بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده عمران

گروه سازه

تحلیل غیر خطی هندسی سازه به روش ایزوژئومتریک در مسائل تنش-کرنش مسطح

دانشجو : مهدی اردیانی

اساتید راهنما :

دکتر بهروز حسنی

دکتر سید مهدی توکلی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۳

شماره :
تاریخ :
ویرایش :

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۶)

بسمه تعالی

فرم صورتجلسه دفاع پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای **مهدی اردیانی** رشته **عمران** گرایش **سازه** تحت عنوان:

تحلیل غیر خطی هندسی سازه به روش ایزوژئومتریک در مسائل تنش-کرنش مسطح

که در تاریخ **۱۳۹۳/۰۶/۱۶** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح زیر است :

قبول (با درجه : عالی امتیاز ۱۹/۵) ☑ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۱ـ عالی (۲۰ ـ ۱۹) ۲ـ بسیار خوب (۱۸/۹۹ ـ ۱۸)

۳ـ خوب (۱۷/۹۹ ـ ۱۶) ۴ـ قابل قبول (۱۵/۹۹ ـ ۱۴)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنما	دکتر بهروز حسنی	استاد	
۲ـ استادراهنما	دکتر سید مهدی توکلی	استادیار	
۳ـ نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر مهدی گلی	استادیار	
۴ـ استاد ممتحن	دکتر فرشید علائی جندقی	دانشیار	
۵ ـ استاد ممتحن	دکتر رضا نادری	استادیار	

تأیید رئیس دانشکده : دکتر احمد احمدی

تقدیم به

پدر دلسوز، مادر صبور و همسر مهربانم

می‌دانم هیچگاه نتوانسته‌ام محبت‌هایتان را جبران نمایم.

هر چه هست از قامت ناساز بی اندام ماست

ورنه تشریف تو بر بالای کس کوتاه نیست

در ابتدای این تحقیق برخود لازم دانسته تا از زحمات اساتید گرانقدر خود که در این مسیر دلسوزانه مرا یاری نمودند تشکر نمایم.

با تقدیر فراوان از معلم علم و اخلاق، آقای دکتر بهروز حسنی که خالصانه علم و تجربه خویش را در اختیار بنده قرار داده و همچون شمعی روشنگر این حقیر در قسمتهای تاریک این تحقیق بوده‌اند.

با سپاس فراوان از آقای دکتر سید مهدی توکلی که روشنگر راهم در تنظیم این پایان نامه بوده و با محبتهایشان مرا مدیون خود کرده‌اند زحماتش را هرگز فراموش نخواهم کرد.

با تشکر و سپاس فراوان از آقای دکتر رضا نادری که با بردباری و دلسوزی فراوان مزاحمت‌های این حقیر را تحمل نموده و پاسخگوی سوالات بنده بوده‌اند.

بنده پیر خراباتم که لطفش دائم است

ورنه لطف شیخ و زاهد گاه هست و گاه نیست

تعهد نامه

اینجانب **مهدی اردیانی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **عمران- سازه** دانشکده **عمران** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **تحلیل غیر خطی هندسی سازه به روش ایزوژئومتریک در مسائل تنش-کرنش مسطح** تحت راهنمائی **دکتر بهروز حسنی و دکتر سید مهدی توکلی** متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده:

مفاهیم مطرح شده در این تحقیق مبتنی بر فرمول‌بندی مسائل غیرخطی الاستیک بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتریک می‌باشد. بدین منظور به مرور خلاصه‌ای از سینماتیک ذرات اشاره شده و روابط مربوط به تعادل بررسی و ارائه می‌شود. در ادامه به فرمول‌بندی مصالح هایپرالاستیسیته پرداخته شده و ضمن بیان معادله تعادل حاکم بر مسئله، خطی‌سازی آن جهت استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن- رافسون انجام گرفته است. با توجه به استفاده از روش تحلیل ایزوژئومتریک ضمن اشاره به مفهوم این روش، توابع مجهول و هندسه در مسائل خطی‌سازی شده هایپرالاستیسیته توسط توابع پایه و متغیرهای کنترلی گسسته‌سازی می‌شوند. جهت سهولت وکارائی الگوریتمی در تحلیل این دسته از مسائل پیشنهاد شده و در ادامه نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته با یکدیگر مقایسه و سپس به بررسی تاثیر تعداد نقاط گوسی، تعداد تقسیمات بار ، استفاده از توابع انرژی کرنشی حجمی مختلف و بحث در انواع مواد تراکم ناپذیر در همگرایی جواب پرداخته شده است.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریک، توابع پایه، نربز، هایپرالاستیسیته

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فهرست علائم و اختصارات

تانسور تنش اولیه پیولا - کیرشهف	$\boldsymbol{P}$
مولفه انحرافی تانسور تنش اولیه پیولا- کیرشهف	$\boldsymbol{P}'$
مولفه فشار هیدرواستاتیکی	p
تانسور تنش ثانویه پیولا- کیرشهف	$\boldsymbol{S}$
مولفه انحرافی تانسور تنش ثانویه پیولا- کیرشهف	$\boldsymbol{S}'$
تانسور تنش کوشی	$\boldsymbol{\sigma}$
مولفه انحرافی تانسور تنش کوشی	$\boldsymbol{\sigma}'$
تانسور گرادیان تغییر شکل	F
تابع انرژی کرنشی ذخیره شده	Ψ
تانسور چرخشی	$\boldsymbol{R}$
تانسور کشیدگی	$\boldsymbol{U}$
تانسور تغییر شکل گرین- کوشی راست	$\boldsymbol{C}$
تانسور تغییر شکل گرین- کوشی چپ	$\boldsymbol{b}$
تانسور کرنش گرین یا لاگرانژی	$\boldsymbol{E}$
تانسور کرنش المانسی یا اویلری	$\boldsymbol{\varepsilon}$
نرخ تغییرات	$\boldsymbol{d}$
تانسور الاستیسیته مادی یا لاگرانژی	$\tilde{\boldsymbol{C}}$
مولفه انحرافی تانسور الاستیسیته مادی یا لاگرانژی	$\hat{\tilde{\boldsymbol{C}}}$
موافه فشار هیدرو استاتیکی تانسور الاستیسیته مادی یا لاگرانژی	$\tilde{\boldsymbol{C}}_p$
مولفه حجمی تانسور الاستیسیته مادی یا لاگرانژی	$\tilde{\boldsymbol{C}}_k$
تانسور الاستیسیته فضایی یا اویلری	$\tilde{\boldsymbol{c}}$
مولفه انحرافی تانسور الاستیسیته فضایی یا اویلری	$\hat{\tilde{\boldsymbol{c}}}$
مولفه فشار هیدرو استاتیکی تانسور الاستیسیته فضایی یا اویلری	$\tilde{\boldsymbol{c}}_p$
مولفه حجمی تانسور الاستیسیته فضایی یا اویلری	$\tilde{\boldsymbol{c}}_k$
چگالی	ρ
نسبت تغییرات حجم	J
حجم آغازین	V

حجم کنونی..	v
مساحت آغازین..	A
مساحت کنونی...	a
بردار سرعت..	$\boldsymbol{v}$
ماتریس سختی مماسی...	$\boldsymbol{K}$
ماتریس ژاکوبین...	$\boldsymbol{J}$
بردار نیروی خارجی..	$\boldsymbol{F(u)}$
بردار نیروی داخلی..	$\boldsymbol{T(u)}$
بردار باقیمانده‌های نیرو در نقاط گرهی..	$\boldsymbol{R(u)}$
مختصات اولیه نقاط..	$\boldsymbol{X}$
مختصات کنونی نقاط...	$\boldsymbol{x}$
مختصات اولیه نقاط کنترلی...	$\boldsymbol{X}_p$
مختصات کنونی نقاط کنترلی..	$\boldsymbol{x}_p$
بردار جابجایی نقاط	$\boldsymbol{u}$
بردار جابجایی نقاط کنترلی...	$\boldsymbol{u}_p$
تابع پایه ب- اسپلاین...	$N_{i,p}$
تابع پایه نربز..	$R_{i,p}$
بردار گره‌ای در راستای ξ..	ξ
بردار گره‌ای در راستای η...	η
بردار گره‌ای در راستای ζ...	ζ

فصل اول

مقدمه و کلیات

۱-۱- تاریخچه موضوع:

روشهای مختلف عددی در دهه‌های اخیر برای تحلیل سازه‌ها پیشنهاد شده و توسعه یافته‌اند. از جمله مهمترین این روشها می‌توان به ترتیب شکل گیری، به روشهای تفاضل محدود[1]، اجزای محدود[2] و دسته روشهای موسوم به روشهای بدون مش[3] اشاره کرد. به عبارت کلی‌تر می‌توان گفت که این روشها، روشهای حل معادلات دیفرانسیل جزئی بوده و علاوه بر تحلیل سازه در بسیاری از مسائل مهندسی مانند حل معادلات حاکم بر مسائل انتقال حرارت، مکانیک سیالات، الکتریسیته، انتشار امواج و غیره بکار می‌روند [1-2]. در این میان، امروزه روش اجزای محدود بعنوان روشی قدرتمند در بسیاری از علوم مهندسی شناخته شده و با استفاده از آن نرم افزارهای مختلفی نوشته شده است که در صنعت کاربرد فراوان دارند. این روش در دهه ۱۹۵۰ تا ۱۹۶۰ شکل گرفت بطوریکه در انتهای این دهه برنامه‌های کامپیوتری تجاری مانند نسترن[4] و آسکا[5] و غیره بوجود آمدند. این روش در طی سالیان گذشته توسعه یافته و همچنین با ادغام آن با روشهای تفاضل محدود و بدون مش بسیاری از مشکلات دانشمندان مکانیک محاسباتی مرتفع گردیده است [3].

از نخستین تلاشها در این زمینه روشی مشابه اجزای محدود با بهره‌گیری از تکه توابع پیوسته[6] بر روی ناحیه مثلثی شکل می‌باشد که توسط کورانت[7] [4] در سال ۱۹۴۳ در مقاله‌ای در زمینه ریاضیات کاربردی مطرح شد. ایده اصلی روش اجزای محدود را می‌توان در مقالات ترنر[8]، کلاف[9]، مارتین[10]، تاپ[11] [5]، ارگریس[12] و کلسی[13] [6] مشاهده نمود. کلاف نام این روش را اجزای محدود نامید. کتاب

[1] Finite Differential Method
[2] Finite Element Method
[3] Meshless Method
[4] NASTARAN
[5] ASKA
[6] Piecewise Continuous Functions
[7] Courant
[8] Turner
[9] Clough
[10] Martin
[11] Topp
[12] Argyris
[13] Kelsey

پرزمیننسکی[1] [7] کاربرد روش فوق را در مسائل تحلیل تنش روشن نمود و تحقیقات زینکوویچ[2] و چیونگ[3] [8] باعث گسترش روش اجزای محدود در بسیاری از علوم مهندسی گشت.

علیرغم این پیشرفت قابله ملاحظه، این روشها دارای نقاط ضعفی نیز می‌باشند که از مهمترین آنها می‌توان به نحوه تعریف مرزهای هندسی اشاره کرد. در روش اجزای محدود با توجه به تقریب هندسه، نزدیک شدن به هندسه واقعی کاملا وابسته به نحوه شبکه بندی است و در برخی از مسائل پیچیده به لحاظ هندسی، رسیدن به آن بسیار مشکل است. همچنین اقناع شرایط مرزی در این روشها، به خصوص در روشهای بدون مش، با مشکلاتی مواجه است. از طرف دیگر بهبود حل، چه به لحاظ تقریب هندسه و یا متغیرهای مجهول، منجر به ایجاد تغییرات در شبکه بندی می‌شود که در نهایت سبب افزایش تعداد معادلات و بالا رفتن زمان حل می‌گردد. علاوه بر این روش اجزای محدود در مسائلی که نیازمند مش بندی مجدد در فرآیند حل است می‌تواند هزینه طرح را به مراتب افزایش دهد. تحقیقات نشان می‌دهد که تولید شبکه در صنایعی چون اتومبیل سازی، هوافضا و کشتی سازی بیش از ۸۰ درصد زمان تحلیل را به خود اختصاص می‌دهد [3].

در بسیاری از مسائل مهندسی در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ[4] در محدوده رفتار خطی مواد جهت طراحی ایمن، بهینه و استفاده حداکثری از قابلیت مصالح، حائز اهمیت می‌باشد. با توجه به رفتار غیرخطی در ناحیه الاستیک، رابطه خطی تنش- کرنش جهت مدل‌سازی رفتار صحیح مصالح نیازمند بازنگری است. در این دسته از مسائل مقادیر تنش نسبت به تابع انرژی کرنشی ذخیره شده[5] تعریف می‌شود که نیازمند خطی‌سازی روابط جهت استفاده از الگوریتم‌های حل عددی مانند نیوتن- رافسون[6] می‌باشد. اولین بار حل مسائل غیرخطی الاستیک توسط ترنر و همکارانش [9] با استفاده از روش اجزای محدود در سال ۱۹۶۰ انجام شد.

[1] Przemieniencki
[2] Zienkiewinc
[3] Cheung
[4] Large Deformation
[5] Stored Strain Energy Function
[6] Newton-Raphson Iteration

از جمله تحقیقات اولیه در این زمینه می‌توان به حل مسئله کمانش توسط کاپور[1] [10] در سال ۱۹۶۶، کالاگر[2] (۱۹۶۷) [11-12] و هولاند[3] (۱۹۶۹) [13] بر پایه روش اجزای محدود اشاره کرد. فرآیند اعمال تدریجی بار در چندین مرحله توسط ترنر و همکاران (۱۹۶۰) [9] و ارگریس (۱۹۶۴-۱۹۶۵) [14-15] مطرح و در ادامه تحقیقات استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن- رافسون توسط اُدن[4](۱۹۶۷) [16]، مالت[5] و مارکل[6](۱۹۶۸) [17] پیشنهاد گردید. اُدن(۱۹۶۹) [18]، هایسر[7] و همکاران (۱۹۷۱) [19] و زینکوویچ (۱۹۷۱) [20] روش نیوتن- رافسون را بهبود بخشیده و بربیا و کونر[8](۱۹۶۹) [21] مفهوم اعمال تدریجی بار و ایجاد همگرایی در هر مرحله افزایش بار را معرفی نمودند. برای آشنایی با مفاهیم بنیادی روشهای غیرخطی مصالح و هندسی مراجع [22-25] پیشنهاد می‌گردند.

تقریبا یک دهه پس از شکل گیری روش اجزای محدود و بین سالهای ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ پیشرفتهای چشمگیری در علم مدل‌سازی هندسه و یا طراحی به کمک کامپیوتر[9] انجام گردید که در آن هندسه- های پیچیده با استفاده از توابع پایه ب- اسپلاین[10] و یا انواع ارتقاء یافته آن نظیر نربز[11] و ت- - اسپلاین[12] مدل‌سازی می‌گردد [26-27]. امروزه به گمان بسیاری از دانشمندان مدل‌سازی هندسه دارای صنعت بسیار بزرگتری نسبت به تحلیل می‌باشد. با توجه به اینکه تحلیل بر بنای هندسه استوار است استفاده از این پیشرفتها می‌تواند کمک شایانی به تحلیل در رفع نقاط ضعف آن نماید. استفاده از این توابع پایه در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول مسائل مهندسی نخستین بار توسط هیوز و

[1] Kapur
[2] Gallager
[3] Holland
[4] Oden
[5] Mallet
[6] Marcal
[7] Haisler
[8] Brebbia & Connor
[9] Computer Aided Design(CAD)
[10] B-Spline
[11] NURBS(Non Uniform Rational B- Spilines)
[12] T-Spline

همکارانش[1] با نام روش تحلیلی ایزوژئومتریک[2] در سال ۲۰۰۵ پیشنهاد گردید [28]. نام این روش برگرفته از مفهوم ایزوپارامتریک[3] در روش اجزای محدود می‌باشد. با توجه به دقت بالا در مدل‌سازی هندسه و همچنین استفاده از شرایط یکسان در مدل‌سازی هندسه و تقریب تابع مجهول، نام این روش "تحلیل ایزوژئومتریک" انتخاب شده است [3]. برای آشنایی بیشتر با مفاهیم بنیادی روش تحلیلی ایزوژئومتریک مراجع [29-31] پیشنهاد می‌شوند. نخستین بار توجه به مفهوم ایزوژئومتریک در تغییر شکل‌های بزرگ در سال ۲۰۰۸ توسط هیوز و همکاران [32] مطرح گردید.

به طور خلاصه مزایای روش تحلیل ایزوژئومتریک را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

- کاهش قابل ملاحظه اندازه دستگاه معادلات حل در مقایسه با سایر روش‌های عددی با دقت یکسان.
- دقت و انعطاف پذیری بالا در تعریف هندسه و مرزهای آن.
- انعطاف پذیری بالا در فرآیند حل و عدم نیاز به مش بندی مجدد با توجه به تغییر دامنه تعریف شد مانند: مسائل بهینه سازی[4]، مسائل با دیدگاه لاگرانژی و تغییرشکل‌های بزرگ.
- دقت بالا در تعریف شرایط مرزی[5] در مقایسه با سایر روش‌های عددی.
- قابلیت این روش در حل مسائلی که ضرایب مشتقات معادله دیفرانسیل به صورت تابع تعریف می‌شوند. مانند مسائلی که مشخصات مواد به صورت تابعی در دامنه تغییر می‌کنند[6].

از جمله مشکلات این روش می‌توان به عدم قرار گیری نقاط کنترلی بر روی هندسه و جواب مسئله اشاره کرد. به بیان دیگر با معلوم بودن نقطه ای در فضای فیزیکی[7] برای یافتن همان نقطه در فضای پارامتریک[8] نیازمند حل دستگاه معادله ای به صورت معکوس می‌باشد.

---
[1] Hughes et al.
[2] Isogeometric Analysis
[3] Isoparametric
[4] Optimazation Problems
[5] Boundary Condition
[6] Functionally Graded Materials (FGM)
[7] Physical Space
[8] Parametric Space

۱-۲- فرضیات و اهداف پایان نامه:

در این تحقیق به فرمول‌بندی مسائل غیرخطی الاستیک، که به مسائل هایپرالاستیسیته[۱] نیز معروفند، بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتریک پرداخته شده است. به این منظور الگوریتمی برای تحلیل این دسته از مسائل پیشنهاد شده است. با در نظر گرفتن روابط حاکم بر مسئله و خطی‌سازی آن، معادلات تعادل در حالت گسسته نوشته می‌شود و ماتریس ضرایب به کمک مفهوم ایزوژئومتریک استخراج می‌گردد. در ادامه نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

به عنوان فرضیات در این تحقیق رفتار مصالح تنها غیرخطی هندسی می‌باشد. برای نوشتن کدهای کامپیوتری که در بخش‌های بعد توضیح داده می‌شوند از نرم افزار ویژوال فرترن استفاده شده است. نام برنامه تهیه شده در این تحقیق IGLAGSHYP نام دارد.

۱-۳- مطالب فصل‌های بعدی:

این تحقیق مشتمل بر پنج فصل می‌باشد. فصل حاضر به مقدمه‌ای بر روش‌های بکار گرفته شده و اهداف و فرضیات تحقیق اختصاص یافته است. در فصل دوم این تحقیق به مرور خلاصه‌ای از سینماتیک ذرات اشاره شده و روابط مربوط به تعادل بررسی و ارائه می‌شود در ادامه به فرمول‌بندی مصالح هایپرالاستیسیته پرداخته شده و ضمن بیان معادله تعادل حاکم بر مسئله، خطی‌سازی آن جهت استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن- رافسون[۲] انجام گرفته است. در فصل سوم ضمن اشاره به مفهوم روش ایزوژئومتریک، توابع مجهول و هندسه در مسائل خطی‌سازی شده هایپرالاستیسیته توسط توابع پایه و متغیرهای کنترلی[۳] گسسته‌سازی[۴] می‌شوند. در انتهای این فصل الگوریتمی برای مسائل غیرخطی الاستیک بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتریک ارائه شده است. فصل

---
[1] Hyperelasticity
[2] Newton-Raphson Iteration
[3] Control Variable
[4] Discritization

چهارم به بررسی نتایج حل و مقایسه روش مذکور با روش اجزای محدود و همچنین حل مسائل متنوع اختصاص یافته است. در فصل پایانی نتیجه تحقیق و مقایسه انجام شده گزارش می‌شود. در قسمت ضمائم برنامهIGLAGSHYP[1] جهت استفاده با بیان مثالی معرفی می‌گردد.

[1] Isogeometric Large Strain Hyperelasticity Plasticity Program

فصل دوم

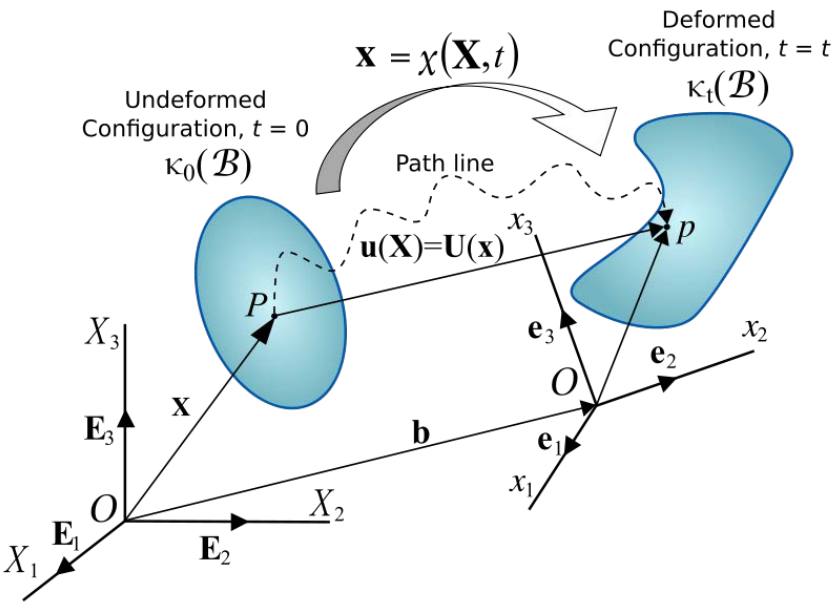
تحلیل غیرخطی هندسی

۲-۱- سینماتیک[1]:

در این بخش ابتدا مفهوم ریاضی حرکت یک جسم تغییر شکل پذیر بیان می‌شود. در ادامه ضمن معرفی گرادیان تغییر شکل و تجزیه قطبی آن به فرمول بندی پارامترهای مهم سینماتیک از جمله کرنش، تغیرات حجم، سطح و مشتقات زمانی و مکانی آنها پرداخته شده و در هر قسمت ارتباط پارامتر بیانی با گرادیان تغییر شکل به عنوان عاملی مهم در سینماتیک بررسی می‌شود.

۲-۱-۱- حرکت[2]:

شکل۲-۱ بیان حرکت یک جسم تغییر شکل پذیر را نشان می‌دهد. وضعیت جسم در حالت اولیه، در دستگاه مختصات لاگرانژی یا موادی[3]، با محورهای مختصات $\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3$ و بردارهای یکه $\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{E}_3$ در زمان $t=0$ و در وضعیت تغییر شکل یافته آن، در دستگاه مختصات اویلری یا فضایی[4]، با محورهای مختصات $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3$ و بردارهای یکه $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ در زمان t بیان می‌شود. با فرض انطباق دستگاه مختصات اولی و ثانویه بر هم فاصله b در شکل برابر صفر است [33-37].



شکل۲-۱: بیان کلی حرکت یک جسم تغییر شکل پذیر [44]

---
1 Kinematics
2 Motion
3 Lagrangian or Material Description
4 Eulerain or Spatial Description

با توجه به شکل ۲-۱ بیان ریاضی حرکت، ازتعریف نگاشتی[1] بین وضعیت اولیه و ثانویه جسم به قرار زیر حاصل می‌شود.

$$\boldsymbol{x} = \phi\left(\boldsymbol{X}, t\right) \; ; \; \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{X}, t\right) \qquad (1\text{-}2)$$

با فرض مقداری ثابت برای t، معادله $(2-1)$ تبدیلی بین وضعیت اولیه و تغییر شکل یافته جسم است و برای یک مقدار ثابت X، معادله، بیان حرکت ذره‌ای در زمان می‌باشد[33-37].

۲-۱-۲- گرادیان تغییر شکل[2]:

شکل ۲-۲ نقطه مادی Q را در همسایگی P در وضعیت اولیه نشان می‌دهد. با توجه به تغییر شکل جسم، نقاط q و p جدید حاصل می‌شود. حال می‌توان بردار جابجایی بین نقاط اولیه و ثانویه را چنین نوشت[33-37]:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X} \qquad (2\text{-}2a)$$

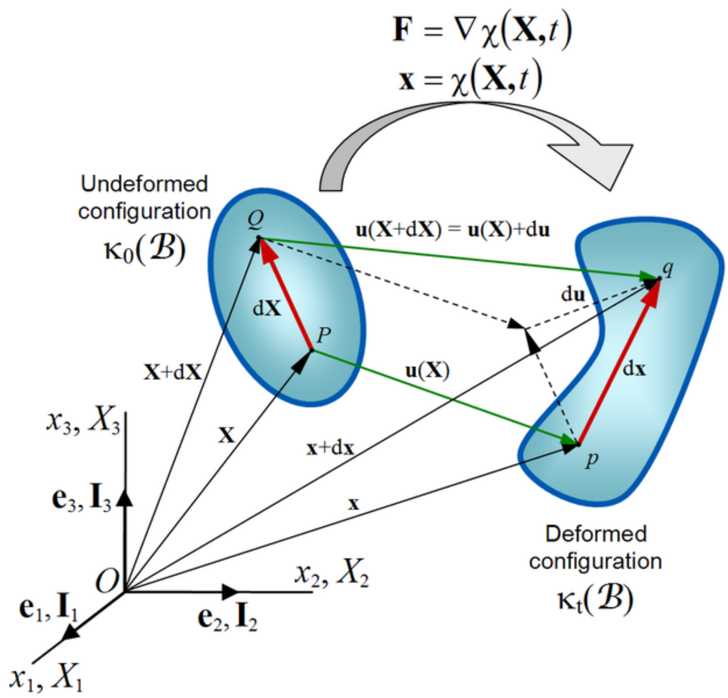
$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{X}} = \nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} - \boldsymbol{I} \qquad (2\text{-}2b)$$

$$d\boldsymbol{x} = d\boldsymbol{X} + d\boldsymbol{u} = d\boldsymbol{X} + \nabla \boldsymbol{u} . d\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{X} \qquad (2\text{-}2c)$$

با توجه به روابط $(2-2c),(2-2b)$ داریم:

$$d\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} + \nabla \boldsymbol{u}) d\boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} \mathrm{d}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{F} d\boldsymbol{X} \qquad (2\text{-}2d)$$

[1] Mapping
[2] Deformation Gradient



شکل ۲-۲: بیان کلی حرکت در همسایگی ذرات [44]

گرادیان تغییر شکل $\boldsymbol{F}$ یک کمیت مهم، در تغییر شکل‌های بزرگ می‌باشد که باعث وابستگی پارامترها، در دو وضعیت اولیه و تغییر شکل یافته است. درحقیقت هر کمیت، در دستگاه ثانویه و اولیه توسط رابطه‌ای شامل متغیر $\boldsymbol{F}$ به یکدیگر وابسته‌اند [33-37].

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}} = \nabla_0 \phi = \nabla_0 \boldsymbol{X} \tag{3-2a}$$

$$\boldsymbol{F} = \sum_{i,I=1}^{3} F_{iI} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_I \tag{3-2b}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \phi} = \frac{\partial \boldsymbol{X}}{\partial \boldsymbol{x}} = \nabla \phi^{-1} = \nabla \boldsymbol{x}^{-1} \tag{3-2c}$$

$$\boldsymbol{F}^{-1} = \sum_{I,i=1}^{3} \frac{\partial X_I}{\partial x_i} \boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{e}_i \tag{3-2d}$$

با تعریف تبدیل پیشرو[1] به صورت:

$$parameter\ in\ Eulerian\ Space = \phi * \left[parameter\ in\ Lagrangian\ space \right] \tag{4-2}$$

[1] Push Forward

و تبدیل پسرو[1] به صورت:

$$parameter\ in\ Lagrangian\ Space = \phi_*^{-1}\left[parameter\ in\ Eulerian\ space \right] \quad (5-2)$$

مکان هر ذره در وضعیت اولیه و ثانویه به قرار زیر است.

$$d\boldsymbol{x} = \phi_*[d\boldsymbol{X}] = \boldsymbol{F}d\boldsymbol{X} \quad (6-2)$$

$$d\boldsymbol{X} = \phi_*^{-1}[d\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{F}^{-1}d\boldsymbol{X} \quad (7-2)$$

در ادامه به نحوه ساخت و استخراج کمیت های مهم و وابستگی آنها به متغیر $\boldsymbol{F}$ خواهیم پرداخت.

۲-۱-۳- کرنش[2]:

با توجه به ضرب نقطه‌ای[3] بین دو بردار $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$، تانسور تغییر شکل گرین- کوشی راست[4] ،

در دستگاه مختصات لاگرانژی به فرم:

$$d\boldsymbol{x}_1 . d\boldsymbol{x}_2 = d\boldsymbol{X}_1 . \boldsymbol{C} d\boldsymbol{X}_2 \quad (8-2)$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \quad (9-2)$$

و تانسور تغییر شکل گرین- کوشی چپ[5]، در دستگاه مختصات اویلری به صورت زیر قابل تعریف

است.

$$d\boldsymbol{X}_1 . d\boldsymbol{X}_2 = d\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{b}^{-1} d\boldsymbol{x}_2 \quad (10-2)$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^T \quad (11-2)$$

با استفاده از روابط فوق، تانسور کرنش گرین یا کرنش لاگرانژی[6] به فرم:

$$\frac{1}{2}(d\boldsymbol{x}_1 . d\boldsymbol{x}_2 - d\boldsymbol{X}_1 d\boldsymbol{X}_2) = d\boldsymbol{X}_1 . \boldsymbol{E} d\boldsymbol{X}_2 \quad (12-2)$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}) \quad (13-2)$$

---
1 Pull Back
2 Strain
3 Scalar Product
4 Right Cauchy-Green Deformation Tensor
5 Left Cauchy-Green Deformation Tensor
6 Green Strain Tensor or Lagrangian Strain Tensor

و تانسور کرنش المانسی یا کرنش اویلری[۱] به فرم:

$$\frac{1}{2}(d\boldsymbol{x}_1.d\boldsymbol{x}_2 - d\boldsymbol{X}_1 d\boldsymbol{X}_2) = d\boldsymbol{x}_1.\boldsymbol{e}d\boldsymbol{x}_2 \qquad (14\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{e} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{b}^{-1}) \qquad (15\text{-}2)$$

حاصل می‌گردد [33-37].

