بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده مهندسی عمران

گروه سازه

بهینه‌سازی توپولوژی در مسائل تنش مسطح با رویکرد کمینه کردن وزن

هاله السادات کاظمی

اساتید راهنما:

دکتر رضا نادری

دکتر سید مهدی توکلی

پایان‌نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۴

تقدیم

تقدیم به **پدر و مادر** مهربانم که...

وقتی چشم به جهان گشودم، قلب کوچکم مهربانی لبخند و نگاهشان را که پر از صداقت و بی ریایی بود احساس کرد. دیدم زمانی را که با لبخندم لبخند زیبایی بر چهره ی خسته شان نشست و دنیایشان سبز شد و با گریه ام دلشان لرزید و طوفانی گشت. از همان لحظه فهمیدم که تنها در کنار این نگاه های پر مهر و محبت است که احساس آرامش و خوشبختی خواهم کرد.

و تقدیم به تمامی **اساتید** گرانقدرم که...

ارزش استاد را دانستن، هنر نیست، بلکه بایستگی و وظیفه است.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوندی را سزاست که کسوت هستی را بر اندام موزون آفرینش پوشانید و تجلیات قدرت لایتزالی را در مظاهر و آثار طبیعت نمایان گردانید. خداوند بزرگ را شاکرم که لطف خود را شامل حال من نمود تا بتوانم تحقیق خود را به پایان برسانم.

بر خود لازم می دانم از کلیه ی کسانی که من را در تدوین و نگارش این پایان نامه یاری نمودند، صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم.

از جناب آقای دکتر رضا نادری که قبول زحمت فرمودند و مسئولیت راهنمایی مرا به عهده گرفتند بسیار سپاسگزارم.

از جناب آقای دکتر سید مهدی توکلی که در کلیه ی مراحل انجام این پژوهش با خوشرویی، یاری و راهنماییم نمودند و وقت خود را بی منت در اختیار من گذاشتند نهایت سپاس را دارم.

همچنین از خانواده و دوستانی که مرا در به ثمر رساندن این پایان نامه همراهی کردند تشکر می نمایم.

تعهد نامه

اینجانب **هاله السادات کاظمی** دانشجوی دوره‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی **مهندسی عمران گرایش سازه** دانشکده **عمران** دانشگاه **صنعتی شاهرود** نویسنده‌ی پایان‌نامه‌ی **بهینه‌سازی توپولوژی در مسائل تنش مسطح با رویکرد کمینه کردن وزن** تحت راهنمائی **دکتر رضا نادری** و **دکتر سید مهدی توکلی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه‌ی اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته‌شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

بهینه‌سازی توپولوژی یکی از مهم‌ترین انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای است که همواره به‌دنبال توزیع بهینه‌ی مصالح در دامنه‌ی مورد نظر می‌باشد. برای رسیدن به این منظور، انتخاب تابع هدف و قید مناسب از اهمیت بالایی برخوردار است. در طول سال‌های گذشته همواره دو رویکرد کلی در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی مطرح بوده است. در رویکرد متداول‌تر، انرژی کرنشی سازه تحت قید حجمی بهینه می‌گردد و هیچ محدودیت دیگری برای واکنش‌های سازه‌ای مثل تنش‌ها و تغییرمکان‌ها در نظر گرفته نمی‌شود. در رویکرد دیگر، که در سال‌های اخیر بیش‌تر از قبل مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است، وزن سازه تحت قیدهای تنش مینیمم می‌گردد.

هدف اصلی از انجام این پایان‌نامه در وهله‌ی اول استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با رویکرد مینیمم کردن وزن است. از طرفی در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مصالح برای تحلیل و بهینه‌سازی یک سازه، می‌تواند طراحی قابل اطمینان‌تری را منجر شود. به‌همین دلیل به‌عنوان هدف دوم، رفتار غیرخطی مصالح و اثر آن روی بهینه‌سازی توپولوژی سازه نیز مورد بررسی قرار گرفته است. به‌منظور انجام فرآیند بهینه‌سازی، روش مجانب‌های پویا انتخاب شده که لازمه‌ی آن نیز تعیین حساسیت توابع هدف و قیود نسبت به متغیرهای طراحی است.

بنابراین در این پایان‌نامه، ابتدا روند تحلیل ایزوژئومتریک سازه‌های تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح مورد بررسی قرار گرفته و برنامه‌ی کامپیوتری آن به زبان فرترن نوشته شده است. در ادامه با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک، مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش برای سازه با رفتار الاستیک مصالح بررسی و برنامه‌ی آن نوشته شده است. در پایان نیز برنامه‌ای جهت مشاهده‌ی اثر تغییرشکل‌های الاستو-پلاستیک روی توپولوژی سازه، تهیه گردیده است و مثال‌های عددی متفاوتی نیز مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

کلمات کلیدی: بهینه‌سازی توپولوژی؛ تحلیل ایزوژئومتریک؛ قیدهای تنش؛ رفتار غیرخطی مصالح؛ روش مجانب‌های پویا؛ آنالیز حساسیت

مقالات مستخرج

۱- تحلیل ایزوژئومتریک و بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش (یازدهمین کنگره‌ی بین‌المللی مهندسی عمران و توسعه‌ی پایدار)

2- Isogeometric topology optimization of structures considering weight minimization and local stress constraints (International journal of optimization in civil engineering)

فهرست مطالب...صفحه

فصل اول: مقدمه و کلیات.. ۱

۱-۱- تاریخچه‌ی موضوع.. ۲

۱-۲- ساختار پایان‌نامه.. ۶

فصل دوم: مروری بر رفتار غیرخطی مصالح.. ۷

۲-۱- مقدمه.. ۸

۲-۲- تئوری ریاضی پلاستیسیته.. ۹

۲-۲-۱- معیار تسلیم.. ۱۰

۲-۲-۱-۱- معیار تسلیم فون می‌سز.. ۱۱

۲-۲-۲- سخت‌شدگی کار یا کرنش.. ۱۳

۲-۲-۳- رابطه‌ی تنش-کرنش با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح.................................. ۱۶

۲-۲-۴- آزمایش تسلیم تک‌محوری روی یک مادّه با سخت‌شدگی کرنشی.................................. ۱۸

۲-۳- فرمول‌بندی ماتریسی.. ۲۰

۲-۴- عبارات اساسی برای مسائل تنش مسطح.. ۲۳

فصل سوم: تحلیل ایزوژئومتریک با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح................. ۲۷

۳-۱- مقدمه.. ۲۸

۳-۲- معرفی سطح ساخته‌شده از توابع نربز.. ۲۸

۳-۳- فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک برای مسائل تنش مسطح.................................. ۳۰

۳-۳-۱- روند تحلیل با در نظر گرفتن رفتار الاستیک خطی مصالح.................................. ۳۱

۳-۳-۲- روند تحلیل با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح.................................. ۳۷

۳-۴- ساختار برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده.. ۳۸

۳-۴-۱- اِعمال بار روی سازه به‌صورت تدریجی ۴۰
۳-۴-۲- پروسه‌ی حل برای مسائل غیرخطی ۴۱
۳-۴-۳- ارزیابی نیروهای گره‌ای معادل با میدان تنش ۴۲
۳-۴-۴- معیار همگرایی ۴۸
۳-۵- مثال‌های عددی برنامه‌ی EPIGA ۴۹
۳-۵-۱- مثال یک ۴۹
۳-۵-۲- مثال دو ۵۴
۳-۵-۳- مثال سه ۵۹
۳-۵-۴- مثال چهار ۶۳
فصل چهارم: بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح ۶۹
۴-۱- مقدمه ۷۰
۴-۲- فرم ریاضی عمومی برای یک مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای ۷۰
۴-۳- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای ۷۲
۴-۴- مسئله‌ی عمومی بهینه‌سازی توپولوژی ۷۴
۴-۴-۱- مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رفتار الاستیک مصالح ۷۵
۴-۴-۲- مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح ۷۹
۴-۵- روش مجانب‌های پویا ۸۱
۴-۶- آنالیز حساسیت ۸۳
۴-۶-۱- روش تحلیلی مستقیم ۸۴
۴-۶-۲- روش تفاضل محدود پیش‌رو ۸۶
۴-۷- ساختار برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده ۸۷

۴-۷-۱- برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده با توجه به رفتار الاستیک مصالح ۸۸
۴-۷-۲- برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده با توجه به رفتار غیرخطی مصالح ۹۰
فصل پنجم: مثال‌های عددی ۹۳
۵-۱- مقدمه ۹۴
۵-۲- مثال‌های برنامه‌ی IGMWSCTO ۹۴
۵-۲-۱- مثال یک ۹۴
۵-۲-۲- مثال دو ۹۸
۵-۲-۳- مثال سه ۱۰۱
۵-۲-۴- مثال چهار ۱۰۴
۵-۳- مثال‌های برنامه‌ی IGMCTO ۱۱۰
۵-۳-۱- مثال یک ۱۱۰
فصل ششم: نتایج و پیشنهادها ۱۱۵
۶-۱- مقدمه ۱۱۶
۶-۲- نتایج ۱۱۶
۶-۳- پیشنهادها ۱۱۷
پیوست: برنامه‌های کامپیوتری ۱۱۹
الف) نرم‌افزارها ۱۲۰
ب) محیط کلی برنامه‌ها ۱۲۰
مراجع ۱۲۴

فهرست اَشکال...صفحه

شکل ۲-۱ طرح معیار تسلیم فون می‌سز..۱۳

شکل ۲-۲ مدل‌های ریاضی برای بیان رفتار سخت‌شدگی کرنش....................................۱۴

شکل ۲-۳ بیان هندسی اصل تعامد در تئوری پلاستیسیته‌ی همبسته...........................۱۸

شکل ۲-۴ منحنی تنش-کرنش برای آزمایش تک‌محوری با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح..............۱۹

شکل ۲-۵ نمایش دستگاه مختصات به‌کار گرفته‌شده در مسائل تنش مسطح...................۲۳

شکل ۳-۱ نقاط انتگرال‌گیری گاوس در روش ایزوژئومتریک...۳۶

شکل ۳-۲ ساختار برنامه‌ی تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح...۳۹

شکل ۳-۳ عملکرد روش حل سختی مماسی برای یک متغیر..۴۲

شکل ۳-۴ تغییرات تدریجی تنش برای یک نقطه‌ی از قبل تسلیم‌شده در محیط الاستو-پلاستیک ۴۴

شکل ۳-۵ تغییرات تدریجی تنش برای یک نقطه در محیط الاستو-پلاستیک و در شرایط تسلیم اولیه ۴۵

شکل ۳-۶ فرآیند بهبودیافته برای بازگرداندن یک نقطه‌ی تنش به سطح تسلیم.................۴۷

شکل ۳-۷ تیر یک سر گیردار: تعریف مسئله و مدل اجزای محدود................................... ۵۰

شکل ۳-۸ نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار برای یک تیر یک سر گیردار.......................۵۱

شکل ۳-۹-(الف) تا (ح) تیر یک سر گیردار: روند تسلیم شدن مصالح.................................۵۱

شکل ۳-۱۰-(الف) تا (ه) کانتورهای تنش در تیر یک سر گیردار با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح....۵۳

شکل ۳-۱۱ نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار برای تیر با تکیه‌گاه ساده.........................۵۵

شکل ۳-۱۲-(الف) تا (ک) تیر با تکیه‌گاه ساده: روند تسلیم شدن مصالح...........................۵۶

شکل ۳-۱۳-(الف) تا (ه) کانتورهای تنش در تیر ساده با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح......................۵۸

شکل ۳-۱۴ نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار برای تیر دو سر گیردار..۶۰

شکل ۳-۱۵-(الف) تا (ط) تیر دو سر گیردار: روند تسلیم شدن مصالح...۶۰

شکل ۳-۱۶-(الف) تا (ج) کانتورهای تنش در تیر دو سر گیردار با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح......۶۲

شکل ۳-۱۷ قاب دو بُعدی...۶۴

شکل ۳-۱۸ نمودار نیرو-تغییرمکان در محل پایین‌ترین نقطه‌ی کنترلی برای قاب دو بُعدی.............۶۵

شکل ۳-۱۹-(الف) تا (و) کانتورهای تنش در قاب دو بُعدی با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح............۶۵

شکل ۳-۲۰ نمودار نیرو-تغییرمکان در محل پایین‌ترین نقطه‌ی کنترلی برای قاب دو بُعدی با در نظر گرفتن اثر پارامتر سخت‌شدگی کرنشی...۶۸

شکل ۴-۱ مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای...۷۱

شکل ۴-۲ یک مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای ابعادی با هدف بهینه کردن سطح مقطع اعضای خرپا...۷۲

شکل ۴-۳ یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با هدف پیدا کردن تابع مناسب برای توصیف شکل سازه..۷۳

شکل ۴-۴ بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا...۷۳

شکل ۴-۵ بهینه‌سازی توپولوژی محیط پیوسته (دو بُعدی)...۷۳

شکل ۴-۶ نمای شماتیک از نحوه‌ی محاسبه‌ی انرژی کرنشی در انتهای هر مرحله‌ی بارگذاری.........۸۰

شکل ۴-۷ رویکردهای کلی برای آنالیز حساسیت...۸۴

شکل ۴-۸ ساختار برنامه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رفتار الاستیک مصالح و با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش...۸۹

شکل ۴-۹ ساختار برنامه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح و با رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم...۹۲

شکل ۵-۱ تیر طره‌ی کوتاه...۹۴

شکل ۵-۲-(الف) توپولوژی بهینه در مرجع [۵۴] با استفاده از روش حفره‌های محدود و توابع سطوح تراز برای تیر طره‌ی کوتاه...۹۵

شکل ۵-۲-(ب) توپولوژی بهینه در پژوهش حاضر برای تیر طره‌ی کوتاه..۹۶

شکل ۵-۲-(ج) کانتور تنش برای تیر طره‌ی کوتاه...۹۶

شکل ۵-۲-(د) نمودار روند همگرایی تابع هدف برای تیر طره‌ی کوتاه...۹۷

شکل ۵-۳ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی برای تیر طره‌ی کوتاه...۹۷

شکل ۵-۴ تیر طره‌ی کوتاه...۹۸

شکل ۵-۵-(الف) و (ب) توپولوژی بهینه برای تیر طره‌ی کوتاه برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی، ۶۲۵ قید تنش و ۱۸۷ نقطه‌ی کنترلی، ۱۲۱ قید تنش (به‌ترتیب)...۹۹

شکل ۵-۵-(ج) و (د) کانتور تنش برای تیر طره‌ی کوتاه برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی، ۶۲۵ قید تنش و ۱۸۷ نقطه‌ی کنترلی، ۱۲۱ قید تنش (به‌ترتیب)...۱۰۰

شکل ۵-۵-(ه) و (و) نمودار روند همگرایی تابع هدف برای تیر طره‌ی کوتاه برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی، ۶۲۵ قید تنش و ۱۸۷ نقطه‌ی کنترلی، ۱۲۱ قید تنش (به‌ترتیب)..۱۰۱

شکل ۵-۶ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی برای تیر طره‌ی کوتاه...۱۰۲

شکل ۵-۷ سازه‌ی اِل شکل...۱۰۲

شکل ۵-۸-(الف) توپولوژی بهینه مربوط به رویکرد مینیمم کردن وزن برای سازه‌ی اِل شکل.........۱۰۳

شکل ۵-۸-(ب) توپولوژی بهینه مربوط به رویکرد متداول برای سازه‌ی اِل شکل...............................۱۰۴

شکل ۵-۸-(ج) کانتور تنش برای سازه‌ی اِل شکل...۱۰۵

شکل ۵-۸-(د) نمودار روند همگرایی تابع هدف برای سازه‌ی اِل شکل..۱۰۵

شکل ۵-۹ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۱۷۰۱ نقطه‌ی کنترلی برای سازه‌ی اِل شکل........۱۰۶
شکل ۵-۱۰-(الف) تا (ج) توپولوژی بهینه‌ی سازه‌ی اِل شکل مراجع [۵۰،۸،۹]........۱۰۶
شکل ۵-۱۱ تیر دو سر گیردار........۱۰۷
شکل ۵-۱۲-(الف) توپولوژی بهینه‌ی پژوهش حاضر برای تیر دو سر گیردار........۱۰۷
شکل ۵-۱۲-(ب) توپولوژی بهینه‌ی رویکرد متداول برای تیر دو سر گیردار........۱۰۸
شکل ۵-۱۲-(ج) کانتور تنش برای تیر دو سر گیردار........۱۰۸
شکل ۵-۱۲-(د) نمودار روند همگرایی تابع هدف برای تیر دو سر گیردار........۱۰۹
شکل ۵-۱۳ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۶۹۳ نقطه‌ی کنترلی برای تیر دو سر گیردار ۱۰۹
شکل ۵-۱۴ مشخصات هندسی، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی مثال ۵-۳-۱-........۱۱۰
شکل ۵-۱۵-(الف) توپولوژی حاصل از مرجع [۲۸] با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح........۱۱۱
شکل ۵-۱۵-(ب) توپولوژی حاصل از مرجع [۲۸] با رفتار الاستیک مصالح........۱۱۱
شکل ۵-۱۵-(ج) توپولوژی حاصل از پژوهش حاضر با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح........۱۱۲
شکل ۵-۱۵-(د) توپولوژی حاصل از پژوهش حاضر با رفتار الاستیک مصالح........۱۱۲
شکل ۰-۱ محیط برنامه‌ی EPIGA ۱۲۱
شکل ۰-۲ محیط برنامه‌ی IGMWSCTO ۱۲۲
شکل ۰-۳ محیط برنامه‌ی IGMCTO ۱۲۳

فهرست جداول...صفحه

جدول ۲-۱ ثابت‌های تعریف‌شده برای سطح تسلیم در یک فرم مناسب برای آنالیز عددی................۲۴
جدول ۳-۱ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال‌های ۳-۵-۱- تا ۳-۵-۳-)
....۴۹
جدول ۳-۲ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک تیر یک سر گیردار طی ۱۰۰ مرحله بارگذاری و ۲۰ تکرار..۵۰
جدول ۳-۳ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک تیر ساده طی ۱۰۰ مرحله بارگذاری و ۲۰ تکرار
....۵۵
جدول ۳-۴ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک تیر دو سر گیردار طی ۱۰۰ مرحله بارگذاری و ۲۰ تکرار..۶۰
جدول ۳-۵ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای هر وصله (مثال ۳-۵-۴-)...............................۶۴
جدول ۳-۶ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک قاب دو بُعدی طی ۱۰۰ مرحله بارگذاری و ۱۰ تکرار..۶۴
جدول ۵-۱ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال‌های ۵-۲-۱- و ۵-۲-۲-)
....۹۵
جدول ۵-۲ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای هر وصله (مثال ۵-۲-۳-)............................۱۰۳
جدول ۵-۳ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال ۵-۲-۴-)..........................۱۰۷
جدول ۵-۴ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال ۵-۳-۱-)..........................۱۱۰

فصل اول:

مقدمه و کلیات

۱-۱- تاریخچه‌ی موضوع:

یکی از فاکتورهای مهم در طراحی مسائل مهندسی، رسیدن به یک طرح اقتصادی و بهینه با رعایت اصول و قوائد فنی مرتبط به آن مسئله است. بهینه‌سازی سازه‌ای، علمی است که رفتار سازه و اقتصاد پروژه را به‌طور هم‌زمان در نظر می‌گیرد و در نهایت علاوه بر ایمنی سازه، منجر به کاهش هزینه‌های ساخت و پرهیز از اتلاف مصالح نیز می‌شود. بهینه‌سازی توپولوژی[1]، یکی از شاخه‌های بهینه‌سازی سازه‌ای است که توجه پژوهشگران بسیاری را به خود جلب کرده است. ایده‌ی اساسی یافتن توپولوژی یک سازه به‌واسطه‌ی جستجوی تابع بهینه‌ی مصالح توسط کی[2] و همکارانش در سال ۱۹۷۳ و تارتار[3] در سال ۱۹۷۹ مطرح شده است [۲،۱]. کاربرد عددی ایده‌ی توزیع مادّه بر اساس مواد همگن‌شده نیز اولین بار توسط بِندسو[4] و کیکوچی[5] در سال ۱۹۸۸ توصیف شده است [۳]. پیشرفت‌های بَعدی ایده‌ی همگن‌سازی می‌تواند در پژوهش‌های سوزوکی[6] و کیکوچی در سال ۱۹۹۱ و تامسِن[7] مشاهده گردد [۵،۴]. در سال ۱۹۸۹ بِندسو ایده‌ی جدیدی برای تقریب‌سازی عددی مسائل طراحی صفر و یک که همان فرم اولیه‌ی مطرح‌شده برای توزیع مادّه است، بیان نمود که از آن به‌عنوان رویکرد مصالح مصنوعی همسانگرد با اِعمال جریمه[8]، نام برده شده و تا به حال نیز به‌طور گسترده مورد استفاده قرار گرفته است [۶].

به‌طور معمول، اغلب مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای توپولوژی برای مصالح همسانگرد با رفتار الاستیک بر حسب رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی (ماکزیمم کردن سختی) بیان شده‌اند. در این نوع از فرمول‌بندی‌ها تلاش می‌شود مقدار معیّنی از مصالح در یک دامنه‌ی مشخص توزیع گردد، به‌طوری‌که سختی سازه‌ی حاصل برای یک بارگذاری معیّن، ماکزیمم به‌دست آید. هر چند این نوع فرمول‌بندی از

---

[1] Topology optimization
[2] Cea
[3] Tartar
[4] Bendsøe
[5] Kikuchi
[6] Suzuki
[7] Thomsen
[8] SIMP: Solid Isotropic Material with Penalization

مزیتی هم‌چون عدم مواجهه با تعداد زیادی از قیدهای غیرخطی بهره می‌برد، اما طراحی نهایی ممکن است در عمل نشدنی باشد چون در آن هیچ محدودیتی برای تنش‌ها و تغییرمکان‌های سازه در نظر گرفته نمی‌شود. در نتیجه طراحی‌های بهینه‌ی متداول اغلب شامل تمرکزهای تنش بالا می‌شوند. بر همین اساس رویکرد دیگری از مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با عنوان مینیمم کردن وزن سازه تحت قیدهای تنش نیز مطرح شده است. در ابتدا دُرن[۱] و همکارانش در سال ۱۹۶۴ بهینه‌سازی خرپاها را با در نظر گرفتن قیدهای تنش مورد بررسی قرار دادند [۷]. از آن پس قیدهای تنش در بهینه‌سازی مسائل پیوسته و بر مبنای روش تحلیل اجزای محدود بسیار مورد توجه قرار گرفت و پژوهش‌های متعددی نیز به‌منظور بهبود عملکرد این نوع رویکرد از مسائل بهینه‌سازی توپولوژی انجام شد [۸-۱۶]. در این رویکرد، چگالی نسبی اِلمان‌های محدود در دامنه‌ی گسسته‌شده به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده‌اند. از طرفی قیدهای تنش نیز برای گره‌ی میانی هر اِلمان محاسبه و با عنوان قیدهای تنش موضعی[۲] شناخته شده‌اند. با توجه به بالا بودن تعداد قیدهای مسئله، برخی از این تحقیقات تمرکز خود را روی کاهش هزینه‌های محاسباتی قرار داده‌اند و با ارائه‌ی فرمول‌بندی‌های جدید سعی کرده‌اند تعداد قیدها را در این دست از مسائل به نحو مطلوبی کاهش دهند به‌طوری‌که در برخی از آن‌ها از یک قید تنش کلی[۳] و در برخی دیگر از قیدهای تنش مجموعه‌ای[۴] استفاده شده است. یکی دیگر از مشکلات این رویکرد، تکینی[۵] نام دارد که به‌دلیل افزایش تنش در نواحی با مصالح کم‌تر رخ می‌دهد و برای جلوگیری از وقوع آن تکنیک‌های رهاسازی متعددی برای تنش ارائه شده‌اند [۱۷-۲۱]. در ضمن به‌منظور انجام پروسه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با تعداد قیود بالا، می‌توان از روش‌های ریاضی مناسب مانند خطی‌سازی متوالی[۶] [۲۳،۲۲،۱۳]، خطی‌سازی محدب[۷] [۸] و مجانب‌های پویا[۸] [۲۴،۱۵]

---

[1] Dorn
[2] Local stress constraints
[3] Global stress constraint
[4] Aggregated stress constraints
[5] Singularity
[6] SLP: Sequential Linear Programming
[7] CONLIN: Convex Linearization
[8] MMA: Method of Moving Asymptotes

استفاده نمود. یکی از نکات مهم و قابل توجه در روش‌های ریاضی نیز، نحوه‌ی محاسبه‌ی مشتقات تابع هدف و قیود نسبت به متغیرهای طراحی است. از جمله روش‌های مناسبی که برای این منظور در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی مورد استفاده قرار گرفته است، می‌توان روش‌های تحلیلی مستقیم[۱] و الحاقی[۲] را نام برد [۲۵].

در تمام پژوهش‌های قبلی، واکنش‌های سازه‌ای خطی از نظر هندسی و مصالح در بهینه‌سازی سازه‌ای در نظر گرفته شده‌اند. این در حالی است که به‌منظور گسترش یک طراحی قابل اطمینان به‌واسطه‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای، بهتر است واکنش‌های سازه‌ای غیرخطی مانند رفتار الاستو-پلاستیک مصالح در نظر گرفته شوند. از جمله تلاش‌های اولیه در زمینه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رویکرد ماکزیمم کردن سختی و با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، توسط سوآن[۳] و کوساکا[۴] (۱۹۹۷)، یوگی[۵] و کیکوچی (۱۹۹۵)، مات[۶] و همکارانش (۱۹۹۸) و شوارز[۷] و همکارانش (۲۰۰۱) صورت گرفته است [۲۶-۲۹]. به‌دنبال آن ابوالبشری و همکارانش در سال ۲۰۱۰، بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌های پیوسته را با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح و با استفاده از روش بهینه‌سازی سازه‌ای فرااِکتشافی بر اساس معیارهای تنش و سختی انجام داده‌اند [۳۰]. در سال ۲۰۱۵ نیز کاتو[۸] و همکارانش فرمول‌بندی مناسبی برای انجام فرآیند آنالیز حساسیت در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی کامپوزیت‌های الاستو-پلاستیک، به روش تحلیلی ارائه دادند [۳۱].

در دهه‌های گذشته روش‌های بسیاری برای تحلیل مسائل مهندسی ارائه شده است که برخی از مشهورترین آن‌ها روش تفاضل محدود، روش اجزای محدود و دسته‌ای از روش‌ها با عنوان روش‌های بدون شبکه می‌باشند. اگرچه این روش‌ها در پی یکدیگر و با هدف توانمندتر نمودن و رفع مشکلات

---

[1] Direct analytical method
[2] Adjoint analytical method
[3] Swan
[4] Kosaka
[5] Yuge
[6] Maute
[7] Schwarz
[8] Kato

روش‌های پیش از خود ارائه شده‌اند، اما هنوز هم نمی‌توان روشی را یافت که بتوان آن را کامل و بدون نقص نامید. از جمله‌ی این کاستی‌ها می‌توان به ضعف در تولید دقیق شکل مسائل دارای هندسه‌ی پیچیده، ضعف در مدل‌سازی دقیق مسائل با تغییرات شدید در خواص مصالح و نیز به تولید مکرر شبکه‌ی اِلمان‌ها در برخی مسائل، نظیر مسائل بهینه‌سازی شکل سازه اشاره نمود.

برای غلبه بر این مشکلات و بهبود روش‌های موجود، استفاده از توابع پایه‌ی اسپیلاین[۱] به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود در تحلیل مسائل مهندسی، اولین بار در سال‌های ۱۹۹۸ تا ۲۰۰۴ توسط کیگان[۲] و هولیگ[۳] معرفی شد [۳۲-۳۴]. در سال ۲۰۰۵، این ایده با استفاده از توابع نربز[۴] (بی-اسپیلاین‌های نسبی غیریکنواخت)، که از توسعه‌ی توابع اسپیلاین به‌دست می‌آیند، توسط هیوز[۵] و همکارانش تکامل یافت و روش تحلیل ایزوژئومتریک[۶] نام گرفت [۳۵-۳۷]. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه[۷] و پیشرفت‌های اخیر در زمینه‌ی گرافیک رایانه‌ای تشکیل می‌دهند. در این روش ضمن استفاده از خواص توابع پایه‌ی اسپیلاین و نربز در تعریف دقیق منحنی‌ها، سطوح و احجام، از آن‌ها جهت درون‌یابی و تقریب‌سازی مجهولات مسئله نیز استفاده می‌گردد. از طرفی روش تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها نیز مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش توابع پایه‌ی نربز برای تقریب تابع چگالی مصالح استفاده شده‌اند [۳۸،۳۹]. در ضمن در پژوهش‌های انجام‌شده با این روش، رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم با در نظر گرفتن رفتار الاستیک مصالح مورد بررسی قرار گرفته است.

بر همین اساس، هدف کلی از انجام این پایان‌نامه استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک در بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش برای مصالح با رفتار الاستیک و همین‌طور بر اساس رویکرد متداول برای مصالح با رفتار الاستو-پلاستیک می‌باشد.

---
[1] Spline
[2] Kagan
[3] Hollig
[4] NURBS: NonUniform Rational B-Spline
[5] Hughes
[6] IA: Isogeometric Analysis
[7] CAD: Computer Aided Design

۱-۲- ساختار پایان‌نامه:

در فصل دوم ابتدا مروری بر رفتار غیرخطی مصالح و روابط سازنده‌ی آن خواهیم داشت. در فصل سوم روند کلی روش تحلیل ایزوژئومتریک برای مسائل تنش مسطح شرح داده خواهد شد. سپس فلوچارت برنامه‌ی تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح و جزئیات آن توضیح داده خواهد شد. در انتهای فصل نیز چندین مثال عددی به‌منظور بررسی صحت برنامه‌ی کامپیوتری نوشته‌شده بررسی می‌شود. در فصل چهارم مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با در نظر گرفتن دو نوع رفتار متفاوت از مصالح بررسی خواهد شد. معرفی مختصری از الگوریتم مجانب‌های پویا به‌منظور انجام فرآیند بهینه‌سازی را در پی خواهیم داشت و در پایان، آنالیز حساسیت مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی برای هر کدام از رفتارهای مورد نظر برای مصالح مورد بررسی قرار خواهد گرفت. فلوچارت برنامه‌های کامپیوتری نوشته‌شده به‌منظور بهینه‌سازی توپولوژی نیز ارائه خواهد شد. در فصل پنجم در دو بخش جداگانه مثال‌هایی به‌منظور اطمینان از صحت و نمایش کارایی برنامه‌های نوشته‌شده برای بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش با رفتار الاستیک مصالح و با رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجمی برای مصالح با رفتار الاستو-پلاستیک ارائه خواهد شد. در فصل ششم نیز خلاصه‌ای از نتایج این پایان‌نامه و همین‌طور پیشنهادهایی به‌منظور توسعه‌ی برنامه‌های کامپیوتری تهیه‌شده برای دانشجویان علاقه‌مند در این زمینه، ارائه خواهد شد.

فصل دوم:

مروری بر رفتار غیرخطی مصالح

۲-۱- مقدمه:

یکی از مباحث مهم و اساسی که بایستی در تحلیل مسائل سازه‌ای در نظر گرفته شود، نوع رفتار مصالح در سازه‌ی مورد نظر است. تحلیل الاستیک خطی[1] یکی از انواع متداول تحلیل سازه‌هاست که در آن تغییرمکان‌ها و کرنش‌های بسیار کوچکی برای سازه در نظر گرفته می‌شود. در این نوع تحلیل، رابطه‌ی بین تنش و کرنش به‌صورت خطی است و قانون هوک[2] برای برقراری این رابطه مورد استفاده قرار می‌گیرد. از طرفی تمامی تنش‌های موجود در سازه به یک سطح معیّن به نام معیار تسلیم[3] محدود می‌شوند. اگرچه فرض رفتار الاستیک خطی مصالح و به‌کارگیری آن در تحلیل مسائل سازه‌ای هم‌چنان از اعتبار و اهمیت بالایی برخوردار است اما در نظر گرفتن رفتار واقعی مصالح در حین پروسه‌ی بارگذاری سازه، می‌تواند منجر به یک طراحی منطقی‌تر و اقتصادی‌تر گردد. این نوع رفتار، که به‌عنوان رفتار غیرخطی مصالح شناخته شده است، تنها زمانی رخ می‌دهد که تنش در سازه از سطح تنش تسلیم عبور کند که این خود نیز منجر به ایجاد کرنش‌های برگشت‌ناپذیری، که وابسته به زمان هم نیستند، می‌شود [۴۰]. در طراحی و تحلیل سازه با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مصالح (تغییرشکل‌های پلاستیک)، فرض این‌که چنان‌چه نقطه‌ای از سازه به تنش تسلیم برسد کل سازه مقاومت خود را از دست می‌دهد معتبر نخواهد بود و به‌عبارت دیگر لزوماً تسلیم موضعی، تسلیم کلی سازه را به‌همراه نخواهد داشت. در واقع سازه تا جایی‌که معیار گسیختگی به آن اجازه می‌دهد می‌تواند رفتار پلاستیک از خود نشان دهد. بنابراین با در نظر گرفتن معیار فوق از تمامی مقاومت سازه حداکثر استفاده خواهد شد و در نتیجه طرح اقتصادی‌تری به‌دست می‌آید. در ادامه‌ی این فصل، مفاهیم رفتار غیرخطی مصالح فلزی و روابط حاکم بر آن بررسی خواهد شد.

[1] Linear elastic analysis
[2] Hooke's law
[3] Yield criterion

۲-۲- تئوری ریاضی پلاستیسیته[۱]:

هدف از تئوری ریاضی پلاستیسیته، فراهم کردن توصیفی نظری از رابطه‌ی بین تنش و کرنش برای مصالحی با رفتار الاستو-پلاستیک می‌باشد. برای ایجاد این تئوری و به‌منظور مدل کردن رفتار غیرخطی مصالح، در نظر گرفتن مراحل زیر امری ضروری محسوب می‌شود [۴۰]:

- تعریف یک رابطه‌ی صریح بین تنش و کرنش برای توصیف رفتار مادّه قبل از شروع تغییرشکل‌های پلاستیک (رفتار الاستیک خطی مصالح).
- تعریف معیار تسلیم مناسب به‌منظور نشان دادن شروع رفتار پلاستیک مصالح.
- توسعه‌ی رابطه بین تنش و کرنش برای توصیف چگونگی رفتار مادّه بعد از شروع تسلیم (رفتار الاستو-پلاستیک مصالح).

همان‌طور که در بخش مقدمه هم اشاره شد، رابطه‌ی بین تنش و کرنش قبل از شروع رفتار پلاستیک مصالح به‌واسطه‌ی یک عبارت استاندارد الاستیک خطی بیان می‌گردد:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad (۲-۱)$$

که در آن σ_{ij} و ε_{kl} به‌ترتیب مؤلفه‌های تنش و کرنش کل هستند و C_{ijkl} تانسور ثابت‌های الاستیک برای یک مادّه‌ی همسانگرد است که در حالت کلی به‌صورت زیر تعریف می‌گردد [۴۰]:

$$C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu\delta_{ik}\delta_{jl} + \mu\delta_{il}\delta_{jk} \qquad (۲-۲)$$

در رابطه‌ی (۲-۲)، λ و μ ثابت‌های لامه[۲] هستند و δ_{ij} نیز نماد کرونکر دلتا[۳] است که به شکل زیر تعریف شده است:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } \ i = j \\ 0 & \text{if } \ i \neq j \end{cases} \qquad (۲-۳)$$

[1] Mathematical theory of plasticity
[2] Lame constants
[3] Kronecker delta

رابطه‌ی (۲-۱)، که در سال ۱۶۷۸ توسط رابرت هوک مطرح شده است، بیان‌گر تغییرشکل یک سازه‌ی الاستیک متناسب با نیروی وارده است به‌طوری‌که سازه‌ی مورد نظر وضعیت اولیه‌ی خود را پس از این‌که بارهای ایجادکننده‌ی تغییرشکل حذف شوند، باز خواهد یافت [۴۱].

۲-۲-۱- معیار تسلیم:

معیار تسلیم در واقع بیان‌گر سطح تنشی است که در آن تغییرشکل پلاستیک شروع می‌شود. فرم کلی سطح تنش f به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f\ (\sigma_{ij}) = K\,(k) \qquad (۲-۴)$$

مطابق رابطه‌ی (۲-۴)، معیار تسلیم غالباً به‌صورت تابعی از مؤلفه‌های تنش تعریف می‌گردد. K نیز یک پارامتر مادّه است که به‌صورت آزمایشگاهی تعیین می‌شود و ممکن است خود تابعی از یک پارامتر سخت‌شدگی[۱] (k) نیز باشد. از آن‌جایی‌که مصالح همسانگرد در همه‌ی جهات خواص یکسانی را از خود نشان می‌دهند پس بهتر است که هر معیار تسلیم مستقل از جهت‌گیری دستگاه مختصات تعیین شود. بنابراین می‌توان این‌گونه نیز بیان کرد که بهتر است معیار تسلیم مورد نظر، تنها تابعی از سه نامتغیر تنش[۲] به فرم زیر باشد [۴۰]:

$$J_1 = \sigma_{ii}$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij}$$

$$J_3 = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \qquad (۲-۵)$$

از طرفی مشاهدات آزمایشگاهی انجام‌شده نشان داده‌اند که تغییرشکل پلاستیک در فلزات اساساً مستقل از فشار هیدروستاتیک[۳] است [۴۲]. پس سطح تسلیم فلزات می‌تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$f\ (J_2', J_3') = K\,(k) \qquad (۲-۶)$$

---

[1] Hardening parameter
[2] Stress invariant
[3] Hydrostatic pressure

که J'_2 و J'_3 دومین و سومین نامتغیرهای تانسور تنش انحرافی[1] (σ'_{ij}) هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - (\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}) \qquad (۲-۷)$$

به‌طور کلی در کاربردهای خاص بهتر است تنش را به دو قسمت، که تانسورهای تنش کروی[2] و انحرافی نامیده می‌شوند، تفکیک نمود. در رابطه‌ی (۲-۷)، عبارت داخل کمان بیان‌گر مؤلفه‌های تنش کروی است. تنش کروی یک تانسور همسانگرد بوده که در تمام دستگاه‌های مختصات یکسان است و تنها تغییرات در حجم را نشان می‌دهد [۴۱]. اما تانسور تنش انحرافی، که جهت‌های اصلی آن همان جهت‌های مربوط به تانسور تنش کل هستند، تنها منجر به تغییر در شکل اجزای مادی جسم یا همان تغییرشکل‌های برشی می‌شود [۴۱]. به‌همین دلیل است که با توجه به مستقل بودن تغییرشکل‌های پلاستیک از تنش‌های هیدروستاتیک در فلزات، فقط نامتغیرهای تنش‌های انحرافی در تعریف سطح تسلیم این مصالح استفاده می‌شوند. به‌منظور بررسی رفتار غیرخطی مصالح شکل‌پذیر هم‌چون فلزات در این پایان‌نامه، سطح تسلیم فون می‌سز[3] انتخاب شده است.

۲-۲-۱-۱- معیار تسلیم فون می‌سز:

معیار تسلیم فون می‌سز بر مبنای مفاهیم انرژی برای مصالح همسانگرد و شکل‌پذیر تعریف می‌شود. نخستین کوشش برای استفاده از انرژی کل به‌عنوان معیاری برای تسلیم در سال ۱۸۸۵ توسط بلترامی[4] ایتالیایی صورت گرفت. در شکل کنونی، این فرضیه توسط هوبر[5] لهستانی در سال ۱۹۰۴ و سپس توسط فون می‌سز آلمانی در سال ۱۹۱۳ بسط داده شد. در این روش انرژی کل ارتجاعی به دو قسمت تقسیم می‌شود. قسمتی که مربوط به تغییرات حجمی مصالح است و قسمتی که باعث

---

[1] Deviatoric stress tensor
[2] Spherical stress tensor
[3] von Mises
[4] Beltrami
[5] Huber

تغییرشکل برشی می‌شود. با مساوی قرار دادن انرژی تغییرشکل برشی نقطه‌ی تسلیم در کشش ساده با انرژی تغییرشکل برشی تحت تنش مرکب، معیار تسلیم فون می‌سز برای تنش‌های مرکب در دستگاه مختصات غیر اصلی و مسائل تنش مسطح (σ_z=0) به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2} \qquad (۸-۲)$$

که در آن σ_x و σ_y مؤلفه‌های تنش نرمال و τ_{xy} مؤلفه‌ی تنش برشی در دستگاه مختصات غیر اصلی هستند. در رابطه‌ی (۲-۸)، $\bar{\sigma}$ سطح تنش مؤثر[۱]، تعمیم‌یافته[۲] یا معادل[۳] نیز نامیده شده است. به طریقی دیگر می‌توان این‌گونه نیز بیان کرد که تسلیم زمانی رخ خواهد داد که مقدار دومین نامتغیر تنش انحرافی به یک مقدار بحرانی مطابق رابطه‌ی زیر برسد [۴۰]:

$$\sqrt{3}(J_2')^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}K \qquad (۹-۲)$$

در رابطه‌ی (۲-۹) دومین نامتغیر تنش انحرافی در فضای سه بُعدی به شکل زیر تعریف می‌گردد:

$$J_2' = \frac{1}{2}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}' = \frac{1}{2}\left[\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2\right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2 \qquad (۱۰-۲)$$

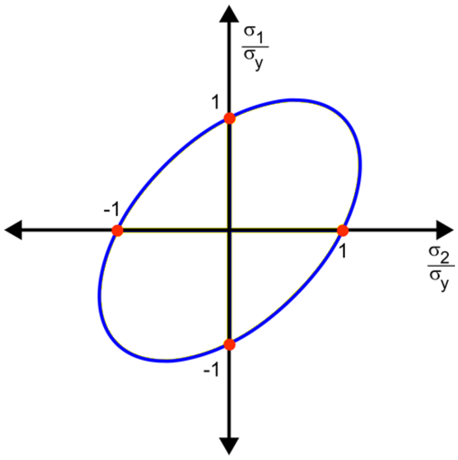
با حذف مؤلفه‌های مربوط به فضای سه بُعدی (τ_{xz}، τ_{yz} و σ_z)، جایگزین کردن مؤلفه‌های تنش انحرافی، انجام ساده‌سازی‌های لازم و در نهایت جایگذاری رابطه‌ی به‌دست آمده از (۲-۱۰) در عبارت سمت چپ رابطه‌ی (۲-۹)، عبارت سمت راست رابطه‌ی (۲-۸) حاصل می‌گردد. مفهوم فیزیکی پارامتر K نیز می‌تواند به‌واسطه‌ی در نظر گرفتن تسلیم مصالح تحت حالت‌های تنش ساده به‌دست آید. بنابراین با توجه به آزمایش کشش تک‌محوری (σ_y=σ_z=0) مقدار $\sqrt{3}\,K$ بایستی تنش تسلیم تک‌محوری[۴] (σ_Y) در نظر گرفته شود. پس بر اساس معیار تسلیم فون می‌سز، هرگاه مقدار سطح تنش مؤثر در نقطه‌ای از سازه به مقدار تنش تسلیم تک‌محوری برسد تسلیم در آن نقطه رخ خواهد داد.

---
[1] Effective stress
[2] Generalised stress
[3] Equivalent stress
[4] Uniaxial yield stress

از طرفی با بازنویسی رابطه‌ی (۲-۸) در دستگاه مختصات اصلی و در حالت تنش صفحه‌ای به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 = \sigma_Y^2 \qquad (۲-۱۱)$$

که σ_1 و σ_2 مؤلفه‌های تنش در راستای اصلی هستند. رابطه‌ی فوق معادله‌ی یک بیضی می‌باشد که طرح آن در شکل ۲-۱ نشان داده شده است. مطابق این شکل، هر نقطه‌ای که در داخل بیضی بیفتد بیان‌گر رفتار ارتجاعی مصالح است و نقاط روی بیضی دلالت بر این دارند که مصالح تسلیم شده‌اند.



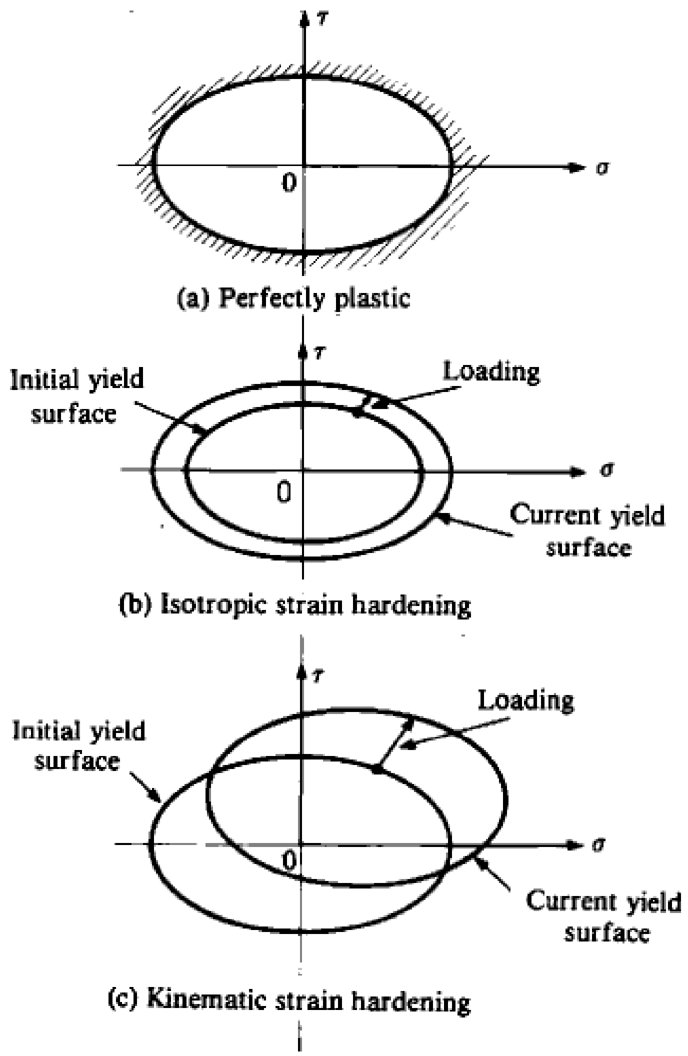
شکل ۲-۱ طرح معیار تسلیم فون می‌سز

۲-۲-۲- سخت‌شدگی کار یا کرنش[1]:

بعد از تسلیم اولیه، سطح تنشی که در تغییرشکل‌های پلاستیک بَعدی به‌دست می‌آید ممکن است به درجه‌ی کرنش پلاستیک متناظرش وابسته شود. این پدیده، که به‌عنوان سخت‌شدگی کرنش یا سخت‌شدگی کار شناخته شده است، بیان‌گر این می‌باشد که سطح تسلیم در هر مرحله از تغییرشکل‌های پلاستیک می‌تواند به طریقی تغییر کند. بعضی از مدل‌های پیشنهادشده برای توصیف این پدیده در یک مادّه در شکل‌های ۲-۲-(a) تا (c) نشان داده شده‌اند. شکل ۲-۲-(a)، مادّه با رفتار کامل پلاستیک را نشان می‌دهد که در آن سطح تنش تسلیم به درجه‌ی پلاستیک شدن بستگی ندارد.

