

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده مهندسی عمران

گروه سازه

بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های تنش مسطح با در نظر گرفتن قید خستگی

نگارنده: علی اسدی

استاد راهنما:

دکتر سید مهدی توکلی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۴۰۰

شماره: ۵۳۹ / ۲ = ۱

تاریخ: ۱۴۰۰ / ۷ / ۲۷

ویرایش:

باسمه تعالی

فره‌های ارزشیابی پایان نامه کارشناسی ارشد

مربوط به ورودی‌های ۹۳ به بعد



مدیریت تحصیلات تکمیلی

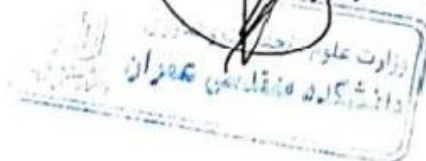
فرم شماره (۳) صورت جلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزشیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای علی اسادی با شماره دانشجویی ۹۷۰۲۳۰۴ رشته عمران گرایش سازه تحت عنوان بهینه سازی توبولوزی سازه های تنش مسطح با در نظر گرفتن قید خستگی که در تاریخ ۱۴۰۰/۶/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار شد به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۹/۹۹			
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹ ☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹			
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد			
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر سید مهدی توکلی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- استاد داور اول	دکتر رضا نادری	دانشیار	
۵- استاد داور دوم	دکتر محمد شامخی امیری	استادیار	
۶- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی گلی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر رضا نادری

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم اثر

تقدیم به پدر و مادرم که در تمام مراحل زندگی با تمام وجود یار و یاورم بوده اند و هیچ گاه از حمایت و عشقشان نسبت به بنده

کم نشد و تقدیم به تمامی اساتید که افتخارم که ارزش استاد و دانشن، هنرنمیت، بلکه بایستگی و وظیفه است.

شکر و قدردانی

در ابتدا شکر خداوند متعال را به جای می آورم که یاری ام رساند تا این پایان نامه را به سرانجام برسانم و با سپاس فراوان از

استاد ارجمندم جناب آقای دکتر سید مهدی توکلی که در تمامی مراحل پایان نامه از راهنمایی های ارزشمند ایشان بهره مند شدم

و همچنین شکر می کنم از جناب آقای مهندس امین زاده که در طی این مسیر به من کمک های فراوان نمودند.

تهدنامه

اینجانب علی اسدی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران گرایش سازه دانشکده عمران دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بهینه سازی توپولوژی سازه های تنش مسطح با در نظر گرفتن قید خستگی تحت راهنمایی جناب آقای دکتر سید مهدی توکلی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود . استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از مهم‌ترین انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای است که به دنبال توزیع بهینه‌ی مصالح در دامنه‌ی مورد نظر می‌باشد. برای رسیدن به این منظور، انتخاب تابع هدف و قید مناسب از اهمیت بالایی برخوردار است. در این تحقیق طراحی توپولوژی سازه با هدف کمینه‌کردن وزن و در نظر گرفتن قید خستگی مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین از آن جایی که تحلیل آیزوژئومتریکی نسبت به روش اجزای محدود توانسته است جایگاه ویژه‌ای میان محققین این حوزه باز کند و در مدل‌سازی هندسه و تغییر مکان‌ها با دقت بیشتری نسبت به روش‌های قبلی عمل کند به عنوان یکی از ابزارهای این پژوهش استفاده شده است. در تحلیل آیزوژئومتریکی، به جای استفاده از توابع چند جمله‌ای در اجزای محدود، از توابع پایه نسبی غیر یکنواخت بی‌اسپلاین برای بیان هندسه و تقریب تغییر مکان استفاده می‌شود.

در طول سال‌های گذشته همواره دو رویکرد کلی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی مطرح بوده است. در رویکرد متداول‌تر، انرژی کرنشی سازه تحت قید حجم کمینه می‌گردد و هیچ محدودیت دیگری برای واکنش‌های سازه‌ای مثل تنش‌ها و تغییر مکان‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. در رویکرد دیگر، وزن سازه تحت قیدهای تنش مینیمم می‌شود. در کاربردهای واقعی، توپولوژی به دست آمده از این مسائل ممکن است نتواند نیازهای مهندسی مانند جلوگیری از خرابی‌های ناشی از خستگی را برآورده نماید. به این منظور جهت تحلیل خستگی از روش تحلیل استاتیکی معادل استفاده شده است. برای کنترل خرابی خستگی، معیار خرابی خستگی گودمن اصلاح شده به کار رفته است و با استفاده از روش قید سراسری برای قیدهای خستگی، زمان محاسبات کاهش یافته است.

به دلیل فراگیر و محبوب شدن روش سطوح تراز و سادگی و دقت بالای این روش و همچنین ماهیت گرهی بودن این روش و سازگاری آن با روش آیزوژئومتریکی، از این روش برای بهینه‌سازی توپولوژی

بهره گرفته شده است. در روش مجموعه سطوح تراز، مرزهای سازه‌ای که بهینه‌سازی می‌شود به صورت مدلی از مرزهای دینامیکی است که به وسیله‌ی یک تابع ضمنی از بعد بالاتر معرفی می‌شود و مرز سازه توسط یک سطح تراز مشخص معرفی می‌گردد و مرز جدید از حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی به دست می‌آید. به منظور نشان دادن کارایی و دقت روش مجموعه سطوح تراز در مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی و صحت معادلات و تحلیل حساسیت به دست آمده، چندین مثال عددی با استفاده از برنامه‌ی کامپیوتری تهیه شده در این پایان نامه، حل و نتایج ارائه شده است.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی توپولوژی سازه، قید خستگی، تحلیل حساسیت، تحلیل آیزوژئومتریک،

روش مجموعه سطوح تراز

فهرست مطالب

ل	فهرست جداول
م	فهرست اشکال
۱	فصل اول: مقدمه
۲	۱-۱- مقدمه.....
۴	۱-۲- ضرورت انجام تحقیق.....
۴	۱-۳- اهداف.....
۵	۱-۴- معرفی فصل‌های پایان‌نامه.....
۷	فصل دوم: پیشینه تحقیقات
۸	۲-۱- بهینه‌سازی به روش مجموعه‌ی سطوح تراز.....
۱۱	۲-۲- تحلیل آیزوژئومتریکی.....
۱۳	۲-۳- بهینه‌سازی توپولوژی با در نظر گرفتن قید خستگی.....
۲۳	فصل سوم: تحلیل آیزوژئومتریکی
۲۴	۳-۱- مقدمه.....
۲۵	۳-۲- معرفی روش تحلیل آیزوژئومتریکی (IGA).....
۲۷	۳-۳- اسپیلاین‌ها و نربزها.....
۲۸	۳-۴- معرفی سطح ساخته‌شده از توابع نربز.....
۲۹	۳-۵- فرمول‌بندی تحلیل آیزوژئومتریکی مسائل تنش مسطح.....
۳۰	۳-۵-۱- روند تحلیل با در نظر گرفتن رفتار الاستیک خطی مصالح.....
۳۷	فصل چهارم: روشهای تحلیل خستگی
۳۸	۴-۱- مقدمه.....

۴۰	۲-۴- روشهای «خستگی - عمر»
۴۱	۴-۲-۱- روش «تنش - عمر»
۴۳	۴-۲-۲- روش «کرنش - عمر»
۴۷	۴-۲-۳- روش مکانیک شکست الاستیک خطی
۵۰	۴-۳- حد دوام
۵۱	۴-۴- استحکام خستگی
۵۳	۴-۵- معیارهای خرابی خستگی
۵۵	۴-۶- روش محاسبه معیار خرابی خستگی [۴۹]

فصل پنجم: بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح ۵۹

۶۰	۵-۱- مقدمه
۶۳	۵-۲- بهینه‌سازی ریاضی
۶۳	۵-۳- بهینه‌سازی سازه‌ای
۶۵	۵-۳-۱- بهینه‌سازی اندازه
۶۵	۵-۳-۲- بهینه‌سازی شکل
۶۸	۵-۳-۳- بهینه‌سازی توپولوژی
۶۹	۵-۴- تعریف مسئله بهینه‌سازی
۶۹	۵-۴-۱- تابع هدف
۶۹	۵-۴-۲- متغیرهای طراحی
۷۱	۵-۴-۳- متغیرهای وضعیت
۷۱	۵-۴-۴- قیدهای مسئله بهینه‌سازی
۷۲	۵-۵- روش اعمال قید خستگی
۷۳	۵-۶- روش مجموعه سطوح تراز

۷۵-۶-۱- تعریف مسئله بهینه‌سازی با استفاده از روش سطوح تراز.....

۷۶-۶-۲- توابع پایه شعاعی مرجع [۷۲،۷۱].....

۷۸-۶-۳- تحلیل حساسیت.....

۸۳ فصل ششم: مثال‌های عددی

۸۴-۶-۱- مثال‌ها.....

۸۵-۶-۱-۱- تیر طره.....

۹۰-۶-۱-۲- تیر طره با تغییر در نقطه‌ی اعمال بار.....

۹۵-۶-۱-۳- تیر ال-شکل با بارگذاری در وسط ارتفاع.....

۱۰۱-۶-۱-۴- تیر ساده.....

۱۰۵ فصل هفتم: نتایج و پیشنهادها

۱۰۶-۷-۱- مقدمه.....

۱۰۶-۷-۲- نتیجه‌گیری.....

۱۰۷-۷-۳- ارائه پیشنهادها جهت مطالعات بعدی.....

۱۰۸ مراجع

فهرست جداول

جدول ۱-۴	مقادیر c و نمای m برای انواع مختلف فولاد [۵۸]	۴۹
جدول ۱-۶	تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای تیر طره	۸۶
جدول ۲-۶	تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای تیر طره	۸۸
جدول ۳-۶	تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای تیر طره	۹۱
جدول ۴-۶	تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای تیر طره	۹۳
جدول ۵-۶	تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای تیر ال-شکل	۹۶
جدول ۶-۶	تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای تیر ال-شکل	۹۹
جدول ۷-۶	تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای تیر ساده	۱۰۲

فهرست اشکال

- شکل ۱-۲ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر ال-شکل [۴۱] ۱۵
- شکل ۲-۲ طرح بهینه‌ی تیر ال-شکل [۴۱] ۱۶
- شکل ۳-۲ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر ال-شکل دوبل [۴۷] ۱۹
- شکل ۴-۲ طرح بهینه‌ی تیر ال-شکل دوبل [۴۷] ۱۹
- شکل ۵-۲ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر طره [۴۸] ۲۱
- شکل ۶-۲ طرح بهینه‌ی تیر طره [۴۸] ۲۱
- شکل ۷-۲ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر حفره‌دار [۴۹] ۲۲
- شکل ۸-۲ طرح بهینه‌ی تیر حفره‌دار [۴۹] ۲۲
- شکل ۱-۳ فضای فیزیکی، فضای پارامتری و فضای انتگرال‌گیری یک المان نرئز [۲۰] ۳۵
- شکل ۱-۴ شکست خستگی یک پیچ در اثر گشتاورهای خمشی تکرار شونده [۵۰] ۳۹
- شکل ۲-۴ ابعاد هندسی نمونه آزمایش خستگی [۵۱] ۴۱
- شکل ۳-۴ نمودار S-N [۵۲] ۴۲
- شکل ۴-۴ نمودار حلقه‌های پسماند «تنش حقیقی-کرنش حقیقی» [۵۱] ۴۵
- شکل ۵-۴ نمودار لگاریتمی رابطه عمر خستگی با دامنه کرنش حقیقی [۵۶] ۴۵
- شکل ۶-۴ نمودار افزایش طول ترک به صورت تابعی از تعداد سیکل‌های تنش [۵۱] ۴۸
- شکل ۷-۴ نمودار لگاریتمی مقادیر da/dN [۵۱] ۴۹
- شکل ۸-۴ نمودار مقادیر β [۵۱] ۵۰
- شکل ۹-۴ نمودار حد دوام برحسب استحکام کششی [۵۹] ۵۱
- شکل ۱۰-۴ کسر استحکام خستگی f [۵۱] ۵۳
- شکل ۱۱-۴ نمایش معیارهای مختلف شکست [۶۰] ۵۴
- شکل ۱۲-۴ یک چرخه از بارگذاری سینوسی [۴۹] ۵۶
- شکل ۱۳-۴ یک چرخه از تاریخچه تنش [۴۹] ۵۶
- شکل ۱۴-۴ نمودار گودمن اصلاح‌شده [۴۹] ۵۷
- شکل ۱-۵ سازه تحت نیروی F و متصل به تکیه‌گاه [۶۲] ۶۴
- شکل ۲-۵ روش‌های مختلف بهینه‌سازی سازه‌ای [۶۲] ۶۴
- شکل ۳-۵ مثالی از بهینه‌سازی اندازه [۶۲] ۶۵
- شکل ۴-۵ تعریف مسئله بهینه‌سازی شکل با روش مختصات گره‌ای المان [۶۲] ۶۶
- شکل ۵-۵ مدل مجموعه سطوح تراز [۸] ۷۴
- شکل ۱-۶ یک چرخه از بارگذاری سینوسی اعمال‌شده به سازه [۴۹] ۸۴
- شکل ۲-۶ شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر طره [۴۹] ۸۵

- شکل ۳-۶ توزیع ۹۸۷ نقطه کنترلی در دامنه طراحی تیر طره ۸۶
- شکل ۴-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۸۶
- شکل ۵-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۸۷
- شکل ۶-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۸۷
- شکل ۷-۶ نمودار گودمن تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۸۷
- شکل ۸-۶ توزیع ۱۵۳۹ نقطه کنترلی در دامنه طراحی تیر طره ۸۸
- شکل ۹-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۸۸
- شکل ۱۰-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۸۹
- شکل ۱۱-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۸۹
- شکل ۱۲-۶ نمودار گودمن تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۸۹
- شکل ۱۳-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره [۴۵] ۹۰
- شکل ۱۴-۶ توزیع ۹۸۷ نقطه کنترلی در دامنه طراحی تیر طره ۹۱
- شکل ۱۵-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۹۱
- شکل ۱۶-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۹۲
- شکل ۱۷-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۹۲
- شکل ۱۸-۶ نمودار گودمن تیر طره با ۹۸۷ نقطه کنترلی ۹۲
- شکل ۱۹-۶ توزیع ۱۵۳۹ نقطه کنترلی در دامنه طراحی تیر طره ۹۳
- شکل ۲۰-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۹۳
- شکل ۲۱-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۹۴
- شکل ۲۲-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۹۴
- شکل ۲۳-۶ نمودار گودمن تیر طره با ۱۵۳۹ نقطه کنترلی ۹۴
- شکل ۲۴-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره [۷۳] ۹۵
- شکل ۲۵-۶ شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ال-شکل [۴۹] ۹۵
- شکل ۲۶-۶ توزیع ۸۷۰ نقطه کنترلی در دامنه طراحی تیر ال-شکل ۹۶
- شکل ۲۷-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر ال-شکل با ۸۷۰ نقطه کنترلی ۹۷
- شکل ۲۸-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی تیر ال-شکل با ۸۷۰ نقطه کنترلی ۹۷
- شکل ۲۹-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن تیر ال-شکل با ۸۷۰ نقطه کنترلی ۹۸
- شکل ۳۰-۶ نمودار گودمن تیر ال-شکل با ۸۷۰ نقطه کنترلی ۹۸
- شکل ۳۱-۶ توزیع ۲۰۷۳ نقطه کنترلی در دامنه طراحی تیر ال-شکل ۹۹
- شکل ۳۲-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر ال-شکل با ۲۰۷۳ نقطه کنترلی ۹۹
- شکل ۳۳-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی تیر ال-شکل با ۲۰۷۳ نقطه کنترلی ۱۰۰
- شکل ۳۴-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن تیر ال-شکل با ۲۰۷۳ نقطه کنترلی ۱۰۰

- شکل ۳۵-۶ نمودار گودمن تیر ال-شکل با ۲۰۷۳ نقطه کنترلی ۱۰۰
- شکل ۳۶-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر ال-شکل [۷۴] ۱۰۱
- شکل ۳۷-۶ شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی تیر ساده [۳۹] ۱۰۱
- شکل ۳۸-۶ توزیع ۱۲۳۵ نقطه کنترلی در دامنه طراحی تیر ساده ۱۰۲
- شکل ۳۹-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر ساده با ۱۲۳۵ نقطه کنترلی ۱۰۲
- شکل ۴۰-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی تیر ساده با ۱۲۳۵ نقطه کنترلی ۱۰۳
- شکل ۴۱-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن تیر ساده با ۱۲۳۵ نقطه کنترلی ۱۰۳
- شکل ۴۲-۶ نمودار گودمن تیر ساده با ۱۲۳۵ نقطه کنترلی ۱۰۳
- شکل ۴۳-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر ساده [۷۵] ۱۰۴

فصل اول: مقدمه

۱-۱- مقدمه

از ابتدای خلقت بشر تا کنون انسان تلاش نموده تا به منظور افزایش بهره‌وری و کارایی و به ضرورت نیاز، طراحی اشیا را بهبود بخشد. این تلاش موجب پیشرفت جامعه بشری است؛ که می‌توان از آن به عنوان بهینه‌سازی یادکرد. برای مثال سازه‌های دایره‌ای از جنس چوب برای جابه‌جایی اشیای سنگین در عهد باستان استفاده شده است. این مفهوم در آینده توسعه یافت و منجر به طراحی چرخ شد؛ که در مراحل بعد موجب اختراعاتی همچون چرخ‌دنده، موتور بخار، خودرو، قطار و دیگر وسایل حمل و نقل شده است. در بخش‌های گوناگونی از دنیای اطراف می‌توان سازه‌های بهینه شده را مشاهده نمود. در بدن انسان استخوان و مفاصل به گونه‌ای طراحی شده‌اند که بهترین و مناسب‌ترین عملکرد را دارا باشند. در طبیعت نیز درختان، برگ‌ها، میوه‌ها و آنچه که در آن یافت می‌شود نشانگر طراحی بهینه بر مبنای محیط اطراف خود هستند. در دنیای مهندسی نیز وجود ساختمان‌ها، هواپیماها و دیگر سیستم‌های پیچیده شاهی بر این مدعا است. طراحی سیستم‌های پیچیده نیازمند محاسبات عظیم و پردازش داده‌ها می‌باشند. در طی سه دهه گذشته، انقلابی در فناوری رایانه و محاسبات عددی به وقوع پیوست و در سال‌های اخیر روش‌های عددی بهینه‌سازی به میزان زیادی توسعه و بهبود یافته‌اند. انسان آگاهانه یا ناخودآگاه متمایل به بهینه‌سازی محیط اطراف خود است؛ بنابراین مطالعه بهینه‌سازی به عنوان یک مبحث علمی و توسعه رابطه سازی ریاضی اجتناب ناپذیر است.

امروزه مبحث بهینه‌سازی در صنعت مورد توجه قرار گرفته و شاهد پیشرفت‌های زیادی در این زمینه بوده است. گسترش و پیشرفت بهینه‌سازی مدیون نیاز بشر به استفاده بهینه از مواد در صنعت و زندگی می‌باشد. با توجه به پیش زمینه بیان شده، لازم است که در بهینه‌سازی، معرفی روش‌ها و الگوریتم‌های جدید سرعت پذیرد که به کمک آن‌ها بتوان از کمینه کردن مقدار استفاده بشر از منابع و ذخایر و نگهداری بخشی از آن برای نسل‌های آتی بشر اقدامی به عمل آورد. یکی از روش‌هایی که در چند دهه اخیر در بهینه‌سازی سازه‌ها مورد توجه قرار گرفته است، بهینه‌سازی توپولوژی می‌باشد. بهینه‌سازی

توپولوژی به دنبال ایجاد حفره‌هایی در شکل سازه به منظور رسیدن به شکل بهینه می‌باشد. لازم به ذکر است که این روش نسبت به دو روش دیگر (بهینه‌سازی شکل و اندازه) بیشتر مورد استقبال محققین قرار گرفته است.

شکست ناشی از خستگی امروزه پدیده شناخته شده‌ای است؛ اما اولین بار در قرن نوزدهم مواردی از شکست‌های غیر منتظره مشاهده شد. در آن زمان خستگی پدیده اسرارآمیزی بود چراکه خسارت خستگی قابل مشاهده نیست و ظاهراً شکست بدون هرگونه هشدار اتفاق می‌افتد. اولین تحقیقات در این زمینه توسط اگست ولر^۱ انجام شد. او دریافت که به‌کاربردن یک بار متمرکز کمتر از حد مقاومت استاتیکی سازه، هیچ آسیبی به سازه وارد نمی‌کند؛ اما اگر بار مشابهی، تکرار شونده باشد، می‌تواند شکست کامل ایجاد کند. این مشاهدات منجر به توسعه منحنی مشهور وُلر شده است که بیشترین تنش تکرار شونده را به‌صورت تابعی از تعداد سیکل‌هایی که می‌تواند قبل از شکست اعمال شود، نمایش می‌دهد. به‌طور اساسی اغلب روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی بر بیشینه کردن سختی با یک قید حجم متمرکز شده‌اند. در کاربردهای واقعی، توپولوژی به‌دست آمده از این مسئله ممکن است نتواند نیازهای مهندسی مانند جلوگیری از خرابی‌های ناشی از خستگی را برآورده نماید. بنابراین در نظر گرفتن خستگی به‌عنوان یک قید در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

پس از بررسی منابع و مراجع مختلف مشخص شد که روش مجموعه سطوح تراز در بهینه‌سازی توپولوژی فراگیر شده و جایگاه ویژه‌ای در نظر محققین این حوزه پیدا کرده است. از طرفی امروزه روش تحلیل آیزوژئومتریک توانسته است جایگزین بهتری نسبت به روش اجزای محدود در تحلیل و مدل‌سازی سازه‌ها گردد. با توجه به مطالب بیان شده تصمیم گرفته شد که در این پژوهش به بررسی استفاده از توابع سطوح تراز و تحلیل آیزوژئومتریک در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها پرداخته شود.

^۱August Wohler

۱-۲- ضرورت انجام تحقیق

امروزه به علت محدود بودن منابع و انرژی در دسترس انسان، استفاده موثرتر از آن‌ها حائز اهمیت است و از مهم‌ترین اهداف مهندسی به شمار می‌رود. در این رابطه بهینه‌سازی به عنوان فرایند جست‌وجو برای بهترین، به عنوان یک ابزار ارزشمند تعریف شده است. به عبارت دیگر هدف اصلی طراحی مهندسی، پیدا کردن بهترین حل ممکن برای یک مسئله خاص می‌باشد، بنابراین بهینه‌سازی قلب مهندسی است. حال ضرورت دارد با انجام بهینه‌سازی توپولوژی به کاهش وزن سازه بپردازیم.

بر اساس آمار منتشر شده توسط موسسه ملی فناوری و استانداردهای آمریکا (NIST) و موسسه باتل (Battelle) در سال ۲۰۰۴، خرابی خستگی، ۱۹۰ میلیارد دلار هزینه روی دست شرکت‌ها گذاشته است، بنابراین خرابی ناشی از خستگی بسیار هزینه بر است و تحلیل خستگی می‌تواند از این هزینه‌ها بکاهد. همچنین دلیل عمده خطرناک بودن شکست خستگی این است که بدون آگاهی قبلی و قابل رویت بودن رخ می‌دهد. بنابراین با توجه به موارد ذکر شده می‌توان به این نتیجه رسید که در نظر گرفتن خستگی در مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی به عنوان یک قید، بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

۱-۳- اهداف

به طور کلی تبیین فرمول‌بندی روش مجموعه سطوح تراز با کمک توابع پایه شعاعی و ارائه‌ی روشی مناسب برای در نظر گرفتن خستگی به عنوان یک قید در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها از اهداف کلی این پایان‌نامه می‌باشد. از آنجایی که تحلیل آیزوژئومتریک در مدل‌سازی و تحلیل سازه‌ها نسبت به روش اجزای محدود جایگاه مطلوبی در نظر محققان امروزی پیدا کرده، لازم است که استفاده از روش‌های جدید تحلیل، بررسی شده تا با ارائه الگوریتم‌هایی سریع‌تر و با دقت بیشتر، زمان و حجم محاسبات لازم جهت ارائه شکل بهینه کمینه گردد؛ لذا در تمامی مراحل بهینه‌سازی از این روش و نتایج به‌دست آمده از آن استفاده می‌شود.

انتخاب ساختاری مناسب برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی از مهم‌ترین عناصر حل مسائل است. همچنین تحلیل حساسیت با شرح دقیق و جزئیات فرمول‌بندی به‌عنوان بخشی تفکیک ناپذیر از بهینه‌سازی به روشهای ریاضی است که در این پایان‌نامه به آن پرداخته خواهد شد. ارائه‌ی برنامه‌ی رایانه‌ای مناسب برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی، لازم و بدون آن حل این مسائل غیر ممکن خواهد بود. در نتیجه نوشتن برنامه‌ای مناسب در این راستا از اهداف دیگری است که در این پایان‌نامه بدان پرداخته شده است.

۴-۱- معرفی فصل‌های پایان‌نامه

به منظور تحلیل و بررسی مواردی که در بخش‌های قبلی به آن اشاره شد، پایان‌نامه حاضر به ۷ فصل تقسیم بندی شده است.

فصل اول شامل مقدمه، اهداف و معرفی فصول پایان‌نامه می‌باشد. فصل دوم به بررسی ادبیات فنی و مروری بر کارهای گذشته در زمینه بهینه‌سازی به روش مجموعه سطوح تراز، تحلیل آیزوژئومتریک و بهینه‌سازی توپولوژی با در نظر گرفتن قید خستگی می‌پردازد. در فصل سوم روش تحلیل آیزوژئومتریک به‌عنوان روشی جدید و پرکاربرد بررسی شده و فرمول‌بندی‌های لازم جهت تحلیل مسائل تنش مسطح به صورت مختصر ارائه شده است. در فصل چهارم انواع روش‌های تحلیل خستگی مورد بررسی قرار گرفته و در انتهای این فصل، روش به کار رفته برای اعمال قید خستگی معرفی شده است. در فصل پنجم بهینه‌سازی با روش مجموعه سطوح تراز بیان گردیده، همچنین فرمول‌بندی‌های مورد استفاده در این روش استخراج شده و با استفاده از آنالیز حساسیت، سرعت نرمال حاکم بر مسئله بهینه‌سازی به‌دست آمده است. در فصل ششم مثال‌های عددی متنوعی تعریف و با استفاده از روش ارائه شده بهینه شده‌اند. در انتها در فصل هفتم به نتیجه‌گیری در خصوص موضوع مورد مطالعه پرداخته و پیشنهادهایی در ارتباط با ادامه مطالعات در آینده بیان شده است.

فصل دوم: پیشینه تحقیقات

۲-۱- بهینه‌سازی به روش مجموعه‌ی سطوح تراز

یکی از مهم‌ترین موضوعات تحقیق در زمینه‌ی بهینه‌سازی سازه‌ها، بهینه‌سازی توپولوژی است. اخیراً توجه زیادی به این موضوع به‌خاطر کاربردی که در حوزه‌های صنعت دارد؛ شده است. از کارهای اولیه‌ای که توسط بندسو و کیکوچی^۱ [۱] انجام شده است، روش‌های زیادی در دهه‌های اخیر برای حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی توسعه پیدا کرده است. برای اطلاعات کامل‌تر به مرجع [۲] مراجعه شود.

در بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته به علت عدم دسترسی آسان به مرز و تغییرات آن از روش و مفاهیم توزیع مصالح بیشتر استفاده شده است. از رایج‌ترین روش‌ها می‌توان به روش همگن‌سازی^۲ [۱] و چگالی متغیر^۳ [۴،۳] اشاره کرد. در روش‌های فوق، توپولوژی بهینه تقریباً شامل المان‌هایی است که دارای چگالی صفر یا یک می‌باشند. لازم به یادآوری می‌باشد که الگوریتم‌های عددی برای این دو روش بر پایه‌ی المان هستند. چهارچوب کلی محاسبات روش‌های المان محور، گسسته‌سازی فضای طرح اولیه به صورت مستطیل‌های یکنواخت اجزای محدود می‌باشد و متغیرهای طراحی به صورت ثابت برای هر جزء محدود در نظر گرفته می‌شود.

اگرچه محاسبات بر پایه‌ی المان تا حدودی کارآمد و موفقیت‌آمیز در حل مسائل بهینه‌سازی می‌باشد اما هنوز پارامترهای نامطلوبی دارد. یکی از معایب بهینه‌سازی با استفاده از روش‌های المان محور در بیان اطلاعات مربوط به هندسه‌ی سازه می‌باشد؛ مثلاً موقعیت و شکل مرزها و همچنین بردار نرمال یا انحنای مرزها مشخص نمی‌باشد.

به‌طور کل در این روش‌ها مرز بین قسمت پر و قسمت خالی دقیقاً مشخص نمی‌باشد و در بهینه‌سازی با این روش‌ها، مرزها به صورت زیگزاگ ظاهر می‌شوند.

بنابراین برای دستیابی به توپولوژی که به واقعیت در عمل نزدیک باشد نیازمند عملیات دیگری از

^۱Bendsoe & Kikuchi

^۲Homogenization

^۳SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization

جمله بهینه‌سازی شکل برای کاهش تمرکز تنش می‌باشیم. همچنین می‌بایست مرزها را به‌صورت نرم‌تری درآورد که این کار بعضاً آسان نمی‌باشد و مستلزم هزینه زیادی می‌باشد.

برای فائق آمدن بر مشکل‌های اشاره شده در فوق، اخیراً الگوریتم‌های بهینه‌سازی توپولوژی وابسته به هندسه‌ی بیشتری پیشنهاد شده است. بارزترین مشخصه‌ی این روش‌ها، معرفی تابع شکل و توپولوژی سازه به‌صورت ضمنی می‌باشد. از آنجایی که در بیشتر این روش‌ها از سطوح تراز صفر تابع ضمنی توپولوژی برای تعریف مرز سازه استفاده می‌شود، به این روش مجموعه‌ی سطوح تراز نیز می‌گویند. ایده اصلی در بیان تابع توپولوژی، بر پایه‌ی روش حرکت تکاملی این تابع بر اساس حساسیت تابع هدف و قیود آن می‌باشد. بهینه‌سازی سازه‌ها به روش مجموعه‌ی سطوح تراز برای اولین بار توسط ستین و ویگمن^۱ [۵] آغاز شد. در کارهای اولیه، آن‌ها سعی کردند طرحی را با کمترین حجم پیدا کنند که به مقدار انرژی مشخصی نیز در همان زمان برسد. آن‌ها برای به‌دست آوردن مرز مشترک از معادله‌ی همیلتون ژاکوبی با تابع سرعت ساخته‌شده‌ای استفاده کردند. در مرجع [۶] اثر و سانتوزا^۲ روش مجموعه سطوح تراز را برای مسائلی که شامل سیستم‌های لرزشی مانند فرکانس تشدید شده یا گپ طیفی برای بهینه‌سازی با قید حجم است استفاده کردند.

در کارهای الایر^۳ و همکارانش [۷]، یک چهارچوب محاسباتی برای بهینه‌سازی شکل و توپولوژی با روش مجموعه سطوح تراز معرفی شده است که از گرادیان شکل^۴ برای رشد تابع مجموعه سطوح تراز استفاده شده است و الگوریتم عددی برای حل تابع مجموعه‌ی سطوح تراز ارائه شده است. کارهای ونگ^۵ و همکارانش [۸، ۹] روش‌های عددی را توسعه داده‌اند. در مقالات آن‌ها مثال‌های عددی زیادی حل گردیده است تا عملکرد این روش را ثابت کند و اهمیت ادامه تحقیقات در این روش را نشان می‌دهد.

^۱Sethian & Wiegmann

^۲Osher & Santoz

^۳Allarie

^۴Shape Gradient

^۵Wang

همچنین آن‌ها این روش را برای مواد مرکب^۱ نیز تعمیم دادند [۱۰]. تابع تعریف توپولوژی^۲ (TDF) توسط رویتر و کیولن^۳ [۱۲، ۱۱] برای حل مسائل طرح بهینه‌ی توپولوژی استفاده گردید و روش معیار بهینگی برای پیدا کردن مقادیر بهینه به کار برده شد. بلیچکو^۴ و همکارانش [۱۳] روش دیگری را در بهینه‌سازی سازه‌های پیوسته ارائه کرده‌اند. در کار آن‌ها مقادیر نقاط گرهی تابع ضمنی تعریف کننده‌ی توپولوژی و شکل سازه به عنوان متغیر طراحی به صورت مستقیم استفاده گردیده است و روش معیار بهینگی برای به دست آوردن مقادیر بهینه به کار گرفته شده است. مثال های عددی نیز ارائه گردیده که کارآمدی روش را اثبات می کند.

