



دانشکده مهندسی
پایان نامه کارشناسی ارشد
گرایش سازه

کاربرد ماتریس لاپلاسین در تحلیل پایداری سازه‌های با تقارن به فرم دو و سه

نگارنده:

اعظم الیاسی گرجی

جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

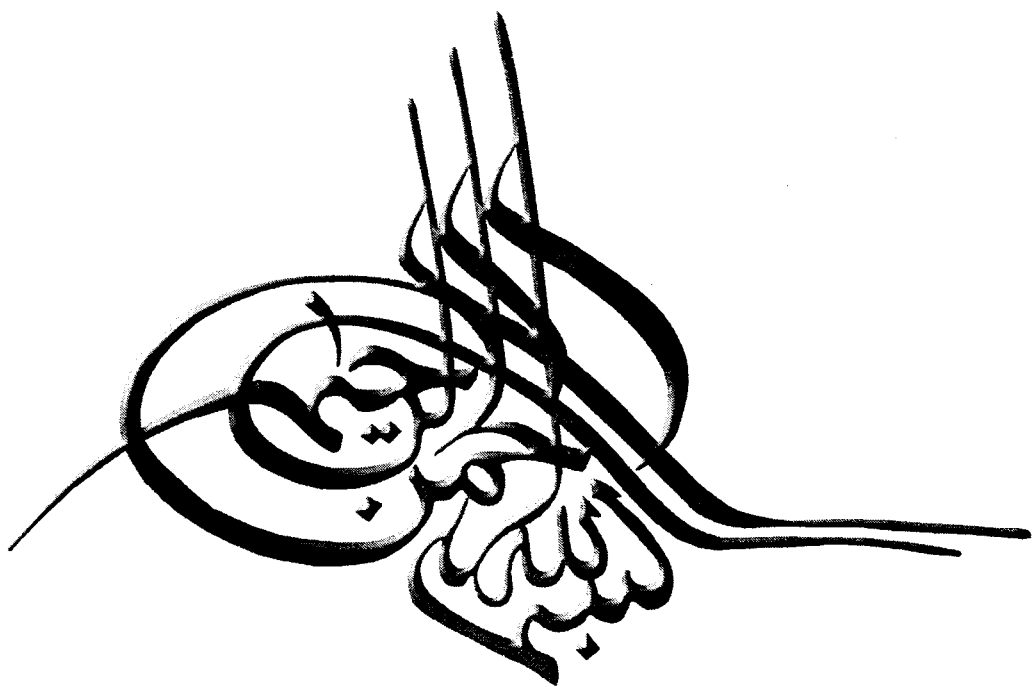
اساتید راهنما:

دکتر محسن طالبزاده

دکتر صادق رحیمی شهرباف

استاد مشاور:

دکتر علی کیهانی



به پدره که برای بالندگی‌ام خمید

و مادره که برای شکوفایی‌ام پژمرد

و تقدیم به برادر محبوبم، علی

که به دستان سوخته‌ام

شوق ممکن بودن قلم را باور داد

نمی دانم پس از مرگم چه خواهم شد
نمی خواهم بدانم کوزه گر، از خاک اندامم چه خواهد ساخت
ولی بسیار مشتاقم که از خاک گلویم سوتکی سازد
گلویم سوتکی باشد
به دست طفلکی گستاخ و بی پروا و بازیگوش
و او، یکریز و پی در پی
دم گرم خمودش را، در گلویم سخت بفشارد
و خواب خفتگان خفته را آشفته تر سازد
بدین سان بشکند دائم
سکوت مرگبارم را

تشکر و قدردانی

حال آنچه باقی می‌ماند، قدردانی از استادان اینجانب است؛

چگونه می‌توانم از استاد اندیشمند و دلسوزم جناب آقای دکتر صادق رحیمی تشکر کنم و چقدر مشکل است آنچه را بنویسی که قلم توانایی بیان ذره‌ای از آن رنج‌ها و تعب‌ها را ندارد. از استاد توانمندم جناب آقای دکتر محسن طالب زاده که با تأنی و احساس مسولیت مرا در انجام این رساله یاری داده‌اند کمال تشکر را دارم. همچنین از جناب آقای دکتر علی کیهانی استاد فرزانه‌ام که با راهنمایی‌های ارزنده نقش مهمی در به ثمر رسیدن این تحقیق داشته‌اند، سپاسگذارم. از کلیه اساتید محترم دانشکده عمران و معماری دانشگاه صنعتی شاهرود بویژه آقای دکتر ساغروانی مدیرگروه محترم و دکتر احمدی ریاست محترم دانشکده و اساتید گرامی دانشکده ریاضی دکتر فتحعلی و دکتر موسوی قدردانی می‌نمایم.

گرچه نمی‌توان با هیچ قلمی، حق زحمات و مساعدتهای بی‌دریغ اساتید گرانقدر و دوستان گرامی را به جای آورد، اما وظیفه خود می‌دانم که از آقایان مهندس رضا مشابه، مهندس رضا امیری، مهندس ربانی و مهندس مزینان کارشناس آموزشی گروه عمران و خانم‌ها، مهندس افسانه کثیری و مهندس سحر رضانی، که کمکهای زیادی در پیشبرد این پایان نامه داشته‌اند خالصانه تشکر و قدردانی کنم.

در پایان بی‌نهایت بار به تمامی افراد خانواده‌ام که همواره مرا باور داشته‌اند، سرتعظیم فرود می‌آورم و تشکر ویژه می‌نمایم.

چکیده:

تحلیل ماتریسی یکی از روشهای مناسب ریاضی است که در علوم مهندسی مورد استفاده قرار گرفته است. در روشهای مبتنی بر تحلیل ماتریسی از خواص ماتریس‌ها در مسایل جبر خطی استفاده می‌شود. در مسایل جبر ماتریسها نوعاً تعداد زیادی متغیر تعریف می‌شوند که مقادیر آنها باید محاسبه گردند. استفاده از خواص جبر ماتریسی و بکارگیری رایانه‌های با سرعت بالا، حل پیچیده‌ترین مسایل سازه‌ای با ویژگی مذکور را به صورت تحلیل ماتریسی فراهم نموده است. در این رساله موضوع "کاربرد ماتریس لاپلاسی در تحلیل پایداری قابهای با تقارن به فرم دو و سه" به صورت تحلیل ماتریسی و با استفاده از مفاهیم تئوری گراف مورد بررسی قرار گرفته است. روش ارائه شده در این رساله مبتنی بر ارائه مدلهایی از گراف است که توصیفی از قابهای مفصلی بدون تغییر مکان محوری می‌باشد. در این رابطه مدل گراف متناظر با قاب در امتداد محور تقارنش، پارش، و به دو مولفه متقارن تجزیه می‌شود. از دو مولفه متقارن تنها یک مولفه متقارن برای بدست آوردن بار بحرانی سازه مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این بحث ماتریس سازه‌ای هم ارز ماتریس لاپلاسین گراف متناظر، ماتریس سختی سازه می‌باشد که ماتریس لاپلاسین حاصل از تجزیه ماتریس متناظر با گراف اصلی با استفاده از تقارن به فرم دو و سه، در پایداری قابها، تشکیل و مقادیر ویژه آن محاسبه و جایگزین مقادیر ویژه ماتریس اصلی قرار می‌گیرد. در این رابطه حجم محاسبات به طور چشمگیری کاهش می‌یابد. همچنین برای توصیف مناسبتری از تقارن به فرم دو و سه اقدام به تعریف نوع خاصی از گراف به نام گرافهای مرکب شده است که روشی کاملاً ابتکاری و منحصر به این رساله می‌باشد. این نوع گرافها همراه با ماتریس لاپلاسین متناظر در فرم دو و سه مورد استفاده و بحث و بررسی قرار گرفته است. همچنین کاربردهای عملی از مدل مذکور ارائه شده است.

کلمات کلیدی: ماتریس لاپلاسین، قابهای سازه‌ای، مقادیر ویژه، تقارن، تئوری گراف

« فهرست مطالب »

عنوان	صفحه
-------	------

فهرست مطالب	الف
فهرست شکلها	خ
فهرست جداول	ش

بخش اول: ماتریسها و کاربرد ماتریس لاپلاسین در تئوری گراف فصل اول: مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه	۱
۲-۱ ضرورت انجام و اهداف تحقیق	۲
۳-۱ خلاصه و مرور تاریخی	۳
۱-۳-۱- منشا و آغاز تئوری گراف (سده ی ۱۷۰۰)	۳
۲-۳-۱- چگونگی رشد تئوری گراف و خلق کاربردهای عملی (سده ی ۱۸۰۰-۱۹۲۰)	۴
۳-۳-۱- گسترش و توسعه ی کاربردهای عملی (دهه ۱۹۲۰-۱۹۸۰)	۵
۴-۳-۱- گسترش و کاربرد تئوری گراف در مکانیک سازه های (۱۹۸۰- تا کنون)	۶
۴-۱ ساختار تحقیق	۷

فصل دو: تعاریف و مفاهیم اولیه ماتریسها و مقادیر ویژه

۱-۲ مقدمه:	۱۰
۲-۲ ماتریسها	۱۰
۳-۲ ضرب دو ماتریس	۱۲
۴-۲ بردار	۱۲
۵-۲ چند ماتریس خاص	۱۳
۶-۲ رتبه ی یک ماتریس	۱۶
۸-۲ روشهای بدست آوردن مقادیر ویژه	۲۰
۱-۸-۲- روش لوریه - فادیو	۲۱
۲-۸-۲- روش ژاکوبی (برای ماتریس متقارن)	۲۲
۳-۸-۲- روش گیونز (برای ماتریسهای متقارن)	۲۳

فصل سوم: کاربرد ماتریس ها در تئوری گراف

۱-۳- مقدمه	۲۸
۲-۳- تعاریف اولیه	۲۸
۱-۲-۳- تعریف شهودی گراف	۲۸
۲-۲-۳- تعریف رسمی گراف	۲۹
۳-۲-۳- تعاریف اولیه گراف	۳۰
۳-۳- ماتریسها و نحوه بکارگیری آنها در تئوری گراف	۳۲
۱-۳-۳- ماتریس مجاورت، یک گراف	۳۲
۲-۳-۳- کاربردهای ماتریس مجاورت	۳۳
۳-۳-۳- ماتریس فاصله، یک گراف	۳۴
۴-۳-۳- کاربردهای ماتریس فاصله	۳۵
۵-۳-۳- ماتریس درجه یک گراف	۳۶
۶-۳-۳- ماتریس لاپلاسیان یک گراف	۳۶
۷-۳-۳- ماتریس تلاقی یا وقوع یک گراف	۳۷
۸-۳-۳- ماتریس مسیر یک گراف	۳۸
۹-۳-۳- ماتریس مدار یک گراف	۴۰
۱۰-۳-۳- ماتریس دور یک گراف	۴۱
۱۱-۳-۳- ماتریس مجموعه‌های برشی، یک گراف	۴۱
۴-۳- مفاهیم تکمیلی	۴۲
۱-۴-۳- درخت	۴۲
۲-۴-۳- درخت، درخت پوشا، درخت با کوتاهترین مسیر	۴۲
۳-۴-۳- درخت با کوتاهترین مسیر	۴۳
۴-۴-۳- گراف چندگانه	۴۴
۵-۴-۳- گراف (سویه‌دار) جهت‌دار	۴۵
۶-۴-۳- زیرگرافها	۴۷

فصل چهارم: کاربرد ماتریس لاپلاسیان و مدل ریاضی گرافها در تقارن به فرم دو و سه

۱-۴-۱- مقدمه	۵۰
۲-۴-۲- ماتریسهای کانونیکال و ماتریسهای فرم یک و دو	۵۰
۱-۲-۴-۱- ماتریس فرم یک	۵۰
۲-۲-۴-۲- ماتریس فرم دو	۵۱
۱-۲-۲-۴-۱- مقادیر ویژه در ماتریس به فرم دو	۵۲
۳-۴-۳- ماتریسهای کانونیکال و ماتریسهای فرم سه	۵۵
۱-۳-۴-۱- اثبات	۵۶
۲-۳-۴-۲- مقادیر ویژه در تقارن به فرم سه	۵۹
۴-۴-۱- بکارگیری فرمهای کانونیکال در گراف متقارن	۶۱
۱-۴-۴-۱- بکارگیری ماتریسهای فرم یک و دو در گراف	۶۲
۲-۴-۴-۲- تعیین ماتریس لاپلاسیان مولفه‌های متقارن گراف متقارن در حالت فرم دو	۶۳
۳-۴-۴-۳- بکارگیری فرم سه در گراف	۶۷
۴-۴-۴- تعیین ماتریس لاپلاسیان مولفه‌های متقارن گراف متقارن، برای حالت ماتریس با فرم سه	۶۷
۵-۴-۵- نحوه تجزیه گراف متقارن به مولفه‌های متقارن	۷۰

فصل پنجم: کاربرد ماتریس لاپلاسیان در گرافهای مرکب با تقارن به فرم دو و سه

۱-۵-۱- مقدمه	۷۷
۲-۵-۲- گرافهای مرکب	۷۷
۱-۲-۵-۱- راس مرکب	۷۸
۱-۲-۵-۱- همجواری درونی	۷۸
۲-۲-۵-۲- گراف مرکب	۷۹
۳-۵-۳- تقارن به فرم دو	۸۰
۱-۳-۵-۱- مولفه‌های متقارن گراف مرکب در فرم دو	۸۴
۲-۳-۵-۲- مولفه‌های متقارن	۸۵
۴-۵-۴- تقارن به فرم سه در گراف مرکب	۸۷

۹۴.....	عنوان
۹۴.....	صفحه

۹۵.....	انتقال یک سوپه
۹۶.....	انتقال دو سوپه
۹۸.....	اتم‌های گراف

بخش دوم: کاربرد ماتریس لاپلاسین در مسائل سازه‌ای

فصل ششم: کاربرد ماتریس لاپلاسین در تقارن‌های به فرم دو و سه در سیستم‌های مکانیکی جرم- فنر

۱۰۵.....	مقدمه
۱۰۵.....	ماتریس‌های لاپلاسین برای فرم‌های متفاوت
۱۰۶.....	تقارن در یک سیستم ارتعاشی جرم- فنر
۱۱۰.....	مدل گراف یک سیستم جرم- فنر
۱۱۲.....	سیستم‌های ارتعاشی با تقارن به فرم دو
۱۱۵.....	سیستم‌های ارتعاشی با تقارن به فرم سه

فصل هفتم: روش‌های تحلیل در پایداری سازه‌ها

۱۲۴.....	مقدمه
۱۲۴.....	روش‌های بدست آوردن بار بحرانی
۱۲۵.....	روش معادلات دیفرانسیل
۱۲۵.....	روش انرژی
۱۳۰.....	روش‌های عددی
۱۳۳.....	سایر روش‌های بررسی پایداری سازه‌ها برای حالات خاصی از سازه
۱۳۴.....	روش انتگرالگیری دو گانه
۱۳۵.....	روش انتگرالگیری تک
۱۳۶.....	روش مرکز جرم
۱۳۷.....	روش تقریب‌های متوالی

فصل هشتم: کاربرد ماتریس لاپلاسیان در پایداری قابهای مفصلی

۱-۸- مقدمه.....	۱۴۱
۲-۸- مدل گراف مرکب در تقارنهای کانونیکال.....	۱۴۲
۱-۲-۸- ماتریس لاپلاسیان در تقارن به فرم دو در قابها.....	۱۴۳
۱-۱-۲-۸- گامهای بدست آوردن اتمهای گراف در تقارن به فرم دو.....	۱۴۶
۲-۲-۸- ماتریس لاپلاسیان در تقارن به فرم سه در قابها.....	۱۶۸
۱-۲-۲-۸- گامهای بدست آوردن اتمهای گراف در تقارن به فرم سه.....	۱۷۰

فصل نهم: مقایسه و جمع‌بندی

۱-۹- مقدمه.....	۱۹۸
۲-۹- بحث درنتایج.....	۲۰۰

فصل دهم: نتیجه‌گیری و چشم‌انداز آینده

۱-۱۰- مقدمه.....	۲۰۵
۲-۱۰- نتیجه‌گیری.....	۲۰۶
۲-۱۰- چشم‌انداز آینده.....	۲۰۷

منابع و مراجع.....

پیوست.....	۲۱۳
------------	-----

بخش اول: ماتریسها و کاربرد ماتریس لاپلاسین در تئوری گراف

فصل اول: مقدمه و کلیات

- شکل ۱-۱- نمایی از شهر کونیکسبرگ در سال ۱۷۳۶ ۳
- شکل ۲-۱- مدل گراف شهر کونیکسبرگ ۴

فصل سوم: کاربرد ماتریسها در تئوری گراف

- شکل ۱-۳- نمایش مدل گرافی که راسهای آن نام افراد می باشد ۲۹
- شکل ۲-۳- گرافی با چهار راس ۲۹
- شکل ۳-۳- گرافی با شش راس و هفت یال ۳۰
- شکل ۴-۳- نمایش گرافهای الف و ب با تعداد رؤوس و تعداد یال متفاوت ۳۰
- شکل ۵-۳- گرافی با شش راس و پنج یال ۳۲
- شکل ۶-۳- گراف G و ماتریس مجاورت مربوط به آن ۳۳
- شکل ۷-۳- گراف G ۳۴
- شکل ۸-۳- گراف G و ماتریس تلاقی مربوط به آن ۳۸
- شکل ۹-۳- گراف G و ماتریس مسیر مربوط به آن ۳۹
- شکل ۱۰-۳- گراف G و ماتریس مدار مربوط به آن ۴۰
- شکل ۱۱-۳- گراف G و ماتریس برش مربوط به آن ۴۲
- شکل ۱۲-۳- جنگل ۴۳
- شکل ۱۳-۳- درخت ۴۳
- شکل ۱۴-۳- نمایش یک گراف در شکل (الف) و درخت پوشا با خطوط مشکی پررنگ در شکل (ب) ۴۳
- شکل ۱۵-۳- (الف) گراف G (ب) درخت با کوتاهترین مسیر از گراف G ۴۴
- شکل ۱۶-۳- (الف) گراف مرتبه ۱ چند گانه دارای طوقه، (ب) گراف مرتبه ۲ چند گانه (دارای یال چند گانه)، (ج) گراف مرتبه چند گانه (دارای یال چند گانه طوقه) ۴۵
- شکل ۱۷-۳- نمایش یال یک سویه ۴۵
- شکل ۱۸-۳- یال دو سویه ۴۶
- شکل ۱۹-۳- نمایش یال جهت دار به صورت طوقه دار ۴۶
- شکل ۲۰-۳- گرافی حاوی یال جهت دار، طوقه و یال ساده ۴۷

- شکل ۳-۲۱- یک یال یکسویه و ماتریس لاپلاسین مربوط به آن..... ۴۷
- شکل ۳-۲۲- گرافهای G و زیرگرافهای آن..... ۴۸

فصل چهارم: کاربرد ماتریس لاپلاسین و مدل ریاضی گرافها در تقارن به فرم دو و سه

- شکل ۴-۱- مدل گراف با برچسب گذاری زوج و فرد در هر نیمه..... ۶۴
- شکل ۴-۲- مدل گراف با برچسب گذاری در جهت خلاف عقربه های ساعت..... ۶۵
- شکل ۴-۳- مدل گراف با برچسب گذاری نامنظم..... ۶۶
- شکل ۴-۴- مدل گراف G_1 با تقارن به فرم دو..... ۶۶
- شکل ۴-۵- مدل گراف با تقارن به فرم سه..... ۶۹
- شکل ۴-۶- (الف) مدل گراف با تقارن به فرم دو (ب) و (ج) نیمه ی متقارن پارش یافته..... ۷۲
- شکل ۴-۷- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) مولفه متقارن G_2 ۷۲
- شکل ۴-۸- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) اتم $G_{G_1G_2}$ (ج) اتم $G_{G_1G_3}$ ۷۳
- شکل ۴-۹- (الف) مولفه متقارن G_2 (ب) اتم $G_{G_2G_3}$ (ج) اتم $G_{G_2G_1}$ ۷۳
- شکل ۴-۱۰- مدل گراف با تقارن به فرم سه..... ۷۴
- شکل ۴-۱۱- (الف) و (ب) دونیمه ی متقارن پارش یافته..... ۷۴

فصل پنجم: کاربرد ماتریس لاپلاسین در گرافهای مرکب با تقارن به فرم دو و سه

- شکل ۵-۲- مدل گراف مرکب..... ۷۹
- شکل ۵-۳- یک گراف مرکب متقارن G با ۲ راس مرکب و ۳ یال..... ۸۰
- شکل ۵-۴- گراف مرکب با دو راس مرکب..... ۸۲
- شکل ۵-۵- گراف مرکب، با چهار راس مرکب و دو راس غیرمرکب..... ۸۴
- شکل ۵-۶- (الف) مولفه متقارن G_1 - (ب) مولفه متقارن G_2 ۸۶
- شکل ۵-۷- گراف مرکب با تقارن به فرم سه..... ۸۸
- شکل ۵-۸- گراف مرکب با عوض کردن ترتیب برچسب گذاری..... ۸۹
- شکل ۵-۹- مدل گراف مرکب با تقارن به فرم سه..... ۹۰
- شکل ۵-۱۰- راس خارجی هم موقعیت با راس ۱، ۲ و ۳..... ۹۱
- شکل ۵-۱۱- گراف مرکب با دو راس هم موقعیت..... ۹۲

- شکل ۵-۱۲- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) مولفه متقارن G_2 ۹۵
- شکل ۵-۱۳- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) مولفه متقارن G_2 ۹۷
- شکل ۵-۱۴- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) مولفه متقارن G_2 ۹۸
- شکل ۵-۱۵- (الف) مدل گراف (ب) نیمه‌های پارشیافته ۹۹
- شکل ۵-۱۶- (الف) مولفه متقارن G_2 (ب) اتم G_{2G_2} (ج) اتم G_{2G_3} ۹۹
- شکل ۵-۱۷- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) اتم G_{3G_2} (ج) اتم G_{3G_3} ۱۰۰
- شکل ۵-۱۸- (الف) مدل گراف مرکب با تقارن به فرم دو (ب) و (ج) نیمه های پارش یافته ۱۰۱
- شکل ۵-۱۹- (الف) مولفه متقارن G_2 (ب) مولفه متقارن G_1 ۱۰۱
- شکل ۵-۲۰- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) اتم G_{1G_2} (ج) اتم G_{1G_3} ۱۰۲

بخش دوم: کاربرد ماتریس لاپلاسین در مسائل سازه‌ای

فصل ششم: کاربرد ماتریس لاپلاسین در تقارن‌های به فرم دو و سه در سیستم‌های مکانیکی جرم- فنر

- شکل ۶-۱- (الف) یک سیستم متقارن دینامیکی و (ب) دو زیرسیستم همراه با یک فنر اتصال ۱۰۷
- شکل ۶-۲- زیرسیستم متناظر با زیرماتریس G_2 ۱۰۸
- شکل ۶-۳- زیرسیستم متناظر با زیرماتریس G_1 ۱۰۸
- شکل ۶-۴- سیستم مکانیکی جرم - فنر ۱۱۰
- شکل ۶-۵- مدل گراف G_1 متناظر با سیستم ارتعاشی ۱۱۰
- شکل ۶-۶- (الف) مولفه متقارن G_1 - (ب) مولفه متقارن G_2 ۱۱۱
- شکل ۶-۷- (الف) یک سیستم دینامیکی (ب) مدل گراف متناظر ۱۱۳
- شکل ۶-۸- اتم‌های دینامیکی G_1 و G_2 ۱۱۴
- شکل ۶-۹- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) مولفه متقارن G_2 ۱۱۵
- شکل ۶-۱۰- یک سیستم دینامیکی ۱۱۵
- شکل ۶-۱۱- مدل گراف متناظر ۱۱۵
- شکل ۶-۱۲- اتم‌های G_2 و G_3 ۱۱۶
- شکل ۶-۱۳- یک فنر جهتدار ۱۱۷
- شکل ۶-۱۴- زیرسیستم‌های با G_2 و G_3 ۱۱۷

شکل ۱۵-۶- سیستم جرم - فنر.....	۱۱۷
عنوان	صفحه

شکل ۱۶-۶- برچسب گذاری سیستم جرم- فنر.....	۱۱۸
شکل ۱۷-۶- مدل گراف G_3	۱۱۸
شکل ۱۸-۶- (الف) مولفه متقارن G_3 (الف) مولفه متقارن G_2	۱۱۹
شکل ۱۹-۶- (الف) زیرسیستم G_2 (ب) زیرسیستم G_3	۱۲۰

فصل هفتم: روشهای تحلیل در پایداری سازه‌ها

شکل ۱-۷- قاب با تکیهگاه مفصلی با تغییر مکان جانبی.....	۱۲۶
شکل ۲-۷- یک تیر دو دهانه که از یک تیر n دهانه.....	۱۲۷
شکل ۳-۷- ستونهای با بارگذاری خاص.....	۱۲۸
شکل ۳-۷- (الف) نیروها و درجات آزادی یک عضو- (ب) نیرو و درجات آزادی یک سیستم سازه‌های (مانند تیر).....	۱۳۰
شکل ۴-۷- (الف) نمایش نیروها و درجه آزادی‌های وارد بر قاب گیردار با تغییر مکان جانبی (ب) نمایش نیروها و درجه آزادی‌های وارد بر قاب مفصلی با تغییر مکان جانبی.....	۱۳۲

فصل هشتم: کاربرد ماتریس لاپلاسین در پایداری قابهای مفصلی

شکل ۱-۸- درجه آزادیهای وارد بر المان تیر- ستون.....	۱۴۳
شکل ۲-۸- نمایش درجه آزادیهای وارد بر المان تیر.....	۱۴۴
شکل ۳-۸- نمایش درجه آزادیهای متقارن وارد بر المان تیر.....	۱۴۴
شکل ۴-۸- نمایش درجه آزادیهای وارد بر المان تیر- ستون.....	۱۴۵
شکل ۵-۸- نمایش مدل گراف متناظر با یک المان در قاب سازه‌های.....	۱۴۵
شکل ۶-۸- الف- طریقه‌ی برچسب گذاری.....	۱۴۷
شکل ۶-۸- ب- نمایش برچسب گذاری یک گراف متناظر با یک سیستم.....	۱۴۷
شکل ۷-۸- الف- نمایش نیروها و درجه آزادی‌های وارده بر قاب یک طبقه.....	۱۴۹
شکل ۷-۸- ب- مدل گراف متناظر با تقارن به فرم دو.....	۱۵۰
شکل ۸-۸- نمایش یک مدل گراف.....	۱۵۰

شکل ۸-۹- مدل گراف یال ² و ماتریس لاپلاسین متناظر با آن.....	۱۵۱
عنوان	صفحه

شکل ۸-۱۰- مدل گراف یال ¹ و ماتریس لاپلاسین متناظر با آن.....	۱۵۱
شکل ۸-۱۱- مدل گراف بدون راس خارجی.....	۱۵۲
شکل ۸-۱۲- الف- اتم G_1	۱۵۳
شکل ۸-۱۲- ب- اتم G_2	۱۵۴
شکل ۸-۱۳- الف- قاب ب- مدل گراف متناظر با قاب.....	۱۵۵
شکل ۸-۱۳- ج- اتم G_2	۱۵۵
شکل ۸-۱۳- د- اتم G_1	۱۵۵
شکل ۸-۱۴- الف- قاب با دهانه فرد.....	۱۵۶
شکل ۸-۱۴- ب- نمایش درجه آزادیهای قاب.....	۱۵۶
شکل ۸-۱۵- مدل گراف با تقارن به فرم دو.....	۱۵۷
شکل ۸-۱۶- الف- اتم G_1	۱۵۸
شکل ۸-۱۶- ب- اتم G_2	۱۵۹
شکل ۸-۱۷- مدل گراف با تقارن به فرم دو.....	۱۶۰
شکل ۸-۱۸- اتم G_1	۱۶۱
شکل ۸-۱۹- اتم G_2	۱۶۲
شکل ۸-۲۰- نمایش نیروها و درجه آزادیهای وارده بر قاب دو طبقه.....	۱۶۳
شکل ۸-۲۱- مدل گراف قاب با تقارن به فرم دو.....	۱۶۳
شکل ۸-۲۲- الف- اتم G_1	۱۶۵
شکل ۸-۲۲- ب- اتم G_2	۱۶۵
شکل ۸-۲۳- الف- مدل گراف با تقارن به فرم دو.....	۱۶۶
شکل ۸-۲۳- ب- اتم G_1	۱۶۷
شکل ۸-۲۳- ج- اتم G_2	۱۶۷
۸-۲-۲- ماتریس لاپلاسین در تقارن به فرم سه در قابها.....	۱۶۸
شکل ۸-۲۴- یال دو سویه متناظر با ستون.....	۱۶۸
شکل ۸-۲۶- یال یک سویه متناظر با ستون.....	۱۶۹
۸-۲-۲-۱- گامهای بدست آوردن اتمهای گراف در تقارن به فرم سه.....	۱۷۰
شکل ۸-۲۸- الف- نیروهای وارد بر قاب با دهانهی فرد.....	۱۷۱
شکل ۸-۲۸- ب- درجه آزادیهای وارد بر سازه.....	۱۷۱

شکل ۸-۲۸-ج- مدل گراف متناظر با قاب با تقارن به فرم سه ۱۷۱

صفحه

عنوان

شکل ۸-۲۹- درجه آزادی انتقالی در مختصات محلی الف- ستون ③ ب-ستون ① ۱۷۲	
شکل ۸-۳۰- الف- اتم G_2 ۱۷۴	
شکل ۸-۳۰- ب- اتم G_3 ۱۷۵	
شکل ۸-۳۱- الف- نیروهای وارد بر قاب دو طبقه با دهانه‌ی فرد ۱۷۶	
شکل ۸-۳۱- ب- درجه آزادی‌های وارد بر قاب ۱۷۶	
شکل ۸-۳۱-ج- مدل گراف قاب با تقارن به فرم دو ۱۷۶	
شکل ۸-۳۲- الف- اتم ۱۷۸	
شکل ۸-۳۲-ب- اتم G_3 ۱۷۹	
شکل ۸-۳۳-ج- قاب با تقارن به فرم دو ۱۸۱	
شکل ۸-۳۴- الف- اتم G_2 ۱۸۴	
شکل ۸-۳۴-ب- اتم G_3 ۱۸۴	
شکل ۸-۳۵- الف- نمایش نیروها و و درجه آزادی‌های وارد بر قاب با دهانه‌ی زوج ۱۸۶	
شکل ۸-۳۵-ب- مدل گراف با تقارن به فرم سه ۱۸۶	
شکل ۸-۳۶- الف- اتم G_2 ۱۸۸	
شکل ۸-۳۶-ب- اتم G_3 ۱۸۸	
شکل ۸-۳۷-ج- مدل گراف متناظر قاب با تقارن به فرم سه ۱۸۹	
شکل ۸-۳۸- الف- اتم G_2 ۱۹۱	
شکل ۸-۳۸-ب- اتم G_3 ۱۹۲	
شکل ۸-۳۹- الف- نمایش نیروها و درجه آزادی‌های وارد بر قاب دو دهانه‌ی یک طبقه ۱۹۳	
شکل ۸-۳۹-ب- مدل گراف با تقارن به فرم سه ۱۹۳	
شکل ۸-۴۰- الف- اتم G_2 ۱۹۵	
شکل ۸-۴۰-ب- اتم G_3 ۱۹۵	

« فهرست جداول »

صفحه

عنوان

فصل نهم: مقایسه و جمع بندی

جدول ۱-۹ - جدول ۱-۹ - نتایج حاصله در تقارن به فرم دو.....	۱۹۸
جدول ۲-۹ - جدول ۲-۹ - نتایج حاصله در تقارن به فرم سه.....	۱۹۹

بخش اول :

ماتریسها و کاربرد ماتریس لاپلاسین در
تئوری گراف

فصل

مقدمه و کلیات

۱-۱ مقدمه:

چنین به نظر می‌رسد که قبل از خلقت (سپیده‌دم) تقارن در مشیت باری تعالی بوده است. تقریباً هر چیزی با تقارن کامل خلق شده است. زیبایی نهفته در تقارن چیزی نیست که به ارث مانده باشد؛ بلکه ظاهراً مورد قبول بشر واقع گردیده است. از اهرام مصر تا ساختمانهای بلند، از پلهای ابتدایی تا پلهای معلق مدرن، کشتی‌ها، هواپیماها و اتومبیل‌ها همه دارای تقارن هستند. تقارن در سازه های مهندسی امری بسیار مهم است؛ مهندسی عمران نیز از چنین خصوصیتی مستثنی نیست. بنابراین به خصوصیات سازه‌های متقارن باید توجه خاصی مبذول داشته و در تحلیل از این خاصیت استفاده نمود. در هر حال این نوع سازه‌ها نه تنها در اقلیت نیستند بلکه در اکثریت نیز قرار دارند. بنابراین، در این رساله سازه‌های متقارن مورد مطالعه قرار گرفته است.

در مهندسی سازه، لازمه‌ی دقت در تحلیل در حد نیاز، برای نشان دادن ایمنی سازه آورده شده است؛ در نتیجه روشهای دقیق تحلیل بایستی نسبت به روشهای قرار دادی گسترش پیدا کند. استفاده از روشهای قراردادی زمانی که از سازه‌های ساده استفاده می‌شود؛ کاملاً رضایت بخش است ولی زمانی که سازه‌های پیچیده و با مقیاس بزرگ به کار می‌رود یافته‌های ناقص حاصل می‌شود. لازمه‌ی کارآمدی و استفاده‌ی بهینه از مواد یعنی طراحی بهینه، دقت بیشتر می‌باشد. برای حصول بدین منظور می‌توان از روشهای تحلیل استفاده نمود که شرایط مذکور را شامل می‌شوند و آن به کارگیری ماتریس‌های جبری و تئوری گراف می‌باشد این روش‌ها به طور ایده‌آل برای مکانیک محاسباتی مدرن مناسبند. این مهم از یک سو به ریاضی‌دان نشان می‌دهد که چگونه مفاهیم محض ریاضیات می‌تواند به راه‌حل کارآمدی از مسایل در مکانیک سازه‌ای اعمال شود و از سوی دیگر نقش مهم مفاهیم ریاضیات را برای حل مسایل مهندسی، به مهندس نشان می‌دهد. چنین کاربردهایی نه تنها مسایل مرتبط با مکانیک سازه‌ای را ساده می‌سازد؛ بلکه یک پل قوی بین پیشرفت در تئوری گراف از یک سو و مکانیک سازه‌ای از سوی دیگر تولید می‌کند [۱].

۲-۱ ضرورت انجام و اهداف تحقیق:

بنابراین در روشهای مبتنی بر تحلیل ماتریسی علاوه بر استفاده از مدلهای ریاضی، همواره اهداف زیر مورد توجه قرار گرفته است:

- ۱- کمترین زمان ممکن برای دستیابی به جوابها صرف شود.
 - ۲- کمترین خطای ممکن در حین محاسبات اتفاق بیفتد.
 - ۳- در استفاده از این متدها با کامپیوتر، کمترین حافظه مورد استفاده قرار گیرد.
- پیامد موارد مذکور، افزایش دقت و سرعت، کاهش حجم محاسباتی و کاهش در هزینه‌ی محاسبات می‌باشد [۱].

با توجه به آنچه مطرح شد گامهای بالا بدون شک انگیزه‌ای بر ضرورت تحقیق در رساله‌ی حاضر بوده و هدف از انجام تحقیق، بر پایه‌ی بدست آوردن مقدار ویژه‌ی کمینه برای یافتن بار بحرانی سازه در پایداری قابهای با تقارن به فرم دو و سه، با استفاده از ماتریس لاپلاسین و متعاقباً تئوری گراف، استواراست. روش ارائه شده در رساله‌ی حاضر به طور اجمالی مبتنی بر ارائه‌ی مدل گراف توصیفی از قابهای مفصلی بدون تغییر مکان محوری می‌باشد که در این راستا مدل گراف متناظر قاب در امتداد محور تقارنش پارش یافته و به دو مولفه‌ی متقارن کاهش می‌یابد که از دو مولفه‌ی متقارن تنها یک مولفه‌ی متقارن برای بدست آوردن بار بحرانی سازه کافی است. ماتریس لاپلاسین مولفه متقارن در تعیین مقدار ویژه مینیمم و بدست آوردن بار بحرانی قاب دارای نقش کلیدی می‌باشد. ماتریس لاپلاسین نقش اساسی در مسایل سازه‌ای دارد [۲،۳،۴،۵] و در این بحث از مهمترین ویژگیهای ماتریسی در تئوری گراف می‌باشد و بدون اعمال خاصیت ماتریسی در گراف عملاً استفاده از تئوری گراف در مکانیک سازه‌ای غیرممکن است یعنی این دو مفهوم در تناظر یک به یک با همدیگر قرار دارند. مزیت عمده به کارگیری فرمهای دو و سه هم‌ارز با ماتریس‌های سازه‌ای علاوه بر کاهش هزینه‌های محاسباتی مسایلی را که به علت محدودیت حافظه رایانه‌ای قابل پردازش نیستند، ممکن می‌سازد.

اگر یک سیستم بوسیله‌ی یک گراف مدل شود تمام ویژگیهای سیستم را می‌توان برای گراف متناظر در نظر گرفت. ماتریس سازه‌ای هم‌ارز ماتریس لاپلاسین در رساله‌ی حاضر ماتریس سختی می‌باشد. دلایل استفاده از ماتریس لاپلاسین هم‌ارز با ماتریس سختی این است که روش سختی از

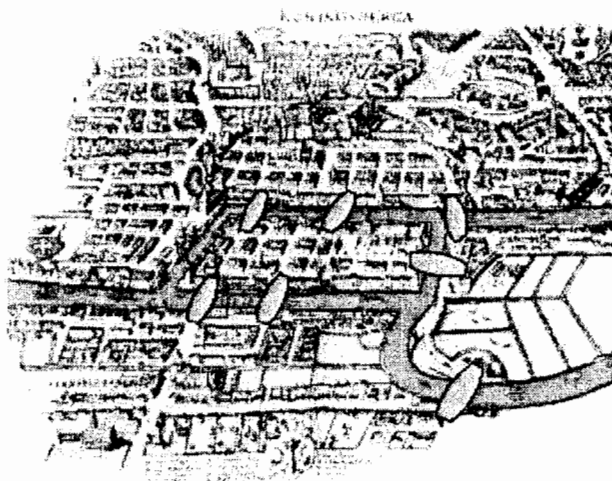
نظر برنامه نویسی بهتر و ساده تر از روش نرمی است. برای سازه هایی که ظاهراً روش نرمی بهتر به نظر می رسد با استفاده از ماتریس های سختی معادل برای اعضای سری یا موازی، روش سختی با روش نرمی مقابله خواهد نمود. حتی برای سازه های خاص که نسبت درجه نامعین استاتیکی بالاست و روش نرمی به مقدار زیاد به کار گرفته می شود روش سختی را می توان با امکانات مساوی به کار بست [۶].

به این دلیل است که در رساله ی حاضر ماتریس لاپلاسیان هم ارز با ماتریس سختی به عنوان رهیافتی مناسب در گرافهای متناظر مورد توجه قرا گرفته است.

۱-۳- خلاصه و مرور تاریخی:

۱-۳-۱- منشا و آغاز تئوری گراف (سده ی ۱۷۰۰)

بر خلاف زمینه های دیگر ریاضیات، منشا و آغاز نظریه گراف به زمان و مکان مشخصی باز می گردد: به سال ۱۷۳۶، به مساله هفت پل کونیگسبرگ^(۱)، که لئونهارت اویلر^(۲) (۱۷۰۷-۱۷۸۳) آن را حل کرد. قسمتهای مختلف شهر کونیگسبرگ توسط هفت پل که در شکل (۱-۱) نشان داده شده با یکدیگر در ارتباط بودند.



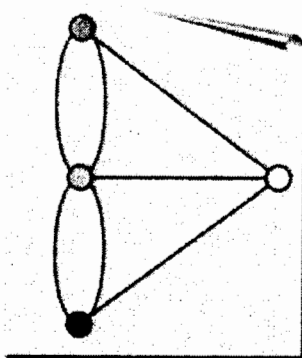
شکل ۱-۱- نمایی از شهر کونیگسبرگ در سال ۱۷۳۶ [۷]

این معما به این صورت مطرح شد که آیا امکان دارد که فردی از مکانی در شهر شروع به حرکت کرده و از تمام پلها فقط یک بار عبور نموده و به مکان اولیه بازگردد؟ اویلر ریاضیدان مشهور ثابت کرده است که این کار امکانپذیر نیست. او نشان داد که این کار در صورتی امکانپذیر است که در

^(۱)Königsberg

^(۲)Euler

گراف متناظر درجه‌ی تمام رئوس زوج باشد. گراف متناظر با پلهای هفت گانه شهر کونیگسبرگ در شکل (۲-۱) نشان داده شده است. هم اکنون مسالهی پلهای با قرار دادن پل هشتم حل شده است!



شکل ۲-۱- مدل گراف شهر کونیگسبرگ

در سال ۱۷۵۲ قضیه اوایلر برای گرافهای هامنی مطرح شد. (این قضیه در اصل برای چند وجهی‌ها در نظر گرفته شده بود). اما بعد از این گسترشها، در مدت تقریباً یک قرن کار چندانی در این زمینه انجام نشد.

۱-۳-۲- چگونگی رشد تئوری گراف و خلق کاربردهای عملی (سده‌ی ۱۸۰۰-۱۹۲۰) [۸]:

در ۱۸۴۷، گوستاف کیرشهوف^(۳) (۱۸۲۴-۱۸۸۷) نوعی خاص از گراف به نام درخت را بررسی کرد. کیرشهوف از این مفهوم در کاربردهایی که با شبکه‌های الکتریکی سروکار دارند در توسیع قانونهای اهم برای جریانهای الکتریکی استفاده کرد. ده سال بعد، آرثر کیلی (۱۸۹۵-۱۸۲۱) این نوع گراف را برای محاسبه ایزومرهای متمایز هیدروکربنهای اشباع شده C_nH_{2n+2} ، $Z^+ \in n$ ، گسترش داد.

در این دوره دو مفهوم اصلی دیگر نیز مطرح شدند. مساله حدس چهار رنگ اولین موضوعی بود که فرانسیس گاتری^(۴) (۱۸۳۱-۱۸۹۹) در حدود ۱۸۵۰ آن را بررسی کرد.

دومین مفهوم اصلی دور همیلتونی بود. این دور منسوب به سرویلیام همیلتن^(۵) (۱۸۰۵-۱۸۶۵) است که این مفهوم را در ۱۸۵۹ برای معمای شگفت انگیزی که در آن از یالهای دوازده وجهی متظم استفاده می‌شود به کار برد. یافتن جواب این معما خیلی مشکل نیست. علاوه بر این، تئوری

^(۳)Kirchhoff

^(۴)Gatry

^(۵)S. V. Hamilton

گراف به طور مفهومی در تحلیل سازه های کارهای مولر برسلاو^(۶) و هنیبرگ^(۷) نیز به کار برده شده است. در دنبال این گسترشها، تا بعد از ۱۹۲۰ فعالیت اندکی دیده می شود.

۱-۳-۳- گسترش و توسعه ی کاربردهای عملی (دهه ۱۹۲۰-۱۹۸۰):

مساله مشخص کردن گرافهای هامنی را کازیمیر کوراتوفسکی در ۱۹۳۰ حل کرد. اولین کتاب درباره نظریه گراف، به وسیله دنسز کونیش، پژوهشگر معروف در زمینه گراف نوشته شد. از آن پس فعالیت زیادی در زمینه گراف صورت گرفت، کامپیوتر در سه دهه اخیر یاری زیادی کرد. بین بسیاری از پژوهشگران معاصر در این زمینه و زمینه های وابسته نامهای کلود برژ^(۸)، خواتال^(۹)، پاول اردوش^(۱۰)، لاسلو لووایس^(۱۱)، توته^(۱۲)، و هاسلرویتنی^(۱۳) و لیو^(۱۴) را می توان یافت. بررسی های پیشرفته تر را می توان در کارهای مهدی بهزاد^(۱۵)، چارترند^(۱۶)، و لزنیاک-فاستر^(۱۷)، بوندی^(۱۸) و مورتی^(۱۹)، دئو^(۲۰) [۹] و هراری^(۲۱) یافت.

گسترشهای تازه زمینه نظریه گراف در دو جلد Studies in Mathematics انجمن ریاضی آمریکا، ویراسته ی فولکرسن^(۲۲) عرضه شده اند.

در مقاله ای از چارترند و ویلسن بسیاری از مفاهیم مهم نظریه گراف، با توجه به گرافی خاص، یعنی گراف پترسن، گسترش یافته اند. کاربردهای نظریه گراف در شبکه های الکتریکی را می توان در اثر سشو^(۲۳) و م.رید یافت. در یک کتاب، اثر دئو، کاربردهایی در نظریه کدگذاری، شبکه های

^(۱)Müller Breslau

^(۲)V.chvátal

^(۳)W. T.Tutte

^(۴)Behzad

^(۵)J. Bondy

^(۶)Harary

^(۷) Henneberg

^(۸)Paul Erdős

^(۹)Hassler Whitney

^(۱۰)G. Chartrand

^(۱۱)U. Murty

^(۱۲)D. Fulkerson

^(۱۳)Claude Berge

^(۱۴)Laszlo Lovász

^(۱۵)Hassler Whitney

^(۱۶)L. Lesniak-Foster

^(۱۷)Deo

^(۱۸)S. Seshu

الکتریکی، پژوهش در عملیات، برنامه ریزی کامپیوتری، و شیمی آمده‌اند. نقش نظریه پولیا در شمارش نموداری نیز اثر این مولف بررسی شده است. کتابی دیگر اثر رابرتز^(۲۴) روشهای گراف را در علوم اجتماعی نشان می‌دهد. کاربردهای جدید نظریه گراف در شیمی، در مقاله‌ای اثر رووری^(۲۵) عرضه شده است. مطالبی بیشتر درباره چند جمله‌ای‌های فامی را می‌توان در مقاله‌ای تحقیقی اثر رید و در فصل ششم اثر ليو يافت [۸].

مسلم است که تئوری گراف در این دوره در اکثر شاخه های علوم مانند مهندسی، علوم پایه، عمران، مهندسی برق و مکانیک، معماری، مهندسی پزشکی [۱۰]، مدیریت و کنترل، ارتباطات، تحقیق در عملیات، تکنولوژی ماتریسی اسپارس، بهینه‌یابی محاسباتی و علوم کامپیوتر کاربردهای بسیاری پیدا کرده است.

۱-۳-۴- گسترش و کاربرد تئوری گراف در مکانیک سازه‌ای (۱۹۸۰-تا کنون):

تئوری گراف همچنین به طور غیرمستقیم در مکانیک سازه‌ای و در محاسبات موازی به کار می‌رود. پیشرفت‌های اخیر در تکنولوژی سازه‌ای به دقت و کارایی و سرعت بیشتری در تحلیل سیستم‌های سازه‌ای نیاز دارد، که در تحلیل بهینه سازه‌ای نشان داده شده است. از اینرو شگفت‌انگیز نیست که روشهای جدیدی برای تحلیل سازه‌های با ترتیبات پیچیده گسترش پیدا کنند. با وجودی که تئوری گراف به طور مفهومی در تحلیل سازه‌ای کارهای مولر برسلاو و هنبِرگ، پیشقدم بوده است، کاربردهای آشکار و صریحی را در کار کرون^(۲۶)، لانگفرس^(۲۷)، هندرسون^(۲۸)، روسوپلوس^(۲۹)، ساموئلسون^(۳۰)، دیمایو^(۳۱)، فنوس^(۳۲)، اسپیلر^(۳۳)، کسل و همکارانش^(۳۴)، هندرسون و

^(۲۴)Roberts^(۲۷)Langefors^(۳۰)Samuelsson^(۳۳)Spillers^(۲۵)D.H.Rouvray^(۲۸)Henderson^(۳۱)Dimaggio^(۳۴)Cassell et al^(۲۶)Kron^(۲۹)Russopoulos^(۳۲)Fenves

ماوندر^(۳۵)، ویبرگ^(۳۶)، کاوه^(۳۷) می‌توان یافت [۱]. لازمه‌ی دقت در تحلیل در حد نیاز برای نشان دادن ایمنی سازه آورده شده است. در نتیجه، روشهای دقیق تحلیل، بایستی نسبت به روشهای قراردادی گسترش پیدا کند. این امر زمانی که سازه‌های پیچیده و با مقیاس بزرگ به کار می‌رود، یافته‌های ناقص را بدست می‌دهد. دلیل دیگر در مورد اینکه چرا دقت بیشتر لازم است، از کارآمدی و استفاده‌ی بهینه از مواد یعنی طراحی بهینه ناشی می‌شود. روشهای تحلیل که شرایط مذکور را شامل می‌شوند؛ به کارگیری ماتریس جبری و گراف تئوری می‌باشد که به طور ایده‌آل برای مکانیک محاسباتی مدرن مناسبند. اگر چه الگوی هم‌ارزی ماتریس‌های سازه‌ای و ماتریس‌های مرتبط با گراف تئوری مسایل سازه‌ای را ساده می‌سازد و اجازه می‌دهد که پیشرفتهایی را در این زمینه برای انتقال به مکانیک سازه‌ای ایجاد کنیم [۱]. در این راستا گسترش و توسعه‌ی تئوری گراف و ماتریس مرتبط با تئوری گراف کماکان ادامه دارد به طوری که با افزایش سرعت پیشرفت علم در چند دهه‌ی اخیر شاهد رشد، توجه و پیشرفت این مهم در تئوری گراف و در مهندسی عمران هستیم.

۴-۱- ساختار تحقیق

محتوی رساله‌ای که در پیش رو قرار دارد در دو بخش کلی تهیه و تنظیم گردیده است که بخش اول خود به چندین فصل تقسیم شده است، بخش اول این رساله خود مشتمل بر پنج فصل جداگانه می‌باشد، فصل اول شامل مقدمه و مرور تاریخی موضوع می‌باشد. در فصل دوم بدلیل نقش اساسی ماتریس‌ها در تحلیل پایداری سازه، اقدام به تعریف و طرح روابط حاکم بر ماتریس‌ها گردید. همچنین در تعیین مقادیر ویژه سه روش محاسباتی، با عناوین روش لوریه فادیو، روش ژاکوبی و روش گیونز مطرح و معرفی گردیده است. فصل سوم حاوی تعریف گرافها می‌باشد. در این فصل، سه نوع ماتریس با نامهای ماتریس مجاورت، ماتریس درجه و ماتریس لاپلاسین معرفی و مورد استفاده قرار گرفته است. در فصل چهارم تقارن به فرم دو و سه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است و نحوه‌ی استفاده از ماتریس لاپلاسین و افراز آن به زیرماتریس‌ها با استفاده از خاصیت تقارن بیان

(۳۵) and Maunder Henderson

(۳۶) Wiberg

(۳۷) Kaveh

شده است. محتوای فصل پنجم مبتنی بر جهت توصیف مناسبتری از تقارن به فرم دو و سه می باشد. در این فصل اقدام به تعریف نوع خاصی از گرافها به نام گرافهای مرکب شده است. این نوع گرافها همراه با ماتریس لاپلاسیان متناظر با آنها در فرم دو و سه مورد بحث قرار گرفته است. بخش دوم این رساله مبتنی بر تعیین کاربردهای ماتریس لاپلاسیان در تحلیل سازه ها است. این بخش، خود مشتمل بر چهار فصل می باشد. در فصل ششم آن کاربرد ماتریس لاپلاسیان در تقارن به فرم دو و سه در سیستم های مانیکی جرم- فنر مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در فصل هفتم چند روش تحلیل در حل مسایل پایداری سازه ها بررسی شده است و محاسن و معایب آن مورد بررسی قرار گرفته است. در فصل هشتم به صورت مفصل در مورد شیوهی به کارگیری ماتریس لاپلاسیان با استفاده از تجزیه ماتریس ها با استفاده از تقارن به فرم دو و سه، در پایداری قابها بحث و بررسی به عمل آمده است. در این بخش محاسبه ی مقدار ویژه ی مینیمم با استفاده از ماتریس لاپلاسیان در قابهای با تقارن به فرم دو و سه به منظور دست یافتن به بار بحرانی سازه آورده شده است. در این خصوص مدل گراف مرکب متناظر قابها تشریح شده است نتیجتاً در این فصل نحوه ی محاسبه ی مقادیر ویژه با استفاده از تجزیه ی ماتریس لاپلاسیان و تشکیل مولفه های متقارن همراه با مثالهای گویا ارائه شده است. در فصل نهم مقایسه و جمع بندی از بحث پایداری قابهای مفصلی مطرح شده است و در فصل دهم ضمن ارائه ی چکیده ی نتایج بدست آمده، با مطرح نمودن پیشنهادات و راهکارهایی در مورد تکامل و پیشرفت قابلیت های الگوی هم ارزی ماتریس های سازه ای و ماتریس های مرتبط با تئوری گراف می تواند در کیفیت امر موثر باشد، زمینه ای فراهم شده است تا پژوهشگران و علاقمندان به تحقیق و بررسی در مورد کاربرد ماتریس لاپلاسیان در صورت تمایل بتوانند از آن استفاده نمایند. ضمناً در پیوست پایان نامه نیز، دو برنامه برای بدست آوردن ماتریس لاپلاسیان به فرم دو و بدست آوردن مقادیر ویژه ماتریسها در فرم های متقارن، آورده شده است.