[1] Work or Strain hardening

در این حالت با افزایش کرنش‌های پلاستیک، سطح تنش‌های تسلیم همان سطح تسلیم اولیه باقی خواهد ماند و به‌عبارت دیگر مقاومت نیز تغییر نخواهد کرد. اگر سطوح تسلیم بعد از تسلیم اولیه به‌صورت یکنواخت نسبت به منحنی تسلیم اصلی و بدون حرکت انتقالی بسط داده شوند، مدل کرنش سخت‌شدگی همسانگرد را شاهد هستیم (شکل ۲-۲-(b)). از سوی دیگر، اگر سطوح تسلیم بَعدی شکل و جهت‌گیریشان را حفظ کنند اما همانند یک بدنه‌ی صلب در فضای تنش انتقال پیدا کنند، کرنش سخت‌شدگی سینماتیک رخ خواهد داد (شکل ۲-۲-(c)) [۴۰].



شکل ۲-۲ مدل‌های ریاضی برای بیان رفتار سخت‌شدگی کرنش [۴۰]

به‌منظور برقراری ارتباط بین سطح تنش تسلیم پیش‌رونده و تغییرشکل‌های پلاستیک، پارامتر سخت‌شدگی (k) مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای این پارامتر می‌توان از دو مفهوم استفاده نمود.

مطابق مفهوم اول، که به‌عنوان سخت‌شدگی کار شناخته شده است، پارامتر سخت‌شدگی می‌تواند به‌صورت تابعی از کار پلاستیک کل[1] (W_p) فرض شود:

$$k = W_p \qquad (۱۲-۲)$$

به‌طوری‌که داریم:

$$W_p = \int \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij})_p \qquad (۱۳-۲)$$

که در آن $(d\varepsilon_{ij})_p$ مؤلفه‌های کرنش پلاستیک هستند که در طول یک نمو کرنش[2] به‌وجود می‌آیند. بر اساس مفهوم دوم، پارامتر سخت‌شدگی می‌تواند تابعی از تغییرشکل پلاستیک کل (کرنش پلاستیک مؤثر، تعمیم‌یافته یا معادل) نیز باشد. رشد کرنش پلاستیک مؤثر با فرض مستقل بودن سطح تسلیم از هر تنش هیدروستاتیک به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\{ (d\varepsilon'_{ij})_p (d\varepsilon'_{ij})_p \right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۱۴-۲)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (۲-۱۴) و مفهوم دوم برای پارامتر سخت‌شدگی، این پارامتر به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$k = \bar{\varepsilon}_p \qquad (۱۵-۲)$$

که $\bar{\varepsilon}_p$ نتیجه‌ی انتگرال‌گیری از $d\bar{\varepsilon}_p$ روی مسیر کرنش می‌باشد. این رفتار به‌عنوان سخت‌شدگی کرنش شناخته شده است.

بنابراین در وضعیت پلاستیک، تغییر تدریجی در مؤلفه‌های تنش منجر به تغییر تدریجی در سطح تسلیم خواهد شد:

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \qquad (۱۶-۲)$$

بر اساس رابطه‌ی (۲-۱۶)، می‌توان حالت‌های زیر را بیان نمود [۴۰]:

[1] Total plastic work
[2] Strain increment

- اگر $df < 0$ آن‌گاه باربرداری الاستیک رخ داده و نقطه‌ی تنش به درون سطح تسلیم برگشته است. این بدین معنی است که در این حالت مادّه رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهد.
- اگر $df = 0$ آن‌گاه بارگذاری بی‌اثر رخ داده و نقطه‌ی تنش روی سطح تسلیم باقی مانده است. این حالت نیز بدین معنی است که مادّه دارای رفتار پلاستیک کامل است.
- اگر $df > 0$ آن‌گاه بارگذاری پلاستیک صورت گرفته و نقطه‌ی تنش روی سطح تسلیم جدید (بسط‌یافته) قرار گرفته است. این وضعیت بیان‌گر رفتار پلاستیک برای یک مادّه با کرنش سخت‌شدگی همسانگرد است.

۲-۲-۳- رابطه‌ی تنش-کرنش با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح:

بعد از این‌که تسلیم اولیه رخ دهد، بخشی از مادّه رفتار الاستیک و بخش دیگر رفتار پلاستیک از خود نشان می‌دهد. در واقع در طول هر افزایش تدریجی تنش، می‌توان فرض کرد که تغییرات کرنش به دو مؤلفه‌ی الاستیک و پلاستیک قابل تقسیم هستند به‌طوری‌که خواهیم داشت:

$$d\varepsilon_{ij} = (d\varepsilon_{ij})_e + (d\varepsilon_{ij})_p \qquad (۱۷-۲)$$

تغییر تدریجی کرنش الاستیک بر اساس رابطه‌ی (۲-۱) به تغییر تدریجی تنش مرتبط شده است. با تفکیک تنش به دو مؤلفه‌ی تنش انحرافی و هیدروستاتیک، تغییر تدریجی کرنش الاستیک را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(d\varepsilon_{ij})_e = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E}\delta_{ij}\, d\sigma_{kk} \qquad (۱۸-۲)$$

که E و ν به‌ترتیب مدول الاستیسیته[1] و ضریب پوآسون[2] مادّه هستند.

[1] Elastic modulus
[2] Poisson's ratio

به‌منظور استخراج رابطه بین مؤلفه‌های کرنش پلاستیک و تغییر تدریجی تنش، یک فرض روی رفتار مادّه بایستی در نظر گرفته شود. بر اساس این فرض، مؤلفه‌های کرنش پلاستیک با گرادیان کمیتی با عنوان پتانسیل پلاستیک[1] (Q) نسبت به مؤلفه‌های تنش متناسب هستند، به‌طوری‌که خواهیم داشت:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (۱۹-۲)$$

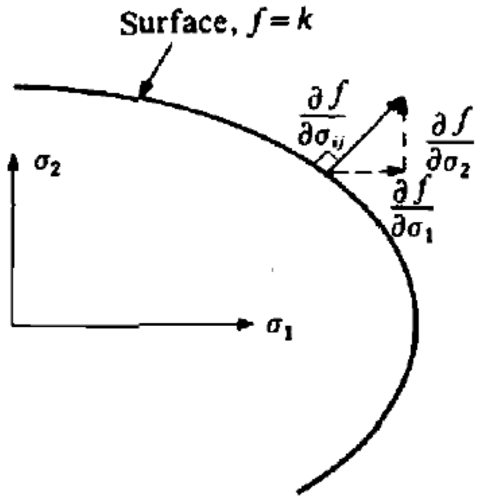
در رابطه‌ی بالا، $d\lambda$ یک ثابت تناسب است که ضریب پلاستیک[2] نامیده شده است. از طرفی معادله‌ی (۲-۱۹) با عنوان قانون جریان[3] شناخته شده است زیرا آن، جریان پلاستیک بعد از پدیده‌ی تسلیم را کنترل می‌کند [۴۰]. بر اساس تئوری پلاستیسیته‌ی همبسته[4] می‌توان پتانسیل پلاستیک را با تابع سطح تسلیم برابر دانست. این فرض از اهمیت و اعتبار خاصی در تئوری ریاضی پلاستیسیته برخوردار است. بر همین اساس خواهیم داشت:

$$(d\varepsilon_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (۲۰-۲)$$

رابطه‌ی (۲-۲۰) اصل تعامد[5] نیز نام گرفته است زیرا گرادیان تابع تسلیم نسبت به مؤلفه‌های تنش، یک بردار عمود بر سطح تسلیم در نقطه‌ی تنش مورد نظر است. در واقع بر اساس اصل پراگر، سطوح تسلیم اولیه و بَعدی در مصالح پایدار[6] محدب[7] بوده و بردار دیفرانسیلی کرنش پلاستیک عمود بر سطح تسلیم است. به‌همین خاطر است که می‌توان دیفرانسیل کرنش پلاستیک را با گرادیان تابع تسلیم متناسب دانست. از طرفی مطابق شکل ۲-۳ بردار مؤلفه‌های دیفرانسیل کرنش پلاستیک می‌بایست در فضای دو بُعدی ترکیب شوند تا یک بردار عمود بر سطح تسلیم را به‌وجود آورند [۴۰].

---

1 Plastic potential
2 Plastic multiplier
3 Flow rule
4 Associated theory of plasticity
5 Normality condition
6 Stable material
7 Convex



شکل ۲-۳ بیان هندسی اصل تعامد در تئوری پلاستیسیته‌ی همبسته [۴۰]

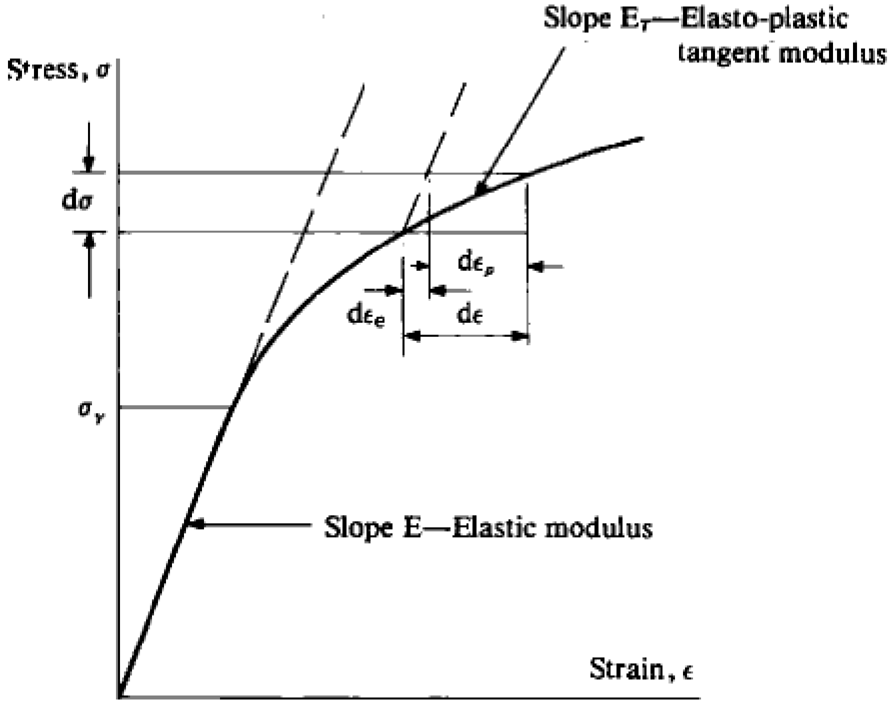
بنابراین با استفاده از روابط (۲-۱۷)، (۲-۱۸) و (۲-۲۰) رابطه‌ی نهایی بین تنش و کرنش برای تغییرشکل الاستو-پلاستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{2\mu} + \frac{(1-2\nu)}{E}\delta_{ij} d\sigma_{kk} + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (۲۱-۲)$$

۲-۲-۴- آزمایش تسلیم تک‌محوری روی یک مادّه با سخت‌شدگی کرنشی:

شکل ۲-۴ منحنی تنش-کرنش حاصل از آزمایش تک‌محوری یک مادّه با رفتار الاستو-پلاستیک را نشان می‌دهد. مادّه از شروع آزمایش تا هنگامی‌که تسلیم در تنش تسلیم تک‌محوری آغاز گردد رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهد که به‌واسطه‌ی یک مدول الاستیک (E) مشخص شده است. پس از شروع تسلیم، رفتار مادّه الاستو-پلاستیک می‌شود و با یک مدول مماسی الاستو-پلاستیک[۱] (E_T)، که به‌صورت مماس موضعی بر منحنی است و به‌طور پیوسته در حال تغییر می‌باشد، مشخص می‌گردد.

[1] Elasto-plastic tangent modulus



شکل ۲-۴ منحنی تنش-کرنش برای آزمایش تک‌محوری با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح [۴۰]

با استفاده از مفهوم سطح تنش مؤثر به‌جای سطح تنش تسلیم و همین‌طور بر اساس رابطه‌ی (۲-۱۵) و مفهوم سخت‌شدگی کرنش، می‌توان رابطه‌ی (۲-۶) را به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\bar{\sigma} = H(\bar{\varepsilon}_p) \tag{۲-۲۲}$$

که در آن H همان پارامتر K در رابطه‌ی (۲-۶) است که مقدار آن از طریق آزمایش قابل محاسبه است. از قبل هم می‌دانیم که این مقدار به پارامتر سخت‌شدگی کرنش می‌تواند وابسته باشد. اگر از رابطه‌ی (۲-۲۲) نسبت به کرنش مؤثر مشتق بگیریم خواهیم داشت:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} = H'(\bar{\varepsilon}_p) \tag{۲-۲۳}$$

از آنجایی‌که در یک آزمایش تک‌محوری، تنش‌های برشی و تنش‌های نرمال راستاهای بدون بارگذاری صفر هستند، پس تنها یک تنش محوری در راستای بارگذاری ایجاد می‌شود که حکم تنش اصلی را نیز دارد ($\sigma_x=\sigma_1=\sigma$). بنابراین بر اساس رابطه‌ی (۲-۸) مقدار سطح تنش مؤثر با تنش محوری برابر می‌شود ($\bar{\sigma}=\sigma$). از طرفی اگر تغییر تدریجی کرنش پلاستیک در جهت بارگذاری برابر با $d\varepsilon_p$ باشد و ضریب پوآسون هم به‌طور مؤثر 0.5 در نظر گرفته شود، آن‌گاه بر اساس رابطه‌ی (۲-۱۴) داریم:

$$\left.\begin{aligned}(d\varepsilon_1)_p &= d\varepsilon_p\\(d\varepsilon_2)_p &= -\frac{1}{2}d\varepsilon_p\\(d\varepsilon_3)_p &= -\frac{1}{2}d\varepsilon_p\end{aligned}\right\}\Rightarrow d\bar{\varepsilon}_p = d\varepsilon_p \qquad (۲-۲۴)$$

با توجه به توضیحات بالا و جایگذاری مقادیر به‌دست آمده برای سطح تنش و کرنش مؤثر در رابطه‌ی (۲-۲۳)، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$H'(\bar{\varepsilon}_p)=\frac{d\sigma}{d\varepsilon_p}=\frac{d\sigma}{d\varepsilon-d\varepsilon_e}=\frac{1}{d\varepsilon/d\sigma-d\varepsilon_e/d\sigma}\Rightarrow H'=\frac{E_T}{1-E_T/E} \qquad (۲-۲۵)$$

بنابراین H' که تابع سخت‌شدگی است و برای محاسبات عددی به‌کار برده می‌شود می‌تواند به‌صورت آزمایشگاهی از یک تست ساده‌ی تسلیم تک‌محوری تعیین گردد [۴۰].

۲-۳- فرمول‌بندی ماتریسی:

در این بخش عبارت‌های تئوری که در بخش‌های قبل توسعه یافت به فرم ماتریسی برگردانده خواهند شد. در همین ابتدا، تابع تسلیم معرفی‌شده در رابطه‌ی (۲-۴) می‌تواند به فرم زیر نوشته شود [۴۰]:

$$f(\boldsymbol{\sigma})=K(k) \qquad (۲-۲۶)$$

که $\boldsymbol{\sigma}$ بردار تنش و k همان پارامتر سخت‌شدگی است که بسط سطح تسلیم را کنترل می‌کند. فرم ماتریسی رابطه‌های (۲-۱۳) و (۲-۱۵) نیز به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned}&\xrightarrow{\text{work hardening}} dk=\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}_p\\&\xrightarrow{\text{strain hardening}} dk=d\boldsymbol{\varepsilon}_p\end{aligned} \qquad (۲-۲۷)$$

با مرتب کردن رابطه‌ی (۲-۲۶) به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$F(\boldsymbol{\sigma},k)=f(\boldsymbol{\sigma})-K(k)=0 \qquad (۲-۲۸)$$

و با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۲-۲۸) نیز عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}d\boldsymbol{\sigma}+\frac{\partial F}{\partial k}dk=0 \qquad (۲-۲۹)$$

که می‌توان آن را در فرم ماتریسی زیر نیز نوشت:

$$\mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma} - A d\lambda = 0 \tag{۳۰-۲}$$

پارامترهای موجود در رابطه‌ی (۲-۳۰) را به‌صورت زیر می‌توانیم تعریف کنیم (مسائل تنش مسطح):

$$\mathbf{a}^T = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} \right\} \tag{۳۱-۲}$$

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial k} dk \tag{۳۲-۲}$$

در رابطه‌ی (۲-۳۰)، $\mathbf{a}$ بردار جریان[1] نام گرفته است. عبارت نهایی مربوط به رابطه‌ی تنش-کرنش در حالت رفتار الاستو-پلاستیک (۲-۲۱) نیز به فرم ماتریسی زیر قابل تبدیل است:

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{D}]^{-1} d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{۳۳-۲}$$

که $\mathbf{D}$ همان ماتریس معمول ثابت‌های الاستیک است. با ضرب طرفین رابطه‌ی (۲-۳۳) در عبارت $\mathbf{d}_D^{\mathrm{T}}=\mathbf{a}^T\mathbf{D}$ و با حذف $\mathbf{a}^T d\boldsymbol{\sigma}$ با استفاده از رابطه‌ی (۲-۳۰)، می‌توانیم ضریب پلاستیک ($d\lambda$) را به‌دست آوریم:

$$d\lambda = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{D} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\left[A + \mathbf{a}^T \mathbf{D} \mathbf{a} \right]} \tag{۳۴-۲}$$

در نهایت با جایگذاری ضریب پلاستیک به‌دست آمده از رابطه‌ی (۲-۳۴) در عبارت (۲-۳۳)، ما می‌توانیم رابطه‌ی نهایی تنش-کرنش الاستو-پلاستیک را برای یک تغییر تدریجی به‌دست آوریم:

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}_{ep} d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{۳۵-۲}$$

که $\mathbf{D}_{ep}$ ماتریس سازنده برای مصالح با رفتار الاستو-پلاستیک می‌باشد و بر اساس رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{D}_{ep} = \mathbf{D} - \frac{\mathbf{d}_D \mathbf{d}_D^{\,T}}{A + \mathbf{d}_D^{\,T} \mathbf{a}}; \quad \mathbf{d}_D = \mathbf{D}\mathbf{a} \tag{۳۶-۲}$$

[1] Flow vector

بخش پایانی این قسمت به تعیین فرم واضحی از پارامتر اسکالر A اختصاص می‌یابد. از آن‌جایی‌که فرضیه‌ی سخت‌شدگی کار از منظر ترمودینامیکی از فرضیه‌ی سخت‌شدگی کرنش عمومی‌تر است، پس در این‌جا برای کاربردهای عددی مورد استفاده قرار خواهد گرفت. با توجه به آن‌چه که قبلاً توضیح داده شد، معادله‌ی (۲-۲۸) می‌تواند به فرم زیر نیز نوشته شود:

$$F(\boldsymbol{\sigma},k)=f(\boldsymbol{\sigma})-\sigma_Y(k)=0 \qquad (۲-۳۷)$$

بنابراین رابطه‌ی (۲-۳۲) نیز می‌تواند به‌صورت زیر بازنویسی شود:

$$A=\frac{1}{d\lambda}\frac{d\sigma_Y}{dk}dk \qquad (۲-۳۸)$$

در واقع چون σ_Y تنها تابعی از پارامتر k است، می‌توان از اُپراتور مشتق‌گیری کامل استفاده نمود. از طرفی با به‌کارگیری شرط تعامد برای دیفرانسیل کرنش پلاستیک در رابطه‌ی (۲-۲۷)، داریم:

$$dk=\boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}_p=\boldsymbol{\sigma}^T d\lambda\mathbf{a}=d\lambda\mathbf{a}^T\boldsymbol{\sigma} \qquad (۲-۳۹)$$

در ضمن، برای آزمایش تک‌محوری و با برقراری $\boldsymbol{\sigma}=\bar{\sigma}=\sigma_Y$ و $d\boldsymbol{\varepsilon}_p=d\bar{\varepsilon}_p$ رابطه‌ی (۲-۳۹) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$dk=\sigma_Y d\bar{\varepsilon}_p=d\lambda\mathbf{a}^T\boldsymbol{\sigma} \qquad (۲-۴۰)$$

هم‌چنین با توجه به رابطه‌ی (۲-۲۳) داریم:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p}=\frac{d\sigma_Y}{d\bar{\varepsilon}_p}=H' \qquad (۲-۴۱)$$

بر اساس تئوری اویلر، اگر $f(\mathbf{x})$ تابع همگن و از درجه‌ی n باشد آن‌گاه $(\partial f/\partial\mathbf{x}).\mathbf{x}=nf$. بنابراین از معادله‌ی (۲-۳۷) می‌توانیم به عبارت زیر دست پیدا کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\boldsymbol{\sigma}=\sigma_Y\rightarrow\mathbf{a}^T\boldsymbol{\sigma}=\sigma_Y \qquad (۲-۴۲)$$

با جایگذاری (۲-۴۲) در (۲-۴۰) داریم:

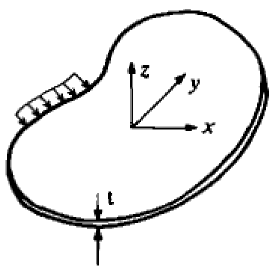
$$dk=\sigma_Y d\bar{\varepsilon}_p=d\lambda\sigma_Y\rightarrow d\bar{\varepsilon}_p=d\lambda \qquad (۲-۴۳)$$

و در نهایت با مقایسه‌ی رابطه‌ی (۲-۳۸) و (۲-۴۱) به این نتیجه می‌رسیم که پارامتر اسکالر A با تابع سخت‌شدگی به‌دست آمده در رابطه‌ی (۲-۲۵) برابر است:

$$A = H' \tag{۲-۴۴}$$

۲-۴- عبارات اساسی برای مسائل تنش مسطح:

در این بخش می‌خواهیم فرم مناسبی از مفاهیم گفته‌شده در بخش‌های قبل را به‌منظور کاربردهای عددی و کدنویسی کامپیوتری بیان کنیم. از آن‌جایی‌که ممکن است در آینده معیارهای تسلیم دیگری هم به غیر از معیار فون میسز در برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده مورد استفاده قرار بگیرند، پس بهتر است در همین ابتدای کار فرمول‌بندی جدیدی ارائه شود تا برای هر نوع معیار تسلیمی قابل استفاده باشد. در این حالت تنها عامل متمایزکننده‌ی این معیارها از همدیگر سه مشخصه‌ی ثابت می‌باشد که بسته به نوع هر معیار قابل تغییر است [۴۰]. از قبل می‌دانیم که در مسائل تنش مسطح، راستای z به‌عنوان جهت مختصه‌ی مستقل در نظر گرفته شده است و بنابراین تنش در این راستا صفر می‌باشد (شکل ۲-۵).



شکل ۲-۵ نمایش دستگاه مختصات به‌کار گرفته‌شده در مسائل تنش مسطح [۴۰]

فرم واضح ماتریس ثابت‌های الاستیک برای مسائل تنش مسطح به‌صورت زیر می‌تواند نوشته شود:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{۲-۴۵}$$

رابطه‌ی (۲-۴۵)، مؤلفه‌های متناظر با جهت مختصه‌ی مستقل را نیز شامل می‌شود اما آن‌ها برای فرمول‌بندی ماتریس ضرایب بیرون نگه داشته می‌شوند و فقط اولین بخش ۳×۳ در ماتریس **D** به‌کار گرفته خواهد شد. بردار جریان مناسب برای مسائل تنش مسطح نیز در رابطه‌ی (۲-۳۰) معرفی شده است. بر اساس فرمول‌بندی مناسب ارائه‌شده برای چهار نوع معیار تسلیم، بردار جریان می‌تواند به فرم زیر نوشته شود:

$$\mathbf{a} = C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2 + C_3\mathbf{a}_3 \tag{۲-۴۶}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1^T &= \{1,1,0,1\} \\
\mathbf{a}_2^T &= \frac{1}{2(J_2')^{1/2}}\{\sigma_x', \sigma_y', 2\tau_{xy}, \sigma_z'\} \\
\mathbf{a}_3^T &= \left\{\left(\sigma_y'\sigma_z' + \frac{J_2'}{3}\right), \left(\sigma_x'\sigma_z' + \frac{J_2'}{3}\right), -2\sigma_z'\tau_{xy}, \left(\sigma_x'\sigma_y' - \tau_{xy}{}^2 + \frac{J_2'}{3}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{۲-۴۷}$$

و نامتغیرهای تنش انحرافی نیز به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
J_2' &= \frac{1}{2}\left(\sigma_x'^2 + \sigma_y'^2 + \sigma_z'^2\right) + \tau_{xy}{}^2 \\
J_3' &= \sigma_z'\left(\sigma_z'^2 - J_2'\right)
\end{aligned} \tag{۲-۴۸}$$

در نهایت تعیین ثابت‌های C_1, C_2 و C_3 برای تکمیل رابطه‌ی (۲-۴۶) ضروری است. جدول ۲-۱ مقادیر این ثابت‌ها را برای چهار معیار تسلیم بیان کرده است که ما فقط از ثابت‌های مربوط به معیار فون می‌سز در این پایان‌نامه استفاده خواهیم کرد.

جدول ۲-۱ ثابت‌های تعریف‌شده برای سطح تسلیم در یک فرم مناسب برای آنالیز عددی [۴۰]

Yield Criterion	C_1	C_2	C_3
Tresca	0	$2\cos\theta(1+\tan\theta\tan 3\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{J_2'}\frac{\sin\theta}{\cos 3\theta}$
Von Mises	0	$\sqrt{3}$	0
Mohr–Coulomb	$\frac{1}{3}\sin\phi$	$\cos\theta[(1+\tan\theta\tan 3\theta) + \sin\phi(\tan 3\theta - \tan\theta)/\sqrt{3}]$	$\frac{(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta\sin\phi)}{(2J_2'\cos 3\theta)}$
Drucker–Prager	α	1.0	0

بر اساس رابطه‌ی (۲-۳۶) به‌منظور به‌دست آوردن توصیف مناسب برای ماتریس الاستو-پلاستیک برای محاسبات عددی، بایستی بردار $\mathbf{d}_D$ را تعیین کنیم. با به‌کارگیری فرم مطلوب ماتریس $\mathbf{D}$ از رابطه‌ی (۲-۴۵) در (۲-۳۶)، بردار $\mathbf{d}_D$ برای مسائل تنش مسطح به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{d}_D = \begin{Bmatrix} \dfrac{E}{1+\nu} a_1 + M_2 \\ \dfrac{E}{1+\nu} a_2 + M_2 \\ G a_3 \\ \dfrac{E}{1+\nu} a_4 + M_2 \end{Bmatrix}, \quad M_2 = \frac{E\nu\left(a_1 + a_2\right)}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)} \tag{۲-۴۹}$$

که در آن، G مدول برشی و $a_1,\dots,a_4$ مؤلفه‌های بردار جریان هستند [۴۰].

فصل سوم:

تحلیل ایزوژئومتریک با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح

۳-۱- مقدمه:

تحلیل ایزوژئومتریک از جمله روش‌های عددی است که امروزه جایگزین مناسبی برای روش‌های متداول هم‌چون روش اجزای محدود، روش تفاضل محدود و روش‌های بدون شبکه شده است. اساس این روش را استفاده از فناوری‌های طراحی به کمک رایانه و پیشرفت‌های اخیر در زمینه‌ی گرافیک رایانه‌ای تشکیل می‌دهد. این روش، که برای اولین بار در سال ۲۰۰۵ توسط هیوز و همکارانش معرفی گردید، از توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین و نربز به‌جای توابع شکل مورد استفاده در اجزای محدود برای مدل‌سازی هندسه و همچنین تقریب و درون‌یابی تابع مجهول استفاده می‌کند و همین امر منجر به تولید هندسه‌ی دقیق سازه و عدم نیاز به مش‌بندی‌های مکرر می‌گردد [۳۵-۳۷]. در ادامه‌ی این فصل به‌طور خلاصه به معرفی سطوح ساخته شده از توابع پایه‌ی نربز و همین‌طور روند تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستیک و الاستو-پلاستیک مصالح پرداخته می‌شود. در انتهای فصل نیز چندین مثال عددی به‌منظور اطمینان از صحت برنامه‌ی کامپیوتری نوشته‌شده بررسی خواهد شد.

۳-۲- معرفی سطح ساخته‌شده از توابع نربز:

یکی از ویژگی‌های منحصربه‌فرد منحنی‌ها، سطوح و احجام ساخته‌شده توسط توابع پایه‌ی نربز، عدم تغییرپذیری آنها تحت تبدیلات هندسی متداول همچون انتقال، دوران، تشابه و نگاشت می‌باشد. به‌همین دلیل توابع نربز یا همان بی-اسپیلاین‌های نسبی غیریکنواخت امروزه در بسیاری از استانداردهای صنعتی جهان به‌عنوان یکی از ابزارهای ریاضی قدرتمند برای طراحی هندسی شناخته شده‌اند. یکی از مفاهیم اساسی برای معرفی سطوح ساخته‌شده توسط نربز، بردار گره‌ای[1] است. یک بردار گره‌ای، دنباله‌ای صعودی از اعداد حقیقی است که به‌صورت زیر تشکیل می‌شود [۴۳]:

[1] Knot vector

$$\Xi = \left\{ \xi_0, \xi_1, ..., \xi_r \right\} \quad , \xi_{i+1} \ge \xi_i \quad i = 0, ..., n + p - 1 \tag{۱-۳}$$

که در آن ξ_i، iاُمین گره، p درجه‌ی چندجمله‌ای و n تعداد توابع شکل تشکیل‌دهنده‌ی بی-اسپیلاین به‌شمار می‌روند. یکی از انواع بردارهای گره‌ای که در این‌جا مورد استفاده قرار می‌گیرد، بردار گره‌ای نامتناوب[1](باز) است که فرم زیر را دارا می‌باشد:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, ..., a}_{p+1}, \xi_{p+1}, ..., \xi_{r-p-1}, \underbrace{b, ..b}_{p+1} \right\} \tag{۲-۳}$$

در این نوع از بردارهای گره‌ای، اولین و آخرین مقدار از گره‌ها دارای $p+1$ تکرار می‌باشند. با توجه به مفاهیم گفته‌شده، iاُمین تابع پایه‌ی بی-اسپیلاین از درجه‌ی p (مرتبه‌ی $p+1$) که با $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود، به شکل زیر تعریف می‌گردد [۴۳]:

$$\begin{aligned} N_{i,0}(\xi) &= \begin{cases} 1 & \text{if} \quad \xi_i \le \xi \le \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ N_{i,p}(\xi) &= \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \end{aligned} \tag{۳-۳}$$

بدین ترتیب، یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه‌ی p و در جهت η از درجه‌ی q می‌باشد، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \omega_{i,j} P_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \omega_{i,j}} \tag{۴-۳}$$

که در آن بردارهای گره‌ای Ξ و H به‌ترتیب دارای $r+1$ و $s+1$ گره هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Xi &= \left\{ \underbrace{0, ..., 0}_{p+1}, \xi_{p+1}, ..., \xi_{r-p-1}, \underbrace{1, ..., 1}_{p+1} \right\} \\ \mathrm{H} &= \left\{ \underbrace{0, ..., 0}_{q+1}, \eta_{q+1}, ..., \eta_{s-q-1}, \underbrace{1, ..., 1}_{q+1} \right\} \end{aligned} \tag{۵-۳}$$

[1] Nonperiodic knot vector

در رابطه‌ی (۳-۴)، $P_{i,j}$ مختصات شبکه‌ای دو سویه از نقاط کنترلی به تعداد $(n \times m)$ نقطه را نشان می‌دهد به‌طوری‌که $n=r-p$ و $m=s-q$ به‌ترتیب تعداد نقاط کنترلی در راستای بردارهای گره‌ای Ξ و H می‌باشند. $\omega_{i,j}$ وزن‌های مرتبط با نقاط کنترلی و $N_{i,p}(\xi)$ و $N_{j,q}(\eta)$ توابع پایه‌ی بی-اسپیلاین در دو راستا هستند که روی بردارهای گره‌ای بالا تعریف شده‌اند [۴۳]. از طرفی اگر توابع پایه‌ی نربز به‌صورت زیر تعریف شود:

$$R_{i,j}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \omega_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) \omega_{i,j}} \tag{۳-۶}$$

آن‌گاه می‌توان رابطه‌ی (۳-۴) را نیز به‌صورت زیر بازنویسی نمود:

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta) P_{i,j} \tag{۳-۷}$$

۳-۳- فرمول‌بندی تحلیل ایزوژئومتریک برای مسائل تنش مسطح:

ویژگی اصلی روش ایزوژئومتریک این است که از توابع پایه‌ی مورد استفاده در مدل‌سازی هندسه، به‌منظور تقریب تابع مجهول نیز استفاده می‌کند و بدین ترتیب از این جهت شباهت زیادی به ایده‌ی ایزوپارامتریک در اجزای محدود کلاسیک دارد. اما این دو رویکرد یک تفاوت اساسی نیز دارند و آن هم این است که در ایده‌ی ایزوپارامتریک روش اجزای محدود، ابتدا تابع مجهول به کمک توابع شکل تقریب زده می‌شود و سپس هندسه. این در حالی است که در روش ایزوژئومتریک ابتدا هندسه به‌صورت دقیق تعیین می‌گردد و سپس با کمک همان توابع پایه‌ای که هندسه را مدل کردند، تابع مجهول مسئله تقریب زده می‌شود.

۳-۳-۱- روند تحلیل با در نظر گرفتن رفتار الاستیک خطی مصالح:

به‌منظور تحلیل الاستیک مسائل دو بُعدی به روش ایزوژئومتریک، ابتدا بایستی هندسه‌ی مسئله توسط بردارهای گره‌ای، شبکه‌ی نقاط کنترلی و در نهایت توابع پایه‌ی نربز به‌طور دقیق تعریف شود. سپس با استفاده از همان بردارهای گره‌ای، دامنه به شبکه‌های کوچکتری تقسیم می‌گردد به‌طوری‌که حد فاصل هر دو گره با مقدار متمایز در دو راستا، یک اِلمان گره‌ای[1] را تشکیل می‌دهد. مجموعه‌ی این اِلمان‌ها که در محدوده‌ی دو بردار گره‌ایِ تعریف‌شده، قرار گرفته‌اند یک وصله[2] را ایجاد خواهد کرد. در مسائل با هندسه‌ی پیچیده می‌توان از بیش از یک وصله نیز استفاده نمود. در مرحله‌ی بعد، مؤلفه‌های تابع مجهول با استفاده از توابع پایه‌ی نربز تقریب زده می‌شوند. سپس مقادیر تقریبی موجود از مرحله‌ی قبل در روابط به‌دست آمده از یکی از روش‌های باقی‌مانده‌ی وزن‌دار و یا اصل کار مجازی جایگزین می‌شوند و این امر منجر به تولید یک دستگاه معادلات خطی می‌گردد. با حل این دستگاه معادلات، مقادیر مجهولات مسئله که همان مقادیر تغییرمکان‌ها در نقاط کنترلی هستند به‌دست می‌آیند. در نهایت با داشتن این مقادیر، می‌توان به مقادیر تغییرمکان‌ها، کرنش‌ها و تنش‌ها در هر نقطه‌ی دلخواهی از دامنه‌ی مسئله دست یافت.

در روش تحلیل ایزوژئومتریک همانند روش اجزای محدود برای رسیدن به دستگاه معادلات خطی بایستی مقدار ماتریس ضرایب کل محاسبه گردد. بر همین اساس مقدار ماتریس ضرایب مطابق آنچه در ادامه گفته خواهد شد برای هر کدام از اِلمان‌های گره‌ای محاسبه و سپس اَسمبل می‌گردند. در صورتی‌که از تعداد وصله‌های بیشتری استفاده شود، ماتریس ضرایب وصله‌ها نیز با هم اَسمبل می‌شوند تا معادله‌ی تعادل $\mathbf{Ku=f}$ حاصل گردد. بر اساس آنچه که در بالا توضیح داده شد، مؤلفه‌های هندسه، $\mathbf{s}^p=[x^p,y^p]$ و مؤلفه‌های تابع تقریب تغییرمکان روی وصله‌ی p، $\mathbf{u}^p=[u^p,v^p]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

---
[1] Knot element
[2] Patch

$$
\begin{aligned}
x^{P}(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\, x_{i,\mathrm{j}}^{p} \\
y^{P}(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\, y_{i,\mathrm{j}}^{p} \\
u^{P}(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\, u_{i,\mathrm{j}}^{p} \\
v^{P}(\xi,\eta) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta)\, v_{i,\mathrm{j}}^{p}
\end{aligned}
\qquad (۸-۳)
$$

که $x^{p}_{i,j}$ و $y^{p}_{i,j}$ مؤلفه‌های مختصات نقاط کنترلی و $u^{p}_{i,j}$ و $v^{p}_{i,j}$ مؤلفه‌های تغییرمکان در دو راستا برای وصله‌ی p هستند. یکی از ویژگی‌های مهم توابع پایه‌ی نربز، خاصیت بازه‌ی تأثیر است که بر اساس آن، روابط (۳-۸) طوری اصلاح می‌شوند که فقط توابع پایه‌ی غیر صفر در محاسبات در نظر گرفته خواهند شد و در نتیجه این امر سبب می‌شود حجم محاسبات در مراحل بعدی کاهش یابد [۴۳]. فرم ماتریسی و اصلاح‌شده‌ی روابط بالا با در نظر گرفتن ویژگی ذکرشده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{s}^{p}(\xi,\eta) &= \begin{bmatrix} x^{p}(\xi,\eta) \\ y^{p}(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(\xi,\eta) P_{k,l}^{p} = \mathbf{Rp} \\
\mathbf{u}^{p}(\xi,\eta) &= \begin{bmatrix} u^{p}(\xi,\eta) \\ v^{p}(\xi,\eta) \end{bmatrix} = \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j} R_{k,l}(\xi,\eta) d_{k,l}^{p} = \mathbf{Rd}
\end{aligned}
\qquad (۹-۳)
$$

که در آن:

$$
\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) & 0 & \cdots & R_{i-p,j}(\xi,\eta) & 0 & \cdots & R_{i,j}(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & R_{i-p,j-q}(\xi,\eta) & \cdots & 0 & R_{i-p,j}(\xi,\eta) & \cdots & 0 & R_{i,j}(\xi,\eta) \end{bmatrix}
$$

(۱۰-۳)

$$
\mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_{x\ i-p,j-q}^{p} & P_{y\ i-p,j-q}^{p} & \cdots & P_{x\ i-p,j}^{p} & P_{y\ i-p,j}^{p} & \cdots & P_{x\ i,j}^{p} & P_{y\ i,j}^{p} \end{bmatrix}^{T} \qquad (۱۱-۳)
$$

$$
\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{x\ i-p,j-q}^{p} & d_{y\ i-p,j-q}^{p} & \cdots & d_{x\ i-p,j}^{p} & d_{y\ i-p,j}^{p} & \cdots & d_{x\ i,j}^{p} & d_{y\ i,j}^{p} \end{bmatrix}^{T} \qquad (۱۲-۳)
$$

در روابط (۳-۱۱) و (۳-۱۲)، $P^{p}_{x\,or\,y}$ و $d^{p}_{x\,or\,y}$ به‌ترتیب مختصات نقاط کنترلی و مؤلفه‌های تغییرمکان در راستای x یا y برای وصله‌ی p هستند.

در این‌جا به‌منظور استخراج ماتریس ضرایب، از اصل کار مجازی استفاده شده است. مطابق این اصل و با در نظر گرفتن نیروهای حجمی[1] $\mathbf{b}$ و نیروهای سطحی[2] $\mathbf{t}$ و با برابر قرار دادن کار ناشی از نیروهای داخلی و خارجی، خواهیم داشت:

$$\int_{V^p} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_{V^p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} dV - \int_{\Gamma^p} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \qquad (۱۳\text{-}۳)$$

در رابطه‌ی (۳-۱۳)، V^p و Γ^p به‌ترتیب حجم و مرز وصله را نشان می‌دهند. $\boldsymbol{\sigma}$ و $\boldsymbol{\varepsilon}$ نیز بیان‌گر بردارهای تنش و کرنش هستند که می‌توان روابط زیر را جایگزین آن‌ها نمود:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} \rightarrow \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\delta\mathbf{u} \\ &\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \qquad (۱۴\text{-}۳)$$

که در آن $\mathbf{B}$ ماتریس کرنش-تغییرمکان (به‌عبارت دیگر ماتریس مشتقات توابع پایه‌ی نربز) است که در ادامه به آن پرداخته می‌شود. از طرفی $\mathbf{D}$ نیز ماتریس ثابت‌های مادّه در حالت الاستیک خطی است که در رابطه‌ی (۲-۴۵) معرفی شده است. در نهایت با جایگذاری روابط (۳-۱۴) در (۳-۱۳) و ساده‌سازی آن ماتریس ضرایب وصله به‌صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\mathbf{K}^p = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \qquad (۱۵\text{-}۳)$$

برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب یک وصله، محاسبه‌ی ماتریس کرنش-تغییرمکان ضرورت پیدا می‌کند. یک ماتریس کرنش-تغییرمکان به‌صورت زیر قابل تعریف است:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{R} \qquad (۱۶\text{-}۳)$$

که در آن $\mathbf{L}$ ماتریس (اُپراتور) دیفرانسیل‌گیری است که به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (۱۷\text{-}۳)$$

[1] Body forces
[2] Traction forces

بنابراین با به‌کارگیری اُپراتور دیفرانسیل‌گیری در رابطه‌ی (۳-۱۶)، ماتریس **B** به شکل زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & 0 & \cdots\\ 0 & \dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \cdots\\ \dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial y} & \dfrac{\partial R_{i-p,j-q}(\xi,\eta)}{\partial x} & \cdots\end{bmatrix} \tag{۳-۱۸}$$

بر اساس رابطه‌ی (۳-۱۸)، ما به مشتقات جزئی توابع پایه‌ی نربز نسبت به x و y نیاز داریم. همانند روش اجزای محدود، برای محاسبه‌ی این مشتقات از قانون زنجیره‌ای[1] استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}=\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\times\dfrac{\partial x}{\partial \xi}+\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\times\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}=\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\times\dfrac{\partial x}{\partial \eta}+\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\times\dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{cases} \tag{۳-۱۹}$$

فرم ماتریسی روابط (۳-۱۹) به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\end{bmatrix} \tag{۳-۲۰}$$

که ماتریس (۲×۲) موجود در آن، ماتریس ژاکوبین[2] نام دارد و با $\mathbf{J}_1$ نمایش داده می‌شود. این ماتریس، که شامل مشتقات جزئی مؤلفه‌های هندسه نسبت به ξ و η می‌باشد، در واقع بیان‌گر نگاشتی از فضای پارامتری (ξ,η) به فضای فیزیکی مسئله (x,y) است. بنابراین مشتقات جزئی توابع پایه‌ی نربز نسبت به x و y به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}\end{bmatrix}=\mathbf{J}_1^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}\end{bmatrix}=\frac{1}{|\mathbf{J}|>0}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & -\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\\ -\dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial x}{\partial \xi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial \mathbf{R}}{\partial \eta}\end{bmatrix} \tag{۳-۲۱}$$

---
[1] Chain rule
[2] Jacobian matrix

در رابطه‌ی (۳-۲۱)، مشتقات جزئی توابع پایه‌ی نربز نسبت به مؤلفه‌های (ξ,η) نیز نیاز است که به‌منظور آشنایی کامل با نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها، مطالعه‌ی مرجع [۴۳] توصیه می‌گردد. در نهایت برای تکمیل رابطه‌ی (۳-۲۱) محاسبه‌ی مشتقات جزئی مؤلفه‌های هندسه ضرورت پیدا می‌کند:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j}\frac{\partial R_{k,l}(\xi,\eta)}{\partial \xi}P_{x\,k,l} \\
\frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j}\frac{\partial R_{k,l}(\xi,\eta)}{\partial \eta}P_{x\,k,l} \\
\frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j}\frac{\partial R_{k,l}(\xi,\eta)}{\partial \xi}P_{y\,k,l} \\
\frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{k=i-p}^{i}\sum_{l=j-q}^{j}\frac{\partial R_{k,l}(\xi,\eta)}{\partial \eta}P_{y\,k,l}
\end{aligned} \tag{۳-۲۲}$$

برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب به‌دست آمده، می‌توان از روش انتگرال‌گیری گوسی استفاده کرد. نقاط گوسی نقاطی از پیش تعیین‌شده هستند که برای اِلمان‌های گره‌ای مختلف، محل و وزن آن‌ها محاسبه شده است (همانند روش اجزای محدود). برای این‌که بتوانیم از این نقاط ارائه‌شده بهره ببریم، بایستی از یک نگاشت دیگر هم استفاده کنیم به‌طوری‌که این نگاشت، مختصات نقاط ارائه‌شده در دستگاه مربوط به فضای اِلمان مادر (r,s) را به دستگاه مختصات فضای پارامتری (ξ,η) منتقل می‌کند:

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\left[\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right)r+\left(\xi_{i+1}+\xi_i\right)\right] \\
\eta &= \frac{1}{2}\left[\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)s+\left(\eta_{i+1}+\eta_i\right)\right]
\end{aligned} \tag{۳-۲۳}$$

این نگاشت در انتگرال‌گیری باعث ایجاد ماتریس ژاکوبین به‌صورت زیر می‌شود:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial r} & \dfrac{\partial \eta}{\partial r} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial s} & \dfrac{\partial \eta}{\partial s} \end{bmatrix} \tag{۳-۲۴}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \xi}{\partial r} &= \frac{1}{2}\left(\xi_{i+1}-\xi_i\right) \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0 \\
\frac{\partial \xi}{\partial s} &= 0 \qquad\qquad\qquad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial s} = \frac{1}{2}\left(\eta_{i+1}-\eta_i\right)
\end{aligned} \tag{۳-۲۵}$$

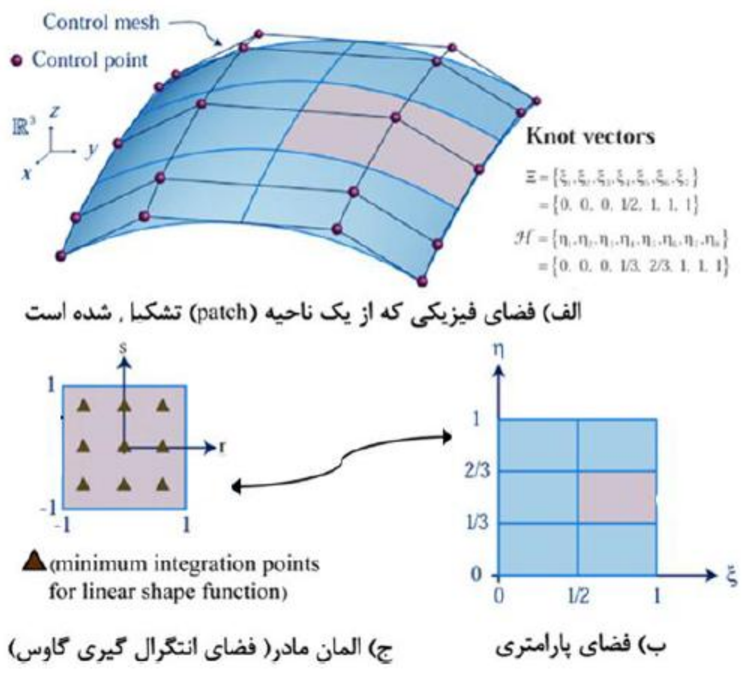
پس می‌توان فرم نهایی ماتریس ضرایب را در دستگاه مختصات مربوط به فضای اِلمان مادر، به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{K}^{p}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\mathbf{B}^{T}(r,s)\mathbf{D}\mathbf{B}(r,s)\left|\mathbf{J}_{1}\right|\left|\mathbf{J}_{2}\right|drds \tag{۲۶-۳}$$

و در نهایت انتگرال ماتریس ضرایب به روش گاوس به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}^{p}=\sum_{i=1}^{m'}\sum_{j=1}^{n'}\mathbf{B}^{T}(r,s)\mathbf{D}\mathbf{B}(r,s)\left|\mathbf{J}_{1}\right|\left|\mathbf{J}_{2}\right|w_{i}w_{j} \tag{۲۷-۳}$$

که در آن m' و n' تعداد نقاط گوسی در جهت r و s در هر اِلمان و w_i و w_j نیز وزن نقاط گوسی می‌باشند. لازم به ذکر است که در تحلیل ایزوژئومتریک حداقل تعداد نقاط مورد نیاز جهت انتگرال‌گیری عددی به روش گاوس با توجه به مرتبه‌ی توابع شکل از مورد مشابه آن در اجزای محدود بیش‌تر است [۴۴]. در شکل ۳-۱ فضای فیزیکی و فضای پارامتری مربوط به آن و هم‌چنین فضای انتگرال‌گیری عددی یک اِلمان نربز ترسیم شده است.