در مقایسه با روش‌های سنتی المان محور بهینه‌سازی توپولوژی، روش گره محور در بهینه‌سازی دارای مزایای روشنی است مثلاً تعریف هندسه‌ی سازه به راحتی انجام می‌پذیرد. در هر مرحله از بهینه‌سازی تمام اطلاعات هندسه‌ی سازه، در تابع ضمنی بیان کننده توپولوژی سازه موجود است. از آن جایی که شکل و پیکره یا شرایط مرزی در هر مرحله قابل دسترسی می باشد مزیت بسیار جالبی است. همچنین تغییرات توپولوژی سازه به راحتی انجام می‌پذیرد و پس از بهینه‌سازی نیاز به روش های پردازش تصویر و بهینه‌سازی شکل نمی‌باشد.

اگرچه روش نقطه محور با استفاده از توابع (TDF) برای حل مسائل بالقوه مناسب است ولی همچنان محدودیت هایی دارد. اولین محدودیت به حل معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی برای روش مجموعه‌ی سطوح تراز برمی گردد. محدودیت از این قرار است که برای پایداری عمومی گام‌های زمانی، می‌بایست شرایط^۵ CFL در نظر گرفته شود. این نکته بدان معناست که در هر مرحله، مجموعه‌ی سطوح تراز می‌توانند به اندازه یک سلول شبکه حرکت کنند. این محدودیت باعث کاهش سرعت در همگرایی جواب می گردد. لوو و همکارانش [۱۴] یک روش برای حل معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز ارائه کردند. در کار آن‌ها

^۱Composite

^۲Topology Description Function

^۳Ruiter & keulen

^۴Belytschko

^۵Courant–Friedrichs–Lewy

از روش تقسیم عملگر تجمعی نیمه ضمنی^۱ برای حل معادله‌ی مجموعه‌ی سطوح تراز استفاده شده است. در روش آن‌ها، تغییرات توپولوژیکی به‌طور خودکار در طول روند بهینه‌سازی، بدون نیاز به روش-های مصنوعی^۲ انجام شده است. توکلی و همکارانش [۱۵] روش آیزوژئومتریک را برای بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها مورد استفاده قرار داده‌اند. آن‌ها به‌منظور بهینه‌سازی، از روش مجانب‌های پویا^۳ (MMA) استفاده کرده‌اند. ونگ و همکارانش [۱۶، ۱۷] روش مجموعه‌ی سطوح تراز پارامتری را معرفی نمودند. در کار آن‌ها برای تعریف رویه‌ی سطح تراز از توابع پایه‌ی شعاعی^۴ استفاده شده و برای تعیین ضریب لاگرانژ قید حجم از روش عددی افزایشی به همراه ضریب جریمه^۵ استفاده کرده‌اند. همچنین ونگ و همکاران بهینه‌سازی توپولوژی را برای مسئله‌ی کمینه کردن انرژی کرنشی تحت قید وزن و یک قید تنش تعمیم دادند. در کار آن‌ها قید تنش مورد نیاز در هر مرحله، بیشترین تنش موجود در بین تمام نقاط انتگرال‌گیری گوسی^۶ در میان کل دامنه می‌باشد [۱۸]. آلبرتو فانسلو و همکاران نیز وزن مینیمم را با استفاده از قیود تنش محلی با استفاده از روش مجموعه‌ی سطوح تراز به دست آوردند [۱۹].

۲-۲- تحلیل آیزوژئومتریک

برخی از محدودیت‌های رویکرد اجزا محدود شامل عدم ارتباط مناسب بین مدل‌های هندسی و تحلیل و کمبود پیوستگی مناسب در المان‌ها و همچنین عدم کارایی مناسب در المان‌هایی با درجات بالا منتهی به معرفی روش آیزوژئومتریک در تحلیل‌های عددی شده است [۲۰]. این روش مستقیماً از توابع پایه طراحی به کمک کامپیوتر^۷ به‌عنوان توابع شکل مدل استفاده می‌کند که در تحلیل هم استفاده می

^۱Semi-Implicit additive operator

^۲Artificial Schemes

^۳Method of Moving Asymptotes

^۴RBF: Radial Basis Function

^۵Augmented Lagrangian With Penalization Parameter

^۶Gaussian integration points

^۷Computer Aided Design

شود. از زمانی که روش آیزوژئومتریک معرفی شده است، توانسته کاربرد خود در حوزه‌های مختلف را اثبات کند [۲۶-۲۱]. در دهه گذشته، آیزوژئومتریک برای هر دو بهینه‌سازی شکل و توپولوژی به دلیل مزیت‌هایی که داشته اتخاذ شده است. به عنوان مثال، بیان هندسه دقیق مدل موجب ادغام تحلیل و طراحی در هر دو بهینه‌سازی شکل و توپولوژی شده است [۲۷-۲۹] و توابع اسپیلاین^۱ آیزوژئومتریک که از شطرنجی شدن شکل سازه بدون اعمال هیچ فیلتری در بهینه‌سازی توپولوژی جلوگیری می‌کند [۳۰-۳۲].

با تحولات اخیر در فناوری *CAGD*، تعریف هندسی و تولید سطوح و اشیا پیچیده قابل دستیابی است [۳۳]. برای این منظور، از اسپیلاین‌ها و برخی نسخه‌های اصلاح شده آن‌ها، به عنوان مثال نربز^۲ و تی اسپیلاین^۴، معمولاً استفاده می‌شود. ایده اصلی در روش *IGA* این است که هر مولفه حوزه متغیرها که به عنوان راه حل در یک معادله دیفرانسیل جزئی حاکم بر مسئله صدق می‌کند، به عنوان یک سطحی که بردار نرمال آن بیش از ۳ مولفه دارد، تصور شود که می‌تواند توسط نسخه‌های مناسب اسپیلاین ساخته شود [۳۴، ۳۵]. به عنوان مثال، در روش جابه‌جایی برای مسائل الاستیسیته، هر یک از اجزای بردار جابه‌جایی به عنوان سطحی در نظر گرفته می‌شود که می‌تواند توسط نربز ساخته شود، و پارامترهای تعیین کننده این سطوح جستجو می‌شود. معیارهای یافتن این پارامترها را می‌توان با به حداقل رساندن کل انرژی پتانسیل عملکردی یا معادل آن با اجرای اصل کار مجازی به دست آورد. روش *IGA* دارای برخی ویژگی‌های مشترک با سایر روش‌های عددی مانند اجزا محدود و روش‌های بدون مش^۵ است. در تحلیل آیزوژئومتریک، گسسته سازی دامنه مورد نظر با استفاده از نقاط کنترل اسپیلاین‌ها به جای استفاده از مش‌های اجزا محدود، تفاضل محدود یا جمع آوری نقاط در روش‌های بدون مش انجام می‌شود. همچنین، توابع پایه اسپیلاین برای تقریب متغیرهای مجهول و همچنین برای

^۱Spline

^۲Computer Aided Geometry Design

^۳NURBS

^۴T-Spline

^۵Meshfree

درون یابی استفاده می‌شود. روش IGA برای مسائل الاستیسیته از مراحل زیر تشکیل شده است. ابتدا هندسه دامنه مورد نظر با استفاده از توابع نریز ساخته می‌شود. بسته به پیچیدگی هندسه و توپولوژی مسئله، می‌توان از چندین وصله^۱ نریز در این مرحله استفاده کرد. این وصله‌ها ممکن است به عنوان نوعی از المان‌های بزرگ در روش اجزای محدود در نظر گرفته شوند و می‌توانند به همان شکل اسمبل شوند [۲۰]. در مرحله بعدی، با استفاده از توابع پایه نریز، و استفاده از ایده اجزا محدود آیزوپارامتریک، هندسه و همچنین مولفه‌های جابه‌جایی را تقریبی می‌یابند. سپس، با پیروی از یک روش استاندارد مانند باقیمانده‌های وزنی یا روش‌های حساب تغییرات، یا به طور مشابه با استفاده از اصل کار مجازی، مقادیر تقریبی در روابط به دست آمده جایگزین می‌شوند. این منجر به حل یک سیستم معادلات خطی می‌شود. باید توجه داشت که به دنبال این روش متغیرهای کنترل ارزیابی می‌شوند و برای به دست آوردن جابه‌جایی‌ها در نقاط خاص به نوعی پردازش ثانویه نیاز است. در فصل تحلیل آیزوژئومتریک نحوه مدل‌سازی هندسه و محاسبه تغییر مکان‌ها در این روش، شرح داده شده است [۳۰].

۳-۲- بهینه‌سازی توپولوژی با در نظر گرفتن قید خستگی

در سال‌های اخیر، بهینه‌سازی مبتنی بر خستگی، به کمک روش‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. بهینه‌سازی شکل با در نظر گرفتن خستگی نیز مورد مطالعه قرار گرفته است [۳۶-۳۸]. برای بهینه‌سازی توپولوژی، در سال ۲۰۱۰ شریف^۲ و همکاران [۳۹]، بار خستگی دینامیکی را با استفاده از بارهای استاتیکی معادل، مورد بررسی قرار دادند. در همین سال کیم^۳ و پارک^۴ [۴۰] نیز اثر معادل‌سازی بار دینامیکی با بار استاتیکی را بررسی کردند.

^۱Patch

^۲Sherif

^۳Kim

^۴Park

در سال ۲۰۱۴ اریک هلمبرگ^۱ و همکاران [۴۱] بهینه‌سازی توپولوژی مبتنی بر خستگی را که در آن تحلیل خستگی و بهینه‌سازی توپولوژی در دو مرحله جداگانه انجام شده است، بررسی کردند. حداکثر تنش اصلی که نشان‌دهنده خسارت تجمعی مجاز می‌باشد، برای تعداد مشخصی از چرخه‌ها محاسبه شده است، و سپس به عنوان قید خستگی به مسئله بهینه‌سازی توپولوژی اعمال شده است. در این مقاله قید خستگی معادل با حداکثر قید تنش اصلی است و مسئله جهت کمینه کردن وزن سازه، درحالی که قیده‌های تنش استاتیکی و خستگی را ارضا می‌کنند، فرمول‌بندی شده است. فرمول‌بندی مسئله به صورت زیر می‌باشد:

$$(۱-۲) \quad \begin{cases} \min \sum_{e=1}^{n_e} m_e \rho_e(x) \\ s.t. \begin{cases} \sigma_j^f(x) \leq \bar{\sigma}^f & , \quad j = 1, \dots, n_{fc} \\ \sigma_i^s(x) \leq \bar{\sigma}^s & , \quad i = 1, \dots, n_{sc} \\ \varepsilon \leq x_e \leq 1 & , \quad e = 1, \dots, n_e \end{cases} \end{cases}$$

که تعداد قیود خستگی و تنش استاتیکی با n_{fc} و n_{sc} مشخص شده است. اندازه خرابی خستگی المان‌ها با استفاده از تابع پی-نرم، به صورت زیر تعریف شده است:

$$(۲-۲) \quad \sigma_j^f(x) = \left(\frac{1}{N_j} \sum_{a \in \Omega_j} (\sigma_a^1(x))^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

که بیشترین تنش اصلی کششی و مجموعه نقاط ارزیابی خستگی متعلق به خوشه j ام به ترتیب با σ_a^1 و Ω_j نشان داده شده است. تنش خستگی بحرانی در معادله ۲-۱، بر اساس تحلیل خستگی پرچرخه، با حل مسئله‌ای که در آن، تابع هدف، بیشینه کردن تنش خستگی بحرانی، درحالی که قید خرابی خستگی تجمعی را به صورت زیر ارضا می‌کند، محاسبه شده است.

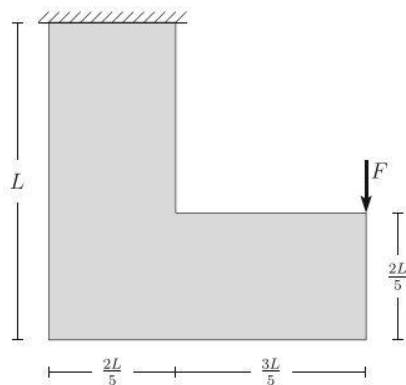
$$(۳-۲) \quad \begin{cases} \text{Maximize: } \bar{\sigma}^f \\ \text{subject to: } \left\{ \sum_{l=1}^L \frac{n_l}{N_l} \leq \bar{D} \quad , \quad D \leq \bar{D} \leq 1 \right. \end{cases}$$

که n_l و N_l به ترتیب تعداد چرخه‌های بارگذاری و تعداد چرخه‌های منجر به خرابی است. برای حل

^۱Erik Holmberg

مسئله بهینه‌سازی در معادله ۱-۲، روش مصالح مصنوعی همسانگرد با اعمال جریمه^۱ همراه با روش مجانب‌های پویا [۴۲] به‌عنوان یک بهینه‌ساز استفاده شده است. همچنین برای اجتناب از پاسخ صفحه شطرنجی شدن^۲، روش فیلتر کردن متغیر طراحی^۳ [۴۳] به‌جای فیلتر کردن حساسیت^۴ به‌کار رفته است، و تحلیل حساسیت قید خستگی براساس بیشترین تنش اصلی کششی انجام گرفته است. برای محاسبه قیدهای خستگی هر خوشه، از تکنیک‌های سطح تنش [۴۴] استفاده شده است، که در آن خوشه‌ها بر اساس مقادیر تنش المان‌ها تعریف شده‌اند. همان‌طور که در [۴۱] مورد بحث قرار گرفته است، طرح بهینه‌نهایی، عاری از تمرکز تنش بزرگ می‌باشد، اما مقادیر خستگی و تنش محلی، می‌توانند به دلیل اعمال روش قیدهای ناحیه‌ای^۵، بالاتر از مقادیر قیده‌ها باشند. از این‌رو، در این مقاله روشی پیشنهاد شده است که در آن، تحلیل خستگی از مسئله بهینه‌سازی توپولوژی جدا می‌باشد، و قید خستگی می‌تواند به‌عنوان قید تنش در مسئله بهینه‌سازی توپولوژی مورد استفاده قرار گیرد.

در شکل ۱-۲ ابعاد هندسی دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر ال-شکل مورد بررسی در این مقاله نشان داده شده است.



شکل ۱-۲ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر ال-شکل [۴۱]

در شکل ۲-۲ طرح بهینه‌ی تیر ال-شکل برای وزن کمینه، با در نظر گرفتن عمر خستگی و تنش

^۱SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization

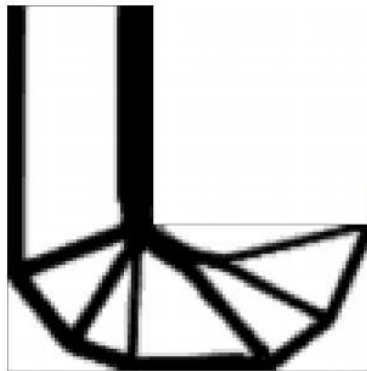
^۲Checkerboard solution

^۳Design variable filtering

^۴Sensitivity filtering

^۵Regional constraints approach

استاتیکی آورده شده است.



شکل ۲-۲ طرح بهینه‌ی تیرال-شکل [۴۱]

در سال ۲۰۱۵ جیونگ^۱ و همکاران [۴۵] بهینه‌سازی توپولوژی مبتنی بر خستگی با شرایط بارگذاری متغیر را مورد بررسی قرار دادند. معیارهای خرابی خستگی بر اساس روش تنش-عمر، با استفاده از تحلیل دینامیکی و استاتیکی برای غلبه بر عدم مشتق‌پذیری قید خستگی، بر اساس نظریه‌های اصلاح-شده گودمن^۲، سودربرگ^۳ و گربر^۴ محاسبه شده‌اند، تنش متوسط فون میزس با استفاده از تحلیل استاتیکی محاسبه شده است و تحلیل دینامیکی برای محاسبه تنش تناوبی فون میزس به کار رفته است. مسئله بهینه‌سازی توپولوژی جهت کمینه‌کردن وزن سازه تحت قیدهای خستگی فرمول‌بندی شده است. همچنین قید اضافی تنش استاتیکی برای جلوگیری از خرابی استاتیک اعمال شده است. مسئله بهینه‌سازی توپولوژی به شرح زیر تعریف شده است:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimize: } V(\gamma) = \sum_{e=1}^{NE} \tilde{\gamma}_e v_e \quad \tilde{\gamma}_e = \text{Filtered density} \\ \text{subject to: } \left\{ \begin{array}{l} f_{1,e} = L_e(\sigma_a, \sigma_m) \leq 1 \\ f_{2,e} = \frac{\sigma_a + \sigma_m}{\sigma_y} \leq 1 \\ f_{3,e} = \frac{\sigma_a - \sigma_m}{\sigma_y} \leq 1 \\ \varepsilon \leq \gamma_e \leq 1 \quad e = 1, \dots, n_e \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (۴-۲)$$

^۱Jeong

^۲Goodman

^۳Soderberg

^۴Gerber

که $f_{2,e}$ و $f_{3,e}$ قیدهای تنش استاتیکی هستند، که می‌توان بر اساس تنش تسلیم مواد (σ_y) برای جلوگیری از خرابی استاتیک آن‌ها را تعریف کرد، و $f_{1,e}$ قید خستگی می‌باشد، که بیشترین معیار خستگی در بین معیارهای گربر، سودربرگ و گودمن اصلاح شده به شرح زیر می‌باشد:

$$f_{1,e} = \max \left(\begin{array}{l} \text{Modified Goodman: } \frac{\sigma_a}{\sigma_{se}} + \frac{\max[\sigma_m, 0]}{\sigma_{TS}} \leq 1 \\ \text{Gerber: } \frac{\sigma_a}{\sigma_{se}} + \left(\frac{\max[\sigma_m, 0]}{\sigma_{TS}} \right)^2 \leq 1 \\ \text{Soderberg: } \frac{\sigma_a}{\sigma_{se}} + \frac{\max[\sigma_m, 0]}{\sigma_y} \leq 1 \end{array} \right) \quad (5-2)$$

که σ_y و σ_{TS} نشان‌دهنده مقاومت کششی و تنش تسلیم هستند. تنش‌های تناوبی و متوسط به ترتیب با σ_a و σ_m نشان داده می‌شود، و σ_{se} دامنه تنش بدون هیچ تنش متوسطی، در شرایط بارگذاری کاملاً معکوس شونده می‌باشد. روش پی-نرم نیز برای جمع‌آوری قیدهای محلی در یک تابع، به صورت زیر اعمال شده است:

$$(f_i^{max})_{PN} = c_i^{iteration} \left(\sum_e (f_{i,e})^p \tilde{\gamma}_e \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6-2)$$

که $c_i^{iteration}$ ضریب نرمال سازی [۴۶] است و می‌تواند به صورت زیر تعریف شود:

$$c_i^{iteration} = \alpha^i \frac{\sigma_{max}^{iteration-1}}{f_{i,PN}^{iteration-1}} + (1 - \alpha^{iteration}) c_i^{iteration-1}, \quad 0 < \alpha^i < 1 \quad (7-2)$$

چون معیارهای خرابی خستگی نسبت به متغیرهای طراحی و مولفه‌های تنش مشتق‌ناپذیر می‌باشند، جیونگ و همکاران با استفاده از معیار فون میزس علامت‌دار، معیارهای مشتق‌پذیر خرابی خستگی و استاتیکی خود را پیشنهاد نمودند. جهت تقریب بهتر قید محلی نیز از همان رویکرد قید ناحیه‌ای [۴۶] استفاده شده است. در نهایت مسئله بهینه‌سازی توپولوژی با قید خستگی بر اساس روش مصالح مصنوعی همسانگرد با اعمال جریمه، همراه با روش مجانب‌های پویا [۴۲] حل شده است. در این مقاله مشاهده می‌شود که مقادیر مختلف p در روش پی-نرم، منجر به طرح‌های مختلف بهینه می‌گردد.

در سال ۲۰۱۷ جیکوب اوست^۱ و لوند^۲ [۴۷] روشی را به کار بردند که در آن عمر خستگی المان‌ها در بهینه‌سازی توپولوژی در نظر گرفته شده است. برای تحلیل اجزا محدود از تحلیل شبه استاتیکی^۳ استفاده شده است، و معیار خرابی خستگی با استفاده از روش سیلان باران^۴ محاسبه شده است. مسئله بهینه‌سازی برای کمینه کردن جرم، ضمن تحمل خرابی انباشته تحت شرایط بارگذاری متغیر، به شرح زیر فرمول‌بندی شده است:

$$\begin{cases} \min: \sum_{e=1}^{n_e} m_e \rho_e(x) \\ \text{subject to: } \begin{cases} g_D(x) \leq 1 \\ \varepsilon \leq x_e \leq 1 \end{cases} \quad e = 1, \dots, n_e \end{cases} \quad (۸-۲)$$

که g_D تابع پی-نرم قید خستگی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g_D(x) = \left(\sum_{e=1}^{n_e} (D_e)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (۹-۲)$$

و D_e خرابی تجمعی در المان e است که توسط هر چرخه بار i به صورت زیر ایجاد می‌شود:

$$D_e = \sum_{i=1}^{n_{RF}} \left(\frac{n_i}{N_{ei}} \right) \quad (۱۰-۲)$$

برای حل مسئله بهینه‌سازی نیز روش مصالح مصنوعی همسانگرد با اعمال جریمه ($SIMP$)، همراه با روش مجانب‌های پویا (MMA) استفاده شده است. همچنین روش فیلتر چگالی برای غلبه بر الگوی صفحه شطرنجی به کار رفته است.

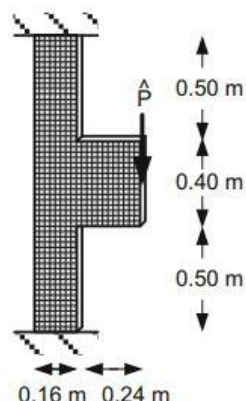
در شکل ۲-۳ ابعاد هندسی دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی مسئله‌ی مورد بررسی در این مقاله نشان داده شده است.

^۱Jacob Oest

^۲Lund

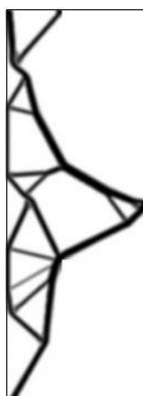
^۳Quasi-Static analysis

^۴Rain-Flow method



شکل ۲-۳ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر ال-شکل دوبل [۴۷]

در شکل ۲-۴ طرح بهینه‌ی مسئله‌ی فوق برای وزن کمینه، با در نظر گرفتن قید خستگی آورده شده است.



شکل ۲-۴ طرح بهینه‌ی تیر ال-شکل دوبل [۴۷]

در همین سال ماکسیم کولت^۱ [۴۸] بهینه‌سازی توپولوژی مقید به قید خستگی را پیشنهاد کرد، که در آن از روش گودمن اصلاح شده به همراه روش سینوسی^۲ برای محاسبه معیارهای خرابی، استفاده شده است. مسئله به صورت کمینه کردن وزن سازه با مجموعه‌ای از قیدهای تنش محلی برای نشان دادن مقاومت خستگی طرح بهینه، تعریف شده است. برای محاسبه تنش تناوبی و متوسط المان‌ها از تحلیل استاتیکی معادل استفاده شده است و سپس با نمودار گودمن اصلاح شده، مقایسه انجام شده است. همان‌طور که در این مقاله توضیح داده شده است، برای جلوگیری از خرابی خستگی، تنش متوسط و تناوبی همه المان‌ها باید در ناحیه ایمن نمودار گودمن قرار گیرند. ناحیه ایمن نمودار گودمن، به صورت

^۱Maxime Collet

^۲Sine method

زیر تعریف شده است:

$$\begin{cases} \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_y} - \frac{\sigma_m}{S_{yc}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_a}{S_e} \leq 1 \end{cases} \quad (11-2)$$

که S_{ut} ، S_y و S_{yc} به ترتیب نشان دهنده‌ی، تنش کششی، تنش تسلیم در کشش و تنش تسلیم در فشار می‌باشند. حد دوام المان‌ها با S_e نشان داده شده است، و σ_m و σ_a تنش معادل متوسط و تناوبی المان‌ها می‌باشند. مسئله بهینه‌سازی در این مقاله نیز به شرح زیر تعریف شده است:

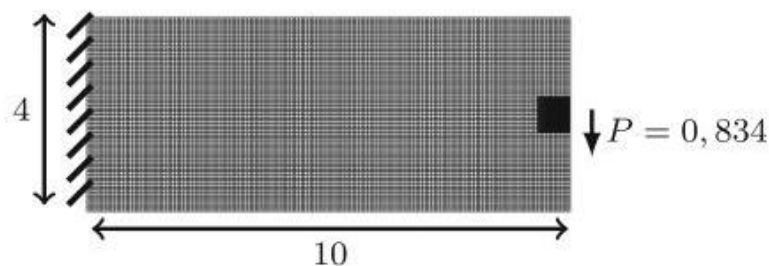
$$\begin{cases} \text{Minimize: } W = \sum_{e=1}^{NE} x_e v_e \\ \text{subject to: } \begin{cases} \frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_a}{\sigma_y} - \frac{\sigma_m}{S_{yc}} \leq 1 \\ \frac{\sigma_a}{S_e} \leq 1 \\ \varepsilon \leq x_e \leq 1 \quad e = 1, \dots, NE \end{cases} \end{cases} \quad (12-2)$$

از روش فیلتر چگالی [۴۳] نیز برای جلوگیری از الگوی صفحه شطرنجی طرح بهینه استفاده شده است. برای حل مسئله بهینه‌سازی نیز روش مصالح مصنوعی همسانگرد با اعمال جریمه، همراه با روش مجانب‌های پویا استفاده شده است. روش آرام‌سازی^۱ نیز برای غلبه بر پدیده موسوم به تکینگی^۲ آفیده‌ای خستگی به کار رفته است.

در شکل ۲-۵ ابعاد هندسی دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر طره مورد بررسی در این مقاله نشان داده شده است.

^۱Relaxation

^۲Singularity



شکل ۲-۵ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر طره [۴۸]

در شکل ۲-۶ طرح بهینه‌ی مسئله‌ی فوق برای وزن کمینه، با در نظر گرفتن قید خستگی آورده شده است.

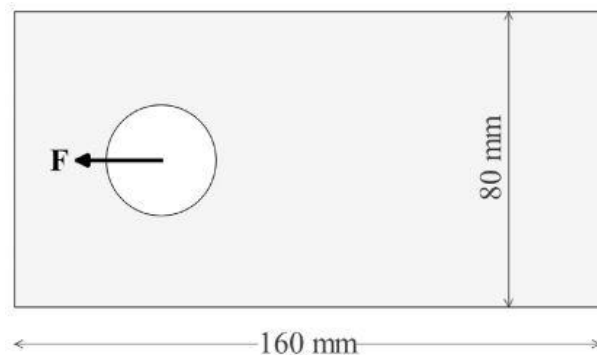


شکل ۲-۶ طرح بهینه‌ی تیر طره [۴۸]

در سال ۲۰۱۹ نیز نبکی^۱ و همکاران [۴۹] مسئله‌ی کمینه‌کردن انرژی کرنشی با در نظر گرفتن قید خستگی و قید حجم را مورد مطالعه قرار دادند. معیار خرابی خستگی گودمن اصلاح شده در این مقاله به‌طور مستقیم در آنالیز حساسیت استفاده شده است و روش بهینه‌سازی تکاملی جهت حل مسئله به‌کار رفته است.

در شکل ۲-۷ ابعاد هندسی دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر مورد بررسی در این مقاله نشان داده شده است.

^۱Nabaki



شکل ۷-۲ دامنه طراحی و شرایط تکیه‌گاهی تیر حفره‌دار [۴۹]

در شکل ۸-۲ طرح بهینه‌ی مسئله‌ی فوق برای کمینه کردن انرژی کرنشی، با در نظر گرفتن قید خستگی و قید حجم آورده شده است.



شکل ۸-۲ طرح بهینه‌ی تیر حفره‌دار [۴۹]

فصل سوم: تحلیل آیزورنومریک

۳-۱- مقدمه

تاکنون برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی روش‌های عددی متعددی معرفی شده است، که در حوزه مکانیک محاسباتی^۱ در مورد آن‌ها بحث می‌شود. این روش‌ها به ترتیب شکل‌گیری شامل روش‌های تفاضل محدود^۲، اجزای محدود^۳ (*FEA*) و روش‌های بدون شبکه^۴ می‌باشند. حوزه استفاده از روش‌ها بسیار متنوع بوده و می‌توان از آن‌ها در مسائلی مانند مکانیک جامدات، مکانیک سیالات، انتشار امواج، الکتریسیته، انتقال حرارت و غیره استفاده و اقدام به مدل‌سازی و حل معادلات حاکم بر این مسائل نمود. در میان روش‌های مذکور، روش *FEA* با قدمتی نزدیک به ۶۰ سال از شناخته شده ترین روش‌های عددی می‌باشد که بنیان بسیاری از نرم افزارهای محاسباتی کنونی را در زمینه‌های علمی مختلف تشکیل می‌دهد. این روش در سال‌های ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت و همزمان با رشد علم کامپیوتر در زمینه سخت افزار و نرم افزار، برنامه‌های آکادمیک و تجاری زیادی بر مبنای آن تهیه گردید. در سال‌های پس از معرفی روش *FEA* محققان بسیاری در سراسر جهان بر روی توسعه این روش کار کرده‌اند. همچنین ابهامات و اشکالات بسیاری مورد موشکافی و بررسی قرار گرفته و اغلب با تولید راه حل‌هایی رفع شده‌اند. اما با بررسی دقیق‌تر هنوز می‌توان اشکالات و یا نقاط ضعفی را برای آن برشمرد که ناشی از فلسفه برخورد این روش با معادلات حاکم بر مسئله مورد نظر می‌باشد. مثلاً نیاز به تولید شبکه ای از المان‌ها^۵ برای تولید هندسه یک مسئله در مکانیک جامدات از ضعف‌های این روش محسوب می‌شود. نحوه شبکه بندی، نوع المان مورد استفاده و تعداد المان‌ها، از پارامترهای موثر بر جواب نهایی مسئله می‌باشند که در صورت انتخاب نادرست آن‌ها به جواب مطلوبی دست نخواهیم یافت. از طرف دیگر شبکه بندی هندسه، خود امری دشوار و زمان بر می‌باشد و ذکر شده است که

^۱Computational Mechanic

^۲Finite Difference Method

^۳Finite Element Method

^۴Meshless Method

^۵Mesh Generation

حدود ۸۰ درصد از زمان حل یک مسئله به روش *FEA* صرف تولید شبکه المان‌ها می‌شود. حال با فرض این‌که در فرآیند حل یک مسئله (مانند مسائل بهینه‌سازی شکل یک سازه) در هر گام از حل مسئله نیاز به باز تولید شبکه المان‌ها باشد، می‌توان به معضلات نیاز به تولید شبکه بیشتر پی‌برد. از طرف دیگر برای بالا بردن دقت در مدل‌سازی هندسه جسم بایستی از تعداد بیشتری المان و یا المان‌های با مرتبه بالاتر و یا ترکیبی از این دو روش استفاده نمود که در تمام حالات سبب افزایش زمان تولید شبکه المان‌ها، زمان حل دستگاه معادلات حاکم بر مسئله و حافظه مورد نیاز کامپیوتر خواهد شد. همچنین اگر بخواهیم به ازای تعداد مشخصی از المان‌ها، دقت بهتری را برای تقریب زدن تابع مجهول به‌دست آوریم بایستی از تکنیک‌های بهبود شبکه استفاده کرد که خود علاوه بر نیاز به مباحث و مشکلات تئوری خاص، سبب نیاز به زمانی اضافه‌تر جهت تولید شبکه مناسب المان‌ها خواهد شد. در حالت کلی نیز با پیچیده‌تر شدن مسئله مورد بررسی، کلیه موارد فوق به شکل موثرتری اثرات منفی خود را نشان می‌دهند.

