





دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک ، گرایش فیزیک هسته‌ای

رساله دکتری

بررسی سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

نگارنده: سپیده سرگلزایی پور

استاد راهنما

دکتر حسن حسن‌آبادی

تیر ۱۳۹۸

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره 12: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)
(ویژه دانشجویان ورودی های 94 و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود خانم سپیده سرگلزایی پور دانشجوی دکتری رشته فیزیک به شماره دانشجویی 9400585 ورودی اول ماه سال 1394 در تاریخ 1398/04/19 از رساله نظری / عملی خود با عنوان: بررسی سیستم های نسبیتی و غیر نسبیتی در فرمالیسم تغییر شکل یافته دفاع و با اخذ نمره ۱۹/۲۹ به درجه عالی نائل گردید.

☒ الف) درجه عالی: نمره 19-20	☐ ب) درجه بسیار خوب: نمره 18/99 - 17
☐ ج) درجه خوب: نمره 16/99 - 15	☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
☐ ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1-	دکتر حسن حسن آبادی	استاد راهنما	استاد	
2-	دکتر حسین بوکلی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
3-	دکتر سید محمد متولی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
4-	دکتر حسین مهربان	استاد مدعو خارجی	استاد	
5-	دکتر احسان ابراهیمی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم سپیده سرگلزایی پور بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر سعید حسامی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

سع

تقدیم به

پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم، و به
مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم
همه مهر، که وجودشان اسطوره زندگیم، پناه حستیم و امید بودم
تقدیم به برادر و خواهرانم که همواره در طول تحصیل متحمل زحمت بودند و تکیه گاه من
در مواجهه با مشکلات، و وجودشان مایه دلگرمی من می باشند.

سپاس‌گزاری...

سپاس‌ خدای را که سخوران، در ستودن او بماند و شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان و امدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز... خدای را بسی شاکرم که از روی کرم، پدر و مادری فداکار نسیم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان پی‌ساییم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. والدینی که بودشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم. بر حسب وظیفه و از باب "من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عز و جل"؛ شاید است که از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عفو کشیده و گریانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاور بی‌چشم داشت برای من بوده‌اند؛ و از استاد فرهیخته و فرزانه‌ام؛ جناب آقای دکتر حسن آبادی که در کمال سه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ‌کلی در این عرصه بر من دریغ نمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را داشته‌باشم، باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

سپیده سرگلزایی پور
تیر ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب سپیده سرگلزایی پور دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بررسی سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی در فرمالیسم تغییر شکل یافته**، تحت راهنمایی **حسن حسن‌آبادی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سپیده سرگلزایی پور

تیر ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در چهاردهه گذشته، جبر کوانتومی موضوع پژوهش‌های بسیاری در زمینه‌های مختلف فیزیک و ریاضیات بوده است. در این رساله، فرمالیسم تغییرشکل یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همانطور که می‌دانیم فرمالیسم تغییرشکل یافته همواره حالت کلی‌تر از نظریه‌ی اولیه متناظر خود است، به گونه‌ای که اگر پارامتر تغییرشکل یافته را به سمت مقدار معینی میل دهیم فرمالیسم اولیه بدست می‌آید. به چند نمونه از این نظریه‌ها اشاره می‌کنیم. مکانیک نیوتنی، حالت خاصی از مکانیک نسبیتی است که پارامتر تغییرشکل آن $\beta = \frac{V}{c}$ است و هر گاه این پارامتر به سمت صفر میل کند مکانیک نسبیتی به مکانیک نیوتنی تبدیل می‌شود، همچنین مکانیک کوانتومی نیز تغییرشکل یافته مکانیک کلاسیک است. پارامتر تغییرشکل در مکانیک کوانتومی $(\frac{1}{\hbar})$ می‌باشد و هنگامی که این پارامتر به سمت بی‌نهایت میل کند مکانیک کوانتومی به مکانیک کلاسیکی تبدیل می‌شود. حال این گونه استنباط می‌شود که نظریه‌های تغییرشکل یافته همواره با وارد کردن یک پارامتر تغییرشکل یافته بدون دیمانسیون در یکی از روابط بنیادی، نظریه‌های اولیه بدست می‌آیند. طرح کلی این پیشنهاد به شرح زیر می‌باشد: ابتدا فرمالیسم تغییرشکل یافته معرفی شده است و در مرحله بعدی به جبر تغییرشکل یافته هایزنبرگ و ویل اشاره می‌کنیم، همچنین توابع مثلثاتی تغییرشکل یافته را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اعداد مختلط و مزدوج اعداد مختلط را در فرمالیسم تغییرشکل یافته مورد مطالعه قرار می‌دهیم و عملگرهای مکان و تکانه را در این فرمالیسم بر حسب عملگرهای مکان و تکانه در فضای کوانتومی معمولی معرفی می‌کنیم، سپس با استفاده از این جبر، نظریه‌های نوسانگر هارمونیک تغییرشکل یافته کوانتومی و کلاسیکی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش بعدی مساله ذره آزاد و نوسانگر هارمونیک در فضای تغییرشکل یافته مورد بررسی قرار گرفته است. رفتار ذره آزاد در این فضا مشابه ذره‌ای با بار e است که در فضای معمولی در یک میدان مغناطیسی حرکت می‌کند. در هر قسمت هامیلتونی تغییرشکل یافته کوانتومی و کلاسیکی را معرفی می‌کنیم و معادله حرکت نوسانگر مربوط به اکثر این هامیلتونی‌ها را محاسبه کرده و طیف انرژی اغلب آن‌ها را بدست می‌آوریم و در هر مرحله از این مراحل اشاره شده نتایج را در حالت حدی (پارامتر تغییرشکل یافته) با نتایج نظریه‌های اولیه متناظر خود مقایسه می‌کنیم. در بخش بعدی مکانیک آماری را در فرمالیسم تغییرشکل یافته بررسی می‌کنیم و عامل بولتزمن معمول دستخوش تغییراتی می‌شود که آن را آمار متمایز می‌نامند. حال اگر در حالت حدی مورد بررسی قرار بگیرد به عامل بولتزمن معمول خود باز می‌گردد با استفاده از این توصیف، سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نتایج را در ادامه ارائه می‌دهیم. همچنین می‌توان آمار متمایز را براساس نوسانات دمایی به جای نوسانات معکوس دمایی مورد مطالعه قرار داد. سپس به بررسی حالت‌های پراکندگی در فرمالیسم تغییرشکل یافته برای معادله دیراک می‌پردازیم. همچنین، به طور مختصر به بررسی مدل‌های هسته‌ای می‌پردازیم که عبارتند از: مدل نیلسون و مدل اندرکنش بوزونی. سپس این دو مدل را در فرمالیسم تغییرشکل یافته بررسی می‌کنیم. نتایج

به دست آمده در این فرمالیسم با حذف پارامتر تغییر شکل به نتایج در فرمالیسم معمولی تبدیل می شوند. در انتها چشم اندازی از کارهای پیش رو ذکر شده است.

کلمات کلیدی: فرمالیسم تغییر شکل یافته، نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته کوانتومی و کلاسیکی، آمار متمایز، سیستم های نسبیتی و غیر نسبیتی، حالات پراکندگی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and A. Boumali, "Morse potential of the q -deformed in the Duffin–Kemmer–Petiau equation", **International Journal of Geometric Methods in Modern Physics**, 14 (07), 1750112 (2017).
2. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, and W.S. Chung, "The q -Deformed Dirac Oscillator in the Presence of a Magnetic Field in $(1+2)$ -Dimensions in Noncommutative Phase Space", **Journal of the Korean Physical Society**, 70 (6), 557-560 (2017).
3. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, and W.S. Chung, "Statistical properties of the q -deformed relativistic Dirac oscillator in minimal length quantum mechanics", **Canadian Journal of Physics**, 96 (1), 25-29 (2018).
4. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, " q -deformed superstatistics of the Schrödinger equation in commutative and noncommutative spaces with magnetic field", **The European Physical Journal Plus**, 133 (1), 5 (2018).
5. H. Hassanabadi, S. Sargolzaeipor and W.S. Chung, "Superstatistics properties of q -deformed Morse potential in one dimension", **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications** 508, 740-747 (2018).
6. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, "Superstatistics with different kinds of distributions in the deformed formalism", **The European Physical Journal Plus**, 133 (3), 125 (2018).
7. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, "Superstatistics of the Klein Gordon equation in deformed formalism for modified Dirac delta distribution", **Modern Physics Letters A**, 33 (10n11), 1850060 (2018).
8. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, "Study of the statistical physics bases on superstatistics from the β -fluctuated to the T -fluctuated form", **The European Physical Journal Plus**, 133 (4), 157 (2018).
9. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, "Study of Schrödinger equation in terms of Heun functions in the commutative vs. non-commutative spaces", **Modern Physics Letters A**, (34) 1950183 (2019).

10. W. S. Chunga, H. Hassanabadi, S. Sargolzaeipor, "*Thermodynamics of Wignons*", **Physics Letters A**, 383 (17), 1989-1996 (2019).

فهرست مطالب

ش	فهرست تصاویر
ث	فهرست جداول
۱	۱ مقدمه‌ای بر جبر تغییر شکل یافته
۲	۱.۱ مقدمه
۳	۲.۱ معرفی جبر تغییر شکل یافته هایزنبرگ
۶	۳.۱ توابع مثلثاتی تغییر شکل یافته
۱۰	۴.۱ بازتعریف اعداد مختلط در فرمالیسم تغییر شکل یافته
۱۳	۵.۱ درک بهتر از فرمالیسم تغییر شکل یافته
۱۴	۱.۵.۱ معادله نیوتن در فرمالیسم تغییر شکل یافته q
۱۵	۲.۵.۱ سرعت یکنواخت در فرمالیسم تغییر شکل یافته
۱۶	۳.۵.۱ شتاب یکنواخت در فرمالیسم تغییر شکل یافته
۱۶	۴.۵.۱ پتانسیل هارمونیک تغییر شکل یافته q
۱۷	۵.۵.۱ بقای انرژی در فرمالیسم تغییر شکل یافته
۱۹	۲ مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیرنسبیتی در فرمالیسم تغییر شکل یافته
۲۰	۱.۲ هامیلتونی نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته
۲۱	۲.۲ بررسی سطوح انرژی در فرمالیسم تغییر شکل یافته
۲۵	۳.۲ معادله شرودینگر در ترم‌هایی از توابع هیون در فضاهای جابجایی و ناجابجایی
	۱.۳.۲ بررسی معادله شرودینگر با میدان مغناطیسی خارجی در فضای جابجایی
۲۶	۲.۳.۲ بررسی معادله شرودینگر با میدان مغناطیسی خارجی در فضای ناجابجایی
۲۸	۴.۲ نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در یک بعد
۳۲	۵.۲ نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در دو بعد

۳۴	۱.۵.۲	بررسی نوسانگردیراک در فرمالیسم مختلط
۳۶	۲.۵.۲	شکل کلی ویژه مقادیر نوسانگر دیراک
۴۰	۶.۲	معرفی خواص ترمودینامیکی نوسانگر دیراک
۴۳	۷.۲	نوسانگر دیراک در حضور میدان مغناطیسی
۴۵	۱.۷.۲	نوسانگر دیراک تغییرشکل یافته در فضای جابجایی
	۲.۷.۲	نوسانگر دیراک تغییرشکل یافته در حضور میدان مغناطیسی در
۴۷		فضای ناجابجایی
۴۹	۸.۲	بررسی نوسانگر دیراک در حضور طول کمینه
۵۱	۹.۲	بررسی خواص ترمودینامیکی نوسانگر دیراک در حضور طول کمینه
۵۴	۱۰.۲	معادله دی کی پی در حضور فرمالیسم تغییرشکل یافته
۵۷	۱.۱۰.۲	محاسبه عملگرهای افزاینده و کاهنده تغییرشکل یافته
۵۹	۳	بازنگری مکانیک آماری در سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی
۶۰	۱.۳	مکانیک آماری در فرمالیسم تغییرشکل یافته
۶۴	۱.۱.۳	آمار نظریه جنبشی گاز ایده‌آل در فرمالیسم تغییرشکل یافته
۶۷	۲.۱.۳	بررسی آماری نوسانگر هارمونیک کلاسیک در فرمالیسم تغییرشکل یافته
۷۰	۳.۱.۳	بررسی آماری نوسانگر هارمونیک کوانتومی در فرمالیسم تغییرشکل یافته
۷۲	۴.۱.۳	آمار سیستم اسپین - $\frac{1}{2}$ پارامغناطیس در فرمالیسم تغییرشکل یافته
۷۶	۲.۳	خواص آمار متمایز از نوسانگر غیرنسبیتی در دو فضای ناجابجایی و جابجایی
	۱.۲.۳	بررسی آمار متمایز از معادله شرودینگر در دو فضای جابجایی
۷۸		وناجابجایی
	۳.۳	بررسی خواص آمار متمایز در حضور پتانسیل مورس تغییرشکل یافته در یک
۸۰		بعد
۸۳	۴.۳	بررسی آمار متمایز توسط معادله کلاین - گوردن تغییرشکل یافته
۸۳	۱.۴.۳	معادله کلاین - گوردن
۸۴	۲.۴.۳	پتانسیل کرنل در میدان الکترومغناطیسی خارجی
۸۷	۳.۴.۳	بررسی آمار متمایز با استفاده از معادله کلاین - گوردن
۸۹	۵.۳	بررسی آمار متمایز براساس نوسان دمایی به جای نوسان معکوس دمایی
۸۹	۱.۵.۳	آمار متمایز نوسان یافته - β در آنسامبل کانونی
۹۲	۲.۵.۳	آمار متمایز نوسان یافته - T برای آنسامبل کانونی
۹۷	۳.۵.۳	توزیع سه ترازوی
۹۹	۴	بررسی پراکندگی فرمیون‌ها در فرمالیسم تغییرشکل یافته
۱۰۰	۱.۴	پراکندگی فرمیون نسبیتی در فرمالیسم تغییرشکل یافته - q

۱۰۰	مکانیک کوانتومی تغییر شکل یافته q -
۱۰۱	پراکندگی فرمیون‌های نسبیتی در مکانیک کوانتومی تغییر شکل یافته
۱۰۲	پراکندگی با توجه به پتانسیل دلتای دیراک منفرد
۱۰۵	پراکندگی از پتانسیل دوگانه دلتای دیراک
۵۰۱.۴	اثر رامساور - تونسل در مکانیک کوانتومی نسبیتی تغییر شکل یافته
۱۰۸	

۵ بررسی سیستم‌های بوزونی و فرمیونی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

۱۱۳	مقدمه
۱۱۴	جبر فرمیون با رابطه جابجایی
۱۱۵	مکانیک کوانتومی ابر تقارن
۱۱۵	مقدمه‌ای بر جبر ویگنون‌ها
۱۱۸	جبر ویگنون تک مدی
۱۱۸	جبر ویگنون چند مدی
۱۱۹	همیلتونی ویگنون از مکانیک کوانتومی ابر تقارن
۱۲۰	برخی از کاربردهای ویگنون در آنسامبل کانونی
۱۲۱	گاز ویگنون غیر برهم‌کنشی
۱۲۱	تابش جسم سیاه
۱۲۴	مدل دبای
۱۲۶	

۶ هسته‌های تغییر شکل یافته بر اساس بعضی از مدل‌های تغییر شکل یافته

۱۲۹	مقدمه‌ای از مدل‌های هسته‌ای
۱۳۰	مروری بر مدل‌های هسته‌ای
۱۳۰	مدل گاز فرمی
۱۳۰	مدل نیلسون
۱۳۲	بررسی فرمالیسم تغییر شکل یافته بر پایه مدل اندرکنش بوزونی
۱۳۶	مدل اندرکنش بوزونی
۱۳۷	بررسی همیلتونی بر پایه مدل برهم‌کنش بوزونی در فرمالیسم
۱۴۰	تغییر شکل یافته

۷ نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۱۴۳	نتیجه‌گیری
۱۴۴	پیشنهادها
۱۴۵	

فهرست تصاویر

۱.۲	رسم‌هایی از ویژه مقادیر انرژی در فضای جابجایی و ناجابجایی برای مقادیر متفاوت از پارامتر تغییرشکل یافته θ و مجموعه‌ای از پارامترها به صورت $(\vartheta = \circ/۲, \alpha = ۱/۲, \eta = ۱/\circ ۱, \{M, a, b\} = ۱)$	۳۲
۲.۲	نوسانگر دیراک تغییرشکل یافته در یک و دو بعد	۳۸
۳.۲	رسم فرکانس برحسب عدد کوانتومی n برای مجموعه‌ای از پارامترهای $(\hbar = m = c = ۱)$	۴۰
۴.۲	خواص ترمودینامیکی برحسب β برای هر دو حالت q حقیقی و موهومی	۵۳
۱.۳	تابع پارش برحسب پارامتر β	۶۷
۲.۳	تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی برحسب β و T	۶۹
۳.۳	تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی برحسب β	۷۳
۴.۳	خواص ترمودینامیکی برحسب β	۷۵
۵.۳	تابع پارش و خواص ترمودینامیکی برحسب پارامتر β	۷۹
۶.۳	تابع پارش و خواص ترمودینامیکی برحسب پارامتر β	۸۱
۷.۳	تابع پارش و خواص ترمودینامیکی برحسب پارامتر β	۸۲
۸.۳	طیف انرژی برحسب عدد کوانتومی n	۸۶
۹.۳	رفتار عامل بولتزمن برحسب پارامتر β برای مقادیر متفاوت از (n, α, a_s, b_s)	۸۷
۱۰.۳	رفتار تابع پارش و انرژی داخلی برحسب پارامتر β برای مقادیر متفاوت از (n, α, a_s, b_s)	۸۸
۱۱.۳	رفتار شدت انرژی برحسب ϑ برای $(\gamma = \circ)$	۹۴
۱۲.۳	رفتار شدت انرژی برحسب ϑ برای مقادیر متفاوت $(\gamma, T_\circ = ۲/۷۲)$	۹۵
۱۳.۳	رسم‌هایی از شدت انرژی برحسب ϑ	۹۶
۱۴.۳	رسم‌هایی از شدت انرژی برحسب ϑ برای مقادیر متفاوت از γ	۹۷
۱.۴	رسم‌هایی از $ r_۱ ^۲, t_۱ ^۲$ و $ r_۱ ^۲ + t_۱ ^۲$ برحسب تغییرات انرژی	۱۰۳
۲.۴	نمودار ضرایب عبور و بازتاب $ r_۱ ^۲, t_۱ ^۲$ برای مقادیر متفاوت از $a_۱$ و $q, V_۱$	۱۰۴
۳.۴	رسم‌هایی از $ r_۲ ^۲, t_۲ ^۲$ و $ r_۲ ^۲ + t_۲ ^۲$ برحسب تغییرات انرژی	۱۰۶

۴.۴	رسم‌هایی از ضرایب عبور و بازتاب $ r_2 ^2, t_2 ^2$ برای مقادیر متفاوت از a_2, q, V_2	۱۰۷
۵.۴	رسم‌هایی از $ r_3 ^2, t_3 ^2$ و $ r_3 ^2 + t_3 ^2$ برحسب تغییرات انرژی	۱۰۹
۶.۴	رسم‌هایی از ضرایب عبور و بازتاب $ r_3 ^2, t_3 ^2$ برای مقادیر متفاوت از a_3, q, V_3	۱۱۰
۱.۵	تغییرات ظرفیت گرمایی بر حسب دما به ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر	
۱۲۴	$(\nu = 0, \nu = 0/1, \nu = -0/1)$	
۲.۵	توزیع طیفی انرژی در تابش جسم سیاه به ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر	
۱۲۵		
۱.۶	رسم انرژی بر حسب پارامتر ε	۱۳۵

فهرست جداول

۱.۱	فرم‌های متفاوت رابطه پارامتر تعداد در فرمالیسم تغییر شکل یافته	۵
-----	--	---

فصل ۱

مقدمه‌ای بر جبر تغییر شکل یافته

۱.۱ مقدمه

جبر کوانتومی توجه زیادی را در زمینه فیزیک و ریاضی در طول سال‌های گذشته به خود جلب کرده است. همانطور که می‌دانیم فرمالیسم تغییر شکل یافته یک جبر کوانتومی است که اگر پارامتر تغییر شکل یافته را در حالت حدی بررسی کنیم به جبر معمولی تبدیل می‌شود و می‌توان بیان کرد که فرمالیسم تغییر شکل یافته حالت کلی‌تر از فرمالیسم اولیه متناظر خود است. فرمالیسم تغییر شکل یافته نخستین بار در سال ۱۹۷۶ توسط اریک^۱ و کون^۲ معرفی شد [۱]. و بعدها توسط مکفارلین^۳ و بیدنهارن^۴ مورد بررسی قرار گرفت [۲]. اریک و کون نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته را براساس عملگرهای افزایشنده و کاهشنده تغییر شکل یافته مورد مطالعه قرار دادند، و سپس طیف و ویژه مقادیر انرژی نوسانگر هارمونیک را تحت این فرض محاسبه کردند و حالتی با پایین‌ترین ویژه مقدار انرژی را به دست آوردند که در قسمت‌های بعد به طور مفصل به مطالعه آن می‌پردازیم. در این راستا و به منظور درک بهتر از مفهوم فرمالیسم تغییر شکل یافته کارهای زیادی صورت گرفت [۳-۸]، که به طور مثال به چند نمونه آن اشاره می‌کنیم. در این رساله ابتدا به جبر تغییر شکل یافته هایزنبرگ – ویل اشاره می‌کنیم. سپس با استفاده از این جبر، نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته کوانتومی و کلاسیکی را معرفی کرده در هر قسمت هامیلتونی‌های تغییر شکل یافته را براساس عملگرهای افزایشنده و کاهشنده در فضای فوک^۵ (فضای هیلبرتی است که حالت‌های کوانتومی را برحسب تعداد ذرات نامشخص توصیف می‌کند) نمایش می‌دهیم و دو حالت خاص را در این رابطه بررسی می‌کنیم [۹]، و همین‌طور نوسانگر دی کی پی^۶ را در حضور پتانسیل مورس^۷ تغییر شکل یافته در نظر می‌گیریم، سپس ویژه مقادیر انرژی و ویژه تابع آن را به دست می‌آوریم و با کمک از ویژه تابع، عملگرهای افزایشنده و کاهشنده را محاسبه می‌کنیم و در انتها نتایج حاصل را با نتایج موجود از پتانسیل مورس معمولی مقایسه می‌کنیم [۱۰]، همچنین سیستم فیزیکی تغییر شکل یافته کلاسیکی و کوانتومی را به طور مختصر بیان کرده [۱۱، ۱۲]، سپس خواص آماری ترمودینامیکی را در فرمالیسم تغییر شکل یافته [۱۳] مورد مطالعه قرار می‌دهیم. مکانیک آماری را در فرمالیسم تغییر شکل یافته بررسی می‌کنیم که مشاهده می‌کنیم که این آمار در فرمالیسم تغییر شکل یافته دستخوش تغییراتی می‌شود که می‌توان این گونه استنباط کرد که مکانیک آماری تغییر شکل یافته، تعمیم یافته مکانیک آماری معمولی متناظر خود است. با استفاده از این توصیف سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نتایج را در ادامه ارائه می‌دهیم. به علاوه،

¹ Arik

² Coon

³ Macfarlane

⁴ Biedenharn

⁵ Fock space

⁶ Duffin–Kemmer–Petiau oscillator

⁷ Morse potential

به مطالعه برخی مسائل مهم و آشنا در مکانیک آماری با استفاده از این فرمالیسم می پردازیم. همچنین می توان آمار متمایز را براساس نوسانات دمایی به جای نوسانات معکوس دمایی مورد مطالعه قرار داد و به اطلاعات جالبی دست یافت. سپس به بررسی پراکندگی فرمیون نسبیتی در فرمالیسم تغییر شکل یافته می پردازیم. در بخش بعدی به بررسی خواص ترمودینامیکی ذره ای که از جبر ویگنر^۸ پیروی می کند می پردازیم. در نهایت به طور مختصر مدل های هسته ای به طور مثال مدل نیلسون و مدل اندرکنش بوزونی را در حضور فرمالیسم تغییر شکل یافته مورد مطالعه قرار می دهیم. در نهایت، فرمالیسم تغییر شکل یافته در چندین شاخه فیزیک کاربرد دارد [۱۵]. اگرچه به چند نمونه از این کاربردها اشاره شد، ولی همچنان جستجو در فیزیک ذرات و هسته ای پی گرفته می شود.

۲.۱ معرفی جبر تغییر شکل یافته هایزنبرگ

یکی از مهمترین روش های تغییر شکل نظریه ها و سیستم های فیزیکی، وارد کردن یک پارامتر تغییر شکل یافته که با q در جبر معمولی هایزنبرگ نشان می دهیم. در اینجا مسأله نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته را مورد بررسی قرار می دهیم. همانطور که می دانیم در جبر معمولی رابطه زیر را داریم

$$a a^\dagger - a^\dagger a = 1$$

سپس حالت کلی جبر تغییر شکل یافته هایزنبرگ^۹ به صورت زیر تعریف می شود [۱۶-۱۸]:

$$a a^\dagger - q a^\dagger a = q^{-N} \quad (1.1)$$

که در آن q پارامتر تغییر شکل یافته و عملگر N در یک فضای هیلبرت^{۱۰} با پایه های $|n\rangle$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) نقش عملگر تعداد را ایفا می کند و $a^\dagger$ و a به ترتیب عملگرهای افزایشنده^{۱۱} و کاهشنده^{۱۲} می باشند و به صورت زیر عمل می کنند [۱۹، ۲۱].

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad (2.1)$$

$$a |n\rangle = (\sqrt{n})_q |n-1\rangle,$$

$$a^\dagger |n\rangle = (\sqrt{n+1})_q |n+1\rangle,$$

$$a |0\rangle = 0$$

⁸The Wigner algebra

⁹Heisenberg

¹⁰Hilbert

¹¹Creation

¹²Annihilation

با اثر دادن رابطه (۱.۱) روی کت $|n\rangle$ و با استفاده از روابط (۲.۱) و روش استقراء ریاضی این ضرایب $[n]_q$ که در مراحل بعد معرفی می‌شوند، را به دست می‌آوریم. ابتدا برای حالت $n = 0$ داریم:

$$a a^\dagger |0\rangle - q a^\dagger a |0\rangle = q^{-N} |0\rangle \quad (3.1)$$

که از آن نتیجه می‌شود

$$a (\sqrt{1})_q |1\rangle - q \times 0 |0\rangle = q^0 |0\rangle \quad (4.1)$$

$$[1]_q - q \times 0 = q^0$$

$$[1]_q = 1$$

سپس برای کت $|n\rangle$ داریم:

$$a a^\dagger |n\rangle - q a^\dagger a |n\rangle = q^{-N} |n\rangle \quad (5.1)$$

$$[n+1]_q |n\rangle - q [n]_q |n\rangle = q^{-n} |n\rangle$$

$$[n+1]_q = q^{-n} + q [n]_q$$

به طور مثال برای $n = 1$ مشاهده می‌کنیم

$$[2]_q = q^{-1} + q \times 1 \quad (6.1)$$

$$= \frac{q^2 - q^{-1}}{q - q^{-1}}$$

با توجه به نتایج فوق برای $[n]_q$ به دست می‌آوریم

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \quad (7.1)$$

اگر پارامتر تغییرشکل یافته q را به سمت یک میل دهیم ملاحظه می‌شود که روابط به صورت معمولی خود تبدیل می‌شوند. که در نتیجه این حالت حدی به حالت اولیه مساله بستگی دارد. صورت‌های مختلف پارامتر تعداد در فرمالیسم تغییرشکل یافته را در جدول ۱.۱ نمایش می‌دهیم که در اینجا پارامتر تغییرشکل یافته را با q نمایش می‌دهیم [۲۲-۲۶]. سپس روابط (۲.۱) تا (۷.۱) هنگامی که پارامتر تغییرشکل یافته به سمت یک میل کند باید به روابط متناظر مکانیک کوانتومی معمولی تبدیل شوند.

جدول ۱.۱: فرم‌های متفاوت رابطه پارامتر تعداد در فرمالیسم تغییر شکل یافته

مرجع مرتبط با پارامتر تعداد در فرمالیسم تغییر شکل یافته	رابطه پارامتر تعداد در فرمالیسم تغییر شکل یافته
نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته [۲]	$\frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}$
نوسانگر تغییر شکل یافته (اریک و کان) [۲۲، ۱]	$\frac{q^x - 1}{q - 1}$
نوسانگر تغییر شکل یافته دو پارامتری [۲۳-۲۵]	$\frac{q^x - p^{-x}}{q - p^{-1}}$
نوسانگر تغییر شکل یافته μ [۲۶]	$\frac{x}{1 + \mu x}$

رابطه (۷.۱) را در دو حالت در نظر می‌گیریم [۲۸-۳۱].

حالت اول: رابطه (۷.۱) هنگامی که پارامتر تغییر شکل یافته $q = e^\tau$ در نظر گرفته شود به صورت زیر تغییر می‌کند

$$[n]_q = \frac{e^{n\tau} - e^{-n\tau}}{e^\tau - e^{-\tau}} = \frac{\text{Sinh}(\tau n)}{\text{Sinh}(\tau)} \quad (۸.۱)$$

حالت دوم: هنگامی که این پارامتر موهومی باشد یعنی $q = e^{i\tau}$ ملاحظه می‌شود که باز هم τ حقیقی است در نتیجه رابطه (۷.۱) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$[n]_q = \frac{e^{in\tau} - e^{-in\tau}}{e^{i\tau} - e^{-i\tau}} = \frac{\text{Sin}(\tau n)}{\text{Sin}(\tau)} \quad (۹.۱)$$

که در هر دو حالت مشاهده می‌کنید حد ($1 \rightarrow$ پارامتر تغییر شکل) یا ($\tau \rightarrow 0$) این رابطه (۷.۱) یا به عبارت دیگر، رابطه پارامتر تعداد تغییر شکل یافته به تعداد معمولی تبدیل می‌شوند.

$$\lim_{q \rightarrow 1} [n]_q = n \quad (۱۰.۱)$$

حال $[n]_q$ را در حد $q \rightarrow 1$ محاسبه می‌کنیم، برای این محاسبه، به رابطه زیر نیاز داریم

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} q^n &= \lim_{q \rightarrow 1} \left(1 + n \text{Ln}(q) + \frac{[n \text{Ln}(q)]^2}{2!} + \dots \right) \\ &\simeq 1 + n \text{Ln}(q) \end{aligned} \quad (۱۱.۱)$$

از جملات مرتبه بالاتر در رابطه (۱۱.۱) به دلیل کوچکی صرف نظر می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} [n]_q &= \lim_{q \rightarrow 1} \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \\ &= \frac{1 + n \text{Ln}(q) - 1 + n \text{Ln}(q)}{1 + \text{Ln}(q) - 1 + \text{Ln}(q)} \\ &= n \end{aligned} \quad (۱۲.۱)$$

در نتیجه روابط (۲.۱) در حد $q \rightarrow 1$ به صورت روابط متناظرشان در مکانیک معمولی تبدیل می‌شوند. حال روابط جابه‌جایی N و عملگر افزایشده و کاهشده $a, a^\dagger$ به صورت زیر خواهند

بود [۳۲-۳۸].

$$[a^\dagger, N] = -a^\dagger \quad (۱۳.۱)$$

$$[a, N] = a$$

همچنین می‌توان با استفاده از رابطه (۲.۱)، عملگرهای $a^\dagger a$ ، $a a^\dagger$ را برحسب N نوشت که به صورت زیر روی کت $|n\rangle$ اثر می‌دهیم

$$a a^\dagger |n\rangle = a [n+1]_q^\dagger |n+1\rangle \quad (۱۴.۱)$$

$$= [n+1]_q |n\rangle.$$

$$a a^\dagger = [N+1]_q$$

با استفاده از همین روش بار دیگر عملگر $a^\dagger a$ را روی کت $|n\rangle$ اثر داده که نتیجه زیر را می‌دهد

$$a^\dagger a = [N]_q \quad (۱۵.۱)$$

همچنین، کت $|n\rangle$ را با استفاده از رابطه (۲.۱) می‌توان برحسب کت پایه $|\circ\rangle$ به صورت زیر بیان کرد

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{(\sqrt{n!})} |\circ\rangle \quad (۱۶.۱)$$

که در فرمالیسم تغییر شکل یافته این رابطه (۱۶.۱) به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{(\sqrt{[n]!})_q} |\circ\rangle \quad (۱۷.۱)$$

که $[1] = [n] [n-1] \dots [2] [1]$ می‌باشد. حال با معرفی مختصری از این فرمالیسم تغییر شکل یافته، به بررسی توابع مثلثاتی در این فرمالیسم می‌پردازیم و حالت حدی آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳.۱ توابع مثلثاتی تغییر شکل یافته

همانطور که در قسمت پیشین، عملگرها و ضرایب تغییر شکل یافته را معرفی کردیم در این قسمت توابع مثلثاتی تغییر شکل یافته را معرفی می‌کنیم. از توابع مثلثاتی می‌توان به تابع نمایی^{۱۳} تغییر شکل یافته اشاره کرد که به صورت زیر معرفی می‌شود [۳۹]

$$e^{i_q x} = C_q(x) + i_q S_q(x), \quad (۱۸.۱)$$

$$e^{i_q^* x} = C_q(x) + i_q^* S_q(x)$$

^{۱۳}Exponential function

که $C_q(x)$, $S_q(x)$ متناظر $\cos_q(x)$, $\sin_q(x)$ است. همانطور که می دانیم واحد موهومی ^{۱۴} در شرایط معمولی به صورت $i = \sqrt{-1}$ می باشد. برای به دست آوردن تابع نمایی تغییر شکل یافته و رسیدن به تابع نمایی معمولی به صورت زیر عمل می کنیم این عملیات در سه مرحله انجام می شود [۴۰-۴۳].

مرحله اول: چون در رابطه (۱۸.۱) واحد موهومی تغییر شکل یافته ظاهر می شود برای تعیین این واحد موهومی از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$$i_q^2 = -f(q) + 2i_q g(q), i_q \neq i \quad (19.1)$$

که توابع مقداری $f(q)$, $g(q)$ حقیقی هستند.

$$f(1) = 1 \quad (20.1)$$

$$g(1) = 0$$

از رابطه (۱۹.۱)، واحد موهومی تغییر شکل یافته به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} i_q &= g + i\sqrt{f - g^2}, \\ i_q^* &= g - i\sqrt{f - g^2} \end{aligned} \quad (21.1)$$

که هر دو i_q , i_q^* راه حل های رابطه (۱۹.۱) هستند. در انتهای این مرحله، نتایج به دست آمده را امتحان می کنیم. یعنی می خواهیم ببینیم این واحد موهومی تغییر شکل یافته زمانی که پارامتر تغییر شکل یافته به سمت یک میل کند به واحد موهومی معمولی تبدیل می شود یا خیر [۳۹]؟

$$i_q = g + i\sqrt{f - g^2} = 0 + i\sqrt{1 - 0} = i$$

همانطور که مشاهده می شود این نتایج با نتایج معمولی مطابقت دارد.

مرحله دوم: می توانیم واحد موهومی تغییر شکل یافته را به صورت کلی تعریف کنیم که به صورت زیر است

$$i_q^{2n} = \alpha_n + i_q \beta_n \quad (22.1)$$

در این مرحله ما α_n , β_n به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} i_q^{2n} &= \alpha_n + i_q \beta_n, \\ i_q^{2n+2} &= \alpha_{n+1} + i_q \beta_{n+1}, \\ i_q^{2n} \times i_q^2 &= \alpha_{n+1} + i_q \beta_{n+1} \end{aligned} \quad (23.1)$$

¹⁴Imaginary unit

از روابط (۱۹.۱) و (۲۲.۱) استفاده می‌کنیم سپس رابطه (۲۳.۱) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$(\alpha_n + i_q \beta) (-f(q) + 2i_q g(q)) = \alpha_{n+1} + i_q \beta_{n+1}, \quad (24.1)$$

$$\alpha_n (-f(q) + 2i_q g(q)) + \beta_n (-2f(q)g(q) + i_q (4g(q)^2 - f(q))) = \alpha_{n+1} + i_q \beta_{n+1}$$

نمایش ماتریسی رابطه (۲۴.۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(q) & -2f(q)g(q) \\ 2g(q) & 4g^2(q) - f(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad (25.1)$$

که $(\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0)$ می‌باشد.

از شرط n به $n+1$ استفاده می‌کنیم در نتیجه، رابطه (۲۵.۱) تبدیل به رابطه زیر می‌شود.

$$\alpha_{n+2} = -f(q) \alpha_{n+1} - 2f(q)g(q) \beta_{n+1}, \quad (26.1)$$

$$\beta_{n+2} = 2g(q) \alpha_{n+1} + (4g^2(q) - f(q)) \beta_{n+1}$$

با استفاده از روابط (۲۵.۱) و (۲۶.۱) داریم

$$\alpha_{n+2} + (2f(q) - 4g^2(q)) \alpha_{n+1} + f^2(q) \alpha_n = 0 \quad (27.1)$$

رابطه (۲۷.۱) را به صورت زیر باز نویسی می‌کنیم

$$\alpha_{n+2} - \kappa \alpha_{n+1} = \lambda (\alpha_{n+1} - \kappa \alpha_n) \quad (28.1)$$

که پارامترهای λ, κ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند.

$$\lambda = 2g^2(q) - f(q) - 2ig(q) \sqrt{f(q) - g^2(q)} \quad (29.1)$$

$$\kappa = 2g^2(q) - f(q) + 2ig(q) \sqrt{f(q) - g^2(q)}$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (۲۸.۱) ضرایب α_n, β_n به صورت زیر به دست می‌آیند [۳۹].

$$\alpha_n = \frac{1}{2i\sqrt{f(q) - g^2(q)}} \left[\left(g(q) + i\sqrt{f(q) - g^2(q)} \right) \lambda^{n-1} - \left(g(q) - i\sqrt{f(q) - g^2(q)} \right) (\lambda^*)^n \right] \quad (30.1)$$

$$\beta_n = \frac{1}{2i\sqrt{f(q) - g^2(q)}} [(\lambda^*)^n - \lambda^n]$$

مرحله سوم: در این مرحله با استفاده از روابطی که در دو مرحله پیشین به دست آوردیم می‌توانیم توابع نمایی تغییر شکل یافته را به دست آوریم. تابع نمایی تغییر شکل یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} e^{i_q x} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_q^n}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_q^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i_q^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned} \quad (31.1)$$

با استفاده از روابط (۲۹.۱) و (۳۰.۱) داریم

$$e^{i_q x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(\gamma n)!} x^{\gamma n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f \beta_n}{(\gamma n + 1)!} x^{\gamma n + 1} \right) + i_q \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{(\gamma n)!} x^{\gamma n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n + \gamma g \beta_n)}{(\gamma n + 1)!} x^{\gamma n + 1} \right) \quad (۳۲.۱)$$

که توابع $\cos_q(x)$, $\sin_q(x)$ در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر تبدیل می شوند

$$C_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(\gamma n)!} x^{\gamma n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(q) \beta_n}{(\gamma n + 1)!} x^{\gamma n + 1} \quad (۳۳.۱)$$

$$S_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{(\gamma n)!} x^{\gamma n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_n + \gamma g(q) \beta_n)}{(\gamma n + 1)!} x^{\gamma n + 1}$$

با استفاده از روابط زیر

$$\lambda = -f(q) e^{\gamma i \Theta} \quad (۳۴.۱)$$

$$\Theta = \frac{1}{\gamma} t g^{-1} \left(\frac{\gamma g(q) \sqrt{f(q) - g^{\gamma}(q)}}{f(q) - \gamma g^{\gamma}(q)} \right)$$

$$\sqrt{\lambda} = i \sqrt{f(q)} e^{i \Theta}$$

$$\sqrt{\lambda^*} = -i \sqrt{f(q)} e^{-i \Theta}$$

و با استفاده از روابط کمکی زیر [۴۴]

$$\cos_q(\sqrt{f(q)} e^{\pm i \Theta} x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{f(q)})^{\gamma n} (e^{\pm i \Theta})^{\gamma n} x^{\gamma n}}{(\gamma n)!} \quad (۳۵.۱)$$

$$\sin_q(\sqrt{f(q)} e^{\pm i \Theta} x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{f(q)})^{\gamma n + 1} (e^{\pm i \Theta})^{\gamma n + 1} x^{\gamma n + 1}}{(\gamma n + 1)!}$$

$$\begin{aligned} \cos(\sqrt{f(q)} e^{i \Theta} x) &= \cos(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \cos(i \sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \\ &\quad - \sin(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \sin(i \sqrt{f(q)} x \sin \Theta), \\ \sin(\sqrt{f(q)} e^{i \Theta} x) &= \sin(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \cos(i \sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \\ &\quad + \sin(i \sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \cos(i \sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos i Z &= \cosh Z \\ \cosh i Z &= \cos Z \\ \sin i Z &= i \sinh Z \\ \sinh i Z &= i \sin Z \end{aligned}$$

این رابطه (۳۳.۱) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 C_q(x) &= -\frac{g(q)}{\sqrt{f(q) - g^2(q)}} \sin(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \sinh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \quad (36.1) \\
 &+ \cos(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \cosh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \\
 &+ \frac{\sqrt{f(q)}}{\sqrt{f(q) - g^2(q)}} \left[\cos \Theta \sinh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \cos(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \right] \\
 &- \sin \Theta \sin(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \cosh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \\
 S_q(x) &= \frac{1}{\sqrt{f(q) - g^2(q)}} \sin(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \sinh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{f(q) (f(q) - g^2(q))}} \left(g(q) \cos \Theta + \sqrt{f(q) - g^2(q)} \sin \Theta \right) \\
 &\quad \cos(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \sinh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \\
 &+ \frac{1}{\sqrt{f(q) (f(q) - g^2(q))}} \left(\sqrt{f(q) - g^2(q)} \cos \Theta - g(q) \sin \Theta \right) \\
 &\quad \sin(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \cosh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \\
 &+ \frac{2g(q)}{\sqrt{f(q) (f(q) - g^2(q))}} \left(\sin \Theta \sin(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \cosh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \right) \\
 &- \frac{2g(q)}{\sqrt{f(q) (f(q) - g^2(q))}} \left(\cos \Theta \cos(\sqrt{f(q)} x \cos \Theta) \sinh(\sqrt{f(q)} x \sin \Theta) \right).
 \end{aligned}$$

روابط توابع مثلثاتی^{۱۵} تغییر شکل یافته زمانی که پارامتر تغییر شکل یافته به سمت یک میل کند تبدیل به توابع مثلثاتی معمولی به صورت زیر می‌شوند.

$$C_q(x) = \cos(x) \cosh(\circ) + \sinh(\circ) \cos(x) = \cos(x)$$

$$S_q(x) = \sin(x) \sinh(\circ) + \sin(x) \cosh(\circ) = \sin(x)$$

که $C_q(x)$, $\sin_q(x)$ متناظر $\cos_q(x)$, $\sin_q(x)$ است.

۴.۱ بازتعریف اعداد مختلط در فرمالیسم تغییر شکل یافته

در این قسمت اعداد مختلط^{۱۶} را در فرمالیسم تغییر شکل یافته مورد بررسی قرار می‌دهیم و در نهایت نتایج را با نتایج اعداد مختلط معمولی مقایسه می‌کنیم. اعداد مختلط و مزدوج اعداد مختلط تغییر شکل یافته را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

¹⁵Trigonometric function

¹⁶Complex number

$$Z_q = x + i_q y \quad (37.1)$$

$$Z_q^* = x + i_q^* y$$

اندازه طول تغییر شکل یافته^{۱۷} را با استفاده از اعداد مختلط و مزدوج مختلط تغییر شکل یافته محاسبه می‌کنیم که در این محاسبه با کمک رابطه (۲۱.۱) اندازه طول تغییر شکل یافته را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} s_q^2 &= |Z_q|^2 = (x + i_q y)(x + i_q^* y) \\ &= x^2 + (g - i_q \sqrt{f - g^2})xy \\ &\quad + (g + i_q \sqrt{f - g^2})xy + f y^2 \\ &= x^2 + f y^2 + 2gxy \end{aligned} \quad (38.1)$$

نمایش ماتریسی رابطه (۳۸.۱) را به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$s_q^2 = |Z_q|^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (39.1)$$

سپس تبدیل زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (40.1)$$

اندازه طول تغییر شکل یافته تحت تبدیل زیر بدون تغییر^{۱۸} می‌ماند

$$\begin{aligned} (s'_q)^2 &= s_q^2 \\ A^T \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & f \end{pmatrix} A &= \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (41.1)$$

در حد $q \rightarrow 1$ ، معادله (۴۱.۱) به $A^\dagger A = I$ کاهش می‌یابد. از رابطه (۴۱.۱) داریم

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a^2 + 2acg + c^2 f & ba + gcb + gda + cdf \\ ba + dga + gbc + dfc & b^2 + 2bdg + d^2 f \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & g \\ g & f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (42.1)$$

¹⁷ q-deformed norm

¹⁸ Invariant

در نتیجه معادلات زیر به دست می‌آیند

$$a^2 + 2acg + c^2f = 1 \quad (43.1)$$

$$b^2 + 2gdb + d^2f = f \quad (44.1)$$

$$ba + gcb + gad + fcd = g \quad (45.1)$$

که در حد $q \rightarrow 1$ این معادلات (42.1) به صورت زیر کاهش می‌یابند.

$$A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{1-a^2} \\ -\sqrt{1-a^2} & a \end{pmatrix} \quad (46.1)$$

معادله (42.1) برای $q \neq 1$ با $a > 0$ به صورت زیر محاسبه می‌شود. از معادله (43.1) پارامتر c را به دست می‌آوریم.

$$c^2f + 2agc + (a^2 - 1) = 0 \quad (47.1)$$

$$c = -\frac{1}{f} \left(ga + \sqrt{g^2a^2 + f(1-a^2)} \right)$$

همچنین از معادله (45.1) پارامتر d را می‌یابیم

$$d = \frac{g}{ga + fc} - \frac{b(a+gc)}{ga + fc} \quad (48.1)$$

رابطه (48.1) را داخل رابطه (44.1) قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} b^2 + 2gb \frac{g}{ga + fc} - 2gb^2 \frac{(a+gc)}{ga + fc} + f \frac{g^2}{(ga + fc)^2} \\ + \frac{fb^2(a+gc)^2}{(ga + fc)^2} - 2gbf \frac{(a+gc)}{(ga + fc)^2} - f = 0 \end{aligned} \quad (49.1)$$

با استفاده از رابطه (47.1)، رابطه (49.1) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$b = ga + \sqrt{(ga)^2 + f(1-a^2)} \quad (50.1)$$

روابط (50.1) و (47.1) را داخل رابطه (48.1) قرار می‌دهیم و ضریب d را به دست می‌آوریم

$$d = \left(1 - \frac{2g^2}{f}\right)a - \frac{2g}{f} \sqrt{(ga)^2 + f(1-a^2)} \quad (51.1)$$

سرانجام زمانی که $q \neq 1$ روابط را به شکل ماتریس به صورت زیر نمایش می‌دهیم

$$A = \begin{pmatrix} a & ga + \sqrt{(ga)^2 + f(1-a^2)} \\ -\frac{1}{f} \left(ga + \sqrt{(ga)^2 + f(1-a^2)} \right) & \left(1 - \frac{2g^2}{f}\right)a - \frac{2g}{f} \sqrt{(ga)^2 + f(1-a^2)} \end{pmatrix} \quad (52.1)$$

اعداد مختلط و مزدوج اعداد مختلط تغییر شکل یافته را مورد بررسی قرار دادیم و نتایج را برای زمانی که $q \neq 1$ و زمانی که $q \rightarrow 1$ را محاسبه نمودیم و مشاهده کردیم که در حد $q \rightarrow 1$ نتایج رابطه (۵۲.۱) با نتایج اعداد مختلط و مزدوج مختلط معمولی رابطه (۴۶.۱) یکسان است. حال به بررسی کاربردهای از فرمالیسم تغییر شکل یافته می‌پردازیم.

