۵): طرح بهینه مسئله صفحه سوراخدار..... ۸۲
- شکل (۸-۵): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس صفحه سوراخدار..... ۸۲
- شکل (۹-۵): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس در نزدیکی سوراخ برای صفحه سوراخدار..... ۸۳
- شکل (۱۰-۵): طرح اولیه مسئله صفحه سوراخدار با ۱۲ زیردامنه..... ۸۴
- شکل (۱۱-۵): روند بهینه‌سازی صفحه سوراخدار..... ۸۴
- شکل (۱۲-۵): طرح بهینه مسئله صفحه سوراخدار..... ۸۵
- شکل (۱۳-۵): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس صفحه سوراخدار..... ۸۵
- شکل (۱۴-۵): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس در نزدیکی سوراخ برای صفحه سوراخدار..... ۸۶

شکل (۵-۱۵): شکل بهینه‌ی مرز سوراخ برای حل با دو زیردامنه (آبی) و ۱۲ زیردامنه (سبز).....	۸۷
شکل (۵-۱۶): طرح اولیه مسئله آچار	۸۹
شکل (۵-۱۷): طرح بهینه مسئله آچار	۸۹
شکل (۵-۱۸): کانتورهای تنش فون میزس برای طرح بهینه مسئله آچار	۹۰
شکل (۵-۱۹): کانتورهای تنش فون میزس برای سر آچار	۹۰
شکل (۵-۲۰): طرح اولیه برای مسئله تیر سه بعدی دو سر گیردار	۹۲
شکل (۵-۲۱): روند بهینه‌سازی برای مسئله‌ی تیر سه بعدی دو سر گیردار	۹۳
شکل (۵-۲۲): طرح بهینه برای مسئله‌ی تیر سه بعدی دو سر گیردار و نحوه توزیع تنش فون میزس در آن	۹۴
شکل (۵-۲۳): طرح اولیه برای مسئله مکعب. (الف) نمای بالا (ب) نمای پایین	۹۵
شکل (۵-۲۴): روند بهینه‌سازی برای مسئله‌ی مکعب	۹۶
شکل (۵-۲۵): طرح بهینه برای مسئله مکعب. نمای بالا.....	۹۶
شکل (۵-۲۶): طرح بهینه برای مسئله‌ی مکعب. نمای پایین	۹۷
شکل (ض-۱): محیط کلی برنامه کامپیوتری	۱۰۴

فهرست جداول

جدول (۲-۱): تفاوت‌های روش آیزوژئومتریک و اجزا محدود	۲۸
جدول (۲-۲): شباهت‌های روش آیزوژئومتریک و اجزا محدود	۲۹
جدول (۳-۱): مدل‌های ارائه شده برای بهینه‌سازی شکل	۵۹

فصل اول

کلیات

۱-۱- مقدمه

در دهه‌های اخیر روش‌های عددی بسیاری به وجود آمده و توسعه یافته‌اند. اما فراگیرترین روشی که در این زمینه پیشنهاد شد روش اجزای محدود بود. جالب است بدانید که پیدایش روش تحلیل اجزای محدود در علوم مهندسی به سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ برمی‌گردد. در طول این دوران مهندسی هوا- فضا نقطه‌ی کانونی بوده است. در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ اولین برنامه‌های کامپیوتری تجاری همچون نسترن^۱، آسکا^۲ و استاردین^۳ به وجود آمدند. پس از آن روش اجزای محدود در سایر علوم مهندسی گسترش یافت و در حال حاضر توسعه‌ی زیادی یافته و برنامه‌های کامپیوتری تجاری زیادی از آن در دسترس هستند.

اگرچه هندسه اساس تحلیل است، اما آنچه تحت عنوان کد^۴ می‌شناسیم، بعدها در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به وجود آمد. این مسئله شاید به نوعی دلیل تفاوت‌های بین نمایش هندسی در اجزای محدود و کد را نشان دهد. بسیاری از برنامه‌های اجزا محدود سال‌ها قبل از اینکه کد به طور گسترده پیشرفت کند به تکامل رسیده بودند. اما در حال حاضر کد صنعتی است که حتی مقداری از تحلیل بزرگتر است. در امور تجاری از تحلیل به عنوان مهندسی به کمک کامپیوتر^۵ تعبیر می‌شود. اینکه دقیقاً بتوانیم حجم صنایع تحلیل و کد را اندازه‌گیری کنیم کمی مشکل است، اما تخمین‌هایی مبنی بر اینکه ارزش تحلیل در حدود یک تا دو هزار میلیون دلار و کد در حدود پنج تا ده هزار میلیون دلار است وجود دارد [۱]. در کارهای مهندسی اینگونه مرسوم است که طراحی‌ها در سیستم‌های کد انجام می‌گیرند و شبکه‌ها از داده‌های کد تولید می‌شوند. این مسئله باعث می‌شود توصیف هندسی کاملاً متفاوتی را برای تحلیل به کار ببریم، هندسه‌ای که تنها یک

^۱ NASTRAN^۲ ASKA^۳ Stardyne^۴ Computer Aided Design (CAD)^۵ Computer Aided Engineering (CAE)

تقریب است. در برخی موارد تولید شبکه را می‌توان به صورت اتوماتیک انجام داد اما اکثر مواقع در بهترین حالت این کار را می‌توان به صورت نیمه اتوماتیک انجام داد. در صنایع اتومبیل، هوا - فضا و کشتی‌سازی چنین تخمین زده می‌شود که حدود ۸۰ درصد کل تحلیل به تولید شبکه اختصاص می‌یابد. در صنایع اتومبیل‌سازی تولید شبکه برای یک وسیله‌ی کامل حدود چهار ماه طول می‌کشد. با توجه به تغییرات طراحی که روزانه انجام می‌شود، اگر نتوانیم شبکه‌ی جدید را در بازه‌ی زمانی لازم تولید کنیم سودمندی تحلیل در طراحی کاهش می‌یابد. وقتی که شبکه ساخته شد، اصلاح آن در هر بار تکرار عملیات نیاز به ارتباط با کد دارد. ایجاد این ارتباط اغلب غیرقابل دسترس است، که این مسئله شاید دلیل اینکه چرا اصلاح تطبیقی همچنان اولین مشکل آکادمیک است را مشخص کند.

ساخت هندسه‌ی اجزا محدود (یا به عبارتی همان شبکه) پرهزینه و زمان‌بر است و خطاهای زیادی ایجاد می‌کند. با توجه به حجم کم صنعت تحلیل در مقایسه با کد منطقی به نظر می‌رسد که به دنبال راهی برای تغییر و جایگزینی تحلیل اجزا محدود، با روشی که سازگاری بیشتری با کد داشته باشد، باشیم. استفاده از یک تقریب چندجمله‌ای ثابت برای هندسه اولین بار توسط سابو^۱ و همکاران انجام شد [۲]. در این روش همچنان که مرتبه‌ی چندجمله‌ای افزایش می‌یافت خطا کاهش می‌یافت تا به جایی می‌رسید که دیگر با افزایش مرتبه‌ی چندجمله‌ای خطا تغییری نمی‌کرد. تأثیر این مشکل وقتی بیشتر می‌شد که از کمیت‌های محاسبه شده روی مرز استفاده می‌کردیم، که معمولاً مهم‌ترین کاربردهای مهندسی هستند و اینجاست که خطاهای هندسی مضرترین خطاها هستند. بعلاوه هنوز بیشتر تحلیل‌های اجزا محدود توسط المان‌های مرتبه پایین انجام می‌شدند که

^۱ Szabo

در آن‌ها خطاهای هندسی بزرگتر بودند. موفقیت نرم‌افزار راسنا^۱ که بعدها توسط شرکت فناوری پارامتری^۲ به دست آمد مرهون ارتباط تنگاتنگ آن با هندسه‌ی کد و در نتیجه نتایج قابل اعتمادتر آن بود. روش آیزوژئومتریک^۳ که در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفته نیز از الگویی مشابه الهام می‌گیرد اما تلاش می‌کند تا بیشتر به هندسه‌ی کد مرتبط شود و توصیف چندجمله‌ای اجزا محدود را به طور کامل حذف کند.

رویکردی که در این روش ارائه می‌شود بر پایه‌ی نربز است، یک تکنولوژی استاندارد که در سیستم‌های کد به کار می‌رود. برای این منظور هندسه‌ی دقیق کد با سطوح نربز تطبیق داده می‌شود و سپس یک شبکه درشت از المان‌های نربز ساخته می‌شود. این المان‌ها، المان‌های سه‌بعدی خواهند بود که هندسه را به صورت دقیق نمایش می‌دهند. این روش یک کار جزیی نیست که فقط شایستگی مقدار کمی مطالعه را داشته باشد، بلکه روشی است که با انجام آن درهای تازه‌ای برای کارهای قدرتمند باز می‌شود. اصلاح^۴ شبکه‌ی به دست آمده از این روش نیاز به ارتباط بیشتری با کد ندارد و به قدری ساده است که می‌تواند مطابقت گسترده‌تر این تکنولوژی را با صنعت فراهم کند. به طور مشابه اصلاح h, p و همچنین hp در این روش نیز وجود دارد. بعلاوه یک روش مرتبه بالاتر جدید بعنوان اصلاح k که بنظر می‌رسد امتیازاتی نظیر کارایی و قدرتمندی را نسبت به اصلاح p سنتی داشته باشد وجود دارد. در تمام حالات شبکه‌های به دست آمده از هندسه‌ی دقیقی برخوردارند. در این روش از مفهومی مشابه آیزوپارامتریک^۵ استفاده می‌شود، یعنی فضای حل برای متغیرهای وابسته برحسب همان توابعی نمایش داده می‌شود که برای نمایش هندسه به کار رفته‌اند. به همین دلیل این روش، تحلیل آیزوژئومتریک نام گرفته است.

^۱RASNA

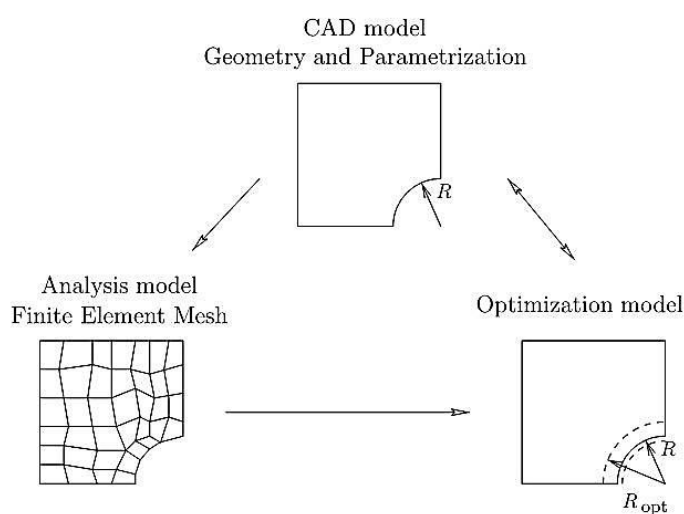
^۲ Parametric Technology Corporation (PTC)

^۳Isogeometric

^۴Refinement

^۵Isoparametric

الگوریتم بهینه سازی تابع هدف و توابع قید را معرفی می کند و با آن ها کار می کند. این الگوریتم از برنامه ریزی ریاضی یا سایر تکنیک ها استخراج می شود. برای رسیدن به یک نتیجه ی مناسب باید تعاملی قوی بین مدل طراحی، مدل تحلیل و مدل بهینه سازی وجود داشته باشد. شکل (۱-۱) این تعامل را نشان می دهد. در بیشتر موارد و در کاربردهای صنعتی مدل طراحی به یک برنامه ی طراحی به کمک کامپیوتر (*CAD*) لینک می شود و مدل تحلیل شامل یک برنامه ی حل به روش اجزا محدود است. یکی از چالش های پیش رو در این زمینه، نیاز به مبادله ی اطلاعات بین این سیستم ها است. مشکل دیگر محدودیت در تغییرپذیری شکل های ممکن است، زیرا فضای طراحی به المان های طراحی که از پیش تعریف شده اند محدود شده است. اما مشکل اصلی این است که هم مدل تحلیل و هم طراحی هر دو به شدت به هندسه وابسته هستند، اگرچه نمایش هندسی در هر دو مورد متفاوت است.



شکل (۱-۱): تعامل بین مدل تحلیل، طراحی و بهینه سازی

امتیازی که در ادغام مدل های تحلیل و طراحی وجود دارد بسیار آشکار است. از اینرو ما رویکرد آیزوژئومتریک را بعنوان روشی جایگزین معرفی می کنیم که این دو را ترکیب می کند. این رویکرد مفهوم اجزای محدود را با دسته ی جدیدی از توابع شکل همچون نربز تجهیز می کند. تاکنون نربز برای بهینه سازی شکل همراه با مفهوم المان طراحی و یا روش المان مرزی به کار رفته است [۳].

سویاریان^۱ و همکاران نیز از نربز به همراه رویکرد بدون شبکه در قالب یک استراتژی ترکیبی بر پایه‌ی هندسه‌ی فضایی استفاده کردند [۴] و [۵]. اگر از حد این روش‌ها که نربز را تنها به عنوان نمایش دهنده‌ی مرزها استفاده می‌کنند، فراتر رویم به رویکرد مورد نظر ما می‌رسیم که در آن این توابع در مدل تحلیل نیز مشارکت می‌کنند. از اینرو ویژگی دقت و همواری نمایش هندسه در تحلیل آیزوژئومتریک به کمک بهینه سازی شکل می‌آید و مدل‌های تحلیل و طراحی را به هم پیوند می‌زند. لازم است توجه شود که استفاده از آیزوژئومتریک در بهینه سازی شکل ابتدا توسط خود هیوز و همکاران به عنوان موضوعی جذاب برای تحقیق مطرح شد [۱].

همانطور که اشاره شد مرحله‌ی تحلیل باید اطلاعات لازم را برای مرحله‌ی بهینه سازی در مورد قیدهای ضمنی به دست آورد. در یک الگوریتم بهینه سازی مرتبه اول به مقادیر تابع و حساسیت قیدهای ضمنی نیاز است. بنابراین آنالیز حساسیت موضوع تحقیقاتی مهمی در زمینه‌ی بهینه سازی شکل است.

۱-۲- تاریخچه

فرآیند بهینه سازی شکل شامل سه قسمت اصلی است: نمایش هندسی مسئله، تحلیل سازه و الگوریتم بهینه سازی. ابتدا باید نمایش هندسی مناسب برای شکل مرزها را انتخاب کنیم و مقادیر اولیه‌ای برای متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، سپس یک مدل تحلیلی مناسب برای تحلیل سازه انتخاب می‌کنیم. یک روش تحلیل مناسب باید قادر باشد اطلاعات لازم را جهت مرحله‌ی بهینه سازی در مورد مشتقات ضمنی بدهد. به عنوان مثال یک الگوریتم معمولی بهینه سازی مرتبه اول به مقادیر توابع قید و حساسیت قیدها بر حسب هر متغیر طراحی نیاز دارد.

^۱Subbarayan

پس از انجام مرحله‌ی تحلیل الگوریتم بهینه سازی مقادیر جدیدی برای متغیرهای طراحی به ما می‌دهد. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ساخته شده و به قسمت تحلیل برده می‌شود. از تحلیل مجدد مقادیر تابع و نتایج حساسیت قیدهای ضمنی برای طراحی جدید حاصل می‌شود. اگر معیار لازم برای خاتمه‌ی محاسبات ارضا شده بود، محاسبات متوقف می‌شود. در غیر اینصورت مرحله‌ی بهینه‌سازی نقطه‌ی طراحی جدیدی به ما می‌دهد.

در روش‌های اولیه برای بهینه‌سازی از مختصات گرهی به عنوان متغیر طراحی استفاده می‌شد، اما این عمل به زودی متوقف شد زیرا تجربه نشان داد که با این کار نمی‌توان به مرز همواری دست پیدا کرد. بعلاوه نمی‌توان انتظار داشت که این کار نتایج صحیحی برای تنش تولید کند.

این تجربه نشان داد که مدل تحلیل باید از مدل طراحی جدا شود زیرا همواری مرز یک نیاز اساسی جهت نمایش هندسه در بهینه سازی شکل است. برای حل این مشکل محققین از چند جمله‌ای‌ها برای نمایش مرز استفاده کردند [۶] و ضرایب چند جمله‌ای را بعنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند، البته این متغیرها به خوبی با خواص مکانیکی قابل ارتباط نبودند. اگرچه این مدل همواری لازم را فراهم می‌کرد اما وقتی مرتبه‌ی چند جمله‌ای بالا می‌رفت می‌توانست منجر به ایجاد مرزهای نوسانی شود. بعلاوه چند جمله‌ای‌ها قادر به نمایش شکل‌های کلی نیستند و تنها می‌توانند خانواده‌ی منحنی‌های درجه دو، سه و غیره را نشان دهند. از نقطه نظر طراحی مشکل دیگر عدم کنترل محلی بر منحنی بود. تغییر در یکی از ضرایب چند جمله‌ای باعث تغییر در کل منحنی می‌شد.

اسپلاین‌ها این مشکلات را حذف کردند زیرا این توابع ترکیبی از چند جمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند. یانگ و چوی [۷] نشان دادند که در حالتی که از توابع اسپلاین استفاده می‌کنیم حساسیت دارای دقت بیشتری نسبت به حالتی است که از فرم نمایش خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برایبنت و همکاران [۸] از

توابع مخلوط ب - اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های ب - اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست آمده و فرمولبندی تحلیلی مشتقات حساسیت نیز ممکن شد. سرانجام هیوز و همکاران با استفاده از توابع نرَبز برای مدل تحلیل و طراحی روش آیزوژئومتریک را ابداع کردند که این روش در این پژوهش به طور مفصل بررسی شده است.

۱-۳- اهداف کلی پایان‌نامه

به صورت کلی بهینه‌سازی شکل سازه‌ها و ارائه روشی مناسب برای تحلیل حساسیت هدف نهایی این پایان‌نامه می‌باشد. اما با توجه به نوظهور بودن روش تحلیل آیزوژئومتریک که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته، بخشی به معرفی این روش اختصاص داده شده است. انتخاب ساختاری مناسب برای مسئله‌ی بهینه‌سازی از مهم‌ترین عناصر حل مسائل است که این موضوع از اهداف اصلی بوده است. همچنین تحلیل حساسیت با شرح دقیق و جزئیات فرمولبندی به عنوان بخش تفکیک‌ناپذیری از بهینه‌سازی شکل هدف مهم دیگری بوده است. ارائه‌ی برنامه کامپیوتری مناسب برای حل مسائل بهینه‌سازی شکل لازم و بدون آن حل این مسائل غیرممکن است. در نتیجه تولید برنامه‌ای مناسب در این راستا از اهداف دیگری است که در این پژوهش پیگیری شده است.

۱-۴- برنامه کامپیوتری نوشته شده در راستای پایان‌نامه

همانطور که اشاره شد بدون ارائه برنامه کامپیوتری مناسب انجام کلیه‌ی بخش‌های دیگر پایان‌نامه بی‌فایده و غیرقابل اجرا بود. لذا برنامه‌ای جهت حل مسائل بهینه‌سازی شکل به روش مجانب‌های متحرک (*MMA*) در پایان‌نامه ایجاد شده است. در پیوست توضیحاتی در مورد این برنامه

کامپیوتری داده شده است. در پایان نیز تعدادی مثال جهت بررسی صحت فرمولبندی‌ها و برنامه کامپیوتری حل و ارائه شده است.

۱-۵- ساختار کلی پایان‌نامه

به طور کلی این پایان‌نامه شامل شش فصل می‌باشد. در فصل حاضر به مقدماتی راجع به پایان‌نامه اشاره شده است. در فصل دوم روش تحلیل آیزوژئومتریک به عنوان روشی جدید و پرکاربرد بررسی شده و فرمولبندی لازم جهت تحلیل مسائل تنش مسطح به صورت مختصر در این فصل ارائه شده است.

در ادامه و در فصل سوم اصول و چهارچوب کلی بهینه‌سازی شکل سازه‌ها و روش‌های متداول و مناسب بررسی شده‌اند و در انتها روش مناسب برای این منظور انتخاب و شرح داده شده است.

با توجه به اینکه تحلیل حساسیت بخش مهمی از این پایان‌نامه را به خود اختصاص می‌دهد در فصلی مجزا به عنوان فصل چهارم به صورت کامل بررسی شده و روش‌های مختلف انجام آن به همراه فرمولبندی شرح داده شده است.

در فصل پنجم بر اساس نتایج به دست آمده از این پایان‌نامه، تعدادی مثال متداول در مراجع بهینه‌سازی شکل بررسی شده و نتایج حاصل از آن‌ها ارائه شده است.

سرانجام در فصل ششم نتایج حاصل از پایان‌نامه و پیشنهادات لازم به اختصار آمده است.

فصل دوم

روش تحلیل آیزوژئومتریک

۲-۱- مقدمه

تاکنون پس از گذشت هشت سال از ظهور روش آیزوژئومتریک مقالات و پایان نامه‌های بسیاری جهت معرفی این روش به وجود آمده است، اما با توجه به موضوع این پایان نامه و استفاده از روش آیزوژئومتریک به عنوان روش تحلیل جا دارد تا به شرح این روش قدرتمند پرداخته شود. لذا در این بخش به شرح این روش و فرمولبندی آن پرداخته می‌شود.

روش آیزوژئومتریک در بسیاری از ویژگی‌ها مشابه روش اجزای محدود^۱ است و از سوی دیگر در مواردی مشابه روش‌های بدون شبکه^۲ است، اما از نظر هندسی این روش بر پایه‌ی اصول طراحی به کمک کامپیوتر^۳ ایجاد شده است و از آن الهام می‌گیرد. هدف اولیه از به وجود آمدن این روش این بود که بتوانیم فارق از میزان ریز یا درشت بودن شبکه، هندسه را به صورت دقیق مدل کنیم.

ابداع و استفاده از روش اجزای محدود در مهندسی به سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ میلادی بازمی‌گردد. مهندسی هوا و فضا اولین جایی بود که اجزای محدود در آن مورد استفاده قرار گرفت. در اواخر دهه‌ی ۱۹۶۰ اولین برنامه‌های کامپیوتری تجاری (آسکا، نسترن و غیره) بر پایه‌ی این روش به وجود آمدند و بعد از آن روش اجزای محدود در علوم مهندسی دیگر گسترش پیدا کرد، تا جایی که اکنون در بسیاری از علوم مهندسی استفاده می‌شود و برنامه‌های تجاری زیادی بر پایه‌ی آن به وجود آمده است.

علیرغم این که هندسه زیربنای تحلیل به شمار می‌رود، طراحی به کمک کامپیوتر، به شکلی که امروزه ما آن را می‌شناسیم در سال‌های ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ به وجود آمد. این موضوع علت اختلاف زیادی را که بین نمایش هندسه در اجزا محدود و طراحی به کمک کامپیوتر وجود دارد نشان می‌دهد. سال‌ها قبل از این که طراحی به کمک کامپیوتر شکل بگیرد، برنامه‌های اجزای محدودی

^۱ Finite Element

^۲ Meshless Methods

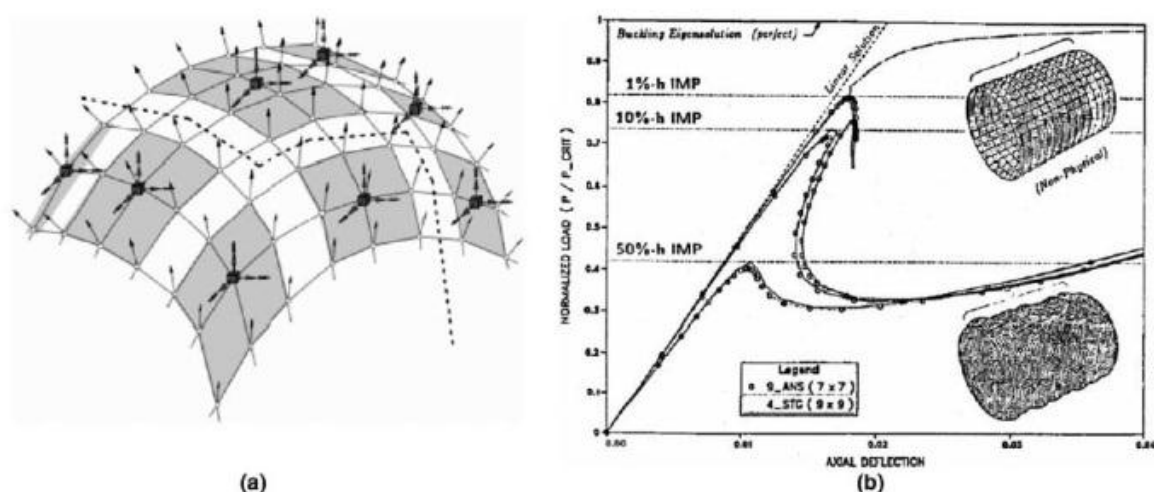
^۳ Computer Aided Design (CAD)

رشد کرده بودند، اما اکنون طراحی به کمک کامپیوتر صنعتی بزرگتر از تحلیل به شمار می‌رود و رشد سریعتری داشته است.

عموماً در مسائل مهندسی طراحی در کد انجام می‌شود و شبکه از اطلاعات حاصل از کد تولید می‌شود. در نتیجه نیاز است توصیفی از هندسه جهت استفاده در تحلیل ایجاد شود، که البته این توصیف تقریبی بیش نیست. بر اساس تحقیق انجام شده توسط لابراتوار ملی سندیا در برنامه‌های موجود تولید مش ۲۰٪ از کل زمان تحلیل را می‌گیرد، در حالی که ایجاد هندسه‌ی مناسب تحلیل حدود ۶۰٪ و تحلیل تنها ۲۰٪ از این زمان را به خود اختصاص می‌دهند. این مقدار ۸۰ به ۲۰ برای نسبت مدلسازی به تحلیل در تجربیات صنعتی بسیار معمول است و تمایل زیادی برای معکوس کردن آن وجود دارد [۹].

توجه داریم که شبکه‌ی اجزا محدود که ما آن را به عنوان مدلی دقیق می‌شناسیم، تنها تقریبی از هندسه‌ی کد است. این تقریب می‌تواند در موارد زیادی باعث خطاهایی در نتیجه‌ی تحلیل شود. به عنوان مثال تحلیل کمانش پوسته نسبت به نقص‌های هندسی بسیار حساس است، و یا پدیده‌های لایه مرزی نسبت به هندسه‌ی دقیق شکل‌های آیرودینامیکی و هیدرودینامیکی حساسند.

تقریب هندسی در شبکه به خودی خود می‌تواند باعث ایجاد مشکلاتی در دقت کار شود. یک نمونه از این مسئله در تحلیل پوسته‌ی نازک پیش می‌آید که شدیداً نسبت به نقص هندسی حساس است. این مسئله در شکل (۱-۲) نشان داده شده است که در آن بار کمانش پوسته‌ی استوانه‌ای با هندسه‌ی دقیق با پوسته‌هایی که دارای نقص هندسی ۱٪، ۱۰٪ و ۵۰٪ در ضخامت هستند مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود کاهش قابل ملاحظه‌ای در بار کمانش با افزایش نقص وجود دارد [۱] و [۱۰].



شکل (۲-۱): بار کمانش پوسته‌ی نازک به ازای نقص‌های هندسی ۱٪، ۱۰٪ و ۵۰٪ [۱]

ساخت هندسه یا شبکه‌ی اجزای محدود پرهزینه، زمان‌گیر و همراه با خطا است. در نتیجه واضح است که بهتر است روش اجزای محدود را تغییر دهیم و یا آن را با روشی که ارتباط بهتری با کد داشته باشد جایگزین کنیم. روش آیزوژئومتریک تلاش می‌کند این کار را انجام دهد و توصیف چندجمله‌ای اجزای محدود را به کلی حذف کند.

رویکرد روش آیزوژئومتریک بر پایه‌ی توابع نرِز^۱ است. توابع نرِز به عنوان توابعی استاندارد در سیستم‌های کد استفاده می‌شوند. تکنیک‌های زیادی در زمینه‌ی هندسه‌ی محاسباتی وجود دارد که می‌توانند به عنوان پایه‌ی تحلیل آیزوژئومتریک به کار روند. دلیل انتخاب نرِز به عنوان توابع اولیه این است که معمول‌ترین تکنیک هندسه‌ی محاسباتی در کد هستند. کاربر روش آیزوژئومتریک می‌تواند این روش را به عنوان بسط و تعمیم قدرتمند تحلیل اجزا محدود سنتی در نظر بگیرد. در این روش نیز از مفهومی مشابه آیزوپارامتریک استفاده می‌شود. به این معنی که فضای حل برای متغیرهای وابسته بر حسب همان توابعی بیان می‌شود که هندسه را نمایش می‌دهند. در نتیجه این روش را آیزوژئومتریک نامگذاری کرده‌اند.

^۱Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS)

در این فصل ابتدا به بررسی توابع ب-اسپلاین پرداخته می‌شود. سپس توابع نربز را معرفی می‌کنیم و در ادامه به بررسی توابع پایه و مشتقات آن‌ها پرداخته می‌شود. پس از آن روش‌های آیزوژئومتریک و اجزای محدود با هم مقایسه می‌شود. در ادامه تحلیل آیزوژئومتریک مسائل تنش مسطح برای مسائل دوبعدی بررسی می‌شود. در بخش آخر نیز تحلیل آیزوژئومتریک مسائل تنش مسطح برای مسائل سه بعدی به همراه فرمولبندی آن ارائه می‌گردد.

۲-۲- مبانی روش آیزوژئومتریک

در روش اجزا محدود دو مفهوم شبکه^۱ و المان وجود دارند، اما المان خود دارای دو مفهوم است. یکی المانی که در فضای المان مرجع وجود دارد و یک المان موجود در فضای فیزیکی. المان‌ها معمولاً به وسیله‌ی مختصات نقاط گرهی خود تعریف می‌شوند و درجات آزادی، مقادیر توابع پایه در گره‌ها هستند. توابع پایه در اجزای محدود حاصل از درونیابی هستند و می‌توانند دارای مقادیر مثبت یا منفی باشند.

در تئوری نربز توابع پایه معمولاً حاصل از درونیابی نیستند. در این تئوری دو مفهوم برای شبکه وجود دارد، یکی شبکه‌ی کنترلی و دیگری شبکه‌ی فیزیکی. نقاط کنترلی شبکه‌ی کنترلی را تعریف می‌کنند و شبکه‌ی کنترلی درونیابی از نقاط کنترلی است. شبکه‌ی کنترلی بر هندسه‌ی واقعی منطبق نیست. در واقع این شبکه چهارچوبی است که هندسه را کنترل می‌کند. شبکه‌ی کنترلی شبیه شبکه‌ی المان‌های چندخطی اجزای محدود است. متغیرهای کنترلی درجات آزادی هستند و بر روی نقاط کنترلی واقع شده‌اند. در نربز بر خلاف اجزا محدود، شبکه‌ی کنترلی می‌تواند به شدت تغییرات داشته باشد، اما در عین حال هندسه‌ی فیزیک مسئله معتبر باقی بماند.

^۱Mesh

شبکه‌ی فیزیکی تجزیه‌ای از هندسه‌ی واقعی است. در شبکه‌ی فیزیکی دو مفهوم برای المان‌ها وجود دارد، یکی زیردامنه^۱ و دیگری بازه‌ی گرهی^۲. زیردامنه‌ها را در حقیقت می‌توان المان‌های بزرگ نامید. در بیشتر مسائل موجود می‌توان هندسه را تنها با یک زیردامنه مدل کرد. هر زیردامنه دارای دو وجهه است. یکی در فضای المان مرجع و دیگری در فضای فیزیکی. هر زیردامنه را می‌توان به بازه‌های گرهی تجزیه کرد. گره‌ها در فضای یک، دو و سه بعدی به ترتیب نقطه، خط و صفحه هستند. بازه‌های گرهی به وسیله‌ی گره‌ها مرزبندی شده‌اند. این بازه‌ها حوزه‌ی المان را جایی که توابع پایه هموار هستند تعریف می‌کنند. در گره‌های این اجزا توابع پایه دارای پیوستگی C^{p-m} هستند که p درجه چندجمله‌ای و m تعداد تکرار نقاط گرهی در بردار گره می‌باشد. بازه‌های گرهی برای انتگرال‌گیری عددی بسیار مناسب هستند. این بازه‌ها را می‌توان به عنوان المان‌های کوچک در نظر گرفت، زیرا کوچکتری جزئی هستند که ما به آن‌ها می‌پردازیم. وقتی از "المان" به تنهایی صحبت می‌کنیم منظورمان همان بازه‌های گرهی است.

