

الْمُعَذَّبُ



دانشکده صنعتی شهرود

دانشکده مهندسی عمران

رشته مهندسی عمران گرایش مهندسی سازه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

## بکار بستن شیوه‌های نوین عددی مبتنی بر روش اجزای محدود برای تحلیل ارتعاش آزاد تیر اویلر – برنولی

نگارنده: مصطفی نوری‌فر

اساتید راهنما:

دکتر علی کیهانی

دکتر احمد آفتابی‌ثانی

۱۳۹۵ بهمن

شماره: ۷۷-۵۵  
تاریخ: ۱۳۹۵

بسمه تعالیٰ

ویرایش:



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۷: صورت جلسه نهایی دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آقای مصطفی نوری‌فر به شماره دانشجویی ۹۲۱۴۷۳۴ رشته مهندسی عمران، گرایش سازه، تحت عنوان «بکار بستن شیوه‌های نوین عددی مبتنی بر روش اجزای محدود برای تحلیل ارتعاش آزاد تیر اوپلر - برنولی» که در تاریخ ۹۵/۱۱/۲۰ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید، به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

<input type="checkbox"/> مردود	<input type="checkbox"/> دفاع مجدد	<input checked="" type="checkbox"/> امتیاز ۸۰	قبول (با درجه: <u>عالی</u> )
		<input type="checkbox"/> عملی	نوع تحقیق: نظری
۳- خوب (۱۷/۹۹)		۱- عالی (۱۹-۲۰)	
۲- سیار خوب (۱۸-۹۹)		۴- قابل قبول (۱۴-۱۵/۹۹)	
۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول			

اعضای هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر علی کجهانی	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر احمد آفتابی‌ثانی	استادیار	
۳- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر پویان برومند	استادیار	
۴- استاد ممتحن اول	دکتر فرنوش باسلیقه	استادیار	
۵- استاد ممتحن دوم	دکتر وحیدرضا کلات‌جاری	دانشیار	

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

۱۳۹۵/۱۱/۲۰

تَعْدِيمُهُ

پر عزیز و ماد همراهانم که هواره پشتیان و نایه امید و حرکت من بوده اند.

## تقدیر و مشکر:

سپس اول بـ پیگاه حضرت دوست، که هرچه دارم از اوست.

اگون که با چنگ حق تعالی و در سایه عنایات حضرت علی ابن موسی الرضا (ع) این پیام نامه به انجام رسیده،

لازم است بین وسیله از اساتید کران قدر جناب آقای دکتر کیهانی و جناب آقای دکتر آقابی شانی که در تامی مرال

انجام این پژوهش نه تنها راهنمای ایجاد بودند و در فراگیری دانش و چنگ به بنده از یتیح گلی فروکذار نکردند، بلکه چون

پدری دلوز و هربان، هواره موجب دلگرمی بوده و حیات های بی دینشان قابل تایش است، مشکر نایم.

همچنین از اساتید کرامی در دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شهروド و از اساتید کرامی در دانشکده مهندسی عمران

دانشگاه آزاد واحد مشهد که به ترتیب در طول دوره کارشناسی ارشد و دوره کارشناسی از محضرشان کسب علم کرده ام، مشکر

و قدردانی می نایم.

## تعهدنامه

اینچنانچه مصطفی نوری فر دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران - گروپ مهندسی سازه، دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه "بکار بستن شیوه های نوین عددی مبتنی بر روش اجزای محدود برای تحلیل ارتعاش آزاد تیز اوبلر - برزوی" تحت راهنمایی دکتر علی کهنه‌ی و دکتر احمد آفتانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینچنانچه انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالعه مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگر برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا پافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است، اصل رازداری، خوبایت و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

۹۵/۱۱/۰ تاریخ  
امانی دانشجو  
*Mas...*  
سعید علی‌خانی

### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

## چکیده

هدف از انجام این پایان‌نامه، افزایش دقت روش عددی اجزای محدود و ارتقاء کیفیت پارهای از المان‌های موجود در آن، برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای اویلر - برنولی نامنشوری در دو حالت دوّار و غیردوّار، و صحتسنجی نتایج با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی، موسوم به روش تبدیل دیفرانسیلی است. برای این منظور، نخست، سه روش پتروف - گالرکین، گالرکین و شیوه تجمع محلی، به عنوان سه حالت خاص از روش کلی تر باقیمانده وزن‌دار، برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای منشوری غیردوّار با شرایط تکیه‌گاهی کلی مورد استفاده قرار گرفت و نتایج حاصل از روش‌های مذکور، با حل بسته موجود و روش تبدیل دیفرانسیلی مقایسه گردید. در گام بعد، به تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای دوّار نامنشوری پرداخته شد. شایان ذکر است، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرهای دوّار اویلر - برنولی، کلی‌تر از معادله حاکم بر تیرهای غیردوّار بوده و در حالت خاص (سرعت دورانی صفر)، به آن فروکاست می‌گردد. در ادامه، برای بهتر و دقیق‌تر ساختن توابع شکل در روش اجزای محدود، علاوه بر شرایط مرزی، از قراردادن توابع شکل در خود معادله دیفرانسیل، به عنوان یک شرط اضافی استفاده شد. همچنین، صحتسنجی نتایج حاصل از بکار بستن توابع شکل جدید، با روش اجزای محدود کلاسیک و روش تبدیل دیفرانسیلی صورت گرفت. در ادامه، تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای دوّار اویلر - برنولی با تغییرات نمایی در طول تیر، با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود صورت پذیرفت. در پایان و در راستای تقویت توابع شکل در روش اجزای محدود، از توابع مثلثاتی به جای توابع چندجمله‌ای معمول، در استخراج آنها استفاده شد. نتایج حاصل، مؤثر و کارا بودن توابع شکل جدید را نشان می‌دهد.

## کلمات کلیدی

تیر اویلر - برنولی، تحلیل ارتعاش آزاد، فرکانس طبیعی، پارامتر فرکانسی، روش اجزای محدود، توابع شکل، روش باقیمانده وزن‌دار، روش تبدیل دیفرانسیلی، تیر دوّار اویلر - برنولی.

## مقالاتِ مستخرج از پایان‌نامه:

[۱] نوری‌فر م.، آفتابی‌ثانی ا. و کیهانی ع. (۱۳۹۵)، "مقایسه روش‌های باقیمانده وزنی و روش تبدیل دیفرانسیلی در تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای اویلر – برنولی با شرایط تکیه‌گاهی کلی"،

چهارمین کنفرانس ملی پژوهش‌های کاربردی در مهندسی عمران، معماری و مدیریت شهری، تهران.

[۲] نوری‌فر م.، کیهانی ع. و آفتابی‌ثانی ا. (۱۳۹۵)، "حل معادله غیرخطی دافینگ با استفاده از

روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام"، چهارمین کنفرانس ملی پژوهش‌های کاربردی در مهندسی

عمران، معماری و مدیریت شهری، تهران.

[3] Nourifar M., Keyhani A. and Aftabi Sani A., "Free vibration analysis of rotating Euler-Bernoulli beam with exponentially varing cross-section by differential transformation method", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, (Under Review).

[4] Nourifar M., Aftabi Sani A. and Keyhani A., "Efficient multi-step differential transform method: Theory and its application to nonlinear oscillators", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, (Under Review).

## فهرست مطالب

عنوان	شماره صفحه
فصل اول مقدمه	۱
فصل دوم تحلیل ارتعاش آزاد تیر غیردووار با تکیه گاههای کلی به روش های باقیمانده وزن دار و روش تبدیل دیفرانسیلی	۷
۱-۲- مقدمه	۸
۲-۲- پیشینه پژوهش	۸
۳-۲- معادله تیر اویلر - برنولی در حالت دینامیکی	۱۰
۴-۲- روش باقیمانده وزن دار	۱۵
۵-۲- روش پتروف - گالرکین	۱۸
۶-۲- روش گالرکین	۲۰
۷-۲- روش تجمع محلی	۲۱
۸-۲- روش تبدیل دیفرانسیلی	۲۲
۹-۲- اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی	۲۳
۱۰-۲- حل دقیق	۲۵
۱۱-۲- نتایج و بحث	۲۶
۱۲-۲- جمع‌بندی	۳۲
فصل سوم تحلیل ارتعاش آزاد تیر غیردووار به روش اجزای محدود کلاسیک	۳۳
۱-۳- مقدمه	۳۴
۲-۳- پیشینه پژوهش و ویژگی های روش اجزای محدود	۳۴

۳-۳- فرمول‌بندی روشِ اجزای محدود	۳۶
۴-۳- توابع شکل در اجزای محدود	۴۰
۴-۳- توابع شکلِ إلمانِ خمشی	۴۲
۴-۳- نتایج و بحث	۴۶
۷-۳- جمع‌بندی	۵۰
فصلِ چهارم باز‌تولیدِ یک پژوهش: تحلیلِ دینامیکی تیرهای دوّار به روشِ اجزای محدود	
۴-۱- مقدمه	۵۱
۴-۲- تاریخچه	۵۲
۴-۳- معادله دیفرانسیل تیرهای نامنشوری دوّار اویلر - برنولی	۵۴
۴-۴- توابع شکلِ کسری	۵۸
۴-۵- روشِ تبدیل دیفرانسیلی	۶۸
۴-۶- نتایج و بحث	۷۲
۴-۷- جمع‌بندی	۷۹
فصلِ پنجم تحلیل ارتعاش آزادِ تیر دوّار با سطحِ مقطعِ دایره‌ای و با تغییراتِ نمایی در طولِ تیر	
۱-۱- مقدمه	۸۱
۱-۲- استخراج معادله حاکم	۸۲
۱-۳- روشِ تبدیل دیفرانسیلی	۸۶
۱-۴- روشِ اجزای محدود	۹۰
۱-۵- نتایج و بحث	۹۳
۱-۶- جمع‌بندی	۱۰۷

<b>فصلِ ششم تحلیل ارتعاش اجباری تیر با شرایط تکیه‌گاه کلی به کمک توابع شکل</b>	
۱۰۹.....	<b>مثلثاتی</b>
۱۱۰.....	۱-۶- مقدمه
۱۱۰.....	۲- توابع شکل مثلثاتی
۱۱۸.....	۳- حل دقيق
۱۲۴.....	۴- حل به روش اجزای محدود
۱۲۵.....	۵- نتایج و بحث
۱۳۲.....	۶- جمع‌بندی
۱۳۳.....	<b>فصل هفتم روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام</b>
۱۳۴.....	۱-۷- مقدمه
۱۳۵.....	۲- تاریخچه
۱۳۷.....	۳- معادله دافینگ
۱۳۷.....	۴- اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی بر معادله دافینگ
۱۳۹.....	۵- روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام
۱۴۱.....	۶- اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام بر معادله دافینگ
۱۴۷.....	۷- معادله حاکم بر آونگ با نوسان‌های بزرگ
۱۵۱.....	۸- جمع‌بندی
۱۵۳.....	<b>پیوست‌ها</b>
۱۵۴.....	پیوست الف
۱۵۶.....	پیوست ب
۱۵۹.....	<b>منابع</b>

نامنامه.....۱۶۵

## فهرست اشکال

..... شکل ۱-۲ خیز و جهت‌های قراردادی تیر [۱۸]	۱۱
..... شکل ۲-۲ تیر با تکیه‌گاه کلی [۱۹]	۱۳
..... شکل ۲-۳ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر مفصل -	
..... مفصل ۲۹	۲۹
..... شکل ۲-۴ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار -	
..... گیردار ۲۹	۲۹
..... شکل ۲-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار - آزاد	
..... آزاد ۳۰	۳۰
..... شکل ۲-۶ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار -	
..... مفصل ۳۰	۳۰
..... شکل ۷-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر مفصل - مفصل با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی	
..... ۳۱	۳۱
..... شکل ۸-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر گیردار با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی	
..... ۳۱	۳۱
..... شکل ۹-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر گیردار - آزاد با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی	
..... ۳۱	۳۱
..... شکل ۱۰-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر مفصل - گیردار با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی	
..... ۳۲	۳۲
..... شکل ۱-۳ ۱ إلمان خمسی با چهار درجه آزادی [۱۸]	
..... ۴۳	۴۳
..... شکل ۲-۳ تغییرات اولین تابع شکل مرسوم $[N_1(x)]$	
..... ۴۴	۴۴

..... ۴۴	شکل ۳-۳ تغییراتِ دومین تابع شکلِ مرسوم $[N_2(x)]$
..... ۴۵	شکل ۴-۳ تغییراتِ سومین تابع شکلِ مرسوم $[N_3(x)]$
..... ۴۵	شکل ۵-۳ تغییراتِ چهارمین تابع شکلِ مرسوم $[N_4(x)]$
..... ۴۹	شکل ۶-۳ نمودار همگرایی روشِ اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اولِ تیرِ مفصل - مفصل.
..... ۴۹	شکل ۷-۳ نمودار همگرایی روشِ اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اولِ تیرِ گیردار - گیردار.
..... ۴۹	شکل ۸-۳ نمودار همگرایی روشِ اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اولِ تیرِ گیردار - آزاد.
..... ۵۰	شکل ۹-۳ نمودار همگرایی روشِ اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اولِ تیرِ گیردار - مفصل.
..... ۵۵	شکل ۱۴-۱ تیرِ دوّار با سطح مقطعِ نامنشوری
..... ۵۸	شکل ۲-۴ ارتباطِ بینِ مختصاتِ کلی و مختصاتِ محلی $\Omega = [21]$
..... ۵۸	شکل ۳-۴ شرایطِ مرزی در $\Omega = [21]$
..... ۶۰	شکل ۴-۴ تابع باقیمانده $R_1(\bar{x})$ به ازای $NE = 4$ و $\Omega = 12$
..... ۶۱	شکل ۵-۴ تابع باقیمانده $R_2(\bar{x})$ به ازای $NE = 4$ و $\Omega = 12$
..... ۶۱	شکل ۶-۴ تابع باقیمانده $R_3(\bar{x})$ به ازای $NE = 4$ و $\Omega = 12$
..... ۶۱	شکل ۷-۴ تابع باقیمانده $R_4(\bar{x})$ به ازای $NE = 4$ و $\Omega = 12$
..... 65	..... و $(\Omega = 0)$ شکل ۸-۴ تغییراتِ اولین توابع شکلِ مرسوم $[N_{R1}(\bar{x})]$ و کسری $[N_1(\bar{x})]$ در طولِ المان ( $NE = 4$ )
..... 66	..... و $(\Omega = 0)$ شکل ۹-۴ تغییراتِ دومین توابع شکلِ مرسوم $[N_{R2}(\bar{x})]$ و کسری $[N_2(\bar{x})]$ در طولِ المان ( $NE = 4$ )
..... 85	..... و $(\Omega = 0)$ شکل ۱۰-۴ تغییراتِ سومین توابع شکلِ مرسوم $[N_{R3}(\bar{x})]$ و کسری $[N_3(\bar{x})]$ در طولِ المان

۶۶ ..... شکل ۱۱-۴ تغییرات چهارمین توابع شکل مرسوم  $[N_4(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R4}(\bar{x})]$  در طول إلمان  $(\Omega = 0$  و  $NE = 4)$

۶۶ ..... شکل ۱۱-۴ تغییرات اولین توابع شکل مرسوم  $[N_1(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R1}(\bar{x})]$  در طول إلمان  $(\Omega = 0$  و  $NE = 4)$

۶۷ ..... شکل ۱۲-۴ تغییرات دومین توابع شکل مرسوم  $[N_2(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R2}(\bar{x})]$  در طول إلمان  $(\Omega = 12$  و  $NE = 4)$

۶۷ ..... شکل ۱۳-۴ تغییرات سومین توابع شکل مرسوم  $[N_3(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R3}(\bar{x})]$  در طول إلمان  $(\Omega = 12$  و  $NE = 4)$

۶۷ ..... شکل ۱۴-۴ تغییرات چهارمین توابع شکل مرسوم  $[N_4(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R4}(\bar{x})]$  در طول إلمان  $(\Omega = 12$  و  $NE = 4)$

۶۸ ..... شکل ۱۵-۴ تغییرات اولین توابع شکل مرسوم  $[N_1(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R1}(\bar{x})]$  در طول إلمان  $(\Omega = 12$  و  $NE = 4)$

شکل ۱-۵ شمای کلی تیر دوّار نامنشوری با سطح مقطع دایره‌ای و با تغییرات نمایی در طول تیر... ۸۳

شکل ۲-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\beta = 1$  و  $\lambda = 0$  ۱۰۱

شکل ۳-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\beta = 1$  و  $\lambda = 12$  ۱۰۱

شکل ۴-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\beta = 2$  و  $\lambda = 0$  ۱۰۱

شکل ۵-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\beta = 2$  و  $\lambda = 12$  ۱۰۲

شکل ۶-۵ تأثیر ضریب نامنشوری برای اولین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت ۱۰۲

- شکل ۷-۵ تأثیر ضریب نامنشوری برای دومین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت ..... ۱۰۳
- شکل ۸-۵ تأثیر ضریب نامنشوری برای سومین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت ..... ۱۰۳
- شکل ۹-۵ تأثیر ضریب نامنشوری برای چهارمین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت ..... ۱۰۳
- شکل ۱۰-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر اولین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت .....  $(\beta=0)$  ۱۰۴
- شکل ۱۱-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر دومین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت .....  $(\beta=0)$  ۱۰۴
- شکل ۱۲-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر سومین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت .....  $(\beta=0)$  ۱۰۵
- شکل ۱۳-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر چهارمین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت .....  $(\beta=0)$  ۱۰۵
- شکل ۱۴-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر اولین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت .....  $(\lambda=12)$  ۱۰۵
- شکل ۱۵-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر دومین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت .....  $(\lambda=12)$  ۱۰۶
- شکل ۱۶-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر سومین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت .....  $(\lambda=12)$  ۱۰۶
- شکل ۱۷-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر چهارمین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت .....  $(\lambda=12)$  ۱۰۶

شكل ٦-١ تغييرات اولين توابع شكل مرسوم  $[N_1(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg1}(x)]$  در طول إلمان ١١٤ ..... ( $\lambda = 1$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٢ تغييرات دومين توابع شكل مرسوم  $[N_2(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg2}(x)]$  در طول إلمان ١١٤ ..... ( $\lambda = 1$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٣ تغييرات سومين توابع شكل مرسوم  $[N_3(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg3}(x)]$  در طول إلمان ١١٤ ..... ( $\lambda = 1$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٤ تغييرات چهارمين توابع شكل مرسوم  $[N_4(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg4}(x)]$  در طول إلمان ١١٥ ..... ( $\lambda = 1$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٥ تغييرات اولين توابع شكل مرسوم  $[N_1(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg1}(x)]$  در طول إلمان ١١٥ ..... ( $\lambda = 3\pi$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٦ تغييرات دومين توابع شكل مرسوم  $[N_2(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg2}(x)]$  در طول إلمان ١١٥ ..... ( $\lambda = 3\pi$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٧ تغييرات سومين توابع شكل مرسوم  $[N_3(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg3}(x)]$  در طول إلمان ١١٦ ..... ( $\lambda = 3\pi$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٨ تغييرات چهارمين توابع شكل مرسوم  $[N_4(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg4}(x)]$  در طول إلمان ١١٦ ..... ( $\lambda = 3\pi$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-٩ تغييرات اولين توابع شكل مرسوم  $[N_1(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg1}(x)]$  در طول إلمان ١١٦ ..... ( $\lambda = 5\pi$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-١٠ تغييرات دومين توابع شكل مرسوم  $[N_2(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg2}(x)]$  در طول إلمان ١١٧ ..... ( $\lambda = 5\pi$  و  $NE = 4$ )

شكل ٦-١١ تغييرات سومين توابع شكل مرسوم  $[N_3(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg3}(x)]$  در طول

المان ( $\lambda = 5\pi$ ) و  $NE = 4$  ..... ۱۱۷

شكل ۶-۵ تغییرات چهارمین توابع شکل مرسوم  $[N_4(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg4}(x)]$  در طول

المان ( $\lambda = 5\pi$ ) و  $NE = 4$  ..... ۱۱۷

شكل ۶-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل - مفصل ( $x = L/2$ ), به روش دقیق،

روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل

مثلثاتی ( $NE = 2$ ) ..... ۱۲۷

شكل ۶-۷ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل - مفصل ( $x = L/2$ ), به روش دقیق،

روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی

..... ( $NE = 4$ ) ..... ۱۲۷

شكل ۶-۸ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل - مفصل ( $x = L/2$ ), به روش دقیق،

روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی

..... ( $NE = 8$ ) ..... ۱۲۷

شكل ۶-۹ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - گیردار ( $x = L/2$ ), به روش دقیق،

روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی

..... ( $NE = 2$ ) ..... ۱۲۸

شكل ۶-۱۰ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - گیردار ( $x = L/2$ ), به روش دقیق،

روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی

..... ( $NE = 4$ ) ..... ۱۲۸

شكل ۶-۱۱ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - گیردار ( $x = L/2$ ), به روش دقیق،

روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی

..... ( $NE = 8$ ) ..... ۱۲۸

شكل ۶-۱۲ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل - گیردار ( $x = L/2$ ), به روش دقیق،

روشِ اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۲۹ ..... (NE = 2)

شکلِ ۲۰ تابع پاسخ فرکانسی شتابِ نقطه میانی تیرِ مفصل - گیردار ( $x = L/2$ ), به روشِ دقیق،

روشِ اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۲۹ ..... (NE = 4)

شکلِ ۲۱ تابع پاسخ فرکانسی شتابِ نقطه میانی تیرِ مفصل - گیردار ( $x = L/2$ ), به روشِ دقیق،

روشِ اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۲۹ ..... (NE = 8)

شکلِ ۲۲ تابع پاسخ فرکانسی شتابِ نقطه میانی تیر گیردار - آزاد ( $x = L/2$ ), به روشِ دقیق،

روشِ اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۳۰ ..... (NE = 2)

شکلِ ۲۳ تابع پاسخ فرکانسی شتابِ نقطه میانی تیر گیردار - آزاد ( $x = L/2$ ), به روشِ دقیق،

روشِ اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۳۰ ..... (NE = 4)

شکلِ ۲۴ تابع پاسخ فرکانسی شتابِ نقطه میانی تیر گیردار - آزاد ( $x = L/2$ ), به روشِ دقیق،

روشِ اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۳۰ ..... (NE = 8)

شکلِ ۲۵ تابع پاسخ فرکانسی شتابِ نقطه انتهایی تیر گیردار - آزاد ( $x = L$ ), به روشِ دقیق، روشِ

اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۳۱ ..... (NE = 2)

شکلِ ۲۶ تابع پاسخ فرکانسی شتابِ نقطه انتهایی تیر گیردار - آزاد ( $x = L$ ), به روشِ دقیق، روشِ

اجزای محدودِ کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روشِ اجزای محدودِ مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی

۱۳۱ ..... (NE = 4)

شکل ۶-۲۷ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه انتهایی نیر گیردار - آزاد ( $L = x$ )، به روش دقیق،

روش اجزای محدود کلاسیک (NE = 8) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی

۱۳۱ ..... (NE = 8)

شکل ۱-۷ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی با توجه به

۱۳۹ .....  $\alpha = 0.2$ ،  $\gamma = 0.2$ ،  $\zeta = 0.04$ ،  $\mu = 0.04$

شکل ۲-۷ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام با توجه

۱۴۳ .....  $\alpha = 0.2$ ،  $\gamma = 0.2$ ،  $\zeta = 0.04$ ،  $\mu = 0.04$

شکل ۳-۷ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام با توجه

۱۴۴ .....  $\alpha = 0.2$ ،  $\gamma = 0.2$ ،  $\zeta = 0.08$ ،  $\mu = 0.08$

شکل ۴-۷ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام با توجه

۱۴۴ .....  $\alpha = 0.5$ ،  $\gamma = 0.5$  و  $\zeta = 0.04$ ،  $\mu = 0.04$

شکل ۵-۷ نمودار فازی در صفحه  $(y(t), dy(t)/dt)$  برای معادله دافینگ به روش تبدیل دیفرانسیلی

۱۴۵ ..... گام به گام

شکل ۶-۷ نمودار فازی در صفحه  $(y(t), dy(t)/dt)$  برای معادله دافینگ به روش تفاضلات

۱۴۵ ..... محدود

شکل ۷-۷ نمودار فازی در فضای سه بعدی  $(y(t), dy(t)/dt, t)$  برای معادله دافینگ به روش تبدیل

۱۴۶ ..... دیفرانسیلی گام به گام

شکل ۸-۷ نمودار فازی در فضای سه بعدی  $(y(t), dy(t)/dt, t)$  برای معادله دافینگ به روش تفاضلات

۱۴۶ ..... محدود

شکل ۹-۷ حل معادله آونگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام با توجه به

۱۴۹ .....  $c = 0.2$ ،  $g = 9.81$ ،  $l = 1$ ،  $m = 1$

- شکل ۷-۱۰ نمودار فازی در صفحه  $(\theta(t), d\theta(t)/dt)$  برای معادله آونگ به روش تبدیل دیفرانسیلی ۱۵۰ ..... گام به گام
- شکل ۷-۱۱ نمودار فازی در صفحه  $(\theta(t), d\theta(t)/dt)$  برای معادله آونگ به روش تفاضلات محدود ۱۵۰ ..... محدود
- شکل ۷-۱۲ نمودار فازی در فضای سه بعدی  $(\theta(t), d\theta(t)/dt, t)$  برای معادله آونگ به روش تبدیل دیفرانسیلی ۱۵۱ ..... گام به گام
- شکل ۷-۱۳ نمودار فازی در فضای سه بعدی  $(\theta(t), d\theta(t)/dt, t)$  برای معادله آونگ به روش تفاضلات محدود ۱۵۱ ..... محدود

## فهرستِ جداول

جدول ۱-۲ تعدادی از عملیاتِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی [۲۰] ..... ۲۳
جدول ۲-۱ اولین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایطِ متفاوتِ تکیه‌گاهی با استفاده از روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین، تجمعِ محلی، تبدیلِ دیفرانسیلی و حلِ دقیق ..... ۲۷
جدول ۲-۲ دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایطِ متفاوتِ تکیه‌گاهی با استفاده از روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین، تجمعِ محلی، تبدیلِ دیفرانسیلی و حلِ دقیق ..... ۲۸
جدول ۲-۳ سومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایطِ متفاوتِ تکیه‌گاهی با استفاده از روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین، تجمعِ محلی، تبدیلِ دیفرانسیلی و حلِ دقیق ..... ۲۸
جدول ۳-۱ اولین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایطِ متفاوتِ تکیه‌گاهی با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی و روشِ اجزای محدود با تعدادِ المانِ متفاوت ..... ۴۷
جدول ۳-۲ دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایطِ متفاوتِ تکیه‌گاهی با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی و روشِ اجزای محدود با تعدادِ المانِ متفاوت ..... ۴۷
جدول ۳-۳ سومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایطِ متفاوتِ تکیه‌گاهی با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی و روشِ اجزای محدود با تعدادِ المانِ متفاوت ..... ۴۸
جدول ۴-۱ مقادیرِ ضرایبِ تابعِ جرمِ واحدِ طولِ تیر $[m(x)]$ و تابعِ صلبیتِ خمثی $[EI(x)]$ ..... ۷۲
جدول ۴-۲ اولین و دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیرِ مثالِ اول و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیلِ دیفرانسیلی ( $N=50$ )، اجزای محدود با توابعِ شکلِ کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابعِ شکلِ مرسوم ( $NE=40$ ) ..... ۷۳
جدول ۴-۳ سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیرِ مثالِ اول و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیلِ دیفرانسیلی ( $N=50$ )، اجزای محدود با توابعِ شکلِ کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابعِ شکلِ مرسوم ( $NE=40$ ) ..... ۷۴

جدول ۴-۴ اولین و دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال دوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=80$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و

اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ ) ..... ۷۵

جدول ۴-۵ سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال دوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=80$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری

..... ۷۶ و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ ) ..... ۷۶

جدول ۴-۶ اولین و دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال سوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=150$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ..... ۷۷

جدول ۴-۷ سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال سوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=150$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری

..... ۷۸ و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ ) ..... ۷۸

جدول ۱-۵ مقایسه اولین و دومین پارامتر فرکانسی حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود ( $N = 100$ ) با توجه به  $\beta = 0$  ..... ۹۵

جدول ۲-۵ مقایسه سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود ( $N = 100$ ) با توجه به  $\beta = 0$  ..... ۹۶

جدول ۳-۵ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود ( $N = 100$ ) با توجه به  $\beta = 0.5$  ..... ۹۷

جدول ۴-۵ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود ( $N = 100$ ) با توجه به  $\beta = 1$  ..... ۹۸

جدول ۵-۵ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود ( $N = 100$ ) با توجه به  $\beta = 1.5$  ..... ۹۹

جدول ۵-۶ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی  
و روش اجزای محدود ( $N = 100$ ) با توجه به  $\beta = 2$  ..... ۱۰۰

# فصل اول

## مقدمہ

روشِ اجزای محدود، یکی از شیوه‌های عددی قدرتمند و پرکاربرد برای حلِ انواع معادلات دیفرانسیل معمولی و پاره‌ای با شرایطِ مرزی و اولیه گوناگون است که از زمانِ ارائه آن در حدودِ دههٔ پنجاهِ میلادی تاکنون، چه از نظرِ جنبه‌های نظری و تئوریک و چه از حیثِ جنبه‌های عملی و کاربردی، پیشرفت‌های فراوان و چشم‌گیری کرده است. در میانِ خیلِ عظیمِ نوآوری‌های صورت‌گرفته در مبانی و روش‌های مختلفِ مبتنی بر تکنیک‌های جزء محدود، ارتقای کیفیتِ توابعِ درونیاب، به عنوانِ یکی از ارکانِ مهم و پایه‌های اساسیِ روشِ اجزای محدود، با هدفِ افزایشِ دقتِ پاسخ‌های عددی حاصل از این شیوه و نزدیک ساختنِ هرچه بیشترِ این پاسخ‌های تقریبی و گستره به پاسخ‌های دقیق و پیوسته (البته در صورتِ وجود)، یکی از شاخه‌های جذابِ تحقیقاتی است که توجه شماری از محققین را به خود جلب کرده و سببِ ارائهٔ پاره‌ای روش‌های ابتکاری نیز شده است. به عنوانِ مثال، استفاده از توابعِ درونیابی که در معادله دیفرانسیلِ حاکم بر مسائله صدق کنند، یکی از شیوه‌های پیشنهادی در مراجع است. لازم به ذکر است که ارضای معادله دیفرانسیلِ مسائله توسطِ تابعِ درونیاب، در شیوهٔ کلاسیکِ اجزای محدود، به هیچ عنوانِ اجباری نبوده و جزء شرایطِ لازم برای حلِ مسائله نیست.

از سوی دیگر، تلاش برای تحلیلِ دینامیکی هرچه دقیق‌ترِ سازه‌ها و استفاده از نتایج آن‌ها برای طراحی هرچه ایمن‌تر سازه‌ها در برابر نیروهای ناشی از وقوع زلزله، شاخهٔ تحقیقاتی دیگری است که در سه دههٔ اخیر، حجمِ عظیمی از پژوهش‌های آکادمیکِ رشته‌های مهندسی و به ویژه مهندسی سازه‌ها را جذبِ خود نموده است. در این میان، تحلیل ارتعاش آزادِ سازه‌ها و از جمله تیرهای خمشی، به عنوانِ یکی از اجزای پایه و کلاسیک در ساختمان‌سازی، با هدفِ یافتنِ فرکانس‌های طبیعی و شکلِ مودهای آن‌ها، یکی از مسائلِ معروف و سنگ‌نشانه است که توسطِ محققینِ مختلف و از جنبه‌های گوناگون موردِ بررسی قرار گرفته است.

هدف از انجامِ این پایان‌نامه، تلفیقِ دو شاخهٔ فوق‌الذکر، یعنی شیوه‌ها و نگرش‌های نوینِ جزء محدود با تحلیل ارتعاش آزادِ تیرهای خمشی بر اساسِ تئوری اویلر - برنولی و دستیابی به

راهکارهای دقیق‌تر برای یافتن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیرها خواهد بود. البته در این راستا و به منظور صحتسنجی و راستی‌آزمایی نتایج به‌دست‌آمده، افرون بر استفاده از پاسخ‌های فرم<sup>۱</sup> بسته<sup>۲</sup> که شمار آن‌ها چندان زیاد نیست، از روش نیمه‌تحلیلی قدرتمند دیگری که در سال‌های اخیر، فراوان مورد توجه و استفاده قرار گرفته است، یعنی روش تبدیل دیفرانسیلی<sup>۳</sup> نیز استفاده می‌شود.

برای دستیابی به هدف تبیین‌شده در پاراگراف قبل، ساختار پایان‌نامه و خلاصه مطالب عرضه شده در هر یک از فصول آتی آن، به قرار زیر، ارائه می‌گردد. خاطر نشان می‌سازد، ساختار انتخابی برای این پایان‌نامه تا حدود زیادی بر پایان‌نامه‌های مقاله‌محور<sup>۴</sup> اनطباق دارد:

پس از اتمام فصل مقدماتی و کوتاهی که در حال مطالعه آن هستید، یعنی فصل اول، فصل دوم به تحلیل ارتعاش آزاد تیر اویلر – برنولی با شرایط تکیه‌گاهی کلی<sup>۵</sup>، با استفاده از چند روش‌های باقیمانده وزن‌دار<sup>۶</sup>، به عنوان پایه و مبنای شیوه اجزای محدود مرسوم، و روش تبدیل دیفرانسیلی می‌پردازد. برای این منظور، نخست مبانی روش‌های باقیمانده وزن‌دار به طور کامل توضیح داده شده و سپس، روش‌های پتروف – گالرکین<sup>۷</sup> و تجمعی محلی<sup>۸</sup>، به عنوان سه ورژن نام‌آشنای روش‌های باقیمانده وزن‌دار، ارائه می‌گردد. در ادامه، اصول اولیه و رابطه‌سازی روش تبدیل دیفرانسیلی نیز، به طور کامل، بیان می‌شود. سپس، پارامتر فرکانسی<sup>۹</sup> تیر با تکیه‌گاه‌های ارجاعی یا در اصطلاح، تیر با چهار فنر، با چهار روش مذکور به‌دست می‌آید. برای صحتسنجی پاسخ‌های به‌دست‌آمده نیز از حل دقیق تیر اویلر – برنولی با شرایط تکیه‌گاهی کلی استفاده شده است.

<sup>1</sup> Closed-form

<sup>2</sup> Differential transform method (DTM)

<sup>3</sup> Paper-based

<sup>4</sup> General restrained Euler-Bernoulli beam

<sup>5</sup> Weighted-residual methods

<sup>6</sup> Petrov-Galerkin method (P-GM)

<sup>7</sup> Galerkin method (GM)

<sup>8</sup> Collocation method (CM)

<sup>9</sup> Frequency parameter

تحلیل دینامیکی تیر اویلر - برنولی، به روش اجزای محدود کلاسیک، موضوع فصل سوم است.

در این فصل، نخست، به معرفی اجمالی ویژگی‌های روش اجزای محدود مرسوم پرداخته شده و سپس، معادله دیفرانسیل پاره‌ای وابسته به مسئله استخراج می‌گردد. پس از آن، روند حل معادله مذکور با استفاده از روش اجزای محدود کلاسیک تشریح می‌شود تا مقدمات کار، برای ارتقای کیفیت پاسخ‌ها در فصل ششم فراهم آید.

پیش از پرداختن به موضوع اصلی پایان‌نامه و با نیت آشنایی‌های بیشتر با گونه‌های جدیدتر اجزای محدود، فصل چهارم، به بازتولید مقاله‌ای مهم خواهد پرداخت که در آن، توابع شکل کسری، به عنوان توابعی دقیق‌تر از توابع شکل مرسوم، معرفی شده و مسئله پیچیده‌تری حل می‌گردد. برای این منظور، نخست، به استخراج معادله حاکم بر تیرهای دوّار<sup>۱</sup> با سطح مقطع نامنشوری پرداخته شده و سپس، با بکار بستن ایده جدید، توابع شکل کسری به دست می‌آیند. سپس، تحلیل ارتعاش آزاد این- گونه تیرها، با استفاده از توابع شکل جدید انجام شده و نتایج، با نتایج حاصل از توابع شکل مرسوم که در فصل سوم معرفی گردیدند، مقایسه می‌گرددند. تا بدین‌جا، مقاله مورد اشاره، به طور کامل بازآفرینی می‌شود. در پایان، تمامی نتایج و روش تبدیل دیفرانسیلی به عنوان کاری جدید تولید می‌گرددند.

بازتولید پژوهشی در زمینه تیرهای دوّار در فصل چهار، انگیزه‌ای برای انجام پژوهشی جدید در این زمینه ایجاد کرد که فصل پنجم، دستاورده آن است. تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای دوّار با سطح مقطع دایره‌ای و تغییرات نمایی در طول تیر، با بکار بستن دو روش تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود، موضوع این فصل است. برای این منظور، نخست معادله دیفرانسیلی حاکم بر این گونه تیرها استخراج شده و سپس، دو روش تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود بر آن اعمال می‌گرددند. خروجی‌ها یا همان نتایج عددی این فصل نیز مشابه فصول قبل، پارامترهای فرکانسی و شکل مودهای تیر هستند.

---

<sup>1</sup> Rotating beams

ایدهٔ اساسی ارتقای کیفیتِ پاسخ‌های حاصل از روشِ اجزای محدود که در مقدمه نیز بدان اشاره شد، در فصل ششم مطرح خواهد شد. از آن‌جا که پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرها شاملِ توابع مثلثاتی است، ساخت و تولیدِ توابع شکل با استفاده از توابع مثلثاتی، مطلقاً و قاعداً می‌تواند بر کیفیتِ پاسخ‌های عددی بیفزاید. برای تأییدِ تجربی این امر، فصل ششم به تحلیلِ ارتعاشِ اجباریِ تیرهای غیردوّار با شرایطِ تکیه‌گاهی کلی، به یاریِ ایدهٔ مطرح شده می‌پردازد. در این راستا، از حلِ فرم‌بسته و روشِ اجزای محدود کلاسیک نیز برای صحتسنجیِ روشِ ارائه شده استفاده می‌گردد. در پایان، تابعِ پاسخِ فرکانسی<sup>۱</sup> به دست آمده از هر سه روشِ مذکور، رسم شده و دقتِ راهکارِ عددی پیشنهاد شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

پایان‌بخش این پایان‌نامه، تشریحِ روندِ حلِ یک معادله دیفرانسیل غیرخطی پرکاربرد در مهندسی سازه، با روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی است. فصل هفتم، به حلِ معادله دیفرانسیل غیرخطی دافینگ با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی گام‌به‌گام<sup>۲</sup>، به عنوانِ یکی از ورژن‌های جدیدِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی، اختصاص دارد. در این راستا، نخست مبانی روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی گام‌به‌گام به طور کامل توضیح داده می‌شود. همچنین، فرمِ کلی معادله دافینگ و پاره‌ای از کاربردهای آن ارائه می‌گردد. در ادامه، ناکارآمدیِ روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی معمولی در حلِ معادله دافینگ، به صراحت، نشان داده شده و معادله مزبور، به روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی گام‌به‌گام حل می‌شود. در ادامه، به بررسی تأثیرِ پارامترهای معادله دافینگ، در نتایج به دست آمده و اصطلاحاً تحلیلِ حساسیتِ پارامترها پرداخته می‌شود. ناگفته نماند، برای صحتسنجیِ پاسخ‌های این فصل، از روشِ تفاضلاتِ محدود<sup>۳</sup> استفاده خواهد شد.

<sup>1</sup> Frequency response function (FRF)

<sup>2</sup> Multi-step differential transform method (MsDTM)

<sup>3</sup> Finite difference method (FDM)

شایان ذکر است، در تمامی فصل‌ها و بخش‌های این پایان‌نامه، از نرم‌افزار **Mathematica**<sup>۱</sup> برای انجام محاسبات و رسم نمودارها استفاده شده است. همچنین، تمامی اسامی خاص غیرفارسی به صورت پرنگ<sup>۲</sup> نوشته شده و در انتهای متن، در قسمت «نامنامه»، نام به زبان اصلی و به همراه معادل انتخاب‌شده، درج خواهد شد. همچنین اصل انگلیسی لغات و اصطلاحاتی که در متن معادل‌سازی می‌شود، برای نخستین بار، به صورت زیرنویس درج می‌شوند.

در پایان ناگفته نماند که، تمامی پاراگراف‌ها، جملات، واژگان، روابط، شکل‌ها و نمودارها و در حالت کلی محتوای موجود در این پایان‌نامه، به جزء مواردی که از منابع و مراجع معتبر اخذ شده و با درج شماره منبع مشخص گردیده‌اند، حاصل کار و تلاش نویسنده بوده و توسط وی تولید شده‌اند. همچنین تمامی نمودارها و نتایج عددی موجود در پایان‌نامه، حتی در صورت وجود در منابع، مجدداً توسط نویسنده بازتولید شده‌اند.

---

<sup>1</sup> Mathematica software

<sup>2</sup> Bold

## فصل دوم

تحلیل ارتعاش آزاد تیر غیردوّار با

تکیه‌گاه‌های کلی به روش‌های

باقیمانده وزن‌دار و روش تبدیل

دیفرانسیلی

## ۱-۲- مقدمه

در این فصل، به تحلیل ارتعاش آزادِ تیر - برنولی با شرایطِ تکیه‌گاهی کلی با استفاده از روشِ باقیمانده وزن‌دار و روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی پرداخته می‌شود. در این راستا، نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر اویلر - برنولی در حالت بی‌بعدشده و با شرایطِ مرزی در حالت کلی معرفی می‌شود. پس از آن، مبانی روشِ باقیمانده وزن‌دار به طور کامل توضیح داده شده و سپس، روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین و تجمع محلی، به عنوان سه حالت نامآشنای روشِ باقیمانده وزن‌دار، ارائه می‌گردد. در ادامه، اصول اولیه و فرمول‌بندی روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی نیز به طور کامل بیان می‌گردد. سپس پارامترهای فرکانسی تیر با چهار روش مذکور به‌دست می‌آید. برای صحت‌سنگی پاسخ‌های به‌دست‌آمده، حل دقیق تیر اویلر - برنولی با شرایطِ تکیه‌گاهی کلی بیان شده و مقدار خطای پاسخ به‌دست‌آمده نیز ارائه می‌گردد. نمودارهای همگرایی<sup>۱</sup> برای روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی با توجه به چهار حالت تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، آزاد و مفصل - گیردار استخراج می‌شود. در پایان نیز شکل مودهای تیر در چهار حالت تکیه‌گاهی بیان شده نمایش داده می‌شود.

## ۲-۲- پیشینهٔ پژوهش

معمولًاً یافتن پاسخ دقیق و تحلیلی مسئله مقدار مرزی و مسئله مقدار اولیه در حالتی که معادله دیفرانسیل، شروط مرزی و یا شروط اولیه آن پیچیده باشند، غیرممکن است. در این‌گونه موارد، روش‌های عددی همچون روش اجزای محدود، شیوه تفاضلات محدود، روش اجزای مرزی و ... بسیار سودمند بوده و پاسخ تقریبی مسئله مدنظر را فراهم می‌آورند. در این میان، همواره کاهش خطای پاسخ تقریبی حاصل، یکی از اصلی‌ترین دغدغه‌های پژوهشگران بوده است. به عبارت دیگر، یک دسته از تلاش‌ها در راستای بهبود روش‌های عددی، کمینه‌کردن تفاوت میان پاسخ تقریبی حاصل و پاسخ

---

<sup>1</sup> Convergence curve

دقیق است. روش باقیماندهای وزن‌دار، نام دسته‌ای از این تلاش‌های به ثمر نشسته می‌باشد که به جای کمینه‌کردن تفاوت ذکرشده، انتگرال وزن‌دار تابع باقیمانده<sup>۱</sup> را صفر می‌کند. روش‌های پتروف – گالرکین، گالرکین و تجمع محلی، نام چند مورد خاص از روش باقیماندهای وزن‌دار است که در آن‌ها توابع وزن، تحت تعریف خاصی انتخاب می‌شوند که در بخش‌های بعدی به توضیح کامل آن‌ها خواهیم پرداخت.

از سوی دیگر، تیر اویلر – برنولی یکی از موضوعات جذاب برای پژوهشگران بوده و پژوهش‌های بسیاری با محوریت آن انجام شده است. به عنوان مثال، مأموریزی و همکاران [۱] به تحلیل تیری منشوری با تکیه‌گاه مفصلی و فنر دورانی در یک سو و فنر انتقالی در سوی دیگر با استفاده از روش تفکیک متغیرها<sup>۲</sup> پرداختند. در پژوهشی دیگر، مأموریزی و همکاران به تحلیل ارتعاش آزاد تیر بر روی بستر کشسان<sup>۳</sup> پرداختند [۲]. همچنین رائو و میرزا به تحلیل تیر اویلر – برنولی با استفاده از روش تفکیک متغیرها پرداختند [۳]. آن‌ها از فنر انتقالی و دورانی به عنوان تکیه‌گاه کلی در دو سوی تیر استفاده کردند و تیر را منشوری فرض کردند. از سوی دیگر، لی و که [۴] به تحلیل تیر اویلر – برنولی نامنشوری با شرایط تکیه‌گاه کلی پرداختند. تحلیل تیرهای دو دهانه، با فرض وجود تکیه‌گاه مفصلی در میانه تیر نیز توسط رائو صورت پذیرفت [۵]. مأموریزی و همکاران [۶]، معادله کلی فرکانس تیرهای اویلر – برنولی یکدهانه منشوری را با شرایط تکیه‌گاه کلی ارائه داده و سپس معادله مذکور را برای چهل و پنج ترکیب متفاوت از شرایط تکیه‌گاهی خلاصه نمودند. بعد از آن مأموریزی و پلیس، در پژوهشی به مقایسه فرکانس‌های تیر اویلر – برنولی و تیر تیموشنکو<sup>۴</sup> با شرط تکیه‌گاهی مفصل – مفصل و همچنین وجود جرم بر روی تیر در مکان دلخواه پرداختند [۷].

<sup>1</sup> Residual function

<sup>2</sup> Separation of variables method

<sup>3</sup> Elastic foundation

<sup>4</sup> Timoshenko beam

پس از آن، فرکانس‌های تیر با شرایطِ تکیه‌گاهِ کلی و وجودِ جرم متمرکز در مکانِ دلخواه بر روی تیر، با استفاده از روشِ دقیق حاصل شدند [۸]. سپس مالیک و دنگ [۹]، با بهره‌گیری از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی، به تحلیلِ ارتعاشِ آزادِ تیر اویلر – برنولی پرداخته و فرکانس‌های حاصل از این روش را برای چند حالت از شرایطِ تکیه‌گاهی ارائه دادند. متذکر می‌گردد که روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی، روشی نیمه‌تحلیلی – نیمه‌عددی می‌باشد که مبتنی بر سری تیلور است که در سال ۱۹۸۶، برای اولین‌بار، توسطِ ژو معرفی گردید [۱۰]. تاریخچه روشِ تبدیل دیفرانسیلی تا سال ۲۰۱۲، توسطِ برویلر [۱۱]، به صورتِ کامل موردِ بررسی قرار گرفته است. در ادامه، معادله فرکانسی تیر اویلر – برنولی با استفاده از سری فوریه تحت شرایطِ تکیه‌گاهی کلی موردِ بررسی قرار گرفت [۱۲]. همچنین مقایسه بینِ سری فوریه سینوسی و کسینوسی برای تیر با شرایطِ تکیه‌گاهِ کلی نیز توسطِ لی انجام گرفت [۱۳]. رُسا و همکاران [۱۴] به کاربردِ نرم‌افزارِ متمتیکا در تحلیلِ دینامیکی تیر منشوری با شرایطِ تکیه‌گاهی کلی و همچنین وجودِ جرم و میراگر پرداختند. سپس رُسا و مائوریزی، کاربردِ تابعِ پسل در تحلیلِ تیر نامنشوری اویلر – برنولی و با درنظر گرفتنِ شرایطِ تکیه‌گاهِ کلی و همچنین وجودِ جرم و میراگر را موردِ بررسی قرار دادند [۱۵]. درنهایت رُسا و همکاران [۱۶] به تحلیلِ ارتعاشِ آزادِ تیر نامنشوری با تغییراتِ نمایی پرداختند.

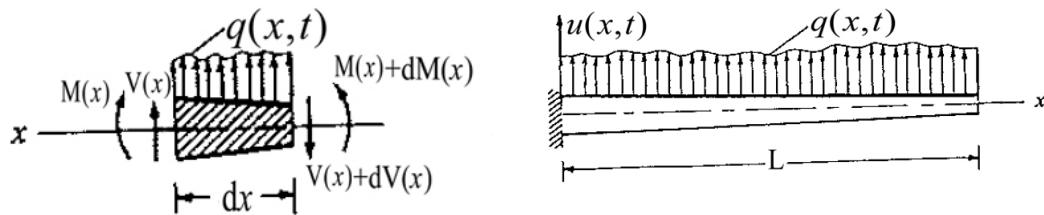
پس از مرورِ پیشینهٔ پژوهش، در بخشِ بعد، به استخراجِ معادله دیفرانسیلِ حاکم بر تیر اویلر – برنولی پرداخته می‌شود.

## ۲-۳- معادله تیر اویلر – برنولی در حالتِ دینامیکی

تا کنون، مدل‌های گوناگونی برای تبیینِ رفتارِ تیرها ارائه شده است که یکی از معروف‌ترین و پرکاربردترین آن‌ها، مدلِ اویلر – برنولی است. شایانِ ذکر است، طبقِ این نظریه، مقطع‌های مستوی عمود بر محورِ مرکزی، پس از خمین همچنان مسطح و عمود بر محورِ مرکزی می‌مانند. همچنین

فرض می‌شود که محور مرکزی از سطح مقطع‌های تیر می‌گذرد. اگر محور  $x$ ، محور طولی عضو و محورهای اصلی مقطع  $y$  و  $z$  باشند، لنگر خمشی و نیروی برشی که در صفحه  $xy$  عمل می‌نمایند، تنها سبب تغییر شکل در همین صفحه خواهند گردید. علاوه بر آن تغییرات کرنش در ارتفاع خطی فرض می‌شود [۱۷].

برای به دست آوردن معادله حاکم بر تیرها، شکل ۱-۲-الف درنظر گرفته می‌شود. طول، صلبیت خمشی، چگالی و سطح مقطع تیر، به ترتیب، با  $L$ ،  $EI$ ،  $\rho$  و  $A$  نمایش داده می‌شود. بار خارجی واردشده بر تیر با  $q(x, t)$  درنظر گرفته شده و در نهایت،تابع تغییر مکان تیر با  $u(x, t)$  نشان داده می‌شود.



ب - دیاگرام آزاد نیروها

الف - شمای کلی تیر

شکل ۱-۲ خیز و جهت‌های قراردادی تیر [۱۸]

در شکل ۱-۲-ب، قطعه‌ای از تیر به طول  $dx$  جدا شده و نیروهای وارد بر آن رسم شده‌اند. با نوشتن تعادل در راستای محور  $y$ ، داریم:

$$V(x) + q(x, t)dx - \left( V(x) + \frac{\partial V(x)}{\partial x} dx \right) = \rho A dx \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (1-2)$$

که در آن  $V(x)$  نشان‌دهنده نیروی برشی است. رابطه (۱-۲)، پس از ساده‌کردن، به صورت رابطه (۲-۲) نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} + \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = q(x, t) \quad (2-2)$$

از سوی دیگر، رابطه‌ای بین لنگر خمشی،  $M(x)$ ، و نیروی برشی،  $V(x)$ ، در مقطع برقرار است که به صورت رابطه (۳-۲) بیان می‌گردد [۱۸]:

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (3-2)$$

افزون بر آن، لنگر خمشی را می‌توان به صورت رابطه (۴-۲) نیز بیان کرد [۱۸]:

$$M(x) = EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \quad (4-2)$$

حال با قراردادن روابط (۳-۲) و (۴-۲) در رابطه (۲-۲)، داریم:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (5-2)$$

معادله (۵-۲)، معادله حاکم بر تیر اویلر - برنولی در حالت دینامیکی است. بدیهی است اگر تابع خیز

تیر، تابع زمان نباشد و به عبارت دیگر، مسئله استاتیکی باشد، معادله به فرم زیر تبدیل خواهد شد:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right] = q(x) \quad (6-2)$$

حال با فرض منشوری بودن تیر و انتقال معادله (۵-۲) به حوزه فرکانس، و همچنین صفر قراردادن

$q(x,t)$ ، که بیانگر ارتعاش آزاد تیر است، معادله مذکور به صورت رابطه (۷-۲) بازنویسی می‌گردد:

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - m \omega^2 u(x) = 0 \quad (7-2)$$

در رابطه فوق،  $m$  جرم واحد طول تیر یا همان  $\rho A$  است. همچنین  $\omega$  نشان‌دهنده فرکانس طبیعی

تیر می‌باشد. شرایط مرزی در کلی ترین حالت که با وجود چهار فنر در ابتدا و انتهای تیر همراه است،

با توجه به نامگذاری فنرهای انتهایی دو سر تیر در شکل ۲-۲، به صورت روابط (۸-۲) تا (۱۱-۲)

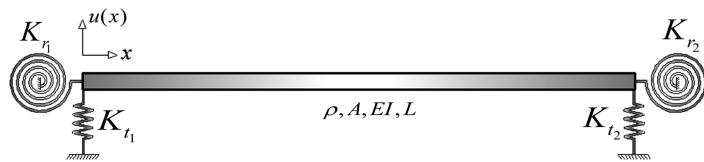
درمی‌آیند [۱۳]:

$$K_{t_1} u(x) \Big|_{x=0} = -EI \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \quad (8-2)$$

$$K_{r_1} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=0} = EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} \quad (9-2)$$

$$K_{t_2} u(x) \Big|_{x=L} = EI \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \Big|_{x=L} \quad (10-2)$$

$$K_{r_2} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = -EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=L} \quad (11-2)$$



شکل ۲-۲ تیر با تکیه‌گاه کلی [۱۹]

در روابط بالا،  $K_{t_1}$  و  $K_{t_2}$  ثابت‌های فنرهای انتقالی و  $K_{r_1}$  و  $K_{r_2}$  ثابت‌های فنرهای دورانی است.

برای بی‌بعد ساختن معادله (۷-۲) و شرایط مرزی موجود در روابط (۸-۲) الی (۱۱-۲)، گر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (12-2)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲-۲) در رابطه (۷-۲) داریم:

$$\frac{EI}{L^4} \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} - m\omega^2 u(\xi) = 0 \quad (13-2)$$

در ادامه، طرفین رابطه (۱۳-۲) را در ثابت  $L^4/EI$  ضرب می‌کنیم. نتیجه به صورت رابطه (۱۴-۲)

در می‌آید:

$$\frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} - \mu^2 u(\xi) = 0 \quad (14-2)$$

که در رابطه (۱۴-۲)  $\mu^2$ ، یا مربع پارامتر فرکانسی، به صورت رابطه (۱۵-۲) تعریف می‌شود:

$$\mu^2 = \frac{m\omega^2 L^4}{EI} \quad (15-2)$$

در ادامه، شرایطِ مرزیِ روابطِ (۱۱-۲) تا (۱۱-۸) را، به فرمِ بی بعدشده بازنویسی می کنیم:

$$K_1 u(\xi) \Big|_{\xi=0} = - \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \Big|_{\xi=0} \quad (16-2)$$

$$K_2 \frac{du(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=0} = \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=0} \quad (17-2)$$

$$K_3 u(\xi) \Big|_{\xi=1} = \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \Big|_{\xi=1} \quad (18-2)$$

$$K_4 \frac{du(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=1} = - \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \Big|_{\xi=1} \quad (19-2)$$

در روابطِ بالا،  $K_1$  تا  $K_4$  که نشان دهنده سختی های بی بعدشده هستند، به صورت زیر تعریف می-

شوند:

$$K_1 = \frac{L^3}{EI} K_{t_1} \quad (20-2)$$

$$K_2 = \frac{L}{EI} K_{r_1} \quad (21-2)$$

$$K_3 = \frac{L^3}{EI} K_{t_2} \quad (22-2)$$

$$K_4 = \frac{L}{EI} K_{r_2} \quad (23-2)$$

معادله (۱۴-۲) به همراه شرایطِ مرزی بیان شده در روابطِ (۱۶-۲) تا (۱۹-۲)، معادله مقدار مرزی بی بعدشده حاکم بر ارتعاش آزادِ تیرهای اویلر - برنولی است.

