

الحمد لله



دانشکده مهندسی عمران و معماری

گروه مهندسی عمران

عنوان: تحلیل جریان آشفته در کانال به روش شبیه سازی مستقیم عددی

دانشجو: سامان سالیانی

استاد راهنما :

دکتر رامین امینی

استاد راهنمای دوم:

دکتر محمد جواد مغربی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده مهندسی عمران و معماری

گروه مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد (رساله دکتری) آقای / خانم

تحت عنوان:

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد (رساله دکتری) مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم بہ پدر و مادر عزیز و مہربانم

تشکر و قدردانی:

با تشکر و سپاس فراوان از استاد راهنمای گرامی‌ام، جناب آقای دکتر رامین امینی، که با راهنمایی‌ها و کمک‌هایشان همواره روشن‌گر راهم بودند. همچنین از استاد راهنمای دومم جناب آقای دکتر محمد جواد مغربی، به دلیل زحمات بی‌دریغشان در یاری و همراهی اینجانب در طول انجام این تحقیق کمال تشکر و قدردانی را دارم.

دانشجو تأیید می نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه (رساله) نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه (رساله) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد .

شهریور ۱۳۹۰

چکیده :

در این رساله سعی بر آن است تا تحلیل مناسبی بر روی جریان مغشوش درون کانال انجام گردد. جهت کاهش حجم محاسبات مسئله به صورت دو بعدی از یک کانال، تعریف شده است و عرض کانال نامحدود در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر دامنه محاسباتی به صورت معادلات ناویر-استوکس در نظر گرفته شده و فرم چرخشی این معادلات به صورت مستقیم حل می گردد.

در این رساله سعی شده است تا با کمک شبیه سازی عددی و به دور از هرگونه مدل سازی و یا فرضی جهت ساده سازی، جریان مغشوش در یک کانال مورد بررسی قرار گیرد. برای پیشروی زمان در دامنه محاسباتی، از طرح رانگ کوتای مرتبه سوم استفاده شده است. مشتقات مادی در این رساله با استفاده از روش تفاضلات محدود فشرده استاندارد، محاسبه شده اند و با توجه به مرتبه معادلات ناویر-استوکس در فرم چرخشی در مجموع، چهار شرط مرزی در ورودی و خروجی جریان در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از این رساله با توجه به مستقیم بودن شبیه سازی و عدم ساده سازی معادلات، از دقت بالاتری نسبت به دیگر روش های عددی برخوردار می باشد.

کلمات کلیدی: جریان آشفته- کانال- شبیه سازی مستقیم عددی.

فهرست

فصل ۱: مقدمه.....	۱
مقدمه.....	۲
فصل ۲: تاریخچه و کاربرد های روش های عددی.....	۴
۱-۲ مقدمه.....	۵
۲-۲ محدودیت های شبیه سازی جریان آشفته.....	۸
۳-۲ کاربرد های آشفتگی.....	۱۰
۴-۲ کاربردهای روشهای عددی.....	۱۲
۵-۲ مقایسه بین روش تئوریک با تحقیق آزمایشگاهی.....	۱۳
۱-۵-۲ شبیه سازی شرایط واقعی.....	۱۳
۲-۵-۲ توانایی شبیه سازی شرایط ایده آل.....	۱۳
۳-۵-۲ سرعت بیشتر.....	۱۴
۴-۵-۲ دست یابی به اطلاعات کامل تر.....	۱۴
۵-۵-۲ هزینه کمتر.....	۱۵
۶-۲ خصوصیات روشهای عددی.....	۱۶
۱-۶-۲ روش تفاضل محدود.....	۱۸
۲-۶-۲ روش اجزاء محدود.....	۱۸
۳-۶-۲ روش حجم محدود.....	۱۹
فصل ۳: شبیه سازی مستقیم عددی.....	۲۰
۱-۳ مقدمه.....	۲۱
۲-۳ طول مقیاس کولموگروف:.....	۲۳
۳-۳ نگاهی متفاوت به روش DNS.....	۲۷
۴-۳ روابط ریاضی.....	۲۹
۱-۴-۳ نمونه محاسبات برای حالت دو بعدی.....	۳۳
۲-۴-۳ شرایط مرزی و اولیه.....	۳۵
۳-۴-۳ شرط اولیه.....	۳۷
۴-۴-۳ شبکه محاسباتی.....	۳۷

۴۱	۵-۴-۳ محاسبات عددی
۴۱	۶-۴-۳ محاسبه مشتقات
۴۶	۷-۴-۳ الگوی پیشروی در زمان
۴۸	۸-۴-۳ حل معادله پواسون
۴۹	۹-۴-۳ انتگرال گیری
۵۰	۱۰-۴-۳ مراحل انجام محاسبات
۵۲	فصل ۴: نتایج
۵۳	۱-۴ مقدمه
۵۳	۲-۴ مشخصات کامپیوتر
۵۴	۳-۴ هندسه کانال
۵۵	۴-۴ شرایط مرزی و اولیه
۵۶	۵-۴ نتایج
۵۶	۱-۵-۴ تابع محرک در ورودی: $vx, y, t = 0.3ye - y^2 \cos \pi t$
۸۳	۲-۵-۴ تابع محرک در ورودی: $vx, y, t = \sin 0.4\pi t$
۱۰۵	فصل ۵: نتیجه گیری و ارائه پیشنهادات
۱۰۶	۱-۵ نتیجه گیری
۱۰۷	۲-۵ ارائه پیشنهادات

فهرست شکل ها

۹	شکل (۱-۲): شماتیک تابع سرعت بر حسب زمان
۱۴	شکل (۲-۲): مثالی از نتایج حاصل شده از روشهای عددی
۲۷	شکل (۱-۳): مقایسه بین روش های مدل سازی
۴۰	شکل (۲-۳)
۵۴	شکل (۱-۴): هندسه کانال و ابعاد آن
۵۵	شکل (۲-۴): شبکه محاسباتی استفاده شده
۵۶	شکل (۳-۴): شرایط مرزی کانال

شکل (۴-۴): تغییرات مولفه افقی سرعت نسبت به زمان در پنج مقطع از طول کانال	۵۷
شکل (۵-۴): تغییرات مولفه عمودی سرعت بر حسب زمان	۵۸
شکل (۶-۴): نمودارهای مقادیر سرعت	۶۵-۵۹
شکل (۷-۴): نمودارهای بردارهای سرعت	۶۹-۶۵
شکل (۸-۴): نمودارهای خطوط جریان	۷۶-۷۰
شکل (۹-۴): تغییرات مولفه عمودی سرعت در مقاطع طولی از کانال	۷۸-۷۷
شکل (۱۰-۴): تغییرات مولفه عمودی سرعت در مقاطع ارتفاعی از کانال	۸۰-۷۹
شکل (۱۱-۴): تغییرات مولفه افقی سرعت در مقاطع طولی از کانال	۸۱-۸۰
شکل (۱۲-۴): تغییرات مولفه افقی سرعت در مقاطع ارتفاعی از کانال	۸۳-۸۲
شکل (۱۳-۴): نمودار تغییرات سرعت در یک سلول بر حسب زمان	۸۴
شکل (۱۴-۴): نمودار تغییرات فشار در یک سلول بر حسب زمان	۸۴
شکل (۱۵-۴): نمودار تغییرات فشار در راستای Y برای چهار مقطع کانال در یک لحظه	۸۵
شکل (۱۶-۴): نمودار تغییرات فشار در راستای X برای چهار ارتفاع مختلف کانال در یک لحظه	۸۵
شکل (۱۷-۴): تغییرات مولفه افقی سرعت در راستای X در چهار ارتفاع مختلف از کانال	۸۶
شکل (۱۸-۴): تغییرات مولفه عمودی سرعت در راستای X در چهار ارتفاع مختلف از کانال	۸۶
شکل (۱۹-۴): تغییرات مولفه افقی سرعت در راستای Y در چهار مقطع مختلف از کانال	۸۷
شکل (۲۰-۴): تغییرات مولفه عمودی سرعت در راستای Y در چهار مقطع مختلف از کانال	۸۷
شکل (۲۱-۴): نمودارهای مقادیر سرعت در یک دوره تناوب	۸۸-۹۲
شکل (۲۲-۴): تغییرات خطوط جریان در زمانهای مختلف	۹۳-۹۹
شکل (۲۳-۴): تغییرات بردارهای سرعت در یک دوره تناوب	۹۹-۱۰۴

فهرست جدول‌ها

جدول ۳-۱: طرح پیشروی زمانی رانگ کوتای مرتبه سوم	۱۰۶
جدول ۴-۱: مشخصات کامپیوتر	۴۷
جدول ۵-۱: رنج تغییرات A و ω	۵۳

فصل ۱

مقدمه

مقدمه

یکی از مهمترین سازه های هیدرولیکی کانال ها می باشند که همواره بررسی شرایط جریان سیال درون کانال ها مورد مطالعه دانشمندان قرار گرفته است. بدیهی است حل دقیق تر جریان سیال درون کانال ها باعث بهینه شدن طراحی این نوع از سازه های هیدرولیکی می شود. به موجب همین امر، بررسی جریان در کانال ها کاربردهای علمی و صنعتی فراوانی دارد.

سه نوع جریان سیال در طبیعت وجود دارد:

۱- جریان آرام ۲- جریان حدواسط ۳- جریان آشفته

یکی از متداول ترین و رایج ترین جریان ها در طبیعت جریان آشفته می باشد که در آن ذرات سیال دارای حرکت موجی می باشند.

جهت تحقیق و مطالعه موضوعات علمی سه روش وجود دارد:

- کار آزمایشگاهی

- کار تئوری

- حل و شبیه سازی عددی

روش های مختلفی جهت شبیه سازی عددی جریان وجود دارد که هر روش دارای دقت و حجم محاسبات خاص خود می باشد. یکی از جدیدترین این روش ها، روش شبیه سازی مستقیم عددی یا DNS می باشد. با توجه به اینکه در طول محاسبات به روش شبیه سازی مستقیم عددی هیچگونه ساده سازی صورت نمی گیرد و همچنین با توجه به اینکه مقیاس شبکه محاسباتی این روش بر اساس مقیاس ادی های کوچک جریان و متعاقبا

رینولدز جریان تعیین می شود دارای دقت بالاتری نسبت به دیگر روش های عددی می باشد. در این رساله سعی شده است که با استفاده از روش شبیه سازی مستقیم عددی جریان مغشوش را در کانال دو بعدی با دقت بالاتری مورد تحقیق و بررسی قرار دهیم. با توجه به اینکه بالا بردن رینولدز جهت آشفتگی کردن جریان سیال باعث بسیار ریز شدن شبکه محاسباتی و متعاقبا افزایش حجم محاسبات و زمان محاسبات و عدم کارایی کامپیوترهای خانگی می گردد، از یک محرک در ورودی کانال جهت ایجاد جریان مغشوش در کانال استفاده شده است.

این تحقیق شامل توضیحاتی در خصوص مزایای روش عددی و تاریخچه آن در فصل دوم می باشد. پس از آن در فصل سوم، توضیحاتی در خصوص روش های شبیه سازی مستقیم عددی و مزایا و معایب آنها نسبت به هم و توضیحات کلی در خصوص روش DNS آورده شده است و محدودیت های این روش نیز مورد بررسی قرار گرفته است. سپس در ادامه این فصل، به روابط ریاضی استفاده شده جهت حل معادله ناویر-استوکس و روش محاسبه مشتقات آن به روش اختلاف محدود فشرده و شرایط اولیه و مرزی لازم جهت محاسبه معادله ناویر-استوکس پرداخته شده است. پس از آن در فصل چهارم، شرایط جریان و هندسه کانال در این پایان نامه مطرح شده و نتایج محاسبات آورده شده است. در فصل پنجم این پایان نامه علاوه بر نتیجه گیری، برای پیشبرد تحقیقات آتی پیشنهاداتی داده شده است. در پایان هم فهرست منابع استفاده شده در این تحقیق آورده شده است.

فصل ۲

تاریخچه و کاربرد های روش های عددی

۲-۱ مقدمه

بشر از دیر باز بخشی از زندگی خود را صرف مطالعه و بررسی جریان سیالات نموده و طی قرون متمادی اصولی را جهت بیان جریان سیالات ارائه کرده است. اولین اصل توسط ارسطو در سال ۳۲۲-۳۸۴ قبل از میلاد ارائه شد.^[۱] او براین باور بود که توانایی یک جسم بر ای حرکت، مستقیماً به دانسیته محیط بستگی دارد و همچنین مقاومت اعمال شده در برابر حرکت نیز به دانسیته محیطی که در آن جسم حرکت می کند، بستگی دارد . در قرن هفدهم و در سال ۱۶۷۸ نیوتن^۱ قانون مشهور خود را برای سیالات لزج بیان کرد . پس از او دانیل برنولی^۲ در سال ۱۳۷۸ رابطه انرژی را در مایعات بیان نمود و در همان دوران اویلر^۳ با بکار بردن قوا نین نیوتن در هر نقطه از سیال، معادله دیفرانسیلی حرکت را ارائه نمود که هنوز به نام خودش شهرت دارد . تفکر اویلر براین اصل استوار بود که سیال هیچگونه تنش برشی را تحمل نمی نماید، بنابراین معادله دیفرانسیلی حرکت، که توسط اویلر ارائه شد، میتوان بر ای سیالات کامل به کار گرفته شود. [۲] در همان دوران محققى به نام دالامبرت^۴ با معادلاتى شبیه به معادلات اویلر، نظریه مشهور خود را منتشر کرد و نشان داد که هیچگونه نیروی کششی بر روی اجسام متناهی وجود ندارد . موضوع آنچنان در تضاد با مشاهدات واقعی بود که چاره ای جز واگذاری آن به آینده وجود نداشت. [۳]

پیشرفت تحلیلی بعدی، اضافه شدن ترم های مقاومت اصطکاکی به معادله اویلر بود. این امر با درجات مختلف دقت و صحت توسط ناویر^۵ در سال ۱۸۲۷ و کوشی^۶ در سال

^۱ - newton

^۲ - Daniel Bernoulli

^۳ - Euler

^۴ - D'Alembert

^۵ - Navier

^۶ -Cauchy

۱۸۲۸، پواسون^۱ در سال ۱۸۲۹ سنت و نانت^۲ در سال ۱۸۴۳ و استوکس^۳ در سال ۱۸۴۵ انجام گردید. استوکس بر ای اولین بار از ضریب لزجت (μ) استفاده نمود. امروزه این معادلات به همراه معادله پیوستگی که اصول اساسی جریان سیال را بیان می کنند به معادلات ناویر - استوکس مشهور می باشد. [۴]

در سال ۱۸۸۳ محقق دیگری به نام رینولدز^۴ دریافت که جریان سیالات را باید به دو دسته تقسیم نمود.

۱- جریان های آرام

۲- جریان های آشفته

جریان های نوع اول در سرعت های کم که ذرات در امتداد خطوط موازی با جداره می لغزند رخ می دهد و جریان نوع دوم در سرعت های نسبتاً زیاد، که در آن ذرات حرکت موجی، ناشی از یک حرکت لرزشی در حول و حوش سرعت متوسط را به اجرا در می آورند، رخ می دهد. در سال ۱۹۰۴ محقق بنام پراتل^۵ دریافت که اغلب میدان های جریان ممکن است به دو ناحیه تقسیم شوند، یکی نزدیک مرز که سیال با جداره در تماس است و دیگری شامل بقیه جریان می باشد. او اعتقاد داشت که در ناحیه نزدیک مرز، که لایه مرزی نامیده می شود، اثر ویسکوزیته از اهمیت بیشتری برخوردار است، اما قسمت دیگر می تواند بعنوان سیال ایده آل در نظر گرفته شود. [۳]

می توان اذعان کرد که در جریان های عمومی، معادلات ناویر- استوکس دهها سال بلااستفاده مانده بود و نقش چندانی در طراحی و توسعه اولیه هواپیماها و یا اصلاح

^۱ -Poisson

^۲ - Saint Venant

^۳ - Stokes

^۴ - Reynolds

^۵ - Prandtl

کشتیها نداشت . هنگام برخورد با یک مشکل ریاضی حذف بعضی پارامترها و ساده کردن معقول معادلات منطقی به نظر می رسد. این کار معمولاً بستگی به اهمیت و بزرگی آن پارامتر حذف شده در مقایسه با پارامترهای باقیمانده برای شرایط مورد نظر دارد.

برای اتخاذ روشی عاقلانه، لازم است که ابتدا متغیرهای مستقل و غیرمستقل را بصورت بدون بعد و نرمال و با تقریب در مرتبه واحد درآوریم. مثلاً می توان سرعت موضعی جریان u را با سرعت جریان آزاد U_∞ و مختصات محوری x را با طول جسم یا قطر لوله و یا دیگر طولها نشان داد . وقتی که چنین کاری برای معادله ناویر - استوکس انجام گیرد یک ضریب $1/Re$ در تمام عبارت لزج ضرب می شود. که این عبارت برای بیشتر جریان های بسیار بزرگ تقریباً 10^{-8} تا 10^{-3} خواهد بود.

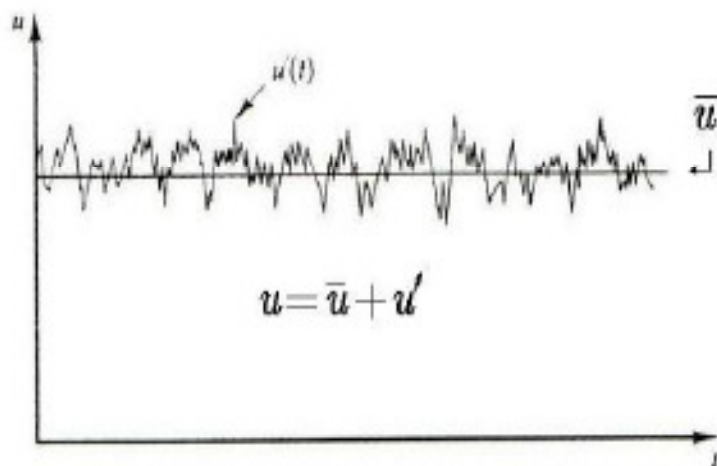
در نظر اول ممکن است گمان کنیم که می توان از تمام عبارتی که در $1/Re$ ضرب شده اند صرفنظر کرد، زیرا عبارت دیگر ضرایب تقریباً مساوی واحد دارند. اما یک مسئله باقی می ماند و آن این است که در معادلات جریان غیرلزج نمی توان نیروی نگهدارنده اصطکاک پسا و انتقال حرارت را پیش بینی کرد. این مسئله بصورت یک موضوع لاینحل باقی مانده بود تا اینکه تحلیلهای موثر لودویک پرانتل (۱۹۰۴) وارد عمل شد. او استدلال می کرد که برای جریان های با عدد رینولدز بزرگ، اثرات لزجت در طول یک لایه نازک ، درامتداد سطح جامد محصور می شود. چنین منطقه ای وجود خواهد داشت، زیرا که سرعت باید از مقدار قابل توجه U_e در خارج لایه تا صفر در روی سطح تغییر کند. این موضوع حتی برای با جریان های با لزجت پائین (Re بزرگ) گرادیانی بزرگ و نتیجتاً یک نیروی برشی ایجاد می کند. اگرچه این منطقه ممکن است بخش کوچکی از تمام منطقه جریان را اشغال کند، اما نمی توان از آن صرفنظر کرد. زیرا تمام انتقال اندازه حرکت و حرارت و جرم چه به سمت داخل صفحه و چه به خارج از صفحه در همین منطقه صورت می گیرد. در خارج از این لایه مرزی، جریان مانند یک جریان غیرلزج عمل خواهد کرد. لذا

این ایده بسیار عالی و جدید که جریان را به دو منطقه تقسیم کنیم و برای هر منطقه معادلات مخصوص بخودش را در نظر بگیریم، متولد شد. برای جریان خارجی از اثر لزجت صرفنظر می کنیم، و در آن از معادلات غیرلزج یعنی اوایلر استفاده می کنیم. برای جریان داخل لایه مرزی از یک فرم ساده معادلات نا ویر - استوکس که شامل عبارت لزج می باشد استفاده می شود. البته حل معادلات در دو منطقه، باید بطور مناسبی جمع شوند تا یک حل مرکب برای تمام جریان بدست آید. این ایده آنقدر قوی است که در شاخه های دیگر علوم در کنار دینامیک سیالات از آن استفاده شده است. [۳]

۲-۲ محدودیت های شبیه سازی جریان آشفته

با افزایش عدد رینولدز جریان به بیش از رینولدز بحرانی، آثار ناپایداری و تغییر رژیم در سیال ظاهر می شود و در اثر اغتشاش محیط، جریان سیال مغشوش می شود. عواملی که در اغتشاش سیال دخالت دارند عبارتند از: آشفتگی درخارج لایه مرزی، زبری سطح، انتقال حرارت، گرادیان فشار و... جریان آشفته موضوع تحقیقات زیادی بوده است و مقالات زیادی در این مورد هر سال منتشر می شود، ولی به علت پیچیدگی این پدیده هنوز تحلیل و تعریف کاملی از آن در دست نیست، اکنون با وجود روش های جدید و کمک تجهیزات اندازه گیری دقیق اطلاعات زیادی درباره آشفتگی جریان از لحاظ فیزیکی و ریاضی می دانیم. اگر سرعت در یک نقطه داخل جریان مغشوش اندازه گیری شود و بر حسب زمان رسم شود، شکل منحنی به صورت زیر می شود:

($\bar{u}$ مقدار متوسط دائمی و $u'(t)$ مولفه نوسانی سرعت می باشد).



شکل ۱-۲: شماتیک تابع سرعت بر حسب زمان

یک منحنی نوسانی نامنظم و با دامنه نوسان ۵ تا ۱۰ درصد مقدار متوسط است، البته با تغییر محل نقطه اندازه گیری شکل نوسان هم عوض می شود. همه متغیرها مانند u ، T ، p ، V و ... در جریان آشفته دارای چنین نوسانی می باشند.

حل چنین جریانی به صورت مستقیم خارج از توانایی کامپیوترهای کنونی است. امونز (۱۹۷۰) به روشنی حد محاسبات توربولانس در یک لوله را مشخص کرد. او نشان داد که در عدد رینولدز 10^7 حدود 10^{22} عمل عددی احتیاج است. اگر ما از نظر حجم حافظه کامپیوتر مشکل نداشته باشیم و سرعت کامپیوتر یک نانو ثانیه برای هر عمل باشد محاسبات حدود ۳۲۰۰۰ سال طول می کشد.

حل انتگرالی نتایج بسیار مفیدی دارد ولی این روش هیچ اطلاعاتی در مورد توربولانس به ما نمی دهد و در ضمن پروفیل های ارائه شده دارای محدودیت کاربرد می باشند؛ مثلاً پروفیل جریان های با مکش و تزریق در مرز را نمی توان با منحنی لگاریتمی تقریب زد. به همین دلیل اغلب در حل جریان های آشفته از روش های عددی به خصوص روش اختلاف محدود استفاده می شود. در روش های عددی اغلب از معادله رینولدز استفاده می شود و تنش رینولدز را با روش های مختلفی مدل می کنند بطور کلی شبیه سازی عددی جریان مغشوش را می توان به سه دسته تقسیم کرد. ساده ترین و عملیترین

روش مورد استفاده در حال حاضر استفاده از معادله های ناویر- استوکس متوسط زمانی به همراه یک مدل اغتشاش است. دومین مرحله از نظر پیشرفته بودن، استفاده از شبیه سازی معادله تابع زمانی با گردابه های بزرگ است. در این روش، اثر گردابه های کوچکتر را با مدل های اغتشاش منظور می کنیم. سومین گروه شبیه سازی مستقیم عددی، گردابه های اغتشاش در همه اندازه ها است. گروه های دوم و سوم جدیدتر از گروه اول هستند. یکی از محدودیت های این روش ها مشکل مربوط به ظرفیت کامپیوترهای امروزی است. در هر حال، با پیشرفت در صنعت کامپیوتر، شبیه سازی گردابه های بزرگ و اغتشاش کامل در دهه های آینده ممکن به نظر می رسد.[۱]

۲-۳ کاربرد های آشفتگی

آشفتگی پدیده ای طبیعی است و زمانی که گرادیان سرعت بالا باشد در جریان سیال اتفاق می افتد و باعث اختلال در حوزه جریان به صورت تابعی از زمان و مکان می شود. امواج اقیانوس ها، حرکت دود در هوا اتمسفر سیارات و غیره مثال هایی از جریان های آشفته می باشند. اگر چه در قرن اخیر آشفتگی بسیار مورد مطالعه قرار گرفته اما هنوز ناشناخته های بسیاری در مورد آشفتگی در جریان های با عدد ماخ یا رینولدز بالا وجود دارد. جریان آشفته در تماس با دیواره یا دو لایه از جریان که با سرعت های متفاوت در کنار هم حرکت می کنند، بوجود می آید. همچنین آشفتگی در نتیجه ناپایداری امواج در جریان خطی و بالا رفتن عدد رینولدز بوجود می آید. با افزایش گرادیان سرعت، جریان به صورت چرخشی درآمده و باعث منبسط شدن خطوط جریان گردابی شده که قابل مشاهده در دو بعد نیستند. بنابراین ماهیت آشفتگی در جریان آشفته به صورت فیزیکی در نمونه

سه بعدی به صورت نوسانات تصادفی می باشد و این باعث می شود که گسسته سازی دو بعدی در جریان آشفته در بسیاری از شبیه سازی های عددی غیر قابل قبول باشد.

در جریان های آشفته انواع مختلف گردابه ها یا همان آشفتگی ها دیده شده که این گردابه ها روی هم افتاده و گردابه های بزرگ، گردابه های کوچک را حمل می کنند و انرژی جنبشی بدین ترتیب از گردابه های بزرگ تر به گردابه های کوچک تر منتقل شده و در نهایت باعث پخش شدن گردابه های کوچک می شود. در روش ^۱ DNS از یک مش اصلاح شده استفاده می شود تا تمام مقیاس های کوچک و بزرگ گردابه ها مدل و حل شوند. این روش به عنوان یک روش دقیق شناخته می شود. اگرچه برخی مسائل ساده با استفاده از روش DNS حل شده بودند، اما حل مسائل کاربردی صنعتی نیازمند استفاده از کامپیوترهای گران و قوی می باشد. تا هنگامیکه نوسانات تصادفی ناشی از آشفتگی ها بوجود نیامدند، روش های عددی سنتی سریعتر از روش های طیفی می باشند. با این رویکرد، میانگین زمانی متغیر ها در جهت عدم استفاده از میانگین مقادیر نوسانات استفاده می شود. در نتیجه مجهولات جدیدی در معادلات حاکم ظاهر می شود. بنابراین جهت بستن دستگاه معادلات، معادلات اضافی معرفی می شوند که با عنوان روش شبیه سازی آشفتگی یا میانگین رینولدز ناویر-استوکس ^۲ RaNS شناخته می شود. پس با این روش نیازی به روش مش اصلاح شده در روش DNS وجود ندارد. از ادغام دو روش DNS و RaNS روش ^۳ LES بوجود می آید. در این روش ادی ها محاسبه می شوند اما ادی های کوچک مدل می شوند. بنابراین مش بندی در روش LES بیشتر از روش RaNS است اما از روش DNS کمتر می باشد. به علت آنکه در روش DNS آشفتگی های کوچک نیز محاسبه می شوند. بنابراین این مسئله باعث ریز شدن مش می شود. [۲۰]

^۱ - Direct Numrical Simulation(DNS)

^۲ - Reynolds – average Navier Stokes

^۳ - Large – Eddy Simulation(LES)

۲-۴ کاربردهای روشهای عددی

می توان گفت که در قرن گذشته مطالعه فرآیندهای جریان سیالات و انتقال حرارت، به دو روش اصلی که عبارتند از: تحقیق آزمایشگاهی و محاسبات عددی انجام شده است. اطلاعات دقیق در مورد یک فرآیند فیزیکی، غالباً توسط اندازه گیری عملی بدست می آید. بسیاری از این دستگاه ها به علت بزرگ بودن نمونه مورد آزمایش بسیار گران خواهند بود، بنابراین آزمایش مورد نظر بر روی ماکتی انجام می شود و باید این نکته را یادآور شد که در بسیاری از حالت ها مشکلات جدی اندازه گیری وجود داشته و وسایل اندازه گیری عاری از خطا نمی باشند. از طرف دیگر محاسبات عددی نیازمند هزینه کمتری می باشد اما لازمه آن ارائه روشهای حلی مناسب جهت حل مسائل می باشد. روشهای حل تئوری ارائه شده عبارتند از: روش حل تحلیلی^۱ و روش حل عددی^۲

با پیشرفت روز افزون تکنولوژی در ساخت وسایل، محققان برآن شدند که با روشهای تحلیلی مسائل را مورد بررسی قرار دهند، اما پیچیدگی مسئله به حدی بود که برای بسیاری از مسائل جواب دقیق بدست نیامده و از سوی دیگر روشهای عددی توسط محققان بکار گرفته شد و نتایج بدست آمده نشان داد که این روشها می توانند جوابگوی نیاز محققان باشند. البته منظور کاستن از اعتبار و ارزش روش تحلیلی نمی باشد، اما تقریباً تردیدی نیست که روشهای کلاسیک ریاضی، راه قابل استفاده ای را برای حل اکثر مسائل پیچیده مهندسی، ارائه نمی کنند.[۴]

^۱-Analytical Method

^۲-Numerical Method

۵-۲ مقایسه بین روش تئوریک با تحقیق آزمایشگاهی

محاسن محاسبات تئوریک نسبت به یک تحقیق آزمایشگاهی عبارتند از:

۲-۵-۱ شبیه سازی شرایط واقعی

در تحقیقات آزمایشگاهی مواردی وجود دارد که مسئله مورد بحث از نظر فیزیکی باید تغییر داده شود. مثلاً برای بررسی اثر حرکت باد بر روی ساختمانهای بلند، به علت بزرگ بودن ابعاد مدلی ساخته شود و یا در بعضی آزمایشات نظیر بررسی حرکت سیال اطراف پره های توربین بخار لازم است از درجه حرارت های بالا استفاده شود که این کار در بسیاری از موارد امکان پذیر نمی باشد. اما در یک محاسبه تئوری شرایط واقعی به آسانی شبیه سازی میشود.

۲-۵-۲ توانایی شبیه سازی شرایط ایده آل

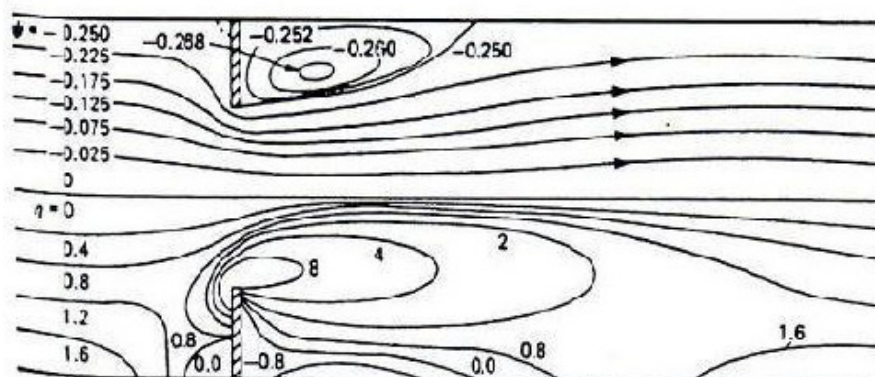
گاهی اوقات برای مطالعه برخی از پدیده ها، محقق توجهش را روی تعدادی از پارامترهای اصلی متمرکز نموده و تمام جنبه های دیگر را حذف می کند. به عنوان مثال می توان از دو بعدی بودن، ثابت بودن جرم مخصوص و یا وجود یک سطح آدیاباتیک نام برد. در یک کار محاسباتی این شرایط به آسانی و با دقت کامل می توانند برقرار شوند. در حالیکه حتی در یک آزمایش عملی دقیق به زحمت می توان به شرایط ایده آل نزدیک شد.

۲-۵-۳ سرعت بیشتر

در محاسبات تئوری انجام شده برای مسئله ای خاص، می توان به راحتی شرایط اعمال شده برای پارامتری خاص را تغییر داد، (مثلاً عدد رینولدز) و این کار نیاز به وقت زیادی نخواهد داشت، اما در یک بررسی آزمایشگاهی برای تغییر هر یک از شرایط اعمال شده لازم است ساعت ها وقت صرف نمائیم.

۲-۵-۴ دست یابی به اطلاعات کامل تر

با استفاده از محاسبات تئوری می توان کلیه پارامترها، نظیر سرعت، فشار و دانسیته را در کل دامنه مورد بررسی بدست آورد اما در یک تحقیق آزمایشگاهی تنها در نقاطی خاص پارامترهای مورد نظر قابل اندازه گیری می باشند.



شکل (۲-۲): مثالی از نتایج حاصل شده از روشهای عددی [۳]

۲-۵-۵ هزینه کمتر

مهم‌ترین فاکتور در شرایط کنونی جهان، صرف هزینه کمتر و بدست آوردن نتایج بهتر است. مهمترین امتیاز روشهای محاسباتی هزینه کمتر آنهاست، و این هزینه که بیشتر آن صرف استفاده از کامپیوتر می شود و در حال حاضر روزبه روز رو به کاهش است. امتیازات گفته شده در قسمت قبل به اندازه کافی مؤثر هستند که شخص را برای تحلیل کامپیوتری و عددی ترغیب نمایند. به هر حال، ایجاد علاقه کورکورانه مطلوب نیست، لذا مفید خواهد بود، که از موانع و محدودیت ها نیز آگاه باشیم [۱۸] .

برای بحث در مورد نارساییهای یک محاسبه تئوری، تقسیم کردن تمام مسائل عملی به دو گروه به شرح زیر مفید خواهد بود.

گروه الف: مسائلی که برای آنها یک بیان ریاضی مناسب می توان نوشت. (مانند

هدایت حرارت، جریانهای آرام، لایه های مرزی آشفته ساده)

گروه ب: مسائلی که برای آنها هنوز یک بیان ریاضی مناسب به دست نیامده است.