۵.۱ درک بهتر از فرمالیسم تغییر شکل یافته

در این قسمت برای اینکه درک بهتری از فرمالیسم تغییر شکل داشته باشیم به چند نمونه مثال در مکانیک کلاسیک اشاره می‌کنیم. ابتدا به معرفی چند رابطه اولیه در این فرمالیسم می‌پردازیم. رابطه پارامتر تعداد در این فرمالیسم به صورت زیر معرفی می‌شود

$$[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (53.1)$$

رابطه مشتق جکسون در فرمالیسم تغییر شکل یافته برای اولین بار در سال ۱۹۰۹ توسط جکسون به صورت زیر معرفی شد [۴۵]

$$\partial_x^q F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{x(q - 1)} \quad (54.1)$$

است. این مشتق را زمانی که روی چند جمله‌ای اثر دهیم به صورت زیر رفتار می‌کند

$$\partial_x^q x^n = [n]_q x^{n-1} \quad (55.1)$$

برخی از نویسندگان در مراجع [۴۶-۵۵] رابطه پارامتر تعداد را تعمیم دادند. آنها عدد q را به $q + 1$ جابه‌جا کردند در نتیجه رابطه پارامتر تعداد به فرم زیر بازنویسی می‌شود

$$[n]_q = \frac{(q + 1)^n - 1}{q} \quad (56.1)$$

در این قسمت، رابطه (۵۶.۱) را به جای رابطه (۵۳.۱) برای سادگی در نظر می‌گیریم. با تعریف روابط زیر

$$a \oplus_q b = a + b + qab, \quad (57.1)$$

$$a \ominus_q b = \frac{a - b}{1 + qb}, \quad -1 < q < 1$$

سپس رابطه تعداد با استفاده از رابطه (۵۷.۱) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$[n]_q \oplus_q [m]_q = \frac{(q + 1)^n - 1}{q} \oplus_q \frac{(q + 1)^m - 1}{q} = \frac{(q + 1)^{n+m} - 1}{q} = [n + m]_q, \quad (58.1)$$

$$[n]_q \ominus_q [m]_q = \frac{1}{(q + 1)^m} \left[\frac{(q + 1)^n - 1}{q} \ominus_q \frac{(q + 1)^m - 1}{q} \right] = \frac{(q + 1)^{n-m} - 1}{q} = [n - m]_q.$$

با استفاده از روابط فوق، معادله شرودینگر وابسته زمان تغییر شکل یافته- q به صورت زیر تعریف می‌شود

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi, \quad (59.1)$$

که هامیلتونی به صورت زیر است

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \quad (60.1)$$

عملگر تکانه و مشتق در فرمالیسم تغییر شکل یافته به فرم زیر تعریف می‌شوند

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} D_x, \quad D_x = (1 + q x) \partial_x \quad (61.1)$$

$$\hat{x} = x$$

در فاصله $0 < q < 1$ به صورت انتگرال زیر بهنجار شده است

$$\int_{-\frac{1}{q}}^{\infty} \frac{|\Psi|^2}{1 + q x} dx = 1 \quad (62.1)$$

و در فاصله $-1 < q < 0$ تابع موج آن به صورت زیر بهنجار شده است

$$\int_{-\infty}^{-\frac{1}{q}} \frac{|\Psi|^2}{1 + q x} dx = 1 \quad (63.1)$$

سپس رابطه جابجایی عملگرهای مکان و تکانه در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر معرفی می‌شود

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \hbar (1 + q \hat{x}) \quad (64.1)$$

در نهایت بعد از تعاریف اولیه به بررسی چند مسئله در مکانیک کلاسیک در این فرمالیسم معرفی شده، می‌پردازیم و مشاهده می‌کنیم معادلات کلاسیکی در فرمالیسم تغییر شکل یافته در حالت حدی به معادلات کلاسیکی در حالت معمول تبدیل می‌شوند.

۱.۵.۱ معادله نیوتن در فرمالیسم تغییر شکل یافته- q

سرعت را در این فرمالیسم به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۵۶]

$$v_q = \frac{dx_q}{dt} = \frac{1}{1 + q x} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 + q x} \dot{x} \quad (65.1)$$

همانطور که مشاهده می‌کنید در حالت حدی زمانی که پارامتر تغییر شکل یافته- q به سمت صفر میل کند سرعت در این فرمالیسم به سرعت در حالت کلاسیکی تبدیل می‌شود. در مرحله بعد سراغ شتاب می‌رویم، شتاب در حالت $q = 0$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + \Delta t) - x(t)] - [x(t) - x(t - \Delta t)]}{(\Delta t)^2} = \ddot{x} \quad (66.1)$$

سپس تعریف شتاب برای حالتی که $q \neq 0$ به صورت زیر است

$$\begin{aligned}
 a_q &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[x(t + \Delta t) \ominus_q x(t)] \ominus_q [x(t) \ominus_q x(t - \Delta t)]}{(\Delta t)^2} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{1 + qx(t)} \ominus_q \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{1 + qx(t - \Delta t)} \right) = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\frac{\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{1 + qx(t)} \ominus_q \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{1 + qx(t - \Delta t)}}{1 + q \left(\frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{1 + qx(t - \Delta t)} \right)} \right] = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \left[\frac{x(t + \Delta t) - 2x(t) + x(t - \Delta t) + q \left(x(t + \Delta t)x(t - \Delta t) - (x(t))^2 \right)}{(1 + qx(t))^2} \right] = \\
 &= \frac{(1 + qx) \ddot{x} - q \dot{x}^2}{(1 + qx)^2} = \frac{dv_q}{dt}
 \end{aligned}
 \tag{۶۷.۱}$$

معادله نیوتن در فرمالیسم تغییر شکل یافته به فرم زیر تعریف می شود

$$m a_q = m \frac{dv_q}{dt} = m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1 + qx} \dot{x} \right) = F_q \tag{۶۸.۱}$$

یا

$$m(x) \ddot{x} = F_q + m(x) \left(\frac{q}{1 + qx} \right) \dot{x}^2$$

جرم وابسته به مکان به فرم زیر است

$$m(x) = \frac{m}{1 + qx} \tag{۶۹.۱}$$

حال برای درک بهتر مثال های زیر را مورد بررسی قرار می دهیم

۲.۵.۱ سرعت یکنواخت در فرمالیسم تغییر شکل یافته

ذره ای را با سرعت یکنواخت v_0 در نظر می گیریم، از رابطه (۶۵.۱) داریم

$$\frac{1}{1 + qx} \dot{x} = v_{0q} \tag{۷۰.۱}$$

از رابطه (۷۰.۱) معادله حرکت ذره را به صورت زیر محاسبه می کنیم

$$x_q(t) = \frac{1}{q} (e^{qv_0 t} - 1) \tag{۷۱.۱}$$

رابطه مکان برای پارامتر q کوچک به صورت زیر به دست می آید

$$x_q(t) \approx v_0 t + \frac{q}{2} v_0^2 t^2 \tag{۷۲.۱}$$

همانطور که مشاهده می کنید در حالت حدی زمانی که $q \rightarrow 0$ به معادله مکان در حالت کلاسیکی تبدیل می شود.

$$x(t) \approx v_0 t$$

۳.۵.۱ شتاب یکنواخت در فرمالیسم تغییر شکل یافته

ذره ای را در نظر بگیرید که با شتاب یکنواخت a_o حرکت می‌کند. رابطه شتاب یکنواخت در فرمالیسم تغییر شکل یافته به فرم زیر است

$$a_{oq} = \frac{dv_q}{dt} \quad (۷۳.۱)$$

که رابطه سرعت را به فرم زیر می‌دهد

$$v_q(t) = v_o + a_{oq}t \quad (۷۴.۱)$$

با استفاده از رابطه (۶۵.۱)، معادله مکان ذره‌ای که با شتاب یکنواخت حرکت می‌کند به فرم زیر محاسبه می‌شود

$$v_q = \frac{1}{1+qx} \dot{x} \Rightarrow \frac{dx}{1+qx} = v_q dt \quad (۷۵.۱)$$

$$\frac{1}{q} \ln(1+qx) = v_o t + \frac{a_{oq}t^2}{2} \Rightarrow x_q(t) = \frac{1}{q} \left(e^{q \left(v_o t + \frac{a_{oq}t^2}{2} \right)} - 1 \right)$$

رابطه (۷۵.۱)، برای پارامتر q کوچک به فرم زیر کاهش می‌یابد

$$x_q(t) \approx v_o t + \frac{a_{oq}t^2}{2} + \frac{q}{2} \left(v_o t + \frac{a_{oq}t^2}{2} \right)^2 \quad (۷۶.۱)$$

از رابطه (۷۴.۱) معادله سرعت مستقل از زمان را محاسبه می‌کنیم

$$\frac{1}{q} \ln(1+qx) = v_o t + \frac{a_{oq}t^2}{2}, \quad (۷۷.۱)$$

$$\frac{1}{q} \ln(1+qx) = v_o \left(\frac{v_q - v_o}{a_{oq}} \right) + \frac{a_{oq}}{2} \left(\frac{v_q - v_o}{a_{oq}} \right)^2 \Rightarrow v^2 - v_o^2 = \frac{2a_{oq}}{q} \ln(1+qx)$$

به سادگی دوباره مشاهده می‌کنید که در حالت حدی $q \rightarrow 0$ ، معادله شتاب یکنواخت مستقل از زمان به حالت معمول خود به فرم کلاسیکی زیر تبدیل می‌شود.

$$v^2 - v_o^2 = 2a_o x$$

۴.۵.۱ پتانسیل هارمونیک تغییر شکل یافته- q

نیروی هوک در فرمالیسم تغییر شکل یافته- q به صورت زیر معرفی می‌شود که اگر در حالت حدی این نیرو را بررسی کنیم به قانون هوک در کلاسیک تبدیل می‌شود

$$F_q = -\frac{K}{q} \ln(1+qx) \quad (۷۸.۱)$$

$$F_{Cl} = -Kx$$

در این حالت معادله حرکت نیوتن تغییر شکل یافته به فرم زیر است

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1+qx} \right) \dot{x} = -\frac{K}{q} \ln(1+qx) \quad (79.1)$$

با داشتن شرایط اولیه زیر

$$x(0) = A, \quad \dot{x}(0) = 0$$

رابطه (79.1) را محاسبه می‌کنیم

$$x(t) = \frac{1}{q} \left[(1+qA)^{\cos \omega t} - 1 \right], \quad (80.1)$$

که دوره $T = \frac{2\pi}{\omega}$ است. رابطه (80.1) برای پارامتر تغییر شکل کوچک به فرم زیر کاهش می‌یابد

$$x(t) \approx A \cos \omega t + \frac{qA^2}{2} \cos \omega t (\cos \omega t - 1) \quad (81.1)$$

۵.۵.۱ بقای انرژی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

کار انجام شده W توسط اندازه نیروی ثابت F روی نقطه‌ای که از x به x' جابه‌جا می‌شود به صورت زیر معرفی می‌شود

$$W = F(x' \ominus_q x), \quad (82.1)$$

که $x' \ominus_q x$ جابه‌جایی تغییر شکل یافته معرفی می‌شود. با معرفی جابه‌جایی بی‌نهایت کوچک در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر

$$d_q x = \lim_{x' \rightarrow x} (x' \oplus_q x) = \frac{dx}{1+qx} \quad (83.1)$$

و با معرفی نیرو و جابه‌جایی می‌توان کار را در فرمالیسم تغییر شکل یافته تعریف نمود

$$W = \int F d_q x \quad (84.1)$$

سپس اصل کار - انرژی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$W_{12} = \int_1^2 F d_q x = K_{2q} - K_{1q}, \quad (85.1)$$

که انرژی جنبشی

$$K_q = \frac{1}{2} m v_q^2 \quad (86.1)$$

ارتباط بین نیروی F با پتانسیل V به صورت زیر تعریف می‌شود

$$F_q = -D_x V_q \quad (87.1)$$

با جایگذاری رابطه (۸۷.۱) در رابطه (۸۴.۱) رابطه زیر را داریم

$$W_{12q} = \int_1^2 (-D_x V_q) d_q x = - (V_{2q} - V_{1q}) \quad (۸۸.۱)$$

در نتیجه انرژی مکانیکی به فرم زیر می‌شود

$$E_q = K_q + V_q = \frac{1}{2} m v_q^2 + V_q \quad (۸۹.۱)$$

در نهایت همانطور که مشاهده می‌کنید در حالت حدی روابط به حالت کلاسیکی معمول تبدیل می‌شوند.

فصل ۲

مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیرنسبیتی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

۱.۲ هامیلتونی نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته

هامیلتونی نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته به صورت زیر معرفی می‌شود [۵۷]:

$$H = \frac{P_q^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 Q_q^2 \quad (۱.۲)$$

که پارامتر تغییر شکل یافته آن را با q نمایش می‌دهیم. عملگرهای افزایشده و کاهشده را برحسب عبارت‌هایی از عملگرهای تکانه (P_q) و مکان (Q_q) معرفی می‌کنیم [۱۹].

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x + \frac{ip}{m\omega} \right) \\ a^\dagger &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(x - \frac{ip}{m\omega} \right) \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

عملگرهای تکانه (P_q) و مکان (Q_q) را با استفاده از رابطه (۲.۲) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} P_q &= i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a^\dagger - a) \\ Q_q &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

در نتیجه هامیلتونی نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته را برحسب عملگرهای افزایشده و کاهشده نمایش می‌دهیم [۵۸، ۵۹].

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \quad (۴.۲)$$

با استفاده از روابط (۱۵.۱) و (۱۶.۱) ویژه مقادیر رابطه (۵.۱) در فضای فوک، به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۶، ۲۱].

$$(E_n)_q = \frac{\hbar\omega}{2} ([n]_q + [n+1]_q) \quad (۵.۲)$$

و با معرفی رابطه تعداد به صورت زیر

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}$$

می‌توان رابطه (۵.۲) را با استفاده از تعریف رابطه پارامتر تعداد در دو حالت در نظر گرفت.

حالت اول: هنگامی که q حقیقی باشد یعنی $q = e^\tau$

حالت دوم: هنگامی که q موهومی باشد یعنی $q = e^{i\tau}$

در نهایت رابطه انرژی (۵.۲) در این دو حالت از q ، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} (E_n)_{q=e^\tau} &= \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\sinh\left(\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\left(\frac{\tau}{2}\right)} \\ (E_n)_{q=e^{i\tau}} &= \frac{\hbar\omega}{2} \frac{\sin\left(\tau\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)} \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

سرانجام در هر دو حالت هنگامی که $(\tau \rightarrow 0)$ $q \rightarrow 1$ ، رابطه ویژه مقدار انرژی نوسانگر تغییر شکل یافته به رابطه ویژه مقدار انرژی نوسانگر معمول تبدیل می شود

$$E_n = \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (7.2)$$

با محاسبه ویژه مقدار انرژی به بررسی سطوح انرژی در فرمالیسم تغییر شکل یافته می پردازیم.

۲.۲ بررسی سطوح انرژی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

برای سطوح انرژی^۱، رابطه (۵.۲) را توسط این فرم از هامیلتونی رابطه (۴.۲) تعیین می کنیم و صریحاً ویژه بردارها را محاسبه می کنیم، همچنین این نمایش مختصاتی را برای عملگرهای کاهنده و افزایشنده مشخص می کنیم. لازم به ذکر است که این انتخابها منحصر به فرد نیستند [۲۱]. با انتخاب:

$$\begin{aligned} b &= \alpha \left(e^{-2isx} - e^{is\partial} e^{-isx} \right) \\ b^\dagger &= \alpha^* \left(e^{2isx} - e^{isx} e^{is\partial} \right) \end{aligned} \quad (8.2)$$

که در آن $\partial = \frac{\partial}{\partial x}$ می باشد، و پارامترهای s, α را طوری تعیین می کنیم که علاوه بر رابطه زیر [۲۲، ۱]

$$b b^\dagger - q^2 b^\dagger b = 1 \quad (9.2)$$

شکل $b, b^\dagger$ در حد $q \rightarrow 1$ با نمایش مکان $a, a^\dagger$ در نوسانگرهارمونیک معمول یکسان شود این مراحل را در پنج مرحله انجام می دهیم.

مرحله اول: ابتدا رابطه (۹.۲) را اثبات می کنیم برای اثبات این رابطه از مدل متفاوتی از نوسانگرهارمونیک تغییر شکل یافته می توان استفاده کرد که اولین بار توسط اریک و کون معرفی شد. در این مدل عملگرهای $b, b^\dagger$ را به صورت زیر نمایش می دهیم [۶، ۶۰، ۶۱].

$$\begin{aligned} a &= q^{\frac{1}{q}} b q^{-\frac{N}{q}} \\ a^\dagger &= q^{\frac{1}{q}} q^{-\frac{N}{q}} b^\dagger \end{aligned} \quad (10.2)$$

که با استفاده از روابط (۱.۱) و با کمک رابطه (۱۳.۱) می توان روابط زیر را به دست آوریم

$$[N, b^\dagger] = b^\dagger \quad (11.2)$$

$$[N, b] = -b$$

$$a a^\dagger - q a^\dagger a = q^{-N}$$

$$\left(q^{\frac{1}{q}} b q^{-\frac{N}{q}} \right) \times \left(q^{\frac{1}{q}} q^{-\frac{N}{q}} b^\dagger \right) - q \left(q^{\frac{1}{q}} q^{-\frac{N}{q}} b^\dagger \right) \times \left(q^{\frac{1}{q}} b q^{-\frac{N}{q}} \right) = q^{-N}$$

$$b b^\dagger - q^2 b^\dagger b = 1$$

¹Energy levels

مرحله دوم: چون در رابطه (۱۱.۲) عبارت $b, b^\dagger$ به صورت حاصلضرب $b^\dagger b, b b^\dagger$ ظاهر می‌شوند، عبارت α را نمی‌توان تعیین نمود برای تعیین $\alpha\alpha^*$ عملگرهای رابطه (۸.۲) را در رابطه (۹.۲) قرار می‌دهیم. سپس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم [۱۹، ۲۰]

$$e^{(a \frac{\partial}{\partial x})} f(x) = f(x+a) e^{(a \frac{\partial}{\partial x})} \quad (12.2)$$

با استفاده از رابطه (۹.۲) داریم

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha\alpha^* \left(e^{-2isx} - e^{is\partial} e^{-isx} \right) \left(e^{2isx} - e^{isx} e^{is\partial} \right) \\ &- q^2 \alpha\alpha^* \left(e^{2isx} - e^{isx} e^{is\partial} \right) \left(e^{-2isx} - e^{is\partial} e^{-isx} \right) \end{aligned} \quad (13.2)$$

رابطه (۱۳.۲) با استفاده از رابطه (۱۲.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$1 = \alpha\alpha^* \left[1 - q^2 + (q^2 - e^{-2s^2})(e^{-s^2} e^{-isx} + e^{isx}) e^{is\partial} + (e^{-2s^2} - q^2) e^{2is\partial} \right] \quad (14.2)$$

عملگرهای $e^{2is\partial}, e^{is\partial}$ ، عملگرهای مستقلی هستند ضرایب آن‌ها باید جداگانه صفرشود

$$q = e^{-s^2} \quad (15.2)$$

$$\alpha\alpha^*(1 - q^2) = 1$$

حال α به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} \\ \alpha^* &= \frac{1}{-\sqrt{1 - q^2}} \end{aligned} \quad (16.2)$$

با استفاده از رابطه (۱۵.۲) به ازای هر مقدار $-\infty < s < \infty$ ، مقدار q بین صفر و یک است. در انتهای این مرحله، نتایج به دست آمده را امتحان می‌کنیم، یعنی می‌خواهیم ببینیم عملگرهای معرفی شده در نوسانگر تغییر شکل یافته در حد $s \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$) به عملگرهای کاهنده و افزاینده در نوسانگر معمولی شبیه هستند یا نه؟ با استفاده از تعریف b داریم

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} (e^{-2isx} - e^{-isx} e^{is\partial}) \\ &= \frac{-i(x + \partial)}{\sqrt{2}} + O(-s^2) \end{aligned} \quad (17.2)$$

به همین ترتیب در مورد $b^\dagger$ داریم

$$b^\dagger = \frac{i(x - \partial)}{\sqrt{2}} + O(-s^2) \quad (18.2)$$

اگرچه $b, b^\dagger$ در حد $s \rightarrow 0$ ($q \rightarrow 1$) بطور کامل با عملگرهای افزاینده و کاهنده در نوسانگر معمول یکسان نیستند اما شکل به دست آمده برای آن‌ها قابل قبول است و نشان می‌دهد با اعمال تصحیحاتی می‌توان شکل بهتری برای آن‌ها به دست آورد.

مرحله سوم: حال وابستگی q به s را بررسی می‌کنیم، این وابستگی به صورت e^{-s^2} می‌باشد. حال اگر فرضاً ضریب $\partial \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ را با s' نمایش دهیم و دیمانسیون آن را عکس دیمانسیون s (ضریب x) فرض کنیم و مراحل انجام شده را برای به دست آوردن q و $\alpha\alpha^*$ را تکرار کنیم نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} q &= e^{-ss'} \\ \alpha\alpha^* &= \frac{1}{1-q^2} \end{aligned} \quad (۱۹.۲)$$

که نما در $e^{-ss'}$ بدون دیمانسیون است.

مرحله چهارم: عملگرهای $b, b^\dagger$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{1-q^2}} \left(e^{-2isx} - e^{-isx} e^{is'\partial} \right) \\ b^\dagger &= \frac{1}{-\sqrt{1-q^2}} \left(e^{2isx} - e^{is'\partial} e^{isx} \right) \end{aligned} \quad (۲۰.۲)$$

حال با استفاده از این شرط $b, b^\dagger$ در حد $q \rightarrow 1$ ($s, s' \rightarrow 0$) به عملگرهای زیر تبدیل شوند، s, s' را تعیین می‌کنیم. در ضمن فرض می‌کنیم وقتی s به سمت صفر میل می‌کند s' نیز به سمت صفر میل کند.

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (ip + \omega x) + \theta (q-1) \\ b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}} (-ip + \omega x) + \theta (q-1) \end{aligned} \quad (۲۱.۲)$$

که در نمایش مکان $\hat{x} = x, p = -i\hbar\partial$ است. همانطور که مشاهده می‌کنید روابط (۲۱.۲) در مکانیک کوانتومی معمول درست نیستند و فقط در حد $q \rightarrow 1$ است که رابطه جابجایی $b, b^\dagger$ به رابطه مکانیک کوانتومی معمول تبدیل می‌شود. از بسط (۲۰.۲) داریم

$$b = \frac{1}{\sqrt{2ss'}\sqrt{1-ss'}+..} \left[\begin{aligned} &1 - 2isx - 2s^2x^2 + \dots - 1 - is'\partial \\ &+ isx + ss'x\partial + \frac{s^2x^2}{2} + \frac{s'^2\partial^2}{2} + \dots \end{aligned} \right] \quad (۲۲.۲)$$

که در حد $s \rightarrow 0$ به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$b = \frac{-isx - is'\partial}{\sqrt{2ss'}} + \theta(s) \quad (۲۳.۲)$$

از مقایسه ضریب x در رابطه (۲۳.۲) و رابطه (۲۱.۲) نتیجه زیر حاصل می‌شود (در حالتی که $s \rightarrow 0$)

$$\frac{s}{\sqrt{2ss'}} = \frac{\omega}{\sqrt{2\hbar\omega}} \quad (۲۴.۲)$$

مرحله پنجم: در این مرحله سطوح انرژی را به دست می آوریم. از عملگرهای کاهنده، افزایشدهای که در مراحل پیشین به دست آوردیم استفاده می کنیم. در ابتدا رابطه زیر را پیشنهاد می کنیم [۲۱]

$$b = \frac{e^{-2i\alpha x} - e^{i\alpha \frac{d}{dx}} e^{-i\alpha x}}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}} \quad (25.2)$$

$$b^\dagger = \frac{e^{2i\alpha x} - e^{i\alpha x} e^{i\alpha \frac{d}{dx}}}{-\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}}$$

که $\left(\alpha = \sqrt{-\frac{(\text{Log } q)}{2}}, \quad 0 < \alpha < \infty \right)$ است.

این رابطه (۲۵.۲) رابطه (۹.۲) را برآورد می کند و در حد $q \rightarrow 1$ ($\alpha \rightarrow 0$) به نوسانگر هارمونیک استاندارد تبدیل می شود، که با استفاده از رابطه (۲۵.۲) عملگرهای متناظر مکان و تکانه^۲ را در مکانیک کوانتومی تغییر شکل یافته به دست می آوریم

$$\hat{x} = \frac{b + b^\dagger}{\sqrt{2}} \quad (26.2)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}} \times \left[2i \sin(2\alpha x) + e^{i\alpha \frac{d}{dx}} e^{-i\alpha x} - e^{i\alpha x} e^{i\alpha \frac{d}{dx}} \right] = (\dots\dots)$$

برای به دست آوردن رابطه (۲۶.۲) از رابطه کمکی زیر استفاده می کنیم [۱۹]

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]} \quad (27.2)$$

که $(e^A = e^{i\alpha \partial}, e^B = e^{-i\alpha x})$ در نظر می گیریم. سپس با استفاده از رابطه (۲۷.۲) می توان رابطه (۲۶.۲) را به دست آوریم به این ترتیب عمل می کنیم

$$e^{i\alpha \partial} e^{-i\alpha x} = e^{-i\alpha x} e^{i\alpha \partial} e^{\alpha^2} \quad (28.2)$$

از طرف دیگر اگر $(e^A = e^{i\alpha x}, e^B = e^{i\alpha \partial})$ در نظر بگیریم رابطه (۲۷.۲) به صورت زیر تبدیل می شود

$$e^{i\alpha x} e^{i\alpha \partial} = e^{i\alpha \partial} e^{i\alpha x} e^{\alpha^2} \quad (29.2)$$

سپس با استفاده از روابط (۲۸.۲) و (۲۹.۲)، رابطه (۲۶.۲) به صورت زیر حاصل می شود

$$\hat{x} = \frac{1}{i\sqrt{2}\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}} \left[2i \sin(2\alpha x) - e^{i\alpha x} e^{i\alpha \frac{d}{dx}} + e^{i\alpha \frac{d}{dx}} e^{-i\alpha x} \right] \quad (30.2)$$

$$= \sqrt{\frac{2}{1 - e^{-2\alpha^2}}} \left[\sin(2\alpha x) - e^{\frac{\alpha^2}{2}} \sin\left(\alpha x + \frac{i\alpha^2}{2}\right) e^{i\alpha \partial} \right]$$

²Coordinate and momentum operators

برای محاسبه عملگر تکانه به صورت روش فوق عمل می‌کنیم در نتیجه عملگر متناظر مکان و تکانه به صورت

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \frac{b+b^\dagger}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{1-e^{-2\alpha^2}}} \left(\sin(2\alpha x) - e^{\frac{\alpha^2}{2}} \sin\left(\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}i\right) e^{i\alpha \frac{d}{dx}} \right) \quad (31.2) \\ \hat{p} &= \frac{b-b^\dagger}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{1-e^{-2\alpha^2}}} \left(\cos(2\alpha x) - e^{\frac{\alpha^2}{2}} \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}i\right) e^{i\alpha \frac{d}{dx}} \right)\end{aligned}$$

است. ابتدا تابع موج در حالت خلا^۳ را محاسبه می‌کنیم برای این منظور $\langle \circ | b = 0 \rangle$ را در نظر می‌گیریم [۲۱]

$$\left[e^{-2i\alpha x} - e^{i\alpha \frac{d}{dx}} e^{-i\alpha x} \right] \psi_\circ(x) = 0 \quad (32.2)$$

با استفاده از رابطه (۲۷.۲) داریم

$$e^{i\alpha \frac{d}{dx}} e^{-i\alpha x} \psi_\circ(x) = e^{-2i\alpha x} \psi_\circ(x) \quad (33.2)$$

$$\psi_\circ(x + i\alpha) = e^{\alpha^2} e^{-i\alpha x} \psi_\circ(x)$$

حال با استفاده از این رابطه $\psi_\circ(x) = e^{Ax^2+Bx+C}$ ، رابطه (۳۳.۲) را به رابطه زیر تبدیل می‌کنیم

$$A(x+i\alpha)^2 + B(x+i\alpha) + C = \alpha^2 - i\alpha x + Ax^2 + Bx + C \quad (34.2)$$

$$\begin{aligned}A &= -\frac{1}{2} \\ B &= -i\frac{\alpha}{2}\end{aligned}$$

در نتیجه تابع موج در حالت خلا به صورت زیر می‌شود

$$\psi_\circ(x) = N_\circ e^{-\frac{x^2}{2} - i\frac{\alpha}{2}x} \quad (35.2)$$

همانطور که مشاهده می‌کنید احتمال^۴ مستقل از پارامتر تغییر شکل است. حال به بررسی معادله شرودینگر در دو فضای جابجایی و ناجابجایی می‌پردازیم.

۳.۲ معادله شرودینگر در ترم‌هایی از توابع هیون در فضا‌های جابجایی و ناجابجایی

در این قسمت معادله شرودینگر را در دو فضای جابجایی و ناجابجایی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. همانطور که می‌دانیم فضای ناجابجایی یک نوع فرمالیسم تغییر شکل یافته است.

^۳Vacuum-state wave function

^۴Probability density

سپس طیف انرژی و تابع موج سیستم را با استفاده از روش فربینیوس^۵ در این دو فضا محاسبه می‌کنیم و در حالت خاص زمانی که پارامتر ناجابجایی به سمت صفر میل می‌کند همان اطلاعات در فضای جابجایی را به دست می‌آوریم.

۱.۳.۲ بررسی معادله شرودینگر با میدان مغناطیسی خارجی در فضای جابجایی

در مکانیک کوانتومی جابجایی عملگرهای مکان و تکانه از رابطه جبرهایزنبیگ^۶ پیروی می‌کنند [۶۳، ۶۲]

$$[x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0 \quad (36.2)$$

$$[x_i, p_j] = i \delta^{ij}$$

معادله شرودینگر در فضای جابجایی به صورت زیر داده می‌شود

$$\left(\left[\left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \right]^2 - 2 M \left(E_{n,m}^{(c)} - V^c(r) \right) \right) \Psi_{n,m}^{(c)} = 0 \quad (37.2)$$

که e ، M به ترتیب جرم و بار از الکترونی هستند که در میدان مغناطیسی خارجی B در امتداد محور Z در حال حرکت است. بخش شعاعی معادله را (۳۷.۲) برای پتانسیل کرنل^۷ محاسبه می‌کنیم. پتانسیل کرنل به صورت

$$V^c(r) = \frac{a}{r} + b r \quad (38.2)$$

است که a, b ثابت هستند. در حضور میدان مغناطیسی تکانه تحت تبدیل $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}(r)$ قرار گرفته و در نتیجه پتانسیل برداری به صورت $\vec{A} = B \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, 0 \right)$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = B \hat{z}$ در نظر گرفته شده است [۶۳، ۶۲]. با قرار دادن میدان مغناطیسی و پتانسیل برداری رابطه (۳۸.۲) به شکل زیر حاصل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \omega^2 r^2 - 2 M \left(b r + \frac{a}{r} \right) + e B m + 2 M E_{n,m}^{(c)} \right] \Psi_{n,m}^{(c)}(r) = 0 \quad (39.2)$$

تغییر متغیر $Y = \sqrt{\omega} r$ برای $\omega = \frac{eB}{2}$ به ما اجازه می‌دهد تا رابطه (۳۹.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\left[\frac{d^2}{dY^2} + \frac{1}{Y} \frac{d}{dY} - \frac{m^2}{Y^2} - Y^2 - \beta Y - \frac{\delta}{Y} + \varepsilon_{n,m}^{(c)} \right] \Psi_{n,m}^{(c)}(Y) = 0 \quad (40.2)$$

⁵The Frobenius method

⁶Heisenberg algebra

⁷Cornell potential

که

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{2 M b}{\omega^{\frac{2}{3}}} \\ \delta &= \frac{2 M a}{\sqrt{\omega}} \\ \varepsilon_{n,m}^{(c)} &= \frac{1}{\omega} \left[e B m + 2 M E_{n,m}^{(c)} \right]\end{aligned}\quad (41.2)$$

با معرفی تابع موج زیر [۶۴]

$$\Psi(Y) = Y^{|m|} e^{-\frac{Y^2}{2}} e^{-\frac{\beta Y}{2}} H(Y) \quad (42.2)$$

که $H(Y)$ راه‌حلی از معادله هیون بایکانفلوئنت^۸ [۶۵] است. این رابطه (۴۰.۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned}H''(Y) + \left[\frac{2|m|+1}{Y} - \beta - 2Y \right] H'(Y) \\ + \left[\varepsilon_{n,m}^{(c)} + \frac{\beta^2}{4} - 2 - 2|m| - \frac{\beta(2|m|+1) + 2\delta}{2Y} \right] H(Y) = 0.\end{aligned}\quad (43.2)$$

بر طبق روش فربینیوس که راه‌حلی از معادله بایکانفلوئنت هیون هستند که به صورت $H(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n Y^n$ است. از رابطه (۴۳.۲)، رابطه بازگشتی^۹ زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Y^n (n+2)(n+2+2|m|) C_{n+2} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} Y^n \left(\beta(n+1) + \frac{\beta(2|m|+1) + 2\delta}{2} \right) C_{n+1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} Y^n \left(\varepsilon + \frac{\beta^2}{4} - 2 - 2|m| - 2n \right) C_n \\ + (2|m|+1) C_1 Y^{-1} - \left(\frac{\beta(2|m|+1) + 2\delta}{2} \right) C_0 Y^{-1} = 0.\end{aligned}\quad (44.2)$$

سپس ضرایب سری به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}C_1 &= \left(\frac{\beta(2|m|+1) + 2\delta}{2(2|m|+1)} \right) C_0 \\ C_{n+2} &= \frac{\beta(2n+3+2|m|) + 2\delta}{2(n+2)(n+2+2|m|)} C_{n+1} \\ &\quad - \frac{(\beta^2 + 4\varepsilon_{n,m}^{(c)} - 4 - 4|m| - 4n)}{4(n+2)(n+2+2|m|)} C_n,\end{aligned}\quad (45.2)$$

⁸The biconfluent Heun equation

⁹The recurrence relation

که

$$\beta = \frac{\sqrt[3]{M b}}{\omega^{\frac{1}{3}}} \quad (46.2)$$

$$\delta = \frac{\sqrt[3]{M a}}{\sqrt{\omega}}$$

در نتیجه رابطه انرژی در فضای جابجایی به صورت زیر محاسبه می شود

$$C_{n+1} = 0, \quad (47.2)$$

$$\left(\beta^2 + \sqrt[3]{\varepsilon_{n,m}^{(c)}} - \lambda - \lambda |m| - \lambda n \right) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$E_{n,m}^{(c)} = -\frac{M b^2}{\sqrt[3]{\omega^2}} + \frac{\omega}{M} [1 + n + |m| - m]$$

رابطه تابع موج (42.2) به صورت زیر بازنویسی می شود

$$\Psi_{n,m}^{(C)}(\sqrt{\omega} r) = (\sqrt{\omega} r)^m e^{-\frac{(\sqrt{\omega} r)^2}{\sqrt[3]{\omega}}} e^{-\frac{\beta (\sqrt{\omega} r)}{\sqrt[3]{\omega}}} \times \quad (48.2)$$

$$H \left(\sqrt[3]{m}, \frac{\sqrt[3]{M b}}{\omega^{\frac{1}{3}}}, \frac{1}{\omega} [e B m + \sqrt[3]{M} E_{n,m}^{(c)}] + \frac{M^2 b^2}{\omega^{\frac{2}{3}}}, \frac{\sqrt[3]{M a}}{\sqrt{\omega}}, \sqrt{\omega} r \right)$$

حال به بررسی معادله شرودینگر در فضای ناجابجایی می پردازیم.

۲.۳.۲ بررسی معادله شرودینگر با میدان مغناطیسی خارجی در فضای ناجابجایی

در فضای ناجابجایی مختصات x_i, p_i را با عملگرهای $\hat{x}_i, \hat{p}_i$ جابجا می کنیم که در رابطه ی زیر صدق می کند [۶۶]:

$$[x_i, x_j] = i \theta^{ij} \quad (49.2)$$

$$[p_i, p_j] = 0$$

$$[x_i, p_j] = i \delta^{ij}$$

که θ^{ij} تانسور پادمتقارن است. سپس در این فضای ناجابجایی عملگرهای مکان و تکانه به صورت زیر تغییر می کنند.

$$x \rightarrow x - \frac{\theta}{\sqrt[3]{\omega}} p_y \quad (50.2)$$

$$y \rightarrow y + \frac{\theta}{\sqrt[3]{\omega}} p_x$$

$$p_x \rightarrow p_x + \frac{\theta}{\sqrt[3]{\omega}} y$$

$$p_y \rightarrow p_y - \frac{\theta}{\sqrt[3]{\omega}} x$$

توسط در نظر گرفتن رابطه پتانسیل در فضای ناجابجایی به صورت

$$V^{(Nc)} = V^{(c)} + \frac{1}{r} (\vec{\theta} \times \vec{p}) \nabla V^{(c)} + o(\theta^2)$$

معرفی می‌شود. سپس با استفاده از پتانسیل در فضای جابجایی رابطه معادله شرودینگر (۳۷.۲) در این فضا به صورت زیر بازنویسی می‌شود [۶۷]

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{\vartheta}{\alpha} r^2 - \frac{2Mb}{\alpha} r - \frac{2\gamma}{r} + \frac{Mm\theta a}{\alpha r^3} + \varepsilon_{n,m}^{(Nc)} \right] \Psi(r)_{n,m}^{(Nc)} = 0 \quad (51.2)$$

که

$$\begin{aligned} \alpha &= 1 + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16} + \frac{e B \theta}{2} \\ \vartheta &= \frac{\theta^2}{4} + \frac{e^2 B^2}{4} + \frac{e B \theta}{2} \\ \eta &= 2\theta + \frac{e^2 B^2 \theta}{4} + e B + \frac{e B \theta^2}{4} \\ \gamma &= -\frac{M b m \theta}{2\alpha} + \frac{M a}{\alpha} \\ \varepsilon_{n,m}^{(Nc)} &= \frac{1}{\alpha} [\eta m + 2 M E_{n,m}^{(Nc)}]. \end{aligned} \quad (52.2)$$

سپس $\frac{Mm\theta a}{\alpha r^3}$ را یک ترم اختلالی در نظر می‌گیریم. تابع موج را برای این معادله شرودینگر در فضای ناجابجایی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Psi(r)_{n,m}^{(Nc)} = r^{-\frac{1}{2}} K(r) \quad (53.2)$$

رابطه (۵۱.۲) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{r^2} - \frac{\vartheta}{\alpha} r^2 - \frac{2Mb}{\alpha} r - \frac{2\gamma}{r} + \varepsilon_{n,m}^{(Nc)} \right] K_{n,m}^{(Nc)}(r) = 0 \quad (54.2)$$

به منظور به دست آوردن یک فرم مناسب‌تر برای رابطه (۵۴.۲)، تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم [۶۸]

$$K_{n,m}^{(Nc)}(r) = r^A e^{rB+Dr^2} z_{n,m}^{(Nc)}(r) \quad (55.2)$$

که

$$\begin{aligned} A &= m + \frac{1}{2}, \\ B &= -\frac{Mb}{\sqrt{\vartheta\alpha}}, \\ D &= -\sqrt{\frac{\vartheta}{4\alpha}} \end{aligned} \quad (56.2)$$

اکنون با قرار دادن رابطه (۵۵.۲) در رابطه (۵۴.۲) معادله حاصل به صورت زیر است

$$z''(r) + \left[\frac{\chi}{r} - \mu + \tau r \right] z'(r) + \left[E - \frac{\xi}{r} \right] z(r) = 0 \quad (57.2)$$

که

$$\chi = 2 \left(m + \frac{1}{2} \right) \quad (58.2)$$

$$\mu = \frac{2 M b}{\sqrt{\vartheta \alpha}}$$

$$\tau = -2 \sqrt{\frac{\vartheta}{\alpha}}$$

$$E = \varepsilon_{n,m}^{(Nc)} + \frac{M^2 b^2}{\vartheta \alpha} - 2 \sqrt{\frac{\vartheta}{\alpha}} (m+1)$$

$$\xi = 2 \gamma + \frac{2 \left(m + \frac{1}{2} \right) M b}{\sqrt{\vartheta \alpha}}$$

همانطور که مشاهده می کنید رابطه (۵۷.۲)، معادله دیفرانسیل هیون بایکانفلوئنت است.

فرم معمول معادله دیفرانسیل بایکانفلوئنت به صورت زیر نوشته می شود [۶۸]

$$\begin{aligned} \xi u''(\xi) + \left(1 + c_1 - c_2 \xi - 2 \xi^2 \right) u'(\xi) \\ + \left[(c_3 - c_1 - 2) \xi - \frac{(c_4 + c_2 (1 + c_1))}{2} \right] u(\xi) = 0 \end{aligned} \quad (59.2)$$

با جواب هایی که توابع هیون بایکانفلوئنت H نامیده می شوند

$$\begin{aligned} z_{n,m}^{(Nc)}(r) = \\ H \left(2m, \frac{2 M b}{\sqrt{\vartheta \alpha}}, \varepsilon_{n,m}^{(Nc)} + \frac{M^2 b^2}{\vartheta \alpha} - 2 \sqrt{\frac{\vartheta}{\alpha}} (m+1) + 2 + 2m, -\frac{2 M b m \vartheta}{\alpha} + \frac{4 M a}{\alpha}, r \right) \end{aligned} \quad (60.2)$$

جواب معمولی این معادله می تواند با استفاده از روش فریبینوس و سری بایکانفلوئنت هیون محاسبه می شود. با فرض این رابطه

$$z(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n$$

و جایگذاری آن در رابطه (۵۹.۲) یک فرم چندجمله ای درجه n را نتیجه می دهد.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left[(n+2)(n+1+\chi) A_{n+2} - (\mu(n+1) + \xi) A_{n+1} + (E + \tau n) A_n \right] \\ + \chi A_1 r^{-1} - \xi A_0 r^{-1} = 0 \end{aligned} \quad (61.2)$$

سپس رابطه بازگشتی زیر را برای ضرایب سری محاسبه می‌کنیم

$$A_1 = \frac{\xi}{\chi} A_0 \quad (62.2)$$

$$A_{n+2} = \frac{\mu(n+1) + \xi}{(n+2)(n+1+\chi)} A_{n+1} - \frac{(E + \tau n)}{(n+2)(n+1+\chi)} A_n$$

رابطه ویژه مقداری انرژی به صورت

$$A_{n+1} = 0 \quad (63.2)$$

$$E_{n,m}^{(Nc)} = -\frac{M b^2}{2\vartheta} + \frac{\sqrt{\vartheta}\alpha}{M} \left[1 + n + |m| \left(1 - \frac{\eta}{2\sqrt{\vartheta}\alpha} \right) \right], n = 1, 2, 3, \dots$$

است. با جایگذاری رابطه (۵۵.۲) در رابطه (۵۳.۲) می‌توان تابع موج سیستم را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\Psi(r)_{n,m}^{(Nc)} = r^m e^{-\frac{M b r}{\sqrt{\vartheta}\alpha} - \sqrt{\frac{\vartheta}{\alpha}} r^2} \times \quad (64.2)$$

$$H \left(2m, \frac{2Mb}{\sqrt{\vartheta}\alpha}, \varepsilon_{n,m}^{(Nc)} + \frac{M^2 b^2}{\vartheta\alpha} - 2\sqrt{\frac{\vartheta}{\alpha}}(m+1) + 2 + 2m, -\frac{2Mb m \theta}{\alpha} + \frac{4Ma}{\alpha}, r \right)$$

اگر پارامتر ناجابجایی را به صورت $\theta = 0$ در نظر بگیریم رابطه (۶۴.۲) به رابطه (۴۸.۲) تبدیل می‌شود.

در مرحله بعدی تابع موج را بهنجار می‌کنیم^{۱۰}.

$$\begin{aligned} \left| \bar{\Psi}_{n,m}^{(Nc)}(r) \right\rangle &= \quad (65.2) \\ \frac{|\Psi(r)\rangle}{\sqrt{\langle \Psi(r) | \Psi(r) \rangle}} &= N_{n,m} |\Psi(r)\rangle \\ &= N_{n,m} r^m \left[1 + \frac{\xi}{\chi} r + \left(\frac{(\mu + \xi)\xi}{2\chi(1+\chi)} - \frac{E_{n,m}^{(Nc)}}{2(1+\chi)} \right) r^2 \right] e^{-\frac{M b r}{\sqrt{\vartheta}\alpha} - \sqrt{\frac{\vartheta}{\alpha}} r^2} \end{aligned}$$

رابطه ویژه مقدار انرژی توسط استفاده از رهیافت اختلال به صورت زیر تغییر می‌کند

$$E_{Total,n,m}^{(Nc)} = E_{n,m}^{(Nc)} + \Delta_1^{(1)} \quad (66.2)$$

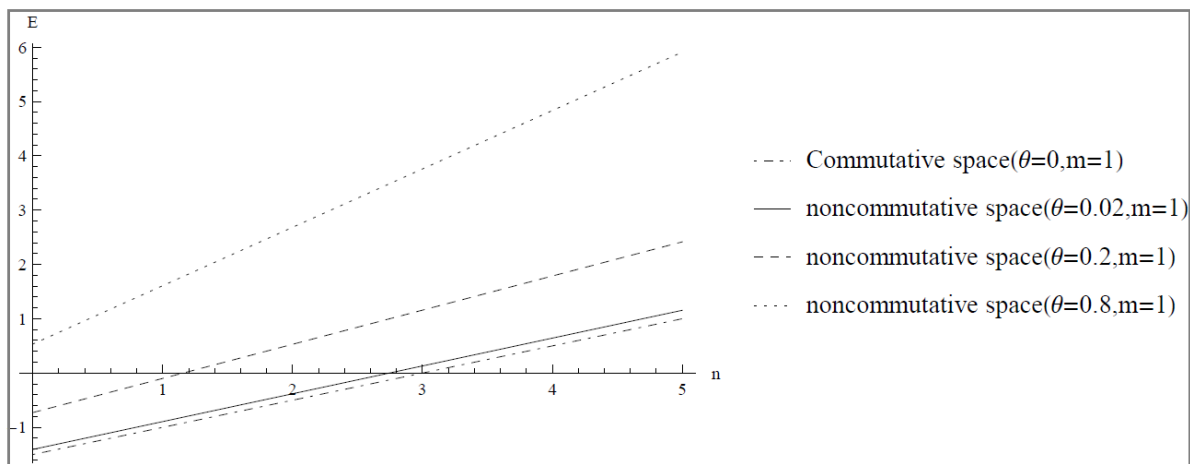
که مرتبه اول اختلال به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta_1^{(1)} &= \langle \bar{\Psi} | \frac{m\theta a}{2r^3} | \bar{\Psi} \rangle \quad (67.2) \\ &= N_{n,m}^2 m \theta a \int_0^\infty 2\pi r^{2m+1} \left[1 + \frac{\xi}{\chi} r + \left(\frac{(\mu + \xi)\xi}{2\chi(1+\chi)} - \frac{E_{n,m}^{(Nc)}}{2(1+\chi)} \right) r^2 \right]^2 e^{-\frac{2Mb r}{\sqrt{\vartheta}\alpha} - 2\sqrt{\frac{\vartheta}{\alpha}} r^2} dr \end{aligned}$$

سپس تاثیرات پارامتر تغییر شکل یافته را روی انرژی برای مجموعه‌ای از پارامترهای تغییر شکل یافته در فضای ناجابجایی در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.

