بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده: عمران و معماری

گروه مهندسی عمران - گرایش سازههای هیدرولیکی

مدلینگ جریان در کانال به روش سی- بی اس

محمد سالخورده حقیقی

استاد راهنما:

دکتر رامین امینی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

اردیبهشت ۹۰

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده :عمران و معماری

گروه : عمران

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محمد سالخورده حقیقی

تحت عنوان: مدلینگ جریان در کانالها با استفاده از روش CBS در تاریخ ۱۳۹۰/۲/۲۱ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما:	امضاء	اساتید مشاور:	امضاء
نام و نام خانوادگی : دکتر رامین امینی		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
اساتید داور:	**امضاء**	**نماینده تحصیلات تکمیلی**	**امضاء**
نام و نام خانوادگی : دکتر وحید رضا کلات جاری		نام و نام خانوادگی : مهندس سیدعلی حسینی	
نام و نام خانوادگی : دکتر احمد احمدی			

تقدیم اثر

تقدیم به پدر و مادر صبور و

همسر عزیزم

به پاس تمامی مهربانیها و فداکاریهایشان......

تشکر و قدردانی

اکنون که به یاری خداوند منان توانسته ام این پایان نامه را به اتمام برسانم، جا دارد که از تمامی کسانی که به اینجانب در انجام این پژوهش یاری رسانده اند، تقدیر و تشکر نمایم.

از استاد ارجمند آقای دکتر رامین امینی که به عنوان استاد راهنما زحمات فراوانی را در انجام این پژوهش برای اینجانب متحمل شده و راهنمایی هایشان چراغ راه من در پیشرفت این تحقیق بوده است، و همچنین دوست عزیزم آقای علیرضا نجاران طوسی کمال تشکر و قدردانی را دارم.

در پایان هم از زحمات فراوان اعضای محترم خانواده ام که سختیهای فراوانی را در طول دوره تحصیل اینجانب متحمل شده اند کمال تشکر و قدردانی را می نمایم.

تعهد نامه

اینجانب محمد سالخورده حقیقی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته مهندسی عمران- سازههای هیدرولیکی، دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مدلینگ جریان در کانال به روش سی- بی- اس تحت راهنمائی دکتر رامین امینی به عنوان استاد راهنما متعهد میشوم که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجهٔ تحقیقات اینجانب بوده در صورت استفاده از نتایج دیگران، مرجع آن را ذکر نموده ام.

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود میباشد.

همچنین حقوق معنوی تمام افراد که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت شده است.

تاریخ:

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق و نشر

- کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشها و نوآوری ناشی از این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب و ...) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحوی مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این تحقیق از الگوریتم جداسازی بر پایه مشخصه یا سی- بی- اس[1] برای مدلسازی جریان در کانال ها استفاده گردیده است. این روش بر پایه المان های محدود می باشد و در سال ۱۹۹۵ توسط زینکوویچ[2] و کدینا[3] برای حل جریان سیالات ارائه گردید. برای مدلسازی جریان در کانال ها با استفاده از این روش، در این تحقیق برنامه نویسی به زبان Visual C++ انجام گرفته است. برای تحلیل المان های محدود در جامدات، معمولا از روش گالرکین استفاده می گردد که در آن توابع وزن همان توابع شکل می باشد. متاسفانه روش گالرکین در سیالات قابل استفاده نیست و سبب واگرایی نتایج می گردد. یک راه حل معمول، استفاده از روش پترو- گالرکین بالادست در امتداد خطوط جریان[4] می باشد. این روش توابع وزن را برای ترم های انتقال مشخص می نماید و در هر قدم محاسباتی باید مجددا بر اساس جهت سرعت ها محاسبه گردد. برنامه به یک ایجاد کننده مش[5] برای شبکه بندی مسائل مجهز شده است. توضیحات کامل برنامه نویسی در فصل ششم داده شده است و هم چنین کد برنامه ضمیمه گردیده است. جهت اثبات و اعتبار بخشیدن به تحقیق، جریان دو بعدی در lid- driven cavity و backward- facing step و همچنین جریان سه بعدی در دو قسمت اولیه از تانک تصفیه آب embsay contact tank در مقیاس آزمایشگاهی ۱:۸ تحلیل و آنالیز شده است. نتایج حاصل از الگوریتم سی بی اس با نتایج آزمایشگاهی و نرم افزار قوی و کاربردی انسیس[6] مقایسه گردیده اند. نتایج روش سی- بی- اس تطابق خوبی با نرم افزار انسیس و همچنین نتایج آزمایشگاهی نشان می دهد.

کلمات کلیدی:

اجزاء محدود - روش جداسازی بر پایه مشخصه - کانال – معادله ناویر استوکس – سیال تراکم ناپذیر

1- CBS-Characteristic Based Split
2- Zienkiewicz
3- Codina
4- Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG)
5- Mesh generator
6- Ansys

فهرست مطالب

فهرست شکل ها

فهرست جدول ها

فهرست علائم

نرخ برداری کرنش	$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{ij}}$
سرعت در مختصات اسکالر	u_{i}
تنش (بردار)	σ_{ij}
تنش برشی	τ_{ij}
دلتای کرونیکر	δ_{ij}
ویسکوزیته	μ
مدول برشی	G
عملگر گرادیان	$\boldsymbol{\nabla}$
عملگر دیورژانس	∇^{T}
چگالی	ρ
ثابت جهانی گاز	R
ویسکوزیته سینماتیکی	υ
عدد پکلت	pe
گرمای ویژه در فشار ثابت	c_p
گرمای ویژه در حجم ثابت	c_v
تابع شکل در گره i	N_i
عدد رینولدز	Re
کسینوس هادی بین خط قائم بر مرز و جهت x	n_x

فصل اول

مقدمه

مقدمه

ذهن بشر به دلیل محدودیت هایش نمی تواند، رفتار محیط و آفریده های پیچیده ی آن را، در یک لحظه درک کند. بنابراین فرایند تقسیم تمامی دستگاه ها به مولفه ها یا اجزاء منفردی با رفتار قابل فهم، و سپس بازسازی دستگاه اولیه از چنین مولفه هایی به منظور بررسی رفتار آن روشی است که هر مهندس، دانشمند، یا حتی اقتصاددان، به طور طبیعی از آن بهره می گیرد.

روش اجزاء محدود یا روش المان‌های محدود[1] که به اختصار FEM نامیده می‌شود، روشی عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی و نیز حل انتگرال ها است. اساس کار این روش با حذف کامل معادلات دیفرانسیل یا ساده سازی آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی، که با روشهای عددی مثل اولر حل می‌شوند، می‌باشد. در حل معادلات دیفرانسیل جزئی مسئله مهم این است که به معادله ساده‌ای که از نظر عددی پایداراست برسیم. (به این معنا که خطا در داده‌های اولیه و در حین حل آنقدر نباشد که به نتایج نا مفهوم منتهی شود). روشهایی با مزایا و معایب مختلف برای این امر وجود دارد، که روش اجزاء محدود یکی از بهترین آنهاست. این روش درحل معادلات دیفرانسیل جزئی روی دامنه‌های پیچیده، یا هنگامی که دامنه متغییر است، یا وقتی که دقت بالا در همه جای دامنه الزامی نیست بسیار مفید می‌باشد. در کاربرد اجزاء محدود برای مسائل مکانیک سیالات به چند مورد برخورد می کنیم. اول برخورد با وضعیت های جریان های تراکم ناپذیر یا تقریبا تراکم ناپذیر است و دوم که مهم تر نیز می باشد ترم های انتقال اند که نیاز ویژه ای به پردازش و تثبیت دارند. در بررسی میدان جریان گازها (تراکم پذیر) رویکرد های زیادی وجود دارد و الگوریتم های متفاوتی برای تحلیل این رده از جریان پیشنهاد می شود. همچنین اگرچه تحلیل جریان های خزشی به خوبی با آنچه که در مکانیک جامدات بیان می شود قابل انجام است، اما برای جریان های مافوق صوت و مادون صوت نیاز به بررسی های بیشتر احساس می شود.

1- Finite Element Method

الگوریتم سی بی اس که در این تحقیق از آن برای بررسی و آنالیز جریان های تراکم ناپذیر استفاده می شود توسط زینکوویچ و کدینا در سال ۱۹۹۵ ابداع شده است. این الگوریتم یک روش مناسب و دقیق برای تحلیل تمامی جریان های تراکم پذیر و تراکم ناپذیر می باشد.

فصل دوم پایان نامه به یک سری تعاریف، کلیات و پیشینه اجزا محدود و کاربردهای آن در علوم مهندسی می پردازد. در ادامه شرح مختصری راجع به روش های وردشی[1] که اساس حل، در اجزاء محدود می باشند داده می شود، و در پایان به تعدادی از مقالات محققین در ارتباط با روش سی بی اس اشاره می شود. در فصل سوم معادلات حاکم بر دینامیک سیالات (بقای جرم، بقای مومنتم و بقای انرژی) بیان می شود و سپس معادلات ناویر- استوکس برای جریان های تراکم ناپذیر (یا تقریبا تراکم ناپذیر) نشان داده می شود. فصل چهارم پایان نامه شامل، تقریب های اجزا محدود می باشد. در این فصل، تقریب های اجزا محدود در حالت های جریان دائمی و غیر دائمی (به خصوص روش خطوط مشخصه) شرح داده می شود. در فصل پنجم، شرح کاملی از الگوریتم سی بی اس بیان می شود. فصل ششم که مهمترین بخش کار می باشد به مقایسه و تحلیل نتایج عددی در غالب سه مثال عددی معتبر می پردازد. دو نمونه عددی اول که به ترتیب حفره lid-driven و backware-facing step هستند دو بعدی می باشند. نمونه عددی سوم embsay contact tank است که دو قسمت از نمونه آزمایشگاهی سه بعدی یک تانک تصفیه آب در مقیاس ۱:۸ می باشد. این تانک در کشور انگلستان ساخته شده و اکنون هم در حال کار می باشد. و در نهایت در فصل آخر نتیجه گیری و پیشنهادات برای پژوهش های آینده ارائه خواهد گردید.

1- Variable

فصل دوم

کلیات

تقریبا هر پدیده ای در طبیعت اعم از علوم زیست شناسی، زمین شناسی، یا مکانیکی را می توان با کمک قوانین فیزیک بر حسب معادلات جبری، دیفرانسیلی یا انتگرالی که ارتباط دهنده مقادیر مختلف مورد نظر هستند ، توصیف نمود . تعیین توزیع تنش در یک مخزن تحت فشار دارای سوراخ هایی با شکل های ناهمگون و تعداد زیادی تقویتی و تحت بار های مکانیکی، حرارتی و (یا) ایرودینامیک، بدست آوردن غلظت آلاینده ها در آب دریا یا در محیط و شبیه سازی هوا جهت درک و پیش بینی مکانیک تشکیل گردباد ها و طوفان ها ، مثال هایی از مسائل متعدد کاربردی مهم می باشند. بیشتر مهندسین و دانش پژوهان در مطالعه پدیده های فیزیکی با دو وظیفه عمده روبرو هستند:

۱ -تشکیل روابط ریاضی فرایند فیزیکی

۲ - تحلیل عددی مدل ریاضی

تشکیل روابط ریاضی برای یک فرایند فیزیکی نیازمند داشتن پیش زمینه در موضوعات مربوطه (برای مثال، قوانین فیزیک) و بیشتر مواقع ابزار ریاضی مشخص می باشد. تشکیل روابط به صورت عبارات ریاضی اغلب به معادلات دیفرانسیلی ختم می گردد که کمیت های مورد نظر را برای درک و (یا) طراحی فرایند فیزیکی با هم مرتبط می سازد. توسعه مدل ریاضی یک فرایند از طریق مفروضاتی در خصوص چگونگی رفتار آن فرایند میسر می گردد. در شبیه سازی عددی، ما از یک روش عددی و یک رایانه برای ارزیابی مدل ریاضی و تخمین مشخصه های فرایند بهره می گیریم. با وجود اینکه استخراج معادلات حاکم برای بیشتر مسائل چندان مشکل نیست، حل آنها به وسیله روش های تحلیلی دقیق، کاری بس دشوار است. در چنین مواقعی روش های تحلیلی تقریبی راه چاره ای را فراهم می آورند. در میان این روش ها، غالبا در ادبیات فنی روش تفاضل محدود و روش های وردشی مانند روش های ریلی – ریتز[۱] و گالرکین[۲] به کار گرفته شده اند. در تقریب تفاضل محدود یک معادله دیفرانسیل، مشتقات آن با بسط سری تیلور[۳] تابع که شامل مقادیر جواب در نقاط مجزای شبکه در دامنه می باشد، جایگزین می گردد. معادلات جبری منتجه پس از اعمال شرایط مرزی، جهت بدست آوردن

1- Rayliegh-Ritz 2- Galerkin 3- Taylor

مقادیر جواب در نقاط شبکه حل می گردند. در حل معادلات دیفرانسیل به روش وردشی، معادله به شکل انتگرال وزنی معادل درآورده می شود، آنگاه حل تقریبی روی دامنه به صورت ترکیبی خطی $\sum_j c_j \varphi_j$ از توابع تقریبی انتخابی مناسب φ_j و ضرایب نا معین c_j فرض می شود. ضرایب c_j طوری تعیین می گردند که عبارت انتگرالی معادل با معادله دیفرانسیل اصلی برقرار باشد. روش های وردشی مختلف، همچون ریلی – ریتز، گالرکین و پترو-گالرکین در انتخاب شکل انتگرال، توابع وزن و (یا) توابع تقریب با یکدیگر تفاوت دارند. روش اجزاء محدود دارای سه ویژگی اصلی است که باعث برتری آن بر دیگر روش های موجود می گردد. اول دامنه پیچیده هندسی مسئله به صورت مجموعه ای از زیر دامنه های ساده به نام اجزاء محدود عرضه می شود. دوم، توابع تقریب برای هر جزء محدود با استفاده از این نظریه ساده که هر تابع پیوسته را می توان به وسیله ترکیب خطی چند جمله ای های جبری بیان نمود، استخراج می شود. سوم، روابط جبری بین ضرایب نامنظم (به عبارت دیگر، مقادیر گرهی) به وسیله برقراری معادلات حاکم، اغلب به صورت انتگرال وزنی، برای هر جزء بدست می آید. بنابراین، روش اجزاء محدود را می توان به طور خاص، به کارگیری روش های ریلی – ریتز یا باقیمانده وزنی به صورت جزء – گون تصور نمود. در این روش، اغلب توابع تقریب به صورت چند جمله ای های جبری در نظر گرفته می شوند و پارامتر های نامعین بیانگر مقادیر جواب در تعداد محدودی از نقاط از پیش تعیین شده روی مرز و در داخل جزء به نام گره می باشند. توابع تقریب با استفاده از مفاهیم نظریه میانیابی استخراج می گردند و بنابراین توابع میانیابی نامیده می شوند. روش سی – بی – اس[1] یا روش مشخصه بر پایه جداسازی یکی از روش های اجزا محدود است که توسط زینکوویچ و تیلور ابداع شده است. سی – بی – اس روشی کاربردی و دقیق جهت مدل کردن انواع جریان های تراکم پذیر و تراکم ناپذیر می باشد.

۲-۱ تاریخچه اجزا محدود

اندیشه نمایش ناحیه ای داده شده به صورت مجموعه ای از نواحی مجزا (گسسته) منحصر به اجزاء محدود نمی باشد. آمده است که ریاضی دانان باستان مقدار π را با توجه به اینکه محیط چند ضلعی

1- Characteristic Based Split

محاط در یک دایره محیط تقریبی دایره است، تخمین زدند. آنها مقدار π را با دقت تقریبا تا ۴۰ رقم اعشار با تصور دایره به صورت چند ضلعی دارای تعداد اضلاع بسیار ولی محدود پیشگویی نمودند, در زمان معاصر این مطلب جایگاهی در تحلیل سازه ای هواپیما پیدا کرد، به طوری که برای مثال، بال ها و بدنه هواپیما به صورت همبست تقویتی های طولی، پوسته ها و صفحات برشی در نظر گرفته می شوند. در سال ۱۹۴۱ هرنیکف[۱] روش به اصطلاح پیکربندی را معرفی نمود که در آن محیط کشسان هواپیما با مجموعه میله ها و تیر ها بیان گردید[۱]. به کارگیری توابع پیوسته قطعه گون تعریف شده روی یک زیر دامنه برای تقریب تابعی نامعین را می توان در کار کورانت[۲] یافت (۱۹۴۳) که از همبست اجزاء مثلثی و اصل کمینه انرژی پتانسیل کل برای مطالعه مسئله پیچش سنت ونانت[۳] استفاده نمود[۲], اگرچه بعضی ویژگی های کلیدی روش اجزاء محدود را می توان در کارهای هرنیکف (۱۹۴۱) و کورانت (۱۹۴۳) یافت اما ارائه رسمی آن به نام آراگیریس[۴] و کلسی[۵] (۱۹۶۰)[۳] و ترنر[۶]، کلاف[۷]، مارتین[۸] و تاپ[۹] (۱۹۵۶) نسبت داده شده است[۴]. عبارت اجزاء محدود اولین بار توسط کلاف در سال ۱۹۶۰ استفاده شد[۵]. از آن هنگام، نشر آثار درباره کاربرد اجزاء محدود به صورت تصاعدی رشد نمود و امروزه تعداد بسیاری مجله علمی که تنها به نظریه و کاربرد این روش اختصاص یافته است، موجود می باشد. همراه با توسعه کامپیوتر های دیجیتالی با سرعت های بالا، کاربرد روش اجزاء محدود هم با نرخ فزاینده ای پیشرفت نمود. زینکوویچ و چانگ[۱۰] نیز تفسیر گسترده ای از این روش و قابلیت بکارگیری آن در هر مسئله عمومی میدان را ارائه داده اند. با چنین تفسیری از روش اجزاء محدود روشن گردید که معادلات اجزاء محدود را می توان با استفاده از روش باقیمانده های وزنی مانند روش گالرکین یا روش حداقل مجذورات استخراج نمود. این موضوع به ایجاد علاقه گسترده در میان ریاضی دانان کاربردی روش اجزاء محدود برای حل معادلات دیفرانسیل خطی و غیر خطی منتهی گردید. ظرف چند سال مقاله ها، گزارش کنفرانس ها و کتاب های متعددی در مورد این روش انتشار یافت. با این همه پیشرفت، امروزه روش اجزاء محدود از سوی مهندسان و دانشمندان کاربردی به عنوان یکی از ابزارهای مناسب و جا افتاده تحلیل، در نظر گرفته می شود. از جمله نرم

1- Hernikoff 2- Courant 3- Saint Venant 4- Aragyris 5- Kelsey 6- Turner 7- Clough 8- Martin 9- Topp 10- Cheung

افزارهای اجزا محدود می توان به ABAQUS ، ANSYS و NASTRAN اشاره نمود.

۲-۲ کاربرد های عمومی روش اجزاء محدود

گرچه این روش بطور وسیعی در رشته مکانیک و سازه ها به کار برده شده است ، لیکن برای حل چندین نوع دیگر از مسائل مهندسی مانند انتقال حرارت ، دینامیک سیالات ، جریان های نفوذی و میدان های الکتریکی و مغناطیسی هم به طور موفقیت آمیزی به کار برده شده است. قابلیت کاربرد عمومی این روش ، ریاضیدانان را براستفاده از این تکنیک برای حل مسائل پیچیده مقادیر مرزی و مسائل دیگر برانگیخت . قابلیت به کارگیری عمومی روش اجزاء محدود را میتوان با ملاحظه تشابهات زیادی که بین انواع مختلف مسائل مهندسی وجود دارد مشاهده نمود .

۲-۳ کاربردهای مهندسی روش اجزاء محدود

روش اجزاء محدود در ابتدا برای سازه های هواپیما توسعه یافت. اما طبیعت عمومی تئوری اجزاء محدود آن را برای طیف وسیعی از مسائل مقدار مرزی در مهندسی قابل استفاده می سازد. یک مساله مقدار مرزی آن است که در آن یک حل در گستره یک جسم به شرط ارضای شرایط مرزی مجاز (لبه ای) بر روی متغیر های وابسته یا مشتقات آنها جستجو می شود. جدول ۲- ۱ کاربرد های روش اجزاء محدود را در سه گروه اصلی مسائل مقدار مرزی شامل ۱- مسائل تعادل یا حالت دائمی یا مستقل از زمان ۲- مسائل مقدار ویژه و ۳- مسائل انتشاری یا غیر دائمی ارائه می دهد. در یک مساله تعادلی، برای مسائل مربوط به مکانیک جامدات لازم است تغییر مکان یا توزیع تنش را برای حالت پایدار بیابیم. در صورتی که موضوع یک مساله انتقال حرارت باشد باید توزیع دما یا نرخ انرژی گرمایی را بیابیم و اگر مساله مکانیک سیالات باشد توزیع سرعت یا فشار را بدست آوریم. در مسائل مقدار ویژه، زمان بطور صریح ظاهر نمی شود. این مسائل ممکن است بعنوان بسط مسائل تعادلی در نظر گرفته شود، که در آنها علاوه بر وضعیت حالت دائمی، مقادیر بحرانی پارامتر های معینی نیز باید تعیین شوند. در اینگونه مسائل اگر مساله مکانیک جامدات یا سازه ها باشد لازم است فرکانس های

طبیعی یا بارهای کمانشی و شکل مود را تعیین کنیم و چنانچه مساله مدارهای الکتریکی باشد باید مشخصه های تشدید سیستم را بیابیم. مسائل انتشاری مسائل وابسته به زمان می باشند. برای مثال این نوع از مسائل در زمینه مکانیک جامدات هنگامی پیش می آیند که ما درصدد تعیین عکس العمل یک جسم تحت اثر نیرویی باشیم که با زمان تغییر می کند و در رشته انتقال حرارت زمانی رخ می دهند که جسم تحت اثر گرمایش یا سرمایش ناگهانی واقع شود.

۲-۱جدول کاربردهای مهندسی روش اجزاء محدود

موضوع مطالعه	مسائل مقدار ویژه	مسائل تعادلی	مسائل انتشاری (غیر دائمی)
۱- سازه های مهندسی عمران	فرکانس ها و شکل مود های طبیعی سازه ها، پایداری سازه ها	تحلیل استاتیکی خرپا ها، قاب ها، ورقه های تا خورده، سقف های پوسته ای، دیوار های برشی، پل ها و سازه های بتنی پیش تنیده	انتشار امواج تنش، عکس العمل سازه ها در مقابل بار های نامنظم
۲- سازه هواپیما ها	فرکانس های طبیعی، لرزش و پایداری هواپیما ها، راکت، فضا پیما و سازه های موشکی	تحلیل استاتیکی بالها، بدنه ها ، پره های هواپیما، سازه های فضا پیما ها و موشک ها	عکس العمل سازه های هواپیما به بار های اتفاقی، عکس العمل دینامیکی هواپیما یا فضا پیما در مقابل بار های نامنظم
۳- هدایت حرارتی	-	توزیع دما در حالت دائمی در جامدات و سیالات	جریان گرمایی غیر دائمی در نازل های راکت، موتور های احتراق داخلی، تیغه های توربین، پره ها و سازه های

			ساختمانی
۴- مکانیک خاک	فرکانس ها و مودهای طبیعی سیستم مخازن سدها و مسائل تاثیر متقابل خاک - سازه	تحلیل حفاری، دیوارهای محافظ راه های زیر زمینی، مسائل تاثیر متقابل خاک – سازه و اتصالات صخره ای، تحلیل تنش در سد های خاکی، توده های لایه لایه و پی ماشین آلات	مسائل تاثیر متقابل خاک – سازه وابسته به زمان ، نفوذ غیر دائمی در خاک ها و صخره ها، انتشار موج تنش در خاک ها و صخره ها
۵- هیدرولیک ومهندسی منابع آب و هیدرودینامیک	پریود ها و مود های طبیعی حوزه های آبی کم عمق، دریاچه ها و بندرگاهها، گردش سیالات در محفظه های صلب و انعطاف پذیر	تحلیل جریان های پتانسیل، جریان های سطح آزاد،جریان های لایه مرزی، جریان های لزج،مسائل آیرودینامیکی غیر دائمی، تحلیل سازه های هیدرولیکی و سد ها	تحلیل جریان غیر دائمی سیال ومسائل انتشار امواج، نفوذ غیر دائمی درآبخیزهاومحیطهای متخلخل، دینامیک گازهای رقیق شده، جریانهای هیدرودینامیک مغناطیسی

۶- مهندسی هسته ای	فرکانس ها طبیعی و پایداری سازه های محافظ، توزیع شارنوترون	تحلیل محفظه های تحت فشار هسته ای وسازه های مربوط به آنها، توزیع دمای حالت دائمی در اجزای راکتورها	عکس العمل سازه محافظ راکتوربه بار های دینامیکی، توزیع دمای غیر دائمی در اجزای راکتور، تحلیل حرارتی و ویسکوالاستیک سازه راکتورها
۷- مهندسی پزشکی	-	تحلیل تنش کره چشم، استخوان هاو دندانها، ظرفیت تحمل بار دندان های کاشته شده و مصنوعی، مکانیک دریچه ها قلب	تحلیل ضربه ای جمجمه، دینامیک سازه های آناتومی
۸- طراحی مکانیکی	فرکانس های طبیعی وپایداری مکانیزم های چند میله ای، چرخ دنده ها وماشین های ابزار	مسائل تمرکزتنش، تحلیل تنش، مخازن تحت فشار، پیستون ها، مواد مرکب، مکانیزم های میله ای و چرخ دنده ها	مسائل ترک و شکست تحت بارهای دینامیکی

۴-۲ روش های تقریبی وردشی

روش های تقریبی وردشی شامل روشهای رایلی – ریتز، گالرکین، پترو – گالرکین[1]، حداقل مربعات[2] و تجمع محلی[3] می باشند (در ادامه به عنوان نمونه ۳ روش رایلی – ریتز،گالرکین و پترو-گالرکین به طور خلاصه شرح داده می شوند). در کلیه این روش ها، هدف یافتن حل تقریبی به شکل ترکیب

1- Petrov-Galerkin 2- Least Squares 3- Collocation Method

خطی از توابع تقریبی مناسب φ_j و پارامترهای مجهول c_j، یعنی $\sum_j c_j \varphi_j$ است. پارامترهای c_j طوری تعیین می گردند که حل تقریبی، شکل انتگرال وزنی یا شکل ضعیف[1] (شکل ضعیف، یک عبارت انتگرال وزنی معادله دیفرانسیل است که مشتق گیری بین متغیرهای وابسته و تابع وزن توزیع شده است و شرایط مرزی مسئله را شامل می گردد. برای توضیحات بیشتر به کتاب های اجزا محدود مراجعه شود.) معادله حاکم را ارضاء نماید. روش های مختلف براساس انتخاب تابع وزن w و توابع تقریبی φ_j با یکدیگر تفاوت دارند.

۲-۴-۱ – روش رایلی – ریتز

در روش رایلی – ریتز، ضرایب تقریب c_j با استفاده از شکل ضعیف مسئله به دست می آیند و انتخاب توابع وزن به وسیله $w = \varphi_j$ محدود می گردد . برای نمونه مسئله وردشی جهت به دست آوردن حل u را در نظر می گیریم، به طوریکه برای کلیه توابع به حد کافی مشتق پذیر w که شرایط مرزی روی u را ارضاء می کند رابطه زیر برقرار باشد.

$$B(w,u) = l(w) \qquad (1-2)$$

در روش رایلی – ریتز هدف یافتن حل تقریبی برای معادله فوق به صورت سری محدود زیر است.

$$u_N = \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j + \varphi_0 \qquad (2-2)$$

که ثابت های c_j ضرایب ریتز نامیده می شوند و به صورتی انتخاب می گردند که معادله (۲-۱) برای $w = \varphi_i$ (i=1,2,3,….,N) برقرار باشد. به عبارت دیگر، معادله (۲-۱) برای N انتخاب مختلف w برقرار باشد، به طوریکه N معادله مستقل جبری بر حسب c_j حاصل گردد. معادله جبری i ام با جایگذاری φ_i برای w به دست می آید

$$B\left(\varphi_i, \sum_{j=1}^{N} c_j \varphi_j + \varphi_0\right) = l(\varphi_i) \qquad (i = 1, 2, 3, \dots, N) \qquad (3-2)$$

برای توضیحات کامل تر به کتاب های اجزا محدود می توان مراجعه نمود.

۲-۴-۲ – روش باقیمانده های وزنی

۲-۴-۲-۱ کلیات.

1- weak form

روش رایلی ریتز را می توان برای کلیه مسائل شامل مسائل غیر خطی که دارای شکل ضعیف هستند، به کار برد. در این روش توابع وزن اجبارا برابر آن هایی که در تقریب مورد استفاده هستند، قرار داده می شوند . روش باقیمانده های وزنی، حالت کلی رایلی – ریتز است که در آن توابع وزن را می توان از مجموعه ای از توابع مستقل انتخاب نمود و لازمه آن تنها تعیین پارامترها به وسیله شکل انتگرال وزنی می باشد. روش باقیمانده های وزنی را می توان برای تقریب شکل انتگرال وزنی هر معادله به کار برد. از آنجا که این نوع شامل هیچ گونه شرایط مرزی معین مسئله نمی باشد، توابع تقریب باید به گونه ای انتخاب شوند که حل تقریبی تمام شرایط مرزی را ارضاء نمایند. علاوه بر آن توابع وزن را می توان مستقل از توابع تقریب انتخاب کرد.

۲-۴-۲-۲- شرح مختصر روش گالرکین

برای حالتی که تابع وزن φ_i برابر تابع تقریب Ψ_i باشد، روش باقیمانده وزنی به روش گالرکین معروف است. معادلات جبری تقریب گالرکین عبارتند از

$$\sum_{j=1}^{N} A_{ij}\, c_{ij} = F_i \qquad (4-2)$$

که

$$A_{ij} = \int \varphi_i A(\varphi_j)\, dxdy \qquad (5-2)$$

$$F_i = \int \varphi_i [f - A(\varphi_0)] dxdy \qquad (6-2)$$

(باید توجه کنیم که A_{ij} قرینه نمی باشد.)

به طورکلی، روش گالرکین مانند روش رایلی – ریتز نمی باشد. این موضوع باید با توجه به این واقعیت که روش اول از شکل انتگرال وزنی استفاده می کند در حالی که روش آخر از شکل ضعیف (یا وردشی) برای تعیین ضرایب c_j استفاده می کند، آشکار باشد. در نتیجه توابع تقریب مورد استفاده در روش گالرکین لازم است از مرتبه بالاتری نسبت به روش رایلی – ریتز برخوردار باشند. زمانیکه توابع تقریب روش گالرکین در روش رایلی – ریتز استفاده گردد روش های رایلی – ریتز و گالرکین نتایج یکسانی ارائه می کنند.

۲-۴-۲-۳- شرح مختصر روش پترو-گالرکین

این روش مشابه روش گالرکین است با این تفاوت که تابع وزن برابر با تابع تقریب نمی باشد ($\varphi_i \neq \Psi_i$).

روش های وردشی سنتی، ابزاری ساده را برای پیدا کردن حل های تقریبی ناحیه ای پیوسته برای مسائل فیزیکی فراهم می آورند. حل های تقریبی حاصل از این روش ها توابع پیوسته ای از موقعیت در دامنه می باشند. از دیدگاه کاربردی، کمبود اصلی روش های وردشی که آنها را از رقابت با روش های تفاضل محدود سنتی باز می دارد مواجهه با مشکل انتخاب توابع تقریب است. جدای از خواصی که توابع باید ارضاء نمایند، روند منحصر به فردی برای تشکیل آنها موجود نمی باشد. فرایند انتخاب زمانیکه دامنه از نظر هندسی پیچیده است و یا شرط مرزی پیچیده می باشند دشوارتر یا حتی غیر ممکن می گردد. البته روش های وردشی می توانند ابزاری قدرتمند برای بدست آوردن حل های تقریبی باشند، مشروط براین که بتوان برای تقریبا هر هندسه ای، راهی نظام یافته برای تشکیل توابع تقریب که تنها وابسته به معادله دیفرانسیل در حال حل باشد و نه شرایط مرزی مسئله پیدا نمود. این خصوصیت انسان را قادر به توسعه برنامه کامپیوتری برای دسته خاصی از مسائل، به عبارت دیگر، یک برنامه کامپیوتری چند منظوره می نمایند. از آنجا که توابع باید برای یک محدوده هندسی پیچیده تشکیل شوند، به نظر می رسد دامنه باید به صورت همبست شکل های هندسی ساده ای بیان گردد که تشکیل توابع تقریب آنها آسان تر شود. روش اجزا محدود بر پایه این اندیشه استوار شده است. در این روش، یک دامنه به وسیله مجموعه ای از اشکال هندسی ساده (اجزا) بیان می گردد و برای هر جزء از مجموعه معادله حاکم با استفاده از هر یک از روش های وردشی تشکیل می گردد. توابع تقریب به صورت نظام یافته برای هر جزء (نمونه) با استفاده از شرایط مرزی تولید می گردد.

به صورت ایده آل، یک روش محاسباتی موثر باید دارای ویژگی های زیر باشد : ۱- باید دارای شالوده ریاضی وهمچنین فیزیکی منطقی باشد (به عبارت دیگر، حل های همگرا ارائه نماید و

قابل استفاده در مسائل کاربردی باشد). ۲- نباید محدودیتی در مورد هندسه و ترکیب فیزیکی دامنه یا طبیعت (بارگذاری) داشته باشد. ۳- فرایند تشکیل روابط باید مستقل از شکل ویژه شرایط مرزی باشد. ۴- روش باید دارای انعطاف پذیری کافی برای تقریب با درجات مختلف بدون نیاز به تشکیل دوباره روابط برای کل مسئله باشد. ۵- باید دارای فرایند نظام یافته ای برای استفاده در رایانه های عددی باشد.

روش اجزاء محدود فنی است که در آن دامنه ای مشخص به صورت ترکیبی از دامنه های ساده به نام **اجزاء محدود** بیان می گردد. به طوری که امکان تشکیل منظم توابع تقریب مورد نیاز در تقریب وردشی یا باقیمانده وزنی برای حل یک مسئله روی هر جزء وجود دارد. بنابراین، روش اجزاء محدود، با روش های سنتی رایلی – ریتز ، گالرکین، حداقل مربعات، تجمع محلی و روش های باقیمانده وزنی دیگر از نظر طرز تشکیل توابع تقریب تفاوت دارد. لیکن این تفاوت عهده دار سه ویژگی روش اجزاء محدود می باشد :

۱- **تقسیم کل به جزءها.** که ارائه دامنه هایی با هندسه های پیچیده را به صورت ترکیبی از دامنه های هندسی مجاز می سازد و استخراج منظم توابع تقریب را امکان پذیر می نماید.

۲ - **استخراج توابع تقریب برای هر جزء.** توابع تقریب اغلب چند جمله ای های جبری هستند که با استفاده از نظریه میا نیابی استخراج می گردند.

۳- **همبست اجزاء.** که براساس پیوستگی حل و توازن شارهای داخلی می باشد. همبست اجزاء بیان گر مشابه گسسته دامنه اصلی و دستگاه معادلات مربوط به آن بیانگر مشابه عددی مدل ریاضی مسئله مورد تحلیل می باشد .

این سه ویژگی که گامهای اصلی استخراج روابط اجزاء محدود را تشکیل می دهند با هم ارتباط تنگاتنگ دارند. هندسه اجزا مورد استفاده برای بیان دامنه مسئله باید به گونه ای باشد که توابع تقریب را بتوان منحصرا استخراج نمود. توابع تقریب نه تنها به هندسه وابسته هستند بلکه به تعداد و محل نقاط یا گره ها در جزء و کمیت های میانیابی شده نیز بستگی دارند. روش اجزاء

محدود نه تنها بر کمبود های روشهای وردشی سنتی فائق می آید بلکه ویژگی های روش محاسباتی موثری نیز به آن اعطا شده است. گامهای اصلی موجود در تحلیل اجزاء محدود در ادامه بیان می شود.

۱- شبکه بندی (یا ارائه) دامنه مشخص به صورت ترکیبی از اجزاء محدود منتخب (این گام می تواند تا تکمیل تشکیل معادلات اجزاء محدود به تعویق افتد). الف – شبکه اجزاء محدود را به صورت اجزاء منتخب تشکیل دهید. ب- گرهها و اجزاء را شماره گذاری کنید. پ- خواص هندسی (مانند، مختصات و مساحت سطوح مقاطع) مورد نیاز برای مسئله را استخراج نمایید.

۲- استخراج معادلات برای کلیه اجزاء شبکه. معادلات جبری که ارتباط بین متغیرهای اولیه و ثانویه را در گره ها برقرار می سازد شامل ۳ مرحله می باشد: الف- باقیمانده وزنی یا شکل ضعیف معادله دیفرانسیل را تشکیل دهید. ب- شکل حل تقریبی را برای یک جزء نمونه فرض نمایید. پ- معادلات اجزاء محدود را با جایگذاری حل تقریبی در باقیمانده وزنی یا شکل ضعیف استخراج کنید. بعبارت دیگر

الف- روابط وردشی را برای معادله دیفرانسیل داده شده برای جزء نمونه بنویسید.

ب- فرض کنید متغیر وابسته نمونه u به صورت زیر داده شده است

$$u = \sum_{i=1}^{n} \left(u_i \varphi_i\right) \qquad (7-2)$$

و آن را در ۲- الف برای رسیدن به معادلات اجزا به صورت زیر جایگذاری نمایید.

$$[K^e]\{u^e\} = \{F^e\} \qquad (8-2)$$

پ- توابع میانیابی اجزا را استخراج یا در صورت موجود بودن در مراجع، انتخاب نمایید و ماتریس های اجزا را محاسبه کنید.

۳- همبست معادلات اجزا برای بدست آوردن معادلات کل مسئله. در استخراج معادلات اجزا یک جزء نمونه از شبکه را جدا کردیم و روابط مسئله وردشی (یا شکل ضعیف) را تشکیل دادیم و مدل اجزا محدود آن را ایجاد نمودیم. برای حل مسئله باید اجزا را در محل اصلی خود قرار دهیم. برای انجام

این عمل قبل از شبکه بندی، پیوستگی متغیرهای اولیه و توازن متغیر های ثانویه در گره های اتصال بین اجزا را اعمال می نماییم. در اینجا منظور از پیوستگی بین متغیرهای اولیه طبیعت تک مقداری حل می باشد و منظور از توازن متغیرهای ثانویه تعادل منابع نقطه ای در محل اتصال چند جزء می باشد. بنابراین همبست معادلات اجزا با اعمال ۲ شرط زیر انجام می پذیرد: ۱- پیوستگی متغیرهای اولیه در گره های متصل به هم:

$$u_{\mathrm{n}}^{\mathrm{e}} = u_1^{\mathrm{e}+1} \qquad (9-2)$$

به عبارت دیگر، آخرین مقدار گرهی جزء e با اولین مقدار گرهی جزء مجاور e+1 یکسان می باشد.

۲- توازن متغیرهای ثانویه در گره های متصل به هم

$$Q_n^e + \mathrm{Q}_1^{\mathrm{e}+1} \begin{cases} 0 & \text{چنانچه منبع خارجی ای نقطه اعمال نشود} \\ \mathrm{Q}_0 & \text{چنانچه منبع خارجی ای نقطه به مقدار } \mathrm{Q}_0 \text{ اعمال گردد} \end{cases}$$

$$(10-2)$$

بطور خلاصه :

۳- الف- شرایط پیوستگی بین اجزا را از میان متغیرهای اولیه با ارتباط دادن گره های اجزاء به گره های مطلق مشخص نمایید.

۳- ب- شرایط تعادل بین متغیرهای ثانویه (روابط بین مولفه های منبع یا نیروی محلی و مولفه های منبع مطلق معین) را مشخص کنید.

۳- پ- معادلات اجزا را با استفاده از ۳-الف و ۳- ب همبست نمایید.

