

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



پردیس خوارزمی

رشته مهندسی عمران گرایش خاک و پی

پایان نامه کارشناسی ارشد

حل معادله تحکیم با استفاده از موجک

نگارنده : مجتبی رستگار

استاد راهنما

دکتر امیر بذرافشان مقدم

استاد مشاور

دکتر مجید عرفانیان اورعی

شهریور ۱۳۹۵



فرم شماره ۷: صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات حدادوند معال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مجتبی رستگار به شماره دانشجویی ۹۲۰۶۸۱۴ رشته: مهندسی عمران گرایش مکانیک خاک و پی تحت عنوان حل معادله تحکیم با استفاده از مویجک که در تاریخ: ۹۵/۶/۱۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: خوب)	امتیاز (۱۷،۷۹)	☒ امتیاز	☐ دفاع مجدد	☐ مردود
نوع تحقیق:	☒ خنثی	☐ علمی		

۱- فانی (۱۴ - ۲۰)

۲- بسیار خوب (۱۸/۹۹ - ۱۸)

۳- خوب (۱۶ - ۱۷/۹۹)

۴- فانی قبول (۱۴ - ۱۵/۹۹)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر امیر پدر افشان مقدم	استاد	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور	دکتر مجید عرفانیان اوری	استاد	
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر غنی عباس نژاد	استاد	
۵- استاد مصحح اول	دکتر مهدی عجمی	استاد	
۶- استاد مصحح دوم	دکتر سعید گلپای	استاد	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده
تاریخ و امضاء و مهر دانشگاه:

تقدیم به:

بهترین های زندگی؛

تقدیم به مادرم که صبوری اش را آسمان و زمین گواهی می دهد و هر چه دارم مرهون دعای خیر او است...

تقدیم به پدرم که لطافت قلبش لطیف تر از گلبرگ های سرخ است، او که برایم الگویی از ایمان و صداقت

است...

تقدیم به همسرم بانم که با همدلی و همراهی خود مرا در این راه یاری کرد و بهار زندگیم به ترنم محبتش آکنده است...

تقدیم به دخترم شکم هایه عزیز، امیدبخش جانم که آسایش او آرامش من است.

و تقدیم به تمام کسانی که فروغ نگاهشان، گرمی کلاشان و روشنی رویشان سرمایه جاودانی زندگی من بوده

است...

تشکر و قدردانی

اینک به پاس هر قدمی که برای ساختن اندیشه های من برداشته شده و در ازای هر اشاره ای که مراد رسیدن به پاسخ پرسش ها، یاری نموده است تنهای توانم یاد کنم از نشان تا خود بانم آموخته ایم در حضور ایشان در زندگی من بوده است.

جای جای این پژوهش مرهون راهنمایی های اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر امیربزر افشان مقدم و جناب آقای دکتر مجید عرفانیان اورعی هستم که در طی مراحل انجام پایان نامه، اینجانب را تا حد توان یاری نمودند. اگر زحمات بی شائبه و راهنمایی های ارزنده آن ها نبود، این تلاش به ثمر نمی رسید. موفقیتهایم را از خداوند منان خواستارم.

و با تشکر ویژه از جناب آقای مهندس ایلین آقاسی زاده و سرکار خانم زهرا بخشی

از جناب آقای دکتر سعید گلپای و جناب آقای دکتر مهدی عجمی که زحمات مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند قدردانی می نمایم.

از حوصله و راهنمایی های همسر مهربانم که در طول این دوران همواره پشتیبان من بوده همواره کمال تشکر را دارم.

و بایادی از مرحوم دکتر بهمن علیاد

تعهد نامه

اینجانب مجتبی رستگار دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته عمران گرایش خاک و پی دانشکده پردیس خوارزمی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه حل معادله تحکیم با استفاده از آنالیز موجک تحت راهنمایی دکتر امیر بذرافشان مقدم متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد .

چکیده:

معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی اهمیت و کاربرد فراوانی در مسائل علمی و مهندسی دارند. هنگام حل این قبیل از معادلات تحت شرایطی با معادلات جدیدی مواجه می شویم که در آنها تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر می شود. این معادلات، معادله انتگرال نامیده می شوند. در اکثر مسائل برق، الکترومغناطیس، مخبرات و غیره مستقیماً با این دسته از معادلات مواجه می شویم. حل این معادلات همواره با برخی مشکلات از قبیل پیچیدگی محاسبات، به دست نیامدن دقت لازم برای جواب ها و غیره توأم بوده است و مطالعات فراوانی برای یافتن روش های مناسب جهت کاهش هرچه بیشتر مشکلات مطرح شده انجام گرفته است. در سال های اخیر نشان داده شده است که موجک ها برای حل این نوع معادلات بسیار مناسب هستند و برای کاهش هزینه محاسبات به طور وسیعی در مسائل فوق بکار برده شده اند. تحقیقات متعدد انجام شده در زمینه حل معادلات انتگرال، قابلیت موجک های متعامد را نسبت به سایر پایه های کلاسیک نشان می دهد. موجک هایی که در ابتدا برای حل معادلات انتگرال مورد استفاده قرار گرفتند، عموماً موجک های متعامد بودند. علت این امر می تواند استفاده این موجک ها برای اولین بار در پردازش سیگنال ها باشد. دو دلیل عمده برای استفاده از موجک ها در حل معادلات انتگرال وجود دارد. اول این که در بسط یک تابع یا یک سیگنال با استفاده از موجک ها، ضرایب اولیه در بسط موجک اکثر اطلاعات مربوط به تابع یا سیگنال را دارا می باشند و در نتیجه نسبت به سایر پایه ها با تعداد جملات کمتری می توان دقت خوبی برای جواب به دست آورد. اما دومین و عمده ترین امتیاز موجک ها داشتن ماتریس های عملیاتی تنک می باشد، که باعث می شود دستگاه معادلات جبری حاصل به سادگی حل شوند. از جمله ویژگی های مطلوب موجک ها در حل معادلات انتگرال داشتن محمل فشرده، متقارن، گشتاور های صفر، فرم بسته و غیره است. موجک ها رده خاصی از توابع است که به عنوان اولین موجک شناخته می شود، و اولین بار توسط آلفرد هار، ریاضیدان مجارستانی در سال ۱۹۰۹ پیشنهاد شد. موجک ها با دارا بودن مزیت های گفته شده در بالا، ساده ترین موجک ممکن نیز می باشد. تا کنون معادله دیفرانسیل تحکیم با روش های گوناگونی حل شده است. در این پایان نامه معادله تحکیم را با استفاده از موجک حل خواهیم نمود. اگرچه ذکر این مطلب ضروریست که تحقیق حاضر شروعی بر حل معادلات با شرایط مرزی پیچیده تر در رابطه با مکانیک خاک و پی می باشد.

کلمات کلیدی: معادله دیفرانسیل، معادله تحکیم، آنالیز موجک

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل ۱ : مقدمه.....	۱
۱-۱ مقدمه.....	۲
۲-۱ نظریه عمومی تحکیم.....	۳
۳-۱ تحکیم تحت بار ثابت - تحکیم اولیه.....	۴
۴-۱ مسیر زهکشی.....	۵
۵-۱ تغییرات تنش موثر.....	۵
۶-۱ تغییرات نشست و نسبت منافذ تحت یک بار ثابت.....	۶
۷-۱ تئوری تحکیم تک بعدی	۶
۸-۱ نتایج حل معادله تحکیم با استفاده از سری فوریه.....	۸
۹-۱ مروری بر تحقیقات گذشته.....	۱۱
۱۰-۱ حل مسئله نمونه با استفاده از روش عددی.....	۱۲
فصل ۲ موجک هار.....	۱۵
۱-۲ مقدمه	۱۶
۲-۲ آنالیز موجک.....	۱۷
۳-۲ کاربرد موجک ها در علوم مختلف.....	۱۹
۴-۲ تعاریف و قضیه ها.....	۲۱
۵-۲ توابع هار.....	۲۵
۶-۲ توابع هار گویا.....	۲۶

۲۸.....	حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک هار
۳۳.....	فصل ۳ حل معادله تحکیم با استفاده از موجک هار
۳۴.....	۱-۳ حل معادله
۳۹.....	۲-۳ نتیجه گیری
۴۰.....	۱-۲-۳ حل مسئله نمونه با استفاده از روش آنالیز موجک
۴۱.....	۲-۲-۳ پیشنهادات
۴۲.....	واژه نامه انگلیسی به فارسی
۴۴.....	مراجع
۴۴.....	پیوست ۱: تعاریف و اصطلاحات

فهرست اشکال

عنوان	صفحه
شکل (۱-۱): آزمایش ساده تحکیم.....	۳
شکل (۲-۱): آزمایش تحکیم.....	۴
شکل (۳-۱) تحکیم اولیه.....	۵
شکل (۴-۱): المانی از نمونه خاک.....	۷
شکل (۵-۱): توزیع فشار آب منفذی.....	۹
شکل (۶-۱) تغییرات فشار آب منفذی.....	۱۰
شکل (۷-۱) تغییرات درجه تحکیم با فاکتور زمان.....	۱۰
شکل (۸-۱) پروفیل خاک مسئله.....	۱۳
شکل (۱-۲) مقایسه روش های مختلف تحلیل سیگنال ها.....	۱۸
شکل (۲-۲) نمودار تعدادی از توابع هار (موجک مادر).....	۲۳

فصل ١

مقدمه

۱-۱ مقدمه

افزایش تنش ناشی از ساخت پی یا بارهای دیگر سبب متراکم شدن لایه های خاک می شود. تراکم از تغییر شکل ذرات خاک، جابجایی ذرات خاک و خروج آب یا هوا از فضای خالی ناشی می شود. به طور کلی نشست خاک در اثر بار را می توان به سه شکل کلی تقسیم کرد:

۱- نشست آنی که در اثر تغییر شکل الاستیک خاک خشک و خاک های مرطوب و اشباع بدون تغییر میزان رطوبت ایجاد می شود. محاسبات نشست آنی معمولاً بر اساس معادلات حاصل از نظریه الاستیک است.

۲- نشست تحکیمی اولیه که در اثر تغییر حجم خاک های چسبنده اشباع به دلیل خروج آب از درون فضاهای خالی ایجاد می شود.

۳- نشست تحکیمی ثانویه که در خاک های چسبنده اشباع مشاهده می شود و در اثر تغییر خاصیت خمیری ساختار خاک ایجاد می شود. این شکل دیگری از تراکم است که در تنش موثر ثابت روی می دهد.

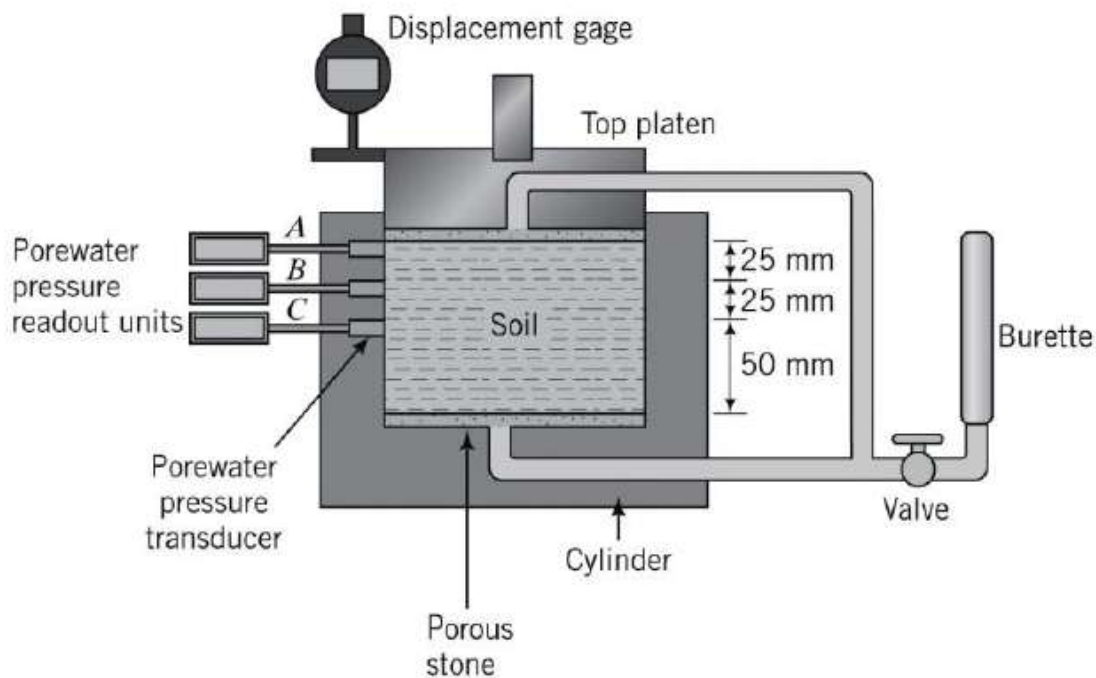
کل نشست پی حاصل مجموع نشست تحکیمی اولیه، نشست تحکیمی ثانویه و نشست آنی می باشد. زمانی که پی بر روی رس های بسیار تراکم پذیر ساخته می شود، نشست تحکیمی ممکن است چندین برابر نشست آنی باشد.

زمانی که لایه خاک اشباع تحت تاثیر افزایش تنش قرار میگیرد، فشار آب منفذی ناگهان افزایش می یابد. در خاک های ماسه ای با نفوذپذیری بالا، زهکشی ناشی از افزایش فشار آب منفذی کاملاً آنی است، زهکشی آب منفذی با کاهش حجم توده خاک همراه است که خود به نشست منجر می گردد. به دلیل زهکشی سریع آب منفذی در خاک های ماسه ای، نشست آنی و تحکیمی هم زمان رخ می دهد. زمانی که لایه رس تراکم پذیر اشباع تحت تاثیر افزایش تنش قرار می گیرد، نشست آنی بلافاصله انجام می شود. از آنجا که ضریب نفوذپذیری رس بسیار کمتر از ماسه است افزایش فشار آب منفذی ناشی از بارگذاری بصورت تدریجی در طی زمان طولانی مستهلک می شود. بنابراین تغییر حجم خاک رس (تحکیم) تا مدت زمان طولانی پس از نشست آنی ادامه می یابد. نشست ناشی از تحکیم در خاک رس چندین برابر بزرگتر از نشست آنی است. در ادامه توضیح مختصری در خصوص تحکیم، معادله و پارامترهای مربوطه بیان خواهد شد.

۲-۱ نظریه عمومی تحکیم

برای توسعه نظریه های گوناگون در نشست تحکیم فرض می کنیم: خاک اشباع و همگن است، ذرات خاک و آب غیر قابل تراکم، جریان آب قائم است، قانون داریسی برقرار است و کرنش ها کوچک هستند.

