

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران گرایش سازه

بهینه سازی توپولوژی در صفحات خمشی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز

نگارنده: امین هلاکو

استاد راهنما

دکتر سید مهدی توکلی

شهریور ۱۴۰۰

در این صفحه صورت جلسه دفاع را قرار دهید. لازم است پس از صحافی این صفحه مجدداً توسط دانشکده مهر گردد و استاد راهنما با امضای خود اصلاحات پایان نامه را تایید کند.

تقدیم اثر

تقدیم به پدر بزرگوار و مادر مهربانم

شکرتقدردانی

با سپاس و تقدیر ویژه از استاد گرانقدر جناب آقای دکتر سید مهدی توکلی که در مراحل مختلف این پژوهش، راهنمایی‌های ارزنده و سازنده خود را بر من ارزانی داشته و از هیچ کوششی در این زمینه دریغ ننمودند.

همچنین از آقای مسعود امین زاده دانشجوی دوره دکتری سازه در دانشگاه صنعتی شاهرود که کمک شایانی به انجام این پایان‌نامه کردند، سپاس‌گذاری می‌کنم و توفیق روز افزون برای ایشان خواستارم.

تعمدنامه

اینجانب امین هلاکو دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران گرایش سازه دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بهینه سازی توپولوژی صفحه های خمشی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز تحت راهنمایی دکتر سید مهدی توکلی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

صفحات خمشی یکی از مهم‌ترین سیستم‌های سازه‌ای هستند که در بسیاری از کارهای مهندسی و صنایع مدرن مورد استفاده قرار می‌گیرند؛ بنابراین بهینه‌سازی آن‌ها حائز اهمیت است. بهینه‌سازی توپولوژی یکی از شاخه‌های بهینه‌سازی سازه‌ای است که اخیراً مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است و هدف از آن یافتن بهترین توزیع از مصالح در دامنه‌ی طراحی، با در نظر گرفتن تابع هدف و قیدهای مشخص است. این پژوهش، بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی الاستیک، با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای آیزوژئومتریک را ارائه می‌دهد. برای تجزیه و تحلیل صفحات خمشی، روش تحلیلی آیزوژئومتریک اعمال می‌شود و توابع پایه بی‌اسپلاین‌های نسبی غیریک‌نواخت (نرئز) برای تقریب هندسه‌ی دامنه‌ی طراحی و همچنین بردار تغییرمکان‌های مجهول استفاده می‌شوند. در مطالعات پیشین، تابع مجموعه سطوح تراز با استفاده از توابع پایه بی‌اسپلاین تقریب زده شده است و شبکه‌ی نقاط کنترلی در طی فرآیند بهینه‌سازی بروز رسانی می‌شود. از آن‌جا که نقاط کنترلی اساساً بر روی سطح تابع مجموعه سطوح تراز قرار ندارند، بین تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز که مرزهای سازه را نمایش می‌دهد و تراز صفر شبکه‌ی نقاط کنترلی آن، اختلاف ظاهر می‌شود. برای جلوگیری از این اختلاف و افزایش دقت، در این پژوهش تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری نرئزهای به‌کار گرفته شده در تحلیل آیزوژئومتریک، تعریف می‌شود. تابع مجموعه سطوح تراز با استفاده از توابع پایه شعاعی بر روی شبکه‌ی تعریف شده در فضای پارامتری که برای هر وصله از مدل یک مربع واحد است، فرمول‌بندی می‌شود. بنابراین شبکه‌ی نقاط کنترلی در مدل تحلیلی آیزوژئومتریک و شبکه‌ی حل تابع مجموعه سطوح تراز از هم جدا می‌شوند. بنابراین تابع مجموعه سطوح تراز برای مسائل با دامنه‌های طراحی پیچیده مستقیماً می‌تواند در یک شبکه‌ی معمول حل شود. تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری حل می‌شود و تابع مجموعه سطوح تراز بروز شده به فضای فیزیکی نگاشت می‌شود.

این روش توانایی حل مسائل با دامنه‌های طراحی پیچیده را دارد و با رویکرد مقداردهی مجدد اولیه تقریبی، می‌تواند یک تابع مجموعه سطوح تراز همواری را در طول فرآیند بهینه‌سازی برقرار کند. همچنین به دلیل توانایی در ایجاد حفره‌های جدید در داخل دامنه‌ی طراحی نسبت به روش مجموعه سطوح تراز مرسوم توپولوژی بهینه‌ی نهایی به طرح‌های اولیه وابستگی کمتری دارد. با توجه به قابلیت روش آیزوژئومتریک در مدل‌سازی دامنه‌های طراحی پیچیده و دقت بالا در تجزیه و تحلیل، ترکیب آیزوژئومتریک با روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای توابع پایه شعاعی، یک روش بسیار مفید و مؤثر را برای مسائل بهینه‌سازی توپولوژی ارائه می‌دهد.

در این پژوهش نیز مانند اکثر مسائل متداول بهینه‌سازی توپولوژی، انرژی کرنشی با در نظر گرفتن قید حجم مصالح حداقل می‌شود. به‌منظور نشان دادن کارایی و دقت روش ارائه شده برای بهینه‌سازی

توپولوژی صفحات خمشی، چندین مثال عددی تهیه شده است و برای بررسی صحت روش، توپولوژی‌های بهینه به دست آمده با توپولوژی بهینه ارائه شده برای صفحات خمشی با روش‌های دیگر در ادبیات فنی موجود، مقایسه می‌شود.

کلمات کلیدی: صفحات خمشی، بهینه‌سازی توپولوژی، روش تحلیلی آیزوژئومتریک، روش مجموعه سطوح تراز، توابع پایه شعاعی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱- تحلیل آیزوئومتریک و بهینه سازی توپولوژی صفحات خمشی به روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای توابع پایه شعاعی (دوازدهمین کنگره بین المللی مهندسی عمران - دانشگاه فردوسی مشهد)

۲- “An Isogeometrical Level Set Topology Optimization for Plate Structures” Structural Engineering and Mechanics, *An International Journal*

فهرست مطالب

ج	فهرست جداول
د	فهرست اشکال
۱	فصل ۱: مقدمه و کلیات
۲	۱-۱ مقدمه.....
۶	۲-۱ هدف پایان نامه.....
۶	۳-۱ ساختار پایان نامه.....
۹	فصل ۲: تاریخچه‌ی موضوع
۱۰	۱-۲ تاریخچه‌ی موضوع.....
۱۹	فصل ۳: تحلیل آیزوژئومتریک صفحات خمشی
۲۰	۱-۳ مقدمه.....
۲۰	۲-۳ مروری بر تئوری‌های صفحات خمشی.....
۲۰	۱-۲-۳ مقدمه.....
۲۱	۲-۲-۳ تئوری کلاسیک صفحات خمشی.....
۲۳	۳-۲-۳ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول.....
۲۶	۳-۳ مبانی پایه آیزوژئومتریک.....
۲۹	۱-۳-۳ بی‌اسپلین‌ها.....
۳۰	۲-۳-۳ بردارهای گره.....
۳۱	۳-۳-۳ توابع پایه.....
۳۲	۴-۳-۳ منحنی بی‌اسپلین.....

۳-۳-۵ سطوح بی‌اسپلین ۳۳

۳-۳-۶ توابع پایه بی‌اسپلین نسبی غیریکنواخت (نربز) ۳۳

۳-۴ تحلیل آیزوژئومتریک صفحات خمشی الاستیک ۳۴

فصل ۴: بهینه‌سازی ۴۱

۴-۱ مقدمه ۴۲

۴-۲ روش مجموعه سطوح تراز مرسوم ۴۳

۴-۳ تابع مجموعه سطوح تراز بر مبنای توابع پایه شعاعی در فضای پارامتری نربز ۴۷

۴-۴ تعریف مسئله‌ی بهینه‌سازی ۵۴

۴-۵ تحلیل حساسیت ۵۵

۴-۵-۱ روش تحلیلی مستقیم ۵۷

فصل ۵: مثال‌های عددی ۶۱

۵-۱ مقدمه ۶۲

۵-۲ مثال‌های عددی ۶۲

فصل ۶: نتایج و پیشنهادات ۷۵

۶-۱ مقدمه ۷۶

۶-۲ نتایج ۷۶

۶-۳ پیشنهادات ۷۷

مراجع ۷۸

فهرست جداول

جدول ۱-۳ خلاصه‌ای از مفاهیم آیزوژئومتریک [57].....	۲۹
جدول ۱-۵ مشخصات تعداد وصله‌ها و تعداد نقاط کنترلی در هر وصله برای مدل‌های مثال ۱-۵.....	۶۴
جدول ۲-۵ تعداد نقاط گسسته‌سازی متفاوت برای مثال ۲-۵.....	۶۷
جدول ۳-۵ بردارهای گره‌ای مرتبط با هر وصله برای مثال ۵-۵.....	۷۳

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ بهینه‌سازی اندازه، (ب) بهینه‌سازی شکل، (پ) بهینه‌سازی توپولوژی [3]..... ۴
- شکل ۱-۳ قسمتی از صفحه‌ی خمشی تغییرشکل نیافته و تغییرشکل یافته در تئوری کلاسیک [55]..... ۲۲
- شکل ۲-۳ (الف) صفحه‌ی خمشی میندلین [56]، (ب) قسمتی از صفحه‌ی تغییرشکل نیافته و تغییرشکل یافته [55]..... ۲۴
- شکل ۳-۳ تصویر شماتیک از مفهوم نربز برای یک سطح [57]..... ۲۸
- شکل ۴-۳ (الف) نگاشت هر المان در روش تحلیل اجزاء محدود، (ب) نگاشت بی‌اسپلین یک وصله در روش آیزوژئومتریک ۳۰
- شکل ۵-۳ نتایج مربوط به توابع پایه بی‌اسپلین برای $p = 0, 1, 2$ [57]..... ۳۲
- شکل ۶-۳ توابع پایه مرتبه دوم برای یک بردار گره‌ای باز و غیریکنواخت [57]..... ۳۲
- شکل ۷-۳ المان استاندارد و تصویر آن در فضای فیزیکی [57]..... ۳۳
- شکل ۸-۳ نمایش شماتیک نگاشت‌ها، (الف) المان مادر، (ب) فضای پارامتری، (پ) فضای فیزیکی ۳۸
- شکل ۱-۴ نمایش تابع‌های مجموعه سطوح تراز و شکل مرزها در تراز صفر آن تابع [59, 38]..... ۴۴
- شکل ۲-۴ مقداردهی مجدد اولیه تقریبی [38]..... ۵۲
- شکل ۳-۴ تأثیر تابع دلتا دیراک [38]..... ۵۳
- شکل ۱-۵ (الف) صفحه‌ی خمشی مربع مثال ۱-۵ با بار متمرکز در وسط که چهار ضلع آن گیردار است. (ب) ترتیب قرار گرفتن وصله‌ها. (پ) توپولوژی بهینه ارائه شده در مرجع [19]..... ۶۴
- شکل ۲-۵ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید مدل یک. ۶۵
- شکل ۳-۵ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید مدل دو. ۶۵
- شکل ۴-۵ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید مدل سه. ۶۵
- شکل ۵-۵ (الف) و (ب) به ترتیب نمایش سه بعدی تابع مجموعه سطوح تراز برای مدل دو و مرزهای توپولوژی بهینه‌ی سازه در تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز را نشان می‌دهد ۶۶
- شکل ۶-۵ (الف) دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی صفحه‌ی مربع مثال ۲-۵، (ب) شبکه‌ی نقاط کنترلی. ۶۷
- شکل ۷-۵ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی برای مدل یک و مدل دو ۶۸
- شکل ۸-۵ (الف) و (پ) به ترتیب نمودار همگرایی تابع هدف برای مدل یک و مدل دو ۶۸
- شکل ۹-۵ (الف) دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی صفحه‌ی خمشی دایره‌ای مثال ۳-۵، (ب) ترتیب وصله-ها. ۶۹
- شکل ۱۰-۵ (الف) توپولوژی بهینه‌ی نهایی و (ب) نمودار همگرایی تابع هدف و قید ۷۰
- شکل ۱۱-۵ (الف) دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی مثال ۴-۵، (ب) ترتیب وصله‌ها ۷۱

شکل ۵-۱۲ (الف) شبکه‌ی نقاط کنترلی، (ب) توپولوژی بهینه‌ی نهایی، (پ) نمودار همگرایی تابع هدف و قید مثال ۵-۴.....	۷۲
شکل ۵-۱۳ (الف) دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی صفحه‌ی خمشی مثال ۵-۵، (ب) ترتیب وصله‌ها. ...	۷۳
شکل ۵-۱۴ (الف) شبکه‌ی نقاط کنترلی، (ب) توپولوژی بهینه‌ی نهایی، (پ) نمودار همگرایی تابع هدف و قید مثال ۵-۵.....	۷۴

فصل ۱ : مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه

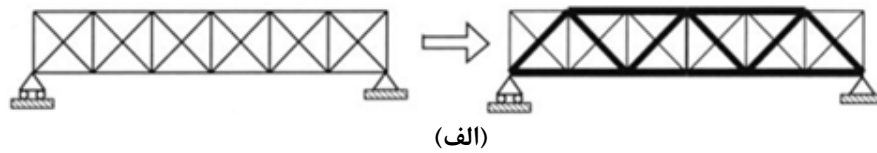
از آنجایی که منابع طبیعی در اختیار انسان محدودند، باید تا حد امکان از آن‌ها به بهترین و مفیدترین حالت ممکن استفاده شود. بنابراین بهینه‌سازی که به معنای فرآیند یافتن بهترین‌ها تعریف می‌گردد، می‌تواند به عنوان ابزاری ارزشمند برای این منظور به کار گرفته شود. هدف اصلی از طراحی مهندسی یافتن بهترین راه حل ممکن برای یک مسئله‌ی خاص هست، به طوری که طرح مورد نظر علاوه بر این که بتواند نیروهای وارده را تحمل کند، اقتصادی و ایمن نیز باشد. بنابراین بهینه‌سازی در قلب مهندسی قرار دارد.

در روش سنتی، طراحی مهندسی بر مبنای آزمون و خطا بوده است. این روش با یک طرح اولیه که مبتنی بر تجربه، خلاقیت و دانش طراح است شروع می‌شود و سپس تجزیه و تحلیل برای ارزیابی عملکرد طرح انجام می‌شود و بر اساس اطلاعات حاصل شده از تحلیل، طراحی جدید ایجاد می‌گردد. این فرآیندها تا زمان دستیابی به بهترین طرح، تکرار می‌شوند. با پیشرفت‌های روز افزون در حوزه فناوری رایانه و قدرت محاسباتی آن، انقلابی در روند طراحی سازه‌ای ایجاد گردید و در فرآیند طراحی در رشته‌های مهندسی، روش بهینه‌سازی سازه‌ای به جای فرآیند تکراری روش سنتی مورد استفاده قرار گرفت [1]. وظیفه‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای، یافتن بهترین یا بهینه‌ترین حالت ممکن برای سازه است که تمام الزامات چندگانه مانند شرایط تولید و غیره را برآورده کند. یک مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای می‌تواند به عنوان استقرار منطقی یک طرح سازه‌ای که بهترین طراحی با هدف و محدودیت‌های تعیین شده هست، تعریف شود. در تحلیل سازه‌ها، هندسه و ابعاد سازه مشخص است و هدف از تحلیل، یافتن رفتار و پاسخ‌های سازه مانند تنش‌ها، جابه‌جایی‌ها و غیره هست. در بهینه‌سازی سازه، ابعاد و خصوصیات هندسی یا توزیع مواد نامشخص است و هدف یافتن حداقل یا حداکثر یک تابع هدف مانند وزن یا سختی و غیره با برخی محدودیت‌ها مانند حجم، تنش‌ها، جابه‌جایی‌ها و غیره می‌باشد. روش‌های مختلف بهینه‌سازی سازه‌ای را می‌توان روش‌های مبتنی بر معیارهای بهینه‌سازی و

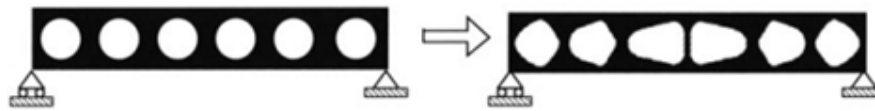
روش‌های مبتنی بر برنامه نویسی ریاضی طبقه بندی کرد. روش‌های معیارهای بهینه‌سازی دارای دو مرحله هستند که شامل شناسایی مجموعه‌ای از شرایط لازم که باید در طراحی بهینه اقناع شوند و دیگری توسعه یک روش طراحی مجدد تکراری برای دستیابی به طرح بهینه می‌باشد. در روش‌های مبتنی بر برنامه نویسی ریاضی، طراحی سازه به عنوان مسئله‌ی حداکثر ریاضی یک تابع هدف در یک فضای متغیر طراحی چند بُعدی که توسط برخی رفتارها و یا توابع هندسی، مقید شده است در نظر گرفته می‌شود.

بهینه‌سازی دارای سه شاخه است؛ بهینه‌سازی توپولوژی، شکل و اندازه که به‌صورت شماتیک در شکل ۱-۱ نشان داده شده‌اند. تحقیقات اولیه در بهینه‌سازی سازه‌ای مربوط به مسائل در زمینه‌ی بهینه‌سازی اندازه است. به‌عنوان مثال، می‌توان به یافتن ویژگی‌های بهینه مقطع‌های یک سازه‌ی خرابی و یا بهینه‌سازی ضخامت یک سازه‌ی صفحه‌ای اشاره کرد. در مسائل بهینه‌سازی اندازه، دامنه‌ی طراحی ثابت است و در طی فرآیند بهینه‌سازی تغییری نمی‌کند. سپس مسئله بهینه‌سازی سازه‌ای شکل موردتوجه قرار گرفت که در آن، مرزهای بهینه‌ی سازه مورد توجه قرار گرفت که در مسائل متنوع، شکل دامنه ثابت نیست اما توپولوژی ثابت هست، مانند یافتن مرزهای بهینه‌ی سازه‌ای که بر اساس فرضیات تنش مسطح مدل‌سازی شده یا یافتن محل اتصالات یک سازه اسکلتی. روش‌های بهینه‌سازی اندازه و شکل فاقد توپولوژی شروع بهینه هستند که برای جبران این ضعف، بهینه‌سازی توپولوژی باید در نظر گرفته شود، که به‌طور معمول هدف در آن یافتن ویژگی‌هایی مانند تعداد سوراخ‌ها و محل قرارگیری آن‌ها است. بهینه‌سازی توپولوژی را می‌توان به‌عنوان توسعه‌ی روش‌های بهینه‌سازی اندازه و شکل در نظر گرفت.

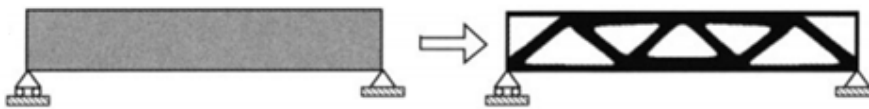
بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای ابزاری فوق‌العاده قدرتمند در بسیاری از زمینه‌های طراحی مانند مهندسی عمران، اپتیک و مکانیک سازه است [2]. هدف از بهینه‌سازی توپولوژی پاسخ به این سؤال است که بهترین دامنه برای توزیع مصالح به منظور بهینه کردن یک تابع هدف معین تحت برخی از قیود کدام است؟



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۱-۱ بهینه‌سازی اندازه، (ب) بهینه‌سازی شکل، (پ) بهینه‌سازی توپولوژی [3].

در بهینه‌سازی توپولوژی ابتدا فضایی که به آن دامنه‌ی مرجع گفته می‌شود را تعریف می‌کنیم که فضای مورد نظر برای طراحی را پوشش می‌دهد. در یک مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی، شرایط مرزی و مشخصات مصالح معلوم است و هدف حذف یا توزیع مجدد مصالح در دامنه‌ی طراحی تعریف شده است، به نحوی که توپولوژی بهینه‌ی حاصل شده، تابع هدف مسئله‌ی بهینه‌سازی را بهینه کند. در بهینه‌سازی توپولوژی در ابتدا باید مدل هندسی مناسبی را برای دامنه‌ی طراحی انتخاب کنیم و مقادیر اولیه را برای متغیرهای طراحی در نظر بگیریم. در مرحله‌ی بعدی باید یک مدل تحلیلی مناسب را برای تحلیل مسئله انتخاب کنیم تا اطلاعات لازم برای بهینه‌سازی در مورد حساسیت و مقدار توابع قید مربوط به هر متغیر طراحی را در اختیار قرار دهد. پس از انجام مرحله‌ی تحلیل، مقادیر جدیدی برای متغیرهای طراحی حاصل می‌شود و منجر به ساخت یک مدل طراحی جدید می‌شود که مجدداً به مرحله‌ی تحلیل فرستاده می‌شود. از تحلیل مجدد مقادیر تابع و نتیجه‌های حساسیت قیده‌ای برای طراحی جدید حاصل می‌شوند و در انتها اگر تابع هدف و قیدها اکتان شده بودند، محاسبات به اتمام می‌رسد.

بهینه‌سازی توپولوژی در کل دارای دو فاز است؛ فاز تحلیل و فاز بهینه‌سازی. انتخاب روش‌های عددی مناسب برای تحلیل سازه یکی از اصل‌های مهم در هر مسئله بهینه‌سازی است. برای فاز تحلیل از روش‌های مختلفی می‌توان استفاده کرد که معروف‌ترین آن‌ها روش اجزاءمحدود است که به‌صورت فراگیر در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی به‌کار رفته است. در روش اجزاءمحدود مدل‌سازی یک مدل تحلیلی با هندسه دقیق کار دشواری است. بنابراین محققان همواره در پی روش‌هایی هستند که عملکرد روش‌های قبلی را بهبود دهند. از جمله روش‌هایی که در سال‌های اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته، روش تحلیلی آیزوژئومتریک است که توانایی مدل‌سازی دقیق هندسه را دارد و استفاده از آن در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی نیز نتایج مناسبی را از خود برجای گذاشته است.

روش‌های زیادی برای فاز بهینه‌سازی توپولوژی سازه معرفی شده‌اند؛ اخیراً روش مجموعه سطوح تراز که یکی از روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی است، مورد توجه محققان قرار گرفته است. در این روش مرز دامنه طرح از طریق تراز صفر تابعی (تابع مجموعه سطوح تراز) با بعد بالاتر نشان داده می‌شود. نمایش ضمنی دامنه طرح ویژگی‌های زیادی دارد و در آن گسترش مرزها، ایجاد حفرات، به هم چسبیدن و جدا شدن حفرات به راحتی انجام می‌شود.

بنابراین در این پژوهش از روش تحلیلی آیزوژئومتریک و روش مجموعه سطوح تراز برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی استفاده می‌کنیم. صفحات خمشی یکی از مهم‌ترین سیستم‌های سازه‌ای هستند که در کارهای مهندسی و صنایع مدرن مختلفی کاربرد دارند و بهینه‌سازی آن‌ها حائز اهمیت است پس در این پژوهش بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی با هدف کمینه کردن انرژی کرنشی با در نظر گرفتن قید حجم مشخص مورد بررسی قرار می‌گیرد تا برای یک بارگذاری مشخص، بهترین توزیع از مصالح را در دامنه‌ی طراحی داشته باشیم تا سخت‌ترین سازه حاصل شود.

۲-۱ هدف پایان نامه

هدف از این پایان نامه بهینه سازی توپولوژی صفحات خمشی در حالت الاستیک خطی است. برای تجزیه و تحلیل صفحات خمشی روش تحلیلی آیزوژئومتریکی به همراه توابع پایه نربز به کار برده می شود و برای بهینه سازی توپولوژی نیز از روش مجموعه سطوح تراز استفاده می شود. تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری توابع پایه نربز مورد استفاده در تحلیل آیزوژئومتریکی تعریف می شود و در فضای پارامتری که یک مربع واحد برای هر وصله است، با استفاده از توابع پایه شعاعی درونیایی می گردد و بردار سرعت نرمال نیز از تحلیل حساسیت به دست می آید. معادله مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری حل می شود و سپس تابع مجموعه سطوح تراز بروز رسانی شده به فضای فیزیکی نگاشت می گردد. در این پژوهش نیز مانند اکثر مسائل متداول در بهینه سازی توپولوژی، انرژی کرنشی با در نظر گرفتن قید حجم، حداقل می شود. به طور کلی فرمول بندی مجموعه سطوح تراز در بهینه سازی توپولوژی سازه ها و ارائه کردن روش مناسبی برای تحلیل حساسیت در این روش از هدف های کلی این پایان نامه است.