همان طور که در شکل ۲-۲ نمایش داده شده است، تیر تحت شرایطِ تکیه گاهی کلی و با چهار فندر دو انتهای نیر است. البته چهار حالت کلاسیکِ مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، گیردار - آزاد و درنهایت مفصل - گیردار که حائز اهمیت هستند، با تنظیم سختی فنرها از همین مدل قابل استخراجند. برای مدل سازی تکیه گاهِ مفصل، بایستی  $\infty \rightarrow K_t$  و  $0 \rightarrow K_r$  در نظر گرفته شود. به صورت مشابه، برای مدل سازی تکیه گاهِ گیردار بایستی  $\infty \rightarrow K_r$  و  $\infty \rightarrow K_t$  لحاظ شود. در نهایت، انتهای آزادِ تیر نیز با در نظر گرفتن  $0 \rightarrow K_t$  و  $0 \rightarrow K_r$  مدل سازی خواهد شد.

پس از استخراج مسئله مقدار مرزی<sup>۱</sup> مورد بررسی، نوبت به حل آن می‌رسد. در ادامه، روش‌های پتروف – گالرکین، گالرکین و تجمع محلی، به عنوان سه روش مهم باقیمانده‌های وزن‌دار، به عنوان شیوه‌های تقریبی حل مسائل مقدار مرزی، به صورت کامل توضیح داده خواهد شد و سپس، معادله (۲۴-۲) توسط هر کدام از روش‌های مذکور حل خواهد گردید. لازم به ذکر است که در این پایان‌نامه، از روش تبدیل دیفرانسیلی، در کنار حل دقیق، برای صحتسنجی پاسخ‌های حاصل از سه روش مذکور استفاده شده است.

## ۲-۴- روش باقیمانده وزن‌دار

روش‌های باقیمانده وزن‌دار بر صفر کردن تابع وزن‌دار باقیمانده در طول دامنه مدنظر استوارند [۱۸]. رابطه‌سازی روش مذکور، در ادامه، و با استفاده از مرجع [۱۸] شرح داده خواهد شد. معادله دیفرانسیل به فرم کلی زیر مدنظر است:

$$\mathbf{L}(u(x)) = g(x) \quad (24-2)$$

که در آن  $\mathbf{L}$  عملگر دیفرانسیلی است. متغیر مستقل معادله (۲۴-۲)،  $x \in [x_b, x_e]$  است که  $x_b$  و  $x_e$  به ترتیب، نقطه آغازین و نقطه انتهایی دامنه هستند.  $g(x)$  نیز تابعی به ذکر است که در اصطلاح، عامل ناهمگن‌ساز معادله دیفرانسیل نام دارد. بدیهی است اگر  $g(x)$  معلوم از  $x$  است که در اصطلاح، عامل ناهمگن‌ساز معادله دیفرانسیل نام دارد. بدیهی است اگر  $g(x)$  برابر صفر باشد، معادله (۲۴-۲) همگن و در غیر این صورت ناهمگن است. هدف از حل معادله (۲۴-۲) یافتن تابع مجھول  $u(x)$  است. در ادامه، روش دستیابی به  $u_{app}(x)$  یا جواب تقریبی معادله دیفرانسیل (۲۴-۲) ارائه می‌شود. تابع  $R(x)$ ، که تابع باقیمانده نام دارد، به صورت رابطه (۲۵-۲) تعریف می‌گردد:

$$R(x) = \mathbf{L}(u_{app}(x)) - \mathbf{L}(u(x)) \quad (25-2)$$

<sup>۱</sup> Boundary value problems

رابطه اخیر را می‌توان با توجه به رابطه (۲۴-۲)، به صورت رابطه (۲۶-۲) نوشت:

$$R(x) = L(u_{app}(x)) - g(x) \quad (26-2)$$

$R(x)$  تفاوت میان پاسخ دقیق و تقریبی مسأله است. بدیهی است زمانی که  $u_{app}(x)$  بر  $u(x)$  منطبق گردد،  $R(x)$  برابر با صفر می‌شود که هدف نهایی و البته نه لزوماً دسترس پذیر تمامی روش‌های تقریبی است. اساس روش‌های باقیمانده وزن‌دار رابطه (۲۷-۲) است:

$$\int_{x_b}^{x_e} w(x) R(x) dx = 0 \quad (27-2)$$

که در آن  $w(x)$  تابع وزن نام دارد و انتخاب آن، اساس نامگذاری روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین و تجمع محلی است. آشکار است که این روش‌ها به جای صفر کردن  $R(x)$ ، انتگرالی وزن‌دار از  $R(x)$  را صفر می‌کنند. از سوی دیگر، شرایط مرزی برای معادله (۲۴-۲) به صورت روابط (۲۸-۲) و (۲۹-۲) تعریف می‌گردد:

$$u^{(r)}(x_b) = h_r \quad (28-2)$$

$$u^{(l)}(x_e) = h_l \quad (29-2)$$

که در روابط (۲۸-۲) و (۲۹-۲)،  $l = 0, 1, 2, \dots, p-1$  و  $r = 0, 1, 2, \dots, p-1$  هستند. لازم به ذکر است که  $h_r$  و  $h_l$  اعدادی حقیقی هستند و  $p$  عددی طبیعی و بالاترین مرتبه مشتق موجود در رابطه (۲۴-۲) است.

در ادامه  $u_{app}(x)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_{app}(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \quad (30-2)$$

در رابطه (۳۰-۲)،  $c_j$  ها ثوابت مجھولند. همچنین  $\phi_0(x)$  تابعی معلوم است که باید در شرایط مرزی مسأله، یعنی روابط (۲۸-۲) و (۲۹-۲)، صدق کند. علاوه بر آن  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$  تابعی معلومی هستند که می‌بایست در ورژن همگن شرایط مرزی صدق کنند. به سخن دیگر،  $\phi_1(x), \phi_2(x), \dots, \phi_n(x)$  باید شرایط مرزی (۲۸-۲) و (۲۹-۲) را با فرضی صفر بودن  $h_r$  و  $h_l$  ارضاء نمایند. تنها شرط لازم برای انتخاب

تا  $\phi_n(x)$ ، مستقل خطی بودن آنها است. با قراردادن رابطه (۳۰-۲) در رابطه (۲۶-۲) داریم:

$$R(x) = L \left( \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x) + \phi_0(x) \right) - g(x) \quad (31-2)$$

با توجه به خطی بودن عملگر  $L$ ، می‌توان رابطه (۳۱-۲) را بسط داد و به صورت رابطه (۳۲-۲) نوشت:

$$R(x) = c_1 L \phi_1(x) + c_2 L \phi_2(x) + c_3 L \phi_3(x) + \cdots + c_n L \phi_n(x) + (L \phi_0(x) - g(x)) \quad (32-2)$$

آشکار است که در رابطه (۳۲-۲)، تعداد مجهولات  $c_j$  برابر با  $n$  است. پس بایستی با انتخاب تعدادی تابع وزن، دقیقاً به تعداد ثوابت مجهول  $c_j$ ، به دستگاه  $n$  معادله و  $n$  مجهول رسید. در این راستا، معادله  $i$  ام این دستگاه از قراردادن رابطه (۳۲-۲) در رابطه (۲۷-۲) به صورت زیر حاصل می-

گردد:

$$\int_{x_b}^{x_e} w_i(x) (c_1 L \phi_1(x) + c_2 L \phi_2(x) + \cdots + c_n L \phi_n(x) + (L \phi_0(x) - g(x))) dx = 0 \quad (33-2)$$

که در آن  $w_i(x)$  تابع وزن  $i$  ام و  $i = 1, 2, \dots, n$ . رابطه (۳۳-۲) را می‌توان به صورت رابطه (۳۴-۲) نوشت:

$$\begin{aligned} & \left( \int_{x_b}^{x_e} w_i(x) L \phi_1(x) dx \right) c_1 + \left( \int_{x_b}^{x_e} w_i(x) L \phi_2(x) dx \right) c_2 + \left( \int_{x_b}^{x_e} w_i(x) L \phi_3(x) dx \right) c_3 \\ & + \dots + \left( \int_{x_b}^{x_e} w_i(x) L \phi_n(x) dx \right) c_n = \int_{x_b}^{x_e} w_i(x) (g(x) - L \phi_0(x)) dx \end{aligned} \quad (34-2)$$

در ادامه، می‌توان از فرم ماتریسی بهره جست تا روابط اخیر مناسب‌تر و کاراتر بیان گردد:

$$[\mathbf{a}] \{ \mathbf{c} \} = \{ \mathbf{b} \} \quad (35-2)$$

$a_{ij}$ ، درایه سطر  $i$  ام و ستون  $j$  ام ماتریس  $\mathbf{a}$ ، و  $b_i$ ، درایه سطر  $i$  ام بردار  $\mathbf{b}$ ، به ترتیب، به صورت

زیر تعریف می‌شوند:

$$a_{ij} = \int_{x_b}^{x_e} w_i(x) L \phi_j(x) dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (36-2)$$

$$b_i = \int_{x_b}^{x_e} w_i(x) (g(x) - L \phi_0(x)) dx \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (37-2)$$

در روابط (۳۶-۲) و (۳۷-۲)،  $i, j = 1, 2, \dots, n$  است. تا بدینجا، روش باقیمانده وزن‌دار و فرمول‌بندی

آن در حالت کلی توضیح داده شد. در ادامه، به توضیح روش‌های پتروف – گالرکین، گالرکین، تجمع محلی و روش تبدیل دیفرانسیلی خواهیم پرداخت.

## ۲-۵-روش پتروف – گالرکین

همان‌طور که پیش از این بیان گردید، انتخاب توابع وزن  $(\xi)_i w$ ، اساس نامگذاری روش‌های متفاوت باقیمانده‌های وزن‌دار است. در روش پتروف – گالرکین، انتخاب تابع وزن  $(\xi)_i w$  کاملاً اختیاری است. لذا توابع وزن برای حل معادله (۱۴-۲) به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$w_i(\xi) = \xi^i \quad (38-2)$$

که در آن  $i = 1, 2, \dots, n$  است. در ادامه،  $(\xi)_j \phi$  را به فرم زیر درنظر می‌گیریم:

$$\phi_0(\xi) = 0 \quad (39-2)$$

$$\phi_j(\xi) = \xi^{j+3} + A\xi^{j+2} + B\xi^2 + C\xi + D \quad (40-2)$$

با توجه به آن‌چه قبلاً بیان گردید،  $(\xi)_j \phi$  باید در شرایط مرزی اصلی و  $(\xi)_j \phi$ ، در ورژن همگن شرایط مرزی صدق کند. از آنجا که هر چهار شرط مرزی مسئله همگن‌اند،  $(\xi)_j \phi$  صفر می‌شود. از آنجا که  $(\xi)_j \phi$ ‌ها باید در شرایط مرزی صدق کنند، باید آن‌ها را در شرایط مرزی مسئله، که در روابط (۱۶-۲) تا (۱۹-۲) بیان گردیدند، بگذاریم تا  $A$ ،  $B$ ،  $C$  و  $D$  به دست آیند. نتیجه کار به قرار روابط (۴۱-۲) الی (۴۴-۲) است:

$$K_1 \left( \xi^{j+3} + A\xi^{j+2} + B\xi^2 + C\xi + D \right) = - \left( (j+3)(j+2)(j+1)\xi^j + A(j+2)(j+1)j\xi^{j-1} \right) \quad (41-2)$$

$$K_2 \left( (j+3)\xi^{j+2} + A(j+2)\xi^{j+1} + 2B\xi + C \right) = (j+3)(j+2)\xi^{j+1} + A(j+2)(j+1)\xi^j + 2B \quad (42-2)$$

$$K_3 \left( \xi^{j+3} + A\xi^{j+2} + B\xi^2 + C\xi + D \right) = (j+3)(j+2)(j+1)\xi^j + A(j+2)(j+1)j\xi^{j-1} \quad (43-2)$$

$$K_4((j+3)\xi^{j+2} + A(j+2)\xi^{j+1} + 2B\xi + C) = -(j+3)(j+2)\xi^{j+1} - A(j+2)(j+1)\xi^j - 2B \quad (44-2)$$

لازم به یادآوری است که در روابط (41-2) و (42-2) و (43-2) و (44-2)  $\xi = 1$

است. روابط (41-2) تا (44-2) تشکیل یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهول می‌دهند که پس از

اندکی ساده‌سازی، به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{cases} D = 0 \\ -2B + K_2 C = 0 \\ K_3(1 + A + B + D) - (j+2)(j+1)(j(A+1)+3) = 0 \\ (j+2)(A(K_4 + j+1) + j+3) + K_4(j+3+2B+C) + 2B = 0 \end{cases} \quad (45-2)$$

با حل دستگاه فوق، ثوابت مجهول به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرند:

$$A = \frac{j^3 + 6j^2 + 11j + 6 - K_3}{-j^3 - 3j^2 - 2j + K_3} + \frac{\Psi_1}{\Psi_2} \quad (46-2)$$

$$B = \frac{\Psi_3}{\Psi_4} \quad (47-2)$$

$$C = \frac{2\Psi_3}{K_2\Psi_4} \quad (48-2)$$

$$D = 0 \quad (49-2)$$

که مقادیر  $\Psi_1$  تا  $\Psi_4$  به شرح روابط (50-2) تا (53-2) است:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= K_3(2 + K_2) \left( -K_2(j^4 + j^3(8 + 2K_4) + j^2(23 + 12K_4) + j(28 + 2K_3 + 22K_4)) \right. \\ &\quad \left. + 4K_3 + 12K_4 + K_3K_4 + 12 \right) \end{aligned} \quad (50-2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 &= K_2(-j^3 - 3j^2 - 2j + K_3) \left( -2K_4(-j^3 - 3j^2 - 2j + K_3) \right. \\ &\quad \left. - 2K_3(j^2 + j(K_4 + 3) + 2K_4 + 2) \right. \\ &\quad \left. + K_2(-K_3(j^2 + j(K_4 + 3) + 2K_4 + 2) + (2K_4 + 2)(-j^3 - 3j^2 - 2j + K_3)) \right) \end{aligned} \quad (51-2)$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= K_2 \left( -j^4 + j^3(-2K_4 - 8) + j^2(-12K_4 - 23) + j(-22K_4 - 2K_3 - 28) \right. \\ &\quad \left. - 4K_3 - 12K_4 - K_3K_4 - 12 \right) \end{aligned} \quad (52-2)$$

$$\begin{aligned}\Psi_4 = & 2K_4(-2j^3 - 3j^2 - j + K_3) - (2K_3 + K_2K_3)(j^2 + j(K_4 + 3) + 2K_4 + 2) \\ & + 2K_2(K_4 + 1)(-j^3 - 3j^2 - 2j + K_3)\end{aligned}\quad (53-2)$$

بدیهی است با قراردادن نتایج فوق در رابطه (۴۰-۲)، توابع  $(\xi)_j \phi$  به دست می‌آیند.

حال که توابع  $(\xi)_i w$  و  $(\xi)_j \phi$  به دست آمدند، بنابر رابطه (۳۶-۲) می‌توان درایه‌های ماتریس  $a$  را محاسبه کرد. از طرف دیگر، کلیه درایه‌های بردار  $b$  به دلیل صفر بودن  $(\xi)_0 \phi$  و  $(\xi)_0 g$  در رابطه (۳۷-۲)، برابر صفر است که این امر، به همگن شدن دستگاه (۳۵-۲) می‌انجامد. یادآوری می‌کند، برای اینکه دستگاه‌های همگن پاسخ غیر صفر داشته باشند، می‌بایست دترمینان ماتریس ضرایب آنها صفر شود. بنابراین، برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی تیر، بایستی دترمینان ماتریس  $a$  برابر صفر شود. با انجام عملیات فوق، مقادیر حاصل برای فرکانس‌های طبیعی تیر به دست می‌آید که در جداول ۲-۲ الی ۴-۲، برای حالتهای تکیه‌گاهی متفاوت، ارائه خواهد شد. در ستون خطای نیز، مقدار خطای پاسخ به دست آمده در قیاس با حل تحلیلی و فرم بسته که در بخش ۹-۲ به دست خواهد آمد، بیان می‌گردد.

## ۲-۶- روش گالرکین

در روش گالرکین، انتخاب توابع وزن  $(\xi)_i w$  همانند روش پتروف – گالرکین اختیاری نبوده و برابر همان توابع  $(\xi)_j \phi$  که پیش از این برای تخمین تابع مجهول تعریف شدن، انتخاب می‌گردد:

$$w_i(\xi) = \phi_j(\xi) \quad (54-2)$$

که در آن  $n = 1, 2, 3, \dots, n$  و  $i = j$  است. از فواید این انتخاب آن است که ماتریس  $a$  متقارن می‌گردد و این امر به کاهش حجم محاسبات می‌انجامد. لازم به ذکر است که در این روش نیز توابع  $(\xi)_j \phi$  همانند روش پتروف – گالرکین دقیقاً همانند روابط (۳۹-۲) تا (۵۳-۲) انتخاب می‌گردند. مقادیر حاصل از این روش برای فرکانس‌های طبیعی تیر در جداول ۲-۲ الی ۴-۲ برای حالتهای تکیه‌گاهی متفاوت درج شده است. در ستون خطای نیز همانند روش قبل، مقدار خطای پاسخ به دست-

آمده از روش گالرکین در قیاس با حل دقیق، ارائه گردیده است.

## ۷-۲-روش تجمع محلی

در روش تجمع محلی،تابع باقیمانده در  $n$  نقطه انتخابی از دامنه برابر با صفر قرار داده می شود تا دستگاه  $n$  معادله و  $n$  مجھول حاصل گردد. در این راستا، توابع وزن  $(\xi_i)$  به کمک رابطه (۵۵-۲)

تعریف می گردد:

$$w_i(\xi) = \delta(\xi - \xi_i) \quad (55-2)$$

که در آن  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  و  $\xi_i$  نقاطی از دامنه هستند. همچنین  $(\xi_i)$  تابع دلتای دیراک است که

به صورت زیر تعریف می گردد:

$$\delta(\xi - \xi_i) = \begin{cases} \infty & \xi = \xi_i \\ 0 & \xi \neq \xi_i \end{cases} \quad (56-2)$$

تابع دلتای دیراک دارای خاصیت بسیار مهم دیگری نیز هست [۱۸]:

$$\int_{\xi_b}^{\xi_e} \delta(\xi - \xi_i) f(\xi) d\xi = f(\xi_i) \quad (57-2)$$

که در رابطه بالا  $f$  تابع دلخواهی از  $\xi$  است. همچنین  $\xi_e$  و  $\xi_b$  نقطه ابتدایی و انتهایی دامنه  $\xi$

می باشد. بنابراین بر اساس رابطه بالا می توان نوشت:

$$\int_0^1 \delta(\xi - \xi_i) L\phi_j(\xi) d\xi = L\phi_j(\xi_i) \quad (58-2)$$

در این روش برای تشکیل درایه های ماتریس  $a$ ، نیازی به انتگرال گیری نیست و کافی است پس از

تشکیل  $L\phi_j$ ، مقدار آن را در نقاط  $\xi_i$  به دست آوریم. این امر به شدت بر سرعت این روش افزوده

و منجر به کاهش حجم محاسبات می گردد. لازم به ذکر است که توابع  $(\xi_i)$  در این روش، مشابه

آنچه در روابط (۳۹-۲) تا (۵۳-۲) بیان شده است، درنظر گرفته می شود. پاسخ های حاصل از این

روش نیز مشابه دو روش قبل، در جداول ۲-۲ الی ۴-۲ برای حالت های تکیه گاهی متفاوت درج خواهد

شد.

## ۲-۸- روش تبدیل دیفرانسیل

همان طور که پیشتر بیان شد، این روش مبتنی بر بسط تیلور بوده و برای اولین بار در سال ۱۹۸۶ معرفی و مورد استفاده قرار گرفت. در این روش، پاسخ معادله دیفرانسیل یا همان  $u(x)$  به صورت رابطه (۵۹-۲) تعریف می‌شود:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U[k] (x - x_0)^k \quad (59-2)$$

که در آن،  $U[k]$  جواب معادله دیفرانسیل است که به آن تابع اصلی<sup>۱</sup> گویند و  $[k, U]$ ، تابع تبدیل یافته<sup>۲</sup> است. لازم به ذکر است که  $x_0$  نقطه‌ای است که سری حول آن گسترش داده می‌شود و معمولاً  $x_0 = 0$  در نظر گرفته می‌شود. همان‌طور که بیان شد،  $U[k]$  تابع تبدیل یافته  $u(x)$  است و به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$U[k] = \left. \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0} \quad (60-2)$$

فرم کاربردی رابطه (۵۹-۲) به صورت زیر است:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} U[k] (x - x_0)^k \quad (61-2)$$

که در آن،  $N$  تعداد جملات سری است که با توجه به نرخ همگرایی مسئله انتخاب خواهد شد. با قراردادن رابطه (۶۰-۲) در رابطه (۶۱-۲)، پاسخ معادله دیفرانسیل مدنظر به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} \left( \left. \frac{d^k u(x)}{dx^k} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^k \right) \quad (62-2)$$

در جدول ۱-۲، تعدادی از تبدیلات پرکاربرد ارائه شده است. خاطر نشان می‌کند، با اعمال روش مذکور به معادلات دیفرانسیل، رابطه‌ای معروف به رابطه بازگشتی<sup>۳</sup> حاصل خواهد شد که متغیر آن

<sup>1</sup> Original function

<sup>2</sup> Transformed function

<sup>3</sup> Recurrence relation

است. با قراردادن مقادیر  $k$ , توابع تبدیل یافته  $U[k]$  به دست می‌آیند. در بخش بعد، این کار برای معادله دیفرانسیل مورد بحث در این فصل صورت می‌پذیرد.

### جدول ۱-۲ تعدادی از عملیات روش تبدیل دیفرانسیلی [۲۰]

تابع تبدیل یافته	تابع اصلی
$U[k] = W[k] \pm V[k]$	$u(x) = w(x) \pm v(x)$
$U[k] = \alpha W[k] \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$u(x) = \alpha w(x) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
$U[k] = (k+1)W[k+1]$	$u(x) = \frac{d w(x)}{dx}$
$U[k] = (k+1)(k+2)W[k+2]$	$u(x) = \frac{d^2 w(x)}{dx^2}$
$U[k] = (k+1)(k+2)\dots(k+m)W[k+m]$	$u(x) = \frac{d^m w(x)}{dx^m}$
$U[k] = \sum_{l=0}^k V[l] W[k-l]$	$u(x) = v(x)w(x)$
$U[k] = \sum_{l_2=0}^k \sum_{l_1=0}^{l_2} V[l_1] W[l_2 - l_1] G[k - l_2]$	$u(x) = v(x)w(x)g(x)$
$U[k] = \delta(k-m), \quad \delta(k-m) = \begin{cases} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{cases}$	$u(x) = x^m$
$U[k] = \frac{\alpha^k}{k!}$	$u(x) = \exp[\alpha x]$

### ۹-۲ اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی

پس از معرفی اصول اولیه و مبانی روش تبدیل دیفرانسیلی در بخش پیشین، حال برآنیم تا معادله دیفرانسیل (۱۴-۲) را به روش مذکور حل نماییم. در این راستا و با استفاده از قوانین بیان شده در جدول ۱-۲، به اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی بر معادله (۱۴-۲) می‌پردازیم که رابطه بازگشتی حاصل به صورت رابطه (۶۳-۲) در می‌آید:

$$U[k+4] = \frac{\mu^2 U[k]}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \quad (63-2)$$

که در آن،  $N = 0, 1, 2, \dots$  و  $U[k]$  تابع تبدیل یافته ( $\tilde{u}$ ) می‌باشد. همان‌طور که در رابطه (63-2)

مشخص است، با قراردادن مقادیر  $k$  در رابطه بازگشتی حاصل،  $U[4]$  بر حسب  $U[0], U[1], U[2], U[3]$  و ... مشخص است، با قراردادن مقادیر  $k$  در رابطه بازگشتی حاصل،  $U[4]$  بر حسب  $U[0], U[1], U[2], U[3]$  و ... محاسبه خواهد شد. پس لازم

است که نخست مقادیر  $U[0], U[1], U[2]$  و  $U[3]$  را محاسبه نماییم که برای انجام این کار از

شرایط مرزی مسئله کمک می‌گیریم. لازم به یادآوری است که در این روش، پاسخ به صورت یک

سری و به فرم رابطه (62-2) درنظر گرفته می‌شود. لذا با قراردادن سری مذکور در رابطه (16-2) و با

فرض  $\xi_0 = 0$ ، نقطه‌ای که حول آن سری را بسط می‌دهیم،  $EI = 1$  و  $L = 1$  داریم:

$$K_1(U[1]\xi + U[2]\xi^2 + U[3]\xi^3 + \dots) = -(6U[3] + 24U[4]\xi + 120U[5]\xi^2 + \dots) \quad (64-2)$$

با توجه به این که شرط مرزی (16-2) در  $\xi = 0$  معتبر است، پس در رابطه فوق،  $\xi = 0$  قرار داده

می‌شود که نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$U[3] = \frac{K_1 U[0]}{-6} \quad (65-2)$$

با انجام عملیات مشابه برای شرط مرزی (17-2)، داریم:

$$U[2] = \frac{K_2 U[1]}{2} \quad (66-2)$$

با توجه به روابط (65-2) و (66-2)، سری حاصل از رابطه (62-2) بر حسب  $U[0]$  و  $U[1]$  خواهد

بود که با یافتن این دو مقدار، تابع ( $\tilde{u}$ ) حاصل خواهد شد. برای این منظور، از شرایط مرزی انتهایی

تیر که در روابط (18-2) و (19-2) بیان شده است، بهره می‌جوییم. پس از اعمال این دو شرط مرزی،

دستگاهی همانند رابطه (67-2) حاصل خواهد شد:

$$[\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} U[0] \\ U[1] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (67-2)$$

که در آن  $\mathbf{A}$  ماتریسی  $2 \times 2$  است. همچنین از آن جایی که تحلیل ارتعاش آزاد تیر مدنظر است، طرف

راست رابطه (۶۷-۲) برابر صفر است. حال برای این که دستگاه موجود جواب‌های غیربدیهی داشته باشد، کافی است دترمینان ماتریس  $A$  برابر با صفر شود. از حل این معادله، مقادیر فرکанс‌های تیر حاصل خواهد شد که در جداول ۲-۲ الی ۴-۲ نمایش داده شده است.

از سوی دیگر، تأثیر تعداد جملات سری در پاسخ حاصل نیز حائز اهمیت است. به عبارت دیگر، باید به این سؤال پاسخ داد که آیا با افزایش مقدار  $N$ ، جواب‌ها (فرکанс‌های حاصل) به سمت یک مقدار واحد همگرا می‌شود و یا رفتار دیگری از خود نشان می‌دهند؟ در پاسخ به سوال فوق می‌توان از نمودارهایی تحت عنوان «نمودار همگرایی» بهره جست که در شکل‌های ۳-۲ الی ۶-۲ در بخش نتایج و بحث، به نمایش درخواهد آمد.

## ۱۰-۲- حل دقیق

برای دستیابی به حل دقیق و فرم‌بسته، معادله دیفرانسیل (۱۴-۲) را مدنظر قرار می‌دهیم. پاسخ عمومی معادله دیفرانسیل (۱۴-۲) به صورت رابطه (۶۸-۲) است [۵]:

$$u(\xi) = c_1 \sin(\mu^{0.5} \xi) + c_2 \cos(\mu^{0.5} \xi) + c_3 \sinh(\mu^{0.5} \xi) + c_4 \cosh(\mu^{0.5} \xi) \quad (68-2)$$

با قراردادن رابطه (۶۸-۲) در شرایط مرزی بیان شده در روابط (۱۶-۲) تا (۱۹-۲)، به دستگاه چهار معادله و چهار مجھول خواهیم رسید که طرف راست هر چهار معادله دستگاه مذکور، صفر خواهد بود. لذا برای یافتن پاسخ غیربدیهی دستگاه، بایستی دترمینان ماتریس ضرایب  $c_1$  تا  $c_4$  را برابر با صفر قرار دهیم؛ در نتیجه معادله (۶۹-۲) حاصل خواهد شد [۳]:

$$\begin{aligned} & (\mu^2 + K_1 K_2)(\mu^2 + K_3 K_4) - 2\mu(\mu^2 K_2 K_4 - K_1 K_3) \sin(\mu^{0.5}) \sinh(\mu^{0.5}) \\ & + (2\mu^2(K_2 K_3 + K_1 K_4) - (\mu^2 - K_1 K_2)(\mu^2 - K_3 K_4)) \cos(\mu^{0.5}) \cosh(\mu^{0.5}) \\ & - \mu^{0.5} ((\mu^2 - K_1 K_2)(\mu^2 K_4 + K_3) + (\mu^2 - K_3 K_4)(\mu^2 K_2 + K_1)) \sin(\mu^{0.5}) \cosh(\mu^{0.5}) \\ & - \mu^{0.5} ((\mu^2 - K_1 K_2)(\mu^2 K_4 - K_3) + (\mu^2 - K_3 K_4)(\mu^2 K_2 - K_1)) \cos(\mu^{0.5}) \sinh(\mu^{0.5}) = 0 \end{aligned} \quad (69-2)$$

که  $K_1$  تا  $K_4$ ، در روابط (۲۰-۲) تا (۲۳-۲) تعریف شده است. اکنون با قراردادن مقادیر مدنظر برای

سختی فنرها و سپس حل معادله فوق، نتیجه حاصل خواهد شد.

## ۱۱-۲- نتایج و بحث

در این بخش، پارامترهای فرکانسی حاصل از به کارگیری روش‌های متفاوت و تحت شرایط تکیه-گاهی گوناگون برای تیر اویلر - برنولی، در جداول ۲-۲ الی ۴-۲ به نمایش می‌آید. جداول مذکور، به ترتیب، مربوط به اولین، دومین و سومین پارامتر فرکانسی در چهار حالت تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، گیردار - آزاد و مفصل - گیردار است. در این راستا  $n$  یا تعداد توابع تقریب ( $\zeta$ ) $\neq$  ۰ که برای روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین و تجمع محلی تحت شرط تکیه‌گاهی گیردار - آزاد درنظر گرفته شده، به ترتیب، برابر با ۵، ۴ و ۱۰ است؛ و تحت سایر شرایط تکیه‌گاهی، به ترتیب، برابر با ۶، ۵ و ۱۱ می‌باشد. همچنین تعداد جملات درنظر گرفته شده برای حل به روش تبدیل دیفرانسیلی نیز برابر با ۳۷ است ( $N = 37$ ). همان‌طور که در جداول دیده می‌شود، برای هر روش ستونی تحت نام «خطا» درنظر گرفته شده است که خطای پاسخ حاصل از روش مدنظر را نسبت به حل دقیق نشان می‌دهد. برای این امر، از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\text{خطا} = \frac{|\omega_{\text{ext}} - \bar{\omega}|}{\omega_{\text{ext}}} \times 100 \quad (70-2)$$

که در رابطه (۷۰-۲)،  $\omega_{\text{ext}}$  و  $\bar{\omega}$ ، به ترتیب، فرکانس‌های حاصل از حل دقیق و روش‌های تقریبی (روش‌های باقیمانده وزن‌دار و تبدیل دیفرانسیلی) است. همان‌طور که در جداول مشخص است، روش تبدیل دیفرانسیلی کاملاً بر حل دقیق منطبق گشته و خطای این روش در هر سه فرکانس، و با توجه به هر شرایط تکیه‌گاهی، برابر با صفر است. بعد از آن، کمترین خطای مربوط به روش تجمع محلی است. نکته جالب توجه دیگر در مورد روش تجمع محلی، سرعت بالای این روش در قیاس با سایر روش‌های باقیمانده وزن‌دار است که قطعاً یکی از دلایل آن، عدم نیاز به عملیات انتگرال‌گیری در این روش است. از منظر دیگر، کلیه روش‌های مورد بررسی در یافتن اولین پارامتر فرکانسی تیر، فارغ از شرایط تکیه-

گاهی، بدون خطا عمل کرده‌اند. البته عملکرد روش‌های مذکور در یافتن دومین پارامتر فرکانسی تیر نیز خوب به نظر می‌رسد؛ زیرا بالاترین خطا در این حالت  $0.331\%$  درصد بوده است.

جدول ۲-۲ اولین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایط متفاوت تکیه‌گاهی با استفاده از روش‌های پتروف - گالرکین،

گالرکین، تجمع محلی، تبدیل دیفرانسیلی و حل دقیق

روش مورد استفاده	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)
پتروف - گالرکین			۹/۸۶۹۶	۰/۰	۲۲/۳۷۳۳	۰/۰	۳/۵۱۶۰	۱۵/۴۱۸۲	۰/۰	۱۵/۴۱۸۲
گالرکین			۹/۸۶۹۶	۰/۰	۲۲/۳۷۳۳	۰/۰	۳/۵۱۶۰	۱۵/۴۱۸۲	۰/۰	۱۵/۴۱۸۲
تجمع محلی			۹/۸۶۹۶	۰/۰	۲۲/۳۷۳۳	۰/۰	۳/۵۱۶۰	۱۵/۴۱۸۲	۰/۰	۱۵/۴۱۸۲
تبدیل دیفرانسیلی			۹/۸۶۹۶	۰/۰	۲۲/۳۷۳۳	۰/۰	۳/۵۱۶۰	۱۵/۴۱۸۲	۰/۰	۱۵/۴۱۸۲
حل دقیق			۹/۸۶۹۶	۰/۰	۲۲/۳۷۳۳	۰/۰	۳/۵۱۶۰	۱۵/۴۱۸۲	۰/۰	۱۵/۴۱۸۲

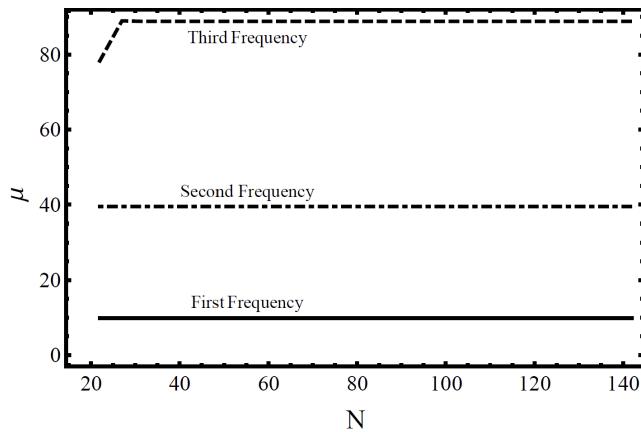
جدول ۳-۲ دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایط متفاوت تکیه‌گاهی با استفاده از روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین، تجمعِ محلی، تبدیل دیفرانسیلی و حلِ دقیق

روشِ موردِ استفاده	مفصل - مفصل	گیردار - گیردار	گیردار - آزاد	مفصل - گیردار
پتروف - گالرکین خطا (%)	۳۹/۴۷۹۷	۶۱/۶۸۸۵	۲۲/۰۳۵۱	۴۹/۹۶۳۶
	۰/۰۰۳۳	۰/۰۲۵۵	۰/۰۰۲۷	۰/۰۰۲۶
گالرکین خطا (%)	۳۹/۴۷۹۶	۶۱/۶۹۳۲	۲۲/۰۳۵۴	۴۹/۹۶۹۹
	۰/۰۰۳۰	۰/۰۳۳۱	۰/۰۰۴۱	۰/۰۱۰۰
تجمعِ محلی خطا (%)	۳۹/۴۷۸۲	۶۱/۶۷۲۲	۲۲/۰۳۴۷	۴۹/۹۶۴۸
	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۰۹	۰/۰۰۰۲
تبدیل دیفرانسیلی خطا (%)	۳۹/۴۷۸۴	۶۱/۶۷۲۸	۲۲/۰۳۴۵	۴۹/۹۶۴۹
	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
حلِ دقیق	۳۹/۴۷۸۴	۶۱/۶۷۲۸	۲۲/۰۳۴۵	۴۹/۹۶۴۹

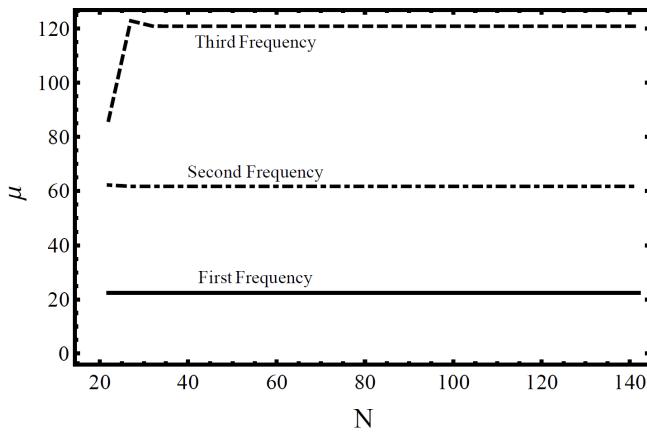
جدول ۴-۲ سومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایط متفاوت تکیه‌گاهی با استفاده از روش‌های پتروف - گالرکین، گالرکین، تجمعِ محلی، تبدیل دیفرانسیلی و حلِ دقیق

روشِ موردِ استفاده	مفصل - مفصل	گیردار - گیردار	گیردار - آزاد	مفصل - گیردار
پتروف - گالرکین خطا (%)	۸۹/۰۱۸۵	۱۲۲/۳۳۷	۶۱/۸۴۴۹	۱۰۵/۲۷۶
	۰/۲۱۶۳	۱/۱۸۶۱	۰/۲۳۹۴	۰/۹۸۶۱
گالرکین خطا (%)	۸۸/۸۵۳۴	۱۲۱/۱۳۱	۶۱/۷۶۲۸	۱۰۴/۴۰۷
	۰/۰۳۰۴	۰/۱۸۸۶	۰/۱۰۶۳	۰/۱۵۲۵
تجمعِ محلی خطا (%)	۸۸/۹۴۵۳	۱۲۱/۰۴۷	۶۱/۷۰۱۳	۱۰۴/۴۳۸
	۰/۱۳۳۹	۰/۱۱۹۱	۰/۰۰۶۶	۰/۱۸۲۳
تبدیل دیفرانسیلی خطا (%)	۸۸/۸۲۶۴	۱۲۰/۹۰۳	۶۱/۶۹۷۲	۱۰۴/۲۴۸
	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
حلِ دقیق	۸۸/۸۲۶۴	۱۲۰/۹۰۳	۶۱/۶۹۷۲	۱۰۴/۲۴۸

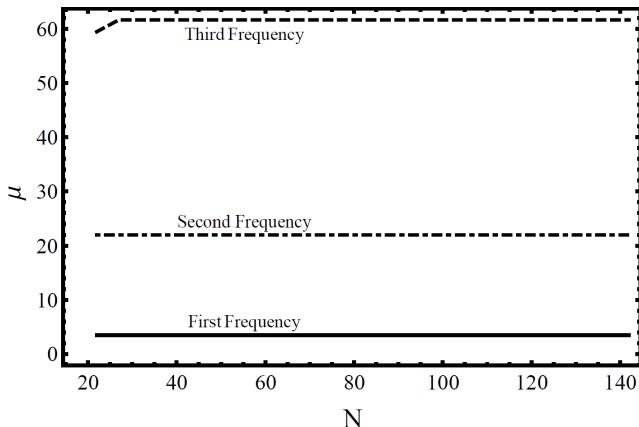
نمودارهای همگرایی مربوط به روش تبدیل دیفرانسیلی در شکل‌های ۳-۲ الی ۳-۶، به ترتیب، برای شرایطِ تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، آزاد و گیردار - مفصل رسم شده است. در این شکل‌ها، محورهای افقی و عمودی، به ترتیب، نمایش‌دهنده تعداد جملات بکار رفته در روش مذکور (N) و پارامتر فرکانسی حاصل ( $\mu$ ) هستند. در شکل‌های ۳-۲ الی ۳-۶، پاسخ‌ها با افزایش تعداد جملات همگرا شده‌اند که خود نشان از صحت روش مذکور است. در کلیه شکل‌ها تعداد جملات سری، از ۲۲ تا ۱۴۲ درنظر گرفته شده است و مشاهده می‌شود، پارامترهای فرکانسی با ۳۷ جمله از سری ( $N = 37$ )، به جواب پایدار رسیده و با افزایش جملات سری، مقدار آن‌ها ثابت مانده‌اند.



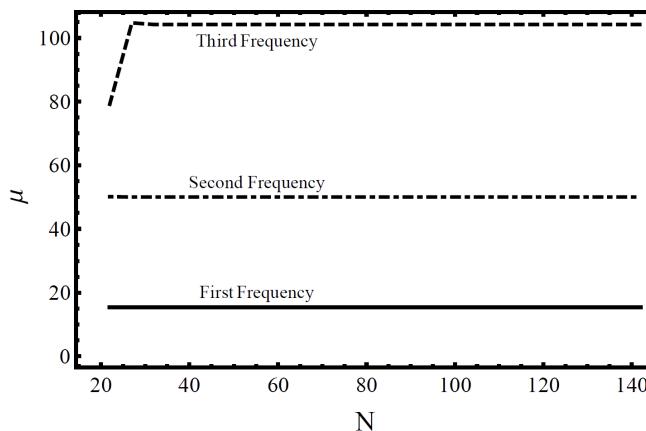
شکل ۳-۲ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر مفصل - مفصل



شکل ۳-۴ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار - گیردار



شکل ۵-۲ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار - آزاد

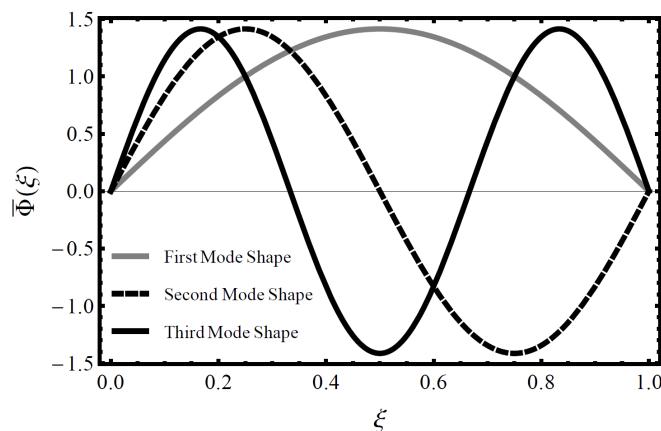


شکل ۵-۳ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار - مفصل

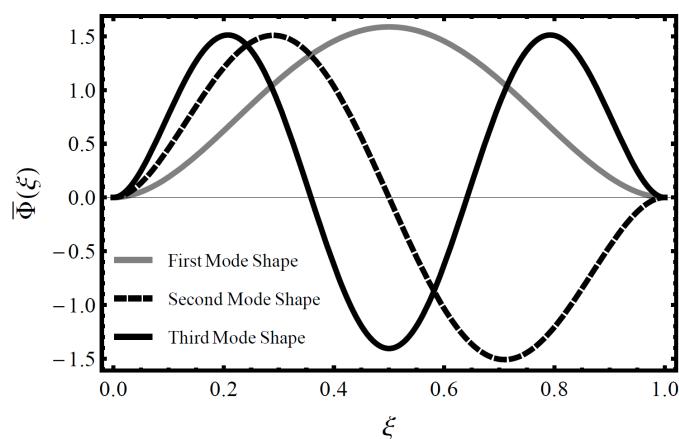
از سوی دیگر، برای نمایش شکل مودهای تیر اویلر - برنولی تحت چهار حالت تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، شکل مودها را نرمال‌سازی کردہ‌ایم. برای این امر، از رابطه زیر سود جسته‌ایم:

$$\bar{\Phi}_l(\xi) = \frac{\Phi_l(\xi)}{\sqrt{\int_0^1 m(\xi) \Phi_l^2(\xi) d\xi}} \quad (71-2)$$

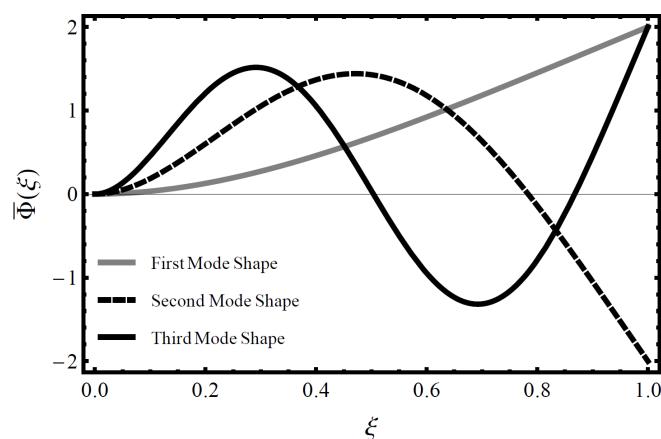
که  $(\xi)\Phi_l$  و  $\bar{\Phi}_l(\xi)$ ، شکل مود نرمال‌شده و شکل مود  $l$  ام می‌باشد. شکل‌های ۷-۲ الی ۱۰-۲، شکل مودهای نرمال‌شده است که با روش تبدیل دیفرانسیلی و برای شرایط تکیه‌گاهی متفاوت رسم شده‌اند.



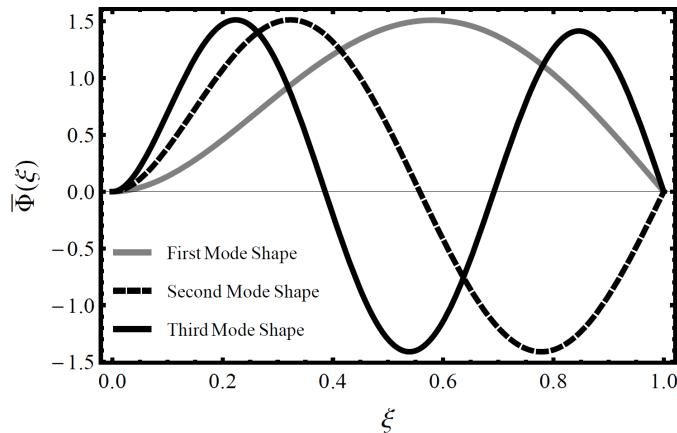
شکل ۷-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر مفصل - مفصل با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی



شکل ۸-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر گیردار با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی



شکل ۹-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر گیردار - آزاد با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی



شکل ۱۰-۲ شکل مود اول تا سوم نرمال‌سازی‌شده تیر مفصل - گیردار با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی

## ۱۲-۲ جمع‌بندی

در این فصل، به تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای اویلر - برنولی با شرایط تکیه‌گاه کلی و با استفاده از روش‌های معروف باقیماندهای وزن‌دار، یعنی سه روش پتروف - گالرکین، گالرکین، تجمع محلی و روش نیمه تحلیلی تبدیل دیفرانسیلی پرداخته شد. در این راستا، روش‌های مذکور به همراه رابطه‌سازی هر کدام، توضیح داده شدند. همچنین به منظور صحت‌سنجدی پاسخ‌های حاصل از روش‌های فوق‌الذکر، کلیه پاسخ‌های حاصل با حل دقیق مقایسه گردیدند و خطای آن‌ها نیز بیان گردید. مشاهده شد که در تمامی موارد، پاسخ‌های حاصل از تقریب خوبی برخوردار بود و در مورد روش تبدیل دیفرانسیلی، پاسخ‌های به‌دست‌آمده کاملاً بر حل دقیق انطباق داشت. همچنین سرعت و دقت بالا، و در عین حال حجم محاسبات کم در روش تجمع محلی نیز نمایان گشت. در پایان نیز، شکل مودهای نرمال‌سازی شده برای چهار حالت تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار، گیردار - آزاد و مفصل - گیردار نمایش داده شد. از نتایج مندرج در این فصل می‌توان چنین نتیجه‌گیری نمود که روش تبدیل دیفرانسیلی با دقت و سرعت همگرایی بالا و همچنین رابطه‌سازی و اصول اولیه ساده، می‌تواند به عنوان روشی مناسب در کنار روش‌های نام‌آشناتر باقیماندهای وزن‌دار، در پیداکردن فرکانس‌ها و شکل مودهای تیر مورد استفاده قرار بگیرد.

## فصل سوم

تحلیل ارتعاش آزادِ تیر غیردوار به

روشِ اجزای محدود کلاسیک

## ۱-۳- مقدمه

در این فصل، رابطه‌سازی روشِ اجزای محدود کلاسیک و پس از آن توابعِ شکلِ مرسوم در روشِ اجزای محدود برای تحلیل دینامیکی تیرهای اویلر - بونولی، به صورتِ کامل توضیح داده خواهند شد تا مقدماتِ لازم، برای بهبودِ آن در فصل‌های آتی فراهم آید. مشابهِ فصلِ قبل، این فصل نیز با نتایج و جمع‌بندی به پایان خواهد رسید.

## ۲-۳- پیشینهٔ پژوهش و ویژگی‌های روشِ اجزای محدود

حلِ معادلاتِ دیفرانسیل همواره یکی از چالش‌های اساسیٰ پیشِ روی پژوهشگران بوده است. در این راستا، تلاش‌های محققین را می‌توان به دو دستهٔ کلی تقسیم نمود. دستهٔ اول، تلاش‌هایی برای یافتن پاسخ‌های فرم‌بسته مربوط به هر معادله با استفاده از تکنیک‌های ریاضی مانندِ روشِ تفکیکِ متغیرها است. از آنجایی که در مسائلِ پیچیده، امکانِ یافتنِ این دسته از پاسخ‌ها وجود نداشت، لذا پژوهشگران را به یافتنِ الگویی منعطف و قابلِ اعتماد برای حلِ معادلاتِ دیفرانسیل ترغیب کرد. تلاش‌های دستهٔ دوم منجر به ایجادِ روش‌های عددی متفاوت برای حلِ معادلاتِ دیفرانسیل گردیده است که از آن جمله می‌توان به روشِ اجزای محدود، شیوهٔ تفاضلاتِ محدود و ... اشاره کرد.

بکارگیری توابع پیوستهٔ قطعه‌گونِ تعریف‌شده روی یک زیردامنه، برای تقریبِ تابعی نامعین را می‌توان در کارِ کورانت، سال ۱۹۴۳، یافت که از سوارکردنِ اجزای مثلثی استفاده نمود. اگرچه بعضی ویژگی‌های کلیدی روشِ اجزای محدود را می‌توان در کارهای هرینیکف (۱۹۴۱) و کورانت (۱۹۴۳) یافت؛ اما ارایهٔ رسمی آن به نامِ آرگیریس و کلسو (۱۹۶۰) و ترنر، کلاف، مارتین و تاپ (۱۹۵۶) نسبت داده شده است. عبارت «اجزای محدود»، اولین بار توسطِ کلاف در سال ۱۹۶۰ استفاده شد. از آن هنگام، نشرِ آثار دربارهٔ کاربردِ اجزای محدود به صورتِ تصاعدی رشد نموده و امروزه تعداد بسیاری مجلهٔ علمی که تنها به نظریه و کاربردِ این روش اختصاص یافته است، موجود می‌باشد [۱۸].

به طورِ کلی، روشِ اجزای محدود برای حلِ مسئله‌های با شرط‌های مرزی یا اولیهٔ موردِ استفاده

قرار می‌گیرد. در سازه‌ها، می‌توان خرپاها، تیرها، قاب‌ها، صفحه‌ها، پوسته‌ها و گونه‌های دیگر را با این شیوه تحلیل نمود [۱۷].

از روش اجزای محدود، به طور کلی، برای تحلیل چهار دسته مسئله مختلف استفاده می‌گردد. دسته‌ای اول، مسئله‌های یکنواخت یا تعادل نام دارند. این دسته شامل مقدارهای تنش، تغییر مکان و ... است که در طی زمان ثابت باقی می‌مانند. معادله ماتریسی حاکم بر رفتار اجسام در این حالت، به شکل کلی رابطه (۱-۳) نوشته می‌شود:

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{P}\} \quad (1-3)$$

که در آن،  $[\mathbf{K}]$  ماتریس مشخصه،  $\{\mathbf{D}\}$  بردار مجهول‌های گرهی و  $\{\mathbf{P}\}$  مقدارهای معلوم گرهی مسئله‌اند [۱۷].

دسته دوم، مسئله‌های مقدار ویژه<sup>۱</sup> هستند که در تحلیل نوسان آزاد، مورد توجه قرار می‌گیرد. در واقع، این مسئله‌ها، نوع خاصی از مسئله‌های تعادل هستند که در آن‌ها چندین وضعیت تعادل میسر است. هر یک از این وضعیت‌ها با یک مقدار ویژه و یک بردار ویژه وابسته به آن مشخص می‌گردد.

معادله کلی این گروه، به فرم رابطه (۲-۳) درمی‌آید:

$$([\mathbf{K}] - \lambda [\mathbf{M}])\{\mathbf{X}\} = \{0\} \quad (2-3)$$

در این رابطه  $\lambda$ ، مقدار ویژه،  $\{\mathbf{X}\}$  بردار ویژه،  $[\mathbf{K}]$  و  $[\mathbf{M}]$  ماتریس‌های معلوم دستگاه است [۱۷]. گروه سوم شامل مسئله‌های وابسته به زمان است. در این دسته، مجهول‌های گرهی تغییر مکان و مانند این‌ها تابعی از زمان هستند. معادله حاکم بر رفتار این دستگاه‌ها، در حالت کلی، به صورت زیر است:

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{C}]\{\dot{\mathbf{D}}\} + [\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\} = \{\mathbf{P}(t)\} \quad (3-3)$$

که در رابطه (۳-۳)، معادله به دست آمده شامل مشتق دوم متغیر گرهی نسبت به زمان است و

<sup>۱</sup> Eigenvalue problems

ماتریس‌های  $[K]$ ,  $[M]$ ,  $[C]$  و  $\{P(t)\}$  مقدارهای معلوم می‌باشند [۱۷].

در دستهٔ چهارم، تنها مشتق اول متغیر گرهی، مانند کرنش، حرارت، پتانسیل و فشار نسبت به زمان وجود دارد و معادلهٔ کلی آن به صورت رابطه (۴-۳) است [۱۷]:

$$[C]\{\dot{D}\} + [K]\{D\} = \{P\} \quad (4-3)$$

در روش اجزای محدود، دامنهٔ مسئله به اجزایی تقسیم می‌گردد. دامنهٔ مسئله می‌تواند جسمی جامد، مایع یا گاز باشد. فرض می‌شود که اجزای تشکیل‌دهندهٔ جسم، تنها در نقاطی به نام گره به یکدیگر می‌پیوندند. از آن‌جا که تغییراتِ واقعی تابع مجھول اصلی مانند تغییر مکان، تنش، فشار و مانند این‌ها، در داخلِ جسم معلوم نیست؛ تابعی ساده برای آن فرض می‌گردد. این تابع‌ها بر حسبِ مجھول‌های گرهی نوشته می‌شوند. هنگامی که معادلهٔ حاکم بر جسم برپا گردند، مجھول‌های آن‌ها مقدارهای گرهی تابع میدان خواهند بود. پس از حل دستگاه معادله‌های مزبور، مجھول‌ها به دست می‌آیند [۱۷].