۳-۲- معرفی روش تحلیل آیزوژئومتریک^۱ (*IGA*)

روش *IGA* بر مبنای استفاده از تکنیک‌های تولید هندسه مانند تکنیک نربز^۲ (*NURBS*) بنا شده است. تکنیک نربز به‌عنوان راهکاری استاندارد برای تولید هندسه به کمک کامپیوتر می‌باشد که در بخش‌های بعدی به تفصیل به آن اشاره خواهد شد. در این روش هندسه مسئله البته با ذکر توضیحاتی، به‌صورت دقیق مدل می‌شود. اگر هندسه مسئله قبل از انجام عملیات تحلیل، با استفاده از تکنیک نربز ایجاد شده باشد و در حل مسئله از همان مشخصات استفاده شود می‌توان از کلمه دقیق استفاده کرد. همچنین در صورتی که هندسه مسئله از اشکال هندسی مشخص مانند دایره، سهمی، هذلولی، استوانه، مخروط، کره و غیره ساخته شده باشد باز هم می‌توان از عبارت دقیق استفاده کرد، در غیر این صورت

^۱Isogeometric Analysis

^۲Non Uniform Rational B-Splines

هندسه مسئله همانند روش اجزای محدود تقریبی خواهد بود ولی شکل تقریبی نسبت به روش اجزای محدود می‌تواند از کیفیت بالاتری برخوردار باشد. از این رو پیشنهاد می‌شود در متون آیزوژئومتریک از لغت نزدیک به دقیق به جای لغت دقیق استفاده نمود. سپس از همان اطلاعاتی که برای مدل‌سازی هندسه استفاده شده، برای تقریب زدن تابع مجهول استفاده می‌شود. به همین علت نیز نام روش آیزوژئومتریک بر روی آن قرار داده شده است که برگرفته از مفهوم آیزوپارامتریک در روش *FEA* است. روش آیزوژئومتریک در مقایسه با روش اجزای محدود از ادبیات خاص خود برخوردار است که بعداً به آن اشاره خواهد شد. ولی به‌طور خلاصه برخی از مزایای آن به شرح زیر می‌باشد:

(۱) مدل‌سازی نسبتاً دقیق هندسه و انعطاف پذیری فوق العاده در تولید و کنترل مرزهای مدل‌های با شکل‌های پیچیده.

(۲) عدم وابستگی کیفیت هندسه تولید شده به ریز یا درشت بودن شبکه نقاط کنترلی.

(۳) امکان اقلان نسبتاً دقیق‌تر شرایط مرزی با تعداد کمتر قیود تکیه‌گاهی. در روش اجزای محدود گره‌ها و در *IGA* نقاط کنترلی تحت تاثیر قرار می‌گیرد.

(۴) داشتن تئوری ریاضی مشابه روش اجزای محدود و دارا بودن اغلب مزایای این روش.

(۵) نیاز کمتر به شبکه بندی مجدد در مسائلی که هندسه مسئله در حین حل تغییر می‌کند.

(۶) کاهش چشمگیر ابعاد دستگاه معادلات حاکم و در نتیجه کاهش زمان حل دستگاه معادلات.

(۷) کاهش در حجم حافظه کامپیوتری مورد نیاز برای ذخیره سازی اطلاعات مسئله.

(۸) نیاز به فایل‌های ورودی بسیار ساده و قابل درک.

(۹) ایجاد امکانات بیشتر در خصوص مسئله بهبود شبکه و بالا بردن دقت حل.

۳-۳- اسپیلاین‌ها و نربزها

منحنی‌ها و سطوح اسپیلاین در واقع از تکامل منحنی‌ها و سطوح بزیر^۱ ایجاد شده‌اند و منحنی‌ها و سطوح بزیر، حالت خاصی از اسپیلاین‌ها می‌باشند. اما خود منحنی‌های بزیر در اواخر دهه ۵۰ میلادی به‌طور همزمان توسط شخصی به نام پیر بزیر^۲ در کارخانه رنو و پائول دی کاستلیانو^۳ در کارخانه سیتروئن ابداع شده و بعدها توسط ریاضیدانی به نام لوباچفسکی^۴ توسعه داده شدند.

استفاده کاربردی از اسپیلاین‌ها در صنایع مختلف بسیار چشمگیر است. صنایعی مانند خودرو سازی، فیلم سازی، نرم افزارهای کامپیوتری و غیره از مصرف کنندگان عمده این تکنیک می‌باشند. علل اصلی استفاده از این روش عبارتند از:

(۱) الگوریتم این روش ساده بوده و به راحتی می‌توان به یک تفسیر و درک هندسی مناسب از آن دست یافت.

(۲) این روش دارای مبنای ریاضی قابل قبولی بوده و در تولید اشکال ساده و پیچیده از یک الگوریتم مشخص استفاده می‌کند. بنابراین رفتار آن در تولید یک شکل ساده مانند خط و دایره با تولید یک رویه پیچیده مانند بدنه ماشین و کشتی، ثابت می‌باشد.

(۳) انعطاف پذیری آن در تولید اشکال مختلف و قابلیت ایجاد تغییرات دلخواه در شکل مسئله بدون نیاز به کار ریاضی اضافی.

(۴) ثابت ماندن شکل منحنی‌ها و سطوح تولید شده تحت اثر تبدیلات هندسی معمول مانند مقیاس کردن، انتقال و دوران.

(۵) کارایی روش در تولید سریع و دقیق شکل مورد نظر.

^۱Bezier

^۲Pierre E. Bézier

^۳Paul de Casteljaou

^۴N. Lobachevsky

۶) وجود پایداری عددی بالا در مواجهه با حجم سنگین محاسبات عددی و عدم ایجاد تغییر شکل-های ناخواسته و اعوجاج در اشکال تولید شده.

۳-۴- معرفی سطح ساخته شده از توابع نربز

یکی از خصوصیات منحنی‌ها، سطوح و احجام ساخته شده توسط توابع پایه‌ی نربز، ثابت بودن آن‌ها تحت تبدیلات هندسی متداول همچون انتقال، دوران، تشابه و نگاشت است. به همین دلیل توابع نربز یا همان بی-اسپیلاین‌های نسبی غیریکنواخت امروزه در بسیاری از استانداردهای صنعتی جهان به عنوان یکی از ابزارهای ریاضی قدرتمند برای طراحی هندسی شناخته شده‌اند. یکی از مفاهیم اساسی برای معرفی سطوح ساخته شده توسط نربز، بردار گره‌ای^۱ است. یک بردار گره‌ای، دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی است که به صورت زیر تشکیل می‌شود [۳۳]:

$$E = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_r\} \quad (۱-۳)$$

که در آن ξ_i ، i امین گره، p درجه‌ی چند جمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل دهنده‌ی بی-اسپیلاین می‌باشد. یکی از انواع بردارهای گره‌ای که در اینجا مورد استفاده قرار می‌گیرد، بردار گره‌ای نامتناوب باز است^۲ که فرم زیر را دارا می‌باشد:

$$\left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (۲-۳)$$

در این نوع از بردارهای گره‌ای، اولین و آخرین مقدار از گره‌ها دارای $p+1$ تکرار می‌باشند. با توجه به مفاهیم گفته شده، i امین تابع پایه‌ی بی-اسپیلاین از درجه‌ی p (مرتبه‌ی $p+1$) که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود، به شکل زیر تعریف می‌گردد [۳۳]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 0 & otherwise \\ 1 & if \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1} \end{cases} \quad (۳-۳)$$

^۱Knot vector

^۲Nonperiodic knot vector

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (4-3)$$

در تحلیل آیزوژئومتری یک برای مدل کردن هندسه‌ای که در جهت ξ از درجه p و در جهت η از درجه q باشد از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) P_{i,j} \quad (5-3)$$

که بردارهای گره‌ای Ξ و H در آن به ترتیب دارای $r+1$ و $s+1$ گره هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1} \right\} \quad (6-3)$$

$$H = \left\{ \underbrace{0, \dots, 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, \dots, \eta_{r-q-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{q+1} \right\} \quad (7-3)$$

در رابطه‌ی (۵-۳)، $P_{i,j}$ مختصات شبکه‌ای دو سویه از نقاط کنترلی به تعداد $(n \times m)$ نقطه را بیان می‌کند به‌طوری که $n=r-p$ و $m=s-q$ به‌ترتیب تعداد نقاط کنترلی در راستای بردارهای گره‌ای Ξ و H می‌باشند. از طرفی اگر توابع پایه‌ی نرَبز به‌صورت زیر تعریف شود:

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \quad (8-3)$$

آن‌گاه رابطه (۵-۳) به‌صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(\xi, \eta) p_{i,j} \quad (9-3)$$

۳-۵- فرمول بندی تحلیل آیزوژئومتری یک مسائل تنش مسطح

ویژگی اصلی روش آیزوژئومتری یک این است که از توابع پایه‌ی مورد استفاده در مدل‌سازی هندسه، به‌منظور تقریب تابع مجهول نیز استفاده می‌کند و بدین ترتیب از این جهت شباهت زیادی به ایده‌ی آیزوپارامتری یک در اجزای محدود کلاسیک دارد. اما این دو رویکرد یک تفاوت اساسی نیز دارند و آن هم این است که در ایده‌ی آیزوپارامتری یک روش اجزای محدود، ابتدا تابع مجهول به کمک توابع شکل تقریب

زده می‌شود و سپس هندسه. این در حالی است که در روش آیزوژئومتریک ابتدا هندسه به صورت دقیق تعیین می‌گردد و سپس با کمک همان توابع پایه‌ای که هندسه را مدل کردند، تابع مجهول مسئله تقریب زده می‌شود.

۳-۵-۱- روند تحلیل با در نظر گرفتن رفتار الاستیک خطی مصالح

به منظور تحلیل الاستیک مسائل تنش مسطح با روش آیزوژئومتریک، لازم است در مرحله اول هندسه‌ی مسئله توسط بردارهای گره‌ای، شبکه‌ی نقاط کنترلی و در نهایت توابع پایه‌ی نربز به طور دقیق تعریف شود. سپس با استفاده از همان بردارهای گره‌ای، دامنه به شبکه‌های کوچکتری تقسیم می‌گردد به طوری که حد فاصل هر دو گره با مقدار متمایز در دو راستا، یک المان گره‌ای^۱ را تشکیل می‌دهد. مجموعه‌ی این المان‌ها که در محدوده‌ی دو بردار گره‌ای تعریف شده‌اند، بیانگر یک وصله^۲ می‌باشند. در مسائل با هندسه‌ی پیچیده می‌توان از بیش از یک وصله نیز استفاده نمود. در مرحله‌ی بعد، مولفه‌های تابع مجهول با استفاده از توابع پایه‌ی نربز تقریب زده می‌شوند. سپس مقادیر تقریبی موجود از مرحله‌ی قبل در روابط به دست آمده از یکی از روش‌های باقیمانده‌ی وزن دار و یا اصل کار مجازی جایگزین می‌شوند و این امر منجر به تولید یک دستگاه معادلات خطی می‌گردد. با حل این دستگاه معادلات، مقادیر مجهول مسئله که همان مقادیر تغییر مکان‌ها در نقاط کنترلی هستند محاسبه می‌شوند. در نهایت با داشتن این مقادیر، می‌توان به مقادیر تغییر مکان‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها در هر نقطه‌ی دلخواهی از دامنه‌ی مسئله دست یافت.

در روش تحلیل آیزوژئومتریک همانند روش اجزای محدود برای رسیدن به دستگاه معادلات خطی بایستی مقدار ماتریس ضرایب کل محاسبه گردد. بر همین اساس مقدار ماتریس ضرایب مطابق آنچه در ادامه گفته خواهد شد برای هر کدام از المان‌های گره‌ای محاسبه و سپس اسمبل می‌گردند. در صورتی

^۱Knot element

^۲Patch

که از تعداد وصله‌های بیشتری استفاده شود، ماتریس ضرایب وصله‌ها نیز با هم آسمل می‌شوند تا معادله‌ی تعادل $KU=F$ حاصل گردد. بر اساس آنچه که در بالا توضیح داده شد، مؤلفه‌های هندسه $S^p = [x^p, y^p]$ و مؤلفه‌های تابع تغییر مکان روی وصله‌ی p ، $U^p = [u^p, v^p]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$x^p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(\xi, \eta) x_{i,j}^p \quad (۱۰-۳)$$

$$y^p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(\xi, \eta) y_{i,j}^p \quad (۱۱-۳)$$

$$u^p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(\xi, \eta) u_{i,j}^p \quad (۱۲-۳)$$

$$v^p(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n R_{i,j}(\xi, \eta) v_{i,j}^p \quad (۱۳-۳)$$

که $x_{i,j}^p$ و $y_{i,j}^p$ مؤلفه‌های مختصات نقاط کنترلی و $u_{i,j}^p$ و $v_{i,j}^p$ به ترتیب مؤلفه تغییر مکان در راستای افقی و قائم برای وصله‌ی p هستند. یکی از ویژگی‌های مهم توابع پایه‌ی نرین، خاصیت بازه‌ی تأثیر است که بر اساس آن، روابط (۱۰-۳) تا (۱۳-۳) طوری اصلاح می‌شوند که فقط توابع پایه‌ی غیر صفر در محاسبات در نظر گرفته خواهند شد و در نتیجه این امر سبب می‌شود حجم محاسبات در مراحل بعدی کاهش یابد [۳۳]. فرم ماتریسی و اصلاح‌شده‌ی روابط بالا با در نظر گرفتن ویژگی ذکر شده به صورت زیر می‌باشد:

$$S(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} x^p(\xi, \eta) \\ y^p(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \sum_{k=i-pl}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) X_{k,l}^p = \mathbf{R}\mathbf{X} \quad (۱۴-۳)$$

$$U(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} u^p(\xi, \eta) \\ v^p(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \sum_{k=i-pl}^i \sum_{l=j-q}^j R_{k,l}(\xi, \eta) U_{k,l}^p = \mathbf{R}\mathbf{U} \quad (۱۵-۳)$$

که در آن:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi, \eta), 0, \dots, R_{i,j-q}(\xi, \eta), 0, \dots, R_{i,j}(\xi, \eta), 0 \\ 0, R_{i-p,j-q}(\xi, \eta), \dots, 0, R_{i,j-q}(\xi, \eta), \dots, 0, R_{i,j}(\xi, \eta) \end{bmatrix} \quad (۱۶-۳)$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{x\ i-p,j-q}, 0, \dots, X_{x\ i,j-q}, 0, \dots, X_{x\ i,j}, 0 \\ 0, X_{y\ i-p,j-q}, \dots, 0, X_{y\ i,j-q}, \dots, 0, X_{y\ i,j} \end{bmatrix}^T \quad (۱۷-۳)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_{x\ i-p,j-q}, 0, \dots, U_{x\ i,j-q}, 0, \dots, U_{x\ i,j}, 0 \\ 0, U_{y\ i-p,j-q}, \dots, 0, U_{y\ i,j-q}, \dots, 0, U_{y\ i,j} \end{bmatrix}^T \quad (۱۸-۳)$$

همچنین رابطه‌ی تنش-کرنش و تعریف کرنش‌ها در مسائل الاستیسیته مطابق روابط زیر است:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (۱۹-۳)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{R}\mathbf{U} \quad (۲۰-۳)$$

که در این روابط $\mathbf{C}$ و $\mathbf{D}$ به ترتیب ماتریس الاستیسیته و ماتریس اپراتور دیفرانسیلی می‌باشند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-v^2} \begin{bmatrix} 1 & v & 0 \\ v & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-v}{2} \end{bmatrix} \quad (۲۱-۳)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (۲۲-۳)$$

بنابراین با به کارگیری اپراتور دیفرانسیلی در رابطه‌ی (۱۶-۳) ماتریس کرنش-تغییر مکان که با $\mathbf{B}$ نمایش

داده می‌شود، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial x} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial y} & \dots \\ \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial y} & \frac{\partial R_{i-p,q-j}}{\partial x} & \dots \end{bmatrix} \quad (۲۳-۳)$$

بر اساس رابطه‌ی بالا، ما به مشتقات جزئی توابع پایه‌ی نریز نسبت به x و y نیاز داریم. همانند روش

اجزا محدود، برای محاسبه‌ی این مشتقات از قانون زنجیره‌ای، استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (۲۴-۳)$$

فرم ماتریسی رابطه (۳-۲۴) به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (۳-۲۵)$$

که ماتریس 2×2 موجود در آن، ماتریس ژاکوبین^۱ نام دارد و با J_1 نمایش داده می شود. این ماتریس که شامل مشتقات جزئی مولفه های هندسه نسبت به ξ و η می باشد، در واقع نگاشتی از فضای پارامتری (ξ, η) به فضای فیزیکی مسئله (x, y) است. بنابر این مشتقات جزئی توابع پایه ی نربز نسبت به x و y به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}_1^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (۳-۲۶)$$

در رابطه ی بالا مشتقات جزئی توابع پایه ی نربز نسبت به مولفه های (ξ, η) نیز نیاز است که در ادامه داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \xi} P_{k,l}^x \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \eta} P_{k,l}^x \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \xi} P_{k,l}^y \\ \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{k=i-p}^i \sum_{l=j-q}^j \frac{\partial \mathbf{R}_{k,l}(\xi, \eta)}{\partial \eta} P_{k,l}^y \end{aligned} \quad (۳-۲۷)$$

برای محاسبه ی ماتریس ضرایب به دست آمده، می توان از روش انتگرال گیری گوسی استفاده کرد. همانند روش اجزای محدود، نقاط گوسی، نقاطی از پیش تعیین شده هستند که برای المان های گره ای مختلف، محل و وزن آن ها محاسبه شده است. برای این که بتوانیم از این نقاط بهره ببریم، بایستی از یک نگاشت دیگر هم استفاده کنیم به طوری که این نگاشت، مختصات نقاط ارائه شده در دستگاه مربوط به فضای المان مادر (r, s) را به دستگاه مختصات فضای پارامتری (ξ, η) منتقل می کند.

^۱ Jacobian matrix

$$\xi = \frac{1}{2}[(\xi_{i+1} - \xi_i)r + (\xi_{i+1} + \xi_i)] \quad (28-3)$$

$$\eta = \frac{1}{2}[(\eta_{i+1} - \eta_i)s + (\eta_{i+1} + \eta_i)]$$

این نگاشت در انتگرال گیری باعث ایجاد ماتریس ژاکوبین به صورت زیر می شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (29-3)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2}(\xi_{i+1} - \xi_i) \\ \frac{\partial \eta}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial s} &= \frac{1}{2}(\eta_{i+1} - \eta_i) \end{aligned} \quad (30-3)$$

در ادامه با استفاده از تعریف کرنش ها در رابطه ۳-۲۰، می توان نتیجه گرفت که:

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{R} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{U} \quad (31-3)$$

حال با انجام یکی از روش های معمول مانند روش کار مجازی، می توان ماتریس ضرایب را به آسانی

تشکیل داد. اگر $\mathbf{b}$ نشان دهنده نیروی حجمی و $\boldsymbol{\tau}$ ، نیروی سطحی باشد، داریم:

$$\int_{V^p} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{V^p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma^p} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\tau} d\Gamma = 0 \quad (32-3)$$

که V^p و Γ^p به ترتیب حجم و مرز وصله P هستند. در نهایت با جایگزینی $\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}$ ، از رابطه

(۳۱-۳) و معادله $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}$ ، در رابطه (۳۲-۳) و ساده کردن $\delta \mathbf{U}^T$ ، ماتریس ضرایب وصله را می توان

به صورت زیر به دست آورد:

$$\mathbf{K}^p = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (33-3)$$

در ادامه می توان فرم نهایی ماتریس ضرایب را در دستگاه مختصات مربوط به فضای المان مادر، به صورت

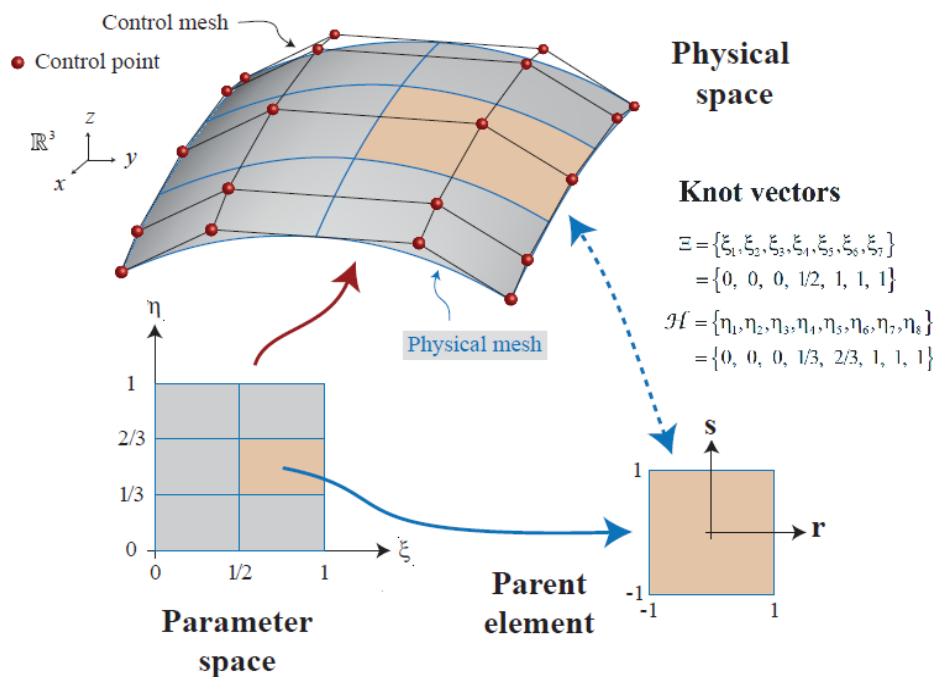
زیر نوشت:

$$\mathbf{K}^p = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi, \eta) |\mathbf{J}_1| |\mathbf{J}_2| dr ds \quad (3-34)$$

و در نهایت انتگرال ماتریس ضرایب به روش گاوس به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}^p = \sum_{i=1}^{m'} \sum_{j=1}^{n'} \mathbf{B}^T(\xi, \eta) \mathbf{C} \mathbf{B}(\xi, \eta) |\mathbf{J}_1| |\mathbf{J}_2| w_i w_j \quad (3-35)$$

که در آن m' و n' تعداد نقاط گاوسی در جهت r و s در هر المان و w_i و w_j نیز وزن نقاط گاوسی می‌باشند. در شکل (۳-۱) فضای فیزیکی، فضای پارامتری و فضای انتگرال‌گیری عددی یک المان نرَبز نشان داده شده است.



شکل ۳-۱ فضای فیزیکی، فضای پارامتری و فضای انتگرال‌گیری یک المان نرَبز. [۲۰]

بنابراین به کمک معادله تعادل ($\mathbf{F}=\mathbf{K}\mathbf{U}$)، مقادیر مجهول نقاط کنترلی محاسبه می‌شود و پس از به‌دست آوردن مقادیر جابه‌جایی در نقاط کنترلی، مقادیر تنش در نقاط گاوسی با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma_i = \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i \quad (3-36)$$

در رابطه‌ی فوق، $\mathbf{B}_i$ و $\mathbf{C}_i$ به‌ترتیب ماتریس‌های کرنش- جابه‌جایی و ثابت‌های ماده برای المان گره‌ای $\mathbf{u}_i$ بردار جابه‌جایی نقاط کنترلی مرتبط با المان گره‌ای $\mathbf{u}_i$ می‌باشد.

فصل چهارم: روش های تحلیلی محتمل

۴-۱- مقدمه

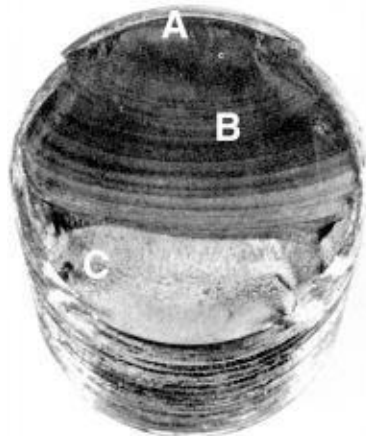
در آزمایش کشش مواد که منجر به رسم نمودار «تنش- کرنش» برای یک ماده خالص می‌شود، بار به صورت تدریجی اعمال می‌گردد، به گونه‌ای که زمان کافی برای بروز کرنش کامل وجود دارد. علاوه بر این، نمونه را تا رسیدن به نقطه شکست آزمایش می‌کنند، به همین دلیل، تنش‌ها فقط یک بار اعمال می‌شوند. از این رو، این نوع آزمایش تنها برای شرایطی موسوم به شرایط استاتیک^۱ به کار می‌رود؛ چنین شرایطی به خوبی شرایط واقعی را که بسیاری از سازه‌ها عملاً در آن قرار دارند شبیه سازی می‌کند. با این وجود، اغلب شرایطی پیش می‌آید که در آن، تنش‌ها با زمان تغییر می‌کنند، یا اینکه بین مقادیر معینی دچار نوسان می‌شوند. بسیار پیش می‌آید که قطعات در اثر تنش‌های مکرر یا نوسانی می‌شکنند، درحالی‌که تحلیل‌های دقیق نشان می‌دهند که بیشترین مقادیر تنش ایجاد شده کمتر از استحکام نهایی ماده، و در بسیاری موارد حتی کمتر از استحکام تسلیم بوده است. برجسته‌ترین ویژگی این‌گونه شکست‌ها این است که تنش‌ها به دفعات بسیار زیاد تکرار می‌شوند. به همین دلیل، آن را شکست خستگی^۲ می‌نامند.

هنگامی که قطعات در اثر بارهای استاتیک تسلیم می‌شوند معمولاً دستخوش تغییر شکل زیادی می‌گردند، چرا که تنش‌ها از استحکام تسلیم گذشته‌اند. به این ترتیب، بسیاری از شکست‌های استاتیکی قبل از وقوع، به صورت عینی مشخص می‌شوند. ولی یک شکست خستگی تا قبل از وقوع هیچ‌گونه علامتی بروز نمی‌دهد. این شکست، ناگهانی، و کلی رخ می‌دهد و به همین دلیل خطرناک است. منطقه شکست خستگی دارای ظاهری بسیار شبیه به شکست مواد ترد است، چرا که سطوح شکست، مسطح و عمود بر محور تنش بدون بروز پدیده باریک شدگی سطح مقطع هستند. با این وجود، ماهیت یک شکست خستگی از نظر مکانیزم ایجاد آن، کاملاً با شکست استاتیک تفاوت دارد. شکست خستگی در سه مرحله صورت می‌گیرد. مرحله اول، پیدایش یک یا تعداد بیشتری ترک‌های میکروسکوپی در اثر

^۱Static conditions

^۲Fatigue failure

تغییر شکل‌های پلاستیک سیکلی و در پی آن، گسترش کریستالی این ترک‌ها از دو به پنج دانه در اطراف ترک اولیه است. در مرحله اول، ترک‌ها با چشم غیر مسلح قابل تشخیص نیستند. مرحله دوم، تبدیل ترک‌های میکروسکوپی به ترک‌های ماکروسکوپی است که به صورت سطوح شکست موازی در قطعه بروز می‌کنند. این سطوح عموماً صاف و هموار و در راستای عمود بر بیشترین تنش‌های کششی هستند. این سطوح همان‌گونه که در شکل ۴-۱ نیز مشاهده می‌شود، به صورت نوارهای تاریک و روشن مانند پوسته صدف یا خطوطی که در اثر امواج دریا بر روی ساحل ایجاد می‌شوند، پدیدار می‌گردند. هنگام بارگذاری سیکلی، این سطوح ترک خورده باز و بسته شده، و بر روی یکدیگر ساییده می‌شوند. ظاهر این نوارهای تاریک و روشن بستگی به تغییرات سطح تنش یا فرکانس بارگذاری و خورنده بودن محیط دارد. مرحله سوم، در طی سیکل نهایی تنش، هنگامی که ماده باقیمانده دیگر قادر به تحمل بارها نیست رخ می‌دهد که منجر به یک شکست ناگهانی و سریع می‌گردد. شکست مرحله سوم می‌تواند یک شکست ترد، شکل‌پذیر یا ترکیبی از این دو باشد. اغلب اوقات، این نوارهای تاریک و روشن (در صورت وجود) به صورت یک پیکان که نوک آن به سمت ترک‌های اولیه است درمی‌آید.



شکل ۴-۱ شکست خستگی یک پیچ در اثر گشتاورهای خمشی تک جهته تکرارشونده [۵۰]

۴-۲- روش‌های «خستگی - عمر»

سه روش اصلی «خستگی - عمر» که در طراحی و تحلیل مسائل به کار می‌روند عبارتند از روش «تنش - عمر»، روش «کرنش - عمر»، و روش مکانیک شکست^۴ الاستیک خطی. این روش‌ها، عمر شکست یک قطعه برحسب تعداد سیکل‌های بارگذاری N ، برای یک محدوده خاص از بارگذاری را پیش‌بینی می‌کنند. عمر در محدوده $10^3 \leq N \leq 10^7$ عموماً به عنوان خستگی کم چرخه^۵ طبقه‌بندی می‌شود، در حالی که برای خستگی پر چرخه^۶ محدوده عمر $N > 10^7$ در نظر گرفته می‌شود.

روش «تنش - عمر» که تنها بر مبنای سطح تنش استوار است، به‌ویژه برای کاربردهای خستگی کم چرخه، کم‌دقت‌ترین روش است. با این وجود، مرسوم‌ترین می‌باشد، چرا که راحت‌ترین روش برای طیف گسترده‌ای از مسائل طراحی است، و داده‌های تایید شده بسیاری در اختیار دارد. این روش، مسائل خستگی پرچرخه را با دقت کافی مدل‌سازی می‌کند.

روش «کرنش - عمر» با استفاده از تحلیل دقیق تغییر شکل پلاستیک در مناطق موضعی تدوین شده است که در آن، تنش‌ها و کرنش‌ها برای ارزیابی عمر در نظر گرفته می‌شوند. این روش به‌ویژه برای مسائل خستگی کم چرخه بسیار مناسب است. در استفاده از این روش، از آنجا که ناگزیر به برخی ایده‌آل‌سازی‌ها هستیم، نتایج حاصل ممکن است دست‌خوش عدم اطمینان شوند.

در روش مکانیک شکست فرض بر این است که یک ترک در قطعه وجود دارد. سپس، به کمک این روش، رشد ترک در تناسب با شدت تنش پیش‌بینی می‌شود. مناسب‌ترین کاربرد این روش برای سازه‌های بزرگ و در تلفیق با برنامه‌های کامپیوتری است.

^۱Fatigue-Life

^۲Stress-Life

^۳Strain-Life

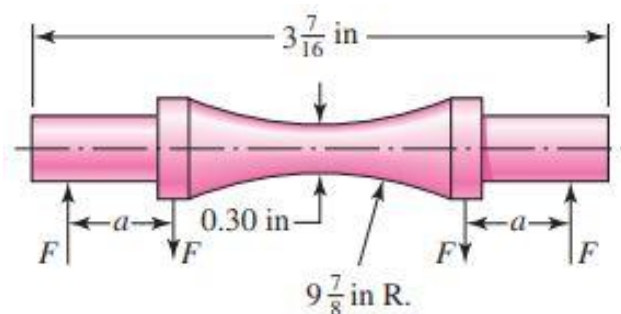
^۴Fracture mechanics

^۵LCF: Low Cycle Fatigue

^۶HCF: High Cycle Fatigue

۴-۲-۱- روش «تنش - عمر»

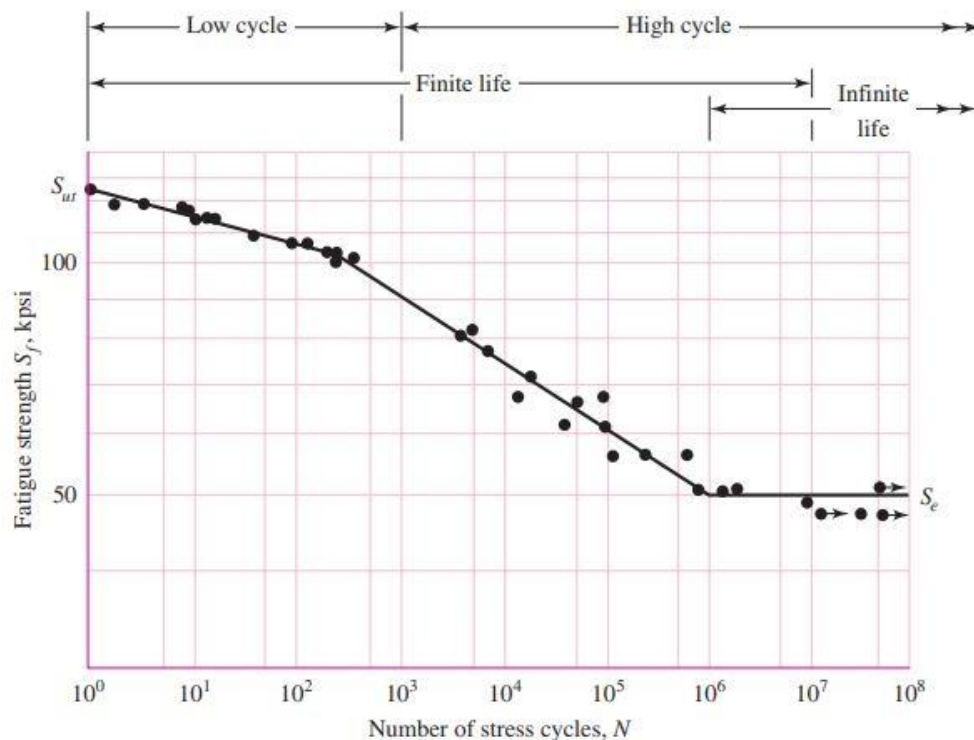
برای تعیین استحکام موادی که تحت بارهای خستگی قرار دارند، نمونه‌های آزمایش این مواد را در معرض نیروهای معین متغیر قرار می‌دهند و سپس تعداد چرخه‌های بارگذاری لازم تا شکست نمونه را یادداشت می‌کنند. از پرکاربردترین دستگاه‌های آزمایش خستگی، دستگاه تیر چرخان «مور» است. این دستگاه به کمک دو وزنه مساوی که در فواصل برابر از دو سر تیر آویزان می‌شوند، نمونه آزمایش را تحت خمش خالص (بدون برش عرضی) قرار می‌دهد. نمونه آزمایش خستگی را که در شکل ۴-۲ می‌بینید با دقت زیاد ماشین‌کاری و پرداخت می‌کنند و برای از بین بردن خراش‌های محیطی، پرداخت نهایی را در جهت محوری انجام می‌دهند. دستگاه‌های دیگری نیز برای آزمایش خستگی وجود دارد که برای اعمال تنش‌های محوری نوسانی، تنش‌های پیچشی نوسانی و یا ترکیبی از این دو تنش بر روی نمونه‌های آزمایش به کار می‌روند.