همانطور که انتظار داریم با افزایش عدد کوانتومی n انرژی سیستم رو به افزایش است. به علاوه، با افزایش خاصیت پارامتر ناجابجایی θ همچنین انرژی سیستم افزایش می‌یابد. حال به بررسی نوسانگر دیراک در فرمالیسم تغییر شکل یافته در یک و دو بعد می‌پردازیم.

¹⁰The normalized wave function



شکل ۱.۲: رسم‌هایی از ویژه مقادیر انرژی در فضای جابجایی و ناجابجایی برای مقادیر متفاوت از پارامتر تغییر شکل یافته θ و مجموعه‌ای از پارامترها به صورت $(\vartheta = \pi/2, \alpha = 1/2, \eta = 1/2, \{M, a, b\} = 1)$

۴.۲ نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در یک بعد

نوسانگر هارمونیک نسبیتی یکی از با اهمیت‌ترین سیستم‌های کوانتومی است که می‌تواند به طور دقیق محاسبه شود. نوسانگر دیراک اولین بار توسط موشینکی^{۱۱} و زس پانیک^{۱۲} معرفی شد [۶۹]. معادله دیراک را در نظر بگیریم که تکانه $\vec{p}$ توسط $(\vec{p} - i m \omega \beta \vec{r})$ جایگزین می‌شود که $\vec{r}$ بردار مکان، m جرم ذرات و ω فرکانس نوسانگر است. نوسانگر دیراک یک بعدی به شکل زیر است

$$\left[c \alpha_x \cdot (p_q - i m \omega \beta Q_q) + \beta m c^2 \right] \psi_D = \varepsilon \psi_D \quad (۶۸.۲)$$

که در آن $\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ و α_x, β ماتریس‌های پاولی به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$\alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

¹¹Moshinky

¹²Szczepaniak

بنابراین معادله (۶۸.۲) به شکل ماتریسی به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c(p_x + im\omega x) \\ c(p_x - im\omega x) & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (۶۹.۲)$$

با استفاده از رابطه (۳.۲) مولفه‌های ماتریس رابطه (۶۹.۲) را بر حسب عملگرهای کاهنده و افزایشنده معمول از نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} c(p_x + im\omega x) &= c \left[i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a^\dagger - a) + i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a + a^\dagger) \right] \quad (۷۰.۲) \\ &= ic\sqrt{2m\omega\hbar} a^\dagger \\ c(p_x - im\omega x) &= c \left[i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a^\dagger - a) - i \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} (a + a^\dagger) \right] \\ &= -ic\sqrt{2m\omega\hbar} a \end{aligned}$$

که $g = imc^2\sqrt{2r}$ از مرتبه برهم‌کنش اسپین - مدار معرفی می‌شود که $r = \frac{\hbar\omega}{mc^2} = 1$ است. این پارامتر نقش مهمی را در اثرات نسبیتی در این نوسانگر دیراک ایفا می‌کند. سپس رابطه (۶۹.۲) نتیجه می‌شود

$$H_D = \begin{pmatrix} mc^2 & ga^\dagger \\ g^*a & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (۷۱.۲)$$

با استفاده از رابطه (۷۱.۲) و تعریف $H_D\psi_D = \varepsilon\psi_D$ ، دو رابطه زیر را نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} \psi_2 &= \frac{(\varepsilon - mc^2)}{ga^\dagger} \psi_1 \quad (۷۲.۲) \\ \psi_1 &= \frac{(\varepsilon + mc^2)}{g^*a} \psi_2 \end{aligned}$$

رابطه (۷۲.۲) به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$\varepsilon = mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega a^\dagger a}{mc^2}} \psi_1 \quad (۷۳.۲)$$

با استفاده از رابطه (۱۶.۱) و در نظر گرفتن بسط ψ_1 در ترم‌هایی از کت $|n\rangle$ داریم

$$\varepsilon = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega [n]_q}{mc^2}} \quad (۷۴.۲)$$

رابطه (۷۴.۲) را با استفاده از روابط (۸.۱)، (۹.۱) برای حالتی که $(q = e^\eta)$ حقیقی و $(q = e^{i\eta})$ موهومی باشد محاسبه می‌کنیم سپس فرم انرژی به ترتیب برابر

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega}{mc^2} \frac{\text{Sinh}(\eta n)}{\text{Sinh}(\eta)}} \quad (۷۵.۲) \\ \bar{\varepsilon}_n &= \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{2\hbar\omega}{mc^2} \frac{\text{Sin}(\eta n)}{\text{Sin}(\eta)}} \end{aligned}$$

در هر دو حالت زمانی که $(\eta \rightarrow 0) q \rightarrow 1$ رابطه (۷۵.۲) نتیجه می‌شود

$$\tilde{\varepsilon}_n = \pm m c^2 \sqrt{1 + \frac{2 \hbar \omega}{m c^2} n} \quad (76.2)$$

که در مرجع [۷۰] اشاره شده است. سپس تابع موج $\psi_D = \begin{pmatrix} |n\rangle \\ |n-1\rangle \end{pmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. سرانجام ویژه مقادیر از نوسانگر دیراک دو بعدی را در هر دو حالت می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_n \pm m c^2}{2 E_n}} |n\rangle \\ \mp i \sqrt{\frac{E_n \mp m c^2}{2 E_n}} |n-1\rangle \end{pmatrix} \quad (77.2)$$

با استفاده از عملگرهای خلق و فنا (۳.۲) و عملگرهای اسپینور دیراک افزایشده و کاهشده $(\sigma^\pm = \frac{1}{2}(\sigma^x \pm i \sigma^y))$ می‌توان رابطه (۶۸.۲) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} H_{\text{D}} = & i c \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \sigma_x a^\dagger - i c \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \sigma_x a - i c \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \sigma_x \sigma_z a \\ & - i c \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} \sigma_x \sigma_z a^\dagger + m c^2 \sigma_z = g (\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger) + \Delta \sigma_z \end{aligned} \quad (78.2)$$

که $\Delta = m c^2$ است [۷۱].

۵.۲ نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در دو بعد

۱.۵.۲ بررسی نوسانگر دیراک در فرمالیسم مختلط

در نمایش مختلط و مزدوج مختلط داریم [۷۲-۷۵]

$$z = x + i y \quad (79.2)$$

$$\bar{z} = x - i y$$

و با معرفی روابط زیر

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (80.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

عملگرهای تکانه p_x, p_y در مختصات دکارتی به صورت زیر مشخص می‌شوند

$$p_x = -i \hbar \frac{\partial}{\partial x} \quad (81.2)$$

$$p_y = -i \hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

با استفاده از $p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$ داریم

$$p_z = -i\hbar \frac{d}{dz} = \frac{1}{2} (p_x - ip_y) \quad (۸۲.۲)$$

$$\bar{p}_z = -i\hbar \frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} (p_x + ip_y)$$

عملگرها، روابط جابه‌جایی اولیه زیر را برآورد می‌کنند

$$[z, p_z] = [\bar{z}, p_{\bar{z}}] = i\hbar \quad (۸۳.۲)$$

$$[z, p_{\bar{z}}] = [\bar{z}, p_z] = 0$$

با استفاده از رابطه (۲.۲) در فرمالیسم مختلط می‌توان رابطه (۸۲.۲) را دوباره فرمول‌بندی کنیم

$$p_z = -i\sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a_x - ia_y) + \frac{im\omega}{2} (x - iy) \quad (۸۴.۲)$$

$$\bar{a}_z = -i \left[\sqrt{\frac{2}{\hbar m \omega}} p_z + i \sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} \bar{z} \right]$$

به روش مشابه قسمت فوق رابطه زیر را به دست می‌آوریم

$$a_z = i \left[\sqrt{\frac{2}{\hbar m \omega}} p_z - i \sqrt{\frac{m \omega}{2 \hbar}} \bar{z} \right] \quad (۸۵.۲)$$

این عملگرها، روابط جابه‌جایی معمول را برآورد می‌کند

$$[a_z, \bar{a}_z] = 1 \quad (۸۶.۲)$$

$$[a_z, a_z] = 0$$

$$[\bar{a}_z, \bar{a}_z] = 0$$

در این حالت عملگرهای خلق و فنا a_z , $\bar{a}_z$ در نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته، رابطه جابه‌جایی زیر را برآورد می‌کند

$$[a_z, \bar{a}_z]_q = a_z \bar{a}_z - q^{-1} \bar{a}_z a_z = q^N \quad (۸۷.۲)$$

که N عملگر عدد است که روابط زیر را ارضا می‌کند.

$$[N, \bar{a}_z] = \bar{a}_z \quad (۸۸.۲)$$

$$[N, a_z] = -a_z$$

سپس به بررسی شکل کلی از ویژه مقادیر انرژی در فرمالیسم تغییر شکل یافته می‌پردازیم.

۲.۵.۲ شکل کلی ویژه مقادیر نوسانگر دیراک

نوسانگر دیراک در دو بعد به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\left[c \sigma_x (p_x - i m \omega x) + c \sigma_y (p_y - i m \omega y) + \beta m c^2 \right] \psi = \varepsilon \psi \quad (۸۹.۲)$$

که $\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ ، $\alpha_x = \sigma_x$ ، $\beta = \sigma_z$ است. با معرفی ماتریس دیراک به صورت زیر

$$\alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۹۰.۲)$$

$$\alpha_y = \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

و با جایگذاری روابط فوق در رابطه (۸۹.۲) داریم

$$\begin{aligned} (\varepsilon + m c^2) |\psi_1\rangle &= c (p_x + i m \omega x - i p_y + m \omega y) |\psi_2\rangle \\ (\varepsilon - m c^2) |\psi_2\rangle &= c (p_x - i m \omega x + i p_y + m \omega y) |\psi_1\rangle \end{aligned} \quad (۹۱.۲)$$

به روش مشابه قسمت قبل، نمایش ماتریسی هامیلتونی به صورت

$$H_D = \begin{pmatrix} m c^2 & c (p_x - i m \omega x + i p_y + m \omega y) \\ c (p_x + i m \omega x + i p_y + m \omega y) & -m c^2 \end{pmatrix} \quad (۹۲.۲)$$

است. با استفاده از روابط (۸۴.۲)، (۸۵.۲)، رابطه هامیلتونی (۹۲.۲) در فرمالیسم مختلط به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$H_D = \begin{pmatrix} m c^2 & 2 c p_z + i m \omega c \bar{z} \\ 2 c \bar{p}_z - i m \omega c z & -m c^2 \end{pmatrix} \quad (۹۳.۲)$$

$$H_D = \begin{pmatrix} m c^2 & 2 g \bar{a}_z \\ 2 g^* a_z & -m c^2 \end{pmatrix}$$

بنابراین رابطه (۹۳.۲)، تبدیل یافته حالت دو بعدی با متغیر مختلط z است. سپس رابطه هامیلتونی (۹۳.۲) را بر حسب توابع موج (ψ_1, ψ_2) ، در نمایش عملگرهای خلق و فنا به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{2 g}{\varepsilon - m c^2} \bar{a}_z |\psi_2\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \frac{2 g^*}{\varepsilon + m c^2} a_z |\psi_1\rangle \end{aligned} \quad (۹۴.۲)$$

سرانجام طیف انرژی نوسانگر هارمونیک دیراک در دو بعد را، هنگامی که $(q = e^\eta)$ حقیقی و $(q = e^{i\eta})$ موهومی است به ترتیب محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \pm m c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar \omega}{m c^2} \frac{\text{Sin} h(\eta n)}{\text{Sin} h(\eta)}} \\ \bar{\varepsilon}_n &= \pm m c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar \omega}{m c^2} \frac{\text{Sin}(\eta n)}{\text{Sin}(\eta)}}\end{aligned}\quad (95.2)$$

به طور مشابه قسمت قبل هنگامی که $(\eta \rightarrow 0)$ $q \rightarrow 1$ رابطه (95.2) به رابطه زیر ساده می‌شود

$$\tilde{\varepsilon}_n = \pm m c^2 \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar \omega}{m c^2} n} \quad (96.2)$$

همانطور که مشاهده می‌شود این نتایج در معادله (96.2) در توافق خوبی با نتایج مرجع [۱۰] می‌باشد. حال تاثیرات جبر تغییر شکل یافته را روی ویژه مقادیر انرژی نوسانگر دیراک در یک و دو بعد مورد مطالعه قرار دادیم و این تاثیرات را توسط پارامتر تغییر شکل یافته η برای هر دو حالت q حقیقی و موهومی بر حسب عدد کوانتومی n در شکل ۲.۲ نشان داده می‌شود. همانطور که نشان داده شده رفتار انرژی برای دو حالت q حقیقی و موهومی متفاوت است برای q موهومی با افزایش عدد کوانتومی ابتدا قدر مطلق انرژی افزایش و سپس کاهش می‌یابد اما برای حالت q حقیقی این روند افزایشی با افزایش عدد کوانتومی n ادامه دارد. بنابراین هامیلتونی دیراک تغییر شکل یافته را در نمایش مختلط و مزدوج مختلط به صورت دیگر باز نویسی می‌کنیم

$$H_D = g (\sigma^+ \bar{a}_z + \sigma^- a_z) + \Delta \sigma_z \quad (97.2)$$

ابتدا ویژه حالات نوسانگر دیراک دو بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهیم

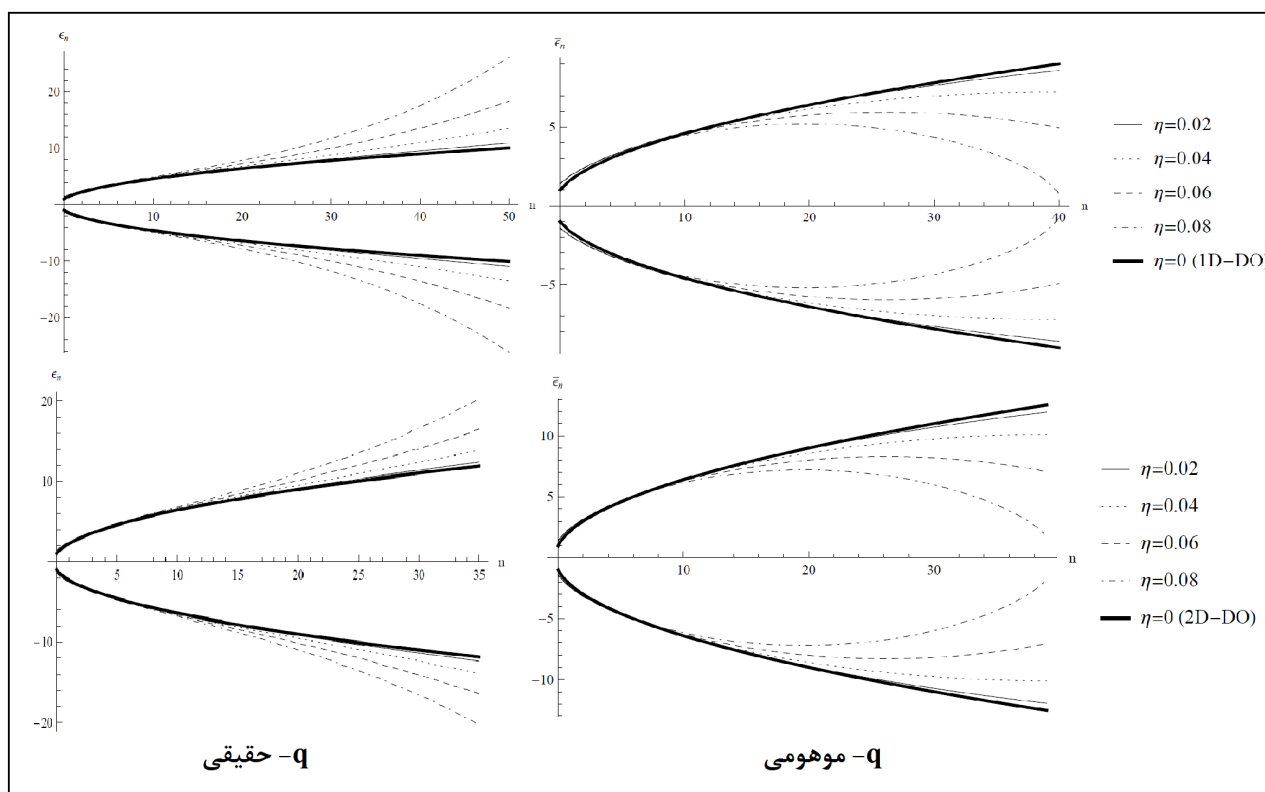
$$|\psi_{1,2}\rangle = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{E_n \pm m c^2}{E_n}} |n\rangle \\ \mp i \sqrt{\frac{E_n \mp m c^2}{E_n}} |n-1\rangle \end{pmatrix} \quad (98.2)$$

حال به ترتیب $E_n \equiv \varepsilon_n$ ($E_n \equiv \bar{\varepsilon}_n$) برای q (موهومی) حقیقی است. بنابراین ویژه حالات را در ترم‌هایی از اسپینورهای پاولی دو مولفه‌ای $|\chi \uparrow\rangle$, $|\chi \downarrow\rangle$ بیان می‌کنیم [۷۶-۷۸].

$$\begin{aligned}|\psi_1\rangle &= \alpha_n |n\rangle |\chi \uparrow\rangle - i \gamma_n |n-1\rangle |\chi \downarrow\rangle \\ |\psi_2\rangle &= \gamma_n |n\rangle |\chi \uparrow\rangle + i \alpha_n |n-1\rangle |\chi \downarrow\rangle\end{aligned}\quad (99.2)$$

که $\alpha_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_n + m c^2}{E_n}} \left(\sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_n + m c^2}{E_n}} \right)$, $\gamma_n = \sqrt{\frac{\varepsilon_n - m c^2}{E_n}} \left(\sqrt{\frac{\bar{\varepsilon}_n - m c^2}{E_n}} \right)$ حقیقی‌اند، سپس حالت اولیه در $t = 0$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم

$$|\psi(0)\rangle = |n-1\rangle |\chi \downarrow\rangle = i \gamma_n |\psi_1\rangle - i \alpha_n |\psi_2\rangle \quad (100.2)$$



شکل ۲.۲: نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در یک و دو بعد .

حالت اولیه رابطه (۱۰۰.۲) برهم‌نهی از دو راه‌حل انرژی مثبت و منفی‌اند، که به فرکانس زیتزر بگ‌انگ^{۱۳} در دینامیک کوانتومی منجر می‌شود.

$$|\Psi(t)\rangle = i\gamma_n e^{-i\omega_n t} |\psi_1\rangle - i\alpha_n e^{i\omega_n t} |\psi_2\rangle \quad (۱۰۱.۲)$$

حال فرکانس زیتزر- بگ‌انگ برای نوسانگر دیراک دو بعدی تغییر شکل یافته به پارامتر تغییر شکل یافته η وابسته است. که فرکانس زیتزر بگ‌انگ به ترتیب برای دو حالت انرژی هنگامیکه q حقیقی و موهومی باشد به صورت

$$\omega_n = \frac{\varepsilon_n}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \frac{\sinh(\eta n)}{\sinh(\eta)}} \quad (۱۰۲.۲)$$

$$\omega_n = \frac{\bar{\varepsilon}_n}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{1 + \frac{\hbar\omega}{mc^2} \frac{\sin(\eta n)}{\sin(\eta)}}$$

است. در هر دو حالت ω_n فرکانس نوسانگر است. این فرکانس نوسانی بین انرژی مثبت و منفی است. در این مرحله تغییر شکل خیلی کوچک را در نظر می‌گیریم و از ترم‌های متناسب با η^4

¹³Zitterbewegung

صرف نظر می کنیم

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{\varepsilon_n}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{1 + 4 \frac{\hbar \omega}{mc^2} \frac{\sin(\eta n)}{\sin(\eta)}} \quad (103.2) \\ &\approx \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{1 + 4n + \frac{4}{3} \eta^2 n^3} \\ &\approx \omega_{Do} (1 \pm \frac{1}{3} \frac{n^3}{(1+4n)} \eta^2)\end{aligned}$$

که $(\omega_{Do} = \frac{mc^2}{\hbar} \sqrt{1+4n})$ ، فرکانس نوسانگر دیراک دوبعدی بدون تغییر شکل است و علامت (+) برای حالت q حقیقی و علامت (-) برای q موهومی است. حال فرکانس ω_n را بر حسب عدد کوانتومی n برای هر دو حالت q حقیقی و موهومی در شکل ۳.۲ نمایش می دهیم. این فرکانس نوسانگر بین دو ویژه مقدار انرژی مثبت و منفی توصیف می شود.

عبارت $|\Psi(t)\rangle$ ، در ترم های دومولفه ای $|\psi_1\rangle$ ، $|\psi_2\rangle$ در تقریب پارامتر تغییر شکل یافته خیلی کوچک η سرانجام به فرم زیر تبدیل می شود

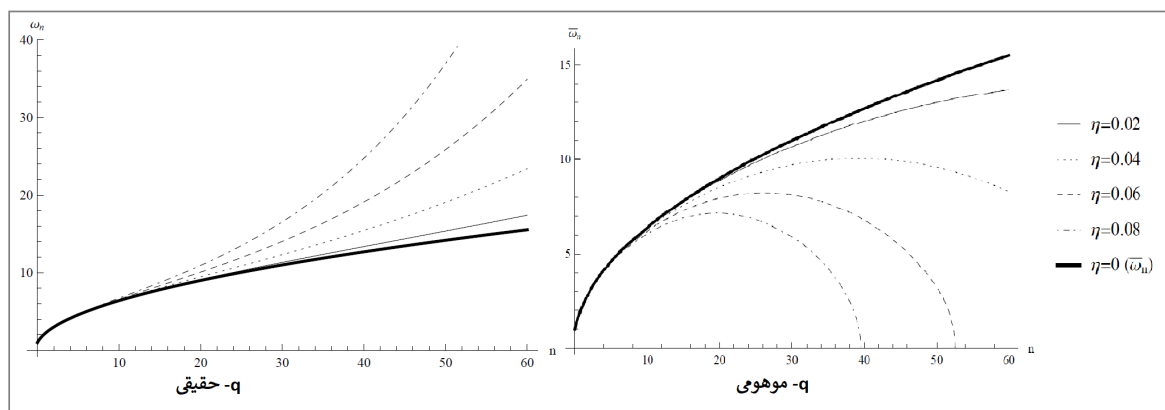
$$|\Psi(t)\rangle = |\Psi(t)\rangle_{\eta=0} + \eta^2 |\Psi(t)\rangle_{\eta \neq 0} \quad (104.2)$$

که $\eta = 0$ بدون تغییر شکل و $\eta \neq 0$ در حضور تغییر شکل بیان می شود. برای هر دو حالت تابع موج به ترتیب به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\begin{aligned}|\Psi(t)\rangle_{\eta=0} &= \left(\cos \omega_{Do} t + \frac{i \sin \omega_{Do} t}{\sqrt{1+4n}} \right) |\psi_1\rangle + \sqrt{\frac{4n}{1+4n}} \sin \omega_{Do} t |\psi_2\rangle \quad (105.2) \\ |\Psi(t)\rangle_{\eta \neq 0} &= \left(\left[\frac{1}{3} \frac{n^3 \omega_{Do} t}{(1+4n)} \sin \omega_{Do} t + \frac{i}{\sqrt{1+4n}} \left\{ \mp \frac{1}{3} \frac{n^3 \omega_{Do} t}{(1+4n)} (\cos \omega_{Do} t + \sin \omega_{Do} t) \right\} \right] \right) |\psi_1\rangle \\ &+ \left\{ \sqrt{\frac{4n}{1+4n}} \frac{1}{3} \frac{n^3 \omega_{Do} t}{(1+4n)} \cos \omega_{Do} t - \sqrt{\frac{4n}{1+4n}} \left(\frac{n^2}{12} + \frac{1}{3} \frac{n^3}{(1+4n)} \right) \sin \omega_{Do} t \right\} |\psi_2\rangle\end{aligned}$$

علامت (+)، (-) به ترتیب برای q حقیقی و موهومی است. همانطور که از شکل ۳.۲ مشاهده می کنید با افزایش عدد کوانتومی n و افزایش پارامتر تغییر شکل یافته η فرکانس در حالت q حقیقی افزایش می یابد و بالعکس برای حالت q موهومی با کاهش عدد کوانتومی و افزایش پارامتر تغییر شکل یافته q ، فرکانس کاهش می یابد.

معادله (۱۰۵.۲) رفتار نوسانگر بین حالات $|n\rangle |\chi \uparrow\rangle$ و $|n-1\rangle |\chi \downarrow\rangle$ نشان می دهد. حال فرض می کنیم N نوسانگر دیراک مستقل از هم داریم که در دمای T قرار دارند. سپس به بررسی خواص آماری از نوسانگر دیراک می پردازیم.



شکل ۳.۲: رسم فرکانس برحسب عدد کوانتومی n برای مجموعه‌ای از پارامترهای $(\hbar = m = c = 1)$.

۶.۲ معرفی خواص ترمودینامیکی نوسانگر دیراک

فرمالیسم آمار تغییرشکل یافته یک موضوع بسیار جالبی در سال‌های اخیر بوده است. در سال‌های اخیر، تحقیقات بسیاری در سیستم‌های فیزیکی تغییرشکل یافته انجام شده است و پیشرفت‌های بسیاری در این تحقیقات به دست آمده است. در این میان، مکانیک آماری نوسانگر کوانتومی تغییرشکل یافته توسط نسکویک^{۱۴} و یوروسویک^{۱۵} مورد مطالعه قرار گرفته شده است. جبر نوسانگر را برای حالت q حقیقی در نظر می‌گیریم و تابع پارش و دیگر کمیت‌های آماری به طور مثال انرژی آزاد F ، آنتروپی S و انرژی داخلی U را برای نوسانگر تغییرشکل یافته به دست می‌آوریم. احتمال پیدا کردن یک سیستم در یک حالت با انرژی E_n به صورت زیر معرفی می‌شود

$$P_n = \frac{e^{-\frac{E_n}{\kappa_B T}}}{Z} \quad (۱۰۶.۲)$$

حال $Z = \text{tr} e^{-\frac{H}{\kappa_B T}} = \sum e^{-\beta E_n}$ تابع پارش است. بنابراین تابع پارش را برای پارامتر تغییرشکل یافته کوچک β محاسبه می‌کنیم. از رابطه زیر برای دو حالت q حقیقی و موهومی شروع می‌کنیم

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \pm m c^2 \sqrt{1 + a \frac{\text{Sinh}(\eta n)}{\text{Sinh}(\eta)}} \\ \varepsilon_n &= \pm m c^2 \sqrt{1 + a \frac{\text{Sin}(\eta n)}{\text{Sin}(\eta)}} \end{aligned} \quad (۱۰۷.۲)$$

که $a = \frac{2\hbar\omega}{mc^2}$ ، $\frac{4\hbar\omega}{mc^2}$ به ترتیب برای حالت نوسانگر هارمونیک دیراک در دو و یک بعد است. سپس انرژی را به ترتیب برای هر دو حالت q حقیقی و موهومی تغییرشکل یافته خیلی کوچک

¹⁴Neskovic

¹⁵Urošević

بررسی می‌کنیم و همچنین از ترم‌های متناسب η^4 صرف‌نظر می‌کنیم

$$\varepsilon_n = \sqrt{1 + a \frac{\eta n + \frac{\eta^3 n^3}{6}}{\eta}} \quad (108.2)$$

$$\simeq \sqrt{1 + a \left(n + \frac{\eta^3 n^3}{6} \right)}$$

$$\simeq \sqrt{1 + a n} \left(1 + \frac{a n^3}{12 (1 + a n)} \eta^2 \right)$$

$$\bar{\varepsilon}_n \simeq \sqrt{1 + a n} \left(1 - \frac{a n^3}{12 (1 + a n)} \eta^2 \right)$$

دو رابطه (108.2) را برای دو حالت q حقیقی و موهومی به شکل ساده‌تری بیان می‌کنیم

$$\zeta_n \simeq \sqrt{1 + a n} \left(1 \pm \frac{a n^3}{12 (1 + a n)} \eta^2 \right) \quad (109.2)$$

یا می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت

$$\zeta_n = \zeta_{n^0} + \zeta_{n\pm} \quad (110.2)$$

با

$$\zeta_{n^0} = \sqrt{1 + a n} \quad (111.2)$$

$$\zeta_{n\pm} = \pm \frac{a n^3}{12 \sqrt{1 + a n}} \eta^2 \quad (112.2)$$

در این حالت تابع پارش با رابطه زیر داده می‌شود

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\zeta_{n\pm}}{\tau}} \quad (113.2)$$

$$\simeq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{1+an}}{\tau}} \left(1 \pm \frac{a n^3}{12 \tau \sqrt{1+an}} \eta^2 \right)$$

$$= Z_0 + Z_1$$

با معرفی متغیرهای زیر

$$\tau = \frac{\kappa_B T}{m c^2} \quad (114.2)$$

$$Z_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\sqrt{1+an}}{\tau}}$$

$$Z_1 = \pm \frac{a \eta^2}{12 \tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{1+an}} e^{-\frac{\sqrt{1+an}}{\tau}}$$

ترم اول تابع پارش در رابطه (113.2) را با استفاده از تابع زتا^{۱۶} و استفاده از رابطه زیر محاسبه

می‌کنیم [۷۰]

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_C ds x^{-s} \Gamma(s) \quad (115.2)$$

¹⁶Zeta function

سپس رابطه (۱۱۴.۲) تبدیل به رابطه زیر می‌شود

$$\begin{aligned} \sum_n e^{-\frac{\gamma}{\tau}\sqrt{\alpha+n}} &= \frac{1}{\tau\pi i} \int_C ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \sum_n (n+\alpha)^{-\frac{s}{\tau}} \Gamma(s) \\ &= \frac{1}{\tau\pi i} \int_C ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \zeta_H\left(\frac{s}{\tau}, \alpha\right) \Gamma(s) \end{aligned} \quad (116.2)$$

با متغیرهای $x = \frac{\gamma}{\tau}\sqrt{\alpha+n}$, $\gamma = \sqrt{a}$, $\alpha = \frac{1}{a}$ به $\Gamma(s)$, $\zeta_H(\frac{s}{\tau}, \alpha)$ اینجا معرفی شده است. ترتیب تابع زتاهوروایز^{۱۷} و تابع اوایلر^{۱۸} است. تابع پارش را در ترم‌های از این تابع زتای هوروایز به دست می‌آوریم

$$Z_0(\tau) = \frac{\tau^2}{a} + \zeta_H\left(0, \frac{1}{a}\right) \quad (117.2)$$

ترم دوم تابع پارش رابطه (۱۱۳.۲) توسط استفاده از رابطه اوایلر – مک لورن^{۱۹} نوشته می‌شود

$$Z_1 = \pm \frac{a\eta^2}{12\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{\sqrt{1+an}} e^{-\frac{\sqrt{1+an}}{\tau}} \quad (118.2)$$

رابطه (۱۱۸.۲) را با کمک رابطه زیر به انتگرال تبدیل می‌کنیم

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{\tau} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_p}{(\tau p)!} f^{(\tau p-1)}(0) \quad (119.2)$$

با توجه به رابطه (۱۱۸.۲)، $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+ax}} e^{-\frac{\sqrt{1+ax}}{\tau}}$ ، B_p اعداد برنولی^{۲۰}، $f^{(\tau p-1)}$ مشتق مرتبه $(\tau p - 1)$ است. در حدود $p = 1$ فرم کلی از ترم Z_1 به صورت

$$\begin{aligned} Z_1(\tau, \eta) &= \int_0^{\infty} f(x) dx \\ &= b\eta^2 e^{-\frac{1}{\tau}} (15\tau^6 + 15\tau^5 + 6\tau^4 + \tau^3) \end{aligned} \quad (120.2)$$

است. برای $b = 6e^{-\frac{1}{\tau}}$ ، $b = \frac{3e^{-\frac{1}{\tau}}}{\lambda}$ زمانی که به ترتیب $a = 2$ و $a = 4$ باشد. سرانجام فرم کلی از تابع پارش نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در یک و دو بعد برای هردو حالت از q به صورت زیر است

$$Z_q(\tau, \eta) = \frac{\tau^2}{\tau} + \zeta_H\left(0, \frac{1}{a}\right) \pm \eta^2 b (15\tau^6 + 15\tau^5 + 6\tau^4 + \tau^3) \quad (121.2)$$

که علامت $(-)$ و $(+)$ به ترتیب برای حالت q حقیقی و موهومی است. از طریق رابطه (۱۲۱.۲) تمام خواص گرمایی به طور مثال انرژی آزاد، آنتروپی، انرژی کل و گرمای ویژه را محاسبه

¹⁷Hurwitz zeta function

¹⁸Euler function

¹⁹Euler–MacLaurin formula

²⁰Bernoulli numbers

می‌کنیم. [۷۹]

$$\begin{aligned}
 F &= -\tau \ln(Z) \\
 U &= \tau^2 \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau} \\
 \frac{S}{\kappa\beta} &= \ln(Z) + \tau \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau} \\
 \frac{C}{\kappa\beta} &= 2\tau \ln(Z) + \tau^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \tau^2}
 \end{aligned}
 \quad (122.2)$$

در بخش بعدی به بررسی نوسانگر دیراک در حضور میدان مغناطیسی می‌پردازیم.

۷.۲ نوسانگر دیراک در حضور میدان مغناطیسی

در سال ۱۹۸۹ نوسانگر مکانیک کوانتومی نسبیتی توسط موشینسکی^{۲۱} و سزپانیک^{۲۲} معرفی شد [۶۹]. نوسانگر دیراک در حد غیرنسبیتی به صورت نوسانگر هارمونیک با یک ترم جفت شده اسپین - مدار رفتار می‌کند. نوسانگر دیراک در کوانتوم اپتیک^{۲۳} [۸۰-۸۲]، فیزیک هسته‌ای^{۲۴} [۸۲-۸۵]، جبرناجایی^{۲۵} [۸۶-۸۹] مورد بررسی قرار گرفته است. این ساختار جبری با تغییر شکل به صورت فشرده مورد بررسی قرار گرفته است [۹۰-۹۴]. اصلی‌ترین مسأله در این ساختار جبری از نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته به دست آوردن این طیف هامیلتونی بر حسب عملگرهای تکانه و مکان است. همانطور که قبلاً اشاره کردیم صورت‌های متفاوتی از نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته مورد توجه است [۹۵]. در این قسمت هامیلتونی تغییر شکل یافته از نوسانگر دیراک را در حضور میدان مغناطیسی خارجی مورد بررسی قرار می‌دهیم. سپس ویژه حالات و انرژی این نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته را در ۲ بعد بررسی می‌کنیم.

هامیلتونی نوسانگر دیراک در حضور میدان مغناطیسی در ۱+۲ بعد به صورت زیر معرفی می‌شود [۹۶]

$$H = c\alpha \cdot (p - im\omega\beta r) + \beta mc^2 \quad (123.2)$$

که c سرعت نور، m جرم الکترون، p تکانه دو بعدی، r بردار مکان ذره، ω فرکانس نوسانگر است.

²¹Moshinsky

²²Szczepaniak

²³Quantum optics

²⁴Nuclear physics

²⁵Noncommutative geometry

همچنین α, β ماتریس دیراک معمول در دوبعد که توسط ماتریس پاولی معرفی می‌شوند.

$$\alpha_x = \sigma_x \quad (124.2)$$

$$\alpha_y = \sigma_y$$

$$\beta = \sigma_z$$

سپس در حضور میدان مغناطیسی خارجی این هامیلتونی سیستم توسط تبدیل زیر به سادگی بازنویسی می‌شود

$$p_i \rightarrow \pi_i = p_i - \frac{e}{c} A_i \quad (125.2)$$

A_i مولفه‌های پتانسیل برداری است. پتانسیل برداری را در حضور میدان مغناطیسی در راستای z در نظر می‌گیریم.

$$\vec{B} = B e_z \quad (126.2)$$

$$\vec{A} = \left(-\frac{B}{2}y, \frac{B}{2}x, 0 \right)$$

روابط (126.2) را در هامیلتونی (123.2) قرار می‌دهیم سپس نمایش ماتریسی هامیلتونی به صورت زیر می‌شود

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 & c(p_x - ip_y) + im\tilde{\omega}c(x - iy) \\ c(p_x + ip_y) - im\tilde{\omega}c(x + iy) & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (127.2)$$

که $\tilde{\omega} = \omega - \frac{\omega_c}{2}$ است. اینجا $\omega_c = \frac{|e|B}{mc}$ ، فرکانس سیکلوترون^{۲۶} است. با معرفی عملگرهای کاهنده و افزایشده به صورت

$$a_D^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{m\tilde{\omega}\hbar}} (p_x - ip_y) + \frac{i}{2} \sqrt{\frac{m\tilde{\omega}}{\hbar}} (x - iy) \quad (128.2)$$

$$a_D = \frac{1}{2\sqrt{m\tilde{\omega}\hbar}} (p_x + ip_y) - \frac{i}{2} \sqrt{\frac{m\tilde{\omega}}{\hbar}} (x + iy)$$

این عملگرها روابط جابه‌جایی زیر را برآورد می‌کند

$$[a_D, a_D^\dagger] = 1 \quad (129.2)$$

$$[a_D, a_D] = 0$$

$$[a_D^\dagger, a_D^\dagger] = 0$$

سپس هامیلتونی در نمایش عملگرهای افزایشده و کاهنده به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$H = \begin{pmatrix} mc^2 & 2c\sqrt{m\tilde{\omega}\hbar} a_D^\dagger \\ 2c\sqrt{m\tilde{\omega}\hbar} a_D & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (130.2)$$

در قسمت بعد به بررسی نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در فضای جابجایی می‌پردازیم.

²⁶The cyclotron frequency

۱.۷.۲ نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در فضای جابجایی

برای به دست آوردن راه حل های دقیق از نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در حضور میدان مغناطیسی خارجی، به صورت زیر عمل می کنیم. ابتدا عملگرهای دیراک a_D ، $a_D^\dagger$ را در ترم هایی از عملگرهای کاهنده و افزایشنده معمول a_x ، a_y ، $a_x^\dagger$ ، $a_y^\dagger$ توسط روابط (۱۲۸.۲) معرفی می شوند

$$\begin{aligned} a_D &= \frac{a_y - i a_x}{\sqrt{2}} \\ a_D^\dagger &= \frac{a_y^\dagger - i a_x^\dagger}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (۱۳۱.۲)$$

که مولفه های x ، y از عملگرهای نوسانگر هارمونیک یعنی a_x ، $a_x^\dagger$ ، a_y ، $a_y^\dagger$ به صورت زیر معرفی می شوند

$$\begin{aligned} a_x &= \sqrt{\frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar}} x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\tilde{\omega}}} \frac{d}{dx} \\ a_x^\dagger &= \sqrt{\frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar}} x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\tilde{\omega}}} \frac{d}{dx} \\ a_y &= \sqrt{\frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar}} y + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\tilde{\omega}}} \frac{d}{dy} \\ a_y^\dagger &= \sqrt{\frac{m\tilde{\omega}}{2\hbar}} y - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\tilde{\omega}}} \frac{d}{dy} \end{aligned} \quad (۱۳۲.۲)$$

نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته توسط برخی از نویسندگان مطالعه شده اند [۹۷]. ابتدا عملگر کاهنده تغییر شکل یافته را روی حالت خلا اثر می دهیم [۹۸]

$$a_q |^\circ\rangle_q = 0 \quad (۱۳۳.۲)$$

سپس اثر عملگرهای کاهنده و افزایشنده روی حالت پایه به صورت

$$\begin{aligned} a_q^\dagger |n\rangle &= \sqrt{[n+1]} |n+1\rangle \\ a_q |n\rangle &= \sqrt{[n]} |n-1\rangle \end{aligned} \quad (۱۳۴.۲)$$

است. که با معرفی پارامتر تعداد به صورت زیر $[n]$

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (۱۳۵.۲)$$

که q پارامتر تغییر شکل یافته است [۹۰-۹۲]. بنابراین

$$\begin{aligned} a_q a_q^\dagger |n\rangle &= [n+1] |n\rangle \\ a_q^\dagger a_q |n\rangle &= [n] |n\rangle \end{aligned} \quad (۱۳۶.۲)$$

روابط (۱۳۶.۲)، رابطه جابه جایی زیر را برآورد می کند

$$[a_q, a_q^\dagger]_q = a_q a_q^\dagger - q a_q^\dagger a_q = 1 \quad (۱۳۷.۲)$$

نمایش مختصاتی از عملگرهای کاهنده و افزاینده به صورت زیر معرفی می‌شوند [۹۷]

$$\begin{aligned} a_q &= \frac{e^{-2i\alpha x} - e^{i\alpha \frac{d}{dx}} e^{-i\alpha x}}{-i\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}} \\ a_q^\dagger &= \frac{e^{2i\alpha x} - e^{i\alpha x} e^{i\alpha \frac{d}{dx}}}{i\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}} \end{aligned} \quad (138.2)$$

نمایش (۱۳۸.۲) رابطه جابه‌جایی (۱۳۷.۲) را برآورد می‌کند. همچنین در حد $[q \rightarrow 1, (\alpha \rightarrow 0)]$ عملگرهای کاهنده و افزاینده (۱۳۸.۲) به عملگرهای کاهنده و افزاینده معمول از نوسانگرهارمونیک کاهش می‌یابد. با استفاده از روابط (۱۳۲.۲)، (۱۳۸.۲) نمایش مختصاتی برای عملگرهای دیراک کاهنده و افزاینده در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{aligned} a_{D_q} &= \frac{1}{-i\sqrt{2}\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}} \begin{bmatrix} e^{-2i\alpha y} - e^{i\alpha \frac{d}{dy}} e^{-i\alpha y} \\ -ie^{-2i\alpha x} + ie^{i\alpha \frac{d}{dx}} e^{-i\alpha x} \end{bmatrix} \\ a_{D_q}^\dagger &= \frac{1}{i\sqrt{2}\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}} \begin{bmatrix} e^{2i\alpha y} - e^{i\alpha y} e^{i\alpha \frac{d}{dy}} \\ +ie^{2i\alpha x} - ie^{i\alpha x} e^{i\alpha \frac{d}{dx}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (139.2)$$

سپس هامیلتونی تغییر شکل یافته (۱۳۰.۲) به سادگی به صورت زیر بیان می‌شود

$$H_q = \begin{pmatrix} mc^2 & 2c\sqrt{m\tilde{\omega}}\hbar a_{D_q}^\dagger \\ 2c\sqrt{m\tilde{\omega}}\hbar a_{D_q} & -mc^2 \end{pmatrix} \quad (140.2)$$

حال معادله دیراک مستقل از زمان با هامیلتونی تغییر شکل یافته رابطه (۱۴۰.۲) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$H_q \psi_q = E_q \psi_q \quad (141.2)$$

که $\psi_q = \begin{pmatrix} \psi_{1q} \\ \psi_{2q} \end{pmatrix}$ ، معادله (۱۴۱.۲) به دو معادله زیر بازنویسی می‌شوند

$$mc^2 \psi_{1q} + 2c\sqrt{m\tilde{\omega}}\hbar a_{D_q}^\dagger \psi_{2q} = E_q \psi_{1q} \quad (142.2)$$

$$2c\sqrt{m\tilde{\omega}}\hbar a_{D_q} \psi_{1q} - mc^2 \psi_{2q} = E_q \psi_{2q}$$

سرانجام از معادلات (۱۴۲.۲) داریم

$$mc^2 \psi_{1q} + \frac{4mc^2\tilde{\omega}\hbar}{E_q + mc^2} a_{D_q}^\dagger a_{D_q} \psi_{1q} = E_q \psi_{1q} \quad (143.2)$$

با استفاده از رابطه (۱۳۷.۲) و در نظر گرفتن بسط ψ_{1q} در ترم‌هایی از $|n\rangle$ رابطه (۱۴۳.۲) و همچنین طیف انرژی به ترتیب به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left(mc^2 + \frac{4c^2 m\tilde{\omega}\hbar}{E_q + mc^2} [n]_q - E_q \right) |n\rangle = 0 \quad (144.2)$$

$$E_q = \pm mc^2 \sqrt{1 + \frac{4\tilde{\omega}\hbar}{mc^2} [n]_q}$$

با جایگزینی $[n]_q$ از رابطه (۱۳۵.۲) در داخل رابطه (۱۴۴.۲) و همچنین در حد $q \rightarrow 1$ رابطه طیف انرژی به رابطه معمول تبدیل می‌شود که به ترتیب به صورت زیر است [۹۶، ۹۷]

$$E_q = \pm m c^2 \sqrt{1 + \frac{4 \tilde{\omega} \hbar}{m c^2} \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right)} \quad (145.2)$$

$$E = \lim_{q \rightarrow 1} E_q = \pm m c^2 \sqrt{1 + \frac{4 \tilde{\omega} \hbar}{m c^2} n}$$

این رابطه انرژی (۱۴۵.۲) در حالت معمول متناسب $\sqrt{n}$ است و معادله (۱۴۵.۲) در حالت تغییر شکل یافته متناسب $\sqrt{\frac{1-q^n}{1-q}}$ است.

سپس در مرحله بعد پایین‌ترین سطوح انرژی نوسانگر تغییر شکل یافته یعنی $|\circ\rangle_q$ با استفاده از شرایط زیر محاسبه می‌کنیم

$$a_{Dq} |\circ\rangle_q = 0 \quad (146.2)$$

با استفاده از عبارت (۱۳۸.۲) برای a_{Dq} ، $\psi_{\circ q}$ داریم

$$|\circ\rangle_q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\left(-\left(\frac{x^2+y^2}{2} \right) + \frac{i}{2} \alpha (x+y) \right)} \quad (147.2)$$

حالت کلی $|n\rangle_q$ توسط به کارگیری عملگر افزایش دیراک و $|\circ\rangle_q$ به صورت زیر معرفی می‌شود

$$|n\rangle_q = M_n \sum_{k=0}^n \left(\frac{n!}{k! (n-k)!} \right) \sum_{l=0}^n \left(\frac{(-1)^l [k]! i^k}{[l]! [k-l]!} \right) e^{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{i}{2} \alpha x \right)} \quad (148.2)$$

$$e^{[(k-l) \frac{i}{2} \alpha x - l \frac{\alpha^2}{2}]} \times e^{\left(-\frac{y^2}{2} + \frac{i}{2} \alpha y \right)} \sum_{l'=0}^{n-k} \left(\frac{(-1)^{l'} [n-k]!}{[l']! [n-k-l']!} \right) e^{[(n-k-l') \frac{i}{2} \alpha y - l' \frac{\alpha^2}{2}]}$$

که $M_n = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{[n]!} i^n 2^{\frac{n}{2}} \left(1 - e^{(-\frac{\alpha^2}{2})} \right)^{\frac{n}{2}}}$ است.