شکل ۳-۱ نقاط انتگرال‌گیری گاوس در روش ایزوژئومتریک [۴۴]

همان‌طور که مشاهده می‌شود حداقل تعداد نقاط انتگرال‌گیری گاوس برای توابع پایه‌ی مرتبه‌ی دو در هر جهت، سه نقطه می‌باشد که این تعداد در روش اجزای محدود دو نقطه در هر جهت است.

۳-۲-۳- روند تحلیل با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح:

آن‌چه که باعث ایجاد تمایز بین تحلیل مسائل سازه‌ای با رفتار الاستیک و الاستو-پلاستیک مصالح می‌شود رابطه‌ی تعادل است که به‌طور عمومی در مسائل الاستو-پلاستیک در هر مرحله‌ی محاسباتی اقناع نخواهد شد. به‌عبارت دیگر با توجه به رابطه‌ی (۳-۱۳) و $\delta\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{B}\delta\mathbf{u}$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{\psi} = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f} \neq 0 \qquad (۲۸-۳)$$

که در آن، $\boldsymbol{\psi}$ بردار نیروی باقی‌مانده[1] و $\mathbf{f}$ بردار نیروهای خارجی نام دارند. برای مسائل سازه‌ای با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، سختی مادّه به‌طور پیوسته در حال تغییر است و رابطه‌ی تنش-کرنش تدریجی نیز توسط رابطه‌ی (۲-۳۵) داده شده است. به‌منظور ارزیابی ماتریس سختی مماسی مادّه (ماتریس ضرایب در روش ایزوژئومتریک) در هر مرحله ($\mathbf{K}_T$)، فرم تدریجی رابطه‌ی (۳-۲۸) بایستی به‌کار گرفته شود. بنابراین در یک رشد تدریجی بار خواهیم داشت:

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \Delta\boldsymbol{\sigma} dV - \Delta\mathbf{f} \neq 0 \qquad (۲۹-۳)$$

با جایگذاری بردار تنش از رابطه‌ی (۲-۳۵) در (۳-۲۹)، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = \mathbf{K}_T \mathbf{u} - \Delta\mathbf{f} \neq 0 \qquad (۳۰-۳)$$

که در آن:

$$\mathbf{K}_T = \int_{V^p} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{ep} \mathbf{B} dV \qquad (۳۱-۳)$$

از آن‌جایی‌که ماتریس $\mathbf{D}_{ep}$ به مجهولات مسئله وابسته است بنابراین ماتریس ضرایب نیز در مسائل سازه‌ای با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح به مجهولات مسئله (تغییرمکان‌ها) وابسته می‌شود و در نتیجه مسئله غیرخطی می‌گردد. برای حل این مسائل بایستی از یک الگوی تکرارشونده استفاده نمود. پس در هر مرحله از این روند تکراری معادله‌ی تعادل اقناع نخواهد شد مگر این‌که همگرایی حاصل شود.

[1] Residual force vector

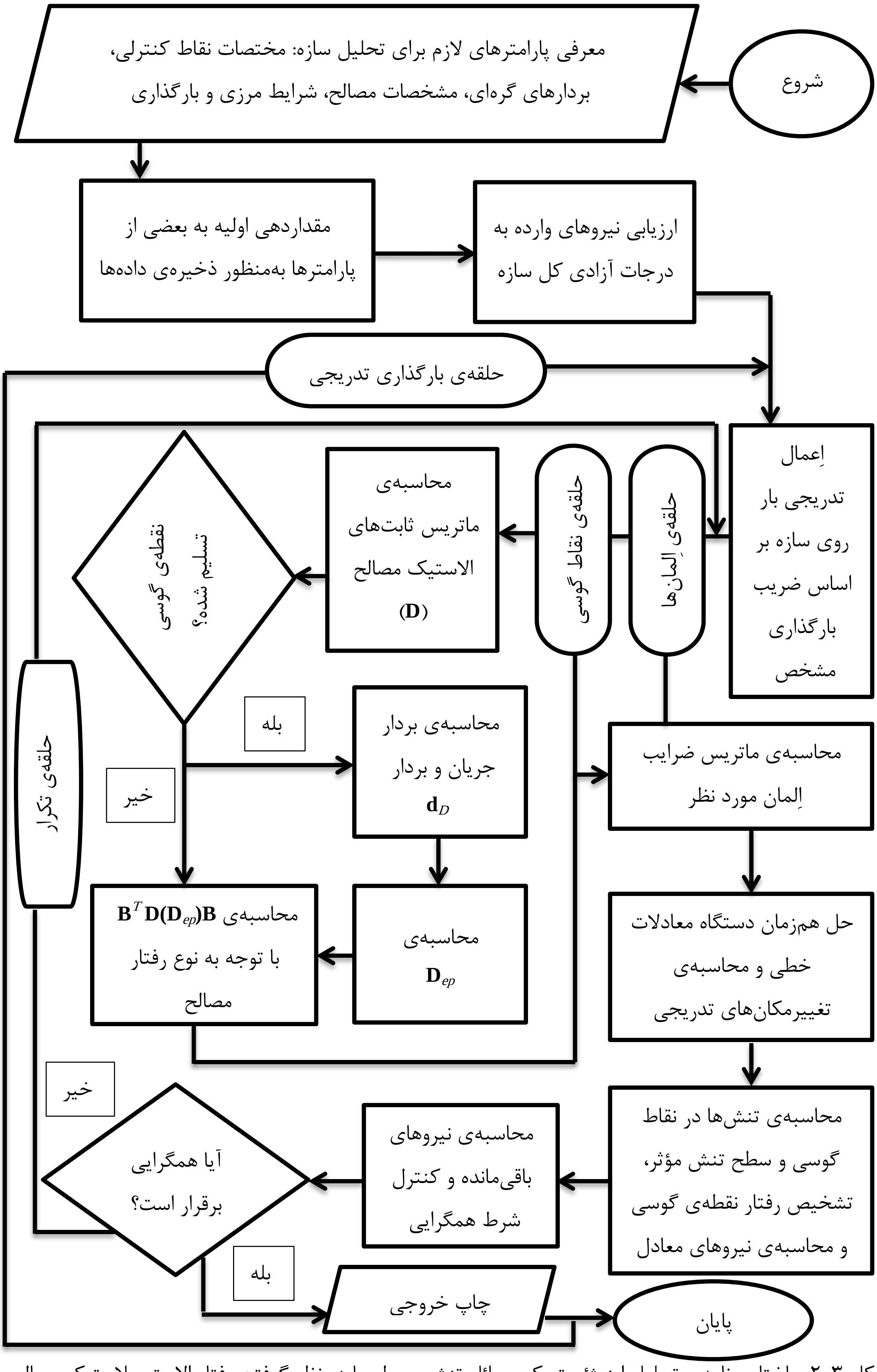
یکی از روش‌های حل مناسب برای معادلات غیرخطی، روش نیوتن-رافسون[1] تعمیم‌یافته است که در ادامه توضیح داده خواهد شد. این نکته را نیز بایستی یادآوری کرد که سایر پارامترهای لازم برای تحلیل ایزوژئومتریک با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح همانند بخش ۳-۳-۱- می‌باشند.

۳-۴- ساختار برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده:

هدف از این بخش معرفی ساختاری منسجم از روابط گفته‌شده در بخش‌های قبلی به‌منظور توسعه‌ی برنامه‌ی کامپیوتری تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح به زبان فرترن است. برای این منظور، در ابتدای این بخش روند کلی و فلوچارت برنامه‌ی مورد نظر با عنوان EPIGA بیان می‌گردد. گام‌های پیشنهادی کلی برای این برنامه به‌صورت زیر می‌باشند:

- معرفی پارامترهای ورودی لازم برای بیان هندسه‌ی سازه، شرایط مرزی و خصوصیات مصالح.
- مقداردهی اولیه به بعضی از متغیرهای برنامه.
- ارزیابی بارهای وارده به سازه.
- ایجاد حلقه‌ای برای اِعمال بار به‌صورت تدریجی روی سازه.
- ایجاد حلقه‌ای برای حل معادلات غیرخطی.
- محاسبه‌ی ماتریس ضرایب سازه با توجه به نوع رفتار مصالح.
- حل معادله‌ی تعادل به‌صورت خطی.
- محاسبه‌ی نیروهای باقی‌مانده در درجات آزادی سازه.
- کنترل شرایط همگرایی.
- پایان حلقه‌ی تکرار برای حل معادلات غیرخطی.
- پایان حلقه‌ی اِعمال بار روی سازه.

[1] Newton-Raphson method



شکل ۳-۲ ساختار برنامه‌ی تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح

شکل ۳-۲ الگوریتم کلی برنامه‌ی نوشته‌شده را نشان می‌دهد. یک نکته‌ی مهمی که در این‌جا بایستی به آن اشاره شود این است که در اولین تکرار از اولین مرحله‌ی بارگذاری، رفتار همه‌ی نقاط گوسی الاستیک فرض می‌شود. به‌منظور آشنایی کامل با فرآیند تحلیل، بیان جزئیات مراحل موجود در شکل ۳-۲ ضرورت پیدا می‌کند که در ادامه‌ی این بخش به آن‌ها پرداخته می‌شود.

۳-۴-۱- اِعمال بار روی سازه به‌صورت تدریجی:

در طول فرآیند تحلیل سازه با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، از دو آرایه به‌منظور اِعمال بار روی سازه استفاده می‌شود که هر کدام کاربرد خاص خودشان را دارند. به‌منظور معرفی این آرایه‌ها، ابتدا بایستی با آرایه‌ی مربوط به بارگذاری کل سازه آشنا شد. بار کل وارده به درجات آزادی هر اِلمان گره‌ای از سازه با آرایه‌ی eload (ielem,ievab) مشخص می‌شود که منظور از ielem شماره‌ی اِلمان گره‌ای مورد نظر و منظور از ievab شماره‌ی هر درجه‌ی آزادی از آن اِلمان است. نکته‌ی قابل توجه این است که در تحلیل ایزوژئومتریک تعداد درجات آزادی هر اِلمان گره‌ای در مسائل تنش مسطح دو برابر حاصل‌ضرب مرتبه‌ی توابع پایه در دو راستا می‌باشد. به‌منظور اِعمال بار به‌صورت تدریجی بایستی از یک ضریب بارگذاری مشخص (facto) نیز استفاده نمود.

بار کل وارده به سازه در هر مرحله از آنالیز به‌صورت تجمعی در آرایه‌ی tload (ielem,ievab) ذخیره می‌شود. از طرف دیگر آرایه‌ی eeload (ielem,ievab) شامل بار وارده به سازه در هر تکرار از پروسه‌ی حل می‌باشد. در ابتدای فرآیند تحلیل (اولین تکرار از اولین مرحله‌ی بارگذاری تدریجی) مقدار آرایه‌ی eeload و tload برابر می‌شود با eload (ielem,ievab)×facto. برای تکرارهای دوم به بعد از همان مرحله‌ی بارگذاری، آرایه‌ی eeload شامل نیروهای گره‌ای باقی‌مانده خواهد شد. بعد از وقوع همگرایی و به‌محض ورود به مرحله‌ی بعدی بارگذاری، آرایه‌ی eeload شامل بار تدریجی جدید به‌اضافه‌ی هر نیروی باقی‌مانده‌ای خواهد شد که بعد از همگرایی پروسه‌ی حل مرحله‌ی بارگذاری قبلی در سازه باقی

مانده است. البته در صورتی‌که فاکتور حد مجاز[1] همگرایی به‌درستی انتخاب گردد این نیروهای باقی‌مانده در پایان پروسه‌ی حل به‌اندازه‌ی کافی کوچک به‌دست خواهند آمد. تنها نکته‌ی باقی‌مانده در این بخش این است که به‌منظور برقراری تعادل و کنترل همگرایی پروسه‌ی حل غیرخطی بایستی در انتهای هر تکرار و بعد از محاسبه‌ی تغییرمکان‌ها و واکنش‌های تکیه‌گاهی تدریجی، مقادیر این واکنش‌ها به آرایه‌ی tload اضافه گردد؛ زیرا تعادل در سازه زمانی برقرار می‌شود که مجموع نیروهای وارده و واکنش‌های تکیه‌گاهی با نیروهای گره‌ای معادل[2] حاصل از تنش‌های داخلی به توازن برسند.

۳-۴-۲- پروسه‌ی حل برای مسائل غیرخطی:

استفاده از روش‌های عددی در تحلیل مسائل سازه‌ای منجر به دست‌یابی به یک دستگاه معادلات به فرم زیر می‌گردد:

$$\mathbf{H}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{f} = 0 \qquad (۳۲-۳)$$

که در آن $\boldsymbol{\varphi}$ بردار مجهولات، $\mathbf{f}$ بردار بارهای وارده و $\mathbf{H}$ ماتریس ضرایب اَسمبل‌شده است. همان‌طور که در بخش‌های قبلی نیز اشاره شد، اگر درایه‌های ماتریس ضرایب به مجهولات مسئله یا مشتقات آن‌ها وابسته شوند، مسئله به‌طور واضح غیرخطی می‌گردد. یکی از روش‌های مناسب برای حل این‌گونه مسائل در کاربردهای سازه‌ای، روش نیوتن-رافسون تعمیم‌یافته یا روش سختی مماسی[3] می‌باشد. از آن‌جایی‌که در مسائل سازه‌ای غیرخطی از یک الگوی تدریجی برای تحلیل استفاده می‌شود، پس حل این‌گونه مسائل علاوه بر این‌که به تغییرمکان‌های جاری وابسته می‌باشند به تاریخچه‌ی بارگذاری قبلی هم وابسته خواهند شد. بنابراین مسئله‌ی مورد نظر می‌تواند در هر مرحله‌ی بارگذاری تدریجی خطی شود. به‌طور کلی در مسائل غیرخطی فرض می‌شود که یک مجموعه از نیروهای باقی‌مانده به فرم زیر وجود دارند:

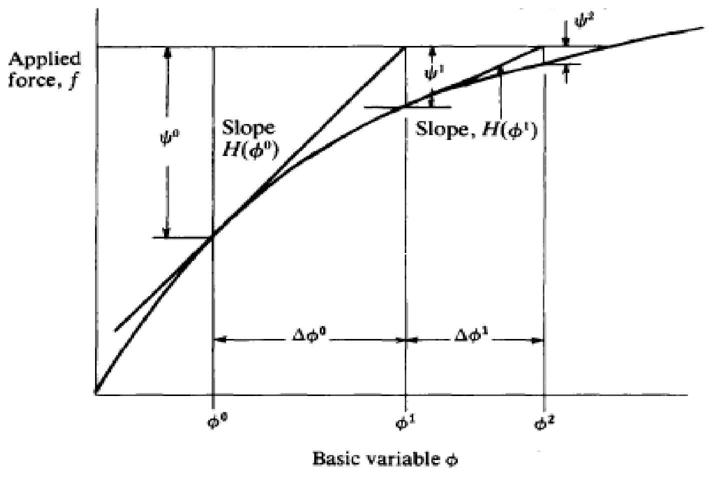
[1] Tolerance
[2] Equivalent nodal forces
[3] Tangential stiffness method

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varphi} + \mathbf{f} \neq 0 \qquad (۳۳-۳)$$

از آن‌جایی‌که $\mathbf{H}$ تابعی از مجهولات می‌باشد، پس در هر مرحله از پروسه‌ی حل، $\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varphi})$ می‌باشد و آن‌گاه خواهیم داشت:

$$\mathbf{H}(\boldsymbol{\varphi}^r).\Delta\boldsymbol{\varphi}^r = -\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\varphi}^r) \rightarrow \mathbf{H}(\boldsymbol{\varphi}^r).\boldsymbol{\varphi}^{r+1} + \mathbf{f} = 0 \qquad (۳۴-۳)$$

که در آن r اشاره دارد به شماره‌ی تکرار مورد نظر از پروسه‌ی حل. حل مسئله با مقدار اولیه‌ی $\boldsymbol{\varphi}^0$ شروع می‌شود و ماتریس ضرایب نیز بر اساس این مقدار حساب می‌گردد. سپس نیروی باقی‌مانده‌ی $\boldsymbol{\psi}^0$ بر اساس رابطه‌ی (۳-۳۳) محاسبه می‌شود. در نهایت $\Delta\boldsymbol{\varphi}^0$ از حل معادله‌ی (۳-۳۴)، که یک دستگاه معادلات خطی است، به‌دست می‌آید و مقدار $\boldsymbol{\varphi}^1=\boldsymbol{\varphi}^0+\Delta\boldsymbol{\varphi}^0$ به‌عنوان مقدار بَعدی برای مجهولات تقریب زده می‌شود. بنابراین بردار مجهولات در هر تکرار اصلاح می‌شود تا زمانی‌که مقدار نیروی باقی‌مانده به‌اندازه‌ی کافی کوچک گردد یا به‌عبارت دیگر مقادیر $\boldsymbol{\varphi}^r$ و $\boldsymbol{\varphi}^{r-1}$ به حد کافی به هم نزدیک شوند. شکل ۳-۳ نحوه‌ی عملکرد این روش را برای یک متغیر تنها نشان می‌دهد.



شکل ۳-۳ عملکرد روش حل سختی مماسی برای یک متغیر [۴۰]

۳-۴-۳- ارزیابی نیروهای گره‌ای معادل با میدان تنش:

در طول مراحل بارگذاری تدریجی یک اِلمان گره‌ای، ممکن است پدیده‌ی تسلیم در برخی قسمت‌های آن اِلمان رخ دهد. از آن‌جایی که تنش در همه‌ی نقاط انتگرال‌گیری گوسی یک اِلمان قابل محاسبه

است پس ما می‌توانیم تعیین کنیم که در کدام نقاط، تغییرشکل‌های پلاستیک ایجاد شده است. در نتیجه اگر بعضی از نقاط گوسی اِلمان گره‌ای مورد نظر تسلیم شوند، پس آن اِلمان می‌تواند به‌صورت بخشی الاستیک و بخشی الاستو-پلاستیک رفتار کند. برای هر مرحله‌ی بارگذاری تدریجی تعیین این‌که چه سهمی از سازه دارای رفتار الاستیک است، چه سهمی تغییرشکل پلاستیک تولید می‌کند و سپس تنظیم میدان کرنش و تنش به‌منظور اقناع کامل معیار تسلیم و قوانین تشکیل‌دهنده، ضروری می‌باشد. برای این منظور، گام‌های زیر بایستی اتخاذ گردد:

گام یک: در گام اول بردار نیروهای باقی‌مانده در تکرار r-1 به‌عنوان بردار بار وارده برای تکرار r در نظر گرفته می‌شود. این نیروها منجر می‌شوند به ایجاد بردار تغییرمکان‌های تدریجی $d\mathbf{u}^r$ بر اساس رابطه‌ی (۳-۳۴) و بردار کرنش‌های تدریجی $d\boldsymbol{\varepsilon}^r$.

گام دو: در این گام، بردار تغییرات تدریجی تنش ($d\boldsymbol{\sigma}_e^r$) به‌صورت $d\boldsymbol{\sigma}_e^r=\mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^r$ محاسبه می‌شود. زیرنویس e نیز اشاره به فرض الاستیک بودن رفتار مصالح دارد.

گام سه: بردار تنش کل الاستیک برای هر یک از نقاط گوسی اِلمان گره‌ای از رابطه‌ی $\boldsymbol{\sigma}_e^r=\boldsymbol{\sigma}^{r-1}+d\boldsymbol{\sigma}_e^r$ به‌دست می‌آید که $\boldsymbol{\sigma}^{r-1}$ بردار تنش‌های همگراشده برای تکرار r-1 می‌باشد.

گام چهار: گام بعدی بستگی به این دارد که آیا تسلیم در نقاط گوسی اِلمان‌های گره‌ای در طول تکرار r-1 رخ داده است یا نه؟ برای رسیدن به جواب این سؤال، بایستی رابطه‌ی زیر را کنترل کنیم:

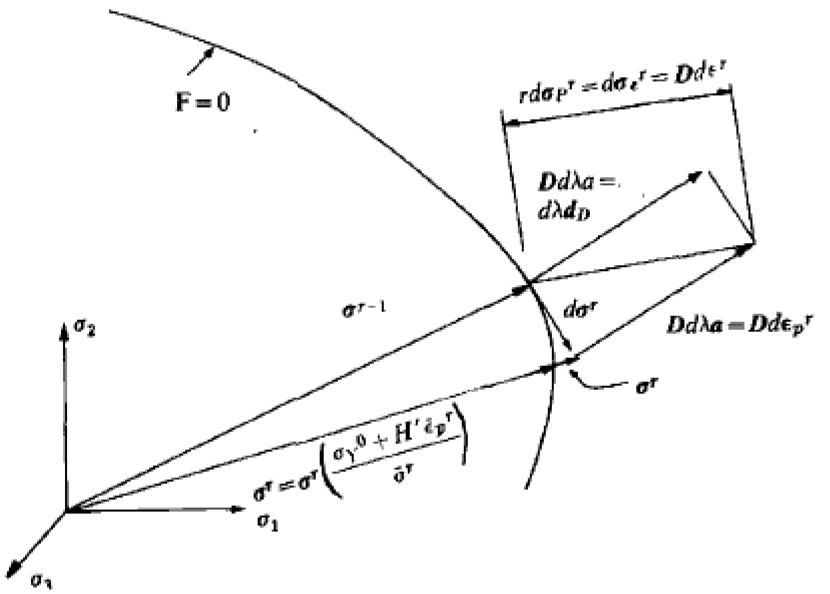
$$\bar{\sigma}^{r-1} > \sigma_Y = \sigma_Y^0 + H'\bar{\varepsilon}_p^{r-1} \qquad (۳-۳۵)$$

که در آن، $\bar{\sigma}^{r-1}$ سطح تنش مؤثر در انتهای تکرار r-1 است که بر اساس رابطه‌ی (۲-۸) قابل محاسبه می‌باشد. $\bar{\varepsilon}_p^{r-1}$ کرنش پلاستیک مؤثر در انتهای تکرار r-1 و σ_Y و H' نیز به‌ترتیب تنش تسلیم تک‌محوری و پارامتر سخت‌شدگی کرنش خطی هستند. بنابراین برای سؤال بالا دو پاسخ وجود دارد:

۱) اگر رابطه‌ی (۳-۳۵) برقرار باشد یعنی نقطه‌ی گوسی مورد نظر در تکرار قبلی تسلیم شده است. پس این بار بایستی رابطه‌ی $\bar{\sigma}_e^r > \bar{\sigma}^{r-1}$ را کنترل کنیم که عبارت سمت چپ نامساوی سطح تنش مؤثری است که بر اساس تنش‌های کل با رفتار الاستیک مصالح به‌دست می‌آید.

۱-الف) اگر رابطه‌ی بند ۱ برقرار نباشد، به این معنی است که نقطه‌ی گوسی در طول تکرار جاری با باربرداری الاستیک مواجه شده است و بنابراین بایستی مستقیماً به گام هفت برویم.

۱-ب) اگر رابطه‌ی بند ۱ برقرار باشد آن‌گاه می‌توان استنباط کرد که نقطه‌ی گوسی تسلیم‌شده در تکرار قبلی هم‌چنان همان رفتار را در تکرار جاری دارد و تنش در آن رو به افزایش است. شکل ۳-۴ تغییرات تدریجی تنش را برای یک نقطه‌ی از قبل تسلیم‌شده در محیط الاستو-پلاستیک نشان می‌دهد.



۳-۴ تغییرات تدریجی تنش برای یک نقطه‌ی از قبل تسلیم‌شده در محیط الاستو-پلاستیک [۴۰]

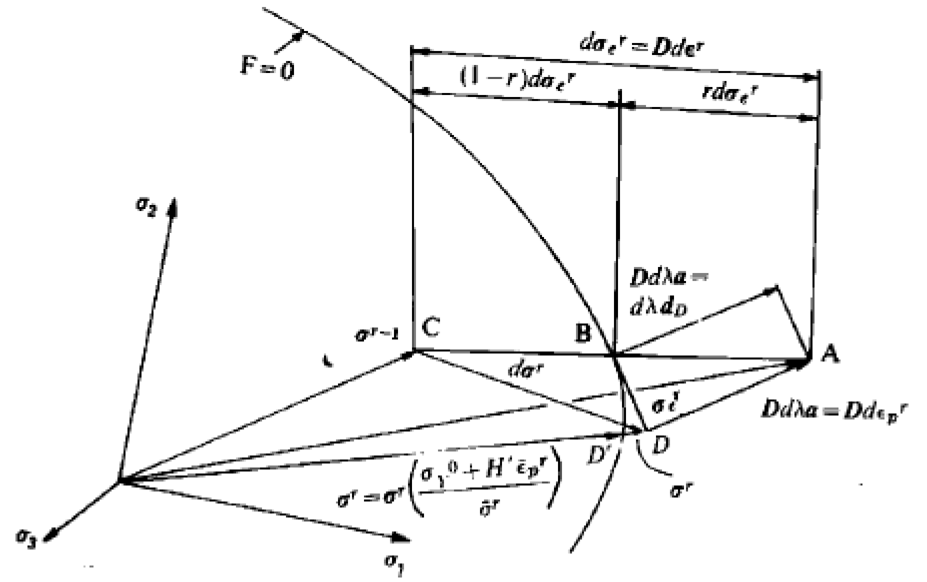
بر اساس شکل ۳-۴، سطح تنش مؤثر ناشی از بردار تنش کل در تکرار r-1 روی سطح تسلیم F قرار دارد. با اضافه شدن بردار تنش تدریجی الاستیک به بردار تنش کل تکرار قبل، سطح تنش مؤثر در تکرار جاری افزایش پیدا کرده و از سطح تنش تسلیم عبور می‌کند. به‌منظور اقناع معیار تسلیم بایستی سهم اضافه‌ی بردار تنش تدریجی الاستیک محاسبه و به‌نحو مناسبی اصلاح گردد. برای این منظور ضریب R مورد استفاده قرار می‌گیرد. این ضریب، که بیان‌گر سهم اضافه‌ی بردار تنش تدریجی الاستیک است، با توجه به نسبت اختلاف سطح تنش مؤثر در تکرار جاری و سطح تنش تسلیم به اختلاف سطح تنش مؤثر در دو تکرار جاری و قبل به‌دست می‌آید. بر همین اساس در مورد هر نقطه‌ی

گوسی که در تکرار قبل تسلیم شده باشد، این ضریب مقدار یک را به خود اختصاص می‌دهد (R=1)؛ به این معنی که چون نقطه‌ی مورد نظر از قبل تسلیم شده بوده پس تمام تنش تدریجی الاستیکی که در تکرار جاری به آن اضافه شده است بایستی به‌نحو مناسبی حذف گردد. با توجه به رابطه‌ی (۲-۸)، برای استفاده از ضریب R می‌توان به‌جای تأثیر مستقیمش روی سطح تنش، آن را روی مؤلفه‌های بردار تنش مورد نظر اثر داد که مراحل این کار در گام‌های بَعدی توضیح داده خواهد شد.

۲) اگر رابطه‌ی (۳-۳۵) برقرار نباشد یعنی نقطه‌ی گوسی مورد نظر در طول تکرار قبلی تسلیم نشده است. حال بایستی کنترل کنیم که آیا رابطه‌ی $\bar{\sigma}_e^r > \sigma_Y$ برقرار است یا نه.

۲-الف) اگر رابطه‌ی بند ۲ برقرار نباشد، یعنی نقطه‌ی گوسی هنوز رفتار الاستیک دارد و بنابراین باید مستقیماً به گام هفت برویم.

۲-ب) اگر رابطه‌ی بند ۲ برقرار باشد آن‌گاه نقطه‌ی گوسی مورد نظر در طول این تکرار تسلیم شده است. شکل ۳-۵ تغییرات تدریجی تنش را برای یک نقطه در محیط الاستو-پلاستیک و در شرایط تسلیم اولیه نشان می‌دهد.



شکل ۳-۵ تغییرات تدریجی تنش برای یک نقطه در محیط الاستو-پلاستیک و در شرایط تسلیم اولیه [۴۰]

با توجه به شکل ۳-۵، سطح تنش مؤثر ناشی از بردار تنش کل در تکرار r-1 به سطح تنش تسلیم F نرسیده است (نقطه‌ی C) و رفتار نقطه‌ی مورد نظر الاستیک است. با اضافه شدن بردار تنش تدریجی

الاستیک به بردار تنش کل تکرار قبل، سطح تنش مؤثر در تکرار جاری افزایش پیدا کرده است و از سطح تنش تسلیم عبور می‌کند (نقطه‌ی A). همانند وضعیت بند ۱-ب بایستی ضریب R به‌منظور اصلاح مؤلفه‌های بردار تنش تدریجی الاستیک محاسبه گردد به‌نحوی‌که سطح تنش مؤثر ناشی از بردار تنش کل جدید در تکرار جاری روی سطح تسلیم قرار گیرد (نقطه‌ی B) و معیار تسلیم اقناع شود. در وضعیتی که نقطه‌ی گوسی در تکرار جاری دچار تسلیم اولیه شده باشد مقدار ضریب مورد نظر با استفاده از تعریف گفته‌شده در بند ۱-ب از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$R = \frac{AB}{AC} = \frac{\bar{\sigma}_e^r - \sigma_Y}{\bar{\sigma}_e^r - \bar{\sigma}^{r-1}} \qquad (۳۶\text{-}۳)$$

از این‌جا به بعد نحوه‌ی محاسبه‌ی بردار تنش کل در تکرار جاری برای هر دو مورد ۱-ب و ۲-ب یکسان است که در ادامه توضیح داده می‌شود.

گام پنج: برای نقاط گوسی تسلیم‌شده، بردار تنش کل در تکرار جاری با توجه به اقناع معیار تسلیم به شکل زیر محاسبه می‌گردد:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{\sigma}^{r-1} + (1-R)d\boldsymbol{\sigma}_e^r \qquad (۳۷\text{-}۳)$$

گام شش: سهم اضافه‌ی بردار تنش تدریجی الاستیک در تکرار جاری، $Rd\boldsymbol{\sigma}_e{}^r$، بایستی به شکل مؤثری حذف گردد. در واقع نقطه‌ی A باید به سطح تسلیم آورده شود به این شرط که اجازه دهیم تغییرشکل‌های پلاستیک نیز رخ دهند. با اِعمال بار تدریجی روی سازه، بردار تنش از نقطه‌ی C با فرض رفتار الاستیک حرکت می‌کند، در نقطه‌ی B سطح تسلیم را قطع می‌کند و سرانجام در نقطه‌ی A به مقدار نهایی خود می‌رسد. با این حال به‌منظور اقناع معیار تسلیم و شرایط تعادل، نقطه‌ی مربوط به سطح تنش مؤثر نمی‌تواند بیرون از سطح تسلیم حرکت کند و تنها می‌تواند سطح تسلیم را قطع کند. بر اساس روابط (۲-۳۴)، (۲-۳۵) و (۲-۳۶) داریم:

$$d\boldsymbol{\sigma}^r = \mathbf{D}d\boldsymbol{\varepsilon}^r - d\lambda \mathbf{d}_D \qquad (۳۸\text{-}۳)$$

یا به‌عبارت دیگر:

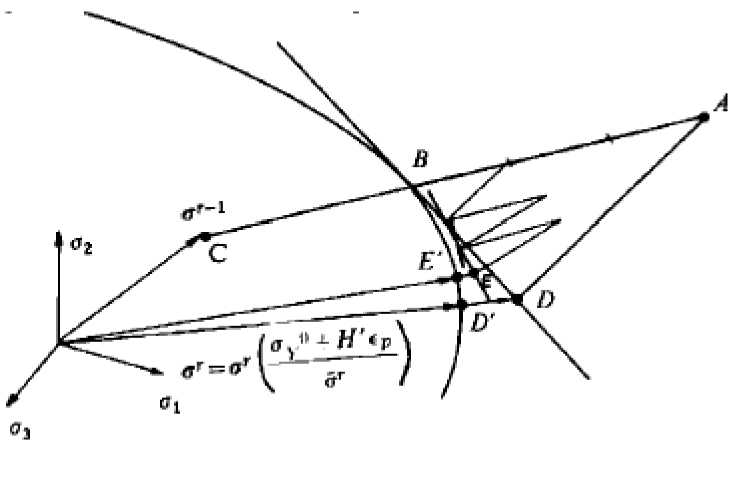
$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{\sigma}^{r-1} + d\boldsymbol{\sigma}_e^r - d\lambda \mathbf{d}_D \qquad (۳۹-۳)$$

که $\boldsymbol{\sigma}^r$ بردار تنش‌های کل در تکرار جاری است که شرایط الاستو-پلاستیک را اقناع می‌کند. رابطه‌ی (۳-۳۹) به‌صورت برداری در شکل‌های ۳-۴ و ۳-۵ قابل مشاهده است. همان‌طور که در این شکل‌ها مشخص است گاهی اوقات نقطه‌ی تنش نهایی (D)، که متناظر است با $\boldsymbol{\sigma}^r$، از سطح تسلیم جدا می‌گردد. در صورتی‌که بار وارده در هر مرحله‌ی بارگذاری به‌اندازه‌ی کافی کوچک در نظر گرفته شود این اتفاق به‌ندرت رخ می‌دهد. با این وجود برای بازگرداندن این نقطه روی سطح تسلیم، می‌توان از یک ضریب مناسب به‌صورت زیر استفاده نمود:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{\sigma}^r \left(\frac{\sigma_Y = \sigma_Y^0 + H'\bar{\varepsilon}_p^r}{\bar{\sigma}^r} \right) \qquad (۴۰-۳)$$

در ضمن با توجه به شکل‌های ۳-۴ و ۳-۵، اصل تعامد برای تغییرات تدریجی کرنش پلاستیک مشهود است، بنابراین رابطه‌ی $\mathbf{D}d\lambda\mathbf{a}=\mathbf{D}d\varepsilon_p$ نیز برقرار می‌باشد.

اگر بار وارده به سازه در مراحل بارگذاری تدریجی، نسبتاً بزرگ باشد می‌تواند به یک پیش‌بینی نادرست از نقطه‌ی نهایی D منجر شود. این مسئله در شکل ۳-۶ نشان داده شده است.



شکل ۳-۶ فرآیند بهبودیافته برای بازگرداندن یک نقطه‌ی تنش به سطح تسلیم [۴۰]

به‌منظور بالا بردن دقت کار و جلوگیری از وقوع این مشکل، می‌توان فرآیند حذف تنش‌های اضافه و رسیدن به سطح تسلیم را در چندین مرحله انجام داد. مطابق شکل ۳-۶، مقدار تنش اضافه به سه بخش مساوی تقسیم شده است که یکی پس از دیگری عملیات حذف این مقادیر انجام می‌شود. سپس

نقطه‌ی تنش E از طریق رابطه‌ی (۳-۴۰) به نقطه‌ی نهایی E' روی سطح تسلیم انتقال داده می‌شود. بدیهی است که هر چه تعداد گام‌های مربوط به حذف تنش‌های اضافه بیش‌تر در نظر گرفته شود، دقت هم بالاتر می‌رود. در این‌جا از معیار زیر برای محاسبه‌ی تعداد گام‌های لازم برای حذف تنش‌های اضافه استفاده می‌شود. مقدار تنش اضافه $Rd\boldsymbol{\sigma}_e^r$ به m بخش تقسیم می‌گردد که m نزدیک‌ترین عدد صحیحی است که از عبارت زیر کوچک‌تر باشد:

$$\left(\frac{\bar{\sigma}_e^r-\sigma_Y}{\sigma_Y^0}\right)\times 8+1 \qquad (۳\text{-}۴۱)$$

گام هفت: برای نقاط گوسی با رفتار الاستیک، بردار تنش کل در تکرار جاری ($\boldsymbol{\sigma}^r$) برابر می‌شود با:

$$\boldsymbol{\sigma}^r=\boldsymbol{\sigma}^{r-1}+d\boldsymbol{\sigma}_e^r \qquad (۳\text{-}۴۲)$$

گام هشت: سرانجام نیروهای گره‌ای معادل با تنش‌های موجود در نقاط گوسی اِلمان‌ها در تکرار جاری، بر اساس رابطه‌ی زیر محاسبه می‌گردد:

$$(f^e)^r=\int_{\Omega^e}\mathbf{B}^T\boldsymbol{\sigma}^r d\Omega \qquad (۳\text{-}۴۳)$$

۳-۴-۴- معیار همگرایی:

به‌منظور کنترل همگرایی روند تکراری حل مسئله، معیار همگرایی زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\frac{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(\psi_i^r)^2\right]}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{n}(f_i^r)^2\right]}}\times 100\le \text{toler} \qquad (۳\text{-}۴۴)$$

که در آن n تعداد کل درجات آزادی سازه (دو برابر تعداد کل نقاط کنترلی) و r شماره‌ی تکرار مورد نظر هستند. toler نیز فاکتوری است که معیار همگرایی را کنترل می‌کند. به‌عبارت دیگر اگر جذر مجموع مربعات نیروهای باقی‌مانده در تمام درجات آزادی سازه در تکرار مورد نظر از toler برابر جذر مجموع مربعات نیروهای کل وارده به تمام درجات آزادی سازه در همان تکرار کم‌تر باشد، همگرایی

صورت گرفته است. این نکته را نیز باید یادآور شویم که مقدار نیروهای باقی‌مانده در درجات آزادی سازه، از اختلاف نیروهای کل وارده (آرایه‌ی tload) و نیروهای گره‌ای معادل به‌دست می‌آیند.

۳-۵- مثال‌های عددی برنامه‌ی EPIGA:

در این بخش برای نمایش کارایی برنامه‌ی کامپیوتری تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، چند مثال متفاوت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. در همه‌ی مثال‌ها، تولرانس همگرایی تعادل سازه برای پروسه‌ی حل غیرخطی 10^{-7}% در نظر گرفته شده است. به‌منظور مدل‌سازی از یک وصله، 187 نقطه‌ی کنترلی (135 اِلمان گره‌ای) و 9×9 نقطه‌ی گوسی (در هر اِلمان گره‌ای) در مثال‌های ۳-۵-۱- تا ۳-۵-۳- استفاده شده است. بردارهای گره‌ای در نظر گرفته‌شده برای این منظور نیز مطابق جدول ۳-۱ می‌باشند. رفتار مصالح در مثال‌ها الاستو-پلاستیک بدون کرنش سخت‌شدگی در نظر گرفته شده و سطح تنش فون می‌سز نیز به‌عنوان معیاری برای ورود به محدوده‌ی تسلیم مصالح انتخاب گردیده است. بارگذاری سازه طی 100 مرحله انجام گردیده و 20 تکرار نیز برای پروسه‌ی حل غیرخطی در نظر گرفته شده است.

جدول ۳-۱ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال‌های ۳-۵-۱- تا ۳-۵-۳-)

تعداد نقاط کنترلی در یک وصله	بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده
187	$\Xi=\{0,0,0,0.066,\ldots,0.933,1,1,1\}$ for $p=2$ $H=\{0,0,0,0.111,\ldots,0.899,1,1,1\}$ for $q=2$

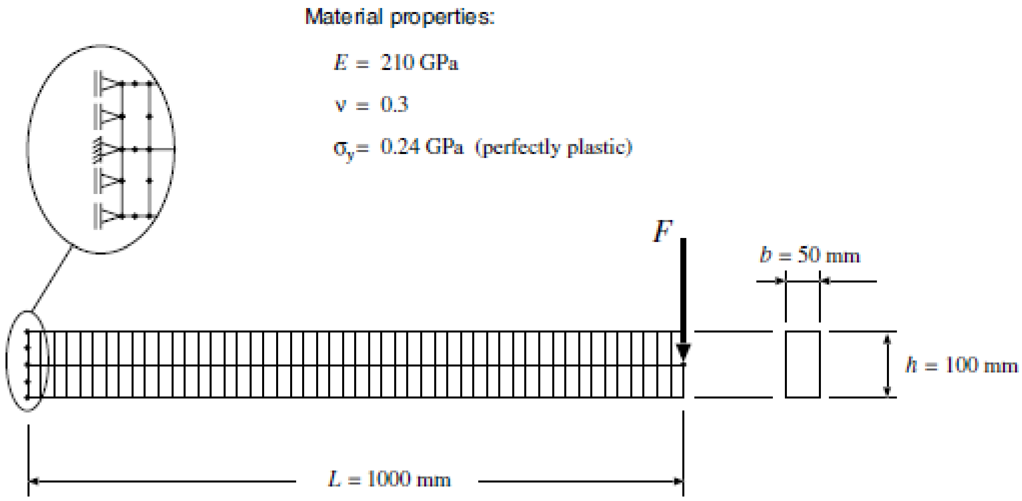
۳-۵-۱- مثال یک:

در این مثال، یک تیر یک سر گیردار با مقطع مستطیلی از مرجع [۴۵] انتخاب شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. هندسه، شرایط مرزی، مدل اجزای محدود و مشخصات مصالح به‌کار رفته در شکل ۳-۷ قابل مشاهده است. تیر مورد نظر با 50×2 اِلمان هشت گره‌ای و با در نظر گرفتن 2×2 نقطه‌ی

گوسی در هر اِلمان مدل شده است. حد نهایی بار برای این نوع مسئله مطابق رابطه‌ی زیر، که مربوط به مرجع [۴۶] می‌باشد، به‌دست می‌آید:

$$F_{\lim} = \frac{\sigma_y b h^2}{4L} \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

که در آن b و h به‌ترتیب ضخامت و ارتفاع سطح مقطع و L طول تیر طره هستند.



شکل ۳-۷ تیر یک سر گیردار: تعریف مسئله و مدل اجزای محدود [۴۵]

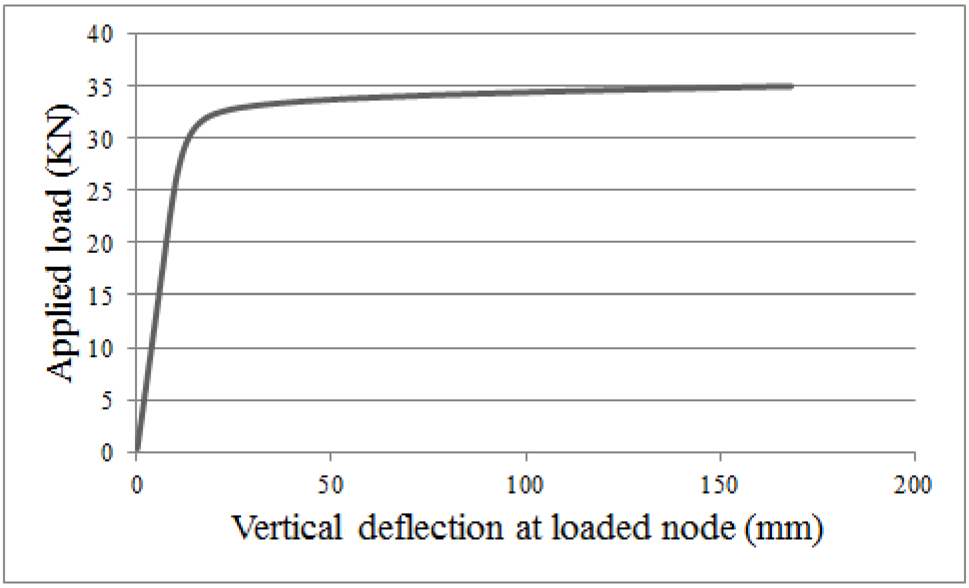
با توجه به هندسه‌ی حاضر و مشخصات مصالح، مقدار تحلیلی حد نهایی بار $30\ KN$ به‌دست می‌آید. از طرفی مقدار بار نهایی بر اساس مدل اجزای محدود و برنامه‌ی کامپیوتری مرجع [۴۵] و با توجه به تولرانس همگرایی در نظر گرفته‌شده، $30.3594\ KN$ به‌دست آمده است.

به‌منظور تحلیل ایزوژئومتریک سازه‌ی مورد نظر، مقدار بار وارده به تیر $35\ KN$ در نظر گرفته شده و نتایج اولیه‌ی حاصل در جدول ۳-۲ قابل مشاهده است.

جدول ۳-۲ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک تیر یک سر گیردار طی ۱۰۰ مرحله‌ی بارگذاری و ۲۰ تکرار

	شماره‌ی مرحله‌ی بارگذاری	مقدار بار وارده به سازه
شروع رفتار پلاستیک مصالح	63	$22.05\ KN$
آخرین مرحله‌ی همگرایی	87	$30.45\ KN$

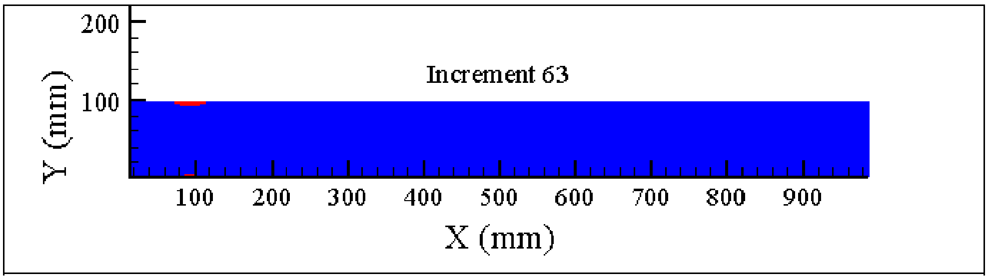
مقایسه‌ی بار نهایی حاصل از روش تحلیل ایزوژئومتریک و نتایج مربوط به حل تحلیلی و مدل اجزای محدود، صحت برنامه‌ی کامپیوتری نوشته‌شده را نشان می‌دهد. از طرفی خطاهای نسبی به‌دست آمده به‌ترتیب 1.5% و 0.3% می‌باشند. شکل ۳-۸ نیز نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار را نشان می‌دهد.



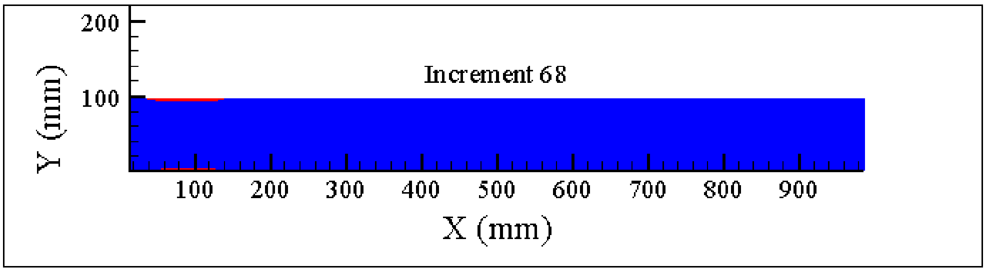
شکل ۳-۸ نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار برای تیر یک سر گیردار

هر چند مقدار بار نهایی بر اساس تولرانس در نظر گرفته‌شده، 30.45 KN به‌دست آمده است اما با این وجود، نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار بیان‌گر این است که تیر یک سر گیردار هم‌چنان توانایی تحمل بار بیش‌تر را دارد. بر اساس شکل ۳-۸ تقریباً از بار 33.25 KN که مربوط به مرحله‌ی 95 بارگذاری می‌شود شاهد افزایش ناگهانی تغییرمکان زیر محل بار هستیم. در واقع می‌توان گفت از این مرحله به بعد تشکیل مفصل پلاستیک در محل تکیه‌گاه، فروپاشی تدریجی تیر را به‌دنبال دارد.