(مانند جریان آشفته پیچیده، جریانهای غیرنیوتنی معین، بعضی جریانهای دو فازی)

می توان گفت، برای بیشتر مسائل گروه الف، حل تحلیلی اصولاً هیچ نوع نارسایی

ندارد. بنابراین حل کامپیوتری نشان دهنده آن قسمت از روش کار است که بسیار برتر از

مطالعه آزمایشگاهی است. با وجود این، گاهی با بعضی نارساییها مواجه می شویم. برای

مسائل مشکل که دارای شکل هندسی پیچیده، غیرخطی های شدید، تغییرات حساس

خواص سیال و غیره باشند، به دست آوردن یک حل عددی دشوار بوده و اگر احیاناً انجام

شود، بسیار گران خواهد بود. مسائل گروه ب علاوه بر دارا بودن تمام نارساییهای گروه الف

در اینکه نتایج محاسبات آنها تا چه حدی با واقعیت توافق دارند نیز، ابهام دارد. در چنین حالت‌های وجود بعضی نتایج آزمایشگاهی، می‌تواند بسیار موثر باشد.

۲-۶ خصوصیات روش‌های عددی

اکثر روش‌های عددی دارای تشابهات زیر می‌باشند:

- (۱) در همه روش‌ها، تمام ناحیه مورد نظر، به اجزاء کوچک تقسیم شده و جواب پیوسته معادله را با مقادیر تفکیک شده در نقاط اجزاء، تعویض می‌کنند.
- (۲) همه روش‌ها، با تقریب‌های مناسب یا توابعی مناسب از متغیرهای وابسته بین نقاط گره‌ها، یک سیستم معادلات جبری را از معادله دیفرانسیل استخراج می‌کنند.
- (۳) سیستم معادلات جبری بدست آمده را با شرایط مرزی و اولیه مناسب حل کرده تا جواب عددی مربوط به همه نقاط شبکه بدست آید.

از طرفی یک روش عددی خوب باید دارای مشخصات زیر باشد:

- (۱) از نظر ریاضی معتبر و منطقی باشد و پایه و اساس فیزیکی داشته باشد. (به جواب‌های واقعی برسد و قابل اعمال بر مسائل عملی باشد)
- (۲) نسبت به هندسه و ترکیب فیزیکی دامنه حل و طبیعت بارگذاری محدودیتی نداشته باشد.
- (۳) روند فرمول‌بندی باید مستقل از شکل دامنه حل و شرایط مرزی باشد.
- (۴) روش باید انعطاف پذیر باشد، تا درجات متفاوت تقریب بدون فرمول‌بندی مجدد مسئله قابل دسترسی باشد [۱۸].

(۵) باید شامل یک روند منظم و قانونمند باشد تا بتواند به صورت خودکار روی کامپیوترها اجرا شود.

روشهای عددی که بیشتر از سایر روشها در آنالیز جریان سیالات مورد استفاده قرار می گیرند عبارتند از:

(۱) روش تفاضل محدود^۱ (FDM)

(۲) روش اجزاء محدود^۲ (FEM)

(۳) روش حجم محدود^۳ (FVM)

سر فصل مشترک روش های حل عددی که در بالا ذکر گردید به شرح زیر می باشد:

(۱) تقریب متغیرهای مجهول جریان، با استفاده از توابع ساده

(۲) گسسته سازی با استفاده از جایگذاری تقریب ها در معادلات حاکم بر جریان و سپس انجام تغییرات ریاضی و تشکیل دستگاه معادلات جبری

(۳) حل معادلات جبری

تفاوت اصلی میان این سه روش حل عددی، در روشی است که در آن متغیرهای

جریان تقریب می خورد و فرآیند گسسته سازی صورت می گیرد.[۳]

^۱-Finite Differences Method

^۲-Finite Element Method

^۳-Finite Volume Method

۲-۶-۱ روش تفاضل محدود

در روش های تفاضلهای محدود، مجهولات مساله جریان Φ را با استفاده از همسایه های هر نقطه در نقاط گره مربوط به شبکه خطوط مختصات تعیین می کنند. اغلب از بسطهای سری تیلور منقطع برای بدست آوردن تقریبهای اختلاف محدود مشتقات Φ در عبارات همسایه های نقطه Φ در هر گره شبکه و در همسایه های آن استفاده می شود. بنابراین مشتقات ظاهر شده در معادلات حاکم توسط اختلاف محدود جایگذاری شده و یک معادله جبری برای مقادیر Φ در هر نقطه از شبکه مختصات تشکیل می شود. اسمیت^۱ در سال ۱۹۸۵ یک مفهوم جامعی از تمام جنبه های روش تفاضلهای محدود ارائه نموده است. [۱۸]

۲-۶-۲ روش اجزاء محدود

در روشهای اجزاء محدود از توابع تکه ای ساده (خطی یا درجه دوم) که برای اجزاء ارزش داشته باشد، به منظور شرح تغییرات محلی متغیرهای مجهول جریان Φ ، استفاده می شود. معادلات حاکم با استفاده از حل دقیق Φ کاملاً ارضاء می شوند. اگر توابع تقریب تکه ای برای Φ ، در معادله جایگذاری شوند، معادله دقیقاً ارضاء نخواهد شد و یک باقیمانده برای اندازه گیری خطاها تعریف می شود. سپس باقیمانده ها (و در نتیجه خطاها) در برخی جهات توسط ضرب آنها در یک مجموعه ای از توابع وزنی و انتگرال گیری، به حداقل می رسند. در نتیجه ما یک مجموعه ای از معادلات جبری برای ضرایب مجهول توابع تقریب بدست می آوریم. تئوری اجزاء محدود اولین بار برای تحلیل تنش سازه ای بیان شد. از

^۱-Smith

جمله کارهای استاندارد ارائه شده برای کاربرد اجزاء محدود در سیالات می توان کارهای

زینکیویکچ و تیلور^۱ (۱۹۹۱) را نام برد. [۱۸]

۲-۶-۳ روش حجم محدود

روش حجم محدود ابتدا به عنوان یک فرمول بندی تفاضل محدود ویژه توسعه

یافت. برخلاف روش های تفاضل محدود که مبتنی بر گسسته سازی بر روی فرم تفاضلی

معادلات حاکم می باشند، روش های حجم محدود مبتنی بر گسسته سازی بر روی فرم

انتگرالی معادلات حاکم بر روی یک حجم کنترل می باشند. [۱۸]

^۱ - Zienkiewicz and Taylor

فصل ۳

شبیه سازی مستقیم عددی

۳-۱ مقدمه

حل عددی کامل معادلات ناویر-استوکس وابسته به زمان، شبیه سازی مستقیم عددی نامیده می شود، که بطور کلی در آن همه مقیاس های مهم جریان را بدون استفاده از مدل های آشفتگی محاسبه می کنند. روش شبیه سازی مستقیم عددی به سبب آنکه جریان آشفته را نیز بصورت مستقیم شبیه سازی می کند و نسبت به دیگر روش های متداول در دینامیک سیالات محاسباتی که وابسته به نحوه مدل کردن معادلات میانگین ناویر-استوکس رینولدزی می باشند، متفاوت است. روش شبیه سازی مستقیم عددی همچنین به سبب آنکه تمامی گردابه های جریان را از کوچکترین تا بزرگترین مقیاس را شبیه سازی می کند، با روش شبیه سازی بزرگترین گردابه^۱ متفاوت بوده و بنابراین به یک مش بندی بسیار ریز نیاز دارد. روش شبیه سازی مستقیم عددی به جهت تولید یکسری از شبیه سازی های جریان آشفته مجازی می توان آنرا به عنوان یک آزمایش عددی معرفی نمود. توانایی بالا این روش آنرا قادر ساخته تا اطلاعات جامع و در عین حال ساده ای را بوسیله تقریب در تمامی نقاط جریان و در تمامی زمان ها در یک دوره زمانی شبیه سازی جریان را فراهم کند.

نقطه شروع برای هر روش عددی، مشخص کردن مدل ریاضی است که شامل مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل جزئی و شرایط مرزی است. معادلاتی که برای بررسی انتخاب می شوند دارای ترم های غیرخطی هستند که می توان آنها را با مدل های ریاضی خاص و مناسب به صورت خطی تبدیل کرده و این مدلها را جایگزین ترمهای غیرخطی^۲ نمود. ولی وقتی که در معادلات ریاضی هیچ گونه دخل و تصرفی صورت نگیرد و هیچگونه ساده سازی و یا مدلسازی در آن وارد نشود و به همان صورتیکه تعریف شده حل عددی شود نتایج بسیار دقیق می باشند و به همین دلیل این نوع حل عددی را در اصطلاح، "حل مستقیم عددی" می نامند. [۵]

^۱-Large-Eddy Simulation (LES)

^۲ - Non-Linear Terms

پایه و اساس روش DNS در جریان لایه مرزی برای نخستین بار توسط اورزاگ^۱ و پترسون^۲ (۱۹۷۲) بنا نهاده شد، آنها برای شبیه سازی مستقیم عددی لایه مرزی در عدد رینولدز ۳۲، از روش طیفی استفاده کرده بودند.[۶] گام مهم بعدی توسط روگالو^۳ (۱۹۸۱) برداشته شد، او با استفاده از بسط و توسعه الگوریتم محاسباتی اورزاگ و پترسون معادلات حاکم بر جریان توربولانس را به روش DNS محاسبه نمود و نتایج بدست آمده را با نتایج آزمایشگاهی و چندین روش توربولانس دیگر مقایسه نمود.[۷] در آن سالها بعلت ضعف کامپیوترها جریان به صورت همگن و تنها در یک جهت مورد مطالعه قرار می گرفت، و اجازه استفاده از روش DNS را در جریان توربولانس در نزدیکی جداره را، به کاربر نمی داد. اسپالارت^۴ (۱۹۸۸) توسط یک روش ابتکاری در DNS توانست، جریان لایه مرزی توربولانس را تحت گرادیان فشار صفر و مطلوب محاسبه نماید.[۱۰]

روش شبیه سازی مستقیم عددی برای مطالعه فیزیک آشفستگی، توسعه مدلها و تئوریهای آن و در موارد خاص، برای پیش بینی و تحلیل جریان های مورد علاقه در مهندسی استفاده می گردد، همچنین در بررسی ساختار آشفستگی و مقایسه داده های تجربی استفاده می شود. اطلاعات بدست آمده از روش شبیه سازی مستقیم عددی در مدلسازی (به خصوص در اعداد رینولدز پایین) و کالیبره کردن وسایل اندازه گیری به کار گرفته می شود. روش شبیه سازی مستقیم عددی در حال حاضر بیشتر توسط ابر کامپیوترها صورت می گیرد.[۱۲]

مشکلات موجود در انجام این محاسبات به دلیل وجود محدوده بسیار وسیع مقیاسهای طولی و زمانی در جریان آشفته است که باید در محاسبات در نظر گرفته شوند. با در نظر گرفتن این تغییرات نیاز به شبکه محاسباتی بسیار ریز و گام های زمانی بسیار کوتاه می باشد، که به این ترتیب احتیاج به انجام محاسبات طولانی برای این امر مشخص می شود.

^۱ - Orszag
^۲ - Patterson
^۳ - Rogallo
^۴ - Spalart

برای بدست آوردن نتایج دقیق در دینامیک جریان آشفته، لازم است که از شبکه محاسباتی که اندازه المانهای آن کوچکتر از کوچکترین ادیهای موجود در جریان می باشد استفاده نمائیم، یعنی هر یک از کوچکترین ادیها به تنهایی توسط چند المان کوچکتر گسسته گردند. بدین منظور لازم است که اندازه کوچکترین ادیها بر حسب طول مقیاس کولموگروف^۱ تعیین گردند. [۱۹]

۳-۲ طول مقیاس کولموگروف:

اندازه کوچکترین ادیها هم مرتبه اندازه طول مقیاس کولموگروف η می باشند. وی ثابت نموده است که:

$$\eta = \left(\frac{\vartheta^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (۳-۱)$$

که در آن ϑ ویسکوزیته سینماتیک و ε نرخ اضمحلال انرژی جنبشی می باشد.

$$\vartheta = \frac{\mu}{\rho} \quad , \quad \varepsilon = \text{نرخ اضمحلال انرژی جنبشی} \quad , \quad \text{Where } T.K.E. = \frac{1}{2} \{ u'^2 + v'^2 + w'^2 \}$$

به همین ترتیب یک سرعت مقیاس کولموگروف نیز تعریف می شود:

$$v = (\varepsilon \vartheta)^{\frac{1}{4}} \quad (۳-۲)$$

بعد از آنکه ادیها به اندازه هائی در حد طول مقیاس کولموگروف شکسته شدند، انرژی خود را به وسیله اضمحلال لزج به گرما تبدیل می کنند که نرخ اضمحلال مربوطه را با ε نشان داده می شود:

^۱-Kolmogorov Length Scale

$$\varepsilon = A \frac{u^{\prime 2}}{l_e} \quad (3-3)$$

که در آن A ضریبی ثابتی از مرتبه واحد، u' نوسان سرعت^۱ و l_e اندازه متوسط ادی حامل انرژی است.

با این فرض که $l_e \propto L_r$ است، (که در آن L_r همان طول مقیاس مساله مانند طول صفحه یا قطر لوله یا ...) است و با در نظر گرفتن U_r (که همان سرعت مقیاس مساله است) و با این فرض که $u' \propto U_r$ می باشد، آنگاه می توان اینطور اظهار داشت که در مدلسازی یک جریان آشسته سه بعدی، دامنه محاسباتی از مرتبه L_r^3 و فاصله بین المان ها از مرتبه η^3 می باشد. بنابراین تعداد کل المانهای مورد نیاز $\left(\frac{L_r}{\eta}\right)^3$ می باشد. با تعریف عدد رینولدز کلی جریان به صورت $Re = \frac{U_r L_r}{\eta}$ در اینصورت:

$$\frac{L_r}{\eta} = \frac{L_r \varepsilon^{\frac{1}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}}} = \frac{L_r U_r^{\frac{2}{3}}}{\eta^{\frac{1}{3}} L_r^{\frac{2}{3}}} = Re^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \text{تعداد کل المان های مورد نیاز} = \left(\frac{L_r}{\eta}\right)^3 \sim Re^{\frac{2}{3}}$$

از آنجا که در کاربردهای مهندسی عدد رینولدز معمولاً دارای مقداری بین 10^5 و 10^8 است، بنابراین اندازه کوچکترین ادی ها چیزی در حدود 10^{-6} تا 10^{-4} برابر طول مقیاس مساله است. به عبارت دیگر، برای مدلسازی کاملاً دقیق ادیهای موجود در هر جریان آشسته (بالاخص نحوه اضمحلال ادیهای موجود در جریان)، هر بعد هندسی مساله بایستی حداقل به 10^4 تا حداکثر 10^6 قسمت گردد. یعنی برای یک مسئله دو بعدی به 10^8 تا 10^{12} عدد المان و در یک مساله سه بعدی به 10^{12} تا 10^{18} عدد المان نیاز می باشد، حال چنانچه بخواهیم مدلسازی را به صورت وابسته به زمان و گذرا انجام دهیم، زمان مورد نیاز برای بررسی کل جریان حداقل بایستی برابر زمان مقیاس بزرگترین ادی یا T باشد:

^۱-Velocity Fluctuation

$$T = \frac{L_r}{U} \quad (4-3)$$

و گام زمانی مورد استفاده بایستی برابر $\frac{\eta}{v}$ باشد. تعداد کل گامهای زمانی مورد نیاز برای

مدلسازی دقیق یک مساله آشفته برابر $\frac{T}{\Delta t}$ باشد. لذا تعداد کل گامهای زمانی مورد نیاز برابر است با:

$$\text{تعداد کل گام های زمانی} = \frac{T}{\Delta t} = \frac{L_r v}{U \eta} = \frac{L_r (\vartheta \varepsilon)^{\frac{1}{\vartheta}}}{\frac{\vartheta^{\frac{\vartheta}{\vartheta-1}}}{\varepsilon^{\frac{1}{\vartheta-1}}} U} = Re^{\frac{1}{\vartheta-1}}$$

در عمل انتخاب گام زمانی در انتگرال گیری زمان باید منطبق بر معیارهای پایداری و دقت

باشد. معیار محدوده پایداری انتشاری به فرم روبرو می باشد:

$$\frac{\vartheta dt}{dx^{\vartheta}} \leq \frac{1}{\vartheta} \quad (5-3)$$

به علت وجود dx^{ϑ} در مخرج خیلی محدود کننده تر از محدوده پایداری انتقال (عدد

کورانت) می باشد.

$$\frac{v dt}{dx} \leq 1 \quad (6-3)$$

برای محاسبه dt برای جریان آشفته با استفاده از مقیاس طول و سرعت کولموگروف (v, η)

و معیارهای محدوده پایداری انتشار و کورانت داریم:

$$\eta = Re^{-\frac{\vartheta}{\vartheta-1}} \times L_r \quad \text{and} \quad \Delta t = Re^{-\frac{1}{\vartheta-1}} \times T = Re^{-\frac{1}{\vartheta-1}} \times \frac{L_r}{U}$$

$$dx = \frac{\eta}{n_x} = \frac{\text{مقیاس طولی کولموگروف}}{\text{تعداد نقاط}}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در محدوده پایداری انتشار و ساده سازی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta dt}{dx^\vartheta} \leq \frac{1}{\vartheta} &\Rightarrow dt \leq \frac{dx^\vartheta}{\vartheta} = \frac{\left(\frac{\eta}{n_x}\right)^\vartheta}{\vartheta} = \frac{\eta^\vartheta = \left(Re^{-\frac{\vartheta}{\varphi}} \times L_r\right)^\vartheta}{\vartheta n_x^\vartheta} \\ &= \frac{Re^{-\frac{\vartheta}{\varphi}} \times L_r^\vartheta}{\vartheta n_x^\vartheta} \xrightarrow{Re=\frac{UL_r}{\vartheta}} = Re^{-\frac{1}{\varphi}} \times \frac{L_r}{\vartheta U n_x^\vartheta} \\ &= \frac{\Delta t}{\vartheta n_x^\vartheta} \quad (\vartheta - 3) \end{aligned}$$

و با قرار دادن مقادیر فوق در محدوده پایداری انتقال و ساده سازی داریم:

$$\begin{aligned} \frac{v dt}{dx} \leq 1 &\Rightarrow dt \leq \frac{dx}{v} = \frac{\frac{\eta}{n_x}}{v} = \frac{\eta}{v \times n_x} = Re^{-\frac{\vartheta}{\varphi}} \times \frac{L_r}{v \times n_x} \\ &= Re^{-\frac{1}{\varphi}} \times \frac{U}{v} \times \frac{\Delta t}{n_x} \quad (\lambda - 3) \end{aligned}$$

برای کاربردهای آیرودینامیک نرخ $\frac{U}{v}$ تقریباً برابر با ۰/۰۱ می باشد.

در امروزه به دلیل محدودیتهای موجود در توان محاسباتی کامپیوترها، محاسبات DNS تنها

منحصر به بعضی جریانهای با هندسه ساده و اعداد رینولدز پایین است و بنابراین استفاده از DNS در

جریان آشفته منحصر به مطالعه بنیادی و کاربرد در مدلسازی می باشد. در شکل (۱-۳) مقایسه

اجمالی میان مدل‌های آشفتگی ارائه شده است. [۱۹]



شکل (۳-۱): مقایسه بین روش‌های مدل‌سازی [۱]

۳-۳ نگاهی متفاوت به روش DNS

تا زمانی‌که از روش DNS برای هندسه‌های ساده استفاده کنیم، جواب‌ها بسیار خوب می‌باشد. ولی این روش برای مسائل پیچیده‌تر پاسخگو نیست و روش مناسبی نمی‌باشد. استفاده از روش‌های FDM و FEM و FVM اگرچه بهتر و دقیق‌تر از روش طیفی جواب نمی‌دهند، اما بیشتر از روش طیفی انعطاف‌پذیری در مورد هندسه‌های دلخواه و شرایط مرزی دارد. با یک نگاه واقع‌گرایانه، آشفتگی در طبیعت سه بعدی است و روش DNS نیازمند استفاده از یک مش بزرگ اصلاح

شده دارد در حالیکه روش محاسبه FDM با یک شبکه یکنواخت در گذشته بسیار استفاده می شده است. DNS در هندسه‌های دلخواه ساختار یافته تجربی و شرایط مرزی در عددهای رینولدز بالا شدیداً نیازمند استفاده از کامپیوترهای خوب می‌باشد و عدم دسترسی به ابر رایانه باعث محدودیت استفاده از این روش می شود. کاربرد های DNS در جریان های با سرعت مادون صوت و تراکم ناپذیر یا مافوق صوت و تراکم پذیر توسط چندین فاکتور تمییز داده شده است:

- (۱) برای شبیه سازی های جریان تراکم ناپذیر، ترم لزجت معمولاً رفتار مطلق و روشنی دارد.
- (۲) در جهت انتقال آشفتگی، نرخ افزایش آشفتگی ها در جریان تراکم پذیر آرامتر از جریان تراکم ناپذیر می باشد که این باعث زیاد شدن محاسبات می شود.
- (۳) مدهای آشفتگی با سرعت انتقال بالا برای جریان تراکم پذیر، نیازمند مش خیلی ریزتر و دقت مرتبه بالاتر مکانی نسبت به جریان های تراکم ناپذیر می باشد.

در DNS می توان هم رویکرد شبیه سازی مکانی و هم شبیه سازی زمانی داشته باشیم. در حالتی که رویکرد شبیه سازی زمانی مد نظر باشد، شبیه سازی محدود به جریان های ورودی پریودیک و شرایط مرزی جریان خروجی و یک جریان موازی بدون در نظر گرفتن رشد لایه مرزی می باشد. رویکرد شبیه سازی مکانی بسیار کلی تر و عملی تر در جریان های غیر پریودیک و شرایط مرزی خروجی استفاده می شوند و رشد لایه مرزی نیز در آن محاسبه می شود. بسیاری از ترقی ها و پیشرفت های اخیر برای هر دو حالت شبیه سازی مکانی و زمانی توسط کلسیر^۱، جیو^۲ و آدامز^۳ گزارش شده است. [۲۰]

^۱ - Klesier

^۲ - Guo

^۳ - Adams

اغلب پژوهش ها و تحقیقات روی جریان های انتقالی و آشفته به روش DNS توسط کیم^۱، مومین^۲، موزر^۳، اسپالارت^۴ و یانگ^۵ انجام گرفته است و علت استفاده از روش DNS، دقت بالای جواب های آن به نسبت روش های دیگر برای جریان آشفته می باشد. [۲۰]

۳-۴ روابط ریاضی

با توجه به قانون دوم نیوتن معادلات مومنتوم برای یک ذره سیال نیوتنی معرفی می شود، که این معادلات به معادلات ناویر-استوکس معروفند. معمولاً برای حل معادلات ناویر-استوکس از روش گام زمانی استفاده می کنند و آنقدر محاسبات را تکرار می کنند تا به یک همگرایی قابل قبول دست پیدا کنند. انفصال معادلات حاکم به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر منجر می شود.

$$\frac{du}{dt} = R(u) \quad (3-9)$$

$R(u)$ بردار شارهای موازنه شده به همراه جملات اتلافی می باشد. وقتی که برای رسیدن به حالت پایدار از مسئله ناپایدار استفاده می شود، طرح های تناوبی تکراری بکار برده می شوند. وقتی که هدف فقط دست یابی به یک حل حالت پایدار باشد و جواب های حین رسیدن به آن مهم نباشد، از طرح گام زمانی برای رسیدن به نرخ همگرایی بهتر می توان استفاده کرد. طرح های چند مرحله ای مزایائی دارند، یکی این است که به روندی مخصوص برای شروع محاسبات نیاز ندارند و همچنین از نقطه نظر همگرایی، یک منطقه پایدار مطلوب را فراهم می سازند. طرح های استاندارد چند مرحله ای

^۱ - Kim
^۲ - Moin
^۳ - Moser
^۴ - Sparlart
^۵ - Yang

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی و برای رسیدن به حل با دقت بالا طراحی شده اند. همچنین در عمل ثابت شده است که روش بسیار موثر برای حل معادلات ناویر-استوکس، استفاده از روش طرح گام زمانی رانگ-کوتا می باشد.

همانطور که می دانیم، دو روش طرح صریح و ضمنی توسط پژوهشگران بکار برده می شوند، اما اولین گام تصمیم گیری در مورد انتخاب یکی از روش های فوق می باشد. در طرح های صریح مشتقات فضایی از مقادیر متغیرهای که در گام زمانی پیشین معلوم شده اند محاسبه می شوند. در صورتی که در طرح های ضمنی برای تخمین مشتقات فضایی از متغیرهای نامشخص در آغاز گام زمانی استفاده می کنند که منجر به معادلات بهم وابسته ای می شود که بایستی به طور همزمان حل شوند. طرح های صریح از لحاظ برنامه نویسی بسیار ساده هستند ولی گام زمانی مورد استفاده در آنها بوسیله معیار پایداری انتقال (عدد کورانت) محدود می شوند، $(C = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x})$ ، این در حالی است که طرح های ضمنی محدودیت مقدار عدد کورانت را ندارد و سریعتر به حالت پایدار رسیده و همگرا می شوند. طرح های ضمنی در کم کردن تعداد گام های زمانی موثر هستند که این امر می تواند افزایش زمان را در هر گام زمانی جبران کند. معمولاً پیآمد استفاده از روش های ضمنی نیاز به حل معادلات حاکم از طریق ماتریس سه قطری می باشد. معمولاً برای مسائل دائمی داریم نیازی به روش های ضمنی نیست و ترجیحاً از روش های صریح استفاده می شود.

در اینجا برای توضیح واضحتر روش حل مستقیم عددی، معادلات ناویر-استوکس را به صورت مستقیم و بدون استفاده از هر گونه مدلسازی و یا ساده سازی به صورت عددی حل می کنیم. می دانیم فرم کلی معادله بی بعد شده ناویر-استوکس به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \nabla) \vec{U} = -\nabla P + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (3-10)$$

با توجه به بقای جرم، معادله پیوستگی برای جریان غیر قابل تراکم به صورت معادله زیر

بدست می آید. [۱۳]

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (3-11)$$

حال برای تبدیل معادله ناویر-استوکس به فرم محاسباتی مراحل ذیل را به ترتیب انجام می

دهیم:

با توجه به رابطه برداری مشخص (۳-۱۲):

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B) \quad (3-12)$$

برای مورد $A = B = \vec{U} = (U, V, W)$ معادله (۳-۱۲) به صورت معادله (۳-۱۳) در می آید:

$$(\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = \vec{\omega} \times \vec{U} + \frac{1}{r} \nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) \quad (3-13)$$

که در آن $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \nabla \times \vec{U}$

با در نظر گرفتن رابطه (۳-۱۳) و (۳-۱۲) به رابطه (۳-۱۴) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{H} - \nabla \left(P + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{r} \right) + \frac{1}{Re} (\nabla^2 \vec{U}) \quad (3-14)$$

که در آن $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3) = \vec{U} \times \vec{\omega}$

با ضرب طرفین معادله (۳-۱۴) در بردار کرل $(\nabla \times)$ داریم:

$$\frac{\partial(\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \nabla \times \nabla \left(P + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{r} \right) + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\nabla \times \vec{U}) \quad (15-3)$$

از طرفی می دانیم که $\nabla(\text{scalar}) = 0$ می باشد. در نتیجه معادله (15-3) به فرم معادله

(16-3) تبدیل خواهد شد:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\omega} \quad (16-3)$$

با تکرار عمل ضرب بالا در معادله (17-3) به معادله زیر خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla \times (\nabla \times \vec{U})}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{Re} \nabla^2 (\nabla \times (\nabla \times \vec{U})) \quad (17-3)$$

با بکار بردن معادله پیوستگی ($\nabla \cdot \vec{U} = 0$) و رابطه ریاضی مشخص زیر

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{U}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{U}) - \nabla^2 \vec{U} \quad (18-3)$$

به فرم محاسباتی (19-3) خواهیم رسید:

$$\frac{\partial \nabla^2 \vec{U}}{\partial t} = -\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) + \frac{1}{Re} \nabla^4 \vec{U} \quad (19-3)$$

معادله (19-3) و معادله پیوستگی معادلات بی بعد شده با مقیاس مشخصه طول و سرعت

می باشند. که $\vec{H} = (H_1, H_r, H_\varphi) = \vec{U} \times \vec{\omega}$ ترم های غیرخطی هستند. یکی از مشکلات اصلی در

حل معادلات ناویر-استوکس، مربوط به نبود اطلاعات برای فشار در مرزها می باشد. عمده مزیت

استفاده از این فرم محاسباتی معادله ناویر-استوکس، کاهش تعداد متغیرهای مستقل در نتیجه کاهش فضای محاسباتی و همچنین عدم احتیاج به تعیین فشار در مرزهای مساله می باشد. از طرفی در قبال این دو مزیت تغییر مرتبه معادله دیفرانسیل حاکم از دو به چهار را نیز تجربه می کنیم. [۱۳]

۳-۴-۱ نمونه محاسبات برای حالت دو بعدی

در معادله (۳-۱۹) بردار سرعت U به دو قسمت جریان پایه $^1 (U(y), 0)$ و متغیرهای محاسباتی $(u(x, y, t), v(x, y, t))$ به فرم معادلات (۳-۲۰) تجزیه می گردد:

$$\begin{cases} U = (U, V) = U\hat{i} + V\hat{j} \\ U(x, y, t) = u(x, y, t) + U(y) \\ V(x, y, t) = v(x, y, t) \end{cases} \quad (3-20)$$

همچنین با تعریف بردار H بصورت رابطه (۳-۲۱):

$$H = (H_x, H_y) = U \times (\nabla \times U) \quad (3-21)$$

و بسط سمت راست رابطه (۳-۲۱) بصورت زیر:

$$\nabla \times U = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ U & V & . \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{k} \quad (3-22)$$

¹-Base flow

$$U \times (\nabla \times U) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ U & V & 0 \\ \cdot & \cdot & \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right) \end{vmatrix}$$

$$= V \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{i} - U \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \hat{j} \quad (23-3)$$

مقادیر H_1 و H_2 بصورت معادلات (24-3) بدست می آید:

$$\begin{cases} H_1 = V \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \\ H_2 = -U \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (24-3)$$

با اعمال آن همراه با معادلات (25-3) در فرم محاسباتی، معادله ناویر-استوکس (29-3) در

جهت اصلی جریان (x) به معادله (25-3) دست خواهیم یافت:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_1 - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} H_2 + \frac{1}{Re} \nabla^4 U \quad (25-3)$$

این معادله برای پیشروی محاسبات در دامنه زمان مورد استفاده قرار می گیرد. مولفه سرعت

در جهت y هم به کمک معادله پیوستگی به راحتی بدست می آید.

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (26-3)$$

حال می توان مولفه ورتیسیته (ω_3) را، با استفاده از تعریف آن براحتی بدست آورد. [13]

$$\omega_r = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (27-3)$$

۳-۴-۲ شرایط مرزی و اولیه

با توجه به معادله دیفرانسیل که از مرتبه چهارم می باشد برای شروع محاسبات نیاز به دو گروه داده داریم. گروه اول شرایط مرزی و گروه دوم شرایط اولیه می باشد. با توجه به فرم چرخشی معادله ناویر - استوکس (معادله ۳-۱۹) نیاز به چهار شرط مرزی داریم. دو شرط مرزی در ورودی جریان و دو شرط مرزی در خروجی جریان از نوع دریشله و نیومن ایجاد می کنیم. می توان شرط دریشله در ورودی را با تئوری پایداری خطی بوجود آورد. به عبارت دیگر با خطی سازی معادلات ناویر - استوکس به معادله مقدار ویژه - بردار ویژه ای به نام معادله اور - سامرفیلد می رسیم. با بدست آوردن مقادیر ویژه و به تبع آن بردار های ویژه که وابسته به سرعت می باشد می توان معادله ای در ورودی جریان برای تحریک آشفتگی در جریان بدست آورد. با توجه به اینکه نتایج حاصل از بردار ویژه رابطه اور - سامرفیلد یک عدد مختلط می باشد قسمت حقیقی آن را جهت اعمال شرط مرزی در ورودی جریان انتخاب می کنیم. این تحریک در واقع کمیتی حقیقی است.

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= A \cdot \text{ReAL}[V(y)e^{i(-\omega t)}] \\ &= A \cdot \text{Real}[(V_y + iV_i) \times e^{i(-\omega t)}] \end{aligned} \quad (28-3)$$

که در آن A دامنه تحریک می باشد و بسته به شرایط می توان آن را تعیین کرد.

پس از ساده سازی معادله (۳-۲۸) به معادله (۳-۲۹) می رسیم :

$$v(x, y, t) = A \times (V_y \cos(\omega t) + V_i \sin(\omega t)) \quad (29-3)$$

با انتخاب قسمت حقیقی این معادله می توان به معادله تحریک در ورودی جریان رسید:

$$v(x, y, t) = A \times (V_y \cos(\omega t)) \quad (30-3)$$

با توجه به معادله (30-3) بدون انجام محاسبات برای تعیین شرط مرزی می توان از تحریکی سینوسی برای مولفه V سرعت استفاده نمود. به عنوان مثال می توان از فرم معادله زیر استفاده کرد:

$$v(x, y, t) = A \times y e^{-y^2} \cos(\omega t) \quad (31-3)$$

بدین ترتیب یکی از شرایط مرزی در ورودی تعیین می گردد که از نوع دریشله می باشد. شرط مرزی دوم در ورودی جریان از نوع نیومن می باشد. این شرط را می توان از معادله پیوستگی برای جریان تراکم ناپذیر بدست آورد.

در مرز خروجی هم برای مشخص نمودن سرعت (اعمال شرط دریشله) از یک شرط مرزی جابجایی^۱ استفاده شده است. در مرز خروجی نباید هیچگونه برگشت جریان و یا وجود تاثیرات خروجی به داخل شبکه محاسباتی داشته باشیم. در این مرز از معادله جابجایی برای تولید شرط مرزی دریشله برای هر دو مولفه سرعت استفاده می کنیم که معادله آن به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -c \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (32-3)$$

در این معادله، مولفه های سرعت u و v جایگزین ψ می گردند. ضریب c برابر با سرعت کلی انتقال موج و یا سرعت متوسط جریان در جهت اصلی در مرز خروجی است. مقدار c بین صفر و یک

^۱-Convective Outflow Boundary Condition

می باشد. البته مقدار مقدار دقیق این پارامتر مشخص نیست و باید با تخمین مناسبی در مجموعه محاسباتی تعیین شود. [۱۳]

۳-۴-۳ شرط اولیه

شرط اولیه برای شبیه سازی جریان همراه با اغتشاشات، نتیجه بدست آمده از جریان در حالت پایدار زمانی می باشد که در آن شرط مرزی ورودی برابر با جریان اولیه می باشد و هیچگونه اغتشاش نداریم.