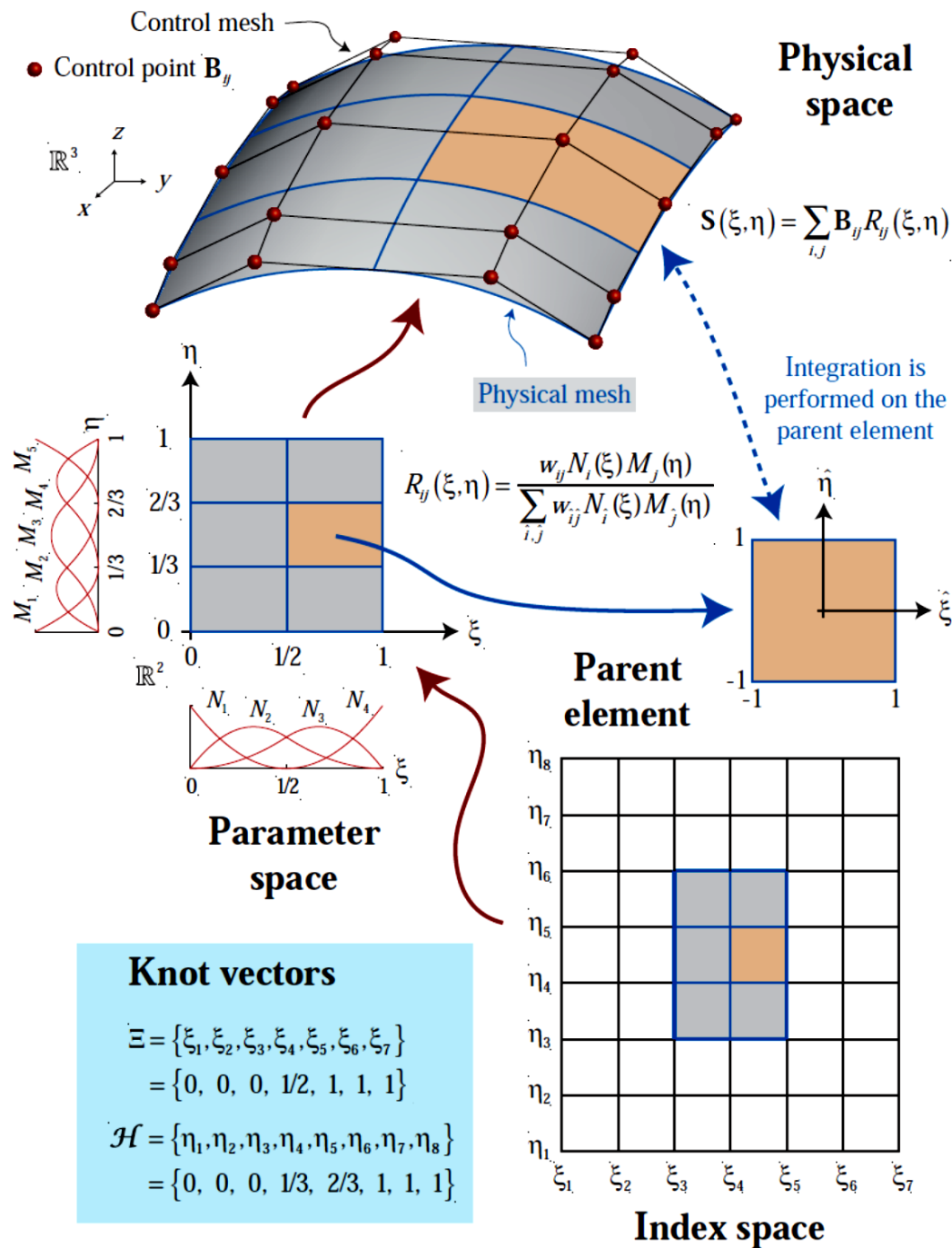
مفهوم مهم دیگری که وجود دارد و کلیدی برای فهم نریز است، فضای شاخص^۳ زیردامنه است. این فضای شاخص هر گره را به طور ویژه مشخص می‌کند و گره‌هایی را که تکرار بیشتر از یک دارند را متمایز می‌کند.

نمایش کلی این مفاهیم در شکل (۲-۲) نشان داده شده است.

^۱ Patch

^۲ Knot Span

^۳ Index Space



شکل (۲-۲): شمای کلی مفهوم نربز برای سطحی با یک المان [۹]

۲-۳-ب - اسپلاین‌ها و توابع نربز

استفاده از چند جمله‌ای‌های مرتبه بالا می‌تواند منجر به ایجاد شکل با مرز نوسانی شود از سوی دیگر ساختن اشکال پیچیده با استفاده از چندجمله‌ای‌ها نیازمند بالا بردن درجه‌ی آنهاست و

نمی‌توان تنها با استفاده از یک چندجمله‌ای چنین اشکالی را مدل کرد. اسپلاین‌ها این مشکل را حذف کردند زیرا این توابع ترکیبی از چند جمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند. این چندجمله‌ای‌ها می‌توانند با مرتبه‌های پیوستگی دلخواه به یکدیگر متصل شوند و یک منحنی را تشکیل دهند. تابع اسپلاین درجه سه که دارای دو مشتق پیوسته می‌باشد و حداقل میانگین انحنای دارد یک انتخاب طبیعی برای تعریف مرز می‌باشد [۱۱] و [۱۲]. یانگ و چوی [۷] نشان دادند که در حالتی که از توابع اسپلاین استفاده می‌کنیم حساسیت دارای دقت بیشتری نسبت به حالتی است که از فرم نمایش خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برایبنت و همکاران [۱۳] از توابع مخلوط ب - اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های ب - اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست آمده و فرمولبندی تحلیلی مشتقات حساسیت نیز ممکن شد.

ب - اسپلاین‌ها از جمله‌ای این منحنی‌ها هستند که در ادامه به توضیح آن‌ها می‌پردازیم.

۲-۳-۱- بردارهای گرهی^۱

یک بردار گرهی در یک بعد مجموعه‌ای از اعداد در فضای پارامتری است که به شکل $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ نوشته می‌شود، که $\xi_i \in R$ ، i امین گره است و $i = 1, 2, \dots, n+p+1$ و p مرتبه‌ی چندجمله‌ای و n تعداد توابع پایه است. گره‌ها فضای پارامتری را به المان‌ها تقسیم می‌کنند و مرزهای المان در فضای فیزیکی تصویر خطوط گرهی تحت نگاشت ب - اسپلاین هستند. بازه‌ی (ξ_i, ξ_{i+1}) را یک دهانه گرهی می‌نامیم که می‌تواند طول آن صفر باشد، زیرا گره‌ها لزوماً دارای مقادیر متمایز نمی‌باشند. اگر فاصله‌ی بین گره‌ها مساوی باشد، در این حالت بردار گرهی را یکنواخت می‌نامیم، در غیر این صورت این بردار غیریکنواخت خواهد بود. اگر یک عدد برای بیشتر

^۱Knot Vectors

از یک گره تکرار شود به آن گرهی تکراری می‌گوییم. یک بردار گرهی را باز گوییم اگر اولین و آخرین گره‌های آن $p+1$ بار تکرار شوند. در مسائل یک بعدی، توابع پایه که از بردارهای گرهی باز شکل گرفته‌اند، یک درونیایی در انتهای بازه‌ی فضای پارامتری (ξ_i, ξ_{i+1}) ، و در چند بعد نیز در گوشه‌های زیرالمان‌ها هستند، اما درونیایی از گره‌های داخلی نیستند. این یک تمایز بین گره‌ها در آیزوژئومتریک ($knots$) و در اجزا محدود ($nodes$) است.

۲-۳-۲- توابع پایه

توابع پایه‌ی ب - اسپلین به صورت بازگشتی با شروع از اعداد ثابت تعریف می‌شوند:

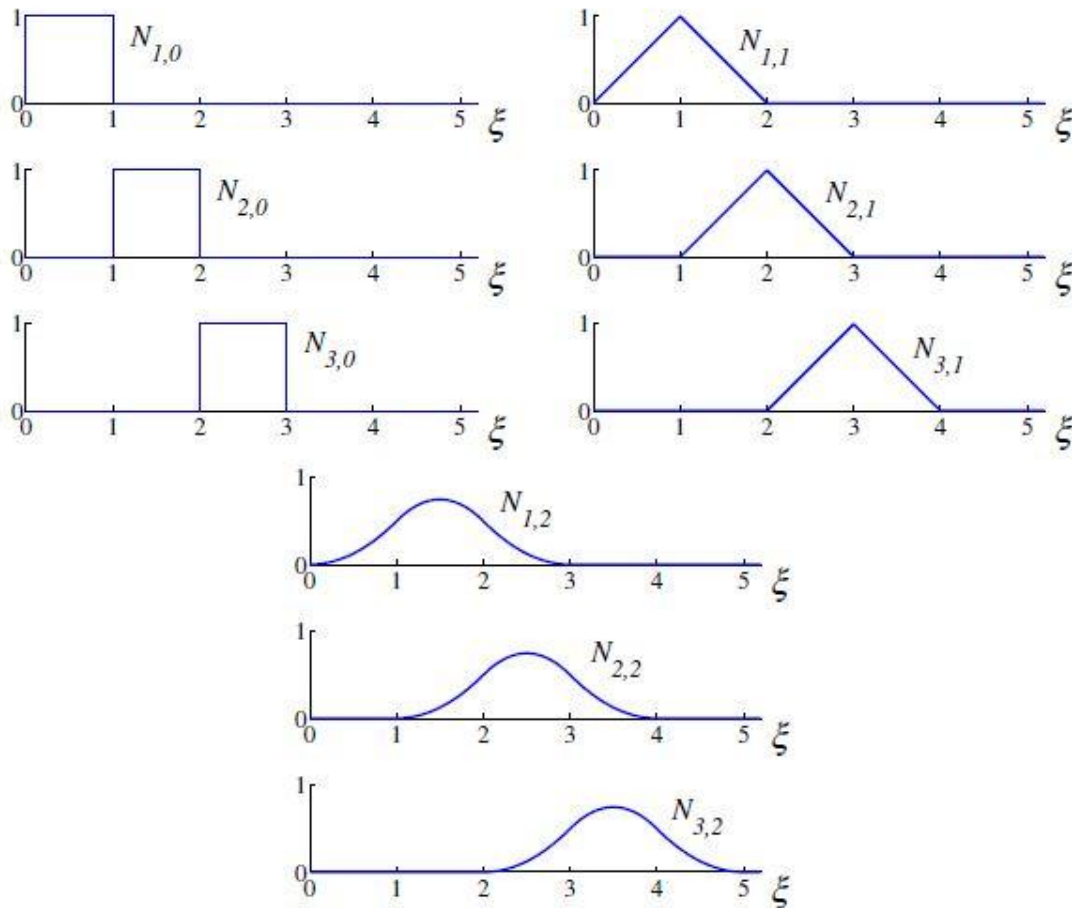
$$N_{i,\cdot}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1-2)$$

برای $p=1, 2, 3, \dots$ داریم:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2-2)$$

یک مثال ابتدایی از نتایج فرمول‌های ۱ و ۲ برای بردار گرهی یکنواخت در شکل (۲-۲) نمایش داده شده است. توجه شود که برای $p=0$ و $p=1$ توابع پایه به ترتیب مانند همان توابع ثابت تکه‌ای و توابع اجزا محدود خطی هستند، اما برای $p \geq 2$ موضوع کمی متفاوت است. توابع پایه‌ی ب - اسپلین مرتبه دوم (همچنین توابع پایه نرئز، آنچنانکه بعداً نشان خواهیم داد) با یکدیگر مشابه هستند و فقط هر کدام نسبت به تابع قبلی چند واحد شیفت داده شده‌اند. این مسئله در مقایسه با توابع اجزا محدود مرتبه دوم که برای گره‌های انتهایی و میانی با هم تفاوت دارند، کمی متفاوت است. این الگوی مشابه برای ب - اسپلین‌های مرتبه بالاتر نیز به همین شکل ادامه می‌یابد و می‌تواند باعث امتیاز بزرگی در حل معادلات نسبت به توابع اجزا محدود که کاملاً نامتشابه هستند، شود.

یک نمونه از توابع پایه برای یک بردار گرهی غیریکنواخت و باز در شکل (۳-۱) نشان داده شده است. توجه شود که توابع پایه در ابتدا و انتها و در $\xi = 4$ دارای پیوستگی از مرتبه‌ی C^1 هستند، در حالی که در سایر نقاط پیوستگی مرتبه‌ی C^1 دارند. به طور کلی توابع پایه با مرتبه‌ی p دارای



شکل (۳-۲۰): توابع پایه‌ی ب-اسپلاین درجه صفر، یک و دو برای بردار گرهی یکنواخت $\Xi = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ [۹]

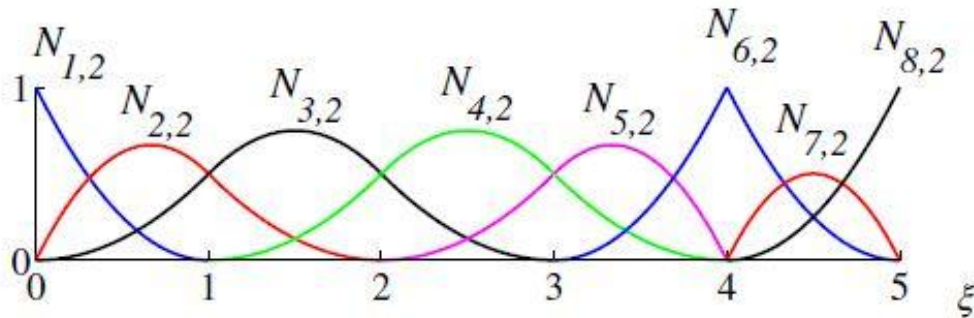
$p-1$ مشتق پیوسته هستند. اگر یک گره k بار تکرار شود تعداد مشتقات پیوسته k مرتبه کاهش می‌یابد.

خواص مهم توابع پایه‌ی ب-اسپلاین به شرح زیر می‌باشد:

۱- جمع مقادیر این توابع برابر واحد است، یعنی $\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1$

۲- هر تابع $N_{i,p}$ به بازه‌ی $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$ محدود می‌شود.

۳- هر تابع پایه غیرمنفی است، یعنی $N_{i,p}(\xi) \geq 0, \forall \xi$. در نتیجه همه‌ی ضرایب ماتریس جرم که بر پایه‌ی ب- اسپلاین ساخته شده بزرگتر یا مساوی با صفر است.



شکل (۲-۴): توابع پایه‌ی درجه دو برای بردار گرهی غیریکنواخت و باز $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5\}$ [۹]

۲-۳-۳- مشتقات توابع پایه ب- اسپلاین

مشتقات توابع پایه ب- اسپلاین را می‌توان به خوبی بر حسب ب- اسپلاین‌های مرتبه پایین‌تر نشان داد. این مسئله با توجه به تعریف بازگشتی این توابع چندان عجیب نیست. برای چندجمله‌ای مرتبه p و بردار گرهی Ξ مشتق تابع پایه‌ی i ام به شکل به دست می‌آید:

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (3-2)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف این معادله می‌توان آن را برای مشتقات مرتبه بالاتر به شکل زیر بسط داد:

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \quad (4-2)$$

$$\frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} \left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i,p-1}(\xi) \right) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1} \xi} N_{i+1,p-1}(\xi) \right)$$

با بسط رابطه‌ی (۴-۲) به وسیله‌ی رابطه‌ی (۳-۲) می‌توانیم به عبارت زیر بر حسب توابع مرتبه پایین‌تر $N_{i,p-k}, \dots, N_{i+k,p-k}$ برسیم:

$$\frac{d^k}{d^k \xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p!}{(p-k)!} \sum_{j=0}^k \alpha_{k,j} N_{i+j,p-k}(\xi) \quad (۵-۲)$$

که در آن:

$$\alpha_{0,0} = 1,$$

$$\alpha_{k,0} = \frac{\alpha_{k-1,0}}{\xi_{i+p-k+1} - \xi_i},$$

$$\alpha_{k,j} = \frac{\alpha_{k-1,j} - \alpha_{k-1,j-1}}{\xi_{i+p+j-k+1} - \xi_{i+j}} \quad j = 1, \dots, k-1, \quad (۶-۲)$$

$$\alpha_{k,k} = \frac{-\alpha_{k-1,k-1}}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+k}}.$$

نتیجه‌ی بسیاری از این ضرایب در حضور گره‌های تکراری صفر خواهد بود.

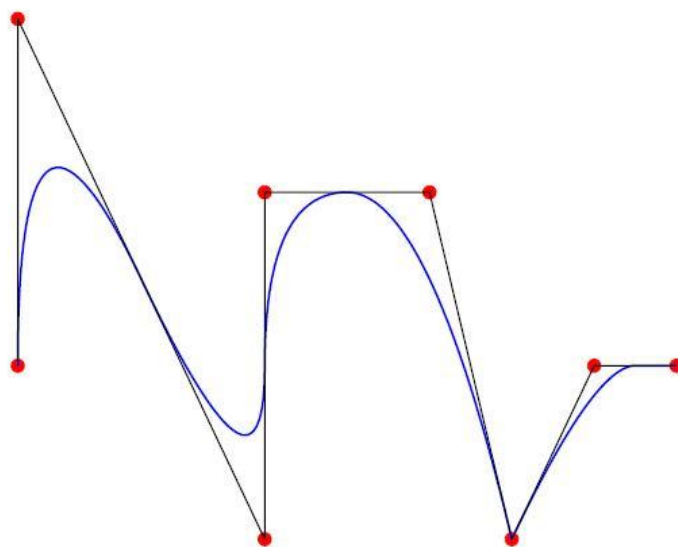
۲-۳-۴- منحنی ب - اسپلین

منحنی‌های ب اسپلین در R^d با استفاده از ترکیب خطی توابع پایه‌ی ب - اسپلین ساخته می‌شوند. ضرایب توابع پایه بعنوان نقاط کنترلی در نظر گرفته می‌شوند. این نقاط به نوعی شبیه مختصات نقاط گرهی در تحلیل اجزا محدود هستند. درونیایی خطی تکه‌ای نقاط کنترلی چندضلعی کنترلی را به دست می‌دهد. برای n تابع ب - اسپلین $N_{i,p}$, $i = 1, 2, \dots, n$ ، و نقاط کنترلی متناظر $B_i \in R^d$ یک منحنی ب - اسپلین به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (۷-۲)$$

یک نمونه از این منحنی‌ها برای تابع پایه‌ی درجه دو که قبلاً بررسی شد در شکل (۴-۲) نشان داده شده است. توجه شود که منحنی در نقاط کنترلی ابتدایی و انتهایی به این خاطر که بردار گرهی باز

است دارای پیوستگی صفر است و همینطور در نقطه‌ی کنترلی ششم به دلیل این که تعداد دفعات تکرار $\xi = 4$ برابر با مرتبه‌ی چندجمله‌ای است. همچنین توجه شود که منحنی در اولین، آخرین و ششمین نقطه‌ی کنترلی مماس بر چندضلعی کنترلی است. منحنی در هرجایی غیر از جایی که گره‌ی تکراری $\xi = 4$ وجود دارد پیوستگی مرتبه‌ی $C^{p-2} = C^2$ دارد.



شکل (۵-۲): منحنی ب-اسپلاین

خواص مهم منحنی ب-اسپلاین به شرح زیر است:

۱- این منحنی‌ها در جاهایی غیر از تکرار گره‌ها یا نقاط کنترلی دارای مشتقات پیوسته‌ی مرتبه‌ی $p-1$ هستند.

۲- تکرار k مرتبه یک نقطه‌ی کنترلی تعداد مشتقات پیوسته را k مرتبه کاهش می‌دهد.

۳- جابه‌جایی نسبی یک منحنی ب-اسپلاین با اعمال جابه‌جایی به نقاط کنترلی آن به دست می‌آید. ما به این خاصیت *کواریانس سلبی*^۱ می‌گوییم.

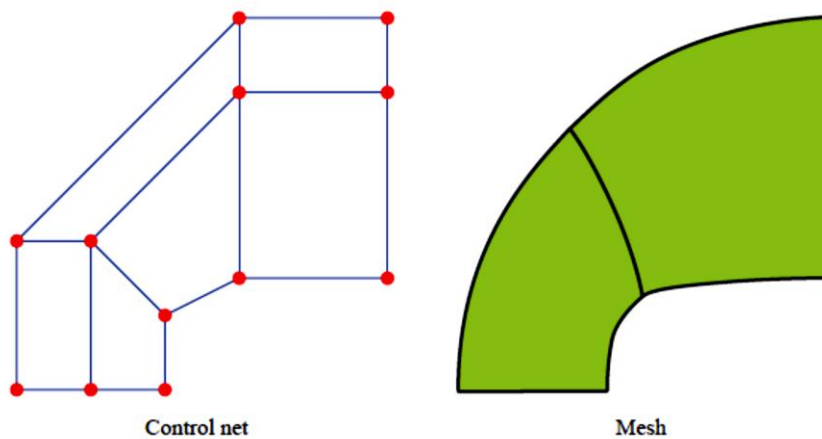
^۱ Affine Covariance

۲-۳-۵- سطوح ب- اسپالین

برای شبکه‌ی کنترلی $\{B_{i,j}\}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, m$ و بردارهای گرهی $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ و $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ یک سطح ب- اسپالین حاصل از ضرب تانسوری به صورت زیر تعریف می‌شود:

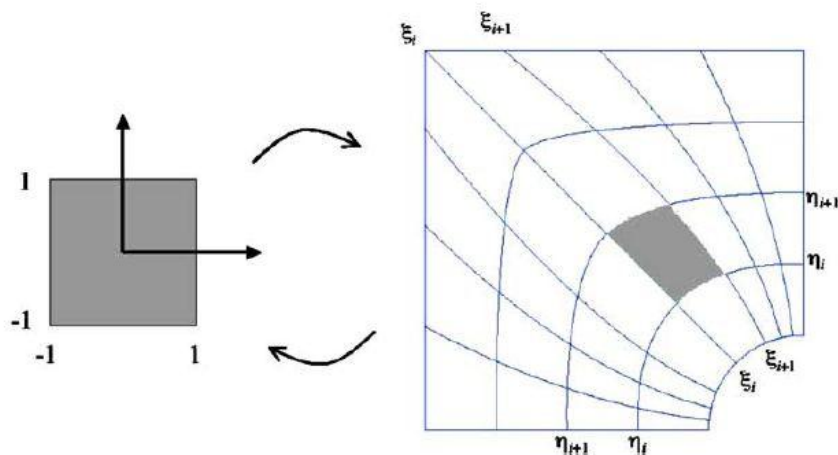
$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (۸-۲)$$

که در آن $N_{i,p}$ و $M_{j,q}$ توابع پایه‌ی منحنی‌های ب- اسپالین هستند. نمونه‌ای از یک سطح ب- اسپالین به همراه شبکه‌ی نقاط کنترلی آن در شکل زیر نمایش داده شده است.



شکل (۶-۲): سطح ب- اسپالین

برای آرایه‌های انتگرال‌گیری عددی ساخته شده از روی ب- اسپالین‌ها، المان‌ها بعنوان دهانه‌های گرهی $[\xi_i, \xi_{i+1}] \times [\eta_j, \eta_{j+1}]$ در نظر گرفته می‌شوند. برای درک بهتر یک المان مرجع دوبعدی و تصویر آن در فضای فیزیکی به شکل (۶-۲) توجه کنید. در انتگرال‌گیری با استفاده از فرمول تغییر متغیر و قوانین انتگرال‌گیری گوس به المان مرجع برمی‌گردیم.



شکل (۷-۲): المان مرجع و تصویر آن در فضای فیزیکی

۲-۳-۶- احجام ب - اسپلاین

احجام ب - اسپلاین حاصل از ضرب تانسوری همانند سطوح ب - اسپلاین تعریف می‌شوند. برای شبکه‌ی کنترلی $\{B_{i,j,k}\}$ و $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$ و $k = 1, 2, \dots, l$ و بردارهای گرهی $H = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ و $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ و $Z = \{\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{l+r+1}\}$ یک حجم ب - اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) L_{k,r}(\zeta) B_{i,j,k} \quad (9-2)$$

۲-۳-۷- ب - اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت^۱ (NURBS)

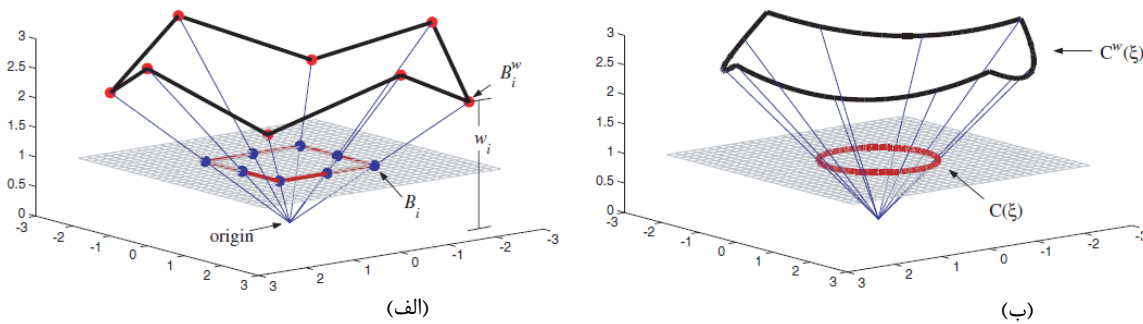
اشکال هندسی در R^d را می‌توان با انتقال تصویری اشکال ب - اسپلاین در R^{d+1} به دست آورد. مقاطع منحنی شکل مانند دایره و بیضی را می‌توان به طور دقیق با انتقال تصویری منحنی‌های درجه دوی قطعه‌ای ساخت. در شکل (۷-۲) این مطلب نمایش داده شده، که در آن یک دایره در R^2 از یک منحنی ب - اسپلاین درجه دوی قطعه‌ای در R^3 ساخته شده است. انتقال تصویری یک منحنی ب - اسپلاین، یک چندجمله‌ای نسبی به فرم $C_R(\xi) = f(\xi)/g(\xi)$ می‌شود، که f و g در آن چندجمله‌ای‌های قطعه‌ای هستند. نحوه‌ی ساخت یک منحنی ب - اسپلاین نسبی در R^d

^۱Non-Uniform Rational B-Splines

به شکل زیر می‌باشد. فرض کنید $\{B_i^w\}$ مجموعه‌ای از نقاط کنترلی برای یک منحنی ب - اسپلاین در R^{d+1} با بردار گرهی Ξ باشد. این نقاط به عنوان نقاط کنترلی تصویری برای منحنی نرئز مورد نظر در R^d در نظر گرفته می‌شوند. نقاط کنترلی در R^d از تصویر نقاط کنترلی تصویری با استفاده از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$(B_i)_j = (B_i^w)_j / w_i, \quad j = 1, 2, \dots, d \quad (10-2)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (11-2)$$



شکل (۲-۸): ساخت منحنی ب-اسپلاین نسبی از منحنی ب-اسپلاین [۱]

که در آن $(B_i)_j$ مؤلفه‌ی j ام بردار B_i است و w_i بعنوان i امین وزن در نظر گرفته می‌شود. در شکل (۲-۷-الف) وزن مؤلفه‌ی قائم نقاط کنترلی منحنی ب - اسپلاین قطعه‌ای را در R^3 تعریف می‌کنند. توابع پایه‌ی نسبی و منحنی نرئز به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$R_i^p(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i} \quad (12-2)$$

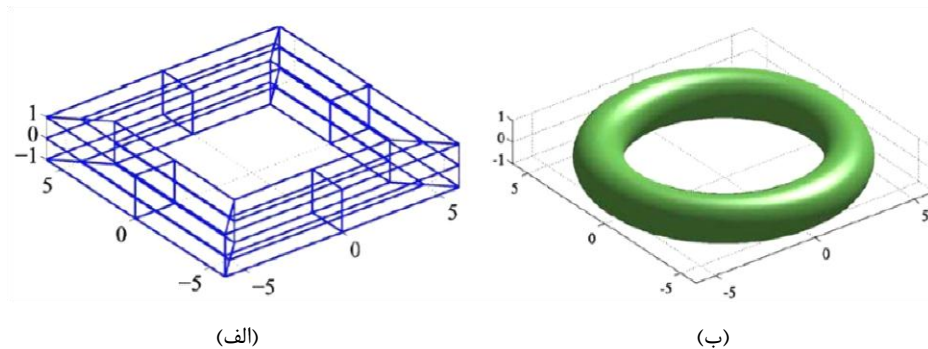
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i^p(\xi)B_i \quad (13-2)$$

سطوح و احجام نسبی به طور مشابه برحسب توابع پایه‌ی نسبی تعریف می‌شوند:

$$R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)w_{i,j}} \quad (14-2)$$

$$R_{i,j,k}^{p,q,r}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l N_{i,p}(\xi)M_{j,q}(\eta)L_{k,r}(\zeta)w_{i,j,k}} \quad (15-2)$$

بعنوان مثال شکل (۸-۲) یک شبکه‌ی کنترلی و سطح نربز مربوط به آن را نشان می‌دهد.



شکل (۸-۲): (الف) شبکه‌ی کنترلی و (ب) سطح نربز مربوطه [۱]

خواص مهم نربز:

- ۱- مجموع مقادیر توابع پایه‌ی نربز برابر واحد است.
- ۲- پیوستگی توابع پایه‌ی نربز همانند ب - اسپلاین‌ها است.
- ۳- انتقال نسبی با اعمال انتقال بر نقاط کنترلی به دست می‌آید، یعنی نربز خاصیت کواریانس سلبی را دارد.
- ۴- اگر وزن‌ها برابر باشند نربز همان ب - اسپلاین خواهد بود (یا به عبارتی چندجمله‌ای قطعه‌ای).
- ۵- سطوح و احجام نربز انتقال تصویری اشکال چندجمله‌ای قطعه‌ای هستند.

۸-۳-۲- مشتقات توابع پایه نربز

از آنجایی که توابع پایه‌ی نربز از روی ب - اسپلاین‌ها ساخته می‌شوند، مشتقات آن‌ها وابسته به مشتقات ب - اسپلاین‌هاست.

$$\frac{d}{d\xi} R_i^p(\xi) = w_i \frac{W(\xi)N'_{i,p}(\xi) - W'(\xi)N_{i,p}(\xi)}{(W(\xi))^2} \quad (۱۶-۲)$$

که در آن:

$$N'_{i,p}(\xi) \equiv \frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi), W'^{(\xi)} = \sum_{i=1}^n N'_{i,p}(\xi) w_i \quad (17-2)$$

۲-۴- نربز بعنوان پایه‌ای برای تحلیل

چهارچوب تحلیل بر مبنای نربز شامل مؤلفه‌های زیر است [۱]:

۱- شبکه برای یک زیرالمان نربز به صورت حاصلضرب بردارهای گرهی تعریف می‌شود. برای

مثال در سه بعد یک شبکه به صورت $\Xi \times H \times Z$ به دست می‌آید.

۲- دهانه‌های گرهی حوزه‌ی مسئله را به المان‌ها تقسیم می‌کنند.

۳- زیربنای هر تابع پایه تنها تعداد کمی المان است.

۴- نقاط کنترلی اختصاص داده شده به توابع پایه، هندسه را تشکیل می‌دهند.

۵- از مفهوم آیزوپارامتریک در اینجا استفاده می‌شود، یعنی پارامترهای مورد سؤال (مانند

جابه‌جایی، سرعت، دما و غیره) بر حسب همان توابع پایه‌ای نمایش داده می‌شوند که برای

نمایش هندسه به کار رفته‌اند.

۶- استراتژی‌های اصلاح شبکه از ترکیب تکنیک‌های گره‌گذاری و افزایش مرتبه به دست

می‌آیند. این کار استفاده از روش‌هایی مشابه اصلاح h و p و همچنین روش جدید k را

فراهم می‌کند.

۷- آرایه‌های ساخته شده از زیرالمان‌های آیزوپارامتریک نربز می‌توانند همچون روش اجزا

محدود برای تشکیل آرایه‌های کلی برهم‌گذاری^۱ شوند. سازگاری بین زیرالمان‌های نربز با

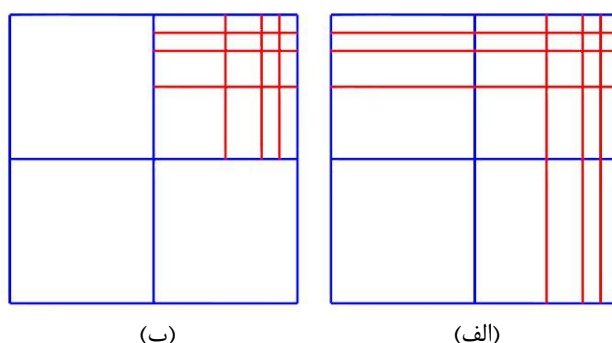
استفاده از نمایش نربز یکسان لبه و سطح برای مرز مشترک زیرالمان‌ها به دست می‌آید.

در شکل (۲-۹-الف) استفاده از روش پیوسته‌ی گالرکین نمایش داده شده است. اصلاح از

زیرالمان‌ای به زیرالمان‌ی دیگر انتقال می‌یابد. دو روش جایگزین طبق شکل (۲-۹-ب)

^۱ Assemble

وجود دارد. یکی روش ناپیوسته‌ی گالرکین است که می‌تواند در سطح زیرالمان انجام شود. با استفاده از فرمولبندی تغییراتی سازگاری به صورت ضعیفی تحمیل می‌شود. روش دیگر استفاده از معادلات مقید برای نقاط و متغیرهای کنترلی است تا به این وسیله سازگاری نقطه‌ای در مرز مشترک زیرالمان‌ها را به دست آوریم.