در نتیجه:

$$\boldsymbol{e} = \phi_*[\boldsymbol{E}] = \boldsymbol{F}^{-T}\boldsymbol{E}\boldsymbol{F}^{-1} \qquad (16\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{E} = \phi_*^{-1}[\boldsymbol{e}] = \boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{e}\boldsymbol{F} \qquad (17\text{-}2)$$

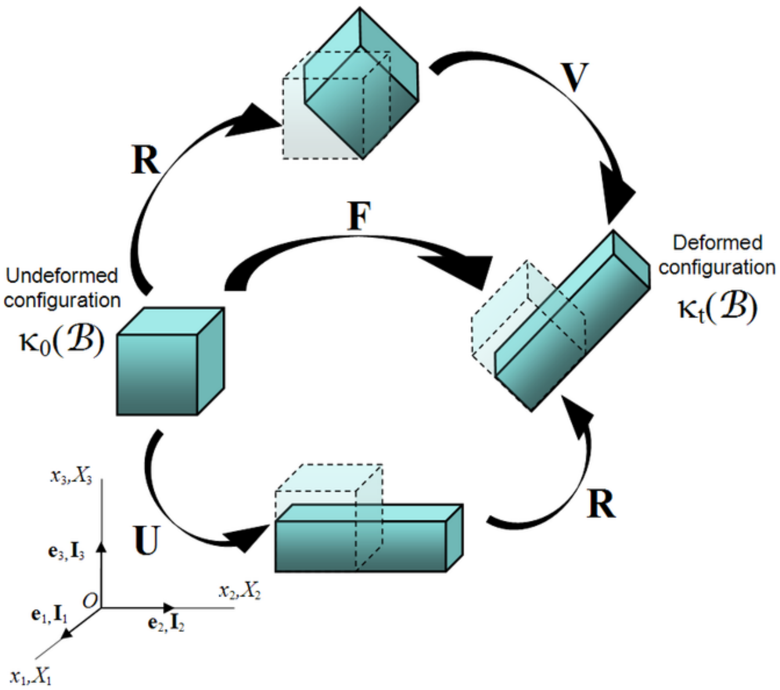
۲-۱-۴- تجزیه قطبی[۲] گرادیان تغییر شکل:

با توجه به شکل ۲-۳ تانسورمرتبه دوم $\boldsymbol{F}$ به یک تانسور متعامد[۳] $\boldsymbol{R}$(چرخشی) و یک تانسور متقارن مثبت و معین[۴] $\boldsymbol{U,V}$ (کشیدگی) قابل تجزیه می‌باشد.

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R} \qquad (18\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U}\boldsymbol{R}^{T} \qquad (19\text{-}2)$$

[1] Almansi Strain Tensor or Eulerian Strain Tensor
[2] Polar Decomposition
[3] Rotation Tensor
[4] Stretch Tensor



شکل۲-۳: تجزیه قطبی گرادیان تغییر شکل [44]

با جایگذاری ترم اول رابطه $(2-18)$ در $(2-9)$:

$$C = F^T F = U^T R^T R U = U^2 \tag{20-2}$$

و با جایگذاری ترم دوم رابطه $(2-18)$ در $(2-11)$ خواهیم داشت:

$$b = F F^T = V R R^T V^T = V^2 \tag{21-2}$$

باید توجه داشت که پارامترهای تعریفی در دستگاه مختصات اولیه و ثانویه در راستاهای اصلی [1] نیز قابل بازنویسی است. در زیر به برخی از این روابط اشاره شده است.

$$U = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha N_\alpha \otimes N_\alpha \tag{22-2}$$

$$C = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 N_\alpha \otimes N_\alpha \tag{23-2}$$

$$V = \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{\lambda}_\alpha n_\alpha \otimes n_\alpha \tag{24-2}$$

[1] Principal Directions

$$b = \sum_{\alpha=1}^{3} \bar{\lambda}_{\alpha}^{2} n_{\alpha} \otimes n_{\alpha} \tag{25-2}$$

$$F = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_{\alpha} n_{\alpha} \otimes N_{\alpha} \tag{26-2}$$

$$E = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(\lambda_{\alpha}^{2} - 1) N_{\alpha} \otimes N_{\alpha} \tag{27-2}$$

$$e = \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{1}{2}(1 - \bar{\lambda}_{\alpha}^{2}) n_{\alpha} \otimes n_{\alpha} \tag{28-2}$$

با توجه به این مطلب که، N_i, n_i بردارهای ویژه[1] و $\lambda_i, \bar{\lambda}_i$ مقادیر ویژه[2]، در راستاهای اصلی در دستگاه مختصات اولیه و ثانویه می‌باشند. آنگاه رابطه بین این مقادیر در دو دستگاه مختصات به قرار زیر است[33-37].

$$n_{\alpha} = RN_{\alpha}, \lambda_{\alpha} = \bar{\lambda}_{\alpha} \tag{29-2}$$

۲-۱-۵- تغییرات حجم[3] و سطح:

با فرض یک المان مکعبی بینهایت کوچک در دستگاه مختصات اولیه حجم این المان به قرار زیر است.

$$dV = dX_1 dX_2 dX_3 \tag{30-2}$$

که در نتیجه حجم ثانویه المان تغییر شکل یافته، متوازی السطوح، در دستگاه مختصات ثانویه از ضرب سه گانه[4] زیر حاصل می‌شود.

$$dv = dx_1.(dx_2 \times dx_3) \tag{31-2}$$

با توجه به رابطه $dx_i = FdX_i = \frac{\partial \phi}{\partial X_i}$ وجایگذاری آن در $(2-31)$ دترمینان تغییر شکل[5] یا ژاکوبین[6] آن به قرار زیر است [33-37].

[1] Eigen Vector
[2] Eigen Value
[3] Volume Change
[4] Triple Product
[5] Determinant of Deformation
[6] Jacobian

$$dv = dx_1 \cdot (dx_2 \times dx_3) = \frac{\partial \phi}{\partial X_1} \cdot (\frac{\partial \phi}{\partial X_2} \times \frac{\partial \phi}{\partial X_3}) dX_1 dX_2 dX_3 \quad (32\text{-}2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial X_1} \cdot (\frac{\partial \phi}{\partial X_2} \times \frac{\partial \phi}{\partial X_3}) = \det F = J \quad (33\text{-}2)$$

$$dv = J \cdot dV \quad (34\text{-}2)$$

از طرفی حجم اولیه و ثانویه المان به صورت زیر نیز قابل تعریف است:

$$dV = dL \cdot dA \quad (35\text{-}2)$$

$$dv = dl \cdot da \quad (36\text{-}2)$$

که در نتیجه تغییرات سطح به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد [33-37].

$$dv = JdV = JdL \cdot dA = (FdL)da \quad (37\text{-}2)$$

$$da = JF^{-T} dA \quad (38\text{-}2)$$

۲-۱-۶- مولفه اعوجاجی[۱] گرادیان تغییر شکل:

در روابط تراکم ناپذیر[۲] و نزدیک به تراکم ناپذیری[۳]، لازم است تغییر شکل به مولفه حجمی[۴] و اعوجاجی بدون تغییر حجم تجزیه گردد. با در نظر گرفتن شرط بیان شده برای مولفه اعوجاجی تغییر شکل خواهیم داشت:

$$\det \hat{F} = 1 \quad (39\text{-}2)$$

رابطه فوق با انتخاب $\hat{F}$ به صورت زیر ارضا می‌گردد.

$$\hat{F} = J^{-\frac{1}{3}} F = (\det F)^{-\frac{1}{3}} F \quad (40\text{-}2)$$

در نتیجه:

$$\hat{C} = \hat{F}^T \hat{F} \quad (41\text{-}2)$$

---
[1] Distortional Component
[2] Incompresible
[3] Nearly Incompressible
[4] Volumetric Component

$$\hat{C} = (\det C)^{-1/3} C \quad (42\text{-}2)$$

$$\det C = J^2 \quad (43\text{-}2)$$

اکنون می‌توان Fو C را به صورت مولفه‌های حجمی و اعوجاجی باز نویسی کرد [33-37].

۲-۱-۷- مشتقات زمانی و مکانی متغیرها:

فرض g کمیتی تانسوری باشد. با توجه به فرم بیان این کمیت در دستگاه مختصات لاگرانژی و اویلری، مشتقات زمانی و مکانی آن به صورت زیر حاصل می‌شود [33-37].

دستگاه مختصات لاگرانژی: $g(X,t)$

$$\dot{g}(X,t) = \frac{\partial g(X,t)}{\partial t} \quad (44\text{-}2)$$

دستگاه مختصات اویلری: $g(x,t)$

$$\dot{g}(x,\mathrm{t}) = \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} \quad (45\text{-}2)$$

با توجه به این مطلب $x = x(X,t)$ داریم:

$$\dot{g}(x,\mathrm{t}) = \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial g(x,t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x(X,t)}{\partial t} = \frac{\partial g(x,t)}{\partial t} + (\nabla g)v \quad (46\text{-}2)$$

با توجه به روابط فوق، تعاریف مورد نیاز به قرار زیر است.

الف) سرعت[1]:

$$v(X,t) = \frac{\partial x(X,\mathrm{t})}{\partial t} \quad (47\text{-}2)$$

ب) گرادیان سرعت[2]:

$$l = \frac{\partial v(x,\mathrm{t})}{\partial x} = \nabla v \quad (48\text{-}2)$$

---

[1] Velocity
[2] Velocity Gradient

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \mathrm{t})}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, \mathrm{t})}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, \mathrm{t})}{\partial \boldsymbol{X}} = \boldsymbol{l}\boldsymbol{F} \tag{49-2}$$

$$\boldsymbol{l} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1} \tag{50-2}$$

ج) نرخ تغییرات شکل[1]:

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{C}} = \frac{1}{2}(\dot{\boldsymbol{F}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{F}}) \tag{51-2}$$

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{l} + \boldsymbol{l}^{T}) \tag{52-2}$$

با استفاده از تبدیل پیشرو و پسرو داریم:

$$\boldsymbol{d} = \phi_*[\dot{\boldsymbol{E}}] = \boldsymbol{F}^{-T}\dot{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}^{-1} \tag{53-2}$$

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \phi_*^{-1}[\boldsymbol{d}] = \boldsymbol{F}^{T}\boldsymbol{d}\boldsymbol{F} \tag{54-2}$$

بنابراین گرادیان سرعت به مولفه متقارن $\boldsymbol{d}$ و پادمتقارن[2] $\boldsymbol{\omega}$ قابل تجزیه می‌باشد. $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\omega}$

د) نرخ تغییر حجم[3]:

$$\frac{d(d\boldsymbol{v})}{dt} = \frac{d(Jd\boldsymbol{V})}{dt} = \dot{J}d\boldsymbol{V} = \frac{\dot{J}}{J}d\boldsymbol{v} \tag{55-2}$$

۲-۲- تنش[4] و بررسی اصل کار مجازی[5]:

در این بخش ابتدا به معرفی تانسور تنش کوشی پرداخته می‌شود. در ادامه ضمن فرمول بندی معادلات دیفرانسیل تعادل و معادله کار مجازی تانسور پیولا-کیرشهف اولیه و ثانویه معرفی شده و مولفه اعوجاجی و فشردگی تانسور تنش بررسی می‌گردد.

[1] Rate of Deformation
[2] Spin Tensor
[3] Rate of Change Volume
[4] Stress
[5] Principle of Virtual Work

۲-۲-۱- تانسور تنش کوشی[1]:

با توجه به شکل ۲-۴ تانسوری که بردار نرمال سطح nرا به بردار تنش $t(n)$ نسبت می‌دهد تانسور تنش کوشی نام دارد.

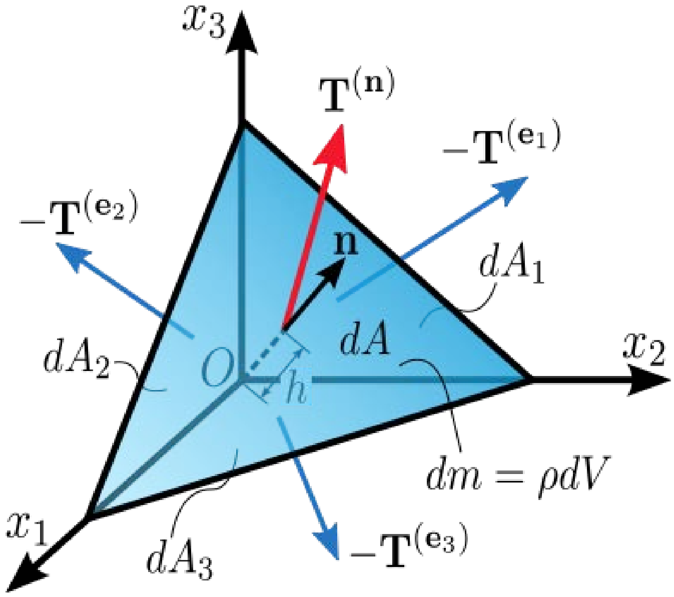
$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\sigma}.\boldsymbol{n} \qquad (56\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{ij} \boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \qquad (57\text{-}2a)$$

تنش کوشی در راستای بردارهای یکه

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha\alpha} \boldsymbol{m}_\alpha \otimes \boldsymbol{m}_\alpha \qquad (57\text{-}2b)$$

تنش کوشی در راستای بردارهای اصلی



شکل ۲-۴: بردار تنش کوشی بر روی صفحه با توجه به بردار نرمال n [44]

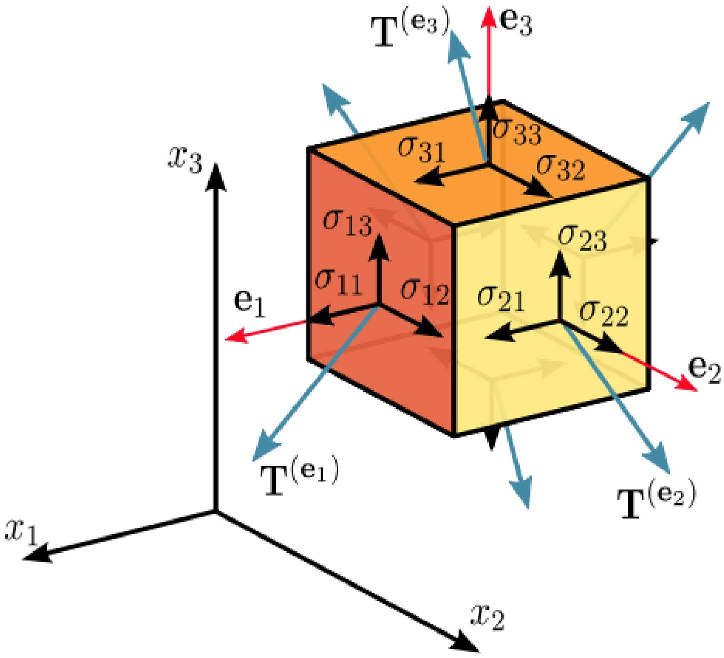
از شکل۲-۵ بردار تنش کوشی در هر راستا $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_i)$ به قرار زیر تعریف می‌گردد [33-37].

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{\sigma}_{11}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{21}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{31}\boldsymbol{e}_3 \qquad (58\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{\sigma}_{12}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{22}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{32}\boldsymbol{e}_3 \qquad (59\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{t}(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{\sigma}_{13}\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{\sigma}_{23}\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{\sigma}_{33}\boldsymbol{e}_3 \qquad (60\text{-}2)$$

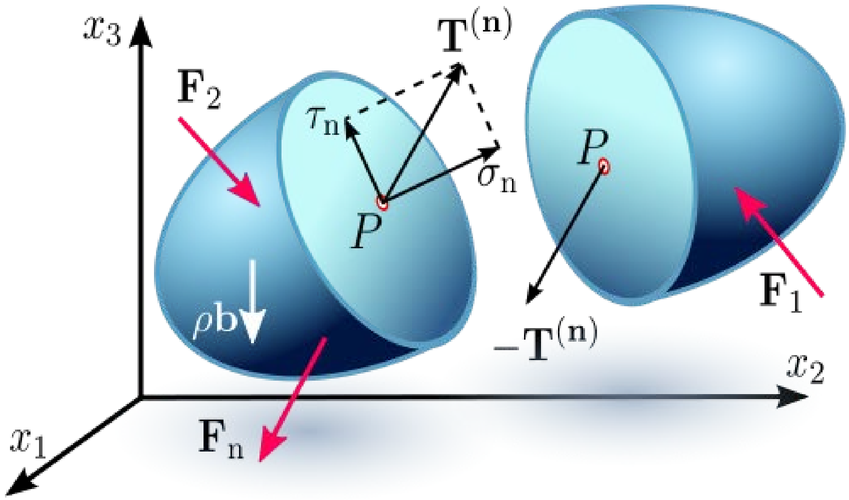
[1] Cauchy Stress Tensor



شکل۲-۵: مولفه‌های تانسور تنش کوشی در هر راستا [44]

۲-۲-۲- معادلات دیفرانسیل تعادل[1]:

با توجه به شکل ۲-۶ به بررسی دو دسته ازمعادلات دیفرانسیل تعادل خواهیم پرداخت.



شکل۲-۶: تعادل [44]

[1] Equilibrium

الف) تعادل انتقالی[1]:

معادله تعادل جسم تحت نیروهای وارده در شکل۲-۶ به قرار زیر است.

$$\int_{\partial v} \boldsymbol{t} da + \int_{v} \boldsymbol{f} dv = 0 \qquad (61\text{-}2)$$

با جایگذاری از معادله $(2-56)$ داریم:

$$\int_{\partial v} \boldsymbol{\sigma n} da + \int_{v} \boldsymbol{f} dv = \int_{v} (div\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f})dv = 0 \qquad (62\text{-}2)$$

در نتیجه معادله تعادل انتقالی یک جسم به صورت زیر خواهد بود:

$$div\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = 0 \qquad (63\text{-}2)$$

در مسائل غیرخطی، به دلیل عدم بالانس نیروهای داخلی و خارجی ، معادله به صورت باقیمانده[2] در هر گام اصلاح می‌گردد بدیهی است توازن گام با میل نمودن باقیمانده به صفر حاصل خواهد شد [33-37].

$$div\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{r} \qquad (64\text{-}2)$$

ب) تعادل چرخشی[3]:

معادله گشتاور جسم تحت نیروهای وارده در شکل ۲-۶ به قرار زیر است.

$$\int_{\partial v} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{t} da + \int_{v} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f} dv = 0 \qquad (65\text{-}2)$$

با جایگذاری از معادله $(2-56)$:

$$\int_{\partial v} \boldsymbol{x} \times (\boldsymbol{\sigma n}) da + \int_{v} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f} dv = 0 \qquad (66\text{-}2)$$

$$\int_{v} \boldsymbol{x} \times div\,\boldsymbol{\sigma} dv + \int_{v} \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma}^T dv + \int_{v} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{f} dv = 0 \qquad (67\text{-}2)$$

در نتیجه معادله تعادل چرخشی یک جسم به صورت زیر خواهد بود [33-37].

---
[1] Translational Equilibrium
[2] Residual
[3] Rotational Equilibrium

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\boldsymbol{\sigma}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{32}-\sigma_{23} \\ \sigma_{13}-\sigma_{31} \\ \sigma_{21}-\sigma_{12} \end{bmatrix} = 0 \tag{68-2}$$

۲-۲-۳- اصل کار مجازی:

با توجه به شکل ۲-۶ معادله کار مجازی، نسبت به سرعت مجازی[1]، به صورت زیر تعریف می‌گردد [33-37].

$$\delta W = \int_v (div\,\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{f}) \cdot \delta \boldsymbol{v} dv = 0 \tag{69-2}$$

$$div\,(\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{v}) = div\,\boldsymbol{\sigma}\cdot\delta\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\sigma}:\nabla\delta\boldsymbol{v} \tag{70-2}$$

$$\int_{\partial v} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{v} da - \int_v \boldsymbol{\sigma}:\nabla\delta\boldsymbol{v} dv + \int_v \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v} dv = 0 \tag{71-2}$$

با توجه به رابطه $(2-48)$:

$$\int_{\partial v} \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\delta\boldsymbol{v} da - \int_v \boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{l} dv + \int_v \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v} dv = 0 \tag{72-2}$$

با تجزیه $\boldsymbol{l}$ به مولفه $\boldsymbol{d}$ و $\boldsymbol{\omega}$ ، اصل کار مجازی حاصل خواهد شد.

$$\delta W = \int_v \boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{d} dv - \int_v \boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{v} dv - \int_{\partial v} \boldsymbol{t}\,\delta\boldsymbol{v} da = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext} \tag{73-2}$$

۲-۲-۴- تانسور تنش کیرشهف[2]:

معادله کار مجازی، نسبت به دستگاه مختصات اولیه، به قرار زیر است:

$$\delta W = \int_V J\boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{d} dV - \int_V \boldsymbol{f}_0\cdot\delta\boldsymbol{v} dV - \int_{\partial V} \boldsymbol{t}_0\delta\boldsymbol{v} dA = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext} \tag{74-2}$$

$$\boldsymbol{f}_0 = J\boldsymbol{f} \tag{75-2a}$$

$$\frac{da}{dA} = \frac{J}{\sqrt{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b}\boldsymbol{n}}} \tag{75-2b}$$

[1] Virtual Velocity
[2] Kirchhoff Stress Tensor

و تانسور تنش کیرشهف به صورت زیر حاصل می‌گردد [33-37].

$$J\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} \tag{75-2c}$$

۲-۲-۵- تانسور تنش پیولا-کیرشهف اولیه [1]:

معادله کار مجازی داخلی، نسبت به گرادیان سرعت مجازی به قرار زیر است:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{l} dv = \int_V J\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{l} dV \tag{76-2}$$

با جایگذاری رابطه $(2-50)$ در $(2-76)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= \int_V J\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{l} dV = \int_V J\boldsymbol{\sigma} : (\delta \dot{\boldsymbol{F}} \boldsymbol{F}^{-1}) dV = \int_V tr(\boldsymbol{J}\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\delta\dot{\boldsymbol{F}}) dV \\ &= \int_V J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} : (\delta\dot{\boldsymbol{F}}) dV = \int_V \boldsymbol{P} : (\delta\dot{\boldsymbol{F}}) dV\end{aligned} \tag{77-2}$$

در نتیجه تانسور تنش پیولا-کیرشهف اولیه به صورت زیر حاصل می‌گردد [33-37].

$$\boldsymbol{P} = J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} \tag{78-2}$$

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i,I=1}^{3} P_{iI}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{E}_I \tag{79-2}$$

۲-۲-۶- تانسور تنش پیولا-کیرشهف ثانویه [2]:

معادله کار مجازی داخلی، نسبت به نرخ تغییرات شکل مجازی به قرار زیر است:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{d} dv = \int_V J\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{d} dV \tag{80-2}$$

با جایگذاری رابطه $(2-53)$ در $(2-80)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= \int_V J\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{d} dV = \int_V J\boldsymbol{\sigma} : (\boldsymbol{F}^{-T}\delta\dot{\boldsymbol{E}}\boldsymbol{F}^{-1}) dV = \int_V tr(\boldsymbol{F}^{-1}J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T}\delta\dot{\boldsymbol{E}}) dV \\ &= \int_V \boldsymbol{F}^{-1}J\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-T} : (\delta\dot{\boldsymbol{E}}) dV = \int_V \boldsymbol{S} : \delta\dot{\boldsymbol{E}} dV\end{aligned} \tag{81-2}$$

---
[1] First Piola Kirchhoff Stress Tensor
[2] Second Piola Kirchhoff Stress Tensor

در نتیجه تانسور تنش پیولا-کیرشهف ثانویه به صورت زیر حاصل می‌گردد [33-37].

$$S = F^{-1} J \boldsymbol{\sigma} F^{-T} = F^{-1} \boldsymbol{\tau} F^{-T} \tag{82-2}$$

با توجه به روابط فوق و استفاده از تبدیل پیشرو و پسرو خواهیم داشت.

$$\boldsymbol{\tau} = \phi_*[S] = FSF^{T} \tag{83-2}$$

$$S = \phi_*^{-1}[\boldsymbol{\tau}] = F^{-1}\boldsymbol{\tau} F^{-T} \tag{84-2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\phi_*[S] = J^{-1} FSF^{T} \tag{85-2}$$

$$S = J\phi_*^{-1}[\boldsymbol{\sigma}] = JF^{-1}\boldsymbol{\sigma} F^{-T} \tag{86-2}$$

۲-۲-۷- مولفه انحرافی[1] و فشردگی[2] تانسور تنش:

در برخی از مسائل مهندسی، مانند پلاستیسیته[3]، مکانیک خاک[4] و بیو مکانیک[5] مناسب است که تانسور تنش به مولفه فشار هیدرواستاتیکی p و مولفه تنش انحرافی $(\boldsymbol{\sigma}' - \boldsymbol{P}' - \mathbf{S}')$ تجزیه گردد [33-37].

الف) تجزیه مولفه‌های تانسور تنش کوشی:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\boldsymbol{I} \tag{87-2a}$$

$$p = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{3}\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{I} \tag{87-2b}$$

$$tr\boldsymbol{\sigma}' = 0 \tag{87-2c}$$

ب) تجزیه مولفه‌های تانسور تنش پیولا-کیرشهف اولیه:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}' + pJ\boldsymbol{F}^{-T} \tag{88-2a}$$

$$\boldsymbol{P}' = J\boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{F}^{-T} \tag{88-2b}$$

---
[1] Deviatiric Component
[2] Pressure Component
[3] Plasticity
[4] Soil Mechanics
[5] Bio Mechanics

$$p = \frac{1}{3} J^{-1} \boldsymbol{P} : \boldsymbol{F} \tag{88-2c}$$

$$\boldsymbol{P}' : \boldsymbol{F} = 0 \tag{88-2d}$$

ج) تجزیه مولفه‌های تانسور تنش پیولا-کیرشهف ثانویه:

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}' + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \tag{89-2a}$$

$$\boldsymbol{S}' = J\boldsymbol{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{F}^{-T} \tag{89-2b}$$

$$p = \frac{1}{3} J^{-1} \boldsymbol{S} : \boldsymbol{C} \tag{89-2c}$$

$$\boldsymbol{S}' : \boldsymbol{C} = 0 \tag{89-2d}$$

۲-۳- هایپرالاستیسیته:

در این بخش ابتدا مفهوم هایپرالاستیسیته تعریف می‌گردد. با تعریف تابع انرژی کرنشی ذخیره شده و خطی‌سازی آن به فرمول بندی تانسور الاستیسیته پرداخته خواهد شد. در ادامه ضمن معرفی مصالح ایزوتروپیک، مواد به سه دسته تراکم پذیر [۱]، تراکم ناپذیر و نزدیک به تراکم ناپذیری تقسیم خواهد شد و به فرمول بندی روابط حاکم بر هر دسته اشاره خواهد شد.

در مصالح هایپرالاستیسیته کار انجام شده مستقل از مسیر [۲] است و رفتار این مصالح تابع گرادیان تغییرشکل برای هر ذره مانند X می‌باشد. به عبارت دیگر در مواردی که کار انجام شده، توسط تنش ایجادی، طی فرآیند تغییر شکل، تنها به حالت اولیه t_0 و پایانی t جسم بستگی داشته باشد، رفتار چنین موادی را مستقل از مسیر نامیده و آن را هایپرالاستیسیته می‌نامیم. در این مصالح تابع انرژی کرنشی ذخیره شده [۳] بر واحد حجم تغییرشکل نیافته Ψ تنها با توجه به نقطه آغازین و پایانی به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد [22-25].

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}\right), \boldsymbol{X}\right) \tag{90-2}$$

---

[1] Compressible
[2] Path Independent
[3] Stored Strain Energy Function or Elastic Potential

$$\Psi\left(F\left(X\right),X\right)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}\right),\boldsymbol{X}\right):\dot{\boldsymbol{F}}\,dt \quad ; \quad \dot{\Psi}=\boldsymbol{P}:\dot{\boldsymbol{F}} \qquad \text{(91-2a,b)}$$

در نتیجه با بهره‌گیری از رابطه بالا مواد هایپرالاستیسیته به صورت زیر قابل تعریف می‌باشند.

$$\mathrm{P}_{iJ}=\frac{\partial\Psi}{\partial F_{iJ}}$$
$$\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}\right),\boldsymbol{X}\right)=\frac{\partial\Psi\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}\right),\boldsymbol{X}\right)}{\partial\boldsymbol{F}} \qquad \text{(92-2a,b)}$$

وابستگی تابع انرژی کرنشی ذخیره شده تنها به مولفه کشیدگی $\boldsymbol{U}$، تابع گرادیان تغییر شکل $\boldsymbol{F}$ بوده و مستقل از مولفه چرخش $\boldsymbol{R}$ می‌باشد. با شناخت روابط $(2-93)$ الی $(2-95)$ تابع انرژی کرنشی Ψ به صورت (2-96) نیز قابل تعریف است.

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{R}\boldsymbol{U} \qquad \text{(93-2)}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{U}^2=\boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \qquad \text{(94-2)}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{C}}=\dot{\boldsymbol{E}} \qquad \text{(95-2)}$$

$$\Psi\left(\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{X}\right),\boldsymbol{X}\right)=\Psi\left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{X}\right),\boldsymbol{X}\right) \qquad \text{(96-2)}$$

اکنون می‌توان با استفاده از روابط عنوان شده تعریف دیگری از مواد هایپرالاستیسیته به صورت زیر ارائه داد [22-25].

$$\dot{\Psi}=\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{C}}:\dot{\boldsymbol{C}}=\frac{1}{2}\boldsymbol{S}:\dot{\boldsymbol{C}} \quad ; \quad \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{X}\right),\boldsymbol{X}\right)=2\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{C}}=\frac{\partial\Psi}{\partial\boldsymbol{E}} \qquad \text{(97-2a,b)}$$

۲-۳-۱- تانسور الاستیسیته[1]:

۲-۳-۱-۱- تانسور الاستیسیته لاگرانژی یا مادی[2]:

رابطه بین $\boldsymbol{S},\boldsymbol{C},\boldsymbol{E}$ در معادله $(2-97)$ غیرخطی است. به دلیل استفاده از روش حل بر مبنای

---

[1] Elasticity Tensor
[2] Material or Lagrangian Elasticity Tensor

تکرار نیوتن- رافسون نیاز به خطی‌سازی رابطه جهت استفاده از الگوریتم حل عددی می‌باشد. با خطی‌سازی رابطه عنوان شده خواهیم داشت [22-25]:

$$DS_{IJ}[\boldsymbol{u}] = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} S_{IJ}\left(E_{KL}[\phi+\varepsilon\boldsymbol{u}]\right) = \sum_{K,L=1}^{3}\frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}}\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\left(E_{KL}[\phi+\varepsilon\boldsymbol{u}]\right) = \sum_{K,L=1}^{3}\frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} DE_{KL}[\boldsymbol{u}] \tag{98-2}$$

که رابطه بین مشتق سوئی[1] $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{E}$ در جهت بردار افزایشی $\boldsymbol{u}$ به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$D\boldsymbol{S}[\boldsymbol{u}] = \tilde{\boldsymbol{C}} : D\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}] \tag{99-2}$$

در نتیجه تانسور مرتبه چهارم $\tilde{\boldsymbol{C}}$ به عنوان تانسور الاستیسیته لاگرانژی یا مادی به صورت زیر تعریف می‌گردد [22-25].

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \sum_{J,J,K,L=1}^{3} \tilde{C}_{IJKL}\boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{E}_K \otimes \boldsymbol{E}_L \tag{100-2}$$

$$\tilde{C}_{IJKL} = \frac{\partial S_{IJ}}{\partial E_{KL}} = \frac{4\partial^2\Psi}{\partial C_{IJ}\partial C_{KL}} = \tilde{C}_{KLIJ} \tag{101-2a}$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{E}} = 2\frac{\partial \boldsymbol{S}}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{4\partial^2\Psi}{\partial \boldsymbol{C}\,\partial \boldsymbol{C}} \tag{101-2b}$$

۲-۳-۱-۲- تانسور الاستیسیته اویلری یا فضایی[2]:

با استفاده از تبدیل پیشرو می‌توان تانسور الاستیسیته اویلری را از تانسور الاستیسیته لاگرانژی حاصل نمود [22-25].