فصل

۲

تعاریف و مفاهیم اولیه
ماتریسها و مقادیر ویژه

۲-۱- مقدمه:

نقش و لزوم بکارگیری ماتریسها در علوم و مباحث ریاضی و بسیاری از مسایل مهندسی امری ضروری و اجتناب ناپذیر بوده است [۱۱]. در این راستا کاربرد ماتریس ها در مهندسی عمران نقشی غیر قابل انکار داشته و لزوم بکارگیری آن در بسیاری از مسایل اهمیت این مهم را به روشنی آشکار ساخته است [۱۲، ۱۳، ۶، ۱۴]. استفاده از ماتریسها در کنار مباحث دیگری از ریاضیات گسسته توانسته است دامنه‌ی پر کاربردی از مسایل را در پهنه‌ی گسترده‌ای از علوم در خود جای دهد [۱۵، ۱۶]. این فصل مقدمه‌ای اجمالی بر معرفی ماتریسها و تاکید آن بر مقادیر ویژه به علت نقش عدیده‌ای که در مسایل پایداری سازه‌ها دارد آورده شده است.

۲-۲- ماتریسها [۹]:

ماتریس یک آرایه‌ی مستطیلی از اعداد تعریف می‌شود. اعداد مولفه‌های ماتریس نامیده می‌شوند. برای نشان دادن ماتریسها معمولاً، از حروف بزرگ، مانند A, B و غیره استفاده می‌شود. مولفه‌های ماتریس را با حروف کوچک لاتین با دو زیرنویس، مثلاً a_{ij}, b_{ij} نشان داده می‌شود. اندیس اول یعنی i ، معرف شماره‌ی سطر و اندیس دوم یعنی j نشان دهنده‌ی شماره‌ی ستونی است که مولفه‌ی a_{ij} از ماتریس A در آرایه موجود است.

مثال ۲-۱- ماتریس A آمده در زیر یک ماتریس با m سطر و n ستون است.

$$A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (۲-۱)$$

به طور کلی می‌توان یک ماتریس را با یک عضو کلی مانند (a_{ij}) نمایش داد.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$$

آنگاه $C = A + B$ عبارتست از:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

۲-۳- ضرب دو ماتریس:

ماتریس $A = (a_{ij})$ ، زمانی در ماتریس $B = (b_{ij})$ قابل ضرب است که تعداد ستونهای A برابر تعداد سطرهای ماتریس B باشد. هر گاه A ماتریسی $m \times n$ و B ماتریسی $n \times k$ باشد، در این صورت حاصل ضرب ماتریس A در B که به صورت $C = (C_{ij}) = AB$ نمایش داده می شود $m \times k$ می باشد که برای هر i و j داریم:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rj}$$

و می نویسیم $C = AB$.

از تعریف فوق واضح است که در حالت کلی $AB \neq BA$.

مثال ۲-۵- ماتریس $C = AB$ را برای ماتریسهای A و B در مثال پیشین بدست می آوریم.

$$C = \begin{bmatrix} 1 \times 0 + 3 \times (-3) & 1 \times 2 + 3 \times 5 \\ 2 \times 0 + (-7) \times (-3) & 2 \times 2 + (-7) \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 17 \\ 21 & -31 \end{bmatrix}$$

۲-۴- بردار

ماتریسهایی را که فقط دارای یک سطر یا یک ستون می باشند، یک بردار نامیده می شود. ماتریسی که دارای یک سطر باشد یک بردار سطری و ماتریسی که دارای یک ستون باشد یک بردار ستونی می نامیم. معمولاً بردارها را با حروف کوچک و سیاه نشان می دهیم، مانند b, a .

مثال ۲-۶- بردار a در زیر یک بردار سطری و بردار b در زیر یک بردار ستونی است.

$$a = [1, 2, 0, 5] \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

۲-۵- چند ماتریس خاص:

ماتریس صفر: ماتریسی که تمام مولفه های آن صفر باشند، ماتریس صفر نامیده و آن را با O نشان می دهیم.

ماتریس قطری: ماتریس (مربع) A یک ماتریس قطری نامیده می شود، برای هر i و j که $i \neq j$ داشته باشیم:

$$a_{ij} = 0$$

مولفه های قطری یک ماتریس: مولفه های $a_{ii} = 0$ ، از یک ماتریس مربع مرتبه n مولفه های قطری نامیده می شود، یک ماتریس قطری را به کمک اعضای قطری آن به صورت زیر نشان می دهیم:

$$A = \text{diag}(a_{ii}) = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

مثال ۲-۷: ماتریس زیر ماتریس قطری می باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

ماتریس واحد یا همانی: ماتریس قطری که تمام مولفه های آن برابر یک باشند، ماتریس واحد یا همانی نامیده می شود.

هر گاه A ماتریسی $m \times n$ باشد، در این صورت داریم:

$$I_n A = A I_m = A$$

ماتریس بالا مثلثی: ماتریس مربع $A = (a_{ij})$ را بالا مثلثی گفته میشود، هر گاه برای هر $i > j$ داشته باشیم:

$$a_{ij} = 0$$

ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربع $A = (a_{ij})$ را پایین مثلثی گفته می شود، هر گاه برای هر $i < j$ داشته باشیم:

$$a_{ij} = 0$$

ماتریس وارونپذیر: ماتریس مربع A وارونپذیر یا معکوسپذیر نامیده می شود، هر گاه ماتریسی مربع مانند B وجود داشته باشد به طوری که داشته باشیم:

$$AB = BA = I_n$$

که در آن n مرتبه ماتریس های A و B می باشد. معمولاً ماتریس وارون A را با A^{-1} نشان می دهیم، لذا هر گاه A وارونپذیر باشد، خواهیم داشت:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

ماتریس منفرد و نامنفرد: ماتریس مربع A نامنفرد نامیده می شود، هر گاه وارونپذیر باشد، در غیر این صورت A را منفرد می نامیم.

مثال ۲-۸- ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این صورت A نامنفرد است، زیرا داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ترانهادهی یک ماتریس: ترانهادهی یک ماتریس $m \times n$ مانند $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ است که از تعویض سطر ها و ستونهای A بدست می آید. به ویژه، ترانهادهی یک بردار سطری بردار ستونی است و بر عکس ترانهادهی یک بردار ستونی، برداری سطری است. ترانهادهی ماتریس A را با A^T نشان می دهیم.

ماتریس متقارن: ماتریس مربع $A = (a_{ij})$ بر روی مجموعه اعداد حقیقی، متقارن نامیده می شود هر گاه برای هر i و j داشته باشیم:

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$A^T = A \text{ در این صورت}$$

ماتریس زیر یک ماتریس متقارن است:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

دو بردار متعامد: بردارهای $\underline{X}$ و $\underline{Y}$ متعامدند، هر گاه داشته باشیم

$$\underline{X}^T \underline{Y} = 0$$

مثال ۲-۹: بردارهای $\underline{X} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$ و $\underline{Y} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$ متعامدند.

$$\underline{X}^T \underline{Y} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \times 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

مجموعه ی متعامد: هر گاه S مجموعه ای از بردارها باشد، S یک مجموعه متعامد نامیده می شود، هر گاه همه ی جفت بردارهای متمایز در S متعامد باشند.

مجموعه ی متعامد یکه: مجموعه ی متعامد S یک مجموعه ی متعامد یکه یا متعامد نرمال نامیده می شود هر گاه برای هر بردار $\underline{X}$ در S داشته باشیم:

$$\underline{X}^T \underline{X} = 1$$

ماتریس متعامد: ماتریس مربع A متعامد نامیده می شود هر گاه داشته باشیم:

$$AA^T = A^T A = I$$

یعنی هر گاه داشته باشیم $A^T = A^{-1}$

مثال ۲-۱۰- ماتریس زیر یک ماتریس متعامد است:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

نکته: از اینکه برای یک ماتریس متعامد داریم $A^T = A^{-1}$ نتیجه می شود بردارهای ستونی (سطری) ماتریس متعامد A دو به دو متعامدند، و در واقع بردارهای ستونی ماتریس متعامد A یک مجموعه ی متعامد نرمال تشکیل می دهند.

۲-۶- رتبه ی یک ماتریس:

گوییم ماتریس غیر صفر A دارای رتبه ی r است هر گاه حداقل یکی از زیردترمینان های مربع مرتبه ی r آن مخالف صفر بوده در حالی که هر زیردترمینان مربع مرتبه ی $(r+1)$ ام آن (در صورت وجود) صفر باشد. ماتریس صفر دارای رتبه ی صفر است. رتبه ی ماتریس A را با $rank(A)$ نشان می دهیم.

هر گاه A ماتریسی $n \times n$ با $rank(A) = n$ باشد، ماتریس A را ماتریسی تمام رتبه می نامیم. که در این صورت A ماتریسی نامنفرد است.

به طور مشابه هر گاه A ماتریسی $m \times n$ با $rank(A) = m$ باشد، A را تمام رتبه ی سطری و هر گاه $rank(A) = n$ آن را تمام رتبه ی ستونی می نامیم.

انجام اعمال زیر که تبدیلات مقدماتی نامیده می شوند، روی یک ماتریس مرتبه و رتبه ی آن را تغییر نمی دهد.

الف) تعویض سطرهای i ام و j ام، که با H_{ij} نشان داده می شود.

تعویض ستونهای i ام و j ام، که با K_{ij} نشان داده می شود.

ب) ضرب هر درایه از سطر i ام در عدد غیر صفر λ ، که آن را با $H_i(\lambda)$ نشان می دهیم.

ضرب هر درایه از ستون i ام در عدد غیر صفر λ ، که با $K_i(\lambda)$ نشان داده می شود.

پ) برای عدد λ ، جمع λ برابر درایه های سطر i ام با درایه های متناظر سطر j ام، که آن را با $H_{ij}(\lambda)$ نشان می دهیم.

جمع λ برابر درایه های ستون j ام با درایه های متناظر ستون i ام، که آن را با $K_{ij}(\lambda)$ نشان می - دهیم.

تبدیلات H تبدیلات سطری مقدماتی و تبدیلات K تبدیلات ستونی مقدماتی نامیده می شوند. **معکوس یک تبدیل مقدماتی:** معکوس یک تبدیل مقدماتی عبارتست از عملی که اثر تبدیل مقدماتی را خنثی می کند، یعنی بعد از اینکه ماتریس A تحت تاثیر یکی از تبدیلات مقدماتی قرار گرفت و سپس ماتریس حاصل تحت تاثیر معکوس آن تبدیل مقدماتی واقع شد، نتیجه ی نهایی ماتریس A خواهد بود.

مثال ۲-۱۱- ماتریس A را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

تبدیل مقدماتی $H_{21}(-2)$ ماتریس زیر را نتیجه می دهد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

تبدیل مقدماتی سطری $H_{21}(2)$ روی ماتریس B ، ماتریس A را بدست می دهد. لذا $H_{21}(-2)$ و $H_{21}(2)$ تبدیلات سطری مقدماتی معکوس هم هستند.

۲-۷- مقادیر ویژه یک ماتریس [۱۷، ۱۸]:

مسایل فیزیکی بسیاری وجود دارند که برای حل آنها مقادیری از λ که در معادله (۲-۱) صدق می کند لازم است.

$$Ax = \lambda x \quad (2-2)$$

در رابطه ی فوق A یک ماتریس $(n \times n)$ و x یک بردار $(n \times 1)$ و λ مقداری ثابت است. چنین مسایلی در بسیاری از مسیل علوم و مهندسی [۱۹، ۱۱] و در تحلیل پایداری و معادلات ارتعاشات ساختمانها

(تحلیل دینامیکی) و مدارهای الکتریکی اتفاق می افتد [۲۰، ۲۱]. مثالی بوسیله ی ارتعاشات جسمی که از حالت تعادل خارج شده ارائه می شود.

مثال ۲-۱۲- فرض کنیم یک دستگاه از اجسام مرتبط داشته باشیم بطوریکه A_1, B_1 حالت تعادل آنها باشد. اکنون فرض می کنیم این اجسام در دو جهت تغییر کوچکی یابند بطوریکه x_2, x_1 فاصله جدید آنها از حالت تعادل باشد.

می پذیریم که نیروها متناسب با x_2, x_1 عمل می نمایند تا دو جسم ما به حالت تعادل اولیه در آیند. معادله حرکت این دو جسم چنین است.

$$a = \begin{cases} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \quad (3-2)$$

جواب دستگاه فوق به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \cos(\omega t + \phi) \\ x_2 = \beta \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \quad (4-2)$$

اگر این جواب را در دستگاه (۳-۲) جایگزین کنیم خواهیم داشت:

$$b = \begin{cases} -\alpha\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = a_{11}\alpha \cos(\omega t + \phi) + a_{12}\beta \cos(\omega t + \phi) \\ -\beta\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = a_{21}\alpha \cos(\omega t + \phi) + a_{22}\beta \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -\omega^2 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad (5-2)$$

در اینجا ω فرکانس نوسان برای x_1, x_2 و ϕ اختلاف فاز می باشد و α, β نیز دامنه ی این نوسانها می باشد. معادله (۵-۲) «معادله جبری مقدار ویژه ماتریس» نامیده می شود. حال در نظر داریم تا معادلاتی مانند (۲-۲) را حل نماییم و x (بردار ویژه)، λ (مقدار ویژه) را که مربوط به ماتریس A می باشند بدست آوریم.

در حالت کلی $x=0$ ، یک جواب برای معادله $Ax = \lambda x$ ، می باشد اما این جواب مطلوبی نیست

زیرا که این جواب متناظر با عدم تغییر از حالت تعادل است و به جواب غیر صفر نیازمند است

فرض می شود معادله (۵-۲) به صورت زیر نوشته شود:

$$(A - \lambda I) = 0 \quad (۶-۲)$$

معادله (۳-۲) نمایش یک دستگاه معادلات خطی همگن می باشد و در صورتی دارای جواب غیر صفر است که:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (۷-۲)$$

پس از بسط دترمینان معادله ی مشخصه ای بر حسب مقادیر ویژه حاصل می شود و داریم:

$$\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0 = 0 \quad (۸-۲)$$

معادله فوق در حالت کلی دارای n جواب است، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ که آنها را مقادیر ویژه ماتریس A می نامیم.

اکنون بازاء هر مقدار λ معادله همگن (۸-۱) دارای جواب x خواهد بود و n بردار $x_1, x_2, \dots, x_n$ متناظر با مقادیر ویژه $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ بردارهای ویژه نامیده می شوند. یعنی در روش فوق، برای یک ماتریس مرتبه n مانند A مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مطابق با بند-های ذیل بدست می آیند:

۱- از بسط $\det(A - \lambda I) = 0$ معادله چند جمله ای از درجه n را نوشته می شود.

۲- جواب های این معادله $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ را که از درجه ی n ام می باشد تعیین می شوند.

۳- برای هر مقدار ویژه مانند $\lambda_r = \lambda$ از حل n معادله خطی، بردارهای ویژه را تعیین می شوند. برای هر x_r داریم:

$$(A - \lambda_r I)x_r = 0 \quad (۹-۲)$$

البته این روش محاسبات بسیار وقت گیر می باشد. زمانی که درجه معادله مشخصه پایین باشد از روش لوریه - فادیو با تشکیل معادله مشخصه ماتریس، مقادیر ویژه ماتریس بدست می آید. روش های ساده تری برای بدست آوردن مقادیر ویژه وجود دارند که به مهمترین آنها اشاره می شود. علت توضیح چنین روش هایی این است که در بسط دترمینان و بدست آوردن ریشه های یک معادله مشخصه با درجه بزرگ ممکن است خطاهای بزرگی بوجود آید. در واقع هدف این روشها، بدست آوردن مقادیر ویژه و بردارهای ویژه با دقت کافی و کاهش زمان عملیات می باشد.

خواص مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس

- بردارهای ویژه یکتا نیستند و در یک ضریب ثابت دلخواه تفاوت دارند.
 - در حالت کلی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه یک ماتریس، حقیقی یا مختلط می باشند.
 - اگر A متقارن باشد، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن حقیقی هستند.
 - بردارهای ویژه A متعامدند، یعنی $x_r^T \cdot x_s = 0$, $\lambda_r \neq \lambda_s$
 - اگر کلیه مقادیر ویژه A متفاوت باشند، در اینصورت بردارهای ویژه A به طور خطی مستقل می باشند و می توان هر بردار دلخواه را به عنوان ترکیب خطی از این بردارهای ویژه نوشت.
 - اگر S ماتریسی غیر منفرد باشد در اینصورت:
- مقادیر ویژه $\{\lambda_i\}$ و بردارهای ویژه $\{x_i\}$ از ماتریس A و مقادیر ویژه $\{\mu_i\}$ و بردارهای ویژه $\{y_i\}$ از ماتریس SAS^{-1} با هم مرتبط هستند، به طوری که:

$$\mu_i = \lambda_i \quad , \quad y_i = Sx_i$$

$$Ax = \lambda x \quad , \quad S Ax = \lambda Sx$$

$$SA(S^{-1}S)x = \lambda Sx \quad , \quad (SAS^{-1})Sx = \lambda Sx$$

که نتیجه مطلوب بدست آمده است. $(SAS^{-1})y = \lambda y$, $y = Sx$ و λ برابر μ مقدار ویژه ماتریس SAS^{-1} می باشد.

۲-۸- روشهای بدست آوردن مقادیر ویژه:

روشهای این بخش از تبدیلات متشابه استفاده کرده؛ تبدیلی از ماتریس با همان مقادیر ویژه، اما با فرم ساده تر بدست می آورند. ماتریسهای تبدیلی که به کار می روند، ماتریسهای متعامد هستند، زیرا می توان نشان داد که چنین ماتریسهایی برای مینیم کردن خطاهای فرایند مناسب ترین هستند.

۲-۸-۱- روش لوریه - فادیو^(۱):

مجموع عناصر قطر یک ماتریس مربع، «اثر»^(۲) ماتریس خوانده می شود و برای ماتریس A اثر ماتریس A به صورت زیر می باشد:

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

ضرایب معادله درجه n امی که ریشه های آن مقادیر ویژه ماتریس A باشند، $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ از روابط زیر بدست می آیند.

$$A_1 = A \quad C_1 = tr(A)$$

$$A_2 = A(A_1 - C_1 I) \quad C_2 = \left(\frac{1}{2}\right)tr(A_2)$$

$$A_3 = A(A_2 - C_2 I) \quad C_3 = \left(\frac{1}{3}\right)tr(A_3)$$

⋮

$$A_n = A(A_{n-1} - C_{n-1} I) \quad C_n = \left(\frac{1}{n}\right)tr(A_n)$$

$$\lambda^n - C_1 \lambda^{n-1} - C_2 \lambda^{n-2} - \dots - C_{n-1} \lambda - C_n = 0$$

که A_n ماتریس قطری است و داریم:

از این رو معکوس ماتریس A را نیز می توان نتیجه گرفت:

$$A^{-1} = \left(\frac{1}{C_n}\right)(A_{n-1} - C_{n-1} I)$$

مقادیر ویژه ماتریس زیر را بدست آورید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = A_1$$

$$C_1 = tr A = 6$$

$$A_2 = A(A_1 - C_1 I) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 & 9 & 6 \\ 2 & -4 & 12 \\ 51 & -3 & -24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 0 & 0 \\ 0 & 66 & 0 \\ 0 & 0 & 66 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \frac{1}{3} tr A_2 = 66$$

^(۱)Leverrier - Faddeev

^(۲)Trace

معادله مشخصه‌ی ماتریس برابر است با:

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 - 49\lambda - 66 = 0$$

مقادیر ویژه یا ریشه های معادله فوق برابرند با:

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3, \lambda_3 = 11$$

و معکوس ماتریس برابر است با:

$$A^{-1} = \frac{1}{C_3} (A_2 - C_2 I) = \frac{1}{66} \begin{bmatrix} -21 & 9 & 6 \\ 2 & -4 & 12 \\ 51 & -3 & -24 \end{bmatrix}$$

۲-۸-۲- روش ژاکوبی (برای ماتریس متقارن):

با توجه به توضیحات قبلی ماتریس A_n به ماتریس A_{n+1} تبدیل می‌شود.

$$A_{n+1} = S_{n+1} A_n S_{n+1}^T$$

تا $B = A_{n+1}$ به سمت یک ماتریس قطری میل نماید.

توجه داریم که اگر A_n ماتریسی متقارن باشد، A_{n+1} نیز متقارن خواهد بود:

$$A_{n+1}^T = (S_{n+1} A_n S_{n+1}^T)^T = (S_{n+1}^T)^T A_n^T S_{n+1}^T = S_{n+1} A_n S_{n+1}^T = A_{n+1}$$

و اگر $Y^{(n)}$ بردار ویژه A_1 باشد، بردار ویژه ماتریس اولیه A عبارتست از:

$$S_1 \dots S_{n-1} S_n Y^{(n)}$$

در این روش کلیه عناصر غیرواقع بر قطر ماتریس‌های $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ را در هر مرحله صفر نماییم. در مرحله n ام فرض می‌کنیم عنصر سطر P ام و ستون q ام از ماتریس A_n بوده و بزرگترین عنصر غیر واقع بر قطر ماتریس از نظر قدر مطلق باشد. ماتریسهایی که در روش ژاکوبی به کار می‌روند، توسیعی از ماتریس‌های دوران در دستگاه دو بعدی می‌باشند. ماتریس دوران $n \times n$ جهت دوران در صفحه (p, q) بوسیله‌ی ماتریس واحد $n \times n$ با چهار تغییر زیر، نمایش داده می‌شود.

$$\begin{aligned} a_{pp} &= \cos \theta, & a_{pq} &= -\sin \theta \\ a_{qp} &= \sin \theta & a_{qq} &= \cos \theta \end{aligned}$$

برای مثال. ماتریس زیر با دوران در صفحه‌ی (2,3) متناظر است.

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s & 0 \\ 0 & s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} c &= \cos \theta \\ s &= \sin \theta \end{aligned}$$

با انتخاب مقدار θ به قسمی که عنصر نظیر a_{pq} در A_{n+1} صفر گردد داریم:

$$\cos^2 \theta a_{pq} - \sin^2 \theta a_{pq} + \sin \theta \cos \theta (a_{pp} - a_{pq}) = 0$$

برای محاسبه θ از رابطه فوق استفاده کرده و باتوجه به اینکه:

$$a_{pq} = -a_{qp}$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{pq}} \quad \text{خواهیم داشت که:}$$

این عمل برای دنباله A_n بصورت نامحدود می باشد، زیرا عناصری که در مرحله A_{n+1} صفر می شوند، در مرحله بعدی مجدداً غیر صفر خواهند شد. اما به هر حال این عمل همگراست و در مرحله ای که عناصر غیرواقع بر قطر از نظر قدر مطلق از عدد مثبت ε کوچکتر بوده و قابل صرف نظر کردن باشند، عمل خاتمه می پذیرد.

۲-۸-۳- روش گیونز^(۳) (برای ماتریس های متقارن):

روش گیونز نیز توسیعی از ماتریس های دوران در دستگاه دوبعدی می باشد. در روش گیونز، ابتدا با تعداد عملیات مشخصی، ماتریس به صورت سه قطری^(۴) در می آید. اگر ماتریس از قبل به صورت سه قطری باشد این روش نسبت به روش ژاکوبی مناسبتر است. در ماتریس تبدیل S ، عناصر a_{pq} را با اندیس (p, q) به شکل زیر انتخاب می کنیم یعنی وقتی دورانی در صفحه (p, q) انجام می شود عنصر $(p-1, q)$ ، به ازای $p = 1, 2, \dots, n-1$ و $q = p+2, p+3, \dots, n$ حذف می شود.

$$\begin{array}{cccc} (2,3), & & & \\ (2,4) & , \dots , & (2,n) & \\ & (3,4) & , \dots , & (3,n) \\ & & (4,5) & , \dots , & (4,n) \\ & & & \vdots & (n-1,n) \end{array}$$

پس، برای دوران فوق در صفحه $(2,3)$ مقدار θ باید انتخاب شود تا در روابط زیر صدق کند.

^(۳) Givens

^(۴) Three Diagonal

$$\cos \theta_{\alpha_3} - \sin \theta_{\alpha_2} = 0$$

$$\tan \theta = \frac{a_{13}}{a_{12}}$$

یا به طور کلی تر

$$\cos \theta_{a_{(p-1)q}} - \sin \theta_{a_{(p-1)p}} = 0$$

$$\tan \theta = \frac{a_{(p-1)q}}{a_{(p-1)p}}$$

در اینصورت با ادامه عملیات عناصر غیرواقع بر قطراصلی و دو قطر مجاور آن، صفر خواهند شد و عملیات در هر مرحله بر عناصر صفر شده قبل تاثیری نخواهد داشت.

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \times & \times & 0 & 0 \\ \times & \times & \times & 0 \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}$$

اکنون ببینیم چطور باید مقادیر ویژه ماتریس سه قطری متقارن را محاسبه کرد. برای بدست آوردن مقادیر ویژه سه قطری ماتریس B که در زیر نشان داده شده است

$$B = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & \\ & \beta_3 & \alpha_3 & \beta_4 & \\ & & \beta_4 & & \beta_{n-1} & \ddots & \beta_n \\ 0 & & & \beta_n & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$(B - \lambda I) = 0$$

معادله $\beta v = \lambda v$ را حل می کنیم و داریم:

$$B - \lambda I = \begin{bmatrix} \alpha_1 - \lambda & \beta_2 & & 0 \\ \beta_2 & \alpha_2 - \lambda & \beta_3 & \\ & \beta_3 & \alpha_3 - \lambda & \beta_4 \\ & \beta_4 & & \beta_{n-1} & \ddots & \beta_n \\ 0 & & & \beta_n & & \alpha_n - \lambda \end{bmatrix}$$

اگر فرض کنیم $f_1, f_2, \dots, f_n$ دترمینان های وابسته به قطر اصلی را نشان می دهند، با توجه به اینکه برای محاسبه $\det(B - \lambda I)$ کافی است آنرا نسبت به یکی از سطرها بسط دهیم، خواهیم داشت:

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = \alpha_1 - \lambda$$

$$f_2 = (\alpha_2 - \lambda)f_1 - \beta_2^2$$

$$f_3 = (\alpha_3 - \lambda)f_2 - \beta_3^2 f_1$$

$$f_4 = (\alpha_4 - \lambda)f_3 - \beta_4^2 f_2$$

با فرض $f_0 = 1$ ، $f_1 = \alpha_1 - \lambda$ در حالت کلی داریم:

$$f_n(\lambda) = (\alpha_n - \lambda)f_{n-1}(\lambda) - \beta_n^2 f_{n-2}(\lambda)$$

$$f_r(\lambda) = (\alpha_r - \lambda)f_{r-1}(\lambda) - \beta_r^2 f_{r-2}(\lambda)$$

$$r = 2, 3, 4, \dots, n$$

در حالت کلی داریم:

مشاهده می شود که $f_n(\lambda) = \det(B - \lambda I)$ و مقادیر ویژه ماتریس B ، جواب های

معادله $f_n(\lambda) = 0$ می باشند و می توانیم با بکار بردن یکی از روشها (مانند روش نصف کردن در ریاضیات) این معادله را حل کنیم.

مثال ۲-۱۳: مقادیر ویژه ماتریس سه قطری B را با استفاده از روش نصف کردن بدست آورید.

$$B = \begin{bmatrix} 1.2 & 2.2 & 0 \\ 2.2 & 1. & 2.3 \\ 0 & 2.3 & 1.2 \end{bmatrix}$$

$$f_0 = 1$$

$$f_1 = 1.2 - \lambda$$

$$f_2 = (1 - \lambda)f_1 - (2.2)^2 f_0$$

$$f_3 = (1.2 - \lambda)f_2 - (2.3)^2 f_1$$

البته در این مثال می توانیم معادله مشخصه را بدست آوریم:

$$f_3(\lambda) = -\lambda^3 + 3.4\lambda^2 + 6.29\lambda - 10.716$$

هر چند در این روش مقصود محاسبه معادله مشخصه نیست.

λ	-3	-2.5	-2	-2.25	-2.125	-2.063	-2.094	-2.078	-2.086	-2.082
f_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
f_1	4.2	3.7	3.2	3.45	3.325	3.263	3.294	3.278	3.286	3.282
f_2	11.92	8.11	4.76	6.373	5.551	5.155	5.352	5.253	5.3014	5.275
f_3	28.019	10.437	-1.946	3.736	0.838	-0.441	0.204	-0.1213	.036	-.05

با توجه به اینکه $f(-2.082) < 0$ و $f(-2.086) > 0$ ، طبق قضیه بولزانو $f_3(\lambda)$ دارای یک ریشه

در فاصله $(-2.086, -2.082)$ می باشد:

$$\lambda_1 = -2.084$$

لازم به یاد آوری است که دنباله $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ از خاصیت دنباله اشترم^(۵) تبعیت می کند.

بدین ترتیب که تعداد تساوی هایی که به ترتیب و به طور متوالی در علائم $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n$ بازاء مقدار انتخابی λ در هر ستون حاصل می شود، نشان دهنده تعداد مقادیر ویژه B می باشد که از λ بزرگترند.

در مثال فوق داریم:

$$\lambda = -3, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > -3$$

$$\lambda = -2.5, \quad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > -2.5$$

$$\lambda = -2, \quad \lambda_1, \lambda_2 > -2$$

پس نتیجه می شود:

$$-2.5 < \lambda_3 < -2$$

از این خاصیت نیز می توان برای تعیین فاصله ای که مقدار ویژه در آن قرار دارد، استفاده کرد.

فصل

کاربرد ماتریس‌ها در تئوری گراف

۳

۳-۱- مقدمه:

بکارگیری ماتریس ها در تئوری گراف امری غیر قابل انکار است. این موضوع از دو دیدگاه قابل بررسی می باشد. یک دیدگاه، جنبه تئوری مسئله است که شامل بکارگیری احکام و قضیه ها و مسائل مطرح شده مربوط به ماتریس ها در جبر خطی است که قابل استفاده در تئوری گراف می باشد و بالعکس. دیدگاه دوم آن است که از لحاظ عملی می توان از ماتریس ها برای انجام محاسبات در جهت کاربرد تئوری گراف در سایر رشته ها استفاده نمود. در این رابطه ماتریس ها ساده ترین ابزار برای انتقال اطلاعات گرافها به رایانه می باشند. بدین ترتیب رابطه تئوری گراف با علوم کامپیوتر نیز روشن می شود. شرح هر یک از این دو مبحث در کتابها و مقالات مربوط به نظریه گراف و کاربرد- های آن آمده است [۲۲، ۲۳، ۲۴، ۵۰]. در اینجا ابتدا، تعاریف اولیه و مفهوم گراف مطرح می شود و سپس چند ماتریس مهم و نحوه ی به کار گیری آنها در تئوری گراف همراه با چند قضیه مطرح می شود.

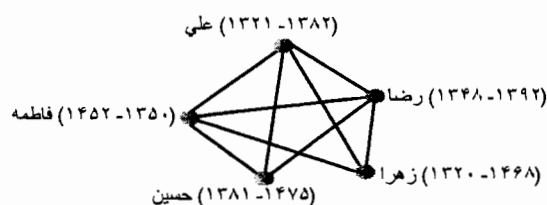
۳-۲- تعاریف اولیه:

۳-۲-۱- تعریف شهودی گراف:

گراف شکلی است که از تعداد متناهی نقطه و تعدادی پاره خط یا منحنی که این نقاط را به هم وصل می کند تشکیل شده باشد. به این نقاط راس و به پاره خطها یا منحنی ها یی که این نقاط را به هم وصل می کنند یال گفته می شود. هر راس نشانه یک شی است و پاره خطها یا منحنی ها نشانه یک ارتباط بین این دو شی است.

مثال ۳-۱: می دانیم علی در سالهای ۱۳۲۱ تا ۱۳۸۲، فاطمه در سالهای ۱۳۵۰ تا ۱۴۵۲، رضا در سالهای ۱۳۴۸ تا ۱۳۹۲، حسین در سالهای ۱۳۸۱ تا ۱۴۷۵ و زهرا در سالهای ۱۳۲۰ تا ۱۴۶۸ می زیسته اند. با یک گراف نشان داده شده است که کدامیک از این افراد با یکدیگر هم عصر بوده اند.

اگر گرافی را در نظر بگیریم که راس های آن نام افراد باشند و هر دو شخص را که با یکدیگر هم عصر بوده اند (یعنی بازه دوران زندگی آنها با هم اشتراک داشته باشد) را با یک خط به هم وصل کنیم.



شکل ۳-۱- نمایش مدل گرافی که راسهای آن نام افراد می باشد

واضح است که اگر جای رئوس عوض شود یا به جای پاره خط از منحنی استفاده کنیم گراف تغییری نمی کند.

۳-۲-۲- تعریف رسمی گراف [۲۵]:

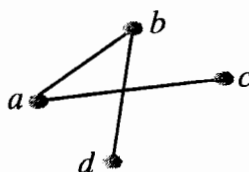
یک گراف $G = (V, E)$ زوج مرتبی چون (V, E) است که در آن V مجموعه ای متناهی و ناتهی و E زیر مجموعه ای از تمام زیر مجموعه های دو عضوی V است. مجموعه V را مجموعه رئوس گراف G و مجموعه E را مجموعه یال های گراف G می نامند.

تعریف: تعداد یالهای یک گراف را اندازه گراف می نامند و آنرا با $|E|$ یا q نمایش می دهند.

مثال ۳-۲: اگر در گراف G ، $V = \{a, b, c, d\}$ ، $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}$ باشد مطلوبست:

الف: ترسیم نمودار این گراف

ب: تعیین تعداد رئوس و یالهای گراف



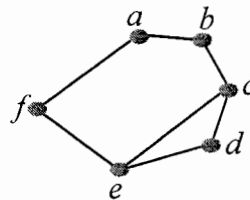
شکل ۳-۲- گرافی با چهار راس

در شکل (۳-۲) این گراف نشان داده شده است. این گراف ۴ نقطه (راس) و ۳ خط (یال) دارد.

۳-۲-۳- تعاریف اولیه گراف:

مجموعه رئوس گراف G را با $V(G)$ یا V نمایش می‌دهند. تعداد رئوس گراف G را مرتبه گراف می‌نامند و آنرا با $|V|$ یا P نمایش می‌دهند.

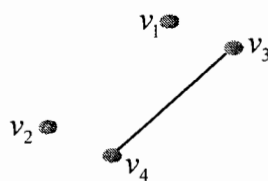
در شکل ۳-۳ زیر مجموعه V و مرتبه گراف تعیین شده است. در این گراف $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مرتبه گراف برابر است با $P = 6$ است، زیرا این گراف ۶ راس دارد.



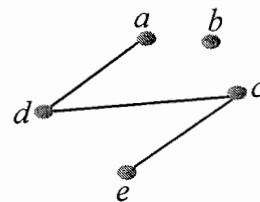
شکل ۳-۳- گرافی با شش راس و هفت یال

مجموعه یالهای گراف G را با $E(G)$ یا E نمایش می‌دهند. تعداد یالهای گراف را اندازه گراف می‌نامند و آنرا با $|E|$ یا q نمایش می‌دهند.

مثال ۳-۳: در گرافهای شکل (۳-۴-الف) و شکل (۳-۴-ب) مجموعه E و اندازه گراف مشخص شده است.



(ب)



(الف)

شکل ۳-۴- نمایش گرافهای الف و ب با تعداد رئوس و تعداد یال متفاوت

در گراف شکل ۳-۴- (الف) $E = \{ad, dc, ce\}$ پس اندازه این گراف برابر $q = 3$ است، زیرا این گراف ۴ یال دارد.

در گراف شکل ۳-۴- (ب) $E = \{V_3V_4\}$ پس اندازه این گراف برابر $q = 1$ است، زیرا مجموعه E یک یال دارد.

چنانچه دو راس در یک گراف با یک یال به هم وصل شده باشند، آنها را مجاور می‌نامند.

اگر a, b دو راس مجاور باشند، یالی که آنها را به هم وصل می کند را به یکی از شکل های زیر نمایش می دهند:

$$ab \text{ یا } ba \text{ یا } \{a, b\} \text{ یا } \{b, a\}$$

تعریف دقیق مجاورت دو راس a, b به صورت زیر است:

$$a, b \text{ مجاورند} \Leftrightarrow \{a, b\} \in E, \{a, b\} \subseteq V$$

یعنی اگر a و b دو راس متعلق به مجموعه رئوس گراف باشند و $\{a, b\}$ متعلق به مجموعه یال های گراف باشد آنگاه a, b را مجاور می نامند. واضح است که اگر b, a مجاور باشند، آنگاه a, b مجاورند. مثال ۳-۴: در گراف شکل (۳-۲) مجموعه رئوسی که با هم مجاور هستند و مجموعه رئوسی که با هم مجاور نیستند نشان داده شده است.

هر دو راس که بین آنها یالی وجود دارد مجاورند و در غیر این صورت مجاور نیستند، پس:

$$\{ab, bd, ac\} = \text{مجموعه رئوسی که با هم مجاورند}$$

$$\{ad, cd, bc\} = \text{مجموعه رئوسی که با هم مجاور نیستند.}$$

درجه راس a برابر است با تعداد یال هایی که از راس a می گذرند. درجه راس a را با $\deg(a)$ نمایش می دهند.

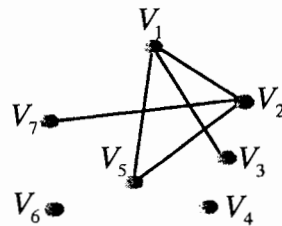
در بین درجات رئوس یک گراف، بیشترین درجه را ماکسیمم درجه می نامند و آنرا با Δ نمایش می دهند.

در بین درجات رئوس یک گراف، کمترین درجه را مینیمم درجه می نامند و آنرا با δ نمایش می دهند.

راسی که درجه آن عددی فرد باشد، راس فرد و راسی که درجه آن عدد زوج باشد راس زوج می نامند. راسی که هیچ یالی از آن نمی گذرد، راس ایزوله یا منزوی می نامند، یعنی درجه آن برابر صفر است.

مثال ۳-۵: در گراف شکل (۳-۵) رئوس V_1 و V_2 و V_3 و V_7 فرد و رئوس V_4 و V_5 و V_6 زوج هستند. رئوس V_4 و V_6 منزوی هستند.

ماکسیمم درجه رئوس برابر است با: $\Delta = 3$ (متعلق به رئوس V_1 و V_2) و مینیمم درجه برابر است با $\delta = 0$ (متعلق به رئوس V_4 و V_6).



شکل ۳-۵- گرافی با شش راس و پنج یال

۳-۳- ماتریس ها و نحوه بکارگیری آنها در تئوری گراف [۲۳]:

گفته شد که ماتریس ها، ساده ترین ابزار برای انتقال اطلاعات گرافها، به رایانه می باشند. همچنین برای انجام محاسبات در مسائل کاربردی تئوری گراف که بوسیله رایانه انجام گیرد، می توان از ماتریس ها استفاده نمود. بعضی از کاربردهای کلی ماتریس ها عبارتند از:

۱. حل الگوریتمی مسائل کلاسیک مانند، مسئله کوتاهترین مسیر، مسئله ارتباط دهی، تور اویلری، درختهای مولد مینیمال و غیره.

۲. بررسی و تشخیص نوع گراف، مانند همبندبودن، ساده بودن، اویلری بودن و غیره.

۳. مقایسه گرافها با یکدیگر از لحاظ یکرختی. (دو گراف یکرخت دارای ماتریسهای مجاورت یکسانی هستند).

اکنون اقدام به تعریف انواع ماتریسهای مورد استفاده در جبر خطی و تئوری گراف می پردازیم. ساده ترین و مهمترین ماتریس توصیف کننده گراف، ماتریس مجاورت است که به صورت زیر تعریف می شود.

۳-۳-۱- ماتریس مجاورت^(۱)، یک گراف:

فرض شود $G = (V, E)$ یک گراف ساده، بدون جهت و بدون وزن باشد. به طوری که مجموعه رئوس گراف $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ باشد. ماتریس مجاورت یک ماتریس مربعی $p \times p$ بصورت $A = [a_{ij}]$ با مقادیر تعیین شده در رابطه (۳-۱) است.

^(۱) adjacency matrix

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i v_j \in E \\ 0 & v_i v_j \notin E \end{cases} \quad (1-3)$$

ماتریس مجاورت دارای خواص زیر است:

الف - قطر اصلی آن صفر است.

ب - جمع درایه های هر سطر (هر ستون) برابر درجه راس نظیر آن سطر است.

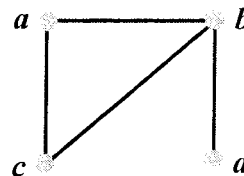
ج-ماتریس مجاورت متقارن است .

د- هر ماتریس $(0,1)$ و متقارن که درایه های قطر اصلی آن صفر باشد ماتریس مجاورت یک گراف است.

مثال ۳-۶: گراف G با چهار راس و چهار یال به همراه ماتریس مجاورت آن در شکل (۲-۶)

ترسیم شده است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



شکل ۳-۶- گراف G و ماتریس مجاورت مربوط به آن

۳-۳-۲- کاربردهای ماتریس مجاورت:

ساده ترین شکل خواندن اطلاعات مربوط به یک گراف از طریق ماتریس مجاورت قابل انجام است. علاوه بر کاربردهای محاسباتی که در فوق به آن اشاره شد، کاربردهای استدلالی نیز دارد که دو نمونه از آن در قالب قضیه در ذیل آورده می شود.

قضیه ۱: فرض شود که A ماتریس مجاورت گراف $G = (V, E)$ با n راس باشد. عنصر a_{ij} از ماتریس A^k ، تعداد گشتهای به طول k از راس v_i به راس v_j برای $k = 1, 2, 3, \dots$ را نشان می دهد. **برهان:** قضیه با استفاده از روش استقراء روی k قابل اثبات است. برای $k = 1$ خود A ماتریس مجاورت است و گشتهای به طول واحد یعنی یک یال هستند. در این حالت برقراری حکم واضح است.

فرض شود که حکم برای A^{k-1} برقرار باشد. کافی است نشان دهیم که درایه های ماتریس A^k تعداد گشتهای به طول k را مشخص می کند. با استفاده از خاصیت ضرب ماتریس ها به صورت $A^k = A^{k-1}A$ و با برقراری رابطه زیر، حکم ثابت می شود.

$$a_{ij}^k = \sum_{m=1}^n a_{im}^{k-1} a_{mj} \quad (2-3)$$

قضیه ۲: اگر A ماتریس مجاورت گراف $G=(V,E)$ با n راس باشد. در این صورت گراف G همبند است اگر و تنها اگر هر ماتریس C به صورت زیر دارای هیچ عنصر صفر خارج از قطر اصلی نباشد.

$$C = A + A^2 + A^3 + \dots + A^{n-1} \quad (3-3)$$

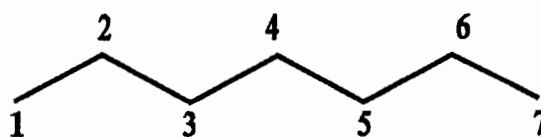
برهان: اگر A همبند باشد، از هر راس به راس دیگر مسیری وجود دارد. در این صورت عنصر a_{ij} حداقل در یکی از $A, A^2, A^3, \dots, A^{n-1}$ دارای مقدار ماتریس از غیر صفر می باشد. در نتیجه عنصر c_{ij} برای $i \neq j$ در ماتریس C مخالف صفر خواهد بود.

۳-۳-۳- ماتریس فاصله^(۱)، یک گراف:

فاصله $d(u,v)$ بین رئوس u,v در گراف G ، کوتاه ترین مسیری است که رئوس u,v را بهم متصل می کند. بر مبنای این مفهوم و مشابه ماتریس مجاورت، یک ماتریس مربعی بر حسب تعداد راسهای گراف به صورت $D(G) = [d_{ij}]$ است بطوریکه:

$$d_{ij} = \begin{cases} d(v_i, v_j) & \text{مسیر وجود دارد} \\ 0 & \text{مسیر وجود ندارد} \end{cases} \quad (4-3)$$

مثال ۳-۷- گراف G با هفت راس و شش یال در شکل شماره ۳-۷ ترسیم شده است.



شکل ۳-۷- گراف G

^(۱) distance matrix

$$D(G) = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \textcircled{3} & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & \textcircled{3} & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \textcircled{3} & 4 \\ \textcircled{3} & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & \textcircled{3} \\ 4 & \textcircled{3} & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & \textcircled{3} & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 4 & \textcircled{3} & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

۳-۳-۴- کاربردهای ماتریس فاصله:

ماتریس فاصله $D(G)$ یک ماتریس متقارن است که شامل اطلاعاتی در مورد فاصله ها در گراف G است. می توان پارامترهای کمی را در گراف تعریف نمود که در توصیف گراف بسیار موثرند. این پارامترها توسط ماتریس فاصله قابل محاسبه می باشند. بعضی از این پارامترها عبارتند از مرکز گراف، شعاع، قطر و خروج از مرکز گراف می باشد. تعریف این مفاهیم با استفاده از مفهوم فاصله به شرح ذیل می باشد.

مرکز گراف G راسی مانند u است به طوری که $\max_{v \in V} d(u, v)$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در حقیقت ماکزیمم فاصله هر راس را از سایر رئوس اندازه گرفته، و از میان مجموعه ماکزیممها، مینیمم انتخاب می شود.

$$e(v) = \max \{d(v \cdot u) \mid u \in V(G)\} \quad (5-3)$$

شعاع گراف همبند G ، را به صورت رابطه (۳-۶) تعریف می کنیم.

$$radG = \min \{e(v) \mid v \in V(G)\} \quad (6-3)$$

قطر گراف همبند G ، را با $diamG$ ، نشان داده و به صورت رابطه (۲-۷) تعریف می شود.

$$\max \{e(v) \mid v \in V(G)\} \quad (7-3)$$

$e(v)$ برای رأس v گراف (یا گراف وزن دار) G فاصله رأس v تا دورترین رأس از v است که به

صورت رابطه (۳-۵) می باشد.

۳-۳-۵- ماتریس درجه^(۱) یک گراف:

فرض شود که $A = [a_{ij}]$ ماتریس مجاورت گراف $G = (V, E)$ باشد. اگر به جای هر یک از درایه های قطر اصلی در ماتریس A ، مقدار درجه راس متناظر را قرار دهیم، ماتریس حاصل را ماتریس درجه گراف G نامیم. ماتریس درجه گراف شکل (۳-۶)، به صورت ماتریس زیر می باشد.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

از ماتریس درجه می توان برای تعیین درجه رئوس گراف، تعیین کوچکترین و بزرگترین درجه راس گراف و محاسبه مجموع و میانگین درج های گراف استفاده کرد.

۳-۳-۶- ماتریس لاپلاسیان^(۱) یک گراف:

فرض شود که $A = [a_{ij}]$ ماتریس مجاورت و D ماتریس درجه گراف $G = (V, E)$ باشد. ماتریس حاصل از رابطه $L = D - A$ را ماتریس لاپلاسیان گراف $G = (V, E)$ نامیم. بنابراین ماتریس لاپلاسیان یک ماتریس مربعی $p \times p$ بصورت $L = [a_{ij}]$ است که با رابطه (۳-۸) تعریف شده است.

$$a_{ij} = \begin{cases} d_{ij} & i = j \\ -1 & v_i v_j \in E \\ 0 & v_i v_j \notin E \end{cases} \quad (۳-۸)$$

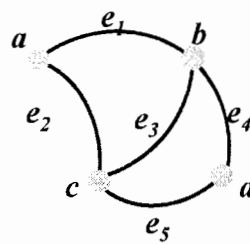
ماتریس لاپلاسیان گراف شکل (۳-۶)، به صورت ماتریس L می باشد.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یک خاصیت جالب در ماتریس لاپلاسیان این است که مجموع درایه های هر سطر و هر ستون آن صفر است.

^(۱) Degree matrix

^(۱) Laplacian matrix



$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

شکل ۳-۸- گراف G و ماتریس تلاقی مربوط به آن

ماتریس وقوع همانند ماتریس مجاورت می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

۳-۳-۸- ماتریس مسیر^(۲) یک گراف:

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با m مسیر $p_1, p_2, p_3, \dots, p_m$ و n یال $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ باشد. برای هر دو راس u و v از این گراف، ماتریس مسیر ماتریسی به صورت $P_{uv} = [P_{ij}]$ می باشد.

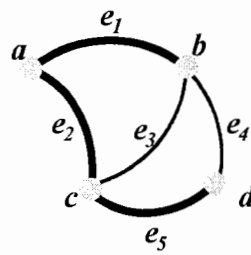
به طوریکه

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j \in p_i \\ 0 & e_j \notin p_i \end{cases} \quad (۳-۱۰)$$

یکی از کاربردهای ماتریس مسیر تعیین مسیرهای مختلف بین هر دو راس گراف است.

ماتریس مسیر گراف شکل (۳-۹)، به صورت ماتریس زیر می باشد و به عنوان مثال، مسیر $P_1 = be_1ae_2ce_3d$ که از راس b شروع می شود و با عبور از راسهای a, c و یالهای e_1, e_2 و e_3 به راس d ختم می شود با خطوط مشکی پررنگ نشان داده شده است.

^(۲) Path matrix



$$P = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

شکل ۳-۹- گراف G و ماتریس مسیر مربوط به آن

گراف همبند، گرافی است که بین هر دو راس دلخواه آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد. رابطه وجود مسیر بین دو راس یک گراف، یک رابطه هم‌ارزی است یعنی:

- هر راس با مسیری (به طول صفر) با خودش رابطه دارد. (خاصیت بازتابی)
- اگر بین a, b مسیری وجود داشته باشد، آنگاه بین a, b نیز مسیری وجود دارد. (خاصیت تقارنی)
- اگر از a به b و از b به c مسیری وجود داشته باشد آنگاه از a به c نیز مسیری وجود دارد. (خاصیت تراگذری یا تعدی)

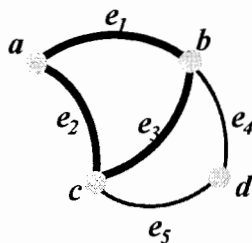
رابطه وجود مسیر، راس‌های هر گراف را به چند بخش افراز می‌کند. در هر یک از این بخشها، راسها به هم متصلند (همبند هستند) ولی راسهای یک بخش به راسهای بخش دیگر متصل نیستند. پس می‌توان گفت، گراف ناهمبند = گرافی است که شامل چند بخش باشد.

۳-۳-۹- ماتریس مدار^(۱) یک گراف:

فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با m مدار $c_1, c_2, c_3, \dots, c_m$ و n یال $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ باشد. برای هر دو راس u و v از این گراف، ماتریس مدار، ماتریسی به صورت $C_{uv} = [c_{ij}]$ می‌باشد به طوریکه

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j \in p_i \\ 0 & e_j \notin p_i \end{cases} \quad (۱۱-۳)$$

ماتریس مدار گراف شکل (۳-۱۰)، به صورت ماتریس زیرمی‌باشد. مدار $c_1 = be_1ae_2ce_3b$ که از راس b شروع می‌شود و با عبور از راسهای a, c و یالهای e_1, e_2, e_3 به راس b ختم می‌شود و یک مدار بسته را تشکیل می‌دهد با خطوط مشکی پررنگ در شکل نشان داده شده است.



$$C = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} c_1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} c_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} c_3 \end{bmatrix}$$

شکل ۳-۱۰- گراف G و ماتریس مدار مربوط به آن

یکی از کاربردهای ماتریس مدار تعیین مدارهای مختلف بین هر دو راس گراف است.

^(۱) Circute Matrix

۳-۳-۱۰- ماتریس دور^(۱) یک گراف:

ماتریس دور یک گراف همانند ماتریس مدار قابل تعریف است با این تفاوت که در این ماتریس راسهای تشکیل دهنده دور بجای یالها شمارش می شوند. از کاربردهای ماتریس دور تعیین دورهای مختلف گراف است.

قضیه ۳: فرض شود که M ماتریس وقوع و C ماتریس مدار گراف $G = (V, E)$ باشند. اگر ستونهای این دو ماتریس در یک ترتیب قرار داشته باشند آنگاه داریم:

$$MC^T = CM^T = 0 \pmod{2} \quad (۱۲-۳)$$

برهان: فرض می شود که $G = (V, E)$ گرافی با n راس و m یال و r مدار باشد. اگر ماتریس وقوع $M = [m_{ij}]$ یک ماتریس $n \times m$ و ماتریس مدار $C = [c_{ij}]$ یک ماتریس $r \times m$ باشند آنگاه ماتریس $H = MC^T$ یک ماتریس $n \times r$ به صورت $H = [h_{ij}]$ خواهد بود به طوری که:

$$h_{ij} = \begin{cases} 1+1=0 & \pmod{2} \\ 0 \end{cases} \quad (۱۳-۳)$$

چون یالها در یک ترتیب در هر دو ماتریس قرار دارند، عناصر یک در مکانهای متناظر آنها در دو ماتریس وقتی اتفاق می افتند که یالی منتخب بر آمین راس همچنان روی آمین مدار باشد. در این حالت همواره دو عدد یک ایجاد می گردد. با همین استدلال می توان نشان داد که $H = CM^T$ نیز برابر صفر است.