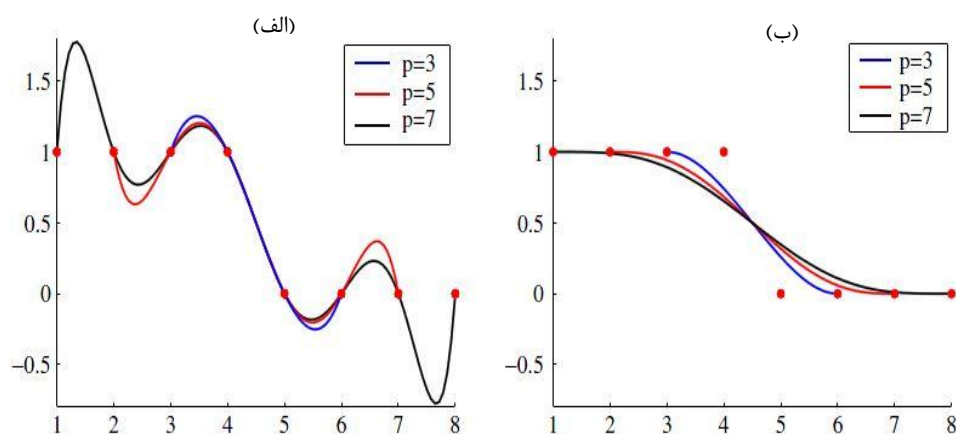
شکل (۲-۱۰): روش‌های (الف) پیوسته و (ب) ناپیوسته‌ی گالرکین

۸- آسانترین راه برای اعمال شرایط مرزی دریکله، اعمال آن بر متغیرهای کنترلی است. در مورد شرایط دریکله‌ی همگن این کار منجر به نتایج دقیق و ارضای نقطه‌ای می‌شود. در مورد شرایط دریکله‌ی غیرهمگن، مقادیر مرزی باید توسط توابع مربوط به فضای نربز تقریب زده شوند. این کار منجر به ارضای قوی ولی تقریبی شرایط مرزی می‌شود. یک فرمولبندی جایگزین از شرایط دریکله می‌تواند ارضای "ضعیف" باشد، یک شکل استاندارد از روش ناپیوسته‌ی گالرکین.

مشهور است که توابع درونیابی اجزا محدود برای تطبیق کردن داده‌های ناپیوسته دارای نوسان هستند. یک مثال از این مطلب در شکل (۲-۱۰-الف) نشان داده شده است، که چندجمله‌ای‌های لاگرانژ مرتبه سوم، پنجم و هفتم ناپیوستگی بین هشت نقطه را در R^2 درونیابی می‌کنند. توجه کنید که همچنان که درجه افزایش می‌یابد، دامنه‌ی نوسان افزایش می‌یابد. این پدیده را پدیده‌ی گیبز^۱ می‌نامند. وقتی از همین اطلاعات به عنوان نقاط کنترلی در نربز استفاده می‌شود رفتار کاملاً

^۱Gibbs Phenomena

متفاوتی را مشاهده می‌کنیم. در شکل (۲-۱۰-ب) منحنی‌های نربز یکنوا هستند، که خاصیت میرایی تغییرات^۱ را نشان می‌دهد. این خاصیت در نمایش لایه‌های تیز برتری ایجاد می‌کند.



شکل (۲-۱۱): الف) توابع درجه سه، پنج و هفت درونیایی لاگرانژ و ب) توابع درجه سه، پنج و هفت نربز

۲-۵- روش آیزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزا محدود

می‌توان تفاوت‌های روش اجزای محدود با روش آیزوژئومتریک را بر اساس توابع پایه‌ی نربز به صورت جدول زیر بیان نمود:

جدول (۲-۱): تفاوت‌های روش آیزوژئومتریک و اجزا محدود [۱۴]

روش آیزوژئومتریک	روش اجزا محدود
دقت بالا در مدلسازی هندسه	هندسه‌ی تقریبی
نقاط کنترلی	نقاط گرهی
متغیرهای کنترلی	متغیرهای گرهی
توابع پایه‌ای نربز	توابع پایه‌ای بر اساس چندجمله‌ای‌ها
پیوستگی کنترل شده	پیوستگی C^0 بین المانی

^۱Variation Diminishing

همچنین مشابهت‌های این روش با روش اجزای محدود به طور خلاصه به صورت جدول زیر می‌باشد:

جدول (۲-۲): شباهت‌های روش آیزوژئومتری و اجزا محدود [۱۴]

روش‌های تحلیل آیزوژئومتری و اجزا محدود
مفهوم آیزوپارامتریک
روش‌های حل معادلات دیفرانسیل
نحوه‌ی نوشتن کدهای کامپیوتری
اقتناع شدن تست‌های استاندارد ^۱
خاصیت تأثیرگذاری در ناحیه‌ی محدود شده ^۲
واحد شدن جمع مقادیر ^۳

۲-۶- تحلیل آیزوژئومتری مسائل تنش مسطح

هدف از این بخش نمایش فرمولبندی روش آیزوژئومتری در مسائل تنش مسطح می‌باشد.

۲-۶-۱- فرمولبندی آیزوژئومتری

تابع تغییر مکان در مسائل تنش مسطح را می‌توان با استفاده از توابع پایه‌ی نربز به صورت زیر تقریب زد:

$$u(r, s) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_{i,j}(r, s) P_{u\ i,j} \quad (2-18)$$

$$v(r, s) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} R_{i,j}(r, s) P_{v\ i,j} \quad (2-19)$$

^۱ Patches Tests

^۲ Compactly Supported Basis

^۳ Partition of Unity

در این روابط $R_{i,j}(r,s)$ توابع پایه‌ی نرېز می‌باشند. با توجه به خاصیت بازه‌ی تأثیر توابع درونیابی، روابط فوق را می‌توان برای $r \in [r_i, r_{i+1}]$ و $s \in [s_j, s_{j+1}]$ به صورت زیر ساده نمود:

$$\bar{u}^{i,j} = \begin{Bmatrix} u^{i,j} \\ v^{i,j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(r,s) P_{u\ k,l} \\ \sum_{k=i-p_1}^i \sum_{l=j-p_2}^j R_{k,l}(r,s) P_{v\ k,l} \end{Bmatrix} = \bar{N} \cdot \bar{P} \quad (20-2)$$

که در رابطه‌ی فوق $\bar{N}$ را می‌توان به صورت بسط یافته‌ی زیر نوشت:

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} R_{i-p_1,j-p_2} & \cdot & \dots & R_{i-p_1,j} & \cdot & \dots & R_{i,j} & \cdot \\ \cdot & R_{i-p_1,j-p_2} & \dots & \cdot & R_{i-p_1,j} & \dots & \cdot & R_{i,j} \end{bmatrix} \quad (21-2)$$

و همچنین $\bar{P}$ عبارت است از:

$$\bar{P} = [P_{u\ i-p_1,j-p_2} \quad P_{v\ i-p_1,j-p_2} \quad \dots \quad P_{u\ i-p_1,j} \quad P_{v\ i-p_1,j} \quad \dots \quad P_{u\ i,j} \quad P_{v\ i,j}]^T \quad (22-2)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش و تعریف کرنش‌ها در مسائل الاستیسیته مطابق روابط زیر است:

$$\sigma = C \varepsilon \quad (23-2)$$

$$\varepsilon = D \bar{u} \quad (24-2)$$

که در این روابط C و D به ترتیب ماتریس الاستیسیته و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی می‌باشند و در مسائل تنش مسطح به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$C = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \cdot \\ \nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 - \nu/\gamma \end{bmatrix} \quad (25-2)$$

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \cdot \\ \cdot & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (26-2)$$

از روابط تنش-کرنش و تعریف کرنش‌ها در رابطه‌ی (24-2) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\varepsilon = D\bar{u} = B\bar{P}, \quad B = D\bar{N} \quad (27-2)$$

در ادامه می‌توان مثل فرمولبندی روش اجزای محدود در مسائل تنش مسطح با استفاده از رابطه کار مجازی، ماتریس ضرائب را به دست آورد. برای ناحیه‌ی فرضی Ω^p رابطه‌ی کار مجازی به صورت زیر است:

$$\int_{\Omega^p} \delta \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega^p} \delta u^T b d\Omega - \int_{\Gamma^p} \delta u^T t d\Gamma = 0 \quad (28-2)$$

که در این رابطه t و b به ترتیب نیروهای سطحی و حجمی می‌باشند. با استفاده از رابطه‌ی کرنش-تغییر مکان (27-2) تغییرات کرنش‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \varepsilon = B \delta \bar{P} \quad (29-2)$$

اکنون با جایگزینی رابطه‌ی فوق در قسمت اول رابطه‌ی کار مجازی و با به کار گیری $\delta u = \bar{N} \delta \bar{P}$ برای بقیه‌ی قسمت‌های این رابطه و حذف ضرائب $\delta \bar{P}$ به دلیل غیرصفر فرض شدن آن‌ها در رابطه‌ی کار مجازی ماتریس ضرائب K و ماتریس نیروها F به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = \int_{\Omega^p} B^T C B d\Omega \quad (30-2)$$

$$F = \int_{\Omega^p} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma^p} N^T t d\Gamma \quad (31-2)$$

بنابراین مقادیر مجهول نقاط کنترلی را می‌توان از حل دستگاه معادلات زیر محاسبه نمود:

$$K \bar{P} = F \quad (32-2)$$

چنانکه اشاره شد شبیه به مفهوم آیزوپارامتریک در روش اجزای محدود، در این روش نیز از تقریب یکسان تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. با این تفاوت که در اینجا هندسه به مراتب دقیق‌تر مدلسازی می‌شود. بنابراین در مسئله‌ی تنش مسطح، هندسه‌ی دامنه به صورت زیر مدل می‌شود:

$$x(r, s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n'} R_{i,j}(r, s) P_{x i,j} \quad (33-2)$$

$$y(r, s) = \sum_{i=.}^n \sum_{j=.}^{n'} R_{i,j}(r, s) P_{y i,j} \quad (34-2)$$

که در این روابط $P_{x i,j}$ و $P_{y i,j}$ مختصات x و y نقاط کنترلی می باشند. همانطور که قبلاً در تقریب تابع مجهول نیز اشاره شد در روابط فوق همه ی پارامترها بر حسب r و s نوشته شده اند که لزوماً نیاز به نگاشت در محاسبات همانند روش اجزای محدود را ایجاب خواهد کرد.

۲-۷- تحلیل آیزوژئومتری مسائل سه بعدی الاستیسیته

کلی ترین مسائل در تحلیل سازه ها، مسائل سه بعدی می باشند که در صنعت نیز کاربرد فراوان دارند. با توجه به پیچیدگی هندسه در مسائل عملی سه بعدی، ساخت شبکه اجزای محدود بسیار پیچیده تر از مسائل دوبعدی است. بنابراین به نظر می رسد حل این مسائل به کمک روش آیزوژئومتری مزیت های این روش را بیشتر نمایان سازد. در این بخش ابتدا فرمول بندی این روش در مسائل سه بعدی الاستیسیته ارائه می شود. به این منظور روش ها و روابط به دست آمده در مسائل تنش مسطح را می توان به سادگی به حالت سه بعدی تعمیم داد.

۲-۷-۱- فرمول بندی مسائل سه بعدی الاستیسیته

در مکانیک محیط های پیوسته، سازه های سه بعدی در هر نقطه، دارای سه درجه آزادی تغییر مکانی می باشند. در این مسائل شش مولفه کرنش وجود دارد. ماتریس کرنش را در مسائل سه بعدی می توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u_x / \partial x \\ \partial u_y / \partial y \\ \partial u_z / \partial z \\ \partial u_x / \partial y + \partial u_y / \partial x \\ \partial u_y / \partial z + \partial u_z / \partial y \\ \partial u_z / \partial x + \partial u_x / \partial z \end{Bmatrix} = Du \quad (35-2)$$

که در این رابطه:

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix}, \quad u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (36-2)$$

بنابراین در مسائل سه بعدی سه مولفه تغییر مکانی u_x و u_y و u_z بایستی تقریب زده شوند. در

روش آیزوژئومتری با استفاده از توابع پایه نریز این کار به صورت زیر انجام می گیرد:

$$u^p(r, s, t) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} R_{i,j,k}(r, s, t) u_{i,j,k}^p \quad (37-2)$$

که در این رابطه $R_{i,j,k}(r, s, t)$ توابع پایه نریز می باشند که در رابطه (2-15) تعریف آن آمده

است. $u_{i,j,k}^p$ متغیرهای کنترلی مربوط به زیردامنه p در مسئله می باشند که تعداد آن ها عبارتند از

$(n_1 + 1) \times (n_2 + 1) \times (n_3 + 1)$. با توجه به خاصیت بازه تاثیر توابع درونیایی، روابط فوق

را می توان برای $r \in [r_i, r_{i+1}]$ ، $s \in [s_j, s_{j+1}]$ و $t \in [t_k, t_{k+1}]$ به صورت زیر ساده نمود:

(38-2)

$$\bar{u}^{i,j,k} = \begin{Bmatrix} u_x^{i,j,k} \\ u_y^{i,j,k} \\ u_z^{i,j,k} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j \sum_{g=k-p_3}^k R_{e,f,g}(r, s, t) P_{u_x e,f,g} \\ \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j \sum_{g=k-p_3}^k R_{e,f,g}(r, s, t) P_{u_y e,f,g} \\ \sum_{e=i-p_1}^i \sum_{f=j-p_2}^j \sum_{g=k-p_3}^k R_{e,f,g}(r, s, t) P_{u_z e,f,g} \end{Bmatrix} = \bar{N} \cdot \bar{P}$$

رابطه تنش - کرنش و تعریف کرنش ها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma = C \varepsilon \quad (39-2)$$

که در این رابطه C ماتریس الاستیسیته است و در مسائل سه بعدی به صورت زیر تعریف می شود:

(40-2)

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1-2\nu/2 & 0 & 0 \\ & sym. & & & 1-2\nu/2 & 0 \\ & & & & & 1-2\nu/2 \end{bmatrix}$$

از روابط تنش- کرنش و تعریف کرنش‌ها می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\varepsilon = D\bar{u} = B\bar{P}, \quad B = D\bar{N} \quad (41-2)$$

در ادامه می‌توان مثل فرمول‌بندی روش اجزای محدود در مسائل سه‌بعدی با استفاده از رابطه کار مجازی، ماتریس ضرایب را به دست آورد. برای یک زیردامنه فرضی V^p رابطه کار مجازی به صورت زیر است:

$$\int_{V^p} \delta \varepsilon^T \sigma dV - \int_{V^p} \delta u^T b dV - \int_{\Omega^p} \delta u^T t d\Omega = 0 \quad (42-2)$$

که در این رابطه t و b به ترتیب نیروهای سطحی و حجمی می‌باشند. در ادامه با استفاده از رابطه کرنش- تغییر مکان (41-2) تغییرات کرنش‌ها به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\delta \varepsilon = B \delta \bar{P} \quad (43-2)$$

اکنون با جایگزینی رابطه فوق در قسمت اول رابطه کار مجازی و با به کارگیری $\delta u = \bar{N} \delta \bar{P}$ برای بقیه قسمت‌های این رابطه و حذف ضرایب $\delta \bar{P}$ به دلیل غیر صفر بودن آن‌ها در رابطه کار مجازی ماتریس ضرایب K و ماتریس نیروهای F به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = \int_{\Omega^p} B^T C B d\Omega \quad (44-2)$$

$$F = \int_{\Omega^p} N^T b d\Omega + \int_{\Gamma^p} N^T t d\Gamma \quad (45-2)$$

بنابراین مقادیر متغیرهای کنترلی را می‌توان از حل دستگاه معادلات زیر محاسبه نمود:

$$K \bar{P} = F \quad (46-2)$$

پس از محاسبه‌ی متغیرهای کنترلی با جایگزینی آن در رابطه (۲-۳۷) مقادیر تابع مجهول به ازای مختصه‌های فضای پارامتری (r, s, t) تعیین می‌گردد. برای محاسبه تابع مجهول در یک نقطه از فضای فیزیکی (x, y, z) ابتدا می‌بایست مختصه‌های پارامتری متناظر این نقاط را پیدا کرده و سپس مقدار تابع مجهول را به دست آورد. این موضوع یکی از پیچیدگی‌های روش آیزوژئومتری به حساب می‌آید.

شبیه به روش اجزای محدود در این روش نیز از تقریب یکسان تابع مجهول و هندسه استفاده می‌شود. در این روش در واقع هندسه مدل‌سازی می‌شود و تابع مجهول با استفاده از توابع پایه تقریب زده می‌شود. بنابراین در مسئله سه‌بعدی هندسه دامن به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$x(r, s, t) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \sum_{k=1}^{n_3} R_{i,j,k}(r, s, t) X_{i,j,k} \quad (2-47)$$

که در این روابط $X_{i,j,k}$ مختصات نقاط کنترلی می‌باشد. همان‌طوری که قبلاً در تقریب تابع مجهول نیز اشاره شد در روابط فوق همه پارامترها بر حسب r و s و t نوشته شده‌اند که لزوم نیاز به نداشت در محاسبات همانند روش اجزای محدود را ایجاب خواهد کرد.

با استفاده از معادلات به دست آمده از این فصل امکان تحلیل مسائل الاستیسیته به صورت کامل، حتی در حالت سه بعدی نیز فراهم می‌شود که در فصل ششم از نتایج این فرمولبندی‌ها برای بهینه‌سازی مسائل استفاده شده است.

فصل سوم

بهینه‌سازی سازه‌ها

۳-۱- مقدمه

بهینه‌سازی شکل سازه‌ها در پی یافتن هندسه‌ی بهینه‌ی یک سازه است، به طوری که رفتار خاصی از سازه تحت قیودی مشخص در بهترین حالت قرار گیرد. توابعی که هدف طراحی و یا قیود را مشخص می‌کنند معمولاً وزن، انرژی ذخیره شده، تنش ماکزیمم و یا جابه‌جایی ماکزیمم هستند.

به طور کلی فرآیند بهینه‌سازی شکل دارای سه مرحله شامل توصیف و اصلاح پارامتری هندسه (مدل طراحی)، تحلیل پاسخ سازه (مدل تحلیل) و الگوریتم بهینه‌سازی است. در مدل طراحی حوزه‌ی هندسی با استفاده از پارامترهایی (متغیرهای طراحی) که با تغییرات شکل در ارتباط هستند توصیف می‌شود. در مدل تحلیل پاسخ سازه با استفاده از روش‌های عددی مانند روش اجزای محدود (*FEM*) محاسبه می‌شود. در نهایت الگوریتم بهینه‌سازی کنترل فرآیند تکرار را برای نزدیک شدن به مقدار بهینه در دست می‌گیرد.

پارامتری‌سازی هندسه نقش مهمی را در این رویه بازی می‌کند و توصیف مناسب مرز بسیار لازم است. این مسئله بیشتر در مسائل مربوط به کاهش تمرکز تنش در جایی که تغییر در شکل مرز بسیار مهم است، آشکار می‌شود. علاوه بر این انتخاب متغیرهای طراحی می‌تواند در موفقیت روند بهینه‌سازی مؤثر باشد و لازم است متناسب با مدل تحلیل انتخاب شود.

در این فصل ابتدا به تعاریف اولیه در بهینه‌سازی پرداخته می‌شود و سپس به بررسی انواع مسائل بهینه‌سازی پرداخته می‌شود. سپس فرم استاندارد مسئله بهینه‌سازی معرفی می‌شود و در ادامه روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی بررسی می‌شود. پس از آن انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها بررسی شده و به بررسی بهینه‌سازی شکل سازه‌ها می‌پردازیم. در این بخش نحوه‌ی نمایش مرزها به طور کامل معرفی می‌شود.

۳-۲- تعاریف اولیه

فرمولبندی و شکل کلی مسائل بهینه‌سازی بر اساس چند پارامتر اصلی تعریف می‌شود که شامل متغیرهای طراحی، تابع هدف و توابع قید می‌باشند و در ادامه به توضیح هریک می‌پردازیم.

۳-۲-۱- متغیرهای طراحی

متغیرهای طراحی پارامترهایی هستند که مقداری آزادی تغییر در آن‌ها داریم و با تغییر آن‌ها اصلاح لازم در سازه مورد نظر را ایجاد می‌کنیم، که این پارامترها معمولاً سطح مقطع اعضا و یا خصوصیات دیگری از مصالح و خواص هندسی اعضای سازه‌ی موجود هستند و به دو دسته‌ی گسسته و پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند. زمانی که متغیرهای طراحی با فاصله‌ی زیادی جدا از هم و گسسته هستند از شاخه‌ای از برنامه‌ریزی خطی به نام *Integer Programming* استفاده می‌کنیم.

۳-۲-۲- تابع هدف

تابع هدف تابعی است که می‌توان آن را به عنوان معیاری جهت تعیین میزان موثر بودن طراحی در نظر گرفت. جهت بهینه‌سازی سازه‌ها وزن، تغییر مکان، تنش، فرکانس لرزش، بارهای کماتش و هزینه و یا ترکیبی از این موارد را می‌توان به عنوان تابع هدف در نظر گرفت. وقتی که چند تابع هدف داریم با توجه به پیچیده بودن مسئله سعی می‌کنیم که تابع هدف را به یک تابع کاهش دهیم که این عمل را یا با ترکیب کردن توابع هدف انجام می‌دهیم و یا یک تابع هدف را که مهم‌تر است انتخاب می‌کنیم. زمانی که انتخاب بین توابع هدف مشکل باشد از روشی به نام *Edgeworth-Pareto Optimization* استفاده می‌کنیم که به مسائل دارای توابع هدف چندگانه می‌پردازد. یک بردار متغیر طراحی (x^*) را *Edgeworth-Pareto Optimal* گوئیم

هرگاه به ازای هر x دیگر مقادیر همه‌ی توابع هدف‌ها، در مقایسه با مقدار آن‌ها به ازای x^* ، یکسان باشد و یا حداقل یکی از آن‌ها بدتر شود.

۳-۲-۳- قیدها

حدودی که برای متغیرهای طراحی وجود دارد و نمی‌توانند از آن‌ها تجاوز کنند را قیدهای طراحی گویند، که به دو دسته‌ی قیدهای مساوی و قیدهای نامساوی تقسیم می‌شوند. یک روش برای تبدیل قیدهای مساوی به نامساوی در روش‌های برنامه‌ریزی غیرخطی که فقط با قیدهای نامساوی سر و کار دارند تبدیل قید مساوی به دو قید نامساوی است:

$$h(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} h(x) \geq 0 \\ h(x) \leq 0 \end{cases} \quad (۱-۳)$$

۳-۳- فرم استاندارد مسئله‌ی بهینه‌سازی

فرم استاندارد مسئله بهینه‌سازی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \min_x f(x) \\ \text{s.t. } g_j(x) \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_g \\ h_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, n_e \end{cases} \quad (۲-۳)$$

زمانی که با تابع هدفی سر و کار داریم که قرار است ماکزیمم شود به راحتی جهت استانداردسازی می‌توانیم مینیمم کردن منفی آن را در نظر بگیریم و چنین مطلبی را در مورد قیدهای نامساوی نیز داریم.

یک مسئله‌ی بهینه‌سازی را خطی گوئیم هرگاه هم تابع هدف و هم قیدها توابعی خطی از متغیرهای طراحی باشند و در این موارد از شاخه‌ای از برنامه‌ریزی ریاضی به نام برنامه‌ریزی خطی^۱

^۱Linear Programming

استفاده می‌کنیم. مسئله‌ی بهینه‌سازی را غیرخطی گوییم هرگاه یا تابع هدف یا قیدها تابعی غیرخطی از متغیرهای طراحی باشند.

یکی از مسائل اصلی در بهینه‌سازی تعیین قیدهای فعال است، زیرا اگر بخواهیم تمام قیدها را در نظر بگیریم هزینه‌ی محاسبات بسیار زیاد خواهد شد.

اگرچه روش‌های زیادی برای بهینه‌سازی وجود دارد ولی اکثر آن‌ها بر اساس چهار مرحله ساخته شده‌اند. مرحله‌ی اول انتخاب قیدهای فعال است. مرحله‌ی دوم محاسبه‌ی یک مسیر بر اساس تابع هدف و قیدهای فعال است. برخی روش‌ها به دنبال مسیری مماس بر مرزهای قیدهای فعال می‌گردند^۱ و برخی به دنبال دور شدن از مرزهای قیدها هستند^۲. مرحله سوم این است که تعیین کنیم می‌خواهیم چه مقدار بر روی مسیر پیدا شده جلو برویم، که این عمل با روشی موسوم به جستجوی خط یک بعدی^۳ انجام می‌شود. مرحله‌ی آخر، مرحله‌ی همگرایی است و این که تعیین کنیم آیا حرکت جدیدی نیاز هست یا خیر.

۳-۴- انواع روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ها

در سیر تکاملی بهینه‌سازی سازه‌ها روش‌های بسیاری به وجود آمده و استفاده شده‌اند که برخی از آن‌ها به زودی فراموش شده و برخی به جایگاه ویژه‌ای دست پیدا کرده‌اند. به طور کلی می‌توان این روش‌ها را به دو دسته‌ی خطی و غیرخطی تقسیم کرد.

برنامه‌ریزی خطی به حل مسائل خطی می‌پردازد، و البته درصد کمی از مسائل فیزیکی هستند که این خاصیت را داشته باشند. بنابراین پاره‌ای از روش‌ها به تقریب خطی مسائل غیرخطی می‌پردازند و از آن جمله می‌توان به روش SLP^4 اشاره کرد، که در بخش ۳-۴-۸ شرح داده خواهد شد. حل

^۱Gradient Projection Methods

^۲Interior Penalty Function method or Feasible Direction Method

^۳One Dimensional Line Search

^۴Sequential Linear Programming

مسائل خطی به سادگی با روش‌هایی همچون سیمپلکس^۱ قابل انجام است. بنابراین می‌توان مسائل غیرخطی زیادی را با این روش حل کرد.

دسته‌ی دیگری از روش‌ها وجود دارند که به حل مسائل محدب می‌پردازند. اگرچه بسیاری از مسائل بهینه‌سازی غیر محدب هستند، اما می‌توان با روش‌هایی همچون SQP^۲ که در بخش ۳-۴- شرح داده خواهد شد، این مسائل را تقریب زده و به مسائل محدب تبدیل کرد.

۳-۴-۱- تحدب

مجموعه‌ی $S \subset R^n$ را محدب گوئیم اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ و هر $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم:

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S \quad (3-3)$$

به عبارت دیگر یک مجموعه را محدب گوئیم هرگاه همه‌ی نقاط روی خطی که دونقطه‌ی موجود در مجموعه را به هم وصل می‌کند، درون مجموعه باشند.



شکل (۳-۱): مجموعه‌ی محدب و غیرمحدب

۳-۴-۲- تابع محدب

تابع $f: S \rightarrow R$ (روی مجموعه‌ی محدب $S \subset R^n$) را محدب گوئیم اگر به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ که $x_1 \neq x_2$ و $\lambda \in (0, 1)$ داشته باشیم:

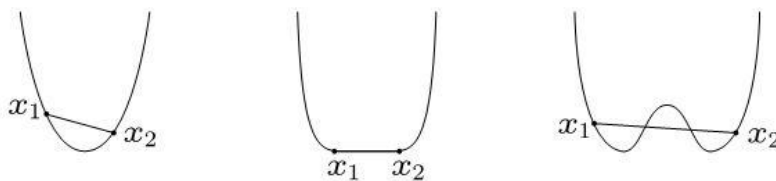
^۱ Simplex

^۲ Sequential Quadratic Programming

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad (4-3)$$

به عبارت دیگر نمودار تابع محدب f یا بر روی خط اتصال دو نقطه‌ی روی گراف قرار دارد یا زیر آن خط قرار می‌گیرد. اگر علامت کوچکتر، مساوی به علامت کوچکتر تبدیل شود تابع f را محدب اکید^۱ می‌گوییم.

اگر $-f$ محدب باشد، تابع f را مقعر^۲ می‌گوییم.



شکل (۱-۳): تابع محدب اکید (چپ)، تابع محدب (وسط)، تابع غیرمحدب (راست)

۳-۴-۳- مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب و نتایج حاصل از آن

اگر تابع هدف و تمام توابع قید محدب باشند، مسئله‌ی بهینه‌سازی را محدب گویند.

- اگر مسئله محدب باشد، مینیمم محلی برای تابع، مینیمم مطلق نیز هست.
- وقتی که محدوده‌ی شدنی مسئله، بسته (مرزبندی شده یا کراندار) باشد همواره یک حل برای آن وجود دارد.

- اگر تابع هدف محدب اکید و توابع قید محدب باشند، حداکثر یک جواب وجود دارد.

بنابراین اگر محدوده‌ی شدنی مسئله، کراندار باشد تنها و تنها یک جواب وجود دارد. در نتیجه اگر در این حالت یک مینیمم محلی را به دست آوریم، مینیمم مطلق را به دست آورده‌ایم.

۳-۴-۴- روش تشخیص تحدب و تقعر

برای تشخیص یک تابع محدب یا مقعر می‌توانیم از گرادیان یا ماتریس هسین^۱ استفاده می‌کنیم.

^۱ Strictly Convex

^۲ Concave

قضیه ۳-۱: اگر مجموعه‌ی S محدب و تابع f مشتق‌پذیر و پیوسته باشد، f محدب (اکید) است اگر و تنها اگر ∇f یکنوا (اکید) باشد.

- تابع g را یکنوا گوییم هرگاه به ازای هر $x_1, x_2 \in S$ داشته باشیم:

$$(x_2 - x_1)^T (g(x_2) - g(x_1)) \geq 0. \quad (5-3)$$

قضیه ۳-۲: برای تابع $f: S \rightarrow R$ که S محدب بوده و f دوبار مشتق‌پذیر و پیوسته باشد داریم:

الف- f محدب است، اگر و تنها اگر هسین $\nabla^2 f$ مثبت نیمه‌قطعی باشد.

ب- f محدب اکید است، اگر $\nabla^2 f$ مثبت باشد.

- ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را مثبت نیمه‌قطعی گوییم، اگر $y^T A y \geq 0$

- ماتریس $A \in R^{n \times n}$ را مثبت قطعی گوییم، اگر $y^T A y > 0$

اما چون چک کردن این تعاریف کار سختی است می‌توانیم از معیار سیلوستر^۲ استفاده کنیم.

۳-۴-۵- معیار سیلوستر

ماتریس متقارن $A \in R^{n \times n}$ را مثبت قطعی گوییم، اگر و تنها اگر درمیان تمام زیر ماتریس‌های $k \times k$ قسمت چپ و بالای ماتریس A به ازای هر $k = 1, \dots, n$ مثبت باشند.

۳-۴-۶- شرایط کاروش-کان-تاکر^۳ (KKT)

حال که تحدب را به طور کامل شرح دادیم، دوباره به این موضوع بازمی‌گردیم که چگونه می‌توان یک مینیمم محلی را، که البته در اینجا مینیمم کلی نیز هست، تشخیص داد. برای این موضوع لازم است ابتدا تابع لاگرانژ را تعریف کنیم:

^۱Hessian

^۲Sylvester's Criterion

^۳Karush-Kuhn-Tucker

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = g_0(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(x) \quad (۶-۳)$$

که λ_i ها را ضرایب لاگرانژ می‌نامند.

با این تعریف شرایط کاروش-کان-تاکر به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} \leq 0, \quad x_j = x_j^{max} \quad \text{اگر} \quad (۷-۳)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j^{min} < x_j < x_j^{max} \quad \text{اگر} \quad (۸-۳)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} \geq 0, \quad x_j = x_j^{min} \quad \text{اگر} \quad (۹-۳)$$

$$\lambda_i g_i(x) = 0 \quad (۱۰-۳)$$

$$g_i(x) \leq 0 \quad (۱۱-۳)$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad (۱۲-۳)$$

مشتق جزئی $\mathcal{L}$ نسبت به متغیرهای طراحی می‌شود:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_0(x)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^l \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \quad (۱۳-۳)$$

هر نقطه‌ای که شرایط (۷-۳) تا (۱۲-۳) را ارضا کند، یک نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر (KKT) نامیده می‌شود. برای مسائل غیرمحدب شرایط کاروش-کان-تاکر لازمند ولی کافی نیستند. به عبارتی نقاط بهینه‌ی موضعی همواره در بین نقاط KKT یافت می‌شوند، اما ممکن است نقاط کاروش-کان-تاکری وجود داشته باشند که نقطه‌ی بهینه‌ی موضعی نباشند. برای مسائل محدب نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر همیشه یک نقطه‌ی بهینه است.

قضیه ۳-۳: فرض کنید P یک مسئله‌ی محدب باشد، و (x^*, λ^*) یک نقطه‌ی کاروش-کان-تاکر برای P باشد. در این صورت x^* یک نقطه‌ی مینیمم محلی (و البته مینیمم مطلق) برای P می‌باشد.

۳-۴-۷- دوگانگی لاگرانژ^۱

روش دیگری که برای حل مسائل محدب می‌توانیم به کار ببریم و از حل معادلات غیرخطی کاروش-کان-تاکر کمی ساده‌تر است، روش دوگانگی لاگرانژ است. اگر مسئله‌ی بهینه‌سازی را به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$(P) \begin{cases} \min g_*(x) \\ s. t. \quad g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ x \in X \end{cases} \quad (۱۴-۳)$$

می‌توان ثابت کرد که این مسئله معادل مسئله‌ی مینیمم-ماکزیمم زیر است:

$$(P_L) \min_{x \in X} \max_{\lambda \geq 0} \{g_*(x) + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(x)\} \quad (۱۵-۳)$$

به این ترتیب ابتدا لاگرانژ (P) بر حسب $\lambda \geq 0$ نسبت به یک x ثابت ماکزیمم می‌شود، سپس نتیجه‌ی حاصل از آن بر حسب $x \in X$ مینیمم می‌شود. این مسئله در حقیقت معادل همان مسئله اولیه یعنی (P) است. اما حال اگر جای مینیمم و ماکزیمم را عوض کنیم به مسئله‌ی دوگانگی لاگرانژ می‌رسیم، که اگر با روش‌هایی همچون MMA که در قسمت ۳-۴-۱۰ توضیح داده خواهد شد تابع هدف و قیدها را تقریب بزنیم، حل این مسئله‌ی دوگانگی لاگرانژ برای حل مسئله کافی خواهد بود. شکل مسئله‌ی دوگانگی لاگرانژ به صورت زیر می‌باشد:

$$(D) \begin{cases} \max_{\lambda} \varphi(\lambda) \\ s. t. \quad \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (۱۶-۳)$$

که تابع هدف دوگانه φ به شکل زیر تعریف می‌شود:

^۱Lagrangian Duality

$$\varphi(\lambda) = \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \lambda) \quad (17-3)$$

ویژگی اصلی روش دوگانگی لاگرانژ این است که قیدها در آن بسیار ساده هستند، در حالی که در مسئله‌ی اصلی ممکن است قیدها بسیار پیچیده باشند. سادگی این روش علاوه بر قیدهای ساده‌ی آن به دلیل مقعر بودن φ نیز می‌باشد.

