بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده: مهندسی عمران

گروه: مهندسی آب و ژئوتکنیک

رساله دکتری

مکانیک شکست و گسترش ترک در روش ایزوژئومتریک

عبدالغفور خادم‌الرسول

استاد راهنما:

رضا نادری

شهریور ماه ۱۳۹۴

دانشگاه شاهرود

دانشکده: مهندسی عمران

گروه: مهندسی آب و ژئوتکنیک

پایان نامه رساله دکتری آقای عبدالغفور خادم‌الرسول

تحت عنوان: مکانیک شکست و گسترش ترک در روش ایزوژئومتریک

در تاریخ ۱۳۹۴/۰۶/۲۴ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه **عالی** مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
دکتر رضا نادری		نام و نام خانوادگی:	
نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی: دکتر بهروز حسنی		نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی عجمی	
نام و نام خانوادگی: دکتر وحیدرضا کلات‌جاری			
نام و نام خانوادگی: دکتر سیدمهدی حسینی			

تقدیم به:

پدر و مادر عزیز و مهربانم

که در سختی‌ها و دشواری‌های زندگی همواره یاوری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده‌اند.

و نیز به همسر مهربانم

که محیطی سرشار از سلامت و امنیت و آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

تشکر و قدردانی

سپاس و ستایش خداوندی را سزاست که کسوت هستی را بر اندام موزون آفرینش بپوشانید و تجلیات قدرت لایزالی را در مظاهر و آثار طبیعت نمایان گردانید. بار الها! من با یاد تو، به تو تقرّب می‌جویم و تو را به پیشگاه تو شفیع می‌آورم و از تو خواستارم، به کرمت، مرا به خودت نزدیک گردانی و یاد خود را به من الهام کنی و بر من رحمت آوری و به آنچه بهره و نصیب من ساخته‌ای، خشنودم قرار دهی و در همه حال به فروتنی‌ام واداری.

"من لم یشکرالمخلوق لم یشکر الخالق". برخودلازم می‌دانم ازکلیه کسانی که بنده را در تدوین و نگارش این پایان‌نامه یاری نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. به خصوص از استاد فرزانه جناب آقای دکتر رضا نادری (استاد راهنما) که در کلیه مراحل انجام این پژوهش با خوشروئی، یاری و راهنمائی‌ام نمودند و وقت خود را بی‌شائبه در اختیار بنده گذاشته صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

اقرارنامه و واگذاری حقوق

دانشجو تأیید می‌نماید که مطالب مندرج در این رساله نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد.

شهریور ماه سال ۱۳۹۴

چکیده

مکانیک شکست یکی از موضوعات مورد توجه محققین مختلف به شمار می‌آید. از آنجا که در طراحی مهندسی، رفتار مکانیکی جسم حاوی ناپیوستگی، متفاوت با جسم بدون ناپیوستگی است، طی سال‌ها مطالعات فراوانی بر رفتار جسم حاوی ترک و ناپیوستگی صورت گرفته است. هدف اصلی تمامی روش‌های موجود در علم مکانیک شکست محاسباتی، تعیین فضای تنش و کرنش در جسم حاوی ناپیوستگی می‌باشد. عموماً در فرایند محاسبه فضای تنش در جسم دارای ناپیوستگی از روش‌های مختلف تحلیلی و عددی استفاده می‌شود. روش‌های تحلیلی ویژه دامنه‌های مشخص با شرایط مرزی خاص هستند. پس برای اینکه بتوان هر جسمی با هر شرایط مرزی را در مکانیک شکست محاسباتی مدل‌سازی نمود باید از روش‌های عددی استفاده گردد. روش‌های عددی که تا امروز در مکانیک شکست مورد استفاده بوده‌اند شامل، روش تفاضل‌های محدود، روش اجزای محدود استاندارد، روش المان مرزی، مجموعه روش‌های بدون‌مش و روش المان منفصل می‌باشند. لازم به ذکر است که در تمامی روش‌های عددی نامبرده از تقریب هندسه دامنه محاسباتی استفاده می‌شود. از طرفی با پیشرفت و توسعه هر چه بیشتر و سریع‌تر تکنولوژی‌های جدید و ساخت طرح‌های مهندسی پیچیده‌تر الزام مدل‌سازی دقیق هندسه دامنه مورد مطالعه بیشتر شده است. می‌دانیم که هندسه و دقت تولید هندسه در برخی شرایط بر نتایج حاصل از آنالیز تاثیرگذار است. بنابراین علاوه بر روش‌های آنالیز جدید نیاز است تا بتوان همزمان هندسه دامنه مورد مطالعه را نیز به دقت مدل‌سازی نمود، تا کمترین خطای محاسباتی از فرایند تقریب دامنه حاصل گردد.

همچنین در فرایند مدل‌سازی رشد ترک علیرغم پیشرفت‌های خوبی که در علم عددی ایجاد شده، کماکان تولید اولیه مش (شبکه) سازه‌ای و نیز اعمال تغییرات بر مش سازه‌ای در خلال فرایند رشد ترک بسیار مشکل و سنگین باقی مانده است. بنابراین این ایده تولید شد تا به سراغ روش عددی برویم تا بتوان در آن بدون تغییر هندسه و مش اولیه و از طرفی با در دست داشتن هندسه دقیق به مدل‌سازی شکست و پیش‌بینی مسیر رشد ترک و ایجاد و توسعه روش انرژی در روش آنالیز

ایزوژئومتریک پرداخته شود. در بین تمامی روش‌های عددی مختلف تنها روشی که قادر به مدل‌سازی هندسه به صورت دقیق است، روش آنالیز ایزوژئومتریک می‌باشد. در روش آنالیز ایزوژئومتریک از توابع B-spline، NURBS به عنوان تکنولوژی هندسی محاسباتی برای تقریب هندسه و متغیر اصلی مساله به طور همزمان استفاده می‌شود، به همین دلیل برگرفته از نامگذاری روش ایزوپارامتریک اجزای محدود استاندارد از نامگذاری ایزوژئومتریک استفاده شده است.

بنابراین در این رساله دکتری به توسعه روش انرژی تحت عنوان انتگرال J در روش عددی آنالیز ایزوژئومتریک برای اولین بار پرداخته می‌شود و بر اساس مقدار انرژی محاسبه شده در نوک ترک با استفاده از اصول انتگرال J فاکتورهای شدت تنش مودهای مختلف محاسبه می‌شوند. همچنین بر اساس نوع بارگذاری و شرایط تنش و کرنش در دامنه مساله متأثر از وجود ناپیوستگی و بر اساس معیارهای موجود در رشد ترک، به محاسبه و برآورد زاویه رشد ترک و امتداد آن پرداخته می‌شود. همچنین برای صحت سنجی نتایج مربوط به هر بخش از روش اجزای محدود توسعه یافته بهره برده خواهد شد. از طرفی در موارد رشد ترک خستگی و تولید مرزهای مستدیر ناهمگن داخلی و تأثیر آنها بر مقادیر فاکتور شدت تنش از روش اجزای محدود توسعه یافته کمک گرفته می‌شود. همچنین ضمن تلفیق روش اجزای محدود توسعه یافته و روش مجموعه تراز به شبیه‌سازی مسیر رشد ترک نیز خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی

روش آنالیز ایزوژئومتریک، مکانیک شکست، روش انرژی، رشد ترک، روش اجزای محدود توسعه یافته، روش مجموعه تراز.

لیست مقالات مستخرج از رساله

- **مدل‌سازی خودکار رشد ترک در مود مرکب و رشد ترک خستگی بدون مش‌بندی مجدد**

  (مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، دانشگاه شاهرود)

- **مدل‌سازی خودکار گسترش ترک در اندرکنش با حفره و مرز ناهمگن بدون مش‌بندی مجدد**

  (مجله مکانیک مدرس، دانشگاه تربیت مدرس)

- **مقایسه روش آنالیز ایزوژئومتریک و روش اجزای محدود توسعه یافته در مدل‌سازی ناپیوستگی و محاسبه فاکتور شدت تنش**

  (مجله روش‌های عددی در مهندسی، دانشگاه صنعتی اصفهان)

- **Local and Global Approaches to Fracture Mechanics Using Isogeometric Analysis Method.**

  (Journal of Applied and Computational Mechanics)

- **Mixed-Mode Stress Intensity Factors Calculation Using Interaction Integral in Isogeometric Analysis Method.** *(Under review)*

  (Journal of Applied Mechanics)

لیست مقالات ارائه شده در کنفرانس

- Fully Automatic Crack Propagation and Crack Growth Modeling in the Presence of the Soft and Hard Inclusions Using Extended Finite Element Method. *The Bi-Annual International Conference on Experimental Solid Mechanics and Dynamics (Xech-2014)*, Feb. 18-19, 2014, Tehran, Iran, Center of Excellence in Experimental Solid Mechanics and Dynamics, School of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology.
- مکانیک شکست با استفاده از آنالیز ایزوژئومتریک و مقایسه آن با روش اجزای محدود توسعه یافته، *کنفرانس بین المللی مهندسی مکانیک و فناوری‌های پیشرفته مهر ماه ۱۳۹۱* –اصفهان –هتل بین المللی عباسی.
- بررسی گسترش ترک در مود مرکب با استفاده از روش مجموعه تراز در اجزای محدود توسعه یافته، *نوزدهمین همایش سالانه مهندسی مکانیک ایران، ISME2011 ایران*، بیرجند، دانشگاه بیرجند، ۲۰ لغایت ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۰.
- مدل‌سازی گسترش ترک در مود مرکب و گسترش ترک خستگی بدون مش بندی مجدد دامنه، *نهمین کنگره بین المللی مهندسی عمران*، دانشگاه صنعتی اصفهان، ۱۹-۲۱ اردیبهشت ماه ۱۳۹۱.
- برآورد فاکتور شدت تنش برای ترک در مود مرکب با استفاده از انتگرال اندرکنش در روش اجزای محدود توسعه یافته، *ششمین کنگره ملی مهندسی عمران*، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران.

فهرست مطالب

فهرست شکل‌ها

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل پنجم

فهرست جداول

فهرست علایم و اختصارات

A	مساحت ناحیه معادل انتگرال اندرکنش
a	طول ترک
b	عرض دامنه
$\mathbf{b}$	نیروهای حجمی
$B_{\mathbf{i,p}}(\xi)$	توابع چند متغیره نربز
C	پارامتر قانون پاریس در رشد ترک خستگی
$\mathbf{C}(\xi)$	منحنی تک متغیره نربز
$\mathrm{d}N$	تعداد سیکل‌های بارگذاری
E (MPa)	مدول الاستیسیته (GPa)
$f_{ij}(\theta)$	توابع عمومی از θ
$\mathbf{F}$	گرادیان تغییر شکل
$F_{\alpha}(r,\theta)$	تابع غنی‌سازی نوک ترک
G_{c}	نرخ رهایی انرژی کرنشی بحرانی
$H(x)$	تابع غنی‌سازی هویساید
$\mathbf{u}^{\mathrm{h}}(x)$	تقریب جابجایی در XFEM
J	انتگرال مستقل از مسیر
K_{I}	فاکتور شدت تنش مود اول
K_{Ic}	فاکتور شدت تنش بحرانی مود اول
K_{II}	فاکتور شدت تنش مود دوم
$M^{(1,2)}$	انتگرال اندرکنش
m	پارامتر قانون پاریس در رشد ترک خستگی
$N_I(x)$	توابع شکل استاندارد اجزای محدود

$N_{\mathbf{i,p}}(\xi)$	توابع پایه نربز
$\mathbf{n}$	بردار نرمال بر مرز و سطح
$\mathbf{P_i}$	مجموعه نقاط کنترلی
q	تابع هموار کننده
r	فاصله در مختصات قطبی نسبت به نوک ترک
R	شعاع دایره انتگرال‌گیری حول نوک ترک
$\mathrm{S}(\xi)$	سطح نربز
$\bar{\mathbf{t}}$	نیروهای گسترده مرزی
$\mathrm{V}(\xi)$	حجم نربز
$W^{(1,2)}$	دانسیته انرژی کرنشی

علایم یونانی

β	زاویه ترک نسبت به افق
Γ	مسیر انتگرال‌گیری حول نوک ترک
Γ_{d}	مرز ناپیوستگی
Γ_{t}	محدوده اعمال شرایط مرزی، بارگذاری
Γ_{u}	محدوده اعمال شرایط مرزی اساسی
$\Delta \mathrm{a}$	مقدار رشد ترک
ΔK	فاکتور شدت تنش موثر
ε_{ij}	تانسور کرنش
ζ_I	مقدار گرهی تابع مجموعه تراز مرز داخلی
η	مقدار پارامتری جهت ۲
θ	زاویه نسبت به نوک ترک
θ_0	زاویه رشد ترک
$\nu(x)$	تابع غنی‌سازی

ξ	مقدار پارامتری جهت ۱
σ	تنش اعمالی بر مرز دوردست
σ_{ij}	تانسور تنش
$\phi(x,t)$	تابع مجموعه تراز نوک ترک
φ_I	تابع مجموعه تراز مرز داخلی
$\Xi, \mathcal{H}$	بردار گرهی
$\psi(x)$	تابع مجموعه تراز مرز داخلی
$\psi(x,t)$	تابع مجموعه تراز بدنه ترک
Ω	محدوده کل دامنه
Ω_c^i	دامنه i امین فضای خالی

فصل اول

مقدمه

۱- مقدمه

بسیاری از صنایع مانند هوافضا، خودروسازی و مهندسی سازه‌ها نیازمند ابزاری ساده و دقیق جهت مطالعه سناریوهای رشد ترک می‌باشند. از طرفی مدل‌سازی گسترش ترک در مود مرکب برای مصالح ترد یا شبه‌ترد بر پایه مکانیک شکست خطی، از دیرباز به عنوان یک حوزه تحقیقاتی فعال در تعیین رفتار ترک خوردگی و ظرفیت باربری یک عضو سازه‌ای در معرض شکست، مورد توجه محققین علوم عددی و مکانیک جامدات قرار داشته است. همچنین مفهوم تولید ناپیوستگی شامل ترک، حفره و مرز ناپیوستگی داخلی مورد توجه محققین بوده است. از طرفی اثبات شده است که شبیه‌سازی عددی، یک جایگزین علمی مناسب برای مسایل پیچیده مهندسی پرهزینه، زمان‌بر و در برخی شرایط آزمایشگاهی خطرناک می‌باشد. روش‌های عددی بر پایه شبکه[1] مانند اجزای محدود به طور گسترده‌ای به عنوان ابزاری جهت آنالیز بسیاری از مسایل مهندسی به کار گرفته شده است. به طور کلی دو شیوه پایه‌ای در روش‌های عددی بر مبنای شبکه وجود دارد که شامل: شبکه اولری[2] و لاگرانژی[3] می‌باشند. بمنظور بهره‌گیری از مزایای این دو روش و اجتناب از معایب آنها روش‌های ترکیبی نوینی به وجود آمده است[۱]. اما روش‌های بر مبنای شبکه برای مسایلی مانند مکانیک شکست با وجود ناپیوستگی‌های متحرک، مسایل با تغییرشکل‌های بزرگ که در آنها تغییرات اساسی در شبکه اجزای محدود ایجاد می‌گردد، مناسب نمی‌باشد.

مکانیک شکست در زمینه آنالیز و طراحی سازه‌ها با درز و ترک است. در مقیاس‌های متفاوت تقریباً تمامی مصالح حاوی درز و ترک یا به صورت میکروسکوپی و یا به صورت ماکروسکوپی به علت خوردگی، خستگی یا ترک‌های ناشی از جوشکاری می‌باشند. بنابراین مکانیک شکست تمامی جزئیات طراحی و تامین ایمنی سازه‌ها را در بر می‌گیرد. در شرایطی که ترک رشد می‌کند نیز علم مکانیک شکست تعیین کننده خواص و شرایط سازه است، از این رو علم مکانیک شکست فقط در ابتدای عمر

[1]- Grid based numerical methods
[2]- Eulerian
[3]- Lagrangian

سازه کاربرد ندارد بلکه در تمام طول عمر سازه به کار می‌آید. مکانیک شکست به این سوالات پاسخ می‌دهد: بزرگترین اندازه ترکی که سازه می‌تواند داشته باشد یا بزرگترین باری که سازه می‌تواند تحمل کند تا گسیخته نشود چقدر است؟ چقدر سازه می‌تواند پس از رخداد ترک پایدار بماند؟ از چه مصالحی باید استفاده شود تا ایمنی لازم حاصل گردد؟ در مطالعه‌ای که در سال ۱۹۷۰ صورت گرفته است، نشان داده شده است که هزینه شکست ناشی از تصادفات، بیش طراحی سازه‌ها، هزینه‌های نگهداری و بازبینی، تعمیر و جایگزینی، تقریباً معادل ۱۲۰ میلیارد دلار در سال هزینه در بر خواهد داشت و این در حالی است که از شکست نیز نمی‌توان اجتناب نمود. همچنین این موسسه پیش‌بینی نموده است که اگر کنترل‌های مربوط به شکست به موقع و درست انجام شود سالانه حدود ۳۵ میلیارد دلار صرفه جویی خواهد شد. این موضوع اهمیت مکانیک شکست را در صنایع مدرن نشان می‌دهد [۲]. در چند دهه گذشته، استفاده از اصول طراحی مکانیک شکست برای جلوگیری از شکست ناگهانی و یا تدریجی سازه‌ها و قطعات ماشین به یک نیاز تبدیل شده است. بسیاری از روش‌های تولید مواد و سازه (به عنوان نمونه جوشکاری) به طور طبیعی ایجاد شکاف و یا ناپیوستگی می‌کنند. ترک‌ها می‌توانند از این شکاف‌ها و ناپیوستگی‌ها شروع به رشد نموده و موجب گسیختگی قطعه و نهایتاً از کار افتادگی سازه شوند. بنابراین مهمترین هدف علم مکانیک شکست، محاسبه میزان حساسیت قطعه به ترک و اندازه بحرانی ترک که می‌تواند سبب شکست ناگهانی در بارهای وارده شود، می‌باشد.

به طور کلی شکست ترد به عنوان یک تهدید برای سازه‌ها به شمار می‌آید. نمونه‌هایی از شکست ترد در سازه‌ها وجود دارد که از بین آنها می‌توان به چند مورد اشاره نمود. در سال ۱۸۸۶ میلادی یک لوله عمودی به طول ۲۵۰ فوت در حین آزمایش هیدرواستاتیک در کشور انگلستان گسیخته شد. در همان سال‌ها موارد دیگری نیز از شکست ترد در برخی از مخازن آب، روغن و گاز که در آنها از پرچ استفاده شده بود، گزارش گردید. در بسیاری از موارد گزارش شده مصالح مورد استفاده از مقاومت کششی لازم برخوردار بوده است. در پاره‌ای از موارد تیم بررسی سانحه شکست، متشکل از مهندسان و

طراحان مجرب پس از مدتها بررسی دقیق و آزمایش، علت شکست را ایجاد تنش بیشتر در مخازن نسبت به مقادیر محاسبه شده از روابط مقاومت مصالح تشخیص دادند.

قبل از جنگ جهانی دوم گزارش‌های متعددی از شکست پل‌ها در بارهای نسبتاً کم، وجود دارد که در اغلب آنها شکست در درجه حرارت پایین به صورت ترد و ناگهانی اتفاق افتاده است. بررسی‌های کارشناسی نشان داد که در بیشتر موارد شکست از محل‌های جوشکاری شروع شده است.

علاوه بر شکست‌های رخ داده در مخازن و پل‌ها، می‌توان گفت که در گذشته بیشترین شکست‌های ترد و ترک خوردگی‌ها در کشتی‌های فلزی رخ داده است. در اغلب این موارد نیز مشاهده گردید که ترک از نقاط گوشه و محل‌هایی که تنش در آنها متمرکز بوده، شروع شده است.

طی سالیان متمادی که موضوع بررسی ظرفیت قطعه ترک‌دار مورد بررسی قرار گرفته است از روش‌های مختلفی در آنالیز توزیع کرنش‌ها و تنش‌ها در قطعه ترکدار استفاده شده است. این روش‌ها شامل روش‌های تحلیلی، آزمایشگاهی و عددی می‌باشند. از آنجا که موضوع این رساله بررسی عددی شکست می‌باشد به بیان نکاتی در خصوص روش عددی پرداخته خواهد شد. به طور کلی در شرایطی که با هندسه ساده و شرایط مرزی مشخص و معمول مواجه باشیم می‌توان از روش‌های تحلیلی در مکانیک شکست استفاده نمود، اما در حالتی که مدل هندسی پیچیده‌تر شده و در نتیجه با اعمال شرایط مرزی مختلف و کامل‌تر مواجه باشیم روش تحلیلی کاربرد خود را از دست می‌دهد. بنابراین باید به سراغ روش‌های حل مساله به صورت عددی رفت. در بین روش‌های عددی از روش اجزای محدود (FEM)، روش المان مرزی (BEM)، روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM)، روش بدون‌مش گالرکین در شبیه‌سازی شکست و گسترش ترک استفاده شده است [۳-۲۷]. بنابراین از بین تمامی روش‌های عددی نامبرده شده روش آنالیز ایزوژئومتریک با ویژگی‌های منحصر به فرد خود در موضوع مکانیک شکست محاسباتی برگزیده شده است تا بر اساس تفاوت‌های خاص آن با دیگر روش‌های عددی به موضوع مکانیک شکست و تعیین مسیر رشد ترک پرداخته شود.

بطور کلی شاخه‌ی (CAGD)[1] شامل تمامی مسایلی است که در آن باید از طریق الگوریتمی کامپیوتری به محاسبه و ذخیره‌سازی هندسه مساله پرداخته شود [۲۸]. به طور کلی روش آنالیز ایزوژئومتریک همان آنالیز اجزای محدود کلاسیک است که دارای ویژگی‌های منحصر به فردی نسبت به اجزای محدود کلاسیک است [۲۹, ۳۰]. آنالیز اجزای محدود (FEA)، از توابع شکل و نقطه استفاده می‌کند در حالیکه روش طراحی به کمک کامپیوتری (CAD)، از توابع پایه و نقاط کنترلی بهره می‌برد. فرم عمومی در مهندسی به این ترتیب است که ابتدا طرح مورد نظر در سیستم CAD طراحی شده سپس بر اساس اطلاعات CAD مش (شبکه) تولید شده و توسط FEA آنالیز انجام می‌گیرد. تلاش‌های زیادی برای تلفیق CAD و FEA صورت گرفته است. اخیراً هیوز مفهوم آنالیز ایزوژئومتریک را برای ایجاد یک ارتباط دقیق و کامل بین CAD و FEA معرفی نموده است. نام آنالیز ایزوژئومتریک نشان دهنده این است که می‌توان از توابع پایه یکسان در CAD و FEA استفاده نمود [۲۹, ۳۰].

روش آنالیز ایزوژئومتریک دارای مشخصات خوب و مفید است، بعنوان نمونه در بسیاری از شرایط، مش‌بندی ضرورتی ندارد و از طرفی مش‌بندی هزینه بردار و وقت‌گیر است. به علاوه دقت مساله پایین می‌آید به عنوان مثال می‌توان به مساله کمانش اشاره نمود که با عدم دقت در هندسه، دقت نتایج حاصل در کمانش نیز کاهش می‌یابند. این در حالی است که در روش آنالیز ایزوژئومتریک هندسه مساله تقریباً بطور دقیق مدل می‌شود. پرکاربردترین تکنولوژی هندسی محاسباتی در روش آنالیز ایزوژئومتریک، نربز[2] بوده است.

بنابراین در این رساله با استفاده از توابع پایه نربز (بی‌اسپیلاین) و تهیه برنامه کامپیوتری در محیط نرم افزار متلب[3] به کاربرد روش آنالیز ایزوژئومتریک در مفهوم مکانیک شکست پرداخته خواهد شد. در واقع هدف اصلی، استفاده از ویژگی‌های ذاتی روش آنالیز ایزوژئومتریک در کنترل درجه پیوستگی در

[1]- Computer aided geometric design
[2]- NURBS (Non-Uniform Rational B-splines)
[3]- MATLAB

فضای پارامتری و فضای فیزیکی مساله است. همانطوریکه می‌دانیم یکی از مسایل مهم در کاربرد روش‌های عددی در موضوع مکانیک شکست، تولید و انطباق ناپیوستگی بر فضای فیزیکی مساله است. به عبارت دیگر در این رساله سعی شده است تا به ساده‌ترین اَشکال ممکن و بر اساس مشخصات روش آنالیز ایزوژئومتریک به تولید منطقه متأثر از ناپیوستگی پرداخته شود و در نتیجه اثرات آن ناپیوستگی در توزیع تنش و کرنش مورد بررسی قرار گیرد. بنابراین در این مطالعه با استفاده از ویژگی کنترل درجه پیوستگی در فضای پارامتری و به عبارت دیگر در بردار گرهی، ویژگی تکرار نقاط کنترلی بین وصله‌ای با مختصات یکسان و همچنین استفاده از خصوصیت وزن نقاط کنترلی به تولید انواع ناپیوستگی از جمله ترک و حفره خواهیم پرداخت.

از طرفی مرتبه بالاتر توابع پایه نربز مورد استفاده در روش آنالیز ایزوژئومتریک، نسبت به روش اجزای محدود کلاسیک یک برتری محسوس در تولید نتایج هموار و خصوصاً در نزدیکی ناپیوستگی میانی بوجود می‌آورد. این در حالی است که استفاده از المان‌های استاندارد اجزای محدود با مرتبه بالاتر تابع درونیاب به سادگی میسر نخواهد شد. در واقع حصول نتایج دقیق و هموار در نزدیکی ناپیوستگی و خصوصاً نوک ترک‌های موجود در دامنه به استخراج مطلوب برای پارامترهای شکست خواهد انجامید.

در این مطالعه پس از حصول نتایج هموار برای توزیع تنش و کرنش در صفحه حاوی ناپیوستگی به محاسبه پارامترهای مهم در مفهوم مکانیک شکست خطی پرداخته‌ایم. مهمترین پارامتر شکست در معیار الاستیک خطی و همچنین مفهوم تسلیم در ناحیه کوچک، پارامتر فاکتور شدت تنش می‌باشد. ما در این رساله بر اساس روش‌های انتگرال اندرکنش برای مود مرکب شکست، روش برون‌یابی تنش در صفحه مقابل نوک ترک و نیز روش حل تجربی-تحلیلی به محاسبه و مقایسه مقادیر فاکتور شدت تنش در مود مرکب بارگذاری می‌پردازیم. پس از محاسبه فاکتورهای شدت تنش مود مرکب، بر اساس دو معیار حداکثر تنش مماسی و معیار تعمیم یافته حداکثر تنش مماسی به برآورد زاویه شروع رشد ترک خواهیم پرداخت. همچنین با اطلاع از مقادیر تقریباً دقیق از فاکتورهای شدت تنش مود مرکب دو بعدی به محاسبه فاکتور شدت تنش موثر بر اساس معیار تاناکا پرداخته شده و ضمن مقایسه میزان

فاکتور شدت تنش موثر با چقرمگی شکست (فاکتور شدت تنش بحرانی) برای مصالح مورد نظر تعیین می‌نماییم که آیا ترک رشد می‌نماید یا خیر. مسلماً در این فرایند هر چقدر مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی دقیق‌تر محاسبه گردند مراحل تعیین رشد ترک نیز بنحو مطلوب‌تری حاصل خواهد شد. لذا از مش‌بندی مختلف در مدل‌های مختلف استفاده نموده‌ایم تا تقریباً به دقیق‌ترین حالت ممکن دسترسی پیدا نماییم. همچنین بمنظور مشخص نمودن وضعیت ماتریس سختی در مدل‌های مختلف مورد بررسی، مقادیر ویژه ماتریس سختی و وضعیت بالا و پایین مثلث ماتریس سختی محاسبه شده تا بدین وسیله تأثیر شیوه گسسته‌سازی در نتایج نشان داده شود.

از طرفی برای مقایسه نتایج بدست آمده از روش آنالیز ایزوژئومتریک برنامه کامپیوتری در محیط نرم افزار متلب تهیه شده است تا با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته که همان اعمال روش پیکره‌بندی واحد در روش اجزای محدود استاندارد است، به محاسبه توزیع تنش و کرنش و در نتیجه محاسبه فاکتورهای شدت تنش پرداخته شود. لازم به ذکر است که در این کُد به تلفیق روش مجموعه تراز با روش اجزای محدود توسعه یافته پرداخته‌ایم تا بتوانیم مسیر حرکت ترک را که بعنوان یک مرز متحرک می‌باشد، تعقیب نماییم. محاسبه فاکتورهای شدت تنش در روش اجزای محدود توسعه یافته نیز بوسیله انتگرال اندرکنش برای مود مرکب محاسبه می‌شود. سپس مثال‌هایی از رشد ترک لبه‌ای و میانی به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه خواهد شد.

نتایج بدست آمده از هر دو روش آنالیز ایزوژئومتریک و روش اجزای محدود توسعه یافته برای مساله صفحه محدود با ترک لبه‌ای و میانی با حل دقیق برای توزیع تنش در همان صفحه مقایسه شده است. البته بدلیل ویژگی خاص روش اجزای محدود توسعه یافته که آن را به انعطاف‌پذیرترین روش بر پایه مش در مساله شکست و رشد ترک تبدیل نموده است، از طریق غنی‌سازی و کاربرد روش مجموعه تراز به تولید مرزهای ناهمگن مستدیر داخلی به شکل حفره و مرز ناهمگن نرم یا سخت پرداخته شده و متعاقباً اثرات مرزهای ناهمگن داخلی بر مقادیر فاکتور شدت تنش مورد ارزیابی قرار داده می‌شود.

همچنین مساله رشد ترک خستگی برای ترک لبه‌ای و میانی افقی بر پایه قانون پاریس در رشد پایدار ترک خستگی به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته شبیه‌سازی شده است.

مطالب ارائه شده در رساله به این ترتیب خواهد بود:

در فصل دوم به ارائه توضیحاتی در خصوص روش‌های عددی پرکاربرد در مفهوم مکانیک شکست می‌پردازیم. در این فصل اصول کلی حاکم بر روش‌های عددی اجزای محدود استاندارد، روش المان مرزی، روش بدون‌مش و روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه خواهد شد. در فصل دوم طریقه غنی‌سازی نقاط گرهی اجزای محدود و ایجاد درجات آزادی اضافی بمنظور تحمیل ناپیوستگی بر مساله و اصول کلی روش مجموعه تراز در دنبال نمودن مرز متحرک بیان می‌گردد.

در فصل سوم، اصول کلی روش آنالیز ایزوژئومتریک ارائه خواهد شد. در این فصل نحوه تشکیل توابع پایه بی‌اسپیلاین و نربز توضیح داده خواهد شد. سپس نحوه بدست آوردن منحنی‌های بی‌اسپیلاین و نربز بیان خواهد شد. تعریف بردار گرهی، نقاط کنترلی و در نتیجه تعریف وصله ارائه شده و طریقه بدست آوردن سطوح و احجام نربز توضیح داده خواهد شد. در انتهای فصل سوم نحوه گسسته‌سازی دامنه در روش آنالیز ایزوژئومتریک برای حل مساله الاستواستاتیک و نحوه اعمال شرایط مرزی اساسی و طبیعی بر مرزها توضیح داده می‌شود.

در فصل چهارم، مفهوم مکانیک شکست و پارامترهای دخیل در شکست به تفصیل توضیح داده خواهد شد. مفهوم چقرمگی شکست، انرژی کرنشی، میزان نرخ رهایی انرژی کرنشی، انرژی کرنشی، انرژی پتانسیل و نرمی بیان می‌گردد. همچنین به تعریف فضای K برای توزیع تنش در مقابل نوک ترک و ارائه تعریف رابطه بین فاکتور شدت تنش و نرخ رهایی انرژی کرنشی پرداخته می‌شود. در ادامه مفهوم ترکیب مودهای شکست و معیارهای رشد ترک شامل معیار حداکثر تنش مماسی، معیار تعمیم یافته حداکثر تنش مماسی، معیار گریفیث و معیار حداقل دانسیته انرژی کرنشی تشریح خواهد شد. همچنین در فصل چهارم روش انتگرال J و انتگرال اندرکنش برای محاسبه مقادیر فاکتور شدت تنش

ارائه می‌گردد. در پایان قانون پاریس در رشد پایدار ترک خستگی و ارائه مفهوم رشد ترک خستگی ارائه خواهد شد.

فصل پنجم، به تشریح نتایج شبیه‌سازی عددی با استفاده از هر دو روش آنالیز ایزوژئومتریک و روش اجزای محدود توسعه یافته پرداخته می‌شود. در این فصل انواع ترک‌های لبه‌ای، میانی افقی و میانی مایل مورد بررسی قرار داده می‌شوند. سپس مثال‌هایی از رشد ترک در حالات مختلف نمایش داده خواهد شد. همچنین به بررسی اثرات حفره و مرز داخلی بر بزرگای فاکتور شدت تنش در مود مرکب پرداخته‌ایم. رشد ترک خستگی برای ترک لبه‌ای و میانی افقی در تعداد سیکل‌های زیاد مورد ارزیابی قرار داده می‌شود.

در فصل ششم جمع‌بندی و نتیجه‌گیری مباحث مطروحه انجام گرفته و پیشنهادات برای کارهای آینده ارائه شده است. در **بخش هفتم** مراجع مورد استفاده در این رساله ارائه خواهد شد.

۱-۱- فرضیات

کلیه مراحل شبیه‌سازی رشد ترک با فرض رفتار الاستیک برای تمام مصالح صورت می‌گیرد. در شرایط ایجاد منطقه پلاستیک فرض بر آن است که تسلیم در محدوده کوچکی در نوک ترک اتفاق افتاده است. در فرایند محاسبات سطوح ترک بدون تنش فرض شده است. تمامی دامنه‌هایی که مدل خواهند شد، صفحات حاوی ترک از پیش تعریف شده هستند. همچنین فرض شده است که ترک با خارج نمودن مقداری از ماده در نوک ترک ایجاد می‌گردد. در مسایل رشد ترک، با هر مقدار از فاکتور شدت تنش موثر، گسترش ترک رخ خواهد داد. به عبارت دیگر رشد ترک مستقل از میزان ظرفیت شکست مصالح در نظر گرفته شده است. در مسایل رشد ترک خستگی میزان ظرفیت شکست در رشد پایدار ترک خستگی لحاظ می‌گردد. مسایل دو بعدی در شرایط کرنش صفحه‌ای آنالیز می‌شوند. در فرایند محاسبات از اثرت دما بر توزیع تنش در صفحات حاوی ترک یا هر ناپیوستگی دیگر صرفنظر شده است.

۱-۲- مروری بر منابع- روش آنالیز ایزوژئومتریک

در این قسمت به معرفی بخشی از مراجع مورد استفاده در موضوع روش آنالیز ایزوژئومتریک و گستردگی کاربرد این روش پرداخته شده است.

هیوز[1] مفهوم آنالیز ایزوژئومتریک با استفاده از نربز را در ایجاد روش جدیدی در مکانیک محاسباتی بر پایه پیشرفت‌های جدید در هندسه محاسباتی خلق نمود [۲۹, ۳۰].

بازیلوز[2] و هیوز مبانی محاسباتی ریاضی روش ایزوژئومتریک با کاربرد نربز را تولید نمودند. آنها ویژگی‌های تقریب و پایداری روش را در مفهوم بهبود شبکه به روش h مطالعه نمودند. به علاوه، آنها روش جدیدی را در تقریب که برای نربز مناسب می‌باشد توسعه دادند [۳۱].

کوترول[3] و همکاران اثرات هموراری توابع پایه را بر دقت حل مساله در روش آنالیز ایزوژئومتریک در چارچوب استفاده از نربز بررسی نمودند. همچنین آنها یک استراتژی جدید را در بهبود محلی که بتواند در حل مساله پوسته به کار گرفته شود را توسعه دادند [۳۲].

هیوز و همکاران مطالعه بر روی قوانین گوس-کوادریچر را در آنالیز ایزوژئومتریک بر پایه نربز آغاز نمودند. آنها قوانین موثر و کارایی را در محاسبات مربوط به ماتریس‌های جرم، سختی و همرفت را توسعه دادند [۳۳].

آوریچیو[4] و همکاران مسایل صفحه‌ای الاستیک غیر قابل تراکم را بوسیله فرمولاسیون تابع جریان[5] را مطالعه کرده همچنین طرح عددی این روش را در چهارچوب نربز توسعه دادند. همچنین آنها روش گالرکین ناپیوسته را برای نگاشت چندگانه به عبارتی دامنه‌های متعدد متصل به یکدیگر پیشنهاد نمودند [۳۴].

کوترول و همکاران مطالعه آنالیز ایزوژئومتریک را در زمینه آنالیز ارتعاش سازه‌ای آغاز نمودند. آنها بر مفهوم بهبود شبکه به روش k به عنوان شیوه‌ی مرتبه بالاتر در اعمال توابع پایه هموار، که مرتباً در

1 - Hughes
2- Bazilevs
3- Cottrell
4- Auricchio
5- Stream function

محاسبات ارتعاشی استفاده شده است، پرداختند. آنها آنالیز ایزوژئومتریک را در حل چند مثال ساده در ارتعاش سازه‌ای به کار بردند. روش k نسبت به روش p یا همان المان‌های مرتبه بالاتر اجزای محدود، دقت بالاتری را در طیف فرکانسی نشان داد [۳۵].

بازیلوز و همکاران یک فرمولاسیون کامل همبسته را در آنالیز اندرکنش سیال-سازه برای سیال غیر قابل تراکم برروی یک دامنه متحرک با ماده جامد هایپرالاستیک غیرخطی توسعه دادند. فرمولاسیون ایزوژئومتریک بر پایه نربز را در مدل‌سازی همبسته اندرکنش سیال- سازه با حضور سیال غیرقابل تراکم و ماده جامد الاستیک غیرخطی و همچنین امکان تغییر شکل‌های بزرگ سازه‌ای توسعه دادند. آنها از این روش در مدل‌سازی جریان خون در رگها استفاده نمودند [۳۶].

وانگ[1] و همکاران روشی را برای اعمال بهتر شرایط مرزی در آنالیز ایزوژئومتریک در حالت شرایط مرزی همگن و غیر همگن ارائه نمودند. آنها از یک انتقال برای نقاط کنترلی مرزی برای انتقال به مرز واقعی دامنه استفاده نموده‌اند [۳۷].

مایسور[2] و همکاران از نمایش نربز در دنبال نمودن مرزهای متحرک و تغییر توپولوژی در خلال تغییر فاز استفاده نمودند. آنها در کار خود بوسیله روش ایزوژئومتریک مرزها را به صورت صریح و بوسیله تکنولوژی نربز مدل نموده و هر دو مساله تغییر شکل و توپولوژی را برآورد نمودند [۳۸].

سویا[3] و همکاران به بهبود دادن نربز در آنالیز سه بعدی اجزای محدود پرداختند. به طور کلی توجه خاص آنها در این کار مدل کردن هندسه دقیق در اجزای محدود است. در واقع آنها از امتیاز مدل نمودن واقعی هندسه و مرزهای فضای سه بعدی با استفاده از نربز بهره بردند. در کار آنها المان‌هایی که با مرز تقاطعی ندارند، از روش استاندارد اجزای محدود در توابع درونیاب و انتگرال‌گیری عددی استفاده شده و در حالتی که المان با مرزی که بوسیله نربز تولید شده است، تقاطع داشته باشند، نیازمند تولید توابع چند جمله‌ای تکه‌ای خاص و انتگرال عددی خاص می‌باشند [۳۹].

1- Wang
2- Mysore
3- Sevilla

گومز[1] و همکاران در مطالعه‌ای معادلات هم دمای ناویر–استوکس-کورتوج را با ابزار ایزوژئومتریک آنالیز نمودند. آنها در این مطالعه به مدل‌سازی جریان دو فازی آب / آب - بخار به صورت عددی پرداختند، آنها روش حل عددی را بر پایه ایزوژئومتریک فرموله کرده‌اند که امکان حل مستقیم برای عملگرهای دیفرانسیلی- جزئی مرتبه بالا را دارد. از این جهت که معادله دیفرانسیل مورد توجه دارای عملگری از مرتبه سه است، به شدت حل این مساله را در اجزای محدود کلاسیک محدود می‌سازد. دلیل این است که حضور عملگر مرتبه سوم الزام می‌کند که توابع پایه، هموار تکه‌ای و پیوستگی C^1 سراسری داشته باشند. در حالیکه تعداد بسیار محدودی از المان‌های دو بعدی اجزای محدود هستند که ویژگی C^1 را دارا بوده و قابلیت مدل‌سازی هندسه پیچیده باشند [۴۰, ۴۱].

حسنی و همکاران به توسعه روش آنالیز ایزوژئومتریک در مساله بهینه‌سازی شکل و توپولوژی در مهندسی سازه‌ها پرداختند [۴۲].

۱-۳- مروری بر منابع- مکانیک شکست

در این قسمت بخشی از مطالعات پیشین در موضوع مکانیک شکست اشاره خواهد شد.

یان[2] به بررسی فاکتورهای شدت تنش و رشد ترک در مود مرکب پرداخت. در این مطالعه یک معیار شکست مود مرکب ترک با لحاظ نمودن پارامترهای شکست بر روی مرز الاستیک- پلاستیک نادای حول نوک ترک ارائه شده است. در واقع در این مطالعه به بررسی معیارهای مختلف رشد ترک پرداخته شده است. همچنین به بررسی و ارائه معیار جدیدی در رشد ترک در مصالحی که دارای تنش تسلیم‌های مختلفی در کشش و فشار هستند پرداخته شده است [۴۳].

گینر[3] و همکاران رشد ترک خستگی ناشی از سایش با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها در این مطالعه با تغییر در زیرتابع‌های برنامه Abaqus به مدل‌سازی رشد ترک خستگی پرداخته‌اند [۴۴].

[1]- Gomez
[2]- Yan
[3]- Giner

سوترادهار[1] و همکاران با استفاده از روش المان مرزی گالرکین متقارن به محاسبه T-stress و فاکتورهای شدت تنش برای مود مرکب ترک با انتگرال اندرکنش پرداخته‌اند. آنها در این مطالعه به بررسی مدل‌سازی ترک در مود مرکب در روش عددی المان مرزی گالرکین در حالت دو بعدی و استفاده از انتگرال اندرکنش در محاسبه همزمان هر دو فاکتور شدت تنش با یک بار انتگرال‌گیری و بدون تجزیه انتگرالی-J پرداخته‌اند [۱۸].

تیلور[2] و همکاران مکانیک شکست با رشد محدود ترک [در مقابل رشد بسیار کوچک ترک] را بررسی نمودند. آنها در مطالعه خود به اصلاح تعادل انرژی گریفیث که در مکانیک شکست خطی مورد استفاده است پرداخته‌اند. اصلاحیه آنها شامل استفاده از مقدار محدود رشد ترک در مقابل رشد بسیار کوچک ترک وقتی که نرخ رهایی انرژی محاسبه می‌شود، می‌باشد [۴۵].

لویکر[3] و همکاران موضوع استفاده از آنالیز ایزوژئومتریک و اجزای محدود توسعه یافته را به طور همزمان مورد بررسی قرار دادند. آنها در این مطالعه به اعمال تغییراتی در یک برنامه اجزای محدود استاندارد که دارای توابع غنی‌سازی در مدل‌سازی ناپیوستگی ترک می‌باشد، پرداختند. آنها در این مطالعه از توابع پایه ایزوژئومتریک یعنی نربز به جای توابع مرتبه پایین اجزای محدود استفاده کرده و مساله محاسبه فاکتور شدت تنش را در دامنه حاوی ترک مورد بررسی قرار دادند [۸].

فیلد[4] و همکاران با استفاده از روش اجزای محدود به محاسبه رشد ترک پرداخته است. وی در این مطالعه به ارائه روشی می‌پردازد که از طریق آن بتوان به محاسبه مساله رشد ترک با زاویه دلخواه در حالت دو بعدی و بوسیله روش اجزای محدود پرداخت. در این مطالعه برای یافتن زاویه رشد ترک از یک روش بهینه‌سازی استفاده شده است. این بهینه‌سازی بر اساس الگوریتمی است که در آن حداکثر انرژی رهایی محلی برای چند حالت فرضی رشد ترک در نوک ترک محاسبه نموده و سپس با یک فرایند بهینه‌سازی زاویه بهینه رشد ترک را محاسبه می‌نماید [۴۶].

---
[1]- Sutradhar
[2]- Taylor
[3]- Luycker
[4]- Field

خویی[1] و همکاران با استفاده از روش اجزای محدود استاندارد از طریق روش تطبیقی با بهبود شبکه اجزای محدود دامنه در محل‌هایی که خطای حل بیشتر است، به مدل‌سازی گسترش ترک پرداختند. کار اصلی در این مطالعه تعیین خطا در محل نوک ترک و سپس ریز کردن المان‌های اجزای محدود در آن منطقه می‌باشد [۱۴].

یانگ[2] در مطالعه‌ای به مدل‌سازی خودکار رشد ترک در مود مرکب با استفاده از روش اجزای محدود مرزی مقیاس شده (SBFEM)[3] پرداخته است. وی در این مطالعه به معرفی روش جدیدی پرداخته که از ویژگی‌های اجزای محدود استاندارد و نیز مزایای روش المان مرزی استفاده می‌نماید [۱۶].

گری[4] و همکاران به مطالعه بهبود المان نقاط یک چهارم[5] مخصوص نوک ترک پرداختند. آنها در این مطالعه اصلاحیه‌ای را برای افزایش دقت نمایش بازشدگی نوک ترک ارائه نمودند [۲].

سالوادوری[6] و همکاران نیز ضمن ارائه توابع شکل خاص جدید پیشنهادی به محاسبه انتگرال به شکل حل بسته نشأت گرفته از روش المان مرزی به محاسبه مقادیر فاکتور شدت تنش در دامنه با رفتار الاستیک خطی پرداخته‌اند [۴۷].

قریشی[7] و همکاران به اعمال روش پیکره‌بندی واحد در روش آنالیز ایزوژئومتریک پرداخته و تولید ترک در صفحه را با استفاده از درجات آزادی اضافی ناپیوسته‌ساز انجام داده‌اند [۷].

سینگ[8] و همکاران به ارائه روشی جهت مدل‌سازی همزمان چندین ناپیوستگی در یک دامنه و محاسبه فاکتور شدت تنش پرداخته‌اند. روش عددی بکار گرفته شده توسط آنها روش آنالیز ایزوژئومتریک توسعه یافته می‌باشد [۴۸].

1- Khoei
2- Yang
3- Scaled Boundary Finite Element Method
4- Gray
5- Quarter-point crack tip element
6- Salvadori
7- Ghorashi
8- Singh

باردواج[1] و همکاران نیز به مدل‌سازی صفحات حاوی ترک تحت شرایط بارگذاری و مرزی مختلف با استفاده از روش ایزوژئومتریک توسعه یافته پرداخته‌اند [۴۹].

[1]- Bhardwaj

فصل دوم

روش های عددی در مکانیک شکست

۲- روش‌های عددی در مکانیک شکست

در این بخش بطور مختصر در خصوص روش‌های عددی با کاربرد فراوان در موضوع مکانیک شکست و گسترش ترک پرداخته می‌شود. لذا در خصوص روش اجزای محدود، روش المان مرزی، روش بدون‌مش و روش اجزای محدود توسعه یافته توضیحاتی ارائه خواهد شد.

۲-۱- روش اجزای محدود استاندارد

در آنالیز به روش اجزای محدود، دامنه مورد مطالعه به اجزای کوچکتری تحت عنوان المان تقسیم شده آنگاه عملگر دیفرانسیلی حاکم بر مساله با استفاده از توابع تقریب محلی (توابع درونیاب) در هر المان به صورت عددی حل می‌شوند.

همان طور که می‌دانیم در روش اجزای محدود، کل محیط به اجزای کوچکتری تقسیم‌بندی شده که به این عمل گسسته‌سازی می‌گوییم. برای آن که بتوانیم تمام جسم را تقسیم بندی کنیم، باید نوع المان مشخص شده باشد. انتخاب نوع المان بستگی به نوع آنالیز، دقت مورد نیاز و دیگر پارامترها دارد. با توجه به اینکه المان‌ها دارای شکل یکنواخت نبوده و دارای اشکال متفاوتی هستند از طرفی برای مهیا نمودن شرایط برای انتگرال‌گیری عددی یک المان با شکل و اندازه مشخص (المان مادر) انتخاب شده و کلیه روابط برای آن نوشته می‌شود. حال با استفاده از یک نگاشت مختصات المان‌های شبکه-بندی شده را به المان مادر انتقال داده و کلیه محاسبات در مختصات المان مادر صورت می‌پذیرد و سرانجام نتایج را در مختصات کلی بدست می‌آوریم. نگاشتی که برای انتقال صورت می‌گیرد همانند توابع شکل است که برای تغییر شکل استفاده می‌گردد، به همین دلیل به این المان، ایزوپارامتریک گفته می‌شود. بعد از انتخاب نوع المان می‌بایست توابع شکل یا تغییرمکان را به دست آوریم. توابع شکل در واقع توابعی فرضی هستند که توسط آن‌ها تغییرمکان هر نقطه به مختصات آن در المان مادر وابسته می‌گردد. به عبارت دیگر با مشخص نمودن مختصات یک نقطه در یک المان، توسط توابع فوق می‌توان کرنش‌های آن نقطه را محاسبه کرد. در توابع فوق ضرایب ثابتی وجود دارد که با توجه به

مقادیر تغییر مکان گرهی می‌توان آن‌ها را حساب کرد. در واقع تقریب اصلی که در روش اجزای محدود به کار می‌رود انتخاب همین توابع شکل برای جابجایی‌ها است. لذا ممکن است این منحنی‌ها (توابع) دقیقاً بر روی منحنی‌های تغییر شکل واقعی منطبق نشوند و ایجاد خطا کنند. به عبارت دیگر اختلافی بین تغییر شکل فرضی ما با تغییر شکل حقیقی پیش خواهد آمد. بنابرین هر چه جملات بیشتری (درجه آزادی بیشتر) را بتوان انتخاب کرد به تبع نتایج بهتری بدست خواهیم آورد. در ادامه باید کرنش‌ها را وابسته به جابجایی گره‌ها کنیم تا با جایگذاری جابجایی گره‌ها به جای کرنش‌ها آن مقادیر را به دست آورده و در نهایت با محاسبه کرنش‌ها، تنش‌ها را نیز محاسبه کنیم. بنابراین می‌بایست کرنش‌ها بر حسب تغییر مکان نقاط گرهی نوشته شوند. برای بدست آوردن ماتریس سختی المان، از اصل مینیمم کردن انرژی پتانسیل استفاده خواهیم کرد. این اصل بیان می‌کند که یک جسم هنگامی پایدار خواهد بود که انرژی پتانسیل آن مینیمم باشد. حال ابتدا انرژی کل جسم که ناشی از انرژی کرنشی، کار نیروهای حجمی، سطحی و نیروهای متمرکز می‌باشد را محاسبه کرده و سپس برای مینیمم کردن آن، نسبت به تغییر مکان گره‌ها مشتق می‌گیریم. در واقع با این عمل تغییر مکان نقاط گرهی به شکلی یافت می‌شوند که انرژی کل، مینیمم شده باشد. با این روش به ماتریس سختی المان دست خواهیم یافت. برای به دست آوردن ماتریس سختی، ماتریس جرم و میرایی از روش‌های انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود. سپس دسته معادلات خطی به دست آمده حل می‌شود و مقادیر متغیر اصلی مساله به دست می‌آیند.

حال برای اینکه بتوان از روش اجزای محدود استاندارد در مدل‌سازی محیط شامل ناپیوستگی استفاده نمود، باید بر معایب این روش فایق آمد. علیرغم تمامی ویژگی‌های روش اجزای محدود استاندارد، این روش دارای معایبی است که استفاده از آن را در بعضی مسایل و بالاخص بحث شکست و گسترش ترک محدود می‌سازد. یکی از معایب عمده این روش در این است که چون المان‌ها به یکدیگر بسته هستند، لذا امکان جدا شدن از یکدیگر را ندارند، بنابراین برای بررسی گسترش ترک نمی‌توان به سادگی از اجزای محدود استاندارد استفاده نمود. در واقع برای رفع نقص این روش باید برای گسترش

ترک در هر مرحله رشد ترک حداقل منطقه اطراف نوک ترک مش‌بندی مجدد گردد. همانطور که می‌دانیم مش‌بندی مجدد دامنه بسیار هزینه بردار بوده و همچنین مقداری خطا در این کار وجود دارد. همچنین یکی دیگر از مشکلات در آنالیز مساله ترک در اجزای محدود استاندارد وجود تکینگی در مقدار تابع تنش برای منطقه نوک ترک است. برای برطرف کردن این مشکل باید از المانی استفاده نمود که دارای تابع شکل غیرتکین باشد. به عبارت دیگر با استفاده از المان تکین نقاط یک چهارم[1] و یا اینکه اعمال یک مش اجزای محدود بسیار ریز در نوک ترک که خود این مساله می‌تواند منتهی به خطاهای عددی شود، مشکل تنش‌های تکین در نوک ترک برطرف می‌گردد. بنابراین تمامی این موارد موجب کاهش توانایی‌های روش اجزای محدود استاندارد در برآورد مسیر گسترش ترک شده‌اند.

به طور کلی از سال ۱۹۶۷ اجزای محدود در گسترش ترک به کار برده شده است. این روش دارای مزایایی است اما معایبی نیز دارد که استفاده از این روش را در گسترش اتوماتیک ترک مشکل نموده است. حال چنانچه بخواهیم از روش اجزای محدود استاندارد در مبحث گسترش ترک استفاده کنیم باید از فرایندهای تخمین خطا، سازگاری مش و انطباق مش با مساله استفاده شود. اول اینکه در این روش برای غلبه بر تکینگی تنش اطراف نوک ترک باید از المان‌بندی ریز استفاده نمود در نتیجه فاکتور شدت تنش صحیح به دست می‌آید و می‌توان فهمید که چه وقت و در چه جهتی ترک رشد می‌نماید. همچنین اندازه المان‌های اطراف نوک ترک نیز دارای اهمیت می‌باشند. یکی دیگر از مشکلات این روش در این است که مدل رشد ترک با جداسازی گره‌ها در مسیر ترک است. پس برای به دست آوردن یک مسیر ترک واقعی یک فرایند پیچیده مش‌بندی مورد نیاز است.

۲-۲- روش المان مرزی

روش المان مرزی[2] را می‌توان جزو روش‌های مدرن در حل برخی از معادلات دیفرانسیلی جزئی دانست. تفاوت عمده‌ای که این روش با روش‌های حجمی همچون اجزای محدود و تفاضل‌های محدود

[1]- Quarter point singular elements
[2]- Boundary element method

دارد در این است که فقط مرز دامنه مورد مطالعه گسسته‌سازی می‌شود. بنابراین بُعد مساله مورد حل یک واحد کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در مسایل سه بعدی یک سطح گسسته‌سازی شده و در مسایل دو بعدی فقط بر روی یک مرز فرایند گسسته‌سازی انجام می‌گیرد. آنالیز المان‌مرزی براساس تبدیل انتقال معادله دیفرانسیل به یک معادله انتگرالی است. تبدیل معادله دیفرانسیل به معادله انتگرالی بر اساس تابع گرین[1] ممکن است. این معادله انتگرالی همه جا [درون دامنه، روی مرز و حتی خارج دامنه] برقرار است اما معمولاً حالت روی مرز مورد توجه قرار دارد. الگوریتمهای متعددی برای تقریب عددی این معادلات انتگرالی به وجود آمده است. از جمله این روش‌ها روش گالرکین یا گالرکین- متقارن می‌باشند. برای حل مساله در حالتهای دو و سه بعدی تفاوتهایی در نحوه حل وجود دارد.

روش المان‌مرزی (BEM) یکی از روش‌های با قابلیت در آنالیز شکست محاسباتی است. در روش المان‌مرزی فقط مرز دامنه مورد نظر گسسته‌سازی شده بنابراین مجهولات مساله فقط بر روی مرز تعیین می‌شوند. این روش در مقایسه با روش اجزای محدود و روش‌های بدون‌مش که در آن کل دامنه گسسته‌سازی می‌شود دارای مزایایی از قبیل کاهش اندازه مساله است. به علاوه برای مش‌بندی مجدد دامنه در مساله گسترش ترک [که در واقع این فرایند فقط نیاز به یک عملگر محلی دارد] در منطقه حول نوک ترک ساده و آسان است. هدف از حل به روش BEM به طور کلی شامل: اولاً، حل دو تابع مرزی پایه‌ی پتانسیل و جریان (در حالت‌های الاستیسیته، جابجایی و نیرو) است. بنابراین در یک کلام می‌توان گفت که BEM برای حل مسایلی که فقط نیاز به حل مرزی دارند مناسب است. ثانیاً پس از حل برای مقادیر مرزی، مقادیر داخلی نیز قابل محاسبه می‌باشند اما این مورد از لحاظ محاسباتی هزینه‌بر می‌باشد. یک نکته جالب در خصوص BEM این است که این روش برای مسایلی که در آنها باید مشتقات با دقت بالا و مناسب تعیین شوند مناسب است. در BEM مشتقات مجهول مستقیماً از حل معادله انتگرالی محاسبه می‌شوند حال آنکه در روش اجزای محدود استاندارد ابتدا پتانسیل تقریب

[1]- Green's function

در تمام دامنه تعیین شده آنگاه با مشتق‌گیری از این تابع تقریب مشتقات به دست می‌آیند که این مشتق‌گیری با مقداری خطا همراه است. در واقع در BEM هر ناپیوستگی به صورت یک مرز در هندسه مساله مشخص می‌گردد. همچنین محل‌های بارگذاری و نیز تکیه گاه‌ها نیز در مرزها تعیین می‌شوند. سطح ترک مورد نظر در مساله شکست به صورت دو سطح مرزی بالا و پایین تعریف می‌شود.

از طرفی معایب عمده روش المان‌مرزی (BEM) شامل این موارد است: (i) دسته معادلات غیرمتقارن و ماتریس‌های بدست آمده پر در روش المان مرزی تجمعی[۱] که حل آنها ساده نیست، (ii) محاسبات ریاضی پیچیده که برای مهندسین تا حدودی نامأنوس است و (iii) همچنین به کار بردن این روش در مسایل ناهمگن و غیرخطی تا حدودی ناشناخته باقی مانده است [۵۰].