۴- اعمال شرایط مرزی مسئله

۵- حل معادلات همبست شده

۶- پس پردازش نتایج. حل معادلات اجزا محدود، مقادیر گرهی مجهولات اولیه (برای مثال جابجایی ،سرعت یا دما) را ارائه می نماید. پس پردازش نتایج شامل یک یا چند مورد زیر می باشد:

الف - محاسبه هر یک از متغیرهای ثانویه (برای مثال تغییرات حل).

ب - میانیابی نتایج برای تایید اینکه حل معقول است (درک فرایند فیزیکی و تجربه ، زمانی که حل های دیگر برای مقایسه موجود نیست،راه گشا است).

پ - ارائه نتایج به صورت جدول یا تصویری.

نکته : سه منبع خطا وجود دارد که می توانند در عدم دقت حل اجزاء محدود مسئله شرکت داشته باشند. ۱- خطای تقریب دامنه، که به واسطه تقریب دامنه می باشد. ۲- خطاهای محاسباتی، که به علت محاسبه غیر دقیق ضرایب K_{ij}^{e} و f_{i}^{e} می باشد یا به خاطر محدودیت محاسباتی در کامپیوتر ایجاد می گردند. ۳- خطای تقریب، که به علت تقریب حل به وسیله ی چند جمله ای های قطعه گون می باشد.

۲-۵ پیشینه ای از روش CBS

مبحث جداسازی در ابتدا توسط چورین[1] مطرح شد[۶]، [۷] که البته این جداسازی فقط شامل جریان های تراکم ناپذیر در بحث تفاضل های محدود بود. پس از آن محققین دیگری توانستند جداسازی فرمول را برای المان های محدود جهت کاربردهای مختلف جریان های تراکم ناپذیر بسط دهند[۸] الی [۱۷]. اما در سال ۱۹۹۵ زینکوویچ وکدینا [۱۸] و [۱۹] الگوریتم جدیدی را جایگزین روش های تیلور – گالرکین (یا لاکس – وندروف) که برای جریان های تراکم پذیر به کار می رفتند، نمودند. زینکوویچ و کدینا الگوریتم جدید را به کمک روش مشخصه گالرکین به هر ۲ حالت تراکم پذیر و تراکم ناپذیر و مسائل آب های سطحی در هر دو محدوده مافوق صوت و مادون صوت تعمیم دادند[۲۰] الی [۲۳]. روش چورین [۶]و [۷]هرگز برای حالت کاملا صریح نمی تواند به کار رود اما فرمول های جدید در هر ۲ حالت صریح و نیمه ضمنی نیز برای جریان های کاملا تراکم پذیر به کار می روند.

در ادامه برای نشان دادن کاربرد وسیع روش CBS در علوم مهندسی بخصوص زمینه مکانیک سیالات به گزیده ای از فعالیت های محققین که در این زمینه اشاره می شود.

در سال ۱۹۹۸، ماساروتی[2]، نیتیاراسو[3] و زینکوویچ، به کمک روش سی- بی- اس مسئله انتقال گرما

1- Chorin 2- Massarotti 3- Nithiarasu

در هر دو حالت جریان تراکم پذیر و تراکم ناپذیر را بررسی کردند[۲۲]. نیتیاراسو در سال ۲۰۰۲، به بررسی شرایط مرزی برای استفاده در روش سی- بی- اس پرداخت[۲۵] یک سال بعد به کمک همین روش تراکم پذیری مصنوعی را برای جریان تراکم ناپذیر بررسی کرد [۲۶] و در سال ۲۰۰۴ به همراهی ماتور[1]، مورگان[2] و ویدریل[3] به محاسبه جریان های تراکم ناپذیر سه بعدی به روش سی- بی- اس در مسائل هم دما و غیر هم دما، و بررسی جریان در محیط های متخلخل پرداخت[۲۷]. نیتیاراسو در همین سال جریان عبوری از سیلندر مدور در مدل آزمایشگاهی Oldroyd-B را با نتایج حاصل از روش سی بی اس مقایسه نمود[۲۸].در ادامه این محقق به کمک لیو[4] آنالیز جریان تراکم ناپذیر مغشوش را نیز بررسی کرد[۲۹]. از دیگر کارهای نیتیاراسو در زمینه سی بی اس میتوان به حل معادلات ALE برای جریان سطح آزاد بدون شکست در سال ۲۰۰۵[۳۰] اشاره کرد. غدیر[5] و همکاران در سال ۲۰۰۴ آنالیز و شبیه سازی جریان برای flip-chip cavity را به روش سی بی اس انجام دادند[۳۶]. بونمارلت[6] و همکاران در سال ۲۰۰۵ با ترکیب الگوریتم سی- بی- اس و مش مناسب به آنالیز جریان های فوق سریع تراکم پذیر پرداختند[۳۱]و در سال ۲۰۰۶ با بررسی جریان عبوری از داخل سیلندر به روش سی- بی- اس، کاربرد و دقت این الگوریتم را برای جریان لزج تراکم ناپذیر اثبات کرده است[۳۲]. موراندی[7] و ونتورین[8] در سال ۲۰۰۶ بررسی و آنالیز مسئله حرکت آب ناشی از جزر و مد در تالاب ونیز[9] را انجام دادند[۳۳]. موارد زیادی دیگری[۳۴]، [۳۵] نیز وجود دارد که در اینجا به ذکر همین تعداد بسنده می شود.

1- Mathur 2- Morgan 3- Weatherill 4- Liu 5- Quadir 6- Boonmarlet
7- Morandi 8- Venturin 9- Venice

فصل سوم

معادلات حاکم بر دینامیک سیالات

۳-۱ معادلات حاکم دینامیک سیالات[۳۷-۴۴]

۳-۱-۱ تنش ها در سیالات

مشخصه مهم سیال زمانی که در حال سکون می باشد، ناتوانی آن در تحمل تنش های برشی می باشد. سیال فقط در هنگام حرکت قادر به تحمل برش می باشد و بنابراین سرعت حرکت، عامل اصلی در تعیین تنش در سیالات می باشد.

اگر جهت های x، y و z را به ترتیب با ۱، ۲و ۳ نشان دهیم، برای نمایش اندیسی سرعت خواهیم داشت:

$$u_i \qquad i = 1,2,3 \tag{1-3}$$

نرخ های کرنش عامل اصلی در ایجاد تنش های اصلی σ_{ij} می باشند و این کرنش ها به صورت زیر بیان می گردد.

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{{\partial u_i}/{\partial x_j} + {\partial u_j}/{\partial x_i}}{2} \tag{2-3}$$

معادله فوق، تعریف تانسوری نرخ کرنش است، اما برای استفاده در فرم وردشی، به صورت برداری که استفاده مناسب تری در آنالیز اجزاء محدود دارد نوشته می شود. بنابراین نرخ کرنش برداری $\dot{\varepsilon}_{ij}$ را به صورت زیر نشان می دهیم.

$$\dot{\varepsilon}^T = [\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, 2\dot{\varepsilon}_{12}] = [\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\gamma}_{12}] \tag{3-3}$$

کرنش های فوق به صورت ۲ بعدی است و به راحتی به صورت ۳ بعدی زیر قابل بیان است.

$$\dot{\varepsilon}^T = [\dot{\varepsilon}_{11}, \dot{\varepsilon}_{22}, \dot{\varepsilon}_{33}, 2\dot{\varepsilon}_{12}, 2\dot{\varepsilon}_{23}, 2\dot{\varepsilon}_{31}] \tag{4-3}$$

زمانی که از شکل برداری نرخ کرنش استفاده می کنیم می توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم

$$\dot{\varepsilon} = Su \tag{5-3}$$

S عملگر بردار یکه می باشد و u سرعت داده شده در رابطه (۳-۱) می باشد. روابط بین تنش و کرنش در یک سیال خطی (نیوتنی) و ایزوتروپ نیازمند در نظر گرفتن دو مورد زیر می باشد. نخست، ارتباط دادن تنش های انحرافی τ_{ij} با نرخ های کرنش انحرافی

$$\tau_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \delta_{ij}\frac{\sigma_{kk}}{3} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \delta_{ij}\frac{\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) \qquad (6-3)$$

در معادله فوق به δ_{ij} ، دلتای کرونیکر[1] گفته می شود

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (7-3)$$

همچنین اندیس های تکراری بیانگر عملگر جمع می باشند.

$$\sigma_{ii} \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \qquad (8-3)$$

و

$$\dot{\varepsilon}_{ii} \equiv \dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33} \qquad (9-3)$$

ضریب μ بیانگر الاستیسیته دینامیکی یا به عبارت ساده تر ویسکوزیته می باشد، که البته مشابه با مدول برشی G در الاستیسیته می باشد. و دوم، رابطه بین تغییرات تنش های اصلی و نرخ های کرنش حجمی می باشد.

$$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = -k\dot{\varepsilon}_{ii} + p_0 \qquad (10-3)$$

k ضریب ویسکوزیته حجمی است و مشابه با مدول بالک K در الاستیسیته خطی می باشد و p_0 ، فشار هیدرواستاتیک اولیه می باشد. (p و p_0 زمانی که سیال تحت فشار است مثبت می باشند)

از ترکیب معادلات (۳-۶) و (۳-۱۰) به معادله زیر می رسیم

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) + \delta_{ij}k\dot{\varepsilon}_{kk} - \delta_{ij}p_0 = \tau_{ij} - \delta_{ij}p \qquad (11-3)$$

یا

$$\sigma_{ij} = 2\mu\dot{\varepsilon}_{ij} + \delta_{ij}\left(k - \frac{2}{3}\mu\right)\dot{\varepsilon}_{ii} + \delta_{ij}p_0 \qquad (12-3)$$

عبارت داخل پرانتز را λ می نامیم

$$k - \frac{2}{3}\mu \equiv \lambda \qquad (13-3)$$

1- Kronecker Delta

دلایل کمی در خصوص وجود ویسکوزیته حجمی وجود دارد و می بایست نشان دهیم که

$$k\dot{\varepsilon}_{ii} \equiv 0 \qquad (14-3)$$

رابطه σ_{ij} را مجددا بازنویسی می کنیم (اندیس را از ترم فشار حذف می کنیم)

$$\sigma_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) - \delta_{ij}\,p \equiv \tau_{ij} - \delta_{ij}\,p \qquad (15-3)$$

لزوما بدون دلالت کردن بر تراکم پذیری داریم که $\dot{\varepsilon}_{ij} = 0$

در معادله بالا

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\delta_{ij}\,\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) = \mu\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\,\frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right] \qquad (16-3)$$

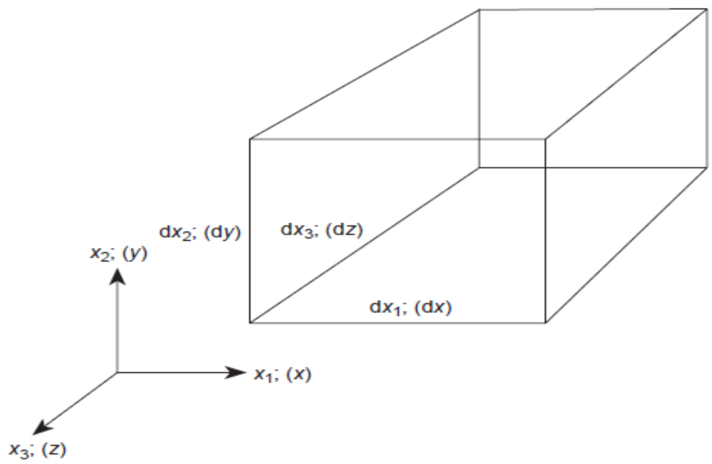
۳-۱-۲ بقای جرم

با در نظر گرفتن ρ به عنوان جرم مخصوص سیال و با داشتن حجم کنترلی مطابق شکل ۱ معادله زیر را داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^{T}(\rho u) = 0 \qquad (17-3)$$

یا برای جریان ۳ بعدی (مختصات کارتزین)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \qquad (18-3)$$



شکل ۳-۱ - دستگاه مختصات ۳ بعدی و یک حجم کنترل

۳-۱-۳ بقای مومنتم – یا تعادل دینامیکی

تعادل مومنتم در جهت j را می نویسیم که در این معادله σ_{ij} بیانگر تنش و نیروهای داخلی را با ρf_j نشان می دهیم. با استفاده از معادله (۳-۱۵) داریم

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\rho u_j)u_i\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ij})-\rho f_i=0 \qquad (19-3)$$

هم چنین به کمک (۳-۱۶) می توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[(\rho u_j)u_i\right]-\frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_i}+\frac{\partial p}{\partial x_j}-\rho f_i=0 \qquad (20-3)$$

به عنوان نمونه معادله مومنتم را در جهت x مجتصات کارتزین می نویسیم

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho uw)-\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}\right)+\frac{\partial p}{\partial x}-\rho f_x=0 \qquad (21-3)$$

۳-۱-۴ بقای انرژی و معادله حالت

در معادلات بخش های قبل (بقای جرم و بقای مومنتم) مشاهده کردیم که متغیرهای u_i (سرعت) ، p (فشار) و ρ چگالی، متغیر مستقل اند. البته تنش های انحرافی که در معادله (۳-۱۶) در ترم سرعت تعریف شده بودند متغیر وابسته اند. اگر فرض کنیم چگالی ثابت است (سیال تراکم ناپذیر) یا اگر رابطه ای بین جرم مخصوص و فشار ایجاد شود (جریان هم دما با اندکی تراکم پذیری) سیستم معادلات کامل و قابل حل می شود.

فشار (p) ، جرم مخصوص (ρ) و دمای مطلق (T) تحت معادله ای به نام معادله حالت با هم در ارتباط اند.

$$\rho=\rho(p\,,T) \qquad (22-3)$$

برای گاز ایده ال معادله به صورت زیر کامل می شود

$$\rho=\frac{p}{RT} \qquad (23-3)$$

که R ثابت جهانی گاز است.

حال لازم است که سیستم معادلات حاکم را با معادله بقای انرژی کامل کنیم. قبل از نوشتن معادله بقای انرژی لازم است کمیت های بیشتری را تعریف کنیم.

اگر e را انرژی بر واحد جرم در نظر بگیریم، این کمیت به حالت سیال، یعنی فشار و دما بستگی دارد

$$\mathrm{e} = \mathrm{e}(p\,,T) \qquad (24-3)$$

E ، کل انرژی در واحد جرم است

$$\mathrm{E} = \mathrm{e} + \frac{\mathrm{u_i u_i}}{2} \qquad (25-3)$$

و نهایتا انتالپی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$h = e + \frac{p}{\rho} \qquad (26-3)$$

یا

$$\mathrm{H} = \mathrm{h} + \frac{\mathrm{u_i u_i}}{2} = \mathrm{E} + \frac{\mathrm{p}}{\rho} \qquad (27-3)$$

حال شار هدایت گرمایی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\mathrm{q_i} = -\mathrm{k}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\mathrm{T} \qquad (28-3)$$

K هدایت گرمایی ایزوتروپ است .

جهت تکمیل روابط نیاز به تعیین ترم منبع گرما می باشد، که آن را می توان به صورت هدایت گرمایی بر واحد حجم q_H ، ناشی از واکنش های شیمیایی موجود در نظر گرفت (هدایت گرمایی شامل اتلاف انرژی ناشی از تنش های داخلی می شود).

با استفاده از معادله های (۳-۱۵ و ۳-۱۶) :

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\left(\sigma_{\mathrm{ij}}\mathrm{u_j}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\left(\tau_{\mathrm{ij}}\mathrm{u_j}\right) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_j}}\left(\mathrm{pu_j}\right) \qquad (29-3)$$

تعادل انرژی در واحد حجم را می توان به صورت زیر نوشت

$$\frac{\partial(\rho \mathrm{E})}{\partial \mathrm{t}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}(\rho \mathrm{u_i E}) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\left(\mathrm{k}\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial \mathrm{x_i}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}(\mathrm{pu_i}) - \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_i}}\left(\tau_{\mathrm{ij}}\mathrm{u_j}\right) - \rho \mathrm{f_i u_i} - \mathrm{q_H} = 0 \qquad (30-3)$$

یا بصورت ساده تر

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i H)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}u_j\right)-\rho f_i u_i-q_H=0 \qquad (31-3)$$

در این جا ترم ماقبل آخر بیانگر کار انجام شده توسط نیروهای داخلی است.

۳-۱-۵ معادلات ناویر – استوکس[۱] و اولر[۲]

معادلات حاکمی که در قسمت های قبل داشتیم را می توان به فرم کلی زیر نوشت

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\nabla\boldsymbol{F}+\nabla\boldsymbol{G}+\boldsymbol{Q}=0 \qquad (32-3)$$

یا

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \boldsymbol{G}_i}{\partial x_i}+\boldsymbol{Q}=0 \qquad (33-3)$$

معادلات (۳-۱۷ و ۳- ۱۸) و (۳-۲۰ و ۳- ۲۱) و(۳-۳۰ و ۳- ۳۱) را به فرم برداری بالا می نویسیم.

در ادامه متغیرهای مستقل مسئله را به هر دو صورت اندیسی و کارتزین نشان می دهیم.

$$\boldsymbol{\varphi}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u_1\\ \rho u_2\\ \rho u_3\\ \rho E\end{Bmatrix} \qquad (34-3)$$

یا به صورت کارتزین

$$\mathbf{U}=\begin{Bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho w\\ \rho E\end{Bmatrix} \qquad (35-3)$$

$$\mathbf{F}_i=\begin{Bmatrix}\rho u_i\\ \rho u_1 u_i+p\delta_{1i}\\ \rho u_2 u_i+p\delta_{2i}\\ \rho u_3 u_i+p\delta_{3i}\\ \rho H u_i\end{Bmatrix} \qquad (36-3)$$

یا

1- Navier Stokes 2- Euler

$$\mathbf{F}_x = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho Hu \end{Bmatrix} \tag{37 – 3}$$

$$\mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{1i} \\ -\tau_{2i} \\ -\tau_{3i} \\ -\left(\tau_{ij} u_j\right) - k\frac{\partial T}{\partial x_i} \end{Bmatrix} \tag{38 – 3}$$

یا

$$\mathbf{G}_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{xx} \\ -\tau_{yx} \\ -\tau_{zx} \\ -\left(\tau_{xx} u + \tau_{xy} v + \tau_{xz} w\right) - k\frac{\partial T}{\partial x} \end{Bmatrix} \tag{39 – 3}$$

و غیره.

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho f_1 \\ -\rho f_2 \\ -\rho f_3 \\ -\rho f_i u_i - q_H \end{Bmatrix} \tag{40 – 3}$$

یا

$$\boldsymbol{Q} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\rho f_x \\ -\rho f_y \\ -\rho f_z \\ -\rho\left(f_x u + f_y v + f_z w\right) - q_H \end{Bmatrix} \tag{41 – 3}$$

و غیره.

در معادلات فوق τ_{ij} برابر است با

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] \qquad (42-3)$$

معادلات حرکت سیال شامل معادلات، بقای جرم، بقای مومنتم و انرژی است. به شکل دیفرانسیلی این معادلات معادله ناویر – استوکس گفته می شود.

شکل خاصی از معادله ناویر – استوکس که در آن ویسکوزیته صفر شده و از هدایت گرمایی صرفنظر می گردد به معادله اولری معروف است $(\tau_{ij} = k = 0)$.

معادلات فوق همگی به فرم بقایی نوشته شده اند، پیوست A این روابط را به شکل غیربقایی نشان می دهد.

۲-۳ جریانات تراکم ناپذیر (یا تقریبا تراکم ناپذیر)

قبلا مشاهده کردیم که معادلات ناویر – استوکس با وجود معادله حالت کامل می شوند.

$$\rho = \rho(p\,,T) \qquad (43-3)$$

در جریانات تراکم ناپذیر (یا تقریبا تراکم ناپذیر) فرض می کنیم که :

۱- مسئله هم دما می باشد.

۲- تغییرات ρ نسبت به p ناچیز می باشد، به عبارت دیگر در ترم های حاصلضرب سرعت و چگالی فرض می شود چگالی ثابت است.

اگر فرضیات ایجاد شده در بالا را به کار گیریم، برای جریان های با تراکم پذیری کم به این نتیجه می رسیم که تغییرات چگالی که نتیجه ای از شکل پذیری الاستیک اند متناسب با تغییرات فشار می باشند. بنابراین می توانیم بنویسیم

$$d\rho = \frac{\rho}{k} dp \qquad (44-3)$$

K مدول الاستیسیته بالک است.

$$d\rho = \frac{1}{c^2} dp \qquad (45-3)$$

یا به عبارت دیگر

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{46 – 3}$$

که $c = \sqrt{k/\rho}$ سرعت موج صوت می باشد.

معادلات (۳-۳۲ الی ۳-۴۲) را با نادیده گرفتن انتقال انرژی بازنویسی می کنیم.

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{47 – 3}$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_j u_i\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\tau_{ji} - f_j = 0 \tag{48 – 3}$$

با داشتن $j = 1,2,3$ سیستم ۴ معادله ای که متغیر های آن p و u_j می باشد، خواهیم داشت.

معادله (۳-۴۷) را در مختصات کارتزین می نویسیم

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial y} + \rho\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{49 – 3}$$

ترم اول برای جریان کاملا تراکم ناپذیر حذف می شود $c = \infty$ و همچنین می دانیم که در این نوع

جریان جرم مخصوص ثابت است

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{50 – 3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz}\right)$$
$$-f_x = 0 \tag{51 – 3}$$

و به طور مشابه برای جهت های y و z نیز می توانیم بنویسیم.

در معادلات فوق

$$\frac{1}{\rho}\tau_{ij} = \upsilon\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \delta_{ij}\,\frac{2}{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right) \tag{52 – 3}$$

که $\upsilon = {}^{\mu}/_{\rho}$ ویسکوزیته سینماتیکی است.

فصل چهارم

تقریب های اجزاء محدود

تقریب های اجزا محدود برای معادله جابجایی – پخش

۱-۴ مقدمه

در این قسمت روش های مختلف حل معادلات دائمی و غیر دائمی از نوع زیر، ارائه می گردد. برای درک بهتر دقت و کارایی هر یک از این روش ها، مسئله ابتدا برای شکل یک بعدی توضیح داده می شود و سپس به مسائل چند بعدی تعمیم داده می شود.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}+\frac{\partial \boldsymbol{F}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial \boldsymbol{G}_i}{\partial x_i}+\boldsymbol{Q}=0 \qquad (1-4)$$

$\boldsymbol{\varphi}$ نمایشگر متغییر برداری مستقل پایه، $\mathbf{Q}$ ترم منبع یا جمله واداری برداری و ماتریس های شار جریان، $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ به صورت زیر می باشند.

$$\boldsymbol{F}_i=\boldsymbol{F}_i(\boldsymbol{\varphi}) \qquad (2-4)$$

و در حالت کلی

$$\boldsymbol{G}_i=\boldsymbol{G}_i\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x_j}\right) \qquad (3-4)$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(x_i,\boldsymbol{\varphi}) \qquad (4-4)$$

در معادلات بالا x_i و i به ترتیب نمایشگر دستگاه مختصات دکارتی و اندیس مربوط به این مختصات است.

معادلات (۴-۱ الی ۴-۴) قوانین پایستاری مربوط به تعادل بین کمیت $\boldsymbol{\varphi}$ با شاره های $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ ورودی به یک حجم کنترل فرضی هستند. این معادلات نمایشگر معادلاتی نمونه از حوزه مکانیک سیالات اند. ساده ترین شکل معادله های ۴-۱ تا ۴-۴ زمانی است که $\boldsymbol{\varphi}$ اسکالر است و شارها توابع خطی می باشند.

$$\boldsymbol{\varphi}=\varphi \qquad (5-4)$$

$$\boldsymbol{Q}=Q(x_i) \qquad (6-4)$$

$$\boldsymbol{F}_i=F_i=U_i\varphi \qquad (7-4)$$

$$\boldsymbol{G}_i=-k\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \qquad (8-4)$$

اکنون معادله اسکالر مورد نظر در دستگاه مختصات دکارتی، به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial(U_i\varphi)}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+Q\equiv\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial(U_x\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial(U_y\varphi)}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+Q=0 \qquad (9-4)$$

در معادله بالا U_{i} در حالت کلی میدان سرعت معلوم، φ کمیتی است که توسط همین سرعت توسط پخش یا انتقال، حمل می گردد و K ضریب پخش می باشد . Q در معادله بالا بیانگر هر منبع خارجی φ که به سیستم وارد می شود و همچنین از دست رفتن یا به دست آمدن آن در طی واکنش است که وابسته به غلظت φ می باشد. رابطه فوق را می توان به صورت زیر نیز نوشت.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\underline{U_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}}+\varphi\frac{\partial U_i}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+Q=0 \qquad (10-4)$$

توجه می کنیم که در معادله فوق به جز ترم انتقال که زیر آن خط کشیده شده است باقی خود الحاقی اند. ترم سوم در معادله فوق، در صورتی که نوع جریان طوری باشد که دیورژانس سرعت ها، صفر گردند قابل حذف می باشد.

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i}=0 \qquad (11-4)$$

چون بیشتر بحث های اجزاء محدود فقط در غالب مسائل اسکالر بیان می شوند و قابل انتقال به فرم برداری نمی باشند در ادامه روی معادلات اسکالر و جزئیات آن بحث می کنیم.

از معادلات (۴-۱۰) و (۴-۱۱) داریم :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U_i\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)+Q=0 \qquad (12-4)$$

در حقیقت معادله (۴-۱) را با در نظر گرفتن F به عنوان جابجایی و G به عنوان کمیت پخش، می توان معادله انتقال نامید. با تقریب متغیر φ به روش متداول زیر

$$\varphi\approx\hat{\varphi}=\mathrm{N}\overline{\varphi}=\sum N_k\overline{\varphi}_{\mathrm{k}} \qquad (13-4)$$

می توان از فرایند معمول نیم گسسته سازی(باقیمانده وزنی) استفاده کرد

$$M\dot{\overline{\varphi}}+H\overline{\varphi}+f=0 \qquad (14-4)$$

ولی اکنون برای ماتریس حتی اگر از وزندهی گالرکین استاندارد استفاده شود نیز متقارن نخواهد بود.
در عین حال این مشکل در مقایسه با مشکل ناپایداری و دقت کم جواب های حاصل از به کارگیری اینگونه توابع وزنی اهمیت محاسباتی کمتری دارد.

در ادامه درباره راه های فائق آمدن بر این مشکلات و چگونگی بهسازی تقریب بحث می شود. بدین منظور برای حل معادله اسکالر (۴-۹) و به منظور ساده سازی از حل یک بعدی آن به صورت زیر شروع می نماییم.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}+U\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+Q=0 \qquad (15-4)$$

ترم $\varphi\frac{\partial U}{\partial x}$ برای سادگی حذف شده است.

برای حالت دائمی ، معادله فوق به شکل معادله دیفرانسیل معمولی زیر در می آید.

$$U\frac{d\varphi}{dx}-\frac{d}{dx}\left(k\frac{d\varphi}{dx}\right)+Q=0 \qquad (16-4)$$

در این معادله U، Kو Q ثابت فرض می شوند.

الف- حالت دائمی

۴-۲ مسائل دائمی یک بعدی

۴-۲-۱ توضیحات مقدماتی

ابتدا گسسته سازی معادله (۴-۱۶) را با استفاده از رابطه زیر مدنظر قرار می دهیم

$$\varphi\approx\sum N_i\widetilde{\varphi}_i=N\widetilde{\varphi} \qquad (17-4)$$

که در آن N_i توابع شکل و φ نمایانگر مجموعه ای از پارامترهای مجهول است. این رابطه در صورت استفاده از یک شیوه عمومی وزندهی به معادله تقریبی زیر برای گره داخلی فرضی i منجر می شود

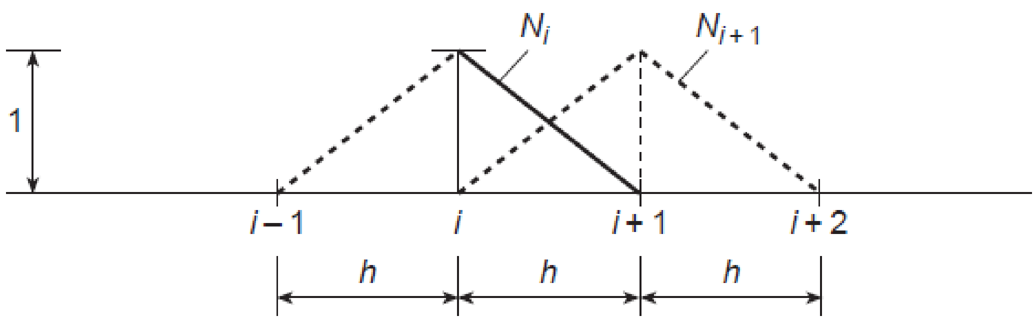
$$K_{ij}\widetilde{\varphi}_j+f_i=0 \qquad (18-4)$$

که در آن

$$K_{ij}=\int_0^l W_iU\frac{dN_j}{dx}dx+\int_0^l\frac{dW_i}{dx}k\frac{dN_j}{dx}dx \qquad (19-4)$$

$$f_i = \int_0^l W_i Q dx \qquad (20-4)$$

و در آن $0 \le x \le l$ نمایشگر حوزه مسئله است.



شکل ۴-۱ تابع شکل خطی برای یک مسئله یک بعدی

در صورت استفاده از توابع شکل خطی، وزندهی گالرکین ($W_i = N_i$) و اجزای با اندازه مساوی h و به ازای مقادیر ثابت U, k وQ (شکل۴-۱) معادله جمعبندی شده نمونه به صورت زیر بدست می آید

$$(-pe-1)\tilde{\varphi}_{i-1} + 2\tilde{\varphi}_i + (pe-1)\tilde{\varphi}_{i+1} + \frac{Qh^2}{k} = 0 \qquad (21-4)$$

که در آن

$$pe = \frac{ah}{2k} \qquad (22-4)$$

نمایشگر عدد پکلت شبکه است. بر حسب اتفاق رابطه بالا معادل تقریب متداول تفاضل های محدود مرکزی است که با استفاده از روابط زیر به دست می آید

$$\frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{\tilde{\varphi}_{i+1} - \tilde{\varphi}_{i-1}}{2h} \qquad (23-4)$$

$$\frac{d^2\varphi}{dx} \approx \frac{\tilde{\varphi}_{i+1} - 2\varphi_i + \tilde{\varphi}_{i-1}}{h^2} \qquad (24-4)$$

معادلات جبری فوق به وضوح نامتقارن اند و علاوه بر این دقت آنها با افزایش پارامتر pe افت می کند. در واقع با میل عدد پکلت به سمت بی نهایت، یعنی وقتی که جملات جابجایی اهمیت بیشتری دارند، جواب حاصل همان گونه که در مثال ساده شکل (۴-۲) از طریق منحنی های با برچسب ($\alpha = 0$) نشان داده شده است کاملا نوسانی می شود. البته مشکل فوق تا حدی به شرایط مرزی مسئله مربوط می شود. استفاده کنندگان از تفاضل های محدود اولین کسانی بودند که با توجه به واقعیت فیزیکی

انتشار اطلاعات در جهت میدان سرعت U و از طریق به کارگیری تفاضل های محدود یک طرفه برای تقریب مشتقات اول موفق به رفع مشکل مربوط به جواب های نامناسب شدند[۴۵- ۴۸]. بدین منظور با فرض مثبت بودن مقدار U از تقریب زیر به جای معادله (۴-۲۳) استفاده شده است.

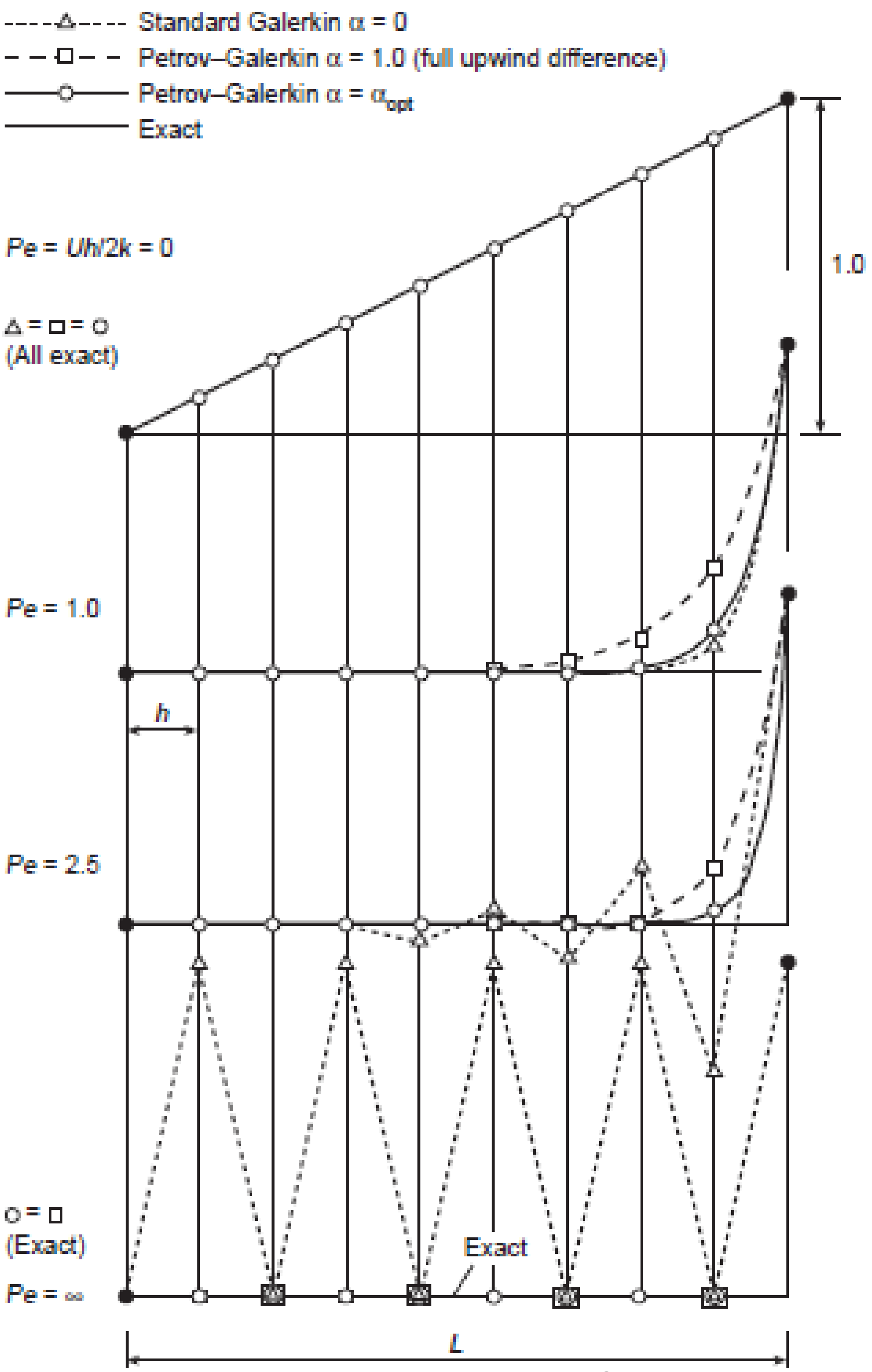
$$\frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{\widetilde{\varphi}_i - \widetilde{\varphi}_{i-1}}{h} \qquad (25-4)$$

و بدین ترتیب صورت تفاضل های محدود مرکزی برای تقریب معادله حاکم که با معادله (۴-۲۱) نشان داده شد، به صورت زیر تبدیل می شود

$$(-2pe-1)\tilde{\varphi}_{i-1} + (2+2pe)\tilde{\varphi}_i - \tilde{\varphi}_{i+1} + \frac{Qh^2}{k} = 0 \qquad (26-4)$$

با استفاده از اینگونه تقریب تفاضل های بالادستی می توان جواب های واقعی را به ازای همه مقادیر pe بدست آورد. این جواب ها در شکل (۴-۲) با برچسب $\alpha = 1$ نشان داده شده اند[۴۹]. با استفاده از این روش می توان جواب های گرهی دقیقی را برای حالت جابجایی خالص $(pe = \infty)$ بدست آورد در حالی که روش اجزا محدود گالرکین جواب های گرهی دقیقی را برای حالت پخش خالص بدست می داد.

اکنون به این سوال پاسخ می دهیم که چگونه می توان این تفاضل گیری بالادستی را در طرح های اجزاء محدود وارد کرد و آن را به شرایط پیچیده تعمیم داد؟



شکل 2-4 حل تقریبی معادله $\frac{Ud\Phi}{dx}-\frac{kd^2\Phi}{dx^2}=0$ به ازای $x=0$ و $\Phi=0$ در $x=l$ و مقادیر مختلف عدد پکلت

برای پاسخ عبارت تابع وزن را از نوع وزندهی پترو- گالرکین به کار می بریم.

$$W_i = N_i + \alpha\widetilde{W_i} \tag{27-4}$$

که در آن تابع $\widetilde{W}_{\mathrm{i}}$ چنان است که

$$\int_{\Omega_e}\widetilde{W_i}dx = \mp\frac{h}{2} \tag{28-4}$$

علامت رابطه فوق به این بستگی دارد که جهت سرعت به سمت گره یا خلاف آن است. صور گوناگونی از تابع W_i را می توان به کار گرفت ولی در ادامه به ساده ترین و مناسب ترین آن اشاره می کنیم

$$\alpha\widetilde{W_i} = \alpha\frac{h}{2}\frac{dN_i}{dx}(sign\ U) \tag{29-4}$$

با استفاده از توابع وزن دهی فوق، تقریب هم ارز معادله (۴-۲۱) به صورت زیر تبدیل می شود

$$\big(-pe(\alpha+1)-1\big)\tilde{\varphi}_{i-1} + [2+2\alpha(\mathrm{pe})]\tilde{\varphi}_i + \big(-pe\big(\alpha-1\big)-1\big)\tilde{\varphi}_{i+1} + \frac{Qh^2}{k} = 0 \tag{30-4}$$

به سادگی می توان مشاهده کرد که فرض $\alpha = 0$ به تقریب گالرکین استاندارد و $\alpha = 1$ به معادله گسسته بالادستی کامل منجر می شود که هر یک از آنها به ترتیب مقادیر گرهی دقیقی را برای موارد پخش خالص و جابجایی خالص بدست می دهند. اگر مقدار α به صورت زیر انتخاب شود

$$|\alpha| = \alpha_{opt} = coth|pe| - \frac{1}{|pe|} \tag{31-4}$$

مقادیر گرهی حاصل به ازای همه مقادیر pe دقیق خواهند بود.

۴-۲-۲ روش پخش متوازن کننده.

مقایسه معادلات گرهی (۴-۲۱) و (۴-۲۲) نشان می دهد که شیوه پترو- گالرکین در واقع هم ارز استفاده از فرایند گالرکین استانداردی است که در آن جمله پخش زیر به معادله دیفرانسیل اولیه (۴-۱۶) اضافه شده باشد.

$$k_b = \frac{1}{2}\alpha Uh \tag{32-4}$$

به سادگی می بینیم که جایگذاری این رابطه در معادله اولیه و در نتیجه نوشتن رابطه زیر به جای معادله (۴-۱۶) به رابطه ای یکسان با معادله (۴-۳۰) منجر می شود مشروط به این که Q ثابت و از شیوه گالرکین استاندارد استفاده شده باشد.

$$U\frac{d\varphi}{dx}-(k+k_b)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+Q=0 \qquad (33-4)$$

استفاده از این گونه پخشودگی متوازن کننده راحت تر از به کارگیری وزن دهی پترو- گالرکین به ویژه در مسائل ۲ یا ۳ بعدی است. ولی این روش جمله منبع را آن طور که باید اصلاح نمی کند و لذا کاربرد آن به همان نتایج غلطی که تقریب بالادستی ساده تفاضل های محدود به دست می دهد، منجر می شود.