۳-۴-۸- تقریب برنامه ریزی خطی ترتیبی (SLP)

در برخی از مسائل بهینه سازی سازه‌ها تابع هدف و همه‌ی قیدها به عنوان توابعی صریح از متغیرهای طراحی نوشته می‌شوند اما در اکثر مسائل یافتن چنین توابع صریحی غیر ممکن است. برای حل این مشکل لازم است مسئله‌ی اصلی را به مجموعه‌ای از زیرمسئله‌های صریح که تقریبی از مسئله‌ی اصلی هستند تبدیل کنیم و به جای مسئله‌ی اصلی این زیرمسئله‌ها را حل کنیم. در ادامه دو مورد از این تقریب‌ها را، که تقریب‌هایی محدب هستند و کاربرد زیادی در حل مسائل بهینه سازی شکل دارند، معرفی می‌کنیم.

در SLP تابع هدف و توابع قید همگی در متغیر طراحی x^k به کمک دو جمله‌ی اول بسط تیلور تقریب زده می‌شوند و به توابعی خطی تبدیل می‌شوند. این عمل مسئله را به شکل زیر تقریب می‌زند:

$$(18-3)$$

$$(SLP) = \begin{cases} \min_x g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T (x - x^k) \\ s. t. \quad g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T (x - x^k) \leq 0, & i = 1, \dots, l \\ x \in X \\ -l_j^k \leq x_j - x_j^k \leq u_j^k, & j = 1, \dots, n \end{cases}$$

که در آن u_j^k و l_j^k حدود جابه‌جایی هستند و به این دلیل به کار می‌روند که خطی سازی انجام شده فقط در نزدیکی طراحی موجود معتبر است. این حدود در طی روند تکرار مسئله توسط کاربر اصلاح می‌شوند. هنگامی که $g_i(x^k)$ و $\nabla g_i(x^k)$ محاسبه شدند تمام عبارت‌ها به عنوان توابع

صریح از x مشخص شده‌اند، بنابراین SLP در حقیقت تقریب صریحی از مسئله‌ی بهینه‌سازی است.

از آنجایی که تابع هدف و تمام قیدها توابع نسبی از x هستند و به عبارتی همه‌ی آن‌ها را می‌توان به شکل $a^T x + b$ که a و b در آن ثابت هستند نوشت، نتیجه می‌گیریم که این توابع محدب هستند. در نتیجه SLP یک مسئله‌ی محدب است. با توجه به اینکه SLP یک تقریب خطی است مسئله‌ی به دست آمده را می‌توان به کمک روش‌هایی همچون الگوریتم سیمپلکس حل کرد.

۳-۴-۹- برنامه ریزی درجه دوم ترتیبی^۱ (SQP)

با اضافه کردن عبارت درجه دوی بسط تیلور به تابع هدف در SLP به تقریب برنامه ریزی درجه دوم ترتیبی SQP می‌رسیم:

(۱۹-۳)

$$(SQP) = \begin{cases} \min_x g.(x^k) + \nabla g.(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H(x^k)(x - x^k) \\ s. t. \quad g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T(x - x^k) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ x \in X \end{cases}$$

که در آن $H(x^k)$ نشان‌دهنده‌ی تقریب مرتبه اول و مثبت نیمه قطعی هسین تابع g در x^k است. این تقریب منجر به تابع هدف محدب می‌شود و بنابراین SQP یک مسئله‌ی محدب می‌باشد. ما از هسین واقعی در این تقریب استفاده نمی‌کنیم زیرا می‌خواهیم این تقریب یک تقریب مرتبه اول باشد. همچنین در این تقریب نیازی به حدود جابه‌جایی نمی‌باشد زیرا SQP نسبت به SLP تقریب بهتری از مسئله‌ی اصلی می‌زند.

۳-۴-۱۰- روش مجانب‌های متحرک^۲ (MMA)

^۱Sequential Quadratic Programming

^۲Method of Moving Asymptotes

روش مجانب‌های متحرک در سال ۱۹۸۷ توسط کریستر سونبرگ^۱ [۱۵] ارائه شد. تقریب MMA تقریبی محدب، صریح و جدایی‌پذیر از مسئله به دست می‌دهد که در نتیجه با روش دوگانگی لاگرانژ به سادگی قابل حل است. این روش، روشی محافظه‌کارانه است، که در آن درجه‌ی محافظه‌کاری را می‌توان کنترل کرد. MMA متغیرهای فرضی رابط زیر را به کار می‌برد:

$$y_j(x_j) = \frac{1}{x_j - L_j} \text{ یا } y_j(x_j) = \frac{1}{U_j - x_j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (20-3)$$

L_j و U_j مجانب‌های متحرک^۲ هستند که در طول روند تکرار مسئله تغییر می‌کنند اما همواره باید شرط زیر را دارا باشند:

$$L_j^k < x_j^k < U_j^k \quad (21-3)$$

تقریب MMA برای تابع g_i در متغیر طراحی x^k به شکل زیر به دست می‌آید:

$$g_i^{M,k}(x) = r_i^k + \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j} + \frac{q_{ij}^k}{x_j - L_j^k} \right) \quad (22-3)$$

که در آن:

$$p_{ij}^k = \begin{cases} (U_j^k - x_j^k)^\gamma \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} & \text{if } \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (23-3)$$

$$q_{ij}^k = \begin{cases} 0 & \text{if } \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} \geq 0 \\ -(x_j^k - L_j^k)^\gamma \frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24-3)$$

$$r_i^k = g_i(x^k) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{p_{ij}^k}{U_j^k - x_j^k} + \frac{q_{ij}^k}{x_j^k - L_j^k} \right) \quad (25-3)$$

^۱Krister Svanberg

^۲Moving Asymptotes

بنابراین اگر p_{ij}^k صفر نباشد q_{ij}^k صفر است و برعکس. مشتقات اول و دوم $g_i^{M,k}$ به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial g_i^{M,k}(x)}{\partial x_j} = \frac{p_{ij}^k}{(U_j^k - x_j)^2} - \frac{q_{ij}^k}{(x_j - L_j^k)^2} \quad (26-3)$$

$$\frac{\partial^2 g_i^{M,k}(x)}{\partial x_j^2} = \frac{2p_{ij}^k}{(U_j^k - x_j)^3} + \frac{2q_{ij}^k}{(x_j - L_j^k)^3} \quad (27-3)$$

$$\frac{\partial^2 g_i^{M,k}(x)}{\partial x_j \partial x_p} = 0, \quad \text{if } j \neq p \quad (28-3)$$

در این روش ما بر اساس شرایط موجود در مسئله درجه‌ی محافظه کاری را تغییر می‌دهیم، و ابزار کار ما برای این منظور L_j و U_j هستند. مثلاً در طی روند تکرار مسئله اگر $x_j^k - x_j^{k-1}$ و $x_j^{k-2} - x_j^{k-1}$ غیرهم‌علامت باشند نشان می‌دهد که جواب‌ها در نزدیکی نقطه‌ی بهینه در حال نوسان هستند و ما باید مقادیر محافظه کارانه‌تری را برای L_j^k و U_j^k انتخاب کنیم (یعنی باید مقادیر L_j^k و U_j^k به x_j^k نزدیکتر شوند). اما اگر $x_j^k - x_j^{k-1}$ و $x_j^{k-2} - x_j^{k-1}$ هم علامت باشند نشان می‌دهد که جواب‌ها از مقدار بهینه فاصله دارند و ما مقادیر غیرمحافظه کارانه‌تری برای L_j^k و U_j^k انتخاب می‌کنیم.

برخی ویژگی‌های MMA به شرح زیر است:

- تقریب MMA یک تقریب مرتبه اول است.
- $g_i^{M,k}$ یک تابع صریح و محدب است، زیرا هسین $\nabla^2 g_i^{M,k}$ مثبت نیمه قطعی است.
- این تقریب جدایی‌پذیر است در نتیجه می‌توان از روش دوگانگی لاگرانژ^۱ برای حل آن استفاده کرد.

^۱Lagrangian Duality

تقریب MMA در تکرار k ام به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$(MMA) = \begin{cases} \min_x g^{M,k}(x) \\ s. t. \quad g_i^{M,k}(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \\ \alpha_j^k \leq x_j \leq \beta_j^k, \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (29-3)$$

که در آن α_j^k و β_j^k حدود جابه‌جایی هستند.

روش SLP حالت خاصی از MMA است، زیرا اگر $L_j^k \rightarrow -\infty$ و $U_j^k \rightarrow +\infty$ آنگاه SLP به دست می‌آید.

۳-۵- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها

۳-۵-۱- بهینه‌سازی ابعادی

بهینه‌سازی ابعادی شاخه‌ای از بهینه‌سازی است که تاکنون تحقیقات زیادی بر روی آن انجام شده است و مسائلی مانند مسئله تعیین سطح مقطع بهینه اعضای یک خرپا یا قاب و یا تعیین ضخامت بهینه یک صفحه از جمله مسائلی هستند که به این روش حل می‌شوند. در این مسائل حوزه ثابت است و در طی بهینه‌سازی تغییر نمی‌کند. مسئله بهینه‌سازی ابعادی را می‌توان به عنوان کاربرد بهینه‌سازی در مرحله طراحی جزئیات در نظر گرفت.

به عنوان مثال می‌توانیم تعیین سطح مقطع اعضای یک خرپای دوبعدی را در نظر بگیریم که لازم است سختی آن حداکثر شود. برای اینکه بتوانیم سختی یک خرپا را حداکثر کنیم می‌توانیم به عنوان یک مقیاس انرژی کرنشی^۱ آن و یا $F^T u$ را حداقل کنیم، که u در آن جابه‌جایی و F نیروی خارجی وارد بر گره می‌باشد. واضح است که اگر انرژی کرنشی کوچک باشد، سختی خرپا زیاد خواهد بود.

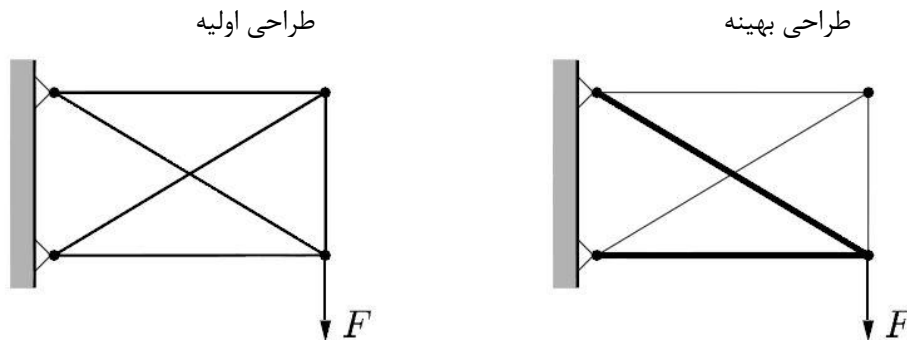
^۱Compliance

مسئله‌ی بهینه‌سازی را می‌توانیم به شکل زیر در نظر بگیریم:

$$\begin{cases} \min_{x,u} F^T u \\ \text{s. t. } K(x)u = F \\ \sum_{j=1}^n l_j x_j \leq V_{max} \\ x \in X = \{x \in R^n : x_j^{min} \leq x_j \leq x_j^{max}, j = 1, \dots, n\} \end{cases} \quad (3-30)$$

که در آن n تعداد اعضای خرپا، l_j طول عضو j ، x_j سطح مقطع عضو j ، و V_{max} حداکثر حجم مجاز خرپاست.

در شکل زیر طرح اولیه و نهایی برای یک خرپا تحت بهینه‌سازی ابعادی نشان داده شده است.



شکل (۳-۲): یک مسئله‌ی بهینه‌سازی ابعادی که برای بهینه‌سازی سطح مقطع اعضای خرپا فرمولبندی شده [۱۶]

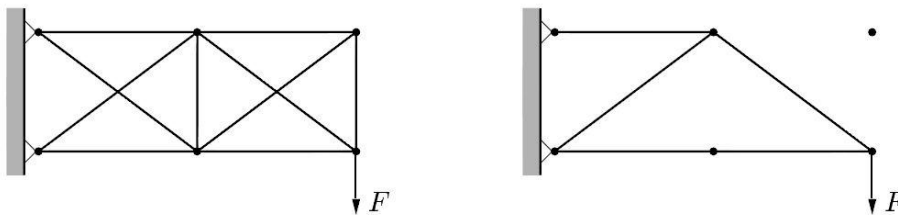
۳-۵-۲- بهینه‌سازی توپولوژی

رویکرد دیگری که در مورد بهینه‌سازی وجود دارد بهینه‌سازی توپولوژی است. در تعریف دو شکل هندسی را دارای توپولوژی یکسان گویند اگر بتوان یکی را از انتقال پیوسته‌ی دیگری به دست آورد. انتقال پیوسته به معنی فشار دادن، کشیدن، پیچاندن، خم کردن و له کردن بدون جدا کردن یا چسباندن نقاط به یکدیگر می‌باشد. عموماً در بهینه‌سازی توپولوژی هدف تعیین مؤلفه‌هایی همچون تعداد و محل سوراخ‌ها بر روی سازه می‌باشد. مسئله پیدا کردن ترکیب بهینه اعضا و اتصالات یک سازه اسکلتی نیز در این دسته قرار می‌گیرد. به عنوان مثال برای یک خرپا اگر سطح مقطع اعضای خرپا را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر بگیریم و اجازه دهیم که این متغیرها مقدار صفر را بگیرند، یا به عبارتی به میله‌ها اجازه دهیم که از خرپا برداشته شوند، این مسئله را

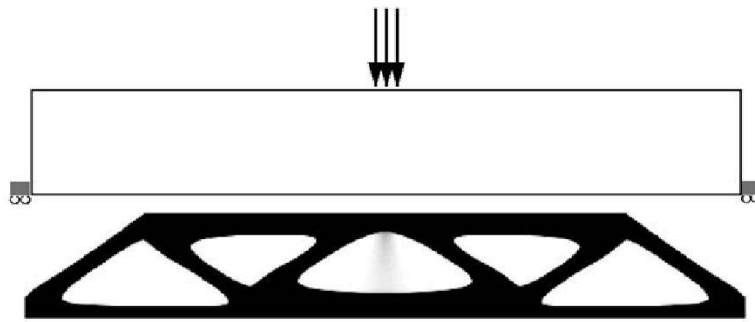
می‌توان به عنوان بهینه‌سازی توپولوژی در نظر گرفت. به این ترتیب با توجه به اینکه اتصال گره‌ها در حال تغییر است، می‌توانیم بگوییم که توپولوژی خرپا تغییر می‌کند. اگر به جای یک سازه گسسته، یک سازه‌ی پیوسته مانند یک صفحه‌ی دوبعدی را در نظر بگیریم، در صورتی که اجازه دهیم ضخامت صفحه مقدار صفر را بگیرد آنگاه می‌توانیم بگوییم توپولوژی در حال تغییر است. اگر بخواهیم توپولوژی بهینه شود، آنگاه ضخامت باید تنها بتواند دو مقدار را بگیرد، یکی صفر و دیگری عدد ثابتی به عنوان حداکثر ضخامت صفحه. در حالت سه‌بعدی، وضعیت مشابه وقتی رخ می‌دهد که X متغیری با ماهیت چگالی باشد و تنها بتواند مقادیر صفر و یک را بگیرد. شکل (۳-۴) یک نمونه از بهینه‌سازی توپولوژی را نشان می‌دهد.

در حقیقت بهینه‌سازی شکل زیرمجموعه‌ای از بهینه‌سازی توپولوژی است، اما از آنجا که مسائل عملی مربوط به بهینه‌سازی شکل و توپولوژی، دارای تکنیک‌ها متفاوتی هستند، این دو را به صورت جداگانه بررسی می‌کنند. وقتی در مورد حل معادلات دیفرانسیل صحبت می‌کنیم، می‌توانیم بگوییم بهینه‌سازی شکل مربوط به کنترل حوزه‌ی معادله است، در حالی که بهینه‌سازی ابعادی و توپولوژی به کنترل پارامترهای آن مربوط می‌شوند.

مجموعه‌ی بهینه‌سازی ابعادی و شکل را بهینه‌سازی هندسی می‌گویند. [۱۷]



شکل (۳-۳): بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا [۱۶]



شکل (۳-۴): بهینه‌سازی توپولوژی یک تیر ساده [۱۶]

۳-۵-۲-۱- روش‌های معیار بهینگی

برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک می‌توان از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی غیرخطی استفاده نمود. این روش‌ها را می‌توان برای حل هر مسئله بهینه‌سازی از جمله بهینه‌یابی سازه‌ها به کار برد. زمانی که از این روش‌ها در بهینه‌سازی سازه‌ها استفاده می‌شود معمولاً به محاسباتی نظیر محاسبه تابع هدف، توابع قید و مشتقات آن‌ها نیاز است. از این رو زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات در روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی وابستگی زیادی به تعداد متغیرهای طراحی در مسئله دارد. بنابراین زمانی که تعداد متغیرهای طراحی زیاد باشد این روش‌ها بسیار زمان‌بر و پرهزینه می‌باشند.

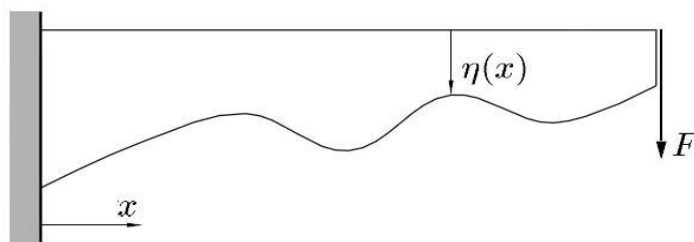
در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها تعداد متغیرهای طراحی وابسته به تعداد المان‌های تقسیم‌کننده فضای طراحی می‌باشد. از آنجایی که غالباً تعداد المان‌ها در یک مسئله بهینه‌سازی توپولوژیک زیاد است، بنابراین استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژیک سازه‌ها زمان‌بر و پرهزینه است. برای فائق آمدن بر این مشکل روش‌های معیار بهینگی پیشنهاد شده‌اند.

ایده‌ی روش‌های معیار بهینگی در سال ۱۹۰۴ توسط میشل [۱۸] معرفی شد و در سال‌های ۱۹۶۰ به بعد این روش‌ها در کنار روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی برای حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ها توسعه یافتند. روش‌های معیار بهینگی بر خلاف روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی که به طور مستقیم تابع

هدف را بهینه می‌کنند، به صورت غیرمستقیم برای اقلان مجموعه‌ای از معیارهای مرتبط با رفتار سازه تلاش می‌کنند. این معیارها یا به صورت درکی و یا با پایه و اساس ریاضی استخراج می‌شوند. روش‌های "طرح بر اساس تنش یکنواخت شده"^۱ و "طرح بر اساس مدهای خرابی همزمان"^۲ مثال‌هایی از روش‌های معیار بهینگی درکی می‌باشند. روش‌های معیار بهینگی که مبنای ریاضی دارند اغلب بر پایه شرایط بهینگی کان-تاکر^۳ استوار می‌باشند.

۳-۵-۳- بهینه‌سازی شکل سازه‌ها

بهینه‌سازی شکل با توسعه تحقیقات بر روی مسئله‌ی یافتن مرزهای بهینه‌ی سازه به وجود آمد. به عنوان نمونه می‌توان به یافتن مرزهای یک سازه‌ی مدل شده با استفاده از فرضیات تنش صفحه‌ای یا یافتن محل اتصالات یک سازه‌ی اسکلتی و یا یافتن مقادیر بهینه پارامترهایی که سطح متوسط یک سازه‌ی پوسته‌ای را تعریف می‌کنند اشاره کرد. به این دسته از مسائل، مسائل بهینه‌سازی شکل می‌گویند. در این گونه مسائل شکل حوزه ثابت نیست ولی توپولوژی حوزه ثابت است. بهینه‌سازی شکل را می‌توان به عنوان کاربرد بهینه‌سازی در مرحله طراحی اولیه در نظر گرفت. در شکل ۳-۶ یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل دوبعدی نشان داده شده است.



شکل (۳-۵): مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با یافتن تابع $\eta(x)$ که شکل تیر را مشخص می‌کند [۱۶]

در دو دهه‌ی اولیه‌ی بهینه‌سازی عددی سازه‌ها، تمرکز بر روی متغیرهای طراحی به اصطلاح ابعادی بود. متغیرهایی از قبیل ضخامت صفحه و سطح مقطع میله از آن جمله هستند که تغییر در

^۱ Fully Stressed Design Method

^۲ Simultaneous Failure Mode Design

^۳ Kuhn- Tucker

آن‌ها نیازی به تغییر در مدل اجزای محدود ندارد. مسائل بهینه‌سازی که در آن‌ها پارامترهای ابعادی متغیر طراحی هستند ساده‌تر از مسائلی هستند که در آن‌ها شکل متغیر طراحی است و هندسه سازه را کنترل می‌کند و معمولاً نیاز به مدل اجزای محدودی دارند که در طول بهینه‌سازی تغییر می‌کند. اما با این وجود در مسایل زیادی بهینه‌سازی شکل بسیار مؤثرتر از بهینه‌سازی ابعاد است، به عنوان مثال در مسئله تمرکز تنش در مرزهای یک صفحه سوراخ‌دار، بهینه‌سازی ابعادی، ضخامت صفحه در اطراف سوراخ را تغییر می‌دهد در حالی که بهینه‌سازی شکل منجر به تغییر در مرزهای شکل سوراخ می‌شود.

در مسایل بهینه‌سازی شکل با دو دسته مشکل مواجه هستیم : ۱- به دلیل تغییر مداوم مدل اجزای محدود مشکل است بتوانیم مطمئن شویم که صحت تحلیل اجزای محدود در طول روال طراحی در حد قابل قبول باقی می‌ماند. ۲- به دست آوردن مشتقات حساسیت مناسب بر حسب متغیرهای طراحی شکل گرانتر از حالتی است که آن‌ها را بر حسب متغیرهای طراحی ابعادی به دست آوریم.

دو دسته قید در شکل کلی فرمولبندی مسائل بهینه‌سازی شکل وجود دارند. یک دسته قیدهای صریح هستند که به طور صریح و مستقیم بر حسب متغیرهای طراحی بیان می‌شوند و یک دسته قیدهای ضمنی هستند که به طور ضمنی و غیر مستقیم بر حسب متغیرهای طراحی نوشته می‌شوند. [۱۹]

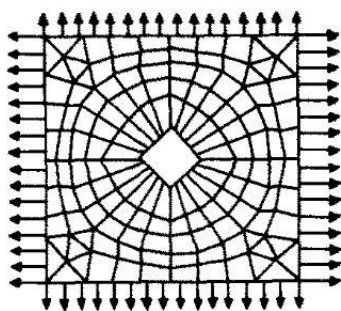
فرآیند بهینه‌سازی شکل شامل سه قسمت اصلی است: نمایش هندسی مسئله، تحلیل سازه و الگوریتم بهینه‌سازی. ابتدا باید نمایش هندسی مناسب برای شکل مرزها را انتخاب کنیم و مقادیر اولیه‌ای برای متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، سپس یک مدل تحلیلی مناسب مانند اجزای محدود یا اجزای مرزی برای تحلیل سازه انتخاب می‌کنیم. یک روش تحلیل مناسب باید قادر باشد اطلاعات لازم را جهت مرحله‌ی بهینه‌سازی در مورد مشتقات ضمنی بدهد. به عنوان مثال یک

الگوریتم معمولی بهینه‌سازی مرتبه اول به مقادیر توابع قید و حساسیت قیدها بر حسب هر متغیر طراحی نیاز دارد.

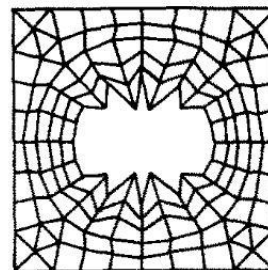
پس از انجام مرحله‌ی تحلیل الگوریتم بهینه‌سازی مقادیر جدیدی برای متغیرهای طراحی به ما می‌دهد. در نتیجه یک مدل طراحی جدید ساخته شده و به قسمت تحلیل برده می‌شود. از تحلیل مجدد مقادیر تابع و نتایج حساسیت قیدهای ضمنی برای طراحی جدید حاصل می‌شود. اگر معیار لازم برای خاتمه‌ی محاسبات ارضا شده بود، محاسبات متوقف می‌شود. در غیر اینصورت مرحله‌ی بهینه‌سازی نقطه‌ی طراحی جدیدی به ما می‌دهد.

۳-۵-۳-۱- انتخاب متغیرهای طراحی

در مسایل بهینه‌سازی شکل معمولاً تمرکز بر روی کاهش تنش در مرز با تغییر آن می‌باشد. اگر در انتخاب متغیرهای طراحی دقت نکنیم ممکن است مدل تحلیل در طول بهینه‌سازی خراب شود و به طرحی بیانجامد که مفید نیست. این اتفاق اغلب زمانی رخ می‌دهد که مختصات گره‌های مرزی مدل اجزای محدود را به عنوان متغیر طراحی انتخاب کنیم (شکل ۳-۷). حالت مشابهی در بهینه‌سازی ابعادی یک صفحه رخ می‌دهد (شکل ۳-۸). راه حل در هر دو مورد این است که از انطباق یک به یک بین مدل تحلیل و متغیرهای طراحی خودداری کنیم و مطمئن شویم که تعداد المان کافی جهت ارزیابی صحیح تنش وجود دارد [۱۹].

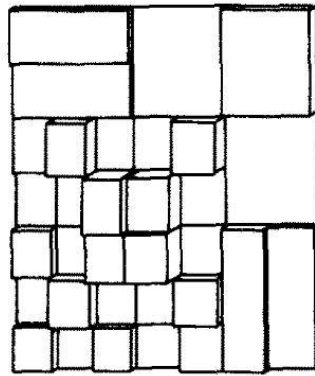


(الف)



(ب)

شکل (۳-۶): استفاده از گره‌های اجزا محدود به عنوان متغیرهای طراحی (الف) طرح اولیه (ب) طرح بهینه [۱۹]



شکل (۷-۳): استفاده از گره‌های اجزا محدود به عنوان متغیرهای طراحی در بهینه‌سازی ابعادی [۱۹]

استفاده از مختصات گرهی به عنوان متغیرهای طراحی به زودی متوقف شد زیرا تجربه نشان داد که با این کار نمی‌توان به مرز همواری دست پیدا کرد. بعلاوه نمی‌توان انتظار داشت که این کار نتایج صحیحی برای تنش تولید کند.

۳-۵-۲- استفاده از چند جمله‌ای‌ها جهت نمایش مرزها

بیهاویکاتی و راماکریشنان [۲۰] از چند جمله‌ای‌ها جهت نشان دادن مرزهای شکل استفاده کردند و ضرایب چند جمله‌ای را بعنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند. رویکرد دیگر این بود که مرز را به صورت ترکیب خطی توابع شکل تعریف کنیم و ضرایب را بعنوان متغیرهای طراحی در نظر بگیریم، از اینرو کریستنسن و مدسن [۲۱] مرز را با استفاده از ترکیب خطی توابع متعامد در نظر گرفتند و ضرایب توابع را به عنوان پارامترهای طراحی در نظر گرفتند. محققین از چند جمله‌ای‌ها برای نمایش مرز استفاده کردند و ضرایب چند جمله‌ای را بعنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفتند، البته این متغیرها به خوبی با خواص مکانیکی قابل ارتباط نبودند. اگرچه این مدل همواری لازم را فراهم می‌کرد اما وقتی مرتبه‌ی چند جمله‌ای بالا می‌رفت می‌توانست منجر به ایجاد مرزهای نوسانی شود. بعلاوه چند جمله‌ای‌ها قادر به نمایش شکل‌های کلی نیستند و تنها می‌توانند خانواده‌ی منحنی‌های درجه دو، سه و غیره را نشان دهند. از نقطه نظر طراحی مشکل دیگر عدم

کنترل محلی بر منحنی بود. تغییر در یکی از ضرایب چند جمله‌ای باعث تغییر در کل منحنی می‌شد [۱۰].

۳-۵-۳- استفاده از اسپلاین‌ها جهت نمایش مرزها

استفاده از چند جمله‌ای‌های مرتبه بالا می‌تواند منجر به ایجاد شکل با مرز نوسانی شود. اسپلاین‌ها این مشکل را حذف کردند زیرا این توابع ترکیبی از چند جمله‌ای‌های مرتبه پایین هستند که با هم ترکیب شده‌اند تا حداکثر همواری را در مرزها به وجود آورند.

تابع اسپلاین درجه سه که دارای دو مشتق پیوسته می‌باشد و حداقل میانگین انحنای دارد یک انتخاب طبیعی برای تعریف مرز می‌باشد. یانگ و چوی نشان دادند که در حالتی که از توابع اسپلاین استفاده می‌کنیم حساسیت دارای دقت بیشتری نسبت به حالتی است که از فرم نمایش خطی تکه‌ای استفاده می‌کنیم. برایینت و همکاران از توابع مخلوط ب - اسپلاین و بزیر برای توصیف مرزهای المان طراحی استفاده کردند. توابع مخلوط انعطاف پذیری بالایی جهت نمایش هندسه ایجاد کردند. با استفاده از فرمول‌های ب - اسپلاین نظم و قاعده مورد نیاز برای مرز به دست آمده و فرمولبندی تحلیلی مشتقات حساسیت نیز ممکن شد. [۸]

۳-۵-۴- استفاده از نرېز^۱ در روش آیزوژئومتری

با وجود اینکه استفاده از اسپلاین‌ها برای مدل کردن مرز بخشی از مشکلات را حل کرده بود اما وجود دوگانگی در حل همچنان وجود داشت. در این روش، رویکرد نسبت به حل مسائل بهینه سازی شکل به کلی تغییر کرد و روش آیزوژئومتری برای تحلیل مورد استفاده قرار گرفت. در این روش از توابع نرېز هم برای مدل هندسی و هم برای تحلیل استفاده می‌شود و مختصات نقاط کنترلی به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به اینکه این روش موضوع اصلی این

^۱Non-Uniform Rational B-Splines

گزارش می‌باشد و در بخش قبل در مورد آن توضیح داده شده در این قسمت بیش از این در مورد آن توضیح نمی‌دهیم و کاربرد آن در بهینه‌سازی را به بخش بعد موکول می‌کنیم.

در جدول ۳-۱ خلاصه‌ای از انواع مدل‌های ارائه شده برای حل مسائل بهینه‌سازی شکل آمده است.

جدول (۳-۱): مدل‌های ارائه شده برای بهینه‌سازی شکل

سال ارائه	متغیرهای طراحی	روش تحلیل	مدل هندسی مرزی	ارائه‌کنندگان مدل
۱۹۷۳	مختصات گره‌های مرزی	اجزا محدود	شبکه اجزا محدود	زینکویچ ^۱ و کمبل ^۲ [۲۲]
۱۹۸۰	ضرایب چند جمله‌ای	اجزا محدود	توابع چند جمله‌ای	بیهاویکاتی ^۳ و راماکریشنان ^۴
۱۹۸۳	مختصات نقاط کنترلی	اجزا محدود	توابع اسپلاین	برایبنت ^۵ و همکاران
۱۹۹۳	مختصات نقاط کنترلی	اجزا محدود	توابع نریز	اسکرم ^۶ و پیلکی ^۷ [۲۳]
۲۰۰۸	مختصات نقاط کنترلی	آیزوژئومتری	توابع نریز	وال ^۸ و همکاران

برای مروری مختصر بر بهینه‌سازی شکل می‌توانید به مقاله‌ی هافکا و گرانبجی^۹ [۱۹] و مقاله‌ی

لیانگ سو^{۱۰} [۱۰] مراجعه کنید. در این پایان‌نامه بهینه‌سازی سه‌بعدی آیزوژئومتری شکل سازه‌ها

مد نظر قرار گرفته که برای اولین بار توسط روش مجانب‌های متحرک با در نظر گرفتن مشتقات

^۱Zienkiewicz

^۲Campbel

^۳Bhavikatti

^۴Ramakrishnan

^۵Braibent

^۶Schramm

^۷Pilkey

^۸Wall

^۹Grandhi

^{۱۰}Yeh-Liang Hsu

حساسیت انجام می‌شود. قبل از این بر روی بهینه‌سازی سازه‌ای سه‌بعدی شکل سازه‌ها تحقیقات متعددی انجام شده که تعدادی از آن‌ها در مراجع [۳۱-۲۴] در دسترس هستند.

فصل چهارم

تحليل حساسيت

۴-۱- مقدمه

تحلیل حساسیت^۱ را می‌توان به این شکل تعریف کرد، که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های مسئله را مطالعه می‌کند. به این وسیله می‌توان میزان تغییرات خروجی‌های مسئله را بر اساس تغییرات در ورودی‌های مختلف از نظر کمی و کیفی تعیین کرد. در حقیقت تحلیل حساسیت یک فاکتور کلیدی برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی می‌باشد.