۳-۳-۱۱- ماتریس مجموعه های برشی^(۲)، یک گراف:

تعریف: فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با m مجموعه برشی $s_1, s_2, s_3, \dots, s_m$ و n یال

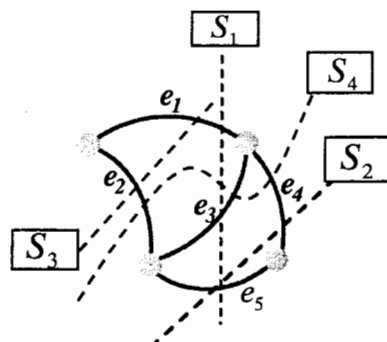
$e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ باشد. ماتریس S ماتریسی $m \times n$ بصورت $S = [s_{ij}]$ است بطوریکه

$$s_{ij} = \begin{cases} 1 & e_j \in s_i \\ 0 & e_j \notin s_i \end{cases}$$

^(۱) Cycle matrix

^(۲) Cutset matrix

گراف و ماتریس برش آن در شکل (۳-۱۱)، نمایش داده شده است.



$$M = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \begin{matrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

شکل ۳-۱۱- گراف G و ماتریس برش مربوط به آن

۳-۴- مفاهیم تکمیلی

۳-۴-۱- درخت

تعریف: درخت گراف همبندی است که دور ندارد.

۳-۴-۲- درخت^(۱)، درخت پوشا^(۲)، درخت با کوتاهترین مسیر [۲۴]^(۳)

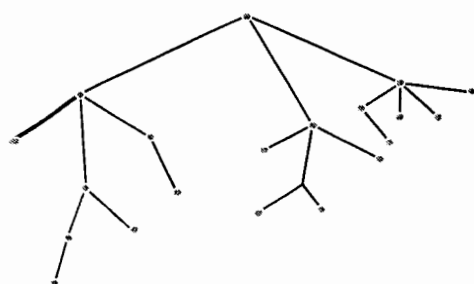
درخت گراف همبندی است که دور ندارد. مجموعه‌ای از درختها تشکیل یک جنگل^(۴) می‌دهند.

^(۱) Tree

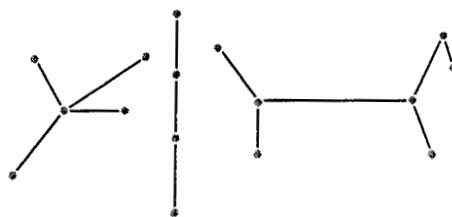
^(۲) Spaning Tree

^(۳) Shortest rout tree

^(۴) Forest

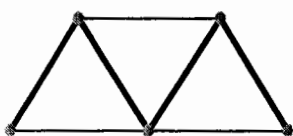


شکل ۳-۱۳- درخت

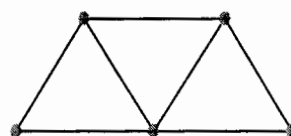


شکل ۳-۱۲- جنگل

درختی که شامل تمامی گره های گراف G باشد، درخت پوشا نامیده می شود، که به منظور سادگی به آن نیز "درخت" می گوئیم. در شکل ۳-۱۴- (الف) یک نمونه از مدل گراف نشان داده شده و در شکل ۳-۱۴- (ب) درخت پوشای آن با خط مشکی پررنگ نشان داده شده است.



(ب)



(الف)

شکل ۳-۱۴- نمایش یک گراف در شکل (الف) و درخت پوشا با خطوط مشکی پررنگ در شکل (ب)

درخت مرتبه P را با T_P نمایش می دهند. رئوس درجه یک هر درخت را برگ می نامند

۳-۴-۳- درخت با کوتاهترین مسیر (SRT)

درختی است که از یک گره مشخص مثل n_0 از گراف S شروع شده و فاصله بین هر نقطه n_i از این درخت T و n_0 کمترین مقدار باشد.

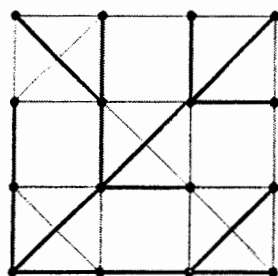
یک الگوریتم ساده برای توسعه درخت کوتاهترین مسیر

۱- ریشه انتخاب شده را با (۰) و گره های همسایه با آن را با (۱) نشان دهید .

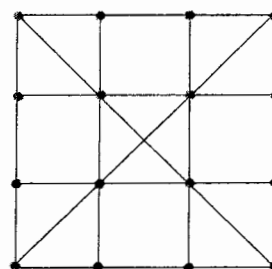
۲- اعضای همبند با (۰) را ثبت نمایید .

۳- این روند را با تکرار مرحله قبل و نامگذاری گره های شماره گذاری شده در مرحله قبل که اعضای متصل به آنها، همبند گره های (۱) می باشند پیش ببرید. و مجدداً این اعضاء را هم ثبت نمایید. این

۳- این روند را با تکرار مرحله قبل و نامگذاری گره های شماره گذاری شده در مرحله قبل که اعضای متصل به آنها، همبند گره های (۱) می باشند پیش ببرید. و مجدداً این اعضا را هم ثبت نمایید. این روند هنگامی که تمام گره های G نامگذاری شده و تمام اعضای درخت T ثبت گردند، تکمیل می شود. در شکل (۳-۱۵-الف) گراف G به عنوان نمونه ای از مدل گراف و درخت کوتاهترین مسیر از گراف G با خطوط مشکی پررنگ در شکل (۳-۱۵-ب) نشان داده شده است.



(ب)



(الف)

شکل ۳-۱۵-الف) گراف G (ب) درخت با کوتاهترین مسیر از گراف G

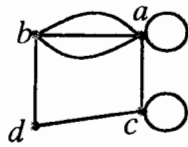
براحتی ثابت می گردد که:

$$M(T) = N(T) - 1 \quad (۳-۶)$$

$M(T)$ و $N(T)$ به ترتیب تعداد اعضا و گره های درخت T می باشد.

۳-۴-۴- گراف چندگانه [۱۵]:

اگر بین حداقل دو راس از گرافی بیش از یک یال برقرار باشد، آن گراف دارای یال چندگانه است. اگر یالی از گراف به صورت یک حلقه، متصل به یک راس باشد، به آن طوقه گویند. اگر بین حداقل دو راس از گرافی بیش از یک یال برقرار باشد یا گراف دارای طوقه باشد، این گراف چند گانه است.



(ج)



(ب)



(الف)

شکل ۳-۱۶- الف) گراف مرتبه ۱ چند گانه دارای طوقه، ب) گراف مرتبه ۲ چندگانه (دارای یال چندگانه)، ج) گراف مرتبه چندگانه (دارای یال چندگانه طوقه)

در گراف شکل ۳-۱۵- ج) $\deg(a) = 6$ (۴ یال ساده + یک طوقه $= 4 + 2 = 6$) در محاسبه درجه راسهایی که شامل طوقه هستند، هر طوقه دو درجه محسوب می شود.

۳-۴-۵- گراف (سویه دار) جهت دار^(۱) [۱۵]:

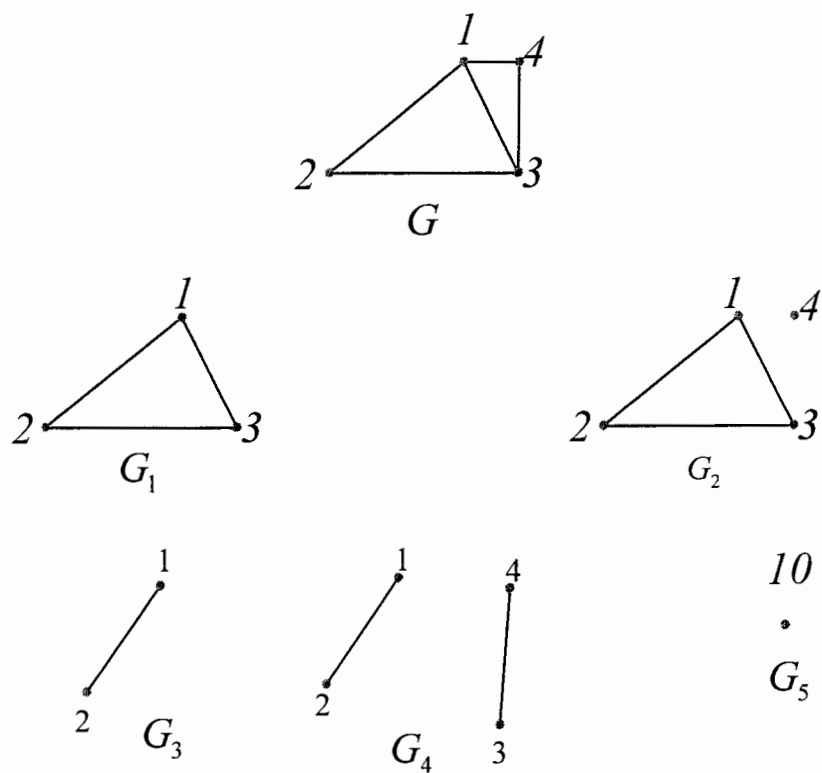
تعریف: گراف سویه دار، گرافی است که در آن یال ها دارای جهت هستند. اگر جهت یال از راس u به v باشد، یعنی u با v مجاور است ولی راس v با u مجاور نیست. نمایش یک یال یک سویه در شکل (۳-۱۷) نشان داده شده است.



شکل ۳-۱۷- نمایش یال یک سویه

یال دو سویه را می توان با یال ساده نمایش داد. نمایش یال دو سویه در شکل (۳-۱۸) نشان داده شده است.

^(۱) oriented graph



شکل ۳-۲۲- گراف های G و زیرگراف های آن

فصل

کاربرد ماتریس لاپلاسین و مدل
ریاضی گرافها در تقارن به فرم
دو و سه

۴-۱- مقدمه:

استفاده از خاصیت تقارن نه تنها در بسیاری از مباحث ریاضی مانند جبر، آنالیز، هندسه و غیره استفاده شده است بلکه در سایر شاخه های علوم نیز از این خاصیت جهت تجزیه و تحلیل مسائل مربوطه سود برده اند [۲۹، ۴۹]. طرح و بررسی تقارن در تئوری گراف، ارتباط نزدیکی با موضوع ماتریسها در جبر خطی دارد که مباحثی از آن در مرجع [۳۰، ۳۱] آمده است. ما در این بحث ابتدا مدل ساختاری را بوسیله ی گراف نمایش می دهیم سپس برای مدل گراف متقارن ماتریس های فرم یک و دو و سه آن را تشکیل داده و با استفاده از تجزیه ماتریس لاپلاسیان گراف زیرماتریسها، مقادیر ویژه ی ماتریس اصلی را محاسبه می نماییم.

۴-۲- ماتریس های کانونیکال^(۱) و ماتریس های فرم یک و دو:

منظور از ماتریس کانونیکال ماتریس به فرم یک و دو و سه در بحث حاضر می باشد که از نظر نوع فرم ماتریسی حائز اهمیت می باشند [۳۲، ۳۳، ۳۴].

۴-۲-۱- ماتریس فرم یک:

ماتریس فرم یک، یک ماتریس با ابعاد $R \times R$ می باشد، فرم کانونیکال این ماتریس به صورت زیر نوشته می شود

$$G = \left[\begin{array}{c|c} [H]_{r \times r} & [O]_{r \times r} \\ \hline [O]_{r \times r} & [H]_{r \times r} \end{array} \right]_{R \times R} \quad (۱-۴)$$

^(۱) canonical form

که در آن $r = \frac{R}{2}$ می باشد، برای روشن تر شدن رابطه ماتریسی ماتریس فرم دو تشریح می شود.

۴-۲-۲- ماتریس فرم دو:

ماتریس فرم دو، یک ماتریس با ابعاد $R \times R$ می باشد، فرم کانونیکال این ماتریس به صورت زیر نوشته می شود :

$$G = \begin{bmatrix} [H]_{r \times r} & [H']_{r \times r} \\ [H']_{r \times r} & [H]_{r \times r} \end{bmatrix}_{R \times R} \quad (۲-۴)$$

که در آن $r = \frac{R}{2}$ می باشد، یعنی در تقارن به فرم یک و دو R زوج است. همانطور که ملاحظه می شود، در فرم یک $[H'] = 0$ می باشد، و در واقع فرم یک همان فرم دو با $[H'] = 0$ می باشد. بنابراین روابط و قضایای حاکم در فرم دو، در فرم یک نیز برقرار است.

در ماتریس فرم دو روابط زیر برقرار است :

$$[G_1] = [H] + [H'] \quad (۳-۴)$$

$$[G_2] = [H] - [H'] \quad (۴-۴)$$

$$|G| = |G_1| \times |G_2| \quad \rightarrow \quad \lambda_G = \{\lambda_{G_1}\} \cup \{\lambda_{G_2}\} \quad (۵-۴)$$

با توجه به تبیین روابط در فرم دو و به نوعی در فرم یک به اثبات روابط مذکور می پردازیم. برای این منظور دترمینان G را می نویسیم.

$$DET(G) = \begin{vmatrix} [H] & [H'] \\ [H'] & [H] \end{vmatrix}$$

سطردوم را به سطر اول اضافه می نماییم.

$$\begin{vmatrix} [H + H'] & [H + H'] \\ [H'] & [H] \end{vmatrix}$$

ستون اول را از ستون دوم کم می نماییم.

$$= \begin{vmatrix} [H + H'] & 0 \\ [H'] & [H - H'] \end{vmatrix} \Rightarrow DET(G) = |[H + H'] \times [H - H']|$$

از طرفی می دانیم که برای دو ماتریس دلخواه مانند A و B می توان نوشت:

$$|AB| = |A||B|$$

بنابر این برای $|G|$ می توان نوشت:

$$|G| = |G_1| \times |G_2|$$

با جایگذاری روابط مربوطه در دترمینان ماتریس G خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} DET(G) &= DET(G_1) \times DET(G_2) = DET(G_1 \times G_2) \\ \Rightarrow DET(G) &= |[H + H'] \times [H - H']| = |[H + H']| \times |[H - H']| \\ G_1 &= [H + H'] \quad , \quad G_2 = [H - H'] \end{aligned} \quad (6-4)$$

۴-۲-۱- مقادیر ویژه در ماتریس به فرم دو:

با استفاده از رابطه ی (۷-۲) در فصل دوم نشان داده می شود که مقادیر ویژه ی ماتریس G اجتماع مقادیر ویژه ی حاصل از زیرماتریس های آن می باشد. در سومین دترمینان ابتدا سطر دوم به سطر اول اضافه می شود و در دترمینان بعدی ستون اول از ستون دوم کم می شود.

$$\begin{aligned} DET(G - \lambda I) &= |G_\lambda| = \begin{vmatrix} [H - \lambda I] & [H'] \\ [H'] & [H - \lambda I] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [H + H' - \lambda I] & [H + H' - \lambda I] \\ [H'] & [H - \lambda I] \end{vmatrix} \Rightarrow \\ &= \begin{vmatrix} [H + H' - \lambda I] & 0 \\ [H'] & [H - H' - \lambda I] \end{vmatrix} \\ \Rightarrow DET(G_\lambda) &= \underbrace{[H + H' - \lambda I]}_{polynolG_{1\lambda}} \times \underbrace{[H - H' - \lambda I]}_{polynolG_{2\lambda}} = 0 \end{aligned}$$

$$polynolG_\lambda = polynolG_{2\lambda} \times polynolG_{1\lambda}$$

در نتیجه می توان به این حقیقت رسید که چند جمله ای های $G_{1\lambda}$ و $G_{2\lambda}$ ، چند جمله ای G_λ را تجزیه نموده و چند جمله ای $G_{1\lambda}$ و $G_{2\lambda}$ در واقع با حاصلضرب دو چند جمله ای ویژه G_1 و G_2 برابر است. اجتماع ریشه های $G_{1\lambda}$ و $G_{2\lambda}$ تمامی ریشه های G را منتج می شود یعنی داریم:

$$root_{G_{1\lambda}} \cup root_{G_{2\lambda}} = root_{G_\lambda}$$

که البته در اینجا منظور از ریشه ها همان مقادیر ویژه می باشد.

بنابراین ثابت شد که موارد فوق برای ماتریس های لاپلاسیان مرتبه $R \times R$ ($R = 2k$) برقرار است. در حالت کلی ماتریس های فرم یک و دو در فرم کانونیکال ماتریس G قرار دارند. بدین لحاظ یک ماتریس مرکب G که شامل زیرماتریس های H و H' می باشد را در نظر بگیرید. H و H' زیر ماتریس های با ابعاد $q \times q$ هستند. ماتریس G یک بلوک ماتریسی مستطیلی با ابعاد $r \times r$ که دارای H روی قطر اصلی اش است و H' با ضرایب متفاوت در تمام درایه های ماتریس G می باشد که در رابطه ی (۷-۴) نشان داده شده است [۳۵].

$$[G] = \begin{bmatrix} H + a_{11}H' & a_{12}H' & \dots & a_{1r}H' \\ a_{21}H' & H + a_{22}H' & \dots & a_{2r}H' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1}H' & a_{r2}H' & \dots & H + a_{rr}H' \end{bmatrix}_{(r \times q)(r \times q)} \quad (7-4)$$

جایی که a_{ij} ($1 \leq i, j \leq r$) می تواند اعداد حقیقی یا مختلط باشد. ضرایب زیرماتریس های H' یک ماتریس با ابعاد $r \times r$ تشکیل می دهند که با رابطه ی (۸-۴) نشان داده شده است.

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}_{r \times r} \quad (8-4)$$

مقادیر ویژه های $[A]$ را به صورت λ_i ($1 \leq i \leq r$) در نظر بگیرید. ثابت می شود که

$$H = G_i - \lambda_i H'$$

مقادیر ویژه G و G_i با λ_G و λ_{G_i} نشان داده می شود. G_i ها در واقع زیرماتریس کاهش یافته $G^{(1)}$ می باشند.

$$\lambda(G) = \lambda(G_1) \cup \lambda(G_2) \cup \lambda(G_3) \cup \dots \lambda(G_i) = \bigcup_{i=1}^n \lambda(G_i) \quad (9-4)$$

که λ_{G_1} و λ_{G_i} از مساوی صفر قرار دادن در ترمینان G_1 و G_i بدست می آید.

$$|G| = |G_1| \times |G_2| \times \dots \times |G_i| \quad (10-4)$$

G به صورت یک بلوک ماتریسی 2×2 در نظر بگیرید:

⁽¹⁾ reduced submatrices

$$[G] = \begin{bmatrix} H & H' \\ H' & H \end{bmatrix}$$

متناظر با رابطه ی (۷-۴) ماتریس، $[A]$ به صورت زیر می باشد:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

مطابق با رابطه ی (۷-۲) ریشه های ماتریس $[A]$ به صورت زیر بدست می آید.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\lambda)^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow G_1 = H + \lambda_1 H'$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow G_2 = H - \lambda_2 H'$$

G_1 و G_2 زیرماتریس های کاهش یافته ی G می باشند. در رابطه با تبدیل ماتریس لاپلاسیان به فرم دو برنامه ای هم نوشته شده که در پیوست ذکر شده است.

مثال ۴-۱- ماتریس G با ابعاد 6×6 می باشد. دترمینان و مقادیر ویژه ماتریس G و زیرماتریسی های کاهش یافته ی G_1 و G_2 آنرا تعیین می کنیم.

$$[G] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right] \rightarrow \begin{matrix} [H] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\ [H'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

زیرماتریس های کاهش یافته G_1 و G_2 به صورت زیر قابل محاسبه هستند.

$$[G_1] = [H] + [H'] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad [G_2] = [H] - [H'] = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|G_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 4 = 4 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 = \lambda^2 - 4$$

$$|G_1 - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_{G_1} = \{ 0, 4 \} \quad , \quad |G_1| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$|G_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4$$

$$|G_2 - \lambda I| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda_{G_2} = \{0, 4\}, |G_2| = 0$$

$$|G - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_G = \{4, 4, 0, 0\}, |G| = 0$$

$$\lambda_G = \{\lambda_{G_1}\} \cup \{\lambda_{G_2}\} = \{0, 4, 0, 4\}$$

$$|G| = |G_1| \times |G_2| = 0 \times 0 = 0$$

مثال ۴-۲- ماتریس دیگری را با ابعاد 6×6 در نظر بگیرید. این ماتریس دارای تقارن به فرم دو می باشد. مقادیر ویژه و دترمینان ماتریسها به همان طریقی بدست می آید که از مثال (۴-۱) بدست آمده است.

$$[G] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} [H] &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \\ [H'] &= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$[G_1] = [H] + [H'] = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad [G_2] = [H] - [H'] = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{G_1} = \{0, 4.7321, 1.2679\}, \lambda_{G_2} = \{5.4142, 4, 2.5858\}$$

$$\lambda_G = \{\lambda_{G_1}\} \cup \{\lambda_{G_2}\} = \{0, 5.4142, 4.7321, 4, 2.5858, 1.2679\}$$

$$|G| = |G_1| \times |G_2| = 0 \times 56 = 0$$

۳-۴- ماتریس های کانونیکال^(۱) و ماتریس های فرم سه:

این فرم حاوی یک زیر ماتریس با فرم دو می باشد، به انضمام چند سطر و ستون که به ماتریس فرم دو اضافه شده است. حالت کلی این ماتریس را مشاهده می کنید.

(۱۱-۴)

بلوک اول

تکرار در ستون

درایه های ستونهای اضافه شده

$$[G] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \text{بلوک اول} & [H] & [H'] & L_{11} & \dots & L_{1q} \\ & & & L_{21} & \dots & L_{2q} \\ & & & L_{r1} & \dots & L_{rq} \\ \hline & [H'] & [H] & L_{11} & \dots & L_{1q} \\ & & & L_{21} & \dots & L_{2q} \\ & & & \vdots & & \vdots \\ & & & L_{r1} & & L_{rq} \\ \hline \text{بلوک دوم} & C(2r+1,1) & \dots & C(2r+1,2q) & C(2r+1,2r+1) & C(2r+1,2r+q) \\ & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ & Z(2r+q,1) & \dots & Z(2r+k,2q) & Z(2r+q,2r+1) & \dots & Z(2r+q,2r+q) \end{array} \right]$$

جایی که G یک ماتریس $(2r+q) \times (2r+q)$ ، با یک زیرماتریس $2q \times 2q$ به فرم دو، و به تعداد q سطر و ستون به ماتریس G اضافه شده است. درایه های ستونهای اضافه شده در بلوک اول و دوم برای هر ستون تکرار می شوند و تمام درایه های $[G]$ اعداد واقعی هستند. زیرماتریس های کاهش یافته ی ماتریس $[G]$ به صورت زیر می باشد [۳۶]:

$$[G_2] = [H] - [H']$$

^(۱) canonical form

$$[G_3] = \begin{bmatrix} & L_{11} & \dots & L_{1q} \\ & L_{21} & & L_{2q} \\ [H+H'] & \vdots & \dots & \vdots \\ & L_{r1} & \dots & L_{rq} \\ & \vdots & & \vdots \\ Z(2r+q,1)+Z(2r+q,q+1) & \dots & Z(2r+q,2r+1) & \dots & Z(2r+q,2r+q) \end{bmatrix} \quad (12-4)$$

مقادیر ویژه $[G]$ به صورت زیر بدست می آید.

$$\lambda_G = \lambda_{G_2} \cup \lambda_{G_3} \quad (13-4)$$

۴-۳-۱- اثبات:

اکنون به طور اجمالی به اثبات روابط ریاضی حاکم بر ماتریس لاپلاسیان به فرم سه در مقیاس کوچکتري پردازيم که بسط توسعه ای آن روابط مذکور می باشد.
ماتریس $[G]$ را در نظر بگیرید. این ماتریس به فرم سه می باشد:

$$G = \left[\begin{array}{cccc|c} h & i & j & k & f \\ i & h' & k & l & g \\ \hline j & k & h & i & f \\ k & l & i & h' & g \\ \hline f & g & f & g & u \end{array} \right]$$

دترمینان ماتریس G را در نظر بگیرید و آن را نسبت به سطر اول بسط دهید.

$$DET(G) = h \begin{vmatrix} h' & k & l & g \\ k & h & i & f \\ l & i & h' & g \\ g & f & g & u \end{vmatrix} - i \begin{vmatrix} i & k & l & g \\ j & h & i & f \\ k & i & h' & g \\ f & f & g & u \end{vmatrix} + j \begin{vmatrix} i & h' & l & g \\ j & k & i & f \\ k & l & h' & g \\ f & g & g & u \end{vmatrix} - k \begin{vmatrix} i & h' & k & g \\ j & k & h & f \\ k & l & i & g \\ f & g & f & u \end{vmatrix} +$$

$$f \begin{vmatrix} i & h' & k & l \\ j & k & h & i \\ k & l & i & h' \\ f & g & f & g \end{vmatrix}$$

۵ دترمینان 4×4 خواهیم داشت.

از بسط دترمینانهای 4×4 و سپس دترمینانهای 3×3 و 2×2 و نهایتاً: $DET(G) = 0$

در چند جمله ای حاصل عبارت $-4i^2k^2u + 2i^2k^2 - 2k^2i^2u$ می نماییم،
خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & ((hh' + jl - i^2 - k^2) + (hl + h'j - 2ik)) u - 2g^2(h + j) + 4fg(i + k) \\ & ((hh' + jl - i^2 - k^2) - (hl + h'j - 2ik)) = \\ & (hh'u + hlu + jh'u + jlu - 2g^2j - i^2u - k^2u - 2iku + 4fgi + 4fgk - 2f^2h' - 2f^2l) \\ & (hh' - i^2 - k^2 + 2ik - jh' - hl + jl) = \\ & ((h - j)(h' - l) - (i - k)(i - k))((h + j)((h' + l)u - 2g^2) - (i + k)((i + k)u - 2fg) + \\ & f((i + k)2g - 2f(h' + l))) \quad (14-4) \end{aligned}$$

اتحاد پرانتز اول در حقیقت بسط دترمینان G می باشد یعنی

$$G_2 = \begin{vmatrix} h - j & i - k \\ i - k & h' - l \end{vmatrix}$$

اتحاد پرانتز دوم در واقع بسط دترمینان G' می باشد یعنی

$$G_3 = \begin{vmatrix} h + j & i + k & f \\ i + k & h' + l & g \\ 2f & 2g & u \end{vmatrix}$$

ماتریس G ضرب دترمینان ماتریس G و G' می باشد

$$DET(G) = DET(G_2) \times DET(G_3)$$

❖ روش بدست آوردن ماتریس های G_2 و G_3

ماتریس G را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$G = \begin{bmatrix} H & H' & F \\ H' & H & F \\ S & S & U \end{bmatrix}$$

$$G_2 = [H] - [H'] \quad (۱۵-۴)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} \quad (۱۶-۴)$$

طبق قضایای حاکم در جبر ماتریسی با جایگذاری روابط مربوطه در دترمینان ماتریس G خواهیم داشت:

$$|G| = \begin{vmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{vmatrix} \times [H] - [H'] \Rightarrow \quad (I)$$

$$|G| = [H][H][U] + [H][H']U - [H][H][S]F - [H']H[U] - [H']H'U + [H']2S[F] \\ [H][H]U - 2[H][S]F + 2[H']S[F] - [H']H[U] + [H][H']U - [H']H'U \quad (II)$$

ماتریسهای G_2 و G_3 هر یک زیر ماتریس از ماتریس G می باشند. $\therefore I = II \Rightarrow$

۴-۳-۲ مقادیر ویژه در تقارن به فرم سه:

در این حالت برای محاسبه مقادیر ویژه، با توجه به رابطه ی (۲-۷) مقدار λ را از قطر اصلی

ماتریس لاپلاسیان مورد نظر کم می شود و دترمینان حاصل مساوی صفر قرار می گیرد.

- اگر ماتریس G یک ماتریس 5×5 باشد

$$G = \begin{bmatrix} h & i & j & k & f \\ i & h' & k & l & g \\ j & k & h & i & f \\ k & l & i & h' & g \\ f & g & f & g & u \end{bmatrix}$$

دترمینان ماتریس G بر حسب λ به صورت زیر می باشد.

$$G = \begin{vmatrix} h-\lambda & i & j & k & f \\ i & h'-\lambda & k & l & g \\ j & k & h-\lambda & i & f \\ k & l & i & h'-\lambda & g \\ f & g & f & g & u-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

که از محاسبه این دترمینان، معادله مشخصه ای بر حسب λ بدست می آید. در واقع در اینجا نیز، بحث محاسبه ی دترمینان ماتریس G است که در بخش ۳-۳-۱ مورد بررسی قرار گرفت؛ با این تفاوت که در بسط حاصل از دترمینان $F(h, h', i, j, k, f, g, l, u)$ به جای h ، $h-\lambda$ و به جای h' ، $h'-\lambda$ و به جای u ، $u-\lambda$ به کار رفته است.

برای سادگی $h_1 = h - \lambda$ و $h_2 = h' - \lambda$ و $u_1 = u - \lambda$ را در نظر گرفته میشود، حاصل بسط دترمینان به صورت زیر می شود. یعنی در $F(h, h', i, j, k, f, g, l, u)$ پس از جایگزینی متغیرهای h_1, h_2, u_1 به جای h, h', u در رابطه ی (۴-۱۴) رابطه ی ذیل حاصل می شود.

$$[(h_1 - j)(h_2 - l) - (i - k)(i + k)][(h_1 + j)((h_2 + l)u_1 - 2g^2) - (i + k)((i + k)u_1 - 2fg) + f((i + k)2g - 2f(h_2 + l))]$$

رابطه ی فوق در حقیقت ضرب دو دترمینان $|G_2|$ و $|G_3|$ می باشد که به صورت زیر نمایش داده

می شود.

$$G_3 = \begin{vmatrix} h_1 + j & i + k & f \\ i + k & h_2 + l & g \\ 2f & 2g & u \end{vmatrix} \quad G_2 = \begin{vmatrix} h_1 - j & i - k \\ i - k & h_2 - l \end{vmatrix}$$

برای بدست آوردن مقادیر ویژه و چند جمله ای مشخصه دترمینان ماتریس G ، با کمک دترمینان ماتریسهای G_2 و G_3 تعیین و برابر صفر قرار داده می شود.

$$|G| = |G_2| \times |G_3| = \begin{vmatrix} h_1 + j & i + k & f \\ i + k & h_2 + l & g \\ 2f & 2g & u \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} h_1 - j & i - k \\ i - k & h_2 - l \end{vmatrix} = 0$$

در رابطه فوق عبارت های $h_1 = h - \lambda$ ، $h_2 = h' - \lambda$ و $u_1 = u - \lambda$ جایگزین می شوند بنابراین:

$$|G| = \begin{vmatrix} h - \lambda + j & i + k & f \\ i + k & h' - \lambda & g \\ 2f & 2g & u - \lambda \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} h - \lambda - j & i - k \\ i - k & h' - \lambda - l \end{vmatrix} = 0$$

$\text{polynoal}(G_{3_\lambda})$

$$\begin{aligned} & (-\lambda^3 + (u - h' + j)\lambda^2 + (-h'u - h'j - hh' - h\lambda + 2ik + i^2 + k^2 + 2f^2)\lambda + hh'u - 2g^2h \\ & - 4g^2j + jh'u - i^2u - 2iku + 4ifg - k^2u + 4kfg - 2f^2h') \times \\ & (\lambda^2 + (-h - h' + l + j)\lambda + hh' - hl - jh' + jl - l^2 - k^2 + 2ik = 0) \end{aligned}$$

$\text{polynoal}(G_{2_\lambda})$

معادله مشخصه ای که از دترمینان های 2×2 و 3×3 بدست آمده رابه ترتیب $\text{polynol}G_{2_\lambda}$ و $\text{polynol}G_{3_\lambda}$ می نامیم و حاصلضرب این چند جمله ای ها را $\text{polynol}G_\lambda$ می نامیم.

$$\text{polynol}G_\lambda = \text{polynol}G_{3_\lambda} \times \text{polynol}G_{2_\lambda}$$

اجتماع ریشه های G_{2_λ} و G_{3_λ} تمامی ریشه های G رامنتج می شود یعنی:

$$\text{root}_{G_{2_\lambda}} \cup \text{root}_{G_{3_\lambda}} = \text{root}_{G_\lambda}$$

که البته در اینجا منظور از ریشه همان مقادیر ویژه می باشد.

موارد فوق برای ماتریس های مرتبه 6×6 ، 7×7 ،، $2r + q \times 2r + q$ نیز برقرار و قابل اثبات می باشد.

مثال ۴-۳- ماتریس G را با ابعاد 6×6 در نظر بگیرید. این ماتریس به فرم کانونیکال سه می باشد.

بدست آوردن مقادیر ویژه طبق روابط مذکور مطلوبست. مقادیر ویژه به کمک نرم افزار مطلب بدست آمده است.

$$L_{G_1} = \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right] \quad L_{G_2} = [H] - [H'] = \begin{bmatrix} 4 - (-1) & -1 - (-1) \\ -1 - (-1) & 3 - (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$L_{G_3} = \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + (-1) & -1 + (-1) & -1 \\ -1 + (-1) & 3 + (-1) & 0 \\ -1 + (-1) & 0 + 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{G_1} = \{ 0, 5, 5, 4, 2 \}$$

$$\lambda_{G_2} = \{ 5, 4 \} \quad \lambda_{G_3} = \{ 0, 5, 2 \} \Rightarrow \lambda_G = \lambda_{G_2} \cup \lambda_{G_3}$$

$$\lambda_{\min} = 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = 5$$

۴-۴- بکارگیری فرمهای کانونیکال در گراف متقارن:

تجزیه یک گراف متقارن بر حسب ساختار آن می تواند مبتنی بر سه حالت زیر باشد.

۱. خط یا صفحه تقارن فقط از بعضی از یالها عبور کند.
 ۲. خط یا صفحه تقارن فقط از بعضی از راسها عبور کند.
 ۳. خط یا صفحه تقارن از بعضی از یالهای و بعضی از راسها عبور کند.
- خط (صفحه) تقارن خطی (صفحه ای) است که گراف را به دو مولفه همبند یکرخت تقسیم می کند. که دو مولفه حاصل، مولفه ی متقارن نامیده می شود. مولفه ای که در یک طرف این خط (صفحه) واقع می شود تصویر آینه ای مولفه دیگر است. (خط تقارن را برای گرافهای مسطح و صفحه تقارن را برای گرافهای غیر مسطح بکار می بریم).

گراف $G = (V, E)$ را متقارن نامند اگر حداقل قابل تفکیک به دو مولفه متقارن باشد.

۴-۴-۱- بکارگیری ماتریسهای فرم یک و دو در گراف:

در تقارن به فرم دو، خط تقارن از یک یا چند یال عبور می کند که به یال هایی که خط تقارن از آن عبور می کند، *یال رابط*^(۱) گویند. در حقیقت در این دو فرم، دو گراف شبیه به هم نسبت به خط تقارن توسط یال یا یال های رابط به یکدیگر اتصال دارند. در فرم های کانونیکال برچسب گذاری گراف دارای اهمیت خاصی است [۳۷]. چه اگر این برچسب گذاری به درستی رعایت نشود، به فرم کانونیکال مورد نظر نخواهیم رسید. طریقه ی برچسب گذاری به این صورت می باشد که در یک گراف با R راس، ابتدا یک نیمه ی متقارن و سپس نیمه ی دوم به همان ترتیب نیمه ی اول با تقارن مستقیم، برچسب گذاری می شود، طوری که اختلاف بین هر دو راس متقارن $\frac{R}{2}$ باشد. در این صورت ماتریس لاپلاسیان گراف برچسب گذاری شده به فرم دو خواهد بود، و می توان با اعمال عملیات انجام شده بر روی ماتریس و گراف متناظر آن به مولفه های متقارن گراف رسید، البته این مهم با توجه به زیرماتریس های کاهش یافته امکان پذیر است، و همانطوری که اشاره و اثبات شد ماتریس به فرم دو به دو زیر ماتریس کاهش یافته ی G_1 و G_2 بخش بندی می شود. بحث اتمهای گراف را در بخش های بعدی مورد توجه قرار می دهیم. در یک گراف با راس های ساده می توان با تشکیل زیرماتریس های $[H]$ و $[H']$ زیرماتریسهای کاهش یافته ی G_1 و G_2 را بدست آورد.

۴-۴-۲- تعیین ماتریس لاپلاسیان مولفه های متقارن گراف متقارن در حالت فرم دو:

برای هر گراف متقارن دو نوع ماتریس قابل طرح می باشد.

۱- ماتریس لاپلاسیان یکی از مولفه های متقارن

۲- ماتریس تقارن که ماتریسی مربعی $\frac{R}{2} \times \frac{R}{2}$ است به صورت $a_{ii} = -1$ می باشد اگر راس i ام از

یک مولفه با راس $i + \frac{R}{2}$ مجاور باشد.

اگر ماتریس اول را H و ماتریس دوم را H' نامیده شود مقادیر ویژه گراف را می توان از طریق تعیین مقادیر ویژه دو ماتریس زیر بدست آورد.

^(۱)conjunctive edge

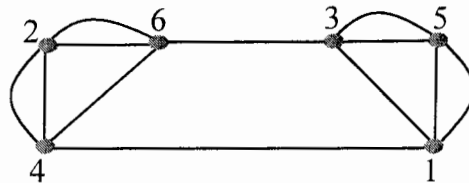
$$G_1 = H + H'$$

$$G_2 = H - H'$$

$$\lambda(G) = \lambda(G_1) \cup \lambda(G_2) \quad \text{زیرا:}$$

با توجه به شکل مدل گراف می توان زیرماتریس های $[H]$ و $[H']$ را تشکیل داد. این خاصیت هنگامی مفید است که ماتریس اصلی گراف را تشکیل ندهیم. در واقع زیرماتریس $[H]$ یک ماتریس است که شامل راس ها و یال های یک نیمه است و زیرماتریس $[H']$ شامل راس هایی است که توسط یال رابط دو نیمه را به یکدیگر پیوند می دهد و چون در ماتریس های به فرم یک یال رابطی وجود ندارد این ماتریس برابر صفر می باشد. هر چند به جای محاسبه یک ماتریس $R \times R$ ، $(R = 2k)$ ما با یک ماتریس $\frac{R}{2} \times \frac{R}{2}$ سروکار داریم و محاسبات به نصف کاهش می یابد، اما این مشاهده در مورد مسائل با گراف های پیچیده تر به آسانی میسر نمی گردد. بدین لحاظ بحث مولفه های متقارن که در بخش های بعدی به آن توجه داریم این نقصان را به خوبی مرتفع می سازد و اندک محدودیت بیان شده را تحت پوشش قرار می دهد. با یک مثال عینی موضوع تبیین شده را روشن می کنیم

مثال ۴-۴ - گراف شکل (۴-۱) دارای ۶ راس می باشد که بوسیله ی دو یال رابط به همدیگر اتصال دارند. برچسب گذاری این گراف بدون رعایت قانون خاصی می باشد.

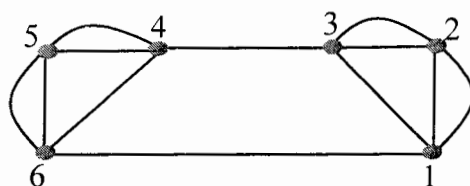


شکل ۴-۱- مدل گراف با برچسب گذاری زوج و فرد در هر نیمه

ماتریس لاپلاسیان گراف به صورت زیر تشکیل می شود. در ارتباط با تشکیل ماتریس لاپلاسیان، به طور مثال، راس ۱ با دو یال با راس ۵ در ارتباط است؛ بنابراین در ماتریس حاصله، درایه $(1,5)$ دارای مقدار ۲- می باشد. راس ۴ با ۴ یال با راس های دیگر ارتباط دارد؛ بنابراین در ماتریس حاصله، درایه $(4,4)$ دارای مقدار ۴ می باشد.

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & -2 & -1 \\ \hline -1 & -2 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

ملاحظه می شود که ماتریس لاپلاسیان گراف به طور اتفاقی به فرم دو خواهد شد. بار دیگر گراف به گونه ای دیگر برچسب گذاری می شود.



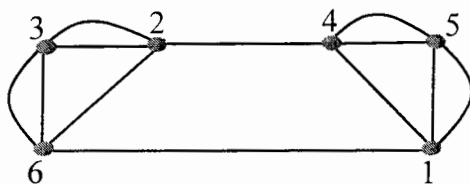
شکل ۴-۲- مدل گراف با برچسب گذاری در جهت خلاف عقربه های ساعت

حال ماتریس لاپلاسیان گراف را تشکیل می شود.

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

ماتریس لاپلاسیان گراف به فرم دو خواهد بود.

برچسب گذاری دیگری انجام می شود.



شکل ۴-۳- مدل گراف با برچسب گذاری نامنظم

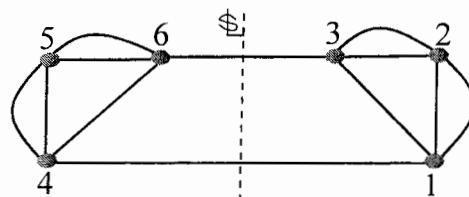
ماتریس لاپلاسیان گراف تشکیل می شود.

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 0 & -2 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

ماتریس لاپلاسیان به فرم دو نیست.

علت اینکه ماتریس لاپلاسیان گراف مورد نظر، در حالت اول تشکیل فرم کانونیکال دوم را داده است، این است که ما در برچسب گذاری قاعده ی خاصی را رعایت کردیم یعنی در حالت اول، یک نیمه را با برچسب زوج و یک نیمه را با برچسب فرد برچسب گذاری کرده ایم. و در حالت دوم پس از برچسب گذاری یک نیمه به طور پادساعتگرد نیمه دوم را - به طور متوالی - و در جهت ساعتگرد برچسب گذاری کرده ایم البته این دلیل متقنی برای پاسخ به مساله نیست، بدلیل اینکه در این حالت خاص درجه تمام راسها یکی است در نتیجه چنین وضعیتی حاکم شده است. بررسی گراف دیگری که راسهای آن هم درجه نباشند دلیلی برتائید بیان مذکور می باشد.

حال اگر گراف مورد نظر با توجه به تقارن آینه ای برچسب گذاری شود که همان خواست مورد نظر می باشد گراف و ماتریس حاصله دارای تقارن به فرم دو خواهد بود.



شکل ۴-۴- مدل گراف با تقارن به فرم دو

ماتریس لاپلاسیان مدل گراف شکل (۴-۴) به صورت زیر بدست می آید.

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

ماتریس لاپلاسیان به فرم دو خواهد بود. در این حالت اختلاف هر دو برچسب متقارن نصف تعداد کلی برچسبهای گراف می باشد.

می توان بدون تشکیل ماتریس اصلی با توجه به شکل مدل گراف زیرماتریس های $[H]$ و $[H']$ را تشکیل داد. طریقه ی بدست آوردن زیرماتریسها به همان طریقی است که در مثال (۴-۱) بیان شد، مقادیر ویژه به کمک نرم افزار مطلب بدست آمده است [۳۸]. که مقادیر ویژه به روش دستی همانند مثال (۴-۱) بدست می آید.

$$L_H = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad L_{H'} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$L_{G_1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad L_{G_2} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{G_1} = \{ 0, 6, 4 \} \quad , \quad \lambda_{G_2} = \{ 6.8284, 6, 1.1716 \}$$

$$|G_1| = 0 \quad , \quad |G_2| = 48 \quad |G| = 0$$

۴-۳-۴- بکارگیری فرم سه در گراف:

در تقارن به فرم سه، خط تقارن از یک یا چند یال و علاوه بر آن از یک یا چند راس عبور می کند که به راسهایی که خط تقارن از آن عبور می کند، راس مرکزی^(۱) می گویند. در حقیقت در این فرم، دو گراف شبیه به هم نسبت به خط تقارن توسط یال یا یالهای رابط به یکدیگر اتصال دارند علاوه براین، راسهای متقارن دو نیمه توانایی اتصال به راسهای مرکزی را نیز دارند. طریقه ی برچسب گذاری به این صورت می باشد که ابتدا یک نیمه ی متقارن و سپس نیمه ی دوم به همان ترتیب نیمه ی اول برچسب گذاری می شود، طوری که اختلاف بین هر دو نیمه ی متقارن برابر $\frac{R}{2}$

^(۱) center vertex

شود سپس راس های مرکزی برچسب گذاری می شود، منتها در برچسب گذاری راس مرکزی بهتر است این قرار داد رعایت شود که به ترتیب راس های دو نیمه برچسب گذاری کنیم، یعنی به طور مثال اگر راس های دو نیمه از بالا به پایین برچسب گذاری شود، بهتر است که راس های مرکزی نیز به همین ترتیب - از بالا به پایین - برچسب گذاری شود. لازم به یادآوری است که به تعداد راس های مرکزی سطر و ستون به ماتریس فرم دو اضافه می شود و فرم سه را می سازد که در اینجا با q نشان داده شده اند. به مثال زیر توجه می کنیم.

۴-۴-۴ - تعیین ماتریس لاپلاسین مولفه های متقارن گراف متقارن، برای حالت ماتریسی با فرم سه:

برای هر گراف متقارن دو نوع ماتریس قابل طرح می باشد.

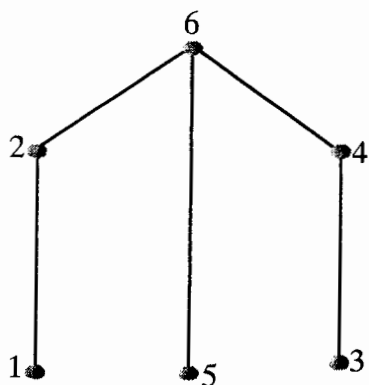
۱- ماتریس لاپلاسین مولفه های متقارن

۲- زیرماتریس تقارن که در بخش ۴-۳-۱ به آن اشاره شده است.

می توان بدون تشکیل ماتریس اصلی و با توجه به شکل مدل گراف زیرماتریس های ماتریس لاپلاسین اصلی را تشکیل داد که این پیگرد با ذکر یک مثال دنبال می شود.

استفاده از زیر ماتریسها باعث می شود که با کاهش درجه ی معادله میزان همگرایی جوابها افزایش می یابد و دقت مساله بالاتر می رود [۳۹].

مثال ۴-۵- گراف شکل (۴-۵) دارای ۶ گره می باشد، که ۴ گره از دو نیمه ی متقارن، و ۲ گره، گره مرکزی می باشد. تشکیل ماتریس لاپلاسین گراف و زیرماتریس های کاهش یافته آن و سپس بدست آوردن مقادیر ویژه مطلوب مساله است. روش بدست آوردن ماتریس لاپلاسین L_{G_2} و L_{G_3} به همان طریقی است که در مثال (۴-۳) بیان شد.



شکل ۴-۵- مدل گراف با تقارن به فرم سه

ماتریس لاپلاسیان گراف به صورت مقابل می باشد. مقادیر ویژه به کمک نرم افزار مطلب بدست آمده است. برای بدست آوردن مقادیر ویژه به روش دستی به مثال (۴-۱) مراجعه شود.

$$L_G = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{array} \right]$$

$$L_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda_{G_2} = \{ 2.6180, 0.3820 \}$$

$$L_{G_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda_{G_3} = \{ 0, 4.3028, 2, 0.6972 \}$$

$$\lambda_G = \{ 0, 4.3028, 2.6180, 2, 0.6972, 0.3820 \}$$

$$\lambda_G = \lambda_{G_2} \cup \lambda_{G_3}$$

$$\lambda_{\min} = 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = 4.3028$$

در گرافهای با تقارن به فرم سه کران بالا و پایین مقدار ویژه همواره در زیرماتریس کاهش یافته G_3 قرار می گیرد.

می توان با توجه به مدل گراف و بدون تشکیل ماتریس اصلی با استفاده از زیرماتریسهای ماتریس اصلی ماتریس لاپلاسیان را تشکیل داد و مقادیر ویژه را بدست آورد.

$$L_H = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad L_{H'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad L_S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad L_U = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

در واقع ماتریس H ماتریس گره های یک نیمه است. ماتریس H' ماتریس ارتباط دو نیمه متقارن به غیر از ارتباط نیمه ها با گره های مرکزی می باشد. ماتریس F ماتریسی است که ارتباط گره های نیمه اول با گره های مرکزی می باشد و ماتریس S ماتریسی است که ارتباط گره های نیمه دوم با گره مرکزی می باشد و نهایتاً ماتریس U ماتریس گره های مرکزی می باشد.

$$L_{G_2} = L_H - L_{H'} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_{G_3} = \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

در واقع به جای حل یک ماتریس با ابعاد 6×6 سروکار مساله برای بدست آوردن مقدار ویژه با دو ماتریس 2×2 و 4×4 است و حتی برای یافتن حداقل مقدار ویژه، سروکار مساله با یک ماتریس 4×4 است. بنابراین با توجه به اینکه حجم عملیات با ماتریس 4×4 به مراتب از یک ماتریس 6×6 کمتر است، می توان از تقارن برای کاهش حجم راه حل مساله استفاده کرد که البته این مهم در ماتریسها با ابعاد بالاتر اهمیت قابل ملاحظه ای دارد. باوجوداین همان دلیلی که در ماتریسهای به فرم دو آورده شد برای ماتریسهای به فرم سه نیز صادق است. بنابراین نیاز به اتمهای گراف در هر دو فرم به خوبی احساس می شود.

در تقارن به فرم سه اگر ارتباط دو نیمه متقارن با گره های مرکزی مشابه هم باشد، دو ماتریس یکسان F تشکیل می شود. البته، این توجه از آن جهت حائز اهمیت است که در فصول پایانی رساله چنین حالتی در ماتریس لاپلاسیان سازه تشکیل می شود.

۴-۵- نحوه تجزیه گراف متقارن به مولفه های متقارن :

هر گرافی که دارای تقارن باشد از خط تقارنش پارش^(۱) یافته و قابل تجزیه به دو مولفه^(۲) است که در نهایت به دو مولفه ی متقارن کاهش می یابد.

اگر مولفه های متقارن خود دارای تقارن باشند مجدداً به دو مولفه تجزیه می شوند. کوچکترین مولفه در این فرایند را، هسته یا اتم^(۳) گراف متقارن می نامیم.

هر افراز از ماتریس اصلی به صورت زیرماتریسها، با نماد $L_{G_{G_1}}$ نشان داده می شود که در آن G گراف اصلی و G_1 یک مولفه متقارن آن است.

تشکیل مولفه های متقارن در تقارن به فرم دو به اینصورت است که با توجه به خط تقارن یالهای رابط به دو نیمه پارش می یابد؛ سپس یالهای رابط از یک نیمه ی متقارن حذف و مولفه متقارن G_1 حاصل می شود. در مرحله ی بعد، کلیه یالهای رابط، به صورت خود- حلقه به نیمه ی دیگر در همان راس انتهایی وارد می شود؛ مولفه متقارن G_2 حاصل می شود.

راس توخالی، راسی است که در گراف برچسب گذاری نمی شود ولی به راسهای گراف اتصال دارد. تشکیل مولفه های متقارن در تقارن به فرم سه به این صورت است که خط تقارن با مقدار کوچک ε (اپسیلون) از راسهایی که خط تقارن از آنها می گذرد فاصله گرفته و از آنجا گراف به دو نیمه پارش می یابد. یعنی خط تقارن به اندازه ی مقدار کوچک ε ، سمت چپ راسهای روی خط تقارن می باشد. به ازای هر راس که روی خط تقارن است یک راس توخالی ترسیم می شود که در نتیجه مولفه متقارن G_2 حاصل می شود. در نیمه ی متقارن پارش یافته ی دوم یک یال یک سویه از راسهایی که خط تقارن از آنها می گذرد (راسهای مرکزی)، به راسهایی که در نیمه ی متقارن G_2 به راسهای روی خط تقارن وصل بود ترسیم می شود. سپس همانند فرم دو، به ازای هر یال یک خود- حلقه به نیمه ی سمت چپ وارد می شود و از نیمه ی سمت راست یعنی مولفه G_3 برداشته می شود. به این صورت مولفه های متقارن در تقارن به فرم سه بدست می آیند

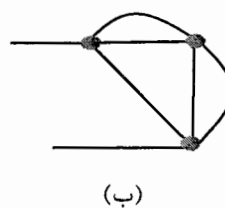
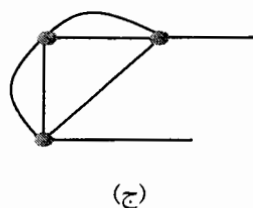
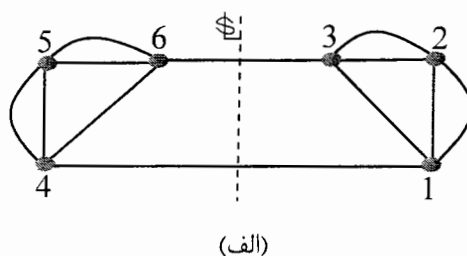
^(۱) fragment

^(۲) component

^(۳) atom

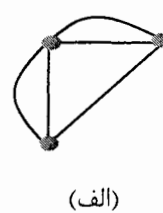
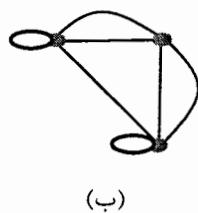
مثال ۴-۶- مدلی گراف شکل (۴-۶-الف) را در نظر بگیرید، بدست آوردن مولفه های متقارن این مدلی گراف را بدست آورید. این گراف دارای تقارن به فرم دو است.

با توجه به توضیحات مشروحه در همین بخش، ابتدا مدلی گراف از خط تقارن پارشی یابد.