می توان با انجام یک آزمایش ساده نظریه های مقدماتی نشست تحکیم یک بعدی خاک های ریزدانه را بیان نمود. یک نمونه نازک، نرم و اشباع رس را بین دو سنگ متخلخل در یک طرف استوانه ای صلب که جدار داخلی آن بدون اصطکاک باشد قرار می دهیم. سنگهای متخلخل برای آسان کردن روند زهکشی آب منفذی از بالا و پایین خاک استفاده می شوند. صفحه ای برای انتقال بار اعمالی به خاک روی سنگ متخلخل بالایی قرار داده می شود. آب اضافی بوسیله یک لوله پلاستیکی به بورت منتقل می شود. شیر برای کنترل جریان آب اضافی به بورت تعبیه شده است. سه دستگاه اندازه گیری فشار آب منفذی در دیوار ظرف متصل شده است. یکی در نزدیکی سنگ متخلخل (A)، دیگری در ارتفاع یک چهارم (B) و آخری در وسط (C). شکل (۱-۱)

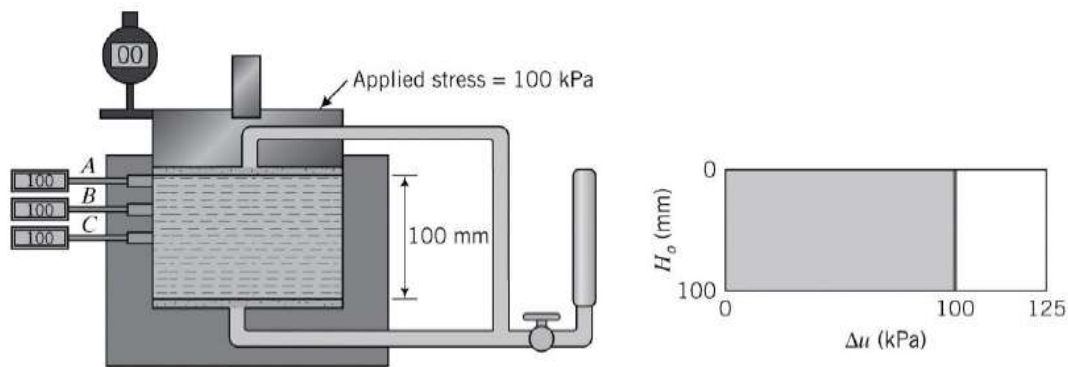


شکل (۱-۱): آزمایش ساده تحکیم [1]

فشار آب منفذی اضافی، فشار آبی است که بدلیل بارگذاری در توده خاک بوجود می آید. یک گنج تغییر مکان برای اندازه گیری نشست عمودی خاک روی صفحه قرار گرفته است. فرض می کنیم آب منفذی و ذرات خاک غیر قابل تراکم اند و فشار آب منفذی اولیه صفر است. حجم آب منفذی اضافی که در خاک زهکشی می شود، همان تغییر حجم خاک حاصل از بار وارده است. چون دیواره های ظرف بدون اصطکاک هستند پس تغییر مکان جانبی رخ نمی دهد.

پس کرنش های جانبی و شعاعی صفر هستند. $\epsilon_\theta + \epsilon_r = 0$ و کرنش حجمی برابر کرنش قائم است $(\epsilon_z + \epsilon_\theta + \epsilon_r = \epsilon_p)$. $\epsilon_z = \frac{\Delta z}{H_0}$ که تغییرات ارتفاع و H_0 ارتفاع یا ضخامت اولیه خاک است. بار P را بر خاک وارد کرده و شیر را بسته نگه می داریم. چون آب منفذی اضافی نمی تواند از خاک زهکشی شود، تغییرات حجم خاک صفر است. $(\Delta V = 0)$ و هیچ گونه بار یا تنش به ذرات خاک منتقل نمی شود $(\Delta \sigma'_z = 0)$. آب منفذی، بار کمی را تحمل می کند. فشار آب منفذی اضافی اولیه (ΔU_0) در نتیجه مساوی با تغییرات تنش عمودی اعمالی است $\Delta \sigma_z = \frac{P}{A}$ که A سطح مقطع خاک، $\Delta P = (\Delta \sigma_z + 2\Delta \sigma_r)/3$ تغییرات تنش کل میانگین است، که $\Delta \sigma_r$ تغییرات تنش شعاعی است. برای خاک آزمایش ما، می توان فرض کرد که فشار آب منفذی اضافی اولیه بصورت یکنواخت در عمق توزیع می شود. بنابراین در هر نقطه در داخل خاک، فشار آب منفذی اضافی اولیه مساوی با تنش عمودی اعمالی است.

برای مثال، اگر $\Delta \sigma_z = 100 \text{ kPa}$ پس $\Delta u_0 = 100 \text{ kPa}$ مطابق شکل (۲-۱).

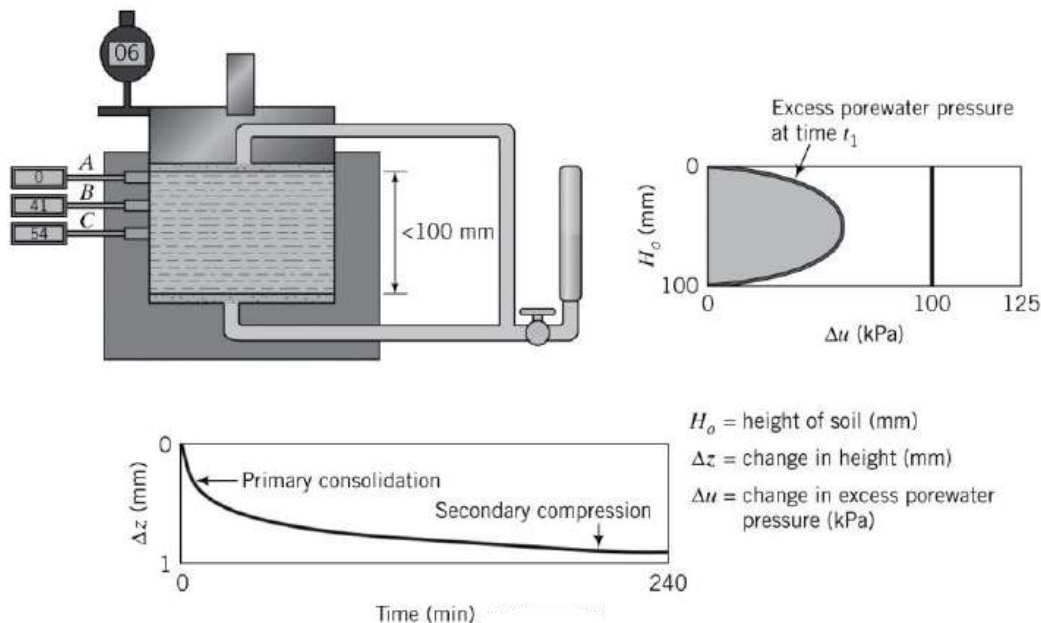


شکل (۲-۱): آزمایش تحکیم [1]

۳-۱ تحکیم تحت بار ثابت - تحکیم اولیه

شیر را باز کرده و اجازه می دهیم آب منفذی اضافی اولیه زهکشی شود. حجم کل خاک در زمان t_1 کاهش می یابد. مقدار آب منفذی که از خاک زهکشی می شود، به وسیله تغییر حجم آب در بورت نشان داده می شود شکل (۳-۱). در بالا و پایین نمونه خاک، فشار آب منفذی اضافی صفر است زیرا آنها مرزهای زهکشی هستند. کاهش فشار آب منفذی اولیه در وسط نمونه خاک (نقطه C) آهسته تر از نقاط دیگر است چون یک ذره آب برای خروج باید از وسط نمونه به بالا یا پایین نمونه حرکت کند. باید توجه شود که نشست خاک $(\Delta \sigma_z)$ نسبت به زمان t خطی نیست. بیشتر نشست در اندک زمانی پس از باز کردن شیر زمانی رخ می دهد دامنه نشست، $\frac{\Delta z}{t}$ بلافاصله پس از باز کردن شیر در قیاس با زمان های بعدی سریعتر است. قبل از باز شدن شیر هد هیدرولیکی اولیه، $\frac{\Delta u_0}{\gamma_w}$ بوسیله تنش عمودی اولیه بوجود آمده بود. بعد از اینکه شیر باز شد، آب منفذی اضافی اولیه به وسیله این هد هیدرولیکی اولیه به بیرون خاک رانده می شود. با گذشت زمان هد هیدرولیکی اولیه کاهش می یابد و در نتیجه مقادیر کمتری آب منفذی اضافی به بیرون رانده می شود. این موضوع همانند یک لوله آب تحت

فشاری است که شکسته شده است، حجم زیادی از آب بلافاصله پس از شکستگی خارج می شود، اما بزودی پس از آن، جریان کاهش می یابد. نشست اولیه بلافاصله پس از باز کردن شیر را تحکیم اولیه نامیم. تحکیم اولیه تغییرات حجم خاک حاصل از خروج آب داخل منافذ و انتقال بار از فشار آب منفذی اضافی به ذرات خاک است.



شکل (۳-۱) تحکیم اولیه [1]

۴-۱ مسیر زهکشی

بیشترین فاصله ای که یک ذره بصورت قائم برای خروج از خاک طی می کند طول مسیر زهکش نامیده می شود. چون به خاک اجازه زهکشی از دو طرف، بالا و پایین، را می دهیم طول مسیر زهکش برابر:

$$H_{dr} = \frac{H_{ave}}{2} = \frac{H_0 + H_f}{4} \quad (1-1)$$

در صورتی که زهکشی از یک طرف اجازه داده شود پس $H_{dr} = H_{ave}$ هرچه مسیر زهکش کوتاهتر باشد نشست خاک در زمان کوتاهتری انجام می گیرد.

۵-۱ تغییرات تنش موثر

از آنجا که تنش عمودی اعمالی (تنش کل) ثابت باقی می ماند، در نتیجه طبق قانون ترازقی، اصل تنش موثر ($\Delta\sigma'_z = \Delta\sigma_z - \Delta u$) هر کاهش فشار آب منفذی اضافی با افزایش متناظر تنش موثر عمودی متعادل می شود.

$$\begin{aligned}
 t = 0 & \quad ; \quad \Delta u_0 = \Delta\sigma_z \quad ; \quad \Delta\sigma'_z = 0 \\
 t & \quad \Delta u(t) \quad ; \quad \Delta z > 0 \quad ; \quad \Delta\sigma'_z = \Delta\sigma_z - \Delta u(t) \\
 t \rightarrow \infty & \quad ; \quad \Delta u_0 \rightarrow 0 \quad ; \quad \Delta V \rightarrow 0 \quad ; \quad \Delta\sigma'_z = \Delta\sigma_z
 \end{aligned}$$

نشست خاک با زمان رابطه خطی ندارد بجز در مراحل اولیه فرآیند تحکیم. تغییر حجم خاک برابر است با حجم آب منفذی اضافی خارج شده. شدت نشست به نفوذپذیری خاک بستگی دارد.

۱-۶ تغییرات نشست و نسبت منافذ تحت یک بار ثابت

حجم اولیه (حجم ویژه) خاک برابر $V = 1 + e_0$ که e_0 نسبت منافذ اولیه خاک است. هر تغییر در حجم (ΔV) برابر است با تغییر نسبت (Δe). کرنش حجمی را می توان از تغییر نسبت منافذ محاسبه کرد:

$$\varepsilon_p = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta e}{1+e_0} \quad (۲-۱)$$

برای تحکیم تک بعدی $\varepsilon_z = \varepsilon_p$ می توان رابطه بین نشست و تغییر نسبت منافذ را نوشت:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta Z}{H_0} = \frac{\Delta e}{1+e_0} \quad (۳-۱)$$

H_0 ارتفاع اولیه خاک است، معادله بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Delta Z = H_0 \frac{\Delta e}{1+e_0} \quad (۴-۱)$$

ما از P_{pc} برای تحکیم اولیه استفاده می کنیم

$$P_{pc} = H_0 \frac{\Delta e}{1+e_0} \quad (۵-۱)$$

نسبت منافذ در انتهای تحکیم تحت بار P برابر:

$$e = e_0 - \Delta e = e_0 - \frac{\Delta Z}{H_0} (1 + e_0) \quad (۶-۱)$$

۱-۷ تئوری تحکیم تک بعدی

المانی از نمونه خاک آزمایشات به ضخامت dz و سطح مقطع $dA = dx dy$ را مطابق شکل (۱-۶) در نظر می گیریم، فرض می کنیم:

- خاک اشباع، ایزوتروپ و همگن است.

- قانون داریسی برقرار است.

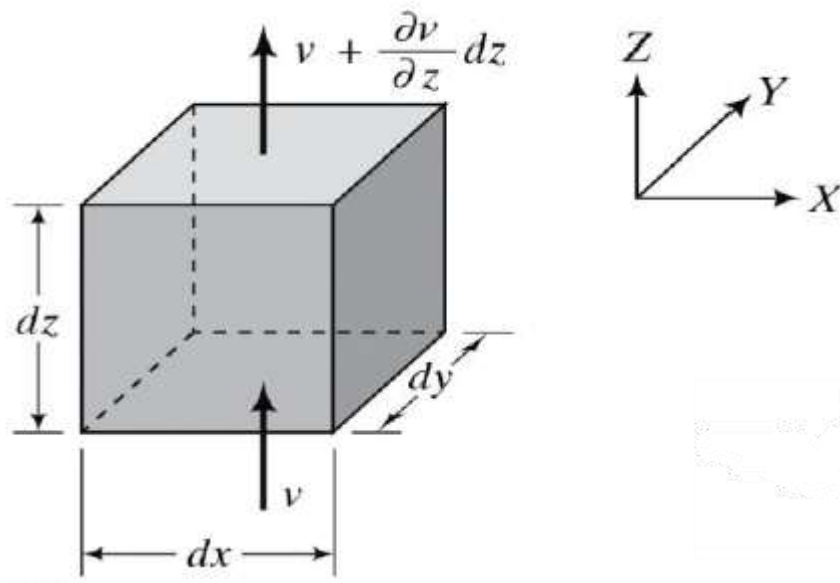
- جریان بصورت عمودی می باشد.

- کرنش ها بسیار کوچک اند.

تغییر حجم خاک ΔV برابر تغییر حجم آب منفذی خارج شده ΔV_w است که برابر با تغییر حجم ΔV_v منافذ است.

$$\Delta V = \Delta V_w = \Delta V_v$$

از آنجا که سطح خاک ثابت است (خاک از اطراف محدود نشده است) تغییر حجم خاک نسبت مستقیم با تغییر ارتفاع دارد.



شکل (۴-۱): المانی از نمونه خاک [1]

در حالت تحکیم یک بعدی، جریان آب به داخل و خارج از جزء حجم خاک فقط در یک امتداد مثلاً در امتداد Z صورت می گیرد. این بدان معنی است که q_x, q_y, dq_x, dq_y (دبی) مساوی صفرند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \text{سرعت تغییر حجم جزء حجم خاک} = (q_z + dq_z) - q_z$$

که در آن $V = dx dy dz$

از معادلات حاکم بر تراوش خواهیم داشت:

$$k \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} dx dy dz = \frac{\partial V}{\partial t} \quad (۷-۱)$$

که در آن k ضریب نفوذپذیری می باشد.
از سوی دیگر

$$h = \frac{u}{\gamma_w} \quad (۸-۱)$$

که γ_w وزن مخصوص آب است. بنابراین:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{dx dy dz} \frac{\partial V}{\partial t} \quad (۹-۱)$$

در طی تحکیم، سرعت تغییر حجم خاک معادل با سرعت تغییر حجم فضای حفره ای می باشد. از اینرو:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V_v}{\partial t} \quad (۱۰-۱)$$

که V_v حجم فضای حفره ها در جزء حجم خاک می باشد. اما:

$$V_v = e V_s \quad (۱۱-۱)$$

که V_s حجم دانه های جامد می باشد، که ثابت است و e نسبت تخلخل را نشان می دهد، از اینرو:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = V_s \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{V}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} = \frac{dx dy dz}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (۱۲-۱)$$

در نتیجه:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} \frac{\partial e}{\partial t} \quad (13-1)$$

تغییر نسبت تخلخل، ∂e در اثر افزایش تنش موثر است. با فرض اینکه این دو رابطه خطی با هم دارند، می توان نوشت:

$$\partial e = -a_v \partial(\Delta \sigma') \quad (14-1)$$

که a_v ضریب تراکم پذیری نامیده می شود. افزایش تنش موثر در اثر کم شدن اضافه فشار آب حفره ای ∂u می باشد. بنابراین:

$$\partial e = a_v \partial u \quad (15-1)$$

با ترکیب معادلات بالا خواهیم داشت:

$$\frac{k}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{a_v}{1+e} \frac{\partial u}{\partial t} = m_v \frac{\partial u}{\partial t} \quad (16-1)$$

$m_v = \frac{a_v}{1+e}$ ضریب تراکم پذیری حجمی است.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (17-1)$$

ضریب تحکیم $C_V = \frac{K_z}{m_v \gamma_w}$ واحد آن $\frac{cm^2}{min}$

K_z و m_v ثابت نیستند. K_z در هنگام تحکیم و با کاهش نسبت منافذ ها کاهش می یابد و m_v نیز رابطه خطی با ارتفاع ندارد. بنابراین C_V نیز ثابت نخواهد بود. اگر تغییرات تنش به اندازه کافی کوچک باشد که K_z و m_v تغییر قابل توجهی نداشته باشند عملاً C_V ثابت است.