شکل ۴-۲ ابعاد هندسی نمونه آزمایش خستگی برای دستگاه آزمایش تیر چرخان «مور» [۵۱]

به علت طبیعت آماری پدیده خستگی، برای تعیین استحکام خستگی یک ماده، تعداد زیادی آزمایش لازم است. در آزمایش تیر چرخان، یک بار خمشی ثابت به آن وارد می‌کنند، و تعداد دور لازم برای شکستن تیر را یادداشت می‌نمایند. اولین آزمایش با تنشی اندکی پایین‌تر از استحکام نهایی جسم انجام می‌شود. آزمایش بعدی را با تنشی کمتر از تنش آزمایش اول انجام می‌دهند؛ با کاهش متوالی تنش، این آزمایش‌ها ادامه پیدا می‌کند. سپس، نتایج را به صورت نمودارهای موسوم به S-N که در شکل ۴-۳ نشان داده شده است رسم می‌کنند. برای فلزات آهنی و آلیاژهای آن، در تنش و تعداد دور معینی

نمودار به صورت افقی درمی آید.



شکل ۳-۴ نمودار S-N براساس نتایج آزمایش های خستگی با بارگذاری کاملاً معکوس شونده [۵۲]

مختصات عرضی نمودار S-N را «استحکام خستگی» S_f می نامند؛ در اشاره به این استحکام باید تعداد چرخه های N مربوط به آن را نیز بیان کرد.

برای فولادها، نمودار S-N یک خمیدگی پیدا می کند که پس از آن بدون توجه به تعداد دورها دیگر شکست رخ نخواهد داد. استحکام متناظر با این خمیدگی را «حد دوام» S_e یا «حد خستگی» می نامند. نمودار شکل ۳-۴ برای آلیاژهای غیرآهنی هیچگاه افقی نمی شود، بدین معنی که این مواد حد دوام ندارند.

نمودار S-N معمولاً از چرخه های تنش کاملاً معکوس شونده به دست می آید. در این نوع بارگذاری، سطح تنش بین مقادیر مساوی کشش و فشار تغییر می کند. خاطر نشان می شود که یک چرخه تنش

^۱Fatigue strength

^۲Endurance limit

^۳Fatigue limit

($N=1$) به معنی یک دفعه وارد کردن و برداشتن بار و سپس وارد کردن و برداشتن آن در جهت مخالف است. بنابراین، $N=0/5$ به معنی یک دفعه وارد کردن بار و سپس برداشتن آن است، که معادل همان آزمایش کشش ساده می‌باشد.

اطلاعات موجود درباره شکست خستگی با تعداد چرخه از $N=1$ تا $N=1000$ همان گونه که در شکل ۳-۴ مشاهده می‌شود به‌طور کلی در گروه خستگی کم چرخه قرار می‌گیرند و خستگی پرچرخه به شکست‌هایی مربوط می‌شود که تعداد چرخه‌های تنش بیش از $N=1000$ باشد.

علاوه بر این، در شکل ۳-۴ دو ناحیه مشخص شده که یکی ناحیه عمر محدود^۱ و دیگری ناحیه عمر نامحدود^۲ است. مرز بین این دو ناحیه را در حالت کلی به درستی نمی‌توان تعیین کرد، مگر برای یک ماده خاص. اما همان گونه که از شکل نیز پیداست، این مرز برای فولاد جایی بین 10^6 و 10^7 چرخه قرار دارد.

روش «تنش-عمر» یکی از متداول‌ترین روش‌های موجود است و داده‌های منتشرشده فراوانی پیرامون آن وجود دارد. به‌کارگیری این روش برای طیف گسترده‌ای از مسائل طراحی، بسیار راحت است؛ علاوه بر این، برای مسائل پر چرخه از دقت کافی برخوردار است.

۲-۲-۴ روش «کرنش-عمر»

بهترین فرضیه‌ای که تا کنون برای توضیح طبیعت شکست خستگی ارائه شده است روش «کرنش-عمر» می‌باشد. این روش را می‌توان برای محاسبه استحکام خستگی به‌کاربرد، اما برای استفاده از آن، نیاز به چند فرض ساده‌کننده داریم که تا حدی موجب عدم اطمینان در نتایج آن می‌شود.

شکست خستگی تقریباً همیشه از ناپیوستگی‌های موضعی مانند شیار، ترک، یا سایر مناطق تمرکز تنش شروع می‌شود. هنگامی که در محل ناپیوستگی، مقدار تنش از حد الاستیک می‌گذرد، کرنش

^۱Finite life

^۲Infinite life

پلاستیک رخ می‌دهد. برای بروز شکست خستگی باید کرنش‌های پلاستیک دوره‌ای وجود داشته باشد.

از این رو، نیاز به بررسی رفتار مواد تحت تغییر شکل‌های دوره‌ای داریم.

در سال ۱۹۱۰، بایرستو^۱ به کمک آزمایش توانست درستی تئوری باوشینگر^۲ را نشان دهد. تئوری باوشینگر بیان‌گر این است که حد الاستیک آهن و فولاد را با تغییرات متناوب تنش می‌توان کم یا زیاد کرد [۵۳]. در حالت کلی، حد الاستیک فولادهای باز پخته شده^۳ هنگامی که تحت تنش‌های متناوب دوطرفه قرار می‌گیرند، ظاهراً افزایش می‌یابند، در حالی که حد الاستیک فولادهای سرد کشیده^۴ کاهش پیدا می‌کنند.

لندگراف^۵ رفتار خستگی تعداد بسیاری از فولادهای با استحکام بسیار بالا را در سیکل‌های پایین بررسی کرد و در جریان تحقیقات خود نمودارهای زیادی از رفتار «تنش-کرنش» متناوب رسم نمود [۵۴]. در شکل ۴-۴ نمایش کلی نمودارهای «تنش-کرنش» برای چند تناوب اول کرنش در شرایط کنترل شده مشاهده می‌شود. در این حالت، استحکام قطعه با تکرار تنش کاهش می‌یابد، چرا که سطح تقریباً ثابتی از کرنش‌ها در تنش‌های کمتری رخ می‌دهند. اما در عوض، همان‌گونه که در بالا اشاره شد، تنش‌های تناوبی می‌توانند سبب افزایش استحکام برخی دیگر از مواد شوند.

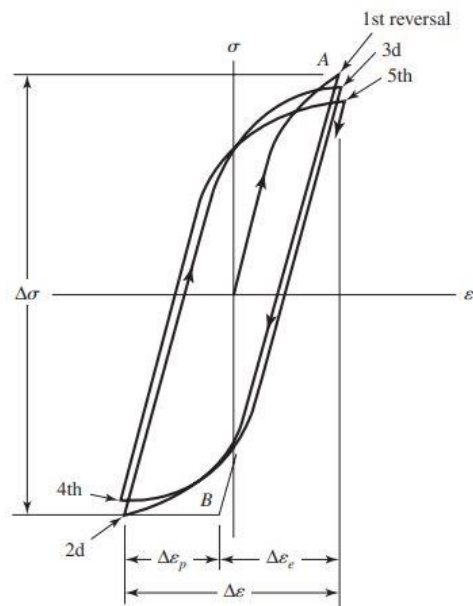
^۱Bairstow

^۲Bauschinger

^۳Annealed steels

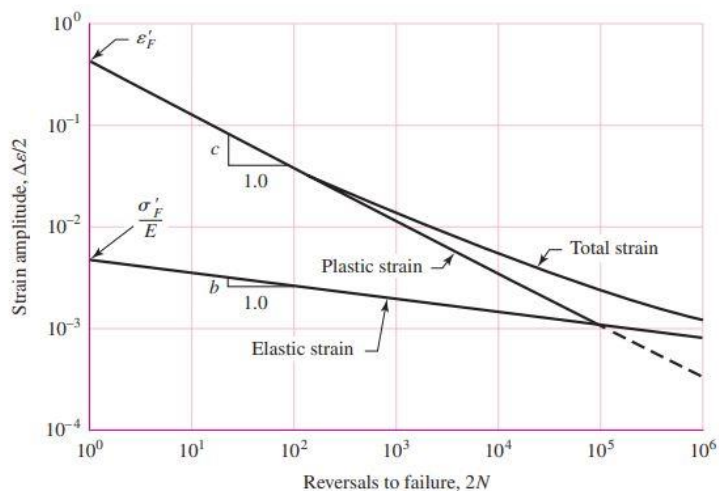
^۴Cold-drawn steels

^۵Landgraf



شکل ۴-۴ حلقه‌های پسماند «تنش حقیقی- کرنش حقیقی» [۵۱]

کمیته مدیریت ارزیابی و طراحی خستگی SAE در سال ۱۹۷۵ گزارشی منتشر کرد که در آن، عمر قطعه بر حسب تعداد تناوب لازم بار برای شکست، به دامنه $\frac{\Delta \varepsilon}{2}$ کرنش ارتباط داده شده است [۵۵]. این گزارش شامل نموداری از این رابطه برای فولاد نورد گرم شده SAE ۱۰۲۰ است. این نمودار در شکل ۴-۵ نشان داده شده است. برای توضیح این نمودار، ابتدا اصطلاحات زیر را تعریف می‌کنیم:



شکل ۴-۵ نمودار لگاریتمی رابطه عمر خستگی با دامنه کرنش حقیقی برای فولاد نورد گرم شده [۵۶]

- ضریب شکل پذیری خستگی^۱ (ϵ'_F)، کرنش حقیقی مربوط به شکست در نیم سیکل، معادل با یک رفت و برگشت است (نقطه A شکل ۴-۴). خط کرنش پلاستیک در شکل ۴-۵ از این نقطه آغاز می‌شود.
 - ضریب استحکام خستگی^۲ (σ'_F)، تنش حقیقی مربوط به شکست در نیم سیکل، معادل با یک رفت و برگشت است (نقطه A شکل ۴-۴). در شکل ۴-۵، خط کرنش الاستیک از $\frac{\sigma'_F}{E}$ آغاز می‌شود.
 - نمای شکل‌پذیری خستگی^۳ (c)، شیب خط کرنش پلاستیک در شکل ۴-۵ است و همچنین عددی است که عمر ۲N باید به توان آن برسد تا متناسب با دامنه کرنش پلاستیک حقیقی گردد. اگر تعداد رفت و برگشت‌ها ۲N باشد، N تعداد سیکل‌ها خواهد بود.
 - نمای استحکام خستگی^۴ (b)، شیب خط کرنش الاستیک است و عمر ۲N باید به توان این عدد برسد تا متناسب با دامنه تنش حقیقی گردد.
- از شکل ۴-۴ پیداست که کرنش کل برابر با مجموع مولفه‌های کرنش پلاستیک و الاستیک است. بنابراین، دامنه کرنش کل برابر است با:

$$\frac{\Delta \epsilon}{2} = \frac{\Delta \epsilon_e}{2} + \frac{\Delta \epsilon_p}{2} \quad (۱-۴)$$

معادله خط کرنش پلاستیک با توجه به شکل ۴-۵ چنین است:

$$\frac{\Delta \epsilon_p}{2} = \epsilon'_F (2N)^c \quad (۲-۴)$$

معادله خط کرنش الاستیک به صورت زیر است:

$$\frac{\Delta \sigma_e}{2} = \frac{\epsilon'_F}{E} (2N)^b \quad (۳-۴)$$

^۱Fatigue ductility coefficient

^۲Fatigue strength coefficient

^۳Fatigue ductility exponent

^۴Fatigue strength exponent

بنابراین، با به کار بردن معادله ۴-۱ برای دامنه کرنش کل، چنین خواهیم داشت:

$$\frac{\Delta\sigma}{2} = \frac{\varepsilon_F'}{E} (2N)^b + \varepsilon_F' (2N)^c \quad (۴-۴)$$

معادله بالا به رابطه «مانسون - کافین» بین عمر خستگی و کرنش کل موسوم است [۵۷].

۴-۲-۳- روش مکانیک شکست الاستیک خطی

نخستین مرحله ترک خوردگی به مرحله اول خستگی موسوم است. لغزش ساختار کریستالی، ناخالصی‌ها و نواقص سطحی می‌توانند نقش مهمی در این پدیده داشته باشند. از آنجا که بخش عمده این پدیده از دید ناظر پنهان است، می‌توان گفت که مرحله اول شامل تنها چند دانه از ساختار کریستالی می‌شود. در مرحله دوم خستگی فرایند گسترش ترک رخ می‌دهد. پیشرفت ترک (به این معنی که سطح جدیدی از ترک ایجاد شده است) را می‌توان به کمک میکروسکوپ‌های الکترونی تصویربرداری کرد. رشد ترک دارای نظم معینی است. شکست نهایی در جریان مرحله سوم خستگی رخ می‌دهد. هنگامی که برای دامنه تنش موجود، طول ترک به اندازه کافی زیاد باشد به گونه‌ای که $K_I = K_{Ic}$ ، K_{Ic} شدت تنش بحرانی برای فلز سالم است). سطح مقطع باقیمانده در اثر فرابارهای کششی دچار یک شکست مخرب و ناگهانی خواهد شد. مرحله سوم خستگی شامل رشد سریع ترک تا لحظه شکست قطعه است.

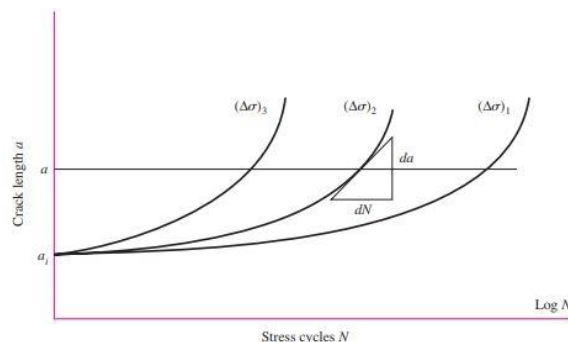
۴-۲-۳-۱- رشد ترک:

ترک‌های خستگی هنگامی شروع به جوانه‌زنی^۱ و رشد می‌کنند که تنش‌ها متغیر و از نوع کششی باشند. یک تنش که بین محدوده‌های σ_{min} و σ_{max} تغییر می‌کند را در نظر بگیرید. در این حالت، محدوده تنش به صورت $\Delta\sigma = \sigma_{max} - \sigma_{min}$ تعریف می‌شود. برای $\Delta\sigma$ ، محدوده شدت تنش برای هر سیکلی برابر خواهد بود با:

$$\Delta K_I = \beta(\sigma_{max} - \sigma_{min})\sqrt{\pi a} = \beta\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (۵-۴)$$

^۱Nucleation

برای دستیابی به داده‌های استحکام خستگی، نمونه‌های زیادی از یک ماده در سطوح مختلف $\Delta\sigma$ مورد آزمایش قرار می‌گیرند. ترک‌ها بر روی سطح آزاد، نقاط نزدیک به سطح یا در ناپیوستگی‌های بزرگ شروع به جوانه‌زنی می‌کنند. اگر طول اولیه ترک را a_i فرض کنیم، رشد ترک به صورت تابعی از تعداد سیکل‌های تنش (N) بستگی به $\Delta\sigma$ (یا به عبارتی به ΔK_I) خواهد داشت. برای مقادیری از ΔK_I که کمتر از یک مقدار آستانه^۱ $(\Delta K_I)_{th}$ باشد، ترک رشد نخواهد کرد. در شکل ۴-۶، طول ترک a به صورت تابعی از N برای سه سطح تنش $(\Delta\sigma)_3 > (\Delta\sigma)_2 > (\Delta\sigma)_1$ نشان داده شده است که برای یک اندازه معین ترک، $(\Delta K_I)_3 > (\Delta K_I)_2 > (\Delta K_I)_1$ است. در شکل ۴-۶، به اثر محدوده‌های تنش بالا بر ایجاد ترک‌های بزرگتر در یک مقدار مشخص از سیکل بارگذاری توجه کنید.



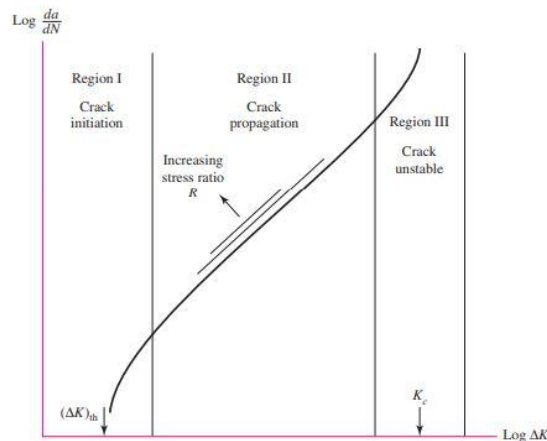
شکل ۴-۶ افزایش طول ترک a از طول اولیه a_i به صورت تابعی از تعداد سیکل‌های تنش [۵۱]

چنانچه نرخ رشد ترک در هر سیکل $\left(\frac{da}{dN}\right)$ در شکل ۴-۶ را آن گونه که در شکل ۴-۷ مشاهده می‌شود رسم کنیم، داده‌های مربوط به هر سه محدوده تنش بر هم منطبق می‌شوند و یک منحنی مارپیچ^۲ تشکیل می‌دهند. بر روی این نمودار، سه مرحله گسترش ترک به خوبی قابل مشاهده هستند و داده‌های مرحله دوم در مختصات لگاریتمی و در محدوده اعتبار تئوری مکانیک شکست الاستیک

خطی دارای شکل خطی می‌باشند. گروهی از منحنی‌های مشابه را می‌توان با تغییر نسبت $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$ به دست آورد.

^۱Threshold

^۲Sigmoidal



شکل ۷-۴ نمودار لگاریتمی مقادیر $\frac{da}{dN}$ [۵۱]

در اینجا، یک روش ساده برای تخمین عمر باقیمانده قطعه‌ای که تحت تنش‌های متناوب قرار دارد را پس از کشف یک ترک ارائه می‌کنیم. در این روش، فرض بر این است که کرنش‌ها صفحه‌ای هستند. با این فرض که ترک در مرحله دوم کشف شده است، رشد ترک در ناحیه دوم از شکل ۷-۴ را می‌توان با معادله «پاریس» که به صورت زیر نوشته می‌شود تقریب زد:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m \quad (۶-۴)$$

که C و m ثابت‌های تجربی ماده هستند و ΔK_I از معادله (۵-۴) به دست می‌آید. مقادیر C و m برای انواع مختلف فولاد در جدول ۱-۴ آمده است.

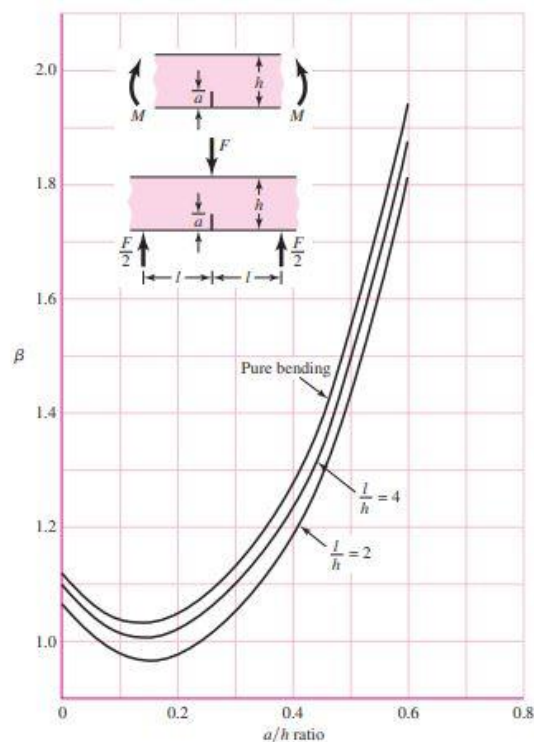
جدول ۱-۴ مقادیر C و نمای m برای انواع مختلف فولاد [۵۸]

Material	$C, \frac{m/cycle}{(MPa\sqrt{m})^m}$	$C, \frac{in/cycle}{(kpsi\sqrt{in})^m}$	m
Ferritic-pearlitic steels	$6.89(10^{-12})$	$3.60(10^{-10})$	3.00
Martensitic steels	$1.36(10^{-10})$	$6.60(10^{-9})$	2.25
Austenitic stainless steels	$5.61(10^{-12})$	$3.00(10^{-10})$	3.25

با جایگذاری معادله (۵-۴) و انتگرال‌گیری از آن چنین خواهیم داشت:

$$\int_0^{N_f} dN = N_f = \frac{1}{C} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{(\beta \Delta \sigma \sqrt{\pi a})^m} \quad (۷-۴)$$

در معادله فوق، a_i طول اولیه ترک، a_f طول نهایی ترک مربوط به نقطه شکست، N_f تعداد تخمینی سیکل‌های تنش برای ایجاد شکست پس از تشکیل ترک اولیه، و β ضریب تصحیح شدت تنش است، و مقدار آن با توجه به نوع گسترش ترک به دست می‌آید. در شکل ۴-۸ مقادیر β برای تیرهای با مقطع چهارگوش که ترکی در لبه دارند، نشان داده شده است.



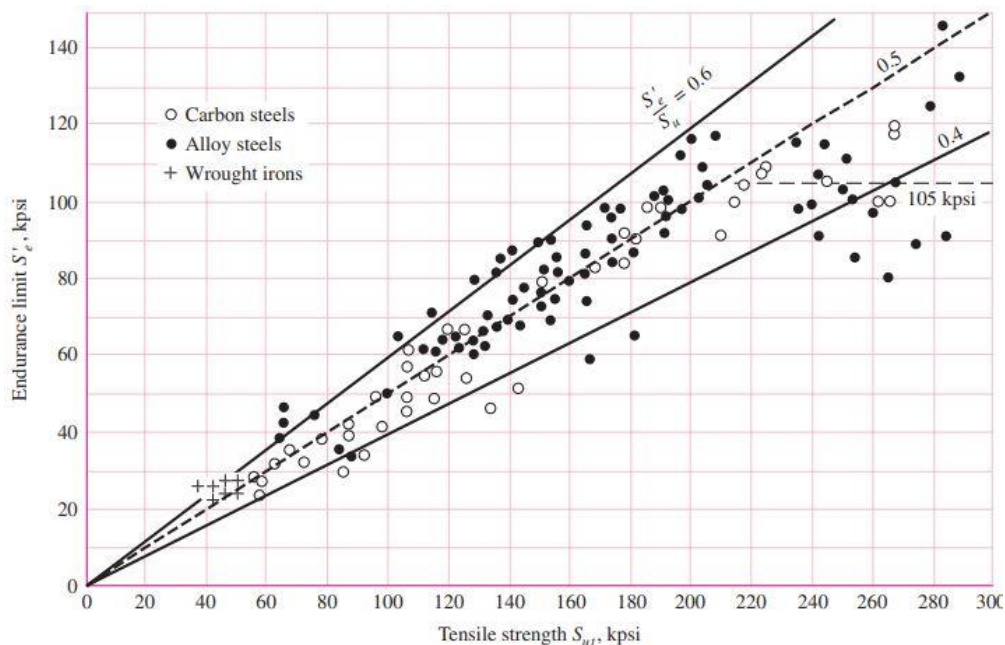
شکل ۴-۸ نمودار مقادیر β [۵۱]

۴-۳- حد دوام

در طراحی مقدماتی و طراحی نمونه اولیه و همچنین در برخی حالت‌های تحلیل شکست، یک روش سریع برای برآورد حد دوام مواد لازم است. داده‌های بسیار زیادی از نتایج آزمایش‌های تیر چرخان و آزمایش‌های کشش ساده در مراجع مربوطه وجود دارد. با رسم این داده‌ها، همانگونه که در شکل ۴-۹ مشاهده می‌شود، برای فولادهای با استحکام کششی تا ۲۱۰ kpsi (۱۴۵۰ Mpa)، حد دوام در محدوده‌ای

^۱Stress-intensity modification factor

از ۴۰ تا ۶۰ درصد استحکام کششی تغییر می‌کند. در محدوده $S_{ut} = ۲۱۰ \text{ kpsi}$ (۱۴۵۰ Mpa) میزان پراکندگی شروع به افزایش می‌کند ولی به مرور داده‌ها همان‌گونه که با خط‌چین نیز نشان داده شده است، در $S'_e = ۱۰۵ \text{ kpsi}$ حالت افقی به خود می‌گیرند.



شکل ۴-۹ نمودار حد دوام برحسب استحکام کششی [۵۹]

برای فولادها، با ساده‌سازی آنچه در شکل ۴-۹ مشاهده می‌شود، حد دوام را به‌صورت زیر ارزیابی

می‌کنیم:

$$S'_e = \begin{cases} 0.5 S_{ut} & S_{ut} \leq 200 \text{ kpsi} (1400 \text{ Mpa}) \\ 100 \text{ kpsi} (700 \text{ Mpa}) & S_{ut} > 200 \text{ kpsi} (1400 \text{ Mpa}) \end{cases} \quad (۸-۴)$$

۴-۴- استحکام خستگی

همان‌گونه که در شکل ۴-۳ دیده می‌شود، ناحیه خستگی سیکل پایین از $N=۱$ تا حدود $N=۱۰۰۰$

امتداد دارد. در این ناحیه، استحکام خستگی S_f فقط اندکی کمتر از استحکام کششی S_{ut} است. یک

روش تحلیلی برای ناحیه‌های سیکل بالا و سیکل پایین توسط «شیگلی»، «میشکه» و «براون» [۶۰] ارائه شده است که نیازمند پارامترهای معادله «مانسون - کافین» و نمای استحکام بخشی کرنشی m است.

شکل ۳-۴ نشان می‌دهد که برای فولادها، خستگی سیکل بالا از $N=1000$ شروع می‌شود و تا عمر حد دوام N_e که از $N=10^6$ تا $N=10^7$ است ادامه می‌یابد. هدف این بخش، تدوین روش‌هایی برای تقریب زدن نمودار S-N در ناحیه سیکل بالا است.

با تعریف استحکام خستگی نمونه آزمایش در یک تعداد سیکل مشخص به صورت $(S'_f)_N = E \frac{\Delta \epsilon_e}{2}$ می‌توان معادله ۳-۴ را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$(S'_f)_N = \sigma'_F (2N)^b \quad (9-4)$$

برای $N=10^3$ داریم:

$$(S'_f)_{10^3} = \sigma'_F (2 * 10^3)^b = f S_{ut} \quad (10-4)$$

که f کسری از S_{ut} است که با نماد $(S'_f)_{10^3}$ نشان داده می‌شود. با حل رابطه بالا برای f داریم:

$$f = \frac{\sigma'_F}{S_{ut}} (2 * 10^3)^b \quad (11-4)$$

کمیته مدیریت ارزیابی و طراحی خستگی SAE برای فولادها رابطه‌ی تقریبی زیر را برای محاسبه‌ی

σ'_F پیشنهاد داده است:

$$\sigma'_F = S_{ut} + 345 \text{ (Mpa)} \quad (12-4)$$

برای یافتن b ، استحکام دوام و تعداد سیکل متناظر با آن یعنی S'_e و N_e ، را در معادله (۹-۴)

جایگذاری می‌کنیم. مقدار b به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$b = - \frac{\log(\sigma'_F / S'_e)}{\log(2N_e)} \quad (13-4)$$

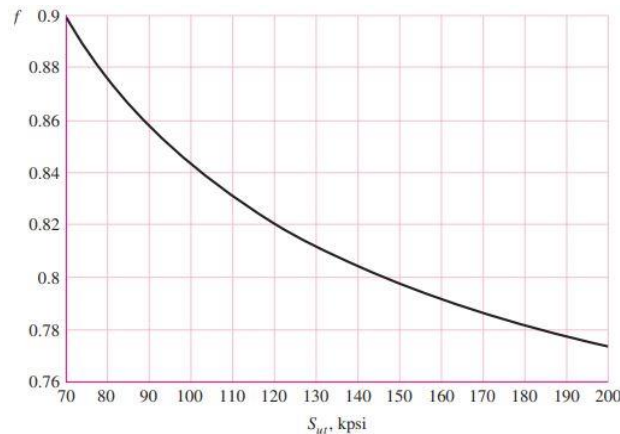
^۱Shigley

^۲Mischke

^۳Brown

فرایند ارائه شده برای یافتن f را می توان برای استحکام های نهایی مختلف تکرار کرد. در شکل ۴-۱۰

نمودار f در محدوده $70 \leq S_{ut} \leq 200(kpsi)$ رسم شده است.



شکل ۴-۱۰ کسر استحکام خستگی f [۵۱]

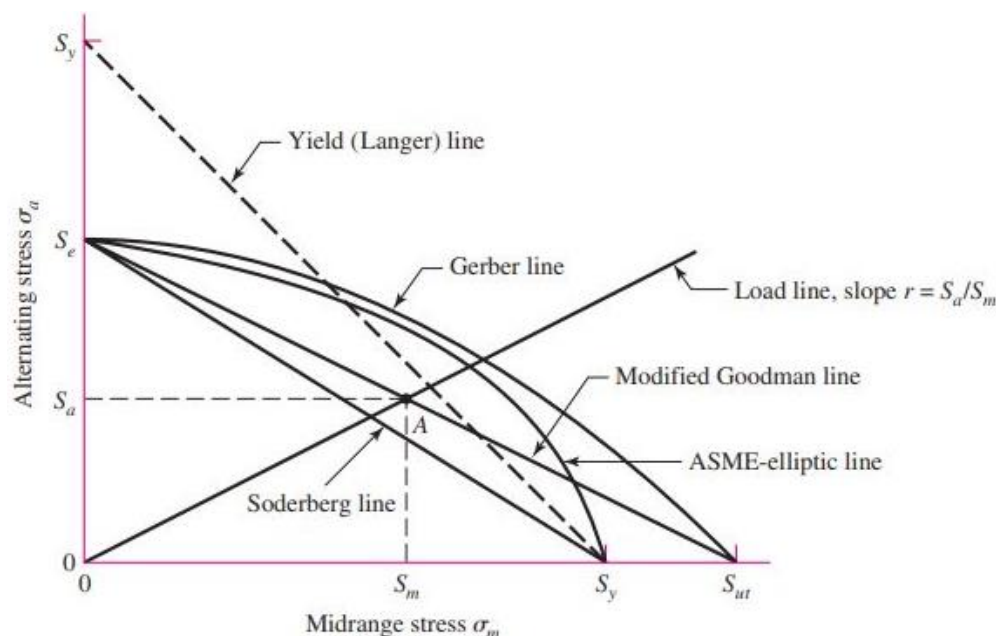
نمودار معمول S-N، تنها برای بارگذاری های کاملاً معکوس شونده معتبر است. برای حالت های کلی بارگذاری نوسانی لازم است که یک تنش معادل کاملاً معکوس شونده به دست آورد که بتواند آسیبی مشابه با تنش واقعی نوسانی وارد آورد.

خستگی کم چرخه اغلب به صورت خستگی که در محدوده $10^3 \leq N \leq 10^6$ رخ می دهد تعریف می شود. در یک مختصات لگاریتمی مانند آنچه در شکل ۴-۳ می بینید، مکان هندسی شکست در این محدوده تقریباً یک خط راست در زیر عمر $N=10^3$ است. یک خط راست بین نقاط $(1, S_{ut})$ و $(10^3, fS_{ut})$ یک مدل محتاطانه است و با رابطه زیر بیان می شود:

$$S_f \geq S_{ut} N^{(\log f)/3} \quad 1 \leq N \leq 10^3 \quad (4-14)$$

۴-۵- معیارهای خرابی خستگی

در شکل ۴-۱۱ پنج معیار شکست نمایش داده شده است که عبارتند از: معیار «سودربرگ»، معیار اصلاح شده ی «گودمن»، معیار «گریر»، معیار بیضی ASME و معیار تسلیم. نمودار نشان می دهد که تنها معیار «سودربرگ» است که در مقابل تسلیم دارای حاشیه امنیت می باشد.