۳-۱ ساختار پایان نامه

در فصل دوم تاریخچه ی موضوع و روش های به کار برده شده شرح داده می شود. در فصل سوم، در ابتدا تئوری های صفحات خمشی به اختصار شرح داده می شوند؛ سپس به مبانی اولیه روش تحلیلی آیزوژئومتریکی و روند کلی روش تحلیلی آیزوژئومتریکی برای صفحات خمشی در حالت الاستیک پرداخته می شود. در فصل چهارم، روش بهینه سازی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز مرسوم و روش مجموعه سطوح تراز مبتنی بر توابع شعاعی در فضای پارامتری و تحلیل حساسیت برای به دست آوردن بردار سرعت نرمال شرح داده می شوند. در فصل پنجم چندین مثال عددی بررسی می شود که در مثال اول به منظور صحت سنجی روش ارائه شده برای بهینه سازی صفحات خمشی، نتایج به دست

آمده با نتیجه‌ی موجود در ادبیات فنی، مقایسه می‌گردد. در فصل ششم نیز نتایج حاصل شده از این پایان‌نامه و همچنین پیشنهاداتی برای توسعه روش ارائه شده در مسائل دیگر برای دانشجویان علاقه‌مند در زمینه‌ی بهینه‌سازی صفحات خمشی ارائه شده است.

فصل ۲ : تاریخچه‌ی موضوع

۱-۲ تاریخچه موضوع

صفحات خمشی یکی از مهم‌ترین سیستم‌های سازه‌ای هستند که به صورت‌های مختلفی در کارهای مهندسی و صنایع مدرن مورد استفاده قرار می‌گیرند که تجزیه و تحلیل و بهینه‌سازی آن‌ها حائز اهمیت می‌باشد. بهینه‌سازی توپولوژی، یکی از زمینه‌های بهینه‌سازی است که مورد توجه محققین بسیاری قرار گرفت است و در دهه‌های اخیر دارای پیشرفت‌های چشمگیری بوده است. بهینه‌سازی توپولوژی را می‌توانیم تعمیم یافته بهینه‌سازی شکل نیز بیان کنیم. اساس یافتن توپولوژی بهینه برای تابع بهینه‌ی مصالح، در سال ۱۹۷۳ توسط کی و همکارانش [4] و در سال ۱۹۷۹ توسط تارتار [5] مطرح گردید. در سال ۱۹۸۸ بندسو و کیکوچی [6] مقاله‌ی خود را در مورد روش همگن‌سازی^۱ ارائه دادند و از آن برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه استفاده کردند. در روش ارائه شده فرض می‌شود که دامنه طراحی توسط ماده‌ای با حفره‌های کوچک تشکیل شده است و بهینه‌سازی توپولوژی به دنبال اقلان تابع هدف برای یافتن تخلخل مطلوب محیط متخلخل تشکیل شده، است. روش همگن‌سازی به دلیل سادگی و کارآمدی، به صورت گسترده در طراحی سازه و بهینه‌سازی مورد استفاده قرار گرفت و سریعاً به یکی از روش‌های اصلی برای بهینه‌سازی توپولوژی تبدیل شد. با این حال روش همگن‌سازی ممکن است برای برخی از تابع‌های هدف در مدل‌سازی ریاضی، نتایج مورد انتظار را نداشته باشد و اغلب طرح‌های با منافذ بی‌نهایت کوچک در داخل مصالح تولید می‌کند که سازه را غیر قابل ساخت می‌کند. بنابراین تعدادی از انواع روش‌های همگن‌سازی با اعمال جریمه به چگالی‌های میانی برای پرداختن به مشکل روش همگن‌سازی مورد بررسی قرار گرفتند. در سال ۱۹۸۹ بندسو [7]، روش ماده ایزوتروپیک جامد با جریمه^۲ را ارائه داد که به صورت گسترده در بهینه‌سازی توپولوژی استفاده شده است. این روش اِلمان‌های با چگالی میانی را نمایش نمی‌دهد و فرض می‌شود که مصالح، دارای تانسور سختی ثابت E_0 و ایزوتروپ و الاستیک هستند. در این روش چگالی مصالح ρ_e ، که در کل دامنه‌ی

¹ Homogenization Method

² SIMP: Solid Isotropic Method with Penalization

طراحی ثابت است به عنوان تابع طراحی در نظر گرفته می‌شود. سپس برای به دست آوردن یکی از مقادیر صفر و یک، تانسور سختی توسط $E(\rho_e) = \rho_e^p E_0$ که p ضریب جریمه است، جریمه می‌شود. بعداً روش بهینه‌سازی تکاملی سازه^۱ نیز توسط ژی و استیون [8] ارائه شده است که برای بهینه‌سازی، سازه را به نواحی مختلف دارای چگالی تقسیم می‌کند و در دامنه‌ی طرح، تنش به‌صورت یکنواخت فرض می‌شود. این روش نواحی دارای تنش کم را به‌صورت پی‌درپی حذف می‌کند و همچنین به تحلیل حساسیت^۲ نیازی ندارد. در بعضی از مسائل، توپولوژی حاصل شده از این روش به توپولوژی بهینه همگرا نمی‌شود. این روش در هر مرحله المان‌ها را حذف می‌کند و توانایی به وجود آوردن آن‌ها در مرحله‌های بعدی بهینه‌سازی را ندارد، بنابراین این روش را کشتن سخت^۳ نیز می‌نامند. با توجه به این که چگالی‌های حذف شده در ابتدای بهینه‌سازی امکان دارد در طی بهینه‌سازی به تابع هدف اثر گذار باشند، کوثرین و همکارانش [9] روش بهینه‌سازی تکاملی دو طرفه^۴ را ارائه کردند که در آن المان‌ها به‌طور کامل حذف نمی‌شوند.

در اواخر سال ۱۹۷۰ مسئله‌ی یافتن توپولوژی بهینه‌ی صفحات خمشی به‌صورت گسترده مورد توجه محققان قرار گرفت، که نتایج اولیه سبب ایجاد روش همگن‌سازی و سایر روش‌ها برای بهینه‌سازی صفحات خمشی گردید [10]. چنگ و آل‌هوف [11] مسئله‌ی بهینه‌سازی صفحات خمشی تحت بارگذاری یکنواخت را با روش معیار بهینه و تفاضل محدود، مورد مطالعه قرار دادند. پندسو [12] از روش همگن‌سازی در بهینه‌سازی صفحات خمشی استفاده کرد. سوزوکی و کیکوچی [13-14] روش همگن‌سازی را برای بهینه‌سازی صفحات خمشی به‌کار بردند. آن‌ها روشی را برای محاسبه‌ی خصوصیات سختی صفحه‌ی خمشی همگن با استفاده از خصوصیات همگن شده‌ای که از الاستیک دو بعدی مشتق‌گیری شده بود، ارائه دادند. سوتو و دیاز [15] نیز روش همگن‌سازی را به‌صورت مستقیم به معادله‌ی صفحه‌ی خمشی اعمال کردند. مدل‌های مبتنی بر تئوری صفحات خمشی میندلین-

¹ ESO: Evolutionary Structural Optimization

² Sensitivity analysis

³ Hard kill

⁴ BESO: Bi-directional Evolutionary Structural Optimization

ریسنر^۱ توسط بورژت و تاپیرو [16]، سوزوکی و کیکوچی [13]، تِنک و هاگیوارا [17]، سوتو و دیاز [15] و دیاز و همکارانش [18] مطالعه شده است. بلبلیدیا و همکارانش [19] نیز از روش همگن‌سازی با اعمال جریمه برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات میندلین-ریسنر تحت بارگذاری متمرکز و شرایط مرزی مختلف استفاده کردند و توپولوژی‌های بهینه با هدف کمینه کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم را برای صفحه‌هایی با مدل‌های تحلیلی تک لایه و سه لایه، ارائه کردند. کیتایاما و همکارانش [20] روش بهینه‌سازی نگاشت مطابق^۲ را برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی ارائه دادند. گو و همکارانش [21] بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی را تحت قید تنش خمشی با تکنیک همگن‌سازی با اعمال جریمه، مورد مطالعه قرار دادند که صفحه‌ی خمشی با استفاده از المان مثلث کیرشهف مجزا^۳، گسسته‌سازی شده است. ژانگ و همکارانش [22] یک روش پیش بینی هندسه را برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی ارائه کردند و تیان چن و همکارانش [23] بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی با تابع هدف انرژی کرنشی با قید حجم را با استفاده از روش اجزاء متحرک^۴ مبتنی بر المان‌های صفحه و تئوری کیرشهف مورد مطالعه قرار دادند. ناکازاوا و همکارانش [24] بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی میندلین تحت بار متمرکز با عدم اطمینان از موقعیت بار، با هدف کمینه کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم را با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز، مورد بررسی قرار دادند.

یکی دیگر از روش‌های بهینه‌سازی روش مجموعه سطوح تراز است که توسط فرمول‌های ریاضی توسعه یافته است که با حل معادله همیلتون-ژاکوبی^۵ مرزهای طراحی سازه را به سمت مرزهای بهینه سوق می‌دهد. در سال‌های اخیر روش مجموعه سطوح تراز در زمینه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی به صورت مؤثر و گسترده به کار برده شده است. روش مجموعه سطوح تراز در ابتدا توسط اُشر و ستیان [25] در

¹ Mindlin-Rissner

² Conformal mapping

³ discrete Kirchhoff triangular (DKT) element

⁴ MMC: moving morphable component

⁵ Hamilton-Jacobi equation

سال ۱۹۸۸ ابداع و معرفی گردید که روشی بسیار پایدار و قدرتمند برای محاسبه و تحلیل حرکت مرزها در حالت‌های دو بُعدی و سه بُعدی است. به‌طوری که می‌تواند گوشه‌های تیز، از هم جدا شدن مرزها یا به هم وصل شدن آن‌ها را به‌راحتی نمایش دهد. ستیان و ویگمن [26] در بین اولین محققانی بودند که روش مجموعه سطوح تراز ارائه شده توسط اُشر و ستیان [25] را برای به‌دست آوردن مرزهای آزاد سازه در یک شبکه‌ی اویلری ثابت^۱، توسعه دادند و به‌جای استفاده از تحلیل حساسیت کلاسیک، تنش معادل فون میسز^۲ را برای بهبود صلبیت سازه‌ای به‌کار بردند و در زمینه‌ی الاستیک خطی دو بُعدی، از روش مرزهای غوطه‌ور^۳ استفاده کردند. اُشر و سانتوزا [27] بهینه‌سازی دو فازی از یک مدل غشائی را با استفاده از یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی اسکالر، مورد مطالعه قرار دادند. در کار آن‌ها مرز آزاد به‌عنوان مرز بین دو جزء که یک دامنه‌ی طراحی را اشغال می‌کند، تعریف شد و روش مجموعه سطوح تراز، بدون در نظر گرفتن زمینه خطی یا غیرخطی الاستیک با تحلیل حساسیت شکل ترکیب شد. وانگ و همکارانش [28] بردار سرعت را از نظر شکل مرز و حساسیت متغیر به عنوان پیوندی بین بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای و روش مجموعه سطوح تراز تعیین کردند. بعداً روش مجموعه سطوح تراز برای ترکیب متغیرهای شکل در فرآیند بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای بیشتر توسعه داده شد. آلایر و همکارانش [29] روش مجموعه سطوح تراز را برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای ارائه دادند که سرعت پیشرونده طی فرآیند بهینه‌سازی، از تحلیل حساسیت شکل کلاسیک حاصل می‌شود و پیشروی با حل معادله همیلتون-ژاکوبی صورت می‌گیرد و همچنین به تغییرات شدید توپولوژی در طی فرآیند بهینه‌سازی اجازه داده شده است. وانگ و همکارانش [28] و آلایر و همکارانش [29] با ارائه مثال‌های عددی پیشنهاد کردند که روش مجموعه سطوح تراز برای بهینه‌سازی توپولوژی دارای پتانسیل‌های انعطاف‌پذیری است. در دامنه‌ی طراحی چند ماده، روش-

¹ Fixed Eulerian mesh

² Von-mises equivalent stress

³ Immersed interface method

های مجموعه سطوح تراز مرسوم در [30] به عنوان یک روش "مجموعه سطوح رنگی"¹ برای حل مسائل بهینه سازی شکل و توپولوژی سازه توسعه پیدا کردند که یک بردار تابع ضمنی برای نمایش مؤثرتر فازهای مختلف ماده استفاده شده است. اخیراً شی و همکارانش [31] یک روش نیمه لاگرانژی را برای بهینه سازی شکل و توپولوژی ارائه دادند. معادله ی همیلتون-ژاکوبی در روش مجموعه سطوح تراز با یک طرح نیمه لاگرانژی بی قید و شرط حل شد و گزارش شد که برای صرفه جویی قابل توجه در زمان محاسبات، اندازه گام زمانی بزرگتری می تواند استفاده شود. وانگ و وانگ [32] استفاده از توابع پایه شعاعی را برای بهینه سازی توپولوژی سازه های مبتنی بر مجموعه سطوح تراز را مورد بررسی قرار دادند. آن ها از بی اسپلاین های مولتی کوادریک² برای تعریف تابع ضمنی استفاده کردند و نتایج جالبی را به دست آوردند. با این حال، تحقیقات کاملی در مورد بهینه سازی مبنی بر روش مجموعه سطوح تراز با توابع پایه شعاعی³ را انجام ندادند و تنها بهینه سازی توپولوژی بدون محدودیت نسبتاً ساده با ضریب لاگرانژ ثابت، به جای بهینه سازی توپولوژی مقید با ضریب لاگرانژ متغیر، مورد بررسی قرار گرفت.

به طور کلی، روش های مجموعه سطوح تراز، توصیف هندسی واضحی از مرزها را ارائه می دهند و نیاز به پیاده سازی نسبتاً ساده ای دارند و بسط آن ها به مسائل سه بعدی ساده است [29]. در عمل، در استفاده از یک مدل مجموعه سطوح تراز مرسوم برای بهینه سازی توپولوژی، باید توجه داشت که اعمال روش مجموعه سطوح تراز مرسوم، مستلزم انتخاب مناسب طرح بالادست⁴، سرعت های توسعه⁵ و الگوریتم های مقداردهی مجدد اولیه⁶ است، که به روش های پیچیده ای برای حل معادله دیفرانسیل جزئی نیاز دارد [32]. در اصل اعمال معادله ی دیفرانسیل جزئی نسبتاً دشوار است، اگر چه برخی

¹ Color level set

² Multi-quadric

³ Radial basis functions

⁴ Upwind scheme

⁵ Extension velocities

⁶ reinitialization algorithms

روش‌های قدرتمند مانند: طرح‌های بالادستی [33-34]، روش‌های پیشروی سریع¹ [35] و روش‌های مجموعه سطوح تراز محلی سریع² [36] در دسترس هستند. علاوه بر این، هیچ مکانیزم حفره‌سازی در روش مجموعه سطوح تراز مرسوم وجود ندارد. این امر سبب می‌گردد که طراحی نهایی به حدس‌های اولیه دامنه‌ی طراحی وابستگی زیادی داشته باشد [29]. از این رو، ملاحظات عددی محاسبات گسسته، مزایای روش مجموعه سطوح تراز مرسوم برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای را به شدت محدود می‌کند. بنابراین روش‌های فرمول‌بندی تابع مجموعه سطوح تراز توسعه یافتند. وانگ و همکارانش [37] برای اولین بار از توابع پایه شعاعی برای تقریب تابع مجموعه سطوح تراز برای بهینه‌سازی توپولوژی و شکل استفاده کردند. آن‌ها با این کار معادله دیفرانسیل جزئی همیلتون-ژاکوبی را به یک سیستم معادله ساده ریاضی³ و مسئله اصلی مقدار اولیه وابسته به زمان را به مسئله نسبتاً ساده درونیایی وابسته به زمان تبدیل کردند و سرعت نرمال را از روش تندترین شیب و تحلیل حساسیت به دست آوردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که این روش در مقایسه با روش مجموعه سطوح تراز مرسوم دارای دقت و سرعت همگرایی بیشتری است و همچنین به دلیل قابلیت در ایجاد حفره‌های جدید در داخل دامنه مصالح به طرح‌های اولیه وابسته نیست. وانگ و همکارانش [38] برای بهینه‌سازی توپولوژی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای توابع پایه شعاعی، کد ۸۸ خطی کارآمدی را برای برنامه متلب ارائه دادند و چن و همکارانش [39] نیز برای بهینه‌سازی توپولوژی تابع مجموعه سطوح تراز را با استفاده از بی‌اسپلاین‌های چند متغیره بر روی یک شبکه‌ی یکنواخت، فرمول‌بندی کردند.

در دهه‌های گذشته روش‌های مختلفی برای تحلیل مسائل مهندسی ارائه گردیده که مشهورترین و پرکاربردترین آن‌ها روش اجزاءمحدود است. روش اجزاءمحدود در ایجاد شکل دقیق مسائل با هندسه‌های پیچیده و همچنین در تولید مکرر شبکه‌ی المان‌ها در برخی از مسائل بهینه‌سازی دارای

¹ Fast marching methods

² Fast local level set methods

³ Ordinary differential equation.

ضعف است. روش آیزوژئومتریکی ابتدا در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش [40] معرفی شد. که اساس و پایه‌ی مفهوم روش آن این است که از توابع پایه، معمولاً توابع پایه نسبی غیریکنواخت (نربز)، که هندسه را به‌طور دقیق مدل‌سازی می‌کنند و نمایش می‌دهند، به‌طور مستقیم به‌عنوان توابع درونیاب برای مجهولات مختلف استفاده می‌شود. در مقایسه با روش اجزاءمحدود به ویژگی‌هایی مانند نمایش دقیق اشکال هندسی، دقت و قدرت محاسباتی زیاد روش آیزوژئومتریکی، می‌توان دست یافت. یکی از مزیت‌های آن نسبت به روش اجزاءمحدود این است که هندسه را در طول فرآیند تجزیه و تحلیل برقرار می‌کند. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه و پیشرفت‌های اخیر در زمینه گرافیک رایانه‌ای تشکیل می‌دهد. در زمینه‌ی تحلیل آیزوژئومتریکی صفحات خمشی، بیرائودا ویگا و همکارانش [41] روش آیزوژئومتریکی را برای گسسته‌سازی و تحلیل مسائل صفحات خمشی تحت خمش، مورد بررسی قرار دادند. هوانگ تای و نگوین [42] فرمول‌بندی آیزوژئومتریکی بر مبنای نربز را با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برش^۱ برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی و پاسخ خمش صفحات خمشی کامپوزیت ورقه‌ای^۲ ارائه دادند، ژین کانگ لی و همکارانش [43] روش آیزوژئومتریکی بر پایه نربز را برای تجزیه و تحلیل صفحات خمش و تیرها بر مبنای تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی را توسعه دادند. تئوری مرتبه سوم به پیوستگی^۱ C نیاز دارد که در روش اجزاءمحدود به آسانی حاصل نمی‌شود؛ بنابراین آن‌ها از توابع پایه نربز و روش آیزوژئومتریکی برای دستیابی به پیوستگی مورد نظر استفاده کردند. سانگ جین لی و کیم [44] ارتعاش آزاد و کمانش خطی صفحات خمشی ضخیم را با استفاده از روش آیزوژئومتریکی مطالعه کردند و المان صفحه را با استفاده از مفاهیم آیزوژئومتریکی برای رفتار سازه‌های صفحه‌ای تحت ارتعاش آزاد و شرایط کمانش خطی، توسعه دادند. ین و همکارانش [45]، بیرائودا ویگا و همکارانش [46]، لیو و جفرز [47]، عبدالمعتی و همکارانش [48] نیز صفحات خمشی را با روش تحلیلی آیزوژئومتریکی مورد بررسی قرار دادند.

¹ TSDT: Third Shear Deformation Theory

² laminated composite

وانگ و همکارانش [49] روش تحلیلی آیزوژئومتریکی را برای فرمول‌بندی مسئله بهینه‌سازی به روش مجموعه سطوح تراز برای صفحات تنش مسطح اعمال کردند. جهانگیری و توکلی [50] برای فرمول‌بندی تابع مجموعه سطوح تراز از روش تحلیلی آیزوژئومتریکی و توابع پایه نربز استفاده کردند و نشان دادند که استفاده از روش تحلیلی آیزوژئومتریکی در مقایسه با روش اجزاءمحدود دارای دقت بیشتری است و استفاده از توابع پایه نربز سبب می‌شود که تابع مجموعه سطح تراز در توپولوژی‌های به‌دست آمده دارای مرزهای هموارتری باشد. بهینه‌سازی شکل صفحه‌ی خمشی به روش تحلیلی آیزوژئومتریکی نیز توسط چو و همکارانش [51]، وال و همکارانش [52]، حسنی و همکارانش [53] و اخیراً توسط امین زاده و همکارانش [54] برای صفحات خمشی در حالت الاستو-پلاستیک بررسی شده است.

در تحقیقات پیشین همان‌طور که بیان گردید بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی با روش‌های مانند: روش همگن‌سازی با اعمال جریمه و روش مجموعه سطوح تراز مرسوم به همراه روش تحلیلی اجزاءمحدود مورد مطالعه قرار گرفته است. ولی بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی با استفاده از روش تحلیلی آیزوژئومتریکی و روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای توابع پایه شعاعی مورد بررسی و مطالعه قرار نگرفته است. استفاده از روش تحلیلی آیزوژئومتریکی سبب می‌شود که دامنه‌ی طراحی دقیق مدل‌سازی شود و دقت تحلیل نسبت به روش اجزاءمحدود افزایش یابد. روش بهینه‌سازی با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای توابع پایه شعاعی سبب می‌شود که شکل‌های بهینه‌ی نهایی به طرح‌های اولیه دامنه‌ی طراحی وابسته نباشند و توپولوژی‌های بهینه دارای مرزهای هموارتری باشند. بنابراین در این پایان نامه روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای آیزوژئومتریکی که تابع مجموعه سطوح تراز با استفاده از توابع پایه شعاعی فرمول‌بندی می‌شود، مورد مطالعه قرار می‌گیرد و نتایج حاصل شده از این روش ارائه می‌گردد.

فصل ۳ : تحلیل آیزوژنومسریک صفحات خمشی

۳-۱ مقدمه

روش تحلیلی آیزوژئومتریکی یکی از روش‌های عددی است که می‌تواند جایگزینی مناسب برای سایر روش‌ها مانند روش اجزاءمحدود باشد. پایه و اساس این روش، استفاده از فناوری‌های رایانه‌ای و پیشرفت‌های زمینه گرافیک رایانه‌ای است. در روش تحلیلی آیزوژئومتریکی از توابع پایه نریز برای مدل‌سازی دقیق هندسه و از همان توابع پایه برای درونیابی مجهولات استفاده می‌شود. مزیت روش آیزوژئومتریکی این است که هندسه‌ی دقیقی ایجاد می‌کند و به مش بندی‌های مکرر نیازی ندارد. از تفاوت‌های بین روش‌های تحلیلی آیزوژئومتریکی و اجزاءمحدود این است که در روش اجزاءمحدود ابتدا مجهولات توسط توابع پایه تقریب زده می‌شوند و سپس با استفاده از آن‌ها هندسه مدل‌سازی می‌شود ولی در روش آیزوژئومتریکی ابتدا هندسه‌ی دامنه‌ی طراحی توسط توابع پایه مدل‌سازی می‌شود و سپس از همان توابع پایه برای تقریب مجهولات استفاده می‌شود. در این فصل ابتدا تئوری‌های صفحات خمشی به اختصار شرح داده می‌شوند و سپس به مبانی پایه روش تحلیلی آیزوژئومتریکی و تحلیل آیزوژئومتریکی صفحات خمشی با در نظر گرفتن حالت الاستیک خطی و تئوری صفحات میندلین، پرداخته می‌شود.