۴-۲-۳ روش تقریب حداقل مربعات – گالرکین(GLS). این روش تلفیقی از تقریب های گالرکین استاندارد و حداقل مربعات است [۵۴-۵۵]. اتفاقی که در نهایت می افتد این است که تقریب حاصل معادل روش پترو- گالرکین خواهد شد.

۴-۳ توسعه به مسائل دو یا سه بعدی

۴-۳-۱ توضیحات مقدماتی

بدیهی است که استفاده از روش گسسته سازی گالرکین استاندارد برای معادله انتقال- پخش در مسائل یک بعدی به جواب های نامناسبی منجر می شود که به ازای اعداد پکلت موضعی بزرگتر از یک دارای نوسانات بزرگی است و بدیهی است که برای مسائل چند بعدی نیز منجر به این نوسانات می شود.

۴-۳-۲ وزندهی پترو- گالرکین خط جریانی[۱]. بهترین راه حل برای اینگونه مسائل به کارگیری روش پترو – گالرکین و معادلات (۴-۲۷) تا (۴-۳۱) است که در آن مقدار بهینه α به روشی مناسب تعیین شود. به سادگی می توان مشاهده کرد که عدد پکلت

$$Pe=\frac{Uh}{2\vartheta} \qquad (34-4)$$

1- Streamline Upwind Petrov-Galerkin

$$U = \begin{cases} u_x \\ u_y \end{cases} \qquad (35-4)$$

در اینجا یک کمیت برداری است و لذا استفاده از فرایند بالادستی باید جهت مند باشد. در یکی از تلاشهای اولیه در این زمینه از فرمولبندی پترو – گالرکین بهینه ای، که در آن تابع $\alpha\widetilde{W}$ با استفاده از مولفه های بردار سرعت در جهت اضلاع جزء تعریف می شود، استفاده شده است. توابع وزنی نهایی که در این روش به کار می رود با استفاده از شیوه ترکیبی بدست می آید [۵۲- ۵۳]. بعدها که شباهت روش پخش متوازن کننده با فرایند بالادستی مشخص شد، امکان ابداع روش های بهتری فراهم شد. در مسائل دو یا سه بعدی، پدیده جابجایی تنها درجهت سرعت برایند جزء فعال است و لذا پخش متوازن کننده یا پخش اصلاحی معرفی شده از طریق فرایند بالادستی باید طبیعتی ناهمسانگرد داشته و ضریب مربوط به آن تنها در جهت برایند سرعت غیر صفر باشد. این روش بدیع را که به طور همزمان هیوز و بروکس[۵۸] و کلی و همکاران[۵۹] پیشنهاد کردند می توان با فرض صورت زیر برای هر یک از توابع وزن دهی تشریح کرد.

$$W_k = N_k + \alpha\widetilde{W}_k \equiv N_k + \frac{\alpha h}{2}\frac{U_i}{|U|}\frac{\partial N_k}{\partial x_i} \qquad (36-4)$$

که α برای هر المان به صورت زیر تعریف می شود

$$\alpha = \alpha_{\text{بهینه}} = coth\, Pe - \frac{1}{Pe} \qquad (37-4)$$

از قبل داشتیم

$$Pe = \frac{|U|h}{2\vartheta} \qquad (38-4)$$

h طول المان است که در ادامه شرح داده می شود و U بردار برایند سرعت می باشد .

۴-۴ طول المان

طول المان، اندازه ای از المان است که در جهت برایند سرعت می باشد. تعیین طول المان نیازمند دقت می باشد، زیرا اگر خیلی کوچک انتخاب شود سبب نوسان در جواب ها می گردد و اگر خیلی

بزرگ باشد سبب ناپایداری حل می گردد. برای بدست آوردن طول المان روشهای زیادی مانند ترسیمی[1] و نگاشت[2] و روش کلی که بر اساس روابط خط و صفحه در فضا می باشد وجود دارد که در این تحقیق از روش ترسیمی استفاده شده است.

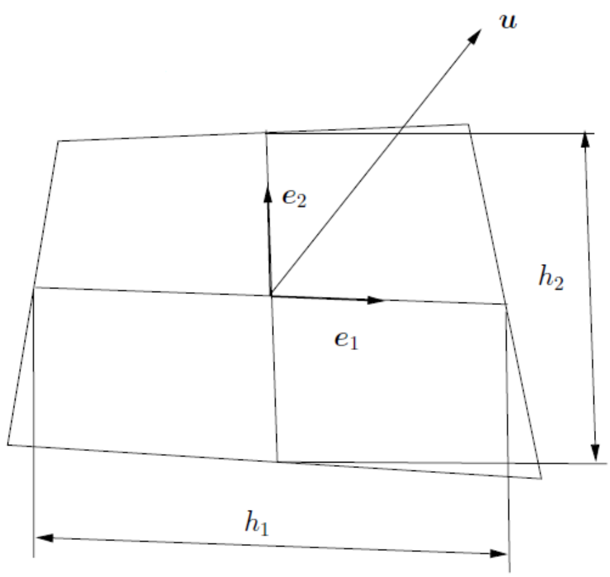
روش ترسیمی

این روش توسط هیوز و بروکس پیشنهاد شده است و بر اساس آن طول المان اینگونه بدست می آید

$$h = \frac{|\boldsymbol{h}_1.U|+|\boldsymbol{h}_2.U|}{|U|} \qquad (39-4)$$

که U بردار سرعت و h_1 و h_2 به کمک شکل توضیح داده می شوند.

$$\boldsymbol{h}_1 = h_1 e_1 \qquad \boldsymbol{h}_2 = h_2 e_2 \qquad (40-4)$$



شکل ۴-۳. تعیین طول المان به روش ترسیمی

در قسمت های قبل چندین روش را که در حال حاضر از آنها برای حل معادله انتقال – پخش دائمی استفاده می شود شرح دادیم. همه این روش ها اساسا به نحوی به روش گسسته سازی پترو – گالرکین خط جریانی (SUPG) منجر می شوند. از آن جا که همه این روش ها جواب های مناسبی را بدست می دهند، انتخاب شیوه به سلیقه استفاده کننده بستگی دارد.

ب- حالت غیر دائمی

1 - projection   2- mapping

۴-۵ ملاحضات اولیه حالت غیر دائمی

۴-۵-۱ عملیات جبری

هدف از این قسمت ایجاد الگوریتم های غیر دائمی است که قابلیت کاربرد جامعی در حل معادله (۴-۱) را داشته باشد. این معادله به ازای مقادیر اسکالر $\varphi\ , F_i\ , G_i$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial F_i}{\partial x_i}+\frac{\partial G_i}{\partial x_i}+Q=0 \qquad (41-4)$$

در ادامه شرح مختصری از روش های گوناگون و الگوی رفتاری معادله اسکالر در یک بعد به منظور فراهم آوردن امکان تفسیر روش های مختلف و رفتار آن ها بیان می شود

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+U\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+Q=0 \qquad (42-4)$$

که البته این معادله، حالت خاصی از معادله (۴-۴۱) است که در آن ، $U=\frac{\partial F}{\partial\varphi}$ ، $F=F(\varphi)$ و $Q=Q(\varphi,x)$ می باشد و بنابراین

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=U\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad (43-4)$$

معادله بالا غیر خطی است مگراینکه U ثابت باشد. با این وجود معادلات غیر بقایی (۴-۴۲ و ۴-۴۳) اجازه تغییرات مکانی U را می دهند و در نتیجه از عمومیت مناسبی برخوردارند. الگوهای رفتاری اصلی معادلات بالا با تغییر متغیر مستقل x به x' می توانند تعیین شوند، طوری که

$$dx'_i=dx_i-U_i dt \qquad (44-4)$$

با توجه به برقراری روابط زیر برای تابع $\varphi=\varphi(x'_i,t)$ داریم

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\text{x const}}=\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}\frac{\partial x'_i}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x'\,const}=-U_i\frac{\partial\varphi}{\partial x'_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{x'\,const} \qquad (45-4)$$

اکنون معادله یک بعدی (۴-۴۲) به صورت زیر تبدیل می شود .

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x'}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\right)+Q(x')=0 \qquad (46-4)$$

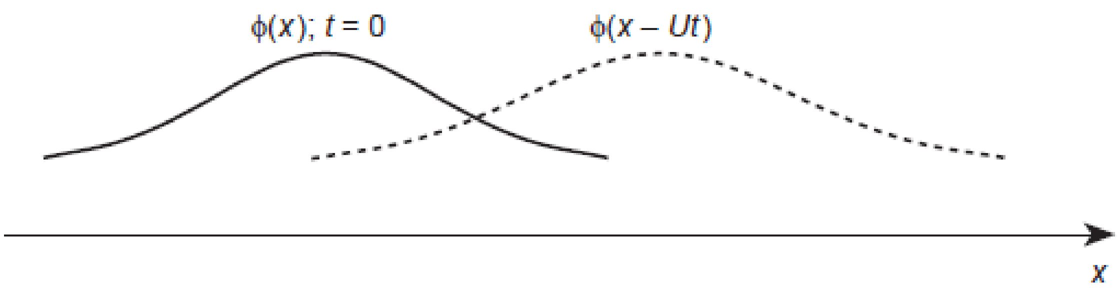
سیستم مختصات معادله (۴-۴۴) ، نمایشگر مختصات متحرکی است که در واقع بر جهات خطوط مشخصه مسئله منطبق است. نتیجه دیگر تغییر مختصات این است که هیچ ترم انتقال یا تولید گرما وجود ندارد به این معنی که وقتی k=0 و Q=0 است، رابطه ساده شده زیر را داریم :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad (47-4)$$

یا

$$\varphi(x') = \varphi(x - Ut) = constant \qquad (48-4)$$

در امتداد مشخصه (با فرض آن که U ثابت است، که در حالت $F = F(\varphi)$ رخ خواهد داد) همان طور که در شکل ۴ نشان داده شده است، این یک نوع معادله انتشار موج است که با سرعت U در جهت X حرکت می کند.



شکل ۴-۴ طبیعت موج یک ذره بدون انتقال . سرعت موج U ثابت است

۴-۵-۲ روش های جداسازی

شیوه هایی که برای گسسته سازی و حل این گونه مسائل به کار می روند، باید طبیعت موجی مسئله را منظور کنند و از طرف دیگر باید امکان استفاده از همان گونه تقریب هایی که در قسمت دائمی به کار برده شد نیر فراهم کنند زیرا حالت دائمی در واقع مورد خاصی از حالت غیر دائمی است. در این قسمت برای تحلیل مسائل غیر دائمی تعدادی از روش های موجود بررسی می گردد[۶۰- ۷۸].

روش های پترو - گالرکین که در آن ها گسسته سازی مکانی مطابق آن چه در قسمت دائمی بیان شد، انجام و سپس به وسیله فرایند حرکت در زمان دنبال می شود. این روش برای مسائل غیر دائمی در سطح وسیع استفاده می شود. با این وجود بکار بردن روش های پترو – گالرکین منجر به ماتریس

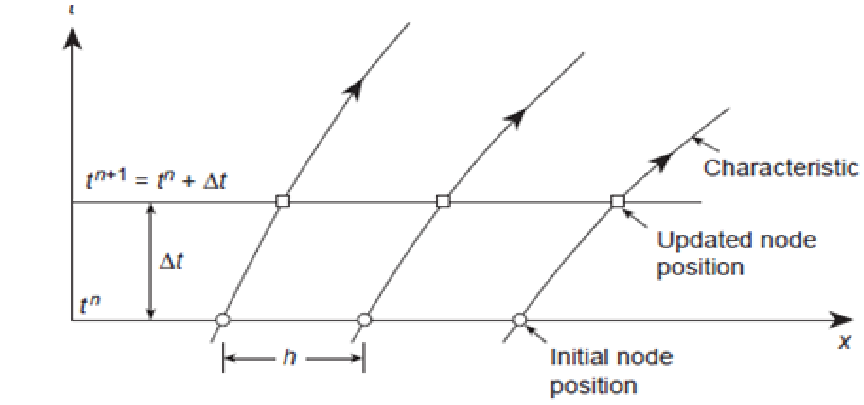
جرم های نا متقارن شده و در نتیجه استفاده از آن برای حالت صریح دشوار می گردد. روش مربعات حداقل گالرکین (GLS) که در آن تلفیقی از شیوه های تقریب بهینه استفاده می شود. استفاده از این روش در حوزه مکان – زمان در اجزاء محدود نیز نتایج مفیدی را دربر می گیرد. استفاده از GLS برای چنین مسائلی توسط نوئن[۱] و رینن[۲][۶۶] ، کری[۳] و جیانگ[۴][۶۷-۶۸] ، جانسون[۵] و کاورکرز[۶] [۶۴]، [۶۹-۷۰] و دیگران[۷۱-۷۲] انجام گرفته است. با این وجود استفاده از المان های مکان – زمان، گران بوده چرا که برای روش های صریح عملی نمی باشد. بنابراین کدام روش را می بایست به کار گیریم؟ آیا روش دیگری که هنوز به آن اشاره نکرده باشیم وجود دارد؟ پاسخ در طبیعت معادلات موج قرار دارد که نه تنها اجازه استفاده از سایر روش ها را می دهد بلکه از بسیاری از جهات، سرراست تر و کاملا مناسب برای روش های عددی است که می خواهیم به کار گیریم. بنابراین می بایست روی چنین روش هایی متمرکز شویم و نشان خواهیم داد که این روش ها به ترم هایی منجر می شوند که در شکل خیلی شبیه آن چیزهایی است که در قسمت های قبل توسط پترو – گالرکین حاصل شده بود می باشد. بنابراین ادامه بحث روی دو هدف اصلی متمرکز خواهد شد. ۱- روش هایی که براساس استفاده از مشخصه ها و طبیعت موج ایجاد می شوند که منجر به روش هایی به نام روش های مشخصه گالرکین می گردد که در ادامه راجع به آن توضیح خواهیم داد. ۲- از روش هایی که تقریب های بالاتر زمان دارند استغاده می نمائیم که روش های تیلور – گالرکین نام دارند. از میان دو روش فوق ، روش اول که براساس مشخصه ها است، اساس این تحقیق را تشکیل می دهد و بنابراین به توضیح آن می پردازیم. (برای توضیحات کاملتر به کتاب اجزا محدود زینکوویچ جلد ۳ مراجعه شود)

۴-۶ روش های مبتنی بر خطوط مشخصه

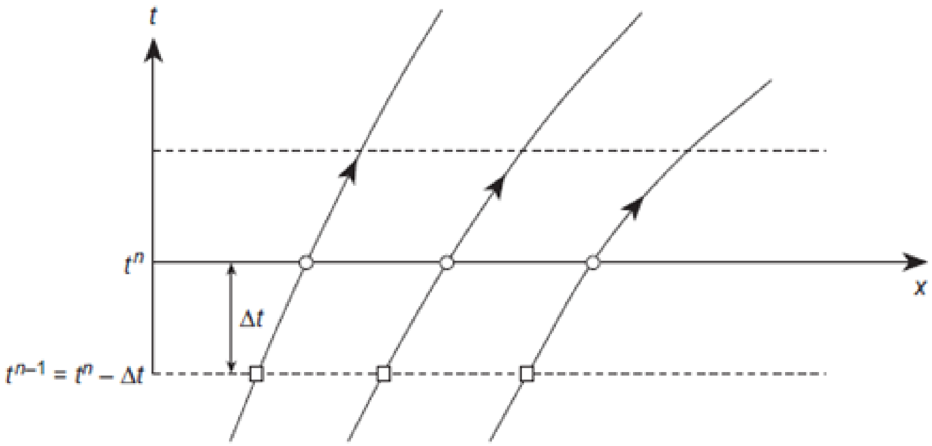
۴-۶-۱ به روز کردن شبکه و روش های درون یابی. قبلا مشاهده کردیم که اگر دستگاه مختصات مکانی به شکلی که در معادله (۴-۴۴) مشخص شده، منتقل گردد، یعنی در امتداد مشخصه

1- Nguen 2- Reynen 3- Carey 4- Jieng 5- Johnson 6- Coworkers

ها در این صورت ترم مرتبه اول انتقال از بین خواهد رفت و مسئله باقیمانده به یک مسئله پخش ساده که شیوه های گسسته سازی مبتنی بر تقریب مکانی گالرکین را می توان برای آن به کار برد تبدیل می شود.



پیشرو



پسرو

شکل ۴-۵ مش در حال تغییر و درون یابی الف) پیشرو ب) پسرو

روشن ترین مورد استفاده این روش در زمینه کاربردهای اجزاء محدود، به روز کردن موقعیت نقاط شبکه است که در شکل ۴-۵- الف نمونه ای از این به روز سازی را برای مسئله یک بعدی (۴- ۴۲ و ۴- ۴۳) که در بازه زمانی Δt اتفاق می افتد نشان داده ایم. به ازای مختصات ثابت x'

$$dx = Udt \qquad (49-4)$$

رابطه ی زیر را برای نقطه گرهی نمونه i خواهیم داشت

$$x_i^{n+1} = x_i^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} U dt \qquad (50-4)$$

که در آن سرعت U در حالت کلی ممکن است تابعی از x باشد . اگر $F = F(\varphi)$ و $U = {\partial F}/{\partial \varphi} = U(\varphi)$ آن گاه سرعت موج در طول مشخصه بخاطر خاصیت معادله های (۴-۴۷ و ۴-۴۸) ثابت بوده و مشخصه ها به صورت خط راست می باشند. به ازای چنین سرعت U ثابتی می توان از رابطه زیر برای یافتن موقعیت شبکه به روز شده استفاده کرد.

$$x_i^{n+1} = x_i^n + U\Delta t \qquad (51-4)$$

برای موقعیت جدید مش، معمولا چنین چیزی رخ نمی دهد و تغییر مش معمولا با U متغیر انجام می گیرد. در مسائل ۲ و ۳ بعدی، این کار سبب ایجاد المان های بسیار به هم ریخته می گردد و مشکلاتی در مرز های مسئله ایجاد می گردد. به همین دلیل واضح به نظر می رسد که بعد از کامل شدن هر مرحله، بازگشت به مش اصلی با استفاده از انترپوله از مقادیر تغییر یافته برای تعیین مقادیر در محل اصلی مش لازم می باشد. البته این روش قابل برگشت است و می توان به شروع خطوط مشخصه (مشابه شکل ۴-۵- ب) با استفاده از مقادیر انترپوله شده اولیه مناسب برگشت. روش فوق توسط ادی[۱] و بربیا[۲][۷۹] و دیگران برای معادلات حمل به طور موفقیت آمیز انجام شده است. این روش اگر به صورت جامع تر بیان شود به روش مشخصه گالرکین می رسیم.[۸۰]

۴-۶-۲ روش های خطوط مشخصه - گالرکین

برای بررسی معادله انتقال- پخش در یک بعد ، معادله (۴-۴۲ و ۴-۴۳) را به دو بخش زیر می بایست تقسیم کنیم

$$\varphi = \varphi^* + \varphi^{**} \qquad (52-4)$$

و

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t} + U_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \qquad (53-4)$$

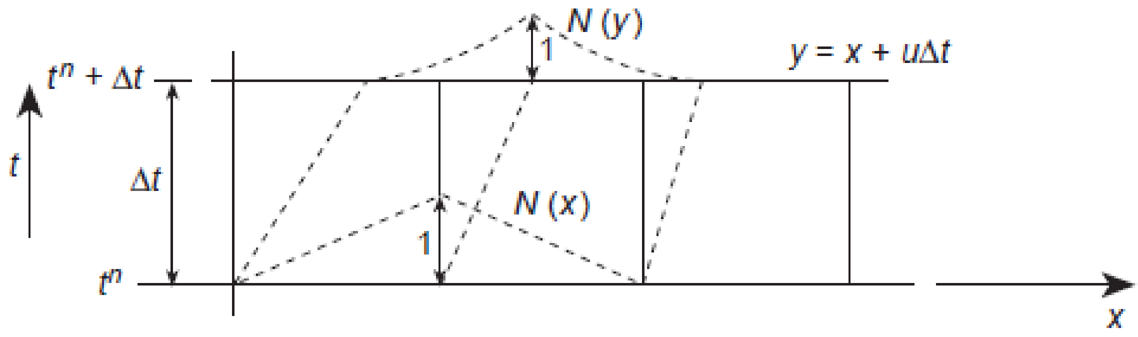
که یک سیستم انتقال خالص است در حالی که

$$\frac{\partial \varphi^{**}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + Q = 0 \qquad (54-4)$$

1- Adey 2- Brebbia

ترم های پخش را نشان می دهد.

هر دوی φ^* و φ^{**} به کمک بسط های استاندارد زیر تقریب زده می شوند.



شکل ۴-۶ اعوجاج تابع شکل انتقال یافته

$$\hat{\varphi}^* = N\hat{\boldsymbol{\varphi}}^* \qquad (55-4)$$

$$\hat{\varphi}^{**} = N\hat{\boldsymbol{\varphi}}^{**} \qquad (56-4)$$

در یک بازه زمانی t^n تا $t^n + \Delta t = t^{n+1}$ می بایست شرایط اولیه را اینگونه فرض کنیم

$$t = t^n \quad \varphi^* = 0 \quad \varphi^{**} = \varphi^{*n} \qquad (57-4)$$

استفاده از گالرکین استاندارد برای گسسته سازی معادله پخش، امکان محاسبه $\tilde{\varphi}^{**n+1}$ را از طریق حل معادله ای چون معادله زیر بر روی شبکه ای ثابت فراهم می کند.

$$M\Delta\tilde{\varphi}^{**n} = \Delta t H(\tilde{\varphi}^n + \theta\Delta\tilde{\varphi}^{**n}) + f \qquad (58-4)$$

که در آن

$$\tilde{\varphi}^{**n+1} = \tilde{\varphi}^{**n} + \Delta\tilde{\varphi}^{**n}$$

در حل مسئله انتقال فرض می کنیم که φ^* در طول مشخصه تغییر نمی کند. شکل (۴-۶) نشان می دهد که مقدار اولیه φ^{*n} میان یابی شده به کمک تابع شکل خطی استاندارد در زمان n (معادلات ۴-۵۵ و ۴-۵۶ را ببینید) چگونه دچار جابجایی و دگرشکلی می گردد. مقدار جدید به صورت زیر تعریف می شود

$$\varphi^{*n+1} = N(y)\tilde{\varphi}^{*n} \qquad y = x + U\Delta t \qquad (59-4)$$

φ^{*n+1}را به کمک تابع شکل استاندارد تقریب می زنیم، حال می بایست از روش تصویر سازی برای هموار کردن این مقادیر به صورت زیر استفاده کنیم.

$$\int_{\Omega} N^T(N\tilde{\varphi}^{*n+1} - N(y)\tilde{\varphi}^{*n})dx = 0 \qquad (60-4)$$

که در نتیجه آن

$$M\tilde{\varphi}^{*n+1} = \int_{\Omega} [N^T N(y)dx]\tilde{\varphi}^{n} \qquad (61-4)$$

که $N = N(x)$

و

$$M = \int_{\Omega} N^T N dx \qquad (62-4)$$

اگر مسئله ۲یا۳ بعد باشد محاسبه انتگرال های فوق کاری دشوار خواهد بود. این گونه انتگرال ها عموما به صورت عددی حل می شوند و پایداری فرمول ها به دقت محاسبه چنین انتگرال هایی وابسته است.

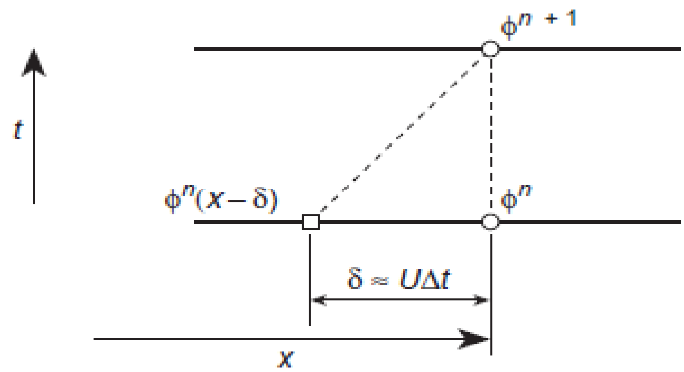
۴-۶-۳ شیوه خطوط مشخصه ای- گالرکین صریح ساده. الگوریتم هایی که در بخش قبل شرح داده شد انواع مختلفی دارد که تعدادی از آن ها خیلی وقت پیش ابداع شده اند. مراجع [۷۹-۹۰] تعدادی از نمونه های موفق این طرح ها را معرفی کرده اند. اگرچه برنامه نویسی این روش ها تاحدودی پیچیده اند و زمان بر می باشند. برای رفع مشکل روشی ایجاد شد که در آن سختی ها به ازای پایداری مشروط از بین رفتند. این روش ابتدا در سال ۱۹۸۴ مطرح شد[۹۱] و بحث های کامل آن در نشریات متعدد موجود است[۹۲- ۹۵]. ایجاد این روش به وسیله بسط تیلور موضعی می باشد و در شکل (۴-۷) برای درک بهتر نشان داده شده است. معادله (۴-۴۲) در طول مشخصه را می توانیم اینگونه بنویسیم

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x'(t), t\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - Q\left(x'\right) = 0 \qquad (63-4)$$

در مختصات انتقالی x' ترم شتاب انتقالی حذف شده و منبع و ترم های انتشار در طول مسیر درون یابی شده اند. اکنون معادله خود الحاقی بوده و تقریب مکانی گالرکین بهینه می شود. جداسازی زمانی در معادله بالا در طول مسیر مشخصه (شکل ۴-۷) به صورت زیر می باشد.

$$\frac{1}{\Delta t}(\varphi^{n+1}-\varphi^{n}\Big|(x-\delta)) \approx \theta\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-Q\right]^{n+1}+(1-\theta)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)-Q\right]^{n}\Big|(x-\delta) \qquad (64-4)$$

که θ برای شکل های صریح صفر بوده و برای نیمه ضمنی و کاملا ضمنی بین صفر و یک می باشد. حل معادله برای مسئله در حال حرکت مشکلاتی را ایجاد می کند بنابراین راه زیر را پیشنهاد می کنیم.



شکل ۴-۷ یک روش مشخصه – گالرکین ساده

از بسط تیلور داریم

$$\varphi^{n}|(x-\delta) \approx \varphi^{n}-\delta\frac{\partial\varphi^{n}}{\partial x}+\frac{\delta^{2}}{2}\frac{\partial^{2}\varphi^{n}}{\partial x^{2}}+O(\Delta t^{3}) \qquad (65-4)$$

فرض می کنیم $\theta = 0.5$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|(x-\delta) \approx \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{n}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^{n}\right]+O(\Delta t^{2}) \qquad (66-4)$$

$$\frac{1}{2}Q\Big|(x-\delta)=\frac{Q^{n}}{2}-\frac{\delta}{2}\frac{\partial Q^{n}}{\partial x} \qquad (67-4)$$

که δ فاصله طی شده توسط ذره در جهت x می باشد (شکل ۴-۷)

$$\delta = \bar{U}\Delta t \tag{68 – 4}$$

$\bar{U}$ میانگین سرعت U در طول مسیرمشخصه است,

تقریب های متفاوت $\bar{U}$ منجر به ترم های پایداری متفاوت می شود. فرم زیر به طور معمول استفاده می گردد[۹۶-۹۷].

$$\bar{U} = U^n - U^n\Delta t\frac{\partial U^n}{\partial x} \tag{69 – 4}$$

معادلات (۴-۶۵ تا ۴ -۶۹) را در معادله (۴-۶۴) قرار می دهیم، بنابراین داریم

$$\varphi^{n+1} - \varphi^n = -\Delta t\left\{U\frac{\partial \varphi^n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1/2} + Q^{n+1/2}\right\} + \Delta t\left\{\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[U^2\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right] - \frac{\Delta t}{2}U\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\Delta t}{2}U\frac{\partial Q}{\partial x}\right\}^n \tag{70 – 4}$$

که

$$\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1/2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \varphi}{\partial x})^n \tag{71 – 4}$$

و همچنین

$$Q^{n+1/2} = \frac{Q^{n+1}+Q^n}{2} \tag{72 – 4}$$

در معادله بالا ترم های مراتب بالاتر در معادلات (۴-۶۶ و ۴-۶۷) نادیده گرفته شده اند.

برای مسائل چند بعدی، معادله (۴-۷۰) را می توانیم به فرم اندیسی بنویسیم و می توانیم ترم های n+1/2 را با ترم های n تقریب بزنیم (برای شکل های کاملا صریح)

$$\varphi^{n+1} - \varphi^n = -\Delta t\left\{U_j\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) + Q\right\}^n + \Delta t\left\{\frac{\Delta t}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[U_iU_j\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right] - \frac{\Delta t}{2}U_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(k\frac{\partial \varphi}{\partial x})\right] + \frac{\Delta t}{2}U_i\frac{\partial Q}{\partial x_i}\right\}^n \tag{73 – 4}$$

برای سرعت متوسط تقریب دیگری اخیرا بیان شده است [۱۹]

$$\bar{U} = \frac{U^{n+1}+U^n|(x-\delta)}{2} \tag{74 – 4}$$

به کمک بسط تیلور داریم

$$U^n|(x-\delta) \approx U^n - \Delta t U^n \frac{\partial U^n}{\partial x} + O(\Delta t^2) \qquad (75-4)$$

از معادلات (۴-۶۴ الی ۴-۶۸) و معادله های (۴-۷۴ و ۴-۷۵) به ازای $\theta = 0.5$ به معادله زیر می رسیم

$$\frac{1}{\Delta t}(\varphi^{n+1} - \varphi^n) = -U^{n+1/2}\frac{\partial \varphi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}U^n\frac{\partial U^n}{\partial x}\frac{\partial \varphi^n}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2}U^{n+1/2}U^{n+1/2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \varphi}{\partial x})^{n+1/2} - \frac{\Delta t}{2}U^{n+1/2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \varphi}{\partial x})^n\right] - Q + \frac{\Delta t}{2}U^{n+1/2}\frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (76-4)$$

که

$$U^{n+1/2} = \frac{U^{n+1}+U^n}{2} \qquad (77-4)$$

اگرترم های زمان n+1/2 را در زمان n تقریب بزنیم تا به حالت کاملا صریح برسیم معادله زیر را خواهیم داشت

$$U^{n+1/2} = U^n + O(\Delta t) \qquad (78-4)$$

بطور مشابه ترم پخش تقریب زده می شود. شکل نهایی معادله صریح مشخصه گالرکین را می توانیم این گونه بنویسیم

$$\Delta\varphi = \varphi^{n+1} - \varphi^n = -\Delta t\left[U^n\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + Q\right]^n + \frac{\Delta t^2}{2}U^n\frac{\partial}{\partial x}\left[U^n\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + Q\right]^n \qquad (79-4)$$

تعمیم به حالت سه بعدی سرراست است و شکل اندیسی برای معادله (۴-۱۰) به صورت زیر می باشد

$$\Delta\varphi = -\Delta t\left[\frac{\partial(U_j\varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + Q\right]^n + \frac{\Delta t^2}{2}U_k^n\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\partial(U_j\varphi)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + Q\right]^n \qquad (80-4)$$

می توان متوجه تفاوت در ترم های پایداری حاصله از دو روش تقریب $\overline{U}$ گردید.

با این وجود می توانیم متوجه تفاوت کم دو روش شویم و وقتی که U ثابت است هر دو تقریب، ترم های تثبیت یکسانی را می دهند.

قبل تر بیان کردیم که تقریب مکانی گالرکین برای زمانی که روش مشخصه گالرکین استفاده می شود مناسب است. بنابراین می توانیم تقریب زیر را بنویسیم

$$\varphi = N\tilde{\varphi} \qquad (81-4)$$

و اگر از N^{T} در عبارت باقی مانده انتگرالی استفاده کنیم به شکل زیر می رسیم

$$M(\tilde{\varphi}^{n+1} - \tilde{\varphi}^{n}) = -\Delta t[(C\tilde{\varphi}^{n} + K\tilde{\varphi}^{n} + f^{n}) - \Delta t(\tilde{\varphi}^{n} K_u + f_s^{n})] \quad (82-4)$$

که معادله فوق در حالت صریح بوده و از ترم های منبع (نیرو) و مشتق های مرتبه بالا صرف نظر گردیده است.

$$M = \int_{\Omega} N^T N d\Omega \qquad (83-4)$$

$$C = \int_{\Omega} N^T \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i N) d\Omega \qquad (84-4)$$

$$K = \int_{\Omega} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} k \frac{\partial N}{\partial x_i} d\Omega \qquad (85-4)$$

$$f = \int_{\Omega} N^T Q d\Omega + b.t \qquad (86-4)$$

و f_s^n و k_u از ترم جدید تولید شده توسط جداسازی درامتداد مشخصه ها ایجاد می شوند. پس از انتگرال گیری جزء به جزء برای عبارات $\mathrm{k_u}$ و f_{s}داریم

$$K_u = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i N^T)\frac{\partial}{\partial x_i}(U_i N) d\Omega \qquad (87-4)$$

$$f_s = -\frac{1}{2}\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i N^T) Q d\Omega + b.t \qquad (88-4)$$

$b.t$ نشان دهنده انتگرال در طول نواحی مرزی است.

دقت شود که معادله بالا شامل مشتقات مرتبه بالاتر نمی باشد

فصل پنجم

الگوریتم سی – بی – اس

۵-۱ مقدمه

معادلات بقا

معادله بقای جرم

در حالت کلی داریم

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial U_i}{\partial x_i} \qquad (1-5)$$

که c سرعت صوت است و به P ، E و ρ بستگی دارد. فرض می شود انتروپی ثابت است

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \qquad (2-5)$$

γ نسبت گرمای ویژه است. برای سیال با تراکم پذیری کم

$$c^2 = \frac{k}{\rho} \qquad (3-5)$$

K مدول بالک است.

بقای جرم در توصیف اولری به صورت زیر بیان می شود.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla.(\rho u) = 0 \qquad (4-5)$$

تمام مسائل مکانیک سیالات لازم است معادله پیوستگی را ارضا نمایند. در مورد حالت دائمی داریم

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \qquad (5-5)$$

و بنابراین داریم

$$\nabla.(\rho u) = 0 \qquad (6-5)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = 0 \qquad (7-5)$$

اگر سیالی تراکم ناپذیر باشد جرم مخصوص ثابت خواهد بود و معادله پیوستگی به صورت زیر تبدیل می شود.

$$\nabla.u = 0 \qquad (8-5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (9-5)$$

معادله بقای مومنتم

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathrm{u_j U_i}\right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - \mathrm{\rho g_i}$$

$(10-5)$

یا به عبارتی

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathrm{u_j U_i}\right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mathrm{\rho g_i}$$

$(11-5)$

که در معادله فوق

$$U_{\mathrm{i}} = \rho u_{\mathrm{i}} \qquad (12-5)$$

معادله بقای مومنتم برای جریان تراکم ناپذیر در دستگاه ۳ بعدی

$$\begin{cases} \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{u}^2) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{uv}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{uw})\right) = \left(\frac{\partial \tau_{ii}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{uv}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(v^2) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{vw})\right) = \left(\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{jj}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{uw}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{wv}) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}(\mathrm{w}^2)\right) = \left(\frac{\partial \tau_{ki}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{kj}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{kk}}{\partial z}\right) - \frac{\partial p}{\partial z} - g \end{cases}$$

$(13-5)$

از تنش های انحرافی داشتیم

$$\tau_{\mathrm{ij}} = 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\,\frac{\varepsilon_{kk}}{3}\right) \qquad (14-5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (15-5)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (16-5)$$

برای سیال تراکم ناپذیر ε_{ii} برابر صفراست و نتیجتا

$$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (17-5)$$

معادله بقای انرژی

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j\rho E\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j p\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\tau_{ij}u_j\right) \qquad (18-5)$$

در معادله فوق u_i مولفه سرعت، ρ چگالی، E انرژی ویژه، P فشار، T دمای مطلق، ρg_i نیروهای حجمی، K هدایت گرمایی و τ_{ij} مولفه های تنش انحرافی اند. معادلات حاکم توصیف شده در بالا، اغلب به صورت بی بعد بکار می روند و بسته به طبیعت جریان، مقیاس های متفاوتی خواهند داشت.

$$\bar{p}=\frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2} \qquad \bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_\infty} \qquad \bar{x}_i=\frac{x_i}{L} \qquad \bar{t}=\frac{tu_\infty}{L}$$

$$\overline{c^2}=\frac{c^2}{u_\infty^2} \qquad \bar{E}=\frac{E}{u_\infty^2} \qquad \bar{u}_i=\frac{u_i}{u_\infty} \qquad \bar{T}=\frac{Tc_p}{u_\infty^2}$$

(19−5)

L طول مرجع و اندیس ∞ نشان دهنده مقادیر مبناء می باشد. حال ۳ معادله اصلی را به شکل بی بعد می نویسیم.

معادله بقای جرم

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{t}}=\frac{1}{\bar{c}^2}\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}}=-\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{x}_i} \qquad (20-5)$$

معادله بقای مومنتم

$$\frac{\partial\bar{U}_i}{\partial\bar{t}}=-\frac{\partial}{\partial\bar{x}_j}\left(\bar{u}_j\bar{U}_i\right)+\frac{1}{Re}\frac{\partial(\bar{v}\bar{\tau}_{ij})}{\partial x_j}-\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}_i}+\bar{\rho}\bar{g}_i \qquad (21-5)$$

$$\bar{v}=Re=\frac{u_\infty L}{v} \qquad \bar{g}_i=\frac{g_i L}{u_\infty^2} \qquad \bar{v}=\frac{v}{v_{ref}} \qquad (22-5)$$

υ ویسکوزیته سینماتیک است و برابر است با نسبت ویسکوزیته دینامیکی به چگالی.

معادله بقای انرژی

$$\frac{\partial(\bar{\rho}\bar{E})}{\partial\bar{t}}=-\frac{\partial}{\bar{x}_j}\left(\bar{u}_j\bar{\rho}\bar{E}\right)+\frac{1}{RePr}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\left(\frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{x}_i}k^*\right)-\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\left(\bar{u}_j\bar{P}\right)+\frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial\bar{x}_i}\left(\bar{v}\bar{\tau}_{ij}\bar{u}_j\right)$$

(23−5)

Prعدد پرانتل است و k^* نسبت هدایت گرمایی است.

$$k^*=\frac{k}{k_{ref}} \qquad Pr=\frac{\mu c_p}{k_{ref}} \qquad (24-5)$$

که k_{ref} هدایت گرمایی مبنا می باشد.

معادله حالت

$$\bar{p} = \frac{\bar{\rho}R\bar{T}}{c_p} = \bar{\rho}\overline{RT} = \bar{\rho}\frac{(\gamma-1)}{\gamma}\bar{T} \qquad (25-5)$$

$$R = c_p - c_v \qquad (26-5)$$

در ادامه شکل بی بعد تعدادی از پارامترهای مناسب در سی - بی - اس بیان می شود

$$\bar{E} = \frac{\bar{T}}{\gamma} + \frac{1}{2}\bar{u}_i\bar{u}_i \qquad (27-5)$$

$$\bar{c^2} = (\gamma-1)\bar{T} \qquad (28-5)$$

$$\bar{P} = (\gamma-1)\left(\bar{\rho}\bar{E} - \frac{1}{2}\frac{\bar{U}_i\bar{U}_i}{\bar{\rho}}\right) \qquad (29-5)$$

۲-۵ روش سی - بی – اس

در این روش ما به دنبال جداسازی در معادله ناویر استوکس و حل آن البته با حذف ترم فشار هستیم.

ابتدا معادله ناویر استوکس را به شکل زیر که قابل حل به وسیله روش مشخصه - گالرکین است، می نویسیم.