شکل ۴-۱۱ نمایش معیارهای مختلف شکست [۶۰]

با در نظر گرفتن خط اصلاح شده «گودمن» به عنوان یک معیار، نقطه A نشانگر یک نقطه حدی با یک استحکام متغیر S_a و استحکام متوسط S_m است. شیب خط بار در شکل فوق به صورت $r = \frac{S_a}{S_m}$ تعریف می‌شود.

معادله خط «سودربرگ» چنین است:

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_y} = 1 \quad (۴-۱۵)$$

به همین ترتیب، رابطه اصلاح شده «گودمن» را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{S_a}{S_e} + \frac{S_m}{S_{ut}} = 1 \quad (۴-۱۶)$$

منحنی‌های سهمی و بیضی، تطابق بهتری با داده‌ها دارند و احتمال شکست را با دقت بیشتری تعیین

می‌کنند. معیار شکست «گربر» به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{S_a}{S_e} + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \quad (۴-۱۷)$$

و معادله بیضی ASME نیز چنین است:

$$\left(\frac{S_a}{S_e}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_{ut}}\right)^2 = 1 \quad (۴-۱۸)$$

معیار تسلیم (لانگر) در نخستین چرخه تنش، به صورت زیر به کار برده می شود:

$$S_a + S_m = S_y \quad (۱۹-۴)$$

در این پایان نامه، بارگذاری سینوسی با دامنه کم و فرکانس بالا به سازه اعمال شده است، که منجر به خستگی پرچرخه و ایجاد کرنش های الاستیک می شود. از آن جا که روش های «کرنش - عمر» و مکانیک شکست، زمانی که کرنش ها کاملاً الاستیک نباشند به کار می روند، از روش «تنش - عمر» که در مسائل خستگی پرچرخه کاربرد دارد، استفاده شده است. ویژگی های زیر دلیل استفاده از معیار خرابی خستگی گودمن در این پایان نامه می باشد.

۱- از آن جا که مکان هندسی «گودمن»، یک خط راست است، عملیات جبری آن نیز خطی و ساده می باشد.

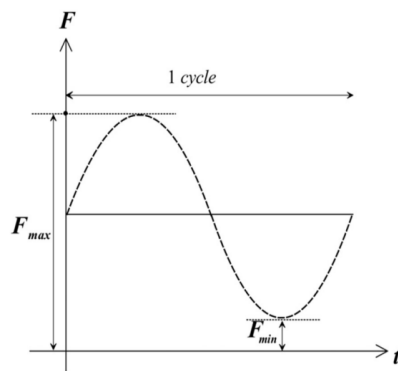
۲- رسم آن در هر زمان و برای هر مسئله ای ساده است.

۳- نکات ظریفی را در مورد مسائل خستگی آشکار می کند.

۴- به عنوان کنترل عملیات جبری، پاسخ مسئله را می توان از روی نمودار نیز به دست آورد.

۴-۶- روش محاسبه معیار خرابی خستگی [۴۹]

در این پژوهش، از روش «تنش - عمر» به همراه روش تحلیل استاتیکی معادل تحت شرایط بارگذاری سینوسی با دامنه ثابت استفاده شده است. در شکل ۴-۱۲، بارگذاری سینوسی اعمال شده به سازه، نشان داده شده است.

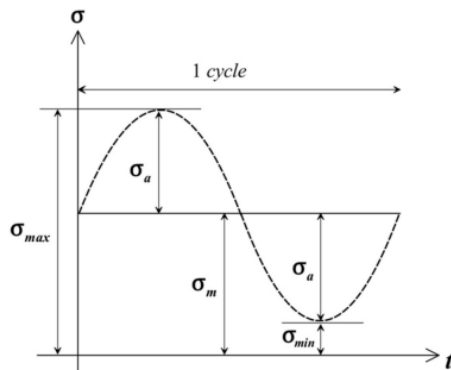


شکل ۴-۱۲ یک چرخه از بارگذاری سینوسی [۴۹]

پس از اعمال بار سینوسی به سازه، تاریخچه‌ی تنش مطابق با شکل ۴-۱۳ به دست می‌آید. که در آن دامنه‌ی تناوب مقادیر تنش‌ها (σ_a) و متوسط مقادیر تنش‌ها (σ_m) با استفاده از کمترین مقدار تنش (σ_{min}) و بیشترین مقدار تنش (σ_{max}) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \quad (۴-۲۰)$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \quad (۴-۲۱)$$



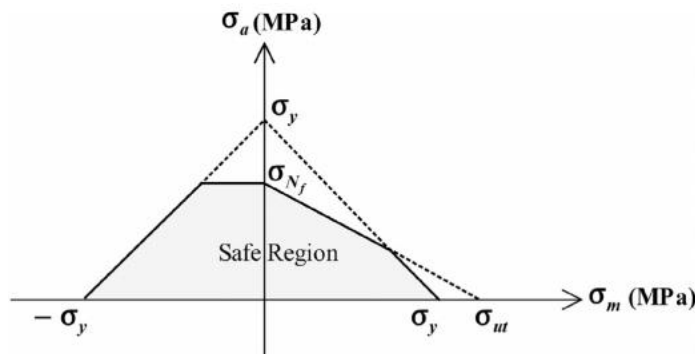
شکل ۴-۱۳ یک چرخه از تاریخچه تنش [۴۹]

برای ارزیابی خرابی خستگی، معیار گودمن اصلاح شده برای بارگذاری سینوسی با دامنه ثابت به کار رفته است. برای جلوگیری از خرابی خستگی، تمام ترکیبات تنش‌های متوسط و تناوبی در نقاط ارزیابی تنش باید در ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن اصلاح شده قرار گیرند. این نمودار در شکل ۴-۱۴ نشان داده شده است. که در آن σ_a ، σ_m ، σ_{ut} و σ_y به ترتیب بیانگر مقادیر تنش تناوبی^۱، تنش متوسط^۲، تنش

^۱Alternating stress

^۲Mean stress

نهایی^۱ و تنش تسلیم^۲ می‌باشند. همچنین σ_{N_f} ، تنش تناوبی مجاز می‌باشد.



شکل ۴-۱۴ نمودار گودمن اصلاح شده [۴۹]

پس از انجام تحلیل آیزوژئومتری و محاسبه‌ی مقادیر تنش، با استفاده از روش تحلیل استاتیکی معادل و اعمال ضرایب ثابت، اثر دوره‌ای بودن بارگذاری بر مقادیر تنش در نظر گرفته می‌شود. مقادیر تنش تناوبی (σ_{a_i}) و تنش متوسط (σ_{m_i}) در هر نقطه‌ی ارزیابی تنش به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_{a_i} = C_a \sigma_i = [\sigma_{x a_i} \quad \sigma_{y a_i} \quad \tau_{xy a_i}]^T \quad (22-4)$$

$$\sigma_{m_i} = C_m \sigma_i = [\sigma_{x m_i} \quad \sigma_{y m_i} \quad \tau_{xy m_i}]^T \quad (23-4)$$

در روابط فوق C_a و C_m به ترتیب ضرایب مقیاس^۳ تنش تناوبی و تنش متوسط می‌باشند که به کمک کمترین و بیشترین مقدار بار سینوسی اعمال شده به سازه، به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$C_a = \frac{1 - (F_{min}/F_{max})}{2} \quad (24-4)$$

$$C_m = \frac{1 + (F_{min}/F_{max})}{2} \quad (25-4)$$

با داشتن مقادیر تنش‌های تناوبی و متوسط، تنش تناوبی فون میزس^۴ ($\sigma_{a_i}^{vonMises}$) و تنش متوسط

فون میزس^۵ ($\sigma_{m_i}^{vonMises}$) که به طور مستقیم در محاسبه‌ی معیار خرابی خستگی گودمن به کار می‌روند،

^۱Ultimate stress

^۲Yielding stress

^۳Scaling factors

^۴Von- Mises alternating stress

^۵Von- Mises mean stress

به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\sigma_{a_i}^{vonMises} = \sqrt{\sigma_{x_{a_i}}^2 + \sigma_{y_{a_i}}^2 - \sigma_{x_{a_i}} \sigma_{y_{a_i}} + 3\tau_{xy_{a_i}}^2} \quad (۲۶-۴)$$

$$\sigma_{m_i}^{vonMises} = \sqrt{\sigma_{x_{m_i}}^2 + \sigma_{y_{m_i}}^2 - \sigma_{x_{m_i}} \sigma_{y_{m_i}} + 3\tau_{xy_{m_i}}^2} \quad (۲۷-۴)$$

برای ارزیابی خرابی خستگی، معیار گودمن اصلاح شده، به صورت زیر تعریف می شود:

$$L_i^{GM} = \frac{\sigma_{a_i}^{vonMises}}{(\sigma_i)_{Nf}} + \frac{\sigma_{m_i}^{vonMises}}{\sigma_{ut}} \quad (۲۸-۴)$$

که σ_{ut} مقاومت کششی و $(\sigma_i)_{Nf}$ تنش تناوبی مجاز می باشد. با استفاده از معادله ی باسکوئن^۱، تنش

تناوبی مجاز به صورت زیر تعریف می شود:

$$(\sigma_i)_{Nf} = \sigma_f' (2N_f)^b \quad (۲۹-۴)$$

و σ_f' و b به ترتیب ضریب مقاومت خستگی^۲ و توان مقاومت خستگی^۳ می باشند. N_f نیز تعداد چرخه-

های بارگذاری است.

^۱Basquin

^۲Fatigue strength coefficient

^۳Fatigue strength exponent

فصل پنجم: بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تشریحی

۵-۱- مقدمه

بهینه‌سازی عبارت است از رسیدن به بهترین نتیجه، در مورد یک عملیات، در حالی که محدودیت‌های مشخصی برآورده شده باشند. انسان محصور در طبیعت، ذاتاً تمام فعالیت‌هایش را به شکلی انجام می‌دهد که در انرژی صرفه جویی شود. این تمایل و اراده به خاطر استفاده از منابع محدود موجود، به منظور بیشینه کردن خروجی یا بهره است. اختراعات اولیه اهرم‌ها یا مکانیزم قرقره، به روشنی تمایل بشر را به افزایش بازدهی مکانیکی نشان می‌دهد. دوگلاس وایلد^۱ [۶۱] مجموعه جالبی در مورد ریشه کلمه بهینه و طراحی بهینه ارائه می‌دهد. تعریف وایلد را نقل به مضمون کرده و طراحی بهینه را به شکل «بهترین طراحی قابل قبول بر اساس یک معیار کیفی شایستگی از پیش تعیین شده» تعریف می‌کنیم.

تلاش جهت یافتن طرحی که دارای مناسب‌ترین ویژگی باشد، سال‌های متمادی ذهن محققین را به خود مشغول کرده است. بهینه‌سازی توپولوژی را می‌توان به عنوان روشی جهت توزیع بهینه جرم در فضای طراحی تعریف کرد که در نهایت ضمن در نظر گرفتن قیود حاکم بر مسئله به ساختار مناسب دست می‌یابد. بهینه‌سازی توپولوژی با مطالعات مایکل^۲ بر روی انواع خرپاها آغاز شد و در سال‌های بعد با ارائه روش‌هایی بر پایه ریاضیات، این نوع بهینه‌سازی به شکل گسترده‌تری مورد استفاده قرار گرفت. هر چند که این روش‌ها برای مسائل بزرگ با ابعاد واقعی چندان کارآمد نبودند، اما در مقابل سایر روش‌های دیگر مانند معیار بهینگی^۳ که به صورت غیرمستقیم به حل یک مسئله بهینه‌سازی می‌پرداختند، توانایی خود را در زمینه‌ی حل مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با ابعاد واقعی و قیود زیاد اثبات نمودند. به‌طور کلی روش‌های بهینه‌سازی توپولوژی را می‌توان به دو گروه عمده تقسیم نمود.

گروه اول روش‌های بر پایه ریاضیات بوده و گروه دوم روش‌های تکاملی و شهودی است. از انواع

^۱Douglas wilde

^۲Michel

^۳Optimality criteria

روش‌های مطرح بر پایه ریاضیات می‌توان به روش‌های همگن‌سازی^۱ و ریز سازه‌های ایزوتروپیک جامد با تابع جریمه^۲ (SIMP) اشاره نمود. در روش همگن‌سازی، فضای طراحی به تعداد معینی سلول تقسیم شده که هریک از آن‌ها به‌عنوان یک ریز سازه محسوب می‌شوند و می‌توانند خصوصیات مربوط به خود را داشته باشند. این روش ضمن اینکه نتایج قابل توجهی را ارائه می‌نماید اما دارای نقاط ضعفی از قبیل همگرا شدن به جواب‌های بهینه محلی، روابط نسبتاً پیچیده ریاضی و پیدایش نواقصی از قبیل صفحه شطرنجی شدن و نواحی خاکستری در نتایج آن می‌باشد، هرچند که در سال‌های بعد فیلترهای مختلف جهت حداقل کردن این مشکل ارائه گردید. روش SIMP به طور گسترده‌ای در حل مسائل مختلف مورد استفاده قرار گرفته است. یکی از مزیت‌های این روش حداقل شدن پوشش ناقص مواد در ریز سازه‌ها و حداقل شدن پیدایش نواحی خاکستری در نتایج بود، هر چند نتایج به دست آمده از این روش نیز تا حدودی به مقدار توان مورد استفاده در تابع جریمه وابسته است. پیچیدگی روابط ریاضی و برخی دیگر از مشکلات فوق منجر به ارائه روش‌های تکاملی گردید. روش‌های تکاملی با حذف تدریجی مواد زائد از فضای طراحی به جواب موردنظر دست می‌یابند. از جمله روش‌های تکاملی می‌توان به مواردی از قبیل حداکثر تنش طراحی^۳، افزایش معکوس^۴ و بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها^۵ اشاره کرد. روش‌های تکاملی دارای مزایایی از قبیل سهولت نسبی در برنامه‌نویسی و درگیر نشدن با روابط پیچیده ریاضی، عدم پیدایش نواحی خاکستری و نزدیک‌بودن قابل توجه نتایج به دست آمده با نتایج تحلیلی می‌باشد.

اهمیت طراحی سازه‌های با وزن کمینه، اولین بار توسط صنایع هوا- فضا مورد توجه قرار گرفت که در آن‌ها طراحی سازه‌های هواپیما بیشتر با وزن آن کنترل می‌شد تا با هزینه آن. در دیگر صنایع مربوط به سیستم‌های مهندسی ساختمان، مکانیک و خودرو، ممکن است هزینه در درجه اول اهمیت باشد، هرچند که وزن سیستم، هزینه و عملکرد آن را تحت تاثیر قرار می‌دهد. توجه فزاینده به کمبود مواد

^۱Homogenization method

^۲Solid isotropic microstructures with penalty

^۳Fully stress design

^۴Reverse adaptivity

^۵Evolutionary structural optimization

خام و نقصان شدید منابع انرژی شناخته شده، موجب تمایل به داشتن سازه‌هایی سبک، کارا و ارزان قیمت شده است. این خواست به نوبه خود بر ضرورت آگاهی یافتن مهندسان از فنون بهینه‌سازی وزن و هزینه سازه‌ها تاکید می‌کند.

در اصل کلمه توپولوژی از ترکیب واژه یونانی توپوس به معنی جا و مکان، و گلوبوس به معنی مطالعه و دلیل حاصل شده است. از جنبه تاریخی توپولوژی در سال ۱۸۴۷ توسط لیستنگ^۱، یکی از شاگردان گاوس معرفی شد. نام دیگری که در اوایل گسترش توپولوژی به این موضوع اطلاق شد آنالیز وضع بود. از جنبه هندسی، توپولوژی مطالعه خواصی است که به وسیله گروه معینی از تبدیلات، یعنی همئومورفیسم‌ها^۲ (همسان ریخت) حفظ می‌شوند. برای درک شهودی از مفهوم همسان ریخت، کره‌ای را تجسم کنید که به صورت بالونی لاستیکی باشد به طوری که بتوان آن را منبسط یا منقبض کرد بدون آنکه پاره شود یا اینکه دو نقطه متمایز آن به هم وصل شود، معلوم است که در نتیجه چنین تبدیلاتی نقاطی که در ابتدا به هم نزدیک بودند، در آخر نیز نزدیک به هم باقی می‌مانند. چنین تبدیلات کره را همسان ریخت می‌نامند و شکل‌های مختلفی را که در نتیجه اعمال همسان ریخت‌ها پدید می‌آیند دو به دو همومورف^۳ (همسان ریخت) می‌گویند.

توپولوژی، مطالعه هندسه و نظریه مجموعه‌ها بر پایه مفاهیمی همچون بعد، تغییر شکل و فضا است. در واقع توپولوژی ساختاری هندسی است که بر روی یک مجموعه تعریف می‌شود و در باب ویژگی‌هایی از فضا که تحت تغییر شکل‌های پیوسته ثابت می‌ماند، بحث می‌کند. این تغییر شکل‌ها (مثلاً کشش یا خمش)، نامتغیرهای توپولوژی نام دارند؛ لازم به ذکر است که در این تغییر شکل‌ها، برش و اتصال مجدد مجاز نیست.

^۱Listing

^۲Homeomorphism

^۳Homeomorph

۵-۲- بهینه‌سازی ریاضی^۱

بهینه‌سازی ریاضی یا برنامه‌ریزی ریاضی در ریاضیات، اقتصاد و مدیریت شامل انتخاب بهترین عضو از یک مجموعه اعضای قابل دستیابی است.

مفهوم اصلی بهینه‌سازی، شناسایی بهترین راه حل ممکن تحت شرایط معین می‌باشد. هدف بهینه‌سازی اغلب کمینه یا بیشینه سازی است؛ به عنوان مثال کمینه سازی زمان مورد نیاز یا بیشینه سازی سختی.^۲ مطلوبیت یک راه حل باید با مقادیر عددی بیان شود؛ این عمل با تعریف یک تابع برحسب متغیرهای طراحی که تابع هدف^۳ نامیده می‌شود، صورت می‌پذیرد. از لحاظ ریاضی مسئله عمومی بهینه‌سازی اغلب با کمینه سازی تابع هدف (که به آسانی می‌تواند تبدیل به مسئله بیشینه سازی با کمینه کردن منفی تابع هدف شود) همراه با قیدهای طراحی^۴ فرمول‌بندی می‌شود.

اگر عبارات تابع هدف و قیدهای در نظر گرفته شده برای متغیرهای طراحی نسبتاً ساده باشد، روش‌های کلاسیک بهینه‌سازی را می‌توان برای حل مسئله به کار برد. اما اگر مسئله بهینه‌سازی شامل تابع هدف و یا قیدهایی باشد که نتوان آن را به عنوان یک تابع صریح از متغیرهای طراحی تعریف نمود و بیش از حد پیچیده بیان شده باشد، نمی‌توان آن را با استفاده از روش تحلیلی حل کرد.

۵-۳- بهینه‌سازی سازه‌ای^۵

بهینه‌سازی سازه‌ای یکی از کاربردهای بهینه‌سازی ریاضی است. از توابع هدف رایج، کمینه سازی جرم، جابجایی^۶ و نرمی^۷ (انرژی کرنشی) را می‌توان نام برد. ایده اولیه بهینه‌سازی سازه‌ای از دو بخش

^۱Mathematical optimization

^۲Stiffness

^۳Objective function

^۴Design constraints

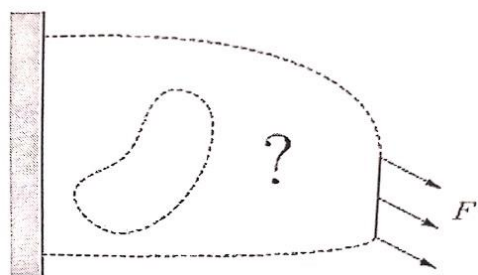
^۵Structural optimization

^۶Displacement

^۷Compliance

سازه و بهینه‌سازی تشکیل شده است.

در مکانیک به هر مجموعه‌ای از مواد که برای حفظ بار در نظر گرفته شده باشد سازه اطلاق می‌شود و بهینه‌سازی به معنی بهتر کردن هر چیزی است. بنابراین بهینه‌سازی سازه‌ای موضوع ساخت یک مجموعه از مواد به بهترین روش برای تحمل نیرو است. همانطور که در شکل ۵-۱ نمایش داده شده هدف مسئله بهینه‌سازی سازه‌ای یافتن ساختاری است که به بهترین نحو نیروی F را به تکیه‌گاه انتقال دهد.



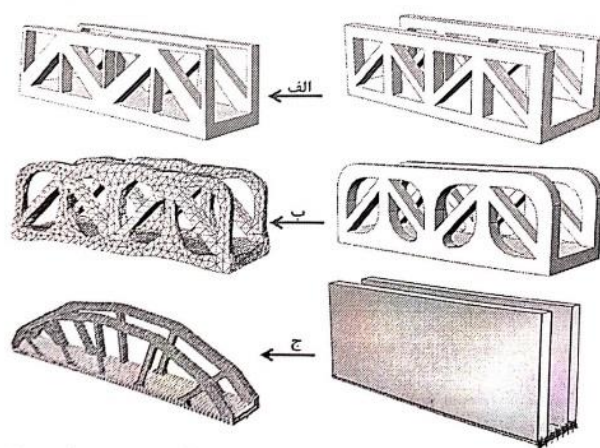
شکل ۵-۱ سازه تحت نیروی F و متصل به تکیه‌گاه [۶۲]

مسئله بهینه‌سازی سازه‌ای می‌تواند به سه شاخه اصلی تقسیم شود (شکل ۵-۲):

(۱) بهینه‌سازی اندازه

(۲) بهینه‌سازی شکل

(۳) بهینه‌سازی توپولوژی

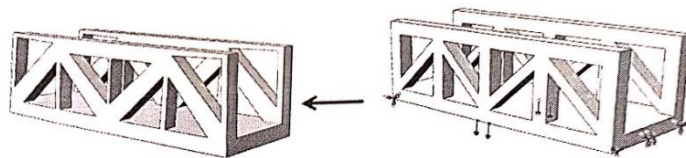


شکل ۵-۲ روش‌های مختلف بهینه‌سازی سازه‌ای [۶۲]

۵-۳-۱- بهینه‌سازی اندازه^۱

بهینه‌سازی اندازه، ساده‌ترین شکل بهینه‌سازی سازه‌ای است. در روش بهینه‌سازی اندازه شکل سازه شناخته شده، خواص المان‌های سازه‌ای مانند ضخامت ورق، خواص مقطع عرضی تیر، سختی فنر و جرم برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی، اصلاح می‌شوند.

شکل ۵-۳ مثالی از بهینه‌سازی اندازه را نشان می‌دهد که در آن قطر میله‌های سازه، متغیرهای طراحی‌اند.



شکل ۵-۳ مثالی از بهینه‌سازی اندازه [۶۲]

۵-۳-۲- بهینه‌سازی شکل^۲

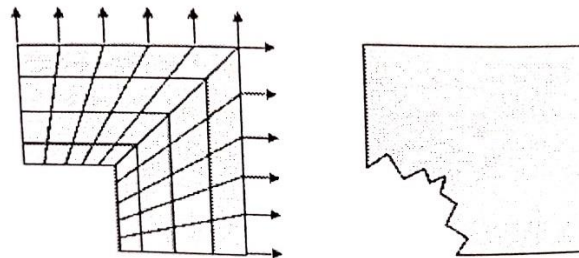
از لحاظ ریاضی، بهینه‌سازی شکل را می‌توان به عنوان مسئله‌ای برای یافتن یک پارامتر کران‌دار مثل Ω و کمینه کردن یک تابع به شکل $F(\Omega)$ در نظر گرفت. این مسئله ممکن است یک قید به شکل $G(\Omega) = 0$ هم داشته باشد. معمولاً طراح مایل است که مقادیر Ω شامل قسمت‌های محدودی باشد چرا که هدف یافتن یک شکل مناسب است که در صورت کمتر بودن قسمت‌های Ω ، سریع‌تر جواب مورد نظر حاصل می‌گردد. برخی مواقع نیاز است که برای اطمینان از صحت شرایط مسئله و تحلیل مطمئن‌تر، قیدهای اضافی ایجاد شود.

^۱Size optimization

^۲Shape optimization

۵-۳-۲-۱- روش مختصات گره‌ای المان^۱

روش مختصات گره‌ای المان، یک روش ابتدایی بهینه‌سازی شکل است که از مختصات مکانی گره‌های المان محدود به عنوان متغیرهای طراحی، بهره می‌برد. جابجایی نقاط گره‌ای مرزی اغلب کیفیت شبکه-بندی را کمتر می‌کند یا منجر به یک طراحی غیر قابل قبول همانند شکل ۴-۵ می‌شود. برای جلوگیری از اعوجاج شبکه‌بندی^۲ یا طراحی‌های غیر قابل قبول، قیدهای جدید برای کنترل حرکت هر مختصات گره‌ای، به وسیله روش آزمون و خطا اضافه می‌شود. در نتیجه، یک نرم‌افزار مدل‌سازی و شبکه‌بندی باید مدل المان محدود را با تغییر متغیرهای طراحی، به روز رسانی کند.



شکل ۴-۵ تعریف مسئله بهینه‌سازی شکل با روش مختصات گره‌ای المان (شکل سمت چپ) و شکل

بهینه‌شده غیر قابل قبول (شکل سمت راست) [۶۲].

شکل مرز^۳ می‌تواند با ترکیب خطی چند شکل مبنای^۴ تعریف شود. به منظور توصیف تغییرات شکلی در تحلیل المان محدود، روش پایه کاهش یافته^۵ به کار برده می‌شود که در آن از تعدادی بردارهای طراحی^۶ برای توصیف تغییرات شکلی^۷ استفاده می‌شود. این روش، روش بردارهای اغتشاشات^۸ نام دارد. یک روش معرفی تغییرات شکل به مدل المان محدود، استفاده از روش بردار اغتشاشات است. در ابتدا

^۱Element nodal coordinate method

^۲Mesh distortion

^۳Boundary shape

^۴Basis shapes

^۵Reduced-basis method

^۶Design vectors

^۷Shape changes

^۸Perturbation vector approach

با استفاده از اغتشاشاتی که به بردار مختصات مکانی گره‌ها اضافه می‌شود، یک یا تعداد بیشتری شکل، تعریف می‌شوند (معادله ۱-۵):

$$r = r_0 + p \quad (۱-۵)$$

در رابطه‌ی فوق، r_0 بردار مختصات مکانی یک گره معین، p اغتشاشات ناشی از تغییر شکل و r بردار مختصات مکانی (بردار شکل) همان گره پس از تغییر شکل است.

با استفاده از ترکیب خطی اغتشاشات، متغیرهای طراحی بهینه‌سازی می‌توانند وزن‌های بردارهای اغتشاشات معرفی شوند.

با توجه به رابطه ۱-۵ متغیر طراحی برای هر بردار شکل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r = r_0 + \sum_{i=1}^n w_i p_i \quad (۲-۵)$$

که n تعداد شکل‌های تعریف شده (متغیرهای طراحی) می‌باشد.

همچنین قیدهایی بر روی وزن بردارهای اغتشاش به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$w_i^{\min} \leq w_i \leq w_i^{\max} \quad i = 1, \dots, n \quad (۳-۵)$$

که w_i ، وزن اختصاص داده به اُمین اغتشاش (p_i) و $w_i^{\min}$ و $w_i^{\max}$ به ترتیب بیشینه و کمینه مقدار وزن‌های اختصاص داده شده به اغتشاشات می‌باشد. در نتیجه بهینه‌سازی شکل، دستیابی به مقدار بهینه مجموعه وزن‌ها را دنبال می‌کند.

۵-۳-۲-۲- روش مرز هندسی^۲

در بهینه‌سازی شکل، مرز هندسی می‌تواند با استفاده از منحنی‌هایی بر پایه مدل هندسی^۴ تعریف

^۱Vector of nodal coordinates

^۲Optimum set of shape weights

^۳Geometric boundary method

^۴Cad-based curves

شود، که روش مرز هندسی نام دارد. برای سازه‌های با المان‌های پوسته‌ای^۱، سطح، از منحنی‌های از پیش تعریف شده، تولید می‌شود و یک تولیدکننده شبکه‌بندی اتوماتیک^۲، شبکه‌ها را بر روی سطح تولید می‌کند. هر زمان که طراحی تغییر کند، منحنی‌های بر پایه مدل هندسی تغییر می‌کنند. سپس تغییرات سطح و شبکه بندی های جدید در طول فرآیند بهینه‌سازی شکل به طور پیوسته انجام می‌شوند. باید توجه داشت که روش مرز هندسی برای المان‌های سه‌بعدی مانند المان شش وجهی به‌علت محدودیت در تولید مش اتوماتیک توصیه نمی‌شود.

۵-۳-۳- بهینه‌سازی توپولوژی^۳

متداول‌ترین روش بهینه‌سازی سازه‌ای، بهینه‌سازی توپولوژی است که هدف آن یافتن توزیع بهینه ماده^۴ در یک فضای طراحی^۵ معین است. بهینه‌سازی توپولوژی یک روش محاسباتی است که شکل بهینه و توزیع ماده را برای یک سازه در فضایی که باید قرار بگیرد، به کمک تکنیک‌های توزیع ماده تولید می‌کند. این تکنیک‌ها اغلب شامل برنامه‌نویسی ریاضی به منظور بهینه‌سازی و روش المان محدود به‌منظور تحلیل، هستند. با استفاده از بهینه‌سازی توپولوژی، مهندسان می‌توانند بهترین طراحی را در شرایطی که نیازهای طراحی را برآورده می‌سازد، بیابند. در واقع بهینه‌سازی توپولوژی اولین قدم مفهومی از فرآیند طراحی برای رسیدن به یک طرح پیشنهادی است به‌طوری‌که پس از آن در مراحل بعدی قابلیت اجرا و ساخت را دارا باشد. این روش باعث کاهش اتلاف زمان و تکرارهای هزینه‌بر می‌شود و زمان طراحی و هزینه کلی را کاهش می‌دهد.

بهینه‌سازی توپولوژی به کمک رایانه، اولین بار در سال ۱۹۸۸ به منظور طراحی قطعات سازه‌ای با کمترین وزن معرفی شد و از آن زمان بهینه‌سازی توپولوژی، محبوبیت گسترده‌ای در دانشگاه‌ها و صنعت

^۱Shell type structure

^۲Automatic mesh generator

^۳Topology optimization

^۴Optimum distribution of material

^۵Design domain

به دست آورده است و در حال حاضر به منظور کاهش وزن و بهینه‌سازی عملکرد قطعات خودروها، هواپیماها و سازه‌های دیگر به کار برده می‌شود. امروزه، تعدادی نرم‌افزارهای تجاری، بهینه‌سازی توپولوژی را برای صنعت فراهم می‌آورند و اصلی‌ترین کاربرد طراحی توپولوژی، کارخانه‌های اتوموبیل‌سازی و تامین‌کننده‌های قطعات آن‌ها هستند.

۵-۴- تعریف مسئله بهینه‌سازی

تعریف یک مسئله بهینه‌سازی شامل تعیین تابع هدف، متغیرهای طراحی و قیدهای بهینه‌سازی می‌باشد. در ادامه توضیحاتی مختصر در مورد موارد ذکر شده داده خواهد شد.

۵-۴-۱- تابع هدف

در این بخش، هدف اصلی بهینه‌سازی باید مشخص شود. تابع هدف تابعی است که برای طبقه بندی طرح استفاده می‌شود. برای هر طرح ممکن، F مقداری را نشان می‌دهد که میزان خوب بودن طرح را نشان می‌دهد. که معمولاً مقدار کوچک F انتخاب بهتری (مسائل کمینه‌سازی) است. در بهینه‌سازی، معمولاً به صورت توابع بیشینه و یا کمینه‌کننده تعریف می‌شوند. همچنین می‌توان این هدف‌ها را به صورت کمینه‌کردن بیشینه‌ها و یا بیشینه‌کردن کمینه‌ها تعریف کرد (مثلاً کاهش بیشترین مقدار تنش). غالباً F میزان وزن، جا به جایی طی یک مسیر، تنش موثر و یا حتی هزینه تولید را محاسبه می‌کند.

۵-۴-۲- متغیرهای طراحی

اولین گام در بیان مسئله بهینه‌سازی، تعریف متغیر طراحی است. با تعریف متغیر طراحی، مشخص می‌شود که کدام المان‌ها باید مورد بهینه‌سازی قرار گیرند. با تعریف متغیر طراحی، میدان طراحی به

دو فضای طراحی^۱ و غیر طراحی^۲ تقسیم بندی می شود.