۳-۴-۴ شبکه محاسباتی

برای حل عددی معادلات دیفرانسیل پاره ای در مکا نیک سیالات، مشتقات پاره ای را باید تقریب زد . با این تقریب ها، مشتقات پاره ای به عبارت های تفاضل محدودی تبدیل می شوند که معادلات دیفرانسیل پاره ای را به معادلات جبری تبدیل می کنند . معادلات جبری حاصل را معادلات تفاضل محدود می نامند . این معادلات جبری را در شبکه ایجاد شده در قلمرو مورد نظر حل می کنیم . بنابر این در داخل قلمرو و روی مرزهای آن، مجموعه ای از نقاط شبکه باید مشخص شود. معمولاً، قلمرو محاسبات به شکل مستطیل انتخاب می شود و نقاط داخلی شبکه بر روی خطوط شبکه توزیع می شوند. بنابراین، نقاط شبکه را می توان به راحتی نسبت به خطوط شبکه مشخص کرد . این نوع شبکه را شبکه با سازمان می نامند، که موضوع این پژوهش نیز می باشد . البته دسته دیگر از شبکه ها به گونه ای ساخته می شود که نقاط شبکه آنها را نمی توان بر روی خطوطی از شبکه که به صورت منظم تعریف شده اند، مرتبط کرد . این نوع شبکه را شبکه بی سازمان گویند.

روش های شبکه سازی را به طور کلی به صورت زیر دسته بندی می کنیم:

(۱) شبکه سازی به روش جبری

(۲) شبکه سازی با استفاده از معادلات دیفرانسیل

(۳) شبکه سازی با استفاده از اعداد مختلط و نگاشت همدیس

علاوه بر این، دستگاه شبکه ها را، به شبکه های ثابت و قابل تطبیق نیز تقسیم می کنند .

بدیهی است که یک شبکه ثابت پیش از آغاز حل معادلات حاکم بر جریان سیال ایجاد می شود و

مستقل از حل، ثابت می ماند . از سوی دیگر، در یک شبکه تطبیقی، شبکه همراه با نتایج حل

معادلات سیال شکل می گیرد.

به عنوان مثال، در یک موج ضربه ای، نقاط شبکه در حوالی نقاط با گرادیان زیاد متمرکز می

شوند. یک نمونه از شبکه تطبیقی، شبکه ای است که توسط کُردا^۱ برای حل جریان لزج مافوق صوت

بر روی یک پله وارونه مورد استفاده قرار گرفته است . در این شبکه از تبدیل زیر استفاده می شود:

$$\Delta x = \frac{B\Delta\xi}{1+b(\frac{\partial g}{\partial x})} \quad (33-3)$$

$$\Delta y = \frac{C\Delta\xi}{1+c(\frac{\partial g}{\partial y})} \quad (34-3)$$

که در آن g متغیر اولیه میدان جریان است (مانند p, ρ یا T). اگر $g=p$ باشد معادلات

(۳۳-۳) و (۳۴-۳) نقاط شبکه را در نواحی که گرادیان فشار زیاد است در فواصل کم از یکدیگر قرار

می دهد و اگر $g=T$ باشد، نقاط شبکه در نواحی که گرادیان درجه حرارت زیاد است در فواصل کم

از یکدیگر قرار می گیرند. B و C فاکتورهای مقیاس هستند. بقیه پارامترها در قسمتهای بعد بصورت

^۱ - Corda

کامل تشریح می گردد. اما در این پژوهش به علت عدم نیاز به استفاده از شبکه تطبیقی از دستگاه شبکه ثابت استفاده شده است و همچنین به علت محاسن شبکه سازی جبری که عبارتند از:

(۱) از نظر محاسباتی خیلی سریع اند.

(۲) متریک ها به صورت تحلیلی محاسبه می شوند. از این رو خطای عددی ناچیز است.

(۳) ایجاد تراکم در مناطق مختلف شبکه به راحتی امکان پذیر است.

از آن سود جسته شده است . با ید توجه داشت که در هنگام شبکه سازی نکات زیر به طور کامل رعایت شوند:

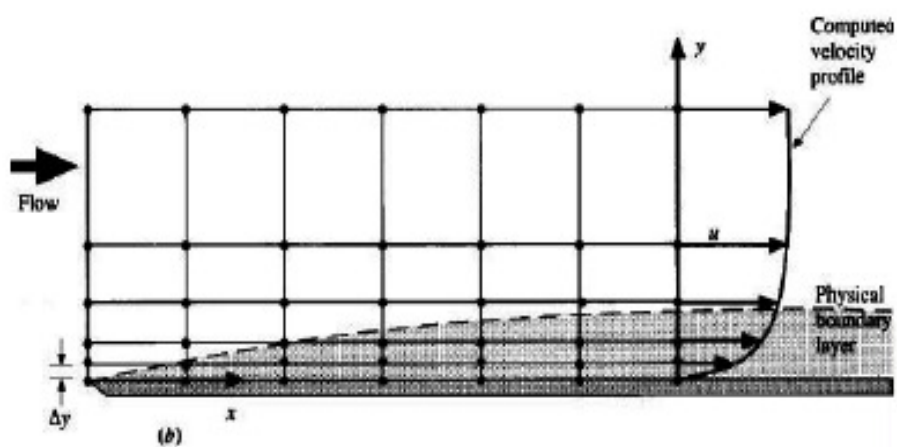
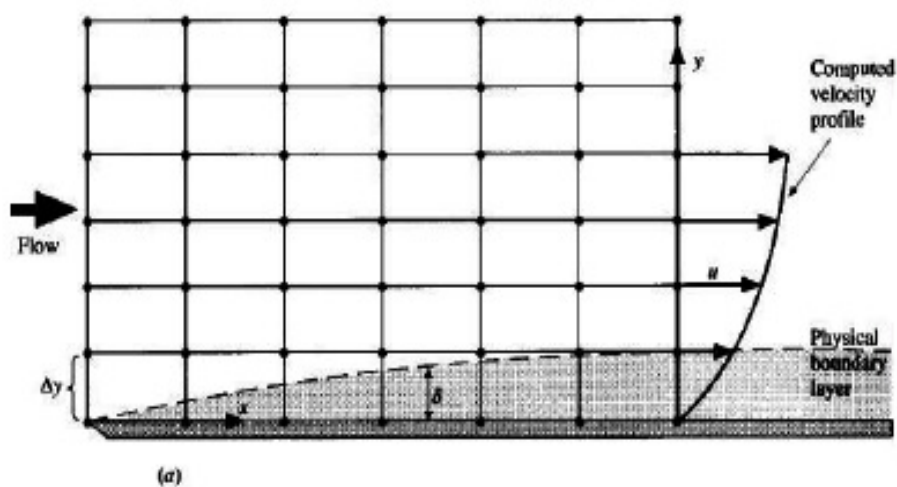
(۱) در هنگام تصویر کردن نقاط رابطه یک به یک رعایت شود، به طوری که خطوط هم خانواده شبکه، یکدیگر را قطع نکنند.

(۲) هموار بودن توزیع نقاط شبکه

(۳) عمود یا نزدیک به عمود بودن خطوط شبکه

(۴) امکان تراکم یا انبساط نقاط شبکه

شبکه های کشیده یا فشرده شده یکی از تکنیک های تولید شبکه می باشد. این روش شامل امتداد دادن شبکه موجود در امتداد یک یا چند محور مختصات می باشد. در جریان های توأم با تمرکز گرادین های بزرگ در نواحی خاص برای نشان دادن خواص جریان به دقت بیشتری نیاز است. به عنوان مثال، جریان سیال لزج در نزدیکی دیواره ها دارای گرادین بزرگی است. محاسبه دقیق گرادین جریان در این نواحی نیاز به تعداد زیادی نقطه در شبکه قلمرو حل دارد. به جای استفاده از شبکه ای با توزیع یکنواخت در قلمرو فیزیکی، نقاط شبکه را می توان در نواحی با گرادین بالا به صورت متراکم در آورد.



شکل (۳-۲): (a) هیچ یک از نقاط شبکه در لایه مرزی قرار ندارند

(b) تعدادی از نقاط شبکه در لایه مرزی قرار دارند [۱۵]

قرار دادن تعدادی از نقاط شبکه در لایه مرزی را به وضوح می توان مشاهده نمود. واضح است که امتیاز شبکه کشیده (یا فشرده) آنست که در جاییکه لازم است می توان نقاط شبکه را در میدان جریان قرار داد و همچنین در نواحی که نیازی به نقاط شبکه احساس نمی شود و یا نیاز

کمتری احساس می شود نقاط شبکه را می توان از میدان جریان خارج نمود (همانند شکل (۳-۱))
برای رسیدن به این هدف می توان از نگاشت جبری^۱ با امکان ایجاد تراکم استفاده نمود. [۱]

۳-۴-۵ محاسبات عددی

در این بخش جزئیات روشهای عددی استفاده شده در معادلات حاکم، جهت استفاده در یک برنامه کامپیوتری بطور کامل توضیح داده شده است. برای حل معادلات (۳-۲۵) و (۳-۲۶)، ما باید قادر به انجام اعمال زیر باشیم:

(۱) محاسبه مشتقات مکانی^۲

(۲) حل معادله پوآسون برای حالت دو بعدی

(۳) انتگرال گیری از معادله پیوستگی به منظور بدست آوردن ν از معادله (۳-۲۶)

(۴) محاسبه ترمهای غیرخطی در معادله (۳-۲۵)

(۵) پیشرفت زمانی (بدست آوردن داده های جدید، که به عنوان شرط اولیه برای زمان

بعدی مورد استفاده قرار می گیرد).

۳-۴-۶ محاسبه مشتقات

مشتقات مادی در این بخش، با استفاده از روش تفاضلات محدوده فشرده استاندارد محاسبه گردیده است. این روش ابتدا توسط لیلی^۳ [۱۴] ارائه شد، ایشان مشتق اول تابع دلخواهی مانند $f(x)$ را بطور ضمنی^۴ مطابق معادله (۳-۳۵) بیان نموده:

^۱-Algebraic mapping

^۲-Spatial

^۳-S.K. Lele

^۴-Implicitly

$$\alpha f'_{j-1} + f'_j + \alpha f'_{j+1} = \frac{\alpha + 2}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4\alpha - 1}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (35-3)$$

که در آن علامت پریم نمایانگر مشتق اول، j بیانگر شماره گره $0 \leq j \leq J$ ، $\Delta x = \frac{L_x}{J}$ می باشد و α از بسط سری تیلور بدست می آید. چنانچه در معادله (35-3)، $\alpha = \frac{1}{4}$ یا $\alpha = \frac{1}{3}$ قرار داده شود به طرحهای با مرتبه خطای چهارم و ششم می رسیم، در این صورت ترم قطری اصلی در طرف راست معادله (34-3) سه یا چهار برابر کوچکتر از دیگر ترم ها است. این مسئله می تواند موجب ایجاد شرایط ناهنجاری¹ در ماتریس گردد. برای جلوگیری از این مسئله و اصلاح معادله هر دو طرف آن را در ضریب $\frac{1}{\alpha}$ ضرب می کنیم. در این صورت معادله (35-3) به فرم (36-3) تغییر شکل خواهد یافت.

$$f'_{j-1} + \frac{1}{\alpha} f'_j + f'_{j+1} = \frac{1 + \frac{2}{\alpha}}{3\Delta x} (f_{j+1} - f_{j-1}) + \frac{4 - \frac{1}{\alpha}}{12\Delta x} (f_{j+2} - f_{j-2}) \quad (36-3)$$

در مرزها یعنی جایی که $j = 0$ و $j = J$ است، از یک طرح مرتبه سوم یک طرفه ضمنی استفاده شده است.

$$f'_j + 2f'_1 = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_j + 4f_1 + f_2) \quad (37-3)$$

$$f'_J + 2f'_{J-1} = \frac{1}{2\Delta x} (5f_J - 4f_{J-1} - f_{J-2}) \quad (38-3)$$

در همسایگی مرزها یعنی جایی که $j = 1$ و $j = J - 1$ است، از معادله (36-3) در حالتی که $\alpha = \frac{1}{4}$ است، استفاده می شود.

¹ -III-conditioning

همانطور که توسط لیلی بحث شده است، با قراردادن $\alpha' = \frac{16\alpha+32}{40\alpha-1}$ به جای α در معادله

(۳۶-۳) برای گره های $j = 2$ and $j = J - 2$ می توان پایداری و بقای عددی معادله

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} f(u)$$

را تضمین نمود.

به طور خلاصه در صورتیکه در شکل کلی معادله $\alpha = \frac{1}{4}$ قرار دهیم، ماتریس محاسبات به

فرم $[A]_{n \times n} \times [F']_{n \times 1} = [B]_{n \times n} \times [F]_{n \times 1}$ خواهد بود. که در آن ماتریس های $[A]$ و $[B]$

ماتریس های ضرایب و ماتریس های $[F]$ و $[F']$ مقادیر توابع $f(x)$ و $f'(x)$ می باشد.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{-5}{2\Delta x} & \frac{4}{2\Delta x} & \frac{1}{2\Delta x} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & \frac{-3}{\Delta x} & 0 & \frac{3}{\Delta x} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \frac{-1}{2\Delta x} & \frac{-4}{2\Delta x} & \frac{5}{2\Delta x} \end{bmatrix}$$

معادله (۳۸-۳) مشتق دوم تابع $f(x)$ را نشان می دهد که یک طرح اختلاف محدود فشرده و

با دقت مرتبه چهارم است.

$$\alpha f_{j-1}'' + f_j'' + \alpha f_{j+1}'' = \frac{4(1-\alpha)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10\alpha-1}{12\Delta x^2} (f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2})$$

(۳۹-۳)

که در آن $\alpha = \frac{1}{4}$ است. در اینجا نیز مسئله ناهنجاری هم مورد توجه قرار گرفته است. برای غلبه بر این مشکل، معادله (۳۷-۳) را در ضریب $\frac{1}{\alpha}$ ضرب می کنیم. در این صورت معادله (۳۸-۳) به فرم (۳۹-۳) تغییر شکل خواهد داد:

$$\alpha f_{j-1}'' + f_j'' + \alpha f_{j+1}'' = \frac{4\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)}{3\Delta x^2} (f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}) + \frac{10 - \frac{1}{\alpha}}{12\Delta x^2} (f_{j+2} - 2f_j + f_{j-2}) \quad (40-3)$$

در مرزهای جریان، حالت مرتبه سوم یک طرفه به کار برده می شود که به صورت زیر می باشد:

$$f_1'' + 11f_1'' = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_1 - 27f_1 + 15f_2 - f_3) \quad (41-3)$$

$$f_J'' + 2f_{J-1}'' = \frac{1}{\Delta x^2} (13f_J - 27f_{J-1} + 15f_{J-2} - f_{J-3}) \quad (42-3)$$

از طرفی با مشتق گیری از معادله (۳۷-۳) معادله (۴۳-۳) تولید می شود.

$$f_1'' + 2f_1'' = \frac{1}{2\Delta x} (-5f_1' + 4f_1' + f_2') \quad (43-3)$$

حال به سادگی می توان از معادله (۳۸-۳)، معادله (۴۳-۳) را بدست آورد.

$$f_1'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} f_1' + \frac{1}{2\Delta x} (f_1' + 4f_1' + f_2') \quad (44-3)$$

با جایگذاری طرف چپ معادله (۳-۴۳) (با فرض $\alpha = \frac{1}{4}$) برای ترم های داخل پرانتز در

معادله (۳-۴۴) به معادله زیر می رسیم:

$$f'' + 2f_1'' = \frac{-3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=0)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_1 - f_2) \quad (3-45)$$

معادله (۳-۴۵) زمانی در داخل مرزها به کار برده می شود که مقادیر تابع و مشتق آنها

موجود باشند. مشابه این روابط را می توان برای جریان خروجی از مرز، هنگامی که تابع و مشتق آن در دسترس است بکار برد.

$$f_j'' + 2f_{j-1}'' = \frac{3}{\Delta x} \frac{df}{dx} \Big|_{(x=Lx)} - \frac{3}{2\Delta x^2} (f_j - f_{j-2}) \quad (3-46)$$

نزدیک مرزها یعنی جائیکه $j = 1$ and $j = J - 1$ است، از طرح اختلاف محدوده فشرده

مرتبه دوم استفاده شده است که با جایگزینی $\alpha = \frac{1}{4}$ در معادله (۳-۴۴) بدست می آید.

به طور خلاصه ماتریس محاسبات به فرم $[D]_{n \times n} \times [F]_{n \times 1} = [C]_{n \times n} \times [F'']_{n \times 1}$ خواهد

بود. که در آن ماتریس های $[C]$ و $[D]$ ماتریس های ضرایب و ماتریس های $[F]$ و $[F'']$ مقادیر توابع $f(x)$ و $f''(x)$ می باشد.

$$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 11 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 & 10 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 11 & 1 \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} \frac{13}{\Delta x^2} & \frac{-27}{\Delta x^3} & \frac{15}{\Delta x^3} & \frac{-1}{\Delta x^3} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{12}{\Delta x^2} & \frac{-24}{\Delta x^3} & \frac{12}{\Delta x^3} & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{-9}{\Delta x^3} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{1}{2\Delta x^2} & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{-9}{\Delta x^3} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{1}{2\Delta x^2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & 0 & \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{-9}{\Delta x^3} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{1}{2\Delta x^2} & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & \frac{1}{2\Delta x^2} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{-9}{\Delta x^3} & \frac{4}{\Delta x^3} & \frac{1}{2\Delta x^2} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{12}{\Delta x^2} & \frac{-24}{\Delta x^3} & \frac{12}{\Delta x^2} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \frac{-1}{\Delta x^2} & \frac{15}{\Delta x^2} & \frac{-27}{\Delta x^3} & \frac{13}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

برای محاسبه مشتقات چهارم هم می توان اپراتور مشتق دوم را دوبار اعمال کرد، که در طرف راست معادله ناویر- استوکس و در قسمت ترم های لزجتی وجود دارد.

۳-۴-۷ الگوی پیشروی در زمان

برای انجام محاسبات و پیشروی در زمان، از طرح اختلاف زمانی رانگ-کوتای مرتبه سوم فشرده^۱ که توسط رای^۲ [۱۶] ارائه شده است، می توان استفاده نمود. کاربرد این روش با در نظر گرفتن معادله مدل (۳-۴۷) و در نظر گرفتن جدول (۳-۹) تشریح می گردد:

$$\frac{du}{dt} = R(u) \quad (47-3)$$

^۱-Compact, third order, Runge-Kutte time differencing scheme
^۲-A. Wray

جدول (۳-۱): طرح پیشروی زمانی رانگ کوتای مرتبه سوم

دومین موقعیت	اولین موقعیت	زمان
$R(u^n)$	u^n	t^n
$R' = R(u')$	$u' = u^n + c_1 \Delta t R$	$t' = t^n + c_1 \Delta t$
$R'' = R(u'')$	$u'' = u' + (c_2 R' + d_2 R) \Delta t$	$t'' = t' + (c_2 + d_2) \Delta t$
	$u^{n+1} = u'' + (c_3 R'' + d_3 R') \Delta t$	$t^{n+1} = t'' + \Delta t$

جدول (۳-۹) نشان می دهد که برای پیشروی زمانی معادله مدل (۳-۴۷) به اندازه Δt ، طرف راست معادله ($R(u)$) نیازمند محاسبه در سه زیر بازه زمانی است. در هر زیربازه زمانی، زمان به اندازه $\Delta t (c_i + d_i)$ افزایش می یابد و u بوسیله یک ترکیب خطی از R در مرحله زمانی برابر با Δt و مقدار u محاسبه شده برابر مقدار u بعد از گذر از یک Δt زمانی است.

برای محاسبه ضرایب هم با معادل قرار دادن ضرایب حاصل از سری تیلور با طرح مذکور می توان اقدام نمود. در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned}
 c_1 + c_2 + c_3 + d_1 + d_2 + d_3 &= 1 \\
 c_1 c_2 + c_2 \left[\frac{d_2}{c_2} \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right] &= \frac{1}{2} \\
 c_1^2 c_2 + c_2 \left[c_1 + c_2 \left(1 + \frac{d_2}{c_2} \right) \right]^2 + c_1^2 d_2 &= \frac{1}{3} \\
 c_1 c_2 c_3 &= \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

برای حل $d_1 = 0$ قرار می دهیم. نتیجه به صورت زیر است:

$$c_1 = \frac{8}{15}, \quad c_2 = \frac{5}{12}, \quad c_3 = \frac{3}{4}, \quad d_1 = 0, \quad d_2 = -\frac{17}{60}, \quad d_3 = -\frac{5}{12}$$

۳-۴-۸ حل معادله پوآسون

بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر-استوکس و پیشروی در زمان، به معادله (۳-۴۸)، که

به معادله پوآسون مشهور است خواهیم رسید:

$$\nabla^2 u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R(x, y) \quad (3-48)$$

در معادله فوق مقدار R معلوم، مقدار u مجهول می باشد.

فرض می کنیم که می خواهیم معادله پوآسون را برای یک دامنه حل کنیم؛ ابتدا یک شبکه

$I \times J$ به فرم زیر را تشکیل می دهیم:

$$\begin{array}{cccc} u_{I \times 1} & u_{I \times 2} & \dots & u_{I \times J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{2 \times 1} & u_{2 \times 2} & \dots & u_{2 \times J} \\ u_{1 \times 1} & u_{1 \times 2} & \dots & u_{1 \times J} \end{array}$$

حال با جایگزین نمودن اپراتورهای مشتقات دوم (بدست آمده از روش اختلاف محدود

فشرده) به حل معادله (۳-۴۸) اقدام می نماییم:

الف) مشتق مرتبه دوم در جهت x

$$Au_{xx} = Bu$$

که در آن u_{xx} مشتق دوم در جهت x است معادله بالا به شکل ماتریس به صورت زیر است:

$$A_{J \times J} u_{xxI \times J}^T = B_{J \times J} u_{I \times J}^T \Rightarrow u_{xxI \times J}^T = (A_{J \times J}^{-1} \times B_{J \times J}) u_{I \times J}^T$$

حال یک بار دیگر ترانهاد طرفین رابطه بالا را محاسبه می کنیم:

$$u_{xxI \times J} = u_{I \times J} (A_{J \times J}^{-1} \times B_{J \times J})^T = UB$$

ب) مشتق مرتبه دوم در جهت Y

$$Au_{yy} = Bu$$

که در آن u_{yy} مشتق دوم در جهت Y است معادله بالا به شکل ماتریس به صورت زیر است:

$$A_{I \times I} u_{yyI \times J} = B_{I \times I} u_{I \times J} \Rightarrow u_{yyI \times J} = (A_{I \times I}^{-1} B_{I \times J}) u_{I \times J} = AU$$

با جاگذاری این روابط و تبدیل R به فرم ماتریسی یعنی $R_{I \times J}$ در معادله پواسن داریم:

$$AU + UB = C \quad (49-3)$$

حال با توجه به روش حل بارتلز^۱ [۱۷] به حل معادله ماتریسی (۳-۴۹)، و در

نهایت معادله پواسن اقدام می نماییم.

۳-۴-۹ انتگرال گیری

با حل معادله (۳-۲۱) می توان $u(x, u, t)$ را بدست آورد. برای محاسبه سرعت در جهت

عرضی v از معادله پیوستگی بهره می گیریم. طبق معادله پیوستگی داریم:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (50-3)$$

^۱-Bartels

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \quad (3-51)$$

چنانچه از طرح اختلاف محدود فشرده استفاده کنیم که ماتریس سمت راست معادله (3-52) دارای عناصر صفر بر روی قطر اصلی است و با این وضع نمی توان به انتگرال گیری پرداخت. جهت غلبه براین مشکل با مشتق گیری از دو طرف معادله بر حسب y معادله (3-52) بدست می آید.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \quad (3-52)$$

با وجود دو شرط مرزی برای v بصورت $v = 0 \rightarrow y = 0$ (شرط عدم لغزش) و $v = 0 \rightarrow y = \infty$ (اگر مرز دور دست را واقعاً دور از صفحه که تمام فعالیت های جریان در حوالی آن روی می دهد در نظر بگیریم، شرایط جریان آزاد را برای آن مرز می توان بکار برد و این معادله حل می شود.

۳-۴-۱۰ مراحل انجام محاسبات

الگوریتم برای حل معادله ناویر-استوکس با توجه به چهار شرط مرزی و یک شرط اولیه به صورت زیر است:

(۱) با توجه به شرط اولیه مشخص برای u و شرایط مرزی معلوم برای u و v و $\frac{\partial u}{\partial x}$ ،

طبق معادله پیوستگی، مقدار v و $\frac{u}{\partial x}$ را برای داخل شبکه محاسبه می کنیم.

(۲) با توجه به اینکه $\omega = \nabla \times U$ است و برای حالت دو بعدی ω_1 و ω_2 است، مقدار

$$\omega_3 = \omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$
 محاسبه می شود.

(۳) جمله غیرخطی H مطابق تعریف برابر $H = U \times \omega$ می باشد که برای حالت دو بعدی

$$H_r = 0 \text{ است و مقادیر } H_\theta = V \cdot \omega \text{ و } H_r = -U \cdot \omega \text{ محاسبه می شوند.}$$

(۴) ترم های غیرخطی در معادله ناویر-استوکس به صورت $\frac{\partial^2 H_\theta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H_r}{\partial x \partial y}$ می باشد و

محاسبه می شوند.

(۵) ترم های لزجی که در معادله به صورت $\frac{\nabla^4 U}{Re}$ ظاهر شده اند را محاسبه می نمائیم.

باید توجه کرد که با توجه به معادله پیوستگی، شرط مرزی $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ محاسبه و در آن اعمال شود.

(۶) قبل از مبادرت به تجدید مقدار u ، بایستی شرایط مرزی ورودی و خروجی را

محاسبه کنیم. در مرز ورودی این شرط بصورت یک تابع که در موقعیت های عرضی مختلف می تواند بصورت تابعی از زمان تغییر کند معرفی می شود و در مرز خروجی با استفاده از شرط جابجائی بوجود می آید.

(۷) بعد از محاسبه طرف راست معادله ناویر-استوکس، با توجه به روش رانگ-کوتای

مرتبه سوم مقدار $\nabla^2 u$ محاسبه می شود.

(۸) با مشخص شدن مقدار $\nabla^2 u$ ، با حل معادله پواسن، مقدار u استخراج می شود.

(۹) تمام مراحل ذکر شده در بالا برای یک گام زمانی است که از u تولید شده در مرحله

قبل به عنوان شرط اولیه جدید در مراحل زمانی بعدی استفاده می شود. [۱]

فصل ۴

نتایج

۴-۱ مقدمه

در این فصل در مورد هندسه کانال و شرایط مرزی و اولیه و مشخصات شبکه محاسباتی این تحقیق و همچنین نتایج بدست آمده بروی سرعت ها در راستای x, y و فشارها در نقاط مختلف و خطوط ایزوبار و نمودارهای مربوط به آن و همچنین مشخصات کامپیوتر استفاده شده و زمان انجام محاسبات توضیح داده شده است. همچنین جهت مقایسه تغییرات سرعت ها و فشارها و نحوه تشکیل گردابه ها در شرایط مختلف اولیه و مرزی توضیحاتی آمده است.

لازم به توضیح است که نتایج بدست آمده از کد CFD در نهایت به علت پس پردازش بالای نرم افزار ParaView برای این نرم افزار که از ابزارهای سیستم عامل لینوکس می باشد، تعریف شده است تا بدین وسیله بتوان تغییرات سرعت و بردارهایش، گردابه ها، فشارها و نمودارهای مربوطه به شکل قابل درکتری ارائه گردد.

۴-۲ مشخصات کامپیوتر

برای انجام محاسبات کد CFD نقاط نرم افزار مطلب از کامپیوتری به مشخصات سخت افزاری مطابق جدول (۴-۱) استفاده شده است که با توجه به ترکیب سخت افزاری زیر مدت زمان انجام محاسبات ۴ ساعت بوده است.

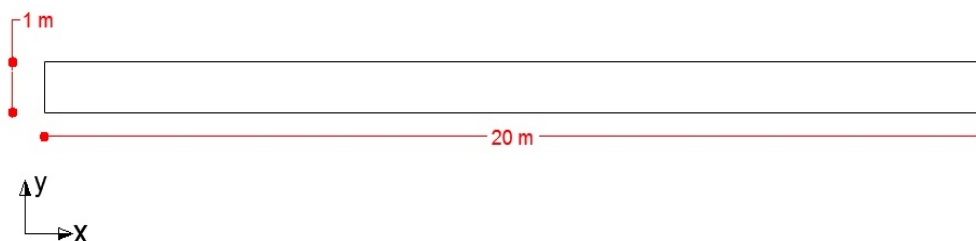
جدول ۴-۱: مشخصات کامپیوتر

CPU	Cash	RAM	Graphic
۲.۳۰ GHz Core i۵	۳MB	۴GB-DDR۳	۱GB

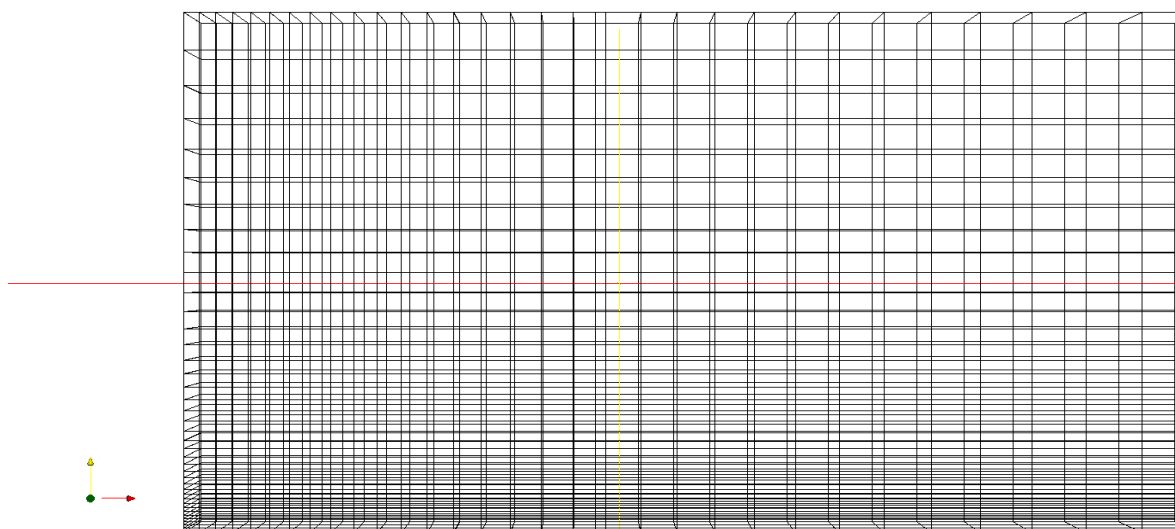
۳-۴ هندسه کانال

با وجود اینکه ماهیت جریان آشفته و آشفتگی سه بعدی است، ولی با عنایت به اینکه حل جریان آشفته در فضای سه بعدی به صورت حل عددی مستقیم نیاز به کامپیوترهای بسیار قوی به صورت موازی یا ابررایانه دارد، حل جریان در دو بعد به صورت ساده شده انجام گرفته است که می توان نتایج آن را با در نظر گرفتن شرایط جدید به سه بعد تعمیم داد. در این تحقیق طول کانال برابر ۲۰ متر و ارتفاع کانال برابر ۱ متر می باشد (شکل (۱-۴)). شبکه محاسباتی استفاده شده مطابق شکل (۲-۴) می باشد.

لازم به توضیح است که رینولدز جریان برابر ۲۰۰ و شبکه محاسباتی در راستای X دارای ۲۴۰ گره و در راستای Y دارای ۸۰ گره می باشد، که با توجه به رابطه مپینگ انتخاب شده در این راستا ۷۰٪ گره ها در $1/3$ پائینی کانال متمرکز شده اند. علت این کار این بوده است که با توجه به وجود عمده تغییرات سرعت در مجاورت لایه مرزی و قسمت تحتانی کانال، تغییرات سرعت به صورت گویاتری نشان داده شود.



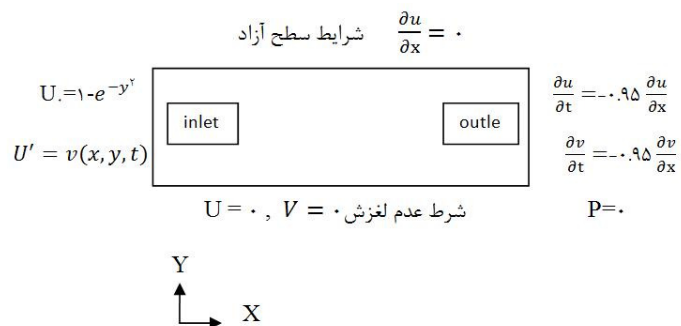
شکل (۱-۴) - هندسه کانال و ابعاد آن



شکل (۲-۴) - شبکه محاسباتی استفاده شده

۴-۴ شرایط مرزی و اولیه

جهت حل مسائل عددی نیاز به یک سری شرایط اولیه و شرایط مرزی داریم. بدیهی است تعیین شرایط مرزی غیر صحیح سبب غیر معقول شدن و یا واگرا شدن جواب ها می گردد. لذا در انتخاب شرایط مرزی و اولیه مناسب باید دقت بسیاری نمود. با توجه به توضیحات فصل گذشته، شرایط مرزی مناسب برای مشاهده گردابه ها و نحوه تشکیل آنها مطابق شکل (۳-۴) می باشد. ضمن اینکه در بخشی از انجام این تحقیق تاثیر تغییرات مختلف بر روی یکی از شرایط ورودی مورد بررسی قرار گرفته است .