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + Q_i^{n+\theta 2} \qquad (30-5)$$

که $Q_i^{n+\theta_2}$ به عنوان معلوم در زمان $t = t^n + \theta_2 \Delta t$ محاسبه می گردد. همچنین در معادله بالا

$$Q_i^{n+\theta_2} = -\frac{\partial P^{n+\theta_2}}{\partial x_i} \qquad (31-5)$$

$$\frac{\partial P^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \theta_2\frac{\partial P^{n+1}}{\partial x_i} + (1-\theta_2)\frac{\partial P^n}{\partial x_i} \qquad (32-5)$$

یا

$$\frac{\partial P^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \frac{\partial P^n}{\partial x_i} + \theta_2\frac{\partial \Delta P}{\partial x_i} \qquad (33-5)$$

$$\Delta P = P^{n+1} - P^n \qquad (34-5)$$

حال به کمک معادله (۴-۸۰) و جایگذاری φ با U_i خواهیم داشت

$$U_i^{n+1} - U_i^n =$$
$$\Delta t\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jU_i)^n + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial x_j} + Q_i^{n+\theta_2} - (\rho g_i)^n + (\frac{\Delta t}{2}u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jU_i) - Q_i + \rho g_i\right))^n\right]$$

$$(35-5)$$

اکنون برای حل معادله فوق به سراغ مرحله جداسازی می رویم که در آن تخمین مناسبی برای Q در نظر می گیریم تا اجازه دهد محاسبات قبل از آن که p^{n+1} محاسبه شود ادامه یابد. مرحله جداسازی را می توانیم به یکی از ۲صورت A یا B انجام دهیم. در روش A تمامی ترم های گرادیان فشار را از معادله حذف می کنیم ولی در روش B گرادیان فشار $\partial P^n/\partial x_i$ را در معادله حفظ می کنیم .

۵-۲-۱ روش‌جداسازی A

ابتدا متغیر کمکی U_i^* را معرفی می کنیم.

$$\Delta \mathrm{U}_i^* = \mathrm{U}_i^* - \mathrm{U}_i^n = \Delta t\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jU_i) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i + \frac{\Delta t}{2}u_k\frac{\partial}{\partial x_k}(\frac{\partial}{\partial x_j}(u_jU_i) + \rho g_i\right]^n \quad (36-5)$$

تصحیح زیر هنگامی که افزایش فشار محاسبه گردید، قابل انجام است.

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta U_i^* - \Delta t\frac{\partial P^{n+\theta 2}}{\partial x_i} - \frac{\Delta t^2}{2}u_k\frac{\partial Q_i^n}{\partial x_k} \quad (37-5)$$

از معادله (۵-۱) به معادله زیر می رسیم

$$\Delta \rho = (\frac{1}{c^2})^n \Delta p = -\Delta t\frac{\partial U_i^{n+\theta 1}}{\partial x_i} = -\Delta t\left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1\frac{\partial \Delta U_i}{\partial x_i}\right] \quad (38-5)$$

با جایگذاری U_i^{n+1} توسط متغیر کمکی واسطه معلوم U_i^* خواهیم داشت

$$\Delta \rho = (\frac{1}{c^2})^n \Delta p =$$
$$-\Delta t\left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1\frac{\partial \Delta U_i^*}{\partial x_i} - \Delta t\theta_1(\frac{\partial^2 p^n}{\partial x_i \partial x_i} + \theta_2\frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i \partial x_i})\right] \quad (39-5)$$

حل یک روش استاندارد گالرکین، به صورت بهینه برای تقریب های مکانی قابل استفاده است. واضح است که معادلات حاکم بعد از تفکیک مکانی به صورت زیر قابل حل می باشند

۱- معادله (۵-۳۶) جهت بدست آوردن ΔU_i^*

۲- معادله (۵-۳۹) جهت به دست آوردن Δp یا $\Delta \rho$

۳- معادله(۵-۳۷)جهت به دست آوردن ΔU_i در زمان n+1

۵-۲-۲ روش جداساز B

در این روش یک متغیر جدید کمکی U_i^{**} که ترم فشار $Q_i^n = \partial p^n/\partial x_i$ را در خود دارد معرفی می کنیم

$$\Delta U_i^{**} = U_i^{**} - U_i^n = \Delta t\left[-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho g_i + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(u_j U_i\right) - Q + \rho g_i\right)\right]^n \qquad (40-5)$$

حال تصحیح را می توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\Delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n = \Delta U_i^{**} - \theta_2 \Delta t \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \qquad (41-5)$$

محاسبه تغییرات فشار در روش جداساز B به صورت زیر که شبیه روش قبل می باشد، صورت می پذیرد.

$$\Delta \rho = \left(\frac{1}{c^2}\right)^n \Delta p = -\Delta t\left[\frac{\partial U_i^n}{\partial x_i} + \theta_1 \frac{\partial \Delta U_i^{**}}{\partial x_i} - \Delta t \theta_1 \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i^2}\right] \qquad (42-5)$$

۵-۲-۳ جداسازی مکانی و روش حل آن

روش جداساز A

در تمام معادلاتی که در ادامه مطرح می شوند از روش مشخصه گالرکین برای جداسازی استفاده شده است. متغیرهای مسئله را به کمک توابع شکل اجزا محدود تقریب می زنیم

$$U_i = N_u \ \widetilde{U}_i \qquad \Delta U_i = N_u \Delta\widetilde{U}_i \qquad \Delta U_i^* = N_u \ \Delta\widetilde{U}_i^*$$

$$u_i = N_u \widetilde{U}_i \qquad p = N_p \tilde{P} \qquad \rho = N_\rho \tilde{\rho}$$

$$(43-5)$$

در معادله فوق

$$\widetilde{U}_i = [U_i^1 \quad U_i^2 \quad \dots \quad U_i^k \quad \dots \quad U_i^m]^T$$

$$N = [N^1 \quad N^2 \ \dots . \quad N^k \quad \dots . \quad N^m]$$

$$(44-5)$$

k شماره مشخصه گره ها یا متغیر ها است که بین ۱ تا m متغیر می باشد.

در ادامه شکل ضعیف معادله(۵-۳۶) را به منظور استفاده در روش تقریب مشخصه گالرکین می نویسیم (توابع وزن همان توابع تقریب می باشند).

$$\begin{aligned}
&\int N_u^k \Delta U_i^* d\Omega = \\
&+\Delta t\left[-\int N_u^k \frac{\partial}{\partial x_j}(u_j U_i) d\Omega - \int \frac{\partial N_u^k}{\partial x_j} \tau_{ij} d\Omega - \int N_u^k (\rho g_i) d\Omega\right]^n + \\
&\frac{\Delta t^2}{2}\left[\int \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i N_u^k)\left(-\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j U_i) + \rho g_i\right) d\Omega\right]^n \\
&+\Delta t\left[\int N_u^k \tau_{ij} n_j d\Gamma\right]^n \qquad (45-5)
\end{aligned}$$

در معادله فوق باید توجه کنیم که چون از تقریب استاندارد گالرکین استفاده می کنیم، پس توابع وزن همان توابع شکل اند. ترم آخر در معادله فوق، انتگرال مرزی ناشی از انتگرال گیری جزء به جزء ویسکوزیته می باشد.

با یادآوری از قبل داریم

$$\tau_{ij} = 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{ij} - \delta_{ij}\frac{\dot{\varepsilon}_{kk}}{3}\right) \qquad (46-5)$$

که

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \qquad (47-5)$$

و

$$\dot{\varepsilon}_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{48 – 5}$$

اکنون کرنش را در دستگاه ۳ بعدی توسط شش مولفه برداری زیر تعریف می کنیم که در آن ها " . "

را برای سادگی حذف کردیم.

$$\varepsilon = [\varepsilon_{11} \;\; \varepsilon_{22} \;\; \varepsilon_{33} \;\; 2\varepsilon_{12} \;\; 2\varepsilon_{23} \;\; 2\varepsilon_{31}]^T = \left[\varepsilon_x \;\; \varepsilon_y \;\; \varepsilon_z \;\; 2\varepsilon_{xy} \;\; 2\varepsilon_{xz} \;\; 2\varepsilon_{zx}\right]^T$$

(49–5)

با تعریف ماتریس زیر

$$m = [1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0]^T \tag{50 – 5}$$

کرنش حجمی را این گونه تعریف می کنیم

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = m^T \varepsilon \tag{51 – 5}$$

متعاقبا برای کرنش برشی داریم

$$\varepsilon^d = \varepsilon - \frac{1}{3} m\varepsilon_v = \left(I - \frac{1}{3} mm^T\right)\varepsilon = I_d\varepsilon \tag{52 – 5}$$

که

$$I_d = \left(I - \frac{1}{3} mm^T\right) \tag{53 – 5}$$

و بنابراین

$$I_d = 1/3\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(54–5)

حال اگر تنش ها را نیز به شکل برداری بنویسیم خواهیم داشت

$$\sigma = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31}]^T \tag{55 – 5}$$

که البته σ_{11} برابر است با σ_{x} و همچنین برابر است با $\tau_{11} - p$ ، و به طور مشابه برای σ_{y} و σ_{z} نیز می توانیم بنویسیم. در حالیکه σ_{12} برابر است با τ_{12} و غیره. بی درنگ می توانیم فرض کنیم که تنش های انحرافی متناسب با کرنش های انحرافی اند و از معادله ۵-۴۶ مستقیما می نویسیم

$$\sigma^{d} = I_{d}\sigma = \mu I_{0}\varepsilon^{d} = \mu(I_{0} - \frac{2}{3}mm^{T})\varepsilon \qquad (56-5)$$

ماتریس قطری I_0 این گونه است

$$I_0 = \begin{bmatrix} 2 & & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(57−5)

کرنش را بر حسب مولفه های سرعت می نویسیم

$$\dot{\varepsilon} = Su \qquad (58-5)$$

که

$$u = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T \qquad (59-5)$$

و ماتریس S را به عنوان عملگر ماتریس کرنش به صورت زیر تعریف می کنیم

$$S = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}$$

(60−5)

اندیس های ۱، ۲ و۳ به ترتیب نمایانگر جهت های x، y و z اند.

نهایتا رابطه کرنش – سرعت را با تعریف ماتریس B این گونه بیان می کنیم

$$B = SN_u \qquad (61-5)$$

حال جهت حل u_i^* به شکل ماتریسی از روابط فوق، مراحل زیر انجام می گیرد.

مرحله اول

$$\Delta\tilde{U}^* = -M_u^{-1}\Delta t\left[\left(C_u\tilde{U} + k_\tau\tilde{u} - f\right) - \Delta t(k_u\tilde{U} + f_s)\right]^n \qquad (62-5)$$

که

$$g = [g_1 \quad g_2 \quad g_3]^T \qquad (63-5)$$

t^{d} کشش متناظر با مولفه های تنش انحرافی است.

$$M_{\mathrm{u}} = \int_\Omega N_u^T \mathrm{N_u d\Omega} \qquad (64-5)$$

$$\mathrm{C_u} = \int_\Omega N_u^T(\nabla(\mathrm{uN_u}))\mathrm{d\Omega} \qquad (65-5)$$

$$\mathrm{K_\tau} = \int_\Omega B^T \mu(\mathrm{I_0} - \tfrac{2}{3}\mathrm{mm^T})B\mathrm{d\Omega} \qquad (66-5)$$

$$f = \int_\Omega N_u^T \rho g \mathrm{d\Omega} + \int_\Omega \mathrm{N_u^T t^d d\Gamma} \qquad (67-5)$$

$$K_{\mathrm{u}} = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(\nabla^{\mathrm{T}}(\mathrm{uN_u})\right)^{\mathrm{T}}\left(\nabla^{\mathrm{T}}(\mathrm{UN_u})\right)\mathrm{d\Omega} \qquad (68-5)$$

$$\mathrm{f_s} = -\frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla^T(uN_u))^T \rho g \mathrm{d\Omega} \qquad (69-5)$$

شکل ضعیف معادله فشار-چگالی

$$\int_\Omega N_p^k \Delta\rho d\Omega = \int_\Omega N_p^k \frac{1}{c^2}\Delta p d\Omega$$
$$= -\Delta t \int_\Omega N_p^k \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i^n + \theta_1\Delta U_i^* - \theta_1\Delta t\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i})d\Omega = \Delta t \int_\Omega \frac{\partial N_p^k}{\partial x_i}\Big[U_i^n +$$
$$\theta_1(\Delta U_i^* - \Delta t\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i})\Big]d\Omega - \Delta t \int_\Gamma N_p^k(U_i^n + \theta_1\left(\Delta U_i^* - \Delta t\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i}\right))n_i d\Gamma$$
$$(70-5)$$

در بالا ترم های فشار و ΔU_i^* جزء به جزء انتگرال گیری شده اند (برای روش انتگرال گیری جزء به جزء به پیوست B مراجعه شود).

مرحله دوم

$$\left(\mathrm{M_p} + \Delta \mathrm{t}^2 \theta_1 \theta_2 H\right)\Delta\tilde{p} = \Delta t\left[G\widetilde{U}^n + \theta_1 G\Delta\widetilde{U}^* - \Delta t\theta_1 H\tilde{p}^n - f_p\right] \quad (71-5)$$

که می توان معادله بالا را برای محاسبه $\Delta\tilde{p}$ به کار برد.

$$H = \int_\Omega (\nabla N_p)^T \nabla N_p \, \mathrm{d}\Omega \quad (72-5)$$

$$M_\mathrm{p} = \int_\Omega N_P^T \left(\frac{1}{\mathrm{c}^2}\right) \mathrm{N_p} \, \mathrm{d}\Omega \quad (73-5)$$

$$G = \int_\Omega (\nabla N_p)^T \nabla N_u \, \mathrm{d}\Omega \quad (74-5)$$

$$\mathrm{f_p} = \Delta t \int_\Gamma N_p^t n^T \left[\widetilde{U}^n + \theta_1 (\Delta\widetilde{U}^* - \Delta t \nabla P^{n+\theta_2})\right] d\Gamma \quad (75-5)$$

در معادله بالا f_p در بر گیرنده شرایط مرزی است.

شکل ضعیف معادله (۵-۳۸)

$$\int_\Omega N_u^k \Delta U_i^{n+1} d\Omega = \int_\Omega N_u^k \Delta U_i^* d\Omega - \Delta t \int_\Omega N_u^k \left(\frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i}\right) d\Omega - \frac{\Delta t^2}{2} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j N_u^k) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} d\Omega \quad (76-5)$$

محاسبه مرحله نهایی بردار سرعت U_i^{n+1} با شکل ماتریسی زیر تکمیل می گردد.

مرحله سوم

$$\Delta\widetilde{U} = \Delta\widetilde{U}^* - M_u^{-1} \Delta t \left[G^T\left(\tilde{P}^n + \theta_2 \Delta\tilde{P}\right) + \frac{\Delta t}{2} P \tilde{p}^n\right] \quad (77-5)$$

که

$$P = \int_\Omega (\nabla(u N_u))^T \nabla N_p \, \mathrm{d}\Omega \quad (78-5)$$

در پایان این مرحله مقادیر $\widetilde{U}^{n+1}$ و $\tilde{p}^{\mathrm{n}+1}$ کاملا محاسبه شدند اما برای محاسبه انرژی $(\rho E)^{n+1}$ لازم است تا بتوان مقادیر جدید c^{n+1} یعنی سرعت صوت را تعیین نمود.

شکل ضعیف معادله انرژی به کمک روش تقریب مشخصه گالرکین از شکل نهایی معادله صریح مشخصه گالرکین (۴-۸۰) نوشته می شود.

$$\int_{\Omega} N_E^k \Delta(\rho E)^{n+1} d\Omega =$$
$$\Delta t\left[-\int_{\Omega} N_E^k \frac{\partial}{\partial x_i}\left(u_i(\rho E+p)\right)d\Omega-\int_{\Omega}\frac{\partial N_E^k}{\partial x_i}(\tau_{ij}u_j+k\frac{\partial T}{\partial x_i})d\Omega\right]+$$
$$\frac{\Delta t^2}{2}\left[\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j N_E^k)\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(-u_i(\rho E+p))\right]d\Omega\right]+\Delta t\left[\int_{\Gamma} N_E^k(\tau_{ij}u_j+\right.$$
$$\left.k\frac{\partial T}{\partial x_i})n_i d\Gamma\right] \qquad (79-5)$$

که

$$\rho E = N_E \tilde{E} \qquad (80-5)$$
$$T = N_T \tilde{T} \qquad (81-5)$$

مرحله چهارم

$$\Delta\tilde{E} = -M_E^{-1}\Delta t\left[C_E\tilde{E}+C_P\tilde{P}+K_T\tilde{T}+K_{\tau E}\tilde{U}+f_e-\Delta t\left(K_{uE}\tilde{E}+K_{up}\tilde{P}+\right.\right.$$
$$\left.\left.f_{es}\right)\right]^n \qquad (82-5)$$

$$M_E = \int_{\Omega} N_E^T N_E d\Omega$$
$$C_E = \int_{\Omega} N_E^T \nabla^T(uN_E)d\Omega$$
$$C_P = \int_{\Omega} N_E^T \nabla^T(uN_P)d\Omega$$
$$K_T = \int_{\Omega} (\nabla N_E)^T k\nabla N_T d\Omega$$
$$K_{\tau E} = \int_{\Omega} B^T\mu\left(I_0-\frac{2}{3}mm^T\right)Bd\Omega$$
$$K_{uE} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(\nabla^T(uN_E)\right)^T(\nabla N_E)d\Omega$$
$$f_e = \int_{\Gamma} N_E^T n^T(t^d u+k\nabla T)d\Gamma$$
$$K_{up} = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int\left(\nabla^T(uN_E)\right)^T(\nabla N_P)\,d\Omega$$
$$(83-5)$$

روش جداساز B

با توجه به ارائه توضیحات جامع در روش جداساز A، مستقیما سراغ مراحل ۱ تا ۳ می رویم.

مرحله اول

$$\Delta\widetilde{U}_i^{**} = -M_u^{-1}\Delta t\left[\left(C_u\widetilde{U} + K_\tau\tilde{u} + G^T\tilde{p} - f\right) - \Delta t(K_u\widetilde{U} + f_s + \frac{\Delta t}{2}P\tilde{p})\right]^n \quad (84-5)$$

به جزء ماتریس f مابقی ماتریس ها در روش قبلی شرح داده شده اند.

$$f = \int_\Omega N_u^T\rho g d\Omega + \int_\Gamma N_u^T t^d d\Gamma \quad (85-5)$$

که حالا ترم فشار به صورت جزء به جزء انتگرال گیری می شود

مرحله دوم

$$\left(M_p + \Delta t^2\theta_1\theta_2 H\right)\Delta\tilde{p} = \Delta t\left[G\widetilde{U}^n + \theta_1 G\Delta\widetilde{U}^{**} - f_p\right]^n \quad (86-5)$$

و

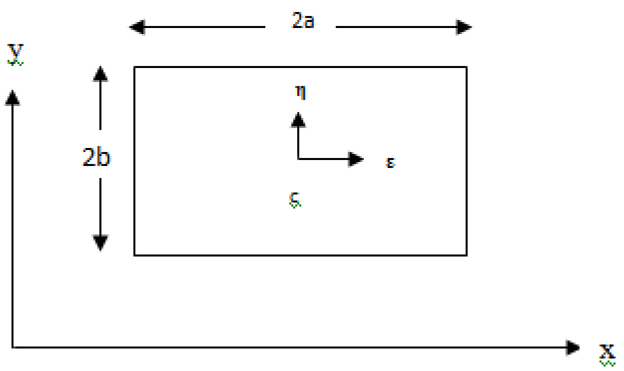
مرحله سوم

$$\Delta\widetilde{U} = \Delta\widetilde{U}^{**} - M_u^{-1}\Delta t[\theta_2 G^T\Delta\widetilde{P}] \quad (87-5)$$

مرحله چهارم

محاسبه انرژی، بدون تغییر و همانند معادله انرژی در روش جداساز قبلی صورت می گیرد. در ادامه شرحی مختصر از روش حل انتگرال ها و توابع شکل مثال های حل شده در این تحقیق بیان می شود. در مسائلی که در این تحقیق بررسی می شوند، المان ها برای مسائل دو بعدی به صورت ۴ضلعی خطی و برای مسائل سه بعدی بصورت شش وجهی خطی(۸گرهی) در نظر گرفته شده است.

اما همانطور که می دانیم، برای اشکال پیچیده نیاز به تبدیل مختصات داریم و این مختصات نرمال شده که در شکل زیر مشاهده می شود، چنان انتخاب می شود که مقادیر آن در امتداد اضلاع المان معادل یک باشد.



شکل ۵-۱ مختصات نرمال شده جزء مستطیلی

$$\varepsilon = \frac{x - x_c}{a} \qquad d\varepsilon = dx/a$$
$$\eta = \frac{y - y_c}{b} \qquad d\eta = \frac{dy}{b} \qquad (88-5)$$

و نهایتا توابع شکل این گونه حاصل می شوند

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \varepsilon_i \varepsilon)(1 + \eta_i \eta) \qquad (89-5)$$

و برای مسائل سه بعدی

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \varepsilon_i \varepsilon)(1 + \eta_i \eta)(1 + \gamma_i \gamma) \qquad (90-5)$$

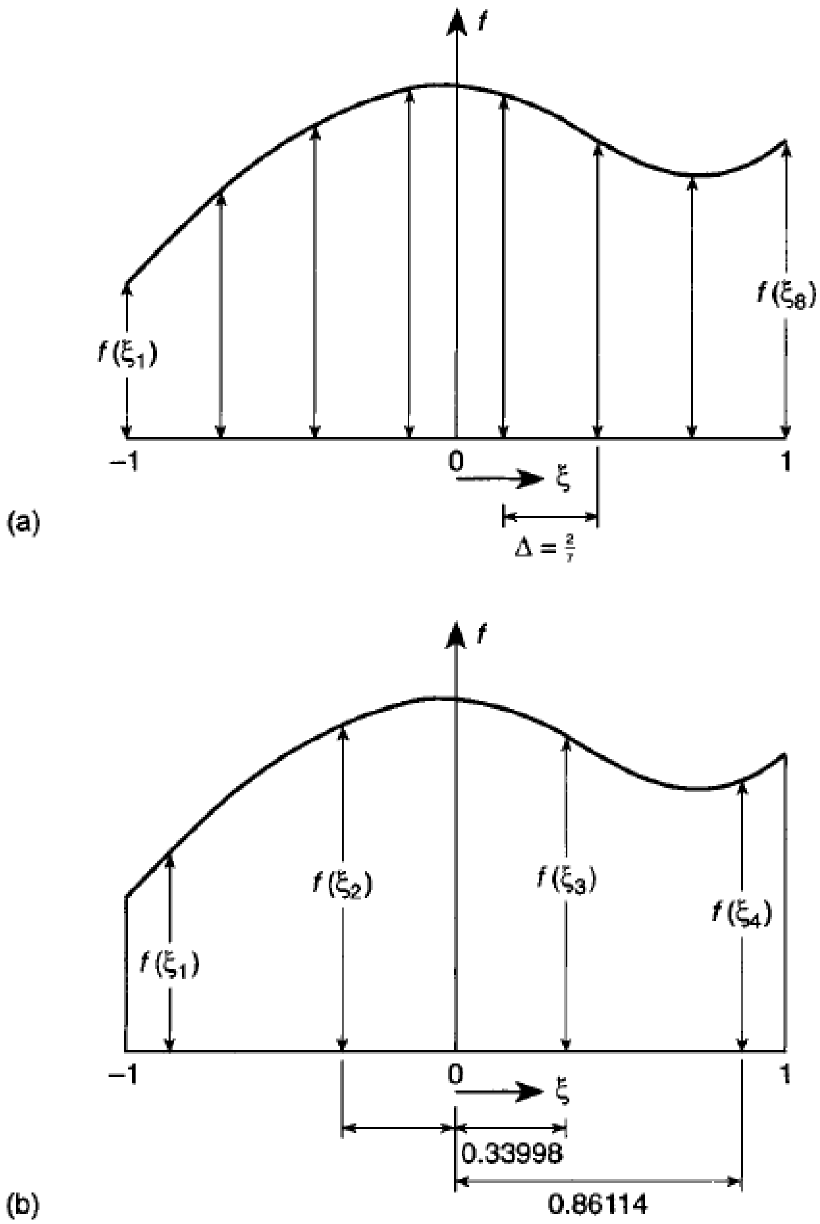
۵-۳ انتگرال گیری عددی

ارزیابی انتگرال هایی به شکل

$$\int_a^b F(x)dx \qquad (91-5)$$

با ابزار دقیق به علت پیچیدگی شکل انتگرالده F،مشکل یا غیر ممکن می باشد. بنابراین استفاده از انتگرال گیری عددی برای اجزاء پیچیده توصیه شده است. برای محاسبه عددی انتگرال یک تابع از چند روش می توان استفاده کرد.

۵-۳-۱- کوادراتور نیوتن- کوتز. در این روش موقعیت نقاطی را که پیدا کردن مقدار تابع در آنها مدنظر است از پیش و معمولا با فواصل مساوی انتخاب می کنیم، سپس یک چندجمله ای را با استفاده از مقادیر تابع مورد نظر در این نقاط تعریف و آن گاه انتگرال آن را به طور دقیق محاسبه می کنیم (شکل ۵-۲)[۹۸].



شکل۵-۲ (a) انتگرال گیری نیوتن- کوتز (b) انتگرال گیری گاوس.

اما روشی که برای حل انتگرال ها در این تحقیق انتخاب می شود روش انتگرال گیری گاوس است

۵-۳-۲ کوادراتور گاوس. اگر موقعیت نقاط نمونه گیری از پیش معلوم نباشد، می توان موقیت نقاط را چنان تعیین کرد که دقت بیشتری حاصل شود. در این صورت به ازای تعدادی فرضی از نقاط نمونه گیری می توان دقت بیشتری بدست آورد. حال رابطه زیر را در نظر می گیریم.

$$I = \int_{-1}^{1} F(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{1}^{n} H_i \, f(\varepsilon_i) \qquad (92-5)$$

در صورت استفاده از یک چند جمله ای می توان به آسانی مشاهده کرد که به ازای n نقطه نمونه گیری، تعداد ۲n مجهول داریم (H_i و ε_i) و لذا می توانیم یک چند جمله ای درجه ۲n-۱ام را تعریف و آن را دقیقا انتگرال گیری کنیم(شکل ۵-۲) بنابراین خطای انتگرال گیری از مرتبه $O(h^{2n})$ می باشد. جدول ۵-۱ [۹۹] نمایشگر موقیت نقاط و ضرایب وزنی مربوطه در انتگرال گیری گاوس است.

در تحلیل اجزا محدود باید از محاسبات پیچیده ای برای تعیین مقادیر تابع f استفاده کرد. استفاده از فرایند گاوس که مستلزم انجام کمترین تعداد از چنین محاسباتی است برای این منظور ایده ال است.

برای المان ۳بعدی داریم

$$\iiint_{-1}^{1} f(\varepsilon,\beta,\gamma)d\varepsilon d\beta d\gamma = \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} H_i H_j H_m f(\varepsilon_i,\beta_j,\gamma_m) \quad (93-5)$$

نکته: در این تحقیق از انتگرال گیری گاوس ۲نقطه ای استفاده می شود.

ضمنا برای تبدیل متغیرها و تبدیل ناحیه ای که انتگرال گیری نسبت به آن صورت می گیرد می بایست از فرایندی استاندارد بهره گرفت که در آن

$$dx\,dy\,dz = det\boldsymbol{j}\,d\varepsilon\,d\eta\,d\gamma \quad (94-5)$$

$$\boldsymbol{j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \\ \frac{\partial x}{\partial \beta} & \frac{\partial y}{\partial \beta} & \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \frac{\partial x}{\partial \gamma} & \frac{\partial y}{\partial \gamma} & \frac{\partial z}{\partial \gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \varepsilon}z_i \\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \beta}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \beta}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \beta}z_i \\ \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \gamma}x_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \gamma}y_i & \sum_{i=1}^{8}\frac{\partial N_i}{\partial \gamma}z_i \end{bmatrix} \quad (95-5)$$

جدول۵-۱ مختصات و ضرایب وزنی فرمول کوادرا تور گاوس

$\pm a$		H
	$n=1$	
0		2.000 000 000 000 000
	$n=2$	
$1/\sqrt{3}$		1.000 000 000 000 000
	$n=3$	
$\sqrt{0.6}$		5/9
0.000 000 000 000 000		8/9
	$n=4$	
0.861 136 311 594 953		0.347 854 845 137 454
0.339 981 043 584 856		0.652 145 154 862 546
	$n=5$	
0.906 179 845 938 664		0.236 926 885 056 189
0.538 469 310 105 683		0.478 628 670 499 366
0.000 000 000 000 000		0.568 888 888 888 889
	$n=6$	
0.932 469 514 203 152		0.171 324 492 379 170
0.661 209 386 466 265		0.360 761 573 048 139
0.238 619 186 083 197		0.467 913 934 572 691
	$n=7$	
0.949 107 912 342 759		0.129 484 966 168 870
0.741 531 185 599 394		0.279 705 391 489 277
0.405 845 151 377 397		0.381 830 050 505 119
0.000 000 000 000 000		0.417 959 183 673 469
	$n=8$	
0.960 289 856 497 536		0.101 228 536 290 376
0.796 666 477 413 627		0.222 381 034 453 374
0.525 532 409 916 329		0.313 706 645 877 887
0.183 434 642 495 650		0.362 683 783 378 362
	$n=9$	
0.968 160 239 507 626		0.081 274 388 361 574
0.836 031 107 326 636		0.180 648 160 694 857
0.613 371 432 700 590		0.260 610 696 402 935
0.324 253 423 403 809		0.312 347 077 040 003
0.000 000 000 000 000		0.330 239 355 001 260
	$n=10$	
0.973 906 528 517 172		0.066 671 344 308 688
0.865 063 366 688 985		0.149 451 349 150 581
0.679 409 568 299 024		0.219 086 362 515 982
0.433 395 394 129 247		0.269 266 719 309 996
0.148 874 338 981 631		0.295 524 224 714 753

فصل ششم

جزئیات برنامه نویسی و

مقایسه و تحلیل نتایج

مطالب این فصل را می توان به دو قسمت عمده تقسیم کرد. بخش اول به توضیح اجمالی جزئیات برنامه نویسی می پردازد و در بخش دوم نتایج روش سی- بی- اس با یک سری مدل های معتبر و کاربردی مقایسه می شود.

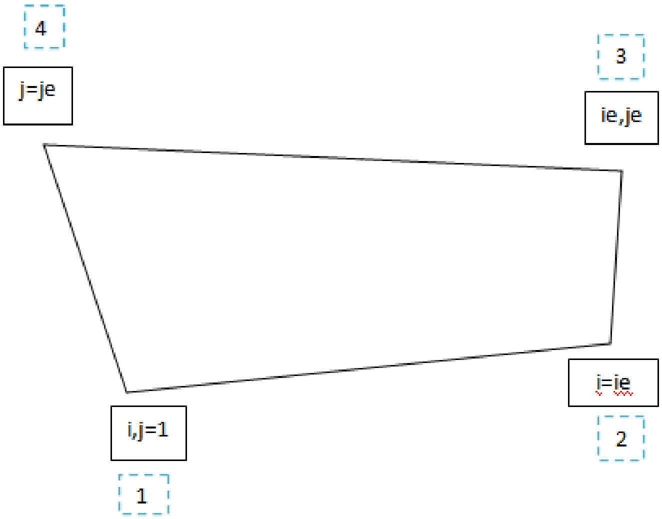
۶-۱ جزئیات برنامه نویسی

در این بخش توضیحاتی در ارتباط با نحوه مش بندی، محاسبه ماتریس ها و انتگرال ها در روش سی- بی- اس و... جهت تسهیل در کدنویسی ارائه می گردد.

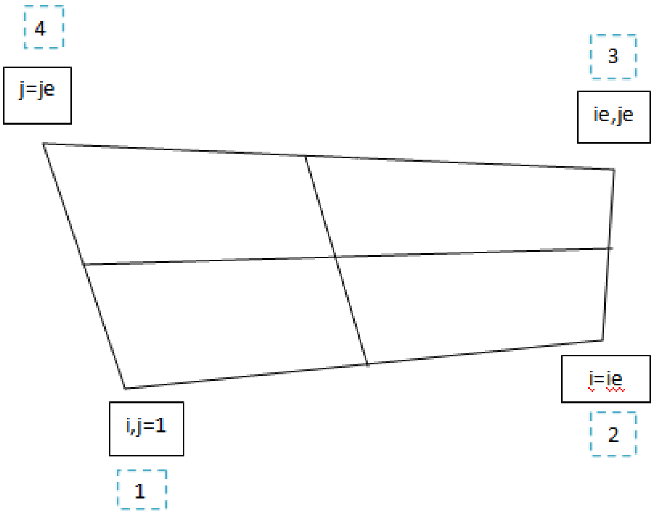
۶-۱-۱ مش بندی

اولین کاری که در مسائل اجزاء محدود می بایست انجام گیرد، مش بندی هر مسئله است. در تحقیق حاضر از مش های ۴ضلعی برای مسائل دو بعدی و یا ۶وجهی برای مسائل سه بعدی استفاده شده است. بدین منظور می بایست مسئله مورد نظر را به ۴ضلعی یا ۶وجهی های پیوسته (بسته به دو و یا سه بعدی بودن مسئله) به نام اجزاء مادر تقسیم کنیم. با داشتن مختصات رئوس هر جزء مادر می توان به روشی که در ادامه شرح داده می شود آن جزء را مش بندی کرد.

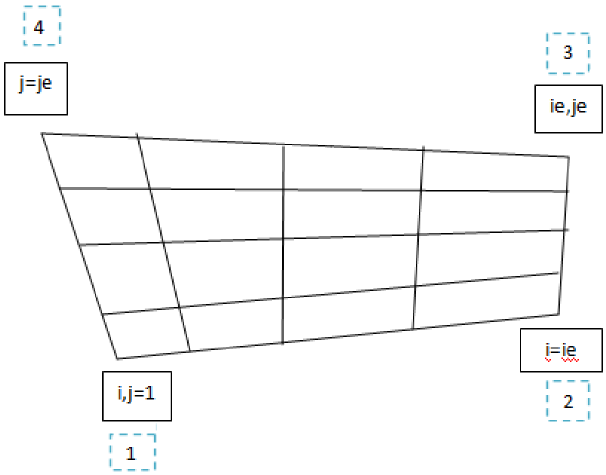
ابتدا نحوه مش بندی برای یک شکل دلخواه دو بعدی شرح داده می شود و سپس آن را به مسائل سه بعدی تعمیم می دهیم. مش بندی برای هر شکل دلخواه مانند شکل۱ بدین صورت است که ابتدا وسط هر یک از اضلاع را مشخص کرده و به هم وصل می کنیم (شکل۲) سپس وسط هر یک از این قسمت ها را یافته و مانند مرحله اول عمل می کنیم(شکل۳). این روند را تا آنجا که شبکه بندی کامل شود ادامه می دهیم.



شکل ۶-۱ هندسه مسئله نمونه



شکل ۶-۲ مش اولیه مسئله نمونه



شکل ۶-۳ مش بندی مسئله نمونه

حال که مش بندی انجام گرفت برای تعیین مختصات x یک گره نمونه روند زیر را طی می کنیم.

به عنوان مثال اگر گره مورد نظر روی خط $j=1$ قرار گرفته باشد با نوشتن نسبت تناسب ساده زیر می توانیم مختصات گره دلخواه را محاسبه نمائیم :

$$\frac{x-x_1}{i-1}=\frac{x_2-x_1}{i_e-1}\rightarrow x=\frac{i-1}{i_e-1}(x_2-x_1)+x_1 \qquad (1-6)$$

و به روشی مشابه این تناسب را به صورت زیر برای ۳ضلع دیگر نیز تشکیل می دهیم.

اگر روی خط $j=j_e$ حرکت کنیم

$$\frac{x-x_4}{i-1}=\frac{x_3-x_4}{i_e-1}\rightarrow x=\frac{i-1}{i_e-1}(x_3-x_4)+x_4 \qquad (2-6)$$

هم چنین اگر روی خط $i=1$ حرکت کنیم

$$\frac{x-x_1}{j-1}=\frac{x_4-x_1}{j_e-1}\rightarrow x=\frac{j-1}{j_e-1}(x_4-x_1)+x_1 \qquad (3-6)$$

و در نهایت با حرکت روی خط $i=i_e$ به مقدار زیر می رسیم.

$$\frac{x-x_2}{j-1}=\frac{x_3-x_2}{j_e-1}\rightarrow x=\frac{j-1}{j_e-1}(x_3-x_2)+x_2 \qquad (4-6)$$

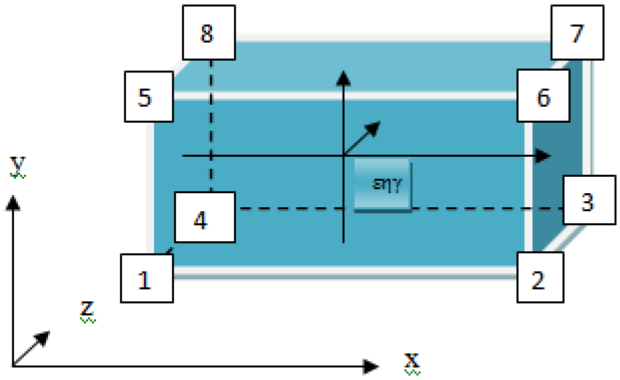
اگر بخواهیم مختصات گرهی میانی مانند گرهی که در محل تقاطع خطوط $i=2$ و $j=3$ (x[2][3]) است را حساب کنیم، از x[2][1] و x[2][je] که در مراحل قبل بدست آمده اند کمک می گیریم.

(اگر فرض کنیم x[2][1]=x5 و x[2][je]=x6)

$$\frac{x-x_5}{j-1} = \frac{x_6-x_5}{j_e-1} \rightarrow x = \frac{j-1}{j_e-1}(x_6 - x_5) + x_5 \qquad (5-6)$$

این عملیات برای تمامی گره ها انجام می گیرد.

حال مش بندی را به مسئله ۳بعدی دلخواه شکل۴ تعمیم می دهیم. برای محاسبه گره درونی f، اگر h در صفحه شامل گره های ۱،۲،۵،۶ و l در صفحه شامل گره های ۳،۴،۷،۸ باشند با یک سری عملیات جبری که در قسمت دو بعدی شرح داده شد به روابط زیر می رسیم.



شکل ۶-۴ مسئله سه بعدی نمونه

$$x_h = \frac{i-1}{i_e-1}\left(\frac{k-1}{k_e-1}(x_6 - x_5 + x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)\right) + \frac{k-1}{k_e-1}(x_5 - x_1) + x_1 \qquad (6-6)$$

$$x_l = \frac{i-1}{i_e-1}\left(\frac{k-1}{k_e-1}(x_7 - x_8 + x_4 - x_3) + (x_3 - x_4)\right) + \frac{k-1}{k_e-1}(x_8 - x_4) + x_4 \qquad (7-6)$$

با نوشتن تناسب ساده زیر و سپس جایگذاری روابط $(6-6)$ و $(7-6)$ در رابطه زیر به رابطه $(9-6)$ می رسیم.

$$\frac{x_f-x_h}{j-1} = \frac{x_l-x_h}{j_e-1} \rightarrow x_f = \frac{j-1}{j_e-1}(x_l - x_h) + x_h \qquad (8-6)$$

$$x_f = \frac{j-1}{j_e-1} * \frac{k-1}{k_e-1} * \frac{i-1}{i_e-1}(x_7 - x_8 + x_4 - x_3 - x_6 + x_5 - x_1 + x_2) + \frac{j-1}{j_e-1} * \frac{i-1}{i_e-1}(x_3 - x_4 - x_2 + x_1) + \frac{j-1}{j_e-1} * \frac{k-1}{k_e-1}(x_8 - x_4 - x_5 + x_1) + \frac{j-1}{j_e-1}(x_4 - x_1) + \frac{i-1}{i_e-1}\left(\frac{k-1}{k_e-1}(x_6 - x_5 + x_1 - x_2) + (x_2 - x_1)\right) + \frac{k-1}{k_e-1}(x_5 - x_1) + x_1 \qquad (9-6)$$

به طریقی مشابه مختصات y و z هر گره را نیز می توان محاسبه نمود.