۲-۳- روش‌های بدون‌مش

پیدایش روش‌های بدون‌مش[۲] را می‌توان به ارائه روش هیدرودینامیک ذرات هموار[۳] جهت مدل‌سازی پدیده‌های نجومی بدون‌مرز مانند انفجار ستاره‌ها و ابرهای گرد و غبار توسط لوسی[۴]، گینگولد[۵] و ماناغان[۶] [۵۱, ۵۲] منسوب نمود. پس از آنها در موضوع توابع تقریب روش بدون‌مش، توسعه فراوانی صورت گرفته است که یکی از انواع روش‌های ایجاد شده تحت عنوان روش پیکره‌بندی واحد (PU)[۷] توسط بابوشکا[۸] و ملنک[۹] ابداع گردید [۵۳]. دو روش معروف و شناخته شده در مجموعه روش‌های بدون‌مش شامل روش‌های ذیل می‌باشد: روش بدون‌مش گالرکین (EFG)[۱۰] که بر پایه حالت ضعیف شده سراسری است و روش بدون‌مش پتروف گالرکین محلی (MLPG)[۱۱] که بر پایه حالت ضعیف

[1]- Collocation boundary element method
[2]- Meshless
[3]- Smoothed particle hydrodynamics (SPH)
[4]- Lucy
[5]- Gingold
[6]- Monaghan
[7]- Partition of unity
[8]- Babuska
[9]- Melenk
[10]-Element Free Galerkin
[11]- Meshless Local Petrov-Galerkin

شده محلی بوده و تنها نیازمند سلول‌های پس زمینه محلی جهت انتگرال‌گیری است [۵۴, ۵۵]. در هر دو روش نامبرده، تقریب بر پایه حداقل مربعات متحرک (MLS)[۱] صورت می‌پذیرد. اما در روش‌های حداقل مربعات متحرک، تابع درونیاب از نقاط گرهی عبور نکرده، بنابراین توابع درونیاب دارای مقدار واحد در هر گره نمی‌باشند. لازم به ذکر است که توابع به کار گرفته شده در اینگونه روش‌های بدون‌مش، تحت عنوان توابع تقریب نامگذاری می‌گردند. از آنجائیکه توابع شکل MLS معیار دلتای کرونکر را اقناع نمی‌نمایند، اعمال شرایط مرزی اساسی پیچیده خواهد شد. لذا بمنظور اعمال شرایط مرزی اساسی باید از شیوه‌های خاصی مانند روش‌های ضریب لاگرانژ، روش جریمه، تکنیک انتقال متعامد، ادغام با اجزای محدود، توابع وزن تکین، تجمع مرزی و اصل دالامبر[۲] استفاده نمود [۵۶]. از طرفی در روش‌های بدون‌مش تکنیک انتگرال‌گیری عددی نیز نیازمند بکارگیری شیوه‌های خاص دارد. مشخصاً استفاده از روش‌های بر پایه اصول پیچیده ریاضی برای جامعه مهندسین که بیشتر به دنبال کاربرد فنی روش‌های عددی هستند تا حدودی طاقت فرسا خواهد بود.

در خصوص کاربردهای روش بدون‌مش می‌توان به آنالیز تغییرشکل‌های بزرگ اشاره نمود. طی سالیان متمادی در زمینه مسایل غیرخطی هندسی و مصالح غیرخطی مطالعات فراوانی در FEM انجام گرفته است. همچنین تلاش‌های زیادی درباره آنالیز تغییرشکل‌های بزرگ در FEM صورت گرفته است اما ساختار متکی به مش اجزای محدود برای نشان دادن اعوجاج زیاد چندان مناسب نیست. روش‌های بدون مش از آن جهت که وابستگی به مش ندارند پس امکان آنالیز تغییرشکل‌های بزرگ را بدون مشکلات اجزای محدود استاندارد فراهم می‌آورند. همچنین از روش بدون‌مش در مکانیک شکست و رشد ترک استفاده می‌شود. روش‌های بدون‌مش از این حیث که گسسته‌سازی در آنها بر اساس گره‌ها و تعریف مرزها و سطوح مشترک مثل ترک صورت می‌گیرد با روش FEM تفاوت دارند. بر این اساس که تغییر در موقعیت یک گره اثری بر دیگر گره‌ها ندارد، بنابراین این روش نسبت به روش‌های اجزای محدود و تفاضل‌های محدود دارای مزایای بهتری در مساله گسترش ترک و مکانیک شکست می‌باشد.

1- Moving least square
2- D'Alembert's principle

یکی دیگر از کاربردهای روش بدون‌مش در آنالیز سازه‌های پوسته نازک است. شبیه‌سازی خطی/غیرخطی سازه‌ای پوسته نازک یک موضوع مورد بحث در مکانیک کاربردی است. از آنجا که در آنالیز مربوط به پوسته‌ها نیاز به پیوستگی در مرز المان‌ها از نوع C^1 می‌باشد و المان‌های کمی در اجزای محدود استاندارد وجود دارد که دارای این ویژگی در مرز المان‌ها باشند، می‌توان به سراغ روش‌های دیگری رفت که این ویژگی را به سادگی در اختیار محققین قرار دهند. بنابراین روش‌های بدون‌مش بر پایه تقریب حداقل مربعات متحرک چون پیوستگی C^1 را بر اساس نوع تابع تقریب به کار رفته در آن تامین می‌کند، برای انجام آنالیز سازه‌ای پوسته مناسب می‌باشد. یکی دیگر از کاربردهای روش بدون‌مش در مسایل بهینه‌سازی و آنالیز حساسیت طراحی شکل می‌باشد. مشکل اصلی مسایل بهینه‌سازی طراحی شکل، این حقیقت است که هندسه سازه، متغیر طراحی است. به عبارت دیگر مدل آنالیز مربوط به سازه باید در خلال فرایند بهینه‌سازی تغییر کند. این مساله نیازمند چندین مرتبه مش‌بندی مجدد از شکل اولیه تا شکل بهینه بر اساس FEM وابسته به مش می‌باشد که در خلال این فرایند تکرار شونده باید مش اجزای محدود تغییر نماید. از طرفی وجود شبکه‌های اجزای محدود شیبدار یا نامتوازن درخلال فرایند بهینه‌سازی می‌تواند منتهی به ناپایداری حل شود. همچنین از روش بدون مش در مسایل میکرومکانیک نیز استفاده می‌شود [۵۶].

در واقع روش‌های عددی المان‌مرزی و بدون‌مش هر کدام دارای مزایا و معایبی هستند که از جمله مهمترین مزایای دو روش فوق الذکر، کاهش دادن حجم محاسبات و اطلاعات اضافی می‌باشد. در عین حال معایبی در این دو روش وجود دارد که کار با آنها را تا حدودی در مسائل مهندسی با مشکل مواجه ساخته است. از این روی و با توجه به نقاط ضعفی که برای دو روش المان‌مرزی و بدون‌مش عنوان گردید، در این مطالعه بمنظور مدل‌سازی ناپیوستگی و متعاقباً گسترش ترک از شیوه‌های عددی جدیدی استفاده خواهد شد تا نواقص ذکر شده را تا حد امکان مرتفع سازند.

۲-۴- روش عددی اجزای محدود توسعه یافته

به طور کلی در روش اجزای محدود استاندارد، برای تولید یک ناپیوستگی همچون ترک، آن ناپیوستگی را باید بر شبکه اجزای محدود منطبق نمود. بطور کلی در روش‌های عددی که از تکنولوژی المان استفاده می‌شود، برای تولید ناپیوستگی از المان‌های واسط[1] [۵۷, ۵۸] و یا تعبیه ناپیوستگی [۵۹-۶۱] در دامنه استفاده شده است. بنابراین در برآورد گسترش ترک با روش اجزای محدود استاندارد در هر مرحله رشد ترک حداقل باید منطقه اطراف نوک ترک مش‌بندی مجدد گردد و در مساله بدون رشد ترک نیز باید منطقه نوک ترک دارای المان‌بندی بسیار ریز باشد تا بتوان محاسبات مربوط به پارامترهای شکست را با خطای کمتر انجام داد. از طرفی در روش اجزای محدود تغییر در موقعیت هر گره برابر با تغییر در تمام گره‌ها است و همانطوریکه می‌دانیم ریزتر کردن بیش از حد شبکه اجزای محدود ایجاد نوعی خطای عددی در محاسبات می‌نماید. در روش اجزای محدود، مدل‌سازی گسترش ترک بوسیله جداسازی گره‌های اجزای محدود قرار گرفته در مسیر ترک خوردگی، انجام می‌گیرد. بنابراین بمنظور بدست آوردن یک مسیر رشد ترک هموار و واقعی باید از یک فرایند مش‌بندی مجدد پیچیده استفاده نمود. الگوریتم‌های موجود در این زمینه شامل حذف-بازسازی[2] و اعمال- جداسازی[3] می‌باشند [۲۶, ۶۲, ۶۳]. همچنین در روش اجزای محدود استاندارد در منطقه نوک ترک با تکینگی تنش مواجه هستیم یعنی تنش در نوک ترک دچار تکینگی است. برای برطرف نمودن تکینگی در نوک ترک می‌توان از المان‌های ویژه تکین استفاده نمود. این المان‌ها دارای ویژگی‌های خاص می‌باشند. برای المان تکین از دو نوع المان‌های مربعی هشت گرهی و یا المان‌های مثلثی شش گرهی ویژه در نوک ترک استفاده می‌شود. نکته‌ای که در خصوص این المان‌ها باید گفت این است که موقعیت نقاط در این المان‌ها بر وجوه منتهی به نوک ترک به نصف فاصله قبلی منتقل می‌شوند. با انجام این عمل المان تولید شده قادر به محاسبه تنش‌های تکین نوک ترک می‌شود.

[1]- Interface element
[2]- Remove-rebuild
[3]- Insert-separate

بنابراین محققین به دنبال یافتن روشی بوده‌اند تا بتوان با حفظ ویژگی‌های روش اجزای محدود یک دامنه با حضور ناپیوستگی و ترک را آنالیز نمود.

به طور کلی شکل‌گیری مبنای ریاضی روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM)[1] با تعریف پیکره‌بندی واحد روش اجزای محدود (PUFEM)[2] توسط ملنک و بابوشکا آغاز گردید [۶۴]. به طور کلی مهمترین عامل در به وجود آمدن روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM)، مدل‌سازی دامنه آنالیز با حضور ناپیوستگی‌ها از قبیل حفرات و ترک می‌باشد. اولین تلاش‌ها برای توسعه XFEM به زمانی باز می‌گردد که بلیچکو و بلک در سال ۱۹۹۹ روش اجزای محدودی با حداقل مش‌بندی مجدد برای گسترش ترک ارائه نمودند [۶۵]. آنها توابع غنی‌کننده ناپیوسته‌ای را به توابع تقریب اجزای محدود استاندارد اضافه کردند تا بتوانند محاسبات مربوط به ترک موجود در مساله را انجام دهند. در واقع در این روش به گره‌های متاثر از ترک، درجات آزادی اضافی داده می‌شود. این روش به ترک اجازه می‌دهد که آزادانه در فضای مش‌بندی شده حرکت کند اما در این روش برای ترک‌های به شدت نوک تیز نیاز به یک مش‌بندی مجدد به صورت مش‌بندی ریزتر در اطراف نوک ترک وجود داشت. بعدها موئز[3] و همکاران روش را بهبود دادند و آن را اجزای محدود توسعه یافته XFEM نامیدند [۲۰, ۲۲]. در این روش بهبود یافته امکان نمایش دادن مستقل ترک از مش (شبکه اجزای محدود)، با استفاده از ایجاد تقریب غنی‌شده، از اندرکنش هندسه ترک و مش به وجود آمد.

در این مطالعه از طریق کدنویسی به تلفیق روش‌های اجزای محدود توسعه یافته، روش مجموعه تراز و روش انتگرال اندرکنش به شبیه‌سازی مدل‌های پیچیده در گسترش ترک پرداخته می‌شود. بدین منظور برنامه کامپیوتری نوشته شده است که امکان مدل‌سازی همزمان انواع ناپیوستگی‌های داخلی از جمله ترک به دو صورت لبه‌ای و میانی با هر نوع زاویه قرارگیری دلخواه در دامنه، حفره میانی و انواع مرز ناهمگن داخلی نرم و سخت را دارا می‌باشد. تمامی مرزهای داخلی ناپیوسته از طریق فرایند غنی-

1- Extended finite element method
2- Partition of unity finite element method
3- Moes

سازی[1] نقاط گرهی تولید شده است. لذا میزان تأثیرگذاری مرزهای داخلی متفاوت از جمله حفره دایره‌ای، مرز داخلی نرم و مرز داخلی سخت و نیز اندرکنش همزمان آن‌ها بر گسترش ترک لبه‌ای و وسط‌چین مورد مطالعه قرار می‌گیرد. لازم به ذکر است که بمنظور محاسبه فاکتورهای شدت تنش[2] از روش مبتنی بر پایه انرژی، انتگرال J که به عنوان یک روش مناسب در محاسبه فاکتور شدت تنش به شمار می‌آید، استفاده شده است. از آن جهت که تولید هندسه‌های پیچیده مد نظر قرار دارد، برای اینکه بتوان میزان فاکتورهای شدت تنش مود مرکب را محاسبه نمود از روش انتگرال اندرکنش برای محاسبه همزمان فاکتورهای شدت تنش استفاده شده است. همچنین جهت افزایش دقت در انتگرال‌گیری عددی حول نوک ترک، فرایند زیرمثلث‌سازی المان‌های مربعی متأثر از ترک در کُد گنجانده شده است. کُد تهیه شده در برگیرنده مسائل شکست در محدوده الاستیک خطی[3] می‌باشد.

۲-۵- اصول کلی روش اجزای محدود توسعه یافته

در این بخش به چگونگی فرایند غنی‌سازی در XFEM پرداخته می‌شود. فرض کنید که $\mathbf{x}$ یک نقطه در مدل اجزای محدود باشد. همچنین فرض کنید که در دامنه‌ای با n گره گسسته‌سازی شده یک ناپیوستگی وجود داشته باشد. در اجزای محدود توسعه یافته از تقریب جابجایی زیر برای برآورد تغییرمکان یک نقطه استفاده می‌شود [۶۵].

$$\mathbf{u}^{\mathrm{h}}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{u}^{\mathrm{FE}} + \mathbf{u}^{\mathrm{enr}} = \sum_{j=1}^{n} N_j(\mathbf{x})\mathbf{u}_j + \left(\sum_{k=1}^{m} N_k(\mathbf{x})\nu(\mathbf{x})\,\mathbf{a}_k\right) \qquad (۱-۲)$$

که، $\mathbf{u}_j$، بردار درجات آزادی گرهی معمول در روش اجزای محدود استاندارد بوده و $\mathbf{a}_k$، درجات آزادی اضافی است که به مدل اجزای محدود استاندارد اضافه شده است. همچنین $\nu(\mathbf{x})$، تابع ناپیوسته غنی کننده‌ای است که برای دسته نقاط متاثر از وجود ترک یا ناپیوستگی تعریف می‌گردد. در رابطه (۲-۱)، $N_j(x)$ توابع شکل استاندارد اجزای محدود می‌باشند.

[1]- Enrichment
[2]- Stress intensity factors
[3]- Linear elastic fracture mechanics

به طور کلی برای مدل‌سازی یک ترک در مصالح همگن، دو الگوی غنی‌سازی متفاوت به کار گرفته می‌شود. برای المانی که به طور کامل با ترک (بدنه ترک) قطع یا بریده شده باشد غنی‌سازی توسط تابع هویساید[1] به طریق زیر استفاده می‌شود. تابع هویساید در واقع یک تابع علامت است که در نمایش ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته به کار گرفته می‌شود [۱۹, ۶۶, ۶۷].

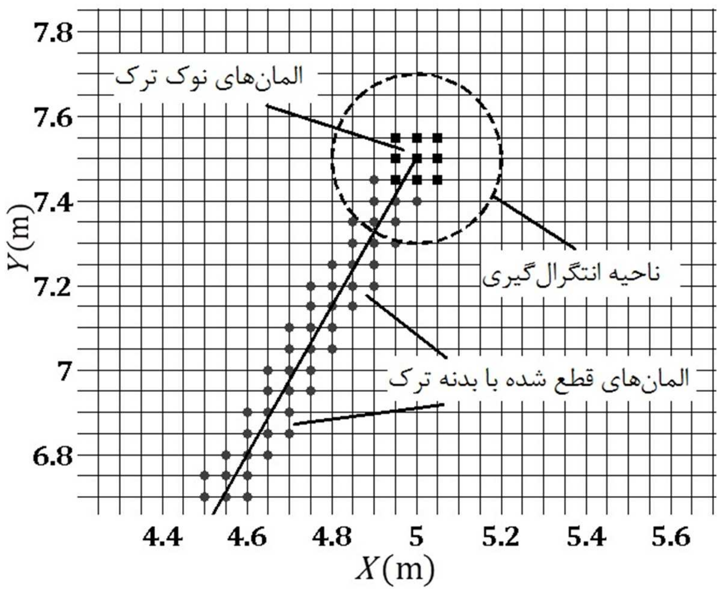
$$h(x)=\begin{cases}+1 & \text{Above Crack}\\ -1 & \text{Below Crack}\end{cases} \qquad (۲-۲)$$

در نتیجه با این عمل ناپیوستگی مورد نظر به صورت ضمنی به المانی که بوسیله ترک بریده شده است اضافه می‌گردد. برای حالتی که المان حاوی نوک ترک باشد از توابعی استفاده می‌شود که بدواً توسط فلمینگ در سال ۱۹۹۷ ارائه شده‌اند. روابط ارائه شده توسط فلمینگ برای نمایش جابجایی دامنه نوک ترک در روش بدون - مش گالرکین بوده و بعدها توسط بلیچکو نیز تکرار شده‌اند [۲۵, ۶۸]. فضای جابجایی‌های نوک ترک به شکل چهار تابعی که در رابطه (۲-۳) آورده شده است، می‌باشند.

$$\phi_\alpha(x)_{,\alpha=1-4}=\left[\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\,\sin\theta\,\cos\frac{\theta}{2},\ \sqrt{r}\sin\theta\,\cos\frac{\theta}{2}\right] \qquad (۳-۲)$$

که، r و θ مختصات قطبی نسبت به مختصات محلی نوک ترک می‌باشند. لازم به ذکر است که در مراحل حل تمام محاسبات نسبت به مختصات محلی نوک ترک منتقل می‌شوند. باید توجه داشت که توابع غنی‌سازی نشان داده شده، معرف ناپیوستگی دو سر ترک در المان‌هایی که شامل نوک ترک می‌باشند، هستند. در حالیکه تابع هویساید در رابطه (۲-۲) همین فرایند را برای المان‌های بریده شده توسط ترک انجام می‌دهد. زمانیکه نقطه‌ای لازم باشد که با هر دو تابع غنی شود فقط از توابع غنی کننده مربوط به نوک ترک استفاده می‌شود. در شکل (۲-۱) نحوه غنی‌سازی نقاط متاثر از نوک و بدنه ترک در خلال چند مرحله مدل‌سازی رشد ترک نشان داده شده است.

[1]- Heaviside functions



شکل (۲-۱) نمایش شبکه اجزای محدود، نقاط گرهی غنی‌سازی شده و محدوه انتگرال‌گیری

تقریبی که در رابطه‌های (۲-۱) ارائه شده است بعلت وجود درجات آزادی غنی‌شده، مشخصه درونیابی را اقناع نمی‌کند، یعنی اینکه $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}^h(x_i)$. یک راهکار عملی بمنظور اقناع مشخصه درونیابی در روش اجزای محدود توسعه یافته استفاده از تابع غنی‌سازی تبدیل‌یافته[1] است به صورتی که

$$\Upsilon_i(x) = \nu(x) - \nu_i(x) \qquad (۲-۴)$$

که $\Upsilon_i(x)$ تابع غنی‌سازی تبدیل‌یافته برای گره i ام و $\nu_i(x)$ مقدار $\nu(\mathrm{x})$ در گره i ام است. بنابراین چنانچه تابع غنی‌سازی $\Upsilon_i(x)$ در گره صفر شود، مشخصه درونیابی بازیابی می‌گردد.

۲-۶- اصول کلی روش مجموعه تراز

یکی از جنبه‌های مهم در مسائلی که با مرز ناپیوستگی Γ_d مواجه هستیم، دنبال کردن تغییرات آن مرز است. روش مجموعه تراز[2] یک روش محاسباتی برای دنبال نمودن مرز متحرک به شمار می‌آید. در این روش به جای دنبال کردن خود مرز، یک منحنی پایه را انتخاب نموده و آن را بر روی یک

[1]- Shifted enrichment function
[2]- Level Set Method (LSM)

سطح ایجاد می‌نماییم. مزایای دیگر این روش، انجام گرفتن محاسبات بر روی یک شبکه ثابت اولری[1] است که به طور طبیعی تغییرات توپولوژی مربوط به مرز را کنترل نموده و به علاوه قابل کاربرد برای مسایل با ابعاد بالاتر نیز می‌باشد. در واقع تابع روش مجموعه تراز در ترکیب با روش اجزای محدود توسعه یافته بمنظور نمایش مرز مصالح همانند هندسه ترک، فضای خالی و مرز نرم و سخت به کار گرفته خواهد شد. همچنین در این مطالعه از تکنیک نوار محدود[2] در محاسبات استفاده شده است. مزیت عمده این تکنیک محدود نمودن نقاط گرهی است که در فرایند محاسبات وارد می‌شوند بنابراین حجم محاسبات در کل کاهش می‌یابد [۶۹-۷۱].

تابع مجموعه تراز $\phi(x(t),\ t)$ یک تابع پیوسته است که $x(t)$ معرف یک نقطه در دامنه Ω است. تابع مجموعه تراز دارای ویژگی‌هایی به شرح رابطه (۲-۵) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &\phi\big(x(t),t\big)<0 \quad \text{for } x\in\Omega \\ &\phi\big(x(t),t\big)>0 \quad \text{for } x\notin\Omega \\ &\phi\big(x(t),t\big)=0 \quad \text{for } x\in\Gamma_d \end{aligned} \tag{۵-۲}$$

بنابراین مرز مورد نظر در هر زمان t، با یافتن $x(t)$ به نحوی که رابطه (۲-۶) را اقناع نماید جانمایی می‌شود.

$$\phi(x(t),t)=0. \tag{۶-۲}$$

رابطه (۲-۷) عموماً به عنوان معادله مجموعه تراز ارجاع داده می‌شود. با مشتق‌گیری از این رابطه نسبت به زمان و با گسسته‌سازی معادله دیفرانسیل جزئی حاصل به کمک روش تفاضل محدود، گرادیان ϕ تقریب زده می‌شود. آنگاه تابع ϕ در مسایل دو بعدی به صورت رابطه (۲-۷) تعیین می‌گردد.

$$\phi^{n+1}=\phi^n-\Delta t\left(u^n\phi^n_{,x}+v^n\phi^n_{,y}\right) \tag{۷-۲}$$

[1]- Eulerian mesh
[2]- Narrow band

که u و v به ترتیب مولفه‌های x و y سرعت مرز متغیر می‌باشند. گام زمانی Δt بر اساس شرط کورنت-فردریچ-لوی[1] تعیین می‌گردد [۶۹, ۷۲].

به طور کلی دو تابع مجموعه تراز ϕ و ψ برای مدل‌سازی و دنبال کردن مسیر رشد ترک لازم می‌باشد. یکی از این توابع برای نمایش مسیر بدنه ترک و دیگری برای دنبال کردن مسیر نوک ترک است. در این شیوه، مسیر بدنه ترک با استفاده از تابع مجموعه تراز صفر $\psi(x(t),t)$ نمایش داده می‌شود. بنابراین ترک در موقعیتی است که شرایط رابطه (۲-۸) صادق باشد.

$$\begin{cases}\phi\left(x\left(t\right),t\right)\leq 0\\ \psi\left(x\left(t\right),t\right)=0\\ \phi_{,i}\,\psi_{,i}=0\end{cases} \qquad (۸-۲)$$

الگوریتمی که در کُد در نظر گرفته شده است این امکان را فراهم آورده است تا تمامی فرایند تعیین نقاط گرهی که غنی‌سازی می‌بایست در خصوص آن‌ها انجام پذیرد، بطور خودکار از طریق توابع مجموعه تراز انجام گیرد. بدین منظور ابتدا شعاع پهنای باند اطراف نوک ترک محاسبه می‌شود. پس از آن طول ترک و به عبارتی فواصل نوک‌های ترک نسبت به یکدیگر بدست آورده می‌شود. از اطلاعات بدست آمده زاویه قرارگیری ترک در دامنه مشخص شده و بر اساس طول ترک و پهنای باند که خود تابع اندازه المان است، شعاع مربوط به جستجوی گرهی بمنظور تعریف توابع مجموعه تراز مشخص می‌گردد. سپس، فاصله همه نقاط دامنه نسبت به نوک ترک تعیین و با مرجع قرار دادن مختصات نوک ترک، مختصات جدید بر حسب موقعیت نوک ترک بدست می‌آید. با داشتن بردار فاصله نقاط نسبت به نوک ترک جستجوی مربوط به تعیین نقاط گرهی که در شعاع تعیین شده قرار دارند انجام می‌پذیرد. پس از آن گره‌هایی که در شعاع تعریف شده قرار گرفته‌اند تعیین شده و به محاسبه توابع مجموعه تراز پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که در روش به کار گرفته شده توابع مجموعه تراز تنها برای گره‌های واقع در شعاع پهنای باند محاسبه گردیده است. آنگاه بمنظور تعیین شماره گره

[1]- Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

المان‌هایی که در پهنای باند قرار گرفته‌اند توابع مجموعه تراز گرهی غیر صفر پیدا شده و شماره گره کلی منحصر به فرد منسوب به آن گره مشخص می‌شود. در این روش مقادیر توابع مجموعه تراز فقط در نقاط ذخیره می‌شوند. پس با استفاده از توابع شکل اجزای محدود می‌توان مقادیر توابع مجموعه تراز را در شبکه اجزای محدود به دست آورد.

۲-۷- تولید حفره و مرز داخلی

در روش اجزای محدود استاندارد حضور مرزهای داخلی مانند ترکها، حفرات و مرزهای ناهمگن داخلی می‌بایست طی فرایند تولید مش (شبکه اجزای محدود) ایجاد شوند. بدین ترتیب که باید لبه‌های المانها بر مرزهای داخلی هندسی منطبق گردد. روش XFEM چنین فرایندی را تسهیل نموده بنحوی که الزامی برای انطباق لبه المان‌های اجزای محدود بر مرزهای داخلی نیست. به طور کلی مرزها (فضای خالی[۱] و اینکلوژن[۲]) به صورت استاتیکی بوده و از تئوری مجموعه تراز جهت نمایش آن‌ها استفاده خواهد شد. برای فضای خالی دایروی از مجموعه تراز به صورت رابطه (۲-۹) استفاده می‌گردد [۷۳]

$$\varphi_I = \min_{\substack{\mathbf{x}_c^i \in \Omega_c^i \\ i=1,2,\ldots,n_c}} \left\{ \left\| \mathbf{x}_I - \mathbf{x}_c^i \right\| - r_c^i \right\}, \tag{۲-۹}$$

که Ω_c^i دامنه i امین فضای خالی، n_c تعداد فضاهای خالی دایروی، x_c^i و r_c^i به ترتیب مرکز و شعاع دایره می‌باشند. توصیف هندسی یک مرز (مرز یک دایره یا اینکلوژن) از طریق منحنی مجموعه تراز صفر $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{x}, t) = 0$ صورت می‌پذیرد. در واقع، توصیف فیزیکی مرز از طریق تابع $\varphi(\mathbf{x}, t)$، به یک نمایش تابعی گسسته، تبدیل می‌شود. درجات آزادی هندسی در یک مجموعه نقاط ثابت $\mathbf{x}_I$ جهت تعیین φ و همچنین موقعیت مرز، مورد استفاده قرار می‌گیرند. جهت محاسبه تابع φ در هر نقطه $\mathbf{x}$ واقع در دامنه از توابع درونیاب اجزای محدود مطابق رابطه (۲-۱۰) استفاده می‌شود [۷۳].

[1]- Void
[2]- Inclusion

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x})\varphi_I, \qquad (۱۰\text{-}۲)$$

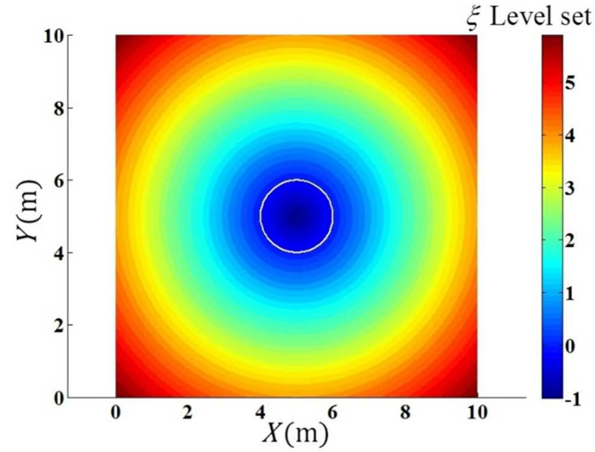
که عمل جمع بر روی تمامی نقاط واقع در المان محتوی $\mathbf{x}$ صورت می‌گیرد، $\phi(\mathbf{x})$ توابع شکل استاندارد اجزای محدود بوده و φ_I مقادیر گرهی تابع مجموعه تراز می‌باشند. انجام فرایند مدل‌سازی و محاسبات هندسی مربوط به حفرات از طریق تابع مجموعه تراز φ انجام خواهد گرفت. استفاده از روش مجموعه تراز امکان محاسبات با بازده مناسب را فراهم می‌آورد. به علاوه، شبکه اجزای محدود و هندسه داخلی با یکدیگر مرتبط بوده که در نتیجه آن یک نمایش سازگار برای مرزهای داخلی با شبکه اجزای محدود موجود، ایجاد می‌شود.

منظور از اینکلوژن، ناهمگنی با مشخصات متفاوت در ماتریس مصالح است. مدل‌سازی اینکلوژن نیازمند اقناع شرط هادامارد [۷۴] بوده که به صورت رابطه (۲-۱۱) می‌باشد.

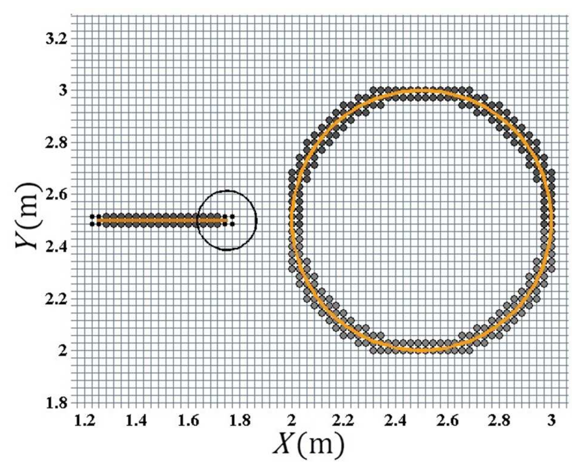
$$\mathbf{F}^+ - \mathbf{F}^- = \mathbf{a} \otimes \mathbf{n}^+, \qquad (۱۱\text{-}۲)$$

که $\mathbf{F}$ گرادیان تغییر شکل، $\mathbf{n}^+$ بردار نرمال بر مرز مصالح و $\mathbf{a}$ یک بردار دلخواه درون صفحه است و $\otimes$ علامت ضرب دایادیک یا ضرب تانسوری است [۷۵]. سوکومار و همکارانش اولین محققانی بودند که تلاش نمود تا مرز داخلی بین مصالح را از طریق فرایند غنی‌سازی در مدل هندسی ایجاد نماید. در شکل (۲-۲) تابع مجموعه تراز مربوط به مرز داخلی (اینکلوژن) نشان داده شده است. همچنین در شکل (۲-۳) نحوه غنی‌سازی نقاط گرهی و اعمال روش مجموعه تراز برای تولید مرزهای داخلی ناپیوسته نمایش داده شده است.

بمنظور اجتناب از ترکیب المان‌های غنی‌شده و غنی‌نشده و بهبود همگرایی حل، از روش پیشنهادی موئز و همکارانش در غنی‌سازی اصلاح شده مطلق که به صورت رابطه (۲-۱۲) تعریف نموده است استفاده می‌گردد [۷۶, ۷۷].



شکل (۲-۲) تابع مجموعه تراز ξ برای مرز داخلی به صورت حفره



شکل (۲-۳) نحوه غنی‌سازی نقاط گرهی در شبکه اجزای محدود جهت تولید مرز داخلی و ترک

$$\psi(x)=\sum_{I} N_I(x)\left|\zeta_I\right|-\left|\sum_{I} N_I(x)\zeta_I\right| \qquad (۱۲-۲)$$

که ζ_I مقادیر مجموعه تراز گرهی برای تابع مجموعه تراز مرز داخلی مصالح و $\psi(X)$ تابع مجموعه تراز برای مرزهای داخلی می‌باشند.

فصل سوم

روش آنالیز ایزوژئومتریک

۳- اصول کلی روش آنالیز ایزوژئومتریک

روش‌های عددی متعددی وجود دارند که هر کدام بخشی از خود را با روش آنالیز ایزوژئومتریک به اشتراک گذاشته‌اند. اولین آنها، آنالیز اجزای محدود گالرکین و دیگر روش‌ها شامل اجزای محدود به صورت تجمع محلی[1]، حداقل مربعات[2] و روش‌های بدون‌مش هستند که در تمامی‌آنها می‌توان از نربز استفاده نمود. در واقع شیوه بر پایه نربز دارای برتری‌هایی بر حالت استاندارد تمامی روش‌های عددی نامبرده می‌باشد که در ادامه به توضیح آنها پرداخته خواهد شد [۲۸]. طرح و ایده اصلی روش آنالیز ایزوژئومتریک استفاده همزمان از یک روش در تولید هندسه، شبکه‌بندی و آنالیز عددی می‌باشد. در این مسیر یک تلفیق اساسی بین تمامی روش‌های محاسباتی در یک موضوع ایجاد شده است. بنا به نظر محققین گام اصلی این روش تمرکز بر فقط یک هندسه تولید شده و انجام فرایند آنالیز بر همان هندسه تقریباً دقیق اولیه مدل می‌باشد.

هر قطعه مهندسی که دارای یک نمایش هندسی (CAD)[3] باشد، باید برای تولید مش و انجام آنالیز اجزای محدود به یک برنامه سازگار با هندسه انتقال داده شود. مطابق تعریف، منظور از CAD نمایش فضاهای هندسی به روش‌های عددی و ریاضی در کامپیوتر می‌باشد.

امروزه برای طرح‌های پیچیده، پیش‌بینی شده است که حدود ۸۰ درصد زمان تمام آنالیز مصروف مش‌بندی می‌شود و این در حالی است که هر روزه طرح‌های مهندسی پیچیده‌تر می‌شوند. برای مثال عموماً یک اتومبیل دارای ۳۰۰۰ قطعه طراحی، یک جت جنگی بیش از ۳۰۰۰۰ قطعه، بوینگ ۷۷۷ بیش از ۱۰۰۰۰۰ و یک زیردریایی هسته‌ای مدرن بیش از ۱۰۰۰۰۰۰ قطعه طراحی است. برای اینکه بتوان طرح‌هایی همچون مثال‌های آورده شده را در کامپیوتر به دقت مدل کرده و آنالیز نمود باید یک ارتباط دقیق و محاسباتی بین طرح هندسی و آنالیز برقرار شود. در روش آنالیز ایزوژئومتریک تلاش در ایجاد چنین ارتباط تنگاتنگی است [۷۸].

[1]- Collocation method
[2]- Least square
[3]- Computer aided design

طراحی مهندسی و آنالیز دو موضوع مستقل از یکدیگر نیستند. به عبارت دیگر طراحی یک سیستم مهندسی بر اساس سلسله آنالیز محاسباتی و روش‌های شبیه‌سازی است. می‌توان گفت که طراحی و آنالیز موضوعاتی متقابل هستند و کاملاً وابسته به یکدیگرند. مدل هندسی مناسب برای آنالیز به خودی خود آماده نمی‌شود بلکه نیازمند یک فرایند پیچیده تحت عنوان تولید مش از هندسه CAD می‌باشد. این چنین فرایندی بسیار وقت‌گیر و هزینه‌بر است. اخیراً تلاش‌های فراوانی جهت یکسان سازی فرایندهای تولید هندسه CAD و آنالیز آن صورت گرفته است. همانطوریکه می‌دانیم در FEM مش تولید شده تنها یک تقریب از دامنه مساله به شمار می‌آید که ما آن را به صورت دقیق می‌بینیم. این تقریب از هندسه در FEM منجر به تولید خطا در بسیاری از مسایل می‌شود. برای مثال، کمانش پوسته‌ها بسیار به نواقص هندسه مدل شده حساس است. پدیده لایه‌های مرزی و لیفت[1] و دراگ[2] در مسایل ایرودینامیک و هیدرودینامیک و لغزش بین سطوح نیز بدون نمایش هندسه دقیق قابل بررسی صحیح نیستند. یکی دیگر از موضوعاتی که در صنایع خیلی مورد توجه قرار نگرفته است بحث بهبود شبکه است. علت موضوع در این است که موضوع بهبود شبکه نیازمند اطلاع دقیق از هندسه مساله است از این رو فرایند بهبود شبکه نیازمند یک ارتباط دقیق و کامل با CAD است که این ارتباط به سادگی ممکن نیست. به طور کلی بدون دسترسی به هندسه دقیق و موضوع سازگاری‌مش[3]، همگرایی و دقت بالای نتایج در بسیاری از موارد ممکن نیست.

در خلال سال‌های اخیر روش آنالیز ایزوژئومتریک توانایی‌های خود را برای ایجاد پلی بین مدل‌سازی هندسه و آنالیز اجزای محدود نشان داده است. طرح و ایده اصلی روش ایزوژئومتریک استفاده همزمان از یک روش در تولید هندسه، مش‌بندی و شبیه‌سازی عددی می‌باشد. در این مسیر یک تلفیق اساسی بین تمامی روش‌های محاسباتی در یک موضوع ایجاد شده است. این شیوه نیازمند تغییر دادن آنالیز اجزای محدود استاندارد از وضع کنونی به شرایطی است که آنالیز بر اساس هندسه CAD دقیق اتفاق

[1]- Lift
[2]- Drag
[3]- Mesh adaptivity

بیافتند. این روش اولین بار توسط هیوز پیشنهاد شد و از آن به بعد توسعه فراوانی در روش داده شده است. روش آنالیز ایزوژئومتریک بر پایه استفاده از هندسه محاسباتی مشابه با مدل CAD می‌باشد [۳۰]. روش آنالیز ایزوژئومتریک دارای ویژگی‌های متعددی است. در بسیاری از موارد تولید مش ضروری نیست، به نظر هزینه‌بر و وقت‌گیر است، به علاوه دقت حل با تولید دقیق هندسه تامین می‌شود.

به طور کلی چندین تکنولوژی هندسی محاسباتی وجود دارد که می‌توان از آنها در روش آنالیز ایزوژئومتریک استفاده نمود. تکنولوژی NURBS، T-Splines و Subdivision Surfaces (SS) و ... از انواع تکنولوژی‌های هندسه محاسباتی می‌باشند. بیشترین تکنولوژی محاسباتی که در روش آنالیز ایزوژئومتریک استفاده می‌شود، NURBS می‌باشد. از جمله مزایای عمده نربز امکان نمایش دادن سطوح آزاد و تولید دقیق احجامی مانند استوانه، کره، اشکال بیضوی و ... است. همچنین الگوریتمهای بسیار کارا و دقیقی در تولید سطوح و احجام نربز وجود دارد. همچنین نربز دارای ویژگی‌های محاسباتی مانند امکان بهبود از طریق اعمال گره، پیوستگی C^{p-1} از مرتبه p می‌باشد. از جمله دیگر ویژگی‌های نربز می‌توان به تقلیل متغیر[۱] و نیز پوشش محدب[۲] اشاره نمود. اصولاً در توسعه و صنعتی‌سازی نربز تلاش‌ها و میلیون‌ها دلار هزینه شده است. همچنین یکی دیگر از مزایای روش آنالیز ایزوژئومتریک بر روش‌های مبتنی بر تکنولوژی المان، مربوط به شرایط پیوستگی از مراتب بالاتر است، که این ویژگی در روش آنالیز ایزوژئومتریک بدست می‌آید. در مدل‌های ناحیه چسباننده[۳] وجود پیوستگی از مراتب بالاتر بسیار لازم و با اهمیت است، چون می‌توان ترک یا ناپیوستگی را با سطوح هموارتری گسسته‌سازی نمود.

یک سطح نربز بر اساس یک دسته نقاط کنترلی تعریف می‌شود که از لحاظ توپولوژی روی یک شبکه مستطیل مربع قرار می‌گیرند.

[1]- Variation diminishing
[2]- Convex hull
[3]- Cohesive zone model

۳-۱- منحنی‌های بزیر (Bezier curves)

نامگذاری منحنی‌های بزیر پس از پیربزیر[1] که مهندسی در شرکت رنو بود انجام گرفت [۷۹]. وی در سال ۱۹۶۰ روشی را شروع نمود که تحت عنوان فرمولاسیون منحنی بزیر شناخته می‌شود. این روش حتی برای کسانی که خیلی اطلاعات زیادی از علم ریاضی نمایش منحنی ندارند ساده و کاملاً قابل فهم است. یک منحنی درجه[2] n بزیر، دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد [۸۰].

- یک منحنی بزیر دارای یک چند ضلعی کنترلی[3] است.
- یک چندضلعی کنترلی دارای n+1 نقطه کنترلی است که از صفر تا n شماره‌گذاری می‌شوند.
- یک منحنی بزیر از اولین و آخرین نقطه کنترلی عبور می‌کند.
- یک منحنی بزیر بر چندضلعی کنترلی در ابتدا و انتها مماس است.
- منحنی بزیر یک مرتبه کمتر از تعداد نقاط کنترلی مربوط به آن است.

در رابطه (۳-۱) نمایش ریاضی یک منحنی بزیر نشان داده شده است.

$$P(t)=\sum_{i=0}^{n} B_i^n(t)\,P_i \qquad (۳-۱)$$

در این رابطه t مقدار پارامتر است بین 0 تا ۱، $P(t)$ مختصات x یا y یک نقطه بر روی منحنی متناسب با t است. P_i، مختصات x یا y نقطه کنترلی i است. $B_i^n(t)$ تابع پایه برای نقطه کنترلی i است. برای منحنی درجه ۳ بزیر (n=3)، توابع پایه به صورت زیر می‌باشند.

$$B_0^3(t)=(1-t)^3,\ B_1^3(t)=3t(1-t)^2,\ B_2^3(t)=3t^2(1-t),\ B_3^3(t)=t^3 \qquad (۳-۲)$$

توجه داشته باشیم که برای هر مقدار پارامتر t مجموع توابع برابر یک می‌باشد. این اصل برای هر مقدار n درست است. گرچه منحنی‌های درجه ۳ بزیر به وفور در صنعت مورد استفاده قرار دارند اما توابع دیگر بزیر از مرتبه‌های دیگر نیز در برخی موارد کاربرد دارند. بنابراین لازم است تا برای بیان

[1]- Pierre Bezier
[2]- Degree
[3]- Control polygon

توابع بزیر از یک حالت نمایش کلی برای تمام توابع با هر درجه‌ای استفاده نمود. رابطه (۳-۳) فرمول به دست آوردن یک منحنی بزیر از مرتبه (درجه) n را نمایش می‌دهد. توابع بزیر یا توابع بلندینگ[1] با $B_i^n(t)$ نمایش داده می‌شوند.

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!}(1-t)^{n-i}t^i \qquad (۳-۳)$$

در رابطه فوق بازه مقدار پارامتر بین ۰ تا ۱ انتخاب شده است. حال باید گفت که مقدار این بازه می‌تواند دلخواه باشد و در هر بازه دیگری نیز تعریف شود. با فرض اینکه مقدار پارامتر t در بازه دلخواه (t_0, t_1) باشد رابطه (۳-۳) به فرم رابطه (۳-۴) تغییر می‌نماید.

$$B_i^n(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(\frac{t_1-t}{t_1-t_0}\right)^{n-i}\left(\frac{t-t_0}{t_1-t_0}\right)^i \qquad (۳-۴)$$

اگر به هر کدام از نقاط کنترلی دخیل در تولید یک منحنی بزیر، P_i، یک مقدار وزن اسکالر داده شود، منحنی حاصل را منحنی بزیر کسری[2] نامند. رابطه مربوط به یک منحنی بزیر کسری به صورت زیر است.

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} R_i^n(t)P_i \quad ; \quad R_i^n(t) = \frac{w_i\, B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j\, B_j^n(t)} \qquad (۳-۵)$$

که $B_i^n(t)$ نشان دهنده تابع پایه بزیر و w_i مقدار وزن نسبت داده شده به نقطه کنترلی می‌باشد. ویژگی مربوط به مقدار اسکالر وزن این است که هرگاه مقدار وزن یک نقطه کنترلی تغییر داده شود در نتیجه شکل منحنی بزیر نیز تغییر خواهد نمود. علت نامگذاری این نوع منحنی بزیر به منحنی بزیر کسری این است که توابع پایه، چندجمله‌ای‌هایی کسری هستند، یا به عبارتی به صورت نسبت دو تابع چندجمله‌ای با متغیر پارامتر t یکسان می‌باشند. یکی از کاربردهای خاص منحنی‌های بزیر کسری در نمایش سطوحی همچون دایره به صورت دقیق است.

[1]- Blending functions
[2]- Rational Bezier curve

۳-۲- نربز و بی‌اسپیلاین (B-splines and NURBS)

کلمه اسپیلاین[1] از صنعت کشتی‌سازی اقتباس شده و به نوارهای باریک بدنه کشتی مربوط می‌شود. حرف B در کلمه ترکیبی B-splines معرف Basis function است. در واقع منحنی‌های بی‌اسپیلاین سری از منحنی‌های بزیر هستند که انتها به انتها به یکدیگر متصل هستند. به عبارت دیگر یک منحنی بی‌اسپیلاین از ترکیب سری از منحنی‌های بزیر تشکیل می‌شود. فیزیک بی‌اسپیلاین این است که نقاط کنترلی بیشترین کنترل را بر شکل منحنی دارند و با دور شدن از آن نقطه کنترلی به تدریج از اثرات آن کاسته می‌شود. بنابراین در موقعیتی که نیاز به کنترل بیشتر بر شکل وجود دارد باید از نقاط کنترلی بیشتری استفاده شود. به طور کلی بی‌اسپیلاین‌ها یکسری چندجمله‌ای‌های تکه‌ای می‌باشند که دارای انعطاف‌پذیری و دقت فوق العاده‌ای در مدل‌سازی قطعات دارند. آنها از ترکیب خطی توابع پایه متناظر با دهانه فضای بی‌اسپیلاین ساخته می‌شوند. این توابع پایه دارای خاصیت پوشش محلی و پیوستگی بوده که به سادگی قابل کنترل هستند. فضاهای تولید شده با بی‌اسپیلاین‌ها دارای ویژگی پیوستگی مشابه توابع پایه‌ای سازنده خود می‌باشند. ابتدا برای اینکه بتوان مفاهیم مورد نظر را تشریح کرد باید چندین عبارت و اصطلاح تعریف شوند که در ادامه به بیان آنها پرداخته خواهد شد.

۳-۲-۱- بردار گرهی و توابع پایه

بردار گرهی[2] از یک سری افزایشی مقادیر پارامتر در فضای پارامتری تحت عنوان گره[3] تشکیل شده که مشخص کننده فاصله پارامتری برای تمام منحنی‌های بزیری است که به یکدیگر متصل شده تا یک بی‌اسپیلاین تولید نمایند. یک بردار گرهی به صورت $\Xi=\{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n+p+1}\}$ که در آن $\xi_i \in R$ گره i^{th} بوده و i نیز اندیس گرهی به صورت $i=1, 2, \cdots, n+p+1$، که p، مرتبه چندجمله‌ای و n تعداد توابع پایه (معادل نقاط کنترلی) بوده که تولید کننده بی‌اسپیلاین هستند. توابع پایه

---

[1]- Spline
[2]- Knot vector
[3]- Knot

بی‌اسپیلاین یک‌بعدی (یک متغیره) از یک بردار گرهی ساخته می‌شوند. باید توجه داشت که بیش از یک مقدار گرهی می‌تواند در یک موقعیت در فضای پارامتری قرار بگیرد.

یک بردار گرهی باز[1] گفته می‌شود اگر مقادیر گرهی ابتدا و انتهای آن به تعداد $p+1$ تکرار شوند. تکرار مقادیر گرهی در ابتدا و انتهای بردار گرهی جهت کنترل بر شرایط ابتدا و انتهای منحنی بی‌اسپیلاین است. لازم به ذکر است که بردارهای گرهی باز بردارهای استاندارد در CAD می‌باشند. آنچه که در این مطالعه مورد توجه قرار دارد نیز این نوع بردار گرهی است [۳۰, ۸۱].

توابع پایه بی‌اسپیلاین برای مرتبه p، از طریق یک رابطه بازگشتی و بر اساس بردار گرهی مفروض در فضای پارامتری تعریف می‌شوند [۸۲, ۸۳]. منظور از رابطه بازگشتی در تولید توابع پایه این است که برای مثال اگر بخواهیم توابع پایه مرتبه ۲ تولید کنیم باید توابع پایه مرتبه ۱ و صفر را داشته باشیم. بنابراین با تعریف توابع ثابت تکه‌ای ($p=0$) شروع می‌کنیم.

$$N_{i,0}(\xi)=\begin{cases}1 & \xi_i \le \xi \le \xi_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \qquad (۶-۳)$$

برای توابع مرتبه $p=1,2,3,\cdots$ از فرمول بازگشتی کوکس-دی‌بور[2] استفاده می‌شود. فرمول بازگشتی کوکس- دی‌بور به این صورت تعریف می‌شود.

$$N_{i,p}(\xi)=\frac{\xi-\xi_i}{\xi_{i+p}-\xi_i}N_{i,p-1}(\xi)+\frac{\xi_{i+p+1}-\xi}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}N_{i+1,p-1}(\xi) \qquad (۷-۳)$$

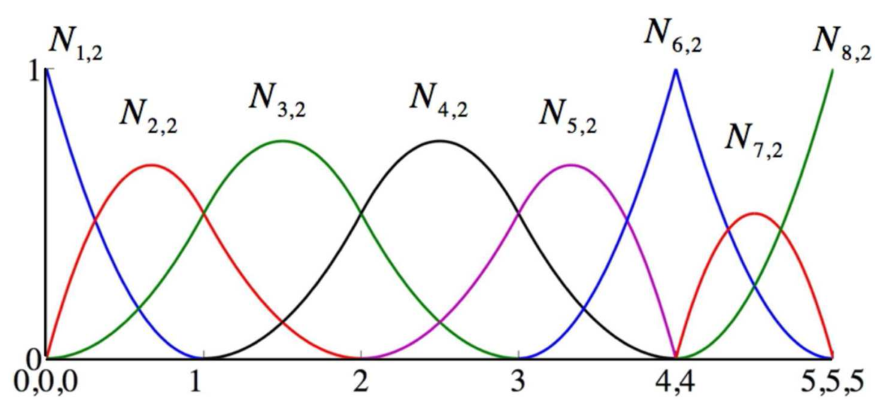
الگوریتمهای سریع و موثری در ساخت توابع پایه بی‌اسپیلاین و مشتقات آنها وجود دارد که از بین آنها الگوریتم دی‌بور معروفترین آنها به شمار می‌رود [۸۲, ۸۳]. بر اساس رابطه (۳-۶) و رابطه (۳-۷) می‌توان به مشخصات زیر برای توابع پایه B-spline پی برد.

- Partition of unity: $\sum_{i=1}^{n} N_{i,p}(\xi)=1,\quad \xi\in\left[\xi_1,\ \xi_{n+p+1}\right]$
- Point wise non-negativity: $N_{i,p}(\xi)\ge 0,\ i=1,2,\cdots,n$
- Linear independence: $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, N_{i,p}(\xi)=0 \Leftrightarrow \alpha_k=0,\quad k=1,2,\cdots,n$

[1]- Open knot vector
[2]- Cox-de Boor

- Compact support: $\left\{\xi \middle| N_{i,p}(\xi)>0\right\} \subset \left[\xi_i,\, \xi_{i+p+1}\right]$
- Control of continuity

منظور از مورد آخر یعنی کنترل بر پیوستگی این است که، اگر یک مقدار گرهی دارای k تکرار باشد (یعنی: $\xi_i = \xi_{i+1} = \cdots = \xi_{i+k-1}$)، آنگاه توابع پایه در آن موقعیت دارای پیوستگی از نوع C^{p-k} می‌باشند. همچنین زمانی که $k=p$ باشد تابع پایه C^0 بوده و در آن موقعیت به صورت درونیابی است. این مشخصات در موضوع اجزای محدود نیز بسیار مفید بوده و مورد استفاده قرار می‌گیرند. چهار مورد اول تضمین کننده درستی حل و ماتریس‌های با پراکندگی پایین در فضای کل ماتریس می‌باشند. پنجمین ویژگی امکان انعطاف پذیری بالا را فراهم می‌آورد. نه تنها توابع هموار منجر به دقت بالا برای هر درجه آزادی در مقایسه با توابع با پیوستگی C^0 می‌شوند بلکه می‌توان پیوستگی را برای حل بهتر گرادیان زیاد کاهش داد. به علاوه می‌توان از بی‌اسپیلاین‌ها برای ساختن توابع پایه‌ای که دهانه‌هایی به اندازه توابع استاندارد اجزای محدود از نوع p[1] داشته باشند استفاده نمود [یعنی یک تابع از مرتبه p که در مرزهای المان C^0 باشد]. به این گونه توابع بی‌اسپیلاین، توابع پایه برنستین[2] گفته می‌شوند. یک مثال از توابع پایه مرتبه دو بی‌اسپیلاین با بردار گرهی $\Xi = \{0,0,0,1,2,3,4,4,5,5,5\}$ در شکل (۳-۱) نشان داده شده است.



شکل (۳-۱) نمایش توابع پایه مرتبه ۲ برای بردار مفروض

[1]- P-version
[2]- Bernstein

تابع نشان داده شده به علت استفاده از بردار گرهی باز در ابتدا و انتها به صورت درونیابی بوده همچنین در $\xi=4$ نیز به علت تکرار مقدار گرهی به اندازه p (مرتبه چند جمله‌ای) درونیابی می‌باشد. توابع پایه دارای پیوستگی به فرم $C^{p-1}=C^{1}$ در مرز المان‌ها می‌باشند.

۳-۲-۲- انکر (Anchor)

باید توجه داشت که، $\{\xi_i\}_{i=1}^{n+p+1}$ و توابع پایه، $\{N_{j,p}\}_{j=1}^{n}$، با یکدیگر تناظر یک به یک ندارند. چنانچه از بردار گرهی باز استفاده شود تعداد $n+p+1$ گره و تعداد n تابع پایه خواهیم داشت. به سادگی قابل اثبات است که محل‌های خاصی در فضای پارامتری وجود دارند که توابع پایه با آنها مرتبط هستند. از این به بعد به این محل‌های خاص در فضای پارامتری انکر[1] گفته می‌شود. این محل‌ها (انکرها) به صورت زیر تعریف می‌شوند. برای هر $N_{i,p}$، انکر متناظر آن که با t_i نمایش داده می‌شود اینگونه به دست می‌آید.

$$t_i=\begin{cases}\xi_{i+(p+1)/2} & \text{IF } p \text{ is odd}\\ \frac{1}{2}\left(\xi_{i+(p/2)}+\xi_{i+(p/2)+1}\right) & \text{IF } p \text{ is even}\end{cases} \qquad (۸-۳)$$

نقاط کنترلی در تناسب یک به یک با توابع پایه هستند. به عبارت دیگر نقاط کنترلی و مقادیر انکر در تناسب یک به یک هستند. ویژگی اصلی و کاربردی مقادیر انکرها در این است که، این مقادیر تقریباً مشخص کننده محل مرکز و حداکثر مقدار تابع در فضای پارامتری می‌باشند. این مقادیر تقریباً مشخص کننده نقطه کنترلی متناظر می‌باشند.

۳-۲-۳- منحنی‌های بی‌اسپیلاین

فرض کنیم d_s معرف ابعاد فضای مورد مطالعه باشد. یک منحنی بی‌اسپیلاین در فضای d_s: R^{d_s} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$C(\xi)=\sum_{i=1}^{n}P_i\ N_{i,p}(\xi) \qquad (۹-۳)$$

[1]- Anchor

که $P_i \in R^{d_s}$ نقاط کنترلی هستند. درونیاب خطی تکه‌ای[۱] نقاط کنترلی تعریف کننده چندضلعی کنترلی است. خواص اصلی منحنی‌های بی‌اسپیلاین به شرح زیر است.

- کوواریانس مستوی[۲]: برای اینکه بتوان کوورایانس مستوی یک منحنی بی‌اسپیلاین را به دست آورد باید انتقال مورد نظر را به نقاط کنترلی اعمال نمود.
- فضای محدب[۳]: هر منحنی بی‌اسپیلاین درون ناحیه‌ای که توسط نقاط کنترلی آن که یک چندضلعی کنترلی را تشکیل داده‌اند قرار می‌گیرد.
- تقلیل تغییرات[۴]: بر اساس تعریف یک منحنی بی‌اسپیلاین نمی‌تواند بیش از چندضلعی کنترلی‌اش یک خط در R^2 یا یک صفحه در R^3 را قطع کند.

به عبارت دیگر تعداد دفعاتی که یک صفحه، منحنی بی‌اسپیلاین را قطع می‌کند بیش از تعداد دفعاتی که چندضلعی کنترلی را قطع می‌کند نیست یعنی همیشه یک خط مسقیم در فضای دو بعدی منحنی را کمتر یا مساوی چند ضلعی کنترلی قطع می‌نماید. این ویژگی به خصوص در شرایطی که با چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ مقایسه شود مشخص می‌شود. در حالت درونیاب لاگرانژ با افزایش مرتبه چند جمله‌ای میزان نوسان تابع حول نقاط داده اولیه بیشتر می‌شود. در حالیکه بی‌اسپیلاین‌ها رفتاری کاملاً متفاوت حول نقاط کنترلی از خود نشان می‌دهند. ویژگی تقلیل تغییرات باعث می‌شود تا منحنی‌های بی‌اسپیلاین یکنواخت باشند و یک خاصیت مفید به هنگام آنالیز را ایجاد کنند.

به علاوه باید اضافه نمود که منحنی‌های بی‌اسپیلاین تمام خواص مربوط به پیوستگی توابع پایه خود را دارا می‌باشند.