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = J^{-1}\phi_*[\tilde{\boldsymbol{C}}] \tag{102-2}$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \sum_{\substack{i,j,k,l=1\\ I,J,K,L=1}}^{3} J^{-1}F_{iI}F_{jJ}F_{kK}F_{lL}\tilde{C}_{IJKL}\boldsymbol{e}_i \otimes \boldsymbol{e}_j \otimes \boldsymbol{e}_k \otimes \boldsymbol{e}_l \tag{103-2}$$

[1] Directional Derivative
[2] Spatial or Eulerian Elasticity Tensor

۲-۳-۲- ایزوتروپیک هایپرالاستیسیته[1]:

موادی که ساختمان رفتاری[2] آنها در تمام جهات یکسان باشد، مواد ایزوتروپیک نام دارد. با توجه به حالت کلی روابط عنوان شده در این بخش، می‌توان روابط هایپرالاستیسیته در بخش های قبل را برای مواد ایزوتروپیک بازنویسی نمود. با بهره‌گیری از تعریف بیان شده برای مواد ایزوتروپیک، می‌توان چنین نتیجه گرفت که رابطه بین $\boldsymbol{C}, \Psi$ مستقل از جهت بردار مواد[3] بوده و تابعی از نامتغیرهای تانسور تغییر شکل گرین- کوشی[4] $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{b}$ می‌باشد [22-25].

$$\Psi\left(\boldsymbol{C}\left(\boldsymbol{X}\right), \boldsymbol{X}\right) = \Psi\left(I_C, II_C, III_C, \boldsymbol{X}\right) \tag{104-2}$$

نامتغیرهای تانسور تغییر شکل گرین- کوشی راست $\boldsymbol{C}$ به صورت زیر قابل تعریف است.

$$I_C = tr\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{I} \tag{105-2a}$$

$$II_C = tr\boldsymbol{C}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{C} \tag{105-2b}$$

$$III_C = det\boldsymbol{C} = J^2 \tag{105-2c}$$

با جایگذاری نامتغیرهای تعریفی عنوان شده در رابطه $(2-97)$ و استفاده از مشتق گیری زنجیره‌ای خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{S} = 2\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial \Psi}{\partial I_C}\frac{\partial I_C}{\partial \boldsymbol{C}} + 2\frac{\partial \Psi}{\partial II_C}\frac{\partial II_C}{\partial \boldsymbol{C}} + 2\frac{\partial \Psi}{\partial III_C}\frac{\partial III_C}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{106-2}$$

$$\frac{\partial I_C}{\partial \boldsymbol{C}} = \boldsymbol{I} \tag{107-2a}$$

$$\frac{\partial II_C}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\boldsymbol{C} \tag{107-2b}$$

$$\frac{\partial III_C}{\partial \boldsymbol{C}} = J^2\boldsymbol{C}^{-1} \tag{107-2c}$$

جهت ساده نویسی رابطه بدست آمده به تعریف پارامترهای زیر خواهیم پرداخت.

[1] Isotropic Hyperelasticity
[2] Constitutive Behavior
[3] Material Axes
[4] Invariant Tensor

$$\frac{\partial \Psi}{\partial I_C} = \Psi_I \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial II_C} = \Psi_{II} \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial III_C} = \Psi_{III} \qquad (108\text{-}2a,b,c)$$

در نتیجه تانسور تنش پیولا-کیرشهف ثانویه به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$\boldsymbol{S} = 2\Psi_I \boldsymbol{I} + 4\Psi_{II}\boldsymbol{C} + 2J^2\Psi_{III}\boldsymbol{C}^{-1} \qquad (109\text{-}2)$$

با شناخت رابطه بین تنش کوشی و تنش پیولا-کیرشهف ثانویه به صورت زیر:

$$\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\boldsymbol{FSF}^T \qquad (110\text{-}2)$$

و با جایگذاری رابطه $(2-110)$ در $(2-109)$ تانسور تنش کوشی برای مواد ایزوتروپیک چنین خواهد بود [22-25].

$$\boldsymbol{\sigma} = 2J^{-1}\Psi_I \boldsymbol{b} + 4J^{-1}\Psi_{II}\boldsymbol{b}^2 + 2J\Psi_{III}\boldsymbol{I} \qquad (111\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} \qquad (112\text{-}2)$$

$$I_b = I_C \quad , II_b = II_C \quad , \quad III_b = III_C \qquad (113\text{-}2a,b,c)$$

باید توجه داشت که در رابطه بالا $\Psi_I, \Psi_{II}, \Psi_{III}$ مشتقات تابع Ψ نسبت به نامتغیرهای تانسور تغییر شکل گرین- کوشی چپ $\boldsymbol{b}$ می‌باشد.

۲-۳-۳- تعریف انواع مواد:

مواد جامد را می‌توان به سه گروه تراکم پذیر، تراکم ناپذیر و در محدوده تراکم ناپذیری تقسیم بندی نمود. با توجه به اینکه روابط عنوان شده در قسمت قبل، برای حالت کلی مواد هایپرالاستیسیته ایزوتروپیک می‌باشد اکنون به فرمول بندی توابع خاصی از مواد در سه گروه اشاره شده پرداخته خواهد شد.

۲-۳-۳-۱: مواد نیو- هوک تراکم پذیر[1]:

تابع انرژی کرنشی ذخیره شده این مواد به صورت زیر تعریف می‌گردد. که در آن λ, μ ثابتهای مواد است.

[1] Compressible Neo-Hookean Material

$$\Psi(\boldsymbol{C}) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 \tag{114-2}$$

حال با استفاده از روابط $(2-109)$ و $(2-111)$ تانسور تنش کوشی و تانسور تنش پیولا-کیرشهف ثانویه به صورت زیر حاصل می‌شود [22-25].

$$\boldsymbol{S} = \mu\left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{C}^{-1}\right) + \lambda(\ln J)\boldsymbol{C}^{-1} \tag{115-2}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{J}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{I}) + \frac{\lambda}{J}(\ln J)\boldsymbol{I} \tag{116-2}$$

و با مشتق گیری از رابطه $(2-114)$ نسبت به تانسور تغییر شکل گرین- کوشی راست C تانسور الاستیسیته لاگرانژی حاصل خواهد شد [22-25].

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \lambda \boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln J)\tilde{\boldsymbol{I}} \tag{117-2}$$

$$\boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} = \sum \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{IJ} \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{KL} \boldsymbol{E}_I \otimes \boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{E}_K \otimes \boldsymbol{E}_L \tag{118-2}$$

$$\tilde{\boldsymbol{I}} = \frac{1}{2}\left[\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{IK}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{JL} + \left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{IL}\left(\boldsymbol{C}^{-1}\right)_{JK}\right] \tag{119-2}$$

حال می‌توان تانسور الاستیسیته اویلری مواد نئو- هوکین تراکم پذیر را با استفاده از تبدیل پیشرو به فرم زیر بدست آورد [22-25].

$$\tilde{\boldsymbol{c}} = \frac{\lambda}{J}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} + \frac{2}{J}(\mu - \lambda \ln J)\tilde{\boldsymbol{i}} \tag{120-2}$$

$$\begin{aligned} &\tilde{\boldsymbol{i}} = \phi_*[\tilde{\boldsymbol{I}}]; \\ &\tilde{\boldsymbol{i}}_{i,j,k,l} = \sum_{I,J,K,L} F_{iI}F_{jJ}F_{kK}F_{lL}\tilde{I}_{IJKL} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) \end{aligned} \tag{121-2a,b}$$

۲-۳-۳-۲- مواد نیو- هوک تراکم ناپذیر[1]:

با توجه به این مطلب که برای مواد تراکم ناپذیر تنش و تانسور الاستیسیته به دو مولفه، انحرافی و فشردگی تجزیه می‌شود خواهیم داشت:

[1] Incompressible Neo-Hookean Material

$$S = S' + pJC^{-1} \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' + p\boldsymbol{I} \qquad (122\text{-}2a,b)$$

$$\tilde{C} = \hat{\tilde{C}} + \tilde{C}_p \quad ; \quad \tilde{c} = \hat{\tilde{c}} + \tilde{c}_p \qquad (123\text{-}2a,b)$$

بنابراین می‌توان تابع انرژی کرنشی ذخیره شده برای این دسته از مواد را با توجه به مولفه اعوجاجی تانسور تغییر شکل گرین- کوشی راست $\left(\hat{C} = III_C^{-1/3} C\right)$بازنویسی نمود [22-25]. به عبارت دیگر خواهیم داشت: $\{\hat{\Psi}(\boldsymbol{C}) = \Psi(\hat{\boldsymbol{C}})\}$

$$\boldsymbol{S} = 2\frac{\partial \hat{\Psi}(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \qquad (124\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{S}' = 2\frac{\partial \hat{\Psi}(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} \qquad (125\text{-}2)$$

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{C}}} = 2\frac{\partial \boldsymbol{S}'}{\partial \boldsymbol{C}} = 4\frac{\partial^2 \hat{\Psi}}{\partial \boldsymbol{C}\,\partial \boldsymbol{C}} \quad ; \quad \tilde{\boldsymbol{C}}_p = 2p\,\frac{\partial\left(J\boldsymbol{C}^{-1}\right)}{\partial \boldsymbol{C}} \qquad (126\text{-}2a,b)$$

تابع انرژی کرنشی مواد نیو- هوک تراکم ناپذیر به صورت زیر قابل تعریف است.

$$\Psi(\mathbf{C}) = \frac{\mu}{2}\left(I_C - 3\right) \qquad (127\text{-}2)$$

با استفاده از روابط عنوان شده در بالا خواهیم داشت.

$$\boldsymbol{S} = \mu III_C^{-\frac{1}{3}}\left(I - \frac{1}{3}I_C\boldsymbol{C}^{-1}\right) + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \qquad (128\text{-}2)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu J^{-\frac{5}{3}}\left(\boldsymbol{b} - \frac{1}{3}I_b I\right) + p\boldsymbol{I} \qquad (129\text{-}2)$$

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{C}}} = 2\mu III_C^{-1/3}\left[\frac{1}{3}I_C\tilde{\boldsymbol{I}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{C}^{-1} - \frac{1}{3}\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{I} + \frac{1}{9}I_C\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}^{-1}\right] \qquad (130\text{-}2)$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_p = pJ\left(\boldsymbol{C}^{-1}\otimes\boldsymbol{C}^{-1} - 2\tilde{\boldsymbol{I}}\right) \qquad (131\text{-}2)$$

و با استفاده از تبدیل پیشرو تانسور الاستیسیته اویلری از تانسور الاستیسیته لاگرانژی به صورت زیر حاصل می‌گردد [22-25].

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{c}}} = 2\mu J^{-5/3}\left[\frac{1}{3}I_b\tilde{\boldsymbol{i}} - \frac{1}{3}\boldsymbol{b}\otimes\boldsymbol{I} - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{b} + \frac{1}{9}I_b\boldsymbol{I}\otimes\boldsymbol{I}\right] \qquad (132\text{-}2)$$

$$\tilde{\boldsymbol{c}}_p = p\left(\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} - 2\tilde{\boldsymbol{i}}\right) \tag{133-2}$$

۲-۳-۳-۳- مواد هایپرالاستیسیته نزدیک به تراکم ناپذیری[1]:

برای مواد نزدیک به تراکم ناپذیری تابع انرژی کرنشی ذخیره شده به دو مولفه اعوجاجی و انرژی کرنشی حجمی[2] قابل تجزیه است [22-25].

$$\Psi(\boldsymbol{C}) = \hat{\Psi}(\boldsymbol{C}) + U(J) \tag{134-2}$$

با بهره‌گیری از تعریف بالا تانسور تنش و تانسور الاستیسیته این دسته از مواد به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$\boldsymbol{S} = 2\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial \hat{\Psi}}{\partial \boldsymbol{C}} + 2\frac{dU}{dJ}\frac{dJ}{d\boldsymbol{C}} = 2\frac{\partial \hat{\Psi}(\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} + pJ\boldsymbol{C}^{-1} \quad ; \quad p = \frac{dU}{dJ} \tag{135-2}$$

باید توجه داشت که تانسور الاستیسیته در این وضعیت به سه مولفه اعوجاجی، فشردگی و حجمی تجزیه می‌شود.

$$\tilde{\boldsymbol{C}} = \hat{\tilde{\boldsymbol{C}}} + \tilde{\boldsymbol{C}}_p + \tilde{\boldsymbol{C}}_k \quad ; \quad \tilde{\boldsymbol{c}} = \hat{\tilde{\boldsymbol{c}}} + \tilde{\boldsymbol{c}}_p + \tilde{\boldsymbol{c}}_k \tag{136-2a,b}$$

روابط مربوط به مولفه‌های اعوجاجی و فشردگی در بخش۲-۳-۳-۲ تعریف گردیده است و مولفه حجمی تانسور الاستیسیته به قرار زیر می‌باشد [22-25]:

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_k = 2J\boldsymbol{C}^{-1} \otimes \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{C}} = J^2 \frac{d^2U}{dJ^2}\boldsymbol{C}^{-1} \otimes \boldsymbol{C}^{-1} \quad ; \quad \tilde{\boldsymbol{c}}_k = J\frac{d^2U}{dJ^2}\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{I} \tag{137-2a,b}$$

باید توجه داشت که برای انرژی حجمی *U(J)* توابع زیادی موجود می‌باشد که در بخش آشنایی با نحوه تهیه فایل ورودی برنامه *IGLAGSHYP V1.0* به برخی از آنها اشاره شده است.

۲-۳-۳-۴- مواد هایپرالاستیسیته در راستای اصلی:

با توجه به پارامترهای λ_i کشیدگی در راستای اصلی، N_i راستاهای اصلی در دستگاه مختصات

[1] Nearly Incompressible Materials
[2] Volumetric Strain Energy

لاگرانژی و n_i راستاهای اصلی در دستگاه مختصات اویلری و شناخت روابط زیر:

$$\boldsymbol{I} = \sum_{\alpha=1}^{3} \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\alpha \tag{138-2}$$

$$\boldsymbol{C} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda^2 \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\alpha \quad ; \; \boldsymbol{C}^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda^{-2} \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\alpha \tag{139-2a,b}$$

می‌توان روابط حاصل شده در بخش ۲-۳-۲، ایزوتروپیک هایپرالاستیسیته، را در جهات اصلی به صورت زیر بازنویسی نمود [22-25].

$$I_C = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad ; \quad II_C = \lambda_1^4 + \lambda_2^4 + \lambda_3^4 \quad ; \quad III_C = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \tag{140-2}$$

$$\frac{\partial I_c}{\partial \lambda_\alpha^2} = 1 \, ; \frac{\partial II_c}{\partial \lambda_\alpha^2} = 2\lambda_\alpha^2 \; ; \frac{\partial III_c}{\partial \lambda_\alpha^2} = \frac{III_c}{\lambda_\alpha^2} \tag{141-2}$$

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\alpha=1}^{3} S_{\alpha\alpha} \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\alpha \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_{\alpha\alpha} \boldsymbol{n}_\alpha \otimes \boldsymbol{n}_\alpha \tag{142-2a,b}$$

$$S_{\alpha\alpha} = 2\Psi_I + 4\Psi_{II}\lambda_\alpha^2 + 2III_C \Psi_{III} \lambda_\alpha^{-2} \tag{143-2}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \frac{\lambda_\alpha}{J} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_\alpha} = \frac{1}{J} \frac{\partial \Psi}{\partial \ln \lambda_\alpha} \tag{144-2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{C}} = & \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} 4 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda_\alpha^2 \lambda_\beta^2} \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\beta \otimes \boldsymbol{N}_\beta + \\ & \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{3} 2 \frac{S_{\alpha\alpha} - S_{\beta\beta}}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\alpha \otimes \boldsymbol{N}_\beta \otimes \boldsymbol{N}_\beta \end{aligned} \tag{145-2}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{c}} = & \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \frac{1}{J} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \ln \lambda_\alpha \partial \ln \lambda_\beta} \boldsymbol{n}_\alpha \otimes \boldsymbol{n}_\alpha \otimes \boldsymbol{n}_\beta \otimes \boldsymbol{n}_\beta - \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} 2\sigma_{\alpha\alpha} \boldsymbol{n}_\alpha \otimes \boldsymbol{n}_\alpha \otimes \boldsymbol{n}_\beta \otimes \boldsymbol{n}_\beta \\ & + \sum_{\substack{\alpha,\beta=1 \\ \alpha \neq \beta}}^{3} 2 \frac{\sigma_{\alpha\alpha}\lambda_\beta^2 - \sigma_{\beta\beta}\lambda_\alpha^2}{\lambda_\alpha^2 - \lambda_\beta^2} \boldsymbol{n}_\alpha \otimes \boldsymbol{n}_\alpha \otimes \boldsymbol{n}_\beta \otimes \boldsymbol{n}_\beta \end{aligned} \tag{146-2}$$

۲-۳-۵- مسائل تنش و کرنش مسطح[1]:

در اکثر مقالات، تابع انرژی کرنشی Ψ به فرم لگاریتمی پارامتر کشیدگی و ضرایب λ, μ به صورت

[1] Plane Stress & Plane Strain

زیر تعریف می‌شود [25].

$$\Psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=\mu\left[(\ln\lambda_1)^2+(\ln\lambda_2)^2+(\ln\lambda_3)^2\right]+\frac{\lambda}{2}(\ln J)^2 \tag{147-2}$$

که با استفاده از رابطه $(2-144)$ خواهیم داشت:

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{1}{J}\frac{\partial\Psi}{\partial\ln\lambda_\alpha}=\frac{2\mu}{J}\ln\lambda_\alpha+\frac{\lambda}{J}\ln J \tag{148-2}$$

در مسائل کرنش صفحه‌ای مقدار پارامتر کشیدگی در راستای سوم برابر یک می‌باشد. $\lambda_3=1$ در نتیجه:

$$\Psi(\lambda_1,\lambda_2)=\mu\left[(\ln\lambda_1)^2+(\ln\lambda_2)^2\right]+\frac{\lambda}{2}(\ln j)^2 \quad ; \quad j=det_{2\times2}(\boldsymbol{F}) \tag{149-2}$$

و در مسائل تنش صفحه ای مقدار تنش در راستای سوم برابر صفر است.

$$\sigma_{33}=\frac{2\mu}{J}\ln\lambda_3+\frac{\lambda}{J}\ln J=0 \tag{150-2}$$

با محاسبه λ_3 و جایگذاری آن در رابطه $(2-147)$ خواهیم داشت:

$$\Psi(\lambda_1,\lambda_2)=\mu\left[(\ln\lambda_1)^2+(\ln\lambda_2)^2\right]+\frac{\bar{\lambda}}{2}(\ln j)^2 \tag{151-2}$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=\frac{2\mu}{j^\gamma}\ln\lambda_\alpha+\frac{\bar{\lambda}}{j^\gamma}\ln j \tag{152-2}$$

که پارامترهای $\bar{\lambda}, \gamma, j^\gamma$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\lambda}=\gamma\lambda \quad ; \quad \gamma=\frac{2\mu}{\lambda+2\mu} \quad ; \quad J=j^\gamma \tag{153-2a,b,c}$$

۲-۳-۴- خطی‌سازی معادلات تعادل[1]:

اصل کار مجازی به صورت زیر، نسبت به سرعت مجازی تعریف می‌گردد.

$$\begin{aligned}&\delta W(\phi,\delta\boldsymbol{v})=\delta W_{int}(\phi,\delta\boldsymbol{v})-\delta W_{ext}(\phi,\delta\boldsymbol{v})=\\&\int_v \boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{d}\,dv-\int_v \boldsymbol{f}.\delta\boldsymbol{v}\,dv-\int_{\partial v}\boldsymbol{t}.\partial\boldsymbol{v}da=0\end{aligned} \tag{154-2}$$

[1] Linearization Eqilibrium Equations

جهت استفاده از الگوریتمهای حل عددی بر مبنای سعی و خطا با خطی‌سازی معادله بالا خواهیم داشت [25]:

$$\delta W\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)+\mathrm{D}\delta W\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)[\boldsymbol{u}]=0 \qquad (155\text{-}2)$$

$$\begin{aligned}&\left[\delta W_{int}\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)-\delta W_{ext}\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)\right]+\\&\left[D\,\delta W_{int}\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)[\boldsymbol{u}]-D\,\delta W_{ext}\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)[\boldsymbol{u}]\right]=0\end{aligned} \qquad (156\text{-}2)$$

در نتیجه نیاز به خطی‌سازی هر یک از ترم های رابطه $(156-2)$ می‌باشد [25].

الف)خطی‌سازی کار داخلی مجازی[1]:

با توجه به ترم اول معادله $(156-2)$:

$$\delta W_{int}\left(\phi,\delta\mathbf{v}\right)=\int_v \boldsymbol{\sigma}:\delta\boldsymbol{d}\;dv=\int_V \boldsymbol{S}:\delta\dot{\boldsymbol{E}}\;dV \qquad (157\text{-}2)$$

حاصل خطی‌سازی کار داخلی مجازی در دستگاه مختصات لاگرانژی به صورت [25]:

$$D\,\delta W_{int}\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)[\boldsymbol{u}]=\int_V D\boldsymbol{E}[\delta\mathbf{v}]:\tilde{\boldsymbol{C}}:D\boldsymbol{E}[\boldsymbol{u}]dV+\int_V \boldsymbol{S}:\left[\left(\nabla_0\boldsymbol{u}\right)^T\left(\nabla_0\delta\mathbf{v}\right)\right]dV \qquad (158\text{-}2)$$

و در دستگاه مختصات اویلری به صورت زیر حاصل می‌گردد.

$$D\,\delta W_{int}\left(\phi_k,\delta\mathbf{v}\right)[\boldsymbol{u}]=\int_v \delta\boldsymbol{d}:\tilde{\boldsymbol{c}}:\boldsymbol{\varepsilon}\,dv+\int_v \boldsymbol{\sigma}:\left[\left(\nabla\boldsymbol{u}\right)^T\left(\nabla\delta\mathbf{v}\right)\right]dv \qquad (159\text{-}2)$$

در روابط فوق برخی از پارامترها به قرار زیر می‌باشد:

$$\delta\dot{\boldsymbol{F}}=\frac{\partial\delta\mathbf{v}}{\partial\boldsymbol{X}}=\nabla_0\delta\mathbf{v}\quad;\quad D\boldsymbol{F}[\boldsymbol{u}]=\nabla_0\boldsymbol{u} \qquad (160\text{-}2a,b)$$

$$2\boldsymbol{\varepsilon}=\left(\nabla\boldsymbol{u}\right)^T+\nabla\boldsymbol{u}\quad;\quad 2\delta\boldsymbol{d}=\left(\nabla\delta\mathbf{v}\right)^T+\left(\nabla\delta\mathbf{v}\right) \qquad (161\text{-}2a,b)$$

و با استفاده از روش اتساع میانه[2] رابطه $(159-2)$را می‌توان برای مواد تراکم ناپذیر به صورت زیر بازنویسی نمود [25].

$$\begin{aligned}&D\,\delta\overline{W}_{int}\left(\phi,\delta\mathbf{v}\right)_{[u]}=\int_v \delta\boldsymbol{d}:\left(\hat{\tilde{\boldsymbol{c}}}+\tilde{\boldsymbol{c}}_p\right):\boldsymbol{\varepsilon}\,dv+\\&\int_v \boldsymbol{\sigma}:\left[\left(\nabla\boldsymbol{u}\right)^T\left(\nabla\delta\mathbf{v}\right)\right]dv+\bar{k}v\left(\overline{div}\,\delta\mathbf{v}\right)\left(\overline{div}\,\boldsymbol{u}\right)\end{aligned} \qquad (162\text{-}2)$$

---
1 Linearization Internal Virtual Work
2 Mean Dilatation

$$\bar{k} = J\frac{d^2U}{dJ^2} = J\frac{dp}{dJ} \qquad (163\text{-}2)$$

ب)خطی‌سازی کار خارجی مجازی[1]:

ب-۱) نیروهای کالبدی[2]:

ساده‌ترین و شاید رایج ترین مثال برای نیروهای کالبدی، نیروی وزن است که در آن $f = \rho g$ و $\rho = \frac{\rho_0}{J}$ می‌باشد.

$$\delta W_{ext}^{f}\left(\phi, \delta\boldsymbol{v}\right) = \int_v \frac{\rho_0}{J} g.\delta\boldsymbol{v}\, dv = \int_V \rho_0 g.\delta\boldsymbol{v}\, dV \qquad (164\text{-}2)$$

با توجه به آنکه هیچ کدام از پارامترهای رابطه فوق، به هندسه شکل، در وضعیت تغییریافته آن وابسته نمی‌باشد در نتیجه حاصل خطی‌سازی کار مجازی برای نیروی کالبدی وزن صفر می‌باشد [25].

$$D\,\delta W_{ext}^{f}\left(\phi, \delta\boldsymbol{v}\right)[\boldsymbol{u}] = 0 \qquad (165\text{-}2)$$

ب-۲) نیروهای سطحی[3]:

با وجود طیف وسیعی از نیروهای سطحی، در این قسمت تنها به بررسی نیروی فشار نرمال خواهیم پرداخت [25].

$$\delta W_{ext}^{p}\left(\phi, \delta\boldsymbol{v}\right) = \int_a p\boldsymbol{n}.\delta\boldsymbol{v}\, da \qquad (166\text{-}2)$$

که با خطی‌سازی رابطه عنوان شده داریم:

$$\begin{aligned} D\,\delta W_{ext}^{p}\left(\phi, \delta\boldsymbol{v}\right)[\boldsymbol{u}] &= \frac{1}{2}\int_{A_\xi} p\,\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi}.\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \eta}\times \delta\boldsymbol{v}\right)+\left(\frac{\partial \delta\boldsymbol{v}}{\partial \eta}\times \boldsymbol{u}\right)\right] d\xi\, d\eta \\ &-\frac{1}{2}\int_{A_\xi} p\,\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}.\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \xi}\times \delta\boldsymbol{v}\right)+\left(\frac{\partial \delta\boldsymbol{v}}{\partial \xi}\times \boldsymbol{u}\right)\right] d\xi\, d\eta \end{aligned} \qquad (167\text{-}2)$$

---

[1] Linearization External Virtual Work
[2] Body Forces
[3] Surface Forces

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta}}{\left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta} \right\|} \quad ; \quad da = \left\| \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi} \times \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta} \right\| d\xi d\eta \tag{168-2}$$

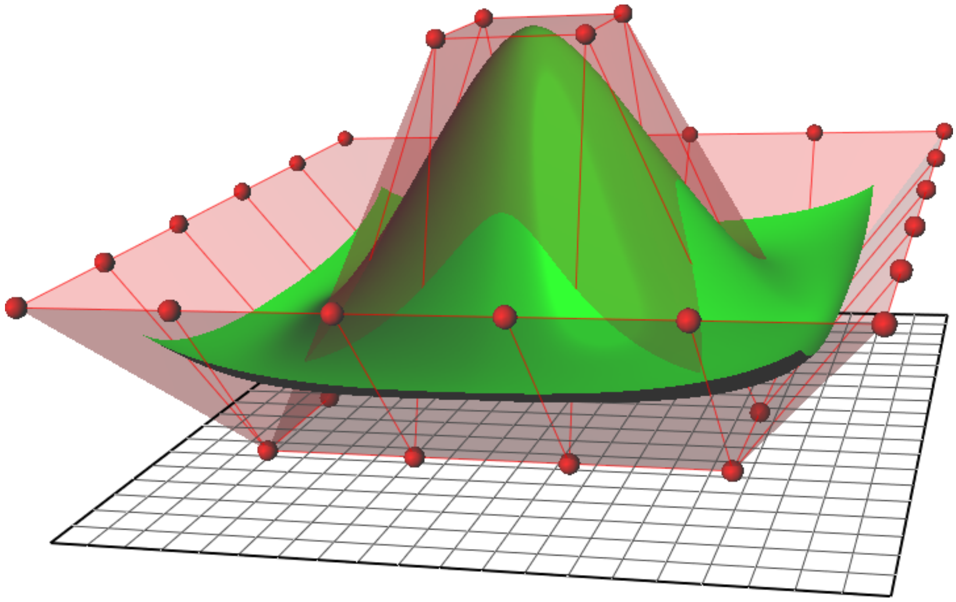
فصل سوم

فرمول بندی روش ایزوژئومتریک در تحلیل مسائل غیرخطی هندسی

۳-۱- شناخت تحلیل ایزوژئومتریک:

در این بخش ابتدا به تعریف تحلیل ایزوژئومتریک پرداخته شده است. در ادامه ضمن معرفی توابع پایه هندسه‌ساز، به بررسی مفهوم روش ایزوژئومتریک و مقایسه آن با روش اجزای محدود و فرمول بندی روش اشاره شده است.

واژه ایزوژئومتریک از دو کلمه ایزوپارامتریک و ژئومتری(هندسه)[1] شکل یافته است. اساس روش تحلیل ایزوژئومتریک [28] برگرفته از پیشرفت‌های صنعت طراحی به کمک کامپیوتر در صنعت مدل‌سازی هندسی[2] است. مدل سازی منحنی، سطوح و احجام در این شاخه به وسیله توابع پایه ب-اسپلاین و انواع ارتقا یافته آن نظیر نربز و ت- اسپلاین انجام می‌شود. شکل ۳-۱



شکل ۳-۱: مدل سازی سطح به وسیله توابع پایه ب- اسپلاین و نقاط کنترلی [45]

در روش ایزوژئومتریک از نقاط کنترلی[3] شامل مولفه‌ای علاوه بر مولفه‌های تعریف هندسه با شرط اقناع معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله استفاده می‌شود و با گسسته‌سازی محیط پیوسته به وسیله این نقاط تعریفی و استفاده آنها در تقریب تابع مجهول جواب مسئله به جای استفاده از المان در روش اجزای محدود، شبکه در دیفرانسیل محدود یا مجموعه‌ای از نقاط در روش‌های بدون مش باعث ایجاد

[1] Geometry
[2] Computer Aided Geometry Design
[3] Control Point

رویه‌ای از جواب خواهد شد. توانایی این ایده در معادلات دیفرانسیل معمولی به وسیله حسنی و همکارانش[1] مورد بررسی قرار گرفته [38,39] و همچنین نتایج بسیار خوبی توسط هیوز و گروه تحقیقاتی آن در مکانیک محاسباتی با بهره گیری از این روش موجود است [40-43,28].

در روش اجزای محدود با تقسیم بندی دامنه تعریفی به المان‌ها، برای یافتن مختصات هر نقطه خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} N_i x_i \\ \sum_{i=0}^{n} N_i y_i \\ \sum_{i=0}^{n} N_i z_i \end{bmatrix} \tag{1-3}$$

با این تعریف مختصات هر نقطه به حاصل ضرب تعداد نقاط گرهی مربوط به المان در توابع درون‌یاب[2] یا توابع شکل[3] آن نقطه وابسته می‌باشد و از همین توابع شکل به صورت زیر در تخمین فضای جواب استفاده می‌شود.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} N_i u_i \\ \sum_{i=0}^{n} N_i v_i \\ \sum_{i=0}^{n} N_i w_i \end{bmatrix} \tag{2-3}$$

در روش اجزای محدود به علت فهم آسان و استفاده راحت جهت ایجاد کد برنامه نویسی از چند جمله‌ای توانی[4] به عنوان پایه‌ای برای توابع شکل استفاده می‌گردد. به عنوان یک مثال ایجاد احجام با بهره‌گیری از این توابع به صورت زیر می‌باشد [26].

$$V(u,v,w) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{n} a_{ijk} u^i v^j w^k \tag{3-3}$$

[1] B. Hassani et al.
[2] Interpolation Function
[3] Shape Function
[4] Power Basis Polynomials

با تعریف $a_{ijk}=(x_{ijk},y_{ijk},z_{ijk})$ مختصات هر مولفه حجم چنین خواهد بود:

$$x(u,v,w)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}x_{ijk}u^{i}v^{j}w^{k} \tag{4-3a}$$

$$y(u,v,w)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}y_{ijk}u^{i}v^{j}w^{k} \tag{4-3b}$$

$$z(u,v,w)=\sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n}z_{ijk}u^{i}v^{j}w^{k} \tag{4-3c}$$

در روش ایزوژئومتریک از توابع پایه ب- اسپلاین و یا انواع ارتقا یافته آن نظیر نربز و ت- اسپلاین استفاده می‌شود که تعریف توابع پایه نربز به صورت زیر است.

$$R_i(\xi)=\frac{N_{i,p_1}(\xi)\ \omega_i}{\sum_{e=0}^{n_1}N_{e,p_1}(\xi)\ \omega_e} \tag{5-3a}$$

$$R_{i,j}(\xi,\eta)=\frac{N_{i,p_1}(\xi)\ N_{j,p_2}(\eta)\ \omega_{i,j}}{\sum_{e=0}^{n_1}\sum_{f=0}^{n_2}N_{e,p_1}(\xi)\,N_{f,p_2}(\eta)\ \omega_{e,f}} \tag{5-3b}$$

$$R_{i,j,k}(\xi,\eta,\varsigma)=\frac{N_{i,p_1}(\xi)\ N_{j,p_2}(\eta)\ N_{k,p_3}(\varsigma)\,\omega_{i,j,k}}{\sum_{e=0}^{n_1}\sum_{f=0}^{n_2}\sum_{g=0}^{n_3}N_{e,p_1}(\xi)\,N_{f,p_2}(\eta)\,N_{g,p_3}(\varsigma)\,\omega_{e,f,g}} \tag{5-3c}$$

همچنین در این روش دامنه مسئله به تکه‌هائی[1] تقسیم می‌گردد که هر تکه می‌تواند شامل المان‌های گره‌ای[2] زیادی باشد و نگاشت بین فضاها بر روی این تکه‌ها انجام می‌پذیرد حال آنکه در روش اجزای محدود نگاشت بین فضای فیزیکی و فضای طبیعی[3] بر روی هر المان انجام شده و باعث افزایش حجم محاسبات می‌گردد.