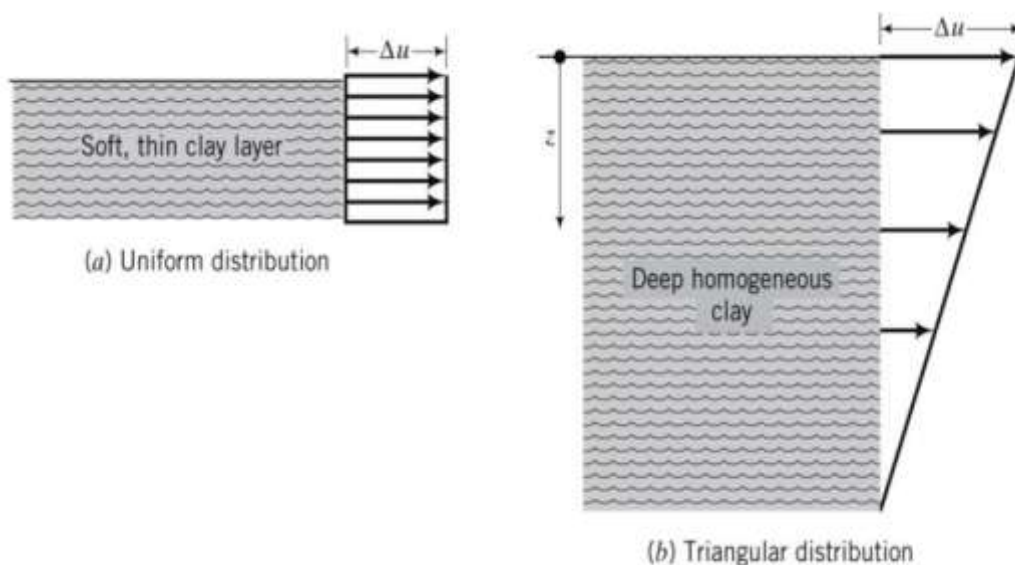
۸-۱ نتایج حل معادله تحکیم با استفاده از سری فوریه

برای حل هر معادله دیفرانسیل نیاز به شرایط مرزی داریم. با مشخص کردن توزیع اولیه فشار آب منفذی در مرزها می توان معادله تحکیم را حل نمود. توزیع فشار آب منفذی می تواند مطابق شکل های زیر باشد شرایط مرزی برای توزیع یکنواخت فشار آب منفذی اضافی در زهکشی دو طرفه بصورت:

$$t = 0 ; \quad \Delta u = \Delta u_0 = \Delta \sigma_z$$

$$Z = 0 ; \quad \Delta u = 0 \quad \text{در مرز بالایی}$$

$$Z = 2H_{dr} ; \quad \Delta u = 0 \quad \text{طول مسیر زهکشی: } H_{dr} \quad \text{در مرز پایینی}$$



شکل (۵-۱): توزیع فشار آب منفذی [1]

جواب معادله تحکیم که شرایط مرزی را ارضاء کند با استفاده از سری فوریه بدست می آید:

$$\Delta u(z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\Delta u_0}{M} \sin \left[\frac{MZ}{H_{dt}} \right] \exp(-M^2 T_V) \quad (18-1)$$

که $M = \frac{\pi}{2}(2m + 1)$ و m مقادیر مثبت از صفر تا بینهایت است. و

$$T_V = \frac{C_V t}{H_{dt}^2} \quad (19-1)$$

که T_V فاکتور زمان است که بدون بعد می باشد.

می توان با رسم معادله بالا مقادیر مختلف فشار آب منفذی نسبت به عمق را در زمانهای مختلف بدست آورد.

$$t = 0 \quad (T_V = 0) ; \quad \Delta u_0 = \Delta \sigma_z$$

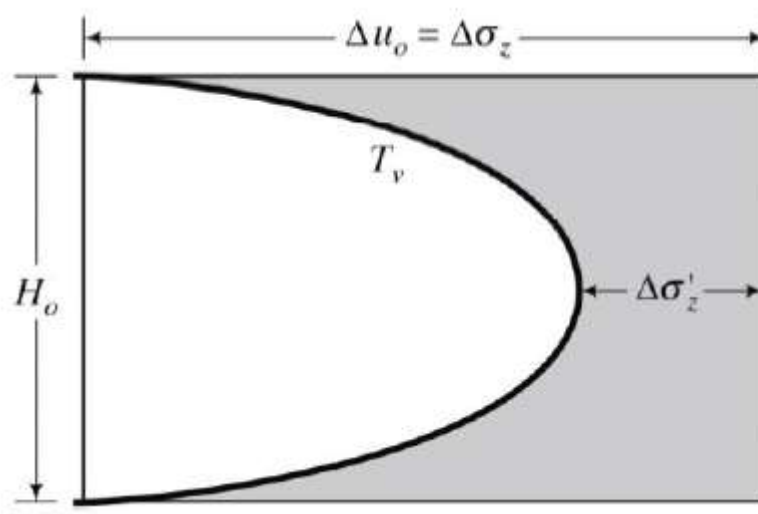
بلافاصله بعد از زهکشی ، فشار آب منفذی اضافی در مرز نفوذپذیر صفر می شود. ماکزیمم فشار آب منفذی در وسط لایه رخ می دهد که مسیر زهکشی طولانی ترین است.

$$t > 0 \quad \Delta \sigma_z = \Delta u_z + \Delta \sigma'_z$$

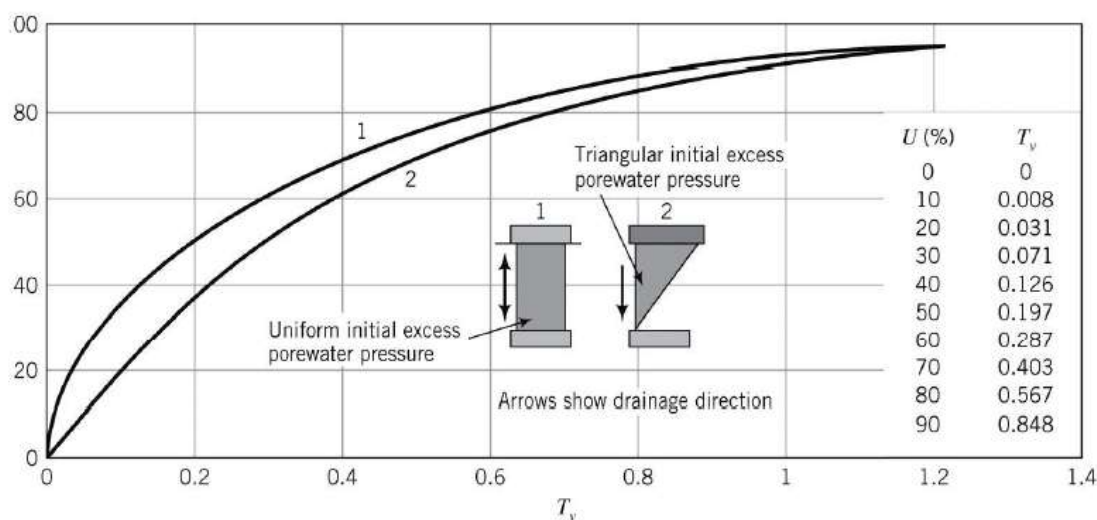
$$t \rightarrow \infty \quad \Delta u = 0 ; \quad \Delta \sigma'_z = \Delta \sigma_z$$

پارامتر U_z معرف درجه تحکیم است مقدار تحکیم را در انتهای یک زمان بخصوص در یک عمق را نشان می دهد. که بصورت ریاضی به صورت:

$$U_z = 1 - \frac{\Delta u_z}{\Delta u_0} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M} \sin \left[\frac{MZ}{H_{dt}} \right] \exp(-M^2 T_V) \quad (20-1)$$



شکل (۶-۱) تغییرات فشار آب منفذی [1]



شکل (۷-۱) تغییرات درجه تحکیم با فاکتور زمان [1]

در شروع تحکیم $t = 0$; $\Delta u_z = \Delta u_0$; $U_z = 0$

در پایان تحکیم $t = \infty$ $\Delta u_z = 0$; $U_z = 1$

ما از درجه تحکیم متوسط U کل لایه در یک زمان به جای درجه اشباع در یک عمق موردنظر استفاده می کنیم. مقدار متوسط درجه تحکیم را می توان از حل معادله تحکیم یک بعدی بدست آورد:

$$U = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} \exp(-M^2 T_v) \quad (۲۱-۱)$$

تغییرات درجه تحکیم متوسط نسبت به فاکتور تراکم T_v را می توان بصورت نمودار برای توزیع یکنواخت و مثلثی فشار آب منفذی نشان داد. معادلات مناسبی که برای زهکشی دوطرفه توسط منحنی ها بدست می آید شامل:

$$U < 60\% \quad T_v = \frac{\pi}{4} \left[\frac{U}{100} \right] \quad (۲۲-۱)$$

$$U \geq 60\% \quad T_V = 1.781 - 0.933 \log(100 - U) \quad (23-1)$$

برای ۵۰ درصد تحکیم $T_V = 0.197$ و برای ۹۰ درصد تحکیم $T_V = 0.848$

۹-۱ مروری بر تحقیقات گذشته

در این جا به صورت یک جدول اشاره ای خواهیم داشت به تحقیقات پیشین که مرتبط با موضوع این تحقیق می باشند و در ادامه نتایج تعدادی از تحقیقات مذکور را به طور مختصر شرح خواهیم داد.

عنوان تحقیق	نویسندگان	نتایج اصلی
مقایسه ی عددی حل های معادله ی تحکیم یک بعدی ترزاقی به روشهای تفاوت های محدود، اجزاء محدود و تحلیلی در ترسیم منحنی های همزمان ۱ تحکیم	شرفی، حسن و یزدان شمس ملکی، ۱۳۹۲	نتایج هر دو روش عددی تفاوت محدود و اجزاء محدود در مجاورت شرایط مرزی انتها و ابتدای لایه ی خاک ، باهم سازگار بوده
حل معادله تحکیم یک بعدی با روش	سپولودا ۱۹۹۱	معادله تحکیم یک بعدی با استفاده از این روش حل می گردد. و نتایج حاصل قابل قبول بوده.
حل معادله تحکیم با استفاده از روش تفاوت های محدود	تومان، جی ۱۹۷۲	نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی و صحرایی متناسب است.
حل معادله تحکیم یک بعدی ترزاقی با شرایط مرزی عمومی	کی مینک چن، ۲۰۱۳	

۱- شرفی، حسن و یزدان شمس ملکی، ۱۳۹۲، مقایسه ی عددی حل های معادله ی تحکیم یک بعدی ترزاقی به روشهای تفاوت های محدود، اجزاء محدود و تحلیلی در ترسیم منحنی های همزمان ۱ تحکیم، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان.

خلاصه مقاله

بررسی میزان نشست سازه ها، از جمله کنترل های مهم در حین طراحی و بهره برداری از سازه است. نشست تحکیمی بسته به نوع ساختگاه سازه ، می تواند تاثیرگذارترین نوع نشست باشد، که با توجه به زمان بر بودن آن ، آگاهی از روند پیشرفت آن در طی زمان، حائز اهمیت است. در این مقاله در حل معادله ی تحکیم یک بعدی ترزاقی ، از سه روش تفاوت های محدود، با جایگزینی مشتقات جزئی موجود در معادله با بسط های سری تیلور، حل اجزاء محدود معادله ، که از نوع وابسته به زمان مرتبه ی اول است، از روش حل ناهمبسته ی ضمنی و برای حل تحلیلی معادله از روش جدایی متغیرها و استفاده از سری های فوریه بهره برده شده است. در پایان راه حل های سه روش ، در یک زبان برنامه نویسی یکسان نوشته شده و خروجی های حاصل از تغییرات اضافه فشار آب منفذی در طول نمو های زمان و در عمق لایه ی خاک در قالب نمودارهایی به نمایش و مقایسه درآمده اند. نتایج هر دو روش

عددی تفاوت محدود و اجزاء محدود در مجاورت شرایط مرزی انتها و ابتدای لایه ی خاک ، باهم سازگار بوده و در میانه ی لایه ، روش اجزاء محدود مقادیر اضافه فشارهای منفذی بیشتری را نسبت به روش تفاوت محدود، بدست می دهد [3].

۲- ان سپولودا انون ۱۹۹۱، حل معادله تحکیم یک بعدی با استفاده از روش pseudospectral

خلاصه مقاله

معادله تحکیم یک بعدی در یک سیستم حوزه آب زیرزمینی با استفاده از روش pseudospectral حل شده است. مشتق مکان با استفاده از تبدیل سری فوریه محاسبه می شود و مشتق زمان با استفاده از روش Runge-Kutta حل می گردد.

مدل کامپیوتری محاسبه تراکم بر مبنای میزان نسبت فضای خالی است که در طی دوره زمانی انباشته شده است. انقباض و انبساط، حاصل از تغییرات سطح آب های زیرزمینی که بر مبنای مشاهدات چاههای مناطق کالیفرنیا و سن جواکین و سانتاکلارا می باشد. از داده های میدانی که قبلا به دست آمده اند چگالی ذرات خاک و ظریب تحکیم و شرایط هیدرولیکی و نسبت منافذ اولیه حاصل می شود. نمودار سطح آب در چاهها رسم شده و استفاده می شود برای نرخ تغییرات تنش موثر در طول زمان [4].

۱-۱۰ حل مسئله نمونه با استفاده از یکی از روش های عددی

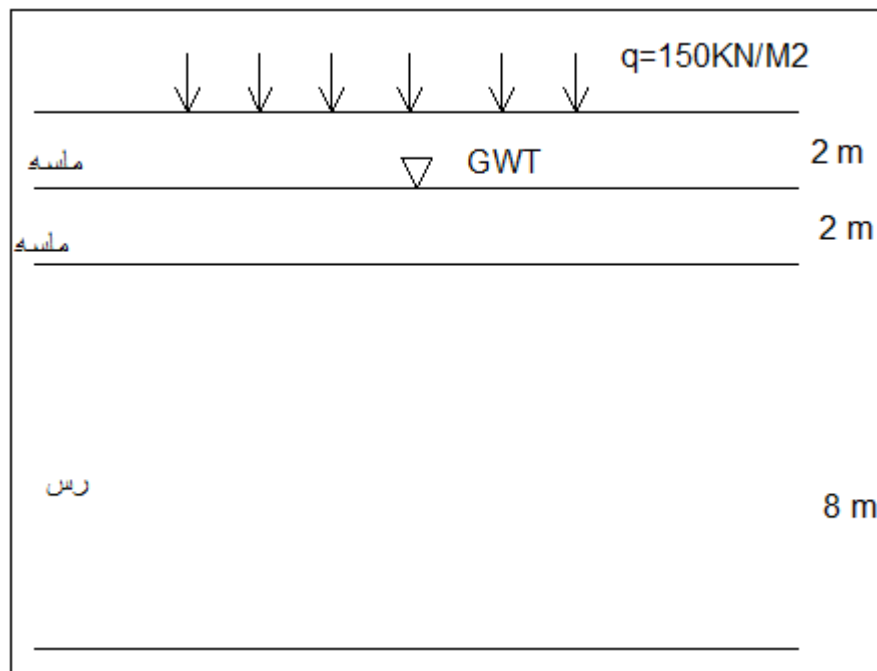
در این بخش به حل نمونه مسئله تحکیم خاک با استفاده از روش ذکر شده در کتاب مکانیک خاک خواهیم پرداخت و در پایان این پایان نامه نتایج به دست آمده با استفاده از این حل را با حل موجکی مسئله مقایسه می نماییم.