همانطور که مشاهده می‌کنید نمایش مختصاتی نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته را با استفاده از عملگر افزایش دیراک و کاهنده محاسبه می‌کنیم و در حد $q \rightarrow 1$ به نمایش مختصات معمول تبدیل می‌شوند و در نهایت طیف انرژی و پایین‌ترین سطوح انرژی را به دست آوردیم. حال نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته را در فضای ناجابجایی^{۲۷} مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۲.۷.۲ نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در حضور میدان مغناطیسی در فضای ناجابجایی

افزایش قابل توجه‌ای در مطالعه معادلات موج نسبیتی در سال‌های اخیر وجود دارد [۱۰]– [۶۹، ۷۳]. در این قسمت به طور مختصر، فضای ناجابجایی را معرفی می‌کنیم و در ادامه به

²⁷Noncommutative Phase Space

بررسی نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در فضای ناجابجایی می‌پردازیم. اولین بار ایده‌ی ناجابجایی در فیزیک از طریق مکانیک کوانتومی مطرح شد که رابطه‌ی جابجایی هایزنبرگ به صورت

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i \delta_{ij}$$

است. فون نویمان^{۲۸} کسی بود که اولین بار به توصیف چنین فضایی پرداخت. در این روش جبر نویمان فرمولبندی شد و منجر به هندسه‌ی ناجابجایی گردید. جبر ناجابجایی، جبری است که در آن ضرب، خاصیت جابجایی ندارد. ریاضیدان فرانسوی آلن کن^{۲۹}، یکی از افرادی است که در جهت پیشروی هندسه‌ی ناجابجایی نقش داشته است. آلن کن در سال ۱۹۸۲ هندسه‌ی ناجابجایی را معرفی کرد. اسنایدر برای اولین بار ایده کوانتیده کردن فضا-زمان را در سال ۱۹۴۷ مطرح کرد و روابط ناجابجایی معینی را بین این مختصات‌ها بیان نمود. هندسه ناجابجایی، کاربردهای فراوانی در زمینه‌ی فیزیک کوانتومی داشته است. مطالعاتی که شواهد بسیاری از فضا-زمان ناجابجایی در آن ارائه شده است. در فضای ناجابجایی این روابط جابجایی بین عملگرهای مکان و تکانه باید در روابط زیر صدق کنند [۹۸].

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i \theta^{ij} \quad (۱۴۹.۲)$$

$$[\hat{p}^i, \hat{p}^j] = i \eta^{ij}$$

$$[\hat{x}^i, \hat{p}^j] = i \hbar \delta^{ij}$$

سپس عملگرهای مکان و تکانه در دوبعد در فضای ناجابجایی باید از تبدیلات زیر پیروی کنند [۹۹-۱۰۱].

$$x \rightarrow x - \frac{\theta}{\hbar} p_y \quad (۱۵۰.۲)$$

$$y \rightarrow y + \frac{\theta}{\hbar} p_x$$

$$p_x \rightarrow p_x + \frac{\theta}{\hbar} y$$

$$p_y \rightarrow p_y - \frac{\theta}{\hbar} x$$

که θ معرف پارامتر ناجابجایی است. در نتیجه با استفاده از تبدیلات رابطه (۱۵۰.۲) معادله هامیلتونی نوسانگر دیراک در فضای ناجابجایی به صورت زیر تبدیل می‌شود [۶۹].

$$H^{(NC)} = \alpha \cdot (P - i m \omega \tilde{\beta} r) + \beta m \quad (۱۵۱.۲)$$

نمایش ماتریسی متناظر این هامیلتونی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$H^{(NC)} = \quad (۱۵۲.۲)$$

$$\begin{pmatrix} m & (\tilde{p}_x^{(NC)} - i\tilde{p}_y^{(NC)}) + im\tilde{\omega}(\tilde{x}^{(NC)} - i\tilde{y}^{(NC)}) \\ (\tilde{p}_x^{(NC)} + i\tilde{p}_y^{(NC)}) - im\tilde{\omega}(\tilde{x}^{(NC)} + i\tilde{y}^{(NC)}) & -m \end{pmatrix}$$

²⁸ Von Neumann

²⁹ Alain Connes

که

$$\begin{aligned}\tilde{p}_{x,y}^{(NC)} &= \left(1 + \frac{m\tilde{\omega}\theta}{2}\right) P_{x,y} \\ \tilde{x}_{x,y}^{(NC)} &= \left(1 + \frac{\theta}{2m\tilde{\omega}}\right) x_{x,y}\end{aligned}\quad (153.2)$$

توسط استفاده از عملگرهای خلق و فنا در فضای ناجابجایی به صورت

$$\begin{aligned}\tilde{a}_D^\dagger &= \frac{1}{2\sqrt{m\tilde{\omega}}} \left(\tilde{p}_x^{(NC)} - i\tilde{p}_y^{(NC)} \right) + \frac{i}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}} \left(\tilde{x}^{(NC)} - i\tilde{y}^{(NC)} \right) \\ \tilde{a}_D &= \frac{1}{2\sqrt{m\tilde{\omega}}} \left(\tilde{p}_x^{(NC)} + i\tilde{p}_y^{(NC)} \right) - \frac{i}{2}\sqrt{m\tilde{\omega}} \left(\tilde{x}^{(NC)} + i\tilde{y}^{(NC)} \right)\end{aligned}\quad (154.2)$$

در نهایت نمایش ماتریسی رابطه (۱۵۲.۲) در فضای ناجابجایی با استفاده از تعریف عملگرهای خلق و فنا توسط رابطه (۱۵۴.۲) به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$H^{(NC)} = \begin{pmatrix} m & 2\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{a}_D^\dagger \\ 2\sqrt{m\tilde{\omega}}\tilde{a}_D & -m \end{pmatrix}\quad (155.2)$$

در حالت حدی زمانی که پارامتر تغییر شکل یافته $q \rightarrow 1$ ، رابطه انرژی نوسانگر دیراک به صورت زیر تبدیل می‌شود [۹۸، ۷۴]

$$E^{(NC)} = \pm m \sqrt{1 + \frac{4\tilde{\omega}}{m}\tilde{n}}\quad (156.2)$$

در حالت خاص زمانی که $\theta = 0$ شرایط زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned}\tilde{a}_D^\dagger &\rightarrow a_D^\dagger \\ \tilde{a}_D &\rightarrow a_D \\ \tilde{n} &\rightarrow n\end{aligned}\quad (157.2)$$

در نهایت در حالت حدی زمانی که پارامتر ناجابجایی به سمت صفر میل کند و $\hbar = c = 1$ باشند تمام نتایج قسمت قبل در فضای جابجایی به دست می‌آیند، همانطور که در رابطه (۱۴۵.۲) مشاهده می‌شود.

۸.۲ بررسی نوسانگر دیراک در حضور طول کمینه

معادله دیراک، معادله‌ای در مکانیک کوانتومی و تعمیم یافته معادله شرودینگر برای محاسبه تابع موج ذرات است با این تفاوت که این معادله نظریه نسبیت خاص را نیز در نظر می‌گیرد. این معادله توسط فیزیکدان بریتانیایی پل دیراک معرفی شد. معادله دیراک، ذرات با اسپین

۵۰ مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیرنسبیتی در فرمالیسم تغییرشکل یافته

نیمه صحیح یعنی فرمیون‌ها را توجیه می‌کند. همانطور که در قسمت‌های قبل معادله ویژه مقدار انرژی نوسانگر دیراک تغییرشکل یافته را در حالت حدی به صورت زیر [۱۰۲]

$$E = \lim_{q \rightarrow 1} E_q = \pm m_0 \sqrt{1 + \frac{4}{m_0} \tilde{\omega} n} \quad (158.2)$$

به دست آمد، که در ادامه به بررسی نوسانگر دیراک تغییرشکل یافته در حضور طول کمینه می‌پردازیم. ابتدا به طور مختصر، فرمالیسم طول کمینه را معرفی می‌کنیم و با استفاده از این فرمالیسم به بررسی خواص ترمودینامیکی نوسانگر دیراک تغییرشکل یافته می‌پردازیم. این جبرهای زنجبرگ در حضور طول کمینه به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۰۳]

$$[x, p] = i \hbar g(p) \quad (159.2)$$

رابطه (۱۵۹.۲) را حول نقطه $p = 0$ بسط تیلور می‌دهیم

$$g(p) = g(p)|_{p=0} + p g'(p)|_{p=0} + \frac{p^2}{2} g''(p)|_{p=0} \quad (160.2)$$

که جمله اول را مساوی یک، جمله دوم را مساوی صفر و جمله سوم را یک ضریب در p^2 در نظر می‌گیریم و این ضریب را δ می‌نامیم که پارامتر طول کمینه است. رابطه (۱۶۰.۲) به شکل زیر ساده می‌شود [۱۰۴، ۱۰۵]

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_i] = i \delta_{ij} (1 + \delta p^2) \quad (161.2)$$

که $\hbar = 1, \delta > 0$ است. حال نمایش عملگرهای مکان و تکانه باید رابطه جابجایی (۱۶۱.۲) را برآورد کند که این عملگرها را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\hat{P}_i = (1 + \delta p^2) p_i \quad (162.2)$$

$$\hat{x}_i = x_i$$

سپس در حضور طول کمینه نمایش ماتریسی هامیلتونی نوسانگر دیراک تغییرشکل یافته به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$\begin{pmatrix} m_0 & 2\sqrt{m_0} \tilde{\omega} \tilde{a}^\dagger \\ 2\sqrt{m_0} \tilde{\omega} \tilde{a} & -m_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{1-q} \\ \psi_{2-q} \end{pmatrix} = \varepsilon_q^{(ml)} \begin{pmatrix} \psi_{1-q} \\ \psi_{2-q} \end{pmatrix} \quad (163.2)$$

که عملگر خلق و فنا در فرمالیسم طول کمینه به صورت زیر است

$$\tilde{a}_D^\dagger = \frac{1}{2\sqrt{m_0} \tilde{\omega}} (\tilde{p}_x^{(ml)} - i \tilde{p}_y^{(ml)}) + \frac{i}{2} \sqrt{m_0} \tilde{\omega} (\tilde{x}^{(ml)} - i \tilde{y}^{(ml)}) \quad (164.2)$$

$$\tilde{a}_D = \frac{1}{2\sqrt{m_0} \tilde{\omega}} (\tilde{p}_x^{(ml)} + i \tilde{p}_y^{(ml)}) - \frac{i}{2} \sqrt{m_0} \tilde{\omega} (\tilde{x}^{(ml)} + i \tilde{y}^{(ml)})$$

به روش مشابه همانطور که در قسمت قبل بیان شد معادله ویژه مقداری انرژی نوسانگر دیراک تغییر شکل یافته در حضور طول کمینه در حالت حدی به صورت زیر به دست می آید [۷۲، ۱۰۳]

$$\varepsilon_q^{(ml)} = \pm m_o \sqrt{1 + \frac{4}{m_o} \tilde{\omega} [\tilde{n}]} \quad (165.2)$$

در حالت خاص که پارامتر طول کمینه را صفر در نظر بگیریم شرایط زیر به دست می آید.

$$\tilde{a}_D^\dagger \rightarrow a_D^\dagger \quad (166.2)$$

$$\tilde{a}_D \rightarrow a_D$$

$$\tilde{n} \rightarrow n$$

۹.۲ بررسی خواص ترمودینامیکی نوسانگر دیراک در حضور طول کمینه

تاکنون به مکانیک کوانتومی تعمیم یافته در محدوده سیستم های تک ذره ای پرداخته ایم اما در اینجا سیستمی ذره ای، متشکل از نوسانگرهای هماهنگ دو بعدی بدون برهم کنش در حضور طول کمینه را در نظر می گیریم. با توجه به اینکه سیستم آماری در اینجا یک آنسامبل کانونی در نظر گرفته شده است پس تبادل ذره ای با محیط نخواهیم داشت و تنها انرژی با محیط مبادله می شود از طرفی ذرات هیچ برهم کنشی با یکدیگر ندارند و سیستم یک سیستم فرمیونی است. از طرفی می دانیم برای بررسی خواص آماری یک سیستم اولین مرحله محاسبه تابع پارش^{۳۰} سیستم است.

تابع پارش بر حسب دما است و گام اولیه در مطالعه رفتار ترمودینامیکی سیستم است زیرا با داشتن تابع پارش، دیگر خواص ترمودینامیکی قابل محاسبه است. تابع پارش چنین سیستمی به صورت زیر به دست می آید

$$Z = \text{tr} e^{-\beta \varepsilon_n} \quad (167.2)$$

که $\beta = \frac{1}{K_B T}$ و K_B ثابت بولتزمن است. سپس انرژی را به ترتیب برای هر دو حالت q حقیقی و موهومی تغییر شکل یافته خیلی کوچک بررسی می کنیم و همچنین از ترم های متناسب η^4 صرف نظر می کنیم [۷۳].

$$\varepsilon_n = \sqrt{n} \left(1 \pm \frac{n^2}{12} \eta^2 \right) \quad (168.2)$$

³⁰The partition function

در ادامه با داشتن انرژی می توان تابع پارش چنین سیستمی را برای حالتی با انرژی مثبت به دست آورد

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad (169.2)$$

$$\simeq \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \sqrt{n}} \left(1 - \frac{n^{\frac{5}{4}}}{12} \beta \eta^2\right)$$

که تابع پارش نوسانگر دیراک برای سیستم N بعدی بدون برهم کنش با استفاده از رابطه $\bar{Z} = (Z(\eta, \delta))^N$ داده می شود. با محاسبه تابع پارش می توان انرژی داخلی ^{۳۱} و انرژی آزاد هلمهولتز ^{۳۲} سیستم را محاسبه کنیم. همانطور که می دانید از دیدگاه مکانیک آماری، انرژی داخلی سیستم برابر میانگین انرژی اجزای سیستم است. اگر سیستم ایزوله باشد انرژی درونی سیستم پایسته می ماند و طبق قانون اول ترمودینامیکی با اضافه کردن گرما یا وارد کردن یک نیروی خارجی از طرف محیط انرژی داخلی سیستم افزایش می یابد و تعریف دومی که ارائه می دهیم انرژی آزاد هلمهولتز است، که مقدار کار مفید قابل حصول از یک سیستم ترمودینامیکی ایزوله را در یک درجه حرارت ثابت اندازه گیری نشان می دهد. انرژی داخلی و انرژی آزاد هلمهولتز سیستم به ترتیب اینگونه تعریف می شوند [۱۰۶]

$$U = -\frac{\partial \ln \bar{Z}}{\partial \beta} \quad (170.2)$$

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln \bar{Z}$$

سپس از انرژی داخلی سیستم می توان ظرفیت گرمایی ^{۳۳} را محاسبه کرد. همانطور که می دانید ظرفیت گرمایی یک کمیت ترمودینامیکی قابل اندازه گیری از انرژی گرمایی که وابسته به دما است.

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} \quad (171.2)$$

حال از انرژی آزاد هلمهولتز سیستم می توان آنتروپی ^{۳۴} را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (172.2)$$

که آنتروپی، کمیتی ترمودینامیکی برای تعیین درجه ی بی نظمی در هر سیستم است. در نهایت اثرات از تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی را بر حسب β برای هر دو حالت q حقیقی و موهومی برای مقادیر متفاوت از پارامتر تغییر شکل یافته η در شکل ۴.۲ نمایش می دهیم. همانطور که مشاهده می کنید با افزایش پارامتر تغییر شکل یافته η در حالت q حقیقی تابع پارش کاهش می یابد ولی در حالت q موهومی تابع پارش افزایش می یابد، و همینطور ظرفیت

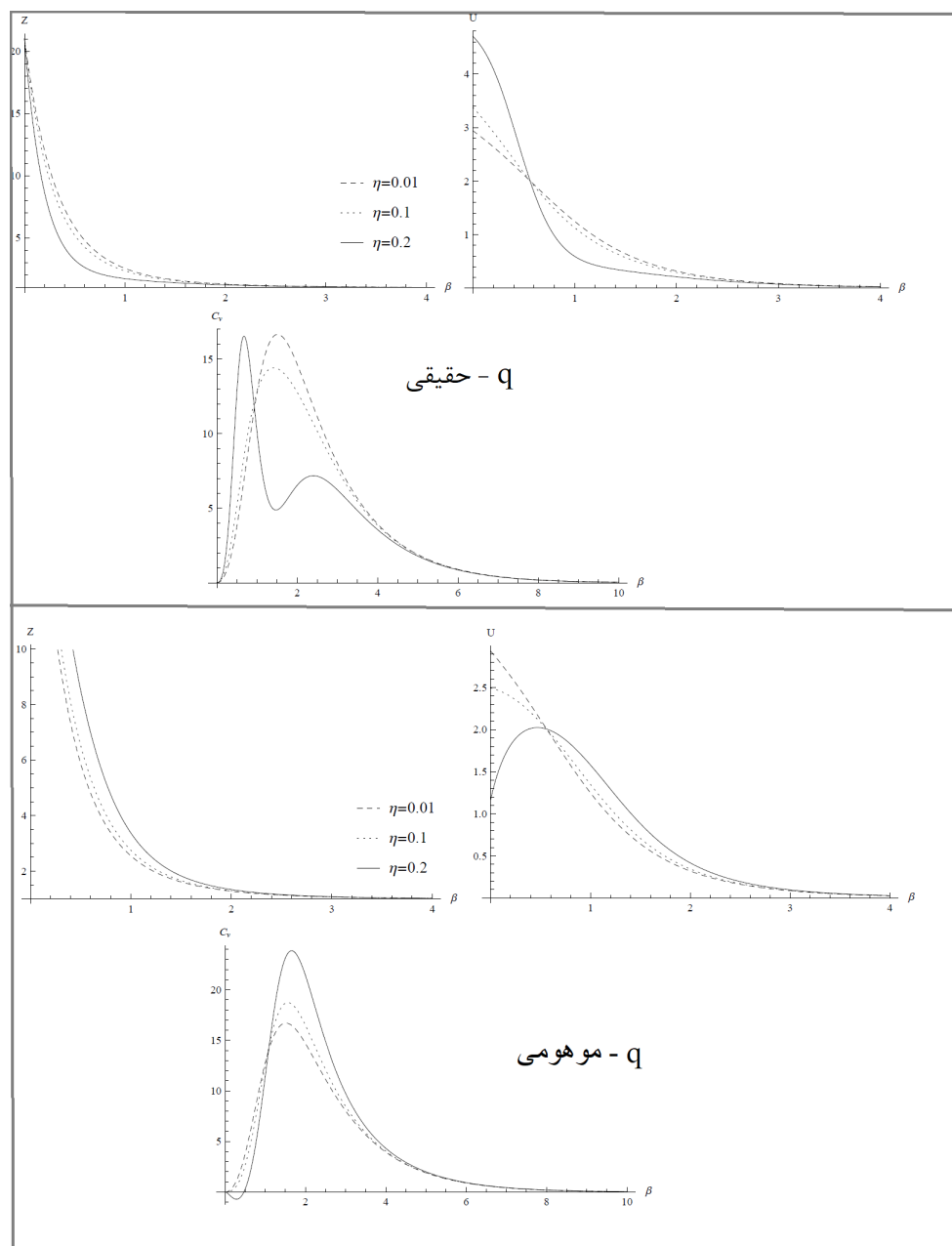
³¹The mean energy

³²The Helmholtz free energy

³³The specific heat

³⁴The entropy

گرمایی با افزایش β برای حالت q حقیقی در بازه کوچک ($0 < \beta < 1/5$) به طور یکنواخت افزایش می‌یابد و به آرامی در بازه ($\beta > 1/5$) روند کاهشی پیدا می‌کند.



شکل ۴.۲: خواص ترمودینامیکی بر حسب β برای هر دو حالت q حقیقی و موهومی.

در اینجا معادله دیراک تغییر شکل یافته را در حضور طول کمینه مورد بررسی قرار دادیم. حال به بررسی معادله دی کی پی^{۳۵} در حضور فرمالیسم تغییر شکل یافته می‌پردازیم.

³⁵The Duffin-Kemmer-Petiau equation

۱۰.۲ معادله دی کی پی در حضور فرمالیسم تغییر شکل یافته

سیستم جالب دیگری را مورد بررسی قرار می دهیم. کارهای پیشگام دافین، کمر و پتیو مشابه نظریه دیراک به یک فرمالیسم غنی تبدیل شد که قادر به توصیف برهم کنش های بوزون های اسپین صفر و یک است. معادله ی موج نسبیتی مرتبه اول دی کی پی بوزون های اسپین صفر و یک را توصیف می کند. از این رو برهم کنش های نسبیتی هادرون – هسته توسط این معادله تجزیه و تحلیل می شود. از لحاظ تاریخی این معادله به دهه ی ۱۹۳۰ برمی گردد. برای اولین بار پی^{۳۶} که یکی از دانشجویان دوبروی بود جبر 16×16 معادله دی کی پی را با ضرب مستقیم ماتریس های دیراک بسط داد و نشان داد که این ماتریس ها می توانند به سه نمایش: یک، پنج و ده مولفه ای تجزیه شوند [۱۰۷-۱۰۹].

معادله دی کی پی در فضا – زمان مینکوفسکی در غیاب پتانسیل برای بوزون هایی با اسپین صفر و یک عبارت است از [۱۱۰-۱۱۲]

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad (173.2)$$

که β^μ در روابط جبری زیر صدق می کند

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu \quad (174.2)$$

به طوری که $g^{\mu\nu}$ تانسور متریک فضا می باشد و به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= \text{diag}(1, -1, -1, -1) \\ (g^{\mu\nu})^2 &= 1 \end{aligned} \quad (175.2)$$

با در نظر گرفتن روابط زیر

$$\beta_\circ \beta_k \beta_\circ = 0, \quad k = 1, 2, 3 \quad (176.2)$$

که β^μ ، ماتریس های دی کی پی هستند، که برای ذراتی با اسپین یک این ماتریس ها عبارتند از [۱۱۳]

$$\beta^\circ = \begin{pmatrix} \circ & \bar{\circ} & \bar{\circ} & \bar{\circ} \\ \bar{\circ}^T & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \bar{\circ}^T & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\circ}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \circ & \bar{\circ} & e_i & \bar{\circ} \\ \bar{\circ}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -is_i \\ -e_i^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \bar{\circ}^T & -is_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (177.2)$$

که S ، ماتریس های 3×3 هستند، $(S_i)_{jk} = -i \varepsilon_{ijk}$ و ε_{ijk} مقادیر $1, -1, 0$ به ترتیب برای شاخص های زوج، فرد و تکرار را به خود می گیرند. سپس e_i ماتریس های 1×3 هستند و به

صورت زیر تعریف می شوند

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad (178.2)$$

$$e_2 = (0, 1, 0)$$

$$e_3 = (0, 0, 1)$$

به طوری که I و 0 به ترتیب ماتریس های واحد و صفر 3×3 تعریف می شود و 0 ماتریس صفر 1×3 معرفی می شود.

معادله ی دی کی پی در حضور برهم کنش به صورت زیر نوشته می شود [۱۱۴]

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m - V) \Psi = 0 \quad (179.2)$$

که V در حالت کلی به فرم $V = \beta^\mu A^\mu + i [P, \beta^\mu] A^\mu$ است که ترم اول مینیمم بردار و ترم دوم غیرمینیمم برداری تعریف می شود. بنابراین در اینجا ما فقط ترم دوم را در نظر می گیریم. با روش حدسی زیر

$$\Psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) e^{-iEt} \quad (180.2)$$

و $\phi(\vec{r})$ به صورت

$$\phi(\vec{r}) = (\varphi^1(\vec{r}), \varphi^2(\vec{r}), \varphi^3(\vec{r}), \varphi^4(\vec{r}), \varphi^5(\vec{r})) \quad (181.2)$$

است. سپس با قرار دادن این روابط معرفی شده در معادله دی کی پی به صورت زیر تبدیل می شود

$$(\beta^0 E + i \beta^k \partial_k - m + i [P, \beta^\mu] A_\mu) \phi(\vec{r}) = 0 \quad (182.2)$$

عملگر تصویر برای بخش اسپین صفر به صورت زیر است [۱۱۵]

$$P = \frac{1}{3} (\beta^\mu \beta_\mu - 1) = \text{diag}(1, 0, 0, 0, 0) \quad (183.2)$$

سپس معادله (۱۸۲.۲) با قراردادن ماتریس های پنج مولفه ای تبدیل به رابطه زیر می شود

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dt^2} + A_0 - A_1 + \frac{d}{dx} A_1 - m^2 \right] \varphi_1 = 0 \quad (184.2)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{m} (E + i A_0) \varphi_1$$

$$\varphi_3 = \frac{i}{m} \left(\frac{d}{dx} + A_1 \right) \varphi_1$$

$$E^2 = -\frac{d^2}{dt^2}$$

که A_0, A_1 را پتانسیل موریس تغییر شکل یافته در نظر می گیریم [۱۱۶، ۱۱۷].

$$A_0 = A_1 = V_0 (e^{-2\alpha x} - 2q e^{-\alpha x}) \quad (185.2)$$

که V_0 متناظر با عمق چاه پتانسیل 37 و α از مرتبه پتانسیل 38 است. معادله دی کی پی با قرار دادن پتانسیل های اسکالر و برداری به صورت زیر معرفی می شود

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + E^2 - m^2 + (A_0)^2 - (A_1)^2 + \frac{dA_1}{dx} \right] \varphi = 0 \quad (186.2)$$

که A_0, A_1, E, m به ترتیب پتانسیل های برداری و اسکالر، انرژی و در نهایت جرم معرفی می شوند. در اینجا پتانسیل های اسکالر و برداری را $A_0 = A_1$ در نظر می گیریم. بنابراین معادله (186.2) به معادله زیر تبدیل می شود.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + E^2 - m^2 - 2\alpha V_0 e^{-2\alpha x} + 2q\alpha V_0 e^{-\alpha x} \right] \varphi = 0 \quad (187.2)$$

با معرفی تغییر متغیر $y = \rho e^{-\alpha x}$ این رابطه (187.2) به صورت زیر بازنویسی می شود

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{\varepsilon_n - \frac{y^2}{4} + \frac{q\rho y}{4}}{y^2} \right] \varphi = 0 \quad (188.2)$$

که

$$\begin{aligned} \varepsilon_n &= \frac{E^2 - m^2}{\alpha^2} \\ \rho^2 &= \frac{4 V_0}{\alpha} \end{aligned} \quad (189.2)$$

حال تابع موج رابطه (188.2) را محاسبه می کنیم

$$\varphi(y) = y^{\vartheta} e^{-\frac{y}{4}} L_n^{\vartheta}(y) \quad (190.2)$$

که $\vartheta = \sqrt{-\varepsilon_n}$ است. رابطه چندجمله ای لاگر 39 (190.2) را به رابطه تابع فوق هندسی 40 تبدیل می کنیم برای این منظور از رابطه بین این دو استفاده می کنیم [118, 112]

$$L_n^{\mu}(y) = \frac{\Gamma(\mu + n + 1)}{n! \Gamma(\mu + 1)} {}_1F_1(-n, \mu + 1, y) \quad (191.2)$$

با استفاده از رابطه (191.2) رابطه (190.2) به رابطه زیر تغییر می کند

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= N_n y^{\vartheta} e^{-\frac{y}{4}} {}_1F_1(-n, 2\vartheta + 1, y) \\ \vartheta &= \mu - n - \frac{1}{4} \\ \mu &= \frac{q\rho}{4} \end{aligned} \quad (192.2)$$

³⁷Depth of the potential

³⁸Range of the potential

³⁹Laguerre polynomials

⁴⁰Hypergeometric function

که ${}_1F_1(-n, \vartheta + 1, y)$ تابع فوق هندسی است و N_n ثابت نرمالایز^{۴۱} است. با استفاده از روابط (۱۸۹.۲) و (۱۹۲.۲) ویژه مقدار را تعیین می‌کنیم

$$E^2 - m^2 = -\alpha^2 \vartheta^2 = -\frac{64 V_0^2}{\vartheta^4} \left(\mu - n - \frac{1}{\vartheta} \right)^2 \quad (193.2)$$

سپس با استفاده از رابطه زیر [۱۱۲، ۱۱۹]

$$\int_0^\infty y^\alpha e^{-y} L_n^\alpha(y) L_m^\alpha(y) dy = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!} \delta_{nm} \quad (194.2)$$

ثابت بهنجارش به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$N_n = \sqrt{\frac{n!}{(n + \vartheta s)!}} \quad (195.2)$$

هدف از این قسمت بررسی این فرمالیسم برای عملگرهای بالابرنده و پایین‌برنده است.

۱.۱۰.۲ محاسبه عملگرهای افزاینده و کاهنده تغییر شکل یافته

عملگرهای افزاینده و کاهنده و را برای تابع موج با استفاده از روش تجزیه^{۴۲} به دست می‌آوریم. عملگرهای افزاینده و کاهنده تغییر شکل یافته $\hat{J}_{q\pm}$ را با خواص زیر معرفی می‌کنیم

$$\hat{J}_{q\pm} \varphi_n^\mu(y) = j_{q\pm} \varphi_{n\pm 1}^{\mu\pm 1}(y) \quad (196.2)$$

ابتدا عملگرهای افزاینده و کاهنده زیر را معرفی می‌کنیم (با روش حدسی^{۴۳})

$$\hat{J}_{q\pm} = C_\pm(y) \frac{d}{dy} + D_\pm(y) \quad (197.2)$$

با استفاده از رابطه کمکی زیر

$$y \frac{d}{dy} L_n^\alpha(y) = n L_n^\alpha(y) - (n + \alpha) L_{n-1}^\alpha(y) \quad (198.2)$$

که از روابط بازگشتی میان توابع لژاندر وابسته به دست می‌آید. و با استفاده از روابط (۱۹۰.۲)، (۱۹۶.۲) و (۱۹۸.۲) داریم

$$\left[-y \frac{d}{dy} + (\vartheta + n) - \frac{y}{\vartheta} \right] \varphi_n^\mu(y) = \sqrt{n(\vartheta \mu - n - 1)} \varphi_{n-1}^{\mu-1}(y) \quad (199.2)$$

بنابراین عملگر کاهنده و ویژه مقدارش^{۴۴} به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\hat{J}_- = -y \frac{d}{dy} + (\vartheta + n) - \frac{y}{\vartheta} \quad (200.2)$$

$$j_- = \sqrt{n(\vartheta \mu - n - 1)}$$

⁴¹Normalized factor

⁴²Factorization method

⁴³Ansatz

⁴⁴Eigenvalue

به طور مشابه عملگر افزایشده و ویژه مقدارش به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$\begin{aligned}\hat{J}_+ &= y \frac{d}{dy} + (\vartheta + n + 1) - \frac{y}{2} \\ j_+ &= \sqrt{(n+1)(2\mu - n)}\end{aligned}\quad (201.2)$$

حال جبر مرتبط با عملگرهای $\hat{J}_{q^+}$, $\hat{J}_{q^-}$ را محاسبه می‌کنیم. با استفاده از روابط (۱۹۰.۲)، (۲۰۰.۲) و (۲۰۱.۲) رابطه جابجایی زیر را به دست می‌آوریم [۱۱۶]

$$[\hat{J}_{q^-}, \hat{J}_{q^+}] \varphi_n^\mu(y) = 2\mu \varphi_n^\mu(y) \quad (202.2)$$

سپس عملگر $\hat{J}_{q^0}$ به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۲۰]

$$\hat{J}_{q^0} \varphi_n^\mu(y) = \mu \varphi_n^\mu(y) \quad (203.2)$$

که $\hat{n} \varphi_n^\mu(y) = n \varphi_n^\mu(y)$ بنابراین عملگرهای $\hat{J}_{q^\pm}$, $\hat{J}_{q^0}$ روابطه جابه جایی زیر را برآورد می‌کنند [۱۱۶]

$$\begin{aligned}[\hat{J}_{q^-}, \hat{J}_{q^+}] &= 2\hat{J}_{q^0} \\ [\hat{J}_{q^0}, \hat{J}_{q^-}] &= -\hat{J}_{q^-} \\ [\hat{J}_{q^0}, \hat{J}_{q^+}] &= +\hat{J}_{q^+}\end{aligned}\quad (204.2)$$

عملگرهای افزایشده و کاهشده تغییر شکل یافته برطبق این عملگرهای افزایشده و کاهشده معمولی به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$\begin{aligned}[\hat{J}_-, \hat{J}_+] \varphi_n^\mu(y) &= (2\hat{J}_0 + (q^{-1} - q)(\hat{J}_0 + \hat{J}_- + \hat{J}_+)) \varphi_n^\mu(y) \\ [\hat{J}_0, \hat{J}_-] \varphi_n^\mu(y) &= -(\hat{J}_- + (q^{-1} - q)(\hat{J}_0 + \hat{J}_-)) \varphi_n^\mu(y) \\ [\hat{J}_0, \hat{J}_+] \varphi_n^\mu(y) &= (\hat{J}_+ + (q^{-1} - q)(\hat{J}_0 + \hat{J}_+)) \varphi_n^\mu(y)\end{aligned}\quad (205.2)$$

که $\hat{J}_0$, $\hat{J}_+$, $\hat{J}_-$ عملگرهای معمولی اند. اگر روابط (۲۰۵.۲) در حالت $q = 1$ به پتانسیل موریس معمولی در معادله دی‌کی پی تبدیل می‌شود [۱۱۶، ۱۲۰].

فصل ۳

بازنگری مکانیک آماری در سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی

۱.۳ مکانیک آماری در فرمالیسم تغییر شکل یافته

آمار متمایز^۱ شاخه‌ای از مکانیک آماری (فیزیک آماری) است، که اولین بار در سال (۲۰۰۳) توسط بک^۲ و کوهن^۳ معرفی شد [۱۲۱]. آمار متمایز به مطالعه سیستم‌های غیرتعادلی و غیرخطی می‌پردازد [۱۲۲-۱۲۶]. همانطور که در سیستم تعادلی، عامل بولتزمن^۴ نقش مهمی را برای محاسبه کمیت‌های ماکروسکوپیکی به طور مثال آنتروپی^۵، انرژی داخلی^۶ و انرژی آزاد هلمهولتز^۷ ایفا می‌کند. در سیستم ترمودینامیک غیرتعادلی، فاکتور β در عامل بولتزمن ممکن است در اطراف $\frac{1}{K_B T}$ نوسان^۸ کند و دیگر عامل بولتزمن به شکل معمول خود نیست بلکه تغییراتی می‌کند که با پارامتر تغییر شکل یافته نشان می‌دهیم در نهایت در حالت حدی به شکل اولیه خود تبدیل می‌شود.

حال عامل بولتزمن موثر به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۲۷]

$$B(E) = \int_0^\infty e^{-\beta' E} f(\beta', \beta) d\beta' \quad (1.3)$$

که $f(\beta', \beta)$ شدت احتمال^۹ است. صورت‌های متفاوتی برای انتخاب شدت احتمال وجود دارد و توجه داشته باشید که شدت احتمال باید از شروط زیر تبعیت کند [۱۲۱]

۱- شدت احتمال از شرط زیر تبعیت می‌کند

$$\int_0^\infty f(\beta', \beta) d\beta' = 1 \quad (2.3)$$

۲- متوسط β' باید $\beta = \frac{1}{K T}$ شود

$$\langle \beta' \rangle = \int_0^\infty \beta' f(\beta', \beta) d\beta' = \beta \quad (3.3)$$

۳- آمار جدید باید بهنجار^{۱۰} باشد، یعنی انتگرال $\int_0^\infty B(E) dE = 1$ باشد. انتخاب‌های متفاوتی از شدت احتمال $f(\beta', \beta)$ ، عامل بولتزمن موثر متفاوت $B(E)$ را نتیجه می‌دهد. ابتدا صورت‌های دیگر از شدت احتمال را معرفی می‌کنیم و در ادامه عامل بولتزمن موثر هرکدام از این شدت احتمال‌ها را محاسبه کرده و در نهایت به بررسی چند مثال با استفاده از این عامل بولتزمن موثر تعمیم‌یافته می‌پردازیم [۱۲۸].

¹ Superstatistics

² Beck

³ Cohen

⁴ Boltzmann factor

⁵ Entropy

⁶ Internal Energy

⁷ Helmholtz free energy

⁸ Fluctuate

⁹ Probability density

¹⁰ Normalizable

انواع تابع توزیع برای شدت احتمال عبارتند از:

۱- تابع توزیع یکنواخت: این تابع توزیع در سال ۲۰۰۳ توسط بک و کوهن معرفی شد [۱۲۹]. که شدت احتمال آن در فاصله $a \leq \beta \leq a+b$ به صورت

$$f_{(uniform)}(\beta) = \frac{1}{b} \quad (4.3)$$

است. عامل بولتزمن موثر برای این تابع توزیع توسط بسط رابطه مثلثاتی به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} B_{(uniform)}(E) &= \int_{\beta_0 - \frac{b}{4}}^{\beta_0 + \frac{b}{4}} \frac{e^{-\beta_0 E}}{b} d\beta \\ &= \frac{e^{-(\beta_0 - \frac{b}{4})E} - e^{-(\beta_0 + \frac{b}{4})E}}{bE}, \\ B_{(uniform)}(E) &= e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{24} b^2 E^2 + \frac{1}{1920} b^4 E^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (5.3)$$

واریانس از این توزیع $\sigma_{(uniform)}^2 = \frac{b^2}{12}$ است. به وضوح مشاهده می شود اگر $b \rightarrow 0$ به مکانیک آماری معمولی تبدیل می شود.

۲- تابع توزیع دوترازی: این تابع توزیع توسط ستین^{۱۱} و سالاس نیچ^{۱۲} در سال (۲۰۰۲) معرفی شد [۱۳۰]. که شدت احتمال آن در فاصله $a \leq \beta \leq a+b$ به صورت

$$f_{(2-level)}(\beta) = \frac{1}{4} \delta(a) + \frac{1}{4} \delta(a+c) \quad (6.3)$$

است. عامل بولتزمن موثر برای این تابع توزیع توسط بسط رابطه مثلثاتی به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned} B_{(2-level)}(E) &= \int_{\beta_0 - \frac{c}{4}}^{\beta_0 + \frac{c}{4}} \frac{e^{-\beta E}}{2} (\delta(a) + \delta(a+c)) d\beta \\ &= \frac{2 e^{-\beta_0 E} \text{Cosh}\left(\frac{cE}{4}\right)}{cE}, \\ B_{(2-level)}(E) &= e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{8} c^2 E^2 + \frac{1}{384} c^4 E^4 + \dots \right) \end{aligned} \quad (7.3)$$

واریانس از این توزیع $\sigma_{(2-level)}^2 = \frac{c^2}{4}$ می شود. حال اگر $c \rightarrow 0$ به مکانیک آماری معمول تبدیل می شود.

۳- تابع توزیع گاما: این تابع توزیع توسط سالیس^{۱۳} در سال (۱۹۹۸) معرفی شد [۱۳۱]، [۱۳۲]. که شدت احتمال آن به صورت

$$f_{(Gamma)}(\beta) = \frac{1}{b \Gamma(c_1)} \left(\frac{\beta}{d} \right)^{c_1-1} e^{-\frac{\beta}{d}} \quad (8.3)$$

¹¹F. Sattin

¹²L. Salasnich

¹³C. Tsallis

که $(d > 0, c_1 > 0)$ پارامترهای حقیقی‌اند. عامل بولتزمن موثر برای این تابع توزیع به صورت زیر به دست می‌آید.

$$B_{(Gamma)}(E) = \int_0^\infty \frac{e^{-\beta E}}{d\Gamma(c_1)} \left(\frac{\beta}{d}\right)^{c_1-1} e^{-\frac{\beta}{d}} d\beta = (1 + dE)^{-c_1} \quad (9.3)$$

یا صورت دیگر از عامل بولتزمن تعمیم‌یافته به صورت این رابطه

$$B_{(Gamma)}(E) = \left[(1 + \beta_0 (q_1 - 1) E)^{-\frac{1}{(q_1-1)}} \right]$$

است که اگر متغیرهای زیر را تعریف کنیم [۱۳۳].

$$\left(c_1 = \frac{1}{q_1 - 1}, d c_1 = \beta_0 \right)$$

عامل بولتزمن تعمیم‌یافته رابطه (۹.۳) به دست می‌آید. سپس رابطه (۹.۳) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$B_{(Gamma)}(E) = e^{-c_1 \text{Log}(1+dE)} \quad (10.3)$$

$$B_{(Gamma)}(E) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{q_1} (q_1 - 1) \beta_0^2 E^2 - \frac{1}{q_1^2} (q_1 - 1)^2 \beta_0^3 E^3 + \dots \right)$$

واریانس از این توزیع $\sigma_{(Gamma)}^2 = d^2 c_1$ می‌شود. اگر $q_1 \rightarrow 1$ به مکانیک آماری معمول تبدیل می‌شود.

۴- تابع توزیع دلتای دیراک تعمیم‌یافته: که شدت احتمال آن به صورت [۱۲۸]

$$f_{(modi-Dirac\delta)}(\beta', \beta) = \delta(\beta' - \beta) \quad (11.3)$$

است. حال آمار متمایز را با توزیع دلتا دیراک تعمیم‌یافته با واریانس غیرصفر در نظر می‌گیریم. این معادله (۱۱.۳) هر سه شرایط از این عامل بولتزمن موثر را برآورد می‌کند. این میانگین از β' با واریانس صفر، β است. معادله (۱۱.۳) را تعمیم می‌دهیم. سپس برای محاسبه عامل بولتزمن موثر برای این شدت احتمال به صورت زیر شروع می‌کنیم. ابتدا رابطه (۱۱.۳) را بسط می‌دهیم

$$f_{(modi-Dirac\delta)}(\beta', \beta) = a \delta(\beta' - \beta) + b \beta' \frac{\partial}{\partial \beta'} (\delta(\beta' - \beta)) + C \beta'^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta'^2} (\delta(\beta' - \beta)) \quad (12.3)$$

و خواص تابع دلتا دیراک را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\int_0^\infty \delta(\beta' - \beta) d\beta' = 1 \quad (13.3)$$

$$\int_0^\infty \delta(\beta' - \beta) F(\beta') d\beta' = F(\beta)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial}{\partial \beta'} \delta(\beta' - \beta) \right) F(\beta') d\beta' = -\frac{\partial}{\partial \beta} F(\beta)$$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta'^2} \delta(\beta' - \beta) \right) F(\beta') d\beta' = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} F(\beta)$$

با استفاده از روابط (۲.۳) و (۳.۳) داریم

$$\int_0^\infty \left[\begin{aligned} &a \delta(\beta' - \beta) + b \beta' \frac{\partial}{\partial \beta'} (\delta(\beta' - \beta)) \\ &+ C \beta'^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta'^2} (\delta(\beta' - \beta)) \end{aligned} \right] d\beta' = 1 \quad (14.3)$$

$$\int_0^\infty \left[\begin{aligned} &a \beta' \delta(\beta' - \beta) + b \beta'^2 \frac{\partial}{\partial \beta'} (\delta(\beta' - \beta)) \\ &+ C \beta'^3 \frac{\partial^2}{\partial \beta'^2} (\delta(\beta' - \beta)) \end{aligned} \right] d\beta' = \beta$$

از این دو رابطه (۱۴.۳)، روابط زیر به دست می‌آیند

$$a - b + 2C = 1 \quad (15.3)$$

$$a - 2b + 6C = 1$$

سپس رابطه واریانس^{۱۴} را برای ($q \geq 0$) به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} q \beta^2 &= \langle \beta^2 \rangle - \langle \beta \rangle^2 \\ &= (a - 3b + 12) \beta^2 - \beta^2, \\ (q + 1) &= (a - 3b + 12) \end{aligned} \quad (16.3)$$

با استفاده از روابط (۱۵.۳) می‌توان ضرایب رابطه (۱۲.۳) را به دست آوریم.

$$a = 1 + q \quad (17.3)$$

$$b = 2q$$

$$C = \frac{q}{4}$$

در نتیجه رابطه (۱۲.۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} f_{(modi-Dirac\ delta)}(\beta', \beta) &= (1 + q) \delta(\beta' - \beta) \\ &+ (2q) \beta' \frac{\partial}{\partial \beta'} (\delta(\beta' - \beta)) + \left(\frac{q}{4}\right) \beta'^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta'^2} (\delta(\beta' - \beta)) \end{aligned} \quad (18.3)$$

از تعریف عامل بولتزمن موثر $B(E)$ داریم:

$$\begin{aligned} B_{(modi-Dirac\ delta)}(E) &= \int_0^\infty e^{-\beta' E} f(\beta', \beta) d\beta' \\ &= \int_0^\infty e^{-\beta' E} (1 + q) \delta(\beta' - \beta) + \int_0^\infty e^{-\beta' E} (2q) \beta' \frac{\partial}{\partial \beta'} (\delta(\beta' - \beta)) \\ &+ \int_0^\infty e^{-\beta' E} \left(\frac{q}{4}\right) \beta'^2 \frac{\partial^2}{\partial \beta'^2} (\delta(\beta' - \beta)) = e^{-\beta E} \left(1 + \frac{q}{4} \beta^2 E^2\right) \end{aligned} \quad (19.3)$$

¹⁴Variance

سرانجام اگر $q \rightarrow 0$ این عامل بولتزمن موثر تعمیم‌یافته به عامل بولتزمن معمولی تبدیل می‌شود.

سپس برخی مدل‌های فیزیکی از این آمار تصحیح شده را با انواع توزیع‌های معرفی شده مورد بررسی قرار می‌دهیم. به عنوان مثال ساده، ما به بررسی نظریه جنبشی گاز ایده‌آل می‌پردازیم.