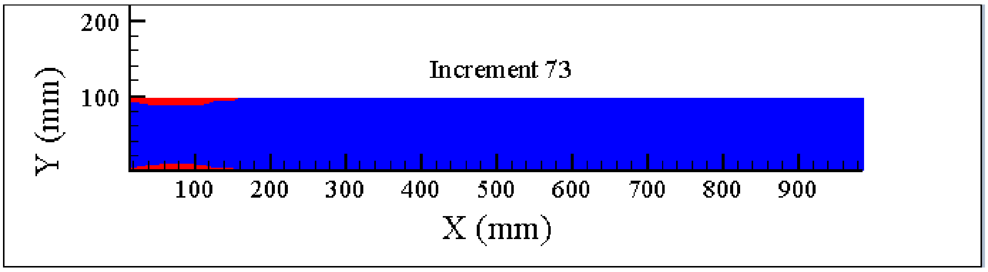
شکل‌های ۳-۹-(الف) تا (ح) روند تسلیم شدن مصالح را در طول مراحل بارگذاری نشان می‌دهند.



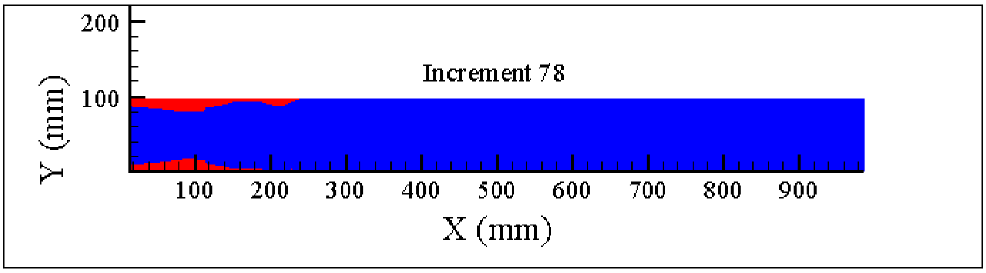
۳-۹-(الف)



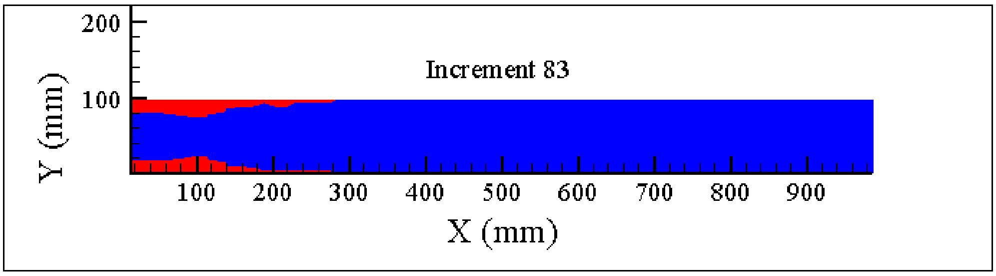
۳-۹-(ب)



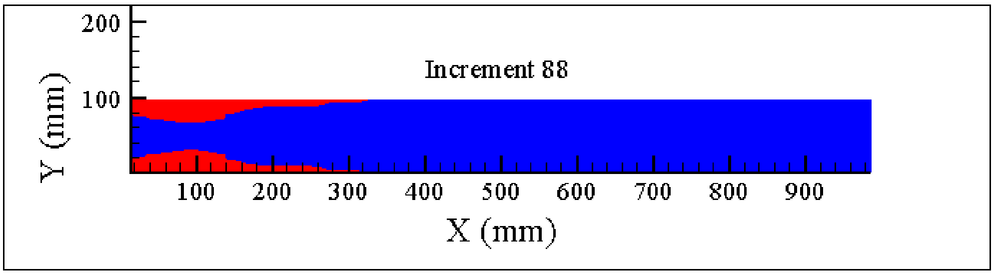
۳-۹-(ج)



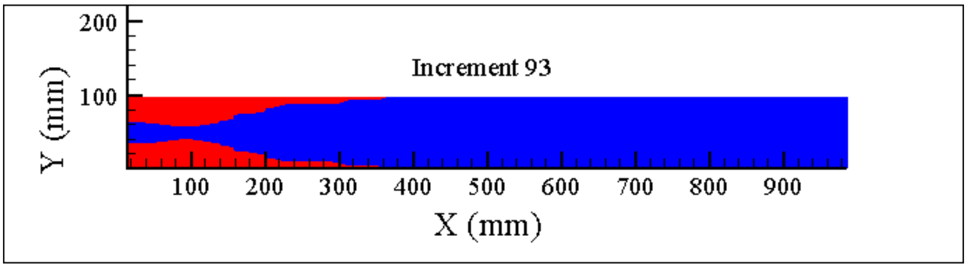
۳-۹-(د)



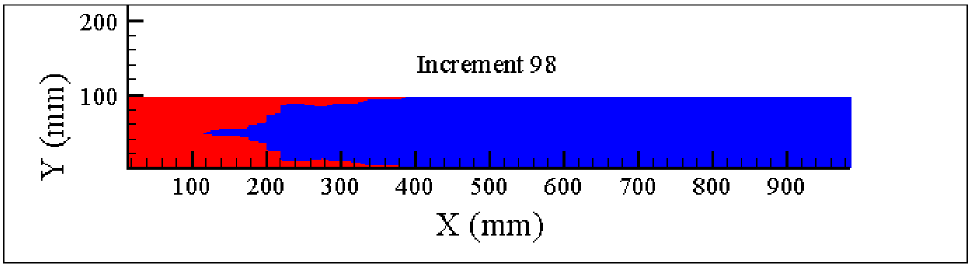
۳-۹-(ه)



۳-۹-(و)



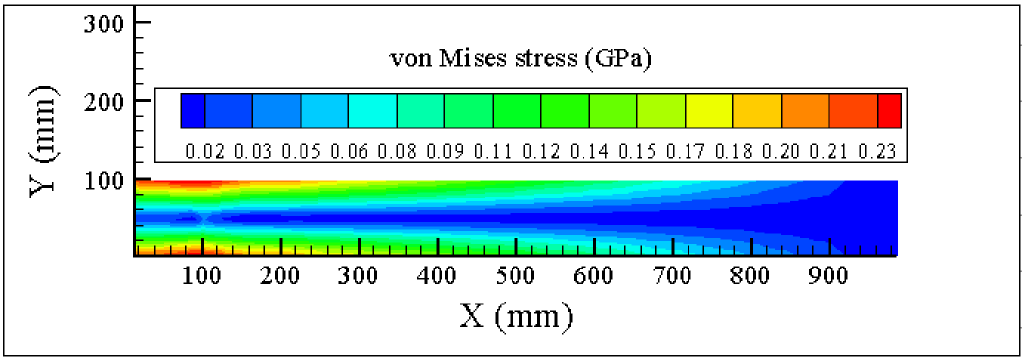
۳-۹-(ز)



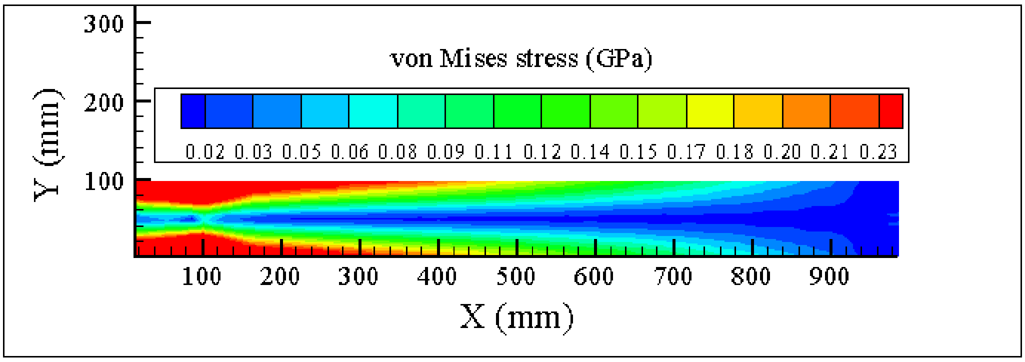
۳-۹-(ح)

شکل ۳-۹ تیر یک سر گیردار: (الف) تا (ح) روند تسلیم شدن مصالح

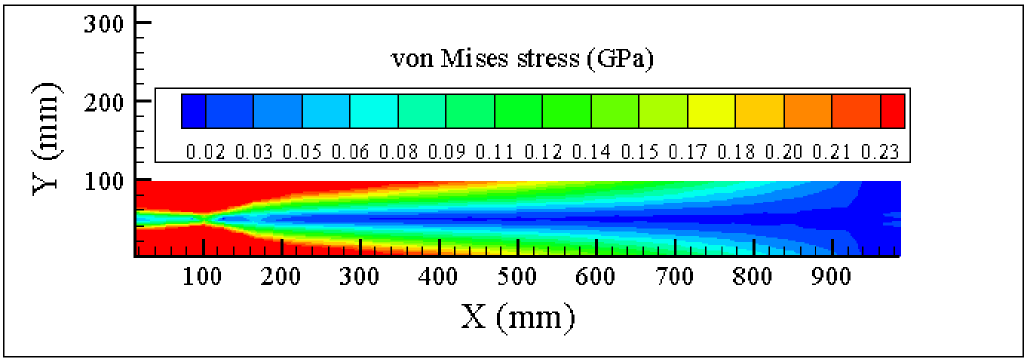
کانتورهای مربوط به سطح تنش فون می‌سز برای چند مرحله‌ی بارگذاری در شکل‌های ۳-۱۰-(الف) تا (ه) قابل مشاهده هستند.



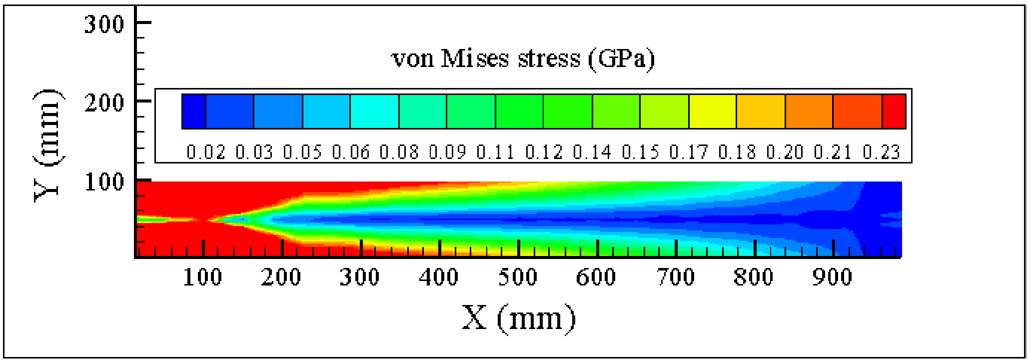
۳-۱۰-(الف)



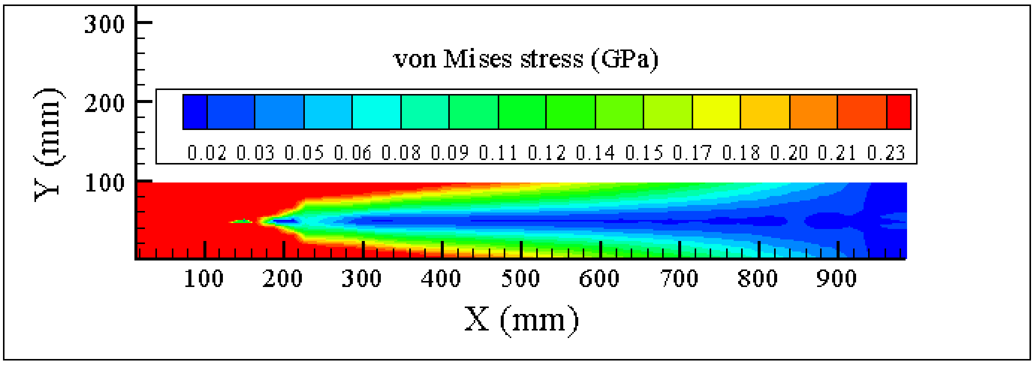
۳-۱۰-(ب)



۳-۱۰-(ج)



۳-۱۰-(د)



۳-۱۰-(ه)

شکل ۳-۱۰ کانتورهای تنش در تیر یک سر گیردار با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح: (الف) مرحله‌ی 63؛ (ب) مرحله‌ی 87؛ (ج) مرحله‌ی 93؛ (د) مرحله‌ی 96؛ (ه) مرحله‌ی 100

۳-۵-۲- مثال دو:

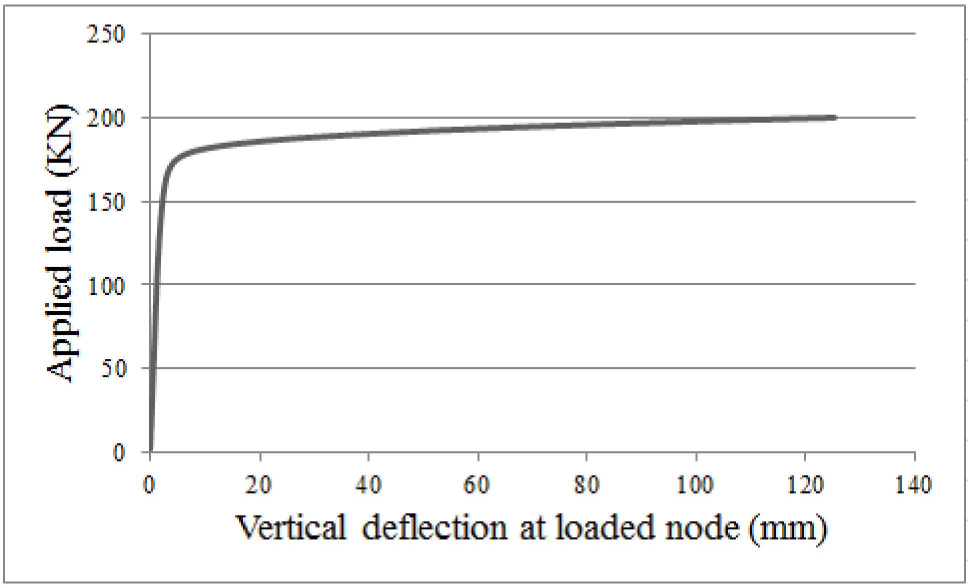
در این مثال یک تیر با تکیه‌گاه ساده مورد بررسی قرار می‌گیرد. هندسه، مشخصات مصالح به‌کار رفته و پارامترهای لازم جهت تحلیل ایزوژئومتریک برای این تیر همانند مثال قبل می‌باشد. به‌منظور بررسی

رفتار مصالح، بار 200 *KN* در مرکز تیر و روی سطح بالایی آن وارد شده است. نتایج اولیه‌ی حاصل از تحلیل ایزوژئومتریک تیر مورد نظر در جدول ۳-۳ قابل مشاهده است.

جدول ۳-۳ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک تیر ساده طی ۱۰۰ مرحله‌ی بارگذاری و ۲۰ تکرار

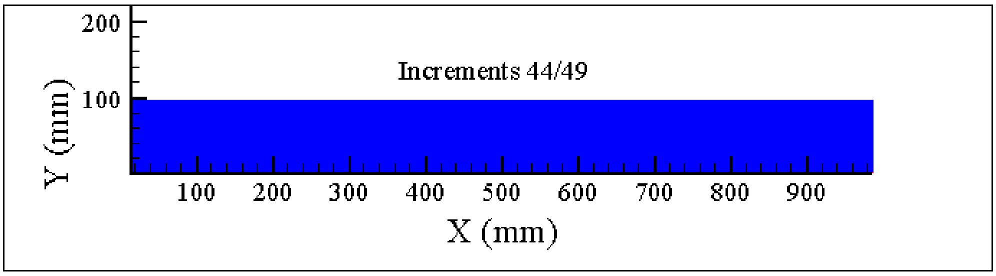
	شماره‌ی مرحله‌ی بارگذاری	مقدار بار وارده به سازه
شروع رفتار پلاستیک مصالح	44	88 *KN*
آخرین مرحله‌ی همگرایی	78	156 *KN*

نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار در شکل ۳-۱۱ نشان داده شده است. بر اساس اطلاعات موجود در جدول ۳-۳ تیر ساده‌ی مورد نظر می‌تواند تا بار 156 *KN* را تحمل کند. این در حالی است که با توجه به شکل ۳-۱۱، سازه‌ی مورد نظر قادر به تحمل بارهای بیش‌تر از این مقدار تا حدود 178 *KN* (مرحله‌ی 89 بارگذاری) نیز می‌باشد. می‌توان این تفاوت در حد نهایی بار را به مقدار تولرانس در نظر گرفته‌شده مرتبط ساخت. بر اساس مقدار تولرانس انتخاب‌شده و در پایان مرحله‌ی 79 بارگذاری، مقدار ماکزیمم نیروی باقی‌مانده در یکی از درجات آزادی سازه برابر با 3.68E-007 *KN* می‌باشد که در برابر بار کل وارده به سازه تا این مرحله (158 *KN*) مقدار بسیار ناچیزی است.

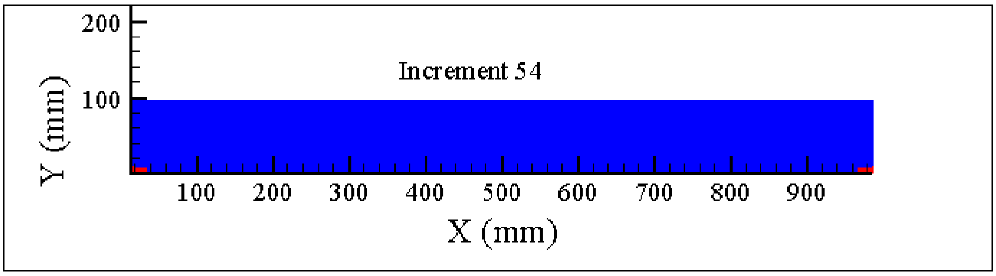


شکل ۳-۱۱ نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار برای تیر با تکیه‌گاه ساده

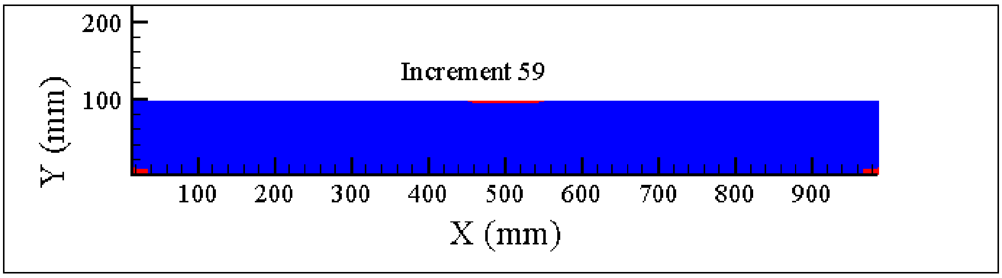
بر همین اساس اگر مقدار تولرانس عدد بزرگ‌تری در نظر گرفته شود میزان حد نهایی بار هم عدد بیش‌تری به‌دست می‌آید. به‌عبارت دیگر هر چقدر مقدار تولرانس مربوط به معیار همگرایی کوچک‌تر در نظر گرفته شود، تحلیل الاستو-پلاستیک سازه با اطمینان و احتیاط بیش‌تری انجام می‌گردد. شکل‌های ۳-۱۲-(الف) تا (ک) روند تشکیل مفصل پلاستیک در تیر با تکیه‌گاه ساده را نشان می‌دهند.



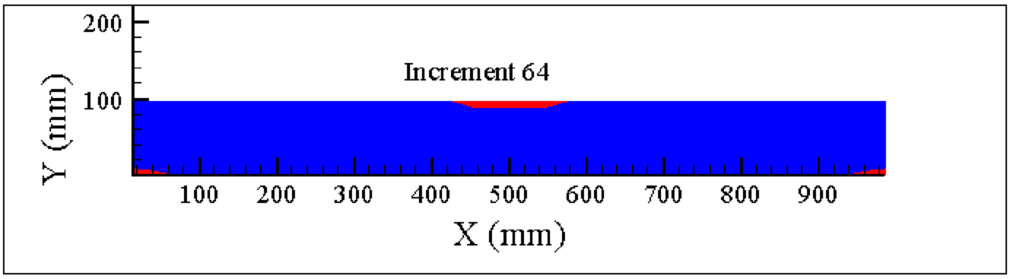
۳-۱۲-(الف)



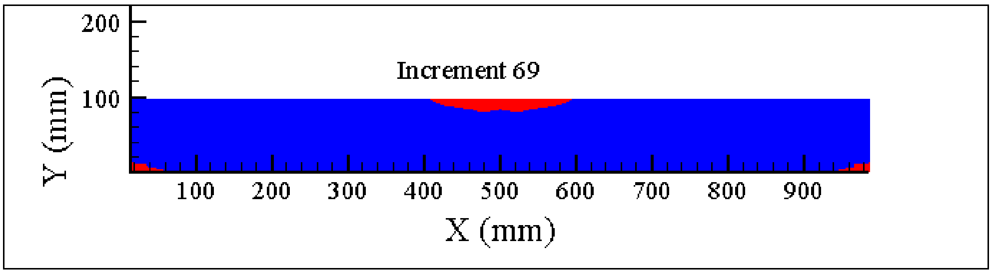
۳-۱۲-(ب)



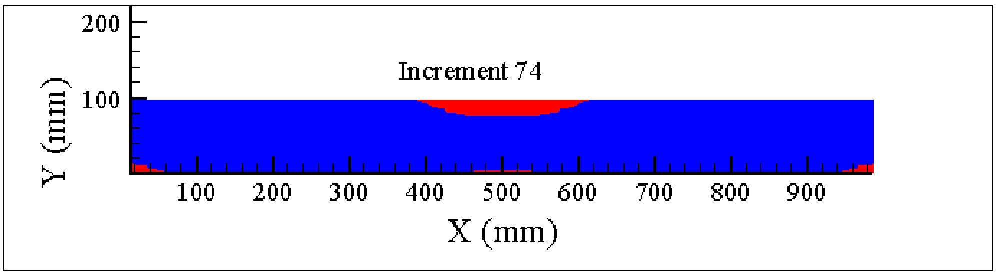
۳-۱۲-(ج)



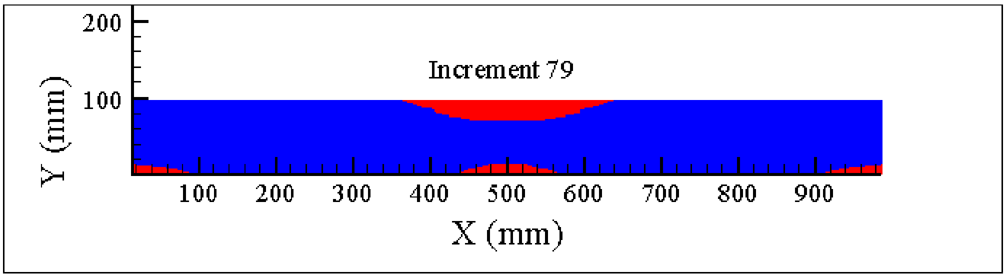
۳-۱۲-(د)



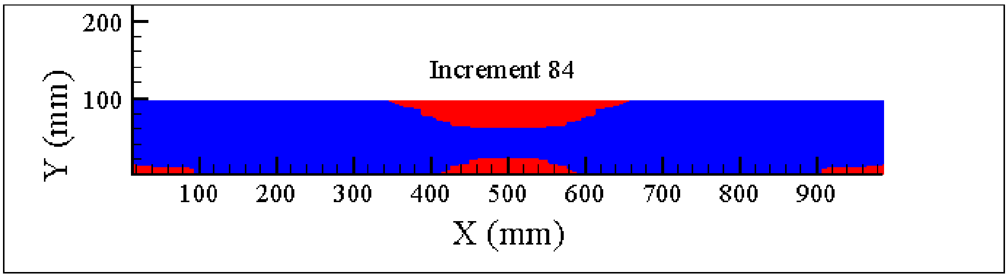
۳-۱۲-(ه)



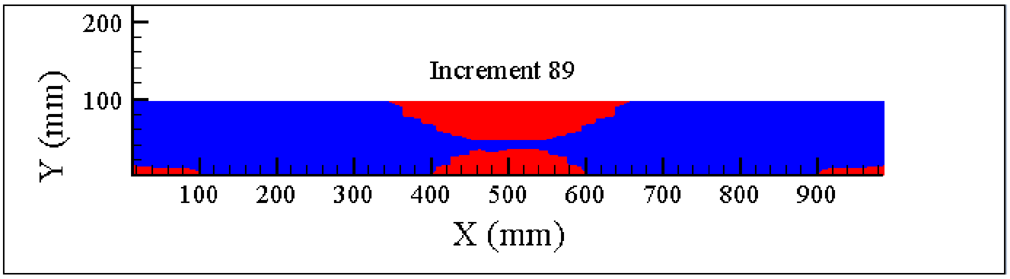
۳-۱۲-(و)



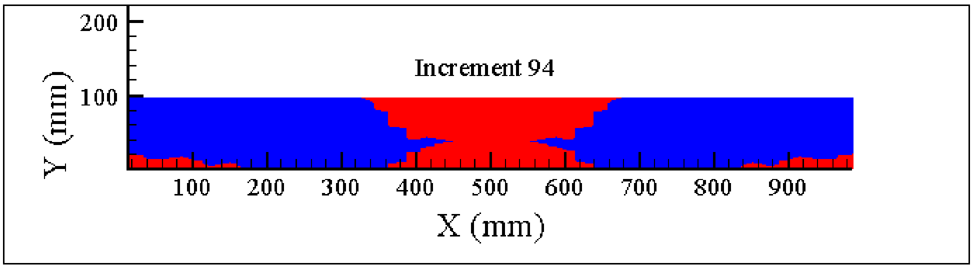
۳-۱۲-(ز)



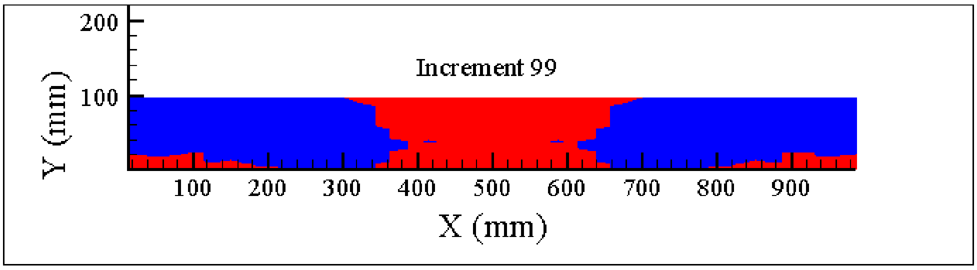
۳-۱۲-(ح)



۳-۱۲-(ط)



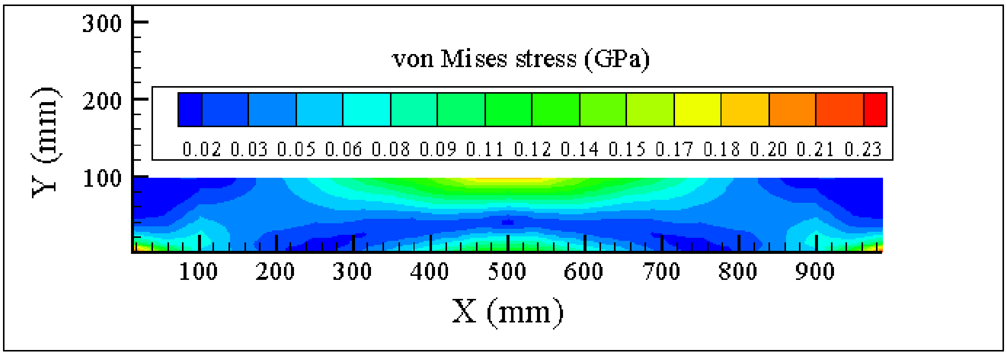
۳-۱۲-(ی)



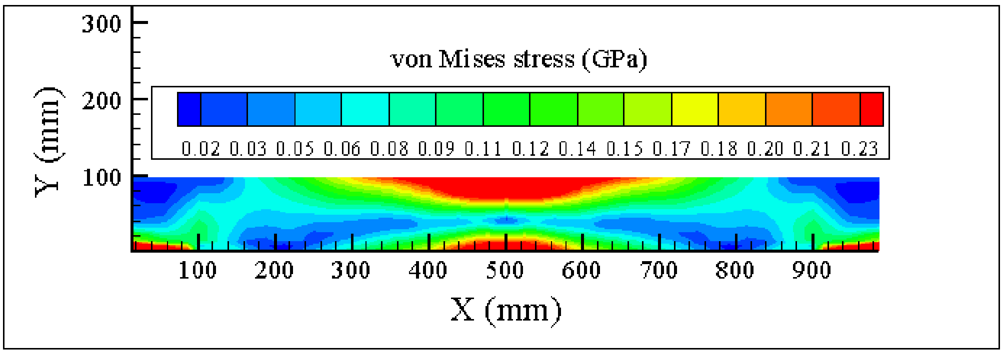
۳-۱۲-(ک)

شکل ۳-۱۲ تیر با تکیه‌گاه ساده: (الف) تا (ک) روند تسلیم شدن مصالح

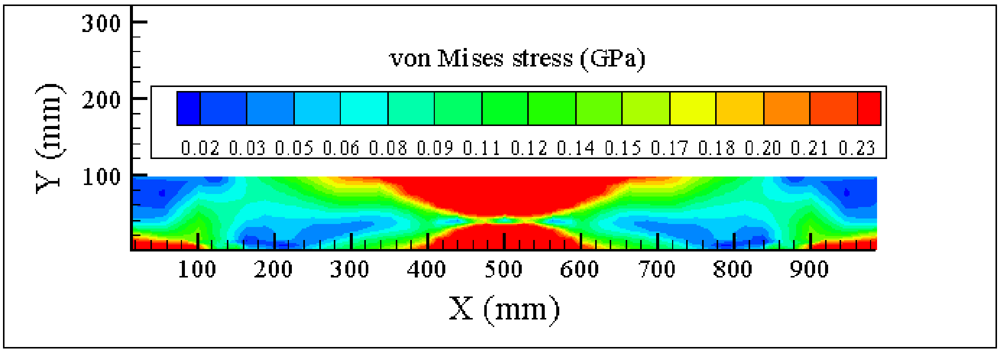
در شکل‌های ۳-۱۳-(الف) تا (ه) نیز کانتورهای مربوط به سطح تنش فون می‌سز برای چند مرحله‌ی بارگذاری نشان داده شده است.



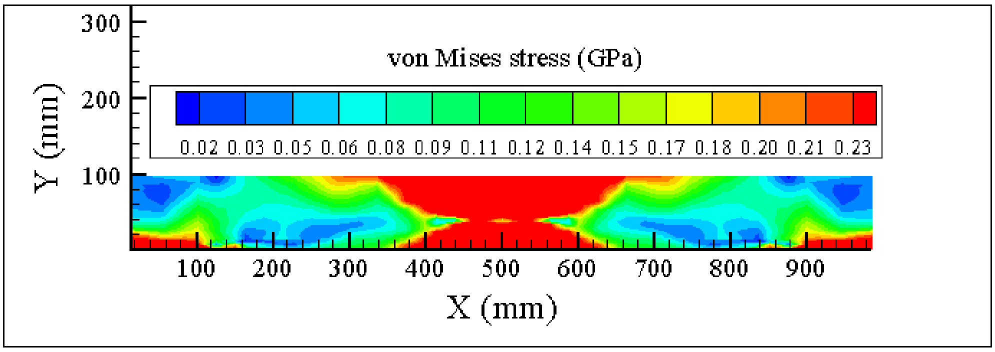
۳-۱۳-(الف)



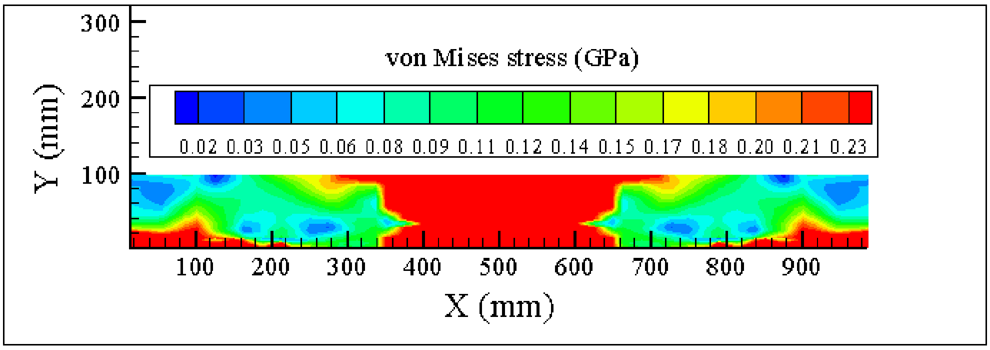
۳-۱۳-(ب)



۳-۱۳-(ج)



۳-۱۳-(د)



۳-۱۳-(ه)

شکل ۳-۱۳ کانتورهای تنش در تیر ساده با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح: (الف) مرحله‌ی 44؛ (ب) مرحله‌ی 78؛ (ج) مرحله‌ی 89؛ (د) مرحله‌ی 92؛ (ه) مرحله‌ی 100

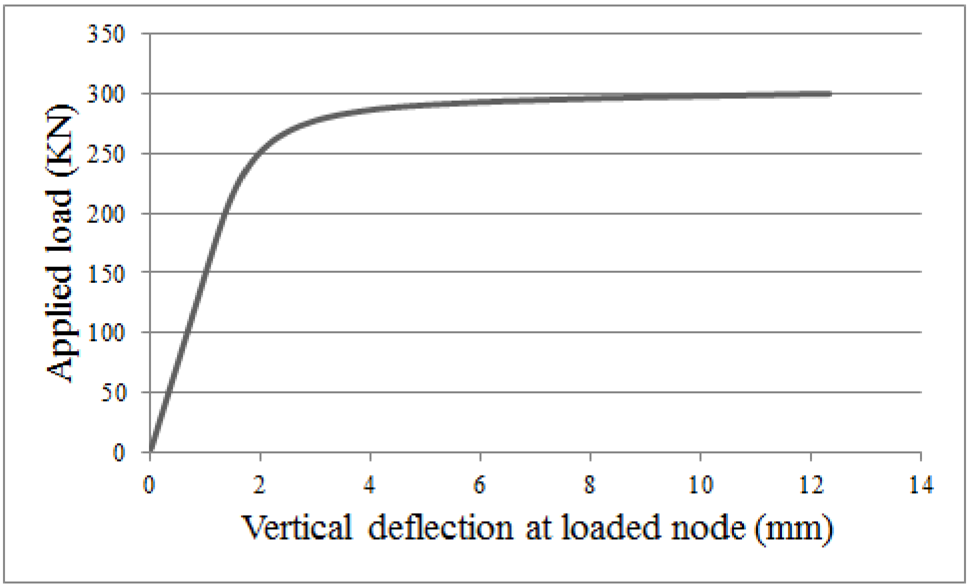
۳-۵-۳- مثال سه:

در این مثال رفتار یک تیر دو سر گیردار تحت بارگذاری 300 KN وارده به مرکز سطح بالایی آن مورد بررسی قرار گرفته است. تمامی مشخصات هندسی، مصالح و پارامترهای لازم برای مدل‌سازی تیر مانند دو مثال قبل در نظر گرفته شده‌اند. جدول ۳-۴ نتایج مربوط به تحلیل این تیر را نشان می‌دهد.

جدول ۳-۴ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک تیر دو سر گیردار طی ۱۰۰ مرحله‌ی بارگذاری و ۲۰ تکرار

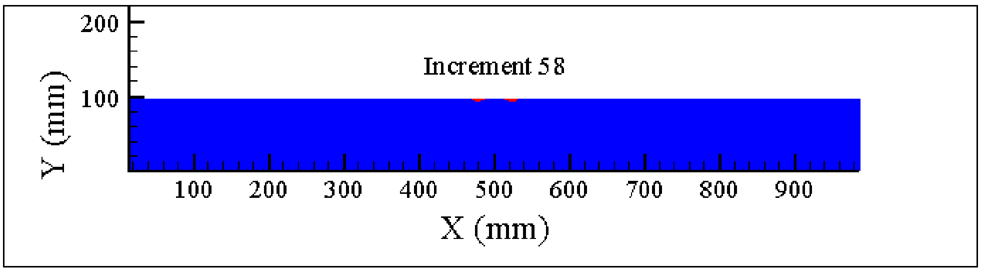
	شماره‌ی مرحله‌ی بارگذاری	مقدار بار وارده به سازه
شروع رفتار پلاستیک مصالح	58	174 *KN*
آخرین مرحله‌ی همگرایی	86	258 *KN*

نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار نیز در شکل ۳-۱۴ قابل مشاهده است که بر اساس آن تیر دو سر گیردار می‌تواند تقریباً تا بار 285 *KN* را تحمل کند (مرحله‌ی 95 بارگذاری). با اِعمال بار بیش‌تر از این مقدار، دیگر همگرایی پروسه‌ی حل رخ نمی‌دهد و تعادل سازه برقرار نمی‌گردد. به‌عبارت دیگر در این وضعیت مفصل پلاستیک در تیر تشکیل شده است و همین امر کم کم منجر به فروپاشی تیر می‌گردد.

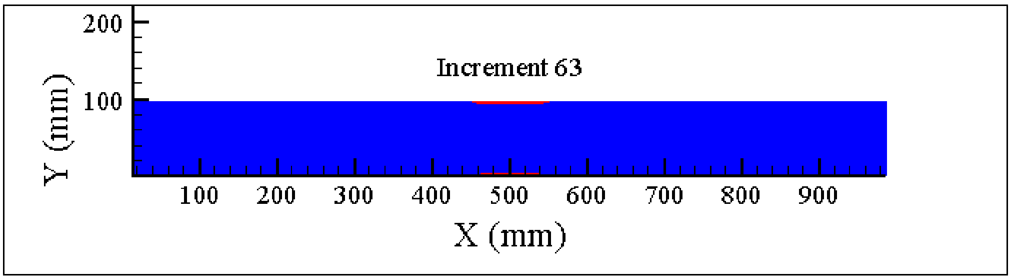


شکل ۳-۱۴ نمودار نیرو-تغییرمکان زیر محل بار برای تیر دو سر گیردار

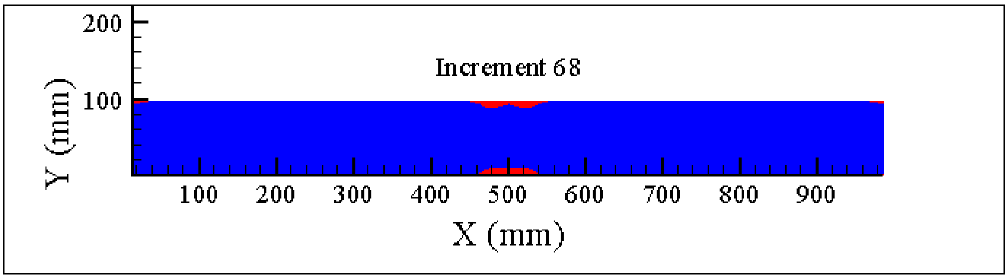
شکل‌های ۳-۱۵-(الف) تا (ط) مراحل تسلیم شدن مصالح برای تیر مورد نظر را نشان می‌دهند.



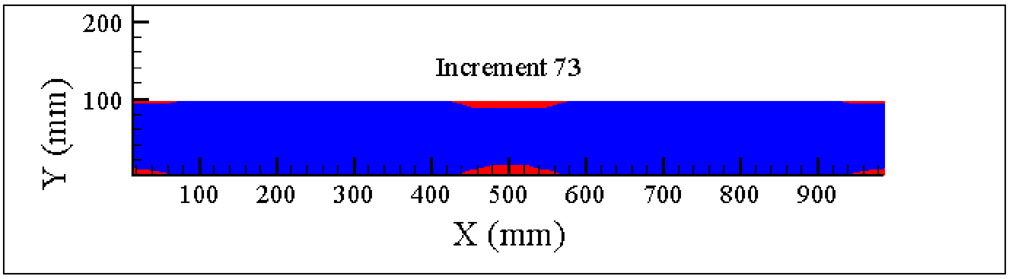
۳-۱۵-(الف)



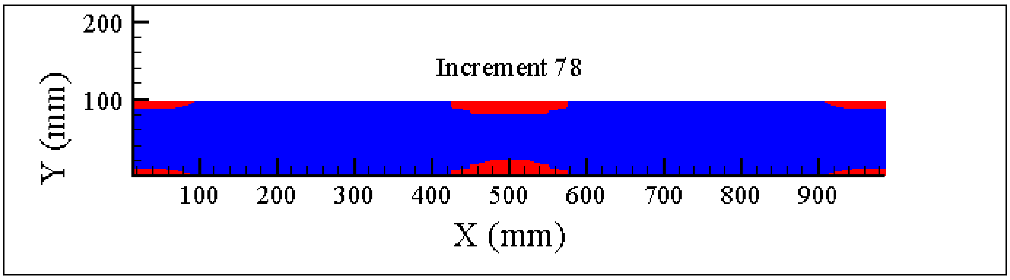
۳-۱۵-(ب)



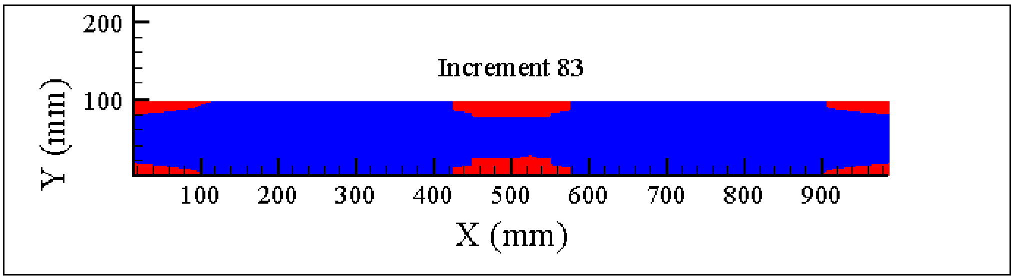
۳-۱۵-(ج)



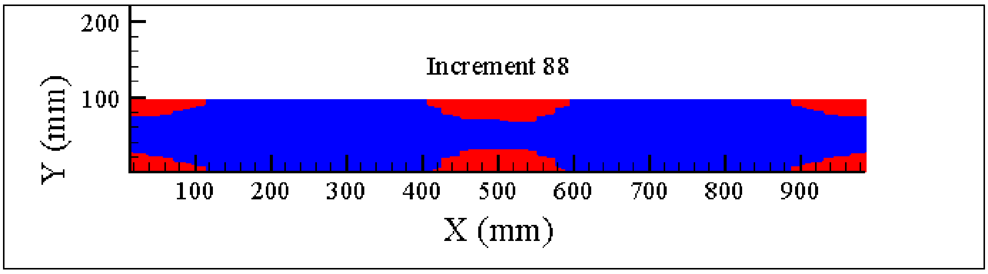
۳-۱۵-(د)



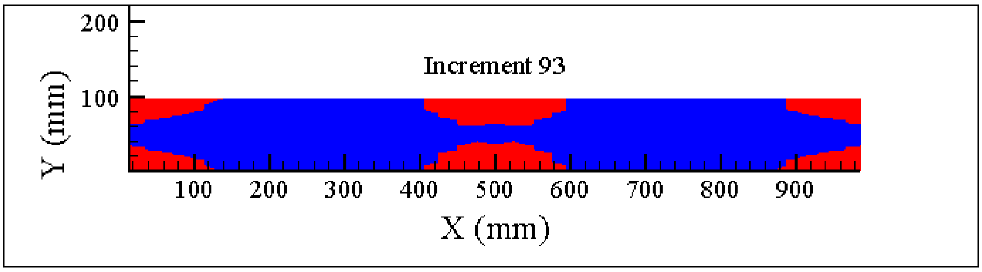
۳-۱۵-(ه)



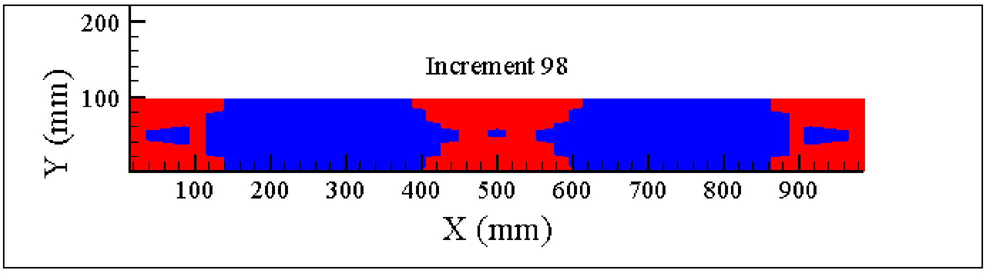
۳-۱۵-(و)



۳-۱۵-(ز)



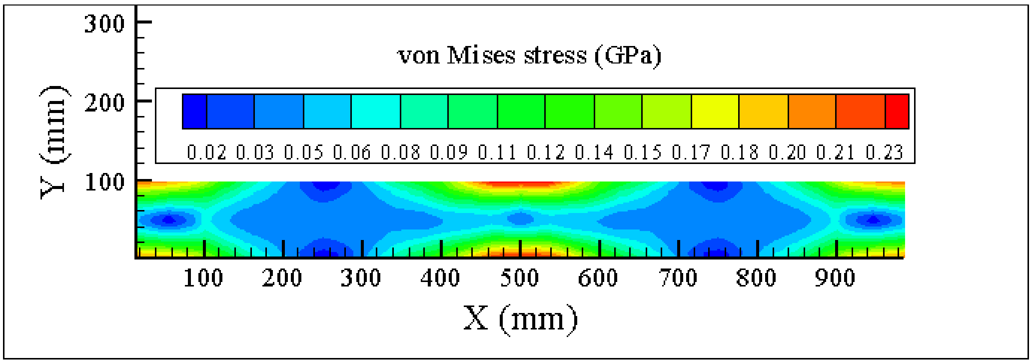
۳-۱۵-(ح)



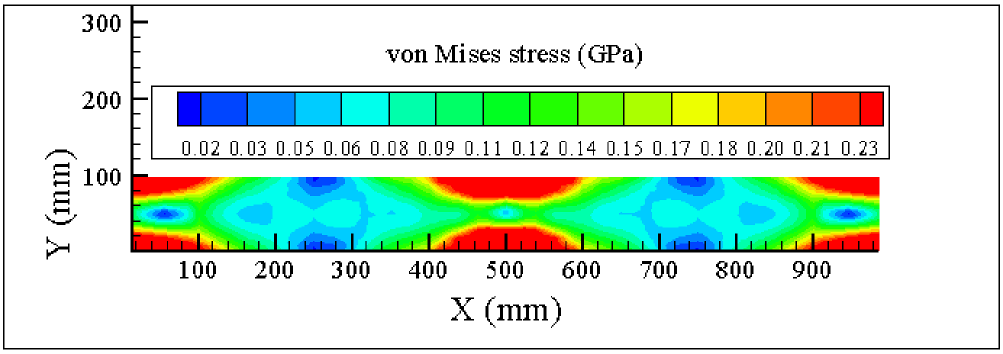
۳-۱۵-(ط)

شکل ۳-۱۵ تیر دو سر گیردار: (الف) تا (ط) روند تسلیم شدن مصالح

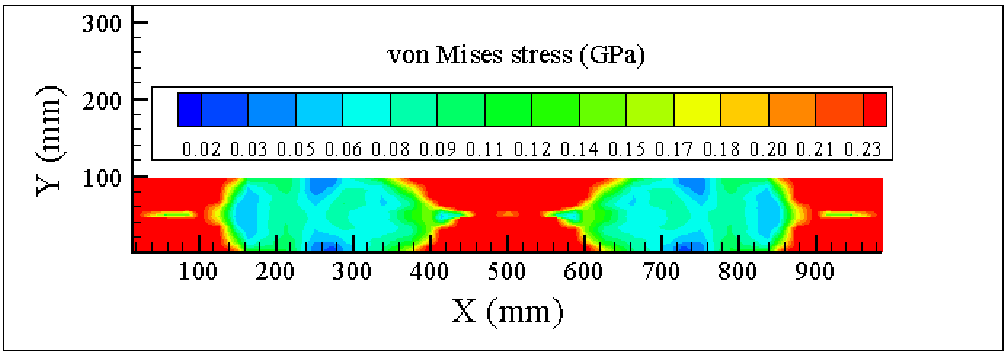
شکل‌های۳-۱۶-(الف) تا (ج) نیز کانتورهای تنش را طی چند مرحله‌ی بارگذاری نشان می‌دهند.