۳-۲ مروری بر تئوری‌های صفحات خمشی

۳-۲-۱ مقدمه

صفحه‌ی خمشی، یک المان سازه‌ای است که ابعاد آن در مقایسه با ضخامت آن بزرگ است و هنگامی که تحت بارهایی قرار می‌گیرد، علاوه بر کشش، تغییرشکل خمشی نیز در آن ایجاد می‌شود. در اکثر موارد ضخامت صفحه از یک دهم کوچک‌ترین بُعد صفحه بزرگ‌تر نیست. اغلب به دلیل کوچک بودن ضخامت صفحه، به مدل‌سازی با استفاده از معادلات سه بُعدی الاستیسیته نیاز نمی‌باشد

و برای مطالعه رفتار صفحات خمشی می‌توان نظریه‌های صفحات خمشی ساده‌ی دو بُعدی را توسعه داد. در حالت کلی دو تئوری برای تحلیل صفحات خمشی مورد استفاده قرار می‌گیرد، تئوری کلاسیک صفحه‌ی خمشی^۱ و تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول صفحه‌ی خمشی. تئوری کلاسیک توسعه‌یافته تئوری تیر اویلر-برنولی^۲ است و بیشتر با نام تئوری صفحات خمشی کیرشهف شناخته می‌شود. تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحه‌ی خمشی، توسعه‌یافته تئوری تیر تیموشنکو^۳ است و به آن تئوری صفحات خمشی میندیلین نیز می‌گویند. در ادامه تئوری‌های ذکر شده مختصراً شرح داده می‌شوند.

۲-۲-۳ تئوری کلاسیک صفحات خمشی

توسعه تئوری تیر اویلر-برنولی به صفحه‌ی خمشی، به‌عنوان تئوری کلاسیک صفحه‌ی خمشی یا تئوری کیرشهف صفحه‌ی خمشی شناخته می‌شود. در تئوری کلاسیک صفحه‌ی خمشی، میدان جابه‌جایی بر اساس فرضیه کیرشهف است که شامل سه فرضیه زیر است (شکل ۳-۱) [55]:

۱- خطوط مستقیم عمود بر سطح میانی بعد از تغییرشکل نیز مستقیم باقی می‌مانند.

۲- ضخامت صفحه خمشی در طول تغییرشکل، تغییر نمی‌کند.

۳- خطوط نرمال بر سطح میانی بعد از تغییرشکل نیز نرمال باقی می‌مانند.

صفحه‌ای با ضخامت یکنواخت را در نظر بگیرید. مختصات کارتزین مستطیلی (x, y, z) با صفحه xy منطبق با صفحه‌ی میانی صفحه‌ی خمشی و مختصات z مثبت به سمت بالا را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم که (u, v, w) نشان دهنده‌ی کل جابه‌جایی‌های یک نقطه در امتداد مختصات (x, y, z) است. یک نقطه از ماده که در موقعیت (x, y, z) در صفحه بدون تغییرشکل قرار دارد، در صفحه‌ی

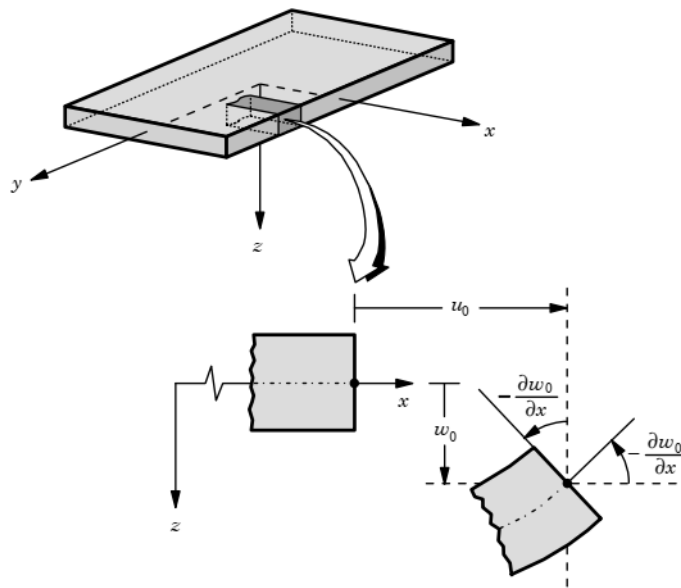
¹ CPT: Classical Plate Theory

² Euler-Bernoulli beam

³ Timoshenko beam

تغییر شکل یافته به موقعیت $(x+u, y+v, z+w)$ حرکت می‌کند. فرضیه‌های ۱ و ۲ دلالت بر این دارد که کرنش نرمال در راستای ضخامت ε_{zz} صفر است بنابراین w از z مستقل است.

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (۱-۳)$$



شکل ۳-۱ قسمتی از صفحه‌ی خمشی تغییر شکل نیافته و تغییر شکل یافته در تئوری کلاسیک [55].

فرضیه ۳ سبب صفر شدن کرنش‌های برشی عرضی می‌شود. بنابراین:

$$\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (۲-۳)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (۳-۳)$$

بنابراین :

$$u(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial x} + u_0(x, y) \quad (۴-۳)$$

$$v(x, y, z) = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (۵-۳)$$

که در آن‌ها u_0 و v_0 به ترتیب بیانگر مقادیر اولیه برای u و v هستند. بنابراین بردار تغییر مکان که فرضیات را اقلان می‌کند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad (۶-۳)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0(x, y, t)$$

که (u, v, w) بردار تغییرمکان یک نقطه با موقعیت (x, y, z) در امتداد راستاهای (x, y, z) و (u_0, v_0, w_0) بیانگر تغییرمکان یک نقطه بر روی صفحه میانی $(x, y, 0)$ در زمان t هستند. کرنش-

های خمشی (بر طبق تغییرمکان w) به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (۷-۳)$$

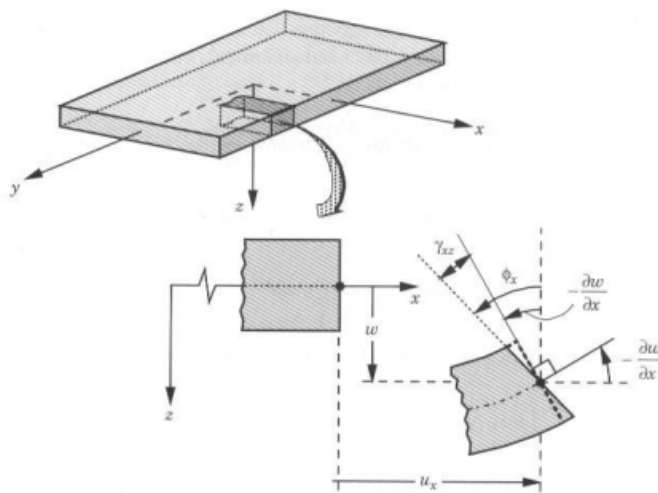
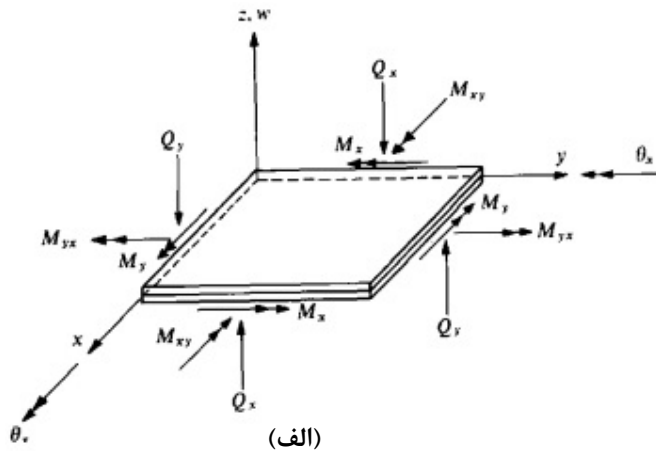
۳-۲-۳ تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول

تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحه‌ی خمشی، توسعه یافته تئوری تیر تیموشنکو است و با نام تئوری صفحات خمشی میندلین نیز شناخته می شود. در تئوری صفحات خمشی میندلین به تغییر شکل های برشی اجازه داده می شود که یک روش جایگزین برای تئوری کلاسیک صفحات کیرشهف پیشنهاد می کند. تفاوت اصلی بین تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول در تأثیر تغییر شکل های برشی بر روی رفتار صفحات خمشی است [56]. فرضیه های مهم تئوری میندلین به صورت زیر می باشند:

۱. تغییر مکان ها در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک هستند.
۲. تنش نرمال بر سطح میانی صفحه ناچیز است.
۳. نرمال ها به سطح میانی بعد از تغییر شکل مستقیم باقی می مانند ولی بعد از تغییر شکل لزوماً

نرمال بر سطح میانی نیستند.

یک صفحه‌ی میندیلین رایج در شکل (۲-۳) نشان داده شده است.



شکل ۲-۳ (الف) صفحه‌ی خمشی میندیلین [56]، (ب) قسمتی از صفحه‌ی تغییرشکل نیافته و تغییرشکل یافته [55].

مؤلفه‌های بردار تغییرمکان به صورت زیر بیان می‌شوند :

$$u = [w, \theta_x, \theta_y]^T \quad (۸-۳)$$

که در آن w تغییرمکان جانبی صفحه‌ی خمشی که نرمال به صفحه xy است و θ_x و θ_y نیز به ترتیب چرخش‌های نرمال بر صفحه‌های xz و yz هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} - \phi_x \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} - \phi_y\end{aligned}\quad (9-3)$$

در تئوری صفحات میندلین، کرنش‌های برشی ϕ_x و ϕ_y که در زیر تعریف می‌شوند برابر صفر در نظر گرفته می‌شوند.

کرنش‌ها به صورت زیر تعریف می‌گردند :

$$\varepsilon = [r_x, r_y, r_{xy}, \phi_x, \phi_y]^T \quad (10-3)$$

که در آن کرنش‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\begin{aligned}r_x &= -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ r_y &= -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ r_{xy} &= -\left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{\partial \theta_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\quad (11-3)$$

و کرنش‌های برشی نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$\begin{aligned}\phi_x &= \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x\right) \\ \phi_y &= \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y\right)\end{aligned}\quad (12-3)$$

تغییر مکان‌های مجازی و کرنش‌های مجازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\delta u = [\delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y]^T \quad (13-3)$$

$$\delta \varepsilon = \left[-\frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial x}, -\frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial y}, -\frac{\partial(\delta \theta_x)}{\partial y} - \frac{\partial(\delta \theta_y)}{\partial x}, \frac{\partial(\delta w)}{\partial x} - \delta \theta_x, \frac{\partial(\delta w)}{\partial y} - \delta \theta_y\right]^T \quad (14-3)$$

با توجه به رابطه‌ی زیر می‌توان تنش‌ها را محاسبه کرد:

$$\sigma = D \varepsilon \quad (15-3)$$

که در آن تنش‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\sigma = [M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]^T \quad (16-3)$$

که M_x و M_y لنگرهای خمشی و M_{xy} لنگر پیچشی است و Q_x و Q_y نیروهای برش در صفحه‌های xz و yz هستند.

برای صفحات خمشی با مصالح الاستیک ایزوتروپیک، ماتریس الاستسیسته $\mathbf{D}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{D} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S \end{bmatrix} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad S = \frac{Gt}{1.2} \quad (۱۷-۳)$$

که در آن t, E, G, ν به ترتیب ضخامت، مدول الاستسیسته، مدول برشی و ضریب پواسون صفحه‌ی خمشی هستند. عدد ۱.۲ نیز بیانگر ضریب اصلاح برش است.

۳-۳ مبانی پایه آیزوژئومتریک

در روش اجزاءمحدود یک مفهوم برای شبکه و یک مفهوم برای یک المان وجود دارد. یک المان به دو صورت نمایش داده می‌شود. یکی در فضای المان مادر^۱ و یکی در فضای فیزیکی. المان‌ها معمولاً توسط مختصات نقاط گره‌ای معرفی می‌گردند و درجات آزادی به عنوان مقادیر توابع پایه در گره‌ها در نظر گرفته می‌شوند. توابع پایه اجزاءمحدود معمولاً درونیاب هستند و ممکن است دارای مقادیر مثبت و منفی باشند. توابع پایه اجزاءمحدود اغلب به عنوان توابع درونیاب برای توابع شکل بیان می‌شوند. در توابع بی‌اسپلاین‌های نسبی غیریکنواخت (نرَبز) توابع پایه معمولاً درونیاب نمی‌باشند. در تئوری نرَبز دو مفهوم برای شبکه وجود دارد که عبارت‌اند از شبکه‌ی کنترلی^۲ و شبکه‌ی فیزیکی^۳. شبکه‌ی کنترلی توسط نقاط کنترلی تعریف می‌شود و شبکه‌ی کنترلی درونیابی از نقاط کنترلی است؛ شبکه‌ی

^۱ Parent element space

^۲ Control net

^۳ Physical net

کنترلی با هندسه واقعی مطابقت ندارد، ولی مانند داربستی است که هندسه را کنترل می‌کند. شبکه‌ی کنترلی مانند شبکه‌ی المان‌های چند خطی اجزاء محدود است و متغیرهای کنترلی که درجات آزادی هستند در نقاط کنترلی واقع شده‌اند. در تئوری نربز برخلاف اجزاء محدود، شبکه‌ی کنترلی می‌تواند دارای تغییرات شدیدی باشد، حتی معکوس باشد؛ ولی هندسه فیزیکی مسئله، معتبر باقی می‌ماند. شبکه‌ی فیزیکی تجزیه هندسه‌ی واقعی است و دارای دو مفهوم وصله^۱ و بازه گره‌ای^۲ می‌باشد. وصله می‌تواند مانند یک المان بزرگ یا زیر دامنه^۳ در نظر گرفته شود که اکثر هندسه‌ها در مسائل را می‌توان با یک وصله مدل‌سازی کرد. یک وصله در فضای المان مادر و هم در فضای فیزیکی نمایش داده می‌شود. هر وصله را می‌توان به بازه‌های گره‌ای تجزیه کرد که گره‌ها در فضای یک بُعدی نقطه، در فضای دو بُعدی خط و در فضای سه بُعدی، صفحه می‌باشند. بازه‌های گره‌ای توسط گره‌ها مرزبندی می‌شوند و دامنه‌ی المان را جایی که توابع پایه هموار هستند تعریف می‌کنند. توابع پایه دارای پیوستگی C^{p-m} می‌باشند که در آن p درجه چندجمله‌ای و m تعداد تکرار نقاط گره‌ای در بردار گره‌ای^۴ هستند. بازه‌های گره‌ای، کوچک‌ترین جزءهایی هستند که به آن‌ها پرداخته می‌شود بنابراین به عنوان المان‌های کوچک می‌توانند در نظر گرفته شوند.

فضای شاخص^۵ وصله یکی از مفاهیم مهم در نربز است که هر گره را به صورت ویژه مشخص می‌کند و گره‌هایی را که تکرار بیشتر از یک دارند را متمایز می‌کند. تصویر شماتیک از مفاهیم بیان شده در شکل ۳-۳ ارائه شده است. خلاصه‌ای از مفاهیم نربز که در تجزیه و تحلیل آیزوژئومتریک استفاده می‌شوند در جدول ۱-۳ نشان داده شده است.

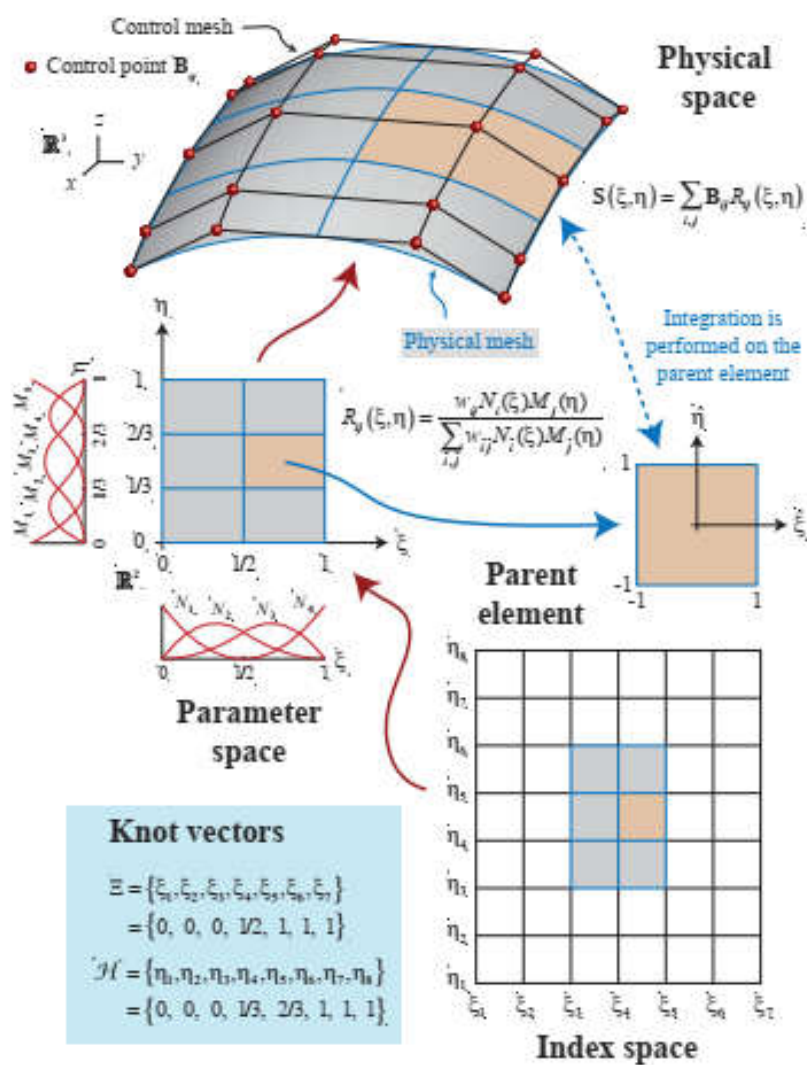
¹ Patch

² Knot span

³ Subdomain

⁴ Knot vector

⁵ Index space



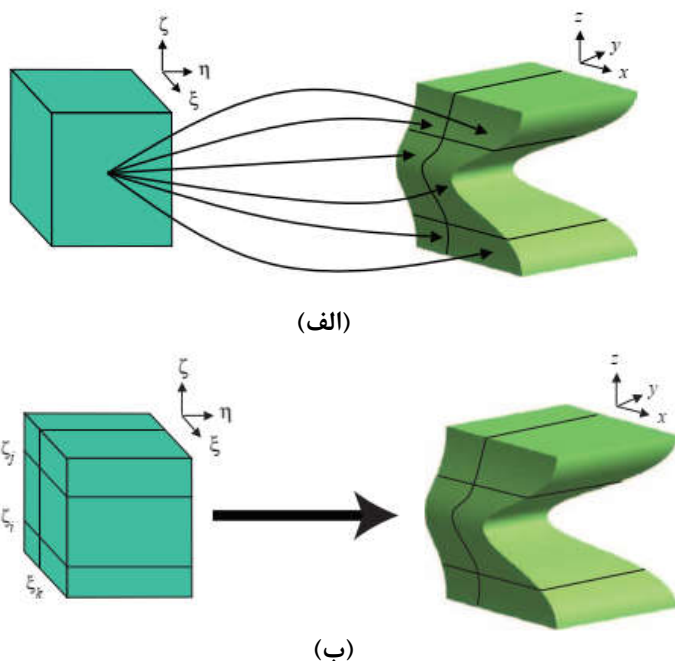
شکل ۳-۳ تصویر شماتیک از مفهوم نربز برای یک سطح [57].

شبکه کنترلی		شبکه فیزیکی
توپولوژی:		بازه های گره ای
یک بعدی : خطوط مستقیم که توسط دو نقطه کنترل متوالی تعریف می شوند	دو بعدی : چهار ضلعی دو خطی که توسط چهار نقطه کنترل تعریف شده است	تصاویر شبکه مستطیلی در دامنه مرجع به صورت هندسه واقعی ترسیم می شوند. ممکن است وصله ها به عنوان المان های بزرگ یا زیر دامنه در نظر گرفته شوند.
		توپولوژی :
سه بعدی : هگزاهدرای سه گانه که با هشت نقطه کنترل تعریف شده است	دو بعدی : سطح ها	توپولوژی گره ها
		سه بعدی : حجم ها
سه بعدی : شش ضلعی منحنی که با شش سطح منحنی محدود شده است	سه بعدی : منحنی ها	وصله ها به بازه های گره تجزیه می شوند که کوچکترین مفهوم یک المان هستند.
		یک بعدی : نقاط
سه بعدی : سطح منحنی محدود شده است	سه بعدی : منحنی ها	دو بعدی : منحنی ها
		سه بعدی : سطوح

جدول ۳-۱ خلاصه‌ای از مفاهیم آیزوژئومتریک [57].

۳-۱-۳ بی‌اسپلین‌ها

نرېزها از بی‌اسپلین‌ها ساخته می‌شوند. فضای پارامتری در تجزیه و تحلیل اجزاءمحدود به یک المان در فضای فیزیکی نگاشت می‌شود و هر المان دارای نگاشتی مانند شکل ۳-۴-الف) است. از سوی دیگر، نگاشت بی‌اسپلین، یک وصله‌ی چند المانی را از فضای پارامتری به فضای فیزیکی انتقال می‌دهد. هر المان در فضای فیزیکی تصویر متناظر آن المان در فضای پارامتری است؛ اما نگاشت به خودی خود برای کل وصله است مانند شکل ۳-۴-ب). وصله‌ها نقش زیر دامنه‌ها را بازی می‌کنند که در آن‌ها انواع المان‌ها و مدل‌های ماده، یکنواخت فرض می‌شوند.



شکل ۳-۴ (الف) نگاشت هر المان در روش تحلیل اجزاء محدود، (ب) نگاشت بی‌اسپلین یک وصله در روش آیروژئومتریك [57].

۳-۳-۲ بردارهای گره

یک بردار گره‌ای در یک بُعد، دنباله‌ای صعودی از اعداد در فضای پارامتری است که به صورت $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ تعریف می‌شود. که در آن $\xi_i \in R$ ، i امین گره و $i = 1, 2, \dots, n+p+1$ و p مرتبه‌ی چندجمله‌ای و n تعداد توابع پایه است. گره‌ها فضای پارامتری را به المان‌ها تقسیم می‌کنند و مرزهای المان‌ها در فضای فیزیکی، تصویر خطوط گره‌ای تحت نگاشت بی‌اسپلین می‌باشند. اگر گره‌ها در فضای پارامتری با فاصله‌ی مساوی قرار گیرند، بردار گره‌ای را یکنواخت می‌گویند و در صورتی که با فاصله‌ی متفاوت قرار گیرند بردار گره‌ای را غیریکنواخت می‌گویند. مقدار گره‌ها ممکن است تکرار شوند، یعنی بیش از یک گره دارای مقدار مشابه باشند. در صورتی که مقدار گره‌های اول و آخر $p+1$ بار تکرار شوند، بردار گره‌ای را باز می‌نامند. در یک بُعد، توابع پایه‌ای که از بردارهای گره‌ای باز تشکیل شده‌اند در انتهای بازه‌ی فضای پارامتری (ξ_i, ξ_{i+1}) و در چند بُعدی نیز در گوشه‌های وصله

درونیاب هستند، اما در گره‌های داخلی در حالت کلی درونیاب نیستند؛ که این ویژگی تفاوت در مفهوم گره‌ها در آیزوژئومتریک و اجزاءمحدود است.