شکل (۳-۴) : شرایط مرزی کانال

لازم به توضیح است U ورودی برابر است با مجموع U و U' .

$$U = U_0 + U' \quad (۱ - ۴)$$

در شرایط مرزی ورودی دو حالت مختلف برای تابع $v(x, y, t)$ در نظر گرفته شده است :

$$v(x, y, t) = 0.3ye^{-y^2} \cos(\pi t) \quad (۲ - ۴)$$

$$v(x, y, t) = \sin(0.4\pi t) \quad (۳ - ۴)$$

۴-۵ نتایج

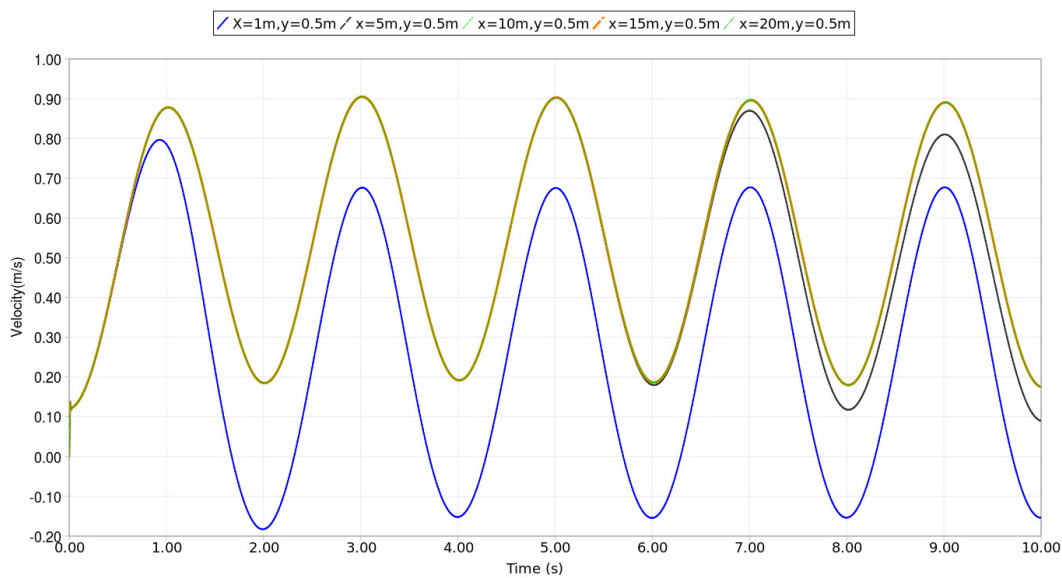
نتایج برای دو حالت ذکر شده در این بخش آورده شده است.

۴-۵-۱ تابع محرک در ورودی: $v(x, y, t) = 0.3ye^{-y^2} \cos(\pi t)$

در این حالت تعداد گره در راستای x برابر ۲۴۰ و در راستای y برابر ۸۰ و گام‌های زمانی $\Delta t = 0.001s$ می‌باشند و تا زمان ۱۰ ثانیه نتایج محاسبه شده است.

۴-۵-۱- تغییرات مولفه‌های سرعت در طول زمان

در شکل (۴-۴) نمودار مولفه افقی سرعت بر حسب زمان در ارتفاع $y=0.5$ و در مقاطع $x = 1, 5, 10, 15, 20$ ترسیم شده است.



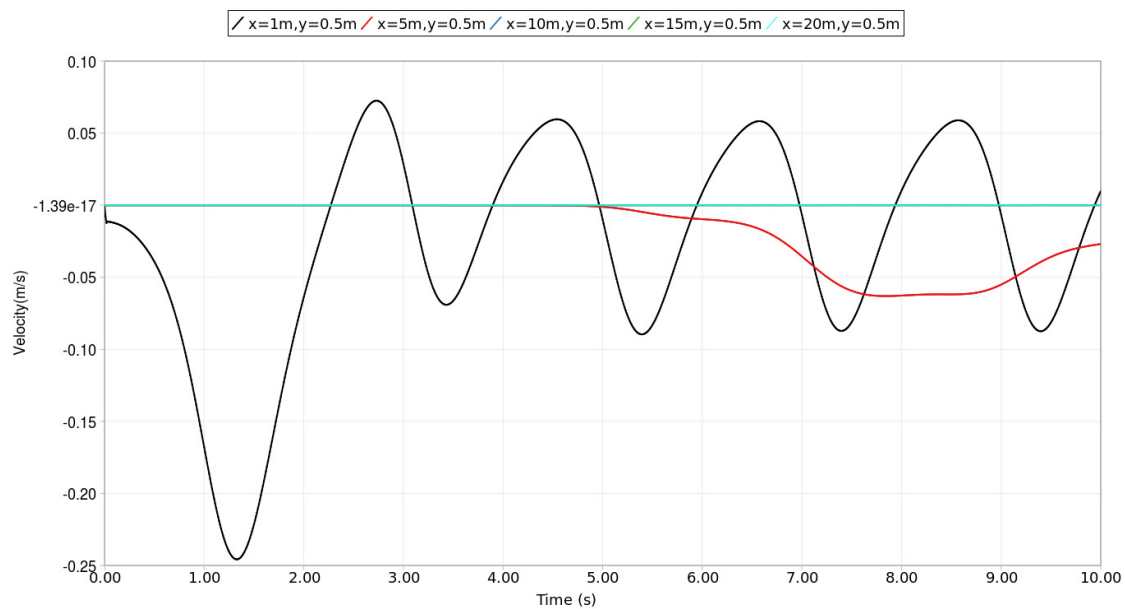
شکل (۴-۴) - تغییرات مولفه افقی سرعت نسبت به زمان در پنج مقطع از طول کانال

این نمودار نشان دهنده این است که جریان پس از ورود به کانال، با یک سرعت نوسانی شروع به حرکت می‌کند. سپس به مرور زمان تاثیر محرک اولیه باعث جدا شدن نمودار سرعت و تغییر شکل نمودارهای x ‌های مختلف می‌شود. نکته قابل به توضیح این است که با توجه به نمودار فوق الذکر دوره تناوب تمام مقاطع مختلف کانال برابر ۲ ثانیه می‌باشد که موید این موضوع است که $\omega = 0.5$ انتخاب شده با نمودار فوق مطابقت دارد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقدار دوره تناوب و دامنه نوسانات برای هر یک از پنج سلول

در نظر گرفته شده برابر می‌باشد. ولی مقدار میانگین سرعت در سلول‌های خروجی نسبت به سلول‌های ورودی در نظر گرفته شده، بالاتر است.

$$\omega = \frac{1}{t} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad (4-4)$$

نمودار شکل (۵-۴) تغییرات مولفه عمودی سرعت بر حسب زمان در ارتفاع $y=0.5$ و در مقاطع $x = 1, 5, 10, 15, 20$ ترسیم شده است.

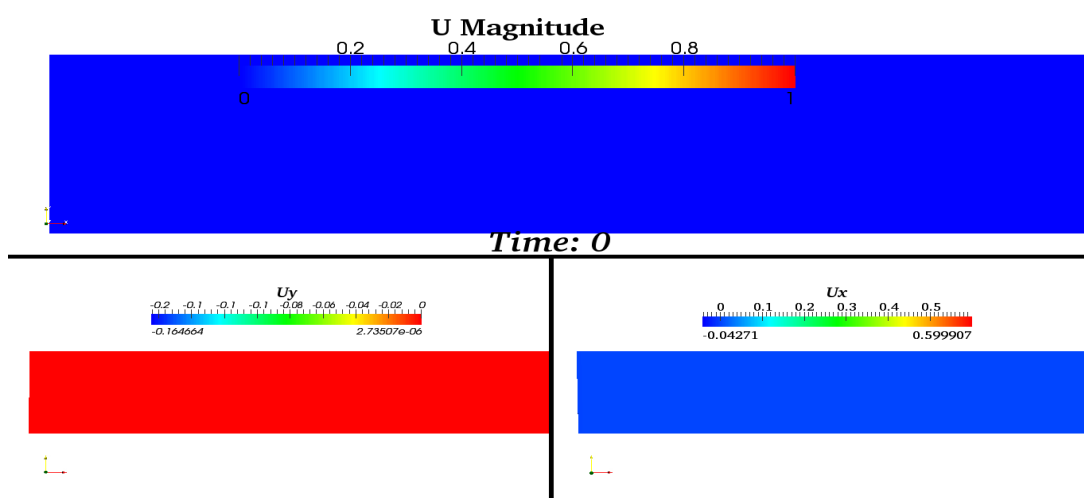


شکل (۵-۴) - تغییرات مولفه عمودی سرعت بر حسب زمان

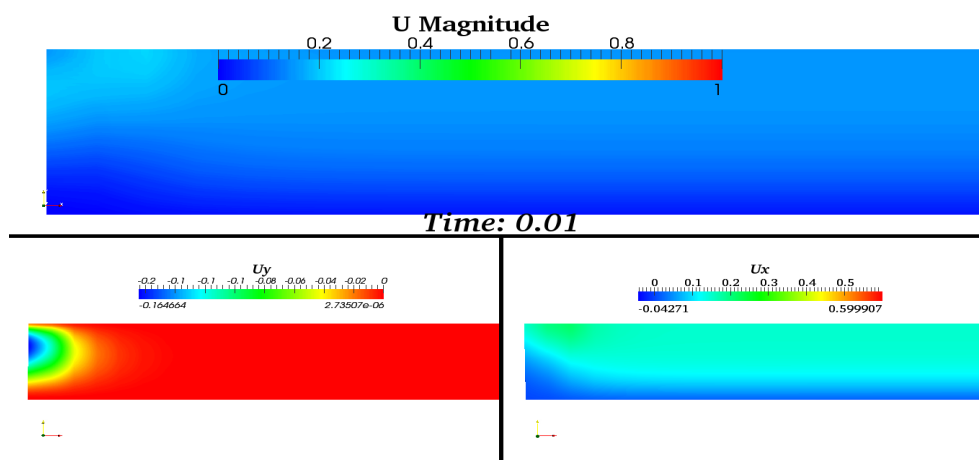
قابل مشاهده است که مولفه قائم سرعت در $x = 15, 20$ در ۱۰ ثانیه اول، بدون تغییر می‌باشد. نوسانات در مقطع $x=1$ دیده می‌شود که به تدریج پس از حدود ۵ ثانیه، به $x=5$ می‌رسد.

۴-۵-۱-۲ نمودارهای مقادیر سرعت

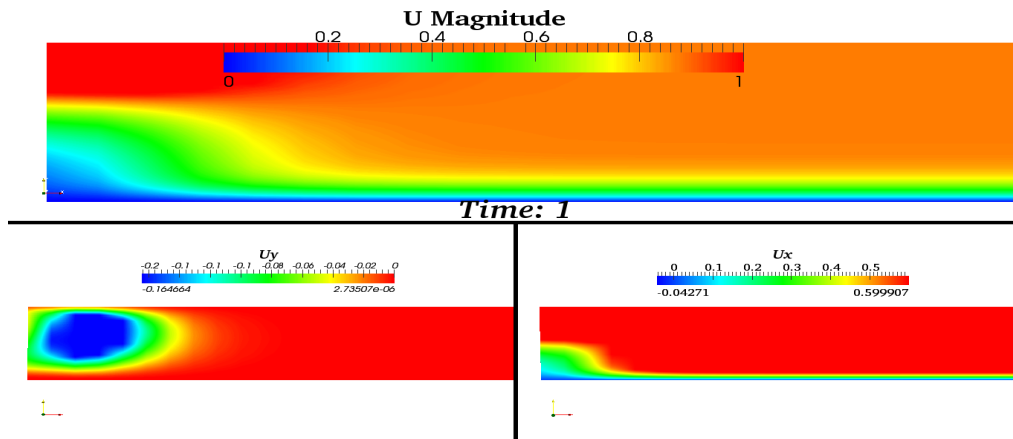
در شکل (۴-۶) تصاویری از بزرگی سرعت و مولفه افقی و عمودی آن در لحظات مختلف آورده شده است.



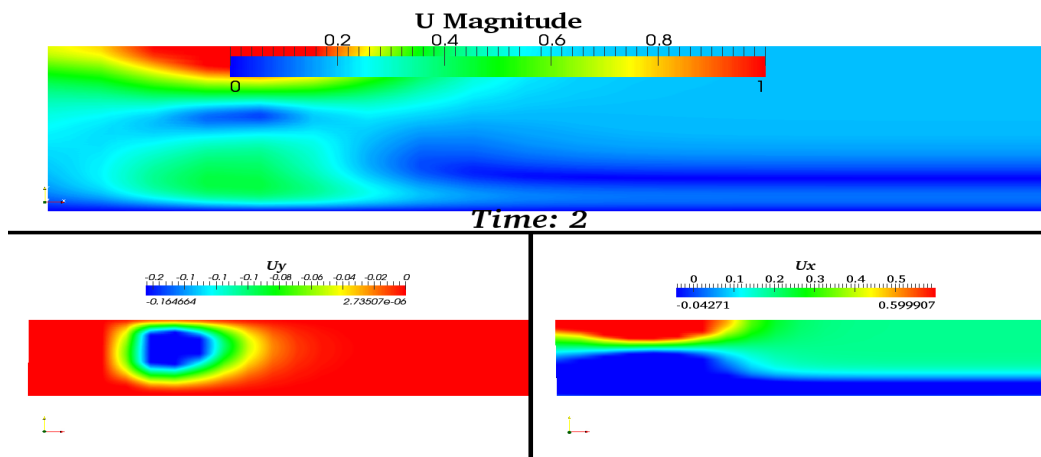
(الف)



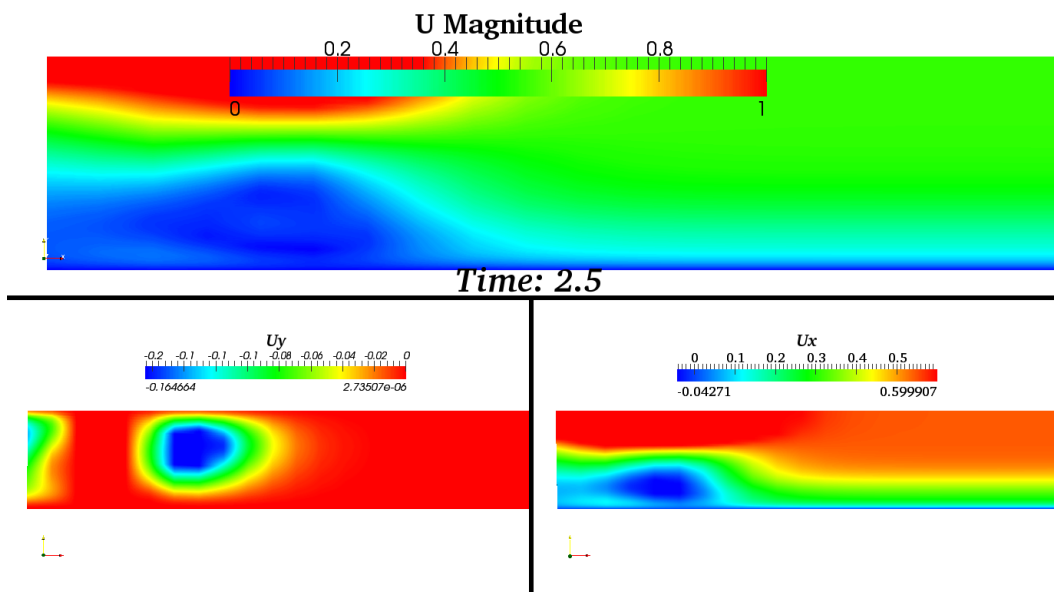
(ب)



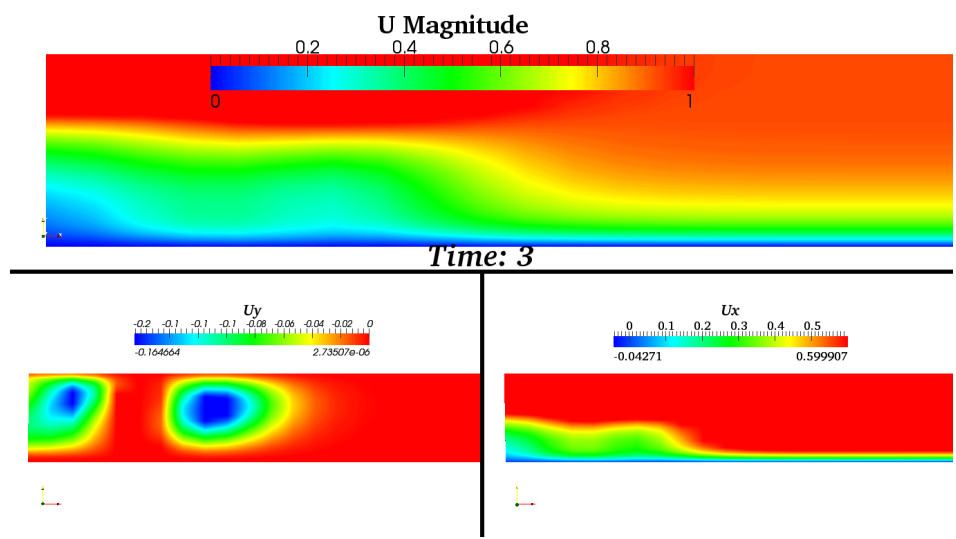
(پ)



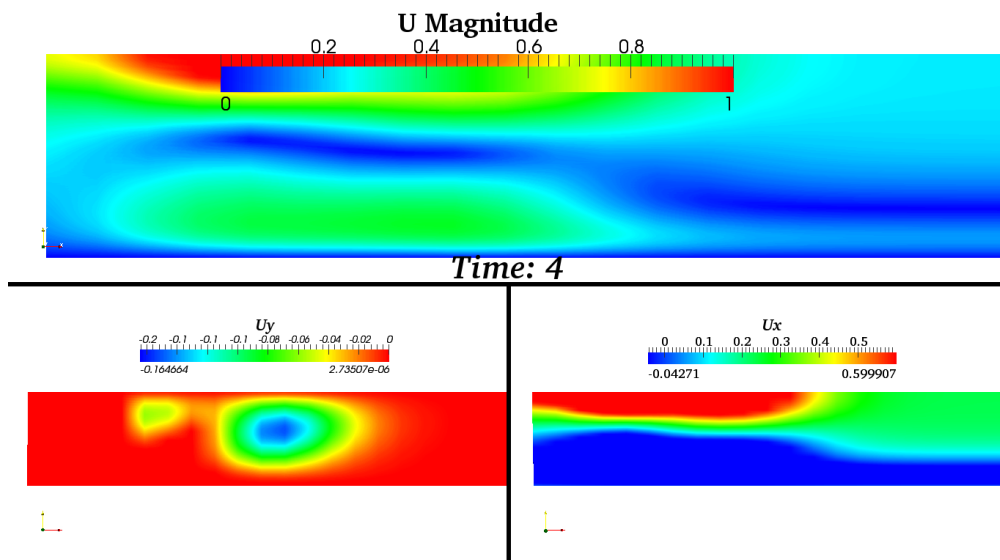
(ت)



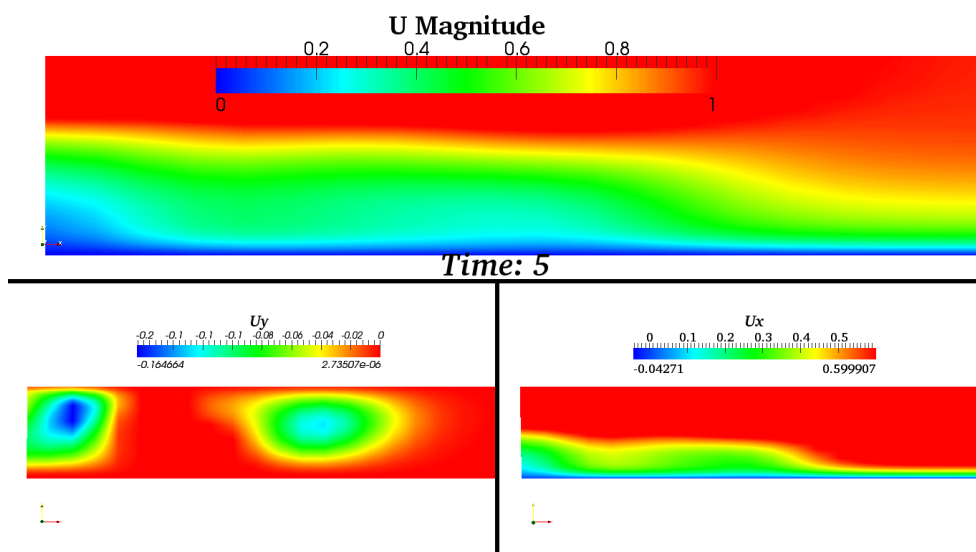
(ث)



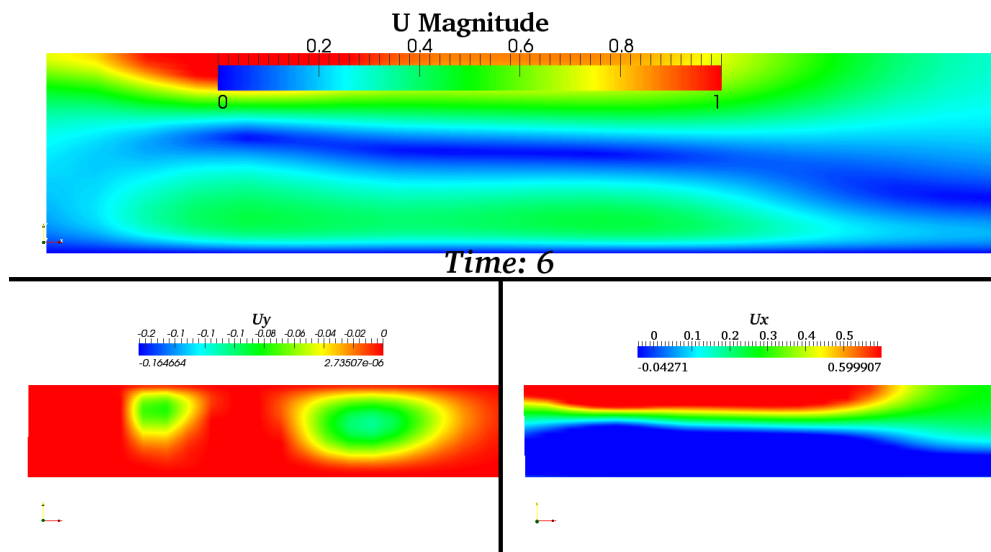
(ج)



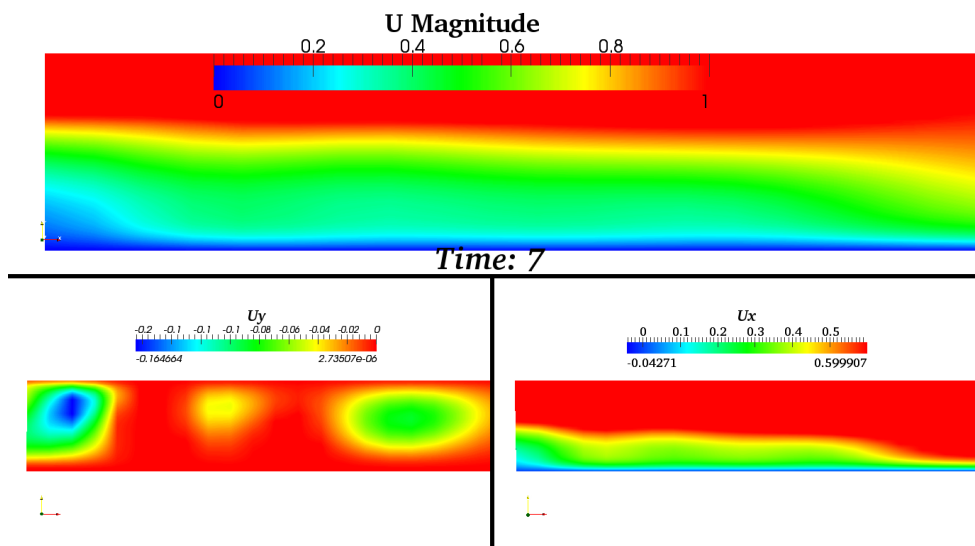
(7)



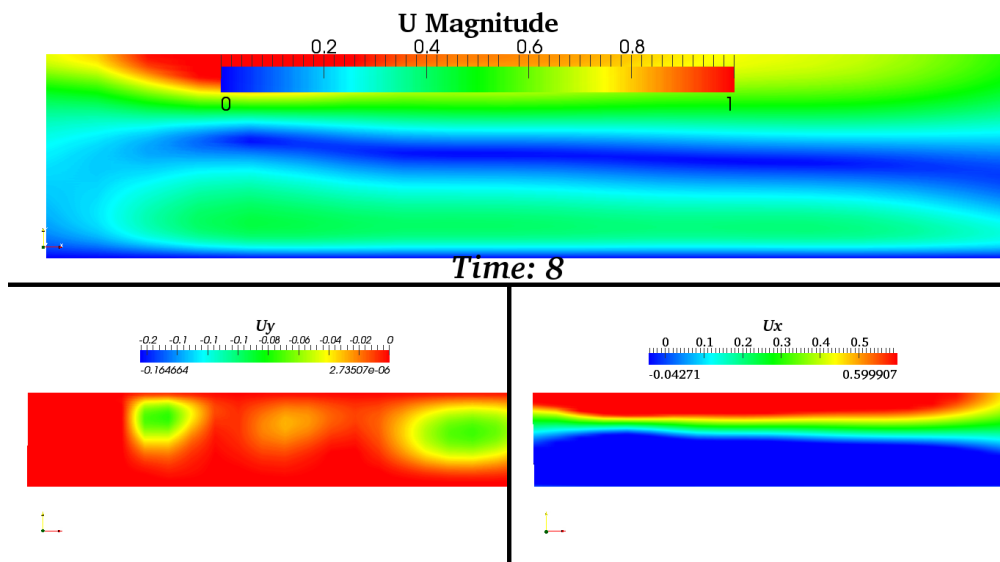
(7)



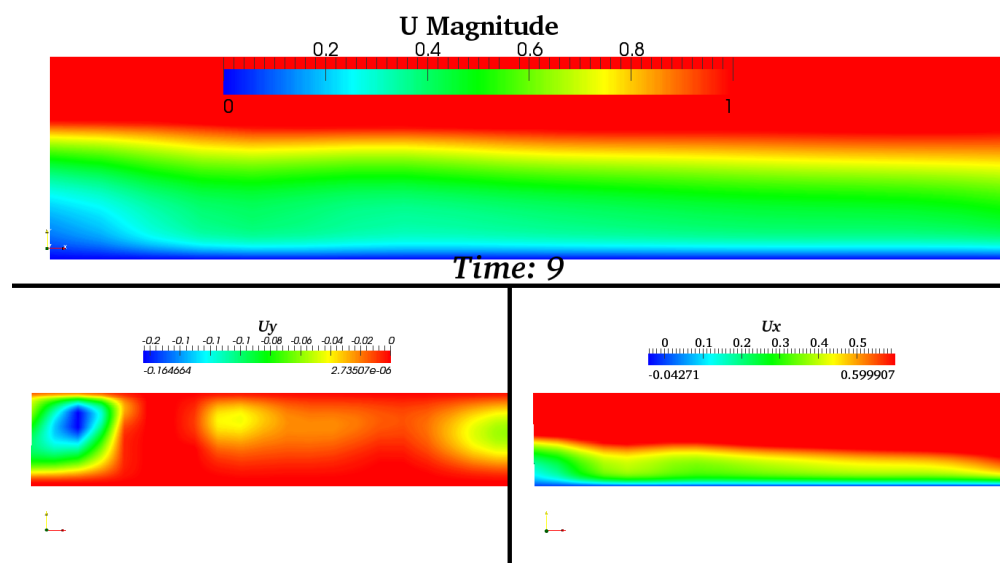
(ç)



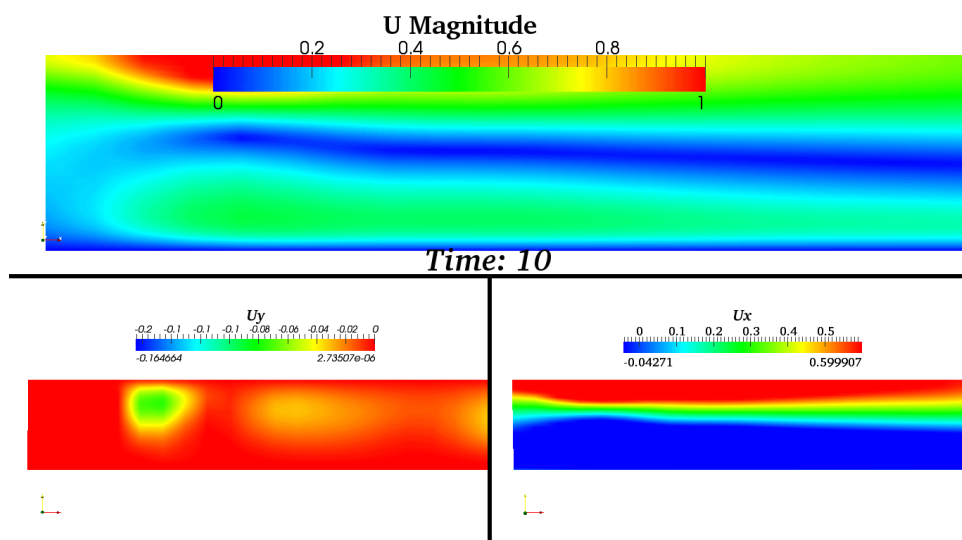
(s)



(j)



(j)

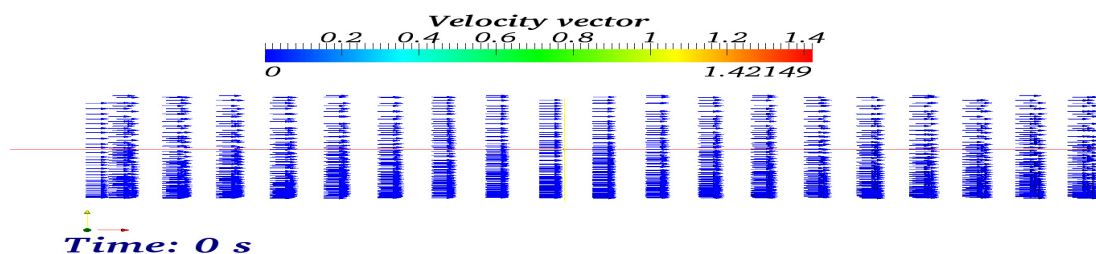


(ز)

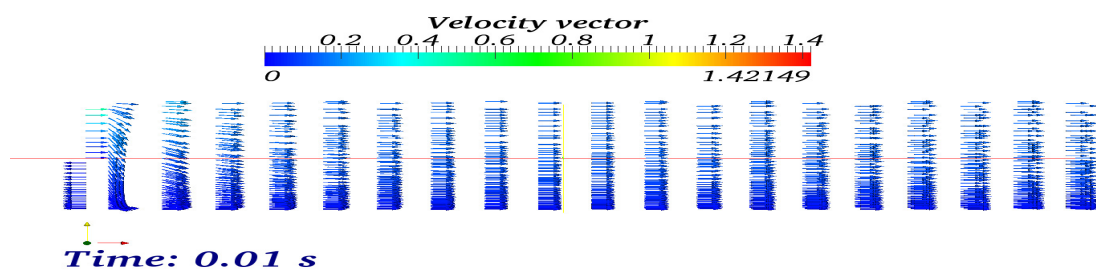
شکل (۴-۶): نمودارهای مقادیر سرعت

۴-۵-۱-۳ نمودارهای بردارهای سرعت

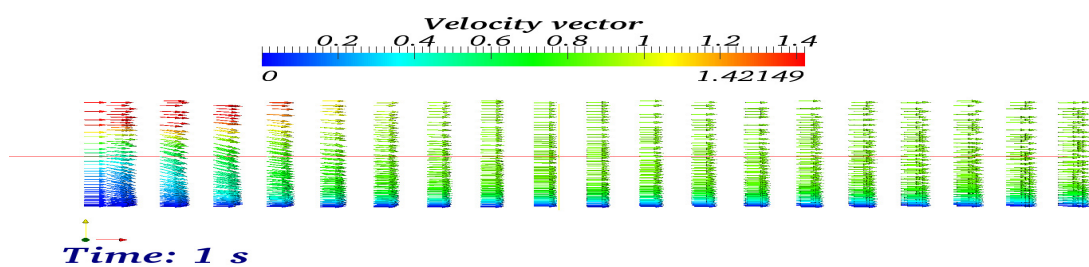
در شکل (۴-۷) تصاویر بردارهای سرعت در لحظات مختلف آورده شده است. به وضوح میتوان دید گردابه‌ها از درون لایه مرزی شروع شده و با رشد لایه مرزی ناشی از تابع محرک ورودی به سمت جلو حرکت میکنند.