در روش ایزوژئومتریک مقدار مجهول مسئله ، متغیرهای کنترلی، در نقاط کنترلی محاسبه و سپس به وسیلهٔ توابع پایه در بقیه نقاط تقریب زده خواهد شد. در این روش نقاط کنترلی طوری انتخاب می‌گردد که مولفه‌های اول و دوم یا اول و دوم و سوم مختصات این نقاط بتوانند هندسه مسئله را ایجاد نمایند در این صورت مولفهٔ سوم یا چهارم مختصات این نقاط طوری محاسبه می‌گردد که درون‌یابی

---

[1] Patchs
[2] Knot Elements
[3] Natural Space

بین این نقاط به وسیله توابع پایه نشان دهندهٔ تغییر مکان نقطه باشد. با توجه به تعریف ارائه شده می‌توان چنین نتیجه گیری نمود که هدف یافتن منحنی، رویه یا حجمی از جواب است که به وسیله توابع شکل و متغیرهای کنترلی به صورت زیر قابل تعریف است.

$$C(\xi,\eta,\varsigma)=\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{n} R_i(\xi,\eta,\varsigma)P_{x,i} \\ \sum_{i=0}^{n} R_i(\xi,\eta,\varsigma)P_{y,i} \\ \sum_{i=0}^{n} R_i(\xi,\eta,\varsigma)P_{z,i} \end{bmatrix} \quad \text{منحنی جواب:} \qquad (6\text{-}3a)$$

$$S(\xi,\eta,\varsigma)=\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} R_{ij}(\xi,\eta,\varsigma)P_{x,ij} \\ \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} R_{ij}(\xi,\eta,\varsigma)P_{y,ij} \\ \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} R_{ij}(\xi,\eta,\varsigma)P_{z,ij} \end{bmatrix} \quad \text{رویه جواب:} \qquad (6\text{-}3b)$$

$$V(\xi,\eta,\varsigma)=\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} R_{ijk}(\xi,\eta,\varsigma)P_{x,ijk} \\ \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} R_{ijk}(\xi,\eta,\varsigma)P_{y,ijk} \\ \sum_{k=0}^{r}\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} R_{ijk}(\xi,\eta,\varsigma)P_{z,ijk} \end{bmatrix} \quad \text{حجم جواب:} \qquad (6\text{-}3c)$$

به دلیل خاصیت بازه تاثیر توابع پایه اسپلاین تنها تعداد محدودی از این توابع به تعداد درجه تابع چند جمله‌ای پیشنهادی به اضافه یک در هر دهانه و در هر راستا غیر صفر می‌باشد. در این صورت خواهیم داشت:

- تعداد توابع پایه غیر صفر منحنی جواب در هر دهانه: $p+1$
- تعداد توابع پایه غیر صفر رویه جواب در هر المان گره ای: $(p+1)(q+1)$
- تعداد توابع پایه غیر صفر حجم جواب در هر المان گره ای: $(p+1)(q+1)(r+1)$

با توجه به این مطلب که المان گره‌ای e_{ijk} متشکل از دهانه گره‌ای[1] $[\xi_i,\xi_{i+1})$ در راستای ξ دهانه گره‌ای $[\eta_i,\eta_{i+1})$ در راستای η و دهانه گره‌ای $[\varsigma_i,\varsigma_{i+1})$ در راستای ς می‌باشد اکنون می‌توان منحنی، رویه و یا حجم جواب را برای هر المان گره‌ای به صورت زیر باز نویسی نمود.

$$C(\xi,\eta,\varsigma)=\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{I=i-p}^{i} R_I(\xi,\eta,\varsigma)P_{x,I} \\ \sum_{I=i-p}^{i} R_I(\xi,\eta,\varsigma)P_{y,I} \\ \sum_{I=i-p}^{i} R_I(\xi,\eta,\varsigma)P_{z,I} \end{bmatrix}$$ منحنی جواب: (7-3a)

$$S(\xi,\eta,\varsigma)=\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{J=j-q}^{j}\sum_{I=i-p}^{i} R_{IJ}(\xi,\eta,\varsigma)P_{x,IJ} \\ \sum_{J=j-q}^{j}\sum_{I=i-p}^{i} R_{IJ}(\xi,\eta,\varsigma)P_{y,IJ} \\ \sum_{J=j-q}^{j}\sum_{I=i-p}^{i} R_{IJ}(\xi,\eta,\varsigma)P_{z,IJ} \end{bmatrix}$$ رویه جواب: (7-3b)

$$V(\xi,\eta,\varsigma)=\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{K=k-r}^{k}\sum_{J=j-q}^{j}\sum_{I=i-p}^{i} R_{IJK}(\xi,\eta,\varsigma)P_{x,IJK} \\ \sum_{K=k-r}^{k}\sum_{J=j-q}^{j}\sum_{I=i-p}^{i} R_{IJK}(\xi,\eta,\varsigma)P_{y,IJK} \\ \sum_{K=k-r}^{k}\sum_{J=j-q}^{j}\sum_{I=i-p}^{i} R_{IJK}(\xi,\eta,\varsigma)P_{z,IJK} \end{bmatrix}$$ حجم جواب: (7-3c)

منظور از $\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}$ تعریف شده در بالا همان تغییر مکان نقاط $\begin{bmatrix} u(\xi,\eta,\varsigma) \\ v(\xi,\eta,\varsigma) \\ w(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix}$ در هر راستا می‌باشد

بنابراین جواب تقریبی مسئله به صورت زیر حاصل می‌گردد.

[1] Knot Span

$$\begin{bmatrix} x(\xi,\eta,\varsigma) \\ y(\xi,\eta,\varsigma) \\ z(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(\xi,\eta,\varsigma) \\ v(\xi,\eta,\varsigma) \\ w(\xi,\eta,\varsigma) \end{bmatrix} = \tilde{\boldsymbol{u}}$$

اکنون با توجه به نوع مسئله مطرح شده با استفاده از فرم ضعیف شده[1] مسائل یا روش کار مجازی به یافتن معادله حاکم برمسئله خواهیم پرداخت و با جایگزینی مقدار تقریبی $\tilde{\boldsymbol{u}}$ با مقدار صحیح و درست جواب مسئله $\boldsymbol{u}$ به مرتب سازی معادله به صورت زیر می‌پردازیم.

$$\boldsymbol{K}_{[\tilde{U}]}\tilde{\boldsymbol{U}} = \boldsymbol{F} \tag{8-3}$$

در مسائل غیرخطی هندسی ماتریس ضرایب[2] $\boldsymbol{K}$ تابعی از متغیر $\tilde{\boldsymbol{U}}$ می‌باشد و معادله با ایجاد توازن بین نیروهای داخلی و خارجی ارضا می‌گردد حال آنکه در مسائل الاستیسیته[3] خطی ماتریس ضرایب $\boldsymbol{K}$ تابع خصوصیات ماده تعریفی است. باید توجه داشت که هر کدام از پارامترهای $\boldsymbol{F}, \tilde{\boldsymbol{U}}, \boldsymbol{K}$ یک رابطه انتگرالی می‌باشد. به عنوان مثال در مسائل الاستیسیته خطی پارامتر $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}$ چنین است:

$$\boldsymbol{K} = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\, d\Omega \tag{9-3}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_{\Omega} \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{f}\, d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{R}^T \boldsymbol{t}\, d\Gamma \tag{10-3}$$

برای محاسبه انتگرالهای حاصله می‌توان از روش انتگرال‌گیری عددی گوس[4] با انتخاب n نقطه گوسی در هر راستا به صورت زیر استفاده نمود.

در یک بعد:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} w_i . f(x_i) \tag{11-3}$$

در دو بعد:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)dxdy = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j . f(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^{N} w_{ij} . f(x_i, y_j) \tag{12-3}$$

---

[1] Weak Form
[2] Cofficient Matrix
[3] Elasticity Problem
[4] Guass Quadrature

در سه بعد:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y,z)dxdydz = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} w_i w_j w_k . f(x_i,y_j,z_k) = \sum_{i=1}^{N} w_{ijk} . f(x_i,y_j,z_k) \quad (13\text{-}3)$$

لازم به ذکر است که بازه انتگرال گیری در این روش عددی $[-1,1]$ بوده و انتگرال گیری در هر بازه دیگری، نیازمند ایجاد نگاشتی بین فضاها می‌باشد.

۳-۲- تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته:

در این بخش ابتدا به انواع روشهای گسسته سازی و خطی‌سازی مسائل مورد تحلیل اشاره خواهد شد در ادامه ضمن بیان روش انتخابی در این تحقیق با بهره‌گیری از آن به ساخت ماتریس ضرایب به کمک مفهوم ایزوژئومتریک در مسائل غیرخطی خواهیم پرداخت. با توجه به ماهیت غیرخطی معادلات هایپرالاستیسیته، جهت استفاده از الگوی حل عددی مبتنی بر تکرار نیوتن- رافسون نیازمند خطی-سازی معادلات می‌باشد که در مراجع دو راهکار برای آن پیشنهاد می‌گردد.

۱. گسسته سازی معادله تعادل و خطی‌سازی آن با توجه به موقعیت نقاط گره‌ای.

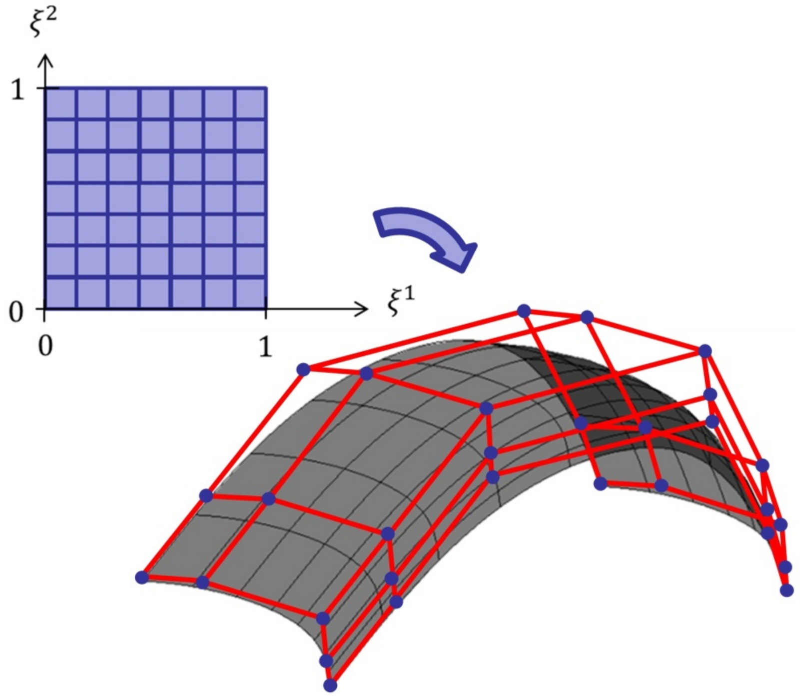
۲. خطی‌سازی معادله کار مجازی و گسسته سازی آن.

باید توجه داشت که روش دوم برای مسائل مکانیک جامدات عمومیت بیشتری دارد هر چند در مسائلی که از گسسته سازی غیر استاندارد[1] استفاده می‌شود روش اول مناسب تر می‌باشد [25]. در این تحقیق از روش خطی‌سازی معادله کار مجازی و گسسته سازی آن استفاده شده است.

۳-۲-۱-گسسته سازی محیط پیوسته:

ایده کلی در تحلیل مسائل هایپرالاستیسیته بر پایه روش ایزوژئومتریک، وابسته‌سازی مسئله مورد تحلیل به توابع پایه و متغیرهای کنترلی موثر بر المان گسسته می‌باشد. شکل ۳-۲

[1] Nonstandard Discretization



شکل ۳-۲: وابسته سازی مسئله مورد تحلیل به توابع پایه و متغیرهای کنترلی [45]

با بهره‌گیری از این تعریف برخی از روابط مورد نیاز این قسمت در محیط گسسته به قرار زیر حاصل می‌گردد. در روابط ارائه شده منظور از n تعداد نقاط کنترلی و R_a مقدار تابع پایه مرتبط با آن نقطه کنترلی است.

$$\boldsymbol{X} = \sum_{a=1}^{n} R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) X_{pa} \tag{14-3a}$$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{a=1}^{n} R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) x_{pa(t)} \tag{14-3b}$$

$$\boldsymbol{v} = \sum_{a=1}^{n} R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \boldsymbol{v}_{pa} \tag{14-3c}$$

$$\boldsymbol{u} = \sum_{a=1}^{n} R_a(\xi_1, \xi_2, \xi_3) u_{pa} \tag{14-3d}$$

$$\boldsymbol{F} = \sum_{a=1}^{n} x_{pa} \otimes \nabla_0 R_a \tag{14-3e}$$

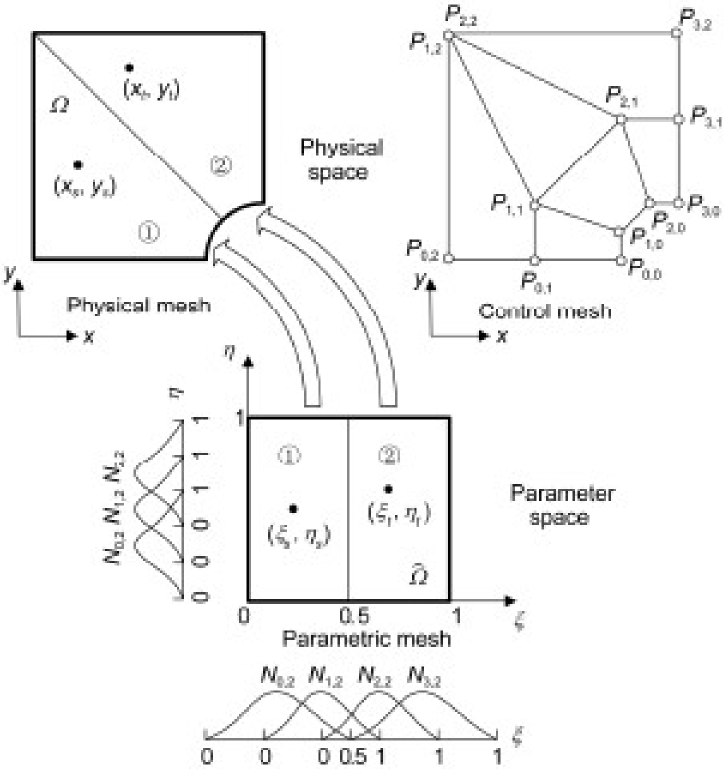
$$\boldsymbol{C} = \sum_{a,b} (x_{pa} . x_{pb}) \nabla_0 R_a \otimes \nabla_0 R_b \tag{14-3f}$$

$$\boldsymbol{b} = \sum_{a,b} \nabla_0 R_a . \nabla_0 R_b \; (x_{pa} \otimes x_{pb}) \tag{14-3g}$$

$$\boldsymbol{d} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{n}\left(\boldsymbol{v}_{pa} \otimes \nabla R_a + \nabla R_a \otimes \boldsymbol{v}_{pa}\right) \tag{14-3i}$$

باید توجه داشت که محاسبه $\nabla_0 \boldsymbol{R}$ و $\nabla \boldsymbol{R}$ با حرکت از فضای فیزیکی به فضای پارامتریک به صورت زیر امکان پذیر می‌باشد. شکل ۳-۳

$$\begin{aligned}
\nabla_0 \boldsymbol{R} &= \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{X}} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{X}} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{X}} \\
\nabla \boldsymbol{R} &= \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{x}} = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial \boldsymbol{x}}
\end{aligned} \tag{15-3a,b}$$



شکل ۳-۳: فضای فیزیکی و فضای پارامتریک [45]

در فصل قبل معادله کار مجازی بر مبنای سرعت مجازی خطی‌سازی شد. اکنون به بررسی هر کدام از مولفه‌های معادله خطی‌سازی شده جهت استفاده در فضای گسسته با توجه به مفهوم روش تحلیل ایزوژئومتریک خواهیم پرداخت. از خطی‌سازی رابطه کار مجازی بر مبنای سرعت مجازی $\delta W(\phi_k, \delta\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}] + D\delta W(\phi_k, \delta\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}] = 0$ مولفه اول معادله $\delta W(\phi_k, \delta\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}]$ بیانگر کار مجازی

به سبب تغییرات نیروهای خارجی[1] $F(x)$ و داخلی[2] $T(x)$ در اثر اعمال سرعتی مجازی است و مولفه دوم $\mathrm{D}\delta W(\phi_k, \delta\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}]$ شیب این تغییرات می‌باشد. به بیان دیگر مولفه دوم معادله خطی‌سازی شده کار مجازی بیانگر شیب تغییرات منحنی[3] $K(x)$ نیرو- جابجائی است. در فضای گسسته این معادله را با توجه به متغیرهای کنترلی تعریفی و روابط بخش۳-۲-۱ بازنویسی کرده و به استخراج روابط حاکم بر مسئله در فضای گسسته با استفاده از مفهوم ایزوژئومتریک خواهیم پرداخت. در واقع با توجه به خطی‌سازی معادله حاکم بر مسئله مورد تحلیل اکنون به وابسته سازی این معادله به توابع پایه و متغیرهای کنترلی جهت استفاده از روش حل عددی نیوتن- رافسون خواهیم پرداخت. شایان ذکر است برخلاف روش اجزای محدود که نقاط کنترلی بر المان تعریفی واقع می‌باشد الزامی به قرار داشتن متغیرهای کنترلی بر روی المان گره‌ای و حتی شکل فیزیکی مسئله نیست.

۳-۲-۱-۱-خطی‌سازی معادله تعادل با توجه به مفهوم روش ایزوژئومتریک:

همانطور که در قسمت قبل اشاره شد معادله $\delta W(\phi, \delta\boldsymbol{v})[\boldsymbol{u}]$ بیانگر کار مجازی به سبب تغییرات نیروهای خارجی $F(x)$ و داخلی $T(x)$ در اثر اعمال سرعتی مجازی است. در محیط گسسته می‌توان این تغییرات نیرو را برای تمامی المان شامل متغیرهای کنترلی موثر بر آنها بطور مجزا بازنویسی نمود. در واقع برای تحلیل کار مجازی بر اثر سرعت مجازی واقع شده بر هندسه مسئله، به بررسی کار مجازی بر مجموع المانهای گسسته خواهیم پرداخت.

معادله کار مجازی برای هر المان گره‌ای ایزوژئومتریک e شامل متغیرکنترلی موثر a، به صورت زیر می‌باشد.

$$\delta W^{(e)}\left(\phi, R_a \delta\boldsymbol{v}_a\right) = \delta\boldsymbol{v}_a \cdot \left(\boldsymbol{T}_a^{(e)} - \mathbf{F}_a^{(e)}\right) \tag{16-3a}$$

با جایگذاری روابط بخش خطی‌سازی معادلات تعادل، معادله برای هر المان شامل متغیر کنترلی موثر بر آن به صورت زیر خواهد بود.

[1] External Force
[2] Internal Force
[3] Tangent Stiffness Matrix

$$\delta W^{(e)}\left(\phi, R_a \delta \mathbf{v}_a\right) = \delta \mathbf{v}_a .[\int_{v^{(e)}} \boldsymbol{\sigma} \nabla R_a \, dv - (\int_{v^{(e)}} R_a \boldsymbol{f} \, dv + \int_{\partial v^{(e)}} R_a \boldsymbol{t} \, da)] \qquad (16\text{-}3b)$$

رابطه کار مجازی برای تمامی المان‌های گره‌ای $\sum e_i = m$ شامل متغیر کنترلی a به قرار زیر است:

$$\delta W\left(\phi, R_a \delta \mathbf{v}_a\right) = \sum_{\substack{e=1 \\ e \ni a}}^{m} \delta W^{(e)}\left(\phi, R_a \delta \mathbf{v}_a\right) = \delta \mathbf{v}_a .\left(\boldsymbol{T}_a - \mathbf{F}_a\right) \qquad (17\text{-}3)$$

و در نهایت، رابطه عنوان شده را می‌توان برای تمامی فضای مسئله مورد تحلیل به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\delta W\left(\phi, \delta \boldsymbol{v}\right) = \sum_{a=1}^{N} W\left(\phi \;\; R_a \delta \mathbf{v}_a\right) = \sum_{a=1}^{N} \delta \mathbf{v}_a \left(\boldsymbol{T}_a - \mathbf{F}_a\right) = 0 \qquad (18\text{-}3)$$

با توجه به این مطلب که معادله فوق باید برای هر سرعت مجازی متغیرهای کنترلی برقرار باشد، بنابراین رابطه به صورت باقیمانده نیروها در متغیرهای کنترلی $\boldsymbol{R}_a$ قابل بیان خواهد بود.

$$\boldsymbol{R}_a = \boldsymbol{T}_a - \mathbf{F}_a = 0 \; ; \mathrm{a} = 1, 2, \ldots, \mathrm{N} \qquad (19\text{-}3a)$$

معادله فوق به فرم ماتریسی به صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_N \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} = \mathbf{0} \qquad (19\text{-}3b)$$

لازم به ذکر است دستگاه معادله فوق تابعی از متغیرهای کنترلی است و متغیرهای کنترلی نیز تابعی از موقعیت جدید خود $(\boldsymbol{x}_a)$ در هر گام می‌باشد. در واقع معادله $(19-3b)$ یک دستگاه معادله غیرخطی با توجه به موقعیت جدید متغیرهای کنترلی است. در نتیجه معادله فوق را به صورت زیر بازنویسی خواهیم کرد.

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{x}) - \mathbf{F}(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad (19\text{-}3c)$$

با توجه به ماهیت غیرخطی معادله $(19-3c)$ جهت حل نیازمند خطی‌سازی آن خواهیم بود.

۳-۲-۱-۲- گسسته سازی معادله تعادل خطی‌سازی شده با توجه به مفهوم روش ایزوژئومتریک:

معادله خطی‌سازی شده کار مجازی به قرار زیر است.

$$D\delta W(\phi,\delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = D\delta W_{\text{int}}(\phi,\delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] - D\delta W_{ext}(\phi,\delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] \tag{20-3a}$$

$$D\delta W(\phi,\delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] = D\delta W_{c}(\phi,\delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] + D\delta W_{\sigma}(\phi,\delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] - D\delta W_{p}(\phi,\delta \mathbf{v})[\mathbf{u}] \tag{20-3b}$$

با توجه به معادله فوق خطی‌سازی معادله کار مجازی بر مبنای سرعت مجازی به سه مولفه $D\delta W_c(\phi,\delta v)[\mathbf{u}], D\delta W_\sigma(\phi,\delta v)[\mathbf{u}], D\delta W_p(\phi,\delta v)[\mathbf{u}]$ وابسته می‌باشد. با بازنویسی معادله کار مجازی خطی‌سازی شده نسبت به راستای $R_b\boldsymbol{u}_b$ در متغیر کنترلی b، گسسته سازی این معادله با توجه به مفهوم روش ایزوژئومتریک در متغیر کنترلی a به قرار زیر است.

$$\begin{aligned} D\delta W^{(e)}(\phi, R_a\delta\mathbf{v}_a)[R_b\boldsymbol{u}_b] &= D\left(\delta\mathbf{v}_a.\left(\boldsymbol{T}_a^{(e)} - \mathbf{F}_a^{(e)}\right)\right)[R_b\boldsymbol{u}_b] \\ &= \delta\mathbf{v}_a\left(D.\left(\boldsymbol{T}_a^{(e)} - \mathbf{F}_a^{(e)}\right)\right)[R_b\boldsymbol{u}_b] = \delta\mathbf{v}_a.\boldsymbol{K}_{ab}^{(e)}u_b \end{aligned} \tag{20-3c}$$

ماتریس ضرایب $\boldsymbol{K}_{ab}^{(e)}$ رابطه بین تغییرات نیرو در متغیر کنترلی a را نسبت به تغییر مکان در متغیر کنترلی b بیان می‌نماید. با جایگذاری روابط پایه‌ای این بخش در معادلات بیان شده در قسمت خطی‌سازی و توجه به وابستگی کار مجازی به سه مولفه اشاره شده، ماتریس ضرایب به دو مولفه ناشی از کار داخلی شامل ساختمان رفتاری[۱] $\boldsymbol{K}_{c,ab}^{(e)}$ و تنش ابتدایی[۲] $\boldsymbol{K}_{\sigma,ab}^{(e)}$ و یک مولفه ناشی از کار خارجی با نام مولفه نیروهای خارجی ماتریس ضرایب[۳] $\boldsymbol{K}_{p,ab}^{(e)}$ قابل تجزیه است. بنابراین:

$$\boldsymbol{K}_{ab}^{(e)} = \boldsymbol{K}_{c,ab}^{(e)} + \boldsymbol{K}_{\sigma,ab}^{(e)} - \boldsymbol{K}_{p,ab}^{(e)} \tag{21-3}$$

$$[\boldsymbol{K}_{c,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{v^{(e)}} \sum_{k,l=1}^{3} \frac{\partial R_a}{\partial x_k}\tilde{c}_{ikjl}\frac{\partial R_b}{\partial x_l}\, dv \quad ; i,j = 1,2,3 \tag{22-3}$$

$$[\boldsymbol{K}_{\sigma,ab}^{(e)}]_{ij} = \int_{v^{(e)}} \sum_{k,l=1}^{3} \frac{\partial R_a}{\partial x_k}\sigma_{kl}\frac{\partial R_b}{\partial x_l}\delta_{ij}\, dv \quad ; i,j = 1,2,3 \tag{23-3}$$

---
[۱] Constitutive Component
[۲] Initial Stress Component
[۳] External Force Component

$$[\boldsymbol{K}^{(e)}_{p,ab}]_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \left[\boldsymbol{k}^{(e)}_{p,ab} \right]_k \quad ; i, j = 1,2,3 \tag{24-3}$$

$$\boldsymbol{k}_{p,ab} = \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi} \left(\frac{\partial R_a}{\partial \eta} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \eta} R_a \right) da + \frac{1}{2} \int_{A_\xi} p \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \eta} \left(\frac{\partial R_a}{\partial \xi} R_b - \frac{\partial R_b}{\partial \xi} R_a \right) da \tag{25-3}$$

برای مواد تراکم ناپذیر، با توجه به اصلاح خطی‌سازی کار داخلی، علاوه بر مولفه‌های عنوان شده، شامل مولفه حجمی[1] نیز می‌باشد. که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boldsymbol{K}^{(e)}_{ab} = \boldsymbol{K}^{(e)}_{c,ab} + \boldsymbol{K}^{(e)}_{\sigma,ab} + \boldsymbol{K}^{(e)}_{k,ab} - \boldsymbol{K}^{(e)}_{p,ab} \tag{26-3}$$

$$\boldsymbol{K}^{(\mathrm{e})}_{(k,ab)} = \bar{k} v^{(e)} \bar{\nabla} R_a \otimes \bar{\nabla} R_b \tag{27-3}$$

$$\bar{\nabla} R_a = \frac{1}{v^{(e)}} \int_{v^{(e)}} \nabla R_a \, dv \tag{28-3}$$

پس از فرمول‌بندی معادلات تعادل خطی‌سازی شده و گسسته سازی فضای مسئله با استفاده از مفهوم روش تحلیل ایزوژئومتریک روابط حاصل شده را جهت استفاده از الگوریتم‌های حل مبتنی بر سعی و خطا می‌توان به صورت زیر بیان نمود.

$$\delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{u} + \delta \mathbf{v}^T \boldsymbol{R} = 0 \tag{29-3a}$$

با توجه به این مطلب که معادله فوق باید برای هر سرعت مجازی برقرار باشد خواهیم داشت.

$$\boldsymbol{K} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{R} = 0 \tag{29-3b}$$

و در پایان دستگاه معادله فوق را جهت الگوریتم حل بر مبنای تکرار نیوتن- رافسون به صورت زیر بازنویسی خواهیم نمود.

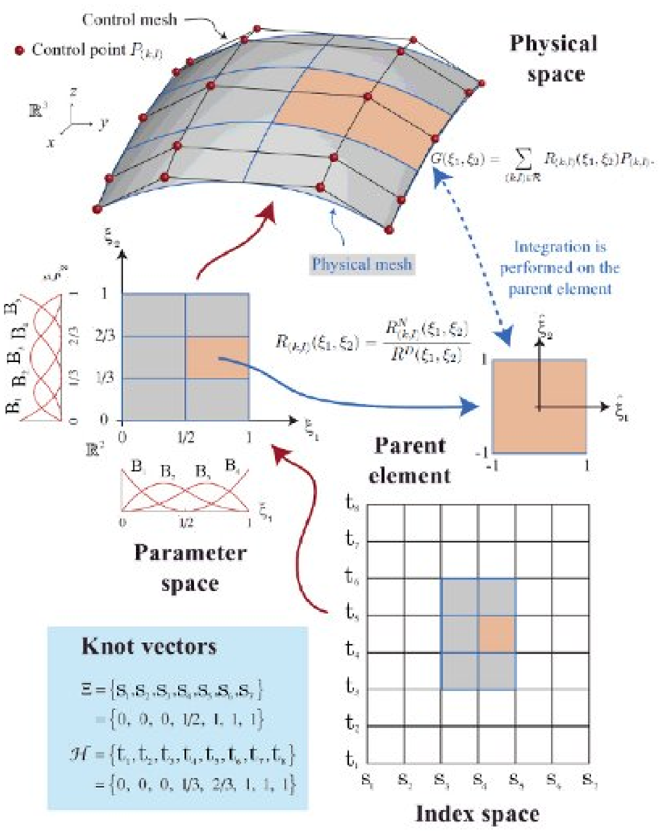
$$\left\{ \begin{aligned} &\boldsymbol{K}(x_k) \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{R}(x_k) \\ &\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{u} \end{aligned} \right\} \tag{30-3}$$

در مسائل غیرخطی اگرچه وارد نمودن تمام بار خارجی در یک مرحله به صورت تئوری امکان پذیر می‌باشد، لیکن در عمل بار خارجی $\mathbf{F}$ به صورت یک سری افزایشی[2] در چند مرحله به قرار زیر بر جسم وارد می‌شود.