حال که به معرفی اجمالی روش اجزای محدود مرسوم و تاریخچهٔ پیدایش آن پرداختیم، در ادامه، برآئیم تا روش مزبور را بر معادلهٔ دیفرانسیل حاکم تیر اویلر - برنولی غیردوّار اعمال کنیم.

### ۳-۳- فرمول‌بندی روش اجزای محدود

نخست، لازم به یادآوری است که در فصل دوم، معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر تیرهای غیردوّار اویلر - برنولی به صورت کامل استخراج و شرح داده شد. در این بخش، معادلهٔ تیر اویلر - برنولی در حالت دینامیکی و با استفاده از روش اجزای محدود گالرکین حل می‌گردد. برای این منظور، طرفین معادله (۵-۲) در تابع وزن  $w(x,t)$  ضرب می‌شود. شایان ذکر است این عمل بر روی المانی به طول انجام می‌پذیرد.

$$\int_0^{L^e} w(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx + \int_0^{L^e} w(x,t) \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx = \int_0^{L^e} w(x,t) q(x,t) dx \quad (5-3)$$

حال بایستی رابطه فوق را به وسیله انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء به فرم ضعیف<sup>۱</sup> تبدیل کنیم. لازم به ذکر است، یافتن فرم ضعیف معادله حاکم، یعنی کاهش مرتبه مشتق موجود در معادله و در نتیجه کاهش مرتبه پیوستگی تابع مجهول که در اصطلاح از آن به ضعیف شدن مرتبه پیوستگی تابع مجهول یاد می‌شود. در نتیجه، جمله اول رابطه (۳-۵) به صورت رابطه (۳-۶) تبدیل می‌گردد:

$$\int_0^{L^e} w(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = \\ \left[ w(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] \right]_0^{L^e} - \int_0^{L^e} \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx \quad (6-3)$$

با جایگذاری روابط (۲-۳) و (۴-۲) در طرف راست رابطه (۳-۶) و اعمال انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، در نهایت داریم:

$$\int_0^{L^e} w(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = \\ \left[ w(x,t) V(x) - \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right]_0^{L^e} + \int_0^{L^e} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx \quad (7-3)$$

جمله دوم و سوم رابطه (۵-۳) را نمی‌توان تضعیف کرد؛ زیرا فاقد مشتق نسبت به  $x$  هستند. پس کافی است رابطه (۴-۲) در رابطه (۷-۳) و نتیجه حاصل در رابطه (۵-۳) قرار داده شود. در نتیجه:

$$\int_0^{L^e} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx + \int_0^{L^e} w(x,t) \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \\ = \int_0^{L^e} w(x,t) q(x,t) dx + \left[ \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} M(x) - w(x,t) V(x) \right]_0^{L^e} \quad (8-3)$$

برای ادامه کار، لازم است یکی از فرض‌های اساسی روش اجزای محدود بیان گردد که در آن توابع  $w(x,t)$  و  $u(x,t)$  به ترتیب، به صورت روابط (۹-۳) و (۱۰-۳) تعریف می‌گردند:

$$u(x,t) = [\mathbf{N}(x)] \{ \mathbf{U}(t) \} \quad (9-3)$$

$$w(x,t) = [\mathbf{N}(x)] \{ \mathbf{w}(t) \} \quad (10-3)$$

<sup>۱</sup> Weak form

در روابط<sup>۱</sup> فوق،  $\mathbf{N}(x)$  ماتریس توابع شکل<sup>۱</sup> یا ماتریس توابع درونیاب<sup>۲</sup> است که در بخش بعد توضیح داده می‌شود.  $\mathbf{U}(t)$  و  $\mathbf{w}(t)$ ، به ترتیب، بردار مقادیر گرهی تابع مجھول و تابع وزن هستند. با فرض صورت پذیرفته در روابط (۹-۳) و (۱۰-۳)، می‌توان مشتقات مکانی و زمانی توابع مذکور را به فرم زیر تعریف نمود:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right] \{ \mathbf{U}(t) \} \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = [\mathbf{N}(x)] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} \\ \frac{\partial \mathbf{w}(x,t)}{\partial x} = \{ \mathbf{w}(t) \}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \right]^T \\ \frac{\partial^2 \mathbf{w}(x,t)}{\partial x^2} = \{ \mathbf{w}(t) \}^T \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right]^T \end{cases} \quad (11-3)$$

در ادامه روابط (۱۰-۳) و (۱۱-۳)، در رابطه (۸-۳) قرار داده می‌شود. نتیجه به فرم رابطه (۱۲-۳) است:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L^e} \{ \mathbf{w}(t) \}^T \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right] \{ \mathbf{U}(t) \} dx \\ & + \int_0^{L^e} \{ \mathbf{w}(t) \}^T [\mathbf{N}(x)]^T \rho A [\mathbf{N}(x)] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} dx = \int_0^{L^e} \{ \mathbf{w}(t) \}^T [\mathbf{N}(x)]^T q(x,t) dx \\ & + \left[ \{ \mathbf{w}(t) \}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \right]^T M(x) - \{ \mathbf{w}(t) \}^T [\mathbf{N}(x)]^T V(x) \right]_0^{L^e} \end{aligned} \quad (12-3)$$

با حذف<sup>T</sup>  $\{ \mathbf{w}(t) \}^T$  از طرفین رابطه (۱۲-۳) و بازنویسی آن، رابطه (۱۳-۳) حاصل می‌گردد:

<sup>1</sup> Shape functions

<sup>2</sup> Interpolation functions

$$\begin{aligned} & \int_0^{L^e} [\mathbf{N}(x)]^T \rho A [\mathbf{N}(x)] dx \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} + \int_0^{L^e} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right] dx \{ \mathbf{U}(t) \} \\ & = \int_0^{L^e} [\mathbf{N}(x)]^T q(x, t) dx + \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \right]^T M(x) - [\mathbf{N}(x)]^T V(x) \right]_0^{L^e} \end{aligned} \quad (13-3)$$

رابطه (13-3) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$[\mathbf{M}^e] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} + [\mathbf{K}^e] \{ \mathbf{U}(t) \} = \{ \mathbf{Q}^e \} + \{ \mathbf{P}^e \} \quad (14-3)$$

معادله فوق، معادله حاکم بر هر ایمان از تیر است که در آن  $[\mathbf{M}^e]$  و  $[\mathbf{K}^e]$ ، به ترتیب، ماتریس جرم و سختی ایمان نام دارند. همچنین،  $\{ \mathbf{P}^e \}$  و  $\{ \mathbf{Q}^e \}$ ، به ترتیب، بردار بارهای معادل گرهی گسترده ایمان و بردار بارهای مرزی ایمان هستند. از مقایسه رابطه (13-3) و (14-3)، به ترتیب، و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$[\mathbf{M}^e] = \int_0^{L^e} [\mathbf{N}(x)]^T \rho A [\mathbf{N}(x)] dx \quad (15-3)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \int_0^{L^e} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right] dx \quad (16-3)$$

$$\{ \mathbf{Q}^e \} = \int_0^{L^e} [\mathbf{N}(x)]^T q(x, t) dx \quad (17-3)$$

$$\{ \mathbf{P}^e \} = \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \right]^T M(x) - [\mathbf{N}(x)]^T V(x) \right]_0^{L^e} \quad (18-3)$$

پس از سوارکردن ماتریس‌های هر ایمان، معادله حاکم بر کل تیر به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$[\mathbf{M}] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} + [\mathbf{K}] \{ \mathbf{U}(t) \} = \{ \mathbf{Q} \} + \{ \mathbf{P} \} \quad (19-3)$$

که در رابطه فوق  $[\mathbf{M}]$ ،  $[\mathbf{K}]$ ،  $\{ \mathbf{Q} \}$  و  $\{ \mathbf{P} \}$ ، به ترتیب، ماتریس جرم، ماتریس سختی، بردار بارهای معادل گرهی گسترده و بردار بارهای مرزی کل تیر هستند. معادله (19-3)، یک معادله دیفرانسیل ماتریسی است که در ادامه با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین آن و انتقال آن به حوزه فرکانس در حالت ارتعاش آزاد، معادله حاکم بر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر استخراج می‌گردد. بدیهی

است در حالت ارتعاش آزاد،  $\{Q\}$  و  $\{P\}$  برابر با صفر است. لذا داریم:

$$\mathbb{F} \left[ \left[ \mathbf{M} \right] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} \right] + \mathbb{F} \left[ \left[ \mathbf{K} \right] \{ \mathbf{U}(t) \} \right] = \mathbb{F}[0] \quad (20-3)$$

در رابطه فوق،  $\mathbb{F}$  نماد تبدیل فوریه است.  $\mathbb{F} \left[ \left\{ \partial^2 \mathbf{U}(t) / \partial t^2 \right\} \right]$  برابر است با:

$$\mathbb{F} \left[ \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} \right] = -\omega^2 \mathbb{F} \left[ \{ \mathbf{U}(t) \} \right] \quad (21-3)$$

که  $\omega$  فرکانس‌های طبیعی تیر است. با قراردادن رابطه (21-3) در رابطه (20-3)، داریم:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbb{F} \left[ \{ \mathbf{U}(t) \} \right] = \{0\} \quad (22-3)$$

با تعریف  $\{ \phi \}$  به صورت  $\{ \phi \} = \mathbb{F} \left[ \{ \mathbf{U}(t) \} \right]$ ، که  $\phi$  شکل مود نام دارد، معادله فوق، به فرم زیر درمی‌آید:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \{ \phi \} = \{0\} \quad (23-3)$$

اکنون با حل مسئله مقدار ویژه (23-3) می‌توان فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر را به دست آورد. حال در ادامه، توابع شکل مربوط به تیر را به دست می‌آوریم. همان‌طور که بالاتر نیز ذکر گردید،  $(x) N$  در روابط (9-3) الی (18-3)، ماتریس توابع شکل است. در بخش بعد، به معرفی توابع شکل خواهیم پرداخت.

### ۳-۴- توابع شکل در اجزای محدود

از آنجاکه یافتن تابع میدان دقیق در روش اجزای محدود بسیار دشوار و حتی غیرممکن است، از توابع درونیاب فرضی با مشخصه‌های معین استفاده می‌گردد که ساده‌ترین آن‌ها توابع چندجمله‌ای می‌باشد. یک دلیل بکاربردن توابع چندجمله‌ای، ساده‌بودن روند مشتق‌گیری از آن‌ها است [۱۷]. در روش اجزای محدود، دامنه تابع به اجزای کوچکی تقسیم می‌گردد. به این ترتیب، شمار جمله‌های لازم برای تخمین‌زنی تابع معلوم فرض شده کمتر می‌شود و اثر جمله‌های حذف شده نیز قابل چشم‌پوشی خواهد بود. خاطر نشان می‌سازد، به سبب حذف جمله‌های درجه بالا، روش اجزای محدود

هرگز به پاسخ واقعی آن مسائلهایی که تابع میدان آن‌ها درجه بالایی دارد، دست پیدا نمی‌کند. باید آگاه بود، با افزایش درجه چندجمله‌ای مورد استفاده و نیز افزایش تعداد اجزا می‌توان، به پاسخ هرچه دقیق‌تر، بسیار نزدیک شد [۱۷]. در ادامه، رابطه‌ای کلی برای پیداکردن توابع شکل بر اساس مراجع [۱۷] و [۱۸]، ارائه خواهد شد.

تابع پاسخ تقریبی معادله (۵-۲) را  $\bar{u}(x,t)$  درنظر می‌گیریم. همان‌طور که اشاره شد، استفاده از توابع چندجمله‌ای برای بیان تابع تقریبی، یکی از معروف‌ترین راه‌کارها می‌باشد:

$$\bar{u}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \quad (24-3)$$

که در آن،  $a_0, a_1, \dots, a_n$  همگی ضرایب مجهول هستند. تعداد جملات در رابطه (۲۴-۳) است  $n+1$  است که برابر با تعداد درجات آزادی هر إلمان است. رابطه (۲۴-۳) را می‌توان به فرم ماتریسی رابطه (۲۵-۳) بازنویسی کرد:

$$\bar{u}(x) = [\mathbf{f}(x)] \{ \mathbf{a} \} \quad (25-3)$$

که در آن،  $[\mathbf{f}(x)]$  ماتریس سطری تابع معلوم و  $\{ \mathbf{a} \}$ ، بردار ستونی ضرایب مجهول است که، به ترتیب، به صورت روابط (۲۶-۳) و (۲۷-۳) تعریف می‌شوند:

$$[\mathbf{f}(x)] = \begin{bmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & x^3 & \dots & x^n \end{bmatrix} \quad (26-3)$$

$$\{ \mathbf{a} \} = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]^T \quad (27-3)$$

از سوی دیگر، درجات آزادی إلمان که تعدادشان دقیقاً برابر با تعداد  $a_i$ ‌های مجهول است ( $j=0,1,2,\dots,n$ )، چیزی نیستند جزء مقادیر خود تابع مجهول یا مشتقات تابع مجهول در نقاطی مشخص (یا نقاط گرهی)، بنابراین اگر درجات آزادی را با  $U_j$  نشان دهیم ( $j=0,1,2,\dots,n$ ، داریم:

$$U_j = \left. \frac{d^m u(x)}{dx^m} \right|_{x=x_i} \quad (28-3)$$

در رابطه فوق  $x_i$  نشان‌دهنده مختصات نقاط مشخص هستند. همچنین  $m$  بیانگر مرتبه مشتق تابع در نقاط مشخص هستند. به این ترتیب می‌توان با قراردادن رابطه (۲۴-۳) در تعریف هر درجه آزادی،

به تعداد درجات آزادی معادله به دست آورد که مجہولات موجود در معادلات حاصل، همان را هستند ( $j = 0, 1, 2, \dots, n$ ). معادلات حاصل، دستگاهی مربعی به فرم رابطه (۲۹-۳) را تشکیل می-

دهند:

$$\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{G}] \{\mathbf{a}\} \quad (29-3)$$

در رابطه فوق،  $\{\mathbf{U}\}$  و  $[\mathbf{G}]$ ، به ترتیب، بردار درجات آزادی و ماتریس مربعی معلوم است. در حقیقت سطر  $i$  ام از ماتریس  $[\mathbf{G}]$ ، مقادیر ماتریس سط्रی  $[\mathbf{f}(x)]$  در خود تابع مجھول یا مشتقات آن در مختصات نقاط مشخص  $x_i$  است.  $\{\mathbf{a}\}$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\{\mathbf{a}\} = [\mathbf{G}]^{-1} \{\mathbf{U}\} \quad (30-3)$$

کافی است رابطه فوق را در رابطه (۲۵-۳) جایگذاری نماییم. حاصل به فرم رابطه (۳۱-۳) است:

$$\bar{u}(x) = [\mathbf{f}(x)] [\mathbf{G}]^{-1} \{\mathbf{U}\} \quad (31-3)$$

از سوی دیگر،  $(x)\bar{u}$  را می‌توان به صورت رابطه (۳۲-۳) نیز نوشت:

$$\bar{u}(x) = [\mathbf{N}(x)] \{\mathbf{U}\} \quad (32-3)$$

اکنون از مقایسه روابط (۳۱-۳) و (۳۲-۳)،  $[\mathbf{N}(x)]$  یا همان توابع شکل به فرم رابطه (۳۳-۳) تعریف

می‌گردد:

$$[\mathbf{N}(x)] = [\mathbf{f}(x)] [\mathbf{G}]^{-1} \quad (33-3)$$

در ادامه با استفاده از روابط بیان شده، توابع شکل  $\mathbb{E}$  ایمان تیر غیردوار را به دست خواهیم آورد.

### ۳-۵- توابع شکل $\mathbb{E}$ ایمان خمثی

ایمانی به طول  $L$ ، با چهار درجه آزادی  $U_1$  تا  $U_4$  که در شکل ۳-۱ نشان داده شده است را در نظر بگیرید. مقادیر درجات آزادی  $U_1$  تا  $U_4$ ، به ترتیب، در روابط (۳۴-۳) الی (۳۷-۳) بر اساس رابطه (۲۸-۳) بیان شده است.

$$U_1 = u(0) \quad (34-3)$$

$$U_2 = \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (35-3)$$

$$U_3 = u(L^e) \quad (36-3)$$

$$U_4 = \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=L^e} \quad (37-3)$$



شکل ۱-۳ یک ماتریس خمی با چهار درجه آزادی [۱۸]

با اندکی دقت در درایه‌های ماتریس  $[G]$  و  $[\mathbf{f}(x)]$ ، یک ماتریس مربعی  $4 \times 4$ ، به ترتیب، به فرم روابط (۳۸-۳) و (۳۹-۳) خواهد بود:

$$[\mathbf{f}(x)] = \begin{bmatrix} 1 & x^1 & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \quad (38-3)$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L^e & (L^e)^2 & (L^e)^3 \\ 0 & 1 & 2L^e & 3(L^e)^2 \end{bmatrix} \quad (39-3)$$

با اندکی دقت در درایه‌های ماتریس  $[G]$  می‌توان دریافت که، درایه‌های هر سطر آن، از قرار دادن قانون حاکم بر روابط (۳۷-۳) الی (۳۴-۳)، در رابطه (۳۸-۳) حاصل می‌گردد. حال با توجه به روابط (۳۸-۳) و (۳۹-۳)، ماتریس  $[\mathbf{N}(x)]$  بر اساس رابطه (۳۳-۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$[\mathbf{N}(x)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{(L^e)^2} & -\frac{2}{L^e} & \frac{3}{(L^e)^2} & -\frac{1}{L^e} \\ \frac{2}{(L^e)^3} & \frac{1}{(L^e)^2} & -\frac{2}{(L^e)^3} & \frac{1}{(L^e)^2} \end{bmatrix} \quad (40-3)$$

ماتریس موجود در رابطه (۴۰-۳)، معکوس ماتریس  $[G]$  است. ماتریس سط्रی  $[\mathbf{N}(x)]$  چهار درایه دارد که می‌توان آن‌ها را به فرم کلی روابط (۴۱-۳) الی (۴۵-۳) نامگذاری کرد:

$$[N(x)] = [N_1(x) \ N_2(x) \ N_3(x) \ N_4(x)] \quad (41-3)$$

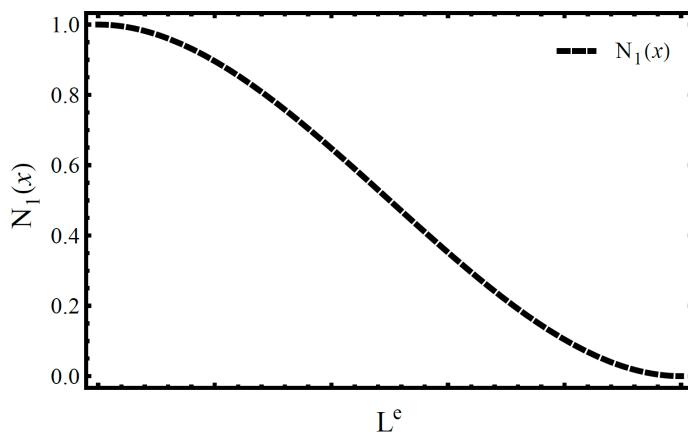
$$N_1(x) = 1 - \frac{3}{(L^e)^2} x^2 + \frac{2}{(L^e)^3} x^3 \quad (42-3)$$

$$N_2(x) = x - \frac{2}{L^e} x^2 + \frac{1}{(L^e)^2} x^3 \quad (43-3)$$

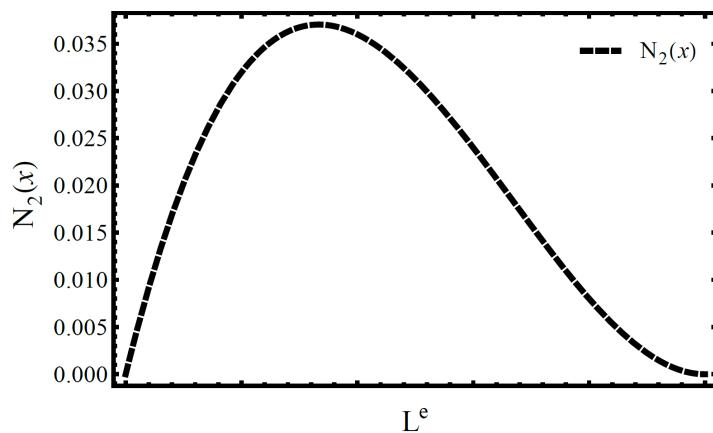
$$N_3(x) = \frac{3}{(L^e)^2} x^2 - \frac{2}{(L^e)^3} x^3 \quad (44-3)$$

$$N_4(x) = -\frac{1}{L^e} x^2 + \frac{1}{(L^e)^2} x^3 \quad (45-3)$$

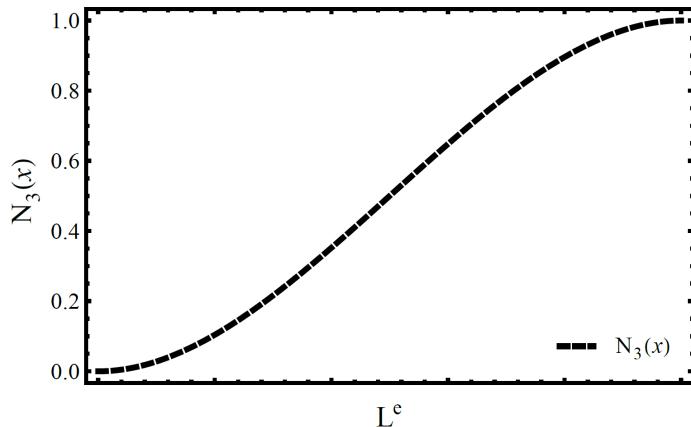
تابع شکل بیان شده بالا، به ترتیب، در شکل های ۲-۳ الی ۵-۳ رسم شده اند.



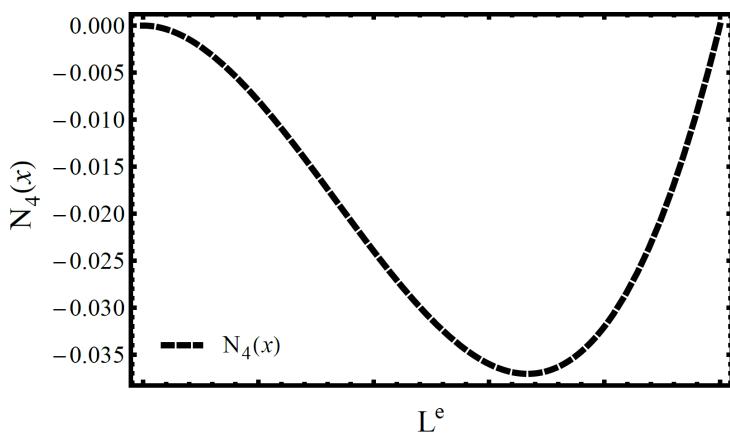
شکل ۲-۳ تغییرات اولین تابع شکل مرسوم  $[N_1(x)]$



شکل ۳-۳ تغییرات دومین تابع شکل مرسوم  $[N_2(x)]$



شکل ۴-۳ تغییرات سومینتابع شکل مرسوم  $[N_3(x)]$



شکل ۵-۳ تغییرات چهارمینتابع شکل مرسوم  $[N_4(x)]$

اکنون که چهارتابع درونیاب المان تیر خمی در دسترس قرار گرفتند، می‌توانیم با قراردادن آن-

ها در تعریف ماتریس جرم و سختی، که، به ترتیب، در روابط (۱۵-۳) و (۱۶-۳) بیان شده است، این

دو ماتریس را برای المان شکل ۱-۳ بیابیم. در این راستا،  $K_{ij}^e$  درایه سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس

سختی المان و  $M_{ij}^e$  درایه سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس جرم المان است:

$$K_{ij}^e = \int_0^{L^e} \frac{\partial^2 N_i(x)}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 N_j(x)}{\partial x^2} dx \quad (46-3)$$

$$M_{ij}^e = \int_0^{L^e} N_i(x) \rho A N_j(x) dx \quad (47-3)$$

که در روابط<sub>i</sub> بالا،  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  هستند. با توجه به روابط فوق آشکار است که ماتریس‌های جرم و سختی متقابن هستند. پس از قرار دادن روابط<sub>i</sub> (۴۲-۳) الی (۴۵-۳) در روابط<sub>i</sub> (۴۶-۳) و (۴۷-۳)، ماتریس سختی و جرم<sub>i</sub> منشوری نشان‌داده شده در شکل<sub>۱-۳</sub>، به ترتیب، به فرم زیر درمی‌آیند:

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{EI}{(L^e)^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L^e & -12 & 6L^e \\ 6L^e & 4(L^e)^2 & -6L^e & 2(L^e)^2 \\ -12 & -6L^e & 12 & -6L^e \\ 6L^e & 2(L^e)^2 & -6L^e & 4(L^e)^2 \end{bmatrix} \quad (48-3)$$

$$[\mathbf{M}^e] = \rho AL^e \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11L^e}{210} & \frac{9}{70} & \frac{-13L^e}{420} \\ \frac{11L^e}{210} & \frac{(L^e)^2}{105} & \frac{13L^e}{420} & \frac{-(L^e)^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13L^e}{420} & \frac{13}{35} & \frac{-11L^e}{210} \\ \frac{-13L^e}{420} & \frac{-(L^e)^2}{140} & \frac{-11L^e}{210} & \frac{(L^e)^2}{105} \end{bmatrix} \quad (49-3)$$

اینک که ماتریس‌های جرم و سختی<sub>i</sub> خمی استخراج و بیان گردید، در ادامه، به تحلیل ارتعاش آزاد<sub>i</sub> تیر غیردووار پرداخته و فرکانس‌های حاصل را با فرکانس‌های روش<sub>i</sub> تبدیل<sub>i</sub> دیفرانسیلی، که در فصل<sub>۱</sub> دوم به دست آمدند، مقایسه می‌نماییم.

### ۳-۶- نتایج و بحث

در این بخش، از نتایج روش<sub>i</sub> تبدیل<sub>i</sub> دیفرانسیلی، که در فصل<sub>۱</sub> قبل و در جداول<sub>۲-۲</sub> الی <sub>۴-۲</sub> بیان گردید، برای صحبت‌سنجی نتایج حاصل از روش<sub>i</sub> اجزای محدود استفاده می‌کنیم. نتایج مذکور در جداول<sub>۱-۳</sub> الی <sub>۳-۳</sub> برای چهار حالت<sub>i</sub> تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، گیردار - آزاد، مفصل - گیردار و با توجه به تعداد<sub>i</sub> متفاوت در روش<sub>i</sub> مذکور، درج شده است. علاوه بر این، در ستونی تحت<sub>i</sub> نام «خطا»، مقدار خطای حاصل از روش<sub>i</sub> اجزای محدود در قیاس با روش<sub>i</sub> تبدیل<sub>i</sub> دیفرانسیلی که در فصل<sub>۱</sub> قبل ثابت شد که دقیقاً منطبق بر پاسخ دقیق است، بر حسب درصد بیان شده است. برای این امر، از رابطه<sub>(۳-۵۰)</sub> بهره جسته‌ایم:

$$\text{خط} = \frac{|\omega_{\text{DTM}} - \omega_{\text{FEM}}|}{\omega_{\text{DTM}}} \times 100 \quad (\Delta \pm \Sigma)$$

در رابطه فوق،  $\omega_{\text{DTM}}$  و  $\omega_{\text{FEM}}$ ، به ترتيب، فرکانس های حاصل از روش های تبدیل دیفرانسیلی و اجزای محدود می باشند.

جدول ۳-۱ اولین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایط متفاوت تکیه‌گاهی با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود با تعداد المان متفاوت

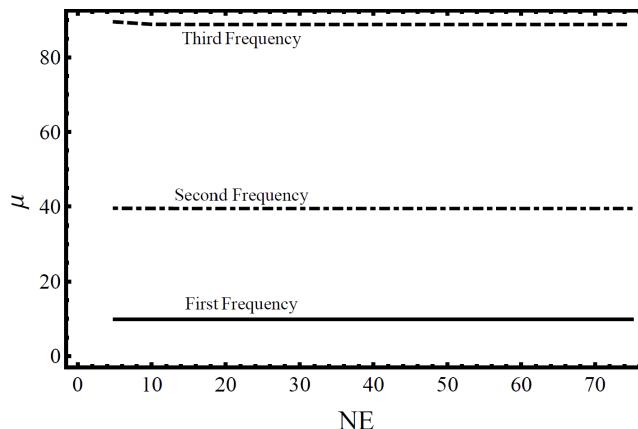
جدول ۲-۳ دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایط متفاوت تکیه‌گاهی با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود با تعداد المان متفاوت

روشِ اجزای محدود				روشِ			
٤٠ إلمان		٢٠ إلمان		٥ إلمان		تبدیلِ تکیه‌گاهی	
مقدار خطا (%)	مقدار	مقدار خطا (%)	مقدار	مقدار خطا (%)	مقدار	دیفرانسیلی	شرایطِ تکیه‌گاهی
٠٪	٣٩/٤٧٨٤	٠/٠٠٠٨	٣٩/٤٧٨٧	٠/١٦٥٧	٣٩/٥٤٣٨	٣٩/٤٧٨٤	مفصل - مفصل
٠/٠٠٠٢	٦١/٦٧٢٧	٠/٠٠١٥	٦١/٦٧٣٧	٠/٣٩٨٩	٦١/٩١٨٨	٦١/٦٧٢٨	گیردار - گیردار
٠٪	٢٢/٠٣٤٥	٠٪	٢٢/٠٣٤٥	٠/٠٤٩٩	٢٢/٠٤٥٥	٢٢/٠٣٤٥	گیردار - آزاد
٠/٠٠١٦	٤٩/٩٦٤١	٠/٠٠٠٦	٤٩/٩٦٤٦	٠/٢٦٢٤	٥٠/٠٩٦	٤٩/٩٦٤٩	مفصل - گیردار

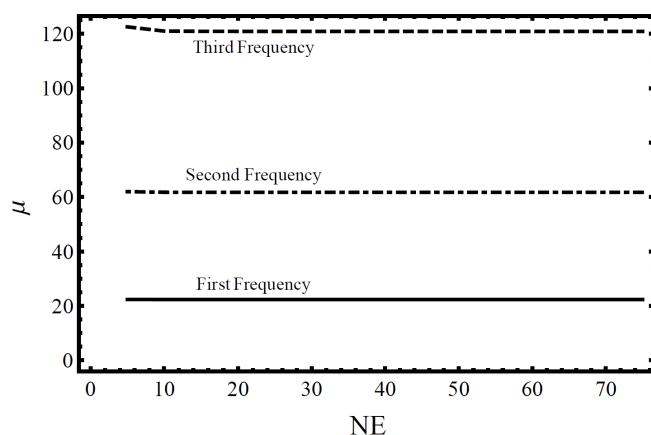
جدول ۳-۳ سومین پارامتر فرکانسی تیر تحت شرایط متفاوت تکیه‌گاهی با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی و روش اجزای محدود با تعداد إلمان متفاوت

روش اجزای محدود						روش	
۴ إلمان		۲۰ إلمان		۵ إلمان		تبدیل دیفرانسیلی	شرایط تکیه‌گاهی
مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)	مقدار	خطا (%)		
۰/۰۰۰۱	۸۸/۸۲۶۵	۰/۰۰۳۳	۸۸/۸۲۹۳	۰/۷۹۴۰	۸۹/۵۳۱۷	۸۸/۸۲۶۴	مفصل - مفصل
۰/۰	۱۲۰/۹۰۳	۰/۰۰۵۸	۱۲۰/۹۱	۱/۳۸۳۸	۱۲۲/۵۷۶	۱۲۰/۹۰۳	گیردار - گیردار
۰/۰	۶۱/۶۹۷۲	۰/۰۰۱۵	۶۱/۶۹۸۱	۰/۳۵۹۲	۶۱/۹۱۸۸	۶۱/۶۹۷۲	گیردار - آزاد
۰/۰۰۲۹	۱۰۴/۲۴۵	۰/۰۰۱۰	۱۰۴/۲۴۹	۱/۰۶۷۶	۱۰۵/۳۶۱	۱۰۴/۲۴۸	مفصل - گیردار

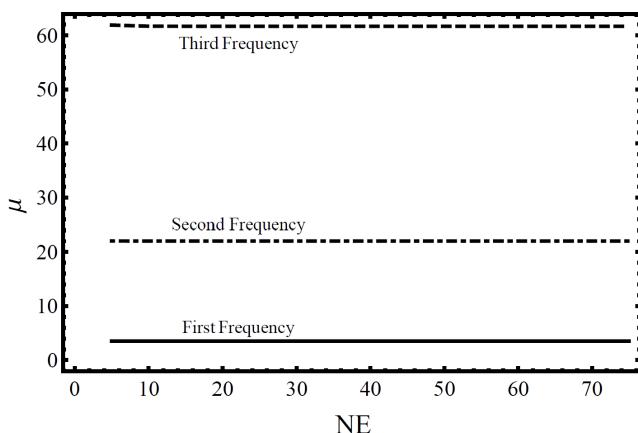
در ادامه، نمودارهای همگرایی مربوط به روش اجزای محدود، در شکل‌های ۶-۳ الی ۹-۳، به ترتیب، برای شرایط تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، گیردار - آزاد و گیردار - مفصل نمایش داده شده است. در این شکل‌ها، محورهای افقی و عمودی، به ترتیب، نمایش‌دهنده تعداد إلمان‌های بکار رفته در روش اجزای محدود (NE) و پارامتر فرکانسی حاصل ( $\mu$ ) هستند. در شکل‌های ۶-۳ الی ۹-۳، پاسخ‌ها با افزایش تعداد إلمان‌ها همگرا شده که خود نشان از صحتِ روش مذکور دارد. در این شکل‌ها، تعداد إلمان‌های بکار رفته در روش اجزای محدود بین ۵ تا ۷۵ إلمان درنظر گرفته شده است. در کلیه اشکال مذکور مشاهده می‌شود که مقادیر پارامتر فرکانسی سوم، دیرتر همگرا می‌شود.



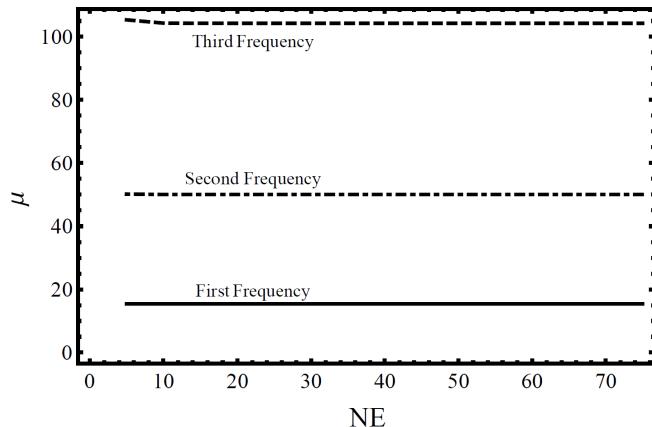
شکل ۳-۶ نمودار همگرایی روش اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر مفصل - مفصل



شکل ۳-۷ نمودار همگرایی روش اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار - گیردار



شکل ۳-۸ نمودار همگرایی روش اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول تیر گیردار - آزاد



شکل ۹-۳ نمودار همگرایی روش اجزای محدود مربوط به سه پارامتر فرکانسی اول، تیز گیردار - مفصل

### ۷-۳- جمع‌بندی

در این فصل، به تشریح روش اجزای محدود کلاسیک پرداخته شد. در این راستا، توابع شکل‌المان خمی، ماتریس‌جرم و سختی‌المان اسخراج گردید. در پایان با استفاده از روش‌مذکور و همچنین روش تبدیل دیفرانسیلی، به تحلیل ارتعاش آزاد تیز اوبلر - برنولی پرداخته شد. مشاهده شد که بیشترین مقدار خطأ با ۵، ۲۰ و ۴۰ المان در روش اجزای محدود، به ترتیب، برابر با  $1/3838$ ،  $0.0058$  و  $0.0114$  درصد است. در پایان نیز نمودارهای همگرایی برای روش اجزای محدود رسم گردید.

## فصل چهارم

باز تولید یک پژوهش: تحلیل

دینامیکی تیرهای دوّار به روش

اجزای محدود غیر کلاسیک و توابع

شکل کسری

## ۱-۴- مقدمه

در این فصل، به معرفی توابع شکل کسری<sup>۱</sup> پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که این فصل، بازتولید مرجع [۲۱] است. در این راستا نخست، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرهای دوّار اویلر - برنولی با سطح مقطع نامنشوری استخراج می‌شود. سپس توابع شکل کسری معرفی شده و، تحلیل ارتعاش آزاد این‌گونه تیرها به کمک توابع شکل کسری تشریح می‌گردد. در پایان، برای صحتسنجی پاسخ‌های حاصل از روش مذکور، از توابع شکل مرسوم در اجزای محدود که در فصل سوم معرفی شدند، استفاده می‌گردد. علاوه بر آن، روش تبدیل دیفرانسیلی نیز برای صحتسنجی پاسخ‌های حاصل از هر دو روش بکار بسته می‌شود که البته این کار، در مرجع [۲۱] صورت نپذیرفته و جزء تولیدات محتوایی خود نویسنده است. متذکر می‌گردد که تیرهای دوّار، حالت کلی‌تری از تیرهای غیردوّار بوده و در نتیجه، معادله دیفرانسیل حاکم بر آن، آعم از معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرهای غیردوّار است که در فصل سوم معرفی گردیدند.

## ۲-۴- تاریخچه

تیرهای دوّار، به عنوان یک عضو سازه‌ای مهم، به صورت گسترده‌ای در صنعت، و در قالب قطعاتی مانند پره‌های توربین‌های باد، بخار، گاز و همچنین پره‌های موتورهای چرخ‌بال مورد استفاده قرار می‌گیرند. تا کنون، پژوهشگران بسیاری به تحقیق و بررسی رفتار دینامیکی این‌گونه تیرها پرداخته‌اند. بدیهی است برای این امر، نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرهای مذکور بایستی استخراج و سپس حل گردد. جالب است که علیرغم پیشرفتهای چشم‌گیر در عرصه فناوری و علی‌الخصوص ریاضیات، متأسفانه به دلیل پیچیدگی معادله مذکور، حل دقیقی برای آن ارائه نشده است. همین امر موجب گشته که پژوهشگران بسیاری با استفاده از روش‌های تقریبی و عددی متفاوت، به حل معادله مزبور

<sup>۱</sup> Rational shape functions (RSF)

بپردازند که از آن جمله می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

بات، تیر چرخان با سطح ثابت به همراهِ جرمی متصل به تیر را با استفاده از روش رایلی - ریتز مورد بررسی قرار داد [۲۲]. سینه‌ها به بررسی تیرهای چرخان تیموشنکو با استفاده از روش رایلی - ریتز پرداخت [۲۳]. گانش و گانگولی به بررسی تیرهای چرخان نامنشوری و با استفاده از روش رایلی - ریتز پرداختند [۲۴]. آن‌ها تغییراتِ جرم و صلبیتِ خمشی در طول تیر را، به ترتیب، خطی و چندجمله‌ای از درجهٔ چهار فرض کردند. استفاده از روش گالرکین در تحلیل تیرهای دوّار را می‌توان در [۲۵] و [۲۶] مشاهده کرد. رائو و گوپتا با استفاده از روشِ اجزای محدود به تحلیل تیرهای دوّار تیموشنکو پرداختند [۲۷]. ونگ و ورلی نیز روشِ اجزای محدود را برای تحلیل تیرهای دوّار اویلر - برنولی مورد استفاده قرار دادند [۲۸]. از سوی دیگر تیسای و همکاران با استفاده از روشِ اجزای محدود به تحلیل تیرهای دوّاری پرداختند که راستای محور دوران با راستای طولی تیر در پلان، تشکیل زاویه می‌دهد [۲۹]. استفاده از سری فربنیوس به عنوان پاسخ معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرهای دوّار و سپس یافتنِ ضرایبِ این پاسخ با استفاده از شرایطِ مرزی را می‌توان در مقالهٔ رایت و همکاران [۳۰]، و ناگولسواران [۳۱] مشاهده کرد. سرکار و گانگولی با استفاده از الگوریتمی بدیع، برای چند حالت خاص از تیرهای اویلر - برنولی دوّار پاسخ دقیق ارائه دادند [۳۲]. آن‌ها شکل مودها را به صورتِ یک تابع چندجمله‌ای با ضرایبِ مجهول درنظر گرفته که با قرارگیری در شرایطِ مرزی، ضرایبِ مجهول تابع مذکور محاسبه می‌شوند. سپس این تابع فرض شده را در معادله دیفرانسیل تیر قرار داده و با فرضِ توابعی متفاوت برای جرم و سختی تیر به صورتِ توابع چندجمله‌ای با ضرایبِ مجهول، دستگاهی تشکیل دادند که مجهولاتش ضرایبِ توابع فرض شده برای جرم و سختی تیر بود. با حلِ دستگاه مذکور، توابعِ جرم و سختی نیز پیدا شده و در نتیجه، پاسخِ دقیق برای چند حالتِ خاص از این‌گونه تیرها در دسترس قرار گرفت که می‌تواند مرجع مناسبی برای صحبت‌سننجی روش‌های عددی و تقریبی بکار بسته شده در تحلیل تیرهای دوّار باشد. از سوی دیگر، استفاده از روش

تبديل دیفرانسیل برای تحلیل تیرهای دوّار نیز مورد استقبال پژوهشگران بوده است که از آن جمله می‌توان موارد زیر را، به عنوان نمونه، معرفی کرد:

می با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل به تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای دوّار همگن تیموشنکو [۳۳] و اویلر - برنولی [۳۴] پرداخت. از دمیر و کایا به تحلیل تیرهای دوّار اویلر - برنولی با سطح مقطع نامنشوری پرداختند [۳۵ و ۳۶]. آن‌ها تغییرات سطح مقطع و صلبیت را، در طول تیر، خطی فرض نمودند. سپس، آن‌ها روش تبدیل دیفرانسیل را برای تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای دوّار تیموشنکو با درنظر گرفتن تغییرات خطی سطح مقطع و صلبیت در طول تیر مورد استفاده قرار دادند [۳۷].

پس از مرور پیشینه کار، در ادامه، نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرهای دوّار نامنشوری اویلر - برنولی را استخراج می‌نماییم.

### ۴-۳- معادله دیفرانسیل تیرهای نامنشوری دوّار اویلر - برنولی

لازم به یادآوری است که در فصل دوم، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر اویلر - برنولی غیردوّار با سطح مقطع منشوری استخراج شد:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (1-4)$$

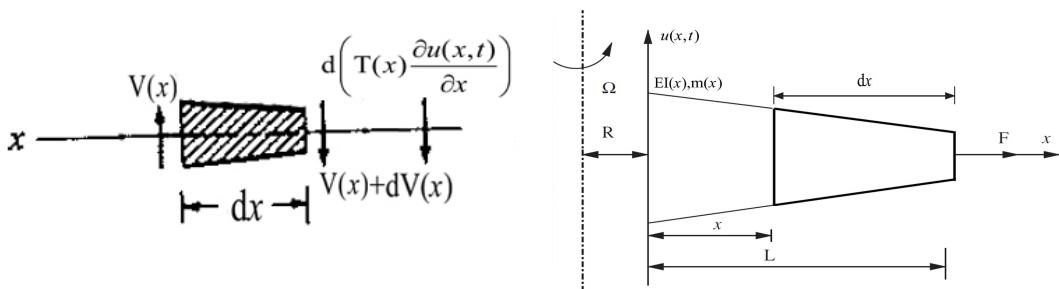
در صورتی که سطح مقطع تیر مفروض، نامنشوری باشد، معادله دیفرانسیل مزبور به صورت زیر نوشتہ درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (2-4)$$

که در رابطه (۲-۴)،  $u(x,t)$ ،  $EI(x)$ ،  $m(x)$  و  $q(x,t)$  به ترتیب، نشان‌دهنده جرم واحد طول تیر، صلبیت و تابع تغییر مکان تیر هستند. حال برآنیم تا معادله دیفرانسیل تیرهای نامنشوری دوّار اویلر - برنولی

(شکل ۱-۴-الف) را به دست آوریم. برای این منظور،  $\text{إلمان}$  کوچکی از تیر به طول  $dx$  را مطابق شکل

۱-۴-ب بیرون کسیده و تحلیل می‌کنیم:



ب - دیاگرام آزاد نیروهای برشی

الف - شماتیکی تیر [۲۱]

شکل ۱-۴ تیر دوار با سطح مقطع نامنشوری

$\Omega$ ،  $R$  و  $F$  در شکل ۱-۴-الف، به ترتیب، سرعت دورانی، فاصله محور دوران تا ابتدای تیر و نیروی متغیر انتهایی تیر هستند.  $T(x)$ ، نیروی گریز از مرکز محوری است که بر اثر دوران در طول تیر ایجاد می‌شود و برای  $\text{إلمان}$  انتخاب شده در شکل ۱-۴-الف، به فرم زیر محاسبه می‌گردد:

$$T(x) = \int_x^L m(x) a_\Omega dx + F \quad (3-4)$$

در رابطه فوق،  $a_\Omega$  شتاب جانب مرکز است که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$a_\Omega = (R + x) \Omega^2 \quad (4-4)$$

با قراردادن رابطه (۴-۴) در رابطه (۳-۴)،  $T(x)$  برابر می‌شود با:

$$T(x) = \int_x^L m(x)(R + x) \Omega^2 dx + F \quad (5-4)$$

از سوی دیگر، تیر در حال دوران خیز دارد و با افق زاویه‌ای بسیار کوچک تشکیل می‌دهد. تصویر نیروی  $T(x)$  در راستای قائم،  $T(x)(\partial u(x,t)/\partial x)$  می‌باشد که در شکل ۱-۴-ب نشان داده شده است. پس با اضافه کردن جمله مذکور به معادله دیفرانسیل (۲-۴)، معادله دیفرانسیل تیرهای

نامنشوری دوار اویلر - برنولی به صورت رابطه (۶-۴) درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + m(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = q(x,t) \quad (6-4)$$

که در آن،  $T(x)$  به کمک رابطه (۵-۵) محاسبه می‌شود.

حال بایستی معادله (۶-۴) را به فرم موجود در مرجع [۲۱] درآوریم. در این راستا، بایستی فرض-

های زیر بر معادله (۶-۴) اعمال گردد:

- تیر منشوری پنداشته شود که در آن صورت  $EI(x) = EI$  و  $m(x) = m$  است؛

- معادله به فرم استاتیکی و با فرض  $q(x,t) = 0$  مورد بررسی قرار می‌گیرد؛

- فاصله محور دوران تا ابتدای تیر (R) و نیروی متumerکز انتهایی تیر (F) برابر با صفر درنظر گرفته می‌شوند.

با درنظر گرفتن فرض‌های بالا، معادله (۶-۴) به صورت زیر بازنویسی می‌گردد:

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - T(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{dT(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} = 0 \quad (7-4)$$

که در آن،  $T(x)$  عبارتست از:

$$T(x) = \int_x^L m x \Omega^2 dx = \frac{m \Omega^2}{2} (L^2 - x^2) \quad (8-4)$$

با قراردادن رابطه (۸-۴) در رابطه (۷-۴)، داریم:

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} + \frac{m \Omega^2 x^2}{2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - \frac{m \Omega^2 L^2}{2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + m \Omega^2 x \frac{du(x)}{dx} = 0 \quad (9-4)$$

با تقسیم طرفین رابطه (۹-۴) بر  $EI$  و همچنین تعریف A و B، به ترتیب، به فرم روابط (۱۰-۴) و (۱۱-۴) و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۹-۴)، معادله مذکور به صورت رابطه (۱۲-۴) بازنویسی می‌گردد:

$$A = \frac{m \Omega^2}{EI} \quad (10-4)$$

$$B = \frac{m \Omega^2 L^2}{2EI} \quad (11-4)$$

$$\frac{d^4u(x)}{dx^4} + \frac{A}{2}x^2 \frac{d^2u(x)}{dx^2} - B \frac{d^2u(x)}{dx^2} + A x \frac{du(x)}{dx} = 0 \quad (12-4)$$

معادله (12-4)، یک معادله دیفرانسیل همگن خطی مرتبه چهار با ضرایب متغیر است که حاکم بر تیرهای منشوری دوّار در حالت استاتیکی و در محورهای مختصات کلی می‌باشد. شایان ذکر است، اگر سرعت دورانی تیر برابر با صفر قرار داده شود ( $\Omega = 0$ )، معادله (12-4) به فرم معادله دیفرانسیل همگن (13-4) درمی‌آید که حاکم بر تیرهای منشوری غیر دوّار و در حالت استاتیکی است:

$$\frac{d^4u(x)}{dx^4} = 0 \quad (13-4)$$

در ادامه، معادله (12-4) را از مختصات کلی<sup>1</sup> ( $x$ ) به مختصات محلی<sup>2</sup> ( $\bar{x}$ ) انتقال می‌دهیم. برای این منظور، نخست ارتباط بین این دو مختصات که در رابطه (14-4) و همچنین شکل ۲-۴-الف نشان داده شده است را ارائه می‌کنیم:

$$x = x_i + \bar{x} \quad (14-4)$$

که در رابطه فوق،  $x_i$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_i = (i-1)l \quad (15-4)$$

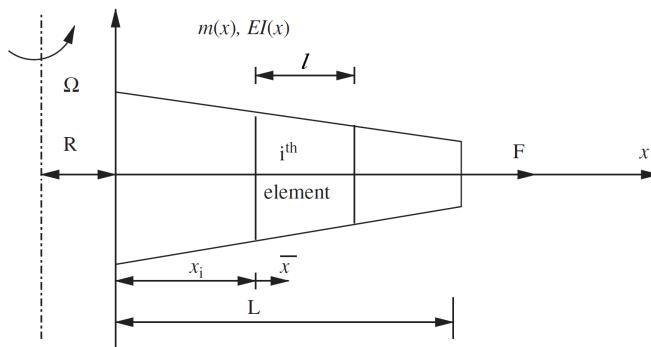
در رابطه اخیر،  $l$  طول یک إلمان و برابر با  $L/NE$  است. لازم به یادآوری است که  $L$  طول تیر بوده و  $NE$  تعداد إلمان مدنظر در روش اجزای محدود می‌باشد. همچنین  $NE, i=1,2,3,\dots$  است. با قراردادن رابطه (14-4) در رابطه (12-4) داریم:

$$\frac{d^4u(\bar{x})}{d\bar{x}^4} + \frac{A(x_i + \bar{x})^2}{2} \frac{d^2u(\bar{x})}{d\bar{x}^2} - B \frac{d^2u(\bar{x})}{d\bar{x}^2} + A(x_i + \bar{x}) \frac{du(\bar{x})}{d\bar{x}} = 0 \quad (16-4)$$

معادله (16-4)، معادله دیفرانسیل همگن حاکم بر تیرهای منشوری دوّار در حالت استاتیکی و در محورهای مختصات محلی است که قرار است در ادامه، به روش اجزای محدود غیرکلاسیک مبتنی بر توابع شکل کسری حل شود. بنابراین، در ادامه، نخست به معرفی توابع شکل کسری خواهیم پرداخت.

<sup>1</sup> Global coordinate

<sup>2</sup> Local coordinate



شکل ۲-۴ ارتباط بین مختصات کلی و مختصات محلی [۲۱]

#### ۴-۴- توابع شکل کسری

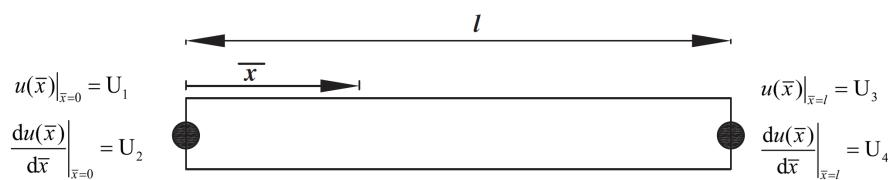
در این بخش، نخست به بیان نقطه ضعف توابع شکل مرسوم<sup>۱</sup> که پیش از این در روابط (۴۳-۳) الی (۴۶-۳) تعریف شده پرداخته و سپس، توابع شکل کسری، که ایراد مذکور را برطرف می‌سازند، معرفی خواهند شد. برای این منظور، شرایط مرزی هر المان، در روابط (۲۰-۴) الی (۱۷-۴) و همچنین در شکل ۳-۴ یادآوری شده است.

$$u(\bar{x})|_{\bar{x}=0} = U_1 \quad (17-4)$$

$$\frac{du(\bar{x})}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = U_2 \quad (18-4)$$

$$u(\bar{x})|_{\bar{x}=l} = U_3 \quad (19-4)$$

$$\frac{du(\bar{x})}{d\bar{x}} \Big|_{\bar{x}=l} = U_4 \quad (20-4)$$



شکل ۳-۴ شرایط مرزی در المان [۲۱]

<sup>۱</sup> Conventional shape functions (CSF)

یادآور می‌شود،  $N_4(\bar{x})$  بر اساس روابط (۴۳-۳) تا (۴۶-۳) به شرح زیر است:

$$N_1(\bar{x}) = 1 - \frac{3}{l^2} \bar{x}^2 + \frac{2}{l^3} \bar{x}^3 \quad (21-4)$$

$$N_2(\bar{x}) = \bar{x} - \frac{2}{l} \bar{x}^2 + \frac{1}{l^2} \bar{x}^3 \quad (22-4)$$

$$N_3(\bar{x}) = \frac{3}{l^2} \bar{x}^2 - \frac{2}{l^3} \bar{x}^3 \quad (23-4)$$

$$N_4(\bar{x}) = -\frac{1}{l} \bar{x}^2 + \frac{1}{l^2} \bar{x}^3 \quad (24-4)$$

بر پایه فرض اساسی روش اجزای محدود، پاسخ تقریبی معادله (۱۶-۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{u}(\bar{x}) = N_1(\bar{x})U_1 + N_2(\bar{x})U_2 + N_3(\bar{x})U_3 + N_4(\bar{x})U_4 \quad (25-4)$$

روابط (۲۱-۴) تا (۲۴-۴) را در رابطه (۲۵-۴) جایگزین کرده و عبارت حاصل را در معادله دیفرانسیل

حاکم بر مسئله، یعنی معادله (۱۶-۴) قرار می‌دهیم؛ نتیجه به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{A(x_i + \bar{x})^2}{2} - B \right) \left( \right. \\ & U_1 \left( \frac{-6}{l^2} + \frac{12\bar{x}}{l^3} \right) + U_2 \left( \frac{-4}{l} + \frac{6\bar{x}}{l^2} \right) + U_3 \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12\bar{x}}{l^3} \right) + U_4 \left( \frac{-2}{l} + \frac{6\bar{x}}{l^2} \right) \\ & \left. + A(x_i + \bar{x}) \left( U_1 \left( \frac{-6\bar{x}l + 6\bar{x}^2}{l^3} \right) + U_2 \left( \frac{l^2 - 4\bar{x}l + 3\bar{x}^2}{l^2} \right) + U_3 \left( \frac{6\bar{x}l - 6\bar{x}^2}{l^3} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + U_4 \left( \frac{-2\bar{x}l + 3\bar{x}^2}{l^2} \right) \right) = 0 \right) \quad (26-4) \end{aligned}$$

با فاکتورگیری از  $U_4$  تا  $U_1$ ، می‌توان رابطه اخیر را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$U_1 R_1(\bar{x}) + U_2 R_2(\bar{x}) + U_3 R_3(\bar{x}) + U_4 R_4(\bar{x}) = 0 \quad (27-4)$$

که  $R_1(\bar{x})$  تا  $R_4(\bar{x})$  توابع باقیمانده نام دارند و به ترتیب، به فرم روابط (۲۸-۴) الی (۳۱-۴) درمی‌آیند:

$$R_1(\bar{x}) = \frac{A(x_i + \bar{x})^2(-6l + 12\bar{x})}{2l^3} - B \frac{-6l + 12\bar{x}}{l^3} + A(x_i + \bar{x}) \frac{-6\bar{x}l + 6\bar{x}^2}{l^3} \quad (28-4)$$

$$R_2(\bar{x}) = \frac{A(x_i + \bar{x})^2(-4l + 6\bar{x})}{2l^2} - B \frac{-4l + 6\bar{x}}{l^2} + A(x_i + \bar{x}) \frac{l^2 - 4\bar{x}l + 3\bar{x}^2}{l^2} \quad (29-4)$$

$$R_3(\bar{x}) = \frac{A(x_i + \bar{x})^2(6l - 12\bar{x})}{2l^3} - B \frac{6l - 12\bar{x}}{l^3} + A(x_i + \bar{x}) \frac{6\bar{x}l - 6\bar{x}^2}{l^3} \quad (30-4)$$

$$R_4(\bar{x}) = \frac{A(x_i + \bar{x})^2(-2l + 6\bar{x})}{2l^2} - B \frac{-2l + 6\bar{x}}{l^2} + A(x_i + \bar{x}) \frac{-2\bar{x}l + 3\bar{x}^2}{l^2} \quad (31-4)$$

با توجه به دلخواه‌بودن مقادیر  $U_1$  تا  $U_4$ ، و از سوی دیگر همیشه برقرار بودن رابطه (۲۷-۴)،

بایستی  $R_1(\bar{x})$  تا  $R_4(\bar{x})$  برابر با صفر باشند که این زمانی اتفاق می‌افتد که  $A$  و  $B$  برابر با صفر

گردند. به بیان دیگر، پاسخ تقریبی بیان شده در رابطه (۲۵-۴) زمانی می‌تواند معادله (۱۶-۴) را ارضاء کند.