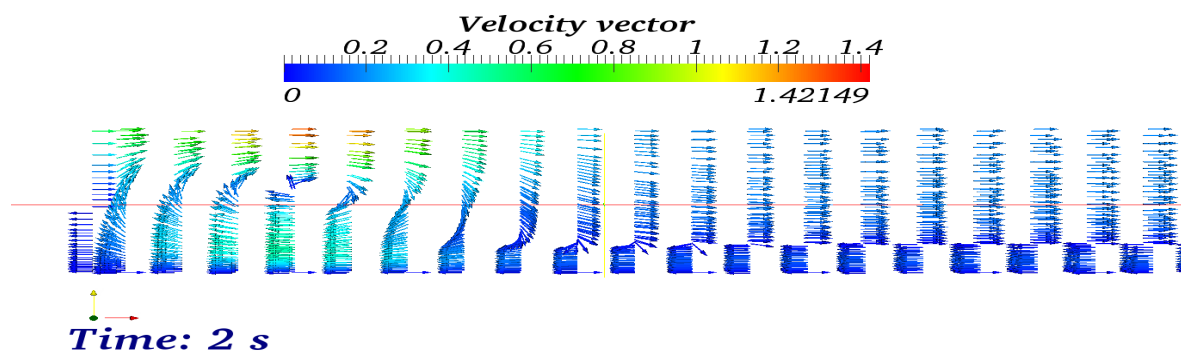
(الف)



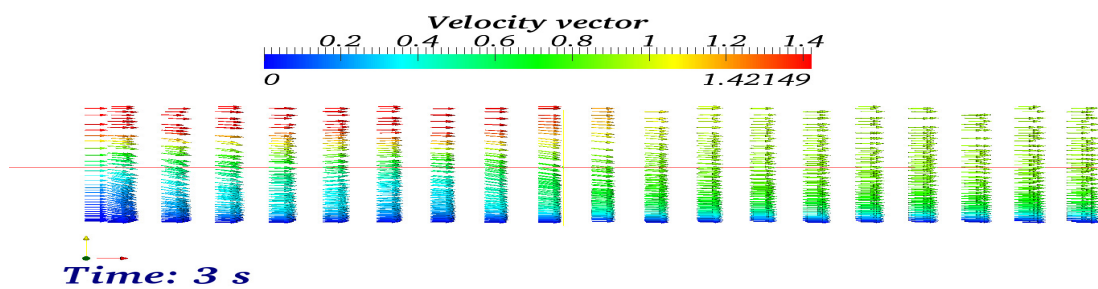
(ب)



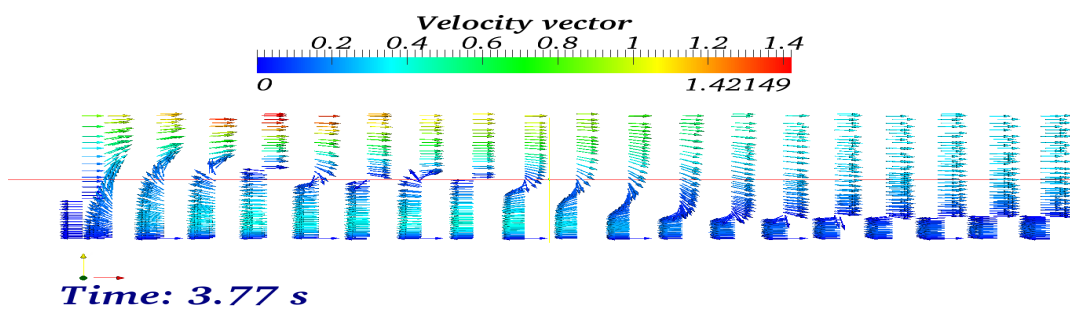
(پ)



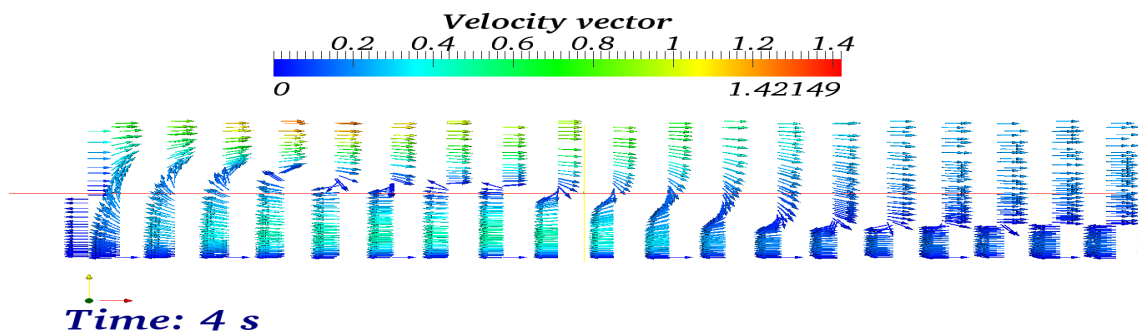
(ت)



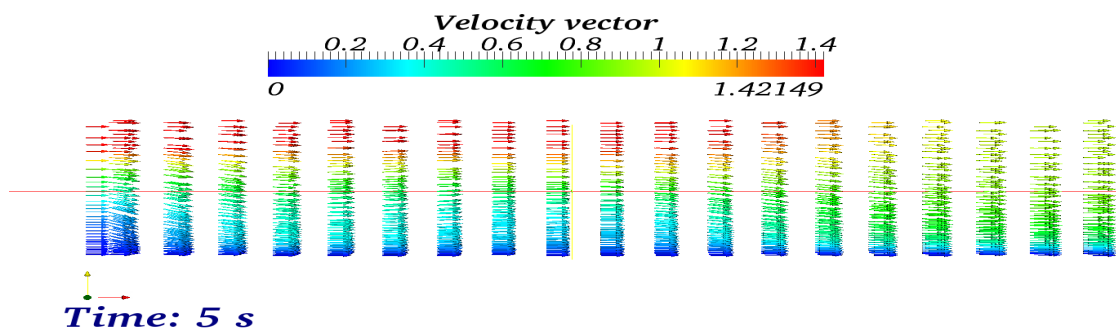
(ث)



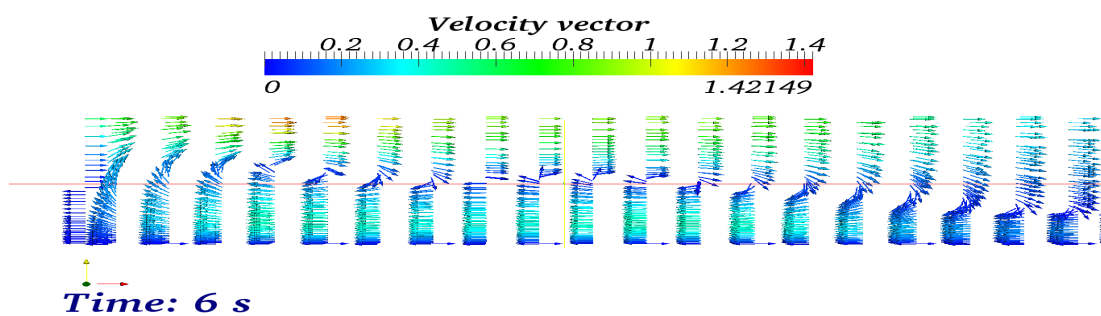
(ج)



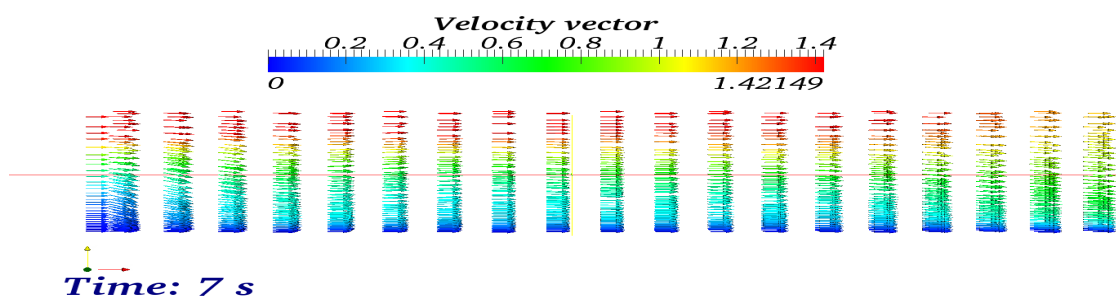
(د)



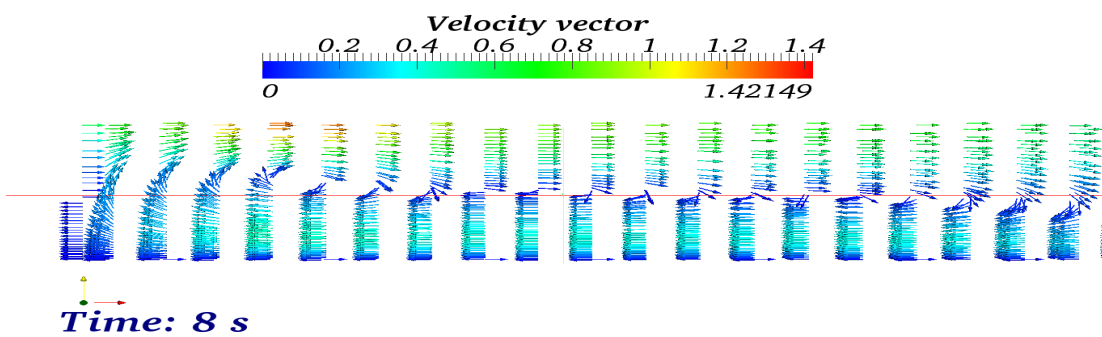
(c)



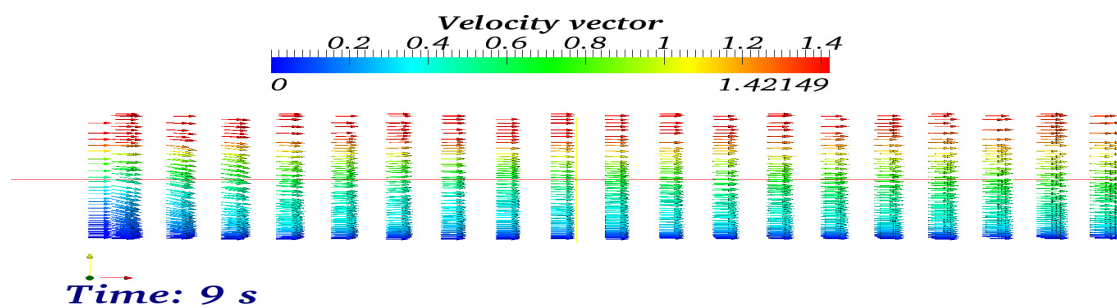
(c)



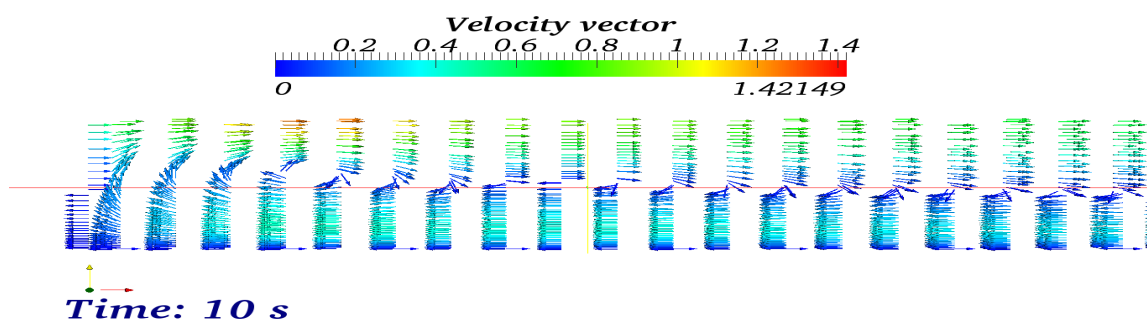
(c)



(د)



(هـ)

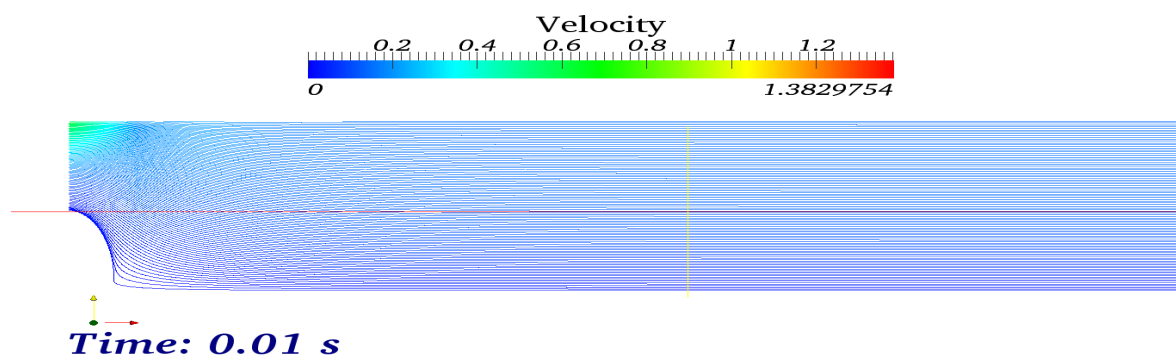


(و)

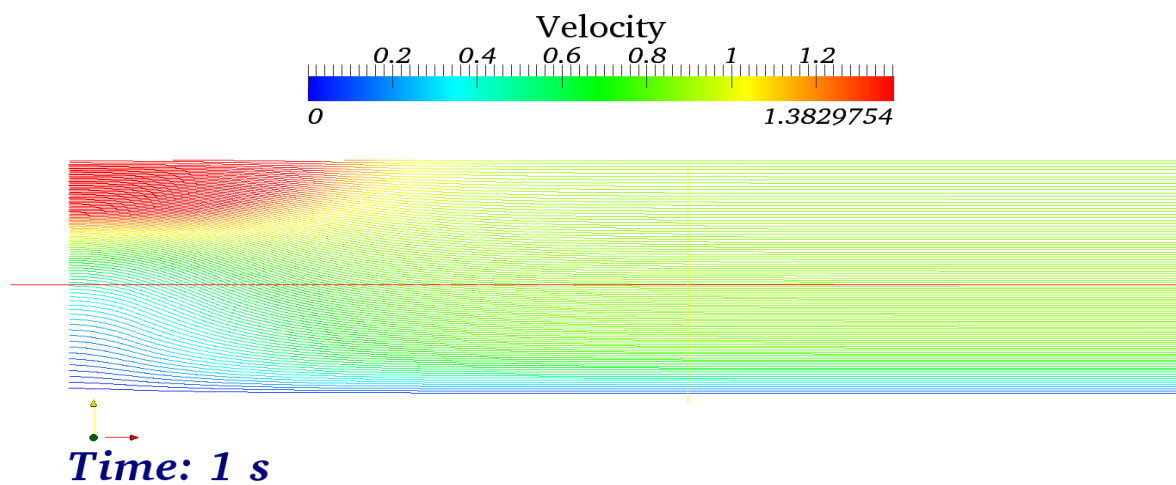
شکل (۴-۷): نمودارهای بردارهای سرعت

۴-۱-۵-۴ نمودارهای خطوط جریان

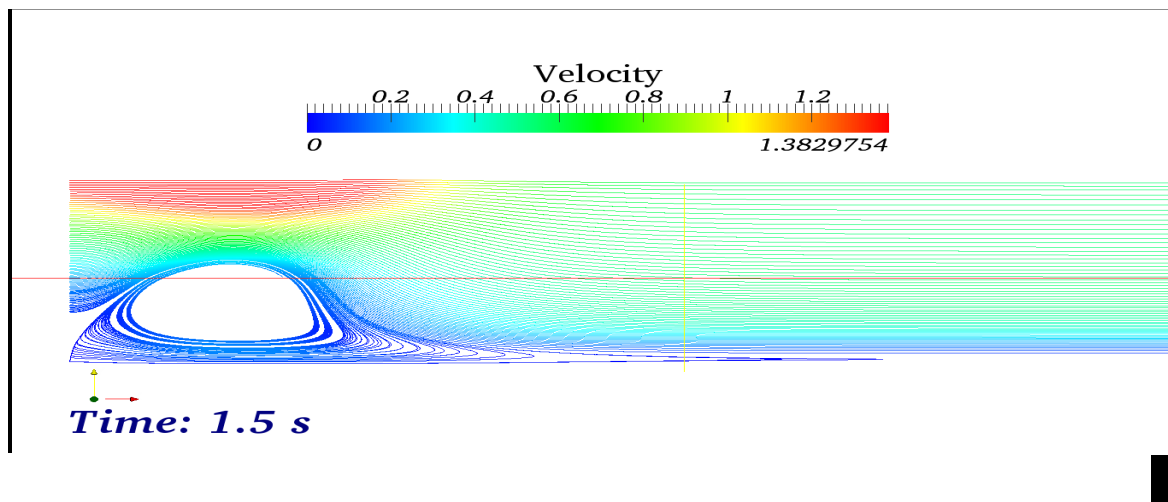
با توجه به بردارهای سرعت، می‌توان نحوه تشکیل گردابه‌ها را درک کرد که در شکل (۸-۴) در لحظات مختلف نحوه تشکیل گردابه‌ها آورده شده است.



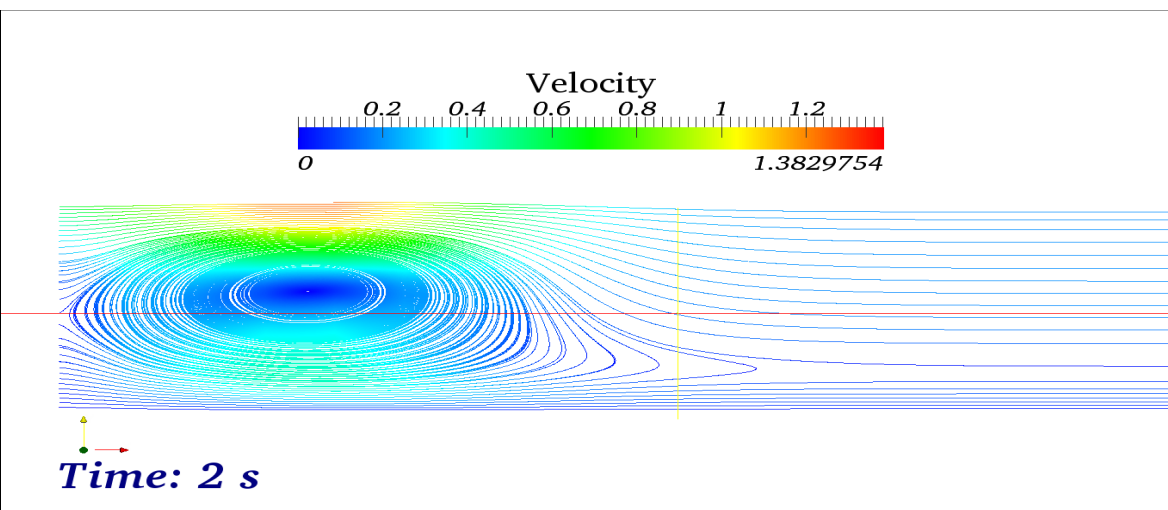
(الف)



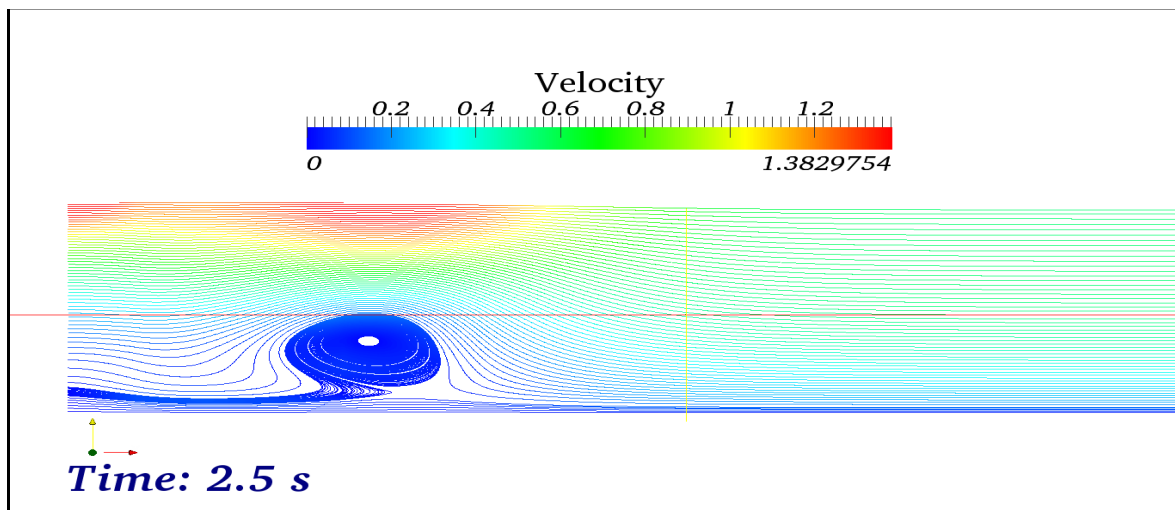
(ب)



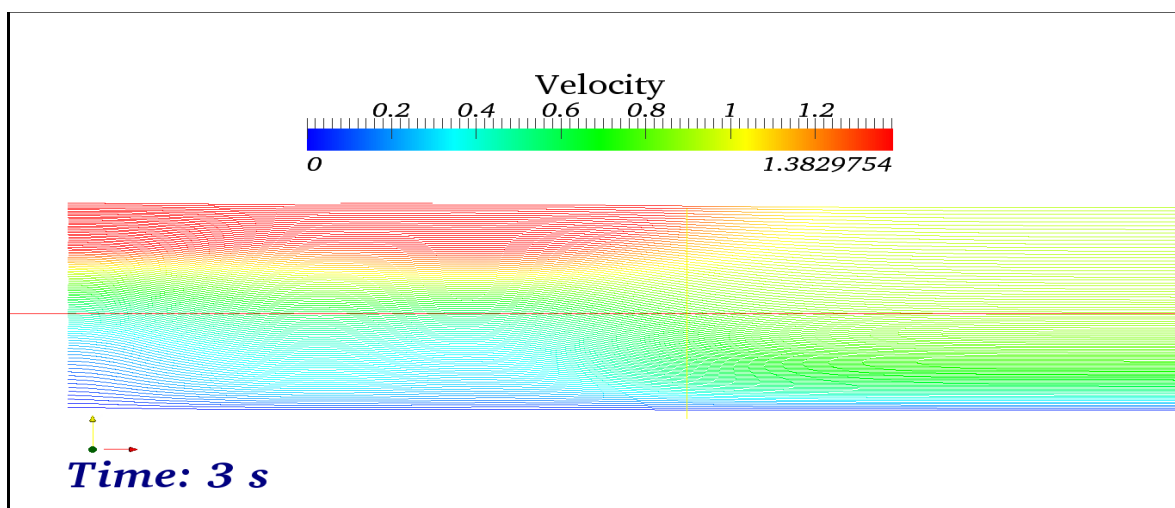
(پ)



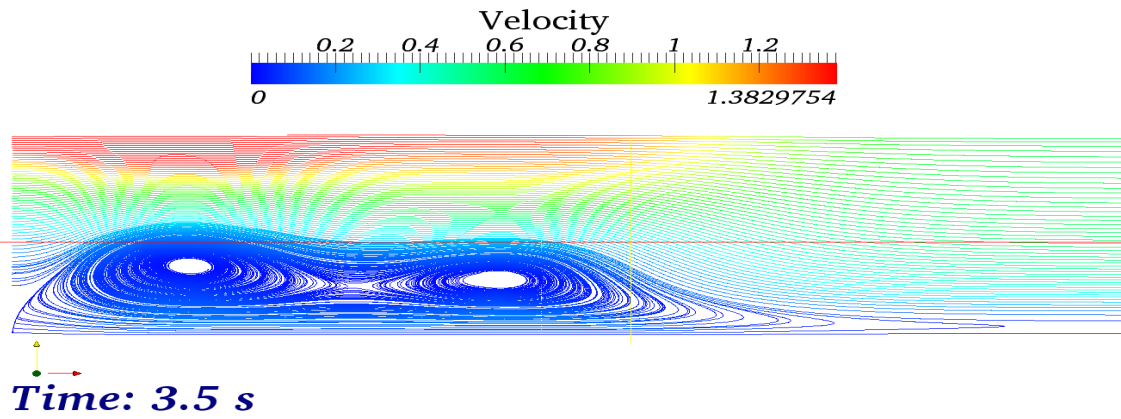
(ث)



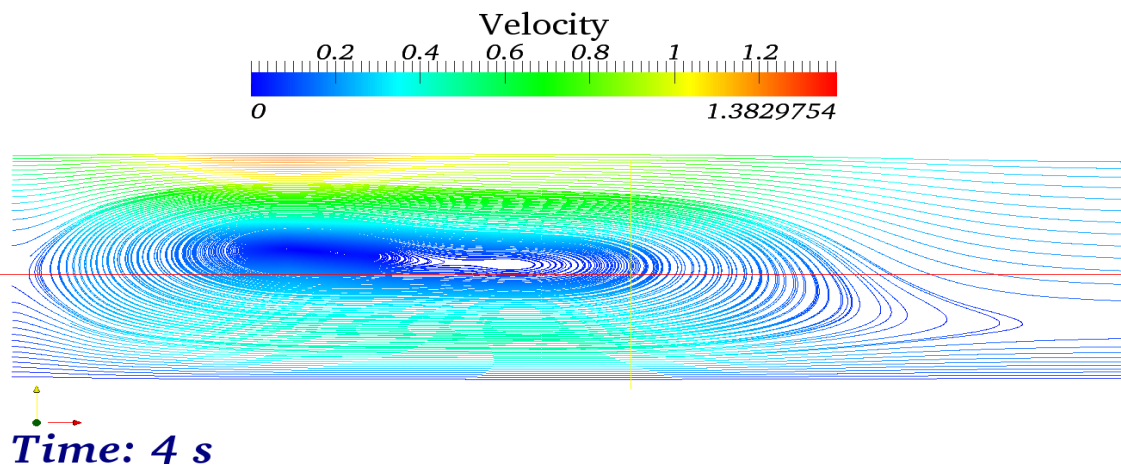
(ت*)



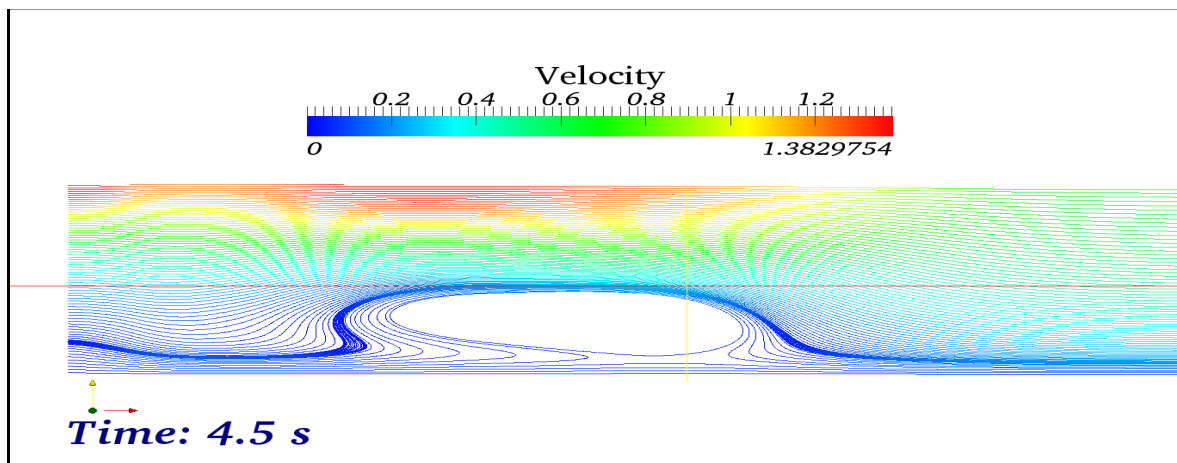
(ج)



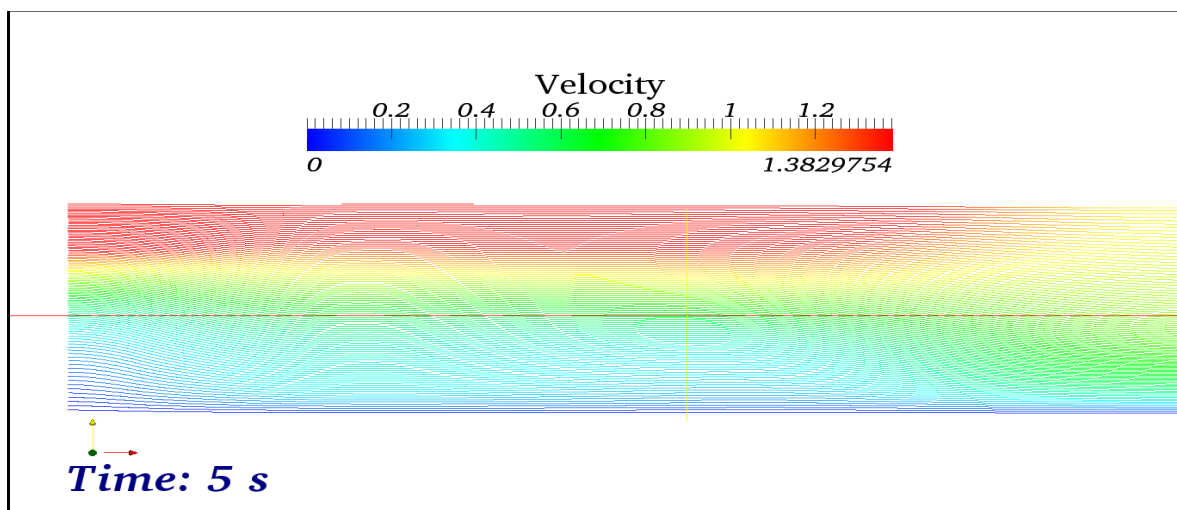
(τ)



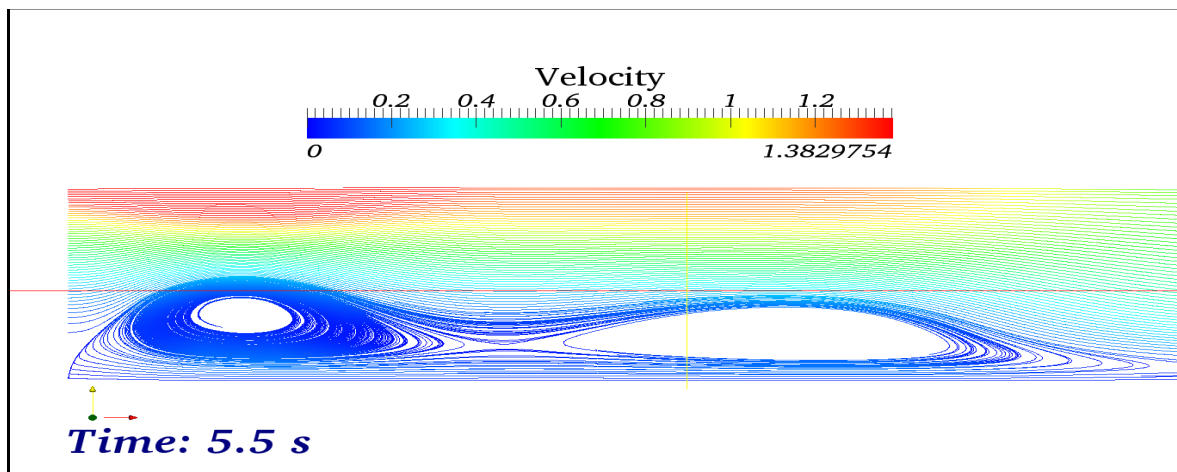
(τ)



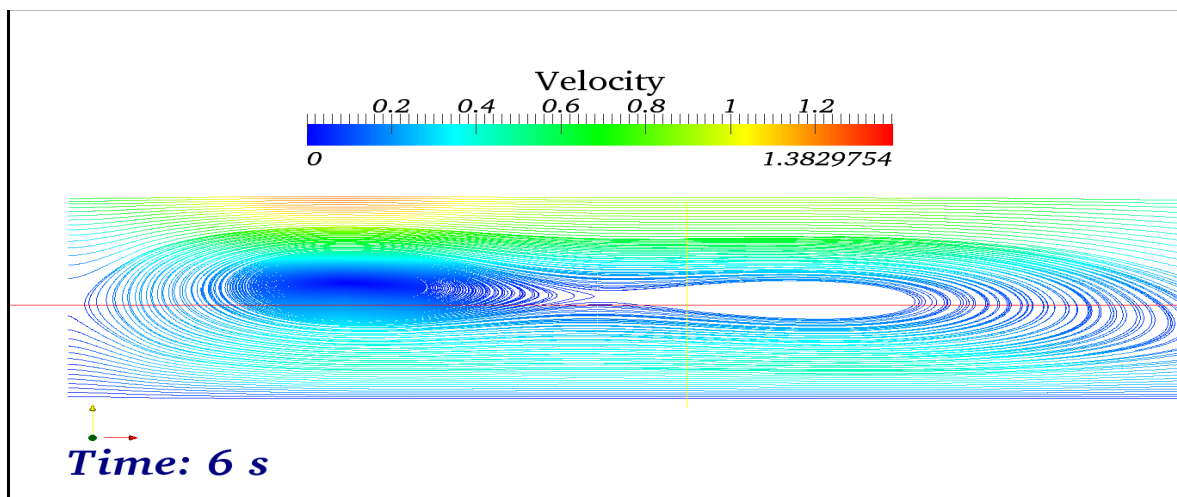
(ç)



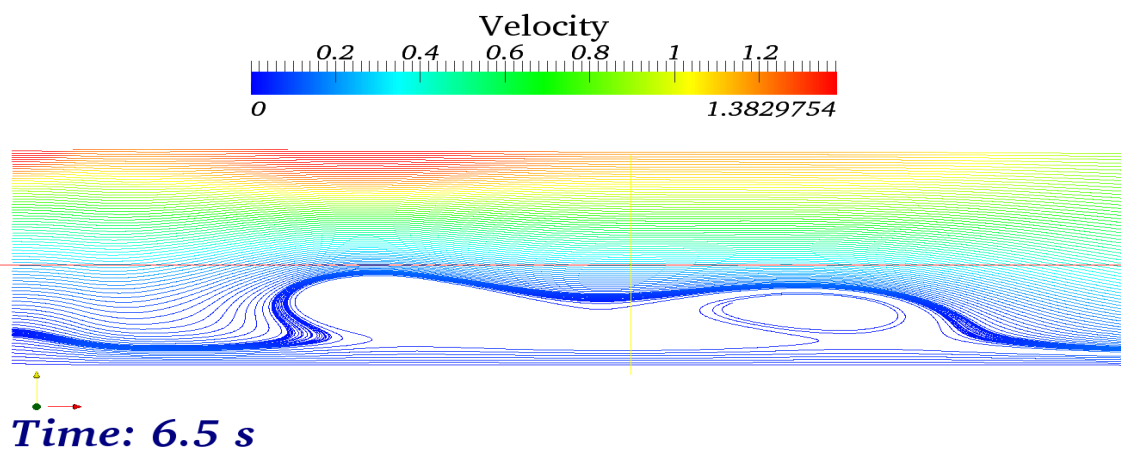
(d)



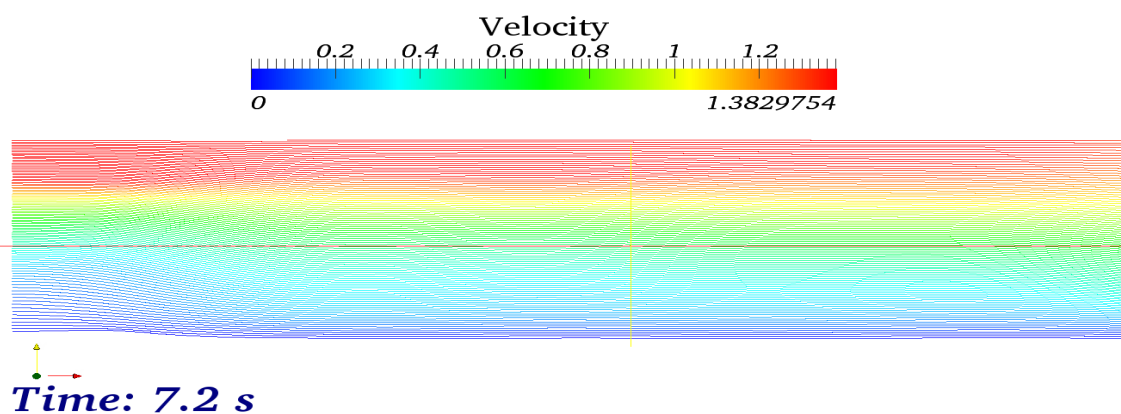
(j)



(j)



(ج)



(ج)

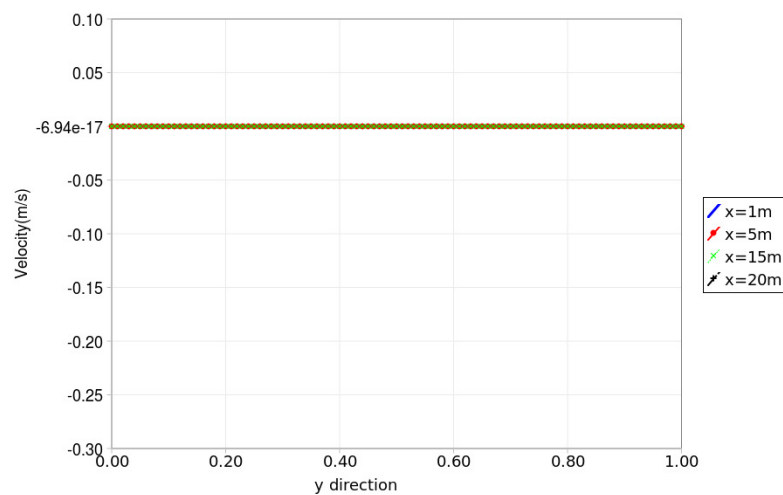
شکل (۴-۸): نمودارهای خطوط جریان

۴-۵-۱ تغییرات مولفه‌های سرعت در مقاطع طولی و ارتفاعی

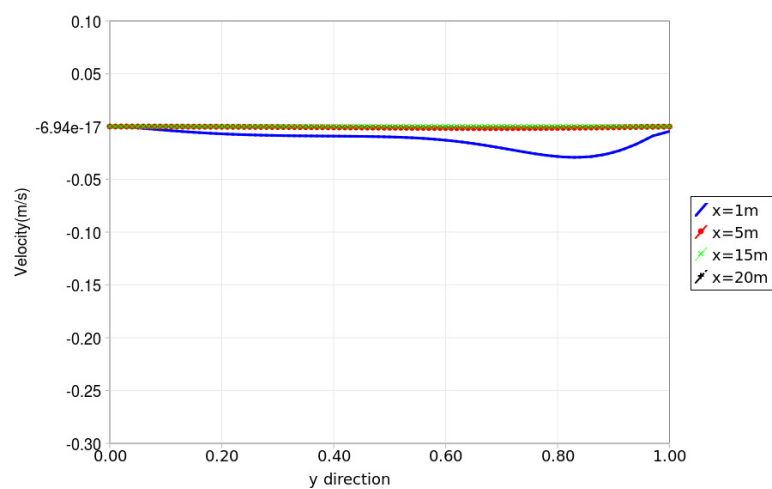
نمودارهای شکل (۴-۹) تغییرات مولفه عمودی سرعت در ارتفاع کانال در چهار مقطع از طول کانال، در زمان‌های ۰، ۵، ۱۰ ثانیه آورده شده است. در زمان $t=0$ هیچ مقطعی از کانال دارای مولفه سرعت عمودی نمی‌باشد و به تدریج در اثر اختلاف سرعت در

لایه‌های مختلف جریان و به وجود آمدن گرادیان سرعت، تغییرات در سرعت عمودی کانال تشکیل می‌شود. در زمان $t=5$ برای $x=5, 15, 20$ همچنان مولفه عمودی سرعت صفر می‌ماند. در زمان $t=10$ برای $x=5$ به وجود آمدن مولفه عمودی سرعت قابل مشاهده است.