---
[1] Volumetric Component
[2] Series of Increments

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{l} \Delta \mathbf{F}_i \quad (31\text{-}3)$$

در روش ایزوژئومتریک هندسه و حل مسئله در فضای فیزیکی $\{x, y, z\}$ توسط متغیرهای کنترلی و توابع پایه تعریف می‌گردد. این توابع پایه توسط بردارهای گرهی در فضای پارامتریک $\{\xi,\eta,\varsigma\}$قابل محاسبه بوده و با توجه به روش انتگرال‌گیری گوس نیازمند انتقال از فضای پارامتریک به فضای الگو[۱] $\{r, s, t\}$ می‌باشد. شکل ۳-۴



شکل ۳-۴: انتقال بین فضای فیزیکی، فضای پارامتریک و فضای الگو [31]

بنابراین انتگرال‌گیری در فضای فیزیکی با دو انتقال از فضای الگو به فضای پارامتریک و سپس به فضای فیزیکی همراه خواهد بود. برای نگاشت‌های اشاره شده ماتریس ژاکوبی[۲] به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$dxdydz = det\boldsymbol{J}_1\, d\xi d\eta d\zeta = det\boldsymbol{J}_1 det\boldsymbol{J}_2\, dr\, ds\, dt \quad (32\text{-}3)$$

---
۱ Parent Space
۲ Jacobian Matrix

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (33\text{-}3)$$

رابطه بین فضای پارامتریک و فضای الگو به قرار زیر است:

$$\xi = \frac{1}{2}\left[\left(\xi_{i+1} - \xi_i\right) r + \left(\xi_{i+1} + \xi_i\right)\right] \quad (34\text{-}3a)$$

$$\eta = \frac{1}{2}\left[\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right) s + \left(\eta_{i+1} + \eta_i\right)\right] \quad (34\text{-}3b)$$

$$\zeta = \frac{1}{2}\left[\left(\zeta_{i+1} - \zeta_i\right) t + \left(\zeta_{i+1} + \zeta_i\right)\right] \quad (34\text{-}3c)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r} & \frac{\partial \eta}{\partial r} & \frac{\partial \zeta}{\partial r} \\ \frac{\partial \xi}{\partial s} & \frac{\partial \eta}{\partial s} & \frac{\partial \zeta}{\partial s} \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} & \frac{\partial \eta}{\partial t} & \frac{\partial \zeta}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left(\xi_{i+1} - \xi_i\right) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(\eta_{i+1} - \eta_i\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\left(\zeta_{i+1} - \zeta_i\right) \end{bmatrix} \quad (35\text{-}3)$$

۳-۲-۲- الگوریتم روش تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته:

بطور خلاصه گام های زیر برای حل مسئله هایپرالاستیسیته پیشنهاد می‌شود.الگوریتم روش نیز در شکل ۳-۵ نشان داده شده است.

۱. وارد نمودن مشخصات هندسه(بردارهای گره‌ای، نقاط کنترلی و وزن توابع پایه)، تعریف پارامترهای مواد ایزوتروپیک و پارامترهای تحلیل.

۲. ایجاد حلقه بر روی سری افزایشی بار:

محاسبه مقدار افزایش بار در هر مرحله $\Delta \mathbf{F}_i$ و $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i + \Delta \mathbf{F}_i$; $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{R}_i - \Delta \boldsymbol{R}_i$

۳. ایجاد حلقه همگرایی در هر مرحله افزایش بار:

الف) محاسبه $\boldsymbol{K}_i$

ب) حل معادله $\boldsymbol{K}_i \boldsymbol{u}_p = -\boldsymbol{R}_i$

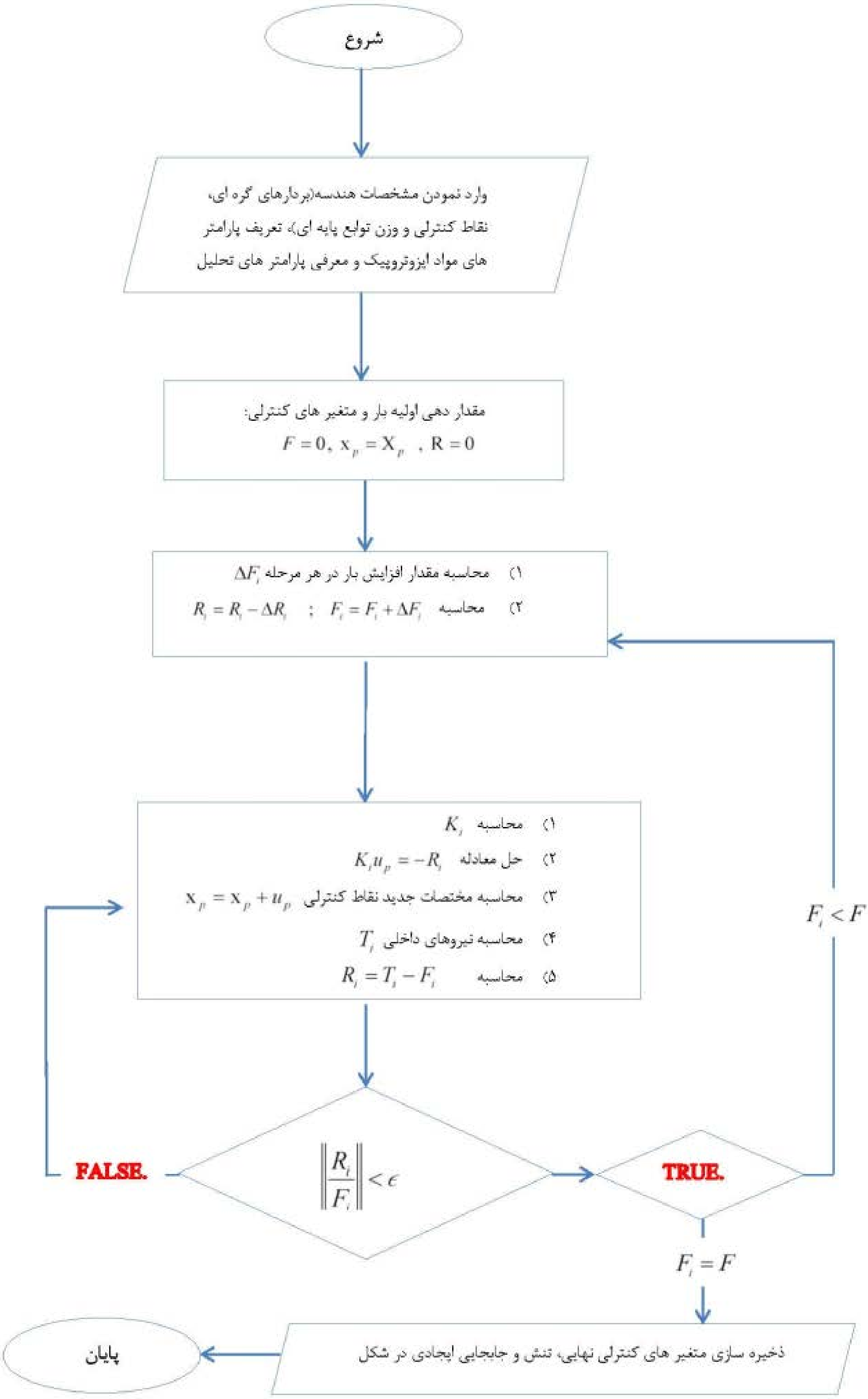
ج) محاسبه مختصات جدید نقاط کنترلی $\boldsymbol{x}_p = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{u}_p$

د) محاسبه نیروهای داخلی $\boldsymbol{T}_i$

ه) محاسبه $\boldsymbol{R}_i = \boldsymbol{T}_i - \mathbf{F}_i$

۴. پایان حلقه همگرایی.

۵. پایان حلقه سری افزایشی بار



شکل ۳-۵: الگوریتم روش تحلیل ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته

فصل چهارم

کاربرد برنامه در تحلیل

مسائل نمونه

در این بخش، ابتدا با ارائه سه مثال نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته با یکدیگر مقایسه می‌گردد. در ادامه به بررسی مثال‌های متنوع دیگری در زمینه روش مذکور خواهیم پرداخت.

۴-۱- بررسی نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته:

۴-۱-۱- مدل سازی تیر طره[1]، تحت اثر بارگذاری در انتها:

مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، یک مکعب مستطیل با طول 15 عرض 2 و ارتفاع واحد می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۱ نشان داده شده است. بارگذاری در 10 مرحله با مقدار همگرایی[2] $\epsilon = 1\times10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. در روش اجزای محدود، از 1920 المان های هشت گره ای شش وجهی[3] و 2745 گره و برای انتگرال‌گیری در هر المان از 8 نقطه گوسی استفاده شده است. در روش ایزوژئومتریک از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$

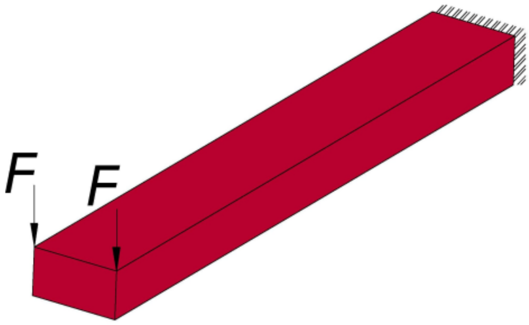
برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$\mathrm{P}_{\xi} = 12 \;;\; \mathrm{P}_{\eta} = 6 \;;\; \mathrm{P}_{\zeta} = 4 \quad ;\; P_{totall} = 288$$

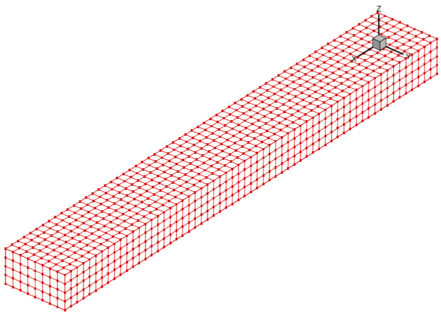
همچنین از مصالح نئو- هوکین تراکم پذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(\mathrm{C}) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$

[1] Cantilever Beam
[2] Tolerance
[3] 8-Noded Trilinear Hexahedron

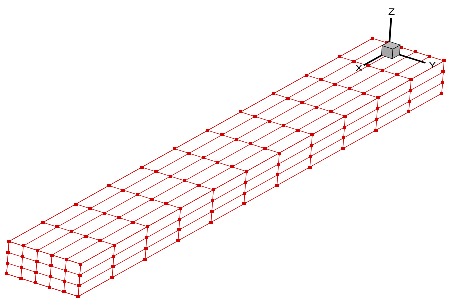
و پارامترهای $\lambda = 100$; $\mu = 100$; $\rho = 0$ استفاده شده است. که در آن ρ چگالی مصالح[1] و λ,μ ضرایب لامه[2] می‌باشند.



(الف)



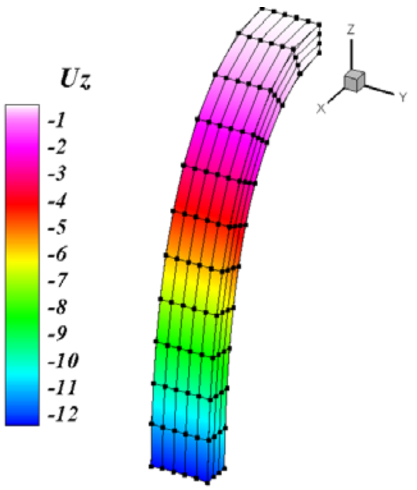
(ب)



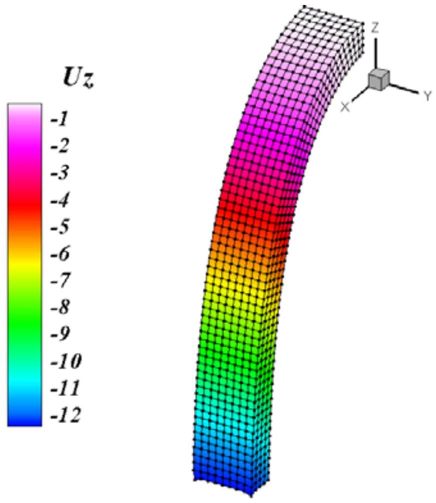
(ج)

شکل ۴-۱: تعریف مسئله۴-۱-۱ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک (ج)مش بندی اولیه در روش اجزای محدود

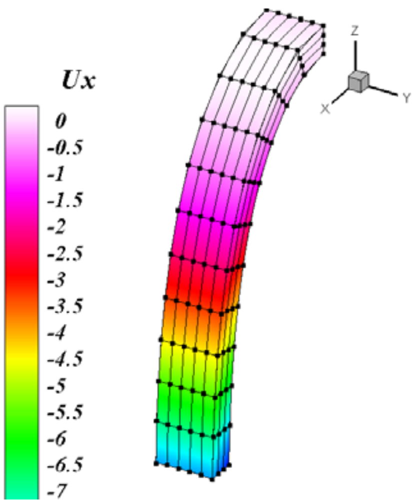
[1] Density
[2] Lame Cofficient


Uz
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
Z
Y
X

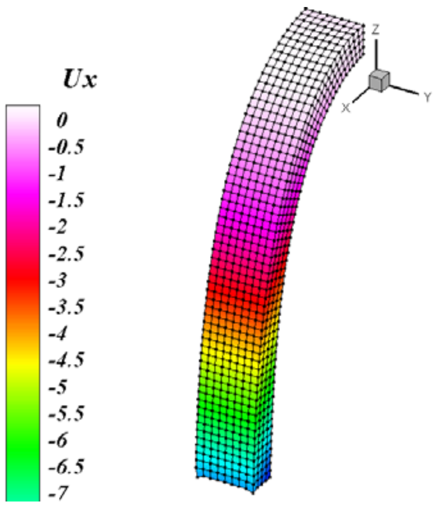
(الف)


Uz
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
-11
-12
Z
Y
X

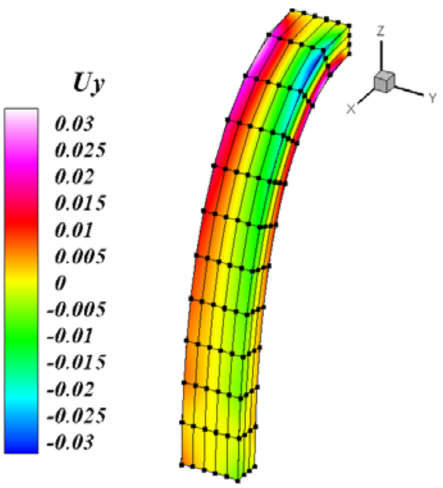
(ب)


Ux
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
-5
-5.5
-6
-6.5
-7
Z
Y
X

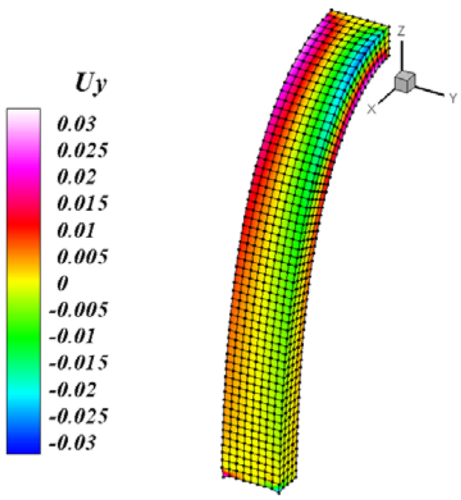
(ج)


Ux
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
-5
-5.5
-6
-6.5
-7
Z
Y
X

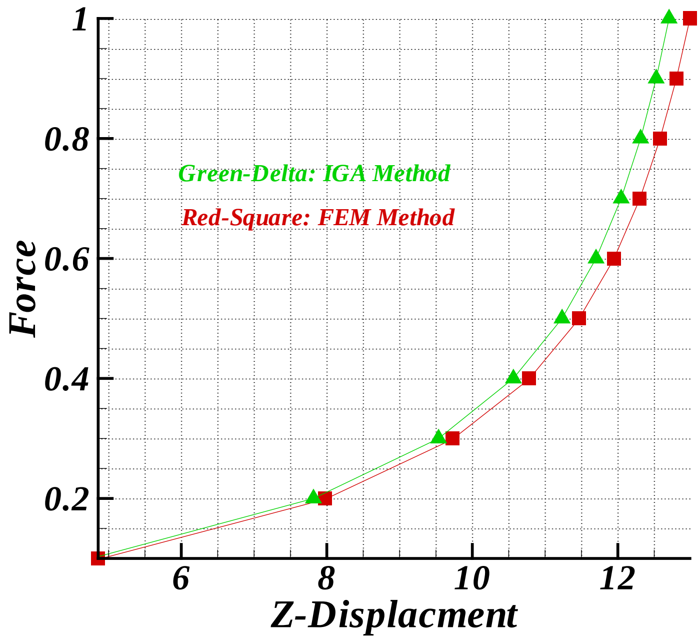
(د)


Uy
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02
-0.025
-0.03
Z
Y
X

(ه)


Uy
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02
-0.025
-0.03
Z
Y
X

(و)



(ز)

جدول ۴-۱: تغییرات حجم آغازین و پایانی در روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک

	حجم اولیه	حجم پایانی	تغییرات حجم J
روش اجزای محدود	30.000000	30.037631	1.00125
روش ایزوژئومتریک	30.000000	30.037242	1.00124

شکل۴-۲: (الف)کانتور جابجایی در راستایZ در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ب) کانتور جابجایی در راستایZ در روش اجزای محدود (ج)کانتور جابجایی در راستایX در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (د) کانتور جابجایی در راستایX در روش اجزای محدود (ه)کانتور جابجایی در راستایY در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (و) کانتور جابجایی در راستایY در روش اجزای محدود (ز) نمودار بار- جابجائی در نقطه اعمال بار

۴-۱-۲- مدل سازی تیر دو سر گیردار[1]، تحت اثر نیروی کالبدی وزن:

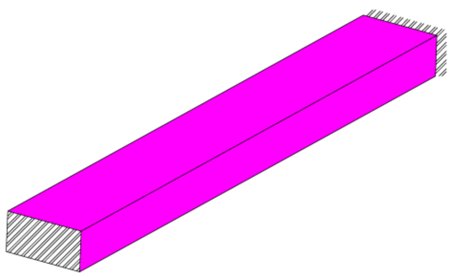
مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، یک مکعب مستطیل با طول 15 عرض 2 و ارتفاع واحد می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۳ نشان داده شده است. بارگذاری در 100 مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. در روش اجزای محدود، از 1920 المان های هشت گره ای شش وجهی و 2745 گره و برای انتگرال‌گیری در هر المان از 8 نقطه گوسی استفاده شده است. در روش ایزوژئومتریک از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

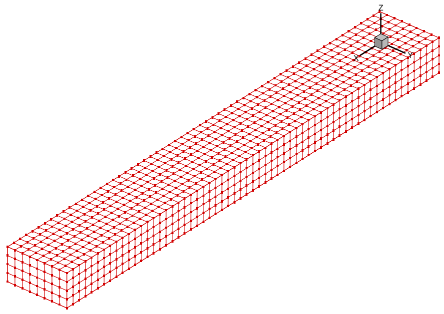
$$\mathrm{P}_{\xi} = 12 \;;\; \mathrm{P}_{\eta} = 6 \;;\; \mathrm{P}_{\zeta} = 4 \quad ; \; P_{totall} = 288$$

همچنین از مصالح نئو- هوکین تراکم پذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(\mathrm{C}) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$ و پارامترهای $\rho = 0.5;\ \mu = 100\ ;\lambda = 100$ استفاده شده است. که در آن ρ چگالی مصالح و λ ، μ ضرایب لامه می‌باشند.

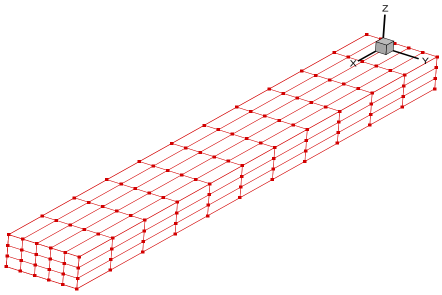


(الف)

[1] Fixed Beam

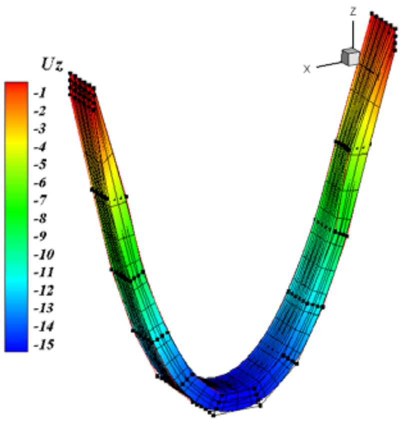


(ب)

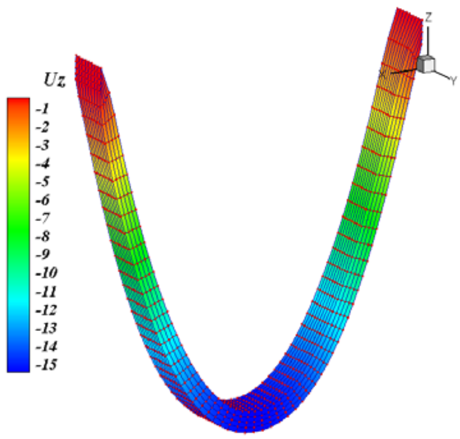


(ج)

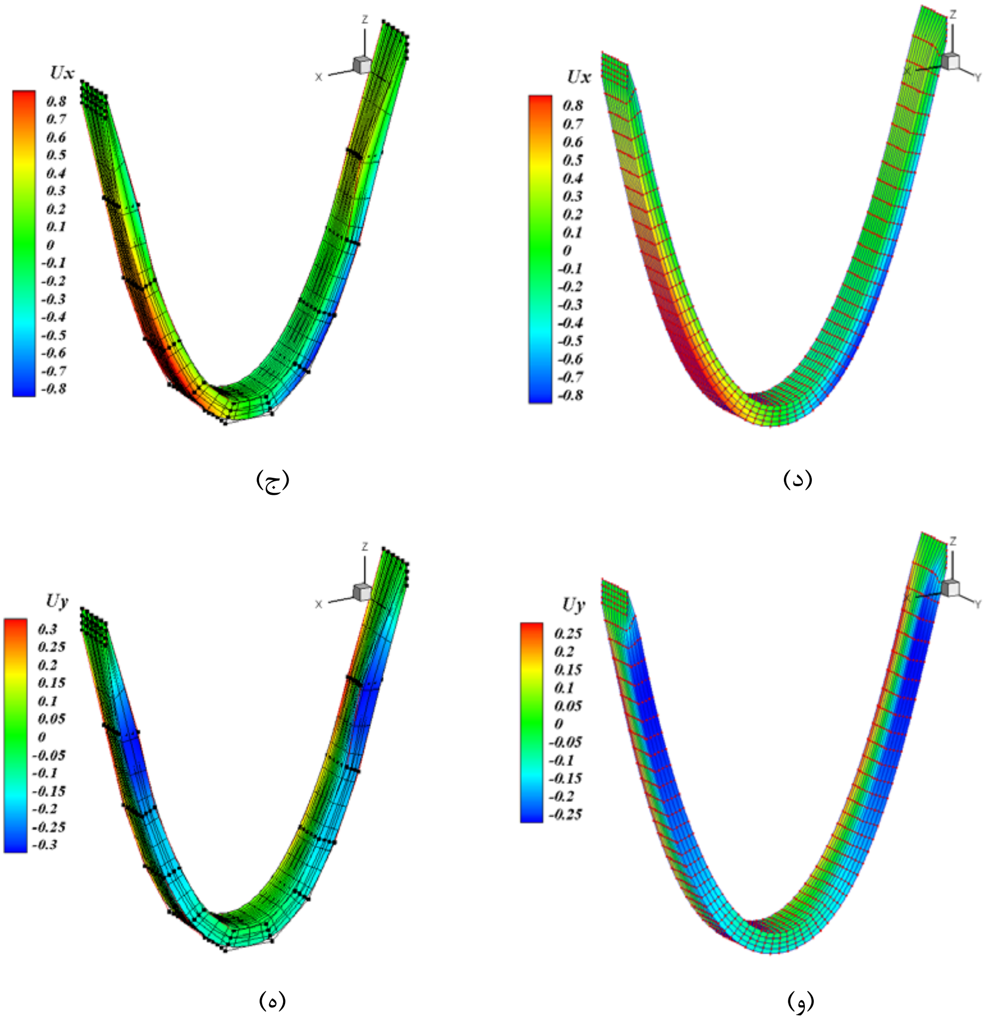
شکل ۴-۳: تعریف مسئله۴-۱-۲ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک (ج)مش بندی اولیه در روش اجزای محدود



(الف)



(ب)



شکل۴-۴: (الف)کانتور جابجایی در راستایZ در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ب) کانتور جابجایی در راستایZ در روش اجزای محدود (ج)کانتور جابجایی در راستایX در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (د) کانتور جابجایی در راستایX در روش اجزای محدود (ه)کانتور جابجایی در راستایY در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (و) کانتور جابجایی در راستایY در روش اجزای محدود

۴-۱-۳- مدل سازی قسمتی از استوانه[۱] تحت اثر پیچش:

مدل تحلیلی این مسئله به صورت یک چهارم استوانه به شعاع متوسط ۱/۱، ضخامت ۰/۲ و ارتفاع ۶ می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۵ نشان داده شده است. بارگذاری در روش اجزای محدود در 1000 مرحله و در روش ایزوژئومتریک در 100 مرحله با مقدار همگرایی

Cylindrical [۱]

$\epsilon = 1\times10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. در روش اجزای محدود، از 300 المان های هشت گره ای شش وجهی و 682 گره و برای انتگرال‌گیری در هر المان از 8 نقطه گوسی استفاده شده است. در روش ایزوژئومتریک از توابع پایه نربز درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,\ 1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,\ 1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$

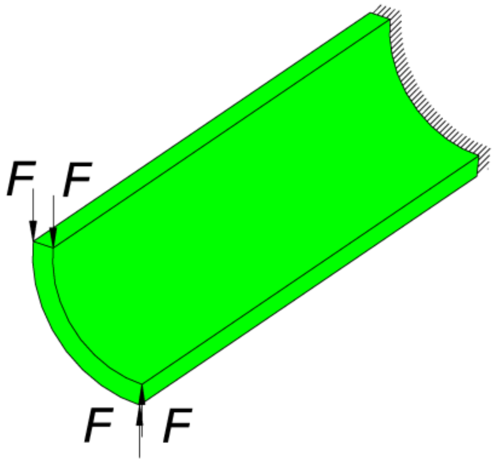
برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$\mathrm{P}_{\xi} = 3\ ;\ \ \mathrm{P}_{\eta} = 3\ ;\ \ \mathrm{P}_{\zeta} = 4 \quad ;\ P_{totall} = 36$$

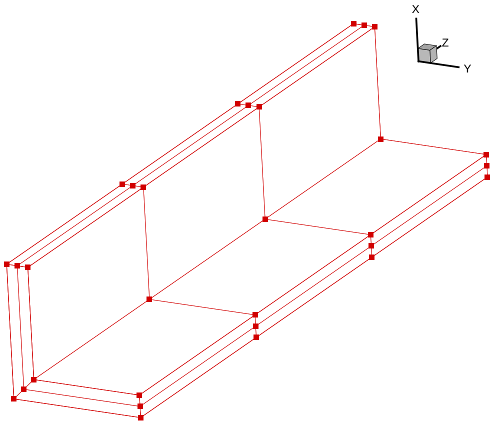
از ماده ایزوتروپیک هایپرالاستیسیته در راستای اصلی با تابع انرژی کرنشی و پارامترهای تعریفی به قرار زیر استفاده شده است.

$$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \mu\left[(\ln\lambda_1)^2 + (\ln\lambda_2)^2 + (\ln\lambda_3)^2\right] + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$$

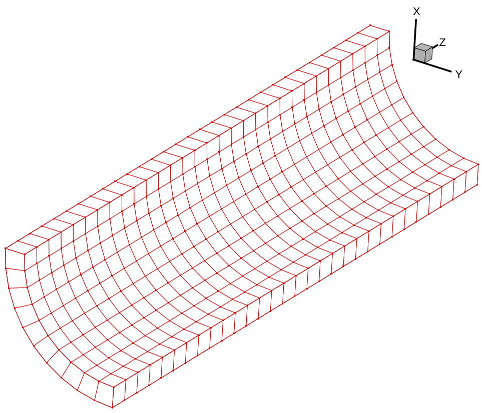
$$\rho = 0\ ;\ \mu = 100\ ; \lambda = 100$$



(الف)



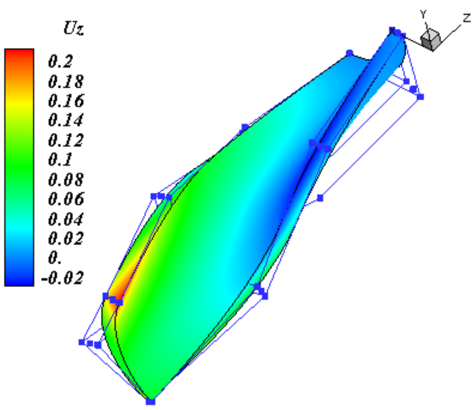
(ب)



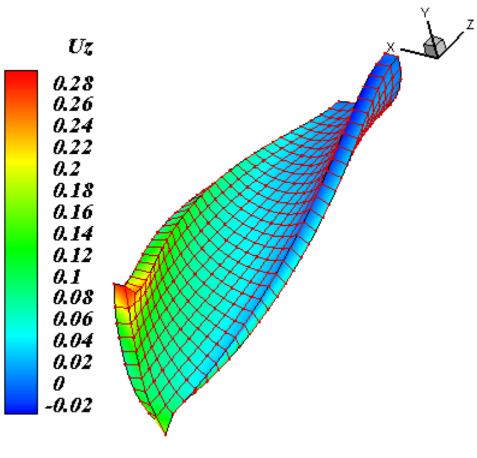
(ج)

شکل ۴-۵: تعریف مسئله۴-۱-۳ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک

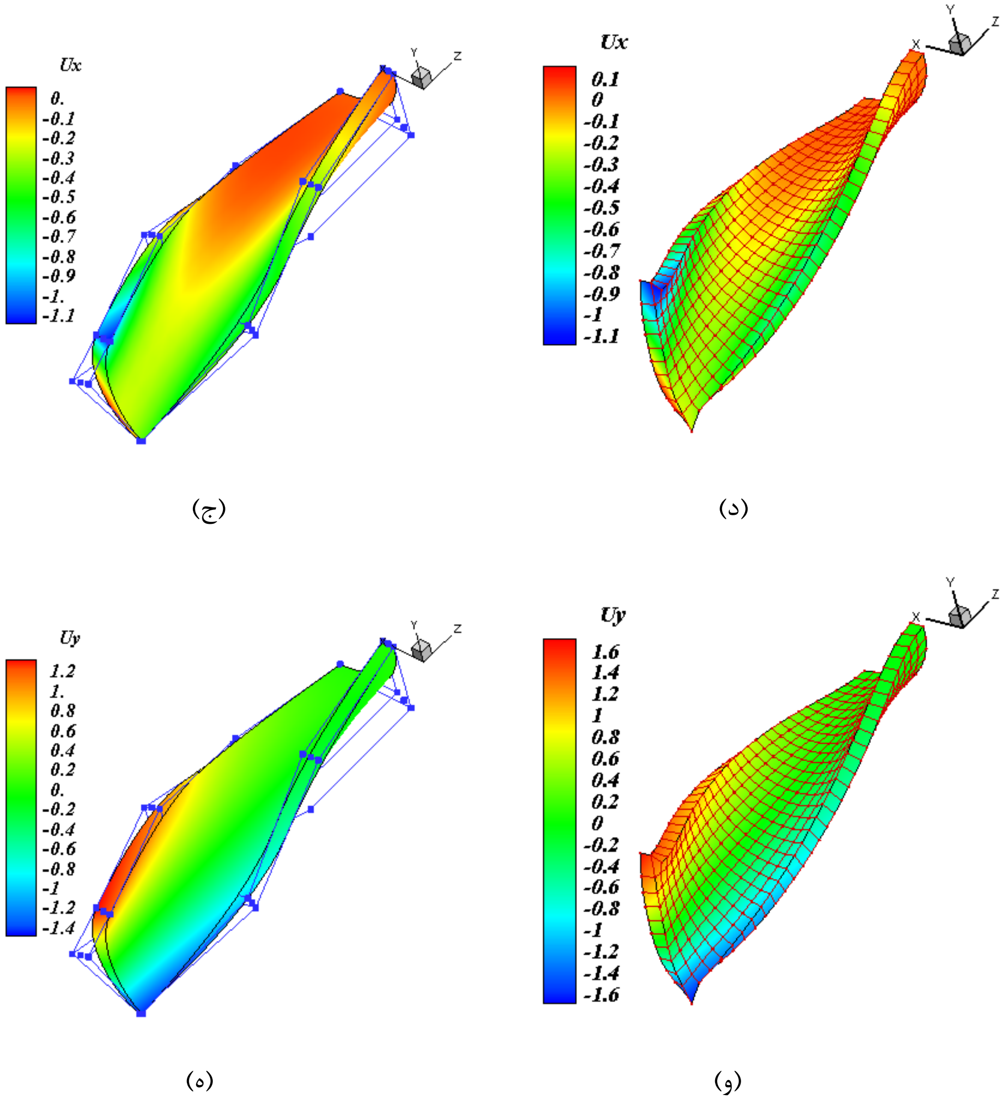
(ج)مش بندی اولیه در روش اجزای محدود



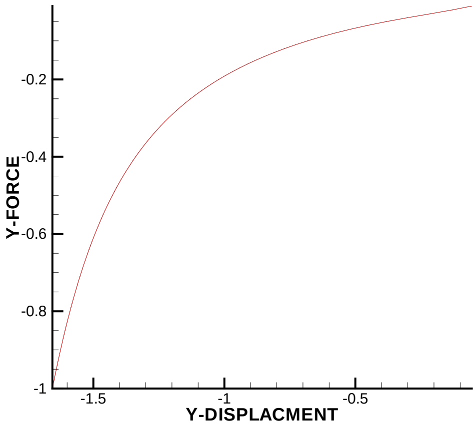
(الف)



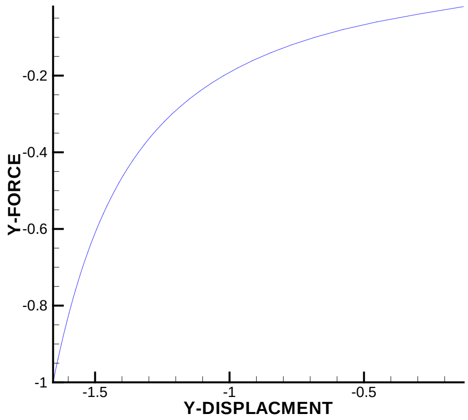
(ب)



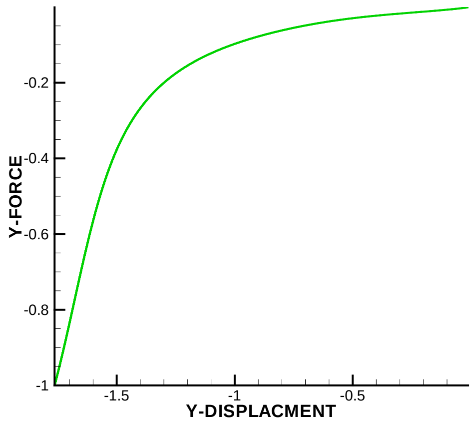
شکل۴-۶: (الف)کانتور جابجایی در راستایZ در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ب) کانتور جابجایی در راستایZ در روش اجزای محدود (ج)کانتور جابجایی در راستایX در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (د) کانتور جابجایی در راستایX در روش اجزای محدود (ه)کانتور جابجایی در راستایY در روش ایزوژئومتریک به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (و) کانتور جابجایی در راستایY در روش اجزای محدود



(الف)



(ب)



(ج)

شکل۴-۷: منحنی بار- جابجایی در راستای Y (الف)روش ایزوژئومتریک بارگذاری در ۱۰۰ مرحله (ب)روش ایزوژئومتریک بارگذاری در ۵۰ مرحله (ج)روش اجرای محدود بارگذاری در ۱۰۰۰ مرحله

با توجه به نتایج ارائه شده در این بخش بکارگیری روش اجزای محدود علاوه بر وابستگی جواب مسئله به اندازه مش که باعث ایجاد دستگاه معادلات با حجم محاسباتی بالا می‌گردد. نیاز به مش بندی مجدد نیز قابل مشاهده می‌باشد. در روش ایزوژئومتریک با توجه به استفاده از توابع پایه با قابلیت انعطاف بالا در ایجاد هندسه مدل، نیاز به فرآیند تولید مش مجدد تا حد زیادی رفع می‌شود. همچنین با استفاده از این روش ضمن ایجاد دستگاه معادلات کوچکتر و کاهش حجم محاسبات دقت یکسان نشان داده شده است.