فضای طراحی، حجم مجازی است که در آن، طراحی می تواند انجام شود. با توجه به تعریف فضای طراحی، نواحی و اجزایی از مدل که در طی فرآیند بهینه سازی احتیاجی به اصلاح آن ها نیست به عنوان نواحی غیر طراحی در نظر گرفته می شوند.

متغیرهای طراحی پارامترهایی هستند که مقداری آزادی تغییر در آن ها داریم و با تغییر آن ها، اصلاح لازم را در سازهی مورد نظر ایجاد می کنیم، که این پارامترها معمولا سطح مقطع اعضا و یا خصوصیات دیگری از مصالح و خواص هندسی اعضای سازهی موجود هستند و به دو دسته ی گسسته و پیوسته تقسیم بندی می شوند.

به طور کلی یک سیستم سازه ای توسط کمیت هایی بیان می شود که بعضی از آن ها را می توان به عنوان متغیرهای طراحی برای فرایند بهینه سازی در نظر گرفت. کمیت هایی که در حین این فرایند ثابت هستند، پارامترهای از پیش تعیین شده نامیده می شوند. این پارامترها توسط الگوریتم های بهینه سازی تغییر نخواهند کرد. کمیت هایی که از پیش تعیین شده نیستند را متغیرهای طراحی می نامیم. مجموعه ی پارامترهای از پیش تعیین شده و متغیرهای طراحی، یک طرح را تشکیل می دهند. متغیرهای طراحی می توانند بیان کننده ی خواص زیر برای سازه باشند [۶۳].

(۱) خواص مکانیکی یا فیزیکی مصالح سازه

(۲) توپولوژی یا نحوه ی ارتباط اعضا یا المان های یک سازه

(۳) هندسه یا ساختار یک سازه

(۴) ابعاد یا سطح مقطع عرضی یا اندازه ی سازه

^۱Design domain

^۲Non-design domain

۵-۴-۳- متغیرهای وضعیت

متغیرهای وضعیت یک سازه، مثلاً برای یک متغیر طراحی در طرح داده شده، تابع یا برداری است که نشان دهنده پاسخ سازه است. منظور از پاسخ برای یک سازه، جابه‌جایی، تنش، کرنش یا نیرو است. می‌توان یک یا تعداد بیشتری قید بر روی یک پاسخ معین با تنظیم کرانه بالا و کرانه پایین تعریف کرد (مثالی از پاسخ‌ها: جرم، حجم، نسبت جرمی، نسبت حجمی، نرمی، تنش فون‌میزس، جابه‌جایی استاتیکی و ... می‌باشد). پاسخ‌هایی که در زیر آورده شده‌اند را می‌توان به عنوان توابع هدف و یا توابع قید به کاربرد: جرم، حجم، کسر حجمی یا جرمی، مرکز ثقل (گرانیگاه)، گشتاور اینرسی، نرمی، بسامد طبیعی، تنش فون‌میزس، ضریب کماتش، جابه‌جایی، سرعت و شتاب فرکانسی.

۵-۴-۴- قیدهای مسئله بهینه‌سازی

در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای سه نوع از قیود تعریف می‌شوند:

(۱) قید رفتاری

(۲) قید طراحی

(۳) قید تعادل

۵-۴-۴-۱- قید رفتاری^۱

منظور قیدهایی است که بر روی متغیر وضعیت y اعمال می‌شود و معمولاً به صورت $g(y) \leq 0$ تعریف می‌شود، که g تابع پاسخ است. به عنوان مثال جابه‌جایی در مسیر مشخص.

^۱Behavioral constraint

۵-۴-۴-۲- قید طراحی^۱

شبیه قیود رفتاری است با این تفاوت که شامل متغیر طراحی x نیز است. قید طراحی در واقع معیاری است که نباید از حدود آن عبور شود. عبور کردن از قیدهای طراحی، یک طراحی غیرممکن و ناشدنی را به همراه خواهد داشت.

۵-۴-۴-۳- قید تعادل^۲

در مسائل بهینه‌سازی، معادله‌ی تعادل (معادله ۴-۵) به‌صورت یک قید در نظر گرفته می‌شود.

$$K(x)u = F(x) \quad (4-5)$$

۵-۵- روش اعمال قید خستگی

سه روش مختلف برای اعمال قیدهای تنش وجود دارد: (۱) محلی^۳، (۲) سراسری^۴، (۳) خوشه‌ای^۵. در صورتی که برای هر نقطه‌ی ارزیابی تنش یک قید به‌کار رود، روش محلی و در صورتی که برای تمام مدل یک قید تنش به‌کار برده شود، روش سراسری است. روش‌های محلی و سراسری توسط دوسینکس و همکاران [۶۵،۶۴] در سال ۱۹۹۸ بررسی شده است. از معایب این دو روش می‌توان به هزینه‌ی محاسباتی سنگین در روش محلی و سطحی بودن روش سراسری اشاره کرد. روش خوشه‌ای اولین مرتبه توسط لی و همکاران [۶۶] در سال ۲۰۱۰ ارائه شد، در این روش تعدادی خوشه تعیین می‌شود و المان‌ها را با توجه به میزان تنش در خوشه‌ها دسته‌بندی می‌نمایند و به هر خوشه یک قید نسبت می‌دهند. این روش موجب کاهش قابل ملاحظه زمان و هزینه محاسبات خواهد شد.

^۱Design constraint

^۲Equilibrium constraint

^۳Local constraint

^۴Global constraint

^۵Clusters constraint

در این پژوهش با استفاده از خوشه بندی قیود خستگی و به کار بردن روش «پی-نرم»^۱ سهم تمام معیارهای خرابی خستگی محلی را در یک تابع به صورت زیر ذخیره می کنیم:

$$f_{PN} = \left(\sum_{i=1}^{N_i} (L_i^{GM})^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (5-5)$$

N_i تعداد نقاط ارزیابی تنش و p ثابت روش «پی-نرم» می باشد و معمولاً بین ۳ و ۵ در نظر گرفته می شود.

جهت در نظر گرفتن بیشترین معیار خرابی خستگی گودمن، از معیار خرابی خستگی «پی-نرم» اصلاح شده به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$(f_{PN}^I)_{max} = C^I f_{PN}^I \quad (6-5)$$

که I شمارنده ی تکرار چرخه ی بهینه سازی می باشد و C نیز در هر چرخه ی بهینه سازی به صورت زیر تعریف می شود:

$$C^I = \alpha^I \frac{LGM_{max}^{I-1}}{f_{PN}^{I-1}} + (1 - \alpha^I) C^{I-1} \quad 0 < \alpha^I < 1 \quad (7-5)$$

جهت جلوگیری از خرابی ناشی از خستگی، مقدار $(f_{PN})_{max}$ در هر چرخه ی بهینه سازی باید کوچکتر یا مساوی یک باشد.

۵-۶- روش مجموعه سطوح تراز

استفاده از روش سطوح تراز در بهینه سازی توپولوژی ابتدا توسط وانگ [۸] پیشنهاد شد. در این روش به معرفی تابع مجموعه سطوح تراز^۲ (LSF) پرداخته می شود که مقدار این تابع در نقاط مرزی سازه برابر صفر بوده و در نقاطی از سازه که ماده وجود ندارد مقدار تابع منفی و در بقیه نقاط دارای مقدار

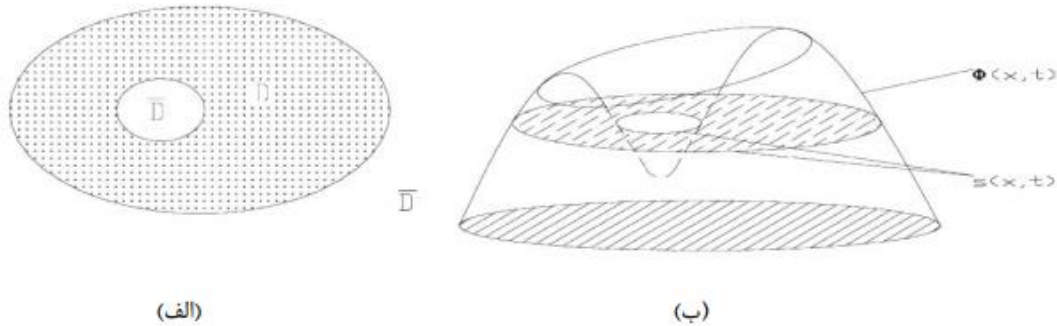
^۱P- Norm

^۲LSF: Level Set Function

مثبت می باشد. معادله ریاضی آن به شرح زیر می باشد.

$$\varphi(x, t) \begin{cases} = 0 & x \in \partial D \\ > 0 & x \in D \\ < 0 & x \in \bar{D} \setminus D \end{cases} \quad (۸-۵)$$

در رابطه (۸-۵) پارامتر t معرف زمان و x بردار مختصات هر نقطه در فضا می باشد. $\bar{D}$ کل دامنه طراحی می باشد و D زیرمجموعه $\bar{D}$ بوده به صورتی که مقدار تابع φ برای اعضای موجود در D مثبت می باشد. $\bar{D} \setminus D$ نمایانگر نقاط خارج از سازه مانند حفره ها می باشد. جهت درک بهتر توضیحات گفته شده می توان به شکل ۵-۵ مراجعه نمود.



شکل ۵-۵: (الف) دامنه طراحی و (ب) مدل مجموعه سطوح تراز [۸]

مقدار تابع مجموعه سطوح تراز از رابطه همیلتون - ژاکوبی^۱ زیر در هر مرحله بهینه سازی به روز رسانی می شود که موجب حرکت مرزها در سطح سازه می شود.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (۹-۵)$$

در رابطه ۹-۵، وانگ مقدار $\nabla \varphi \cdot \frac{dx}{dt}$ را با $-v_n |\nabla \varphi|$ جایگزین می کند. که $v_n = -\frac{\nabla \varphi \cdot \frac{dx}{dt}}{|\nabla \varphi|}$ معادل مقدار سرعت حرکت در مرزها می باشد. به منظور جلوگیری از بزرگ و کوچک شدن مقدار φ در مرزها که مشکلات عددی ایجاد می کند، لازم است برای تابع φ بعد از هر مرحله بهینه سازی مقادیر $|\nabla \varphi|$ در مرز اصلاح گردد. به همین جهت در رابطه (۵-۱۰)، به منظور حفظ مقادیر φ در مرزها، بدون دخالت در روند بهینه سازی، مقادیر $|\nabla \varphi|$ به مقدار ۱ تبدیل می شود که به این روند مقدار

^۱Hamilton-Jacobi

دهی دوباره گفته می‌شود.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{sign}(\varphi) * (|\nabla \varphi| - 1) = 0 \quad (10-5)$$

جهت آشنایی بیشتر با رابطه (10-5) می‌توان به مراجع [67-69] مراجعه نمود.

در مطالعات گذشته، تابع مجموعه سطوح تراز (φ) با توابع پایه بی-اسپیلین تقریب زده می‌شد و شبکه نقاط کنترلی در طی فرآیند بهینه‌سازی به‌روزرسانی می‌شد. از آنجا که نقاط کنترلی، اساساً روی سطوح تراز قرار ندارند، یک اختلاف بین تراز صفر تابع φ که نشان دهنده‌ی مرزهای سازه است و تراز صفر شبکه کنترلی ظاهر می‌شود. برای کاهش این اختلاف و افزایش دقت، تعداد نقاط کنترلی ممکن است افزایش یابد. در این مقاله، ایده‌ی ارائه شده، حل کردن معادله‌ی مجموعه سطوح تراز نسبت به فضای پارامتری توابع پایه بی-اسپیلین در مدل آیزوژئومتریک می‌باشد. پس از آن تابع مجموعه سطوح تراز به‌روزرشده به فضای فیزیکی نگاشت می‌شود.

5-6-1- تعریف مسئله بهینه‌سازی با استفاده از روش سطوح تراز

با در نظر گرفتن مرجع [8]، برای حل مسئله بهینه‌سازی به روش سطوح تراز، لازم است که یک مسئله بهینه‌سازی با قید خستگی به شکل زیر تعریف شود:

$$\begin{cases} \text{Minimize: } V(\varphi) = \sum_{e=1}^{nk} \left(\int H(\varphi) dV^e \right) \\ \text{subject to: } \begin{cases} \text{equilibrium} \\ \text{fatigue constraint: } (f_{PN})_{\max} \leq 1 \\ \text{design restrictions} \end{cases} \end{cases} \quad (11-5)$$

که nk تعداد کل المان‌های گره‌ای، V حجم کل، $(f_{PN})_{\max}$ بیشترین مقدار معیار خرابی خستگی «پی-نرم»، φ تابع مجموعه سطوح تراز و H نیز تابع هویساید می‌باشد که در رابطه (5-12) تعریف شده‌است.

¹Reinitialization

²Heaviside

$$H(\varphi) = \begin{cases} 1 & \varphi > 0 \\ 0 & \varphi \leq 0 \end{cases} \quad (۱۲-۵)$$

با معرفی تابع لاگرانژ به صورت زیر داریم:

$$L(u, \varphi) = \sum_{e=1}^{nk} \left(\int H(\varphi) dV^e \right) + \lambda((f_{PN})_{max}(u, \varphi) - 1) \quad (۱۳-۵)$$

λ ضریب لاگرانژ اُقید خستگی می باشد، و بر اساس روش عددی افزایشی^۲ محاسبه شده است [۷۰].

از آن جایی که در بهینه سازی به دنبال این هستیم که تابع لاگرانژ در هر گام بهینه سازی نسبت به گام قبل کمتر یا بیشتر باشد، به همین منظور در جهت کمینه سازی تابع لاگرانژ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{\partial L}{\partial t} < 0 \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t} < 0 \quad (۱۴-۵)$$

با توجه به تعریف تابع φ در مرجع [۸] و نوشتن معادله همیلتون-ژاکوبی داریم:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \frac{dx}{dt} = 0 \quad (۱۵-۵)$$

با فرض $v_n = \frac{-\nabla \varphi \cdot \frac{dx}{dt}}{|\nabla \varphi|}$ که به عنوان پارامتر سرعت مرز در نظر گرفته می شود، می توان معادله بالا

را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - v_n |\nabla \varphi| = 0 \quad (۱۶-۵)$$

۵-۶-۲- توابع پایه شعاعی مرجع [۷۱، ۷۲]

در این روش، شبکه تابع سطح تراز در فضای پارامتری تعریف شده و مرکز توابع پایه شعاعی، در نقاط شبکه ای فضای پارامتری در نظر گرفته شده است. به این صورت که یک شبکه بر روی فضای پارامتری تعریف شده و مرکز توابع پایه شعاعی همان نقاط شبکه فضای پارامتری تعریف می شود. مزیت این روش

^۱Lagrange multiplier

^۲Augmented

نسبت به روش اجزا محدود، ریزتر کردن شبکه تابع سطح تراز به اندازه دلخواه، با ثابت در نظر گرفتن نقاط کنترلی می باشد که منجر به تشخیص بهتر مرزها در سازه می شود. اگر به منظور تعریف کردن تابع φ از توابع پایه شعاعی استفاده شود، داریم:

$$\varphi(r, t) = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) g_i(r) + p(r, t) \quad (17-5)$$

در رابطه‌ی فوق $r=(r,s)$ مختصات نقاط در فضای پارامتری و m تعداد نقاط تقسیم کننده‌ی فضای پارامتری می باشد. ضریب وزن تابع پایه شعاعی است که در تأمین نقطه قرار دارد. $g_i(r)$ اسپیلاین چند جمله‌ای درجه دو، و $p(r,t)$ یک چند جمله‌ای درجه یک برای اطمینان از معین مثبت بودن پاسخ می باشد. $g_i(r)$ و $p(r,t)$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$g_i(r) = \sqrt{(r - r_i)^2 + c_i^2} \quad (18-5)$$

$$p(r, t) = p_0(t) + p_1(t)r + p_2(t)s$$

به منظور جلوگیری از خطاهای عددی در مشتقات توابع g_i ، ثابت C_i در این توابع در نظر گرفته می شود. جهت اطمینان از این که تابع سطح تراز توسط توابع پایه شعاعی در دو بعد با کمترین خطا تقریب زده شود، لازم است که ضرایب انبساط روابط زیر را اغنا کنند.

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = 0 \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i r_i = 0 \quad \sum_{i=1}^m \alpha_i s_i = 0 \quad (19-5)$$

رابطه‌ی (۱۷-۵) به فرم زیر بازنویسی می شود:

$$G\alpha(t) = \varphi(t) \quad (20-5)$$

در رابطه‌ی فوق داریم:

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= \{\alpha_1 \quad \cdots \quad \alpha_m \quad p_0 \quad p_1 \quad p_2\}^T \\ \varphi(t) &= \{\varphi(r_1, t) \quad \cdots \quad \varphi(r_m, t) \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^T \\ G &= \begin{bmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} g_1(r_1) & \cdots & g_n(r_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_n(r_1) & \cdots & g_n(r_n) \end{pmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & s_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & r_n & s_n \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (21-5)$$

از آنجا که G معکوس پذیر است، ضرایب وزن با استفاده از رابطه‌ی زیر به دست می آیند:

$$\alpha(t) = G^{-1}\varphi(t) \quad (22-5)$$

پس از به دست آوردن مقادیر ضرایب وزن، تابع مجموعه سطوح تراز با استفاده از رابطه‌ی ۵-۲۰ به فرم برداری زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi(r, t) &= g(r)^T \alpha(t) \\ g(r) &= \{g_1(r) \quad \cdots \quad g_n(r) \quad 1 \quad r \quad s\}^T \end{aligned} \quad (23-5)$$

با جایگذاری $\varphi(r, t)$ در رابطه‌ی (۵-۱۶) خواهیم داشت:

$$g(r)^T \frac{d\alpha(t)}{dt} - v_n |\nabla g(r) \alpha(t)| = 0 \quad (24-5)$$

در انتها، معادله‌ی همیلتون-ژاکوبی به فرم ماتریسی زیر بازنویسی می‌شود:

$$G \frac{d\alpha}{dt} - W(\alpha, t) = 0 \quad (25-5)$$

در معادله‌ی فوق:

$$W(\alpha, t) = [v_n(r_1) |\nabla g^T(r_1) \alpha(t)|, \dots, v_n(r_m) |\nabla g^T(r_m) \alpha(t)|, 0, 0, 0]^T \quad (26-5)$$

از معادله‌ی زیر جهت به روز رسانی بردار $\alpha(t)$ در هر مرحله‌ی بهینه‌سازی استفاده شده است.

$$\alpha(t_{i+1}) = \alpha(t_i) + \Delta t G^{-1} W(\alpha(t_i), t_i) \quad (27-5)$$

۵-۶-۳- تحلیل حساسیت

تحلیل حساسیت را می‌توان به این صورت تعریف کرد که رابطه‌ی بین ورودی‌ها و خروجی‌های مسئله را مورد بررسی قرار می‌دهد. به این صورت می‌توان میزان تغییرات خروجی‌های مسئله را بر اساس تغییرات در ورودی‌های مختلف از نظر کمی و کیفی تعیین کرد. در حقیقت تحلیل حساسیت یک پیش نیاز اساسی برای حل مسئله‌ی بهینه‌سازی به روش ریاضی می‌باشد.

در مسائل بهینه‌سازی نیاز داریم تا از تابع هدف و توابع قید بر حسب متغیرهای طراحی مشتق‌گیری نماییم و اصطلاحاً حساسیت تابع هدف و توابع قید را نسبت به متغیرهای طراحی به دست آوریم. اصولاً این گونه روش‌ها به دلیل انجام تحلیل حساسیت از سایر روش‌ها بسیار سودمندتر هستند و بسیار سریع‌تر

پاسخ را برای ما تعیین می کنند؛ زیرا با تعیین مشتقات حساسیت می توانیم بر حسب شدت اثر تغییرات یک متغیر بر روی تابع هدف و توابع قید، متغیری را انتخاب کرده و تغییر دهیم که تغییرات در آن شدت بیشتری بر روی تابع هدف و توابع قید داشته باشد و در نتیجه خود را سریع تر به جواب نزدیک کنیم.

به طور کلی سه روش برای تعیین مشتقات حساسیت وجود دارد: ۱- روش تفاضل محدود ۲- روش تحلیلی ۳- روش نیمه تحلیلی.

با توجه به اینکه در این پژوهش از روش تحلیلی برای آنالیز حساسیت استفاده شده است لذا تنها این روش بررسی خواهد شد. در روش تحلیلی از تعریف مشتق و محاسبه ی آن برای تعیین حساسیت ها استفاده می شود. مشتق معیار خرابی خستگی «پی-نرم» با استفاده از قاعده ی زنجیره ای مشتق به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\partial f_{PN}}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_{PN}}{\partial L_i^{GM}} \frac{\partial L_i^{GM}}{\partial \varphi} \quad (28-5)$$

در رابطه ی فوق مشتق معیار خرابی خستگی «پی-نرم» نسبت به معیار گودمن $(\frac{\partial f_{PN}}{\partial L_i^{GM}})$ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\frac{\partial f_{PN}}{\partial L_i^{GM}} = \left(\sum_{i=1}^{N_i} (L_i^{GM})^p \right)^{\left(\frac{1}{p}-1\right)} (L_i^{GM})^{(p-1)} \quad (29-5)$$

به کمک قاعده ی زنجیره ای مشتق، مشتق معیار گودمن نسبت به متغیر طراحی $(\frac{\partial L_i^{GM}}{\partial \varphi})$ برابر است با:

$$\frac{\partial L_i^{GM}}{\partial \varphi} = \frac{\partial L_i^{GM}}{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}} \frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \varphi} + \frac{\partial L_i^{GM}}{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}} \frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \varphi} \quad (30-5)$$

مشتق معیار گودمن نسبت به تنش های تناوبی و متوسط فون میزس در رابطه (۳۱-۵) مشاهده می شود.

$$\frac{\partial L_i^{GM}}{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}} = \frac{1}{(\sigma_i)_{Nf}} \quad , \quad \frac{\partial L_i^{GM}}{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}} = \frac{1}{\sigma_{ut}} \quad (31-5)$$

مشتق تنش تناوبی و تنش متوسط فون میزس با استفاده از قاعده زنجیره ای مشتق برابر است با:

$$\frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{a_i}} \frac{\partial \sigma_{a_i}}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varphi} \quad (32-5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{m_i}} \frac{\partial \sigma_{m_i}}{\partial \sigma_i} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \varphi} \quad (33-5)$$

در مسائل دو بعدی، مشتق تنش‌های تناوبی و متوسط فون میزس از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{a_i}} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{x_{a_i}}} = \frac{1}{2\sigma_{a_i}^{vonMises}} (2\sigma_{x_{a_i}} - \sigma_{y_{a_i}}) \\ \frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{y_{a_i}}} = \frac{1}{2\sigma_{a_i}^{vonMises}} (2\sigma_{y_{a_i}} - \sigma_{x_{a_i}}) \\ \frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \tau_{xy_{a_i}}} = \frac{1}{\sigma_{a_i}^{vonMises}} (3\tau_{xy_{a_i}}) \end{cases} \quad (34-5)$$

$$\frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{m_i}} = \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{x_{m_i}}} = \frac{1}{2\sigma_{m_i}^{vonMises}} (2\sigma_{x_{m_i}} - \sigma_{y_{m_i}}) \\ \frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{y_{m_i}}} = \frac{1}{2\sigma_{m_i}^{vonMises}} (2\sigma_{y_{m_i}} - \sigma_{x_{m_i}}) \\ \frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \tau_{xy_{m_i}}} = \frac{1}{\sigma_{m_i}^{vonMises}} (3\tau_{xy_{m_i}}) \end{cases} \quad (35-5)$$

مشتق‌های $\frac{\partial \sigma_{m_i}}{\partial \sigma_i}$ و $\frac{\partial \sigma_{a_i}}{\partial \sigma_i}$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial \sigma_{a_i}}{\partial \sigma_i} = C_a \quad , \quad \frac{\partial \sigma_{m_i}}{\partial \sigma_i} = C_m \quad (36-5)$$

مشتق تنش نسبت به متغیر طراحی عبارت است از:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial \varphi} = \mathbf{CB} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} \quad (37-5)$$

جمله‌ی $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi}$ به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای مشتق و استفاده از معادله‌ی تعادل برابر است با:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \varphi} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varphi} \mathbf{u} \quad (38-5)$$

با ترکیب معادلات (30-5)، (32-5)، (33-5)، (37-5) و (38-5)، مشتق معیار خرابی خستگی «پی-

نرم» با رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{PN}}{\partial \varphi} = & \left(\sum_{i=1}^{N_i} (L_i^{GM})^p \right)^{\left(\frac{1}{p}-1\right)} (L_i^{GM})^{(p-1)} \left[\frac{1}{(\sigma_i)_{Nf}} \frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{a_i}} C_a \left(-\mathbf{CBK}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varphi} \mathbf{u} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sigma_{ut}} \frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{m_i}} C_m \left(-\mathbf{CBK}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varphi} \mathbf{u} \right) \right] \end{aligned} \quad (39-5)$$

با مشتق گیری از تابع هدف نسبت به متغیر طراحی خواهیم داشت:

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \int \frac{\partial H(\varphi)}{\partial \varphi} d\Omega = \int \delta(\varphi) |\nabla \varphi| d\Omega = \int 1 ds \quad (40-5)$$

در رابطه‌ی فوق $\delta(\varphi)$ تابع دلتای دیراک^۱ می‌باشد و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(\varphi) = \begin{cases} \frac{3}{4\Delta} \left(1 - \frac{\varphi^2}{\Delta^2} \right) & |\varphi| \leq \Delta^2 \\ 0 & |\varphi| > \Delta \end{cases} \quad (41-5)$$

با استفاده از روش تندترین شیب، سرعت نرمال با استفاده از مقادیر مشتق‌های تابع هدف و تابع قید

به‌صورت زیر به دست خواهد آمد:

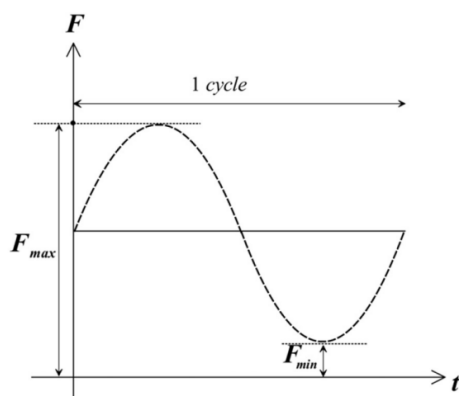
$$\begin{aligned} v_n = & -(1 + c\lambda) \left(\sum_{i=1}^{N_i} (L_i^{GM})^p \right)^{\left(\frac{1}{p}-1\right)} (L_i^{GM})^{(p-1)} \left[\frac{1}{(\sigma_i)_{Nf}} \frac{\partial \sigma_{a_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{a_i}} C_a \left(-\mathbf{CBK}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varphi} \mathbf{u} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sigma_{ut}} \frac{\partial \sigma_{m_i}^{vonMises}}{\partial \sigma_{m_i}} C_m \left(-\mathbf{CBK}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \varphi} \mathbf{u} \right) \right] \end{aligned} \quad (42-5)$$

^۱Dirac delta

فصل ششم: مثال های عددی

۱-۶- مثال‌ها

در این بخش به حل چند مسئله بهینه‌سازی به کمک برنامه‌ای که در راستای این پژوهش توسعه یافته، پرداخته شده است. لازم به ذکر است که در همه مثال‌ها، مصالح مورد استفاده، فولاد کربنی (AISI 1018) با مدول الاستیسیته ۲۱۰ گیگاپاسکال و ضریب پواسون ۰/۳ به کار رفته است. مقاومت کششی برابر با تنش تسلیم و برابر با ۳۵۸ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. در رابطه‌ی باسکوئین (معادله ۴-۲۹)، مقادیر ضریب مقاومت خستگی (σ_f') و توان مقاومت خستگی (b) به ترتیب ۵۹۳ مگاپاسکال و ۰/۰۸۶- در نظر گرفته شده‌اند. همچنین برای بارگذاری، یک بار سینوسی، با دامنه ثابت، همان طور که در شکل ۱-۶ نشان داده شده، به سازه اعمال شده است.



شکل ۱-۶ یک چرخه از بارگذاری سینوسی اعمال شده به سازه [۴۹]

برای رسیدن به یک طرح بهینه بدون خرابی خستگی، ترکیب تمام تنش‌های متوسط و تناوبی المان‌ها باید در ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن قرار گیرند. برای بررسی کردن مقاومت خرابی خستگی طرح بهینه، ۳ ترکیب مختلف از تنش‌های تناوبی و متوسط به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\text{Combination 1: } \begin{cases} \sigma_a = \sqrt{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 - 2\sigma_{1a}\sigma_{2a}} \\ \sigma_m = \sqrt{\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 - 2\sigma_{1m}\sigma_{2m}} \end{cases} \quad (1-6)$$

که σ_{2a} ، σ_{1a} ، σ_{2m} و σ_{1m} به ترتیب تنش‌های تناوبی و متوسط اصلی هستند.

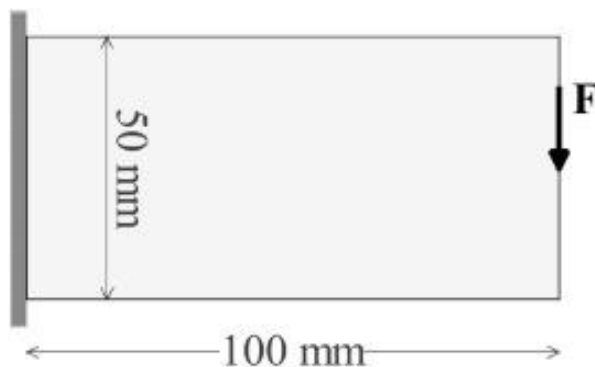
$$\text{Combination 2: } \begin{cases} \sigma_a = \sqrt{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 - 2\sigma_{1a}\sigma_{2a}} \\ \sigma_m^{eq} = \sigma_{1m} + \sigma_{2m} \end{cases} \quad (2-6)$$

که σ_{1m} و σ_{2m} تنش‌های متوسط اصلی هستند.

$$\text{Combination 3: } \begin{cases} \sigma_a = \sqrt{\sigma_{1a}^2 + \sigma_{2a}^2 - 2\sigma_{1a}\sigma_{2a}} \\ \sigma_m^{\text{signed vonMises}} = \begin{cases} \sqrt{\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 - 2\sigma_{1m}\sigma_{2m}} & |\sigma_{1m}| \geq 0 \\ -\sqrt{\sigma_{1m}^2 + \sigma_{2m}^2 - 2\sigma_{1m}\sigma_{2m}} & |\sigma_{1m}| < 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3-6)$$

۶-۱-۱- تیر طره

اولین مسئله‌ی مورد بررسی تیر طره با ابعاد ۱۰۰ میلی‌متر در ۵۰ میلی‌متر می‌باشد، که تحت یک بارگذاری سینوسی با بیشترین مقدار بار ۳۵۰ نیوتن و کمترین مقدار بار ۱۵۰ نیوتن قرار گرفته است. شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله در شکل زیر نشان داده شده است:

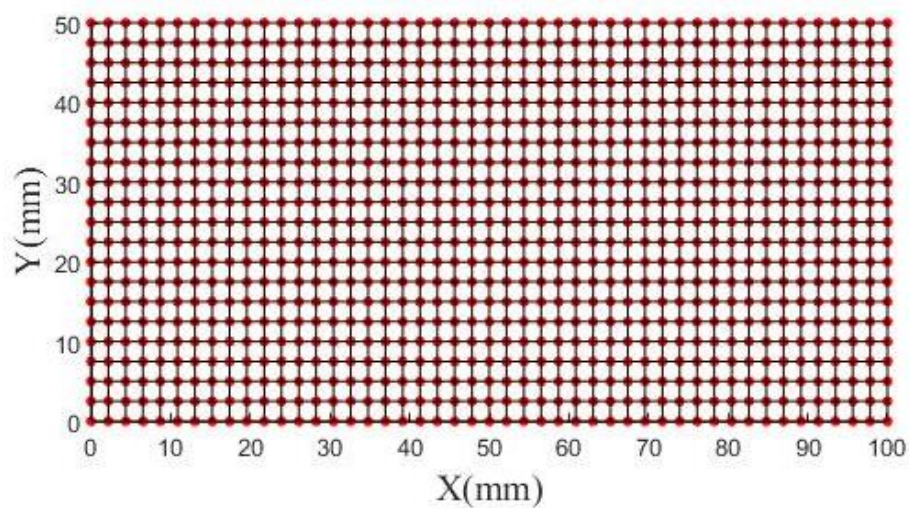


شکل ۲-۶ شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی [۴۹]

در جدول (۶-۱)، تعداد نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای در راستای افقی و قائم آورده شده است، همچنین توزیع نقاط کنترلی در شکل (۳-۶) قابل مشاهده است.