مثال: سربار یکنواخت $q = 150 \text{ KN}/m^2$ بر سطح زمین که سطح مقطع آن به شکل (۱-۱۳)

نشان داده شده است، وارد می شود. با استفاده از روش عددی، توزیع فشار آب حفره ای را برای لایه رس، ده روز پس از وارد شدن سربار محاسبه می کنیم.

حل: برای اینکه سربار با شدت یکنواخت اثر می کند، اضافه فشار آب حفره ای بلافاصله بعد از اعمال بار در تمام اعماق لایه های رس به مقدار ثابت $150 \text{ KN}/m^2$ خواهد بود. از طرفی در اثر شرایط

زهکشی، اضافه فشار آب حفره ای در بالا و پایین لایه رس فوراً به صفر خواهد رسید. فرض می کنیم که $Z_R = 8 \text{ m}$ و $U_R = 1.5 \frac{\text{KN}}{m^2}$ باشند. پس $\bar{Z} = \frac{8}{8} = 1$ و $\bar{U} = \frac{150}{1.5} = 100$ خواهند بود. لازم به ذکر است که $\Delta \bar{Z} = \frac{2}{8} = 0.25$ است.



شکل (۸-۱) پروفیل خاک مسئله

حال خواهیم داشت:

$$t_R = \frac{Z_R^2}{C_V} , \quad \bar{t} = \frac{t}{t_R} , \quad \frac{\Delta t}{\Delta \bar{t}} = \frac{Z_R^2}{C_V} , \quad \Delta \bar{t} = \frac{C_V \Delta t}{Z_R^2}$$

به ازای $\Delta t = 5$ خواهیم داشت:

$$\Delta \bar{t} = \frac{C_V \Delta t}{Z_R^2} = \frac{0.26(5)}{8^2} = 0.0203$$

$$\frac{\Delta \bar{t}}{\Delta \bar{Z}} = \frac{0.0203}{0.25^2} = 0.325$$

U در زمان $t = 5$

در $\bar{Z} = 0$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = 0$$

در $\bar{Z} = 0.25$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = \frac{\Delta \bar{t}}{(\Delta \bar{Z})^2} (\bar{U}_{1,\bar{t}} + \bar{U}_{3,\bar{t}} - 2\bar{U}_{0,\bar{t}}) + \bar{U}_{0,\bar{t}}$$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = 0.325[0 + 100 - 2(100)] + 100 = 67.5$$

در $\bar{Z} = 0.5$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta \bar{t}} = 0.325[100 + 100 - 2(100)] + 100 = 100$$

در $\bar{Z} = 0.75$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = 0.325[100 + 0 - 2(100)] + 100 = 67.5$$

در $\bar{Z} = 1$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = 0$$

برای $t = 10 \text{ day}$

در $\bar{Z} = 0$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = 0$$

در $\bar{Z} = 0.25$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = 0.325[0 + 100 - 2(67.5)] + 67.5 = 56.13$$

در $\bar{Z} = 0.5$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = 0.325[67.5 + 67.5 - 2(100)] + 100 = 78.875$$

در $\bar{Z} = 0.75$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = 0.325[100 + 0 - 2(67.5)] + 67.5 = 56.13$$

در $\bar{Z} = 1$

$$\bar{U}_{0,\bar{t}+\Delta\bar{t}} = 0$$

نتایج حاصل در زمان $t = 10 \text{ day}$

$z(m)$	0	2	4	6	8
$U(\frac{KN}{m^2})$	0	84.20	118.311	84.20	0

فصل ۲

موجک هار

۲-۱ مقدمه

اصلی ترین شاخه ریاضیات که توسط دانشمند فرانسوی ژوزف فوریه^۱، در سال ۱۸۰۷ ارائه شد و منجر به پیدایش موجکها گردید، نظریه آنالیز فرکانس بود که هم اکنون این تئوری، آنالیز فوریه نامیده می شود. فوریه برای نخستین بار طی ارائه رساله ای در آکادمی علوم پاریس ایده ی نمایش یک تابع بر حسب توابع دیگر را مطرح کرد. نظریه فوریه دری را به روی یک دنیای جدید تابعی باز کرد. بعد از سال ۱۸۰۷، با کشف مفاهیمی نظیر همگرایی سریهای فوریه، سیستمهای متعامد و غیره، مطالعه آنالیز سیگنال جای خود را به آنالیز مقیاس واگذار کرد. آنالیز مقیاس عبارت است از مطالعه تابع $f(x)$ با ایجاد ساختارهای ریاضی برای $f(x)$ ، که در مقیاس متغیر هستند. به این ترتیب که ابتدا یک تابع ساخته می شود، سپس با یک مقدار ثابت انتقال داده می شود و در مقیاس تغییر می کند. برای تقریب یک سیگنال این روند مکرراً انجام می شود. چون این روش میانگین نوسان سیگنال در مقیاسهای مختلف را اندازه گیری می کند، دارای خطای کمی می باشد. در واقع برای آن که تابع $f(x)$ به شیوه ای ساده و فشرده نمایش داده شود، می توان از مجموعه ای نامتناهی توابع سینوس وار استفاده نمود. عبارت دیگر فوریه نشان داد که تابع $f(x)$ را می توان بوسیله ی ترکیب خطی بی نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $\sin ax$ و $\cos ax$ نمایش داد. با گذشت زمان ضعف پایه های فوریه نمایان شد. مثلاً برای فرمول بندی پردازش سیگنال های پیچیده نظری تصاویر، نه تنها ایده آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند، زیرا قادر به نمایش ساختارهای گذرا نظیر مرزهای موجود در تصاویر نمی باشند. در سال ۱۹۰۹ هار اولین کسی بود که به موجک ها اشاره کرد.

در سال ۱۹۳۰ ریاضیدانان به قصد تحلیل ساختارهای تکین موضوعی به فکر اصلاح پایه های فوریه افتادند و بعد از آن در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام ژان مورله^۲ در آزمایشگاهی متعلق به الف آکیلن متوجه شد، که پایه های فوریه ابزار مطمئنی برای اکتشافات زیر زمین نیست، که این موضوع از مهمترین دلایل کشف موجک ها گردید. در سال ۱۹۷۶ میرو و مالت^۳ از پایه های موجک متعامد توانستند آنالیز چند ریزگی^۴ را بسازند و مالت تجزیه موجک ها و الگوریتم های بازسازی را با به کار بردن آنالیز چند ریزگی بوجود آورد و تحول عظیمی در آنالیز موجک ایجاد نمود [5,6]. در سال ۱۹۸۰ ایوس میر^۵ ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه های موجکی متعامد و ژان مورله مفهوم و تبدیل موجک را به عنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین لرزه و گراسمن^۶ فیزیکدان فرانسوی نیز فرمول وارونی را برای تبدیل موجک بدست آوردند [7,8,9]. در سال ۱۹۸۸ نخستین دسته از موجک های متعامد با محمل فشرده توسط دابشی^۷ ساخته شد [10]. در سال ۱۹۹۰ مورنزی^۸ و آنتوان^۹ موجک ها

1 Joseph Fourier

2 Jean Morlet

3 Stéphane Mallat

4 MultiResolution Analysis (MRA)

5 Yves Meyer

6 Alex Grossmann

7 Daubechies

8 R. Murenzi

9J.-P. Antoine

را به دو بعد و سپس به فضاهایی با ابعاد بزرگتر گسترش دادند و بدین ترتیب بود که آنالیز موجک^۱ پایه گذاری گردید [11]. همچنین در سال ۱۹۹۰ شرایط لازم و کافی برای تعامد موجک ها توسط لاوتون^۲ [12] و در سال ۱۹۹۲ نظریه موجک های دو بدو متعامد توسط کوهن^۳ و همکارانش برای رفع مشکل اساسی نامتقارن بودن موجک ها ارائه گردید [13]. موجکها در زمینه های مختلفی از علوم و مهندسی مانند پردازش تصاویر، پردازش سیگنال [6] و آنالیز عددی [14] کاربرد فراوانی دارند.

۲-۲ آنالیز موجک

آنالیز موجک یکی از دستاوردهای نسبتا جدید و قابل توجه در ریاضیات محض است، و پیشینه چندین دهه تحقیق و پژوهش در آنالیز هارمونیک (همساز) را دارا است. آنالیز موجک امروزه کاربردهای مهمی در بسیاری از رشته های علوم و مهندسی دارد و امکانات جدیدی برای درک جنبه های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است. در آنالیز موجک هم مانند آنالیز فوریه با بسط توابع روبرو هستیم، ولی این بسط برحسب موجک ها انجام می شود. موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط برحسب انتقال ها و اتساع های این توابع انجام می گیرد، بر خلاف چند جمله ای های مثلثاتی، موجک ها در فضا به صورت موضعی بررسی می شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیکی بین توابع و ضرایب آن ها برقرار می شود، و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می گردد. هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می توان با استفاده از موجک ها فرمول بندی کرد و اطلاعات مکانی (یا زمانی) موضعی بیشتری بدست آورد. بطور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم های عددی سریع برای محاسبه ی عملگرهای انتگرالی اثر می گذارد. آنالیز موجک، حاصل ۵۰ سال کار ریاضی است که طی آن، با توجه به مشکلاتی که در پاسخ دادن به ساده ترین پرسش های مربوط به تبدیل فوریه وجود داشت، جانشین های انعطاف پذیر ساده تری از طریق آنالیز همساز ارائه شد. مستقل از این نظریه که درون ریاضیات محض جای دارد، صورت های مختلفی از این رهیافت را در طی دهه ی گذشته در پردازش تصویر، آکوستیک، کدگذاری (به شکل های آینه ای متعامد و الگوریتم های هرمی)، و استخراج نفت دیده ایم. آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنال های گذرای که سریعا تغییر می کنند، صدا و سیگنال های صوتی، جریان های الکتریکی در مغز، صداهای زیر آبی ضربه ای و داده های طیف نمایی^۴ و در کنترل نیروگاه های برق از طریق صفحه ی نمایش کامپیوتر به کار می رود. همچنین بعنوان ابزاری علمی، برای روشن ساختن ساختارهای پیچیده ای که در تلاطم (مانند موج دریا)، جریان های جوی، و در بررسی ساختارهای ستاره ای از آن استفاده می شود. این آنالیز به عنوان یک ابزار عددی می تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی مقیاس بزرگ محاسبات بکاهد، بدین ترتیب که با تغییر ضریب هموار سازی، ماتریسهای متراکم را به شکل ماتریسهای تنکی که به سرعت قابل محاسبه باشد در آورد. آنالیز موجک

1 Wavelet Analysis

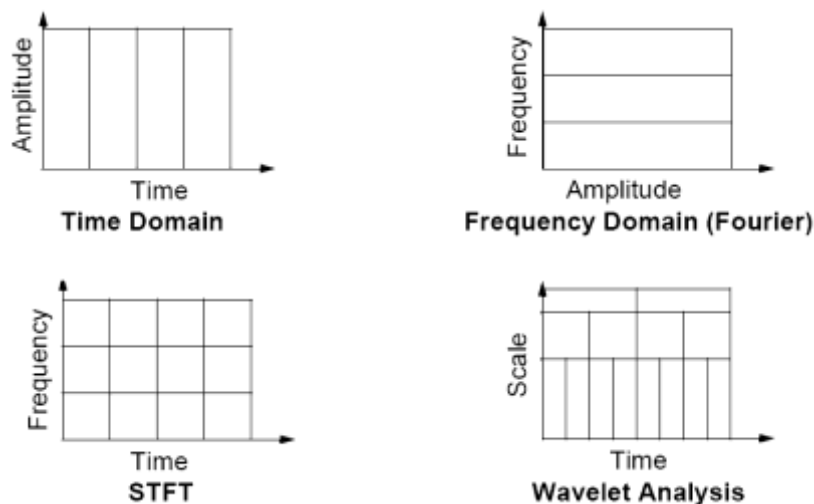
2 Lawton

3 Cohen

4 NMR

امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می توان به کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی^۱، سی تی اسکن^۲، جداسازی بافت های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تراشه های هوشمند، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی^۳ و عملکردهای تشدید مغناطیسی^۴ اشاره نمود [15].

آنالیز موجکی تکنیکی کارآمد جهت آنالیز و تقریب سازی سیگنال های ناپایدار بوده و قادر است به خوبی محتوای فرکانسی و اطلاعات زمانی مربوطه را تفکیک نموده و نشان دهد. همچنین موجک ها توانایی تحلیل زمان-فرکانس بصورت محلی را نیز دارند. به این معنی که یک ناحیه مشخص از یک موج، با بزرگنمایی آنالیز شده تا جزئیات بیشتری از اطلاعات زمان-فرکانسی در اختیار قرار دهد. بر خلاف تبدیل فوریه که در موج های دارای ناپیوستگی قادر به تشخیص محل ناپیوستگی نیست، تبدیل موجکی بطور واضح زمان دقیق ناپیوستگی را نشان می دهد. آنالیز موجکی توانایی نشان دادن جزئیاتی را دارد که بقیه روشها آن را در نظر نگرفته و یا حذف می کنند (نظیر نقاط تفکیک، ناپیوستگی در مشتقات مرتبه بالا و...). [16]. شکل (۱-۲) تفاوت روشهای مطرح شده را بطور ساده نشان می دهد.



شکل (۱-۲) مقایسه روش های مختلف تحلیل سیگنال ها

همانگونه که در شکل فوق ملاحظه می گردد در آنالیز موجکی، عرض پنجره تحلیل در محور زمان و محور فرکانس متغیر بوده و می تواند مقادیر مختلفی داشته باشد در حالیکه در آنالیز فوریه پنجره ای، پنجره فوق ثابت بوده و تغییر نمی نماید.

1 MRI
2 CAT
3 MR Spectroscopy
4 FMRI

۳-۲ کاربرد موجک ها در علوم مختلف

پیدایش موجک ها تحول عظیمی را در بسیاری از شاخه های علوم مختلف از قبیل دینامیک مولکولی، فیزیک، نجوم، زلزله شناسی، اپتیک، مکانیک کوانتم، پردازش تصویر، آنالیز هواشناسی، فشار خون، ضربان قلب، آزمایش دی ان ای و پردازش گفتار و غیره پدید آورده است. در زیر به طور خلاصه به بیان برخی از این پیشرفت ها می پردازیم.

- بینایی مصنوعی برای روباتها

در اوایل دهه ۱۹۸۰، دیوید مار در لابراتوار هوش مصنوعی دانشگاه ام آی تی شروع به کار روی بینایی مصنوعی برای روبات ها نمود. او با مطالعه سیستم بینایی انسان در پی یافتن راهی برای ساخت روبات های بینا بود. وی در تحقیقاتش را روی جوانب میکانیکی و غیر ارادی بینایی انسان متمرکز نمود. تئوری مار، که بر روی پردازش تصویر در سیستم بینایی انسان استوار بود، ساختار پیچیده ای دارد که شامل چندین مرحله پردازش است. در هر مرحله از پردازش، سیستم شبکه مستمری یک نمایش از تصویر به شیوه ای هندسی، مقیاس بندی می کند. اما مباحث مار عمدتاً به کشف شدت تغییرات مرتبط بودند. او بیان کرد که شدت تغییرات در مقیاس های مختلف یک تصویر رخ می دهند. نابراین شناسایی بهینه آن ها مستلزم استفاده از اپراتورهایی در اندازه های مختلف است. او هم چنین بیان کرد که تغییرات ناگهانی در اولین پردازش تصویر باعث به وجود آمدن قله یا دره می شوند. برای بررسی این دو فرضیه باید یک فیلتر بینایی با دو ویژگی مورد استفاده قرار گیرد؛ اول این که باید یک اپراتور دیفرانسیل باشد و دوم این که قادر به عمل در هر مقیاس مطلوب باشد. اپراتوری که مار آن را به کار برد، یک موجک بود که امروزه موجک مار نامیده می شود.