۳-۲-۴- توابع بی‌اسپیلاین چند متغیره

توابع پایه چند متغیره بی‌اسپیلاین از حاصلضرب تانسوری توابع پایه بی‌اسپیلاین تک متغیره به دست می‌آیند. به طور کلی از حاصلضرب دایادیک ($\otimes$) دو بردار یک ماتریس(صفحه) ایجاد شود. از این به

[1]- Piecewise linear interpolation
[2]- Affine covariance
[3]- Convex hull
[4]- Variation diminishing

بعد اندکی در نحوه نمایش روابط تغییر ایجاد خواهد شد. با d_p پارامتر، $l = 1,\dots,d_p$ نشان دهنده جهت مورد نظر است. چنانچه $d_p = 2$ (صفحه) و اگر $d_p = 3$ (حجم) را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که چنانچه از عبارت بالانویس l استفاده شد، معرف توان نیست. توابع پایه بی‌اسپیلاین از تعداد d_p بردار گرهی ساخته شده که هر کدام از آنها بیانگر یک جهت است. پس داریم:

$$\Xi^l = \left\{\xi_1^l, \xi_2^l, \dots, \xi_{n_l, p_l+1}^l\right\} \qquad (۱۰-۳)$$

که p_l نشان دهنده مرتبه چندجمله‌ای در امتداد جهت l، n_l تعداد توابع پایه اختصاص داده شده می‌باشد. هر کدام از توابع پایه بی‌اسپیلاین با $\left\{N_{il,pl}^l\right\}_{il=1}^{nl}$ نشان داده شده و با استفاده از بردار گرهی Ξ^l تعریف می‌شوند. حال لازم است تا یک چند-اندیس[1] به فرم $\mathbf{i} \in Z^{d_p}$ تعریف کنیم.

$$I = \left\{\mathbf{i} = \left\{i_1, \dots, i_{d_p}\right\} \mid i_l \in \left\{1, \dots, n_l\right\} \ \forall i_l = 1, \dots, d_p\right\} \qquad (۱۱-۳)$$

همچنین، می‌توان مرتبه‌های مختلف برای چند جمله‌ای‌ها را به صورت $P = \left\{p_1, p_2, \dots, p_{d_p}\right\}$ نشان داد. حال می‌توان برای هر چند-اندیس $\mathbf{i} \in I$، یک تابع پایه بی‌اسپیلاین با d_p بُعد تعریف نمود.

$$B_{i,p}(\xi) = \prod_{l=1}^{d_p} N_{il,pl}^l(\xi^l) \qquad (۱۲-۳)$$

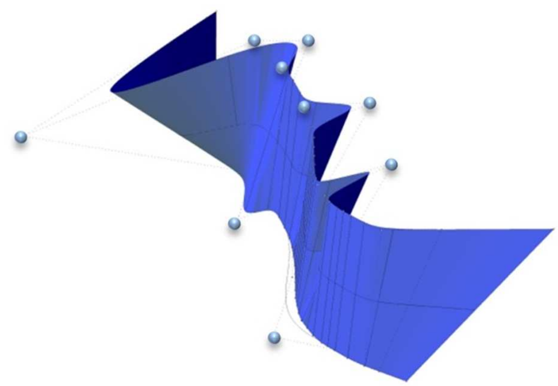
که $\xi = (\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{d_p})$. در واقع رابطه اخیر نشان می‌دهد که یک تابع پایه بی‌اسپیلاین چند متغیره از مجموع $\prod_{l=1}^{d_p} n_l$ توابع پایه متناظر با بردارهای گرهی d_p تشکیل می‌گردد. توابع پایه بی‌اسپیلاین چند متغیره تمامی مشخصات توابع یک متغیره را دارا می‌باشند.

۳-۲-۵- سطوح و احجام بی‌اسپیلاین و نربز

پس از تعریف توابع چندمتغیره می‌توان به تعریف سطوح و احجام با استفاده از بی‌اسپیلاین پرداخت. ابتدا در این بخش لازم است تا شبکه کنترلی[2] تعریف شود [۸۱, ۸۴]. در واقع شبکه کنترلی چندضلعی کنترلی در فضای d_p بعدی است. شبکه کنترلی مجموعه‌ای از نقاط کنترلی $\{\mathbf{P_i}\}_{\mathbf{i} \in I}$ است.

[1]- Multi-index
[2]- Control mesh or control net or control lattice

در شکل (۳-۲) سطح نربز و نقاط کنترلی نمایش داده شده است.



شکل (۳-۲) نمایش سطح نربز و نقاط کنترلی غیر منطبق بر هندسه فیزیکی

برای تعریف یک سطح بی‌اسپیلاین، نیاز به یک چند–اندیس $\mathbf{P}=\{p_1,p_2\}$، دو بردار گرهی $\Xi^1=\{\xi_1^1,\xi_2^1,\ldots,\xi_{n1+p1+1}^1\}$ و $\Xi^2=\{\xi_1^2,\xi_2^2,\ldots,\xi_{n2+p2+1}^2\}$ و شبکه کنترلی متناظر به فرم $\{\mathbf{P_i}\}_{\mathbf{i}\in I}$ می‌باشد. سپس سطح بی‌اسپیلاین به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\mathbf{S}(\xi)=\sum_{\mathbf{i}\in I}\mathbf{P_i}\ B_{\mathbf{i},\mathbf{p}}(\xi) \tag{۱۳-۳}$$

در رابطه فوق توابع پایه دو متغیره بی‌اسپیلاین با استفاده از رابطه (۳-۱۲) تعریف می‌شوند.

به طور مشابه برای تعریف یک فضای حجمی (سه بعدی) نیز باید $\mathbf{P}=\{p_1,p_2,p_3\}$، سه بردار گرهی به صورت $\Xi^1=\{\xi_1^1,\xi_2^1,\ldots,\xi_{n1+p1+1}^1\}$ و $\Xi^2=\{\xi_1^2,\xi_2^2,\ldots,\xi_{n2+p2+1}^2\}$ و $\Xi^3=\{\xi_1^3,\xi_2^3,\ldots,\xi_{n3+p3+1}^3\}$ و شبکه کنترلی به صورت $\{\mathbf{P_i}\}_{\mathbf{i}\in I}$ را تعریف نمود. حال حجم بی‌اسپیلاین اینگونه تعریف می‌شود.

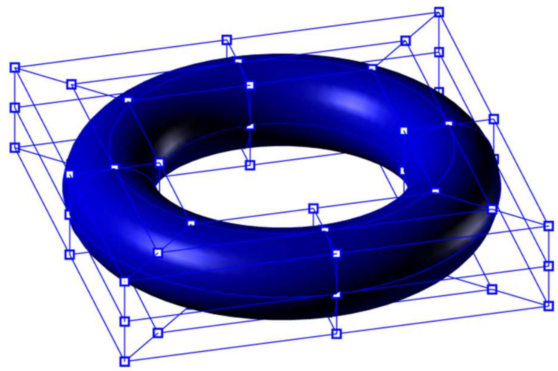
$$\mathbf{V}(\xi)=\sum_{\mathbf{i}\in I}\mathbf{P_i}\ B_{\mathbf{i},\mathbf{p}}(\xi) \tag{۱۴-۳}$$

در رابطه (۳-۱۴)، $B_{\mathbf{i},\mathbf{p}}(\xi)$ توابع پایه بی‌اسپیلاین سه متغیره هستند. در شکل (۳-۳) یک حجم نربز و شبکه کنترلی مربوط به آن نمایش داده شده است.

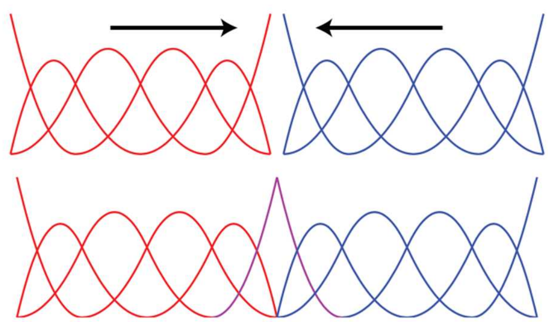
هر بی‌اسپیلاین با دسته‌ای از بردارهای گرهی، مرتبه چند جمله‌ای و نقاط کنترلی تحت عنوان یک وصله[1] نامگذاری می‌شوند. هر وصله فضای پارامتری مخصوص به خود را دارد. هندسه‌های بزرگ با

[1]- Patch

استفاده از چندین وصله ساخته می‌شوند. در شرایطی که دو وصله به یکدیگر می‌رسند، در محل تماس وصله‌ها با یکدیگر باید نقاط کنترلی و بردارهای گرهی یکسان باشند. تحت چنین شرایطی فقط پیوستگی از نوع C^0 از توابع پایه در مرز وصله‌ها به دست می‌آید. شکل (۳-۴) نحوه اتصال توابع پایه در مرز وصله‌ها را نمایش می‌دهد.



شکل (۳-۳) نمایش حجم نربز و نقاط کنترلی مربوط به حجم نربز



شکل (۳-۴) نمایش نحوه اتصال دو بردار گرهی که از بردار گرهی باز تشکیل شده‌اند، چنانچه پیوستگی از نوع C^0 باشد می‌توانند به طور یکسان رفتار نمایند

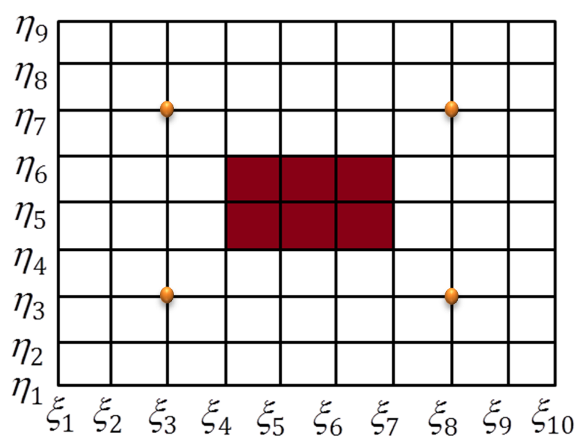
۳-۲-۶- فضاهای اندیسی، پارامتری و فیزیکی

در شکل (۳-۲) و شکل (۳-۳) شبکه فیزیکی و شبکه کنترلی در فضای فیزیکی نشان داده شده است. در واقع فضای پارامتری تصویر شبکه فیزیکی است. نگاشت بی‌اسپیلاین هر نقطه از فضای پارامتری را به نقطه‌ای در فضای فیزیکی می‌برد و تصویر خطوط گرهی[1] تحت نگاشت نربز المان‌های فیزیکی را مشخص می‌کنند. فرض کنیم بردارهای گرهی باز برای تابع تقریب مرتبه سه در هر دو جهت مطابق با

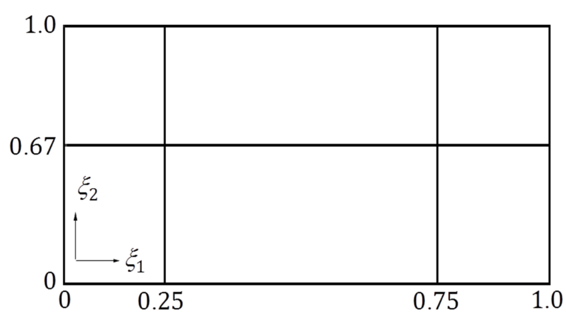
[1]- Knot line

رابطه (۳-۱۵) در نظر گرفته شده باشند. آنگاه فضای اندیس و فضای پارامتری به ترتیب مطابق شکل (۳-۵) و شکل (۳-۶) خواهند شد. در شکل (۳-۵) محدوده شروع و پایان نقاط کنترلی بر اساس درجه چند جمله‌ای نمایش داده شده است. در شرایطی که مرتبه چند جمله‌ای فرد باشد محل انکر در محل تقاطع خطوط گرهی به جای وسط المان‌ها قرار خواهد گرفت. در مجموع برای هر دو حالتی که مرتبه چند جمله‌ای زوج یا فرد باشد، انکر برای هر تابع دقیقاً در مرکز پوشش آن تابع در فضای اندیسی قرار خواهد گرفت.

$$\begin{aligned} \Xi &= \{0, 0, 0, 0, 0.25, 0.75, 1, 1, 1, 1\} \\ \mathrm{H} &= \{0, 0, 0, 0, 0.67, 1, 1, 1, 1\} \end{aligned} \quad (۳-۱۵)$$



شکل (۳-۵) نمایش فضای اندیس برای بردار گرهی مفروض



شکل (۳-۶) نمایش فضای پارامتری برای بردار گرهی مفروض

فضای اندیسی از ترسیم مقادیر گرهی با فاصله‌های یکسان و بدون در نظر گرفتن مقادیر واقعی آنها به دست می‌آید. این طرز نگاه به مساله در توسعه الگوریتم‌های حل و درک آن بسیار مفید می‌باشد. برای

مثال به سادگی می‌توان در فضای اندیسی خطوط گرهی را که محل ابتدا و انتهای منطقه پوششی هر تابع و همچنین المان‌هایی که با تابع پوشش داده می‌شوند را تشخیص داد. یک نکته جالب در فضای پارامتری این است که بعضی از گره‌ها می‌توانند مقادیر یکسان داشته باشند که در واقع در فضای اندیسی با فاصله صفر تعریف می‌شوند.

۳-۲-۷- اعمال گره

یکی از عملکردهای استاندارد در بی‌اسپیلاین اعمال گره[1] است. اعمال گره بصورت، اعمال یک گره در بردار گرهی موجود، بدون تغییر در شکل منحنی تعریف می‌گردد. به علاوه برخی از نقاط کنترلی موجود حذف شده و جایگزین نقاط کنترلی جدیدی به علت اعمال گره در بردار گرهی می‌شوند. فرایند اعمال گره به وفور در ایجاد کنترل محلی برای اصلاح بخشی از منحنی مورد نظر اتفاق می‌افتد [۸۱, ۸۵, ۸۶].

۳-۳- نربز (NURBS)

به طور کلی در فضای R^{d_s} هندسه‌هایی وجود دارد که نمی‌توان آنها را با چند جمله‌ای‌های تکه‌ای مدل نمود. مهمترین این هندسه‌ها را می‌توان از طریق یک انتقال جلوآمده[2] از بی‌اسپیلاین در فضای R^{d_s+1} که منجر به شکل‌گیری بی‌اسپیلاین کسری می‌شود به دست آورد. به ویژه از طریق این تبدیل می‌توان اشکال دایره‌ای و بیضوی را به دقت مدل نمود. لازم به ذکر است که این تبدیل بر منحنی‌های مرتبه دوم تکه‌ای اعمال می‌شود.

ساخت منحنی‌های بی‌اسپیلاین کسری در فضای R^{d_s} با انتخاب یک دسته نقاط کنترلی $\left\{\mathbf{P}_i^w\right\}$ برای یک منحنی بی‌اسپیلاین در R^{d_s+1} با بردار گرهی $\Xi=\left\{\xi_1,\ldots,\xi_{n+p+1}\right\}$ آغاز می‌گردد. به این نقاط کنترلی، نقاط جلوآمده گفته می‌شود. نقاط کنترلی در R^{d_s} از طریق رابطه زیر به دست می‌آیند.

---
[1]- Knot insertion
[2]- Projective transformation

$$\left(\mathbf{P}_i\right)_j = \frac{\left(\mathbf{P}_i^w\right)_j}{w_i}, \quad j = 1, \ldots, d_s \tag{۱۶-۳}$$

همچنین

$$w_i = \left(\mathbf{P}_i^w\right)_{d_s+1} \tag{۱۷-۳}$$

که در این رابطه $(\mathbf{P}_i)_j$، درایه j^{th} بردار $\mathbf{P}_i$ و w_i مربوط است به وزن i^{th} ام. بنابراین، منحنی نربز به این صورت تعریف می‌شود.

$$\mathbf{C}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}_i \; R_{i,p}(\xi) \tag{۱۸-۳}$$

که در این رابطه توابع پایه جلوآورده شده نربز، یعنی $R_{i,p}(\xi)$ اینگونه تعریف می‌شوند.

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{w_i \; N_{i,p}(\xi)}{\sum_{j=1}^{n} w_j \; N_{j,p}(\xi)} \tag{۱۹-۳}$$

به همین ترتیب توابع پایه چند متغیره نربز با استفاده از d_p بردار گرهی Ξ^l، دسته از نقاط $\{w_i\}_{i\in I}$ تعریف می‌شوند. بر اساس $\mathbf{P}$ و $\mathbf{i}$ که قبلاً تعریف شدند می‌توان توابع پایه نربز چند متغیره متناسب را تولید نمود.

$$R_{\mathbf{i},\mathbf{p}}(\xi) = \frac{w_i \; B_{\mathbf{i},\mathbf{p}}(\xi)}{\sum_{j\in I} w_{\mathbf{j}} \; B_{\mathbf{j},\mathbf{p}}(\xi)} \tag{۲۰-۳}$$

همچنین سطوح و احجام نربز نیز به طریق مشابه سطوح و احجام بی‌اسپیلاین به دست می‌آیند.

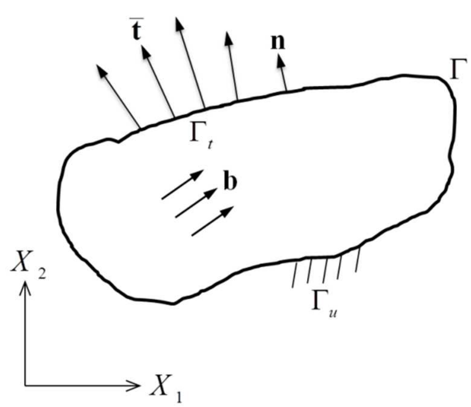
$$\mathbf{S}(\xi) = \sum_{\mathbf{i}\in I} \mathbf{P}_{\mathbf{i}} \; R_{\mathbf{i},\mathbf{p}}(\xi) \tag{۲۱-۳}$$

توابع نربز تمامی مشخصات مربوط به چند جمله‌ای‌های تکه‌ای را دارا می‌باشند. همچنین مشخصات مربوط به پیوستگی در توابع نربز دقیقاً مشابه آنچه که در ویژگی‌های پیوستگی در بی‌اسپیلاین گفته شد می‌باشد. مطلوب است تا تمامی مقادیر اسکالر وزن در نربز غیر- منفی انتخاب گردد در غیر این صورت ممکن است که ویژگی پوشش محدب دچار مشکل شود.

به طور کلی تنها تفاوت بین یک بی‌اسپیلاین که یک چند جمله‌ای بی‌اسپیلاین گفته شده است با یک بی‌اسپیلاین کسری در مقدار وزنی است که به نقاط کنترلی یک بی‌اسپیلاین کسری اعمال شده است. باید توجه داشت که چنانچه تمامی مقادیر وزن یک مقدار یکسان داده شود، بی‌اسپیلاین کسری به یک چندجمله‌ای بی‌اسپیلاین کاهش داده می‌شود. در این رساله منظور از بی‌اسپیلاین همان چندجمله‌ای بی‌اسپیلاین و منظور از نربز همان بی‌اسپیلاین کسری می‌باشد. همانند بی‌اسپیلاین در موضوع نربز نیز به مجموعه بردارهای گرهی، مرتبه چند جمله‌ای و نقاط کنترلی یک وصله گفته می‌شود.

۳-۴- گسسته‌سازی در روش آنالیز ایزوژئومتریک

فلسفه روش حل ایزوژئومتریک بر اساس مسایل چند متغیره است که حل هر جزء به صورت سطحی مستقل در مسایل دو بعدی ساخته می‌شود. در نهایت جواب مساله با پیدا کردن نقاط کنترلی تعیین می‌گردد. در روش آنالیز ایزوژئومتریک حل مساله به صورت یک سطح تصور می‌شود که می‌تواند توسط بی‌اسپیلاین و نربز تعریف گردد. در واقع x و y نقاط کنترلی معلوم در نظر گرفته شده و مختصات z این نقاط با یکی از روش‌های باقیمانده وزنی یا روش تغییرات[1] به دست می‌آیند. با توجه به شکل (۳-۷) به استخراج معادلات حاکم بر حل مساله الاستواستاتیک می‌پردازیم.



شکل (۳-۷) یک محیط پیوسته دو بعدی.

[1]- Variational method

معادلات حاکم بر یک مساله مقدار مرزی[1] دو بعدی و با فرض الاستیک خطی بدین ترتیب است.

$$\mathbf{L}^T\sigma+\mathbf{b}=0 \quad \text{in}\,\Omega \tag{۲۲-۳}$$

$$\sigma\mathbf{n}=\overline{\mathbf{t}} \qquad \text{on}\,\Gamma_t \tag{۲۳-۳}$$

$$\mathbf{u}=\overline{\mathbf{u}} \qquad \text{on}\,\Gamma_u \tag{۲۴-۳}$$

که در رابطه (۳-۲۲)، $\mathbf{L}$، عملگر دیفرانسیلی است که بدین ترتیب تعریف می‌گردد.

$$\mathbf{L}=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial X_2} \\ \dfrac{\partial}{\partial X_2} & \dfrac{\partial}{\partial X_1} \end{bmatrix} \tag{۲۵-۳}$$

که σ، $\mathbf{u}$ و $\mathbf{b}$ به ترتیب، تنش، جابجایی و بردار نیروهای حجمی می‌باشند. $\overline{\mathbf{t}}$، بردارهای نیروهای وارده تعریف شده بر مرز طبیعی، $\overline{\mathbf{u}}$، جابجایی‌های تعریف شده بر مرز اساسی و $\mathbf{n}$ نیز بردار یکه عمود بر سطح (به سمت خارج) در یک نقطه بر مرز طبیعی است شکل (۳-۷).

فرم ضعیف شده معادلات آورده شده در رابطه (۳-۲۲) به صورت رابطه (۳-۲۶) است.

$$\int_\Omega (\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T\,(\mathbf{DLu})\,d\Omega-\int_\Omega \delta\mathbf{u}^T\,\mathbf{b}\,d\Omega-\int_{\Gamma_t}\delta\mathbf{u}^T\,\overline{\mathbf{t}}\,d\Gamma=0 \tag{۲۶-۳}$$

که $\mathbf{D}$، تانسور ثابتهای الاستیک است. گسسته‌سازی رابطه (۳-۲۶) منتهی به رابطه (۳-۲۷) می‌گردد

$$\mathbf{Ku}=\mathbf{f} \tag{۲۷-۳}$$

که، $\mathbf{K}$ ماتریس سختی ، $\mathbf{f}$ بردار نیرو و $\mathbf{u}$ بردار جابجایی متغیر کنترل می‌باشند. $\mathbf{K}$ و $\mathbf{f}$ بر اساس رویهم‌گذاری ماتریس سختی و نیز بردار نیروی المانی بدست می‌آیند. لذا خواهیم داشت.

$$\mathrm{K_e}=\int_{\Omega_e}(\mathbf{B})^T\,\mathbf{DB}\,d\Omega \tag{۲۸-۳}$$

$$\mathbf{f}_e=\int_{\Omega_e}\mathbf{R}^T\mathbf{b}\,d\Omega+\int_{\Gamma_{te}}\mathbf{R}^T\,\overline{\mathbf{t}}\,d\Gamma \tag{۲۹-۳}$$

[1]- Boundary value problem

ماتریس $\mathbf{B}$ که حاوی مشتقات توابع پایه است بدین ترتیب به دست می‌آید. اگر فرض کنیم که $\mathbf{R}(\boldsymbol{\xi})$ یک بردار از توابع پایه نربز، که $R_i, (i=1, 2, ..., n_{\text{en}})$، در فضای پارامتری $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ خواهیم داشت.

$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \frac{\partial R_1}{\partial X_1} & 0 & \cdots & \frac{\partial R_{n_{\text{en}}}}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_1}{\partial X_2} & \cdots & 0 & \frac{\partial R_{n_{\text{en}}}}{\partial X_2} \\ \frac{\partial R_1}{\partial X_2} & \frac{\partial R_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial R_{n_{\text{en}}}}{\partial X_2} & \frac{\partial R_{n_{\text{en}}}}{\partial X_1} \end{bmatrix} \tag{۳۰-۳}$$

که $n_{\text{en}} = (p+1)\times(q+1)$ و نشان دهنده تعداد توابع پایه غیر صفر برای یک دهانه گرهی مفروض (المان گرهی) است. در نهایت تقریب جابجایی $\mathbf{u}^h$ و مختصات فیزیکی $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ برای مختصات پارامتری $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$ از طریق روابط ذیل بدست می‌آیند.

$$\mathbf{u}^h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} R_i(\boldsymbol{\xi})\mathbf{u}_i \tag{۳۱-۳}$$

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{n_{\text{en}}} R_i(\boldsymbol{\xi})\mathbf{T}_i \tag{۳۲-۳}$$

که $\mathbf{u}_i$ درایه i ام از بردار $\mathbf{u}$ می‌باشد که از حل دستگاه معادلات (۳-۲۷) بدست می‌آید. همانگونه که مشاهده می‌شود از توابع پایه نربز برای تقریب جابجایی و نیز تقریب هندسه همزمان استفاده می‌شود.

مشتقات توابع پایه نسبت به مختصات فیزیکی در (۳-۳۰) مطابق رابطه زیر محاسبه می‌گردند.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial X_1} \\ \frac{\partial R_i}{\partial X_2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial R_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial R_i}{\partial \xi_2} \end{Bmatrix}, \tag{۳۳-۳}$$

که $\mathbf{J}$ نشان دهنده ماتریس ژاکوبین برای انتقال بین فضاهای پارامتری و فیزیکی بوده و بدین ترتیب تعریف می‌گردد. باید توجه داشت که برخلاف اجزای محدود استاندارد، نقاط کنترلی در فضای فیزیکی الزاماً بر رئوس المانها انطباق ندارند.

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial X_2}{\partial \xi 1}\\ \dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial X_2}{\partial \xi_2}\end{bmatrix}. \qquad (۳۴-۳)$$

لازم به ذکر است که هر کدام از درایه‌های ماتریس ژاکوبین بر اساس تابع پایه، مشتقات آنها (رابطه (۳۵-۳)) و مختصات نقاط کنترلی در منطقه پوشش محلی محاسبه می‌شوند.

$$\frac{d^k}{d^k\xi}N_{i,\mathrm{p}}(\xi)=\frac{p}{\xi_{i+p}-\xi_i}\left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1}\xi}N_{i,p-1}(\xi)\right)-\frac{p}{\xi_{i+p+1}-\xi_{i+1}}\left(\frac{d^{k-1}}{d^{k-1}\xi}N_{i+1,\mathrm{p}-1}(\xi)\right). \qquad (۳۵-۳)$$

در نهایت درایه‌های تانسور کرنش و تنش بر اساس تقریب جابجایی $\mathbf{u}^h$ به صورت زیر محاسبه می‌گردند.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\xi)=\mathbf{L}\mathbf{u}^h(\xi) \qquad (۳۶-۳)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\xi)=\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}(\xi). \qquad (۳۷-۳)$$

۳-۵- اعمال شرایط مرزی اساسی

از آن جهت که توابع پایه نربز خاصیت دلتای کرونکر را ارضا نمی‌نمایند، لذا اعمال مستقیم شرایط مرزی غیرهمگن بر نقاط کنترلی ممکن است منجر به شکل‌گیری خطا در نتایج گردد. روش‌های متعددی بمنظور اعمال شرایط مرزی اساسی بوجود آمده است که روش ضریب لاگرانژ[1] بهترین آنهاست. روش ضریب لاگرانژ یک بردار میدانی مجهول جدید به فرم $\boldsymbol{\lambda}^h$ تعریف می‌نماید که به صورت زیر است.

$$\boldsymbol{\lambda}^h=\begin{Bmatrix}\lambda_u\\ \lambda_v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1 & 0 & \cdots & N_{n\boldsymbol{\lambda}} & 0\\ 0 & N_1 & \cdots & 0 & N_{n\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\lambda_{u1}\\ \lambda_{v1}\\ \vdots\\ \lambda_{un_{\boldsymbol{\lambda}}}\\ \lambda_{un_{\boldsymbol{\lambda}}}\end{Bmatrix}=\mathbf{N}(s)\boldsymbol{\lambda}, \qquad (۳۸-۳)$$

[1]- Lagrange multiplier method

که λ_i ضرایب لاگرانژ بوده که بصورت مجموعه‌ای از n_λ نقطه کنترلی است که تشکیل دهنده شرط مرزی اساسی هستند. باید توجه داشت که چنانچه نقاط کنترلی فوق الذکر بر روی مرز اساسی قرار نگرفته باشند، نزدیکترین نقطه مجاور آنها که بر روی مرز اساسی واقع شده باشد انتخاب می‌گردند. N_i توابع شکل درونیاب لاگرانژ یک بعدی و s نیز طول قوس در امتداد مرز اساسی است. با اعمال روش ضریب لاگرانژ خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}&\int_{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{L}\delta\mathbf{u})^T(\mathbf{DLu})\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}-\int_{\boldsymbol{\Omega}}\delta\mathbf{u}^T\mathbf{b}\mathrm{d}\boldsymbol{\Omega}-\int_{\boldsymbol{\Gamma}_t}\delta\mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}}\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}\\&-\int_{\boldsymbol{\Gamma}_u}\delta\boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}-\int_{\boldsymbol{\Gamma}_u}\delta\mathbf{u}^T\boldsymbol{\lambda}\mathrm{d}\boldsymbol{\Gamma}=0\end{aligned} \tag{۳-۳۹}$$

پس از مقداری محاسبات معادله گسسته‌شده نهایی به صورت رابطه (۳-۴۰) خواهد شد.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{K} & \mathbf{G}\\ \mathbf{G}^T & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{f}\\ \mathbf{q}\end{Bmatrix} \tag{۳-۴۰}$$

که

$$\mathbf{G}_{ij}^T=-\int_{\Gamma_u}\mathbf{N}_i^T\mathbf{R}_j\,\mathrm{d}\Gamma \tag{۳-۴۱}$$

$$\mathbf{q}_i=-\int_{\Gamma_u}\mathbf{N}_i^T\bar{\mathbf{u}}\mathrm{d}\Gamma \tag{۳-۴۲}$$

که $\boldsymbol{\lambda}$ بردار ضرایب لاگرانژ و $\mathbf{N}$ ماتریس توابع درونیاب لاگرانژ می‌باشند.

فصل چهارم

اصول کلی مکانیک شکست

۴- مکانیک شکست

مکانیک شکست بر این فرض استوار است که مصالح مهندسی حاوی ترک بوده و گسیختگی از محل ترک‌ها شروع می‌شود. تخمین عمر اعضای سازه‌ای نیازمند اطلاع از نحوه توزیع تنش بواسطه وجود ترک و نیز ارتباط آن با رشد ترک است. وجود ترکها منجر به شکل‌گیری تنشهای با سطح بالا در نوک ترک شده که زمینه رشد ترک را مهیا می‌نماید. بارگذاری یک جسم ترکدار برای تمامی مصالح بجز مصالح ترد ایده‌آل، با تغییرشکل‌های غیرالاستیک و دیگر اثرات غیرخطی نزدیک به نوک ترک همراه است. اما شرایطی وجود دارد که در آن اثرات غیرخطی یا غیرالاستیک نسبت به اندازه ترک بسیار ناچیز است که در این حالت استفاده از تئوری خطی برای مشخص نمودن توزیع تنش‌ها کافی به نظر می‌رسد.

در چند دهه گذشته استفاده از اصول مکانیک شکست برای جلوگیری از شکست ناگهانی و یا تدریجی سازه‌ها و قطعات ماشین به یک نیاز تبدیل شده است. ترک یا ناپیوستگی‌ها ممکن است به دلایل مختلفی در یک سازه شکل بگیرند. ترک‌های موجود در یک سازه ممکن است تحت بارگذاری شروع به رشد نموده و نهایتاً موجب تخریب یا از کارافتادگی دستگاه شوند. لذا مهمترین هدف علم مکانیک شکست، محاسبه میزان حساسیت قطعه به ترک و اندازه بحرانی ترک که می‌تواند سبب شکست ناگهانی در بارهای اعمالی شود، می‌باشد. در تاریخچه مکانیک شکست نمونه‌های مختلفی از شکست سازه‌هایی همچون مخازن، سازه کشتی و پل‌ها وجود دارد [۸۷, ۸۸].

به طور کلی در شرایطی که یک جسم بدون ترک و ناپیوستگی باشد، رفتار آن جسم تحت بارگذاری مفروض، تابع شرایط عمومی تسلیم آن مصالح است. اما در حالتی که جسم دارای ناپیوستگی باشد به علت توزیع غیر یکنواخت تنش در جسم علاوه بر معیارهای عمومی تسلیم مصالح باید وضعیت موضعی جسم در نزدیکی ناپیوستگی نیز مورد بررسی قرار گیرد. اصولاً در ابتدا برای تعیین وضعیت تنش‌ها در نزدیکی ناپیوستگی از روش‌های تحلیلی استفاده شده است. برای مثال با استفاده از روش‌های تحلیلی وضعیت تنش‌های یک جسم با ناپیوستگی معلوم همچون دایره و بیضی مشخص

شده است. اما این روش‌های تحلیلی در شرایطی که آن ناپیوستگی به سمت یک ناپیوستگی نوک‌تیز میل نماید دیگر امکان تعیین وضعیت تنش در نزدیکی نوک آن ناپیوستگی وجود ندارد. بنابراین برای تعیین وضعیت تنش در نزدیکی ناپیوستگی نوک‌تیز مانند ترک، از روش‌های دیگری همچون روش فاکتور شدت تنش و روش میزان رهایی انرژی استفاده می‌شود.

۴-۱- ظرفیت شکست (چقرمگی شکست)

بطور کلی در علم مکانیک شکست سوالاتی مانند (الف) حداکثر اندازه ترک چقدر می‌تواند باشد تا مصالح بتواند بطور ایمن آن را تحمل کند؟ (ب) مقاومت سازه بصورت تابعی از اندازه ترک چقدر است؟ (ج) اندازه ترک چه ارتباطی با بار اعمالی دارد؟ (د) میزان بحرانی بار چقدر است تا ترک شروع به رشد کند و آیا رشد ترک پایدار است یا ناپایدار؟ (ه) چگونه اندازه ترک بصورت تابعی از زمان رشد می‌نماید؟

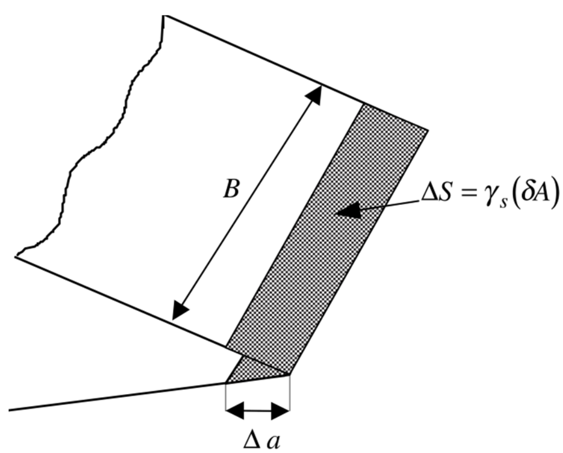
در پاسخ به این سوالات علم مکانیک شکست به دنبال پارامترهایی می‌گردد تا بتواند ویژگی یک ترک جهت رشد را مشخص نماید. چنین پارامتری باید بتواند نتایج آزمایشگاهی را با عملکرد سازه مرتبط سازد. لذا پاسخ سازه ترکدار می‌تواند بوسیله نتایج آزمایشگاهی پیش‌بینی گردد. اگر ما چنین پارامتری را نیروی پیشران ترک[۱] نامگذاری کنیم، قادر خواهیم بود تا آن نیرو را بصورت تابعی از رفتار مصالح، اندازه ترک، هندسه سازه و بارگذاری تعیین نماییم. به عبارت دیگر، مقدار بحرانی این پارامتر، که بعنوان مشخصه‌ای از مصالح فرض می‌شود، تحت عنوان ظرفیت شکست یا چقرمگی شکست[۲] نامگذاری می‌گردد. ظرفیت شکست توانایی مصالح برای مقاومت در مقابل شکست در حضور ترک و ناپیوستگی را نشان می‌دهد. با مساوی قرار دادن نیروی پیشران ترک و ظرفیت شکست مصالح، رابطه‌-ای بین نیروی اعمالی، اندازه ترک و هندسه سازه بدست می‌آوریم که اطلاعات ضروری جهت طراحی سازه‌ای را به ما نشان خواهد داد.

[1]- Crack driving force
[2]- Fracture toughness

پارامتر ظرفیت شکست بمنظور رتبه‌بندی توانایی مقاومت مصالح در مقابل شکست در چارچوب مکانیک شکست مورد استفاده قرار می‌گیرد. بطور مشابه مقاومت تسلیم یا نهایی مصالح نیز بمنظور درجه‌بندی مقاومت مصالح برای تسلیم شدن یا شکست در معیارهای طراحی متعارف مورد استفاده قرار دارد. بطور کلی در فرایند انتخاب مصالح برای کاربردهای سازه‌ای باید بین مصالح با مقاومت تسلیم بالا (یا پایین) یا ظرفیت شکست بالا (یا پایین) تصمیم‌گیری شود. مطابق نتایج مطالعات طراحی سازه‌ای اثبات شده است که برای طراحی سازه در وضعیتی که حضور ترک‌های کوچک پیش بینی شده است، باید از مصالحی با مقاومت تسلیم بالا استفاده شود در حالیکه برای اجسام در حضور ترک‌های بزرگ ترجیح بر کاربرد مصالح با ظرفیت شکست بالا است [۸۸, ۸۹].

۴-۲- میزان نرخ رهایی انرژی

در سال ۱۹۲۴، گریفیث[1] معیاری را برای رشد ترک با کاربرد روش انرژی به دست آورد. معیار گریفیث بر مفهوم بقای انرژی استوار است. بر این اساس، زمانی یک ترک رشد می‌کند که تغییر (کاهش) در انرژی پتانسیل ذخیره شده در سیستم، U، در تعادل با تغییر (افزایش) در انرژی سطحی، S، ناشی از ایجاد سطوح جدید ترک می‌باشد [۹۰]. مفهوم بیان شده در شکل (۴-۱) بصورت شماتیک نمایش داده شده است.



شکل (۴-۱) نمایش شماتیک رشد ترک به میزان Δa

[1]- Griffith

جسمی به عرض B حاوی ترک با ضخامت مشخص در سراسر جسم را در نظر بگیرید. برای اینکه شکست اتفاق افتد باید بقای انرژی برقرار باشد، یعنی:

$$\Delta U + \Delta S = 0 \qquad (۱-۴)$$

تغییر در انرژی سطحی $\Delta S = \delta A\ \gamma_s$ که در این رابطه δA مقدار سطح جدید ناشی از رشد ترک بوده و γ_s نیز انرژی سطحی در واحد سطح می‌باشد. تغییر در سطح ترک $\delta A = 2B\ \Delta a$ است که ضریب ۲ به علت وجود دو سطح ترک است. با جایگذاری روابط و تقسیم آن بر $B\ \Delta a$ داریم:

$$-\frac{1}{B}\frac{\Delta U}{\Delta a} = 2\gamma_s \qquad (۲-۴)$$

با نوشتن روابط به صورت مشتقات جزیی رابطه گریفیث به دست می‌آید.

$$-\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial a} = 2\gamma_s \qquad (۳-۴)$$

اگر این رابطه ارضا شد آنگاه رشد ترک اتفاق خواهد افتاد. نرخ رهایی انرژی، G، به این صورت تعریف می‌شود.

$$G = -\frac{1}{B}\ \frac{\partial U}{\partial a} \qquad (۴-۴)$$

در بیشتر حالات مقدار $\partial U/\partial a$ منفی است، یعنی اینکه اگر ترک رشد کند انرژی پتانسیل کاهش یافته پس G، مثبت خواهد شد. می‌توان با به سمت چپ بردن عبارت $1/B$ در رابطه (۴-۴) U را به انرژی پتانسیل در ضخامت واحد تبدیل نمود. دیمانسیون G، به صورت $\mathrm{J/m^2, N/m, MPa}$ بوده و نرخ رهایی انرژی، مقدار انرژی رهایی به ازای رشد واحد ترک در ضخامت واحد می‌باشد. این مقدار انرژی لازم برای رشد ترک توسط سیستم است و به مصالح، هندسه و بارگذاری سیستم بستگی دارد. انرژی سطحی[1]، γ_s، فقط به جنس مصالح و شرایط طبیعی مانند دما، فشار و غیره بستگی داشته و به شرایط بارگذاری یا هندسه ترک بستگی ندارد. تئوری گریفیث برای مصالح کاملاً ترد (شکننده) برقرار

[1]- Surface energy

بوده و برای مصالح شکل پذیر برقرار نیست. بر اساس مطالب گفته شده یک ترک زمانی رشد خواهد کرد که وضعیت زیر برقرار باشد.

$$\underbrace{G}_{\text{Crack driving force}} \geq 2\gamma_s = \underbrace{G_c}_{\text{Material toughness}} \quad . \qquad (۵-۴)$$

از آنجائیکه تئوری گریفیث برای مصالح بسیار ترد مانند شیشه معتبر بود، لذا میزان انرژی مورد نیاز برای ترک در بیشتر مصالح بسیار بیشتر از $2\gamma_s$ می‌باشد.

اروین[1] و اوروان[2] به طور مستقل اصلاحیه‌ای بر روی تئوری گریفیث انجام دادند و فرمولاسیون آن را برای مصالحی با رفتار پلاستیک ارائه نمودند. به عبارت دیگر کل انرژی مورد نیاز برای رشد ترک را مجموع انرژی سطحی و کار پلاستیک برگشت ناپذیر، γ_p، مربوط به منطقه نوک ترک معرفی نمودند [۹۱, ۹۲].

$$\gamma = \gamma_s + \gamma_p \qquad (۶-۴)$$

بنابراین معیار شکست بدین ترتیب خواهد شد.

$$-\frac{1}{B}\,\frac{\partial U}{\partial a} \geq 2(\gamma_s + \gamma_p) \qquad (۷-۴)$$

روش‌های گریفیث و اروین/ اوروان از لحاظ محاسبات ریاضی مشابه بوده و تنها تفاوت در معرفی مقدار ظرفیت شکست مصالح[3]، G_c، در شکست است. به طور کلی G_c، مستقیماً از آزمایش‌های شکست به دست می‌آید و این مقدار تابعی از γ_s و γ_p نیست. مقدار رهایی انرژی بحرانی یک ثابت مصالح مانند مدول یانگ یا تنش تسلیم است و به ماهیت بارگذاری و یا شکل ترک بستگی ندارد اما به دما و شرایط طبیعی مصالح بستگی دارد [۸۹, ۹۳, ۹۴].

---

[1]- Irwin
[2]- Orowan
[3]- Material toughness

۴-۳- دانسیته انرژی کرنشی

دانسیته انرژی کرنشی[1]، W، را می‌توان به این صورت تعریف نمود.

$$W = \int_0^{\varepsilon} \sigma \, d\varepsilon \tag{۸-۴}$$

که σ، تانسور تنش و ε تانسور کرنش می‌باشند.

تحت شرایط بارگذاری تک‌محوری، W، برابر است با سطح زیر نمودار تنش-کرنش (توجه، W سطح زیر نمودار بار-جابجایی نیست). به طور کلی مقدار انرژی کرنشی در سراسر جسم یکسان نیست و به موقعیت آن در جسم بستگی دارد.

۴-۳-۱- انرژی کرنشی

منظور از انرژی کرنشی U_e، مقدار انرژی کرنشی است که در جسم ذخیره شده است. این مقدار به مصالح و بارگذاری بستگی دارد و به این صورت تعریف می‌گردد.

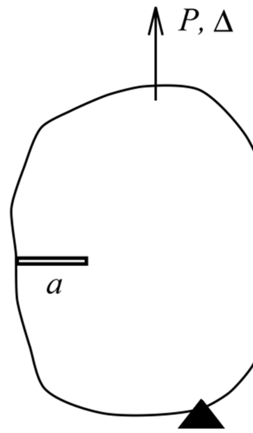
$$U_e = \int_V W \, dV \tag{۹-۴}$$

که V، حجم جسم می‌باشد. انرژی کرنشی U_e، برابر است با انتگرال دانسیته انرژی کرنشی روی تمام جسم و می‌توان نشان داد که انرژی کرنشی با سطح زیر نمودار بار- جابجایی برابر است. برای مصالح الاستیک خطی انرژی کرنشی به صورت رابطه (۴-۱۰) خواهد شد.

$$U_e = \frac{P\,\Delta}{2} \tag{۱۰-۴}$$

که P و Δ مطابق آنچه در شکل (۴-۲) نمایش داده شده است، مقادیر بار و جابجایی متناظر می‌باشند.

[1]- Strain energy density



شکل (۴-۲) نمایش شماتیک جسم ترکدار

دانسیته انرژی کرنشی برای مصالح الاستیک تنها به کرنش موجود بستگی دارد، در حالیکه برای مصالح پلاستیک دانسیته انرژی کرنشی به تاریخچه بارگذاری / باربرداری بستگی دارد. در اجسام الاستیک تمامی انرژی در فرایند باربرداری بازیابی خواهد شد در حالیکه در اجسام پلاستیک انرژی کرنشی مستهلک می‌گردد. چنانچه مصالح پیوسته تحت شرایط بارگذاری باشند، میزان دانسیته انرژی کرنشی (W) برای اجسام الاستیک یا پلاستیک یکسان خواهد بود. اما اگر باربرداری اتفاق بیافتد (جزئی یا کلی) شرایط متفاوت خواهد شد.

برای مصالح با رفتار الاستیک (خطی یا غیرخطی) داریم

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \qquad (۱۱-۴)$$

که $\mathbf{D}$ تانسور الاستیسیته و σ و ε به ترتیب تانسورهای تنش و کرنش می‌باشند. میزان دانسیته انرژی کرنشی مطابق رابطه (۴-۱۲) خواهد شد که در شرایط بارگذاری تک محوره به صورت رابطه (۴-۱۳) می‌باشد.

$$W = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon. \qquad (۱۲-۴)$$

$$W = \frac{\sigma^2}{2E}. \qquad (۱۳-۴)$$

۴-۴- انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل، U، از انرژی کرنشی داخلی و کار خارجی انجام شده بر جسم تشکیل می‌شود. انرژی پتانسیل به نحوه بارگذاری بستگی دارد. برای جسم نشان داده شده در شکل (۴-۲)، انرژی پتانسیل تعاریف مختلفی دارد. بر اساس اینکه این جسم بوسیله یک جابجایی مشخص یا بار مشخص، بارگذاری شود تعریف انرژی پتانسیل متفاوت خواهد بود.

برای جابجایی مشخص داریم، $\Delta:\ U = U_e$ و برای بار مشخص خواهیم داشت، $P:\ \ U = U_e - P\Delta$.

منظور از بار مشخص یعنی اینکه بار در خلال مراحل رشد ترک ثابت خواهد بود، در حالیکه منظور از جابجایی مشخص این است که جابجایی در خلال رشد ترک ثابت است. برای شرایط بار مشخص شده به عنوان بارگذاری خارجی روی جسم ترکدار، کار خارجی توسط بارگذاری خارجی در خلال رشد ترک اتفاق نمی‌افتد چونکه جابجایی ثابت فرض شده است و از طرفی کار به صورت حاصل‌ضرب نیرو در جابجایی تعریف می‌شود پس تغییر در انرژی پتانسیل فقط به علت تغییر در انرژی کرنشی رخ می‌دهد.

۴-۵- نرمی

نرمی به صورت عکس سختی تعریف می‌شود. نرمی یکی از مشخصات مصالح به شمار نمی‌رود، اما نرمی به بارگذاری و هندسه بستگی دارد. برای جسمی حاوی ترک با طول a می‌توان نوشت.

$$\Delta = C(a)P \qquad (۱۴-۴)$$

که $C(a)$ نرمی است و تابع هندسه (شامل طول ترک، a)، مدول یانگ و نسبت پواسون می‌باشد. لازم به ذکر است که می‌توان نرخ رهایی انرژی G را بر اساس تعریف نرمی مطابق رابطه (۴-۱۵) به دست آورد. به عبارت دیگر نرمی به مفوم نسبت تغییرشکل به بار ($C = \delta/P.$) می‌باشد.

$$U=\frac{P\Delta}{2}-P\Delta=-\frac{P\Delta}{2}$$
$$G=-\frac{1}{B}\left(\frac{\partial U}{\partial a}\right)_p=\frac{P}{2B}\left(\frac{\partial \Delta}{\partial a}\right)_p \qquad (۱۵-۴)$$
$$\Delta=C(a)P\Rightarrow$$
$$G=\frac{1}{2B}P^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}$$

که عبارت $\left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_p$ تأکید می‌نماید که مقدار بار (P) ثابت فرض شده است.

۴-۶- پایداری رشد ترک

با در نظر گرفتن رابطه (۴-۱۵) برای G و با مشتق‌گیری از آن نسبت به a، برای بارگذاری ثابت خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)_P=\frac{1}{2B}P^2\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}a^2} \qquad (۱۶-۴)$$

در حالیکه برای جابجایی ثابت خواهیم داشت

$$\left(\frac{\partial G}{\partial a}\right)_\Delta=\frac{1}{2B}P^2\left(\frac{\mathrm{d}^2C}{\mathrm{d}a^2}-\frac{2}{C}\left(\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}a}\right)^2\right). \qquad (۱۷-۴)$$

برای بیشتر هندسه‌ها، عبارت $\mathrm{d}^2C/\mathrm{d}a^2$ مثبت خواهد بود. بنابراین G برای بارگذاری از پیش تعریف شده، متناظر به رشد ترک، افزایش می‌یابد. بنابراین افزایش در میزان a منجر به افزایش در G می‌شود، که در این حالت گفته می‌شود که رشد ترک ناپایدار[1] است.

برای شرایط جابجایی از پیش تعریف شده، چنانچه $2/C\left(\mathrm{d}C/\mathrm{d}a\right)^2>\mathrm{d}^2C/\mathrm{d}a^2$ باشد، آنگاه داریم

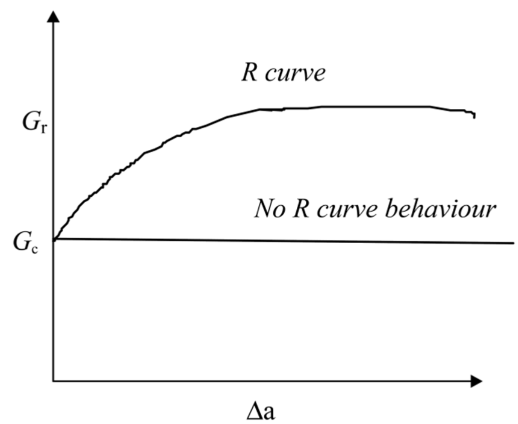
$$\frac{\partial G}{\partial a}<0 \qquad (۱۸-۴)$$

بنابراین به همراه رشد ترک میزان G کاهش می‌یابد. یعنی اینکه می‌بایست جابجایی اعمال شده افزایش یابد تا رشد ترک حفظ گردد. معیار رشد ترک ناپایدار خواهد شد:

[1]- Unstable crack growth

$$G = G_c \quad \text{and} \quad \frac{\partial G}{\partial a} > 0. \tag{۱۹-۴}$$

علت اهمیت مفهوم پایداری در آن است که، درحالیکه رشد ترک پایدار ممکن است قابل قبول باشد، از شکست ناپایدار همواره باید اجتناب گردد. اکثر مصالح حتی در شرایط الاستیک خطی نیز دارای رفتار شکل‌پذیر[۱] می‌باشند، لذا ظرفیت شکست با رشد ترک افزایش می‌یابد. این موضوع تحت عنوان منحنی مقاومت شناخته شده که به عنوان منحنی R [۲] نیز شناخته می‌شود.



شکل (۴-۳) نمایش شماتیک منحنی رفتار مقاومت مصالح

در چنین شرایطی ارضای معیارهای فوق الزاماً منتج به رشد ناپایدار ترک نخواهد شد و معیارهای رشد ترک ناپایدار به صورت رابطه (۴-۲۰) خواهد بود.

$$G = G_r \quad \text{and} \quad \frac{\partial G}{\partial a} > \frac{\mathrm{d}G_r}{\mathrm{d}a}. \tag{۲۰-۴}$$

۴-۷- آنالیز تنش ترک

۴-۷-۱- فضای K برای مصالح الاستیک خطی

یک روش جایگزین برای شیوه انرژی (مانند روش گریفیث) در آنالیز ترک‌ها، روش تمرکز (شدت) تنش[۳]، است. در این روش فضای تنش و کرنش در نوک ترک مورد بررسی و محاسبه قرار می‌گیرد. در

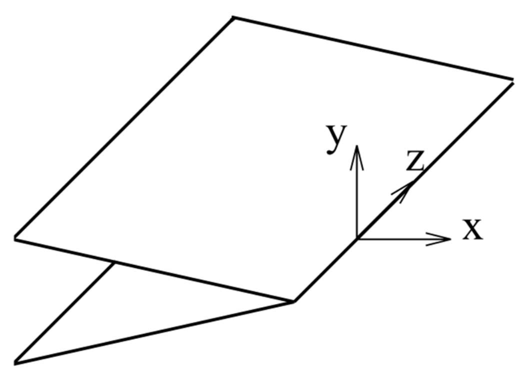
[1]- Ductile
[2]- Resistance curve or *R*-curve
[3]- Stress intensity

بسیاری مواقع روش‌های انرژی و تمرکز تنش یکسان بوده و نتایج مشابهی به دست می‌دهند. روش انرژی عمدتاً برای مصالح الاستیک خطی یا الاستیک غیرخطی مناسب است، در حالیکه روش تمرکز تنش بسیار انعطاف‌پذیر بوده و قابل اعمال برای محدوده وسیع‌تری از مصالح می‌باشد.

هدف ما تعیین وضعیت تنش در نوک ترک است. حالت تنش در فضای سه بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma(x\,,\,y\,,\,z\,)=\begin{pmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz}\\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz}\end{pmatrix} \qquad (۲۱-۴)$$

در تانسور تنش ارائه شده شش درایه تنش مستقل وجود دارد. برای سادگی مساله ابتدا یک ترک مستقیم و تیز را در نظر گرفته و محورها را در امتداد جلوی ترک مطابق شکل (۴-۴) قرار می‌دهیم.



شکل (۴-۴) نمایش شماتیک یک ترک سه بعدی

فرض می‌شود، همچنانکه به نوک ترک نزدیک می‌شویم تغییرات تنش در امتداد جلوی ترک (جهت z) نسبت به تغییرات تنش در جهات دیگر یعنی x و y قابل صرفنظر کردن است، یعنی:

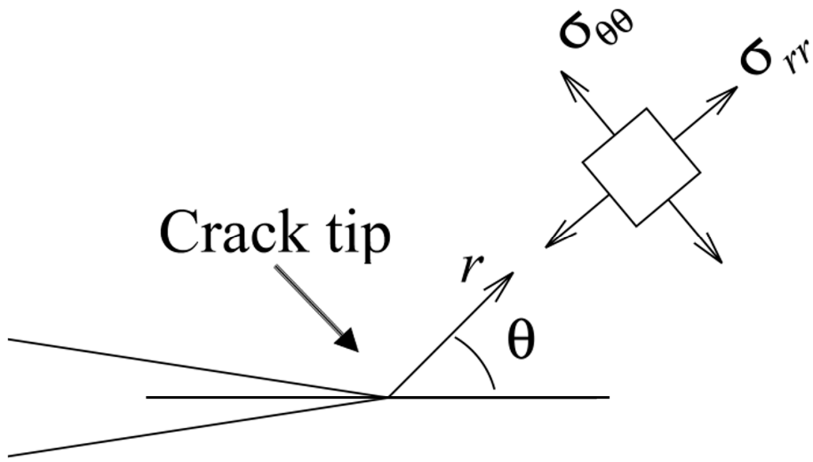
$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial z}=\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\ldots=0. \qquad (۲۲-۴)$$

بنابراین در نزدیکی نوک ترک تنش‌ها و کرنش‌ها به جهت z بستگی نداشته یا به عبارت دیگر رفتار تنش‌ها مانند فضای تغییرشکل یک فضای دو بعدی است. پس بنابراین وضعیت تنش‌ها در نوک ترک ترکیبی از تنش/ کرنش صفحه‌ای، $u(x\,,\,y)\,,v(x\,,\,y)$ و مساله کرنش غیر صفحه‌ای، $w(x\,,\,y)$

است. که u و v به ترتیب جابجایی‌های درون صفحه‌ای در جهات x و y بوده و همچنین w، جابجایی خارج صفحه‌ای در جهت z می‌باشد. برای مساله الاستیک خطی باید این مودها را به طور جداگانه مشخص نمود و کل تنش را با اصل جمع آثار قوا[1] [خطی] تعیین نمود.

۴-۷-۲- فضای تنش / کرنش صفحه‌ای نوک ترک

برای سادگی مساله از مختصات قطبی مطابق شکل (۴-۵) استفاده می‌شود.



شکل (۴-۵) مختصات قطبی نسبت به نوک ترک

در این بخش عمده توجه بر روی فضای نوک ترک است، پس شرایط مرزی در دوردست چندان دارای اهمیت نیستند. تنها شرط مرزی مورد توجه سطوح بدون تنش ترک می‌باشند.

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= 0 \\ \tau_{r\theta}(r, \pm\pi) &= 0 \end{aligned} \qquad (۲۳-۴)$$

برای مصالح الاستیک خطی، این مساله با استفاده از تابع تنش ایری[2] قابل حل است. تابع تنش ایری حل دقیق مساله تنش الاستیک خطی را نتیجه می‌دهد. در روش حل ایری فضای تنش به صورت سری با بینهایت جمله مطابق رابطه (۴-۲۲) در نظر گرفته می‌شود.

$$\sigma(r, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \, r^{\lambda_i} f_i(\theta) \qquad (۲۴-۴)$$

[1]- Superposition
[2]- Airy

که A_i و λ_i ثابت‌های حقیقی مجهول و f_i نیز توابعی از θ می‌باشند. به طور کلی در حل دقیق مساله ترک در مکانیک شکست به دنبال عبارت‌هایی هستیم که بیشترین سهم را در ایجاد تنش در نوک ترک ($r \to 0$) داشته باشند. در شرایطی که تنش متناظر با مقدار λ، به سمت صفر میل کند در حالیکه به نوک ترک نزدیک می‌شویم، مقادیر $\lambda \geq 0$ قابل صرفنظر کردن هستند ($r^\lambda \to 0$ when $r \to 0$ for $\lambda > 0$; $r^\lambda = 1$ when $\lambda = 0$). همچنین می‌توان نشان داد که برای به دست آوردن انرژی کرنشی محدود در نوک ترک عبارت‌های با مرتبه کمتر از ۱- باید حذف شوند. از دید فیزیکی انرژی کرنشی نامحدود غیرمحتمل است ولی تنش نامحدود امکان پذیر است.