۴-۲: ارائه چند مثال متنوع با استفاده از روش ایزوژئومتریک:

۴-۲-۱- مدل سازی نیم مخروط ناقص تحت فشار خارجی:

دراین مسئله به بررسی تاثیر نقاط گوسی در همگرایی جواب پرداخته شده است. مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله یک نیم مخروط ناقص با شعاع متوسط ابتدائی 2.9 انتهائی 0.9 ضخامت 0.2 و ارتفاع 6 می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۸ نشان داده شده است. بار در 200 مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه نربز درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,0.5,0.5,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,1,1,1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره ای A_i^3 نقطه گوسی استفاده شده است. A_i تعداد گوسی در هر راستا می‌باشد. به منظور بررسی اثر نقاط گوسی بر جواب مسئله $A_i = 3,4,6$ در نظر گرفته شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی به صورت زیر است.

$$\mathrm{P}_\xi = 5;\ \ \mathrm{P}_\eta = 3\ \ ;\ \ \mathrm{P}_\zeta = 3\quad ;\ \ P_{totall} = 45$$

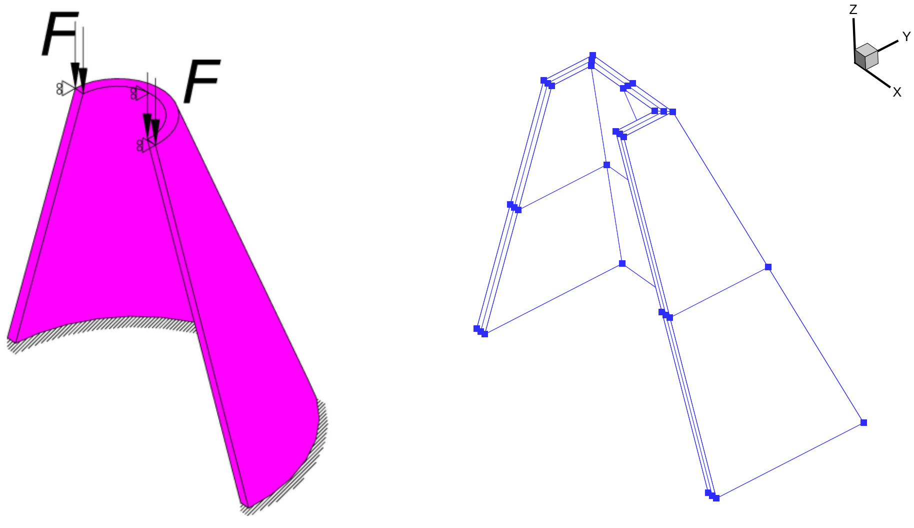
همچنین از مصالح ایزوتروپیک هایپرالاستیسیته در محدوده تراکم ناپذیری در راستای اصلی با تابع انرژی کرنشی و با پارامترهای به قرار زیر استفاده شده است. تابع انرژی کرنشی حجمی نیز $0.5\kappa(\ln J)^2$ چنین است.

$$\rho = 0\ ;\ \mu = 100\ ;\lambda = 100\ ;\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 166.67$$

$$\psi(\mathrm{C}) = \hat{\psi}(\mathrm{C}) + U(\mathrm{J})$$

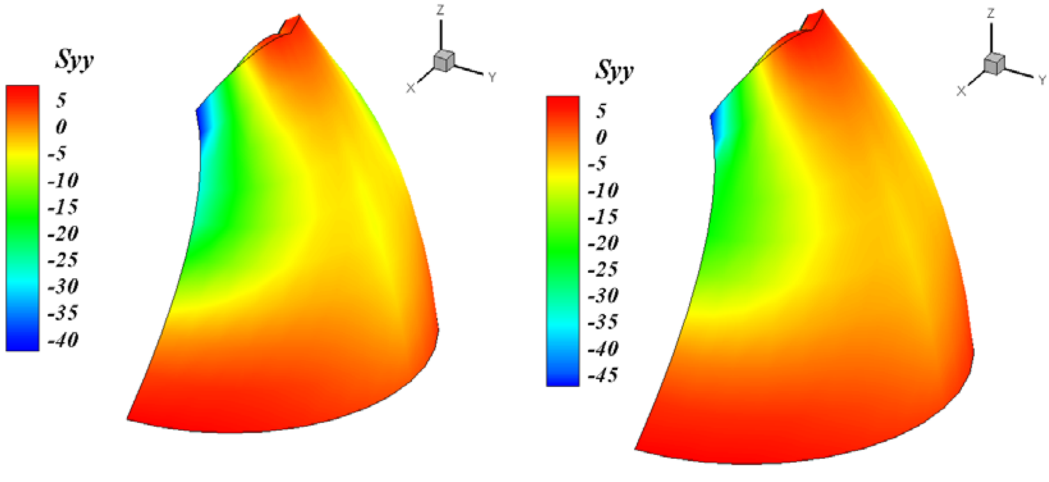
$$\hat{\psi}\left(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3\right) = \mu\left[\left(\ln\hat{\lambda}_1\right)^2 + \left(\ln\hat{\lambda}_2\right)^2 + \left(\ln\hat{\lambda}_3\right)^2\right]$$

κ مدول بالک[1] و $\{\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\hat{\lambda}_3\}$ مولفه اعوجاجی پارامترهای کشیدگی، در راستای اصلی می‌باشند.



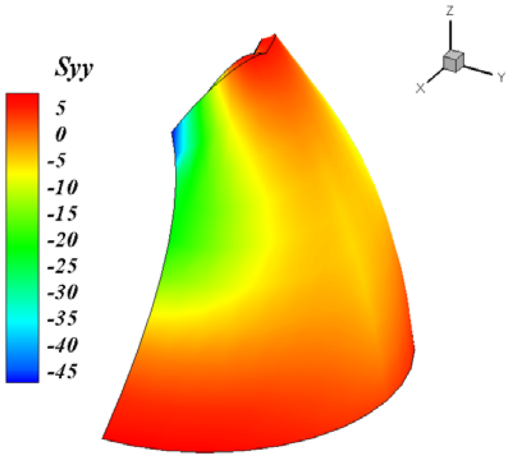
(الف) (ب)

شکل ۴-۸: تعریف مسئله۴-۲-۱ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک

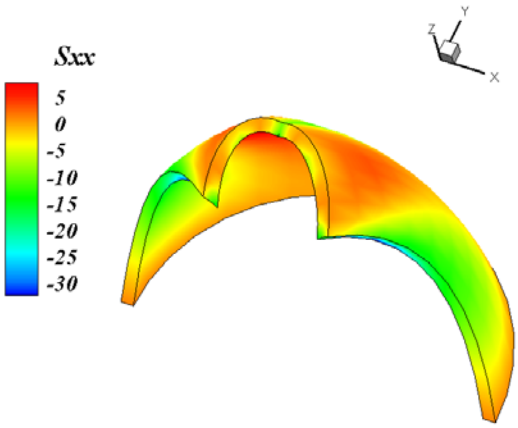


(الف) (ب)

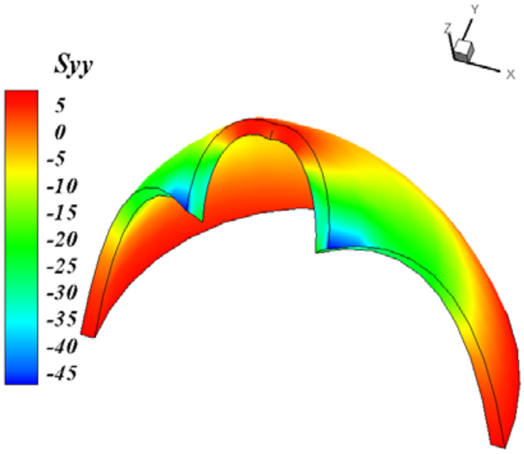
[1] Bulk Modulus


Syy
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
Z
X
Y

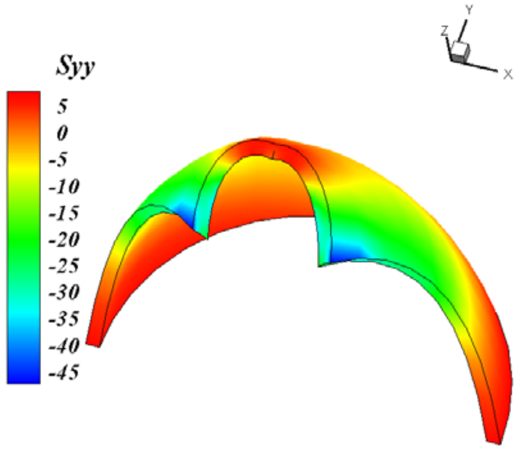
(ج)


Sxx
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
Y
Z
X

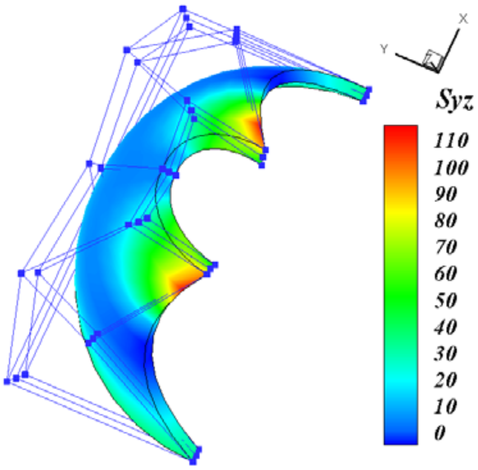
(د)


Syy
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
Y
Z
X

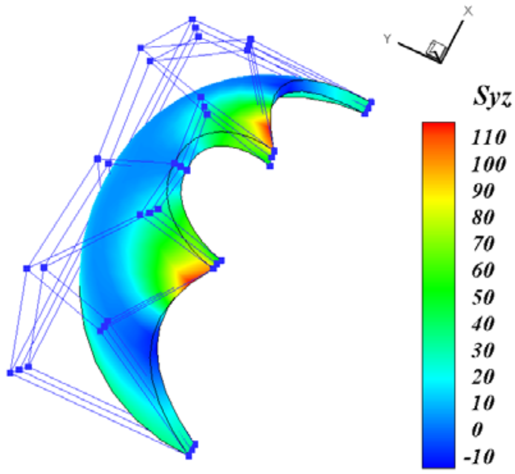
(ه)


Syy
5
0
-5
-10
-15
-20
-25
-30
-35
-40
-45
Y
Z
X

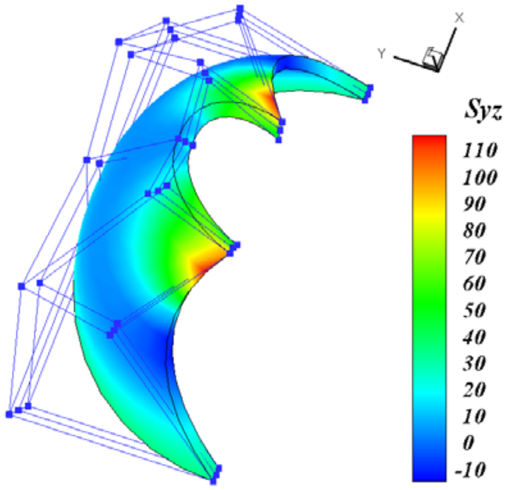
(و)



(ز)



(ح)



(ط)

شکل۴-۹: (الف)کانتور تنش σ_{yy} با ۲۷ نقطه گوسی (ب) کانتور تنش σ_{yy} با ۶۴ نقطه گوسی (ج) کانتور تنش σ_{yy} با ۲۱۶ نقطه گوسی (د)کانتور تنش σ_{xx} با ۲۷ نقطه گوسی (ه) کانتور تنش σ_{xx} با ۶۴ نقطه گوسی (و) کانتور تنش σ_{xx} با ۲۱۶ نقطه گوسی (ز)کانتور تنش τ_{xz} با ۲۷ نقطه گوسی به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ح) کانتور تنش τ_{xz} با ۶۴ نقطه گوسی به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ط) کانتور تنش τ_{xz} با ۲۱۶ نقطه گوسی به همراه شبکه کنترلی تغییریافته

با توجه به استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی در نقاط گوسی، یافتن تعداد نقاط گوسی بهینه در هر راستا بدون کاهش در دقت جواب مسئله باعث افزایش سرعت حل و کاهش زمان محاسبات می‌گردد. نتایج ارائه شده در این مثال نشان می‌دهد با مرتبه چند جمله ای $\{p = q = r = 2\}$ انتخاب 4 نقطه

گوسی در هر راستا مناسب است.

۴-۲-۲- مدل سازی صفحه خمیده تحت فشار خارجی:

دراین مسئله به بررسی تاثیر تعداد تقسیمات بار در همگرایی جواب پرداخته شده است. مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله یک صفحه خمیده با شعاع تقریبی متوسط 9 ضخامت 1 و طول 18 می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۱۰ نشان داده شده است. بار در A مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. به منظور بررسی اثر تعداد تقسیمات بار بر جواب مسئله $A = 10, 20, 50, 100$ در نظر گرفته شده است. از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

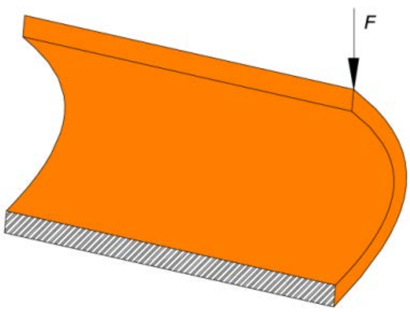
$$\xi = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,1,1,1\}, \zeta = \{0,0,0,1,1,1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

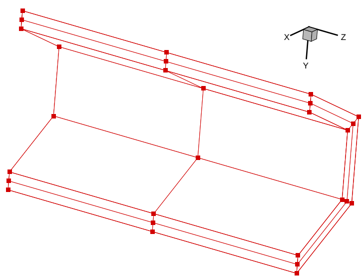
$$P_\xi = 4;\ P_\eta = 3\ ;\ P_\zeta = 3\quad ;\ P_{totall} = 36$$

همچنین از مصالح نئو- هوکین تراکم پذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(C) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$

و پارامترهای $\lambda = 100$; $\mu = 100$; $\rho = 0$ استفاده شده است.

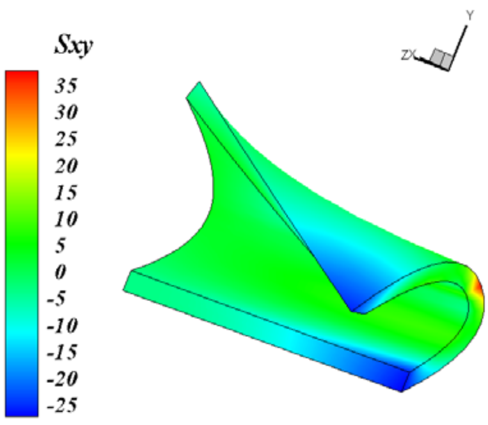


(الف)

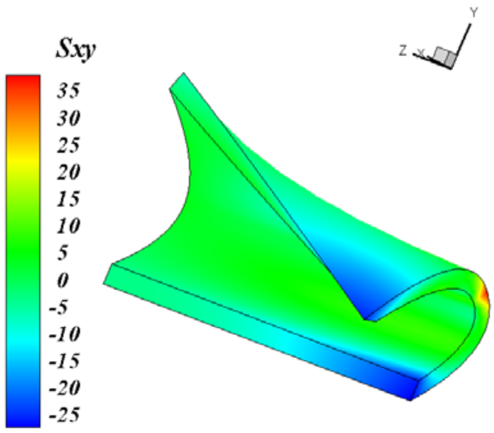


(ب)

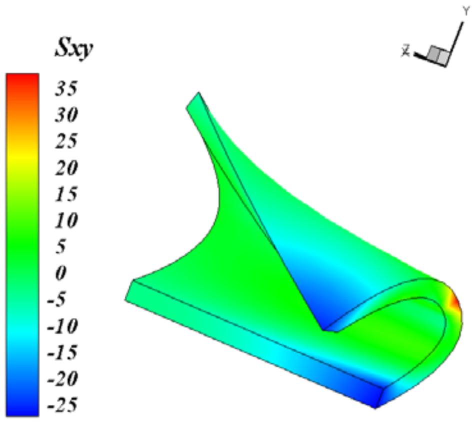
شکل ۴-۱۰: تعریف مسئله۴-۲-۲ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک



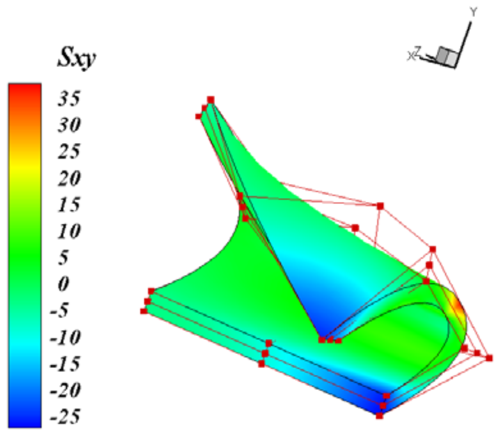
(الف)



(ب)

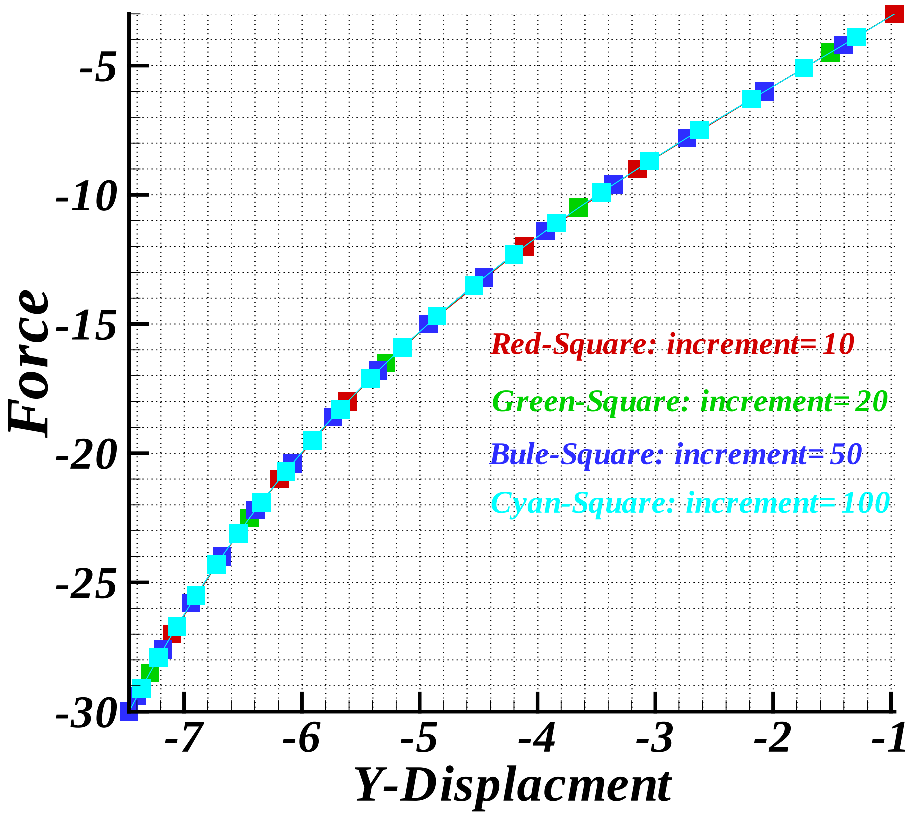


(ج)



(د)

شکل ۴-۱۱: (الف) کانتور تنش τ_{xy} با تعداد تقسمات بار=۱۰ (ب) کانتور تنش τ_{xy} با تعداد تقسمات بار=۲۰ (ج) کانتور تنش τ_{xy} با تعداد تقسمات بار=۵۰ (د) کانتور تنش τ_{xy} با تعداد تقسمات بار= ۱۰۰ به همراه شبکه کنترلی تغییریافته



شکل ۴-۱۲: نمودار بار-جابجائی در نقطه اعمال بار

با توجه به نتایج ارائه شده در این مثال در مسائل هایپرالاستیسیته جواب نهایی مستقل از تعداد تقسیمات بار می‌باشد.

۴-۲-۳- مدل سازی نیم استوانه تحت فشار خارجی:

مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، یک نیم استوانه با شعاع متوسط 2.9، ضخامت 0.2 و ارتفاع 8 می‌باشد. شرایط بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۱۳ نشان داده شده و بار در 50 مرحله، با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ ، به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه نربز درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

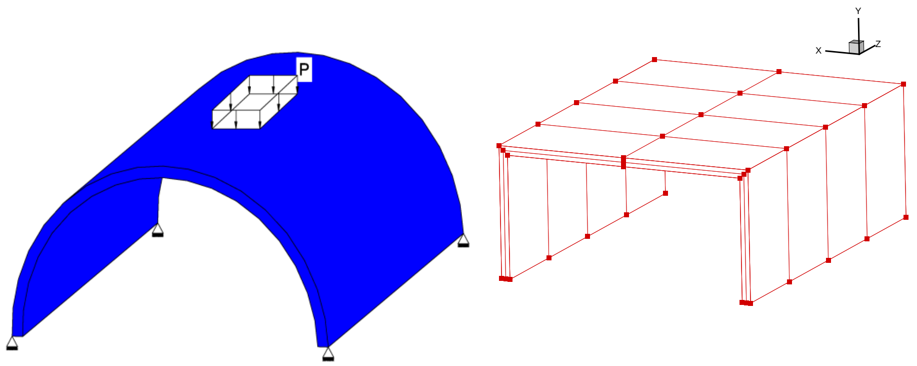
$$\xi = \{0,0,0,0.5,0.5,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,0.3,0.6,1,1,1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$P_{\xi} = 5;\ \ P_{\eta} = 3\ \ ;\ \ P_{\zeta} = 5\ \ \ \ ;\ \ P_{totall} = 75$$

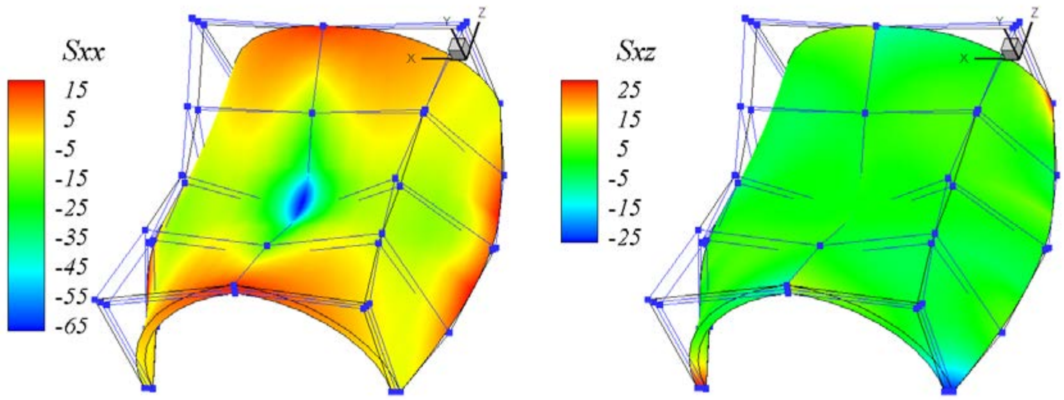
همچنین از مصالح نئو- هوکین تراکم پذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(C) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$

و پارامترهای $\lambda = 100$; $\mu = 100$; $\rho = 0$ استفاده شده است.

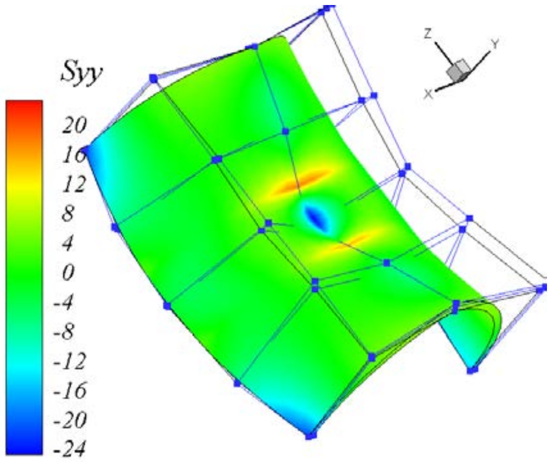


(الف) (ب)

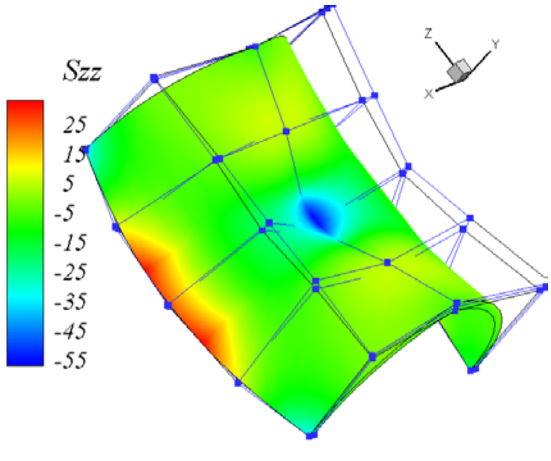
شکل ۴-۱۳: تعریف مسئله۴-۲-۳ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک



(الف) (ب)



(ج)



(د)

شکل ۴-۱۴: (الف) کانتور تنش σ_{xx} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ب) کانتور تنش τ_{xz} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ج) کانتور تنش σ_{yy} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (د) کانتور تنش σ_{zz} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته

۴-۲-۴- مدل سازی قلاب جرثقال تحت بار:

در این مسئله به بررسی تاثیر توابع انرژی کرنشی حجمی در همگرایی جواب پرداخته شده است. مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، یک قلاب جرثقال می‌باشد. شرایط بارگذاری و تکیه گاهی در شکل۴-۱۶ نشان داده شده و بار در 200 مرحله، با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ ، به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,0.13,0.26,0.39,0.52,0.65,0.78,0.91,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,1,1,1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$P_\xi = 10;\ \ P_\eta = 3\ \ ;\ \ P_\zeta = 3\ \ \ ;\ \ P_{totall} = 90$$

همچنین از مصالح ایزوتروپیک هایپرالاستیسیته در محدوده تراکم ناپذیری در راستای اصلی با تابع

انرژی کرنشی و با پارامترهای به قرار زیر استفاده شده است. توابع انرژی کرنشی حجمی مورد بحث نیز در جدول ۴-۲ ارائه شده است.