نماید که سرعت دورانی برابر با صفر باشد ( $\Omega = 0$ ). این همان نقطه‌ضغف توابع شکل تعریف شده در

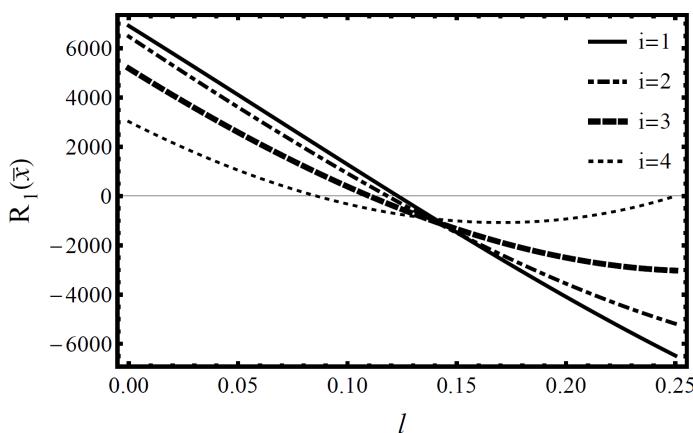
روابط (۲۱-۴) تا (۲۴-۴) است. شایان ذکر است به دلیل تعریف  $x$  طبق رابطه (۱۵-۴)، هر کدام از

تابع  $R_1(\bar{x})$  تا  $R_4(\bar{x})$ ، خود به مقدار NE دارای نمودار می‌باشند. توابع باقیمانده  $R_1(\bar{x})$  تا

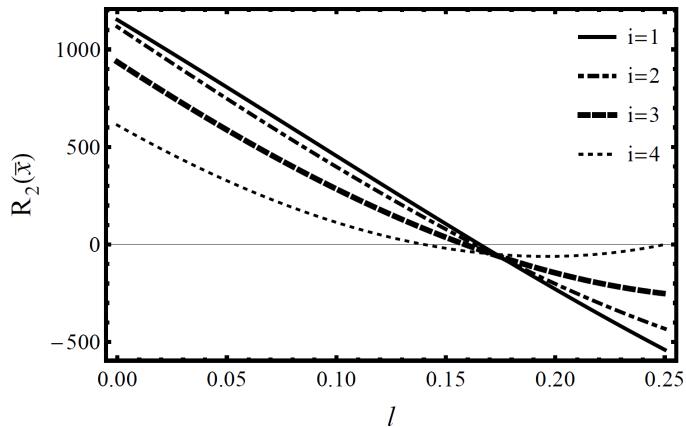
$R_4(\bar{x})$  برای چهار إلمان ( $NE = 4$ ) و سرعت دورانی برابر با ۱۲ ( $\Omega = 12$ ) در شکل‌های ۴-۴ تا ۷-۴

رسم شده‌اند. همان‌طور که بیان گردید، توابع باقیمانده  $R_1(\bar{x})$  تا  $R_4(\bar{x})$  برای سرعت دورانی برابر با

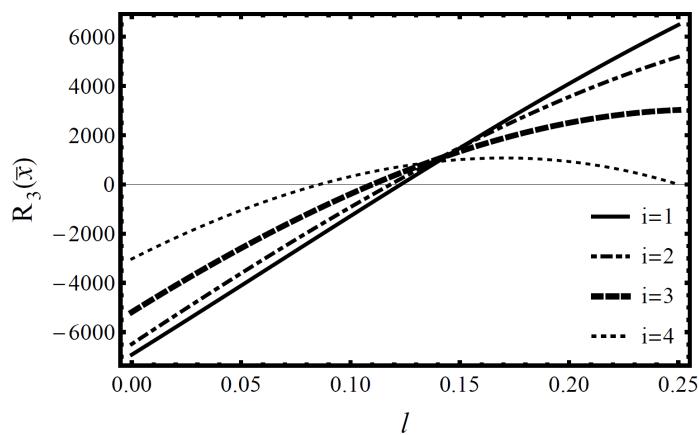
صفر ( $\Omega = 0$ )، منطبق بر خط  $y = 0$  می‌شوند.



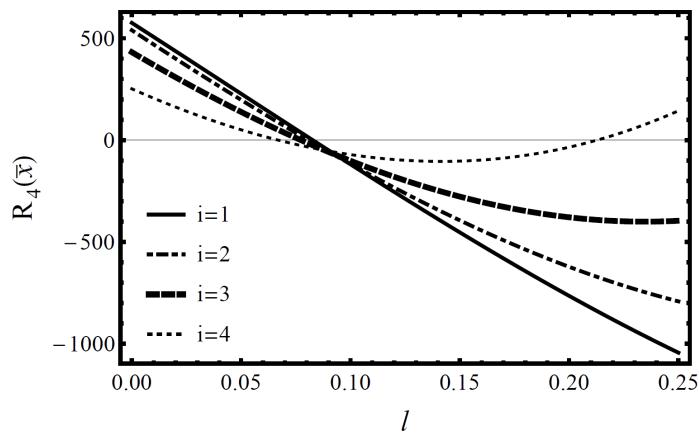
شکل ۴-۴ تابع باقیمانده  $R_1(\bar{x})$  به ازای  $NE = 4$  و  $\Omega = 12$



شکل ۵-۴ تابع باقیمانده  $R_2(\bar{x})$  به ازای  $\Omega = 12$  و  $NE = 4$



شکل ۶-۴ تابع باقیمانده  $R_3(\bar{x})$  به ازای  $\Omega = 12$  و  $NE = 4$



شکل ۷-۴ تابع باقیمانده  $R_4(\bar{x})$  به ازای  $\Omega = 12$  و  $NE = 4$

حال برآئیم تا شرطِ ارضای معادله دیفرانسیل را نیز در روابطِ اجزای محدود بگنجانیم تا نقطه-  
ضعی مذکور از بین برود. پاسخ تقریبی جدیدِ مدنظر  $[\bar{u}_N(\bar{x})]$  برای معادله دیفرانسیل (۳۲-۴) را به  
فرمِ رابطه (۳۲-۴) درنظر می‌گیریم. نخست، لازم به یادآوری است که در رابطه (۳۷-۳)، تعدادِ  $\alpha$ ‌های  
مجھول را دقیقاً برابر با تعدادِ درجات آزادی تعریف کردیم که با توجه به شکل ۳-۴، تعدادِ  $\alpha$ ‌های  
مجھول برابر با چهار می‌گردد. اما رابطه (۳۲-۴) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{u}_N(\bar{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{x}^2 + \alpha_3 \bar{x}^3 + \alpha_4 \bar{x}^4 \quad (32-4)$$

همان‌طور که مشاهده می‌گردد در رابطه فوق  $\alpha_0$  تا  $\alpha_4$ ، پنج ضریبِ مجھولی هستند که بایستی  
محاسبه شوند. بدیهی است برای محاسبه پنج مجھول فوق به پنج معادله نیازمندیم که چهار عدد از  
آن‌ها توسط شرایطِ مرزی نشان‌داده در شکل ۳-۴ تأمین خواهد شد. معادله پنجم، همان شرطِ اضافی  
ارضای معادله دیفرانسیل توسطِ توابع شکل است که از قراردادن رابطه (۳۲-۴) در معادله (۱۶-۴)  
حاصل خواهد شد. به بیانِ دیگر، با شیوه اتخاذ‌شده، ارضای معادله دیفرانسیل توسطِ توابع شکل نیز در  
رابطه‌سازی اجزای محدود گنجانده شد. بدین ترتیب، دستگاه مذکور به صورتِ زیر در می‌آید:

$$\begin{cases} \bar{u}_N(\bar{x})|_{\bar{x}=0} = U_1 \\ \frac{d\bar{u}_N(\bar{x})}{d\bar{x}}|_{\bar{x}=0} = U_2 \\ \bar{u}_N(\bar{x})|_{\bar{x}=L} = U_3 \\ \frac{d\bar{u}_N(\bar{x})}{d\bar{x}}|_{\bar{x}=L} = U_4 \\ \left( \frac{A(x_i + \bar{x})^2}{2} - B \right) (2\alpha_2 + 6\alpha_3 \bar{x} + 12\alpha_4 \bar{x}^2) + A(x_i + \bar{x})(\alpha_1 + 2\alpha_2 \bar{x} + 3\alpha_3 \bar{x}^2 + 4\alpha_4 \bar{x}^3) = -24\alpha_4 \end{cases} \quad (33-4)$$

مقادیر  $\alpha_0$  تا  $\alpha_4$  که از حلِ معادله فوق حاصل خواهند شد، به ترتیب، به فرمِ روابطه (۳۴-۴) الی  
(۳۸-۴) خواهند بود:

$$\alpha_0 = U_1 \quad (34-4)$$

$$\alpha_1 = U_2 \quad (\text{۳۵-۴})$$

$$\alpha_2 = \frac{\Psi_2}{l^2 \psi_1} \quad (\text{۳۶-۴})$$

$$\alpha_3 = \frac{\Psi_3}{l^3 \psi_1} \quad (\text{۳۷-۴})$$

$$\alpha_4 = \frac{\Psi_4}{l^3 \psi_1} \quad (\text{۳۸-۴})$$

که در روابط فوق،  $\Psi_1$  تا  $\Psi_4$  عبارتند از:

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & -24 + 2Bl^2 + \bar{x}(-12Bl + \bar{x}(12B - 3Al^2 + 2A(6l - 5\bar{x})\bar{x})) - 2A\bar{x}(2l^2 - 9l\bar{x} + 8\bar{x}^2)x_i \\ & - A(l^2 + 6\bar{x}(-l + \bar{x}))x_i^2 \end{aligned} \quad (\text{۳۹-۴})$$

$$\begin{aligned} \Psi_2 = & 6(-12 - \bar{x}(4Bl + \bar{x}(-6B + A\bar{x}(-4l + 5\bar{x}))))U_3 \\ & + 2l(12 + \bar{x}(3Bl + \bar{x}(-6B + A\bar{x}(-3l + 5\bar{x}))))U_4 \\ & + A\bar{x}^2(12(3l - 4\bar{x})U_3 + l(-9l + 16\bar{x})U_4)x_i \\ & + 3A\bar{x}((4l - 6\bar{x})U_3 - l(l - 2\bar{x})U_4)x_i^2 \\ & + lU_2 \left( 48 + \bar{x}(18Bl + Al^3 + 2\bar{x}(-12B + A\bar{x}(-9l + 10\bar{x}))) \right. \\ & \left. + A(l^3 - 27l\bar{x}^2 + 32\bar{x}^3)x_i + 3A\bar{x}(-3l + 4\bar{x})x_i^2 \right) \\ & + 6U_1(12 + \bar{x}(4Bl + \bar{x}(-6Bb + A\bar{x}(-4l + 5\bar{x}))) + 2A\bar{x}(-3l + 4\bar{x})x_i + A(-2l + 3\bar{x})x_i^2) \end{aligned} \quad (\text{۴۰-۴})$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 = & 4U_3(12 + 2Bl^2 - 6B\bar{x}^2 - 3Al^2\bar{x}^2 + 5A\bar{x}^4) \\ & + U_4(-24l - 2Bl^3 + 12B\bar{x}^2 + 3Al^3\bar{x}^2 - 10A\bar{x}^4) \\ & + 4A\bar{x}(-4(l^2 - 2\bar{x}^2)U_3 + l(l^2 - 4\bar{x}^2)U_4)x_i + A(-4(l^2 - 3\bar{x}^2)U_3 + l(l^2 - 6\bar{x}^2)U_4)x_i^2 \\ & + 4U_1(-2(6 + Bl^2) + \bar{x}^2(6B + 3Al^2 - 5A\bar{x}^2) + 4A\bar{x}(l^2 - 2\bar{x}^2)x_i + A(l^2 - 3\bar{x}^2)x_i^2) \\ & + lU_2 \left( -6(4 + Bl^2) + \bar{x}(-2Al^3 + 12B\bar{x} + 9Al^2\bar{x} - 10A\bar{x}^3) - 2A(l^3 - 6l^2\bar{x} + 8\bar{x}^3)x_i \right. \\ & \left. + 3A(l^2 - 2\bar{x}^2)x_i^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{۴۱-۴})$$

$$\begin{aligned}
\Psi_4 = & U_3 (-6Bl + 12B\bar{x} + 9Al\bar{x}^2 - 12A\bar{x}^3) + U_4 (+2Bl^2 - 6Bl\bar{x} - 3Al^2\bar{x}^2 + 6Al\bar{x}^3) \\
& + A\bar{x} (6(2l - 3\bar{x})U_3 + l(-4l + 9\bar{x})U_4)x_i + A(3(l - 2\bar{x})U_3 - l(l - 3\bar{x})U_4)x_i^2 \\
& + 3U_1 (2Bl + \bar{x}(-4B + A\bar{x}(-3l + 4\bar{x}))) + 2A\bar{x}(-2l + 3\bar{x})x_i - A(l - 2\bar{x})x_i^2 \\
& + lU_2 (4Bl + \bar{x}(-6B + Al^2 + 6A\bar{x}(-l + \bar{x}))) + A(l^2 - 8l\bar{x} + 9\bar{x}^2)x_i + A(-2l + 3\bar{x})x_i^2
\end{aligned} \tag{42-4}$$

در ادامه، با قراردادن روابط (۴۲-۴) تا (۴۷-۴) در رابطه (۳۲-۴) و فاكتورگيری از  $U_1$  تا  $U_4$ ،

میتوان رابطه اخير را به صورت زیر نيز بازنويسي کرد:

$$\bar{u}_N(\bar{x}) = N_{R1}(\bar{x})U_1 + N_{R2}(\bar{x})U_2 + N_{R3}(\bar{x})U_3 + N_{R4}(\bar{x})U_4 \tag{43-4}$$

که در آن  $N_{R1}(\bar{x})$  تا  $N_{R4}(\bar{x})$  توابع شكل کسری نام دارند و به فرم زیر تعریف میشوند:

$$N_{R1}(\bar{x}) = \frac{\zeta_1(\bar{x})}{lD(\bar{x})} \tag{44-4}$$

$$N_{R2}(\bar{x}) = \frac{\zeta_2(\bar{x})}{D(\bar{x})} \tag{45-4}$$

$$N_{R3}(\bar{x}) = \frac{\zeta_3(\bar{x})}{lD(\bar{x})} \tag{46-4}$$

$$N_{R4}(\bar{x}) = \frac{\zeta_4(\bar{x})}{D(\bar{x})} \tag{47-4}$$

در روابط فوق،  $D(\bar{x})$  و  $\zeta_i(\bar{x})$  تا  $\zeta_4(\bar{x})$  عبارتند از:

$$\begin{aligned}
D(\bar{x}) = & l^2 \left( -10Ax^4 + (16x_i - 12l)Ax^3 + ((3l^2 + 6x_i^2 - 18lx_i)A - 12B)x^2 \right. \\
& \left. + ((4x_il^2 - 6lx_i^2)A + 12Bl)\bar{x} + 24 + Ax_i^2l^2 - 2Bl^2 \right) \tag{48-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_1(\bar{x}) = & 8Ax^7 + (14x_i - 21l)Ax^6 + ((12l^2 + 6x_i^2 - 36lx_i)A - 12B)x^5 \\
& + ((10l^3 + 20l^2x_i - 15lx_i^2)A + 30Bl)\bar{x}^4 + ((16l^3x_i + 8l^2x_i^2 - 12l^4)A - 16Bl^2 + 48)\bar{x}^3 \\
& + ((3l^5 + 6l^3x_i^2 - 18x_il^4)A - 12Bl^3 - 72l)\bar{x}^2 \\
& + ((4l^5x_i - 6x_i^2l^4)A + 12Bl^4)\bar{x} + 24l^3 - 2Bl^5 + Al^5x_i^2
\end{aligned} \tag{49-4}$$

$$\begin{aligned}\zeta_2(\bar{x}) = & \bar{x} \left( -4A\bar{x}^6 + (7x_i - 14l)A\bar{x}^5 + ((3x_i^2 - 24lx_i + 18l^2)A - 6B)\bar{x}^4 \right. \\ & + ((30l^2x_i - 10lx_i^2 - 11l^3)A + 20Bl)\bar{x}^3 + ((12l^2x_i^2 - 16l^3x_i + 2l^4)A - 24Bl^2 + 24)\bar{x}^2 \\ & \left. + ((3l^4x_i - 6x_i^2l^3)A + 12Bl^3 - 48l)\bar{x} + 24l^2 - 2Bl^4 + Al^4x_i^2 \right) \quad (50-4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_3(\bar{x}) = & -\bar{x}^2 \left( -8A\bar{x}^5 + (14x_i - 21l)A\bar{x}^4 + ((6x_i^2 + 12l^2 - 36lx_i)A - 12B)\bar{x}^3 \right. \\ & \left. + ((20l^2x_i - 15lx_i^2)A + 30Bl)\bar{x}^2 + (8Al^2x_i^2 - 16Bl^2 + 48)\bar{x} - 72l \right) \quad (51-4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_4(\bar{x}) = & \bar{x}^2 \left( -4ax^5 + (x_i - l)7ax^4 + ((3x_i^2 + 3l^2 - 12lx_i)a - 6b)\bar{x}^3 \right. \\ & \left. + ((l^2x_i - lx_i^2)5a + 10bl)\bar{x}^2 + (2al^2x_i^2 - 4bl^2 + 24)\bar{x} - 24l \right) \quad (52-4)\end{aligned}$$

با توجه به معادله پنجم دستگاه (۳۳-۴)، قطعاً توابع شکل کسری معرفی شده در روابط (۴۴-۴)

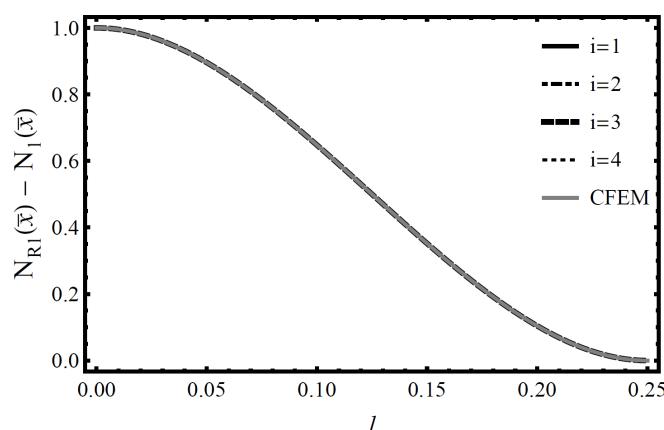
الی (۵۲-۴)، معادله (۱۶-۴) را ارضا می نمایند. لازم به ذکر است که با فرض ثابت بودن طول تیر (L)

و تعداد ایمانها (NE)، توابع شکل مرسوم تنها تابع موقعیت محلی ( $\bar{x}$ ) در طول ایمان هستند؛ و این

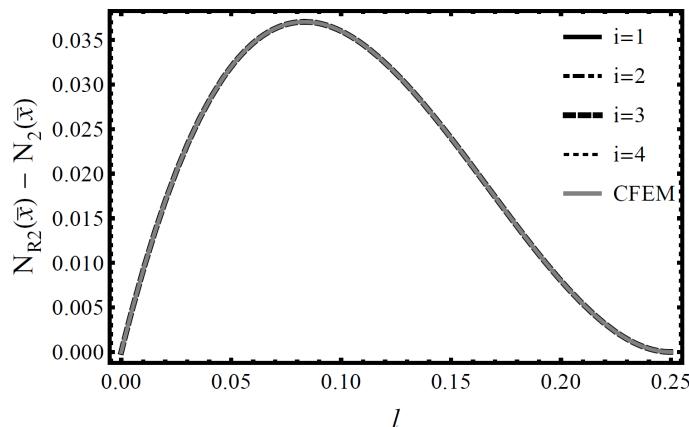
در حالی است که توابع شکل کسری علاوه بر آن، تابع جرم واحد طول و صلبیت تیر (m و EI)،

سرعت دورانی ( $\Omega$ ) و همچنین، موقعیت ایمان در حال بررسی ( $x_i$ ) نیز هستند. در شکل های ۸-۴ تا

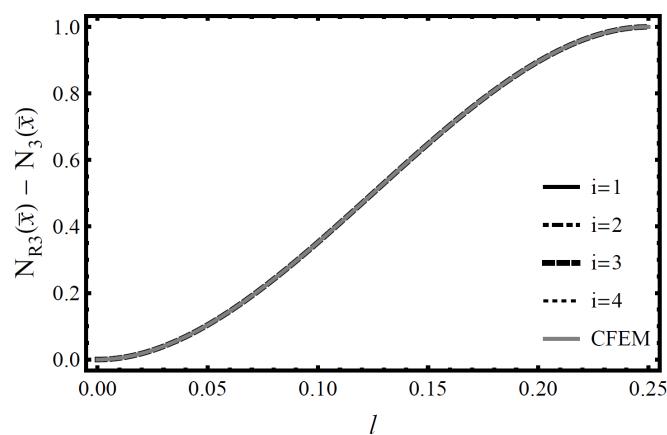
۱۵-۴ به مقایسه توابع شکل کسری و مرسوم (CFEM) با فرض  $1 = L$  و  $4 = NE$  پرداخته ایم.



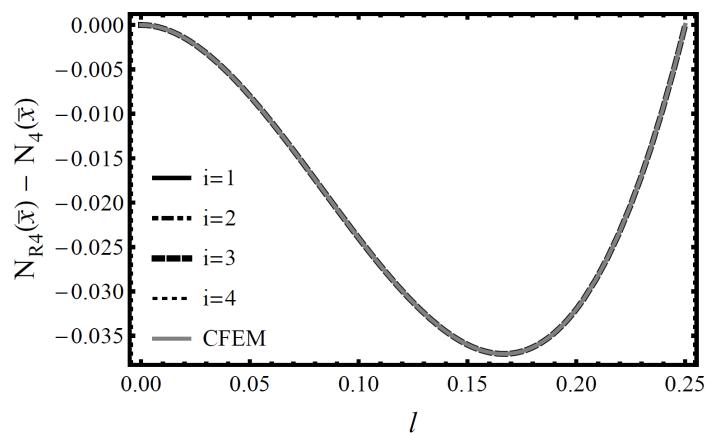
شکل ۸-۴ تغییرات اولین توابع شکل مرسوم  $[N_i(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R1}(\bar{x})]$  در طول ایمان ( $\Omega = 0$  و  $NE = 4$ )



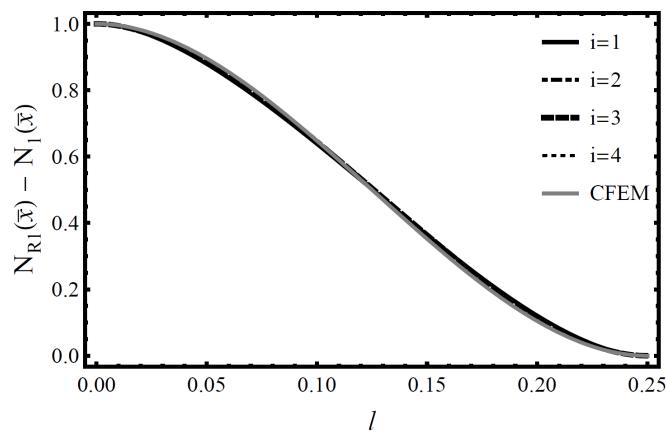
شکل ۴-۹ تغییرات دومین توابع شکل مرسوم  $[N_{R2}(\bar{x})]$  و کسری  $[N_2(\bar{x})]$  در طول ایمان ( $\Omega = 0$  و  $NE = 4$ )



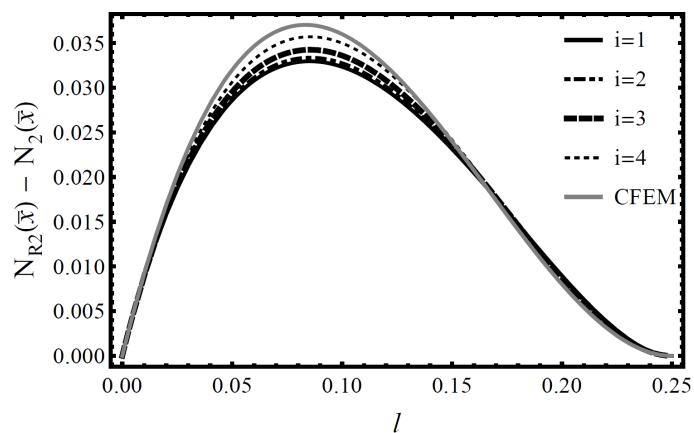
شکل ۴-۱۰ تغییرات سومین توابع شکل مرسوم  $[N_{R3}(\bar{x})]$  و کسری  $[N_3(\bar{x})]$  در طول ایمان ( $\Omega = 0$  و  $NE = 4$ )



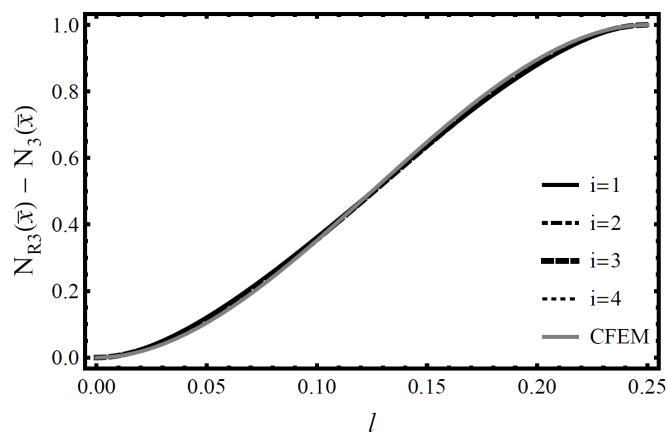
شکل ۴-۱۱ تغییرات چهارمین توابع شکل مرسوم  $[N_{R4}(\bar{x})]$  و کسری  $[N_4(\bar{x})]$  در طول ایمان ( $\Omega = 0$  و  $NE = 4$ )



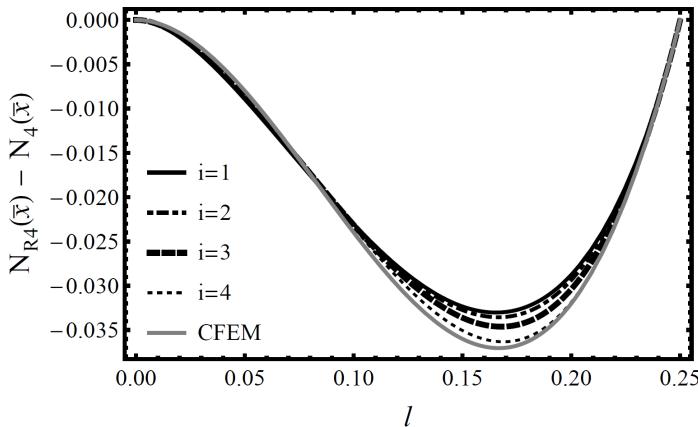
شکل ۱۲-۴ تغییرات اولین توابع شکل مرسوم  $[N_{R1}(\bar{x})]$  و کسری  $[N_i(\bar{x})]$  در طول ایمان ( $\Omega = 12$  و  $NE = 4$ )



شکل ۱۳-۴ تغییرات دومین توابع شکل مرسوم  $[N_{R2}(\bar{x})]$  و کسری  $[N_2(\bar{x})]$  در طول ایمان ( $\Omega = 12$  و  $NE = 4$ )



شکل ۱۴-۴ تغییرات سومین توابع شکل مرسوم  $[N_{R3}(\bar{x})]$  و کسری  $[N_3(\bar{x})]$  در طول ایمان ( $\Omega = 12$  و  $NE = 4$ )



شکل ۴-۱۵ تغییرات چهارمین توابع شکل مرسوم  $[N_{R4}(\bar{x})]$  و کسری  $[N_{R4}(\bar{x})]$  در طول المان ( $\Omega = 12$  و  $NE = 4$ )

در ادامه برآنیم تا به تحلیل ارتعاش آزاد تیر دوّار منشوری و نامنشوری با استفاده از توابع شکل مرسوم و توابع شکل کسری در قالب چند مثال بپردازیم. علاوه بر دو روش مذکور، از روش تبدیل دیفرانسیلی نیز برای یافتن فرکانس‌های تیر دوّار بهره خواهیم جست. در ادامه، نخست به استخراج رابطه بازگشتی در روش تبدیل دیفرانسیلی می‌پردازیم.

#### ۴-۵- روش تبدیل دیفرانسیلی

نخست برای به دست آوردن رابطه بازگشتی کلی برای معادله دیفرانسیلی تیرهای نامنشوری دوّار اویلر - برنولی، که در رابطه (۴-۶) بیان گردید، توابع صلبیت خمی و جرم واحد طول تیر نامنشوری، به ترتیب، به فرم روابط (۵۳-۴) و (۵۴-۴) فرض می‌گردد:

$$EI(x) = EI_0 \left( 1 + \beta_1 \frac{x}{L} + \beta_2 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \beta_3 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + \beta_4 \left( \frac{x}{L} \right)^4 \right) \quad (53-4)$$

$$m(x) = m_0 \left( 1 + \alpha \frac{x}{L} \right) \quad (54-4)$$

که در روابط فوق،  $\beta_1$  تا  $\beta_4$  و  $\alpha$  همگی ضرایبی معلوم هستند. همچنین  $m_0$  و  $EI_0$ ، به ترتیب، صلبیت خمی و جرم واحد طول تیر در ابتدای تیر هستند. با جایگذاری رابطه (۵۴-۴) در رابطه (۵-۴)،  $T(x)$  به صورت رابطه (۵۵-۴) است:

$$T(x) = \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 \left( 2RL - 2Rx + L^2 - x^2 + \frac{\alpha}{3L} (3RL^2 - 3Rx^2 + 2L^3 - 2x^3) \right) \quad (55-4)$$

اکنون معادله (55-4) را با فرضی  $q(x,t)$  برابر با صفر (برای تحلیل ارتعاش آزاد تیر)، و همچنین

بردن معادله به حوزه فرکانس، به فرم رابطه (56-4) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} EI(x) \frac{d^4 u(x)}{dx^4} + 2 \frac{dEI(x)}{dx} \frac{d^3 u(x)}{dx^3} + \frac{d^2 EI(x)}{dx^2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \\ - \frac{dT(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} - T(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - m(x) \omega^2 u(x) = 0 \end{aligned} \quad (56-4)$$

همانند فصل دوم، معادله دیفرانسیل را بی بعد می‌نماییم. لذا  $\xi$  به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad (57-4)$$

حال با قراردادن روابط (53-4) تا (55-4) و (56-4) در رابطه (56-4) و اندکی ساده‌سازی، رابطه

(56-4) به فرم رابطه (58-4) بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{EI_0}{L^4} (1 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 + \beta_4 \xi^4) \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} \\ + 2 \frac{EI_0}{L^4} (\beta_1 + 2\beta_2 \xi + 3\beta_3 \xi^2 + 4\beta_4 \xi^3) \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \\ + \frac{EI_0}{L^4} (2\beta_2 + 6\beta_3 \xi + 12\beta_4 \xi^2) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ - \left( \frac{m_0 \Omega^2}{2} (2\bar{R} + 1 - 2\bar{R}\xi - \xi^2) + \frac{m_0 \Omega^2}{6} \alpha (3\bar{R} + 2 - 3\bar{R}\xi^2 - 2\xi^3) + \frac{F}{L^2} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ + m_0 \Omega^2 (\bar{R} + \xi) (1 + \alpha \xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} - m_0 \omega^2 (1 + \alpha \xi) u(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (58-4)$$

که در رابطه (58-4)،  $\bar{R}$  برابر است با  $L/R$ . با ضرب کردن طرفین رابطه (58-4) در عبارت

داریم:

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \beta_3 \xi^3 + \beta_4 \xi^4\right) \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} \\
& + 2 \left(\beta_1 + 2\beta_2 \xi + 3\beta_3 \xi^2 + 4\beta_4 \xi^3\right) \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \\
& + \left(2\beta_2 + 6\beta_3 \xi + 12\beta_4 \xi^2\right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\
& - \left(\frac{\lambda^2}{2} \left(2\bar{R} + 1 - 2\bar{R}\xi - \xi^2\right) + \frac{\lambda^2}{6} \alpha \left(3\bar{R} + 2 - 3\bar{R}\xi^2 - 2\xi^3\right) + \tilde{F}\right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\
& + \lambda^2 (\bar{R} + \xi) (1 + \alpha \xi) \frac{du(\xi)}{d\xi} - \mu^2 (1 + \alpha \xi) u(\xi) = 0
\end{aligned} \tag{59-4}$$

معادله (59-4)، معادله دیفرانسیل بی بعدشده حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای نامنشوری دوّار اویلر –

برنولی است. در این معادله،  $\lambda$  سرعت دورانی بی بعد است. در رابطه فوق،  $\lambda^2$ ،  $\tilde{F}$  و  $\mu^2$  به صورت زیر

تعريف می شوند:

$$\lambda^2 = \frac{m_0 \Omega^2 L^4}{EI_0} \tag{60-4}$$

$$\tilde{F} = \frac{FL^2}{EI_0} \tag{61-4}$$

$$\mu^2 = \frac{m_0 \omega^2 L^4}{EI_0} \tag{62-4}$$

شرایط مرزی برای تیر دوّار مورد بررسی در مرجع [۲۱]، دقیقاً همان شرایط مرزی تیر گیردار – آزاد (تیر طره) است. این شرایط در روابط (۶۳-۴) الی (۶۶-۴) بیان شده است:

$$u(\xi)|_{\xi=0} = 0 \tag{63-4}$$

$$\left. \frac{du(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \tag{64-4}$$

$$\left. \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \tag{65-4}$$

$$\left. \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right|_{\xi=1} = 0 \tag{66-4}$$

اکنون با استفاده از قوانین بیان شده در جدول ۱-۲، به اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی بر معادله

(۴-۶۷) می پردازیم که رابطه بازگشتی حاصل به صورت رابطه (۴-۶۷) در می آید:

$$\begin{aligned} U[k+4] &= \frac{-1}{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)} \left( \right. \\ &+ \left( \beta_1(k+3)(k+2)^2(k+1) \right) U[k+3] \\ &+ (k+2)(k+1) \left( \beta_2(k(k+3)+2) - \left( \left( \lambda^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{3} + \bar{R} \left( 1 + \frac{\alpha}{2} \right) \right) \right) + \tilde{F} \right) \right) U[k+2] \\ &+ (k+1) \left( \beta_3 k ((k-1)(k+4)+6) + \lambda^2 \bar{R} (k+1) \right) U[k+1] \\ &+ \left( \beta_4 k (k-1) ((k-2)(k+5)+12) + \lambda^2 k \left( 1 + \alpha \bar{R} \right) \left( 1 + \frac{k-1}{2} \right) - \mu^2 \right) U[k] \\ &+ \alpha \left( \frac{(k-1)(k+1)}{3} \lambda^2 - \mu^2 \right) U[k-1] \left. \right) \end{aligned}$$

در رابطه (۴-۶۷)،  $k = 0, 1, 2, \dots, N$  تعداد جملات در روش تبدیل دیفرانسیلی است. همچنین

تابع تبدیل یافته  $(\xi) u$  می‌باشد. مشاهده می‌شود با صفر قراردادن مقادیر  $\beta_1$  تا  $\beta_4$ ،  $\alpha$ ،  $\lambda$ ،

$\bar{R}$  و  $\tilde{F}$ ، رابطہ  $(\bar{F} - \tilde{F})$  برابر با رابطہ  $(\bar{R} - \tilde{R})$  می شود۔ یاد آور می گردد رابطہ  $(\bar{R} - \tilde{R})$ ، رابطہ بازگشتی

حاصل از اعمالِ روشِ تبدیل دیفرانسیلی بر معادله دیفرانسیلی تیرهای اویلر - برنولی منشوری است.

اکنون همانند آنچه در فصل دوم بیان گردید،  $[0]U$  و  $[1]U$  را، به ترتیب، بر اساس روابطِ

(۶۴-۴) و (۶۳-۴) محاسبه خواهیم کرد که هر دو برابر با صفر خواهند شد. سپس [2] و [3] را

مجھوں درنظر گرفته و سایر توابع تبدیل را بر اساس آنها خواهیم یافت. در پایان به کمکِ شرایطِ

مرزی (۶۵-۴) و (۶۶-۴) دستگاهی همانند رابطه (۶۸-۴) حاصل می‌گردد:

$$[\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} U[2] \\ U[3] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (8\lambda - 4)$$

کافی است دترمینان ماتریس  $A$  را برابر با صفر قرار دهیم که از حل معادله وابسته به آن، مقادیر رابطه (۶۸-۴) برابر صفر است. حال برای اینکه دستگاه موجود جواب‌های غیربدیهی داشته باشد، که در آن  $A$  ماتریسی  $2 \times 2$  است. با توجه به اینکه تحلیل ارتعاش آزاد تیر مدنظر است، طرف راست

فرکانس‌های تیر به دست می‌آید. در بخشی بعدی نتایج این کار، همراه با نتایج حاصل از روش اجزای محدود ارائه می‌گردد.

#### ۴-۶- نتایج و بحث

در این بخش، با استفاده از توابع شکلی مرسم و کسری به تحلیل ارتعاش آزاد تیرهای دوّار اویلر - برنولی با سطح مقطع منشوری و نامنشوری پرداخته می‌شود. علاوه بر آن، از روش تبدیل دیفرانسیلی نیز برای صحت‌سنجه‌ی پاسخ‌های حاصل استفاده می‌شود. برای این منظور، هر سه مثال مرجع [۲۱] را مدنظر قرار می‌دهیم که در همگی آن‌ها، شرایط مرزی همانند آن‌چه در روابط (۶۳-۴) تا (۶۶-۴) بیان شده، فرض می‌گردد؛ اما ضرایب توابع صلبیت خمی و جرم واحد طول تیر که، به ترتیب، در روابط (۵۳-۴) و (۵۴-۴) معرفی گردیدند، بر اساس آن‌چه در جدول ۱-۴ تعریف شده‌اند درنظر گرفته می‌شوند. شایان ذکر است مقادیر بیان شده در جدول ۱-۴، بر اساس مرجع [۲۱] است. پارامترهای فرکانسی حاصل از بکارگیری روش‌های مذکور در جداول ۲-۴ الی ۷-۴ نشان داده شده‌اند. خاطر نشان می‌سازد در کلیه حالات،  $\bar{R}$  و  $\tilde{F}$  برابر با صفر است. علاوه بر آن، تعداد جملات استفاده شده در روش تبدیل دیفرانسیلی (N) و تعداد المان‌های درنظر گرفته شده در روش اجزای محدود (NE)، در بالای هر جدول بیان شده است.

جدول ۱-۴ مقادیر ضرایب تابع جرم واحد طول تیر  $[m(x)]$  و تابع صلبیت خمی  $[EI(x)]$  بر اساس مرجع [۲۱]

شماره مثال	$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\beta_3$	$\beta_4$
مثال اول	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰	۰/۰
مثال دوم	-۰/۵	-۱/۵	۰/۷۵	-۰/۱۲۵	۰/۰
مثال سوم	-۰/۸	-۰/۹۵	۰/۰	۰/۰	۰/۰

جدول ۲-۴ اولین و دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال اول و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=50$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ )

پارامتر فرکانسی دوم				پارامتر فرکانسی اول				سرعت
روش اجزای محدود		روش تبدیل	روش دیفرانسیلی	روش اجزای محدود		روش تبدیل	روش دیفرانسیلی	دورانی بی-
کسری	مرسوم			کسری	مرسوم			بعد ( $\lambda$ )
۲۲/۰۳۴۵	۲۲/۰۳۴۵	۲۲/۰۳۴۵		۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰		۰
۲۲/۱۸۱۰	۲۲/۱۸۱۰	۲۲/۱۸۱۰		۳/۶۸۱۷	۳/۶۸۱۷	۳/۶۸۱۷		۱
۲۲/۶۱۴۹	۲۲/۶۱۴۹	۲۲/۶۱۴۹		۴/۱۳۷۳	۴/۱۳۷۳	۴/۱۳۷۳		۲
۲۳/۳۲۰۳	۲۳/۳۲۰۳	۲۳/۳۲۰۳		۴/۷۹۷۳	۴/۷۹۷۳	۴/۷۹۷۳		۳
۲۴/۲۷۳۴	۲۴/۲۷۳۴	۲۴/۲۷۳۴		۵/۵۸۵۰	۵/۵۸۵۰	۵/۵۸۵۰		۴
۲۵/۴۴۶۱	۲۵/۴۴۶۱	۲۵/۴۴۶۱		۶/۴۴۹۵	۶/۴۴۹۵	۶/۴۴۹۵		۵
۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۱		۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴		۶
۲۸/۳۳۴۱	۲۸/۳۳۴۱	۲۸/۳۳۴۱		۸/۲۹۹۶	۸/۲۹۹۶	۸/۲۹۹۶		۷
۲۹/۹۹۵۴	۲۹/۹۹۵۴	۲۹/۹۹۵۴		۹/۲۵۶۸	۹/۲۵۶۸	۹/۲۵۶۸		۸
۳۱/۷۷۰۵	۳۱/۷۷۰۵	۳۱/۷۷۰۵		۱۰/۲۲۵۷	۱۰/۲۲۵۷	۱۰/۲۲۵۷		۹
۳۳/۶۴۰۴	۳۳/۶۴۰۴	۳۳/۶۴۰۴		۱۱/۲۰۲۳	۱۱/۲۰۲۳	۱۱/۲۰۲۳		۱۰
۳۵/۵۸۹۰	۳۵/۵۸۹۰	۳۵/۵۸۹۰		۱۲/۱۸۴۳	۱۲/۱۸۴۳	۱۲/۱۸۴۳		۱۱
۳۷/۶۰۳۱	۳۷/۶۰۳۱	۳۷/۶۰۳۱		۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۷۰۲		۱۲

جدول ۴-۳ سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال اول و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=50$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ )

پارامتر فرکانسی چهارم			پارامتر فرکانسی سوم			سرعت
دورانی بی-	روش تبدیل دیفرانسیلی	روش اجزای محدود	دورانی بی-	روش تبدیل دیفرانسیلی	روش اجزای محدود	بعد ( $\lambda$ )
کسری	مرسوم	دیفرانسیلی	کسری	مرسوم	دیفرانسیلی	
۱۲۰/۹۰۲	۱۲۰/۹۰۲	۱۲۰/۹۰۲	۶۱/۶۹۷۳	۶۱/۶۹۷۳	۶۱/۶۹۷۲	۰
۱۲۱/۰۵۱	۱۲۱/۰۵۱	۱۲۱/۰۵۱	۶۱/۸۴۱۸	۶۱/۸۴۱۸	۶۱/۸۴۱۸	۱
۱۲۱/۴۹۷	۱۲۱/۴۹۷	۱۲۱/۴۹۷	۶۲/۲۷۳۲	۶۲/۲۷۳۲	۶۲/۲۷۳۲	۲
۱۲۲/۲۳۶	۱۲۲/۲۳۶	۱۲۲/۲۳۶	۶۲/۹۸۵۰	۶۲/۹۸۵۰	۶۲/۹۸۵۰	۳
۱۲۳/۲۶۲	۱۲۳/۲۶۲	۱۲۳/۲۶۱	۶۳/۹۶۶۸	۶۳/۹۶۶۸	۶۳/۹۶۶۸	۴
۱۲۴/۵۶۷	۱۲۴/۵۶۷	۱۲۴/۵۶۶	۶۵/۲۰۵۱	۶۵/۲۰۵۱	۶۵/۲۰۵۰	۵
۱۲۶/۱۴۱	۱۲۶/۱۴۱	۱۲۶/۱۴	۶۶/۶۸۴۰	۶۶/۶۸۴۰	۶۶/۶۸۳۹	۶
۱۲۷/۹۷۳	۱۲۷/۹۷۳	۱۲۷/۹۷۲	۶۸/۳۸۶۰	۶۸/۳۸۶۰	۶۸/۳۸۶۰	۷
۱۳۰/۰۵۰	۱۳۰/۰۴۹	۱۳۰/۰۴۹	۷۰/۲۹۳۰	۷۰/۲۹۳۰	۷۰/۲۹۳۰	۸
۱۳۲/۳۵۸	۱۳۲/۳۵۸	۱۳۲/۳۵۸	۷۲/۳۸۶۸	۷۲/۳۸۶۷	۷۲/۳۸۶۷	۹
۱۳۴/۸۸۵	۱۳۴/۸۸۵	۱۳۴/۸۸۴	۷۴/۶۴۹۴	۷۴/۶۴۹۴	۷۴/۶۴۹۳	۱۰
۱۳۷/۶۱۵	۱۳۷/۶۱۵	۱۳۷/۶۱۴	۷۷/۰۶۴۰	۷۷/۰۶۳۹	۷۷/۰۶۳۸	۱۱
۱۴۰/۰۵۳۵	۱۴۰/۰۵۳۵	۱۴۰/۰۵۳۴	۷۹/۶۱۴۶	۷۹/۶۱۴۵	۷۹/۶۱۴۵	۱۲

جدول ۴-۴ اولین و دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال دوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=80$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ )

پارامتر فرکانسی دوم				پارامتر فرکانسی اول				سرعت
روشی اجزای محدود		روش تبدیل	روشی اجزای محدود	روشی اجزای محدود		روش تبدیل	دیفرانسیلی	دورانی بی-
کسری	مرسوم	دیفرانسیلی	کسری	مرسوم	دیفرانسیلی	بعد ( $\lambda$ )		
۱۸/۳۱۷۳	۱۸/۳۱۷۳	۱۸/۳۱۷۳	۳/۸۲۳۸	۳/۸۲۳۸	۳/۸۲۳۸	۰		
۱۸/۴۷۴۰	۱۸/۴۷۴۰	۱۸/۴۷۴۰	۳/۹۸۶۶	۳/۹۸۶۶	۳/۹۸۶۶	۱		
۱۸/۹۳۶۶	۱۸/۹۳۶۶	۱۸/۹۳۶۶	۴/۴۳۶۸	۴/۴۳۶۸	۴/۴۳۶۸	۲		
۱۹/۶۸۳۹	۱۹/۶۸۳۹	۱۹/۶۸۳۹	۵/۰۹۲۷	۵/۰۹۲۷	۵/۰۹۲۷	۳		
۲۰/۶۸۵۲	۲۰/۶۸۵۲	۲۰/۶۸۵۲	۵/۸۷۸۸	۵/۸۷۸۸	۵/۸۷۸۸	۴		
۲۱/۹۰۵۳	۲۱/۹۰۵۳	۲۱/۹۰۵۳	۶/۷۴۳۴	۶/۷۴۳۴	۶/۷۴۳۴	۵		
۲۳/۳۰۹۳	۲۳/۳۰۹۳	۲۳/۳۰۹۳	۷/۶۵۵۱	۷/۶۵۵۱	۷/۶۵۵۱	۶		
۲۴/۸۶۴۷	۲۴/۸۶۴۷	۲۴/۸۶۴۷	۸/۵۹۵۶	۸/۵۹۵۶	۸/۵۹۵۶	۷		
۲۶/۵۴۳۷	۲۶/۵۴۳۷	۲۶/۵۴۳۷	۹/۵۵۴۰	۹/۵۵۴۰	۹/۵۵۴۰	۸		
۲۸/۳۲۲۷	۲۸/۳۲۲۷	۲۸/۳۲۲۷	۱۰/۵۲۳۹	۱۰/۵۲۳۹	۱۰/۵۲۳۹	۹		
۳۰/۱۸۲۸	۳۰/۱۸۲۷	۳۰/۱۸۲۷	۱۱/۵۰۱۵	۱۱/۵۰۱۵	۱۱/۵۰۱۵	۱۰		
۳۲/۱۰۸۵	۳۲/۱۰۸۵	۳۲/۱۰۸۵	۱۲/۴۸۴۵	۱۲/۴۸۴۵	۱۲/۴۸۴۵	۱۱		
۳۴/۰۸۷۷	۳۴/۰۸۷۷	۳۴/۰۸۷۷	۱۳/۴۷۱۱	۱۳/۴۷۱۱	۱۳/۴۷۱۱	۱۲		

جدول ۴-۵ سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال دوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=80$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ )

پارامتر فرکانسی چهارم						پارامتر فرکانسی سوم		سرعت
روشی اجزای محدود			روشی اجزای محدود			روشی تبدیل	دورانی بی-	
کسری	مرسوم	دیفرانسیلی	کسری	مرسوم	دیفرانسیلی	بعد ( $\lambda$ )		
۹۰/۴۵۰۹	۹۰/۴۵۰۹	۹۰/۴۵۰۵	۴۷/۲۶۴۹	۴۷/۲۶۴۹	۴۷/۲۶۴۸	۰		
۹۰/۶۰۴۳	۹۰/۶۰۴۳	۹۰/۶۰۳۹	۴۷/۴۱۷۳	۴۷/۴۱۷۳	۴۷/۴۱۷۳	۱		
۹۱/۰۶۳۰	۹۱/۰۶۳۰	۹۱/۰۶۲۶	۴۷/۸۷۱۷	۴۷/۸۷۱۷	۴۷/۸۷۱۶	۲		
۹۱/۸۲۲۰	۹۱/۸۲۱۹	۹۱/۸۲۱۶	۴۸/۶۱۹۱	۴۸/۶۱۹۱	۴۸/۶۱۹۰	۳		
۹۲/۸۷۳۴	۹۲/۸۷۳۴	۹۲/۸۷۳۰	۴۹/۶۴۵۷	۴۹/۶۴۵۷	۴۹/۶۴۵۶	۴		
۹۴/۲۰۶۸	۹۴/۲۰۶۷	۹۴/۲۰۶۴	۵۰/۹۳۳۹	۵۰/۹۳۳۹	۵۰/۹۳۳۸	۵		
۹۵/۸۰۹۴	۹۵/۸۰۹۴	۹۵/۸۰۹۰	۵۲/۴۶۳۳	۵۲/۴۶۳۳	۵۲/۴۶۳۳	۶		
۹۷/۶۶۷۰	۹۷/۶۶۷۰	۹۷/۶۶۶۶	۵۴/۲۱۲۵	۵۴/۲۱۲۵	۵۴/۲۱۲۴	۷		
۹۹/۷۶۴۲	۹۹/۷۶۴۱	۹۹/۷۶۳۷	۵۶/۱۵۹۶	۵۶/۱۵۹۵	۵۶/۱۵۹۵	۸		
۱۰۲/۰۸۵	۱۰۲/۰۸۵	۱۰۲/۰۸۴	۵۸/۲۸۳۴	۵۸/۲۸۳۳	۵۸/۲۸۳۳	۹		
۱۰۴/۶۱۲	۱۰۴/۶۱۲	۱۰۴/۶۱۲	۶۰/۵۶۴۰	۶۰/۵۶۳۹	۶۰/۵۶۳۹	۱۰		
۱۰۷/۳۳۱	۱۰۷/۳۳۱	۱۰۷/۳۳۱	۶۲/۹۸۳۰	۶۲/۹۸۲۹	۶۲/۹۸۲۹	۱۱		
۱۱۰/۲۲۶	۱۱۰/۲۲۵	۱۱۰/۲۲۵	۶۵/۵۲۳۷	۶۵/۵۲۳۷	۶۵/۵۲۳۷	۱۲		

جدول ۴-۶ اولین و دومین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقدار مثال سوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=150$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابع شکل مرسوم ( $NE=40$ )

پارامتر فرکانسی دوم				پارامتر فرکانسی اول			سرعت
روش اجزای محدود		روش تبدیل	روش دیفرانسیلی	روش اجزای محدود		روش تبدیل	دورانی بی-
کسری	مرسوم			کسری	مرسوم	دیفرانسیلی	بعد ( $\lambda$ )
۲۴/۰۰۴۱	۲۴/۰۰۴۱	۲۴/۰۰۸۲		۵/۲۷۳۸	۵/۲۷۳۸	۵/۲۷۴۴	۰
۲۴/۱۰۶۹	۲۴/۱۰۶۹	۲۴/۱۱۱۱		۵/۳۹۰۳	۵/۳۹۰۳	۵/۳۹۰۹	۱
۲۴/۴۱۳۰	۲۴/۴۱۳۰	۲۴/۴۱۷۱		۵/۷۲۴۹	۵/۷۲۴۹	۵/۷۲۵۴	۲
۲۴/۹۱۴۹	۲۴/۹۱۴۹	۲۴/۹۱۸۹		۶/۲۴۰۲	۶/۲۴۰۲	۶/۲۴۰۷	۳
۲۵/۶۰۱۳	۲۵/۶۰۱۳	۲۵/۶۰۵۴		۶/۸۹۲۸	۶/۸۹۲۸	۶/۸۹۳۲	۴
۲۶/۴۵۸۱	۲۶/۴۵۸۱	۲۶/۴۶۲۱		۷/۶۴۴۳	۷/۶۴۴۳	۷/۶۴۴۷	۵
۲۷/۴۶۹۳	۲۷/۴۶۹۳	۲۷/۴۷۳۳		۸/۴۶۵۳	۸/۴۶۵۳	۸/۴۶۵۶	۶
۲۸/۶۱۸۵	۲۸/۶۱۸۵	۲۸/۶۲۲۴		۹/۳۳۴۷	۹/۳۳۴۷	۹/۳۳۴۹	۷
۲۹/۸۸۹۴	۲۹/۸۸۹۴	۲۹/۸۹۳۳		۱۰/۲۳۷۹	۱۰/۲۳۷۹	۱۰/۲۳۸۱	۸
۳۱/۲۶۶۹	۳۱/۲۶۶۹	۳۱/۲۷۰۸		۱۱/۱۶۵۰	۱۱/۱۶۵۰	۱۱/۱۶۵۲	۹
۳۲/۷۳۶۹	۳۲/۷۳۶۹	۳۲/۷۴۰۸		۱۲/۱۰۹۲	۱۲/۱۰۹۲	۱۲/۱۰۹۴	۱۰
۳۴/۲۸۷۱	۳۴/۲۸۷۱	۳۴/۲۹۰۹		۱۳/۰۶۵۷	۱۳/۰۶۵۷	۱۳/۰۶۵۸	۱۱
۳۵/۹۰۶۴	۳۵/۹۰۶۴	۳۵/۹۱۰۲		۱۴/۰۳۱۳	۱۴/۰۳۱۳	۱۴/۰۳۱۴	۱۲

جدول ۷-۴ سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی تیر تحت مقادیر مثال سوم و سرعت‌های دورانی متفاوت با استفاده از روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=150$ )، اجزای محدود با توابع شکل کسری ( $NE=40$ ) و اجزای محدود با توابع

شکل مرسوم ( $NE=40$ )

پارامتر فرکانسی چهارم			پارامتر فرکانسی سوم			سرعت
کسری	رسوم	دیفرانسیلی	کسری	رسوم	دیفرانسیلی	دورانی بی-
						بعد ( $\lambda$ )
۱۱۲/۹۱۰	۱۱۲/۹۱۰	۱۱۲/۹۳۵	۵۹/۹۷۰۲	۵۹/۹۷۰۲	۵۹/۹۸۲۶	۰
۱۱۳/۰۰۹	۱۱۳/۰۰۹	۱۱۳/۰۳۵	۶۰/۰۶۹۶	۶۰/۰۶۹۶	۶۰/۰۸۲۰	۱
۱۱۳/۳۰۸	۱۱۳/۳۰۸	۱۱۳/۳۳۳	۶۰/۳۶۶۹	۶۰/۳۶۶۹	۶۰/۳۷۹۳	۲
۱۱۳/۸۰۳	۱۱۳/۸۰۳	۱۱۳/۸۲۹	۶۰/۸۵۹۱	۶۰/۸۵۹۱	۶۰/۸۷۱۵	۳
۱۱۴/۴۹۳	۱۱۴/۴۹۳	۱۱۴/۵۱۸	۶۱/۵۴۱۲	۶۱/۵۴۱۲	۶۱/۵۵۳۶	۴
۱۱۵/۳۷۳	۱۱۵/۳۷۳	۱۱۵/۳۹۸	۶۲/۴۰۶۹	۶۲/۴۰۶۹	۶۲/۴۱۹۳	۵
۱۱۶/۴۳۹	۱۱۶/۴۳۹	۱۱۶/۴۶۵	۶۳/۴۴۸۴	۶۳/۴۴۸۴	۶۳/۴۶۰۸	۶
۱۱۷/۶۸۶	۱۱۷/۶۸۶	۱۱۷/۷۱۱	۶۴/۶۵۶۷	۶۴/۶۵۶۷	۶۴/۶۶۹۱	۷
۱۱۹/۱۰۷	۱۱۹/۱۰۷	۱۱۹/۱۳۳	۶۶/۰۲۲۳	۶۶/۰۲۲۲	۶۶/۰۳۴۷	۸
۱۲۰/۶۹۷	۱۲۰/۶۹۶	۱۲۰/۷۲۲	۶۷/۵۳۵۲	۶۷/۵۳۵۱	۶۷/۵۴۷۷	۹
۱۲۲/۴۴۷	۱۲۲/۴۴۷	۱۲۲/۴۷۳	۶۹/۱۸۵۲	۶۹/۱۸۵۲	۶۹/۱۹۷۸	۱۰
۱۲۴/۳۵۱	۱۲۴/۳۵۱	۱۲۴/۳۷۷	۷۰/۹۶۲۳	۷۰/۹۶۲۲	۷۰/۹۷۴۹	۱۱
۱۲۶/۴۰۱	۱۲۶/۴۰۱	۱۲۶/۴۲۷	۷۲/۸۵۶۶	۷۲/۸۵۶۵	۷۲/۸۶۹۳	۱۲

با مقایسه نتایج حاصل برای مثال اول (تیر منشوری) در حالت سرعت دورانی بی بعد برابر با صفر ( $\lambda=0$ )، که در ردیف اول جدول‌های ۷-۴ و ۳-۴ بیان شده است، با نتایج ارایه شده در جداول ۲-۲ تا ۴-۲ برای حالت تکیه‌گاهی گیردار - آزاد، آشکار می‌گردد که نتایج حاصل بر هم منطبق هستند. از سوی دیگر، از مقایسه سایر نتایج حاصل از روش اجزای محدود کسری با روش اجزای محدود رسوم،

انطباق کامل نتایج این دو روش بر هم کاملاً آشکار است.