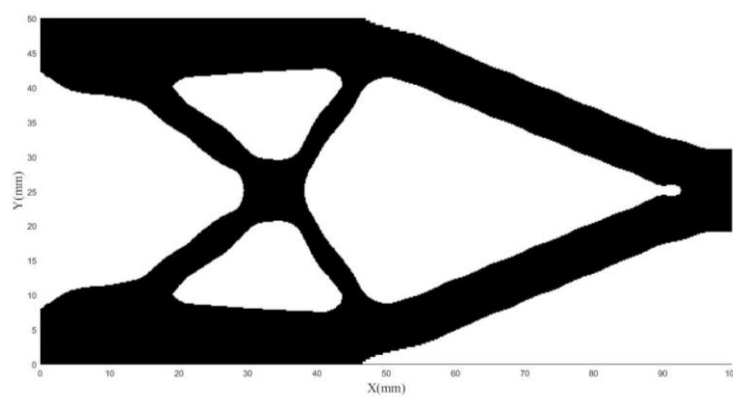
جدول ۶-۱ تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای

تعداد نقاط کنترلی	بردار گره‌ای در راستای افقی	بردار گره‌ای در راستای قائم
۹۸۷	$r = \{0, 0, 0, 0.0222, \dots, 0.9778, 1, 1, 1\}$	$s = \{0, 0, 0, 0.0526, \dots, 0.9474, 1, 1, 1\}$



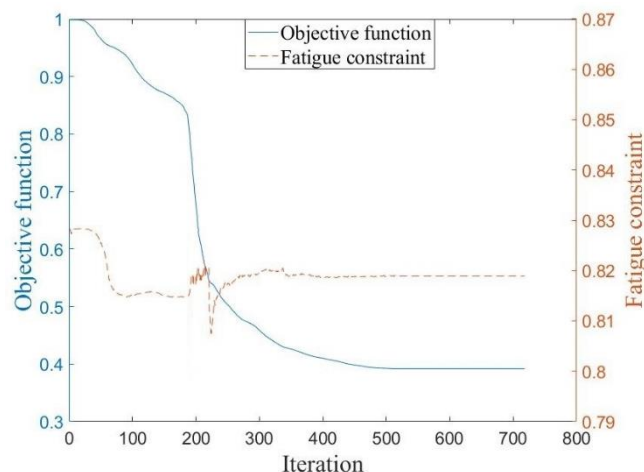
شکل ۶-۳ توزیع نقاط کنترلی در دامنه طراحی

توپولوژی بهینه به دست آمده در شکل زیر مشاهده می‌شود:



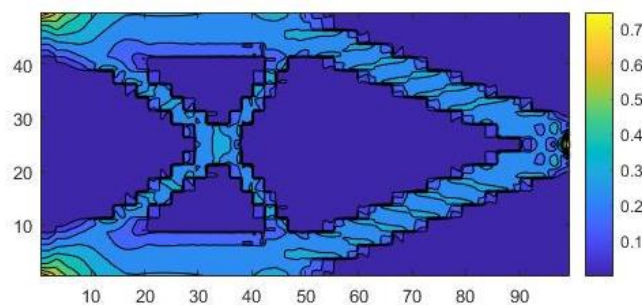
شکل ۶-۴ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره

تغییرات تابع هدف و قید خستگی در روند بهینه‌سازی در شکل ۶-۵ آورده شده است.



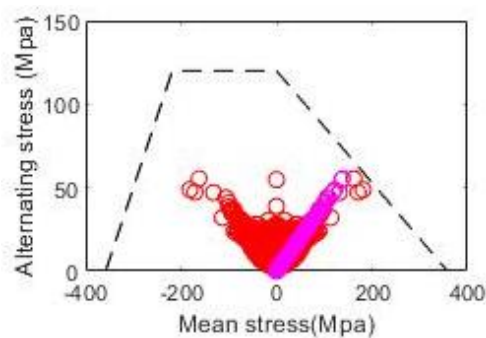
شکل ۵-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی

در شکل (۶-۶) کانتور معیار خرابی خستگی گودمن و در شکل (۷-۶) نمودار گودمن برای تیر طره‌ی فوق ترسیم شده است.



شکل ۶-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن

همان‌طور که در شکل (۷-۶) ملاحظه می‌شود تمام نقاط ارزیابی تنش در داخل ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن قرار گرفته‌اند، بنابراین سازه‌ای مقاوم در برابر خستگی خواهیم داشت.



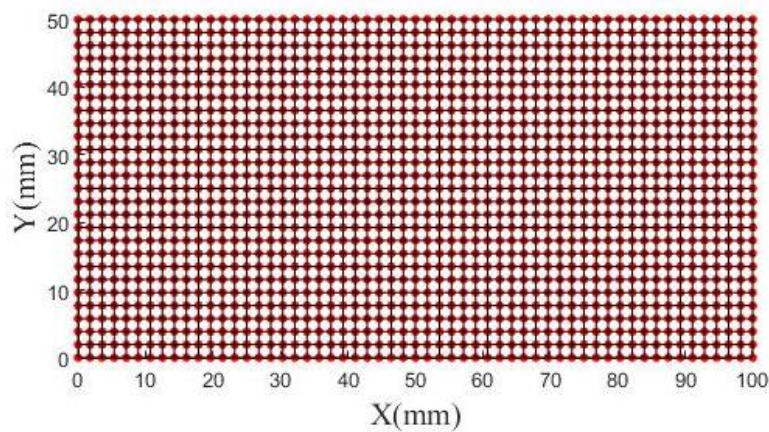
شکل ۷-۶ نمودار گودمن

در مسئله‌ی فوق، تعداد نقاط کنترلی را از ۹۸۷ به ۱۵۳۹ می‌رسانیم و اثر افزایش تعداد نقاط کنترلی

بر توپولوژی بهینه‌ی به دست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در جدول (۶-۲)، تعداد نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای در راستای افقی و قائم آورده شده است، همچنین توزیع نقاط کنترلی در شکل (۸-۶) قابل مشاهده است.

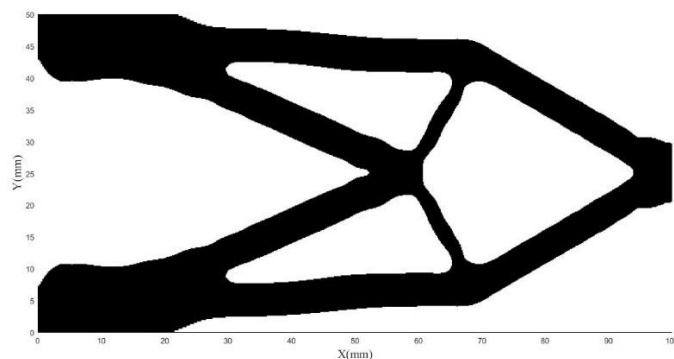
جدول ۶-۲ تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای

تعداد نقاط کنترلی	بردار گره‌ای در راستای افقی	بردار گره‌ای در راستای قائم
۱۵۳۹	$r = \{0, 0, 0, 0.0182, \dots, 0.9818, 1, 1, 1\}$	$s = \{0, 0, 0, 0.04, \dots, 0.96, 1, 1, 1\}$



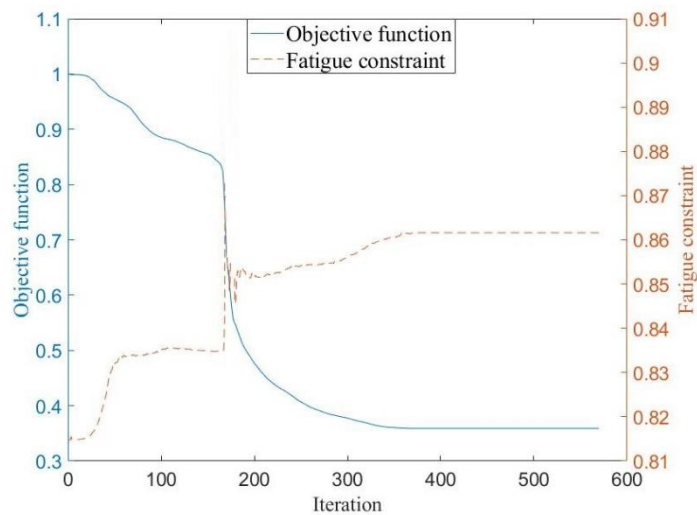
شکل ۸-۶ توزیع نقاط کنترلی در دامنه طراحی

توپولوژی بهینه به دست آمده در شکل زیر مشاهده می‌شود:



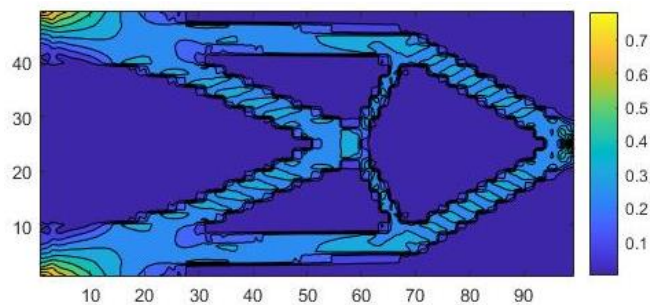
شکل ۹-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره

تغییرات تابع هدف و قید خستگی در روند بهینه‌سازی در شکل (۶-۱۰) آورده شده است.



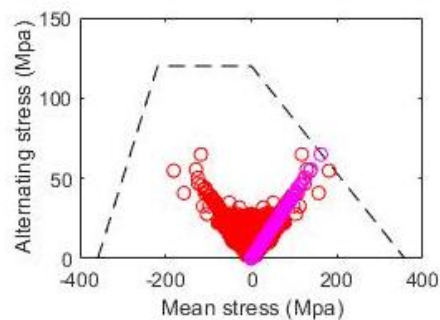
شکل ۶-۱۰ تغییرات تابع هدف و قید خستگی

در شکل (۶-۱۱) کانتور معیار خرابی خستگی گودمن و در شکل (۶-۱۲) نمودار گودمن برای تیر طره‌ی فوق ترسیم شده است.



شکل ۶-۱۱ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن

همان‌طور که در شکل (۶-۱۲) ملاحظه می‌شود تمام نقاط ارزیابی تنش در داخل ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن قرار گرفته‌اند، بنابراین باز هم سازه‌ای مقاوم در برابر خستگی خواهیم داشت.



شکل ۶-۱۲ نمودار گودمن

جیونگ و همکاران [۴۵]، کمینه کردن وزن سازه را به عنوان تابع هدف مسئله بهینه سازی توپولوژی، و خستگی را قید مسئله در نظر گرفتند. در شکل (۶-۱۳)، توپولوژی بهینه ی تیر طره در مقاله ذکر شده، مشاهده می شود.



شکل ۶-۱۳ توپولوژی بهینه ی تیر طره [۴۵].

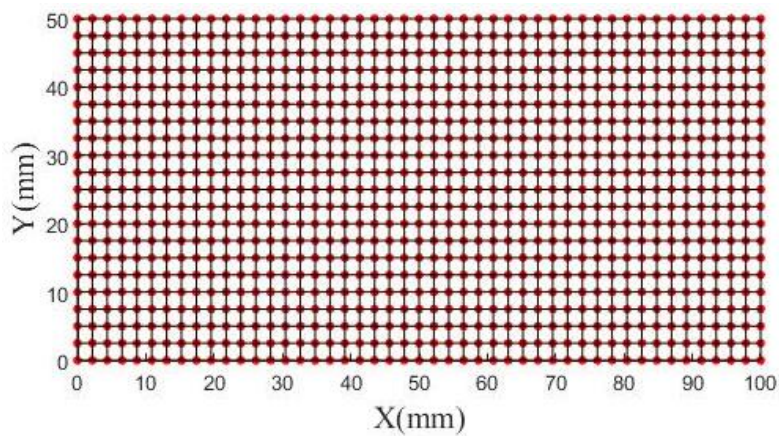
با مقایسه طرح بهینه تیر طره فوق و توپولوژی های بهینه تیر طره، که از برنامه کامپیوتری نوشته شده به دست آمده اند، می توان دریافت که با در نظر گرفتن قید خستگی، در سطوح فوقانی و تحتانی تیر طره، انحنا ایجاد می شود. در مسئله ی حل شده، با افزایش تعداد نقاط کنترلی، این انحنا قابل مشاهده است.

۶-۱-۲- تیر طره با تغییر در نقطه ی اعمال بار

برای دومین مسئله ی مورد بررسی شرایط تکیه گاهی و ابعاد هندسی مطابق با مثال ۱ فرض شده است، با این تفاوت که بار در گوشه پایین سمت راست سازه وارد شده است. بارگذاری سینوسی با بیشترین مقدار بار ۲۰۰ نیوتن و کمترین مقدار بار ۸۵ نیوتن به سازه اعمال شده است. در جدول (۶-۳)، تعداد نقاط کنترلی و بردارهای گره ای در راستای افقی و قائم آورده شده است، همچنین توزیع نقاط کنترلی در شکل (۶-۱۴) قابل مشاهده است.

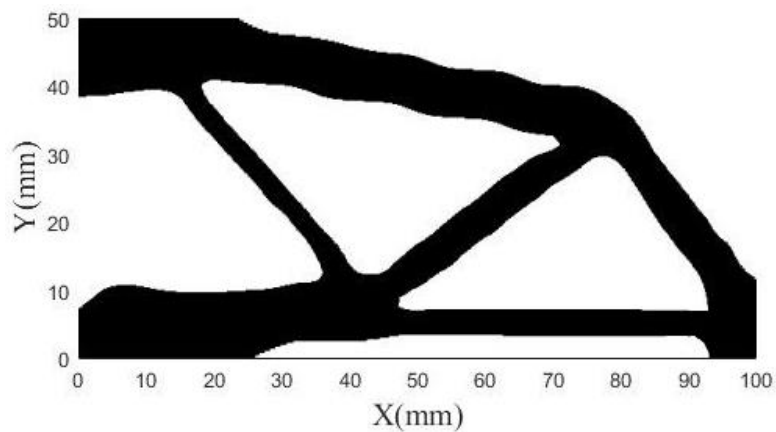
جدول ۳-۶ تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای

تعداد نقاط کنترلی	بردار گره‌ای در راستای افقی	بردار گره‌ای در راستای قائم
۹۸۷	$r = \{0, 0, 0, 0.0222, \dots, 0.9778, 1, 1, 1\}$	$s = \{0, 0, 0, 0.0526, \dots, 0.9474, 1, 1, 1\}$



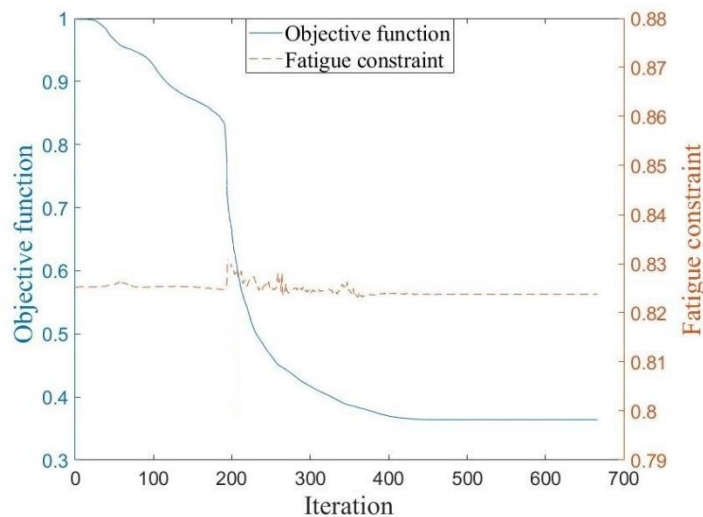
شکل ۱۴-۶ توزیع نقاط کنترلی در دامنه طراحی

توپولوژی بهینه به دست آمده در شکل زیر مشاهده می‌شود:



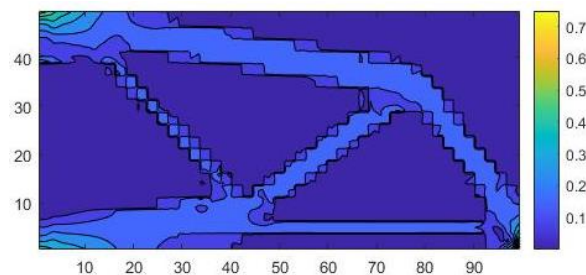
شکل ۱۵-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره

تغییرات تابع هدف و قید خستگی در روند بهینه‌سازی در شکل (۱۶-۶) آورده شده است.



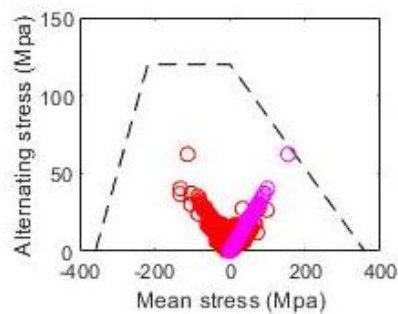
شکل ۶-۱۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی

در شکل (۶-۱۷) کانتور معیار خرابی خستگی گودمن و در شکل (۶-۱۸) نمودار گودمن برای تیر طره‌ی فوق ترسیم شده است.



شکل ۶-۱۷ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن

همان‌طور که در شکل (۶-۱۸) ملاحظه می‌شود تمام نقاط ارزیابی تنش در داخل ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن قرار گرفته‌اند، بنابراین سازه‌ای مقاوم در برابر خستگی خواهیم داشت.



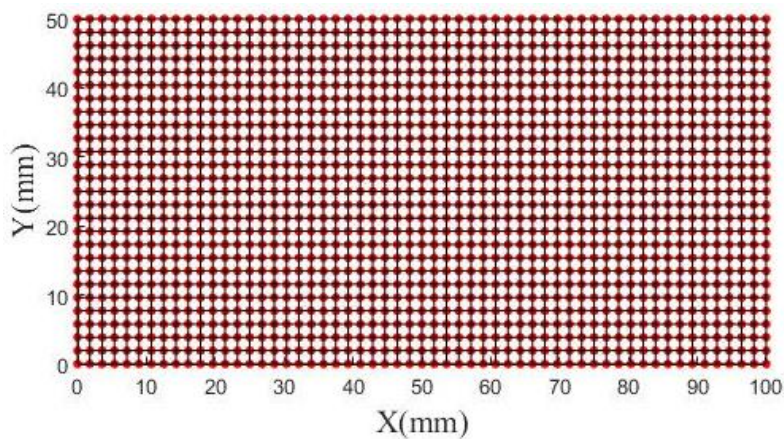
شکل ۶-۱۸ نمودار گودمن

در مسئله‌ی فوق، تعداد نقاط کنترلی را از ۹۸۷ به ۱۵۳۹ می‌رسانیم و اثر افزایش تعداد نقاط کنترلی

بر توپولوژی بهینه‌ی به دست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در جدول (۴-۶)، تعداد نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای در راستای افقی و قائم آورده شده است، همچنین توزیع نقاط کنترلی در شکل (۱۹-۶) قابل مشاهده است.

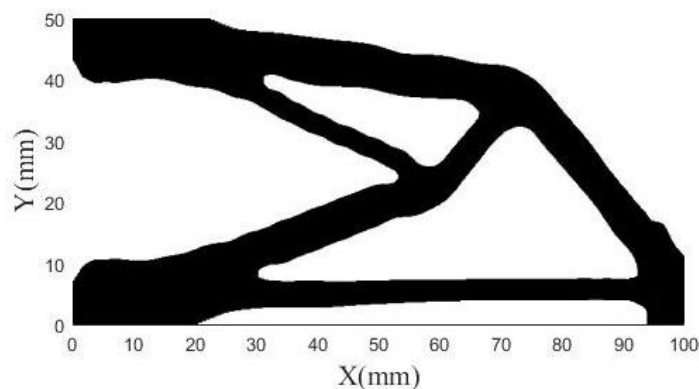
جدول ۴-۶ تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای

تعداد نقاط کنترلی	بردار گره‌ای در راستای افقی	بردار گره‌ای در راستای قائم
۱۵۳۹	$r = \{0, 0, 0, 0.0182, \dots, 0.9818, 1, 1, 1\}$	$s = \{0, 0, 0, 0.04, \dots, 0.96, 1, 1, 1\}$



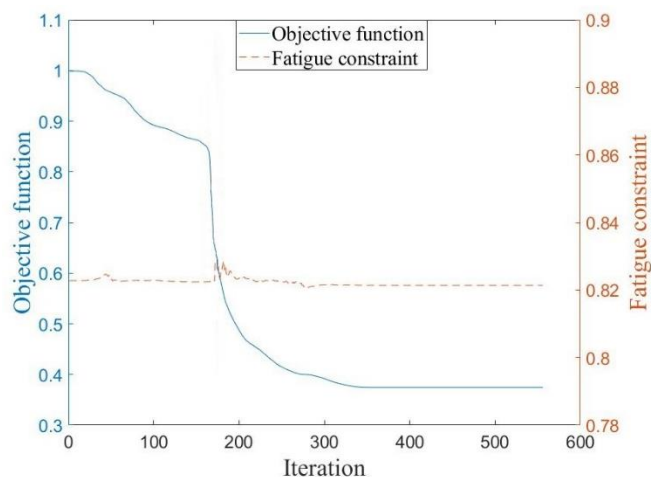
شکل ۱۹-۶ توزیع نقاط کنترلی در دامنه طراحی

توپولوژی بهینه به دست آمده در شکل زیر مشاهده می‌شود:



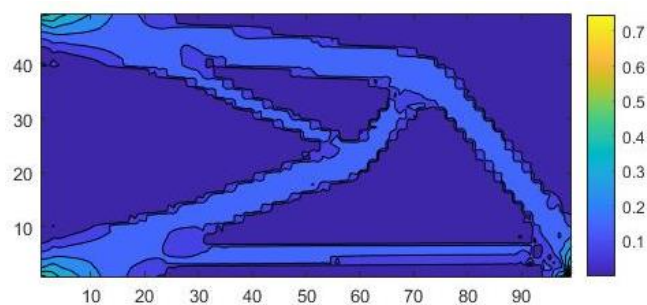
شکل ۲۰-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره

تغییرات تابع هدف و قید خستگی در روند بهینه‌سازی در شکل (۲۱-۶) آورده شده است.



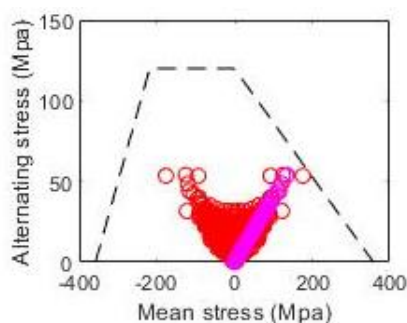
شکل ۶-۲۱ تغییرات تابع هدف و قید خستگی

در شکل (۶-۲۲) کانتور معیار خرابی خستگی گودمن و در شکل (۶-۲۳) نمودار گودمن برای تیر طره‌ی فوق ترسیم شده است.



شکل ۶-۲۲ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن

همان‌طور که در شکل (۶-۲۳) ملاحظه می‌شود تمام نقاط ارزیابی تنش در داخل ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن قرار گرفته‌اند، بنابراین باز هم سازه‌ای مقاوم در برابر خستگی خواهیم داشت.



شکل ۶-۲۳ نمودار گودمن

نبکی [۷۳] در رساله دکتری خود، مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی جهت کمینه‌کردن وزن، با در

نظر گرفتن قید تنش را نیز مورد بررسی قرار داده است. ابعاد هندسی و مشخصات مصالح مورد استفاده در تیر طره با بارگذاری در گوشه پایین سمت راست، مطابق با مسئله‌ی تعریف شده‌ی فوق می‌باشد. در شکل (۶-۲۴)، توپولوژی بهینه‌ی تیر طره با بارگذاری بیان شده در رساله‌ی مذکور، نشان داده شده است.

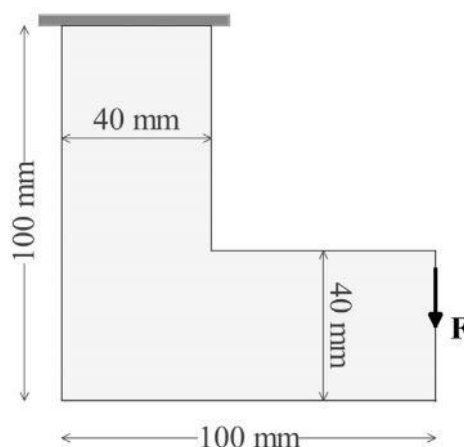


شکل ۶-۲۴ توپولوژی بهینه‌ی تیر طره [۷۳].

با توجه به طرح فوق و طرح‌های به‌دست آمده از برنامه نوشته شده، شباهت مسئله بهینه‌سازی توپولوژی با در نظر گرفتن قید خستگی و مسئله بهینه‌سازی توپولوژی با قید تنش مشخص می‌شود.

۶-۱-۳- تیر ال-شکل با بارگذاری در وسط ارتفاع

سومین مسئله‌ی مورد بررسی تیر ال-شکل می‌باشد، که تحت یک بارگذاری سینوسی با بیشترین مقدار بار ۲۵۰ نیوتن و کمترین مقدار بار ۵۰ نیوتن قرار گرفته است. شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی و ابعاد هندسی این مسئله در شکل زیر نشان داده شده است:



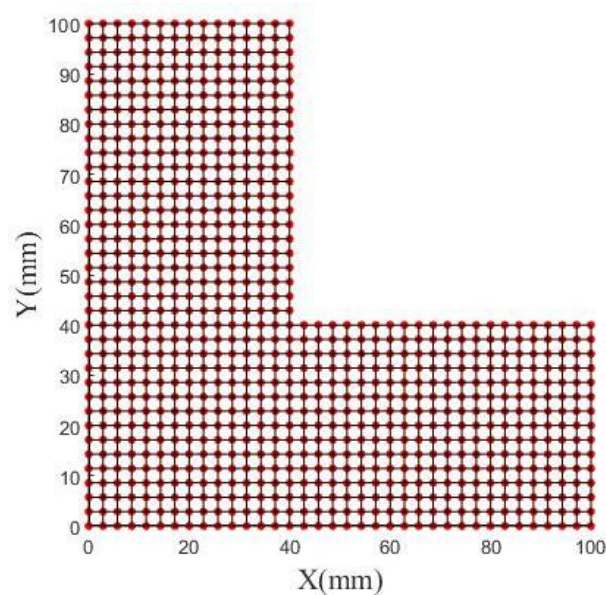
شکل ۶-۲۵ شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی [۴۹].

در جدول (۶-۵)، تعداد نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای در راستای افقی و قائم آورده شده است،

همچنین توزیع نقاط کنترلی در شکل (۶-۲۶) قابل مشاهده است. لازم به ذکر است، کل دامنه توسط دو وصله‌ی نریز با مرتبه‌ی دو در هر دو جهت مدل شده است.

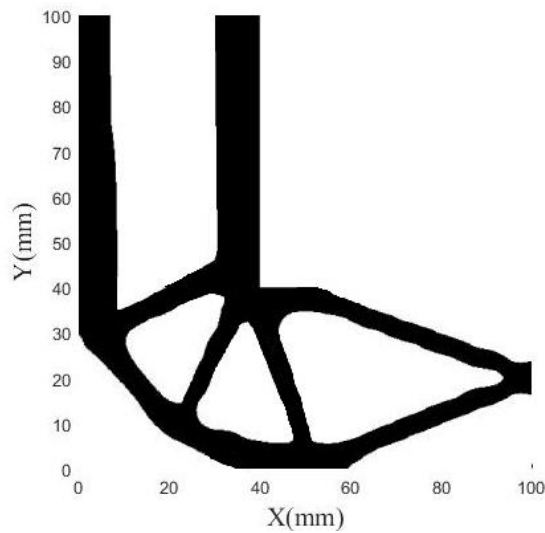
جدول ۵-۶ تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای

شماره وصله	تعداد نقاط کنترلی	بردار گره‌ای در راستای افقی (r)	بردار گره‌ای در راستای قائم (s)
۱	۳۳۰	$\{0, 0, 0, 0.0769, \dots, 0.9231, 1, 1, 1\}$	$\{0, 0, 0, 0.05, \dots, 0.95, 1, 1, 1\}$
۲	۵۴۰	$\{0, 0, 0, 0.0294, \dots, 0.9706, 1, 1, 1\}$	$\{0, 0, 0, 0.0769, \dots, 0.9231, 1, 1, 1\}$



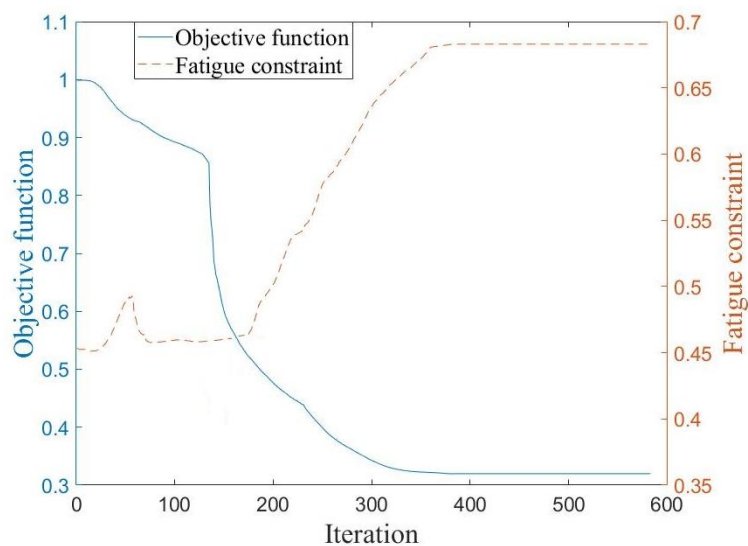
شکل ۶-۲۶ توزیع نقاط کنترلی در دامنه طراحی

توپولوژی بهینه به دست آمده در شکل زیر مشاهده می‌شود:



شکل ۶-۲۷ توپولوژی بهینه‌ی تیرال-شکل

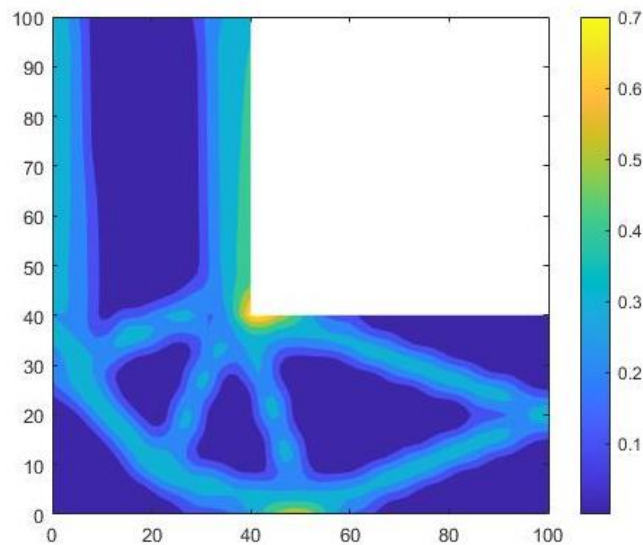
تغییرات تابع هدف و قید خستگی در روند بهینه‌سازی در شکل (۶-۲۸) آورده شده است.



شکل ۶-۲۸ تغییرات تابع هدف و قید خستگی

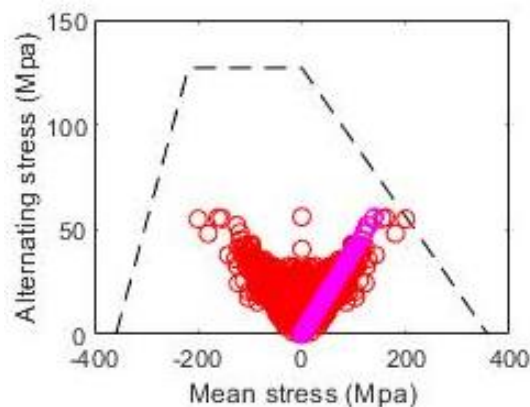
در شکل (۶-۲۹) کانتور معیار خرابی خستگی گودمن و در شکل (۶-۳۰) نمودار گودمن برای تیر

ال-شکل فوق ترسیم شده است.



شکل ۶-۲۹ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن

همان‌طور که در شکل (۶-۳۰) ملاحظه می‌شود تمام نقاط ارزیابی تنش در داخل ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن قرار گرفته‌اند، بنابراین سازه‌ای مقاوم در برابر خستگی خواهیم داشت.