۱.۱.۳ آمار نظریه جنبشی گاز ایده‌آل در فرمالیسم تغییر شکل یافته

ابتدا توزیع ماکسول - بولتزمن^{۱۵} از سرعت‌های مولکولی در یک مخزن گاز را در نظر می‌گیریم. سرعت یک مولکول به صورت $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ است. حال از آمار متمایز استفاده می‌کنیم و عامل بولتزمن موثر را برای نظریه جنبشی از گاز ایده‌آل به صورت زیر معرفی می‌کنیم [۱۲۸].

$$B_{Modi-Dirac\ delta} \left(\frac{m v^2}{2} \right) = e^{-\beta \frac{m v^2}{2}} \left(1 + \frac{q}{\lambda} \beta^2 m^2 v^4 \right) \quad (20.3)$$

$$B_{Uniform} \left(\frac{m v^2}{2} \right) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{96} b^2 m^2 v^4 + \dots \right)$$

$$B_{\Psi-level} \left(\frac{m v^2}{2} \right) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{32} c^2 m^2 v^4 + \dots \right)$$

$$B_{Gamma} \left(\frac{m v^2}{2} \right) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{\lambda} (q_1 - 1) \beta_0^2 m^2 v^4 + \dots \right)$$

سپس احتمال یافتن ذره با سرعت v به صورت زیر تعریف می‌شود

$$p_{Modi-Dirac\ delta}(v) = \frac{2 \sqrt{2} (m \beta)^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}} (\lambda + 15 q)} e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} \left[1 + \frac{q \beta^2 m^2 v^4}{\lambda} \right] 4 \pi v^2 \quad (21.3)$$

$$p_{Uniform}(v) = \frac{\lambda \sqrt{2} \beta^2 (m \beta)^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}} (32 \beta^2 + 5 b^2)} e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} \left[1 + \frac{b^2 m^2 v^4}{96} \right] 4 \pi v^2$$

$$p_{\Psi-level}(v) = \frac{\lambda \sqrt{2} \beta^2 (m \beta)^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}} (15 c^2 + 32 \beta^2)} e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} \left[1 + \frac{c^2 m^2 v^4}{32} \right] 4 \pi v^2$$

$$p_{Gamma}(v) = \frac{2 \sqrt{2} (m \beta)^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}} (\lambda + 15 (q_1 - 1))} e^{-\frac{\beta m v^2}{2}} \left[1 + \frac{(q_1 - 1) \beta^2 m^2 v^4}{\lambda} \right] 4 \pi v^2$$

¹⁵Maxwell-Boltzmann distribution

بیشترین سرعت محتمل v_m از شرایط مقداری بی نهایت $p'(v) = 0$ به دست می آید که دقیقاً به صورت زیر برآورد می شود

$$\begin{aligned} v_{(Modi-Dirac)m}^2 &= \frac{kT}{m} \left[2 - \frac{24q - 36q^2}{6 \times 3^{\frac{1}{3}} q D_{(MDd)}} + \frac{2 D_{(MDd)}}{3^{\frac{1}{3}} q} \right] \\ v_{(Uniform)m}^2 &= \frac{kT}{m} \left[2 + \frac{2(b^2 - 8\beta^2)}{D_{(Uniform)}} + \frac{2 D_{(Uniform)}}{b^2} \right] \\ v_{(2-level)m}^2 &= \frac{kT}{m} \left[2 + \frac{2(8\beta^2 - 3c^2)}{3 D_{(2-level)}} - \frac{2 D_{(2-level)}}{c^2} \right] \\ v_{(Gamma)m}^2 &= \frac{kT}{m} \left[2 - \frac{2(3(q_1 - 1) - 2)}{3^{\frac{1}{3}} D_{(Gamma)}} + \frac{2 D_{(Gamma)}}{3^{\frac{1}{3}}} \right] \end{aligned} \quad (22.3)$$

که پارامترهای D برای هر کدام از شدت احتمال ها به صورت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} D_{(MDd)} &= \left(9q^3 + \sqrt{6} \sqrt{4q^3 - 18q^4 + 27q^5} \right), \\ D_{(Uniform)} &= \left(b^6 + 2\sqrt{2} \sqrt{b^6(3b^4\beta^2 - 24b^2\beta^2 + 64\beta^6)} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ D_{(2-level)} &= \left(-9c^6 + 2\sqrt{6} \sqrt{c^6(27c^4\beta^2 - 72c^2\beta^4 + 64\beta^6)} \right)^{\frac{1}{3}}, \\ D_{(Gamma)} &= (9 - (9(q_1 - 1) + 9)(3 + (-2 + (q_1 - 1))q_1)) \\ &\quad + \sqrt{6} \sqrt{(q_1 - 1)^3(49 + 96(3(q_1 - 1) - 5))})^{\frac{1}{3}} \end{aligned} \quad (23.3)$$

بنابراین سرعت $\vec{v}$ را به مولفه هایش (v_x, v_y, v_z) تجزیه می کنیم. سپس احتمال یافتن یک ذره با مولفه هایش (v_x, v_y, v_z) در ناحیه (dv_x, dv_y, dv_z) محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} P_{(MDd)}(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= \frac{1}{Z_{(MDd)}} B_{(MDd)} \left(\frac{mv^2}{2} \right), \\ P_{(Uniform)}(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= \frac{1}{Z_{(Uniform)}} B_{(Uniform)} \left(\frac{mv^2}{2} \right), \\ P_{(2-level)}(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= \frac{1}{Z_{(2-level)}} B_{(2-level)} \left(\frac{mv^2}{2} \right), \\ P_{(Gamma)}(v_x, v_y, v_z) dv_x dv_y dv_z &= \frac{1}{Z_{(Gamma)}} B_{(Gamma)} \left(\frac{mv^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (24.3)$$

تابع تفکیک موثر و متوسط مربع مولفه سرعت توسط روابط زیر تعیین می‌شود

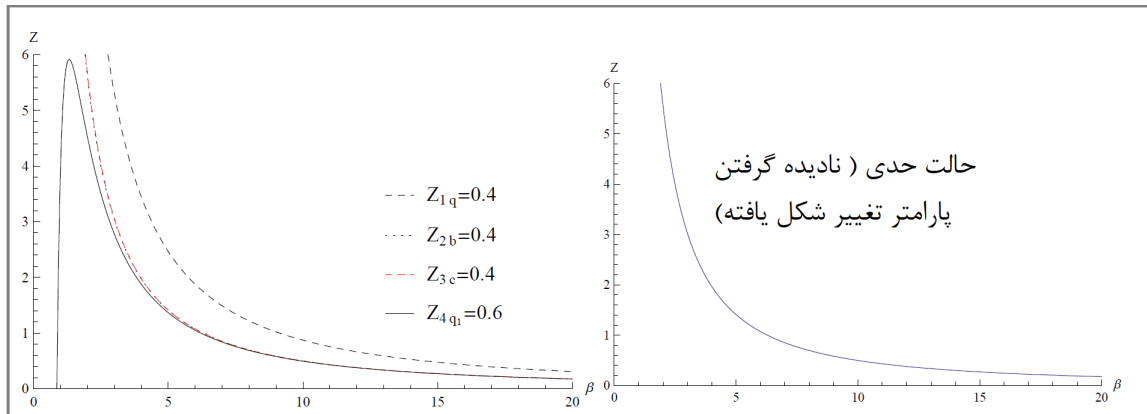
$$\begin{aligned}
 Z_{(Modi-Dirac\ delta)} &= \left(1 + \frac{15}{\lambda} q\right) \left(\frac{2\pi K T}{m}\right)^{\frac{3}{2}}, & (25.3) \\
 \langle v_{(Modi-Dirac\ delta)}^2 \rangle &= \frac{3KT}{m} \left(\frac{1 + \frac{25}{\lambda} q}{1 + \frac{15}{\lambda} q}\right), \\
 Z_{(Uniform)} &= \left(1 + \frac{5b^2}{32\beta^2}\right) \left(\frac{2\pi K T}{m}\right)^{\frac{3}{2}}, \\
 \langle v_{(Uniform)}^2 \rangle &= \frac{3KT}{m} \left(\frac{1 + \frac{25b^2}{96\beta^2}}{1 + \frac{5b^2}{32\beta^2}}\right), \\
 Z_{(2-level)} &= \left(1 + \frac{15c^2}{32\beta^2}\right) \left(\frac{2\pi K T}{m}\right)^{\frac{3}{2}}, \\
 \langle v_{(2-level)}^2 \rangle &= \frac{3KT}{m} \left(\frac{1 + \frac{25c^2}{32\beta^2}}{1 + \frac{15c^2}{32\beta^2}}\right), \\
 Z_{(Gamma)} &= \left(1 + \frac{15}{\lambda} (q_1 - 1)\right) \left(\frac{2\pi K T}{m}\right)^{\frac{3}{2}}, \\
 \langle v_{(Gamma)}^2 \rangle &= \frac{3KT}{m} \left(\frac{1 + \frac{25}{\lambda} (q_1 - 1)}{1 + \frac{15}{\lambda} (q_1 - 1)}\right).
 \end{aligned}$$

متوسط انرژی جنبشی برای یک تک ذره و برای q کوچکتر به ترتیب به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{m v_{(Modi-Dirac\ delta)}^2}{2} \right\rangle &= \frac{3}{2} K T \left(\frac{1 + \frac{25}{\lambda} q}{1 + \frac{15}{\lambda} q}\right), & (26.3) \\
 \left\langle \frac{m v_{(Uniform)}^2}{2} \right\rangle &= \frac{3}{2} K T \left(\frac{1 + \frac{25b^2}{96\beta^2}}{1 + \frac{5b^2}{32\beta^2}}\right), \\
 \left\langle \frac{m v_{(2-level)}^2}{2} \right\rangle &= \frac{3}{2} K T \left(\frac{1 + \frac{25c^2}{32\beta^2}}{1 + \frac{15c^2}{32\beta^2}}\right), \\
 \left\langle \frac{m v_{(Gamma)}^2}{2} \right\rangle &= \frac{3}{2} K T \left(\frac{1 + \frac{25}{\lambda} (q_1 - 1)}{1 + \frac{15}{\lambda} (q_1 - 1)}\right).
 \end{aligned}$$

به وضوح مشاهده می‌شود در حالت حدی تمام روابط مربوط به مسئله نظریه جنبشی گاز ایده‌آل در فرمالیسم تغییرشکل یافته به حالت معمولی خود باز می‌گردد. حال تاثیرات پارامتر تغییرشکل یافته را روی تابع پارش و همچنین حالت حدی این چهار توزیع را در شکل ۱.۳ نشان داده می‌شود.

به عنوان مثالی دیگر در مکانیک آماری به بررسی نوسانگر هارمونیک کلاسیک در فرمالیسم تغییرشکل یافته می‌پردازیم.



شکل ۱.۳: تابع پارش برحسب پارامتر β

۲.۱.۳ بررسی آماری نوسانگر هارمونیک کلاسیک در فرمالیسم تغییر شکل یافته

نوسانگر هارمونیک کلاسیکی توسط هامیلتونی زیر $H = \frac{p^2}{m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ مورد بحث قرار می گیرد. انرژی نوسانگر هارمونیک کلاسیکی

$$E(n) = \varepsilon n$$

که ε ثابت مثبت دلخواه است. این تابع تفکیک برای این چهار توزیع به صورت زیر معرفی می شوند.

$$\begin{aligned} Z_{(Modi-Dirac\ delta)} &= \int_0^\infty B(n\varepsilon) dn = \frac{1+q}{\beta\varepsilon}, \\ Z_{(Uniform)} &= \frac{1}{\beta\varepsilon} + \frac{b^2}{12\beta^3\varepsilon} + \frac{b^4}{80\beta^5\varepsilon}, \\ Z_{(2-level)} &= \frac{1}{\beta\varepsilon} + \frac{c^2\beta^2}{4\beta^5\varepsilon} + \frac{c^4}{16\beta^5\varepsilon}, \\ Z_{(Gamma)} &= -\frac{(-1+(q_1-1))(2(q_1-1)+1)}{\beta\varepsilon}. \end{aligned} \quad (27.3)$$

انرژی داخلی به صورت زیر به دست می آید [۷۳]

$$\begin{aligned} U_{(Modi-Dirac\ delta)} &= \frac{1+3q}{(1+q)\beta}, \\ U_{(Uniform)} &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{15b^4 + 60b^2\beta^2 + 240\beta^4}{3b^4 + 20b^2\beta^2 + 240\beta^4} \right), \\ U_{(2-level)} &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{5c^4 + 12c^2\beta^2 + 16\beta^4}{c^4 + 4c^2\beta^2 + 16\beta^4} \right), \\ U_{(Gamma)} &= \frac{1}{\beta} \left(\frac{10 - (19 - 8q_1)q_1}{(-1+(q_1-1))(1+2(q_1-1))} \right). \end{aligned} \quad (28.3)$$

سپس انرژی آزاد هلمهولتز برای این چهار توزیع به صورت [۱۰۲]

$$F_{(Modi-Dirac\ delta)} = -\frac{Ln\left(\frac{1+q}{\beta\varepsilon}\right)}{\beta}, \quad (29.3)$$

$$F_{(Uniform)} = -\frac{1}{\beta}Ln\left(\frac{12 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2}{12\beta\varepsilon}\right),$$

$$F_{2-level} = -\frac{1}{\beta}Ln\left(\frac{4 + \left(\frac{c}{\beta}\right)^2}{4\beta\varepsilon}\right),$$

$$F_{(Gamma)} = -\frac{1}{\beta}Ln\left(-\frac{(-1 + (q_1 - 1))(1 + 2(q_1 - 1))}{\varepsilon\beta}\right).$$

ظرفیت گرمایی برای این چهار توزیع عبارتند از

$$C_{(Modi-Dirac\ delta)v} = K\left(\frac{1+3q}{1+q}\right), \quad (30.3)$$

$$C_{(Uniform)v} = 15K\left(\frac{3840 + 2560b^2K^2t^2 + 1136b^4K^4t^4 + 48b^6K^6t^6}{(240 + 20b^2K^2t^2 + 3b^4K^4t^4)^2}\right),$$

$$C_{(2-level)v} = K\left(\frac{256 + 512c^2K^2t^2 + 400c^4K^4t^4 + 48c^6K^6t^6}{(16 + 4c^2K^2t^2 + c^4K^4t^4)^2}\right),$$

$$C_{(Gamma)v} = K\left(\frac{10 - (19 - 8q_1)q_1}{(-1 + (q_1 - 1))(1 + 2(q_1 - 1))}\right).$$

آنترופی از این مسئله برای این چهار توزیع به ترتیب برابر

$$S_{(Modi-Dirac\ delta)} = K\left[1 + Ln\left(\frac{1+q}{\beta\varepsilon}\right)\right], \quad (31.3)$$

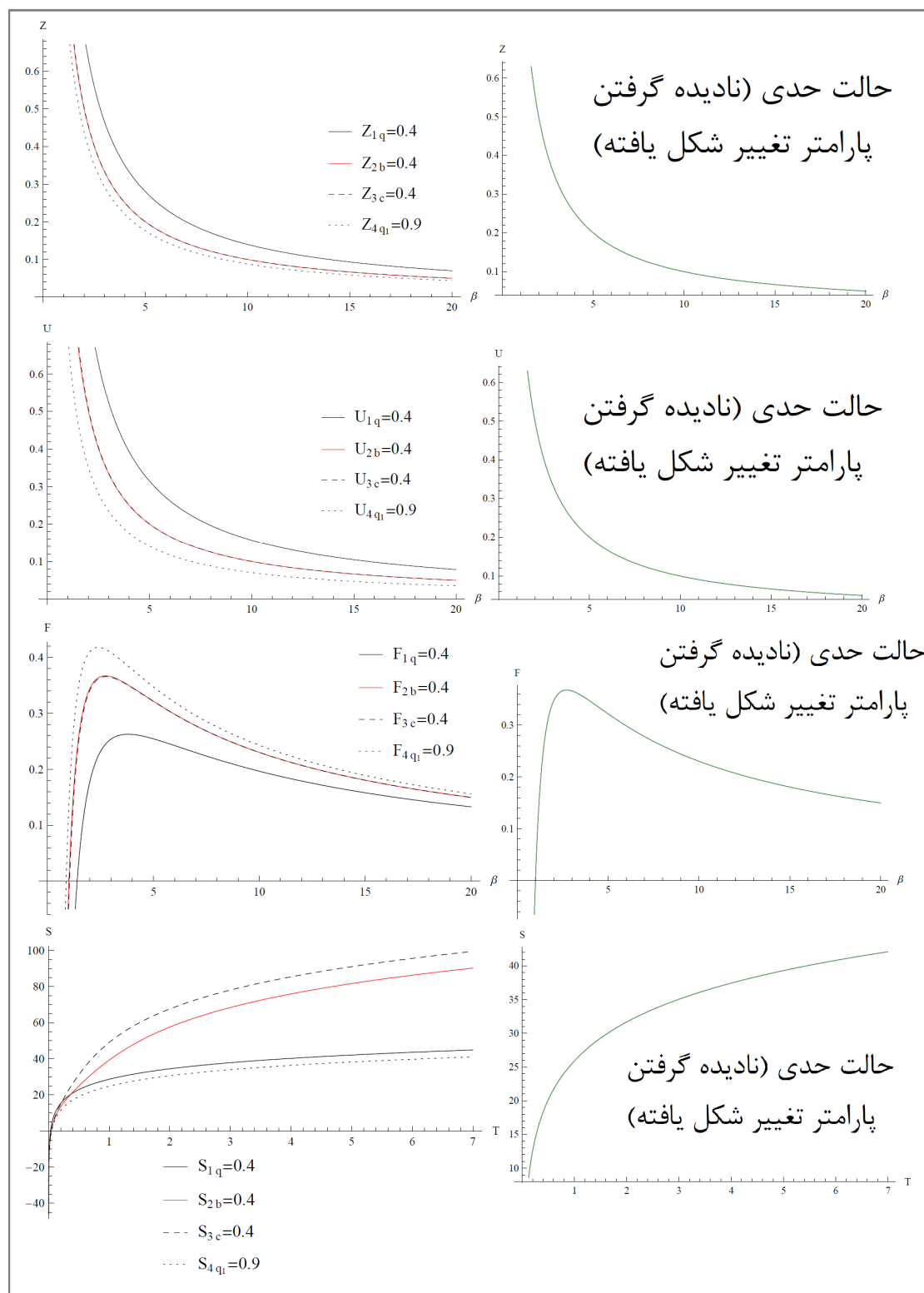
$$S_{(Uniform)} = \frac{K\left(3\left(4 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2\right) + \left(12 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2\right)Ln\left(\frac{12 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2}{12\beta\varepsilon}\right)\right)}{\left(12 + \left(\frac{b}{\beta}\right)^2\right)},$$

$$S_{(2-level)} = \frac{K\left(4 + 3\left(\frac{c}{\beta}\right)^2 + \left(4 + \left(\frac{c}{\beta}\right)^2\right)Ln\left(\frac{4 + \left(\frac{c}{\beta}\right)^2}{4\beta\varepsilon}\right)\right)}{\left(4 + \left(\frac{c}{\beta}\right)^2\right)},$$

$$S_{(Gamma)} = K\left(1 + Ln\left(-\frac{(-1 + (q_1 - 1))(1 + 2(q_1 - 1))}{\beta\varepsilon}\right)\right).$$

به وضوح مشاهده می‌شود در حالت حدی تمام روابط مربوط به مسئله نوسانگر هارمونیک کلاسیکی در فرمالیسم تغییرشکل یافته به حالت معمولی خود باز می‌گردد. حال تاثیرات پارامتر

تغییر شکل یافته را روی تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی و همچنین حالت حدی این چهار توزیع را در شکل ۲.۳ نشان داده می‌شود.



شکل ۲.۳: تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی بر حسب β و T

به عنوان مثالی دیگر در فرمالیسم تغییر شکل یافته فاکتور بولتزمن، به بررسی نوسانگر هارمونیک کوانتومی می‌پردازیم.

۳.۱.۳ بررسی آماری نوسانگر هارمونیک کوانتومی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

در این قسمت نوسانگر هارمونیک کوانتومی را توسط هامیلتونی

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

بررسی می‌کنیم. انرژی نوسانگر هارمونیک کوانتومی به صورت $E_n = n\varepsilon = nh\vartheta$ که $(n = 0, 1, 2, \dots)$ است.

تابع تفکیک برای نوسانگر هارمونیک کوانتومی به صورت

$$Z_{(Modi-Dirac\ delta)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} + \frac{q\beta^2(h\vartheta)^2}{2} \left(\frac{e^{-\beta h\vartheta}(1 + e^{-\beta h\vartheta})}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^3} \right), \quad (32.3)$$

$$Z_{(Uniform)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} + \frac{b^2(h\vartheta)^2}{24} \left(\frac{e^{-\beta h\vartheta}(1 + e^{-\beta h\vartheta})}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^3} \right),$$

$$Z_{(2-level)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} + \frac{c^2(h\vartheta)^2}{8} \left(\frac{e^{-\beta h\vartheta}(1 + e^{-\beta h\vartheta})}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^3} \right),$$

$$Z_{(Gamma)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} + \frac{(q-1)\beta^2(h\vartheta)^2}{2} \left(\frac{e^{-\beta h\vartheta}(1 + e^{-\beta h\vartheta})}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^3} \right).$$

است.

انرژی داخلی با استفاده از تابع پارش به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$U_{(Modi-Dirac\ delta)} = \frac{h\vartheta e^{-\beta h\vartheta}}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{q}{2}\beta^2(h\vartheta)^2 \left(\frac{1 + 4e^{-\beta h\vartheta} + e^{-2\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)}{1 + \frac{q}{2}\beta^2(h\vartheta)^2 \left(\frac{(1 + e^{-\beta h\vartheta})e^{-\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)} \right], \quad (33.3)$$

$$U_{(Uniform)} = \frac{h\vartheta e^{-\beta h\vartheta}}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{b^2}{24}(h\vartheta)^2 \left(\frac{1 + 4e^{-\beta h\vartheta} + e^{-2\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)}{1 + \frac{b^2}{24}(h\vartheta)^2 \left(\frac{(1 + e^{-\beta h\vartheta})e^{-\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)} \right],$$

$$U_{(2-level)} = \frac{h\vartheta e^{-\beta h\vartheta}}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{c^2}{8}(h\vartheta)^2 \left(\frac{1 + 4e^{-\beta h\vartheta} + e^{-2\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)}{1 + \frac{c^2}{8}(h\vartheta)^2 \left(\frac{(1 + e^{-\beta h\vartheta})e^{-\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)} \right],$$

$$U_{(Gamma)} = \frac{h\vartheta e^{-\beta h\vartheta}}{1 - e^{-\beta h\vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{(q-1)}{2}\beta^2(h\vartheta)^2 \left(\frac{1 + 4e^{-\beta h\vartheta} + e^{-2\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)}{1 + \frac{(q-1)}{2}\beta^2(h\vartheta)^2 \left(\frac{(1 + e^{-\beta h\vartheta})e^{-\beta h\vartheta}}{(1 - e^{-\beta h\vartheta})^2} \right)} \right].$$

سپس شدت حالات انرژی داخلی برابر است با

$$I = \int_0^\infty U(\vartheta) d\vartheta$$

که شدت از حالات انرژی برای این چهار توزیع به صورت زیر محاسبه می شود

$$\begin{aligned}
 U_{(Modi-Dirac\ delta)}(\vartheta) &= \frac{\lambda \pi h \vartheta^{\gamma} e^{-\beta h \vartheta}}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{q}{\gamma} \beta^{\gamma} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{1 + e^{-\beta h \vartheta} + e^{-\gamma \beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)}{1 + \frac{q}{\gamma} \beta^{\gamma} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{(1 + e^{-\beta h \vartheta}) e^{-\beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)} \right], \quad (34.3) \\
 U_{(Uniform)}(\vartheta) &= \frac{\lambda \pi h \vartheta^{\gamma} e^{-\beta h \vartheta}}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{b}{\gamma \gamma} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{1 + e^{-\beta h \vartheta} + e^{-\gamma \beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)}{1 + \frac{b}{\gamma \gamma} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{(1 + e^{-\beta h \vartheta}) e^{-\beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)} \right], \\
 U_{(\gamma-level)}(\vartheta) &= \frac{\lambda \pi h \vartheta^{\gamma} e^{-\beta h \vartheta}}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{c}{\lambda} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{1 + e^{-\beta h \vartheta} + e^{-\gamma \beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)}{1 + \frac{c}{\lambda} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{(1 + e^{-\beta h \vartheta}) e^{-\beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)} \right], \\
 U_{(Gamma)}(\vartheta) &= \frac{\lambda \pi h \vartheta^{\gamma} e^{-\beta h \vartheta}}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} \left[\frac{1 + \frac{(q_1-1)}{\gamma} \beta^{\gamma} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{1 + e^{-\beta h \vartheta} + e^{-\gamma \beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)}{1 + \frac{(q_1-1)}{\gamma} \beta^{\gamma} (h \vartheta)^{\gamma} \left(\frac{(1 + e^{-\beta h \vartheta}) e^{-\beta h \vartheta}}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right)} \right].
 \end{aligned}$$

سپس انرژی آزاد هلمهولتز و آنتروپی برای این چهار توزیع به صورت زیر به دست می آید.

$$\begin{aligned}
 F_{(Modi-Dirac\ delta)} &= - \frac{\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} + \frac{q \beta^{\gamma} (h \vartheta)^{\gamma}}{\gamma} \left(\frac{e^{-\beta h \vartheta} (1 + e^{-\beta h \vartheta})}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right) \right)}{\beta}, \quad (35.3) \\
 F_{(Uniform)} &= - \frac{\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} + \frac{b (h \vartheta)^{\gamma}}{\gamma \gamma} \left(\frac{e^{-\beta h \vartheta} (1 + e^{-\beta h \vartheta})}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right) \right)}{\beta}, \\
 F_{(\gamma-level)} &= - \frac{\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} + \frac{c (h \vartheta)^{\gamma}}{\lambda} \left(\frac{e^{-\beta h \vartheta} (1 + e^{-\beta h \vartheta})}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right) \right)}{\beta}, \\
 F_{(Gamma)} &= - \frac{\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} + \frac{(q_1-1) \beta^{\gamma} (h \vartheta)^{\gamma}}{\gamma} \left(\frac{e^{-\beta h \vartheta} (1 + e^{-\beta h \vartheta})}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right) \right)}{\beta}, \\
 S_{(Modi-Dirac\ delta)} &= \frac{\partial \left(\frac{\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} + \frac{q \beta^{\gamma} (h \vartheta)^{\gamma}}{\gamma} \left(\frac{e^{-\beta h \vartheta} (1 + e^{-\beta h \vartheta})}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right) \right)}{\beta} \right)}{\partial T}, \\
 S_{(Uniform)} &= \frac{\partial \left(\frac{\text{Ln} \left(\frac{1}{1 - e^{-\beta h \vartheta}} + \frac{b (h \vartheta)^{\gamma}}{\gamma \gamma} \left(\frac{e^{-\beta h \vartheta} (1 + e^{-\beta h \vartheta})}{(1 - e^{-\beta h \vartheta})^{\gamma}} \right) \right)}{\beta} \right)}{\partial T},
 \end{aligned}$$

$$S_{(\gamma\text{-level})} = \frac{\partial \left(\frac{\ln \left(\frac{1}{1-e^{-\beta \hbar \vartheta}} + \frac{e^{\gamma(h \vartheta)^2}}{\lambda} \left(\frac{e^{-\beta \hbar \vartheta} (1+e^{-\beta \hbar \vartheta})}{(1-e^{-\beta \hbar \vartheta})^3} \right) \right)}{\beta} \right)}{\partial T},$$

$$S_{(Gamma)} = \frac{\partial \left(\frac{\ln \left(\frac{1}{1-e^{-\beta \hbar \vartheta}} + \frac{(q-1)\beta^{\gamma}(h \vartheta)^2}{\gamma} \left(\frac{e^{-\beta \hbar \vartheta} (1+e^{-\beta \hbar \vartheta})}{(1-e^{-\beta \hbar \vartheta})^3} \right) \right)}{\beta} \right)}{\partial T}.$$

مشابه حالت قبل در حالت حدی تمام روابط مربوط به مسئله نوسانگر هارمونیک کوانتومی در فرمالیسم تغییر شکل یافته به حالت معمول خود باز می‌گردد. حال تاثیرات پارامتر تغییر شکل یافته را روی تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی و همچنین حالت حدی این چهار توزیع را در شکل ۳.۳ نشان داده می‌شود.

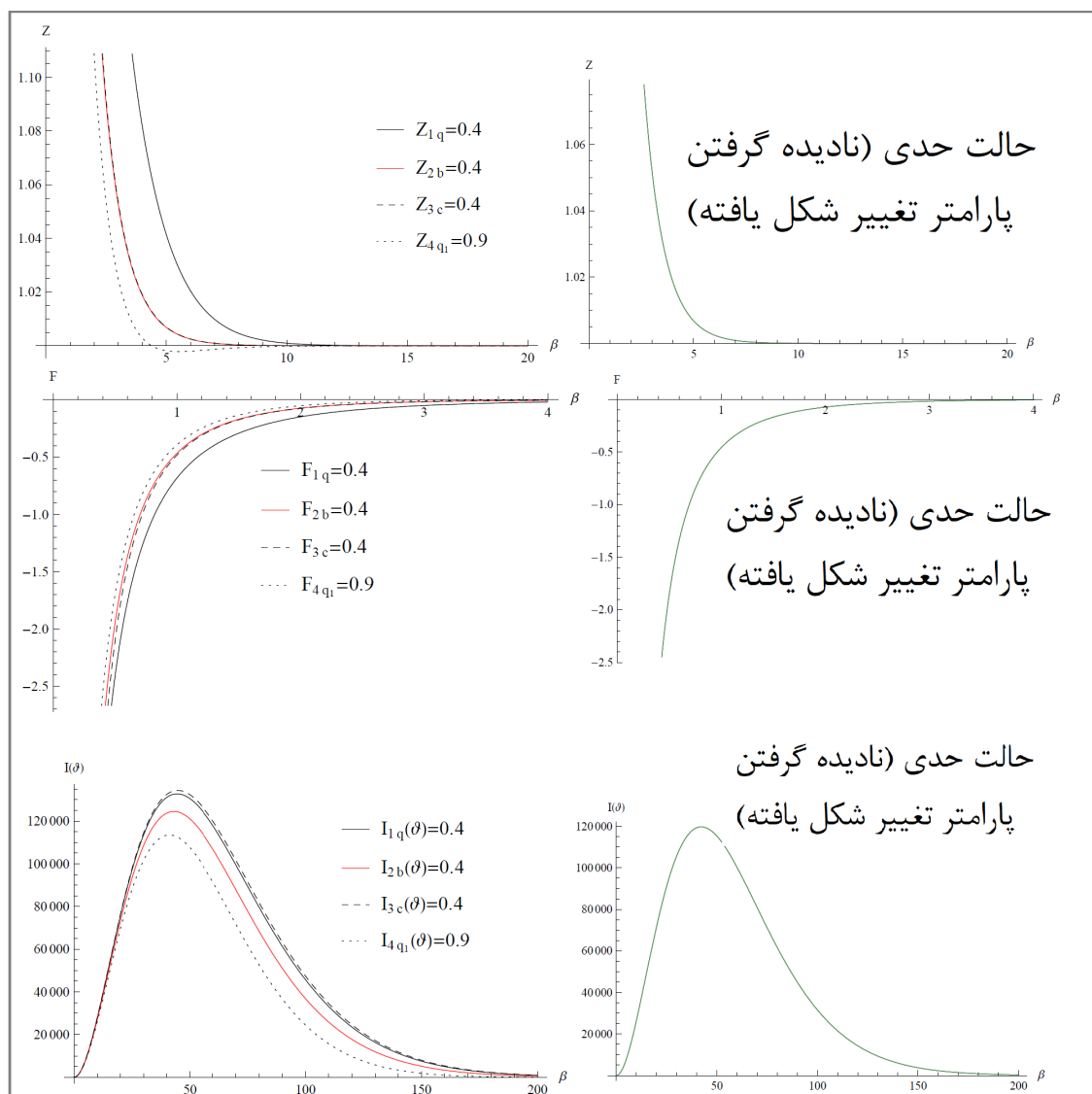
سپس این آمار متمایز را برای مسئله پارامغناطیس^{۱۶} بررسی می‌کنیم.

۴.۱.۳ آمار سیستم اسپین - ۱/۲ پارامغناطیس در فرمالیسم تغییر شکل یافته

یک ذره با اسپین تکانه زاویه‌ای برابر $\frac{1}{2}$ در میدان مغناطیسی B در امتداد جهت z قرار داده شده است که در دو ویژه حالت می‌تواند وجود داشته باشد: بالا و پایین ($Up, Down$). برای حالت بالا، این تکانه مغناطیسی در امتداد z برابر با $-\mu_B$ با مقدار انرژی $(\mu_B B)$ و برای حالت پایین، این تکانه مغناطیسی در امتداد z برابر با μ_B با مقدار انرژی $(-\mu_B B)$ است. اینجا $\mu_B = \frac{e \hbar}{2m}$ مگنتون بوهر^{۱۷} است و از این حقیقت انرژی $(-\vec{\mu}_B \cdot \vec{B})$ استفاده می‌کنیم.

¹⁶ Paramagnet

¹⁷ Bohr magneton



شکل ۳.۳: تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی بر حسب β

اگر $Z_q(1)$ تابع تفکیک برای یک سیستم است، سپس این تابع تفکیک برای هر مجموعه از N سیستم قابل تشخیص که هریک دقیقا همان مجموعه‌ای از سطوح انرژی را دارند، به صورت زیر است.

$$Z_q(N) = [Z_q(1)]^N$$

برای این سیستم غیربرهم‌کنشی که هر ذره مستقل از ذره دیگری است این تابع تفکیک N

ذره را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned} Z_{(Modi-Dirac\ delta)q}(N) &= \left[2 \cosh(\beta \mu B) \left(1 + \frac{q}{2} \beta^2 \mu^2 B^2 \right) \right]^N, \quad (36.3) \\ Z_{(Uniform)b}(N) &= \left[2 \cosh(\beta \mu B) \left(1 + \frac{b^2}{4} \mu^2 B^2 \right) \right]^N, \\ Z_{(2-level)c}(N) &= \left[2 \cosh(\beta \mu B) \left(1 + \frac{c^2}{\lambda} \mu^2 B^2 \right) \right]^N, \\ Z_{(Gamma)(q_1-1)}(N) &= \left[2 \cosh(\beta \mu B) \left(1 + \frac{(q_1-1)}{2} \beta^2 \mu^2 B^2 \right) \right]^N. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه تابع تفکیک می‌توان انرژی آزاد هلمهولتز F به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} F_{(Modi-Dirac\ delta)q} &= -N K T \left[\ln 2 + \ln \cosh(\beta \mu B) + \ln \left(1 + \frac{q}{2} \beta^2 \mu^2 B^2 \right) \right], \quad (37.3) \\ F_{(Uniform)b} &= -N K T \left[\ln 2 + \ln \cosh(\beta \mu B) + \ln \left(1 + \frac{b^2}{4} \mu^2 B^2 \right) \right], \\ F_{(2-level)c} &= -N K T \left[\ln 2 + \ln \cosh(\beta \mu B) + \ln \left(1 + \frac{c^2}{\lambda} \mu^2 B^2 \right) \right], \\ F_{(Gamma)(q_1-1)} &= -N K T \left[\ln 2 + \ln \cosh(\beta \mu B) + \ln \left(1 + \frac{(q_1-1)}{2} \beta^2 \mu^2 B^2 \right) \right], \end{aligned}$$

تکانه مغناطیسی کل را برای این پارامگنت به صورت زیر محاسبه می‌شود

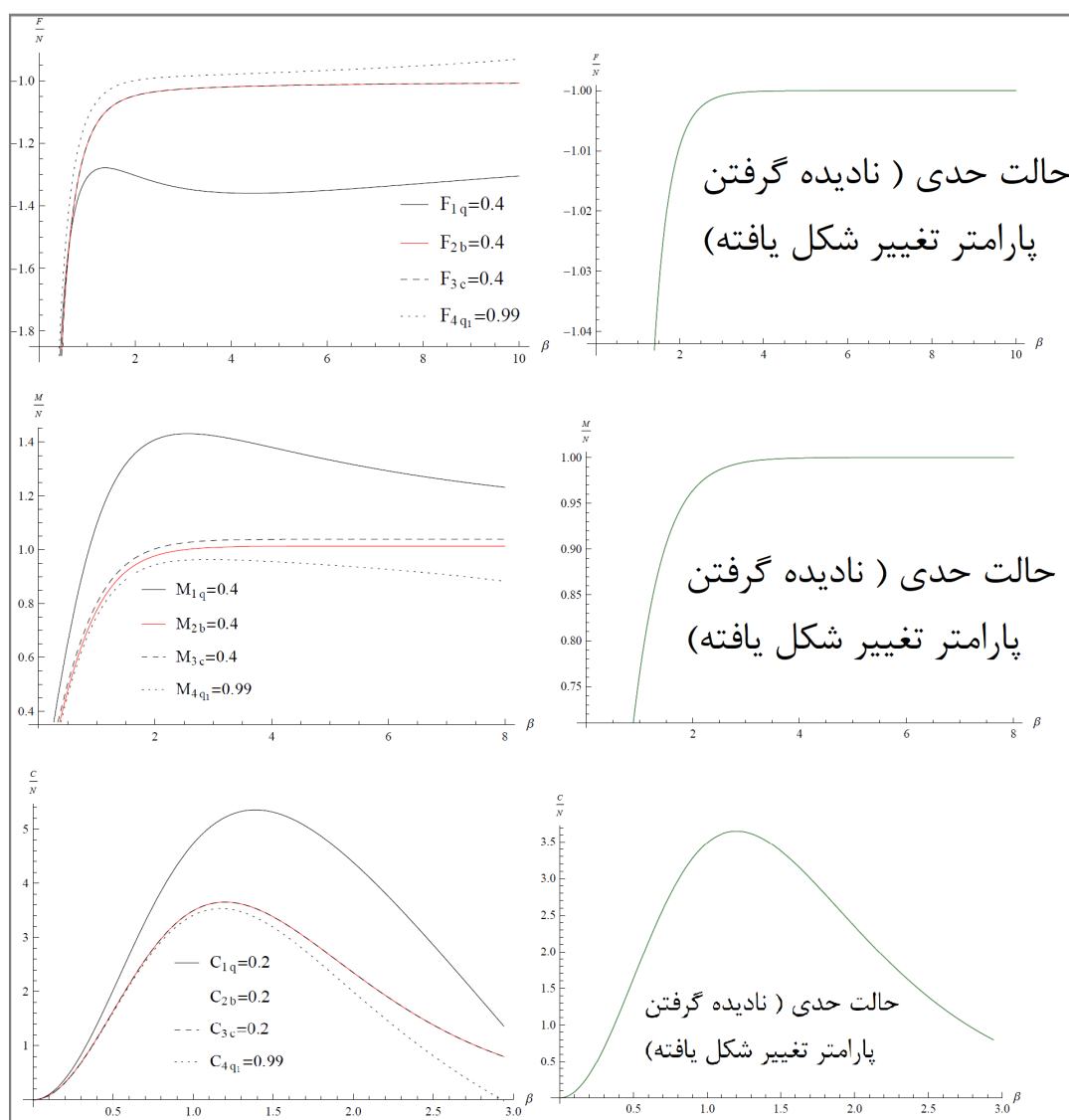
$$\begin{aligned} M_{(Modi-Dirac\ delta)q} &= - \left(\frac{\partial F_{(Modi-Dirac\ delta)q}}{\partial B} \right) \quad (38.3) \\ &= N \mu \left[\tanh(\beta \mu B) + \frac{2 B q \beta \mu}{2 + q (B \beta \mu)^2} \right], \\ M_{(Uniform)b} &= N \mu \left[\tanh(\beta \mu B) + \frac{2 B b^2 \mu}{4 \beta + \beta (B b \mu)^2} \right], \\ M_{(2-level)c} &= N \mu \left[\tanh(\beta \mu B) + \frac{2 B c^2 \beta \mu}{\lambda \beta + \beta (B c \mu)^2} \right], \\ M_{(Gamma)(q_1-1)} &= N \mu \left[\tanh(\beta \mu B) + \frac{2 B (q_1-1) \beta \mu}{2 + (q_1-1) (B \beta \mu)^2} \right]. \end{aligned}$$

و سرانجام با استفاده از انرژی آزاد هلمهولتز می‌توان آنتروپی را محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} S_{(Modi-Dirac\ delta)q} &= - \frac{2 N K (B \mu)^2 q}{2 K^2 T^2 + (B \mu)^2 q} + N K \ln \left[2 + (B \mu \beta)^2 q \right] \quad (39.3) \\ &\quad + N K \ln [\cosh(B \mu \beta)] - \frac{B N \mu \tanh(B \mu \beta)}{T}, \\ S_{(Uniform)b} &= N \left[K \ln \left[2 + \frac{(B \mu b)^2}{4} \right] + K \ln [\cosh(B \mu \beta)] - \frac{B \mu \tanh(B \mu \beta)}{T} \right], \\ S_{(2-level)c} &= N \left[K \ln \left[2 + \frac{(B \mu c)^2}{\lambda} \right] + K \ln [\cosh(B \mu \beta)] - \frac{B \mu \tanh(B \mu \beta)}{T} \right], \end{aligned}$$

$$S_{(Gamma)q_1} = N K \left[\left(Ln[\Psi] + Ln \left[1 + \frac{(q_1 - 1)(B \mu \beta)^2}{\Psi} \right] + Ln [\cosh (B \mu \beta)] \right) \right. \\ \left. - N K B \mu \beta^2 \left(- \frac{B \mu (q_1 - 1)}{1 + \frac{(B \mu \beta)^2 (q_1 - 1)}{\Psi}} - \frac{\tanh (B \mu \beta)}{\beta} \right) \right]$$

سرانجام در حالت حدی تمام روابط مربوط به مسئله پارامغناطیس در فرمالیسم تغییر شکل یافته به حالت معمولی خود باز می‌گردد. حال تاثیرات پارامتر تغییر شکل یافته را روی تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی و همچنین حالت حدی این چهار توزیع را در شکل ۴.۳ نشان داده می‌شود.



شکل ۴.۳: خواص ترمودینامیکی بر حسب β

همانطور که مشاهده شد آمار متمایز را برای چندمثال بررسی کردیم و اگر در تمام روابط فوق مقادیر پارامترها را به صورت $(q = b = c = 0, q_1 = 1)$ قرار دهیم تمام روابط به روابط

معمولی خود تبدیل می‌شوند.

۲.۳ خواص آمار متمایز از نوسانگر غیرنسبیتی در دو فضای ناجابجایی و جابجایی

در این بخش هدف آن است که آمار بولتزمن-گیبس را در فرمالیسم تغییرشکل یافته تعمیم دهیم. با توجه به اهمیت نوسانگر هماهنگ در فیزیک، هدف اصلی از این بخش مطالعه‌ی نوسانگر هماهنگ غیرنسبیتی در حضور میدان مغناطیسی در دوفضای ناجابجایی و جابجایی است. حال اثرات میدان مغناطیسی را در دینامیک کوانتومی برای ذرات غیرنسبیتی در حضور پتانسیل نوسانی در چارچوب معادله شرودینگر دوبعدی را محاسبه می‌کنیم و مسئله را در مکانیسم مکانیک کوانتومی در فضای فاز ناجابجایی با روش تحلیلی بررسی می‌کنیم [۱۳۴]. ذره باردار با بار e در حال حرکت در دو بعد و در معرض یک میدان مغناطیسی در امتداد محور Z قرار دارد. معادله شرودینگر در فضای جابجایی به صورت زیر است [۱۳۵].

$$\left(\left[\left(p_x - \frac{e}{c} A_x \right) + \left(p_y - \frac{e}{c} A_y \right) \right]^2 + \frac{M \omega^2}{4} (x^2 + y^2) \right) \Psi = 2 M E_{n,m}^{(c)} \Psi \quad (40.3)$$

با در نظر گرفتن پتانسیل برداری به صورت $\vec{A} = B \left(-\frac{y}{4}, \frac{x}{4}, 0 \right)$ که B شدت میدان مغناطیسی است و همانطور که گفته شد میدان مغناطیسی در امتداد محور Z قرار دارد. معادله (۴۰.۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} + \left(\frac{e^2 B^2}{4} + M^2 \omega^2 \right) r^2 - e B L_Z \right] \Psi = 2 M E_{n,m}^{(c)} \Psi \quad (41.3)$$

با معرفی تغییر متغیر $\rho = r^2$ و فرض $L_z = m \hbar$ رابطه (۴۱.۳) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{-\frac{m^2}{4} + \left(\frac{e^2 B^2}{16} + \frac{M^2 \omega^2}{4} \right) \rho^2 - \left[\frac{e B L_z}{4} + \frac{M E_{n,m}^{(c)}}{2} \right] \rho}{\rho^2} \right] \Psi = 0 \quad (42.3)$$

سپس به روش تحلیلی طیف انرژی را به دست می‌آوریم

$$E_{n,m}^{(c)} = \frac{2 \eta}{M} \left(n + \frac{m+1}{2} \right) - \frac{e B m}{2 M} \quad (43.3)$$

که $\eta = \sqrt{\left(\frac{e^2 B^2}{4} + M^2 \omega^2 \right)}$ است. در حالت خاص زمانی که $m = 0$ رابطه (۴۳.۳) به رابطه انرژی نوسانگر هارمونیک غیرنسبیتی معمولی به دست می‌آید.

$$E_{n,m}^{(c)} = \frac{2 \eta}{M} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (44.3)$$

حال معادله شرودینگر را در فضای ناجابجایی مورد بررسی قرار می‌دهیم. که عملگرهای مکان و تکانه از روابط زیر پیروی می‌کند [۱۳۵، ۱۳۶].

$$\begin{aligned} [\hat{x}^\vartheta, \hat{x}^\mu] &= i \theta^{\vartheta, \mu} \\ [\hat{p}^\vartheta, \hat{p}^\mu] &= i \bar{\theta}^{\vartheta, \mu} \\ [\hat{x}^\vartheta, \hat{p}^\mu] &= i \delta^{\vartheta, \mu} \end{aligned} \quad (45.3)$$

که $\theta^{\vartheta, \mu}, \bar{\theta}^{\vartheta, \mu}$ تانسور ثابت پاد متقارن هستند $\bar{\theta}^{\vartheta, \mu} = \theta^{\mu, \vartheta}$. بنابراین عملگر مکان و تکانه در معادله شرودینگر به صورت زیر تغییر می‌کنند

$$\begin{aligned} \hat{x}^\vartheta &\rightarrow x^\vartheta - \frac{\theta}{2} \varepsilon^{\vartheta, \mu} p^\mu \\ \hat{p}^\vartheta &\rightarrow p^\vartheta + \frac{\bar{\theta}}{2} \varepsilon^{\vartheta, \mu} x^\mu \end{aligned} \quad (46.3)$$

که $\theta, \bar{\theta}$ پارامتر ناجابجایی معرفی می‌شوند. با جایگذاری رابطه (46.3) در داخل رابطه (40.3) معادله شرودینگر را در فضای ناجابجایی محاسبه می‌کنیم

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{1}{s} \frac{d}{ds} + \frac{-\frac{m^2}{4} + \frac{\tau}{4\lambda} s^2 - \left[\frac{\chi L_z}{4\lambda} - \frac{M E_{n,m}^{(NC)}}{2\lambda} \right] s}{s^2} \right] \Psi = 0 \quad (47.3)$$

که

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16} + \frac{e B \theta}{2} + \frac{M^2 \omega^2 \theta^2}{4} \\ \tau &= \frac{\theta^2}{4} + \frac{e^2 B^2}{4} + \frac{e B \theta}{2} + M^2 \omega^2 \\ \chi &= 2\theta + \frac{e^2 B^2 \theta}{4} + e B + \frac{e B \theta^2}{4} \end{aligned} \quad (48.3)$$

سپس طیف انرژی معادله شرودینگر در فضای ناجابجایی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E_{n,m}^{(NC)} = \frac{2\lambda}{M} \left(n + \frac{m+1}{2} \right) \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} - \frac{\chi}{2M} m \quad (49.3)$$

برای $m = 0$ رابطه (49.3) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$E_{n,m}^{(NC)} = \frac{2\lambda}{M} \left(n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} \quad (50.3)$$

سرانجام اگر پارامتر ناجابجایی را صفر قرار دهیم $\theta = 0$ رابطه (50.3) تبدیل به رابطه (44.3) می‌شود.