- استفاده از تبدیل موجک برای استخراج ویژگیهای سیگنال EEG

سیگنال بینایی EEG به عنوان نشان گر فعالیت مغز، اطلاعات غنی درباره عملکرد و وضعیت مغز دارد. امروزه پس از پشت سر گذاشتن مشکلات ثبت این سیگنال ضعیف، پردازش و تحلیل آن اهمیت ویژه ای دارد. زیرا تفسیر آن کاری مشکل بوده و اکثر اطلاعات موجود در آن با چشم قابل مشاهده نیستند. از طرفی متخصصان بیهوشی نیاز به پارامتری معادل با سطح هوشیاری دارند و ارزیابی تغییرات آن با وضعیت EEG که لازمه آن کمی سازی اطلاعات موجود در سیگنال هوشیاری است. روش های مختلف در این زمینه ارائه شده اند. اخیراً تبدیل موجک که یک تبدیل زمان-فرکانس است، برای کمی سازی این سیگنال مورد استفاده قرار گرفته است که نسبت به سایر روشهای ارائه شده دارای نتایج مطلوبی است. شناسایی مشخصات ترک در المان های سازه ای از طریق تبدیل موجک بسیاری از شکست های سازه ای به علت گسیختگی مواد تشکیل دهنده رخ می دهد. این گسیختگی ها با ترک توام می باشند و در صورت گسترش تهدیدی جدی برای رفتار سازه محسوب می شوند. به همین جهت روش های تشخیص و نمایان سازی ترک موضوع تحقیقات گسترده ای می باشد که تا کنون انجام شده و متدهای فراوانی برای آن ارائه شده اند که به مدیریت رفتار و عملکرد مورد انتظار از سازه می پردازند. تاثیر ترک

در رفتار دینامیکی سازه به صورت تغییرات موضعی سختی است. روش های گوناگونی در راستای بررسی و تشخیص این تغییرات ارائه شده است که هر کدام دارای توانایی ها و ضعف هایی می باشند. یکی از روش های کلاسیک در این زمینه تبدیل فوریه می باشد که اطلاعات مربوط به فرکانس های موجود در یک سیگنال را ارائه می کند و لیکن از زمان رخ دادن یک فرکانس خاص هیچ اطلاعی به دست نمی دهد. برای تشخیص مکان ترک آگاهی از زمان رخ دادن یک فرکانس اهمیت ویژه ای دارد. به این ترتیب تبدیل فوریه در این مورد با ضعف مواجه می شود. روش جدید و کارآمدی که در سالهای اخیر مورد توجه محققین قرار گرفته تبدیل موجکاست که قابلیت بالایی در شناسایی ناپیوستگی ها و یا ناهماهنگی ها مانند کاهش ناگهانی سختی دارد. نتایج کار با موجک ها در این زمینه نشانگر کارایی بالای آن ها در تشخیص زمان و مکان ترک می باشد. تشخیص آوای صدا دار از آوای بی صدا به کمک تبدیل موجک تشخیص صوت از شاخه های مهم و کاربردی در مبحث پردازش گفتار می باشد. الگوریتم ها و تبدیل های مختلفی در این زمینه ارائه شده است که دارای مزایا و معایبی می باشند. اما یکی از تبدیل های کاربردی و موفق در این راستا تبدیل موجک می باشد که کاربرد قابل توجهی در تشخیص آوای صدا دار از آوای بی صدا دارد. مزیت تبدیل موجک نسبت به سایر تبدیل ها در این است که الگوریتم های ارائه شده با تبدیل موجک قابلیت تبدیل شدن به سخت افزار دارند و چون در بیشتر مواقع سرعت اجرا و اعلام نتایج سخت افزار نسبت به نرم افزار بیشتر است، انتخاب این تبدیل ها در کاربردهای مذکور بیشتر مورد توجه می باشد [17].

چند دسته مهم از کاربردهای پردازش تصویر با استفاده از موجک به شرح زیر می باشند:

- کاربردهای عکاسی مانند ارتقا و بازسازی تصاویر قدیمی، بازسازی تصاویر خراب شده با نویز و بهبود ظاهر تصاویر معمولی.
 - کاربردهای پزشکی مانند ارتقا ویژگی های تصاویر اشعه ایکس، تولید تصاویر ماموگرافی، ام آر آی و سی تی اسکن.
 - کاربردهای امنیتی مانند تشخیص حرکت در دزدگیرها، تشخیص اثر انگشت، تشخیص چهره و تشخیص امضا.
 - کاربردهای نظامی مانند تشخیص و رهگیری خودکار اهداف متحرک یا ثابت از هوا یا زمین.
 - کاربردهای سنجش از راه دور مانند ارتقاء و تحلیل تصاویر هوایی و ماهواره ای برداشته شده از مناطق مختلف جغرافیایی که در کاربرهای نقشه برداری، کشاورزی، هواشناسی و موارد دیگر مفید هستند.
 - کاربردهای فشرده سازی تصویر مانند ذخیره سازی، ارسال تصاویر تلویزیون با کیفیت بالا و ارسال تصاویر متحرک و زنده از روی شبکه اینترنت و یا خط تلفن.
 - کاربردهای صنعتی مرتبط با خودکار سازی صنایع مانند تفکیک محصولات مختلف براساس شکل یا اندازه، آشکارسازی نواقص و شکستگی های موجود در محصولات، تعیین محل اشیاء و اجرای فرایند تولید با استفاده از روبات ها و بینایی ماشین.
- برخی دیگر از کاربردهای آنالیز موجک عبارتند از:

- یافتن نقاط ناپیوسته در سیگنال
- نویزبرداری از سیگنال
- فشرده سازی سیگنال
- فشرده سازی تصاویر
- حل معادلات دیفرانسیل و ...

۲-۴ تعاریف و قضیه ها

در این بخش، برخی از مفاهیمی که در مویک ها کاربرد فراوانی دارند، معرفی و تعدادی از قضایا و تعاریف مربوط به آن ها را مرور می کنیم.

تعریف: $L^p(a, b)$ یک فضای تابعی است که عناصر آن توابع اندازه پذیر روی بازه (a, b) بوده و در شرط زیر صدق می کنند:

$$f(x) \in L^p(a, b), \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty \quad (۱-۲)$$

در تعریف فوق اگر قرار دهیم $p=2$ فضای فوق $L^2(a, b)$ فضای توابع به طور مربعی انتگرال پذیر می باشد. ضرب درونی دو تابع u, v در این فضا به صورت زیر تعریف می شود:

$$(u(x), v(x)) = \int_a^b u(x) v(x) dx \quad (۲-۲)$$

بنابراین $L^2(a, b)$ یک فضای ضرب درونی می باشد. نرم تابع u در این فضا به شکل زیر تعریف می شود:

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} = \left(\int_a^b u^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۲)$$

تعریف: مجموعه توابع f_i یک پایه ریس^۱ برای $L^2(a, b)$ نامیده می شود هرگاه:

۱. هر عضو u در $L^2(a, b)$ را بتوان به صورت ترکیب خطی از اعضای f_i نوشت. یعنی:

$$u(x) = \sum_i c_i f_i(x) \quad (۴-۲)$$

بعبارت دیگر: i

$$\overline{\text{span}\{f_i, i \in \mathbb{Z}\}} = L^2(a, b) \quad (۵-۲)$$

۲. اعداد مثبت A, B موجود باشند بگونه ای که برای هر u دلخواه از فضا با ترکیب خطی رابطه

بالا داشته باشیم:

$$A\|u\|^2 \leq |c_i|^2 \leq B\|u\|^2 \quad (۶-۲)$$

تعریف: تابع دلتای کرونگر^۱ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (۷-۲)$$

تعریف: محمل^۲ تابع $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ بستر مجموعه تمام نقاطی مانند $x \in \Omega$ است که $f(x)$ مخالف صفر باشد و آن را با نماد زیر نمایش می دهیم:

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}} \quad (۸-۲)$$

اگر محمل تابع f زیر مجموعه ای فشرده از $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه می گوییم تابع f محمل فشرده^۳ دارد. یک مثال معروف از توابع با محمل فشرده، تابع بی شمار بار مشتق پذیر زیر است:

$$\xi(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2-1}), & |x| < 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases} \quad (۹-۲)$$

که محمل این تابع بازه $(-1, 1)$ است. مثال معروف دیگر از این قبیل توابع، تابع

$$h(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۰-۲)$$

که به تابع مقیاس هار^۴ معروف است. محمل آن بازه $[0, 1)$ بوده و در معادله

$$h(x) = h(2x) + h(2x - 1) = h(2x) + h_1(2x) \quad (۱۱-۲)$$

صدق می کند که در آن $h_k = h(x - k)$, $(k \in \mathbb{Z})$. این تابع بر انتقال های صحیح خود عمود است، یعنی:

$$(h, h_k) = \int h(x)h(x - k)dx = \delta_{0k} \quad (۱۲-۲)$$

تعریف: یکی از مفاهیم اساسی نظریه موجک کلاسیک معادله مقیاس^۵ است که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \phi(2x - k) \quad (۱۳-۲)$$

که در آن ϕ را تابع مقیاس می نامند.

با کمک تابع مقیاس، مفاهیمی همچون تقریب های چند ریزگی^۶ موجکها، گسسته سازی سریع^۷ و الگوریتم های اصلاحی^۸ معرفی می شوند. برای مشاهده جزئیات بیشتر می توان به مراجع [18] و [19] مراجعه نمود.

تعریف: تابع $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ را تابع مقیاس^۹ می نامیم، اگر در معادله زیر صدق کند.

1 Kronecker delta

2 Support

3 Compact support

4 Haar scaling function

5 Scaling or Refinable equation

6 Multi Resolution Approximation

7 Fast decomposition

8 Reconstruction algorithms

9 Scaling function

$$\phi(x) = \sum_{k=k_0}^{k_1} a_k \phi(2x - k) \quad (۱۴-۲)$$

که در آن $a_k \in \mathbb{C}$ را ضریب مقیاس می نامند.

موجک $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ یک موجک متعامد^۱ نامیده می شود، اگر مجموعه توابع $\{\phi_{j,k}\}$

که $\phi_{j,k}(x) = \left\{ 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j x - k) \right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ می باشد، در رابطه زیر صدق کند.

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{m,k}, \quad m, l, j, k \in \mathbb{Z} \quad (۱۵-۲)$$

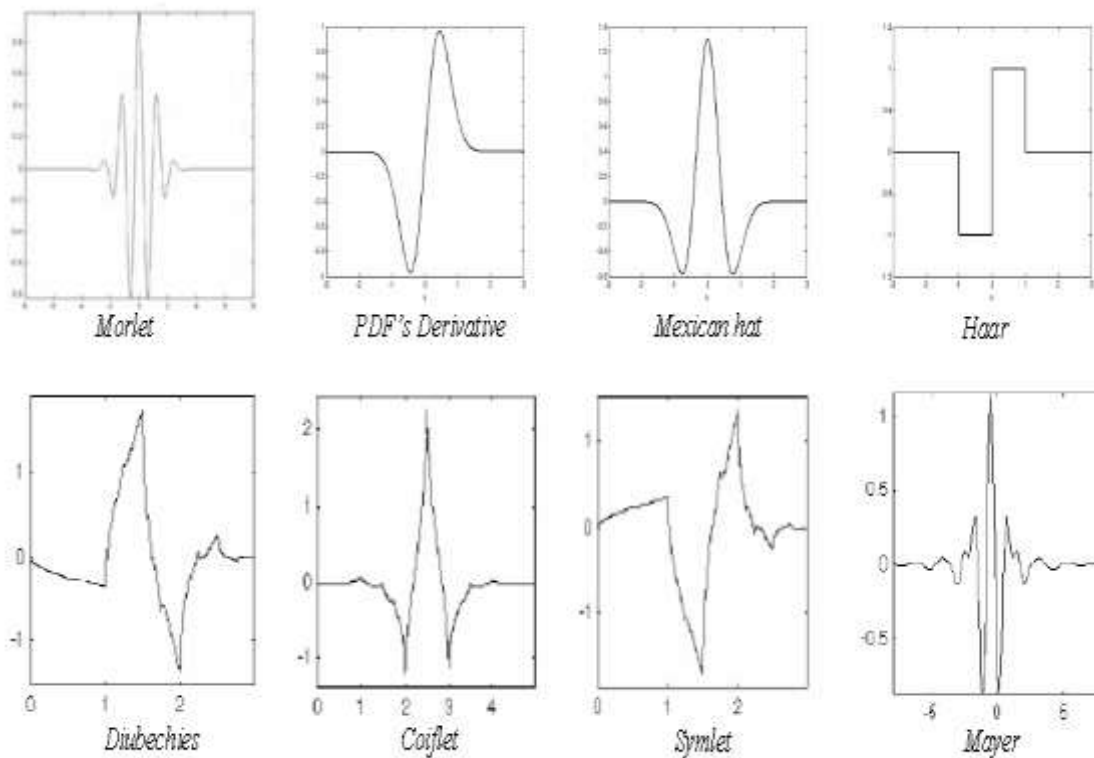
ولی اگر

$$\langle \phi_{j,k}, \phi_{l,m} \rangle = 0 \quad j \neq l \quad (۱۶-۲)$$

موجک ϕ موجک شبه متعامد نامیده می شود.

موجک‌هایی که به طور وسیع در پردازش سیگنال مورد استفاده قرار می گیرند، موجک‌های متعامد هستند.

در کاربردهای مذکور بر خلاف روش‌های حل معادلات انتگرال خود موجک هیچ گاه ساخته نمی شود و توابع مقیاس و ضرایب بسط موجک مورد نیاز هستند. در شکل (۲-۲) نمودار تعدادی از توابع موجک رسم شده است.



شکل (۲-۲): نمودار تعدادی از توابع هار (موجک مادر) [18]

مثال: تابع هار^۱ یک تابع متعامد است و در معادله زیر صدق کند.

$$\phi(x) = \phi(2x) + \phi(2x - 1) \quad (17-2)$$

زیرا برای $k \neq 0$ محمول توابع $\phi(x)$ و $\phi(x - k)$ تنها یک نقطه مشترک می توانند داشته باشند.

مثال: تابع کلاهی^۲ به صورت زیر تعریف می شود

$$\phi(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-x & 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (18-2)$$

$\phi(x)$ در معادله مقیاس زیر صدق می کند

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\phi(2x+1) + \phi(2x) + \frac{1}{2}\phi(2x-1) \quad (19-2)$$

که یک تابع متعامد نمی باشد.

تعریف: اگر ثابت هائی مانند A, B موجود باشند که $0 < A \leq B$ به طوری که برای هر دنباله

$\{c_k\} \in L^2$ داشته باشیم

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \|\sum_k c_k^* \phi(x-k)\|_2^2 \leq B \sum_k |c_k|^2 \quad (20-2)$$

آن گاه تابع مقیاس $\phi \in L^2$ دارای انتقال پایدار است.

با فرض $A = B = 1$ اگر تابع ϕ متعامد باشد، پایدار نیز خواهد بود [18].

تعریف: دنباله $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ از زیر فضاهای L^2 را یک تقریب چندریزی $L^2(R)$ می نامیم هر گاه

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots$$

و دارای خواص زیر نیز باشد

۱. $U_n V_n$ در $L^2(R)$ چگال است.

۲. $U_n V_n = \{0\}$

۳. $f(x) \in v_n \leftrightarrow f(2x) \in v_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

۴. $f(x) \in v_n \leftrightarrow f(x - 2^{-n}k) \in v_n \quad \forall n, k \in \mathbb{Z}$

۵. تابعی مانند $\phi \in L^2$ وجود دارد به طوری که $\{\phi(x-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ تشکیل یک پایه

پایدار برای V_0 می دهد.