می‌توان نشان داد که تنها مقادیر λ، بین ۱- و صفر که ارضا کننده معادله تعادل هستند و شرایط مرزی فوق $\lambda = -1/2$ است، یعنی:

$$\sigma \sim \frac{A}{\sqrt{r}} f(\theta) + \ldots \tag{۲۵-۴}$$

عبارتی که برای تقریب تنش در نوک ترک استفاده شده است جمله اول و به عبارتی مهمترین جمله سری نامبرده می‌باشد. به طور قراردادی ثابت دلخواه A با عبارت فاکتور شدت تنش[1]، K جایگزین شده و حل به دست آمده از سری فوق به مودهای I، اول یا کششی و مود II، دوم یا برشی تقسیم می‌شود. تنش‌های مود اول در نوک ترک به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos^3\frac{\theta}{2} + \cdots \\
\sigma_{rr} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \left(\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right) + \cdots \\
\tau_{r\theta} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2} + \cdots
\end{aligned} \tag{۲۶-۴}$$

باید توجه داشت که در $\theta = 0$،

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}; \quad \tau_{r\theta} = 0; \tag{۲۷-۴}$$

و همچنین در $\theta = \pm\pi$ (سطوح ترک)،

[1]- Stress intensity factor

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) &= 0\\ \tau_{r\theta}(r, \pm\pi) &= 0.\end{aligned} \qquad (۴-۲۸)$$

برای مود دوم شکست داریم.

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(-3\sin\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\\ \sigma_{rr} &= \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\sin\frac{\theta}{2}-3\sin^3\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{\theta}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\cdots\end{aligned} \qquad (۴-۲۹)$$

باید توجه داشت که در $\theta = 0$،

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} = 0; \quad \tau_{r\theta} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}; \qquad (۴-۳۰)$$

و همچنین در $\theta = \pm\pi$ (سطوح ترک)،

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}(r, \pm\pi) &= 0\\ \tau_{r\theta}(r, \pm\pi) &= 0.\end{aligned} \qquad (۴-۳۱)$$

مقادیر تنش‌های خارج صفحه، σ_{zz}، به انتخاب شرایط آنالیز از لحاظ کرنش صفحه‌ای یا تنش صفحه‌ای بستگی دارد و مطابق رابطه (۴-۳۲) خواهد بود.

$$\sigma_{zz} = \begin{cases}\nu(\sigma_{rr}+\sigma_{\theta\theta}) & \text{plane strain}\\ 0 & \text{plane stress}\end{cases}. \qquad (۴-۳۲)$$

در شرایط واقعی هندسه سه بعدی، مقدار σ_{zz} از کرنش صفحه‌ای در مرکز تا تنش صفحه‌ای در سطح تغییر خواهد کرد اما دیگر مقادیر تنش ثابت باقی می‌مانند.

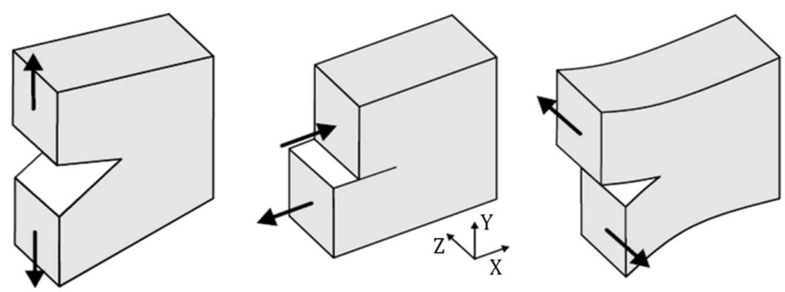
برای مود III، سوم یا برش غیرصفحه‌ای داریم.

$$\begin{aligned}\tau_{z\theta} &= \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}+\cdots\\ \tau_{zr} &= \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}+\cdots\end{aligned} \qquad (۴-۳۳)$$

و مابقی مقادیر تنش همگی صفر هستند. این فضای تنشی کاملاً معرف فضای تنش برای یک ترک نوک تیز در مصالح الاستیک خطی است. مقادیر $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{III}}$ بر اساس آنالیز فوق به دست

نمی‌آیند بلکه به واسطه شرایط مرزی دوردست قابل ارزیابی هستند. عبارت فضای تکین[1] [بینهایت]، برای تشریح این فضاها و پیش‌بینی تنش‌های بینهایت در $r = 0$ به کار می‌روند. مساله تکینگی مربوط است به جمله $\sqrt{r}$ که در مخرج کسر قرار دارد و در شرایطی که به نوک ترک نزدیک می‌شویم یعنی در $r = 0$ مساله تکینگی تنش اتفاق می‌افتد ($\sigma \sim \frac{1}{\sqrt{r}}$).

مطابق پیشنهاد اروین مودهای مختلف شکست که در واقع یک ترک ممکن است به فرم آنها گسترش پیدا کند به شرح شکل (۴-۶) است.



شکل (۴-۶) نمایش مودهای سه‌گانه شکست

لازم به ذکر است که فضای K فضای حل دقیق تنش در یک جسم حاوی ترک نیست. این روش، حلی برای فضای تنش در شرایط نزدیک به نوک ترک ارائه می‌کند. از آن جهت که مقدار این عبارت در فضای تنش از مابقی جملات بسیار بزرگتر است پس از مابقی جملات صرفنظر کرده و فضای تنش نوک ترک را تنها با یک پارامتر K تعریف می‌نماییم.

همچنین مقدار بازشدگی نوک ترک[2] (CTOD) را می‌توان مستقیماً با استفاده از مقدار K محاسبه نمود. البته روش بازشدگی نوک ترک به عنوان یک پارامتر شکست بر پایه مکانیک شکست الاستیک غیرخطی بنا شده است. در واقع مقدار بازشدگی نوک ترک تنها یک مقدار عددی نیست بلکه جابجایی نسبی سطوح ترک را در فاصله r از نوک ترک نشان می‌دهد.

[1]- Singular
[2]- Crack tip opening displacement

با توجه به شکل (۴-۷) بازشدگی نوک ترک به طور ریاضی اینگونه تعریف می‌شود.

$$\Delta u(r) = u_y(r, \theta = \pi) - u_y(r, \theta = -\pi) \qquad (۴\text{-}۳۴)$$

در نتیجه برای به دست آوردن مقدار Δu از رابطه زیر که بر حسب K بیان شده، استفاده می‌گردد.

$$\Delta u(r) = 2\frac{K_I}{E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\,(1+\nu)(\kappa+1) \qquad (۴\text{-}۳۵)$$

که

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & \text{plane strain} \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{plane stress.} \end{cases} \qquad (۴\text{-}۳۶)$$

با جایگذاری κ در رابطه (۴-۳۵) می‌توان نوشت.

$$\Delta \mathrm{u}(r) = 8\frac{K_I}{E'}\sqrt{\frac{r}{2\pi}} \qquad (۴\text{-}۳۷)$$

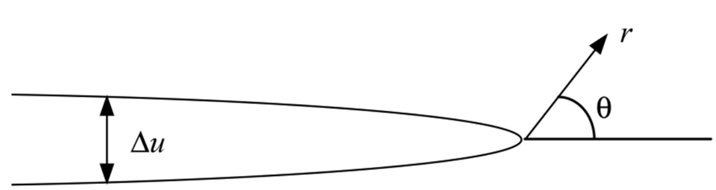
که

$$E' = \begin{cases} \dfrac{E}{1-\nu^2} & \text{plane strain} \\ E & \text{plane stress.} \end{cases} \qquad (۴\text{-}۳۸)$$

باید توجه داشته باشیم که

$$\sigma,\ \varepsilon \propto \frac{1}{\sqrt{r}}; \quad u,\ \mathrm{CTOD} \propto \sqrt{r} \qquad (۴\text{-}۳۹)$$

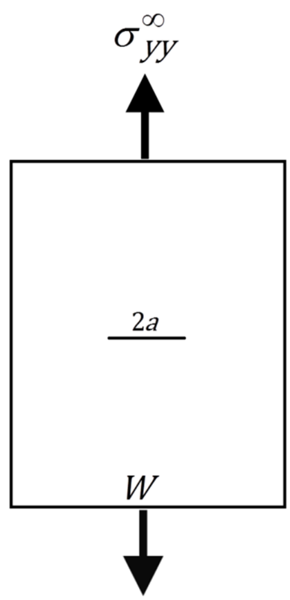
باید به این نکته اشاره نمود که مقادیر دقیق برای حل تحلیلی K در محیط‌های محدود و غیرمحدود با یکدیگر متفاوت است. همچنین باید یادآور شد که تنشی که به موازات بدنه ترک اعمال گردد اثری بر روی فاکتور شدت تنش نمی‌گذارد.



شکل (۴-۷) تعریف بازشدگی نوک ترک

۴-۷-۳- مقایسه بین فضای K با فضای تنش کل

همانگونه که اشاره شد روش فضای K، حل کامل فضای تنش در یک جسم ترکدار را نتیجه نمی‌دهد. این روش راه حل محاسبه فضای تنش در نزدیکی نوک ترک مطابق آنچه که در فرضیات استخراج روابط K به کار رفته، می‌باشد. صفحه نامحدودی را که ترکی به طول $2a$ مطابق شکل (۴-۸) در آن قرار دارد را در نظر بگیریم. حل دقیق 2D فضای تنش را می‌توان از طریق توابع تنش به دست آورد.



شکل (۴-۸) صفحه نامحدود با ترکی در وسط تحت کشش

با در نظر گرفتن کشش اعمالی در دوردست، مقدار تنش σ_{yy} در خط جلوی امتداد نوک ترک یعنی در $y=0$ خواهد شد.

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad \text{for } |x-a| > 0 \tag{۴۰-۴}$$

که x فاصله از وسط صفحه را اندازه‌گیری می‌کند. با جایگزینی x با r که r فاصله از نوک ترک را اندازه گیری می‌نماید خواهیم داشت:

$$r = x - a \Rightarrow x = r + a$$

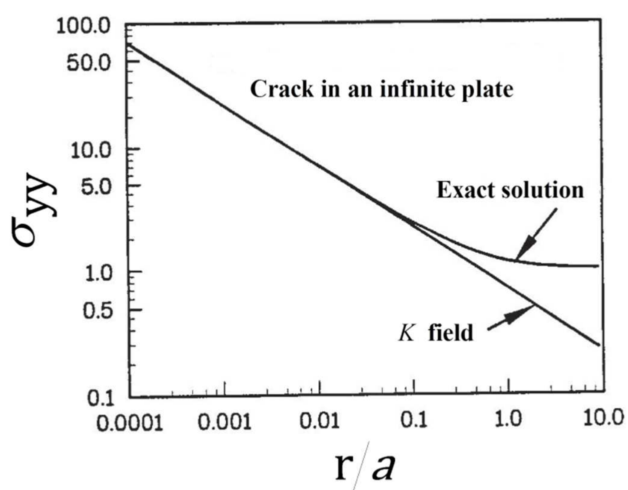
$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}\ |r+a|}{\sqrt{(r+a)^2 - a^2}} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}\ |r+a|}{\sqrt{r^2 + 2ar + a^2 - a^2}} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}\ |r+a|}{\sqrt{r^2 + 2ar}} \tag{۴۱-۴}$$

با در نظر گرفتن شرایط مربوط به نوک ترک یعنی $r \to 0$، آنگاه $r+a \to a$ و $r^2+2ar \to 2ar$

پس داریم:

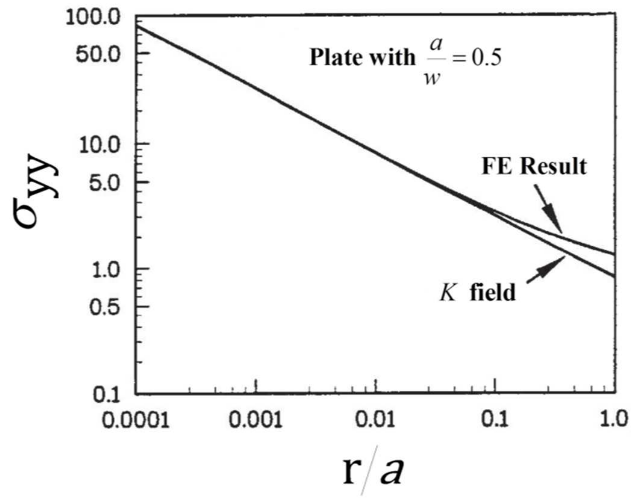
$$\sigma_{yy} \approx \frac{\sigma_{yy}^{\infty}\, a}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{\sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \qquad (۴۲-۴)$$

چنانچه رابطه اخیر را با رابطه مربوط به فضای K از مود اول یعنی $\sigma_{yy} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}$ مقایسه کنیم، خواهیم دید که، برای این هندسه مشخص مقدار فاکتور شدت تنش مود اول $K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\pi}\ \sigma_{yy}^{\infty}\sqrt{a}$ خواهد شد. مقایسه بین فضای تنش دقیق از رابطه (۴-۴۰) و فضای K در شکل (۴-۹) نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که برای $r < 0.1a$ فضای K و توزیع تنش دقیق بسیار به یکدیگر نزدیک هستند.



شکل (۴-۹) مقایسه بین فضای تنش دقیق و فضای K، ورق نامحدود با ترک مرکزی

برای بیشتر اشکال هندسی فضاهای تنش باید به صورت عددی محاسبه شوند. فضای تنش برای یک صفحه ترکدار وسط‌چین با $a/W = 0.5$ و تحت کشش، با استفاده از آنالیز اجزای محدود به دست آمده و با فضای K برای همین هندسه در شکل (۴-۱۰) مقایسه شده است، مقدار Y (فاکتور شکل) برای این هندسه معادل $1.15\sqrt{\pi}$ است (منظور از W در روابط فوق عرض صفحه ترکدار است).



شکل (۴-۱۰) مقایسه بین فضای تنش دقیق و فضای K، ورق ترکدار با $a/W = 0.5$

باید گفت که چنانچه فضای تنش برای یک هندسه خاص مشخص باشد، مقدار K را می‌توان از طریق زیر به دست آورد.

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\left[\sigma_{yy}(\theta=0)\right] \\ K_{\mathrm{II}} &= \lim_{r\to 0} \sqrt{2\pi r}\left[\sigma_{xy}(\theta=0)\right] \end{aligned} \qquad (۴۳-۴)$$

این روش برای تعیین مقدار K اندکی مشکل است در حالیکه روش‌های عددی ساده‌تری وجود دارد. ساده‌ترین روش استفاده از انتگرال J است که از آن می‌توان در محاسبه K استفاده کرد.

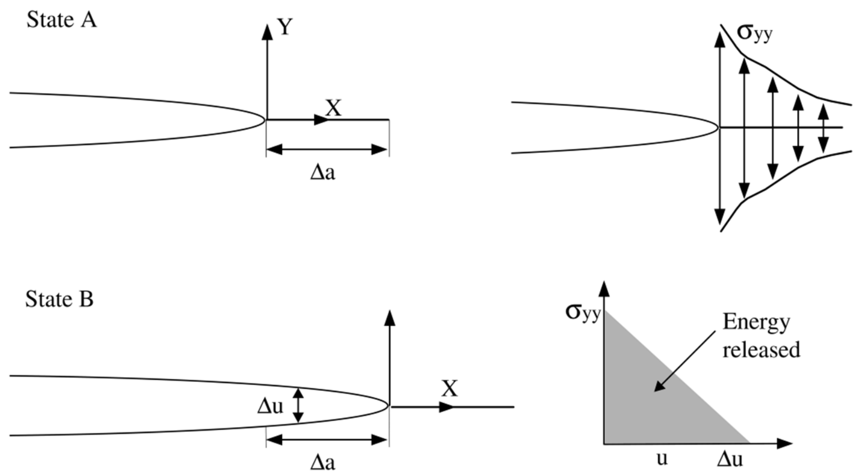
۴-۷-۴- ارتباط بین K و G

با در نظر گرفتن انرژی کرنشی رها شده در زمانیکه ترک به اندازه Δa رشد کرده باشد، یعنی تغییر از وضعیت A به B در شکل (۴-۱۱)، تنش نرمال(عمود) بر ترک، σ_{yy}، از مقدار $\sigma_{yy}(x)$ تا صفر در Δa کاهش یافته، در شرایطی که جابجایی از صفر تا Δu تغییر کرده باشد (مطابق شکل (۴-۱۱)). آنگاه مقدار انرژی آزاد شده در ضخامت واحد از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\Pi=\int_0^{\Delta a} \frac{1}{2}\sigma_{yy}(x)\,\Delta u(x)\,\mathrm{d}x \qquad (۴۴-۴)$$

با انجام یک سری محاسبات که خارج از موضوع مورد بحث این متن است، در نتیجه ارتباط بین K و G برای مود اول شکست به صورت رابطه (۴-۴۵) به دست می‌آید.

$$G=\frac{K^2}{E'};\quad E'=\begin{cases}\dfrac{E}{1-\nu^2} & \text{plane strain}\\ E & \text{plane stress}\end{cases}. \qquad (۴۵-۴)$$



شکل (۴-۱۱) فرایند رشد ترک از وضعیت A به B

بنابراین بین K و G یک رابطه یک به یک برای مصالح الاستیک خطی وجود دارد. لذا برای مصالح الاستیک خطی، روش انرژی با استفاده از G و شیوه فاکتور شدت تنش با استفاده از K معادل یکدیگر هستند. در واقع زمانیکه G به مقدار بحرانی خود برسد، یعنی G_c، آنگاه K نیز به مقدار بحرانی خود، یعنی K_c، می‌رسد. رابطه کلی بین مودهای مختلف شکست با مقدار انرژی کرنشی رهایی به صورت رابطه (۴-۴۶) تعریف می‌شود.

$$G=\frac{K_{\mathrm{I}}^2+K_{\mathrm{II}}^2}{E'}+\frac{K_{\mathrm{III}}^2}{2G_{\text{shear}}} \qquad (۴۶-۴)$$

که G_{shear}، مدول برشی مصالح می‌باشد.

در محدوده نزدیک به نوک ترک، دامنه تنش و کرنش به خوبی با فضای K توصیف می‌گردد. فرض کنیم که دو هندسه متفاوت داشته باشیم که دارای مقادیر یکسان از K باشند، لذا آن دو هندسه، فضای یکسانی از توزیع تنش و کرنش خواهند داشت. چنین موضوعی به عنوان مفهوم تشابه نامیده شده که حاوی تمامی اطلاعات مربوط به بارگذاری و هندسه ترک می‌باشد. حال باید دید که در کدام هندسه شکست اتفاق خواهد افتاد؟ بنابراین، اگر نمونه آزمایشگاهی در اختیار داشته باشیم که در مود

اول دچار شکست شود، به آن مقدار از فاکتور شدت تنش مود اول، فاکتور شدت تنش بحرانی مود اول مصالح، یعنی، K_{Ic} گفته می‌شود. به عبارت دیگر اگر سازه‌ای دارای ترک داشته باشیم که تحت بارگذاری، $K_{\mathrm{I}} \geq K_{\mathrm{Ic}}$ شود، آنگاه شکست در سازه اتفاق خواهد افتاد. بطور کلی K_{c} فاکتور شدت تنش بحرانی نامیده می‌شود.

همچنین می‌توان مقدار انرژی کرنشی آزاد شده‌ای را تصور نمود که به هنگام شکست در مصالح ایجاد گردد. چنین پارامتری بعنوان نرخ رهایی انرژی کرنشی بحرانی مصالح، G_{c}، نامیده شده و بر اساس تئوری گریفیث ارتباط آن با مشخصات صفحه ترکدار بصورت $\sigma_f = \sqrt{\frac{EG_{\mathrm{c}}}{\pi a}}$ می‌باشد. که σ_f تنش گسیختگی است. بنابراین برای مساله‌ای با هندسه مشخص و اصل نرمی میزان بار بحرانی رشد ترک محاسبه می‌گردد. از طرفی می‌توان بین تنش گسیختگی، طول ترک و ظرفیت شکست رابطه‌ای به صورت $\sigma_f = K_{\mathrm{IC}} / \alpha\sqrt{\pi a}$ معرفی نمود. که در این رابطه α پارامتر هندسه بوده و بعنوان مثال برای ترک لبه‌ای برابر با یک می‌باشد [۸۷, ۹۳, ۹۵, ۹۶]. باید اشاره نمود که مقادیر عددی G_{c} و K_{c} در شرایط تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای بسیار متفاوت می‌باشند. بعنوان نمونه مقادیر G_{IC} و K_{IC} برای چند نمونه از مصالح در جدول (۴-۱) آورده شده است.

۴-۸- تعریف ترکیب مودهای شکست

برای یک ترک در صفحه دو بعدی تحت مود مرکب بارگذاری (ترکیب کشش و برش)، تنش در جلوی ترک از روابط زیر به دست می‌آید.

$$\sigma_{yy} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}; \quad \tau_{xy} = \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}} \qquad (۴۷-۴)$$

منظور از ترکیب مودی سنجش نسبت مود اول به مود دوم است. ترکیب مودی معمولاً به وسیله زاویه فاز (ϕ) تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned}&\phi = \tan^{-1}\left(\frac{K_{\mathrm{II}}}{K_{\mathrm{I}}}\right)\\&\phi=0 \Rightarrow \text{Mode I}\ ,\ \ \phi=\pi/2 \Rightarrow \text{Mode II}\ (\tan(\pi/2)=\infty)\\&\text{or}\\&M=\frac{2}{\pi}\phi\\&M=0 \Rightarrow \text{Mode I},\ \ M=1 \Rightarrow \text{Mode II}\end{aligned} \qquad (۴۸-۴)$$

جدول (۴-۱) مشخصات ظرفیت شکست مصالح

$E\,(\mathrm{GPa})$	$K_{\mathrm{IC}}\,(\mathrm{MNm}^2)$	$G_{\mathrm{IC}}\,(\mathrm{kJm}^{-2})$	نام مصالح
۲۱۰	۱۵۰	۱۰۷	Steel alloy
۶۹	۳۷	۲۰	Aluminum alloy
۲۱۰	۵۰	۱۲	Steel-mild
۰/۰۰۱	–	۱۳	Rubber
۷	۷	۷	Glass-reinforced
۳	۱/۱	۰/۴	Polystyrene

۴-۹- معیارهای رشد ترک

تعیین زاویه شروع شکست یک مرحله مهم در تخمین مسیر رشد ترک بشمار می‌رود. چندین معیار رشد ترک که همبستگی مناسبی را با نتایج آزمایشگاهی نشان داده‌اند، پیشنهاد شده است [۹۷]. نتایج حاصله از شیوه‌های مختلف پیشنهادی در رشد ترک بسیار به یکدیگر نزدیک می‌باشند، تنها تفاوت بین این روش‌ها در چگونگی فرمولاسیون ریاضی آنهاست [۴۳]. بر این اساس مبانی محاسبه زاویه رشد ترک بصورت زیر در نظر گرفته شده است.

- معیار حداکثر نرخ رهایی انرژی کرنشی (معیار-G) [۹۰].

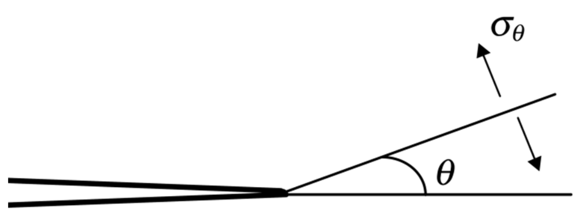
- معیار حداکثر تنش مماسی[1] (معیار-MTS) [۹۸]. ترک در امتداد حداکثر تنش پیرامونی یا مماسی ($\sigma_{\theta\theta}$) رشد می‌کند.
- معیار حداقل دانسیته انرژی کرنشی (معیار-SED) [۹۹]. ترک در جهتی رشد می‌کند که مقدار محلی مود II صفر باشد، یعنی در جهتی که $K_{\mathrm{II}}=0$ باشد.

۴-۹-۱- معیار حداکثر تنش مماسی (MTS)

بر اساس معیار MTS، یک ترک در مود مرکب از نوک آن در جهت حداکثر تنش مماسی رشد می‌نماید. در چنین شرایطی تنش برشی صفر می‌باشد. بر اساس این معیار زاویه شروع شکست و رشد ترک بدین ترتیب بدست می‌آید. مقدار تنش مماسی به این صورت تعیین می‌شود.

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos^{3}(\frac{\theta}{2})+\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}[-3\sin(\frac{\theta}{2})\cos^{2}(\frac{\theta}{2})] \qquad (۴۹-۴)$$

این نکته باید مورد توجه قرار گیرد که تنش مماسی عمود بر هر ترک منشعب شده می‌باشد (مطابق شکل (۴-۱۲)).



شکل (۴-۱۲) تنش مماسی در زاویه θ

برای معیار حداکثر تنش مماسی مقدار زاویه رشد ترک، که با متغیر θ_0 نمایش داده می‌شود، باید شرط زیر را ارضا نماید، بنابراین خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{\theta}}{\partial\theta}=0\\&\Rightarrow\ K_{\mathrm{I}}\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{I}}^{\theta\theta}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}+K_{\mathrm{II}}\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{II}}^{\theta\theta}(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0\end{aligned} \qquad (۵۰-۴)$$

[1]- Maximum tangential-stress criterion

که $f_{\mathrm{I}}^{\theta\theta}(\theta)=\cos^3(\frac{\theta}{2})$, $f_{\mathrm{II}}^{\theta\theta}(\theta)=-3\sin(\frac{\theta}{2})$. بنابراین با مقادیر مشخص $K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{II}}$ می‌توان رابطه را بر حسب θ حل نمود. پس در نتیجه مقدار θ_0 به دست می‌آید.

$$\sin\theta_0=\frac{K_{\mathrm{II}}}{K_{\mathrm{I}}}(1-3\cos\theta_0) \qquad (۵۱-۴)$$

$$\therefore \quad \theta_0=\tan^{-1}\left(\frac{-3\left(\sqrt{8K_{\mathrm{II}}^2+K_{\mathrm{I}}^2}+K_{\mathrm{I}}\right)K_{\mathrm{II}}}{3K_{\mathrm{II}}^2+K_{\mathrm{I}}\sqrt{8K_{\mathrm{II}}^2+K_{\mathrm{I}}^2}}\right) \; , K_{\mathrm{II}}\neq 0. \qquad (۵۲-۴)$$

که K_{I} و K_{II} به ترتیب فاکتورهای شدت تنش مربوط به مود اول و دوم شکست می‌باشند. زمانیکه هر دو مقدار K_{I} و K_{II} مثبت باشند، رابطه (۴-۵۲) یک مقدار منفی در بازه صفر (برای مود خالص اول) تا ۷۰/۵- درجه (برای مود خالص دوم) را برای θ_0 نتیجه می‌دهد [۱۰۰].

۴-۹-۱-۱- معیار حداکثر تنش مماسی تعمیم‌یافته (GMTS)

حالت تعمیم یافته معیار حداکثر تنش مماسی بمنظور محاسبه زاویه شروع رشد ترک تحت شرایط مود مرکب مورد بررسی و استفاده قرار می‌گیرد. در مقایسه با معیار متداول حداکثر تنش مماسی (MTS)، معیار GMTS که اولین بار توسط اسمیت[۱] در سال ۲۰۰۱ توسعه داده شد، از توصیف دقیق‌تر توزیع تنش در مقابل نوک ترک استفاده می‌نماید [۱۰۱]. ویلیامز[۲] در سال ۱۹۵۷ نشان داد که تنش مماسی پیرامون نوک ترک را می‌توان به صورت یک سری با بینهایت جمله به صورت رابطه (۴-۵۳) نوشت:

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[K_{\mathrm{I}}\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}K_{\mathrm{II}}\sin\theta\right]+T\,\sin^2\theta+O\left(r^{1/2}\right) \qquad (۵۳-۴)$$

که r و θ مختصات قطبی متداول نسبت به نوک ترک می‌باشند. اولین عبارت (جمله) غیرتکین از سری ویلیامز که به عنوان تی-استرس (*T*-stress) نامیده می‌شود، یک عبارت تنش ثابت بوده که مستقل از فاصله نسبت به نوک ترک است. عبارات با مرتبه‌های بالاتر، یعنی $O\left(r^{1/2}\right)$، در نوک ترک

[1]- Smith
[2]- Williams

قابل صرفنظر کردن فرض می‌گردند. در حالیکه در معیار MTS تنها جملات تکین در محاسبه فضای تنش در نوک ترک لحاظ می‌شود، معیار تعمیم یافته حداکثر تنش مماسی، GMTS، علاوه بر جملات شامل K_{I} و K_{II} اثرات عبارت غیرتکین T را لحاظ می‌نماید. اثر عبارت T اولین بار توسط ویلیامز، ایوینگ [۱۰۲] و یودا [۱۰۳] در مفهوم شکست ترد مورد بررسی قرار داده شد که شامل ارائه حل بسته برای صفحه حاوی ترک میانی بود. پس از آنها اسمیت حالت تعمیم یافته را ارائه نمود که قابل اعمال برای هر حالت دلخواه از مود مرکب شکست می‌باشد. بر اساس این معیار، رشد ترک در مود مرکب بصورت شعاعی از نوک ترک در امتداد حداکثر تنش مماسی رخ خواهد داد. از این رو، بر اساس معیار GMTS زاویه شروع رشد ترک θ_0 مطابق رابطه (۴-۵۴) محاسبه می‌گردد:

$$\left.\frac{\partial\sigma_{\theta\theta}(r,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}=0,\qquad \frac{\partial^2\sigma_{\theta\theta}(r,\ \theta)}{\partial\theta^2}<0 \tag{۴-۵۴}$$

که می‌دهد:

$$\left[K_{\mathrm{I}}\sin\theta_0+K_{\mathrm{II}}\left(3\cos\theta_0-1\right)\right]-\frac{16T}{3}\sqrt{2\pi r_c}\cos\theta_0\sin\frac{\theta_0}{2}=0 \tag{۴-۵۵}$$

در رابطه (۴-۵۵)، r_{c}، فاصله بحرانی از نوک ترک بوده و معمولاً بعنوان ثابت مصالح در نظر گرفته می‌شود. اگر T-stress و r_{c} به صورت رابطه (۴-۵۶) و رابطه (۴-۵۷) نرمال شوند:

$$B=\frac{T\sqrt{\pi a}}{\sqrt{K_{\mathrm{I}}^2+K_{\mathrm{II}}^2}} \tag{۴-۵۶}$$

و

$$\alpha=\frac{\sqrt{2r_{\mathrm{c}}}}{\sqrt{a}} \tag{۴-۵۷}$$

رابطه (۴-۵۵) را می‌توان به شکل رابطه (۴-۵۸) و بر حسب عبارت $B\alpha$ بازنویسی کرد:

$$\left[K_{\mathrm{I}}\sin\theta_0+K_{\mathrm{II}}\left(3\cos\theta_0-1\right)\right]-\frac{16B\alpha\sqrt{K_{\mathrm{I}}^2+K_{\mathrm{II}}^2}}{3}\cos\theta_0\sin\frac{\theta_0}{2}=0 \tag{۴-۵۸}$$

در روابط فوق، a طول ترک لبه‌ای و برای ترک میانی معادل نصف طول ترک می‌باشد. از هر دو رابطه (۴-۵۵) و رابطه (۴-۵۸) بمنظور محاسبه زاویه رشد ترک بر اساس معیار GMTS می‌توان استفاده نمود. همانگونه که در روابط اشاره شده مشهود است، میزان زاویه رشد ترک علاوه بر مقادیر فاکتور شدت تنش مودهای اول و دوم شکست به اندازه T-stress نیز بستگی دارد. مقدار منفی برای اندازه T-stress موجب کاهش اندازه مطلق زاویه θ_0 شده و برعکس مقدار مثبت آن باعث افزایش زاویه θ_0 می‌شود. در جدول (۴-۲) برای چند نمونه از مصالح مختلف مقادیر مورد نیاز جهت محاسبه زاویه رشد ترک با معیار GMTS آورده شده است. لازم به ذکر است که مقادیر فاصله بحرانی r_c، را می‌توان بر حسب مقاومت کششی مصالح (σ_t) و نیز مقدار فاکتور شدت تنش بحرانی مود اول (K_{Ic}) برای هر مصالحی مطابق رابطه (۴-۵۹) تعیین نمود [۹۸].

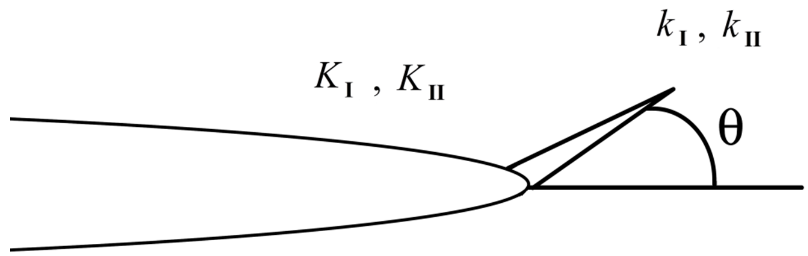
$$r_c = \frac{\pi}{2}\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_t}\right)^2 \qquad (۵۹-۴)$$

جدول (۴-۲) اندازه فاصله بحرانی (r_c) برای چند نمونه از مواد مختلف [۱۰۰]

نام ماده	$K_{Ic}\,(\mathrm{MPa\,m^{0.5}})$	$r_c\,(\mathrm{mm})$
Sialon	۴/۵	۰/۰۷۲
Mullite	۲	۰/۰۶۸
Alumina	۳/۳	۰/۶۵
Glass	۰/۷	۰/۲۳

۴-۹-۱-۲- معیار G و SED

این دو معیار در مساله رشد ترک برای حل به صورت تحلیلی بسیار مشکل‌تر از روش قبل می‌باشند. در این روش شاخه ترک واقعی را در نظر گرفته، سپس مقادیر جدید K_{I} و K_{II} را برای ترک منشعب شده (به صورت، k_{I} و k_{II}) محاسبه می‌شوند. روش کار در شکل (۴-۱۳) نشان داده شده است.



شکل (۴-۱۳) فاکتورهای شدت تنش محلی، k_{I} و k_{II} جلوی ترک منشعب شده

می‌توان نشان داد که ارتباط بین k_{I} و k_{II} به این صورت می‌باشد.

$$\begin{aligned} k_{\mathrm{I}}(\theta) &= a(\theta)\, K_{\mathrm{I}} + b(\theta)\, K_{\mathrm{II}} \\ k_{\mathrm{II}}(\theta) &= c(\theta)\, K_{\mathrm{I}} + d(\theta)\, K_{\mathrm{II}} \end{aligned} \qquad (۶۰-۴)$$

همانگونه که مشخص است مقادیر a، b، c و d به اندازه زاویه θ بستگی دارند. برای محاسبه این مقادیر راه حل تحلیلی وجود ندارد، پس باید از حل عددی در محاسبه آنها استفاده نمود. در این دو معیار انتخاب مسیر ترک، بر مبنای $k_{\mathrm{II}}(\theta)=0$ یا $G(\theta)$ حداکثر به دست می‌آید. برای حالت دوم داریم:

$$G(\theta) = \frac{k_{\mathrm{I}}(\theta)^2 + k_{\mathrm{II}}(\theta)^2}{E'} \qquad (۶۱-۴)$$

در اینجا مساله حداکثر سازی مقدار $G(\theta)$ است که باید به صورت عددی انجام گیرد. در انتها باید اشاره نمود که علیرغم فرضیات ساده در روش حداکثر تنش مماسی، بهترین انطباق را با نتایج آزمایشگاهی نشان داده است [۱۰۰, ۱۰۱]. بنابراین در این رساله از روش حداکثر تنش مماسی در محاسبه زاویه رشد ترک استفاده خواهد شد.

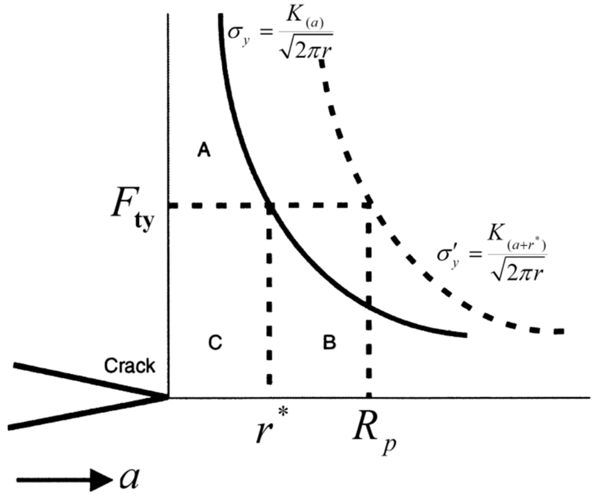
۴-۱۰- مفهوم تسلیم ناحیه کوچک

بطور کلی مکانیک شکست به سه دسته عمومی، مکانیک شکست الاستیک خطی، مکانیک شکست الاستوپلاستیک و مکانیک شکست تابع زمان تقسیم‌بندی می‌شود. تمامی موضوعاتی که تاکنون مورد بحث قرار گرفتند مربوط به مصالح الاستیک خطی بود. مکانیک شکست الاستیک خطی (LEFM)[1] را می‌توان برای مصالحی که دارای تغییر شکل پلاستیک اما در حد محدود و کوچک باشند نیز به کار برد، به این موضوع، شرط تسلیم ناحیه کوچک[2] گفته می‌شود. به عبارت دیگر چنانچه منطقه پلاستیک نوک ترک به اندازه کافی کوچک باشد، می‌توان از معادلات دامنه، که فرض شده آنها در منطقه پلاستیک کوچک در نوک ترک برقرار باشند، در تعیین فضای تنش و کرنش برای مصالح ترد استفاده نمود [۱۰۴]. در این حالت فرض بر این است که منطقه پلاستیک خیلی کوچکتر از طول ترک است ($r << a$). در مقایسه منظور از تسلیم ناحیه بزرگ این است که منطقه پلاستیک بزرگتر از طول ترک است ($r \geq a$). به عبارت دیگر در خصوص معیار گسترش ترک: حداکثر تنش مماسی، این معیار در حالتی که با ترک بزرگ مواجه باشیم، چونکه در این شرایط فضای تنش در نوک ترک تقریبی‌اند، کاربرد این روش سوال برانگیز خواهد بود. وجود منطقه پلاستیک در نوک ترک توزیع تنش را تغییر می‌دهد و در نتیجه استفاده از فاکتورهای شدت تنش یک روش مناسب بشمار نمی‌آید. فقط برای شرایط تسلیم در سطح کوچک زاویه رشد ترک را می‌توان با رابطه مشخص به دست آورد.

بطور کلی برای مصالح شکل‌پذیر یا ترد که حاوی ترک یا ناپیوستگی باشد، منطقه پلاستیک در نوک ترک تشکیل می‌گردد. به عبارتی در مصالح ترد نیز بعلت عدول کردن تنش در نوک ترک از تنش تسلیم مصالح، منطقه پلاستیک نوک ترک تشکیل می‌شود اما بسیار محدود و کوچک می‌باشد، لذا می‌توان از اثرات آن صرفنظر نمود و مطابق مصالح الاستیک با آن رفتار نمود. در ادامه توضیحات مختصری در خصوص تفاوت ماهیتی منطقه پلاستیک در شرایط مختلف آنالیز بیان خواهد شد.

[1]- Linear elastic fracture mechanics
[2]- Small scale yielding

صفحه‌ای را در نظر بگیریم که تحت بارگذاری بوده و نحوه توزیع تنش در آن بصورت تنش صفحه‌ای در نظر گرفته شده است. توزیع تنش σ_y or σ_{yy} بر اساس رابطه (۴-۶۷) به صورت شکل (۴-۱۴) بدست آمده است.



شکل (۴-۱۴) توزیع تنش و تنش انتقال یافته بعلت تسلیم مصالح در مقابل نوک ترک

فرض می‌شود که مصالح قرار گرفته بین نوک ترک ($r = 0$) تا فاصله‌ای از نوک ترک (r^*) دچار تسلیم شده باشند. با جایگزین نمودن F_{ty} به جای σ_y و r^* بجای r خواهیم داشت:

$$F_{ty} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{or} \quad r^* = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_I}{F_{ty}}\right)^2. \qquad (۴-۶۲)$$

با لحاظ نموده r^* بعنوان گسترش منطقه پلاستیک نوک ترک، ضمن تداوم تنش اعمالی، مناطق بیشتری از نوک ترک دچار تسلیم شدگی خواهند گردید. به عبارت دیگر بمنظور حفظ تعادل مساحت ناحیه A باید با مساحت ناحیه B یکسان باشد. از آنجا که ناحیه A با B مساوی است لذا ناحیه‌ای که باید انتگرال‌گیری شود برابر است با نواحی B به اضافه C.

$$\int_0^{r^*} \sigma_y \mathrm{d}r = F_{ty}(r_p - r^*) + F_{ty} \cdot r^* \qquad (۴-۶۳)$$

یا به عبارتی

$$\int_0^{r^*} \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \mathrm{d}r = F_{ty} \cdot r_p \qquad (۴-۶۴)$$

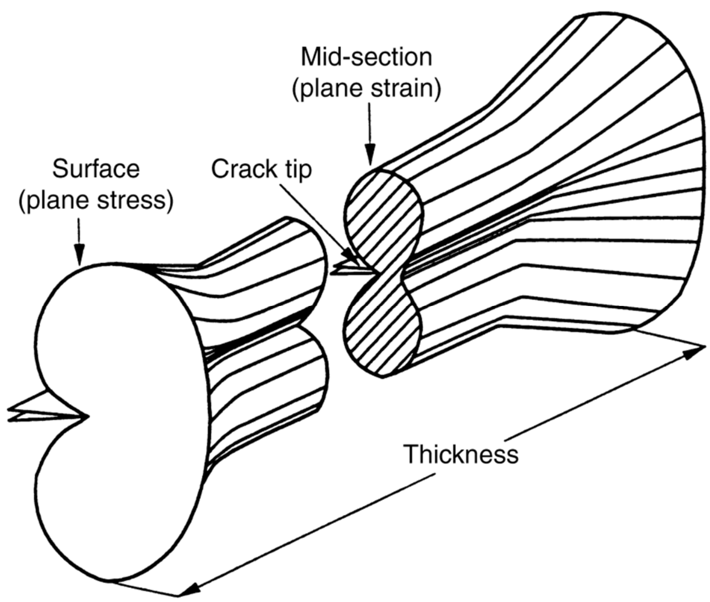
پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$r_p = \frac{1}{\pi}\left(\frac{K_I}{F_{ty}}\right)^2 \qquad (۶۵-۴)$$

با مقایسه روابط (۴-۶۵) و (۴-۶۲) به این نتیجه می‌رسیم که، $r_p = 2r^*$ است. که به r_p منطقه پلاستیک کامل یا عرض ناحیه پلاستیک گفته می‌شود. حل تعیین r_y در حالت کرنش صفحه‌ای توسط اروین بدست آورده شده است که به صورت رابطه (۴-۶۶) می‌باشد.

$$r_y^2 = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\left(\frac{K_I}{F_{ty}}\right)^2 \cong \frac{1}{6\pi}\left(\frac{K_I}{F_{ty}}\right)^2 \qquad (۶۶-۴)$$

بنابراین همانگونه که ملاحظه می‌شود منطقه پلاستیک در حالت کرنش صفحه‌ای حدوداً یک سوم منطقه پلاستیک در حالت تنش صفحه‌ای است. این موضوع بصورت شماتیک در شکل (۴-۱۵) نمایش داده شده است.



شکل (۴-۱۵) تغییر اندازه ناحیه پلاستیک نوک ترک در ضخامت صفحه [۱۰۵]

با فرض ایجاد پدیده جاری شدن در مقیاس کوچک در جسم الاستیک، می‌توان ترک را به عنوان یک ناپیوستگی نیمه بینهایت در نظر گرفت. بنابراین می‌توان از تعدادی از جملات سری صرفنظر نمود. از این رو معادلات فضای تنش مرتبه اول برای مود اول شکست به صورت زیر خواهد شد [۱۰۵].

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \\ 1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} \qquad (۶۷-۴)$$

در رابطه فوق اگر $\theta = 0$ در نظر گرفته شود حل تحلیلی مرتبه اول برای خط مقابل نوک ترک در دامنه بدست می‌آید. همچنین مطابق رابطه (۴-۶۷) در $r \to 0$ مقدار تنش دچار تکینگی می‌گردد.

۴-۱۱- فاکتور شدت تنش، انتگرال مستقل از مسیر (J) و انتگرال اندرکنش (M)

پارامتر فاکتور شدت تنش نیروی محرک ترک بوده و مقدار بحرانی آن که بعنوان ظرفیت شکست (چقرمگی) شناخته می‌شود، یک مشخصه ویژه مصالح است که به نوبه خود نیروی مقاوم در برابر گسترش ترک محسوب می‌گردد. در واقع برای اینکه بتوان در مکانیک شکست خطی از وضعیت تنش در نزدیکی نوک ترک و وضعیت تکینگی تنش‌ها اطلاعات کافی بدست آورد، فاکتور شدت تنش تعریف شده است. یکی از روش‌هایی که در محاسبه فاکتورهای شدت تنش در مود بارگذاری مرکب وجود دارد، روش انتگرال اندرکنش[۱] (انتگرال M) می‌باشد. روش انتگرال اندرکنش اولین بار توسط یاو[۲] و همکارانش برای مسائل با مود مرکب در مصالح ایزوتروپیک معرفی گردید [۱۰۶]. انتگرال اندرکنش از انتگرال مستقل از مسیر J برای دو وضعیت ممکن از یک جسم الاستیک ترک‌دار به دست می‌آید. انتگرال J توسط رایس[۳] توسعه داده شد [۱۰۷]. انتگرال مستقل از مسیر J بر پایه تعادل انرژی بنا نهاده شده و معادل نرخ رهایی انرژی در خلال گسترش ترک در جسم الاستیک همگن می‌باشد. در حالیکه انتگرال اندرکنش M، حالت دوگانه[۴] انتگرال J می‌باشد. در واقع انتگرال M بر پایه اصل انرژی مکمل[۵] بنا نهاده شده است [۱۰۸].

---

[1]- Interaction integral (*M*-integral)
[2]- Yau
[3]- Rice
[4]- Dual form
[5]- Principle of complementary energy

انتگرال مستقل از مسیر J دارای کاربردهای فراوانی در تعیین میزان انرژی کرنشی است. برای تشریح مفهوم این انتگرال، قطعه‌ای ساخته شده از یک ماده الاستیک (غیرخطی) ترک‌دار که دارای تغییر مکان پیش فرض $\bar{u}$ در مرز Γ_u و نیروهای گسترده T روی مرز Γ_t است را در نظر بگیرید. فرض کنید که سطح آزاد جسم به مقدار S و حجم جسم V باشد که در اثر گسترش ترک سطح آزاد جسم به مقدار Δs تغییر نموده و مقدار تغییر حجم ماده در اثر این گسترش ترک ΔV است. (در این جا فرض شده است که ترک با خارج نمودن مقداری از ماده در نوک ترک ایجاد می‌گردد.) تغییر در مقدار انرژی پتانسیل در اثر این رشد ترک خواهد بود.

$$-\Delta U^* = \int_{\Delta V} W \, .\mathrm{d}V - \int_{\Delta s} T \, .\Delta u \, .\mathrm{d}S \tag{۶۸-۴}$$

که در آن W دانسیته انرژی کرنشی است. T_i نیز بردار نیروی گسترده است که به روی مرز Γ_t عمل می‌کند.

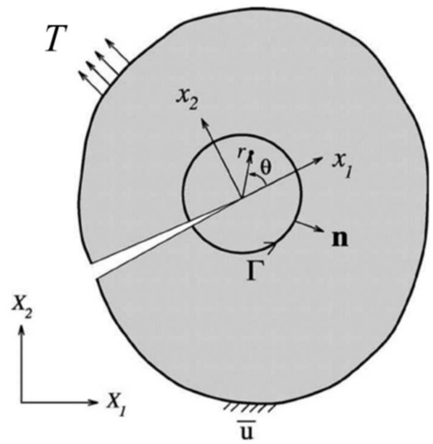
Δu بردار تغییر جابجایی‌های سطح S در اثر رشد ترک است. با توجه به تعاریف فوق می‌توان انتگرال اول موجود در رابطه (۴-۶۸) را برابر انرژی کرنشی ماده جدا شده از قطعه و انتگرال دوم را معادل کار انجام شده برای ایجاد سطح جدید (در اثر رشد ترک) دانست. پس تغییر در انرژی پتانسیل جسم در اثر رشد ترک برابر تفاضل بین انرژی کرنشی ماده جدا شده از جسم و کار لازم برای ایجاد سطح جدید ترک دانست که این تغییر در انرژی پتانسیل منفی خواهد بود ($\Delta U^* \le 0$).

اکنون در سیستم مختصات جدید (نسبت به نوک ترک) و با استفاده از قضیه گرین برای تبدیل انتگرال دو بعدی به انتگرال روی خط و از نماد J استفاده می‌کنیم.

$$J = \lim_{\Gamma \to 0} \int_{\Gamma} \left(W \, \delta_{1j} - \sigma_{ij} u_{i,1} \right) n_j \;\; \mathrm{d}\Gamma, \tag{۶۹-۴}$$

که n_j بردار نرمال بر مسیر (کانتور)[1] Γ مطابق شکل (۴-۱۶) می‌باشد.

[1]- Contour



شکل (۴-۱۶) نمایش عمومی جسم ترکدار، مختصات قطبی نسبت به نوک ترک و مسیر انتگرال J

یکی از ویژگی‌های مهم رابطه (۴-۶۹) این است که انتگرال طرف راست معادله، مستقل از مسیر انتگرال‌گیری (Γ) است. به بیان دیگر مسیر انتگرال‌گیری هر مسیر دلخواهی حول نوک ترک می‌تواند باشد. خاصیت مستقل از مسیر بودن انتگرال J از اهمیت زیادی برخوردار است. علت اصلی این اهمیت در این است که می‌توان با اطلاعات موجود در منطقه‌ای نسبتاً دور از نوک ترک انرژی موجود در نوک ترک را محاسبه نمود. لازم به ذکر است که رابطه (۴-۶۹) مقدار کلی J را به دست می‌دهد و تجزیه آن به مودهای مختلف شکست نیز با روش‌های خاصی امکانپذیر است [۱۰۶, ۱۰۹].

۴-۱۱-۱- حل گرهی انتگرال J

در ابتدا حالت ساده‌ای را در نظر بگیرید که تنش‌ها در گره‌ها معین باشند، پس ارزیابی عددی J نسبتاً ساده خواهد شد. با اصلاح رابطه (۴-۶۹) در یک مساله تنش صفحه‌ای خواهیم داشت.

$$J = \int_\Gamma W_S \,\mathrm{d}\eta - \int_\Gamma \mathbf{t} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \,\mathrm{d}\Gamma \qquad (۴-۷۰)$$

یا به عبارت دیگر داریم.

$$J = \int_\Gamma W_S \,\mathrm{d}\eta - \int_\Gamma (\sigma_n, \sigma_t) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_n}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial u_t}{\partial \xi} \end{bmatrix} \mathrm{d}\Gamma \qquad (۴-۷۱)$$

که در این رابطه، عبارات آمده به این صورت تعریف می‌شوند.

$$
\begin{aligned}
W_S &= \frac{1}{2E}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})^2+\frac{1+2\nu}{E}(\sigma_{xy}^2-\sigma_{xx}\sigma_{yy}) \\
\sigma_n &= \sigma_{xx}\cos^2\theta+\sigma_{xy}\sin\theta\cos\theta+\sigma_{yy}\sin^2\theta \\
\tau_t &= (\sigma_{yy}-\sigma_{xx})\sin\theta\cos\theta+\sigma_{xy}(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \\
u_n &= u_x\cos\theta+u_y\sin\theta \\
u_t &= -u_x\sin\theta+u_y\sin\theta\cos\theta
\end{aligned}
\tag{۷۲-۴}
$$

در نتیجه انتگرال J را می‌توان به این صورت تعریف نمود.

$$
\begin{aligned}
J = &\int w\,(\sin\theta\,\mathrm{d}x+\cos\theta\,\mathrm{d}y) \\
&-\int[\sigma_{xx}\varepsilon_{xx}\cos\theta\,\mathrm{d}y+\sigma_{xy}\varepsilon_{yy}\sin\theta\,\mathrm{d}y-\sigma_{xy}\varepsilon_{xx}\cos\theta\,\mathrm{d}x-\sigma_{yy}\varepsilon_{yy}\sin\theta\,\mathrm{d}x \\
&+\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}\cos\theta\,\mathrm{d}y-\sigma_{xy}\varepsilon_{xy}\sin\theta\,\mathrm{d}x+(\sigma_{xx}\sin\theta-\sigma_{xy}\cos\theta)\mathrm{d}u_n \\
&-(\sigma_{yy}\sin\theta+\sigma_{xy}\sin\theta)\mathrm{d}u_t]
\end{aligned}
\tag{۷۳-۴}
$$

در روابط فوق θ زاویه بین نرمال بر کنتور انتخابی و جهت x در هر نقطه است. از طرفی انتخاب شکل و اندازه کانتور انتگرال کاملاً تابع روش عددی است. می‌توان نشان داد که هرگاه J در طول یک کانتور حول نوک ترک اعمال شود، این انتگرال معرف تغییر در انرژی پتانسیل برای یک رشد یا توسعه مجازی ترک به اندازه $\mathrm{d}a$ است [۱۰۷].

۴-۱۱-۲- حل عمومی عددی برای محاسبه انتگرال J

بیشتر برنامه‌های عددی مانند روش آنالیز ایزوژئومتریک یا روش اجزای محدود مقادیر تنش را در نقاط گوسی محاسبه می‌کنند. از این رو باید دقت لازم در محاسبه انتگرال J که از این نقاط عبور داده شود، لحاظ گردد.

بر اساس تعریف انتگرال J داریم:

$$
J=-\frac{\partial\Pi}{\partial a}=\int_\Gamma\left(W_S\,\mathrm{d}y-\mathbf{t}\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\mathrm{d}\Gamma\right) \tag{۷۴-۴}
$$

تعریف بردارهای نیرو و جابجایی، دانسیته انرژی کرنشی و طول کمان بر حسب ویژگی‌های مساله:

$$W_S = \frac{1}{2}\left[\sigma_{xx}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy}\,\frac{\partial u_y}{\partial y}\right] \qquad (۷۵\text{-}۴)$$

در ادامه برای فرمولاسیون انتگرال J داریم:

$$\mathrm{d}y = \frac{\partial y}{\partial \eta}\mathrm{d}\eta \qquad (۷۶\text{-}۴)$$

$$\mathbf{t}\cdot\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \left[\left(\sigma_{xx}n_1 + \sigma_{xy}n_2\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\sigma_{xy}n_1 + \sigma_{yy}n_2\right)\frac{\partial u_y}{\partial x}\right] \qquad (۷۷\text{-}۴)$$

$$\mathrm{d}\Gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\,\mathrm{d}\eta \qquad (\text{at}\quad \mathrm{d}\xi=\text{constant}) \qquad (۷۸\text{-}۴)$$

$$\begin{aligned} J = \int_\Gamma \Bigg\{ & \frac{1}{2}\left[\sigma_{xx}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy}\,\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ & -\left[\left(\sigma_{xx}n_1 + \sigma_{xy}n_2\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\sigma_{xy}n_1 + \sigma_{yy}n_2\right)\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\Bigg\}\mathrm{d}\eta \end{aligned} \qquad (۷۹\text{-}۴)$$

برای محاسبه رابطه انتهایی انتگرال J از انتگرال‌گیری گوس در مسیر کانتور استفاده می‌شود.

$$J = \sum_{g=1}^{ng} W_g I_g(\xi_g, \eta_g) \qquad (۸۰\text{-}۴)$$

که W_g فاکتور وزن گوس، ng، تعداد نقاط انتگرالی گوس و I_g مقدار انتگرالی است که در هر نقطه گوسی، g، محاسبه می‌شود.

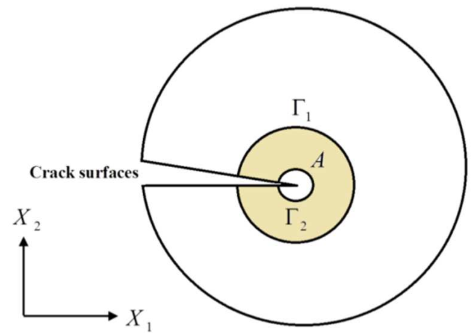
$$\begin{aligned} I_g = \Bigg\{ & \frac{1}{2}\left[\sigma_{xx}\,\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{xy}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_{yy}\,\frac{\partial u_y}{\partial y}\right]\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ & -\left[\left(\sigma_{xx}n_1 + \sigma_{xy}n_2\right)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \left(\sigma_{xy}n_1 + \sigma_{yy}n_2\right)\frac{\partial u_y}{\partial x}\right]\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}\Bigg\}_g \end{aligned} \qquad (۸۱\text{-}۴)$$

مسیر انتگرال‌گیری عمداً بر روی نقاط انتگرال‌گیری گوس انتخاب شده است. بنابراین تمامی جملات موجود در رابطه (۴-۸۱) مشخص می‌باشند. تنش‌ها که در نقاط گوسی موجودند، کرنش‌ها را نیز

می‌توان از ماتریس B (مشتقات توابع شکل یا توابع تقریب) به دست آورد، همچنین عبارات $\partial y/\partial \eta$ نیز جملات ماتریس ژاکوبین موجود می‌باشند [۶۶].

۴-۱۱-۳- روش انتگرال در دامنه معادل

لی[۱] و همکاران در سال ۱۹۸۵، همچنین بابوشکا[۲] و میلر[۳] در سال ۱۹۸۴ روشی را ارائه نمودند که می‌تواند جایگزین روش قبل شده و در این روش فقط یک آنالیز مورد نیاز است. مطابق شکل (۴-۱۷) انتگرال J را می‌توان بر روی دامنه معادل A تعریف نمود [۱۱۰, ۱۱۱].



شکل (۴-۱۷) نمایش دامنه معادل انتگرال‌گیری حول نوک ترک

$$q(x)=\sum_{i=1}^{n}N_i(x)q_i \qquad (۸۲-۴)$$

در رابطه فوق q یک تابع دلخواه هموارسازی است که بر روی Γ_2 مساوی با یک و روی Γ_1 مساوی صفر است. در واقع انتگرال روی کانتور با انتگرال روی دامنه معادل جایگزین شده است. این روش محاسبه انتگرال J با حل اجزای محدود بیشتر سازگار است. همچنین مقادیر q برای نقاط درون المان را می‌توان درونیابی نمود.

در رابطه فوق n تعداد نقاط هر المان، q_i مقادیر گرهی q و N_i نیز توابع شکل المان‌ها می‌باشند. در نتیجه محاسبه J به این طریق خواهد بود:

---

[1]- Li
[2]- Babuska
[3]- Miller

$$J=\sum_{A}\sum_{g=1}^{ng}\left\{\left[\left(\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}-W_S\delta_{1i}\right)\frac{\partial q}{\partial x_i}\right]\det\left(\frac{\partial x_j}{\partial \xi_k}\right)\right\}_g W_g \qquad (۸۳-۴)$$

لازم به ذکر است در شرایط بارگذاری ترکیبی نیاز به تجزیه مودی انتگرال J است. ولی روش تجزیه مودی در حل عددی و غیرعددی با مشکلاتی مواجه است. بنابراین روش انتگرال M برای غلبه بر مشکل تجزیه مودی ایجاد شده است.