۱.۲.۳ بررسی آمار متمایز از معادله شرودینگر در دو فضای جابجایی و ناجابجایی

برای مطالعه این مساله در مکانیک آماری، ابتدا به سراغ عامل بولتزمن موثر در مکانیک آماری می‌رویم. عامل بولتزمن موثر به صورت زیر معرفی می‌شود [۱۳۴، ۱۳۷]

$$B(E) = \int_0^\infty e^{-\beta' E} f(\beta', \beta) d\beta' \quad (51.3)$$

که $f(\beta', \beta)$ شدت احتمال می‌نامیم. تابع توزیع دلتا دیراک تعمیم‌یافته را برای شدت احتمال در نظر می‌گیریم.

$$f(\beta', \beta) = \delta(\beta' - \beta) \quad (52.3)$$

با بسط رابطه (۵۲.۳) و با استفاده از خواص دلتای دیراک که در رابطه (۱۳.۳) معرفی کردیم عامل بولتزمن در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر به دست می‌آید [۱۳۸].

$$B(E) = e^{-\beta E} \left(1 + \frac{q}{\beta} \beta^2 E^2\right) \quad (53.3)$$

به وضوح قابل مشاهده است که در حالت حدی $q = 0$ عامل بولتزمن موثر تغییر شکل یافته در رابطه (۵۳.۳) به عامل بولتزمن موثر در مکانیک آماری معمولی تبدیل می‌شود [۱۳۹]. حال با استفاده از آمار تصحیح شده می‌توان تابع پارش معادله شرودینگر را در دو فضای جابجایی و ناجابجایی به ترتیب زیر به دست آورد.

$$Z^{(c)} = \int_0^\infty e^{-\beta \left(\frac{\gamma \eta}{M} (n + \frac{m+1}{2}) - \frac{e B m}{2M} \right)} \left(1 + \frac{q}{\beta} \beta^2 \left(\frac{\gamma \eta}{M} (n + \frac{m+1}{2}) - \frac{e B m}{2M} \right)^2 \right), \quad (54.3)$$

$$Z^{(NC)} = \int_0^\infty e^{-\beta \left(\frac{\gamma \lambda}{M} (n + \frac{m+1}{2}) \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} - \frac{\chi}{2M} m \right)} \left(1 + \frac{q}{\beta} \beta^2 \left(\frac{\gamma \lambda}{M} (n + \frac{m+1}{2}) \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}} - \frac{\chi}{2M} m \right)^2 \right)$$

که K_B ثابت بولتزمن است.

سپس با استفاده از تابع پارش رابطه (۵۴.۳) می‌توان خواص آماری سیستم را به دست آوردیم. به عبارت دیگر انرژی داخلی، انرژی آزاد هلمهولتز، آنترپی و ظرفیت گرمایی سیستم را در دو فضای جابجایی و ناجابجایی به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۷۳].

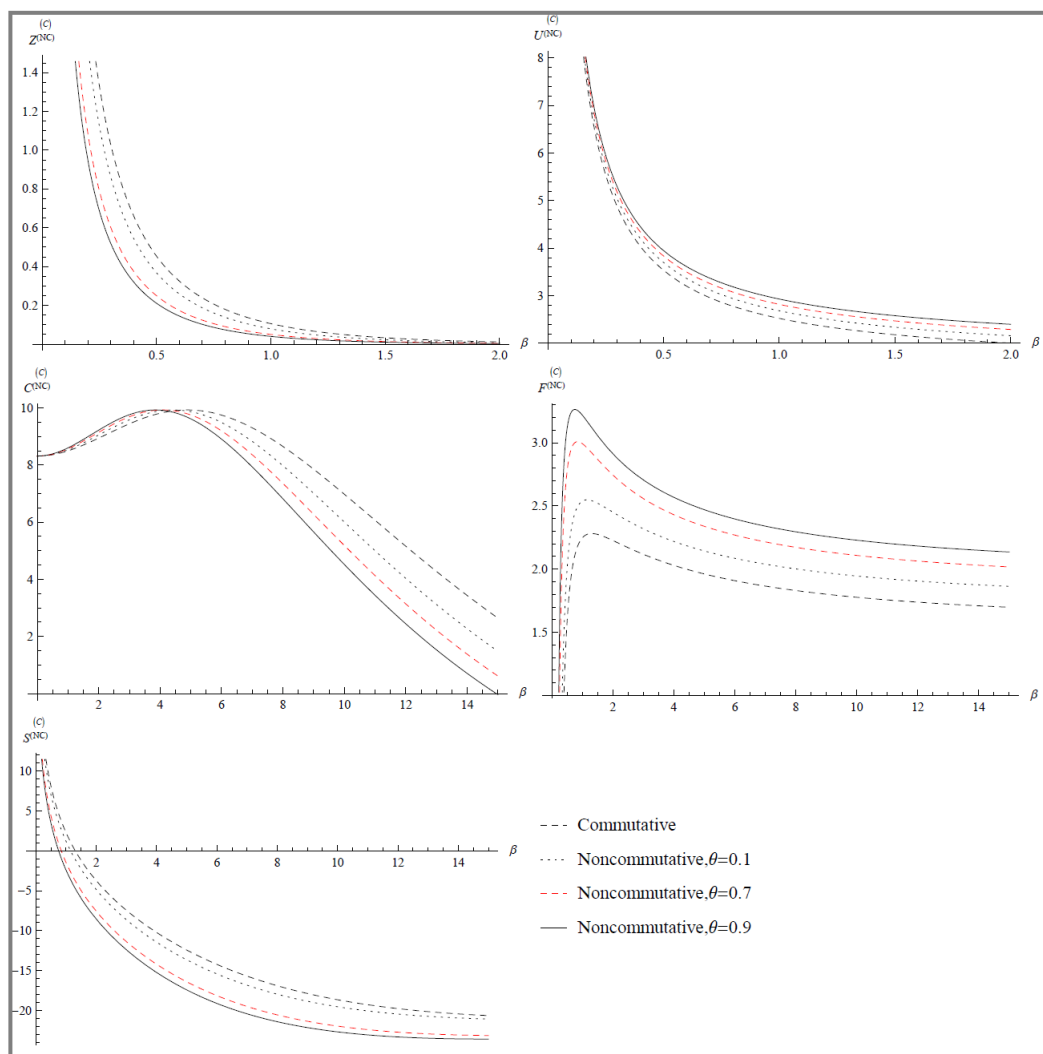
$$F^{(N C)}_{(c)} = -\frac{1}{\beta} \ln(Z^{(N C)}_{(c)}) \quad (55.3)$$

$$U^{(N C)}_{(c)} = -\frac{\partial \ln(Z^{(N C)}_{(c)})}{\partial \beta}$$

$$S^{(N C)}_{(c)} = -\frac{\partial F^{(N C)}_{(c)}}{\partial T}$$

$$C^{(N C)}_{(c)} = \frac{\partial U^{(N C)}_{(c)}}{\partial T}$$

حال اثرات آمار متمایز را روی تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی در دو فضای ناجابجایی و جابجایی برای مجموعه‌ای از پارامترهای $(q = 1/10, \theta = 1/10, 7/10, 9/10)$ در شکل ۵.۳ نشان داده می‌شود.



شکل ۵.۳: تابع پارش و خواص ترمودینامیکی برحسب پارامتر β

همانطور که در شکل ۵.۳ مشاهده می‌شود: تابع پارش را برحسب پارامتر β رسم می‌کنیم و مشاهده شد با افزایش پارامتر β و کاهش θ تمام منحنی‌ها در دو فضای جابجایی و ناجابجایی برهم منطبق می‌شوند و همینطور با کاهش β در کمیت ظرفیت گرمایی یک انتقال به سمت راست مشاهده می‌شود.

حال به بررسی آمار متمایز در معادله شرودینگر در حضور پتانسیل مورس تغییر شکل یافته می‌پردازیم.

۳.۳ بررسی خواص آمار متمایز در حضور پتانسیل مورس تغییر شکل یافته در یک بعد

معادله شرودینگر در یک بعد به فرم [۱۴۰، ۱۴۱]

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \Psi = E \Psi \quad (۵۶.۳)$$

است. که پتانسیل را در این قسمت پتانسیل مورس تغییر شکل یافته در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۴۲]

$$V = V_0 \left(e^{-2\alpha x} - 2q_2 e^{-\alpha x} \right) \quad (۵۷.۳)$$

با جایگذاری رابطه (۵۷.۳) در رابطه (۵۶.۳) معادله زیر را به دست می‌آوریم

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{2m V_0}{\hbar^2} e^{-2\alpha x} + \frac{4m q_2 V_0}{\hbar^2} e^{-\alpha x} + \frac{2m}{\hbar^2} E \right] \Psi = 0 \quad (۵۸.۳)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\rho = e^{-\alpha x}$ رابطه (۵۸.۳) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} + \frac{\frac{2m}{\alpha^2 \hbar^2} E + \frac{4m q_2 V_0}{\alpha^2 \hbar^2} \rho - \frac{2m V_0}{\alpha^2 \hbar^2} \rho^2}{\rho^2} \right] \Psi = 0 \quad (۵۹.۳)$$

سپس به روش تحلیلی طیف انرژی رابطه (۵۹.۳) را محاسبه می‌کنیم

$$E = -\frac{1}{V_0} \left[q_2 V_0 - \frac{(2n+1)\alpha \hbar}{4m} \sqrt{2m V_0} \right]^2 \quad (۶۰.۳)$$

این رابطه انرژی مشابه رابطه انرژی در مرجع [۱۴۳] است. حال با داشتن انرژی می‌توان خواص آماری را با استفاده از آمار متمایز بررسی کرد. تابع پارش در آمار متمایز با استفاده از تابع توزیع دلتا دیراک تعمیم یافته به فرم زیر تبدیل می‌شود.

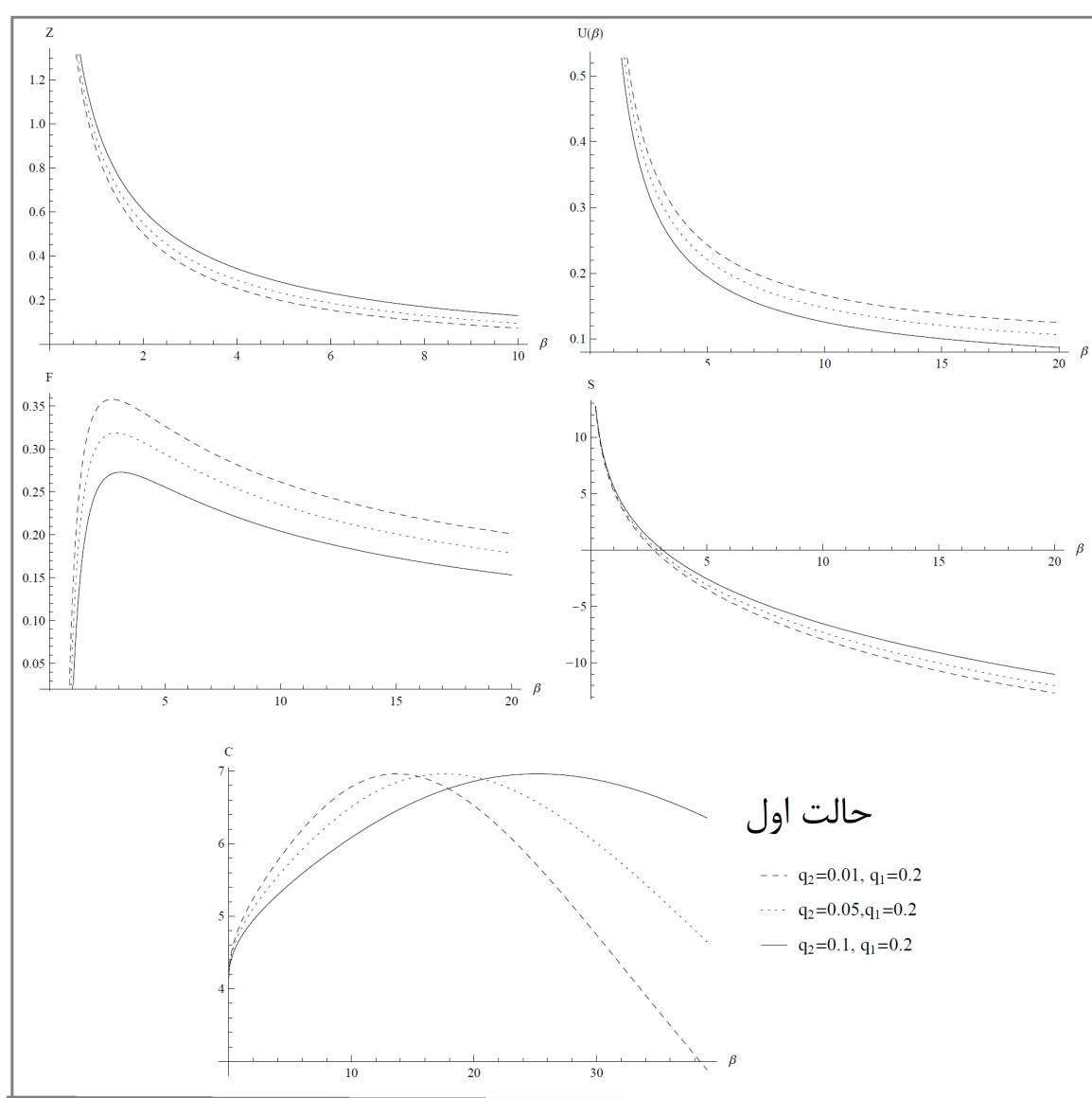
$$\begin{aligned} Z &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E} \left(1 + \frac{q_1}{2} \beta^2 E^2 \right) \quad (۶۱.۳) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\beta \left(-\frac{1}{V_0} \left[q_2 V_0 - \frac{(2n+1)\alpha \hbar}{4m} \sqrt{2m V_0} \right]^2 \right)} \left(1 + \frac{q_1}{2} \beta^2 \left(\frac{1}{V_0^2} \left[q_2 V_0 - \frac{(2n+1)\alpha \hbar}{4m} \sqrt{2m V_0} \right]^4 \right) \right) \end{aligned}$$

زمانی که $T \gg 1$ باشد یعنی زمانی که دما را بالاتر در نظر بگیریم تقریب خوبی است که جمع را توسط انتگرال جابجا کنیم که رابطه تابع پارش به رابطه زیر تبدیل می‌شود

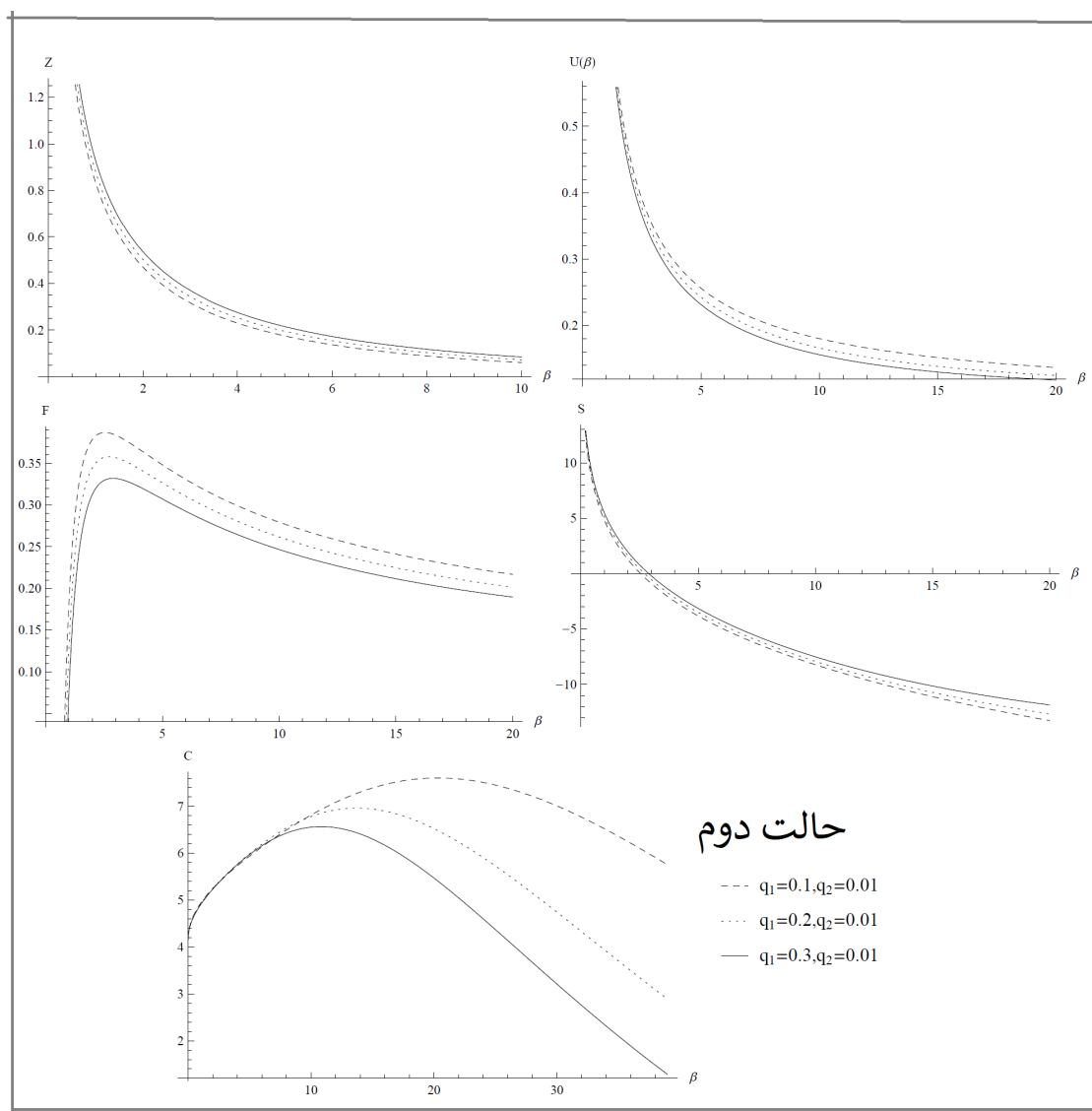
$$\begin{aligned} Z &= \int_0^{\infty} e^{\beta \left(-\frac{1}{V_0} \left[q_2 V_0 - \frac{(2n+1)\alpha \hbar}{4m} \sqrt{2m V_0} \right]^2 \right)} \times \quad (۶۲.۳) \\ &\quad \left(1 + \frac{q_1}{2} \beta^2 \left(\frac{1}{V_0^2} \left[q_2 V_0 - \frac{(2n+1)\alpha \hbar}{4m} \sqrt{2m V_0} \right]^4 \right) \right) dn \end{aligned}$$

سپس به روش مشابه با داشتن تابع پارش دیگر خواص ترمودینامیکی را محاسبه می‌کنیم [۱۴۱].

حال اثرات آمار متمایز را روی تابع پارش و دیگر خواص ترمودینامیکی در حضور پتانسیل مورس تغییرشکل یافته در دو حالت بررسی می‌کنیم که حالت اول زمانی که پارامتر $q_1 = 0.2$ و مقادیر متفاوت از پارامتر q_2 و حالت دوم زمانی است که این بار پارامتر $q_2 = 0.1$ و پارامتر q_1 مقادیر متفاوتی را به خود بگیرد، که به ترتیب در شکل‌های ۶.۳ و ۷.۳ نشان داده می‌شوند.



شکل ۶.۳: تابع پارش و خواص ترمودینامیکی برحسب پارامتر β



شکل ۷.۳: تابع پارش و خواص ترمودینامیکی برحسب پارامتر β

همانطور که در شکل‌های ۶.۳ و ۷.۳ مشاهده می‌شود: رفتار انرژی آزاد هلمهولتز در ابتدا با افزایش β افزایش می‌یابد و به مقدار ماکزیمم خود در دو حالت q به صورت زیر

$$\beta_{\max}(q_1=0.2) = (2.73, 2.80, 2.93), \quad \beta_{\max}(q_2=0.01) = (2.54, 2.61, 2.73)$$

برای مقادیر متفاوت از

$$q_2 = (0.01, 0.05, 0.1), \quad q_1 = (0.1, 0.2, 0.3)$$

می‌رسند، و سپس کاهش می‌یابد. همچنین رفتار ظرفیت گرمایی ابتدا با افزایش β افزایش می‌یابد تا به مقادیر ماکزیمم خود در دو حالت q به صورت زیر

$$\beta_{\max}(q_1=0.2) = (13.51, 17.42, 25.36), \quad \beta_{\max}(q_2=0.01) = (20.85, 13.39, 11.01)$$

برای مقادیر متفاوت از

$$q_2 = (0/01, 0/05, 0/1), q_1 = (0/1, 0/2, 0/3)$$

می‌رسند و سپس کاهش می‌یابد.

حال سراغ معادله کلاین گوردن^{۱۸} می‌رویم و این معادله را در فرمالیسم تغییر شکل یافته با استفاده از آمار متمایز بررسی می‌کنیم.

۴.۳ بررسی آمار متمایز توسط معادله کلاین – گوردن تغییر شکل یافته

در این بخش معادله‌ی نسبیتی کلاین – گوردن را انتخاب می‌کنیم. ابتدا به طور مختصر با این معادله آشنا می‌شویم. معادله کلاین – گوردن در سال ۱۹۲۶ توسط دو فیزیکدان به نام اسکار کلاین^{۱۹} و والتر گوردن^{۲۰} معرفی شد. معادله کلاین گوردن، مدل نسبیتی از معادله شرودینگر است که رفتار نسبیتی الکترون را توصیف می‌کند البته این معادله ذرات با اسپین صفر را نیز شامل می‌شوند [۱۴۴، ۱۴۵]. در این بخش آمار متمایز را توسط معادله کلاین گوردن در فرمالیسم تغییر شکل یافته مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۴.۳ معادله کلاین – گوردن

معادله کلاین – گوردن در حضور میدان مغناطیسی به فرم زیر [۱۴۶]

$$\left[D^2 - (M + S(r))^2 \right] \psi = 0 \quad (63.3)$$

است. که عملگر دیفرانسیل و پتانسیل اسکالر این مسئله را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - i e A_\mu \\ S(r) &= a_s r + \frac{b_s}{r} \end{aligned} \quad (64.3)$$

میدان مغناطیسی را شار آهارونوف بوهم^{۲۱} در نظر می‌گیریم. A_μ پتانسیل چهاربرداری را در مختصات کروی به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} A_\mu &= (A_0, 0, 0, A_\phi) \\ A_\phi &= \frac{\phi_B}{2\pi} + g(1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad (65.3)$$

¹⁸The Klein-Gordon equation

¹⁹Oskar Klein

²⁰Walter Gordon

²¹The Aharonov-Bohm

که ϕ_B شار آهارانوف بوهم و $q = eg$ معرفی می‌شوند. سپس $A_\circ$ را پتانسیل کرنل ^{۲۲} در نظر می‌گیریم

$$A_\circ(r) = a_\circ r + \frac{b_\circ}{r} \quad (۶۶.۳)$$

که r شعاع و $a_\circ, b_\circ$ ضرایب ثابتند.

۲.۴.۳ پتانسیل کرنل در میدان الکترومغناطیسی خارجی

از معادلات شعاعی و زاویه‌ای که در مراجع [۱۴۷، ۱۴۸] به‌دست آمده است استفاده می‌کنیم که به ترتیب، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_{n,\lambda,m}(r)}{dr} \right) \\ & - \left[-\frac{\ell^2}{r^2} + (M + S(r))^2 - (E_{n,\lambda,m} + eA_\circ)^2 \right] R_{n,\lambda,m}(r) = 0 \\ & \frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta (\sin\theta \partial_\theta) + \frac{(\partial_\phi^2 - 2ieA_\phi \partial_\phi - e^2 A_\phi^2)}{\sin^2\theta} Y(\theta, \varphi) = \ell^2 Y(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (۶۷.۳)$$

که ℓ^2 ثابت است. حال با بخش زاویه‌ای معادله (۶۷.۳) ادامه می‌دهیم و با استفاده از تبدیل

$$x = \cos\theta,$$

و معرفی روابط زیر

$$\begin{aligned} K_\varphi &= m - q \\ \frac{e\phi_B}{2\pi} + eg(1 - \cos\theta) &= \frac{e\phi_B}{2\pi} + eg(1 - x) \\ q &= -ge \\ m_\phi &= \frac{\phi_B e}{2\pi} + ge - K_\varphi \end{aligned} \quad (۶۸.۳)$$

رابطه (۶۷.۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta(x)}{dx} - \frac{(m_\phi + qx)^2}{(1 - x^2)} \Theta(x) = \ell^2 \Theta(x) \quad (۶۹.۳)$$

حال تغییر متغیر زیر را فرض می‌کنیم

$$Z = \frac{1-x}{2} \quad (۷۰.۳)$$

با استفاده از این تغییر متغیر رابطه (۶۹.۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \Theta(Z)}{dZ^2} + \frac{(1-2Z)}{Z(1-Z)} \frac{d\Theta(Z)}{dZ} \\ & + \left[\frac{-(m^2 + q^2 + 2mq) - (q^2 - \ell^2)Z^2 - (\frac{-4q^2 - 4m_\phi q}{4} + \ell^2)Z}{[Z(1-Z)]^2} \right] \Theta(Z) = 0 \end{aligned} \quad (۷۱.۳)$$

²²Cornell potential

تابع موج متناظر رابطه (۷۱.۳) در ترم‌هایی از چند جمله‌ای ژاکوبی بیان می‌شود [۱۱۹]

$$\Theta(x) = K_{n,\lambda,m} \left(\frac{1-x}{2} \right)^{\frac{m_\phi+q}{2}} \left(\frac{1+x}{2} \right)^{\frac{m_\phi-q}{2}} P_n^{(m_\phi+q, m_\phi-q)}(x) \quad (72.3)$$

حال به بخش شعاعی معادله کلاین گوردن بر می‌گردیم با جایگذاری روابط (۶۴.۳) - (۶۶.۳) در داخل رابطه (۶۷.۳) و با تغییر متغیر $R_{n,\lambda,m}(r) = \frac{U_{n,\lambda,m}(r)}{r}$ به فرم معادله زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2 U_{n,\lambda,m}(r)}{dr^2} + \left[\varepsilon^2 + \frac{S}{r} - dr - cr^2 - \frac{\lambda(\lambda+1)}{r^2} \right] U_{n,\lambda,m}(r) = 0 \quad (73.3)$$

که

$$\varepsilon^2 = (E^2 - 2a_s b_s - M^2 + 2e a_o b_o) \quad (74.3)$$

$$S = (-2M b_s + 2E e b_o)$$

$$d = (2M a_s - 2E e a_o)$$

$$c = (a_s^2 - e^2 a_o^2)$$

$$\lambda(\lambda+1) = (-\ell^2 + b_s^2 - e^2 b_o^2)$$

راه حل از رابطه (۷۴.۳) به صورت [۱۴۹]

$$U(r) = r^{\lambda+1} \exp\left(-\frac{\sqrt{(a_s^2 - e^2 a_o^2)}}{2} r^2 - \frac{(2M a_s - 2E e a_o)}{2\sqrt{(a_s^2 - e^2 a_o^2)}} r\right) \Psi(r) \quad (75.3)$$

است و با معرفی روابط زیر

$$x = \sqrt[4]{c} r = \sqrt[4]{(a_s^2 - e^2 a_o^2)} r \quad (76.3)$$

$$\kappa = 2\lambda + 1$$

$$\chi = \frac{d}{\sqrt[4]{c^3}} = \frac{(2M a_s - 2E e a_o)}{\sqrt[4]{(a_s^2 - e^2 a_o^2)^3}}$$

$$\eta = \frac{d^2 + 4c\varepsilon^2}{4\sqrt[4]{c^3}} = \frac{(2M a_s - 2E e a_o)^2 + 4(a_s^2 - e^2 a_o^2)(E^2 - 2a_s b_s - M^2 + 2e^2 a_o b_o)}{4\sqrt[4]{(a_s^2 - e^2 a_o^2)^3}}$$

$$\Theta = \frac{1}{2} [\rho + \chi(\kappa + 1)] = \frac{1}{2} \left[-\frac{2(-2M b_s + 2E e b_o)}{\sqrt{(a_s^2 - e^2 a_o^2)}} + \frac{(2M a_s - 2E e a_o)}{\sqrt[4]{(a_s^2 - e^2 a_o^2)^3}} (2\lambda + 2) \right]$$

$$\rho = -\frac{2S}{\sqrt[4]{c}} = -\frac{2(-2M b_s + 2E e b_o)}{\sqrt[4]{(a_s^2 - e^2 a_o^2)}}$$

رابطه (۷۳.۳) با معرفی روابط (۷۶.۳) به صورت ترم‌هایی از معادله هیون بایکانفلونت^{۲۳} بازنویسی می‌شوند [۱۵۰]

$$x \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + (\kappa + 1 - \chi x - 2x^2) \frac{d\Psi}{dx} + [(\eta - \kappa - 2)x - \Theta] \Psi = 0 \quad (77.3)$$

²³The biconfluent Heun equation

و با استفاده از روابط بازگشتی زیر

$$B_{i+2} = [(i+1)\chi + \Theta] B_{i+1} - (i+1)(i+\kappa+1)(\eta - \kappa - 2 - 2i) B_i \quad (78.3)$$

می‌توان طیف انرژی را به‌دست آورد

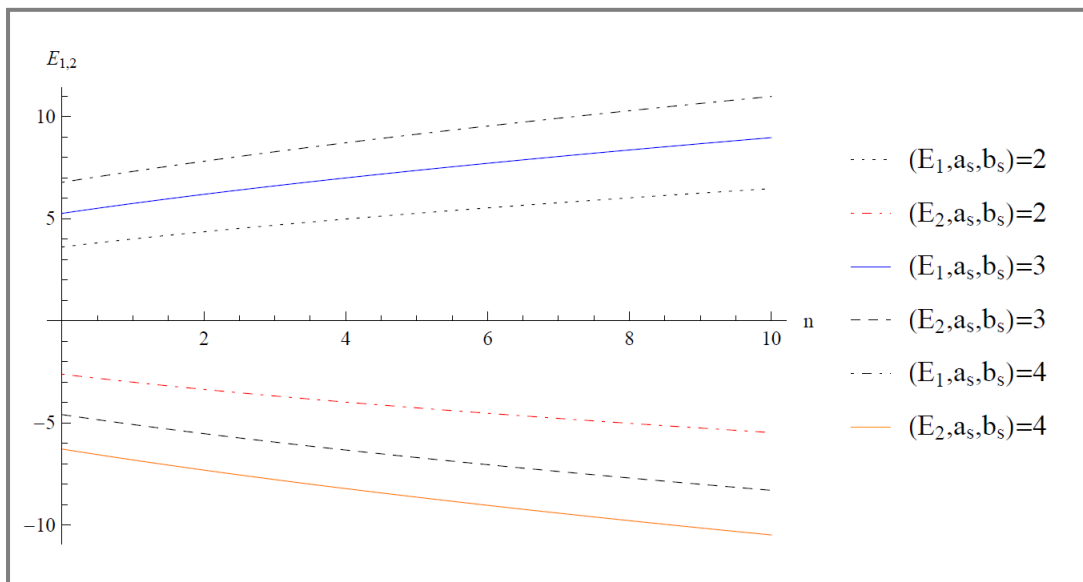
$$E_{1,2} = M_E \pm M_E \sqrt{1 + \frac{1}{M_E^2} \left[\frac{Z}{4a_s^2} \right]} \quad (79.3)$$

که

$$M_E = \frac{e a_o M}{a_s} \quad (80.3)$$

$$Z = \left[\lambda a_s^3 b_s - \lambda e^2 a_o b_o a_s^2 - \lambda a_s b_s e^2 a_o^2 - 4 a_s^2 M_E^2 \right. \\ \left. + \lambda e^4 a_o^3 b_o + 4(2n + 2\lambda + 2) \sqrt{(a_s^2 - e^2 a_o^2)^3} \right]$$

همانطور که مشاهده می‌شود انرژی به پارامترهای b_o, b_s, a_o, a_s وابسته است. حال اثرات از این پارامترها را روی انرژی برحسب عدد کوانتومی در شکل ۸.۳ نشان داده می‌شوند.



شکل ۸.۳: طیف انرژی برحسب عدد کوانتومی n

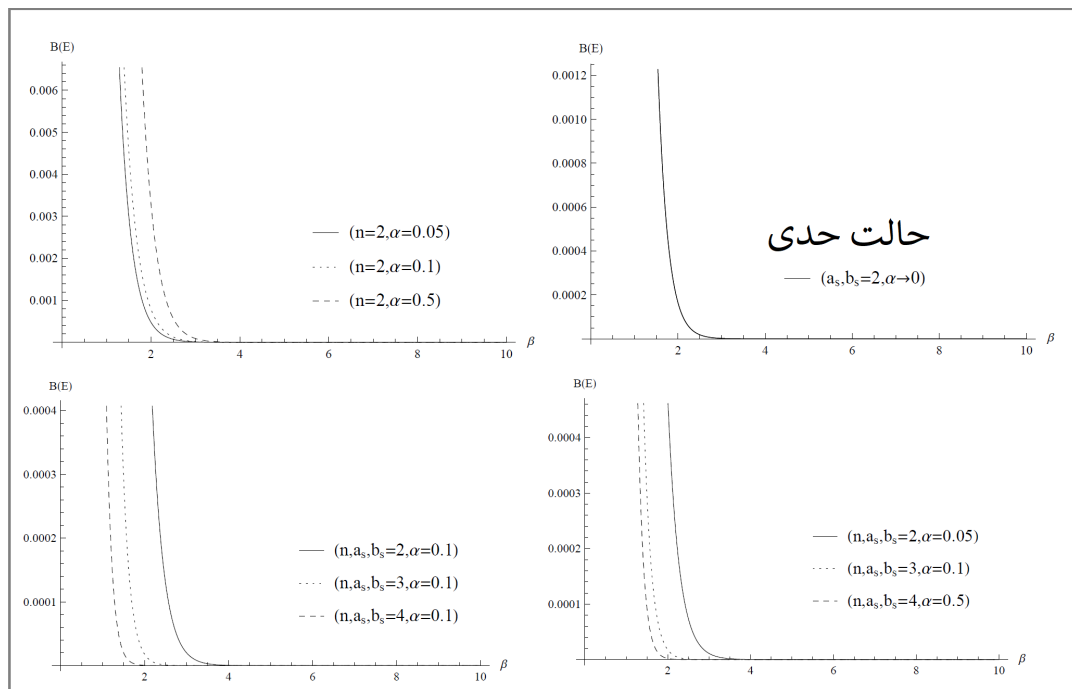
سپس با محاسبه انرژی می‌توان این مسئله را در مکانیک آمار متمایز بررسی کرد.

۳.۴.۳ بررسی آمار متمایز با استفاده از معادله کلاین – گوردن

عامل بولتزمن موثر در آمار متمایز با استفاده از توزیع دلتای دیراک تعمیم یافته به صورت زیر است [۱۵۱]

$$B(E) = e^{-\beta E} \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma} \beta^\gamma E^\gamma \right) \quad (۸۱.۳)$$

که α پارامتر تغییر شکل یافته است که همانطور می دانید در حالت حدی زمانی که این پارامتر به سمت صفر میل می کند این آمار تصحیح شده به آمار بولتزمن – گیبس تبدیل می شود. حال اثرات از پارامترهای متفاوت (n, α, a_s, b_s) را روی عامل بولتزمن موثر بر حسب β در شکل ۹.۳ نشان داده می شود.



شکل ۹.۳: رفتار عامل بولتزمن بر حسب پارامتر β برای مقادیر متفاوت از (n, α, a_s, b_s)

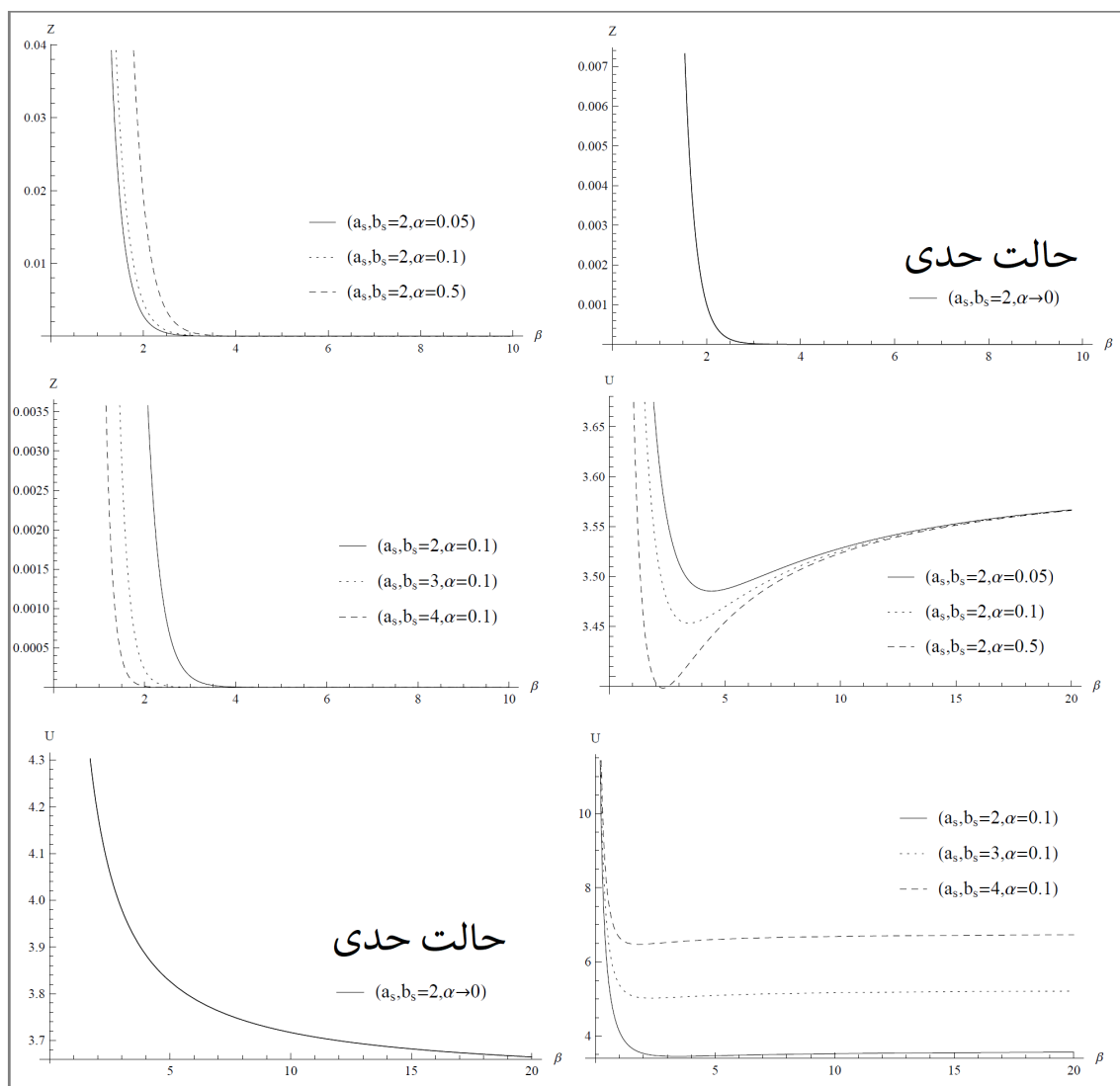
تابع پارش برای این توزیع دلتای دیراک تعمیم یافته به فرم زیر محاسبه می شود

$$Z = \int_0^\infty B(E) d n \quad (۸۲.۳)$$

و با محاسبه تابع پارش، می توان انرژی داخلی به فرم زیر محاسبه کرد.

$$U = - \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} \quad (۸۳.۳)$$

اثرات از پارامترهای متفاوت (n, α, a_s, b_s) را روی تابع پارش و انرژی داخلی بر حسب β در شکل ۱۰.۳ نشان داده می شود.



شکل ۱۰.۳: رفتار تابع پارش و انرژی داخلی برحسب پارامتر β برای مقادیر متفاوت از (n, α, a_s, b_s)

همانطور که از شکل ۱۰.۳ مشاهده می‌شود رفتار تابع پارش برحسب β با افزایش پارامتر تغییر شکل یافته یک انتقال به سمت راست داریم و بالعکس با افزایش پارامتر پتانسیل یک انتقال به سمت چپ ایجاد می‌شود. و همینطور رفتار انرژی داخلی با افزایش پارامتر تغییر شکل یافته ابتدا انرژی کاهش یافته و سپس افزایش پیدا کرده ولی با افزایش پارامتر β به یک مقدار اشباع رسیدند و به عبارت دیگر، با افزایش پارامتر پتانسیل مقدار انرژی افزایش یافته و با افزایش پارامتر β انرژی به مقدار ثابتی میل کرده است.

۵.۳ بررسی آمار متمایز براساس نوسان دمایی به جای نوسان معکوس دمایی

در این بخش نوسان دمایی را به جای نوسان معکوس دمایی در نظر می‌گیریم به طوری که با استفاده از این فرض رابطه ترمودینامیکی $F = U - T_0 S$ هنوز هم برقرار است. سپس آمار متمایز را براساس نوسان دمایی در آنسامبل کانونی در نظر می‌گیریم و برخی مدل‌های فیزیکی را براساس سه آمار که عبارتند از: آمار بوز انیشتین، آمار فرمی دیراک و آمار ماکسول بولتزمن مورد بررسی قرار می‌دهیم و در انتها حالت حدی این مسئله را بررسی می‌کنیم که مشاهده می‌شود در حالت حدی این سه آمار با استفاده از این فرض به آمار معمولی در مکانیک آماری منجر می‌شود. ابتدا به طور مختصر در مورد آمار متمایز از نوسانات دمایی مطالبی را ذکر می‌کنیم. آمار متمایز از این فرض که معکوس دمایی $\beta = \frac{1}{T}$ در اطراف معکوس دما تعادلی $\beta_0 = \frac{1}{T_0}$ نوسان می‌کند نشأت می‌گیرد [۱۵۲، ۱۵۳] - [۱۲۵، ۱۲۶]. حال سیستمی را در نظر بگیرید که بدون نوسان معکوس دمایی است احتمال اینکه سیستم در حالت انرژی E باشد به صورت زیر است

$$P(E) = \frac{e^{-\beta_0 E}}{Z(\beta_0)}, \quad Z(\beta_0) = \sum_E e^{-\beta_0 E} \quad (۸۴.۳)$$

با این حال در این سیستم با نوسان معکوس دمایی ما این احتمال توزیع را برای β در نظر می‌گیریم و این تابع توزیع را توسط $g(\beta, \beta_0)$ نشان می‌دهیم، احتمال اینکه سیستم در معکوس دمایی دارای انرژی E است را به فرم زیر تعریف می‌کنیم [۱۲۳]

$$P(E) = \int g(\beta, \beta_0) \frac{e^{-\beta E}}{Z(\beta)} d\beta \quad (۸۵.۳)$$

حال ممکنه این سوال مطرح شود چرا از نوسانات دمایی به جای نوسانات معکوس دمایی استفاده می‌کنیم؟ بین این دو نوسان چه تفاوت‌هایی وجود دارد؟ در این بخش این دو نوسان را مقایسه می‌کنیم و به این نتیجه منجر می‌شود که آمار متمایز نوسان دمایی نتیجه مناسب‌تری نسبت به آمار متمایز نوسان معکوس دمایی ارائه می‌دهد و درنهایت این قوانین ترمودینامیکی در حالت حدی به فرم معمولی خود منجر می‌شوند.