۶-۱-۲ محاسبه حجم المان

برای محاسبه حجم هر المان دلخواه(شکل۴) ، ابتدا می بایست مرکز هر وجه المان را با میانگین گیری از رئوس آن وجه بدست آوریم

به عنوان نمونه روش محاسبه مختصات مرکز وجه شامل گره های ۲۳۷۶ را نشان می دهیم

$$\bar{x}_{2376} = (x_2 + x_3 + x_7 + x_6)/4$$
$$\bar{y}_{2376} = (y_2 + y_3 + y_7 + y_6)/4$$
$$\bar{z}_{2376} = (z_2 + z_3 + z_7 + z_6)/4 \qquad (10-6)$$

پس از محاسبه مختصات مرکز تمام وجه ها، تفاضل مختصات وجه های مقابل هم را بدست آورده یا به عبارتی تغییرات xyz را نسبت به مختصات موضعی εηγ حساب می کنیم

$$\Delta x_{\varepsilon} = \bar{x}_{2376} - \bar{x}_{1485} \qquad \Delta x_{\eta} = \bar{x}_{4378} - \bar{x}_{1265} \qquad \Delta x_{\gamma} = \bar{x}_{5678} - \bar{x}_{1234}$$
$$\Delta y_{\varepsilon} = \bar{y}_{2376} - \bar{y}_{1485} \qquad \Delta y_{\eta} = \bar{y}_{4378} - \bar{y}_{1265} \qquad \Delta y_{\gamma} = \bar{y}_{5678} - \bar{y}_{1234}$$
$$\Delta z_{\varepsilon} = \bar{z}_{2376} - \bar{z}_{1485} \qquad \Delta z_{\eta} = \bar{z}_{4378} - \bar{z}_{1265} \qquad \Delta z_{\gamma} = \bar{z}_{5678} - \bar{z}_{1234}$$
$$(11-6)$$

اکنون می توان حجم المان(V_e) را با حل دترمینان زیر به دست آورد.

$$V_e = \begin{vmatrix} \Delta x_{\varepsilon} & \Delta y_{\varepsilon} & \Delta z_{\varepsilon} \\ \Delta x_{\eta} & \Delta y_{\eta} & \Delta z_{\eta} \\ \Delta x_{\gamma} & \Delta y_{\gamma} & \Delta z_{\gamma} \end{vmatrix} \qquad (12-6)$$

۶-۱-۳ ماتریس وارون

برای بدست آوردن وارون یک ماتریس ۳در ۳ ، بهتر است ابتدا ماتریس ۳در ۳ مورد نظر را به صورت ماتریس ۳در ۶ فرضی زیر بنویسیم

$$\begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & 1 & 0 & 0 \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & 0 & 1 & 0 \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (13-6)$$

حال به روشی که در ادامه می آید می توان ماتریس وارون را بدست آورد .

اگر به طریقی بتوانیم ماتریس فوق را به صورت زیر در بیاوریم، قسمت سمت راست ماتریس حاصل، درایه های وارون ماتریس اصلی را نمایش می دهند .

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & j_{11}^{-1} & j_{12}^{-1} & j_{13}^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & j_{21}^{-1} & j_{22}^{-1} & j_{23}^{-1} \\ 0 & 0 & 1 & j_{31}^{-1} & j_{32}^{-1} & j_{33}^{-1} \end{bmatrix} \qquad (14-6)$$

برای رسیدن به ماتریس فوق مراحل زیر را بر روی ماتریس ۳در ۶ اصلی انجام می دهیم

۱ -در سطر اول با تقسیم اعضا بر درایه اول، عضو ۱۱ ماتریس برابر ۱ می شود.

۲ -برای صفر کردن درایه های اول سطرهای ۲و۳ ، در سطرهای دوم و سوم، هر درایه j_{ij} را به صورت زیر می نویسیم .

$$j_{ij} = j_{ij} - j_{i1} * j_{1j}$$

۳ -در سطر دوم با تقسیم اعضا بر درایه قطری۲۲ ، عضو ۲۲ ماتریس برابر ۱ می شود.

۴- حال عضو۳۲ ماتریس را مشابه مرحله دوم ، صفر می کنیم .

$$j_{3j} = j_{3j} - j_{32} * j_{2j}$$

۵- در سطر سوم با تقسیم اعضا بر درایه قطری۳۳ ، عضو ۳۳ ماتریس برابر ۱ می شود.

با انجام پنج مرحله فوق به راحتی می توان وارون یک ماتریس را بدست آورد.

۶-۱-۴ معادله های اصلی

شرح کاملی از روش سی- بی- اس زینکوویچ در فصل قبل ارائه گردید. در روش زینکوویچ به علت وجود ترم های زمان، پایداری مسئله وابسته به زمان می باشد و این امر سبب کند شدن فرایند همگرایی می گردد. در این تحقیق با حذف این ترم ها، پایداری عملا مستقل از زمان گردیده و سبب می گردد که فرایند حل سریع تر همگرا گردد.

آنچه در ادامه می آید معادله های اصلی مسئله می باشد که تغییرات ذکر شده در آن ها ایجاد شده است.

جهت یادآوری مجددا معادله مومنتم را به صورت زیر می نویسیم

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial\rho uu}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (15-6)$$

حال اگر متغیر کمکی u^* را به صورت زیر فرض کنیم

$$\frac{\partial\rho u^*}{\partial t}=-\left(\frac{\partial\rho uu}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (16-6)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله مومنتم، معادله مومنتم را به صورت زیر می توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\rho u^*}{\partial t}=0 \qquad (17-6)$$

از آن جایی که مسئله را مستقل از زمان در نظر گرفته ایم بنابراین معادله بالا را می توانیم به صورت ساده تر زیر بنویسیم

$$\rho\frac{\Delta u}{\Delta t}+\frac{\partial p}{\partial x}-\rho\frac{\Delta u^*}{\Delta t}=0 \qquad (18-6)$$

در معادله فوق منظور از Δu تفاضل سرعت در گام n+1 و n می باشد.

اگر در معادله فوق ترم های فشار و متغیر کمکی را به سمت راست معادله انتقال دهیم به معادله های زیر بر اساس سرعت های اصلی می رسیم. عملیات مربوط به سرعت های w و v به خاطر تشابه عملیات محاسبه با عملیات مربوط به سرعت u در توضیحات ذکر نشده است.

$$\left.\begin{aligned}\Delta u&=\Delta u^*-\frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \Delta v&=\Delta v^*-\frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \Delta w&=\Delta w^*-\frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (19-6)$$

همان طور که در این معادله ها مشاهده می کنیم برای به دست آوردن سرعت ها نیازمند محاسبه فشار و متغیرهای کمکی می باشیم. اگر معادله پیوستگی را در گام n+1 بنویسیم و به جای u^{n+1} ، $u^n + \Delta u$ را جایگذاری کنیم به معادله زیر می رسیم

$$\frac{\partial(u+\Delta u)}{\partial x}+\frac{\partial(v+\Delta v)}{\partial y}+\frac{\partial(w+\Delta w)}{\partial z}=0 \qquad (20-6)$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial \Delta u}{\partial x}+\frac{\partial \Delta v}{\partial y}+\frac{\partial \Delta w}{\partial z}=0 \qquad (21-6)$$

با جایگذاری معادله (۶-۱۹) در معادله فوق به معادله زیر می رسیم

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta u^*-\frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\Delta v^*-\frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta w^*-\frac{\Delta t}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0 (22-6)$$

به عبارتی

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial \Delta u^*}{\partial x}+\frac{\partial \Delta v^*}{\partial y}+\frac{\partial \Delta w^*}{\partial z}-\frac{\Delta t}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (23-6)$$

حال این معادله را مرتب می کنیم

$$\frac{\partial(u+\Delta u^*)}{\partial x}+\frac{\partial(v+\Delta v^*)}{\partial y}+\frac{\partial(w+\Delta w^*)}{\partial z}-\frac{\Delta t}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (24-6)$$

برای محاسبه فشار در هر مرحله، پس از ضرب تابع وزن در معادله فوق از معادله حاصله انتگرال گیری جزء به جزء نموده تا در نهایت به معادله زیر برسیم

$$\int\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \omega_i}{\partial x}+\frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \omega_i}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right)d\forall+\frac{\rho}{\Delta t}\int\left(\frac{\partial u+\Delta u^*}{\partial x}+\frac{\partial v+\Delta v^*}{\partial y}+\frac{\partial w+\Delta w^*}{\partial z}\right)\omega_i d\forall=0 \ (25-6)$$

برای محاسبه متغیر کمکی سرعت به سراغ معادله (۶-۱۶) می رویم

$$\frac{\partial\rho u^*}{\partial t}+\frac{\partial\rho uu}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}-\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 \qquad (26-6)$$

با انتگرال گیری و ضرب تابع فوق در تابع وزن به معادله زیر می رسیم

$$\int\frac{\partial\rho u^*}{\partial t}\omega_i d\forall+\int\left(\frac{\partial\rho uu}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}\right)\omega_i d\forall-\mu\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\omega_i d\forall=0 \qquad (27-6)$$

یا

$$\int\frac{\partial\rho u^*}{\partial t}\omega_i d\forall+\int\left(\frac{\partial\rho uu}{\partial x}+\frac{\partial\rho uv}{\partial y}+\frac{\partial\rho uw}{\partial z}\right)\omega_i d\forall+$$

$$\mu \int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_i}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_i}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right) d\forall = 0 \qquad (28-6)$$

در معادله بالا، جمله دوم معرف ترم انتقال و عبارت پایانی ترم پخش می باشد.

و در نهایت با انتگرال گیری جزء به جزء متغیرهای کمکی سرعت محاسبه می شوند.

حال مقادیر فشار و متغیرهای کمکی سرعت را در معادله (۶-۱۹) جایگذاری می کنیم تا سرعت ها در هر گره در زمان n+1 محاسبه شوند.

۶-۱-۴-۱ متغیرهای کمکی سرعت

در قسمت قبل پس از یک سری عملیات جبری به معادله نهایی متغیر کمکی سرعت رسیدیم و مشاهده کردیم که برای رسیدن به جواب نیازمند حل ترم های انتقال و پخش می باشیم. در ادامه به بررسی نحوه محاسبه این ترم ها جهت کدنویسی در مسائل مختلف می پردازیم.

ترم پخش

از معادله (۶-۲۸) مشاهده کردیم که معادله ترم پخش به صورت زیر می باشد.

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_i}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_i}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right) d\forall \qquad (29-6)$$

در فصل پنجم مشاهده کردیم که برای حل انتگرال ها به روش کوادراتور گوس، می بایست انتگرال را در دستگاه εηγ بنویسیم

$$\int \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \omega_i}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \omega_i}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \omega_i}{\partial z}\right) detj\ d\varepsilon d\eta d\gamma \qquad (30-6)$$

همچنین در این فصل توضیح دادیم که برای محاسبه انتگرال ها از انتگرال گیری عددی دو نقطه ای استفاده می کنیم. البته در ابتدا محاسبه انتگرال هایی مانند معادله فشار و یا ترم انتقال به صورت تک نقطه ای انجام گرفته بود اما برای رسیدن به دقت بالاتر بعدا تمامی انتگرال ها به روش کوادراتور گوس دو نقطه ای محاسبه شدند.

برای درک بهتر نحوه محاسبه ترم پخش، این ترم را برای گرهی که در مکان i، j وk قرار داشته و به عنوان گره mام در المان x شناخته می شود می نویسیم.

$$\text{ترم پخش} \equiv \sum_{\mathrm{pn}=1}^{8}\sum_{n=1}^{8}\left(\frac{\partial \mathrm{N_m}}{\partial \mathrm{x}}\frac{\partial \mathrm{N_n}}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{N_m}}{\partial \mathrm{y}}\frac{\partial \mathrm{N_n}}{\partial \mathrm{y}}+\frac{\partial \mathrm{N_m}}{\partial \mathrm{z}}\frac{\partial \mathrm{N_n}}{\partial \mathrm{z}}\right)_{pn} u_n\, detj_x \qquad (31-6)$$

Pn : بیانگر نقاط انتگرال گیری در روش کوادراتور گوس دو نقطه ای در المان ۳بعدی می باشد (مثلا اگر pn=1 باشد بیانگر نقطه ای است که مختصات آن در دستگاه εηγ برابر (0.57-,0.57-,0.57-) می باشد)

n : شماره گره ها در المان x است.

u_n : سرعت در راستای محورx گره n است

N_n : تابع شکل گره n بوده و $detj_x$ دترمینان ژاکوبی المان x است.

توابع شکل بر اساس مختصات εηγ بیان می شوند، بنابراین برای محاسبه مشتق توابع شکل نسبت به مختصات دکارتی نیازمند محاسبات پیچیده هستیم. به علت این که روند محاسبه مشتق توابع شکل در دستگاه دکارتی مشابه می باشد، به عنوان نمونه محور x را برای توضیحات بررسی می کنیم.

مشتق تابع شکل N نسبت به محورx را بسط می دهیم

$$\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \beta}\frac{\partial \beta}{\partial \mathrm{x}}+\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \mathrm{x}} \qquad (32-6)$$

در معادله فوق مشتق گیری از تابع شکل نسبت به مختصات εηγ بسیار ساده می باشد. اما با توجه به نامنظم بودن المان ها عملا محاسبه مستقیم مشتق εηγ نسبت به مختصات دکارتی غیرممکن است.

با توجه به تعریف ماتریس ژاکوبی (معادله ۵-۹۶)، وارون این ماتریس در بر گیرنده جمله های $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathrm{x}}$، $\frac{\partial \beta}{\partial \mathrm{x}}$ و $\frac{\partial \gamma}{\partial \mathrm{x}}$ خواهد بود.

در کد برنامه، جمله پخش به شکل زیر نشان داده شده است

$$dm[x][y][z][m][n] \qquad (33-6)$$

xyz معرف مختصات المان مورد نظر بوده و m و n گره های المان هستند.

ترم انتقال در معادله متغیرهای کمکی سرعت

ترم انتقال معادله مومنتم در جهت x به صورت زیر نوشته می شود.

$$\int\left(\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}\right)\omega_i d\forall \qquad (34-6)$$

در فصل چهارم مشاهده کردیم که بهترین روش برای محاسبه تابع وزن در ترم انتقال، روش وزن دهی پترو-گالرکین خط جریانی یا SUPG می باشد. ابتدا جهت کم کردن حجم محاسبات انتگرال گیری عددی به صورت تک نقطه ای انجام گرفت اما مشاهده شد که جواب ها با اندکی خطا همراه هستند که در نهایت جهت رفع این مشکل تمامی محاسبات بر اساس کوادراتور گوس دو نقطه ای انجام گرفته است. علاوه بر تغییر فوق، در بسط ترم انتقال نیز ابتدا جمله $u(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})$ حذف گردید اما مشاهده شد که با اعمال این جمله جواب ها کیفیت بهتری پیدا می کنند.

$$\frac{\partial uu}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+u\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad (35-6)$$

توضیحات مربوط به محاسبه تابع وزن به روش SUPG در فصل چهارم داده شده است. حال اگر ترم انتقال را به صورت زیر در نظر بگیریم

$$\text{ترم انتقال} \equiv \text{تابع وزن} \times m_{\mathrm{u}} \qquad (36-6)$$

با محاسبه m_{u} در جهت x ، ترم انتقال متغیر کمکی سرعت در راستای x بدست می آید. در نهایت به معادله زیر می رسیم

$$m_{\mathrm{u}}=\left(u\frac{\partial N}{\partial x}u_p+v\frac{\partial N}{\partial y}v_p+w\frac{\partial N}{\partial z}w_p+u_p\left(u\frac{\partial N}{\partial x}+v\frac{\partial N}{\partial y}+w\frac{\partial N}{\partial z}\right)\right)detj \qquad (37-6)$$

u_p برای هر المان در هر نقطه انتگرال گیری کوادراتور گوس به صورت مجموع حاصل ضرب سرعت گره های المان مورد نظر در تابع وزنشان می باشد. به عنوان مثال این مولفه برای المان s به صورت زیر محاسبه می گردد.

$$u_p=\sum_{n=1}^{8}(w_n\times(\mathrm{u_n})_{\mathrm{s}}) \qquad (38-6)$$

n : شماره گره های المان s است.

برای مشاهده توضیحات تکمیلی به کد برنامه در پیوست c مراجعه شود.

پس از محاسبه ترم های انتقال- پخش در معادله متغیرهای کمکی سرعت، ضریب این متغیر را در معادله (۶-۲۸) محاسبه می کنیم.

$$\int\frac{\partial\rho u^*}{\partial t}\omega_i d\forall$$

به عبارت دیگر برای گره m از المان x داریم

$$\text{ضریب متغیر کمکی سرعت} = \frac{\rho}{dt}\sum_{pn=1}^{8}(\mathrm{w_n}[\mathrm{m}][\mathrm{pn}]\ \mathrm{detj}[\mathrm{x}][\mathrm{pn}]) \qquad (39-6)$$

Pn : بیانگر نقاط انتگرال گیری در روش کوادراتور گوس دو نقطه ای است. اگر معادله فوق را برای تمام المان های مرتبط با گره m بنویسیم، تابع وزن، سهم گره m را در هر المان مشخص می کند. یکی از سختی های روش اجزاء محدود این است که اگر در قسمتی از کدنویسی دچار اشتباه گردیم، جواب ها به سرعت واگرا می گردد. در ابتدا در محاسبه ضریب متغیرهای کمکی به اشتباه وزن المان دو مرتبه حساب شده بود و این سبب واگرایی جواب ها در تکرارهای زیاد می گردید. برای برطرف کردن این مشکل ابتدا نحوه محاسبه طول المان مورد بررسی مجدد قرار گرفت اما پس از بررسی چندین روش معتبر دیگر متوجه شدیم که مشکل واگرایی مربوط به این طول نمی باشد. در نهایت پس از مرور کد برنامه اشکال برنامه یافت گردید. عیب برنامه که سبب جواب های نامناسب شده بود به نادرست محاسبه شدن ضریب u^*، v^* و w^* مربوط بود، زیرا همانطور که در توضیحات قبل دیدیم در محاسبه این ضریب فقط به یک بار ضرب کردن وزن نقطه نیاز است در صورتی که در شکل نادرست قبلی دوبار وزن در هم ضرب می شد.

۶-۱-۴-۲ معادله فشار

برای محاسبه فشار هر گره می بایست معادله (۶-۲۵) را حل کنیم. ترم اول معادله فشار یک جمله پخش می باشد. برای محاسبه فشار معادله (۶-۲۵) را به شکل ساده زیر می نویسیم

$$\Delta p \times C_m + p_t = 0 \qquad (40-6)$$

کاری که در این قسمت انجام می دهیم این است که برای محاسبه $p^{\mathrm{n+1}}$ در گره موردنظر این مقدار را در جمله اول معادله فشار به جای p^{n} قرار می دهیم. p_t در معادله فوق در واقع همان معادله(۶-۲۵) می باشد. در این مرحله هدف محاسبه فشار گره m از المان x است.

جمله اول معادله فشار، که یک ترم پخش است را به شکل زیر می نویسیم

$$\text{ترم پخش معادله فشار} \equiv \sum_{\mathrm{n}=1}^{8}(dm[x][m][n] \times p[n]) \qquad (41-6)$$

n شماره گره های المان x بوده و dm ترم پخش در المان موردنظر می باشد (ترم پخش در اینجا نیز مانند آن چه در قسمت متغیر کمکی سرعت بیان شد محاسبه می شود). جمله دوم معادله (۶-۲۵) نیز به راحتی قابل حل بوده پس نیاز به توضیح اضافی نمی باشد.

C_m نیز قسمتی از ترم پخش معادله فشار است که در ارتباط مستقیم با گره مورد نظر k می باشد.

$$C_m[k] = dm[x][m][m] \qquad (42-6)$$

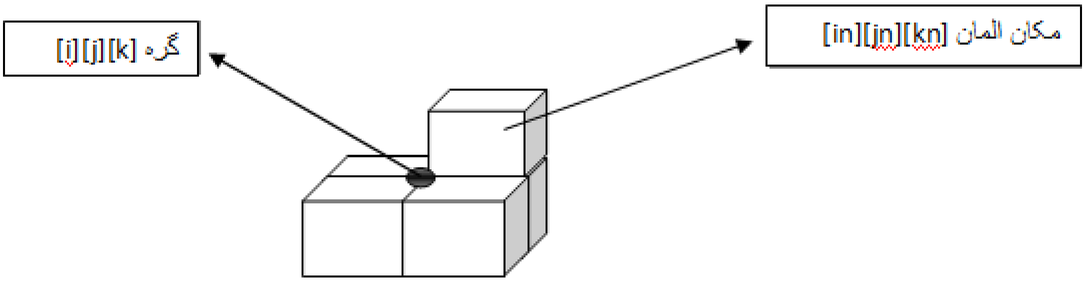
x المان یا المان هایی که گره k در آن قرار دارد می باشد و m شماره داخلی گره k در المان x است.

۶-۱-۴-۳ تعیین سرعت

پس از تعیین مقادیر فشار و متغیرهای کمکی سرعت در جهت های مختلف و اعمال شرایط مرزی در دیوارها، ورودی و خروجی مسئله و قرار دادن آن ها در معادله (۶-۱۹) ، سرعت های اصلی مسئله را به راحتی بدست می آوریم.

برای محاسبه پارامترهای مختلف در هر گره می بایست ارتباط آن گره با اطرافش مشخص شود. به عنوان مثال در یک مسئله سه بعدی با المان های ۶وجهی هر گره داخلی با ۸ المان در ارتباط است. در حالی که در کف و یا دیواره ها، هر گره با ۴المان یا کمتر در ارتباط می باشد. کاری که در این قسمت توضیح داده می شود تعریف معادله ای است که این ارتباط را مشخص کند. در این معادله هدف یافتن متغیری به نام nn است. این عمل سبب تسهیل در برنامه نویسی و کم شدن تعداد دستورات برنامه می گردد.

فرض می کنیم گره مورد نظر در مکان i ، j و k قرار داشته باشد و in ، jn وkn محل المان مشخص شده در شکل نمونه زیر باشد.



شکل۶-۵

برای المان ها شمارنده های i1,i2,j1,j2,k1,k2 را به صورت زیر نشان می دهیم

i1=i-1 , j1=j-1 , k1=k-1

i2=i+1 , j2=j+1 , k2=k+1

$$(43-6)$$

که البته برای گره های اول و آخر مسئله که به ترتیب در مکان های (i،j،k) (۱،۱،۱) و (ie+1، je+1، ke+1) قرار دارند، به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\left.\begin{array}{l} i=1 \rightarrow i1=1 \\ j=1 \rightarrow j1=1 \\ k=1 \rightarrow k1=1 \end{array}\right\} \text{المان اول}$$

$$\left.\begin{array}{l} i=ie+1 \rightarrow i2=ie+1 \\ j=je+1 \rightarrow j2=je+1 \\ k=ke+1 \rightarrow k2=ke+1 \end{array}\right\} \text{المان آخر}$$

$$(44-6)$$

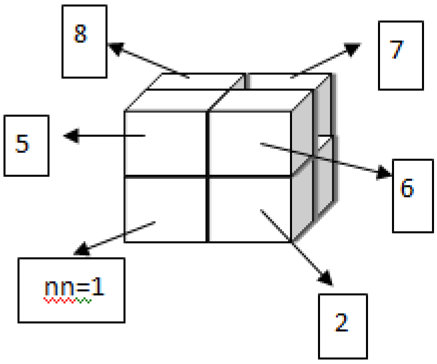
اکنون مقادیر in , jn , kn را این گونه تعریف می کنیم

$$i1 \leq in \leq i2-1 \qquad j1 \leq jn \leq j2-1 \qquad k1 \leq kn \leq k2-1 \qquad (45-6)$$

در نهایت تابع nn که بیان گر شماره گره داخلی، گره مورد نظر در المان های اطرافش می باشد را تعریف می کنیم.

nn= a(i-in)+b(j-jn)+c(k-kn)+d(i-in)(j-jn)+e(i-in)(k-kn)+f(j-jn)(k-kn)+
h(i-in)(j-jn)(k-kn)+g

$$(46-6)$$



شکل۶-۶ المان نمونه جهت تعیین معادله nn

از آنجایی که i1 یکی از i کمتر و i2 یکی از آن بیشتر است و in بین i1 و i2-1 قرار دارد بنابراین i-in بین 0 و 1 قرار می گیرد(برای سایر جهات نیز همین گونه است) .

پس اگر به المان nn=1)1) مختصات (i-in,j-jn,k-kn) معادل صفر را نسبت دهیم برای سایر المان ها جدول زیر را خواهیم داشت

جدول ۶-۱

nn	i-in	j-jn	k-kn
1	0	0	0
2	1	0	0
3	1	1	0
4	0	1	0
5	0	0	1
6	1	0	1
7	1	1	1
8	0	1	1

حال به کمک مقادیر جدول فوق، مجهولات معادله nn را بدست می آوریم ($a=1$, $b=3$, $c=4$, $d=-2$, $e=f=h=0$, $g=1$) و در نهایت به معادله اصلی زیر می رسیم.

$$nn= (i-in)+3(j-jn)+4(k-kn)-2(i-in)(j-jn)+ 1 \tag{47-6}$$

۶-۲ مثال های عددی

در قسمت دوم این فصل به بررسی سه مثال عددی می پردازیم. نمونه های اول و دوم مربوط به مسائل دو بعدی و نمونه سوم یک مثال عدی سه بعدی معتبر می باشد. در این مثال ها، بردارهای سرعت در کل حوزه مسئله و یا در مکان های مشخصی ترسیم شده است. علاوه بر این خطوط جریان نیز در تمامی مثال ها ترسیم شده است. برای ترسیم این بردارها و خطوط از نرم افزارهای کاربردی اکسل[۱] و سورفر[۲] کمک گرفته شده است. ضمنا در مثال عددی تانک تصفیه آب، علاوه بر خطوط جریان، نتایج با نمودارهای حاصل از نرم افزار انسیس[۳] مقایسه شده است.

۶-۲-۱ Lid – driven cavity

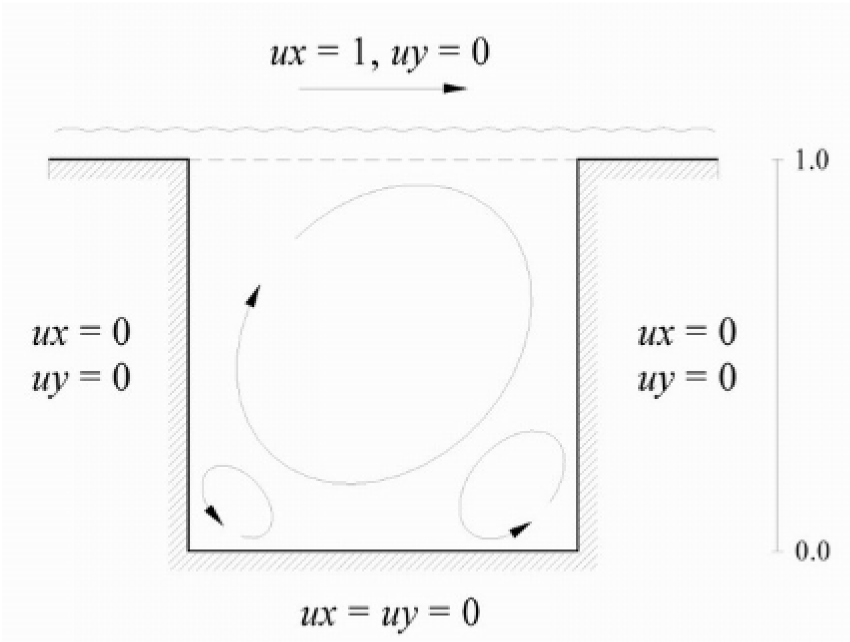
به عنوان اولین مثال عددی معتبر، جریان درون حفره بررسی می شود. Lid-driven cavity یک مربع دو بعدی است که سیال درون آن قرار دارد. مرز فوقانی، صفحه متحرکی است که با سرعت ۱متر بر ثانیه مطابق شکل در حرکت است و سایر دیواره ها ساکن می باشند. این مسئله برای معادلات ناویر-استوکس معتبر است و یک مثال مناسب برای بررسی جریانات تراکم ناپذیر می باشد. شکل ۶-۷ شرایط مرزی مسئله و قلمرو محاسباتی را نشان می دهد. محققان زیادی طی سال های اخیر بر روی این مسئله کار کرده اند و در نهایت نتایج کارشان را با آزمایش تجربی ghia مقایسه نموده اند[۲۴]، [۵۶-۵۷]و [۹۶]. در این تحقیق نیز نتایج در غالب نمودارهای مقایسه ای سرعت با نتایج ghia مقایسه شده اند.

عدد رینولدز را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$Re = \frac{V_{slip}\,H}{\vartheta} \qquad (48-6)$$

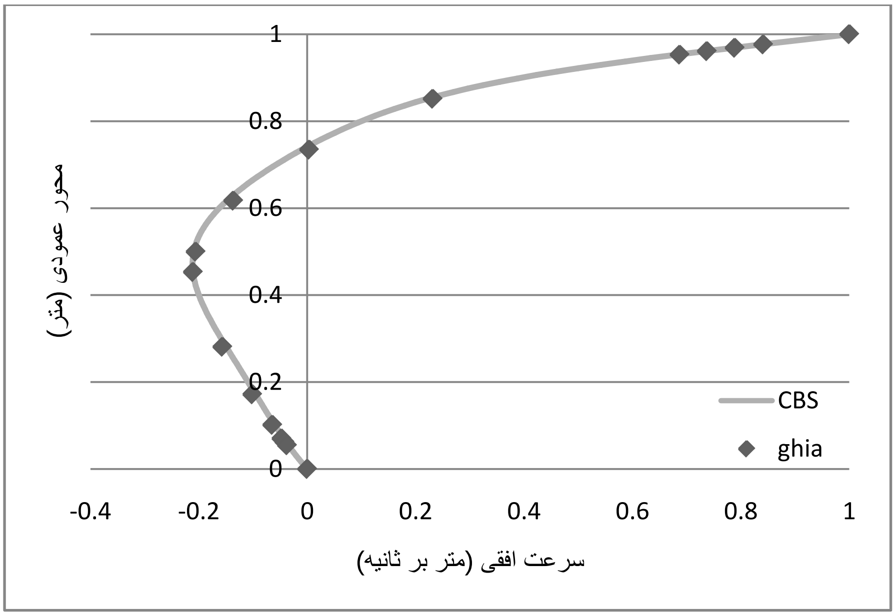
در معادله فوق H و V_{slip} مشخصه ی طول و سرعت هستند و ϑ ویسکوزیته سینماتیک سیال می باشد.

1- Excel 2- Surfer 3- Ansys

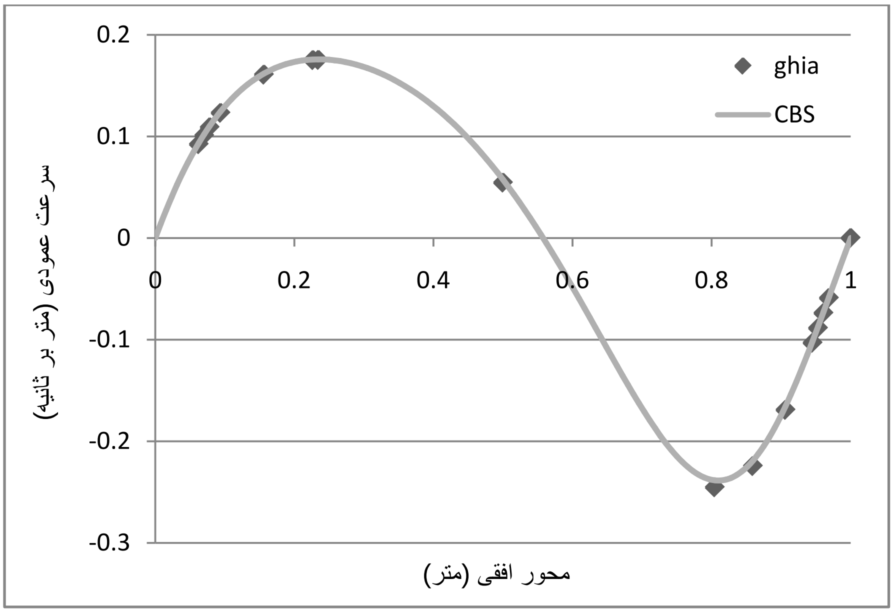


شکل۶-۷- هندسه و شرایط مرزی مسئله lid-driven cavity

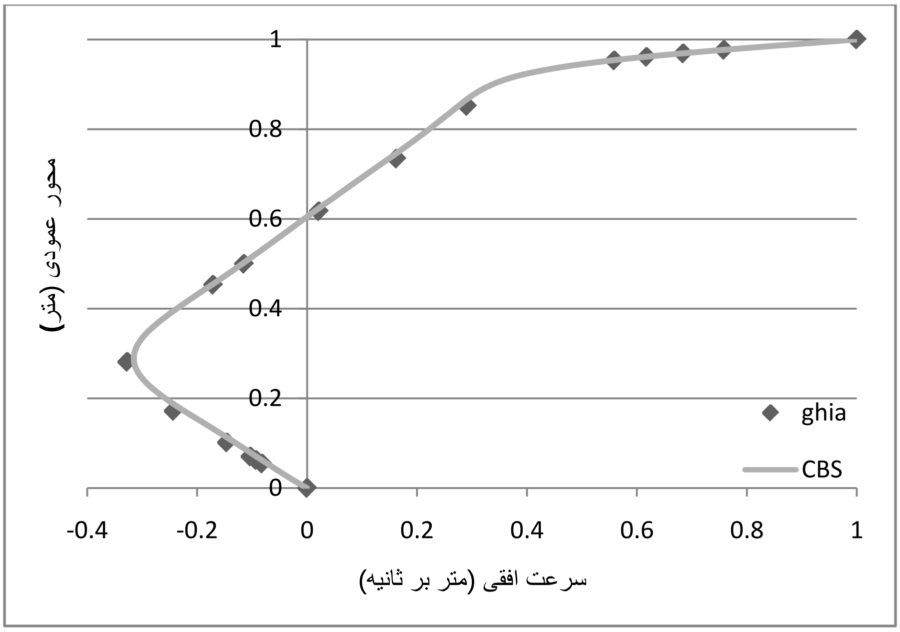
به عنوان مثال $H=1m$ و سرعت صفحه متحرک را $1m/s$ فرض می کنیم، و در ادامه نمودارهای سرعت افقی و عمودی و همچنین خطوط جریان را به ازای اعداد رینولدز متفاوت (۱۰۰، ۴۰۰ و ۱۰۰۰) ترسیم می کنیم. برای شروع ابتدا نمودار های سرعت های افقی و عمودی به ترتیب در طول خط مرکزی محورهای x و y به ازای رینولدزهای مختلف نشان داده می شود. و نتایج هر نمودار با مقادیر *ghia* مقایسه می شود[۱۰۰-۱۰۳].



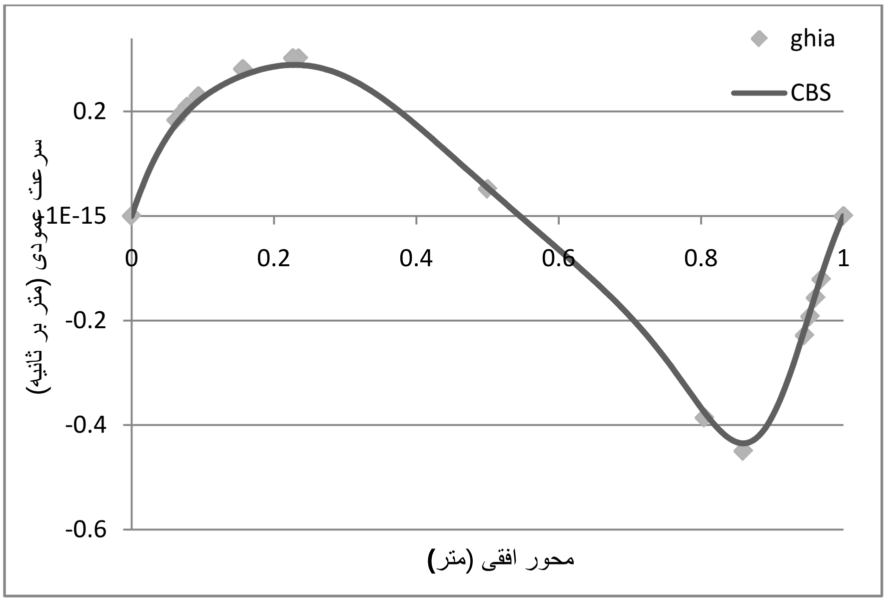
شکل۶-۸- سرعت افقی به ازای Re=100 در محل محور مرکزی در امتداد محور عمودی



شکل۶-۹- سرعت عمودی به ازای Re=100 در محل محور مرکزی در امتداد محور افقی

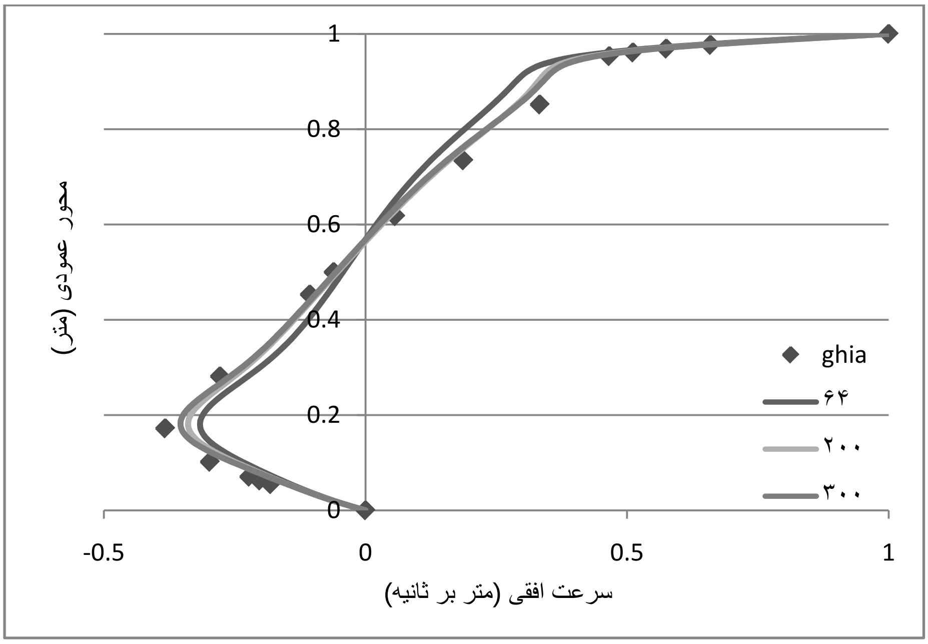


شکل۶-۱۰- سرعت افقی به ازای Re=400 در محل محور مرکزی در امتداد محور عمودی

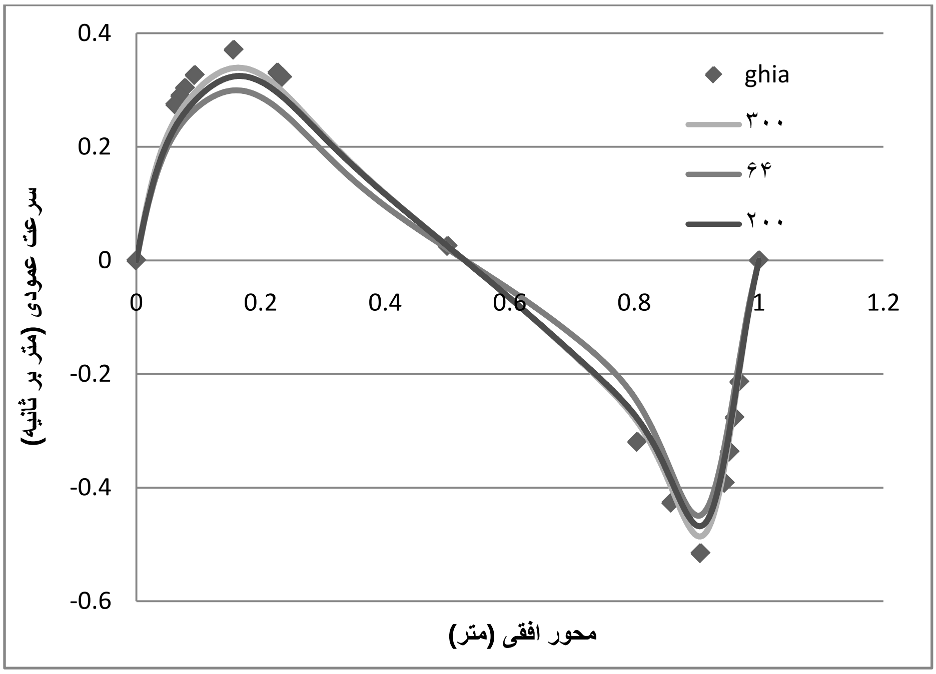


شکل۶-۱۱ - سرعت عمودی به ازای Re=400 در محل محور مرکزی در امتداد محور افقی

همانطور که نتایج اشکال ۶-۸ الی ۶-۱۱ نشان می دهد، تطابق کاملی بین نتایج حاصل از مدلسازی با روش سی- بی- اس و نتایج آزمایشگاهی ghia وجود دارد. در ادامه برای نشان دادن نقش تعداد شبکه ها در دقت یک مسئله اجزاء محدود، نمودارهای سرعت مربوط به عدد رینولدز ۱۰۰۰ را به ازای مش های ۶۴ در ۶۴، ۲۰۰ در ۲۰۰و ۳۰۰ در ۳۰۰ ترسیم می کنیم و می بینیم که هرچه مش ها ریزتر باشند، جوابها به مقادیر ghia نزدیکتر می شود.