۴-۱۱-۴- انتگرال اندرکنش (انتگرال M)

انتگرال اندرکنش از انتگرال مستقل از مسیر J برای دو وضعیت قابل قبول از یک جسم الاستیک ترک‌دار به دست می‌آید. در روش انتگرال اندرکنش، یک فضای کمکی تعریف می‌شود و بر فضای اصلی مساله تحمیل می‌گردد. فضای کمکی تنش و جابجایی‌ها به نحوی انتخاب می‌گردد که معادلات تعادل و شرایط مرزی مساله بدون نیرو بر سطوح ترک را در دامنه معادل در انتگرال‌گیری عددی پیرامون ترک ارضا نماید. در این مطالعه از معادلات کمکی تنش و جابجایی به دست آمده توسط ویلیامز و وسترگارد که پس از آنها توسط فلمینگ، بلیچکو و سوکومار تکرار شدند، استفاده می‌گردد [۲۵, ۶۸, ۱۱۲-۱۱۴]. برای بیان فرمولاسیون روش انتگرال M بالانویس "۱" در جملات $u_i^{(1)}, \varepsilon_{ij}^{(1)}, \sigma_{ij}^{(1)}$ جهت نمایش وضعیت اصلی و بالانویس "۲" در جملات $u_i^{(2)}, \varepsilon_{ij}^{(2)}, \sigma_{ij}^{(2)}$ برای نمایش وضعیت کمکی[1] است.

فضای کمکی تنش به شرح زیر می‌باشند.

$$\sigma_{ij}^{\text{aux}}=\frac{K_{\text{I}}^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}^{\text{I}}(\theta)+\frac{K_{\text{II}}^{\text{aux}}}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}^{\text{II}}(\theta)\quad i,\ j=1,\ 2 \qquad (۸۴-۴)$$

$$\sigma_{11}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left\{K_{\text{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]-K_{\text{II}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right]\right\} \qquad (۸۵-۴)$$

$$\sigma_{12}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\left\{K_{\text{I}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}+K_{\text{II}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]\right\} \qquad (۸۶-۴)$$

[1]- Auxiliary field

فضای کمکی جابجایی نیز به صورت زیر می‌باشد.

$$u_1=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{K_{\mathrm{I}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-\cos\theta\right)+K_{\mathrm{II}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+2+\cos\theta\right)\right\} \qquad (۸۷\text{-}۴)$$

$$u_1=\frac{1}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left\{K_{\mathrm{I}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa-\sin\theta\right)+K_{\mathrm{II}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-2+\cos\theta\right)\right\} \qquad (۸۸\text{-}۴)$$

لازم به ذکر است که در روابط ارائه شده پارامترهای κو μ به ترتیب ثابت کولوسوف[1] و مدول صلبیت (برشی) می‌باشند. ثابت کولوسوف به صورت رابطه (۴-۸۹) تعریف می‌شود.

$$\kappa=\begin{cases}3-4\nu & \text{plane strain}\\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} & \text{plane stress}\end{cases}. \qquad (۸۹\text{-}۴)$$

که ν نسبت پواسون است.

یادآور می‌شود که انتگرال J به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J_i=\int_{\Gamma}\left[Wn_i-\sigma_{jk}n_j\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right]\mathrm{d}\Gamma \qquad (۹۰\text{-}۴)$$

$$J_1=\int_{\Gamma}\left[W\,\delta_{1j}-\sigma_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\right]n_j\,\mathrm{d}\Gamma \qquad (۹۱\text{-}۴)$$

با جایگزین نمودن دو وضعیت تنش در رابطه (۴-۹۰) انتگرال اندرکنش به دست می‌آید.

$$J_1^{(1+2)}=\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}\right)\left(\varepsilon_{ij}^{(1)}+\varepsilon_{ij}^{(2)}\right)\delta_{1j}-\left(\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}\right)\frac{\partial\left(u_i^{(1)}+u_i^{(2)}\right)}{\partial x_1}\right]n_j\,\mathrm{d}\Gamma \qquad (۹۲\text{-}۴)$$

انتگرال J را می‌توان برای وضعیت خالص "۱" و کمکی "۲" از هم جدا نمود که این امر منتهی به یک جمله اندرکنش می‌شود.

$$J_1^{(1+2)}=J_1^{(1)}+J_1^{(2)}+M^{(1,2)} \qquad (۹۳\text{-}۴)$$

در رابطه (۴-۹۳)، عبارت $M^{(1,2)}$، جمله اندرکنش است که به صورت رابطه زیر می‌باشد.

[1]- Kolosov's constant

$$M^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j \, \mathrm{d}\Gamma \qquad (۹۴-۴)$$

که، $W^{(1,2)}$ دانسیته انرژی کرنشی است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$W^{(1,2)} = \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(1)} \qquad (۹۵-۴)$$

از آنجا که دو حالت ترک را رویهم‌گذاری کرده‌ایم، پس می‌توان آنها را به صورت زیر نوشت.

$$J_1^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + \frac{2}{E_{\text{eff}}} \left(K_{\text{I}}^{(1)} K_{\text{I}}^{(2)} + K_{\text{II}}^{(1)} K_{\text{II}}^{(2)} \right) \qquad (۹۶-۴)$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$M^{(1,2)} = \frac{2}{E_{\text{eff}}} \left(K_{\text{I}}^{(1)} K_{\text{I}}^{(2)} + K_{\text{II}}^{(1)} K_{\text{II}}^{(2)} \right) \qquad (۹۷-۴)$$

که در روابط فوق E_{eff} به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$E_{\text{eff}} = \begin{cases} E, & \text{plane stress} \\ \dfrac{E}{1-\nu^2}, & \text{plane strain} \end{cases} \qquad (۹۸-۴)$$

در انتها فاکتورهای شدت تنش را برای وضعیت تنش موجود می‌توان با جداسازی دو مود شکست از یکدیگر به دست آورد. برای مثال با قرار دادن $K_{\text{I}}^{(2)} = 1$, $K_{\text{II}}^{(2)} = 0$ مساله برای به دست آوردن $K_{\text{I}}^{(1)}$ حل می‌گردد.

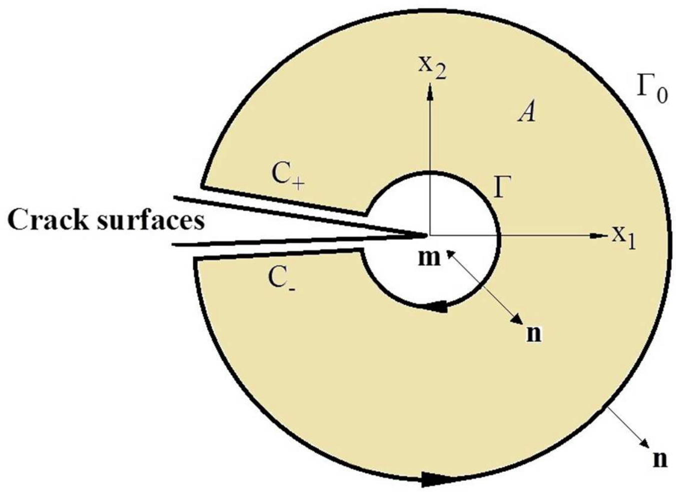
$$K_{\text{I}}^{(1)} = \frac{M^{(1,\text{Mode I})} E_{\text{eff}}}{2} \qquad (۹۹-۴)$$

و به طور مشابه خواهیم داشت:

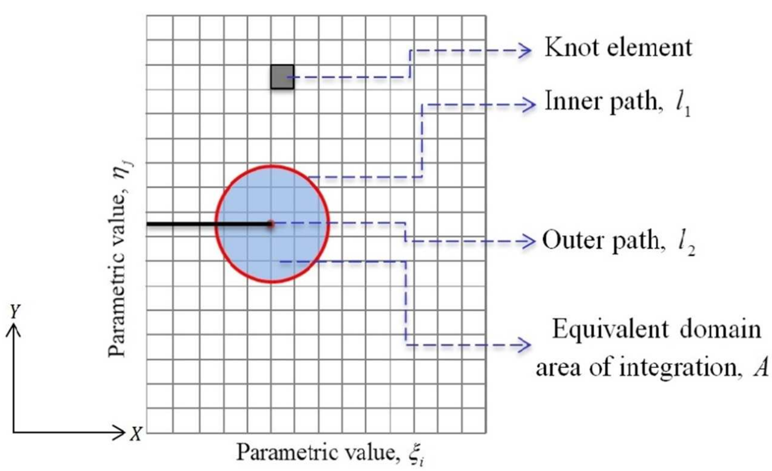
$$K_{\text{II}}^{(1)} = \frac{M^{(1,\text{Mode II})} E_{\text{eff}}}{2} \qquad (۱۰۰-۴)$$

در محاسبه انتگرال M به صورت عددی می‌توان این انتگرال را یا بر روی مسیر منحنی‌وار گرفت و یا اینکه از یک سطح معادل مثل A (مطابق شکل (۴-۱۷)) استفاده نمود. از جمله ویژگی‌های استفاده از روش سطح معادل بهبود روش محاسبه انتگرال در روش عددی است. مسیر $M^{(1,2)}$ با استفاده از تابع

هموار کننده[1] ($q(x)$) به انتگرال سطح منتقل می‌شود. این تابع برای داخلی‌ترین مسیر دارای مقدار یک و برای بیرونی‌ترین مسیر دارای مقدار صفر است (مطابق شکل (۴-۱۸)). سپس برای هر نقطه درون منطقه A از توابع شکل (تقریب) در درونیابی مقدار q استفاده می‌شود. در شکل (۴-۱۹) نحوه پیاده‌سازی فرایند محاسبه انتگرال اندرکنش در روش عددی آنالیز ایزوژئومتریک نشان داده شده است.



شکل (۴-۱۸) نمایش دامنه معادل انتگرال‌گیری برای محاسبه انتگرال اندرکنش



شکل (۴-۱۹) نمایش شماتیک فضای پارامتری در محاسبه انتگرال اندرکنش

[1]- Bounded smoothing function

بنابراین انتگرال اندرکنش را می‌توان بدین ترتیب نوشت:

$$M^{(1,2)} = \int_{C} \left[W^{(1,2)} \delta_{1j} - \sigma_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] q\, m_j \, \mathrm{d}\Gamma \qquad (۱۰۱-۴)$$

که $C = \Gamma + C_{+} + C_{-} + \Gamma_0$ و $\mathbf{m}$ نیز بردار یکه نرمال بر کانتور C می‌باشد. همچنین بمنظور ساده-سازی در محاسبات عددی، انتگرال اندرکنش برای محاسبه در دامنه معادل به صورت زیر نوشته می-شود.

$$M^{(1,2)} = \int_{A} \left[\boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \boldsymbol{\sigma}_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \boldsymbol{\delta}_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} \, \mathrm{d}A \qquad (۱۰۲-۴)$$

محاسبه انتگرال اندرکنش در یک حلقه از المان‌ها (المان گرهی) که در اطراف نوک ترک قرار گرفته‌اند انجام می‌گیرد. المان‌های موجود در این حلقه مانند یک جسم صلب حرکت می‌کنند. برای تمامی المان‌های موجود در این حلقه مقدار تابع q برابر واحد است لذا مشتق تابع q نسبت به x_j صفر خواهد شد. از طرفی برای تمامی المان‌های خارج از حلقه مفروض مقدار تابع q صفر بوده، پس مجدداً مشتق تابع q صفر خواهد بود. المان‌هایی که در انتگرال‌گیری اطراف نوک ترک مورد استفاده هستند در فاصله شعاعی از نوک ترک، که به صورت رابطه (۴-۱۰۳) تعیین می‌شود قرار دارند.

$$R = c \times \sqrt{\text{Elemental area}}\,;\ c = 1, \cdots, 5, \qquad (۱۰۳-۴)$$

که c ضریبی است که بهترین تأثیر در محاسبه انتگرال اندرکنش را در بازه اعداد یک تا پنج دارد [۲۲].

۴-۱۱-۵- مقادیر حل تجربی-تحلیلی فاکتور شدت تنش

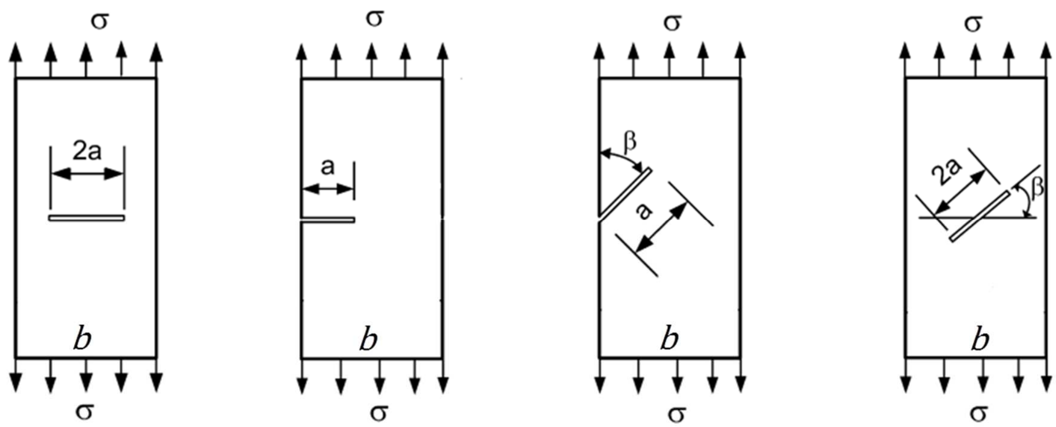
در حالت کلی برای برخی از حالات ایده‌آل شده و مطابق شرایط هندسی و بارگذاری مشخص حل تجربی-تحلیلی برای محاسبه فاکتور شدت تنش ارائه شده است که در این بخش مختصراً به آن روابط اشاره خواهد شد. روابط مورد استفاده شامل دامنه‌های حاوی ترک وسط (رابطه (۴-۱۰۴))، ترک لبه‌ای (رابطه (۴-۱۰۵)) و دو ترک لبه‌ای (رابطه (۴-۱۰۶)) می‌باشد که در ادامه به ترتیب روابط

محاسباتی تحلیلی فاکتور شدت تنش برای آنها ارائه می‌گردد. همچنین در شکل (۴-۲۰) پارامترها و شرایط هندسی دامنه جهت محاسبه فاکتور شدت تنش تحلیلی-تجربی نمایش داده شده است.

$$K_{\mathrm{I}} = \left[1 + 0.256\left(\frac{a}{b}\right) - 1.152\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 12.2\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]\sigma\sqrt{\pi a} \qquad (۱۰۴\text{-}۴)$$

$$K_{\mathrm{I}} = \left[1.12 - 0.23\left(\frac{a}{b}\right) + 10.56\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 21.74\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 30.42\left(\frac{a}{b}\right)^4\right]\sigma\sqrt{\pi a} \qquad (۱۰۵\text{-}۴)$$

$$K_{\mathrm{I}} = \left[1.12 - 0.2\left(\frac{a}{b}\right) + 1.2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1.93\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]\sigma\sqrt{\pi a} \qquad (۱۰۶\text{-}۴)$$



شکل (۴-۲۰) حالات مختلف صفحه حاوی ترک (ترک لبه‌ای، ترک میانی، ترک میانی مایل و ترک لبه‌ای مایل)

همچنین برای صفحه حاوی ترک مایل میانی تحت کشش یکنواخت (نشان داده شده در شکل (۴-۲۰)) که ترک با افق دارای زاویه β باشد، مطابق مرجع [۱۰۱] بزرگای فاکتورهای شدت تنش از رابطه (۴-۱۰۷) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} K_{\mathrm{I}} &= \sigma\sqrt{\pi a}\,\sin 2\beta \\ K_{\mathrm{II}} &= \sigma\sqrt{\pi a}\,\cos\beta\,\sin\beta \end{aligned} \qquad (۱۰۷\text{-}۴)$$

لازم به ذکر است که بمنظور محاسبه فاکتورهای شدت تنش در روش‌های عددی از روش برونیابی فاکتور شدت تنش در صفحه مقابل نوک ترک استفاده می‌شود.

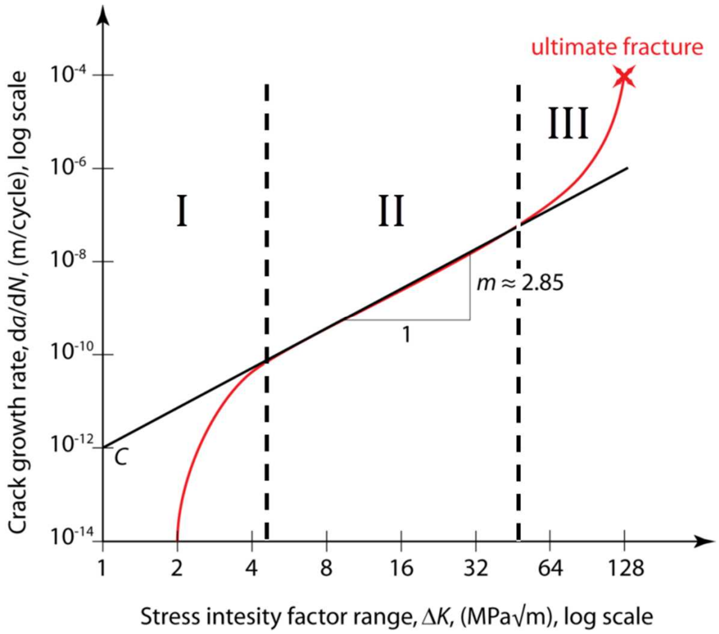
۴-۱۲- رشد ترک خستگی

رشد ترک خستگی پدیده‌ای است که در آن ترک در هر سیکل بارگذاری به میزان بسیار کم رشد می‌نماید. بر اساس آزمایش‌ها و مشاهده‌های مختلف مشخص شده است که مقدار رشد ترک (Δa) در هر سیکل بارگذاری با نسبت تغییرات طول ترک به تغییرات سیکل بارگذاری ($\mathrm{d}a/\mathrm{d}N$) قابل نمایش است.

در اوایل دهه ۱۹۶۰، پاریس[1] برای اولین بار نشان داد که مقدار رشد پایدار ترک در هر سیکل بارگذاری خستگی، با فاکتور شدت تنش در نوک ترک کنترل می‌شود. در شکل (۴-۲۱) رشد ترک خستگی بر حسب تغییرات لگاریتم $\mathrm{d}a/\mathrm{d}N$ و $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$ نشان داده شده است. بر اساس نتایج آزمایشگاهی سه ناحیه برای این منحنی تشخیص داده شده است [۱۱۵-۱۱۸].

بر اساس نتایج آزمایشگاهی سه ناحیه برای این منحنی تشخیص داده شده است [۱۱۷]. ناحیه اول مربوط به دامنه فاکتور شدت تنش‌های نزدیک به مقدار آستانه پایین ΔK_{th}، است که کمتر از این مقدار رشد ترک اتفاق نمی‌افتد. به این ناحیه، ناحیه آستانه گفته می‌شود. بخش خطی دوم موجود در دیاگرام، معرف یک رابطه توانی بین نرخ رشد ترک و محدوده فاکتورهای شدت تنش است. در انتها زمانی که $K_{\max}$ میل به مقدار فاکتور شدت تنش بحرانی K_{IC} می‌کند، رشد سریع ترک اتفاق افتاده و ترک به صورت ناپایدار رشد می‌کند. در ناحیه دوم معادله پاریس تقریب خوبی از داده‌های آزمایشگاهی را بیان می‌کند.

[1]- Paris



شکل (۴-۲۱) منحنی چگونگی رشد ترک خستگی

$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}N} = C\left(\Delta K\right)^{m} \qquad (۱۰۸-۴)$$

در رابطه فوق C و m ثابت‌های تجربی هستند که تحت عنوان پارامترهای قانون پاریس شناخته می‌شوند. طی سال‌ها مطالعات زیادی بر روی این پارامترها انجام گرفته است تا نشان دهند که این دو مقدار را نمی‌توان فقط به عنوان ثابت مصالح تعریف نمود. در واقع آنها به شرایط آزمایش مانند هندسه و اندازه نمونه، طول اولیه ترک و نسبت بارگذاری $R = \sigma_{\min}/\sigma_{\max} = K_{\min}/K_{\max}$ بستگی دارند. در جدول (۴-۳) برای چند نمونه از فلزات، مشخصات مطابق با معیار پاریس ذکر شده است [۱۱۶, ۱۱۸, ۱۱۹]. روابطی که در محاسبه ΔK موثر وجود دارد به شرح روابط زیر می‌باشند. در این مطالعه از روش تاناکا[1] استفاده شده است.

[1]- Tanaka

جدول (۴-۳) پارامترهای عددی در معیار پاریس

آلیاژ	پارامتر m	پارامتر C
فولاد	۳	$۱۰^{-۱۱}$
آلومینیوم	۳	$۱۰^{-۱۲}$
نیکل	۳/۳	۴×۱۰^{-۱۲}
تیتانیوم	۵	$۱۰^{-۱۱}$

$$\Delta K = \sqrt{K_{\mathrm{I}}^{2} + K_{\mathrm{II}}^{2}} \qquad \text{Rhee (1987)}$$

$$\Delta K = \left(K_{\mathrm{I}}^{4} + 8K_{\mathrm{II}}^{4}\right)^{1/4} \qquad \text{Tanaka (1974)} \qquad (۱۰۹-۴)$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\cos(\theta_0 / 2)K_{\mathrm{I}}(1+\cos\theta_0) - 3K_{\mathrm{II}}\sin\theta_0 \qquad \text{Yan (1992)}$$

فصل پنجم

شبیه سازی عددی

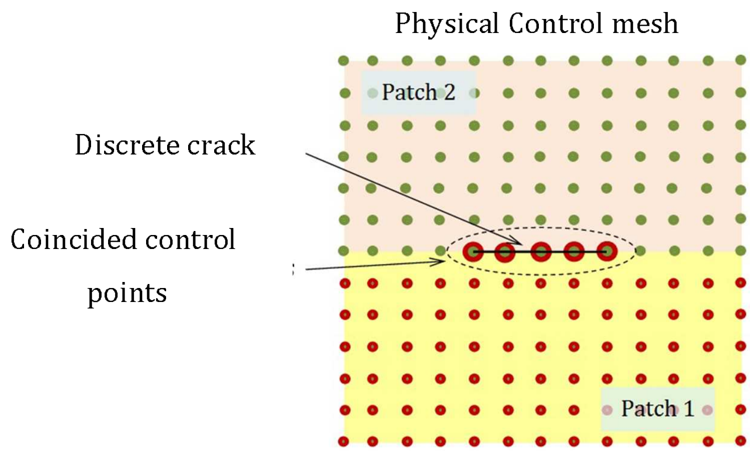
۵- نتایج شبیه‌سازی عددی

در ابتدای این بخش باید اشاره شود که تمامی نتایج عددی بدست آمده، بر اساس برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار MATLAB می‌باشند. در این قسمت به مدل‌سازی محیط‌های حاوی ناپیوستگی به صورت ترک لبه‌ای و وسطچین پرداخته شده است. همچنین نتایج حاصل از محاسبه فاکتور شدت تنش با روش‌های تحلیلی، برون‌یابی تنش و نیز روش انتگرال M نشان داده شده است. در این فصل برای مقایسه توانایی روش آنالیز ایزوژئومتریک در مکانیک شکست از مقادیر مختلف گسسته‌سازی دامنه در روش اجزای محدود توسعه یافته استفاده شده است. در این بخش به فرایند تولید منطقه ناپیوسته، مدل‌سازی عددی صفحه به همراه ناپیوستگی، مقایسه نتایج با حل دقیق، محاسبه فاکتورهای شدت تنش و شبیه‌سازی گسترش ترک پرداخته می‌شود. در پیش‌بینی شروع مسیر رشد ترک از هر دو روش حداکثر تنش مماسی (MTS) و حالت تعمیم یافته حداکثر تنش مماسی (GMTS) استفاده شده و تفاوت مسیر رشد ترک در هر دو روش نشان داده می‌شود.

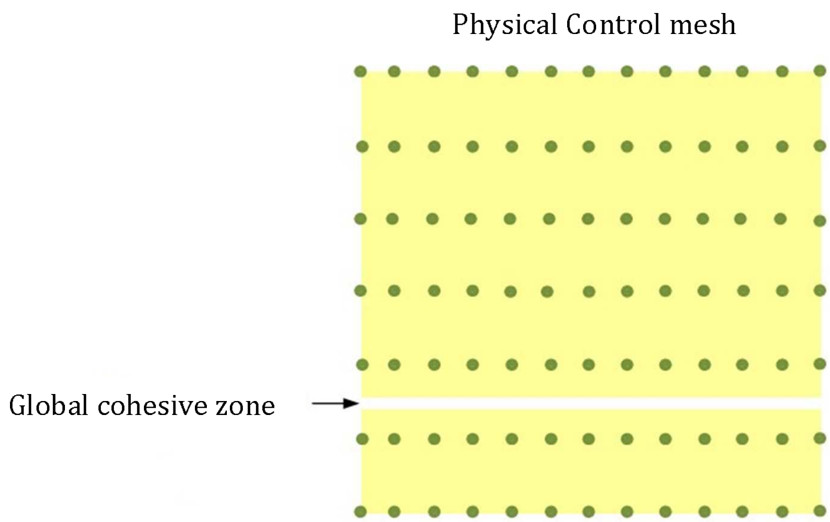
بدین منظور از هر دو روش عددی آنالیز ایزوژئومتریک که بمنظور خلاصه‌سازی از عبارت IGA برای آن استفاده خواهد شد و همچنین روش اجزای محدود توسعه یافته که تحت عنوان XFEM نامیده شده است استفاده خواهد شد.

۵-۱- روش تولید ناپیوستگی در روش آنالیز ایزوژئومتریک

بطور کلی در روش آنالیز ایزوژئومتریک از دو طریق به مدل‌سازی منطقه ناپیوسته پرداخته شده است. این دو شیوه شامل؛ استفاده از فضای پارامتری و متعاقباً کنترل درجه پیوستگی بین المانی در مدل‌های دو و سه بعدی و همچنین استفاده از فضای فیزیکی و تکرار نقاط کنترلی بین وصله‌ها و در نتیجه تولید تکینگی در ماتریس سختی می‌باشد. دو شیوه گفته شده بصورت شماتیک در شکل (۵-۱) و شکل (۵-۲) نمایش داده می‌شود.



شکل (۵-۱) نمایش شماتیک گسسته‌سازی دامنه بمنظور تولید ترک در روش آنالیز ایزوژئومتریک، نقاط کنترلی



شکل (۵-۲) نمایش شماتیک تولید منطقه ناپیوسته، از طریق فضای پارامتری، روش آنالیز ایزوژئومتریک

۵-۲- کنترل پیوستگی در فضای پارامتری و تولید مرز ناپیوسته در محیط دو بعدی

این موضوع که به صورت خاص در این مطالعه ارائه شده است یکی از توانایی‌های منحصر به فرد در روش آنالیز ایزوژئومتریک محسوب می‌گردد. به طور کلی موضوع تولید منطقه متأثر از ناپیوستگی تحت عنوان مدل ناحیه چسباننده (CZM)[۱]، شناخته می‌شود [۱۲۰, ۱۲۱]. در تمامی روش‌های عددی تلاش برای یافتن راه حلی است که بتوان هرچه ساده‌تر این ناحیه را بر دامنه فیزیکی مساله منطبق نمود. به طور کلی در روش آنالیز ایزوژئومتریک تولید ناپیوستگی بسیار مشخص است به نحوی

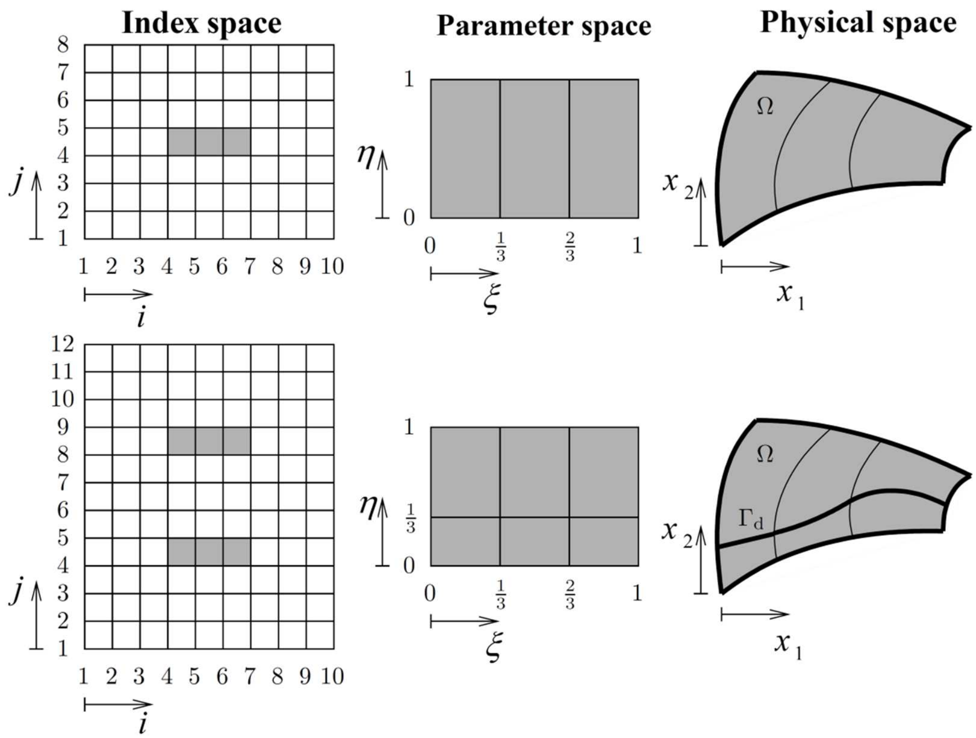
[1]- Cohesive zone model

که مهندسین و محققین می‌توانند با اطلاعات کافی از موضوع روش آنالیز ایزوژئومتریک به تولید محیط ناپیوسته بپردازند. بنابراین برای اینکه پُلی بین روش عددی و کار مهندسی برقرار نماییم، روشی بسیار کارا و قابل فهم در تولید ناپیوستگی را در روش آنالیز ایزوژئومتریک بیان می‌نماییم. لازم به ذکر است که از این ویژگی روش آنالیز ایزوژئومتریک می‌توان در مدل‌سازی مساله رشد ترک بدون اینکه در فضای فیزیکی تغییری ایجاد شود استفاده نمود.

در این روش منطقه ناپیوسته با استفاده از عملیاتی که در فضای پارامتری انجام می‌گیرد، ساخته می-شود. همانطوریکه گفته شد در فضای پارامتری می‌توان درجه پیوستگی چند جمله‌ای تقریب را کنترل نمود. به عبارت دیگر کنترل درجه پیوستگی بین المانی مزیت خاص روش آنالیز ایزوژئومتریک بشمار می‌آید که با استفاده از این قابلیت منحصر به فرد به تولید مرز ناپیوستگی در هر موقعیتی از وصله می‌پردازیم. کنترل درجه پیوستگی چند جمله‌ای بر اساس میزان تکرار مقادیر گرهی موجود در بردار گرهی که تولید کننده وصله می‌باشند انجام می‌گیرد. فضای پارامتری در روش آنالیز ایزوژئومتریک تصویر فضای فیزیکی مساله است که با نگاشت توابع نربز به دست می‌آید. بنابراین با تکرار یک مقدار گرهی در یک مختصات مشخص در فضای پارامتری، به تعداد یکی بیشتر از مرتبه چندجمله‌ای تقریب، یک ناپیوستگی سراسری در کل دامنه ایجاد می‌گردد.

در شکل (۵-۳) نمای کلی از این موضوع نشان داده شده است. از سمت چپ به راست شکل (۵-۳)، فضای اندیسی، فضای پارامتری و در انتها فضای فیزیکی نشان داده شده است. در نمایش فضای اندیسی به منظور فهم بهتر موضوع از تقسیمات یکسان استفاده می‌شود. بنابراین مقادیری که در هر دو جهت فضای اندیسی نشان داده شده است، معرف مقادیر گرهی است که در بردار گرهی تولید کننده وصله به کار گرفته می‌شود. از طرفی فضای پارامتری نشان دهنده چگونگی المان‌بندی فضای فیزیکی است. به عبارت دیگر تعداد تقسیمات المانی انجام شده بر فضای فیزیکی از طریق فضای پارامتری مشخص می‌شود.

هدف اصلی این مطالعه بیان این قابلیت و نشان دادن اثرات کنترل درجه پیوستگی در روش آنالیز ایزوژئومتریک است. بنابراین انتظار می‌رود تا در نتایج حاصل از کرنش و تنش برای جسم مورد نظر با یک پرش مواجه باشیم. نکته قابل توجه دیگر در این است که ناپیوستگی‌های دلخواه را می‌توان تنها در یک وصله ایجاد نمود و به این ترتیب در حجم محاسبات صرفه جویی نماییم.

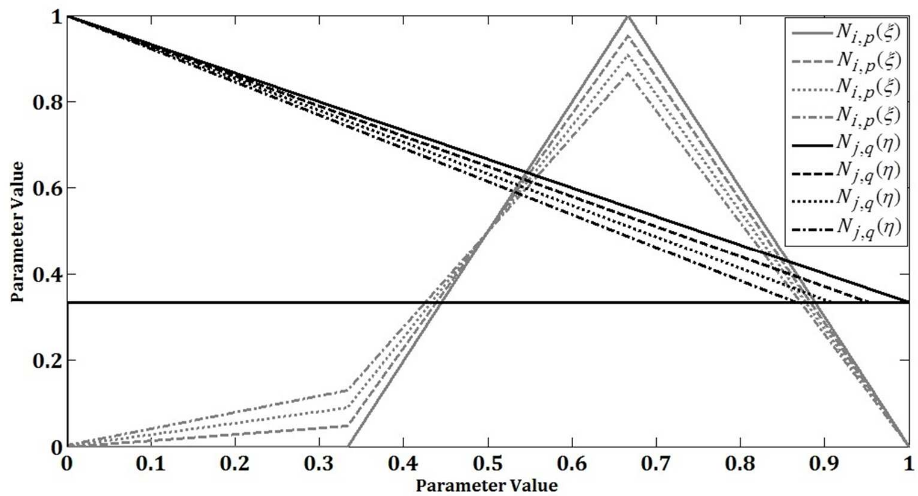


شکل (۵-۳) نمایش شماتیک تولید منطقه ناپیوسته سراسری به کمک روش آنالیز ایزوژئومتریک بر پایه نربز

در ادامه برای مشخص‌تر شدن موضوع به مدل‌سازی دامنه‌ای با اعمال قانون فوق در تولید منطقه ناپیوسته پرداخته می‌شود. در این مثال دامنه‌ای با یک ناپیوستگی افقی سراسری تولید می‌شود. در این مثال دامنه تحت کشش یکنواخت قرار گرفته است. بردارهای گرهی در هر دو جهت به صورت رابطه (۵-۱) در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} \Xi &= \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.333,\ 0.6667,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\} \\ \mathcal{H} &= \{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.333,\ 0.333,\ 0.333,\ 0.333,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\} \end{aligned} \tag{۵-۱}$$

در این قابلیت با استفاده از یک وصله می‌توان دامنه‌ای را مدل نمود که به چندین بخش تقسیم شده است. مطابق بردارهای گرهی ارائه شده در گسسته‌سازی فضای فیزیکی از ۳ المان گرهی در جهت x و ۲ المان گرهی در جهت y استفاده شده است. از طرفی در بردار گرهی $\mathcal{H}$ در موقعیت پارامتری $\eta = \eta_d = \frac{1}{3}$، که معادل ۷/۳ ارتفاع در فضای فیزیکی است، با تکرار ۴ بار در مقدار پارامتری ۰/۳۳۳ که این تعداد تکرار یکی بیشتر از مرتبه چندجمله‌ای تقریب است، یک ناپیوستگی سراسری در دامنه فیزیکی و تنها از طریق ویژگی کنترل پیوستگی در فضای پارامتری، ایجاد گردیده است. در شکل (۵-۴) توابع نربز ناپیوسته در موقعیت پارامتری ۰/۳۳۳ ارتفاع صفحه ارائه می‌گردد.

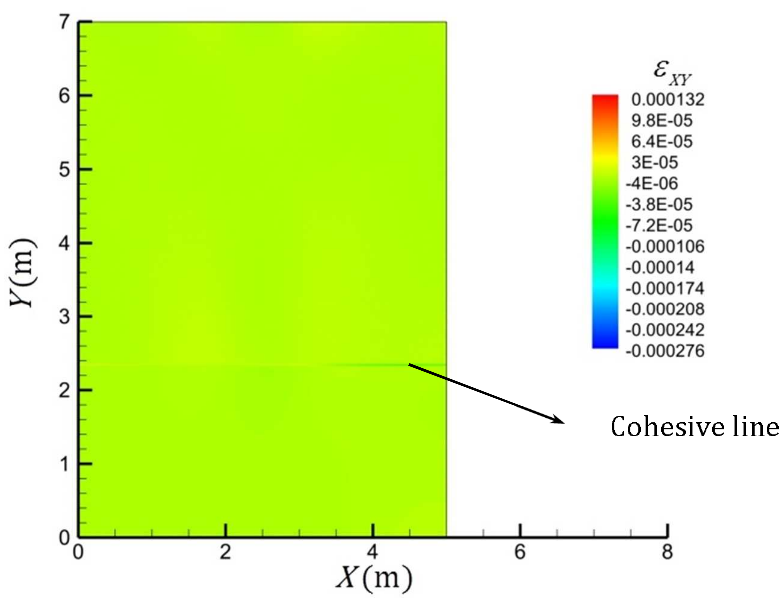


شکل (۵-۴) نمایش توابع پایه نربز (بی‌اسپیلاین) برای مدل‌سازی منطقه ناپیوسته

در فرمولاسیون منطقه متأثر از ناپیوستگی در وضعیت تغییرشکل‌های کوچک، پیوستگی بردار موقعیت x از طریق مقید نمودن موقعیت نقاط کنترلی و وزن آنها بر روی دو وجه ناپیوستگی تأمین می‌گردد. به عبارت دیگر قیدهای مربوطه از طریق مساوی قرار دادن موقعیت و همچنین وزن نقاط کنترلی متناظر بر دو سطح ترک اعمال می‌گردند. این قید در مورد میدان جابجایی مورد نیاز نمی‌باشد. از این روی، یک پرش در میدان جابجایی‌ها در مرز ناپیوستگی میانی (Γ_d) در فضای حل بدست می‌آید. این در حالی است که برای مسایل با تغییر شکل‌های بزرگ، میدان موقعیت مادی x در وضعیت تغییر شکل یافته، ناپیوسته خواهد بود. لذا در چنین وضعیتی می‌بایست قیود به نحوی اعمال گردد تا

پیوستگی نقاط مادی در حالت تغییرشکل نیافته را ارضا نماید. در چنین حالتی با یک سیستم معادلات غیر خطی مواجه خواهیم بود که باید از طریق یک فرایند تکرار شونده مانند نیوتن-رافسون حل شود.

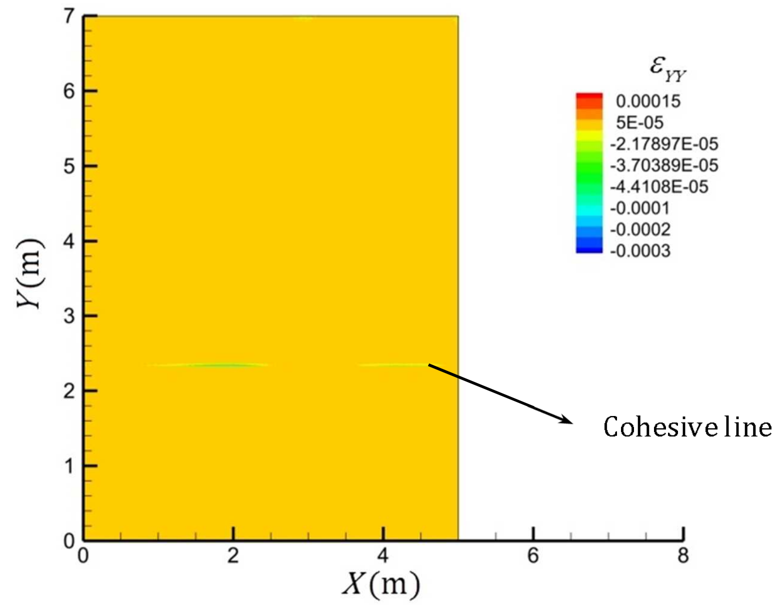
در مدل نشان داده شده، که دارای عرض ۵ و ارتفاع ۷ می‌باشد، در ارتفاع معادل ۱/۳، یک ناپیوستگی سراسری تولید شده است. نحوه توزیع کرنش برای شرایط مختلف نشان دهنده وجود یک لایه ناپیوسته می‌باشد. مطابق نتایج ارائه شده در شکل (۵-۵) و شکل (۵-۶) تاثیر وجود لایه مرزی تولید شده از طریق فضای پارامتری در روش آنالیز ایزوژئومتریک مشاهده می‌گردد. باید اضافه نمود که این قابلیت منحصر به فرد در روش آنالیز ایزوژئومتریک یک امتیاز فوق العاده مفید در مدل‌سازی مسایل با لایه مرزی است. بنابراین این توانایی دریچه‌ای را به سوی محققین مختلف و بالاخص در زمینه آنالیزهای عددی برای مطالعات بیشتر باز می‌نماید.



شکل (۵-۵) نمایش نحوه توزیع کرنش ε_{xy}

نکته مورد توجه در نمایش توزیع کرنش، پرش بوجود آمده در نتایج است که خود گواه وجود ناپیوستگی سراسری در جسم فیزیکی است. نکته قابل توجه در تمامی نتایج به دست آمده از تولید منطقه ناپیوسته سراسری بوسیله کنترل پیوستگی در فضای بردار گرهی روش آنالیز ایزوژئومتریک در

این است که جسم اولیه به دو یا چند قطعه مجزا از یکدیگر تفکیک شده و پرش بوجود آمده در نتایج تنش و کرنش گویای این واقعیت است. پرش بوجود آمده در نتایج معرف ایجاد ناپیوستگی در جسم فیزیکی اولیه بدون تغییر در دامنه فیزیکی مساله است.



شکل (۵-۶) نمایش نحوه توزیع کرنش ε_{yy}

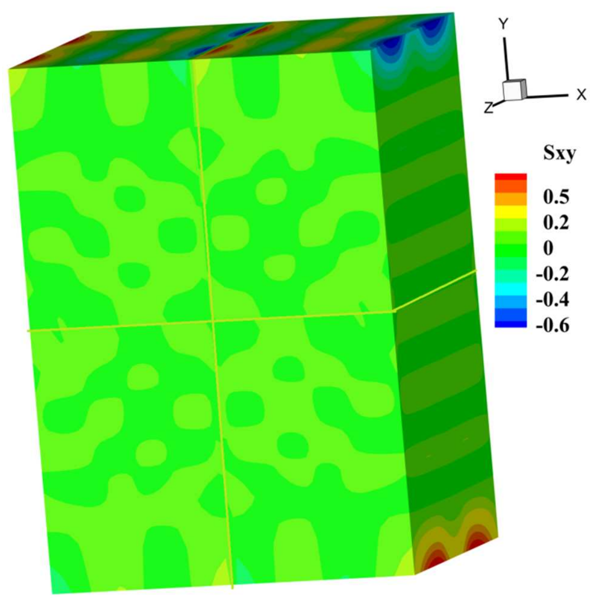
۵-۳- کنترل پیوستگی در فضای پارامتری و تولید مرز ناپیوسته در محیط سه بعدی

از طرفی بمنظور اثبات توانایی روش آنالیز ایزوژئومتریک در کنترل درجه پیوستگی بین المانی که نقش مهمی در فرایند گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیلی مرتبه بالاتر دارد، با استفاده از چند مدل سه بعدی به نمایش مطلوب برای موضوع مطروحه پرداخته می‌شود.

بطور کلی یک تابع عمومی u از چندین متغیر $(x\,,y\,,\ldots)$ از کلاس $C^{d}(\Omega)$ در یک دامنه Ω نامیده می‌شود، اگر تمامی مشتقات جزئی آن نسبت به $(x\,,y\,,\ldots)$ تا مرتبه d وجود داشته باشند و در دامنه Ω پیوسته باشند. بنابراین اگر u، در دو بعد در دامنه Ω از کلاس C^{0} باشد، آنگاه u، در دامنه Ω، پیوسته است، یعنی اینکه مقادیر $\partial u/\partial x\,,\;\partial u/\partial y$ وجود دارند اما ممکن است پیوسته نباشند.

۵-۳-۱- مثال اول

در این بخش یک مدل سه بعدی با استفاده از توابع پایه نربز ایجاد شده و درجه پیوستگی در فضای پارامتری تغییر داده می‌شود. این مدل از طریق ۷۱۵ نقطه کنترلی تولید شده است. در مدل‌سازی مثال اول به ترتیب مرتبه چند جمله‌ای تقریب نربز در جهات x، y و z برابر با ۳، ۳ و ۲ در نظر گرفته شده است. در چنین وضعیتی اگر تعداد تکرار مقادیر گرهی در فضای اندیس در جهت‌های x، y برابر با ۳ و در جهت z برابر با ۲ فرض گردد، آنگاه در فضای فیزیکی معادل با مقدار پارامتری مفروض، پیوستگی از مرتبه صفر یعنی مرز C^0 خواهیم داشت. به عبارت دیگر چنین فرایندی موجب گسسته سازی حجم نربز تولید شده به صورت المان‌های محدود مشابه با روش اجزای محدود استاندارد با پیوستگی بین مرز المانی از مرتبه صفر یعنی مرز C^0 می‌گردد. در نتیجه در مدل حجمی نربز شاهد یک پرش بصورت خط C^0 خواهیم بود. شکل (۵-۷) نشان دهنده خط با پیوستگی مرتبه صفر یعنی C^0، در مقدار پارامتری معادل با ۰/۵ در جهت‌های x و y می‌باشد. ابعاد دامنه ایجاد شده بصورت ۴×۷×۵ فرض شده است. رفتار مصالح بصورت الاستیک خطی بوده و نحوه بارگذاری بصورت کشش یکنواخت بر وجوه هندسی y لحاظ گردیده است.

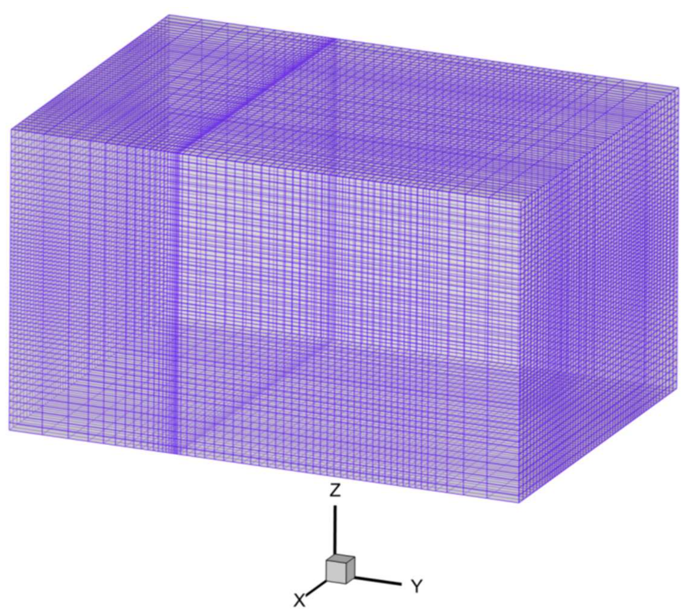


شکل (۵-۷) نمایش تقسیم بندی داخلی حجم نربز با مرزهای C^0 از طریق فضای پارامتری

۵-۳-۲- تولید مرز ناپیوسته

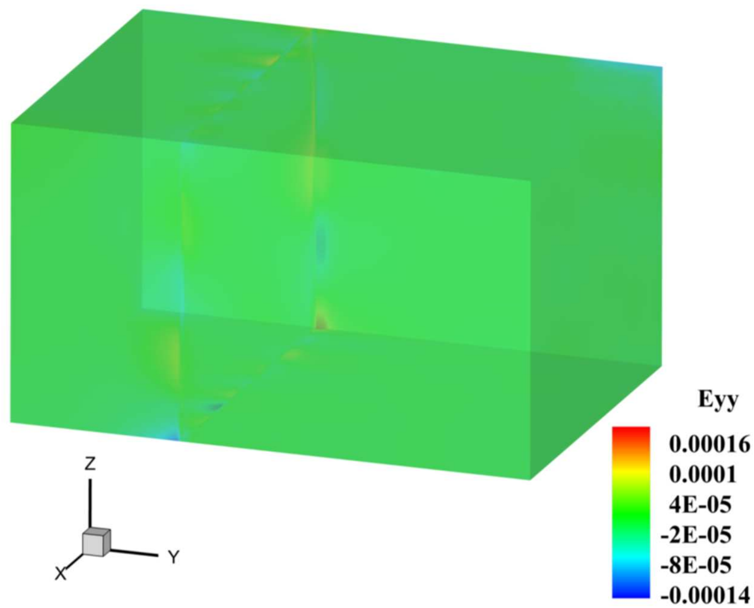
بمنظور نمایش منطقه متأثر از ناپیوستگی یک حجم نربز سه بعدی تولید نموده‌ایم و با استفاده از قابلیت فضای پارامتری و نحوه کنترل درجه پیوستگی بین المانی به تولید مرز ناپیوسته سراسری در ارتفاع معدل ۱/۳ پرداخته شده است. در این مثال از چندجمله‌ای تقریب نربز مرتبه ۳ در دو جهت x و y استفاده شده و در جهت z چندجمله‌ای مرتبه ۲ بکار گرفته شده است. حجم نربز مورد بررسی بوسیله یک وصله ساخته شده است و ابعاد آن ۴×۷×۵ در نظر گرفته شده است. طول بردارهای گرهی در جهت‌های x، y و z به ترتیب برابر با ۱۵، ۱۷ و ۸ می‌باشند. دامنه مورد بررسی تحت کشش یکنواخت بوده و رفتار مصالح در آن الاستیک خطی فرض گردیده است. در شکل (۵-۸) شبکه کنترلی بکار برده شده در تولید منطقه ناپیوسته سراسری نشان داده شده است.

همچنین در شکل (۵-۹) حجم نربز به همراه سطح ناپیوسته سراسری و در مقدار پارامتری $\eta = \frac{1}{3}$ نشان داده شده است. در واقع مساله مورد بررسی از طریق یک وصله و بصورت تکرار مقادیر گرهی در مقدار پارامتری مد نظر و با تعداد یکی بیشتر از درجه چندجمله‌ای تقریب در جهت y بدست آمده است.



شکل (۵-۸) شبکه کنترلی سه بعدی برای یک وصله در تولید منطقه ناپیوسته سراسری

نکته قابل ذکر در قید بکار گرفته شده در شبیه‌سازی عددی، بصورت یکسان در نظر گرفته شدن مختصات و وزن نقاط کنترلی بر وجوه سطح ناپیوسته سراسری است. لذا بدین ترتیب همانطوریکه در شکل (۵-۹) مشاهده می‌شود، یک پرش در کرنش ε_{yy} بوجود آمده است که نشان دهنده وجود لایه مرزی در محدوده آنالیز با تغییرشکل‌های کوچک است.



شکل (۵-۹) نمایش پرش در کرنش (ε_{yy}) و تولید منطقه متأثر از ناپیوستگی سراسری

در ادامه سطوح و احجام نربز به همراه ناپیوستگی از پیش تعریف شده بصورت ترک لبه‌ای و میانی (میانی مایل) مورد بررسی قرار داده می‌شود. در ابتدا برای صفحات حاوی ترک لبه‌ای و میانی افقی مقایسه بین حل عددی و حل دقیق بعمل آورده می‌شود. هدف از مقایسه بین حل عددی و دقیق نمایش دقت روش عددی در تخمین فضای کرنش و تنش است. وضعیت توزیع تنش در مثال‌های دو بعدی بصورت کرنش صفحه‌ای فرض شده و رفتار مصالح الاستیک خطی است. در نهایت مقایسه مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی از طریق انتگرال اندرکنش با مقادیر فاکتور شدت تنش بدست آمده از روش‌های برون‌یابی تنش و حل تجربی-تحلیلی ذکر شده در فصل ۴ صورت خواهد پذیرفت. همچنین بمنظور مشخص شدن وضعیت ماتریس سختی، مقادیر ویژه[1] برای هر مدل محاسبه شده و

[1]- Eigenvalue

نسبت بزرگترین به کوچکترین مقدار ویژه ($\lambda_{max}/\lambda_{min}$) مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. لازم به ذکر است که نسبت بزرگترین به کوچکترین مقدار ویژه تحت عنوان شاخص سختی[1] (SIn) نامیده می‌شود. مطابق تعریف، یک ماتریس، سخت نامیده می‌شود اگر مقدار شاخص سختی خیلی بزرگتر از یک باشد.

۵-۴- صفحه محدود با یک ترک لبه‌ای (SEC) در روش آنالیز ایزوژئومتریک

در بخش اول دامنه‌ای با یک ترک لبه‌ای به طول ۰/۵ با استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش آنالیز ایزوژئومتریک ترک لبه‌ای بوسیله تکرار نقاط کنترلی بین وصله‌ها و در نتیجه ایجاد تکینگی در ماتریس سختی تولید می‌گردد. ابعاد دامنه به عرض ۳ و طول ۶ در نظر گرفته شده است. نحوه بارگذاری بصورت کشش یکنواخت فرض شده است. مدل صفحه محدود حاوی ترک لبه‌ای را بوسیله دو الگوی مختلف از توزیع نقاط کنترلی گسسته‌سازی نموده‌ایم. در دو الگوی بکار گرفته شده به ترتیب از ۱۲۳۳ و ۳۳۳۶ نقطه کنترلی استفاده شده است. در واقع توزیع و ترتیب قرارگیری نقاط کنترلی بنحوی در نظر گرفته شده است که بیشترین کنترل را بر سطح نربز در نزدیکی نوک ترک داشته باشیم. به عبارت دیگر شبکه کنترلی ایجاد شده در نزدیکی نوک ترک ریزتر بوده و از طرفی در فضای پارامتری و در بردار گرهی مفروض در هر دو جهت نیز با نزدیک شدن به صفحات و نوک ترک از تقسیم‌بندی‌های ریزتری در بردار گرهی استفاده شده است. بنابراین دقت انتگرال‌گیری را در نوک ترک به حداکثر ممکن رسانده‌ایم. بعلاوه برای مشاهده بهتر تغییرات ناگهانی تنش در نوک ترک از چند جمله‌ای تقریب مرتبه ۳ در هر دو جهت هندسی استفاده شده است. تمامی مدل‌ها از طریق دو وصله تشکیل یافته است. برای مدلی که از ۱۲۳۳ نقطه کنترلی در گسسته‌سازی آن بکار گرفته شده است هر وصله از ۶۲۵ نقطه کنترلی با الگوی (۲۵×۲۵) تشکیل یافته و هر وصله در مدل حاوی ۳۳۳۶ نقطه کنترلی با الگوی (۳۳×۵۱) دارای ۱۶۸۳ نقطه کنترلی می‌باشد. بنابراین و بر اساس مشخصات تعداد نقاط کنترلی در هر مدل طول بردارهای گرهی در مدل

[1]- Stiff index

۱۲۳۳ و ۳۳۳۶ نقطه کنترلی به ترتیب در جهات x و y برابر با ۲۹، ۲۹، ۵۵ و ۳۷ لحاظ گردیده است. همچنین از این حیث که بردارهای گرهی از نوع باز انتخاب شده‌اند، تعداد تکرار مقادیر گرهی ابتدا و انتهای هر بردار برابر با ۴ بوده است. در محاسبات مربوطه از الگوی انتگرال‌گیری عددی گوسی مربعی در المان گرهی مربعی ۶×۶ و ۱۲×۱۲ استفاده شده که در جدول (۵-۱) و جدول (۵-۲) مشخصات نقاط گوسی نشان داده شده است. با مقایسه نتایج بدست آمده با هر دو الگو، الگوی ۶×۶ نیز جهت استفاده در محاسبات مناسب تشخیص داده شد. لذا نتایج بدست آمده تقریباً در دقیق‌ترین حالت ممکن می‌باشد. بعلاوه در فرایند زیرمثلث‌سازی در المان‌های گرهی نوک ترک از الگوی مثلثی هفت گرهی مطابق جدول (۵-۳) استفاده شده است. لازم به ذکر است که به منظور افزایش دقت در انتگرال‌گیری عددی حول نوک ترک از روش زیرمثلث‌سازی استفاده شده است. با کمک تابع زیرمثلث‌سازی، المان‌های متأثر از ترک، به المان مثلثی تقسیم شده آنگاه پس از تقسیم المان‌های مربعی به مثلث از نقاط گوسی جدید در انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود تا دقت حل در منطقه متاثر از ترک بیشتر گردد. برای مثال مورد نظر، مشخصات مصالح برای رفتار در محدوده الاستیک خطی، مقادیر $\nu = 0.3$, $E = 1.0\,\mathrm{E}+07\,(\mathrm{MPa})$ برای نسبت پواسون و مدول یانگ در رفتار کرنش صفحه‌ای لحاظ گردیده است. در ادامه برای ترک لبه‌ای با طول‌های مختلف مساله تکرار شده است و مقادیر فاکتور شدت تنش مودهای اول و دوم محاسبه شده است. خلاصه نتایج برای ترک‌های با طول غیر از ۰/۵ در ادامه مورد اشاره قرار خواهد گرفت.