۱.۵.۳ آمار متمایز نوسان یافته- β در آنسامبل کانونی

اجازه دهید حالتی از سیستم را در نظر بگیریم که در میان L معکوس دمایی، سیستم در یکی از حالات معکوس دمایی $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_L\}$ قرار دارد. فرض کنید میکرو حالات از سیستم توسط $\{E_n\}$ که مستقل از معکوس دمایی β_i داده شده است. حال $P(\beta_i) = \ell_i$ است احتمال

اینکه سیستم در معکوس دمایی β_i قرار بگیرد به صورت [۱۰۶]

$$\sum_i P(\beta_i) = \sum_i \ell_i = 1 \quad (۸۶.۳)$$

است. این شرایط احتمال این که سیستم انرژی E_n برای β_i می‌دهد را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$P(E_n | \beta_i) = \frac{P(E_n \cap \beta_i)}{P(\beta_i)} = \frac{e^{-\beta_i E_n}}{\sum_n e^{-\beta_i E_n}} \quad (۸۷.۳)$$

احتمال اینکه سیستم دارای انرژی E_n به صورت زیر است [۱۵۳]

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \sum_i P(E_n \cap \beta_i) = \sum_i P(E_n | \beta_i) P(\beta_i), \\ \sum_n P(E_n) &= \sum_n \sum_i P(E_n | \beta_i) P(\beta_i) = \sum_n \sum_i \frac{\ell_i}{Z_i(\beta_i)} e^{-\beta_i E_n} \\ &= \sum_i \frac{\ell_i}{Z_i(\beta_i)} \sum_n e^{-\beta_i E_n} = \sum_i \ell_i = 1 \end{aligned} \quad (۸۸.۳)$$

مقدار چشمداشتی انرژی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \sum_n E_n P(E_n) = \sum_n E_n \sum_i \frac{\ell_i}{Z_i(\beta_i)} e^{-\beta_i E_n} \\ &= \sum_i \frac{\ell_i}{Z_i(\beta_i)} \sum_n E_n e^{-\beta_i E_n} = \sum_i \ell_i \langle E \rangle_i \end{aligned} \quad (۸۹.۳)$$

بنابراین مقدار چشمداشتی انرژی در آنسامبل کانونی برای معکوس دمایی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle E \rangle_i = -\frac{\partial}{\partial \beta_i} \ln Z_i \quad (۹۰.۳)$$

انرژی آزاد هلمهولتز در این معکوس دمایی β_i به صورت

$$F_i = -T_i \ln Z_i \quad (۹۱.۳)$$

که $\beta_i = \frac{1}{T_i}, k = 1$ قرار می‌دهیم. حال معکوس دمایی آنتروپی β_i به صورت

$$S_i = -\sum_n p_i(E_n, \beta_i) \ln p_i(E_n, \beta_i) \quad (۹۲.۳)$$

است. این کمیت‌های بالا توسط رابطه زیر به هم مرتبط هستند

$$F_i = U_i - T_i S_i \quad (۹۳.۳)$$

مقدار چشمداشتی رابطه (۹۳.۳) بر روی β_i به صورت زیر داده می‌شود

$$\langle F \rangle = \langle E \rangle - \langle T S \rangle \quad (۹۴.۳)$$

این رابطه (۹۴.۳) به رابطه در ترمودینامیک معمولی با معکوس دمای تعادل $\beta_0 = \frac{1}{T_0}$ اشاره دارد که به صورت

$$F = U - T_0 S \quad (95.3)$$

است. به منظور در نظر گرفتن رابطه (۹۴.۳) با حالت استاندارد رابطه (۹۵.۳) لازم است یک تعریف جدید برای آنتروپی زمانی که نوسانات معکوس دمایی داریم، معرفی شود.

$$S = \frac{1}{T_0} \langle T S \rangle = \beta_0 \left\langle \frac{1}{\beta} S \right\rangle \quad (96.3)$$

ابتدا آمار متمایز نوسان یافته استاندارد β را در نظر می گیریم. در این حالت ما فرض می کنیم

$$\langle \beta \rangle = \sum_i \ell_i \beta_i = \beta_0 \quad (97.3)$$

که $\beta_0 = \frac{1}{T_0}$ معکوس دمای تعادل است. با این وجود، این انتخاب رابطه (۹۷.۳) با رابطه (۹۶.۳) مقایسه شده است و یک تناقض را می دهد. این آنتروپی سیستم به صورت زیر بازنویسی می شود

$$S = \sum_i \ell_i \frac{\langle T S \rangle_i}{T_0} = \sum_i \frac{\ell_i}{Z_i} \sum_n \left(\frac{\beta_0}{\beta_i} \right) S_i e^{-\beta_i E_n} \quad (98.3)$$

تعریف رابطه بالا با شکست مواجه شد چرا که به نتایج کلاسیکی در حالت بدون نوسان کاهش نمی یابد. این حالت اشغال از هر میکرو حالت را در نظر می گیریم که مساوی احتمال است و این W تعداد میکرو حالات است. در این حالت ما $S_i = \ln W$ و $S = \ln W$ داریم زیرا $p_i(E_n, \beta_i)$ وابسته روی معکوس دمایی نیست. سپس از رابطه (۹۸.۳) داریم

$$\ln W = \sum_i \ell_i \left(\frac{\beta_0}{\beta_i} \right) \ln W, \quad (99.3)$$

که

$$\left\langle \frac{1}{\beta} \right\rangle = \frac{1}{\beta_0} \quad (100.3)$$

می دهد. با مقایسه با رابطه (۹۷.۳) تناقض را می دهد. حال این تناقض را برای توزیع دوسطحی نشان دهیم که به صورت (β_+, β_-) با احتمال

$$l_+ = \frac{1}{2}, \quad l_- = \frac{1}{2} \quad (101.3)$$

که $\beta_+ \neq \beta_-$ است. در این حالت از رابطه (۹۷.۳) داریم

$$\langle \beta \rangle = \frac{\beta_+ + \beta_-}{2} = \beta_0 \quad (102.3)$$

و از رابطه (۱۰۰.۳) نتیجه می شود

$$\left\langle \frac{1}{\beta} \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta_+} + \frac{1}{\beta_-} \right) = \frac{1}{\beta_0}, \quad (103.3)$$

که

$$(\beta_+ - \beta_-)^2 = 0 \rightarrow \beta_+ = \beta_-,$$

تناقض را می‌دهد. بنابراین اگر رابطه (۹۵.۳) درست باشد باید $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_0}$ به جای $\beta = \beta_0$ انتخاب شود. بنابراین ما آمار متمایز نوسان یافته T_- را به جای آمار متمایز نوسان یافته β_- به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\langle T \rangle = \sum_i \ell_i T_i = T. \quad (104.3)$$

۲.۵.۳ آمار متمایز نوسان یافته T_- برای آنسامبل کانونی

در این قسمت مساله نوسانگر هارمونیک کوانتومی با توزیع‌های دوسطحی و سه‌سطحی براساس نوسانات دمایی برای سه آمار ماکسول بولتزمن، فرمی دیراک و بوز انیشتین مورد بررسی قرار می‌دهیم. عامل بولتزمن موثر برای نوسان یافته β_- و نوسان یافته T_- به ترتیب به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$\begin{aligned} B(\beta_0) &= \int_0^\infty e^{-\beta E} g(\beta, \beta_0) d\beta \\ B(T_0) &= \int_0^\infty e^{-\frac{E}{T}} g(T, T_0) dT \end{aligned} \quad (105.3)$$

توزیع دوسطحی

پتانسیل در آنسامبل کانونی q از نوسانگر هارمونیک کوانتومی در دمای T به صورت زیر داده می‌شود

$$q = \sum_\varepsilon L n Z_T = \frac{1}{a} \sum_\varepsilon L n \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \right) \quad (106.3)$$

که $(a = -1, 0, 1)$ به ترتیب نمایانگر آمار بوز - انیشتین، آمار ماکسول - بولتزمن و آمار فرمی - دیراک است. متوسط تعداد ذرات در آمار متمایز نوسان دمایی به صورت

$$\langle n \rangle_{(T)} = \int \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} + a} g(T, T_0) dT \quad (107.3)$$

است. در اینجا شدت احتمال را برابر توزیع دوسطحی از دمای T در بازه

$$T_0(1 - \gamma) \leq T \leq T_0(1 + \gamma)$$

به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$g(T, T_0) = \frac{1}{\gamma} [\delta(T - T_1) + \delta(T - T_2)] \quad (108.3)$$

با جایگذاری رابطه (۱۰۸.۳) در رابطه (۱۰۷.۳) می توان متوسط ذرات را در آمار متمایز نوسان یافته-
 T به دست آورد

$$\langle n \rangle_{(r)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}(1-\gamma)} + a} + \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}(1+\gamma)} + a} \right] \quad (109.3)$$

میانگین عدد اشغال رابطه (۱۰۹.۳) و انرژی داخلی برای مقادیر کوچکتر از γ به صورت زیر محاسبه می شود

$$\langle n \rangle_{(r)} \approx \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} + a} + \frac{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \varepsilon \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (-2T_0 + \varepsilon) - a(2T_0 + \varepsilon) \right) \gamma^2}{2 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^3 T_0^2}, \quad (110.3)$$

$$U_{(r)} = \varepsilon \langle n \rangle_{(r)} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} + a} + \frac{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \varepsilon^2 \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (-2T_0 + \varepsilon) - a(2T_0 + \varepsilon) \right) \gamma^2}{2 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^3 T_0^2}$$

که $\varepsilon = h\vartheta$ ، سپس ما این شدت انرژی I که متناسب با شدت از حالات و همینطور انرژی داخلی را محاسبه می کنیم

$$I_{(r)} \simeq \int_0^\infty u(\vartheta) d\vartheta, \quad (111.3)$$

$$u_{(r)}(\vartheta) = \frac{\Lambda \pi h \vartheta^3}{c^3} \left[\frac{1}{a + e^{\frac{h\vartheta}{T_0}}} + \frac{e^{\frac{h\vartheta}{T_0}} h\vartheta \left(e^{\frac{h\vartheta}{T_0}} (-2T_0 + h\vartheta) - a(2T_0 + h\vartheta) \right) \gamma^2}{2 \left(a + e^{\frac{h\vartheta}{T_0}} \right)^3 T_0^2} \right]$$

انرژی آزاد هلمهولتز و آنتروپی برای مقادیر کوچک γ به صورت زیر داده می شود

$$F_{(r)} = - \int T g(T, T_0) \ln Z dT \quad (112.3)$$

$$\approx - \int \frac{T}{\gamma a} (\delta [T - T_1] + \delta [T - T_2]) \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \right) dT$$

$$\approx - \frac{1}{\gamma a} \left(T_1 \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_1}} \right) + T_2 \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_2}} \right) \right)$$

$$\approx - \frac{T_0 \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)}{a} - \frac{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \varepsilon^2 \gamma^2}{2 T_0 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^2}$$

$$S_{(r)} \approx \frac{U}{T_0} - \frac{F}{T_0} \approx \frac{\varepsilon}{T_0 \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} + a \right)} + \frac{\ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)}{a}$$

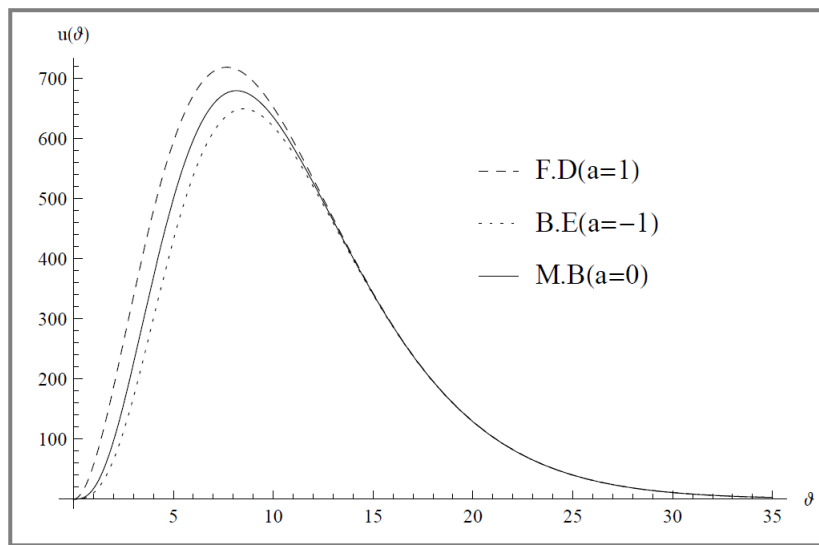
$$- \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (T_0 - \varepsilon) + a (T_0 + \varepsilon) \right)}{2 T_0^3 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^3}$$

ظرفیت گرمایی برای مقادیر کوچکتر از γ به صورت

$$C(\gamma) \approx \frac{\partial U(\gamma)}{\partial T_0} \approx \frac{\varepsilon^2 e^{\frac{\varepsilon}{T_0}}}{\left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}}\right)^2 T_0^2} \quad (113.3)$$

$$+ \frac{\varepsilon^2 e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \gamma^2 \left(4 a e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (T_0 - \varepsilon) (T_0 + \varepsilon) + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \left(2 T_0^2 - 4 T_0 \varepsilon + \varepsilon^2\right) + a^2 \left(2 T_0^2 + 4 T_0 \varepsilon + \varepsilon^2\right)\right)}{2 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}}\right)^4 T_0^4}$$

حال اثرات از پارامترهای $(a = (1, 0, -1), \gamma = 0, T_0 = 2/72)$ را روی شدت انرژی در شکل ۱۱.۳ مشاهده می‌کنید.



شکل ۱۱.۳: رفتار شدت انرژی بر حسب ϑ برای $(\gamma = 0)$

حالت اول: آمار بوز - انیشتین $(a = -1)$

متوسط تعداد ذرات و انرژی داخلی برای مقادیر γ کوچک به صورت

$$\langle n \rangle_{B.E}(\gamma) \approx \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} - 1} + \frac{\varepsilon \left(-2 T_0 + \varepsilon \coth \left[\frac{\varepsilon}{2 T_0} \right] \right) \gamma^2}{\lambda \sinh^2 \left[\frac{\varepsilon}{2 T_0} \right] T_0^2} \quad (114.3)$$

$$U_{B.E}(\gamma) \approx \varepsilon \langle n \rangle_{B.E}(\gamma) \approx \frac{\varepsilon}{-1 + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}}} + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 \left(-2 T_0 + \varepsilon \coth \left[\frac{\varepsilon}{2 T_0} \right] \right)}{\lambda T_0^2 \sinh^2 \left[\frac{\varepsilon}{2 T_0} \right]}$$

است. شدت انرژی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$I_{B.E}(\gamma) \approx \int_0^\infty u(\vartheta) d\vartheta, \quad (115.3)$$

$$u_{B.E}(\gamma)(\vartheta) = \frac{\lambda \pi h \vartheta^3}{c^3} \left[\frac{1}{-1 + e^{\frac{h\vartheta}{T_0}}} + \frac{h\vartheta \gamma^2 \left(-2 T_0 + h\vartheta \coth \left[\frac{h\vartheta}{2 T_0} \right] \right)}{\lambda T_0^2 \sinh^2 \left[\frac{h\vartheta}{2 T_0} \right]} \right]$$

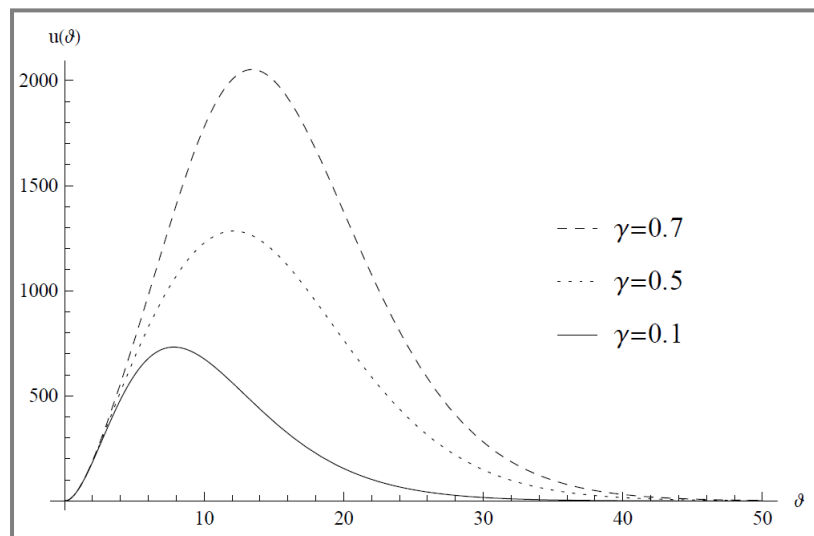
انرژی هلمهولتز، آنتروپی و ظرفیت گرمایی به صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$F_{B.E}(\gamma) \approx T_0 \ln \left[1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \right] + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2}{4 T_0 - 4 T_0 \cosh \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right]} \quad (116.3)$$

$$S_{B.E}(\gamma) \approx \frac{\varepsilon}{T_0 \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} - 1 \right)} - \ln \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \right) - \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 \left(T_0 - \varepsilon \coth \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right] \right)}{4 T_0^2 \left(-1 + \cosh \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right] \right)}$$

$$C_{B.E}(\gamma) \approx \frac{\varepsilon^2}{4 T_0^2 \sinh^2 \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right]} + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 \left(\left(2 T_0^2 + \varepsilon^2 \right) \cosh \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right] - 2 \left(T_0^2 + 2 T_0 \varepsilon \sinh \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right] - \varepsilon^2 \right) \right)}{16 T_0^4 \sinh^4 \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right]}$$

رفتار شدت انرژی بر حسب ϑ برای مقادیر متفاوت از γ در شکل ۱۲.۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۱۲.۳: رفتار شدت انرژی بر حسب ϑ برای مقادیر متفاوت $(\gamma, T_0 = 2/72)$

حالت دوم: آمار فرمی دیراک ($a = 1$)

متوسط تعداد ذرات و انرژی داخلی را برای γ کوچکتر داریم

$$\langle n \rangle_{F.D}(\gamma) \approx \frac{1}{1 + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}}} + \frac{\varepsilon \gamma^2 \left(-2 T_0 + \varepsilon \tanh \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right] \right)}{\lambda T_0^2 \cosh^2 \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right]} \quad (117.3)$$

$$U_{F.D}(\gamma) \approx \varepsilon \langle n \rangle_{F.D}(\gamma) \approx \frac{\varepsilon}{1 + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}}} + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 \left(-2 T_0 + \varepsilon \tanh \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right] \right)}{\lambda T_0^2 \cosh^2 \left[\frac{\varepsilon}{T_0} \right]}$$

که $\varepsilon = h \vartheta$ است. این شدت انرژی به صورت زیر است

$$I_{F.D}(\gamma) \simeq \int_0^\infty u(\vartheta) d\vartheta, \quad (118.3)$$

$$u_{F.D}(\gamma)(\vartheta) = \frac{\lambda \pi h \vartheta^3}{c^3} \left[\frac{1}{1 + e^{\frac{h \vartheta}{T_0}}} + \frac{h \vartheta \gamma^2 \left(-2 T_0 + h \vartheta \tanh \left[\frac{h \vartheta}{T_0} \right] \right)}{\lambda T_0^2 \cosh^2 \left[\frac{h \vartheta}{T_0} \right]} \right]$$

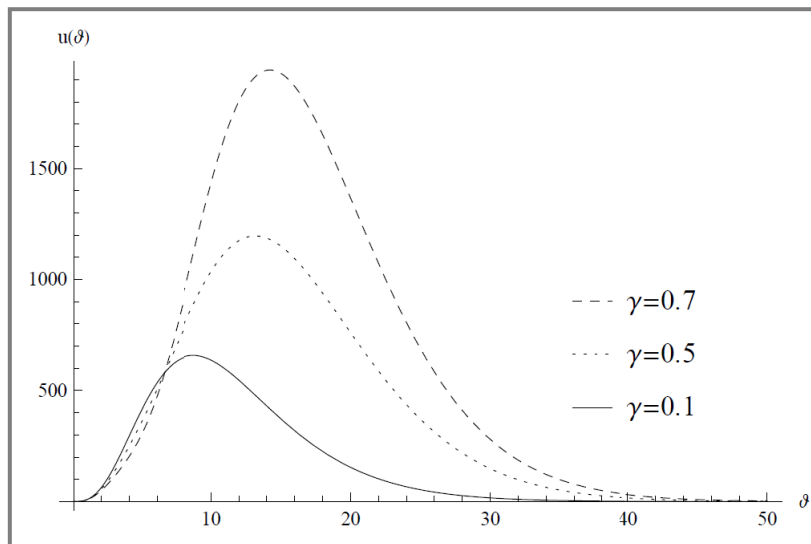
انرژی آزاد هلمهولتز، آنروپی و ظرفیت گرمایی برای آمار فرمی دیراک به فرم زیر تبدیل می‌شوند

$$F_{F.D}(\gamma) \approx -T_0 \ln \left[1 + e^{-\frac{\epsilon}{T_0}} \right] - \frac{\epsilon^2 \gamma^2}{4 T_0 + 4 T_0 \cosh \left[\frac{\epsilon}{T_0} \right]} \quad (119.3)$$

$$S_{F.D}(\gamma) \approx \frac{\epsilon}{T_0 \left(e^{\frac{\epsilon}{T_0}} + 1 \right)} + \ln \left(1 + e^{-\frac{\epsilon}{T_0}} \right) - \frac{\epsilon^2 \gamma^2 \left(T_0 - \epsilon \tanh \left[\frac{\epsilon}{4 T_0} \right] \right)}{4 T_0^2 \left(1 + \cosh \left[\frac{\epsilon}{T_0} \right] \right)}$$

$$C_{F.D}(\gamma) \approx \frac{\epsilon^2}{4 \cosh^2 \left[\frac{\epsilon}{4 T_0} \right] T_0^2} + \frac{\epsilon^2 \gamma^2 \left(2 (T_0 - \epsilon) (T_0 - \epsilon) + (2 T_0^2 + \epsilon^2) \cosh \left[\frac{\epsilon}{T_0} \right] - 4 T_0 \epsilon \sinh \left[\frac{\epsilon}{T_0} \right] \right)}{16 \cosh^4 \left[\frac{\epsilon}{4 T_0} \right] T_0^4}$$

رفتار شدت انرژی از توزیع دو تراز بر حسب ϑ برای مقادیر متفاوت از $(\gamma, T_0 = 2/72)$ در شکل ۱۳.۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۱۳.۳: رسم‌هایی از شدت انرژی بر حسب ϑ

به روش مشابه کمیت‌های ترمودینامیکی را برای مقادیر کوچک γ محاسبه می‌کنیم

$$\langle n \rangle_{M.B}(\gamma) \approx e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \left(1 + \frac{\varepsilon \gamma^2 (-2T_0 + \varepsilon)}{2 T_0^2} \right) \quad (120.3)$$

$$U_{M.B}(\gamma) \approx \varepsilon \langle n \rangle_{M.B}(\gamma) \approx \varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \left(1 + \frac{\varepsilon \gamma^2 (-2T_0 + \varepsilon)}{2 T_0^2} \right)$$

$$I_{M.B}(\gamma) \approx \int_0^\infty u(\vartheta) d\vartheta,$$

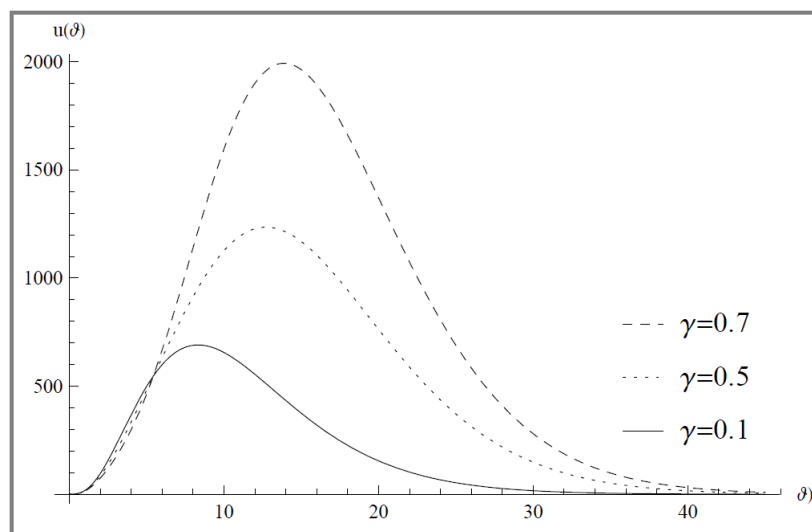
$$u_{M.B}(\gamma)(\vartheta) = \frac{\lambda \pi h \vartheta^3}{c^3} e^{-\frac{h\vartheta}{T_0}} \left[1 + \frac{h\vartheta \gamma^2 (-2T_0 + h\vartheta)}{2 T_0^2} \right]$$

$$F_{M.B}(\gamma) \approx -\frac{e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \varepsilon^2 \gamma^2}{2 T_0}$$

$$S_{M.B}(\gamma) \approx \frac{\varepsilon e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}}}{T_0} + \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} (-T_0 + \varepsilon)}{2 T_0^3}$$

$$C_{M.B}(\gamma) \approx \frac{\varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}}}{T_0^2} + \frac{\varepsilon^2 e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \gamma^2 (2T_0^2 - 4T_0\varepsilon + \varepsilon^2)}{2 T_0^4}$$

رفتار شدت انرژی از توزیع دو تراز بر حسب ϑ برای مقادیر متفاوت از $(\gamma, T_0 = 2/72)$ در شکل ۱۴.۳ مشاهده می‌شود.



شکل ۱۴.۳: رسم‌هایی از شدت انرژی بر حسب ϑ برای مقادیر متفاوت از γ

۳.۵.۳ توزیع سه تراز

حال به بررسی مساله با شدت احتمال سه تراز می‌پردازیم. متوسط تعداد ذرات برای آمار متمایز نوسان - T به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle n \rangle(\gamma) = \int \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T}} + a} g(T, T_0) dT \quad (121.3)$$

ما چگالی احتمال را یک توزیع سه سطحی در دمای T در نظر می‌گیریم

$$g(T, T_0) = \frac{1}{3} [\delta(T - T_1) + \delta(T - T_2) + \delta(T - T_3)] \quad (122.3)$$

رابطه (۱۲۲.۳) در رابطه (۱۲۱.۳) قرار می‌دهیم و متوسط ذرات برای توزیع سه‌تزاری به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\langle n \rangle_{(3)} = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}(1-\gamma)} + a} + \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} + a} + \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}(1+\gamma)} + a} \right] \quad (123.3)$$

میانگین عدد اشغال و انرژی داخلی برای γ کوچک به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\langle n \rangle_{(3)} \approx \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} + a} + \frac{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \varepsilon \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (-2T_0 + \varepsilon) - a(2T_0 + \varepsilon) \right) \gamma^2}{3 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^3 T_0^2} \quad (124.3)$$

$$U_{(3)} = \varepsilon \langle n \rangle_{(3)} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} + a} + \frac{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \varepsilon^2 \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (-2T_0 + \varepsilon) - a(2T_0 + \varepsilon) \right) \gamma^2}{3 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^3 T_0^2}$$

شدت انرژی، انرژی هلمهولتز، آنترپی و ظرفیت گرمایی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$I_{(3)} \simeq \int_0^\infty u(\vartheta) d\vartheta, \quad (125.3)$$

$$u_{(3)}(\vartheta) = \frac{\Lambda \pi h \vartheta^3}{c^3} \left[\frac{1}{a + e^{\frac{h\vartheta}{T_0}}} + \frac{e^{\frac{h\vartheta}{T_0}} h\vartheta \left(e^{\frac{h\vartheta}{T_0}} (-2T_0 + h\vartheta) - a(2T_0 + h\vartheta) \right) \gamma^2}{3 \left(a + e^{\frac{h\vartheta}{T_0}} \right)^3 T_0^2} \right]$$

$$\begin{aligned} F_{(3)} &\approx - \int \frac{T}{3a} (\delta[T - T_1] + \delta[T - T_2] + \delta[T - T_3]) \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T}} \right) dT \\ &\approx - \frac{1}{3a} \left(T_1 \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_1}} \right) + T_2 \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_2}} \right) + T_3 \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_3}} \right) \right) \\ &\approx - \frac{T_0 \ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)}{a} - \frac{e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \varepsilon^2 \gamma^2}{3 T_0 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^2} \end{aligned}$$

$$S_{(3)} \approx \frac{U}{T_0} - \frac{F}{T_0} \approx \frac{\varepsilon}{T_0 \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} + a \right)} + \frac{\ln \left(1 + a e^{-\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)}{a} - \frac{\varepsilon^2 \gamma^2 e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \left(e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (T_0 - \varepsilon) + a(T_0 + \varepsilon) \right)}{3 T_0^3 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^3}$$

$$\begin{aligned} C_{(3)} &\approx \frac{\partial U}{\partial T_0} \approx \frac{\varepsilon^2 e^{\frac{\varepsilon}{T_0}}}{\left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^2 T_0^2} \\ &+ \frac{\varepsilon^2 e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \gamma^2 \left(4 a e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (T_0 - \varepsilon) (T_0 + \varepsilon) + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} (2T_0^2 - 4T_0 \varepsilon + \varepsilon^2) + a^2 (2T_0^2 + 4T_0 \varepsilon + \varepsilon^2) \right)}{3 \left(a + e^{\frac{\varepsilon}{T_0}} \right)^4 T_0^4} \end{aligned}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید، با حذف پارامتر تغییر شکل یافته γ روابط به روابط معمول در مکانیک آماری تبدیل می‌شوند.

فصل ۴

بررسی پراکندگی فرمیون‌ها در فرمالیسم تغییر شکل یافته

۱.۴ پراکندگی فرمیون نسبیتی در فرمالیسم تغییر شکل یافته q

در این فصل می‌خواهیم حالت‌های پراکندگی را در فرمالیسم تغییر شکل یافته مورد بررسی قرار دهیم. از پتانسیل‌های دلتای دیراک منفرد، دلتای دیراک دوگانه و چاه پتانسیل استفاده می‌کنیم زیرا کاربرد بسیاری در زمینه هسته‌ای دارند و می‌تواند پتانسیل مناسبی برای تعیین پراکندگی باشند. رهیافت ساده‌ای برای ارتباط با مسائل دیراک فرض شده است و بدان وسیله معادله دیراک با استفاده از این پتانسیل‌ها بررسی شده است. در نهایت ضرائب عبور و بازتاب به خوبی گزارش شده است [۱۵۴].

۱.۱.۴ مکانیک کوانتومی تغییر شکل یافته q

ابتدا فرمالیسم تغییر شکل یافته را در مکانیک کوانتومی به طور مختصر معرفی می‌کنیم. ۱- در این فرمالیسم از مکانیک کوانتومی مشابه یک حالت دلخواه، فرم وابسته زمان معادله شرودینگر در این فرمالیسم به صورت زیر بیان می‌شود [۱۵۵].

$$i \hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = H(\hat{x}, \hat{p}) \Psi(x, t) = \left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}) \right) \Psi(x, t) \quad (1.4)$$

عملگرهای مکان و تکانه در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$\begin{aligned} \hat{p} &= -i \hbar D_x \\ &= -i \hbar \left(1 + q x^2 \right) \frac{d}{dx}, \\ \hat{x} &= x \end{aligned} \quad (2.4)$$

که q مقدار ثابت مثبت و Ψ تابع موج معرفی می‌شوند.

۲- حاصلضرب داخلی از فضای هیلبرت در مکانیک کوانتومی تغییر شکل یافته q در یک بعد به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x) f(x) d_q x \\ d_q x &= \frac{dx}{(1 + q x^2)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

۳- مقدار چشمداشتی عملگر $\hat{O}$ از تابع موج Ψ به صورت زیر است

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle \Psi | \hat{O} \Psi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x, t) \hat{O} \Psi(x, t) d_q x \quad (4.4)$$

سپس تعریف هرمیتی از این عملگر به صورت

$$\langle \Psi | \hat{O} \Psi \rangle = \langle \hat{O} \Psi | \Psi \rangle \quad (5.4)$$

است. رابطه جابجایی بین عملگرهای مکان و تکانه در مکانیک کوانتومی تغییرشکل یافته به صورت زیر نوشته می شود

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar (1 + q\hat{x}^2) \quad (6.4)$$

فرم عملگری از مکان و تکانه را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\hat{x} \leftrightarrow x \quad (7.4)$$

$$\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar D_x$$

سپس رابطه (۱.۴) به صورت زیر بازنویسی می شود

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} D_x^2 + V(x) \right) \Psi(x, t) \quad (8.4)$$

با در نظر گرفتن

$$\Psi(x, t) = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \Phi(x)$$

فرم مستقل از زمان معادله شرودینگر در این فرمالیسم به صورت زیر تبدیل می شود

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} D_x^2 + V(x) \right) \Phi(x) = E \Phi(x) \quad (9.4)$$

با استفاده از رابطه (۸.۴) رابطه پیوستگی در این فرمالیسم تغییرشکل یافته به دست می آید

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + D_x j(x, t) = 0 \quad (10.4)$$

که

$$\rho(x, t) = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t), \quad (11.4)$$

$$j(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^*(x, t) D_x \Psi(x, t) - \Psi(x, t) D_x \Psi^*(x, t))$$

حال پراکندگی نسبیتی فرمیون ها را در مکانیک کوانتومی نسبیتی تغییرشکل یافته q مورد مطالعه قرار می دهیم.

۲.۱.۴ پراکندگی فرمیون های نسبیتی در مکانیک کوانتومی تغییرشکل یافته

معادله دیراک را به فرم زیر در نظر می گیریم [۱۵۴، ۱۵۶].

$$i \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t} = [\alpha \cdot p + \beta (m + S(x)) + V(x)] \Psi(x, t), \quad (12.4)$$

که ماتریس‌های α و β به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$\alpha = \begin{pmatrix} \circ & \sigma \\ \sigma & \circ \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & -1 \end{pmatrix}$$

که σ ماتریس‌های پاولی هستند. با انتخاب تابع موج به صورت

$$\Psi(x, t) = e^{-iEt} \Phi(x) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \Phi_u(x) \\ \Phi_d(x) \end{pmatrix} \quad (14.4)$$

برای سادگی پتانسیل اسکالر و برداری را برابر $S(x) = V(x)$ در نظر می‌گیریم. سپس با استفاده از این فرض رابطه (۱۳.۴)، به صورت زیر تغییر می‌کند

$$(m + 2V(x) - E) \Phi_u(x) + \sigma_x \left(-i(1 + qx^2) \frac{d\Phi_d(x)}{dx} \right) = \circ, \quad (15.4)$$

$$\sigma_x \left(-i(1 + qx^2) \frac{d\Phi_d(x)}{dx} \right) - (m + E) \Phi_d(x) = \circ$$

از رابطه (۱۵.۴) مولفه پایین اسپینور به صورت زیر است

$$\Phi_d(x) = \frac{-i\sigma_x(1 + qx^2)}{E + m} \frac{d\Phi_u(x)}{dx} \quad (16.4)$$

با جایگذاری رابطه (۱۶.۴) داخل رابطه (۱۵.۴) به آسانی روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\begin{aligned} (1 + qx^2)^2 \frac{d^2\Phi_u(x)}{dx^2} + 2qx(1 + qx^2) \frac{d\Phi_u(x)}{dx} \\ + (p^2 - 2(E + m)V(x)) \Phi_u(x) = \circ, \end{aligned} \quad (17.4)$$

$$p^2 = E^2 - m^2$$

حال هدف آن است که به ازای سه پتانسیل، پراکندگی را مورد بررسی قرار بدهیم.

۳.۱.۴ پراکندگی با توجه به پتانسیل دلتای دیراک منفرد

می‌دانیم پتانسیل دلتای دیراک منفرد به شکل زیر است [۱۵۴].

$$V(x) = V_1 \delta(x - a_1) \quad (18.4)$$

که a_1 و V_1 ضرایب ثابت هستند. اولین مرتبه مشتق تابع موج به صورت

$$\frac{d\Phi_u(x = a_1^+)}{dx} - \frac{d\Phi_u(x = a_1^-)}{dx} = \frac{2(m + E)}{(1 + qa_1^2)^2} \Phi_u(x = a_1) \quad (19.4)$$

است. فرض می‌کنیم ذرات در ناحیه $x < a_1$ وارد می‌شوند و به دلیل وجود پتانسیل دلتای دیراک پراکنده می‌شوند. در نتیجه برخی از ذرات در ناحیه I ، $x < a_1$ بازتاب می‌شوند و برخی از ذرات در ناحیه II ، $x > a_1$ عبور می‌کنند. بر طبق این فرض، توابع موج را در این دو ناحیه به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\Phi_{u,I}(x) &= e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)} + r_1 r e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ \Phi_{u,II}(x) &= t_1 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)}\end{aligned}\quad (20.4)$$

این ضرایب r_1 و t_1 را با استفاده از شرایط مرزی تابع موج در $x = a_1$ تعیین می‌کنیم

$$\begin{aligned}e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_1)}{\sqrt{q}}\right)} + r_1 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_1)}{\sqrt{q}}\right)} &= t_1 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_1)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_1)}{\sqrt{q}}\right)} (t_1 - 1) + r_1 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_1)}{\sqrt{q}}\right)} &= \frac{2(m+E)V_1}{ip(1+qa_1^2)} t_1 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_1)}{\sqrt{q}}\right)}\end{aligned}\quad (21.4)$$

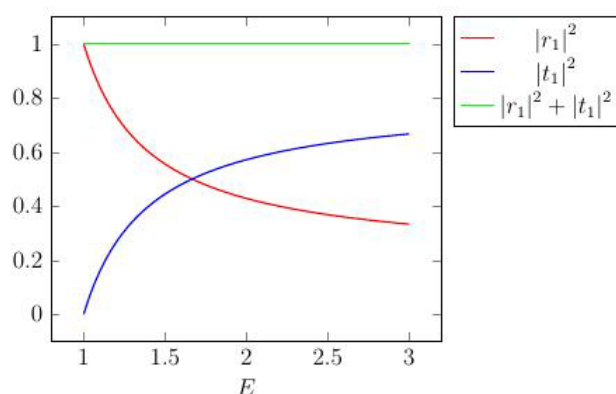
در نتیجه ضرایب r_1 و t_1 از رابطه (21.4) به دست می‌آیند

$$\begin{aligned}r_1 &= -\frac{V(e+m)e^{\frac{2ip\tan^{-1}(\sqrt{q}a_1)}{\sqrt{q}}}}{V(e+m)-ip(1+qa_1^2)}, \\ t_1 &= \frac{p+pq a_1^2}{pq a_1^2 + iV(e+m) + p}\end{aligned}\quad (22.4)$$

از طرف دیگر چگالی جریان از فرمیون‌ها توسط رابطه $j = \Psi^\dagger \alpha \Psi$ محاسبه می‌شوند. از چگالی جریان شرط زیر را به دست می‌آوریم

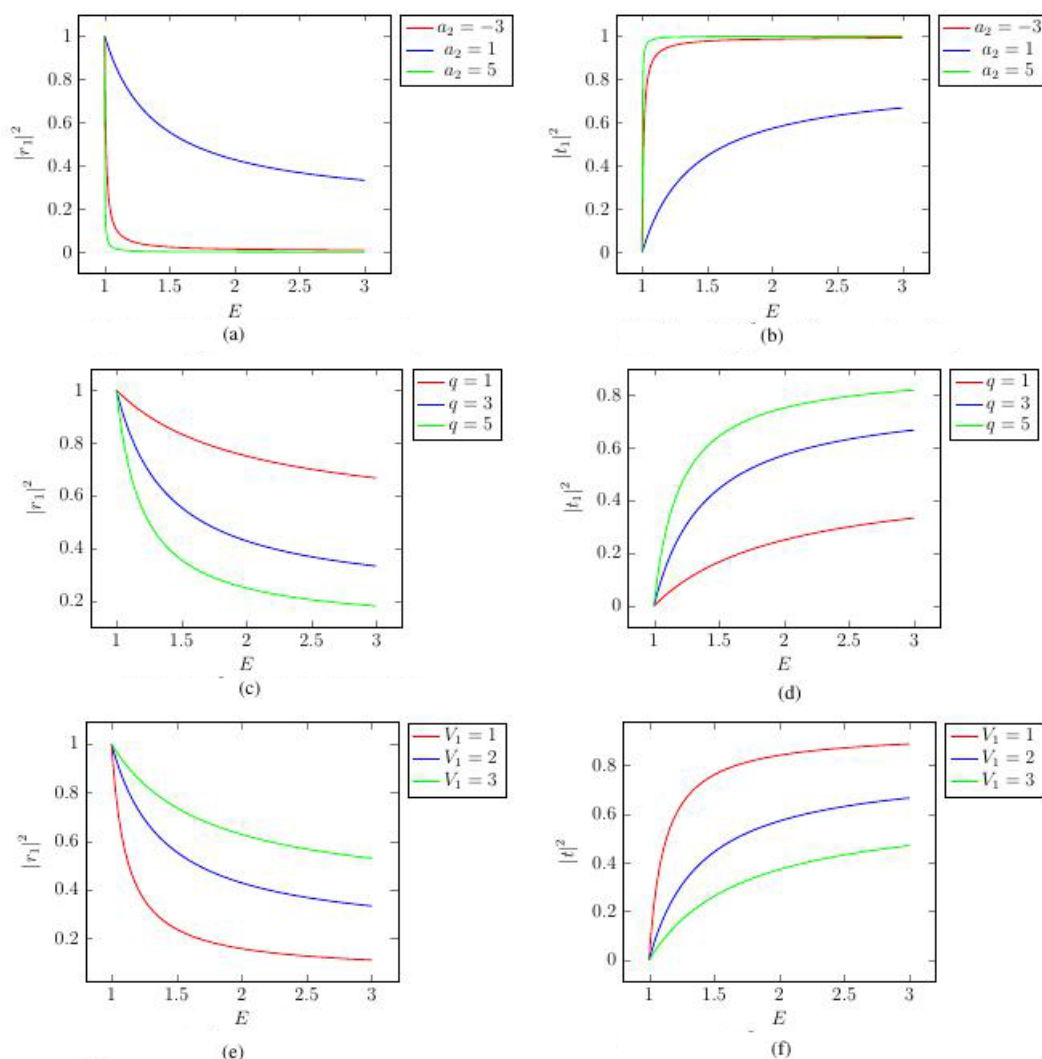
$$|r_1|^2 + |t_1|^2 = 1 \quad (23.4)$$

سپس این معادله را با در نظر گرفتن مقادیر پارامترهای $a_1 = 1$ ، $q = 3$ ، $V_1 = 2$ و $m = 1$ در شکل ۱.۴ مشاهده می‌کنید.



شکل ۱.۴: رسم‌هایی از $|r_1|^2$ ، $|t_1|^2$ و $|r_1|^2 + |t_1|^2$ برحسب تغییرات انرژی

سپس اثرات پارامترهای متفاوت را روی ضرایب عبور و بازتاب در شکل ۲.۴ مشاهده می‌شود. رفتارهای متفاوت از ضرایب عبور و بازتاب $|r_1|^2, |t_1|^2$ را برحسب تغییرات پارامترهای a_1, q, V_1 رسم می‌کنیم که در اشکال (a) و (b) برای این مجموعه از پارامترهای $q = 3, V_1 = 2$ در اشکال (c) و (d) و $a_1 = 1, V_1 = 2$ و در اشکال (e) و (f) $q = 3, a_1 = 1$ است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش انرژی، موج بازتابیده کاهش و موج عبوری افزایش می‌یابد. و در نهایت، مجموع موج بازتابیده و عبوری بقای انرژی را می‌دهد



شکل ۲.۴: نمودار ضرایب عبور و بازتاب $|r_1|^2, |t_1|^2$ برای مقادیر متفاوت از a_1 و q, V_1

۴.۱.۴ پراکندگی از پتانسیل دوگانه دلتای دیراک

در این قسمت، ما فرض می‌کنیم که ذره از پتانسیل دوگانه دلتای دیراک پراکنده می‌شود. که این پتانسیل به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۱۵۴].

$$V(x) = V_2 [\delta(x + a_2) + \delta(x - a_2)] \quad (24.4)$$

که V_2 و a_2 ثوابت حقیقی‌اند. از قسمت قبل ما می‌دانیم این نوع از پتانسیل برای مشتق تابع موج در $x = a_2$ و $x = -a_2$ پیوسته نمی‌باشد، که به صورت

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_u(x = a_2^+)}{dx} - \frac{d\Phi_u(x = a_2^-)}{dx} &= \frac{2(m+E)}{(1+qa_2^2)^2} \Phi_u(x = a_2), \quad x = a_2, \quad (25.4) \\ \frac{d\Phi_u(x = -a_2^+)}{dx} - \frac{d\Phi_u(x = -a_2^-)}{dx} &= \frac{2(m+E)}{(1+qa_2^2)^2} \Phi_u(x = -a_2), \quad x = -a_2 \end{aligned}$$

است. مشابه قسمت قبل، ما فرض می‌کنیم ذرات در ناحیه $x < a_2$ وارد می‌شوند. سپس در ناحیه $-a_2 < x < a_2$ ، II پراکنده می‌شوند. در نتیجه برخی از ذرات در ناحیه $x < a_2$ ، I بازتاب می‌شوند و برخی از ذرات در ناحیه $x > a_2$ ، III عبور می‌کنند. بر طبق این فرض ما مولفه بالایی تابع موج را در این سه ناحیه به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \Phi_{u,I}(x) &= e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)} + r_2 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)}, \quad (26.4) \\ \Phi_{u,II}(x) &= A e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)} + B e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ \Phi_{u,III}(x) &= t_2 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)} \end{aligned}$$

که ضرایب ثابتند و از شرایط پیوستگی و ناپیوستگی در ناحیه $x = a_2, -a_2$ برای تعیین این ضرایب استفاده می‌کنیم، که چهار معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} + r_2 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} &= A e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} + B e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ (A-1) e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} + (r_2-B) e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} &= \\ \frac{2V_2(E+m)}{ip(1+qa_2^2)} \left[e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(-a_2\sqrt{q})}{\sqrt{q}}\right)} + r_2 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(-a_2\sqrt{q})}{\sqrt{q}}\right)} \right] &= \\ A e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} + B e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} &= t_2 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ (t_2-A) e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} + B e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} &= \\ = \frac{2V_2(E+m)}{ip(1+qa_2^2)} \left(t_2 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_2)}{\sqrt{q}}\right)} \right) & \quad (27.4) \end{aligned}$$

سپس این چهار معادله از این سیستم را محاسبه می‌کنیم و ضرایب عبور r_2 و بازتاب t_2 به ترتیب به صورت زیر نتیجه می‌شوند.

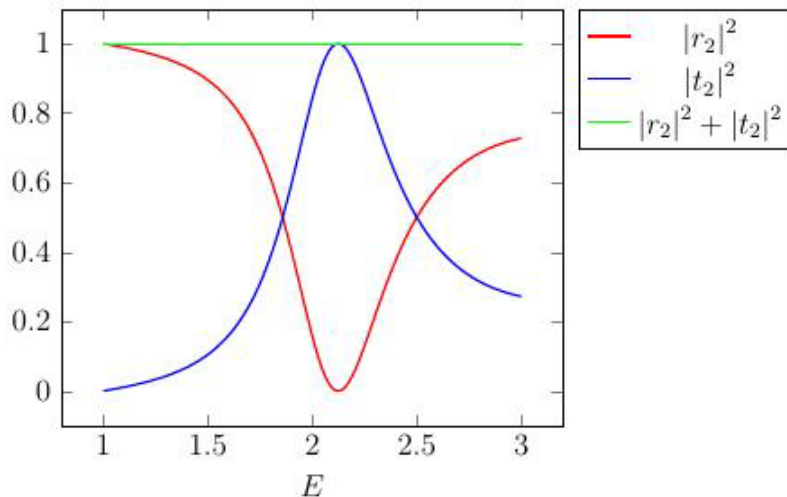
$$r_2 = - \frac{V(e+m) e^{-\frac{2ip \tan^{-1}(a_2 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}}}{\left(a_2^2 pq + iV(e+m) + p\right)^2 + V^2(e+m)^2 e^{\frac{2ip \tan^{-1}(a_2 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}}} \times \left(e^{\frac{2ip \tan^{-1}(a_2 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} \left(V(e+m) + ip(a_2^2 q + 1) \right)^2 + i(a_2^2 pq + imV + p) - eV \right)$$

$$t_2 = \frac{(a_2^2 pq + p)^2}{\left(a_2^2 pq + iV(e+m) + p\right)^2 + V^2(e+m)^2 e^{\frac{2ip \tan^{-1}(a_2 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}}} \quad (28.4)$$

با استفاده از روش مشابه قسمت قبل ما به دست می‌آوریم

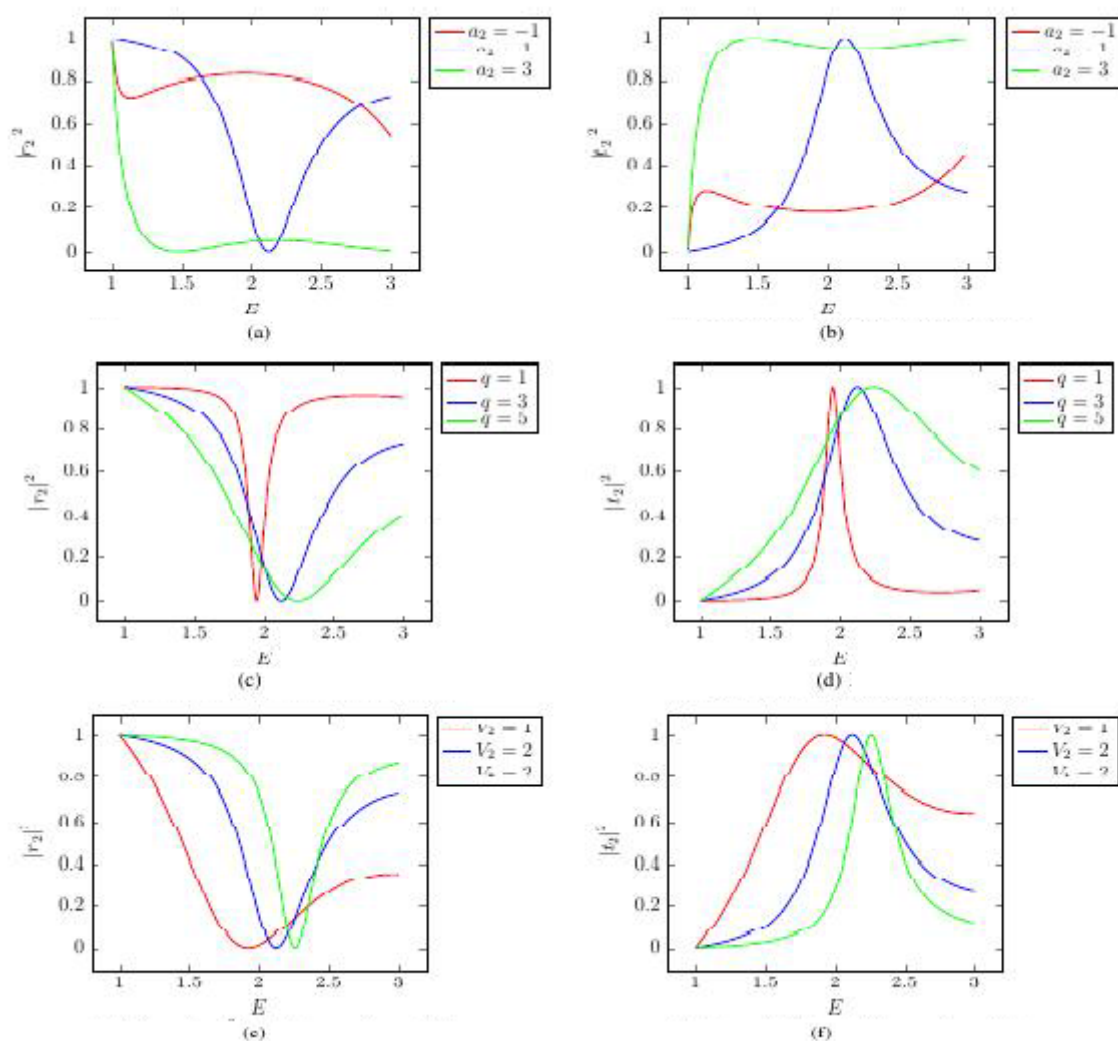
$$|r_2|^2 + |t_2|^2 = 1 \quad (29.4)$$

توسط رسم این معادله با استفاده از رابطه (27.4) اعتبار این رابطه فوق را بررسی می‌کنیم. در شکل 3.4 مشاهده می‌کنید.