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی مثل مسائل بهینه‌سازی تو در تو که در آن‌ها مجموعه‌ای از تقریب‌های مرتبه اول صریح را حل می‌کنیم و روش MMA نیز از این دست روش‌ها می‌باشد، نیاز داریم تا از تابع هدف و توابع قید بر حسب متغیرهای طراحی مشتق‌گیری نماییم و اصطلاحاً حساسیت تابع هدف و توابع قید را نسبت به متغیرهای طراحی به دست آوریم. اصولاً این گونه روش‌ها به دلیل انجام تحلیل حساسیت از سایر روش‌ها بسیار سودمندتر هستند و بسیار سریع‌تر پاسخ را برای ما به دست می‌دهند. زیرا با تعیین مشتقات حساسیت می‌توانیم بر حسب شدت اثر تغییرات یک متغیر بر روی تابع هدف و توابع قید، متغیری را انتخاب کرده و تغییر دهیم که تغییرات در آن، شدت بیشتری بر روی تابع هدف و توابع قید داشته باشد و در نتیجه خود را سریعتر به جواب نزدیک کنیم. از این رو در این پایان‌نامه روش MMA برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل انتخاب شده و تحلیل حساسیت به عنوان بخش مهمی از آن انجام شده است.

یک روش ساده برای محاسبه‌ی مشتق پاسخ نسبت به متغیرهای طراحی روش تفاضل محدود است. برای تابع $u(x)$ تقریب تفاضل محدود پیشرو $\Delta u / \Delta x$ برای مشتق du/dx به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} \quad (۴-۱)$$

^۱Sensitivity Analysis

با توجه به این فرمول مشاهده می‌شود که محاسبه‌ی $\Delta u / \Delta x$ مستقل از محاسبه تابع است و این مطلب باعث می‌شود استفاده از روش تفاضل محدود ساده باشد. بعلاوه این روش برای همه‌ی روش‌های تحلیل سازه‌ای (بعنوان مثال برای اجزای محدود یا اجزای مرزی) و همینطور انواع تحلیل (بعنوان مثال استاتیکی یا تحلیل مودی) قابل استفاده است زیرا به هیچگونه دانش تحلیلی در مورد تابع نیاز ندارد. با این وجود اگر تعداد متغیرهای طراحی زیاد باشد روش تفاضل محدود از لحاظ محاسباتی روش گرانی است زیرا اگر بخواهیم مشتقات پاسخ سازه را نسبت به n متغیر طراحی به دست آوریم در روش تفاضل محدود پیشرو به n تحلیل اضافی نیاز داریم و در روش تفاضل محدود مرکزی نیز به $2n$ تحلیل اضافی. علاوه بر این رویکرد تفاضل محدود اغلب دارای مشکل دقت است. روش آنالیز حساسیت تحلیلی روش مؤثرتری است. دو رویکرد مختلف در این زمینه وجود دارد، یکی رویکرد مشتق‌گیری ضمنی و دیگری رویکرد تغییراتی. مشتق‌گیری ضمنی بر اساس فرمولبندی گسسته سیستم سازه‌ای است.

در نتیجه $\partial u / \partial x_i$ را می‌توان با محاسبه‌ی $\partial K / \partial x_i$ به دست آورد. مشتق $\partial K / \partial x_i$ را می‌توان به صورت تحلیلی نسبت به متغیرهای ابعادی همچون ضخامت، سطح مقطع و ممان اینرسی به دست آورد. اما محاسبه‌ی تحلیلی آن برای متغیرهای طراحی شکل بسیار سخت است، زیرا تغییر در متغیرهای طراحی شکل باعث می‌شود هندسه‌ی المان و در نتیجه کل ماتریس سختی K تغییر کند. در نتیجه $\partial K / \partial x_i$ به روش تفاضل محدود محاسبه می‌شود. به این روش، روش نیمه تحلیلی گفته می‌شود. اگرچه این روش حل معادله‌ی ماتریسی $Ku = f$ را حذف می‌کند، اما همچنان گران است. زیرا باید با هر تغییر در متغیرهای طراحی ماتریس سختی را دوباره از نو بسازیم. بعلاوه هافکا و همکاران [۳۲] گزارش کردند که دقت روش نیمه-تحلیلی حتی از روش تفاضل محدود نیز کمتر است. مشکل دیگر با رویکرد مشتق‌گیری ضمنی دشواری استفاده از آن در برنامه‌های اجزا محدود با رویکرد کلی است.

رویکرد تغییراتی بر اساس مشتق گیری کلی از معادله حالت تغییراتی است. هافکا و همکاران رویکرد تغییراتی را بررسی کرده اند. اجرای این رویکرد با سختی کمتری همراه است، زیرا بیان تحلیلی برای حساسیت تنها به کمیت های حل مرزی بستگی دارد که معمولاً از برنامه های تحلیل در دسترس هستند. اشکال اولیه این است که این کمیت ها به سختی به صورت صحیح به دست می آیند.

۴-۲- روش های تعیین مشتقات حساسیت

به طور کلی سه روش برای تعیین مشتقات حساسیت وجود دارد: ۱- روش تفاضل محدود ۲- روش تحلیلی ۳- روش نیمه تحلیلی.

یک معیار برای انتخاب روش، میزان دقت روش انتخابی است. مسلماً میزان دقت^۱ حساسیت می تواند بر حل مسئله بهینه سازی، تعداد حلقه های تکرار مسئله و میزان همگرایی آن تاثیر بگذارد. لازم به ذکر است که بین دقت و سازگاری^۲ تفاوت وجود دارد. اصولاً دقت در اینجا اینگونه تعریف می شود، که تفاوت بین مشتقاتی که ما به دست می آوریم و مشتقات حاصل از حل دقیق بر پایه ی معادلات پیوسته است. همچنین سازگاری را به عنوان تفاوت بین مشتقاتی که ما به دست می آوریم و مشتقات حاصل از مدل عددی، تعریف می کنیم.

دو عامل دیگر در انتخاب روش مناسب برای تحلیل حساسیت موثرند، که یکی میزان هزینه ی محاسبات و دیگری سختی اجرای آن است [۱۹].

شکل کلی مسئله ی بهینه سازی را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{cases} \min \hat{g} \cdot (x) = g \cdot (x, \bar{u}(x)) \\ \text{s.t. } \hat{g}_i(x, \bar{u}(x)) \leq 0, \quad i = 1, \dots, l \end{cases} \quad (2-4)$$

$$x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : x_j^{\min} \leq x_j \leq x_j^{\max}, j = 1, 2, \dots, n\}$$

^۱ Accuracy

^۲ Consistency

که در آن $\bar{u}$ تابعی ضمنی از x است، که از معادلات تعادل $K(x)\bar{u}(x) = F(x)$ به دست می‌آید. حال با این تعریف به توضیح هریک از سه روش می‌پردازیم:

۴-۲-۱- روش عددی (تفاضل محدود)

در روش عددی برای تعیین مشتقات حساسیت از تفاضل محدود استفاده می‌شود. برای این منظور می‌توان از هریک از دو روش تفاضل پیشرو و تفاضل مرکزی استفاده کرد. تفاضل پیشرو را می‌توان از فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} \approx D_f = \frac{\hat{g}_i(x^k + h e_j) - \hat{g}_i(x^k)}{h} \quad (3-4)$$

مشتقات ناشی از تفاضل محدود با گام‌های بزرگ، دارای خطاهای ناشی از کوتاه‌سازی^۱ هستند. به عبارت دیگر یکی از دلایل خطاهای کوتاه‌سازی صرفنظر کردن از برخی عبارت‌ها در بسط سری تیلور است. با کاهش مقدار گام‌ها می‌توان این خطا را کاهش داد. اما از سوی دیگر اگر گام‌ها را کوچک انتخاب کنیم خطاهای شرطی^۲ زیاد خواهند شد. خطای شرطی در حقیقت تفاضل بین ارزیابی عددی تابع و مقدار دقیق آن است. بزرگ‌ترین منبع این نوع خطا، خطاهای محاسباتی مانند خطاهای ناشی از گرد کردن و خطاهای ناشی از شرایط ضعیف در مسئله هستند. در نتیجه انتخاب مقدار مناسب برای گام‌های مسئله از نکات مهم در حل به روش تفاضل محدود است.

جهت استفاده از این روش، پس از اینکه مقدار تابع $\hat{g}_i$ به ازای x^k به دست آمد، لازم است تا مقدار x^k را به اندازه‌ی h افزایش دهیم و دوباره مقدار تابع را به ازای آن محاسبه کنیم. در نتیجه اگر تعداد n متغیر طراحی داشته باشیم، لازم است مقدار توابع موجود (شامل تابع هدف و توابع قید) را به تعداد $2n$ مرتبه انجام دهیم و این مسئله حجم محاسبات را بسیار بالا خواهد برد.

تفاضل مرکزی را نیز می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

^۱Truncation Errors

^۲Condition Errors

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} \approx \frac{\hat{g}_i(x^k + h e_j) - \hat{g}_i(x^k - h e_j)}{2h} \quad (4-4)$$

این تقریب، تقریبی دقیق‌تر از تفاضل پیشرو به دست می‌دهد. اما جهت محاسبه‌ی آن لازم است n بار تحلیل اضافی انجام شود، که این مطلب هزینه‌ی محاسبات را بالا خواهد برد.

در برابر مشکلاتی که برای روش عددی تعیین مشتقات حساسیت، با تقریب تفاضل محدود ذکر شد شاید تنها ویژگی که بتوان ذکر کرد، ساده بودن اجرای محاسبات با این روش باشد.

۴-۲-۲- روش تحلیلی

در روش تحلیلی از تعریف مشتق و محاسبه‌ی آن جهت تعیین حساسیت‌ها استفاده می‌کنیم. به این ترتیب لازم است ابتدا با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق، $\partial \hat{g}_i(x^k) / \partial x_j$ را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i(x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i(x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} \quad (5-4)$$

در این بخش دو روش تحلیلی متفاوت بررسی خواهد شد. یکی روش مستقیم و دیگری روش الحاقی.

۴-۲-۲-۱- روش تحلیلی مستقیم^۱

در روش مستقیم $\partial \bar{u}(x^k) / \partial x_j$ با مشتق‌گیری از معادلات تعادل به دست می‌آید:

$$\frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) + K(x^k) \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} \quad (6-4)$$

که می‌توان این فرمول را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$K(x^k) \frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \quad (7-4)$$

^۱ Direct Analytical Method

به عبارت سمت راست معادله‌ی فوق شبه بار^۱ گفته می‌شود. اگر برای تعیین $\frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j}$ معادله‌ی بالا به جای استفاده از روش‌های *iterative* به صورت مستقیم حل گردد، روش حاصل روش مستقیم خواهد بود.

به عنوان مثال اگر مینیمم کردن انرژی کرنشی^۲ به عنوان هدف در نظر گرفته شود:

$$\hat{g} \cdot (x) = g \cdot (x, \bar{u}(x)) = F(x)^T \bar{u}(x) \quad (۸-۴)$$

خواهیم داشت:

$$\frac{\partial g \cdot (x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial x_j} = \frac{\partial F(x^k)^T}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \quad (۹-۴)$$

$$\frac{\partial g \cdot (x^k, \bar{u}(x^k))}{\partial \bar{u}} = F(x^k)^T \quad (۱۰-۴)$$

$$\frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j} = K(x^k)^{-۱} \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \quad (۱۱-۴)$$

که با جایگذاری در رابطه‌ی (۵-۴) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} &= \frac{\partial F(x^k)^T}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) + F(x^k)^T K(x^k)^{-۱} \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \\ &= {}^{\gamma} \bar{u}(x^k)^T \frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \bar{u}(x^k)^T \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \end{aligned} \quad (۱۲-۴)$$

روش تحلیلی الحاقی^۳ - ۲-۲-۲-۴

می‌دانیم:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \frac{\partial g_i}{\partial u} K(x^k)^{-۱} \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \quad (۱۳-۴)$$

^۱Pseudo Load

^۲Compliance

^۳Adjoint Analytical Method

اگر تابع λ_i را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u} K(x^k)^{-1} \right)^T = K(x^k)^{-1} \left(\frac{\partial g_i}{\partial u} \right)^T \quad (14-4)$$

در این روش ابتدا به حل معادله‌ی زیر برای تعیین λ_i می‌پردازیم:

$$K(x^k) \lambda_i = \left(\frac{\partial g_i}{\partial u} \right)^T \quad (15-4)$$

سپس با جایگذاری در رابطه‌ی زیر حساسیت به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \hat{g}_i(x^k)}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} + \lambda_i^T \left(\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j} - \frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j} \bar{u}(x^k) \right) \quad (16-4)$$

۴-۲-۳- مقایسه‌ی روش مستقیم و الحاقی

در روش مستقیم باید ابتدا معادله‌ی (۵-۴) را برای هر x_j حل کنیم (n بار) و سپس نتایج را در معادله‌ی (۷-۴) به تعداد $l+1$ مرتبه برای هر متغیر طراحی قرار دهیم. در روش الحاقی باید معادله‌ی (۱۵-۴) برای تابع هدف و هر تابع قید به اندازه‌ی $l+1$ مرتبه حل شود و نتیجه به تعداد n مرتبه برای هر تابع در (۱۶-۴) قرار داده شود. در نتیجه وقتی تعداد قیدها از متغیرهای طراحی کمتر است، روش الحاقی و وقتی متغیرهای طراحی از توابع قید بیشتر است، روش مستقیم مناسب‌تر است.

۴-۲-۴- محاسبه‌ی شبه بار در حالت دوبعدی

همانطور که در فصل قبل ذکر شد می‌توان هندسه‌ی مسئله و تغییر مکان‌ها را به شکل زیر درونیابی کرد:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \bar{N}P \quad (17-4)$$

$$U = \bar{N}P_U \quad (18-4)$$

می‌توانیم P و P_U که به ترتیب مختصات نقاط کنترلی و میزان تغییر مکان نقاط کنترلی هستند را به شکل زیر تعریف کنیم:

(۱۹-۴)

$$P = [P_{x\ 1,1} \quad P_{y\ 1,1} \quad P_{x\ 2,1} \quad P_{y\ 2,1} \quad \cdots \quad P_{x\ n,1} \quad P_{y\ n,1} \quad \cdots \quad P_{x\ n,m} \quad P_{y\ n,m}]^T$$

(۲۰-۴)

$$P_U = [P_{u\ 1,1} \quad P_{v\ 1,1} \quad P_{u\ 2,1} \quad P_{v\ 2,1} \quad \cdots \quad P_{u\ n,1} \quad P_{v\ n,1} \quad \cdots \quad P_{u\ n,m} \quad P_{v\ n,m}]^T$$

همچنین برای $\bar{N}$ داریم:

(۲۱-۴)

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & 0 & \cdots & R_{n,1} & 0 & \cdots & R_{n,m} & 0 \\ 0 & R_{1,1} & 0 & R_{2,1} & \cdots & 0 & R_{n,1} & \cdots & 0 & R_{n,m} \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی را نیز می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$K_e = t_e \int_{\hat{\Omega}} B^T C B |J| d\hat{\Omega} \quad (۲۲-۴)$$

همچنین ماتریس جابه‌جایی کرنشی B برابر است با:

$$B = D \times \bar{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}}{\partial x} & 0 & \cdots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{1,1}}{\partial y} & \cdots & 0 & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{1,1}}{\partial y} & \frac{\partial R_{1,1}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial y} & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۲۳-۴)$$

برای حالت تنش صفحه‌ای:

$$C = \frac{E}{(1-\nu)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \cdot \\ \nu & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 - \nu/\gamma \end{bmatrix} \quad (۲۴-۴)$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (25-4)$$

اگر فرض کنیم شکل منحنی‌های مرزی با متغیرهای طراحی α_i کنترل می‌شود، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial K_e}{\partial \alpha_i} = t_e \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{\partial B^T}{\partial \alpha_i} C B |J| + B^T C \frac{\partial B}{\partial \alpha_i} |J| + B^T C B \frac{\partial |J|}{\partial \alpha_i} \right) d\hat{\Omega} \quad (26-4)$$

برای تعیین مشتقات $\frac{\partial |J|}{\partial \alpha_i}$ و $\frac{\partial B^T}{\partial \alpha_i}$ ، ابتدا دو ماتریس اضافی را تعریف می‌کنیم:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}}{\partial x} & \frac{\partial R_{r,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{1,1}}{\partial y} & \frac{\partial R_{r,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (27-4)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1}}{\partial r} & \frac{\partial R_{r,1}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial r} \\ \frac{\partial R_{1,1}}{\partial s} & \frac{\partial R_{r,1}}{\partial s} & \dots & \frac{\partial R_{n,m}}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (28-4)$$

با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق داریم:

$$\hat{G} = JG \quad (29-4)$$

اگر P را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} P_{x1,1} & P_{x2,1} & \dots & P_{xn,1} & P_{xn,2} & \dots & P_{xn,m} \\ P_{y1,1} & P_{y2,1} & \dots & P_{yn,1} & P_{yn,2} & \dots & P_{yn,m} \end{bmatrix} \quad (30-4)$$

از معادله‌ی (۱۷-۴) داریم:

$$J = \hat{G}\hat{P} \quad (31-4)$$

اگر $\frac{\partial}{\partial \alpha_i}$ را با (') نشان دهیم، با توجه به اینکه $\hat{G}$ مستقل از متغیرهای طراحی است خواهیم داشت:

$$\cdot = \hat{G}' = J'G + JG' \quad (32-4)$$

$$J' = \hat{G}\hat{P}' \quad (33-4)$$

از معادلات (۲۹-۴)، (۳۲-۴) و (۳۳-۴) خواهیم داشت:

$$G' = -J^{-1}J'G = -J^{-1}\hat{G}\hat{P}'G = -G\hat{P}'G \quad (34-4)$$

همانطور که از جبر خطی می‌دانیم برای هر ماتریس غیرمنفرد^۱ A :

$$|A'| = |A| \operatorname{tr}(A^{-1}A') \quad (35-4)$$

در نتیجه برای $|J|'$ از معادلات (۳۵-۴)، (۳۳-۴) و (۲۹-۴) داریم:

$$|J'| = |J| \operatorname{tr}(J^{-1}J') = |J| \operatorname{tr}(J^{-1}\hat{G}\hat{P}') = |J| \operatorname{tr}(\hat{G}\hat{P}') \quad (36-4)$$

به طور خلاصه روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial G}{\partial \alpha_i} = -G \frac{\partial \hat{P}}{\partial \alpha_i} G \quad (37-4)$$

$$\frac{\partial |J|}{\partial \alpha_i} = |J| \operatorname{tr}\left(\hat{G} \frac{\partial \hat{P}}{\partial \alpha_i}\right) \quad (38-4)$$

با داشتن مشتق G به راحتی می‌توانیم مشتق B را نیز به دست آوریم. پس از تعیین این مشتقات

با جایگذاری در رابطه‌ی (۲۶-۴) مشتق K نسبت به متغیرهای طراحی به دست می‌آید.

۴-۲-۲-۵ حساسیت‌ها و محاسبه‌ی شبه بار در حالت سه بعدی

در حالت سه بعدی می‌توانیم هندسه و تغییر مکان‌ها را به ترتیب زیر به دست آوریم:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \bar{N}P \quad (39-4)$$

$$U = \bar{N}P_U \quad (40-4)$$

^۱ Non-Singular

که P و P_U مطابق روابط زیر به دست می آیند:

(۴۱-۴)

$$P = [P_{x_{1,1,1}} \quad P_{y_{1,1,1}} \quad P_{z_{1,1,1}} \quad \dots \quad P_{x_{n,1,1}} \quad P_{y_{n,1,1}} \quad P_{z_{n,1,1}} \quad \dots \quad P_{x_{n,m,l}} \quad P_{y_{n,m,l}} \quad P_{z_{n,m,l}}]^T$$

(۴۲-۴)

$$P_U = [P_{u_{1,1,1}} \quad P_{v_{1,1,1}} \quad P_{w_{1,1,1}} \quad \dots \quad P_{u_{n,1,1}} \quad P_{v_{n,1,1}} \quad P_{w_{n,1,1}} \quad \dots \quad P_{u_{n,m,l}} \quad P_{v_{n,m,l}} \quad P_{w_{n,m,l}}]^T$$

توابع پایه‌ی نربز و ماتریس سختی نیز همانند حالت دوبعدی به شکل زیر می باشند:

(۴۳-۴)

$$\bar{N} = \begin{bmatrix} R_{1,1,1} & 0 & 0 & \dots & R_{n,1,1} & 0 & 0 & \dots & R_{n,m,l} & 0 & 0 \\ 0 & R_{1,1,1} & 0 & \dots & 0 & R_{n,1,1} & 0 & \dots & 0 & R_{n,m,l} & 0 \\ 0 & 0 & R_{1,1,1} & \dots & 0 & 0 & R_{n,1,1} & \dots & 0 & 0 & R_{n,m,l} \end{bmatrix}$$

$$K_e = t_e \int_{\hat{\Omega}} B^T C B |J| d\hat{\Omega} \quad \text{تکرار (۲۲-۴)}$$

با توجه به معادله‌ی (۳۶-۲) در مورد ماتریس اپراتور دیفرانسیلی D ، برای ماتریس جابه‌جایی

کرنشی در حالت سه‌بعدی داریم:

$$B = D \times \bar{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۴۴-۴)$$

همچنین ماتریس ژاکوبین برابر است با:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (45-4)$$

مانند قبل برای ماتریس سختی داریم:

$$\frac{\partial K_e}{\partial \alpha_i} = t_e \int_{\hat{\Omega}} \left(\frac{\partial B^T}{\partial \alpha_i} C B |J| + B^T C \frac{\partial B}{\partial \alpha_i} |J| + B^T C B \frac{\partial |J|}{\partial \alpha_i} \right) d\hat{\Omega} \quad (46-4)$$

ماتریس‌های G و $\hat{G}$ به ترتیب در این حالت برابرند با:

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial y} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial z} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (47-4)$$

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial r} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial r} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial s} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial s} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial s} \\ \frac{\partial R_{1,1,1}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial R_{n,1,1}}{\partial t} & \dots & \frac{\partial R_{n,m,l}}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (48-4)$$

با تعریف P به شکل زیر:

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} P_{x1,1,1} & P_{x2,1,1} & \dots & P_{xn,1,1} & P_{xn,2,1} & \dots & P_{xn,m,l} \\ P_{y1,1,1} & P_{y2,1,1} & \dots & P_{yn,1,1} & P_{yn,2,1} & \dots & P_{yn,m,l} \\ P_{z1,1,1} & P_{z2,1,1} & \dots & P_{zn,1,1} & P_{zn,2,1} & \dots & P_{zn,m,l} \end{bmatrix} \quad (49-4)$$

می‌توانیم همان معادلات (۳۷-۴) و (۳۸-۴) را در حالت سه بعدی نیز به کار ببریم.

۴-۲-۳ روش نیمه تحلیلی

اگر در روش تحلیلی برای محاسبه $\frac{\partial \bar{u}(x^k)}{\partial x_j}$ و یا $\frac{\partial F(x^k)}{\partial x_j}$ و یا $\frac{\partial K(x^k)}{\partial x_j}$ از تفاضل محدود استفاده

شود (در روش تحلیلی) حاصل روش نیمه تحلیلی خواهد بود.

با استفاده از نتایج به دست آمده از این فصل و فرمولبندی سه بعدی تحلیل آیزوژئومتریک که در فصل دوم آمده است می‌توانیم بهینه‌سازی مسائل سه بعدی الاستیسیته را انجام دهیم. در فصل بعد بهینه‌سازی چند مسئله انجام شده و در این پایان‌نامه برای اولین بار از این روش‌ها برای بهینه‌سازی تعدادی مسئله‌ی سه بعدی استفاده شده است.

فصل پنجم

مثال‌های عددی

۵-۱- مقدمه

در این بخش جهت روشن‌تر شدن موضوع و ارزیابی میزان اثر بخشی تحلیل حساسیت در بهینه کردن جواب‌ها و سرعت حل و همچنین کارایی روش مجانب‌های جابه‌جاشونده چند مثال مرسوم حل شده‌اند. کلیه این مثال‌ها از مثال‌هایی انتخاب شده‌اند که در بسیاری از منابع بهینه‌سازی بررسی شده‌اند و در نتیجه حل تحلیلی و عددی آن‌ها به روش‌های مختلف موجود است و امکان مقایسه را برای ما فراهم می‌کند.

در کلیه این مثال‌ها کمینه کردن انرژی کرنشی به عنوان تابع هدف و حجم به عنوان قید طراحی در نظر گرفته شده است. شکل کلی مسئله بهینه‌سازی به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} \min \hat{g} \cdot (x) = g \cdot (x, \bar{u}(x)) = F(x)^T \bar{u}(x) \\ s. t. \quad V \leq V_{max}, \\ x_{min} \leq x_i \leq x_{max} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (۱-۵)$$

جهت تعیین مشتق تابع انرژی کرنشی می‌توان از فرمول (۴-۱۲) استفاده کرد.

مسئله ۵-۱: تیر طره

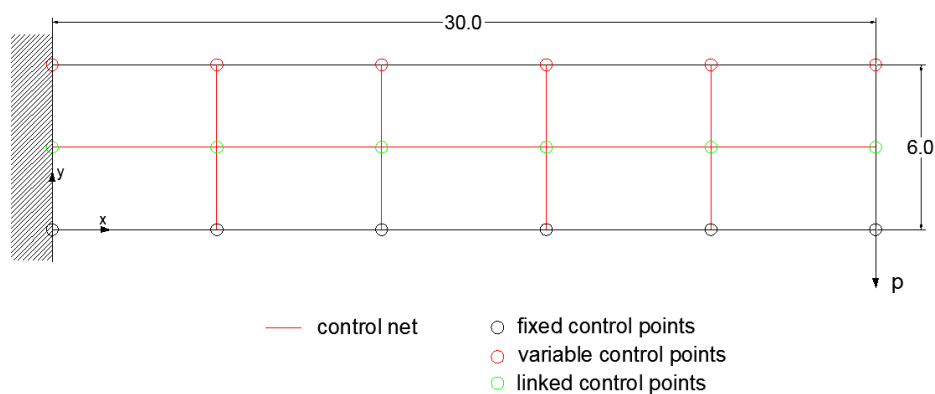
در این مثال تیر طره‌ای به ابعاد ۶ در ۳۰ در نظر گرفته شده که شامل ۶ نقطه‌ی کنترلی در جهت x و ۳ نقطه‌ی کنترلی در جهت y است. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب ۱۵۰۰۰۰۰ و ۰/۲۵ فرض شده‌اند. متغیرهای طراحی ۶ نقطه‌ی کنترلی روی مرز بالایی تیر هستند که مقادیر ۱/۵ و ۱۰ به عنوان کمترین و بیشترین مقدار برای آن‌ها انتخاب شده‌اند. حداکثر مقدار برای حجم تیر، ۷۰ درصد بیشترین حالت، یعنی ۲۱۰ در نظر گرفته شده است. بارگذاری روی نقطه‌ی انتهایی در قسمت پایین تیر انجام شده و مقدار آن ۱۰ می‌باشد. فضای مسئله به وسیله‌ی یک زیردامنه‌ی نریز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت x و y مدل شده است. وزن تمامی نقاط کنترلی ۱ در نظر گرفته شده که این کار باعث تبدیل سطوح نریز به سطوح ب-اسپلاین می‌شود.

بردارهای گرهی به شکل زیر در نظر گرفته شده‌اند:

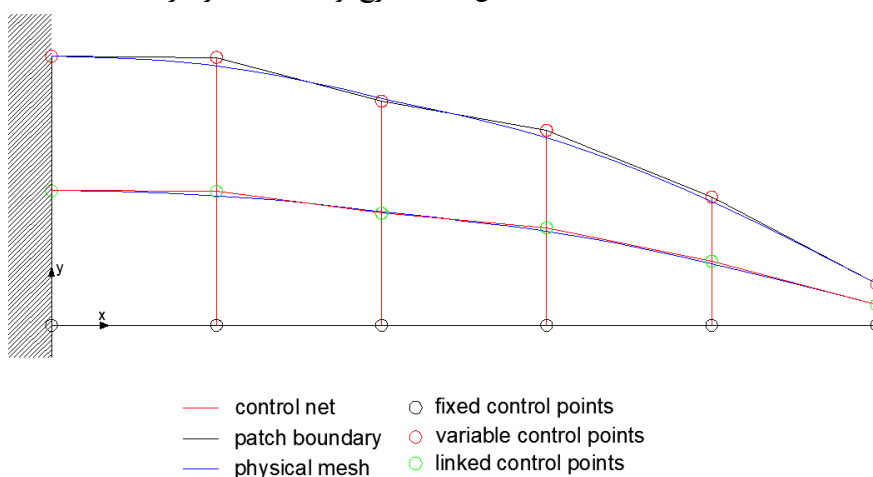
$$r = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$$

$$s = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

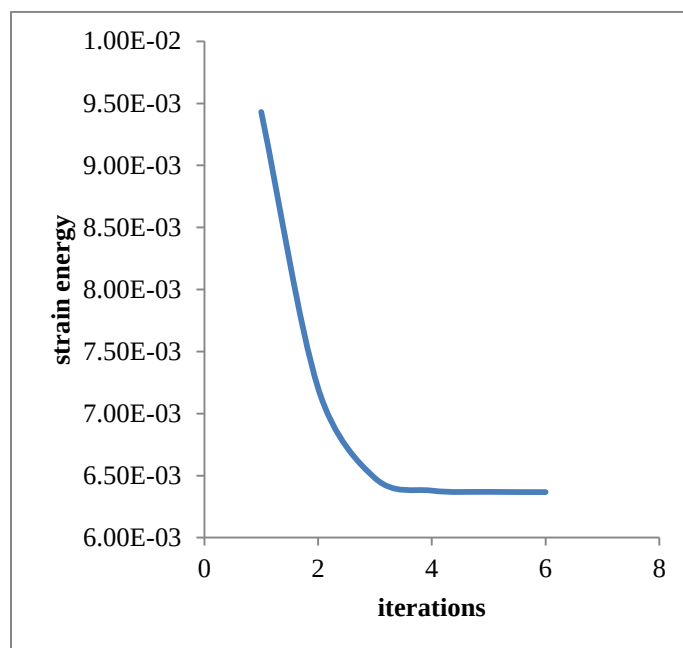
پس از ۴ مرحله تحلیل سازه شکل بهینه به صورت شکل (۲-۵) به دست می‌آید که به همراه نحوه‌ی توزیع تنش‌های فون میزس در شکل (۴-۵) ترسیم شده است. لازم به ذکر است ۶ نقطه‌ی کنترلی میانی به عنوان متغیرهای لینک شده هستند که مختصه‌ی قائم آن‌ها با ضریب ۰/۵ به مختصه‌ی قائم نقاط بالایی لینک شده است.



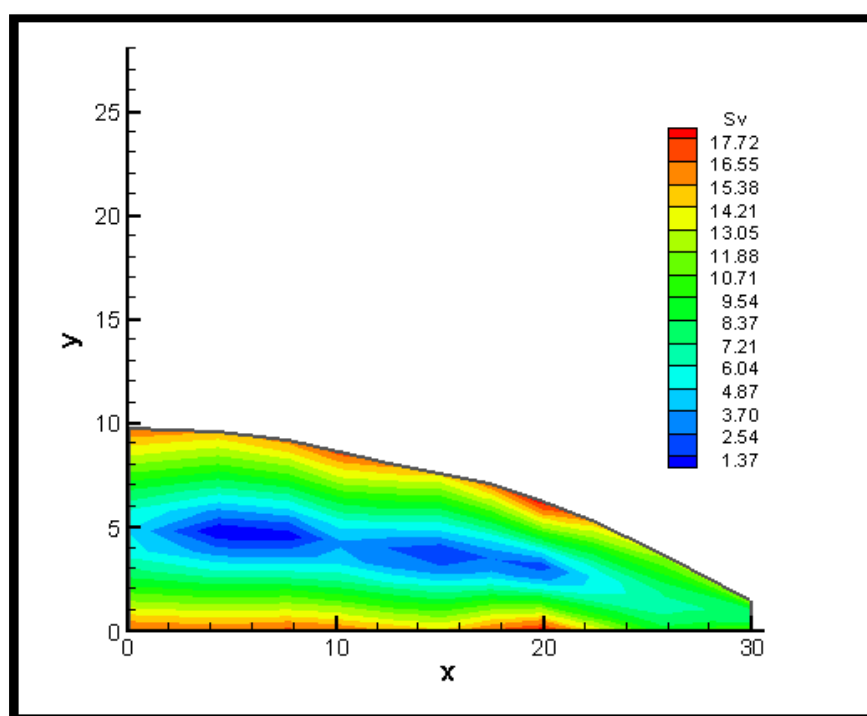
شکل (۱-۵): طرح اولیه مسئله تیر طره



شکل (۲-۵): طرح بهینه مسئله تیر طره

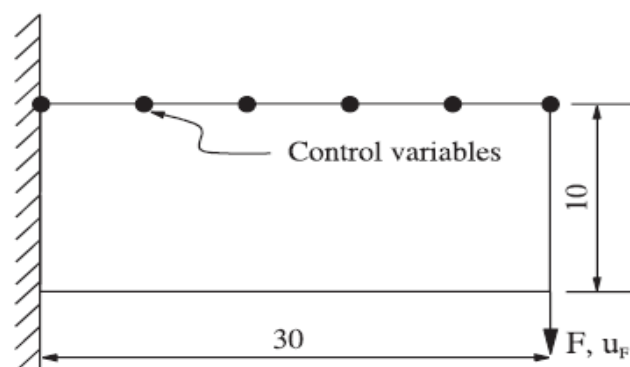


شکل (۳-۵): روند بهینه‌سازی شکل تیر طره



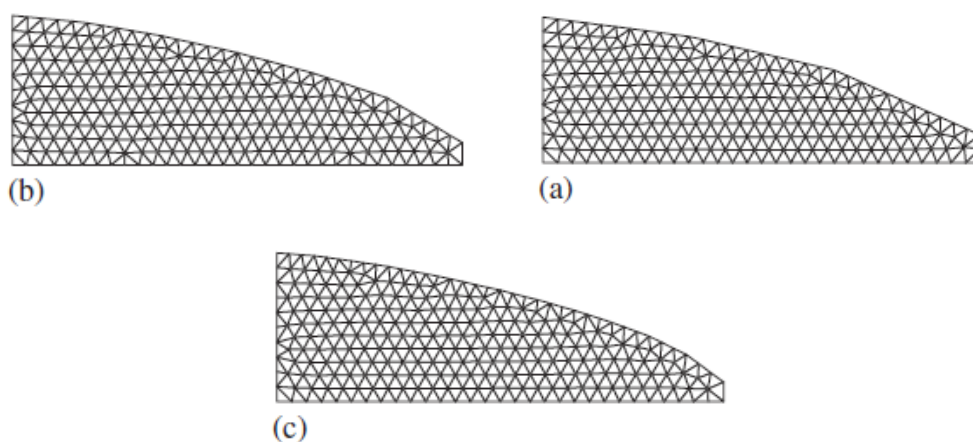
شکل (۴-۵): کانتورهای تنش فون میزس برای طرح بهینه مسئله تیر طره

در ادامه جهت مقایسه به مثال مشابه حل شده توسط ویلک و همکاران [۳۳] که به روش SQP حل شده و تحلیل آن توسط روش اجزای محدود انجام شده، اشاره می‌شود. در این مثال ابعاد تیر ۱۰ در ۳۰ در نظر گرفته شده، یک بار نقطه‌ای به مقدار ۱۰ در قسمت نوک تیر اعمال شده و هدف مینیمم کردن جابه‌جایی در محل اعمال بار می‌باشد، همچنین حجم به عنوان قید طراحی در نظر گرفته شده و به ۷۰ درصد حجم اولیه محدود شده است. جهت بازتولید شبکه المان‌های مثلی در نظر گرفته شده‌اند. نقاط کنترلی روی مرز بالایی مطابق شکل (۵-۵) متغیر طراحی هستند.