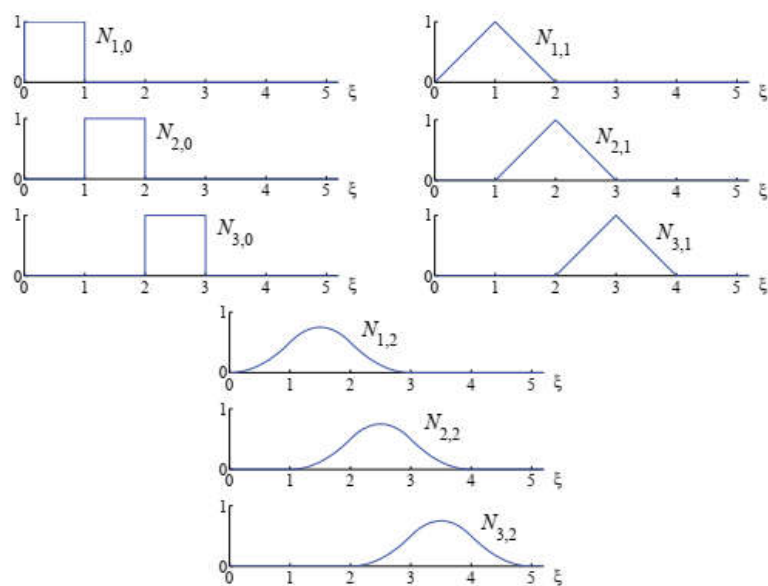
۳-۳-۳ توابع پایه

برای بردار گره‌ای تعریف شده Ξ ، توابع پایه به صورت زیر تعریف می‌شوند :

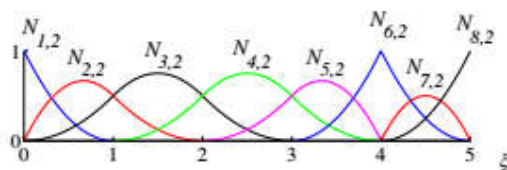
$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3-18)$$

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi)$$

که در آن p بیانگر مرتبه چندجمله‌ای است. نتایج روابط فوق برای یک بردار گره‌ای یکنواخت در شکل ۳-۵ نشان داده شده است. توابع پایه بی‌اسپلین با $p=0$ و $p=1$ به ترتیب مانند همان توابع ثابت تکه‌ای و توابع اجزاءمحدود خطی می‌باشند. توابع بی‌اسپلین مرتبه دوم با هم یکسان هستند ولی نسبت به هم چند واحد منتقل شده‌اند، الگوی مشابه‌ای برای بی‌اسپلین‌های با مرتبه‌ی بالاتر نیز به همین شکل ادامه می‌یابد و سبب مزیت بزرگی در حل معادلات نسبت به توابع اجزاءمحدود می‌شود که کاملاً نامشابه هستند. یک مثال از توابع پایه مرتبه دوم برای یک بردار گره‌ای باز و غیریکنواخت نیز در شکل ۳-۶ نمایش داده شده است. توجه شود که توابع پایه در نقاط انتهای بازه درونیاب هستند و در جایی که گره‌ها تکرار شده‌اند ($\xi=4$) فقط پیوستگی C^0 حاصل شده است. در جاهای دیگر توابع دارای پیوستگی C^1 هستند. در کل توابع پایه با مرتبه p دارای $p-1$ مشتقات پیوسته هستند.



شکل ۳-۵ نتایج مربوط به توابع پایه بی اسپلاین برای $p=0,1,2$ [57].



شکل ۳-۶ توابع پایه مرتبه دوم برای یک بردار گره‌ای باز و غیریکنواخت [57].

۳-۳-۴ منحنی بی اسپلاین

منحنی‌های بی اسپلاین در $\mathbb{R}^d$ با ترکیب خطی توابع پایه بی اسپلاین ساخته می‌شوند. که ضرایب توابع پایه به عنوان نقاط کنترلی در نظر گرفته می‌شوند. این‌ها تا حدودی مشابه مختصات گره‌ای در تجزیه و تحلیل اجزاء محدود هستند. درونیابی خطی تکه‌ای نقاط کنترلی موجب تشکیل چند ضلعی کنترلی می‌شود. برای n تابع بی اسپلاین و نقاط کنترلی $B_i \in \mathbb{R}^d$ یک منحنی بی اسپلاین به صورت زیر تعریف می‌گردد :

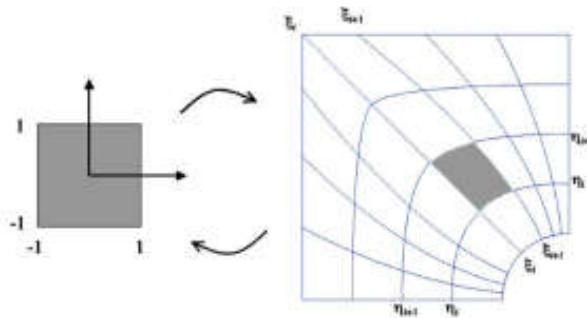
$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) B_i \quad (3-19)$$

۳-۳-۵ سطوح بی اسپلین

برای یک شبکه‌ی نقاط کنترلی $\{B_{i,j}\}$ که در آن $i = 1, 2, \dots, n$ و $j = 1, 2, \dots, m$ هستند و بردارهای گره‌ای آن $\Xi = \{\xi_1, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ و $\Pi = \{\eta_1, \dots, \eta_{m+q+1}\}$ هستند یک سطح بی اسپلین حاصل از ضرب تانسوری به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(\xi) M_{j,q}(\eta) B_{i,j} \quad (۳-۲۰)$$

که در آن $N_{i,p}(\xi)$ و $M_{j,q}(\eta)$ به ترتیب توابع پایه برای بردارهای گره‌ای Ξ و Π می‌باشند و p و q نیز مرتبه‌های چندجمله‌ای می‌باشند. المان‌ها به عنوان بازه گره‌ها در نظر گرفته می‌شوند که به صورت $[\eta_i, \eta_{i+1}] \times [\xi_i, \xi_{i+1}]$ معرفی می‌شود. در شکل ۳-۷ یک المان استاندارد دو واحدی و تصویر آن در فضای فیزیکی نمایش داده شده است.



شکل ۳-۷ المان استاندارد و تصویر آن در فضای فیزیکی [57].

۳-۳-۶ توابع پایه بی اسپلین نسبی غیریکنواخت (نربز)

یک نربز موجود در $\mathbb{R}^d$ با انتقال تصویر یک بی اسپلین موجود در $\mathbb{R}^{d+1}$ به دست می‌آید. به طور خاص مقاطع مخروطی، مانند دایره‌ها و بیضی‌ها، دقیقاً توسط انتقال تصویر منحنی‌های درجه دوم تکه‌ای که یکی از ویژگی‌های تعیین‌کننده تحلیل آیزوژئومتریک است، می‌توانند ساخته شوند. برای منحنی نربزها نقاط کنترلی را با استفاده از انتقال تصویر مشابه نقاط کنترلی منحنی‌های بی اسپلین

در نظر می‌گیریم. در این زمینه بی‌اسپلین $C^w(\xi)$ ، منحنی تصویر با تصویر نقاط کنترلی متناظر B_i^w نامیده می‌شود. با قرار دادن $\{B_i^w\}$ به‌عنوان مجموعه‌ای از نقاط کنترلی برای منحنی بی‌اسپلین با بردار گره‌ای Ξ . این‌ها به‌عنوان نقاط کنترلی تصویر برای منحنی نربز دلخواه در فضای $\mathbb{R}^d$ بیان می‌شوند. نقاط کنترلی در $\mathbb{R}^d$ از نقاط کنترلی تصویر شده با استفاده از رابطه‌های زیر استخراج می‌شوند.

$$(B_i)_j = (B_i^w)_j / w_i \quad j = 1, \dots, d \quad (21-3)$$

$$w_i = (B_i^w)_{d+1} \quad (22-3)$$

که در آن $(B_i)_j$ مؤلفه‌ی j ام بردار B_i و w_i بیانگر i امین وزن است. بنابراین توابع پایه نربز و منحنی نربز با استفاده از روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$R_i(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) \omega_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) \omega_i} \quad (23-3)$$

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_i(\xi) B_i \quad (24-3)$$

۳-۴ تحلیل آیزوژئومتریک صفحات خمشی الاستیک

در نظر گرفتن رفتار سازه یکی از مباحث‌های مهم و اساسی در تجزیه و تحلیل مسئله‌ها است. تحلیل الاستیک یکی از رایج‌ترین تحلیل سازه است که در تئوری آن برای سازه، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌های بسیار کوچکی در نظر گرفته می‌شود. در این نوع تحلیل رابطه‌ی تنش کرنش به‌صورت خطی است و این رابطه‌ی خطی با استفاده از قانون هوک برقرار می‌گردد. اخیراً توابع پایه بی‌اسپلین‌های نسبی غیریکنواخت (نربز) به دلیل این‌که منحنی‌ها و سطوح ساخته شده توسط آن‌ها تحت تبدیل‌های هندسی مانند انتقال و نگاشت تغییر ناپذیر هستند، در بسیاری از کارهای مهندسی و صنعتی به‌عنوان یک ابزار قدرتمند ریاضی برای مدل‌سازی هندسه به کار برده می‌شوند. توابع پایه‌ی نربز تعمیم یافته

توابع پایه بی‌اسپلین‌ها هستند و ابزار استاندارد برای مدل‌سازی هندسه در زمینه طراحی و گرافیک کامپیوتری می‌باشند. به‌منظور تجزیه و تحلیل آیزوژئومتریک مسائل صفحات خمشی در حالت الاستیک اولاً هندسه‌ی دقیق مسئله توسط بردارهای گره‌ای و شبکه‌ی نقاط کنترلی و توابع پایه نربز باید تعریف گردد. ثانیاً توسط بردارهای گره‌ای تعریف شده دامنه طراحی به شبکه‌های کوچک‌تری تقسیم می‌شود، به صورتی که به فاصله‌ی دو گره با مقادیر متفاوت در دو جهتِ المان گره‌ای گویند. مجموعه‌ی المان‌های گره‌ای یک وصله را ایجاد می‌کنند. سپس مجهولات با استفاده از توابع پایه نربز تقریب زده می‌شوند. استفاده از روش اصل کار مجازی و جایگزین کردن مقادیر تقریبی حاصل شده در رابطه‌ی اصل کار مجازی، منجر به تولید یک دستگاه معادلات خطی می‌شود. با حل کردن معادله خطی حاصل شده، مقدار مجهولات مسئله که تغییر مکان‌ها در نقاط کنترلی هستند، به‌دست می‌آیند. یک سطح نربز را با توجه به رابطه‌ی (۳-۲۳) می‌توانیم به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$R_{i,j}(r,s) = \frac{N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) \omega_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) \omega_{i,j}} \quad (۳-۲۵)$$

در رابطه‌ی بالا $N_{i,p}(r)$ و $N_{j,q}(s)$ به ترتیب بیانگر توابع پایه بی‌اسپلین در جهت r و s بر روی بردارهای گره‌ای متناظر با خود هستند که از رابطه‌ی (۳-۱۸) محاسبه می‌شوند و $\omega_{i,j}$ وزن‌های مرتبط با نقاط کنترلی می‌باشند. بردارهای گره‌ای r و s که بردارهای گره‌ای باز هستند به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$r = \{\underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, r_{p+1}, r_{p+2}, \dots, r_{m_1-p-1}, \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}\} \quad (۳-۲۶)$$

$$s = \{\underbrace{b, \dots, b}_{q+1}, s_{q+1}, s_{q+2}, \dots, s_{m_2-q-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{q+1}\} \quad (۳-۲۷)$$

بنابراین یک سطح نربز در فضای پارامتری دو بُعدی $[0,1]$ با بردارهای گره‌ای r و s به‌صورت زیر تعریف می‌شود که در آن $P_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی در شبکه‌ای با $(n = m_1 - p) \times (m = m_2 - q)$ نقطه کنترلی را نشان می‌دهد.

$$S(r,s) = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) \omega_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m N_{i,p}(r) N_{j,q}(s) \omega_{i,j}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(r,s) P_{i,j} \quad 0 \leq r, s \leq 1 \quad (28-3)$$

بر اساس توضیحات ارائه شده، برای یک وصله، مؤلفه‌های هندسی s^p و مؤلفه‌های بردار تغییر مکان‌ها u^p ، با استفاده از توابع پایه نرئز مشابه به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$s^p(r,s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(r,s) X_{i,j}^p \quad (29-3)$$

$$u^p(r,s) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m R_{i,j}(r,s) u_{i,j}^p \quad (30-3)$$

که $X_{i,j}^p$ مؤلفه‌های مختصات نقاط کنترلی وصله و $u_{i,j}^p$ مؤلفه‌های تغییر مکان‌ها در دو راستای وصله مورد نظر می‌باشند. برای به دست آوردن ماتریس ضرایب، بر طبق اصل کار مجازی و در نظر گرفتن نیروهای حجمی b و سطحی t ، کار نیروهای داخلی و خارجی را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\int_{V^p} \delta \varepsilon^T \sigma dV^p - \int_{V^p} \delta u^T b dV^p - \int_{\Gamma^p} \delta u^T t d\Gamma^p = 0 \quad (31-3)$$

در رابطه‌ی (31-3) مؤلفه‌های V^p و Γ^p به ترتیب حجم و مرز وصله را مشخص می‌کنند و مؤلفه‌های ε و σ به ترتیب بیانگر بردارهای کرنش و تنش هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\varepsilon = B u \rightarrow \delta \varepsilon = B \delta u \quad (32-3)$$

$$\sigma = D \varepsilon \rightarrow \delta \sigma = D \delta \varepsilon \quad (33-3)$$

که در رابطه‌ی (32-3)، B بیان گر ماتریس کرنش-جابجایی است و در رابطه‌ی (33-3)، D بیان گر ماتریس الاستیسیته است که از رابطه‌ی (3-17) به دست می‌آید. ماتریس B را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد:

$$B = L R \quad (34-3)$$

که در رابطه‌ی فوق L ماتریس دیفرانسیل گیری است که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3-35)$$

با اعمال ماتریس دیفرانسیل‌گیری به رابطه‌ی (۳-۳۴)، ماتریس کرنش-جاب‌جایی $\mathbf{B}$ به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial R_{i,j}(r,s)}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial R_{i,j}(r,s)}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial R_{i,j}(r,s)}{\partial y} & \frac{\partial R_{i,j}(r,s)}{\partial x} \\ \frac{\partial R_{i,j}(r,s)}{\partial x} & -R_{i,j}(r,s) & 0 \\ \frac{\partial R_{i,j}(r,s)}{\partial y} & 0 & -R_{i,j}(r,s) \end{bmatrix} \quad (3-36)$$

برای محاسبه‌ی $\mathbf{B}$ به مشتقات جزئی توابع پایه نریز نسبت به x و y نیاز داریم که برای این منظور از ماتریس ژاکوبین $\mathbf{J}_1$ استفاده می‌کنیم. ماتریس ژاکوبین $\mathbf{J}_1$ ، نگاشتی از فضای پارامتری $\hat{\Omega}$ به فضای فیزیکی $\tilde{\Omega}$ است و شامل مشتقات جزئی مؤلفه‌های هندسه نسبت به r, s هست و برای نگاشت از فضای المان مادر $\bar{\Omega}(\bar{r}, \bar{s})$ به فضای پارامتری r, s از یک نگاشت دیگر $\mathbf{J}_2$ ، نیز باید استفاده کنیم این فرآیند به‌صورت شماتیک در شکل ۳-۸ نشان داده شده است.

$$\mathbf{J}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (3-37)$$

مانند روش اجزاءمحدود برای به‌دست آوردن مشتقات جزئی نسبت به توابع نریز x و y داریم:

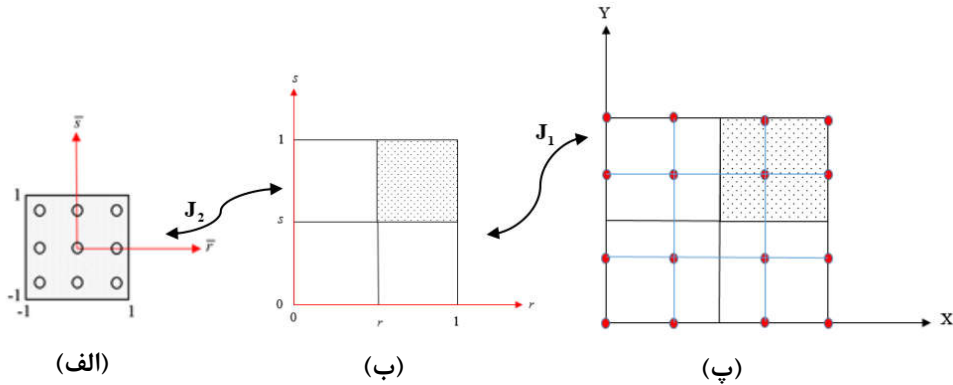
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial r} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (38-3)$$

برای نگاشت از فضای المان مادر $(\bar{r}, \bar{s})$ به فضای پارامتری r, s از یک نگاشت دیگر که موجب ایجاد ماتریس $\mathbf{J}_2$ می‌شود، باید استفاده کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r = \frac{1}{2}[(r_{i+1} - r_i)\bar{r} + (r_{i+1} + r_i)]$$

$$s = \frac{1}{2}[(s_{i+1} - s_i)\bar{s} + (s_{i+1} + s_i)] \quad (39-3)$$

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \bar{r}} & \frac{\partial s}{\partial \bar{r}} \\ \frac{\partial r}{\partial \bar{s}} & \frac{\partial s}{\partial \bar{s}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r_{i+1} - r_i}{2} & 0 \\ 0 & \frac{s_{i+1} - s_i}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}((r_{i+1} - r_i) \times (s_{i+1} - s_i)) \quad (40-3)$$



شکل ۳-۸ نمایش شماتیک نگاشت‌ها، (الف) المان مادر، (ب) فضای پارامتری، (پ) فضای فیزیکی

در روش تحلیلی آیزوژئومتریک نیز همانند روش اجزاءمحدود برای به دست آوردن مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی باید معادله تعادل زیر حل شود:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{F} \quad (41-3)$$

که در آن $\mathbf{F}$ بردار نیروهای خارجی و $\mathbf{K}$ ماتریس ضرایب است. ماتریس ضرایب برای هر المان گره-ای محاسبه و سپس با هم اسمبل می‌شوند و در صورتی که تعداد وصله‌ها بیشتر از یک وصله باشد؛ ماتریس ضرایب وصله‌ها نیز با هم اسمبل می‌شوند تا ماتریس ضرایب کل محاسبه شود. بنابراین طبق

روابط ذکر شده و جاگذاری آن‌ها در رابطه‌ی اصل کار مجازی (۳-۳۱) ماتریس ضرایب برای هر المان

گروه‌ای به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\mathbf{K} = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\tilde{\Omega} = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\mathbf{J}_1| |\mathbf{J}_2| d\bar{\Omega} = \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} \mathbf{B}^T(r,s) \mathbf{D} \mathbf{B}(r,s) |\mathbf{J}_1| |\mathbf{J}_2| w_i w_j \quad (۳-۴۲)$$

که m' و n' به ترتیب تعداد نقاط گوسی در جهت $\bar{s}$ و $\bar{r}$ و w_i و w_j وزن نقاط گوسی هستند.

فصل ۴ : بهینه سازی

۴-۱ مقدمه

روش مجموعه سطوح تراز که برای بهینه‌سازی توپولوژی اعمال می‌شود، قادر به غلبه بر برخی از کاستی‌های روش‌های بر مبنای چگالی است. مزیت اصلی این روش توصیف هندسه‌های پیچیده و تغییر شکل و توپولوژی طرح بدون معرفی مصالح با چگالی میانی است و رویکرد روش مجموعه سطوح تراز برخلاف مدل پیکسلی روش‌های چگالی، یک مدل مبتنی بر ناحیه با مرزهای صریح است [58].

در این فصل روش مؤثر و قدرتمند مجموعه سطوح تراز برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی در حالت الاستیک خطی با هدف کمینه کردن انرژی کرنشی و قید حجم مشخص، معرفی می‌گردد. در روش مجموعه سطوح تراز، مرزهای سازه‌ی تحت بهینه‌سازی به‌صورت ضمنی با مرز متحرک یک تابع اسکالر (تابع مجموعه سطوح تراز) با بُعد بالاتر نشان داده می‌شود. توپولوژی سازه ممکن است دچار تغییرات اساسی شود، ولی توپولوژی تغییر یافته به راحتی توسط تابع مجموعه سطوح تراز حاصل می‌شود. مدل مجموعه سطوح تراز به مدل‌های حرکت ضمنی مرزها نسبت داده می‌شود و می‌تواند حفره‌ها، جدا شدن به چند بخش و یا به هم پیوستن مرزها را به سادگی نشان دهد.

برای فرمول‌بندی تابع مجموعه سطوح تراز از توابع پایه شعاعی مولتی کوادریک استفاده می‌شود و معادله دیفرانسیل جزئی همیلتون-ژاکوبی اصلی به یک سیستم معادله ریاضی آسان‌تری تفکیک می‌شود. بنابراین مسئله مقدار اولیه وابسته به زمان، به یک مسئله درونیایی برای مقادیر اولیه ضرایب انبساط تبدیل می‌شود. بنابراین یک سیستم معادله ساده ریاضی به حرکت مرزهای دینامیکی حاکم می‌شود و تکاملی با مرزهای هموارتر برقرار می‌گردد [37].

در این پایان‌نامه تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری بی‌اسپلاین‌هایی که در تحلیل آیزوژئومتریک استفاده می‌شوند، تعریف می‌گردد و تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری که برای هر وصله از مدل یک مربع واحد است، با استفاده از توابع پایه شعاعی فرمول‌بندی می‌شود. تابع

مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری حل می‌شود و تابع مجموعه سطوح تراز بروز رسانی شده به فضای فیزیکی نگاشت می‌شود.

در این بخش ابتدا روش مجموعه سطوح مرسوم شرح داده می‌شود و سپس فرمول‌بندی تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری با استفاده از توابع پایه شعاعی برای بهینه‌سازی توپولوژی بسط داده می‌شود و در آخر نیز تحلیل حساسیت شرح داده می‌شود.

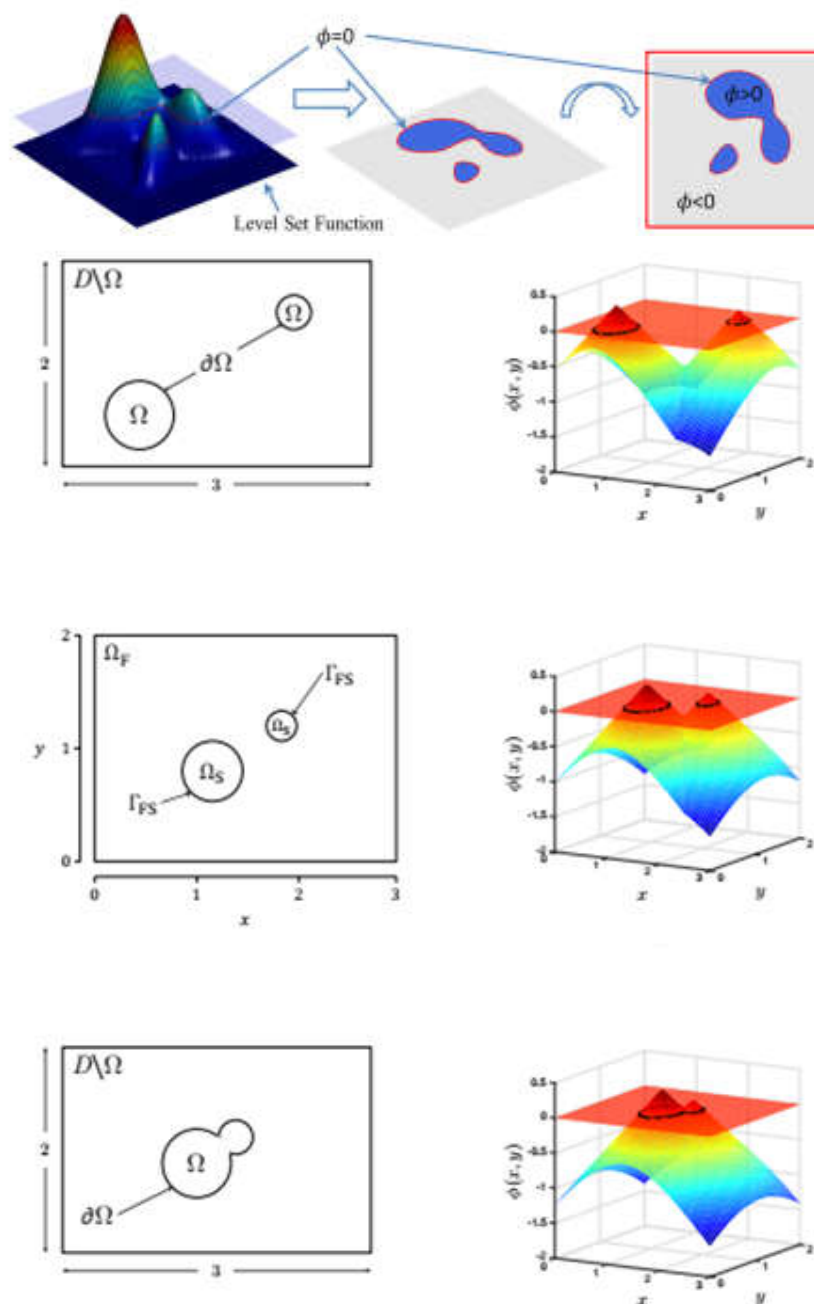
۴-۲ روش مجموعه سطوح تراز مرسوم

در بهینه‌سازی توپولوژی به روش مجموعه سطوح تراز، مرزهای طراحی سازه توسط تراز صفر از تابع با بُعد بالاتر $\Phi(x)$ نشان داده می‌شود. هر برشی از تراز تابع $\Phi(x)$ مرزهای سازه مورد نظر را در آن تراز نشان می‌دهد. بنابراین هر تغییری در تابع $\Phi(x)$ در طول فرآیند بهینه‌سازی می‌تواند موجب حرکت مرزهای سازه، جدا شدن یا به هم پیوستن حفرات شود.