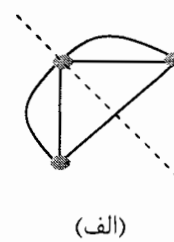
شکل ۴-۶-الف مدلی گراف با تقارن به فرم دو (ب) و (ج) نیمه ی متقارن پارشی یافته

و به دو مولفه ی متقارن G_1 و G_2 کاهش می یابد. (تقارن به فرم دو)

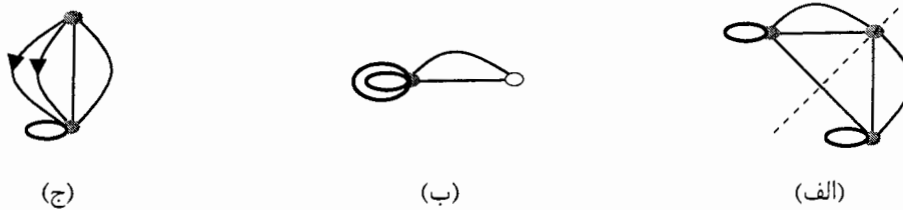


شکل ۴-۷- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) مولفه متقارن G_2

مولفه های متقارن G_1 و G_2 خود به دو مولفه متقارن کاهش می یابند. (تقارن به فرم سه)



شکل ۴-۸- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) اتم G_{1G_2} (ج) اتم G_{1G_3}



شکل ۴-۹- (الف) مولفه متقارن G_2 (ب) اتم G_{2G_2} (ج) اتم G_{2G_3}

ماتریس لاپلاسیان اتمهای گراف شکل (۴-۶-الف) به صورت زیر می باشند. به عنوان مثال $L_{G_1 \cap G_2}$ زیرماتریس اتم G_2 است که در آن G گراف اصلی و G_1 مولفه متقارن و در نهایت G_2 یکی از اتمهای مولفه G_2 می باشد؛ در این رابطه در مدل گراف متناظر، شکل (۴-۸-ب) یک راس دارد که چهار یال به آن اتصال دارد، در نتیجه ماتریس لاپلاسیان متناظر با آن یک ماتریس 1×1 می باشد که درایه نظیر آن دارای مقدار عددی ۴ می باشد.

$$L_{G_1 \cap G_2} = [4] \quad \lambda = \{4\}$$

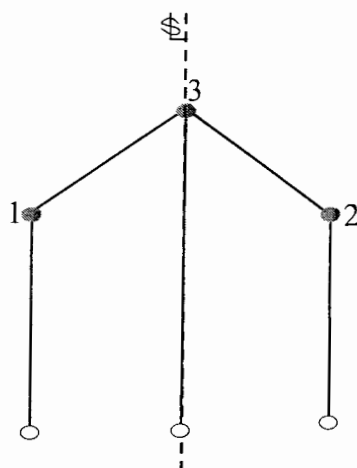
$$L_{G_1 \cap G_3} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \quad \lambda = \{0, 6\}$$

$$L_{G_2 \cap G_2} = [6] \quad \lambda = \{6\}$$

$$L_{G_2 \cap G_3} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \quad \lambda = \{6.8284, 1.1716\}$$

لازم به یادآوری است که هر مولفه متقارن به صورت یک اندیس در کنار گراف مورد نظر خود نوشته می شود. همانطوری که ملاحظه می شود به جای حل یک ماتریس 6×6 با ماتریس های 2×2 و 1×1 سروکار داریم و این یعنی حجم محاسبه ی ما $1/6$ و $1/3$ برابر کم می شود. به مثال دیگری توجه کنید.

مثال ۴-۷- گراف شکل (۴-۱۰) را در نظر بگیرید. این گراف دارای تقارن به فرم سه می باشد. این گراف دارای سه راس توخالی می باشد که برچسب گذاری نمیشود. اتمهای این مدل گراف بدست آورده و ماتریس لاپلاسیان متناظر را در هر مرحله محاسبه نمایید.

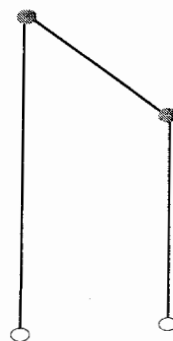


شکل ۴-۱۰- مدل گراف با تقارن به فرم سه

با توجه به توضیحات مشروحه در ابتدای این بخش، ابتدا مدل گراف از خط تقارن پارش می- یابد، در فرم سه خط تقارن با مقدار حدی بسیار کوچکی از نیمه ی سمت چپ پارش می یابد یعنی در این فرم خط تقارن به اندازه ی ε از گره ها فاصله دارد و تنها یال ها را قطع می کند.



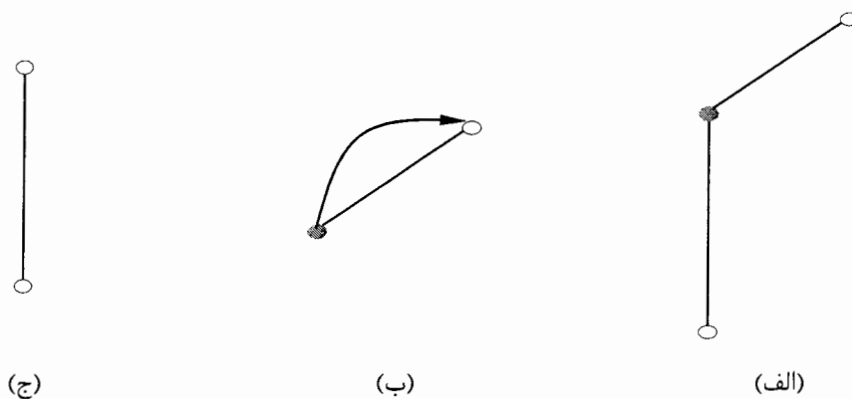
(ب)



(الف)

شکل ۴-۱۱- (الف) و (ب) دونیمه ی متقارن پارش یافته

و به دو مولفه متقارن G_2 و G_3 کاهش می یابد. (تقارن به فرم سه).
مولف متقارن G_2 به یک اتم کاهش می یابد. مولفه متقارن G_3 خود، اتم می باشد و به مولفه ی متقارن دیگری کاهش نمی یابد.



شکل ۴-۱۲ (الف) مولفه متقارن G_2 (ب) اتم G_{2G_3} (ج)

ماتریس لاپلاسیان اتمهای شکل (۴-۱۰) به صورت زیر می باشد. طریقه بدست آوردن زیرماتریس ها به همان طریقی است که در مثال ۴-۶ آورده شده است.

$$L_{G_{G_2G_3}} = [2] \quad \lambda = \{2\}$$

$$L_{G_{G_3}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \lambda = \{4, 1\}$$

$$L_G = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \lambda = \{4, 2, 1\}$$

فصل

کاربرد ماتریس لاپلاسیان در
گرافهای مرکب با تقارن به فرم
دو و سه

۵-۱- مقدمه:

در فصل چهارم درباره ی ماتریس لاپلاسیان گراف بحث شد و نحوه ی ارتباط و استفاده ی آنها در تحلیل ماتریسی نشان داده شد. در تحلیل پایداری سازه ها، سازه هایی که بدون تغییر مکان محوری هستند مطرح شده است [۴۰، ۵۱]، دو انتهای المان (المانهای تیر و ستون) این قابها، دارای دو نوع درجه آزادی، یک درجه آزادی انتقالی و یک درجه آزادی دورانی می باشد. در این رساله، به صورت کاملاً ابتکاری، برای در نظر گرفتن این دو درجه آزادی مدل گراف متناظر با یک قاب مفصلی (بدون تغییر مکان محوری)، به صورت یک گراف مرکب نشان داده شده است. این نوع گراف می تواند توصیف کننده ی بسیار مناسبی برای قابهای مذکور باشد. در ذیل ابتدا اقدام به تعریف این نوع گرافها و ویژگیهای آن می نماییم.

۵-۲- گرافهای مرکب^(۱):

همانطوری که در مقدمه ذکر شد در رساله ی حاضر با توجه به لزوم، اقدام به تعریف نوعی گراف، موسوم به گراف مرکب می نماییم. برای تعریف گرافهای مرکب با مفاهیمی جدید آشنا می شویم و بدین جهت ناگزیر از تعریف راسی خاص می باشیم که این راس خاص رهیافتی تازه برای حل مسایل، در اختیار ما قرار می دهد. یک راس مرکب، متشکل از دو راس تودرتو می باشد، این راس مرکب متناظر با دو درجه آزادی دورانی و انتقالی در المانهای قاب می باشد بدین لحاظ مدل گراف مرکب توصیف بسیار مناسبتری از یک قاب را نسبت به گراف معمولی متناظر با قاب ارائه می دهد.

^(۱) combined graph

۵-۲-۱- راس مرکب^(۲):

راس V_{ji} را مرکب گوئیم که:

- متشکل از دو راس همجوار i, j باشد.
- همجواری بین این دو راس به صورت همجواری درونی است و این همجواری همواره وجود دارد.

نمایش یک راس مرکب که متشکل از دو راس i, j می باشد، در شکل (۵-۱) نشان داده شده است.



شکل ۵-۱- نمایش یک راس مرکب

۵-۲-۱-۱- همجواری درونی^(۳): ارتباط بین دو راس تشکیل دهنده ی یک راس مرکب را همجواری درونی نامیم.

ماتریس لاپلاسیان بدون وزن برای گراف مرکب $G=(V, E)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$L = \begin{cases} d_j + 1 & \text{راس } j \text{ مرکب است \& } j = k \\ 1 & \text{برای راس } i, i = j \\ -1 & \text{راس } j \text{ و راس } k \text{ همجوار هستند \& } j \neq k \\ 0 & \text{راس } i \text{ و راس } j \text{ همجوار نیستند \& } j \neq k \end{cases} \quad (۵-۱)$$

برچسب گذاری راس به این صورت می باشد که i راس خارجی و j راس داخلی می باشد راس i ، همجواری بیرونی با راس j دارد. طریقه ی برچسب گذاری با تعریف (۳-۸) نیز به روشنی سازگار است. با توجه به رابطه ی (۵-۱) و (۳-۸) نمایش ماتریسی راس مرکب به صورت ذیل می باشد.

^(۲) combined vertex

^(۳) internal adjacency

$$I_2$$

$$L_{1,1} = 1 \quad L_{1,2} = -1$$

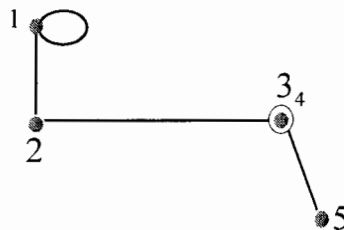
$$L_{2,1} = -1 \quad L_{2,2} = 1$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

۵-۲-۲- گراف مرکب: گرافی را که دارای حداقل یک راس مرکب باشد، یک گراف مرکب نامیم.

در گراف قبلی هر راس محل اتصال یک یال است، اما در گراف مرکب یال با راس مرکب، ارتباط ویژه‌ای را بوجود می آورد که در بخشهای بعدی رساله، مطرح می گردد.

مثال ۵-۱- مدل گراف مرکب شکل (۵-۲) را در نظر بگیرید که با ۵ شماره برجسب گذاری شده است. این مدل گراف یک حلقه در راس ۱ و یک راس مرکب که با برجسب گذاری 3_4 مشخص شده را شامل می شود.



شکل ۵-۲- مدل گراف مرکب

ماتریس لاپلاسیان این گراف به صورت ذیل می باشد. برای نمونه ماتریس لاپلاسیان متناظر راس داخلی راس مرکب 3_4 ، به این صورت می باشد که راس ۳ با راس ۱ همجوار نیست؛ در نتیجه درایه $0 = (1, 3)$ است. راس مذکور با راس ۲ و ۵ توسط یک یال همجوار شده است و با راس ۴ همجواری درونی دارد. در نتیجه درایه های $(2, 3)$ و $(3, 4)$ و $(3, 5)$ از ماتریس لاپلاسیان دارای مقدار عددی ۱- می باشند و از آنجایی که راس ۳، با راسهای ۲، ۴ و ۵ همجواری دارد، درایه ی ماتریسی $3 = (3, 3)$ می باشد.

$$L = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

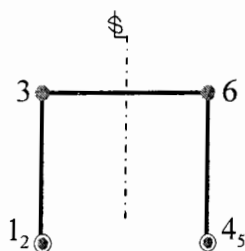
راس مرکب برتری های بالقوه ای را برای ما آشکار می سازد و خواست های ما را در بسیاری از مسایل مرتفع می سازد.

اینک به بررسی این مهم، در تقارن های دو و سه می پردازیم که در پیشبرد کار پروژه گذرگاهی برای رسیدن به هدف اصلی فراهم می آورد.

۵-۳- تقارن به فرم دو:

در این قسمت سعی بر آن است که وضعیت گراف مرکب، زمانی که نسبت به خط تقارن پارش می یابد راتحاد مطلوبی برآورده ساخته در این خصوص نمونه مثالهایی از تقارن بررسی می شود.

مثال ۵-۲- گراف مرکب شکل (۵-۳) را در نظر بگیرید، این گراف تا ۶ شماره برجسب گذاری می شود و دو انتهای گراف دارای راس مرکب است. ویال رابط آن یال ۶_۳ می باشد.



شکل ۵-۳- یک گراف مرکب متقارن G با ۲ راس مرکب و ۳ یال

ماتریس لاپلاسیان متناظر این گراف به صورت زیر می باشد. طریقه ی بدست آوردن ماتریس لاپلاسیان به همان صورتی است که در مثال (۵-۱) به اختصار بیان شد.

$$L_G = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

آن طور که از ماتریس لاپلاسیان گراف مشهود است این ماتریس دارای تقارن به فرم دو می باشد چنانچه این تقارن در مدل گراف متناظر ماتریس نیز مشهود است. زیرماتریس های کاهش یافته این گراف به صورت زیر می باشد:

$$L_{G_1} = L_H + L_{H'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_{G_2} = L_H + L_{H'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

بدست آوردن تمامی این مقادیر ویژه با استفاده از نرم افزار *MATLAB* حاصل شده است.

$$\lambda(G) = \{0, 3.7321, 3, 2, 1, 0.2679\}$$

$$\lambda(G_1) = \{0, 3, 1\}$$

$$, \quad \lambda(G_2) = \{3.7321, 2, 0.2679\}$$

$$\lambda(G) = \lambda(G_1) \cup \lambda(G_2)$$

همانطوری که ملاحظه می شود کران پایین مقدار ویژه در گراف های مرکب در G_1 و کران بالای آن در G_2 قرار می گیرد.

$$\lambda_{\min} = 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = 3.7321 \quad \text{یعنی}$$

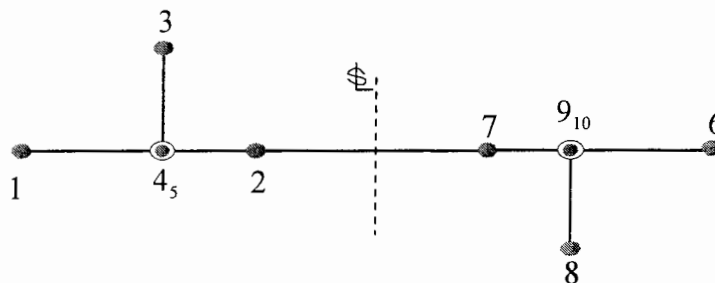
البته این نتیجه در مورد گراف های بی وزن همواره صادق می باشد. اما در گراف های وزن دار [۵]

که در بخش دوم در فصل شش و هشت مطرح می شود بسته به ماتریس وزنی وارد در یالی که خط تقارن آن را قطع می کند، کران بالا و پایین مقدار ویژه در زیر ماتریس های حاصله وضعیت متفاوتی را دنبال می کند.
ذکر این نکته ضروری است که:

- ترتیب بر چسب گذاری در گراف مرکب، همان روند برچسب گذاری در گراف با راسهای معمول می باشد.

اینک مثال دیگری مورد بررسی قرار می گیرد.

مثال ۳-۵- گراف شکل (۴-۵) دارای دو راس مرکب 4_5 و 9_{10} و یال رابط $2-7$ می باشد که خط تقارن از آن عبور می کند. با دقت در پلان مدل گراف شکل (۴-۵) دریافت می شود که یال $8-9_{10}$ ، در جهت موازی با یال $3-4_5$ و تنها در جهت مخالف یال $3-4_5$ می باشد. و در حقیقت مدل گراف دارای تقارن به فرم دو است.



شکل ۴-۵- گراف مرکب با دو راس مرکب

ماتریس لاپلاسیان گراف با ترتیب برچسب گذاری در مدل فوق به صورت زیر می باشد:

$$L_G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

زیرماتریس های کاهش یافته گراف فوق به صورت زیر می باشد:

$$L_{G_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad L_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس L_G, L_{G_1}, L_{G_2} را بدست آورید.

$$\begin{aligned} \lambda_G &= \{5.1774, 5, 2.6784, 1., 1.+0.0000i, 1-0.0000i, 0.1442\} \\ \lambda_{G_1} &= \{0, 5, 1+0.0000i, 1-0.0000i, 1\}, \\ \lambda_{G_2} &= \{5.1774, 2.6784, 1, 1, 0.1442\} \\ \lambda_{\min} &= 1-0.i \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = 5.1774 \end{aligned}$$

برای این دسته از گراف ها، می توان از همان ابتدا مقادیر ماتریسی $[H]$ و $[H']$ را با توجه به روابط (۲-۴)، (۳-۴)، (۴-۴) و (۵-۴) بخش (۴-۱) بدست آورد و بدون محاسبه ماتریس کلی، ماتریس-های G_1 و G_2 را محاسبه نمود.

$$L_H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_{H'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$L_{G_1} = L_H + L_{H'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

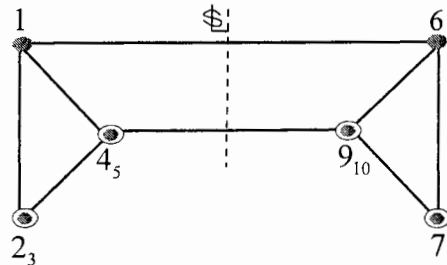
$$L_{G_2} = L_H + L_{H'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

که مقادیر ویژه به همان ترتیب بدست می آید.

۵-۳-۱- مولفه های متقارن گراف مرکب در فرم دو:

خاصیت مهمی که یک گراف مرکب نیز آن را دنبال می کند، مولفه های متقارن این گراف می باشد. که در گسترده وسیعی از مسایل کاربردی اهمیت خود را آشکار می سازد. این امر، زمانی توانایی خود را میسر می سازد که ماتریس لاپلاسیان متناظر مولفه متقارن و در نهایت اتم- در حل مسئله مورد نظر به همراه مدل گرافش- به کار رود. این پهنه، از آن جهت شاخص است که در تحلیل این گراف ها و زیرماتریس های متناظر تنها نیمی از مدل تکامل یافته، تحلیل می شود و محاسبات ما به نصف کاهش می یابد و در نتیجه جستجوی زمانی در رسیدن به جواب کاهش می یابد و در زمان صرفه جویی را خواهیم داشت که در محاسبات کامپیوتری اهمیت قابل ملاحظه ای دارد. مثال دیگری مورد بررسی قرار می گیرد.

مثال ۵-۴- گراف شکل (۵-۵) دارای چهار راس مرکب و دو راس غیر مرکب می باشد. که خط تقارن از راس های $1-6$, 4_5-9_{10} می گذرد. در این مثال قصد داریم مقایسه ای روشن بین آنچه در گراف اصلی اتفاق می افتد و آنچه در مولفه متقارن آن بدست می آوریم انجام دهیم. تا به تکرار دیدگاهی تازه در مورد راس مرکب در گرافهای با تقارن به فرم دو متوجه شویم.



شکل ۵-۵- گراف مرکب، با چهار راس مرکب و دو راس غیر مرکب

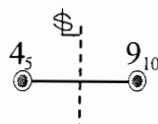
ماتریس لاپلاسیان مدل گراف نشان داده شده به صورت زیر می باشد:

$$L_G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه ماتریس لاپلاسیان به صورت زیر می باشد:

$$\lambda_G = \{ 5.8477, 4.6615, 4.3028, 3.6180, 2.3019, 1.3820, 0.7806, 0.6972, 0.4083, 0 \}$$

ماتریس لاپلاسیان یالی که راس های دو طرف آن راس مرکب باشد و خط تقارن از آن عبور می کند در شکل زیر نشان داده شده است.



$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

۵-۳-۲- مولفه های متقارن:

آنچه در اینجا نسبت به گراف های با راسهای معمول مورد توجه است، این است که اگر خط تقارن یال رابط متصل به راس مرکب را قطع کند، یک خود-حلقه^(۱) به راس داخلی در مولفه متقارن G_2 وارد می شود. خاطر نشان می کنیم که راس مرکب در مولفه متقارن G_1 ، پذیرای هیچ یالی نسبت به خط تقارن نمی باشد.

مثال ۵-۵- در این مثال با استفاده از مولفه های متقارن گراف شکل (۵-۵) مقادیر ویژه حاصل می شوند.



شکل ۵-۶- (الف) مولفه متقارن G_1 - (ب) مولفه متقارن G_2

ماتریس لاپلاسیان کاهش یافته گراف G_1 :

$$L_{G_1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس لاپلاسیان کاهش یافته گراف G_2 :

^(۱) self-loop

$$L_{G_2} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان کاهش یافته G_1 و G_2 به صورت زیر می باشد:

$$\lambda_{G_1} = \{ 4.3028, 3.6180, 1.3820, 0.6972, 0 \}$$

$$\lambda_{G_2} = \{ 0.4083, 0.7806, 2.3019, 4.6615, 5.8477 \} \Rightarrow \lambda_G = \lambda_{G_1} \cup \lambda_{G_2}$$

- همانطوری که ملاحظه می شود می توان بدون در نظر گرفتن ماتریس لاپلاسیان کلی، یا در نظر گرفتن ماتریس های $[H]$ و $[H']$ ، با استفاده از مولفه متقارن و ماتریس لاپلاسیان کاهش یافته اش مقدار ویژه را بدست آورد.

برداشت دیگری که از ماتریس لاپلاسیان کاهش یافته می توان داشت این است که $\lambda_{\min}$ در مولفه متقارن G_1 از ماتریس لاپلاسیان مولفه متقارن و $\lambda_{\max}$ در مولفه متقارن G_2 از ماتریس لاپلاسیان کاهش یافته این زیرگراف حاصل می شود. همانطوری که می دانیم کران بالا و پایین در بسیاری از مسائل مهندسی از اهمیت خاصی برخوردار است. به عنوان مثال "در رشته مهندسی برق و مهندسی پزشکی حداکثر و حداقل پالس یا سیگنال فرستاده شده در چه محدوده ای می تواند باشد؟" چنین برداشتی به طور شهودی نیز قابل دریافت می باشد یعنی از مولفه متقارن مشهود است که: از نظر تعداد یال ها مولفه متقارن G_2 حجم بیشتری را دارا می باشد و در نتیجه یکی از ریشه های $|G_2| = 0$ ماکزیمم مقدار ویژه را دارا می باشد. و به همین دلیل $|G_1| = 0$ مینیمم مقدار ویژه را دارا می باشد.

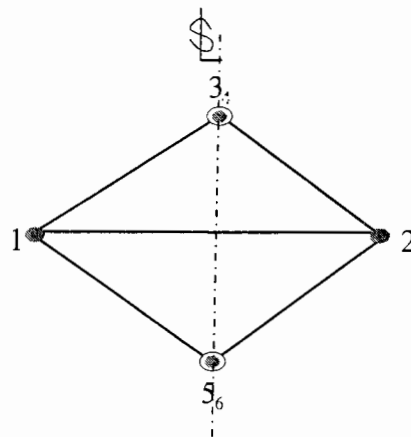
۵-۴- تقارن به فرم سه در گراف مرکب:

همانطوری که می دانیم، خط تقارن در این فرم، از راس ها^(۱) می گذرد، علاوه بر راس ها، خط تقارن از یال رابط نیز عبور می کند.

^(۱) vertex

در گراف مرکب خط تقارن علاوه بر راس های ساده و یال ها، از راس مرکب عبور می کند. بر چسب گذاری مدل، بر اساس برچسب گذاری گراف های با راس های ساده در فرم سه می باشد، اما در اینجا مولفه ها کمی متفاوت عمل می کنند که تشریح می شود.

مثال ۵-۶- گراف زیر دارای تقارن به فرم سه می باشد، که خط تقارن از دو راس مرکب 5_4 و 5_6 و یال رابط ۱-۲ می گذرد.



شکل ۵-۷- گراف مرکب با تقارن به فرم سه

ماتریس لاپلاسیان گراف به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$L_G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس لاپلاسیان مدل به صورت زیر می باشد:

$$\lambda_G = \{ 0, 4.7321, 4.0000, 3.4142, 1.2679, 0.5858 \}$$

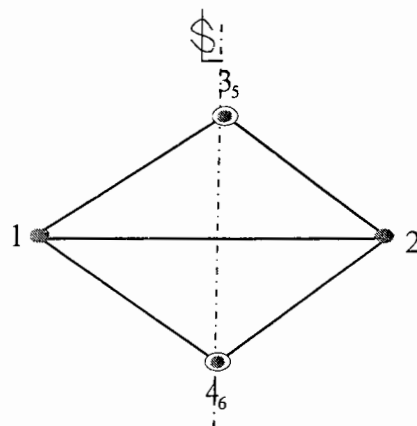
زیرماتریس کاهش یافته ی این گراف به صورت زیر می باشد:

$$L_{G_2} = L_H - L_{H'} = [H] - [H'] = [4] \quad , \quad L_{G_3} = \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{G_3} = \{ 0, .5858, 1.2679, 3.4142, 4.7321 \}$$

$$\lambda_{\min} = 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = 4.7321$$

حال مدل گراف را به گونه ای دیگر برچسب گذاری می کنیم و مقادیر ویژه را بدست می آوریم. در این حالت ابتدا راس های داخلی و سپس راس های خارجی راس مرکب برچسب گذاری می شوند.



شکل ۵-۸- گراف مرکب با عوض کردن ترتیب برچسب گذاری

ماتریس لاپلاسیان گراف مرکب G به صورت زیر می باشد:

$$L_G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آید:

$$\lambda_G = \{ 0, 4.7321, 4.0000, 3.4142, 1.2679, 0.5858 \}$$

راس خارجی راس مرکب در تقارن به فرم سه خاصیت جابجایی دارد، البته برتری برچسب-گذاری، در مسایل کاربردی مشخص می شود. این وضعیت اغلب در راس های هم موقعیت^(۱) پیش می آید، زیر ماتریس های این گراف، در این حالت به صورت زیر می باشد:

$$L_{G_2} = L_H - L_{H'} = [H] - [H] = [4] \quad , \quad L_{G_3} = \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه ماتریس L_G, L_{G_2}, L_{G_3} به صورت ذیل حاصل می شود.

$$\lambda_{G_2} = 4 \quad , \quad \lambda_{G_3} = \{ 0, 4.7321, 3.4142, 1.2679, .5858 \}$$

$$\lambda_G = \{ 0, 4.7321, 4, 3.4142, 1.2679, .5858 \}$$

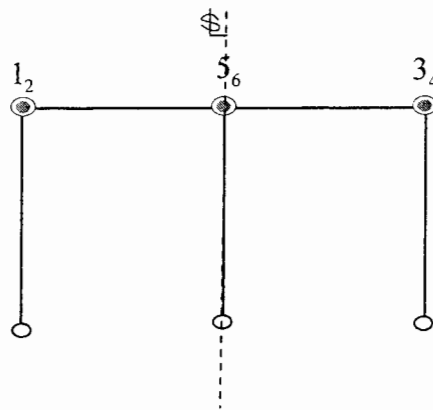
$$\lambda_{\min} = 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = 4.7321$$

همانطوری که ملاحظه می شود، مقدار ویژه بدست آمده در G اجتماع مقادیر ویژه بدست آمده از مولفه های متقارن G_2 و G_3 می باشد. و کران بالا و کران پایین مقدار ویژه بدست آمده در مولفه متقارن G_3 قرار می گیرد.

برای روشن شدن موضوع مثال دیگری مورد بحث و بررسی قرار می گیرد.

مثال ۵-۷- مدل گراف مطابق شکل (۵-۹) دارای ۶ راس می باشد، که شامل سه راس مرکب و سه راس تو خالی می باشد که سه راس تو خالی برچسب گذاری نمی شوند و خط تقارن از یکی از راس های مرکب عبور می کند.

^(۱) homoposition



شکل ۵-۹- مدل گراف مرکب با تقارن به فرم سه

ماتریس لاپلاسیان گراف:

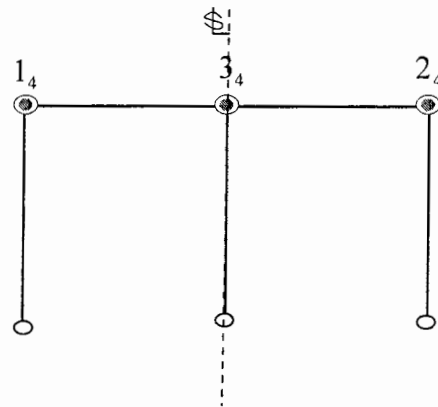
$$L_G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} [H] &= \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & [H'] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [F] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & [s] &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ [U] &= \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & [G_2] &= [H] - [H'] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} & [G_3] &= \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

اگر سه راس خارجی دارای موقعیت یکسان باشند یعنی ارتباط آنها با راس های ۱، ۲ و ۳ یکی باشد،

بنابراین برچسب گذاری مدل به صورت شکل (۵-۱۰) خواهد بود:



شکل ۵-۱۰- راس خارجی هم موقعیت با راس ۲، ۳ و ۴

در گراف با راس هم موقعیت، ابتدا راس های داخلی راس مرکب برچسب گذاری می شود و سپس راس خارجی (هم موقعیت) برچسب گذاری می شود. اگر دقت شود برای برچسب گذاری راس خارجی ۴، همانند تقارن به فرم سه، ابتدا راسهای یک نیمه و راسهای نیمه ی دوم و سپس راسهای مرکزی برچسب گذاری می شوند.

در این حالت ماتریس لاپلاسیان گراف به صورت زیر خواهد بود:

$$L_G = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$[H] = 3 \quad [H'] = 0 \quad [F] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

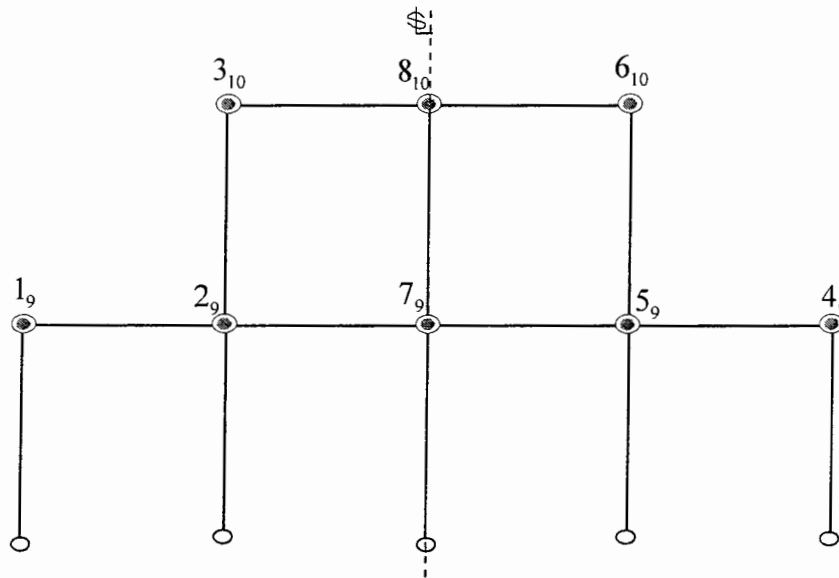
$$[U] = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad [G_2] = [H] - [H'] = [3] \quad [G_3] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{G_2} = \{ 3 \} \quad , \quad \lambda_{G_3} = \{ 5, 4.3028, 0.6972 \}$$

$$\lambda_G = \{ 5, 4.3028, 3, 0.6972 \}$$

بعضی دیگر از این نوع را مورد بررسی قرار می دهیم.

مثال ۵-۸- در گراف مطابق شکل (۵-۱۱) حاضر گره های خارجی ۹ و ۱۰ گره های هم موقعیت می باشند. با توجه به برجسب گذاری، ماتریس لاپلاسیان به فرم سه خواهد بود.



شکل ۵-۱۱- گراف مرکب با دو راس هم موقعیت

ماتریس لاپلاسیان گراف مرکب با راس هم موقعیت صورت زیر می باشد:

$$L_G = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

زیرماتریس های حاصله به فرم زیر می باشد.

$$[H] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad [H'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[U] = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad [G_2] = [H] - [H'] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$[G_3] = \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{G_2} = \{ 5.7321, 3, 2.2679 \}$$

$$\lambda_{G_3} = \{ -1.3661, 6.4548, 5.7862, 4.5466, 3.8446, 3.4467, 1.2872 \}$$

$$\lambda_G = \{ 6.4548, 5.7862, 5.7321, 4.5466, 3.8446, 3.4467, 3, 2.2679, 1.2872, -1.3661 \}$$

$$\lambda_{\min} - 1.3661 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} = 6.4548$$

همانطوری که از مدل گراف مثال (۷-۵) و مثال (۸-۵) مشاهده می شود، ابتدا راس های داخلی برچسب گذاری می شود و سپس راس خارجی (راس هم موقعیت) برچسب گذاری می شود.

۵-۴-۱- مولفه های متقارن گراف مرکب:

اهم توجه در گراف های مرکب اتمهای گراف می باشد و این بدلیل نقشی است که راس خارجی در چنین گراف هایی بازی می کند. لازم به ذکر است که راس مرکب زمانی برچسب گذاری نمی شود که راس داخلی، تو خالی و راس خارجی به صورت نقطه چین نمایش داده شود. اتمهای مدل گراف مرکب در شکل (۵-۱۰) در شکل های ۵-۱۲ (الف) و (ب) نمایش داده می شوند.

در این وضعیت همان شرایط قبلی در گراف با راس های معمول را دنبال می شود، تنها تفاوت در این است که در راس مرکب مربوطه که خط تقارن آن را قطع می کند، راس داخلی مرکزی به راس داخلی نیمه ی سمت راست، یعنی G_3 ، یک انتقال یک سویه، خواهد داشت. این انتقال یک سویه، از طرف راس مرکزی به راس متقارن که متصل به راس مرکزی می باشد، در مولفه متقارن G_3 اعمال می شود.

۵-۴-۱-۱- انتقال یک سویه:

نمایش ماتریسی چنین انتقالی به صورت زیر می باشد:



$$L_{1,1} = 2$$

$$L_{2,2} = L_{3,3} = L_{4,4} = 1$$

$$L_{1,2} = L_{3,4} = L_{2,1} = L_{4,3} = -1$$

نمایش ماتریسی مدل به صورت زیر خواهد بود:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

اینک به نمایش مولفه های شکل (۵-۹) توجه کنید.



شکل ۵-۱۲- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) مولفه متقارن G_2

که زیرماتریس های کاهش یافته ی این مولفه ها در مثال های (۷-۵) نشان داده شده است. نکته بسیار مهمی که درباره تقارن های به فرم سه و حتی فرم دو با آن مواجه می شویم، خاصیت بسیار ویژه ای است که راس مرکب دارا می باشد. همانطوری که در مثال ۷-۵ شکل (۵-۱۰) مشهود است، راس ۴، راس خارجی راس مرکب می باشد که با راس ۱، ۲ و ۳ را هم موقعیت است. بنابراین راس خارجی راس مرکب، خاصیت «هم موقعیت»^(۱) بودن یک یا چند راس با راس های دیگر را دارد، که البته بسته به کاربرد در مدل، وضعیت های مشخصی را دارا می باشد. در این وضعیت مولفه حاصل دارای انتقال یک سویه، خواهد بود؛ یعنی در این حالت در راس مرکب مربوطه که خط تقارن آن را قطع می کند، راس داخلی به راس داخلی مولفه متقارن G_3 ، یک انتقال یک سویه، خواهد داشت. مطابق با آنچه که در بخش (۴-۵) مطرح شد، این انتقال یک سویه، از طرف راس داخلی به راس مشابه در دو مولفه متقارن G_2 و G_3 که متصل به راس مرکزی می باشند، در مولفه متقارن G_3 اعمال می شود و یک انتقال دو سویه از طرف راس های هم موقعیت در مولفه متقارن G_3 ، توسط آندسته از راس هایی که بوسیله ی خط تقارن قطع نمی شوند، اعمال می شود. در مولفه G_2 راسی که خط تقارن از آن عبور می کند با راس توخالی نمایش داده می شود. در مورد راس مرکب نیز راس داخلی توخالی و راس خارجی با خط چین نمایش داده می شود. در این وضعیت نیز راس توخالی مرکب، راسی است که برچسب گذاری نمی شود ولی به یالهای گراف اتصال دارد.

^(۱) homoposition

۵-۴-۱-۲- انتقال دو سویه:

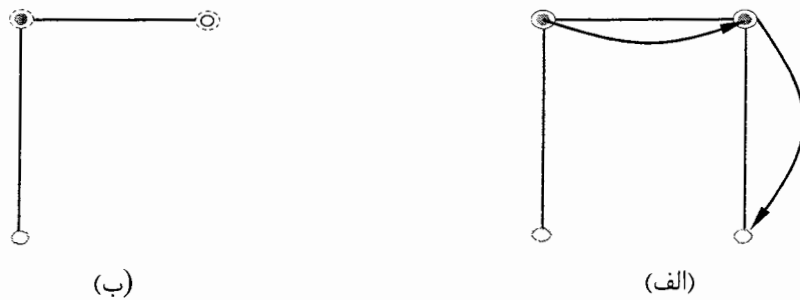


$$L_{4,4} = L_{2,2} = 2$$

$$L_{2,1} = L_{4,3} = -1$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

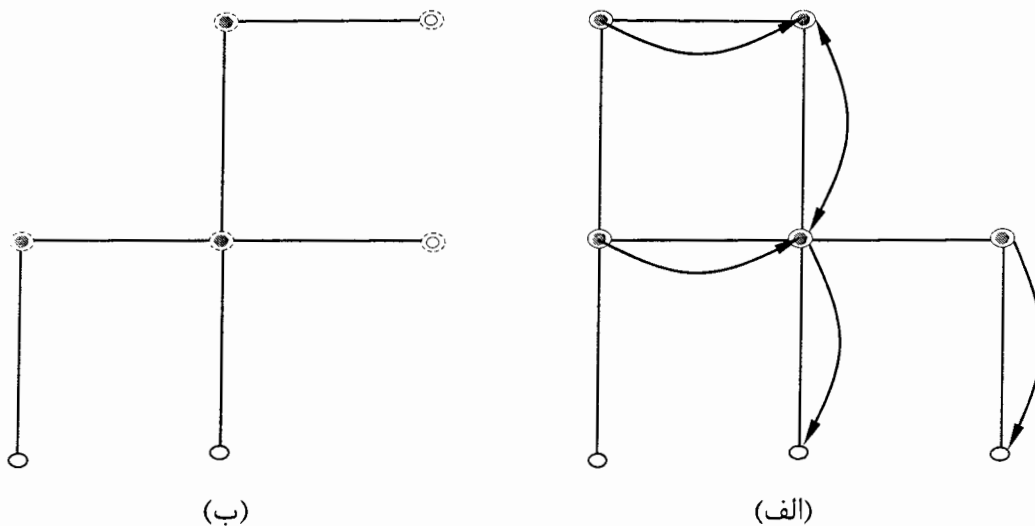
در واقع چون خط تقارن راس مرکب را قطع می کند بنابراین دو انتقال یک سویه داریم، که یکی از این انتقال ها از طریق راس داخلی راس مرکب به راس داخلی راس مرکب مجاور در مولفه G_3 صورت می گیرد. در راس ۴، که راس خارجی راس مرکب می باشد و با راس های ۱، ۲ و ۳ هم موقعیت می باشد، خط تقارن از راس مرکب 3_4 عبور می کند، که در تقارن به فرم متناظر یک انتقال یک سویه در مولفه متقارن خواهد بود، در ابتدا تصور می شود که این انتقال یک سویه از راس 3_4 به راس 2_4 باشد، اما وضعیت بوجود آمده حالتی از اتصال دوبل را برای گره ۴ (از ۴ به ۴) در مولفه G_3 به دنبال خواهد داشت و تناقض در فرم سه ایجاد خواهد کرد، که البته شرایط زیرماتریس های کاهش یافته نیز نقض چنین وضعیتی را تأیید می کند. چون راس خارجی ۴، راسی است که بوسیله ی خط تقارن قطع می شود و از طرفی به راس های گراف در دو نیمه اتصال دارد؛ بنابراین در مولفه G_2 به صورت نقطه چین نشان داده می شود یعنی برچسب گذاری نمی شود اما به راس های گراف اتصال دارد. راس هم موقعیت (در اینجا راس ۴) در یک راس نسبت به خط تقارن در صورتی که شرایط فرم سه را دارا باشد، یک انتقال را به همراه خواهد داشت. مولفه های G_2, G_3 ، مثال (۷-۵) شکل (۹-۵) در شکل زیر نشان داده شده اند.



شکل ۵-۱۳- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) مولفه متقارن G_2

همانطوری که بیان شد، مشاهده می شود که چون راس ۴ یک راس هم موقعیت می باشد، و خط تقارن از آن می گذرد، در مولفه متقارن G_2 راس خارجی به صورت نقطه چین نشان داده می شود و در محاسبات لحاظ نمی شود. در مولفه متقارن G_3 از راس خارجی راس مرکب 3_4 به راس تو خالی یک انتقال یک سویه وجود دارد.

به مولفه های مثال (۵-۸) شکل (۵-۱۱)، توجه کنید.

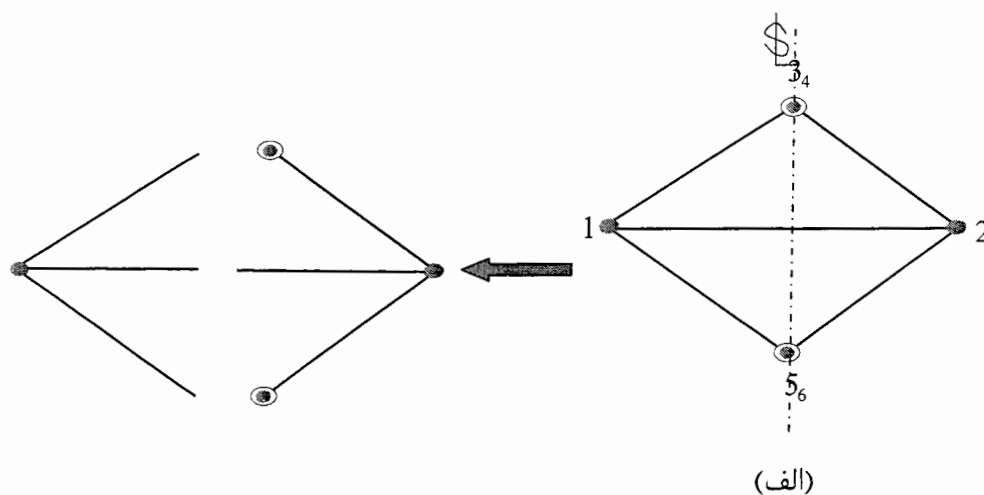


شکل ۵-۱۴- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) مولفه متقارن G_2

۵-۵- اتمهای گراف:

در این قسمت سعی بر آن است تا چگونگی پارش و تشکیل اتمهای گراف را توضیح داده شود. در این راستا مثال (۵-۶) شکل (۵-۷) مورد توجه و بررسی قرار می گیرد. این گراف دارای دو خط

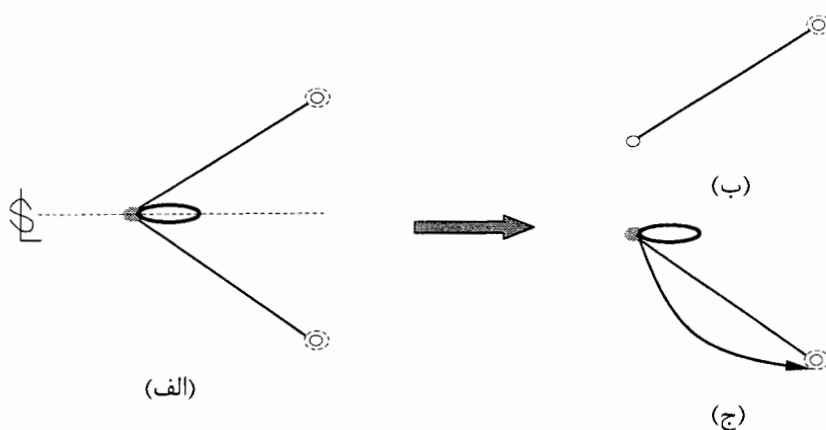
تقارن است لکن قصد آن است که از خط تقارنی که در شکل مشخص شده اتمهای گراف را تشکیل شود. در ابتدا گراف به دو نیمه پارش می شود و به دو مولفه متقارن G_2 و G_3 کاهش می یابد.



(ب)

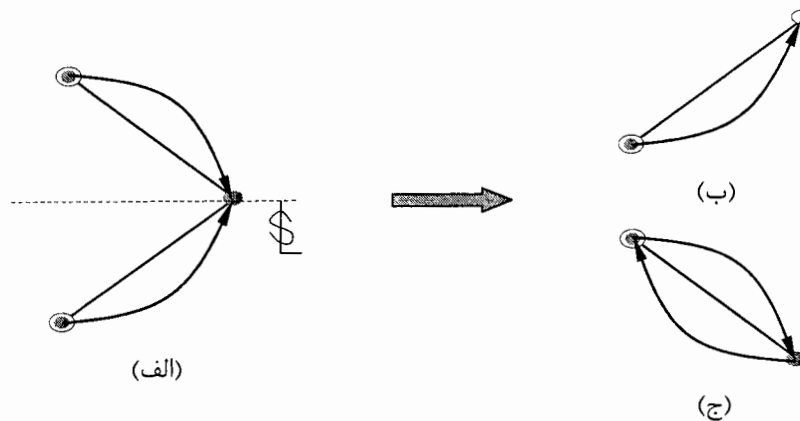
شکل ۵-۱۵ مدل گراف (ب) نیمه های پارش یافته

مولفه متقارن G_2 خود دارای تقارن به فرم سه می باشد. و دارای دو اتم $G_{2_{G_2}}$, $G_{2_{G_3}}$ می باشد، که مولفه متقارن $G_{2_{G_2}}$ دارای دو راس توخالی است و در محاسبات لحاظ نمی شود.



شکل ۵-۱۶ (الف) مولفه متقارن G_2 (ب) اتم $G_{2_{G_2}}$ (ج) اتم $G_{2_{G_3}}$

مولفه متقارن G_3 نیز دارای تقارن به فرم سه می باشد و دارای دو اتم G_{3G_2} , G_{3G_3} می باشد. با توجه به بخش (۴-۵) در تقارن به فرم سه، خط تقارن از گره مرکزی عبور می کند در نتیجه اتم G_{3G_2} به صورت یک راس توخالی نشان داده می شود و در اتم G_{3G_3} یک انتقال از راس مرکزی به راس مجاور صورت می گیرد



شکل ۵-۱۷- (الف) مولفه متقارن G_3 (ب) اتم G_{3G_2} (ج) اتم G_{3G_3}

ماتریس لاپلاسیان اتم های گراف و مقادیر ویژه آنها به صورت زیر می باشد.

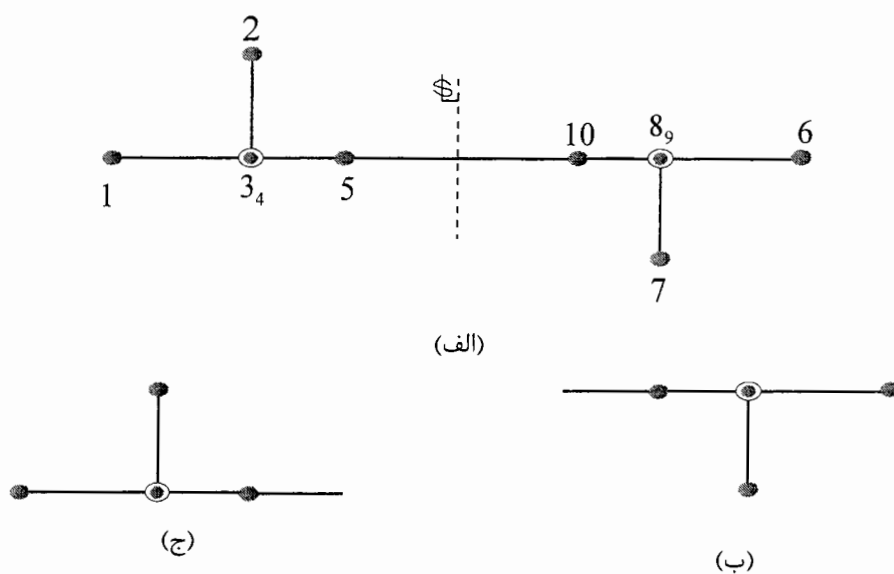
$$L_{G_{3G_3}} = [4] \rightarrow \lambda_{G_{3G_3}} = \{ 4 \} \quad L_{G_{3G_2}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{G_{3G_2}} = \{ 0.5858, 3.4142 \}$$

$$L_{G_{3G_3}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{G_{3G_3}} = \{ 4.7321, 1.2679, 0 \}$$

بنابراین یک گراف مرکب 6×6 به سه اتم 1×1 و 2×2 و 3×3 تقسیم می شود.

مثال دیگری را مورد بررسی قرار می گیرد.

مثال ۵-۸- این گراف دارای تقارن به فرم دو می باشد. در ابتدا گراف به دو نیمه پارش می یابد.



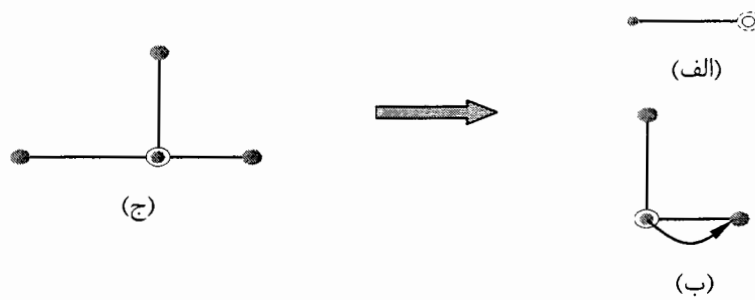
شکل ۵-۱۸- (الف) مدل گراف مرکب با تقارن به فرم دو (ب) و (ج) نیمه های پارش یافته

مولفه های متقارن G_1 و G_2 تشکیل می شوند. چون مولفه متقارن G_2 دارای تقارن دیگری نمی باشد، خود اتم می باشد.



شکل ۵-۱۹- (الف) مولفه متقارن G_2 (ب) مولفه متقارن G_1

مولفه متقارن G_1 دارای تقارن به فرم سه می باشد و به دو اتم G_{1G_2} و G_{1G_3} کاهش می یابد.



شکل ۵-۲۰- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) اتم G_{1G_2} (ج) اتم G_{1G_3}

حال به محاسبه ی ماتریس لاپلاسیان اتم های حاصله می پردازیم. برای بدست آوردن ماتریس لاپلاسیان به مثال توجه شود.

$$L_{G_{1G_2}} = [1] \quad \lambda = 1$$

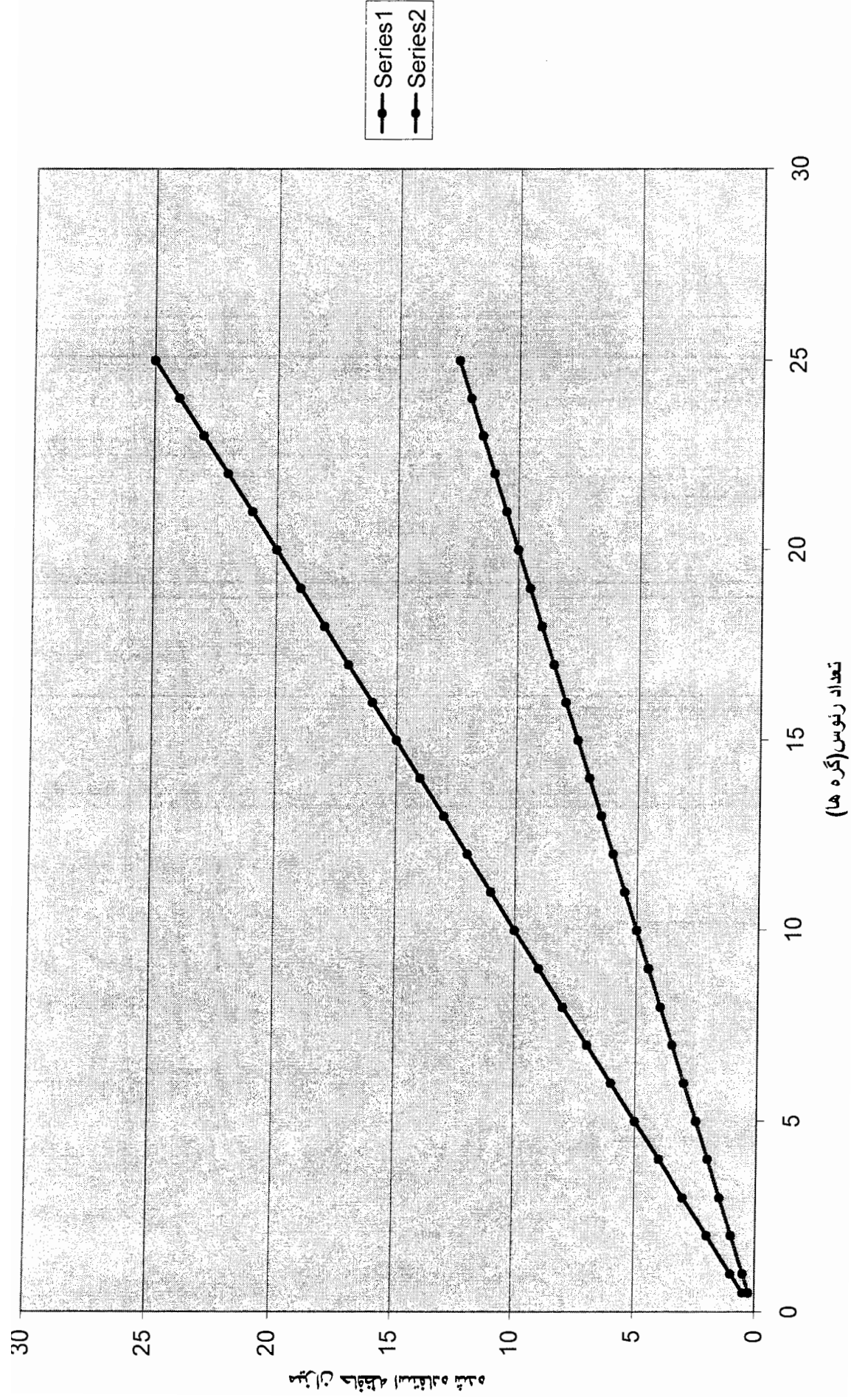
$$L_{G_{1G_3}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{ 0, 1+0.0000i, 1-0.0000i, 5 \}$$

$$L_{G_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\lambda = \{ 5.1774, 2.6784, 1, 1, 0.1442 \}$$

بنابراین یک گراف مرکب 10×10 به سه اتم 1×1 ، 4×4 و 5×5 تقسیم می شود. و می توان با محاسبه ی اتمهای گراف، بدون اینکه به محاسبه گراف اصلی بپردازیم، دترمینان و در نهایت مقادیر ویژه ی آن را بدست آوریم و از طریق اتمهای گراف ریشه های مساله را بیابیم.