شکل (۵-۵): طرح اولیه مثال حل شده توسط ویلک و همکاران به روش اجزای محدود

نتیجه‌ی حاصل از بهینه‌سازی برای حالت‌هایی که ۴، ۷ و ۱۳ متغیر طراحی داشته باشیم به شکل (۵-۶) به دست می‌آیند.



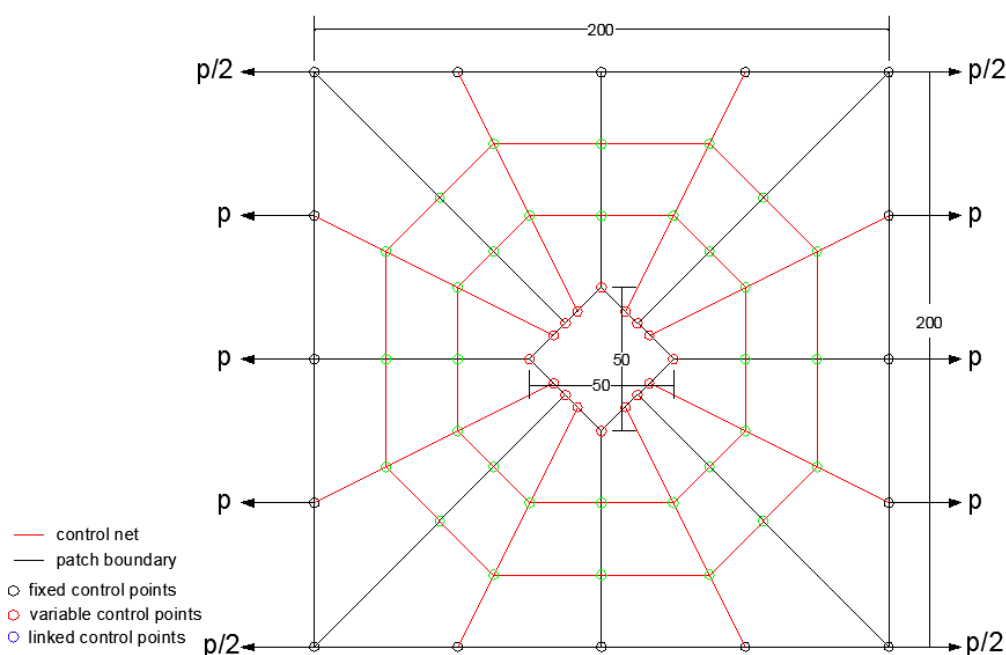
شکل (۵-۶): طرح بهینه مثال حل شده توسط ویلک و همکاران به روش اجزای محدود

مسئله ۵-۲: صفحه سوراخدار

در مثال دیگری یک صفحه‌ی سوراخدار برای تعیین شکل بهینه‌ی سوراخ مدل شده است. مدل اولیه برای صفحه به صورت شکل (۵-۷) می‌باشد. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب ۱۵۰۰۰۰ و ۰/۲۵ فرض شده‌اند و بارگذاری تنها بر روی دو لبه‌ی کناری صفحه به مقدار $p = ۱۲۵$ انجام شده تا بار گسترده‌ای به میزان $\sigma = ۲.۵$ را ایجاد کند.

به دلیل تقارن تنها یک چهارم صفحه در نظر گرفته شده و فضای دامنه توسط دو زیردامنه‌ی نریز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت X و Y مدل شده است. حجم به عنوان قید تقریباً برابر همان حجم اولیه در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه منحنی‌های $b -$ اسپلاین قادر به نمایش دقیق اشکالی همچون دایره و بیضی نیستند، بر خلاف مسئله‌ی قبل در این مسئله لازم است وزن برخی نقاط کنترلی عددی غیر از یک در نظر گرفته شود تا منحنی‌های نریز به دست آیند. برای این منظور وزن نقاط کنترلی در نقاطی که به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده‌اند به ترتیب زیر:

$$\{1, 0.9239, 1, 0.9239, 1\}$$

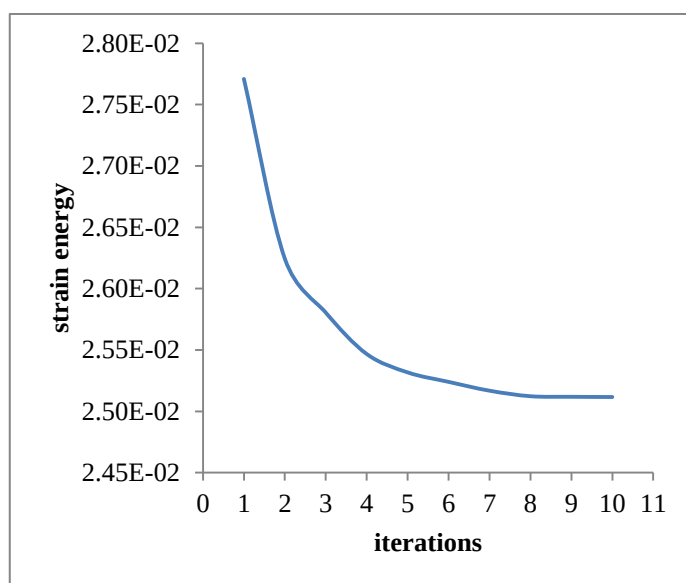


شکل (۵-۷): طرح اولیه مسئله صفحه سوراخدار

و در سایر نقاط یک در نظر گرفته شده است. بردارهای گرهی نیز به شکل زیر تعریف شده‌اند:

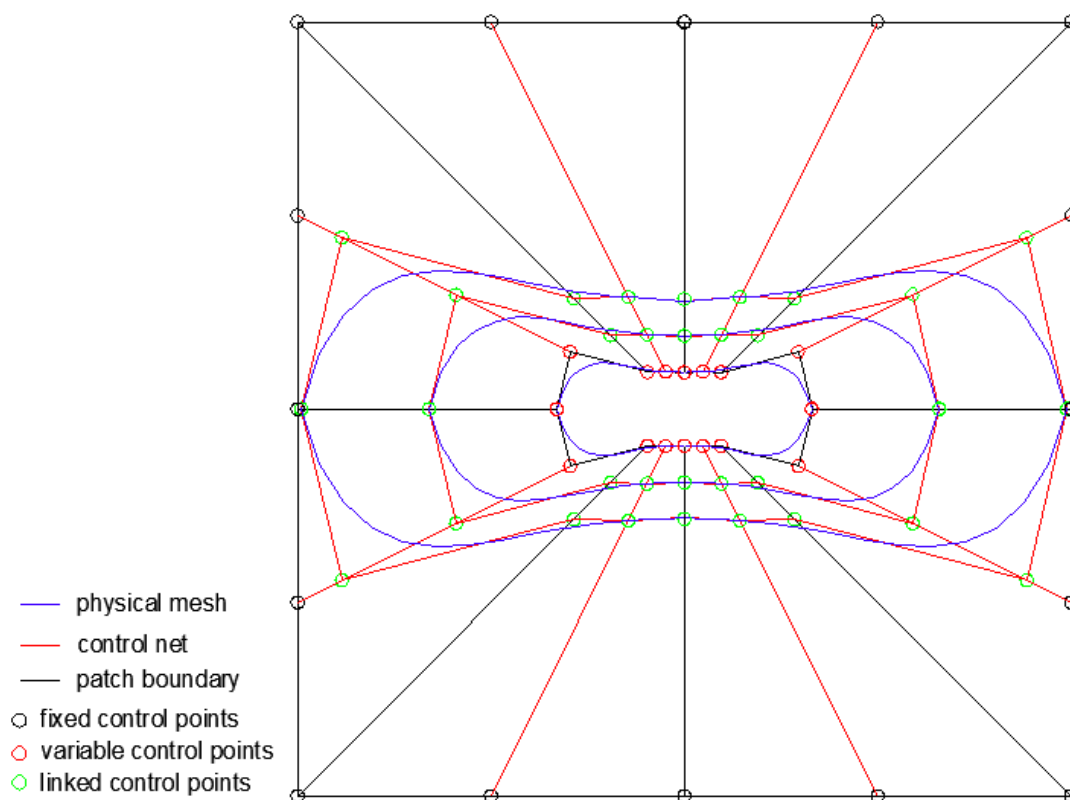
$$s = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \text{ و } r = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$$

پس از ۷ مرحله بهینه‌سازی، شکل بهینه به صورت شکل (۵-۹) به دست می‌آید که کانتورهای تنش فون میزس برای آن در شکل (۵-۱۰) رسم شده است.

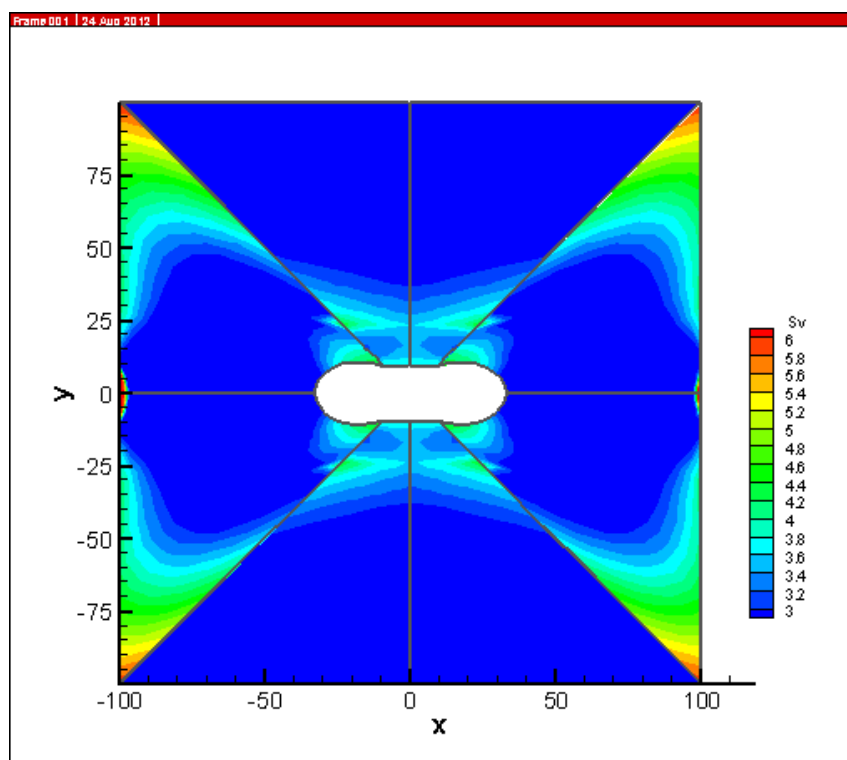


شکل (۵-۸): روند بهینه‌سازی صفحه سوراخدار

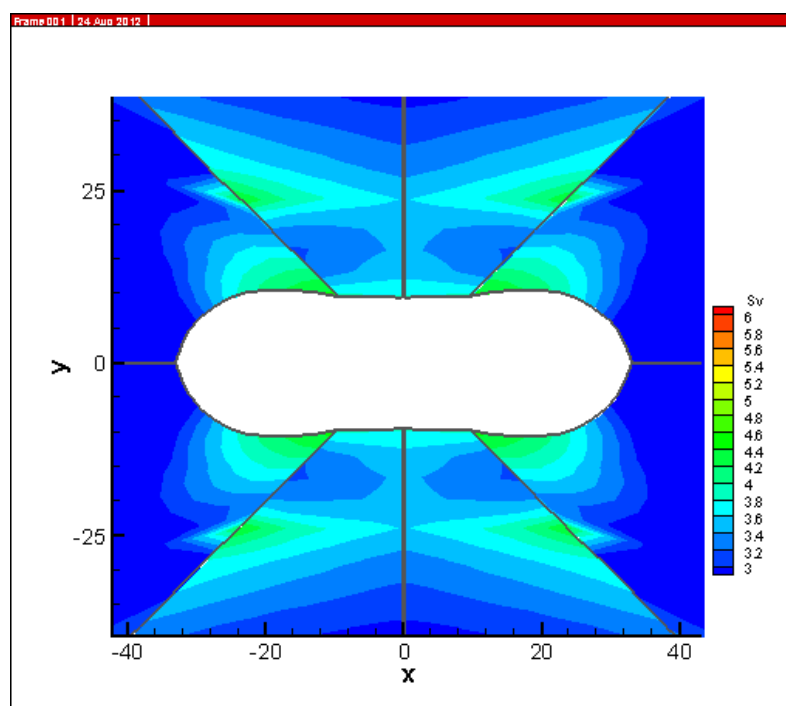
منحنی به دست آمده برای مرز سوراخ کاملاً همواری لازم را دارد، اما اگر نحوه بارگذاری روی این صفحه کاملاً گسترده و یکنواخت باشد از حل تحلیلی آن، برای مرز سوراخ شکل بیضی به دست می‌آید. همانطور که در شکل (۵-۹) مشاهده می‌شود با توجه به نحوه بارگذاری این نتیجه کمی با شکل بیضی اختلاف دارد. جهت بررسی این موضوع همین مسئله در قسمت بعد با تعداد زیردامنه‌های بیشتر حل شده است. شکل (۵-۱۱) توزیع تنش در نزدیکی مرز سوراخ را بهتر نشان می‌دهد.



شکل (۵-۹): طرح بهینه مسئله صفحه سوراخدار



شکل (۵-۱۰): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس صفحه سوراخدار



شکل (۵-۱۱): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس در نزدیکی سوراخ برای صفحه سوراخدار

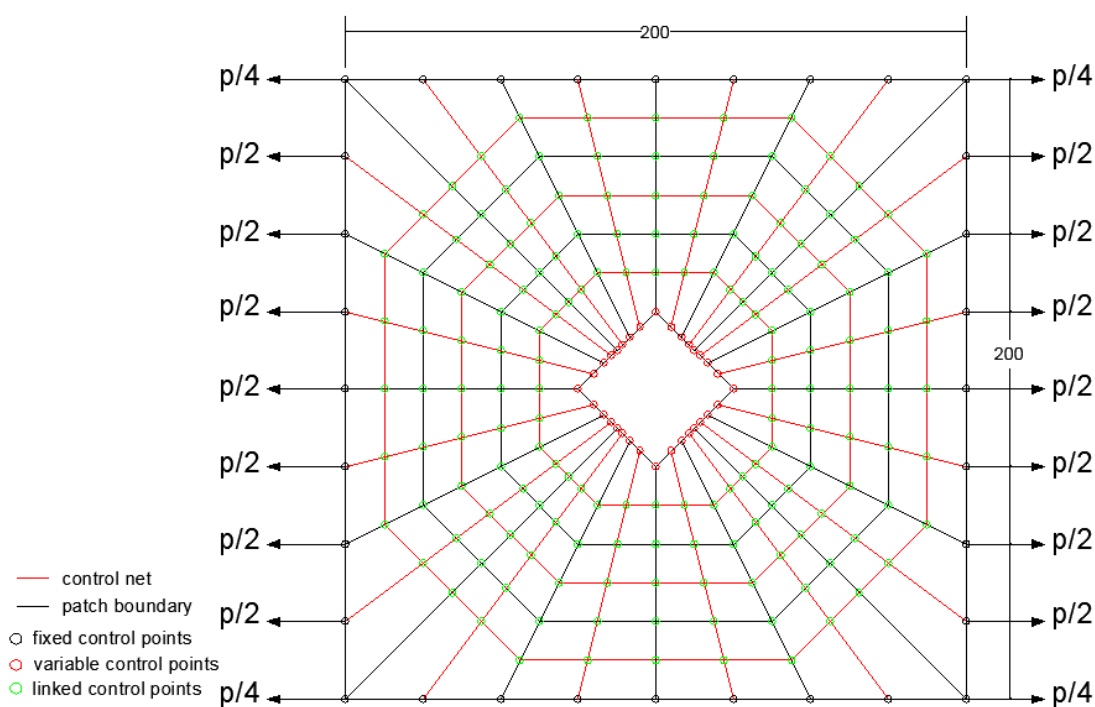
حل مسئله ۵-۲ با تعداد زیردامنه‌های بیشتر

همانطور که در شکل (۵-۱۱) مشاهده می‌شود، توزیع تنش در نزدیکی مرز سوراخ دارای مقداری ناموزونی می‌باشد. جهت رفع این مشکل و بررسی اثر افزایش تعداد زیردامنه‌ها، این بار مسئله را با ۱۲ زیردامنه‌ی نریز با مرتبه‌ی دو در دو جهت حل کرده‌ایم. این بار نیز تنها یک چهارم مسئله در نظر گرفته شده، حجم حداکثر تقریباً برابر حجم اولیه و تعداد نقاط کنترلی ۶۳ عدد می‌باشد. بردارهای گرهی در این مورد به شکل زیر می‌باشند:

$$s = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\} \text{ و } r = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

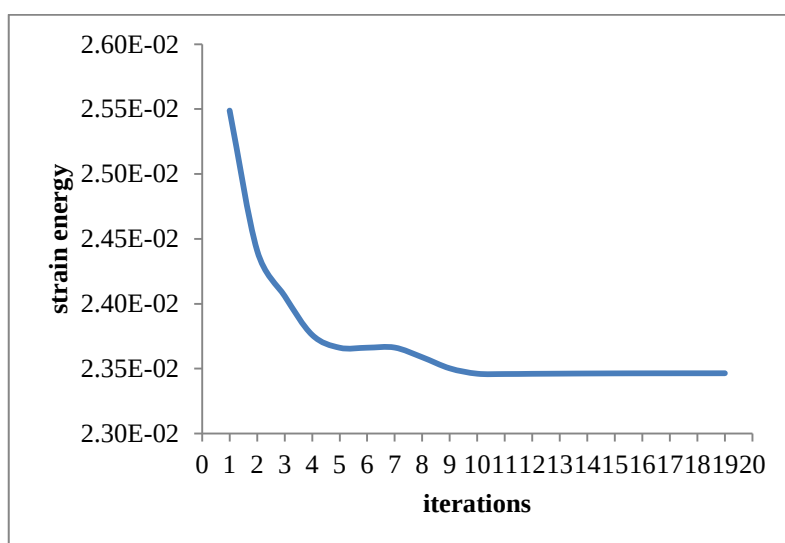
طرح اولیه برای مسئله در شکل (۵-۱۲) نمایش داده شده است. وزن نقاط کنترلی در نقاطی که به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده‌اند به ترتیب زیر است:

$$\{1, 0.9724, 1, 0.9877, 1, 0.9877, 1, 0.9724, 1\}$$

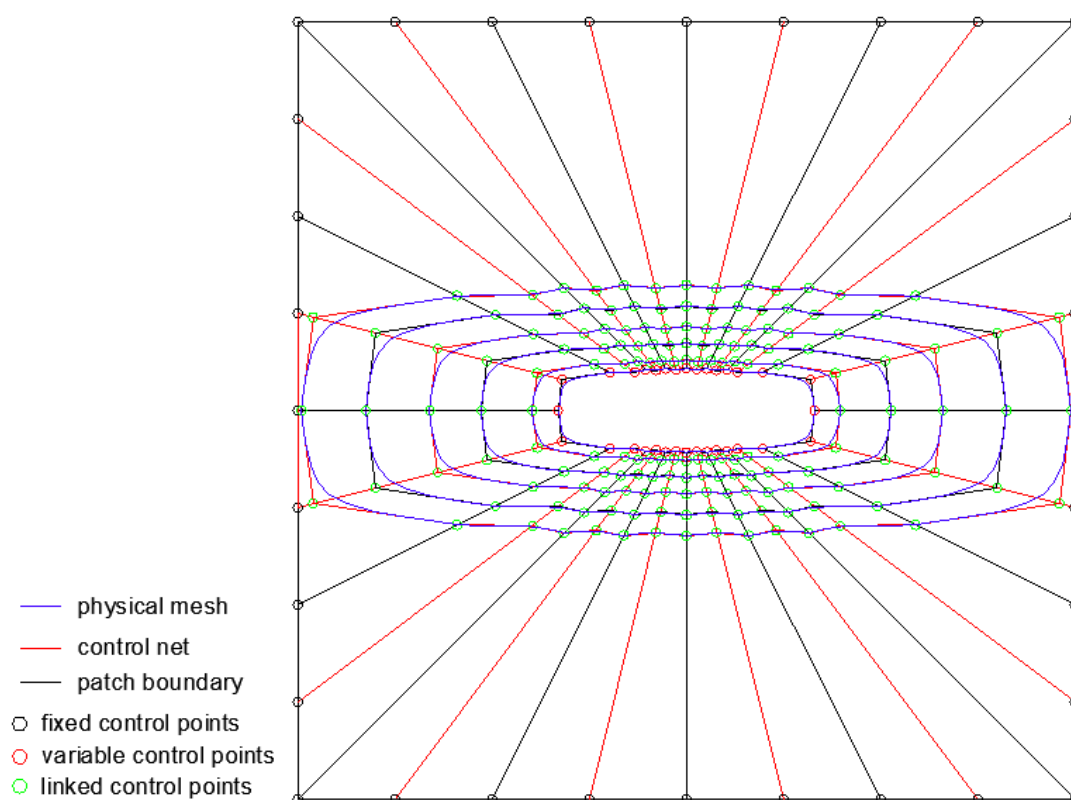


شکل (۵-۱۲): طرح اولیه مسئله صفحه سوراخدار با ۱۲ زیردامنه

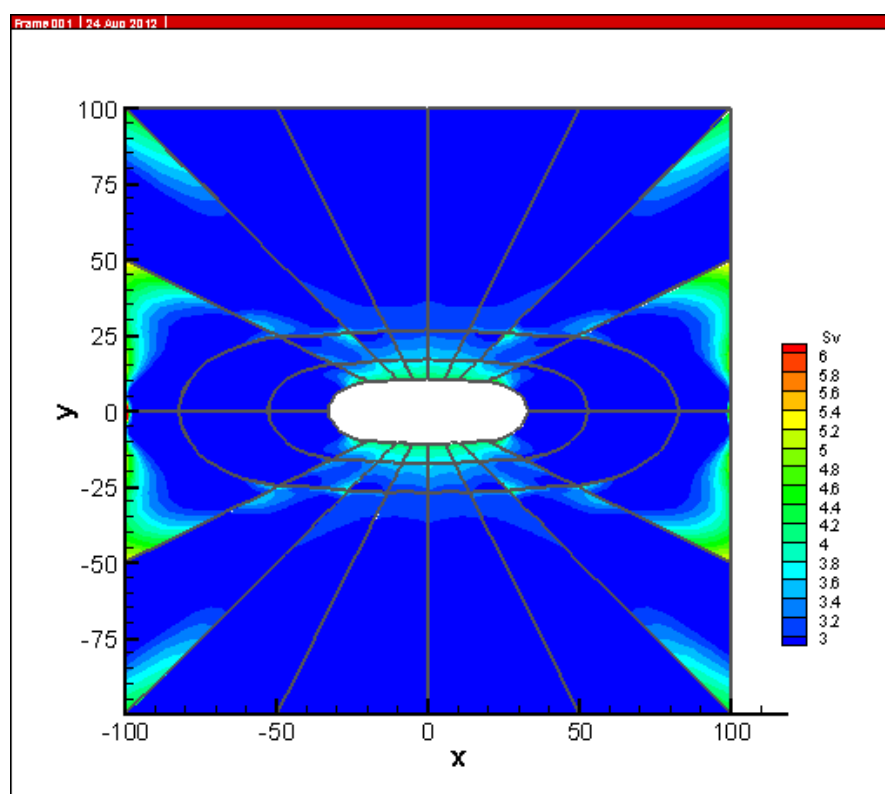
پس از ۱۱ مرحله بهینه‌سازی شکل بهینه به صورت شکل (۵-۱۴) به دست می‌آید. کانتورهای تنش نیز به ترتیب برای کل شکل و نزدیک مرز سوراخ در شکل‌های (۵-۱۵) و (۵-۱۶) رسم شده‌اند.



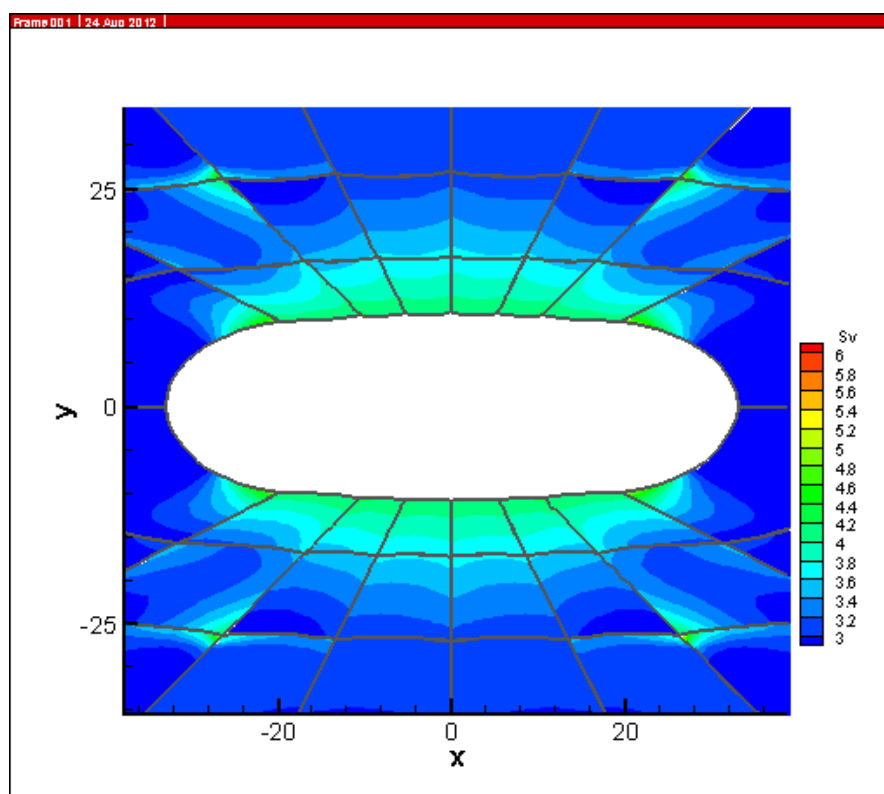
شکل (۵-۱۳): روند بهینه‌سازی صفحه سوراخدار



شکل (۵-۱۴): طرح بهینه مسئله صفحه سوراخدار

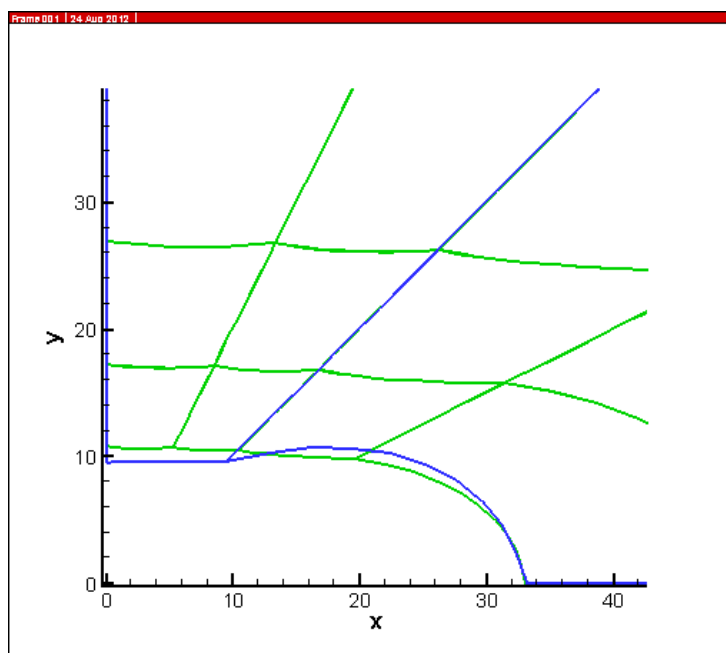


شکل (۵-۱۵): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس صفحه سوراخدار



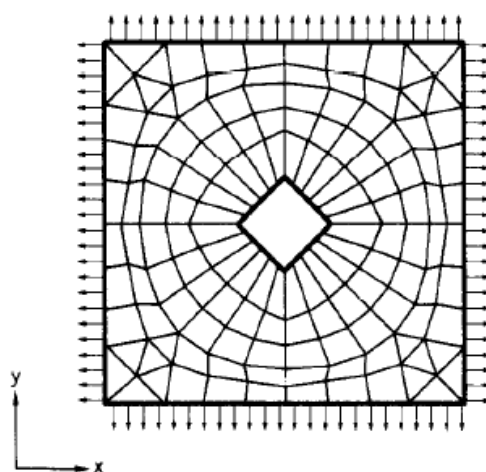
شکل (۵-۱۶): شکل بهینه و کانتورهای تنش فون میزس در نزدیکی سوراخ برای صفحه سوراخدار

همانطور که در شکل (۵-۱۶) مشاهده می‌شود با افزایش تعداد زیردامنه‌ها توزیع تنش یکنواخت‌تری در نزدیکی مرز سوراخ به دست آمده است. ضمن اینکه شکل مرز سوراخ کاملاً با نتیجه‌ی مورد انتظار همخوانی دارد. علت بهتر شدن جواب در این حالت توزیع یکنواخت‌تر و مناسب‌تر بار روی لبه‌ی کناری صفحه است، که با توجه به اینکه در نقاط بیشتری توزیع شده، اثر بهتری روی پاسخ‌ها داشته است. در نهایت شکل مرز سوراخ برای دو حالت جهت مقایسه به صورت همزمان در شکل (۵-۱۷) ترسیم شده است.

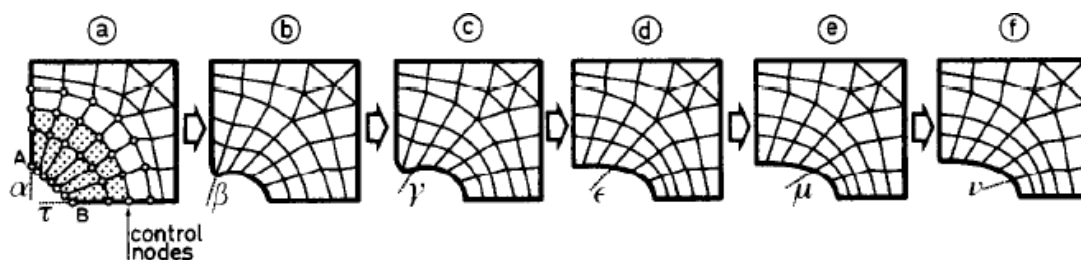


شکل (۵-۱۷): شکل بهینه‌ی مرز سوراخ برای حل با دو زیردامنه (آبی) و ۱۲ زیردامنه (سبز)

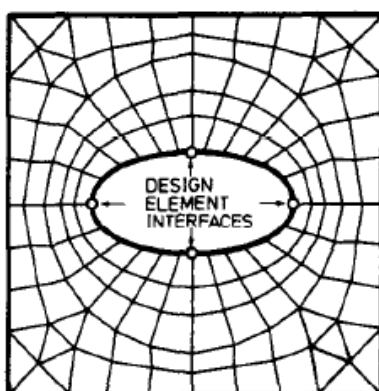
در ادامه حل مسئله صفحه سوراخدار که توسط برایبنت و فلوری [۳۴] به روش اجزای محدود انجام شده است، بررسی می‌شود. در این مثال مرز سوراخ توسط توابع ب-اسپلاین مدل شده است، مینیمم کردن وزن به عنوان تابع هدف و تنش‌ها به عنوان قیدهای طراحی در نظر گرفته شده‌اند. مدل اولیه، روند بهینه‌سازی و شکل بهینه به ترتیب در شکل‌های (۵-۱۸)، (۵-۱۹) و (۵-۲۰) نمایش داده شده‌اند.