#### ۷-۴- جمع‌بندی

در این فصل، به بازتولید یکی از پژوهش‌های مهم در زمینه گونه‌های غیرکلاسیک روش اجزای محدود که به معرفی توابع شکل کسری اختصاص داشت، پرداخته شد. در این راستا، نخست معادله دیفرانسیل حاکم بر تیرهای دوار اویلر - برنولی با سطح مقطع نامنشوری استخراج گردیده و سپس، فرمول‌بندی توابع شکل کسری به صورت کامل بیان شد. در پایان نیز همانند سایر فصل‌های این نوشتار، از روش تبدیل دیفرانسیلی برای صحتسنجی پاسخ‌های حاصل از روش اجزای محدود با استفاده از توابع شکل مرسوم و کسری، استفاده شد. پاسخ‌های حاصل از روش اجزای محدود با استفاده از توابع شکل معرفی شده به وضوح نشان داد که این توابع شکل، سودمند بوده و فرکانس‌های حاصل از آن، دقیق مناسبی دارند.



## فصل پنجم

تحلیل ارتعاش آزادِ تیرِ دوّار با  
سطح مقطعِ دایره‌ای و با تغییراتِ  
نمایی در طولِ تیر

## ۱-۵- مقدمه

در این فصل، به تحلیل ارتعاش آزادِ تیرهای دوّار اویلر - برنولی با سطح مقطع دایره‌ای و تغییراتِ نمایی در طولِ تیر، با استفاده از روشِ اجزای محدود و روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی می‌پردازیم. در این راستا، نخست، معادله حاکم بر این‌گونه تیرها استخراج شده و سپس به اعمالِ روش‌های فوق بر معادله مذکور پرداخته می‌شود. در بخشِ نتایج، به بررسی تأثیرِ ضریبِ نامنشوری<sup>۱</sup> در نتایج حاصل (فرکانس‌های حاصل) پرداخته می‌شود. در پایان، پارامترهای فرکانسی حاصل و نمودارهای همگرایی برای هر دو روش نمایش داده می‌شود.

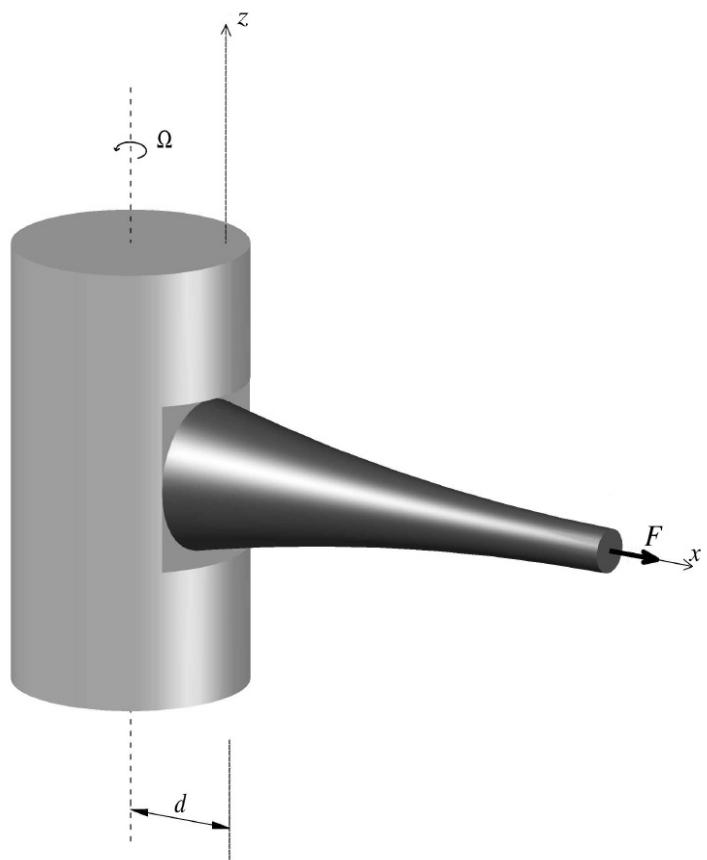
شایان ذکر است که مسئله پیش‌رو، توسطِ مؤلفین طرح شده و بر اساسِ جستجوهای انجام-پذیرفته، تا به حال تیر دوّار اویلر - برنولی با سطح مقطع دایره‌ای و تغییراتِ نمایی در طولِ تیر و با استفاده از روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی و همچنین روشِ اجزای محدود، در هیچ مرجعی موردِ بحث قرار نگرفته است.

## ۲-۵- استخراجِ معادله حاکم

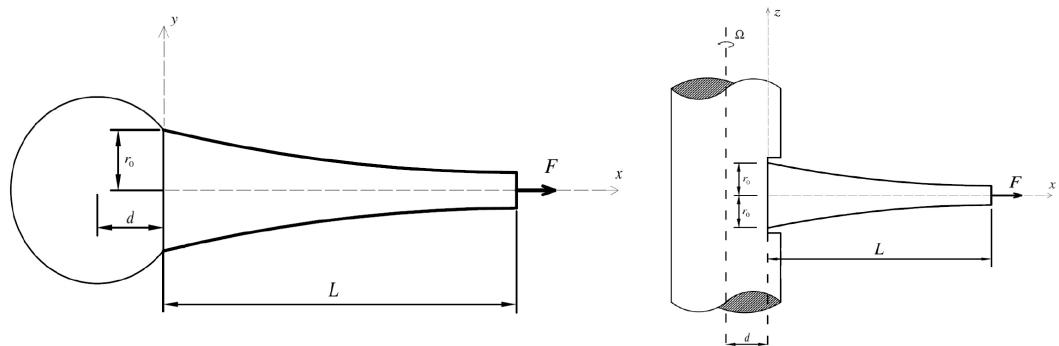
تیرِ دوّار اویلر - برنولی با سطح مقطع دایره‌ای و تغییراتِ نمایی در طولِ تیر که در شکل ۱-۵ نشان داده شده، مدنظر می‌باشد که در آن  $L$ ،  $d$  و  $r_0$ ، به ترتیب، نشان‌دهنده طولِ تیر، فاصله بینِ محورِ دوران تا ابتدای تیر، و شعاعِ سطح مقطعِ تیر در ابتدای تیر ( $x=0$ ) هستند. یادآوری می‌کند، معادله دیفرانسیلِ حاکم بر تحلیل ارتعاش آزادِ تیرهای دوّار اویلر - برنولی نامنشوری در حوزهٔ فرکانس بر اساسِ رابطهٔ (۴-۵۶) به صورتِ رابطهٔ (۱-۵) است.

---

<sup>۱</sup> Taper parameter



الف - نمای سه بعدی تیر



ب - نما از بالا

الف - نما از کنار

شکل ۱-۵ شمای کلی تیر دوار نامنشوری با سطح مقطع دایره‌ای و با تغییرات نمایی در طول تیر

$$\begin{aligned} EI(x) \frac{d^4 u(x)}{dx^4} + 2 \frac{dEI(x)}{dx} \frac{d^3 u(x)}{dx^3} + \frac{d^2 EI(x)}{dx^2} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \\ - \frac{dT(x)}{dx} \frac{du(x)}{dx} - T(x) \frac{d^2 u(x)}{dx^2} - m(x) \omega^2 u(x) = 0 \end{aligned} \quad (1-5)$$

در رابطه (1-5)،  $u(x)$  و  $T(x)$ ، به ترتیب، نشان‌دهنده تابع خیز تیر و نیروی محوری ایجاد شده بر اثر دوران در طول تیر هستند.  $m(x)$  و  $EI(x)$ ، توابع جرم در واحد طول تیر و صلبیت خمشی تیر، به ترتیب، به صورت روابط (2-5) و (3-5) تعریف می‌شوند:

$$m(x) = m_0 \exp \left[ -2\beta \frac{x}{L} \right] \quad (3-5)$$

$$EI(x) = EI_0 \exp \left[ -4\beta \frac{x}{L} \right] \quad (3-5)$$

که در روابط فوق،  $\beta$  ضریب نامنشوری است.  $m_0$  و  $I_0$ ، به ترتیب، جرم واحد طول تیر و ممان اینرسی در ابتدای تیر بوده و به فرم روابط (4-5) و (5-5) تعریف می‌شوند:

$$m_0 = \frac{\rho \pi r_0^2}{2\beta} \quad (4-5)$$

$$I_0 = \frac{\pi r_0^4}{4} \quad (5-5)$$

که در رابطه (4-5)،  $m$  نشان‌دهنده چگالی است. لازم به ذکر است که تغییرات شعاع در طول تیر که با  $R(x)$  نشان داده می‌شود، به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$R(x) = r_0 \exp \left[ -\beta \frac{x}{L} \right] \quad (6-5)$$

همان‌طور که پیش‌تر بیان گردید،  $T(x)$  نیروی محوری است که بر اثر دوران در طول تیر ایجاد می‌شود و بر اساس رابطه (4-5)، به فرم زیر محاسبه می‌گردد:

$$T(x) = \int_x^L m(x)(d+x) \Omega^2 dx + F \quad (7-5)$$

لازم به یادآوری است که در رابطه بالا،  $\Omega$  و  $F$ ، به ترتیب، سرعت دورانی و نیروی متumerکز انتهایی تیر هستند. حال با جایگذاری رابطه (2-5) در رابطه (7-5) و انگرال‌گیری در طول  $x$ ، داریم:

$$T(x) = \frac{\Omega^2 m_0 L}{2\beta} \left( \exp\left[-2\beta \frac{x}{L}\right] \left(d + x + \frac{L}{2\beta}\right) - \exp\left[-2\beta \left(d + L + \frac{L}{2\beta}\right)\right] \right) + F \quad (8-5)$$

اکنون همانند فصل قبل، با تعریف  $\xi$  به صورت  $x/L$  و همچنین  $\bar{d}$  به فرم  $d/L$ ، رابطه (1-5) را

به صورت بی بعد می نویسیم. برای این امر، روابط (2-5)، (3-5) و (8-5) را در رابطه (1-5) قرار می -

دهیم که حاصل به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} & \frac{EI_0}{L^4} \exp[-4\beta\xi] \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} - \frac{8\beta EI_0}{L^4} \exp[-4\beta\xi] \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} + \frac{16\beta^2 EI_0}{L^4} \exp[-4\beta\xi] \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & - \left( m_0 \Omega^2 \left( \exp[-2\beta\xi] \left( \frac{\bar{d} + \xi}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) - \exp[-2\beta] \left( \frac{\bar{d} + 1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) \right) + \frac{F}{L^2} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & + m_0 \Omega^2 \left( \exp[-2\beta\xi] (\bar{d} + \xi) \right) \frac{du(\xi)}{d\xi} - m_0 \exp[-2\beta\xi] \omega^2 u(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (9-5)$$

سپس با ضرب کردن طرفین رابطه (9-5) در عبارت  $L^4/EI_0$ ، این رابطه به صورت زیر بازنویسی می -

گردید:

$$\begin{aligned} & \exp[-4\beta\xi] \frac{d^4 u(\xi)}{d\xi^4} - 8\beta \exp[-4\beta\xi] \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} + 16\beta^2 \exp[-4\beta\xi] \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & - \lambda^2 \left( \exp[-2\beta\xi] \left( \frac{\bar{d} + \xi}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) - \exp[-2\beta] \left( \frac{\bar{d} + 1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ & + \lambda^2 \left( \exp[-2\beta\xi] (\bar{d} + \xi) \right) \frac{du(\xi)}{d\xi} - \tilde{F} \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} - \mu^2 \exp[-2\beta\xi] u(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (10-5)$$

معادله (10-5)، معادله دیفرانسیل بی بعد شده حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای دوبار اویلر - برنولی با

سطح مقطع دایره‌ای و تغییرات نمایی در طول تیر است. در این رابطه،  $\lambda$  سرعت دورانی بی بعد است.

در رابطه فوق،  $\lambda^2$ ،  $\tilde{F}$  و  $\mu^2$ ، به ترتیب، به فرم روابط (11-5) تا (13-5) تعریف می شوند:

$$\lambda^2 = \frac{m_0 \Omega^2 L^4}{EI_0} \quad (11-5)$$

$$\tilde{F} = \frac{FL^2}{EI_0} \quad (12-5)$$

$$\mu^2 = \frac{m_0 \omega^2 L^4}{EI_0} \quad (13-5)$$

شرط مرزی برای تیرهای دوار دقیقاً برابر با شرایط مرزی گیردار - آزاد (تیر طره) است که در روابط (۶۳-۴) الی (۶۶-۴) بیان گردید. برای راحتی کار، مجدداً روابط مذکور را در روابط (۱۴-۵) الی

(۱۷-۵) بیان می‌کنیم:

$$u(\xi)|_{\xi=0} = 0 \quad (14-5)$$

$$\left. \frac{du(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=0} = 0 \quad (15-5)$$

$$\left. \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (16-5)$$

$$\left. \frac{d^3 u(\xi)}{d\xi^3} \right|_{\xi=1} = 0 \quad (17-5)$$

حال که معادله دیفرانسیل به همراه شرایط مرزی استخراج گردید، اکنون در بخشی بعدی به اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی بر معادله (۱۰-۵) می‌پردازیم.

### ۳-۵-روش تبدیل دیفرانسیلی

در فصل دوم، روش تبدیل دیفرانسیلی به طور کامل شرح داده شد. حال برآنیم تا با استفاده از جدول ۱-۲، به اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی بر معادله (۱۰-۵) بپردازیم و رابطه بازگشتی مربوطه را استخراج نماییم. در این راستا، نخست این فرآیند را با ذکر جزئیات برای جمله چهارم رابطه (۱۰-۵) انجام می‌دهیم. بنابراین، جمله چهارم رابطه (۱۰-۵) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$g(\xi) = -\lambda^2 \left( \exp[-2\beta\xi] \left( \frac{\bar{d} + \xi}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) - \exp[-2\beta] \left( \frac{\bar{d} + 1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (18-5)$$

اکنون رابطه (۱۸-۵) را به فرم رابطه (۱۹-۵) بازنویسی می‌کنیم:

$$g(\xi) = -\lambda^2 \left( \exp[-2\beta\xi] \left( \frac{\bar{d}}{2\beta} \right) \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} - \lambda^2 \left( \exp[-2\beta\xi] \left( \frac{\xi}{2\beta} \right) \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \\ - \lambda^2 \left( \frac{\exp[-2\beta\xi]}{4\beta^2} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} + \lambda^2 \exp[-2\beta] \left( \frac{\bar{d}+1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (19-5)$$

از سوی دیگر،  $(\xi) g$  را می‌توان به صورت رابطه (۲۰-۵) نیز نوشت:

$$g(\xi) = g_1(\xi) + g_2(\xi) + g_3(\xi) + g_4(\xi) \quad (20-5)$$

با مقایسه روابط (۱۹-۵) و (۲۰-۵)،  $g_1(\xi)$  تا  $g_4(\xi)$  را می‌توان به ترتیب به فرم روابط (۲۱-۵)

الى (۲۴-۵) تعریف نمود:

$$g_1(\xi) = -\frac{\bar{d}\lambda^2}{2\beta} \exp[-2\beta\xi] \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (21-5)$$

$$g_2(\xi) = -\frac{\lambda^2 \xi}{2\beta} \exp[-2\beta\xi] \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (22-5)$$

$$g_3(\xi) = \frac{-\lambda^2}{4\beta^2} \exp[-2\beta\xi] \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (23-5)$$

$$g_4(\xi) = \lambda^2 \exp[-2\beta] \left( \frac{\bar{d}+1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) \frac{d^2 u(\xi)}{d\xi^2} \quad (24-5)$$

حال  $G_4[k]$  تا  $G_1[k]$  را، به ترتیب، توابع تبدیل یافته  $(\xi) g$  تا  $(\xi) g_4$  نامیده و بر اساس

جدول ۱-۲ به فرم روابط (۲۵-۵) الی (۲۸-۵) تعریف می‌کنیم:

$$G_1[k] = -\frac{\bar{d}\lambda^2}{2\beta} \sum_{l=0}^k \frac{(-2\beta)^l}{l!} (k-l+1)(k-l+2) U[k-l+2] \quad (25-5)$$

$$G_2[k] = -\frac{\lambda^2}{2\beta} \sum_{l=0}^k \frac{(-2\beta)^l}{l!} (k-l)(k-l+1) U[k-l+1] \quad (26-5)$$

$$G_3[k] = -\frac{\lambda^2}{4\beta^2} \sum_{l=0}^k \frac{(-2\beta)^l}{l!} (k-l+1)(k-l+2) U[k-l+2] \quad (27-5)$$

$$G_4[k] = \lambda^2 \exp[-2\beta] \left( \frac{\bar{d}+1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) (k+1)(k+2) U[k+2] \quad (28-5)$$

در نهایت  $G[k]$  که تابع تبدیل یافته  $(\xi) g$  است، از جمع توابع  $G_4[k]$  تا  $G_1[k]$  حاصل خواهد شد

که در رابطه (۲۹-۵) نشان داده شده است:

$$\begin{aligned}
G[k] = & \lambda^2 \exp[-2\beta] \left( \frac{\bar{d}+1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) (k+1)(k+2) U[k+2] \\
& - \frac{\lambda^2}{2\beta} \sum_{l=0}^k \frac{(-2\beta)^l}{l!} (k-l+1) \left( (k-l+2) U[k-l+2] \left( \bar{d} + \frac{1}{2\beta} \right) + (k-l) U[k-l+1] \right)
\end{aligned} \tag{29-5}$$

اکنون با انجام عملیات مشابه بر روی کلیه جملات رابطه (۵-۱۰)، رابطه بازگشتی که حاصل اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی بر معادله دیفرانسیل است، به صورت معادله (۵-۳۰) حاصل خواهد

شد:

$$\begin{aligned}
U[k+4] = & \frac{-1}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)} \left( \right. \\
& \left. \left( \sum_{l=1}^k \frac{(-4\beta)^l}{l!} (k-l+1)(k-l+2)(k-l+3)(k-l+4) U[k-l+4] \right) \right. \\
& - 8\beta \left( \sum_{l=0}^k \frac{(-4\beta)^l}{l!} (k-l+1)(k-l+2) \left( (k-l+3) U[k-l+3] \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\beta U[k-l+2] \right) \right) \\
& + (k+1)(k+2) U[k+2] \left( -\tilde{F} + \lambda^2 \left( \frac{\bar{d}+1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) \exp[-2\beta] \right) \\
& - \sum_{l=0}^k \mu^2 \frac{(-2\beta)^l}{l!} U[k-l] \\
& + \lambda^2 \left( \sum_{l=0}^k \frac{(-2\beta)^l}{l!} ((k-l) U[k-l] + \bar{d}(k-l+1) U[k-l+1]) \right) \\
& - \frac{\lambda^2}{2\beta} \sum_{l=0}^k \frac{(-2\beta)^l}{l!} (k-l+1) \left( \right. \\
& \left. (k-l+2) U[k-l+2] \left( \bar{d} + \frac{1}{2\beta} \right) + (k-l) U[k-l+1] \right)
\end{aligned} \tag{30-5}$$

که در رابطه فوق،  $k = 1, 2, \dots, N$  و  $N$  تعداد جملات در روش تبدیل دیفرانسیلی است. همچنین  $U[k]$  تابع تبدیل یافته ( $\hat{u}$ ) می‌باشد.  $U[4]$  نیز به فرم رابطه (۳۱-۵) تعریف می‌شود:

$$U[4] = \frac{-1}{24} \left( \begin{array}{l} -48\beta U[3] + U[2] \left( 2\lambda^2 \left( \frac{\bar{d}+1}{2\beta} + \frac{1}{4\beta^2} \right) \exp[-2\beta] \right. \\ \left. + 32\beta^2 - 2\tilde{F} - \frac{\lambda^2}{\beta} \left( \bar{d} + \frac{1}{2\beta} \right) \right) \end{array} \right) \quad (31-5)$$

اکنون به عنوان نمونه، با قراردادن مقدار  $k=1$  و  $k=2$  در رابطه (30-5)،  $U[5]$  و  $U[6]$  را به

ترتیب به صورت روابط (32-5) و (33-5) محاسبه می‌نماییم:

$$\begin{aligned} U[5] &= \frac{\exp[-2\beta]}{240\beta^2} \left( \begin{array}{l} -3\lambda^2 (U[3] + 4\beta U[2]) (1 + 2\beta(1 + \bar{d})) \\ + 3\exp[-2\beta] U[3] (\lambda^2 + 2\beta(96\beta^3 + \bar{d}\lambda^2 + 2\beta\tilde{F})) \\ + 4\beta\exp[-2\beta] U[2] (3\lambda^2 + 4\beta(-32\beta^3 + \bar{d}\lambda^2 + 3\beta\tilde{F})) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (32-5)$$

$$\begin{aligned} U[6] &= \frac{\exp[-4\beta]}{5760\beta^4} \left( \begin{array}{l} U[2]\lambda^4 (1 + 2\beta(1 + \bar{d}))^2 \\ - 2\lambda^2 \exp[2\beta] (1 + 2\beta(1 + \bar{d})) (144\beta^3 U[3] \\ + U[2](\lambda^2 + 2\beta(80\beta^3 + \bar{d}\lambda^2 + 2\beta\tilde{F}))) \\ + \exp[4\beta] (48\beta^3 U[3] (256\beta^4 + 6\lambda^2 + 9\bar{d}\beta\lambda^2 + 24\beta^2\tilde{F}) \\ + U[2] (-12288\beta^8 + 224\bar{d}\beta^5\lambda^2 + \lambda^4 + 4\bar{d}\beta\lambda^4 + 1280\beta^6\tilde{F} + 16\bar{d}\beta^3\lambda^2\tilde{F} \\ + 4\beta^2(\bar{d}^2\lambda^4 + 2\lambda^2\tilde{F}) + 16\beta^4(17\lambda^2 + \mu^2 + \tilde{F}^2)) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (33-5)$$

حال همانند آنچه در فصل دوم و چهارم بیان گردید،  $[0]U$  و  $[1]U$  را به ترتیب بر اساس روابط

(14-5) و (15-5) محاسبه خواهیم کرد که هر دو برابر با صفر خواهند شد. سپس  $[2]U$  و  $[3]U$  را

مجھول درنظر گرفته و سایر توابع تبدیل را بر اساس آنها خواهیم یافت. در پایان به کمک شرایط

مرزی (16-5) و (17-5) دستگاهی همانند رابطه (34-5) حاصل می‌گردد:

$$[\mathbf{A}] \begin{Bmatrix} U[2] \\ U[3] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (34-5)$$

که در آن  $\mathbf{A}$  بازم ماتریسی  $2 \times 2$  است. با توجه به اینکه تحلیل ارتعاش آزاد تیر مدنظر است، طرف

راست رابطه (۳۴-۵) برابر صفر است. برای این که دستگاه موجود جواب‌های غیربدیهی داشته باشد، کافی است دترمینان ماتریس  $\mathbf{A}$  را برابر با صفر قرار دهیم. در بخش نتایج و بحث، نتایج این کار همراه با نتایج حاصل از روش اجزای محدود ارائه می‌گردد. شایان ذکر است که نتایج ارائه شده همگی بر اساس  $d = 0$ ،  $F = 0$  و  $N = 100$  می‌باشند.

#### ۴-۵-روش اجزای محدود

برای تحلیل ارتعاش آزاد با استفاده از روش اجزای محدود، بر اساس رابطه (۲۳-۳) بایستی نخست ماتریس‌های جرم ( $\mathbf{M}$ ) و سختی ( $\mathbf{K}$ ) محاسبه شوند. برای یادآوری، رابطه (۲۳-۳) مجدداً در رابطه (۳۵-۵) نوشته می‌شود:

$$([\mathbf{K}] - \omega^2 [\mathbf{M}])\{\phi\} = \{0\} \quad (35-5)$$

بدیهی است برای به‌دست‌آوردن ماتریس جرم و سختی تیر، بایستی نخست، ماتریس جرم إلمان ( $\mathbf{M}^e$ ) و ماتریس سختی إلمان ( $\mathbf{K}^e$ ) را به‌دست آوریم. این عمل برای تیرهای غیردوّار در بخش ۳-۳ انجام شد؛ و این در حالی است که تیرهای دوّار به علت وجود نیروی محوری ناشی از چرخش، متفاوت از تیرهای غیردوّار عمل می‌کنند. لذا، به صورت مختصر به توضیح فرمول‌بندی تیرهای دوّار برای به‌دست‌آوردن ماتریس جرم و سختی می‌پردازیم.

معادله دیفرانسیل تیرهای دوّار بر اساس فرمول (۴-۶) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] = q(x,t) \quad (36-5)$$

اکنون همان‌طور که در فصل سوم بیان گردید، برای به‌دست‌آوردن ماتریس جرم و سختی إلمان، بایستی طرفین رابطه (۳۶-۵) را در تابع وزن  $w(x,t)$  ضرب کرده و سپس از طرفین رابطه حاصل، بر روی إلمانی به طول  $L$  انتگرال بگیریم. این عمل در رابطه (۳۷-۵) انجام شده است:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx - \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx \\ &= \int_0^{L^e} w(x,t) q(x,t) dx - \int_0^{L^e} w(x,t) \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx \end{aligned} \quad (37-5)$$

طرفِ راستِ معادله (37-5) را نمی‌توان تضعیف کرد؛ زیرا فاقد مشتق نسبت به  $x$  هستند. جمله اول

طرفِ چپِ رابطه (37-5)، پس از دو مرتبه انتگرال گیری جزء به جزء به فرم رابطه (7-3) درخواهد آمد که مجدداً در رابطه (38-5) نوشته خواهد شد:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right] dx = \\ & \left[ w(x,t) V(x) - \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right]_0^{L^e} + \int_0^{L^e} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (38-5)$$

اکنون به سراغِ جمله حاوی نیروی محوری یا همان  $T(x)$  می‌رویم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{\partial}{\partial x} \left[ T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] dx = - \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{dT(x)}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \\ & - \int_0^{L^e} w(x,t) T(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx \end{aligned} \quad (39-5)$$

حال طرفِ راستِ رابطه (39-5) را با استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء به فرم زیر درمی‌آوریم:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{dT(x)}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx - \int_0^{L^e} w(x,t) T(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \\ & - \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{dT(x)}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx - w(x,t) T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_0^{L^e} \\ & + \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{dT(x)}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx + \int_0^{L^e} T(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (40-5)$$

که رابطه (40-5) پس از ساده‌سازی به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} & - \int_0^{L^e} w(x,t) \frac{dT(x)}{dx} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx - \int_0^{L^e} w(x,t) T(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx = \\ & - w(x,t) T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_0^{L^e} + \int_0^{L^e} T(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (41-5)$$

در نهایت با قراردادن روابط (38-5) و (41-5) در رابطه (37-5)، داریم:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L^e} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} dx + \int_0^{L^e} w(x,t) \rho A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} dx + \int_0^{L^e} T(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} dx \\ &= \int_0^{L^e} w(x,t) q(x,t) dx + \left[ \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} M(x) - w(x,t) V(x) \right]_0^{L^e} + w(x,t) T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_0^{L^e} \end{aligned} \quad (42-5)$$

با استفاده از روابط (۹-۳) الی (۱۱-۳)، رابطه (۴۲-۵) به صورت رابطه (۴۳-۵) بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L^e} \{w(t)\}^T \left[ \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \right] \{U(t)\} dx + \int_0^{L^e} \{w(t)\}^T [N(x)]^T \rho A [N(x)] \left\{ \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \right\} dx \\ &+ \int_0^{L^e} T(x) \{w(t)\}^T \left[ \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right]^T \left[ \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right] \{U(t)\} dx = \int_0^{L^e} \{w(t)\}^T [N(x)]^T q(x,t) dx \\ &+ \left[ \{w(t)\}^T \left[ \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right]^T M(x) - \{w(t)\}^T [N(x)]^T V(x) + \{w(t)\}^T [N(x)]^T T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]_0^{L^e} \end{aligned} \quad (43-5)$$

با حذف  $\{w(t)\}^T$  از طرفین رابطه (۴۳-۵) و بازنویسی آن، رابطه (۴۴-۵) حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} & \int_0^{L^e} [N(x)]^T \rho A [N(x)] dx \left\{ \frac{\partial^2 U(t)}{\partial t^2} \right\} \\ &+ \left( \int_0^{L^e} \left[ \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 N(x)}{\partial x^2} \right] dx + \int_0^{L^e} \left[ \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right]^T T(x) \left[ \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right] dx \right) \{U(t)\} \\ &= \int_0^{L^e} [N(x)]^T q(x,t) dx + \left[ \left[ \frac{\partial N(x)}{\partial x} \right]^T M(x) - [N(x)]^T V(x) + [N(x)]^T T(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right]_0^{L^e} \end{aligned} \quad (44-5)$$

اکنون رابطه (۴۴-۵) به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$[\mathbf{M}^e] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} + [\mathbf{K}^e] \{ \mathbf{U}(t) \} = \{ \mathbf{Q}^e \} + \{ \mathbf{P}^e \} \quad (45-5)$$

معادله فوق، معادله حاکم بر هر إلمان از تیر دوّار است که در آن  $[\mathbf{K}^e]$  و  $[\mathbf{M}^e]$  به ترتیب، ماتریس جرم و سختی إلمان نام دارند. همچنین،  $\{ \mathbf{Q}^e \}$  و  $\{ \mathbf{P}^e \}$ ، به ترتیب، بردار بارهای معادل گرهی گسترده إلمان و بردار بارهای مرزی إلمان هستند. از مقایسه رابطه (۴۴-۵) و (۴۵-۵)، (۴۶-۵) و (۴۹-۵) الی (۴۶-۵) تعريف می‌شوند: و  $\{ \mathbf{P}^e \}$ ، به ترتیب، و به صورت روابط (۴۶-۵) الی (۴۹-۵) تعريف می‌شوند:

$$[\mathbf{M}^e] = \int_0^{L^e} [\mathbf{N}(x)]^T \rho A [\mathbf{N}(x)] dx \quad (46-5)$$

$$[\mathbf{K}^e] = \int_0^{L^e} \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right]^T EI \left[ \frac{\partial^2 \mathbf{N}(x)}{\partial x^2} \right] dx + \int_0^{L^e} \left[ \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \right]^T T(x) \left[ \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \right] dx \quad (47-5)$$

$$\{\mathbf{Q}^e\} = \int_0^{L^e} [\mathbf{N}(x)]^T q(x, t) dx \quad (48-5)$$

$$\{\mathbf{P}^e\} = \left[ \left[ \frac{\partial \mathbf{N}(x)}{\partial x} \right]^T M(x) - [\mathbf{N}(x)]^T V(x) + [\mathbf{N}(x)]^T T(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right]_0^{L^e} \quad (49-5)$$

پس از سوارکردن ماتریس‌های هر المان، معادله حاکم بر کل تیر به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$[\mathbf{M}] \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{U}(t)}{\partial t^2} \right\} + [\mathbf{K}] \{\mathbf{U}(t)\} = \{\mathbf{Q}\} + \{\mathbf{P}\} \quad (50-5)$$

که در رابطه فوق  $[\mathbf{M}]$ ,  $[\mathbf{K}]$ ,  $[\mathbf{Q}]$  و  $\{\mathbf{P}\}$ , به ترتیب، ماتریس جرم، ماتریس سختی، بردار بارهای معادل گرهی گسترده و بردار بارهای مرزی کل تیر هستند. معادله (50-5) یک معادله دیفرانسیل ماتریسی است که با گرفتن تبدیل فوریه از طرفین آن و انتقال آن به حوزه فرکанс در حالت ارتعاش آزاد، معادله حاکم بر فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای تیر استخراج می‌گردد. بدیهی است در حالت ارتعاش آزاد،  $\{\mathbf{Q}\}$  و  $\{\mathbf{P}\}$  برابر با صفر است.

در حالت کلی که سرعت دورانی بی‌بعد و ضریب نامنشوری مخالف صفر باشند ( $0 \neq \lambda$  و  $0 \neq \beta$ ), ماتریس‌های جرم و سختی بسیار پیچیده می‌شوند؛ اما اگر سرعت دورانی بی‌بعد را برابر با صفر پنداشیم و ضریب نامنشوری را مخالف صفر ( $\lambda = 0$  و  $0 \neq \beta$ )، آن‌گاه می‌توان ماتریس‌های جرم و سختی را در حالت کلی نمایش داد که این عمل در پیوست الف نمایش داده شده است. نتایج حاصل از اعمال این روش بر معادله (9-5) در بخش نتایج و بحث به همراه نتایج حاصل از روش تبدیل دیفرانسیلی نشان داده می‌شود.

## ۵-۵- نتایج و بحث

در این بخش، نخست، پارامترهای فرکانسی حاصل از اعمال روش‌های اجزای محدود و تبدیل

دیفرانسیلی را در جداول ۱-۵ الی ۱-۶ نشان می دهیم. تمامی نتایج حاصل بر اساس  $d=0$  و  $F=0$  به دست آمده‌اند. البته لازم به تذکر است که تعداد جملات در روش تبدیل دیفرانسیلی برابر با ۱۰۰ جمله ( $N=100$ ) می‌باشد. همچنین نتایج حاصل از روش اجزای محدود بر اساس ۲۰ ایمان ( $NE=20$ ) حاصل شده‌اند. علاوه بر آن، جداول بر اساس مقدارهای متفاوت از ضریب نامنشوری دسته‌بندی شده‌اند. شایان ذکر است که نتایج حاصل از حالت  $\beta=0$ ، که تیر منشوری است، با مرجع [۳۸] مقایسه شده است. همچنین خاطر نشان می‌سازد، در این فصل از توابع شکل مرسوم در روش اجزای محدود کلاسیک برای تحلیل بهره جسته شده و از توابع شکل کسری، که در فصل چهارم معرفی شدند، استفاده نگردیده است.

جدول ۱-۵ مقایسه اولین و دومین پارامتر فرکانسی حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=100$ ) و روش اجزای محدود ( $NE=20$ ) با توجه به  $\beta=0$

پارامتر فرکانسی دوم				پارامتر فرکانسی اول				سرعتِ دورانی
مرجع [۳۸]	روش اجزای محدود	روش تبدیل دیفرانسیلی	مرجع [۳۸]	روش اجزای محدود	روش تبدیل دیفرانسیلی	(λ)	بی‌بعد	
۲۲/۰۳۴۵	۲۲/۰۳۴۵	۲۲/۰۳۴۴	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰	۳/۵۱۶۰	۰		
۲۲/۱۸۱۰	۲۲/۱۸۱۱	۲۲/۱۸۱۰	۳/۶۸۱۶	۳/۶۸۱۷	۳/۶۸۱۷	۱		
۲۲/۶۱۴۹	۲۲/۶۱۵۰	۲۲/۶۱۴۹	۴/۱۳۷۳	۴/۱۳۷۳	۴/۱۳۷۳	۲		
۲۳/۳۲۰۳	۲۳/۳۲۰۳	۲۳/۳۲۰۲	۴/۷۹۷۳	۴/۷۹۷۲	۴/۷۹۷۳	۳		
۲۴/۲۷۷۳	۲۴/۲۷۷۴	۲۴/۲۷۷۳	۵/۵۸۵۰	۵/۵۸۵۰	۵/۵۸۵۰	۴		
۲۵/۴۴۶۱	۲۵/۴۴۶۱	۲۵/۴۴۶۰	۶/۴۴۹۵	۶/۴۴۹۶	۶/۴۴۹۵	۵		
۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۱	۲۶/۸۰۹۰	۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴	۷/۳۶۰۴	۶		
۲۸/۳۲۴۱	۲۸/۳۲۴۱	۲۸/۳۲۴۱	۸/۲۹۹۶	۸/۲۹۹۶	۸/۲۹۹۹	۷		
۲۹/۹۹۵۴	۲۹/۹۹۵۴	۲۹/۹۹۵۷	۹/۲۵۶۸	۹/۲۵۶۹	۹/۲۵۶۸	۸		
۳۱/۷۷۰۵	۳۱/۷۷۰۶	۳۱/۷۷۱۴	۱۰/۲۲۵۷	۱۰/۲۲۵۷	۱۰/۲۲۵۸	۹		
۳۳/۶۴۰۴	۳۳/۶۴۰۴	۳۳/۶۴۰۳	۱۱/۲۰۲۳	۱۱/۲۰۲۳	۱۱/۲۰۱۵	۱۰		
۳۵/۵۸۹۰	۳۵/۵۸۹۱	۳۵/۵۸۵۸	۱۲/۱۸۴۳	۱۲/۱۸۴۴	۱۲/۱۸۵۵	۱۱		
۳۷/۶۰۳۱	۳۷/۶۰۳۲	۳۷/۶۱۵۶	۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۷۰۲	۱۳/۱۶۳۰	۱۲		

جدول ۲-۵ مقایسه سومین و چهارمین پارامتر فرکانسی حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی

$\beta = 0$  با توجه به  $N = 100$  و روشی اجزای محدود ( $NE = 20$ )

مرجع [۳۸]	پارامتر فرکانسی چهارم			پارامتر فرکانسی سوم			سرعتِ دورانی بی‌بعد (λ)
	روشِ اجزای محدود	روشِ تبدیل دیفرانسیلی	مرجع [۳۸]	روشِ اجزای محدود	روشِ تبدیل دیفرانسیلی	مرجع [۳۸]	
	عدمِ ارائه	۱۲۰/۹۰۹۰	۱۲۰/۹۰۱	۶۱/۶۹۷۲	۶۱/۶۹۸۲	۶۱/۶۹۷۰	.
عدمِ ارائه	۱۲۱/۰۵۸۰	۱۲۱/۰۵۰۰	۶۱/۸۴۱۸	۶۱/۸۴۲۸	۶۱/۸۴۱۵	۶۱/۸۴۱۵	۱
عدمِ ارائه	۱۲۱/۵۰۴۰	۱۲۱/۴۹۵۰	۶۲/۲۷۳۲	۶۲/۲۷۴۲	۶۲/۲۷۲۹	۶۲/۲۷۲۹	۲
عدمِ ارائه	۱۲۲/۲۴۳۰	۱۲۲/۲۳۴۰	۶۲/۹۸۵۰	۶۲/۹۸۶۰	۶۲/۹۸۴۷	۶۲/۹۸۴۷	۳
عدمِ ارائه	۱۲۳/۲۶۹۰	۱۲۳/۲۶۰۰	۶۳/۹۶۶۸	۶۳/۹۶۷۷	۶۳/۹۶۶۴	۶۳/۹۶۶۴	۴
عدمِ ارائه	۱۲۴/۵۷۴۰	۱۲۴/۵۵۵۰	۶۵/۲۰۵۰	۶۵/۲۰۶۰	۶۵/۲۰۵۴	۶۵/۲۰۵۴	۵
عدمِ ارائه	۱۲۶/۱۴۸۰	۱۲۶/۱۴۱۰	۶۶/۶۸۳۹	۶۶/۶۸۴۹	۶۶/۶۸۳۷	۶۶/۶۸۳۷	۶
عدمِ ارائه	۱۲۷/۹۷۹۰	۱۲۷/۹۶۲۰	۶۸/۳۸۶۰	۶۸/۳۸۶۹	۶۸/۳۸۶۱	۶۸/۳۸۶۱	۷
عدمِ ارائه	۱۳۰/۰۵۶۰	۱۳۰/۰۴۳۰	۷۰/۲۹۳۰	۷۰/۲۹۳۹	۷۰/۲۹۱۹	۷۰/۲۹۱۹	۸
عدمِ ارائه	۱۳۲/۳۶۵۰	۱۳۲/۳۷۵۰	۷۲/۳۸۶۷	۷۲/۳۸۷۶	۷۲/۳۷۹۹	۷۲/۳۷۹۹	۹
عدمِ ارائه	۱۳۴/۸۹۱۰	۱۳۴/۷۷۴۰	۷۴/۶۴۹۳	۷۴/۶۵۰۳	۷۴/۶۵۱۳	۷۴/۶۵۱۳	۱۰
عدمِ ارائه	۱۳۷/۶۲۱۰	۱۳۷/۶۷۲۰	۷۷/۰۶۳۸	۷۷/۰۶۴۸	۷۷/۰۶۳۷	۷۷/۰۶۳۷	۱۱
عدمِ ارائه	۱۴۰/۵۴۱۰	۱۴۰/۵۷۴۰	۷۹/۶۱۴۵	۷۹/۶۱۵۵	۷۹/۵۹۶۸	۷۹/۵۹۶۸	۱۲

جدول ۳-۵ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=100$ ) و روش

اجزای محدود ( $NE=20$ ) با توجه به  $\beta=0.5$

پارامتر فرکانسی سوم		پارامتر فرکانسی دوم		پارامتر فرکانسی اول		سرعتِ
روشِ	روشِ	روشِ	روشِ	روشِ	روشِ	دورانی
اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	بی‌بعد
محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	(λ)
۵۰/۴۱۹۳	۵۰/۴۱۸۴	۱۹/۶۴۶۳	۱۹/۶۴۶۲	۴/۲۲۸۰	۴/۲۲۸۰	۰
۵۰/۵۵۵۴	۵۰/۵۵۴۵	۱۹/۷۸۶۹	۱۹/۷۸۶۹	۴/۳۷۷۳	۴/۳۷۷۳	۱
۵۰/۹۶۱۵	۵۰/۹۶۰۶	۲۰/۲۰۳۰	۲۰/۲۰۳۰	۴/۷۹۵۳	۴/۷۹۵۳	۲
۵۱/۶۳۰۹	۵۱/۶۳۰۰	۲۰/۸۷۸۴	۲۰/۸۷۸۴	۵/۴۱۵۱	۵/۴۱۵۱	۳
۵۲/۵۵۳۱	۵۲/۵۵۲۳	۲۱/۷۸۹۲	۲۱/۷۸۹۲	۶/۱۶۹۹	۶/۱۶۹۹	۴
۵۳/۷۱۴۵	۵۳/۷۱۳۷	۲۲/۹۰۷۱	۲۲/۹۰۷۱	۷/۰۱۰۵	۷/۰۱۰۵	۵
۵۵/۰۹۹۲	۵۵/۰۹۸۴	۲۴/۲۰۲۹	۲۴/۲۰۲۸	۷/۹۰۴۶	۷/۹۰۴۶	۶
۵۶/۶۸۹۹	۵۶/۶۸۹۱	۲۵/۶۴۸۶	۲۵/۶۴۸۶	۸/۸۳۲۵	۸/۸۳۲۵	۷
۵۸/۴۶۸۷	۵۸/۴۶۸۰	۲۷/۲۱۹۱	۲۷/۲۱۹۱	۹/۷۸۱۹	۹/۷۸۱۹	۸
۶۰/۴۱۸۰	۶۰/۴۱۷۳	۲۸/۸۹۲۹	۲۸/۸۹۲۹	۱۰/۷۴۵۵	۱۰/۷۴۵۵	۹
۶۲/۵۲۰۶	۶۲/۵۲۰۰	۳۰/۶۵۱۶	۳۰/۶۵۱۶	۱۱/۷۱۸۶	۱۱/۷۱۸۶	۱۰
۶۴/۷۶۰۵	۶۴/۷۵۹۹	۳۲/۴۸۰۲	۳۲/۴۸۰۲	۱۲/۶۹۸۲	۱۲/۶۹۸۲	۱۱
۶۷/۱۲۲۸	۶۷/۱۲۲۱	۳۴/۳۶۶۴	۳۴/۳۶۶۴	۱۳/۶۸۲۴	۱۳/۶۸۲۴	۱۲

جدول ۴-۵ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=100$ ) و روش

اجزای محدود ( $NE=20$ ) با توجه به  $\beta=1$

پارامتر فرکانسی سوم		پارامتر فرکانسی دوم		پارامتر فرکانسی اول		سرعت
روش	روش	روش	روش	روش	روش	دورانی
اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	بی بعد
محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	(λ)
۴۱/۱۶۲۸	۴۱/۱۶۱۸	۱۷/۳۶۸۰	۱۷/۳۶۷۹	۴/۸۰۳۸	۴/۸۰۳۸	۰
۴۱/۳۰۴۴	۴۱/۳۰۳۳	۱۷/۵۱۴۱	۱۷/۵۱۴۰	۴/۹۵۱۱	۴/۹۵۱۱	۱
۴۱/۷۲۶۱	۴۱/۷۲۵۱	۱۷/۹۴۵۴	۱۷/۹۴۵۳	۵/۳۶۵۵	۵/۳۶۵۵	۲
۴۲/۴۱۹۵	۴۲/۴۱۸۵	۱۸/۶۴۲۱	۱۸/۶۴۲۰	۵/۹۸۳۸	۵/۹۸۳۸	۳
۴۳/۳۷۱۱	۴۳/۳۷۰۲	۱۹/۵۷۵۴	۱۹/۵۷۵۳	۶/۷۴۰۸	۶/۷۴۰۸	۴
۴۴/۵۶۴۰	۴۴/۵۶۳۰	۲۰/۷۱۲۱	۲۰/۷۱۲۱	۷/۵۸۶۲	۷/۵۸۶۲	۵
۴۵/۹۷۸۴	۴۵/۹۷۷۵	۲۲/۰۱۸۹	۲۲/۰۱۸۸	۸/۴۸۶۷	۸/۴۸۶۷	۶
۴۷/۵۹۳۷	۴۷/۵۹۲۹	۲۳/۴۶۴۶	۲۳/۴۶۴۵	۹/۴۲۱۶	۹/۴۲۱۶	۷
۴۹/۳۸۸۲	۴۹/۳۸۸۲	۲۵/۰۲۲۴	۲۵/۰۲۲۴	۱۰/۳۷۸۰	۱۰/۳۷۸۰	۸
۵۱/۳۴۴۰	۵۱/۳۴۳۳	۲۶/۶۷۰۰	۲۶/۶۶۹۹	۱۱/۳۴۸۳	۱۱/۳۴۸۳	۹
۵۲/۴۳۹۷	۵۲/۴۳۹۰	۲۸/۳۸۹۰	۲۸/۳۸۹۰	۱۲/۳۲۷۸	۱۲/۳۲۷۸	۱۰
۵۵/۶۵۸۷	۵۵/۶۵۸۰	۳۰/۱۶۵۱	۳۰/۱۶۵۱	۱۳/۳۱۳۴	۱۳/۳۱۳۴	۱۱
۵۷/۹۸۵۳	۵۷/۹۸۴۷	۳۱/۹۸۶۸	۳۱/۹۸۶۸	۱۴/۳۰۳۲	۱۴/۳۰۳۲	۱۲

جدول ۵-۵ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=100$ ) و روش

اجزای محدود ( $NE = 20$ ) با توجه به  $\beta = 1.5$

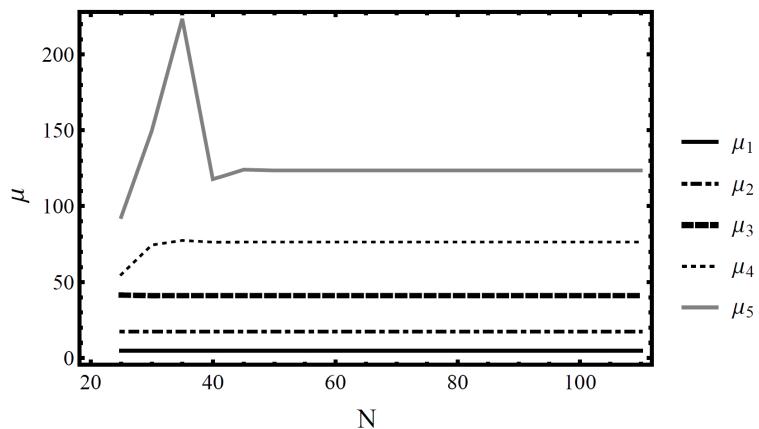
پارامتر فرکانسی سوم		پارامتر فرکانسی دوم		پارامتر فرکانسی اول		سرعتِ
روشِ	روشِ	روشِ	روشِ	روشِ	روشِ	دورانی
اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	بی‌بعد
محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	(λ)
۳۳/۵۸۲۰	۳۳/۵۸۰۸	۱۵/۲۷۷۰	۱۵/۲۷۶۹	۵/۱۱۴۳	۵/۱۱۴۳	۰
۳۳/۷۴۱۳	۳۳/۷۴۰۱	۱۵/۴۳۹۴	۱۵/۴۳۹۳	۵/۲۷۵۸	۵/۲۷۵۸	۱
۳۴/۲۱۴۷	۳۴/۲۱۳۵	۱۵/۹۱۶۵	۱۵/۹۱۶۴	۵/۷۲۷۱	۵/۷۲۷۱	۲
۳۴/۹۸۹۱	۳۴/۹۸۷۹	۱۶/۶۸۰۴	۱۶/۶۸۰۳	۶/۳۹۳۴	۶/۳۹۳۴	۳
۳۶/۰۴۴۳	۳۶/۰۴۳۲	۱۷/۶۹۱۶	۱۷/۶۹۱۵	۷/۱۹۹۶	۷/۱۹۹۶	۴
۳۷/۳۵۵۳	۳۷/۳۵۴۳	۱۸/۹۰۶۲	۱۸/۹۰۶۱	۸/۰۹۰۲	۸/۰۹۰۲	۵
۳۸/۸۹۴۵	۳۸/۸۹۳۵	۲۰/۲۸۲۴	۲۰/۲۸۲۳	۹/۰۳۰۱	۹/۰۳۰۱	۶
۴۰/۶۳۳۴	۴۰/۶۳۲۵	۲۱/۷۸۳۴	۲۱/۷۸۳۴	۹/۹۹۸۸	۹/۹۹۸۸	۷
۴۲/۵۴۴۷	۴۲/۵۴۳۹	۲۲/۳۷۹۶	۲۳/۳۷۹۵	۱۰/۹۸۴۲	۱۰/۹۸۴۲	۸
۴۴/۶۰۳۱	۴۴/۶۰۲۳	۲۵/۰۴۷۵	۲۵/۰۴۷۴	۱۱/۹۷۹۶	۱۱/۹۷۹۶	۹
۴۶/۷۸۶۰	۴۶/۷۸۵۳	۲۶/۷۶۹۴	۲۶/۷۶۹۳	۱۲/۹۸۰۹	۱۲/۹۸۰۹	۱۰
۴۹/۰۷۳۸	۴۹/۰۷۳۱	۲۸/۵۳۲۰	۲۸/۵۳۱۹	۱۳/۹۸۵۸	۱۳/۹۸۵۸	۱۱
۵۱/۴۴۹۴	۵۱/۴۴۸۸	۳۰/۳۲۵۵	۳۰/۳۲۵۴	۱۴/۹۹۲۹	۱۴/۹۹۲۹	۱۲

جدول ۶-۵ مقایسه سه پارامتر فرکانسی اول، حاصل از بکارگیری روش‌های تبدیل دیفرانسیلی ( $N=100$ ) و روش

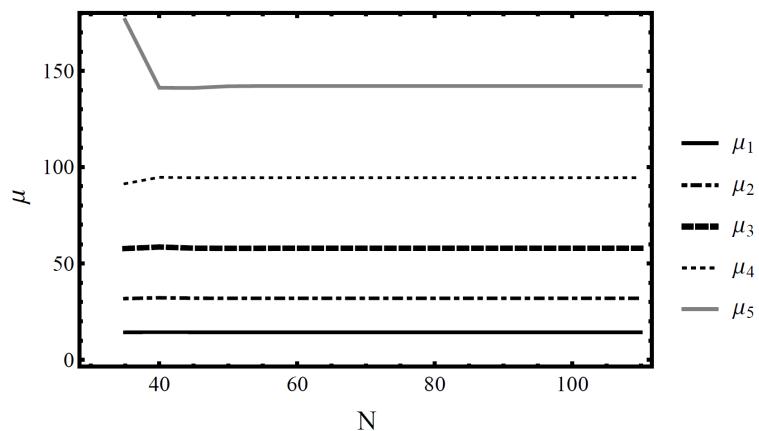
اجزای محدود ( $NE=20$ ) با توجه به  $\beta = 2$

پارامتر فرکانسی سوم		پارامتر فرکانسی دوم		پارامتر فرکانسی اول		سرعت
روش	روش	روش	روش	روش	روش	دورانی
اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	اجزای	تبدیل	بی بعد
محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	محدود	دیفرانسیلی	(λ)
۲۷/۳۹۲۶	۲۷/۳۹۱۱	۱۳/۳۶۴۴	۱۳/۳۶۳۲	۵/۰۷۲۱	۵/۰۷۲۱	۰
۲۷/۵۸۳۱	۲۷/۵۸۱۶	۱۳/۵۵۵۳	۱۳/۵۵۵۱	۵/۲۶۸۵	۵/۲۶۸۵	۱
۲۸/۱۴۶۴	۲۸/۱۴۵۰	۱۴/۱۱۴۵	۱۴/۱۱۴۳	۵/۸۰۶۵	۵/۸۰۶۶	۲
۲۹/۰۶۰۰	۲۹/۰۵۸۷	۱۴/۹۹۵۹	۱۴/۹۹۵۸	۶/۵۷۸۰	۶/۵۷۸۰	۳
۳۰/۲۸۹۹	۳۰/۲۸۸۶	۱۶/۱۳۹۳	۱۶/۱۳۹۲	۷/۴۸۴۴	۷/۴۸۴۴	۴
۳۱/۷۹۵۵	۳۱/۷۹۴۴	۱۷/۴۸۲۴	۱۷/۴۸۲۳	۸/۴۶۲۰	۸/۴۶۲۰	۵
۳۳/۵۳۴۴	۳۳/۵۳۳۴	۱۸/۹۷۰۷	۱۸/۹۷۰۶	۹/۴۷۴۹	۹/۴۷۴۹	۶
۳۵/۴۶۵۹	۳۵/۴۶۵۰	۲۰/۵۶۱۳	۲۰/۵۶۱۲	۱۰/۵۰۴۷	۱۰/۵۰۴۷	۷
۳۷/۵۵۳۴	۳۷/۵۵۲۵	۲۲/۲۲۲۶	۲۲/۲۲۲۵	۱۱/۵۴۲۰	۱۱/۵۴۲۰	۸
۳۹/۷۶۵۴	۳۹/۷۶۴۹	۲۳/۹۳۲۴	۲۳/۹۳۲۴	۱۲/۵۸۲۰	۱۲/۵۸۲۰	۹
۴۲/۰۷۶۰	۴۲/۰۷۶۸	۲۵/۶۷۵۵	۲۵/۶۷۵۹	۱۳/۶۲۲۳	۱۳/۶۲۲۳	۱۰
۴۴/۴۶۴۲	۴۴/۴۶۴۹	۲۷/۴۴۱۳	۲۷/۴۴۱۳	۱۴/۶۶۱۷	۱۴/۶۶۱۷	۱۱
۴۶/۹۱۳۳	۴۶/۹۲۹۷	۲۹/۲۲۲۸	۲۹/۲۲۶۹	۱۵/۶۹۹۷	۱۵/۶۹۹۹	۱۲

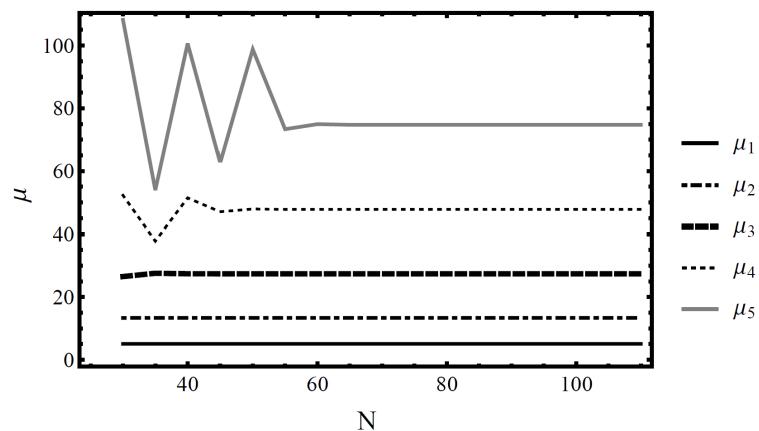
در ادامه، به سراغ نمودارهای همگرایی برای روش تبدیل دیفرانسیلی می‌رویم. این شکل‌ها، با توجه به سرعت‌های بی‌بعدشده متفاوت ( $\lambda$ ) و ضریب نامنشوری متفاوت ( $\beta$ ) رسم شده‌اند.