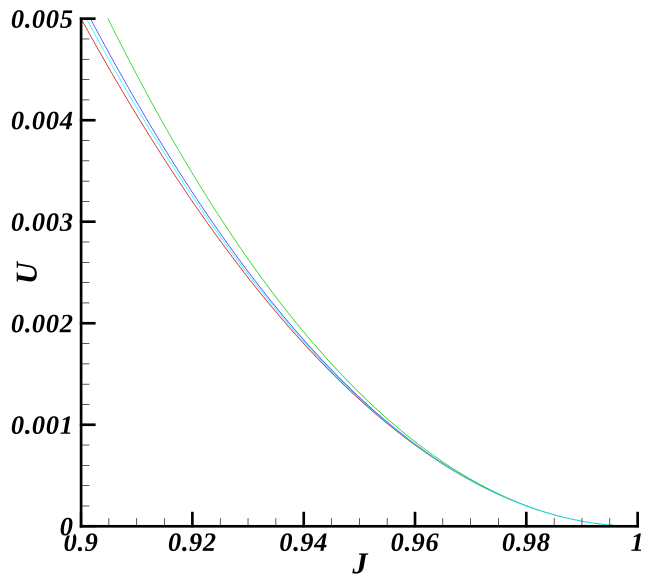
$$\rho = 0\ ;\ \mu = 100\ ; \lambda = 100\ ; \kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 166.67$$

$$\psi(\mathrm{C}) = \hat{\psi}(\mathrm{C}) + U(\mathrm{J})$$

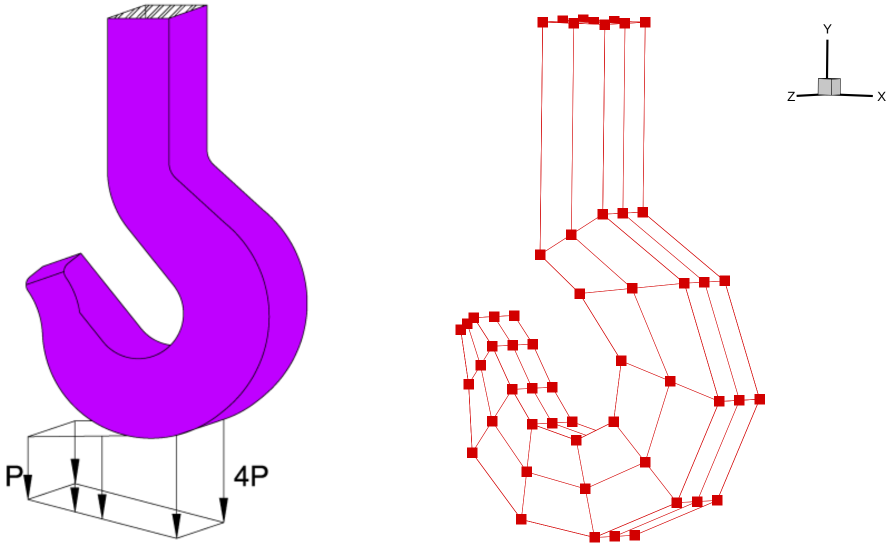
$$\hat{\psi}\left(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3\right) = \mu\left[\left(\ln \hat{\lambda}_1\right)^2 + \left(\ln \hat{\lambda}_2\right)^2 + \left(\ln \hat{\lambda}_3\right)^2\right]$$

جدول۴-۲: توابع انرژی کرنشی حجمی

number	$U_i(J)$
1	$0.5\kappa(J-1)^2$
2	$0.5\kappa(\ln J)^2$
3	$\kappa(J.\ln J - J + 1)$
4	$0.5\kappa(\mathrm{e}^{J-1} - \ln J - 1)$

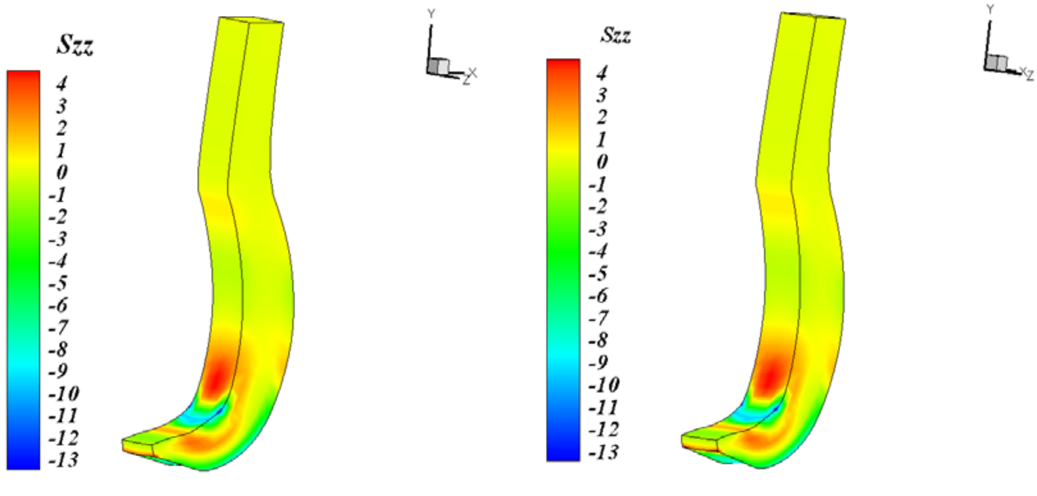


شکل۴-۱۵: نمودار انرژی کرنشی حجمی به نسبت تغییرات حجم، تابع اول قرمز، تابع دوم سبز، تابع سوم آبی و تابع چهارم آبی کمرنگ

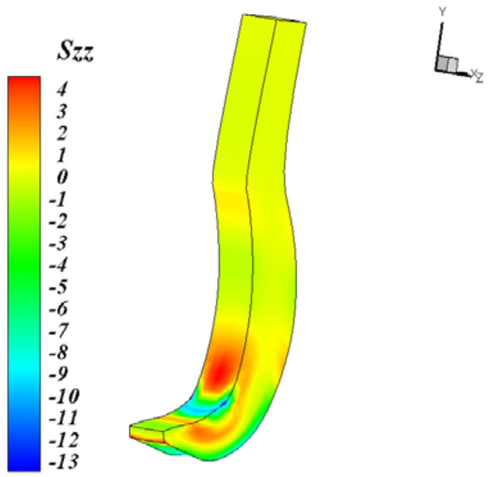


(الف) (ب)

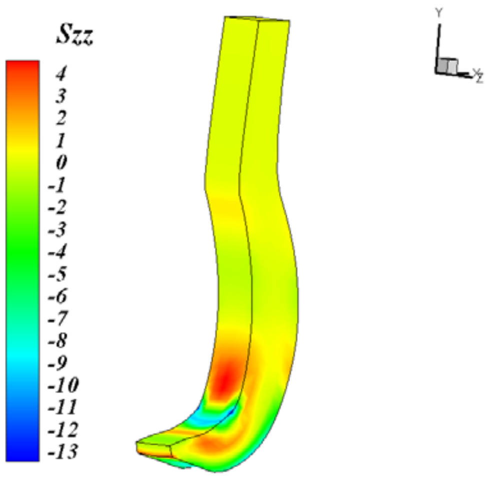
شکل ۴-۱۶: تعریف مسئله۴-۲-۴ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک



(الف) (ب)



(ج)



(د)

شکل ۴-۱۷: (الف) کانتور تنش σ_{zz} برای تابع انرژی کرنشی اول (ب) کانتور تنش σ_{zz} برای تابع انرژی کرنشی دوم (ج)کانتور تنش σ_{zz} برای تابع انرژی کرنشی سوم (د)کانتور تنش σ_{zz} برای تابع انرژی کرنشی چهارم

جدول۴-۳: حجم اولیه، حجم پایانی و نسبت تغییرات حجم

number	V_0	V_{totall}	$1/J$
1	*32.243*	*36.613*	*0.880*
2	*32.243*	*36.613*	*0.880*
3	*32.243*	*36.613*	*0.880*
4	*32.243*	*36.613*	*0.880*

۴-۲-۵- مدل سازی تیر طره تحت اثر پیچش[1]:

مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، یک مکعب مستطیل با طول 15 عرض 2 و ارتفاع واحد می‌باشد. شرایط هندسی، بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۱۸ نشان داده شده است. بارگذاری در 50 مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

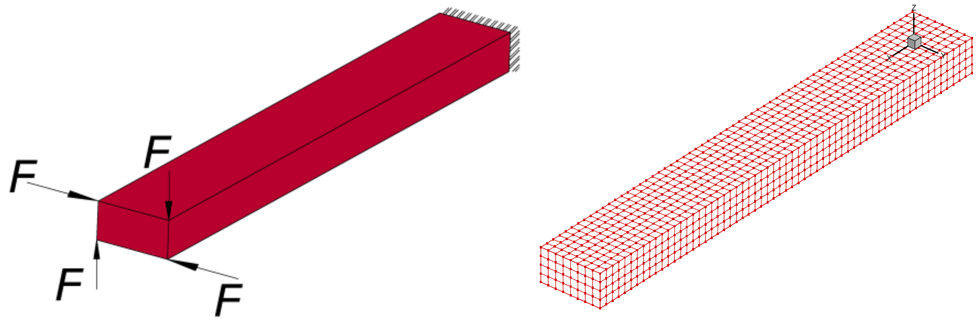
[1] Torsion

$$\xi = \{0,0,0,0.1,0.2,0.3,0.4,0.5,0.6,0.7,0.8,0.9,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,0.25,0.5,0.75,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

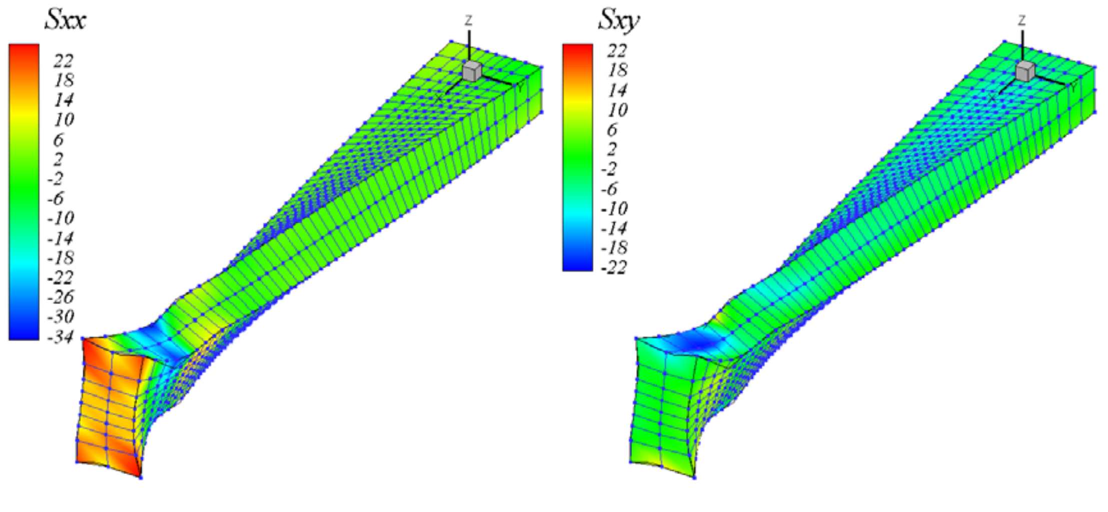
$$P_{\xi} = 12 \;\; ; \;\; P_{\eta} = 6 \;\; ; \;\; P_{\zeta} = 4 \quad ; \;\; P_{totall} = 288$$

همچنین از مصالح نئو- هوکین تراکم پذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(\mathrm{C}) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$ و پارامترهای $\lambda = 100$; $\mu = 100$; $\rho = 0$ استفاده شده است. که در آن ρ چگالی مصالح و λ, μ ضرایب لامه می‌باشند.

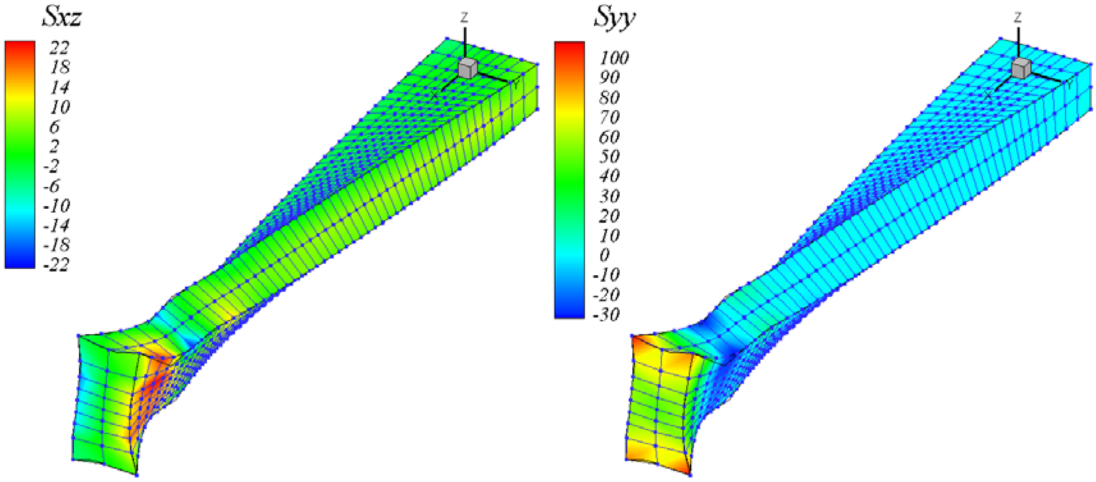


(الف) (ب)

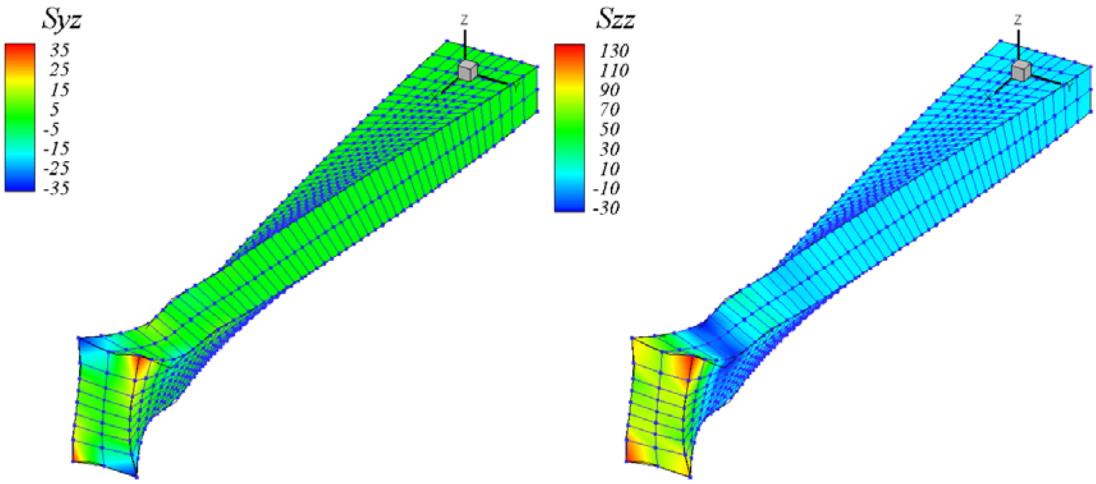
شکل ۴-۱۸: تعریف مسئله۴-۲-۵ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک



(الف) (ب)



(ج) (د)



(ه) (و)

شکل ۴-۱۹: (الف) کانتور تنش σ_{xx} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ب) کانتور تنش τ_{xy} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ج) کانتور تنش τ_{xz} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (د)کانتور تنش σ_{yy} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (ه) (ب) کانتور تنش τ_{yz} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته (و) کانتور تنش σ_{zz} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته

۴-۲-۶- مدل سازی تیر خمیده تحت اثر برش[1] و کشش[2]:

در این مسئله به بحث در انواع مواد تراکم ناپذیر در جواب مسئله پرداخته شده است. مدل تحلیلی

[1] Shear
[2] Tension

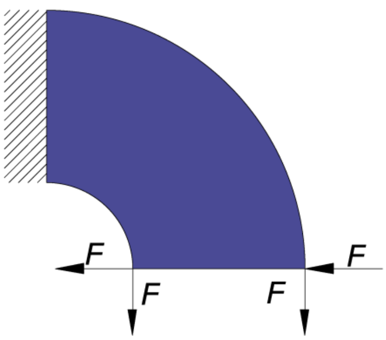
ارائه شده در این مسئله، یک تیر خمیده، با شعاع خارجی 3.0، و شعاع داخلی 2.0 می‌باشد. شرایط بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۲۰ نشان داده شده و بار در 50 مرحله، با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-10}$ ، به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,1,1,1\}$$

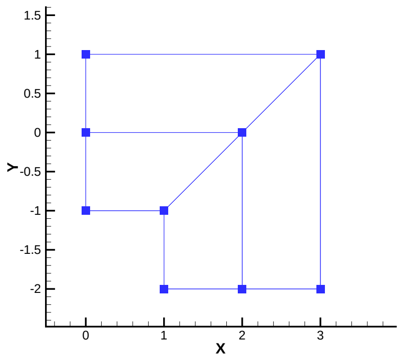
برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 16 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$P_\xi = 3;\ P_\eta = 3 \quad ; \ P_{totall} = 9$$

همچنین در تحلیل مدل اول از مصالح نئو- هوکین تراکم ناپذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(C) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3)$ و پارامترهای $thickness = 1$; $\mu = 100$; $\rho = 0$ و در تحلیل مدل دو، از مصالح ایزوتروپیک هایپرالاستیسیته تراکم ناپذیر در راستای اصلی، با تابع انرژی کرنشی $\psi(\lambda_1, \lambda_2) = \mu\left[(\ln\lambda_1)^2 + (\ln\lambda_2)^2\right]$ و پارامترهای $thickness = 1$; $\mu = 100$; $\rho = 0$ استفاده شده است.

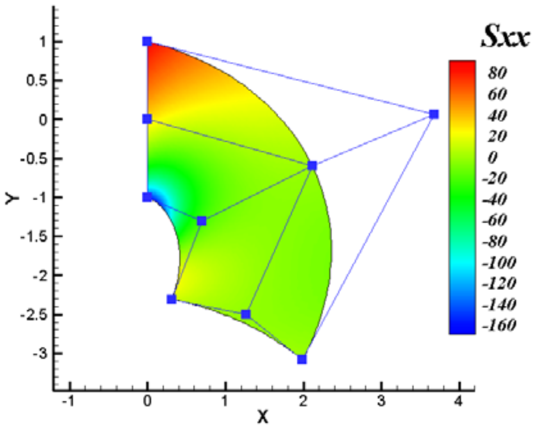


(الف)

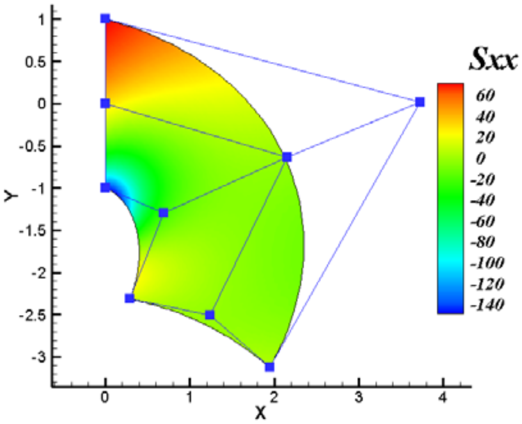


(ب)

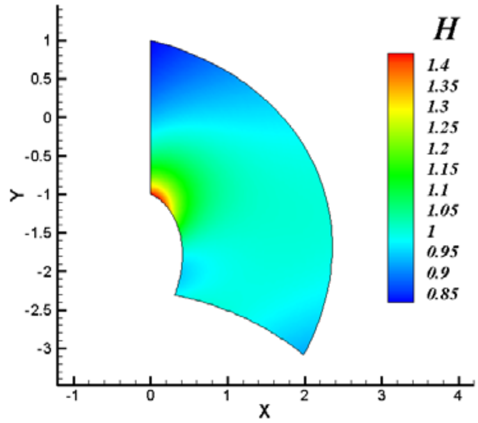
شکل ۴-۲۰: تعریف مسئله۴-۲-۶ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک



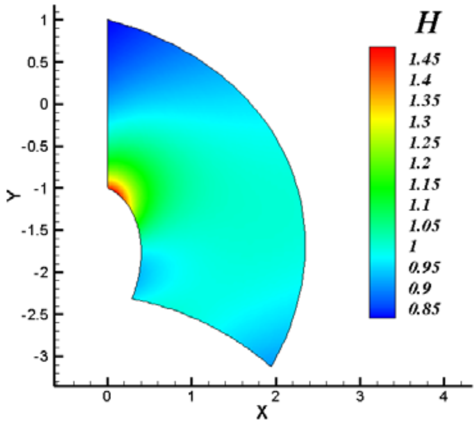
(الف)



(ب)

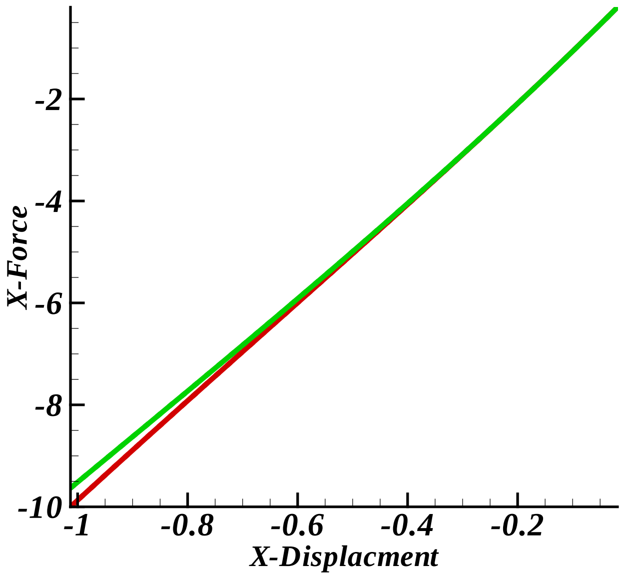


(ج)

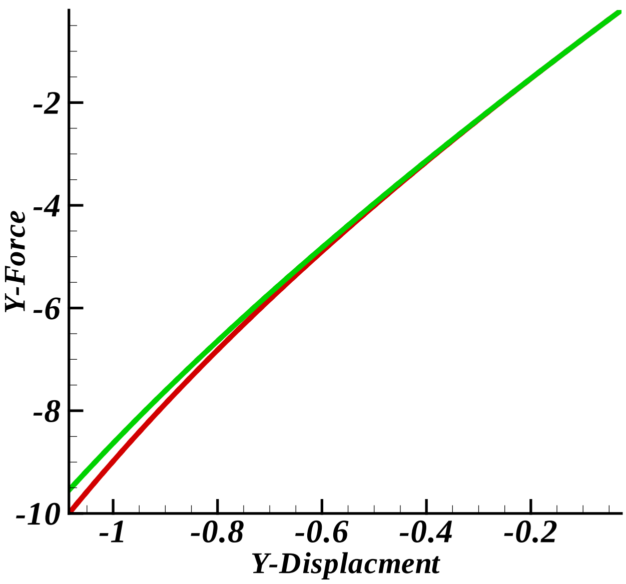


(د)

شکل ۴-۲۱: (الف) کانتور تنش σ_{xx} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته مدل اول (ب) کانتور تنش σ_{xx} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته مدل دوم (ج)تغییرات ضخامت مدل اول (د)تغییرات ضخامت مدل دوم



(الف)



(ب)

شکل ۴-۲۲: (الف) نمودار بار-جابجایی در راستای X مدل اول قرمز و مدل دوم سبز (ب) نمودار بار-جابجایی در راستای Y مدل اول قرمز و مدل دوم سبز

۴-۲-۷- مدل سازی صفحه دارای پیش خیز تحت اثر بار در مرکز صفحه:

در این مسئله پدیده تقسیم به دو شاخه شدن یا شکاف گاه[1] نشان داده شده است. هدف از طرح این مثال تنها نشان دادن قابلیت برنامه نوشته شده و نه بررسی آن می‌باشد و توجه به این مطلب که پدیده عنوان شده زیر شاخه‌ای از مسائل تغییر شکلهای بزرگ است. مدل تحلیلی ارائه شده در این مسئله، یک صفحه دارای طول و عرض 20 ضخامت 0.5 و پیش خیز 3.0 می‌باشد. شرایط بارگذاری و تکیه گاهی در شکل ۴-۲۳ نشان داده شده و بار یک بار در 50 مرحله و بار دیگر در 200 مرحله، با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times10^{-8}$ ، به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,0.142,0.285,0.428,0.571,0.714,0.857,1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,0.142,0.285,0.428,0.571,0.714,0.857,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,\ 1,1,1\}$$

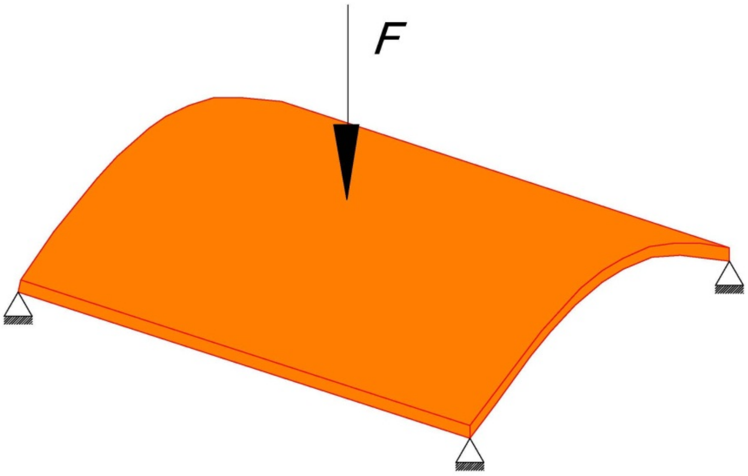
برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 27 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$\mathrm{P}_{\xi} = 9 \ ;\ \mathrm{P}_{\eta} = 9 \ ;\ \mathrm{P}_{\zeta} = 3 \quad ;\ P_{totall} = 243$$

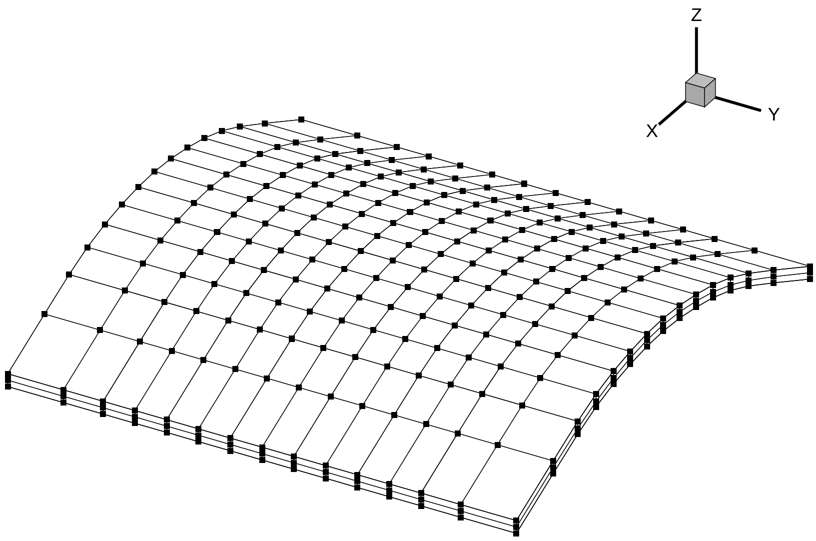
همچنین از مصالح نئو- هوکین تراکم پذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(\mathrm{C}) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$

و پارامترهای $\rho = 0 \ ;\ \mu = 100 \ ; \lambda = 100$ استفاده شده است. که در آن ρ چگالی مصالح و λ, μ ضرایب لامه می‌باشند.

[1] Bifurcation



(الف)

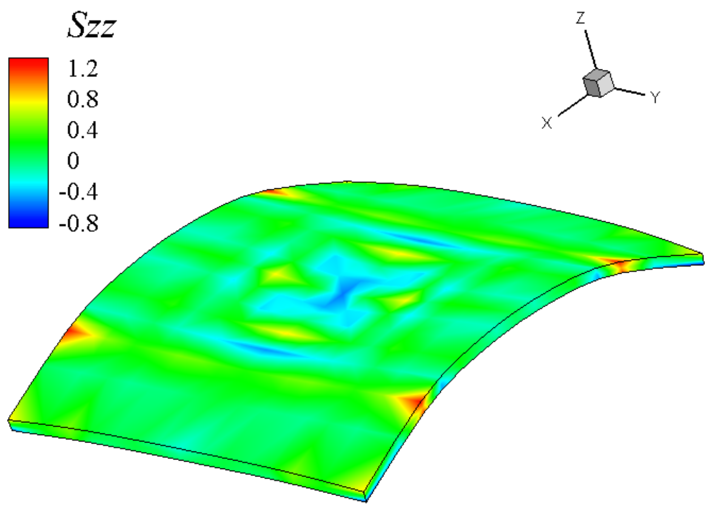


(ب)

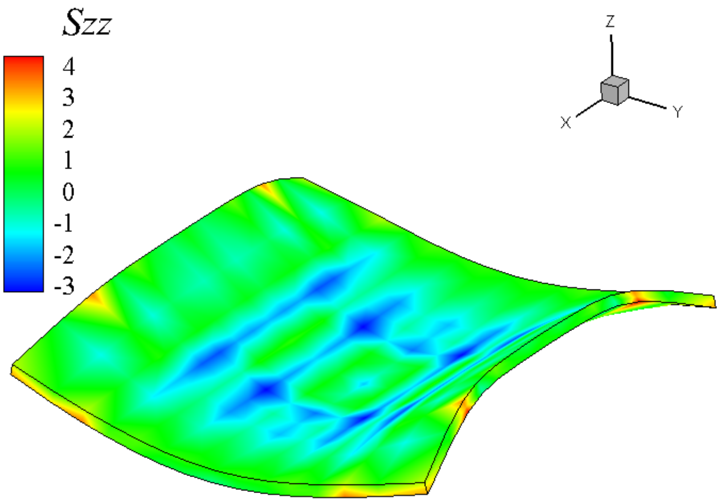
شکل ۴-۲۳: تعریف مسئله۴-۲-۷ (الف) هندسه، بارگذاری و شرایط مرزی (ب)شبکه کنترلی در روش ایزوژئومتریک

پس از دو مرتبه تحلیل با ۵۰ و ۲۰۰ مرحله اعمال بار به صورت سری افزایشی در مرتبه اول تحلیل بین مرحله ۷ تا ۸ و در مرتبه دوم تحلیل بین مرحله ۳۱ تا۳۲ شاهد پدیده تقسیم به دو شاخه شدن می‌باشیم. تغییرات شکل صفحه دارای پیش خیز در قبل و بعد مراحل نام برده شده و همچنین نمودار

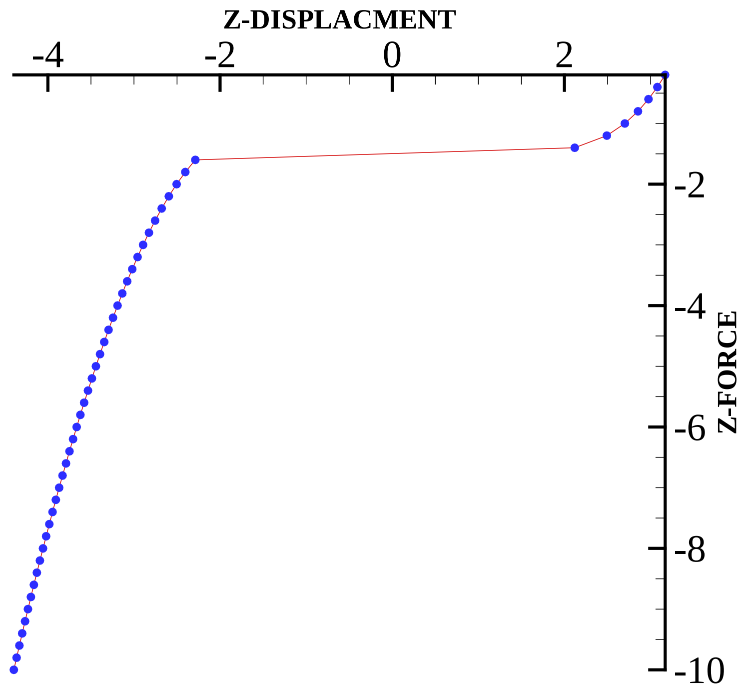
بار جابجایی و تغییر شکل نهایی کل به صورت زیر قابل گزارش می‌باشد.