جدول (۵-۱) موقعیت و وزن نقاط گوسی، با الگوی ۶×۶، برای المان مربعی

وزن نقطه گوسی	موقعیت نقطه گوسی
nw(1) = 0.171324492379170	np(1) = -0.932469514203152
nw(2) = 0.360761573048139	np(2) = -0.661209386466265
nw(3) = 0.467913934572691	np(3) = -0.238619186083197
nw(4) = 0.467913934572691	np(4) = 0.238619186083197
nw(5) = 0.360761573048139	np(5) = 0.661209386466265
nw(6) = 0.171324492379170	np(6) = 0.932469514203152

جدول (۵-۲) موقعیت و وزن نقاط گوسی، با الگوی ۱۲×۱۲، برای المان مربعی

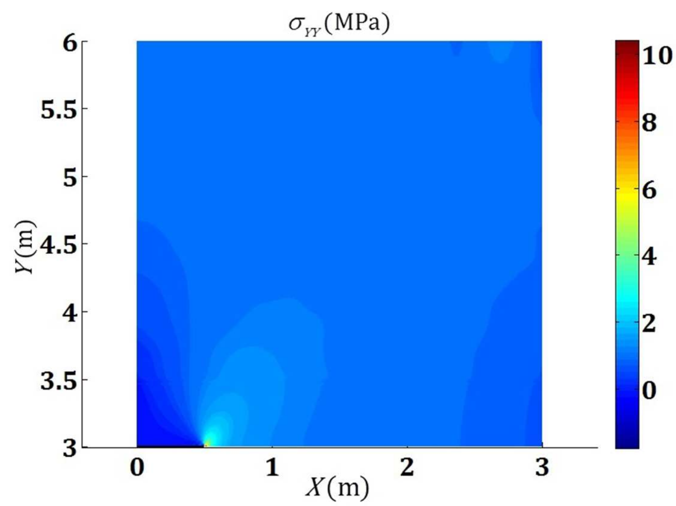
وزن نقطه گوسی	موقعیت نقطه گوسی
nw(1) = 0.047175336386512	np(1) = -0.981560634246719
nw(2) = 0.106939325995318	np(2) = -0.904117256370475
nw(3) = 0.160078328543346	np(3) = -0.769902674194305
nw(4) = 0.203167426723066	np(4) = -0.587317954286617
nw(5) = 0.233492536538355	np(5) = -0.367831498998180
nw(6) = 0.249147045813403	np(6) = -0.125233408511469
nw(7) = 0.249147045813403	np(7) = 0.125233408511469
nw(8) = 0.233492536538355	np(8) = 0.367831498998180
nw(9) = 0.203167426723066	np(9) = 0.587317954286617
nw(10) = 0.160078328543346	np(10) = 0.769902674194305
nw(11) = 0.106939325995318	np(11) = 0.904117256370475
nw(12) = 0.047175336386512	np(12) = 0.981560634246719

جدول (۵-۳) موقعیت و وزن نقاط گوسی، با الگوی ۷ گرهی، برای المان مثلثی

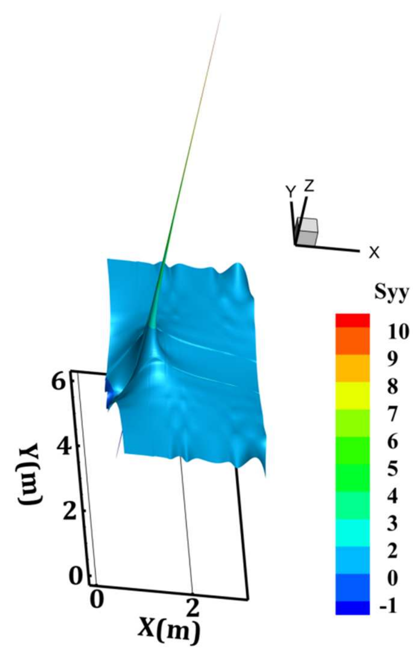
وزن نقطه گوسی	موقعیت نقطه گوسی
gw(1,:) = 0.125939180544827	gp(1,:) = [0.101286507323456 0.101286507323456]
gw(2,:) = 0.132394152788506	gp(2,:) = [0.470142064105115 0.059715871789770]
gw(3,:) = 0.125939180544827	gp(3,:) = [0.797426985353087 0.101286507323456]
gw(4,:) = 0.225030000300000	gp(4,:) = [0.333333333333333 0.333333333333333]
gw(5,:) = 0.132394152788506	gp(5,:) = [0.059715871789770 0.470142064105115]
gw(6,:) = 0.132394152788506	gp(6,:) = [0.470142064105115 0.470142064105115]
gw(7,:) = 0.125939180544827	gp(7,:) = [0.101286507323456 0.797426985353087]

همچنین بمنظور صحت سنجی نتایج روش آنالیز ایزوژئومتریک، مثال ترک لبه‌ای با طول ۰/۵ با روش اجزای محدود توسعه یافته نیز شبیه‌سازی شده که نتایج آن متعاقباً در بخش (۵-۴-۱-) آورده خواهد شد. در شکل (۵-۱۰) و شکل (۵-۱۱) نتایج حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریک برای صفحه حاوی ترک لبه‌ای ارائه شده است. نتایج برای مدل تشکیل شده از تعداد ۳۳۳۶ نقطه کنترلی ارائه می‌گردد. از طرفی بمنظور بررسی صحت و دقت هر دو روش عددی در مدل‌سازی ناپیوستگی ترک، از حل دقیق (مطابق رابطه (۴-۶۷)) استفاده شده که نتایج مقایسه‌ای آن با حل به روش آنالیز ایزوژئومتریک (مطابق شکل (۵-۱۲) تا شکل (۵-۱۵)) ارائه خواهد شد. همانگونه که مشاهده می‌شود، روش آنالیز ایزوژئومتریک در برآورد مقادیر تنش در جسم حاوی ترک لبه‌ای از دقت قابل توجهی برخوردار هستند. به عبارت دیگر موقعیت رخداد تمرکز تنش را بطور مطلوبی نمایش می‌دهد. از طرفی در

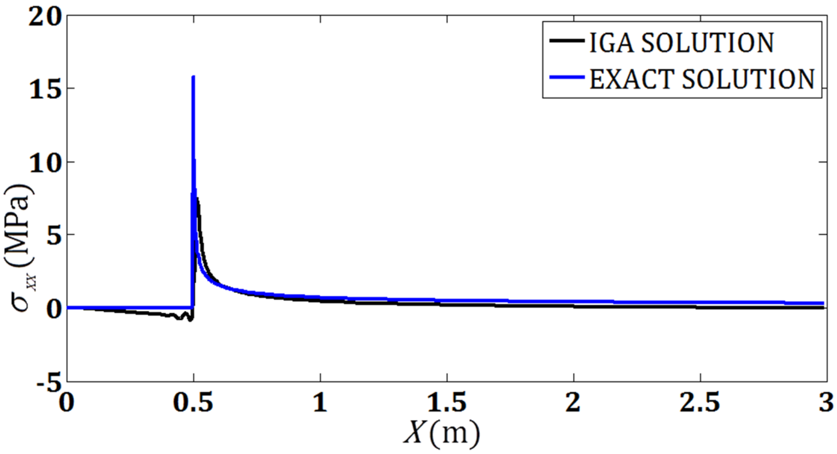
فاصله پس از نوک ترک تا انتهای دامنه انطباق حل دقیق و حل عددی تقریباً کامل است. نکته قابل ذکر در اندک تغییرات تنش در نقاط کنترلی نزدیک به نوک ترک در صفحه پشت آن می‌باشد که علت آن در نحوه گسسته‌سازی ترک در روش آنالیز ایزوژئومتریک است. البته این وضعیت تنها در حداکثر دو نقطه کنترلی منتهی به نوک ترک ظاهر گردیده و پس از نوک ترک نتایج روند مطلوب خود را حفظ کرده است.



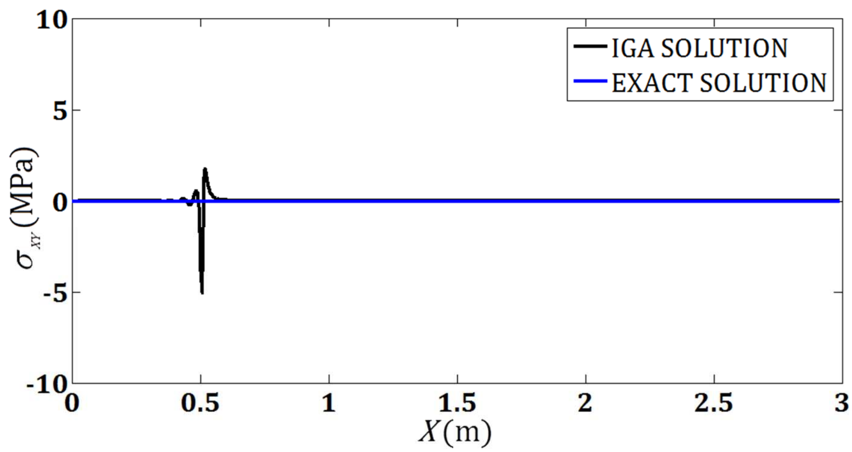
شکل (۵-۱۰) نمایش نحوه توزیع تنش σ_{yy} در صفحه حاوی ترک لبه‌ای به طول ۰/۵



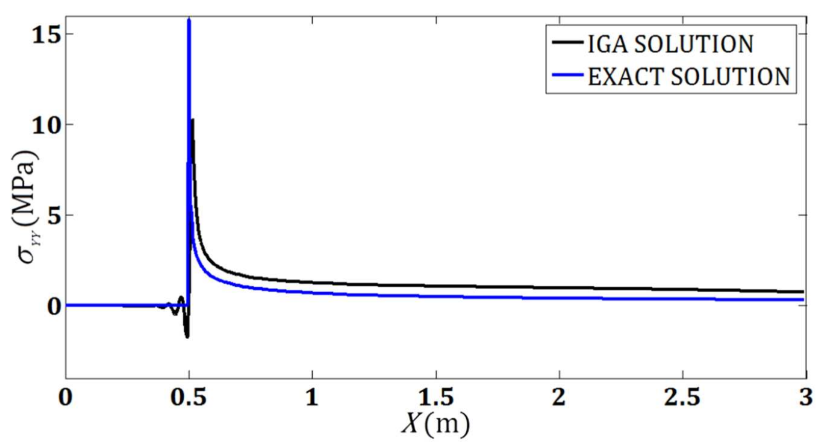
شکل (۵-۱۱) نمایش تمرکز تنش در صفحه حاوی ترک لبه‌ای به طول ۰/۵



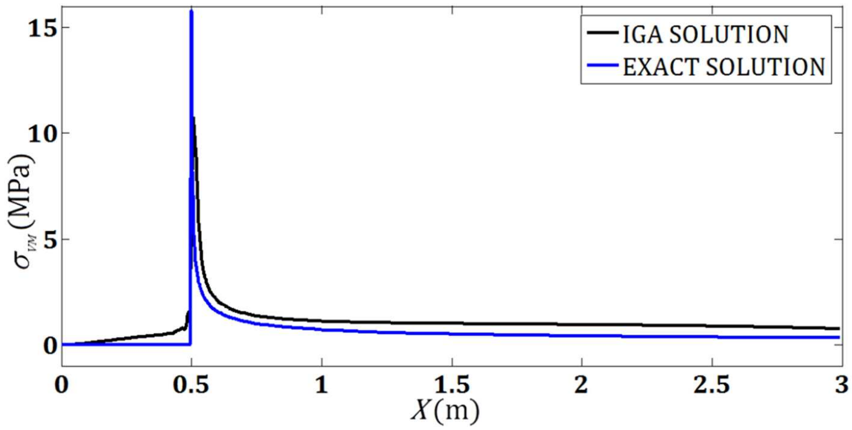
شکل (۵-۱۲) مقایسه توزیع تنش σ_{xx} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه



شکل (۵-۱۳) مقایسه توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه



شکل (۵-۱۴) مقایسه توزیع تنش σ_{yy} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه



شکل (۵-۱۵) مقایسه توزیع تنش σ_{VM} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه

در واقع آنچه که در مکانیک شکست محاسباتی حائز اهمیت فوق العاده است، محاسبه هموار تنش و کرنش در صفحه حاوی ترک و بالاخص در نوک ترک است. مطابق نتایج ارائه شده همواری نتایج و انطباق آنها با حل تحلیلی مناسب بوده و متضمن محاسبه فاکتورهای شدت تنش دقیق و در نتیجه محاسبه زاویه رشد ترک مطلوب مطابق معیار حداکثر تنش مماسی است. در ادامه نتایج مربوط به محاسبه فاکتورهای شدت تنش مود اول و مود دوم نشان داده خواهد شد. همانگونه که در جدول (۵-۴) مشاهده می‌شود، متناظر با افزایش درجات آزادی و ریزتر شدن شبکه کنترلی و فضای پارامتری در نوک ترک علاوه بر بهبود میزان فاکتورهای شدت تنش محاسباتی، وضعیت ماتریس سختی نیز بر اساس اندیس سختی بهبود یافته است.

جدول (۵-۴) مقایسه نتایج فاکتور شدت تنش محاسباتی و وضعیت ماتریس سختی در مدل‌های ترک لبه‌ای

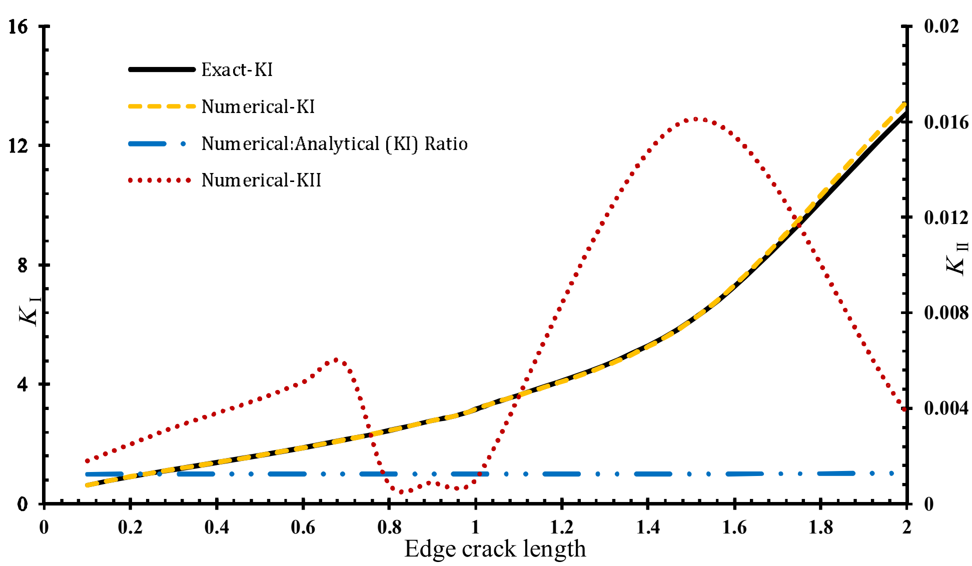
Crack length	Analytical-Experimental K_{I}	Number of control points	K_{I} (M-integral)	K_{II} (M-integral)	K_{I} / K_{I}(Analytical)	K_{II} (Analytical)	Stiff index
0.5	1.6266	1233	1.6850	0.001	1.036	0.0	1.56
0.5	1.6266	3336	1.6360	0.003	1.005	0.0	1.17

در ادامه بمنظور نمایش چگونگی مقادیر فاکتور شدت تنش برای ترک لبه‌ای با طول‌های مختلف در صفحه ۶×۳، ترک‌هایی با طول متفاوت که از ۰/۱ تا ۲/۰ متغیر خواهد بود به محاسبه میزان فاکتور

شدت تنش محاسباتی بوسیله انتگرال اندرکنش و مقایسه آنها با حل تحلیلی – تجربی پرداخته شده و نتایج حاصل در جدول (۵-۵) و شکل (۵-۱۶) نشان داده می‌شود.

جدول (۵-۵) ارائه نتایج فاکتور شدت تنش محاسباتی برای ترک لبه‌ای با طول‌های مختلف

Crack length	Analytical-Experimental K_I	Numerical K_I	Numerical K_{II}	K_I(Numerical)/ K_I(Analytical)
0.1	0.6296	0.6251	0.0018	0.993
0.2	0.9082	0.9135	0.0025	1.006
0.3	1.1493	1.1547	0.0032	1.005
0.4	1.3846	1.3869	0.0038	1.001
0.5	1.6266	1.6258	0.0044	0.999
0.6	1.8825	1.8789	0.0051	0.998
0.7	2.1581	2.1535	0.0058	0.998
0.8	2.4591	2.4532	0.0008	0.998
0.9	2.7927	2.7905	0.0009	0.999
1.0	3.1674	3.1708	0.001	1.001
1.5	6.1407	6.1340	0.0161	0.999
2.0	13.1032	13.4695	0.0038	1.028



شکل (۵-۱۶) مقایسه بین مقادیر فاکتور شدت تنش ترک لبه‌ای با طول‌های مختلف

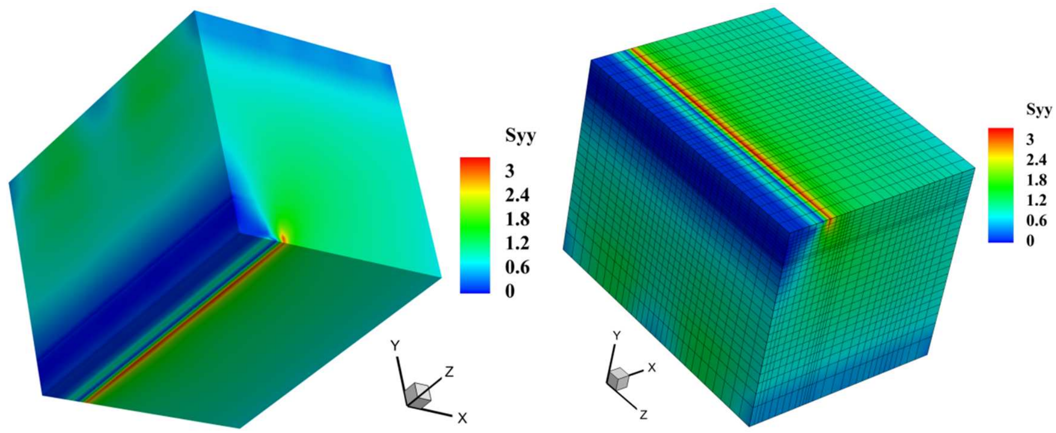
بر اساس نتایج ارائه شده از آن جهت که عرض دامنه برابر با ۳ (صفحه محدود) در نظر گرفته شده است، با افزایش طول ترک و با نزدیک تر شدن نوک ترک به مرز هندسی صفحه میزان خطای محاسباتی مقدار فاکتور شدت تنش نیز اندکی افزایش یافته است. اما میزان خطا بسیار ناچیز می‌باشد. در چنین شرایطی و در حالت ترک لبه‌ای افقی و صفحه تحت بارگذاری کششی یکنواخت، مقادیر فاکتور شدت تنش مربوط به مود دوم شکست (برشی) به روش تحلیلی صفر می‌باشند. در محاسبه عددی مقادیر مربوط به فاکتور شدت تنش مود دوم نیز نزدیک به صفر محاسبه شده است. البته مقداری خطا در محاسبات وجود دارد که اجتناب ناپذیر است. بنابرابن مطابق نتایج محاسباتی فاکتور شدت تنش مسیر رشد ترک لبه‌ای در کشش یکنواخت بر وجوه y بصورت افقی خواهد بود. همچنین بر اساس معیار تاناکا (فصل ۴) میزان فاکتور شدت تنش موثر محاسبه شده و با فاکتور شدت تنش بحرانی مصالح مقایسه می‌گردد. بر این اساس چنانچه فاکتور شدت تنش موثر از فاکتور شدت تنش بحرانی تجاوز نماید ترک در راستای زاویه θ_0 شروع به رشد می‌نماید.

در ادامه به مدل‌سازی یک حجم نربز به همراه یک سطح ناپیوسته لبه‌ای (ترک لبه‌ای) پرداخته می‌شود. حجم نربز مورد مطالعه بوسیله ۶۱۷۰ نقطه کنترلی تولید شده است. ترتیب نقاط کنترلی و بردار گرهی بنحوی تنظیم شده است که بیشترین کنترل بر سطح نربز در محدوده نزدیک به سطوح و نوک ترک حاصل گردد. حجم سه بعدی نربز حاوی ترک لبه‌ای از دو وصله تشکیل شده است. مرتبه چند جمله‌ای تقریب در جهات x و y برابر با ۳ و در جهت z برابر با ۲ فرض شده است. شرایط بارگذاری نیز بصورت کشش یکنواخت می‌باشد. شکل (۵-۱۷) نشان دهنده وضعیت ترک لبه‌ای در حجم نربز می‌باشد در این شکل وضعیت هر دو وصله به همراه شبکه کنترلی اعمال شده نشان داده شده است.

۵-۴-۱- صفحه محدود با ترک لبه‌ای به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته

با استفاده از آنالیز اجزای محدود توسعه یافته، توزیع تنش مطابق شکل (۵-۱۸) برای صفحه با ترک لبه‌ای از پیش تعریف شده به دست آمده است. لازم به ذکر است که چون دامنه مورد مطالعه تحت کشش یکنواخت بوده مقادیر تنش σ_{yy} نمایش داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود توزیع

تنش بدست آمده حاکی از تمرکز تنش در نوک ترک می‌باشد. این توزیع تنش برای مدل اجزای محدود توسعه یافته با المان‌های مربعی به طول ۰/۰۲ ارائه گردیده که محل رخداد تمرکز تنش در آن مدل به وضوح مشخص است.



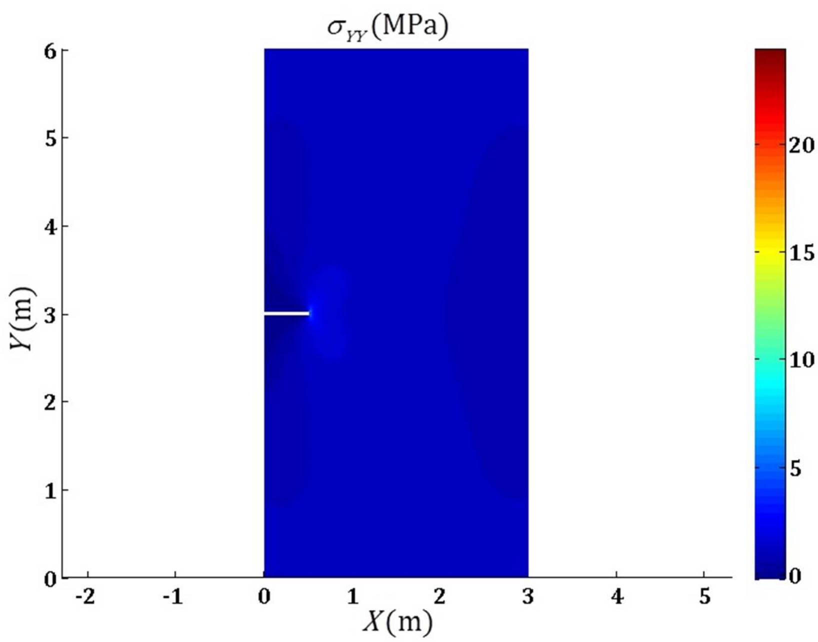
شکل (۵-۱۷) نمایش ترک لبه‌ای در حجم نربز برای وصله اول (سمت راست) و وصله دوم (سمت چپ)

در مدل اجزای محدود توسعه یافته از ۹۱۰۲۲ درجه آزادی استفاده شده است لذا شبکه اجزای محدود به کار گرفته شده یک شبکه بسیار ریز به شمار می‌آید. گسسته‌سازی دامنه مورد مطالعه در آنالیز به روش اجزای محدود توسعه یافته در هر جهت با المان‌های مربعی به ابعاد مختلف صورت گرفته است. در بخش مثال‌های عددی نتایج حاصل از آنالیز اجزای محدود توسعه یافته برای بهترین حالت ارائه می‌گردد.

جدول (۵-۶) نتایج محاسباتی ترک لبه‌ای به طول ۰/۵ به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته و وضعیت ماتریس سختی در مش‌بندی‌های با ابعاد مختلف

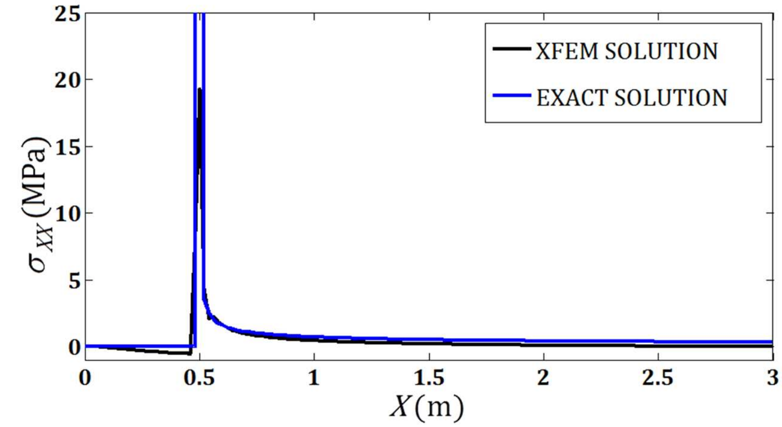
روش آنالیز	تشریح مدل	اندازه بعد المان مربعی	شاخص سختی	درجات آزادی
اجزای محدود توسعه یافته	ترک لبه‌ای	۰/۲	۱/۵۰	۱۰۴۴
	ترک لبه‌ای	۰/۱	۱/۷۸	۳۸۶۲
	ترک لبه‌ای	۰/۰۵	۱/۲۹	۱۴۸۵۲
(XFEM)	ترک لبه‌ای	۰/۰۳۳	۱/۲۲	۳۳۰۴۲
	ترک لبه‌ای	۰/۰۲۵	۱/۱۸	۵۸۴۳۲
	ترک لبه‌ای	۰/۰۲	۱/۱۱	۹۱۰۲۲

آنچه که در نتایج حاصل از روش اجزای محدود توسعه یافته مشهود است، باز هم با افزایش درجات آزادی و متعاقباً کاهش اندازه المان، میزان شاخص سختی کاهش یافته که دلالت بر بهبود وضعیت ماتریس سختی می‌نماید.

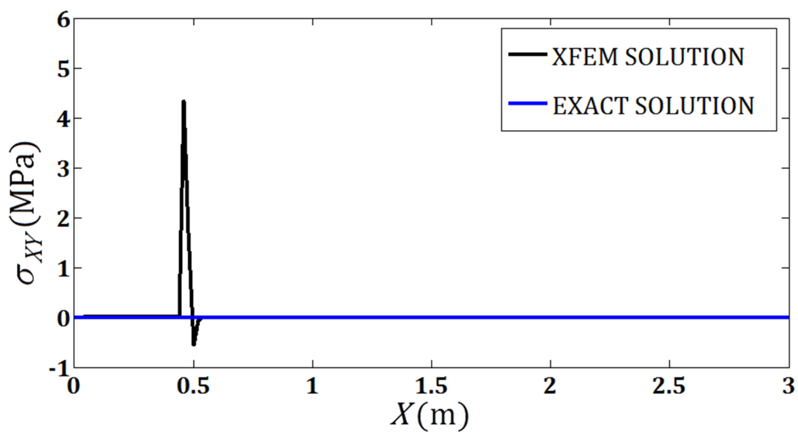


شکل (۵-۱۸) نمایش توزیع تنش در مدل ترک لبه‌ای، روش اجزای محدود توسعه یافته

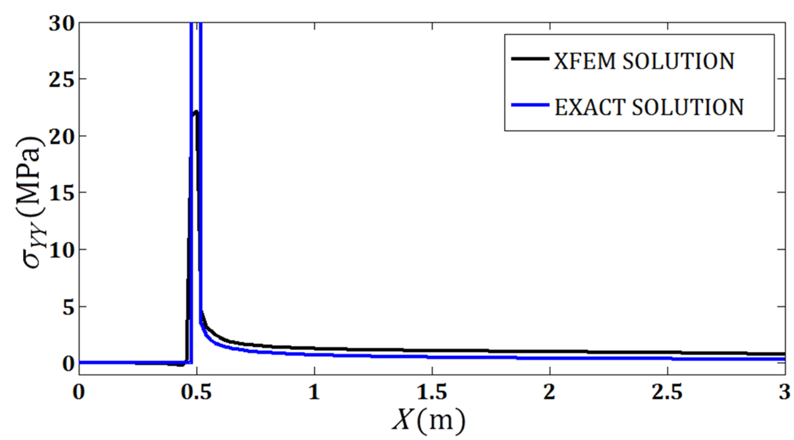
بمنظور نمایش نحوه شبیه‌سازی تنش در روش اجزای محدود توسعه یافته، مقایسه‌ای بین نتایج حل XFEM و دقیق صورت گرفته است که نتایج آن در شکل (۵-۱۹) تا شکل (۵-۲۲) نمایش داده می‌شود. انطباق حل عددی و حل دقیق در سراسر دامنه به خوبی تحقق یافته است. لازم به ذکر است که نتایج حاصل برای اندازه شبکه اجزای محدود برابر با ۰/۰۲ است. به عبارت دیگر نتایج با اندازه المان درشت‌تر از چنین دقتی برخوردار نبوده است.



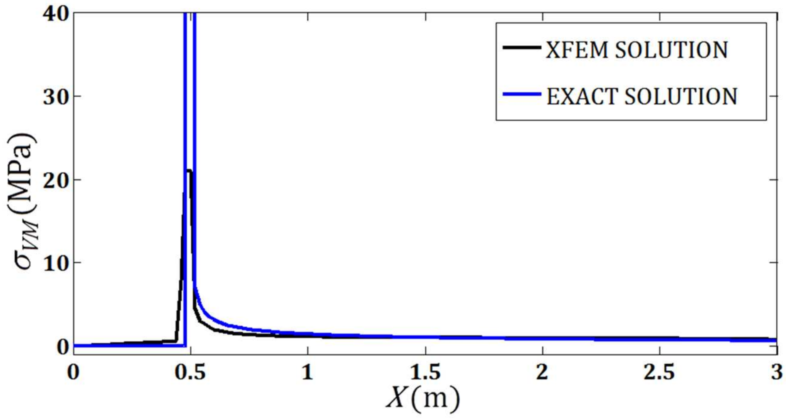
شکل (۵-۱۹) مقایسه توزیع تنش σ_{xx} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه



شکل (۵-۲۰) مقایسه توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه



شکل (۵-۲۱) مقایسه توزیع تنش σ_{yy} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه



شکل (۵-۲۲) مقایسه توزیع تنش σ_{VM} در خط گذرنده از نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه

در جدول (۵-۷) نتایج مربوط به فاکتورهای شدت تنش محاسباتی در روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه شده است. مقادیر ذکر شده برای صفحه محدود با ترک لبه‌ای به طول ۰/۵ می‌باشد. در واقع تأثیر تعداد درجات آزادی بر بزرگای فاکتور شدت تنش که با استفاده از روش انتگرال اندرکنش محاسبه شده است، مورد بررسی قرار گرفته است. همانطوریکه مشهود است روش اجزای محدود توسعه یافته نیز یک روش قوی و در عین حال انعطاف‌پذیر در مکانیک شکست محاسباتی است.

جدول (۵-۷) نتایج محاسباتی فاکتور شدت تنش با اندازه المان‌های مختلف در روش XFEM

تشریح مدل	اندازه بعد المان مربعی	پهنای باند: عرض پایین	پهنای باند: عرض بالا	شاخص سختی	فاکتور شدت تنش تئوری-تجربی	فاکتور شدت تنش عددی	درجات آزادی
ترک لبه‌ای	۰/۲	۵۹۱	۵۹۱	۱/۵۰	۱/۶۲۶۶	۱/۵۴۴۱	۱۰۴۴
ترک لبه‌ای	۰/۱	۲۰۶۷	۲۰۶۷	۱/۷۸	۱/۶۲۶۶	۱/۵۹۷۲	۳۸۶۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۵	۷۷۰۷	۷۷۰۷	۱/۲۹	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۳۱	۱۴۸۵۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۳۳	۱۶۹۴۷	۱۶۹۴۷	۱/۲۲	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۴۲	۳۳۰۴۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۲۵	۲۹۷۸۷	۲۹۷۸۷	۱/۱۸	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۵۸	۵۸۴۳۲
ترک لبه‌ای	۰/۰۲	۴۶۲۲۷	۴۶۲۲۷	۱/۱۱	۱/۶۲۶۶	۱/۶۲۹۱	۹۱۰۲۲

۵-۴-۲- مقایسه ماتریس سختی

در این بخش مقایسه‌ای بین وضعیت ماتریس سختی در هر دو روش آنالیز ایزوژئومتریک و روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه خواهد شد. همانطوریکه نشان داده شد، روش آنالیز ایزوژئومتریک با درجات آزادی کمتر و در نتیجه تلاش محاسباتی کمتر قادر است تا با دقت کافی و تقریباً معادل با درجات آزادی زیاد در روش XFEM به محاسبه پارامترهای شکست بپردازد.

اما ماتریس سختی که در هر دو روش عددی ایجاد می‌شود، پُر[1] یا متراکم[2] نبوده و هر دو ماتریس دارای مقادیر زیاد صفر[3] می‌باشند. اما ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته از شرایط قطری بودن مناسب‌تری نسبت به ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریک برخوردار است. به عنوان نمونه در مثال اول ماتریس سختی مربعی بدست آمده در روش آنالیز ایزوژئومتریک با اندازه ۲۴۶۶، دارای پهنای باند بالایی ۱۵۷ و پهنای باند پایین ۱۳۲۴ است. در حالیکه ماتریس سختی مربعی محاسبه شده به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته با اندازه ۹۱۰۲۲، دارای پهنای باند بالایی ۴۶۲۲۷ و پهنای باند پایین ۴۶۲۲۷ بوده است. به عبارت دیگر ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریک پُرتر از ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته است. این مساله به خودی خود به لحاظ محاسبات ماتریسی اختلافاتی در نوع حل و یا حجم محاسبات جهت معکوس‌سازی ماتریس به دنبال خواهد داشت که البته شاید بتوان گفت به دلیل کوچکتر بودن ابعاد ماتریس در مقایسه با روش اجزای محدود توسعه یافته این اختلاف قابل اغماض باشد.

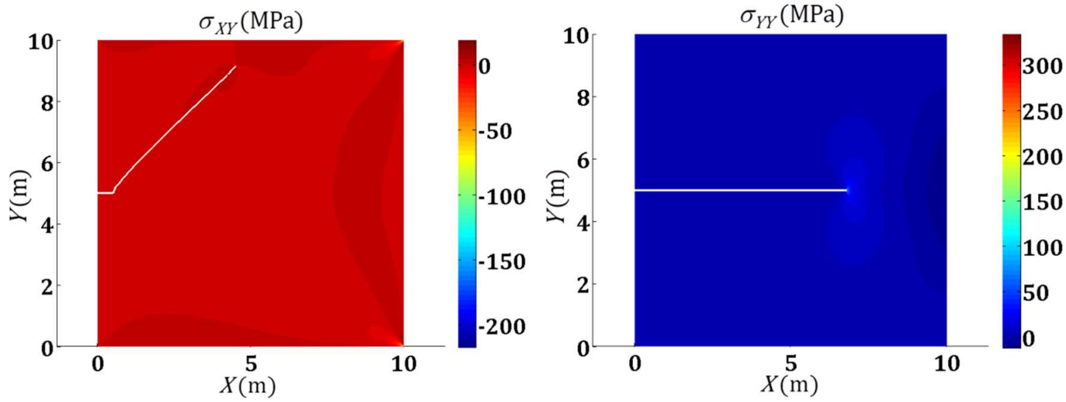
در مقایسه با مدل اجزای محدود توسعه یافته همواری نتایج توزیع تنش در حالت با درجات آزادی یکسان در روش آنالیز ایزوژئومتریک قابل توجه است؛ که علت در نحوه محاسبه و استخراج نتایج است. در روش آنالیز ایزوژئومتریک نتایج به دست آمده به صورت سطحی از نربز می‌باشند که بطور پیوسته به دست می‌آید. لازم به ذکر است که سطح نربز از طریق موقعیت نقاط کنترلی استخراج می‌گردد. سپس بمنظور نمایش نتایج، می‌توان هر چقدر از این سطح پیوسته را استخراج نمود. اصولا به طور کلی می‌توان گفت که بر اساس ویژگیهای منحصر به فرد روش آنالیز ایزوژئومتریک، امکان مدل‌سازی بهتر و مطلوب‌تر تغییرات ناگهانی و شدید گرادیان یا تغییر شدید در مقادیر تنش و کرنش وجود دارد.

[1]- Fully populated matrix
[2]- Dense matrix
[3]- Sparse matrix

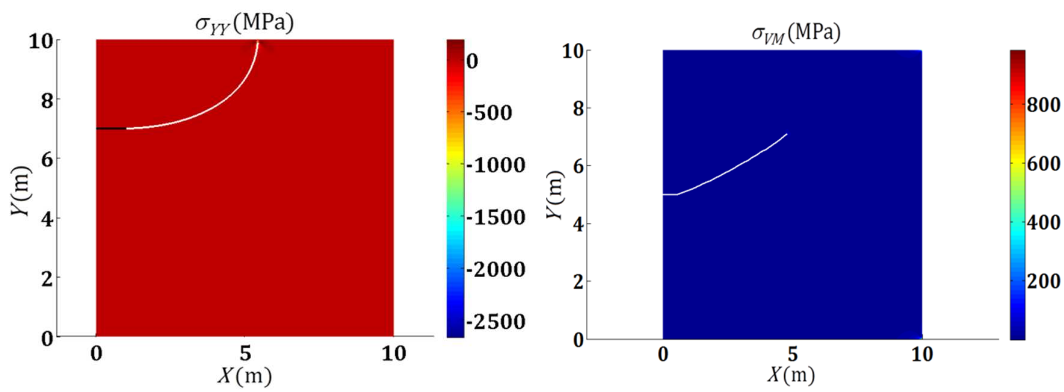
۵-۴-۳- شبیه‌سازی گسترش ترک لبه‌ای افقی

در ابتدا به بررسی مسیر گسترش ترک در شرایط بارگذاری متفاوت پرداخته می‌شود تا تفاوت‌های موجود در محتوای انرژی نوک ترک و چگونگی گسترش ترک لبه‌ای نشان داده شود. بنابراین سه مثال با ترک لبه‌ای به طول اولیه ۰/۵ و در نظر گرفتن رفتار الاستیک خطی برای مصالح و حالت کرنش صفحه‌ای در توزیع تنش‌ها مورد بررسی قرار داده شده است. نتایج حاصل برای ۳۰ مرحله رشد ترک به طول ثابت ۰/۲ در هر تکرار محاسبه گردیده است. لذا دامنه‌ای به ابعاد ۱۰×۱۰ با شبکه‌بندی به اندازه بعد ۰/۰۲۵ و ۳۲۲۷۰۶ درجه آزادی در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که مثالهای ارائه شده به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته شبیه‌سازی شده است. نتایج به ترتیب برای بارگذاری در کشش تک و برش در شکل (۵-۲۳)، ترکیب برش و کشش در شکل (۵-۲۴) ارائه می‌گردد.

مطابق نتایج ارائه شده، ترک لبه‌ای در کشش تک محوره به علت غلبه مود اول شکست (بازشدگی) تنها در مسیر افقی و به عبارتی عمود بر جهت حداکثر تنش مماسی رشد نموده است. در مقابل مدل تحت برش یکنواخت بر وجه y با غلبه مشهود مود دوم (برشی) با شیب تند به سمت وجه y رشد نموده است. اما در شرایط مود مرکب بارگذاری، مسیر رشد ترک با وضعیتی منحنی با سمت وجه y در حرکت است که نشان دهنده ترکیب مودهای اول و دوم است. نکته قابل توجه در مثال چهارم نشان داده شده در شکل (۵-۲۴) می‌باشد که ترک لبه‌ای غیر وسطچین در کشش یکنواخت در یک مسیر منحنی به سمت وجه y حرکت می‌نماید. در واقع موقعیت هندسی ترک به نوبه خود وضعیت ترکیب مودها را در گسترش ترک به آن دیکته می‌کند.



شکل (۵-۲۳) شبیه‌سازی گسترش ترک لبه‌ای، کشش یکنواخت (سمت راست)، برش یکنواخت (سمت چپ)

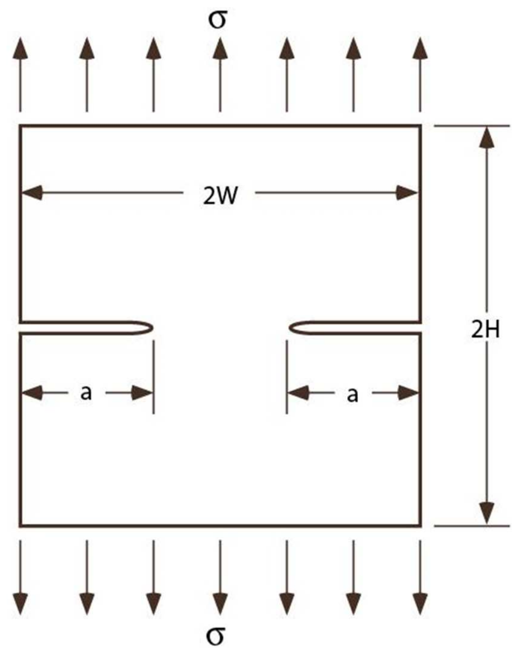


شکل (۵-۲۴) شبیه‌سازی گسترش ترک لبه‌ای، ترکیب کشش و برش (سمت راست)، ترک لبه‌ای واقع در نیمه بالایی صفحه در کشش (سمت چپ)

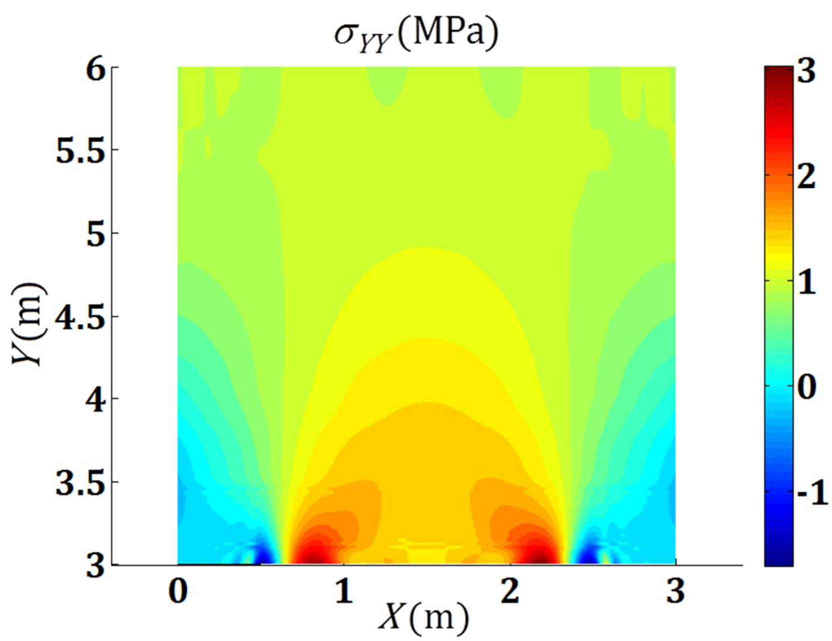
۵-۵- صفحه محدود با دو ترک لبه‌ای (DEC) در روش آنالیز ایزوژئومتریک

در مساله با دو ترک لبه‌ای از ۱۲۴۳ نقطه کنترلی استفاده شده است که در مجموع ۲۴۸۶ درجه آزادی وجود داشته است. در شکل (۵-۲۵) هندسه صفحه حاوی دو ترک لبه‌ای نشان داده شده است. صفحه حاوی دو ترک لبه‌ای تحت شرایط بارگذاری کشش تک محوره مورد بررسی قرار گرفته است. ماتریس سختی بدست آمده دارای پهنای باند بالایی ۱۵۷ و پهنای باند پایین ۱۳۴۴ بوده است. هموای مناسب نتایج نشان دهنده دقت قابل توجه روش آنالیز ایزوژئومتریک در برآورد تغییرات ناگهانی در متغیر مساله است. این مثال از طریق دو وصله که در هر وصله توابع پایه نربز با مرتبه ۳ برای هر دو جهت x و y منظور گردیده شبیه‌سازی شده است. در شکل (۵-۲۶) چگونگی توزیع تنش σ_{yy} در صفحه‌ای با دو ترک لبه‌ای که از طریق روش آنالیز ایزوژئومتریک بدست آمده است نمایش

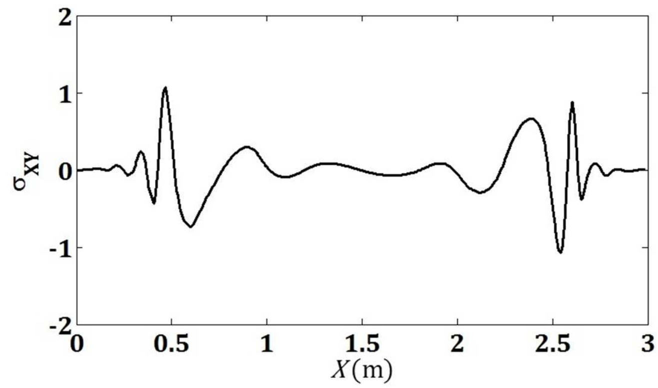
داده می‌شود. نتایج حاصل برای توزیع تنش در صفحه مقابل نوک هر دو ترک برای صفحه حاوی دو ترک لبه‌ای به کمک روش آنالیز ایزوژئومتریک در شکل (۵-۲۷) و شکل (۵-۲۸) ارائه گردیده است.



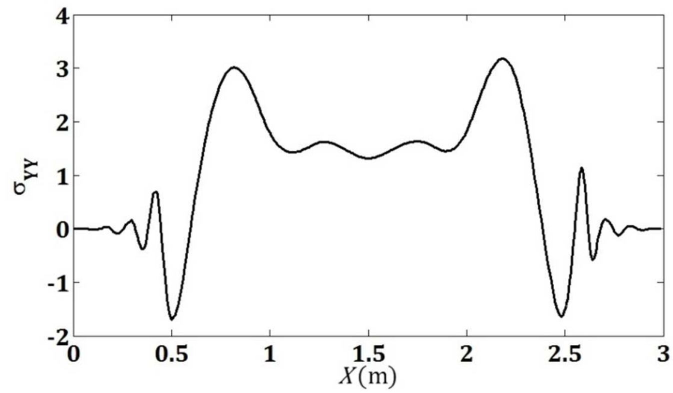
شکل (۵-۲۵) نمایش صفحه حاوی دو ترک لبه‌ای



شکل (۵-۲۶) توزیع تنش σ_{yy} در روش آنالیز ایزوژئومتریک برای دامنه‌ای با دو ترک لبه‌ای



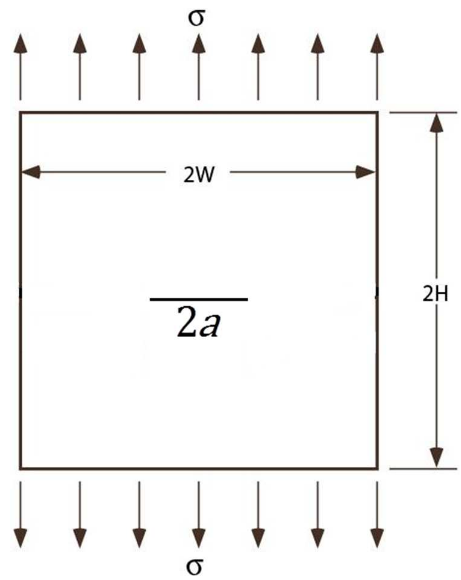
شکل (۵-۲۷) نحوه توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از دو نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه



شکل (۵-۲۸) نحوه توزیع تنش σ_{yy} در خط گذرنده از دو نوک ترک لبه‌ای تا انتهای صفحه

۵-۶- صفحه محدود با یک ترک میانی افقی (SCC) در روش آنالیز ایزوژئومتریک

در بخش اول صفحه‌ای با یک ترک وسطچین به طول ۰/۵ با استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریک مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش آنالیز ایزوژئومتریک ترک میانی بوسیله تکرار نقاط کنترلی بین وصله‌ها و در نتیجه ایجاد تکینگی در ماتریس سختی تولید می‌گردد. ابعاد دامنه به عرض ۳ و طول ۶ در نظر گرفته شده است. نحوه بارگذاری بصورت کشش یکنواخت فرض شده است. در مثال حاضر به شبیه‌سازی ترک وسط به طول ۰/۵ در میانه دامنه پرداخته‌ایم. بنابراین نوک اول ترک در عرض ۱/۲۵ که معادل با ۰/۴۱۶ مقدار پارامتری است و نوک دوم ترک در عرض ۱/۷۵ که معادل ۰/۵۸۳ مقدار پارامتری است قرار دارد. در شکل (۵-۲۹) هندسه صفحه حاوی ترک میانی افقی که تحت بارگذاری کششی تک محوره قرار گرفته باشد، نشان داده شده است.



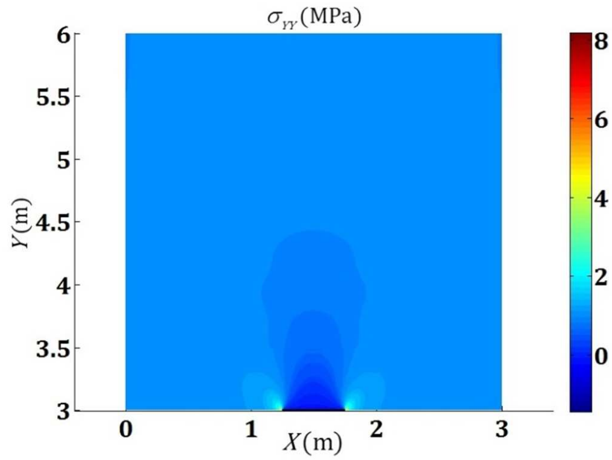
شکل (۵-۲۹) نمایش هندسه صفحه حاوی ترک میانی افقی

بمنظور اثبات اثرات چگونگی الگوی قرارگیری نقاط کنترلی بر روی مساله با حضور ترک میانی، صفحه مورد نظر از طریق سه الگوی متفاوت مورد بررسی قرار داده می‌شود. مدل‌های مورد بررسی بوسیله ۱۲۳۰، ۴۰۱۰ و ۹۸۷۶ نقطه کنترلی تولید شده است. در واقع توزیع نقاط کنترلی را بنحوی در نظر گرفته‌ایم که بیشترین کنترل را بر سطح نربز در مناطق نزدیک به سطوح و نوک‌های ترک داشته باشیم. لذا، شبکه کنترلی و فضای پارامتری ریزتری در محدوده نزدیک به ترک خواهیم داشت. ذکر این نکته ضروری بنظر می‌رسد که در مساله ترک میانی تمامی محاسبات و روند شبیه‌سازی بصورت متقارن برای هر دو نوک ترک برنامه‌نویسی شده است. از طرفی برای مشاهده بهتر تغییرات سطح تنش از چندجمله‌ای مرتبه ۳ در تقریب استفاده نموده‌ایم. همانطوریکه گفته شد تمامی مدل‌های ساخته شده از طریق تکرار نقاط کنترلی بین دو وصله ایجاد شده است. از این روی، برای تولید هر وصله در مدل‌های اول تا سوم این بخش به ترتیب از ۶۲۵ (۲۵×۲۵)، ۲۰۲۵ (۴۵×۴۵) و ۴۹۷۸ (۱۳۱×۳۸) نقطه کنترلی مجزا استفاده شده است. همچنین طول بردارهای گرهی برای هر مدل به ترتیب بصورت (۲۹×۲۹)، (۴۹×۴۹) و (۱۳۵×۴۲) لحاظ گردیده است.

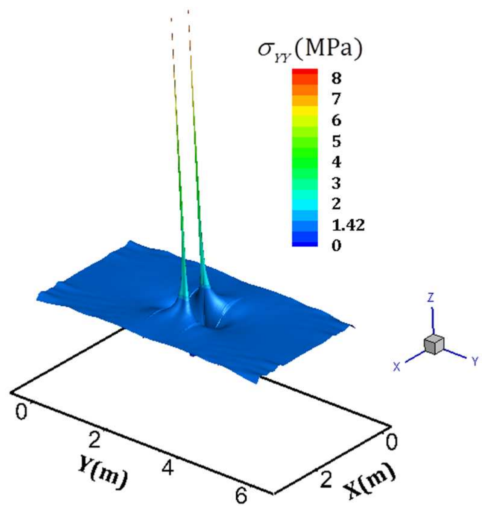
همچنین از این حیث که بردارهای گرهی از نوع باز انتخاب شده‌اند، تعداد تکرار مقادیر گرهی ابتدا و انتهای هر بردار برابر با ۴ بوده است. در محاسبات مربوطه از الگوی انتگرال‌گیری عددی گوس مربعی ۶×۶ و ۱۲×۱۲، در المان گرهی مربعی استفاده شده که در جدول (۵-۱) و جدول (۵-۲) مشخصات نقاط گوسی نشان داده شده است. با مقایسه نتایج بدست آمده با هر دو الگو، الگوی ۶×۶ نیز جهت استفاده در محاسبات مناسب تشخیص داده شد. لذا نتایج بدست آمده تقریباً در دقیق‌ترین حالت ممکن می‌باشد. بعلاوه در فرایند زیرمثلث‌سازی در المانهای گرهی نوک ترک از الگوی مثلثی هفت گرهی مطابق جدول (۵-۳) استفاده شده است. لازم به ذکر است که به منظور افزایش دقت در انتگرال‌گیری عددی حول نوک ترک از روش زیرمثلث‌سازی استفاده شده است. با کمک تابع زیرمثلث‌سازی، المان‌های متأثر از ترک، به المان مثلثی تقسیم شده آنگاه پس از تقسیم المان‌های مربعی به مثلث از نقاط گوسی جدید در انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود تا دقت حل در منطقه متاثر از ترک بیشتر گردد.

برای مثال مورد نظر، مشخصات مصالح برای رفتار در محدوده الاستیک خطی، از مقادیر $E = 1.0\,\mathrm{E}+07\,(\mathrm{MPa})\ \ ,\ \ \nu = 0.3$ برای نسبت پواسون و مدول یانگ در رفتار کرنش صفحه‌ای لحاظ گردیده است. در ادامه برای ترک میانی افقی با طول‌های مختلف مساله تکرار شده است و مقادیر فاکتور شدت تنش مودهای اول و دوم محاسبه شده است. خلاصه نتایج برای ترک‌های با طول غیر از ۰/۵ در ادامه مورد اشاره قرار خواهد گرفت. در شکل (۵-۳۰) و شکل (۵-۳۱) نتایج حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریک برای صفحه حاوی ترک میانی افقی ارائه شده است. نتایج برای مدل تشکیل شده از تعداد ۹۸۷۶ نقطه کنترلی ارائه می‌گردد.

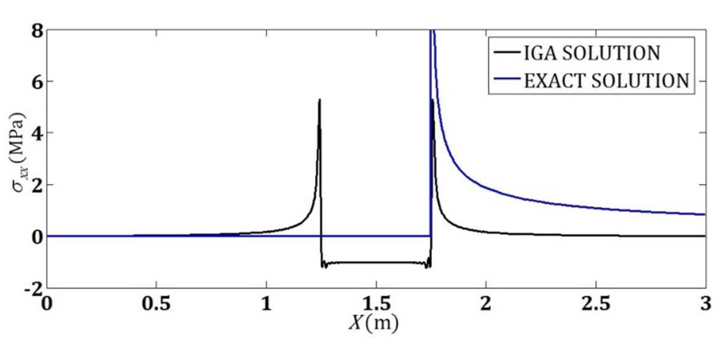
از طرفی بمنظور بررسی صحت و دقت هر دو روش عددی در مدل‌سازی ناپیوستگی ترک، از حل دقیق (مطابق رابطه (۴-۶۷)) استفاده شده که نتایج مقایسه‌ای آن با حل به روش آنالیز ایزوژئومتریک (مطابق شکل (۵-۳۲) تا شکل (۵-۳۵)) ارائه خواهد شد.



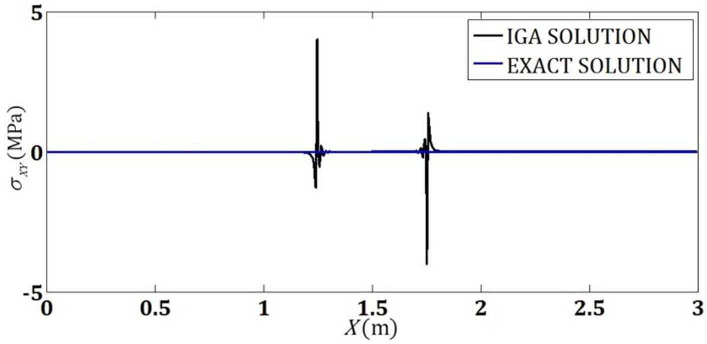
شکل (۵-۳۰) نمایش توزیع کانتور تنش در مدل ایزوژئومتریک برای صفحه حاوی ترک میانی افقی



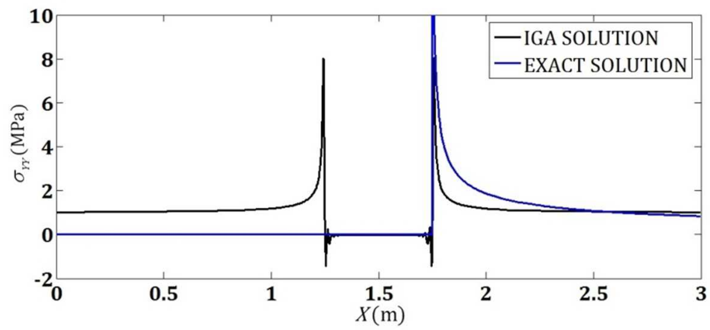
شکل (۵-۳۱) نمایش تمرکز تنش σ_{yy} برای صفحه حاوی ترک میانی افقی



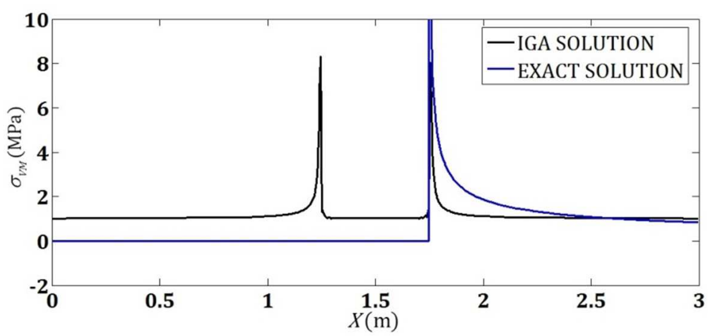
شکل (۵-۳۲) مقایسه توزیع تنش σ_{xx} در خط گذرنده از هر دو نوک ترک میانی تا انتهای صفحه



شکل (۵-۳۳) مقایسه توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از هر دو نوک ترک میانی تا انتهای صفحه



شکل (۵-۳۴) مقایسه توزیع تنش σ_{yy} در خط گذرنده از هر دو نوک ترک میانی تا انتهای صفحه



شکل (۵-۳۵) مقایسه توزیع تنش σ_{VM} در خط گذرنده از هر دو نوک ترک میانی تا انتهای صفحه

همانگونه که مشاهده می‌شود، روش آنالیز ایزوژئومتریک در برآورد مقادیر تنش در جسم حاوی ترک میانی از دقت قابل توجهی برخوردار هستند. به عبارت دیگر موقعیت رخداد تمرکز تنش را بطور مطلوبی نمایش می‌دهد. از طرفی در فاصله پس از نوک ترک تا انتهای دامنه انطباق حل دقیق و حل عددی تقریباً کامل است. نکته قابل ذکر در اندک تغییرات تنش در نقاط کنترلی نزدیک به نوک ترک

در صفحه پشت آن می‌باشد که علت آن در نحوه گسسته‌سازی ترک در روش آنالیز ایزوژئومتریک است. البته این وضعیت تنها در حداکثر دو نقطه کنترلی منتهی به نوک ترک ظاهر گردیده و پس از نوک ترک نتایج روند مطلوب خود را حفظ کرده است.