تابع مجموعه سطوح تراز بر روی کل دامنه‌ی طراحی تعریف می‌شود و فرض می‌شود که تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز $\Phi(x)$ ، توپولوژی و مرزهای سازه را نمایش می‌دهد بنابراین با در نظر گرفتن این فرض، می‌توانیم نواحی داخل و خارج مرزها را نشان داد که در شکل ۴-۱ نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}\Phi(x) &> 0 & \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \Phi(x) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \\ \Phi(x) &< 0 & \forall x \in D \setminus \Omega\end{aligned}\tag{۴-۱}$$

که در رابطه‌ی (۴-۱)، $x \in D \subset \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R}^d\}$ بیانگر دامنه طراحی ثابت و $\partial\Omega$ بیانگر مرزهای نواحی دارای مصالح Ω می‌باشند.



شکل ۴-۱ نمایش تابع‌های مجموعه سطوح تراز و شکل مرزها در تراز صفر آن تابع [38, 59].

با در نظر گرفتن تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز $\Phi(x)$ و اجازه بدهیم که تابع $\Phi(x)$ با زمان t تغییر کند، مجموعه‌ای از نقاط بر روی مرزهای سازه را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:

$$S(\mathbf{x}) = \{\mathbf{x}(t) : \Phi(\mathbf{x}(t), t) = 0\} \quad (۲-۴)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه‌ی (۳-۴) نسبت به زمان، معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی به‌صورت زیر حاصل می‌شود که وابستگی تابع Φ را به زمان نشان می‌دهد:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - v_n |\nabla \Phi(\mathbf{x}, t)| = 0 \quad ; \quad v_n = \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) \cdot \mathbf{n} \quad ; \quad \mathbf{n} = \frac{-\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} \quad ; \quad \Phi(x, 0) = \Phi_0(x) \quad (3-4)$$

در رابطه‌ی (۳-۴)، $\nabla(\cdot)$ بیانگر گرادیان تابع اسکالر و v_n بیانگر بردار سرعت نرمال تابع مجموعه سطوح تراز است که به تابع هدف مسئله بستگی دارد و از تحلیل حساسیت مسئله بهینه‌سازی به-دست می‌آید و $\Phi_0(x)$ تابع مجموعه سطوح تراز اولیه در زمان صفر است.

در مدل دینامیکی تابع مجموعه سطوح تراز، $\frac{d\mathbf{x}}{dt}$ حرکت یک نقطه بر روی سطح است که از بهینه-سازی تابع هدف حاصل می‌شود و می‌تواند به‌عنوان موقعیت $\mathbf{x}$ و هندسه‌ی سطح در آن نقطه باشد. در این صورت مرز بهینه‌ی سازه از حل معادله‌ی دیفرانسیل جزئی بر روی تابع Φ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = v_n |\nabla \Phi(x, t)| \quad (4-4)$$

این روش دارای دو مزیت است؛ اولاً تابع مجموعه سطوح تراز از نظر توپولوژیکی منعطف است، یعنی تابع اسکالر Φ سه‌بعدی تعریف می‌شود تا همیشه به‌سادگی توپولوژی را داشته باشیم؛ مجموعه سطوح تراز توانایی نمایش مرزها و شکل‌های پیچیده اعم از به هم پیوستن و جدا شدن حفرات را دارا می‌باشد بنابراین نیازی به فرمول‌بندی مجدد پارامترهای مدل نیست، زیرا مدل به مقدار قابل توجهی تغییر شکل می‌دهد. ثانیاً، این مدل می‌تواند شامل تعداد زیادی از درجات آزادی باشد و تعدادی از تکنیک‌های عددی برای این‌که مسئله مقدار اولیه‌ی رابطه‌ی (۴-۴) را از نظر محاسباتی قدرتمند و کارآمد کنند توسعه یافته‌اند [35].

در مقابل روش مجموعه سطوح تراز مرسوم دارای معایب و مشکلات محاسباتی می‌باشد که در اینجا به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم. روش مجموعه سطوح تراز مرسوم برای حل رابطه‌ی (۳-۴) که معادله دیفرانسیل جزئی همیلتون-ژاکوبی است به انتخاب مناسبی از روش‌های تفاضل محدود در یک شبکه-ی کارترین ثابت نیاز دارد. فرآیند اصلی بروز رسانی مجموعه سطوح تراز مرسوم شامل روش اختلاف

بالادستی، مقداردهی مجدد اولیه و توسعه سرعت می‌باشد و بازه زمانی باید به اندازه‌ای کوچک باشد تا شرط کورانت-فردریشز-له‌وی^۱ برای پایداری عددی اقناع گردد.

در استراتژی روش مجموعه سطوح تراز مرسوم، تابع مجموعه سطوح تراز باید بارها مجدداً مقداردهی اولیه شود تا یک تابع فاصله علامت‌دار را برقرار کند. مقداردهی مجدد اولیه یک فرایند مهم در روش مجموعه سطوح تراز مرسوم است که برای ثابت نگه داشتن نُرم گرادیان تابع مجموعه سطوح تراز و پایداری تکامل مرزها است. ضعف دیگر روش مجموعه سطوح تراز مرسوم، عدم وجود ظرفیت در ایجاد حفرات جدید در داخل دامنه‌ی مصالح است. یک راه کلی برای غلبه بر این ضعف، ایجاد تعداد کافی حفره در طراحی اولیه برای حفظ پیچیدگی توپولوژی سازه‌ای است زیرا روش مجموعه سطوح تراز به سادگی می‌تواند با ادغام حفرات، تغییرات توپولوژی را ایجاد کند. برای غلبه بر کاستی‌های روش مجموعه سطوح تراز مرسوم در این بخش برای بهینه‌سازی توپولوژی به روش مجموعه سطوح تراز، تابع مجموعه سطوح تراز با استفاده از توابع پایه شعاعی فرمول‌بندی می‌شود. فرمول‌بندی تابع مجموعه سطوح تراز با استفاده از توابع پایه شعاعی، معادله دیفرانسیل جزئی همیلتون-ژاکوبی را به یک سیستم معادله دیفرانسیل ساده ریاضی تبدیل می‌کند و با اعمال روش تقریبی برای حل این سیستم معادله، مقدار تابع هدف در حالی که قیدها اقناع می‌شوند می‌تواند کاهش یابد. همچنین این روش به دلیل توانایی در ایجاد حفرات جدید در دامنه‌ی طراحی به طرح‌های اولیه وابستگی ندارد. در ادامه به تعریف تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری که توسط توابع پایه شعاعی فرمول‌بندی می‌شود پرداخته می‌شود.

^۱ CFL: Courant-Friedrichs-Lewy

۳-۴ تابع مجموعه سطوح تراز بر مبنای توابع پایه شعاعی در فضای پارامتری نربز

تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری توابع پایه نربز که برای تقریب مدل هندسی و تجزیه و تحلیل آیزوژئومتریک از آنها استفاده می‌شوند توسط توابع پایه شعاعی تقریب زده می‌شود. با استفاده از توابع پایه شعاعی، معادله‌ی دیفرانسیل جزئی همیلتون-ژاکوبی به یک سیستم معادله‌ی دیفرانسیل ساده ریاضی تبدیل می‌شود که حرکت مرزهای آزاد را در روش مجموعه سطوح تراز مدیریت می‌کند. برای تعریف تابع مجموعه سطوح تراز بر روی فضای پارامتری توابع پایه نربز، تراز صفر تابع $\Phi(\mathbf{r})$ که در آن $\mathbf{r} = (r, s)$ و r و s بردارهای گره‌ای تعریف شده در رابطه‌های (۳-۲۶) و (۳-۲۷) هستند را در نظر بگیریم و به تابع $\Phi(\mathbf{r})$ اجازه بدهیم که با زمان تغییر کند، با توجه به رابطه‌ی (۴-۲) مجموعه نقاط در روی مرزهای سازه به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(t) = \{\mathbf{r}(t) : \Phi(\mathbf{r}(t), t) = 0\} \quad (۴-۵)$$

با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه‌ی (۴-۵) نسبت به زمان، معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی مانند رابطه‌ی (۴-۳) در فضای پارامتری به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \Phi(\mathbf{r}, t) \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad (۴-۶)$$

با تعریف v_n بردار سرعت نرمال در فضای پارامتری به‌صورت زیر:

$$v_n = \frac{-\nabla \Phi \cdot d\mathbf{r} / dt}{|\nabla \Phi|} \quad (۴-۷)$$

رابطه‌ی (۴-۶) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - v_n |\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)| = 0 \quad (۴-۸)$$

توابع پایه شعاعی مولتی کوادریک برای فرمول‌بندی تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری نربز به‌کار برده می‌شوند که در فضای پارامتری در i اُمین گره به‌صورت زیر قابل تعریف هستند:

$$g_i(\mathbf{r}) = \sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)^2 + c_i^2} \quad (9-4)$$

در رابطه‌ی (۹-۴)، c پارامتر شکل است که معمولاً مقدار ثابت کوچکی برای همه‌ی نقاط گسسته-سازی در فضای پارامتری در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) g_i(\mathbf{r}) + p(\mathbf{r}, t) \quad (10-4)$$

در رابطه‌ی (۱۰-۴)، m تعداد نقاط گسسته‌سازی در فضای پارامتری، α_i ضریب انبساط توابع پایه شعاعی در i اُمین نقطه گسسته‌سازی هست که با زمان تغییر می‌کنند و $p(\mathbf{r}, t)$ چندجمله‌ای درجه اول است که با زمان تغییر می‌کند و برای در نظر گرفتن بخش خطی و ثابت تابع مجموعه سطوح تراز و برای اطمینان از معین-مثبت بودن راه حل اعمال می‌گردد.

برای مسائل با مدل دو بُعدی، $p(\mathbf{r}, t)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$p(\mathbf{r}, t) = p_0(t) + p_1(t)r + p_2(t)s \quad (11-4)$$

که در رابطه‌ی (۱۱-۴)، $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ ضرایب چندجمله‌ای هستند. برای اطمینان از راه حل منحصر به فرد درونیایی تابع مجموعه سطوح تراز مبتنی بر توابع پایه شعاعی، ضرایب انبساط باید از محدودیت‌های زیر تبعیت کند:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) r_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) s_i = 0 \quad (12-4)$$

تابع مجموعه سطوح تراز در رابطه‌ی (۱۰-۴) و رابطه‌ی (۱۱-۴) با محدودیت‌های رابطه‌ی (۱۲-۴) با هم ترکیب می‌شوند و به‌صورت ماتریسی زیر می‌توانند نوشته شوند:

$$\mathbf{H}\alpha(t) = \Phi(t) \quad (13-4)$$

که در آن :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{P} \\ \mathbf{P}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (۱۴-۴)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{r}_1) & \cdots & g_m(\mathbf{r}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(\mathbf{r}_m) & \cdots & g_m(\mathbf{r}_m) \end{bmatrix} \quad (۱۵-۴)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_m & s_m \end{bmatrix} \quad (۱۶-۴)$$

$$\mathbf{a}(t) = [\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_m \quad p_0 \quad p_1 \quad p_2]^T \quad (۱۷-۴)$$

$$\Phi(t) = [\Phi(\mathbf{r}_1, t) \quad \cdots \quad \Phi(\mathbf{r}_m, t) \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (۱۸-۴)$$

از آنجا که ماتریس $\mathbf{H}$ معکوس پذیر است، بنابراین ضرایب انبساط به صورت زیر می توانند محاسبه شوند:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{H}^{-1} \Phi(t) \quad (۱۹-۴)$$

بنابراین، تابع مجموعه سطوح تراز در رابطه‌ی (۱۰-۴) به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \mathbf{g}(\mathbf{r})^T \mathbf{a}(t) \quad (۲۰-۴)$$

که در رابطه‌ی فوق $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \{g_1(\mathbf{r}) \quad \cdots \quad g_m(\mathbf{r}) \quad 1 \quad r \quad s\}^T \quad (۲۱-۴)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۲۰-۴) در رابطه‌ی (۸-۴)، معادله همیلتون-ژاکوبی به معادله حاکم بر مبنای

ضرایب انبساط توابع پایه شعاعی تبدیل می شود. بنابراین داریم:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r})^T \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} - \nu_n |(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{r})) \mathbf{a}(t)| = 0 \quad (۲۲-۴)$$

که عبارت $|\nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}) \mathbf{a}(t)|$ در رابطه‌ی (۲۲-۴) به صورت زیر تعریف می شود:

$$|(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{r})) \mathbf{a}(t)| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial r} \mathbf{a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial s} \mathbf{a}\right)^2} \quad (۲۳-۴)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial r} = \left\{ \frac{\partial g_1(\mathbf{r})}{\partial r} \quad \dots \quad \frac{\partial g_m(\mathbf{r})}{\partial r} \quad 0 \quad 1 \quad 0 \right\}^T \quad (24-4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{r})}{\partial s} = \left\{ \frac{\partial g_1(\mathbf{r})}{\partial s} \quad \dots \quad \frac{\partial g_m(\mathbf{r})}{\partial s} \quad 0 \quad 0 \quad 1 \right\}^T \quad (25-4)$$

برای مسئله درونیابی وابسته به زمان، برای اطمینان از این که ضرایب انبساط می‌توانند به واسطه‌ی شرایط معین-مثبت اسپلاین مولتی کوادریک حل شوند، محدودیت‌های جانبی زیر باید تعریف گردند:

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) r_i = 0, \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) s_i = 0 \quad (26-4)$$

در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی، به دلیل این که لازم است مقادیر اولیه تابع مجموعه سطوح تراز $\Phi(t_0)$ برای تمام نقاط تعریف شود و ماتریس $\mathbf{H}$ معکوس‌پذیر است، مقادیر اولیه ضرایب انبساط $\alpha(t_0)$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\alpha(t_0) = \mathbf{H}^{-1} \Phi(t_0) \quad (27-4)$$

بنابراین معادله اصلی دیفرانسیل جزئی وابسته به زمان همیلتون-ژاکوبی به یک سیستم معادلات ساده ریاضی که بر حرکت مرزهای دینامیکی حاکم است تبدیل می‌شود که آن را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\mathbf{H} \frac{d\alpha}{dt} - \mathbf{B}(\alpha, t) = 0 \quad (28-4)$$

که در آن $\mathbf{B}(\alpha, t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{B}(\alpha, t) = \begin{pmatrix} \nu_n(\mathbf{r}_1, t) |(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}_1)) \alpha(t)| \\ \vdots \\ \nu_n(\mathbf{r}_m, t) |(\nabla \mathbf{g}(\mathbf{r}_m)) \alpha(t)| \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (29-4)$$

سیستم معادلات ساده ریاضی می‌تواند به روش مرتبه اول اویلری روبه جلو^۱ حل شوند و حل تقریبی آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{a}(t_{i+1}) = \mathbf{a}(t_i) + \Delta t \mathbf{H}^{-1} \mathbf{B}(\mathbf{a}(t_i), t_i) \quad (۳۰-۴)$$

که در رابطه‌ی فوق t_i و Δt به ترتیب i امین گام زمانی و اندازه گام زمانی هستند. رابطه‌ی فوق در عمل ممکن است موجب ناپایداری‌های عددی نامطلوبی شود. بنابراین شی و میر مهدی [60] برای جلوگیری از این مشکل، روش نرمالایز شده‌ای را ارائه کردند که در آن بردار سرعت‌ها به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{B}(t_i) = \{v_n(r_1, t_i) \quad \dots \quad v_n(r_n, t_i) \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \quad (۳۱-۴)$$

این روش را می‌توان به عنوان حذف کننده گرادیان از (۲۸-۴) در نظر گرفت و تنها در صورتی با (۲۸-۴) مطابقت دارد که اگر $|\nabla \Phi| = 1$ باشد؛ که به این معنا است که تابع فاصله علامت‌دار باید حداقل در اطراف مرز تابع مجموعه سطوح تراز Φ برقرار باشد. روش‌های مقداردهی مجدد اولیه با حل معادله دیفرانسیل جزئی و روش پیشروی سریع، برای حفظ ویژگی فاصله علامت‌دار تابع مجموعه سطوح تراز و اطمینان حاصل کردن از دقت کافی دوتا از رایج‌ترین راه‌ها هستند. یک روش ساده و تقریبی مقداردهی مجدد اولیه برای جلوگیری از بسیار بزرگ یا کوچک شدن مقادیر $|\nabla \Phi|$ در اطراف مرزها در این بخش اعمال می‌شود. بنابراین تابع مجموعه سطوح تراز Φ به Φ'' با استفاده از روش تقریبی زیر بروز رسانی می‌شود:

$$\Phi'' = \frac{\Phi}{\text{mean}\left(|\nabla \Phi_1^0|, |\nabla \Phi_2^0|, \dots, |\nabla \Phi_k^0|\right)} \quad (۳۲-۴)$$

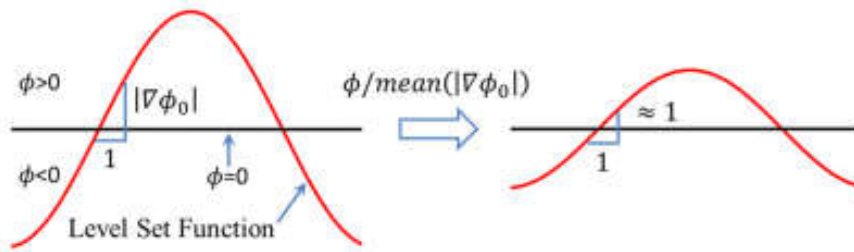
که در رابطه‌ی (۳۲-۴)، Φ_k^0 و $|\nabla \Phi_k^0|$ به ترتیب مقدار مجموعه سطوح تراز و گرادیان در k امین گره در اطراف تراز صفر هستند و $|\cdot|$ نیز نشان دهنده نرم اقلیدسی^۱ و عبارت $\text{mean}(f_1, f_2, \dots, f_k)$ بیان-

^۱ First-order forward Euler's method

کننده مقدار میانگین $f_i (i=1,2,\dots,k)$ است. بنابراین مخرج رابطه‌ی (۳۲-۴) مقدار متوسط $|\nabla\Phi|$ در اطراف مرزهای سازه را نشان می‌دهد. رابطه‌ی بین Φ و α خطی است، پس رابطه‌ی (۳۲-۴) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\alpha'' = \frac{\alpha}{\text{mean}\left(|\nabla\Phi_1^0|, |\nabla\Phi_2^0|, \dots, |\nabla\Phi_k^0|\right)} \quad (33-4)$$

در شکل ۲-۴ دیاگرام شماتیک این روش نشان داده شده است. در مقایسه با روش مرسوم مقداردهی مجدد اولیه، این روش به سادگی قابل اعمال است و می‌تواند مرزها را به صورت مؤثری به دست آورد. علاوه بر این، این روش فقط مقادیر نسبی تابع مجموعه سطوح تراز را تغییر می‌دهد؛ بنابراین از ایجاد حفرات جدید جلوگیری نمی‌کند.



شکل ۲-۴ مقداردهی مجدد اولیه تقریبی [38].

تابع دلتا دیراک $\delta(\Phi)$ برای جلوگیری از رشد بیش از حد تابع مجموعه سطوح تراز به فرآیند تکاملی در رابطه‌ی (۳۰-۴) افزوده می‌شود. که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta(\Phi) = \begin{cases} 0 & \Phi > \Delta \\ \frac{3}{4\Delta} \left(1 - \frac{\Phi^2}{\Delta^2}\right) & -\Delta \leq \Phi \leq \Delta \\ 0 & \Phi < -\Delta \end{cases} \quad (34-4)$$

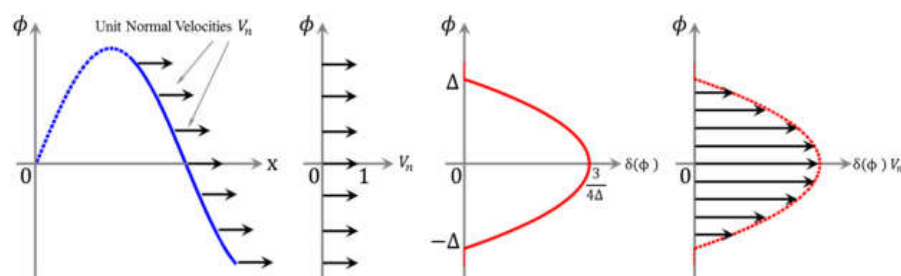
بنابراین رابطه‌ی (۳۰-۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\alpha(t_{i+1}) = \alpha''(t_i) + \Delta t \mathbf{H}^{-1} \hat{\mathbf{B}}(\alpha''(t_i), t_i) \quad (35-4)$$

که $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{a}''(t_i), t_i)$ ، بیانگر بردار سرعت بروز رسانی شده در گام زمانی t_i است و آن را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{a}''(t_i), t_i) = \begin{Bmatrix} v_n(\mathbf{r}_1, t_i) \delta(\Phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{a}''(t_i))) \\ \vdots \\ v_n(\mathbf{r}_n, t_i) \delta(\Phi(\mathbf{r}_n, \mathbf{a}''(t_i))) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (۳۶-۴)$$

پارامتر Δ برای کنترل مقدار حد بالا و پایین تابع مجموعه سطوح تراز استفاده می شود. تأثیر $\delta(\Phi)$ نیز در شکل ۳-۴ نشان داده شده است. زمانی که مقدار تابع مجموعه سطوح تراز بالاتر از Δ یا پایین تر از $-\Delta$ است، سرعت نرمال برای جلوگیری از این که مقدار Φ به بی نهایت برسد با ضرب شدن در تابع $\delta(\Phi)$ در نتیجه به صفر می رسد.



شکل ۳-۴ تأثیر تابع دلتا دیراک [38].

فرمول بندی با استفاده از توابع پایه شعاعی مولتی کوادریک، تابع مجموعه سطوح تراز نسبتاً هموارتر با عملکرد مقداردهی اولیه مجدد را در طول فرآیند بهینه سازی ایجاد می کند و تشکیل حفرات جدید در داخل دامنه ی مصالح امکان پذیر می شود. بنابراین طرح نهایی بهینه از طرح های اولیه مستقل است.