شکل (۵-۱۸): طرح اولیه مثال صفحه سوراخدار حل شده توسط برایبنت و فلوری به روش اجزای محدود



شکل (۵-۱۹): روند بهینه‌سازی مثال صفحه سوراخدار حل شده توسط برایبنت و فلوری



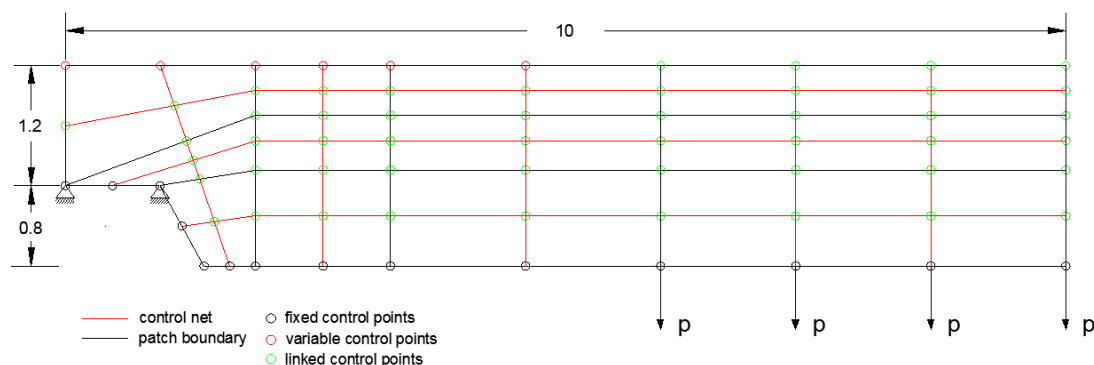
شکل (۵-۲۰): طرح بهینه مثال صفحه سوراخدار حل شده توسط برایبنت و فلوری

همانطور که مشاهده می‌شود برای این مدل از ۷ نقطه‌ی کنترلی به عنوان متغیر طراحی استفاده شده است و همچنین از تعداد زیادی المان برای مدلسازی استفاده شده است. در نهایت شکل به دست آمده کاملاً با نتیجه مسئله حل شده در بخش قبل همخوانی دارد.

مسئله ۵-۳: آچار

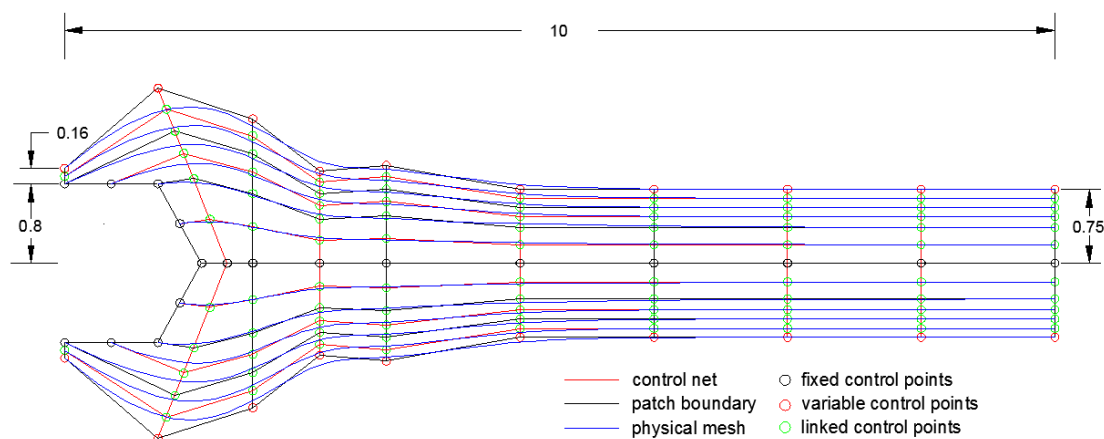
مسئله‌ی آچار، مسئله‌ی دیگری است که در اکثر منابع بهینه‌سازی شکل مورد توجه قرار می‌گیرد. لذا در این بخش آچاری به طول ۱۰ با سایز بولت ۰/۸ بررسی شده است. با توجه به تقارن در این مسئله نیز تنها نصف آچار مدل شده است. شکل اولیه‌ی فضای مسئله به صورت شکل (۵-۲۱) در نظر گرفته شده است و مولفه‌ی قائم متغیرهای موجود بر روی مرز بالای آچار به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده‌اند. برای اینکه شکل دسته‌ی آچار به صورت مستقیم به دست آید، چهار

نقطه‌ی کنترلی انتهایی بر روی مرز بالای شکل به نقطه‌ی پنجم لینک شده‌اند. همچنین غیر از نقاط روی مرز بولت و نقاط روی مرز پایینی سایر نقاط به متغیرهای طراحی لینک شده‌اند. ضخامت اولیه برای آچار برابر یک در نظر گرفته شده و حداکثر مقدار برای مولفه‌ی قائم نقاط طراحی دو فرض شده است.

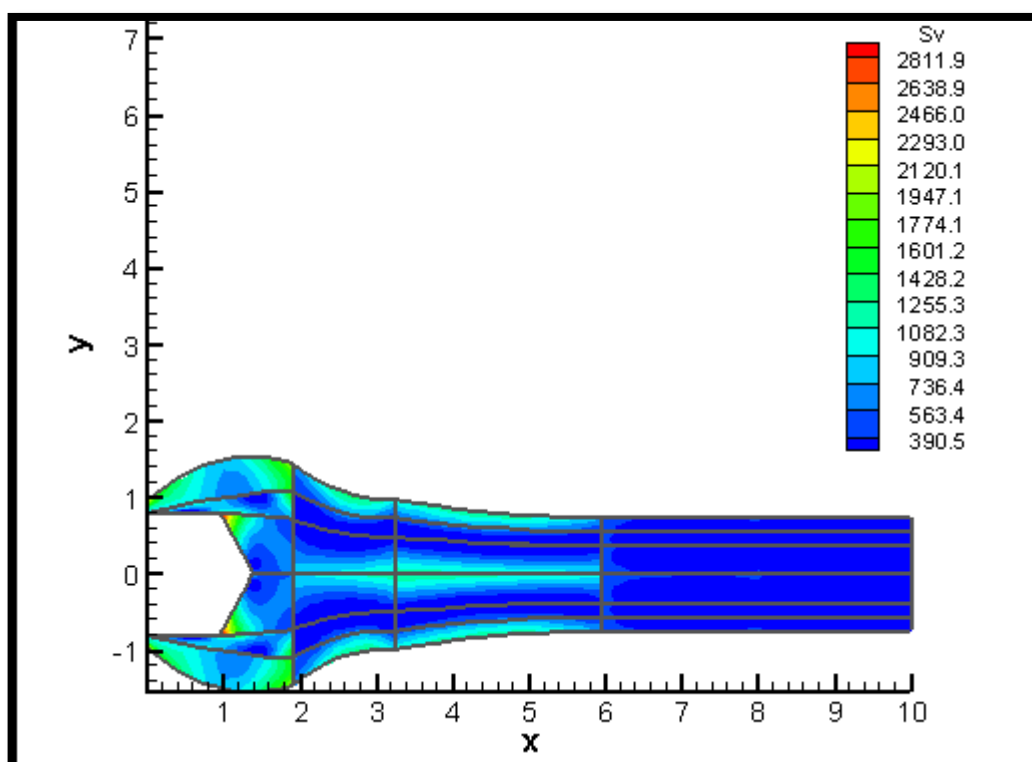


شکل (۵-۲۱): طرح اولیه مسئله آچار

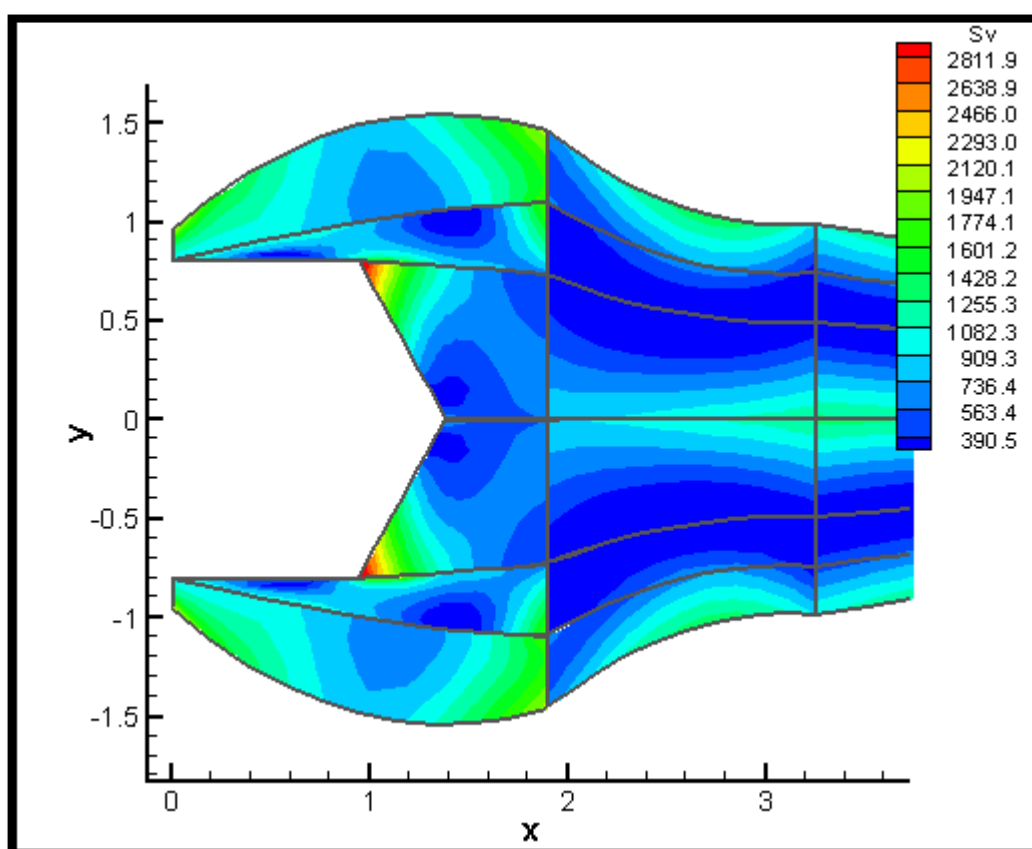
فضای مسئله توسط ۱۲ زیردامنه با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده است. پس از ۱۳ مرحله بهینه‌سازی، شکل بهینه به صورت شکل (۵-۲۲) به دست می‌آید. توزیع تنش‌های فون میزس در شکل‌های (۵-۲۳) و (۵-۲۴) رسم شده است.



شکل (۵-۲۲): طرح بهینه مسئله آچار

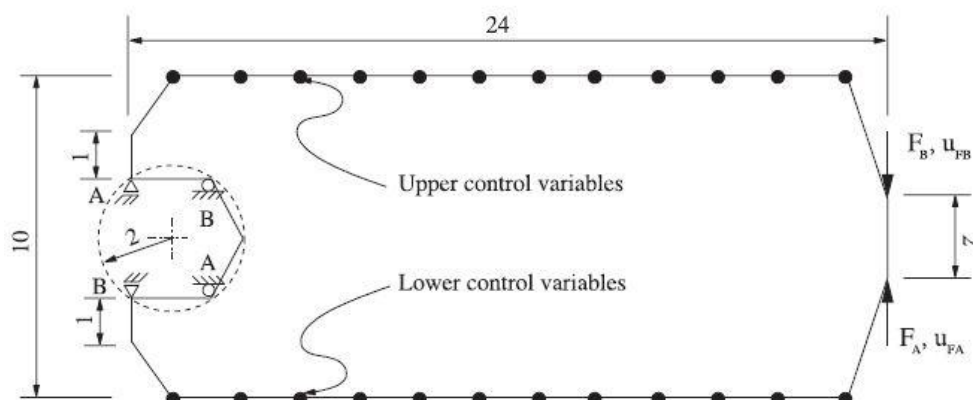


شکل (۵-۲۳): کانتورهای تنش فون میزس برای طرح بهینه مسئله آچار



شکل (۵-۲۴): کانتورهای تنش فون میزس برای سر آچار

مشابه این مسئله قبلاً توسط ویلک و همکاران [۳۳] به روش اجزای محدود حل شده است. هدف در این مسئله مینیمم کردن مقدار $\frac{1}{2}(u_{FA} - u_{FB})$ می‌باشد، که مقدار جابه‌جایی نقطه‌ی اعمال نیروی F_A و مقدار جابه‌جایی نقطه‌ی اعمال نیروی F_B است. ۳۰ درصد حجم اولیه به عنوان قید حجم در نظر گرفته شده و حداقل مقدار برای پهنای دسته آچار ۲ می‌باشد. برای بهینه‌سازی از روش SQP استفاده شده است. شکل اولیه و شکل بهینه برای ۴، ۱۰ و ۲۲ نقطه‌ی کنترلی به ترتیب در در شکل‌های (۲۵-۵) و (۲۶-۵) نمایش داده شده‌اند.



شکل (۲۵-۵): طرح اولیه مثال آچار حل شده توسط ویلک و همکاران



شکل (۲۶-۵): طرح بهینه برای مثال آچار حل شده توسط ویلک و همکاران

مسئله ۴-۵: تیر دو سر گیردار سه بعدی

در این قسمت یک تیر دو سر گیردار سه بعدی با سطح مقطع اولیه‌ی مستطیلی مدل شده است. این تیر برای اولین بار توسط حسنی و همکاران [۳۵] توسط روش SQP حل شده است. طول تیر ۱۵، ارتفاع آن ۳ و عرض آن یک در نظر گرفته شده است. طرح اولیه برای تیر در شکل (۲۷-۵)

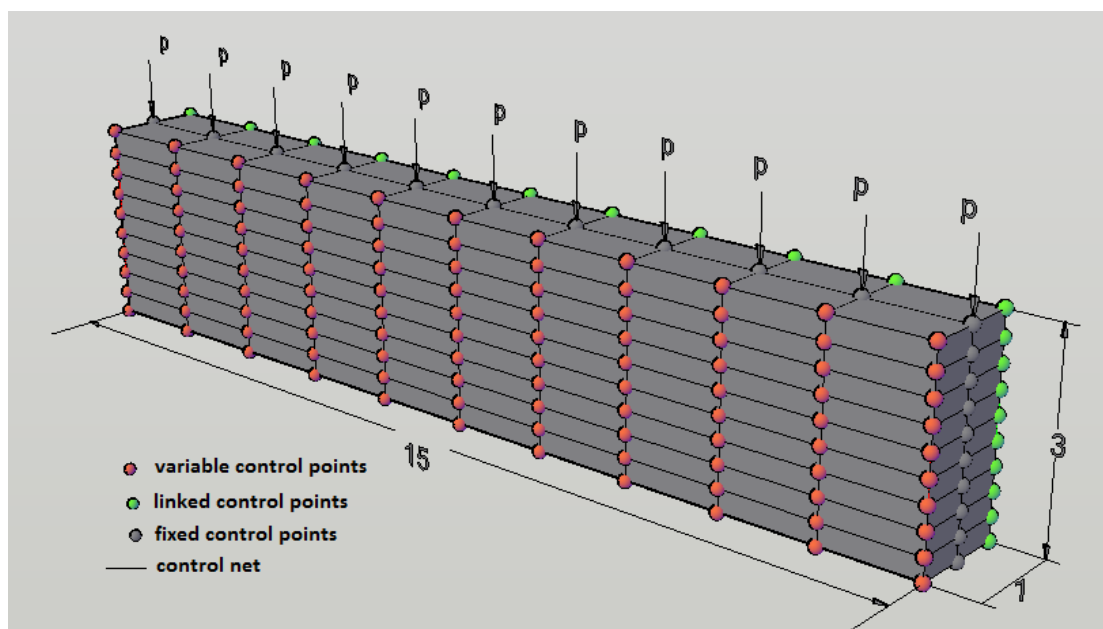
نمایش داده شده است. مولفه‌ی عرضی نقاط کنترلی واقع بر دو طرف تیر به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده‌اند و می‌توانند در جهت y حرکت کنند و جهت سادگی نقاط واقع بر یک طرف تیر به طرف دیگر لینک شده‌اند. کل تیر توسط یک زیردامنه‌ی نرئز با درجات سه، دو و دو به ترتیب در جهت‌های x ، y و z مدل شده است.

بارگذاری بر روی مرز بالایی تیر روی نقاط کنترلی ثابت به اندازه‌ی $p = 100$ انجام شده و مدول الاستیسیته و ضریب پواسون به ترتیب ۱۵۰۰ و ۰٫۲۵ فرض شده‌اند. حداکثر مقدار حجم به عنوان قید تقریباً برابر مقدار اولیه‌ی آن در نظر گرفته شده است. بردارهای گرهی نیز به شکل زیر می‌باشند:

$$r = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 8, 0, 9, 1, 1, 1, 1\}$$

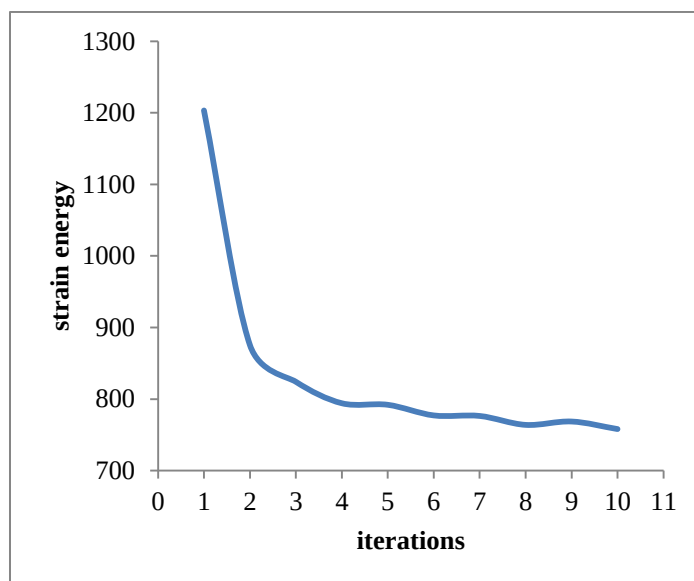
$$s = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

$$t = \{0, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 0, 6, 0, 7, 0, 9, 1, 1, 1\}$$

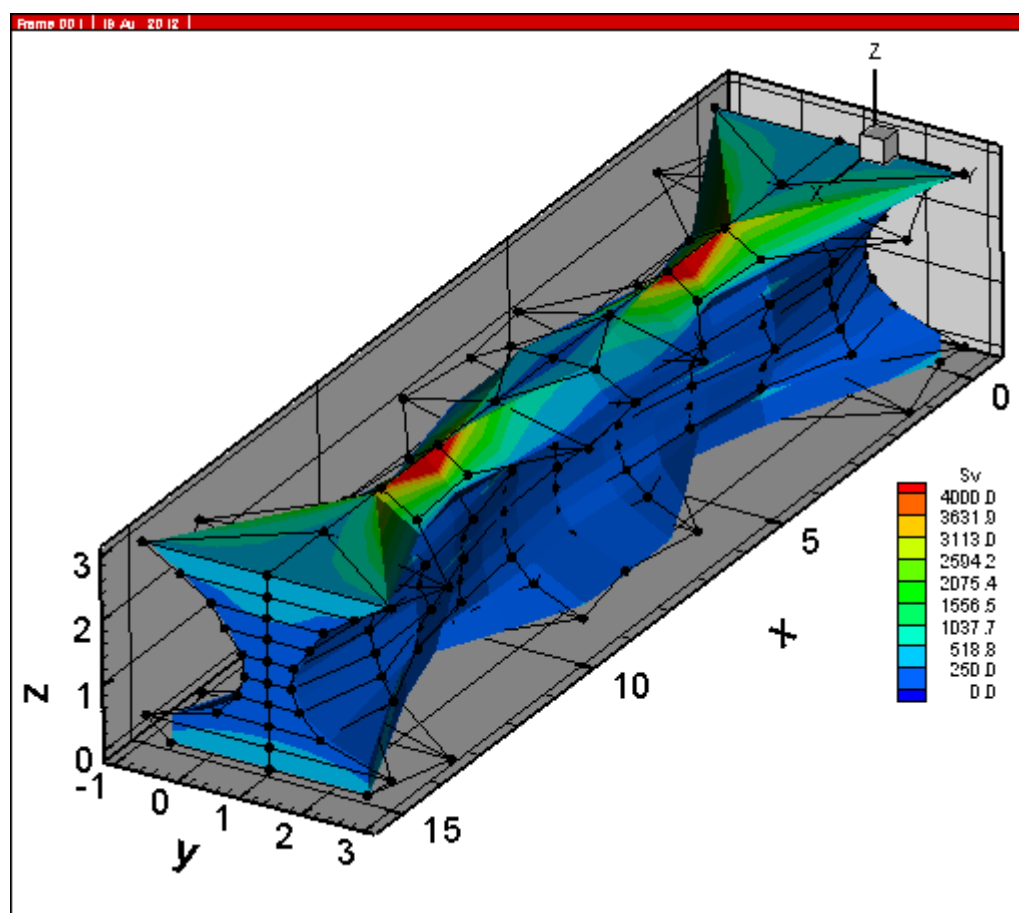


شکل (۵-۲۷): طرح اولیه برای مسئله تیر سه بعدی دو سر گیردار

پس از ۱۰ مرحله بهینه‌سازی طرح بهینه به شکل (۵-۲۹) به دست می‌آید. همانطور که مشاهده می‌شود شکل به دست آمده کاملاً همواری لازم را دارد و در دو انتها و وسط تیر که خمش بیشتر است شکل مقطع I شکل شده و در قسمت‌های دیگر که برش بیشتر است مقدار جان تیر افزایش یافته است.



شکل (۵-۲۸): روند بهینه‌سازی برای مسئله‌ی تیر سه بعدی دو سر گیردار



شکل (۵-۲۹): طرح بهینه برای مسئله‌ی تیر سه بعدی دو سر گیردار و نحوه توزیع تنش فون میزس در آن

مسئله‌ی ۵-۵: مکعب

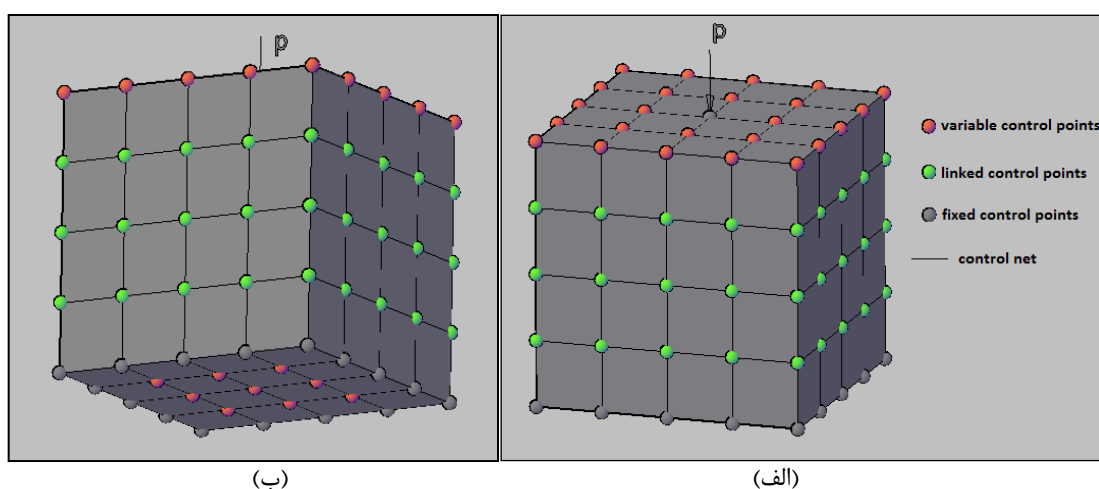
در مثال دیگری یک مکعب به ابعاد ۴ در نظر گرفته شده که در اطراف خود روی مرز پایینی دارای تکیه‌گاه می‌باشد و روی وجه فوقانی آن در نقطه‌ی میانی یک بار نقطه‌ای به اندازه‌ی ۱۰۰ وجود دارد. در نقطه‌ی اعمال بار نیز نقطه‌ی کنترلی ثابت در نظر گرفته شده است. تعداد نقاط کنترلی در نظر گرفته شده برای مکعب ۱۲۵ عدد می‌باشند. متغیرهای طراحی، مولفه‌ی قائم تمام نقاط کنترلی روی وجه بالایی به استثنای نقطه‌ی اعمال بار و مولفه‌ی قائم نقاط کنترلی میانی روی وجه پایینی مکعب می‌باشند. کلیه‌ی نقاط کنترلی بین دو وجه بالا و پایین نیز به نقاط بالا و پایین خود لینک شده‌اند.

کل شکل توسط چهار زیردامنه‌ی نیز که در محل اعمال بار هم مرز می‌باشند، با درجات دو در هر سه جهت مدل شده است. مدول الاستیسیته و ضریب پواسون نیز مطابق مسئله‌ی قبل در نظر گرفته شده‌اند. حداکثر مقدار حجم نیز ۱۳ فرض شده است. بردارهای گرهی به شرح زیر می‌باشند:

$$r = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

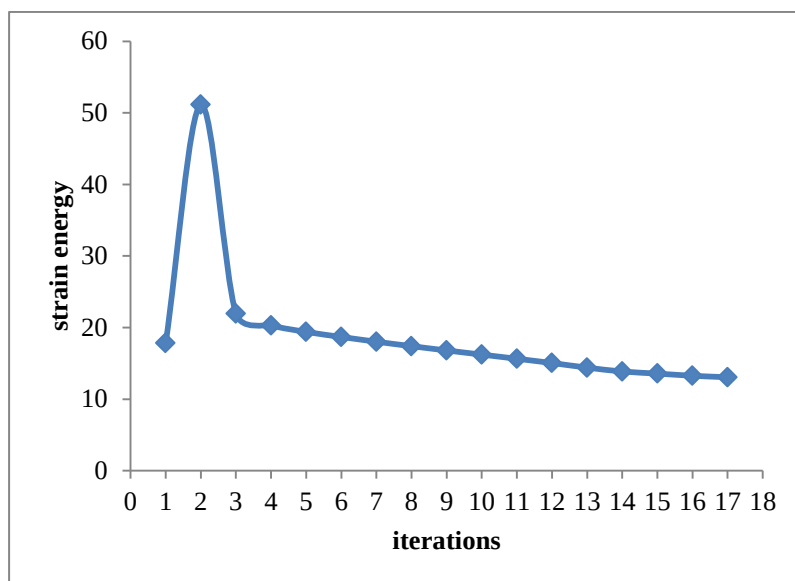
$$s = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$$

$$t = \{0, 0, 0, 0.33, 0.66, 1, 1, 1\}$$

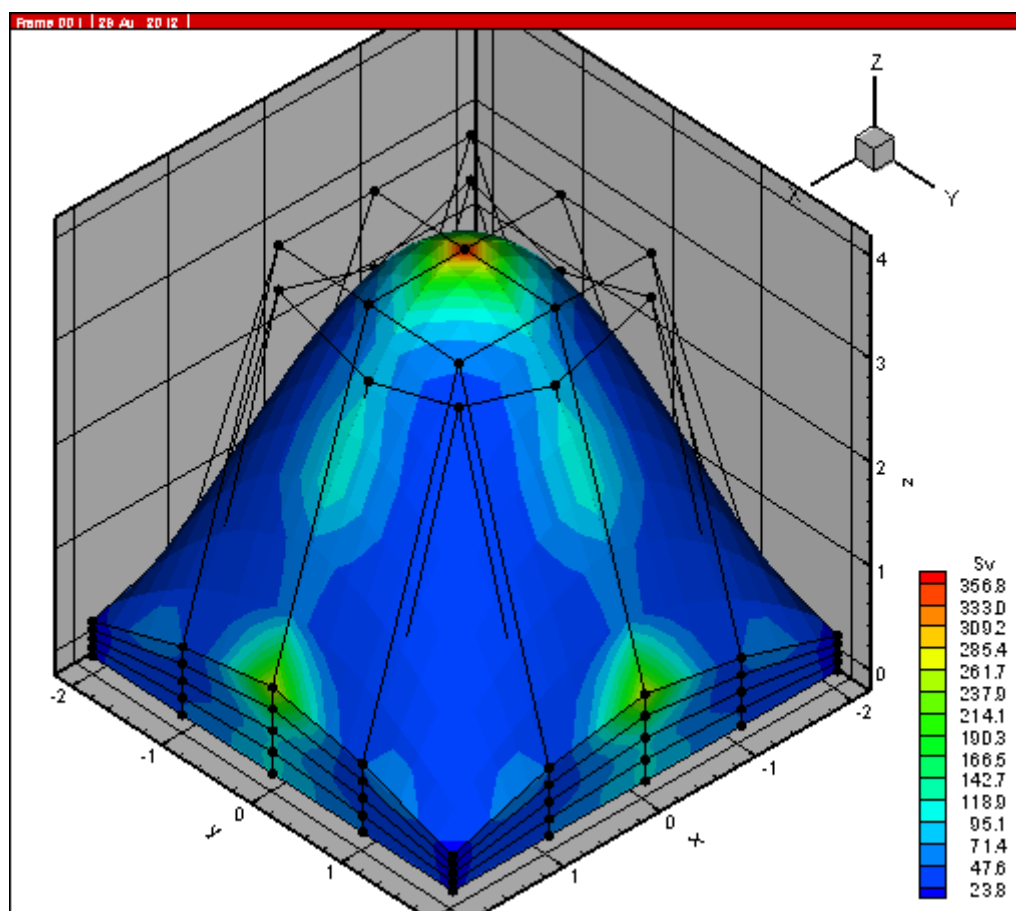


شکل (۵-۳۰): طرح اولیه برای مسئله مکعب. (الف) نمای بالا (ب) نمای پایین

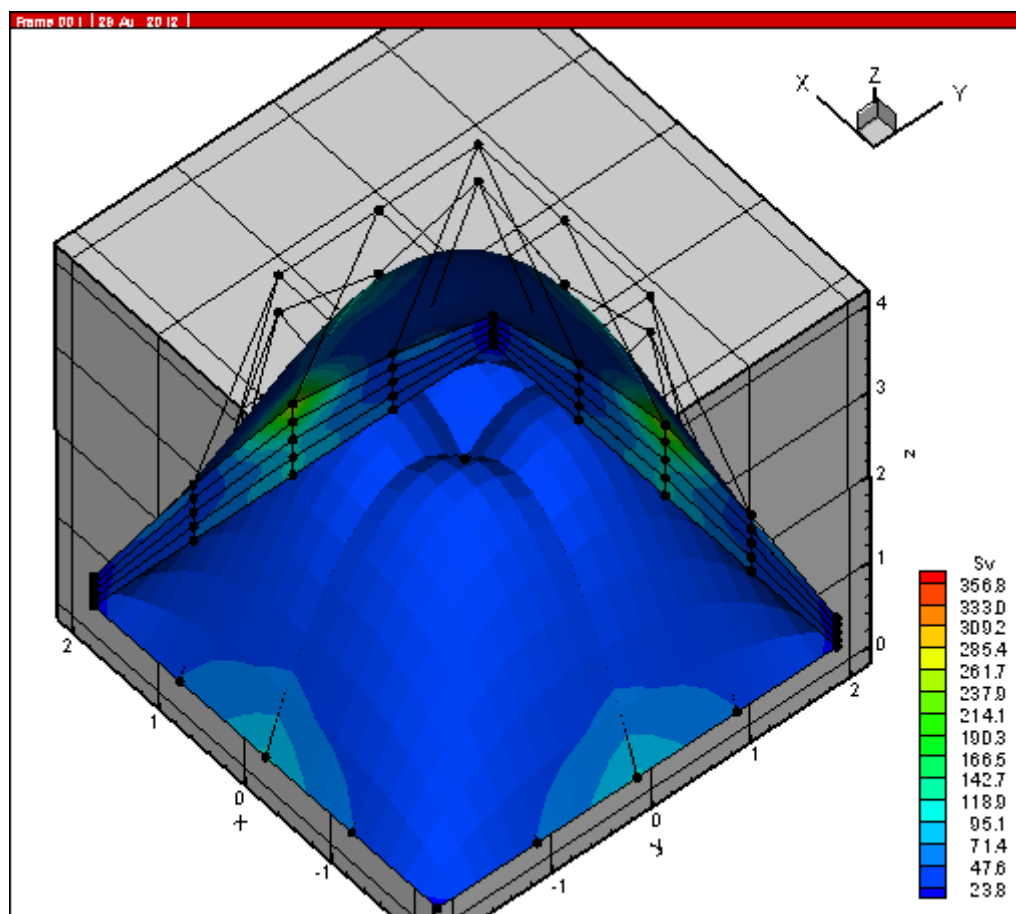
پس از ۱۷ مرحله بهینه‌سازی طرح بهینه به صورت شکل (۵-۳۲) به دست می‌آید. نمودار تغییرات انرژی کرنشی در طی روند بهینه‌سازی در شکل (۵-۳۱) نمایش داده شده است. با توجه به اینکه حجم اولیه برای شکل ۶۴ می‌باشد و قید حجم ۱۳ در نظر گرفته شده است و به عبارتی شروع حل از ناحیه شدنی صورت نمی‌گیرد ابتدا انرژی کرنشی کمی افزایش می‌یابد و این روند در طی مراحل بعدی بهینه‌سازی اصلاح می‌گردد تا کم‌کم انرژی کرنشی کاهش می‌یابد و همگرا می‌شود.