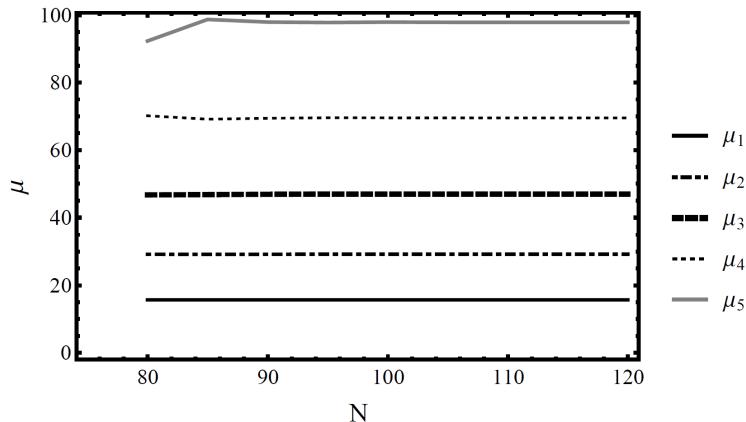
شکل ۲-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\lambda = 0$  و  $\beta = 1$



شکل ۳-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\lambda = 12$  و  $\beta = 1$

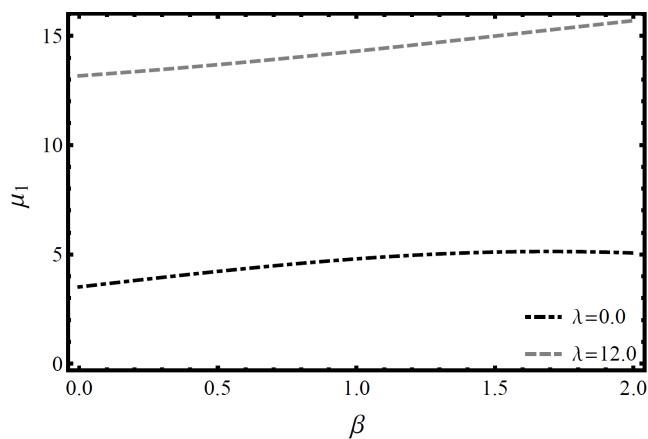


شکل ۴-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\lambda = 0$  و  $\beta = 2$

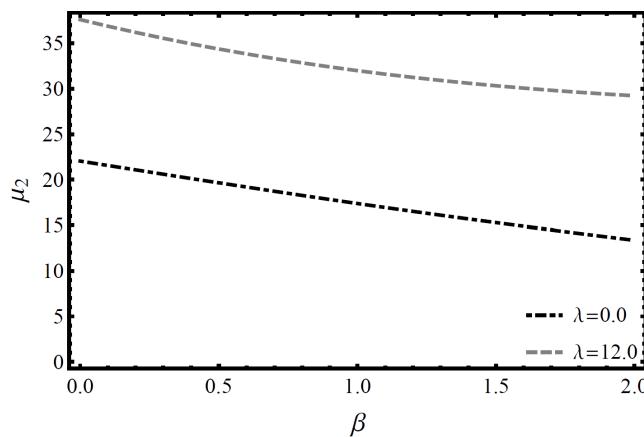


شکل ۵-۵ نمودار همگرایی روش تبدیل دیفرانسیلی مربوط به پنج پارامتر فرکانسی اول با توجه به  $\lambda = 12$  و  $\beta = 2$

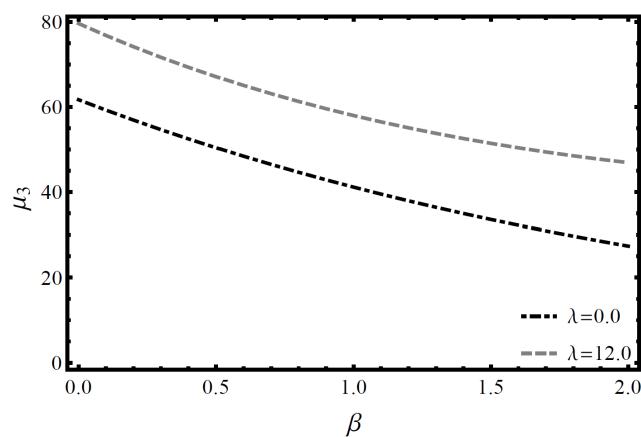
همان‌طور که در نمودارهای همگرایی مشخص است، با افزایش تعداد جملات در روش تبدیل دیفرانسیلی، پاسخ‌ها همگرا شده و افزایش تعداد جملات، تأثیری بر نتایج حاصل ندارد. اکنون برآئیم تا به بررسی تأثیر ضریب نامنشوری بر پارامترهای فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت بپردازیم. در این راستا شکل‌های ۵-۶ الی ۹-۵ به ترتیب برای پارامترهای فرکانسی اول تا چهارم رسم شده‌اند. در شکل‌های مذکور، محور افقی و عمودی به ترتیب نشان‌دهنده ضریب نامنشوری و پارامتر فرکانسی حاصل ( $\mu$ ) می‌باشند. مشاهده می‌شود که افزایش ضریب نامنشوری، موجب افزایش اولین پارامتر فرکانسی و کاهش سایر پارامترهای فرکانسی می‌گردد.



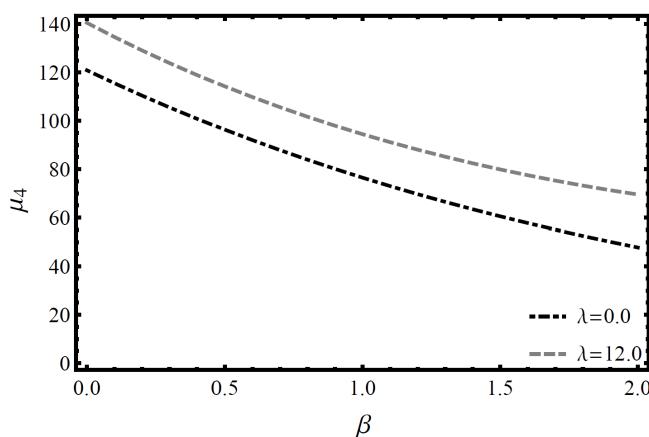
شکل ۵-۶ تأثیر ضریب نامنشوری برای اولین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت



شکل ۷-۵ تأثیر ضریب نامنشوری برای دومین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت

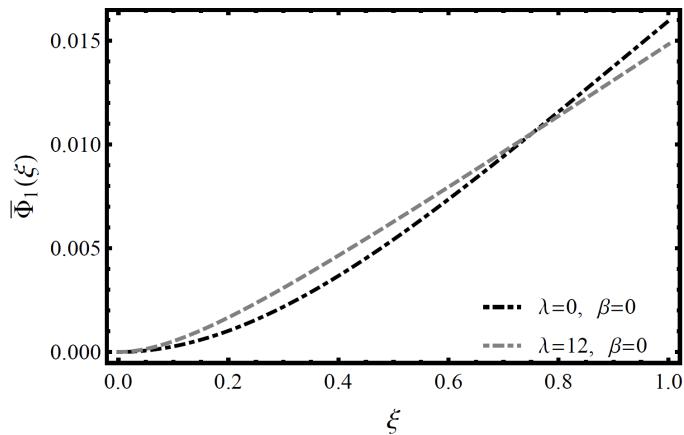


شکل ۸-۵ تأثیر ضریب نامنشوری برای سومین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت

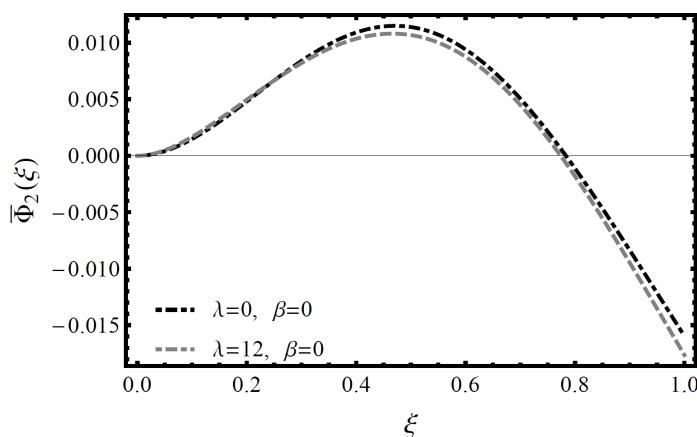


شکل ۹-۵ تأثیر ضریب نامنشوری برای چهارمین پارامتر فرکانسی حاصل با توجه به سرعت‌های دورانی متفاوت

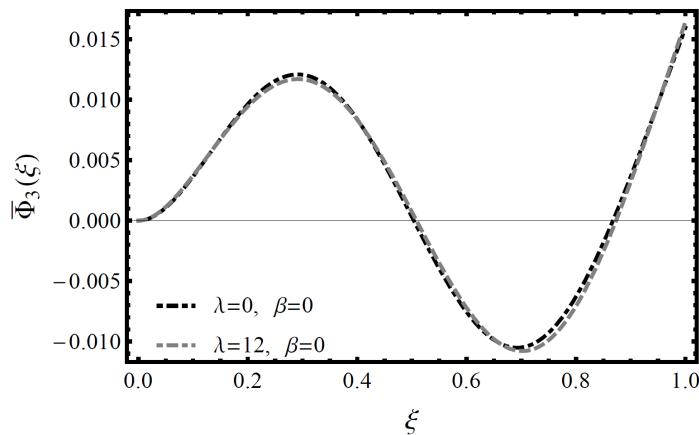
اکنون برآئیم تا به بررسی تأثیر سرعت دورانی و ضریب نامنشوری در شکل مودهای نرمال شده ( $\bar{\Phi}_i$ ) بپردازیم. در شکل های ۱۰-۵ الی ۱۳-۵ با ثابت نگهداشتن مقدار ضریب نامنشوری ( $\beta=0$ ) و سرعت های دورانی متفاوت، شکل مودهای اول تا چهارم رسم شده است. مشاهده می شود، شکل مودها با تفاوت در سرعت دورانی، تقریباً بر هم منطبق می باشند. از سوی دیگر، در شکل های ۱۴-۵ الی ۱۷-۵، با ثابت نگهداشتن مقدار سرعت دورانی ( $\lambda=12$ ) و ضریب نامنشوری متفاوت، شکل مودهای اول تا چهارم رسم شده است. مشاهده می شود با افزایش مقدار ضریب نامنشوری، میزان تغییرات شکل مودها به شدت افزایش یافته است.



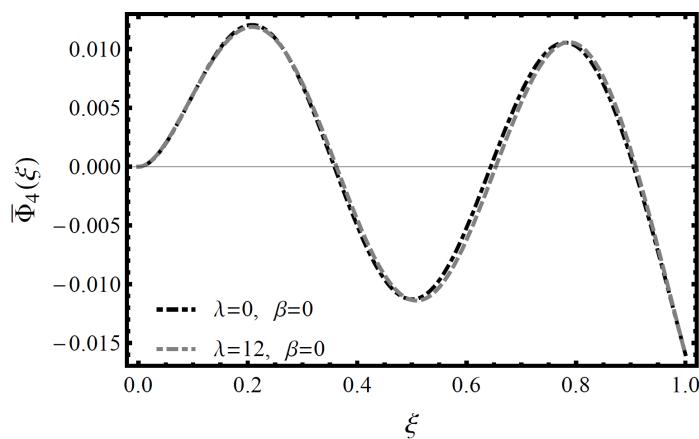
شکل ۱۰-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر اولین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت ( $\beta=0$ )



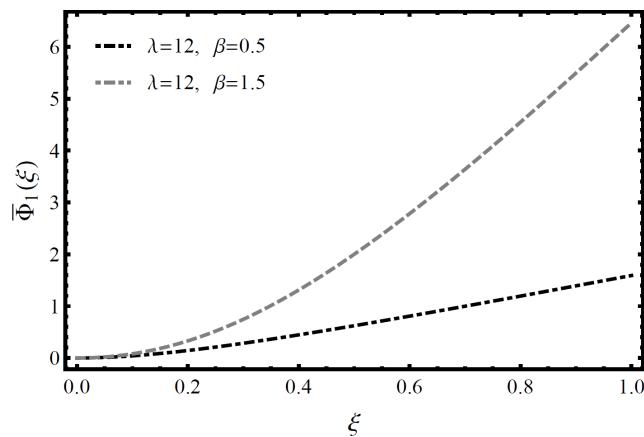
شکل ۱۱-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر دومین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت ( $\beta=0$ )



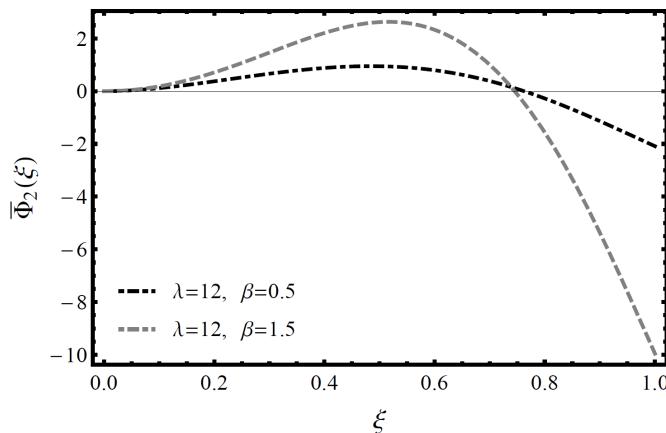
شکل ۱۲-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر سومین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت ( $\beta=0$ )



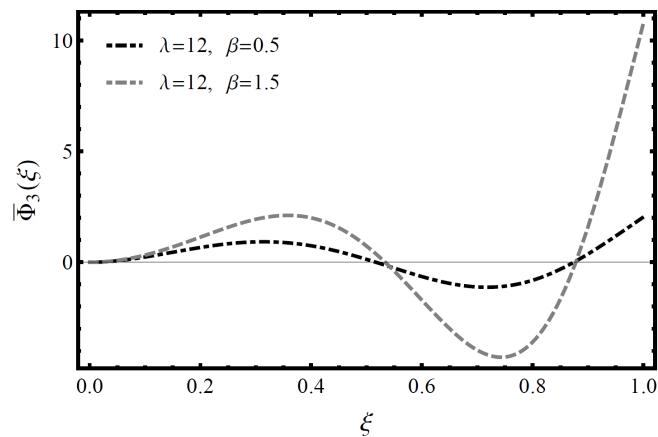
شکل ۱۳-۵ تأثیر سرعت دورانی ( $\lambda$ ) بر چهارمین شکل مود نرمال شده با توجه به ضریب نامنشوری ثابت ( $\beta=0$ )



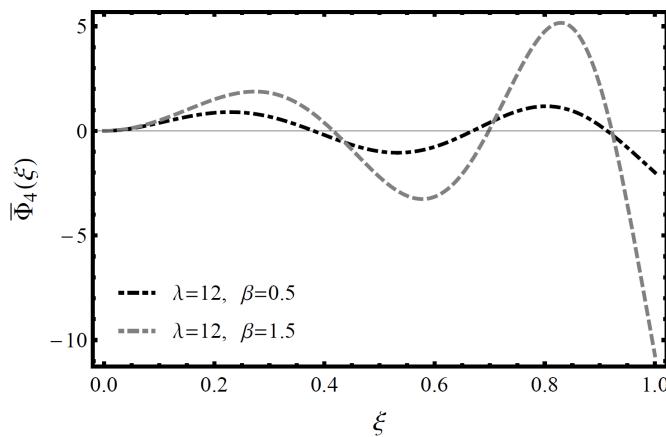
شکل ۱۴-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر اولین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت ( $\lambda=12$ )



شکل ۱۵-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر دومین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت ( $\lambda=12$ )



شکل ۱۶-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر سومین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت ( $\lambda=12$ )



شکل ۱۷-۵ تأثیر ضریب نامنشوری ( $\beta$ ) بر چهارمین شکل مود نرمال شده با توجه به سرعت دورانی ثابت ( $\lambda=12$ )

## ۵-۶- جمع‌بندی

در این فصل به تحلیل ارتعاش آزادِ تیرهای دوّار اویلر - برنولی با سطح مقطعی دایره‌ای و تغییرات نمایی در طولِ تیر، با استفاده از روشِ اجزای محدود و روشِ تبدیلِ دیفرانسیلی پرداخته شد و فرکانس‌های طبیعی و شکلِ مودها حاصل ارائه شدند. پس از آن، به بررسی تأثیرِ ضریبِ نامنشوری بر پارامترهای فرکانسی پرداخته شد. در نهایت، تأثیرِ ضریبِ نامنشوری و سرعتِ دورانی بر شکلِ مودهای نرمال‌شده موردِ بررسی قرار گرفت. می‌توان نتایج حاصل را به صورتِ زیر جمع‌بندی نمود:

- با افزایشِ سرعتِ دورانی، مقادیرِ پارامترهای فرکانسی افزایش می‌یابد.
- با افزایشِ ضریبِ نامنشوری، اولین پارامتر فرکانسی افزایش می‌یابد؛ درحالی که سایر پارامترهای فرکانسی کاهش می‌یابند.
- افزایشِ ضریبِ نامنشوری منجر به افزایشِ تغییرات در شکلِ مودهای نرمال‌شده می‌گردد.



## فصلٍ ششم

تحلیلِ ارتعاش اجباریٰ تیر با

شرایطِ تکیه‌گاهِ کلی به کمکِ توابعِ

شکلِ مثلثاتی

## ۶-۱- مقدمه

در این فصل، به معرفی روشِ اجزای محدود مبتنی بر از توابعِ شکلِ مثلثاتی، به عنوان ایده مطرح شده در جهتِ افزایشِ دقتِ پاسخ‌های عددی حاصل از بکارگیری روشِ اجزای محدود، پرداخته می‌شود. برای این منظور، تحلیلِ ارتعاش اجباری تیر اویلر - برنولی با شرایطِ تکیه‌گاهی کلی با استفاده از روشِ دقیق، روشِ اجزای محدود کلاسیک و روشِ اجزای محدود مبتنی بر توابعِ شکلِ مثلثاتی موردِ بررسی قرار می‌گیرد و تابعِ پاسخِ فرکانسی مربوط به آن رسم می‌گردد.

لازم به ذکر است، تابعِ پاسخِ فرکانسی، تابعی است که پاسخِ دینامیکی سازه به بارِ اعمالی را به صورتِ تابعی از فرکانسِ بارِ واردِ بیان می‌کند [۳۹]. بدیهی است که تابعِ پاسخِ فرکانسی را می‌توان برای تحلیلِ ارتعاشِ انواعِ گوناگونِ سازه‌ها مانندِ تیرها، قاب‌ها و ... بکار گرفت. لازم به تذکر است، استخراجِ تابعِ پاسخِ فرکانسی تیرها به صورتِ دقیق و محاسباتی، تاکنون کمتر موردِ توجهِ پژوهشگران قرار گرفته است و از این تابع در تحلیل‌های دینامیکی، اغلب به صورتِ تجربی و آزمایشگاهی استفاده شده است [۳۹]. به عنوانِ نمونه، می‌توان به پژوهشِ لی و کیم اشاره نمود که با ارائهِ روشی آزمایشگاهی به محاسبهِ پاسخِ فرکانسی سیستم با توجه به میرایی پرداخته است [۴۰]. گرگز و ایرل [۴۱]، پاسخِ فرکانسی تیر در شرایطِ تکیه‌گاهی مفصل - گیردار را ارائه دادند. علیپور و آفتتابی‌ثانی [۴۲]، با استفاده از حلِ دقیق و روشِ اجزای محدود کلاسیک به یافتنِ تابعِ پاسخِ فرکانسی تیر اویلر - برنولی با توجه به شرایطِ تکیه‌گاهی مفصل - مفصل پرداختند.

## ۶-۲- توابعِ شکلِ مثلثاتی

یادآوری می‌کند، حلِ دقیقِ ارائه شده برای تیر اویلر - برنولی منشوری با صلبیتِ خمشی یکسان در طولِ تیر (EI)، در قالبِ رابطه (۶۸-۲) بیان شد. با توجه به رابطه مذکور، ایده استفاده از توابعِ مثلثاتی به عنوانِ توابعِ اولیه تقریب در روشِ اجزای محدود برای تحلیلِ تیر اویلر - برنولی، در ذهنِ

نویسنده‌گان شکل گرفت. در ادامه، توابع شکل مثلثاتی استخراج می‌گرددند.

از فصل سوم به خاطر داریم که توابع شکل إلمان خمثی بر اساس رابطه (۳-۳) به فرم زیر

حاصل می‌گرددند:

$$[\mathbf{N}(x)] = [\mathbf{f}(x)][\mathbf{G}]^{-1} \quad (1-6)$$

که در رابطه فوق،  $[\mathbf{f}(x)]$  و  $[\mathbf{N}(x)]$  به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس توابع شکل إلمان خمثی و ماتریس سطري توابع تقریب هستند. همچنین  $[\mathbf{G}]$ ، ماتریس مربعی حاصل از اعمال شرایط مرزی بر ماتریس سطري  $[\mathbf{f}(x)]$  است. در اجزای محدود کلاسیک و برای إلمان خمثی، ماتریس سطري  $[\mathbf{f}(x)]$  به صورت رابطه (۳-۸) تعریف می‌گردد؛ اما در این فصل و برای استخراج توابع شکل مثلثاتی،  $[\mathbf{f}(x)]$  به فرم زیر تعریف می‌گردد که این امر، سبب تابع فرکانس شدن توابع شکل خواهد

شد:

$$[\mathbf{f}(x)] = [\sin(\lambda x) \cos(\lambda x) \sinh(\lambda x) \cosh(\lambda x)] \quad (2-6)$$

که  $\lambda$  در رابطه فوق، به صورت زیر درنظر گرفته می‌شود:

$$\lambda^4 = \frac{m\omega^2}{EI} \quad (3-6)$$

در رابطه فوق،  $EI$  و  $m$  به ترتیب صلبیت و جرم واحد طول تیر می‌باشند.

اکنون إلمانی خمثی به طول  $L^\circ$  که با چهار درجه آزادی  $U_1$  تا  $U_4$  در شکل ۱-۳ نشان داده

شده است را مدنظر قرار می‌دهیم. لازم به ذکر است، مقادیر درجات آزادی  $U_1$  تا  $U_4$ ، در روابط

(۳-۳) الی (۳-۷) تعریف شده است که مجدداً در روابط (۶-۴) الی (۷-۶) بیان می‌گردد:

$$U_1 = u(0) \quad (4-6)$$

$$U_2 = \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=0} \quad (5-6)$$

$$U_3 = u(L^\circ) \quad (6-6)$$

$$U_4 = \left. \frac{du(x)}{dx} \right|_{x=L^\circ} \quad (7-6)$$

همان‌طور که پیش‌تر بیان گردید، هر سطر از ماتریس  $[G]$  از اعمال ماتریس سطحی  $[f(x)]$  بر شرایط مرزی المان، که در روابط (۴-۶) الی (۷-۶) تعریف شدند، حاصل می‌گردد. در نتیجه ماتریس

$[G]$ ، یک ماتریس مربعی  $4 \times 4$  به فرم رابطه (۸-۶) است:

$$[G] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \sin(\lambda L^e) & \cos(\lambda L^e) & \sinh(\lambda L^e) & \cosh(\lambda L^e) \\ \lambda \cos(\lambda L^e) & -\lambda \sin(\lambda L^e) & \lambda \cosh(\lambda L^e) & \lambda \sinh(\lambda L^e) \end{bmatrix} \quad (8-6)$$

اکنون با جایگذاری روابط (۶-۲) و (۶-۸) در رابطه (۱-۱)، ماتریس سطحی توابع شکل مثلثاتی که با

نشان داده می‌شود، حاصل خواهد شد:

$$[N_{Trg}(x)] = \begin{bmatrix} \sin(\lambda x) \\ \cos(\lambda x) \\ \sinh(\lambda x) \\ \cosh(\lambda x) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \lambda & 0 & \lambda & 0 \\ \sin(\lambda L^e) & \cos(\lambda L^e) & \sinh(\lambda L^e) & \cosh(\lambda L^e) \\ \lambda \cos(\lambda L^e) & -\lambda \sin(\lambda L^e) & \lambda \cosh(\lambda L^e) & \lambda \sinh(\lambda L^e) \end{bmatrix}^{-1} \quad (10-6)$$

انجام محاسبات طاقت‌فرسای مربوط به رابطه فوق، توابع شکل مثلثاتی که تابع فرکانس نیز هستند را

به صورت زیر در دسترس قرار می‌دهد:

$$N_{Trg1}(x) = \frac{2 \sin(\lambda(L^e - x)) \sinh(\lambda L^e) + 2 \sinh(\lambda(L^e - x)) \sin(\lambda L^e)}{4 \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 4} + \frac{-2 \cos(\lambda x) - 2 \cosh(\lambda x) + 2 \cos(\lambda(L^e - x)) \cosh(\lambda L^e) + 2 \cosh(\lambda(L^e - x)) \cos(\lambda L^e)}{4 \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 4} \quad (11-6)$$

$$N_{Trg2}(x) = -\frac{(-\cosh(\lambda x) \sin(\lambda L^e) + \sin(\lambda(L^e - x)) - \cos(\lambda L^e) \sinh(\lambda x)) \cosh(\lambda L^e)}{2 \lambda \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 2 \lambda} - \frac{(\sin(\lambda L^e) \sinh(\lambda x) + \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda x) - \cos(\lambda(L^e - x))) \sinh(\lambda L^e)}{2 \lambda \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 2 \lambda} - \frac{\sin(\lambda x) + \sinh(\lambda x)}{2 \lambda \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 2 \lambda} \quad (12-6)$$

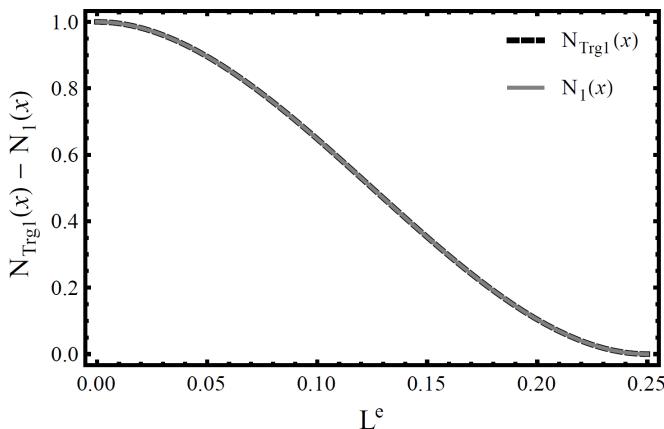
$$N_{Trg3}(x) = \frac{\cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda x) - \cos(\lambda(L^e - x)) + (\cos(\lambda x) - \cosh(\lambda x)) \cosh(\lambda L^e)}{2 \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 2}$$

$$+ \frac{-\sin(\lambda x) \sinh(\lambda L^e) + (\sin(\lambda L^e) + \sinh(\lambda L^e)) \sinh(\lambda x)}{2 \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 2} \quad (13-6)$$

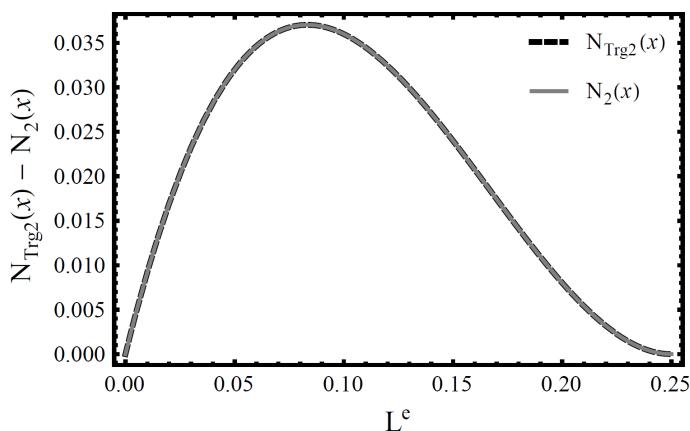
$$N_{Trg4}(x) = \frac{-\sinh(\lambda L^e) \cos(\lambda x) + \sin(\lambda(L^e - x)) + (\sinh(\lambda L^e) - \sin(\lambda L^e)) \cosh(\lambda x)}{2 \lambda \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 2 \lambda}$$

$$+ \frac{\sinh(\lambda x) \cos(\lambda L^e) + (\sin(\lambda x) - \sinh(\lambda x)) \cosh(\lambda L^e)}{2 \lambda \cos(\lambda L^e) \cosh(\lambda L^e) - 2 \lambda} \quad (14-6)$$

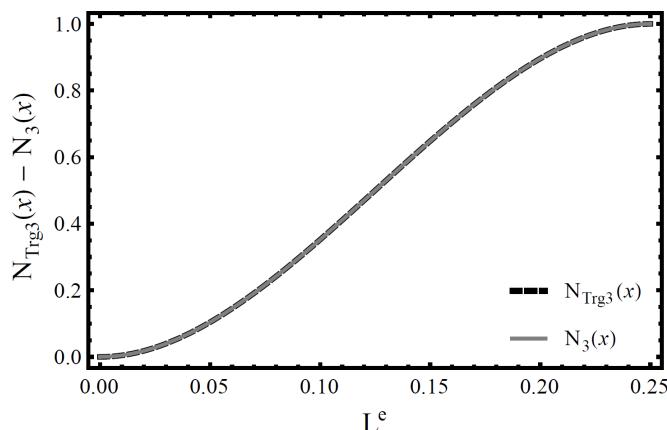
$L^e$  طولِ إلماں مدنظر است که برابر با  $L/NE$  می باشد. خاطر نشان می سازد  $L$  و  $NE$  به ترتیب بیان کننده طولِ تیر و تعدادِ إلماں ها در روش اجزای محدود هستند. در ادامه، توابعِ شکلِ مثلثاتی در شکل‌های ۱-۶ الی ۱۲-۶ با فرض  $L=1$  و  $NE=4$  رسم می شوند. در کلیه شکل‌های مذکور، توابع شکل مثلثاتی با توابع شکل مرسوم در روش اجزای محدود کلاسیک، که در روابطِ (۴۲-۳) الی (۴۵-۳) بیان گردیده است، مقایسه شده‌اند. لازم به ذکر است، همان‌طور که در روابطِ (۱۱-۶) الی (۱۴-۶) مشهود است، توابع شکل مثلثاتی وابسته به مقدار  $\lambda$  هستند؛ لذا شکل‌های ۱-۶ الی ۶-۱۲ با توجه به  $\lambda=1$ ، شکل‌های ۵-۶ الی ۸-۶ با توجه به  $\lambda=3\pi$  و در نهایت شکل‌های ۹-۶ الی ۱۲-۶ با توجه به  $\lambda=5\pi$  رسم شده‌اند. بدین ترتیب، تأثیر پارامتر  $\lambda$  در رفتارِ توابع شکل مثلثاتی آشکار می‌گردد. با افزایشِ مقدار  $\lambda$ ، توابع شکل مثلثاتی از توابع شکل مرسوم فاصله می‌گیرند (شکل‌های ۵-۶ الی ۱۲).



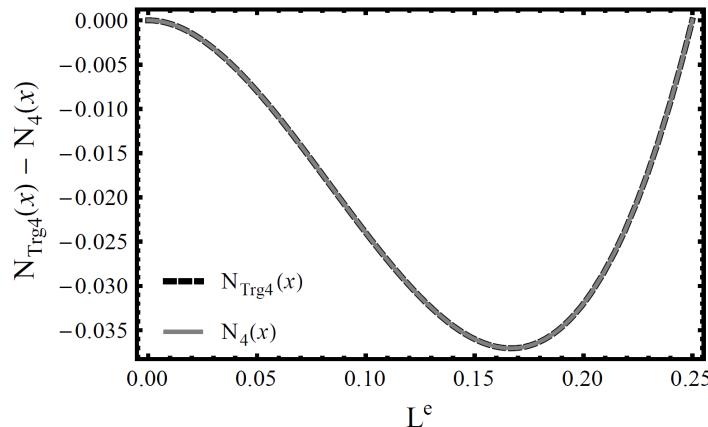
شكل ٦-١ تغييرات اولين توابع شكل مرسوم  $[N_{\text{Trg}1}(x)]$  و مثلثاتی  $[N_1(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 1$  و  $NE = 4$ )



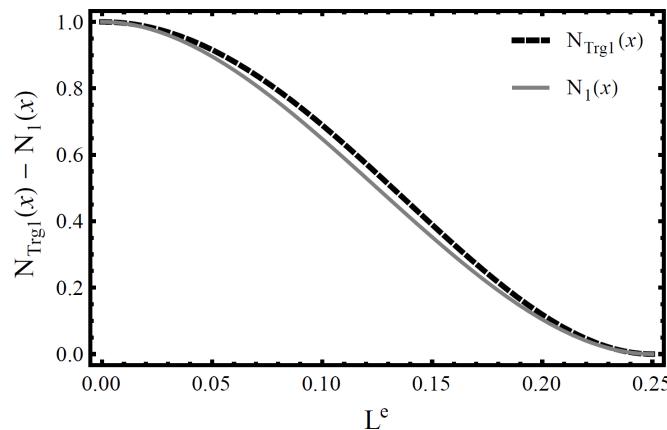
شكل ٦-٢ تغييرات دومين توابع شكل مرسوم  $[N_{\text{Trg}2}(x)]$  و مثلثاتی  $[N_2(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 1$  و  $NE = 4$ )



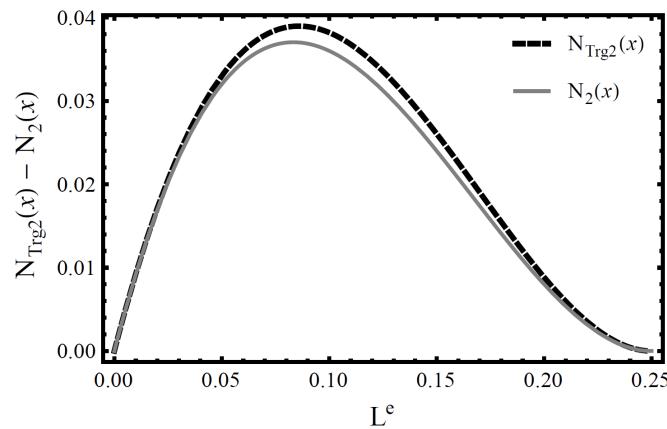
شكل ٦-٣ تغييرات سومين توابع شكل مرسوم  $[N_{\text{Trg}3}(x)]$  و مثلثاتی  $[N_3(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 1$  و  $NE = 4$ )



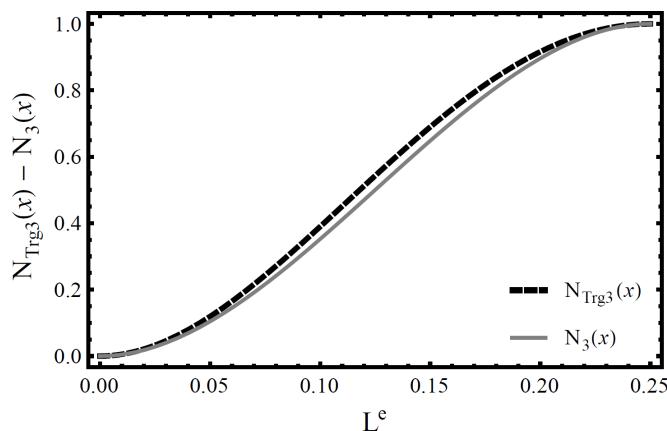
شکل ۴ تغییرات چهارمین توابع شکل مرسوم  $[N_4(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trq4}(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 3\pi$ ) و  $NE = 4$



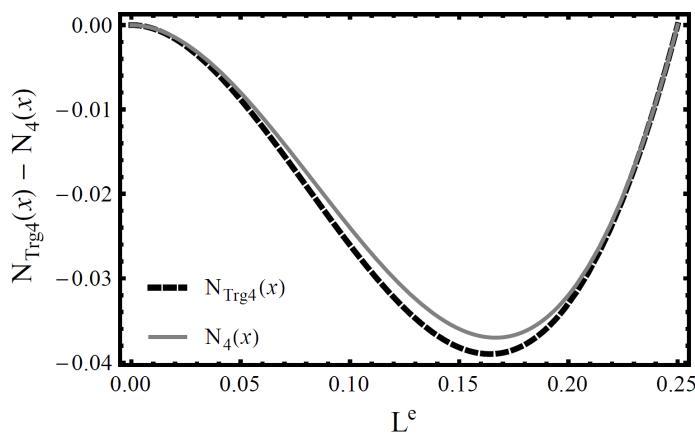
شکل ۵ تغییرات اولین توابع شکل مرسوم  $[N_1(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trq1}(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 3\pi$ ) و  $NE = 4$



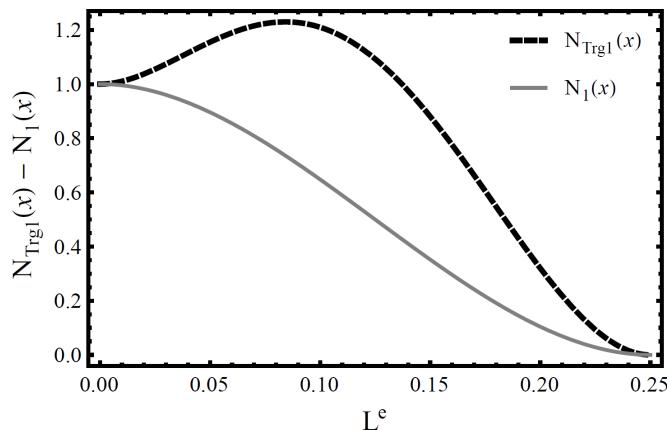
شکل ۶ تغییرات دومین توابع شکل مرسوم  $[N_2(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trq2}(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 3\pi$ ) و  $NE = 4$



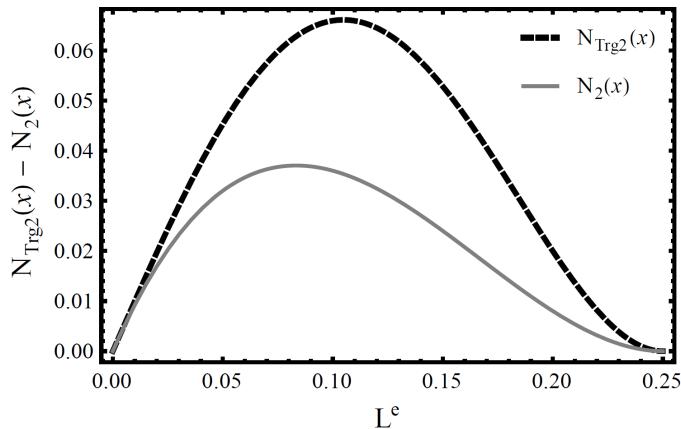
شکل ۷-۶ تغییرات سومین توابع شکل مرسوم  $[N_3(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg3}(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 3\pi$  و  $NE = 4$ )



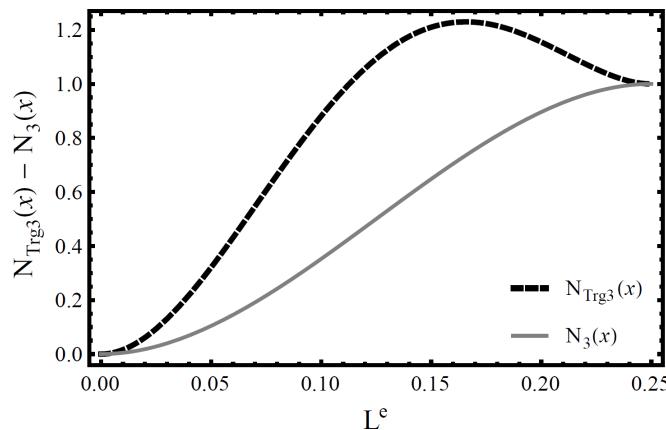
شکل ۷-۷ تغییرات چهارمین توابع شکل مرسوم  $[N_4(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg4}(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 3\pi$  و  $NE = 4$ )



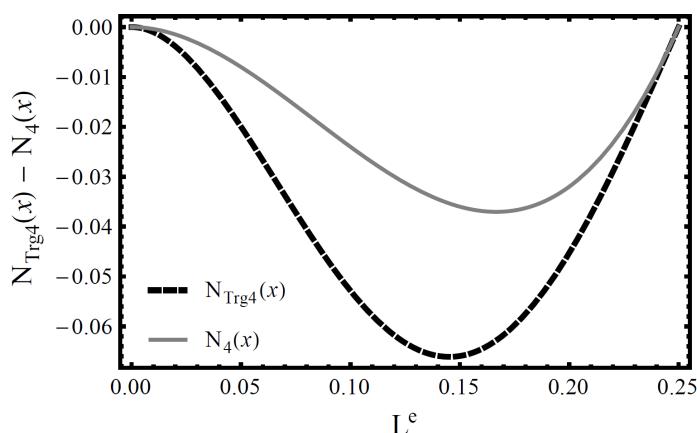
شکل ۷-۸ تغییرات اولین توابع شکل مرسوم  $[N_1(x)]$  و مثلثاتی  $[N_{Trg1}(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 5\pi$  و  $NE = 4$ )



شكل ١٠ تغييراتِ دومين توابع شكل مرسوم  $[N_{\text{Trg}2}(x)]$  و مثلثاتی  $[N_2(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 5\pi$  و  $NE = 4$ )



شكل ١١ تغييراتِ سومين توابع شكل مرسوم  $[N_{\text{Trg}3}(x)]$  و مثلثاتی  $[N_3(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 5\pi$  و  $NE = 4$ )



شكل ١٢ تغييراتِ چهارمين توابع شكل مرسوم  $[N_{\text{Trg}4}(x)]$  و مثلثاتی  $[N_4(x)]$  در طول إلمان ( $\lambda = 5\pi$  و  $NE = 4$ )

اکنون که چهار تابع شکل مثلثاتی در دسترس قرار گرفته‌اند، می‌توانیم با قراردادن آن‌ها در تعریف ماتریس جرم و سختی المان، که به ترتیب، در روابط ۱۵-۶ و ۱۶-۶) بیان شده است، این دو ماتریس را بیابیم. مجدداً یادآوری می‌گردد،  $K_{ij}^e$  درایه سطر  $i$  و ستون  $j$  ماتریس سختی المان و  $M_{ij}^e$  درایه سطر  $i$  و ستون  $j$  ماتریس جرم المان می‌باشند:

$$K_{ij}^e = \int_0^{L^e} \frac{\partial^2 N_{Trg_i}(x)}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 N_{Trg_j}(x)}{\partial x^2} dx \quad (15-6)$$

$$M_{ij}^e = \int_0^{L^e} N_{Trg_i}(x) \rho A N_{Trg_j}(x) dx \quad (16-6)$$

در روابط بالا،  $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$  بیان‌کننده تعداد درجات آزادی هر المان است. با توجه به روابط فوق آشکار است که ماتریس جرم و سختی، ماتریس‌های متقارن هستند. خاطر نشان می‌سازد، ماتریس‌های جرم و سختی در حالت کلی، در پیوست ب نمایش داده شده است. پس از قرار دادن روابط ۱۱-۶) الی ۱۴-۶) در روابط ۱۵-۶ و ۱۶-۶)، ماتریس سختی و جرم برای المان منشوری محاسبه خواهد شد.

در ادامه به تحلیل ارتعاش اجباری تیر منشوری اویلر - برنولی با شرایط تکیه‌گاهی کلی پرداخته و فرکانس‌های حاصل را با فرکانس‌های حاصل از حل دقیق و همچنین روش اجزای محدود کلاسیک مقایسه می‌نماییم. در این راستا، نخست به بیان حل دقیق ارتعاش اجباری تیر مذکور می‌پردازیم.