این تابع پایه ای ϕ را تابع مقیاس می نامند. MRA را متعامد گویند اگر ϕ متعامد باشد. ویژگیهای

اول و دوم نشان می دهند که $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ یک دنباله تو در تو از زیر فضاهایی است که $L^2(R)$ را می

پوشاند. یعنی اینکه هر تابع به طور مربعی انتگرال پذیر می تواند به هر اندازه دلخواه با تابعی که متعلق

به حداقل یکی از زیر فضاهای $\{V_n\}$ است، تقریب زده شود. ویژگی سوم بیان می کند که زیر فضاهای

فوق می توانند از طریق تظریف با توانهایی از ۲ از یکدیگر مشتق شوند. همچنین ویژگی مذکور یک

1 Haar function

2 Hat function

تفسیر شهودی از ویژگیهای دنباله $\{V_n\}$ را ارائه می دهد. بعنوان مثال تابع $f(2x)$ ویژگیهای ظریف تری نسبت به $f(x)$ را داراست بنابراین دنباله فوق به زیر فضای بالاتری متعلق است.

تصویر متعامد یک تابع دلخواه $f \in L^2$ روی V_n به صورت زیر معرفی می شود

$$P_n f = \sum_k \langle f, \phi_{n,k} \rangle \phi_{n,k} \quad (21-2)$$

می گوییم که توابع در V_n دارای مقیاس 2^{-n} هستند و $P_n f$ را تقریبی از f در مقیاس 2^{-n} گوییم. لم: به ازای هر $f \in L^2$ وقتی که $n \rightarrow \infty$ آنگاه $P_n f \rightarrow f$ در L^2 [18].

تعریف: تابع مقیاس ϕ دارای مرتبه تقریب q است اگر

$$\|f - p_n f\| = O(2^{-nq}) \quad (22-2)$$

تعریف: چند موجکها تعمیمی از موجکها هستند، که تابع مقیاس آن به صورت تابع برداری زیر نشان داده می شود

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_r(x) \end{pmatrix} \quad (23-2)$$

معادله مقیاس نظیر تابع چند مقیاس¹ $\phi(x)$ به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi(x) = \sqrt{m} \sum_{k_0}^{k_1} H_k \phi(mx - k), \quad k \in Z \quad (24-2)$$

که در آن $m \geq 2$ را فاکتور تأخیر می نامند و ضرایب H_k ماتریس های $r \times r$ می باشند.

تابع مقیاس برداری را متعامد گویند هرگاه

$$\langle \phi(x), \phi(x - k) \rangle = \int_R \phi(x) \phi(x - k)^* dx = \delta_{0,k}, I \quad (25-2)$$

این ضرب داخلی یک ماتریس $r \times r$ است.

چند موجک ها نسبت به موجک ها دارای مزایایی هستند. از جمله می توان به کوچک بودن محمل، همواری و مرتبه تقریب بالا، متقارن و متعامد بودن آن ها اشاره کرد.

۵-۲ توابع هار

موجک هار رده ای خاص از توابع است که به عنوان اولین موجک شناخته می شود. این رده از موجک ها اولین بار توسط آلفرد هار، ریاضیدان مجارستانی در سال ۱۹۰۹ پیشنهاد شد. موجک هار ساده ترین موجک ممکن می باشد. مشکل این موجک این است که پیوسته نیست و در نتیجه مشتق پذیر نمی باشد. تابع مقیاس $\phi_0(t)$ برای توابع هار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\phi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (26-2)$$

همچنین $\psi(t)$ را موج مادر می نامند، و به صورت زیر تعریف می شود.

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (27-2)$$

مابقی توابع هار با در نظر گرفتن دو عملگر انتقال و تاخیر از موج مادر طبق معادله زیر تولید می شود.

$$\psi_{n,k}(t) = \left\{ 2^{\frac{n}{2}} \psi(2^n t - k) \right\}, \quad n, k \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{Z} \quad (28-2)$$

از آن جایی که موجک های هار متعامد هستند، بنابراین داریم

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(2^{n_1} t - k_1) \psi(2^{n_2} t - k_2) dt = \delta_{n_1, n_2} \delta_{k_1, k_2} \quad (29-2)$$

۲-۶ توابع هار گویا

مجموعه متعامد از موجک های هار، گروهی از موجک های مربعی با $-2^{\frac{i}{2}}, +2^{\frac{i}{2}}$ برای $i = 0, 1, \dots$ هستند. لینچ^۱ [20] و ریز^۲ [21, 22] برای اولین بار، از موجک های گویا، با حذف ضرایب توان های دو از ابتدای موجک های هار، استفاده نمودند. این تغییرات موجب ظهور و استفاده از نوع جدیدی از موجک ها بنام موجک های هار گویا^۳ گردید.

تبدیلات توابع هار گویا تمام ویژگی های تبدیلات هار اصلی را دارا بوده و می توانند به طور موثر و کارآمدتری در مسائل کاربردی مورد استفاده قرار گیرند. موجک های توابع هار گویا تنها دارای سه دامنه نوسان $+1$ و -1 و 0 می باشند. از این رو کار کردن با این موجک ها بسیار ساده می باشد.

تعریف: توابع هار گویای $h_l(t)$ برای هر $l = 1, 2, \dots$ که $l = 2^i + j$ ، با $i = 0, 1, \dots$ و $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ به صورت $h_l(t) = RH(2^i t - j)|_{[0,1]}$ تعریف می شود.

$$RH(2^i t - j) = \begin{cases} 1, & j2^{-i} \leq t < (j + \frac{1}{2})2^{-i} \\ -1, & (j + \frac{1}{2})2^{-i} \leq t < (j + 1)2^{-i} \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (30-2)$$

برای عدد صحیح $i = 0, 1, \dots$ ، 2^i نشان دهنده ی عرض موجک و $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ پارامتر انتقال می باشد.

گزاره: در توابع RH برای هر $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ خاصیت ضرب پذیری برای هر $0 < l < q$ ، عبارتست از:

1 Lynch

2 Reis

3 Rationalized Haar (RH) wavelet

- ۱- اگر $l = 0$ باشد آن گاه $h_l(t)h_q(t) = h_q(t)$
 ۲- اگر h_q در نیمه مثبت موج h_l قرار گیرد آن گاه $h_l(t)h_q(t) = h_q(t)$
 ۳- اگر h_q در نیمه منفی موج h_l قرار گیرد آن گاه $h_l(t)h_q(t) = -h_q(t)$
 لم: دنباله $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک مجموعه متعامد کامل در فضای $L^2[0,1]$ است [23].

تعریف: اگر $i \in Z^+ \cup \{0\}$ و $j = 0, 1, \dots, 2^i - 1$ در این صورت خاصیت تعامدی به صورت زیر تعریف می گردد.

$$\langle h_l(t), h_q(t) \rangle = \int_0^1 h_l(s) h_q(s) ds = \begin{cases} 2^{-i}, & l = q = 2^i + j \\ 1, & l = q = 0 \\ 0, & l \neq q \end{cases} \quad (31-2)$$

لم: [23] اگر $f(t) \in C[0,1]$ باشد، آنگاه سری

$$\sum_n 2^i \langle f(t), h_n(t) \rangle h_n(t) \quad (32-2)$$

به صورت یکنواخت همگرا به $f(t)$ که در آن

$$\langle f(t), h_l(t) \rangle = \int_0^1 f(s) h_l(s) ds \quad (33-2)$$

اگر تابع $f(t) \in L^2([0,1])$ و بردارهای C و $H_m(t)$ به صورت زیر

$$C = [c_0, c_1, \dots, c_{m-1}]^T \quad (34-2)$$

و

$$H_m(t) = [h_0(t), h_1(t), \dots, h_{m-1}(t)]^T \quad (35-2)$$

تعریف شوند، آنگاه تابع $f(t)$ را می توان به صورت تعداد متناهی جمله از توابع RH به صورت زیر تقریب زد.

$$f(t) \cong \sum_{l=0}^{m-1} c_l h_l(t) = C^T H_m(t) \quad (36-2)$$

که در آن $m = 2^{\alpha+1}$ و $\alpha = 0, 1, \dots$ و c_l ضرایب توابع RH به صورت زیر محاسبه می شود.

$$c_l = \frac{\langle f(t), h_l(t) \rangle}{\langle h_l(t), h_l(t) \rangle} \quad (37-2)$$

تعریف: اگر $h_l(t)$ یک موجک هار گویا باشد در این صورت انتگرال آن عبارت است از

$$\int_0^1 h_l(s) ds = \begin{cases} 1, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases} \quad (38-2)$$

بنابراین با استفاده از تعریف $H_m(t)$ داریم

$$\int_0^1 H_m(s) ds = V_m \quad (39-2)$$

و

$$\int_0^t H_m(s) ds = P H_m(t) \quad (40-2)$$

که در آن $V_m = [1,0,0, \dots, 0]$ و

$$P = P_{m \times m} = \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} 2mP_{\frac{m}{2} \times \frac{m}{2}} & -\phi_{\frac{m}{2}} \\ \phi_{\frac{m}{2}}^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (41-2)$$

و

$$\phi_m = \left[H_m \left(\frac{1}{2m} \right), H_m \left(\frac{3}{2m} \right), \dots, H_m \left(\frac{2m-1}{2m} \right) \right] \quad (42-2)$$

که در آن

$$\phi_1 = [1] \quad , \quad P_{1 \times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (43-2)$$

و

$$D_{m \times m} = \text{diag} \left(1, 1, 2, 2, 2^2, \dots, 2^2, \dots, \frac{m}{2}, \dots, \frac{m}{2} \right) \quad (44-2)$$

بنابراین معکوس ϕ_m عبارت است از

$$\phi_m^{-1} = \left(\frac{1}{m} \right) \phi_m^T D_{m \times m} \quad (45-2)$$

هر تابع دلخواهی مانند $y(t)$ را که

$$\int_0^1 y^2(t) dt < \infty \quad (46-2)$$

باشد را می توان بر حسب موجک های هار به صورت زیر بسط داد [24,25].

$$y(t) = c_0 h_0(t) + c_1 h_1(t) + c_2 h_2(t) + \dots \quad (47-2)$$

که در آن

$$c_i = \int_0^1 y(t) h_i(t) dt \quad (48-2)$$

۷-۲ حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک هار

در آنالیز عددی، حل معادله دیفرانسیل معمولی و جزئی معمولاً پیچیده و خسته کننده می باشد و همچنین روش اجرایی آن بسیار آهسته صورت می پذیرد. معمولاً در حل معادلات مربوط به رشته های مهندسی روش اجرایی سریع مد نظر می باشد. یک روش ساده و سریع محاسباتی در حل معادلات مربوطه، استفاده از موجک می باشد.

آنالیز موجک محاسبات طولانی را کوتاه تر و همچنین محاسبات را بوسیله دستور و فرمانهای نرم افزاری انجام می دهد، که کمک شایانی در حل معادلات مربوطه خواهد داشت.

می دانید که تبدیل موجک یا آنالیز موجک در چند سال اخیر وسیله بسیار موثری در حل معادلات دیفرانسیل های معمولی و خطی بوده به طوری که علاوه بر حل معادلات تبدیل موجک در پردازش تصویر، فشردن سازی اطلاعات، حذف نویز و ... پیشرفت های چشمگیری داشته است.

در حل معادله دیفرانسیل با استفاده از روش های موجک افرادی به نام چن و هیسو ماتریس عملگری از پایه های انتگرال را روی موجک ها پیدا کردند و توانستند معادلات دیفرانسیل مورد بررسی را حل کنند.

معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتر توسط لپیک حل شد و علاوه بر آن لپیک از تبدیل موجک ها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی غیر خطی استفاده کرد.

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 0.5 \\ -1 & 0.5 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (49-2)$$

تبدیل موجک ها توسط تابع پله ای $\psi(x)$ به صورت زیر تعریف می شود.

که به این موجک، موجک مادر گفته می شود.

مابقی توابع ها با در نظر گرفتن دو عملگر انتقال و تاخیر از موج مادر طبق معادله زیر تولید می شود.

$$\psi(x) = \psi(2^i x + k) \quad (50-2)$$

$$\begin{cases} \psi(x) = \psi(x + k) & \text{جابجایی یا انتقال} \\ \psi(x) = \psi(2^i x) & \text{مقیاس یا اتساع} \end{cases} \quad (51-2)$$

این دو ویژگی برجسته موجک ها در حل معادلات دیفرانسیل بسیار موثر هستند.

برای حل یک معادله دیفرانسیل خطی با استفاده موجک ها خواهیم داشت.

$$A_1 y^{(n)}(x) + A_2 y^{(n-1)}(x) + \dots + A_n y^1(x) = f(x) \quad (52-2)$$

که $x \in [A, B]$ و با شرایط اولیه مشخص $y^1(A)$ و $y^{(n-2)}(A)$ و $y^{(n-1)}(A)$ داریم $m = 2(2^j)$ و بازه $[A, B]$ را به m زیر بازه تقسیم می کنیم. به طوری که $\Delta x = \frac{B-A}{m}$ و ابعاد ماتریس $m \times m$ خواهد بود [26].

با توجه به مقدمات و تعاریف ذکر شده در این فصل، در مرجع [26] چند گام زیر برای حل معادلات دیفرانسیل بیان شده که این الگوریتم یکی از مبانی حل معادله موضوع این پایان نامه می باشد. این گام ها عبارتند از:

گام ۱: فرض کنید

$$y^{(n)}(x) = \sum_{i=1}^m a_i h_i(x) \quad (53-2)$$

که h ماتریس ها و a_i ضرایب موجک ها می باشند.

ماتریس h برای میزان $j=2$ به صورت زیر می باشد.

$$y''(x) = \sum_{i=1}^m a_i h_i(x)$$

گام ۲:

$$y^{(v)}(x) = \sum_{i=1}^m a_i P_{2,i}(x) + \sum_{\sigma=0}^{2-0-1} \frac{1}{\sigma!} (x-0)^\sigma y_0^\sigma = \sum_{i=1}^m a_i P_{2,i}(x) + 1 + x$$

گام ۳:

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) &= \sin x + x \cos x \\ \sum_{i=1}^m a_i h_i(x) + \sum_{i=1}^m a_i P_{2,i}(x) + 1 + x &= \sin x + x \cos x \\ \sum_{i=1}^m a_i [h_i(x) + P_{2,i}(x)] &= \sin x + x \cos x - 1 - x \end{aligned}$$

ماتریس P به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3^1 & 5^2 & 7^3 & 9^4 & 11^5 & 13^6 & 15^7 & 17^8 & 19^9 & 21^{10} & 23^{11} & 25^{12} & 27^{13} & 29^{14} & 31^{15} \\ 1 & 3^2 & 5^3 & 7^4 & 9^5 & 11^6 & 13^7 & 15^8 & 287 & 343 & 391 & 431 & 463 & 487 & 503 & 511 \\ 1 & 3^3 & 5^4 & 7^5 & 79 & 103 & 119 & 127 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 3^3 & 5^4 & 7^5 & 79 & 103 & 119 & 127 \\ 1 & 3^4 & 23 & 31 & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 & & & & \\ \frac{1}{2!} \frac{1}{32^2} & 1 & 7 & & & & & & & & & & 1 & 3^2 & 23 & 31 \\ & & 1 & 7 & & & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & 7 & & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & 7 & & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & 7 & & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 7 & & & & & & & & \\ & & & & & & & 1 & 7 & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & 7 & & & & & & \\ & & & & & & & & & 1 & 7 & & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & 7 & & & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & 7 & & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & 7 & & \\ & & & & & & & & & & & & & 1 & 7 & \end{pmatrix}$$

گام ۴: محاسبه کردن مولفه a_i

گام ۵: به دست آوردن حل عددی برای $y(x)$

تعدادی از نتایج حاصل به شرح زیر می باشد.