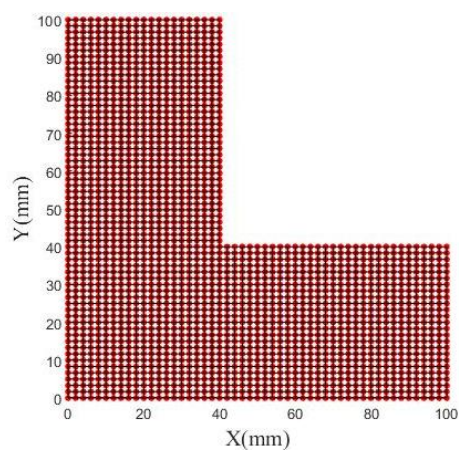


شکل ۶-۳۰ نمودار گودمن

در مسئله‌ی فوق، تعداد نقاط کنترلی را در وصله‌ی اول از ۳۳۰ به ۷۹۸ و در وصله‌ی دوم از ۵۴۰ به ۱۲۷۵ می‌رسانیم و اثر افزایش تعداد نقاط کنترلی بر توپولوژی بهینه‌ی به دست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در جدول (۶-۶)، تعداد نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای در راستای افقی و قائم آورده شده است، همچنین توزیع نقاط کنترلی در شکل (۶-۳۱) قابل مشاهده است.

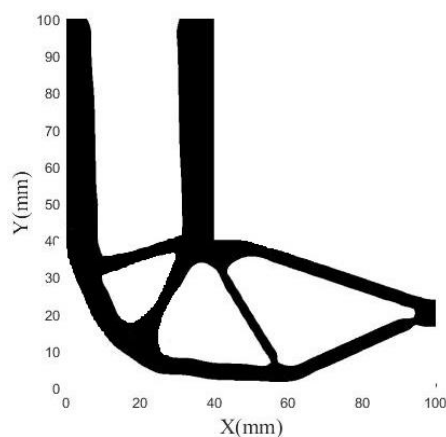
جدول ۶-۶ تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای

شماره وصله	تعداد نقاط کنترلی	بردار گره‌ای در راستای افقی (r)	بردار گره‌ای در راستای قائم (s)
۱	۷۹۸	$\{0, 0, 0, 0.0526, \dots, 0.9474, 1, 1, 1\}$	$\{0, 0, 0, 0.0278, \dots, 0.9722, 1, 1, 1\}$
۲	۱۲۷۵	$\{0, 0, 0, 0.0204, \dots, 0.9796, 1, 1, 1\}$	$\{0, 0, 0, 0.0435, \dots, 0.9565, 1, 1, 1\}$



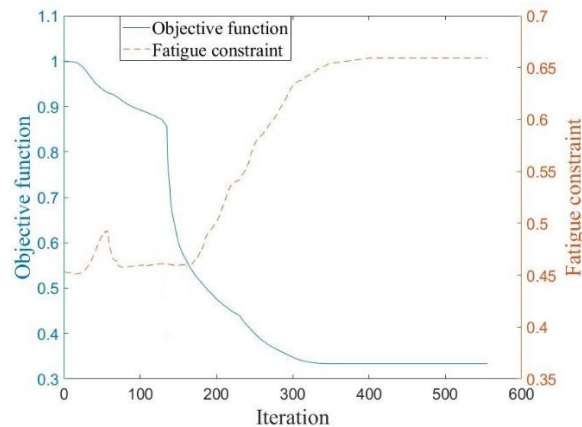
شکل ۶-۳۱ توزیع نقاط کنترلی در دامنه طراحی

توپولوژی بهینه به دست آمده در شکل زیر مشاهده می‌شود:



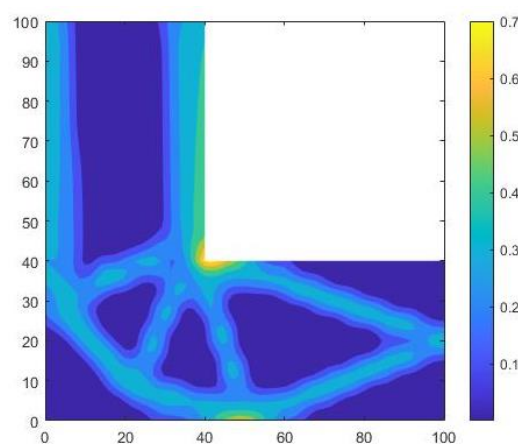
شکل ۶-۳۲ توپولوژی بهینه‌ی تیرال-شکل

تغییرات تابع هدف و قید خستگی در روند بهینه‌سازی در شکل (۶-۳۳) آورده شده است.



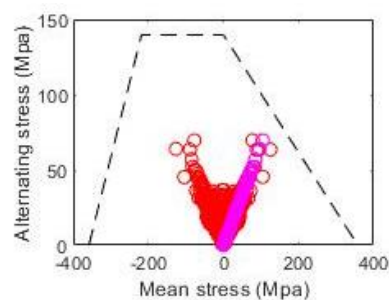
شکل ۳۳-۶ تغییرات تابع هدف و قید خستگی

در شکل (۳۴-۶) کانتور معیار خرابی خستگی گودمن و در شکل (۳۵-۶) نمودار گودمن برای تیر ال-شکل فوق ترسیم شده است.



شکل ۳۴-۶ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن

همان طور که در شکل (۳۵-۶) ملاحظه می شود تمام نقاط ارزیابی تنش در داخل ناحیه ای ایمن نمودار گودمن قرار گرفته اند، بنابراین سازه ای مقاوم در برابر خستگی خواهیم داشت.



شکل ۳۵-۶ نمودار گودمن

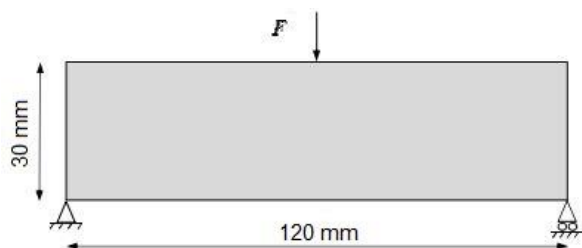
در مقاله نبکی و همکاران [۷۴]، مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی جهت کمینه‌کردن وزن، با در نظر گرفتن قید خستگی مورد بررسی قرار گرفته است. ابعاد هندسی و مشخصات مصالح مورد استفاده در تیر ال-شکل بررسی شده در این مقاله، مطابق با مسئله‌ی تعریف شده‌ی فوق می‌باشد. در شکل (۶-۳۶)، توپولوژی بهینه‌ی تیر ال-شکل در مقاله‌ی مذکور نشان داده شده است.



شکل ۶-۳۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر ال-شکل [۷۴].

۶-۱-۴- تیر ساده

چهارمین مسئله‌ی مورد بررسی تیر ساده با ابعاد ۱۲۰ میلی‌متر در ۳۰ میلی‌متر می‌باشد، که تحت یک بارگذاری سینوسی با بیشترین مقدار بار ۲۵۰ نیوتن و کمترین مقدار بار ۱۱۰ نیوتن قرار گرفته است. شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی این مسئله در شکل زیر نشان داده شده است:

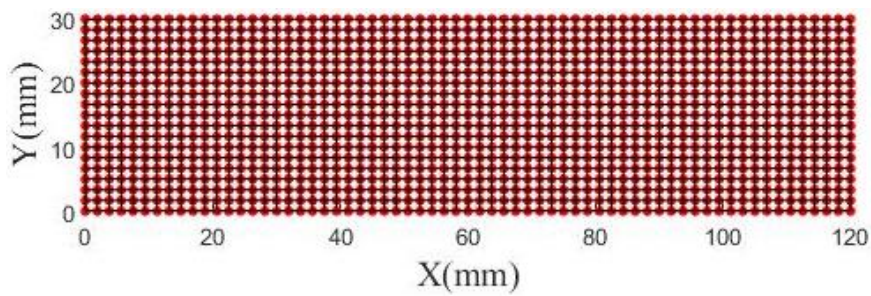


شکل ۶-۳۷ شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی

در جدول (۶-۷)، تعداد نقاط کنترلی و بردارهای گره‌ای در راستای افقی و قائم آورده شده است، همچنین توزیع نقاط کنترلی در شکل (۶-۳۸) قابل مشاهده است.

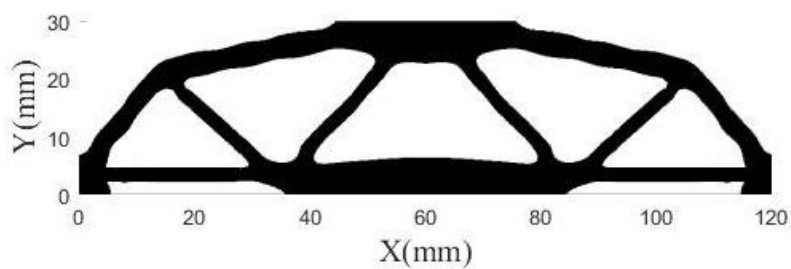
جدول ۶-۷ تعداد نقاط کنترلی و مقادیر بردارهای گره‌ای

تعداد نقاط کنترلی	بردار گره‌ای در راستای افقی	بردار گره‌ای در راستای قائم
۱۲۳۵	$r = \{0, 0, 0, 0.0159, \dots, 0.9841, 1, 1, 1\}$	$s = \{0, 0, 0, 0.0588, \dots, 0.9412, 1, 1, 1\}$



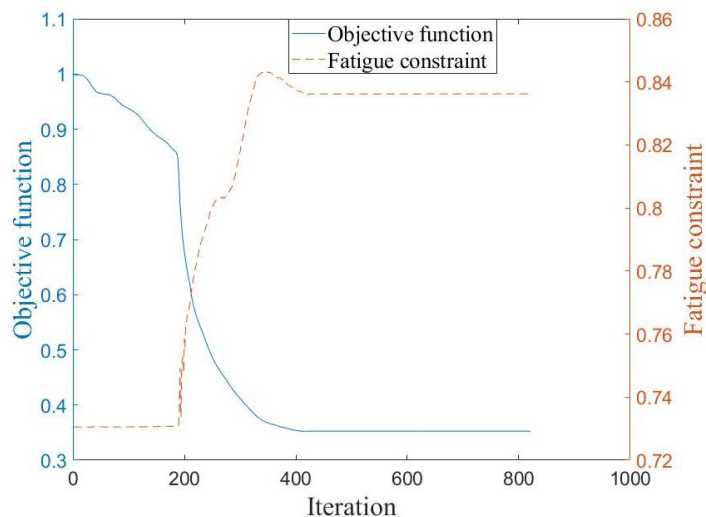
شکل ۶-۳۸ توزیع نقاط کنترلی در دامنه طراحی

توپولوژی بهینه به دست آمده در شکل زیر مشاهده می‌شود:



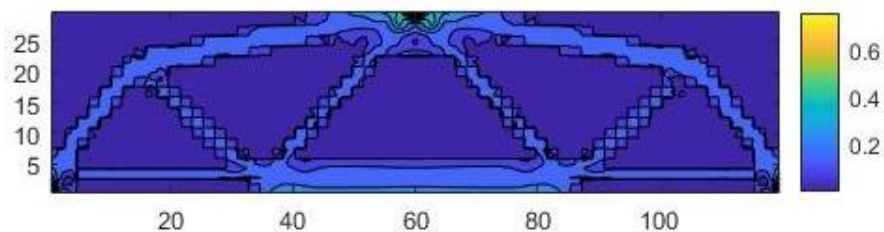
شکل ۶-۳۹ توپولوژی بهینه‌ی تیر ساده

تغییرات تابع هدف و قید خستگی در روند بهینه‌سازی در شکل (۶-۴۰) آورده شده است.



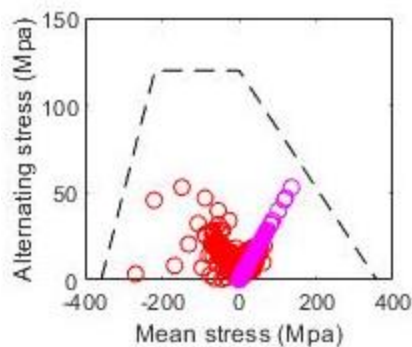
شکل ۶-۴۰ تغییرات تابع هدف و قید خستگی

در شکل (۶-۴۱) کانتور معیار خرابی خستگی گودمن و در شکل (۶-۴۲) نمودار گودمن برای تیر ساده‌ی فوق ترسیم شده است.



شکل ۶-۴۱ کانتور معیار خرابی خستگی گودمن

همان طور که در شکل (۶-۴۲) ملاحظه می‌شود تمام نقاط ارزیابی تنش در داخل ناحیه‌ی ایمن نمودار گودمن قرار گرفته‌اند، بنابراین سازه‌ای مقاوم در برابر خستگی خواهیم داشت.



شکل ۶-۴۲ نمودار گودمن

در پایان‌نامه صفار نجیب [۷۵]، بهینه‌سازی توپولوژی برای کمینه سازی جرم سازه با در نظر گرفتن

قیدهای تنش و خستگی مورد بررسی قرار گرفته است. در شکل (۴۳-۶)، توپولوژی بهینه‌ی تیر ساده در پایان‌نامه ذکر شده، مشاهده می‌شود.



شکل ۴۳-۶ توپولوژی بهینه‌ی تیر ساده [۷۵]

با مقایسه طرح‌های بهینه به دست آمده از مقالات با توپولوژی‌های بهینه به دست آمده از برنامه کامپیوتری نوشته شده، می‌توان به صحت عملکرد روش پیشنهادی پی‌برد.

فصل ہفتم: نتیجہ و مشاہدہ

۷-۱- مقدمه

در فصل‌های قبلی این پایان‌نامه، به بررسی کامل روند تحلیل آیزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستیک مصالح پرداختیم. سپس انواع روش‌های تحلیل خستگی را بررسی کردیم و روش به‌کار رفته برای در نظر گرفتن قید خستگی را ارائه نمودیم. سپس بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح را به همراه آنالیز حساسیت‌های لازم مورد بررسی قرار دادیم. در نهایت برای بررسی صحت و کارایی الگوریتم‌ها و روش‌های استفاده شده و همین‌طور برنامه‌های کامپیوتری تهیه شده، مثال‌های متعددی را مورد مطالعه قرار دادیم. در این فصل، نتایج نهایی حاصل از این مطالعات را به صورت خلاصه بیان خواهیم کرد. در پایان نیز پیشنهادهایی جهت توسعه‌ی برنامه‌های نوشته شده برای دانشجویان علاقه‌مند در این زمینه ارائه خواهد شد.

۷-۲- نتیجه‌گیری

در انتها پس از تحلیل و بررسی طرح‌های بهینه‌ی توپولوژی مسائل مورد مطالعه، می‌توان این‌گونه نتیجه‌گیری کرد که:

۱- از آن‌جا که در تمام مسائل مورد بررسی، ترکیب تنش‌های تناوبی و تنش‌های متوسط در داخل

ناحیه ایمن نمودار گودمن قرار گرفته‌اند، بنابراین طرح‌های به دست آمده ایمن در برابر خرابی ناشی

از خستگی می‌باشند.

۲- استفاده از روش قید تنش عمومی، ضمن کاهش تعداد قیود و کاهش حجم محاسبات در بخش

تحلیل حساسیت، موجب افزایش قدرت بهینه‌سازی در حل مسائل پیچیده‌تر می‌گردد.

۳- استفاده از توابعی که تحلیل مسائل توسط آن‌ها انجام می‌شود به عنوان توابعی که مدل هندسی را

ایجاد می‌کنند، باعث می‌شود مشکل دوگانگی مدل تحلیل و مدل طراحی که مشکلی بزرگ در سایر

روش‌های عددی است حل شود و به این وسیله مدل تحلیل و طراحی به هم پیوند داده شوند. به

این ترتیب دیگر نیازی به کار اضافی جهت تبدیل مدل طراحی به مدل تحلیل و برعکس وجود ندارد.

۴- از صحت و کارایی برنامه‌ی کامپیوتری نوشته شده و آنالیز حساسیت های به کاررفته در هر کدام از مسائل بهینه سازی توپولوژی مورد نظر، با مقایسه‌ی طرح‌های بهینه‌ی خروجی از برنامه با مقالات مربوطه، اطمینان حاصل می‌شود.

۷-۳- ارائه پیشنهادها جهت مطالعات بعدی

برای در نظر گرفتن قید خستگی، خستگی پر چرخه مورد بررسی قرار گرفته است، درحالی که خستگی کم چرخه یک نوع خرابی مهم به شمار می‌آید، بنابراین پیشنهاد می‌شود این نوع از خستگی در مطالعات بعدی مورد بررسی قرار گیرد.

جهت تحلیل خستگی، روش «تنش- عمر» به کار رفته است. پیشنهاد می‌شود سایر روش‌های تحلیلی مانند روش «کرنش- عمر» و روش مکانیک شکست الاستیک خطی مورد استفاده قرار گیرد و مقایسه‌ای بین این روش‌ها صورت پذیرد.

پیشنهاد می‌شود، سایر معیارهای خستگی، مانند معیار سودربرگ و معیار گربر نیز مورد استفاده قرار گیرد.

1. Bendsoe, M.P.; Kikuchi, N. 1899, *Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method*. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2, 185– 222
2. Eschenauer HA, Olhoff N., 2001, *Topology optimization of continuum structures: A review*, *Applied Mechanics Review*, Vol. 72 331-380
3. Rozvany GIN, Zhou M and Birker T., 1882, *Generalized shape optimization without homogenization*. *Structural Optimization*, Vol. 2 270-272.
4. Bendsoe, M.P. 1898, *Optimal shape design as a material distribution problem*, *Struct. Optim.* 1, 183–202
5. Sethian JA, Wiegmann A., 2000, *Structural boundary design via level set and immersed interface methods*. *Journal of Computational Physics*, Vol.113 298-729.
6. Osher SJ, Santosa F., 2001, *Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints I. Frequency of a two density inhomogeneous drum*. *Journal of Computational Physics*, Vol. 171 272-288.
7. Allaire G, Jouve F and Toader AM., 2002, *A level set method for shape optimization*. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie I*, Vol. 334 1125- 1130.
8. Wang MY, Wang XM and Guo DM., 2003, *A level set method for structural topology optimization*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192 227-246.
9. Wang X, Wang MY and Guo D., 2002, *Structural shape and topology optimization in a level-set framework of region representation*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27 1-19.
10. Wang MY, Wang XM., 2002, *“Color” level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 183 218 – 281.
11. Petersen NL., 2000, *Maximization of Eigenvalues using topology optimization*. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20 2-12.
12. de Ruiter MJ, van Keulen F., 2002, *Topology optimization using a topology description function*, *Struct Multidisc Optim.*
13. Belytschko T, Xiao SP and Parimi C., 2003, *Topology optimization with implicit functions and regularization*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol., 75 1155-1181.
14. Luo J., Luo Z., Chen L., Tong L., Wang M.Y.; *A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization*, *Journal of Computational Physics*, 225:7711–7791. DOI: 10.1011/j.jcp.2009.02.003, 2009.
15. Tavakkoli S.M., Hassani B., Ghasemnejad H.: *ISOGEOMETRIC TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES BY USING MMA*, *Int. J. Optim. Civil Eng.*, 2013; 3(2):313-321.
16. P. Wei, Z. Li, and M. Y. Wang, “An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions”, *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 58, no. 2, pp. 831– 849, Jan. 2018, doi: 10.1007/s00158-018-1904-8.

17. S. Wang, M. Y. Wang, "Radial basis functions and level set method for structural topology optimization", *Int. J. Numer. Meth. Engng*, vol. 65, no. 12, pp. 2060–2090, Oct. 2005, doi: 10.1002/nme.1536.
18. Xu Guo, Wei Sheng Zhang, Michael Yu Wang, Peng Wei; Stress-related topology optimization via level set approach, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 200 (2011) 3238–3272.
19. Hélio Emmendoerfer Jr., Fancello EA, Barcellos CS. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. *Int. J. Numer. Meth. Engng* (2012); DOI: 10.1002/nme.2151.
20. T. J. R. Hughes, J. A. A. Cottrell, Y. Bazilevs, T. J. R. J. R. Hughes, J. A. A. Cottrell, and Y. Bazilevs, "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 194, no. 39–41, pp. 4135–4195, Oct. 2005, doi: 10.1016/j.cma.2004.10.008.
21. D. J. Benson, Y. Bazilevs, M. C. Hsu, and T. J. Hughes, "A large deformation, rotation-free, isogeometric shell," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 200, no. 13–16, pp. 1367–1378, Mar. 2011, doi: 10.1016/j.cma.2010.12.003.
22. M. C. Hsu and Y. Bazilevs, "Fluid-structure interaction modeling of wind turbines: Simulating the full machine," *Comput. Mech.*, vol. 50, no. 6, pp. 821–833, Dec. 2012, doi: 10.1007/s00466-012-0772-0.
23. Y. J. Wang and D. J. Benson, "Multi-patch nonsingular isogeometric boundary element analysis in 3D," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 293, pp. 71–91, Aug. 2015, doi: 10.1016/j.cma.2015.03.016.
24. Y. Wang, D. J. Benson, and A. P. Nagy, "A multi-patch nonsingular isogeometric boundary element method using trimmed elements," *Comput. Mech.*, vol. 56, no. 1, pp. 173–191, Jul. 2015, doi: 10.1007/s0046-015-1165-y
25. J. Yan, X. Deng, A. Korobenko, and Y. Bazilevs, "Free-surface flow modeling and simulation of horizontal-axis tidal-stream turbines," *Comput. Fluids*, vol. 158, pp. 157–166, Nov. 2017, doi: 10.1016/j.compfluid.2016.06.016.
26. X. W. Deng, N. Wu, K. Yang, and W. L. Chan, "Integrated design framework of next-generation 85-m wind turbine blade: Modelling, aeroelasticity and optimization," *Compos. Part B Eng.*, vol. 159, pp. 53–61, Feb. 2019, doi: 10.1016/j.compositesb.2018.09.028.
27. Y. D. Seo, H. J. Kim, and S. K. Youn, "Isogeometric topology optimization using trimmed spline surfaces," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 199, no. 49–52, pp. 3270–3296, Dec. 2010, doi: 10.1016/j.cma.2010.06.030.
28. Y. D. Seo, H. J. Kim, and S. K. Youn, "Shape optimization and its extension to topological design based on isogeometric analysis," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 47, no. 11–12, pp. 1618–1640, Jun. 2010, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2010.03.004.
29. W. A. Wall, M. A. Frenzel, and C. Cyron, "Isogeometric structural shape optimization," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 197, no. 33–40, pp. 2976–2988, Jun. 2008, doi: 10.1016/j.cma.2008.01.025.
30. B. Hassani, M. Khanzadi, and S. M. Tavakkoli, "An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol. 45, no. 2, pp. 223–233, Feb. 2012, doi: 10.1007/s00158-011-0680-5.

31. L. Dedè, M. J. Borden, and T. J. R. Hughes, "Isogeometric Analysis for Topology Optimization with a Phase Field Model," *Arch. Comput. Methods Eng.*, vol. 19, no. 3, pp. 427–465, Sep. 2012, doi: 10.1007/s11831-012-9075-z.
32. Q. X. Lieu and J. Lee, "A multi-resolution approach for multi-material topology optimization based on isogeometric analysis," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 323, pp. 272–302, Aug. 2017, doi: 10.1016/j.cma.2017.05.009.
33. L. A. Piegl and W. Tiller, *The NURBS book*. Springer, 1997.
34. B. Hassani, "Isogeometric shape optimization of three dimensional problems," 8Th World Congr. Struct. Multidiscip. Optim., pp. 1–8, 2009, Accessed: Dec. 31, 2018.
35. T. S. M. HASSANI B. *, MOGHADDAM N.Z., "ISOGEOMETRICAL SOLUTION OF LAPLACE EQUATION," *ASIAN J. Civ. Eng. (BUILDING HOUSING)*, vol. 10, 2009.
36. Grunwald, J & Schnack, E 1998, 'Modeling fatigue for shape optimization of dynamically loaded parts', *Advances in Engineering Software*, vol. 29, no. 1, pp. 63-67.
37. Kaya, N, Karen, İ & Öztürk, F 2010, 'Re-design of a failed clutch fork using topology and shape optimisation by the response surface method', *Materials and Design*, vol. 31, no. 6, pp. 3008-3014.
38. Mrzyglod, M & Zielinski, AP 2007, 'Multiaxial high-cycle fatigue constraints in structural optimization', *International Journal of Fatigue*, vol. 29, no. 9, pp. 1920-1926.
39. Sherif, K, Witteveen, W, Puchner, K & Irschik, H 2010, 'Efficient Topology Optimization of Large Dynamic Finite Element Systems Using Fatigue', *AIAA Journal*, vol. 48, no. 7, pp. 1339-1347.
40. Kim, Y-I & Park, G-J 2010, 'Nonlinear dynamic response structural optimization using equivalent static loads', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 9, pp. 660-676.
41. E. Holmberg, B. Torstenfelt and A. Klarbring, *Fatigue constrained topology optimization, Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 50, No. 2, pp. 207-219, 2014.
42. Svanberg, K 1987, 'The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 24, no. 2, pp. 359-373.
43. Bruns, TE & Tortorelli, DA 2001, 'Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, no. 26, pp. 3443-3459.
44. Holmberg, E, Torstenfelt, B & Klarbring, A 2013, 'Stress constrained topology optimization', *Struct Multidisc Optim*, vol. 48, no. 1, pp. 33-47.
45. Jeong, SH, Choi, D-H & Yoon, GH 2015, 'Fatigue and static failure considerations using a topology optimization method', *Applied Mathematical Modelling*, vol. 39, no. 3-4, pp. 1137-1162.
46. Le, C, Norato, J, Bruns, T, Ha, C & Tortorelli, D 2010, 'Stress- based topology optimization for continua', *Struct Multidisc Optim*, vol. 41, no. 4, pp. 605-620.
47. J. Oest and E. Lund, *Topology optimization with finite-life fatigue constraints, Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 56, No. 5, pp. 1045-1059, 2017.
48. M. Collet, M. Bruggi and P. Duysinx, *Topology optimization for minimum weight with compliance and simplified nominal stress constraints for fatigue resistance, Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 55, No. 3, pp. 839-855, 2017.

49. K. Nabaki, J. Shen and X. Huang, *Evolutionary topology optimization of continuum structures considering fatigue failure*, *Materials & Design*, Vol. 166, 2019, 107586, ISSN 0264-1275.
 50. *ASM Handbook*, Vol. 12: *Fractography*, 2nd printing, 1992, ASM International, Materials Park, OH 44073-0002, fig 50, p. 120.
 51. Richard G. Budynas, J. Keith Nisbett, *Shigley's Mechanical Engineering Design*.
 52. NACA Tech. Note 3866, December 1966.
 53. L. Bairstow, "The Elastic Limits of Iron and Steel under Cyclic Variations of Stress," *Philosophical Transactions, Series A*, vol. 210, Royal Society of London, 1910, pp. 35-55.
 54. R. W. Landgraf, *Cyclic Deformation and Fatigue Behavior of Hardened Steels*, Report no. 320, Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois, Urbana, 1968, pp. 84-90.
 55. *Technical Report on Fatigue Properties*, SAE J1099, 1975.
 56. *Tech.Rep.SAE J1099_200208* © 2002 SAE International.
 57. J. F. Tavernelli and L. F. Coffin, Jr., "Experimental Support for Generalized Equation Predicting Low Cycle Fatigue," and S. S. Manson, discussion, *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, vol. 84, no. 4, pp. 533-537.
 58. J. M. Barsom and S. T. Rolfe, *Fatigue and Fracture Control in Structures*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1987, pp. 288-291, Copyright ASTM International.
 59. H. J. Grover, S. A. Gordon, and L. R. Jackson in *Fatigue of Metals and Structures*, Bureau of Naval Weapons Document NAVWEPS 00-25-534, 1960; and from *Fatigue Design Handbook*, SAE, 1968, p. 42.)
 60. J. E. Shigley, C. R. Mischke, and T. H. Brown, Jr., *Standard Handbook of Machine Design*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 2004, pp. 29.25-29.27.
 61. Wilde, D.j., *Globally Optimal Design*, John Wiley and Sons, New Yorks 1978.
۶۲. مرزبان‌راد، جواد، افروشه، مسعود، بیگزاده، سپهر، بهینه‌سازی توپولوژی، تهران، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ایران، ۱۳۹۷.
63. Fleury C., Braibant V., 1891, *Structural optimization - a new dual method using mixed variable*, *Int. J. Num. Meth. Eng.* 23,208-229.
 64. P. Duysinx and M. P. Bendsøe, *Topology optimization of continuum structures with local stress constraints*, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 43, No. 8, pp. 1453-1478, 1998.
 65. P. Duysinx and O. Sigmund, *New developments in handling stress constraints in optimal material distribution*, in *Seventh Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, St. Louis ,U.S.A, 1998.
 66. C. Le, J. Norato, T. Bruns, C. Ha and D. Tortorelli, *Stress-based topology optimization for continua*, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 41, No. 4, pp. 605-620, 2010.
 67. C. Min, "On reinitializing level set functions," *J. Comput. Phys.*, vol. 229, no. 8, pp. 2764-2772, Apr. 2010, doi: 10.1016/j.jcp.2009.12.030.
 68. G. Della Rocca and G. Blanquart, "Level set reinitialization at a contact line," *J. Comput. Phys.*, vol. 265, pp. 34-49, 2014, doi: 10.1016/j.jcp.2014.01.04.

69. L. Li, X. Xu, and S. E. Spagnolie, "A Locally Gradient-Preserving Reinitialization for Level Set Functions," *J. Sci. Comput.*, vol.71, no. 1, pp. 274–302, 2017, doi: 10.1007/s10915-016-0299-1.
 70. P. Wei, M.Y. Wang, The Augmented Lagrangian Method in Structural Shape and Topology Optimization with RBF Based Level Set Method, in: *Proc. Fourth China-Japan-Korea Jt. Symp. Optim. Struct. Mech. Syst.*, 2006.
 71. P. Wei, Z. Li, X. Li, and M. Y. Wang, "An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions," *Struct. Multidiscip. Optim.*, vol.58, no. 2, pp. 831–849, 2018, doi: 10.1007/s00158-018-1904-8.
 72. S. Y. Wang, K. M. Lim, B. C. Khoo, and M. Y. Wang, "An extended level set method for shape and topology optimization," *J. Comput. Phys.*, vol. 221, no. 1, pp. 395–421, 2007, doi: 10.1016/j.jcp.2006.06.029.
 73. NABAKI, K. 2019, Topology optimization of structures against fatigue Life, PHD thesis, RMIT university.
 74. NABAKI, K., SHEN, J., HUANG, X. Bi-directional evolutionary topology optimization based on critical fatigue constraint. *International Journal of Civil and Environmental Engineering*, Vol:12, No:2, 2018.
۷۵. صفار نجیب، حبیب (۱۳۹۶). بهینه‌سازی توپولوژی برای کمینه‌سازی جرم سازه با در نظر گرفتن قیدهای تنش و خستگی. پایان‌نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد.

Abstract

Topology optimization is one of the most important types of structural optimization problems that seeks optimal distribution of materials in the design domain. To achieve this, it is important to select the appropriate objective function and constraint. In this thesis, topology optimization with the aim of weight minimization and considering fatigue constraint has been investigated. Since the isogeometric analysis in comparison with finite element method, has found a special place among researchers in this field and it has been able to act more accurately in geometry modeling and displacement calculation compared to previous methods, it has been used as one of the tools in this research. In isogeometric analysis, instead of using polynomial basis functions in finite elements, Non-Uniform Rational B-Splines basis functions are used to express geometry and approximation of displacement. For fatigue analysis the equivalent static analysis method has been used. To control fatigue failure, the modified Goodman fatigue failure criterion has been used and the computational time has been reduced by using the stress constraint clustering method. Due to the ubiquity and popularity of the level set method and the simplicity and high accuracy as well as its compatibility with the isogeometric analysis, this method has been used for topology optimization. In the level set method, the structural boundaries that are optimized are a model of dynamic boundaries that are introduced by an implicit function from a higher dimension, and the structural boundary by a definite level is introduced and a new boundary is obtained by solving the Hamilton-Jacobi equation. In order to verify the derived sensitivity equations, demonstrate the ability of LSM in solving topology optimization problems and check the code, written in this thesis, several two dimensional illustrative examples are presented.

Keywords: topology optimization, fatigue constraint, sensitivity analysis, isogeometric analysis, level set method



Shahrood University of
Technology

Faculty of Civil Engineering

M.Sc. Thesis in Structural Engineering

Topology optimization of plane stress structures with fatigue constraint

By: Ali Asadi

Supervisor:
Dr. S.M. Tavakkoli

September, 2021