۴-۴ تعریف مسئله بهینه‌سازی

مسئله بهینه‌سازی توپولوژی با هدف کمینه کردن انرژی کرنشی صفحات خمشی در حالت الاستیک با در نظر گرفتن قید حجم مصالح به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \text{Minimize}_{\Phi} \quad & J(\mathbf{u}, \Phi) = \int_{\Omega} ((\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) H(\Phi) d\Omega = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \mathbf{k}^e(\Phi) \mathbf{u} \\ \text{Subject to} \quad & \text{equilibrium} \\ & \text{volume constraint: } V(\Phi) \leq V_{max} \\ & \text{design restrictions} \end{aligned} \quad (۳۷-۴)$$

که در رابطه‌ی فوق $J(\mathbf{u}, \Phi)$ تابع هدف، $\mathbf{u}$ بردار تغییر مکان نقاط کنترلی برای یک المان گره‌ای با ماتریس ضرایب $\mathbf{k}^e$ ، nk نیز تعداد کل المان‌های گره‌ای و $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$ بیانگر بردار کرنش هستند. $V(\Phi)$ حجم مصالح و V_{max} بیانگر حداکثر مصالح مجاز در دامنه مصالح می‌باشند. $H(\Phi)$ نیز بیانگر تابع هوی‌ساید است که برای نشان دادن وجود مصالح در یک نقطه از تابع مجموعه سطوح تراز Φ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(\Phi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \Phi \geq 0 \\ 0 & \text{if } \Phi < 0 \end{cases} \quad (۳۸-۴)$$

در فرمولاسیون تابع مجموعه سطوح تراز، دامنه طراحی کل شامل دامنه فضای خالی و دامنه مصالح است و هیچ مصالح با چگالی میانی وجود ندارد که از روش‌های چگالی متغیر، متفاوت است. گام اصلی در بهینه‌سازی توپولوژی به روش مجموعه سطوح تراز، پیدا کردن سرعت نقاط مرزی سازه است که بردار سرعت نرمال $\mathbf{v}_n$ که بیان کننده رشد تابع مجموعه سطوح تراز در راستای عمود بر مرزها است، از تحلیل حساسیت تابع لاگرانژین مسئله بهینه‌سازی و روش تندترین شیب محاسبه می‌شود. برای محاسبه‌ی ضریب لاگرانژ از روش توسعه یافته بروز رسانی کردن ضریب لاگرانژ^۱ استفاده می‌کنیم که در بخش بعدی تعریف می‌گردد. بنابراین تابع لاگرانژین مسئله بهینه‌سازی به شکل زیر تعریف می‌گردد:

^۱ Augmented Lagrangian Updating Scheme

$$L(\mathbf{u}, \Phi, \lambda) = J(\mathbf{u}, \Phi) + \lambda g(\Phi) \quad (39-4)$$

که در رابطه‌ی فوق λ و $g(\Phi)$ به ترتیب ضریب لاگرانژ و تابع قید هستند که $g(\Phi)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g(\Phi) = V(\Phi) - V_{\max} = 0, \quad V(\Phi) = \sum_{e=1}^{nk} \left(\int_{V^e} H(\Phi) dV^e \right) \quad (40-4)$$

بنابراین رابطه‌ی (39-4) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$L(\mathbf{u}, \Phi) = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \mathbf{k}^e(\Phi) \mathbf{u} + \lambda \left(\sum_{e=1}^{nk} \left(\int_{V^e} H(\Phi) dV^e \right) - V_{\max} \right) \quad (41-4)$$

برای کمینه کردن تابع لاگرانژین مسئله بهینه‌سازی، تغییرات در تابع لاگرانژین نسبت به زمان باید منفی باشد. بنابراین:

$$\frac{\partial L(\Phi(\mathbf{r}))}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \Phi} \cdot (\nabla \Phi(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt}) < 0 \quad (42-4)$$

که در رابطه‌ی (42-4) عبارت $\nabla \Phi(\mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ گرادیان سرعت است. برای منفی بودن ضرب نقطه‌ای فوق، سرعت بر اساس روش تندترین شیب مانند مرجع [29] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\nabla \Phi(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = - \frac{\partial L}{\partial \Phi} \quad (43-4)$$

که عبارت $\frac{\partial L}{\partial \Phi}$ از تحلیل حساسیت مسئله بهینه‌سازی به دست می‌آید که در بخش بعدی توضیح داده می‌شود.

۴-۵ تحلیل حساسیت

در اکثر الگوریتم‌های برنامه نویسی ریاضی، برای یافتن مسیر تحقیق، اطلاعات حساسیت مورد نیاز است. مشتقات توابع هدف و قیدها در رابطه با متغیرهای طراحی با استفاده تحلیل حساسیت محاسبه

می‌شوند که نشان دهنده حساسیت‌های طرح فعلی نسبت به تغییرات کوچک در متغیرهای طراحی است.

تحلیل حساسیت به‌عنوان محاسبه‌ی مشتقات تابع هدف و قیدها نسبت به متغیرهای طراحی تعریف می‌شود؛ که انجام تحلیل حساسیت موجب سنجش میزان تغییرات یک تابع نسبت به تغییرات متغیر-های آن می‌شود. در مسئله‌های بهینه‌سازی نیاز داریم که از تابع هدف و قیدها نسبت به متغیرهای طراحی مشتق بگیریم. بنابراین تحلیل حساسیت امری ضروری و اساسی در حل مسائل بهینه‌سازی به روش‌های ریاضی است. به طور کلی عملکرد سازه‌ای به متغیرهای طراحی خود وابسته است. به عنوان مثال تغییر در مساحت سطح مقطع یک تیر بر وزن سازه تأثیر می‌گذارد. در صورتی که رابطه‌ی وزن برحسب متغیرهای طراحی بیان شود، محاسبه حساسیت تابع وزن نسبت به متغیرهای طراحی کار ساده‌ای می‌باشد. برای مثال وزن یک تیر با سطح مقطع دایره‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$W(r) = \pi r^2 l \quad (4-44)$$

که در آن $u=r$ برابر شعاع سطح مقطع است و l ، طول تیر است. در صورتی که شعاع به‌عنوان متغیر طراحی در نظر گرفته شود، بنابراین حساسیت طراحی W نسبت به متغیر طراحی به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{dW}{dr} = 2\pi r l \quad (4-45)$$

این نوع تابع به‌صورت صریح به متغیرهای طراحی وابسته است که تابع صریحاً با عبارت‌هایی از متغیرهای طراحی می‌تواند نوشته شود. ولی در اکثر موارد سنجش عملکرد سازه صریحاً به متغیرهای طراحی وابسته نیست. برای مثال، وقتی که تنش یک تیر به‌عنوان سنجش عملکرد سازه در نظر گرفته شود، بنابراین هیچ راه ساده‌ای برای بیان صریح حساسیت طراحی تنش به‌صورت عبارت‌هایی از متغیر طراحی r وجود ندارد و در مسائل الاستیک خطی، تنش یک سازه به واسطه تغییر مکان‌های حاصل شده از تحلیل عددی محاسبه می‌شود بنابراین حساسیت تنش $\sigma(z)$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{d\sigma}{dr} = \frac{d\sigma^T}{dz} \frac{dz}{dr} \quad (4-46)$$

که در رابطه‌ی فوق z تغییرمکان تیر است. تنش به‌عنوان تابعی از تغییرمکان به‌صورت $\frac{d\sigma}{dz}$ به سادگی حاصل می‌شود. برای محاسبه حساسیت تنش نسبت به متغیرهای طراحی سازه به طریق خاصی مشتق تغییرمکان‌ها نسبت به متغیر طراحی $\frac{dz}{dr}$ باید محاسبه شود. در حالت کلی حساسیت‌ها را می‌توان با تفاضل محدود، روش تحلیلی و یا نیمه تحلیلی محاسبه کرد. در این پایان‌نامه از روش تحلیلی برای تحلیل حساسیت استفاده می‌شود.

حساسیت‌ها با مشتق‌گیری از معادله حاکم محاسبه می‌شوند لذا محاسبه مشتق ماتریس ضرایب ضرورت دارد و اگر این مشتق با استفاده از بیان صریح ماتریس سختی با توجه به متغیر طراحی به دست آید، آن را روش تحلیلی می‌نامند.

۴-۵-۱ روش تحلیلی مستقیم

با در نظر گرفتن تابع لاگرانژین تعریف شده در رابطه‌ی (۴-۴۱)، از تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی مشتق‌گیری می‌کنیم:

$$\frac{\partial J(\text{Objective function})}{\partial \Phi} = \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \mathbf{k}^e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Phi} + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} \quad (4-47)$$

عبارت $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Phi}$ را می‌توان با مشتق‌گیری از دو طرف رابطه‌ی $\mathbf{k}^e \mathbf{u} = \mathbf{f}$ نسبت به متغیرهای طراحی با در نظر گرفتن این‌که بردار نیروهای خارجی مستقل از متغیرهای طراحی است، به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} + \mathbf{k}^e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Phi} = 0 \quad (4-48)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \Phi} = -(\mathbf{k}^e)^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} \quad (4-49)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۴-۴۹) در رابطه‌ی (۴-۴۷) داریم:

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \mathbf{k}^e (-\mathbf{k}^e)^{-1} \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} \quad (۴-۵۰)$$

با ساده‌سازی رابطه‌ی فوق، می‌توانیم آن را به‌صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = -\sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} \quad (۴-۵۱)$$

در نهایت مشتق تابع هدف نسبت به متغیر طراحی، به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} \mathbf{u} \quad (۴-۵۲)$$

ماتریس ضرایب برای المان‌های گره‌ای به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{k}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} H(\Phi) dV^e \quad (۴-۵۳)$$

مشتق تابع هوی‌ساید در جهت نرمال برابر تابع دلتا دیراک می‌شود، بنابراین:

$$\delta(\Phi) = H'(\Phi) \quad (۴-۵۴)$$

$$\delta(\mathbf{r}) = \nabla H \cdot \frac{\nabla \Phi}{|\nabla \Phi|} = \delta(\Phi) |\nabla \Phi| \quad (۴-۵۵)$$

بنابراین، عبارت $\frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi}$ به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{k}^e}{\partial \Phi} = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| dV^e \quad (۴-۵۶)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۴-۵۶) در رابطه‌ی (۴-۵۲)، آن را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial J}{\partial \Phi} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| dV^e \right) \mathbf{u} \quad (۴-۵۷)$$

همچنین مشتق قید در رابطه‌ی (۴-۴۰) نسبت به متغیر طراحی نیز به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{\partial V^e}{\partial \Phi} = \sum_{e=1}^{nk} \left(\int_{V^e} \frac{\partial H(\Phi)}{\partial \Phi} dV^e \right) = \sum_{e=1}^{nk} \left(\int_{V^p} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| dV^p \right) \quad (۴-۵۸)$$

با جاگذاری رابطه‌ی (۴-۵۷) در رابطه‌ی (۴-۴۱)، رابطه‌ی (۴-۴۱) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}(\Phi), \Phi)}{\partial \Phi} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| dV^e \right) \mathbf{u} + \lambda \sum_{e=1}^{nk} \left(\int_{V^e} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| dV^e \right) \quad (۴-۵۹)$$

از آنجایی که تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری توسط معادله همیلتون-ژاکوبی تکامل می‌یابد، بنابراین رابطه‌ی (۴-۵۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(۴-۶۰)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{u}(\Phi), \Phi)}{\partial \Phi} = -\frac{1}{2} \sum_{e=1}^{nk} \mathbf{u}^T \left(\int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| |\mathbf{J}_1| dV^e \right) \mathbf{u} + \lambda \sum_{e=1}^{nk} \left(\int_{V^e} \delta(\Phi) |\nabla \Phi| |\mathbf{J}_1| dV^e \right)$$

که در رابطه‌ی فوق، $|\mathbf{J}_1|$ بیان‌کننده دترمینان ماتریس ژاکوبین است. برای پیدا کردن سرعت در یک نقطه (r, s) از المان گره‌ای ke در فضای پارامتری رابطه‌ی (۴-۶۰) را در رابطه‌ی (۴-۴۳) جاگذاری می‌کنیم:

$$v = \nabla \Phi(\mathbf{r}) \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial \Phi} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{ke}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\nabla \Phi| |\mathbf{J}_1| \mathbf{u}_{ke} - \lambda |\nabla \Phi| |\mathbf{J}_1| \quad (۴-۶۱)$$

بنابراین سرعت نرمال در یک نقطه (r, s) در فضای پارامتری را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$v_n = \left(\frac{1}{2} \mathbf{u}_{ke}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{u}_{ke} - \lambda \right) |\mathbf{J}_1| \quad (۴-۶۲)$$

سرعت به‌دست آمده در رابطه‌ی (۴-۶۲) را در رابطه‌ی (۴-۳۶) جاگذاری می‌کنیم و تابع مجموعه سطوح تراز در طی فرآیند بهینه‌سازی بروز رسانی می‌شود و در آخر هم هر نقطه از تابع مجموعه سطوح تراز بروز رسانی شده در فضای فیزیکی نمایش داده می‌شود.

ضریب لاگرانژین نیز از روش توسعه یافته بروز رسانی کردن ضریب لاگرانژ تعریف شده در زیر به‌دست می‌آید و طی فرآیند بهینه‌سازی بروز رسانی می‌گردد:

$$\lambda^{k+1} = \begin{cases} \mu G^k & k \leq n_R \\ \lambda^k + \gamma^k G & k > n_R \end{cases} \quad (۴-۶۳)$$

که در آن μ و γ^k پارامترهای تکرار k ام فرآیند بهینه‌سازی هستند. که γ^k با استفاده از رابطه‌ی زیر بروز رسانی می‌شود:

$$\gamma^{k+1} = \min(\gamma^k + \Delta_\gamma, \gamma_{\max}) \quad k > n_R \quad (۴-۶۴)$$

که در آن Δ_γ و $\gamma_{\max}$ به ترتیب مقدار افزایشی به پارامتر γ در هر تکرار بهینه‌سازی و حد بالای پارامتر γ می‌باشند. تا زمانی که مقدار درصد حجمی طرح اولیه در بهینه‌سازی به روش مجموعه سطوح تراز به درصد حجمی مورد نظر نرسد، قید حجم در n_R تکرار اولیه با استفاده از رابطه‌ی زیر کاهش می‌یابد که در آن V_0 بیان کننده حجم طرح اولیه است :

$$G^k = \int_D H(\Phi) d\Omega - \left[V_0 - (V_0 - V_{\max}) \frac{k}{n_R} \right] \quad k \leq n_R \quad (۴-۶۵)$$

فصل ۵ : مثال های عددی

۵-۱ مقدمه

در این بخش چندین مثال عددی برای مسئله بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی در حالت الاستیک با تابع هدف کمینه کردن انرژی کرنشی و قید حجم مصالح با استفاده از روش مجموعه سطوح تراز ارائه شده، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در این پایان‌نامه روش به اصطلاح، مصالح جایگزین^۱ اعمال می‌شود. این روش به صورت گسترده در تحلیل حساسیت مسئله بهینه‌سازی برای به دست آوردن بردار توسعه سرعت طبیعی از انرژی کرنشی در کل دامنه طراحی، استفاده شده است. در این روش فرض می‌شود که دامنه‌های خالی با نوعی ماده ضعیف جایگزین می‌شوند که مدول الاستیسیته آن بسیار کمتر است. بنابراین برای محاسبه مدول الاستیسیته در هر المان گره‌ای می‌توانیم از رابطه‌ی زیر استفاده کنیم:

$$E_i^e = E_{min} + \nu f_i^e (E_0 - E_{min}) \quad (5-1)$$

که در آن E_i^e و νf_i^e به ترتیب مدول الاستیسیته و کسر حجم برای i امین المان گره‌ای هستند. E_0 مدول الاستیسیته مصالح جامد است که برابر یک و E_{min} نیز مدول الاستیسیته دامنه‌های خالی است که در اینجا برابر 1×10^{-6} در نظر گرفته می‌شود.

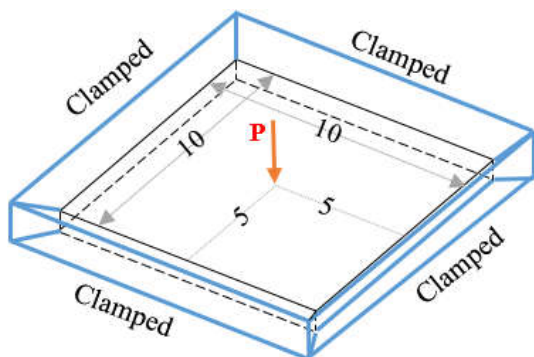
۵-۲ مثال‌های عددی

مثال ۵-۱:

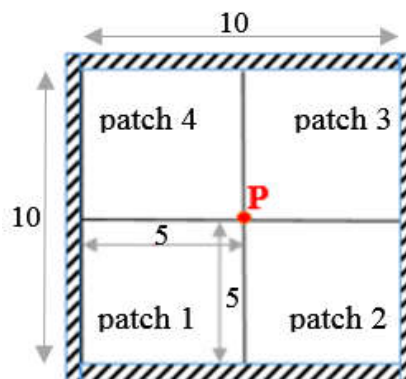
یک صفحه‌ی خمشی مربع، که چهار ضلع آن گیردار است تحت بار متمرکز در وسط صفحه همان‌طور که در شکل ۵-۱-الف) نشان داده شده است، در نظر گرفته می‌شود. از آن جایی که این مثال توسط بلبلیدیا و همکارانش در مرجع [19] مورد بررسی قرار گرفته است، از اطلاعات مشابه با آن در این مثال استفاده می‌شود. سه مدل: دو مدل با یک وصله به ترتیب با ۶۲۵ و ۲۶۰۱ نقطه‌ی کنترلی و یک

¹ ersatz-material

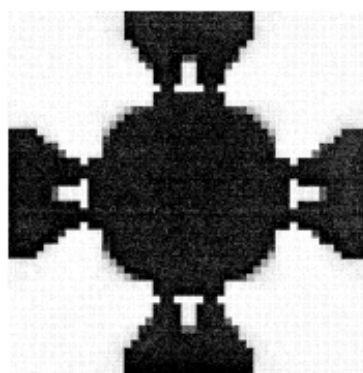
مدل با چهار وصله شامل ۲۴۰۱ نقطه‌ی کنترلی، که در جدول ۵-۱ نشان داده شده است، برای حل این مثال ارائه شده‌اند. تعداد ۲۶۰۱ گره اجزاء محدود در مرجع [19] در نظر گرفته شده است. بنابراین برای مقایسه‌ی نتایج، برای مدل دو، ۲۶۰۱ نقطه کنترلی در نظر گرفته شده است. چیدمان وصله‌ها در شکل ۵-۱(ب) نشان داده شده است. بردارهای گره‌ای باز یکسان با درجه نریز ۲ برای هر مدل در نظر گرفته می‌شوند. ضخامت صفحه‌ی خمشی برابر ۰.۱، مدول الاستیسیته $10^5 \times 10.92$ ، ضریب پواسون برابر ۰.۳ و بار متمرکز برابر $P=100$ و قید حجم نیز ۵۰ درصد مصالح در نظر گرفته می‌شود. توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودارهای همگرایی مدل یک در شکل ۵-۲ و توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودارهای همگرایی مدل دو در شکل ۵-۳ و توپولوژی بهینه‌ی نهایی مدل سه و نمودار همگرایی آن نیز در شکل ۵-۴ نشان داده شده‌اند. حالت سه بُعدی تابع مجموعه سطوح تراز و مرزهای توپولوژی بهینه در تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز برای مدل دو در شکل ۵-۵ نمایش داده شده است. با توجه به نتایج حاصل شده، توپولوژی‌های بهینه به تعداد نقاط کنترلی وابسته هستند. توپولوژی بهینه در مرجع [19]، همان‌طور که در شکل ۵-۱(پ) نشان داده شده است، با استفاده از روش همگن-سازی با اعمال جریمه، با در نظر گرفتن ۶۲۵ تا ۱۰۵۱=۵۱×۵۱ نقطه کنترلی در مدل دو، به توپولوژی بهینه حاصل شده است. با در نظر گرفتن ۲۶۰۱=۵۱×۵۱ نقطه کنترلی در مدل دو، به توپولوژی بهینه مشابهی دست می‌یابیم؛ ولی مرزهای هموارتر و صریح‌تری در توپولوژی بهینه، با استفاده از روش ارائه شده حاصل می‌شوند و همچنین دیگر مصالح با چگالی میانی نیز در توپولوژی بهینه به دست آمده مشاهده نمی‌شود و روش ارائه شده دارای دقت بیشتری است.



(الف)



(ب)

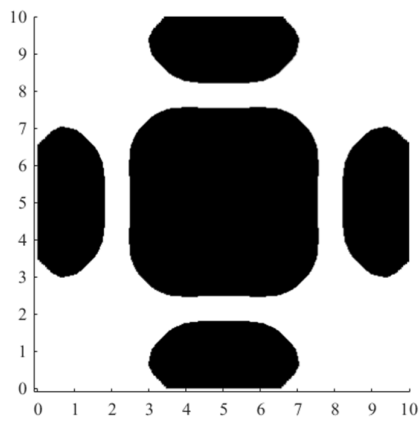


(پ)

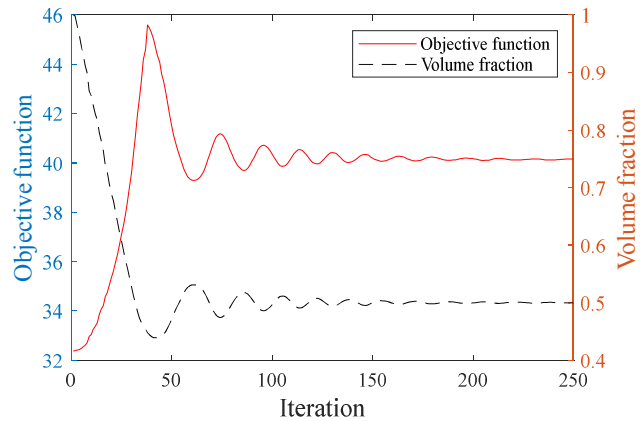
شکل ۵-۱ (الف) صفحه‌ی خمشی مربع مثال ۵-۱ با بار متمرکز در وسط که چهار ضلع آن گیردار است. (ب) ترتیب قرار گرفتن وصله‌ها. (پ) توپولوژی بهینه‌ی ارائه شده در مرجع [19].

تعداد درجات آزادی کل	تعداد نقاط کنترلی در هر وصله	تعداد وصله‌ها	مدل
۱۸۷۵	۲۵×۲۵	۱	مدل یک
۷۸۰۳	۵۱×۵۱	۱	مدل دو
۷۲۰۳	۲۵×۲۵	۴	مدل سه

جدول ۵-۱ مشخصات تعداد وصله‌ها و تعداد نقاط کنترلی در هر وصله برای مدل‌های مثال ۵-۱.

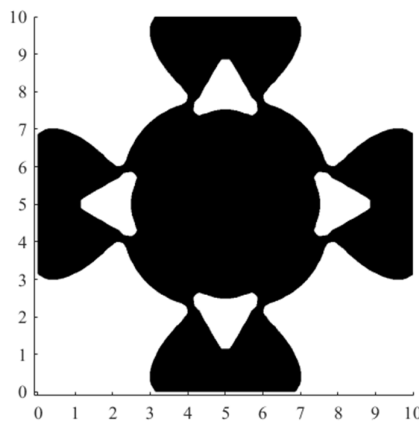


(الف)

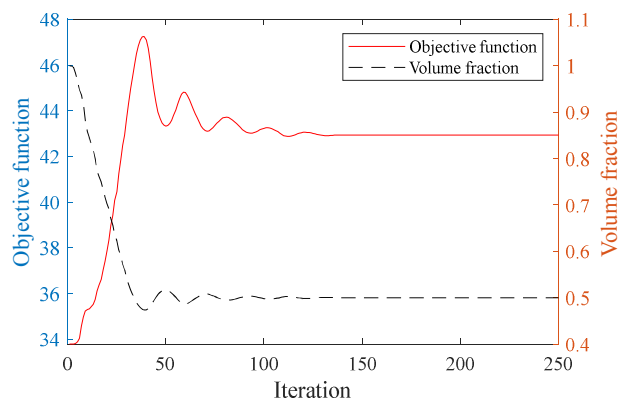


(ب)

شکل ۵-۲ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید مدل یک.

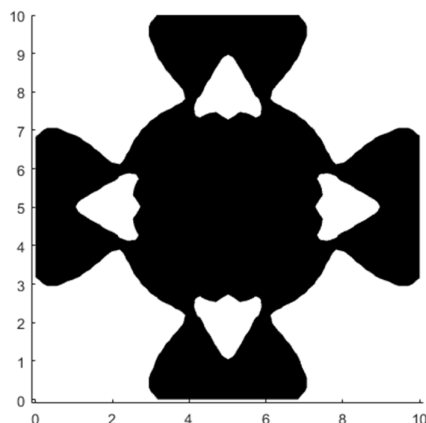


(الف)

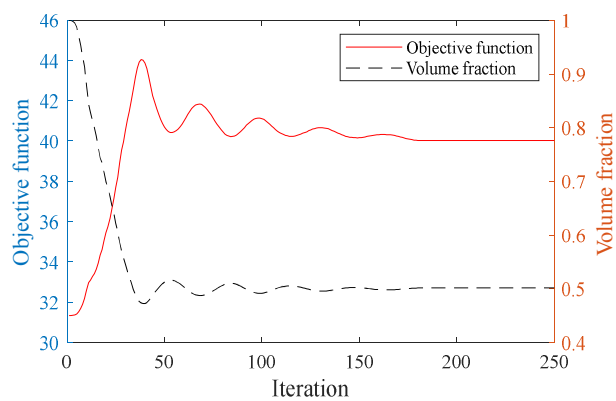


(ب)

شکل ۵-۳ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید مدل دو.