شکل (۵-۳۱): روند بهینه‌سازی برای مسئله مکعب



شکل (۵-۳۲): طرح بهینه برای مسئله مکعب. نمای بالا



شکل (۵-۳۳): طرح بهینه برای مسئله‌ی مکعب. نمای پایین

فصل ششم

نتایج و پیشنهادات

۶-۱- مقدمه

در فصول قبل روش تحلیل آیزوژئومتری، بهینه‌سازی شکل و روش‌های مناسب برای آن و تحلیل حساسیت به طور مفصل بررسی شدند و همچنین تعدادی مثال عددی برای بررسی کارایی این روش‌ها مورد مطالعه قرار گرفتند. در این فصل نتایج حاصل از این مطالعات به صورت خلاصه ذکر می‌گردد. همچنین در پایان پیشنهاداتی جهت فعالیت‌های آتی ارائه می‌شود.

۶-۲- نتایج

روش تحلیل آیزوژئومتریک به عنوان روشی توانمند به طور مفصل در این پایان‌نامه مورد بررسی قرار گرفت که در ادامه نتایج حاصل از این بخش به اختصار توضیح داده شده است:

- مشابه روش‌های عددی دیگر در روش آیزوژئومتریک نیز می‌توان از مبانی پایه‌ای مشابهی همچون مفهوم آیزوپارامتریک استفاده کرد.
- با توجه به انعطاف‌پذیری بالای نرزه‌ها در مدلسازی هندسه و تقریب توابع مجهول می‌توان با تعداد نقاط کنترلی کم دقت بالایی در مدلسازی هندسه و تقریب توابع مجهول به دست آورد، که این مسئله حجم معادلات را بسیار کاهش می‌دهد و سبب می‌شود با حجم کمتری از محاسبات و سرعت بیشتر نسبت به روش‌های عددی دیگر به دقت مشابهی در حل برسیم.
- استراتژی‌های اصلاح شبکه همچون اصلاح h و p و همچنین روش جدید k در این روش کاربرد دارند و همچون روش اجزای محدود می‌توان از استراتژی‌ها استفاده کرد.
- در روش آیزوژئومتریک نقاط کنترلی سطوح حل، (مجهولات مسئله) لزوماً بر هندسه و فیزیک حل منطبق نیستند و بنابراین دو مفهوم شبکه کنترلی و فیزیکی در این روش مطرح است. نقاط کنترلی، شبکه‌ی کنترلی را ایجاد می‌کنند که این شبکه در مسائل دوبعدی شامل اعضای چهارضلعی و در مسائل سه بعدی شامل اعضای شش وجهی است.

نقاط کنترلی توسط این شبکه درونیابی می‌شوند. این فرآیند سبب انعطاف‌پذیری نربزها در مدل کردن هندسه‌های پیچیده می‌شود.

در بخش‌های بعدی از این پایان‌نامه بهینه‌سازی شکل سازه‌ها و تحلیل حساسیت مورد بررسی قرار گرفته‌اند که نتایج این دو فصل به طور خلاصه به شرح زیر می‌باشد:

- با استفاده از نربزها تعریف هندسه مسئله با دقت بسیار بالا انجام می‌شود، لذا می‌توان با استفاده از این مزیت شکل مرزها را به صورت مناسبی با دقت بالا مدل کرد. ضمن اینکه به کمک نربزها امکان مدلسازی اشکالی همچون دایره و بیضی در حالت دوبعدی و کره و بیضی‌گون در حالت سه بعدی با دقت بالایی وجود دارد.
- در این روش تغییرات سطوح مرزی در حین بهینه‌سازی خللی در یکنواختی آن‌ها ایجاد نمی‌کند و در حین بهینه‌سازی با تغییراتی که در مرز ایجاد می‌شود همواری لازم همچنان حفظ می‌شود.
- یکی از مهم‌ترین مزیت‌های این روش نسبت به روش‌های متداول که از روش اجزای محدود استفاده می‌کنند حذف مرحله‌ی ساخت شبکه‌ی اجزای محدود در حین مراحل بهینه‌سازی است. این کار سبب کاهش قابل ملاحظه‌ی حجم محاسبات به خصوص در مسائل سه بعدی می‌شود.
- استفاده از توابعی که تحلیل مسائل توسط آن‌ها انجام می‌شود به عنوان توابعی که مدل هندسی را ایجاد می‌کنند، باعث می‌شود مشکل دوگانگی مدل تحلیل و مدل طراحی، که مشکلی بزرگ در سایر روش‌های عددی است حل شود و به این وسیله مدل تحلیل و طراحی به هم پیوند داده شوند. به این ترتیب دیگر نیازی به کار اضافی جهت تبدیل مدل طراحی به مدل تحلیل و برعکس وجود ندارد.

- از بین روش‌های موجود برای بهینه‌سازی، روش *MMA* انتخاب شده است. زیرا این روش یکی از جدیدترین و بروزترین روش‌های بر پایه‌ی گرادیان است، که از مشتقات حساسیت در روند بهینه‌سازی استفاده می‌کند و لذا سرعت بهینه‌سازی در آن نسبت به روش‌های مشابه بالاتر است.
- با توجه به قدرت روش *MMA* از نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود که حتی در برخی موارد در صورتی که شروع بهینه‌سازی از ناحیه‌ی نشدنی آغاز شود باز هم نتایج همگرا شده و بهینه‌سازی صورت می‌گیرد.
- همانطور که در مثال تیر دو سر گیردار سه بعدی مشاهده می‌شود، تنها پس از ۱۰ بار تکرار روند بهینه‌سازی به نتایج قابل قبولی می‌رسیم، ضمن اینکه به دلیل وجود تنها ۱۱۰ متغیر طراحی کل روند بهینه‌سازی بیش از ده دقیقه زمان نمی‌گیرد، در حالی که اگر از روش‌های دیگری مانند اجزای محدود برای تحلیل یا روش‌های دیگری مانند *SQP* برای بهینه‌سازی استفاده شود، به دلیل تعداد زیاد نقاط کنترلی و متغیرهای طراحی، این زمان به ساعت‌ها پردازش اطلاعات خواهد رسید.

۳-۶- پیشنهادات

در این پایان‌نامه شکل کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی به این صورت بررسی شد که انرژی کرنشی به عنوان تابع هدف و حجم به عنوان قید طراحی در نظر گرفته شد. این موضوع باعث می‌شود انجام عملیات بهینه‌سازی با آزمون و خطای زیادی جهت پیدا کردن مقدار مناسبی برای قید حجم همراه باشد و تاکنون نیز در تمام مقالات بررسی شده برای بهینه‌سازی آیزوژئومتریک شکل سازه‌ها از همین الگو استفاده شده است. به عنوان زمینه‌ی کاری جدید پیشنهاد می‌شود شکل مسئله به گونه‌ای طراحی شود که مینیمم کردن حجم به عنوان تابع هدف و مقادیر تنش به عنوان قید

طراحی در نظر گرفته شوند. ضمناً نقاط اعمال بار و نحوه‌ی بارگذاری، به خصوص در حالت بارگذاری گسترده، می‌تواند از موضوعات قابل بررسی در این زمینه باشد.

پیوست

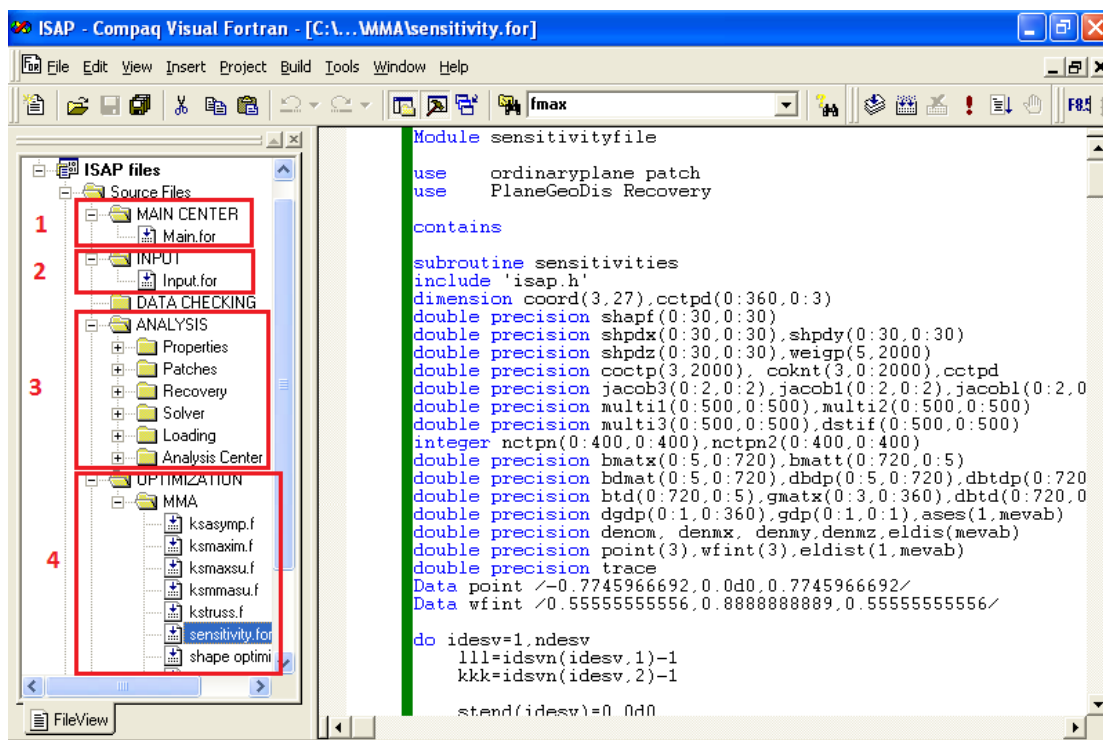
راهنمای برنامه کامپیوتری

محیط کلی برنامه

همانطور که قبلاً اشاره شد، جهت حل مسائل و بررسی اثربخشی روش‌های پیشنهاد شده برنامه کامپیوتری تحت نرم‌افزار فرترن^۱ طراحی شده که در ادامه به توضیح و معرفی آن می‌پردازیم.

جهت اجرایی کردن این برنامه در درجه‌ی اول از لینک کردن دو برنامه دیگر استفاده شده است. برنامه‌ی اول برنامه‌ای تحت عنوان *ISAP* می‌باشد که توسط دکتر سید مهدی توکلی جهت تحلیل به روش آیزوژئومتریک طراحی شده است و برنامه دوم کدهایی هستند که پروفیسور سونبرگ^۲ جهت بهینه‌سازی به روش آیزوژئومتریک نوشته‌اند.

در مرحله‌ی دوم با توجه به موضوع اصلی این پایان‌نامه بر مبنای روش تحلیلی مستقیم کدهایی برای تحلیل حساسیت توسط اینجانب نوشته شده است و به این دو برنامه لینک شده است.



شکل (ض-۱): محیط کلی برنامه کامپیوتری

^۱ Fortran

^۲ Krister Svanberg

در شکل فوق شمای کلی برنامه مشاهده می‌شود. همانطور که در سمت چپ تصویر ملاحظه می‌شود، این برنامه از چهار بخش کلی تشکیل شده است:

۱- در بخش اول که *Main Center* می‌باشد هسته‌ی اصلی برنامه قرار دارد و شروع برنامه از آن آغاز می‌شود.

۲- در بخش دوم اطلاعات ورودی برنامه دریافت می‌شود.

۳- در بخش سوم عمل تحلیل صورت می‌گیرد و کلیه‌ی مسائلی که در تحلیل آیزوژئومتریک وجود دارد در این قسمت لحاظ شده است.

۴- در بخش آخر عمل بهینه‌سازی صورت می‌گیرد، که روش *MMA* و تحلیل حساسیت در این بخش قرار گرفته‌اند.

فایل ورودی

در این بخش نحوه تنظیم فایل اطلاعات ورودی بررسی می‌شود. در ادامه نمونه‌ای از فایل اطلاعات ورودی جهت آشنایی آورده شده است:

```
Example ۲- cantilever beam
npach, ntctp, ndime, nvfix, nmats, nsolv
    ۱      ۱۸      ۲      ۳      ۱      ۱
noptim, nlnkv, volfr
    ۱      .      ۲۱۰
coordinates
۱      ۰      ۰      ۰      ۱
۲      ۶      ۰      ۰      ۱
۳      ۱۲      ۰      ۰      ۱
۴      ۱۸      ۰      ۰      ۱
۵      ۲۴      ۰      ۰      ۱
۶      ۳۰      ۰      ۰      ۱
۷      ۰      ۳      ۰      ۱
۸      ۶      ۳      ۰      ۱
۹      ۱۲      ۳      ۰      ۱
۱۰     ۱۸      ۳      ۰      ۱
۱۱     ۲۴      ۳      ۰      ۱
۱۲     ۳۰      ۳      ۰      ۱
۱۳     ۰      ۶      ۰      ۱
۱۴     ۶      ۶      ۰      ۱
۱۵     ۱۲      ۶      ۰      ۱
۱۶     ۱۸      ۶      ۰      ۱
۱۷     ۲۴      ۶      ۰      ۱
```

```

۱۸      ۳۰      ۶      ۰      ۱
patch connectivity - no. doapx  nokntx  doapy noknty
۱ ۲ ۸ ۲ ۵ ۱ ۷ ۱۳ ۲ ۸ ۱۴ ۳ ۹ ۱۵ ۴ ۱۰ ۱۶ ۵ ۱۱ ۱۷ ۶ ۱۲ ۱۸
knot vectors
۱ ۰ ۰ ۰ ۰,۲۵ ۰,۵ ۰,۷۵ ۱ ۱ ۱
۱ ۰ ۰ ۰ ۱ ۱ ۱
boundary conditions
۱      ۱      ۱
۷      ۱      ۱
۱۳     ۱      ۱
material properties
۱ ۱۵۰۰۰۰۰۰ ۰,۲۵
loading
۱
load values
۶ ۰ -۱۰
ndesv
۶
۱      ۱۳      ۲      ۱,۵      ۱۰
۲      ۱۴      ۲      ۱,۵      ۱۰
۳      ۱۵      ۲      ۱,۵      ۱۰
۴      ۱۶      ۲      ۱,۵      ۱۰
۵      ۱۷      ۲      ۱,۵      ۱۰
۶      ۱۸      ۲      ۱,۵      ۱۰
nlinv
۶
۱      ۷      ۲      ۱۳      ۰,۵      ۰
۲      ۸      ۲      ۱۴      ۰,۵      ۰
۳      ۹      ۲      ۱۵      ۰,۵      ۰
۴      ۱۰     ۲      ۱۶      ۰,۵      ۰
۵      ۱۱     ۲      ۱۷      ۰,۵      ۰

```

در قسمت اول به ترتیب تعداد زیردامنه‌ها، تعداد کل نقاط کنترلی، تعداد بعد، تعداد نقاط کنترلی

ثابت، تعداد مصالح و تعداد حل‌کننده‌ها مشخص می‌شود.

در قسمت دوم ابتدا شماره‌ی بهینه‌سازی وارد می‌شود که در صورتی که عدد صفر وارد شود تنها

تحلیل انجام می‌شود و اگر عدد یک وارد شود عمل بهینه‌سازی نیز صورت می‌گیرد. سپس عدد

مربوط به نحوه گرفتن متغیرهای لینک داده می‌شود، که اگر صفر باشد اعداد به ترتیب زیر خوانده

می‌شوند:

- شماره متغیر لینک، شماره نقطه کنترلی لینک شونده، مولفه‌ای از نقطه کنترلی لینک

شونده که به همان مولفه از نقطه کنترلی متغیر لینک خواهد شد، شماره نقطه کنترلی

متغیر، ضریب a در رابطه زیر، ضریب b در رابطه زیر:

$$x_2 = ax_1 + b$$

در این رابطه x_1 و x_2 به ترتیب مولفه متغیر نقطه کنترلی ثابت و متغیر هستند.

در صورتی که مقدار $nlnkv$ یک داده شود متغیر لینک به دو متغیر طراحی لینک خواهد شد و اعداد به ترتیب زیر خوانده می‌شوند:

- شماره متغیر لینک، شماره نقطه کنترلی لینک شونده، مولفه‌ای از نقطه کنترلی لینک شونده که به همان مولفه از نقطه کنترلی متغیر لینک خواهد شد، شماره نقطه کنترلی اول، شماره نقطه کنترلی دوم، ضریب a در رابطه زیر، ضریب b در رابطه زیر، ضریب c در رابطه زیر:

$$x_3 = ax_1 + bx_2 + c$$

x_1 ، x_2 و x_3 به ترتیب نقطه کنترلی اول، نقطه کنترلی دوم و نقطه کنترلی متغیر لینک شونده هستند.

در صورتی که مقدار $nlnkv$ دو وارد شود مولفه‌ای از نقطه کنترلی لینک به مولفه‌ای از نقطه کنترلی دیگر لینک می‌شود که بر خلاف حالت اول الزاماً یکی نیستند. اعداد به ترتیب زیر خوانده می‌شوند:

- شماره متغیر لینک، شماره نقطه کنترلی لینک شونده، مولفه نقطه کنترلی لینک شونده، شماره نقطه کنترلی متغیر، مولفه نقطه کنترلی متغیر ضریب a در رابطه زیر، ضریب b در رابطه زیر:

$$x_2 = ax_1 + b$$

در این رابطه x_1 و x_2 به ترتیب مولفه متغیر نقطه کنترلی ثابت و متغیر هستند.

همچنین با توجه به اینکه حجم به عنوان قید طراحی در نظر گرفته شده در این بخش حجم بیشینه تعیین می‌شود.

در قسمت سوم مختصات نقاط کنترلی و وزن آنها وارد می‌شود.

در قسمت *patch connectivity* برای هریک از زیردامنه‌ها شماره‌ی نقاط کنترلی به ترتیب وارد می‌شود.

در قسمت *knot vectors* برای هریک از زیردامنه‌ها بردارهای گرهی در هریک از ابعاد مشخص می‌شوند.

در بخش *boundary condition* شماره‌ی نقاط کنترلی که ثابت هستند وارد می‌شود و در صورتی که برای هریک از ابعاد عدد یک وارد شود، آن درجه‌ی آزادی ثابت شده و در صورتی که صفر وارد شود آزاد در نظر گرفته می‌شود.

در بخش *material properties* مدول الاستیسیته و ضریب پواسون وارد می‌شوند.

در قسمت *loading* تعداد نیروهای گرهی و مقدار و محل اعمال آنها وارد می‌شود.

در قسمت *ndesv* شماره‌ی نقاط کنترلی که به عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شده‌اند و حدود تغییرات آنها مشخص می‌شود.

در بخش *nlinv* مشخصات نقاط کنترلی که به متغیرهای طراحی لینک شده‌اند و ضرایب وابستگی آنها وارد می‌شود. لازم به ذکر است که این وابستگی به صورت خطی تعریف شده است.

فایل خروجی

پس از انجام محاسبات برنامه نتایج را در فایل خروجی ذخیره می‌کند که نمونه‌ای از این فایل خروجی در زیر آورده شده است:

```
Example ۲- cantilever beam
npach,ntctcp,ndime,nvfix,nmats,nsolv
noptim, volfr
coordinates
patch conectivity - no. doapx nokntx doapy noknty
```

knot vectors						
	E	Nu	Density	t		
loads	۱	۱۵۰۰۰۰۰۰,۰۰۰۰۰۰۰۰	۰,۲۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰			
desv	۱	۰,۰۰۰۰۰۰E+۰۰۰	-۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰			
lnkv	۱	۱۳	۲	۱,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	
	۲	۱۴	۲	۱,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	
	۳	۱۵	۲	۱,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	
	۴	۱۶	۲	۱,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	
	۵	۱۷	۲	۱,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	
	۶	۱۸	۲	۱,۵۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	۱۰,۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰	
strenergy	۱	۷	۲	۱۳	۰,۵۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰۰
	۲	۸	۲	۱۴	۰,۵۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰۰
	۳	۹	۲	۱۵	۰,۵۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰۰
	۴	۱۰	۲	۱۶	۰,۵۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰۰
	۵	۱۱	۲	۱۷	۰,۵۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰۰
	۶	۱۲	۲	۱۸	۰,۵۰۰۰۰۰	۰,۰۰۰۰۰۰۰۰E+۰۰۰
۱,۶۰۱۳۱۲۸۱۶۹۷۹۷۱۸۸E-۰۰۲ ۹,۴۳۰۵۵۹۴۷۰۱۱۹۳۹۱E-۰۰۳ ۷,۲۰۴۱۶۹۷۸۲۰۰۰۴۳۴۷E-۰۰۳ ۱,۴۷۹۹۸۳۶۸۰۴۹۱۶۸۲E-۰۰۳ ۱,۳۷۹۱۱۶۷۱۸۳۸۹۱۸۴۳E-۰۰۳ ۱,۳۶۸۹۵۱۴۷۴۳۸۶۸۹۸E-۰۰۳ ۱,۳۶۷۲۹۴۷۹۴۷۳۶۷۵۹E-۰۰۳ ۱,۳۶۶۷۵۹۱۷۱۷۷۷۳۸۴E-۰۰۳ ۱,۳۶۶۳۲۸۳۶۲۵۴۲۵۱۶E-۰۰۳ ۱,۳۶۵۹۰۲۳۸۲۴۸۷۵۹۱E-۰۰۳ ۱,۳۶۵۴۵۰۴۹۸۳۵۱۵۱۳E-۰۰۳ ۱,۳۶۴۹۷۸۲۹۷۲۳۵۰۸۷E-۰۰۳ ۱,۳۶۴۴۸۹۸۴۳۵۲۰۸۵۷E-۰۰۳ ۱,۳۶۴۰۰۴۹۹۷۴۹۸۷۱۹E-۰۰۳ ۱,۳۶۳۵۴۰۷۰۸۱۶۵۹۱۰E-۰۰۳ ۱,۳۶۳۱۲۶۹۵۵۳۵۴۰۰E-۰۰۳ ۱,۳۶۲۷۷۳۵۶۹۳۸۵۲۹۸E-۰۰۳ ۱,۳۶۲۵۴۶۴۰۳۹۳۲۳۰۴E-۰۰۳ ۱,۳۶۲۵۸۲۴۹۸۹۸۷۱۱۹E-۰۰۳ ۱,۳۶۲۳۳۳۰۴۶۷۱۲۷۹۵E-۰۰۳ ۱,۳۶۲۸۸۶۴۳۲۰۹۶۲۱۴E-۰۰۳ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۰,۰۰۸۷۹۰ -۱۷,۴۸۴۵۱۵ -۴,۳۲۸۱۷۶ -۳,۶۴۸۸۷۷ ۱۶,۹۹۱۴۱۶ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۰,۹۸۴۴۴۸ -۱۳,۶۱۷۴۷۸ -۳,۳۷۰۲۷۲ -۳,۳۰۲۶۴۱ ۱۳,۵۵۰۷۲۵ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۱,۹۶۰۱۰۶ -۹,۸۴۶۰۷۹ -۲,۴۳۶۲۷۶ -۳,۰۳۶۳۴۸ ۱۰,۳۲۲۳۶۳ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۲,۹۳۵۷۶۴ -۶,۱۷۰۳۱۷ -۱,۵۲۶۱۹۱ -۲,۸۴۹۹۹۹ ۷,۴۳۹۹۲۵ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۳,۹۱۱۴۲۲ -۲,۵۹۰۱۹۳ -۰,۶۴۰۰۱۴ -۲,۷۴۳۵۹۵ ۵,۲۹۵۵۵۵ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۴,۸۸۷۰۸۱ ۰,۸۹۴۲۹۴ ۰,۲۲۲۲۵۳ -۲,۷۱۷۱۳۵ ۴,۷۷۴۸۱۶ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۵,۸۶۲۷۳۹ ۴,۲۸۳۱۴۳ ۱,۰۶۰۶۱۱ -۲,۷۷۰۶۱۹ ۶,۱۶۰۸۸۰ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۶,۸۳۸۳۹۷ ۷,۵۷۶۳۵۵ ۱,۸۷۵۰۵۹ -۲,۹۰۴۰۴۷ ۸,۴۸۵۹۵۰ ۰,۰۴۳۱۶۱ ۷,۸۱۴۰۵۵ ۱۰,۷۷۳۹۳۰ ۲,۶۶۵۵۹۹ -۳,۱۱۷۴۱۹ ۱۱,۱۱۸۴۰۴						

در قسمت اول از این فایل عنوان اطلاعات ورودی ذکر شده است.

در بخش بعد اطلاعات مربوط به مشخصات مصالح و بارهای وارده آورده شده است.

در قسمت سوم نتایج حاصل از انرژی کرنشی در هر مرحله ثبت شده و در بخش آخر برای نقاط از هندسه‌ی شکل خروجی مسئله اطلاعات مربوط به مختصات نقاط، تنش‌ها در جهت‌های مختلف و

در ستون آخر تنش‌های فون میزس چاپ شده است.

مراجع

- [١] Hughes T.J.R, Cottrel J. and Bazilevs Y. (٢٠٠٥), "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, vol. ١٩٤, pp. ٤١٣٥-٤١٩٥,.
- [٢] Szabo B., Duster. A. , Rank. E. (٢٠٠٤), "The p-version of the finite element method E. Stein, R. de Borst, T.G.R. Hughes (Eds.)," in **Encyclopedia of Computational Mechanics**, vol. ١, New York, Wiley.
- [٣] Cervera E., Trevelyan J. (٢٠٠٥), "Evolutionary Structural Optimization Based on Boundary Representation of NURBS. Part i: ٢d Algorithms," **Comput. Struct.**, vol. ٨٣, pp. ١٩٠٢-١٩١٤.
- [٤] Subbarayan G., Rayasam M., Srinivasan V. (٢٠٠٧), "CAD inspired hierarchical partition of unity constructions for NURBS-based, meshless design, analysis and optimization," **Int. J. Numer. Math. Eng.**, vol. ٧٢, no. ١٢, pp. ١٤٥٢-١٤٨٩.
- [٥] Subbarayan G., Zhang X., Rayasam M.(٢٠٠٧), "A meshless compositional approach to shape optimal design," **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, vol. ١٩٦, pp. ٢١٣٠-٢١٤٦.
- [٦] Bennet J., Botkin M. (١٩٨٤), "Structural shape optimization with geometric problem description and adaptive mesh refinement," pp. ٤٥٨-٤٦٤.
- [٧] Yang R. J.Choi K.K. (١٩٨٥), "Accuracy of finite element based shape design sensitivity analysis," vol. ١٣, no. ٢, pp. ٢٢٣-٢٣٩.
- [٨] Braibant V., Fleury. C. , Beckers P. (١٩٨٣), "Shape optimal design: An approach matching C.A.D. and optimization concept," **Aerospace laboratory of university of liege**, Belgium.
- [٩] Hughes T., Cottrel J. and Bazilevs Y., Isogeometric Analysis- Toward Integration of CAD and FEA, **Wiley**, ٢٠٠٩.

- [۱۰] Liang Hsu Y., "A review of structural shape optimization," vol. ۲۶, pp. ۳-۱۳, ۱۹۹۴.
- [۱۱] Kurshin P.M., L.M., Onoprienko. "Determination of the shapes of doubly-connected bar sections of maximum torsional stiffness," vol. ۴۰, no. ۶, pp. ۱۰۷۸-۱۰۸۴, ۱۹۷۶.
- [۱۲] Weck M., Steinke P.(۱۹۸۳/۸۴) , "An efficient technique in shape optimization," vol. ۱۱, no. ۴, pp. ۴۳۳-۴۴۹.
- [۱۳] Braibent V. and Fleury C. (۱۹۸۴), "Shape optimal design: A performing C.A.D. oriented formulation," in *AIAA/ASME/ASCE/AHS ۲۵th Structural Dynamics and Material Conference*, CA.
- [۱۴] توکلی، س. م، ۱۳۸۸، رساله دکتری، آنالیز و بهینه سازی توپولوژی آیزوژئومتریک سازه‌ها در محیط‌های پیوسته با استفاده از توابع پایه‌ی نریز، دانشکده عمران، دانشگاه علم و صنعت.
- [۱۵] Svanberg K. (۱۹۸۷), "The method of moving asymptotes - a new method for structural optimization," *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. ۲۴, no. ۲, pp. ۳۵۹-۳۷۳.
- [۱۶] Christensen P. W. and Klarbring A. (۲۰۰۹), *An Introduction to Structural Optimization*, **Waterloo: Springer**.
- [۱۷] Hassani B. and Hinton E. (۱۹۹۹), *Homogenization and structural topology optimization*, **Springer**.
- [۱۸] A.G.m. and Michell, "The limits of economy of material in frame structures," vol. ۸, pp. ۳۰۵-۳۱۶.
- [۱۹] Haftka, Raphael T., Grandhi, Ramana V. (۱۹۸۶), "Structural Shape Optimization- A Survey," vol. ۵۷, pp. ۹۱-۱۰۶.
- [۲۰] Bhavikatti S.S. and Ramakrishnan C.V. (۱۹۷۷), "Optimum Design of Fillets in Flat and Round Tension Bars," **Design engineering technical conference**, Chicago,.
- [۲۱] Kristensen ES. and Medsen. N.F., "On the Optimum Shape of Fillets in Plates Subjected to Multiple in-plane Loading Cases," vol. ۱۰, pp. ۱۰۰۷-۱۰۰۹, ۱۹۷۶.

- [22] Zeinkiewicz O. and Campbell J. (1973), "Shape optimization and sequential linear programming," **Optimal Structural Design**, pp. 109-126.
- [23] Schramm U. and Pilkey W. (1993), "Coupling of geometric descriptions and finite element using NURBS- A study in shape optimization," **Finite Elements Anal. Des.**, vol. 15, pp. 11-43.
- [24] Imam M. (1982), "Three-dimensional shape optimization," **Internat. J. Numer. Methods Eng.**, vol. 18, pp. 661-673.
- [25] Yao T. and Choi K. (1989), "3-D shape optimal design and automatic finite element regidding," **Internat. J. Numer. Methods Eng.**, vol. 28, pp. 369-384.
- [26] Botkin M. (1992), "Three-dimensional shape optimization using fully automatic mesh generation," **AIAA J.**, vol. 30, pp. 1932-1934, 1992.
- [27] Younsi R., Knopf-Lenoir C. and Selman A. (1996), "Multi-mesh and adaptivity in 3D shape optimization," **Comput. Struct.**, vol. 61, no. 6, pp. 1125-1133.
- [28] Lindby T. and Santos J. (1997), "2-D and 3-D shape optimization using mesh velocities to integrate analytical sensitivities with associative CAD," **Struct. Optim.**, vol. 13, no. 4, pp. 213-222.
- [29] Shi X. and Mukherjee S. (1999), "Shape optimization in three-dimensional linear elasticity by the boundary contour method," **Eng. Anal. Bound. Elem.**, vol. 23, pp. 627-637.
- [30] Annicchiarico W. and Cerrolaza M. (2001), "Structural shape optimization 3D finite element models based on genetic algorithms and geometric modeling," **Finite Elem. Anal. Des.**, vol. 37, no. 5, pp. 403-415.
- [31] Cervera E. and Trevelyan J. (2005), "Evolutionary structural optimization based on boundary representation of NURBS. Part II: 3D algorithms," **Comput. Struct.**, vol. 83,

no. ۲۳-۲۴, pp. ۱۹۱۷-۱۹۲۹۱.

- [۳۲] Keulen F. v., Haftka R. and Kim N. (۲۰۰۵), "Review of options fo structural design sensitivity analysis. Part ۱: Linear systems," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. ۱۹۴, pp. ۳۲۱۳-۳۲۴۳.
- [۳۳] Wilke D. N., Kok S. and Groenwold A. A. (۲۰۰۶), "A quadratically convergent unstructured remeshing strategyfor shape optimization," *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. ۶۵, pp. ۱-۱۷.
- [۳۴] Braibant V. and Fleury C. (۱۹۸۴), "Shape optimal design using b-splines," *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. ۴۴, pp. ۲۴۷-۲۶۷.
- [۳۵] Hasani B., Tavakkoli S.M., Zarif Moghaddam N. (۲۰۱۱), "Application of isogeometric analysis in structural shape optimization," *Scientia Iranica*, vol. ۱۸, pp. ۸۴۶-۸۵۲.
- [۳۶] Wall Wolfgang A.Frenzel Moritz A. Cyron C. (۲۰۰۸), "Isogeometric Structural Shape Optimization," *Comp. Meth. in appl. Mech. and Eng.*, vol. ۱۹۷, pp. ۲۹۷۶-۲۹۸۸.

Abstract

In the current research shape optimization of structures considered as an important part of structural optimization. It has been done based on the isogeometric analysis approach which has the advantage of using powerful representation capabilities of CAD systems based on shape parameterization technique of Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) .

Several mathematical programming techniques can be used to solve optimization problem. Between two mainly approach of gradient-based and gradient-free algorithms we used gradient-based method of moving asymptotes (MMA) which is widely used in many recent works.

As an inseparable part of gradient-based methods sensitivity analysis carries the burden of accelerating of optimization algorithm. Hence formulation of these derivatives based on isogeometric has been considered. Isogeometrical shape optimization of two dimensional structures considered in 2014 for the first time by wall et al. but 3D sensitivity analysis formulation and 3D shape optimization of structures which has many applications in the elasticity problems has been presented in this thesis. Finally some 3D and 2D elasticity problems has been solved in the last chapter to verify formulation results and methods.

Key words: Sensitivity analysis, Structural shape optimization, Isogeometric analysis.