$x(/32)$	حل با آنالیز موجک	حل دقیق	میزان خطا
1	1.030777	1.030767	0.000010
3	1.089527	1.089496	0.000031
5	1.144880	1.144700	0.000180
31	1.663308	1.652763	0.010545

مثال ۲: مطلوبست حل معادله دیفرانسیل زیر به ازای $j=3$.

$$y^{(4)}(x) + xy(x) = 16 \sin 2x + x \sin 2x$$

$$x \in [0,1] \quad , \quad y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 2 \quad , \quad y''(0) = 0 \quad , \quad y'''(0) = -8$$

حل:

از گام های ۱ تا ۳ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^m a_i [h_i(x) + xP_{4,i}(x)] = 16 \sin 2x + x \sin 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^4$$

نتایج حاصل بعد از گام های ۴ و ۵ به شرح زیر می باشد:

$x(/32)$	حل با آنالیز موجک	حل دقیق	میزان خطا
1	0.062459	0.062459	0.000000
3	0.186405	0.186403	0.000002
5	0.307463	0.307439	0.000024
31	1.010991	0.933514	0.077477

فصل ۳

حل معادله تحکیم با استفاده
از موجک هار

۳-۱ حل معادله

در ابتدا بعضی معادلات و تعریف های ذکر شده در مورد موجک هار یادآوری می شود.

$$h_i(x) = \begin{cases} 1 & \alpha \leq x < \beta \\ -1 & \beta \leq x < \gamma \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱-۳)$$

که $\alpha = \frac{k}{m}$ و $\beta = \frac{k+0.5}{m}$ و $\gamma = \frac{k+1}{m}$. عدد صحیح $m = 2^j$ ، $(j = 0, 1, 2, 3, \dots, J)$ درجه موجک را نشان می دهد و $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m-1$ پارامتر انتقال می باشد. ماکزیمم درجه دقت J میباشد. اندیس i با استفاده از فرمول زیر محاسبه می شود.

$$i = m + k + 1$$

در این خصوص کمترین مقدار $i = 2$ به ازای $m = 1$ و $k = 0$ به دست می آید. و بیشترین مقدار $i = 2M$ به ازای $M = 2^J$ به دست می آید. از آن چه که گفته شد میزان $i = 1$ متناسب است با سنجش تابع در بازه $[0, 1]$.

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۲-۳)$$

حالا مجموعه نقاط $x_l = \frac{(l-0.5)}{2M}$ را تعریف می کنیم به طوری که $l = 1, 2, 3, \dots, 2M$. داریم:

$$h_1(x) = [1, 1, 1, 1] \quad (۳-۳)$$

$$h_2(x) = [1, 1, -1, -1] \quad (۴-۳)$$

$$h_3(x) = [1, -1, 0, 0] \quad (۵-۳)$$

$$h_4(x) = [0, 0, 1, -1] \quad (۶-۳)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$H_4(x) = [h_1(x), h_2(x), h_3(x), h_4(x)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (۷-۳)$$

$H_4(x)$ را ماتریس ضرایب هار می نامند. که یک ماتریس مربعی مرتبه ۴ می باشد و تعریف می کنیم $H(i, l) = (h_i(x_l))$ که دارای ابعاد $2M \times 2M$ می باشد. حالا معادله انتگرالی رابطه $h_i(x)$ را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$q_i(x) = \int_0^x h_i(t) dt \quad (۸-۳)$$

در مجموعه نقاط، معادله $q_i(x)$ از رابطه $Q(i, l) = q_i(x_l)$ حاصل می شود که Q یک ماتریس $2M \times 2M$ می باشد.

حالا خواهیم داشت:

$$Q_n = P_n H_n \quad (9-3)$$

که به ترتیب P_n و H_n را انتگرال و ماتریس ضرایب هار می نامیم. عملگر ماتریس انتگرال P که یک ماتریس مربعی $2M$ می باشد را به صورت زیر می توان تعریف نمود.

$$P_{i,1}(x) = \int_0^x h_i(t) dt \quad (10-3)$$

$$P_{i,n+1}(x) = \int_0^x P_{i,n}(t) dt \quad (11-3)$$

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots$$

این انتگرال ها را با استفاده از رابطه $h_i(x)$ و برای ۴ تای اول بازنویسی می کنیم.

$$P_{i,1}(x) = \begin{cases} x - \alpha & x \in [\alpha, \beta) \\ \gamma - x & x \in [\beta, \gamma) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (12-3)$$

$$P_{i,2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 & x \in [\alpha, \beta) \\ \frac{1}{4m^2} - \frac{1}{2}(\gamma - x)^2 & x \in [\beta, \gamma) \\ \frac{1}{4m^2} & x \in [\gamma, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (13-3)$$

$$P_{i,3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x - \alpha)^3 & x \in [\alpha, \beta) \\ \frac{1}{4m^2}(x - \beta) - \frac{1}{6}(\gamma - x)^3 & x \in [\beta, \gamma) \\ \frac{1}{4m^2}(x - \beta) & x \in [\gamma, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (14-3)$$

$$P_{i,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}(x - \alpha)^4 & x \in [\alpha, \beta) \\ \frac{1}{8m^2}(x - \beta)^2 - \frac{1}{24}(\gamma - x)^4 + \frac{1}{192m^4} & x \in [\beta, \gamma) \\ \frac{1}{8m^2}(x - \beta)^2 + \frac{1}{192m^4} & x \in [\gamma, 1) \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (15-3)$$

ما میدانیم که تمام موجک های هار با یکدیگر متعامد هستند.

$$\int_0^1 h_i(x)h_l(x)dx = \begin{cases} 2^{-j}, & i = l = 2^i + k \\ 0, & i \neq l \end{cases} \quad (۱۶-۳)$$

بنابراین ساختار آنها تحت انتقال پایا است. هر معادله انتگرال پذیر $y(x)$ در فاصله $[0,1]$ می تواند بوسیله سری های هار بسط داده شود.

$$y(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i(x) \quad (۱۷-۳)$$

ضرایب c_i را به صورت زیر می توان تعیین نمود:

$$c_0 = \int_0^1 y(x)h_0(x)dx \quad (۱۸-۳)$$

$$c_i = 2^j \int_0^1 y(x)h_i(x)dx \quad (۱۹-۳)$$

که $x \in [0,1]$, $0 \leq k < 2^j$, $j \geq 0$, $i = 2^j + k$ به طوری که میزان خطا از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\varepsilon = \int_0^1 [y(x) - \sum_{i=1}^m c_i h_i(x)]^2 dx \quad (۲۰-۳)$$

به طوری که $m = 2^j$ و $j = 0,1,2, \dots$ ، معمولاً بسط سری های $y(x)$ شامل یک سری جملات نامتناهی است. اگر $y(x)$ تکه ای ثابت باشد.

$$y(x) \cong \sum_{i=1}^m c_i h_i(x) = c_m^T h_m(x) \quad (۲۱-۳)$$

به طوری که ضرایب c_m^T و بردارهای تابع هار $h_m(x)$ به صورت زیر تعریف می شوند.

$$c_m^T = [c_1, c_2, c_3, \dots, c_m] \quad (۲۲-۳)$$

$$h_m(x) = [h_1(x), h_2(x), h_3(x), \dots, h_m(x)]^T \quad (۲۳-۳)$$

که T ترنسپوز می باشد.

با توجه به نکات بیان شده حل معادله به صورت زیر می باشد:

$$u(x,0) = f_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,0) = f_1(x) \quad \text{و شرایط مرزی} \quad u(0,t) = g_0(t), \quad u(1,t) = g_1(t) \quad \text{می باشد.}$$

داریم:

$$\ddot{u}''(x,t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x), \quad t \in (t_s, t_{s+1}) \quad (۲۴-۳)$$

از معادله بالا انتگرال گیری می کنیم، در ابتدا دو بار بر حسب t از t_s تا t_s و دو بار بر حسب x از 0 تا x .

$$\dot{u}''(x,t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + \dot{u}''(x, t_s) \quad (۲۵-۳)$$

$$u''(x,t) = \frac{1}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x) + (t - t_s) \dot{u}''(x, t_s) + u''(x, t_s) \quad (۲۶-۳)$$

$$u'(x, t) = \frac{1}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i p_{1,i}(x) + (t - t_s)[\dot{u}'(x, t_s) + \dot{u}'(0, t_s)] + u'(x, t_s) - u'(0, t_s) + u'(0, t) \quad (۲۷-۳)$$

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x) + (t - t_s)[\dot{u}(x, t_s) - \dot{u}(0, t_s) - x\dot{u}'(0, t_s)] + u(x, t_s) - u(0, t_s) + x[u'(0, t) - u'(0, t_s)] + u(0, t) \quad (۲۸-۳)$$

با دو بار مشتق گیری از رابطه فوق بر حسب t خواهیم داشت:

$$\dot{u}(x, t) = (t - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x) + \dot{u}(x, t_s) + \dot{u}(0, t) - \dot{u}(0, t_s) + x[\dot{u}'(0, t) - \dot{u}'(0, t_s)] \quad (۲۹-۳)$$

$$\ddot{u}(x, t) = \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x) + \ddot{u}(0, t) + x[\ddot{u}'(0, t)] \quad (۳۰-۳)$$

با توجه به شرایط مرزی و اولیه خواهیم داشت:

$$u(x, 0) = f_0(x), u'(x, 0) = f_1(x), u(0, t) = g_0(t), u(1, t) = g_1(t)$$

$$u(0, t_s) = g_0(t_s), u(1, t_s) = g_1(t_s), \dot{u}(0, t) = \dot{g}_0(t), \dot{u}(1, t) = \dot{g}_1(t)$$

$$\ddot{u}(0, t) = \ddot{g}_0(t), \ddot{u}(1, t) = \ddot{g}_1(t), \ddot{u}(0, t_s) = \ddot{g}_0(t_s), \ddot{u}(1, t_s) = \ddot{g}_1(t_s)$$

به ازای $x = 1$ در فرمول های $u(x, t)$ ، $\dot{u}(x, t)$ و $\ddot{u}(x, t)$ و با استفاده از شرایط بالا خواهیم داشت:

$$u'(0, t) - u'(0, t_s) = -\frac{1}{2} (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - (t - t_s)[\dot{g}_1(t_s) - \dot{g}_0(t_s) - \dot{u}'(0, t_s)] + g_1(t) - g_0(t) + g_0(t_s) - g_1(t_s) \quad (۳۱-۳)$$

$$\dot{u}'(0, t) - \dot{u}'(0, t_s) = g_1(t) - g_0(t) + g_0(t_s) - g_1(t_s) - (t - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) \quad (۳۲-۳)$$

$$\ddot{u}'(0, t) = -\sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - \ddot{g}_0(t) + \ddot{g}_1(t) \quad (۳۳-۳)$$

حال با جایگذاری سه معادله به دست آمده در معادلات قبلی و به ازای $x \rightarrow x_l$ و $t \rightarrow t_{s+1}$ خواهیم داشت.

$$u''(x_l, t_{s+1}) = \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(x_l) + (t_{s+1} - t_s) \dot{u}''(x_l, t_s) + u''(x_l, t_s) \quad (34-3)$$

$$u'(x_l, t_{s+1}) = \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{1,i}(x_l) + (t_{s+1} - t_s) \dot{u}'(x_l, t_s) + u'(x_l, t_s) - \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - (t_{s+1} - t_s)[\dot{g}_1(t_s) - \dot{g}_0(t_s)] + g_1(t_{s+1}) - g_1(t_s) + g_0(t_s) - g_0(t_{s+1}) \quad (35-3)$$

$$u(x_l, t_{s+1}) = \frac{1}{2}(t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x_l) + (t_{s+1} - t_s)[\dot{u}(x_l, t_s) - \dot{g}_0(t_s)] - x_l[g_1(t_s) - g_0(t_s) + g_0(t_{s+1}) - g_1(t_{s+1})] + g_0(t_{s+1}) \quad (36-3)$$

$$\dot{u}(x_l, t_{s+1}) = (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(x_l) + \dot{u}(x_l, t_s) - \dot{g}_0(t_s) - x_l[\dot{g}_1(t_s) - \dot{g}_0(t_s)] - x_l(t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - x_l[\dot{g}_0(t_{s+1}) - \dot{g}_1(t_{s+1})] + \dot{g}_0(t_{s+1}) \quad (37-3)$$

$$\ddot{u}(x_l, t_{s+1}) = \sum_{i=1}^{2M} a_i [P_{2,i}(x_l) - x_l P_{2,i}(1)] - x_l[\ddot{g}_0(t_{s+1}) - \ddot{g}_1(t_{s+1})] + \ddot{g}_0(t_{s+1}) \quad (38-3)$$

ما می دانیم که:

$$P_{2,i}(1) = \begin{cases} 0.5 & , \quad i = 1 \\ \frac{1}{4m^2} & , \quad i > 1 \end{cases} \quad (39-3)$$

و در نهایت روابط به دست آمده را در معادله اصلی جایگذاری و با استفاده از نرم افزارهای مربوطه کد نویسی و حل می نماییم.

مثال: معادله زیر را به ازای $j=4$ و $c=3$ و $\Delta t = 0.00001$ حل می نماییم.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad t > 0$$

شرایط اولیه:

$$u(x, 0) = u_0 \sin(\pi x) \quad , \quad \dot{u}(x, 0) = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

شرایط مرزی:

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(1, t) = 0 \quad , \quad t > 0$$

حل دقیق:

$$u(x, t) = u_0 \cos(\pi c t) \sin(\pi x)$$

نتایج حل با آنالیز موجک:

$$u(x_l, 0) = u_0 \sin(\pi x_l), u''(x_l, 0) = -\pi^2 u_0 \sin(\pi x_l), \dot{u}''(x_l, 0) = 0, \\ \dot{u}(x_l) = 0$$

برای $t=0.2$ و $u_0 = 1$ خواهیم داشت:

$xl/64$	حل با آنالیز موجک	حل دقیق
1	-1.515e-002	-1.516e-002
3	-4.531e-002	-4.534e-002
5	-7.503e-002	-7.509e-002
63	-1.515e-002	-1.516e-002

۲-۳ نتیجه گیری

شکل کلی معادله تحکیم به صورت زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_V \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

معادله را به صورت زیر بازنویسی می نماییم:

$$\dot{u}(z_l, t_{s+1}) = C_V u''(z_l, t_{s+1})$$

با جایگذاری روابط به دست آمده در معادله بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(z_l) + \dot{u}(z_l, t_s) - \dot{g}_0(t_s) - z_l[\dot{g}_1(t_s) - \dot{g}_0(t_s)] \\ - z_l(t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) - z_l[\dot{g}_0(t_{s+1}) - \dot{g}_1(t_{s+1})] + \dot{g}_0(t_{s+1}) \\ = C_V \left[\frac{1}{2} (t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(z_l) + (t_{s+1} - t_s) \dot{u}''(z_l, t_s) \right. \\ \left. + u''(z_l, t_s) \right] \end{aligned}$$

۳-۲-۱ حل مسئله نمونه با استفاده از روش آنالیز موجک

حال مثال بخش ۱-۱۰ را با استفاده از روش موجک هار حل می نماییم.

با فرض وجود لایه ماسه نفوذپذیر از بالا و پایین لایه رس خواهیم داشت:

$$\dot{g}_1(t_{s+1}) = 0 \text{ و } \dot{g}_0(t_{s+1}) = 0 \text{ و } \dot{g}_0(t_s) = 0 \text{ و } \dot{g}_1(t_s) = 0$$

$$\begin{aligned} (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(z_l) + \dot{u}(z_l, t_s) - z_l(t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) \\ = C_V \left[\frac{1}{2} (t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(z_l) + (t_{s+1} - t_s) \dot{u}''(z_l, t_s) \right. \\ \left. + u''(z_l, t_s) \right] \end{aligned}$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} (t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(z_l) - z_l(t_{s+1} - t_s) \sum_{i=1}^{2M} a_i P_{2,i}(1) \\ - C_V \left[\frac{1}{2} (t_{s+1} - t_s)^2 \sum_{i=1}^{2M} a_i h_i(z_l) \right] \\ = C_V [(t_{s+1} - t_s) \dot{u}''(z_l, t_s) + u''(z_l, t_s)] - \dot{u}(z_l, t_s) \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} (t_{s+1} - t_s) \left(\sum_{i=1}^{2M} a_i \left(P_{2,i}(z_l) - z_l P_{2,i}(1) - C_V \left[\frac{1}{2} (t_{s+1} - t_s) h_i(z_l) \right] \right) \right) \\ = C_V [(t_{s+1} - t_s) \dot{u}''(z_l, t_s) + u''(z_l, t_s)] - \dot{u}(z_l, t_s) \end{aligned}$$

نتایج حاصله به ازای $j = 1$ به صورت زیر می باشد.