۳-۱۶-(الف)



۳-۱۶-(ب)

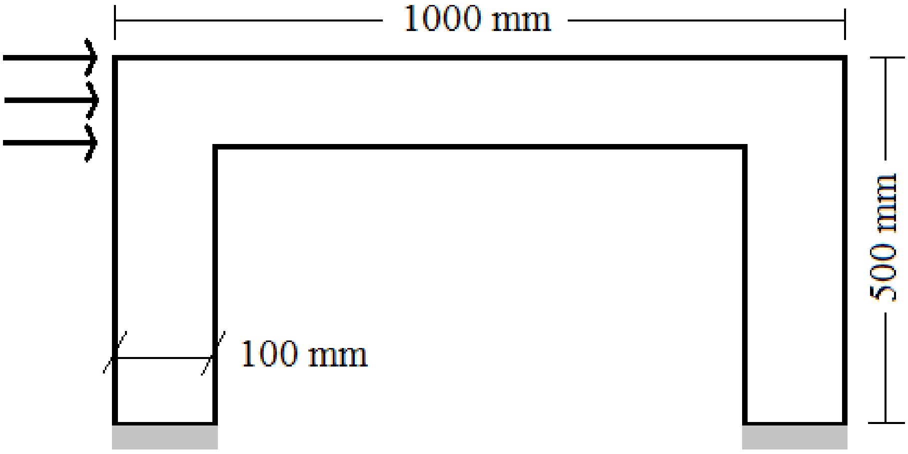


۳-۱۶-(ج)

شکل ۳-۱۶ کانتورهای تنش در تیر دو سر گیردار با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح: (الف) مرحله‌ی 58؛ (ب) مرحله‌ی 86؛ (ج) مرحله‌ی 100

۳-۵-۴- مثال چهار:

در این مثال یک قاب دو بُعدی مورد بررسی قرار گرفته است. شرایط هندسی، تکیه‌گاهی و بارگذاری این قاب در شکل ۳-۱۷ نمایش داده شده است. ضخامت اعضای این قاب 50 *mm* می‌باشد. مشخصات مصالح به‌کار رفته در این قاب نیز همانند مثال‌های قبلی این بخش در نظر گرفته شده است. به‌منظور تحلیل ایزوژئومتریک این قاب از 5 وصله و 513 نقطه‌ی کنترلی استفاده گردیده است. بردارهای گره‌ای باز به‌کار رفته در مدل‌سازی این قاب در جدول ۳-۵ قابل مشاهده هستند. مقدار 320 *KN* بار به‌صورت مساوی بین چهار نقطه‌ی کنترلی در قسمت بالای سمت چپ قاب توزیع گردیده است. در این مسئله 10 تکرار برای پروسه‌ی حل غیرخطی در نظر گرفته شده است. نتایج اولیه‌ی تحلیل این قاب بر اساس تولرانس همگرایی موجود نیز در جدول ۳-۶ نشان داده شده‌اند.



شکل ۳-۱۷ قاب دو بُعدی

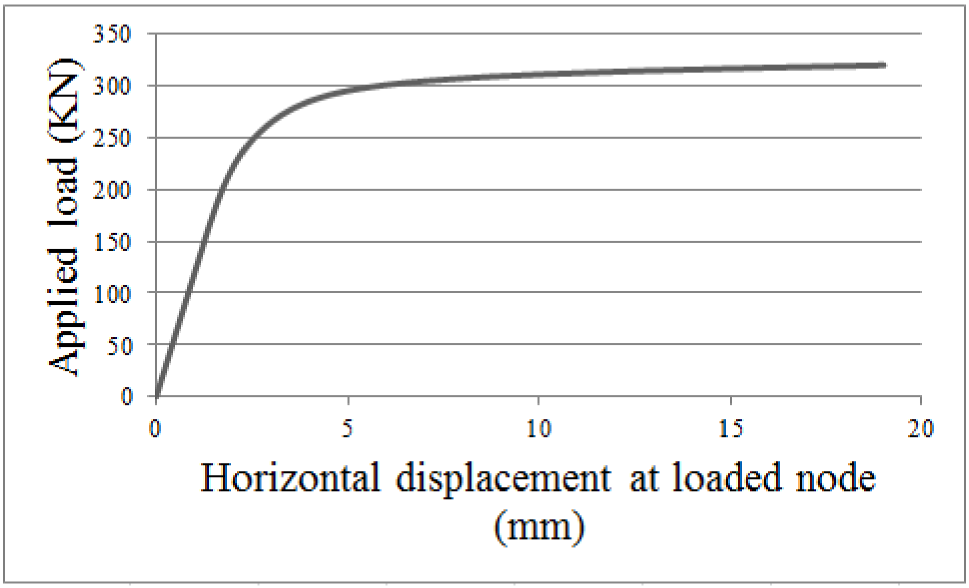
جدول ۳-۵ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای هر وصله (مثال ۳-۵-۴-)

شماره‌ی وصله	بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده
1	Ξ={0,0,0,0.142857,…,0.857142,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.090909,…,0.909090,1,1,1} for q=2
2	Ξ={0,0,0,0.142857,…,0.857142,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.142857,…,0.857142,1,1,1} for q=2
3	Ξ={0,0,0,0.0666,…,0.9333,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.142857,…,0.857142,1,1,1} for q=2
4	Ξ={0,0,0,0.142857,…,0.857142,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.090909,…,0.909090,1,1,1} for q=2
5	Ξ={0,0,0,0.142857,…,0.857142,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.142857,…,0.857142,1,1,1} for q=2

جدول ۳-۶ نتایج مربوط به تحلیل ایزوژئومتریک قاب دو بُعدی طی ۱۰۰ مرحله‌ی بارگذاری و ۱۰ تکرار

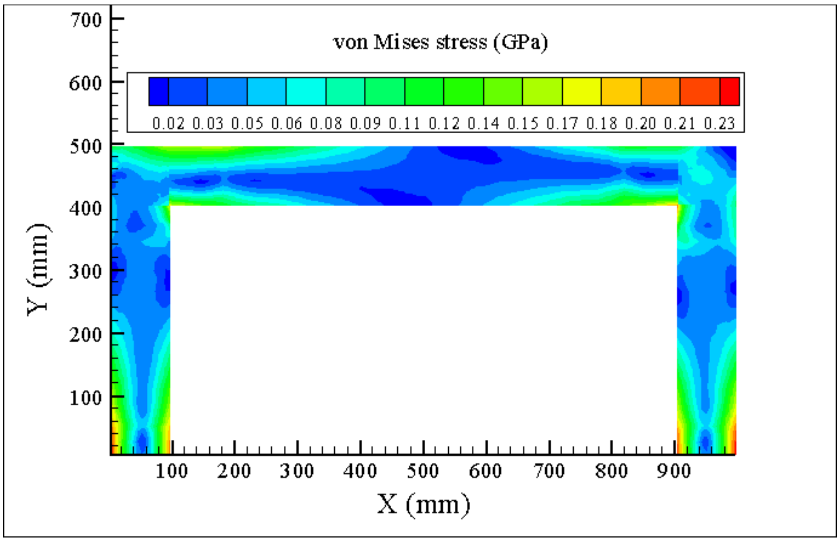
	شماره‌ی مرحله‌ی بارگذاری	مقدار بار وارده به سازه
شروع رفتار پلاستیک مصالح	48	153.6 *KN*
آخرین مرحله‌ی همگرایی	61	195.2 *KN*

نمودار نیرو-تغییرمکان در محل پایین‌ترین نقطه‌ی کنترلی تحت بار، در شکل ۳-۱۸ نمایش داده شده است. بر اساس آن هنگامی‌که مقدار بار وارده به عدد 292 KN برسد، شیب نمودار کم‌کم کاهش می‌یابد و تقریباً افقی می‌شود. بنابراین می‌توان این‌گونه برداشت کرد که از این لحظه‌ی بارگذاری به بعد مفصل پلاستیک تشکیل شده و در نتیجه سازه در حال فروپاشی است.

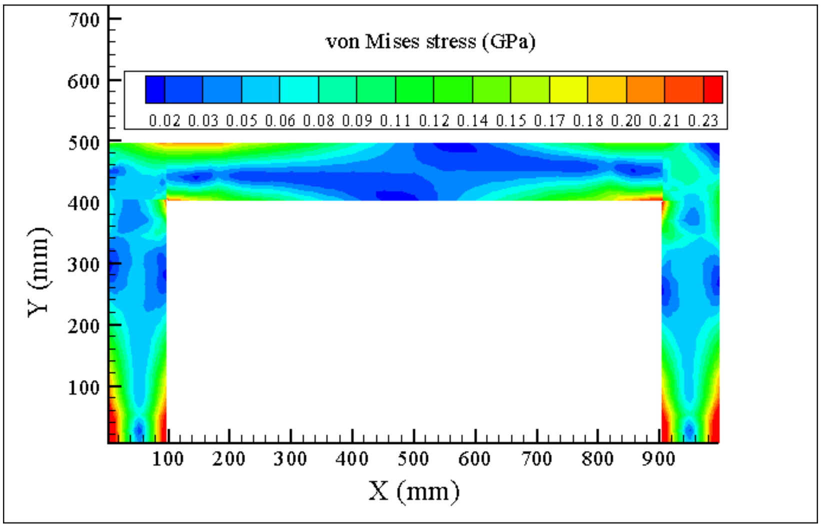


شکل ۳-۱۸ نمودار نیرو-تغییرمکان در محل پایین‌ترین نقطه‌ی کنترلی برای قاب دو بُعدی

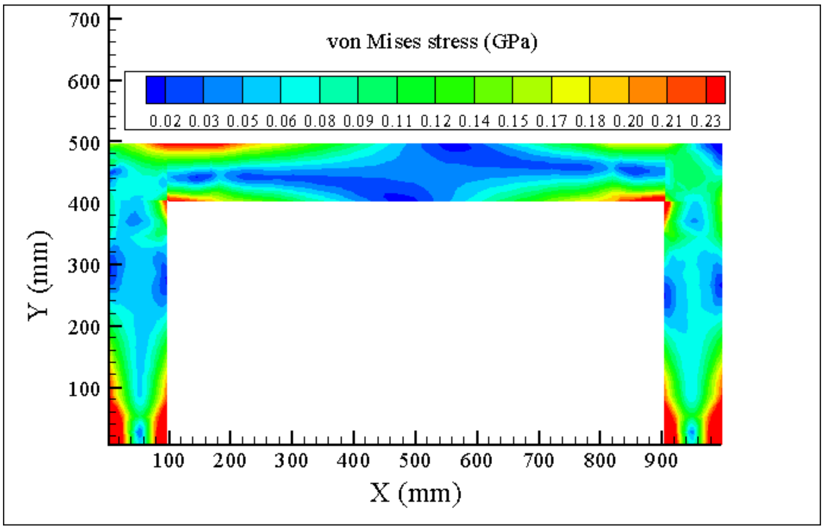
کانتورهای تنش به‌وجود آمده در قاب نیز در شکل‌های ۳-۱۹-(الف) تا (و) قابل مشاهده هستند.



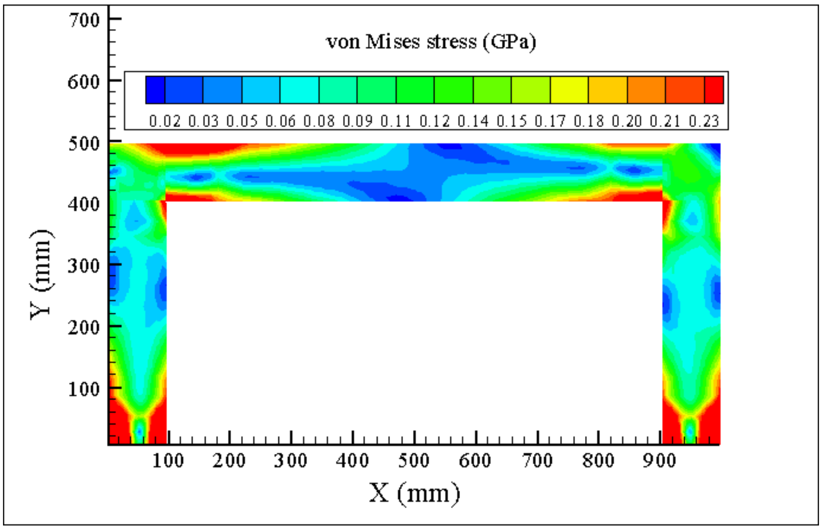
۳-۱۹-(الف)



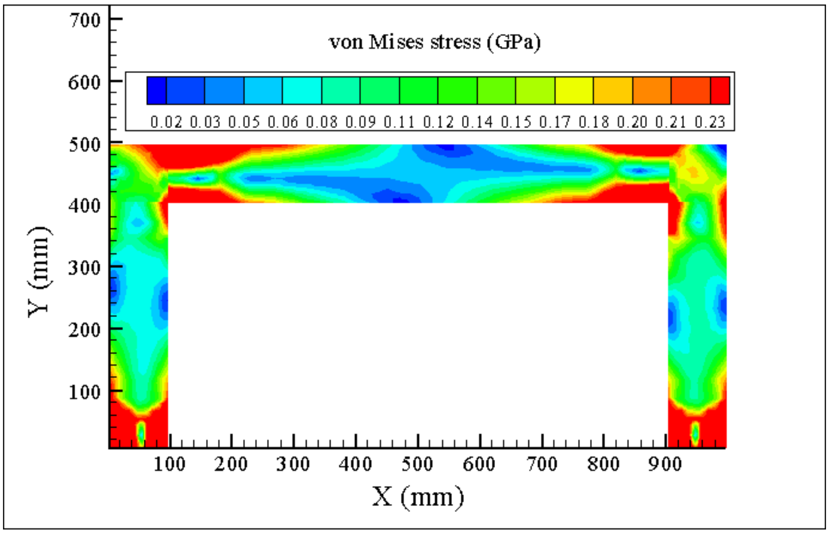
۳-۱۹-(ب)



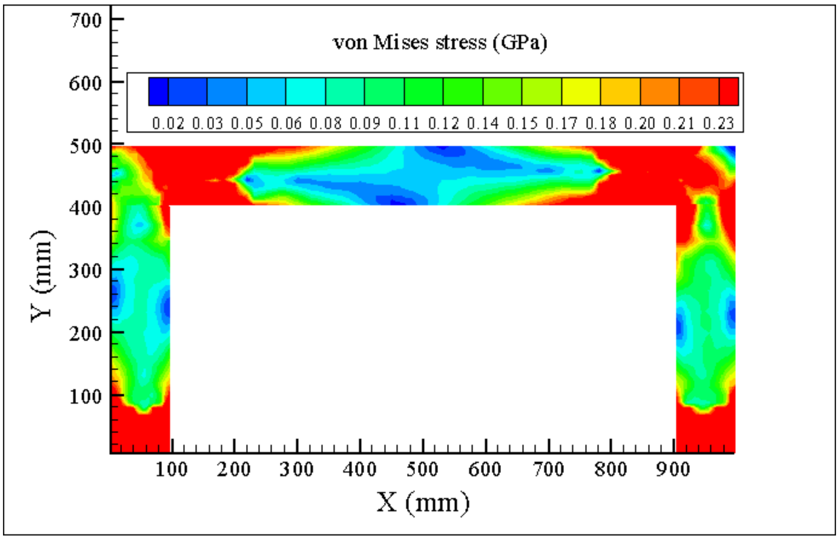
۳-۱۹-(ج)



۳-۱۹-(د)



۳-۱۹-(ه)

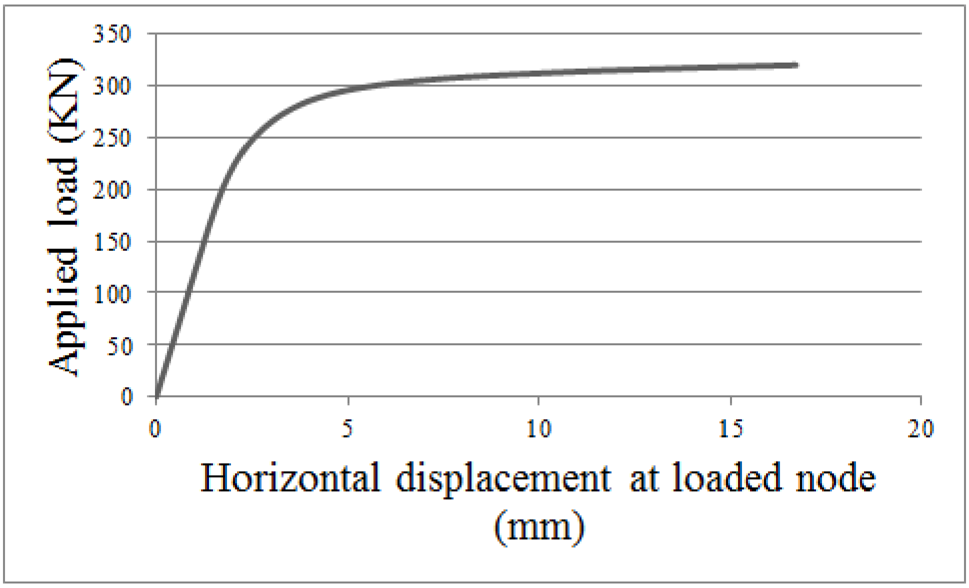


۳-۱۹-(و)

شکل ۳-۱۹ کانتورهای تنش در قاب دو بُعدی با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح: (الف) مرحله‌ی 48؛ (ب) مرحله‌ی 61؛ (ج) مرحله‌ی 71؛ (د) مرحله‌ی 81؛ (ه) مرحله‌ی 91؛ (و) مرحله‌ی 100

به‌منظور مشاهده‌ی اثر پارامتر سخت‌شدگی کرنشی روی رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، یک مرتبه‌ی دیگر مثال قاب دو بُعدی را با در نظر گرفتن $H'=0.2\ GPa$ مورد بررسی قرار می‌دهیم. نتایج مربوط به مرحله‌ی شروع رفتار پلاستیک مصالح و آخرین مرحله‌ی همگرایی بر اساس تولرانس مورد نظر همانند وضعیت قبل است (جدول ۳-۶). نمودار نیرو-تغییرمکان در محل پایین‌ترین نقطه‌ی کنترلی تحت بار نیز در شکل ۳-۲۰ نشان داده شده است. مقایسه‌ی شکل‌های ۳-۱۸ و ۳-۲۰ نشان می‌دهد که

سخت‌شدگی کرنشی منجر به کاهش تغییرمکان‌های به‌وجود آمده در محل بار در طی مراحل بارگذاری بعد از ورود به رفتار پلاستیک مصالح می‌گردد. در واقع می‌توان این‌گونه نتیجه گرفت که سخت‌شدگی کرنشی باعث می‌شود که سازه بتواند بارهای بیش‌تری را تحت تغییرشکل‌های کم‌تری تحمل کند و در نتیجه تخریب و فروپاشی در آن دیرتر رخ دهد.



شکل ۳-۲۰ نمودار نیرو-تغییرمکان در محل پایین‌ترین نقطه‌ی کنترلی برای قاب دو بُعدی با در نظر گرفتن اثر پارامتر سخت‌شدگی کرنشی

در ضمن با در نظر گرفتن اثر این پارامتر در تحلیل مسئله، مقدار سطح تسلیم در هر مرحله از بارگذاری و برای هر نقطه‌ای که تسلیم شده است، با توجه به میزان کرنش مؤثر ناشی از مرحله‌ی قبلی (در آن نقطه) افزایش پیدا خواهد کرد.

فصل چهارم:

بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح

۴-۱- مقدمه:

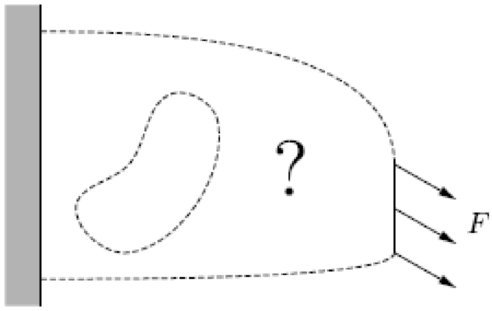
یکی از دغدغه‌های مهمی که سالیان متمادی ذهن مهندسان را به خود مشغول کرده است، دست‌یابی به طرح‌هایی است که در عین رعایت اصول و قوائد فنی و مهندسی، بهینه و اقتصادی نیز باشند. به‌همین دلیل در طی سال‌های گذشته بهینه‌سازی جایگاه ویژه‌ای در علوم مهندسی پیدا کرده است. بهینه‌سازی توپولوژی یکی از شاخه‌های بهینه‌سازی سازه‌ای است که به توزیع مقدار معیّنی از مصالح در یک دامنه‌ی مشخص می‌پردازد. به‌عبارت دیگر هدف از بهینه‌سازی توپولوژی تعیین تعداد، مکان و شکل حفره‌های سازه و نحوه‌ی اتصال مصالح در دامنه می‌باشد [۴۷]. در حالت عمومی هدف از مسائل بهینه‌سازی توپولوژی، ماکزیمم کردن سختی سازه یا به‌عبارت دیگر مینیمم کردن انرژی ناشی از بارهای اِعمال‌شده تحت قید حجمی است. با این حال رویکرد دیگری از مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با عنوان مینیمم کردن وزن سازه نیز مطرح است.

در ادامه‌ی این فصل، ابتدا به معرفی مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای و مفاهیم آن پرداخته می‌شود. پس از آن اشاره‌ای کوتاه به انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای خواهد شد. به‌دنبال آن مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش برای مصالح با رفتار الاستیک و سپس با رویکرد متداول برای مصالح الاستو-پلاستیک مطرح می‌گردد. سپس به‌منظور انجام پروسه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی توضیح مختصری درباره‌ی روش ریاضی مجانب‌های پویا داده می‌شود. در نهایت نیز نحوه‌ی محاسبه‌ی مشتقات تابع هدف و قیود نسبت به متغیرهای طراحی به‌عنوان آنالیز حساسیت در هر دو مسئله‌ی بهینه‌سازی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۴-۲- فرم ریاضی عمومی برای یک مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای:

بهینه‌سازی سازه‌ای به معنی ایجاد بهترین ساختاری است که بتواند بارهای وارده را به تکیه‌گاه‌ها انتقال دهد (شکل ۴-۱). منظور از بهترین می‌تواند ساختاری با کم‌ترین وزن، بیش‌ترین سختی و یا

حتی پایدارترین رفتار در مقابل کمانش باشد. به‌منظور رسیدن به هر کدام از این اهداف، ممکن است قیدهایی نیز وجود داشته باشند. در مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای، معمولاً کمیت‌هایی هم‌چون حجم مصالح به‌کار گرفته‌شده، تنش‌ها، تغییرمکان‌ها و حتی هندسه‌ی سازه به‌عنوان قید در نظر گرفته می‌شوند [۴۸].



شکل ۴-۱ مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای [۴۸]

به‌طور کلی می‌توان مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای را در فرم عمومی زیر بیان کرد [۴۹]:

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && f(\mathbf{x}) && \\ &\text{such that} && h_j(\mathbf{x}) = 0, && j = 1,2,\dots,n_h \\ & && g_k(\mathbf{x}) \le 0, && k = 1,2,\dots,n_g \\ & && x_i^l \le x_i \le x_i^u, && i = 1,2,\dots,n \end{aligned} \qquad (۱-۴)$$

که در آن $f(\mathbf{x})$ تابع هدف[1]، $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ برداری از متغیرهای طراحی[2]، $h_j(\mathbf{x})$ قیدهای مساوی[3] و $g_k(\mathbf{x})$ قیدهای نامساوی[4] هستند. هم‌چنین n_h، n_g و n به‌ترتیب تعداد قیدهای مساوی، قیدهای نامساوی و متغیرهای طراحی هستند. مقادیر x_i^l و x_i^u نیز کران‌های پایینی و بالایی متغیرهای طراحی x_i محسوب می‌شوند. مجموعه‌ای از متغیرهای طراحی که همه‌ی قیدها را اقناع کنند، یک فضای شدنی[5] را تشکیل می‌دهند. از طرفی، فضای نشدنی[6] مجموعه‌ای از همه‌ی نقاط طراحی است که حداقل یکی از قیدها را نقض کرده باشند [۴۹].

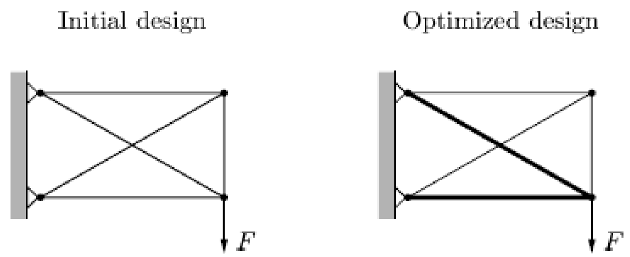
[1] Objective function
[2] Design variables
[3] Equality constraints
[4] Inequality constraints
[5] Feasible domain
[6] Infeasible domain

اگر تابع هدف و قیدهای مساوی و نامساوی توابعی خطی از متغیرهای طراحی باشند، آن‌گاه مسئله یک مسئله‌ی بهینه‌سازی خطی[1] خواهد بود. در یک مسئله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی[2]، تابع هدف یا حداقل یکی از قیدها یک تابع غیرخطی از متغیرهای طراحی است. به‌طور معمول مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای جزو مسائل بهینه‌سازی غیرخطی می‌باشند [۴۹].

۴-۳- انواع مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای:

از منظر خصوصیات هندسی، می‌توان مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای را در سه دسته‌ی زیر تقسیم‌بندی نمود:

بهینه‌سازی ابعادی[3]: پژوهش‌های اولیه در بهینه‌سازی سازه‌ای، تمرکز خود را روی مسائل بهینه‌سازی ابعادی گذاشته‌اند. به‌عنوان مثال، پیدا کردن سطح مقطع اعضای یک خرپا یا قاب یا بهینه کردن ضخامت یک صفحه از جمله‌ی این مسائل هستند. در این دست از مسائل، دامنه‌ی طراحی ثابت است و در طول پروسه‌ی بهینه‌سازی تغییر نمی‌کند [۴۹،۴۸]. شکل ۴-۲ یک نمونه از مسائل بهینه‌سازی ابعادی را برای یک خرپا نشان می‌دهد.

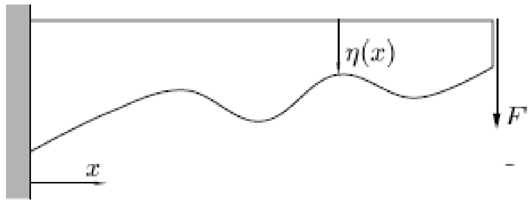


شکل ۴-۲ یک مسئله‌ی بهینه‌سازی سازه‌ای ابعادی با هدف بهینه کردن سطح مقطع اعضای خرپا [۴۸]

بهینه‌سازی شکل[4]: به‌عنوان توسعه‌های بعدی در بهینه‌سازی سازه‌ای، مسئله‌ی پیدا کردن مرزهای بهینه‌ی یک سازه مطرح شده است. پیدا کردن تابع مناسب برای تعریف مرزهای یک سازه‌ی تنش

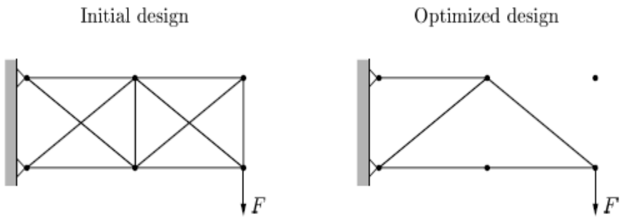
1 Linear optimization problem
2 Nonlinear optimization problem
3 Size optimization
4 Shape optimization

مسطح و همین‌طور پیدا کردن محل اتصالات یک سازه‌ی اسکلتی جزو این دسته از مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای هستند. در این‌گونه مسائل، دامنه‌ی طراحی ثابت نیست اما نحوه‌ی توزیع مصالح ثابت باقی می‌ماند. از طرفی مرزهای جدید نیز شکل نمی‌گیرند [۴۹،۴۸]. شکل ۴-۳ یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل در محیط پیوسته را نشان می‌دهد.

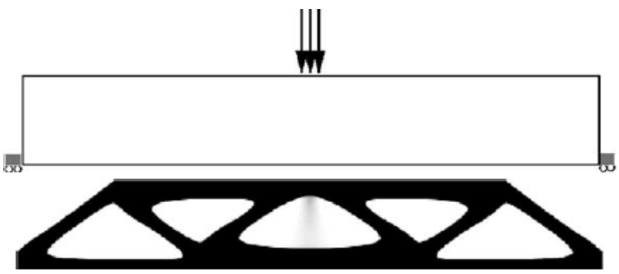


شکل ۴-۳ یک مسئله‌ی بهینه‌سازی شکل با هدف پیدا کردن تابع مناسب برای توصیف شکل سازه [۴۸]

بهینه‌سازی توپولوژی: می‌توان آن را به‌عنوان متداول‌ترین نوع بهینه‌سازی سازه‌ای مطرح نمود. در بهینه‌سازی توپولوژی مسائل گسسته مانند خرپاها، سطح مقطع اعضا به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته می‌شود که مقدار آن‌ها می‌تواند صفر گردد به این معنی که این اعضا قادر هستند از خرپا حذف شوند. شکل ۴-۴ بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا را نشان می‌دهد. در بهینه‌سازی توپولوژی محیط‌های پیوسته نیز، هدف تعیین تعداد و موقعیت حفره‌ها و به‌عبارت دیگر توزیع مصالح در دامنه‌ی طراحی است که نمونه‌ای از آن در شکل ۴-۵ نشان داده شده است.



شکل ۴-۴ بهینه‌سازی توپولوژی یک خرپا [۴۸]



شکل ۴-۵ بهینه‌سازی توپولوژی محیط پیوسته (دو بُعدی) [۴۸]

۴-۴- مسئله‌ی عمومی بهینه‌سازی توپولوژی:

امروزه بهینه‌سازی توپولوژی به‌عنوان یک ابزار قدرتمند در بسیاری از زمینه‌های طراحی و به‌خصوص مسائل مهندسی و سازه‌ای در نظر گرفته می‌شود. ما در علم بهینه‌سازی توپولوژی همواره با این سؤال روبرو هستیم که بهترین وضعیت برای توزیع مصالح در دامنه‌ای معیّن به‌منظور بهینه کردن یک تابع هدف معلوم تحت قیدهای خاص چیست؟

بنابراین در طراحی توپولوژی یک سازه، ما به‌دنبال تعیین جانمایی بهینه‌ی مصالح همسانگرد داده‌شده در دامنه‌ی مورد نظر هستیم؛ به این معنی که بهتر است تعیین کنیم کدام نقاط از دامنه دارای مصالح و کدام نقاط خالی از مصالح باشند (به‌صورت حفره باقی بمانند). پس می‌توان به‌منظور توزیع مصالح از یک تابع چگالی گسسته به فرم زیر استفاده نمود [۴۷]:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 \ \ \text{if} \quad x \in \Omega_{\text{mat}} \\ 0 \ \ \text{if} \quad x \notin \Omega_{\text{mat}} \end{cases} \qquad (۲-۴)$$

زمانی‌که از یک فرم گسسته استفاده می‌کنیم، دامنه‌ی طراحی در روش‌های مبتنی بر اِلمان[۱] به پیکسل‌هایی تبدیل می‌شود که در نهایت بسته به این‌که مادّه در آن‌ها قرار می‌گیرد یا نه، سیاه یا سفید خواهند شد. در واقع در فضای مرجع Ω به‌دنبال تعیین زیرمجموعه‌ی بهینه‌ی Ω_{mat} هستیم که شامل مصالح باشد. بنابراین این تابع که به فرم گسسته‌ی صفر-یک نیز معروف است بیان‌گر این است که در صورت وجود مصالح مقدار چگالی برابر با یک و در غیر این‌صورت مقدار چگالی برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. با این حال امروزه در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی به‌جای استفاده از مقادیر صحیح و گسسته‌ی چگالی می‌توان از مقادیر پیوسته تحت عنوان تابع چگالی مصنوعی استفاده نمود. در این‌صورت به‌منظور جلوگیری از شکل‌گیری نواحی متخلخل (نواحی با چگالی بین صفر و یک) از یک توان جریمه نیز مطابق با رویکرد مصالح مصنوعی همسانگرد با اِعمال جریمه استفاده می‌شود [۶].

[1] Element based method

روش ایزوژئومتریک از جمله روش‌های بر پایه‌ی گره[1] است که امروزه در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده است. در این روش به‌جای تقسیم دامنه به مجموعه‌ای از اِلمان‌ها و در نظر گرفتن یک مقدار ثابت چگالی برای هر اِلمان، از تقریب یک تابع چگالی پیوسته روی کل دامنه استفاده می‌گردد که مقدار آن بین صفر و یک محدود می‌شود. به‌منظور تعریف این تابع از همان توابع پایه‌ی نربزی که برای تعریف هندسه و تقریب تابع تغییرمکان استفاده شده بود، کمک گرفته می‌شود [۳۹،۳۸]. بنابراین فرم تابع چگالی مصنوعی برای وصله‌ی p به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\phi^{p}\left(\xi,\eta\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}R_{i,j}\left(\xi,\eta\right)\Phi^{p}{}_{i,j} \qquad (۳-۴)$$

که در آن $\Phi^{p}_{i,j}$ها چگالی نقاط کنترلی در وصله‌ی مورد نظر هستند و به‌عنوان متغیرهای طراحی مسئله‌ی بهینه‌سازی در نظر گرفته شده‌اند. از این‌جا به بعد می‌خواهیم مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی را با در نظر گرفتن دو نوع رفتار متفاوت برای مصالح بیان کنیم.

۴-۴-۱- مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رفتار الاستیک مصالح:

همان‌طور که در بخش مقدمه نیز اشاره شد، به‌منظور بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ها می‌توان از دو رویکرد کلی نام برد. در رویکرد متداول‌تر ما به‌دنبال یافتن سخت‌ترین سازه‌ی ممکن تحت قید حجمی هستیم. در واقع در این رویکرد انرژی کرنشی ناشی از بارهای اِعمال‌شده به سازه، بایستی حداقل گردد. از آن‌جایی‌که در این حالت هیچ محدودیتی برای تنش‌ها و تغییرمکان‌های موجود در سازه در نظر گرفته نمی‌شود، نوع دیگری از مسائل بهینه‌سازی توپولوژی نیز مطرح شده است که هدف از آن مینیمم کردن وزن سازه تحت قیدهای تنش می‌باشد [۸-۱۰].

در رویکرد دوم مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با در نظر گرفتن روش تحلیل اجزای محدود، مقدار چگالی در هر اِلمان محدود به‌عنوان متغیر طراحی مسئله در نظر گرفته می‌شود. از طرفی مقدار

[1] Nodal based methods

قیدهای تنش به‌ازای گره‌ی میانی هر اِلمان محاسبه و تحت عنوان قیدهای تنش موضعی شناخته می‌شوند. اگرچه در این شیوه از رویکرد جدید تعداد قیدهای مسئله و به‌دنبال آن حجم محاسبات نسبت به فرمول‌بندی عمومی مسائل بهینه‌سازی توپولوژی خیلی بیشتر است، با این حال نتایج حاصل از این رویکرد از منظر کاربردی در مسائل مهندسی و سازه‌ای، واقعی‌تر و منطقی‌تر به‌نظر می‌رسند [۲۲]. با توجه به این‌که در این‌جا روش تحلیل ایزوژئومتریک به‌جای اجزای محدود متداول مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقدار چگالی در هر نقطه‌ی کنترلی حکم متغیرهای طراحی مسئله را دارد. با فرض واحد در نظر گرفتن ضخامت سازه، می‌توان وزن کل سازه، W، را از رابطه‌ی زیر محاسبه نمود:

$$W = \sum_{p=1}^{np} \int_{\Omega^p} \phi^p(\xi,\eta)\, d\Omega \tag{۴-۴}$$

به‌منظور محاسبه‌ی انتگرال بالا روش انتگرال‌گیری گوسی اتخاذ می‌شود. در این پایان‌نامه برای معرفی قید تنش، از سطح تنش فون می‌سز استفاده می‌گردد. در ضمن در روش ایزوژئومتریک مقدار تنش را می‌توان در هر نقطه‌ی دلخواهی از سازه به‌راحتی حساب نمود. بنابراین فرم کلی مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} &\min_{\Phi_{i,j}} && W(\Phi_{i,j}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{Ku} = \mathbf{f} \\ & && \sigma_{\text{von}} \le \sigma_{\text{all}} \\ & && \Phi_{\min} \le \Phi_{i,j} \le 1 \quad i = 1,\dots,n \;,\; j = 1,\dots,m \end{aligned} \tag{۵-۴}$$

که در آن، σ_{all} و $\Phi_{\min}$ به‌ترتیب مقدار تنش مجاز و کران پایین متغیرهای طراحی هستند. σ_{von} نیز سطح تنش فون می‌سز است که از رابطه‌ی (۲-۸) به‌دست می‌آید. در روش تحلیل ایزوژئومتریک نیز می‌توان برای جلوگیری از شکل‌گیری نواحی با چگالی بینابین از یک توان جریمه هم‌چون روش SIMP استفاده نمود [۳۹،۳۸]. بنابراین ماتریس ثابت‌های الاستیک مادّه نیز به تابع چگالی مصنوعی وابسته خواهد شد و در نتیجه می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{D} = \phi^{\mu}(\xi,\eta)\mathbf{D}^0 \tag{۶-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۶)، $\mathbf{D}^0$ و $\mathbf{D}$ به‌ترتیب ماتریس الاستیسیته‌ی مصالح جامد و مصنوعی هستند. با توجه به رابطه‌ی (۴-۶) و (۳-۱۵) مقدار ماتریس ضرایب کل در مسئله‌ی بهینه‌سازی به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K} = \sum_{p=1}^{np} \mathbf{K}^p = \sum_{p=1}^{np} \int_{\Omega^p} \mathbf{B}^T \phi^\mu \mathbf{D}^0 \mathbf{B} d\Omega \qquad (۴-۷)$$

np تعداد وصله‌ها در دامنه‌ی طراحی است که ماتریس‌های ضرایب متناظر با آن‌ها مشابه روش اجزای محدود اَسمبل می‌شوند. از این‌جا به بعد تابع چگالی مصنوعی نیز به اختصار با ϕ نشان داده می‌شود.

در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با قید تنش، علاوه بر زیاد بودن تعداد قیود و بالا بودن حجم محاسبات، مشکل عمده‌ی دیگری نیز در مقایسه با مسائل متداول با هدف ماکزیمم کردن سختی وجود دارد. در سال ۱۹۶۸، پژوهشگران به این نتیجه رسیدند که وقتی مساحت اِلمان در مسائل بهینه‌سازی خرپا به سمت صفر میل می‌کند، قیدهای تنش نقض می‌شوند و بنابراین آن عضو خرپا نمی‌تواند حذف گردد [۱۷]. این مسئله که با عنوان تکینی شناخته شده است، در بهینه‌سازی توپولوژی مسائل پیوسته نیز قابل مشاهده است به‌طوری‌که در مسائلی از این دست، هنگامی که چگالی (متغیر طراحی) به صفر نزدیک می‌شود، مقداری تنش باقی می‌ماند. در واقع در یک ناحیه با مقادیر متغیر طراحی اندک، هنوز مقدار کمی کرنش وجود دارد که منجر به ایجاد تنش غیر صفر و گاهی اوقات با مقدار بالا می‌شود. مسئله‌ی تکینی در بسیاری از مقالات مورد بحث قرار گرفته است [۲۰،۱۹]. یکی از راه‌های اِرائه‌شده برای دوری کردن از این مشکل استفاده کردن از رویکرد رهاسازی با ε [۱] است که در سال ۱۹۹۷ پیشنهاد شده [۲۱] و در بسیاری از پژوهش‌های بعدی نیز مورد استفاده قرار گرفته است. مطابق این رویکرد، قیدهای تنش رهاشده با فرمول‌بندی جدید جایگزین قیدهای تنش اصلی می‌شوند، به‌طوری‌که به‌ازای هر مقدار مثبت پارامتر ε فضای طراحی دیگر چندحالتی نخواهد بود و مسئله‌ی مورد نظر بهتر به جواب همگرا می‌شود [۴۷].

---

[1] ε-relaxation

به‌منظور این‌که همواره قیدهای تنش در نقاط با چگالی صفر اقناع شوند، ابتدا شکل قید تنش می‌تواند به‌صورت زیر پیشنهاد شود:

$$\left(\sigma_{\text{von}} - \sigma_{\text{all}}\right) \times \phi \leq 0 \tag{۸-۴}$$

که مقدار تابع چگالی مصنوعی ϕ برای هر قید در محل محاسبه‌ی تنش به‌دست می‌آید که در صورت صفر بودن آن، هر چند مقدار تنش زیاد هم باشد، قید تنش صفر می‌گردد و در نتیجه نقض نمی‌شود. اما اگر مقدار چگالی در نقطه‌ی تنش به صفر نزدیک شود و مقدار تنش در آن نقطه زیاد به‌دست آید، بر اساس رابطه‌ی (۴-۸) قید تنش ممکن است اقناع نشود. بر همین اساس می‌توان رابطه‌ی (۴-۸) را با رویکرد رهاسازی با پارامتر ε به شکل زیر اصلاح کرد:

$$\left(\sigma_{\text{von}} - \sigma_{\text{all}}\right) \times \phi \leq \varepsilon \tag{۹-۴}$$

بنابراین در صورتی‌که مقدار چگالی در نقطه‌ی تنش به‌اندازه‌ی کافی کوچک شد، رابطه‌ی (۴-۹) این اجازه را به قید تنش می‌دهد که اقناع شود. بسیاری از رویکردهای رهاسازی که برای مسائل بر پایه‌ی اِلمان پیشنهاد شده‌اند، بر اساس پارامتر ε هستند. البته رویکردهای کلی‌تری نیز وجود دارند که در آن‌ها تنها سطح تنش فون می‌سز حساب‌شده با استفاده از یک فاکتوری مشابه با آن‌چه که در روش SIMP دیدیم، جریمه می‌گردد [۱۴]. در این‌جا ضریب A برای رهاسازی قیدهای تنش انتخاب شده است [۵۰]:

$$A = \frac{\phi}{\phi + \varepsilon(1-\phi)} \tag{۱۰-۴}$$

بنابراین فرم کلی و نهایی مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با هدف مینیمم کردن وزن، به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned} &\min_{\Phi_{i,j}} && W(\Phi_{i,j}) \\ &\text{subject to} && \mathbf{Ku} = \mathbf{f} \\ & && \sigma_{\text{von}} \leq \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{\phi}\right)\sigma_{\text{all}} \rightarrow \frac{\phi}{\phi + \varepsilon(1-\phi)}\sigma_{\text{von}} \leq \sigma_{\text{all}} \\ & && \Phi_{\min} \leq \Phi_{i,j} \leq 1 \qquad i = 1,\ldots,n \;\;,\;\; j = 1,\ldots,m \end{aligned} \tag{۱۱-۴}$$

در رابطه‌ی (۴-۱۱) عبارت ضرب‌شده در سطح تنش فون می‌سز ضریب رهاسازی نامیده شده است که در آن پارامتر ε یک مقدار مثبت کوچک در نظر گرفته می‌شود [۵۰]. مطابق رابطه‌ی (۴-۱۱)، مقدار تنش فون می‌سز در هر نقطه‌ی تنش با توجه به مقدار چگالی آن جریمه می‌گردد به‌طوری‌که اگر مقدار چگالی در نقطه‌ای صفر شود، مقدار ضریب رهاسازی و به تبع آن قید تنش نیز صفر می‌گردد. بنابراین از نقض قید جلوگیری خواهد شد.