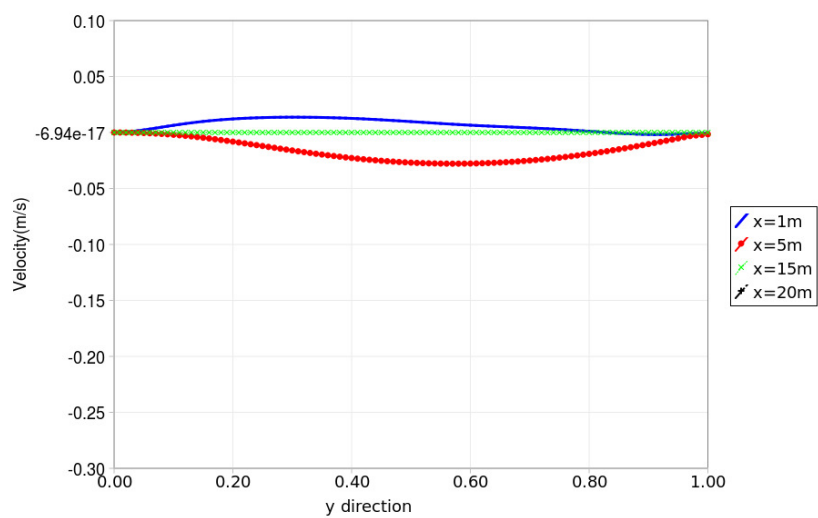
همچنین به دلیل شروط عدم لغزش و سطح آزاد، مولفه عمودی سرعت در $y=0, y=1$ برابر صفر باقی می‌ماند. که در نمودارهای شکل (۴-۹) نیز این مساله دیده می‌شود.



(الف) $t=0$ s



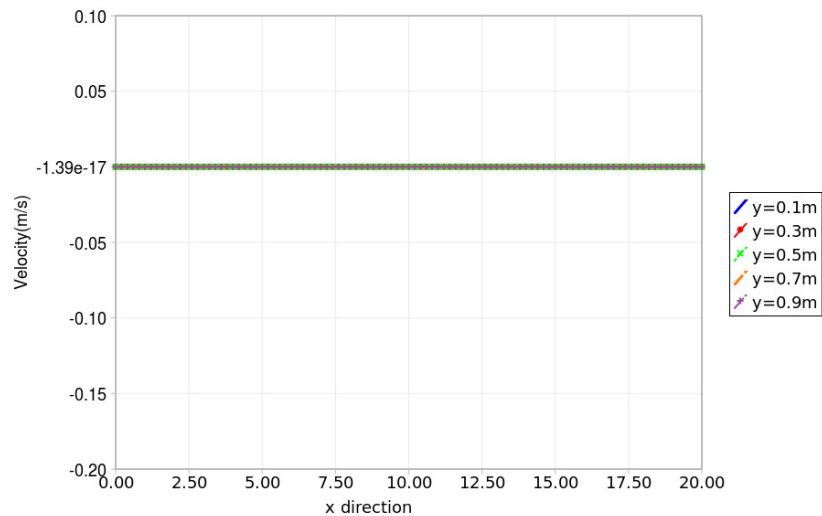
(ب) $t=5s$



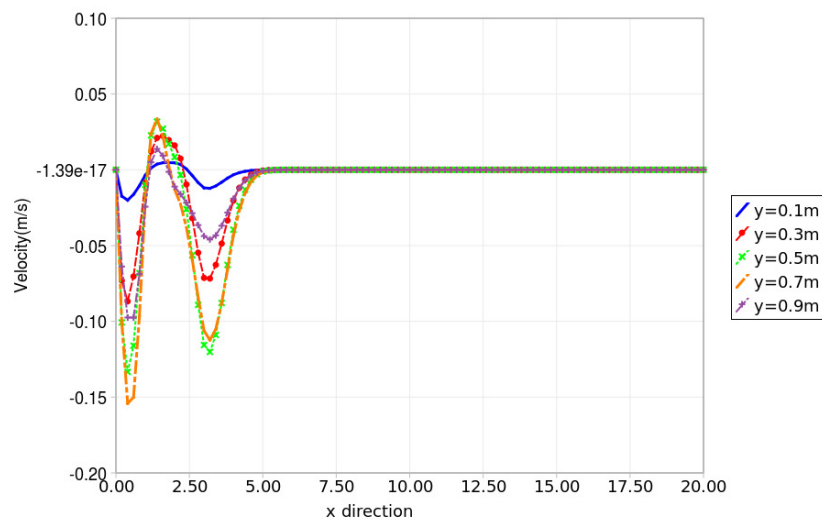
(پ) $t=1s$

شکل (۴-۹): تغییرات مولفه عمودی سرعت در مقاطع طولی از کانال

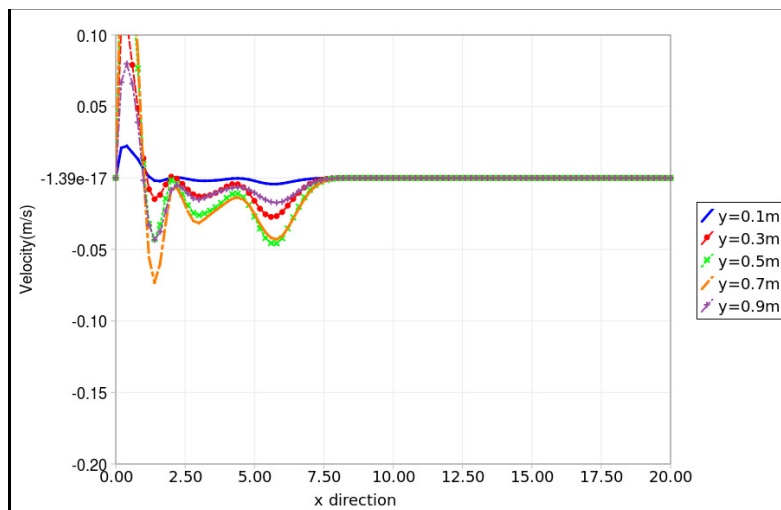
به همین ترتیب در شکل (۵-۱۰) تغییرات مولفه عمودی سرعت در طول کانال برای پنج ارتفاع مشخص از کانال، در زمان های $t=0, 5, 10$ آورده شده است. همانطور که در شکل (۵-۶) هم مشاهده شد، مولفه قائم سرعت در طول زمان به سمت جلو حرکت کرده تا به انتهای کانال برسد.



(الف) $t=0s$



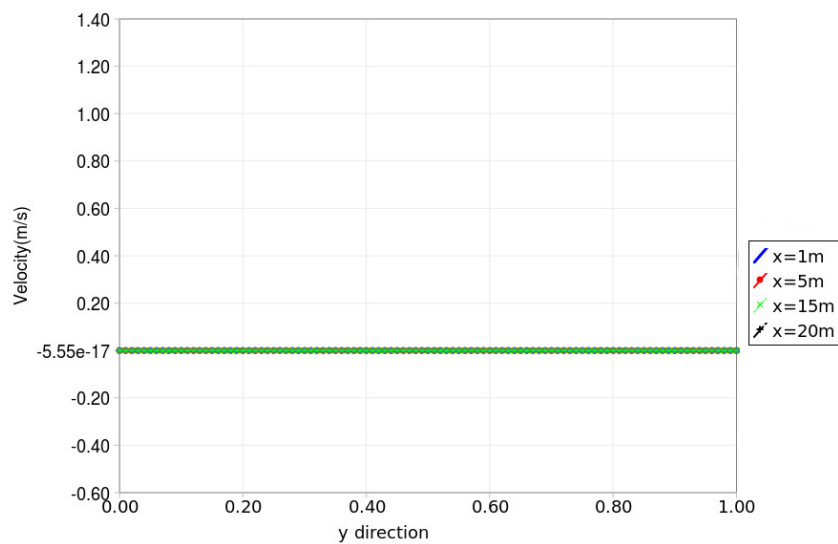
(ب) $t=5s$



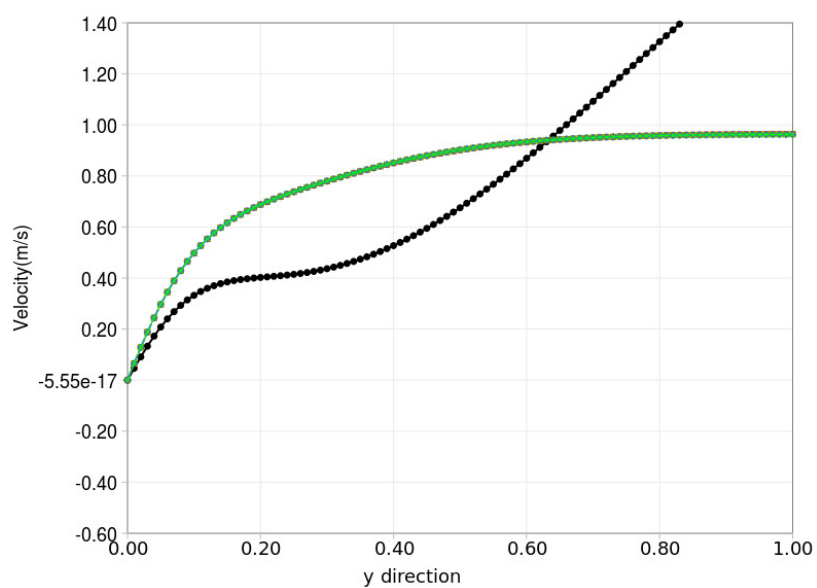
(پ) $t=10\text{ s}$

شکل (۴-۱۰): تغییرات مولفه عمودی سرعت در مقاطع ارتفاعی از کانال

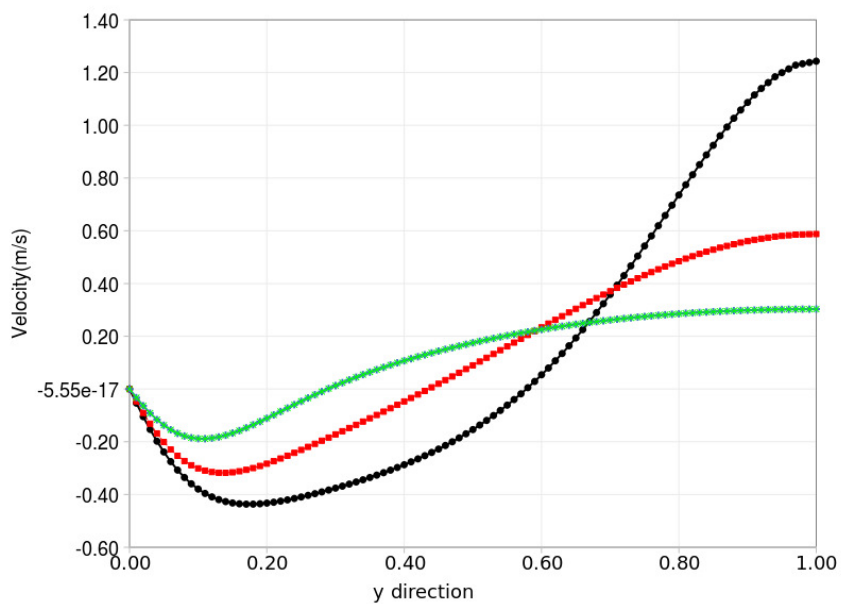
تغییرات مولفه افقی سرعت در زمان های ۰، ۵، ۱۰ در ارتفاع کانال در چهار مقطع از طول کانال در شکل (۴-۱۱) نمایش داده شده است.



(الف) $t=0\text{ s}$



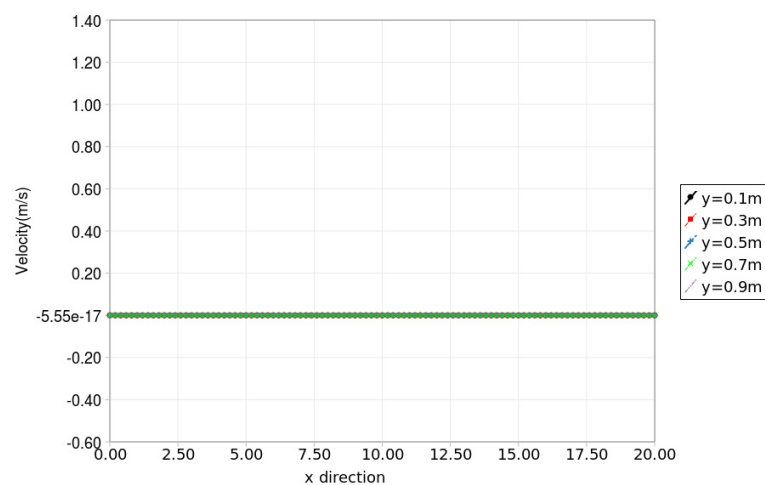
(ب) $t = \Delta s$



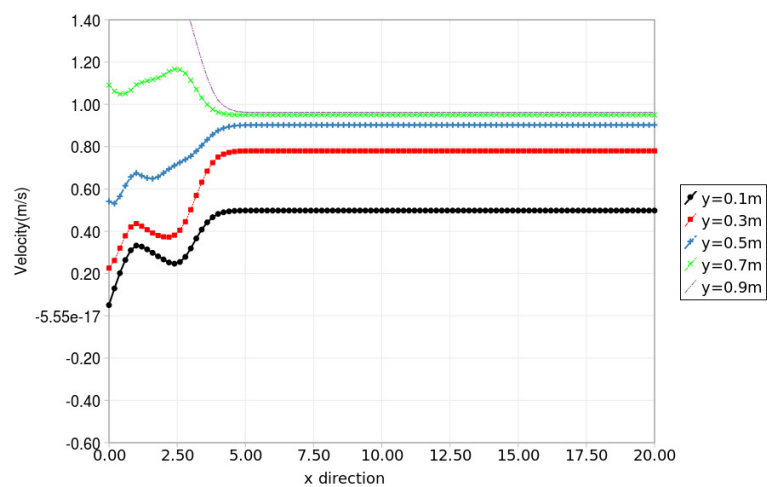
(پ) $t = 1.0 s$

شکل (۴-۱۱): تغییرات مولفه افقی سرعت در مقاطع طولی از کانال

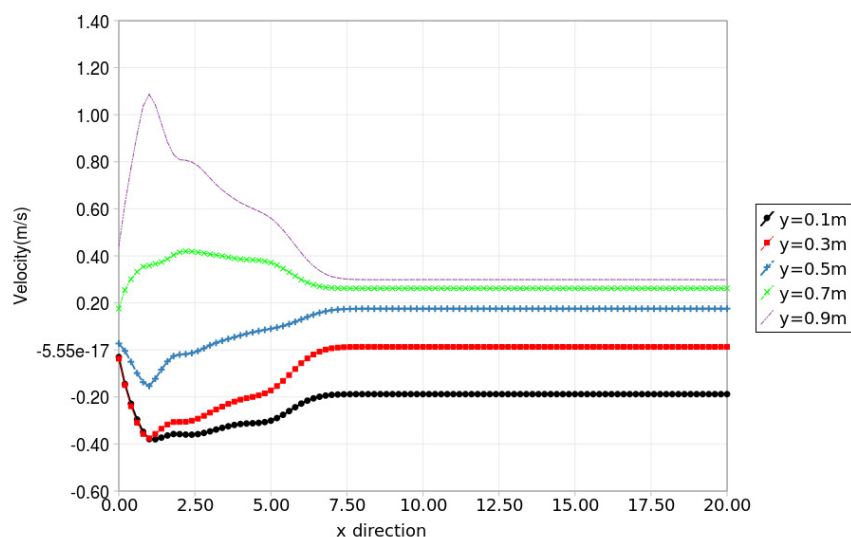
تغییرات مولفه افقی سرعت در زمان های $t=0, 0.5, 1.0$ در طول کانال در چهار ارتفاع مختلف از کانال در شکل (۴-۱۲) آورده شده است .



(الف) $t=0$ s



(ب) $t=0.5$ s



(پ) $t = 1 \text{ s}$

شکل (۴-۱۲): تغییرات مولفه افقی سرعت در مقاطع ارتفاعی از کانال

۴-۵-۲ تابع محرک در ورودی: $v(x, y, t) = \sin(0.4\pi t)$

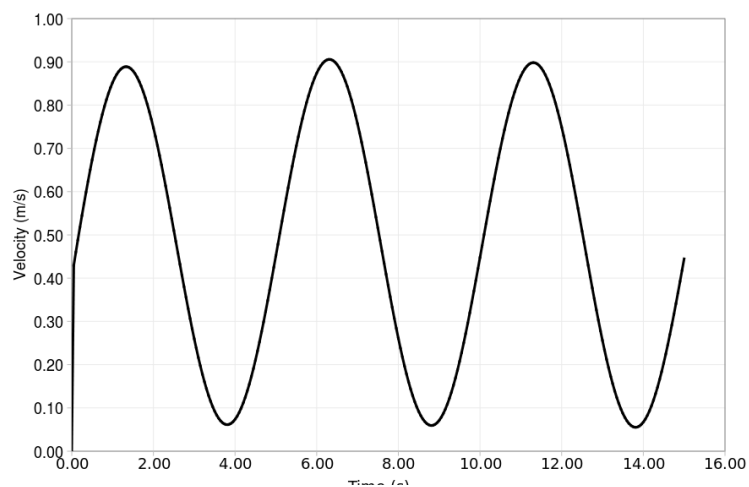
در این حالت ابعاد کانال همان ابعاد قبلی می‌باشد، اما به واسطه دامنه بزرگ تابع محرک (U') از مش درشت‌تری استفاده شده است. تعداد گره در راستای x برابر ۸۰ و در راستای y برابر ۴۰ و گامهای زمانی $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ می‌باشند و تا زمان ۵۰ ثانیه نتایج محاسبه شده است.

۴-۵-۲-۱ نتایج تغییرات سرعت و فشار در یک سلول بر حسب زمان

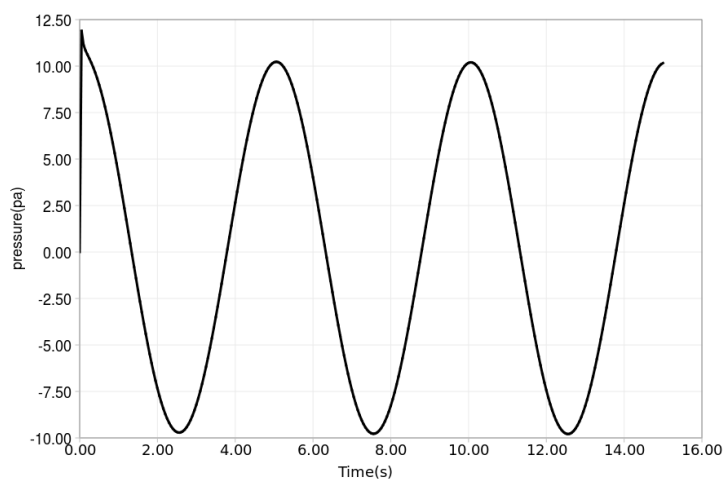
در شکل های (۴-۱۳) و (۴-۱۴) نمودارهای تغییرات سرعت و فشار در یک گره در طول بازه زمانی حل، برای حالتی که تابع محرک اولیه $v(x, y, t) = \sin(0.4\pi t)$

می‌باشد، آورده شده است. زمان دوره تناوب بر اساس اشکال، مطابق با نوسان اولیه ایجاد

شده تابع $V(x, y, t)$ می‌باشد که این امر تا حدی موید درستی جواب‌ها است.



شکل (۴-۱۳) - نمودار تغییرات سرعت در یک سلول بر حسب زمان



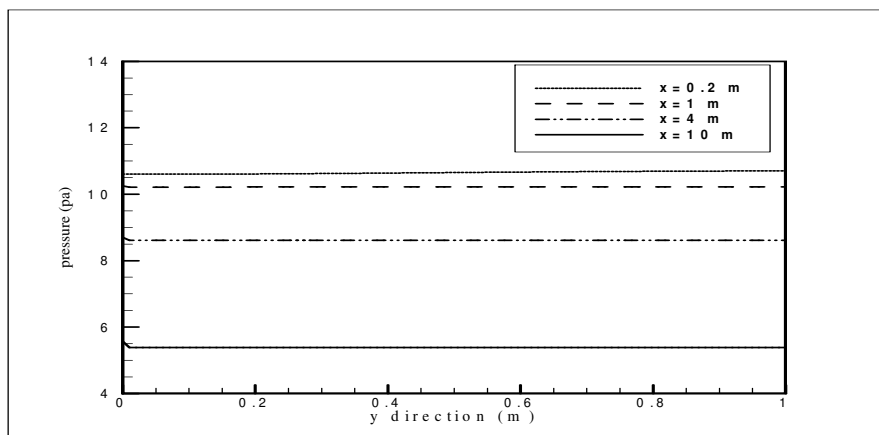
شکل (۴-۱۴) - نمودار تغییرات فشار در یک سلول بر حسب زمان

در اشکال فوق خطوط رسم شده در واقع همان خطوط ایزوبار یا هم فشار هستند.

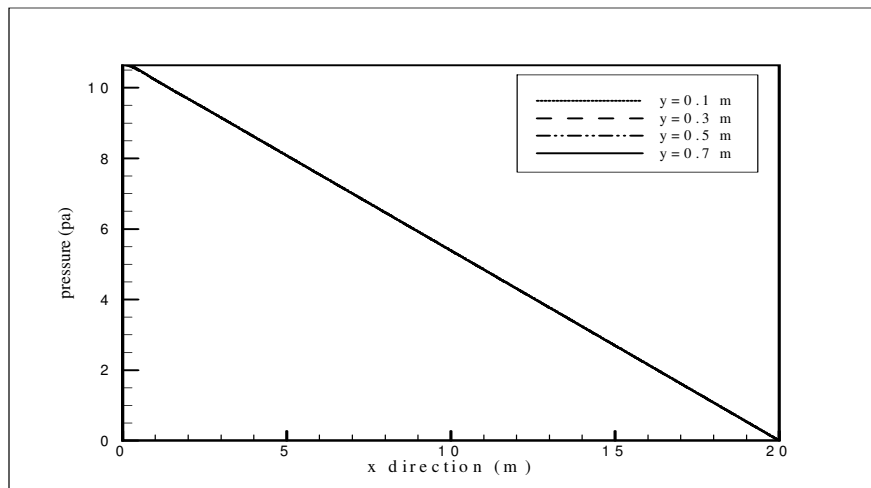
۴-۵-۲ تغییرات فشار در مقاطع طولی و ارتفاعی کانال در یک لحظه

شکل‌های (۴-۱۵) و (۴-۱۶) نمایش دهنده ی فشارها در لحظه $t=5.0$ s در مقاطع

مختلف از طول کانال و همچنین فشارها در مقاطع مختلفی از ارتفاع کانال می‌باشند.



شکل (۴-۱۵) - نمودار تغییرات فشار در راستای y برای چهار مقطع کانال در یک لحظه



شکل (۴-۱۶) - نمودار تغییرات فشار در راستای x برای چهار ارتفاع مختلف کانال در یک لحظه

نمودار فشار در راستای y به صورت تابع ثابت می باشد که نشان گر این است که

خطوط ایزوبار به صورت عمودی هستند. نمودار فشارها در راستای x بیانگر این موضوع

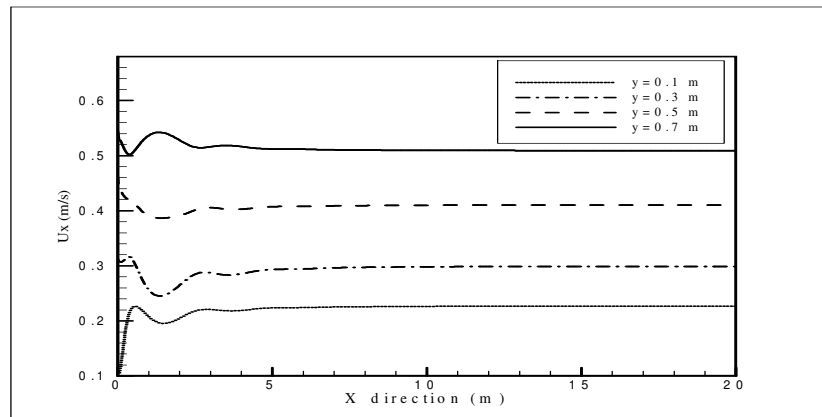
است که رنج تغییر فشار در طول کانال به چه صورت می باشد.

۴-۵-۲-۳ تغییرات سرعت در مقاطع طولی و ارتفاعی کانال در یک لحظه

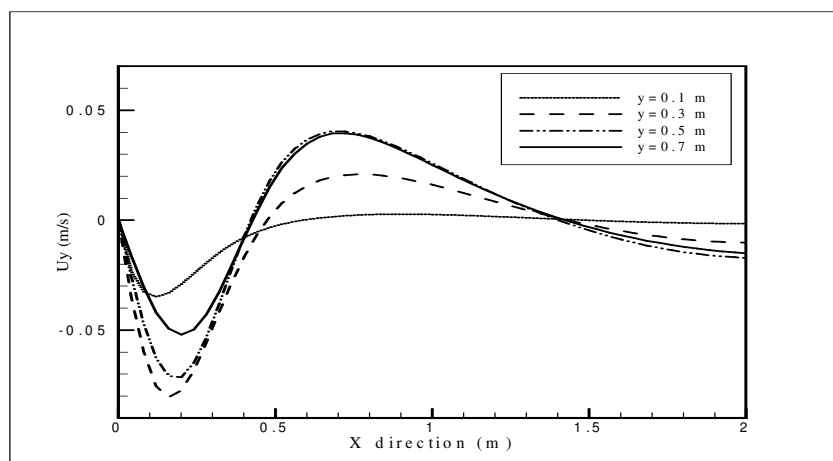
در اشکال (۴-۱۷) و (۴-۱۸) تغییرات مولفه افقی سرعت در طول و ارتفاع کانال و

در اشکال (۴-۱۹) و (۴-۲۰) تغییرات مولفه عمودی سرعت در طول و ارتفاع کانال آمده

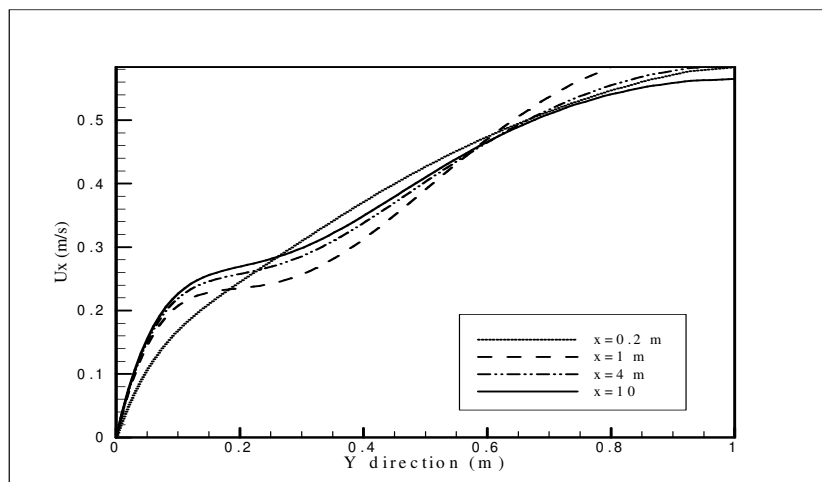
است.