نتایج حاصل در زمان $t = 5day$

$z(m)$	0	2	4	6	8
$U(\frac{KN}{m^2})$	0	84.18	118.327	84.22	0

نتایج مثال حل شده در فصول اول و سوم بخش های ۱-۱۰ و ۳-۲-۱ که یکی با روش حل عددی و

دیگری آنالیز موجکی حل شده است را در جدول ذیل مقایسه می نماییم.

$z(m)$	موجک هار $U(\frac{KN}{m^2})$	حل عددی $U(\frac{KN}{m^2})$	میزان خطا
0	0	0	0
2	84.18	84.20	0.0119
4	118.327	118.313	0.0146
6	84.22	84.20	0.0185
8	0	0	0

با توجه به داده های بالا مشاهده می کنیم که میزان خطا در حد قابل قبولی می باشد. می توان از روش آنالیز موجک برای حل معادله تحکیم و دیگر معادلات مکانیک خاک استفاده نمود. در پژوهش دیگری همزمان با این پژوهش، حل معادله تراوش با استفاده از آنالیز موجک ها انجام شده است و نتایج حاصله از آن نیز قابل قبول می باشد.

از جمله مزایای حل معادلات با آنالیز موجک، استفاده از محاسبات ماتریسی در تعیین جوابهای عددی می باشد، که موجب افزایش دقت و سرعت محاسبات می شود. کاهش حجم محاسبات و ارائه زمان اجرا از مزایای این روش محسوب می شود. با افزایش میزان رزولیشن (J) می توان تعداد بیشتری از داده ها را در فاصله نزدیک تر به دست آورد، به طوری که به ازای $J=3$ ماتریس مورد نظر تبدیل به یک ماتریس 16×16 می شود و مشخصا تعداد جواب ها نیز افزایش می یابد. اما باید این نکته را در نظر گرفت که با افزایش رزولیشن و در پی آن افزایش درایه های ماتریس، حل معادله ماتریسی مربوطه مشکل می گردد.

۲-۲-۳ پیشنهادات

در این پژوهش سعی شده است معادله تحکیم خاک با فرض های اولیه ساده با استفاده از روش موجک ها حل گردد. تحقیق حاضر شروعی بر حل معادلات با شرایط مرزی پیچیده تر در رابطه با مکانیک خاک و پی می باشد. پیشنهاد می گردد که پژوهشگران با استفاده از فرض های پیچیده تر سعی نمایند معادله تحکیم خاک و یا دیگر معادلات مکانیک خاک را با استفاده از این روش حل نمایند.

Contraction	انقباضی
Compact	فشرده
Cauchy principal value	مقدار اصلی کوشی
Convex	محدب
Compact support	محمل فشرده
Cauchy type	نوع کوشی
Countinuous mapping	نگاشت پیوسته
difference kernel	هسته تفاضلی
Function Space	فضای تابع
Fast decomposition	گسسته سازی سریع
Haar scaling function	تابع مقیاس هار
Haar function	تابع هار
Hat function.....	تابع کلاهی
Hilbert space	فضای هیلبرت
Homogeneous	همگن
Hammerstein	همرشتین
Hermitian kernel	هسته هرمیتی
Kronecker delta	تابع دلتای کرونکر
Kernel	هسته
Lipschitzian	لیپ شیتز
MultiResolution Analysis..	آنالیز چندریزگی
Measure	اندازه
Multiscaling function	چند مقیاس
Method perturbation homotopy	روش هموتوپی HMP
Method of Cosine And Sine wavelets	روش موجک های CAS
Method transformation differential	روش DT
Nonlinear Hammerstein integral Equation	معادله انتگرال غیر خطی همرشتین
Nonhomogeneous	ناهمگن
Normal kernel	هسته نرمال
Orthogonal	متعامد

Ordered	مرتب
Probabilistic	احتمالی
Powerdomain	دامنه توانی
Program Fragment	قطعه برنامه
Reconstruction algorithms	الگوریتم اصلاحی
Riesz Basis	پایه ریس
Rationalized Haar wavelet	موجک های هار گویا
Regular local	موضعی منظم
Stably	پایدار
Scaling function	تابع مقیاس
Schauder Fixed-POint thm.....	قضیه نقطه ثابت شودر
Symmetric kernel.....	هسته متقارن
Support	محمل
Scaling or Refinable equation	معادله مقیاس
Semantic Domain	دامنه معنایی
Singular integral equation	معادله انتگرال منفرد
Volterra integral equation	معادله انتگرال ولترا
Volterra integro-differential equations	معادله انتگرال - دیفرانسیل ولترا
Valuation	ارزیابی
Wavelet Analysis	آنالیز موجک

مراجع:

- [1] Braja M.Das, (2008), "**advanced soil mechanics**", Vol. 1 third edition, Taylor&Francis, New York, P276-372.
- [2] Braja M.Das, (2009), "**principal of geotechnical engineering**", Vol. 1 fifth edition, Thomson, California state university, P 259-310.
- [3] شرفی، حسن و یزدان شمس ملکی، (۱۳۹۲)، "مقایسه ی عددی حل های معادله ی تحکیم یک بعدی ترزاقی به روشهای تفاوت های محدود، اجزاء محدود و تحلیلی در ترسیم منحنی های همزمان ۱ تحکیم"، هفتمین کنگره ملی مهندسی عمران، زاهدان، دانشگاه سیستان و بلوچستان.
- [4] Sepulveda Anon N., (1991) "**Solution of the one-dimensional consolidation theory equation with a pseudospectral method**", Proceedings of the 4th International Symposium on Land Subsidence, p10, Houston, TX, USA.
- [5] عباسی نادر، رحیمی حسن، فاخر علی، (۱۳۸۴) "بررسی رفتار تحکیم پذیری خاک های ریزدانه نرم با استفاده از دستگاه تحکیم هیدرولیکی" مجله تحقیقات مهندسی کشاورزی، شماره ۲۵، دوره ۶: ص ۹۵ تا ۱۱۲.
- [5] S. G. Mallat, (1989), "**Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of** , **Trans.AMS**", Vol. 315, Issue 1 pp. 69-87.
- [6] Y. Meyer, (1992), "**Wavelets and Operators**", Vol. 1 Cambridge University Press.
- [7] A. Grossmann, J. Modet, T. Paul, (1985), "**Transforms associated to square integrable group representations**", 1. General results, J.Math. Phys. 26 (10) (1985) 2473–2479.
- [8] A. Grossmann, J. Modet, T. Paul, (1986), "**Transforms associated to square integrable group representations. 2. Examples**", Ann. Inst. Henri Poincare 45 (3) (1986) 293–309.
- [9] A. Grossmann, M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, (1987), "**Detection of abrupt changes in sound signals with the help of wavelet transforms**", Adv. Electron. Electron Phys. S 19 (1987) 289–306.
- [10] I. Daubechies, (1992), "**Ten Lectures on wavelets**", SIAM, Philadelphia, PA.
- [11] J. P. Antoine, P. Carrette, R. Murenzi, B. Piette, (1993), "**Image analysis with two-dimensional continuous wavelet transform**", Signal Processing Volume 31, Issue 3, April 1993, Pages 241–272.
- [12] W. M. Lawton, (1991), "**Necessary and sufficient conditions for constructing orthogonal wavelet bases**" Journal of Mathematical Physics, Vol. 32, Issue 1 pp. 57-61.
- [13] A. Cohen, (2003), "**Wavelets method in numerical analysis**", Elsevier, Amsterdam.
- [14] A. Cohen, I. Daubechies, J. Feauveau, (1992), "**Biorthogonal bases of compactly supported wavelets**" Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. 45, Issue 5 pp. 485– 560.

[15] Donggao Deng, Guangzhou, Daren Huang, Hangzhou, Rong-Qing Jia, Wei Lin, Guangzhou, and Jianzhong Wang, (2002), "**Wavelet Analysis and Applications**", A co-publication of the AMS and International Press of Boston, Inc.

[16]] Nayebi, K., Sodagar, I., and Barnwell, T.P. (1992), "**The wavelet transform and time-varying tiling of the time-frequency plane**". IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, pp. 147-150.

[17] عرفانیان اورعی م، (۱۳۹۴)، رساله دکتری: "حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از موجک های هار"، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی.

[18]] F. Keinert, (2004), "**Wavelets and Multiwavelets**", Chapman Hall/CRC.

[19] H. L. Resnikoff, R. O. Wells, (1998), "**Wavelet Analysis, The scalable structure of information**" Springer-Verlag.

[20] M. Razzaghi, J. Nazarzadeh, (1999), "Walsh functions" Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering 23 p 429-440.

[21] J. J. Reis, R. T. Lynch, J. Butman, (1976), "**Adaptive Haar transform video bandwidth reduction system for RVPs**", Proceedings of Annual Meeting of Society of Photo-Optic Institute of Engineering (SPIE), SanDiego, CA, (1976) 24-35.

[22] R. T. Lynch, J. J. Reis, (1976), "**Haar transform image condng**" Proceedings of the National Telecommunications Conference, Dallas, TX, p 441-443.

[23] P. Wojtaszczyk, (1997), "**A Mathematical Introduction to Wavelets**", Cambridge University Press.

[24]] STRANG, (1992), "**G.Wavelet transforms versus Fourier transforms**", Research notes, MIT, pp. 1-18.

[25]] STRANG, (1989), "**G.Wavelet and dilation equations a brief introduction**", SIAM Rev., 31, pp. 614-627.

[26]] phang chang, phang piau, (2008), "**Haar Wavelet Matrices Designation in Numerical Solution of Ordinary Differential Equations**" IAENG International Journal of Applied Mathematics, Volume 38 No.3.

[27]] Inderdeep Singh, Sangeeta Arora, Sheo Kumar , (2015), "**NUMERICAL SOLUTION OF WAVE EQUATION USING HAAR WAVELET**" International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 98 No. 4, 457-469.

[28] G. Hariharan and K. Kannan, (2013), "**An Overview of Haar Wavelet Method for Solving Differential and Integral Equations**" World Applied Sciences Journal, Volume 23 No. 1201-14.

[29] بذرافشان مقدم، ا و باقری پور، م، (۱۳۸۷)، رساله دکتری: "آنالیز تاریخیچه زمانی با استفاده از تئوری موجکی"، چهارمین. کنگره ملی مهندسی عمران، دانشگاه تهران، ایران.

[30] S.S.Dragomir, (2007), “**Inequalities for the norm and the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces**”, Vol. 2 Demonstratio Mathematica,Poland,p 411-417.

پیوست ۱: تعاریف و اصطلاحات

موجک: دسته ای از توابع ریاضی هستند که برای تجزیه سیگنال پیوسته به مولفه های فرکانسی آن بکار می رود که رزولوشن هر مولفه برابر با مقیاس آن است. تبدیل موجک تجزیه تابع بر مبنای توابع موجک می باشد. موجک ها (که به عنوان موجک های دختر شناخته می شوند) نمونه های انتقال یافته و مقیاس شده یک تابع (موجک مادر) با طول متناهی و نوسانی شدیداً میرا هستند [30].

تبدیل موجک پیوسته: (CWT) Continuous wavelet transform

تبدیل موجک گسسته: (DWT) Discrete wavelet transform

تبدیل موجک سریع: (FWT) Fast wavelet transform

تجزیه بسته های موجک: (WPD) Wavelet packet decomposition

تبدیل موجک ساکن: (SWT) Stationary wavelet transform

آنالیز چند رزولیشنه: (Multi resolution analysis) منظور از آنالیز چند رزولوشنه، تحلیل سیگنال در فرکانسهای مختلف با رزولوشن های متفاوت است. بر خلاف تبدیل فوریه زمان-کوتاه، در آنالیز چند رزولوشنه، با هر یک از مؤلفه های فرکانسی به طور یکسان رفتار نمی شود. در حقیقت هدف آنالیز چند رزولوشنه، ارائه رزولوشن زمانی مناسب و رزولوشن فرکانسی نادقیق در فرکانس های بالا و در مقابل، رزولوشن فرکانسی خوب و رزولوشن زمانی ضعیف در فرکانس های پائین است.

درجه بندی دودویی: به منظور گسسته کردن تبدیل موجک، ابتدا پارامتر مقیاس بر حسب یک درجه بندی لگاریتمی، گسسته می شود. پس از آن، متغیر زمان با توجه به پارامتر مقیاس گسسته می شود به نحوی که برای هر مقیاس، یک نرخ نمونه برداری جداگانه استفاده شود. اصطلاحاً گفته می شود نمونه برداری بر روی یک درجه بندی دودویی انجام پذیرفته است.

فضای نرم دار: فرض کنید X یک فضای برداری میدان مختلط C باشد. تابع حقیقی $\|\cdot\|: X \rightarrow R$ را که در شرایط زیر صدق کند، یک نرم روی X می نامیم.

$$1. \quad \|x\| \geq 0 \text{ برای هر } x \in X \text{ و } \|x\| = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0$$

$$2. \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ برای هر } x, y \in X \text{ (نا مساوی مثلث)}$$

$$3. \quad \|\gamma x\| = |\gamma| \|x\| \text{ برای هر } x \in X \text{ و } \gamma x \in C$$

یک فضای برداری مختلط X که دارای نرم باشد را یک فضای نرم دار می گوئیم.

فضای هیلبرت: یک فضای برداری کامل است که نرم آن (معادل قدر مطلق) از طریق ضرب نرده ای تعریف می شود.

ماتریس تنک: ماتریسی است که اکثر عناصر آن صفر باشد. هنگامی که ابعاد ماتریس به حدی بزرگ شود که در حافظه نگنجد و نیز تعداد زیادی از درایه های موجود صفر باشد [30].

Abstract

Ordinary & differential equations arise in many scientific & engineering problems. Sometimes while solving this type of equations, we will encounter with new equations that their unknown functions appear under an integral sign. These equations are called as Integral equations. There are two problems during solving these equations, complicated calculations & result accuracy. Many studies have been done to find a solution to reduce the mentioned problem. In recent years, wavelet is used for solution of integral equations, it will reduce calculating costs, broadly. Researches showed that orthogonal wavelet is capable than classic basis. Orthogonal wavelet was first wavelets which used to solve integral equations, because of they used in signal processing, from the first time.

There are two reasons for using wavelets, first, when wavelet is used for extension of a function or signal, initial coefficients in wavelet extension have most of the function or signal information, so, accurate results can be achieved with less terms than the other basis. Second reason which is more major than the first one is scattered operational matrices that cause to easy solution of algebraic equation system. Among the wavelet desirable features in solving integral equations, simplest orthonormal wavelet with compact support are remarkable. Haar wavelet is a sequence that is now recognized as the first known wavelet basis and extensively used as a teaching example. The Haar sequence was proposed in 1909 by Alfréd Haar. The Haar wavelet is also the simplest possible wavelet. consolidation differential equation has been solved with different methods. In this thesis, we will solve the consolidation differential equation by using wavelet. Although, it should be mention that the present research is beginning of the soil mechanic equations solution with more complicated boundary conditions.

Key words: differential equations, . consolidation differential, wavelet



Shahrood University of Technology

Kharazmi Campus

.Msc thesis in Geotechnique

A wavelet–based solution of the consolidation equation

By: Mojtaba Rastegar

Supervisor

Dr. A. Bazrafshan. M

Consultant

Dr. M. Erfanian.O

Sep 2016