۴-۴-۲- مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح:

همان‌طور که در بخش‌های قبل هم توضیح داده شد، بهینه‌سازی توپولوژی علمی است که به‌منظور تعیین جانمایی بهینه‌ی مصالح در یک دامنه‌ی معیّن به‌کار گرفته می‌شود. نکته‌ی قابل توجه این است که واکنش‌های غیرخطی سازه‌ای مثل کمانش یا رفتار الاستو-پلاستیک مصالح بهتر است به‌منظور گسترش یک طرح واقعی در بهینه‌سازی سازه‌ای در نظر گرفته شوند. برای این منظور در این بخش، فرمول‌بندی بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای با در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مصالح مورد بررسی قرار خواهد گرفت. هدف از مسئله‌ی بهینه‌سازی مینیمم کردن انرژی کرنشی سازه تحت قید حجمی در نظر گرفته شده است. متغیرهای طراحی نیز همانند بخش قبل چگالی نقاط کنترلی هستند. بنابراین مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با تابع هدف و قید ذکرشده می‌تواند به‌صورت زیر تعریف گردد:

$$\begin{aligned} &\min_{\Phi_{i,j}} && C \\ &\text{subject to} && \mathbf{Ku} = \mathbf{f} \\ & && \Omega_s \le \bar{\Omega}_s \\ & && \Phi_{\min} \le \Phi_{i,j} \le 1 \quad i = 1,\dots,n \quad , \quad j = 1,\dots,m \end{aligned} \qquad (۱۲-۴)$$

که در آن، C انرژی کرنشی محاسبه‌شده برای سازه در مسئله‌ی بهینه‌سازی مورد نظر می‌باشد. انرژی کرنشی سازه با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح را نیز می‌توان به‌صورت زیر محاسبه نمود:

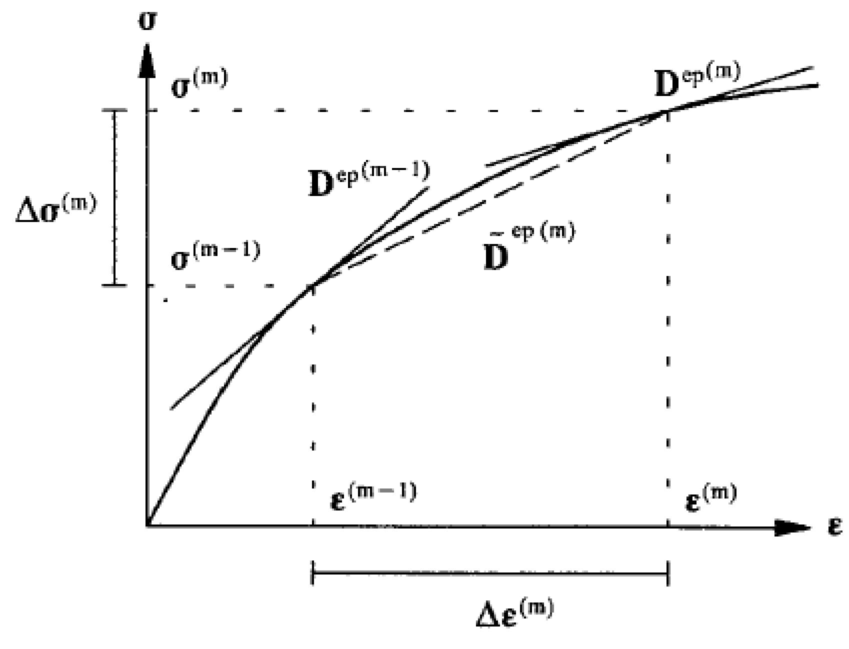
$$C = \int_{V^p} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \sum_{m=1}^{n} \Delta C^{(m)} \qquad (۱۳-۴)$$

که در آن m و n به‌ترتیب شماره‌ی مرحله‌ی بارگذاری جاری و تعداد کل نموهای در نظر گرفته‌شده هستند. $\Delta C^{(m)}$ نیز مقدار انرژی کرنشی در هر نمو بار است که به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta C^{(m)} = 0.5 \times \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{*(m)^T} \times \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(m)} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)^T} \times \boldsymbol{\sigma}^{(m-1)} \qquad (۱۴-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۱۴)، $\boldsymbol{\sigma}^{(m-1)}$ بردار تنش‌های کل محاسبه‌شده در انتهای مرحله‌ی بارگذاری قبلی، $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}$ بردار کرنش‌های تدریجی محاسبه‌شده در ابتدای مرحله‌ی بارگذاری جاری و $\Delta\boldsymbol{\sigma}^{(m)}$ بردار تنش‌های تدریجی به‌دست آمده از رابطه‌ی (۲-۳۵) برای مرحله‌ی جاری هستند. $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{*(m)}$ نیز بردار کرنش‌های تدریجی محاسبه‌شده در انتهای مرحله‌ی بارگذاری جاری است که بر اساس رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^{*(m)} = (\mathbf{D}_{ep})^{-1(m)} \times \Delta \boldsymbol{\sigma}^{(m)} \qquad (۱۵-۴)$$



شکل ۴-۶ نمای شماتیک از نحوه‌ی محاسبه‌ی انرژی کرنشی در انتهای هر مرحله‌ی بارگذاری [۲۸]

این نکته را نیز بایستی یادآور شویم که رابطه‌ی (۴-۱۴) به‌ازای تمام نقاط گوسی اِلمان‌ها محاسبه می‌گردد و سپس همه‌ی مقادیر به‌دست آمده جمع می‌شوند تا انرژی کرنشی در انتهای هر مرحله‌ی بارگذاری به‌دست آید. شکل ۴-۶ که از مرجع [۲۸] انتخاب گردیده است برای درک بهتر مطالب ارائه‌شده مناسب می‌باشد. ماتریس ضرایب کل مورد استفاده در مسئله‌ی (۴-۱۲) نیز همانند رابطه‌ی

(۴-۷) تعریف می‌گردد با این تفاوت که ماتریس ثابت‌های مادّه بسته به نوع رفتار مصالح در نقطه‌ی گوسی مورد نظر قابل تغییر است. در ضمن در طول پروسه‌ی بهینه‌سازی ماتریس ثابت‌های الاستیک مصالح، بردار تنش‌های تدریجی محاسبه‌شده در ابتدای هر مرحله‌ی بارگذاری، سطح تنش فون می‌سز و پارامتر کرنش سخت‌شدگی بهتر است مطابق با روش SIMP برای مصالح متخلخل جریمه گردند.

پیدا کردن روش بهینه‌سازی مناسب برای حل این مسائل اهمیت زیادی دارد. یکی از روش‌هایی که برای حل مسائل توپولوژی، بسیار مورد استفاده قرار گرفته است روش مجانب‌های پویا است که در ادامه این روش توضیح داده خواهد شد.

۴-۵- روش مجانب‌های پویا:

در اغلب مسائل بهینه‌سازی، واکنش‌های سازه‌ای (توابع هدف و قیدها) توابعی غیرخطی هستند و رفتاری یکنواخت یا غیریکنواخت را نسبت به تغییرات متغیر طراحی مورد نظر از خود نشان می‌دهند. تحت این شرایط، حل مستقیم مسئله‌ی اصلی از نظر محاسباتی بسیار سخت خواهد شد. در دهه‌های اخیر به‌منظور حل این‌گونه مسائل، رویکردهای تقریبی پیشنهاد شدند که در آن‌ها به‌جای حل مسئله‌ی اصلی، یک سری زیرمسئله‌های تقریبی تولید و حل می‌شوند [۵۱]. یکی از این رویکردها، روش مجانب‌های پویاست که اولین بار در سال ۱۹۸۷ مطرح شده است. این روش از جمله روش‌های ریاضی بر پایه‌ی گرادیان در بهینه‌سازی سازه‌ها محسوب می‌شود که با ایجاد الگوهای تقریبی از مسئله‌ی اصلی، زیرمسئله‌های محدب و تفکیک‌پذیری را با استفاده از اطلاعات آنالیز حساسیت در نقطه‌ی تکرار جاری و نقاط قبلی ایجاد می‌کند [۵۲]. در هر نقطه‌ی تکرار، این زیرمسئله‌ها با استفاده از روش دوگان[1] حل می‌شوند و پاسخ آن‌ها، به‌عنوان نقطه‌ی تکرار بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روند تکراری تا رسیدن به همگرایی ادامه می‌یابد. در این روش، تابع تقریب برای هر $j=0,\ldots,m$ در

[1] Dual method

اطراف نقطه‌ی تکرار $\mathbf{x}^{(k)}$ ($\mathbf{x}$ بردار متغیرهای طراحی با n عضو و k شمارنده‌ی تکرار هستند) به‌صورت زیر تعریف شده است [۵۲]:

$$g_j^{(k)}(\mathbf{x}) \approx r_j^{(k)} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{ji}^{(k)}}{U_i^{(k)} - x_i} + \frac{q_{ji}^{(k)}}{x_i - L_i^{(k)}}\right) \tag{۱۶-۴}$$

که مقادیر $r_j^{(k)}$، $p_{ji}^{(k)}$ و $q_{ji}^{(k)}$ به‌صورت زیر انتخاب می‌شوند:

$$\begin{aligned}
& r_j^{(k)} = g_j(\mathbf{x}^{(k)}) - \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_{ji}^{(k)}}{U_i^{(k)} - x_i^{(k)}} + \frac{q_{ji}^{(k)}}{x_i^{(k)} - L_i^{(k)}}\right) \\
& p_{ji}^{(k)} = (U_i^{(k)} - x_i^{(k)})^2 \times \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \text{if} \ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} > 0 \\
& p_{ji}^{(k)} = 0 \qquad \text{if} \ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \le 0 \\
& q_{ji}^{(k)} = 0 \qquad \text{if} \ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \ge 0 \\
& q_{ji}^{(k)} = -(x_i^{(k)} - L_i^{(k)})^2 \times \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \quad \text{if} \ \frac{\partial g_j}{\partial x_i} < 0
\end{aligned} \tag{۱۷-۴}$$

مقادیر مثبت $L_i^{(k)}$ و $U_i^{(k)}$ وارسی‌کننده‌ی محدوده‌ای هستند که در آن، تابع تقریب قادر به تولید پاسخ‌های معقول برای مسئله‌ی بهینه‌سازی است. مقادیر این پارامترها، که مجانب‌های قائم برای تابع تقریب محسوب می‌شوند، بایستی در هر تکرار به‌روز گردند. از طرفی، $L_i^{(k)}<x_i^{(k)}<U_i^{(k)}$ به‌ازای تمامی متغیرهای طراحی برقرار می‌باشد و همه‌ی مشتقات جزئی موجود در رابطه‌ی (۴-۱۷) نیز در بردار متغیرهای طراحی مربوط به تکرار k ارزیابی شده‌اند. بنابراین با جایگذاری روابط (۴-۱۷) در مسائل بهینه‌سازی (۴-۱۱) و (۴-۱۲)، می‌توان فرم تقریبی آن‌ها را به‌دست آورد. برای حل زیرمسئله‌ی تقریبی با استفاده از روش دوگان، ابتدا بایستی تابع لاگرانژین[1] ساخته و نسبت به متغیرهای طراحی مسئله حداقل شود. در نهایت با جایگذاری مقدار مینیمم به‌دست آمده در تابع لاگرانژین، که به مقدار ضرایب لاگرانژ نیز وابسته است، بایستی این تابع نسبت به ضرایب لاگرانژ حداکثر شود. مقدار به‌دست آمده در گام نهایی همان نقطه‌ی بهینه‌ی زیرمسئله‌ی تقریبی خواهد بود [۵۲].

---
[1] Lagrangian function

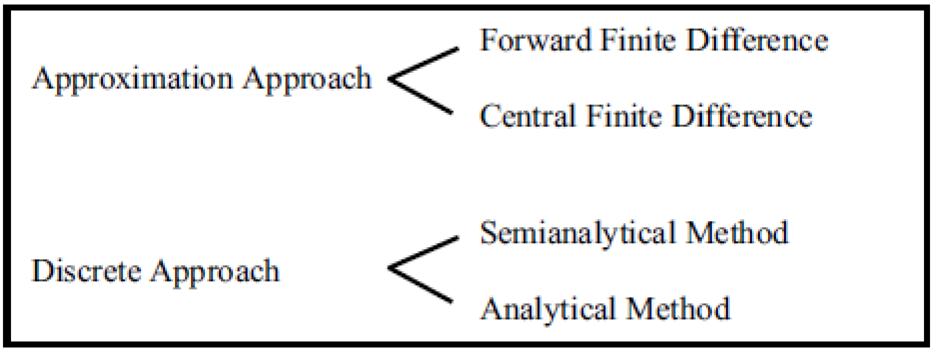
برای رسیدن به فرم تقریبی مسئله‌ی بهینه‌سازی مورد نظر، محاسبه‌ی مشتقات توابع هدف و قیود نسبت به متغیرهای طراحی الزامی است که در بخش بعدی مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۴-۶- آنالیز حساسیت:

به‌منظور حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای به‌واسطه‌ی روش‌های بر پایه‌ی گرادیان مانند روش مجانب‌های پویا، آنالیز حساسیت که محاسبه‌ی مشتقات تابع هدف و قیدها نسبت به متغیرهای طراحی است، امری ضروری محسوب می‌شود. به‌عبارت دیگر طی این فرآیند، میزان تغییر یک تابع نسبت به تغییرات متغیرهای طراحی آن سنجیده می‌شود. در حالت کلی و در کاربردهای مهندسی، یک عملکرد سازه‌ای به متغیرهای طراحی خود وابسته است. به‌عنوان مثال، تغییر در سطح مقطع یک تیر روی وزن سازه‌ای آن اثر می‌گذارد. اگر رابطه‌ی وزن بر حسب متغیرهای طراحی سازه‌ی مورد نظر (طول و مشخصات سطح مقطع تیر) شناخته شود، آنگاه محاسبه‌ی حساسیت تابع وزن نسبت به هر کدام از آن متغیرها کار ساده‌ای می‌باشد و در واقع تابع وزن نسبت به متغیرهای طراحی خود وابستگی صریح[1] دارد. با این حال در اغلب موارد، یک تابع سازه‌ای به‌طور واضح به متغیرهای طراحی وابسته نیست. به‌عنوان مثال، وقتی تنش یک تیر به‌عنوان عملکرد سازه‌ای در نظر گرفته شده است هیچ رابطه‌ی صریحی بین تنش و متغیرهای طراحی وجود ندارد بلکه تنش سازه به‌واسطه‌ی تغییرمکان‌های حاصل از آنالیز عددی قابل محاسبه است. بر همین اساس برای محاسبه‌ی حساسیت تنش نسبت به متغیرهای طراحی سازه می‌بایست ابتدا به طریقی خاص مشتق تغییرمکان‌ها نسبت به متغیر طراحی مورد نظر محاسبه گردد. بنابراین در این‌گونه موارد تابع عملکرد (مانند تنش) وابستگی ضمنی[2] نسبت به متغیر طراحی مسئله دارد [۵۳]. روش‌های متفاوت به‌کار گرفته‌شده در آنالیز حساسیت در شکل ۴-۷ نمایش داده شده‌اند. دو رویکرد کلی برای به‌دست آوردن حساسیت‌ها می‌تواند مورد استفاده قرار

[1] Explicitly dependent
[2] Implicitly dependent

گیرد: رویکردهای تقریبی و گسسته. در رویکرد تقریبی، حساسیت تابع به‌واسطه‌ی روش تفاضل محدود پیش‌رو[1] یا مرکزی[2] به‌دست می‌آید. در رویکرد گسسته، حساسیت‌ها بر اساس مشتق‌گیری از معادله‌ی حاکم گسسته‌شده محاسبه می‌شوند. برای این منظور، محاسبه‌ی مشتق ماتریس سختی (ضرایب) ضروری است. اگر این مشتق به‌صورت تجزیه‌ای با استفاده از عبارت صریح ماتریس سختی (ضرایب) نسبت به متغیر طراحی به‌دست آید، یک روش تحلیلی[3] نام می‌گیرد. اما اگر این مشتق با استفاده از تفاضل محدود محاسبه شود، به آن روش نیمه‌تحلیلی[4] گفته می‌شود [۵۳،۴۹،۴۸].



شکل ۴-۷ رویکردهای کلی برای آنالیز حساسیت [۵۳]

۴-۶-۱- روش تحلیلی مستقیم:

در این پایان‌نامه، برای محاسبه‌ی مشتقات قیدهای تنش موضعی در رویکرد مینیمم کردن وزن با در نظر گرفتن رفتار الاستیک مصالح، روش تحلیلی مستقیم مورد استفاده قرار گرفته است. با توجه به این‌که ضریب رهاسازی، خود تابعی از متغیرهای طراحی است؛ پس بایستی از مشتق حاصل‌ضرب برای محاسبه‌ی مشتق قیدهای تنش استفاده نمود. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \text{stress constraint}}{\partial \Phi_{i,j}} = \frac{\partial A}{\partial \Phi_{i,j}} \times \sigma_{\text{von}} + A \times \frac{\partial \sigma_{\text{von}}}{\partial \Phi_{i,j}} \qquad (۱۸-۴)$$

[1] Forward finite difference method
[2] Central finite difference method
[3] Analytical method
[4] Semianalytical method

مطابق با رابطه‌ی (۲-۸)، مشتق سطح تنش فون می‌سز نسبت به متغیرهای طراحی (چگالی هر نقطه‌ی کنترلی) به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial\sigma_{\text{von}}}{\partial\Phi_{i,j}}=\frac{\frac{\partial}{\partial\Phi_{i,j}}(\sigma_x^2+\sigma_y^2-\sigma_x\sigma_y+3\tau_{xy}^2)}{2\sigma_{\text{von}}}=\frac{\frac{\partial\sigma_x^2}{\partial\Phi_{i,j}}+\frac{\partial\sigma_y^2}{\partial\Phi_{i,j}}-\frac{\partial\sigma_x\sigma_y}{\partial\Phi_{i,j}}+3\frac{\partial\tau_{xy}^2}{\partial\Phi_{i,j}}}{2\sigma_{\text{von}}}$$

$$=\frac{2\sigma_x\frac{\partial\sigma_x}{\partial\Phi_{i,j}}+2\sigma_y\frac{\partial\sigma_y}{\partial\Phi_{i,j}}+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial\Phi_{i,j}}-(\sigma_x\frac{\partial\sigma_y}{\partial\Phi_{i,j}}+\sigma_y\frac{\partial\sigma_x}{\partial\Phi_{i,j}})}{2\sigma_{\text{von}}} \qquad (۱۹-۴)$$

$$=\frac{\frac{\partial\sigma_x}{\partial\Phi_{i,j}}(2\sigma_x-\sigma_y)+\frac{\partial\sigma_y}{\partial\Phi_{i,j}}(2\sigma_y-\sigma_x)+6\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial\Phi_{i,j}}}{2\sigma_{\text{von}}}$$

برای محاسبه‌ی عبارت (۴-۱۹) بایستی مشتق هر کدام از مؤلفه‌های بردار تنش را نسبت به متغیرهای طراحی محاسبه نمود. به‌همین منظور با مشتق‌گیری از رابطه‌ی (۳-۱۴) خواهیم داشت:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}}{\partial\Phi_{i,j}}=\mathbf{DB}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\Phi_{i,j}} \qquad (۲۰-۴)$$

با مشتق‌گیری از طرفین معادله‌ی تعادل **Ku=f** و با استفاده از قاعده‌ی زنجیره‌ای، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\mathbf{K}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\Phi_{i,j}}+\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\Phi_{i,j}}\mathbf{u}=\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\Phi_{i,j}} \qquad (۲۱-۴)$$

با توجه به این‌که تنها نیروهای سطحی در این‌جا در نظر گرفته شده‌اند و این نیروها نیز به چگالی وابسته نیستند، عبارت سمت راست تساوی (۴-۲۱) صفر می‌گردد و در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathbf{K}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial\Phi_{i,j}}=-\frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\Phi_{i,j}}\mathbf{u} \qquad (۲۲-۴)$$

از آن‌جایی‌که رابطه‌ی (۴-۲۲) همان ساختار معادله‌ی تعادل را دارد، سمت راست تساوی را عبارت شبه بار[1] نامیده‌اند [۴۹،۴۸]. برای به‌دست آوردن بردار شبه بار، بایستی مشتق ماتریس ضرایب کل نسبت به چگالی نقاط کنترلی به‌صورت زیر محاسبه گردد:

[1] Pseudo-load

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \Phi_{i,j}} = \sum_{p=1}^{np} \int_{\Omega^p} \mathbf{B}^T \, (\mu \phi^{\mu-1} R(\xi,\eta)) \mathbf{D}^0 \mathbf{B} \, d\,\Omega \qquad (۲۳-۴)$$

در رابطه‌ی (۴-۲۳)، $R(\xi,\eta)$ تابع پایه‌ی نربز متناظر با متغیر طراحی است که مشتق نسبت به آن گرفته شده است. با جایگذاری مشتق ماتریس ضرایب کل در رابطه‌ی (۴-۲۲) و حل معادله‌ی حاصل، بردار مشتقات تغییرمکان‌ها نسبت به متغیرهای طراحی به‌دست می‌آید. سرانجام با جایگذاری مقادیر به‌دست آمده در رابطه‌ی (۴-۲۰)، می‌توان مشتق مؤلفه‌های بردار تنش و به‌دنبال آن مشتق سطح تنش فون می‌سز را محاسبه نمود. حال برای کامل کردن فرآیند مشتق‌گیری قیدهای تنش، بایستی مشتق ضریب رهاسازی نیز محاسبه و در رابطه‌ی (۴-۱۸) جایگذاری گردد. از قبل می‌دانیم که مشتق تابع تقریب چگالی نسبت به هر کدام از متغیرهای طراحی، همان تابع پایه‌ی نربز متناظر با آن متغیر است. بر همین اساس مشتق ضریب رهاسازی بعد از ساده‌سازی‌های لازم، به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial A}{\partial \Phi_{i,j}} = \frac{R(\xi,\eta)\varepsilon}{\varepsilon^2 (1+\phi^2 - 2\phi) + 2\phi\varepsilon + \phi^2 (1-2\varepsilon)} \qquad (۲۴-۴)$$

برای تکمیل آنالیز حساسیت، بایستی مشتق تابع هدف (وزن) نیز نسبت به متغیرهای طراحی محاسبه گردد. با توجه به رابطه‌ی (۴-۴)، مشتق وزن نسبت به متغیر طراحی به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\frac{\partial W}{\partial \Phi_{i,j}} = \int_{\Omega} R(\xi,\eta) \, d\,\Omega \qquad (۲۵-۴)$$

۴-۶-۲- روش تفاضل محدود پیش‌رو:

به‌منظور محاسبه‌ی مشتق انرژی کرنشی در مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رویکرد متداول با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، روش تفاضل محدود پیش‌رو مورد استفاده قرار گرفته است. در واقع ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی اطلاعات حساسیت یک تابع استفاده از روش تفاضل محدود می‌باشد. این روش حساسیت تابع مورد نظر را با ارزیابی آن در طول مراحل مختلف در پروسه‌ی طراحی محاسبه می‌کند. برای نشان دادن این روش، ابتدا می‌بایست مقدار تابع انرژی کرنشی را در

متغیر طراحی جاری (همان متغیری که مشتق نسبت به آن گرفته خواهد شد) محاسبه نمود. سپس یک مقدار کوچک $h > 0$ به متغیر طراحی جاری بایستی اضافه گردد و مقدار تابع مجدد حساب شود. در نهایت مشتق تابع مورد نظر نسبت به متغیر طراحی جاری به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial C}{\partial \Phi_{i,j}} \approx \frac{C(\Phi_{i,j}+h)-C(\Phi_{i,j})}{h} \qquad (۲۶-۴)$$

اگرچه این روش بسیار ساده است اما هزینه‌ی محاسباتی در آن بسیار بالا می‌باشد. در واقع اگر تعداد متغیرهای طراحی مسئله n باشد، $n+1$ مرتبه باید آنالیز انجام شود. از طرفی پیدا کردن مقدار مناسب برای h هم امر مهمی است. اگر مقدار h خیلی بزرگ باشد، عبارت سمت راست رابطه‌ی (۴-۲۶) تقریب بدی از مشتق به ما خواهد داد. بیش از اندازه کوچک بودن مقدار h نیز منجر به خطا در محاسبه‌ی مشتق می‌شود [۵۳]. نکته‌ی مهم دیگری که باید به آن اشاره نمود این است که با توجه به روند نموی بودن تحلیل مسائل الاستو-پلاستیک و محاسبه‌ی انرژی کرنشی سازه، حساسیت این تابع نیز به‌صورت تدریجی محاسبه می‌گردد.

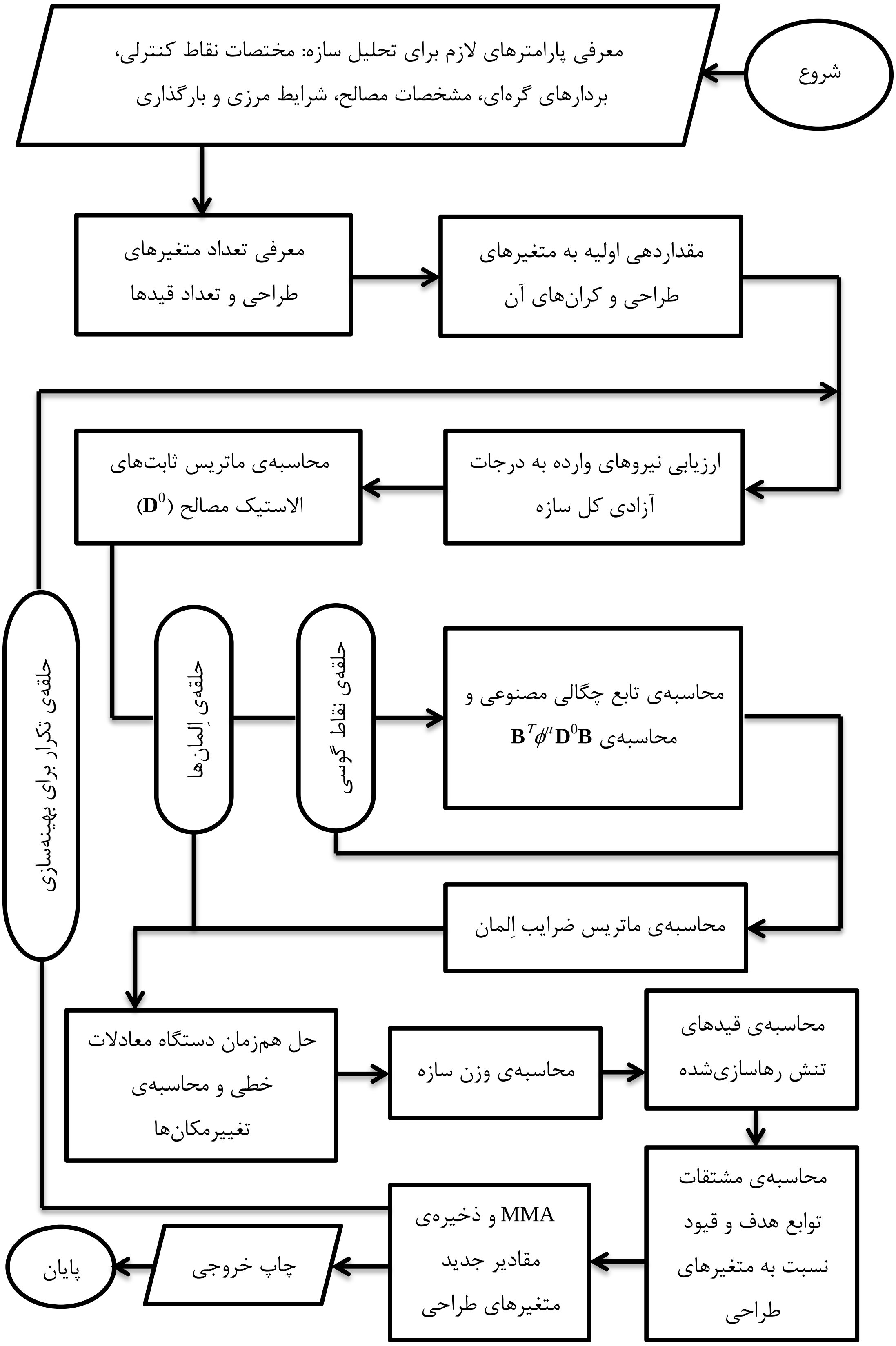
۴-۷- ساختار برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده:

هدف از این بخش معرفی ساختاری منسجم از روابط گفته‌شده در بخش‌های قبلی به‌منظور توسعه‌ی دو برنامه‌ی کامپیوتری برای بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک و الگوریتم MMA، با توجه به نوع رفتار مصالح به زبان فرترن است. برای این منظور، ابتدا روند کلی برنامه با توجه به نوع رفتار در نظر گرفته‌شده برای مصالح، توضیح داده می‌شود و سپس فلوچارت مربوط به هر برنامه ارائه خواهد شد.

۴-۷-۱- برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده با توجه به رفتار الاستیک مصالح:

در بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رفتار الاستیک مصالح، وزن سازه تحت قیدهای تنش مینیمم می‌گردد. به‌همین منظور برنامه‌ای با عنوان IGMWSCTO تهیه شده است. گام‌های کلی پیشنهادی برای برنامه‌ی مورد نظر به‌صورت زیر می‌باشند:

- معرفی پارامترهای ورودی لازم برای بیان هندسه‌ی سازه، شرایط مرزی و خصوصیات مصالح.
- معرفی تعداد متغیرهای طراحی و قیدها.
- مقداردهی اولیه به متغیرهای طراحی و کران‌های پایین و بالای آن‌ها.
- ایجاد حلقه‌ای برای شروع فرآیند بهینه‌سازی.
- ارزیابی بارهای وارده به سازه.
- محاسبه‌ی تابع چگالی مصنوعی و ماتریس ضرایب سازه با توجه به رفتار الاستیک مصالح.
- حل معادله‌ی تعادل به‌صورت خطی.
- محاسبه‌ی تابع هدف (وزن سازه).
- محاسبه‌ی مقادیر قیدهای تنش رهاسازی‌شده و معرفی حد مجاز تنش به برنامه.
- محاسبه‌ی مشتق تابع هدف و قیدهای تنش نسبت به متغیرهای طراحی.
- ورود به الگوریتم MMA و به‌دست آوردن مقادیر جدید برای متغیرهای طراحی و ذخیره‌ی آن‌ها برای تکرار بعدی.
- پایان حلقه‌ی تکرار برای بهینه‌سازی.



شکل ۴-۸ ساختار برنامه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رفتار الاستیک مصالح و با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش

شکل ۴-۸ الگوریتم کلی برنامه‌ی نوشته‌شده را نشان می‌دهد. نکته‌ی مهمی که در این‌جا بایستی به آن اشاره شود این است که به‌منظور رسیدن به کم‌ترین وزن ممکن برای سازه مقدار اولیه‌ی متغیرهای طراحی، چگالی نقاط کنترلی، در تکرار اول بهینه‌سازی یک فرض می‌شود.

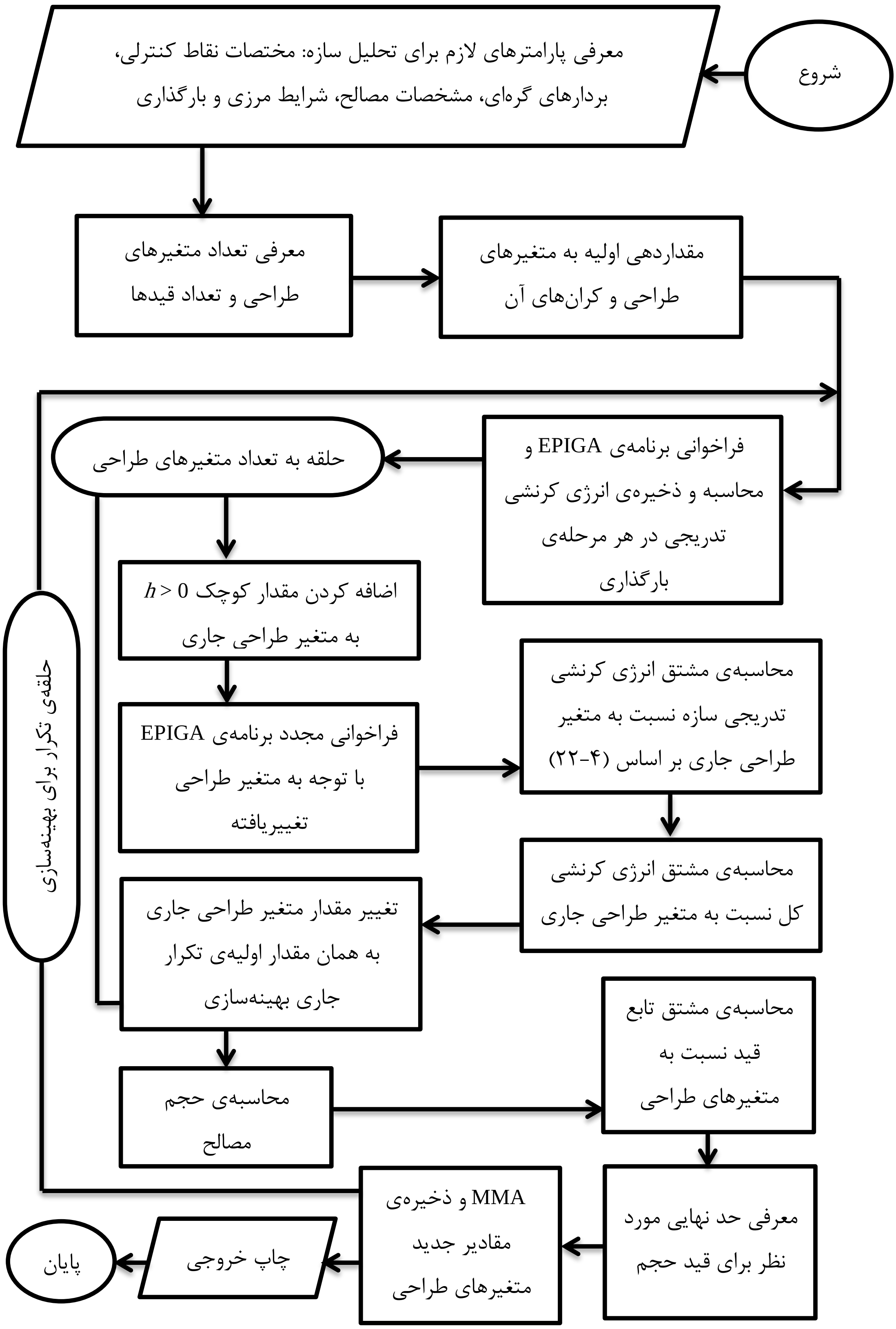
۴-۷-۲- برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده با توجه به رفتار غیرخطی مصالح:

در بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، انرژی کرنشی سازه تحت قید حجمی مینیمم می‌گردد. به‌همین منظور برنامه‌ای با عنوان IGMCTO تهیه شده است. گام‌های کلی پیشنهادی برای برنامه‌ی مورد نظر به‌صورت زیر می‌باشند:

- معرفی پارامترهای ورودی لازم برای بیان هندسه‌ی سازه، شرایط مرزی و خصوصیات مصالح.
- معرفی تعداد متغیرهای طراحی و قیدها.
- مقداردهی اولیه به متغیرهای طراحی و کران‌های پایین و بالای آن‌ها.
- ایجاد حلقه‌ای برای شروع فرآیند بهینه‌سازی.
- فراخوانی برنامه‌ی EPIGA برای محاسبه و ذخیره‌ی مقادیر تدریجی انرژی کرنشی در انتهای هر مرحله‌ی بارگذاری بر اساس مقادیر اولیه‌ی متغیرهای طراحی: محاسبه‌ی تابع چگالی مصنوعی، جریمه‌ی ماتریس ثابت‌های الاستیک هنگام محاسبه‌ی ماتریس ضرایب، جریمه‌ی بردار تنش‌های تدریجی، سطح تنش فون می‌سز و پارامتر سخت‌شدگی نیز بایستی به برنامه‌ی تحلیل افزوده شود.
- ایجاد حلقه‌ای به تعداد متغیرهای طراحی.
- اضافه کردن مقدار مثبت و کوچک h به متغیر طراحی جاری.
- فراخوانی مجدد برنامه‌ی EPIGA به‌منظور محاسبه و ذخیره‌ی مقادیر انرژی کرنشی تدریجی در انتهای هر مرحله‌ی بارگذاری بر اساس مقدار تغییریافته‌ی متغیر طراحی جاری.

- محاسبه‌ی مشتق انرژی کرنشی تدریجی نسبت به متغیر طراحی جاری از رابطه‌ی (۴-۲۶).
- محاسبه‌ی مشتق انرژی کرنشی کل نسبت به متغیر طراحی جاری.
- تغییر مقدار متغیر طراحی جاری به همان مقدار اولیه در تکرار جاری فرآیند بهینه‌سازی.
- پایان حلقه‌ی متغیرهای طراحی.
- محاسبه‌ی حجم مصالح به‌کار رفته در سازه.
- محاسبه‌ی مشتق قید حجم نسبت به متغیرهای طراحی با استفاده از روش تحلیلی.
- معرفی حد نهایی مورد نظر برای قید حجم.
- ورود به الگوریتم MMA و به‌دست آوردن مقادیر جدید برای متغیرهای طراحی و ذخیره‌ی آن‌ها برای تکرار بعدی.
- پایان حلقه‌ی تکرار برای بهینه‌سازی.

در ضمن به هنگام فراخوانی برنامه‌ی تحلیل ایزوژئومتریک با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح بایستی به این نکته نیز توجه نمود که قسمت مربوط به معرفی پارامترهای ورودی از آن حذف گردد زیرا این بخش یک بار در ابتدای برنامه‌ی بهینه‌سازی فراخوانی می‌شود. شکل ۴-۹ الگوریتم کلی برنامه‌ی نوشته‌شده را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۹ ساختار برنامه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح و با رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم

فصل پنجم:

مثال‌های عددی

۵-۱- مقدمه:

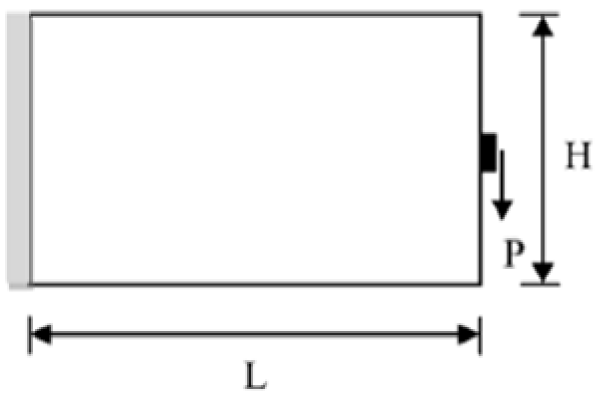
در این بخش به‌منظور اطمینان از صحت برنامه‌های کامپیوتری نوشته‌شده برای مسائل بهینه‌سازی توپولوژی در مسائل تنش مسطح، مثال‌های عددی متفاوتی مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

۵-۲- مثال‌های برنامه‌ی IGMWSCTO:

در این قسمت چهار مثال برای نشان دادن عملکرد روش تحلیل ایزوژئومتریک و آنالیز حساسیت به‌کار گرفته‌شده در مسائل بهینه‌سازی توپولوژی با هدف مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش و با در نظر گرفتن رفتار الاستیک مصالح ارائه شده‌اند.

۵-۲-۱- مثال یک:

در این مثال یک تیر طره‌ی کوتاه با ابعاد L=8 *cm* و H=5 *cm* تحت بار نقطه‌ای P=100 *kgf*، با یک وصله و 1066 نقطه‌ی کنترلی مدل شده است (شکل ۵-۱). مقدار مدول الاستیسیته، ضریب پوآسون، توان جریمه، پارامتر ε و تنش مجاز نیز به‌ترتیب 1500 kgf/cm^2، 0.3، 3، 0.1 و 570 kgf/cm^2 در نظر گرفته شده است. در جدول ۵-۱ بردارهای گره‌ای باز به‌ازای یک وصله قابل مشاهده است. در ضمن مقدار قیدهای تنش در یک شبکه‌ی 25×25 که شامل 625 نقطه می‌شود محاسبه شده‌اند.

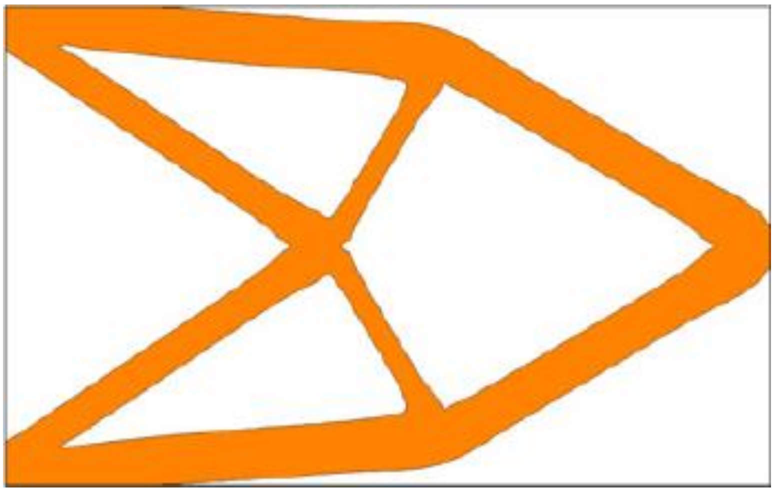


شکل ۵-۱ تیر طره‌ی کوتاه

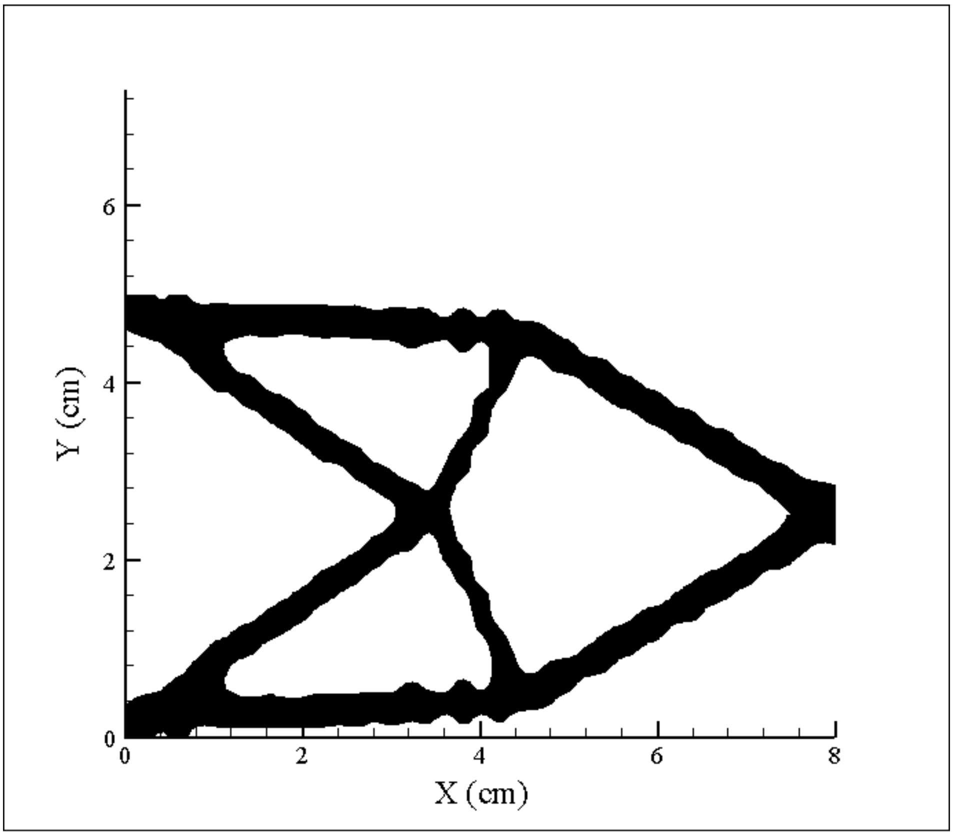
جدول ۵-۱ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال‌های ۵-۲-۱- و ۵-۲-۲-)

تعداد نقاط کنترلی در یک وصله	بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده
1066	Ξ={0,0,0,0.025641,…,0.974358,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.041666,…,0.958318,1,1,1} for q=2
187	Ξ={0,0,0,0.066,…,0.933,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.111,…,0.899,1,1,1} for q=2

شکل‌های ۵-۲-(الف) و (ب) به‌ترتیب توپولوژی‌های بهینه‌ی به‌دست آمده از مرجع [۵۴] و پژوهش حاضر را نشان می‌دهند. با توجه به یکسان بودن توپولوژی بهینه‌ی حاصل از هر دو پژوهش، می‌توان از صحت و کارایی الگوریتم و آنالیز حساسیت به‌کار گرفته‌شده در تحلیل ایزوژئومتریک اطمینان حاصل کرد. شکل ۵-۲-(ج) کانتور تنش به‌دست آمده را نشان می‌دهد. در واقع بررسی نتایج نشان داده است که انتخاب تعداد کافی از قیدها در نقاط دلخواه از دامنه‌ی مسئله و همین‌طور تکنیک مناسب برای رهاسازی آن‌ها، علاوه بر تولید توپولوژی درست و جلوگیری از شکل‌گیری نواحی خاکستری در محل حفره‌ها، منجر به صفر شدن مقدار تنش در نواحی بدون مصالح (جلوگیری از مشکل تمرکز تنش) و اقناع تمام قیدهای تنش نیز شده است. در ضمن، روند همگرایی نشان داده‌شده در شکل ۵-۲-(د) نیز بیان‌گر عملکرد مناسب روش مجانب‌های پویا در کنترل مسائل بهینه‌سازی با تعداد قیود بالا می‌باشد. شکل ۵-۳ نیز تابع چگالی بهینه‌شده برای مسئله‌ی مورد نظر را در فضای سه بُعدی نمایش می‌دهد.