### ۳-۶- حل دقیق

در این بخش، به بیان حل دقیق ارتعاش اجباری تیر منشوری اویلر - برنولی با شرایط تکیه‌گاهی کلی می‌پردازیم. در این راستا نخست، معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر مذکور در حالت ارتعاش آزاد و در حوزه فرکانس، که در رابطه ۷-۲) بیان شده است، را مجدداً در رابطه ۱۷-۶) بیان می‌نماییم:

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - m \omega^2 u(x) = 0 \quad (17-6)$$

حال برای ارتعاش اجباری تیر، تکیه‌گاه‌های تیر را تحت شتاب تکیه‌گاهی واحد در حوزه فرکانس،

يعنى  $a_g = 1e^{i\omega t}$ ، قرار مى دهيم. شایان ذکر است،  $i$  نشان‌دهنده واحد موهومی عدد مختلط بوده و  $i = \sqrt{-1}$  است. لذا، معادله (۱۷-۶) به فرم زیر تغییر می‌کند:

$$EI \frac{d^4 u(x)}{dx^4} - m \omega^2 \left( u(x) + \frac{1}{-\omega^2} \right) = 0 \quad (18-6)$$

با تقسیم طرفین معادله فوق بر  $EI$  و با توجه به رابطه (۳-۶) و همچنین اندکی ساده‌سازی، معادله (۱۸-۶) به فرم معادله (۱۹-۶) بازنویسی می‌گردد:

$$\frac{d^4 u(x)}{dx^4} - \lambda^4 u(x) = \frac{-m}{EI} \quad (19-6)$$

مشاهده می‌گردد که معادله فوق، معادله‌ای ناهمگن است، و معادله ناهمگن، بیان ریاضی ارتعاش اجباری می‌باشد. پاسخ معادله (۱۹-۶)، به صورت رابطه (۲۰-۶) نوشته می‌شود:

$$u(x) = u_g(x) + u_p(x) \quad (20-6)$$

که در آن  $u_g(x)$  و  $u_p(x)$  به ترتیب نشان‌دهنده، پاسخ عمومی و خصوصی معادله دیفرانسیل (۱۹-۶) هستند. پاسخ عمومی معادله (۱۹-۶)، که از حل معادله دیفرانسیل مذکور در حالت همگن حاصل می‌شود، در رابطه (۶۸-۲) بیان شده است که در رابطه (۲۱-۶) مجددأ نوشته می‌شود:

$$u_g(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x) \quad (21-6)$$

اکنون پاسخ خصوصی معادله (۱۹-۶) در رابطه (۲۲-۶) بیان می‌گردد:

$$u_p(x) = \frac{1}{\omega^2} \quad (22-6)$$

بنابراین با قراردادن روابط (۲۱-۶) و (۲۲-۶) در رابطه (۲۰-۶)، پاسخ معادله دیفرانسیل (۱۹-۶) به صورت رابطه (۲۳-۶) درمی‌آید:

$$u(x) = c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x) + \frac{1}{\omega^2} \quad (23-6)$$

ضرایب  $c_1$  تا  $c_4$  که در رابطه (۲۳-۶) وجود دارد، بر اساس شرایط تکیه‌گاهی مسئله مشخص خواهد شد. شرایط تکیه‌گاهی در روابط (۸-۲) الی (۱۱-۲) و همچنین در شکل ۲-۲ نشان داده شده

است. مجدداً این روابط را در روابط (۲۴-۶) الی (۲۷-۶) بیان می‌نماییم:

$$K_{t_1} u(x) \Big|_{x=0} = -EI \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \quad (24-6)$$

$$K_{r_1} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=0} = EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} \quad (25-6)$$

$$K_{t_2} u(x) \Big|_{x=L} = EI \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \Big|_{x=L} \quad (26-6)$$

$$K_{r_2} \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = -EI \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=L} \quad (27-6)$$

در روابط بالا،  $K_{t_1}$  و  $K_{t_2}$  ثابت‌های فنرهای انتقالی و  $K_{r_1}$  و  $K_{r_2}$  ثابت‌های فنرهای دورانی هستند که

در شکل ۲-۲ نشان داده شده‌اند. در ادامه شرایط مرزی در روابط (۲۴-۶) تا (۲۷-۶) را به ترتیب، به

فرم روابط (۲۸-۶) الی (۳۱-۶) بازنویسی می‌کنیم:

$$K_1 u(x) \Big|_{x=0} = -\frac{d^3 u(x)}{dx^3} \Big|_{x=0} \quad (28-6)$$

$$K_2 \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} \quad (29-6)$$

$$K_3 u(x) \Big|_{x=L} = \frac{d^3 u(x)}{dx^3} \Big|_{x=L} \quad (30-6)$$

$$K_4 \frac{du(x)}{dx} \Big|_{x=L} = -\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \Big|_{x=L} \quad (31-6)$$

لازم به ذکر است  $K_1$  تا  $K_4$ ، که در روابط (۲۸-۶) تا (۳۱-۶) بیان شده‌اند، به صورت زیر تعریف می-

شوند:

$$K_1 = \frac{K_{t_1}}{EI} \quad (32-6)$$

$$K_2 = \frac{K_{r_1}}{EI} \quad (33-6)$$

$$K_3 = \frac{K_{t_2}}{EI} \quad (34-6)$$

$$K_4 = \frac{K_{r_2}}{EI} \quad (35-6)$$

اکنون با قراردادن رابطه (۲۳-۶) تا (۲۸-۶) در روابط (۳۱-۶) تا (۳۶-۶) به ترتیب روابط (۳۶-۶) تا (۳۹-۶)

حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} K_1 & \left( c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x) + \frac{1}{\omega^2} \right) \Big|_{x=0} \\ & = - \left( -\lambda^3 c_1 \cos(\lambda x) + \lambda^3 c_2 \sin(\lambda x) + \lambda^3 c_3 \cosh(\lambda x) + \lambda^3 c_4 \sinh(\lambda x) \right) \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (36-6)$$

$$\begin{aligned} K_2 & \left( \lambda c_1 \cos(\lambda x) - \lambda c_2 \sin(\lambda x) + \lambda c_3 \cosh(\lambda x) + \lambda c_4 \sinh(\lambda x) \right) \Big|_{x=0} \\ & = \left( -\lambda^2 c_1 \sin(\lambda x) - \lambda^2 c_2 \cos(\lambda x) + \lambda^2 c_3 \sinh(\lambda x) + \lambda^2 c_4 \cosh(\lambda x) \right) \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (37-6)$$

$$\begin{aligned} K_3 & \left( c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x) + c_3 \sinh(\lambda x) + c_4 \cosh(\lambda x) + \frac{1}{\omega^2} \right) \Big|_{x=L} \\ & = \left( -\lambda^3 c_1 \cos(\lambda x) + \lambda^3 c_2 \sin(\lambda x) + \lambda^3 c_3 \cosh(\lambda x) + \lambda^3 c_4 \sinh(\lambda x) \right) \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (38-6)$$

$$\begin{aligned} K_4 & \left( \lambda c_1 \cos(\lambda x) - \lambda c_2 \sin(\lambda x) + \lambda c_3 \cosh(\lambda x) + \lambda c_4 \sinh(\lambda x) \right) \Big|_{x=L} \\ & = \left( -\lambda^2 c_1 \sin(\lambda x) - \lambda^2 c_2 \cos(\lambda x) + \lambda^2 c_3 \sinh(\lambda x) + \lambda^2 c_4 \cosh(\lambda x) \right) \Big|_{x=L} \end{aligned} \quad (39-6)$$

حال برای یافتن ضرایب  $c_1$  تا  $c_4$ ، بایستی چهار رابطه بیان شده در روابط (۳۶-۶) تا (۳۹-۶) را در

قالب یک دستگاه چهار معادله و چهار مجهول حل نماییم. در این راستا، دستگاه مذکور در رابطه

(۴۰-۶) نمایش داده شده است:

$$\begin{cases} K_1 \left( c_2 + c_4 + \frac{1}{\omega^2} \right) + \lambda^3 (c_3 - c_1) = 0 \\ \lambda K_2 (c_1 + c_3) + \lambda^2 (c_2 - c_4) = 0 \\ K_3 \left( c_1 \sin(\lambda L) + c_2 \cos(\lambda L) + c_3 \sinh(\lambda L) + c_4 \cosh(\lambda L) + \frac{1}{\omega^2} \right) \\ \quad + \lambda^3 c_1 \cos(\lambda L) - \lambda^3 c_2 \sin(\lambda L) - \lambda^3 c_3 \cosh(\lambda L) - \lambda^3 c_4 \sinh(\lambda L) = 0 \\ K_4 \left( \lambda c_1 \cos(\lambda L) - \lambda c_2 \sin(\lambda L) + \lambda c_3 \cosh(\lambda L) + \lambda c_4 \sinh(\lambda L) \right) \\ \quad - \lambda^2 c_1 \sin(\lambda L) - \lambda^2 c_2 \cos(\lambda L) + \lambda^2 c_3 \sinh(\lambda L) + \lambda^2 c_4 \cosh(\lambda L) = 0 \end{cases} \quad (40-6)$$

از حل دستگاه (۴۰-۶)، ضرایب  $c_1$  تا  $c_4$  حاصل خواهد شد که، به ترتیب، در روابط (۴۱-۶) الی

(۴۴-۶) نمایش داده می شوند:

$$\begin{aligned}
c_1 = & \frac{-\lambda K_1(K_3 K_4 + \lambda^4) + K_3(K_1 K_2 + \lambda^4)(\lambda \cos(\lambda L) + K_4 \sin(\lambda L))}{\psi} \\
& + \frac{\cosh(\lambda L)(\lambda K_3(K_1 K_2 + 2K_1 K_4 - \lambda^4) + \lambda K_1(-K_4(2K_2 + K_4) + \lambda^4) \cos(\lambda L))}{\psi} \\
& + \frac{\cosh(\lambda L)(K_1(-K_2 K_3 K_4 + \lambda^4(K_2 + 2K_4)) \sin(\lambda L))}{\psi} \\
& + \frac{\sinh(\lambda L)(K_3(K_1 K_2 K_4 + 2\lambda^2 K_1 - \lambda^4 K_4) + K_1(-K_2 K_3 K_4 - 2\lambda^2 K_3 + \lambda^4 K_2) \cos(\lambda L))}{\psi} \\
& + \frac{\lambda K_1 \sinh(\lambda L) \sin(\lambda L)(-K_3 K_4 + 2\lambda^2 K_2 K_4 + \lambda^4)}{\psi}
\end{aligned}$$

(41-5)

$$\begin{aligned}
c_2 = & \frac{K_1 K_2(K_3 K_4 + \lambda^4) + K_3(K_1 K_2 + \lambda^4)(K_4 \cos(\lambda L) - \lambda \sin(\lambda L))}{\psi} \\
& + \frac{\cosh(\lambda L)(-K_1 K_2 K_3 K_4 + \lambda^4 K_3(2K_2 + K_4))}{\psi} \\
& + \frac{K_1 \cosh(\lambda L) \cos(\lambda L)(-K_2 K_3 K_4 + \lambda^4(K_2 + 2K_4))}{\psi} \\
& + \frac{\lambda K_1 \cosh(\lambda L) \sin(\lambda L)(2K_2 K_3 + K_3 K_4 - \lambda^4)}{\psi} \\
& + \frac{\sinh(\lambda L)((\lambda K_3(-K_1 K_2 + 2\lambda^2 K_2 K_4 + \lambda^4)) + \lambda K_1 \cos(\lambda L)(-K_3 K_4 + 2\lambda^2 K_2 K_4 + \lambda^4))}{\psi} \\
& + \frac{K_1 \sinh(\lambda L) \sin(\lambda L)(K_2 K_3 K_4 + 2\lambda^2 K_3 - \lambda^4 K_2)}{\psi}
\end{aligned}$$

(42-5)

$$\begin{aligned}
c_3 = & \frac{\lambda K_1 (K_3 K_4 + \lambda^4)}{\psi} - \frac{\lambda K_3 \cos(\lambda L) (K_1 (K_2 + 2K_4) - \lambda^4)}{\psi} \\
& - \frac{K_3 (K_1 K_2 + \lambda^4) (\lambda \cosh(\lambda L) + K_4 \sinh(\lambda L))}{\psi} - \frac{K_3 \sin(\lambda L) (K_1 K_2 K_4 - 2\lambda^2 K_1 - \lambda^4 K_4)}{\psi} \\
& - \frac{K_1 \cosh(\lambda L) \sin(\lambda L) (2\lambda^2 K_3 + K_2 (-K_3 K_4 + \lambda^4))}{\psi} \\
& - \frac{\lambda K_1 \sinh(\lambda L) \sin(\lambda L) (K_3 K_4 + 2\lambda^2 K_2 K_4 - \lambda^4)}{\psi} \\
& - \frac{\lambda K_1 \cosh(\lambda L) \cos(\lambda L) (-K_3 (2K_2 + K_4) + \lambda^4)}{\psi} \\
& - \frac{K_1 \sinh(\lambda L) \cos(\lambda L) (-K_2 K_3 K_4 + \lambda^4 (K_2 + 2K_4))}{\psi}
\end{aligned}$$

(۴۳-۶)

$$\begin{aligned}
c_4 = & \frac{K_1 K_2 (K_3 K_4 + \lambda^4) + K_3 \cos(\lambda L) (-K_1 K_2 K_4 + \lambda^4 (2K_2 + K_4))}{\psi} \\
& + \frac{K_3 (K_1 K_2 + \lambda^4) (K_4 \cosh(\lambda L) + \lambda \sinh(\lambda L))}{\psi} \\
& + \frac{K_1 \cosh(\lambda L) \cos(\lambda L) (-K_2 K_3 K_4 + \lambda^4 (K_2 + 2K_4))}{\psi} \\
& + \frac{\lambda K_1 \sinh(\lambda L) \cos(\lambda L) (-K_3 (2K_2 + K_4) + \lambda^4)}{\psi} + \frac{\lambda K_3 \sin(\lambda L) (K_1 K_2 + 2\lambda^2 K_2 K_4 - \lambda^4)}{\psi} \\
& + \frac{\lambda K_1 \cosh(\lambda L) \sin(\lambda L) (K_3 K_4 + 2\lambda^2 K_2 K_4 - \lambda^4)}{\psi} \\
& + \frac{K_1 \sinh(\lambda L) \sin(\lambda L) (-K_2 K_3 K_4 + 2\lambda^2 K_3 + \lambda^4 K_2)}{\psi}
\end{aligned}$$

(۴۴-۶)

ψ در روابط (۴۱-۶) تا (۴۴-۶) به صورت رابط (۴۵-۶) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\psi = & 2\lambda^3 K_1^2 (K_1 K_2 + \lambda^4) \left( \begin{array}{c} (K_1 K_2 + \lambda^4)(K_3 K_4 + \lambda^4) \\ + \cosh(\lambda L) ((-K_1 K_2 K_3 K_4 + (K_1 K_2 + 2K_2 K_3 + 2K_1 K_4 + K_3 K_4) \lambda^4 + \lambda^8) \cos(\lambda L)) \\ + \lambda \sin(\lambda L) \cosh(\lambda L) \left( \begin{array}{c} K_1 K_3 (K_2 + K_4) + \lambda^2 K_2 K_4 (K_1 + K_3) \\ - \lambda^4 (K_1 + K_3) - \lambda^6 (K_2 + K_4) \end{array} \right) \\ + \lambda \sinh(\lambda L) \left( \begin{array}{c} 2\lambda \sin(\lambda L) (K_1 K_3 - \lambda^4 K_2 K_4) \\ + \cos(\lambda L) (-K_1 K_3 (K_2 + K_4) + \lambda^2 K_2 K_4 (K_1 + K_3) + \lambda^4 (K_1 + K_3) - \lambda^6 (K_2 + K_4)) \end{array} \right) \end{array} \right) \\
& \quad (45-6)
\end{aligned}$$

بدین ترتیب، با قراردادن روابط (41-6) تا (45-6) در رابطه (23-6)، تابع پاسخ فرکانسی تغییر مکان تیر اویلر - برنولی با شرایط تکیه‌گاهی کلی، در هر نقطه دلخواهی مانند  $x$  و به ازای هر فرکانس حریکی مانند  $\omega$ ، حاصل خواهد شد. لازم به ذکر است، تابع پاسخ فرکانسی شتاب  $[a(x)]$ ، با ضرب  $\omega^2$ - در تابع پاسخ فرکانسی تغییر مکان قابل دستیابی است [39]. در ادامه، به توضیح مختصر حل ارتعاش اجباری به کمک روش اجزای محدود می‌پردازیم.

#### ۶-۴- حل به روش اجزای محدود

در فصل‌های پیشین، حل ارتعاش آزاد به کمک روش اجزای محدود توضیح داده شد. همان‌طور که پیش‌تر بیان شد، در این فصل، حل ارتعاش اجباری مدنظر است. در این راستا، بردار  $\{\mathbf{Q}\}$  در رابطه (3-19) را نمی‌توان صفر پنداشت. لذا، بردار  $\{\mathbf{Q}\}$  بر اساس رابطه (3-17)، به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\{\mathbf{Q}\} = \int_0^L \left[ \mathbf{N}_{\text{Trg}}(x) \right]^T dx \quad (46-6)$$

بردار  $\{\mathbf{Q}\}$  چهار درایه دارد که می‌توان آنها را به فرم کلی روابط (6-51) الی (6-47) نامگذاری و تعریف کرد:

$$\{\mathbf{Q}\} = [Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4] \quad (47-6)$$

$$Q_1 = \frac{(\cosh(\lambda L) - 1) \sin(\lambda L) + (\cos(\lambda L) - 1) \sinh(\lambda L)}{\lambda (\cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) - 1)} \quad (48-6)$$

$$Q_2 = \frac{\cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L) + \sin(\lambda L) \sinh(\lambda L)}{\lambda^2 (\cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) - 1)} \quad (49-6)$$

$$Q_3 = \frac{(\cosh(\lambda L) - 1) \sin(\lambda L) + (\cos(\lambda L) - 1) \sinh(\lambda L)}{\lambda (\cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) - 1)} \quad (50-6)$$

$$Q_4 = \frac{\cos(\lambda L) - \cosh(\lambda L) + \sin(\lambda L) \sinh(\lambda L)}{\lambda^2 (\cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) - 1)} \quad (51-6)$$

در بخش بعد، نتایج حاصل از هر سه روش مذکور که چیزی نیستند جزء تابع پاسخ فرکانسی تیر با شرایط تکیه‌گاهی کلی، در قالب شکل‌هایی ارائه می‌شود.

## ۶-۵- نتایج و بحث

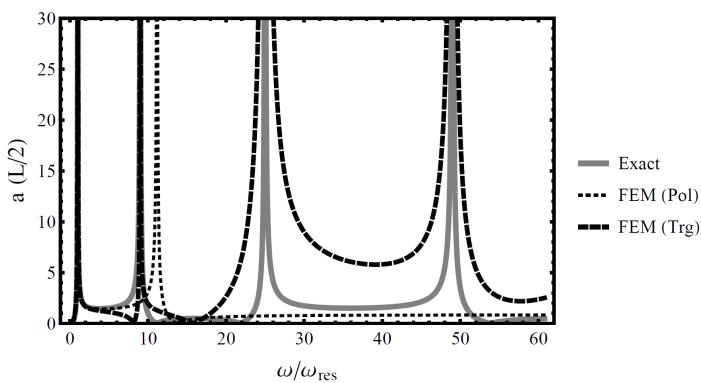
پس از دستیابی به توابع پاسخ فرکانسی به سه صورت دقیق، اجزای محدود کلاسیک و اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی، نوبت به استخراج نتایج می‌رسد. شایان توجه است، در تمامی شکل‌های ۱۳-۶ الی ۲۷-۶، اعداد درج شده در محور افقی نمودارها بی‌بعد بوده و با تقسیم کردن فرکانسی تحریک، به نخستین فرکانسی تشدید متقارن تیر یا همان  $\omega_{res}$ ، به دست آمداند:

$$\omega_{res} = \mu_1 \quad (52-6)$$

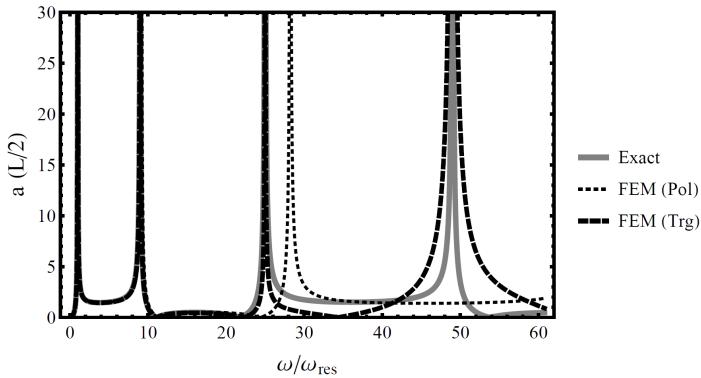
که  $\mu_1$ ، بیانگر اولین پارامتر فرکانسی مربوط به تیر مورد بررسی است، که با توجه به شرایط تکیه‌گاهی مدنظر، از جدول ۲-۲ استخراج می‌شود. محور قائم شکل‌های ۱۳-۶ الی ۲۷-۶، نشان‌دهنده تابع پاسخ فرکانسی شتاب هستند. لازم به ذکر است، نقطه مورد بررسی در شکل‌های ۱۳-۶ تا ۲۴-۶، نقطه وسط تیر ( $x=L/2$ ) و در شکل‌های ۲۵-۶ تا ۲۷-۶، نقطه انتهایی تیر ( $x=L$ ) می‌باشد. از سوی دیگر، شکل‌های ۱۳-۶ تا ۱۵-۶ مربوط به تیر تحت شرایط تکیه‌گاهی مفصل - مفصل می‌باشد. همچنین شکل‌های ۱۶-۶ تا ۱۸-۶ و ۱۹-۶ تا ۲۱-۶، به ترتیب، مربوط به تیر تحت شرایط تکیه‌گاهی گیردار - گیردار و مفصل - گیردار است. در نهایت، شکل‌های ۲۲-۶ تا ۲۷-۶ برای تیر تحت شرایط تکیه‌گاهی گیردار - آزاد رسم شده‌اند. خاطر نشان می‌سازد، برای هر مدل از شرایط تکیه‌گاهی، حداقل سه شکل

رسم شده است که تفاوت آن‌ها، در تعداد المان درنظر گرفته شده در هر دو روش اجزای محدود است. در این راستا، تعداد المان‌ها (NE)، برابر با ۲، ۴ و ۸ درنظر گرفته شد. بدین ترتیب، تأثیر تعداد المان در پاسخ‌های به‌دست‌آمده از روش اجزای محدود کلاسیک و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی نیز مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

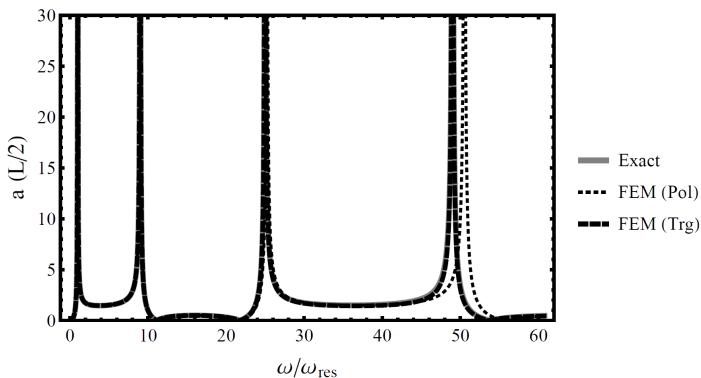
با مشاهده تمامی شکل‌های ۱۳-۶ تا ۲۷-۶، نقطه مشترکی در آن‌ها دیده می‌شود و آن، وجود شاخه‌هایی از منحنی است که به سمت بینهایت می‌کند و دارای مجانب قائم است؛ که دلیل این امر، اثر تشدید می‌باشد. این پدیده، بایستی در تیر با شرایط تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، هنگامی که نسبت  $\omega/\omega_{\text{res}}$  مساوی با اعداد صحیح ۱، ۹، ۲۵، ۴۹ و ... است، به وضوح دیده شود [۳۹]. در سایر شرایط تکیه‌گاهی، اثر تشدید هنگامی که نسبت  $\omega/\omega_{\text{res}}$  اعداد غیر صحیح باشد، اتفاق می‌افتد (به جزء ۱).



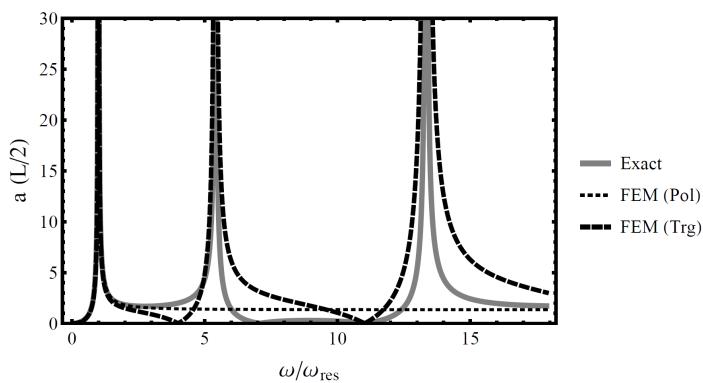
شکل ۱۳-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 2$ )



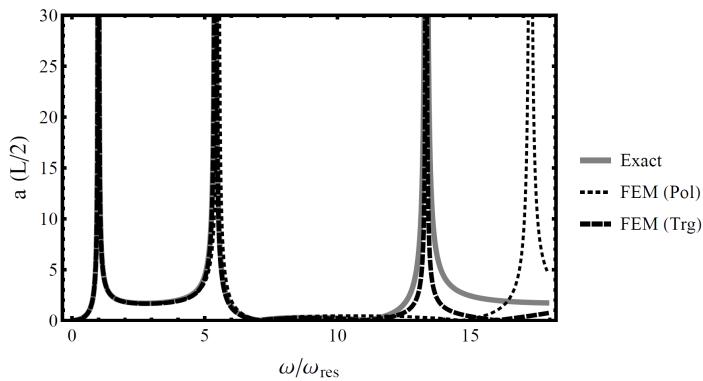
شکل ۱۴-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 4$ )



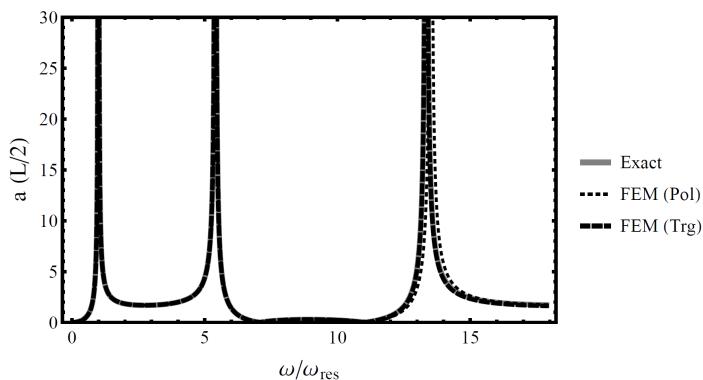
شکل ۱۵-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 8$ )



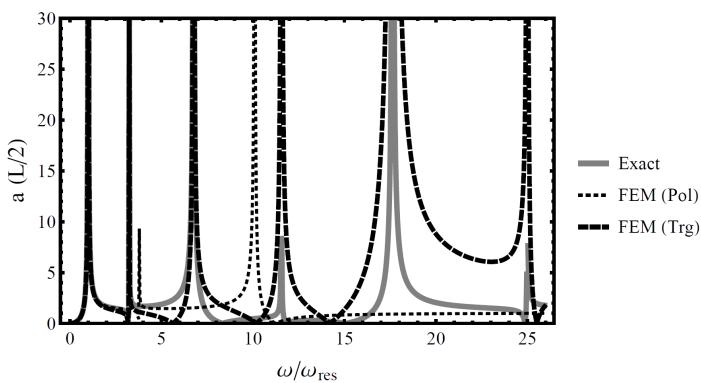
شکل ۱۶-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - گیردار ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 2$ )



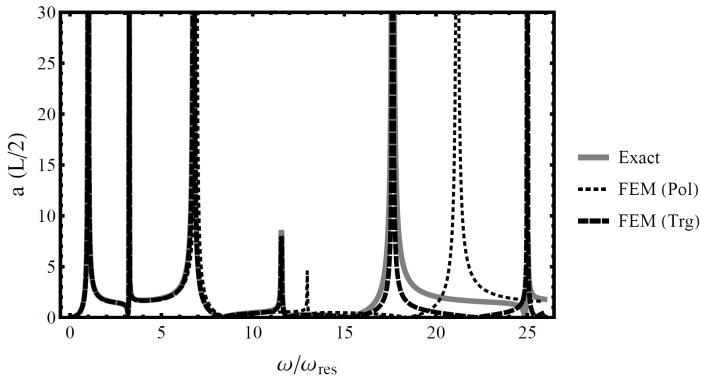
شکل ۱۷-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - گیردار ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 4$ )



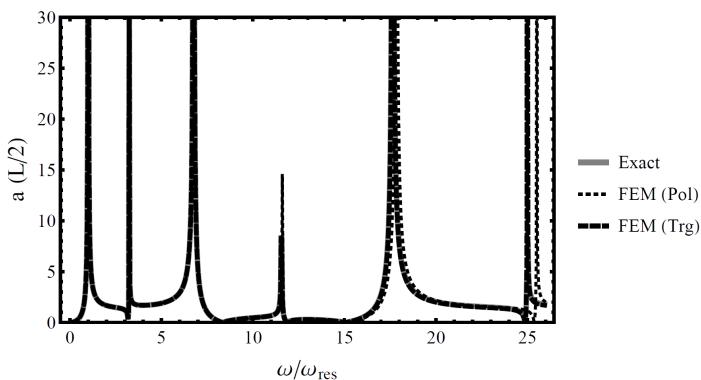
شکل ۱۸-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - گیردار ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 8$ )



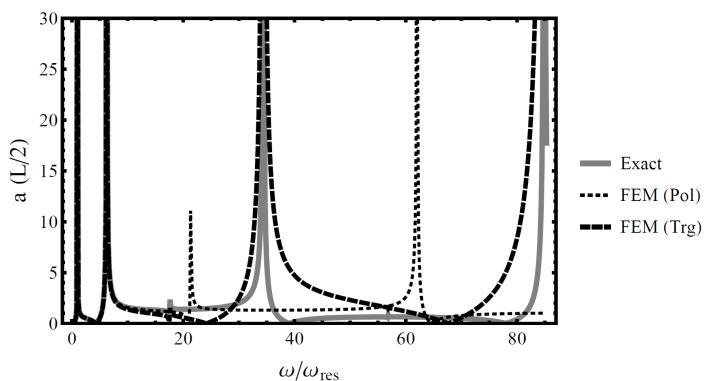
شکل ۱۹-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل - گیردار ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 2$ )



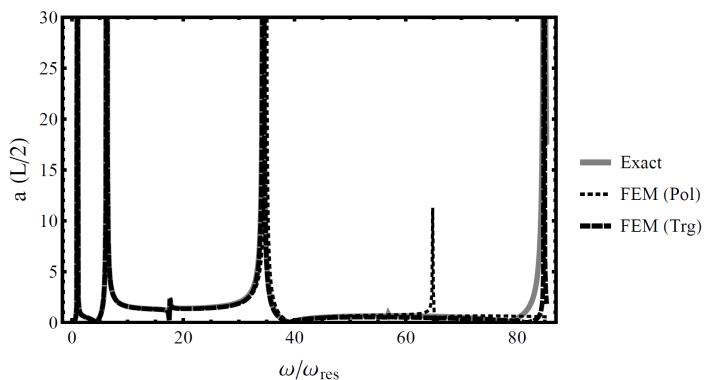
شکل ۲۰-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل - گیردار ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 4$ )



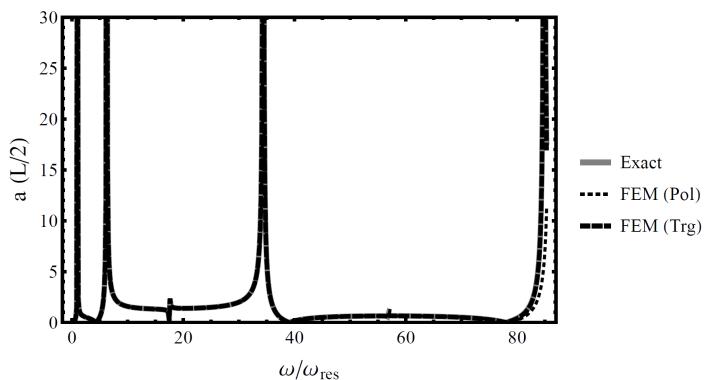
شکل ۲۱-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر مفصل - گیردار ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 8$ )



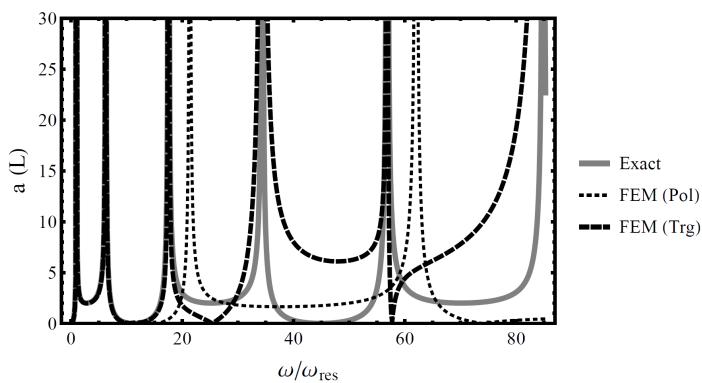
شکل ۲۲-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - آزاد ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 2$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 2$ )



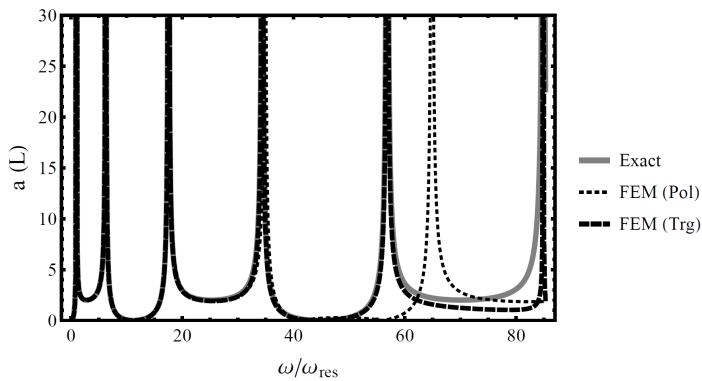
شکل ۲۳-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - آزاد ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 4$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 4$ )



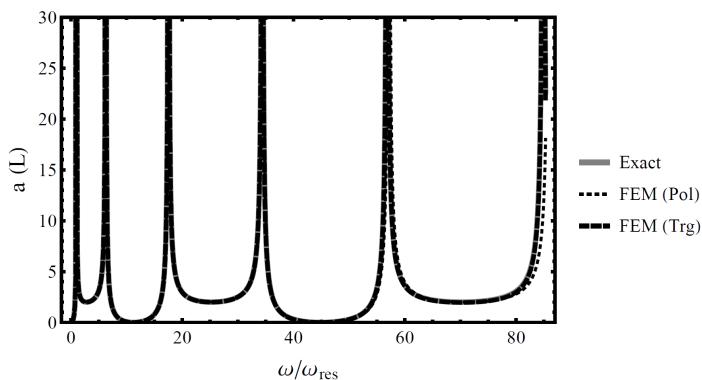
شکل ۲۴-۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه میانی تیر گیردار - آزاد ( $x = L/2$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE = 8$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE = 8$ )



شکل ۲۵ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه انتهایی تیر گیردار - آزاد ( $x=L$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE=2$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE=2$ )



شکل ۲۶ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه انتهایی تیر گیردار - آزاد ( $x=L$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE=4$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE=4$ )



شکل ۲۷ تابع پاسخ فرکانسی شتاب نقطه انتهایی تیر گیردار - آزاد ( $x=L$ )، به روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک ( $NE=8$ ) و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی ( $NE=8$ )

## ۶- جمع‌بندی

در این فصل، تحلیل ارتعاش اجباری تیر اویلر - برنولی با شرایط تکیه‌گاهی کلی و با استفاده از روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی، در حوزه فرکانس مورد بررسی قرار گرفت. برای این منظور، نخست، حل به روش دقیق به صورت کامل ارائه گردید. پس از آن، اصول روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی مطرح شده و روابط آن مفصلأً بیان گردید. در پایان، نمودارهای تابع پاسخ فرکانسی برای هر سه راهکار (روش دقیق، روش اجزای محدود کلاسیک و روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی) و همچنین با توجه به چهار حالت تکیه‌گاهی مفصل - مفصل، گیردار - گیردار، گیردار - آزاد و مفصل - گیردار ارائه گردید. خاطر نشان می‌گردد، نمودارهای مذکور با تقسیم تیر به دو، چهار و هشت إلمان و برای  $\omega/\omega_{\text{res}}$  حداکثر برابر با ۸۵ و در یک نقطه از تیر رسم شدند. مشاهده گردید، روش پیشنهادی با دقت بالا، بر روش دقیق منطبق بوده و این پدیده، حتی در مودهای بالا هم به خوبی صورت پذیرفته بود؛ و این در حالیست که، اثربودهای بالا توسط روش اجزای محدود کلاسیک به خوبی تخمین زده نشده بود. علاوه بر آن، مشاهده شد، افزایش تعداد إلمان، منجر به نزدیکشدن حل اجزای محدود کلاسیک به حل دقیق می‌گردد.

## فصل هفتم

روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام

## ۱-۷ مقدمه

در فصل‌های قبل، روش تبدیل دیفرانسیلی به عنوان روش راستی‌آزمای نتایج حاصل بکار رفت. همچنین، مشاهده شد که روش مذکور، روشی قابل اعتماد بوده و نتایج حاصل از بکارگیری آن، در برخی موارد، حتی با نتایج حاصل از حل دقیق نیز برابری دارد (فصل دوم). اما باید گفت که این روش نیز ایراداتی دارد که از آن جمله می‌توان به عدم همگرایی پاسخ‌ها زمانی که دامنه متغیر مستقل مسئله بزرگ است، اشاره کرد [۴۲]. این امر بیشتر در مسائل وابسته به زمان اتفاق می‌افتد که یافتن پاسخ‌ها در محدوده وسیعی از زمان مدنظر است. برای رفع این مشکل، پژوهشگران پیشنهاداتی آماده کردند که در این فصل با یکی از آن‌ها آشنا خواهیم شد.

در این فصل به معروفی روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام پرداخته می‌شود. برای این منظور، نخست، مبانی روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام به طور کامل توضیح داده شده و سپس، با استفاده از این روش، معادله دیفرانسیل غیرخطی دافینگ حل می‌شود. در ادامه، ناکارآمدی روش تبدیل دیفرانسیلی معمولی در حل معادله دافینگ به صراحت نشان داده شده و پس از آن، معادله مزبور به روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام حل می‌شود. سپس، به بررسی تأثیر پارامترهای معادله دافینگ، در نتایج بهدست آمده پرداخته می‌شود. ناگفته نماند، در این فصل، برای صحتسنجی کلیه پاسخ‌های بهدست آمده، از روش تفاضلات محدود استفاده شده است. در پایان نیز به عنوان نمونه، یکی از کاربردهای معادله دافینگ که آونگ در حال نوسان است، انتخاب گردیده، معادله حاکم بر آن استخراج شده و سپس به روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام و همچنین تفاضلات محدود حل می‌گردد. شایان توجه است در ارائه نتایج عددی، از سه نوع نمودار برای مقایسه پاسخ‌ها استفاده شده که عبارتند از (۱) منحنی تاریخچه زمانی (۲) نمودار فازی دو بعدی<sup>۱</sup> و (۳) منحنی فازی سه بعدی<sup>۲</sup>.

<sup>1</sup> Phase plot in plane

<sup>2</sup> Phase plot in space

## ۷-۲- تاریخچه

روش تبدیل دیفرانسیلی در فصل دوم مورد بحث قرار گرفت. یادآور می‌گردد، این روش مبتنی بر سری تیلور است که پاسخ معادله دیفرانسیل، را به صورت یک عبارت چندجمله‌ای با ضرایب مجهول فرض می‌کند. با جایگذاری این سری در معادله دیفرانسیل، یک رابطه کلی به نام رابطه بازگشتی پیدا خواهد شد که ضرایب مذکور را تحت الگوی مشخص و واحد، محاسبه خواهد کرد. بعد از معرفی این روش توسط ژو در سال ۱۹۸۶ [۱۰]، بسیاری از محققین این روش را در زمینه‌های گوناگون کاربردی مهندسی مورد استفاده قرار دادند که در فصل‌های پیشین به آن‌ها اشاره شد. از طرف دیگر، برخی از پژوهشگران به توسعه نظری این روش پرداختند. آیاز در مطالعه‌ای، اصول اولیه روش تبدیل دیفرانسیلی سه‌بعدی<sup>۱</sup> را تعریف کرد و در ادامه به کاربرد آن در حل دستگاه‌های معادلات خطی و غیرخطی با مشتقات جزئی پرداخت [۴۳]. آریکوگلو و اُزکول به استفاده از این روش در حل معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی<sup>۲</sup> پرداختند [۴۴]. عبدالحليم حسن نیز به حل دستگاه معادلات دیفرانسیلی با استفاده از این روش پرداخت [۴۵]. در مطالعه‌ای دیگر، شیه چنگ و لینگ چنگ راه کار نوینی برای حل معادلات غیرخطی به کمک روش تبدیل دیفرانسیلی ارائه نمودند [۴۶]. آن‌ها این ایده را به معادلات دیفرانسیل با دو متغیر مستقل نیز تعمیم دادند [۴۷].

اگرچه روش تبدیل دیفرانسیلی، روشی قدرتمند برای حل معادلات دیفرانسیل است؛ اما متأسفانه ایراداتی هم دارد. به عنوان مثال، روش تبدیل دیفرانسیلی در مسائلی که دامنه متغیر مستقل مسئله کوچک است، همگرا می‌گردد. اما با افزایش اندازه دامنه متغیر مستقل، سرعت همگرایی کم و کمتر می‌گردد. البته شایان ذکر است که این ایراد بیشتر در مسائل نوسانی اتفاق می‌افتد. شاید بتوان دلیل این امر را، نامتناوب بودن پاسخ فرض شده توسط روش تبدیل دیفرانسیلی دانست. در این راستا و برای

<sup>1</sup> Three-dimensional differential transform method

<sup>2</sup> Integro-differential equations

حل مشکل مذکور، روش‌های متفاوتی از سوی پژوهشگران ارائه شده است. یکی از این روش‌ها، روش بهبوددهنده<sup>۱</sup> است که توسط عباد ارائه گردید [۴۲]. این روش به دو دستهٔ روش بهبوددهنده سینوس<sup>۲</sup> و روش بهبوددهنده کسینوس<sup>۳</sup> تقسیم می‌گردد. ایدهٔ دیگر برای حل مشکل مذکور، تقسیم دامنهٔ متغیر مستقل مسأله به چند زیردامنه و بکار بستن روش تبدیل دیفرانسیلی در هر یک از زیردامنه‌ها می‌باشد [۴۸-۵۵]. **أدیبات** و همکاران برای اولین بار نام «روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام» را بر این روش نهادند. آن‌ها علاوه بر فرمول‌بندی روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام، به حل دستگاه‌های معادلات لوتکا – ولترا<sup>۴</sup>، چن<sup>۵</sup> و لورنژ<sup>۶</sup> پرداختند [۵۵]. بعد از آن، گوکدوگان و همکاران روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام پویا<sup>۷</sup> را معرفی کردند که در آن تقسیم زیردامنه در فواصل مشخص صورت نپذیرفته و با بررسی کل دامنه اولیه، هر آن‌جا که اعمال تقسیم الزامی باشد، این عمل صورت می‌پذیرد [۵۶]. یادآور می‌گردد، برویلپر در مقاله‌ای ارزشمند، به بررسی کامل تاریخچه روش تبدیل دیفرانسیلی تا سال ۲۰۱۲ پرداخته است [۱۱].

از سوی دیگر، معادله دافینگ یکی از معادلات معروف برای توصیف سیستم‌های غیرخطی مکانیکی است. در اهمیت معادله دافینگ همین بس که به گزارش إلزویر اسکوپوس، عبارت «دافینگ» بالغ بر ۲۷۰۰ بار در بین سال‌های ۱۹۶۰ تا ۲۰۰۹ در عنوان، چکیده و یا کلیدوازگان مقالاتی در زمینه‌های مختلف، اعم از مهندسی مکانیک، فیزیک، ریاضیات، مهندسی شیمی و ...، تکرار شده است [۵۷]. از کاربردهای عملی سیستم‌هایی که رفتار دینامیکی آن‌ها با استفاده از معادله دافینگ توضیح داده می‌شود، می‌توان به ارتعاشات کابل غیرخطی، خیز زیاد در تیر با سخت‌شوندگی

<sup>۱</sup> Aftertreatment technique

<sup>۲</sup> Sine aftertreatment technique

<sup>۳</sup> Cosine aftertreatment technique

<sup>۴</sup> Lotka-Volterra system

<sup>۵</sup> Chen system

<sup>۶</sup> Lorenz system

<sup>۷</sup> Adaptive multi-step differential transform method

غیرخطی، سخت‌شوندگی غیرخطی<sup>۱</sup>، آونگ، جداکننده لرزه‌ای غیرخطی<sup>۲</sup>، مدار الکتریکی غیرخطی<sup>۳</sup> و ... اشاره کرد [۵۷].

### ۳-۷- معادله دافینگ

صورت کلی معادله دیفرانسیل دافینگ با درنظر گرفتن میرایی و سختی خطی و غیرخطی، به

صورت زیر است [۵۷]:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \mu \left( \frac{dy(t)}{dt} \right)^3 + 2\zeta \frac{dy(t)}{dt} + \gamma y^3(t) + \alpha y(t) = 0 \quad (1-7)$$

که در آن،  $y(t)$  تابع مجهول،  $\mu$  و  $\zeta$  به ترتیب، ضریب میرایی غیرخطی و نسبت میرایی خطی،  $\gamma$  و  $\alpha$  به ترتیب، ضریب سختی غیرخطی و ضریب سختی خطی هستند. لازم به ذکر است که در این فصل، شرایط اولیه برای معادله (۱-۷) به صورت بیان شده در روابط (۲-۷) و (۳-۷) درنظر گرفته می‌شوند:

$$y(0) = 0 \quad (2-7)$$

$$\left. \frac{dy(t)}{dt} \right|_{t=0} = 1 \quad (3-7)$$

در ادامه، حل معادله (۱-۷) با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی ارائه خواهد شد. لازم به ذکر است، از روش تفاضلات محدود برای صحتسنجی پاسخ‌های به دست آمده استفاده خواهد شد.

### ۴-۷- اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی بر معادله دافینگ

در فصل دوم، مبانی روش تبدیل دیفرانسیلی توضیح داده شد. حال می‌خواهیم معادله (۱-۷) را به روش مذکور حل نماییم. با استفاده از قوانین بیان شده در جدول ۲-۱، رابطه بازگشتی حاصل از اعمال

<sup>1</sup> Nonlinear stiffness

<sup>2</sup> Nonlinear isolator

<sup>3</sup> Nonlinear electrical circuit

روش تبدیل دیفرانسیلی به معادله (۱-۷)، به صورت رابطه (۴-۷) درمی‌آید:

$$Y[k+2] = \frac{-1}{(k+1)(k+2)} \left( \begin{array}{l} 2\zeta(k+1)Y[k+1] + \alpha Y[k] \\ + \mu \left( \sum_{l_2=0}^k \sum_{l_1=0}^{l_2} (l_1+1)(l_2-l_1+1)(k-l_2+1) Y[l_1+1] Y[l_2-l_1+1] Y[k-l_2+1] \right) \\ + \gamma \left( \sum_{l_4=0}^k \sum_{l_3=0}^{l_4} Y[l_3] Y[l_4-l_3] Y[k-l_4] \right) \end{array} \right) \quad (4-7)$$

که در آن،  $N$  و  $k = 0, 1, 2, \dots$  باشد. همچنین با اعمال روش مذکور به شرایط اولیه، روابط (۲-۷) و (۳-۷)، داریم:

$$Y[0] = 0 \quad (5-7)$$

$$Y[1] = 1 \quad (6-7)$$

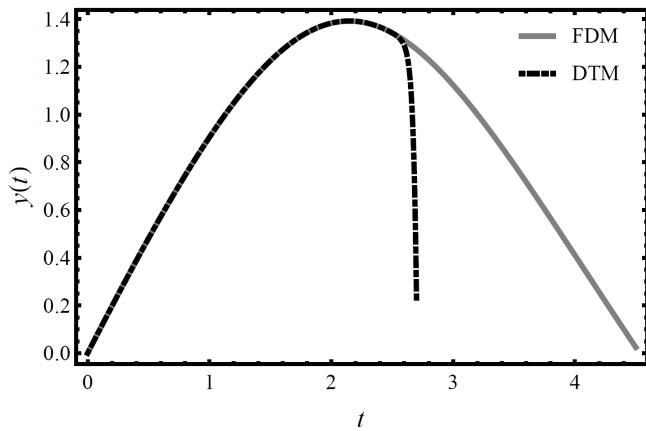
پس از یافتن مقادیر  $[k]$  به کمک رابطه بازگشتی (۴-۷)، پاسخ معادله دافینگ به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$y(t) = \sum_k^N Y[k] (t - t_0)^k \quad (7-7)$$

با اختصاص  $\mu = 0.04$ ،  $\zeta = 0.2$ ،  $\alpha = 0.2$  و  $\gamma = 0.04$ ،  $t_0 = 0$  و  $N = 100$ ، تابع پاسخی معادله دافینگ در شکل ۱-۷ نمایش داده شده است. در شکل ۱-۷، مشاهده می‌گردد که حل به روش تبدیل دیفرانسیلی برای  $t \geq 2.65$  واگرا شده و از حل به روش تفاضلات محدود فاصله می‌گیرد. لازم به ذکر است  $\Delta t$  در روش تفاضلات محدود برابر با  $0.001$  درنظر گرفته شده است. ناگفته نماند، از آنجا که روش تفاضلات محدود بسیار شناخته شده است، از توضیح و تشریح آن در این بخش می‌پرهیزیم. دلیل واگرایی پاسخ به دست آمده به روش تبدیل دیفرانسیلی که با افزایش تعداد جملات سری نیز از بین نمی‌رود را می‌توان این‌گونه بیان نمود:

روش تبدیل دیفرانسیلی زمانی می‌تواند پاسخ‌های مناسبی ارائه دهد که مقادیر متغیر مستقل مسئله، از نقطه‌ای که سری حول آن نوشته می‌شود (یعنی  $t_0$ )، فاصله کمی داشته باشند. به بیان

دیگر، با فاصله‌گرفتن مقادیر متغیر مستقل مسأله از نقطه  $t_0$  (که سری حول آن بسط داده می‌شود)، سرعت همگرایی کم می‌شود و یا حتی همانند شکل ۱-۷، حل ارائه شده به شدت واگرا می‌گردد. برای این منظور، لازم است تا در فرآیند حل، نقطه  $t_0$  یا همان نقطه‌ای که سری حول آن بسط داده می‌شود، به تناوب تغییر کند و جلو برود. این امر، ایده اساسی روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام است [۵۵]. در بخش بعدی، نخست، به اختصار روش مذکور توضیح داده خواهد شد و بعد از آن، معادله دافینگ با روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام حل خواهد شد.



شکل ۱-۷ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی با توجه به  $\mu = 0.04$ ،  $\gamma = 0.04$ ،  $\alpha = 0.2$  و  $\gamma = 0.2$

## ۷-۵- روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام

در این روش، دامنه متغیر مستقل مسأله به  $M$  زیردامنه تقسیم شده و سپس، روش تبدیل دیفرانسیلی بر هر زیردامنه اعمال می‌گردد. شرایط اولیه برای اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی به زیردامنه  $z$  به کمک تابع محاسبه شده در زیردامنه  $-z$  به دست می‌آید. بدیهی است که شرایط اولیه مورد نیاز برای اولین زیردامنه، از صورت مسأله برداشت می‌شود. رابطه‌سازی روش مذکور بر اساس مرجع [۵۵] در ادامه شرح داده خواهد شد.

معادله دیفرانسیل به فرم کلی رابطه (۸-۷) مدنظر است:

$$f(t, u(t), u'(t), u''(t), u'''(t), \dots, u^{(p)}(t)) = 0 \quad t \in [t_b, t_e] \quad (8-7)$$

که در آن  $p$  عددی طبیعی و بالاترین مرتبه مشتق موجود در معادله است. هدف از حل معادله (8-7)، یافتن تابع مجهول  $u(t)$  است. متغیر مستقل معادله (8-7)،  $t$  است که  $t \in [t_b, t_e]$ . لازم به ذکر است که  $t_b$  و  $t_e$  به ترتیب نقطه آغازین و نقطه انتهایی دامنه متغیر مستقل هستند. شرایط اولیه برای معادله (8-7) به فرم کلی زیر تعریف می‌گردد:

$$u^{(r)}(t_b) = W_r \quad r = 0, 1, 2, \dots, p-1 \quad (9-7)$$

که در آن  $W_r$  اعداد حقیقی هستند. اگر بخواهیم  $u(t)$  را بر اساس روش تبدیل دیفرانسیلی به دست آوریم، بایستی از رابطه‌ای مشابه (7-7) استفاده کنیم. ولی برای استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام، نخست فرض کنید که دامنه  $[t_b, t_e]$  به  $M$  زیردامنه مساوی با طول  $h$  تقسیم گردد:

$$h = \frac{t_e - t_b}{M} \quad (10-7)$$

تابع  $u_j(t)$  که در حقیقت، تابع  $u(t)$  در زیردامنه  $j$  است، به کمک رابطه (11-7) تعریف می‌شود:

$$u_j(t) = \sum_{i=0}^N U_j[i] (t - t_j)^i \quad t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (11-7)$$

که در آن  $j = 1, 2, 3, \dots, M$ . لازم به ذکر است، در رابطه (11-7)،  $U_j[i]$  تابع تبدیل یافته در زیردامنه  $j$  است.  $U_j[i]$  با قراردادن مقادیر  $i$  در رابطه بازگشتی به دست خواهد آمد. شایان ذکر است که رابطه بازگشتی برای تمامی زیردامنهای یکسان است؛ اما با توجه به متفاوت بودن شرایط اولیه در ابتدای هر زیردامنه، مقادیر متفاوتی برای  $U_j[i]$  در هر زیردامنه به دست می‌آید. پس از اعمال روش مذکور بر هر زیردامنه،  $u(t)$  به صورت رابطه (12-7) نوشته می‌شود:

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) = \sum_{i=0}^N U_1[i] (t - t_b)^i & t \in [t_b, t_2] \\ u_2(t) = \sum_{i=0}^N U_2[i] (t - t_2)^i & t \in [t_2, t_3] \\ u_3(t) = \sum_{i=0}^N U_3[i] (t - t_3)^i & t \in [t_3, t_4] \\ \vdots & \vdots \\ u_{M-1}(t) = \sum_{i=0}^N U_{M-1}[i] (t - t_{M-1})^i & t \in [t_{M-1}, t_M] \\ u_M(t) = \sum_{i=0}^N U_M[i] (t - t_M)^i & t \in [t_M, t_e] \end{cases} \quad (12-7)$$

که در آن  $t_b = t_1$  و  $t_e = t_{M+1}$ . شرایط اولیه نیز به صورت رابطه (13-7) در می‌آید:

$$u_j^{(r)}(t = t_j) = \begin{cases} u_1^{(r)}(t = t_b) = U[r] \\ u_2^{(r)}(t = t_2) = u_1^{(r)}(t_2) \\ u_3^{(r)}(t = t_3) = u_2^{(r)}(t_3) \\ \vdots \\ u_{M-1}^{(r)}(t = t_{M-1}) = u_{M-2}^{(r)}(t_{M-1}) \\ u_M^{(r)}(t = t_M) = u_{M-1}^{(r)}(t_M) \end{cases} \quad (13-7)$$

که در آن  $r = 0, 1, 2, \dots, M-1$ . بدیهی است، با فرض  $M=1$ ، روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام، بر روش تبدیل دیفرانسیلی منطبق می‌گردد.

## ۷-۶- اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام بر معادله دافینگ

در ادامه، معادله دافینگ بیان شده در رابطه (1-7) را این‌بار، به کمک روش تبدیل دیفرانسیلی

گام به گام حل خواهیم کرد. با فرض  $M=50$  و  $t \in [0, 70]$  برابر است با:

$$h = \frac{70-0}{50} = 1.4 \quad (14-7)$$

رابطه بازگشتی در این روش، به فرم رابطه (15-7) است:

$$\begin{aligned}
Y_j[i+2] = & \frac{-1}{(i+1)(i+2)} \left( \begin{array}{l} 2\zeta(i+1) Y_j[i+1] + \alpha Y_j[i] \\ + \mu \left( \sum_{l_2=0}^i \sum_{l_1=0}^{l_2} \left( \begin{array}{l} (l_1+1)(l_2-l_1+1)(i-l_2+1) \\ Y_j[l_1+1] Y_j[l_2-l_1+1] Y_j[i-l_2+1] \end{array} \right) \right) \\ + \gamma \left( \sum_{l_4=0}^i \sum_{l_3=0}^{l_4} Y_j[l_3] Y_j[l_4-l_3] Y_j[i-l_4] \right) \end{array} \right) \\
& \quad (15-7)
\end{aligned}$$

که در آن  $M = i, 0, 1, 2, \dots, N$  و  $j = 1, 2, 3, \dots, N$  همچنین شرایط اولیه به صورت زیر فرض می‌شود که

عبارتند از، تغییر مکان اولیه صفر و سرعت اولیه واحد:

$$Y_1[0] = 0 \quad (16-7)$$

$$Y_1[1] = 1 \quad (17-7)$$

برای بهدست آوردن تابع پاسخ در هر زیردامنه، از رابطه (11-7) استفاده می‌شود. شایان توجه است

که شرایط اولیه به صورت کلی زیر تعریف می‌گردند:

$$Y_j[0] = y_{j-1}(t) \Big|_{t=t_j} \quad (18-7)$$

$$Y_j[1] = \frac{dy_{j-1}(t)}{dt} \Big|_{t=t_j} \quad (19-7)$$

با توجه به آن‌چه بیان شد، اگر  $N = 8$  و  $\mu = 0.04$ ،  $\zeta = 0.04$  و  $\gamma = 0.2$  با

فرض شوند، تابع پاسخ برای معادله دافینگ به صورت رابطه (20-7) درمی‌آید. پاسخ ارائه شده در

رابطه (20-7)، در شکل ۲-۷ رسم شده و با حل به روش تفاضلات محدود مقایسه گردیده است. در

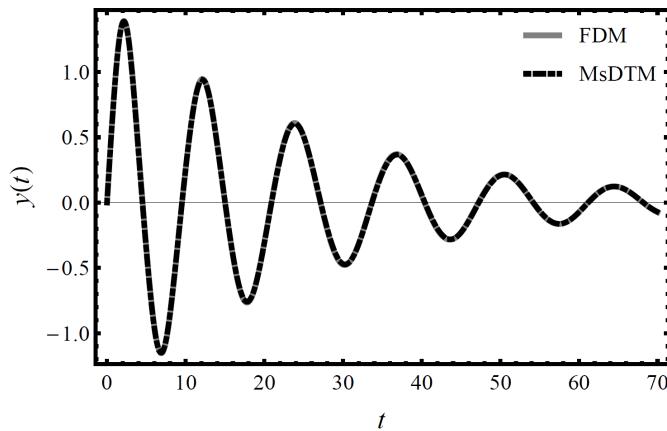
شکل ۲-۷، محور افقی و قائم به ترتیب، نمایان گر زمان و مقادیر تابع یا  $y(t)$  هستند. آشکار است که

پاسخ بهدست آمده توسط هر دو روش بر یکدیگر کاملاً منطبق هستند. یادآوری می‌کند که از روش

تفاضلات محدود برای صحتسنجی روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام استفاده شده و در این راستا،

$\Delta t$  در روش تفاضلات محدود برابر با  $1/000$  درنظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= t - 6 \times 10^{-2}t^2 - 2.93 \times 10^{-2}t^3 + 2.32 \times 10^{-4}t^4 - 9.92 \times 10^{-3}t^5 + 1.5 \times 10^{-3}t^6 \\
&\quad + 3.45 \times 10^{-4}t^7 - 8.85 \times 10^{-5}t^8 \quad t \in [0, 1.4] \\
y_2(t) &= 1.17 + 5.53 \times 10^{-1}(t-1.4) - 3.03 \times 10^{-1}(t-1.4)^2 - 8.26 \times 10^{-2}(t-1.4)^3 \\
&\quad + 8.28 \times 10^{-3}(t-1.4)^4 + 1.36 \times 10^{-2}(t-1.4)^5 + 1.62 \times 10^{-3}(t-1.4)^6 \\
&\quad - 1.49 \times 10^{-3}(t-1.4)^7 - 4.55 \times 10^{-4}(t-1.4)^8 \quad t \in [1.4, 2.8] \\
&\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
y_{49}(t) &= 4.82 \times 10^{-2} - 4.65 \times 10^{-2}(t-67.2) - 2.96 \times 10^{-3}(t-67.2)^2 \\
&\quad + 1.64 \times 10^{-3}(t-67.2)^3 + 1.16 \times 10^{-5}(t-67.2)^4 - 1.61 \times 10^{-5}(t-67.2)^5 \\
&\quad + 4.08 \times 10^{-7}(t-67.2)^6 + 3.57 \times 10^{-8}(t-67.2)^7 \\
&\quad - 9.14 \times 10^{-9}(t-67.2)^8 \quad t \in [67.2, 68.6] \\
y_{50}(t) &= -1.83 \times 10^{-2} - 4.54 \times 10^{-2}(t-68.6) + 3.65 \times 10^{-3}(t-68.6)^2 \\
&\quad + 1.42 \times 10^{-3}(t-68.6)^3 - 8.74 \times 10^{-5}(t-68.6)^4 - 1.2 \times 10^{-5}(t-68.6)^5 \\
&\quad + 5.53 \times 10^{-7}(t-68.6)^6 + 2.19 \times 10^{-8}(t-68.6)^7 \\
&\quad + 5.02 \times 10^{-9}(t-68.6)^8 \quad t \in [68.6, 70] \\
\end{aligned}
\tag{۷-۲}$$



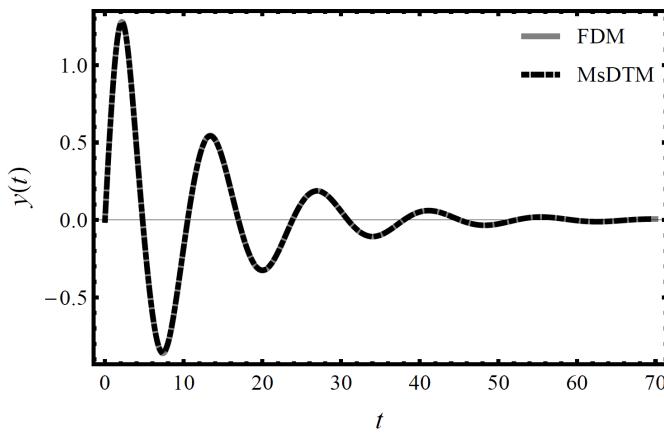
شکل ۷-۲ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام با توجه به  $\mu = 0.04$ ،

$$\alpha = 0.2, \gamma = 0.2, \zeta = 0.04$$

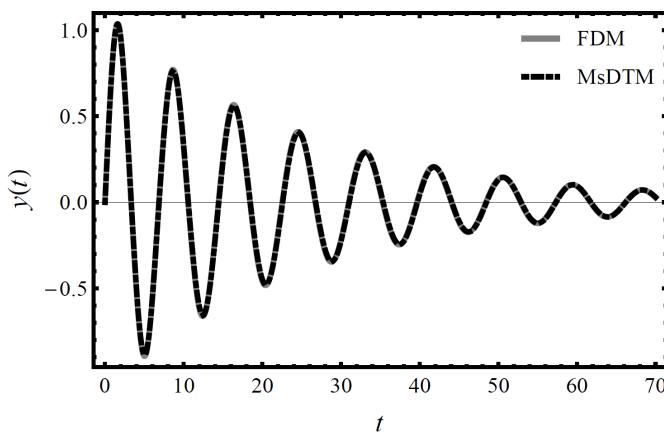
همچنین برای بهتر نشان دادن تأثیر ضرایب میرایی و سختی بر پاسخ معادله دافینگ، شکل های

۳-۷ و ۴-۷ با تغییر مقادیر ثوابت  $\mu$ ،  $\gamma$ ،  $\alpha$  و  $\zeta$  رسم شده اند. شکل ۳-۷ همانند شکل ۷-۲، با توجه

به  $N = 8$ ،  $M = 50$ ،  $t \in [0, 70]$ ،  $\alpha = 0.2$  و  $\gamma = 0.2$  رسم شده است؛ ولی مقادیر  $\mu$  و  $\zeta$  برابر با  $0.08$  درنظر گرفته شده است. شکل ۳-۷ نشان می‌دهد که با افزایش در مقادیر ضریب‌های میرابی، نوسان‌های تابع پاسخ کاهش می‌یابند. در شکل ۴-۷ نیز  $N = 8$ ،  $M = 50$ ،  $t \in [0, 70]$ ،  $\alpha = 0.04$  فرض شده‌اند؛ ولی ضرایب سختی غیرخطی و خطی، ( $\gamma$  و  $\alpha$ )، برابر با  $0.05$  هستند. شکل ۴-۷ نشان می‌دهد که با افزایش مقادیر ضرایب سختی، مقادیر حداقل و حداکثر پاسخ کاهش می‌یابند.