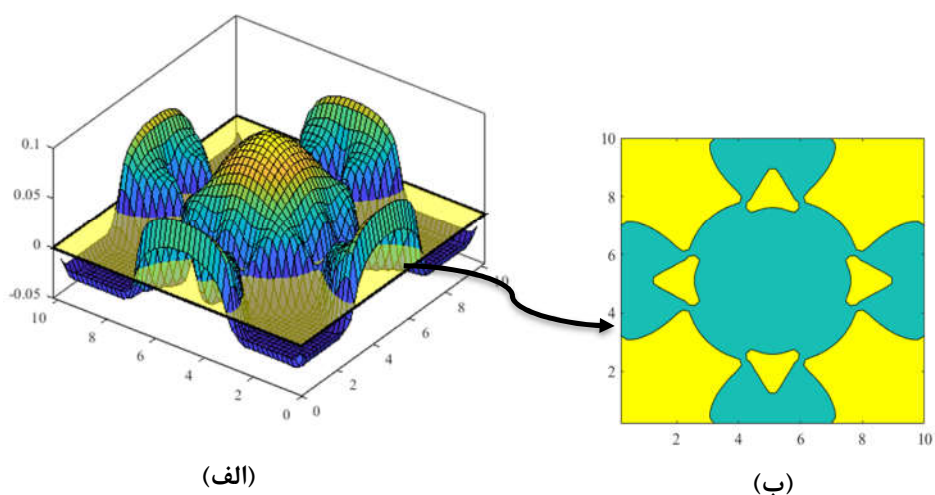


(الف)



(ب)

شکل ۵-۴ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید مدل سه.

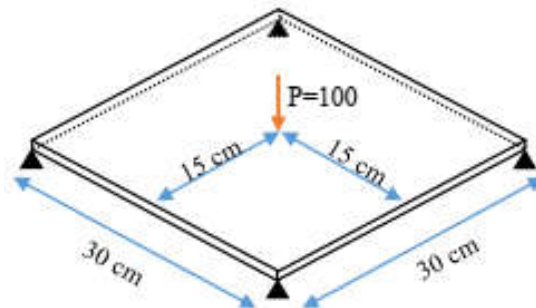


شکل ۵-۵ (الف) و (ب) به ترتیب نمایش سه بعدی تابع مجموعه سطوح تراز برای مدل دو و مرزهای توپولوژی بهینه‌ی سازه در تراز صفر تابع مجموعه سطوح تراز را نشان می‌دهد.

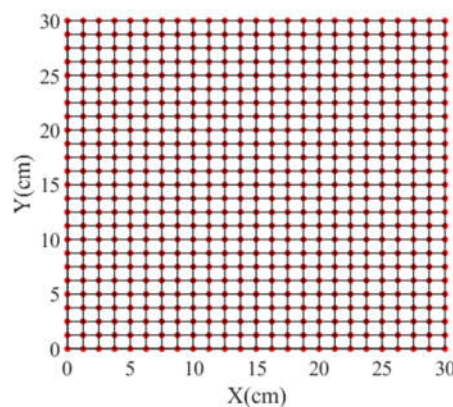
مثال ۵-۲:

یک صفحه‌ی مربعی به ضلع ۳۰ سانتی‌متر با تکیه‌گاه‌های ساده در چهار گوشه‌ی آن با بار متمرکز $P=100$ در وسط آن، با دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی نشان داده شده در شکل ۵-۶-الف را در نظر می‌گیریم. دامنه‌ی طراحی با $625 = 25 \times 25$ نقطه‌ی کنترلی گسسته‌سازی می‌شود و برای هر دو جهت بردارهای گره‌ای باز r و s با درجه نرین ۲ انتخاب می‌شوند. برای این مثال، مدول الاستیسیته برابر ۱ و ضریب پواسون برابر ۰.۳ و ضخامت برابر ۱ سانتی‌متر و قید حجم ۵۰ درصد در نظر گرفته می‌شود. شکل ۵-۶-ب شبکه‌ی نقاط کنترلی آیزوژئومتریک مسئله را نشان می‌دهد. این مثال برای دو مدل با نقاط کنترلی ثابت ولی با تعداد نقاط گسسته‌سازی متفاوت در فضای پارامتری (جدول ۵-۲) در شبکه‌ای که توابع پایه شعاعی در آن تعریف می‌شود مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل‌های ۵-۷-الف و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی را برای مدل یک و مدل دو را نشان می‌دهند و شکل‌های ۵-۸-الف و (ب) به ترتیب نمودار همگرایی تابع هدف و قید را برای مدل یک و مدل دو نشان می‌دهند.

نتایج نشان می‌دهند با تعداد نقاط گسسته‌سازی متفاوت در فضای پارامتری که توابع پایه شعاعی در آن تعریف می‌شود، توپولوژی‌های به‌دست آمده برای مدل یک و مدل دو یکسان هستند ولی مرزهای توپولوژی بهینه‌ی مدل دو نسبت به مدل یک هموارتر است. بنابراین افزایش تعداد نقاط گسسته‌سازی در فضای پارامتری موجب هموارتر شدن مرزها می‌گردد و در شکل کلی توپولوژی تأثیری ندارد.



(الف)

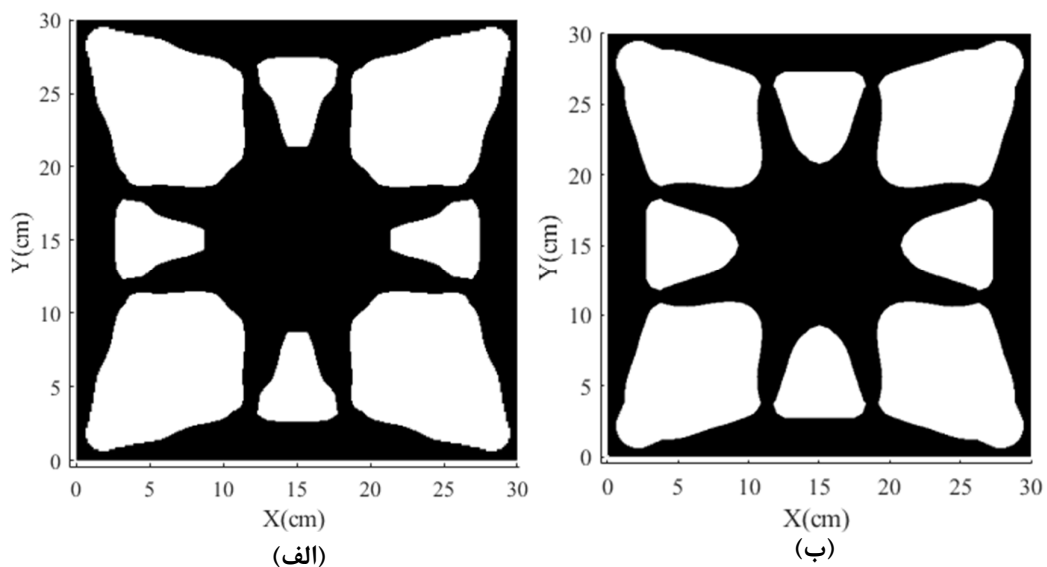


(ب)

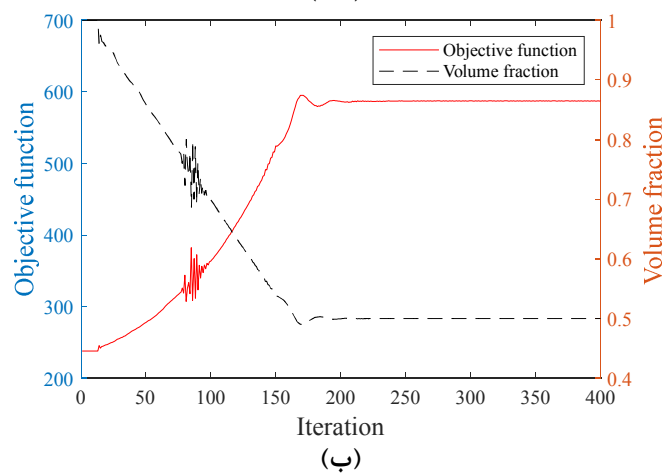
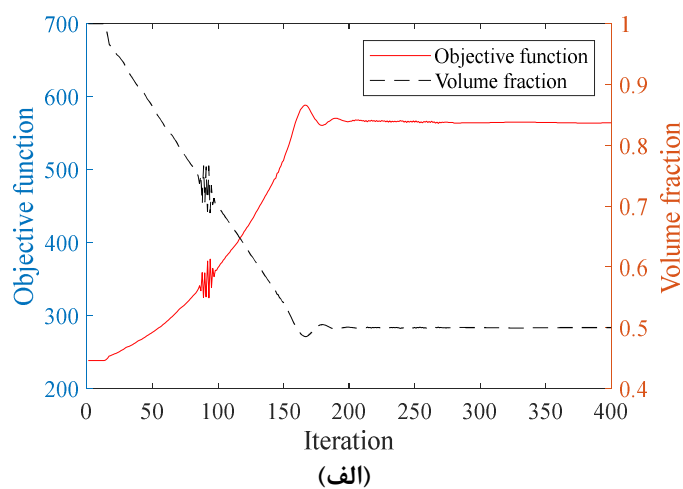
شکل ۵-۶ (الف) دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی صفحه‌ی مربع مثال ۲-۵، (ب) شبکه‌ی نقاط کنترلی.

مدل	تعداد نقاط کنترلی در هر وصله	تعداد نقاط گسسته‌سازی فضای پارامتری	بردارهای گره‌ای
مدل یک	۶۲۵	۲۴×۲۴	$r = s = \{0, 0, 0, 0, 0.435, \dots, 0.9565, 1, 1, 1\}$
مدل دو		۴۷×۴۷	

جدول ۲-۵ تعداد نقاط گسسته‌سازی متفاوت برای مثال ۲-۵.



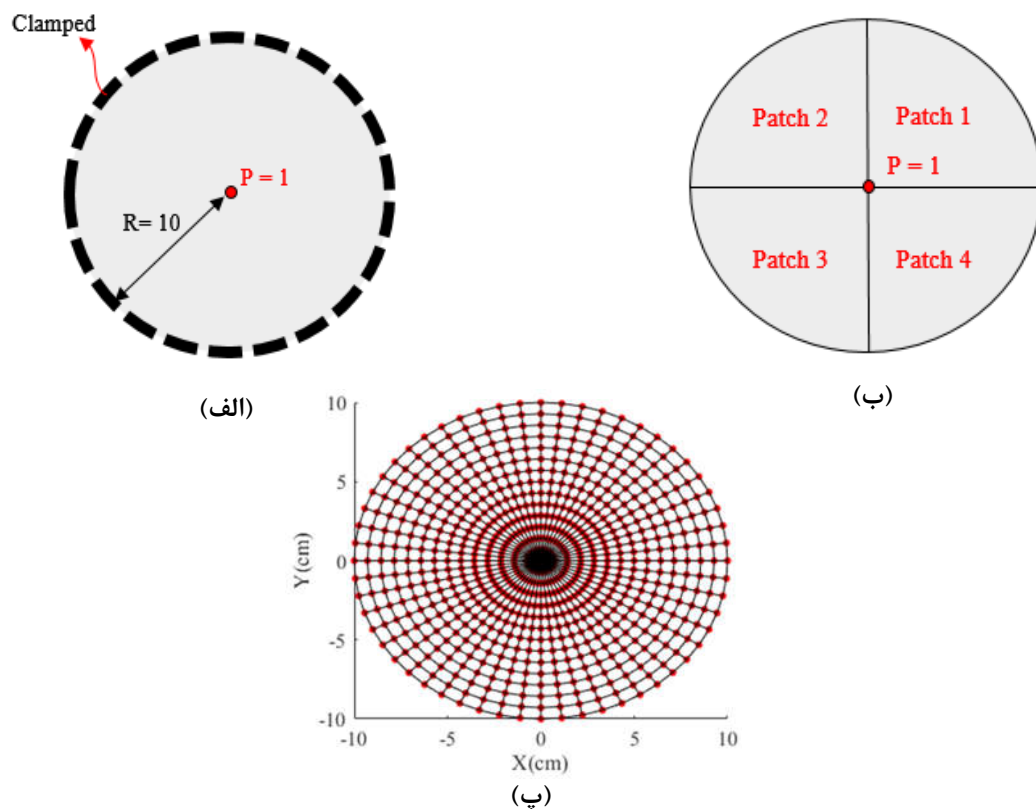
شکل ۵-۷ (الف) و (ب) به ترتیب توپولوژی بهینه‌ی نهایی برای مدل یک و مدل دو.



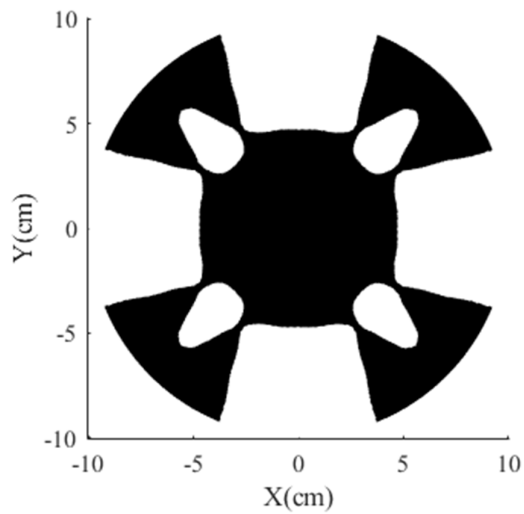
شکل ۵-۸ (الف) و (ب) به ترتیب نمودار همگرایی تابع هدف برای مدل یک و مدل دو.

مثال ۵-۳:

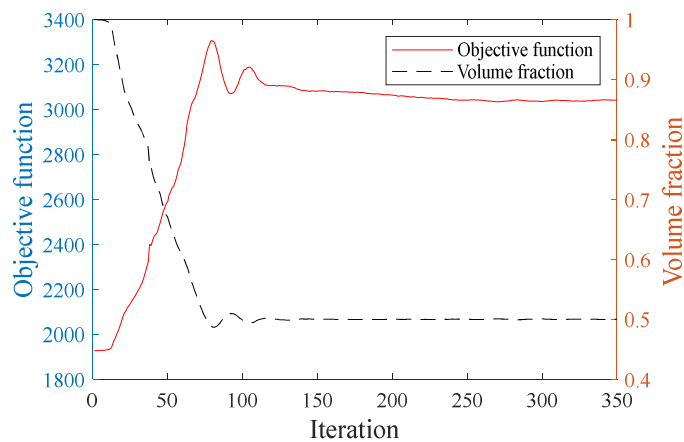
صفحه‌ی خمشی دایره‌ای با شعاع ۱۰ سانتی‌متر و تکیه‌گاه گیردار تحت بار متمرکز $P=1$ در وسط صفحه که در شکل ۵-۹-الف) نشان داده شده است، در نظر گرفته می‌شود. دامنه‌ی طراحی به چهار وصله تقسیم می‌شود و برای همه وصله‌ها در دو جهت بردارهای گره‌ای r و s با درجه نریز ۲ در نظر گرفته می‌شوند. هر وصله با ۲۲۵ تا نقطه کنترلی گسسته‌سازی می‌شود. در این مثال مدول الاستیسیته ۱، ضریب پواسون ۰.۳، و ضخامت ۱.۲ سانتی‌متر و قید حجم نیز ۵۰ درصد مصالح در نظر گرفته می‌شود. شکل ۵-۹-ب) ترتیب وصله‌ها و شکل ۵-۹-پ) شبکه‌ی نقاط کنترلی دامنه‌ی طراحی را نمایش می‌دهند. توپولوژی بهینه‌ی نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید به ترتیب در شکل‌های ۵-۱۰-ت) و ۵-۱۰-ث) نمایش داده شده‌اند. $r=s=\{0,0,0,0,0.769,\dots,0.9231,1,1,1\}$



شکل ۵-۹ (الف) دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی صفحه‌ی خمشی دایره‌ای مثال ۵-۳، (ب) ترتیب وصله‌ها، (پ) شبکه‌ی نقاط کنترلی.



(الف)



(ب)

شکل ۵-۱۰ (الف) توپولوژی بهینه‌ی نهایی و (ب) نمودار همگرایی تابع هدف و قید.

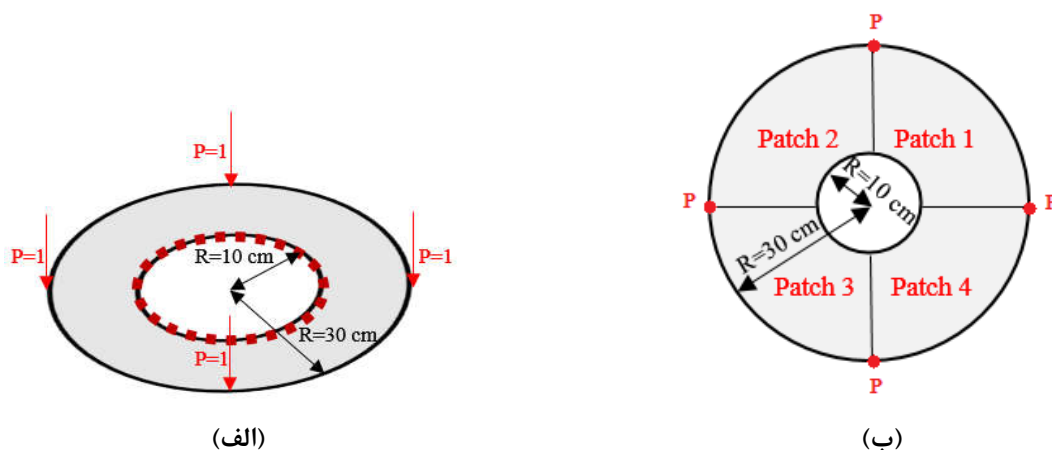
نمودار همگرایی تابع هدف و قید نشان می‌دهد که تابع هدف با اقلان قید مورد نظر همگرا می‌شود. بنابراین، شکل توپولوژی بهینه و نمودار همگرایی این مثال نشان می‌دهند که بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی با روش ارائه شده، توانایی مدل‌سازی و بهینه‌سازی دامنه‌های طراحی را دارد که مدل‌سازی آن‌ها با روش اجزاء محدود دشوار است. در مثال بعدی برای صفحه‌ی خمشی با دامنه‌ی طراحی به شکل رینگ، توپولوژی بهینه و نمودار همگرایی تابع هدف و قید حاصل شده، نشان داده شده است.

مثال ۵-۴:

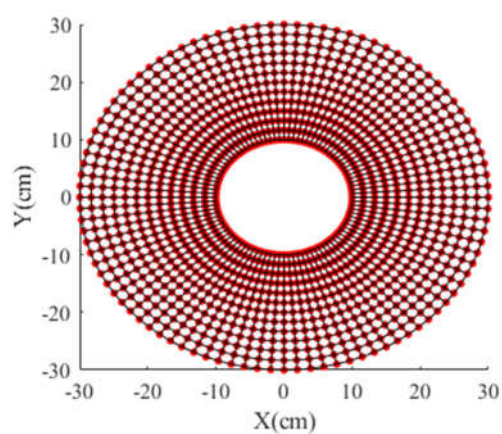
یک صفحه‌ی خمشی به حالت رینگ که شعاع داخلی آن ۱۰ سانتی‌متر و شعاع خارجی آن ۳۰ سانتی‌متر است با چهار بار متمرکز $P=1$ که به دایره شعاع خارجی آن اعمال می‌شوند، در نظر گرفته می‌شود. دامنه‌ی طراحی با چهار وصله مدل‌سازی می‌شود. دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی مثال و ترتیب وصله‌ها در شکل‌های ۵-۱۱ (الف) و (ب) نشان داده شده‌اند. بردارهای گره‌ای برای هر وصله که با ۳۲۵ نقطه کنترلی گسسته‌سازی شده و درجه نربز نیز برای هر دو جهت برابر ۲ در نظر گرفته می‌شود به صورت زیر هستند:

$$r = \{0, 0, 0, 0, 0, 43, \dots, 0, 9565, 1, 1, 1\} \quad \text{و} \quad s = \{0, 0, 0, 0, 0, 909, \dots, 0, 9091, 1, 1, 1\}$$

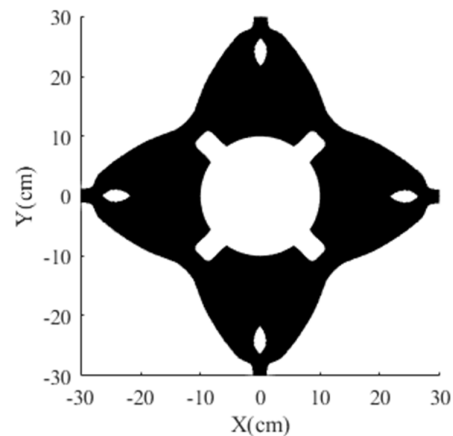
مدول الاستیسیته ۱، ضریب پواسون ۰.۳، ضخامت برابر ۱ سانتی‌متر و قید حجم ۵۰ درصد در نظر گرفته می‌شوند. شکل ۵-۱۲ (الف) شبکه‌ی نقاط کنترلی آیزوئومتریک را نشان می‌دهد. توپولوژی بهینه‌ی نهایی در شکل ۵-۱۲ (ب) و نمودار همگرایی تابع هدف و قید در شکل ۵-۱۲ (پ) نشان داده شده است. نمودار همگرایی تابع هدف و قید نشان می‌دهد که تابع هدف با اقناع قید مورد نظر همگرا می‌شود.



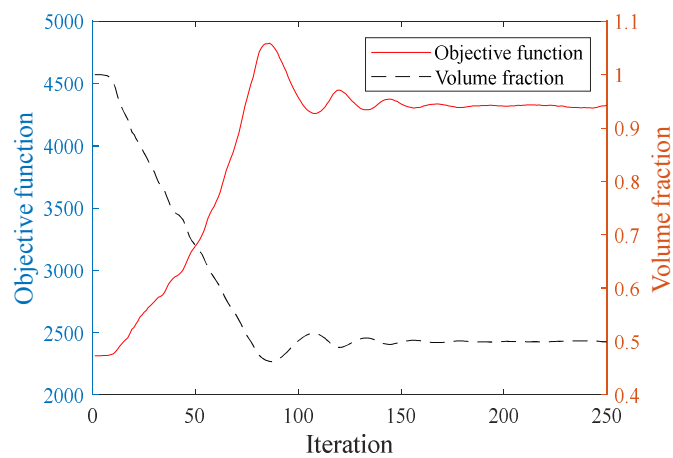
شکل ۵-۱۱ (الف) دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی مثال ۵-۴، (ب) ترتیب وصله‌ها.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۵-۱۲ (الف) شبکه‌ی نقاط کنترلی، (ب) توپولوژی بهینه‌ی نهایی، (پ) نمودار همگرایی تابع هدف و

قید مثال ۵-۴.

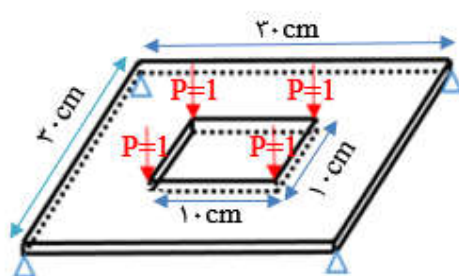
مثال ۵-۵:

صفحه‌ی خمشی با چهار تا بار متمرکز $P=1$ که دامنه‌ی طراحی و شرایط مرزی در شکل ۵-۱۳-الف) نشان داده شده است، در نظر گرفته می‌شود. دامنه‌ی طراحی با چهار وصله گسسته‌سازی می‌شود که برای همه‌ی وصله‌ها برای هر دو جهت بردارهای گره‌ای با درجه نرَبز ۲ در نظر گرفته می‌شود. بردارهای گره‌ای مرتبط با هر وصله در جدول ۵-۳ نشان داده شده است و تعداد کل نقاط کنترلی

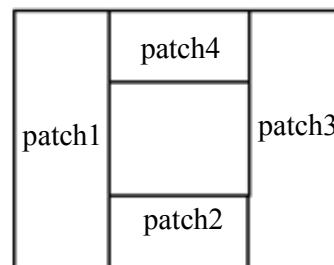
برابر ۵۷۶ تا است. برای این مثال مدول الاستیسیته ۱، ضریب پواسون ۰.۳، ضخامت ۱ سانتی متر و قید حجم برابر ۳۰ درصد در نظر گرفته شده است. شکل ۵-۱۳ (ب) نحوه گسسته سازی دامنه ی طراحی و ترتیب قرار گرفتن وصله ها را نشان می دهد. شبکه ی نقاط کنترلی در شکل ۵-۱۴ (الف) نشان داده شده است. توپولوژی بهینه نهایی و نمودار همگرایی تابع هدف و قید نیز به ترتیب در شکل های ۵-۱۴ (ب) و (پ) نمایش داده شده اند. نمودار همگرایی نشان می دهد که تابع هدف که همان کمینه کردن انرژی کرنشی است با اقناع کردن قید حجم مورد نظر، همگرا می شود.