در این قسمت نموداری مقایسه ای به کمک نرم افزار اکسل بر اساس تعداد رئوس و میزان حافظه استفاده شده آورده شده است. در نمودار با شیب کمتر از تقارن استفاده شده است. همانطوری که از نمودار ملاحظه می شود با کاهش تعداد رئوس در تقارنهای کانونیکال میزان حافظه استفاده شده به طور چشم گیری کاهش می یابد.



بخش دوم :

کاربرد ماتریس لاپلاسین در مسائل
سازه‌ای

فصل

کاربرد ماتریس لاپلاسیان در تقارن -
های به فرم دو و سه در سیستمهای
مکانیکی جرم - فنر

۶-۱- مقدمه:

در این فصل کاربرد ماتریس های لاپلاسیان را به کمک مدل گراف معمولی در سیستم های مکانیکی جرم- فنر مورد بررسی قرار می گیرد. در تحلیل مکانیکی این سیستم ها نیز از مدل گراف و ماتریس های لاپلاسیان به فرم دو و سه استفاده شده است. طرح این موضوع مقدمات بحث در رابطه با کاربرد ماتریس لاپلاسیان در تقارن های به فرم دو و سه را برای فصل هشتم فراهم می آورد. علاوه بر این، فصل حاضر، با استفاده از خاصیت تقارن، مدل گراف به دو مولفه متقارن تجزیه می گردد و محاسبات بر اساس ماتریس های لاپلاسیان این مولفه ها انجام می پذیرد

۶-۲- ماتریس های لاپلاسیان برای فرم های متفاوت:

همانطوری که ذکر شد ماتریس لاپلاسیان $L(G)$ ، یک ماتریس مرتبط با گراف G می باشد که مقادیر ویژه ای که از آن تشکیل می شود به صورت طیف $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ می باشد. ارتباط جالبی بین ویژگی های یک گراف و طیف لاپلاسیان وجود دارد. از آنجایی که یک گراف مدل اصولی^(۱) از یک سیستم ارتعاشی جرم- فنر می باشد، بنابراین مقادیر ویژه ای حاصل از گراف در این بخش دارای اهمیت زیادی می باشد [۳۴].

گراف وزندار گرافی است که اعضای آن دارای وزن باشند. در واقع گراف های معمولی و مرکب در فصل سه و چهار و پنج که مورد بحث و بررسی قرار گرفتند، گراف های وزندار هستند که اعضای آن دارای وزن واحد می باشند.

ماتریس لاپلاسیان برای گراف های وزندار $L(G) = [l_{ij}]_{N \times N}$ از یک گراف G ، یک ماتریس $N \times N$ است که به صورت زیر تعریف می شود [۵].

$$L(G) = D(G) - A(G)$$

^(۱)underlying

جایی که N تعداد راسهای گراف می باشد یعنی:

$$L_{ij} = \begin{cases} \text{مجموع وزنه های اعضای متصل} & \text{برای } n_i \text{ متصل به } n_j \\ \text{به } n_i \text{ تا } n_j - (n_j) & \\ \text{مجموع وزنه های اعضای متصل به } n_i & \text{برای } n_i = n_j \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در گراف های وزن دار، راسها هم می توانند دارای وزن باشند که در ماتریس لاپلاسیان تأثیری ندارد.

وقتی وزن های اعضا به صورت واحد در نظر گرفته می شود، بنابراین $D(G)$ و $A(G)$ به ترتیب ماتریس درجه و ماتریس همجوار G می باشند.

۶-۳- تقارن در یک سیستم ارتعاشی جرم - فنر:

یک سیستم متقارن در شکل (۶-۱-الف) نشان داده شده؛ این سیستم متقارن است، و ویژگی - هایش می تواند با استفاده از زیرسازه های^(۱) مورد بررسی قرار گیرد. این ویژگی ها شامل جرم m_1 و سختی k_1 می باشد. جرم ها، سختی ها و اتصالاتشان بصورت متقارن نسبت به محور تقارن می - باشند. این سیستم به صورت دو زیرسیستم^(۲) مجزا که با یک فنر به یکدیگر متصل اند، فنر اتصال^(۳)، در شکل (۶-۱-ب) نشان داده شده است. این سیستم دارای دو درجه آزادی v_1 و v_2 می باشد. فرکانس های طبیعی و مودهای طبیعی به صورت زیر بدست می آیند [۱۲]:

$$([k] - \omega^2 [m])\{\phi\} = \{0\} \quad (۶-۲)$$

که در این حالت برای بدست آوردن پاسخ مساله دترمینان مسئله ویژه را مساوی با صفر قرار می دهیم.

$$[k] - \omega^2 [m] = 0 \quad (۶-۲)$$

^(۱) substructure

^(۲) subsystem

^(۳) conjunctive spring

جایی که k ماتریس سختی و m ماتریس جرم سیستم می‌باشد. مقدارویژه و بردارویژه به ترتیب با ω_i و ϕ_i نشان داده می‌شود.

ماتریس سختی این سیستم به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

همانطوری که ملاحظه می‌شود این ماتریس دارای تقارن به فرم دو است که در آن طبق روابط حاکم به فرم دو است:

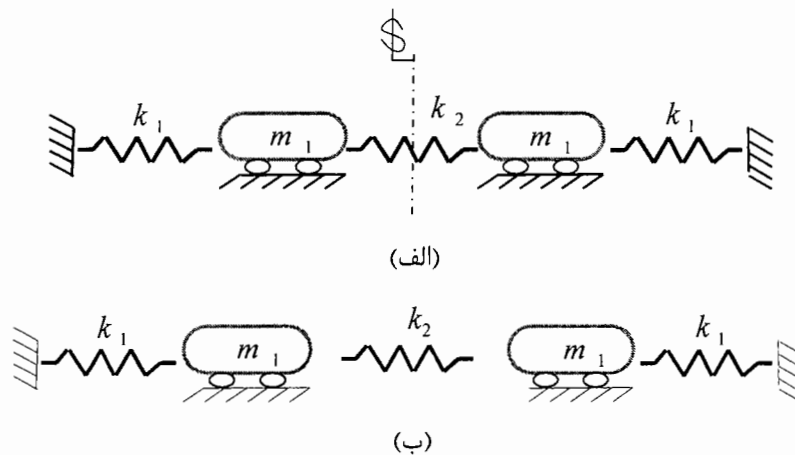
$$H = [k_1 + k_2]$$

$$H' = [-k_2]$$

اگر ماتریس جرم سیستم تشکیل شود:

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{bmatrix}$$

ماتریس $[M]$ هم دارای تقارن به فرم یک است که حالتی از تقارن به فرم دو می‌باشد.



شکل ۶-۱- (الف) یک سیستم متقارن دینامیکی و (ب) دو زیرسیستم همراه با یک فنر اتصال

از آنجایی که $[k]$ و $[m]$ هر دو متقارن به فرم دو هستند بنابراین، طبق رابطه‌ی (۶-۱) لاپلاسیان ماتریس $[k] - \omega^2 [m]$ به فرم دو می‌باشد:

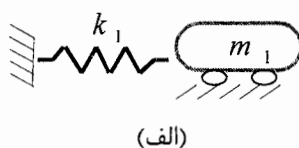
$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 - \omega^2 m_1 \end{bmatrix}$$

بدلیل تقارن در ماتریس سختی و ماتریس جرم، ماتریس رابطه ی (۶-۲) دارای تقارن به فرم دو است

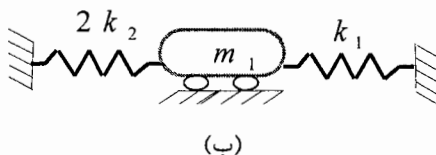
با جایگزینی λ به جای $\omega^2 m_1$ ، برای محاسبه ی فرکانسهای طبیعی بایستی ماتریس فوق را برابر صفر قرار داد.

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2) - \lambda & -k_2 \\ -k_2 & (k_1 + k_2) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

چون ماتریس سختی لاپلاسیان به فرم دو می باشد، بنابراین می توان مقادیر ویژه اش را با استفاده از زیرماتریس های آن محاسبه نمود.



شکل ۶-۲- زیرسیستم متناظر با زیرماتریس G_2



شکل ۶-۳- زیرسیستم متناظر با زیر ماتریس G_1

$$[G_1] = [k_1 + k_2 + k_2] = [k_1 + 2k_2]$$

$$[G_2] = [k_1 + k_2 - k_2] = k_1$$

زیرماتریس های G_1 و G_2 هر کدام دارای بخشی از مقادیر ویژه می باشند. زیرا این زیرماتریس ها^(۱) طبیعی شبیه به ماتریس سختی کلی دارند، با این زیرماتریسها، می توان دو زیرسازه متناظر با آنها که در شکل (۶-۳- الف) و (ب) را بدست آورد. بنابراین برای بدست آوردن مقادیر ویژه λ ، دو مقدار زیر را خواهد داشت:

$$\lambda = \begin{cases} k_1 \\ k_1 + 2k_2 \end{cases}$$

^(۱) submatrice

به سازه متناظر با زیرماتریس نشان داده شده در شکل (۳-۶) (الف) و (ب) زیرسیستم های ارتعاشی^(۲) می گویند.

این زیرسیستم های ارتعاشی، هر یک بخشی از ویژگی های سیستم ارتعاشی را شامل می شوند. بنابراین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه سازه کلی می تواند با استفاده از زیرسیستم های نشان داده شده در شکل (۳-۶) محاسبه شود.

برای یک سیستم ارتعاشی با N درجه آزادی، m (ماتریس جرم) و k (ماتریس سختی) ماتریس ها $N \times N$ می باشند و اگر سازه متقارن باشد، زیرماتریس های متناظر، ابعاد $\frac{N}{2} \times \frac{N}{2}$ را خواهند داشت. برای بررسی مدهای ارتعاشی سیستم ها و زیرسیستم ها:

ماتریس G به فرم دو را به صورت مقابل می توان نوشت:

$$G = \begin{bmatrix} H & H' \\ H' & H \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه متناظر ماتریس G ، $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ و بردار ویژه متناظر ماتریس

G ، $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots, \phi_n$ می باشد. بردارهای ویژه را به دو گروه می توان تقسیم بندی کرد:

گروه اول: این بردارهای ویژه با $\frac{N}{2}$ ورودی (درایه) تکرار می شوند.

گروه دوم: این بردارهای ویژه با $\frac{N}{2}$ ورودی (درایه) با علامت معکوس تکرار می شوند.

اگر ماتریس G متقارن به فرم دو باشد، بنابراین زیرماتریس های کاهش یافته به صورت زیر می -

باشند:

$$G_1 = H + H' \quad G_2 = H - H'$$

بردارهای ویژه G_1 ، گروه بردارهای ویژه نوع اول و بردارهای ویژه G_2 ، گروه بردارهای ویژه نوع

دوم می باشند.

بنابراین اگر بردارهای ویژه ماتریس G_1 (با $\frac{N}{2}$ ورودی) قابل محاسبه هستند، بنابراین G به آسانی از اجتماع آن با $\frac{N}{2}$ ورودی با علامت معکوس که از ماتریس G_2 قابل محاسبه است بدست می آید.

۴-۶- مدل گراف یک سیستم جرم - فنر:

مدل ریاضی سیستم دینامیکی شامل جرم و فنر می باشد. این جرم ها متصل به فنرها می باشند.

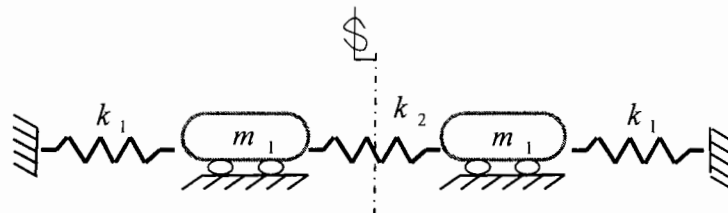
همانطوری که در مدل ریاضی یک گراف وزن دار به صورت زیر تعریف می شود:

۱. تکیه گاه ها در مدل ریاضی، راس های (راس های) خنثی در مدل گراف می باشند.

۲. برای هر جرمی یک راس، در مدل گراف مربوطه در نظر گرفته می شود و وزنش اندازه جرم می باشد.

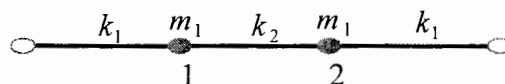
۳. برای هر فنری یک یال در نظر گرفته می شود و وزنش میزان سختی فنر می باشد.

سیستم دینامیکی شکل (۴-۶) را در نظر بگیرید.



شکل ۴-۶- سیستم مکانیکی جرم - فنر

مدل گراف سیستم شکل (۴-۶) در شکل زیر نمایش داده می شود.



شکل ۴-۵- مدل گراف G_1 متناظر با سیستم ارتعاشی

مشاهده می شود که یک گراف وزن دار هم ارز با سیستم اصلی است برای سیستم دینامیکی،

رابطه (۳-۶) به صورت ذیل برقرار است:

$$K\phi = \omega^2 m\phi \Rightarrow [K - \omega^2 m] = 0 \quad (۳-۶)$$

رابطه ی (۳-۶) یک مسئله مقدار ویژه می باشد که ω مقدار ویژه و ϕ بردار ویژه می باشد. در سیستم های جرم- فنر، جرم ها متمرکز هستند در نتیجه ماتریس ماتریس m به صورت یک ماتریس قطری می باشد، بنابراین رابطه (۳-۶) به صورت ذیل خواهد شد.

$$[[K - m] + m - \omega^2 m] \phi = 0$$

اگر $[K - m] = [L_T]$ و $\lambda I = m\omega^2 - m$ ، بنابراین:

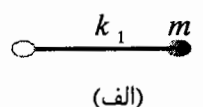
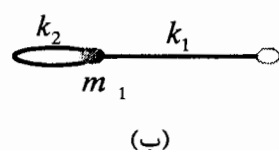
$$[L_T - \lambda I] = 0 \quad (۴-۶)$$

ماتریس (۴-۶) یک مسئله مقدار ویژه، متناظر با مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه L_T می باشد. این ارتباط می تواند با مدل گراف متناظر مرتبط باشد. اگر L_T لاپلاسیان تعمیم یافته^(۱) گراف باشد [۳۴]، بنابراین مسئله بالا یک مسئله ویژه^(۲) یک گراف می باشد.

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار شکل (۵-۶) به صورت شکل زیر می باشد:

$$L = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 \end{bmatrix}$$

ماتریس لاپلاسیان هم ارز با ماتریس سختی سیستم ارتعاشی شکل (۶-۱-الف) می باشد در نتیجه می توان دریافت که در هر سیستم ارتعاشی، ماتریس سختی هم ارز با ماتریس لاپلاسیان مدل گراف متناظر با آن می باشد. بنابراین، اگر سازه ای دارای تقارن به فرم دو و یا سه باشد ماتریس لاپلاسیان و نهایتاً مدل گراف متناظر آن هم آن تقارن را داراست. این هم ارزی باعث می شود که هر خاصیتی را که ماتریس لاپلاسیان هم ارز و نهایتاً مدل گراف متناظر دارا باشد، مانند محاسبه ی دترمینان، مقادیر ویژه و اتم و...، بتوان در ماتریس سازه ای یا سیستم ارتعاشی آن به کار برد و بالعکس. با توجه به توضیحات فوق مدل گراف شکل (۵-۶) به صورت دو مولفه متقارن در شکلهای (۶-۶) - (الف) و (ب) نمایش داده می شود.



شکل ۶-۶ - (الف) مولفه متقارن G_1 - (ب) مولفه متقارن G_2

^(۱) generalized laplacian

^(۲) eigenproblem

ماتریس لاپلاسیان هریک از این مولفه ها به صورت زیر می باشد.

$$L_{G_1} = [k_1] \quad \lambda_1 = k_1 \quad m_1 \times \omega_1^2 = k_1 \quad \Rightarrow \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$$

$$L_{G_2} = [k_1 + 2k_2] \quad \lambda_2 = k_1 + 2k_2 \quad m_2 \times \omega_2 = k_1 + 2k_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k_2}{m_2}}$$

که زیرماتریسهای کاهش یافته همان ماتریس های سختی زیرسیستم ها در مدل ریاضی می باشند. به راس با وزن m_1 یک خود- حلقه وزندار با وزن k_2 دابل شده است [۱۶].

اگر زیرسیستم های متناظر با این مولفه ها ترسیم شود، همان زیرسیستم های شکل (۲-۶) و (۳-۶) حاصل می شود. بنابراین تعریف این زیرسازه ها عملی است. یعنی اگر نتوان مدل گراف متناظر سیستم را توصیف کرد، نمی توان خاصیت های گراف را به آن نسبت داد و یک زیرسازه یا زیرسیستم را طراحی و مقادیر مربوط به مساله را بدست آورد. حتی اگر به نظر چنین عملی درست باشد؛ چون تناظر گرافی برقرار نیست روابط ماتریسی گراف را نمی توان به آن نسبت داد و در محاسبه به کار برد.

۵-۶- سیستم های ارتعاشی با تقارن به فرم دو:

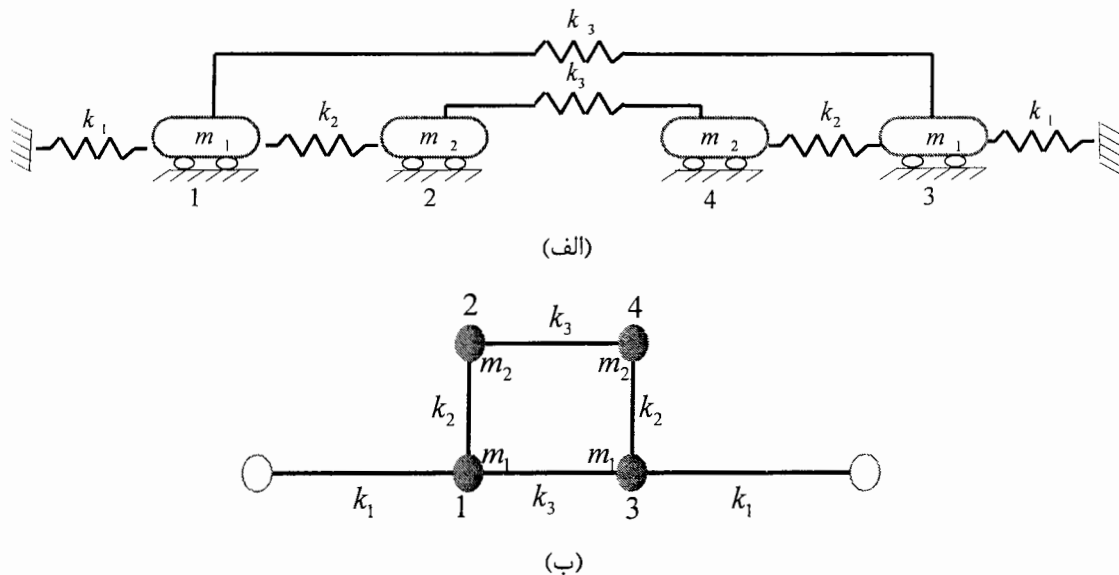
ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته برای گراف شکل (۵-۶) دارای فرم زیر می باشد:

$$L_T = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_1 + k_2 - m_1 \end{bmatrix}$$

توضیح ماتریسی به این صورت می باشد که در گراف شکل (۵-۶) در درایه ی (۱, ۱) یالهای متصل به راس ۱، k_1 و k_2 می باشند، بنابراین $k_1 + k_2 = (1, 1)$ و به همین ترتیب طبق تعریف ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار $-k_2 = (1, 2)$. همچنین از نظر اثر وزنی ماتریس جرم، راس $m_1 = (1, 1)$ و $0 = (1, 2)$ چون جرم m ، جرم متمرکز می باشد و طبق رابطه ی (۴-۶) ماتریس L_T به صورت فوق بیان می شود. طریقه بدست آوردن این ماتریس به همان طریقی می باشد که در توضیح ماتریس شکل (۱-۶) آورده شد و اگر چنین نباشد، همارزی ماتریس سختی و ماتریس لاپلاسیان رعایت نشده است.

برای یک گراف متقارن، برچسب گذاری مناسب راس ها، ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته با فرم دو را نتیجه می دهد.

مثال ۶-۱: سیستم دینامیکی دیگری با مدل گراف در شکل (۶-۷-الف و ب) نشان داده شده است.



شکل ۶-۷- (الف) یک سیستم دینامیکی (ب) مدل گراف متناظر

این گراف متقارن است و ماتریس لاپلاسیان آن به فرم ذیل می باشد:

$$L = \left[\begin{array}{cc|cc} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & 0 & -k_3 \\ \hline -k_3 & 0 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & -k_2 & k_2 + k_3 \end{array} \right]$$

برای تقارن در فرم دو، ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته به صورت زیر نوشته می شود.

$$L_T = \left[\begin{array}{cc|cc} k_1 + k_2 + k_3 - m_1 & -k_2 & -k_3 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 & 0 & -k_3 \\ \hline -k_3 & 0 & k_1 + k_2 + k_3 - m_1 & -k_2 \\ 0 & -k_3 & -k_2 & k_2 + k_3 - m_2 \end{array} \right]$$

روش بدست آوردن ماتریس های L و L_T به همان ترتیبی است که در ابتدای این بخش به صورت خلاصه آورده شد.

$$L_T = \left[\begin{array}{c|c} H & H' \\ \hline H' & H \end{array} \right]$$

همانطوری که ذکر شد زیرماتریس H بیانگر ویژگی های همه ی مولفه های متقارن می باشد، و زیرماتریس H' نشان دهنده اثر فنرهای بین دو مولفه متقارن در ماتریس سختی می باشد.

بر طبق ویژگی های فرم دو، اگر $[H + H'] = G_1$ و $[H - H'] = G_2$ بنابراین L'_T می تواند به صورت زیر بیان می شود.

$$L'_T = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix}$$

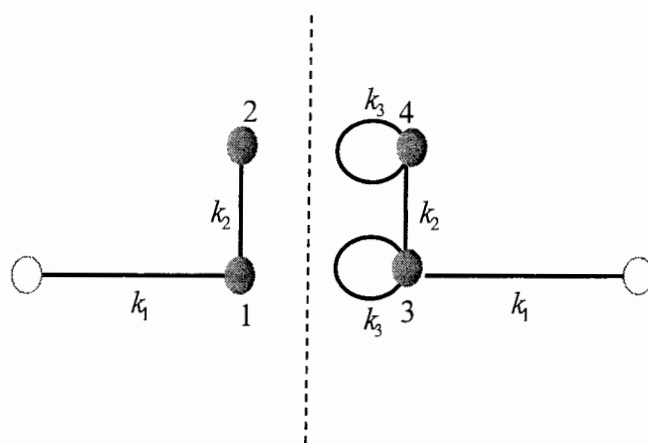
اگر L'_T ماتریس لاپلاسیان کلی یک گراف باشد، بنابراین این گراف دو مولفه متقارن با $\frac{N}{2}$ راس برای هر مولفه که متصل به یکدیگر نیستند را شامل می شود و مقادیر ویژه L_T به صورت زیر می باشد.

$$\lambda_{L_T} = \lambda_{G_1} \cup \lambda_{G_2}$$

بنابراین مولفه های متقارن G_1 و G_2 اتم های دینامیکی مدل هستند. هر اتم بخشی از فرکانس های طبیعی ω_i از سیستم کلی می باشد.

$$\{\omega_{L_T}\} = \{\omega_{G_1}\} \cup \{\omega_{G_2}\}$$

به عنوان مثال، برای گراف شکل (۶-۷-الف) اتم های G_1 و G_2 در شکل (۶-۸) نشان داده شده است.

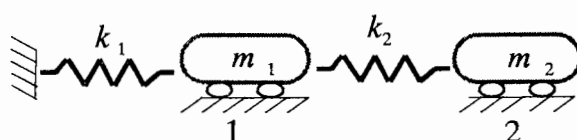


شکل ۶-۸- اتم های دینامیکی G_1 و G_2

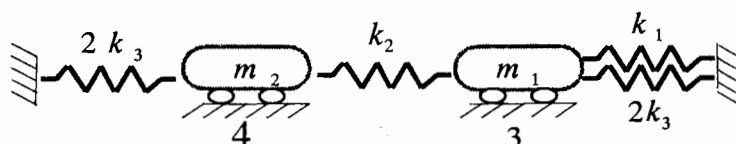
ماتریس های لاپلاسین L_{G_1} و L_{G_2} به صورت زیر نشان داده می شوند.

$$L_{G_1} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad L_{G_2} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + 2k_3 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + 2k_3 \end{bmatrix}$$

زیرسیستم های گراف های متناظر مدل ریاضی، برای هر مولفه متقارن G_1 و G_2 به صورتی است که در شکل (الف-۹-۶) و (ب-۹-۶) نشان داده شده است. برای توضیحات بیشتر به مرجع [۳۴] مراجعه شود.



(الف)

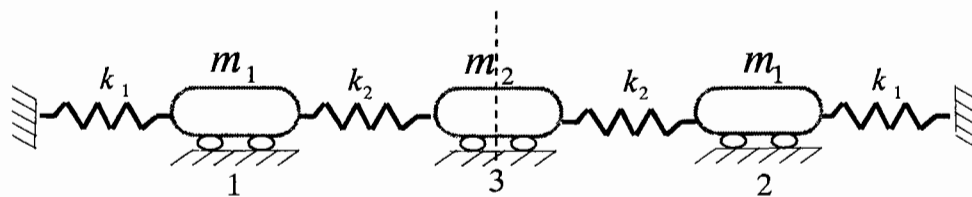


(ب)

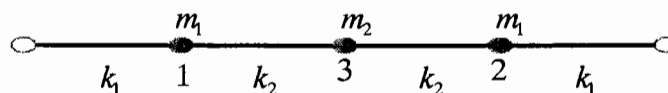
شکل ۹-۶- (الف) مولفه متقارن G_1 (ب) مولفه متقارن G_2

۶-۶- سیستم های ارتعاشی با تقارن به فرم سه:

برای یک سیستم دینامیکی با تعداد جرم های فرد، گراف متناظر، تقارن به فرم سه خواهد داشت. برای چنین سیستمی زیر گراف های کاهش یافته با استفاده از ویژگی تقارن حاصل می شوند. به عنوان مثال، مدل نشان داده شده در شکل (۱۰-۶) را در نظر بگیرید. گراف متناظر در شکل (۶-۱۱) نشان داده شده است.



شکل ۶-۱۰- یک سیستم دینامیکی



شکل ۶-۱۱- مدل گراف متناظر

ماتریس لاپلاسیان و ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته به صورت L و L_T می باشند.

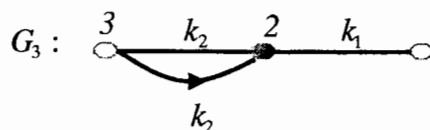
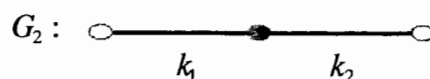
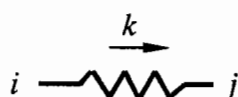
$$L = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & -k_2 & 2k_2 \end{bmatrix}, \quad L_T = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_1 + k_2 - m_1 & -k_2 \\ -k_2 & -k_2 & 2k_2 - m_2 \end{bmatrix}$$

همانطوری که نشان داده شده L و L_T هر دو به فرم سه می باشند.

ماتریس های لاپلاسیان متناظر با اتم های ارتعاشی به صورت زیر می باشد.

$$L_{G_2} = [k_1 + k_2 - 0] = [k_1 + k_2] \quad \text{و} \quad L_{G_3} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -2k_2 & 2k_3 \end{bmatrix}$$

گراف های این ماتریس ها در شکل (۶-۱۲) نشان داده شده اند. اگر یک یال جهت دار بین دو راس جهت دار i و j از i به j وجود داشته باشد، آن نشان دهنده یک فنر جهت دار در سیستم دینامیکی است. در شکل (۶-۱۳) ویژگی های مهم چنین فنی نشان داده شده و به این صورت است که اتصال این فنر به جرم ها طوری است که در سختی $k_{j,i}$ سهمی ندارد اما در سختی $k_{i,j}$ اثر دارد [۳۴]. برای توضیحات بیشتر در مورد ترسیم مولفه های شکل (۶-۱۲) به بخش (۴-۵) فصل ۴ توجه شود.

شکل ۶-۱۲- اتمهای G_2 و G_3 

شکل ۶-۱۳- یک فنر جهت دار

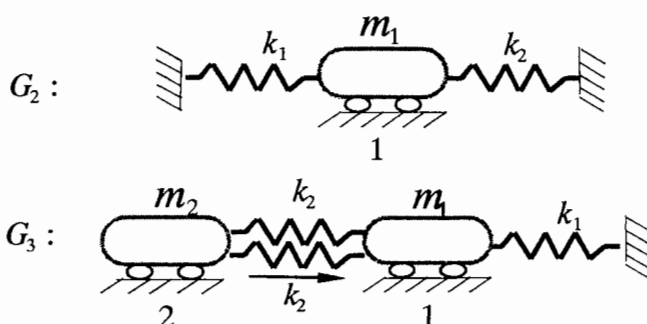
مدل های ریاضی متناظر با هسته های G_2 و G_3 در شکل (۶-۱۴) نشان داده شده اند. مطابق با

ویژگی های

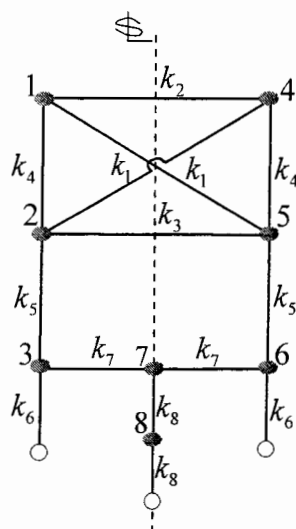
$$\{\lambda_{L_T}\} = \{\lambda_{G_2}\} \cup \{\lambda_{G_3}\}$$

$$\{\omega_{L_T}\} = \{\omega_{G_2}\} \cup \{\omega_{G_3}\}$$

و

شکل ۶-۱۴- زیرسیستم های با G_2 و G_3

از زیرسیستم های ارتعاشی G_2 و G_3 ، مدهای ارتعاشی کل سیستم را می توان یافت. اگر هر سیستم ارتعاشی خودش متقارن باشد، بر طبق آن زیرسازه های متناظر با آن بدست می آیند. . برای توضیحات بیشتر به مرجع [۳۴] مراجعه شود. کاهش بیشتر در صورت تقارن نیز امکان پذیر است.



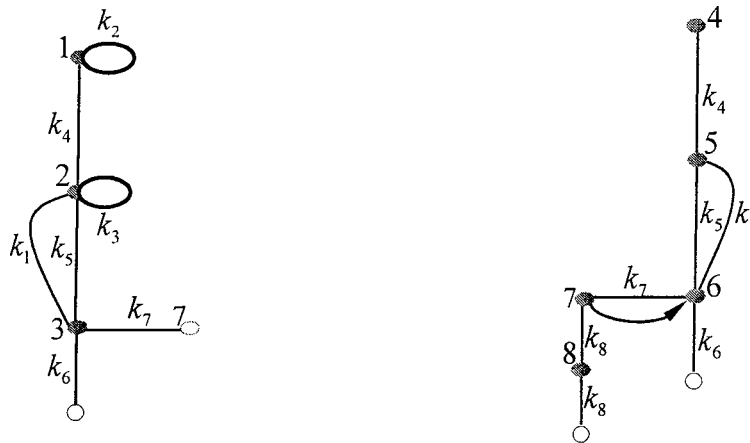
شکل ۶-۱۷- مد گراف G_3

با توجه به مدل گراف ملاحظه می شود که سیستم دارای تقارن به فرم سه است. و می توان آن را به دو مولفه متقارن کاهش داد. این نتیجه بدون شماره گذاری روی سیستم و با توجه به مدل گراف مورد نظر و برچسب گذاری صحیح نیز کاملاً قابل درک است. ماتریس لاپلاسیان متناظر با مدل گراف L_T ، نشان داده شده است.

$$L_T = \begin{bmatrix} k_2 + k_4 - m_1 & -k_4 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1 + k_3 + k_4 + k_5 - m_2 & -k_1 - k_5 & 0 & -k_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 - k_5 & k_6 + k_7 + k_5 + k_1 - m_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_7 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & k_2 + k_4 - m_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 & -k_4 & k_1 + k_3 + k_4 + k_5 - m_5 & -k_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_5 & k_5 + k_6 + k_7 + k_1 - m_6 & -k_7 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -k_7 & 0 & 0 & -k_7 & 2k_7 + k_8 - m_7 & -k_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_8 & 2k_8 - m_8 & 0 \end{bmatrix}$$

برای توضیحات بیشتر برای بدست آوردن ماتریس L_T به توضیحاتی که در ابتدای بخش (۶-۵) آورده شده است توجه شود.

مولفه های متقارن سیستم در شکل (۶-۱۸) نشان داده شده است.



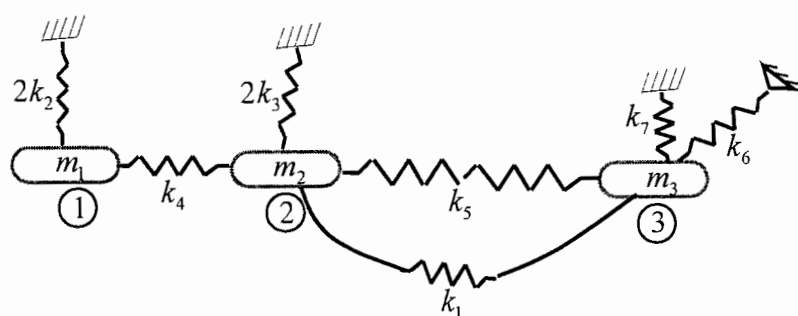
شکل ۶-۱۸- (الف) مولفه متقارن G_3 (الف) مولفه متقارن G_2

ماتریس لاپلاسیان مولفه ها که همان اتمهای گراف می باشند، به صورت زیر بدست می آید:

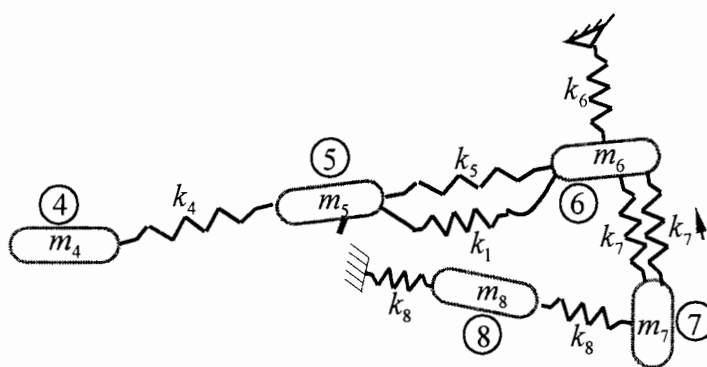
$$L_{G_2} = \begin{bmatrix} 2k_2 + k_4 & -k_4 & 0 \\ -k_4 & k_1 + 2k_3 + k_4 + k_5 & -k_1 - k_5 \\ 0 & k_1 - k_5 & k_1 + k_5 + k_6 + k_7 \end{bmatrix}$$

$$L_{G_3} = \begin{bmatrix} k_4 & -k_4 & 0 & 0 & 0 \\ -k_4 & k_1 + k_4 + k_5 & -k_1 + k_5 & 0 & 0 \\ 0 & -k_1 - k_5 & k_1 + k_5 + k_6 + k_7 & -k_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2k_7 + k_8 & -2k_7 \\ 0 & 0 & 0 & -k_8 & 2k_8 \end{bmatrix}$$

زیرسیستم های G_2 و G_3 در شکل (۶-۱۹-الف و ب) نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۶-۱۹- (الف) زیرسیستم G_2 (ب) زیرسیستم G_3

از مساوی صفر قرار دادن دترمینان L_T مقادیر ω حاصل می شوند.

از آنجایی که تنها بحثی که تا کنون در زمینه ی هم ارزی ماتریس لاپلاسیان و مدل گراف های متناظر با یک سیستم ارتعاشی، برای بدست آوردن مقادیر ویژه بحث حاضر می باشد این فصل از رساله به این بحث اختصاص یافته است. تقارن در سیستم های دینامیکی باعث می شود سیستم جرم - فنر به زیرسیستم های کوچکتری کاهش یابد. ماتریس های متناظر با این زیرسیستم های کاهش یافته ابعاد کوچکتری دارند و شامل بخشی از ویژگی های سیستم ارتعاشی هستند. تقارن در مدل ریاضی با توزیع متقارن ویژگی های فیزیکی، که شامل جرم ها و فنرها و اتصالات جرم ها بوسیله ی فنرها می باشد متناظر است. برای هر مدل گرافی از یک سیستم دینامیکی تقارن به فرم دو، دو مولفه متقارن G_1 و G_2 را نتیجه می دهد. این مولفه ها به طور فیزیکی نشان می دهند که مولفه G_1 انعطاف پذیرتر از مولفه G_2 است، و فرکانس اصلی و مد متناظر در این قسمت از مدل قرار دارند. برای مدل گراف یک سیستم ارتعاشی با تقارن به فرم سه دو زیرسیستم G_2 و G_3 تولید می شوند.

برای مدل گراف یک سیستم ارتعاشی با تقارن به فرم سه دو زیرسیستم G_2 و G_3 تولید می شود. تعداد جرم ها و فنرها در زیرسیستم G_2 کمتر از زیرسیستم G_3 می باشد، و در زیرسیستم G_3 فنرهای جهت دار را خواهیم داشت در اینجا ممکن است این سوال مطرح شود که وقتی از خاصیت گراف می توان در سیستمی استفاده کرد چه لزومی دارد که از مدل گراف استفاده کنیم؟ توجه به این نکته ضروری است که در واقع استنباط کلی در چنین سیستم هایی به کمک مدل گراف مورد نظر حاصل می شود و نمی توان از خاصیت ماتریسی گراف استفاده کرد بدون آنکه مطمئن باشیم که این خاصیت در مدل گراف برقرار است یا خیر؟. در ثانی سیستم های جرم - فنر سیستم هایی هستند که کل سیستم دارای یک درجه آزادی می باشد و وزن یال ها و راسها یک درایه ی یک بعدی است و می توان با یک مدل گراف معمولی زیر سیستم های حاصل را به راحتی ترسیم کرد بدون آنکه مساله سازه ای را دچار شبهه کنیم، هر چند در این مبحث فنر جهت دار مطرح می شود که در مساله ای مشاهده نشده است، لکن این موضوع با مشاهدات و مسایل مهندسی - در مورد مسایلی از این قبیل - قابل درک است، اما در بسیاری از مسایل مهندسی ما با سیستم هایی مواجه می شویم که راسهای دو سر یک یال با هم ارتباط دارند و این ارتباط از طریق یالها صورت می پذیرد و ارتباطی ماتریسی بین اعضا برقرار است. یعنی بسیاری از مسایل را نمی توان به سادگی به زیرسیستم یا زیرسازه تبدیل نمود چون مجبور می شویم برای برقراری ارتباط مورد نظر دائماً المانهای جدیدی را تعریف کنیم که طرحی ناآشنا در مسایل سازه ای هستند [۴۱] و این در حالی است که دیدگاه گرافی به سهولت این خواست را مرتفع می سازد. در حقیقت در این مبحث با استفاده از مدل گراف معمولی به تنهایی، می توان مقادیر ویژه و مدهای مورد نظر را بدست آورد بدون آنکه نیازی به ترسیم زیر سیستم ها باشد. یعنی این توانایی را داریم همانطور که در بسیاری از مسایل مهندسی مانند مکانیک و شیمی و عمران این خواست امکان پذیر شده و دقت بسیار بالایی از مساله حاصل شده است [۲۲، ۴۲، ۴۳، ۴۴].

فصل

روشهای تحلیل در پایداری
سازه‌ها

۷

۷-۱- مقدمه

تئوری پایداری ارتجاعی برای سازه‌ها یکی از مباحث مهم و کاربرد در طراحی‌های مهندسی است. از آنجا که بحث پایداری کلی و موضعی سازه‌ها همواره در تمام بخشهای تحلیل و طراحی یک سازه همانند طراحی اعضای کششی، فشاری، خمشی، پیچشی و ... حضوری پراهمیت دارد، روشهای زیادی برای بررسی پایداری سازه‌ها بوجود آمده است که در این فصل به شرح و مقایسه‌ی آنها پرداخته می‌شود.

۷-۲- روشهای بدست آوردن بار بحرانی

کلاً می‌توان انواع تحلیل پایداری یک سازه را به دو بخش تحلیلی^(۱) و عددی^(۲) تقسیم کرد. روشهای سنتی بررسی پایداری سازه‌ها، مبتنی بر معادلات دیفرانسیل تعادل یا روشهای انرژی و یا ... هستند، که همگی بر پایه اصول اساسی مقاومت مصالح بنا شده‌اند.

روش تحلیلی همانند روش معادلات دیفرانسیل تعادل همان روش اصلی و اولیه تحلیل پایداری سازه‌هاست. این روش بر اساس تعادل نیرو در مقطعی از سازه و نوشتن معادلات دیفرانسیل تعادل بنا شده‌است. روشهای عددی، مانند روش تفاضلات محدود و روش ماتریسی، از روشهای دیگر بررسی پایداری سازه‌ها هستند که جبر ماتریسی را برای تحلیل ماتریس سازه به خدمت می‌گیرند [۴۵].

^(۱) analytical

^(۲) numerical

۷-۲-۱- روش معادلات دیفرانسیل

همانطوری که در بخش (۷-۲) توضیح داده شد، روش معادلات دیفرانسیل تعادل در واقع همان روش اصلی و اولیه تحلیل پایداری سازه‌هاست که براساس تعادل نیرو در مقطعی از سازه و نوشتن معادلات دیفرانسیل بنا شده است.

پس از نوشتن معادلات دیفرانسیل، با توجه به شرایط مرزی موجود ثابتهای انتگرال‌گیری محاسبه شده و بار بحرانی سازه براین اساس که در آن بار، وقتی که تغییر مکان سازه به سمت بی-نهایت میل می‌کند، محاسبه می‌شود.

در واقع این روش بیانگر مفهوم کمانش در یک سازه است. این تعریف نشان‌دهنده این است که کمانش سازه در لحظه‌ای اتفاق می‌افتد که تغییرشکلهای سازه به طور ناگهانی افزایش قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند، بطوریکه سریعاً سازه در آن بخش گسیخته می‌شود.

از آنجا که این روش بر اساس نیروها در مقطعی از سازه است، برای سازه‌های معین می‌تواند روشی موثر و کارا باشد، اما در سازه‌های نامعین محاسبه نیروهای داخلی برای نوشتن رابطه تعادل، نیازمند استفاده از روشهای تحلیل سازه‌های نامعین می‌باشد.

این موضوع برای سازه‌هایی که درجات نامعینی زیادی دارند و مخصوصاً سازه‌هایی تغییر مکان جانبی دارند، موجب بروز مشکلاتی برای تحلیل پایداری می‌شود. واضح است که در این سازه‌ها قبل از نوشتن معادلات تعادل، ابتدا نیاز به حل یک سازه است که ممکن است درجات آزادی زیادی داشته‌باشد. از تحلیل سازه‌های نامعین می‌دانیم که حتی روشهای قدرتمندی همانند شیب-افت، پخش لنگر و کانی نیز برای تحلیل چنین سازه‌هایی با درجات آزادی زیاد، از نظر زمان و هزینه به صرفه نیست.

۷-۲-۲- روش انرژی

روش انرژی بر اساس بررسی حالت سازه از لحاظ انرژی داخلی و خارجی و سپس بررسی تعادل آن بنا شده‌است. در این روش مقادیر انرژی کرنشی داخلی ΔU و انرژی خارجی ΔT محاسبه می‌شود.

در واقع در روش انرژی، با این فرض که تغییرمکان جانبی کوچک در سیستم وجود دارد، بررسی را شروع می‌کنیم.

این تغییر مکان موجب افزایش انرژی داخلی سیستم می‌شود. در همین زمان، بار P نیز تغییرمکان کوچکی خواهد داشت و به اندازه ΔT کار انجام خواهد داد [۴۶] و سه حالت زیر بوجود می‌آید:

۱. اگر $\Delta T < \Delta U$: سیستم در حالت تغییرمکان نیافته‌اش پایدار خواهد بود.
۲. اگر $\Delta U > \Delta T$: سیستم در حالت تغییرمکان نیافته‌اش ناپایدار خواهد بود.
۳. اگر $\Delta U = \Delta T$: نشان دهنده حالتی است که تعادل از وضع پایدار به وضع ناپایدار منتقل می‌شود.

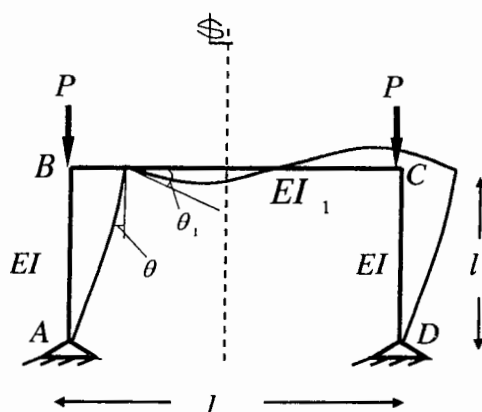
این روش برای سازه‌های معین، روشی مناسب و قوی است ولی برای بررسی پایداری سازه‌های نامعین بازهم نیاز به استفاده از روشهای تحلیل سازه‌های نامعین است.

با توجه به توضیحاتی که مختصراً در مورد دو روش تعادل و انرژی گفته شد، دریافت می‌شود که حجم محاسباتی این روشها، با افزایش درجات آزادی بطور قابل توجهی افزایش پیدا می‌کند. این مطلب برای سازه‌هایی که دارای درجات آزادی انتقالی یا همان تغییرمکانهای جانبی هستند (همانند قابهای پرتال و سازه‌های چند طبقه)، بحرانی‌تر می‌شود و از آنجایی که در عمل نیز با چنین سازه‌هایی سروکار داریم نیاز به روشهایی داریم که بتوانند از این اصول، به شکل مطلوبی بهره گیرند و حجم محاسبات را کاهش دهند.

مشکلات ذکرشده در بالا موجب پیدایش روشهای عددی و تقریبی برای بررسی پایداری سازه‌ها شده‌است. روشهایی همانند تفاضلات محدود (که یک روش تقریبی است)، روش ماتریسی (که یک روش دقیق و مناسب برای برنامه‌نویسی و نرم‌افزار است) و روش تحلیل پایداری با گرافها (که یک روش عددی با جوابهای بسیار نزدیک به جواب دقیق است و در فصل هشتم رساله به بررسی این روش پرداخته شده است) از این خانواده هستند.

در این بخش مختصراً یک مثال مطرح می‌شود:

مثال ۷-۱- بار بحرانی p را برای قاب با تکیه گاه مفصلی شکل (۷-۱) به دست آورید.



شکل ۷-۱- قاب با تکیه گاه مفصلی با تغییر مکان جانبی [۴۶]

حل این قاب با استفاده از دو روش تعادل به صورت زیر خواهد بود [۴۶].

- اگر این قاب دارای یک محور تقارن باشد، می توان هر عضو قائم را همانند یک میله تحت فشار با یک انتهای آزاد و یک انتهای گیر دار در نظر گرفت. اگر محور های مختصات مطابق شکل باشند، معادله دیفرانسیل منحنی تغییر مکان میله AB عبارتست از:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -py \quad (۷-۱)$$

جواب این معادله با ارضای شرایط انتهایی میله در بخش پائینی می شود:

$$y = A \sin kx \quad (۷-۲)$$

در گره B مقادیر θ و θ_1 با هم برابرند و چون میله افقی، B تحت دو کوپل مساوی $p(y)_{x=l}$ قرار گرفته است، شرط مرزی در انتهای B میله قائم می شود:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l} = p \cdot \frac{b}{6EI_1} (y)_{x=l} \quad (۷-۳)$$

با استفاده از معادله (۲)، داریم:

$$k \cos kl = \frac{pb \sin kl}{6EI_1} \quad (۴-۷)$$

- اگر میله BC کاملاً صلب باشد، $EI_1 = \infty$ شده و خواهیم داشت:

$$\cos kl = 0 \quad .kl = \frac{\pi}{2} \quad . P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \quad (۵-۷)$$

در حالت عمومی معادله (۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$kl \cdot \tan kl = \frac{6I_1 l}{I_2 b} \quad (۶-۷)$$

و مقدار بحرانی بار P به ازای هر مقدار عددی نسبت $\frac{I_1 l}{I_2 b}$ قابل محاسبه است. اگر هر سه میله

دارای خصوصیات یکسانی باشند، خواهیم داشت:

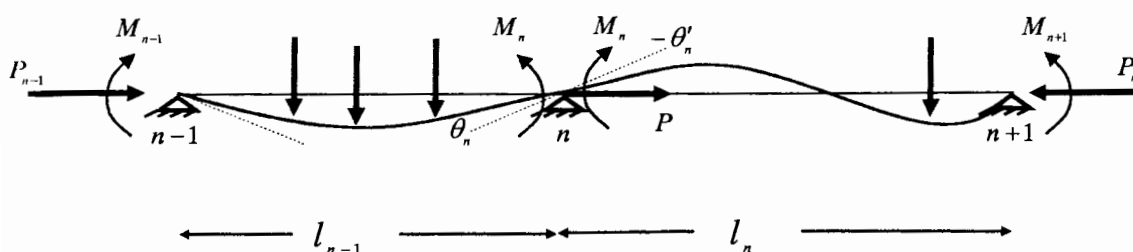
$$kl \cdot \tan kl = 6 \quad (۷-۷)$$

که از آن داریم:

$$kl = 1.35 \quad P_{cr} = \frac{1.82 EI}{l^2} \quad (۸-۷)$$

در این مثال مشاهده شد که برای یک قاب ساده که در واقع تنها سه درجه آزادی داشت، نیاز به معادله نه چندان ساده $kl \cdot \tan kl = 6$ بود و این معادله برای سازه‌های پیچیده تر تبدیل به معادلات حجیم و تقریباً غیر قابل حل می‌شود.

مثال ۷-۲- به عنوان مثال دیگر می‌توان رابطه تعادل بدست آمده برای تیر دو دهانه زیر که از یک تیر n دهانه جدا شده است را بررسی می‌کنیم.



شکل ۷-۲- یک تیر دو دهانه که از یک تیر n دهانه [۴۶]

معادله دیفرانسیل تعادل برای سازه بالا به صورت زیر می‌شود

$$M_{n-1}\phi(u_{n-1}) + 2M_n \left[\Psi(u_{n-1}) + \frac{l_n}{l_{n-1}} \cdot \frac{I_{n-1}}{I_n} \psi(u_n) \right] + M_{n+1} \cdot \frac{l_n}{l_{n-1}} \cdot \frac{I_{n-1}}{I_n} \phi(u_n) = -\frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}} (\theta_{0n} + \theta'_{0n}) \quad (9-7)$$

جمله های $\psi(u)$ و $\phi(u)$ توابعی غیر خطی بر حسب U هستند که U رابطه U به صورت زیر است.

$$u = \frac{kl}{2} \quad k = \sqrt{\frac{P}{EI}} \quad (10-7)$$

جملات دیگری نظیر θ'_{0n} و θ_{0n} در رابطه (۹) مشاهده می شود که با استفاده از مباحث تکمیلی محاسبه می شوند هدف از ارائه این رابطه برای یک تیر سراسری نشان دادن پیچیدگی حل تحلیلی یک سازه است.