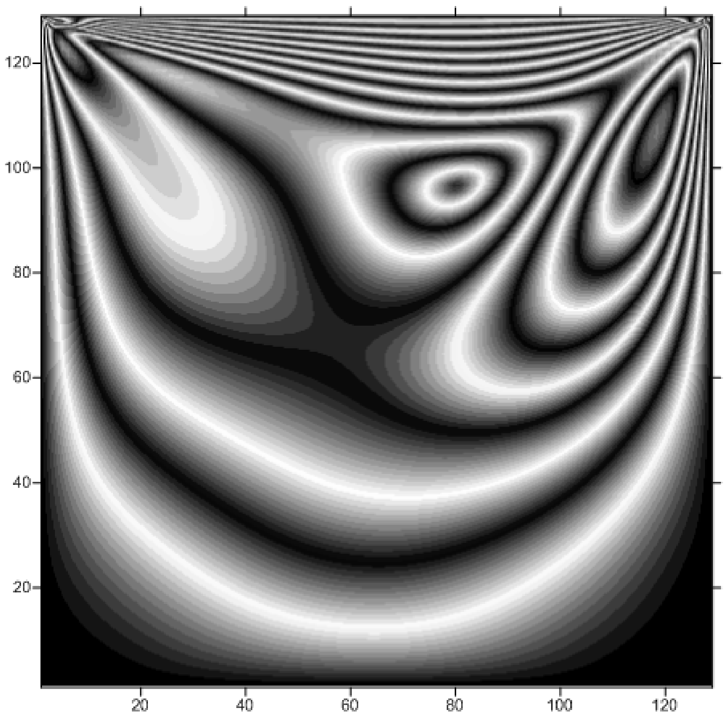


شکل۶-۱۲ - سرعت افقی به ازای Re=1000 در محل محور مرکزی در امتداد محور عمودی

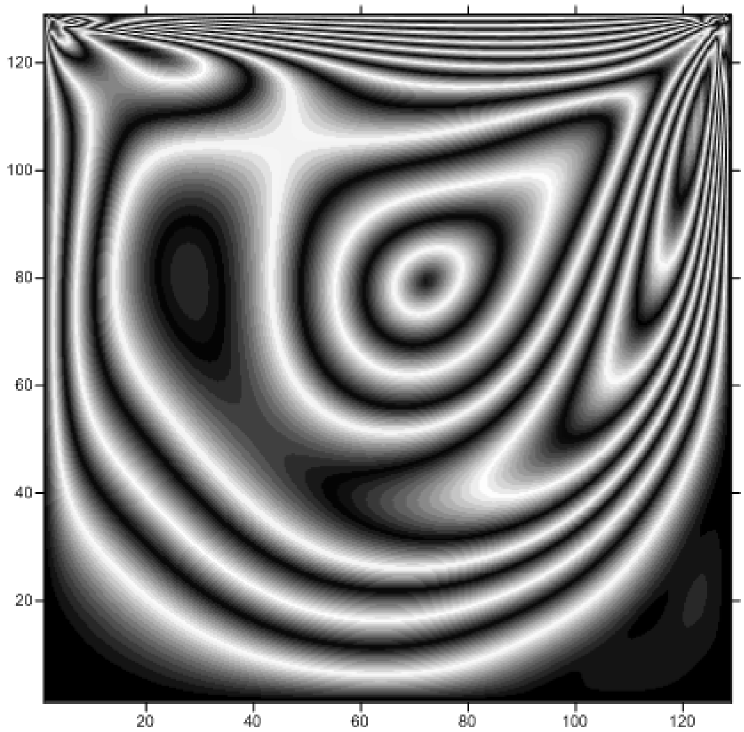


شکل۶-۱۳- سرعت عمودی به ازای Re=1000 در محل محور مرکزی در امتداد محور افقی

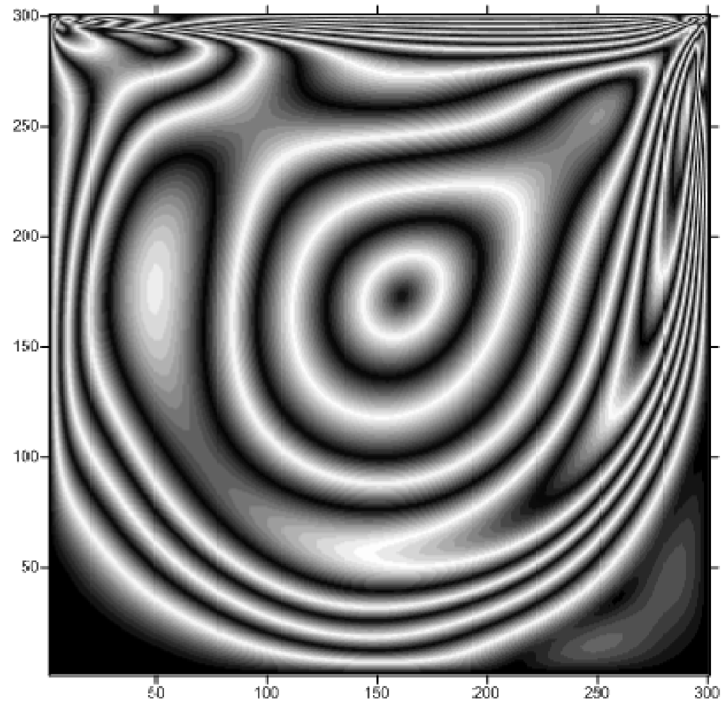
حال نمودار خطوط جریان lid-driven cavity به ازای اعداد رینولدز ۱۰۰، ۴۰۰ و ۱۰۰۰ ترسیم می شود. در تمام نمودارهای خطوط جریان و سرعت این فصل محورها بدون بعد بوده و تعداد مش ها در طول را نشان می دهند



شکل۶-۱۴ خطوط جریان به ازای Re=100

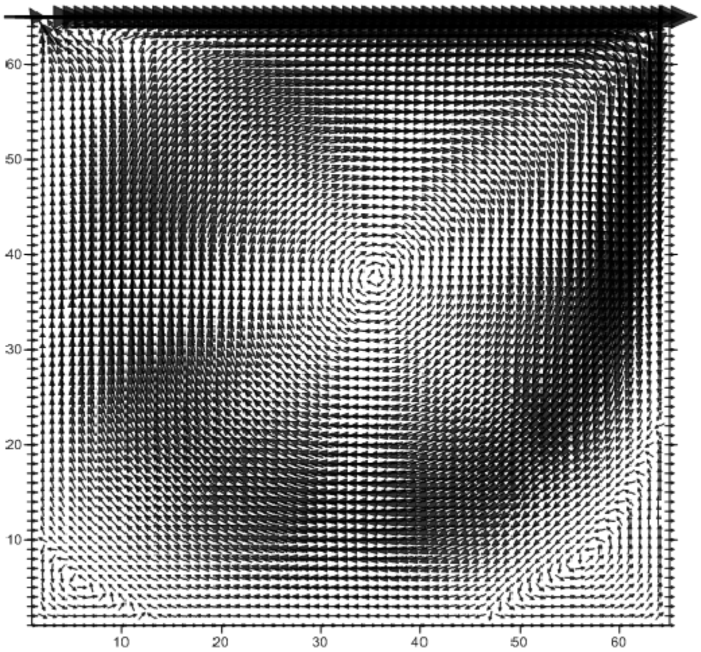


شکل۶-۱۵ خطوط جریان به ازای Re=400



شکل۶-۱۶ خطوط جریان به ازای Re=1000

به عنوان آخرین شکل در مثال عددی اول، بردار سرعت درون حفره در یک شبکه ۶۴ در ۶۴ به ازای عدد رینولدز ۱۰۰۰ نشان داده می شود.



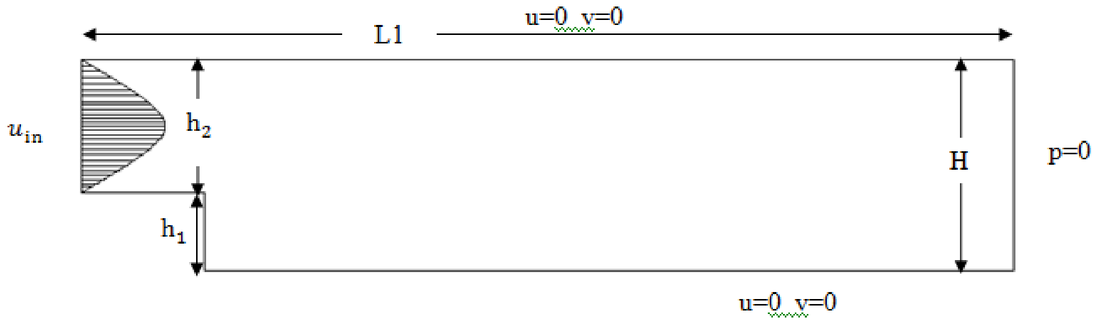
شکل۶-۱۷ بردار سرعت به ازای Re=1000

همانطور که این مثال عددی نشان داد، روش سی- بی- اس به طور دقیقی می تواند برای تحلیل جریان در مسئله lid driven cavity به کار گرفته شود.

۶-۲-۲ Backward-Facing Step

به عنوان دومین مثال عددی، مدل معروف دیگری به نام backward facing step بررسی می شود[۱۰۲- ۱۰۳]. این مثال نیز بسیار معروف است و بسیاری از محققین از این مسئله برای کنترل عملکرد الگوریتم هایشان استفاده نموده اند. به علت اینکه تقریبا در هیچ تحقیقی به جز مرجع [۱۰۴] که جدول مقایسه سرعت در آن با تحقیق حاضر در پایان این مثال عددی شرح داده می شود، مقادیر سرعت در غالب جدول ارائه نشده و تنها به ترسیم نمودارهای سرعت اکتفا شده است. بنابراین برای نمونه جدول ۶-۲ مقایسه سرعت افقی در پائین دست را با یک تحقیق معتبر نشان می دهد.

همانطور که در شکل زیر مشاهده می شود سرعت ورودی به صورت سهمی بوده و با توجه به عدد رینولدز جریان به صورت زیر بیان می شود.



شکل ۶-۱۸ هندسه و شرایط مرزی مسئله Backward Facing Step

در شکل فوق، h_2 ارتفاع ورودی 0/2متر، h_1 ارتفاع پله 0/1 متر و H ارتفاع کانال در پائین دست می باشد. طول کانال L1 برابر ۲متر و طول پائین دست ۰/۴ متر می باشد. هم چنین همان گونه که در شکل نیز مشخص است u_{in} سرعت ورودی بوده و در خروجی فشار برابر صفر و در دیواره های کناری شرط عدم لغزش برقرار می باشد. همانطور که می دانیم عدد رینولدز برابر است با

$$Re = \frac{\rho v_{ave} D}{\mu} \qquad (49-6)$$

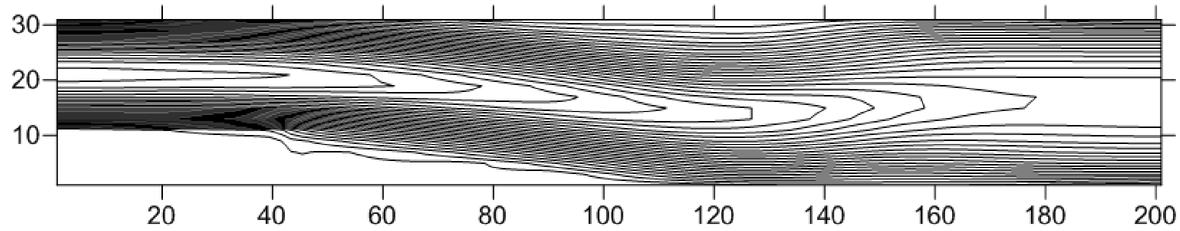
در معادله فوق $\rho = 1\ \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$، لزجت دینامیکی $\mu = 1 \times 10^{-4}\ \frac{Kg}{m.s}$ و D برابر $h_1 + h_2$ است. حال به ازای رینولدزهای مختلف می توان سرعت متوسط در ورودی(به عبارتی سرعت در مرکز ورودی) را بدست آورد. بنابراین برای سرعت متوسط ورودی خواهیم داشت

$$v_{ave} = Re \times \frac{10^{-4}}{1.5h_2} \qquad (50-6)$$

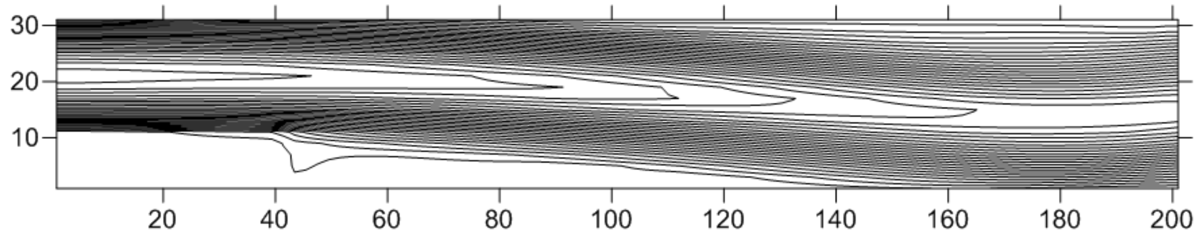
در نهایت به کمک سرعت متوسط ورودی و معادله سهمی درجه دوم، مقدار سرعت در ورودی را بدست می آوریم

$$u_{in} = \frac{Re}{150h_2}(y-h_1)(H-y) \qquad (51-6)$$

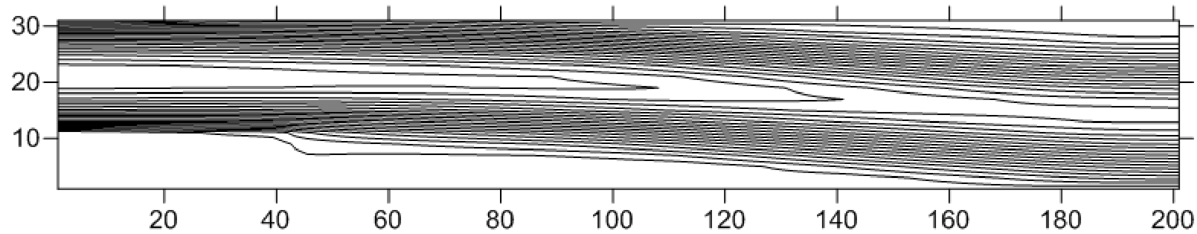
برای بررسی بیشتر، خطوط تراز سرعت و سرعت های افقی در فواصل مختلف و همچنین خطوط جریان به ازای رینولدزهای ۴۰۰، ۸۰۰ و ۱۲۰۰ نشان داده می شود.



شکل۶-۱۹ - خطوط تراز سرعت به ازای Re=400

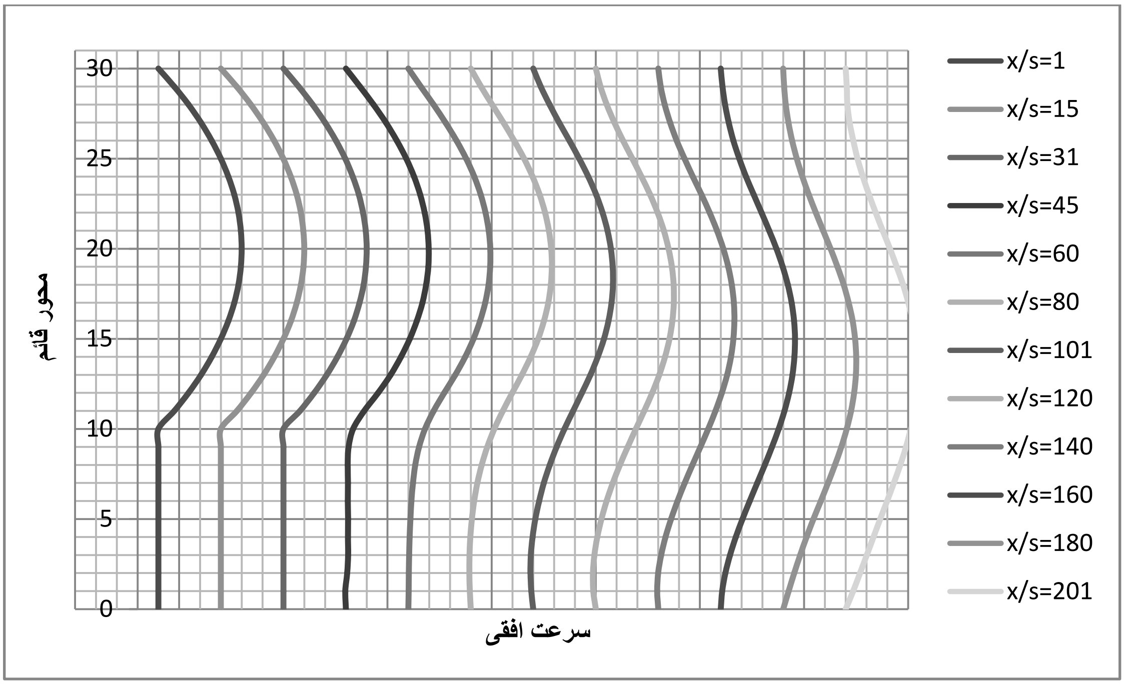


شکل۶-۲۰- خطوط تراز سرعت به ازای Re=800

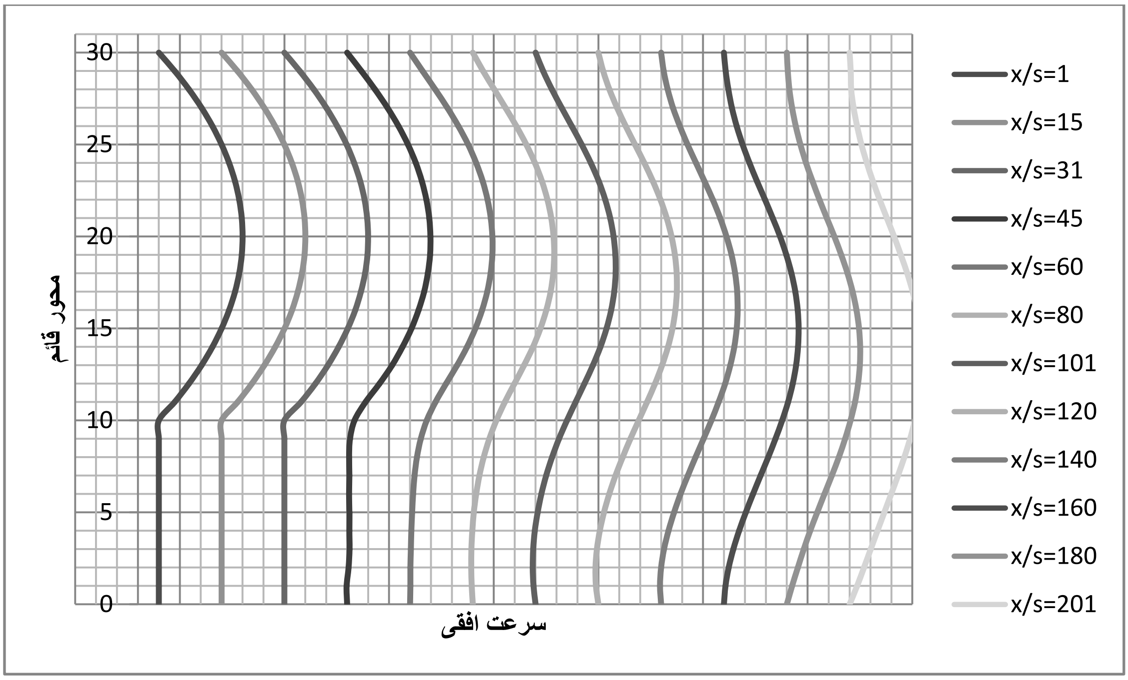


شکل۶-۲۱ - خطوط تراز سرعت به ازای Re=1200

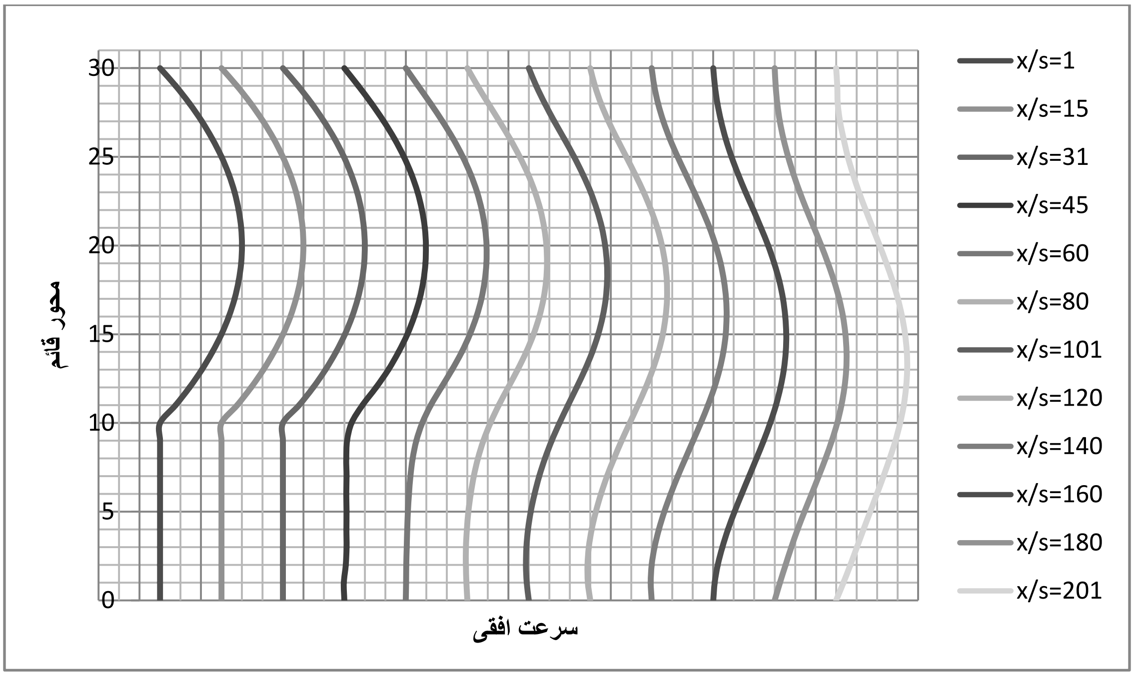
اگر اندازه شبکه ها برابر ۰/۰۱متر باشد (s تعداد مش ها) نمودارهای سرعت افقی در طول کانال به صورت زیر در می آید



شکل۶-۲۲ نمودار سرعت های افقی در فواصل مختلف کانال به ازای رینولدز ۴۰۰

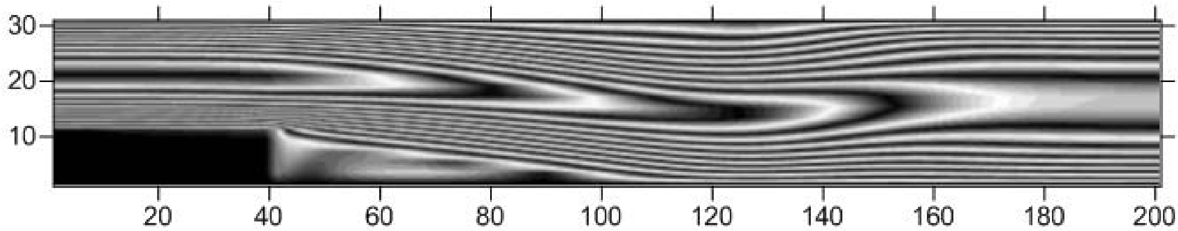


شکل۶-۲۳ نمودار سرعت های افقی در فواصل مختلف کانال به ازای رینولدز ۸۰۰

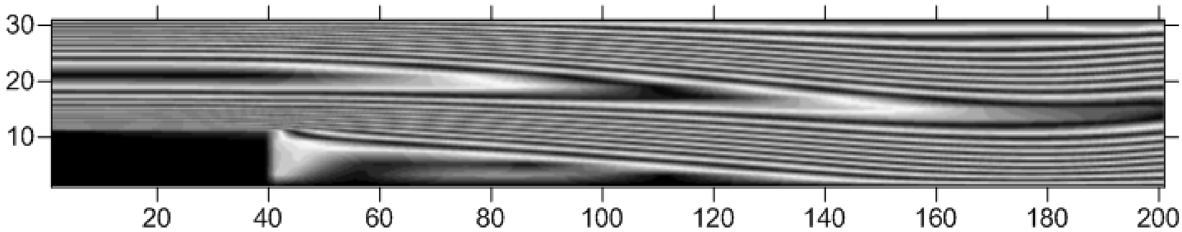


شکل۶-۲۴ نمودار سرعت های افقی در فواصل مختلف کانال به ازای رینولدز ۱۲۰۰

در نهایت نمودارهای خطوط جریان را به ازای سه عدد رینولدز ۴۰۰، ۸۰۰ و ۱۲۰۰ مشاهده می کنیم.

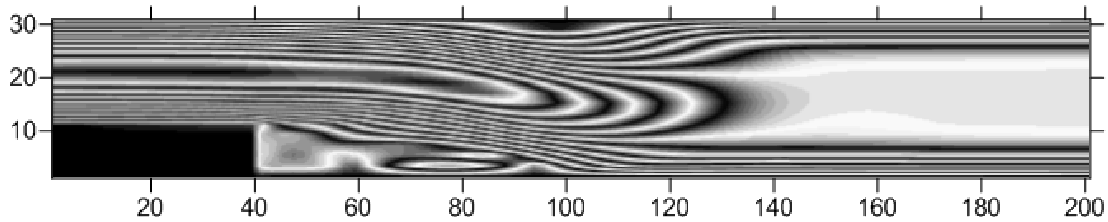


شکل۶-۲۵ خطوط جریان به ازای Re=400

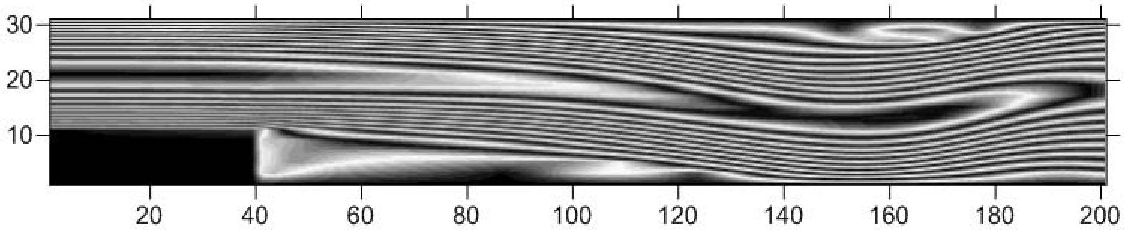


شکل۶-۲۶ خطوط جریان به ازای Re=800

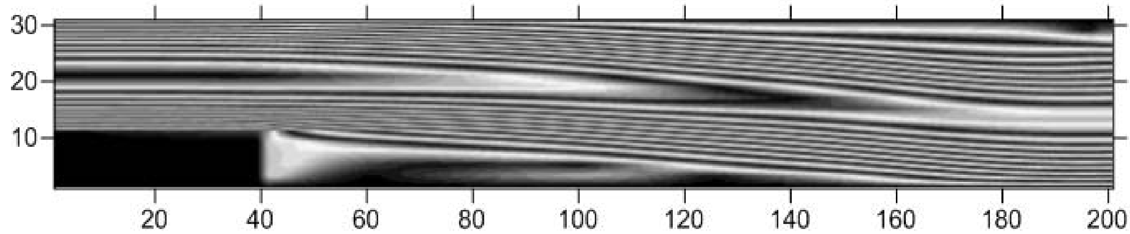
در ادامه نمودارهای خطوط جریان مربوط به عدد رینولدز ۱۲۰۰ در dt=0.001 و به ازای تکرارهای مختلف نمایش داده می شود.



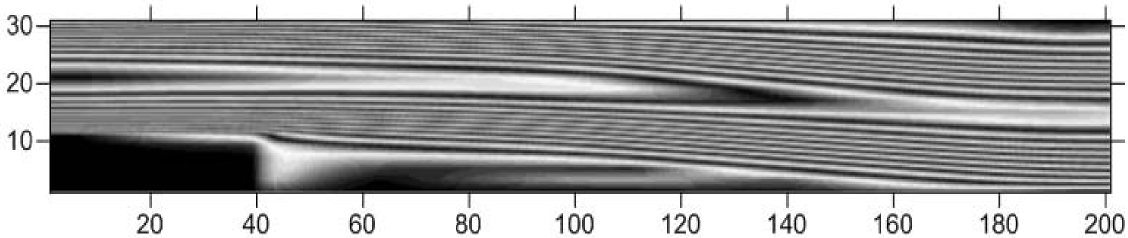
شکل۶-۲۷ خطوط جریان به ازای Re=1200 در تکرار 5000



شکل۶-۲۸ خطوط جریان به ازای Re=1200 در تکرار 10000



شکل۶-۲۹ خطوط جریان به ازای Re=1200 در تکرار 15000



شکل۶-۳۰ خطوط جریان به ازای Re=1200 در تکرار 20000

جدول ۶-۲ مقدار سرعت افقی در فاصله ۷متری از پله را به ازای رینولدز ۸۰۰ و h_1, h_2 برابر با ۰.۵متر و طول پائین دست ۳۰متر با نتایج مرجع [۱۰۴] مقایسه می کند.

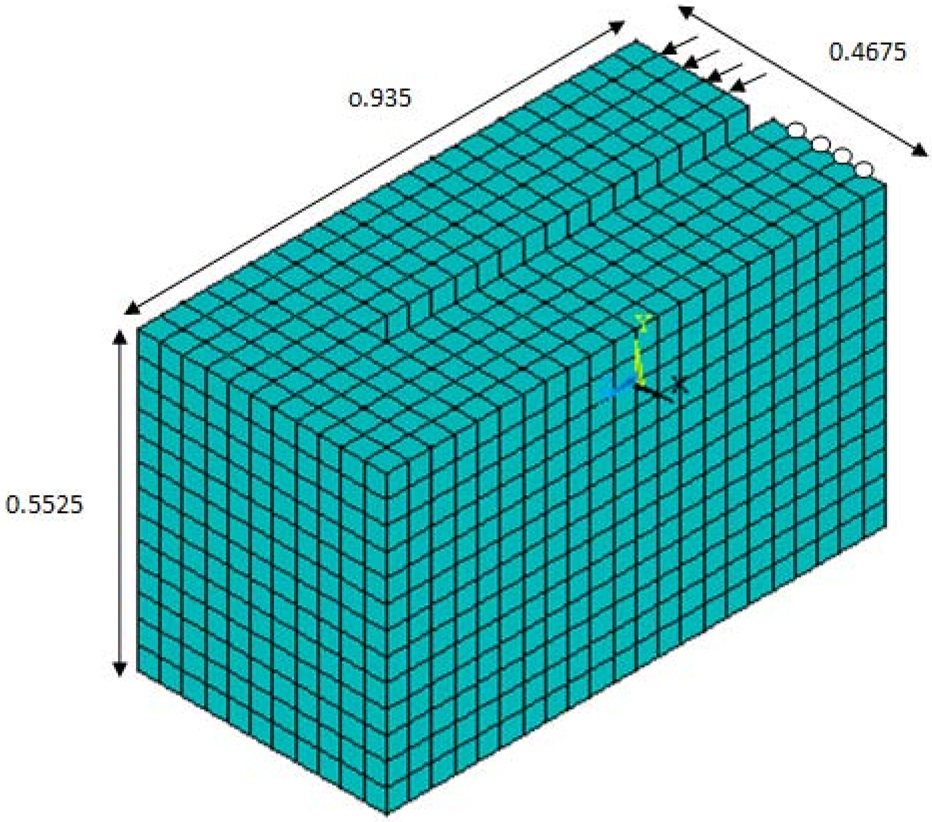
جدول۶-۲ سرعت افقی در فاصله ۷متری پائین دست

ارتفاع (متر)	سرعت در مرجع [۱۰۴]	سرعت در روش حاضر(متر بر ثانیه)
۰	۰	۰
۰.۰۵	۰.۲۳۲	۰.۲۲
۰.۱	۰.۴۲۷	۰.۴۴

۰.۱۵	۰.۶۱۲	۰.۶۵
۰.۲	۰.۷۹۱	۰.۸۳
۰.۲۵	۰.۹۴۷	۰.۹۶
۰.۳	۱.۰۶۱	۱.۰۶
۰.۳۵	۱.۱۱۷	۱.۱
۰.۴	۱.۱۰۵	۱.۰۶
۰.۴۵	۱.۰۲۴	۱
۰.۵	۰.۸۸۶	۰.۸۳۵
۰.۵۵	۰.۷۱	۰.۶۸
۰.۶	۰.۵۲۳	۰.۵۲
۰.۶۵	۰.۳۴۹	۰.۳۶
۰.۷	۰.۲۰۴	۰.۲۲۲
۰.۷۵	۰.۰۹۳	۰.۱
۰.۸	۰.۰۱۵	۰.۰۲
۰.۸۵	-۰.۰۳۱	-۰.۰۳
۰.۹	-۰.۰۴۹	-۰.۰۶
۰.۹۵	-۰.۰۳۸	-۰.۰۵
۱	۰	۰

۶-۲-۳- مدل تصفیه کننده آب

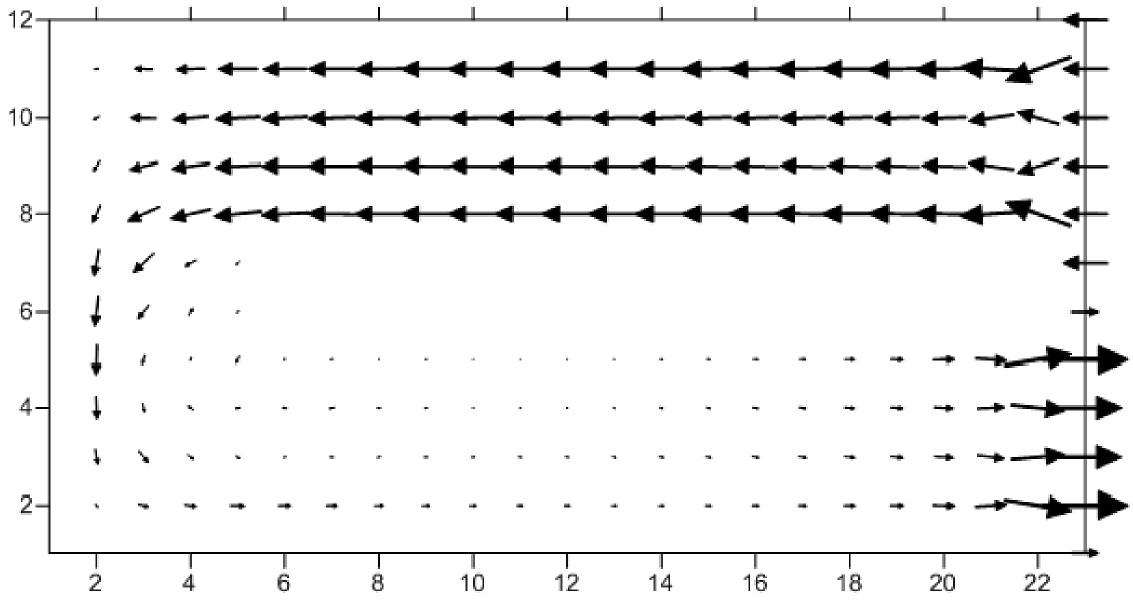
شکل زیرمدل آزمایشگاهی در مقیاس ۱:۸ قسمتی از یک تصفیه کننده آب است که در کشور انگلستان به اسم Embsay contact tank ساخته شده و در حال کارمی باشد.



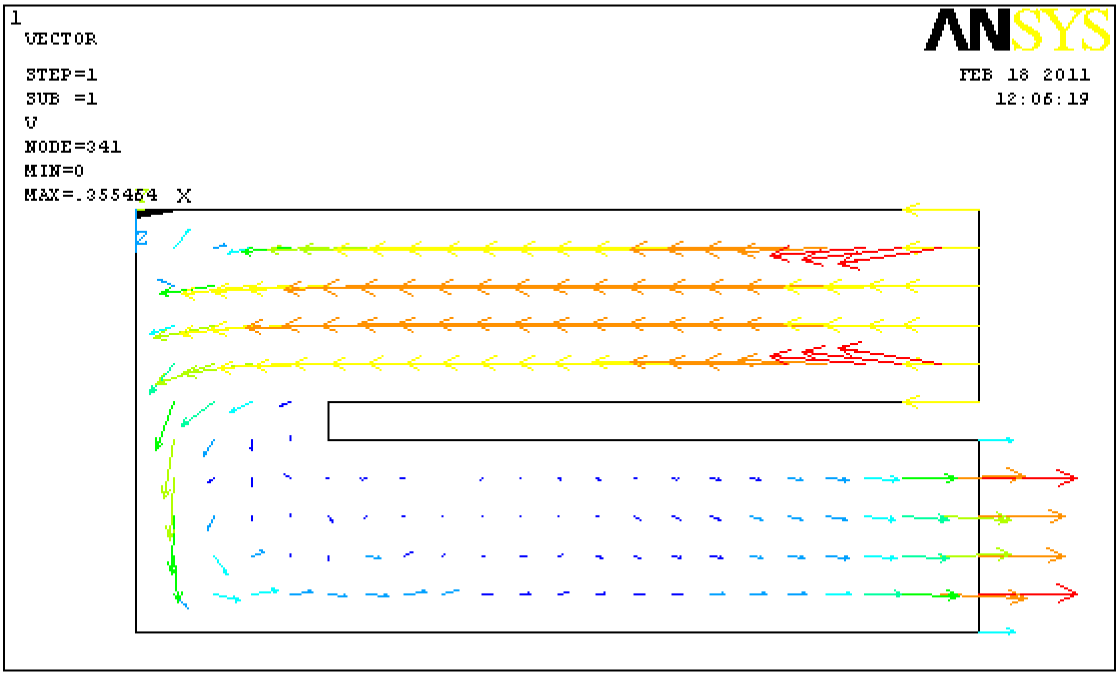
شکل ۶-۳۱ هندسه و ابعاد تانک تصفیه آب(بر حسب متر)

مشخصات سیال درون تانک بدین صورت می باشد، $\rho = 1000\ \frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m}^3}$ و لزجت دینامیکی آب برابر با $\mu = 1 \times 10^{-1}\ \frac{\mathrm{Kg}}{\mathrm{m.s}}$. سرعت ورودی تانک که در شکل نیز مشخص است $-0.2591\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ می باشد. در خروجی تانک فشار برابر صفر بوده و در دیواره ها مولفه های سرعت صفر می باشد. ضمنا روی سطح جریان شرایط درپوش ثابت برقرار می باشد. ابعاد کانال و نحوه شبکه بندی در شکل ۶-۳۱ نشان داده شده است (ابعاد هر یک از مش ها ۰.۰۴۲۵متر می باشد).