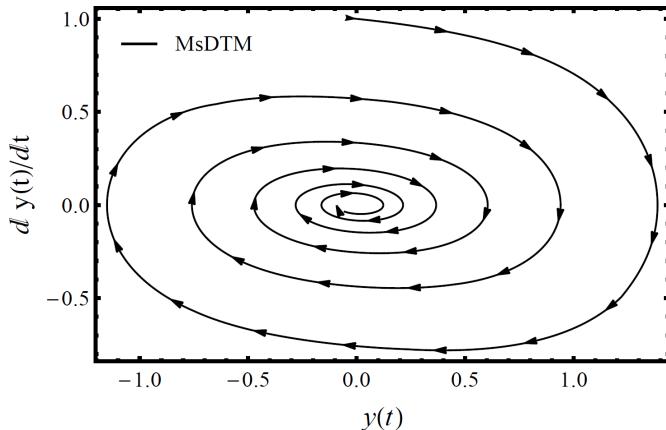


شکل ۳-۷ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام با توجه به  $\mu = 0.08$ ،  $\alpha = 0.2$  و  $\gamma = 0.2$ ،  $\zeta = 0.08$

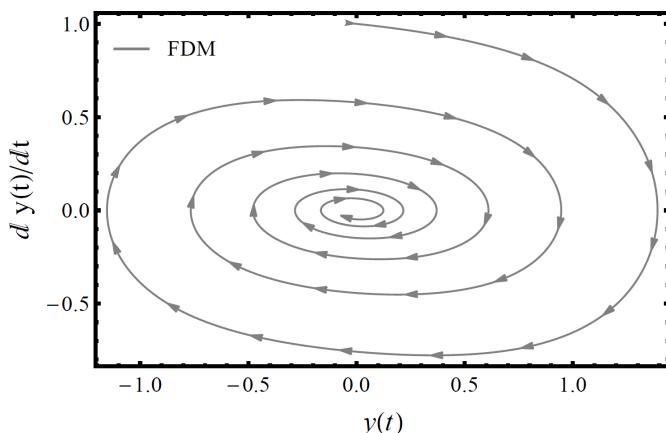


شکل ۴-۷ حل معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام با توجه به  $\mu = 0.04$ ،  $\alpha = 0.5$  و  $\gamma = 0.5$ ،  $\zeta = 0.04$

در شکل‌های ۵-۷ و ۶-۷ نمودارهای فازی که به ترتیب با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی گامبهگام و روش تفاضلات محدود به دست آمده‌اند، نمایش داده شده است. در این نمودارها، محور افقی و قائم به ترتیب نمایان‌گر  $y(t)$  یا همان مقدار تابع و  $dy(t)/dt$  یا همان مشتق تابع نسبت به زمان هستند. متذکر می‌شود که شکل ۵-۷، با فرض  $t \in [0, 70]$ ،  $M = 50$ ،  $N = 8$  رسم شده است. همچنین در شکل‌های ۵-۷ و ۶-۷  $\mu = 0.04$ ،  $\gamma = 0.2$ ،  $\alpha = 0.2$  درنظر گرفته شده است. از مقایسه شکل‌های ۵-۷ و ۶-۷ در می‌یابیم که پاسخ‌های حاصل از دو روش تبدیل دیفرانسیلی گامبهگام و تفاضلات محدود کاملاً بر هم منطبق هستند.

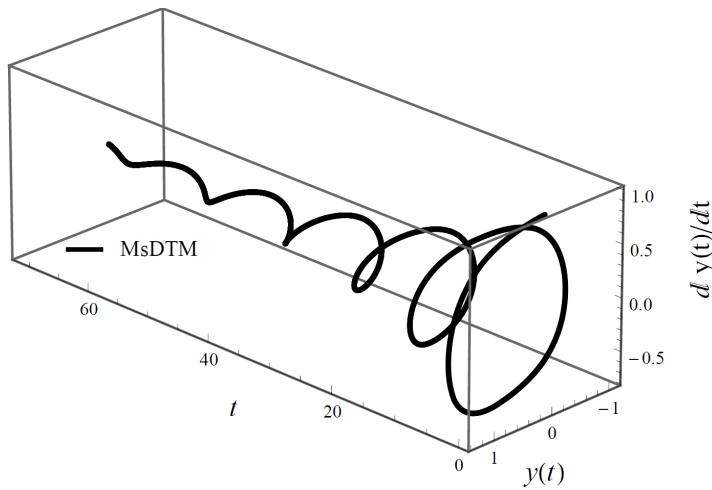


شکل ۵-۷ نمودار فازی در صفحه  $(y(t), dy(t)/dt)$  برای معادله دافینگ به روش تبدیل دیفرانسیلی گامبهگام

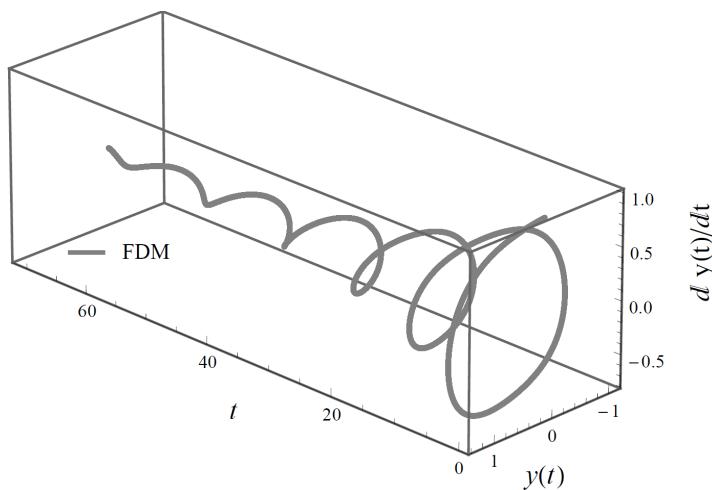


شکل ۶-۷ نمودار فازی در صفحه  $(y(t), dy(t)/dt)$  برای معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود

در شکل‌های ۷-۷ و ۸-۷، پاسخ معادله دیفرانسیل دافینگ به ترتیب با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام و روش تفاضلات محدود در  $t \in [0, 70]$  به صورت سه‌بعدی ارائه شده است. شکل ۷-۷ با توجه به  $N = 8$  و  $M = 50$  رسم شده است. همچنین شایان ذکر است که در شکل‌های ۷-۷ و ۸-۷،  $\alpha = 0.2$ ،  $\gamma = 0.04$ ،  $\mu = 0.04$  و مقایسه شکل‌های ۷-۷ و ۸-۷ در می‌یابیم که پاسخ‌های حاصل از دو روش فوق انتطباق خوبی بر هم دارند.



شکل ۷-۷ نمودار فازی در فضای سه‌بعدی  $(y(t), dy(t)/dt, t)$  برای معادله دافینگ به روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام



شکل ۸-۷ نمودار فازی در فضای سه‌بعدی  $(y(t), dy(t)/dt, t)$  برای معادله دافینگ به روش تفاضلات محدود

تا بدینجا، حل معادله دیفرانسیل دافینگ در حالت کلی و توسط روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام ارائه شد. همچنین از مقایسه پاسخهای حاصل از این روش با روش معروف عددی تفاضلات محدود در تمامی حالتها آشکار گشت که روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام، شیوه‌ای قابل اعتماد می‌باشد. شایان ذکر است که در شکل ۱-۷، برای حل مسئله به روش تبدیل دیفرانسیلی، ۱۰۰ جمله از سری درنظر گرفته شد ( $N=100$ ) که با این وجود، پاسخ به شدت واگرا گردید. ولی در روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام تنها ۸ جمله اول سری ( $N=8$ ) لحاظ گردید که خود نشان‌دهنده کارایی و سرعت همگرایی بالای این روش است.

همان‌طور که در مقدمه نیز بیان گردید، معادله دیفرانسیل دافینگ، معادله حاکم بر بسیاری از سیستم‌های غیرخطی است [۵۷]. آونگ در حال نوسان با فرض دامنه‌های بزرگ، یکی از سیستم‌های غیرخطی است که می‌تواند با معادله دیفرانسیل دافینگ بیان گردد. در بخش بعد، نخست معادله دیفرانسیل آونگ شرح داده شده و سپس حل معادله مذکور به روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام ارائه خواهد شد.

## ۷-۷- معادله حاکم بر آونگ با نوسان‌های بزرگ

آونگی با میله‌ای به جرم ناچیز و طول  $l$  را درنظر می‌گیریم که در انتهای گویی به جرم  $m$  به آن آویزان شده است. برای به‌دست آوردن معادله حاکم بر نوسان آونگ مذکور، با لنگرگیری حول نقطه تکیه‌گاه داریم [۵۷]:

$$m l^2 \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + mg l \sin(\theta(t)) = 0 \quad (21-7)$$

که در رابطه فوق،  $g$  شتاب جاذبه زمین است. جمله  $\sin(\theta(t))$  در معادله (۲۱-۷)، عامل غیرخطی است. می‌توان از طریق بسط تیلور،  $\sin(\theta(t))$  را به صورت زیر نوشت:

$$\sin(\theta(t)) = \theta(t) - \frac{(\theta(t))^3}{3!} + \frac{(\theta(t))^5}{5!} - \frac{(\theta(t))^7}{7!} + \dots \quad (22-7)$$

حال اگر تنها دو جمله اول رابطه (۲۲-۷) را در نظر گرفته و آن را در معادله (۲۱-۷) قرار دهیم، داریم:

$$ml^2 \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + mg l \left( \theta(t) - \frac{(\theta(t))^3}{3!} \right) = 0 \quad (23-7)$$

معادله (۲۳-۷) پس از اندکی ساده سازی به فرم زیر در می آید:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - \frac{g}{6l} (\theta(t))^3 + \frac{g}{l} \theta(t) = 0 \quad (24-7)$$

از مقایسه معادله (۲۴-۷) با معادله (۱-۷)، کاملاً آشکار می شود که معادله دیفرانسیل حاکم بر

آونگ، حالت خاص از معادله دافینگ است. معادله (۲۴-۷) در حالت وجود میرایی به فرم رابطه

در می آید:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{g}{6l} (\theta(t))^3 + \frac{g}{l} \theta(t) = 0 \quad (25-7)$$

که در آن،  $c$  ضریب میرایی است. شرایط اولیه نیز به صورت زیر در نظر گرفته می شود که عبارتند از

سرعت دورانی اولیه صفر و زاویه اولیه شصت درجه:

$$\theta(0) = \frac{\pi}{3} \quad (26-7)$$

$$\left. \frac{d\theta(t)}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (27-7)$$

در ادامه، روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام بر معادله (۲۵-۷) و شرایط اولیه (۲۶-۷) و (۲۷-۷)

اعمال خواهد شد. با استفاده از روابط موجود در جدول ۱-۲، رابطه بازگشتی حاصل از اعمال روش

مذکور به معادله (۲۵-۷)، به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \Theta_j[i+2] &= \frac{-1}{(i+1)(i+2)} \left( c(i+1) \Theta_j[i+1] + \frac{g}{l} \Theta_j[i] \right. \\ &\quad \left. - \frac{g}{6l} \left( \sum_{l_2=0}^i \sum_{l_1=0}^{l_2} (\Theta_j[l_1] \Theta_j[l_2 - l_1] \Theta_j[i - l_2]) \right) \right) \end{aligned} \quad (28-7)$$

که در آن  $i = 0, 1, 2, \dots, N$  و  $j = 1, 2, 3, \dots, M$  است. همچنین،  $\Theta_j[i]$  تابع تبدیل یافته  $\theta(t)$  در گام

جام است. شرایط اولیه (۲۶-۷) و (۲۷-۷) نیز پس از اعمال روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام، به

صورت رابطه (۳۹-۷) و (۳۰-۷) نوشته خواهند شد:

$$\Theta_1[0] = \frac{\pi}{3} \quad (39-7)$$

$$\Theta_1[1] = 0 \quad (30-7)$$

لازم به ذکر است که شرایط اولیه به صورت کلی زیر تعریف می‌گردند:

$$\Theta_j[0] = \theta_{j-1}(t) \Big|_{t=t_j} \quad (31-7)$$

$$\Theta_j[1] = \frac{d\theta_{j-1}(t)}{dt} \Big|_{t=t_j} \quad (32-7)$$

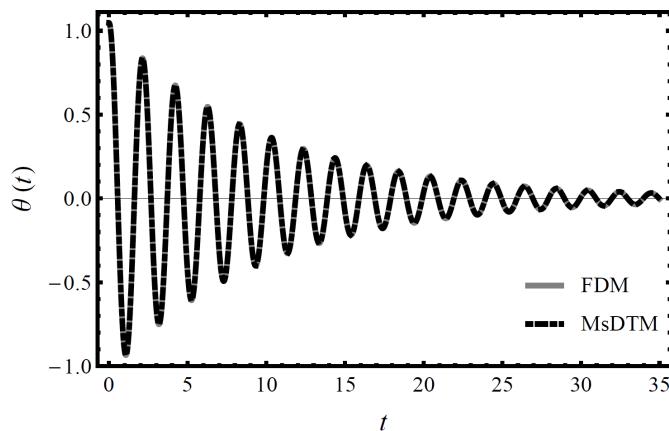
پاسخ به دست آمده برای  $\theta_j(t)$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\theta_j(t) = \sum_{i=0}^N \Theta_j[i] (t - t_j)^i \quad t \in [t_j, t_{j+1}] \quad (33-7)$$

پاسخ به دست آمده برای معادله آونگ در رابطه (۲۵-۷) با توجه به شرایط اولیه (۲۶-۷) و (۲۷-۷)

و همچنین  $m=1$ ،  $l=1$ ،  $c=0.2$  و  $g=9.81$  رسم شده است. برای رسم این نمودار

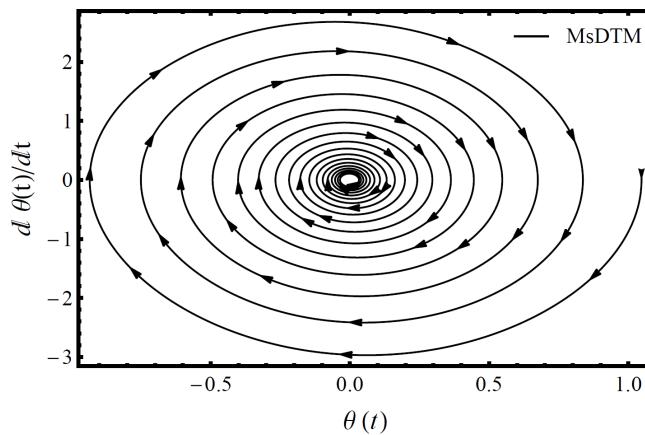
$t \in [0, 35]$  فرض شده‌اند.



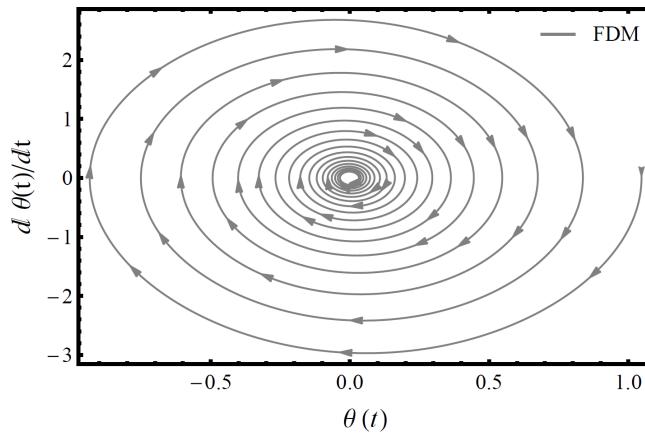
شکل ۹-۷ حل معادله آونگ به روش تفاضلات محدود و روش تبدیل دیفرانسیلی گام‌به‌گام با توجه به  $m=1$ ،  $l=1$ ،

$$c=0.2 \text{ و } g=9.81$$

در شکل‌های ۱۰-۷ و ۱۱-۷ نمودارهای فازی که به ترتیب با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی گامبه‌گام و روش تفاضلات محدود به دست آمده‌اند، رسم شده‌اند. شایان ذکر است، تمامی پارامترها در شکل‌های ۱۰-۷ و ۱۱-۷، مشابه با شکل ۹-۷ در نظر گرفته شده است.

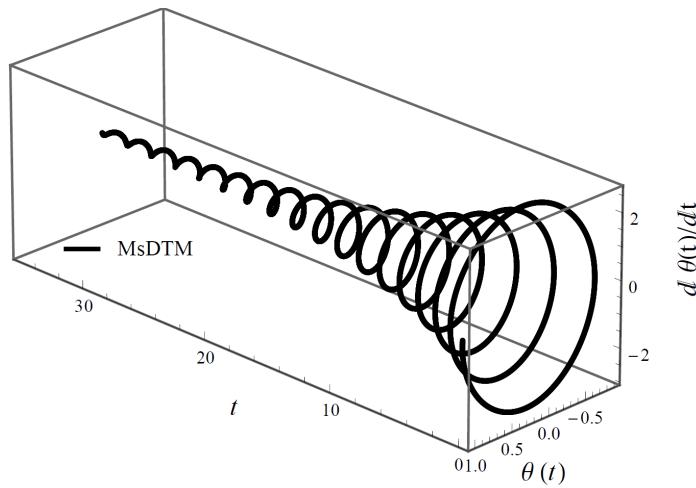


شکل ۱۰-۷ نمودار فازی در صفحه  $(\theta(t), d\theta(t)/dt)$  برای معادله آونگ به روش تبدیل دیفرانسیلی گامبه‌گام

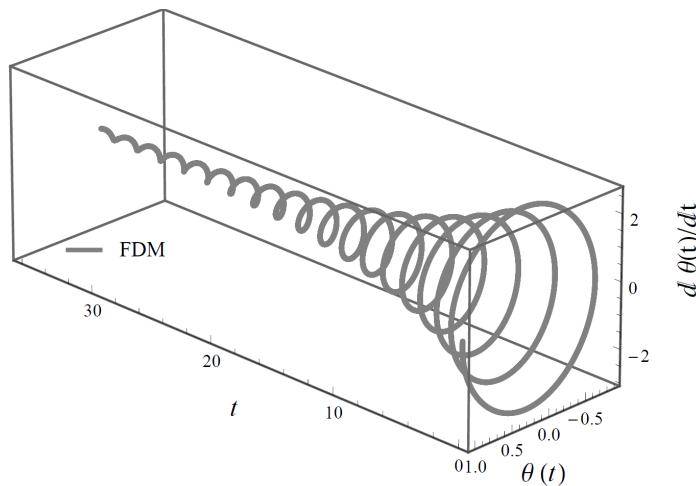


شکل ۱۱-۷ نمودار فازی در صفحه  $(\theta(t), d\theta(t)/dt)$  برای معادله آونگ به روش تفاضلات محدود

در ادامه نیز نمودارهای سه‌بعدی در فضای  $(\theta(t), d\theta(t)/dt, t)$  با توجه به  $l=1$ ،  $m=1$ ،  $t \in [0, 35]$ ،  $N=8$ ،  $c=0.2$  و  $g=9.81$  ارائه می‌شوند. لازم به ذکر است که شکل‌های ۱۲-۷ و ۱۳-۷ به ترتیب با روش‌های تبدیل دیفرانسیلی گامبه‌گام و تفاضلات محدود رسم شده‌اند.



شکل ۱۲-۷ نمودار فازی در فضای سه بعدی  $(\theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}, t)$  برای معادله آونگ به روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام



شکل ۱۳-۷ نمودار فازی در فضای سه بعدی  $(\theta(t), \frac{d\theta(t)}{dt}, t)$  برای معادله آونگ به روش تفاضلات محدود

## ۷-۸- جمع بندی

در این فصل، به حل معادله دیفرانسیل غیرخطی **دافینگ** با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام پرداخته شد. در این راستا، روش تبدیل دیفرانسیلی گام به گام توضیح داده شد و فرمول بندی آن به صورت کامل بیان گردید. همچنین به منظور صحتسنجی حل ارائه شده، کلیه پاسخهای حاصل

با روش نامآشنا و البته کند تفاضلات محدود مقایسه گردید که خوبشخтанه، در تمامی موارد، حل ارائه شده بر حل به روش تفاضلات محدود انطباق کامل داشت. همچنین تأثیر پارامترهای متفاوت در معادله دیفرانسیل دافینگ مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه، سیستم مکانیکی آونگ و معادله دیفرانسیل غیرخطی آن، به عنوان یکی از کاربردهای معادله دیفرانسیل دافینگ، با درنظر گرفتن جمله غیرخطی و با روش تبدیل دیفرانسیلی گامبهگام حل گردید. در این مثال نیز پاسخهای بهدست آمده با روش تفاضلات محدود تطابق کامل داشت. بنابراین، می‌توان چنین نتیجه گرفت که روش تبدیل دیفرانسیلی گامبهگام، با دقت و سرعت همگرایی بالا و همچنین حجم محاسبات بسیار کمتر، می‌تواند به عنوان روشی مناسب برای حل معادله دیفرانسیل غیرخطی دافینگ مورد استفاده قرار گیرد.

# پیوست‌ها

## پیوست الف

در این پیوست، ماتریس‌های جرم و سختی إلمان را در حالت کلی و با فرض سرعت دورانی بی‌بعد برابر با صفر و ضریب نامنشوری مخالف صفر ( $\lambda = 0$  و  $\beta \neq 0$ ) نشان خواهیم داد. در این راستا ماتریس جرم و سختی إلمان، به ترتیب، به صورت روابط (الف-۱) و (الف-۲) است:

$$[\mathbf{M}^e] = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۱})$$

$$[\mathbf{K}^e] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{الف-۲})$$

شایان ذکر است در روابط مذکور،  $l$  نشان‌دهنده طول إلمان است. همچنین به دلیل متقارن بودن ماتریس جرم و سختی، تمامی درایه‌ها نمایش داده نمی‌شوند.

$$\begin{aligned} M_{11} = & \frac{l m_0 \exp[-2\beta]}{4\beta^7} \left( -9(10 + \beta(10 + 3\beta)) \right. \\ & \left. + \exp[2\beta](90 + \beta(-90 + \beta(27 + 2\beta(3 - 3\beta + \beta^3)))) \right) \end{aligned} \quad (\text{الف-۳})$$

$$\begin{aligned} M_{12} = & \frac{l^2 m_0 \exp[-2\beta]}{8\beta^7} \left( -3(30 + \beta(25 + 6\beta)) \right. \\ & \left. + \exp[2\beta](90 + \beta(-105 + 2\beta(24 + (-3 + \beta)\beta(1 + \beta)))) \right) \end{aligned} \quad (\text{الف-۴})$$

$$M_{13} = \frac{-3l m_0 \exp[-\beta]}{2\beta^7} \left( \beta(-30 + \beta^2) \cosh[\beta] + (30 + 9\beta^2 - \beta^4) \sinh[\beta] \right) \quad (\text{الف-۵})$$

$$\begin{aligned} M_{14} = & \frac{l^2 m_0 \exp[-2\beta]}{8\beta^7} \left( -3(2 + \beta)(15 + \beta(10 + 3\beta)) \right. \\ & \left. + \exp[2\beta](90 + \beta(-75 + \beta(18 + \beta(3 - 2\beta)))) \right) \end{aligned} \quad (\text{الف-۶})$$

$$M_{22} = \frac{l^3 m_0 \exp[-2\beta]}{8\beta^7} \left( -3(15 + 2\beta(5 + \beta)) + \exp[2\beta](45 + 2\beta(-30 + \beta(18 + \beta(-6 + \beta)))) \right) \quad (\text{الف - ٧})$$

$$M_{23} = \frac{l^2 m_0 \exp[-2\beta]}{8\beta^7} \left( 90 + 3 \exp[2\beta](-2 + \beta)(15 + \beta(-10 + 3\beta)) + \beta(75 + \beta(18 - \beta(3 + 2\beta))) \right) \quad (\text{الف - ٨})$$

$$M_{24} = \frac{-3l^3 m_0 \exp[-\beta]}{4\beta^7} \left( \beta(15 + \beta^2) \cosh[\beta] - 3(5 + 2\beta^2) \sinh[\beta] \right) \quad (\text{الف - ٩})$$

$$M_{33} = \frac{l m_0 \exp[-2\beta]}{4\beta^7} \left( -90 + 9 \exp[-2\beta](10 + \beta(-10 + 3\beta)) + \beta(-90 + \beta(-27 + 6\beta + 6\beta^2 - 2\beta^4)) \right) \quad (\text{الف - ١٠})$$

$$M_{34} = \frac{l^2 m_0 \exp[-2\beta]}{8\beta^7} \left( 90 - 3 \exp[2\beta](30 + \beta(-25 + 6\beta)) + \beta(105 - 2\beta(-24 + (-1 + \beta)\beta(3 + \beta))) \right) \quad (\text{الف - ١١})$$

$$M_{44} = \frac{l^3 m_0 \exp[-2\beta]}{8\beta^7} \left( -45 + \exp[2\beta](45 + 6(\beta - 5)\beta) - 2\beta(30 + \beta(18 + \beta(6 + \beta))) \right) \quad (\text{الف - ١٢})$$

$$K_{11} = \frac{9EI_0 \exp[-4\beta](-1 - 2\beta - 2\beta^2 + \exp[4\beta](1 - 2\beta + 2\beta^2))}{2l^3\beta^3} \quad (\text{الف - ١٣})$$

$$K_{12} = \frac{3EI_0 \exp[-4\beta](-3 - 5\beta - 4\beta^2 + \exp[4\beta](3 - 7\beta + 8\beta^2))}{4l^2\beta^3} \quad (\text{الف - ١٤})$$

$$K_{13} = \frac{9EI_0 \exp[-4\beta](1 + 2\beta + 2\beta^2 + \exp[4\beta](-1 + 2\beta - 2\beta^2))}{2l^3\beta^3} \quad (\text{الف - ١٥})$$

$$K_{14} = \frac{3EI_0 \exp[-4\beta](-3 - 7\beta - 8\beta^2 + \exp[4\beta](3 - 5\beta + 4\beta^2))}{4l^2\beta^3} \quad (\text{الف - ١٦})$$

$$K_{22} = \frac{EI_0 \exp[-4\beta](-9 - 12\beta - 8\beta^2 + \exp[4\beta](9 - 24\beta + 32\beta^2))}{8l\beta^3} \quad (\text{الف - ١٧})$$

$$K_{23} = \frac{-3EI_0 \exp[-4\beta](-3 - 5\beta - 4\beta^2 + \exp[4\beta](3 - 7\beta + 8\beta^2))}{4l^2\beta^3} \quad (\text{الف } 18)$$

$$K_{24} = \frac{EI_0 \exp[-4\beta](-9 - 18\beta - 16\beta^2 + \exp[4\beta](9 - 18\beta + 16\beta^2))}{8l\beta^3} \quad (\text{الف } 19)$$

$$K_{33} = \frac{9EI_0 \exp[-4\beta](-1 - 2\beta - 2\beta^2 + \exp[4\beta](1 - 2\beta + 2\beta^2))}{2l^3\beta^3} \quad (\text{الف } 20)$$

$$K_{34} = \frac{-3EI_0 \exp[-4\beta](-3 - 7\beta - 8\beta^2 + \exp[4\beta](3 - 5\beta + 4\beta^2))}{4l^2\beta^3} \quad (\text{الف } 21)$$

$$K_{44} = \frac{EI_0 \exp[-4\beta](-9 - 24\beta - 32\beta^2 + \exp[4\beta](9 - 12\beta + 8\beta^2))}{8l\beta^3} \quad (\text{الف } 22)$$

## پیوست ب

در این پیوست، درایه‌های ماتریس‌های جرم و سختی ایمان، در روش اجزای محدود مبتنی بر توابع شکل مثلثاتی، در حالت کلی نشان داده خواهد شد. در این راستا ماتریس جرم و سختی ایمان، به ترتیب، به صورت روابط (ب-۱) و (ب-۲) است:

$$[\mathbf{M}^e] = \frac{m}{\lambda(Cos(\lambda l) \cosh(\lambda l) - 1)^2} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۱})$$

$$[\mathbf{K}^e] = \frac{\lambda EI}{(Cos(\lambda l) \cosh(\lambda l) - 1)^2} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \quad (\text{ب-۲})$$

شایان ذکر است در روابط مذکور،  $l$  نشان‌دهنده طول ایمان است.

$$\begin{aligned} M_{11} = & \frac{1}{8} \left( \lambda l (2 + \cos(2\lambda l) + \cosh(2\lambda l)) - 2 \cosh(\lambda l) (2\lambda l \cos(\lambda l) + 3 \sin(\lambda l)) \right. \\ & \left. + 3 \cosh(\lambda^2 l^2) \sin(\lambda l) - 6 \cos(\lambda l) \sinh(\lambda l) + 3 \cos(\lambda^2 l^2) \sinh(\lambda l) \right) \end{aligned} \quad (\text{ب-۳})$$

$$M_{12} = \frac{1}{8\lambda} \left( \begin{array}{l} -2\lambda l \cosh(\lambda l) \sin(\lambda l) + \lambda l \sin(2\lambda l) - 2 \sinh(\lambda l) (\lambda l \cos(\lambda l) + 2 \sin(\lambda l)) \\ + \sinh(2\lambda l) (\lambda l + \sin(2\lambda l)) \end{array} \right) \quad (4- \curvearrowleft)$$

$$M_{13} = \frac{1}{8} \left( \begin{array}{l} -3 \cosh(\lambda l) \sin(2\lambda l) + 6 \sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l) (6 + \lambda l \sin(2\lambda l)) \\ - \sinh(2\lambda l) (3 \cos(\lambda l) + \lambda l \sin(\lambda l)) \end{array} \right) \quad (5- \curvearrowleft)$$

$$M_{14} = \frac{1}{4\lambda} \left( \begin{array}{l} 3 \cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l) (3 + \cos(2\lambda l)) \\ + \cos(\lambda l) \cosh(2\lambda l) + \lambda l \sin(\lambda l) \sinh(\lambda l) (\sinh(\lambda l) - \sin(\lambda l)) \end{array} \right) \quad (6- \curvearrowleft)$$

$$M_{22} = \frac{1}{8\lambda^2} \left( \begin{array}{l} -\lambda l \cos(2\lambda l) + \lambda l \cosh(2\lambda l) + \sin(2\lambda l) \cosh(\lambda^2 l^2) + 2 \cos(\lambda l) \sinh(\lambda l) \\ - 2 \sin(\lambda l) (\cosh(\lambda l) + 2\lambda l \sinh(\lambda l)) - \sinh(2\lambda l) \cos(\lambda^2 l^2) \end{array} \right) \quad (7- \curvearrowleft)$$

$$M_{23} = \frac{1}{4\lambda} \left( \begin{array}{l} -3 \cos(\lambda l) + \cosh(\lambda l) (3 + \cos(2\lambda l)) - \cos(\lambda l) \cosh(2\lambda l) \\ + \lambda l \sin(\lambda l) \sinh(\lambda l) (\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l)) \end{array} \right) \quad (8- \curvearrowleft)$$

$$M_{24} = \frac{1}{8\lambda^2} \left( \begin{array}{l} -\cosh(\lambda l) (4\lambda l + \sin(2\lambda l)) + \sinh(\lambda l) (-2 + \lambda l \sin(2\lambda l)) \\ + \cos(\lambda l) (4\lambda l + \sinh(2\lambda l)) + \sin(\lambda l) (2 + \lambda l \sinh(2\lambda l)) \end{array} \right) \quad (9- \curvearrowleft)$$

$$M_{33} = \frac{1}{8} \left( \begin{array}{l} \lambda l (2 + \cos(2\lambda l) + \cosh(2\lambda l)) - 2 \cosh(\lambda l) (2\lambda l \cos(\lambda l) + 3 \sin(\lambda l)) \\ + 3 \sin(2\lambda l) \cosh(\lambda^2 l^2) - 6 \cos(\lambda l) \sinh(\lambda l) + 3 \cos(\lambda^2 l^2) \sinh(2\lambda l) \end{array} \right) \quad (10- \curvearrowleft)$$

$$M_{34} = \frac{1}{-4\lambda} \left( \begin{array}{l} -\sinh(\lambda l) (2 \sin(\lambda l) + \lambda l \cos(\lambda l)) + \lambda l \cosh(\lambda l) (\sinh(\lambda l) - \sin(\lambda l)) \\ + \frac{\sin(2\lambda l) (\lambda l + \sinh(2\lambda l))}{2} \end{array} \right) \quad (11- \curvearrowleft)$$

$$M_{44} = \frac{1}{8\lambda^2} \left( \begin{array}{l} -\lambda l (\cos(2\lambda l) - \cosh(2\lambda l)) + \cosh(\lambda^2 l^2) \sin(2\lambda l) + 2 \cos(\lambda l) \sinh(\lambda l) \\ - \cos(\lambda^2 l^2) \sinh(2\lambda l) - 2 \sin(\lambda l) (\cosh(\lambda l) + 2\lambda l \sinh(\lambda l)) \end{array} \right) \quad (12- \curvearrowleft)$$

$$K_{11} = \frac{\lambda^2}{16} \left( \begin{array}{l} 2\lambda l (2 + \cos(2\lambda l) + \cosh(2\lambda l)) + 4 \cosh(\lambda l) (-2\lambda l \cos(\lambda l) + \sin(\lambda l)) \\ - 2 \cosh(\lambda^2 l^2) \sin(2\lambda l) + 4 \cos(\lambda l) \sinh(\lambda l) - 2 \cos(\lambda^2 l^2) \sinh(2\lambda l) \end{array} \right) \quad (13- \curvearrowleft)$$

$$K_{12} = \frac{\lambda}{4} \left( \begin{array}{l} \sinh(\lambda l) (-\lambda l \cos(\lambda l) + 2 \sin(\lambda l)) + \lambda l \cosh(\lambda l) (-\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l)) \\ - \frac{\sin(2\lambda l) (-\lambda l + \sinh(2\lambda l))}{2} \end{array} \right) \quad (14-\text{c})$$

$$K_{13} = \frac{\lambda^2}{8} \left( \begin{array}{l} -2 \sinh(\lambda l) + \sin(2\lambda l) (\cosh(\lambda l) + \lambda l \sinh(\lambda l)) + \cos(\lambda l) \sinh(2\lambda l) \\ - \sin(\lambda l) (2 + \lambda l \sinh(2\lambda l)) \end{array} \right) \quad (15-\text{c})$$

$$K_{14} = \frac{\lambda}{4} \left( \begin{array}{l} -3 \cos(\lambda l) + \cosh(\lambda l) (3 + \cos(2\lambda l)) - \cos(\lambda l) \cosh(2\lambda l) \\ + \lambda l \sin(\lambda l) \sinh(\lambda l) (-\sin(\lambda l) + \sinh(\lambda l)) \end{array} \right) \quad (16-\text{c})$$

$$K_{22} = \frac{1}{8} \left( \begin{array}{l} -\lambda l (\cos(2\lambda l) - \cosh(2\lambda l)) + 6 \cosh(\lambda l) \sin(\lambda l) - 3 \cosh(\lambda^2 l^2) \sin(2\lambda l) \\ - 2 \sinh(\lambda l) (3 \cos(\lambda l) + 2 \lambda l \sin(\lambda l)) + 3 \cos(\lambda^2 l^2) \sinh(2\lambda l) \end{array} \right) \quad (17-\text{c})$$

$$K_{23} = \frac{\lambda}{4} \left( \begin{array}{l} 3 \cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l) (\cos(2\lambda l) + 3) + \cos(\lambda l) \cosh(2\lambda l) \\ + \lambda l \sin(\lambda l) \sin(\lambda l) (\sin(\lambda l) - \sinh(\lambda l)) \end{array} \right) \quad (18-\text{c})$$

$$K_{24} = \frac{1}{8} \left( \begin{array}{l} \cosh(\lambda l) (3 \sin(2\lambda l) - 4 \lambda l) + \sinh(\lambda l) (6 + \lambda l \sin(2\lambda l)) \\ + \cos(\lambda l) (4 \lambda l - 3 \sinh(2\lambda l)) + \sin(\lambda l) (-6 + \lambda l \sinh(2\lambda l)) \end{array} \right) \quad (19-\text{c})$$

$$K_{33} = \frac{\lambda^2}{16} \left( \begin{array}{l} 2 \lambda l (2 + \cos(2\lambda l) + \cosh(2\lambda l)) + 4 \cosh(\lambda l) (-2 \lambda l \cos(2\lambda l) + \sin(\lambda l)) \\ - 2 \cosh(\lambda^2 l^2) \sin(2\lambda l) + 4 \cos(\lambda l) \sinh(\lambda l) - 2 \cos(\lambda^2 l^2) \sinh(2\lambda l) \end{array} \right) \quad (20-\text{c})$$

$$K_{34} = \frac{\lambda}{8} \left( \begin{array}{l} 2 \lambda l \cosh(\lambda l) \sin(\lambda l) + 2 \sinh(\lambda l) (\lambda l \cos(\lambda l) - 2 \sin(\lambda l)) - \lambda l \sinh(2\lambda l) \\ + \sin(2\lambda l) (-\lambda l + \sinh(2\lambda l)) \end{array} \right) \quad (21-\text{c})$$

$$K_{44} = \frac{1}{8} \left( \begin{array}{l} -\lambda l (\cos(2\lambda l) - \cosh(2\lambda l)) + 6 \cosh(\lambda l) \sin(\lambda l) - 3 \cosh(\lambda^2 l^2) \sin(2\lambda l) \\ - 2 \sinh(\lambda l) (3 \cos(\lambda l) + 2 \lambda l \sin(\lambda l)) + 3 \cos(\lambda^2 l^2) \sinh(2\lambda l) \end{array} \right) \quad (22-\text{c})$$

# منابع

- [1] Maurizi M.J., Rossi R.E. and Reyes J.A. (1976), “Vibration frequencies for a uniform beam with one end spring-hinged and subjected to a translational restraint at the other end”, *Journal of Sound and Vibration*, 48, 4, pp. 565-568.
- [2] Maurizi M.J., Rosales M. and Belles P. (1988), “A further note on the free vibrations of beams resting on an elastic foundation”, *Journal of Sound and Vibration*, 124, 1, pp. 191-193.
- [3] Rao C.K. and Mirza S. (1989), “A note on vibrations of generally restrained beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 130, 3, pp. 453-465.
- [4] Lee S.Y. and Ke H.Y. (1990), “Free vibrations of a non-uniform beam with general elastically restrained boundary conditions”, *Journal of Sound and Vibration*, 136, 3, pp. 425-437.
- [5] Rao C.K. (1990), “Frequency analysis of two-span uniform Bernoulli-Euler beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 137, 1, pp. 144-150.
- [6] Maurizi M.J., Rossi R.E. and Reyes J.A. (1991), “Comments on a note of generally restrained beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 147, 1, pp. 167-171.
- [7] Maurizi M.J. and Belles P.M. (1991), “Natural frequencies of the beam-mass system: Comparison of the two fundamental theories of beam vibrations”, *Journal of Sound and Vibration*, 150, 2, pp. 330-334.
- [8] De Rosa M.A., Franciosi C. and Maurizi M.J. (1996), “On the dynamic behaviour of slender beams with elastic ends carrying a concentrated mass”, *Computers & Structures*, 58, 6, pp. 1145-1159.
- [9] Malik M. and Dang H.H. (1998), “Vibration analysis of continuous systems by differential transformation”, *Applied Mathematics and Computation*, 96, 1, pp. 17-26.
- [10] Zhou J.K. (1986), “*Differential transformation and its applications for electrical circuits*”, Huarjung University Press, Wuuhahn, China. (in Chinese) (Cited by Bervillier [11])
- [11] Bervillier C. (2012), “Status of the differential transformation method”, *Applied Mathematics and Computation*, 218, 20, pp. 10158-10170.
- [12] Kim H.K. and Kim M.S. (2001), “Vibration of beams with generally restrained boundary conditions using Fourier series”, *Journal of Sound and Vibration*, 245, 5, pp. 771-784.
- [13] Li W.L. (2002), “Comparison of Fourier sine and cosine series expansions for beams with arbitrary boundary conditions”, *Journal of Sound and Vibration*, 255, 1, pp.

185-194.

- [14] De Rosa M.A., Auciello N.M. and Maurizi M.J. (2003), "The use of Mathematica in the dynamic analusis of a beam with a concentrated mass and dashpot", *Journal of Sound and Vibration*, 263, 1, pp. 219-226.
- [15] De Rosa M.A. and Maurizi M.J. (2005), "Damping in exact analysis of tapered beams", *Journal of Sound and Vibration*, 286, 4-5, pp. 1041-1047.
- [16] Rosa M.A., Lippiello M., Maurizi M.J. and Martin H.D. (2010), "Free vibration of elastically cantilever tapered beams with concentrated viscous damping and mass", *Mechanics Research Communications*, 37, 2, pp. 261-264.
- [۱۷] رضایی‌پژند م. و مؤیدیان م. (۱۳۸۲)، "نگره جزء محدود"، چاپ اول، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد، مشهد، ص ۳۴۵-۴.
- [۱۸] ردی جی. ان. (۱۳۸۷)، "مقدمه‌ای بر روش اجزای محدود"، جلد اول، سلطانی ن. و راستگو ع، چاپ دوم، مؤسسه انتشارات و چاپ دانشگاه تهران، تهران، ص ۵-۹۰۲.
- [19] Hozhabrossadati S.M. and Sani A.A. (2016), "Application of Green's function for constructing influence lines", *Journal of Engineering Mechanics*, 142, 3, pp. 040150971-15.
- [20] Odibat Z.M. (2008), "Differential transform method for solving Volterra integral equation with seperable kernels", *Mathematical and Computer Modelling*, 48, 7-8, pp. 1144-1149.
- [21] Gunda J.B. and Ganguli R. (2008), "New rational interpolation functions for finite element analysis of rotating beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, 50, 3, pp. 578-588.
- [22] Bhat R.B. (1986), "Transverse vibrations of a rotating uniform cantilever beam with tip mass as predicted by using beam characteristic orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, 105, 2, pp. 199-210.
- [23] Sinha S.K. (2007), "Combined torsional-bending-axial dynamics of a twisted rotating cantilever Timoshenko beam with contact-impact loads at the free end", *Journal of Applied Mechanics*, 74, 3, pp. 505-522.
- [24] Ganesh R. and Ganguli R. (2013), "Stiff string approximations in Rayleigh-Ritz method for rotating beams", *Applied Mathematics and Computation*, 219, 17, pp. 9282-9295.

- [25] Nagaraj V.T. and Shanthakumar P. (1975), “Rotor blade vibrations by the Galerkin finite element method”, *Journal of Sound and Vibration*, 43, 3, pp. 575-577.
- [26] Lauzon D.M. and Murthy V.R. (1993), “Determination of vibration characteristics of multiple-load-path blades by a modified Galerkin's method”, *Computers & Structures*, 46, 6, pp. 1007-1020.
- [27] Rao S.S. and Gupta R.S. (2001), “Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams”, *Journal of Sound and Vibration*, 242, 1, pp. 103-124.
- [28] Wang G. and Wereley N.M. (2004), “Free vibration of rotating blades with uniform tapers”, *AIAA Journal*, 42, 12, pp. 2429-2437.
- [29] Tsai M.H., Lin W.Y., Zhou Y.C. and Hsiao K.M. (2011), “Investigation on steady state deformation and free vibration of a rotating inclined Euler beam”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53, 12, pp. 1050-1068.
- [30] Wright A.D., Smith C.E., Thresher R.W. and Wang J.L.C. (1982), “Vibration modes of centrifugally stiffened beams”, *Journal of Applied Mechanics*, 49, 1, pp. 197-202.
- [31] Naguleswaran S. (1994), “Lateral vibration of a centrifugally tensioned uniform Euler-Bernoulli beam”, *Journal of Sound and Vibration*, 176, 5, pp. 613-624.
- [32] Sarkar K. and Ganguli R. (2014), “Modal tailoring and closed-form solutions for rotating non-uniform Euler-Bernoulli beams”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 88, pp. 208-220.
- [33] Mei C. (2006), “Differential transformation approach for free vibration analysis of a centrifugally stiffened Timoshenko beam”, *Journal of Vibration and Acoustics*, 128, 2, pp. 170-175.
- [34] Mei C. (2008), “Application of differential transformation technique to free vibration analysis of a centrifugally stiffened beam”, *Computers and Structures*, 86, 11-12, pp. 1280-1284.
- [35] Özdemir Ö. and Kaya M.O. (2006), “Flapwise bending vibration analysis of a rotating tapered cantilever Bernoulli-Euler beam by differential transform method”, *Journal of Sound and Vibration*, 289, 1-2, pp. 413-420.
- [36] Ozgumus O.O. and Kaya M.O. (2006), “Flapwise bending vibration analysis of double tapered rotating Euler-Bernoulli beam by using the differential transform method”, *Meccanica*, 41, 6, pp. 661-670.
- [37] Ozgumus O.O. and Kaya M.O. (2010), “Vibration analysis of a rotating tapered

Timoshenko beam using DTM”, *Meccanica*, 45, 1, pp. 33-42.

[38] Hodges D.H. and Rutkowski M.J. (1981), “Free-vibration analysis of rotating beams by a variable-order finite-element method”, *AIAA Journal*, 19, 11, pp. 1459-1466.

[٣٩] علیپور ع. و آفتابی ثانی ا. (۱۳۹۳)، "یافتن تابع پاسخ فرکانسی تیر اویلر - برنولی با تکیه-

گاههای ساده به کمک اجزای محدود و مقایسه آن با پاسخ دقیق "، هشتمین کنگره ملی

مهندسی عمران، بابل.

[40] Lee J.H. and Kim J. (2001), “Identification of damping matrices from measured frequency response functions”, *Journal of sound and vibration*, 240, 3, pp. 545-565.

[41] Gugrgogze M. and Erol H. (2001), “Determination of the frequency response function of a cantilevered beam simply supported in-span”, *Journal of sound and vibration*, 247, 2, pp. 372-378.

[42] Ayaz F. (2004), “Solutions of the system of differential equations by differential transform method”, *Applied Mathematics and Computation*, 147, 2, pp. 547-567.

[43] Arikoglu A. and Ozkol I. (2005), “Solution of boundary value problems for integro-differential equations by using differential transform method”, *Applied Mathematics and Computation*, 168, 2, pp. 1145-1158.

[44] Abdel-Halim Hassan I.H. (2008), “Application to differential transformation method for solving systems of differential equations”, *Applied Mathematical Modelling*, 32, 12, pp. 2552-2559.

[45] Chang S.H. and Chang I.L. (2008), “A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions”, *Applied Mathematics and Computation*, 195, 2, pp. 799-808.

[46] Chang S.H. and Chang I.L. (2009), “A new algorithm for calculating two-dimensional differential transform of nonlinear functions”, *Applied Mathematics and Computation*, 215, 7, pp. 2486-2494.

[47] Ebaid A.E. (2011), “A reliable aftertreatment for improving the differential transformation method and its application to nonlinear oscillators with fractional nonlinearities”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16, 1, pp. 528-536.

[48] Jang M.J. and Chen C.L. (1997), “Analysis of the response of a strongly nonlinear

- damped system using a differential transformation technique”, *Applied Mathematics and Computation*, 88, 2-3, pp. 137-151.
- [49] Chen C.L., Lin S.H. and Chen C.K. (1996), “Application of Taylor transformation to nonlinear predictive control problem”, *Applied Mathematical Modelling*, 20, 9, pp. 699-710.
- [50] Chen C.L. and Liu Y.C. (1998), “Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 95, 2-3, pp. 155-164.
- [51] Yu L.T. and Chen C.K. (1998), “The solution of the Blasius equation by the differential transformation method”, *Mathematical and Computer Modelling*, 28, 1, pp. 101-111.
- [52] Jang M.J., Chen C.L. and Liy Y.C. (2000), “On solving the initial-value problems using the differential transformation method”, *Applied Mathematics and Computation*, 115, 2-3, pp. 145-160.
- [53] Chen C.K. and Chen S.S. (2004), “Application of the differential transformation method to a non-linear conservative system”, *Applied Mathematics and Computation*, 154, 2, pp. 431-441.
- [54] Abdel-Halim Hassan I.H. (2004), “Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems”, *Applied Mathematics and Computation*, 154, 2, pp. 299-311.
- [55] Odibat Z.M., Bertelle C., Aziz-Alaoui M.A. and Duchamp G.H.E. (2010), “A multi-step differential transform method and application to non-chaotic or chaotic systems”, *Computers and Mathematics with Applications*, 59, 4, pp. 1462-1472.
- [56] Gokdogan A., Merdan M. and Yildirim A. (2012), “Adaptive multi-step differential transformation method to solving nonlinear differential equations”, *Mathematical and Computer Modelling*, 55, 3-4, pp. 761-769.
- [57] Kovacic I. and Brennan M.J. (2011), “*The Duffing equation: nonlinear oscillators and their behaviour*”, Wiley, United Kingdom.

# نامنامه

Argyris .....	آرگیریس
Argyris .....	آرگیریس
Arikoglu .....	آریکوگلو
Odibat.....	أدیبات
Ozdemir.....	ازدمیر
Ozkol .....	ازکول
Elsevier Scopus .....	الزویر اسکوپوس
Euler-Bernoulli.....	اویلر - برنولی
Erol .....	ایرل
Bervillier.....	بروبلیر
Bessel .....	بسل
Petrov-Galerkin .....	پتروف - گالرکین
Topp .....	تاپ
Turner.....	ترنر
Tsai .....	تیساي
Taylor .....	تیلور
Timoshenko.....	تیموشنکو
Chen .....	چن
Duffing .....	دافینگ
Delta.....	دلتا
Dang.....	دانگ
Dirac .....	دیراک

Rao .....	راؤ
Wright.....	رایت
Rayleigh-Ritz .....	رایلی - ریتز
Rosa .....	رسا
Zhou .....	ژو
Sarkar.....	سرکار
Sinha .....	سینها
Shih Chang.....	شیه چنگ
Ebaid .....	عِباد
Abdel-Halim Hassan .....	عبدالحليم حسن
Frobenius .....	فربینیوس
Fourier .....	فوریه
Kaya .....	کایا
Clough.....	کلاف
Kelsey.....	کلیسی
Courant.....	کورانت
Ke .....	کے
Kim .....	کیم
Galerkin .....	گالرکین
Ganesh.....	گانش
Ganguli.....	گانگولی
Gugrgogze .....	گُرگُر

Gupta .....	گوپتا.....
Gokdogan .....	گوکدوگان.....
Lotka-Volterra .....	لوتکا - ولتراء.....
Lorenz .....	لورنز.....
Lee .....	لی.....
Ling Chang .....	لینگ چنگ.....
Martin.....	مارتين.....
Malik .....	مالیک.....
Maurizi .....	مائوریزی.....
Mathematica.....	متماتیکا.....
Mei.....	می.....
Mirza .....	میرزا.....
Naguleswaran .....	ناگولسواران.....
Wereley .....	ورلی.....
Wang .....	ونگ.....
Hrenikoff .....	هرينیکف.....

## **Abstract**

The main purpose of this thesis is to increase the accuracy of the numerical finite element method and some of its elements for investigating the free vibration analysis of non-uniform rotating and non-rotating Euler-Bernoulli beams, and verifying the results by means of differential transform method as a semi-analytical technique. To this end, Petrov-Galerkin, Galerkin and Collocation methods, as the three well-known approaches of weighted-residual method, are firstly utilized for carrying out the free vibration analysis of non-rotating tapered general restrained beams. Then the results obtained by considering the mentioned methods are compared by the closed-form solution and differential transform method. The free vibration analysis of rotating tapered beams is subsequently investigated. It should be mentioned that, the governing differential equation of non-rotating Euler-Bernoulli beams is a particular form (when rotational speed is assumed zero) of the differential equation of rotating Euler-Bernoulli beams. Moreover, in order to enhance the accuracy of the finite element method shape functions, the governing differential equation of the rotating beams is used as an additional constraint. The results achieved by considering the new shape functions are also verified utilizing the conventional finite element method and differential transform method. Afterwards, the free vibration analysis of non-uniform rotating Euler-Bernoulli beams with exponentially varying cross-section is carried out by using differential transform and finite element methods. Finally, trigonometric functions are employed in order to derive more accurate finite element method shape functions. It is obviously shown that the results obtained by using the new trigonometric shape functions are significantly efficient and accurate.

## **Keywords:**

Euler-Bernoulli beam, Free vibration analysis, Natural frequency, Frequency parameter, Finite element method (FEM), Shape functions, Weighted residual method, Differential transform method (DTM), Rotating Euler-Bernoulli beam.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Civil Engineering**

**MSc Thesis in Structural Engineering**

**Free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams utilizing new  
numerical techniques based on finite element method**

By: Mostafa Nourifar

Supervisors:

Dr. Ali Keyhani

Dr. Ahmad Aftabi Sani

February 2017