اما در روش انرژی بار بحرانی از مساوی هم قرار دادن مقادیر ΔU و ΔT محاسبه می شود که این مقادیر از روابط زیر به دست می آیند

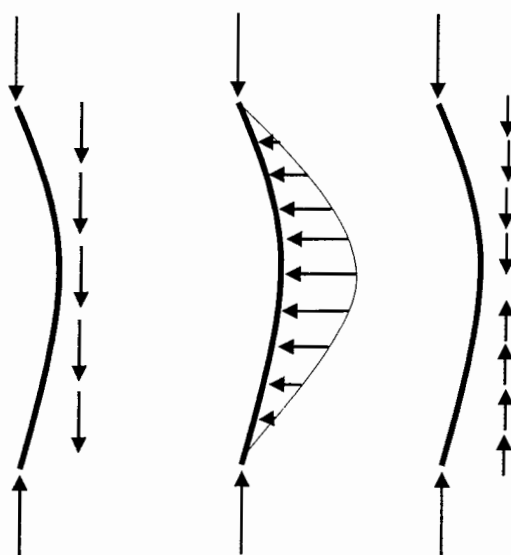
$$\Delta U = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EI} \quad M = Py(x) \quad (11-7)$$

که این رابطه معادل با انرژی کرنش داخلی سازه است و:

$$\Delta T = P\lambda \quad \lambda = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (12-7)$$

این رابطه نیز معادل با انرژی خارجی یا کار نیروهای خارجی است.

روش انرژی برای سازه هایی که دارای بارهایی در میان دهانه هستند مانند شکل (۷-۳)، روش بسیار مناسب است ولی برای این سازه ها، هم نیاز به محاسبه انتگرال های عددی دارد.



شکل ۷-۳- ستونهای با بارگذاری خاص

معمولاً برای حل چنین مسائلی، سعی می‌شود که انتگرال‌های به وجود آمده از روش انرژی با روشهای عددی نظیر روش سریهای متوالی حل شود. در واقع همواره با افزایش تعداد درجات آزادی لزوم حل عددی برای مسائل پدیدار می‌گردد. در حال حاضر اکثر مسائل مهندسی با روشهای عددی حل می‌شوند و مسائل پایداری سازه‌ها نیز از این قاعده مستثنی نیستند.

۷-۲-۳- روشهای عددی

روشهای عددی بسته به نوع فرمول‌بندی استفاده شده در آنها دارای دقتهای متفاوتی برای مقادیر متفاوت بار بحرانی هستند. برخی از روشها همانند روش تفاضلات محدود^(۴) بسته به تعداد نقاط در دامنه مورد بررسی جوابهای متفاوتی می‌دهند و هر چه تعداد نقاط بیشتر باشد، جواب این روش دقیق تر می‌باشد. در کل این روش تا حدودی می‌تواند به عنوان روش مناسب برای تحلیل پایداری استفاده شود.

اما روش ماتریسی که براساس بسط ماتریس منحنی برای اعضای خمشی و فشاری بوجود آمده است روش بهتر و کارآمدتر از روش تفاضلات محدود است.

^(۴)finite difference

روش ماتریس، روشی عددی است که جبر ماتریسی را برای تحلیل سازه مورد استفاده قرار می دهد و از این جهت که در برنامه نویسی رایانه ای به کار می رود بسیار حائز اهمیت است. در این روش سیستم به صورت مجموعه ای از اعضای گسسته که دارای نقاطی موسوم به گره است و به همدیگر متصل اند، مدل سازی می شود [۴۰].

معادله نیرو-تغییر شکل برای یک عضو را می توان به صورت زیر نوشت (شکل ۷-الف):

$$q_{ij} = k_{ij} \cdot \delta_i \quad i = (1, n, j = 1, n) \quad (۷-۱۳)$$

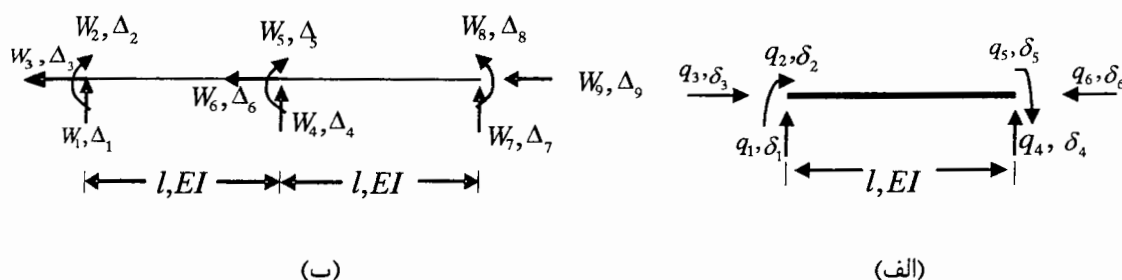
که در این رابطه k_{ij} به ضرایب تاثیر سختی موسوم است و نشانگر نیروی لازم برای تغییر مکان واحد δ_i است و این تغییر در حالی محاسبه می شود که بقیه مولفه های تغییر مکانی برابر صفر در نظر گرفته می شود و n تعداد درجات آزادی در عضو مورد بررسی است.

اما معادله نیرو-تغییر شکل برای کل سازه را می توان به صورت زیر نوشت:

$$W_{ij} = K_{ij} \Delta_i \quad i = 1, N, j = 1, N \quad (۷-۱۴)$$

و رابطه (۷-۱۴) را می توان به فرم ماتریس زیر نوشت.

$$[W] = [k][\Delta] \quad (۷-۱۵)$$



شکل ۷-۳- (الف) نیروها و درجات آزادی یک عضو- (ب) نیرو و درجات آزادی یک سیستم سازه ای (مانند تیر) [۱]

در اینجا، ابتدا ماتریس سختی هر یک از اعضا با استفاده از روش هایی که در تحلیل ماتریس سازه ها ارائه می شود محاسبه کرد و سپس ماتریس سختی کل سازه نیز از سر هم کردن ماتریس تمام اعضا در غالب یک ماتریس کلی محاسبه می شود که برای اطلاعات بیشتر در این مورد می توان به مرجع [۴۰] مراجعه کرد.

پس از محاسبه سختی خمشی نوبت به محاسبه سختی فشاری اعضا می شود. سختی یک عضو خمشی در محدوده تغییر شکلهای کوچک و تنش های ارتجاعی ثابت بوده و رفتار آنها توسط رابطه خطی $[Q] = [k][\Delta]$ قابل بیان است. در عوض سختی عضوی که تحت اثر همزمان با محوری و خمشی قرار گیرد؛ تابعی از بار محوری خواهد بود. رابطه نیرو-تغییر شکل برای چنین عضوی به صورت زیر است.

$$[Q] = \{[k] + P[k_1]\}[\Delta] \quad (۷-۱۶)$$

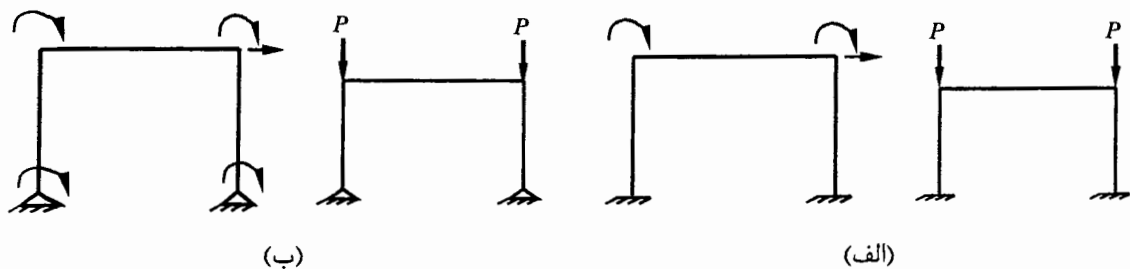
در این رابطه $[Q]$ شامل بارهای عرضی بوجود آورنده خمش، $[\Delta]$ حاوی تغییر شکل های خمشی وابسته به آنها و P نشانگر بار محوری است. ماتریس سختی نیز دارای دو بخش است: بخش اول، ماتریس سختی استاندارد یک عضو خمشی $[k]$ و بخش دوم یعنی $[k_1]$ ماتریسی است برای نمایش اثر نیروی P روی سختی عضو خمشی.

تحت اثر بار بحرانی سختی خمشی عضو برابر صفر می شود یعنی به ازاء مقادیر محدود بار-گذاری، تغییر مکان های خمشی بی نهایت بزرگ می شوند. مقدار بار با استفاده از این مفهوم از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی کل سازه به دست می آید. برای توضیحات بیشتر به مرجع [۴۰] مراجعه شود.

جواب های بدست آمده از این روش تطابق مناسبی با جواب های دقیق دارد. چند نمونه از آنها در زیر آورده شده است.

$P_{cr} = \frac{9.8EI}{l^2}$	روش تعادل	$P_{cr} = \frac{9.8EI}{l^2}$	روش ماتریسی	تیر دو سر مفصل
$P_{cr} = \frac{39.44EI}{l^2}$	روش تعادل	$P_{cr} = \frac{40EI}{l^2}$	روش ماتریسی	تیر دو سر گیر دار
$P_{cr} = \frac{9.8EI}{l^2}$	روش تعادل	$P_{cr} = \frac{7.5EI}{l^2}$	روش ماتریسی	قاب شکل (۴-الف)
$P_{cr} = \frac{1.82EI}{l^2}$	روش تعادل	$P_{cr} = \frac{2.2890EI}{l^2}$	روش ماتریسی	قاب شکل (۴-ب)

- ۱- قاب شکل (۷-۴-الف) به دلیل اینکه دارای ۵ درجه آزادی است دارای خطای بیشتری نسبت به قاب (۷-۴-ب) که دارای ۳ درجه آزادی است می باشد. یعنی در هر مرحله قاب مفصلی دارای خطای بیشتری بسبب به قاب گیردار است.
- ۲- با توجه به مقایسه روش فوق با روشهای ماتریسی در قابها با توجه به افزایش تعداد درجات تغییر مکانی یا انتقالی و در نتیجه افزایش ابعاد، ماتریس سختی دارای خطا خواهد بود که در این راستا استفاده از روش ماتریسی در تئوری گراف به عنوان یکی از روشهای تحلیل پایداری سازه ها دارای اهمیت ویژه ای خواهد بود که در فصل هشتم رساله به بحث و بررسی این مهم پرداخته شده است.



شکل ۷-۴ (الف) نمایش نیروها و درجه آزادی های وارد بر قاب گیردار با تغییر مکان جانبی (ب) نمایش نیروها و درجه آزادی های وارد بر قاب مفصلی با تغییر مکان جانبی

۷-۴- سایر روشهای بررسی پایداری سازه ها برای حالات خاصی از سازه:

روشهایی که تاکنون شرح داده شد، روشهای کلی و نسبتاً قوی برای تحلیل پایداری انواع سازه ها بودند. معمولاً در هر علمی می توان روشهای سریع و جالبی را برای مسایل خاص بوجود آورد. بحث پایداری سازه ها نیز از این قضیه مستثنی نیست. برخی از روشهایی که در زیر به شرح آنها می-پردازیم، دارای چنین خصوصیتی هستند که تنها برای حالات خاصی از سازه، روش سریع و کارا هستند [۴۷].

اساس اکثر این روشها بر پایه محاسبات تقریبی و یا گسسته سازی^(۱) مدل مورد بررسی بنا شده است و به همین دلیل نیز دارای جوابهای تقریبی هستند که جوابهای اکثر این روشها، دارای دقت مناسبی می‌باشند.

۷-۴-۱- روش انتگرال گیری دو گانه^(۲):

روش انتگرال گیری دو گانه را می‌توان به عنوان جایگزینی برای روش تقریبهای متوالی^(۳) که در ادامه شرح داده خواهد شد، در نظر گرفت. این روش برای ستونهایی با ممان اینرسی ثابت بسیار کاربرد دارد و در واقع روشی با روند معکوس است. به این دلیل که در ابتدا توابع شکل، مناسب فرض می‌شوند [۴۷] برای توضیح بیشتر به مرجع مراجعه شود.

قواعد این روش:

در ابتدا یک تابع تغییر مکان برای تعریف حالت کمانش یافته ستون فرض می‌شود که این رابطه بر حسب جملاتی از تغییر شکل حداکثر δ است. سپس با استفاده از معادله دیفرانسیل زیر:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M = -Py$$

تغییر مکان حداکثر جدید، Δ بدست می‌آید. بار بحرانی زمانی بدست می‌آید که مقادیر δ و Δ به هم نزدیک شوند. به عنوان مثال برای یک ستون یک‌سر گیردار و یک سر آزاد روابط ذیل برقرار است:

$$P_{cr} = \frac{2.5EI}{l^2} \quad \text{روش انتگرال گیری}$$

$$P_{cr} = \frac{2.466EI}{l^2} \quad \text{جواب دقیق}$$

مشاهده می‌شود که خطایی حدود ۱،۳۸٪ وجود دارد.

^(۱) discretization

^(۲) Double integration method

^(۳) Successive approximation

۷-۴-۲- روش انتگرال‌گیری تک^(۱):

مشکل اصلی روش انتگرال‌گیری دو گانه این بود که این روش برای ستونهایی با مقطع یکنواخت قابل اجرا بود و اینکه نیاز به دو بار انتگرال‌گیری وجود داشت و به همین دلیل روش دو گانه نیز نامیده می‌شود.

روش تقریبهای متوالی بر این اصل استوار است که تغییرمکان حداکثر منحنی تغییرشکل فرضی با تغییرمکان جدید بدست آمده بوسیله‌ی همان منحنی یکسان است. در روش انتگرال‌گیری تک فرض بر این است که شیب منحنی فرضی در یک مقطع خاص با شیب جدید در همان مقطع که با استفاده از منحنی فرضی بدست آمده برابر است. دومین ویژگی این روش این است که تنها یک بار انتگرال‌گیری انجام می‌شود و سومین ویژگی نیز قابل اعمال بودن این روش بر ستونهایی با ممان اینرسی متغیر است [۴۷].

با استفاده از روش انتگرال‌گیری تک برای یک ستون یک سرگیردار و یک سرآزاد داریم:

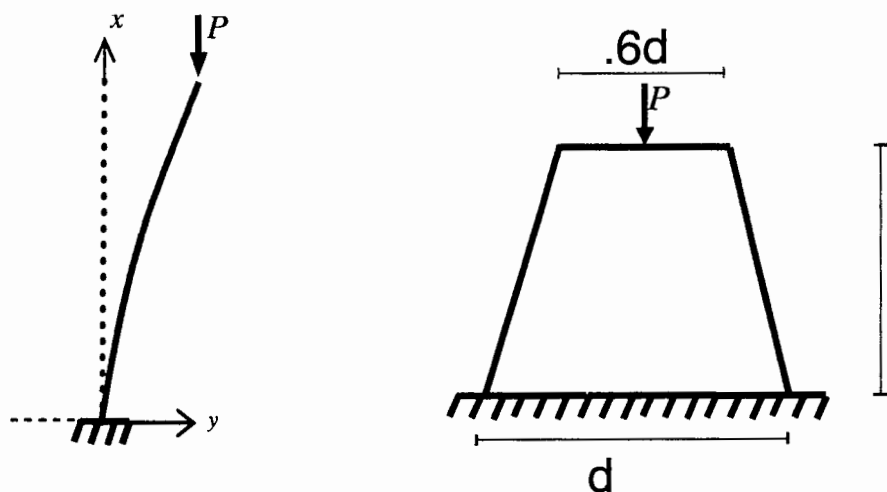
$$P_{cr} = \frac{2.348EI}{l^2} \quad \text{روش انتگرال‌گیری}$$

$$P_{cr} = \frac{2.466EI}{l^2} \quad \text{جواب دقیق}$$

که حدود ۴،۸٪ خطا دارد.

برای سازه‌ی شکل (۷-۵) با استفاده از روش انتگرال‌گیری تک بار بحرانی $P_{cr} = \frac{6.52EI}{l^2}$ بدست می‌آید که دارای خطایی برابر ۱،۵۵٪ نسبت به جواب دقیق است.

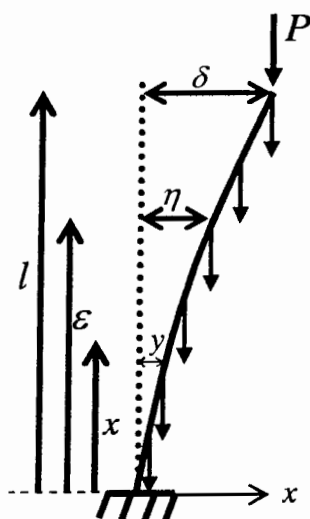
^(۱) Single Integration Method



شکل ۵-۷- ستون با مقطع غیریکنواخت و با بار P روی آن

۷-۴-۳- روش مرکز جرم^(۱):

این روش بیشتر برای ستونهایی قابل اعتماد است که دارای بارهای منفرد و یا گسترده در میان دهانه هستند. برای توضیحات بیشتر به مرجع [۴۷] مراجعه شود.
به عنوان مثال سازه‌ی شکل (۶-۷) را در نظر بگیرید.



شکل ۶-۷- ستون با بار گسترده

^(۱) Center of Gravity Method

$$P_{cr} = \frac{7.911EI}{l^2} \quad \text{روش مرکز جرم}$$

$$P_{cr} = \frac{7.837EI}{l^2} \quad \text{روش استفاده از تابع بسل}$$

$$P_{cr} = \frac{7.890EI}{l^2} \quad \text{روش انرژی تیموشنکو}$$

۷-۴-۴- روش تقریبهای متوالی^(۱):

بار بحرانی برای ستونهای غیرمنشوری، پارامتری مجهول است و یا محاسبه‌ی آن بسیار پیچیده است. برای تعیین جواب قابل قبول برای چنین ستونهایی روشهای تقریبی زیادی پیشنهاد شده است. یکی از این روشها روش تقریبهای متوالی است.

این روش در اصل توسط دانشمندانی نظیر استودولا^(۲)، ویانلو^(۳)، شوارز^(۴)، ترفز^(۵) و نیومارک^(۶) بوجود آمد.

کار اصلی در این روش مقایسه دو تغییر مکان است که یکی تغییر مکان قدیم یا قبلی و دیگری تغییر مکان جدید یا بعدی است.

تغییر مکان قدیم، یک تغییر مکان معلوم و معین در منحنی تغییر شکل فرضی است و تغییر مکان جدید، تغییر مکان محاسبه شده از این روش است. بنابراین این روش در واقع روش مقایسه‌ی تغییر شکل است.

برای محاسبه‌ی بار بحرانی با استفاده از این روش ابتدا یک منحنی تغییر مکان منطقی برای شکل کمانش یافته ستون فرض می‌شود به طوری که ارضاء شرایط مرزی هندسی از لزومات اولیه‌ی این فرض است. براساس این تغییر مکانهای معلوم می‌توان لنگر خمشی را محاسبه نمود. سپس با دانستن لنگر خمشی، تغییر مکانهای جدید محاسبه می‌شوند. با مقایسه‌ی تغییر مکانهای فرضی با

^(۱) Successive approximation

^(۲) Stodola

^(۳) Vianello

^(۴) Schwarz

^(۵) Trefftz

^(۶) Newmark

تغییرمکانهای جدید، مقدار بار بحرانی بدست می‌آید. بسته به شانس، اگر منحنی فرضی همان منحنی دقیق انتخاب شود، با استفاده از این روش به جواب دقیق خواهیم رسید.

با توجه به اینکه این روش نیازمند محاسبه‌ی لنگر خمشی و تغییر مکان در هر سیکل است، لذا محاسبه‌ی تغییرمکانها نیز از اهمیت خاصی برخوردار است که می‌توان بسته به نوع سازه از روشهای زیر استفاده کرد:

(۱) روش انتگرال‌گیری دوگانه

(۲) روش تیر مزدوج

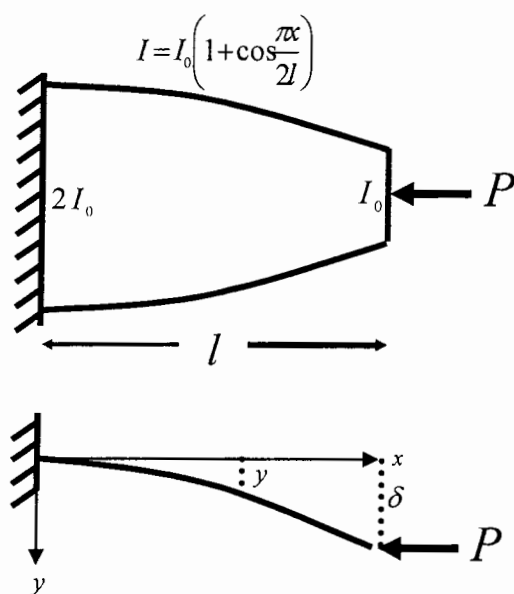
(۳) روش بار واحد مجازی

(۴) روش لنگر سطح

(۵) تئوری کاستیگلیانو

به طور کلی می‌توان گفت که این روش یکی از روشهای قدرتمند برای محاسبه‌ی بار بحرانی ستونها با حالت خاص شکل و بارگذاری است و دارای کاربرد بسیاری در این زمینه است و البته جواب بدست آمده از این روش بستگی زیادی به منحنی اولیه فرضی برای حالت کمانش یافته‌ی سازه دارد. در واقع هر چه منحنی فرضی تطابق بیشتری با منحنی دقیق داشته باشد، جوابهای بسیار مطلوبی بدست خواهد آمد. پس می‌توان گفت که یکی از مشکلات اصلی این روش، حدس اولیه برای منحنی تغییرمکان ستون کمانش یافته است که البته این مسأله می‌تواند با تجربه‌ی حاصل از حل مسایل فراوان اندکی، رفع شود.

به عنوان مثال سازه‌ی شکل (۷-۷) با فرض اولیه‌ی $y = \frac{\delta x^2}{l^2}$ را در نظر بگیرید.



شکل ۷-۷- سازه با حالت خاصی از شکل

از روش تقریبهای متوالی بار بحرانی این ستون $P_{cr} = \frac{4.539EI}{l^2}$ بدست آمده که نسبت به جواب دقیق دارای خطایی حدود ۰.۷۵٪ است که این خطا، خطای بسیار کمی است و نشان دهندهی این است که منحنی اولیه فرض شده تطابق مناسبی با منحنی دقیق دارد.

فصل

کاربرد ماتریس لاپلاسین در
تقارن‌های به فرم دو و سه در
پایداری قابهای مفصلی

۸-۱- مقدمه:

قانون ابتدایی طبیعی در مورد کمانش ستون به این صورت است که وقتی برای وقوع پدیده، راههای مختلفی وجود داشته باشد، آسانترین مسیر برای وقوع آن انتخاب می‌شود. ستون زیر بارهای نسبتاً کم پدیده‌ی کوتاه شدن و زیر بارهای نسبتاً زیاد پدیده‌ی خم شدن را آسانتر می‌یابد. به بیان دیگر وقتی بار به مقدار کمانش خود می‌رسد ستون برای پایین بردن بار خم شدن را نسبت به کوتاه شدن آسانتر می‌یابد. بنابراین به نظر می‌آید، که بار کمانش حد باری است که با آن فشردن ستون بدون خم شدن ممکن است.

ستونها در معرض نوعی رفتار که به کمانش موسوم است قرار می‌گیرند. تا زمانی که بار روی چنین عضوی نسبتاً کم است، افزایش بار فقط به کوتاه شدن محوری قطعه منجر می‌شود که به نوبه‌ی خود می‌تواند باعث از کار افتادن عضو می‌شود. بنابراین باری که در آن کمانش اتفاق می‌افتد معیاری برای طرح اعضای فشاری است. لذا محاسبه‌ی بار بحرانی ستون دارای اهمیت زیادی می‌باشد [۴۰، ۴۶، ۴۷]

بار بحرانی در مسایل سازه‌ای معمولاً به روش تحلیل با استفاده از روش تقریبی، روش انرژی، روش تعادل خنثی، معادلات شیب-افت، تحلیل ماتریسی و ... بدست می‌آید که در آنها با صرفنظر از تغییر شکل محوری المان‌های قاب می‌باشد بدین معنی که تغییرمکانهای دو سر المان تیر در هر طبقه یکسان در نظر گرفته می‌شود.

در این فصل با بکارگیری ماتریس لاپلاسین تمرکز بر تحلیل ماتریسی می‌باشد و بار بحرانی قاب با امکان بر ساده‌سازی به کمک مدل گراف در حالت متقارن و تجزیه گراف به مولفه‌های متقارنش حاصل می‌شود.

۸-۲- مدل گراف مرکب در تقارنهای کانونیکال:

مدل متناظر یک قاب سازه‌ای، گرافی وزندار می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

تکیه‌گاهها مفصلی در مدل گراف، راس خارجی یک راس مرکب می‌باشند که با خطچین نشان داده می‌شوند.

برای هر درجه آزادی، یک راس در مدل گراف مربوطه در نظر گرفته می‌شود. راسهای داخلی گراف مرکب، متناظر با درجه آزادی‌های دورانی و راسهای خارجی گراف، متناظر با درجه آزادی‌های انتقالی می‌باشند

هر راس برچسب‌گذاری شده معادل با یک سطر و ستون در ماتریس لاپلاسیان متناظر می‌باشد؛ یعنی به ازای هر راسی که وجود ندارد، سطرو ستون متناظر حذف می‌شود.

برای هر تیر و ستون یک یال در نظر گرفته می‌شود و وزنش میزان سختی تیر و ستون مورد نظر می‌باشد.

هر درجه آزادی با یک برچسب مشخص می‌شود.

مساله حاصل، یک مساله‌ی مقدار ویژه متناظر با مقادیر ویژه L_T می‌باشد. سرهم کردن ماتریس لاپلاسیان به همان صورتی است که در ماتریس سختی صورت می‌گیرد؛ زیرا این دو ماتریس هم-ارز یکدیگرند. این ارتباط با مدل گراف متناظر نشان داده می‌شود. از آنجایی که یک تناظر یک به یک بین دیاگرام مدل گراف و دیاگرام سازه‌ای برقرار است، بنابراین بین ماتریس سختی سازه و ماتریس لاپلاسیان گراف متناظر نیز این تناظر یک به یک وجود دارد. بنابراین مساله‌ی قاب سازه‌ای یک مساله‌ی ویژه از یک گراف می‌باشد.

برای هر گراف متقارن بار بحرانی با دو روش حاصل می‌شود.

الف- (حل به روش اول):

بدست آوردن مقدار ویژه کمینه، بدون تشکیل ماتریس اصلی، با توجه به شکل مدل گراف و با توجه به زیرماتریس‌ها

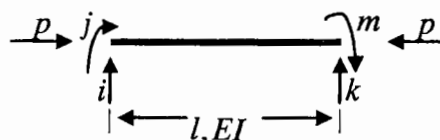
ب- (حل به روش دوم):

۱- به کمک ماتریس لاپلاسیان یکی از مولفه های متقارن.

۸-۲-۱- ماتریس لاپلاسیان در تقارن به فرم دو در قابها:

ماتریس سختی یک المان تیر- ستون به صورتی است که در شکل (۸-۱) نشان داده شده است.

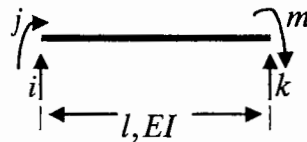
$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} i & j & k & m \\ 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} i & j & k & m \\ \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ m \end{matrix}$$



شکل ۸-۱- درجه آزادی های وارد بر المان تیر- ستون

این ماتریس شامل دو قسمت است. قسمت اول ماتریس سختی معمولی برای یک عنصر خمشی و قسمت دوم ماتریسی است که اثر بار محوری روی ماتریس سختی خمشی را نشان می دهد. ماتریس اخیر بعضاً تحت عنوان ماتریس سختی تنش اولیه مطرح می شود. تغییرشکلهای زاویه ای در ضریب l ضرب شده و بر ماتریس تغییرشکل اعمال شده است [۴۰].

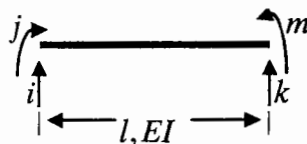
ماتریس تیر به صورت نشان داده شده خواهد بود.



شکل ۸-۲- نمایش درجه آزادی های وارد بر المان تیر

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

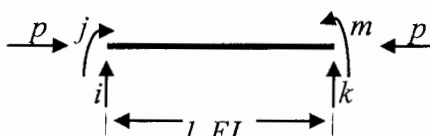
متناسب با تغییر در شماره گذاری درجات آزادی، سطر و ستون ماتریس سختی تغییر خواهد کرد [۱۴]. اگر سطر و ستون چهار قرینه شود، یعنی ماتریس سختی را در $(-1) \times (-1)$ ضرب کرده- ایم و ماتریس، متقارن به فرم دو خواهد بود و این یعنی اینکه درجه آزادی m در جهت پادساعتگرد است ماتریس و المان تیر در حالت متقارن در شکل (۸-۳) نشان داده شده است.



شکل ۸-۳- نمایش درجه آزادی های متقارن وارد بر المان تیر

$$K = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & 6 \\ -6 & 4 & 6 & -2 \\ -12 & 6 & 12 & -6 \\ 6 & -2 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس لاپلاسیان المان تیر- ستون نیز متقارن به فرم دو خواهد بود.

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} i & j & k & m \\ 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} i & j & k & m \\ \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{30}{10} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{30}{10} & \frac{1}{10} & \frac{15}{15} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ m \end{matrix}$$


شکل ۸-۴- نمایش درجه آزادی های وارد بر المان تیر- ستون

مدل گراف متناظر با ماتریس، یالی است که حاوی دو راس مرکب در دو انتها می باشد به شکل (۶-۵) توجه شود. که در آن m و j راسهای داخلی و k و i راسهای خارجی می باشند.



شکل ۸-۵- نمایش مدل گراف متناظر با یک المان در قاب سازه ای

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & 6 \\ -6 & 4 & 6 & -2 \\ -12 & 6 & 12 & -6 \\ 6 & -2 & -6 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & \frac{30}{10} \\ -\frac{6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{30}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{15}{15} \end{bmatrix}$$

همانطوری که از ماتریس شکل (۸-۵) و (۸-۱) ملاحظه می شود، ماتریس لاپلاسیان متناظر گراف هم-ارز ماتریس سختی در قاب سازه ای می باشد.

ماتریس لاپلاسیان متناظر یک تیر در یک قاب سازه ای به صورت زیر می باشد.

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad (۸-۱)$$

که این ماتریس خود، به تنهایی متقارن به فرم دو می باشد و همین خاصیت، افراز درمدل گراف متناظر و ساده سازی در مساله را موجب می شود.

عملیات ماتریسی در گرافهای متناظر قابها، با سازه ی اصلی معادل است و با یک برچسب گذاری صحیح وقتی ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته به فرم دو باشد، دو مولفه ی متقارن خواهیم داشت. مطابق بابخش (۴-۶) فصل شش، به روشنی مشهود است که وزن یکی از مولفه های متقارن از دیگری بیشتر است یعنی ماتریس لاپلاسیان متناظر مولفه ی مذکور، دارای مقدار ویژه ی کمینه و بار بحرانی بیشینه خواهد بود و این مهم در قاب های مفصلی با تقارن به فرم دو، یعنی اینکه به جای تحلیل ماتریسی یک سازه با $R \times R$ بعد (R درجه ی آزادی)، سرو کار با نیمی از آن، یعنی $\frac{R}{2} \times \frac{R}{2}$ بعد می باشد. ضمن اینکه در مسایل پایداری سازه ها بدست آوردن مقدار ویژه ی مینیمم لازم است و طیف مقدار ویژه، مطلوب مساله نیست. بنابراین ضروری است تا طریقه ی بدست آوردن اتمهای متناظر در این سازه ها مورد توجه قرار گیرد.

۸-۲-۱-۱- گامهای بدست آوردن اتمهای گراف در تقارن به فرم دو:

همانطوری که در بخش (۴-۴-۱) از فصل چهارم ذکر شد، یالی که خط تقارن آن را قطع می کند، یال رابط نامیده می شود که این یال، مدل متناظر تیر در قاب سازه ای می باشد. در تقارنهای به فرم دو و سه در قابهای مفصلی هرگراف به دومولفه متقارن کاهش می یابد، بنابراین دو مولفه متقارن، اتمهای گراف می باشند. در تقارنهای به فرم دو مراحل ذیل برقرار است.

۱- یالی که خط تقارن از آن عبور می کند:

با توجه به رابطه ی (۸-۱) و از تقارن به فرم دو مقادیر زیر حاصل می شوند.

$$L_{G_1} = [H] + [H'] = \frac{EI}{l^3} (4 + 2) = \frac{6EI}{l^3}$$

$$L_{G_2} = [H] - [H'] = \frac{EI}{l^3} (4 - 2) = \frac{2EI}{l^3}$$

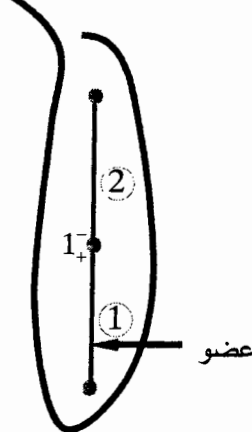
رابطه ی ماتریسی فوق در اتمهای گراف به صورت زیر برقرار است:

- در اتم G_1 یک حلقه به صورت خود - وزن $\frac{EI}{l^3}$ ، به راس با برچسب z دوبل می شود.
- در اتم G_2 یک حلقه به صورت خود - وزن $\frac{3EI}{l^3}$ ، به راس با برچسب m دوبل می شود.

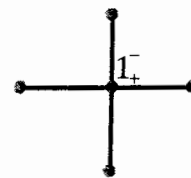
۲- برچسب گذاری:

در مدل گراف مورد نظر، درجه آزادی های متناظر عضو و قاب به صورتی است که در شکل های (الف-۶-۸) و (ب-۶-۸) برچسب گذاری می شوند. در شکل (ب-۶-۸) یال های ① و ② متناظر با عضو در سیستم سازه ای می باشند.

مدل گراف متناظر با یک سیستم سازه ای



شکل ۶-۸-ب- نمایش برچسب گذاری یک گراف متناظر با یک سیستم



شکل ۶-۸-الف- طریقه ی برچسب گذاری

بدلیل اینکه اثر درجه آزادی المان های ① و ② در سازه از نظر اثر درجه آزادی در سیستم قاب کلی می تواند متفاوت باشد؛ با تبدیل ماتریس های سختی هر یک از اعضاء در مختصات عضوی به سازه ای و ترکیب نتایج به کمک ماتریس های تبدیل ماتریس سختی کل قاب بدست می آید. برای توضیحات بیشتر به مرجع [۴۰] مراجعه شود. از آنجایی که ماتریس لاپلاسیان هم ارز ماتریس سختی می باشد، هر خاصیتی که ماتریس سازه ای داشته باشد؛ ماتریس لاپلاسیان نیز داراست. بنابراین

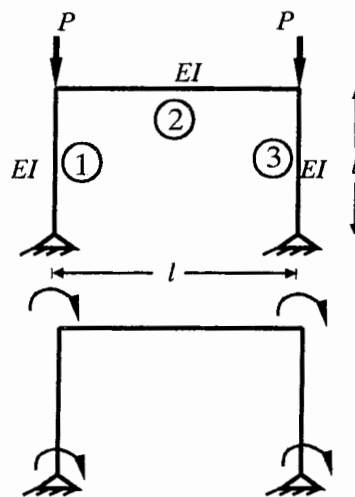
ماتریس لاپلاسین این خاصیت ماتریس سختی را نیز شامل می شود. در نتیجه برچسب گذاری راسها در این وضعیت در مدل گراف مورد نظر دارای اهمیت می باشد. اگر یال ⁽²⁾ متناظر با ستون در قاب سازه ای باشد زمانی که درجه آزادی عضو در مختصات محلی در خلاف جهت درجه آزادی سیستم قاب سازه ای باشد، یک علامت منفی در گوشه ی بالای سمت راست برچسب ۱، برای یال ⁽²⁾ در مدل گراف متناظر در نظر گرفته می شود. این برچسب گذاری، برچسب گذاری پیشرو^(۱) نامیده می شود. علامت مثبت در گوشه ی پایین سمت چپ برچسب ۱، مربوط به یال ⁽¹⁾ است و به این دلیل است که درجه آزادی عضو در مختصات محلی هم جهت با درجه آزادی سیستم قاب سازه ای می باشد این برچسب گذاری، برچسب گذاری پسرو^(۲) نامیده می شود. برای سهولت امر از قرار دادن علامت مثبت کنار برچسب مورد نظر خودداری می شود.

^(۱) Forerunner labeling

^(۲) retrograde labeling

قابهای بدون تغییر مکان جانبی با دهانه‌ی فرد:

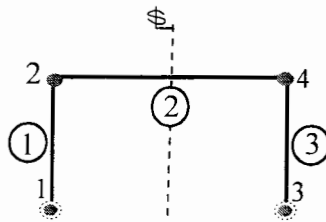
مثال ۸-۱- قاب یک طبقه یک دهانه‌ی ۴ درجه آزادی با تکیه‌گاههای مفصلی در شکل (۶-۷-الف) نشان داده شده است. فرض بر این است که در تمام موارد اشاره شده در این فصل بارهای خارجی P مستقیماً روی ستونها عمل می‌کنند. در کلیه قابهای مطرح شده در رساله، ثابت EI در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۸-۷-الف- نمایش نیروها و درجه آزادی‌های وارده بر قاب یک طبقه [۴۰]

الف-

مدل گراف قاب با برچسب‌گذاری نشان داده شده در شکل (۸-۷-ب) نشان داده شده است. مطابق با موارد ذکر شده در بخش (۸-۲) راسهای داخلی گراف مرکب، متناظر با درجه آزادی-های دورانی می‌باشند که با ۴ برچسب در شکل نشان داده شده‌اند و تکیه‌گاههای مفصلی در مدل گراف، راس خارجی یک راس مرکب می‌باشند که با خط‌چین نشان داده شدند و برچسب‌گذاری نمی‌شوند. برای هر تیر و ستون در قاب یک یال در مدل گراف متناظر در نظر گرفته شده است که وزنش میزان سختی تیر یا ستون مورد نظر می‌باشد، به این‌صورت که یال ②، یالی است که خط تقارن از آن عبور می‌کند و یال رابط می‌باشد، و در مدل گراف، متناظر با تیر در قاب سازه‌ای می‌باشد. یالهای ① و ③ نماینده‌ی ستون در قاب سازه‌ای می‌باشند.



شکل ۸-۷-ب- مدل گراف متناظر با تقارن به فرم دو

همانطوری که ملاحظه می شود مدل گراف، دارای تقارن به فرم دو می باشد. یعنی این گراف هم از نظر برچسب گذاری و هم از نظر ترتیب و نوع قرار گرفتن المانها دارای تقارن به فرم دو می باشد. ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته گراف وزندار به صورت زیر نشان داده شده است.

(۸-۲)

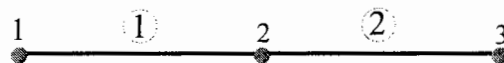
$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4+4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4+4 \end{bmatrix} - \frac{p}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

1

2

ماتریس 1 یک ماتریس به فرم دو می باشد و ماتریس 2 یک ماتریس به فرم یک می باشد که حالت خاصی از تقارن به فرم دو است.

حال نحوه بدست آمدن رابطه ی بالا شرح داده می شود. برای این منظور یک مدل ساده از گراف که در شکل (۸-۸) نشان داده شده، مورد بررسی قرار می گیرد.



شکل ۸-۸- نمایش یک مدل گراف

ماتریس لاپلاسیان این مدل گراف به صورت زیر می باشد:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

ماتریس لاپلاسیان هر یک از یالهای ① و ② به صورتی است که در شکل (۸-۹) و (۸-۱۰) نشان داده شده است.



$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

شکل ۸-۱۰ مدل گراف یال ① و ماتریس لاپلاسیان متناظر با آن



$$L = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}$$

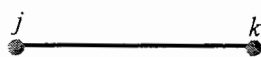
شکل ۸-۹ مدل گراف یال ② و ماتریس لاپلاسیان متناظر با آن

از سرهم بندی کردن ماتریس یالهای ① و ②، با هم، ماتریس زیر حاصل می شود:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

یعنی در راس ۲ که راس مشترک دو یال ① و ② می باشد، عدد درایه ی (۲, ۲) از ماتریس لاپلاسیان متناظر یال ① با عدد درایه ی (۲, ۲) از ماتریس لاپلاسیان یال ② برای اسمبل شدن باید با یکدیگر جمع شوند. حال نحوه ی بدست آمدن رابطه ی (۸-۱) شرح داده می شود. با توجه به اینکه ماتریس لاپلاسیان برای مدل گراف شکل (۸-۵) نشان داده شده است، با اسمبل کردن ماتریس لاپلاسیان گرافهایی همانند شکل (۸-۵) و تشکیل ماتریس لاپلاسیان گراف شکل (۸-۷ ب) رابطه ی (۸-۲) برای ماتریس لاپلاسیان کل سازه تشکیل می شود، که این رابطه منطبق بر رابطه ای است که از تحلیل ماتریسی برای ماتریس سختی کل بدست می آید [۴۰]. لازم به ذکر است که مدل گراف به صورت شکل (۸-۱۱) می باشد، زیرا سازه دارای درجه آزادی انتقالی نمی باشد.





شکل ۸-۱۱- مدل گراف بدون راس خارجی

و ماتریس لاپلاسین متناظر با تیر و ستون یال (۸-۱۱) به صورت زیر می باشد:

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

ماتریس لاپلاسین متناظر با ستون

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

ماتریس لاپلاسین متناظر با تیر

بار بحرانی، زمانی اتفاق می افتد که سختی سازه صفر شود، یا در واقع حداکثر یک نیروی کوچک به تغییر شکلهای بی نهایت برسد. این ویژگی را می توان با صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی کل

بر سازه اعمال کرد. متناظراً در ماتریس لاپلاسین نیز با در نظر گرفتن

$$\lambda = \frac{Pl^2}{30EI}$$

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix}$$

همانطوری که ملاحظه می شود این ماتریس دارای تقارن به فرم دو است که در آن طبق روابط حاکم بر فرم دو:

$$[H] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix}, [H'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

چون گراف دارای ۴ راس برچسب گذاری شده می باشد پس دارای چهار سطر و ستون در ماتریس لاپلاسین حاصل خواهد بود. با استفاده از زیرماتریس های کاهش یافته مقادیر $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ بدست می آیند. با توجه به مواردی که در بالا توضیح داده شد و بخش (۴-۲-۲) مقادیر $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ از صفر قرار دادن دترمینان ماتریسهای زیر بدست می آیند.

$$\lambda = 1 \quad L_{G_1} = L_H + \lambda_1 H' = [H] + [H'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 10-4\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |L_{G_1}| = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda = 3.2649, 0.7351 \Rightarrow \lambda_{\max} = 3.2649$$

$$\lambda = -1 \quad L_{G_2} = L_H - \lambda_2 L_{H'} = [H] - [H'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |L_{G_2}| = 0 \Rightarrow$$

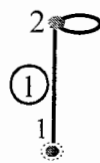
$$\lambda = 2.3710, 0.5624 \Rightarrow \lambda_{\min} = 0.5624$$

$$\lambda = \lambda_{\min} = \frac{PL^2}{30EI} \Rightarrow P_{cr} = 16.87 \frac{EI}{l^2}$$

همانطوری که ملاحظه می شود بار بحرانی با توجه به مقدار $\lambda_{\min}$ بدست می آید.

ب-

با توجه به بخش (۵-۳-۲) می توان گراف شکل (۸-۷-ب) را به دو اتم G_1 و G_2 تقسیم کرد. مقدار بار بحرانی سازه با استفاده از اتمهای G_1 و G_2 و با توجه به بخش (۸-۲-۱-۱) حاصل می شود. در اتم G_1 ، همانطوری که در شکل (۸-۱۲-الف) نشان داده شده، یک حلقه به صورت خود-وزن $\frac{EI}{l^3}$ به راس با برچسب ۲ دوبر می شود.



شکل ۸-۱۲-الف- اتم G_1

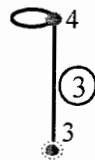
ماتریس لاپلاسیان اتم وزندار G_1 به صورت زیر بدست می آید:

ماتریس لاپلاسیان اتم وزندار G_1 = (ماتریس یال وزندار + ماتریس خود _ حلقه وزندار)

$$L_{G_1} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(3) \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 10-4\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |G_1| = 0 \quad \alpha \quad \lambda = \{3.2649 \quad 0.7351\}$$

همانطوری که از شکل (۸-۱۲-الف) مشاهده می شود، یک خود-حلقه با وزن $\frac{3EI}{l^3}$ به راس ۲ دابل شده است. بنابراین درایه ی ماتریسی (۲،۲) دارای وزن $\frac{6EI}{l^3}$ می باشد. در واقع این خود-حلقه به علت اینکه ماهیت اصلی آن تیر است فاقد بخش فشاری در ماتریس لاپلاسین متناظر با آن است. در اتم G_1 با توجه به شکل (۸-۱۲-ب) یک حلقه به صورت خود - وزن $\frac{3EI}{l^3}$ به راس ۴ دابل می - شود.



شکل ۸-۱۲-ب- اتم G_2

ماتریس لاپلاسین متناظر با اتم وزن دار G_2 به صورت زیر می باشد:

ماتریس لاپلاسین اتم وزن دار G_2 = (ماتریس یال وزندار + ماتریس خود- حلقه وزندار)

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2(1) \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} =$$

$$\frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow |G_2| = 0 \propto \lambda = \{2.3710, 0.5624\} \Rightarrow \lambda_{\min} = 0.5624$$

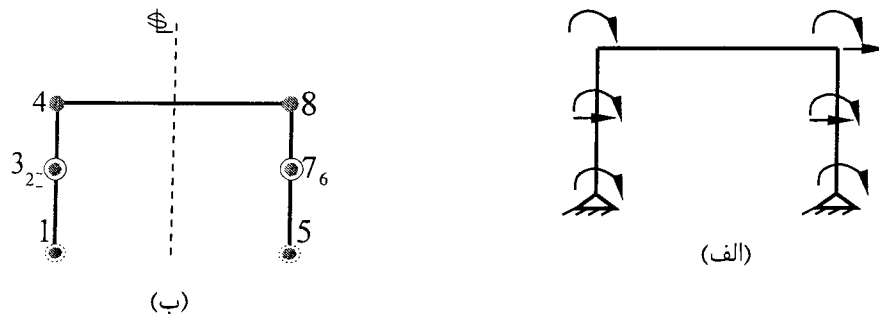
$$\lambda = \frac{Pl^2}{30EI} \Rightarrow P_{cr} = 16.87 \frac{EI}{l^2}$$

ملاحظه می شود که مقدار بار بحرانی حاصله از ماتریس لاپلاسین تعمیم یافته گراف وزندار و ماتریس لاپلاسین اتم ها با یکدیگر برابرند.

ج -

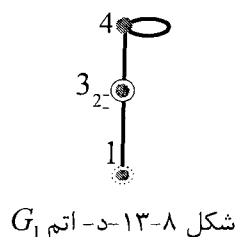
برای بدست آوردن تقریب بهتری از بار بحرانی، همانطوری که در شکل (۸-۹-الف و ب) نشان داده شده، عضو ۴-۳-۲-۱ به دو قسمت مساوی به فاصله $\frac{l}{2}$ تقسیم می شود. هر درجه آزادی با یک راس

در مدل گراف متناظر نشان داده می شود یعنی درجه آزادی انتقالی با راس خارجی و با برچسب ۲ و ۶ و درجه آزادی دورانی با راس داخلی در مدل گراف نمایش داده می شود.

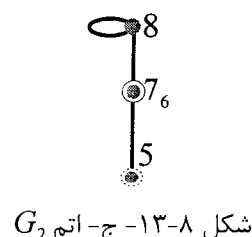


شکل ۸-۱۳- الف- قاب ب- مدل گراف متناظر با قاب

با تشکیل اتمهای G_1 و G_2 که در شکل (۸-۱۳-ج) و (۸-۱۳-د) نشان داده شده است در اتم G_1 ، طوقه ای با وزن $\frac{1}{8}(\frac{EI}{L^3})$ و در اتم G_2 طوقه ای با وزن $\frac{1}{8}(\frac{3EI}{L^3})$ به صورت دویل به ترتیب در راس-های ۴ و ۸ دویل می شود.



شکل ۸-۱۳-د- اتم G_1



شکل ۸-۱۳-ج- اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان اتم وزندار G_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_1} = \frac{EI}{.125L^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 \\ -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda \\ 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4-4\lambda+2(3/8) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|L_{G_1}| = 0 \propto \lambda = \{2.0701, 1.1670, 0.4326, 0.0999\}$$

$$L_{G_2} = \frac{EI}{.125L^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 \\ -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda \\ 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4-4\lambda+2(1/8) \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$|L_{G_2}| = 0 \Rightarrow \lambda = \{2.0217, 1.1188, .4114, .0872\} \Rightarrow \lambda_{\min} = .0872 \rightarrow P_{cr} = 10.46 \frac{EI}{L^2}$$

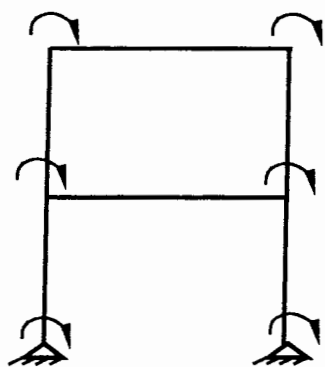
این نتیجه به مقدار دقیق $P_{cr(exact)} = 11.55 \frac{EI}{L^2}$ نزدیک می باشد [۴۷].

جهت روشن تر شدن موضوع مثال دیگری مورد بررسی قرار می گیرد.

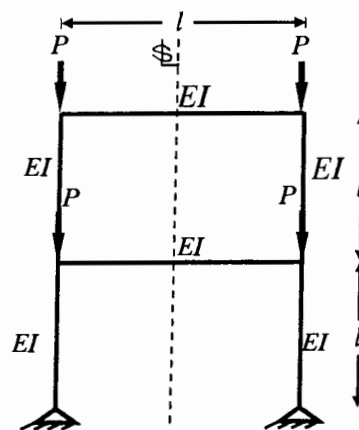
مثال ۸-۲- قاب شکل (۸-۱۴-الف) یک قاب یک دهانه دو طبقه با ۶ درجه آزادی می باشد که در

شکل (۸-۱۴-ب) نشان داده شده، مدل گراف این قاب دارای تقارن به فرم دو می باشد. لذا ماتریس

لاپلاسیان حاصله دارای تقارن به فرم دو است.



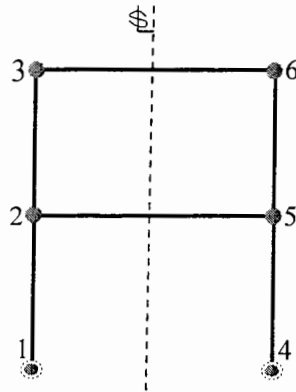
شکل ۸-۱۴-ب- نمایش درجه آزادی های قاب



شکل ۸-۱۴-الف- قاب با دهانه فرد [۱]

الف -

مدل گراف متناظر با قاب، در شکل (۸-۱۵) نشان داده شده است.



شکل ۸-۱۵ مدل گراف با تقارن به فرم دو

روش بدست آوردن ماتریس لاپلاسیان و اتمهای گراف به همان صورتی است که در مثال (۸-۱) توضیح داده شد. ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار به صورت زیر بدست می آید.

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 12 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} =$$

$$\lambda = \frac{Pl^2}{30EI}$$

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda = \{3.1543 \quad 1.6503 \quad 0.6788 \quad 2.5383 \quad 1.2712 \quad 0.6405\}$$

$$\lambda_{\min} = 0.6405 \Rightarrow P_{cr} = 19.2150 \frac{EI}{l^2}$$

همانطوری که ملاحظه می شود ماتریس و مدل گراف متناظر متقارن و به فرم دو است با توجه به زیرماتریس های ماتریس لاپلاسیان، مقادیر ویژه بدست می آید.

$$L_{G_1} = L_H - L_{H'} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 10-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda = \{3.1543, 1.6503, 0.6788\}$$

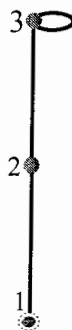
$$L_{G_2} = L_H - L_{H'} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{2.5383, 1.2712, 0.6405\}$$

با توجه به اینکه $\lambda_{\min} = 0.6405$ بدست آمده است، مقدار بار بحرانی به صورت $P_{cr} = 19.2150 \frac{EI}{l^2}$ حاصل می شود.

ب-

به کمک اتم های گراف متقارن بار بحرانی سازه حاصل شود. روند بدست آوردن اتم های گراف به همان روشی است که در بند ب مثال (۸-۱) آورده شده است. نمایش گرافی اتم G_1 به صورتی است که در شکل (۸-۱۶-الف) نشان داده شده است.



شکل ۸-۱۶-الف- اتم G_1

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار G_1 و مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_1} = L_H - L_{H'} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda = \{2.5383, 1.2712, 0.6405\}$$

$$\lambda_{\min} = 0.6405 \quad \alpha \quad P_{cr} = 19.2150 \frac{EI}{l^2}$$

نمایش گرافی اتم G_2 در شکل (۸-۱۶-ب) نشان داده شده است.



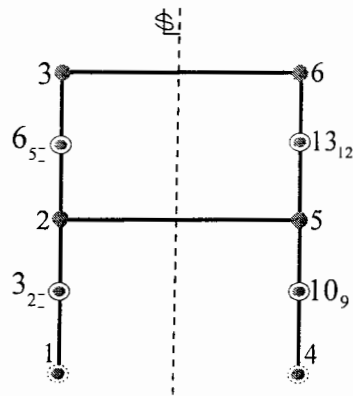
شکل ۸-۱۶-ب- اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار G_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 10-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\alpha \quad \lambda = \{3.1543, 1.6503, 0.6788\}$$

مقدار بار بحرانی بدست آمده خیلی نامطلوب می باشد بنابراین هر یال گراف که متناظر با ستون در قاب می باشد، به دو یال با فاصله مساوی از هر راس تقسیم می شود. به گراف شکل (۸-۱۷) زیر توجه کنید.