برای مقایسه نتایج، نمودارهای بردار سرعت در سطح جریان و مقاطع مختلف تانک با نمودارهای حاصل از نرم افزار قوی و کاربردی ANSYS مقایسه شده است.

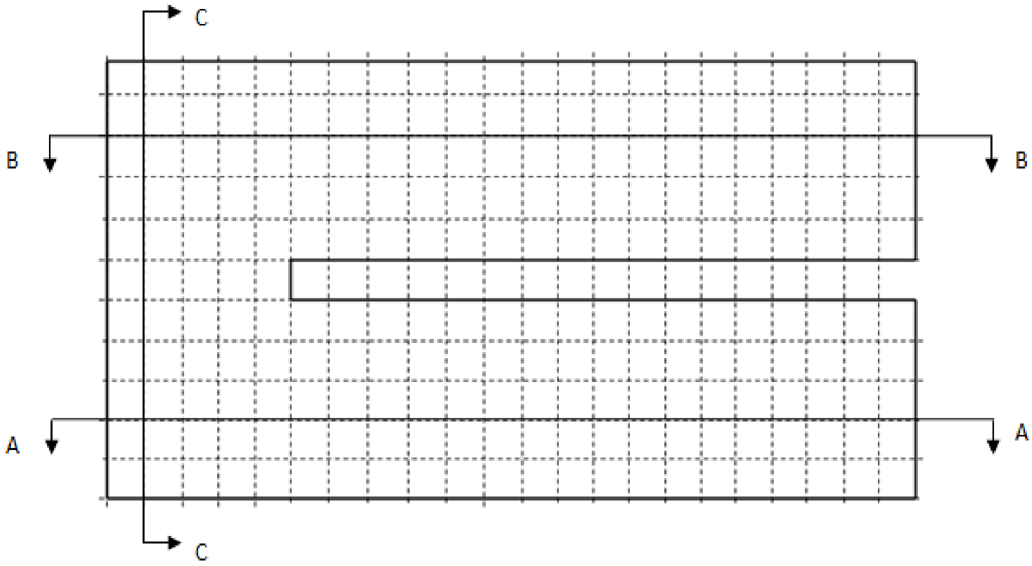


شکل۶-۳۲ بردار سرعت در سطح جریان به روش CBS

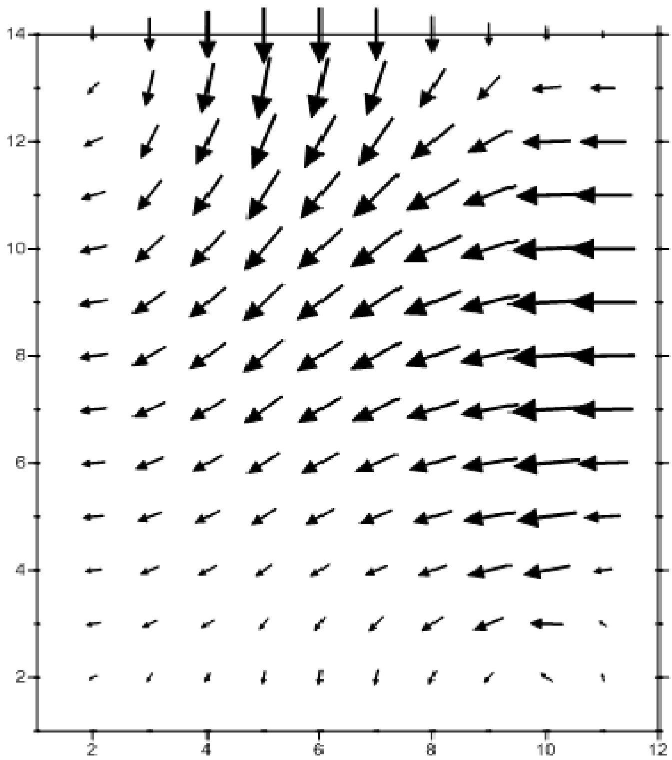


شکل۶-۳۳ بردار سرعت در سطح جریان در نرم افزار ANSYS

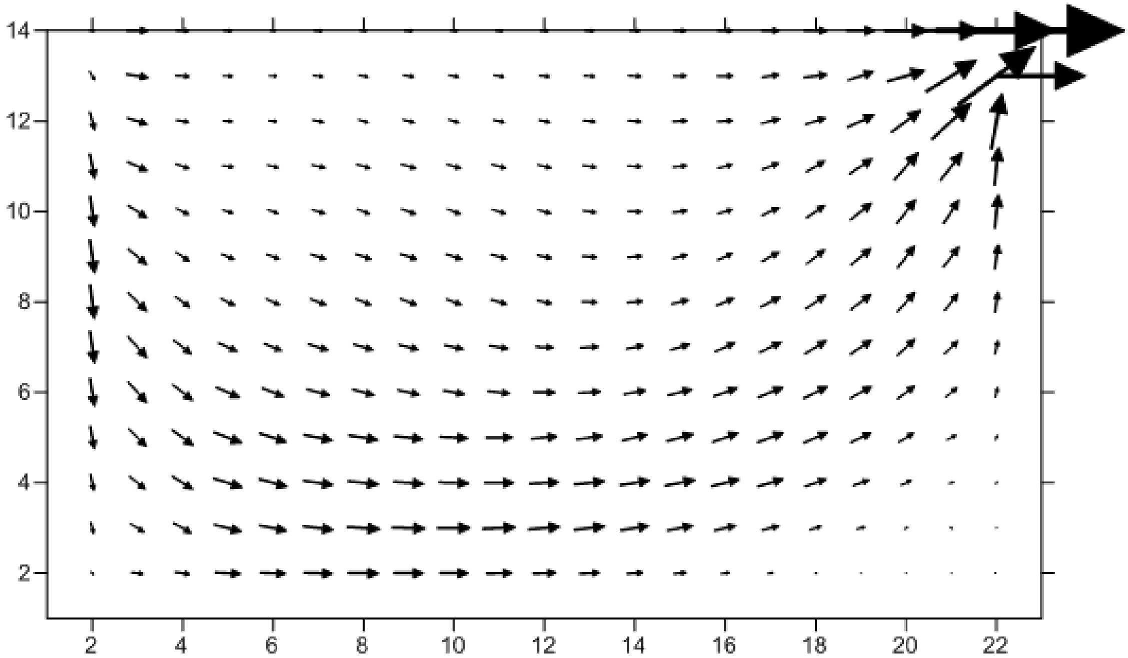
علاوه بر ترسیم بردارهای سرعت بر روی سطح جریان، این بردارها برای مقاطع مختلف در شکل ۶-۳۴ نشان داده شده و با نمودارهای انسیس مقایسه می شود.



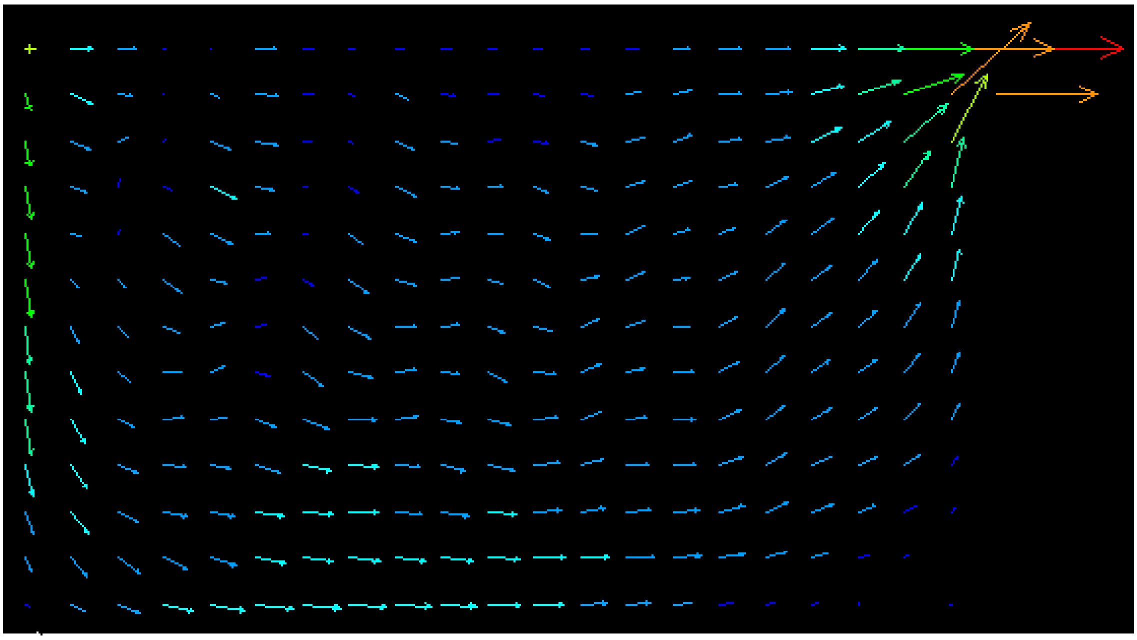
شکل۶-۳۴ شبکه بندی و تعیین مقاطع A, B,C



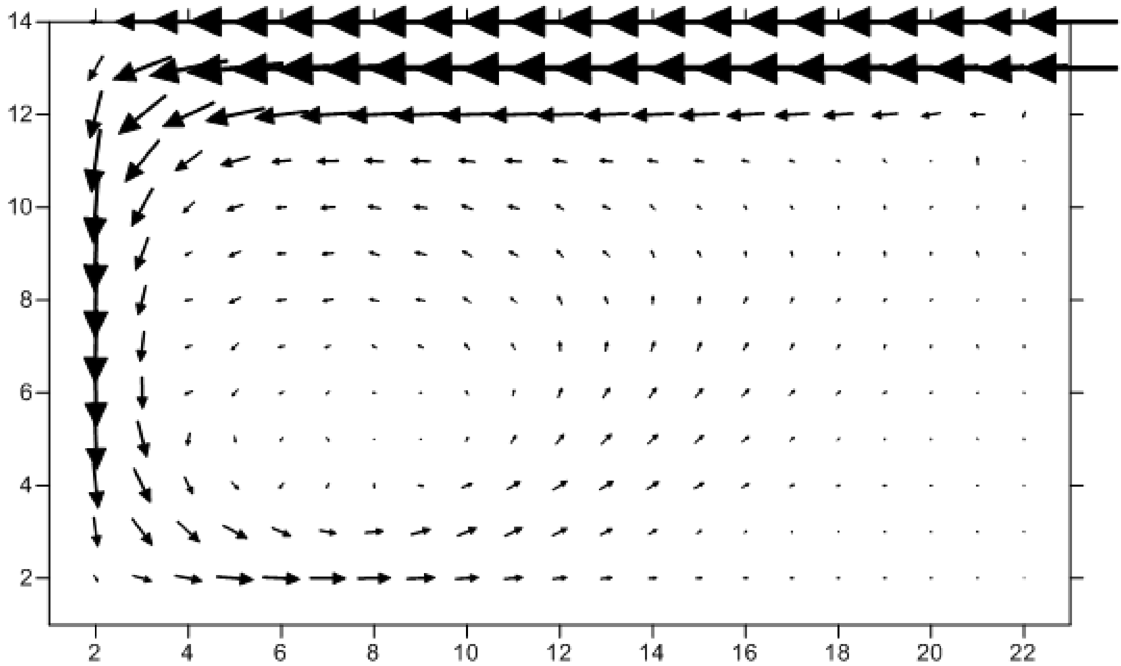
شکل ۶-۳۵ .بردارهای سرعت در مقطع C



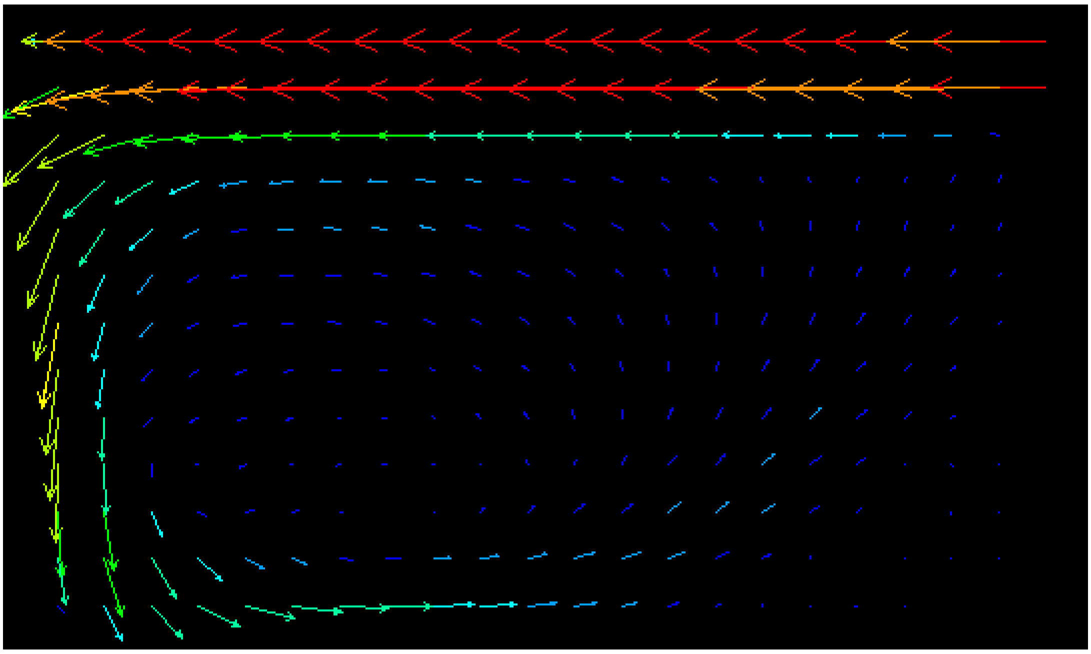
شکل ۶-۳۶ الف - بردارهای سرعت در مقطع A



شکل ۶-۳۶ ب - بردارهای سرعت در انسیس در مقطع A

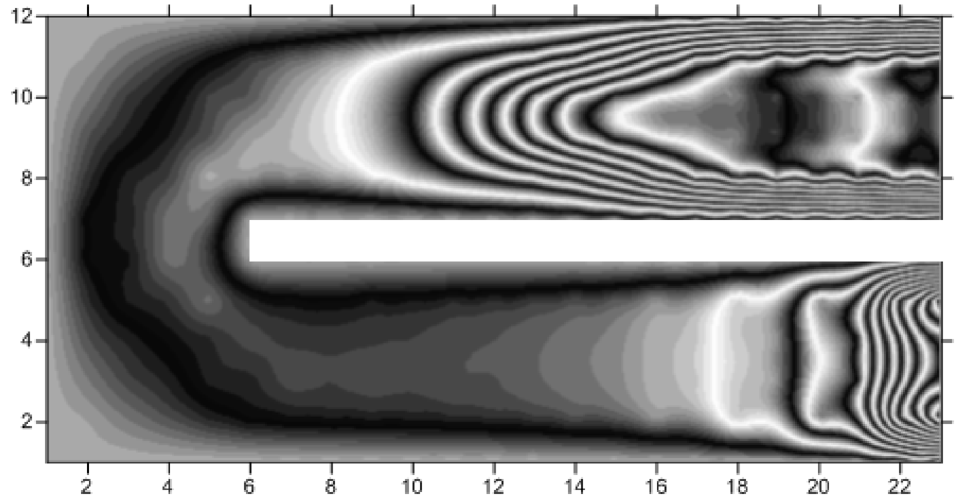


شکل ۶-۳۷ الف- بردارهای سرعت در مقطع B

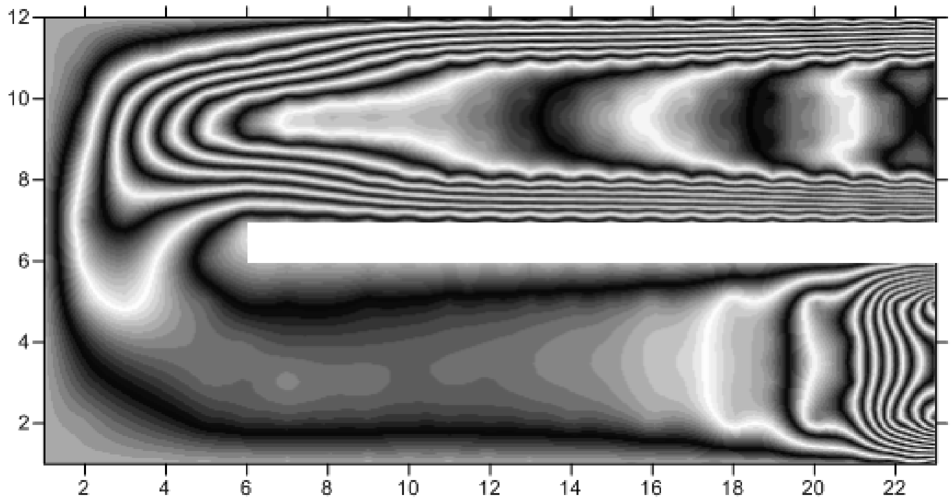


شکل ۶-۳۷ ب- بردارهای سرعت در انسیس در مقطع B

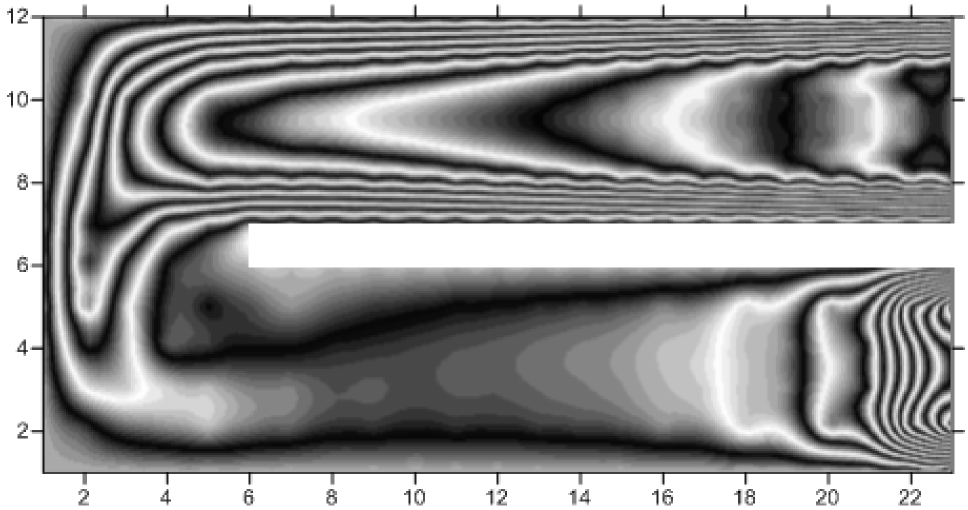
برای نشان دادن روند پیشرفت سیال درون تانک، نمودارهای خطوط جریان در dt=0.001 و به ازای تکرارهای مختلف نمایش داده می شود.



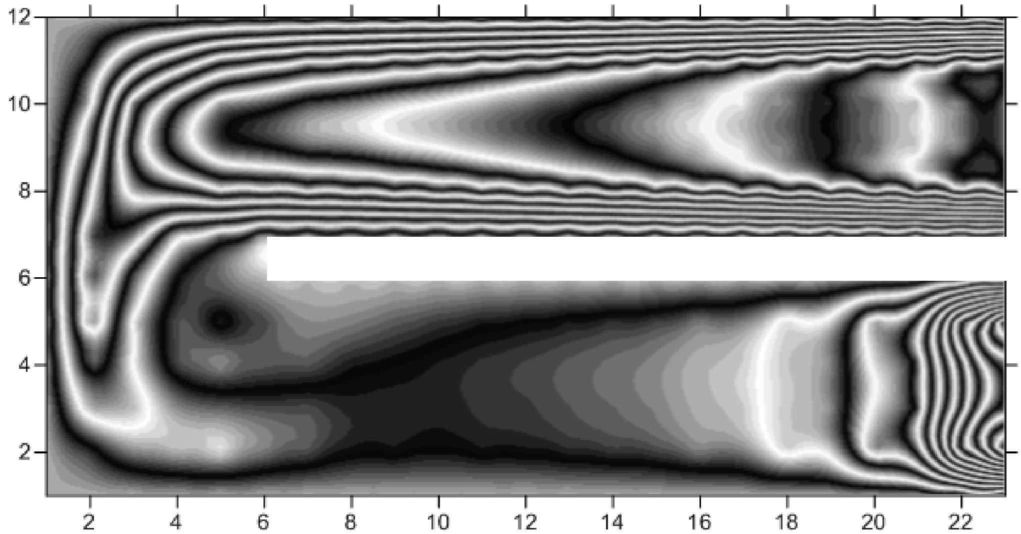
شکل۶-۳۸ خطوط جریان در تکرار۶۰۰۰



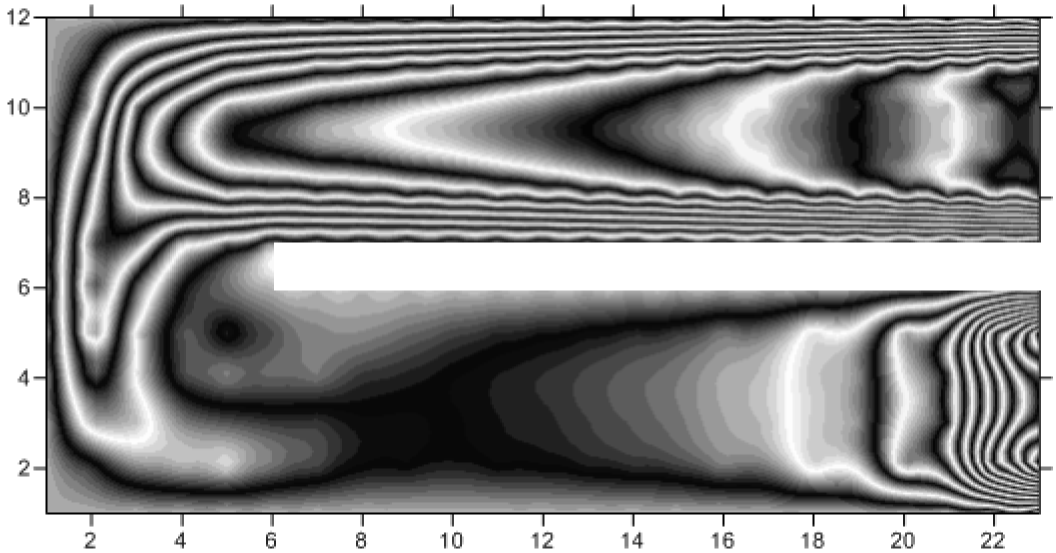
شکل۶-۳۹ خطوط جریان در تکرار۱۳۰۰۰



شکل۶-۴۰ خطوط جریان در تکرار۲۳۰۰۰



شکل۶-۴۱ خطوط جریان در تکرار۳۳۰۰۰



شکل۶-۴۲ خطوط جریان در تکرار۴۰۰۰۰

با بررسی نمودارها و شکل های ترسیم شده در این فصل به دقت خوب این روش پی می بریم. در یک مسئله اجزاء محدود راه های زیادی برای افزایش دقت وجود دارد، یکی از این روش ها ریزتر کردن شبکه ها می باشد که این امر در نمودار بردار سرعت به ازای رینولدز۱۰۰۰ به خوبی نشان داده شده است. برای این که رفتار سیال را در کانال در هر لحظه بررسی کنیم می توانیم از خطوط جریان در طول مسیر استفاده کنیم که این امر نیز در نمونه های عددی دوم و سوم در غالب شکل های خطوط جریان، در تکرارهای مختلف نشان داده شده است.

شرایط مرزی مسئله مورد بررسی در تحلیل های اجزاء محدود بسیار مهم می باشد. در مثال های فوق شرط عدم لغزش برای دیواره های ساکن، فشار صفر در خروجی و شرط درپوش ثابت در سطح جریان برای مسئله سه بعدی تانک تصفیه آب در نظر گرفته شده است.

فصل هفتم

خلاصه، نتیجه گیری و پیشنهادات

۱-۷ خلاصه

در این پایان نامه همان گونه که مشاهده کردیم از روش سی- بی- اس برای مدل سازی جریان استفاده شده است. در ابتدا پس از ذکر تاریخچه ای از روش سی- بی- اس اعتبار این روش با ذکر نتایج تحقیقات محققین مختلف در حوزه هیدرولیک اثبات گردید. تعدد مراجعی که از روش سی- بی- اس استفاده می کنند و همچنین مبدع این روش به خوبی مشخص نمود که این روش از بهترین روش های حل جریان به طریق المان های محدود می باشد.

پس از ذکر معادلات اساسی، این معادلات جهت حل به روش سی- بی- اس به فرم های انتگرالی مربوطه نوشته شدند. قبل از حل این معادلات انتگرالی به روش انتگرال گیری عددی، نحوه اعمال شرایط مرزی که اعمال نادرست آن سبب واگرایی جواب ها می گردد و همچنین نحوه برخورد با ترم های مختلف در این معادلات بررسی شدند.

در بررسی ترم های انتقال و پخش ابتدا به روش گالرکین مراجعه شد اما مشاهده کردیم که این روش در ترم های انتقال سبب واگرایی در پاسخ ها می گردد. در این مرحله پس از بررسی سایر روش ها مانند پترو گالرکین و حداقل مربعات، روش پترو گالرکین بالادست در امتداد خط جریان به عنوان روش مناسب در محاسبه ترم انتقال معرفی شد. در عین حال مشاهده گردید که بر خلاف مسائل سازه ای، در مسائل حل جریان توابع وزن با توابع شکل متفاوت هستند و باید در هر پله زمانی بر حسب جهت های جریان مجدداً محاسبه گردند. این امر سبب بسیار مشکل تر شدن مسائل حل جریان نسبت به مسائل سازه ای است. در پایان برای اثبات دقت روش سی- بی- اس، این معادلات به کمک ایجاد کننده های مش برای مثال های عددی معتبری کد نویسی شدند و جواب هایشان با نمودارهای آزمایشگاهی و نرم افزار قوی و کاربردی انسیس مقایسه گردیدند.

۲-۷ نتیجه گیری

در فصل ششم با مقایسه نتایج حاصل از روش سی- بی- اس با روش های آزمایشگاهی و نرم افزار معتبر انسیس به دقت روش سی- بی- اس پی بردیم و دیدیم که نمودارها و شکل های مقایسه ای تقریبا با مقادیر واقعی یکسان می باشد.

به عنوان اولین مثال عددی معتبر در بحث اجزا محدود، مسئله کاربردی و مهم جریان درون حفره مورد بررسی قرار گرفت و نمودارهای سرعت و جریان در این حفره با نتایج ghia که به عنوان مرجع شناخته می شود مقایسه شد و مشاهده کردیم که جواب ها منطبق بر جواب های مرجع می باشد.در نمودارهای مربوط به سرعت افقی و عمودی به ازای رینولدز ۱۰۰۰ علاوه بر مقایسه نتایج روش سی- بی- اس با نتایج آزمایشگاهی ghia تاثیر اندازه شبکه و مش بندی نیز به تصویر کشیده شد و این نتیجه مهم را گرفتیم، که با ریزتر شدن مش ها دقت جواب ها افزایش پیدا می کند؛ همچنان که نوع مش بندی، درجه تابع شکل ها و ... در دقت جواب های هر مسئله اجزا محدود تاثیرگذار می باشد.

پس از حل مسئله معتبر دو بعدی دوم (facing backward step)، دقت بالای روش سی- بی- اس در مسائل دو بعدی را از طریق مقایسه نتایج این مسئله با نمودارهای حاصل از تحقیقات آزمایشگاهی فوق ثابت کردیم. ما در این مساله خطوط تراز سرعت را در کانال بررسی کرده و نتایج روش دقیق سی- بی- اس را با نتایج مرجع [۱۰۴] در غالب جدول مقایسه کردیم. علاوه بر این جدول، نمودارهای خطوط جریان به ازای رینولدزهای مختلف نشان داده شدند.

ما در این تحقیق جهت نشان دادن کاربرد روش سی- بی- اس در مسائل سه بعدی و همچنین مقایسه با نرم افزار قوی انسیس مثال عددی سوم را به تانک تصفیه آب embsay surge tank اختصاص دادیم و از مقایسه نمودارهای خطوط جریان و همچنین توزیع سرعت در مقاطع مختلف تانک تصفیه آب با نمودارهای حاصل از نرم افزار انسیس دقت بالای روش سی-بی- اس را در این زمینه نتیجه گرفتیم.

یک نتیجه مهم دیگر این تحقیق بیان تاثیر اندازه مش ها در افزایش دقت جوابهای حاصله میباشد. طبیعتاً هرچه اندازه مش بندی ریزتر باشد جواب ها دقیق تر می گردد. البته بایستی به تاثیر این مساله در کند شدن اجرای برنامه نیز توجه کرد.

با توجه به حجم بالای کدنویسی و این که تعداد خطوط کدنویسی در ارتباط مستقیم با زمان اجرای برنامه است، نتیجه می گیریم بهینه سازی کدنویسی در عین دشوار بودن یک مسئله مهم می باشد. به عنوان نمونه در این برنامه برای تعریف ارتباط هرگره با گره و المان های اطرافش با توجه به این نکته که تعداد المان ها به محل قرار گیری گره موردنظر مرتبط است، ابتدا در هر تابع حل با توجه به محل گره، معادله مربوطه آن نوشته شد که این امر سبب کندشدن اجرای برنامه گردید. اما در نهایت که موفق به ایجاد تابع nn گردیدم این مشکل کاملا حل گردید. در نهایت با اعمال تغییرات این چنینی توانستم خطوط برنامه را از حدود ۱۰۰۰خط به کمتر از نصف برای هر مسئله کاهش دهم.

یکی دیگر از سختی های روش اجزاء محدود این است که اگر در قسمتی از کدنویسی دچار اشتباه گردیم، جواب ها به سرعت واگرا می گردد. مثلا در ابتدا در محاسبه ضریب متغیرهای کمکی به اشتباه وزن المان دو مرتبه حساب شده بود و این سبب واگرایی جواب ها در تکرارهای زیاد می گردید. برای برطرف کردن این مشکل ابتدا نحوه محاسبه طول المان مورد بررسی مجدد قرار گرفت اما پس از بررسی چندین روش معتبر دیگر متوجه شدیم که مشکل واگرایی مربوط به این طول نمی باشد. در نهایت پس از مرور کد برنامه اشکال برنامه یافت گردید. عیب برنامه که سبب جواب های نامناسب شده بود به نادرست محاسبه شدن ضریب متغیرهای سرعت مربوط بود، زیرا در محاسبه این ضریب فقط به یک بار ضرب کردن وزن نقطه نیاز است در صورتی که در شکل نادرست قبلی دوبار وزن در هم ضرب می شد. با توجه به این توضیحات، یک بار دیگر دشواری روش CBS را نشان دادیم.

همواره به عنوان یک نتیجه کلی باید به خاطر داشت، از آنجا که شرایط مرزی اهمیت ویژه ای دارد، اعمال نادرست شرایط مرزی، مهمترین عامل در واگرایی جواب های برنامه می باشد. به این دلیل در مثال های عددی مورد بحث شرط عدم لغزش برای دیواره های ساکن و فشار صفر در خروجی و

همچنین شرط درپوش ثابت در سطح جریان برای مسئله سه بعدی تانک تصفیه آب در نظر گرفته شده است.

در انتها بار دیگر این مطلب را یادآوری میکنیم که برای انجام یک مسئله به روش های اجزا محدود، تسلط نسبی بر ریاضیات(به خصوص مبحث ماتریس ها) ، علم مهندسی مربوطه و آشنایی با زبان برنامه نویسی کامپیوتری از اهم شرایط لازم می باشد.

۳-۷ پیشنهادات

نظر به نقش بالایی که نوع مش بندی در بهبود جوابها دارد، ضمن یادآوری این نکته که در این تحقیق از مش های مستطیلی برای مسائل دو بعدی و شش وجهی برای مسائل سه بعدی استفاده شده است، یک پیشنهاد مفید، استفاده از مش بندی های مثلثی، چهار وجهی و غیره و نیز ترکیب انواع مش بندی ها برای مسائل وسیع تر میباشد.

همانطور که مشاهده کردیم روش سی- بی- اس با نمونه های مختلف حفره، پله در کانال و تانک سه بعدی تصفیه آب مقایسه شده است، بنابراین با ایجاد تغییرات مناسب در کد نوشته شده به راحتی می توان به تحلیل هر نوع جریانی در کانال ها، رودخانه ها و ... که در حالت آرام یا آشفته قرار دارد پرداخت و این تحلیلها هریک میتوانند موضوع تحقیق جداگانه ای قرار گیرند.

تغییرات فوق شامل نحوه صحیح مش بندی، اعمال شرایط مرزی مسئله مورد نظر، تغییرات اصلی در پارامترهای معادلات و فرمول های مسئله و موارد متعدد دیگر می باشد.

ایده بعدی استفاده از برنامه نوشته شده در این پایان نامه برای تحلیل جریان کاملاً آشفته در سیالات تراکم پذیر و تراکم ناپذیر میباشد؛ به نحوی که در طرح ها و پروژه های عملی برای تحلیل و طراحی جریان در سازه های هیدرولیکی به عنوان یک مرجع معتبر قابل استفاده باشد.

علاوه بر موارد فوق، از کد نوشته شده در این تحقیق می توان برای تحلیل جریان های سطح آزاد، جریان های لایه مرزی، جریان های لزج و غیره به کار برد و همچنین مسایل انتشار امواج و نفوذ در محیط های متخلخل را بررسی نمود.

پیوست ها

پیوست A

شکل غیر بقایی معادلات ناویر – استوکس

برای نشان دادن معادلات ناویر – استوکس در فرم غیر بقایی شان، با فرم بقایی شروع می کنیم.

بقای جرم :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i}=\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+u_i\frac{\partial \rho}{\partial x_i}=0 \qquad A.1$$

بقای مومنتم :

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t}+\frac{\partial(u_j\rho u_i)}{\partial x_j}-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \qquad A.2$$

بقای انرژی :

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t}+\frac{\partial(u_j\rho E)}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial(u_j p)}{\partial x_j}-\frac{\partial(\tau_{ij}u_j)}{\partial x_j}=0 \qquad A.3$$

معادله مومنتم را با ترم های مشتق گیری شده، بازنویسی می کنیم.

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right)+\rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \qquad A.4$$

با جایگزین کردن معادله بقای جرم (A.1) در معادله بالا به معادله ساده شده مومنتم می رسیم.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=0 \qquad A.5$$

به طور مشابه در بالا ، معادله انرژی (A.3) را می توانیم با ترم های مشتق گیری شده بازنویسی کنیم

$$E\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u_j}{\partial x_j}+u_j\frac{\partial \rho}{\partial x_j}\right)+\rho\frac{\partial E}{\partial t}+\rho u_j\frac{\partial E}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{\partial(u_i p)}{\partial x_i}-\frac{\partial(\tau_{ij}u_j)}{\partial x_i}=0 \qquad A.6$$

مجدد معادله پیوستگی را در معادله بالا جایگزین می کنیم و به شکل خلاصه شده معادله انرژی می رسیم .

$$\frac{\partial E}{\partial t}+u_j\frac{\partial E}{\partial x_j}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(k\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial(u_i p)}{\partial x_i}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\tau_{ij}u_j)}{\partial x_i} \qquad A.7$$

بعضی مولفین، معادلات (A.1)، (A.5) و (A.7) را برای مطالعه مسائل جریان تراکم پذیر استفاده می کنند، اگرچه این معادلات غیربقایی در حالت های خاص، جواب های نادرست و چندگانه می دهند. این

حالت به طور خاص برای مسائل جریان تراکم پذیر با سرعت بالا همراه با شک درست می باشد.

بایستی توجه شود که معادلات غیربقایی برای شبیه سازی مسائل جریان تراکم پذیر مناسب نمی باشد.

پیوست B

انتگرال گیری جزء به جزء در دو یا سه بعد (قضیه گرین)

انتگرال گیری جزء به جزء از عبارت دو بعدی زیر را در نظر بگیرید

$$\int\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial\psi}{\partial x} dxdy$$

B.1

با استفاده از رابطه معروف انتگرال گیری جزء به جزء برای انتگرال گیری نسبت به x داریم.

$$\int_{\mathrm{xL}}^{\mathrm{xR}} udv = -\int_{\mathrm{xL}}^{\mathrm{xR}} vdu + (\mathrm{uv})_{\mathrm{x=xR}} - (\mathrm{uv})_{\mathrm{x=xL}} \qquad \mathrm{B.2}$$

با استفاده از علائم شکل B.1 داریم.

$$\int\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{x}} \mathrm{dxdy} = -\int\int_{\Omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}} \psi \mathrm{dxdy} + \int_{\mathrm{y=yB}}^{\mathrm{y=yT}} [(\Phi\psi)_{\mathrm{x=xR}} - (\Phi\psi)_{\mathrm{x=xL}}]\mathrm{dy}$$

B.3

حال اگر قطعه مرزی مستقیم $\mathrm{d}\,\boldsymbol{\Gamma}$ را بر روی مرز سمت راست در نظر بگیریم، مشاهده خواهیم کرد که

$$dy = d\boldsymbol{\Gamma} n_x \qquad B.4$$

که در آن n_x کسینوس هادی بین خط قائم بر مرز و جهت x است. همچنین برای سمت چپ مرز داریم.

$$dy = -d\boldsymbol{\Gamma} n_x \qquad B.5$$

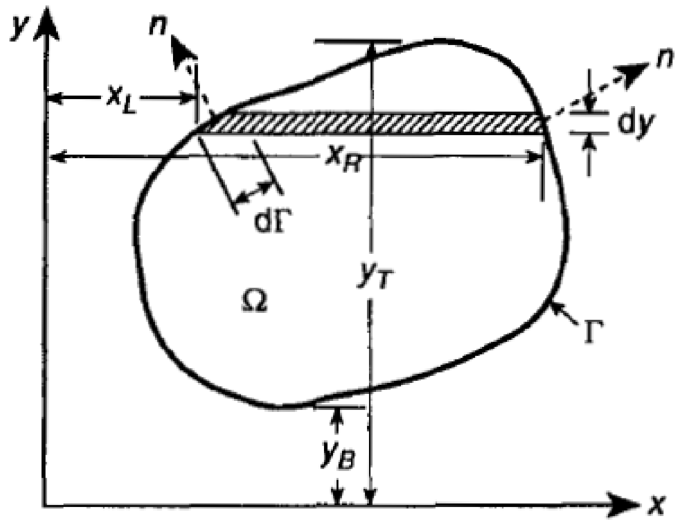
بنابراین جمله آخر معادلهB.2 را می توان به منزله انتگرالی حول یک مرز بسته کامل در خلاف جهت عقربه های سات منظور کرد:

$$\oint_{\Gamma} \Phi\psi n_x d\Gamma \qquad B.6$$

در صورتی که چند خط تراز بسته وجود داشته باشد این انتگرال گیری باید حول هریک از این خطوط تراز انجام گیرد. رابطه کلی مورد نظر در همه موارد به صورتی خواهد بود که در پی می آید.

$$\int\int_{\Omega} \Phi \frac{\partial\psi}{\partial x} dxdy \equiv -\int\int_{\Omega} \frac{\partial\Phi}{\partial x} \psi dxdy + \oint_{\Gamma} \Phi\psi n_x d\Gamma$$

B.7



شکل B.1 تعاریف موردنیاز در انتگرال دو بعدی

در صورت وجود مشتق هایی در جهت y نیز داریم.

$$\int\int_{\Omega}\Phi\frac{\partial\psi}{\partial y}dxdy \equiv -\int\int_{\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\psi dxdy + \oint_{\boldsymbol{\Gamma}}\Phi\psi n_y d\boldsymbol{\Gamma}$$

B.8

که در آن n_y نمایشگر کسینوس بین قائم خارجی بر مرز و محور y است.