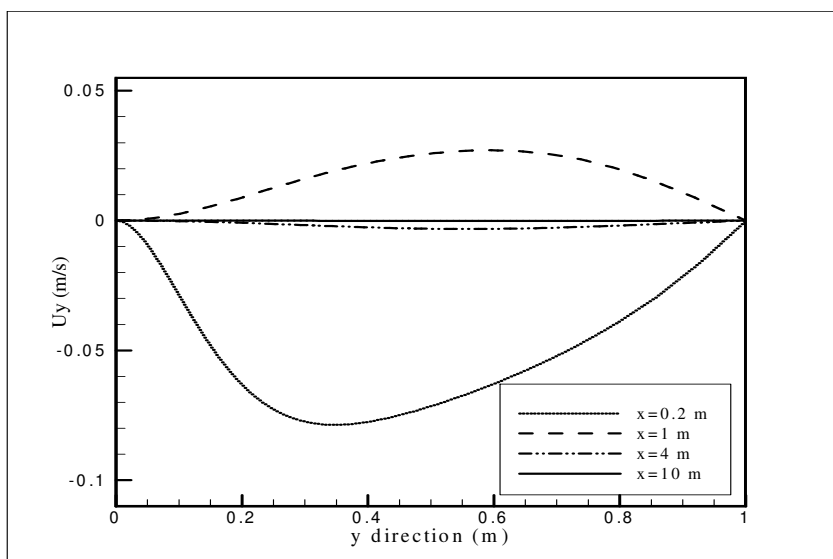
شکل (۴-۱۷) - تغییرات مولفه افقی سرعت در راستای X در چهار ارتفاع مختلف از کانال



شکل (۴-۱۸) - تغییرات مولفه عمودی سرعت در راستای X در چهار ارتفاع مختلف از کانال



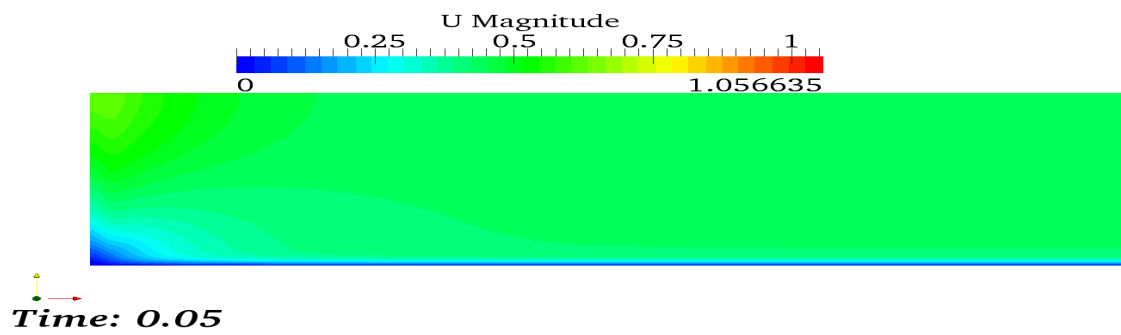
شکل (۴-۱۹) - تغییرات مولفه افقی سرعت در راستای y در چهار مقطع مختلف از کانال



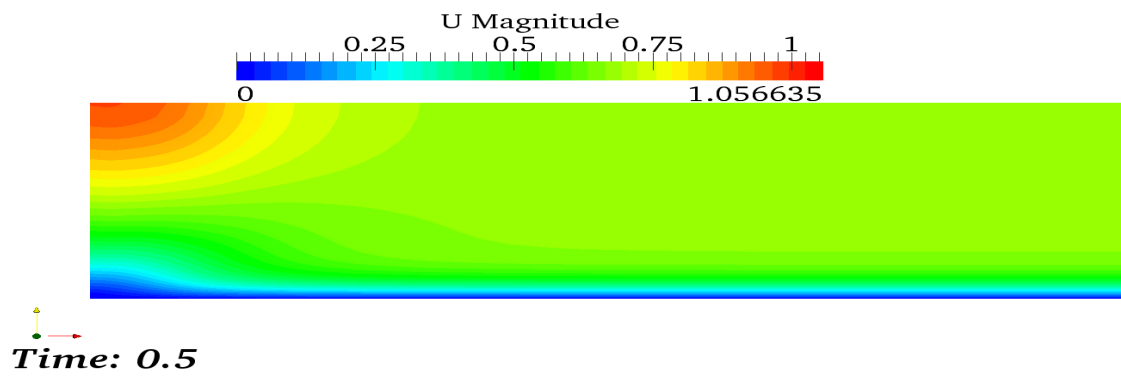
شکل (۴-۲۰) - تغییرات مولفه عمودی سرعت در راستای y در چهار مقطع مختلف از کانال

۴-۲-۵-۴ نمودارهای مقادیر سرعت

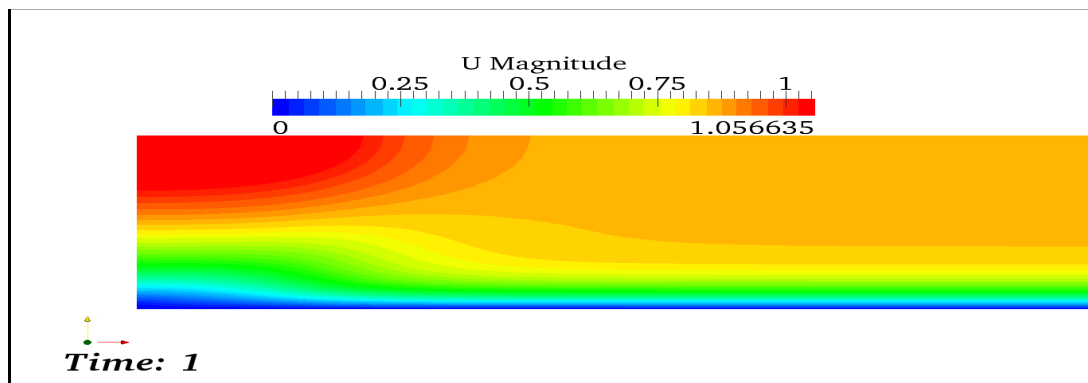
در شکل (۴-۲۱) مقادیر سرعت‌ها در لخطات مختلف نمایش داده شده است.



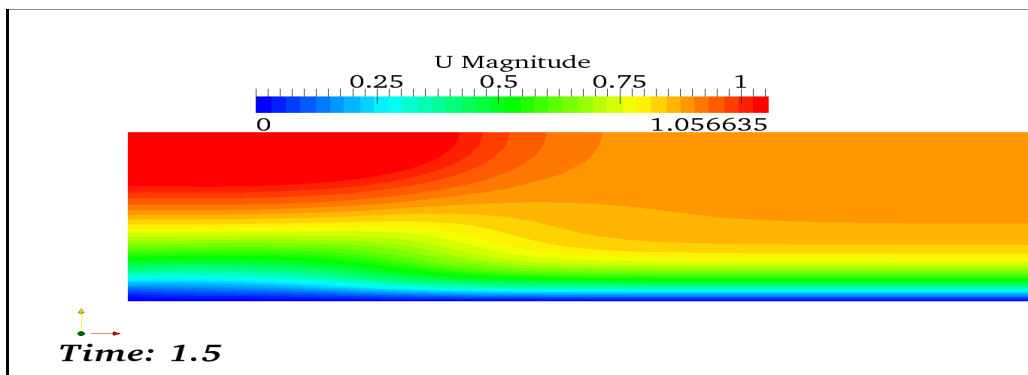
(الف)



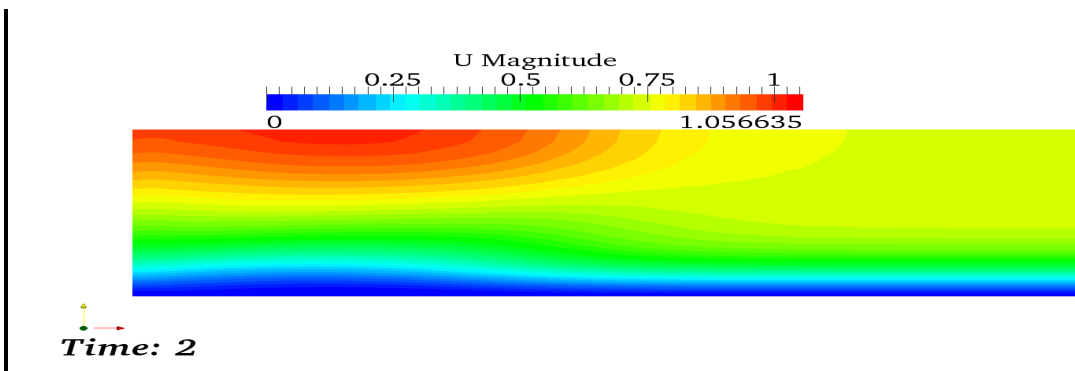
(ب)



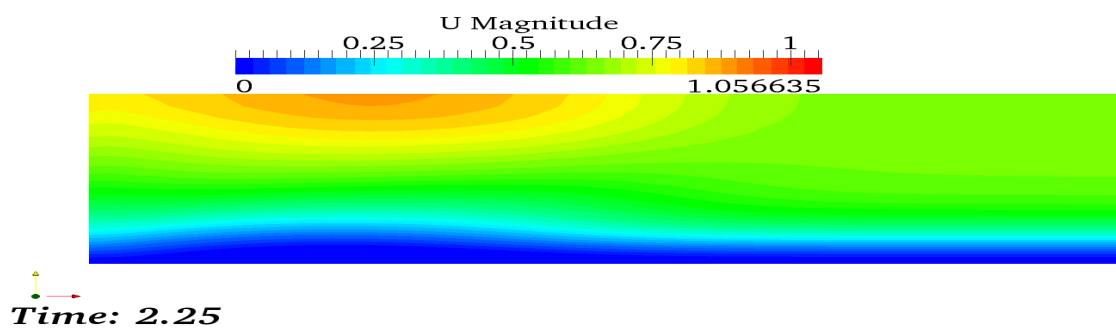
(پ)



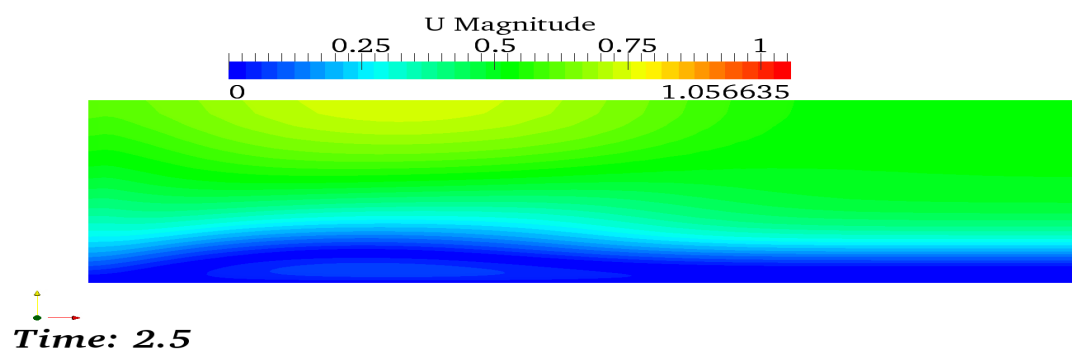
(ت)



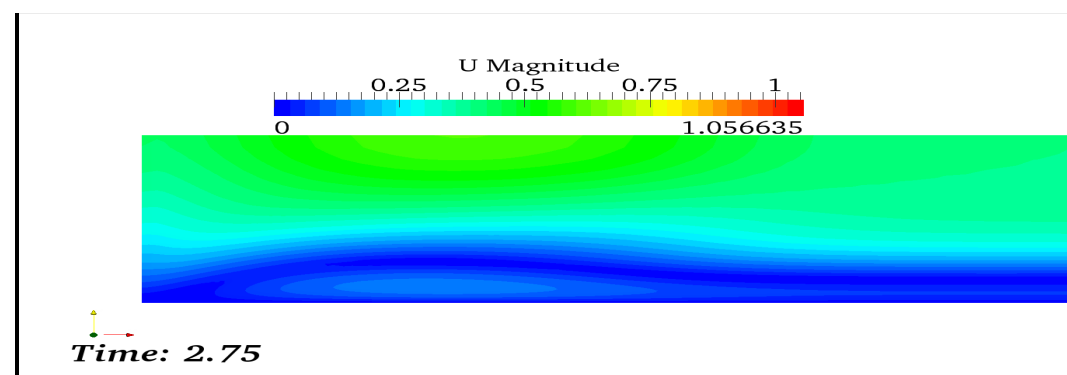
(ث)



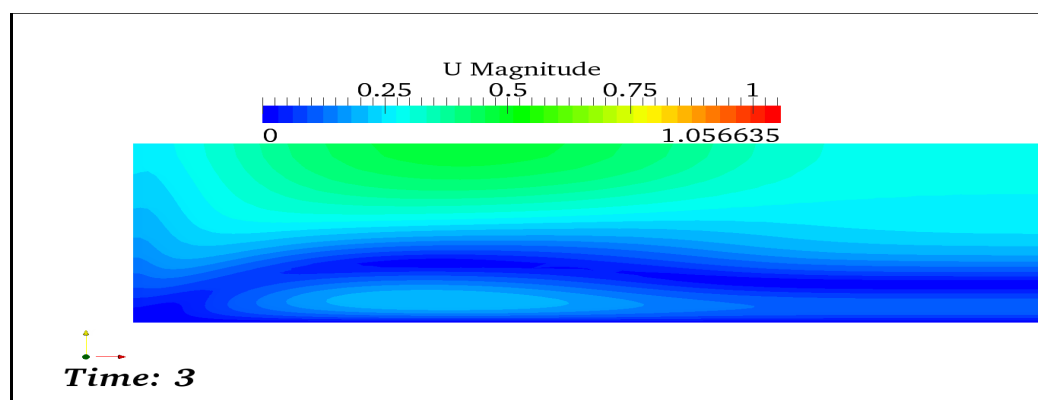
(ج)



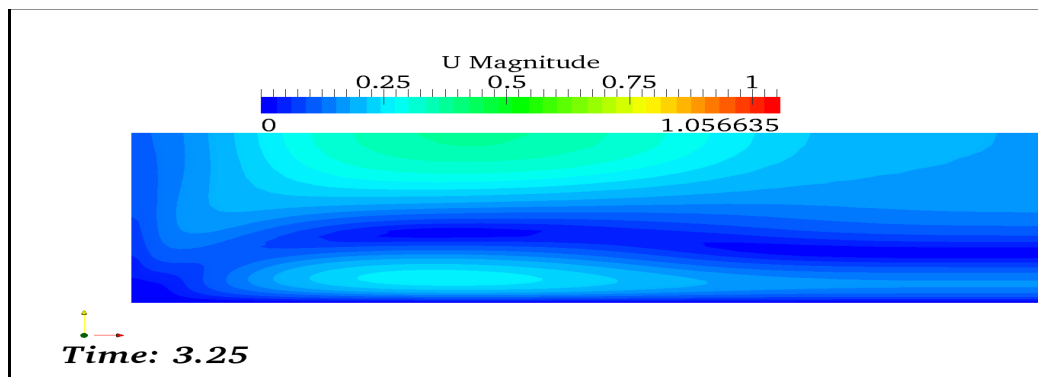
(c)



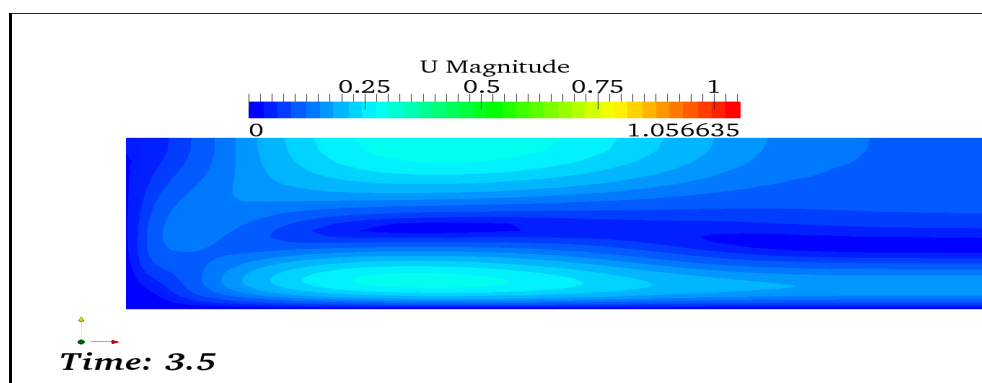
(c)



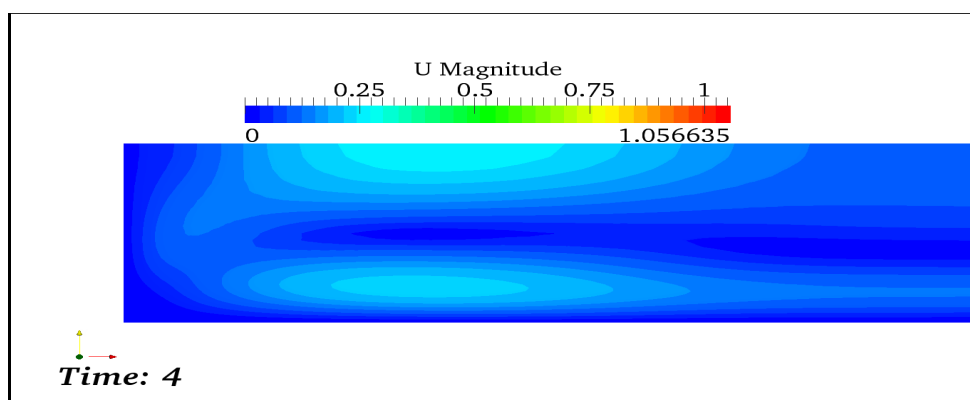
(c)



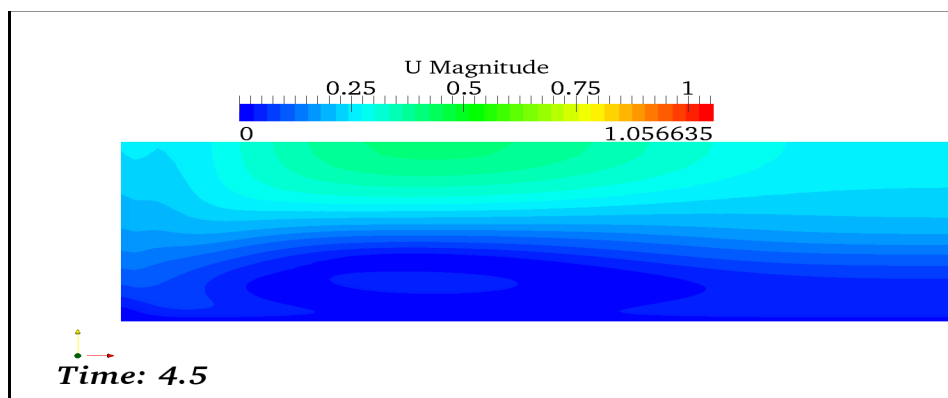
(j)



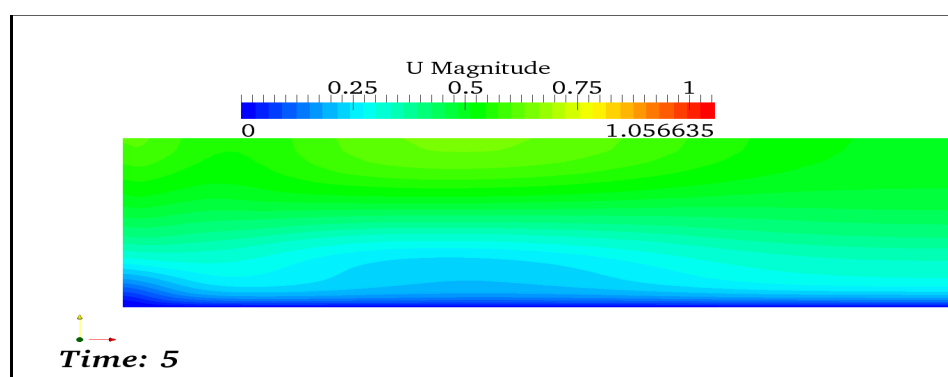
(j)



(j)



(ز)



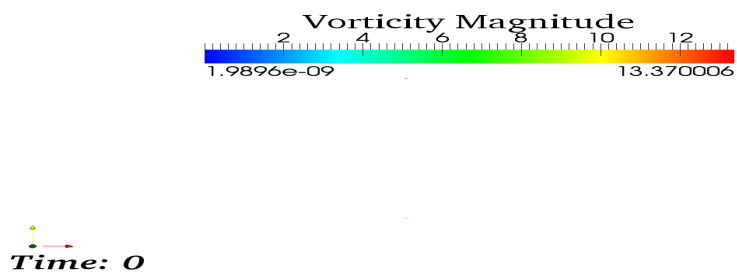
(ز)

شکل (۴-۲۱) - نمودارهای مقادیر سرعت در یک دوره تناوب

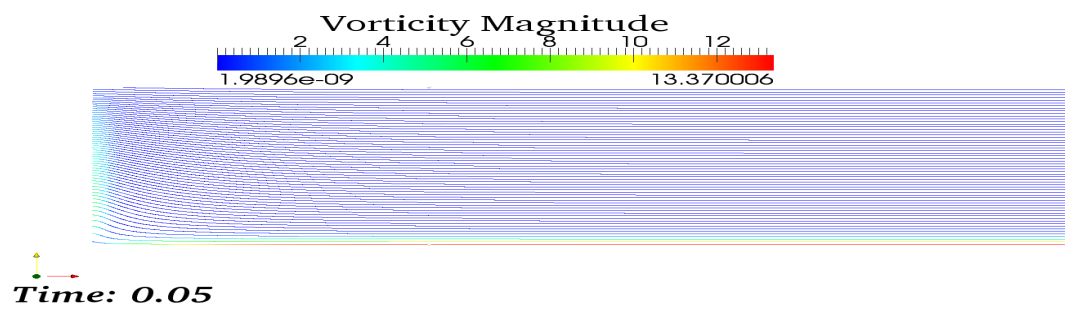
۴-۵-۲-۵ نمودارهای خطوط جریان

در شکل (۴-۲۲) خطوط جریان در لحظات مختلف نشان داده شده است. همانطور

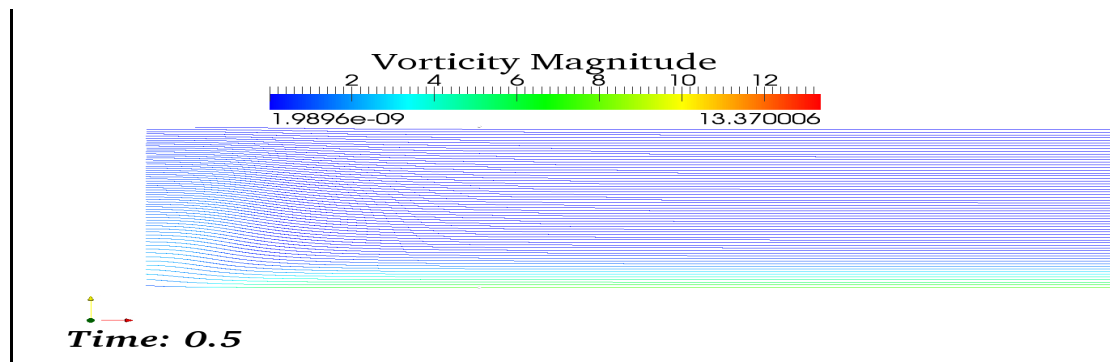
که از نتایج این شکل برمی آید از ثانیه دوم گردابه‌ای اول شروع به تشکیل شدن می‌نماید.



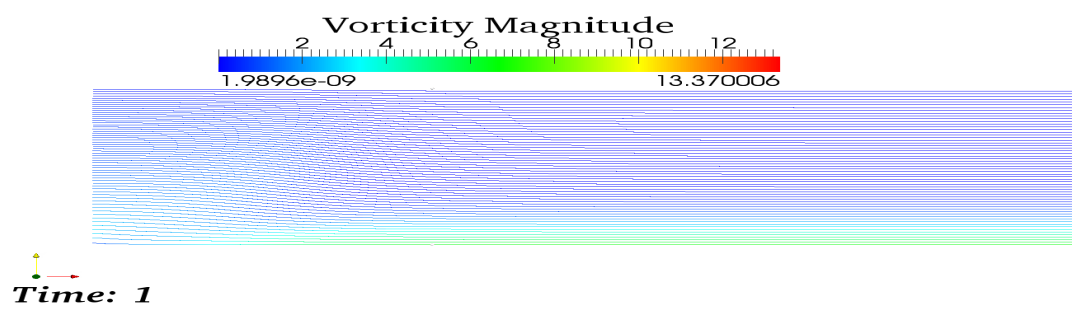
(الف)



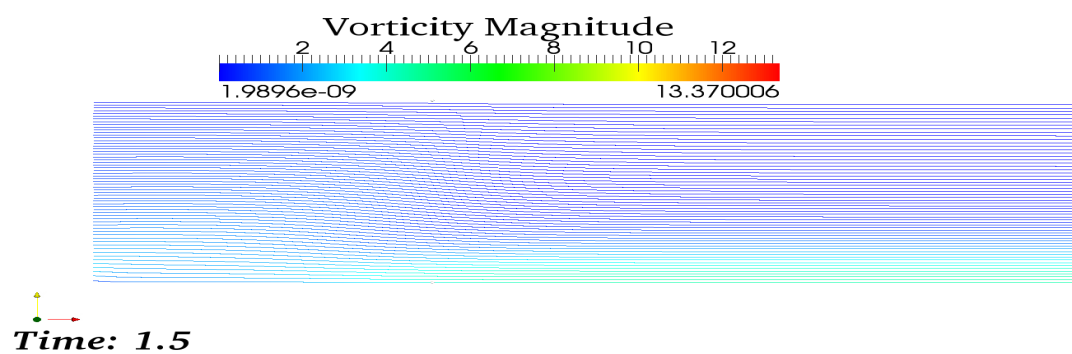
(ب)



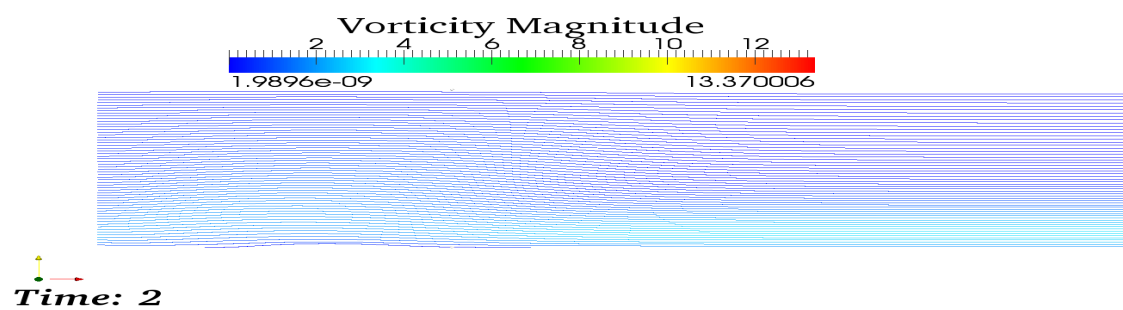
(پ)



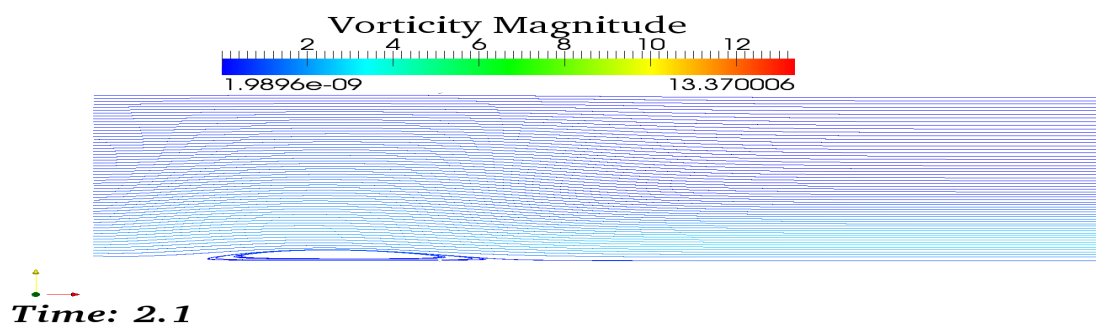
(ت)



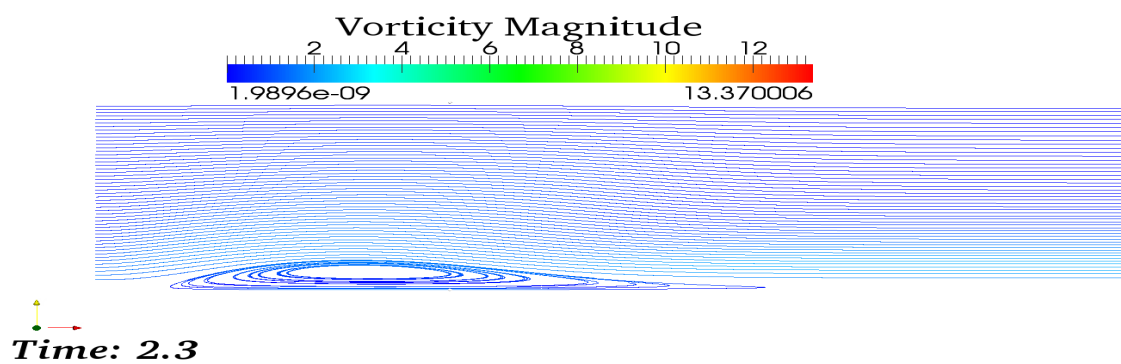
(ث)



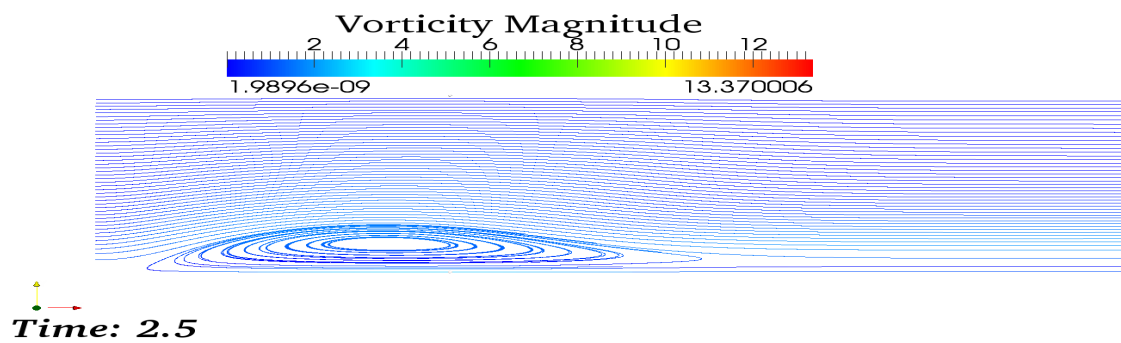
(ج)



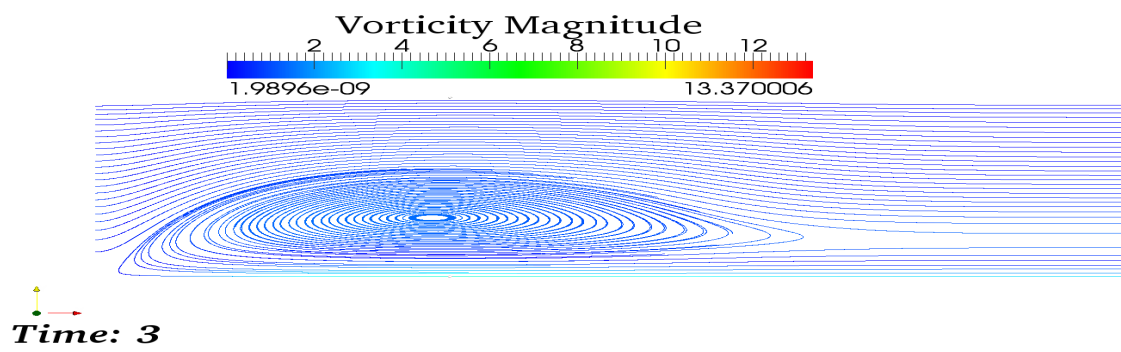
(ζ)



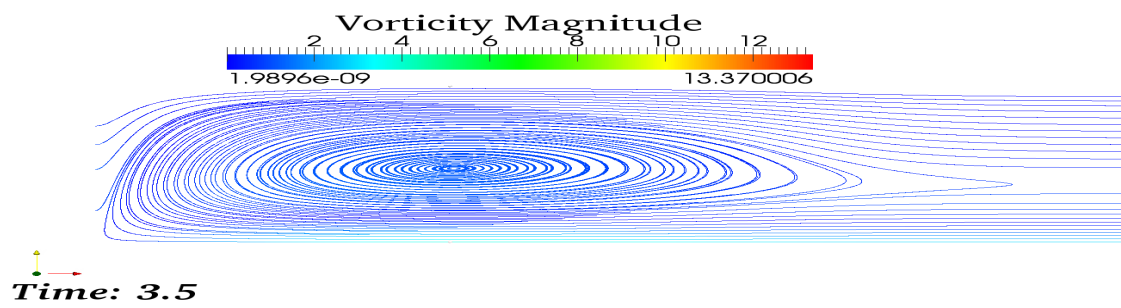
(ζ)



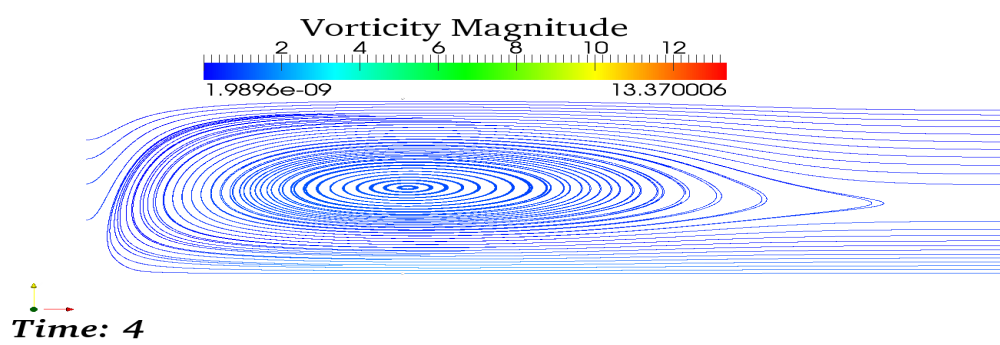
($\dot{\zeta}$)



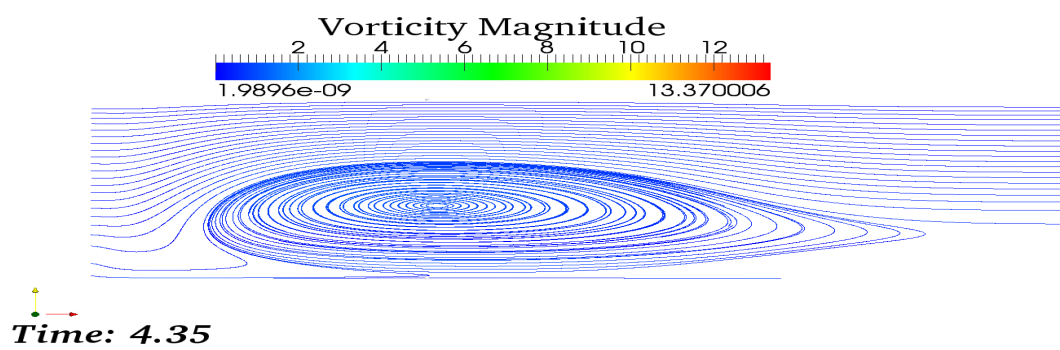
(j)