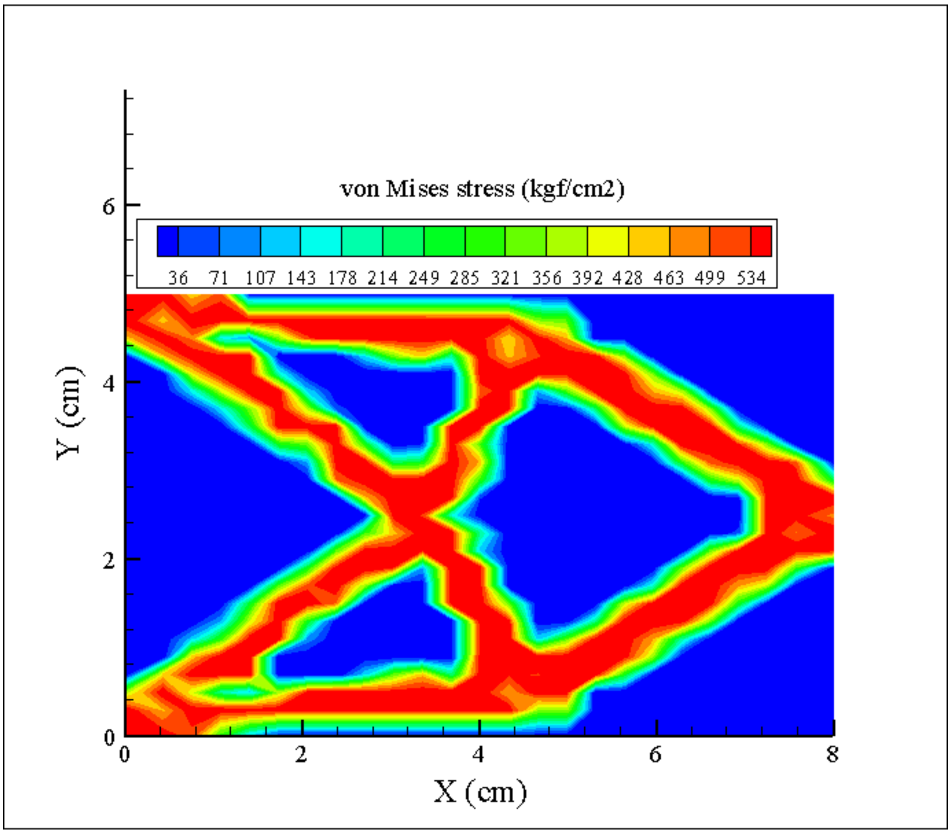


۵-۲-(الف)



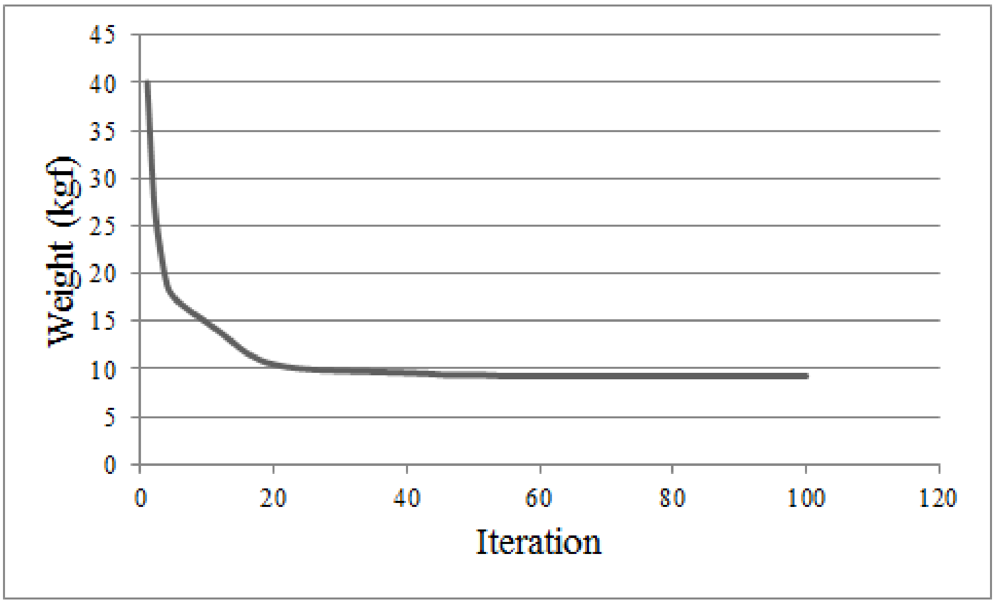
Y (cm)
X (cm)
0
2
4
6
8

۵-۲-(ب)



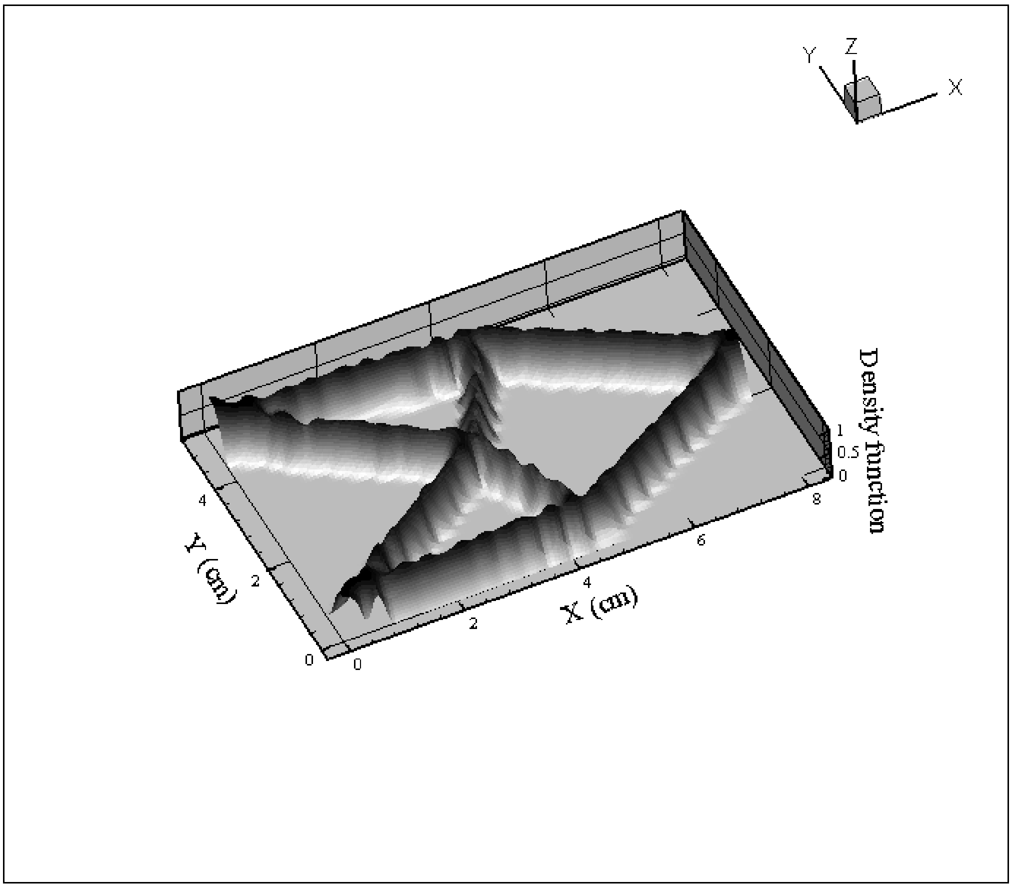
von Mises stress (kgf/cm2)
36 71 107 143 178 214 249 285 321 356 392 428 463 499 534
Y (cm)
X (cm)
0
2
4
6
8

۵-۲-(ج)



۵-۲-(د)

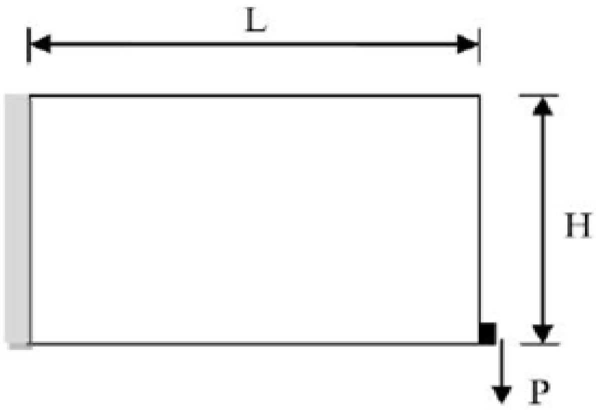
شکل ۵-۲ تیر طره‌ی کوتاه: (الف) توپولوژی بهینه در مرجع [۵۴] با استفاده از روش حفره‌های محدود و توابع سطوح تراز؛ (ب) توپولوژی بهینه در پژوهش حاضر؛ (ج) کانتور تنش؛ (د) نمودار روند همگرایی تابع هدف



شکل ۵-۳ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی برای تیر طره‌ی کوتاه

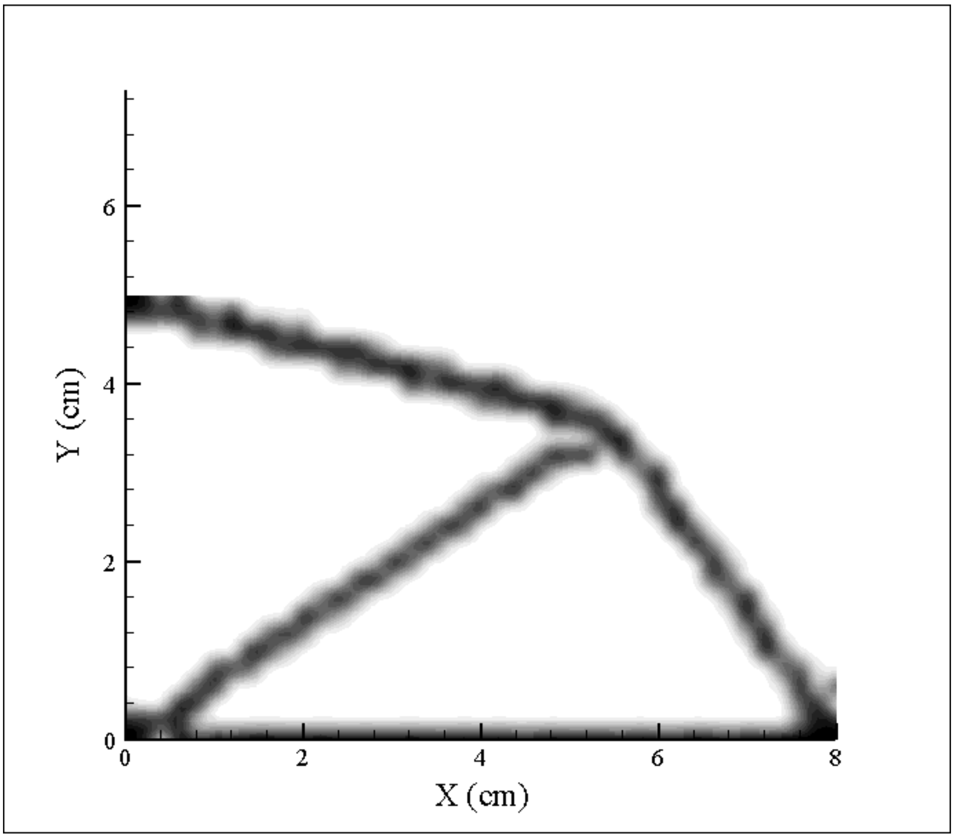
۵-۲-۲- مثال دو:

در این مثال مجدداً یک تیر طره‌ی کوتاه با شرایط بارگذاری متفاوت نسبت به مسئله‌ی قبل و به‌منظور بررسی اثر تعداد نقاط کنترلی و قیدهای تنش مورد مطالعه قرار گرفته است (شکل ۵-۴). تمامی پارامترهای لازم برای تحلیل و بهینه‌سازی این مسئله همانند مثال قبل در نظر گرفته شده‌اند. برای مقایسه‌ی نتایج در دو وضعیت، مسئله یک بار هم با 187 نقطه‌ی کنترلی و 121 نقطه‌ی تنش (جدول ۵-۱) مدل و مقدار تنش مجاز نیز $1620\ kgf/cm^2$ انتخاب شده است.

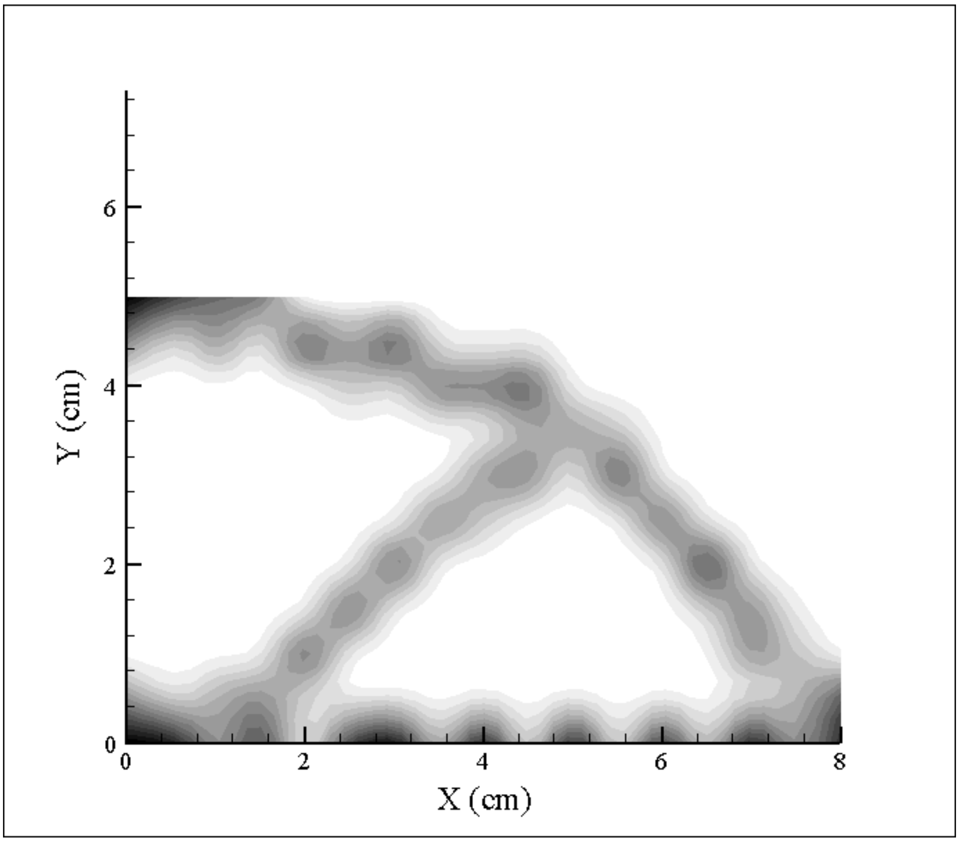


شکل ۵-۴ تیر طره‌ی کوتاه

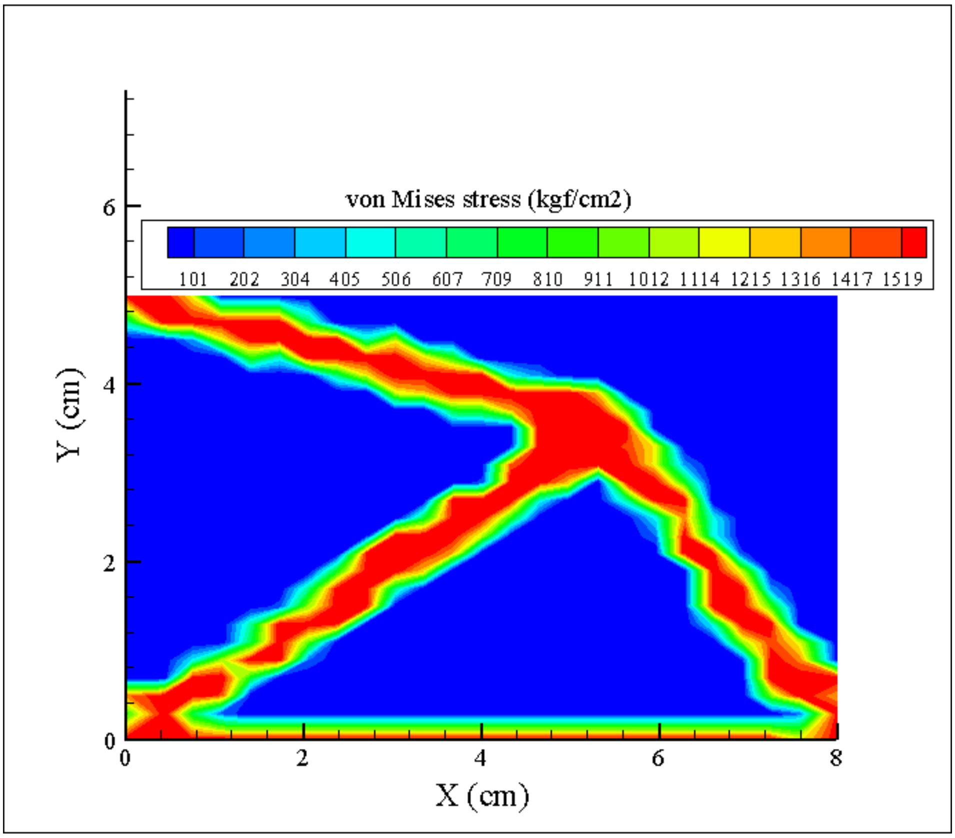
شکل‌های ۵-۵-(الف) و (ب)، توپولوژی‌های به‌دست آمده و شکل‌های ۵-۵-(ج) و (د) کانتور تنش‌های متناظر آن‌ها را با در نظر گرفتن تعداد نقاط کنترلی و قیدهای تنش متفاوت نشان می‌دهند. همان‌طور که مشخص است با افزایش تعداد نقاط کنترلی و قیدهای تنش و با ثابت در نظر گرفتن سایر پارامترهای مسئله، علاوه بر این‌که اِلمان‌هایی با نواحی خاکستریِ کم‌تر به‌دست آمده است، کانتور تنش بهتری نیز شکل گرفته است. با توجه به نمودارهای روند همگرایی (شکل‌های ۵-۵-(ه) و (و))، وزن نهایی سازه در وضعیت 187 نقطه‌ی کنترلی، 5.63 کیلوگرم و در وضعیت 1066 نقطه‌ی کنترلی، 4.80 کیلوگرم به‌دست آمده که علت این مسئله نیز حذف مصالح با چگالی متوسط از توپولوژی بهینه در وضعیت دوم (تعداد نقاط کنترلی بیش‌تر) است. شکل ۵-۶ نیز تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی را برای 1066 نقطه‌ی کنترلی نشان می‌دهد.



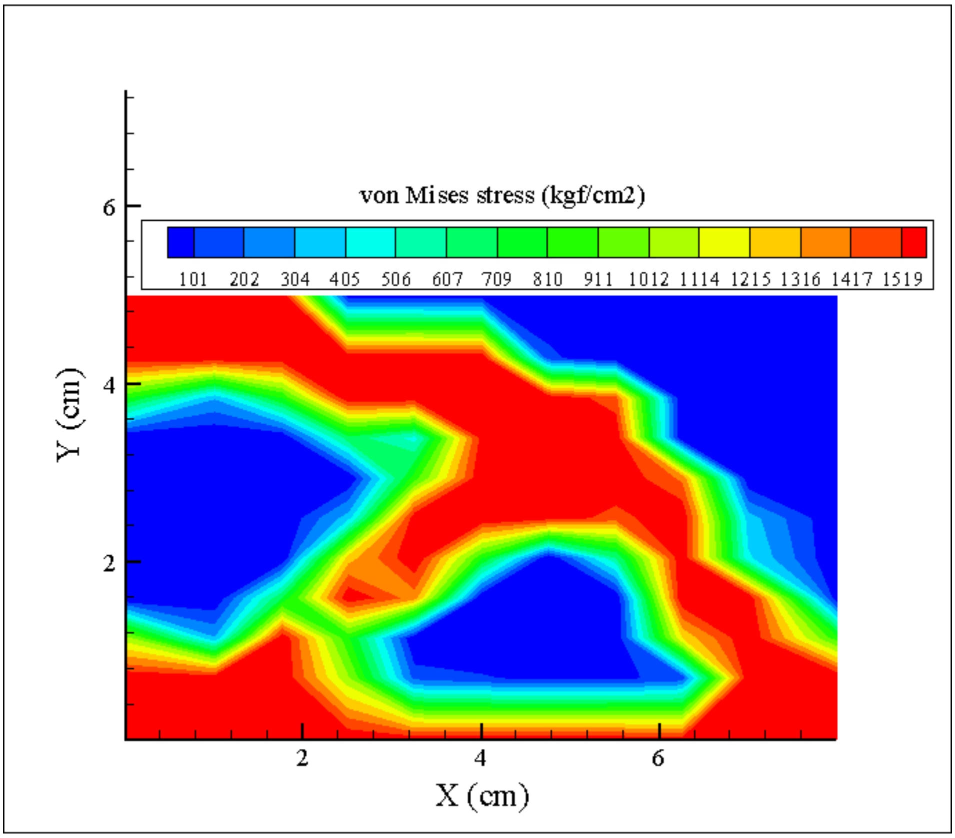
۵-۵-(الف)



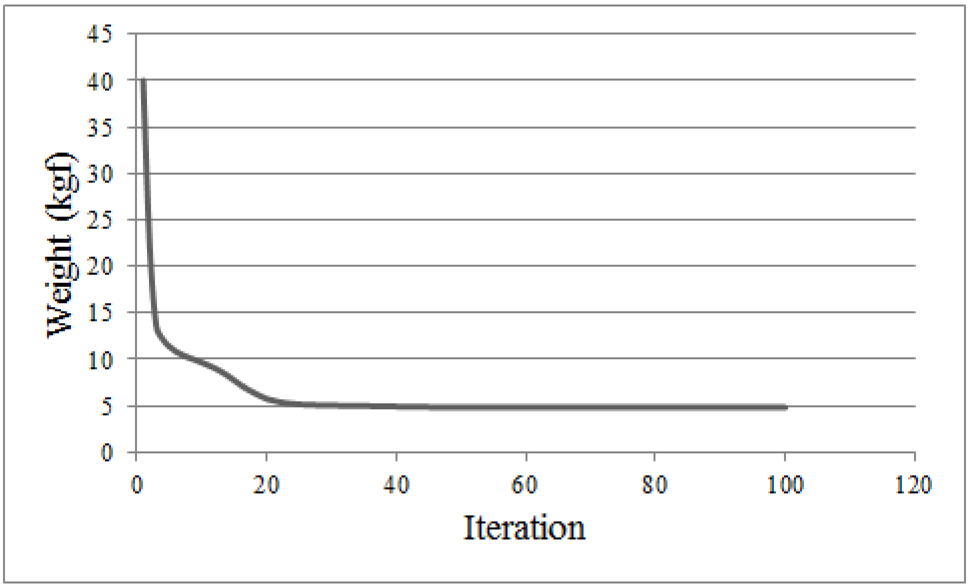
۵-۵-(ب)


von Mises stress (kgf/cm2)
101 202 304 405 506 607 709 810 911 1012 1114 1215 1316 1417 1519
Y (cm)
X (cm)
0
2
4
6
8

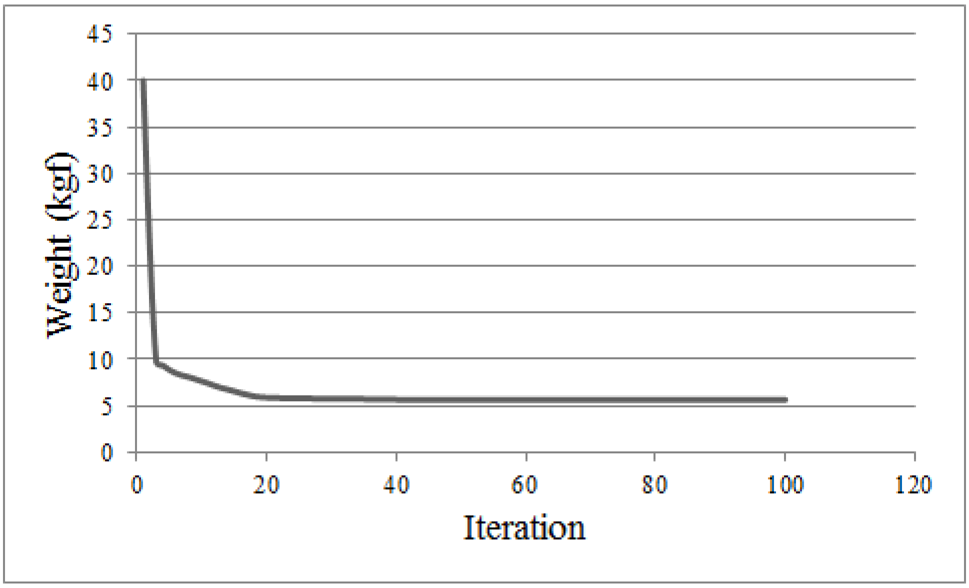
۵-۵-(ج)


von Mises stress (kgf/cm2)
101 202 304 405 506 607 709 810 911 1012 1114 1215 1316 1417 1519
Y (cm)
X (cm)
2
4
6

۵-۵-(د)



۵-۵-(ه)

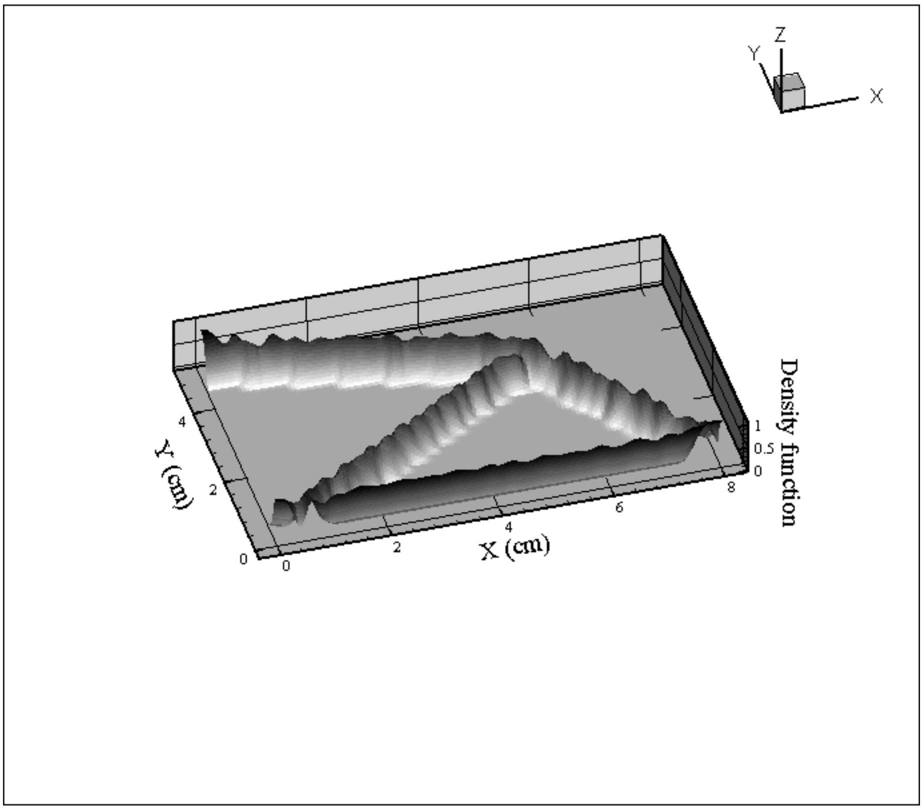


۵-۵-(و)

شکل ۵-۵ تیر طره‌ی کوتاه: (الف) و (ب) توپولوژی بهینه؛ (ج) و (د) کانتور تنش؛ (ه) و (و) نمودار روند همگرایی تابع هدف برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی، ۶۲۵ قید تنش و ۱۸۷ نقطه‌ی کنترلی، ۱۲۱ قید تنش (به‌ترتیب)

۵-۲-۳- مثال سه:

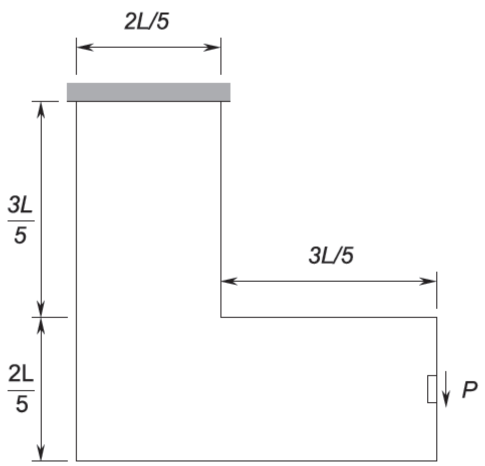
به‌منظور مقایسه‌ی توپولوژی‌های بهینه‌ی حاصل از دو رویکرد متفاوت در مسائل بهینه‌سازی، یک سازه‌ی اِل شکل مورد مطالعه قرار گرفته است. شکل ۵-۷ ابعاد سازه، شرایط بارگذاری و تکیه‌گاهی را نشان می‌دهد. سایر پارامترهای مورد نیاز در این مثال به شرح زیر هستند:



شکل ۵-۶ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۱۰۶۶ نقطه‌ی کنترلی برای تیر طره‌ی کوتاه

E=100 Pa; ν=0.3; L=1.0 m; P=1.0 N; μ=3; ε=0.1

به‌منظور تحلیل ایزوئومتریک، دامنه‌ی مسئله با سه وصله و 1701 نقطه‌ی کنترلی مدل شده است و بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده در هر وصله در جدول ۵-۲ تعریف شده‌اند. قیدهای تنش در هر وصله در 324 نقطه (در مجموع در 972 نقطه) محاسبه و مقدار تنش مجاز نیز 100 Pa در نظر گرفته شده است.

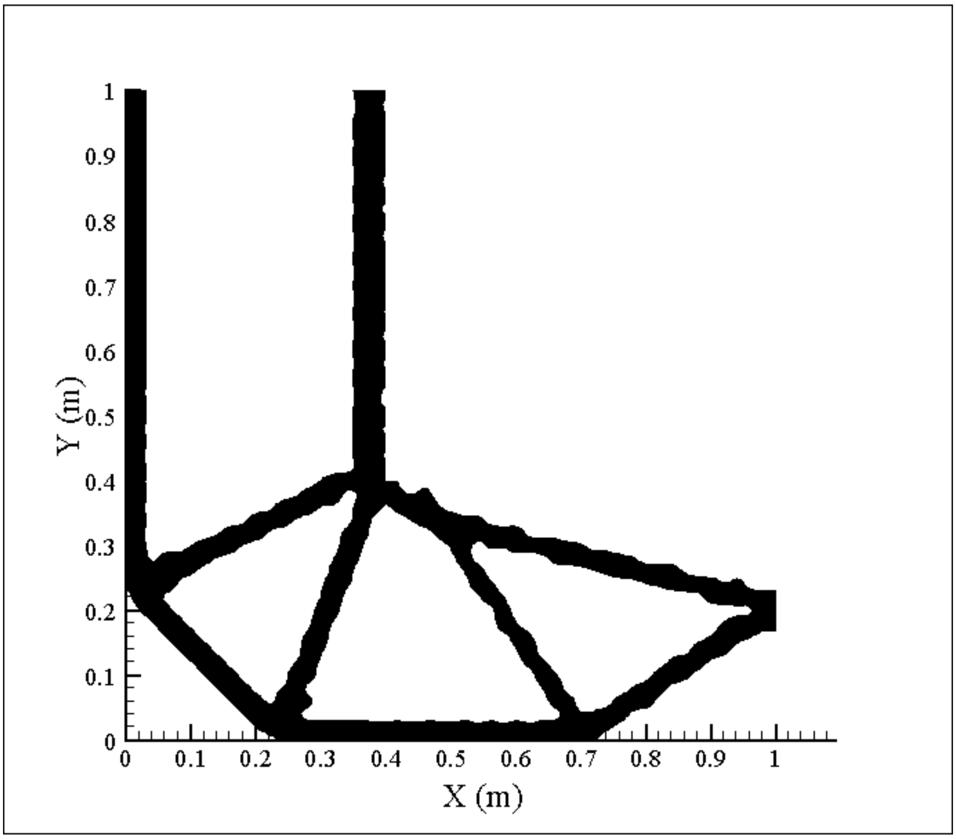


شکل ۵-۷ سازه‌ی اِل شکل

جدول ۵-۲ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای هر وصله (مثال ۵-۲-۳-)

بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده	شماره‌ی وصله
Ξ=H={0,0,0,0.052631,…,0.947358,1,1,1} for p=q=2	1
Ξ={0,0,0,0.052631,…,0.947358,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.034482,…,0.965496,1,1,1} for q=2	2
Ξ={0,0,0,0.034482,…,0.965496,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.052631,…,0.947358,1,1,1} for q=2	3

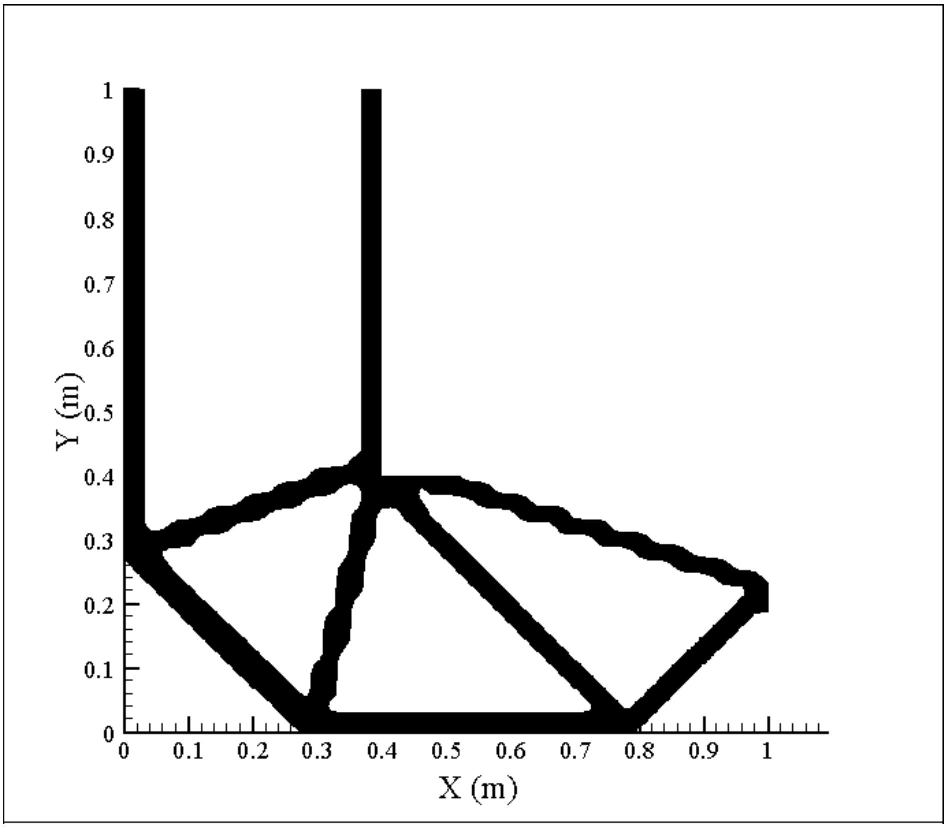
شکل‌های ۵-۸-(الف) و (ج) به‌ترتیب توپولوژی و کانتور تنش حاصل از مسئله‌ی بهینه‌سازی با هدف مینیمم کردن وزن را نشان می‌دهند. بر اساس نمودار روند همگرایی (شکل ۵-۸-(د)) مقدار وزن بهینه 0.128 نیوتن به‌دست آمده که 0.2 وزن اولیه‌ی سازه (0.64 نیوتن) است.



۵-۸-(الف)

بدین ترتیب به‌منظور مقایسه‌ی توپولوژی حاصل از دو رویکرد، از وزن بهینه‌ی به‌دست آمده به‌عنوان قید حجم در رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی استفاده شده که نتیجه‌ی آن در شکل ۵-۸-(ب)

قابل مشاهده است. با توجه به توپولوژی‌های حاصل می‌توان به این نتیجه دست یافت که رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش موضعی منجر به گردشدگی توپولوژی در محل اتصال سه وصله (گوشه‌ی داخلی) شده و این امر در کنار استفاده از تکنیک رهاسازی از تمرکز تنش در این ناحیه جلوگیری کرده و موجب دست‌یابی به توپولوژی منطقی‌تری گشته است. تابع چگالی بهینه‌شده نیز در شکل ۵-۹ قابل مشاهده است. در ضمن نمونه‌هایی از نتایج سایر پژوهش‌های انجام‌شده در این زمینه، در شکل‌های ۵-۱۰-(الف) تا (ج) نشان داده شده است.



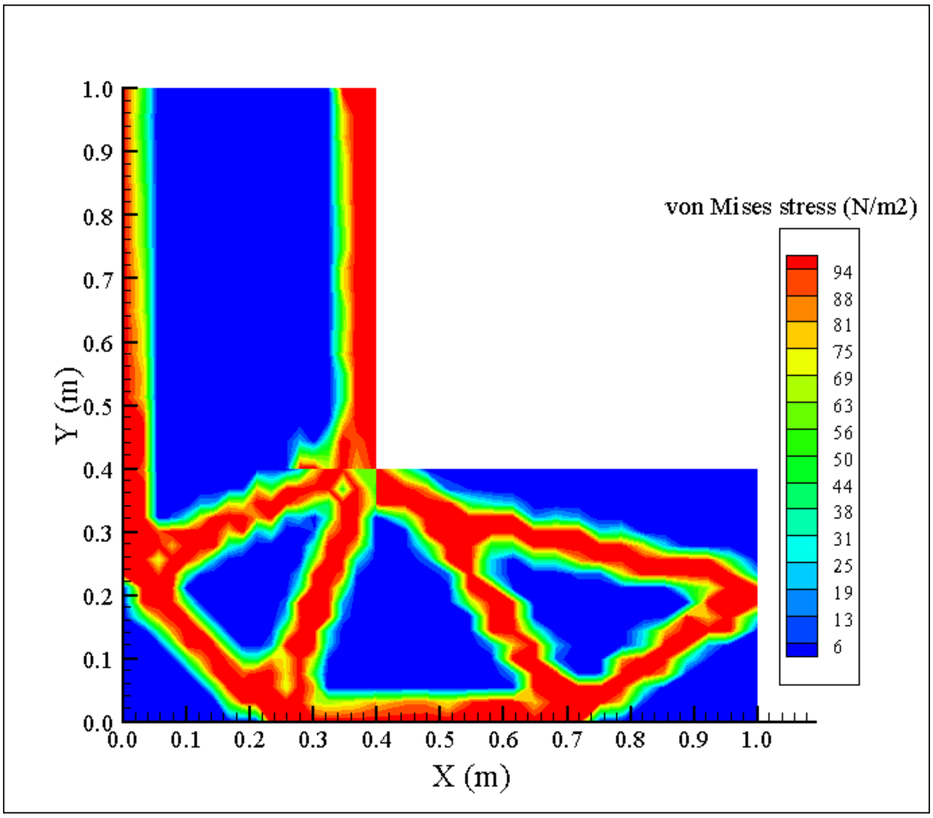
۵-۸-(ب)

۵-۲-۴- مثال چهار:

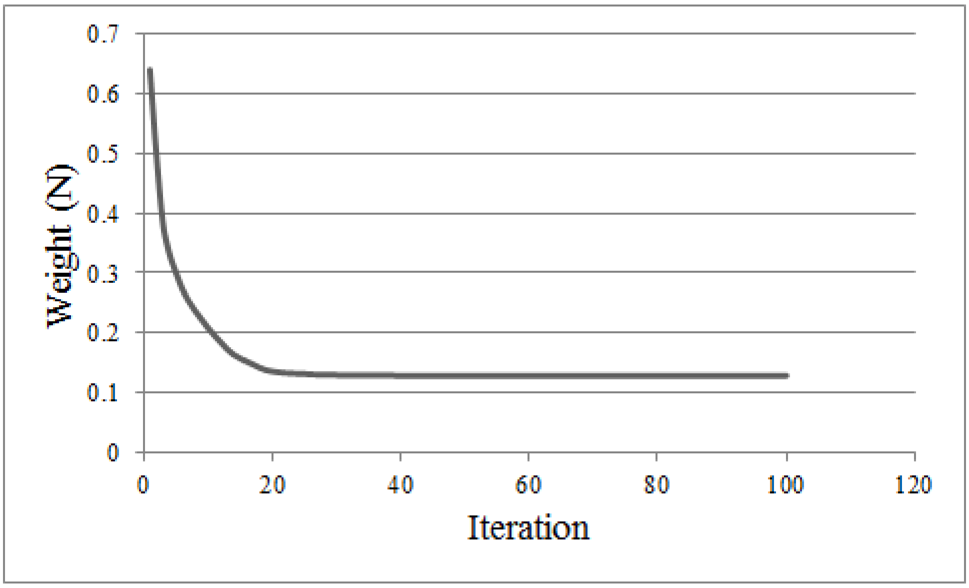
یک تیر دو سر گیردار به‌منظور مقایسه‌ی نتایج حاصل از دو رویکرد ارائه شده است (شکل ۵-۱۱). این تیر با 693 نقطه‌ی کنترلی و یک وصله مدل شده و مقدار تنش مجاز برای این مسئله $130\ kgf/cm^2$ در نظر گرفته شده است. قیدهای تنش در یک شبکه‌ی 20×20 معادل با 400 نقطه محاسبه شده‌اند. در جدول ۵-۳ نیز بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده برای یک وصله تعریف شده‌اند.

پارامترهای لازم برای تحلیل و بهینه‌سازی در این مسئله به شرح زیر هستند:

E=1500 kgf/cm^2; v=0.3; L=20 cm; H=5 cm; P=100 kgf; μ=3; ε=0.1

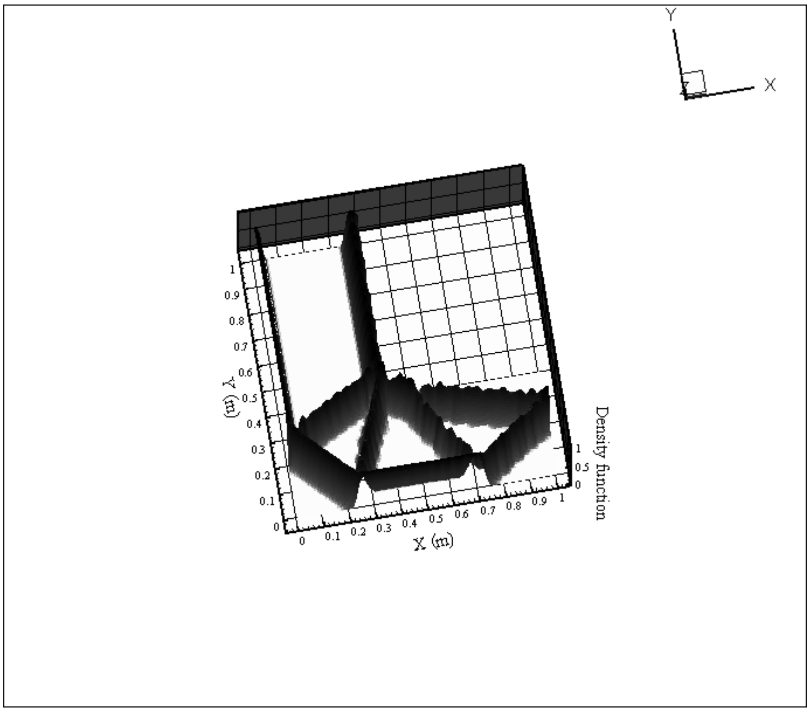


۵-۸-(ج)



۵-۸-(د)

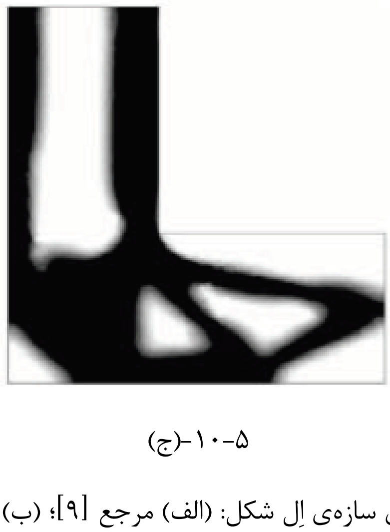
شکل ۵-۸ سازه‌ی اِل شکل: (الف) توپولوژی بهینه مربوط به رویکرد مینیمم کردن وزن؛ (ب) توپولوژی بهینه مربوط به رویکرد متداول؛ (ج) کانتور تنش؛ (د) نمودار روند همگرایی تابع هدف



شکل ۵-۹ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۱۷۰۱ نقطه‌ی کنترلی برای سازه‌ی اِل شکل

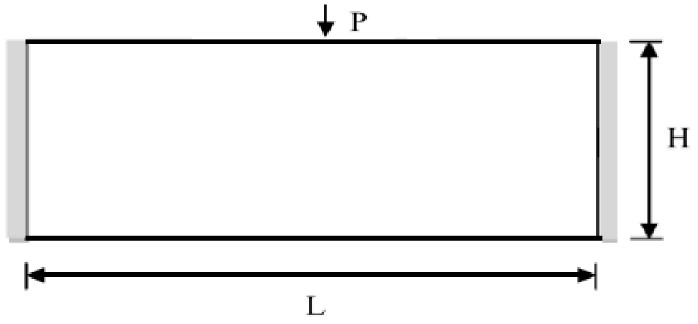
۵-۱۰-(الف)

۵-۱۰-(ب)



۵-۱۰-(ج)

شکل ۵-۱۰ توپولوژی بهینه‌ی سازه‌ی اِل شکل: (الف) مرجع [۹]؛ (ب) مرجع [۸]؛ (ج) مرجع [۵۰]

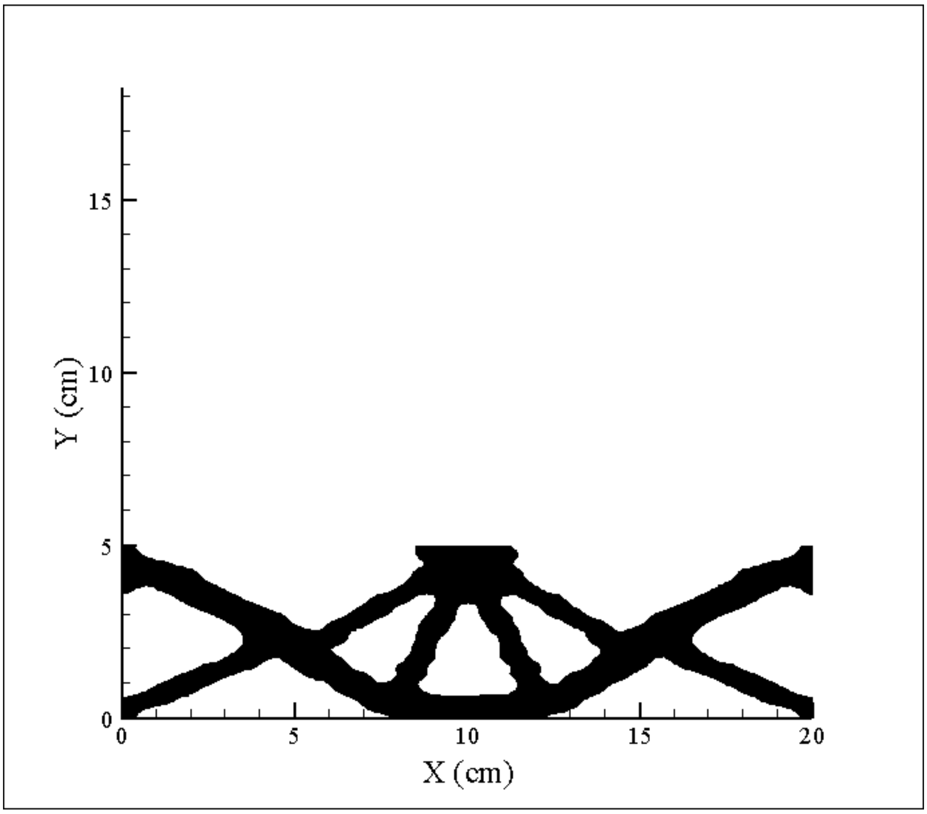


شکل ۵-۱۱ تیر دو سر گیردار

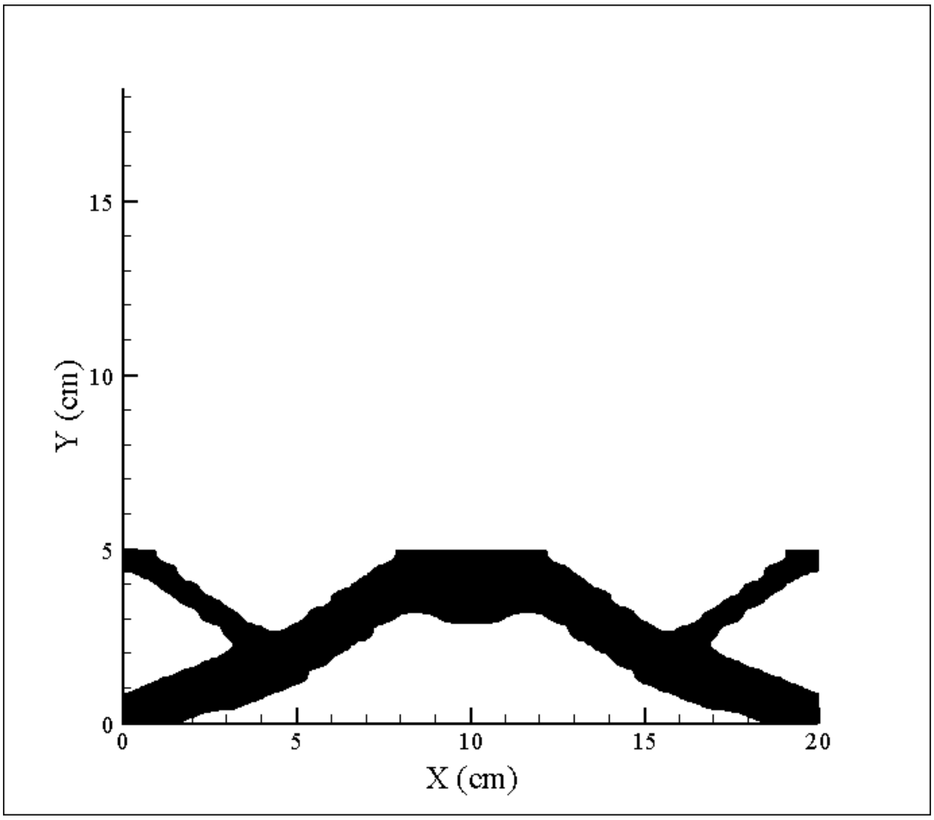
جدول ۵-۳ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال ۵-۲-۴-)

تعداد نقاط کنترلی در یک وصله	بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده
693	Ξ={0,0,0,0.032258,…,0.96774,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.052631,…,0.947358,1,1,1} for q=2

توپولوژی بهینه‌ی حاصل از دو رویکرد بهینه‌سازی توپولوژی در شکل‌های ۵-۱۲-(الف) و (ب) و کانتور تنش و نمودار روند همگرایی تابع هدف نیز در شکل‌های ۵-۱۲-(ج) و (د) نشان داده شده‌اند.