در سه بعد نیز می توان رابطه زیر را با استفاده از شیوه یکسانی بدست آورد

$$\int\int\int_{\Omega}\Phi\frac{\partial\psi}{\partial x}dxdydz = -\int\int\int_{\Omega}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\psi dxdydz + \oint_{\Gamma}\Phi\psi n_x d\Gamma$$

B.9

که در آن Γ اکنون نمایشگر جزء رویه، و انتگرال آخر حول همه رویه گرفته می شود.

پیوست C

در این قسمت به عنوان نمونه، کد برنامه visual c++ مربوط به مسئله lid driven cavity ارائه می گردد.

```
// 2D Finite Elements Program
// Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) for convective terms-8 Point
Quadrature gauss for every thing
#include<math.h>
#include<stdio.h>
const int ie=200,je=200,ke=1,ninp=0;
const double mo=1e-3,ro=1,vinp=1.0,pout=0,pi=3.1415,nu=mo/ro,dt=0.002;
const double x1=0,y10=0,z1=0,x2=1,y2=0,z2=0,x3=1,y3=1,z3=0,x4=0,y4=1,z4=0;
const double
x5=0,y5=0,z5=0.05,x6=1,y6=0,z6=0.05,x7=1,y7=1,z7=0.05,x8=0,y8=1,z8=0.05;

double  x[ie+2][je+2], y[ie+2][je+2], z[ie+2][je+2];  // x,y and z
coordinates of nodes
double  u[ie+2][je+2], v[ie+2][je+2], w[ie+2][je+2];  // u,v and w
velocities at nodes
double us[ie+2][je+2],vs[ie+2][je+2],ws[ie+2][je+2];  // u*,v*,w* Momentum
u,v,w solution without pressure term at nodes
double  p[ie+2][je+2],cm[ie+2][je+2],cv[ie+2][je+2];  // Pressure at nodes
of elements- Coefficient central pressure- coefficient u*,v*,w* in momentum
equations
double v123[ie+1][je+1][4][4],he[ie+1][je+1];                      //
vectors components in 1,2,3 directions,Elements length
double rt[ie+1][je+1][5],wf[5][5];
      // Residual pressure equation- weight of 8 functions at 8 points of
elements
double dm[ie+1][je+1][5][5];
            // Diffusion Matrix of elements
double nx[ie+1][je+1][5][5];
            // X derivative of 8 shape functions at 8 points of elements
double ny[ie+1][je+1][5][5];
            // Y derivative of 8 shape functions at 8 points of elements
double nz[ie+1][je+1][5][5];
            // Z derivative of 8 shape functions at 8 points of elements
short  fk[5],fe[5],fz[5];
                        // coefficients of kisi,eta,zita in 8 functions
double px[ie+1][je+1][5],py[ie+1][je+1][5],pz[ie+1][je+1][5];     //
derivation of pressure in x,y,z directions at 8 points of elements
double mu[ie+1][je+1][5],mv[ie+1][je+1][5],mw[ie+1][je+1][5];     //
Convective terms of momentum u,v,w equations at 8 points of elements
double up[ie+1][je+1][5],vp[ie+1][je+1][5],wp[ie+1][je+1][5];     //
average u,v,w at at 8 points of elements
double tv[ie+1][je+1][5],dj[ie+1][je+1][5];                             //
total velocity at 8 points of elements, Jacobian determinant at 8 point,
void geometry();
void solver();
void surfdat();
void printvars();
long t;
void main(){
      FILE *res;
```

```
	fopen_s(&res,"Res.txt","w");
	fprintf(res,"ie=%i, je=%i, ke=%i, ninp=%i, dt=%f, mo=%f, RO=%f, 
vinp=%f, pout=%f",ie,je,ke,ninp,dt,mo,ro,vinp,pout);
	fprintf(res,"\nStep     p[1][41]          u[%i][%i]\n",ie-1,je);
	geometry();
	for(t=1;t<20000;t++){
		printf("\nTry=%i",t);
		solver();
		fprintf(res,"%i    %f     %f     \n",t,p[1][41],u[ie-1][je]);
	};
	surfdat();
	printvars();
	fclose (res);
}
void geometry(){
	int i,j,k,l,m,n,i1,j1,k1,i2,j2,k2,in,jn,kn,nn,pn,fn;
	double jp[3][5],kx,ky,kz,ex,ey,ez,zx,zy,zz,tp;
	double df[5][5][3],xe[5],ye[5],ze[5],ki[5],et[5],zi[5];
//_______________________________________________ Linear Mesh Generaration 
by 8 point _________________________________
	for(i=1;i<ie+2;i++)for(j=1;j<je+2;j++){
		x[i][j]=x1+(x2-x1)*(i-1)/ie+(x4-x1)*(j-1)/je+(x3+x1-x2-x4)*(i-
1)*(j-1)/(ie*je);
		y[i][j]=y10+(y2-y10)*(i-1)/ie+(y4-y10)*(j-1)/je+(y3+y10-y2-
y4)*(i-1)*(j-1)/(ie*je);
	};
//____________________________________________ Shape Functions derivatives in 
three direction at 8 point _____________
	fk[1]=-1;fk[2]=1;fk[3]=1;fk[4]=-1;
	fe[1]=-1;fe[2]=-1;fe[3]=1;fe[4]=1;

	tp=0.5773502692;
	ki[1]=-tp;ki[2]=tp;ki[3]=tp;ki[4]=-tp;
	et[1]=-tp;et[2]=-tp;et[3]=tp;et[4]=tp;

	for(fn=1;fn<5;fn++)for(pn=1;pn<5;pn++){
		wf[fn][pn]=(1+fk[fn]*ki[pn])*(1+fe[fn]*et[pn])/4;
		df[fn][pn][1]=fk[fn]*(1+fe[fn]*et[pn])/4;
		df[fn][pn][2]=fe[fn]*(1+fk[fn]*ki[pn])/4;

	};
	fk[1]=0;fk[4]=0;
	fe[1]=0;fe[2]=0;

//______________________________________________ Element vectors in three 
directions ____________________________________________
	for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++){

	xe[1]=x[i][j];xe[2]=x[i+1][j];xe[3]=x[i+1][j+1];xe[4]=x[i][j+1];

	ye[1]=y[i][j];ye[2]=y[i+1][j];ye[3]=y[i+1][j+1];ye[4]=y[i][j+1];

		v123[i][j][1][1]=(xe[2]+xe[3]-xe[1]-xe[4])/2;
		v123[i][j][1][2]=(ye[2]+ye[3]-ye[1]-ye[4])/2;
		v123[i][j][2][1]=(xe[3]+xe[4]-xe[1]-xe[2])/2;
		v123[i][j][2][2]=(ye[3]+ye[4]-ye[1]-ye[2])/2;

//____________________________________ Diffusion Matrix Determination By 8 
Point Quadrature Guass Method_______________________________
		for(pn=1;pn<5;pn++){
			for(m=1;m<3;m++)for(n=1;n<3;n++)jp[m][n]=0;
```

```
                  for(fn=1;fn<5;fn++){
                        jp[1][1]=jp[1][1]+xe[fn]*df[fn][pn][1];
                        jp[1][2]=jp[1][2]+ye[fn]*df[fn][pn][1];
                        jp[2][1]=jp[2][1]+xe[fn]*df[fn][pn][2];
                        jp[2][2]=jp[2][2]+ye[fn]*df[fn][pn][2];
                  };
                  dj[i][j][pn]=jp[1][1]*jp[2][2]-jp[1][2]*jp[2][1];


      for(m=1;m<3;m++)for(n=3;n<5;n++)jp[m][n]=0;jp[1][3]=1;jp[2][4]=1;
                  for(m=1;m<3;m++){
                        for(n=4;n>m-1;n--)jp[m][n]=jp[m][n]/jp[m][m];
                        for(l=1;l<3;l++)if(l!=m)for(n=4;n>m-1;n--
)jp[l][n]=jp[l][n]-jp[m][n]*jp[l][m];
                  };
                  for(fn=1;fn<5;fn++){

      nx[i][j][fn][pn]=df[fn][pn][1]*jp[1][3]+df[fn][pn][2]*jp[1][4];

      ny[i][j][fn][pn]=df[fn][pn][1]*jp[2][3]+df[fn][pn][2]*jp[2][4];

                  };
            };
            for(m=1;m<5;m++)for(n=1;n<5;n++){tp=0;

      for(l=1;l<5;l++)tp=tp+dj[i][j][l]*(nx[i][j][n][l]*nx[i][j][m][l]
+ny[i][j][n][l]*ny[i][j][m][l]);
                  dm[i][j][m][n]=tp;
            };
      };

//______________________________________________ Pressure and momentum
coefficients determination _______________________________
      for(i=1;i<ie+2;i++)for(j=1;j<je+2;j++){
            tp=0;kx=0;
            i1=i-1;j1=j-1;i2=i+1;j2=j+1;
            if(i==1)i1=1;
            if(j==1)j1=1;
            if(i==ie+1)i2=ie+1;
            if(j==je+1)j2=je+1;
            for(in=i1;in<i2;in++)for(jn=j1;jn<j2;jn++){
                  nn=(i-in)+3*(j-jn)-2*(i-in)*(j-jn)+1;
                  tp=tp+dm[in][jn][nn][nn];
                  for(pn=1;pn<5;pn++)kx=kx+wf[nn][pn]*dj[in][jn][pn];
            };
            cm[i][j]=tp;
            cv[i][j]=kx;
      };
//________________________________________________________ Initial
Condition _______________________________________________________
      for(j=1;j<je+2;j++){
u[1][j]=0;      v[1][j]=0;
u[ie+1][j]=0;   v[ie+1][j]=0;
}
      for(i=1;i<ie+2;i++){
u[i][1]=0;         v[i][1]=0;
u[i][je+1]=vinp;   v[i][je+1]=0;
}
      }
void solver(){
      int i,j,k,i1,i2,j1,j2,k1,k2,in,jn,kn,nn,pn,fn;
```

```
      double ut,vt,wt,tp,tx,ty,tz,wn,pe,pt,txx,tyy;
//_______________________________________ Convective terms of momentum
x,y,z equations for each elements _____________________________
      for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++){
            up[i][j][0]=(u[i][j]+u[i+1][j]+u[i][j+1]+u[i+1][j+1])/4;
            vp[i][j][0]=(v[i][j]+v[i+1][j]+v[i][j+1]+v[i+1][j+1])/4;

      tv[i][j][0]=sqrt(up[i][j][0]*up[i][j][0]+vp[i][j][0]*vp[i][j][0]);
            for(pn=1;pn<5;pn++){
                  up[i][j][pn]=u[i][j]  *wf[1][pn]+u[i+1][j]
*wf[2][pn]+u[i+1][j+1]  *wf[3][pn]+u[i][j+1]  *wf[4][pn]  ;

                  vp[i][j][pn]=v[i][j]  *wf[1][pn]+v[i+1][j]
*wf[2][pn]+v[i+1][j+1]  *wf[3][pn]+v[i][j+1] *wf[4][pn] ;


      tv[i][j][pn]=sqrt(up[i][j][pn]*up[i][j][pn]+vp[i][j][pn]*vp[i][j][pn]
);

                  tx= u[i][j]  *nx[i][j][1][pn]+u[i+1][j]
*nx[i][j][2][pn]+u[i+1][j+1]  *nx[i][j][3][pn]+u[i][j+1]  *nx[i][j][4][pn];
                    ty= u[i][j]  *ny[i][j][1][pn]+u[i+1][j]
*ny[i][j][2][pn]+u[i+1][j+1]  *ny[i][j][3][pn]+u[i][j+1]  *ny[i][j][4][pn];

mu[i][j][pn]=(tx*up[i][j][pn]+ty*vp[i][j][pn])*dj[i][j][pn];
                  txx=tx;

                  tx= v[i][j]  *nx[i][j][1][pn]+v[i+1][j]
*nx[i][j][2][pn]+v[i+1][j+1]  *nx[i][j][3][pn]+v[i][j+1]  *nx[i][j][4][pn];
                    ty= v[i][j]  *ny[i][j][1][pn]+v[i+1][j]
*ny[i][j][2][pn]+v[i+1][j+1]  *ny[i][j][3][pn]+v[i][j+1] *ny[i][j][4][pn];

      mv[i][j][pn]=(tx*up[i][j][pn]+ty*vp[i][j][pn])*dj[i][j][pn];
                  tyy=ty;

                  tz=(txx+tyy)*dj[i][j][pn];
                  mu[i][j][pn]=mu[i][j][pn]+tz*up[i][j][pn];
                  mv[i][j][pn]=mv[i][j][pn]+tz*vp[i][j][pn];
            };
            if(tv[i][j][0]<0.0001)he[i][j]=0;else
            he[i][j]=
fabs((v123[i][j][1][1]*up[i][j][0]+v123[i][j][1][2]*vp[i][j][0])/tv[i][j][0
])

      +fabs((v123[i][j][2][1]*up[i][j][0]+v123[i][j][2][2]*vp[i][j][0])/tv[
i][j][0]);

            pe=tv[i][j][0]*he[i][j]/(2*nu);
            if(pe<0.01)he[i][j]=0;else he[i][j]=(1/tanh(pe)-
1/pe)*he[i][j]/2;
      };
//____________________________________ Diffusion and advection terms of
momentum x,y,z equations __________________________________________
      for(i=1;i<ie+2;i++)for(j=1;j<je+2;j++){
            ut=0;vt=0;wt=0;
            i1=i-1;j1=j-1;i2=i+1;j2=j+1;
            if(i==1)i1=1;
            if(j==1)j1=1;
            if(i==ie+1)i2=ie+1;
            if(j==je+1)j2=je+1;
            for(in=i1;in<i2;in++)for(jn=j1;jn<j2;jn++){
```

```
                nn=(i-in)+3*(j-jn)-2*(i-in)*(j-jn)+1;
                for(pn=1;pn<5;pn++){
                      if(he[in][jn]==0)wn=wf[nn][pn];else

    wn=wf[nn][pn]+he[in][jn]*(up[in][jn][pn]*nx[in][jn][nn][pn]

    +vp[in][jn][pn]*ny[in][jn][nn][pn])/tv[in][jn][pn];

                      ut=ut+dm[in][jn][nn][pn]*u[in+fk[pn]][jn+fe[pn]]*nu
                            +wn*mu[in][jn][pn];

                      vt=vt+dm[in][jn][nn][pn]*v[in+fk[pn]][jn+fe[pn]]*nu
                            +wn*mv[in][jn][pn];
                      };
          };
          us[i][j]=-ut*dt/cv[i][j];
          vs[i][j]=-vt*dt/cv[i][j];
    };

    for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++)for(pn=1;pn<5;pn++){
          tp=0;
          for(fn=1;fn<5;fn++){
                in=i+fk[fn];
                jn=j+fe[fn];
                tp=tp+nx[i][j][fn][pn]*(us[in][jn]+u[in][jn])
                       +ny[i][j][fn][pn]*(vs[in][jn]+v[in][jn]);
          };
          rt[i][j][pn]=tp*dj[i][j][pn]*ro/dt;
    };

//______________________________________________ Computation of New
pressures,u,v,w ___________________________________________
    for(i=1;i<ie+2;i++)for(j=1;j<je+2;j++){
          pt=0;
          i1=i-1;j1=j-1;i2=i+1;j2=j+1;
          if(i==1)i1=1;
          if(j==1)j1=1;
          if(i==ie+1)i2=ie+1;
          if(j==je+1)j2=je+1;
          for(in=i1;in<i2;in++)for(jn=j1;jn<j2;jn++){
                nn=(i-in)+3*(j-jn)-2*(i-in)*(j-jn)+1;

          pt=pt+dm[in][jn][nn][1]*p[in][jn]
+dm[in][jn][nn][2]*p[in+1][jn]  +dm[in][jn][nn][3]*p[in+1][jn+1]
+dm[in][jn][nn][4]*p[in][jn+1]

+rt[in][jn][1]*wf[nn][1]+rt[in][jn][2]*wf[nn][2]+rt[in][jn][3]*wf[nn][3]+rt
[in][jn][4]*wf[nn][4];
                };
          p[i][j]=p[i][j]-pt/cm[i][j];
    };
    for(i=1;i<ie+1;i++)for(j=1;j<je+1;j++)for(pn=1;pn<5;pn++){
          px[i][j][pn]=(nx[i][j][1][pn]*p[i][j]
+nx[i][j][2][pn]*p[i+1][j]  +nx[i][j][3][pn]*p[i+1][j+1]
+nx[i][j][4][pn]*p[i][j+1])*dj[i][j][pn];
          py[i][j][pn]=(ny[i][j][1][pn]*p[i][j]
+ny[i][j][2][pn]*p[i+1][j]  +ny[i][j][3][pn]*p[i+1][j+1]
+ny[i][j][4][pn]*p[i][j+1])*dj[i][j][pn];
          };
    for(i=2;i<ie+1;i++)for(j=2;j<je+1;j++){
          tx=0;ty=0;
```

```
            for(in=i-1;in<i+1;in++)for(jn=j-1;jn<j+1;jn++){
                  nn=(i-in)+3*(j-jn)-2*(i-in)*(j-jn)+1;
                  for(pn=1;pn<5;pn++){
                        tx=tx+px[in][jn][pn]*wf[nn][pn];
                        ty=ty+py[in][jn][pn]*wf[nn][pn];
                  };
            };
            u[i][j]=u[i][j]+us[i][j]-tx*dt/(ro*cv[i][j]);
            v[i][j]=v[i][j]+vs[i][j]-ty*dt/(ro*cv[i][j]);
      };
}
void surfdat(){
      FILE *vy3,*vz1,*vz2,*vz3,*pt;
      fopen_s(&vy3,"Vy3.txt","w");
      fopen_s(&vz1,"Vz1.txt","w");
      fopen_s(&vz2,"Vz2.txt","w");
      fopen_s(&vz3,"Vz3.txt","w");
      fopen_s(&pt,"Pressures.csv","w");
      int i,j;
      double um,vm,vt,ang;
      j=je/2+1;for(i=1;i<ie+2;i++){
        vt=v[i][j];
          fprintf(vy3,"%i\t %f\t\t \n",i,vt);
      }
      j=je/2+1;for(i=1;i<ie+2;i++){
        vt=p[i][j];
          fprintf(vz1,"%i\t %f\t\t \n",i,vt);
      }
      i=ie/2+1;for(j=1;j<je+2;j++){
        vt=u[i][j];
          fprintf(vz2,"%i\t %f\t\t \n",j,vt);
      }
      for(i=1;i<ie+2;i++)for(j=1;j<je+2;j++){
            um=u[i][j];
      vm=v[i][j];
                  vt=sqrt(um*um+vm*vm);
                        ang=atan2(vm,um);
                        ang=(ang*180)/pi;
                        ang=ang-90;
            fprintf(vz3,"%i\t %i\t %f\t\t %.0f\n",i,j,vt,ang);
      }
            for(i=1;i<ie+2;i++)fprintf(pt,",%i",i);
            for(j=je+1;j>0;j--){
                  fprintf(pt,"\n%i",j);
                  for(i=1;i<ie+2;i++){
                        fprintf(pt,",%f",p[i][j]);
                  };
            };
      fclose (vy3),(vz1),(vz2),(vz3),(pt);
}
```

1- Hrenikoff, A.(1941) **''Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method**," Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics, vol.8 , pp. 169-175.

2- Courant, R.(1943) **''Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration,**" Bulletin of the American Mathematical Society, vol.49. pp. 1-43.

3- Argyris, J. H., and S. Kelsey.(1960) "**Energy Theorems and Structural Analysis.**" , Butterworth Scientific Publications, London.

4- Turner, M., R. W. Clough, H. H. Martin, and L. Topp.(1956) **''Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures,** "Journal of Aeronautical Science, vol. 23, pp. 805-823.

5- Clough, R.W.(1960) **''The Finite Element Method in Plane Stress Analysis**," Journal of Structures Division, ASCE, Proceedings of 2d Conference on Electronic Computation, pp. 345-378.

6- A.J.Chorin.(1968) **"Numerical solution of Navier-Stokes equations.Math.Comput**.", 22,745-62.

7- A.J.Chorin. (1969)"**On the convergence of discrete approximation to the Navier-Stokes equations** ." Math. Comput., 23,341-53.

8- G.Comini and S.Del Guidice.(1972) "**Finite element solution of incompressible Navier-Sotkes equation** ." Num.Heat Transfer., partA, 5, 463-78.

9- G.E.Schneider,G.D Raithby andM.M. Yovanovich.(1978) **"Finite element analysis of incompressible fluid flow incorporating equal order pressure and velocity interpolation**" , in C.Taylor ,K.Morgan and C.A.Brebbia, Numerical methods in laminar and turbulent flows , Pentech press, Plymouth.

10- J.Donea ,S.Giuliani, H Laval and L.Quartapelle.(1982) "**Finite element solution of unsteady Navier-Stokes equations by a fractional stop methods** ." Comp.Meth .Appl.Mech .Eng., 33, 53-73.

11- P.M.Gresho ,S.T.Chan , R.L.Lee and .C.D.Upson .(1984) "**A modified finite element method for solving incompressible Navier-Stokes equations** ." part 1 theory .Int.J.Num Meth .fluids ,4,557-98.

12- M.Kawahara and K .Ohmia.(1985) "**Finite element analysis of density flow usig the velocity correction method** ." Int.J.Num. Meth.Fluids , 5,981 - 93.

13- J.G.Rice and R.J.Schnipke .(1986) "**An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes** ." Comp.Meth .Appl .Mech .Eng., 58,135-49.

14- B.Ramaswamy ,M.Kawahara and T.Nakayama .(1986) "**Lagrangian finite element method for the analysis of two dimensional sloshing problems** ." Int.J.Num. Meth.Fluids , 6,659- 70.

15- B.Ramasmawy.(1988) "**Finite element solution for advection and natural convection flows** ." Comp. Fluids , 16,349- 88.

16- M.Shimura and M.Kawahara .(1988) "**Two dimensional finite element flow analysis using velocity correction procedure** ."Struct.Eng ., 5,255- 63.

17- B.Ramaswamy .(1993) "**Theory and implementation of a semi-implicit finite element method for viscous incompressible flows**." Comp.Fluids , 22,725- 47,1993.

18- O.C.Zienkiewicz and R.Codina .(1995) "**Search for a general fluid mechanichs algorithm**." Frontiers of computational fluid dynamics ,Eds ,D.A.Caughey and M.M.Hafez .J.Wiley,New York ,101-13.

19- O.C.Zienkiewicz , P. Nithiarasu, R.Codina .(1996) "**A general algorithm for compressible and incompressible flow – part1**." The split , characteristic based sheme. Int .J.Num.Meth.Fluids,20,869-85.

20- O.C.Zienkiewicz and P.Ortiz .(1995) **"Asplit characteristic based finite element model for shallow water equations**." Int.J. Num.Meth. Fluids ,20,1061- 80.

21- O.C.Zienkiewicz and P.Ortiz .(1996) "**An improved finite element model for shallow water problems**." 61-84,1996.

22- N.Massarotti ,P.Nithiarasu and O.C.Zienkiewicz .(1998) "**Characteristic-based- split (CBS) algorithm for incompressible flow problems with heat transfer** ." Int.J. Num.Meth. Fluids , 8,969- 90.

23- O.C.Zienkiewicz ,J.Rojec , R.L.Taylor and M.Pastor .(1999) "**Triangles and tetrahedral in explicit dynamics codes for solids** ." Int.J. Num.Meth. Eng., 43,565- 83.

24-Ghia, Ghia, and Shin (1982), "**High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method**", Journal of Computational Physics, Vol. 48, pp. 387-411.

25-Nithiarasu, P. (2002)," **On boundary conditions of the characteristic based split (CBS) algorithm for fluid dynamics**." International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54: 523–536.

26- Nithiarasu, P. (2003)," **An efficient artificial compressibility (AC) scheme based on the characteristic based split (CBS) method for incompressible flows**." International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56: 1815–1845.

27-Nithiarasu, P., Mathur, J. S., Weatherill, N. P. and Morgan, K. (2004)," **Three-dimensional incompressible flow calculations using the characteristic based split (CBS) scheme**." International Journal for Numerical Methods in Fluids, 44: 1207–1229.

28- Nithiarasu, P. (2004), "**A fully explicit characteristic based split (CBS) scheme for viscoelastic flow calculations**." International Journal for Numerical Methods in Engineering, 60: 949–978.

29- **P. Nithiarasu, C.-B. Liu.(2004**) "**An artificial compressibility based characteristic based split (CBS) scheme for steady and unsteady turbulent incompressible flows** ." Computer Methods in Applied Mechanics and EngineeringV 195, 2961-2982

30- Nithiarasu, P. (2005), "**An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme**." International Journal for Numerical Methods in Fluids, 48, 1415–1428.

31- Boonmarlert, Parinya Phongthanapanich, Sutthisak Dechaumphai, Pramote.(2005) " **Combined characteristic-based split algorithm and mesh adaptation technique for high-speed compressible flow analysis**." , Indian Journal of Engineering and Materials Sciences (IJEMS) Vol.12, 376-388.

32- Parinya Boonmarlert, Sutthisak Phongthanapanich and Pramote Dechaumphai.(2006) "**Combined Adaptive Mesh Movement and Characteristic-Based Split Algorithm for Viscous Incompressible Flow Analysis**." The 20th Conference of Mechanical Engineering Network of Thailand

33- Morandi-Cecchi, M. and Venturin, M. (2006), "Characteristic-based split (CBS) algorithm finite element modelling for shallow waters in the Venice lagoon." International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66: 1641–1657.

34 Nithiarasu, P., Codina, R. and Zienkiewicz, O. C. (2006), "**The Characteristic-Based Split (CBS) scheme—a unified approach to fluid dynamics**." International Journal for Numerical Methods in Engineering, 66: 1514–1546.
35- Bayram Celik, Firat Oguz Edis, (2009) "**Micro-scale synthetic-jet actuator flow simulation with characteristic-based-split method**", Aircraft Engineering and Aerospace Technology, Vol. 81 Iss: 3, pp.239 - 246

36- Kulkarni, V.M. Seetharmu, K.N. Aswatha Narayana, P.A. Azid, I.A. Quadir, G.A.(2004) "**Flow analysis for flip chip underfilling process using characteristic based split method**." Electronics Packaging Technology Conference, 2004. EPTC 2004. Proceedings of 6th, Mech. Eng., 615 – 619.
37- C.K. Batchelor.(1967) " **An introduction to fluid dynamics**." , Cambridge Univ. press.
38- H. Lamb.(1932) "**Hydrodynamics**" , 6th ed., Cambridge Unive. Press.
39- C. Hirsch.(1988) "**Numerical Computation of Interal and External Flows**", Vol. 1, wiley, Chichester .
40- P.J. Roach.(1972) "**Computational Fluid Mechanics**", Hermosa Press, Albuquerque, New Mexico.
41- H. Schlichting.(1955) "**Boundary Layer Theory**." ,Pergamon Press, London.
42- L.D. Landau and E.M. Lifshitz.(1959) "**Fluid Mechanics**", Pergamon Press , London .
43- R. Teman.(1977) "**The Navier- Stokes Equaction**," North- Holland.
44- I.G. Currie. (1993) "**Fundamental Mechanics of Fluids**." , McGraw- Hill .

45- R. courant, E. isaacson and M.ress. (1952)"**on the solution of non-linear hyperbolic differential equations by finite difference**" comm.. cuuure aaappl. Math., V,243-55.

46- A.K.Runchall and M.Wolfstein. (1969)"**numerical integration procedure for the steady state Navier-Stokes equations**." J.Mech.Eng.sci., 11, 445-53.

47- D.B.Spalding.(1972) "**A novel finite difference formulation for differential equations involving both first and second derivatives**" Int.J.Num.Meth. Eng., 4, 551-9.

48- K.E.Barrett.(1974) "**The numerical solutions of singular perturbation boundary value problem** " Q.J.Mech.Appl.Math., 27,57-68.

49- O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor. (2000) "**The finite element method**" 5th, v3 fluid dynamics. ,fig2-2,p17.

50- O.C.Zienkiewicz, R.H.Gallaagher and P.Hood.(1976)" **Newtonian and non Newtonian viscous incompressible flow** " temperature induced flows and finite element solutions, in the mathematics of finite elements and applications(ed.J.Whiteman),vol.2,academic press,London

51- I.Christie,D.F.Griffiths,A.R.Mitchell and O.C.Zienkiewicz.(1976) "**Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives**" Int.J.Num.Meth.Eng., 10,1389-96.

52- O.C.Zienkiewicz, J.C.Heinrich,P.S.Huyakorn and A.R.Mitchell.(1977) "**An upwind finite element scheme for two dimensional convective transport equations**." Int.J.Num.Meth.Eng., 11,131-44.

53- J.C.Heinrich and O.C.Zienkiewicz.(1977) "**Quadratic finite element schemes for two dimensional convective-transport problems**." Int.J.Num.Meth.Eng., 11,1831-44.

54- T. J. R. HUGHES, L.P. FRANCA, G.M. HULBERT, Z. JOHAN and F. SAKHIB, (1988) "**The Galerkin least square method for advective diffusion**

equactions", in Recent Developments in Computational Fluid Mechanics (eds T.E. Tezduyar and T. J. R. Hughes), AMD 95, ASME.

55- J.Doena, T.Belytschko and P.Smolinski, (1985) " **A generalized galerkin method for steady state convection diffusion problems with application to quadratic shape function.**" ,Comp.Meth .Appl.Mech.Eng ., 48,25-43.

56- Bozeman and Dalton (1973), "**Numerical Study of viscous flow in a cavity**", Journal of Computational Physics, Vol. 12, pp. 348-363.

57- Burgaff (1966), "**Analytical and Numerical studies of the structures of steady separated flows**", JFM, Vol. 24, pp. 113-151

58- T.J.R. Hughes and A.Brocks, (1979)" **A multi dimensional upwind scheme with no cross wind diffusion.**" , in finite elements for convection dominated flows (ed.T.J.R.Hughes), Amd 34, ASME.

59- D.W. Kelly,S. NAKAZAWA and O.C. ZIEKIEWINCZ, (1980) "**A note on anisotropic balancing dissipation in the finite element method approximation to convec- tive diffusion problems**," Int. J. Num. Meth. Eng., 15,1705-11.

60- C.Johnson and A.Szepessy.(1987) "**on the convergence of a finite element method for a nonlinear hyperbolic conservation law**." Math.Comput., 49,427-44.

61- F.Shakib, T.R.J.Hughes and Z.Johan. (1991) "**A new finite element formulation for computational fluid dynamics:" X.the compressible Euler and Navier-Stokes equations**"Comp. Meth.Appl.Mech.Eng., 89,141-219.

62- R.Codina. (1993)" **A discontinuity capturing crosswind-dissipation for the finite element solution of convection diffusion equation**." Comp. Meth.Appl.Mech.Eng., 110,325- 42.

63- P.Nithiarasu, O.C.Zienkiewicz, B.V.K.S.Say, K.Morgan, R.Codina and M.Vasquez. (1998)" **Shock capturing viscocities for the general fluid mechanics algorithm**". Int.J.Num.Meth. Fluids., 28, 1325-53.

64- C.Johnson, V.Navert and J.Pitkaranta(1984) " **finite element methods for linear , hyperbolic problems**" Comp. Meth.Appl.Mech.Eng., 45,285-312.

65- P.A.B. de sampaio. (1988) "**A modified operator analysis of convection diffusion problems, in proc**." 2 national meeting on thermal sciences, Aguas de lindoia(Brazil). Pp.180-3.

66- N .Nguen and J.reynen(1984) ." **a space – time least square finite element scheme for advection – diffusion eq** ." comp . meth . appl . mech . eng ., 42,331 – 42.

67- G.F.Carey and B.N Jiang .(1998) " **least square finite elements for first order hyperbolic sys** ." Int . J . Num . meth . eng . 26 , 81-93 .

68- B.N Jiang and G.F Carey .(1988**)" a stable least square finite element method for non-linear hyperbolic problems** ." int . j . num . meth . fluids . 8,993-42.

69- C.Johnson.(1986**)" streamline diffusion elements for problems in fluid mechanics** ." vol6,pp.251-61 , Wiley, Chichester .

70- C.Johnson .(1987**)" numerical solution of partial differential eq.**" cambridge university press , Cambridge.

71- C.C.Yu and J.C.Helnrich .(1986) "**petrov galerkin methods for the time dependent convective transport eq** ." Int . J . Num . meth . eng . 23 ,883-901.

72- C.C.Yu and J.C.Helnrich .(1987) "**petrov galerkin methods for multidimensional ,time dependent convective diffusion eq** ." int.j.num.meth.eng.,24 , 2201-15.

73- C.E.Baumann, M.A.Storti and S.R.Idelsohn. (1992) "**A petrov galerkin technique for the solution of transonic and supersonic flows**" Comp . Meth . Appl . Mech . Eng ., 95, 49-70.

74- P.A.B. de sampaio, P.R.M.Lyra, K.Morgan and N.P.Weatherill. (1993) "**petrov-galerkin solutions of the incompressible navier-stokes equations in**

primitive variables with adaptive remeshing." Comp . Meth . Appl . Mech . Eng ., 106,143-78.

75- J.A.Cardle.(1995) **" A modification of the petrov galerkin method for the transient convection diffusion equation**." Int . J . Num . Meth . Eng . 38,171-81.

76- S.R.Idelsohn, J.C.Heinrich and E.Onate. (1996) " **petrov galerkin methods for the transient advective diffusive equation with sharp gradients**." Int . J . Num . Meth . Eng ,.39,1455-73.

77- R.Codina. (1998) "**Comparison of some finite element methods for solving the diffusion convection reaction equation**." Comp . Meth . Appl . Mech . Eng ., 156,185- 210.

78- P.K.Maji and G.Biswas. (1999)" **Analysis of flow in the spiral casing using a streamline upwind petrov- galerkin method**." Int . J . Num . Meth . Eng ,. 45, 147-74.

79- R.A Adey and C.A Berbbia .(1974) "**finite element solution of effluent dispersion ,in numerical methods in fluid mechanics** ." pp325 – 54 pentech press , soothampton.

80- K.W Morton .(1985) "**generalized galerkin methods for hyperbolic problems .** " Comp . Meth . Appl . Mech . Eng ., 52,847 -71,1985.

81- R.E.Ewing and T.F.Russel.(1981) "**Multistep galerkin methods along characteristics for convection diffusion problems**." Vol4,IMACS,pp.28-36,Rutgers university , Brunswick,N.J.

82- J.Douglas, Jr and T.F.Russell.(1982) **" numerical methods for convection dominated diffusion problems based on combining the method for characteristic with finite element or finite difference procedures**." SIAM.J.Num.Anal., 19, 871-85.

83- O.Pironneau. (1982**)" on the transport diffusion algorithm and its application to the Navier-Stokes equation**".Num.Math., 38, 309-32.

84- M.Bercovier, O.Pironneau,Y.Harbani and E.Levine. (1982) " **characteristics and finite element methods applied to equations of fluids**." In the mathematics of finite element and applications,Vol 5,pp. 471-8, Academic press,London.

85- J.Goussebaile, F.Hecht, C.Labadie and L.Reinhart. (1984) "**finite element solution of the shallow water equations by a quasi direct decomposition procedure.**" Int . J . Num . Meth . Fluids ,. 4, 1117-36.

86- M.Bercovier ,O.Pironneau and V.Sastri.(1983) **"finite elements and characteristics for some parabolic- hyperbolic problems**."Appl.Math.Modelling,.7,89-96.

87- J.P.Benque,J.P.Greguire ,A.Hauguel and M,Maxant. (1983)" **applications des methods du decomposition aux calculs numeriques en hydraulique indestrille, In INRIA,6th,coll**." Inst. Methods de calcul sci.et techn., Versailles, 12-16 des.

88- A.Bermudez, J.Durany, M.Posse and C.Vasquez. (1984) "**An upwind method for solving transport diffusion – reaction system**." Int . J . Num . Meth . Eng ,.28, 2021-40.

89- P.X.Lin ,K.W.Morton and E.Suli.(1997)" **Characteristic galerkin schemes for scalar conservation laws in 2 and 3 space dimensions**." SIAM.J.Num.Anal., 34,779- 96.

90- . O. Pironneau, J. Liou and T.T.I. Tezduyar.(1992) "**Characteristic Galerkin and Galerkin least squares space-time formulations for the advection-diffusion equaction with time dependent domain**." Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 100, 117-41.

91- O.C. Zienkiewicz, R. Lo hner, K. Morgan and S. Nakazawa.(1984) "**Finite elements in fluid mechanics – a decade of progress, in Finite Elements in Fluids**" (eds R.H. Galagher et al.), Vol. 5, chap. 1, pp. 1-26, Wiley, Chichester.

92- R. Lohner, K. Morgan and O.C. Zienkiewicz.(1984) "**The solution of non-linear hyperbolic equaction systems by the finite element method**." Int. J. Num. Meth. Fluids,4, 1043-63.

93- O.C. Zienkiewicz, R. Lohner, K. Morgan and J. Peraire.(1989) "**High speed compressible flow and other advection dominated problems of fluid mechanics**", in Finite Elements in Fluids (eds R.H. Gallagher et al.), Vol. 6, chap. 2, pp. 41-88, Wiley, Chichester.

94- R. Lohner, K. Morgan and O.C. Zienkiewicz.(1985) "**An adaptive finite element procedure for compressible high speed flows.**" Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 51, 441-65.

95- O.C. Zienkiewicz, R. Lohner and K. Morgan.(1985) "**Hihg speed inviscid compressive flow by the finite element method**", in The Mathematics of Finite Elements and Applications (ed. J. R. Whiteman), Vol. VI, PP. 1-25, Academic Press, London.

96- Erturk, Corke, and Gokcol (2005), "**Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers**", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 48, pp. 747-774.

97- . O.C.Zienkiewicz , P. Nithiarasu, R.Codina and M.Vazquez .(1999)" **The characteristic based split procedure :An efficient and accurate algorithm for fluid problems** ." Int.J.Num.Meth.Fluids,31,359-92 .

98- O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor. (2000) "**The finite element method**" 5th, v1 The Basis. ,fig9-12 ,p218.

99- O.C.Zienkiewicz and R.L.Taylor. (2000) "**The finite element method**" 5th, v1 The Basis. ,table 9-1,p220.

100-Guia, U., Ghia, K. and Shin, C.,(1982**)." High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method**." J. Comput. Phys., 48, 387-411.

101- Charles-Henri Bruneau, Mazen Saad(2006)" **The 2D lid-driven cavity problem revisited**" j. Computers & Fluids 35 326–348.

102- R. N. Elias; A. L. G. A. Coutinho; M. A. D. Martins.(2004)" **Inexact Newton-type methods for non-linear problems arising from the SUPG/PSPG solution of steady incompressible navier-stokes equations**"J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng. vol.26 no.3

103- V. D. Pereira; J. B. Campos Silva(2005) "**Simulations of incompressible fluid flows by a least squares finite element method**"J. Braz. Soc. Mech. Sci. & Eng. vol.27 no.3

104- Jayant Keskar and D.A. Lyn (1999) " **Computations Of a laminar backward- facing step flow at re=800 with a spectral domain decomposition method**" International journal for numerical methods in fluids. Int. J. Numer. Meth. Fluids 29: 411–427

Shahrood university of technology

Modeling of flow in channels by CBS Method

Mohammad S.Haghighi

Supervisor

Dr.Ramin Amini

May 2011