در واقع آنچه که در مکانیک شکست محاسباتی حائز اهمیت فوق العاده است، محاسبه هموار تنش و کرنش در صفحه حاوی ترک و بالاخص در نوک ترک است. مطابق نتایج ارائه شده همواری نتایج و انطباق آنها با حل تحلیلی مناسب بوده و متضمن محاسبه فاکتورهای شدت تنش دقیق و در نتیجه محاسبه زاویه رشد ترک مطلوب مطابق معیار حداکثر تنش مماسی می‌باشد. در ادامه نتایج مربوط به محاسبه فاکتورهای شدت تنش مود اول و مود دوم نشان داده خواهد شد. همانگونه که در جدول (۵-۸) مشاهده می‌شود، متناظر با افزایش درجات آزادی و ریزتر شدن شبکه کنترلی و فضای پارامتری در نوک ترک علاوه بر بهبود میزان فاکتور شدت تنش محاسباتی، وضعیت ماتریس سختی نیز بر اساس اندیس سختی بهبود یافته است.

جدول (۵-۸) خلاصه نتایج محاسباتی فاکتورهای شدت تنش و وضعیت ماتریس سختی در صفحه حاوی ترک میانی

Crack length	Analytical-Experimental K_I	Number of control points	K_I (M-integral)	K_{II} (M-integral)	K_I / K_I(Analytical)	K_{II} Analytical	Stiff index
0.5	0.9043	1230	0.9103	0.056	1.006	0.0	1.850
0.5	0.9043	4010	0.8970	0.011	0.992	0.0	1.690
0.5	0.9043	9876	0.9033	0.011	0.999	0.0	1.003

در ادامه بمنظور نمایش چگونگی مقادیر فاکتور شدت تنش برای ترک لبه‌ای با طول‌های مختلف در صفحه ۶×۳، ترک‌هایی با طول متفاوت که از ۰/۱ تا ۲/۰ متغیر خواهد بود به محاسبه میزان فاکتور شدت تنش محاسباتی بوسیله انتگرال اندرکنش و مقایسه آنها با حل تحلیلی – تجربی پرداخته شده و نتایج حاصل در جدول (۵-۹) و شکل (۵-۳۶) نشان داده می‌شود.

بر اساس نتایج ارائه شده از آن جهت که عرض دامنه برابر با ۳ (صفحه محدود) در نظر گرفته شده است، با افزایش طول ترک و با نزدیک تر شدن نوک ترک به مرز هندسی صفحه میزان خطای

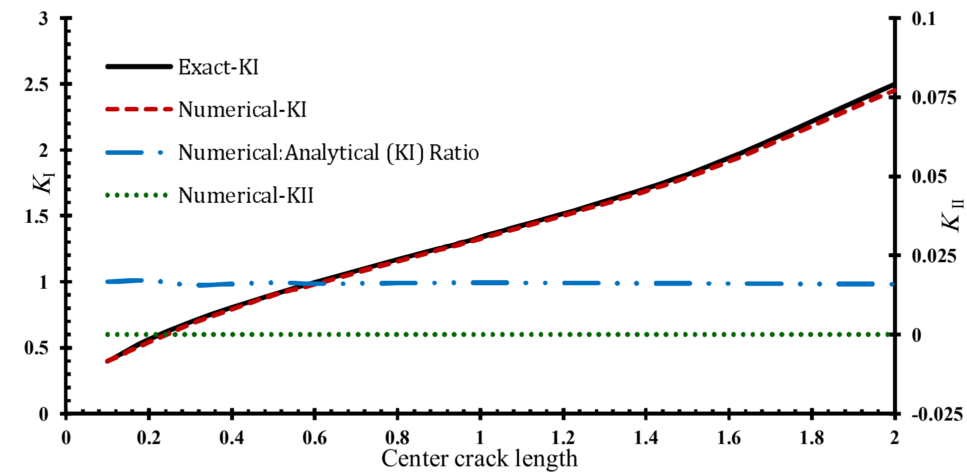
محاسباتی مقدار فاکتور شدت تنش نیز اندکی افزایش یافته است. اما میزان خطا بسیار ناچیز می‌باشد. در چنین شرایطی و در حالت ترک میانی افقی و صفحه تحت بارگذاری کششی یکنواخت، مقادیر فاکتور شدت تنش مربوط به مود دوم شکست (برشی) به روش تحلیلی صفر می‌باشند. در محاسبه عددی مقادیر مربوط به فاکتور شدت تنش مود دوم نیز نزدیک به صفر محاسبه شده است. البته مقداری خطا در محاسبات وجود دارد که اجتناب ناپذیر است.

جدول (۵-۹) خلاصه محاسبات فاکتور شدت تنش برای ترک میانی با طول متغیر از ۰/۱ تا ۲/۰

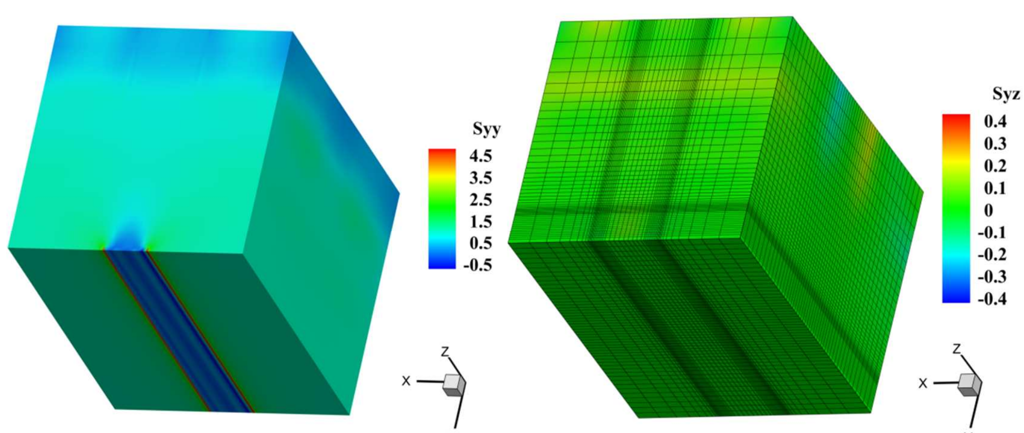
Crack length	Analytical-Experimental K_I	Numerical K_I	Numerical K_{II}	K_I(Numerical)/ K_I(Analytical)
0.1	0.3979	0.3982	0.0000	1.001
0.2	0.5648	0.5434	0.0000	1.01
0.3	0.6943	0.6787	0.0000	0.976
0.4	0.8050	0.7919	0.0000	0.984
0.5	0.9043	0.8988	0.0000	0.994
0.6	0.9963	0.9810	0.0000	0.985
0.7	1.0838	1.0701	0.0000	0.987
0.8	1.1687	1.1566	0.0000	0.990
0.9	1.2528	1.2422	0.0000	0.992
1.0	1.3375	1.3278	0.0000	0.993
1.5	1.8153	1.7940	0.0000	0.988
2.0	2.4977	2.4517	0.0000	0.982

بنابراین مطابق نتایج محاسباتی فاکتور شدت تنش مسیر رشد ترک میانی افقی در کشش یکنواخت بر وجوه y بصورت افقی خواهد بود. به عبارت دیگر مود اول شکست مود غالب بوده و مسیر رشد ترک بصورت مود بازشدگی است. همچنین بر اساس معیار تاناکا (فصل ۴) میزان فاکتور شدت تنش موثر محاسبه شده و با فاکتور شدت تنش بحرانی مصالح مقایسه می‌گردد. بر این اساس چنانچه فاکتور شدت تنش موثر از فاکتور شدت تنش بحرانی تجاوز نماید ترک در راستای زاویه θ_0 شروع به رشد می‌نماید.

در ادامه به مدل‌سازی یک حجم نربز به همراه یک سطح ناپیوسته میانی (ترک میانی) پرداخته می-شود. حجم نربز مورد مطالعه بوسیله ۶۱۵۰ نقطه کنترلی تولید شده است. ترتیب نقاط کنترلی و بردار گرهی بنحوی تنظیم شده است که بیشترین کنترل بر سطح نربز در محدوده نزدیک به سطوح و نوک ترک حاصل گردد. حجم سه بعدی نربز حاوی ترک میانی افقی از دو وصله تشکیل شده است. مرتبه چند جمله‌ای تقریب در جهات x و y برابر با ۳ و در جهت z برابر با ۲ فرض شده است. شرایط بارگذاری نیز بصورت کشش یکنواخت می‌باشد. شکل (۵-۳۷) نشان دهنده وضعیت ترک میانی در حجم نربز می‌باشد در این شکل وضعیت وصله به لحاظ توزیع تنش نشان داده شده است.



شکل (۵-۳۶) نمایش مقایسه بین نتایج فاکتور شدت تنش محاسباتی و تجربی-تحلیلی، صفحه حاوی ترک میانی افقی



شکل (۵-۳۷) نمایش توزیع تنش σ_{yz} (سمت راست) و σ_{yy} (سمت چپ)، حجم نربز حاوی ترک میانی افقی

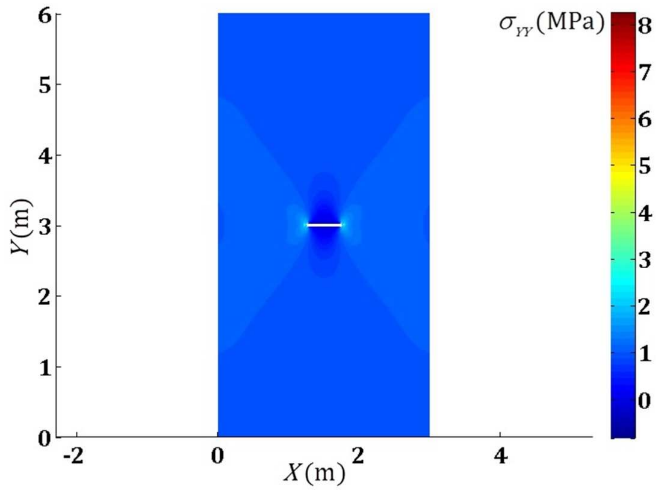
همچنین بمنظور صحت سنجی نتایج روش آنالیز ایزوژئومتریک، مثال ترک میانی با طول ۰/۵ با روش اجزای محدود توسعه یافته نیز شبیه‌سازی شده که نتایج آن متعاقباً در بخش ۵-۶-۱- آورده خواهد شد.

۵-۶-۱- صفحه محدود با ترک میانی افقی به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته

در این بخش با استفاده از آنالیز اجزای محدود توسعه یافته، شبیه‌سازی صفحه محدود حاوی ترک میانی افقی مورد بررسی قرار داده شده تا مقایسه‌ای با نتایج آنالیز ایزوژئومتریک صورت گرفته باشد. نتایج بدست آمده برای مدل اجزای محدود توسعه یافته با المان‌های مربعی به طول ۰/۰۲۸ را ارائه نموده‌ایم. لازم به ذکر است که در روش آنالیز اجزای محدود توسعه یافته، مطالعه‌ای در خصوص تأثیر اندازه المان بر دقت نتایج صورت پذیرفته و بهترین گزینه انتخاب شده است. البته گزینه انتخاب شده از بین بینهایت حالت ممکن، بر اساس حالتهای کنترل شده و شبیه‌سازی شده انجام گرفته است. در مدل اجزای محدود توسعه یافته از ۴۴۸۶۰ درجه آزادی استفاده شده است لذا شبکه اجزای محدود به کار گرفته شده یک شبکه بسیار ریز به شمار می‌آید.

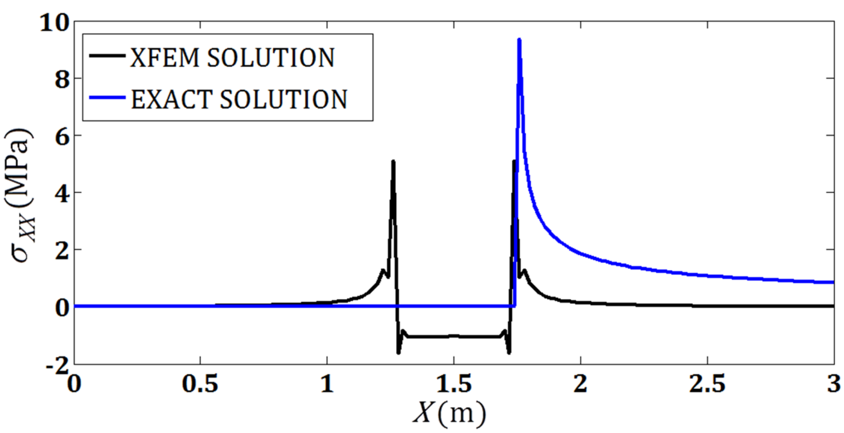
ابعاد صفحه به عرض ۳ و ارتفاع ۶ بوده و گسسته‌سازی دامنه مورد مطالعه در آنالیز به روش اجزای محدود توسعه یافته در هر جهت با المان‌های مربعی صورت گرفته است. در مثال حاضر به شبیه‌سازی ترک وسط به طول ۰/۵ در میانه دامنه پرداخته‌ایم. بنابراین نوک اول ترک در عرض ۱/۲۵ و نوک دوم ترک در عرض ۱/۷۵ قرار دارد. رفتار مصالح بصورت الاستیک خطی و با مقادیر $E = 1.0\,\mathrm{E}+07\,(\mathrm{MPa})\ ,\ \ \nu = 0.3$ برای نسبت پواسون و مدول یانگ در رفتار کرنش صفحه‌ای لحاظ گردیده است.

در شکل (۵-۳۸) نتایج حاصل برای توزیع تنش نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که چون دامنه مورد مطالعه تحت کشش یکنواخت بوده مقادیر تنش σ_{yy} نمایش داده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود توزیع تنش بدست آمده حاکی از تمرکز تنش در نوک ترک بوده که محل رخداد تمرکز تنش در آن مدل به وضوح مشخص است.

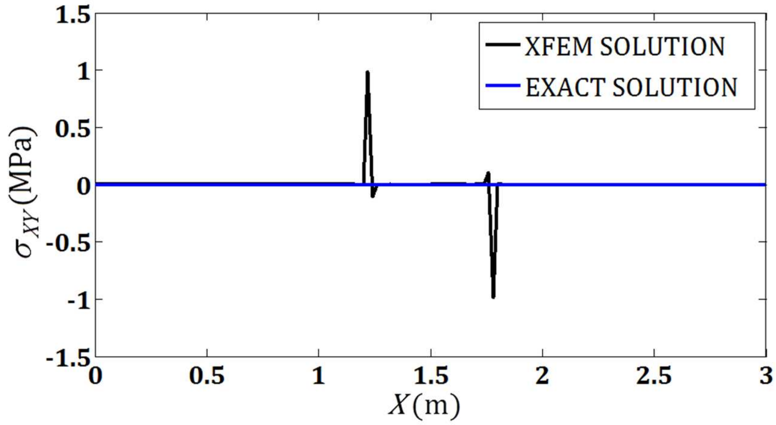


شکل (۵-۳۸) نحوه توزیع تنش در صفحه محدود حاوی ترک میانی، روش اجزای محدود توسعه یافته

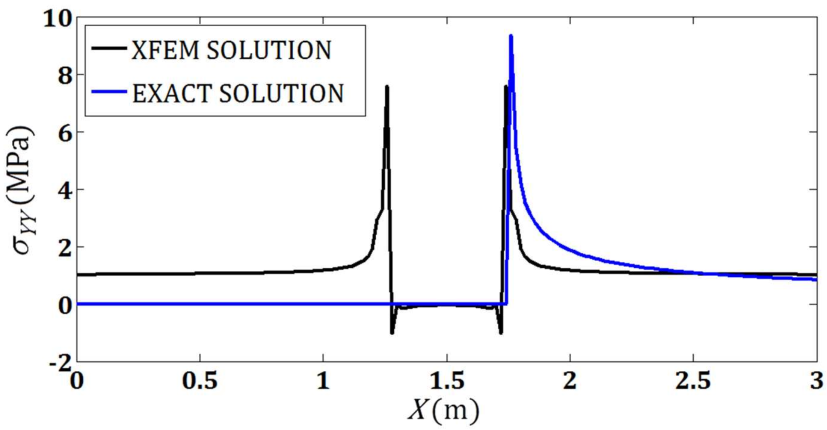
بمنظور نمایش نحوه شبیه‌سازی تنش در روش اجزای محدود توسعه یافته، مقایسه‌ای بین نتایج حل XFEM و دقیق صورت گرفته است که نتایج آن در شکل (۵-۳۹) تا شکل (۵-۴۲) نمایش داده می‌شود. انطباق حل عددی و حل دقیق در سراسر دامنه به خوبی تحقق یافته است. لازم به ذکر است که نتایج حاصل برای اندازه شبکه اجزای محدود برابر با ۰/۰۲۸ است. به عبارت دیگر نتایج با اندازه المان درشت‌تر از چنین دقتی برخوردار نبوده است.



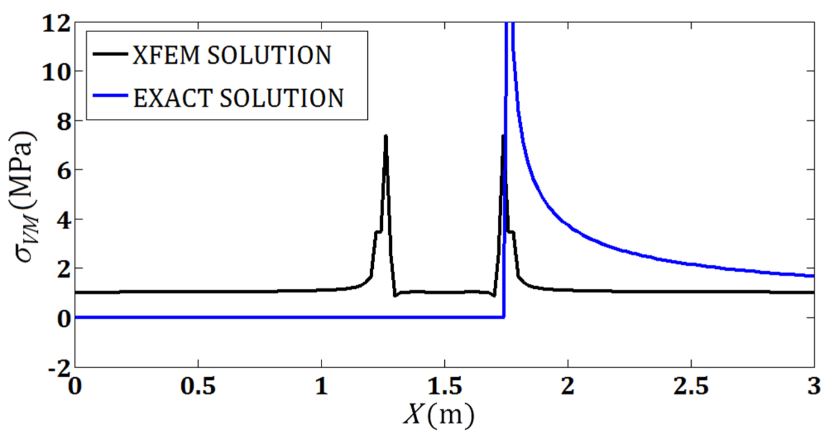
شکل (۵-۳۹) مقایسه توزیع تنش σ_{xx} در خط گذرنده از نوک ترک میانی افقی تا انتهای صفحه



شکل (۵-۴۰) مقایسه توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از نوک ترک میانی افقی تا انتهای صفحه



شکل (۵-۴۱) مقایسه توزیع تنش σ_{yy} در خط گذرنده از نوک ترک میانی افقی تا انتهای صفحه



شکل (۵-۴۲) مقایسه توزیع تنش σ_{VM} در خط گذرنده از نوک ترک میانی افقی تا انتهای صفحه

در جدول (۵-۷) نتایج مربوط به فاکتورهای شدت تنش محاسباتی در روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه شده است. مقادیر ذکر شده برای صفحه محدود با ترک لبه‌ای به طول ۰/۵ می‌باشد. در واقع تأثیر تعداد درجات آزادی بر بزرگای فاکتور شدت تنش که با استفاده از روش انتگرال اندرکنش محاسبه شده است، مورد بررسی قرار گرفته است. همانطوریکه مشهود است روش اجزای محدود توسعه یافته نیز یک روش قوی و در عین حال انعطاف‌پذیر در مکانیک شکست محاسباتی است.

جدول (۵-۱۰) مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی در روش XFEM و مشخصات ماتریس سختی

تشریح مدل	اندازه بعد المان مربعی	پهنای باند: عرض پایین	پهنای باند: عرض بالا	شاخص سختی	فاکتور شدت تنش تئوری-تجربی	فاکتور شدت تنش عددی	درجات آزادی
ترک میانی	۰/۱	۲۰۴۹	۲۰۴۹	۱/۷۱	۰/۹۰۴۳	۰/۷۴۲۱	۳۸۸۴
ترک میانی	۰/۰۵	۷۶۷۷	۷۶۷۷	۱/۳۰	۰/۹۰۴۳	۰/۸۷۳۸	۱۴۹۲۰
ترک میانی	۰/۰۳۳	۱۶۸۹۳	۱۶۸۹۳	۱/۲۲	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۱۲	۳۳۰۶۴
ترک میانی	۰/۰۲۸	۲۲۸۵۷	۲۲۸۵۷	۱/۲۰	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۸۹	۴۴۸۶۰
ترک میانی	۰/۰۲	۴۶۱۴۳	۴۶۱۴۳	۱/۱۲	۰/۹۰۴۳	۰/۸۹۵۴	۹۱۰۴۴

۵-۶-۲- مقایسه ماتریس سختی

در این بخش مقایسه‌ای بین وضعیت ماتریس سختی در هر دو روش آنالیز ایزوژئومتریک و روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه خواهد شد. همانطوریکه نشان داده شد، روش آنالیز ایزوژئومتریک با درجات آزادی کمتر و در نتیجه تلاش محاسباتی کمتر قادر است تا با دقت کافی و تقریباً معادل با درجات آزادی زیاد در روش XFEM به محاسبه پارامترهای شکست بپردازد.

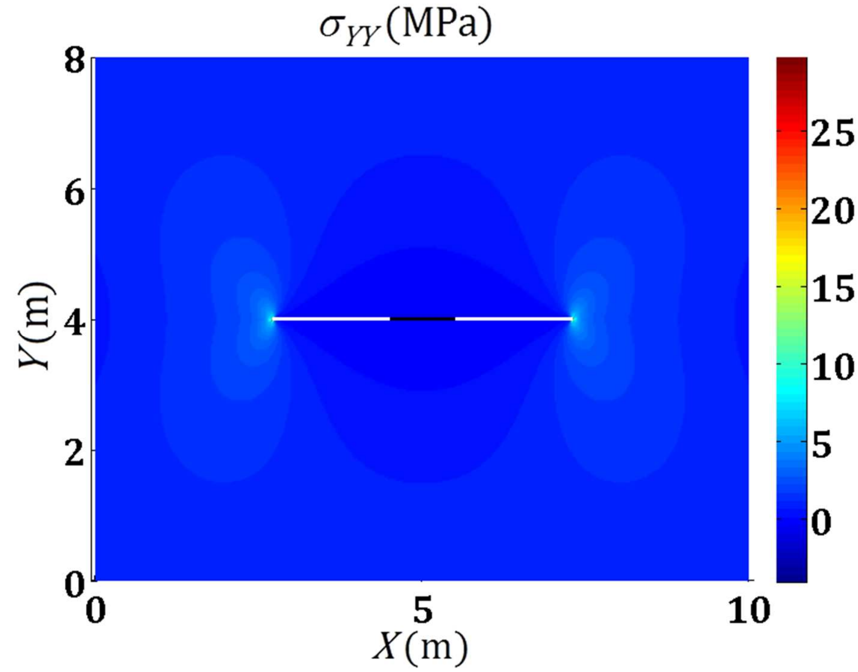
اما ماتریس سختی که در هر دو روش عددی ایجاد می‌شود، پُر یا متراکم نبوده و هر دو ماتریس دارای مقادیر زیاد صفر می‌باشند. اما ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته از شرایط قطری بودن مناسب‌تری نسبت به ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریک برخوردار است. به عنوان نمونه در مثال دوم ماتریس سختی مربعی بدست آمده در روش آنالیز ایزوژئومتریک با اندازه ۸۰۲۰، دارای پهنای باند پایین ۴۱۵۸ و پهنای باند بالا ۲۷۷ است. همچنین در مدل سوم ایزوژئومتریک با ۱۹۷۵۲ درجه آزادی پهنای باند پایین ۹۹۵۶ و پهنای باند بالا ۲۳۵ بدست آمده است. در حالیکه ماتریس سختی مربعی محاسبه شده به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته با اندازه ۴۴۸۶۰، دارای پهنای

باند بالایی ۲۲۸۷۵ و پهنای باند پایین ۲۲۸۷۵ بوده است. به عبارت دیگر ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریک پُرتر از ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته است. این مساله به خودی خود به لحاظ محاسبات ماتریسی اختلافاتی در نوع حل و یا حجم محاسبات جهت معکوس‌سازی ماتریس به دنبال خواهد داشت که البته شاید بتوان گفت به دلیل کوچکتر بودن ابعاد ماتریس در مقایسه با روش اجزای محدود توسعه یافته این اختلاف قابل اغماض باشد.

از طرفی باید اشاره نمود که در مقایسه با مدل اجزای محدود توسعه یافته همواری نتایج توزیع تنش در حالت با درجات آزادی یکسان در روش آنالیز ایزوژئومتریک قابل توجه است؛ که علت در نحوه محاسبه و استخراج نتایج است. در روش آنالیز ایزوژئومتریک نتایج به دست آمده به صورت سطحی از نربز می‌باشند که بطور پیوسته به دست می‌آید. لازم به ذکر است که سطح نربز از طریق موقعیت نقاط کنترلی استخراج می‌گردد. سپس بمنظور نمایش نتایج، می‌توان هر چقدر از این سطح پیوسته را استخراج نمود. اصولا به طور کلی می‌توان گفت که بر اساس ویژگیهای منحصر به فرد روش آنالیز ایزوژئومتریک، امکان مدل‌سازی بهتر و مطلوب‌تر تغییرات ناگهانی و شدید گرادیان یا تغییر شدید در مقادیر تنش و کرنش وجود دارد.

۵-۶-۳- شبیه‌سازی گسترش ترک میانی افقی

در این بخش بر اساس مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی گفته شده در بخش قبل به محاسبه زاویه رشد ترک و در نتیجه تعیین مسیر گسترش ترک میانی افقی تحت کشش پرداخته‌ایم. از آن جهت که صفحه مورد بررسی با ابعاد ۸×۱۰ تحت کشش تک محوره بوده و ترک میانی نیز افقی است، پس مود غالب، مود اول شکست بوده بنابراین ترک می‌بایست بصورت افقی گسترش یابد که نتیجه حاصل در شکل (۵-۴۳) نشان داده شده است.



شکل (۵-۴۳) شبیه‌سازی گسترش ترک افقی میانی تحت کشش تک محوره

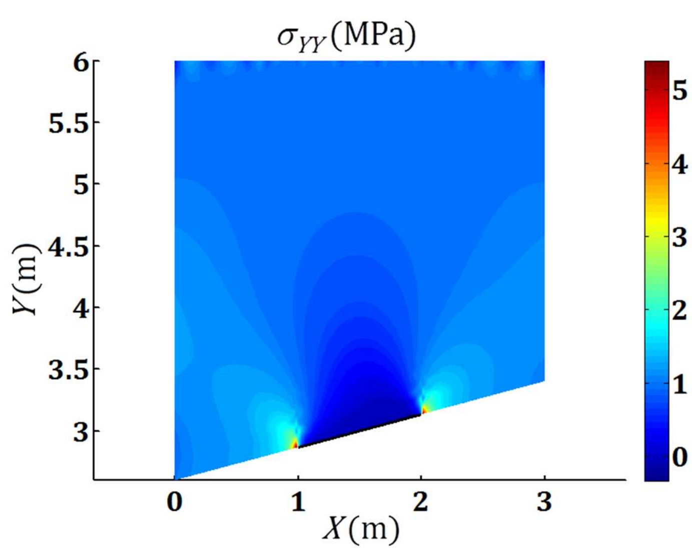
۵-۷- صفحه محدود با یک ترک مایل میانی (SSCC) در روش آنالیز ایزوژئومتریک

در این بخش چهار حالت مختلف از ترک میانی مایل[1] با زوایای ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه نسبت به افق مورد بررسی قرار داده خواهد شد. در مورد هر چهار مدل حاوی ترک میانی مایل به محاسبه مقادیر فاکتور شدت تنش مود مرکب با استفاده از انتگرال اندرکنش پرداخته شده است. سپس با استفاده از هر دو معیار حداکثر تنش مماسی و معیار حالت تعمیم یافته حداکثر تنش مماسی به برآورد زاویه شروع رشد ترک پرداخته‌ایم. لذا تفاوت لحاظ نمودن عبارت غیر تکین در سری تقریب تنش در پیرامون نوک ترک مورد بررسی قرار داده شده است. همچنین مقادیر فاکتور شدت تنش عددی محاسبه شده با مقادیر حل تجربی-تحلیلی فاکتور شدت تنش که در فصل چهار بیان گردید، مقایسه می‌شود. لازم به ذکر است که تمامی مثالهای ارائه شده در این بخش در شرایط بارگذاری تک محوره است. باید اشاره نمود که قیدهای تکیه‌گاهی مساله در مدلهای ارائه شده بصورت سه درجه آزادی بسته شده در نظر گرفته شده است.

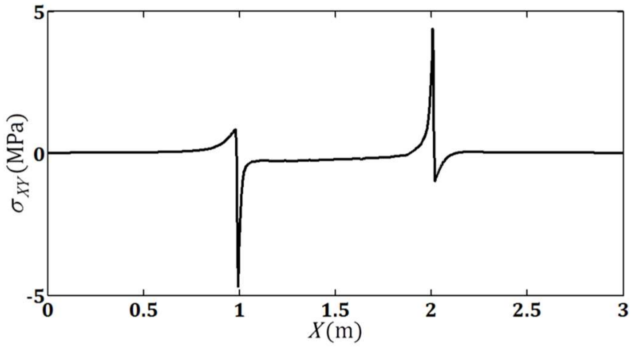
[1]- Slanted center crack

مدل‌های ارائه شده از طریق دو وصله ایجاد شده و مرتبه چندجمله‌ای تقریب در جهت‌های مختصاتی برابر با ۳ فرض گردیده است. همچنین رفتار مصالح شیشه بصورت الاستیک خطی با مشخصات $E = 65\text{E+09}$ و $\nu = 0.25$ مفروض است. در تولید هندسه‌های مورد بررسی به ترتیب از ۴۸۰۰، ۱۴۴۶، ۱۹۱۲ و ۳۶۲۰ نقطه کنترلی سراسری در مدل‌های حاوی ترک با زوایای ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه استفاده شده است. شبکه کنترلی فیزیکی و فضای پارامتری در نزدیکی سطوح و نوکهای ترک ریزتر لحاظ گردیده است.

در مثالهای حل شده برای صفحه‌ای حاوی ترک میانی با زوایای ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه نسبت به افق کانتور توزیع تنش برای σ_{yy} نمایش داده می‌شود. همچنین نحوه تغییرات تنش σ_{xy} در خط گذرنده از هر دو نوک ترک نمایش داده خواهد شد. همواری نتایج در توزیع تنش بسیار قابل توجه بوده که منجر به شکل‌گیری محاسبه دقیق برای فاکتور شدت تنش در هر دو نوک ترک شده است. شاخص سختی در مدل‌های ۱۵، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه به ترتیب برابر با ۱/۰۱۲۱، ۱/۱۱۲۵، ۱/۱۲۴۱ و ۱/۲۳۹۲ بدست آمده که نشان دهنده وضعیت مطلوب برای ماتریس سختی می‌باشد. در شکل (۵-۴۴) و شکل (۵-۴۵) نتایج برای نحوه توزیع تنش در مثال صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۱۵ درجه نسبت به افق نمایش داده شده است.

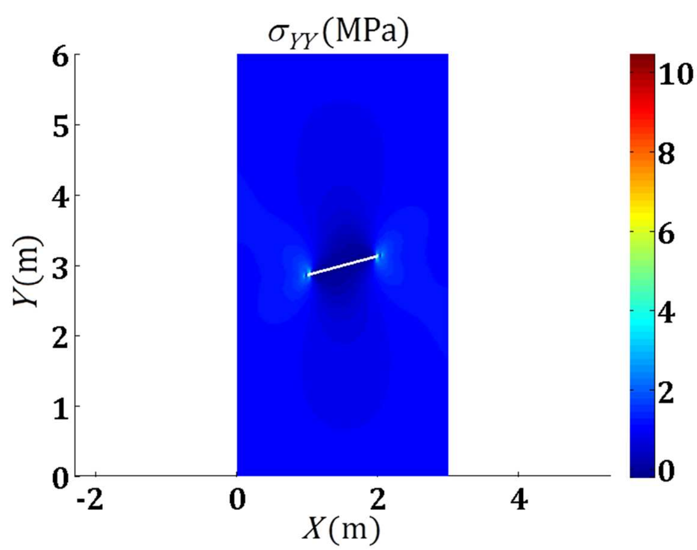


شکل (۵-۴۴) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای ترک ۱۵ درجه، روش IGA



شکل (۵-۴۵) نمایش توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از نوکهای ترک ۱۵ درجه نسبت به افق

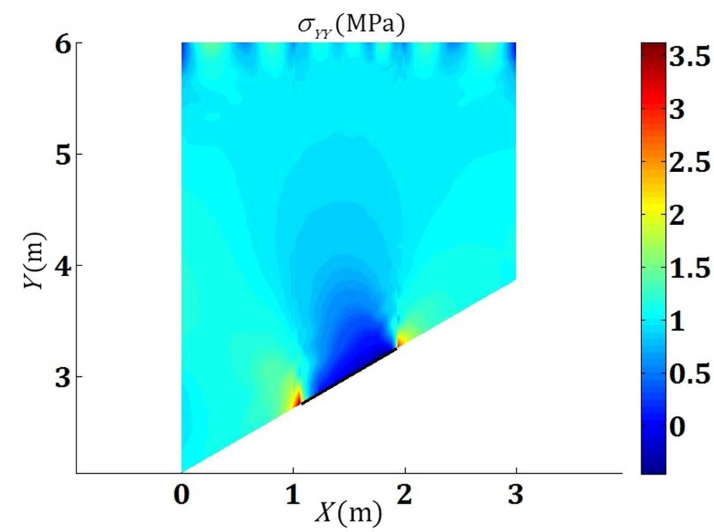
همچنین در شکل (۵-۴۶) مثال ترک میانی مایل با زاویه ۱۵ درجه نسبت به افق به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته مدل‌سازی شده و نتایج آن برای نمایش نحوه توزیع σ_{yy} ارائه گردیده است. با توجه به نتایج ارائه شده برای مدل آنالیز ایزوژئومتریک می‌توان به درجه همواری نتایج در روش آنالیز ایزوژئومتریک مطمئن شد. در مدل XFEM از ۵۸۶۰۸ درجه آزادی با نسبت سختی ۱/۰۴۱۷ بهره برده شده است. در حالیکه مدل IGA دارای ۹۶۰۰ درجه آزادی است.



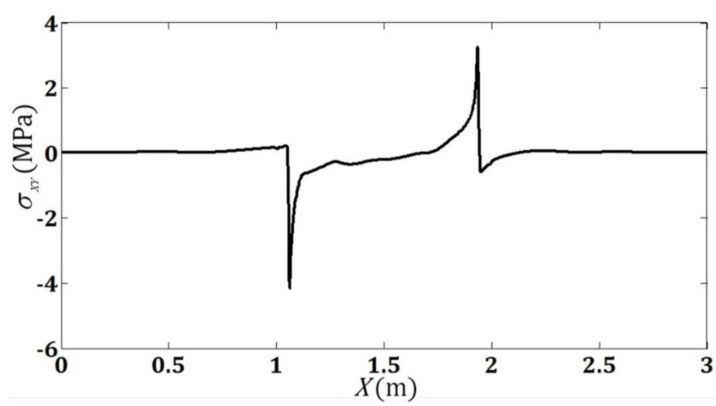
شکل (۵-۴۶) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای ترک ۱۵ درجه، روش XFEM

در شکل (۵-۴۷) و شکل (۵-۴۸) نتایج برای نحوه توزیع تنش در مثال صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۳۰ درجه نسبت به افق نمایش داده شده است. همچنین در شکل (۵-۴۹) مثال ترک میانی

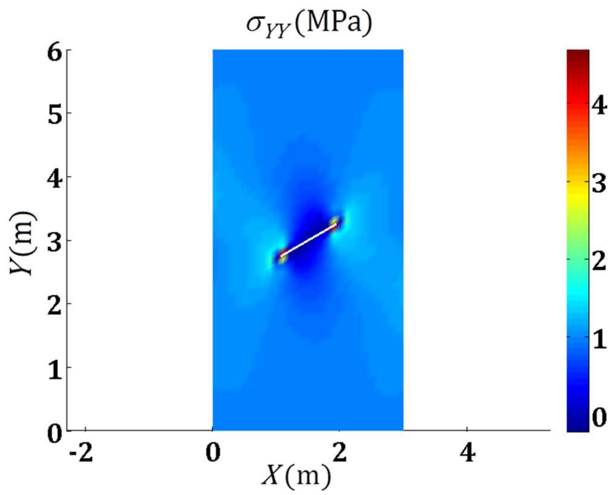
مایل با زاویه ۳۰ درجه نسبت به افق به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته مدل‌سازی شده و نتایج آن برای نمایش نحوه توزیع σ_{yy} ارائه گردیده است. با توجه به نتایج ارائه شده برای مدل آنالیز ایزوژئومتریک می‌توان به درجه همواری نتایج در روش آنالیز ایزوژئومتریک مطمئن شد. در مدل XFEM از ۳۸۹۴ درجه آزادی با نسبت سختی ۱/۲۰۷۲ بهره برده شده است. در حالیکه مدل IGA دارای ۲۸۹۲ درجه آزادی است. در این مثال تعمداً از درجات آزادی تقریباً برابر در هر دو روش عددی استفاده شد، تا اختلاف همواری نتایج بیشتر مشهود گردد.



شکل (۵-۴۷) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای ترک ۳۰ درجه، روش IGA

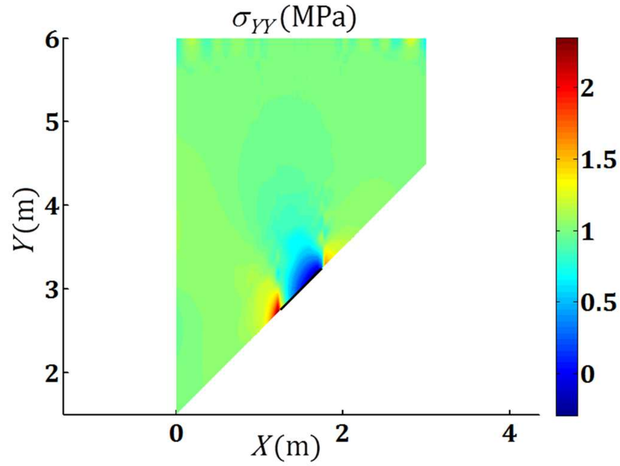


شکل (۵-۴۸) نمایش توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از نوکهای ترک ۳۰ درجه نسبت به افق

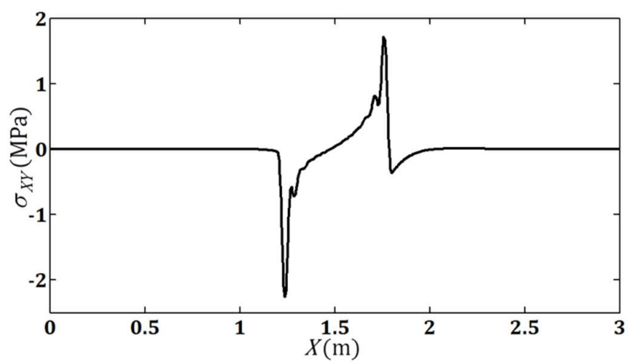


شکل (۵-۴۹) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای ترک ۳۰ درجه، روش XFEM

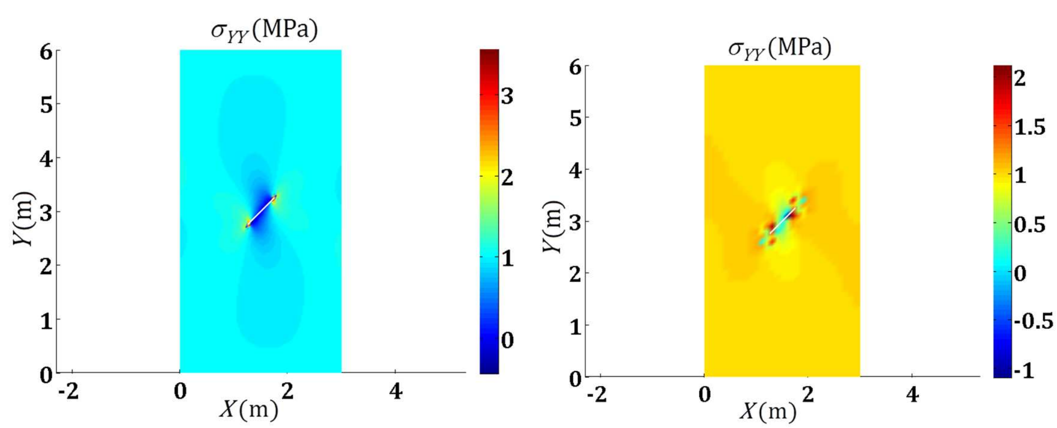
در شکل (۵-۵۰) و شکل (۵-۵۱) نتایج برای نحوه توزیع تنش در مثال صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق نمایش داده شده است. همچنین در شکل (۵-۵۲) مثال ترک میانی مایل با زاویه ۴۵ درجه نسبت به افق به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته مدل‌سازی شده و نتایج آن برای نمایش نحوه توزیع σ_{yy} ارائه گردیده است. با توجه به نتایج ارائه شده برای مدل آنالیز ایزوژئومتریک می‌توان به درجه همواری نتایج در روش آنالیز ایزوژئومتریک مطمئن شد. در مثال XFEM از دو مدل با ۳۹۸۸ درجه آزادی با نسبت سختی ۱/۳۰۷۵ و مدل با ۴۴۹۸۴ درج آزادی با نسبت سختی ماتریس سختی ۱/۰۲۰۲ بهره برده شده است. در حالیکه مدل IGA دارای ۳۸۲۴ درجه آزادی است. در این مثال تعمداً از درجات آزادی تقریباً برابر و یا با اختلاف خیلی زیاد در هر دو روش عددی استفاده نمودیم، تا اختلاف همواری نتایج بیشتر مشهود گردد.



شکل (۵-۵۰) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای ترک ۴۵ درجه، IGA



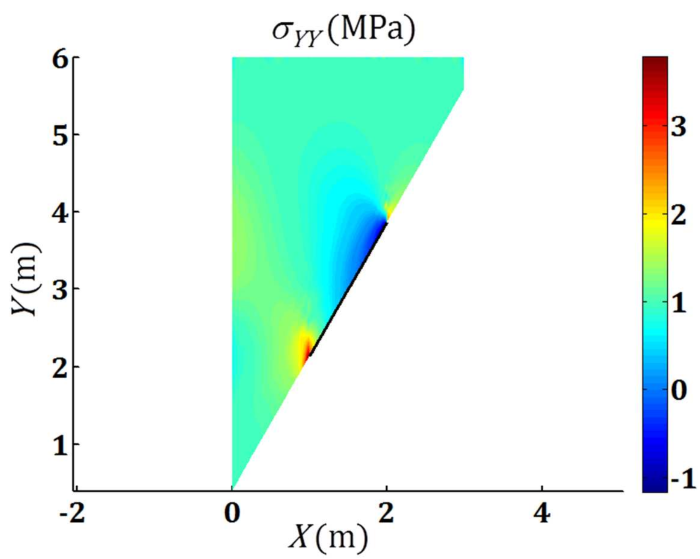
شکل (۵-۵۱) نمایش توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از نوکهای ترک ۴۵ درجه نسبت به افق



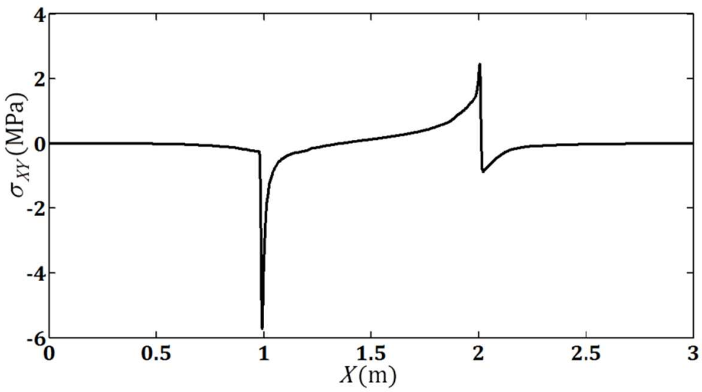
شکل (۵-۵۲) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای مدل با ۳۹۸۸ درجه آزادی (سمت راست) و مدل با ۴۴۹۸۴ درجه آزادی (سمت چپ) برای ترک ۴۵ درجه، روش XFEM

در شکل (۵-۵۳) و شکل (۵-۵۴) نتایج برای نحوه توزیع تنش در مثال صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق نمایش داده شده است. همچنین در شکل (۵-۵۵) مثال ترک میانی مایل با زاویه ۶۰ درجه نسبت به افق به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته مدل‌سازی شده و نتایج آن برای نمایش نحوه توزیع σ_{yy} ارائه گردیده است. با توجه به نتایج ارائه شده برای مدل آنالیز ایزوژئومتریک می‌توان به درجه همواری نتایج در روش آنالیز ایزوژئومتریک مطمئن شد. در مثال XFEM از دو مدل با ۳۹۷۲ درجه آزادی با نسبت سختی ۱/۰۶۴۵ و مدل با ۴۵۲۰۰ درج آزادی با نسبت سختی ماتریس سختی ۱/۰۲۴۸ بهره برده شده است. در حالیکه مدل IGA دارای ۷۲۴۰ درجه آزادی است. در این مثال تعمداً از درجات آزادی تقریباً برابر و یا با اختلاف خیلی زیاد در هر دو روش عددی استفاده نمودیم، تا اختلاف همواری نتایج بیشتر مشهود گردد.

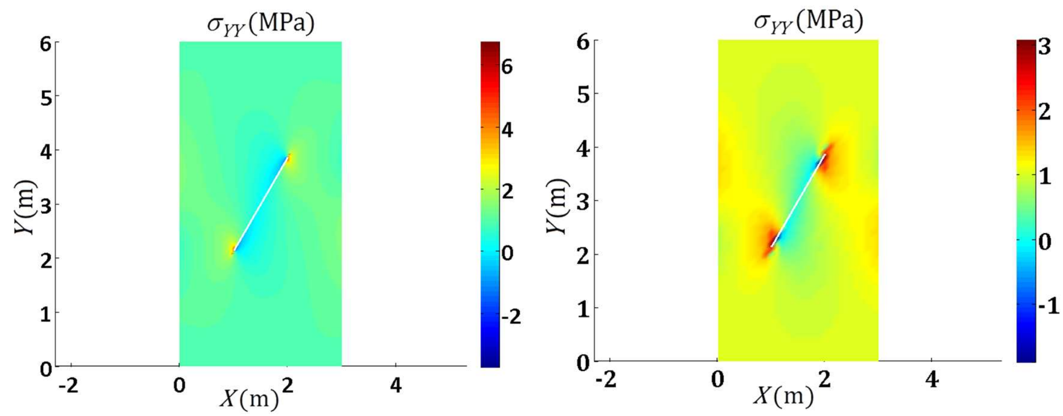
بمنظور محاسبه فاکتورهای شدت تنش مود مرکب، از روش‌های برون‌یابی تنش در صفحه مقابل نوک ترک، روش تجربی-تحلیلی و روش انتگرال اندرکنش استفاده شده و در جدول (۵-۱۱) خلاصه نتایج ارائه شده است. در شکل (۵-۵۶) نمونه‌ای از محاسبه فاکتور شدت تنش به روش برون‌یابی تنش در صفحه مقابل نوک ترک نمایش داده می‌شود.



شکل (۵-۵۳) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای ترک ۶۰ درجه، IGA



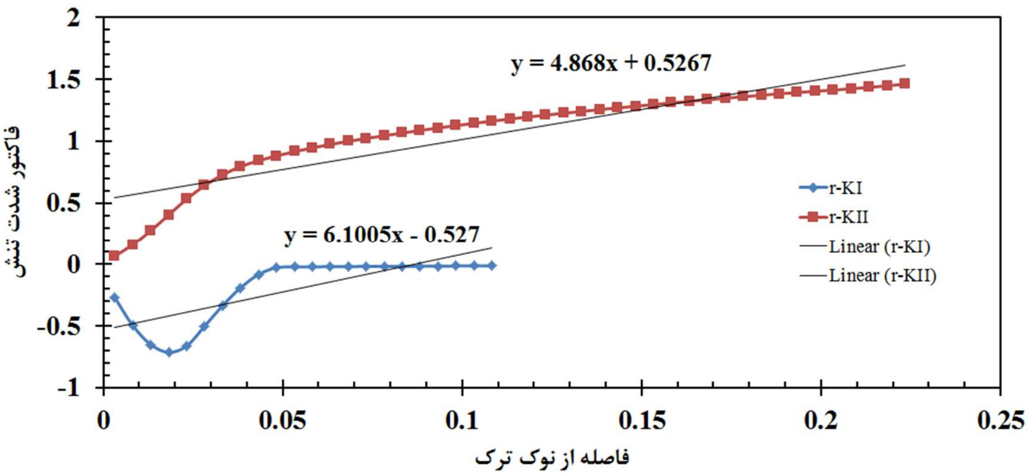
شکل (۵-۵۴) نمایش توزیع تنش σ_{xy} در خط گذرنده از نوکهای ترک ۶۰ درجه نسبت به افق



شکل (۵-۵۵) نمایش توزیع تنش σ_{yy} برای مدل با ۳۹۸۸ درجه آزادی (سمت راست) و مدل با ۴۴۹۸۴ درجه آزادی (سمت چپ) برای ترک ۶۰ درجه، روش XFEM

جدول (۵-۱۱) محاسبه فاکتورهای شدت تنش برای ترک میانی مایل

Crack configuration	K_{I} (Analytical)	K_{I} (Stress extrapolation)	K_{II} (Analytical)	K_{II} (Stress extrapolation)	K_{I} (*M*-integral)	K_{II} (*M*-integral)
15°	1.1897	1.1867	0.3188	0.3168	1.2690	0.3245
30°	0.9399	0.9395	0.5427	0.5010	1.0196	0.5564
45°	0.5270	0.5267	0.5270	0.5270	0.5486	0.5341
60°	0.4431	0.4461	0.7675	0.7646	0.6029	0.9065



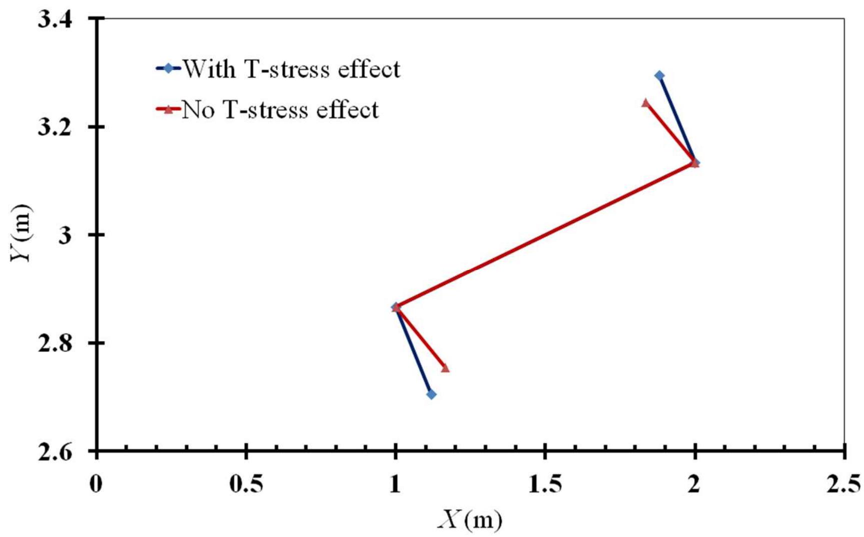
شکل (۵-۵۶) نمایش نحوه محاسبه فاکتورهای شدت تنش به روش برون یابی تنش، ترک ۴۵ درجه

۵-۷-۱- شبیه‌سازی گسترش ترک میانی مایل

در این بخش به شبیه‌سازی شروع مسیر گسترش ترک میانی پرداخته‌ایم. علاوه بر تعیین مسیر شروع و حرکت گسترش ترک به نمایش اختلاف زاویه شروع رشد ترک با لحاظ کردن اثر عبارت *T*-stress اقدام نموده‌ایم. همانگونه که قبلاً نیز اشاره شد، تمامی مدل‌ها برای مصالح شیشه با پارامترهایی که در بخش ۴ گفته شد انجام گرفته است. از طرفی همانگونه که می‌دانیم نوع بارگذاری در تحمیل مسیر رشد ترک تأثیرگذار است. لذا از این روی به نمایش شروع مسیر گسترش ترک میانی مایل در شرایط بارگذاری تک‌محوره فشاری و کششی پرداخته‌ایم.

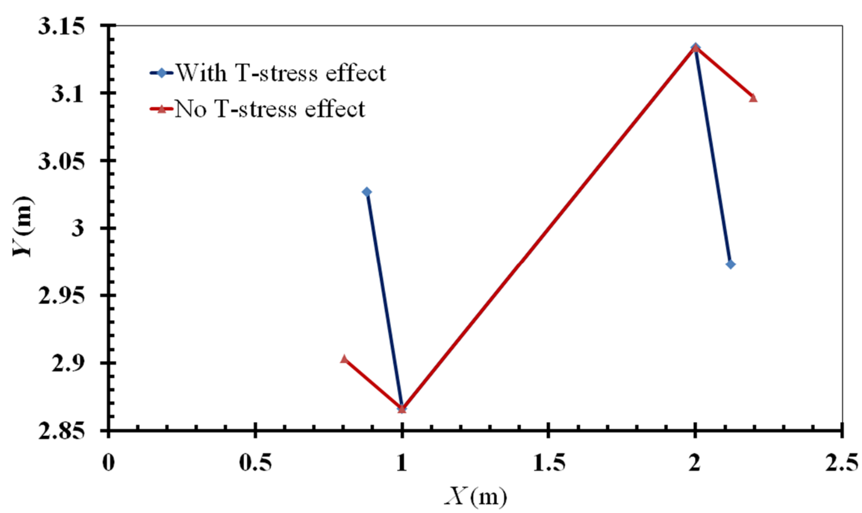
در ابتدا برای ترک مایل میانی با زاویه ۱۵ درجه نسبت به افق، در کشش و فشار به شبیه‌سازی مسیر رشد ترک از طریق هر دو معیار MTS و GMTS پرداخته‌ایم. در واقع در این بخش پس از محاسبه مقادیر فاکتور شدت تنش مود مرکب، مقدار فاکتور شدت تنش موثر محاسبه شده و با فاکتور شدت تنش بحرانی مصالح مقایسه می‌گردد. در صورت تجاوز میزان فاکتور شدت تنش موثر از میزان بحرانی رشد ترک در امتداد زاویه محاسبه شده به اندازه تعیین شده گسترش می‌یابد. البته در فرایند رشد ترک، مقدار فاکتور شدت تنش بحرانی را بنحوی در برنامه تعیین کرده‌ایم که با هر مقدار فاکتور شدت تنش موثر، ترک شروع به رشد خواهد نمود، تا به نوعی مستقل از جنس مصالح گردد. اما مقادیر مربوطه در محاسبه زاویه رشد ترک بر اساس معیار GMTS بر مبنای شیشه فرض شده است.

در شکل (۵-۵۷) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۱۵ درجه در فشار تک محوره نمایش داده شده است.



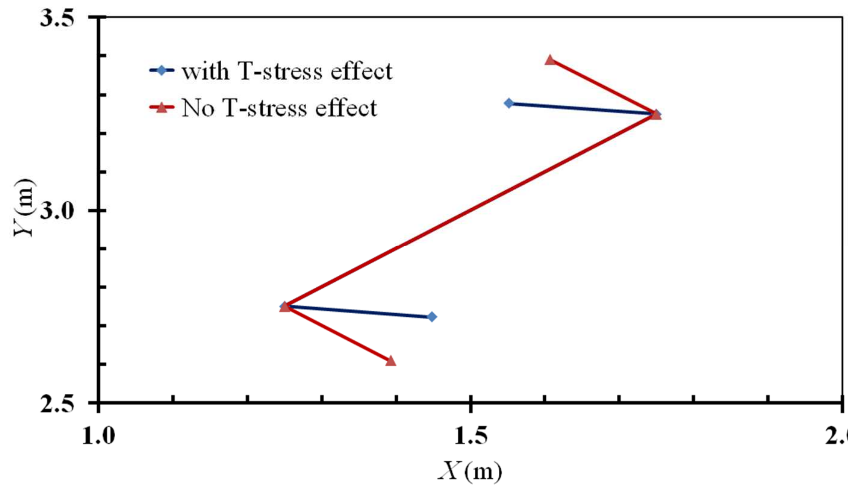
شکل (۵-۵۷) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۱۵ درجه تحت فشار تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

در شکل (۵-۵۸) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۱۵ درجه در کشش تک محوره در جهت قایم نمایش داده شده است. آنچنانکه در مثال‌های ارائه شده مشهود است، لحاظ نمودن اثرات عبارت غیرتکین T-stress در تعیین مسیر رشد ترک حائز اهمیت می‌باشد.



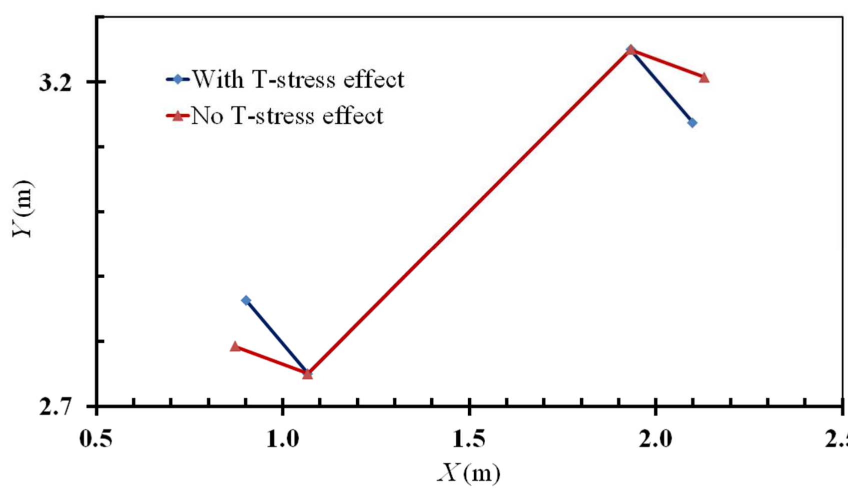
شکل (۵-۵۸) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۱۵ درجه تحت کشش تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

در شکل (۵-۵۹) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۳۰ درجه در فشار تک محوره نمایش داده شده است.