شکل ۸-۱۷- مدل گراف با تقارن به فرم دو

ماتریس لاپلاسیان با توجه به مدل گراف نشان داده شده به صورت زیر بدست می آید.

$$L_G = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & \frac{1}{2}+4+4-8\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6+\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6+3\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4+\frac{1}{2}-4\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & \frac{1}{2}+4+4-8\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6+\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4+\frac{1}{2}-4\lambda \end{bmatrix}$$

کمترین مقدار ویژه که از $|L_T| = 0$ بدست می آید برابر است با:

$$\lambda_{\min} = .0825 \quad \Rightarrow \quad P_{cr} = 9.9 \frac{EI}{l^2}$$

ماتریس لاپلاسیان G_1 و G_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_1} = [H] + [H'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 8.75-8\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6+\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4.75-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda = \{2.0700 \quad 1.7129 \quad 1.1929 \quad 0.6653 \quad 0.4320 \quad 0.1778 \quad 0.0956\}$$

$$L_{G_2} = [H] - [H'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 8.25-8\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6+\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4.25-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda = \{2.0216 \quad 1.6735 \quad 1.1478 \quad 0.6221 \quad 0.4112 \quad 0.675 \quad 0.0825\} \rightarrow$$

$$P_{cr} = 9.9 \frac{EI}{l^2}$$

ب-

به کمک اتم گراف متقارن بار بحرانی سازه را بدست می آید
نمایش گرافی اتم G_1 در شکل (۸-۱۸) نشان داده شده است.



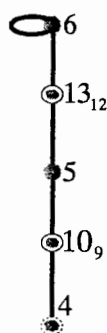
شکل ۸-۱۸- اتم G_1

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار G_1 و مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_1} = [H] + [H'] = \begin{bmatrix} 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 8.75-8\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6+\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4.75-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda = \{2.0700 \quad 1.7129 \quad 1.1929 \quad 0.6653 \quad 0.4320 \quad 0.1778 \quad 0.0956\}$$

اتم G_2 در شکل (۸-۱۹) نشان داده شده است.



شکل ۸-۱۹- اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار G_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = [H] - [H'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6+3\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 8.25-8\lambda & -6+3\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6+\lambda & 24-72\lambda & 0 & 6+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 0 & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6-3\lambda & 2+\lambda & 4.25-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \lambda = \{2.0216 \quad 1.6735 \quad 1.1478 \quad 0.6221 \quad 0.4112 \quad 0.675 \quad 0.0825\} \rightarrow$$

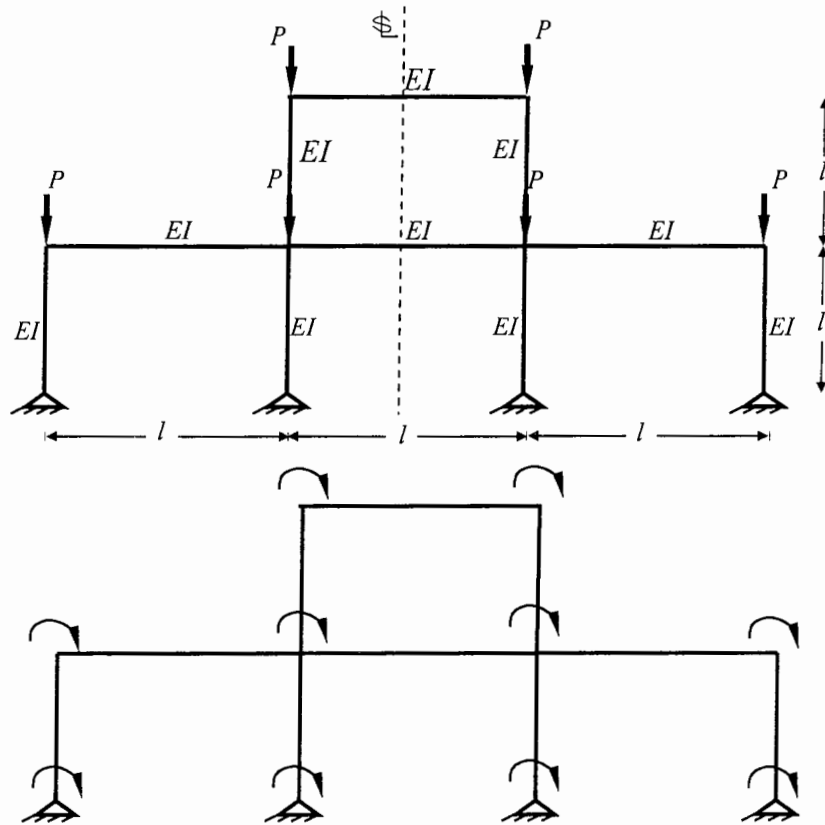
$$P_{cr} = 9.9 \frac{EI}{l^2}$$

این نتیجه به مقدار دقیق $P_{cr(exact)} = 7.24 \frac{EI}{l^2}$ نزدیک می باشد [۴۰].

به مثال دیگری توجه کنید.

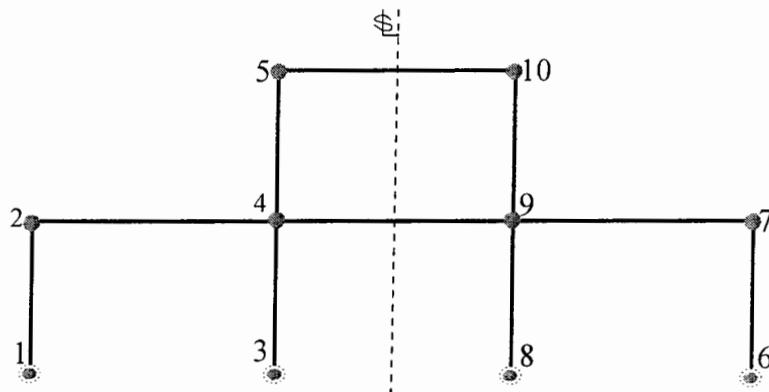
مثال ۸-۳- قاب شکل (۸-۲۰) دارای درجه آزادی های نشان داده شده می باشد. با توجه به مدل

گراف شکل (۸-۲۱) این قاب دارای تقارن به فرم دو می باشد.



شکل ۸-۲۰- نمایش نیروها و درجه آزادی های وارده بر قاب دو طبقه

مدل گراف متناظر، در شکل (۸-۲۱-الف) نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۱- مدل گراف قاب با تقارن به فرم دو

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار به صورت زیر می باشد.

$$L_1 = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4+4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4+4+4+4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4+4+4+4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\min} = 0.6029 \quad \Rightarrow P_{cr} = 18.087 \frac{EI}{l^2}$$

$$L_{G_1} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 16-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 10-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{3.4954 \quad 2.7539 \quad 1.8090 \quad 0.7925 \quad 0.6325\}$$

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 14-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{3.0719 \quad 2.4775 \quad 1.2880 \quad 0.7430 \quad 0.6029\}$$

$$\lambda_{\min} = 0.6029 \quad \Rightarrow P_{cr} = 18.087 \frac{EI}{l^2}$$

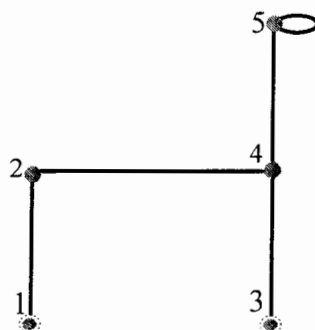
ملاحظه می شود که مقدار بار بحرانی حاصله از ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته گراف وزندار و ماتریس

لاپلاسیان اتم ها با یکدیگر برابرند

ب-

به کمک اتم گراف متقارن به حل مساله می پردازیم.

اتم G_1 در شکل (۸-۲۲-الف) نشان داده شده:



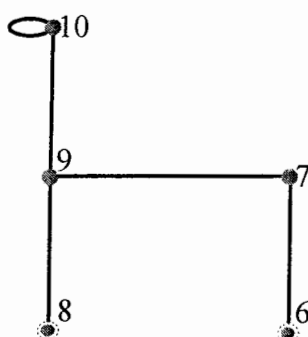
شکل ۸-۲۲-الف- اتم G_1

ماتریس لاپلاسیان گراف G_1 :

$$L_{G_1} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 16-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 10-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{3.4954 \quad 2.7539 \quad 1.8090 \quad 0.7925 \quad 0.6325\}$$

نمایش مدل گراف اتم G_2 در شکل (۸-۲۲-ب) نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۲-ب- اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان گراف G_2 :

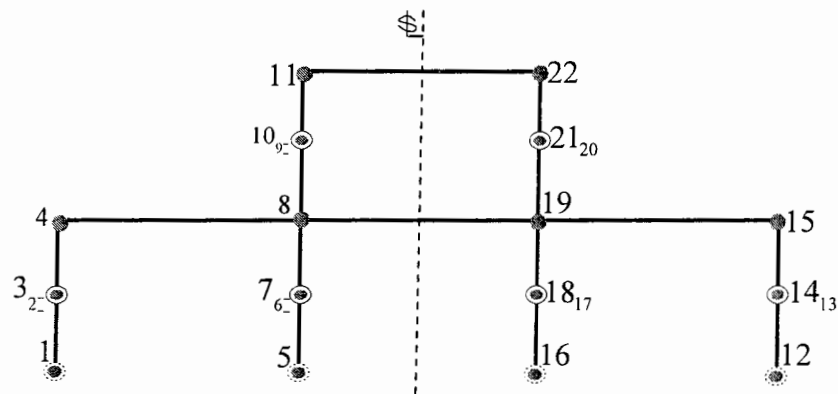
$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 14-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{3.0719 \quad 2.4775 \quad 1.2880 \quad 0.7430 \quad 0.6029\}$$

$$\lambda_{\min} = 0.6029 \quad P_{cr} = 18.087 \frac{EI}{l^2}$$

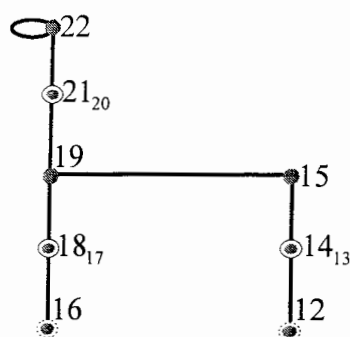
ج-

برای بدست آوردن تقریب بهتری از بار بحرانی، همانطوری که در شکل (۸-۲۳-الف) نشان داده شده، عضوهای ۱-۲، ۳-۴، ۴-۵، ۶-۷، ۸-۹، ۹-۱۰ به دو قسمت مساوی به فاصله $\frac{l}{2}$ تقسیم می-شود. در این قسمت هدف بدست آوردن اتمهای گراف می باشد.

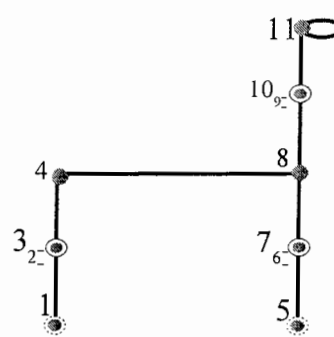


شکل ۸-۲۳-الف- مدل گراف با تقارن به فرم دو

اتمهای مدل گراف بدون محاسبه زیرماتریس های سازه در شکلهای (۸-۲۳-ب) و (۸-۲۳-ج) نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۳-ج- اتم G_2



شکل ۸-۲۳-ب- اتم G_1

با نوشتن زیرماتریس های اتمها، همان نتیجه برای بدست آوردن بار بحرانی بدست می آید. در مسایل متقارن به فرم دو، برای بدست آوردن بار بحرانی، در هر مرحله تحلیل ماتریسی نیمی از مدل متناظر در بدست آوردن بار بحرانی سازه صورت می پذیرد. از آنجایی که به جای $R \times R$ بعد سروکار با $\frac{R}{2} \times \frac{R}{2}$ بعد $(\frac{R}{2}$ درجه آزادی) می باشد، و حجم محاسبات در هر مرحله به نصف کاهش می یابد و واگرایی جوابها کاهش و در نتیجه دقت جوابها افزایش می یابد.

۸-۲-۲- ماتریس لاپلاسیان در تقارن به فرم سه در قابها:

در اتمهای گراف با تقارن به فرم سه، نظر به یالهای دو سویه و یک سویه‌ای که دارای وزن ماتریسی زیر می‌باشند معطوف می‌شود.

• یالهای دو سویه وزندار:

مدل گراف متناظر با ستون در شکل (۸-۲۴) نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۴- یال دو سویه متناظر با ستون

و با رابطه‌ی ماتریسی زیر بیان می‌شود:

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} i & j & k & m \\ 12 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} i & j & k & m \\ \frac{6}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{-6}{5} & \frac{-1}{10} \\ \frac{5}{10} & \frac{0}{10} & \frac{5}{10} & \frac{0}{10} \\ \frac{-6}{5} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{5}{10} & \frac{0}{10} & \frac{5}{10} & \frac{0}{10} \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ m \end{matrix}$$

مدل گراف متناظر با تیر در شکل (۸-۲۵) نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۵- یال متناظر با تیر

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} i & j & k & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ j \\ k \\ m \end{matrix}$$

و دارای رابطه‌ی ماتریسی مقابل است.

• یال‌های یک سویه وزندار:

یال متناظر با ستون در شکل (۸-۲۶) نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۶- یال یک سویه متناظر با ستون

ماتریس لاپلاسیان وزندار در این حالت به صورت زیر می‌باشد.

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{6}{5} & \frac{-1}{10} & \frac{-6}{5} & \frac{-1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

یال متناظر با تیر در یک قاب سازه‌ای در شکل (۸-۲۷) نشان داده شده است.



شکل ۸-۲۷- یال یک سویه متناظر با تیر

$$L = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

و دارای رابطه ماتریسی مقابل خواهد بود

در گرافهای با تقارن به فرم سه، در راس های هم موقعیت، خاصیت ماتریسی زیر برقرار است:

$$L_{W_{rs}} = \begin{cases} W_{rs} & r, s \in \{i, j, k, m\} \quad i \neq k \\ 0 & i = k \end{cases} \quad (3-8)$$

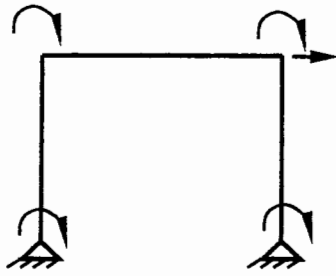
۸-۲-۱- گامهای بدست آوردن اتمهای گراف در تقارن به فرم سه:

۱- در اتم G_2 یک حلقه به صورت خود - وزن $\frac{EI}{l^3}$ به راس داخلی راس مرکب با برچسب j دوبل می شود.

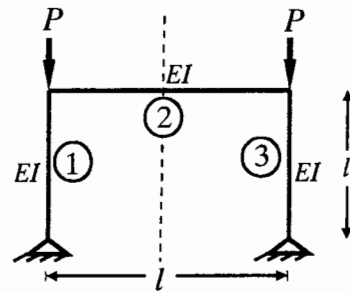
۲- در اتم G_3 یک حلقه به صورت خود - وزن $\frac{3EI}{l^3}$ به راس داخلی راس مرکب با برچسب m دوبل می شود.

۳- شرایط یال های انتقالی به همان صورتی است که در تقارنهای به فرم سه مبحث گرافهای مرکب به آن اشاره شد. در این وضعیت یالهای یک سویه و دو سویه دارای وزن و ماتریس های لاپلاسیان متناظر آنها با بعد 4×4 می باشند.

۴- طریقه ی برچسب گذاری به همان روشی است که در تقارن به فرم دو شرح داده شد. لازم به ذکر است که در این حالت نیز گراف های معمولی حالت خاصی از گراف های مرکب می باشند. که در آن یک راس مرکب بدون راس خارجی است، یعنی در ماتریس لاپلاسیان متناظر به ازای هر راسی که وجود ندارد، سطر و ستون متناظر حذف می شوند.



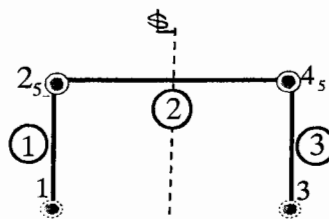
شکل ۸-۲۸-ب- درجه آزادی های وارد بر سازه



شکل ۸-۲۸-الف- نیروهای وارد بر قاب با دهانه ی فرد [۴۰]

الف -

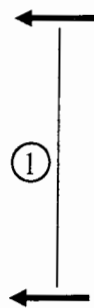
مدل گراف سازه، با مرتب سازی در برچسب گذاری در شکل (۶-۲۸-ج) نشان داده شده است.



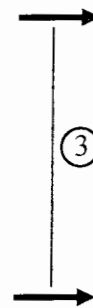
شکل ۸-۲۸-ج- مدل گراف متناظر با قاب با تقارن به فرم سه

همانطوری که مشهود است و با توجه به فصل ۵ بخش (۵-۴) مدل گراف، دارای تقارن به فرم سه می باشد. یعنی این گراف هم از نظر برچسب گذاری و هم از نظر ترتیب و نوع قرار گرفتن المانها دارای تقارن می باشد. درجه آزادی انتقالی با برچسب ۵ نشان داده شده است و از آنجایی که در قاب متناظر درجه آزادی انتقالی بر هر دو ستون اعمال می شود؛ در گراف متناظر با برچسب ۵ به صورت یک راس خارجی راس مرکب، نشان داده شده است همچنین قاب دارای ۴ درجه آزادی دورانی است که با ۴ راس داخلی ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان داده شده است. با توجه به رابطه ی (۸-۳) ملاحظه می شود که در یال ②، $i = k = 5$ می باشد، در نتیجه یال مورد نظر متناظر با تیر در قاب سازه ای می باشد و در یال ① و ③ همانطوری که ملاحظه می شود $i = 0 \neq k = 5$ می باشد، بدین لحاظ یالهای ① و ③ متناظر با ستون در قاب سازه ای می باشند. ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار شکل (۸-۲۸-ج) به صورت نشان داده شده می باشد. علامت منفی در گوشه ی پایین برچسب ۵ به این دلیل است که

یک راس خارجی راس مرکب، نشان داده شده است همچنین قاب دارای ۴ درجه آزادی دورانی است که با ۴ راس داخلی ۱، ۲، ۳ و ۴ نشان داده شده است. با توجه به رابطه ی (۸-۳) ملاحظه می شود که در یال ②، $i = k = 5$ می باشد، در نتیجه یال مورد نظر متناظر با تیر در قاب سازه ای می باشد و در یال ① و ③ همانطوری که ملاحظه می شود $i = 0 \neq k = 5$ می باشد، بدین لحاظ یالهای ① و ③ متناظر با ستون در قاب سازه ای می باشند. ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار شکل (۸-۲۸-ج) به صورت نشان داده شده می باشد. علامت منفی در گوشه ی پایین برچسب ۵ به این دلیل است که تغییر مکان جانبی قاب که متناظر با درجه آزادی ۵ است دارای جهتی مخالف جهت مختصات محلی عضو، در یال متناظر، یعنی یال ① است، تغییر مکانهای جانبی در مختصات محلی برای یالهای ① و ③ مطابق شکل (۸-۲۹) می باشد. برای توضیحات بیشتر به بخش (۸-۲-۱-۱) مراجعه شود.



(ب)



(الف)

شکل ۸-۲۹- درجه آزادی انتقالی در مختصات محلی الف- ستون ③ ب- ستون ①

با توجه به بخش (۸-۲-۲) و توضیحات مثال (۸-۱)، از هم ارز بودن ماتریس لاپلاسیان و ماتریس سختی، L_T ، به صورت زیر بدست می آید.

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4+4 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & 4+4 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & -6 & 12+12 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

1

2

ماتریس 1 یک ماتریس به فرم سه می باشد و ماتریس 2 نیز یک ماتریس به فرم سه می باشد.

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \left[\begin{array}{cc|cc|c} \text{H} & & \text{H}' & & \\ \hline 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & -6+3\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & -6+3\lambda \\ \hline 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & -6+3\lambda \\ 0 & 2 & 4+\lambda & 8-4\lambda & -6+3\lambda \\ \hline -6+3\lambda & -6+3\lambda & -6+3\lambda & -6+3\lambda & 24-72\lambda \end{array} \right]$$

که در آن $\lambda = \frac{pl^2}{30EI}$ می باشد، با صفر قرار دادن درمینان ماتریس L_T و محاسبه ی کوچکترین مقدار λ ، بار بحرانی بدست می آید. این عملیات را می توان با استفاده از روشهای مختلف عددی محاسبه کرد که در این فصل مقادیر ویژه به کمک نرم افزار مطلب بدست آمده است.

$$\lambda = \{3.5279 \quad 2.4981 \quad 0.8434 \quad 0.7412 \quad 0.4565 \quad 0.0763\}$$

از طیف مقدار ویژه بدست آمده $\lambda_{\min} = 0.0763$ بدست می آید که با توجه به آن بار بحرانی مقدار $P_{cr} = \frac{2.2890EI}{l^2}$ را خواهد داشت، که البته به کمک رابطه ماتریسی زیر که در فصل ۴ بخش (۴-۲) به آن اشاره شد می توان مقدار بار بحرانی را بدست آورد.

$$L_{G_2} = L_H - L_{H'} = [H] - [H'] = \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{2.3710 \quad 0.5624\}$$

$$L_{G_3} = \begin{bmatrix} [H] + [H'] & [F] \\ [2S] & [U] \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 4-4\lambda & 2+\lambda & -6+3\lambda \\ 2+\lambda & 10-4\lambda & -6+3\lambda \\ \hline -12+6\lambda & -12+6\lambda & 24-72\lambda \end{array} \right]$$

$$\rightarrow \lambda = \{3.3561 \quad .7831 \quad 0.0609\} \quad \lambda_{\min} = 0.0609 \rightarrow P_{cr} = \frac{1.8270EI}{l^2}$$

در اینجا نیز علت اختلاف در معادلات مشخصه می باشد، زیرا با کاهش درجه ی معادله میزان همگرایی جوابها افزایش می یابد و دقت مساله بالاتر می رود. بنابراین استفاده از زیرماتریس ها از نظر

دقت و حجم عملیاتی بسیار بهینه است و هر چه درجه آزادی سازه بالاتر باشد از میزان خطا به طور قابل ملاحظه ای کاسته می شود و دقت مساله را بالا می برد.

ب-

با توجه به بخش (۴-۵) می توان گراف شکل (۸-۲۸-ج) را به دو اتم G_2 و G_3 تقسیم کرد. مقدار بار بحرانی سازه با استفاده از اتمهای G_2 و G_3 و با توجه به بخش (۸-۲-۲) حاصل می شود.

با توجه به شکل (۸-۳۰-الف) در اتم G_2 ، یک حلقه به صورت خود- وزن $\frac{EI}{l^3}$ به راس داخلی راس مرکب با برچسب ۲ وارد می شود.



شکل ۸-۳۰-الف- اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان اتم G_2 به صورت زیر می باشد.

ماتریس لاپلاسیان اتم G_2 = (ماتریس وزنی یال + ماتریس وزنی خود _ حلقه)

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \frac{p}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{2.3710 \quad 0.5624\}$$

با توجه به شکل (۸-۳۰-ب) در اتم G_3 یک حلقه به صورت خود- وزن $\frac{3EI}{l^3}$ به راس مرکب 4_5

وارد می شود.

ماتریس لاپلاسیان یال یک سویه

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 12 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 4 & -6 \\ -6 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

ماتریس لاپلاسیان یال وزندار

$$- \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} \end{bmatrix} + \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & -6+3\lambda \\ 2+\lambda & 10-4\lambda & -6+3\lambda \\ -12+6\lambda & -12+6\lambda & 24-72\lambda \end{bmatrix}$$

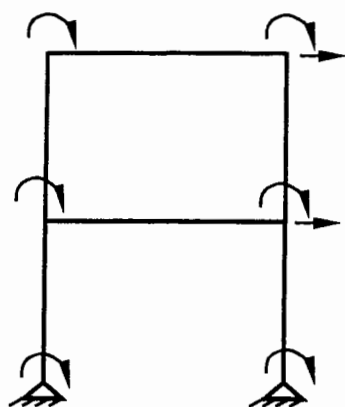
ماتریس لاپلاسیان خود-حلقه وزندار

$$\rightarrow \lambda = \{ 3.3561 \quad .7831 \quad 0.0609 \} \rightarrow \lambda_{\min} = 0.0609 \rightarrow P_{cr} = 1.8270 \frac{EI}{l^2}$$

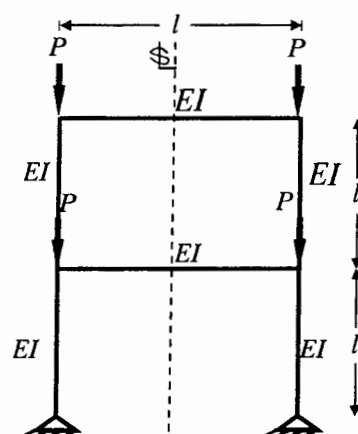
این نتیجه به مقدار دقیق $P_{cr} = \frac{1.82EI}{l^2}$ نزدیک می باشد [۴۷].

خاطر نشان می شود که G_2 و G_3 اتمهای گراف G می باشند و به اتم دیگری کاهش نمی یابند. همانطوری که ملاحظه می شود درجه آزادی ۵ در اتم G_2 برچسب گذاری نمی شود چون درجه آزادی ۵ جزو درجه آزادی انتقالی است و یک راس هم موقعیت می باشد و می بایستی در مولفه متقارن G_3 اعمال شود، که این همانا مفهوم تقارن به فرم سه می باشد.

مثال ۸-۵- قاب دو طبقه ای در شکل (۸-۳۱-الف) نشان داده شده است. این قاب دارای ۸ درجه آزادی، (۶ درجه آزادی دورانی و ۲ درجه آزادی انتقالی) که در شکل (۸-۳۱-ب) نشان داده شده می باشد. بار بحرانی سازه مطلوب مساله است.



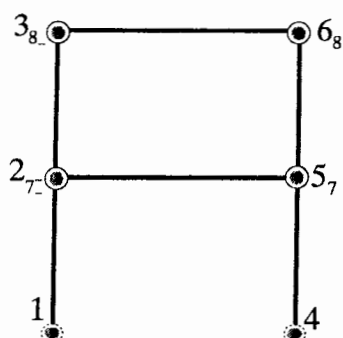
شکل ۸-۳۱-ب- درجه آزادی های وارد بر قاب



شکل ۸-۳۱-الف- نیروهای وارد بر قاب دو طبقه با دهانه ی فرد [۴۰]

الف-

مدل گراف سازه، با برچسب گذاری صحیح در شکل (۸-۳۱-ج) نشان داده شده است.



شکل ۸-۳۱-ج- مدل گراف قاب با تقارن به فرم دو

با توجه به توضیحات مثال (۸-۴) ماتریس لاپلاسین گراف وزن دار، یک ماتریس به فرم سه است.

با توجه به توضیحات مثال (۸-۴) ماتریس لاپلاسیان گراف وزن دار، یک ماتریس به فرم سه است.

$$L_T = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 4+4 & 2 & 0 & 0 & 0 & -6+6 & -6 \\ 0 & 2 & 4+4 & 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 & 2 & -6+6 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4+4 & 6 & -6 \\ -6 & -6+6 & 6 & -6 & -6+6 & 6 & 12+12+12+12 & -12-12 \\ 0 & -6 & -6 & 0 & -6 & -6 & -12-12 & 12+12 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{P}{I} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} & -\frac{6}{5} - \frac{6}{5} \\ 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} - \frac{6}{5} & \frac{6}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آید:

$$\lambda = \{2.6520 \quad 2.5156 \quad 1.4271 \quad 1.3479 \quad 0.5457 \quad 0.48380 \quad 0.1581 \quad 0.0171\}$$

که با در نظر گرفتن مقدار $\lambda = \frac{Pl^3}{30EI}$ مقدار بار بحرانی به صورت زیر بدست می آید:

$$\lambda_{\min} = 0.0171 \quad \Rightarrow P_{cr} = 0.513 \frac{EI}{l^2}$$

زیرماتریس های کاهش یافته ی G_2 و G_3 و مقادیر ویژه ی آنها به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{2.2249 \quad 1.2283 \quad 0.4635\}$$

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda & 6-3\lambda & -6+3\lambda \\ -12+6\lambda & 0 & 12-6\lambda & 48-144\lambda & -24+72\lambda \\ 0 & -12+6\lambda & -12+6\lambda & -24+72\lambda & 24-72\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\lambda = \{2.2293 \quad 1.2664 \quad 0.4827 \quad 0.1305 \quad 0.0133\}$$

$$\lambda_{\min} = 0.0133 \rightarrow P_{cr} = 0.399 \frac{EI}{l^2}$$

ب-

مقادیر ویژه را با استفاده از اتم G_2 و G_3 بدست می آوریم.

اتم G_2 در شکل (۸-۳۲-الف) نشان داده شده:

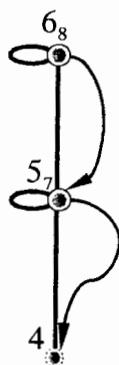


شکل ۸-۳۲-الف- اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان اتم G_2 به صورت زیر می باشد.

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 8-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{2.2249 \quad 1.2283 \quad 0.4635\}$$

مدل گراف اتم G_3 در شکل (۸-۲۷-ب) نشان داده شده است.



شکل ۸-۳۲-ب- اتم G_3

ماتریس لاپلاسیان اتم G_3 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 8-8\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda & 6-3\lambda & -6+3\lambda \\ -12+6\lambda & 0 & 12-6\lambda & 48-144\lambda & -24+72\lambda \\ 0 & -12+6\lambda & -12+6\lambda & -24+72\lambda & 24-72\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

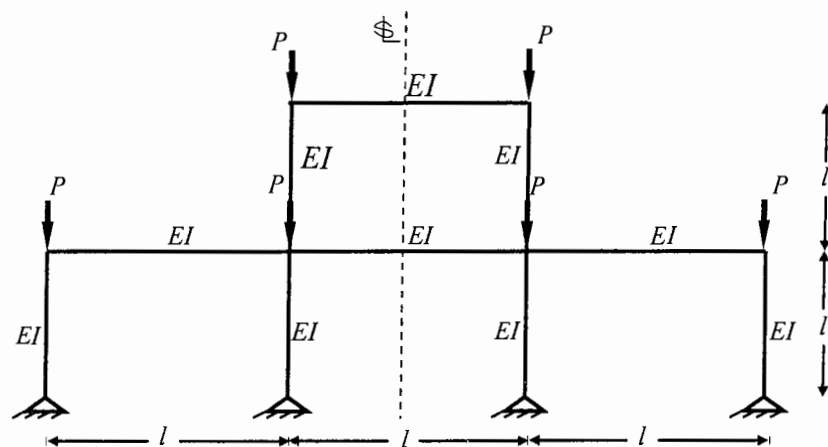
$$\lambda = \{2.2293 \quad 1.2664 \quad 0.4827 \quad 0.1305 \quad 0.0133\}$$

$$\lambda_{\min} = 0.0133 \rightarrow P_{cr} = 0.399 \frac{EI}{l^2}$$

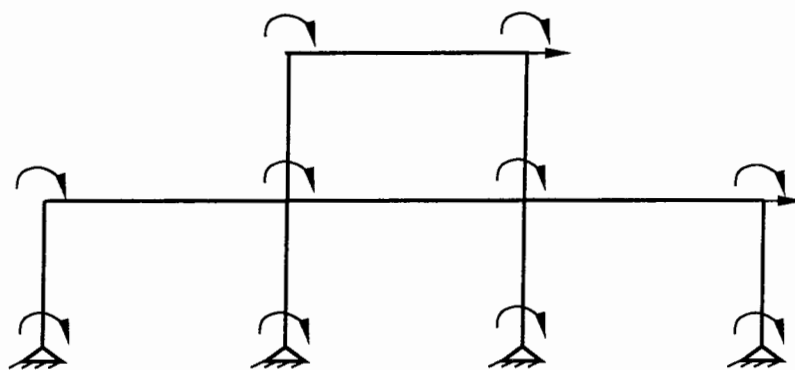
که این نتیجه به مقدار دقیق $p_{cr(exact)} = 0.398 \frac{EI}{l^2}$ نزدیک می باشد [۴۵]. همان مقدار باری است

که از توجه یک بدست آمده است. ملاحظه می شود که مقدار بار بحرانی حاصله از ماتریس لاپلاسیان تعمیم یافته گراف وزندار و ماتریس لاپلاسیان اتم ها با یکدیگر برابرند. مثال دیگری مطرح می شود.

مثال ۸-۶- قاب شکل (۸-۳۳-الف و ب) دارای ۱۲ درجه آزادی با ۲ درجه آزادی انتقالی و ۱۰ درجه آزادی دورانی است که دارای تقارن به فرم دو می باشد.



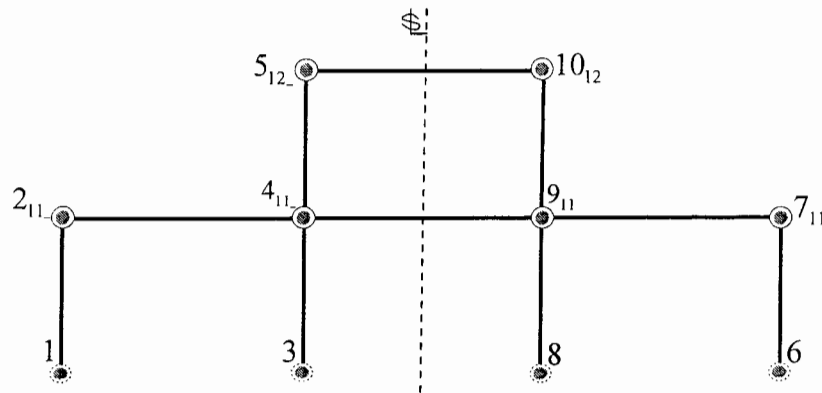
شکل ۸-۳۳-الف- نیروهای وارد بر قاب سازه ای دو طبقه با دهانه فرد



شکل ۸-۳۳-ب- درجه آزادی های وارد بر قاب سازه ای دو طبقه با دهانه فرد

الف-

نمایش مدل گراف سازه، با برچسب گذاری متناظر با درجه آزادی های سازه در شکل (۸-۳۳-ج) نشان داده شده است.



شکل ۸-۳۳-ج- قاب با تقارن به فرم دو

$$L_T = \frac{EI}{P} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & 4+4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4+4+4+4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -6+6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 & 0 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 4+4+4+4 & 2 & -6+6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 & 6 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & -6+6 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6+6 & 6 & 12+12+12+12+12+12 & -12-12 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & 0 & 0 & 0 & -6 & -6 & -12-12 & 12+12 \end{bmatrix}$$

$$\frac{P}{I} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} + \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} & -\frac{6}{5} - \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5} - \frac{6}{5} & -\frac{6}{5} - \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

با در نظر گرفتن $\lambda = \frac{Pl^3}{30EI}$ مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آید:

$$\lambda = \begin{Bmatrix} 3.7338 & 3.0747 & 2.7620 & 2.4701 & 1.8936 & 1.3110 \\ 0.8817 & 0.7431 & 0.6518 & 0.6087 & 0.2258 & 0.0972 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_{\min} = 0.0972 \Rightarrow p_{cr} = 2.9160 \frac{EI}{l^2}$$

با در نظر گرفتن $\lambda = \frac{Pl^3}{30EI}$ ، زیرماتریس های L_{G_2} و L_{G_3} به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 14-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 18-8\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 10-4\lambda & 6-3\lambda & -6+3\lambda \\ -12+6\lambda & -12+6\lambda & -12+6\lambda & 0 & 12+6\lambda & 72-216\lambda & -24+72\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -12+6\lambda & -12+6\lambda & -24+72\lambda & 24-72\lambda \end{bmatrix}$$

مقدار ویژه بدست آمده از L_{G_2} و L_{G_3} به صورت زیر بدست می آید.

$$\lambda_{G_2} = \{2.8, 2.7242, 1.2912, 0.7013, 0.6667\}$$

$$\lambda_{G_3} = \{3.7793, 2.7745, 1.8931, 0.8666, 0.6492, 0.2123, 0.0650\}$$

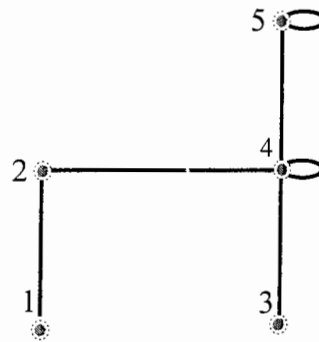
$$P_{cr} = 1.95 \frac{EI}{l^2} \text{ با } 0.0650 \text{ ویژه به مقدار ویژه برابر است با}$$

ب-

نحوه ی عملکرد در صورتی که از همان ابتدا افزاز انجام شود، یعنی به کمک اتم های G_2 و G_3 به

صورتی است که در شکل (۸-۳۴-الف) و (۸-۳۴-ب) نشان داده شده است.

نمایش اتم G_2 با توجه به شکل (۸-۳۴-الف) به صورت زیر می باشد:

شکل ۸-۳۴-الف-اتم G_2

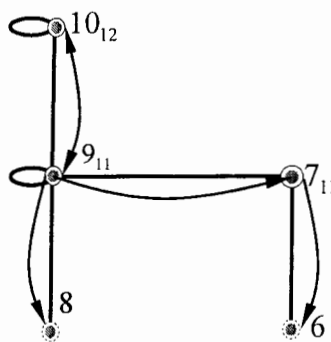
ماتریس لاپلاسیان اتم وزن دار به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 14-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 6-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

و مقادیر ویژه به صورت مقابل حاصل می شود.

$$L_{G_2} = \{2.8, 2.7242, 1.2912, 0.7013, 0.6667\}$$

نمایش اتم وزن دار G_3 به صورتی است که در شکل (۸-۳۴-ب) نشان داده شده است.

شکل ۸-۳۴-ب-اتم G_3

ماتریس لاپلاسیان اتم G_3 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_1} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2+\lambda & 18-8\lambda & 2+\lambda & 0 & -6+3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 2+\lambda & 10-4\lambda & 6-3\lambda & -6+3\lambda \\ -12+6\lambda & -12+6\lambda & -12+6\lambda & 0 & 12+6\lambda & 72-216\lambda & -24+72\lambda \\ 0 & 0 & 0 & -12+6\lambda & -12+6\lambda & -24+72\lambda & 24-72\lambda \end{bmatrix}$$

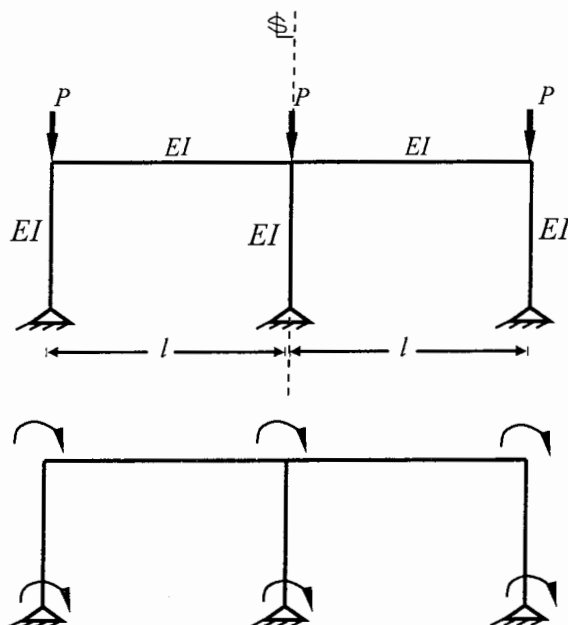
$$L_{G_1} = \{3.7793, 2.7745, 1.8931, 0.8666, 0.6492, 0.2123, 0.0650\}$$

$$\lambda_{\min} = 0.0650 \rightarrow P_{cr} = 1.95 \frac{EI}{l^2}$$

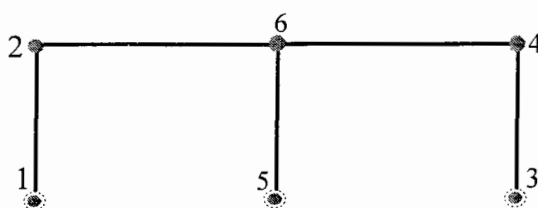
در ماتریس متناظر مدل گراف چنین قابهایی، به جای حل یک ماتریس با $R+Q$ بعد (قاب با $R+Q$ درجه آزادی) با ماتریسی با $(Q+\frac{R}{2}) \times (Q+\frac{R}{2})$ سروکار داریم که این امر باعث کاهش حجم محاسباتی و افزایش دقت جوابها خواهد شد. در اینجا Q راس هم موقعیت (درجه آزادی انتقالی) و R راس درونی (درجه آزادی متقارن) وارد بر قاب می باشد.

قاب بدون تغییر مکان جانبی با دهانه زوج:

مثال ۸-۷- قاب یک طبقه دو دهانه شکل (۸-۳۵-الف) را در نظر بگیرید. این قاب دارای ۶ درجه آزادی می باشد.



شکل ۸-۳۵-الف- نمایش نیروها و و درجه آزادی های وارد بر قاب با دهانه ی زوج



شکل ۸-۳۵-ب- مدل گراف با تقارن به فرم سه

الف -

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار (۸-۳۵-ب) به صورت زیر بدست می آید. برای توضیحات بیشتر به مثال (۸-۴) مراجعه شود.

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4+4 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4+4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4+4+4 \end{bmatrix} - \frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

با توجه به $\lambda = \frac{Pl^2}{30EI}$ مقادیر ویژه به صورت زیر بدست می آیند:

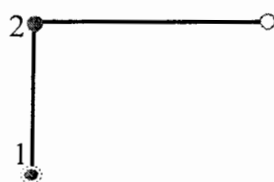
$$\lambda = \{4.1163 \quad 2.800 \quad 2.4813 \quad 0.8075 \quad 0.6667 \quad 0.5949\}$$

$$L_{G_2} = L_H - L_{H'} = [H] - [H'] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \{2.8, 0.6667\}$$

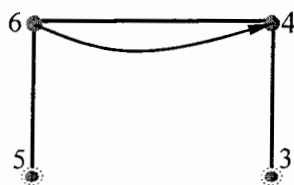
$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 4 & 2+\lambda & 12-4\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \{4.1163, 2.4813, 0.8075, 0.5949\}$$

$$\rightarrow P_{cr} = 17.8470 \frac{EI}{l^2}$$

ب-

اتم G_2 در شکل (۸-۳۶-الف) نشان داده شده است..شکل ۸-۳۶-الف- اتم G_2 ماتریس لاپلاسیان اتم G_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{2.8, 0.6667\}$$

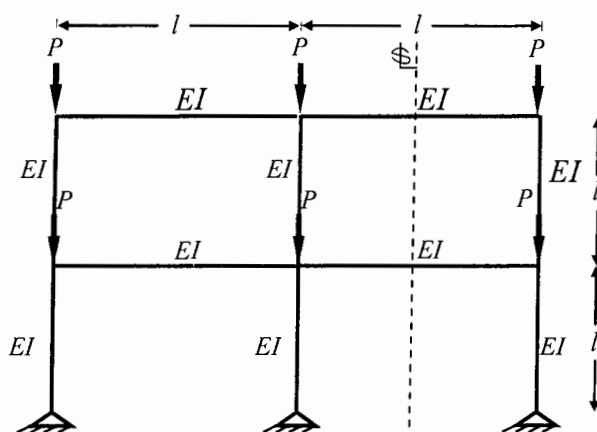
بار بحرانی با مقدار ویژه $\lambda = 0.5949$ به صورت $P_{cr} = 17.8470 \frac{EI}{l^2}$ می باشد.- نمایش اتم G_3 در شکل (۸-۳۶-ب) نشان داده شده است.شکل ۸-۳۶-ب- اتم G_3 ماتریس لاپلاسیان اتم وزندار G_3 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 4 & 2+\lambda & 12-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{4.1163, 2.4813, 0.8075, 0.5949\}$$

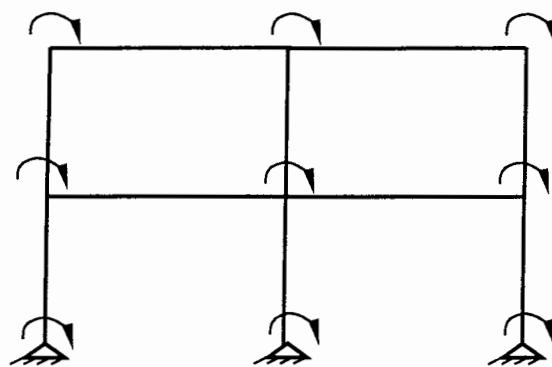
که مقدار بار بحرانی از اتم وزندار G_3 ، $P_{cr} = 17.8470 \frac{EI}{l^2}$ بدست می آید.

برای روشن تر شدن موضوع مثال دیگری مطرح می شود.

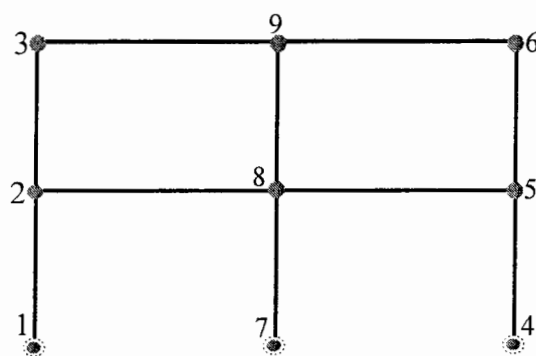
مثال ۸-۸- قاب شکل (۸-۳۷-الف و ب)، یک قاب دو طبقه با دو دهانه می باشد. همانطوری که ملاحظه می شود این قاب دارای ۶ درجه آزادی دورانی است.



شکل ۸-۳۷-الف- نمایش نیروهای وارد بر قاب دو دهانه



شکل ۸-۳۷-ب- نمایش درجه آزادی های وارد بر قاب دو دهانه



شکل ۸-۳۷-ج- مدل گراف متناظر قاب با تقارن به فرم سه

الف -

ماتریس لاپلاسیان گراف وزندار، L_T به صورت زیر بدست آمده است:

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4+4+4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4+4 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 4+4 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4+4+4+4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 4+4+4 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} + \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه با توجه به $\lambda = \frac{Pl^2}{30EI}$ به صورت زیر بدست می آید:

$$\lambda = \left\{ \begin{matrix} 4.1163, & 2.8, & 2.4813, & 2.1830, \\ 1.5, & 1.317, & 0.8075, & 0.6667, & 0.5949 \end{matrix} \right\}$$

زیرماتریس های L_{G_2} و L_{G_3} به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{2.8 \quad 1.5 \quad 0.6667\}$$

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2+\lambda & 16-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2+\lambda & 12-4\lambda \end{bmatrix}$$

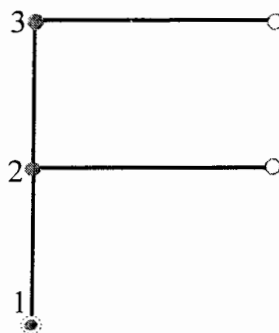
$$\lambda = \{4.1163 \quad ,2.4813 \quad ,2.1830 \quad ,1.3170 \quad ,0.8075 \quad ,0.5949\}$$

با توجه به $\lambda_{\min}$ که از زیرماتریس L_{G_3} بدست آمده است مقدار بار بحرانی 17.8470 بدست می آید.

ب-

با توجه به اتمهای گراف حاصله مقدار بار بحرانی را بدست می آوریم.

نمایش اتم گراف G_2 در شکل (۸-۳۸-الف) نشان داده شده است.



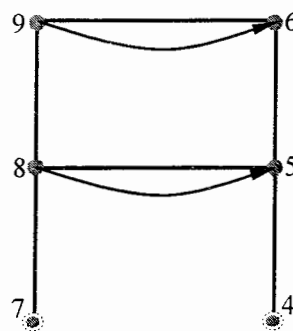
شکل ۸-۳۸-الف- اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان اتم G_2 با توجه به مدل گراف مورد نظر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{2.8 \quad 1.5 \quad 0.6667\}$$

اتم G_3 :



شکل ۸-۳۸-ب- اتم G_3

ماتریس لاپلاسین L_{G_3} :

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2+\lambda & 12-8\lambda & 2+\lambda & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2+\lambda & 16-8\lambda & 2+\lambda \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2+\lambda & 12-4\lambda \end{bmatrix}$$

$$\lambda = \{4.1163, 2.4813, 2.1830, 1.3170, 0.8075, 0.5949\}$$

$$P_{cr} = 17.8470 \frac{EI}{l^2}$$

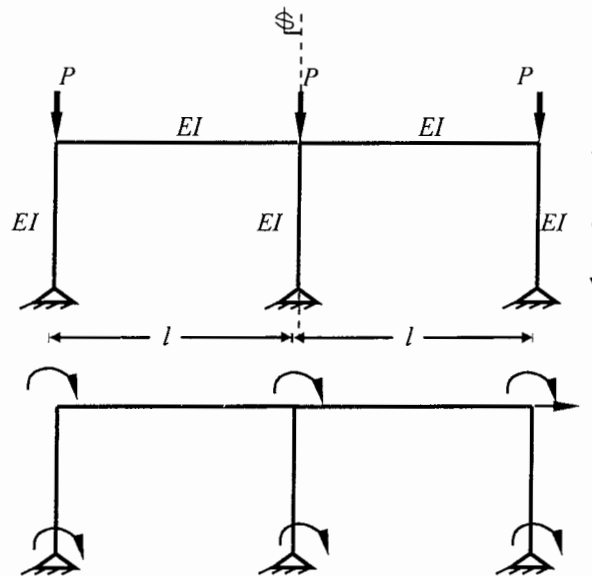
در ماتریس متناظر مدل گراف چنین قابهایی، به جای حل یک ماتریس با $R+Q$ بعد (قاب با

$R+Q$ درجه آزادی) سروکار با ماتریسی با ابعاد $(Q+\frac{R}{2}) \times (Q+\frac{R}{2})$ می باشد. در اینجا Q راس

مرکزی (درجه آزادی دورانی) و R راس متقارن (درجه آزادی دورانی متقارن) وارد بر قاب می باشد.

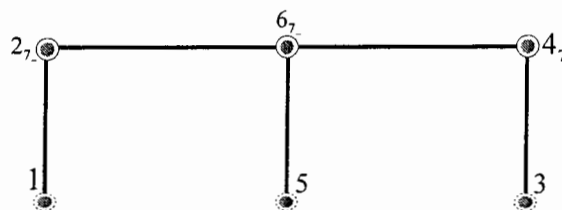
قاب با تغییر مکان جانبی با دهانه ی زوج:

مثال ۸-۹- قاب شکل (۸-۳۹-الف) یک قاب یک طبقه دو دهانه می باشد که دارای ۶ درجه آزادی دورانی و یک درجه آزادی انتقالی می باشد.



شکل ۸-۳۹-الف- نمایش نیروها و درجه آزادی های وارد بر قاب دو دهانه ای یک طبقه

نمایش مدل گراف قاب سازه ای در شکل (۸-۳۹-ب) نشان داده شده است.



شکل ۸-۳۹-ب- مدل گراف با تقارن به فرم سه

ماتریس لاپلاسیان گراف به صورت زیر بدست می آید:

$$L_T = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \\ 2 & 4+4 & 0 & 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 4+4 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4+4+4 & -6 \\ -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & -6 & 12+12+12 \end{bmatrix}$$

$$-\frac{P}{l} \begin{bmatrix} \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{15} & -\frac{1}{30} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{30} & \frac{2}{15} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5} + \frac{6}{5} + \frac{6}{5} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه با توجه به مقدار $\lambda = \frac{Pl^2}{30EI}$ به صورت زیر بدست می آیند:

$$\lambda = \{4.2648 \quad 2.8 \quad 2.4850 \quad .8552 \quad .6667 \quad .5988 \quad .0629\}$$

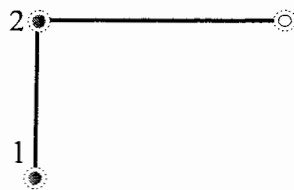
$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{2.8 \quad 0.6667\}$$

$$L_{G_1} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & -6+3\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & -6+3\lambda \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & -6+3\lambda \\ 0 & 4 & 2+\lambda & 12-4\lambda & -6+3\lambda \\ -12+6\lambda & -12+6\lambda & -6+3\lambda & -6+3\lambda & 36-108\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\lambda = \{4.2648 \quad ,2.4850 \quad ,0.8552 \quad ,0.5988 \quad ,0.0629\}$$

ب-

اتم G_2 در شکل (۸-۴۰-الف) نشان داده شده است.

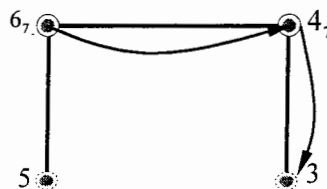


شکل ۸-۴۰-الف-اتم G_2

ماتریس لاپلاسیان مولفه متقارن وزندار G_2 به صورت زیر بدست می آید.

$$L_{G_2} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = \{2.8 \quad 0.6667\}$$

- اتم G_3 در شکل (۸-۴۰-ب) نشان داده شده است.