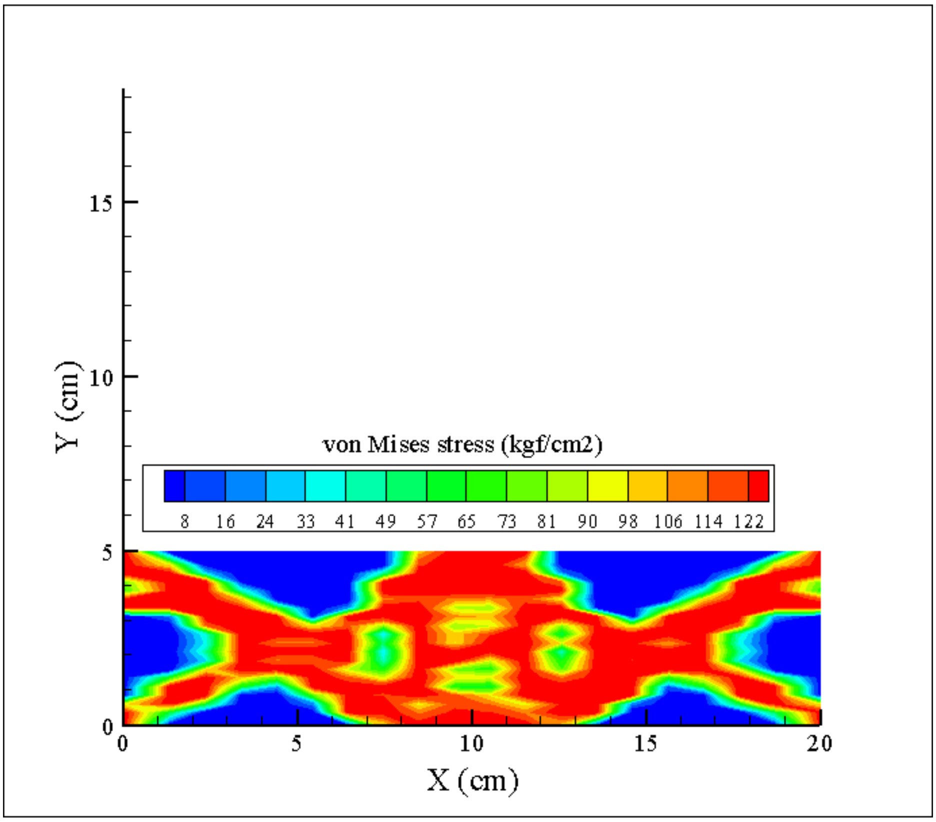


۵-۱۲-(الف)



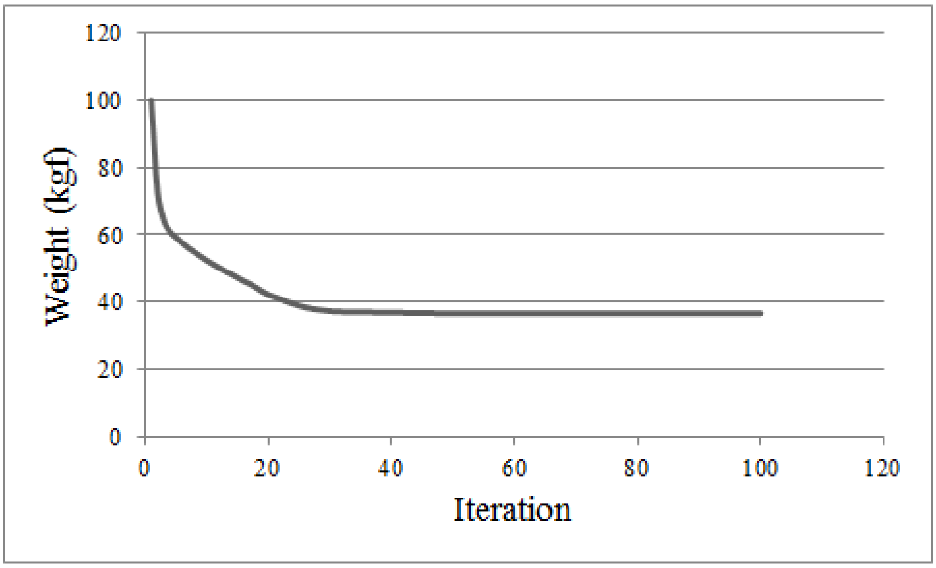
Y (cm)
X (cm)
0
5
10
15
20

۵-۱۲-(ب)



von Mises stress (kgf/cm2)
8 16 24 33 41 49 57 65 73 81 90 98 106 114 122
Y (cm)
X (cm)
0
5
10
15
20

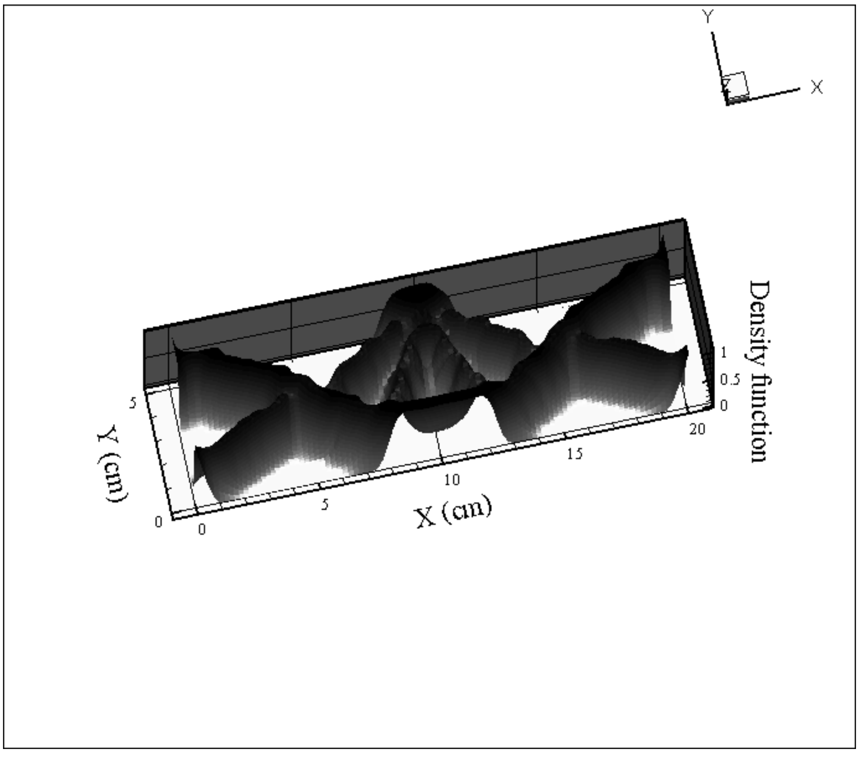
۵-۱۲-(ج)



۵-۱۲-(د)

شکل ۵-۱۲ تیر دو سر گیردار: (الف) توپولوژی بهینه‌ی پژوهش حاضر؛ (ب) توپولوژی بهینه‌ی رویکرد متداول؛ (ج) کانتور تنش؛ (د) نمودار روند همگرایی تابع هدف

از مقایسه‌ی توپولوژی‌های حاصل می‌توان متوجه شد که در رویکرد مینیمم کردن وزن، بار به‌طور مساوی بین قسمت بالاتر و پایین‌تر تکیه‌گاه‌ها توزیع شده که این مسئله منجر به ایجاد یک جانمایی داخلی متفاوت نسبت به رویکرد متداول گشته است.



شکل ۵-۱۳ تابع چگالی بهینه‌شده در فضای سه بُعدی برای ۶۹۳ نقطه‌ی کنترلی برای تیر دو سر گیردار

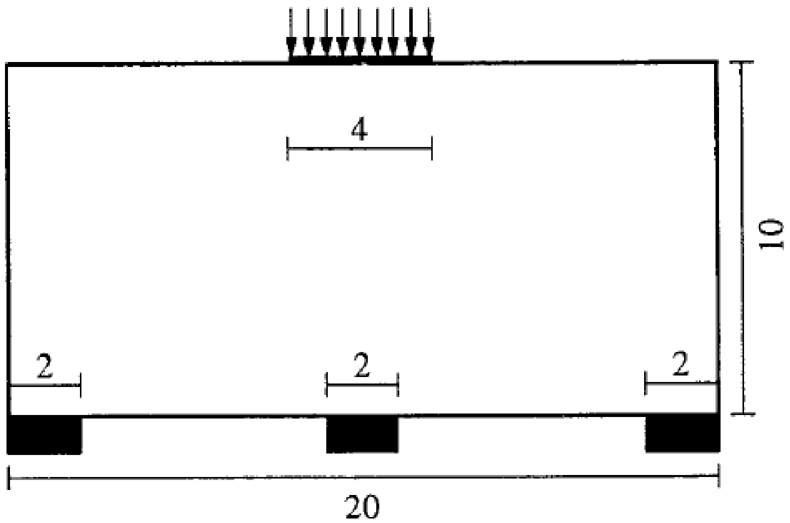
۵-۳- مثال‌های برنامه‌ی IGMCTO:

به‌عنوان بخش پایانی، نتایج حاصل از یک مثال به‌منظور بهینه‌سازی توپولوژی با رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم برای مصالح با رفتار الاستو-پلاستیک به نمایش گذاشته شده است.

۵-۳-۱- مثال یک:

در این قسمت به‌منظور بررسی صحت برنامه‌ی کامپیوتری نوشته‌شده، یک مثال از مرجع [۲۸] انتخاب گردیده و مورد مطالعه قرار گرفته است. مشخصات هندسی، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی این مسئله در شکل ۵-۱۴ نمایش داده شده است. مشخصات مصالح به‌کار گرفته‌شده نیز به شرح زیر هستند:

E=30000 KN/m^2, H'=0.1 KN/m^2, σ_y=240 KN/m^2, ν=0.0, μ=2.5



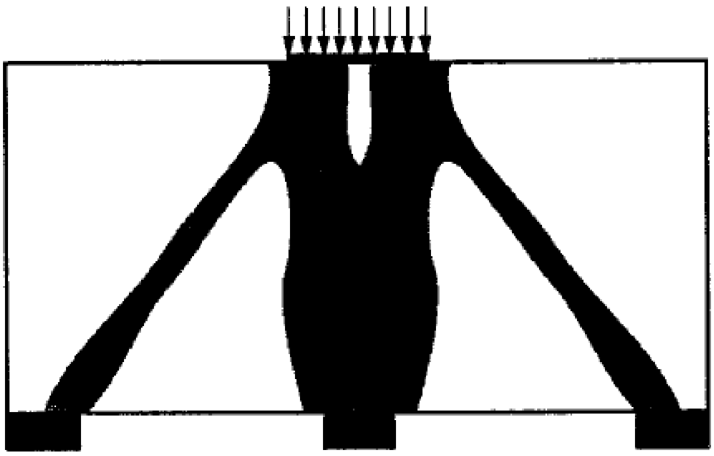
شکل ۵-۱۴ مشخصات هندسی، بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی مثال ۵-۳-۱- [۲۸]

به‌منظور تحلیل ایزوژئومتریک، سازه‌ی مورد نظر با یک وصله و 126 نقطه‌ی کنترلی مدل شده است. بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده در این مثال نیز در جدول ۵-۴ قابل مشاهده هستند.

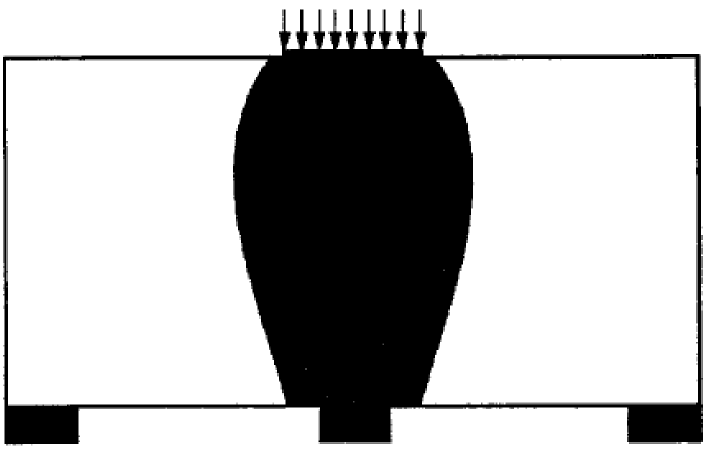
جدول ۵-۴ بردارهای گره‌ای باز در نظر گرفته‌شده برای یک وصله (مثال ۵-۳-۱-)

تعداد نقاط کنترلی در یک وصله	بردارهای گره‌ای باز به‌کار گرفته‌شده
126	Ξ={0,0,0,0.052631,…,0.947358,1,1,1} for p=2 H={0,0,0,0.25,…,0.75,1,1,1} for q=2

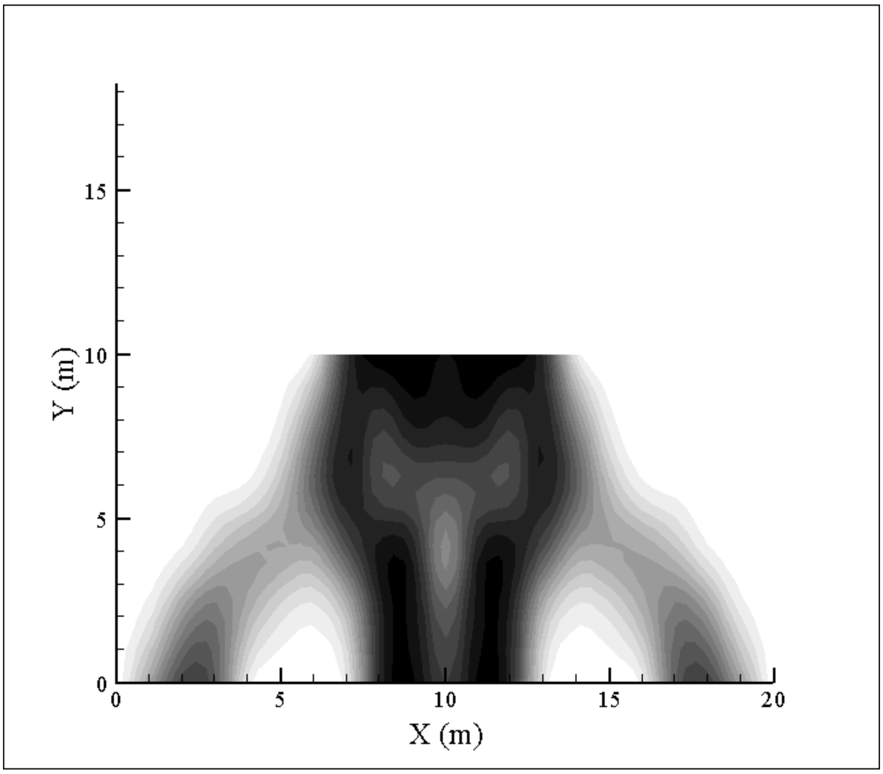
مطابق شکل ۵-۱۴ بارگذاری سازه در یک طول چهار متری توزیع شده است. برای رعایت این مسئله در زمان تحلیل، بار مورد نظر روی پنج نقطه‌ی کنترلی در محل نشان داده‌شده اِعمال شده است. به‌منظور اِعمال تدریجی بار روی سازه از 50 مرحله‌ی بارگذاری و 5 تکرار برای پروسه‌ی حل غیرخطی استفاده شده و مقدار تولرانس معیار همگرایی نیز 0.001% در نظر گرفته شده است. درصد حجمی مصالح در تکرار اول بهینه‌سازی 80% در نظر گرفته شده و در انتهای هر مرحله‌ی بهینه‌سازی تا پایان تکرار پنجم، 10% از درصد حجمی کاسته شده است تا میزان مصالح به‌کار رفته در انتهای پروسه‌ی بهینه‌سازی روی 30% باقی بماند. در ضمن به هر نقطه‌ی کنترلی تحت بار، $140\ KN$ بار وارد شده است. توپولوژی‌های حاصل از مرجع [۲۸] و پژوهش حاضر با در نظر گرفتن دو نوع رفتار متفاوت برای مصالح به‌ترتیب در شکل‌های ۵-۱۵-(الف) تا (د) قابل مشاهده هستند.



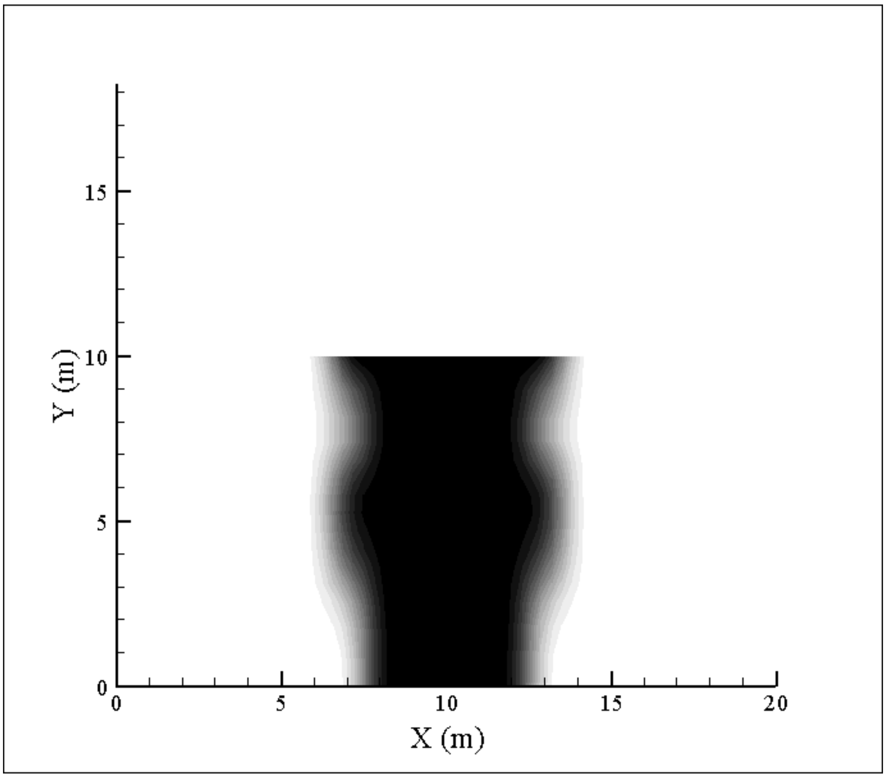
۵-۱۵-(الف)



۵-۱۵-(ب)



۵-۱۵-(ج)



۵-۱۵-(د)

شکل ۵-۱۵ توپولوژی‌های حاصل از مرجع [۲۸] و پژوهش حاضر به‌ترتیب: (الف) و (ج) با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح؛ (ب) و (د) با رفتار الاستیک مصالح

مقایسه‌ی شکل‌های ۵-۱۵-(الف) و (ج) نشان می‌دهد برنامه‌ی کامپیوتری تهیه‌شده تا حدودی درست عمل می‌کند. با توجه به هزینه‌ی محاسباتی بسیار بالای آنالیز حساسیت به روش تفاضل محدود، دامنه‌ی مسئله با نقاط کنترلی بسیار کمی مدل شده است و همین امر می‌تواند در شکل‌گیری توپولوژی تأثیرگذار باشد. در ضمن به‌منظور تضمین همگرایی پروسه‌ی حل غیرخطی و برقراری تعادل در سازه با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، تغییرمکان زیر محل بار به عدد $0.06\ m$ محدود شده است. مقایسه‌ی شکل‌های ۵-۱۵-(ج) و (د) نیز نشان می‌دهد که توپولوژی حاصل از رفتار الاستو-پلاستیک مصالح، به‌طور مساوی از تکیه‌گاه‌های موجود استفاده می‌کند و این در حالی است که توپولوژی سازه با رفتار الاستیک مصالح به‌صورت یک ستون مستقیم حاصل شده است. در وضعیت الاستو-پلاستیک، بارها توسط هر سه تکیه‌گاه انتقال داده می‌شوند که این امر منجر به کاهش تمرکز تنش در محل تکیه‌گاه‌ها می‌تواند بشود.

فصل ششم:

نتایج و پیشنهادها

۶-۱- مقدمه:

در فصل‌های قبلی این پایان‌نامه، به بررسی کامل روند تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح پرداختیم. سپس بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن دو نوع رفتار متفاوت برای مصالح را به‌همراه آنالیز حساسیت‌های لازم برای هر مسئله، مورد بررسی قرار دادیم. در نهایت برای بررسی صحت و کارایی الگوریتم‌ها و روش‌های استفاده‌شده و همین‌طور برنامه‌های کامپیوتری تهیه‌شده، مثال‌های متعددی را مورد مطالعه قرار دادیم. در این فصل، نتایج نهایی حاصل از این مطالعات را به‌صورت خلاصه بیان خواهیم کرد. در پایان نیز پیشنهادهایی جهت توسعه‌ی برنامه‌های نوشته‌شده برای دانشجویان علاقه‌مند در این زمینه ارائه خواهد شد.

۶-۲- نتایج:

نتایج نهایی حاصل از مطالعات این پایان‌نامه را می‌توان به‌طور خلاصه به‌صورت زیر بیان نمود:

- عملکرد مناسب برنامه‌ی کامپیوتری EPIGA در تحلیل مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح با استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک.
- اطمینان از صحت و کارایی برنامه‌های کامپیوتری IGMWSCTO و IGMCTO و آنالیز حساسیت‌های به‌کار گرفته‌شده در هر کدام از مسائل بهینه‌سازی توپولوژی مورد نظر.
- حذف نواحی خاکستری (مصالح با چگالی متوسط) از توپولوژی بهینه و شکل‌گیری سازه‌ی سبک‌تر به‌واسطه‌ی افزایش تعداد نقاط کنترلی و هم‌چنین اقناع کامل قیدهای تنش با انتخاب تکنیک رهاسازی مناسب در مسئله‌ی بهینه‌سازی توپولوژی با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش با رفتار الاستیک مصالح.

- شکل‌گیری توپولوژی منطقی‌تر و دوری کردن از مشکلاتی هم‌چون تمرکز تنش در طراحی سازه‌هایی مانند سازه‌ی اِل شکل و تیر دو سر گیردار در رویکرد مینیمم کردن وزن با رفتار الاستیک مصالح نسبت به رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی.
- شکل‌گیری توپولوژی‌های متفاوت در رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم با در نظر گرفتن دو نوع رفتار متفاوت برای مصالح در مثال ۵-۳-۱- در این پایان‌نامه.
- استفاده‌ی یکسان مصالح با رفتار الاستو-پلاستیک از تکیه‌گاه‌های موجود در سازه.
- انتقال بارها توسط همه‌ی تکیه‌گاه‌های موجود در سازه و کاهش تمرکز تنش در آن‌ها در توپولوژی حاصل از رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی با رفتار الاستو-پلاستیک مصالح.

۶-۳- پیشنهادها:

به‌منظور توسعه‌ی مطالعات پایان‌نامه‌ی حاضر، می‌توان پیشنهادهایی را برای دانشجویان علاقه‌مند در این زمینه ارائه داد:

- توسعه‌ی برنامه‌ی EPIGA با در نظر گرفتن سایر معیارهای تسلیم موجود در تئوری پلاستیسیته برای مصالح شکل‌پذیر و ترد هم‌چون معیارهای تسلیم ترسکا، موهر-کلمب و دراکر-پراگر.
- توسعه‌ی برنامه‌ی IGMWSCTO با در نظر گرفتن یک قید تنش کلی و یا قیدهای تنش مجموعه‌ای به‌منظور کاهش هزینه‌های محاسباتی ناشی از پروسه‌ی آنالیز حساسیت.
- توسعه‌ی برنامه‌ی IGMCTO با استفاده از روش تحلیلی برای انجام آنالیز حساسیت به‌منظور کاهش هزینه‌های محاسباتی.

پیوست

برنامه‌های کامپیوتری

الف) نرم‌افزارها:

به‌منظور تهیه‌ی برنامه‌های کامپیوتری در این پایان‌نامه، نرم‌افزار PGI Visual Fortran 2012 مورد استفاده قرار گرفته است. برای ترسیم توپولوژی‌های بهینه و کانتورهای تنش به‌دست آمده نرم‌افزار Tecplot 9.0 استفاده گردیده است. در ضمن نمودارهای مربوط به روند همگرایی مسائل بهینه‌سازی و هم‌چنین نیرو-تغییرمکان در تحلیل الاستو-پلاستیک مسائل تنش مسطح نیز با نرم‌افزار Excel ترسیم شده‌اند.

ب) محیط کلی برنامه‌ها:

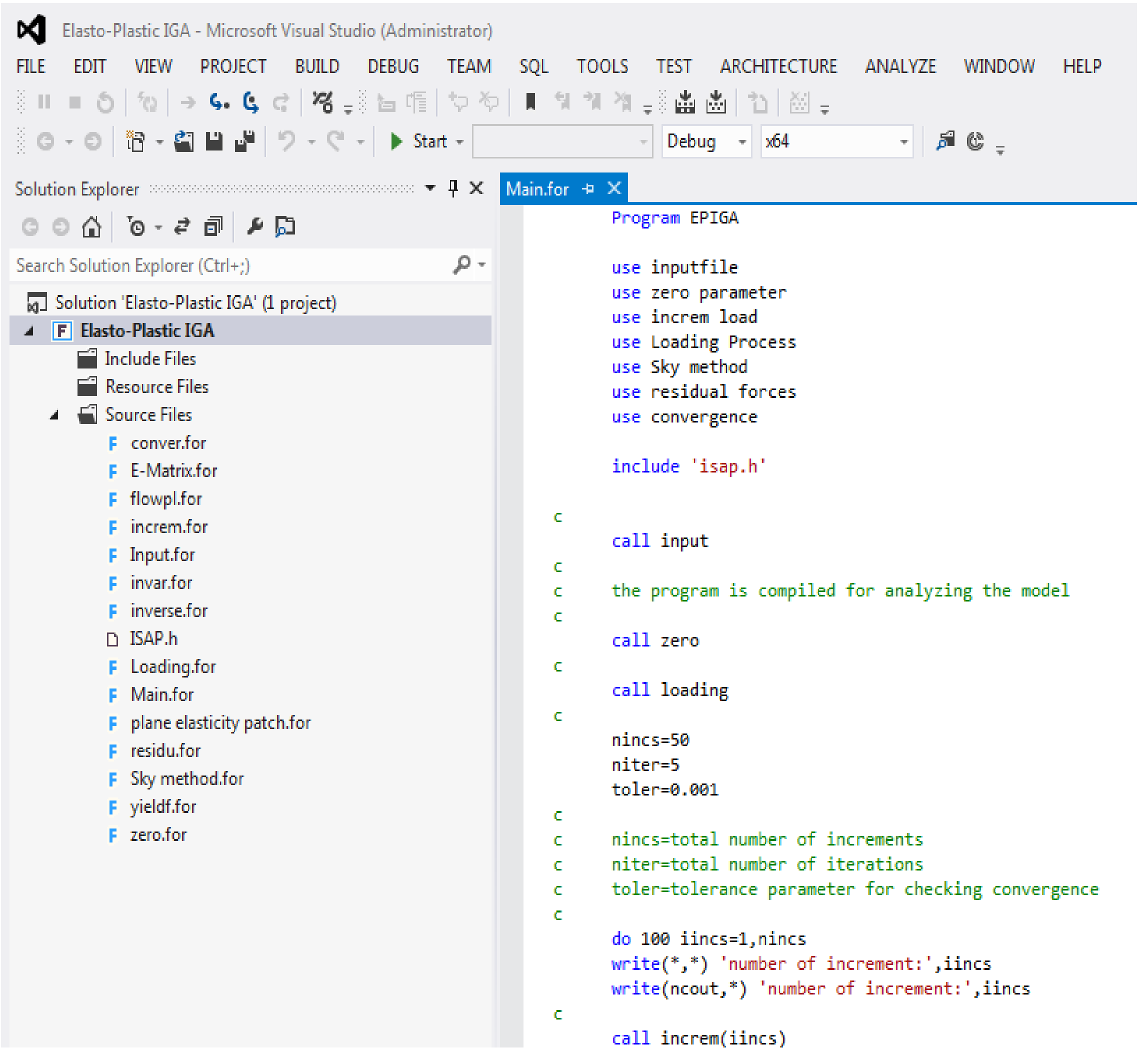
شکل ۰-۱ محیط کلی برنامه‌ی تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح را نشان می‌دهد. سمت چپ تصویر شامل زیربرنامه[1]هایی است که در این برنامه مورد استفاده قرار گرفته‌اند. سمت راست تصویر که Program EPIGA نام دارد هسته‌ی اصلی برنامه محسوب می‌گردد و برنامه از آن آغاز می‌شود. این نکته را نیز بایستی متذکر شویم که برنامه‌ی اولیه‌ی تحلیل ایزوژئومتریک مسائل تنش مسطح با در نظر گرفتن رفتار الاستیک مصالح تحت عنوان Plane Stress Analysis Using B-Splines توسط دکتر سید مهدی توکلی طراحی و نوشته شده است که من نیز از این برنامه استفاده و به‌منظور در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح در تحلیل مسائل، آن را تکمیل نموده‌ام.

شکل ۰-۲ محیط برنامه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رویکرد مینیمم کردن وزن تحت قیدهای تنش برای مصالح با رفتار الاستیک را نمایش می‌دهد. این برنامه نیز از بخش اصلی Program IGMWSCTO شروع و بعد از فراخوانی فایل ورودی، وارد مدول mma optimization می‌گردد. این مدول خود شامل تمام زیربرنامه‌های لازم برای انجام پروسه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی اعم

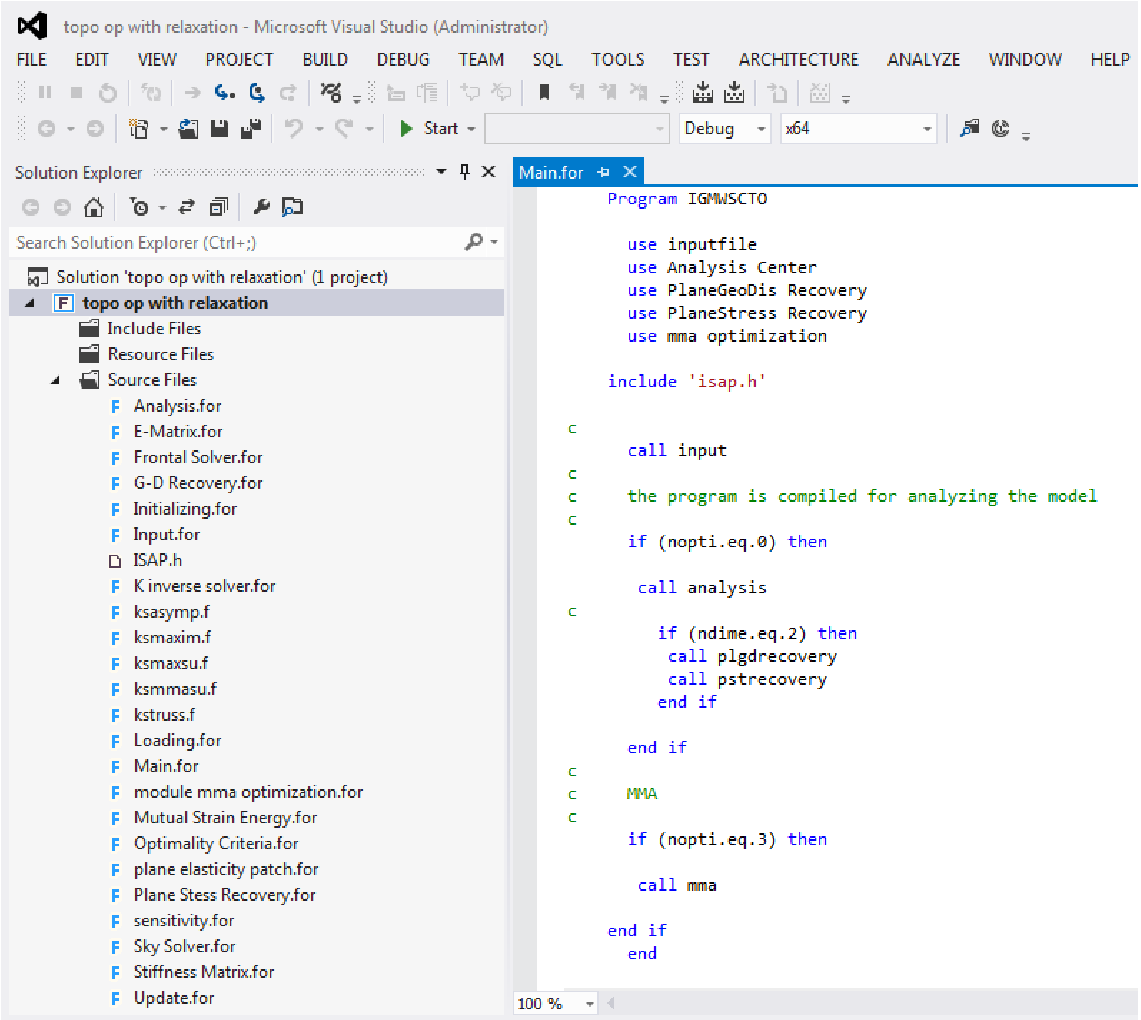
[1] Subroutine

از مقداردهی اولیه‌ی متغیرهای طراحی، تحلیل الاستیک سازه، محاسبه‌ی مقادیر توابع هدف و قیود، آنالیز حساسیت و در نهایت زیربرنامه‌های روش مجانب‌های پویا است. نکته‌ی مهمی که این‌جا بایستی یادآوری کنیم این است که زیربرنامه‌های مربوط به روش مجانب‌های پویا نیز توسط پروفسور سونبرگ نوشته شده و در این برنامه مورد استفاده قرار گرفته است.

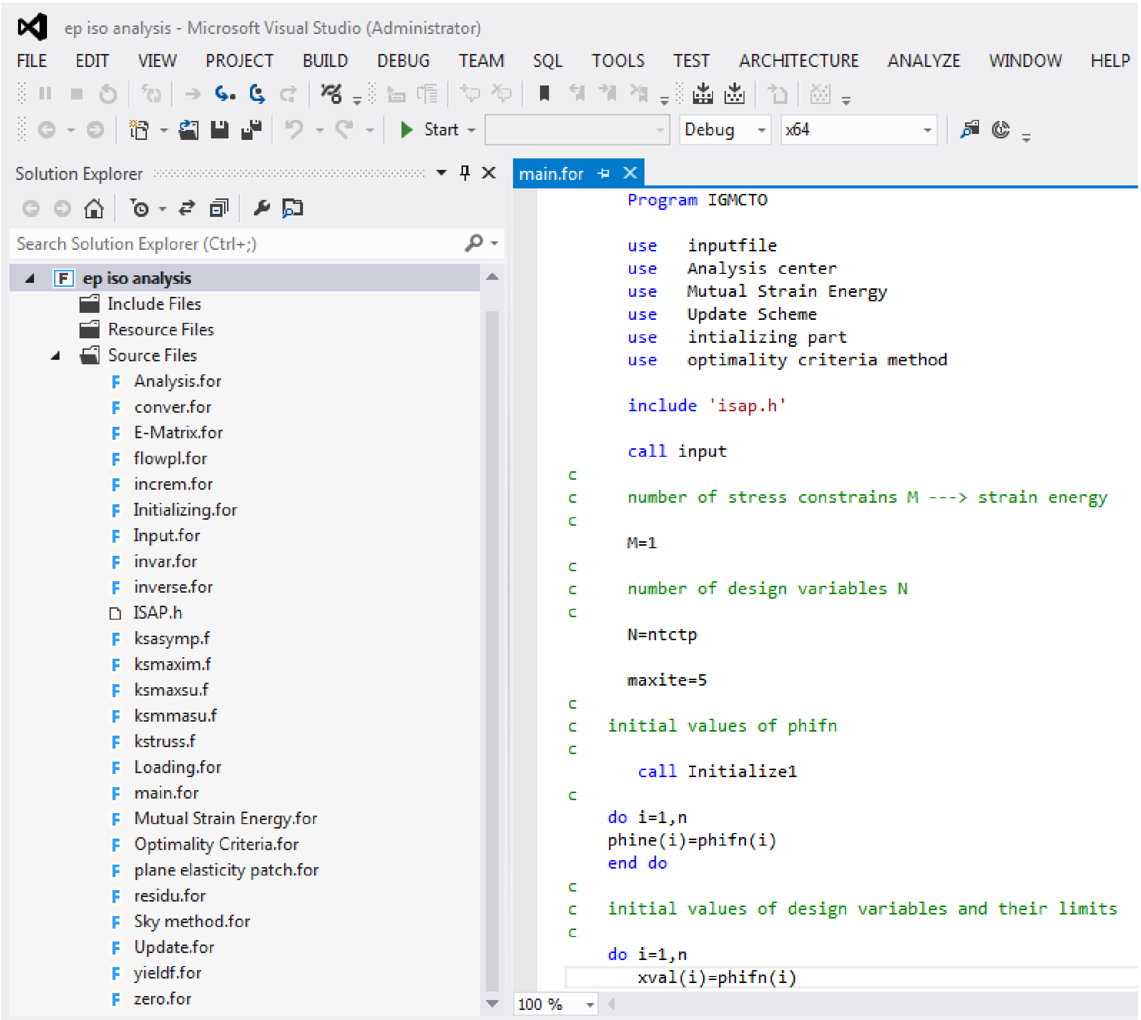
محیط برنامه‌ی بهینه‌سازی توپولوژی مسائل تنش مسطح با رویکرد مینیمم کردن انرژی کرنشی تحت قید حجم با در نظر گرفتن رفتار الاستو-پلاستیک مصالح نیز در شکل ۰-۳ قابل مشاهده است. هسته‌ی اصلی این برنامه Program IGMCTO نام دارد که شامل تمامی زیربرنامه‌های لازم برای تحلیل و سپس بهینه‌سازی مسئله با استفاده از روش ایزوژئومتریک می‌باشد.



شکل ۰-۱ محیط برنامه‌ی EPIGA



شکل ۰-۲ محیط برنامه‌ی IGMWSCTO



شکل ۳-۰ محیط برنامه‌ی IGMCTO

مراجع

1. Cea J., Gioan A. and Michel J. (**1973**), “Quelques resultat sur l’identification de domains”, *Calcolo*, **10**, **3**, pp. **207-232**.
2. Tartar L. (**1979**), “Estimation de coefficients homogénéisés”, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, **704**, pp. **364-373**.
3. Bendsøe M. P. and Kikuchi N. (**1988**), “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **71**, **2**, pp. **197-224**.
4. Suzuki K. and Kikuchi N. (**1991**), “A homogenization method for shape and topology optimization”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **93**, **3**, pp. **291-318**.
5. Thomsen J. (**1991**), “Optimization of composite discs”, *Structural Optimization*, **3**, **2**, pp. **89-98**.
6. Bendsøe M. P. (**1989**), “Optimal shape design as a material distribution problem”, *Structural Optimization*, **1**, **4**, pp. **193-202**.
7. Dorn W., Gomory R. and Greenberg M. (**1964**), “Automatic design of optimal structures”, *Journal de Mecanique*, **3**, pp. **25-52**.
8. Duysinx P. and Bendsøe M. P. (**1998**), “Topology optimization of continuum structures with local stress constraints”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **43**, **8**, pp. **1453-1478**.
9. Duysinx P. and Sigmund O. (**1998**), “New developments in handling stress constraints in optimal material distributions”, 7^{th} AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, pp. **1501-1509**, USA.
10. Duysinx P. (**2000**), “Topology optimization with different stress limits in tension and compression”, Third World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, Buffalo, USA.
11. Paris J., Navarrina F., Colominas I. and Casteleiro M. (**2009**), “Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints”, *Struct Multidisc Optim*, **39**, pp. **419-437**.
12. Paris J., Navarrina F., Colominas I. and Casteleiro M. (**2010**), “Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures”, *Advances in Engineering Software*, **41**, pp. **433-441**.

13. Paris J., Colominas I., Navarrina F. and Casteleiro M. (**2013**), “Parallel computing in topology optimization of structures with stress constraints”, *Computers and Structures*, **125**, pp. **62-73**.
14. Le C., Norato J., Bruns T., Ha C. and Tortorelli D. (**2010**), “Stress-based topology optimization for continua”, *Struct Multidisc Optim*, **41**, pp. **605-620**.
15. Holmberg E., Torstenfelt B. and Klarbring A. (**2013**), Stress constrained topology optimization, *Struct Multidisc Optim*, **48**, pp. **33-47**.
16. Kennedy G. J. (**2015**), “Strategies for adaptive optimization with aggregation constraints using interior-point methods”, *Computers and Structures*, **153**, pp. **217-229**.
17. Sved G. and Ginos Z. (**1968**), “Structural optimization under multiple loading”, *Int. J. mech. Sci.*, **10**, **10**, pp. **803-805**.
18. Kirsch U. (**1990**), “On singular topologies in optimum structural design”, *Structural Optimization*, **2**, **3**, pp. **133-142**.
19. Rozvany G. I. N. and Birker T. (**1994**), “On singular topologies in exact layout optimization”, *Structural Optimization*, **8**, **4**, pp. **228-235**.
20. Guo X., Cheng G. and Yamazaki K. (**2001**), “A new approach for the solution of singular optima in truss topology optimization with stress and local buckling constraints”, *Struct Multidisc Optim*, **22**, **5**, pp. **364-373**.
21. Cheng G. and Guo X. (**1997**), “ε-relaxed approach in structural topology optimization”, *Structural Optimization*, **13**, **4**, pp. **258-266**.
22. Navarrina F., Muinos I., Colominas I. and Casteleiro M. (**2005**), “Topology optimization of structures: A minimum weight approach with stress constraints”, *Advances in Engineering Software*, **36**, pp. **599-606**.
23. Paris J., Navarrina F., Colominas I. and Casteleiro M. (**2010**), “Improvements in the treatment of stress constraints in structural topology optimization problems”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **234**, pp. **2231-2238**.
24. Luo Y., Wang M. Y. and Kang Z. (**2013**), “An enhanced aggregation method for topology optimization with local stress constraints”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **254**, pp. **31-41**.
25. Paris J., Navarrina F., Colominas I. and Casteleiro M. (**2010**), “Stress constraints sensitivity analysis in structural topology optimization”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199**, pp. **2110-2122**.

26. Swan C. C. and Kosaka I. (**1997**), “Voigt-Reuss topology optimization for structures with nonlinear material behaviors”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**, pp. **3785-3814**.
27. Yuge K. and Kikuchi N. (**1995**), “Optimization of a frame structure subjected to a plastic deformation”, *Structural Optimization*, **10**, **3-4**, pp. **197-208**.
28. Maute K. Schwarz S. and Ramm E. (**1998**), “Adaptive topology optimization of elastoplastic structures”, *Structural Optimization*, **15**, **2**, pp. **81-91**.
29. Schwarz S. Maute K. and Ramm E. (**2001**), “Topology optimization for elastoplastic structural response”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **190**, pp. **2135-2155**.
30. Abolbashari M. H., Khajooei-Gharaei M., Ghaffarianjam H. R. and Mahpeykar M. R. (**2010**), “Topology optimization of continuum structures with elasto-plastic behavior using evolutionary structural optimization based on stress and stiffness criteria”, 6th Australasian Congress on Applied Mechanics, Perth, Australia.
31. Kato J., Hoshiba H., Takase S., Terada K. and Kyoya T. (**2015**), “Analytical sensitivity in topology optimization for elastoplastic composites”, *Struct Multidisc Optim*, **52**, pp. **507-526**.
32. Kagan P., Fischer A. and Bar-Yoseph P. Z. (**1998**), “New B-Spline finite element approach for geometrical design and mechanical analysis”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **41**, **3**, pp. **435-458**.
33. Hollig K., Reif U. and Wipper J. (**2001**), “Weighted extended B-Spline approximation of dirichlet problems”, *Siam J. Numer. Anal.*, **39**, **2**, pp. **442-462**.
34. Kagan P., Fischer A. and Bar-Yoseph P. Z. (**2003**), “Mechanically based models: adaptive refinement for B-Spline finite element”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **57**, **8**, pp. **1145-1175**.
35. Hughes T. J. R., Cottrell J. A. and Bazilevs Y. (**2005**), “Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **194**, **39-41**, pp. **4135-4195**.
36. Bazilevs Y. Beirao Da Veiga L., Cottrell J. A., Hughes T. J. R. and Sangalli G. (**2006**), “Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **16**, **7**, pp. **1031-1090**.

37. Cottrell J. A., Reali A., Bazilevs Y., and Hughes T. J. R. (**2006**), "Isogeometric analysis of structural vibrations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **195**, pp. **5257-5296**.
38. Hassani B., Khanzadi M. and Tavakkoli S. M. (**2012**), "An isogeometrical approach to structural topology optimization by optimality criteria", *Struct Multidisc Optim*, **45**, pp. **223-233**.
39. Tavakkoli S. M., Hassani B. and Ghasemnejad H. (**2013**), "Isogeometric topology optimization of structures by using MMA", *Int. J. Optim. Civil Eng.* **3**, pp. **313-326**.
40. Owen D. R. J. and Hinton E. (**1980**), "*Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice*", 1th ed., Pineridge Press, Swansea, UK, pp. **157-262**.
41. Sadd M. H. (**2009**), "*Elasticity: Theory, Application and Numerics*", 2th ed., Academic Press, Burlington, USA, pp. **55-87**.
42. Bridgman P. W. (**1952**), "*Studies in Large Plastic Flow and Fracture*", McGraw-Hill, New York, USA.
43. Piegl L. and Tiller W. (**1995**), "*The NURBS Book*", 2th ed., Springer, Germany, pp. **1-138**.
44. Hughes T. J. R., Reali A. and Sangalli G. (**2010**), "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **199**, **5-8**, pp. **301-313**.
45. Neto E. A. S., Peric D. and Owen D. R. J. (**2008**), "*Computatinal Methods for Plasticity: Theory and Applications*", 1th ed., Wiley, UK, pp. **386-388**.
46. Lubliner J. (**1990**), "*Plasticity Theory*", Macmillan, New York, USA. pp. **239-243**.
47. Bendsøe M. P. and Sigmund O. (**2003**), "*Topology Optimization; Theory, Methods and Applications*", Springer, Germany, pp. **1-84**.
48. Christensen P. W. and Klarbring A. (**2009**), "*An Introduction to Structural Optimization*", Springer, Sweden, pp. **1-7**.
49. Hassani B. and Hinton E. (**1998**), "*Homogenization and Structural Topology Optimization: Theory, Practice and Software*", Springer, London, pp. **1-7**.
50. Pereira J. T., Fancello E. A. and Barcellos C. S. (**2004**), "Topology optimization of continuum structures with material failure constraints", *Struct Multidisc Optim*, **26**, pp. **50-66**.
51. Bruyneel M., Duysinx P. and Fleury C. (**2002**), "A family of MMA approximations for structural optimization", *Struct Multidisc Optim*, **24**, pp. **263-276**.

52. Svanberg K. (**1987**), "The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization", *Int J Numer Meth Eng*, **24**, pp. **359-373**.

53. Choi K. K. and Kim N. H. (**2005**), "*Structural Sensitivity Analysis and Optimization 1—Linear Systems*", Springer, Berlin, pp. **20-24**.

50. Cai S. and Zhang W. (**2015**), "Stress constrained topology optimization with free-form design domains", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **289**, pp. **267-290**.

Abstract

Topology optimization is one of the most important kinds of structural optimization problems, aims to find the optimum distribution of materials in a certain domain. To reach the point, different objective functions and constraints might be considered. During the last decade, two general approaches on topology optimization problems have been developed. In more common approach, the compliance or energy of deformation is minimized for a given amount of materials. The other approach is to minimize the weight of structures under stress or displacement constraints.

The main goal of this research is to utilize the Isogeometric Analysis (IA) method in topology optimization problems with minimum weight approach. In addition, the IA formoulation for materially nonlinear structures is derived based on Elasto-Plastic materials. The effect of considering nonlinear analysis on topology optimization problems is also studied. The Method of Moving Asymptotes (MMA) is employed for optimization process in which derivatives of the objective function and constraints with respect to the design varibales (sensitivity analysis) are needed to be determined.

In this thesis, first the IA formulation of plane stress structures considering elasto-plastic materials is explained. Then, the topology optimization problem with minimum weight approach subject to stress constraints for elastic materials is formulated when IA is used. To achieve this and in order to demonstrate the effect of elasto-plastic deformations on optimum topology of structures, fortran codes for isogeometric topology optimization of elastic and elasto-plastic structures are developed. Finally, the outputs are verified through several numerical examples.

Keywords: topology optimization; isogeometric analysis; stress constraints; materially nonlinear structures; MMA; sensitivity analysis

Shahrood University of Technology

Faculty of Civil Engineering

Topology Optimization of Plane Stress Problems Considering Weight Minimization

Haleh Sadat Kazemi

Supervisors:

Dr. Reza Naderi

Dr. Seyed Mehdi Tavakkoli

February 2016