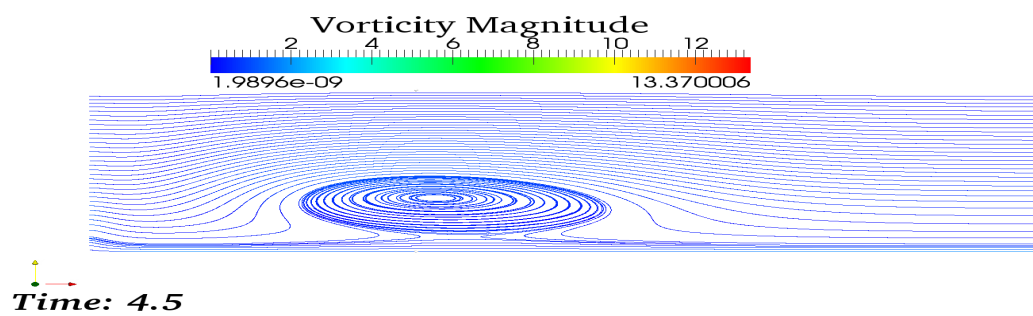
(j)



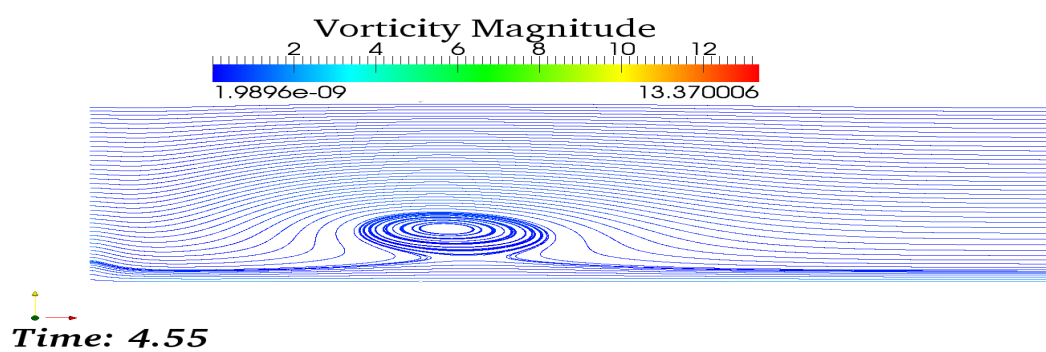
(j)



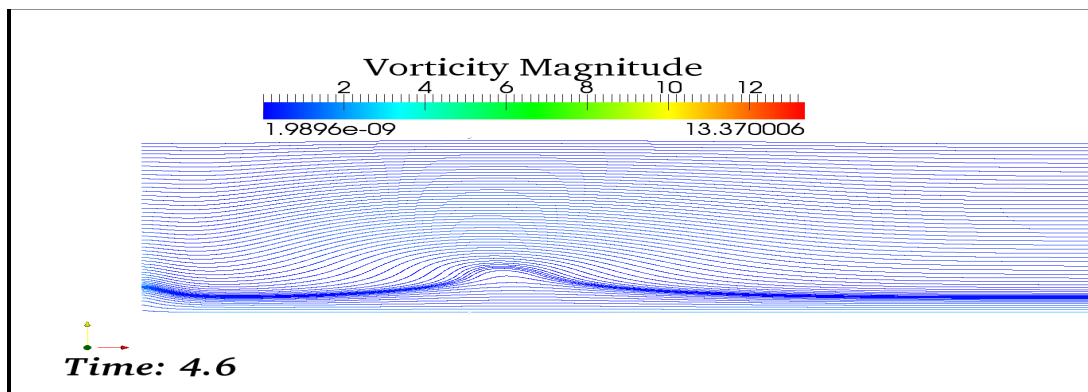
(ج)



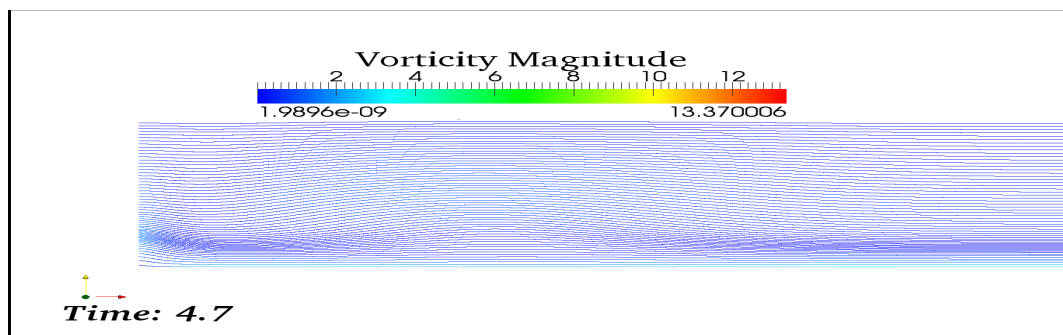
(د)



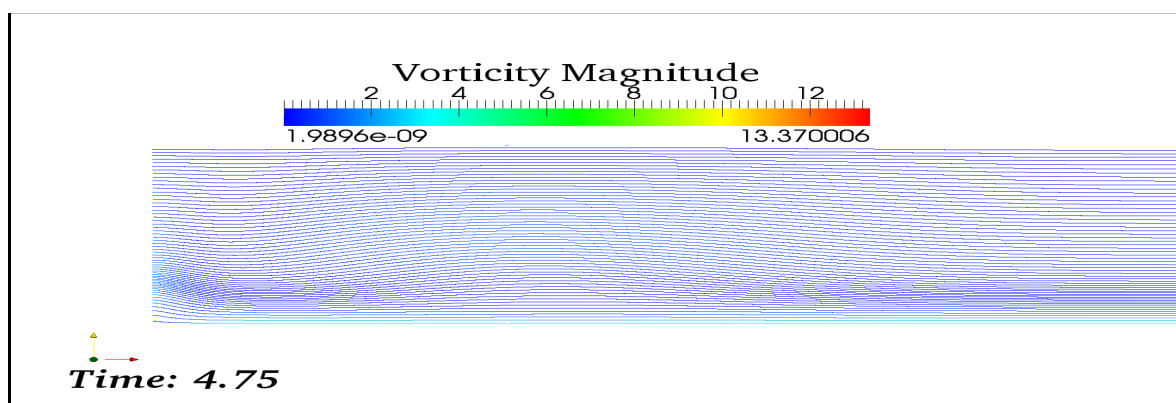
(س)



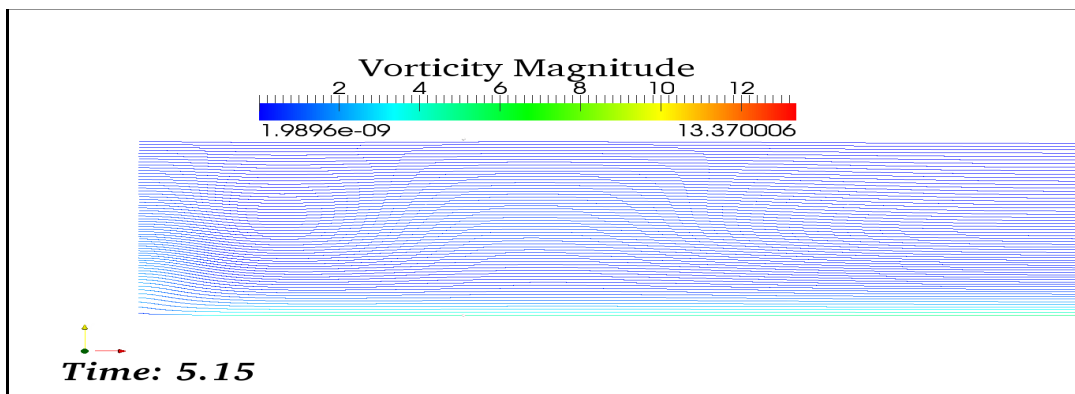
(ش)



(ص)



(ض)

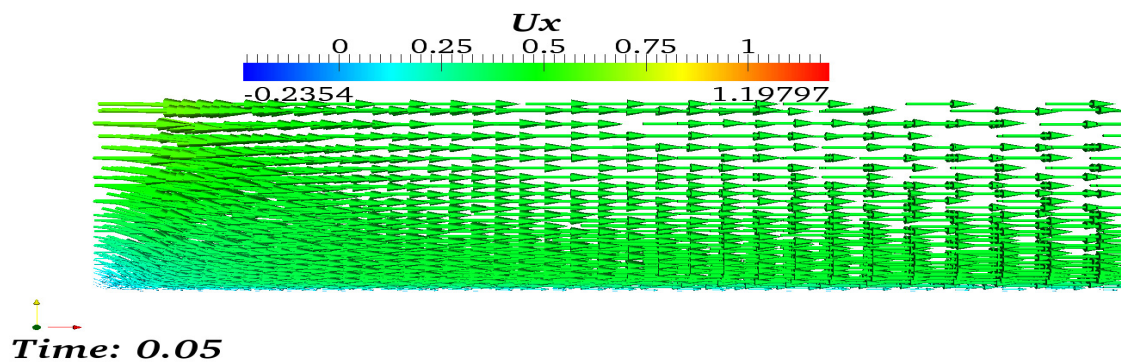


(ط)

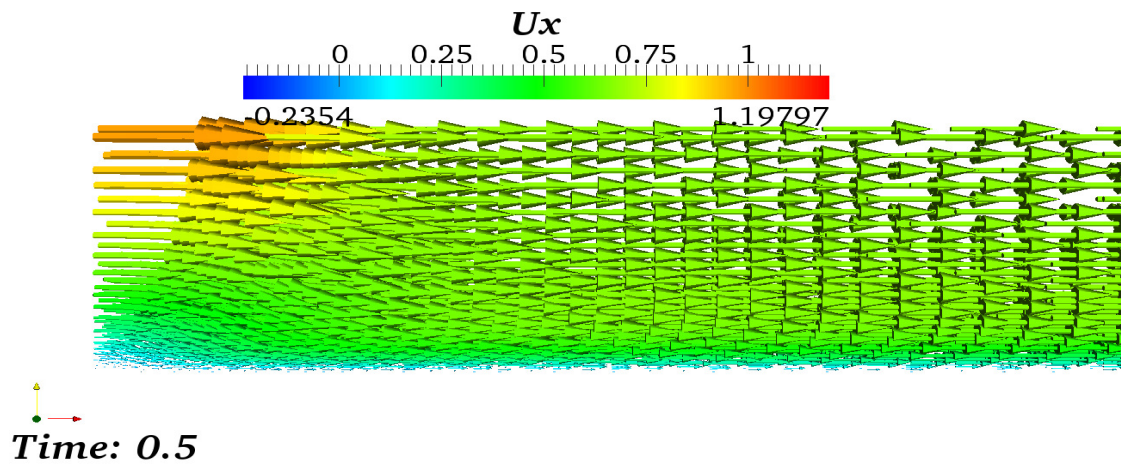
شکل (۴-۲۲) - تغییرات خطوط جریان در زمانهای مختلف

۴-۵-۲-۶ نمودارهای بردارهای سرعت

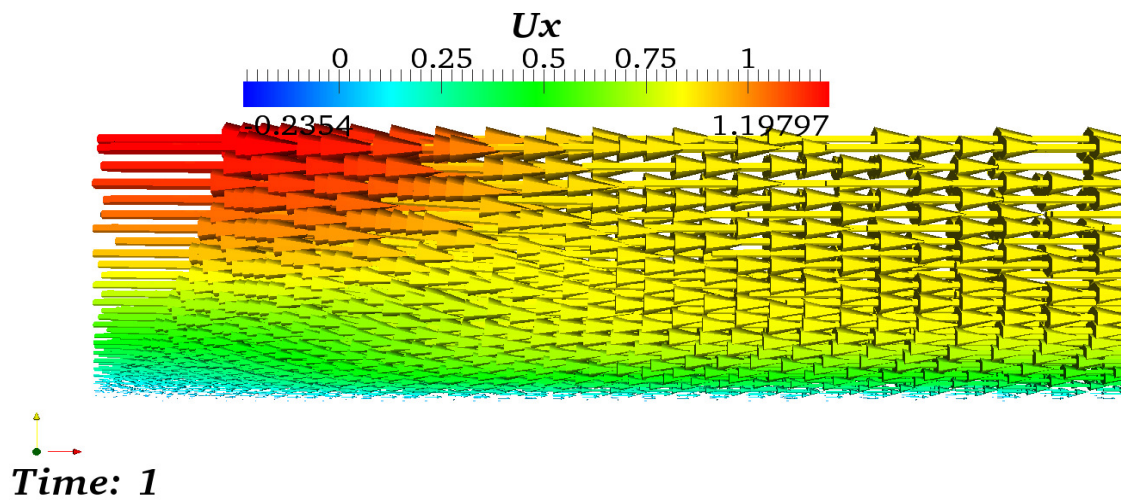
در شکل (۴-۲۳) بردارهای سرعت در لحظات مختلف آورده شده است. در این تصاویر به وضوح می توان دید گردابه ها در مقطع ورودی کانال از درون لایه مرزی شروع به تشکیل شدن می نمایند.



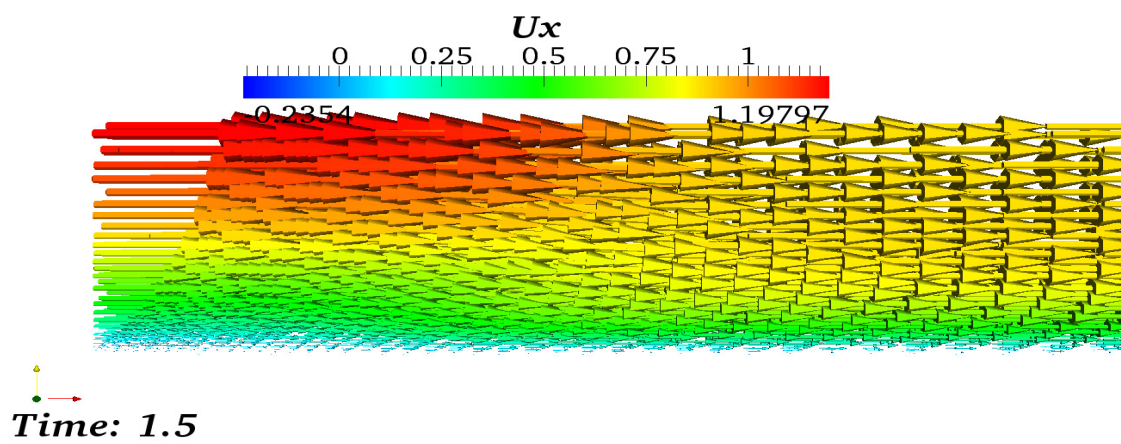
(الف)



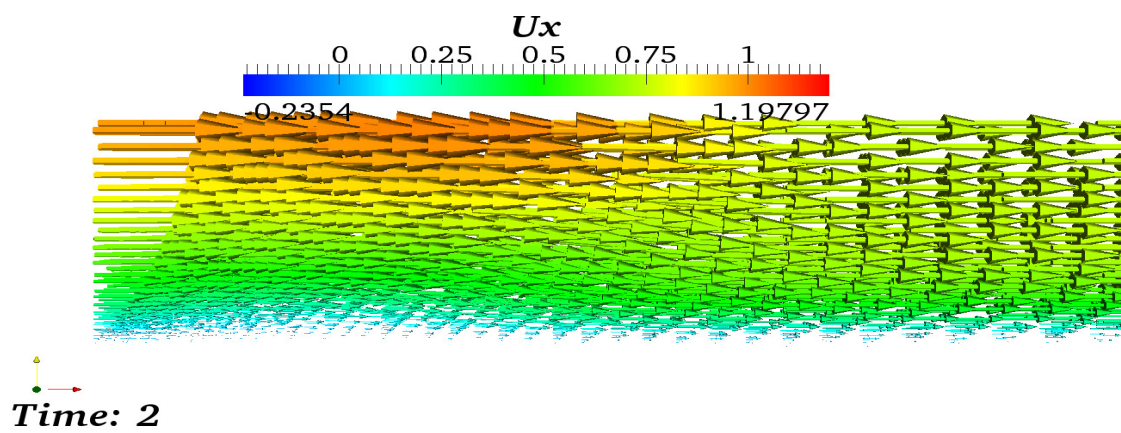
(ب)



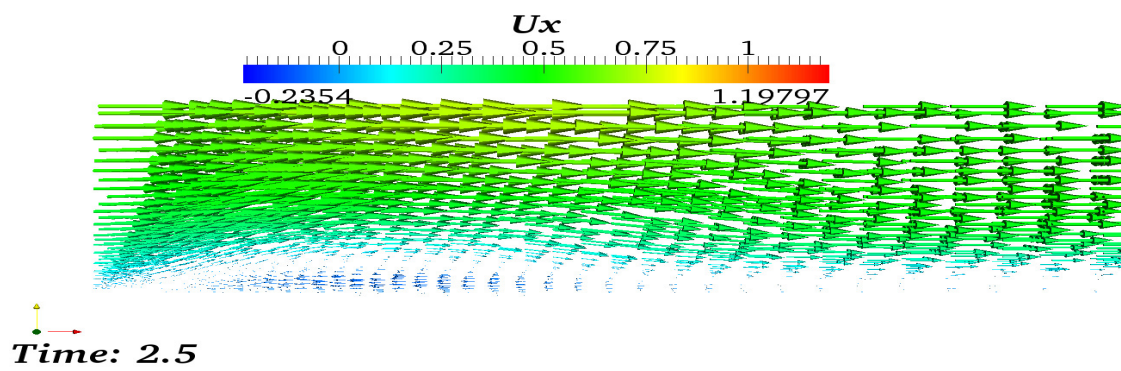
(پ)



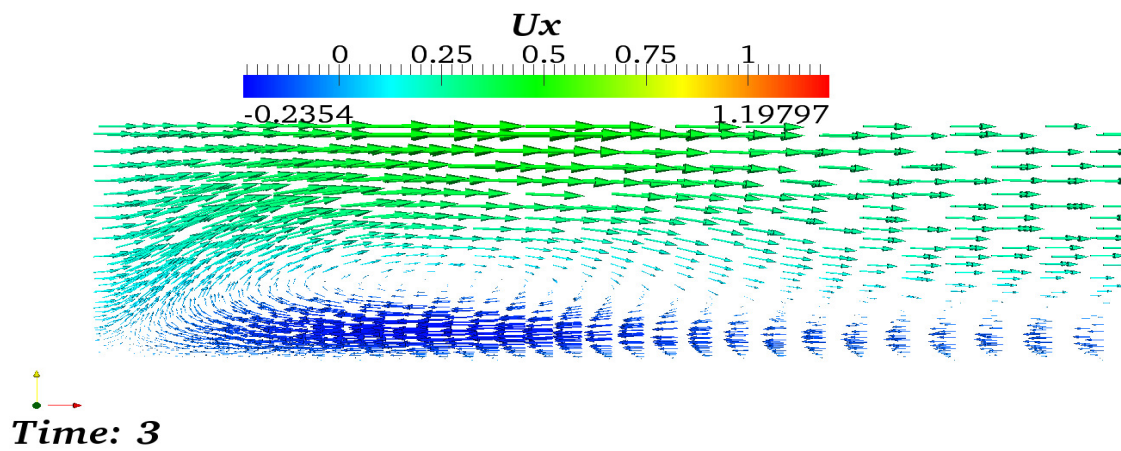
(ت)



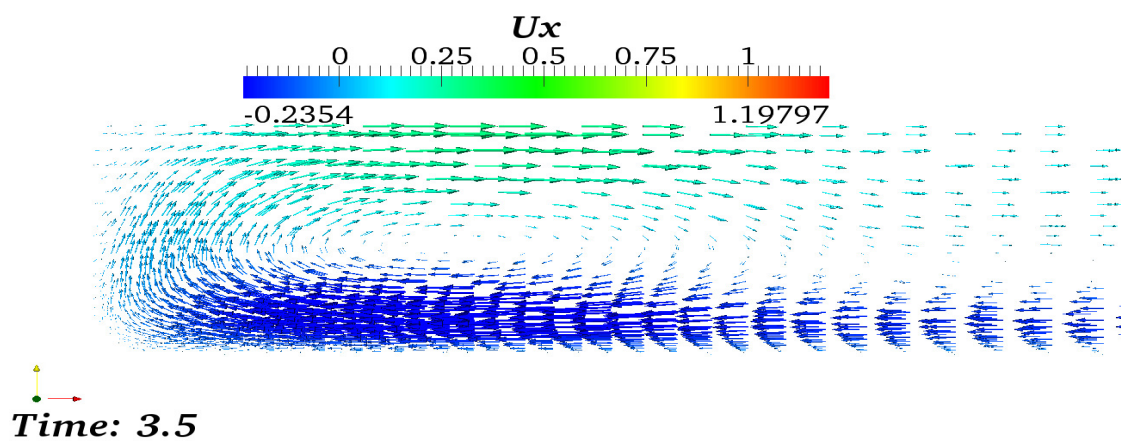
(ث)



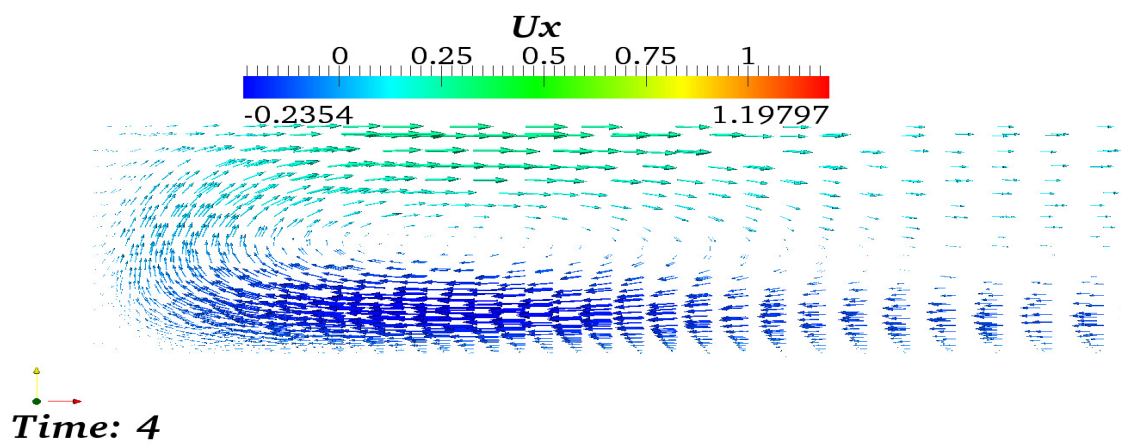
(c)



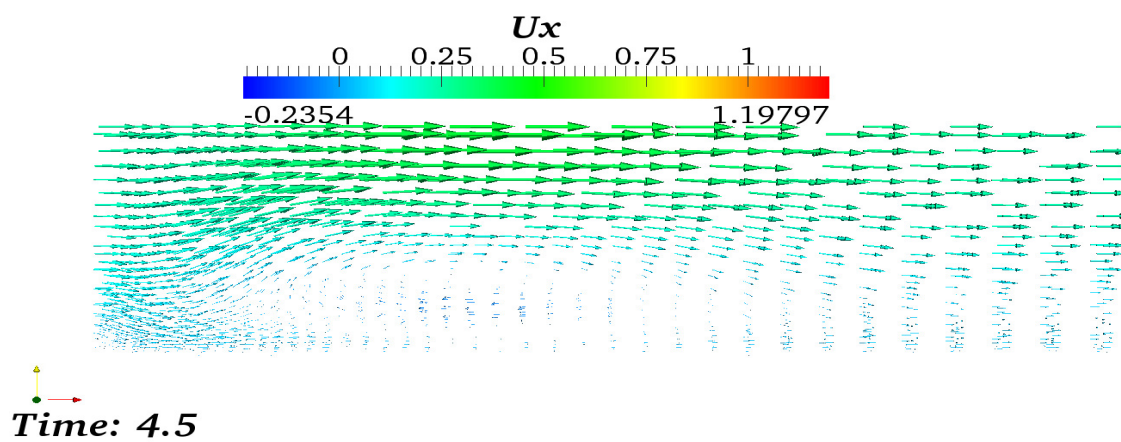
(c)



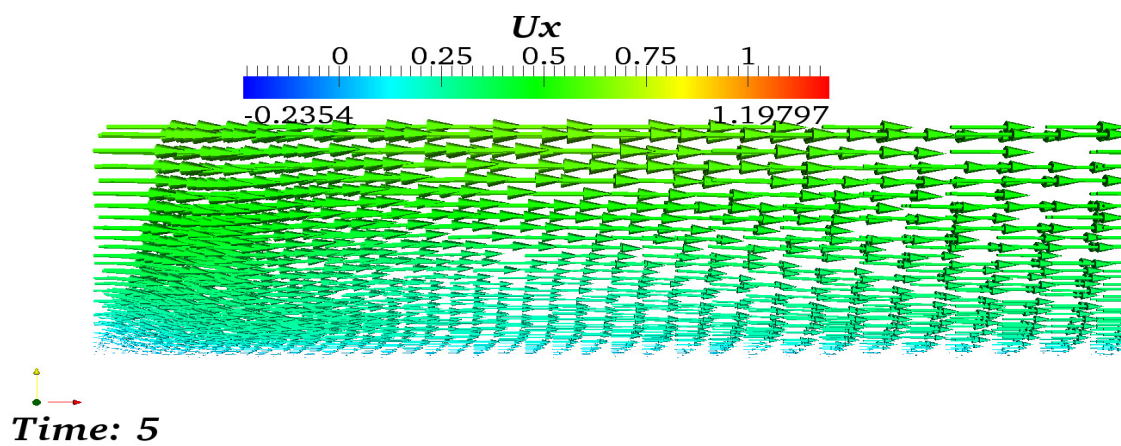
(τ)



($\dot{\tau}$)



(د)



(ذ)

شکل (۴-۲۳) - تغییرات بردارهای سرعت در یک دوره تناوب

فصل ۵

نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات

۵-۱ نتیجه گیری

در این پایان نامه سعی بر مدل سازی جریان آشفته در کانال به روش DNS شد و پس از حل کردن جریان با شرایط مرزی و اولیه که در فصول چهارم و پنجم توضیح داده شد. شاهد بوجود آمدن گردابه ها در طول کانال بودیم. ضمن اینکه چندین بار شرایط تابع محرک اولیه را تغییر دادیم و نتایج بدست آمده را با هم مقایسه کردیم.

در سعی و خطاهایی که در تابع محرک اولیه کردیم به این نتیجه رسیدیم که باتوجه به ماهیت سیال آب و ویسکوزیته پائین این سیال تاثیرات دامنه در بروز اغتشاشات در سیال بیشتر از تاثیرات فرکانس تابع بود. ضمن اینکه با کوچک کردن دامنه تابع محرک اولیه گردابه های کوچکتری تولید و در نتیجه مجبور به ریز کردن بیش از حد شبکه محاسباتی بودیم که کامپیوترهای استفاده شده توان انجام محاسبات یا پس پردازش آن را نداشتند با تغییرات بر روی ω به ناچار مجبور به کم کردن گام های مکانی و زمانی می شویم که این مسئله باعث بالا رفتن حجم محاسبات و عدم بدست آوردن جواب ها می شد. در نهایت پس از تغییرات متوالی بر روی ω و A که ترکیبی از حالت های زیر مورد بررسی قرار گرفت.

جدول ۵-۱: رنج تغییرات A و ω

ω	A						
$\omega = 0.1$	۱	۰.۱	۰.۰۰۱	$0.0001ye^{-y^2}$	$0.01ye^{-y^2}$	$0.03ye^{-y^2}$	ye^{-y^2}
$\omega = 0.2$	۱	۰.۱	۰.۰۰۱	$0.0001ye^{-y^2}$	$0.01ye^{-y^2}$	$0.03ye^{-y^2}$	ye^{-y^2}
$\omega = 0.3$	۱	۰.۱	۰.۰۰۱	$0.0001ye^{-y^2}$	$0.01ye^{-y^2}$	$0.03ye^{-y^2}$	ye^{-y^2}
$\omega = 0.4$	۱	۰.۱	۰.۰۰۱	$0.0001ye^{-y^2}$	$0.01ye^{-y^2}$	$0.03ye^{-y^2}$	ye^{-y^2}

در برخی از سعی و خطاها گردابه تشکیل نمی شد و در نتیجه آشفتگی دیده نمی شد. در برخی دیگر گردابه ها در طول کانال منتقل نمی شدند و فقط در مقطع ورودی کانال گردابه تشکیل می شد و در نهایت بهترین حالت برای نمایش گردابه وقتی بود که تابع محرک ورودی برابر :

$$v(x, y, t) = 0.3ye^{-y^2} \cos(\pi t) \quad (5-1)$$

در نظر گرفته شد که با توجه به مشخصات سخت افزاری کامپیوتر هم گردابه تشکیل می شد و هم در طول کانال منتقل می شد.

در واقع به نظر می رسد در صورت تغییر در ویسکوزیته به علت بیشتر شدن تنش ها و در نتیجه افزایش گردایان سرعت شاهد بروز گردابه ها در حالت های کوچکتر دامنه و فرکانس می توان بود.

۵-۲ ارائه پیشنهادات

این بخش شامل ارائه پیشنهاداتی جهت تحقیقات آینده است که به صورت زیر بیان می گردد.

- بررسی شرایط اولیه مختلف در ورودی کانال با تغییرات فرکانس محرک و دامنه آنها و ارزیابی نقش فرکانس و دامنه در انتشار گردابه ها
 - به عنوان مثال همین مساله را برای یک کانال مدور می توان حل نمود.
 - تحلیل جریان دائمی آشفته در کانال سه بعدی
 - تحلیل جریان آشفته در یک کانال دو بعدی با موانعی در کف جهت ایجاد آشفتگی
- به روش DNS و مقایسه نتایج آن با روش LES و بررسی زمان محاسبات و دقت ها.

- مدل سازی جریان آشفته با تابع محرک اولیه مطابق این پایان نامه، جهت ایجاد آشفته گی در کانال به روش LES.

مراجع :

۱- م.ج. فیض آباد فراهانی، (۱۳۸۶)، " حل مستقیم عددی جریان دو بعدی لایه مرزی در اعداد رینولدز پائین با استفاده از روش تفاضل های محدود تطبیقی"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود

۲- ح. سنندجی، (۱۳۸۸)، " بررسی شرایط مرزی خروجی در جریان اختلاطی آزاد غیرقابل تراکم"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شاهرود

۳. F.M. White, (۱۹۹۱). Viscous Fluid Flow, second ed., McGraw Hill, New York.

۴. H .Rouse, and Ince Simon, (۱۹۵۷). History of Hydraulics. New York, Dover

۵. J. Mathieu, J.Scott, (۲۰۰۰). An Introduction to Turbulent Flow, Cambridge University Press.

۶. S.A. Orszag and G.S. Patterson, (۱۹۷۲). Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence. Phys. Rev. Lett., ۲۸:۷۶-۷۹.

۷. R.S. Rogallo, (۱۹۸۱). Numerical experiments in homogeneous turbulence. NASA TM ۸۱۳۱۵.

8. John Kim, Parviz Moin, and Robert Moser, (1987). Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. J. of Fluid Mech., 177:133–166.

9. H. Kreplin. And H. Eckelmann,(1979). Behaviour of the three fluctuating velocity components in the wall region of a turbulent channel flow. Physics of Fluids, vol 22:1233–1239

10. R. Spalart, (1988). Direct simulation of a turbulent boundary layer up to $Re=1410$. J. Fluid Mech., 187:61–98.

11. Hung Le, Parviz Moin, and John Kim, (1997). Direct numerical simulation of turbulent flow over a backwardfacing step. J. of Fluid Mech. 330:349–374.

12. N.N. Mansour, J. Kim, P. Moin,(1988). Reynoldsstress and dissipationrate budgets in a turbulent channel flow. J. Fluid Mech. 194, 15– 44.

13. M.J. Maghrebi, (1999). A Study of Evolution of Intense Focal Structures in

Spatially Developing Three Dimensional Plane Wake, PhD thesis, Department of Mechanical Engineering, Monash University, Melbourne, Australia.

14. S.K. Lele, (1992). Compact Finite Difference Scheme with Spectral Like Resolution, Journal of Computational Physics, 103, 1612.

۱۵. Corda, Stephen, (۱۹۹۲). Numerical Investigation of the Laminar, Supersonic Flow over a Rearward Facing Step Using an Adaptive Grid Scheme, M.S thesis, Department of Aerospace Engineering, University of Maryland, College Park.
۱۶. A. Wray & M.Y. Hussaini,(۱۹۸۴). Numerical Experiments in Boundary Layer Stability, Proc. R. Soc. Lond. A, vol. ۳۹۲, pp ۳۷۳۳۸۹.
۱۷. RH. Bartles & GW. Stewart,(۱۹۷۲). Solution of the Matrix Equation $AX+XB=C$, Communications of the ACM, Vol ۱۵, Number ۹.
۱۸. Haffmann, K.A and Chiang,S.T.۲۰۰۰. Computational Fluid Dynamics. Volume ۱,*Fourth edition. Publication of Engineering Education system ,Wichita , Kansas.*
۱۹. W.C. Reynolds, (۱۹۹۰). The Potential and Limitations of Direct and Large Eddy Simulations. In J.L. Lumley, editor, *Whither Turbulence? Turbulence at the Crossroads*, pages ۳۱۳۳۴۳. Springer, New York.
۲۰. T.J. Chung,(۲۰۰۲).Computational Fluid Dynamics, *first ed.*, Cambridge University, United Kingdom.

Abstract

Proper analysis on turbulent flow in the channel has been studied in this thesis. In order to reduce the amount of calculations, the problem is defined as two-dimensional form of a channel and the width of the channel is considered unlimited. The equations applied on calculating domain is considered as Navir-Stocks equations and the rotational form of these equations is solved directly.

In this thesis, turbulent flow in a channel has been studied by the help of numerical simulation and apart from modeling or hypothesis in order to reach simplicity. In order to reach time advancement in calculating range, the third order of Runge-Kutta method has been used. The derivations in this thesis have been calculated using compact finite differences scheme; and regarding the order of Navir-Stocks equations in the rotational form, totally, four boundary conditions in inlet and outlet of the flow are considered. Due to directness of simulation and lack of simplicity of equations, the results of this thesis are of greater accuracy compared to other numerical methods.

Keywords: turbulent flow, channel, direct numerical simulation