شکل ۸-۴۰-ب-اتم G_3

ماتریس لاپلاسیان اتم G_3 به صورت زیر می باشد.

$$L_{G_3} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4-4\lambda & 2+\lambda & 0 & 0 & -6+3\lambda \\ 2+\lambda & 8-4\lambda & 0 & 2 & -6+3\lambda \\ 0 & 0 & 4-4\lambda & 2+\lambda & -6+3\lambda \\ 0 & 4 & 2+\lambda & 12-4\lambda & -6+3\lambda \\ -12+6\lambda & -12+6\lambda & -6+3\lambda & -6+3\lambda & 39-108\lambda \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\lambda = \{4.2648, 2.4850, 0.8552, 0.5988, 0.0629\}$$

$$\lambda = 0.0555 \quad P_{cr} = 1.887 \frac{EI}{l^2}$$

یعنی اگر یک قاب پنج طبقه دو دهانه، با تغییر مکان جانبی، تقارن به فرم سه داشته باشد، گراف متناظر دارای ۲۳ راس خواهد بود، و ماتریس لاپلاسیان آن دارای ابعاد ۲۳×۲۳ است که جمع درایه های آن ۵۲۹ می باشد، با توجه به تقارن، ماتریس لاپلاسیان به دو ماتریس به ابعاد ۶×۶ و ۱۷×۱۷

تبدیل می گردد که جمعاً دارای ۳۶ و ۲۸۹ درایه می باشد. پر واضح است که محاسبات با زیرماتریس- ها، دارای سرعت بالاتر و دقت بیشتر می باشد و همچنین در قابهای کوچکتر، در هر مرحله حافظه کمتری مورد نیاز است.

فصل

مقایسه و جمع بندی

۹

۹-۱- مقدمه

کاربرد ماتریس‌های مرتبط با تئوری گراف می‌تواند به عنوان یک روش قدرتمند برای تحلیل پایداری سازه‌ها مورد استفاده قرار گیرد. این روش که بر اساس کاربرد ماتریس لاپلاسیان و خواص آن در سازه بوجود آمده سازگاری خوبی با مسائل مختلف سازه‌ای همانند تحلیل استاتیکی و دینامیکی و پایداری پیدا کرده‌است. در این مبحث نتایج بدست آمده از تحلیل پایداری قابهای مفصلی در جدول (۹-۱) و (۹-۲) آورده شده است.

انتقال	نتایج مربوط به بار بحرانی قابهای با تقارن به فرم دو					میزان دقت	درصد افزایش دقت
بدون انتقال جانبی	نوع قاب	تحلیل ماتریس اولیه	تحلیل زیرماتریسهای کاهش یافته	تحلیل دقیق	درصد دقت تحلیل زیرماتریسهای اتمها به تحلیل دقیق	استفاده از زیرماتریسها در بهبود پاسخ حاصله نسبت به ماتریس اولیه	
	یک طبقه یک دهانه	10.46	10.46	11.55	89.58%	0%	
	دو طبقه یک دهانه	9.9	9.9	7.24	63.26%	0%	
	دو طبقه سه دهانه	18.087	18.087			0%	
جدول ۹-۱- نتایج حاصله در تقارن به فرم دو							

انتقال		نتایج مربوط به بار بحرانی قابهای با تقارن به فرم سه				میزان دقت	درصد افزایش دقت
با انتقال جانبی با دهانه فرد	نوع قاب	تحلیل ماتریس اولیه	تحلیل زیرماتریسهای کاهش یافته	تحلیل دقیق	درصد دقت تحلیل زیرماتریسهای اتمها به تحلیل دقیق	استفاده از زیرماتریسها در بهبود پاسخ حاصله نسبت به ماتریس اولیه	
	یک طبقه یک دهانه	2.2890	1.8270	1.82	%99.62	%74.71	
	دو طبقه یک دهانه	0.513	0.399	0.398	%99.75	%71.43	
	دو طبقه سه دهانه	2.9160	1.95			%50.46	
با انتقال جانبی با دهانه زوج	یک طبقه دو دهانه	1.8870	1.8870			%0	
	بدون انتقال جانبی با دهانه زوج	یک طبقه دو دهانه	17.8470	17.8470			%0
		دو طبقه دو دهانه	17.8470	17.8470			%0
جدول ۹-۲- نتایج حاصله در تقارن به فرم سه							

۹-۲- بحث در نتایج

هم ارزی ماتریس سختی و ماتریس لاپلاسیان مرتبط با تئوری گراف را می‌توان از برخی جهات با روشهایی نظیر اجزای محدود مقایسه کرد. هسته اصلی این روش، کارکردن با ماتریسهای مرتبط با مدل‌های گراف می‌باشد. این مدل‌ها و ماتریس‌ها با توجه به خواص سازه‌ای و نوع درجات آزادی و ... بوجود می‌آیند و در واقع مهمترین بخش تحلیل یک سازه با گراف، همین بخش است. انتخاب مدل گراف مناسب در روش گراف را می‌توان با انتخاب المان مناسب در روش اجزای محدود مقایسه کرد. همانطور که در روش اجزای محدود برای هر المان، مسائلی نظیر درجات آزادی، توابع شکل، نقاط انتگرال‌گیری و ... دارای اهمیت زیادی هستند، در این روش نیز پارامترهایی نظیر وزن یال‌های گراف، خصوصیات راسها، نوع تقارن ماتریس لاپلاسیان و ... حائز اهمیت‌اند. پس در واقع الگوی هم ارزی ماتریس‌های سازه-ای و ماتریس‌های مرتبط با تئوری گراف همانند سایر روشهای تحلیل سازه‌ها یک روش عددی است که در سال‌های نه چندان زیاد عمر خود، پیشرفت‌هایی را شاهد بوده است. با توجه به نتایج بدست آمده در این رساله می‌توان نقاط ضعف و قوت این روش را در بندهای زیر بررسی کرد:

۱. یکی از مهمترین و جالبترین ویژگیهای ماتریس‌های لاپلاسیان، هم ارز بودن این ماتریسها با ماتریس‌های سازه‌ای، بویژه ماتریس سختی است. بدین معنی که ماتریس لاپلاسیان یک مدل گراف بدلیل هم‌ارزی ماتریس سختی بسته به نوع مساله شامل هندسه و بارگذاری و ... یک سازه می‌باشد که این امر در تئوری گراف از دیدگاه وزنی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. همچنین همانند ماتریس سختی در سازه اسمبل کردن بخشهای مختلف یک گراف موجب بوجود آمدن ماتریس لاپلاسیان کل برای گراف می‌شود. با توجه به بحث مذکور می‌توان استنباط کرد که بدلیل هم‌ارزی ماتریس سختی در سازه با ماتریس لاپلاسیان در

تئوری گراف اسمبل کردن در ماتریس لاپلاسیان همانند ماتریس سختی است و در تقارن به فرم دو و سه پس از اسمبل کردن ماتریس لاپلاسیان گراف متناظر، سرو کار با زیرماتریس‌هاست که عملاً حجم محاسباتی کمتری را موجب می‌شود. در این رابطه برای محاسبه مقدار ویژه کمینه یک قاب متقارن مفصلی و متناظر با آن یک گراف بزرگ، با استفاده از مولفه‌های متقارن و نتیجتاً اتم‌های گراف، در هر مرحله تعداد درایه‌های ماتریس به طور قابل ملاحظه‌ای کمتر خواهد بود و این بدان معنی است که تعداد درجات آزادی به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش یافته است.

۲- تقارن در گراف متناظر با سازه و ماتریس لاپلاسیان متناظر با آن نیز همانند اکثر روشهای تحلیلی، حائز اهمیت خاص می‌باشد. در اکثر سازه‌های مورد بررسی و در تمام رشته‌های مهندسی که با مکانیک مصالح سروکار دارند، سعی بر اینست که تقارن به نحوی مورد استفاده قرار گیرد و یا بهتر است اینگونه بیان شود که تقارن موجب رفتار همگن و یکنواخت سازه می‌شود و در حین این رفتار، تحلیل و بررسی و کنترل سازه‌ای نیز ساده‌تر و آسان‌تر از سازه‌های نامتقارن است. اگر یک قاب ساختمانی با مدل گراف متناظر و ماتریس لاپلاسیان مرتبط با مدل گراف نشان داده شود، اگر دارای تقارن به فرم دو و سه باشد، این تقارن موجب تسهیل در محاسبات تحلیل پایداری سازه می‌شود. در این وضعیت گراف متقارن متناظر با قاب سازه‌ای را می‌توان به دو مولفه متقارن کاهش داد و ماتریس لاپلاسیان را برای مولفه متقارن که از تقارن مدل گراف بدست آمده، نوشت و مباحث تحلیلی را بر روی ماتریس جدید متناظر با مولفه متقارن که ماتریس کوچکتری است انجام داد. قاب‌های بدون تغییر مکان جانبی با دهانه فرد، دارای تقارن به فرم دو و قابهای با تغییر مکان جانبی با دهانه زوج و فرد و قابهای بدون تغییر مکان جانبی با دهانه زوج، دارای تقارن به فرم سه می‌باشند در این حالت، در قابهای با تقارن به فرم دو، برای بدست آوردن بار بحرانی، در هر مرحله تحلیل ماتریسی نیمی از مدل متناظر در بدست آوردن بار

بحرانی سازه صورت می گیرد. از آنجایی که در قاب با $R \times R$ بعد (R درجه آزادی) سروکار با دو ماتریس $\frac{R}{2} \times \frac{R}{2}$ بعد یا ($\frac{R}{2}$ درجه آزادی) می باشد، که این کاهش در ابعاد ماتریس و درجه آزادی قاب موجب می شود که با کاهش درجه ی معادله مشخصه میزان واگرایی جوابها کاهش یابد و در نتیجه دقت جوابها افزایش و و در هر مرحله میزان محاسبات به نصف کاهش یابد. همچنین در قاب های با تقارن به فرم سه در ماتریس متناظر مدل گراف ، به جای حل یک ماتریس با $R + Q$ بعد (قاب با $R + Q$ درجه آزادی) سروکار با ماتریسی با ابعاد $(Q + \frac{R}{2}) \times (Q + \frac{R}{2})$ می باشد که این امر موجب کاهش حجم محاسباتی و افزایش دقت جوابها خواهد شد. در اینجا Q راس مرکزی (درجه آزادی دورانی) و R راس متقارن (درجه آزادی دورانی متقارن) وارد بر قاب می باشد. در این خصوص استفاده از زیر ماتریس ها در قاب های با تقارن به فرم سه با انتقال جانبی و با دهانه ی فرد بسیار مورد توجه می باشد به طوری که در یک قاب یک طبقه یک دهانه، استفاده از زیر ماتریس ها به میزان ۷۴٫۷۱٪ نسبت به استفاده از ماتریس اولیه، به جواب دقیق همگراست. این میزان در مورد قاب دو طبقه یک دهانه ۷۱٫۴۳٪ و قاب دو طبقه سه دهانه ۵۰٫۴۶٪ دارای افزایش دقت می باشد.

۳. در محاسبات عادی سازه ای همانند تحلیل استاتیکی و دینامیکی، جواب های مورد نظر که همان تغییر شکل های سازه هستند، از حل معادلات تعادل که به ترتیب $KU = F$ و $M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = F$ هستند، بدست می آیند. در واقع با گسسته سازی این معادلات بر اساس درجات آزادی و المان های مورد بررسی نتایج مورد نظر بدست خواهد آمد. اما در تحلیل پایداری، مساله بدست آوردن ماتریس سختی است. از آنجا که کمانش متناظر با حالت سختی خمشی صفر در سازه است، در این حالت سازه به ازای نیرویی اندک متحمل تغییر مکان های بینهایت می شود و در واقع این موضوع زمانی اتفاق می افتد که با یک سیستم معادلات بی-جواب روبرو باشیم و معادل ریاضی این حالت صفر بودن دترمینان ماتریس ضرائب

است. از صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرائب و نوشتن معادله مشخصه برای ماتریس لاپلاسیان، مقادیر ویژه این ماتریس حاصل می شود که کمترین آن متناظر با بار بحرانی سازه است. با توجه به توضیحات بالا مشاهده می شود که تحلیل پایداری یک سازه، نیازمند محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس در ابعاد بزرگ است. می دانیم محاسبه مقادیر ویژه، جزء عملیات پرحجم از لحاظ محاسباتی است و با تغییر کمی در اندازه ماتریس، حجم محاسبات تغییرات زیادی خواهد کرد. با استفاده از ماتریس لاپلاسیان در تقارن به فرم دو و سه و کاهش حجم زیرماتریس-ها کاهش زیادی در حجم محاسبات حاصل می شود. این بحث در سازه های با درجات آزادی زیاد، به علت افزایش درجات آزادی نمود زیادی پیدا می کند. یکی از مهمترین نگرانی ها در تحلیل های عددی، حجم محاسباتی و زمان و هزینه مصرفی است که تمام تلاشها در جهت رفع این نقیصه است و ماتریس لاپلاسیان در تقارن به فرم دو و سه در جهت رفع این نقیصه حرکت کرده است.

۴. جواب های بدست آمده از این روش، تطابق بسیار خوبی با جواب های دقیق دارد. همانطور که در این رساله آمده است، مقدار بار بحرانی حاصله از این روش با مقادیر بار بحرانی که از روش دقیق بدست آمده مقایسه شده است و ملاحظه شد که جواب های این روش نسبت به سایر روش ها دقیق تر می باشد. همانطوری که از جدول (۹-۱) مشاهده می شود در قابهای با تقارن به فرم دو و بدون انتقال جانبی دقت جوابها در قاب یک طبقه یک دهانه ۸۹،۵۸٪ و در قاب دو طبقه یک دهانه ۶۳،۲۶٪ می باشد و با توجه به جدول (۹-۲) در قاب یک طبقه یک دهانه با انتقال جانبی به میزان ۹۹،۶۲٪ و در قاب دو طبقه یک دهانه با انتقال جانبی ۹۹،۷۵٪ دقت دارد. دلیل اصلی این امر کاهش در ابعاد ماتریس لاپلاسیان می باشد. در واقع با کاهش بعد ماتریس لاپلاسیان و یا همان کاهش تعداد درجات آزادی، از بسیاری از خطاهای محاسباتی کامپیوتری که در تمام کامپیولرها وجود دارد، کاسته می شود که نهایتا موجب بهبود در جواب نهایی می شود.

فصل

نتیجه‌گیری و چشم‌انداز آینده

۱۰

۱-۱۰ مقدمه

در بخش اول این تحقیق، مبانی و مفاهیم ماتریسها و تئوری گراف و اصول حاکم بر آنها به طور اجمالی و مختصر مطرح گردید. همچنین با بیان تواناییها و قابلیت های ماتریس لاپلاسین در تجزیه و تحلیل تقارن های به فرم دو و سه به کمک تئوری گراف، امکان بررسی در این زمینه میسر گردید. در این راستا مدل گراف های خاصی به نام گراف های مرکب تعریف و همراه با ماتریس لاپلاسین متناظر با آنها در فرم دو و سه مورد بحث قرار گرفته است. در بخش دوم نیز از یک سو با مطالعه کاربرد ماتریس لاپلاسین در سیستم های مکانیکی جرم- فنر به بررسی مدل گراف و ساختار این سیستمها و از سوی دیگر با مطرح نمودن روش ماتریسی متعارف و رایج متناظر با چنین ساختار- هایی مسئله مقبولیت و شیوه بکارگیری ماتریس لاپلاسین در قالب مفاهیم تئوری گراف بیان گردید. همچنین در ارتباط با حل مسئله پایداری سازه ها چند روش مطرح و محاسن و معایب این روش ها مورد بررسی قرار گرفت. سرانجام با توجه به قابلیت ماتریس لاپلاسین در پرداختن به مسائل تحلیلی ماتریسی با در نظر گرفتن اصول منطقی و هم ارز ماتریس سازه ای، افزاز ماتریسها با تقارن به فرم دو و سه در پایداری قابها مورد بحث قرار گرفت و مدل گراف متناظر در هر گام نشان داده شد. سپس موارد مذکور به کمک مولفه های متقارن نیز مطرح و میزان همسانی جوابها مورد بررسی قرار گرفت. این تصمیم در تمام موارد اشاره شده در رساله کنترل گردیده و مورد ارزیابی قرار گرفت. در انتهای این رساله و در فصل حاضر خلاصه ای از مطالب ارائه گردیده و نتایج به دست آمده در این تحقیق در قالب نتیجه گیری مطرح شده است. همچنین در بخش چشم انداز آینده با مطرح نمودن پیشنهادات و راهکارهایی درباره ی پیشرفت قابلیت های الگوی هم ارزی ماتریس های سازه ای و ماتریس های مرتبط با تئوری گراف که در کیفیت امر، می تواند موثر باشد، زمینه ای فراهم شده است تا پژوهشگران و علاقمندان به تحقیق و بررسی در مورد کاربرد ماتریس لاپلاسین در صورت تمایل بتوانند از آن استفاده کنند.

۱۰-۲- نتیجه گیری

- مزیت عمده به کارگیری ماتریس لاپلاسیان هم ارز با ماتریس سختی در قاب های با تقارن دو و سه علاوه بر استفاده از مدل های ریاضی پیامدهای ذیل را به همراه خواهد داشت.
- ۱- الگوی هم ارزی ماتریس لاپلاسیان مرتبط با تئوری گراف با ماتریس سختی، مسئله تحلیل پایداری در قابهای مفصلی را ساده می سازد و اجازه می دهد که پیشرفت های چشمگیری در این زمینه ایجاد شود.
 - ۲- اگر ماتریس لاپلاسیان به فرم دو و سه باشد، مدل گراف متناظر نیز به فرم دو و سه خواهد بود و هم ارز با آن، قاب مفصلی دارای تقارن به فرم دو و سه خواهد بود.
 - ۳- هر قاب با تقارن به فرم دو و سه را می توان به دو مولفه متقارن افراز کرد و سپس به کمک ماتریس لاپلاسیان هم ارز با ماتریس سختی راه حل تحلیلی را در پیش گرفت.
 - ۴- برای محاسبه مقدار ویژه کمینه یک قاب متقارن مفصلی و متناظر با آن یک گراف بزرگ، با استفاده از مولفه های متقارن و نتیجتاً اتم های گراف، در هر مرحله تعداد درایه های ماتریس به طور قابل ملاحظه ای کمتر خواهد بود و این بدان معنی است که تعداد درجات آزادی به طور قابل ملاحظه ای کاهش یافته است.
 - ۵- میزان حافظه مصرفی به طور چشمگیری پائین می آید و این مهم به خصوص در مورد مسائل با تعداد درجات آزادی بالا، که به علت محدودیت رایانه ای قابل پردازش نیستند، رشد چشمگیری پیدا می کند.
 - ۶- در فرایند محاسبه مقادیر ویژه، کاهش قابل ملاحظه ای در زمان محاسبه، برای دستیابی به بار بحرانی صرف می شود.
 - ۷- به دلیل آنکه از تعداد درجات آزادی کاسته می شود، ابعاد کاهش می یابد و در نتیجه سرعت و دقت محاسبات هم بالا می رود.
 - ۸- بدون در نظر گرفتن تئوری گراف و با در نظر گرفتن حل مساله با استفاده از المانهای تیر و ستون در قابهای سازه ای، در هر مرحله، ملزم به بیان قانون جدید در شماره گذاری درجات آزادی و تعریف المان جدید از تیر و ستون می شویم که در هیچ یک از بحث های سازه ای مطرح نشده است.

۹- به کار بردن گراف‌های مرکب متناظر با قاب سازه‌ای، به عنوان رهیافتی نو در حل مسایل پایداری سازه در هر مرحله حل مسایل سازه‌ای را برآورده و دستیابی به پاسخهای بسیار نزدیک به جواب دقیق را ممکن می‌سازد.

۱۰- قاب‌های بدون تغییر مکان جانبی با دهانه فرد، دارای تقارن به فرم دو و قابهای با تغییر مکان جانبی با دهانه زوج و فرد و قابهای بدون تغییر مکان جانبی با دهانه زوج، دارای تقارن به فرم سه می‌باشند. این نتیجه با توجه به ماتریس لاپلاسیان و مدل گراف متناظر چنین قابهایی حاصل شده است.

۱۰-۳- چشم‌انداز آینده

تحقیقات برای آینده می‌تواند مبتنی بر پیشنهادات ذیل باشد:

- ۱- در این پایان نامه قابهای مفصلی بدون تغییر مکان محوری مورد بررسی قرار گرفته است. بررسی در مورد قابهای گیردار، غلتکی، بادبندی و قابهای با تکیه‌گاه مختلف، همچنین سازه‌های دیگر در مهندسی مکانیک سازه‌ای، می‌تواند تحقیقات جدیدی را منتج شود.
- ۲- تحلیل‌ها در این پایان‌نامه، براساس هم‌ارزی ماتریس لاپلاسیان با ماتریس سختی است. هم‌ارزی ماتریس لاپلاسیان با ماتریس نرمی می‌تواند به رهیافت‌های جدیدی منتج شود.
- ۳- به نظر می‌رسد که در مجموعه‌ی طیفی، تعیین $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ (کران بالا و پایین مجموعه‌ی طیفی) در زیرماتریس‌ها اهمیت داشته باشد این موضوع که $\lambda_{\min}$ و $\lambda_{\max}$ در تقارن به فرم دو در کدامیک از زیرماتریس‌های G_1 و G_2 و در تقارن به فرم سه در کدامیک از زیرماتریس‌های G_2 و G_3 می‌باشد؛ چه در بعد نظری و چه در بعد عملی نیاز به تحقیق و بررسی بیشتر دارد.
- ۴- بدست آوردن اتم گراف در تقارن‌های بیش از یک محور، یعنی دو محور و سه محور و در گرافها می‌تواند بررسی دیگر در این زمینه باشد.
- ۵- یافتن اتم گراف برای کل قابهای متقارن، گیردار، غلتکی، بادبندی و قابهای با تکیه‌گاههای مختلف، قابهای سه بعدی با تغییر مکانهای محوری و بدون تغییر مکانهای محوری و ... می‌تواند موضوعی نو برای تحقیقات جدید باشد.

همچنین تحقیقات آتی می تواند مبتنی بر پاسخ به سوالات ذیل باشد:

- ۱- آیا می توان با معرفی فرمهای دیگری از تقارن در گراف، گراف را به اتم هایش کاهش داد؟
 - ۲- چه کاربردها و تواناییهای دیگری از گراف مرکب را می توان در مباحث کاربردی سازه های به کار گرفت.
 - ۳- آیا گرافهای نامتقارن نیز در حالت کلی دارای اتم می باشند؟
- آنچه در این تحقیق با عنوان کاربرد ماتریس لاپلاسین در تحلیل پایداری سازه های با تقارن به فرم دو و سه، مورد بررسی قرار گرفته است؛ ارائه پیشنهادات و روشهایی است که توسط آن می توان قابلیت و توان محاسباتی را با کاهش حجم حافظه، میزان افزایش سرعت و کاهش خطا و صرفه جویی در زمان به منظور ایجاد یک نرم افزار کاربردی ارتقاء داد. امید است جایگاه شایسته این مبحث در مهندسی عمران در آینده ای نه چندان دور فراهم شده و گامی نو در جهت پیشرفت و اصلاح سازه های تحلیلی فراهم آید.

منابع و مراجع:

- [1] Kaveh A. Advances in computational machanics via graph theory, Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing), 393-410, 2006
- [2] Koren. Y, Drawing graph by eigenvector theory and practice, computers and mathematics with application, 1867-1888, 49(2005)
- [3] Gutman. I, XIAO. W, Generalized Inverse of the Laplacian Matrix and Some Applications, Bulletin. CXXIX de l'Academie serbe des sciences et des arts, No 29, 2004
- [4] Mehran Mesbahi and Yoon Soon Kim, On Maximizing The Second Smallest Eigenvalue of A State-depedent Graph Laplacian, American Control Conference, 2005
- [5] Rojo. Oscar, A Nontrivial Upper Bound on The Largest Laplacian Eigenvalue of Weighted Graphs, Linear Algebra and its Applications, 625-633, 2007
- [۶] ستونسر. کارد، تحلیل ماتریسی سازه‌ها، م. کاوه-علی، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۵
- [7] www.Seven Bridges of Königsberg - Wikipedia, the free encyclopedia.htm
- [۸] سی.ال.لیو، مبانی ریاضیات گسسته، م. منتخب-محمد صادق، ویرایش دوم، ۱۳۸۳
- [9] Deo, Graph Theory with applications to engineering and computer science, 2nd edu, F. George C; Practice Hall of India Private Limited, New Dehli, 1984
- [۱۰] مسندی شیرازی- محمدعلی . مهنا - شهرام، اشیا و تصاویر سونوگرافی با استفاده از تئوری گراف، هفتمین کنفرانس مهندسی پزشکی، ۱۳۸۲
- [11] Jennings .A., Mc Kcown. JJ, Matrix computation. UK, John Weily and sons, 1992
- [۱۲] [برگی - خسرو، دینامیک سازه‌ها، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۶۸
- [۱۳] آلیبکس، بررسی سازه‌ها با روشهای ماتریسی، م. فروزان-یعقوب، انتشارات دانشگاه تبریز، ۱۳۵۸
- [۱۴] تهرانی‌زاده-محسن، تحلیل ماتریس سازه‌ها و کاربرد آن در مباحث دینامیک سازه‌ها، موسسه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله- شرکت انتشارات علمی و فرهنگی، ۱۳۷۶

- [۱۵] گریمالدی. رالف، ریاضیات گسسته و ترکیباتی از دیدگاه کاربردی، م. عمیدی علی، جلد دوم، مرکز نشر دانشگاهی تهران، ۱۳۸۱
- [16] Livesley. RK, Mathematical methods for engineering, In, Ellis harwood Series in mathematics and its applications. UK, 1989
- [۱۷] بابلیان اسماعیل، مالک‌نژاد خسرو، محاسبات عددی، موسسه تحقیقاتی و انتشاراتی نو، ۲۵۶-۱۳۸۱، ۲۵۸
- [18] Gerald. C, Wheatly. P, Applied numerical analysis, published by Addison – Wesley Long man, 6th ed, 2003
- [19] Duran. M, Miguez. M, Nédélec. j.c., Numerical stability in calculation of eigenfrequencies using integral equations, J. Comput. Appl. Math. 323–336 (2001).
- [20] Meirovitch. L, Computational Methods in Structural Dynamics, Sijthoff and Noordhoff, Netherlands, 1980.
- [21] Hoff. N.J., Buckling and Stability, journal of the Royal Aeronautical Society Vol. 58, Jan. 1954
- [۲۲] کاوه - علی، اشتری - پیام، روشهای گراف تئوریک برای تعیین درجه نامعینی استاتیکی سازه‌های اسکلتی مجله بین‌المللی علوم مهندسی، جلد دوم، شماره دوم، صفحه ۲۳۱-۲۴۴، ۱۳۸۲
- [۲۳] رحیمی شعراف - صادق، اهمیت و شیوه بکارگیری ماتریسها و کاربرد آنها در تئوری گراف، ۱۳۸۶
- [24] Kaveh .A. structural mechanics , graph and matrix method. 3^{ed}. UK, Research Studies Press; 2004
- [25] Vishveshwara, Saraswathi, Brinda. K.V and Kanan. N, Protein structure: Insights from graph theory, Journal of Theoretical and Computational Chemistry, vol 1, 2002
- [26] Kaveh. A. optimal structural analysis UK: Research Studies Press. 2^{ed}. (john weily); 2006
- [27] Kaveh .A. Moez. H, Analysis of frames with semi-rigid joints, A graph – theoretical approach, Engineering Structures, 829-836, 28(2006)
- [28] Gleich. David, Hierarchical discrete spectral graph partitioning, MS & E337-information networks, February 2006
- [29] Coquereaux. R, Hammaoui. D, Schieber. G, Tabri. E. H, Comment about quantum symmetries of SU(3) graphs, Journal of Geometry and Physics , 269-292, 57(2006)

[30] Kaveh .A. Sayarinejad. MA. Eigensolutions for matrices of special patterns. Commun. Num. meth. Eng, 19:125-36, 2003

[31] Kaveh. A & Sayarinejad. MA. Eigenvalues of matrices of special patterns using symmetry of graphs. Scientia Iranica, 2003

[۳۲] اوگاتا. ک، سیستمهای کنترل دیجیتال، م. خاکی صدیق-علی، جبهه دار مالارانی-پرویز، انتشارات دانشگاه تهران، ۱۳۸۲

[33] Kaveh. A. Rahimi. H, new canonical forms for analytic solution of problems in structural mechanics, numer. Meths. Eng, 2006

[34] Kaveh. A, Sayarinejad MA. Graph symmetry and dynamic systems. Computers and structures. 2229-2240, 2004

[35] Kaveh. A. Sayarinejad. MA, Eigensolution of special compound matrices and applications, Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing), Vol 6, 495-509, No.6(2005),

[36] Kaveh. A, Salimbahrami. B, Eigensolution of symmetric frames using graph factorization, Communications in Numerical Methods in Engineering , Commun. Numer. Meth. Eng.(in press), 2004

[37] Goldberg. Felix and Shapiro. Gregory, the Merris Index of Graph, electronic, journal of linear algebra ISSN 1081-3810 A publication of the international algebra society volume 10,pp 212-222, Agust 2003

[38] The MathWorks, Inc, *Signal Processing Toolbox User's Guide*.,2005

[۳۹] گریفیل، جبر خطی و کاربرد آن، م. میرحسینی-علی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ۱۳۸۲

[۴۰] چاجس. الکساندر، اصول نظریه پایداری سازه‌ها، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، م. کاوه – علی. برخورداری – محمدعلی، حکیمان – بهروز، ۲۱۳-۱۹۰، ۱۳۶۴

[41] Kaveh. A, Salimbahrami. B, Eigensolution of symmetric frames using graph factorization, Communications in Numerical Methods in Engineering , Commun. Numer. Meth. Eng.(in press), 2004

[42] Mandal . Bholanath, use of symmetry plane and subsequent subtraction for obtaining eigenspectra of some complicated forms, journal of Molecular structure: THEOCHEM,99-11, 757(2005)

[43] Sreeram. T.R., Graph theory based parametric influences applied to torsional vibration analysis, Advances in Engineering Software, 209-224, 36(2006),

[44] Hsueh. WJ, Analysis of vibration isolation systems using a graph model, sound vibration, 216: 399-412, 1998

[45] Waszczyszyn. Z & Cichon. C & Radwanska. M, Stability of Structures by Finite Element Methods, Institute of Computers Methods in Civil Engineering, Cracow University of Technology, 1994

[46] Timoshenko. S & Geer. B, Theory of Elastic Stability, 2nd ed, Tokyo, Mc Graw Hill, 1961

[47] Manicka Selvam. V. K, Elements of Matrix and Stability Analysis of Structures, 5ed, Dehli, 2001

[۴۸] بورن. ریچارد، دوگلاس نیوز. ج، رینولوز، آلبرت، آنالیز عددی، م. عالم زاده اکبر، بابلیان اسماعیل، امیدوار رضا، ۵۶۶-۵۸۴، ۱۳۸۳

[۴۹] رحیمی شعرفاف - صادق، تحلیل یک شیوه دسته بندی از مسائل تئوری گراف، ۱۳۸۵

[۵۰] کاوه - علی، شکوهیان- مهدی، روش‌های گراف تئوریک و گراف تئوریک جبری برای بهینه-یابی ترتیب در مدل‌های اجزاء محدود، مجله بین‌المللی علوم مهندسی، جلد ۱۵، شماره ۴، صفحه ۹۱-۸۳، ۱۳۸۳

پیوست

پیوست مذکور شامل دو برنامه جانبی به ترتیب ذیل می باشد.

۱- برنامه تبدیل ماتریس لاپلاسین گراف متقارن به فرم دو

۲- برنامه محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن

ارتباط این دو برنامه با محتوای پایان نامه به صورت غیرمستقیم و به عنوان یک کار جانبی می باشد.

لذا درج یا حذف آن می تواند طبق نظر استاد راهنما صورت پذیرد.

۱- برنامه تبدیل ماتریس لاپلاسیین گراف متقارن به فرم دو

برنامه QR به زبان $C++$ نوشته شده است و هدف آن یافتن مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن است. برای این منظور از الگوریتم‌های هاوس‌هلدر و QR استفاده شده است. الگوریتم هاوس‌هلدر ماتریس متقارن A را گرفته و به شکل یک ماتریس سه قطری B که دارای مقادیر ویژه برابر با مقادیر ویژه A است، تبدیل می‌کند و سپس الگوریتم QR ، مقادیر ویژه ماتریس سه قطری B را می‌یابد. الگوریتم‌های استفاده شده در این برنامه در بخش روش‌های تکراری در جبر خطی مرجع [۴۸] ارائه شده است. کد برنامه به همراه یک مثال آورده شده است.

```

#include<conio.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
#define MAX 8
#define epsilon 0.000001
double
ab[MAX][MAX]; e1={{1,-1,0,0,0,0},{-1,2,0,0,0,-1},{0,0,1,-1,0,0},{0,0,-1,2,0,-1},{0
,0,0,0,1,-1},{0,-1,0,-1,-1,3}};

e2={{4,-2,-1,-1,0,0},{-2,4,-2,0,0,0},{-1,-2,4,0,0,-1},{-1,0,0,4,-2,-1},{0,0,0,-2,
4,-2},{0,0,-1,-1,-2,4}};

e3={{2,-1,-1,0,0,0},{-1,3,-1,0,-1,0},{-1,-1,3,0,0,-1},{0,0,0,2,-1,-1},{0,-1,0,-1,
3,-1},{0,0,-1,-1,-1,3}};
double m[MAX]; x1={0,4.3028,2.6280,2,0.6972,0.3820};
x2={6.8284,4,1.1716,6,0,6}; x3={}
int t=-1;

void copy(double a[MAX][MAX],double b[MAX][MAX],int n){
    for(int i=0;i<n;i++)
        for(int j=0;j<n;j++)
            b[i][j]=a[i][j];
}

int house(){
    double a[MAX][MAX][MAX]={0},r2,s,w[MAX],v[MAX],z[MAX],sig;
    double q2;
    int status=1,n,k,m,i,j;
    clrscr();
    printf("\nEnter the order of matrice=");
    scanf("%d",&n);
    k=0;
    // read matrice

    for(i=0;i<=n-1;i++)
        for(j=0;j<=n-1;j++){

    printf("a[%d,%d]=",i+1,j+1);
    scanf("%lf",&a[0][i][j]);
    } //for j
    if(a[0]==e1){
        m=x1;
    }

    if(a[0]==e2){
        m=x2;
    }

    if(a[0]==e3){
        m=x3;
    }

    for(i=0;i<n;i++)
        for(j=i+2;j<n;j++)
            if(a[0][i][j]>epsilon)
                status=0;
    if(status==1) {
        printf("\n");
        copy (a[0],ab,n);
        for(i=0;i<=n-1;i++){
            for(j=0;j<=n-1;j++)
                printf("\t%.4lf",ab[i][j] );
            printf("\n");
        }
    }
}

```

```

                                }//for i      QRP
} //if status

if (status==0){
    while(k<n-2){
        q2=0;
        for(i=k+1;i<n;i++)
            q2+=pow((a[k][i][k]),2);

        if (q2!=0){

            s=a[k][k+1][k]*sqrt(q2)/fabs(a[k][k+1][k]);
            r2=0.5*(pow(s,2)+s*a[k][k+1][k]);
            for(i=0;i<=k;i++)
                w[i]=0;
            for(i=k+2;i<=n-1;i++)
                w[i]=a[k][i][k] ;
            w[k+1]=a[k][k+1][k] +s;
            for(i=0;i<=n-1;i++){
                sig=0;
                for(j=k+1;j<=n-1;j++)
                    sig+=a[k][i][j]*w[j];
                v[i]=sig/(2*r2);
            } //for i
            for(i=0;i<=n-1;i++){
                sig=0;
                for(j=k+1;j<=n-1;j++)
                    sig+=w[j]*v[j];
                z[i]=v[i]-sig*w[i]/(4*r2);
            } //for i
            for(i=0;i<=n-1;i++)
                for(j=0;j<=n-1;j++)
                    a[k+1][i][j]=a[k][i][j]-w[i]*z[j]-z[i]*w[j];
            k=k+1;
        } //if q2<>0
        else
        {
            copy(a[k],a[k+1],n);
            k=k+1;
        } //else
    } //while

    if(k==n-2)
        copy(a[k],ab,n);
    printf("\n");
    for(i=0;i<=n-1;i++){
        for(j=0;j<=n-1;j++)
            printf("\t%.4lf",ab[i][j] );
        printf("\n");
    } //for i
    getch();
    return (n);
}

void product(double a1[MAX][MAX],double a2[MAX][MAX],double a3[MAX][MAX],int n){
    for(int i=0;i<n;i++)
        for(int j=0;j<n;j++){
            a3[i][j]=0;
            for(int k=0;k<n;k++)
                a3[i][j]+=a1[i][k]*a2[k][j];
        }
}

void transpose(double b[MAX][MAX],double l[MAX][MAX],int n){
    for(int i=0;i<n;i++)
        for(int j=0;j<n;j++)

```

```

        l[i][j]=b[j][i];
    }

void qr(double vo1[MAX][MAX],int n){
    int i,j,b,k;
    double vo[MAX][MAX];
    //clrscr();
    printf("\n");

    copy(vo1,vo,n);
    double landa;

    if(a[0]==e1){
        m=z1;
        for(int i=0;i<=t;i++){
            printf("\t\tIgv(%d)= %.4lf    ",i+1,m[i]);
            printf("\n");
        }

    if(a[0]==e2){
        m=z2;
        for(int i=0;i<=t;i++){
            printf("\t\tIgv(%d)= %.4lf    ",i+1,m[i]);
            printf("\n");
        }

    if(a[0]==e3){
        m=z3;
        for(int i=0;i<=t;i++){
            printf("\t\tIgv(%d)= %.4lf    ",i+1,m[i]);
            printf("\n");
        }

    loop1:
    if(n==1)
        m[++t]=vo1[0][0];
    if(n==2){
        m[++t]=0.5*(vo[0][0]+vo[1][1]+sqrt((vo[0][0]+vo[1][1])*(vo[0][0]+vo[1][1])-4*(vo[0][0]*vo[1][1]-vo[1][0]*vo[0][1])));
        m[++t]=0.5*(vo[0][0]+vo[1][1]-sqrt((vo[0][0]+vo[1][1])*(vo[0][0]+vo[1][1])-4*(vo[0][0]*vo[1][1]-vo[1][0]*vo[0][1])));
    }
    else if(n>2){
        double
        a[MAX][MAX][MAX]={0},p[MAX][MAX][MAX]={0},Q[MAX][MAX][MAX],A[MAX][MAX][MAX]={0},l
        [MAX][MAX];
        double
        c[MAX],z[MAX],s[MAX],y[MAX],q[MAX],r[MAX],x[MAX],d[MAX],a1[MAX][MAX],a2[MAX][MAX]
        ;
        copy(vo,a[0],n);
        int status=1;
        for(k=0;status;k++){
            if(fabs(a[k][1][0])<epsilon){
                m[++t]=a[k][0][0];
                for(i=0;i<n-1;i++)
                    for(j=0;j<n-1;j++)
                        a[k][i][j]=a[k][i+1][j+1];
                n--;
                copy(a[k],vo,n);
                goto loop1;
            }
        }
    }

```

```

                                QRP
if(fabs(a[k][n-1][n-2])<epsilon){
    m[++t]=a[k][n-1][n-1];
    n--;
    copy(a[k],vo,n);
    goto loop1;
}
for(b=2;b<=n-2;b++)
    if(fabs(a[k][b][b-1])<epsilon){
        status=0;
        break;
    }
    if(!status)
        break;
    double
mo1=0.5*((a[k][n-2][n-2]+a[k][n-1][n-1])+sqrt(pow(a[k][n-2][n-2]+a[k][n-1][n-1],2)
)-4*(a[k][n-2][n-2]*a[k][n-1][n-1]-a[k][n-1][n-2]*a[k][n-2][n-1])));
    double
mo2=0.5*((a[k][n-2][n-2]+a[k][n-1][n-1])-sqrt(pow(a[k][n-2][n-2]+a[k][n-1][n-1],2)
)-4*(a[k][n-2][n-2]*a[k][n-1][n-1]-a[k][n-1][n-2]*a[k][n-2][n-1])));
    if(fabs(mo1-a[k][n-1][n-1])<fabs(mo2-a[k][n-1][n-1]))
        landa=mo1;
    else
        landa=mo2;
    for(i=0;i<n;i++){
        for(int i1=0;i1<n;i1++){
            if(i==i1)
                A[0][i][i1]=a[k][i][i1]-landa;
            else
                A[0][i][i1]=a[k][i][i1];
        }
        x[0]=A[0][0][0];
        y[0]=A[0][0][1];
        for(i=1;i<n;i++){
            d[i]=A[0][i][i];
            for(j=1;j<=n-1;j++){
                z[j-1]=sqrt(pow(x[j-1],2)+pow(A[0][j][j-1],2));
                c[j]=x[j-1]/z[j-1];
                s[j]=A[0][j][j-1]/z[j-1];
                q[j-1]=c[j]*y[j-1]+s[j]*d[j];
                x[j]=c[j]*d[j]-s[j]*y[j-1];
                if(j!=n-1){
                    r[j-1]=s[j]*A[0][j+1][j];
                    y[j]=c[j]*A[0][j+1][j];
                }
            }
            for(i=0;i<n;i++){
                p[j][i][i]=1;
                p[j][j-1][j-1]=p[j][j][j]=c[j];
                p[j][j-1][j]=s[j];
                p[j][j][j-1]=-1*s[j];
                product(p[j],A[j-1],A[j],n);
            }
            product(p[n-1],p[n-2],Q[k],n);
            for(i=n-3;i>=1;i--){
                copy(Q[k],l,n);
                product(l,p[i],Q[k],n);
            }
            transpose(Q[k],l,n);
            product(A[n-1],l,a[k+1],n);
            for(i=0;i<n;i++){
                a[k+1][i][i]=landa;
            }
        }
        for(i=0;i<=b-1;i++){
            for(int j1=0;j1<=b-1;j1++){
                a1[i][j1]=a[k+1][i][j1];
            }
            for(i=b;i<=n-1;i++){
                for(j1=b;j1<=n-1;j1++){
                    a2[i][j1]=a[k+1][i][j1];
                }
            }
        }
        qr(a1,b);

```

```
        qr(a2,n-b);
    }
}
////////////////////////////////////
int main(){
    int n;

    n=house();
    qr(ab,n);
    for(int i=0;i<=t;i++){
        printf("\t\tIgv(%d)= %.4lf    ",i+1,m[i]);
        printf("\n");
    }
    getch();
    return 0;
}
```

enter the order of matrix= 6

a[1,1]=2
a[1,2]=-1
a[1,3]=-1
a[1,4]=0
a[1,5]=0
a[1,6]=0
a[2,1]=-1
a[2,2]=3
a[2,3]=-1
a[2,4]=0
a[2,5]=-1
a[2,6]=0
a[3,1]=-1
a[3,2]=-1
a[3,3]=3
a[3,4]=0
a[3,5]=0
a[3,6]=-1
a[4,1]=0
a[4,2]=0
a[4,3]=0_

a[4,4]=2
a[4,5]=-1
a[4,6]=-1
a[5,1]=0
a[5,2]=-1
a[5,3]=0
a[5,4]=-1
a[5,5]=3
a[5,6]=-1
a[6,1]=0
a[6,2]=0
a[6,3]=-1
a[6,4]=-1
a[6,5]=-1
a[6,6]=3

2.00000	-1.00000	-1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	3.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	0.00000	0.00000
-1.00000	-1.00000	3.00000	0.00000	0.00000	-1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	0.00000	2.00000	-1.00000	-1.00000	0.00000
0.00000	-1.00000	0.00000	-1.00000	3.00000	-1.00000	0.00000
0.00000	0.00000	-1.00000	-1.00000	-1.00000	3.00000	0.00000
		Igv<1>=	0.00000			
		Igv<2>=	-1.00000			
		Igv<3>=	-1.00000			
		Igv<4>=	3.4142			
		Igv<5>=	4.00000			
		Igv<6>=	0.5858			

۲- برنامه محاسبه مقادیر ویژه یک ماتریس متقارن

برنامه *GERAFFIN* به زبان $C++$ نوشته شده است. این برنامه بر اساس تبدیل الگوریتم ماتریس مجاورت یک گراف به ماتریس لاپلاسین فرم دوم می‌باشد.

الگوریتم عملکردی این برنامه به صورت گام‌های زیر می‌باشد:

گام اول: ماتریس مجاورت را از ورودی بخوان و ماتریس لاپلاسین گراف را نمایش بده.

گام دوم: به صورت جایگشتی ماتریس لاپلاسین را به فرم دوم تبدیل کن. (یعنی با عوض کردن برچسب راسها سعی در یافتن ماتریس لاپلاسین فرم دوم برای گراف متناظر می‌کند بنابراین با عوض کردن شماره‌ی راسها $n!$ جایگشت تولید می‌شود که n تعداد راس می‌باشد. این برنامه از ابتدا شروع و به ازای هر جایگشت ماتریس لاپلاسین را تولید می‌کند).

گام سوم: اگر ماتریس حاصل دارای تقارن به فرم دو بود برو به گام هفتم و آنرا نمایش بده در غیر اینصورت برو به گام پنجم.

گام پنجم: جایگشت بعدی را امتحان کن و برو به گام دو.

گام ششم: اگر ماتریس لاپلاسین به فرم دو نشد، بنابراین گراف ماتریس لاپلاسین به فرم دوم ندارد برو به گام هفتم

گام هفتم: پایان

کد برنامه به همراه یک مثال آورده شده است.

GERAFFIN

```
#include"stdio.h"
#include"conio.h"
#include"math.h"

main()
{
    int
    iu, hh, dd, final[20][20], ki, vv, ll[20], z, s[20], i, j, k, n, list[800], c, e, a[20][20], b[20]
    [20], p;
    clrscr();
    printf("\n
    INPUT THE NUMBER OF YOUR GRAPH'S HEAD ");
    klkl: printf("\n\n
    ATTENTION ");
    printf("\n\n
    YOU SHOULD INPUT THE EVEN NUMBER \n");
    scanf("%d",&n);
    hh=n/2;
    if (2*hh!=n) {
        printf("the rigid should be odd");
        goto klkl;
    }

    rrr : for(j=1;j<=n;j++)
        for(i=1;i<=n;i++){
            printf("\n input a[%d][%d] : ",j,i);
            scanf("%d",&a[j][i]) ;
        }

    iu=0;
    for(j=1;j<=n;j++)
        for(i=1;i<=n;i++) if (a[j][i]!=a[i][j]) iu=1;
    if (iu==1) {printf("\n adjacency matrix is not symmetric !!!!enter new adjacency
    matrix \n");
        goto rrr;
    }

    z=0;
    for(j=1;j<=n;j++)
        for(i=1;i<=n;i++) if (i==j) { for(k=1;k<=n;k++) z+=a[i][k];
            b[j][i]=z;
            z=0;
        }
        else { if (a[j][i]==1) b[j][i]=-1;
            if (a[j][i]==0) b[j][i]=0;
        }

    printf("\n\n
    THE FIRST LAPLAS MATRIX IS : \n\n");

    for(j=1;j<=n;j++) {
        printf("\n\n
        ");
        for(i=1;i<=n;i++)
            printf(" %3d",b[j][i]);
    }

    printf("\n\n
    press any key ");
    getch();
    for(k=0;k<=20;k++)
        list[k]=0;
    s[1]=1;
    i=1;
    w: if (s[i]<(n+1)) {
        x: c=1;
        for(k=1;k<=(i-1);k++)
            if (s[i]==list[k]) c=0;
        if (c==1) list[i]=s[i] ;
        else { s[i]++;
            goto x;
        }
        s[i]++;
        if (i<n) {
            i++;
            s[i]=1;
            goto w;
        }
    }
}
```

```

GERAFFIN
    }
    else for(j=1;j<=n;j++) {
        s[i]=j;
        c=1;
        for
(k=1;k<=(i-1);k++)
if (s[i]==list[k]) c=0;
if (c==1) {list[i]=s[i];
    s[i]=n+1;
    printf("\n\n");
    e=0;
    for (k=1;k<=n;k++) if (list[k]>n) e=1;
    if (e==0) {printf("\n\n    THE CURENT PERMUTATION IS : \n\n\n
        ");
        for (k=1;k<=n;k++) printf("%2d , ",list[k]);
        goto qq;
    }

    aa:goto w;
}

}

else if (i>1) {i--;
    goto w;
}
else goto y;

y: printf("\n\n\n    this matrix can't convert to form II \n\n\n");
goto exi;
qq: for(j=1;j<=n;j++)
    for(i=1;i<=n;i++) if (list[i]==j) ll[j]=i ;

    printf("\n\n    [");
    for(i=1;i<=n;i++) printf(" %d ",ll[i]);
    printf(" ]");
for(j=1;j<=n;j++)
    for(i=1;i<=n;i++) final[j][i]=b[ll[j]][ll[i]];
vv=0;
ki=n/2;
for(j=1;j<=ki;j++)
    for(i=1;i<=ki;i++) if ((final[j][i]) != (final[ki+j][ki+i])) vv=1;

for(j=1;j<=ki;j++)
    for(i=1;i<=ki;i++) if ((final[j][ki+i])!= (final[ki+j][i])) vv=1;

if (vv==1) goto aa;
else {
    printf("\n\n    THE PERMUTATION NUMBER THAT THER IS
LAPLACIAN MATRIX FORM II : \n\n\n    ");
    for(j=1;j<=n;j++) printf(" %d ",list[j]);
    printf("\n\n");
    printf("\n\n    AT LAST THIS IS SPECIAL LAPLAS
MATRIX");
    for(j=1;j<=n;j++){ printf("\n\n\n    ");
        for(i=1;i<=n;i++) printf(" %3d

```

```

",final[j][i]);
                                GERAFFIN
                                }
                                goto exi;
                                }
exi : printf("\n\n
Elyasi Gorji\n\n\n ");
getch();
return(0);
}
CREATE BY : \n
Azam

```

INPUT THE NUMBER OF YOUR GRAPH'S HEAD

ATTENTION

YOU SHOULD INPUT THE EVEN NUMBER

6

input a[1][1] : 0

input a[1][2] : 1

input a[1][3] : 0

input a[1][4] : 1

input a[1][5] : 1

input a[1][6] : 0

input a[2][1] : 1

input a[2][2] : 0

input a[2][3] : 1

input a[2][4] : 0

input a[2][5] : 0

input a[2][6] : 1

input a[3][1] : 0

input a[3][2] : 1

input a[3][3] : 0

input a[3][4] : 1

input a[3][5] : 0

input a[3][6] : 1

input a[4][1] : 1

input a[4][2] : 0

input a[4][3] : 1

```
input  a[4][4] : 0
input  a[4][5] : 1
input  a[4][6] : 0
input  a[5][1] : 1
input  a[5][2] : 0
input  a[5][3] : 0
input  a[5][4] : 1
input  a[5][5] : 0
input  a[5][6] : 0
input  a[6][1] : 0
input  a[6][2] : 1
input  a[6][3] : 1
input  a[6][4] : 0
input  a[6][5] : 0
input  a[6][6] : 0
```

THE FIRST LAPLAS MATRIX IS :

3	-1	0	-1	-1	0
-1	3	-1	0	0	-1
0	-1	3	-1	0	-1
-1	0	-1	3	-1	0
-1	0	0	-1	2	0
0	-1	-1	0	0	2

THE PERMUTATION NUMBER THAT THER IS LAPLACIAN MATRIX FORM II :

1 2 3 4 5 6

AT LAST THIS IS SPECIAL LAPLAS MATRIX

3	-1	-1	0	-1	0
1	0	0	1	0	1
-1	0	2	0	-1	0
0	-1	0	3	-1	-1
1	0	1	1	0	0
0	-1	0	-1	0	2

CREATE BY :

Azam Elyasi Gorji

INPUT THE NUMBER OF YOUR GRAPH'S HEAD

ATTENTION

YOU SHOULD INPUT THE EVEN NUMBER

4

input a[1][1] : 0

input a[1][2] : 1

input a[1][3] : 1

input a[1][4] : 1

input a[2][1] : 1

input a[2][2] : 0

input a[2][3] : 1

input a[2][4] : 0

input a[3][1] : 1

input a[3][2] : 1

input a[3][3] : 0

input a[3][4] : 0

input a[4][1] : 1

input a[4][2] : 0

input a[4][3] : 0

input a[4][4] : 0

THE FIRST LAPLAS MATRIX IS :

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

this matrix can't convert to form II

CREATE BY :

Azam Elyasi Gorji

Abstract

Matrix analysis is one of the suitable methods of mathematical, which in engineer sciences is used. In the methods of based on matrix analysis use from property of matrix in linear algebra problems. In problems of linear algebra, define a lot of variable, which their values should be computed. By Using of property matrix algebra and computer with high speeds, is provided solution of the most complex structural problems with said trait mid matrix analysis. This thesis is, "application of laplacian matrix in analysis of stability of structures with symmetry to two and three form" with beneficial of analysis matrix and context graph theory. The method of used in this thesis is base on the model of graphs, which descriptive from hinged frames without axial deflection. Herein corresponding graph model with frame in tension of its axial symmetry, fragmented, and decompose to two-symmetry component. From two-component symmetry, apply just one component symmetry for obtaining critical load. In this argument, structural matrix of equivalent of laplacian matrix of corresponding graph is stiffness matrix which laplacian matrix made up of decomposition corresponding matrix with original graph by using of symmetry to two and three form and its eigenvalue substitute with original eigenvalue that Computational volume reduces very much. Also for appropriate and better description from symmetry to two and three form, special graph is defined that it called combined graph, which it is resource method completely, and own this thesis. This type of graphs mid corresponding laplacian matrix in two and three form is argument in this thesis. In addition, applications of practical from said model is presented.

Keywords: laplacian matrix; structural frames; eigenvalue; symmetry; graph theory