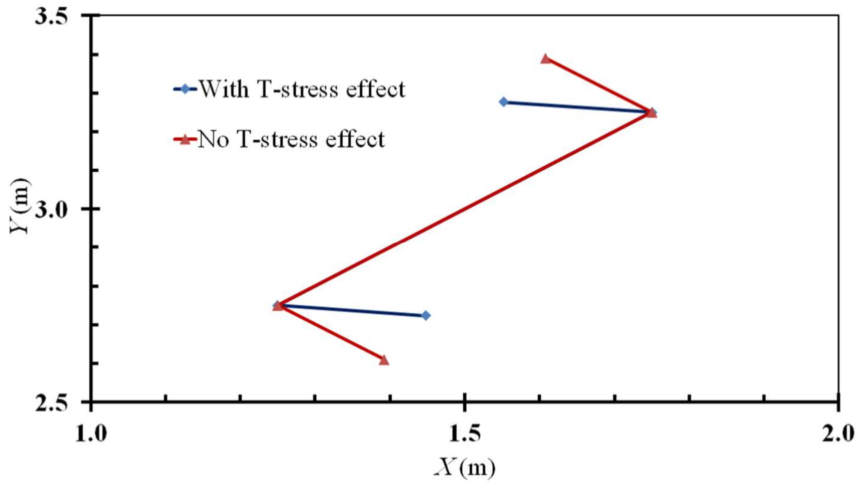
شکل (۵-۵۹) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۳۰ درجه تحت فشار تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

در شکل (۵-۶۰) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۳۰ درجه در کشش تک محوره در جهت قایم نمایش داده شده است. آنچنانکه در مثال‌های ارائه شده مشهود است، لحاظ نمودن اثرات عبارت غیرتکین *T*-stress در تعیین مسیر رشد ترک حائز اهمیت می‌باشد.



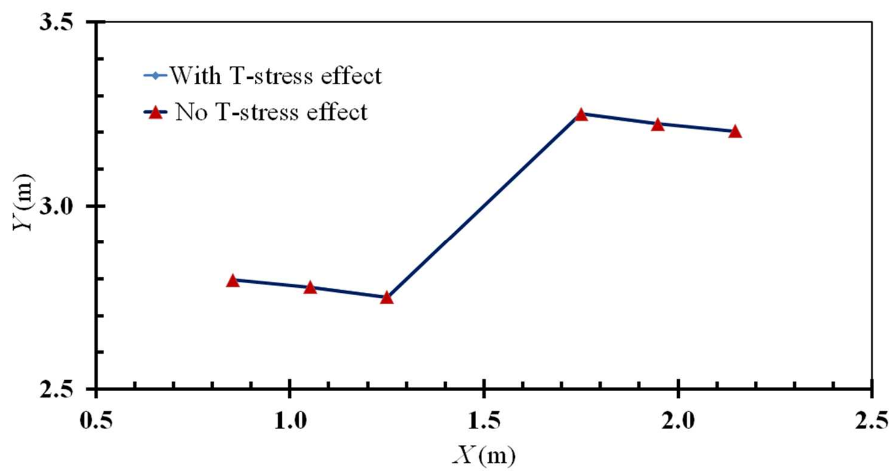
شکل (۵-۶۰) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۳۰ درجه تحت کشش تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

در شکل (۵-۶۱) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۴۵ درجه در فشار تک محوره نمایش داده شده است.



شکل (۵-۶۱) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۴۵ درجه تحت فشار تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

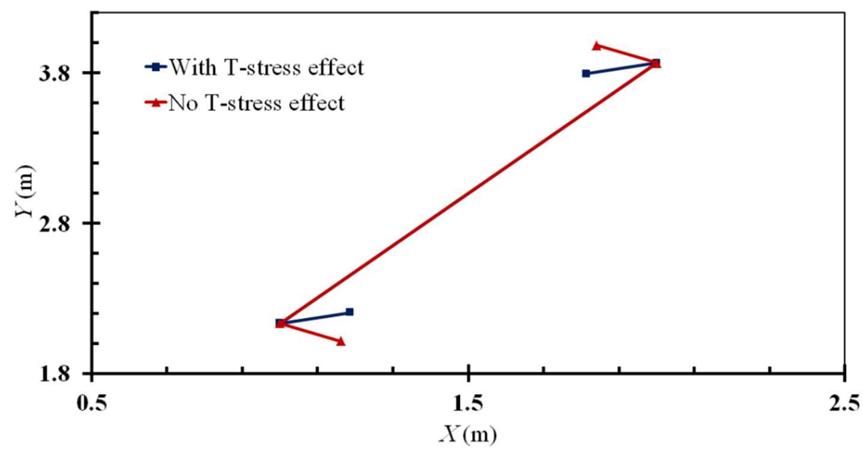
در شکل (۵-۶۲) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۴۵ درجه در کشش تک محوره در جهت قایم نمایش داده شده است. آنچنانکه در مثال‌های ارائه شده مشهود است، لحاظ نمودن اثرات عبارت غیرتکین T-stress در تعیین مسیر رشد ترک حائز اهمیت می‌باشد.



شکل (۵-۶۲) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۴۵ درجه تحت کشش تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

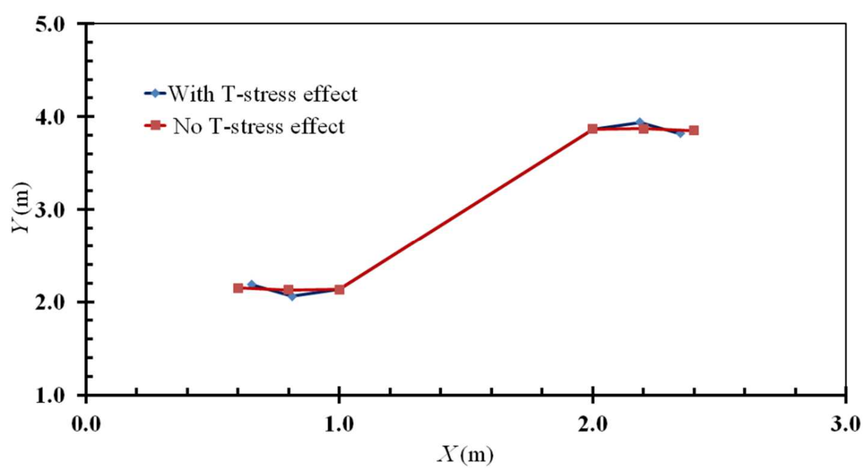
موضوعی که در خصوص ترک ۴۵ درجه جالب است، یکسان بودن مسیر رشد ترک در دو معیار MTS و GMTS برای حالت کشش تک محوره است. یعنی اینکه در کشش مسیر رشد ترک بر اساس هر دو معیار یکسان بدست آمده است.

در شکل (۵-۶۳) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۶۰ درجه در فشار تک محوره نمایش داده شده است.



شکل (۵-۶۳) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۶۰ درجه تحت فشار تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

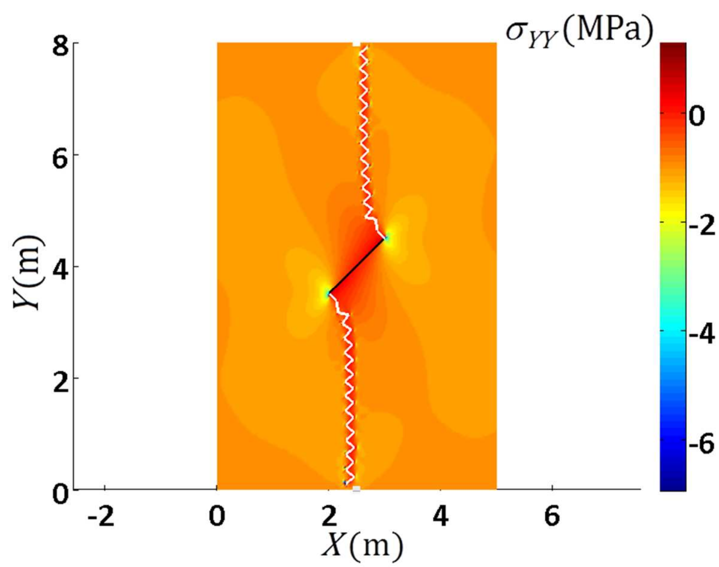
در شکل (۵-۶۴) مقایسه شروع مسیر رشد ترک در صفحه حاوی ترک میانی مایل با زاویه ۶۰ درجه در کشش تک محوره در جهت قایم نمایش داده شده است.



شکل (۵-۶۴) شبیه‌سازی گسترش ترک در ترک میانی با زاویه ۶۰ درجه تحت کشش تک محوره، مقایسه بین معیارهای گسترش ترک

آنچنانکه در مثال‌های ارائه شده مشهود است، لحاظ نمودن اثرات عبارت غیرتکین T-stress در تعیین مسیر رشد ترک حائز اهمیت می‌باشد.

در انتهای این بخش بمنظور تکمیل نتایج در شبیه‌سازی گسترش ترک مایل با کمک روش اجزای محدود توسعه یافته و توانایی روش مجموعه تراز در دنبال نمودن مرز ناپیوستگی در خلال رشد ترک، به مدل سازی گسترش ترک مایل ۴۵ درجه نسبت به افق در فشار تک محوره پرداخته‌ایم. بنابراین در شکل (۵-۶۵) طی چندین مرحله رشد، مسیر حرکت ترک برای صفحه حاوی ترک ۴۵ درجه نمایش داده می‌شود. مطابق نتایج آزمایشگاهی می‌بایست مسیر رشد ترک میانی ۴۵ درجه تقریباً عمود بر مرز دوردست مطابق شکل (۵-۶۵) باشد.

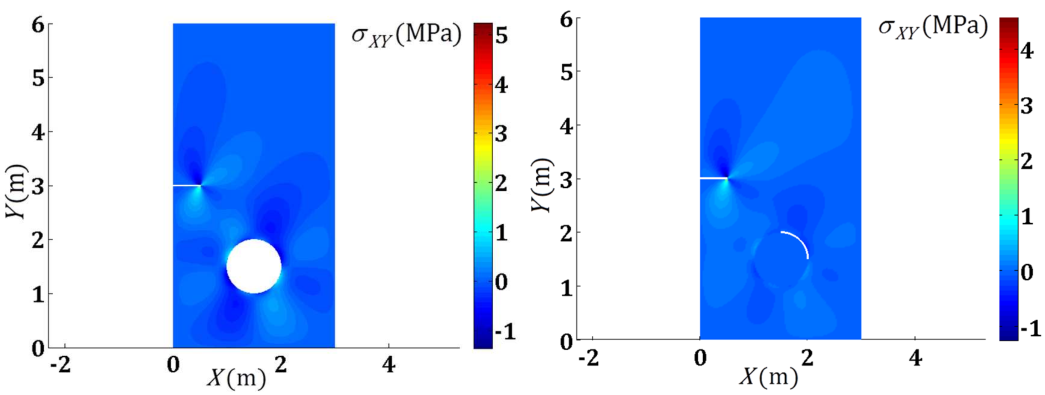


شکل (۵-۶۵) مسیر رشد ترک ۴۵ درجه تحت فشار به کمک روش XFEM

۵-۸- تأثیر حفره و مرز ناهمگن داخلی بر مقادیر فاکتور شدت تنش، ترک لبه‌ای

در این بخش بر اساس توانایی روش اجزای محدود توسعه یافته در تولید مرز داخلی ناهمگن با ماتریس مصالح و همچنین تولید حفره مستدیر به بررسی اثرات مرز ناهمگن داخلی بر مقادیر فاکتور شدت تنش محاسباتی پرداخته می‌شود. لازم به ذکر است که منظور از مرز داخلی سخت، بیشتر بودن مشخصات الاستیک مرز داخلی نسبت به مصالح ماتریس بوده و برای مرز داخلی نرم، مشخصات

الاستیک مصالح ماتریس از مرز نرم بیشتر است. از این روی در مثال‌های عددی ارائه شده نسبت مدول الاستیسیته ماتریس مصالح به مرز ناهمگن به ترتیب برای مرز داخلی سخت و نرم برابر با ۰/۳۳ و ۳ انتخاب شده است. در این بخش حفره داخلی مستدیر، مرز داخلی نرم و سخت به شعاع ۰/۵ در وسط نیمه پایینی صفحه فرض شده است. مصالح در نظر گرفته شده شامل آلومینیوم و فولاد بوده است. بنابراین به بررسی تأثیر مرز داخلی نرم، سخت و حفره داخلی بر مقادیر فاکتور شدت تنش مود مرکب برای ترک لبه‌ای به طول ۰/۵ پرداخته خواهد شد. لازم به ذکر است که اندازه بعد المان مربعی ۰/۰۲۵ در نظر گرفته شده است. در شکل (۵-۶۶) صفحه حاوی ترک لبه‌ای و مرز داخلی تحت شرایط کشش تک محوره نمایش داده شده است. همچنین در شکل (۵-۶۶) مدل ترک لبه‌ای در اندرکنش همزمان با حفره داخلی مستدیر نمایش داده شده است.



شکل (۵-۶۶) نمایش همزمان مرز داخلی (نرم) به شعاع ۰/۵ و ترک لبه‌ای به طول ۰/۵ (سمت راست) و حفره مستدیر داخلی به شعاع ۰/۵ و ترک لبه‌ای به طول ۰/۵

جدول (۵-۱۲) تأثیر مرز داخلی بر مقادیر فاکتور شدت تنش مود مرکب برای ترک لبه‌ای به طول ۰/۵

نوع مدل هندسی / فاکتور شدت تنش	بدون مرز داخلی	به همراه مرز داخلی نرم	به همراه مرز داخلی سخت	به همراه حفره داخلی
K_{I} (M-integral)	۱/۶۲۳۹	۱/۷۴۸۳	۱/۵۴۴۳	۱/۹۸۳۹
K_{II} (M-integral)	$-۴/۵۳۰۳\times ۱۰^{-۸}$	۰/۰۳۳۵	-۰/۰۲۱۲	۰/۱۰۰۹

۵-۹- تأثیر حفره و مرز ناهمگن داخلی بر مقادیر فاکتور شدت تنش، ترک میانی مایل

در ادامه به بررسی اثرات مرزهای ناهمگن داخلی بر مقادیر فاکتور شدت تنش مود مرکب برای ترک‌های مایل ۱۵و ۴۵ درجه نسبت به افق پرداخته خواهد شد. در ابتدا تأثیر حفره، مرز داخلی نرم و سخت به شعاع ۰/۵ بر ترک میانی مایل ۱۵ درجه نسبت به افق در جدول (۵-۱۳) نشان داده می‌شود.

جدول (۵-۱۳) تأثیر مرزهای ناهمگن داخلی بر بزرگای فاکتور شدت تنش مود مرکب، ترک میانی ۱۵ درجه

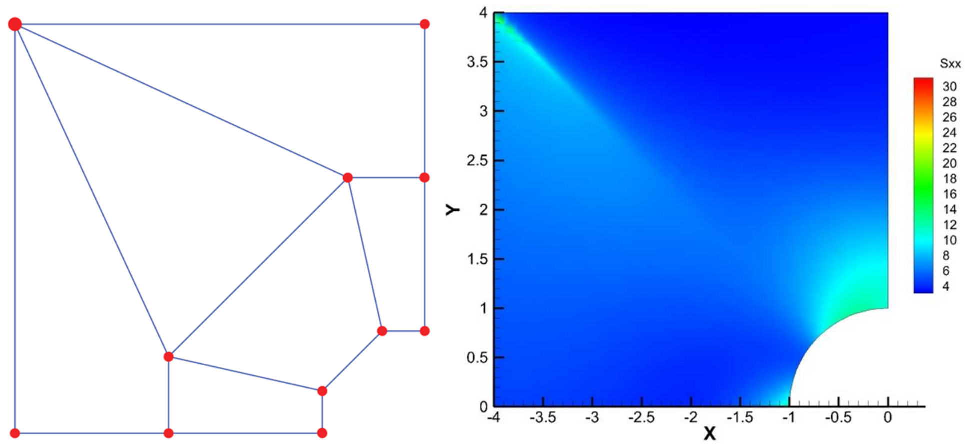
نوع مدل هندسی / فاکتور شدت تنش	بدون مرز داخلی	به همراه مرز داخلی نرم	به همراه مرز داخلی سخت	به همراه حفره داخلی
K_{I} (First tip)	۱/۲۶۶۶	۱/۲۱۴۰	۱/۲۹۵۵	۱/۱۱۴۸
K_{II} (First tip)	۰/۳۲۲۲	۰/۲۸۴۳	۰/۳۴۸۲	۰/۲۰۱۷
K_{I} (Second tip)	۱/۲۶۶۶	۱/۱۷۶۷	۱/۳۱۷۲	۱/۰۱۳۳
K_{II} (Second tip)	۰/۳۲۲۲	۰/۳۳۵۱	۰/۳۲۰۳	۰/۳۳۶۰

سپس تأثیر حفره، مرز داخلی نرم و سخت به شعاع ۰/۵ بر ترک میانی مایل ۴۵ درجه نسبت به افق در جدول (۵-۱۴) نشان داده می‌شود. در این مثال برای مرز داخلی نرم (که نشان دهنده نرم تر بودن مصالح مرز داخلی نسبت به مصالح ماتریس می‌باشد) از نسبت مدول الاستیسیته ۳ و برای مرز داخلی سخت با نسبت مدول الاستیسیته ۰/۳ استفاده شده است.

جدول (۵-۱۴) تأثیر مرزهای ناهمگن داخلی بر بزرگای فاکتور شدت تنش مود مرکب، ترک میانی ۴۵ درجه

نوع مدل هندسی / فاکتور شدت تنش	بدون مرز داخلی	به همراه مرز داخلی نرم	به همراه مرز داخلی سخت	به همراه حفره داخلی
K_{I} (First tip)	۰/۵۳۹۸	۰/۵۲۸۳	۰/۵۴۴۹	۰/۵۰۱۲
K_{II} (First tip)	۰/۵۴۳۴	۰/۴۹۰۲	۰/۵۵۹۳	۰/۴۰۱۵
K_{I} (Second tip)	۰/۵۳۹۸	۰/۴۷۴۲	۰/۵۷۶۳	۰/۳۵۳۲
K_{II} (Second tip)	۰/۵۴۳۴	۰/۴۷۷۴	۰/۵۶۷۶	۰/۳۷۲۰

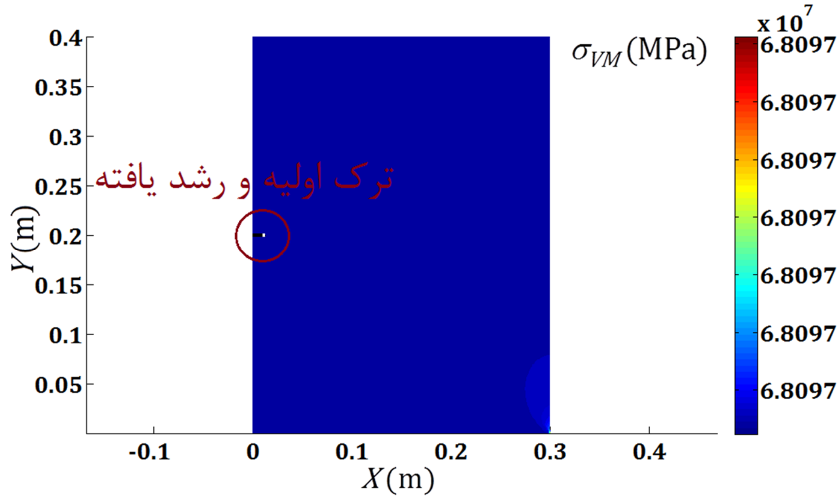
البته در روش آنالیز ایزوژئومتریک تولید حفره داخلی در دامنه را می‌توان از طریق کنترل بر وزن و مختصات نقاط کنترلی شبیه‌سازی نمود. لذا در مثالی به شبیه‌سازی حفره داخلی در صفحه پرداخته می‌شود. این مدل با استفاده از ۱۲ نقطه کنترلی و با اعمال یک وصله بدست آمده است (شکل (۵-۶۷)).



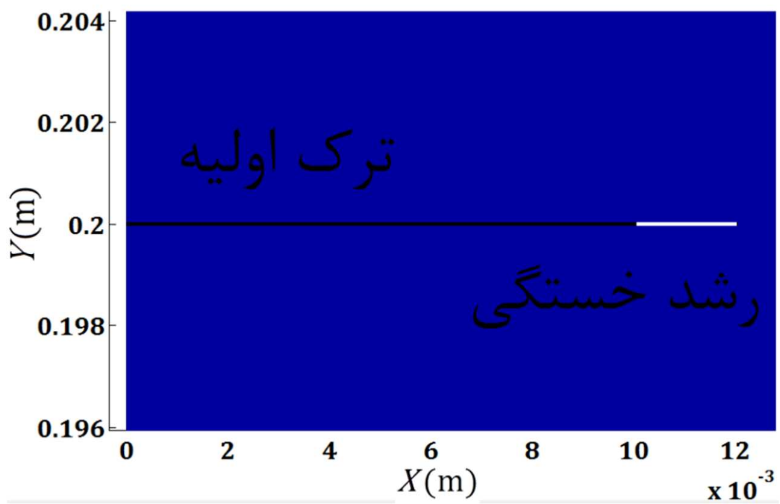
شکل (۵-۶۷) نمایش توزیع تنش σ_{xx} و شبکه کنترلی در صفحه حاوی حفره میانی به کمک روش آنالیز ایزوژئومتریک

۵-۱۰- رشد ترک خستگی

در این بخش بر اساس قانون پاریس در برآورد رشد پایدار ترک خستگی به مدل‌سازی رشد ترک خستگی پرداخته می‌شود. مثال رشد ترک خستگی با ۲۳۵ سیکل بارگذاری انجام شده است (شکل (۵-۶۸) و شکل (۵-۶۹)). طول اولیه ترک ۰/۰۱ و ابعاد دامنه ۰/۳ در ۰/۴ بوده همچنین اندازه المان‌ها ۰/۰۰۲ انتخاب شده است.

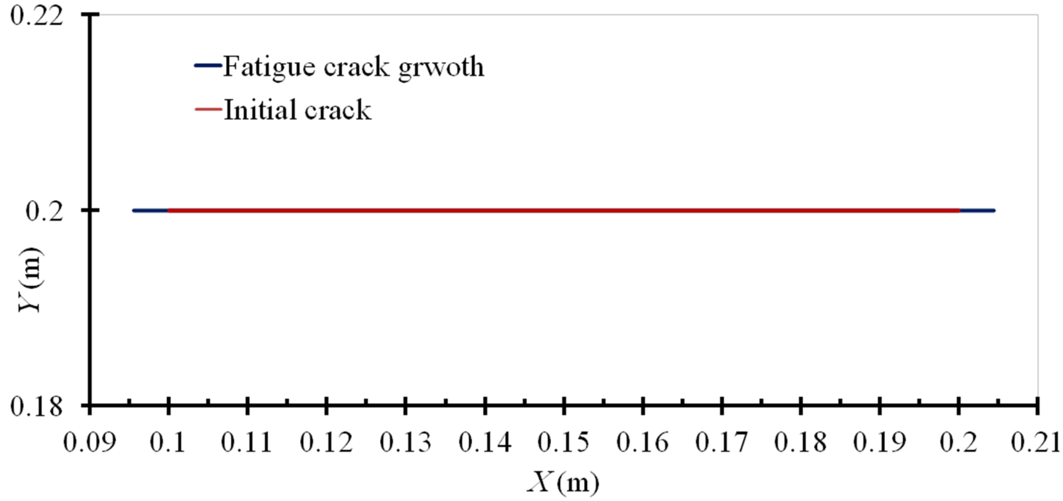


شکل (۵-۶۸) ترک لبه‌ای در صفحه تحت کشش، رشد ترک خستگی



شکل (۵-۶۹) نمایش حالت بزرگنمایی شده رشد ترک خستگی، ترک لبه‌ای

در مثال دیگری رشد پایدار ترک خستگی برای ترک میانی افقی به طول ۰/۱ به عنوان یک ترک بزرگ مورد ارزیابی قرار داده می‌شود. رشد ترک خستگی برای ترک وسطچین افقی در شرایط تعداد سیکل‌های برابر با ۲۵۰۰، تعداد تکرار در هر گام معادل ۵۰ انجام گرفته است. مشخصات مصالح مطابق معیار پاریس در رشد ترک خستگی بصورت $C = 1.5E\text{-}10$ و $m = 3.8$ فرض گردیده است. مدول الاستیسیته مصالح و نسبت پواسون به ترتیب 71.7E+9 و 0.33 فرض شده و فاکتور شدت تنش بحرانی مود اول برای مصالح مورد نظر برابر با 30E+6 می‌باشد. در شکل (۵-۷۰) مسیر رشد ترک خستگی برای ۵۰ تکرار نمایش داده شده است.



شکل (۵-۷۰) رشد ترک خستگی برای ترک وسط‌چین افقی

فصل ششم

نتیجه گیری و پیشنهادات

۶- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

همانگونه که نشان داده شد، روش آنالیز ایزوژئومتریک دارای توانایی‌های قابل توجه در تولید منطقه ناپیوسته می‌باشد. امکان استفاده از توابع پایه مرتبه بالاتر نربز در روش آنالیز ایزوژئومتریک قابلیت بالایی برای روش آنالیز ایزوژئومتریک در شبیه‌سازی تغییرات ناگهانی سطح تنش در مقایسه با سایر روش‌ها، ایجاد نموده است. از این رو روش آنالیز ایزوژئومتریک از پتانسیل لازم جهت تبدیل شدن به ابزاری نیرومند در موضوع مکانیک شکست محاسباتی برخوردار است. در این مطالعه با استفاده از توابع پایه مرتبه ۳ در روش آنالیز ایزوژئومتریک به نتایجی با دقت بیشتر نسبت به مدل اجزای محدود توسعه یافته با همان تعداد درجات آزادی دست یافته‌ایم. از طرفی برتری در میزان هموراری نتایج فضای تنش و کرنش در درجات آزادی یکسان با روش آنالیز ایزوژئومتریک است که این نتیجه منتهی به محاسبه فاکتور شدت تنش مود مرکب با کمک روش انتگرال اندرکنش و نیز روش برون‌یابی تنش در صفحه مقابل نوک ترک در روش آنالیز ایزوژئومتریک گردیده است.

بعلاوه در روش آنالیز ایزوژئومتریک نیاز به تولید شبکه المانی مشابه روش اجزای محدود از بین رفته که خود یک مزیت بزرگ در این روش بشمار می‌آید. بنابراین می‌توان با صرف زمانی کوتاه دامنه مورد نظر را با یک یا چند وصله تولید نمود. همچنین مقادیر محاسباتی فاکتور شدت تنش دقت مناسب و بالای روش آنالیز ایزوژئومتریک را در برآورد فاکتورهای شدت تنش، با درجات آزادی کمتر و در نتیجه تلاش محاسباتی کمتر نشان می‌دهد. همچنین در روش آنالیز ایزوژئومتریک بر پایه نربز، هندسه مساله تقریباً بطور دقیق مدل شده بنابراین خطای تقریب هندسه به حداقل می‌رسد در حالیکه در روش اجزای محدود خطای تقریب هندسه و متغیر اصلی مساله وجود دارد. به علاوه ویژگیهای روش آنالیز ایزوژئومتریک در تولید ناپیوستگی موجب استفاده آسان این روش در مساله شکست شده است. در این مطالعه با استفاده از تکرار نقاط کنترلی در مرز وصله‌ها با پیوستگی C^0 در یک موقعیت که به تولید ناپیوستگی به شکل ترک منجر می‌شود، پرداخته شد. در واقع این مزیت یک امکان منحصر به فرد در روش آنالیز ایزوژئومتریک بشمار می‌آید. همچنین روش آنالیز ایزوژئومتریک توانایی قابل

توجهی در مدل‌سازی ضمنی یک ناپیوستگی و لایه مرزی دارد که در این مطالعه این برتری به خوبی نشان داده شده است. در واقع بصورت ضمنی و با کمک فضای ریاضی که در این روش بکار گرفته شده است، می‌توان یک مرز ناپیوستگی را بخوبی در موقعیت مورد نظر تولید نمود. چنین ویژگی در مدل‌سازی ضمنی رشد ترک نیز بسیار مفید خواهد بود. همچنین روش آنالیز ایزوژئومتریک برخلاف روش اجزای محدود توسعه یافته که بر پایه پیکره‌بندی واحد قرار دارد، نیازمند روش‌های خاص مانند غنی‌سازی جهت مدل‌سازی ناپیوستگی نمی‌باشد. مسلّماً عدم نیاز به روش‌های خاص مانند غنی‌سازی جهت مدل‌سازی ناپیوستگی باعث کاهش حجم محاسبات خواهد شد.

در کنار امتیازاتی که روش آنالیز ایزوژئومتریک دارد، روش اجزای محدود توسعه یافته نیز یک روش بسیار انعطاف‌پذیر در مساله مکانیک شکست محاسباتی است. با کمک این روش انواع ناپیوستگی‌ها از جمله ترک بطور ضمنی به مدل اجزای محدود اضافه می‌گردند. این در حالی است که روش آنالیز ایزوژئومتریک به خودی خود امکان تولید هر نوع ناپیوستگی شامل فضای خالی یا اینکلوژن (جاسازی مصالحی در یک ماتریس در مصالح دیگر) را نداشته و نیازمند استفاده از چندین وصله در مدل‌سازی هندسی است. همچنین ماتریس سختی بدست آمده از روش اجزای محدود توسعه یافته نسبت به ماتریس سختی بدست آمده از روش آنالیز ایزوژئومتریک از وضعیت قطری بودن مطلوب‌تری برخوردار بوده و پهنای باند بالا و پایین آن مساوی بوده در حالیکه پهنای باند بالا و پایین ماتریس سختی روش آنالیز ایزوژئومتریک برابر نمی‌باشد. این شرایط ماتریس سختی در روش آنالیز ایزوژئومتریک باعث می‌شود که در اندازه یکسان با ماتریس سختی روش اجزای محدود توسعه یافته دارای شرایط پُر بودن بیشتری بوده که تا حدودی حجم محاسبات ماتریسی را بیشتر می‌نماید. همچنین نسبت حداکثر مقدار ویژه ماتریس سختی به حداقل آن در مجموع در ماتریس سختی بدست آمده از روش آنالیز ایزوژئومتریک به شرطی که تولید شبکه کنترلی و نیز فضای اندیس و به تبع فضای پارامتری بنحو مطلوبی برای تولید مدل بکار گرفته شده باشد از وضعیت بهتری نسبت به ماتریس سختی در روش

اجزای محدود توسعه یافته برخوردار بوده که خود نشان دهنده شرایط مناسب‌تر ماتریس سختی در روش آنالیز ایزوژئومتریک است.

همچنین تعیین مسیرهای حرکت ترک برای انواع ترک‌های افقی و مایل که بصورت لبه‌ای و میانی در نظر گرفته شده بودند، به کمک روش آنالیز ایزوژئومتریک شبیه‌سازی گردید. در فرایند رشد ترک از هر دو معیار حداکثر تنش مماسی و روش تعمیم یافته حداکثر تنش مماسی استفاده شد. بنابرابن اختلاف مسیر رشد ترک در هر دو معیار نمایش داده شد. در مورد ترک‌های افقی (لبه‌ای و میانی) تفاوتی در مسیر رشد ترک بر اساس دو معیار مورد بررسی مشاهده نگردید و مسیر رشد ترک در هر دو معیار بصورت غلبه مود اول (بازشدگی) و بصورت افقی بوده است. اما در خصوص ترک‌های مایل میانی با زوایای مختلف، مسیر رشد ترک در معیارهای مورد بررسی دارای اختلافاتی می‌باشد که در بخش نتایج شبیه‌سازی عددی نشان داده شد. از طرفی اثرات مرزهای ناهمگن داخلی شامل حفره مستدیر و نیز مرز ناهمگن نرم یا سخت بر تعیین مسیر رشد ترک یا به عبارت دیگر اثرات مرزهای ناهمگن داخلی بر بزرگای فاکتورهای شدت تنش به کمک روش اجزای محدود توسعه یافته مورد بررسی قرار گرفت. همچنین رشد ترک خستگی برای ترک‌های لبه‌ای و میانی نشان داده شد. در مثال‌های رشد ترک خستگی، چنانچه میزان فاکتور شدت تنش موثر از فاکتور شدت تنش بحرانی در تعداد سیکل‌های تعیین شده تجاوز نموده باشد، ترک افقی به میزان مطابق با قانون پاریس در رشد پایدار ترک خستگی حرکت نموده است. نتایج شبیه‌سازی شده در بخش نتایج نشان دهنده صحت محاسبات می‌باشد.

۶-۱- پیشنهادات و کارهای آینده

در این بخش تلاش می‌شود تا پیشنهادهایی ارائه شود که مولفین رساله خود نیز مشتاق به انجام آنها هستند.

- پیشنهاد می‌شود تا موضوع مکانیک شکست محاسباتی به کمک روش آنالیز ایزوژئومتریک به صورت آنالیز دینامیکی مورد مطالعه قرار گیرد.
- مسیر رشد ترک در آنالیز دینامیکی مورد بررسی قرار داد شود.
- پیشنهاد می‌گردد تا به کمک توابع مجموعه تراز و فرایند غنی‌سازی به تولید حفره و مرز ناهمگن داخلی در روش آنالیز ایزوژئومتریک پرداخته شود.
- پیشنهاد می‌گردد تا مطالعه صورت گرفته در این رساله بوسیله توابع پایه تی‌اسپیلاین تکرار و تدقیق گردد.
- الگوریتمی مناسب جهت شبیه‌سازی اتوماتیک رشد ترک بوسیله ابزار ذاتی روش آنالیز ایزوژئومتریک تهیه شود.
- پیشنهاد می‌گردد تا موضوع مکانیک شکست در مصالحی با مدل رفتاری ویسکوالاستیک یا ویسکوالاستوپلاستیک به کمک روش آنالیز ایزوژئومتریک یا روش اجزای محدود توسعه یافته مورد بررسی قرار داده شود.
- پیشنهاد می‌شود تا با ترکیب توابع پایه نربز یا تی‌اسپیلاین در روش المان مرزی یا روش بدون‌مش موضوع مکانیک شکست و محاسبه پارامترهای شکست مورد ارزیابی قرار داده شوند.
- می‌توان به دنبال توسعه روش ایزوژئومتریک المان مرزی بود.
- می‌توان از روش آنالیز ایزوژئومتریک برای مطالعات ژئوتکنیکی با تغییرشکل‌های بزرگ استفاده نمود.
- پیشنهاد می‌شود تا با تولید هندسه‌های پیچیده و یا سازه‌های واقعی مساله گسترش ترک مورد بررسی قرار گیرد.
- پیشنهاد می‌شود تا از مطالعات بر روی کاربردهای روش عددی فاصله گرفته و به دنبال اصلاح در اصول پایه‌ای ریاضی روش باشیم.

- پیشنهاد می‌شود تا مساله گسترش ترک برای سطوح مدور مانند لوله‌های تحت فشار استفاده شود.
- به دنبال توسعه روش آنالیز ایزوژئومتریک برای مدل‌سازی محیط‌های پر از درزه و ترک یا محیط‌های سنگی و تولید روش عددی مشابه المان منفصل اما با کمک اصول پایه‌ای بر مبنای وصله‌ها در روش آنالیز ایزوژئومتریک باشیم.
- پیشنهاد می‌شود بدنبال روشی باشیم تا بتوان به کمک منحنی‌های نربز به تولید ناپیوستگی در روش اجزای محدود توسعه یافته بپردازد. به عبارت دیگر بتوان مرز ناپیوستگی را به کمک نربز تولید نمود.
- پیشنهاد می‌گردد تا از آنالیز حرارتی برای شبیه‌سازی گسترش ترک استفاده شود.

۷- مراجع

[1] Liu G R, Liu B. (2003), "**Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method**", World Scientific .

[2] Gray L J, Phan A V, Paulino G H, Kaplan T. (2003) "Improved quarter-point crack tip element" **Eng. Fract. Mech.**, 70, 2, PP 269-283.

[3] Shedbale A S, Singh I V, Mishra B K, Sharma K. (2015) "Evaluation of Mechanical Properties using Spherical Ball Indentation and Coupled FE–EFG Approach" **Mech. Adv. Mater. Struct**.

[4] Price R J, Trevelyan J. (2014) "Boundary element simulation of fatigue crack growth in multi-site damage" **Eng. Anal. Boundary Elem.**, 43, PP 67-75.

[5] Namakian R, Shodja H M, Mashayekhi M. (2014) "Fully enriched weight functions in mesh-free methods for the analysis of linear elastic fracture mechanics problems" **Eng .Anal. Boundary Elem.**, 43, PP 1-18.

[6] Kumar S, Singh I V, Mishra B K. (2014) "A multigrid coupled (FE-EFG) approach to simulate fatigue crack growth in heterogeneous materials" **Theor. Appl. Fract. Mech.**, 72, PP 121-135.

[7] Ghorashi S S, Valizadeh N, Mohammadi S. (2012) "Extended isogeometric analysis for simulation of stationary and propagating cracks" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 89, 9, PP 1069-1101.

[8] De Luycker E, Benson D J, Belytschko T, Bazilevs Y, Hsu M C. (2011) "X-FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 87, 6, PP 541-565.

[9] Shi J, Chopp D, Lua J, Sukumar N, Belytschko T. (2010) "Abaqus implementation of extended finite element method using a level set representation for three-dimensional fatigue crack growth and life predictions" **Eng. Fract. Mech.**, 77, 14, PP 2840-2863.

[10] Romlay F R M, Ouyang H, Ariffin A K, Mohamed N a N. (2010) "Modeling of fatigue crack propagation using dual boundary element method and Gaussian Monte Carlo method" **Eng. Anal. Boundary Elem.**, 34, 3, PP 297-305.

[11] Pais M J, Kim N H, Davis T, (2010) "Reanalysis of the Extended Finite Element Method for Crack Initiation and Propagation", University of Florida, Gainesville, FL 32611.

[12] Mousavi S E, Sukumar N. (2010) "Generalized Gaussian quadrature rules for discontinuities and crack singularities in the extended finite element method" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 199, 49–52, PP 3237-3249.

[13] Musivand-Arzanfudi M, Hosseini-Toudeshky H. (2009) "Development of the extended parametric meshless Galerkin method to predict the crack propagation path in two-dimensional damaged structures" **Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.**, 32, 7, PP 552-566.

[14] Khoei A R, Azadi H, Moslemi H. (2008) "Modeling of crack propagation via an automatic adaptive mesh refinement based on modified superconvergent patch recovery technique" **Eng. Fract. Mech.**, 75, 10, PP 2921-2945.

[15] Giner E, Sukumar N, Denia F D, Fuenmayor F J. (2008) "Extended finite element method for fretting fatigue crack propagation" **Int. J. Solids Struct.**, 45, 22–23, PP 5675-5687.

[16] Yang Z. (2006) "Fully automatic modelling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method" **Eng. Fract. Mech.**, 73, 12, PP 1711-1731.

[17] Wang X, Bell R. (2004) "Elastic T-stress solutions for semi-elliptical surface cracks in finite thickness plates subject to non-uniform stress distributions" **Eng. Fract. Mech.**, 71, 9–10, PP 1477-1496.

[18] Sutradhar A, Paulino G H. (2004) "Symmetric Galerkin boundary element computation of T-stress and stress intensity factors for mixed-mode cracks by the interaction integral method" **Eng. Anal. Boundary Elem.**, 28, 11, PP 1335-1350.

[19] Sukumar N, Chopp D L, Moran B. (2003) "Extended finite element method and fast marching method for three-dimensional fatigue crack propagation" **Eng. Fract. Mech.**, 70, 1, PP 29-48.

[20] Dolbow J, Moës N, Belytschko T. (2000) "Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method" **Finite Elem. Anal. Des.**, 36, 3–4 ,PP 235-260.

[21] Belytschko T, Organ D, Gerlach C. (2000) "Element-free galerkin methods for dynamic fracture in concrete" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 187, 3–4, PP 385-399.

[22] Moës N, Dolbow J, Belytschko T. (1999) "A finite element method for crack growth without remeshing" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 46, 1, PP 131-150.

[23] Belytschko T, Fleming M. (1999) "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method" **Computers & Structures**, 71, 2, PP 173-195.

[24] Babuška I, Zhang Z" (١٩٩٨) .The partition of unity method for the elastically supported beam" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 152, 1–2, PP 1-18.

[25] Fleming M, Chu Y A, Moran B, Belytschko T. (1997) "Enriched element-free Galerkin Methods for Crack Tip Fields" **Int. J. Numer .Methods Eng.**, 40, 8, PP 1483-1504.

[26] Xie M, Gerstle W H, Rahulkumar P. (1995) "Energy-based automatic mixed-mode crack propagation modeling" **J. Eng. Mech.**, 121, 8, PP 914-923.

[27] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. (1995) "Crack propagation by element-free Galerkin methods" **Eng. Fract. Mech.**, 51, 2, PP 295-315.

[28] Sederberg T W, Zheng J. (2002). Chapter 15 - Algebraic Methods for Computer Aided Geometric Design, pp **363-387**, In: "**Handbook of Computer Aided**

Geometric Design", Gerald F, Josef H, Myung-Soo K ,Myung-Soo KimA2 - Gerald Farin JHM-SKJH, North-Holland, Amsterdam.

[29] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. (2009), "**Isogeometric Analysis Toward integration of CAD and FEM** ."

[30] Hughes T J R, Cottrell J A, Bazilevs Y. (2005) "Isogeometric analysis :CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 194, 39–41, PP 4135-4195.

[31] Bazilevs Y, Beirão Da Veiga L, Cottrell J A, Hughes T J R, Sangalli G. (2006) "Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes" **Math. Models Methods Appl. Sci.**, 16, 07, PP 1031-1090.

[32] Cottrell J A, Hughes T J R, Reali A. (2007) "Studies of refinement and continuity in isogeometric structural analysis" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng**, 196, 41-44, PP 4160-4183.

[33] Hughes T J R, Reali A, Sangalli G. (2010) "Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 199, 5–8, PP 301-313.

[34] Auricchio F, Da Veiga L B, Buffa A, Lovadina C, Reali A, Sangalli G. (2007) "A fully “locking-free” isogeometric approach for plane linear elasticity problems: A stream function formulation" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 197, 1–4, PP 160-172.

[35] Cottrell J A, Reali A, Bazilevs Y, Hughes T J R. (2006) "Isogeometric analysis of structural vibrations" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 195, 41–43, PP 5257-5296.

[36] Bazilevs Y, Calo V M, Cottrell J A, Hughes T J R, Reali A, Scovazzi G. (2007) "Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 197, 1–4, PP 173-201.

[37] Wang D, Xuan J. (2010) "An improved NURBS-based isogeometric analysis with enhanced treatment of essential boundary conditions" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 199, 37-40 ,PP 2425-2436.

[38] Mysore K, Morgan O T, Subbarayan G. (2011) "NURBS representational strategies for tracking moving boundaries and topological changes during phase evolution" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 200, 33–36, PP 2594-2610.

[39] Sevilla R, Fernández-Méndez S, Huerta A. (2011) "3D NURBS-enhanced finite element method (NEFEM)" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 88, 2, PP 103-125.

[40] Gomez H, Hughes T J R. (2011) "Provably unconditionally stable, second-order time-accurate, mixed variational methods for phase-field models" **J. Comput. Phys.**, 230, 13, PP 5310-5327.

[41] Gomez H, Hughes T J R, Nogueira X, Calo V M. (2010) "Isogeometric analysis of the isothermal Navier–Stokes–Korteweg equations" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 199, 25–28, PP 1828-1840.

[42] B Hassani S M T, N.Z Moghadam. (2011) "Application of isogeometric analysis in structural shape optimization" **Scientia Iranica**, 18, 4, PP 846-852.

[43] Yan X. (2006) "Stress intensives and propagation of mixed-mode cracks" **Eng. Fail. Anal.**, 13, 6, PP 1022-1027.

[44] Giner E, Sukumar N, Tarancón J E, Fuenmayor F J. (2009) "An Abaqus implementation of the extended finite element method" **Eng. Fract. Mech.**, 76, 3, PP 347-368.

[45] Taylor D, Cornetti P, Pugno N. (2005) "The fracture mechanics of finite crack extension" **Eng. Fract. Mech.**, 72, 7, PP 1021-1038.

[46] Field F A, Baker B R. (1962) "Crack Propagation Under Shear Displacements" **J. Appl. Mech.**, 29, 2, PP 436-448.

[47] Salvadori A, Gray L J. (2007) "Analytical integrations and SIFs computation in 2D fracture mechanics" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 70, 4, PP 445-495.

[48] Singh I V, Bhardwaj G, Mishra B K. (2015) "A new criterion for modeling multiple discontinuities passing through an element using XIGA" **J. Mech. Sci. Technol.**, 29, 3, PP 1131-1143.

[49] Bhardwaj G, Singh I V, Mishra B K, Kumar V. (2015) "Numerical Simulations of Cracked Plate using XIGA under Different Loads and Boundary Conditions" **Mech. Adv. Mater. Struct**.

[50] Leonel E D, Venturini W S. (2010) "Non-linear boundary element formulation with tangent operator to analyse crack propagation in quasi-brittle materials" **Eng. Anal. Boundary Elem.**, 34, 2, PP 122-129.

[51] Monaghan J J, Gingold R A. (1983) "Shock simulation by the particle method SPH" **J. Comput. Phys.**, 52, 2, PP 374-389.

[52] Lucy L B. (1977) "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis" **Astron. J.**, 82, PP 1013-1024.

[53] Babuska I, Melenk, J. (1997) "The Partition of unity method" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 40, PP 727–758.

[54] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. (1994) "Element-free Galerkin methods" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 37, 2, PP 229-256.

[55] Atluri S N, Zhu T. (1998) "A new Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics" **Comput. Mech.**, 22, 2, PP 117-127.

[56] Daxini S D, Prajapati J M. (2014) "A Review on Recent Contribution of Meshfree Methods to Structure and Fracture Mechanics Applications" **The Scientific World Journal**.

[57] Schellekens J C J, De Borst R. (1993) "On the numerical integration of interface elements" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 36, 1, PP 43-66.

[58] Rots J. (1991) "Smeared and discrete representations of localized fracture" **Int J Fract**, 51, 1, PP 45-59.

[59] Jirásek M, Zimmermann T. (2001) "Embedded crack model: I. Basic formulation " **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 50, 6, PP 1269-1290.

[60] Oliver J. (1996) "Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: numerical simulation" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 39, 21, PP 3601-3623.

[61] Simo J C, Oliver J, Armero F. (1993) "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids" **Comput. Mech.**, 12, 5, PP 277-296.

[62] Carter B J, Wawrzynek P A, Ingraffea A R. (2000) "Automated 3-D crack growth simulation" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 47, 1-3, PP 229-253.

[63] Wawrzynek P A. (1991), "**Discrete modeling of crack propagation : theoretical aspects and implementation issues in two and three dimensions**", Cornell University, August .

[64] Melenk J M, Babuška I. (1996) "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 139, 1–4, PP 289-314.

[65] Belytschko T, Black T. (1999) "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing "**Int. J. Numer. Methods Eng.**, 45, 5, PP 601-620.

[66] Mohammadi S. (2008), "**Extended Finite Element Method: for Fracture Analysis of Structures**", Wiley .

[67] Sukumar N, Prévost J H. (2003) "Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation" **Int. J. Solids Struct.**, 40, 26, PP 7513-7537.

[68] Belytschko T, Fleming M. (1999) "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method" **Comput. Struct.**, 71, 2, PP 173-195.

[69] Osher S, Fedkiw R. (2003), "**Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces**", Springer .

[70] Sethian J A. (1996) "A fast marching level set method for monotonically advancing fronts" **Proceedings of the National Academy of Sciences**, 93, 4, PP 1591-1595.

[71] Adalsteinsson D, Sethian J A. (1995) "A Fast Level Set Method for Propagating Interfaces" **J. Comput. Phys.**, 118, 2, PP 269-277.

[72] Daru V. (2000) "Level Set Methods and Fast Marching Methods – Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science by J.A. Sethian (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999, 2nd edition, 378 pp.) " **European Journal of Mechanics - B/Fluids**, 19, 4, PP 531-532.

[73] Sukumar N, Chopp D L, Moës N ,Belytschko T. (2001) "Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 190, 46–47, PP 6183-6200.

[74] Grinfeld P. (2010) "Hadamard's Formula Inside and Out" **J Optim Theory Appl**, 146, 3, PP 654-690.

[75] Bonet J, Wood R D. (2008), "**Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**", 2nd edn, Cambridge University Press .

[76] Moës N, Cloirec M, Cartraud P, Remacle J F. (2003) "A computational approach to handle complex microstructure geometries" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 192, 28–30, PP 3163-3177.

[77] Moës N, Belytschko T. (2002) "Extended finite element method for cohesive crack growth" **Eng. Fract. Mech.**, 69, 7, PP 813-833.

[78] Cottrell J A, Hughes T J R, Bazilevs Y. (2009), "**Isogeometric Analysis: Toward Integration of CAD and FEA**", Wiley Publishing .

[79] Rogers D F. (2001), "**An introduction to NURBS: with historical perspective**", Morgan Kaufmann Publishers .

[80] Piegl L A, Tiller W. (1997), "**The Nurbs Book**", Springer-Verlag GmbH .

[81] Bazilevs Y, Calo V M, Cottrell J A, Evans J A, Hughes T J R, Lipton S, et al. (2010) "Isogeometric analysis using T-splines" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 199, 5–8, PP 229-263.

[82] De Boor C. (1972) "On calculating with B-splines" **Journal of Approximation Theory**, 6, 1, PP 50-62.

[83] Cox M G. (1972) "The Numerical Evaluation of B-Splines" **IMA Journal of Applied Mathematics**, 10, 2, PP 134-149.

[84] Scott M A, Li X, Sederberg T W, Hughes T J R. (2012) "Local refinement of analysis-suitable T-splines" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 213–216, 0, PP 206-222.

[85] Beirão Da Veiga L, Buffa A, Cho D, Sangalli G. (2011) "IsoGeometric analysis using T-splines on two-patch geometries" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 200, 21–22, PP 1787-1803.

[86] Buffa A, Cho D, Sangalli G. (2010) "Linear independence of the T-spline blending functions associated with some particular T-meshes" **Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.**, 199, 23–24, PP 1437-1445.

[87] Shukla A. (2006), "**Dynamic Fracture Mechanics**", World Scientific .

[88] Gdoutos E E. (2005), "**Fracture Mechanics: An Introduction**", Springer .

[89] Gdoutos E E. (1990), "**Fracture Mechanics Criteria and Applications**", Springer .

[90] Griffith A A. (1921) "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids" **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character**, 221.

[91] Irwin G R. (1957) "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate" **J. Appl. Mech.**, 24, PP 361-364.

[92] Orowan E, "Fracture and strength of solids", 1948.

[93] Broberg K B. (1999), "**Cracks and Fracture**", Elsevier Science .

[94] Parton V Z, Morozov E M. (1978), "**Elastic-plastic fracture mechanics**", Mir Publisher.

[95] Zahnder A T. (2012), "**Fracture Mechanics**", Springer .

[96] Zhang W, Cai Y. (2010), "**Continuum Damage Mechanics and Numerical Applications**", Springer .

[97] Ayhan A O. (2007) "Stress intensity factors for three-dimensional cracks in functionally graded materials using enriched finite elements" **Int. J. Solids Struct.**, 44, 25–26, PP 8579-8599.

[98] Erdogan F, Sih G C. (1963) "On the Crack Extension in Plates Under Plane Loading and Transverse Shear" **Journal of Basic Engineering**, 85, 4, PP 519-525.

[99] Sih G C. (1973) "Some basic problems in fracture mechanics and new concepts" **Eng. Fract. Mech.**, 5, 2, PP 365-377.

[100] Aliha M R M, Ayatollahi M R. (2012) "Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion" **Int .J. Solids Struct.**, 49, 13, PP 1877-1883.

[101] Smith D J, Ayatollahi M R, Pavier M J. (2001) "The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading" **Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct.**, 24, 2, PP 137-150.

[102] Williams J G, Ewing P D. (1972) "Fracture under complex stress — The angled crack problem" **Int. J. Fract.Mech.**, 8, 4, PP 441-446.

[103] Ueda Y, Ikeda K, Yao T, Aoki M. (1983) "Characteristics of brittle fracture under general combined modes including those under bi-axial tensile loads" **Eng. Fract. Mech.**, 18, 6, PP 1131-1158.

[104] Unger D J. (1995). 4 - Small-Scale Yielding versus Exact Linear Elastic Solutions, pp **261-284**, In: "**Analytical Fracture Mechanics**", Unger DJ, Academic Press, San Diego.

[105] Liu A F. (2005), "**Mechanics and Mechanisms of Fracture: An Introduction**", A S M International .

[106] Yau J F, Wang S S, Corten H T. (1980) "A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity" **J. Appl. Mech.**, 47, 2, PP 335-341.

[107] Rice J R. (1968) "A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks" **J. Appl. Mech.**, 35, 2, PP 379-386.

[108] De Klerk A, Visser A G, Groenwold A A. (2008) "Lower and upper bound estimation of isotropic and orthotropic fracture mechanics problems using elements with rotational degrees of freedom" **Commun. Numer. Methods Eng.**, 24, 5, PP 335-353.

[109] Banks-Sills L, Hershkovitz I, Wawrzynek P A, Eliasi R, Ingraffea A R. (2005) "Methods for calculating stress intensity factors in anisotropic materials: Part I—z=0 is a symmetric plane" **Eng. Fract. Mech.**, 72, 15, PP 2328-2358.

[110] Babuška I, Miller A. (1984) "The post-processing approach in the finite element method—Part 2: The calculation of stress intensity factors" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 20, 6, PP 1111-1129.

[111] Li F Z, Shih C F, Needleman A. (1985) "A comparison of methods for calculating energy release rates" **Eng. Fract. Mech.**, 21, 2, PP 405-421.

[112] Williams M L. (1957) "On the stress distribution at the base of a stationary crack." **ASME. J. Appl. Mech.**, 24, 1, PP 109–114.

[113] Westergaard H M. (1939) "Bearing Pressure and Cracks" **J. Appl. Mech.**, 61, PP 49-53.

[114] Sukumar N, Huang Z Y, Prévost J H, Suo Z. (2004) "Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks" **Int. J. Numer. Methods Eng.**, 59, 8, PP 1075-1102.

[115] Spagnoli A. (2005) "Self-similarity and fractals in the Paris range of fatigue crack growth" **Mech. Mater.**, 37, 5, PP 519-529.

[116] Romaniv O N, Nikiforchin G N, Andrusiv B N. (1984) "Influence of fatigue crack closure and geometry on the structural sensitivity of the near-threshold fatigue of steels" **Mater Sci**, 20, 1, PP 62-67.

[117] Ritchie R O. (1977) "Near-Threshold Fatigue Crack Propagation in Ultra-High Strength Steel: Influence of Load Ratio and Cyclic Strength" **J. Eng. Mater. Technol.**, 99, 3, PP 195-204.

[118] Paris P, Erdogan F. (1963) "A Critical Analysis of Crack Propagation Laws" **Journal of Basic Engineering**, 85, 4, PP 528-533.

[119] Pugno N, Ciavarella M, Cornetti P, Carpinteri A. (2006) "A generalized Paris' law for fatigue crack growth" **J. Mech. Phys. Solids**, 54, 7, PP 1333-1349.

[120] Jiang H. (2010), Ph.D. Thesis, "Cohesive Zone Model for Carbon Nanotube Adhesive Simulation and Fracture/Fatigue Crack Growth", University of Akron ,

[121] Verhoosel C, Scott M A, Borst R D, Hughes T J R, "An Isogeometric Approach To Cohesive Zone Modeling", The Institute for Computational Engineering and Sciences: The University of Texas at Austin Austin ,Texas 78712, 2010.

[۱۲۲] نادری، ر. و خادم‌الرسول، ع، (۱۳۹۰) "مدل‌سازی خودکار رشد ترک در مود مرکب و رشد ترک خستگی بدون مش‌بندی مجدد" **مجله سازه‌ها و شاره‌ها**، شماره ۱، دوره ۱، ص ۲۷-۳۸.

[۱۲۳] نادری، ر. و خادم‌الرسول، ع، (۱۳۹۴) "مدل‌سازی خودکار گسترش ترک در اندرکنش با حفره و مرز ناهمگن بدون مش‌بندی مجدد" **مجله مکانیک مدرس**، شماره ۷، دوره ۱۵، ص ۲۶۱-۲۷۳.

[۱۲۴] خادم‌الرسول، ع. نادری، ر. گنجعلی، ا، (۱۳۹۰) "برآورد فاکتور شدت تنش برای ترک در مود مرکب با استفاده از انتگرال متقابل در روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM)"، کنفرانس ملی عمران، سمنان.

[۱۲۵] جاویدراد، ف، (۱۳۸۳) **"مکانیک شکست و کاربرد آن در مهندسی"** چاپ اول، انتشارات صنایع هوافضا، تهران.

[۱۲۶] حسنی، ب. گنجعلی، ا. و خادم‌الرسول، ع، (۱۳۹۰) "برآورد خطای موجود در تحلیل ایزوژئومتریک صفحه ترکدار تحت کشش"، کنفرانس مهندسی مکانیک، بیرجند، ایران.

[۱۲۷] میرزایی نصیرآباد، ح. کاکایی، ر. حسنی، ب، (۱۳۸۷) "نحوه رشد و اتصال ترک‌ها در محیط‌های سنگی با روش عددی بدون‌مش گالرکین و اعتبار سنجی آن با مطالعات آزمایشگاهی"، دانشکده معدن و ژئوفیزیک، دانشگاه شاهرود.

Abstract

Fracture mechanics is one of the most interesting subjects for prominent researchers. In fact the combination of the fracture mechanics and the numerical methods has been appealing for scientists. Finite difference, finite element method, boundary element method, meshless methods and the discrete element methods have utilized since last few decades. Among these numerical approaches the isogeometric analysis method is chosen due to its inherit specifications in the computational fracture mechanics.

An interaction integral method for evaluating mixed-mode stress intensity factors (SIFs) for two dimensional crack problems using NURBS-based isogeometric analysis method is investigated. The interaction integral method is based on the path independent *J*-integral. By introducing a known auxiliary field solution, the mixed-mode SIFs are calculated simultaneously. Among features of B-spline basis functions the possibility of enhancing a B-spline basis with discontinuities by means of knot insertion makes isogeometric analysis method a suitable candidate for modelling discrete cracks. Also repetition of two different control points between two patches can create a discontinuity and also demonstrates a singularity in the stiffness matrix. In the case of a pre-defined interface, non-uniform rational B-splines are used to obtain an efficient discretization. Various numerical simulations for edge and center cracks demonstrate the suitability of the isogeometric analysis approach to fracture mechanics.

Also, due to evaluation the isogeometric analysis results the extended finite element method is coupled with the level set method to create all kind of discontinuities. In other words, where the IGA can not fulfil the objectives of the fracture mechanics calculations for example in the internal discontinuity boundaries modelling such as circular holes and soft or hard inclusions, the XFEM is utilized. All results are shown the capabilities of isogeometric analysis method and also the extended finite element mthod in all catagories of the computational fracture mechanics.

Keywords

NURBS, Isogeometric analysis method, Knot insertion, Interaction integral, Extended finite element method, Level set method.

University of Shahrood
Faculty of Civil Engineering

FRACTURE MECHANICS AND CRACK PROPAGATION USING ISOGEOMETRIC ANALYSIS METHOD

ABDOLGHAFOOR KHADEMALRASOUL

Supervisor
Dr. REZA NADERI

September 2015