وصله	بردارهای گره ای
۱ و ۳	$r = \{0, 0, 0, 0, 0.1429, \dots, 0.8571, 1, 1, 1\}$
	$s = \{0, 0, 0, 0, 0.435, \dots, 0.9565, 1, 1, 1\}$
۲ و ۴	$r = \{0, 0, 0, 0, 0.1429, \dots, 0.8571, 1, 1, 1\}$
	$s = \{0, 0, 0, 0, 0.435, \dots, 0.9565, 1, 1, 1\}$

جدول ۵-۳ بردارهای گره ای مرتبط با هر وصله برای مثال ۵-۵.

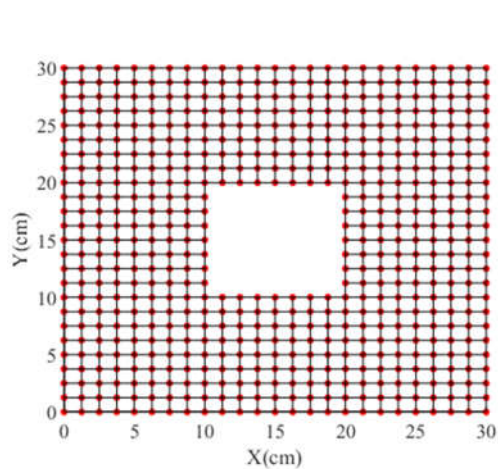


(الف)

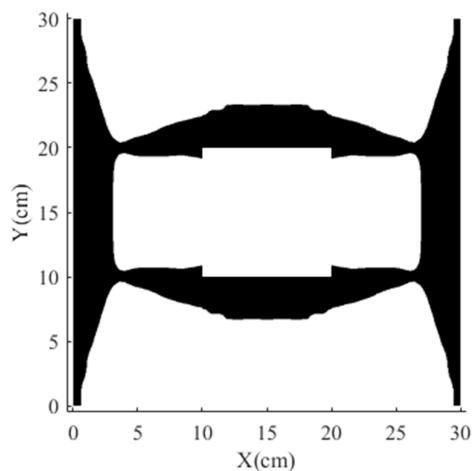


(ب)

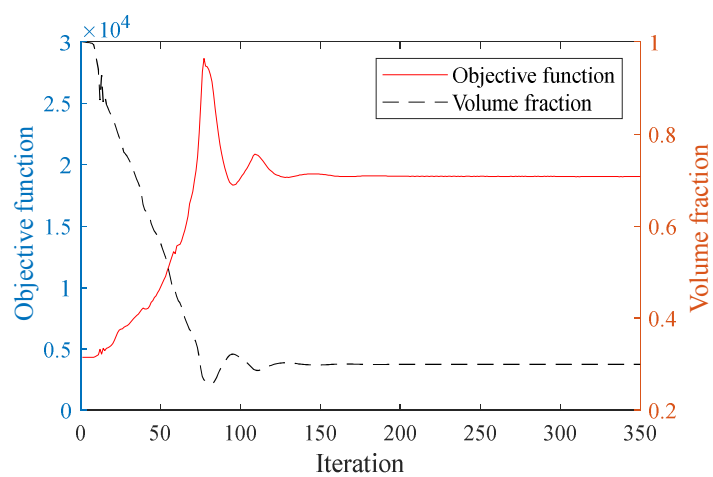
شکل ۵-۱۳ (الف) دامنه ی طراحی و شرایط مرزی صفحه ی خمشی مثال ۵-۵، (ب) ترتیب وصله ها.



(الف)



(ب)



(پ)

شکل ۵-۱۴ (الف) شبکه‌ی نقاط کنترلی، (ب) توپولوژی بهینه‌ی نهایی، (پ) نمودار همگرایی تابع هدف و قید مثال ۵-۵.

فصل ۷ : نتایج و مشاهدات

۶-۱ مقدمه

در فصل‌های قبل تحلیل آیزوژئومتریکی صفحات خمشی و روش مجموعه سطوح تراز مبتنی بر آیزوژئومتریکی برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی و همچنین مثال‌های عددی برای بررسی کارایی و توانایی روش ارائه گردیدند. در این بخش نتایج کلی به دست آمده از این پژوهش به صورت مختصر ذکر می‌شود و در آخر هم پیشنهاداتی برای علاقه‌مندان در این زمینه برای کارهای آتی ارائه شده است.

۶-۲ نتایج

در این پایان‌نامه بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی توسط روش مجموعه سطوح تراز بر مبنای آیزوژئومتریکی، با هدف کمینه کردن انرژی کرنشی با در نظر گرفتن مقدار مشخصی از مصالح در دامنه‌ی طراحی به عنوان قید مسئله بهینه‌سازی، مورد بررسی قرار گرفت. تابع مجموعه سطوح تراز در فضای پارامتری نرېزهای مورد استفاده در تحلیل آیزوژئومتریکی توسط توابع پایه شعاعی مولتی کوادریک فرمول‌بندی می‌شود. برای هر وصله از مدل، فضای پارامتری یک مربع واحد است، بنابراین تابع مجموعه سطوح تراز در یک شبکه‌ی معمول حل می‌شود و به پیچیدگی دامنه طراحی بستگی ندارد. شبکه‌ی نقاط کنترلی و شبکه‌ای که تابع مجموعه سطوح تراز در آن حل می‌شود از هم جدا هستند و وابستگی به هم ندارند. بنابراین برای بهبود دقت در تحلیل و بروز رسانی تابع مجموعه سطوح تراز، شبکه‌ی نقاط کنترلی و شبکه‌ای که تابع مجموعه سطوح تراز در آن تعریف می‌شود به صورت جداگانه می‌توانند اصلاح شوند.

چندین مثال عددی با شرایط مرزی متفاوت برای نشان دادن توانایی و کارآمدی روش ارائه شدند. با توجه به انعطاف نرېزها در مدل‌سازی دقیق هندسه‌هایی که مدل‌سازی آن‌ها با روش اجزاء محدود دشوار است، صفحاتی به حالت دایره و رینگ مدل‌سازی شده‌اند. نتیجه‌ی به دست آمده در مثال ۵-۱

برای مدل دو با استفاده از روش ارائه شده، نشان می‌دهد که توپولوژی بهینه‌ی حاصل شده انطباق خوبی با توپولوژی بهینه‌ی ارائه شده در ادبیات فنی موجود را دارد؛ در حالی که توپولوژی بهینه‌ی حاصل شده دارای مرزهای هموارتر و صریح‌تری است و نتایج مثال ۵-۱ نشان می‌دهند که توپولوژی‌های بهینه‌ی نهایی به تعداد نقاط کنترلی وابسته هستند. در مثال‌های ارائه شده نمودارهای همگرایی نشان می‌دهند که تابع هدف همگرا شده است و قید نیز اقلان گردیده است. همچنین افزایش نقاط گسسته‌سازی در فضای پارامتری در شبکه‌ای که تابع مجموعه سطوح تراز مبتنی بر توابع پایه شعاعی تعریف می‌شود، در شکل کلی توپولوژی بهینه تأثیری ندارد و فقط موجب هموارتر شدن مرزهای طرح بهینه می‌شود. بنابراین روش ارائه شده می‌تواند به‌عنوان یک روش مؤثر برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی در نظر گرفته شود.

۳-۶ پیشنهادات

- در این پایان‌نامه فقط مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی با تابع هدف کمینه کردن انرژی کرنشی و حجم به‌عنوان قید طراحی مورد بررسی قرار گرفته است. بنابراین بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی می‌تواند با تابع هدف و قیدهای متفاوتی مورد پژوهش قرار گیرد.
- برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی از حالت غیرخطی و یا تئوری پلاستیک صفحات خمشی استفاده کرد.
- روش بهینه‌سازی توپولوژی ارائه شده را می‌توان برای بهینه‌سازی توپولوژی صفحات خمشی کامپوزیت چند لایه بسط داد.
- توپولوژی بهینه صفحات خمشی در حالت دینامیکی و لرزه‌ای را می‌توان با روش ارائه شده مورد بررسی قرار داد.

- [1] D. M. Frangopol, F. Y. Cheng, Structural Engineering Institute. Technical Committee on Optimal Structural Design., Structural Engineering Institute. Technical Administrative Committee on Analysis and Computation., and I. . Structures Congress '96 (1996 : Chicago, "Advances in structural optimization : proceedings of the First U.S.-Japan Joint Seminar on Structural Optimization held in conjunction with the ASCE Technical Committee on Optimal Structural Design meeting at the Structures Congress XIV," p. 225, 1997.
- [2] B. Hassani and E. (Ernest) Hinton, "Homogenization and Structural Topology Optimization : Theory, Practice and Software," p. 268, 1999.
- [3] M. P. Bendsøe and O. Sigmund, *Topology Optimization ebook*. 2004.
- [4] J. Céa, A. Gioan, J. M.- Calcolo, and undefined 1973, "Quelques résultats sur l'identification de domaines," *Springer*, Accessed: Aug. 28, 2021. [Online]. Available: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02575843.pdf>.
- [5] L. T.-C. methods in applied sciences and and undefined 1979, "Estimation de coefficients homogenises," *Springer*, Accessed: Aug. 28, 2021. [Online]. Available: <https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BFb0063632.pdf>.
- [6] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 71, no. 2, pp. 197–224, 1988, doi: 10.1016/0045-7825(88)90086-2.
- [7] M. P. Bendsøe, "Optimal shape design as a material distribution problem," *Struct. Optim.*, vol. 1, no. 4, 1989, doi: 10.1007/BF01650949.
- [8] Y. M. Xie and G. P. Steven, "A simple evolutionary procedure for structural optimization," *Comput. & Struct.*, vol. 49, no. 5, pp. 885–896, 1993.
- [9] O. M. Querin, V. Young, G. P. Steven, and Y. M. Xie, "Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 189, no. 2, 2000, doi: 10.1016/S0045-7825(99)00309-6.
- [10] K. A. Lurie and A. Cherkayev, "On applying {Prager}'s theorem to the problems of optimal design of thin plates," *Mech. Solids*, vol. 11, no. 6, pp. 157–159, 1976.
- [11] K.-T. Cheng and N. Olhoff, "An investigation concerning optimal design of solid elastic plates," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 17, no. 3, pp. 305–323, 1981.
- [12] M. P. Bendsoe, "Some Smear-Out Models for Integrally Stiffened Plates With Applications To Optimal Design.," in *Proc. Int. Symp. on Optimum Structural Design*, 1982, pp. 13–34.
- [13] K. Suzuki and N. Kikuchi, "Generalized layout optimization of three-dimensional shell structures," in *Geometric aspects of industrial design*, 1991.
- [14] N. Kikuchi and K. Suzuki, "Structural optimization of linearly elastic structures using the homogenization method," in *Shape and Layout Optimization of Structural Systems and Optimality Criteria Methods*, Springer, 1992, pp. 199–242.
- [15] C. A. Soto and A. R. Díaz, "Optimum Layout and Shape of Plate Structures Using Homogenization," in *Topology Design of Structures*, Springer, 1993, pp. 407–420.
- [16] A. Bourgeat and R. Tapiero, "Homogenization of a Transversely Perforated Plate in the Frame of Mindlin, Hencky Theory, in the Thermoelastic Case With Non Uniformly Oscillating Coefficients," *Comptes Rendus L Acad. Des Sci. Ser. I-*

- Mathematique*, vol. 297, no. 3, pp. 213–216, 1983.
- [17] L. H. Tenek and I. Hagiwara, “Optimization of material distribution within isotropic and anisotropic plates using homogenization,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 109, no. 1–2, 1993, doi: 10.1016/0045-7825(93)90230-U.
 - [18] A. R. Díaz, R. Lipton, and C. A. Soto, “A new formulation of the problem of optimum reinforcement of Reissner-Mindlin plates,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 123, no. 1–4, 1995, doi: 10.1016/0045-7825(94)00777-K.
 - [19] F. Belblidia, J. E. B. Lee, S. Rechak, and E. Hinton, “Topology optimization of plate structures using a single- or three-layered artificial material model,” *Adv. Eng. Softw.*, vol. 32, no. 2, pp. 159–168, 2001, doi: 10.1016/S0045-7949(00)00141-3.
 - [20] S. Kitayama, K. Yamazaki, and H. Yamakawa, “Topology optimization of planar and plate structures using conformal mapping,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 29, no. 2, 2005, doi: 10.1007/s00158-004-0477-x.
 - [21] S. Goo, S. Wang, J. Hyun, and J. Jung, “Topology optimization of thin plate structures with bending stress constraints,” *Comput. Struct.*, vol. 175, 2016, doi: 10.1016/j.compstruc.2016.07.006.
 - [22] S. Zhang, J. A. Norato, A. L. Gain, and N. Lyu, “A geometry projection method for the topology optimization of plate structures,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 54, no. 5, 2016, doi: 10.1007/s00158-016-1466-6.
 - [23] T. Cui, Z. Sun, C. Liu, L. Li, R. Cui, and X. Guo, “Topology optimization of plate structures using plate element-based moving morphable component (MMC) approach,” *Acta Mech. Sin. Xuebao*, vol. 36, no. 2, 2020, doi: 10.1007/s10409-020-00944-5.
 - [24] Y. Nakazawa, N. Kogiso, T. Yamada, and S. Nishiwaki, “Robust topology optimization of thin plate structure under concentrated load with uncertain load position,” *J. Adv. Mech. Des. Syst. Manuf.*, vol. 10, no. 4, pp. 1–12, 2016, doi: 10.1299/JAMDSM.2016JAMDSM0057.
 - [25] S. Osher and J. A. Sethian, “Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations,” *J. Comput. Phys.*, vol. 79, no. 1, pp. 12–49, 1988, doi: 10.1016/0021-9991(88)90002-2.
 - [26] J. A. Sethian and A. Wiegmann, “Structural Boundary Design via Level Set and Immersed Interface Methods,” *J. Comput. Phys.*, vol. 163, no. 2, pp. 489–528, 2000, doi: 10.1006/jcph.2000.6581.
 - [27] S. J. Osher and F. Santosa, “Level Set Methods for Optimization Problems Involving Geometry and Constraints I. Frequencies of a Two-Density Inhomogeneous Drum,” *J. Comput. Phys.*, vol. 171, no. 1, pp. 272–288, Jul. 2001, doi: 10.1006/JCPH.2001.6789.
 - [28] M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo, “A level set method for structural topology optimization,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, no. 1–2, pp. 227–246, Jan. 2003, doi: 10.1016/S0045-7825(02)00559-5.
 - [29] G. Allaire, F. Jouve, and A. M. Toader, “Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method,” *J. Comput. Phys.*, vol. 194, no. 1, pp. 363–393, 2004, doi: 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
 - [30] M. Y. Wang and X. Wang, “‘Color’ level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 193, no. 6–8, 2004, doi: 10.1016/j.cma.2003.10.008.
 - [31] Q. Xia, M. Y. Wang, S. Wang, and S. Chen, “Semi-Lagrange method for level-set-based structural topology and shape optimization,” *Struct. Multidiscip. Optim.*

- 2006 316, vol. 31, no. 6, pp. 419–429, Apr. 2006, doi: 10.1007/S00158-005-0597-Y.
- [32] S. Wang and M. Y. Wang, “Radial basis functions and level set method for structural topology optimization,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 65, no. 12, pp. 2060–2090, Mar. 2006, doi: 10.1002/NME.1536.
 - [33] S. Osher and C. W. Shu, “High-order essentially nonoscillatory schemes for Hamilton-Jacobi equations,” *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 28, no. 4, 1991, doi: 10.1137/0728049.
 - [34] G. S. Jiang and D. Peng, “Weighted ENO schemes for Hamilton-Jacobi equations,” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 21, no. 6, 2000, doi: 10.1137/S106482759732455X.
 - [35] J. a. Sethian, *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*. 1999.
 - [36] D. Peng, B. Merriman, S. Osher, H. Zhao, and M. Kang, “A PDE-Based Fast Local Level Set Method,” *J. Comput. Phys.*, vol. 155, no. 2, 1999, doi: 10.1006/jcph.1999.6345.
 - [37] S. Y. Wang, K. M. Lim, B. C. Khoo, and M. Y. Wang, “An extended level set method for shape and topology optimization,” *J. Comput. Phys.*, vol. 221, no. 1, pp. 395–421, 2007, doi: 10.1016/j.jcp.2006.06.029.
 - [38] P. Wei, Z. Li, X. Li, and M. Y. Wang, “An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, no. 2, pp. 831–849, 2018, doi: 10.1007/s00158-018-1904-8.
 - [39] J. Chen, M. Freytag, and V. Shapiro, “Shape sensitivity of constructively represented geometric models,” *Comput. Aided Geom. Des.*, vol. 25, no. 7, pp. 470–488, 2008.
 - [40] T. J. R. Hughes, J. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, “Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 194, no. 39–41, pp. 4135–4195, 2005, doi: 10.1016/j.cma.2004.10.008.
 - [41] L. Beirão da Veiga, A. Buffa, C. Lovadina, M. Martinelli, and G. Sangalli, “An isogeometric method for the Reissner-Mindlin plate bending problem,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 209–212, pp. 45–53, 2012, doi: 10.1016/j.cma.2011.10.009.
 - [42] C. H. Thai, H. Nguyen-Xuan, N. Nguyen-Thanh, T.-H. Le, T. Nguyen-Thoi, and T. Rabczuk, “Static, free vibration, and buckling analysis of laminated composite Reissner-Mindlin plates using NURBS-based isogeometric approach,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 91, no. 6, pp. 571–603, Aug. 2012, doi: 10.1002/nme.4282.
 - [43] X. Li, J. Zhang, and Y. Zheng, “NURBS-based isogeometric analysis of beams and plates using high order shear deformation theory,” *Math. Probl. Eng.*, vol. 2013, 2013, doi: 10.1155/2013/159027.
 - [44] S. J. Lee and H. R. Kim, “Vibration and Buckling of Thick Plates using Isogeometric Approach,” *Archit. Res.*, vol. 15, no. 1, pp. 35–42, 2013, doi: 10.5659/aikar.2013.15.1.35.
 - [45] S. Yin, J. S. Hale, T. Yu, T. Q. Bui, and S. P. A. Bordas, “Isogeometric locking-free plate element: a simple first order shear deformation theory for functionally graded plates,” *Compos. Struct.*, vol. 118, pp. 121–138, 2014.

- [46] L. Beirão Da Veiga *et al.*, “A locking-free model for Reissner-Mindlin plates: Analysis and isogeometric implementation via NURBS and triangular NURPS,” *Math. Model. Methods Appl. Sci.*, vol. 25, no. 8, pp. 1519–1551, 2015, doi: 10.1142/S0218202515500402.
- [47] N. Liu and A. E. Jeffers, “Isogeometric analysis of laminated composite and functionally graded sandwich plates based on a layerwise displacement theory,” *Compos. Struct.*, vol. 176, pp. 143–153, 2017, doi: 10.1016/j.compstruct.2017.05.037.
- [48] A. K. Abdelmoety, T. H. A. Naga, and Y. F. Rashed, “Isogeometric boundary integral formulation for Reissner’s plate problems,” *Eng. Comput.*, vol. 37, no. 1, pp. 21–53, Jul. 2019, doi: 10.1108/EC-11-2018-0507.
- [49] Y. Wang and D. J. Benson, “Isogeometric analysis for parameterized LSM-based structural topology optimization,” *Comput. Mech.*, vol. 57, no. 1, pp. 19–35, 2016, doi: 10.1007/s00466-015-1219-1.
- [50] H. A. Jahangiry and S. M. Tavakkoli, “An isogeometrical approach to structural level set topology optimization,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 319, pp. 240–257, 2017, doi: 10.1016/j.cma.2017.02.005.
- [51] S. Cho and S. H. Ha, “Isogeometric shape design optimization: Exact geometry and enhanced sensitivity,” *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 38, no. 1, pp. 53–70, 2009, doi: 10.1007/s00158-008-0266-z.
- [52] W. A. Wall, M. A. Frenzel, and C. Cyron, “Isogeometric structural shape optimization,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 197, no. 33–40, pp. 2976–2988, 2008, doi: 10.1016/j.cma.2008.01.025.
- [53] B. Hassani, S. M. Tavakkoli, and N. Z. Moghadam, “Application of isogeometric analysis in structural shape optimization,” in *Scientia Iranica*, 2011, vol. 18, no. 4 A, pp. 846–852, doi: 10.1016/j.scient.2011.07.014.
- [54] M. Aminzadeh and S. M. Tavakkoli, “Maximum energy dissipation for elasto-plastic plates via isogeometric shape optimization,” *Eng. Comput.*, vol. 37, no. 1, pp. 355–367, 2021, doi: 10.1007/s00366-019-00827-9.
- [55] J. N. Reddy, “Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells,” *Theory Anal. Elastic Plates Shells*, 2006, doi: 10.1201/9780849384165.
- [56] E. Hinton and D. R. J. Owen, “Finite elements in plasticity: Theory and practice,” *Appl. Ocean Res.*, vol. 3, no. 3, p. 149, Jul. 1981, doi: 10.1016/0141-1187(81)90117-6.
- [57] J. A. Cottrell, T. J. R. Hughes, and Y. Bazilevs, “Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA,” *John Wiley Sons*, 2009, doi: 10.1002/9780470749081.
- [58] X. Wang, Y. Mei, M. W.-P. of W. 2004-Warsaw, and undefined 2004, “Incorporating topology/phase derivatives into level set methods for optimization of solids,” *repository.ust.hk*, Accessed: Aug. 06, 2021. [Online]. Available: <https://repository.ust.hk/ir/Record/1783.1-74591>.
- [59] C. H. Villanueva Perez, “Topology optimization using the level set and extended finite element methods: theory and applications,” 2016.
- [60] X. Xie and M. Mirmehdi, “Radial basis function based level set interpolation and evolution for deformable modelling,” *Image Vis. Comput.*, vol. 29, no. 2–3, 2011, doi: 10.1016/j.imavis.2010.08.011.

Abstract

.....

Plate structures are one of the most important structural systems that are used in many engineering works and modern industries; Therefore, optimizing them is important. Topology optimization is one of the fields of structural optimization that has recently been considered by many researchers and its purpose is to find the best distribution of materials in the design domain by considering the objective function and specific constraints. This study presents topology optimization of plate structures by employing isogeometrical level set method. For structural analysis of plates, the IsoGeometric Analysis (IGA) approach is applied and Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) basis functions are used for approximation of the design domain geometry as well as the unknown deformation field. In previous studies, the level set function has been approximated using the b-spline basis functions, and the control net is updated during the optimization process. Since the control points are not basically on the level set surfaces, the difference between the zero level of the level set function, which shows the boundaries of the structure, and the zero level of its control net appears. to alleviate this difference and increase the accuracy, in this study the level set function is parametrized with Radial Basis Functions (RBFs) over a grid defined in parameter space which is constantly a unite square for each patch of the model. Therefore, the control net in the isogeometric analysis model and the grid for solve the level set function are separate. therefore, for problems with complicated design domains the level set function can be solved in a uniform grid. the level set function is solved in parameter space and the updated level set function is mapped into physical space.

This approach can handle the problems with complicated design domains and with an approximate re-initialization scheme can maintain a smooth level set function during the optimization process and has less dependency on initial designs because of its ability to nucleate new holes inside the design domain. Due to the capability of IGA method in modeling complex design domains, while maintaining high accuracy in analysis, combination of IGA with RBFs level set method provides a very useful and effective technique for topology optimization problems.

in this study, like most common topology optimization problems, compliance is minimized by considering the volume constraint of the material. Several numerical examples are prepared to demonstrate the efficiency and accuracy of the method for topology optimization of the plate structures and to evaluate the validity of the method, the obtained optimal topologies are compared with the optimal topology presented for plate structures with other methods in the existing literature.

Keywords: plate structures, Topology optimization, Level set method, Isogeometric analysis, Radial basis functions.



Shahrood University of
Technology

Faculty of Civil Engineering

M.Sc. Thesis in Structural Engineering

Topology optimization of plate structures by using level set method

By: Amin Halaku

Supervisor:
Dr. Seyed Mehdi Tavakkoli

September, 2021