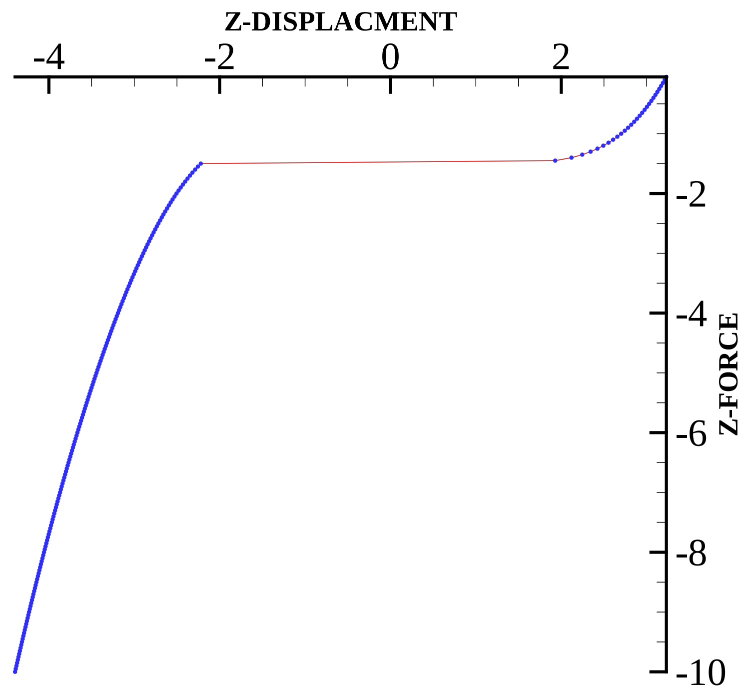
(الف)



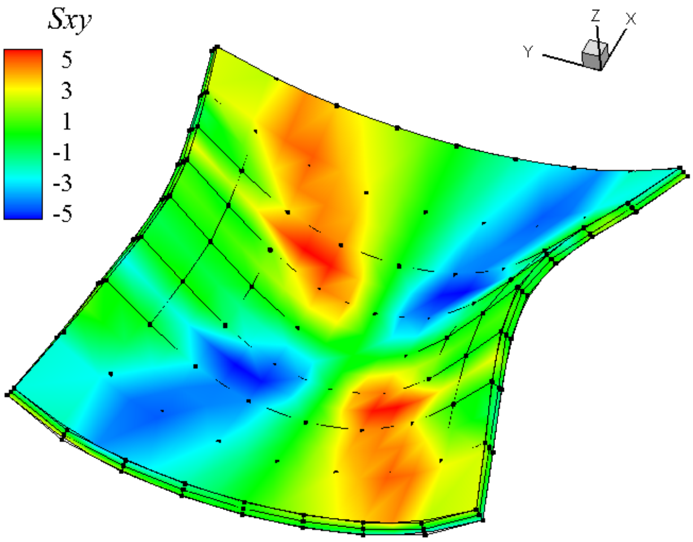
(ب)


Z-DISPLACMENT
-4
-2
0
2
-2
-4
-6
-8
-10
Z-FORCE

(ج)


Z-DISPLACMENT
-4
-2
0
2
-2
-4
-6
-8
-10
Z-FORCE

(د)



(ه)

شکل ۴-۲۴: (الف)کانتور تنش σ_{zz} به همراه شکل تغییریافته جسم قبل از وقوع پدیده (ب)کانتور تنش σ_{zz} به همراه شکل تغییریافته جسم بعد از وقوع پدیده (ج)نمودار بار-جابجایی در راستای Z برای ۵۰ مرحله بارگذاری (د)نمودار بار-جابجایی در راستای Z برای ۲۰۰ مرحله بارگذاری (ه)کانتور تنش τ_{xy} به همراه شبکه کنترلی تغییریافته و تغییر شکل نهایی جسم

فصل پنجم

نتیجه گیری

۵-۱- مقدمه

این تحقیق مشتمل بر پنج فصل می‌باشد. فصل اول به مقدمه‌ای بر روش‌های بکار گرفته شده و اهداف و فرضیات تحقیق اختصاص یافته است. در فصل دوم این تحقیق به مرور خلاصه‌ای از سینماتیک ذرات اشاره شده و روابط مربوط به تعادل بررسی و ارائه می‌شود در ادامه به فرمول‌بندی مصالح هایپرالاستیسیته پرداخته شده و ضمن بیان معادله تعادل حاکم بر مسئله، خطی‌سازی آن جهت استفاده از روش حل بر مبنای تکرار نیوتن- رافسون انجام گرفته است. در فصل سوم ضمن اشاره به مفهوم روش ایزوژئومتریک، توابع مجهول و هندسه در مسائل خطی‌سازی شده هایپرالاستیسیته توسط توابع پایه و متغیرهای کنترلی گسسته‌سازی می‌شوند. در انتهای این فصل الگوریتمی برای مسائل غیرخطی الاستیک بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتریک ارائه شده است. فصل چهارم به نتایج حل و مقایسه آن با روش اجزای محدود و حل مسائل متنوع اختصاص یافته است. در فصل پایانی نتیجه تحقیق و مقایسه انجام شده گزارش می‌شود. در قسمت ضمائم برنامه IGLAGSHYP جهت استفاده با بیان مثالی معرفی می‌گردد.

با توجه به استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک در این تحقیق به طور خلاصه مزایای این روش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

- کاهش قابل ملاحظه اندازه دستگاه معادلات حل در مقایسه با سایر روش‌های عددی با دقت یکسان.
- دقت و انعطاف پذیری بالا در تعریف هندسه و مرزهای آن.
- انعطاف پذیری بالا در فرآیند حل و عدم نیاز به مش بندی مجدد با توجه به تغییر دامنه تعریف شد مانند: مسائل بهینه سازی، مسائل با دیدگاه لاگرانژی و تغییرشکل‌های بزرگ.
- دقت بالا در تعریف شرایط مرزی در مقایسه با سایر روش‌های عددی.
- قابلیت این روش در حل مسائلی که ضرایب مشتقات معادله دیفرانسیل به صورت تابع تعریف می‌شوند. مانند مسائلی که مشخصات مواد به صورت تابعی در دامنه تغییر می‌کنند.

از جمله مشکلات این روش می‌توان به عدم قرار گیری نقاط کنترلی بر روی هندسه و جواب مسئله اشاره کرد. به بیان دیگر با معلوم بودن نقطه ای در فضای فیزیکی برای یافتن همان نقطه در فضای پارامتریک نیازمند حل دستگاه معادله ای به صورت معکوس می‌باشد.

۵-۲- جمع بندی نتایج

در این تحقیق به فرمول‌بندی مسائل غیرخطی الاستیک بر پایه روش تحلیلی ایزوژئومتریک پرداخته شده است. به این منظور یک الگوریتم جهت ایجاد الگوئی کارا در تحلیل این دسته از مسائل پیشنهاد شده است. با در نظر گرفتن روابط حاکم بر مسئله و خطی‌سازی آن، معادلات تعادل در حالت گسسته نوشته می‌شود و ماتریس ضرایب به کمک مفهوم ایزوژئومتریک استخراج می‌گردد. در ادامه نتایج روش اجزای محدود و روش ایزوژئومتریک در مسائل هایپرالاستیسیته با یکدیگر مقایسه و سپس به بررسی تاثیر تعداد نقاط گوسی، تعداد تقسیمات بار ، استفاده از توابع انرژی کرنشی حجمی مختلف و بحث در انواع مواد تراکم ناپذیر در همگرایی جواب پرداخته شده است. نتایج این تحقیق به قرار زیر است:

- با توجه به تغییرشکل های بزرگ در مسائل غیرخطی الاستیک، بکارگیری روش اجزای محدود علاوه بر وابستگی جواب مسئله به اندازه مش که باعث ایجاد دستگاه معادلات با حجم محاسباتی بالا می‌گردد، در مواردی نیاز به مش بندی مجدد اجتناب ناپذیر است.
- در روش ایزوژئومتریک با توجه به استفاده از توابع پایه اسپلاین با قابلیت انعطاف پذیری بالا در ایجاد هندسه مدل نیاز به فرآیند تولید مش مجدد تا حد زیادی رفع می‌شود.
- با استفاده از روش ایزوژئومتریک ضمن ایجاد دستگاه معادلات کوچکتر و کاهش حجم محاسبات، دقت یکسان در جوابها نشان داده شده است.
- با توجه به استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی در نقاط گوسی، یافتن تعداد نقاط گوسی بهینه در هر راستا بدون کاهش در دقت جواب مسئله باعث افزایش سرعت حل و کاهش

زمان محاسبات می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد با مرتبه چند جمله‌ای $\{p = q = r = 2\}$ انتخاب 4 نقطه گوسی در هر راستا مناسب است.

- در مسائل هایپرالاستیسیته جواب نهایی مستقل از تعداد تقسیمات بار می‌باشد.
- استفاده از توابع انرژی کرنشی حجمی مختلف برای مصالح در محدوده تراکم ناپذیری، تفاوت چندانی در جوابها نشان نداده است.

ضمائم

معرفی و ساخت فایل ورودی و خروجی برنامه $IGLAGSHYP\ V1.0$:

در این بخش به معرفی، فایل ورودی و خروجی برنامه $IGLAGSHYP\ V1.0$ پرداخته شده است. پس از اجرای برنامه دستور زیر نمایش داده خواهد شد.

$Is\ the\ problem\ starting\ from\ scratch\left(y/n\right)?$

در صورت آنکه برنامه، قبلا اجرا شده باشد و در مرحله همگرایی به جواب نرسیده باشد، فایلی حاوی اطلاعات مهم ذخیره سازی می‌شود و با انتخاب گزینه N، اطلاعات قبلی فرا خوانی می‌شود در غیر این صورت از گزینه Y استفاده می‌نمائیم. پس از انتخاب گزینه Y دستور دیگری به صورت زیر مشاهده می‌شود.

$Enter\ the\ data\ file\ name?$

نام فایل ورودی ساخته شده همراه با پسوند txt در این قسمت وارد شود. سپس با دستور زیر نام فایل خروجی جهت ذخیره نتایج تحلیل وارد خواهد شد.

$Enter\ the\ result\ file\ name?$

در ادامه شماره نقطه کنترلی، جهت ایجاد خروجی نمودار بار جابجایی وارد شود.

$Enter\ number\ of\ control\ point\ per\ draw\ P-delta?$

همانطور که در بالا ذکر شد برنامه فایل ورودی با پسوند txt که حاوی اطلاعات هندسی مانند بردارهای گره‌ای، نقاط کنترلی، وزن توابع پایه و غیره، تعریف پارامترهای مواد ایزوتروپیک و پارامترهای تحلیل است را دریافت می‌نماید و در فایل متنی دیگری ذخیره خواهد نمود. در ادامه به معرفی اطلاعات فایل ورودی و خروجی می‌پردازیم.

الف) ساخت فایل ورودی:

تمام اطلاعات مورد نیاز این بخش در جدول ۶-۱ نمایش داده شده است که به بررسی هر کدام از پارامترهای ذکر شده خواهیم پرداخت.

جدول ۶-۱: اطلاعات مورد نیاز جهت ایجاد فایل ورودی

NO	Definition
1	Name of Example(title)
2	Type of Curve(eltyp)
3	Type of method for integration(minteg)
4	Number of patch(npatch),Number of dimension(ndime)
5	(do i=1,ndime,hincr(i):divide element in every direction)
6	Number of gauss point in every direction if use gauss quadrature for integration(ngausd)
7	do i=1,number of patch(function order in number of dimension)(ξ,η,ς direction),(number of patch,function orders)
8	do i=1,number of patch(Number of Knot in number of dimension)(ξ,η,ς direction),(number of patch,number of knot)
9	do i=1,number of patch(do j=1, number of dimension)(nknot vector in every direction)
10	do i=1,number of patch [(Number of control point in every direction),(number of control point in patch)]
11	Number of difference nurbs weight (wijk=1)(do i=1,npatch)
12	(do i=1,number of patch)(do i=1,number difference nurbs weight)
13	(do i=1,number of patch)(do i=1,numberof control point in patch)
14	do i=1,number of patch(material type)(matyp)
15	do i=1,npatch(material property for every patch)(table of next sheet)
16	do i=1,npatch[if(props(i,7)=4) φ (i) , if(props(i,7)=6) α (i),β (i)]
17	number of loaded nodes(nplds),number of prescribed displacements nodes(nprs),(do i=1,ndime gravity vector)
18	(do i=1,number of loaded nodes)[(coordinate(i)),(load(k))]
19	(do i=1,number of prescribed displacment nodes)[(coordinate(i))(displacment(k))]
20	nincr:number of load(displacement), xlmax: maximum value of loadscaling parameter , dlamb: load parameter increment, miter: maximum allowed number of iteration per increment, cnorm: convergence tolerance, searc: line search parameter(if 0.0 not in use), arcln: arc-length parameter(if 0.0 not in use), incout: output counter(e.g. for every 5thincrement, incout=5), itarget: target iterations per increment,nwant: single output node(0 if not used), iwant: output degree of (freedom at nwant (0 if not used

۱- نام گذاری مسئله مورد تحلیل.

۲- انتخاب نوع تابع پایه مورد استفاده در تحلیل.

در حال حاضر مدل سازی هندسی توسط برنامه با استفاده از توابع پایه ب- اسپلاین و نربز انجام می‌پذیرد. باید توجه داشت که با انتخاب درست بردارهای گره‌ای و وزن نقاط کنترلی، تابع پایه بزیر[۱] و تابع پایه بزیر نسبی[۲] نیز حاصل خواه شد.

۳- روش انتگرال گیری انتخابی.

در حال حاضر در برنامه از روش انتگرال گیری نقاط گوسی استفاده شده است.

۴- وارد نمودن تعداد تکه‌ها و مشخص نمودن بعد[۳] مسئله.

۵- وارد نمودن تعداد تقسیمات بردار گره‌ای در هر راستا برای ایجاد خروجی گرافیکی.

۶- تعداد نقاط گوسی در هر راستا برای استفاده در تحلیل مسئله.

تعداد نقاط انتخابی در هر راستا می‌تواند بین یک تا یازده نقطه گوسی باشد.

۷- وارد نمودن شماره تکه، درجه تابع چند جمله ای پیشنهادی در هر راستا.

$$Patch_i\,, p_i\,, q_i\,, r_i\,; i\ = 1, n$$

۸-وارد نمودن شماره تکه، تعداد بردارهای گرهای در هر راستا.

$$Patch_i\,, \xi_i\,, \eta_i\,, \varsigma_i\,; i\ = 1, n$$

۹- وارد نمودن شماره تکه، شماره راستا، بردارهای گره ای راستا.

$$patch_i\,, d_j\,, [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m\,];\, j\ = 1, \dim ension;\, i\ = 1, n$$

۱۰- وارد نمودن شماره تکه، تعداد نقاط کنترلی در هر راستا، تعداد نقاط کنترلی در تکه.

$$patch_i\,, P_1, P_2, P_3, P_1 \times P_2 \times P_3;\, i\ = 1, n$$

۱۱- وارد نمودن تعداد نقاط کنترلی وزن دار هر تکه با توجه به استفاده از تابع پایه نربز.

---
[1] Bezier Basis Function
[2] Rational Bezier Basis Function
[3] Dimension

در این قسمت اگر تعداد نقاط وزن دار صفر اختیار شود نیازی به بررسی پارامتر بعدی نخواهد بود.

۱۲- وارد نمودن شماره تکه، اندیس وزن در هر راستا، وزن نقاط کنترلی.

$$patch_a, i, j, k, w_{ijk}; a = 1, n$$

۱۳- وارد نمودن شماره تکه، اندیس نقاط کنترلی، مختصات نقاط کنترلی، شرایط مرزی نقطه.

جهت وارد نمودن شرایط مرزی در برنامه از جدول ۶-۲ استفاده می‌نماییم.

$$patch_a, i, j, k, P_{xi}, P_{yj}, P_{zk}, Boundary\ Condition; a = 1, n$$

جدول ۶-۲: تعریف شرایط مرزی نقاط کنترلی

Number	Boundary Code
0	free
1	x fixed
2	y fixed
3	x+y fixed
4	z fixed
5	x+z fixed
6	y+z fixed
7	x+y+z fixed

۱۴- وارد نمودن نوع مصالح استفاده شده در هر تکه.

1: plane strain or three-dimensional compressible neo-Hookean;
3: plane strain or three-dimensional hyperelastic in principal directions;
4: plane stress hyperelastic in principal directions;
5: plane strain or three-dimensional nearly incompressible neo-Hookean;
6: plane stress incompressible neo-Hookean;
7: plane strain or three-dimensional nearly incompressible hyperelasticity in principal directions;
8: plane stress incompressible hyperelasticity in principal directions;

۱۵- وارد نمودن خصوصیات مصالح مورد استفاده برای هر تکه.

جهت وارد نمودن خصوصیات مصالح در برنامه از جدول ۶-۳ استفاده می‌نماییم.

جدول۶-۳: پارامترهای خصوصیات مواد

type	*props(1)*	*props(2)*	*props(3)*	*props(4)*	*props(5)*	*props(6)*	*props(7)*
1	ρ	μ	λ	----	----	----	----
3	ρ	μ	λ	----	----	----	----
4	ρ	μ	λ	h	----	----	----
5	ρ	μ	κ	----	----	----	function
6	ρ	μ	λ	----	----	----	----
7	ρ	μ	κ	----	----	----	function
8	ρ	μ	λ	----	----	----	----
17	ρ	μ	λ	----	τ_y	H	function

۱۶- وارد نمودن شماره تابع انرژی کرنشی حجمی از جدول ۶-۴

در صورت استفاده از مواد در محدوده تراکم ناپذیری، نیازمند تعریف تابع انرژی کرنشی حجمی به قرار زیر می‌باشد.

جدول۶-۴: توابع انرژی کرنشی حجمی

	Volumetric strain energy	*K*
NO.	U(J)	$J=v^{(e)}/V^{(e)}$
1	$0.5K(J-1)^2$	
2	$0.5K(LnJ)^2$	
3	$0.25K[(J-1)^2+(LnJ)^2]$	
4	$K\varphi^{-2}(\varphi LnJ+J^{-\varphi}-1)$	for $\varphi<-1$
5	$K(J.LnJ-J+1)$	
6	$K[(\alpha+1)^{-1}J^{(\alpha+1)}+(\beta-1)^{-1}J^{-(\beta-1)}](\alpha+\beta)^{-1}-K(\alpha+1)^{-1}(\beta-1)^{-1}$	$\alpha>0$, $\beta>1$
7	$0.5K(e^{(J-1)}-LnJ-1)$	
8	$0.5K(J-1)LnJ$	

۱۷- وارد نمودن تعداد نقاط کنترلی که نیرو بر آنها اعمال شده است همچنین تعداد نشست تکیه گاهی و بردار گرانشی.

۱۸- وارد نمودن مختصات نقطه اعمال نیرو و مقدار نیروی وارده در هر راستا.

۱۹- وارد نمودن مختصات نقطه نشست تکیه گاهی و مقدار نشست تکیه گاهی در هر راستا.

۲۰- وارد نمودن پارامترهای تحلیل:

تعداد تقسیمات بار، ضریب نهایی افزایش بار، مقدار افزایش بار در هر مرحله، مقدار تکرار برای رسیدن به همگرایی در هر گام، مقدار همگرایی، $1,1,1,1,0,0$

با استفاده از اطلاعات بالا و به عنوان نمونه ، فایلی ورودی جهت تحلیل یک تیر طره‌ای با اطلاعات زیر ایجاد می‌گردد.

مدل تحلیلی ارائه شده، یک مکعب مستطیل با طول 15 عرض 2 و ارتفاع واحد می‌باشد. بار وارد بر جسم، ناشی از وزن جسم بوده همچنین مدل در ابتدا ، در برابر جابجایی در هر سه راستا مقید شده است. بارگذاری در 10 مرحله با مقدار همگرایی $\epsilon = 1\times 10^{-10}$ به صورت سری افزایشی بر جسم وارد می‌شود. از توابع پایه ب- اسپلاین درجه $\{p = q = r = 2\}$ برای تقریب هندسه و توابع مجهول استفاده شده و بردارهای گره‌ای به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند.

$$\xi = \{0,0,0,\ 0.5,\ 1,1,1\}$$
$$\eta = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$
$$\zeta = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$$

برای انتگرال‌گیری در هر المان گره‌ای از 64 نقطه گوسی استفاده شده است. با استفاده از رابط $m = n + P + 1$ تعداد نقاط کنترلی در هر راستا به صورت زیر است.

$$P_\xi = 4\ ;\ P_\eta = 4\ ;\ P_\zeta = 4\quad ;\ P_{totall} = 64$$

همچنین از مصالح نئو- هوکین تراکم پذیر با تابع انرژی کرنشی $\psi(C) = \frac{\mu}{2}(I_C - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2}(\ln J)^2$

و پارامترهای $\lambda = 100;\ \mu = 100\ ;\ \rho = 0.5$ استفاده شده است.

```
cantilever beam
nurbs
gaussquadrature
1	3
2	2	2
4
1	2	2	2
1	7	7	7
1	1	0	0	0	0.5	1	1	1
1	2	0	0	0	0.5	1	1	1
1	3	0	0	0	0.5	1	1	1
1	4	4	4	64
0
1	1	1	1	0	0	0	7
1	2	1	1	1	0	0	0
1	3	1	1	2	0	0	0
1	4	1	1	3	0	0	0
1	1	2	1	0	1	0	7
1	2	2	1	1	1	0	0
1	3	2	1	2	1	0	0
1	4	2	1	3	1	0	0
1	1	3	1	0	2	0	7
1	2	3	1	1	2	0	0
1	3	3	1	2	2	0	0
1	4	3	1	3	2	0	0
1	1	4	1	0	3	0	7
1	2	4	1	1	3	0	0
1	3	4	1	2	3	0	0
1	4	4	1	3	3	0	0
1	1	1	2	0	0	1	7
1	2	1	2	1	0	1	0
1	3	1	2	2	0	1	0
1	4	1	2	3	0	1	0
1	1	2	2	0	1	1	7
1	2	2	2	1	1	1	0
1	3	2	2	2	1	1	0
1	4	2	2	3	1	1	0
1	1	3	2	0	2	1	7
1	2	3	2	1	2	1	0
1	3	3	2	2	2	1	0
1	4	3	2	3	2	1	0
1	1	4	2	0	3	1	7
1	2	4	2	1	3	1	0
1	3	4	2	2	3	1	0
1	4	4	2	3	3	1	0
```

1	1	1	3	0	0	2	7			
1	2	1	3	1	0	2	0			
1	3	1	3	2	0	2	0			
1	4	1	3	3	0	2	0			
1	1	2	3	0	1	2	7			
1	2	2	3	1	1	2	0			
1	3	2	3	2	1	2	0			
1	4	2	3	3	1	2	0			
1	1	3	3	0	2	2	7			
1	2	3	3	1	2	2	0			
1	3	3	3	2	2	2	0			
1	4	3	3	3	2	2	0			
1	1	4	3	0	3	2	7			
1	2	4	3	1	3	2	0			
1	3	4	3	2	3	2	0			
1	4	4	3	3	3	2	0			
1	1	1	4	0	0	3	7			
1	2	1	4	1	0	3	0			
1	3	1	4	2	0	3	0			
1	4	1	4	3	0	3	0			
1	1	2	4	0	1	3	7			
1	2	2	4	1	1	3	0			
1	3	2	4	2	1	3	0			
1	4	2	4	3	1	3	0			
1	1	3	4	0	2	3	7			
1	2	3	4	1	2	3	0			
1	3	3	4	2	2	3	0			
1	4	3	4	3	2	3	0			
1	1	4	4	0	3	3	7			
1	2	4	4	1	3	3	0			
1	3	4	4	2	3	3	0			
1	4	4	4	3	3	3	0			
1										
0.05	100	100								
0	0	0	0	-9.8						
10	10	1	25	E-10	0	0	1	2	2	1

ب) مشخصات فایل خروجی:

۱- نام مسئله مورد تحلیل.

۲- نوع تابع پایه مورد استفاده در تحلیل و روش انتگرال گیری.

۳- شماره مرحله بار و ضریب بار

۴-تعداد نقاط کنترلی

۵- شماره نقطه کنترلی، شرایط مرزی نقطه، مقدار نیرور داخلی نقطه کنترلی در هر راستا، مختصات جدید نقطه کنترلی به تعداد جمیع نقاط کنترلی.

۶- تعداد المان گره ای.

۷- نوع ماده مصرفی.

۸- شماره المان گره‌ای، شماره نقاط کنترلی موثر در آن به تعداد جمیع المان گره‌ای.

۹- شماره المان گره ای، مقدار تنش ها در هر نقطه گوسی به تعداد جمیع المان گره‌ای.

مراجع:

[1] Bathe K.J., (1996), "*Finite Element Procedures*", Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[2] Buchanan G.R., (1995), "*Schaum's Outline of Theory and Problems of Finite Element Analysis*", McGraw-Hill, New York.

[3] توکلی س.م، (۱۳۸۸)، پایان نامه دکترا:" آنالیز و بهینه سازی توپولوژی ایزوژئومتریک سازه‌ها در محیطهای پیوسته با استفاده از توابع پایه نربز"، دانشکده عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران.

[4] Courant R., (1943), "*Variational Methods for The Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations*", Bulletin of American Mathematical Society, **49**, **1-23**.

[5] Turner M.J., Clough R.W., Martin and Topp L.J., (1956), "*Stiffness and Defelection Analysis of Complex Structures*", Journals of Aeronautical Science, **23**, **805-824**.

[6] Argyris J.H., Kelsey S., (Octobr 1954 to May 1955), "*Energy Theorems and Structural Analysis*", Aircraft Engineering, Vol. **26** and **27**, Part I by Argyris J.H. and Part II by Argyris J.H. and Kelsey S.

[7] Przemieniencki J.S., (1968), "*Theory of Matrix Structural Analysis*", McGraw-Hill, New York.

[8] Zienkiewicz O.C. and Cheung Y.K., (1967) , "*The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*", McGraw-Hill, London.

[9] Tuner M.J., Drill E.H., Martin H.C. & Melosh R.J. , (1960), "*Large deflection of structures subject to heating and external load*", J. Areo. Sci., **27**, **97-106**.

[10] Kapur W.W., Hartz B.J. , (1966), "*Stability of plates using the finite element method*", Proc, ASCE, J. Engag., **92**, EM2, **177-195**.

[11] Gallagher R.J., Padlog J., "*Discrete element approach to strucural stability*", Am.Inst. Areo. & Astro. J., **1**(6),**1437-1439**.

[12] Gallagher R.J., Gellatly R.A., Padlog J., Mallet R.H., (1967), "*A discrete element procedure for thin shell instability analysis*", Am. Inst. Areo. & Astro. J., **5**(1), **138-145**.

[13] Holand I., Moan T., (1969), "*The finite element in plate buckling*", Finite Element Meth. in Stress Analysis, ed. I. Holand et al., Tapir.

[14] Argyris J.H. , (1964), "*Recent Advance in Matrix Method of Structure Analysis*",

Pergamon Press.
[15] Argyris J.H., (Octobr 1965),”*Countinua and discountinua”*, Proc, conf, Matrix Methods in Struct, mech, Air Force Inst, of Tech, Wright Patterson Air Force Base, Ohio.
[16] Oden J.T. , (1967), *“Numerical Formulation of non-linear elasticity problems”*, Proc, ASCE, J. Struct, Dir, **93**, ST3, Paper 5290.
[17] Mallet R.H., Marcal P.V., (1968), *“finite element analysis of non-linear structures”*, Proc, ASCE, J. of Struct, Dir, **94**, ST9, **2081-2105**.
[18] Oden J.T. , (November 1969), *“Finite elemnt application in non-linear structural analysis”*, Proc, Conf, on Finite elemnt Meth, Vanderbilt University Tennessee.
[19] Haisler W.E., Stricklin J.E., Stebbins F.J. , (April 1971), *“Development and evaluation of solution procedures for geometrically non-linear structural analysis by the discrete stiffnes method”*, AIAA/ASME, 12th structure, Structural Dynamics & Materials Conf, Anaheim, californa.
[20] Zienckiewicz O.C. , (1971), *”The Finite Element in Engeneering Science”*, Mc Graw-Hill, London.
[21] Brebbia C., Connor J., (1969), *“Geometrically non-linear finite element analysis”*, Proc, ASCE, J. Eng, Mech, Dir, Proc, Paper **6516**.
[22] Crisfield M.A. , (1991), *“Nonlinear finite element analysis of solids and structures”*, vol I & vol II, John Wiley & Sons.
[23] Belytschko T., Liu W.K., Moran B., (2000), *“Nonlinera Finite Element for Countinua and Structures”*, John Wiley & Sons.
[24] Wriggers P. , (2008),” *Nonlinear finite element methods”*, springer.
[25] Bonet J., Wood R.D., (2008), *“Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis, 2nd edition”* , Cambridge University Press.
[26] Piegel L., Wayne Tiller, (1996), *“The Nurbs Book ,2nd edition”*, Springer.
[27] Rogers D.F. , (2001), *“An Introduction to NURBS with Historical Perspective”*, Morgan Kaufmann Publishers.
[28] Hughes T.J.R., Cottrell J.A., Bazilevs Y. , (2005), *“Isogeometric analysis: Cad, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement”*, Comput. Meth. Appl.Mech. Engrg. **194** (39–41) **4135–4195**.
[29] Penter P.M. , (1989), *“Splines and Variational methods”*, John Wiley & Sons.
[30] Hölling K. , (2003), *“ finite elemnt methods with B-Splines”*, siam, Society for

industrial and applied mathematics Philadelphia.

[31] Cottrell J.A., Hughes T.J.R., Bazilves Y., (2009), "*Isogeometric Analysis: toward integration of CAD and FEA*", John Wiley& Sons.

[32] Elguedj T., Bazilevs Y., Calo V.M., Hughes T.J.R. , (2008), "$\overline{B}$ *and* $\overline{F}$ *projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higherorder NURBS elements*", Comput. Methods Appl. Mech. Engrag, **197**, **2732-2762**.

[33] Reddy J.N., (2008), "*An Introduction to The Continuum Mechanics With Applications*", Cabridge University Press.

[34] Michael Lai W.,Rubbin D., Krempl E., (2010), "*Introduction to Continuum Mechanics 4nd edition*", Elsevier.

[35] Nair S., (2009), "*Introduction to Continuum Mechanics*", Cabridge University Press.

[36] Gonzalez O., Stuart M., (2008), "*A First Course in Continuum Mechanics*", Cabridge University Press.

[37] Mase G., (1970), "*Theory and Problems of Continuum Mechanics*", Vol I, Vol II, Vol III, Schaums Outlines.

[38] Hassani B., Moghadam N.Z., (2009), "*Development of a new numerical method for solution of ordinary differential equations by using spine basis functions*", Technical Report No. **1015**, Shahrood University of Technology, Iran, (In Farsi).

[39] Hassani B., Moghaddam N.Z., Tavakkoli S.M. , (2009), " *Isogeometric solution of Laplace equation*" , Asian journal of Civil Engineering, **10** (5) **579-592**.

[40] Bazilevs Y., Beirao Da Veiga L., Cottrell J., Hughes T.J.R., Sangalli G. , (2006), "*Isogeometric analysis: approximation, stability and error estimates for h-refined meshes*", Math. Mod.Meth.Appl. Sci. **16** 1031–1090.

[41] Bazilevs Y., Calo V., Cottrell J., Hughes T., Reali A., Scovazzi G. , (2007), "*Variationalmultiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows*", Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.**197** (**1–4**) **173–201**.

[42] Bazilevs Y., Calo V.M., Zhang Y., Hughes T.J.R., (2006), "*Isogeometric fluid structure interaction analysis with applications to arterial blood flow*", Comput. Mech. **38** (4) **310–322**.

[43] Cottrell J.A., Reali A., Bazilevs Y., Hughes T.J.R., (2006), "*Isogeometric analysis of structural vibrations*", Comput.Meth. Appl. Mech. Engrg.**195** (**41–43**) **5257–5296**.

[44] Quinn V., Stubblefield A., (2012), *“Continuum And Solid Mechanics Concepts And Applications”*, Academic Studio.
[45] http://de.wikipedia.org/wiki/Non-Uniform_Rational_B-Spline.

Abstract:

This research work is devoted to the formulation of nonlinear elastic problems based on the isogeometric analysis method. For this purpose, a summary of the particle kinetics is reviewed and the related equilibrium equations are presented. Then, the formulation of hyperelastic materials is explained and the equilibrium equations are derived and linearized for the use of the iterative Newton-Raphson method. Since the isogeometric analysis method is employed for analysis, its basics are pointed and the discretization of unknown functions and geometry in hyperelasticity by using the NURBS basis functions and the control variables are explained. An algorithm for analysis of this category of problems is proposed and the obtained hyperelasticity results by the isogeometric analysis method are compared with finite elements. In the continuation, the effects of the number of Gauss integration points, the number of load increments, the different strain energy functions and different incompressible material on the convergence of the solution are discussed.

Key words: Isogeometric analysis, basis functions, NURBS, Hyperelasticity

Shahrood University of Technology

Faculty Civil Engineering

Geometrical Nonlinear Analysis of Plane Stress-Strain Problems by Using IGA

Mahdi Ardiani

Supervisors:

Dr. Behrooz Hassani

Dr. Seyed Mehdi Tavakkoli

Date: September 2014