شکل 3.4: رسم هایی از $|r_2|^2$, $|t_2|^2$ و $|r_2|^2 + |t_2|^2$ برحسب تغییرات انرژی

سپس اثرات پارامترهای متفاوت را روی ضرایب عبور و بازتاب در شکل 4.4 مشاهده می‌کنید. رفتارهای متفاوت از ضرایب عبور و بازتاب $|r_2|^2$, $|t_2|^2$ را برحسب تغییرات پارامترهای a_2, q, V_2 رسم می‌کنیم که در اشکال (a) و (b) برای این مجموعه از پارامترهای $V_2 = 2, q = 3$ در اشکال (d) و (c) $a_2 = 1, V_2 = 2$ در اشکال (e) و (f) $a_2 = 1, q = 3$ رسم شده است.



شکل ۴.۴: رسم‌هایی از ضرایب عبور و بازتاب $|r_2|^2, |t_2|^2$ برای مقادیر متفاوت از a_2, q, V_2

تفاوت اصلی بین این قسمت و قسمت قبل در نتایج نشان داده شده است. در این بخش با در نظر گرفتن پتانسیل دیراک دوگانه به عنوان پتانسیل پراکندگی، حالت‌های رزونانسی را در ضرایب عبور و بازتاب مشاهده می‌شود. با این حال در بخش قبلی رفتار آرامی را برآورد می‌کرد. از سوی دیگر این چنین آشفتگی‌ها یکی از مهم‌ترین و معروف‌ترین اثر در فیزیک رامساور – تاونسند^۱ را یاد می‌کنند. در بخش بعدی این اثر را در نسخه نسبیتی تغییر شکل یافته - q بررسی خواهیم کرد.

¹Ramsauer-Townsend

۵.۱.۴ اثر رامساور – تونسل در مکانیک کوانتومی نسبیتی تغییر شکل یافته

اثر رامساور – تونسل یک صورتی از پراکندگی الکترون است. این پراکندگی با توجه به یک چاه پتانسیل ساده است. در واقع، زمانی که الکترونی از طریق گاز نجیب^۲ مانند زنون^۳ با انرژی کم در حدود 1eV حرکت می‌کند، اتفاق عجیبی رخ می‌دهد [۱۵۴، ۱۵۵]. اهمیت این پراکندگی ساده این است که این اثر تنها می‌تواند توسط مکانیک کوانتومی حل شود. در حال حاضر، ما این اثر را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مطالعه خواهیم کرد با توجه به این چاه پتانسیل به صورت

$$\begin{cases} -V & -a_3 < x < a_3 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases} \quad (30.4)$$

است. با فرض بخش قبلی ما می‌توانیم توابع موج را در سه ناحیه در این مساله به صورت زیر به دست آوریم

$$\begin{aligned} \Phi_{u,I}(x) &= e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)} + r_3 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ \Phi_{u,II}(x) &= A_3 e^{i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)} + B_3 e^{-i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ \Phi_{u,III}(x) &= t_3 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}x)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ \eta^2 &= p^2 + 2(E+m)V. \end{aligned} \quad (31.4)$$

که از شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق آن‌ها در ناحیه $x = a_3, -a_3$ معادلات زیر را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} + r_3 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} &= A_3 e^{i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} + B_3 e^{-i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ p e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} - p r_3 e^{-ip\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} &= \eta A_3 e^{i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} - \eta B_3 e^{-i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(-\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ A_3 e^{i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} + B_3 e^{-i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} &= t_3 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)}, \\ \eta A_3 e^{i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} - \eta B_3 e^{-i\eta\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)} &= p t_3 e^{ip\left(\frac{\tan^{-1}(\sqrt{q}a_3)}{\sqrt{q}}\right)}. \end{aligned} \quad (32.4)$$

²Noble gas

³Xenon

برای این سیستم این ضرایب را تعیین می‌کنیم

$$r_3 = \frac{(p - \eta)(\eta + p) e^{-\frac{\gamma_i p \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} \left(e^{\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} - 1 \right)}{p^2 e^{\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} - \gamma_i \eta p e^{\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} + \eta^2 e^{\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} - \eta^2 - p^2 - \gamma_i \eta p},$$

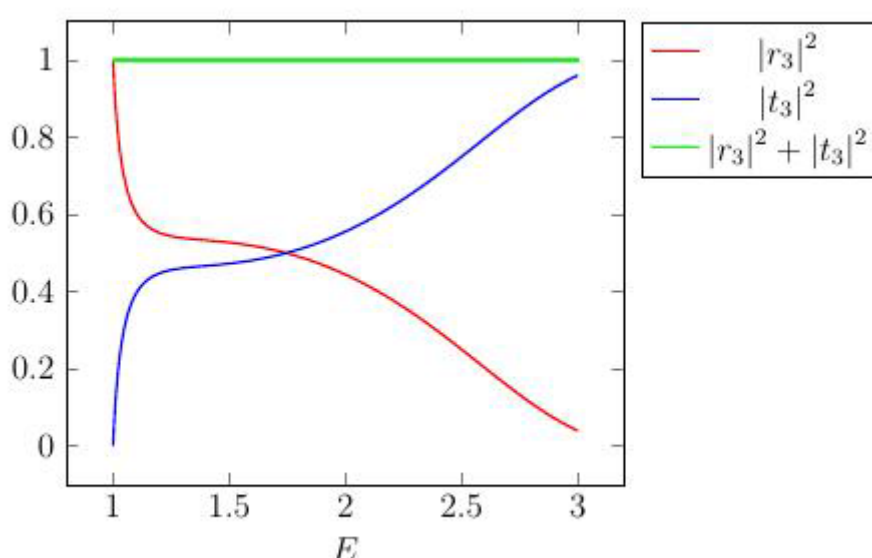
$$t_3 = \frac{\gamma_i \eta p e^{\left(\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}} - \frac{\gamma_i p \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}} \right)}}{p^2 e^{\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} - \gamma_i \eta p e^{\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} + \eta^2 e^{\frac{\gamma_i \eta \tan^{-1}(a_3 \sqrt{q})}{\sqrt{q}}} - \eta^2 - p^2 - \gamma_i \eta p}.$$

(۳۳.۴)

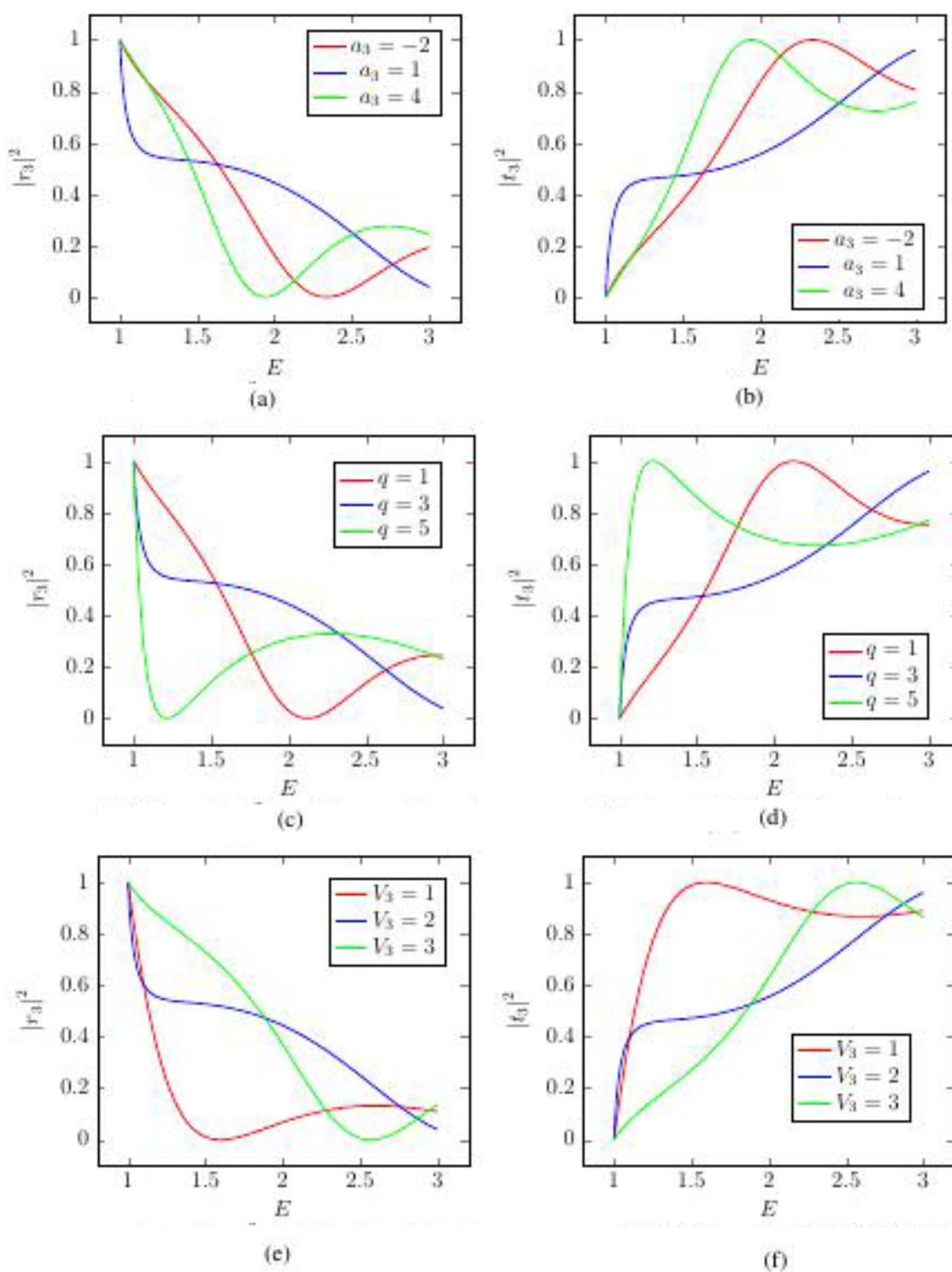
با استفاده از روش مشابه قسمت قبل شرط زیر را برای ضرایب عبور و بازتاب به دست می‌آوریم

$$|r_3|^2 + |t_3|^2 = 1 \quad (34.4)$$

با استفاده از روابط (۳۲.۴) و رسم رابطه (۳۴.۴) اعتبار این رابطه فوق را بررسی می‌کنیم. که در شکل ۵.۴ مشاهده می‌شود.



شکل ۵.۴: رسم‌هایی از $|r_3|^2$, $|t_3|^2$ و $|r_3|^2 + |t_3|^2$ برحسب تغییرات انرژی



شکل ۶.۴: رسم‌هایی از ضرایب عبور و بازتاب $|r_3|^2, |t_3|^2$ برای مقادیر متفاوت از a_3, q, V_3

سپس اثرات پارامترهای متفاوت را روی ضرایب عبور و بازتاب را در شکل ۶.۴ مشاهده می‌شود. رفتارهای متفاوت از ضرایب عبور و بازتاب $|r_3|^2, |t_3|^2$ را برحسب تغییرات پارامترهای

رسم می‌کنیم که در اشکال (a) و (b) برای این مجموعه از پارامترهای $q = 3, V_3 = 2$ در اشکال (c) و (d) $a_3 = 1, V_3 = 2$ و (e) و (f) $a_3 = 1, q = 3$ است. این اثر از این پراکندگی از چاه پتانسیل در نسخه تغییر شکل یافته - q در مکانیک کوانتومی نسبیتی می‌تواند توسط در نظر گرفتن پتانسیل دلتای دیراک دو گانه شبیه سازی شود.

فصل ۵

بررسی سیستم‌های بوزونی و فرمیونی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

۱.۵ مقدمه

مطالعه سیستم‌های اسپینی، علاقه زیادی را به بسیاری از شاخه‌های فیزیک به خود جلب کرده است. علاوه بر بوزون‌ها و فرمیون‌ها، پارافرمیون‌ها از مرتبه p هستند که در [۱۵۷، ۱۵۸] معرفی شده‌اند، با $(p = 1, 2, 3, 4)$. فرمیون معمول به وضوح متناظر پارافرمیون^۱ با $p = 1$ است، در حالی که فرمیون‌ها از آمار فرمی – دیراک و بوزون‌ها از آمار بوز – انیشتین پیروی می‌کنند. پارافرمیون و پارابوزون^۲ از آمار میانه^۳ که پارا آمار^۴ می‌نامیم پیروی می‌کنند. این خواص از این پارا آمار موضوع بسیاری از بررسی‌های اخیر بوده است [۱۵۹–۱۶۱]. بوزون‌ها از رابطه جابجایی زیر تبعیت می‌کنند

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [N_a, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N_a, a] = -a, \quad N_a = a^\dagger a, \quad (1.5)$$

فضای فوک برای بوزون‌ها با استفاده از رابطه (۱.۵) به صورت زیر معرفی می‌شود

$$N_a |n_a\rangle = n_a |n_a\rangle, \quad n_a = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

$$a |n_a\rangle = \sqrt{n_a} |n_a - 1\rangle, \quad a |0\rangle = 0$$

$$a^\dagger |n_a\rangle = \sqrt{n_a + 1} |n_a + 1\rangle.$$

سپس فرمیون‌ها از رابطه پادجابجایی زیر تبعیت می‌کنند

$$\{f, f^\dagger\} = 1, \quad f^2 = (f^\dagger)^2 = 0, \quad [N_f, f^\dagger] = f^\dagger, \quad [N_f, f] = -f, \quad (3.5)$$

که

$$f^\dagger f = N_f, \quad f f^\dagger = 1 - N_f, \quad (4.5)$$

فضای فوک برای فرمیون‌ها با استفاده از رابطه (۳.۵) به صورت زیر معرفی می‌شود

$$N_f |n_f\rangle = n_f |n_f\rangle, \quad n_f = 0, 1 \quad (5.5)$$

$$f |n_f\rangle = \sqrt{n_f} |n_f - 1\rangle, \quad f |0\rangle = 0, \quad f |1\rangle = |0\rangle,$$

$$f^\dagger |n_f\rangle = \sqrt{n_f + 1} |n_f + 1\rangle, \quad f^\dagger |0\rangle = |1\rangle, \quad f^\dagger |1\rangle = 0,$$

حال در اینجا یک سوال مطرح می‌شود: آیا می‌توان جبر پارافرمیون را توسط روابط جابجایی براساس پارا ابرتقارن توصیف کرد؟ برای پاسخ به این سوال ابتدا جبر فرمیون‌ها را از طریق رابطه جابجایی محاسبه می‌کنیم و سپس این روابط را برای جبر پارافرمیون تعمیم می‌دهیم.

¹Parafermion

²Paraboson

³Intermediate statistics

⁴Parastatistics

۲.۵ جبر فرمیون با رابطه جابجایی

فرض کنید رابطه (۳.۵)، را بتوان به شکل زیر نوشت

$$b^\dagger b = F(N_b) \quad , \quad b b^\dagger = F(N_b + 1), \quad (۶.۵)$$

بادر نظر گرفتن تعاریف بالا، روابط زیر حاصل می شود

$$[b, b^\dagger] = F(N_b + 1) - F(N_b) \quad , \quad [N_b, b^\dagger] = b^\dagger, [N_b, b] = -b, \quad (۷.۵)$$

حال این فضای فوک را به صورت زیر معرفی می کنیم

$$N_b |n_b\rangle = n_b |n_b\rangle \quad , \quad n_b = 0, 1 \quad (۸.۵)$$

$$b |n_b\rangle = \sqrt{F(n_b)} |n_b - 1\rangle \quad , \quad b |0\rangle = 0, \quad b |1\rangle = \sqrt{F(1)} |0\rangle = 0$$

$$b^\dagger |n_b\rangle = \sqrt{F(n_b + 1)} |n_b + 1\rangle \quad , \quad b^\dagger |0\rangle = \sqrt{F(1)} |1\rangle \quad , \quad b^\dagger |1\rangle = \sqrt{F(2)} |2\rangle$$

در نهایت رابطه (۷.۵) همان نمایش رابطه (۳.۵) را با فرض زیر می دهد

$$F(0) = 0 \quad , \quad F(1) = 1 \quad , \quad F(2) = 0 \quad (۹.۵)$$

ساده ترین انتخاب برای F به صورت $F = N_b(2 - N_b)$ است در نتیجه جبر زیر را داریم

$$[b, b^\dagger] = 1 - 2N_b, \quad b^2 = (b^\dagger)^2 = 0, \quad [N_b, b^\dagger] = b^\dagger, [N_b, b] = -b, \quad (۱۰.۵)$$

$$b^\dagger b = N_b(2 - N_b) \quad , \quad b b^\dagger = (N_b + 1)(1 - N_b)$$

فضای فوک برای این نوع جبر تغییر شکل به صورت زیر است

$$N_b |n_b\rangle = n_b |n_b\rangle \quad , \quad (۱۱.۵)$$

$$b |n_b\rangle = \sqrt{n_b(2 - n_b)} |n_b - 1\rangle \quad ,$$

$$b^\dagger |n_b\rangle = \sqrt{(n_b + 1)(1 - n_b)} |n_b + 1\rangle$$

به آسانی بررسی می شود که این جبر همان نمایش روابط (۴.۵)–(۵.۵)، در نتیجه رابطه (۶.۵)، فرم دیگری از جبر فرمیون است.

۱.۲.۵ مکانیک کوانتومی ابر تقارن

در این بخش مکانیک کوانتومی ابر تقارن را^۵ برای دو نوع از فرمیون ها توصیف می کنیم [۱۶۲–۱۶۴]. در یک سیستم ابر تقارنی دو ابر بار به صورت $Q_\pm$ وجود دارد. ابتدا فرمیون f را در نظر می گیریم. در این حالت دو ابر بار به فرم زیر داریم

$$Q_+ = \sqrt{w} a f^\dagger, \quad Q_- = \sqrt{w} a^\dagger f, \quad \hbar = 1 \quad (۱۲.۵)$$

⁵Supersymmetric quantum mechanics

هامیلتونی H_S ، به فرم زیر به دست می‌آید

$$Q_{\pm}^2 = 0, \quad (13.5)$$

$$\{Q_+, Q_-\} = H_S,$$

$$[H_S, Q_{\pm}] = 0$$

از رابطه دوم (۱۳.۵)، ما داریم

$$\{Q_+, Q_-\} = H_S \quad (14.5)$$

سپس هامیلتونی H_S به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$H_S = \left\{ \sqrt{w} a f^\dagger, \sqrt{w} a^\dagger f \right\} = w \left(a f^\dagger a^\dagger f + a^\dagger f a f^\dagger \right) \quad (15.5)$$

$$= w \left(a a^\dagger f^\dagger f + a^\dagger a f f^\dagger \right) = w \left[(1 + N_a) N_f + N_a (1 - N_f) \right] = w [N_a + N_f]$$

همانطور که از رابطه (۱۴.۵)، مشاهده می‌شود این انرژی از نوسانگر ابرتقارن به تعداد بوزون و تعداد فرمیون بستگی دارد. حال ابرتقارن، حالت فوک را معرفی می‌کنیم

$$|n_a, n_f\rangle, \quad n_a = 0, 1, 2, \dots, \quad n_f = 0, 1 \quad (16.5)$$

سپس داریم

$$H_S |n_a, n_f\rangle = E_{n_a, n_f} |n_a, n_f\rangle = w (n_a + n_f) |n_a, n_f\rangle \quad (17.5)$$

یا

$$H_S |n_a, 0\rangle = w n_a |n_a, 0\rangle \quad (18.5)$$

$$H_S |n_a, 1\rangle = w (n_a + 1) |n_a, 1\rangle$$

حالت دوم: حال فرمیون b را در نظر می‌گیریم، در نهایت به این نتیجه منجر می‌شود که فرمیون f و فرمیون b هم‌ارز هم هستند. در حالت فرمیون b دوابار به فرم زیر معرفی می‌شوند

$$Q_+ = \sqrt{w} a b^\dagger, \quad Q_- = \sqrt{w} a^\dagger b \quad (19.5)$$

ابرهامیلتونی با استفاده از رابطه (۱۹.۵) به صورت زیر به دست می‌آید

$$H_S = w \left[N_a \left(1 + 2 N_a - 2 N_b^2 \right) + N_b \left(2 - N_b \right) \right] \quad (20.5)$$

حال به طور مشابه، ابرتقارن حالت فوک را معرفی می‌کنیم

$$|n_a, n_b\rangle, \quad n_a = 0, 1, 2, \dots, \quad n_b = 0, 1 \quad (21.5)$$

با اعمال هامیلتونی روی کت معرفی شده در رابطه (۲۱.۵) داریم

$$\begin{aligned} H_S |n_a, n_b\rangle &= E_{n_a, n_b} |n_a, n_b\rangle \\ &= w \left[n_a (1 + 2 n_a - 2 n_b^2) + n_b (2 - n_b) \right] |n_a, n_b\rangle \end{aligned} \quad (22.5)$$

یا

$$\begin{aligned} H_S |n_a, 0\rangle &= w n_a |n_a, 0\rangle \\ H_S |n_a, 1\rangle &= w (n_a + 1) |n_a, 1\rangle \end{aligned} \quad (23.5)$$

روابط (۱۸.۵) - (۲۳.۵)، انرژی‌های مشابه دارند در نتیجه فرمیون f و فرمیون b هم‌ارزند. هامیلتونی رابطه (۲۲.۵)، متشکل از سه هامیلتونی است که عبارتند از: هامیلتونی برای بوزون معمولی، هامیلتونی برای فرمیون معمولی و هامیلتونی برهم‌کنش فرمیون و بوزون که به صورت زیر نمایش داده می‌شوند.

$$H_S = H_B + H_F + H_{BF} \quad (24.5)$$

که صورت باز شده رابطه (۲۴.۵)، به صورت زیر است

$$\begin{aligned} H_B &= w \left(N_a + \frac{1}{4} \right), \\ H_F &= w \left[N_b (2 - N_b) - \frac{1}{4} \right], \\ H_{BF} &= 2 w N_a N_b (1 - N_b) \end{aligned} \quad (25.5)$$

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که فرمیون b و فرمیون f همان مکانیک کوانتومی ابرتقارن را نتیجه می‌دهد.

سپس از جبر مکانیک کوانتومی ابرتقارنی برای ذره‌ای که از جبر ویگنر^۶ پیروی می‌کند که آن ذره را ویگنون^۷ می‌نامیم، استفاده می‌کنیم. ویگنون‌ها، بوزون‌هایی که از جبر تغییرشکل یافته بوزونی تبعیت می‌کنند. در ابتدا جبر ویگنون تک مد و نمایش آن را مطالعه می‌کنیم. سپس، این هامیلتونی از ویگنون را در مکانیک کوانتومی ابرتقارنی به دست می‌آوریم. همچنین کاربردهایی از ترمودینامیک ویگنون، به طور مثال گاز ویگنون غیر برهم‌کنشی، تابش جسم سیاه و مدل دبای را در مکانیک آماری مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در نهایت اثرات از پارامتر ویگنر را روی ظرفیت گرمایی از گاز ویگنون غیر برهم‌کنشی و چگالی انرژی از تابش جسم سیاه را محاسبه می‌کنیم.

^۶Wigner algebra

^۷Wignons

۳.۵ مقدمه‌ای بر جبر ویگنون‌ها

در سال ۱۹۵۰ ویگنر^۸ [۱۶۵]، یک جبر جدید از بوزون تغییرشکل یافته را به فرم زیر معرفی کرد

$$[a, a^\dagger] = 1 + 2\nu R, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger, \quad [N, a] = -a, \quad R = (-1)^N \quad (26.5)$$

که ν پارامتر ویگنر است. به طور تاریخی فرم صریح (۲۶.۵) از این جبر برای اولین بار توسط یانگ^۹ [۱۶۶] معرفی شد. این جبر بعدها توسط گرین^{۱۰} تعمیم داده شد [۱۶۷]. در این جبر به جای $a^\dagger a \neq N$ ما فرم زیر را برای N داریم

$$a^\dagger a = N + \nu(1 - (-1)^N). \quad (27.5)$$

جبر ویگنر یک نسخه تعمیم یافته از جبر بوزون معمولی است. در واقع، اگر پارامتر ویگنر ν به سمت صفر میل کند این جبر ویگنر به جبر بوزون معمول کاهش می یابد. پالو^{۱۱} نوسانگر سه بعدی را توسط جبر ویگنر در فضای ناجابجایی مورد مطالعه قرار داد [۱۶۸]. رابطه جبری (۲۶.۵) کاربردهای وسیعی در ریاضیات و فیزیک دارد [۱۶۹-۱۷۱]. اخیراً رابطه جبری (۲۶.۵) در هندسه ناجابجایی استفاده شده است [۱۷۴].

۱.۳.۵ جبر ویگنون تک مدی

جبر ویگنون تک مدی [۱۶۵]، توسط رابطه (۲۶.۵) داده می شود. که عملگر بازتاب R به صورت زیر معرفی می شود

$$R = (-1)^N, \quad (28.5)$$

این عملگر از شرایط زیر تبعیت می کند

$$\{R, a\} = \{a^\dagger, R\} = 0, \quad R^\dagger = R^{-1} = R, \quad R^2 = I. \quad (29.5)$$

ویژه بردار عملگر تعداد N به صورت زیر است.

$$N|n\rangle = n|n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (30.5)$$

که N هرمیتی است و حالت پایه $|0\rangle$ از رابطه زیر تبعیت می کند.

$$a|0\rangle = 0, \quad (31.5)$$

⁸Wigner

⁹Yang

¹⁰Green

¹¹Palev

از رابطه (۲۶.۵) نمایش زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} a|n\rangle &= \sqrt{[n]_\nu} |n-1\rangle, \\ a^\dagger|n\rangle &= \sqrt{[n+1]_\nu} |n+1\rangle, \end{aligned} \quad (32.5)$$

که رابطه پارامتر تعداد در فرمالیسم تغییرشکل یافته ν به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[n]_\nu = n + \nu(1 - (-1)^n), \quad (33.5)$$

چند مقدار اول ν را با استفاده از رابطه (۳۳.۵) به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$[0]_\nu = 0 \quad (34.5)$$

$$[1]_\nu = 1 + 2\nu$$

$$[2]_\nu = 2$$

$$[3]_\nu = 3 + 2\nu$$

$$[4]_\nu = 4$$

رابطه کلی برای این پارامتر تعداد تغییرشکل یافته ν برای اعداد زوج و فرد به صورت زیر مشخص می‌شود

$$[2n]_\nu = 2n, \quad [2n+1]_\nu = 2n+1+2\nu, \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (35.5)$$

کت فضای فوک از ویگنون به صورت زیر داده می‌شود

$$|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{[n]_\nu!}} |0\rangle, \quad a|0\rangle = 0 \quad (36.5)$$

۲.۳.۵ جبر ویگنون چند مدی

جبر ویگنون چند مدی به فرم زیر داده می‌شود [۱۷۵، ۱۷۶]

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}(1 + 2\nu R_i), \quad \nu > -1/2, \quad (37.5)$$

$$[N_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} a_i^\dagger, \quad [N_i, a_j] = -\delta_{ij} a_i,$$

$$[a_i, a_j] = 0, \quad [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0,$$

که این عملگر پاریته (یا انعکاس) به صورت $R_i = (-1)^{N_i}$ است. که از روابط جابجایی زیر تبعیت می‌کند

$$\{R_i, a_i\} = \{a_i^\dagger, R_i\} = 0, \quad (38.5)$$

$$[R_i, a_j] = [R_i, a_j^\dagger] = 0 \quad \text{for } i \neq j.$$

رابطه بین این عملگر تعداد و عملگرهای نردبانی به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$a_i^\dagger a_i = [N_i]_\nu. \quad (39.5)$$

۳.۳.۵ هامیلتونی ویگنون از مکانیک کوانتومی ابر تقارن

در این قسمت به محاسبه هامیلتونی ویگنون می‌پردازیم. همانطور که می‌دانید در جبر ویگنون $N \neq a^\dagger a$ است. ما دو نوع از هامیلتونی را در نظر می‌گیریم:

۱- هامیلتونی نوع اول به صورت

$$\omega N$$

که در آن N عملگر تعداد و ω فرکانس معرفی می‌شوند.

۲- هامیلتونی نوع دوم به صورت

$$\omega a^\dagger a$$

است. به این منظور برای محاسبه فرم صحیح از هامیلتونی ویگنون از ابر تقارن مکانیک کوانتومی^{۱۲} استفاده می‌کنیم [۱۷۷-۱۸۱]. مکانیک کوانتومی ابر تقارن دارای عباراتی از دو ابربار که به صورت زیر معرفی می‌شوند

$$Q_+ = \sqrt{w} a f^\dagger, \quad Q_- = \sqrt{w} a^\dagger f, \quad (40.5)$$

که $a, a^\dagger$ عملگرهای نردبانی ویگنون هستند و $f, f^\dagger$ عملگرهای نردبانی فرمیون که از شرایط زیر تبعیت می‌کنند

$$\{f, f^\dagger\} = 1, \quad f^2 = (f^\dagger)^2 = 0$$

که در اینجا $\hbar = 1$ قرار می‌دهیم. این هامیلتونی H از جبر مکانیک کوانتومی ابر تقارن محاسبه می‌شود

$$Q_\pm^2 = 0, \quad \{Q_+, Q_-\} = H, \quad [H, Q_\pm] = 0. \quad (41.5)$$

بنابراین ما داریم

$$\begin{aligned} \{Q_+, Q_-\} &= w[N]_\nu (1 - f^\dagger f) + w[N + 1]_\nu f^\dagger f, \\ &= w[N]_\nu + w([N + 1]_\nu - [N]_\nu) f^\dagger f, \end{aligned} \quad (42.5)$$

این هامیلتونی برای فرمیون و ویگنون به صورت زیر داده می‌شود

$$H = w a^\dagger a + w(1 + 2\nu R) f^\dagger f. \quad (43.5)$$

به آسانی این جابجایی هامیلتونی با $Q_\pm$ بررسی می‌شود. این هامیلتونی به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H = H_W + H_F + H_{W-F}, \quad (44.5)$$

¹²The supersymmetric quantum mechanics

که در رابطه (۴۴.۵) عبارت اول H_W به هامیلتونی ویگنون اشاره دارد [۱۷۳-۱۷۵]

$$H_W = w \left(a^\dagger a + \frac{1}{\gamma} \right) = w \left([N]_\nu + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (45.5)$$

عبارت دوم H_F هامیلتونی فرمیون نوشته می‌شود

$$H_F = w \left(f^\dagger f - \frac{1}{\gamma} \right), \quad (46.5)$$

و در نهایت عبارت سوم رابطه (۴۴.۵) H_{W-F} به برهم کنش هامیلتونی فرمیون و ویگنون اشاره می‌کند

$$H_{W-F} = \gamma \nu w R f^\dagger f. \quad (47.5)$$

سپس سطوح انرژی برای ذره ویگنون به صورت زیر به دست می‌آید

$$E_n = w \left([n]_\nu + \frac{1}{\gamma} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (48.5)$$

در نتیجه، رابطه انرژی (۴۸.۵) به ازای ν متفاوت برای n زوج و فرد به صورت زیر به دست می‌آید

$$E_{n, \nu=0} = w \left(n + \frac{1}{\gamma} \right), \quad (49.5)$$

$$E_{n=\text{even}, \nu \neq 0} = w \left(n + \frac{1}{\gamma} \right),$$

$$E_{n=\text{odd}, \nu \neq 0} = w \left((n + 2\nu) + \frac{1}{\gamma} \right).$$

همانطور که مشاهده می‌کنید، انرژی‌های حالت زوج و فرد n ، یکسان نیستند.

۴.۵ برخی از کاربردهای ویگنون در آنسامبل کانونی

در این بخش مثال‌های از ترمودینامیک ویگنون را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۴.۵ گاز ویگنون غیر برهم‌کنشی

ابتدا گاز غیر برهم‌کنشی ویگنون را در نظر می‌گیریم. این تابع پارش تک ذره به صورت زیر داده می‌شود که در آن E_n ، از رابطه (۴۸.۵)، جایگذاری می‌شود.

$$\begin{aligned} Z_W &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} = e^{-\beta w / \gamma} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta w [n]_\nu} \\ &= e^{-\frac{\beta w}{\gamma}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\beta w} + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1+2\nu)\beta w} \right] = e^{-\frac{\beta w}{\gamma}} \left[\frac{e^{2\beta w}}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{e^{\beta w - 2\nu\beta w}}{e^{2\beta w} - 1} \right] \\ &= e^{-\frac{\beta w}{\gamma}} \left[\frac{1}{1 - e^{-2\beta w}} + \frac{e^{-\beta w - 2\nu\beta w}}{1 - e^{-2\beta w}} \right] = \frac{e^{-\beta w / \gamma} (1 + e^{-(1+2\nu)\beta w})}{1 - e^{-2\beta w}} = e^{-\nu\beta w} \frac{\cosh \frac{\beta w}{\gamma} (1 + 2\nu)}{\sinh \beta w}, \end{aligned} \quad (50.5)$$

که $\beta = \frac{1}{T}$ است. ثابت بولتزمن را یک قرار می‌دهیم. میانگین عدد اشغال به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} f_W = \langle n \rangle &= \frac{1}{Z_W} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta E_n} \\ &= \frac{1}{Z_W} \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-\beta w [n]_{\nu}} \\ &= \frac{1 + e^{2\beta w} + 2e^{(\nu+1)\beta w}}{(e^{2\beta w} - 1)(e^{(\nu+1)\beta w} + 1)}, \end{aligned} \quad (51.5)$$

شکل ساده شده از رابطه (51.5)، به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$f_W = \langle n \rangle = \frac{2}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{1}{e^{(\nu+1)\beta w} + 1}. \quad (52.5)$$

رابطه (52.5)، یک تابع عام‌تر از تابع توزیع بوز انیشتین است زیرا f_W در حد $\nu \rightarrow 0$ به تابع توزیع بوز - انیشتین معمولی کاهش می‌یابد.

$$f_{BE} = \frac{1}{e^{\beta w} - 1}$$

فرض کنید این ویگنون‌ها غیر برهم‌کنشی هستند. تابع پارش برای N ویگنون قابل تشخیص به فرم زیر است.

$$Z_N = (Z_W)^N = \left[e^{-\nu\beta w} \frac{\cosh \frac{\beta w}{2} (1 + 2\nu)}{\sinh \beta w} \right]^N. \quad (53.5)$$

انرژی آزاد با استفاده از تابع پارش به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} F = -T \ln Z_N &= NT\nu\beta w - \ln \cosh \frac{\beta w}{2} (1 + 2\nu) + \ln \sinh \beta w \\ &= \frac{Nw}{2} + NT \left[\ln(1 - e^{-2\beta w}) - \ln(1 + e^{-\beta w(1+2\nu)}) \right]. \end{aligned} \quad (54.5)$$

سپس با استفاده از رابطه (54.5)، آنتروپی به صورت زیر به دست می‌آید

$$S = -\frac{F}{T}|_{N,V} = N \left[\frac{2\beta w}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{(\nu+1)\beta w}{e^{(\nu+1)\beta w} + 1} - \ln \frac{1 - e^{-2\beta w}}{1 + e^{-(1+2\nu)\beta w}} \right]. \quad (55.5)$$

آنتروپی هنگامی که $\beta w \rightarrow \infty$ ، صفر می‌شود. سپس میانگین انرژی به صورت زیر به دست می‌آید

$$U = F + TS = Nw \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{\nu+1}{e^{(\nu+1)\beta w} + 1} \right]. \quad (56.5)$$

ملاحظه می‌شود که نظریه‌ی هم‌ارز کلاسیکی^{۱۳} $U = NT$ فقط در حد $T \rightarrow \infty$ بازتولید می‌شود. یعنی، زمانی که مجموع گسسته است با تقریب به صورت انتگرال در نظر گرفته

¹³The classical equipartition theorem

می‌شود. در حالت حدی $T \rightarrow 0$ انرژی به صورت $U = \frac{Nw}{2}$ است. این انرژی همچنین به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$U = N\langle E_n \rangle, \quad (57.5)$$

میانگین انرژی $\langle E_n \rangle$ از نوسانگر ویگنون به صورت زیر محاسبه شده است.

$$\langle E_n \rangle = w \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)\beta w} + 1} \right]. \quad (58.5)$$

ظرفیت گرمایی را به صورت زیر به دست می‌آوریم

$$C_V = \frac{U}{T}|_{N,V} = \frac{Nw^2}{T^2} \left[\frac{4e^{2\beta w}}{(e^{2\beta w} - 1)^2} + \frac{(2\nu + 1)^2 e^{(2\nu+1)\beta w}}{(e^{(2\nu+1)\beta w} + 1)^2} \right], \quad (59.5)$$

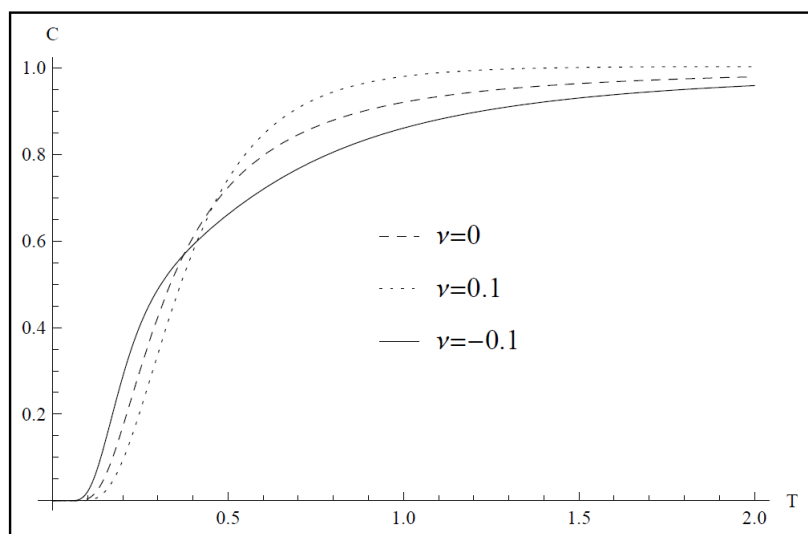
ملاحظه می‌شود که برای $T \rightarrow 0$ این ظرفیت گرمایی صفر می‌شود در حالی که در حد دمای بینهایت این ظرفیت گرمایی $C_V = N$ است. در دمای $T \gg w$ ما به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} C_V &\approx \frac{Nw^2}{T^2} \left[\frac{4T^2}{4w^2} + \frac{(2\nu + 1)^2 T^2}{(2\nu + 1)^2 w^2 + 4T^2 + 4Tw(2\nu + 1)} \right] \\ &= N + \frac{N}{\left[1 + \frac{2T}{(2\nu+1)w} \right]^2} \approx N. \end{aligned} \quad (60.5)$$

همانطور که به وضوح نشان داده می‌شود در دمای بالا این ظرفیت گرمایی به N نزدیکتر است. در دمای $T \ll w$ ظرفیت گرمایی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} C_V &\approx \frac{Nw^2}{T^2} \left[\frac{4e^{\frac{2w}{T}}}{e^{\frac{2w}{T}}} + \frac{(2\nu + 1)^2 e^{\frac{(2\nu+1)w}{T}}}{e^{\frac{(2\nu+1)w}{T}}} \right] \\ &= \frac{4Nw^2}{e^{\frac{2w}{T}} T} + \frac{(2\nu + 1)^2 Nw^2}{e^{\frac{(2\nu+1)w}{T}} T} \approx 0. \end{aligned} \quad (61.5)$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم در دمای بالا این ظرفیت گرمایی با دما افزایش می‌یابد و سرانجام به مقدار کلاسیکی میل می‌کند. سپس، در دمای بالا این ظرفیت گرمایی از گاز ویگنون از مقدار کلاسیکی کمتر است. از طرف دیگر، این مقدار صفر می‌شود زمانی که $T \ll w$ است. رفتار ظرفیت گرمایی را برحسب دما برای مقادیری از $N = 1, w = 1$ به ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر $\nu = 0, \nu = 1/2, \nu = -1/2$ در شکل ۱.۵ رسم می‌شود.



شکل ۱.۵: تغییرات ظرفیت گرمایی بر حسب دما به ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر ($\nu = 0, \nu = 0.1, \nu = -0.1$)

همانطور که از شکل ۱.۵ مشاهده می‌شود نمودار تغییرات ظرفیت گرمایی بر حسب دما به ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر ν در دمای یکسانی همدیگر را قطع می‌کنند. برای محاسبه نقطه تلاقی با قرار دادن دو پارامتر ویگنر متفاوت در رابطه (۶۱.۵)، و تساوی قراردادن روابط به دست آمده از این دو پارامتر ویگنر، به رابطه زیر منجر می‌شود.

$$\frac{4}{e^{\frac{\nu w}{T}}} \frac{w^2}{T} + \frac{(2\nu+1)^2}{e^{\frac{(2\nu+1)w}{T}}} \frac{w^2}{T} = \frac{4}{e^{\frac{\nu' w}{T}}} \frac{w^2}{T} + \frac{(2\nu'+1)^2}{e^{\frac{(2\nu'+1)w}{T}}} \frac{w^2}{T} \quad (62.5)$$

$$T = \frac{(\nu - \nu') w}{\ln \left[\left(\frac{1+2\nu}{1+2\nu'} \right) \right]}$$

به طور مثال برای ($\nu = 0, \nu' = -0.1$) نقطه تلاقی برابر 0.45 می‌شود.

$$T = \frac{(\nu - \nu') w}{\ln \left[\left(\frac{1+2\nu}{1+2\nu'} \right) \right]} = 0.45 \quad (63.5)$$

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد به ازای دو مقدار از پارامتر ویگنر ν در دمای $T = 0.45$ دو نمودار همدیگر را قطع می‌کنند.

۲.۴.۵ تابش جسم سیاه

در این بخش فوتون را در نظر می‌گیریم که از جبر ویگنر تبعیت می‌کند. در نمایش ویگنون، فوتون دارای انرژی

$$E_n = [n]_{\nu} w, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (64.5)$$

تعداد حالات بر واحد حجم در جسم سیاه به صورت زیر داده می‌شود

$$g(w)dw = \frac{w^2}{\pi^2 c^3} dw, \quad (۶۵.۵)$$

که c سرعت نور در خلا است. بنابراین، چگالی انرژی که عبارت است از انرژی عبوری در واحد زمان از واحد سطح به صورت زیر معرفی می‌شود

$$\begin{aligned} du &= u(w)dw = \frac{w^2}{\pi^2 c^3} \langle E_n \rangle dw \\ &= \frac{w^3}{\pi^2 c^3} dw \left[\frac{2}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)\beta w} + 1} \right], \end{aligned} \quad (۶۶.۵)$$

که $\langle E_n \rangle = w \langle [n]_\nu \rangle$ است. سپس چگالی انرژی به صورت زیر بیان می‌شود

$$u(w) = \frac{w^3}{\pi^2 c^3} \left[\frac{2}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)\beta w} + 1} \right]. \quad (۶۷.۵)$$

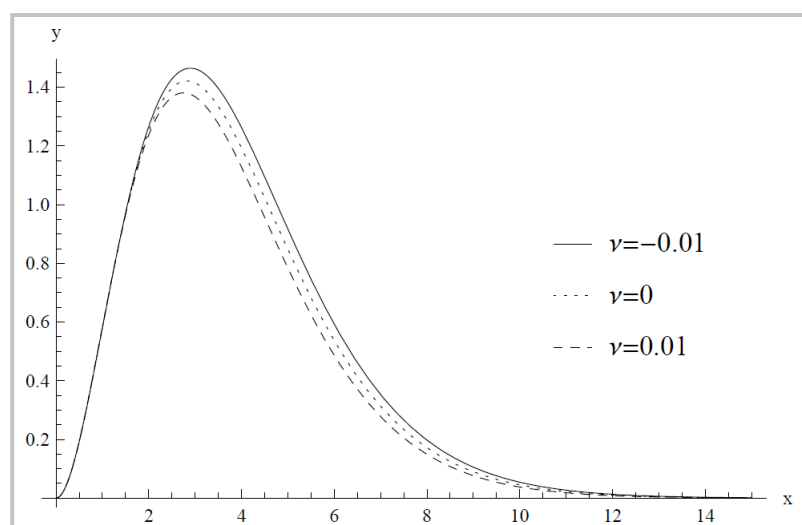
ما می‌دانیم که رابطه (۶۷.۵) در حد $\nu \rightarrow 0$ به قانون پلانک معمول کاهش می‌یابد. با در نظر گرفتن روابط زیر

$$x = \frac{w}{T}, \quad y(x) = \frac{\pi^2 c^3}{T^4} u(x), \quad (۶۸.۵)$$

و با جایگذاری رابطه (۶۸.۵) در رابطه (۶۷.۵) رابطه زیر حاصل می‌شود

$$y(x) = \frac{2x^3}{e^{2x} - 1} + \frac{(2\nu + 1)x^3}{e^{(2\nu+1)x} + 1}. \quad (۶۹.۵)$$

رفتار توزیع طیفی انرژی را برای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنون $\nu = 0, \nu = 0.01, \nu = -0.01$ در شکل ۲.۵ رسم می‌کنیم.



شکل ۲.۵: توزیع طیفی انرژی در تابش جسم سیاه به ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنون

سپس مقدار ماکزیمم نمودار توزیع طیفی انرژی را در شکل ۲.۵، به‌ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر- ν به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

از رابطه (۶۹.۵)، مشتق می‌گیریم سپس رابطه به‌دست آمده را مساوی صفر قرار می‌دهیم در نهایت به‌ازای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر- ν ، مقادیر ماکزیمم نمودار شکل ۲.۵، به‌دست می‌آوریم.

$$y'(x) = \frac{6x^2}{e^{2x}-1} - \frac{4e^{2x}x^3}{(e^{2x}-1)^2} + \frac{3x^2(1+2\nu)}{1+e^{(1+2\nu)x}} - \frac{e^{(1+2\nu)x}x^3(1+2\nu)^2}{(1+e^{(1+2\nu)x})^2}, \quad (70.5)$$

به‌ازای $y'(x) = 0$ ، مقدار ماکزیمم توزیع طیفی انرژی به صورت زیر است

$$\frac{6x^2}{e^{2x}-1} - \frac{4e^{2x}x^3}{(e^{2x}-1)^2} + \frac{3x^2(1+2\nu)}{1+e^{(1+2\nu)x}} - \frac{e^{(1+2\nu)x}x^3(1+2\nu)^2}{(1+e^{(1+2\nu)x})^2} = 0. \quad (71.5)$$

برای مقادیر متفاوت از پارامتر ویگنر، مقدار ماکزیمم توزیع طیفی انرژی به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$x_{\max, \nu=0} = 2/8, \quad (72.5)$$

$$x_{\max, \nu=0/0.1} = 2/7,$$

$$x_{\max, \nu=-0/0.1} = 2/9$$

در نهایت در شکل ۲.۵، با کاهش دما به‌ازای مقادیر متفاوت پارامتر ویگنر ابتدا نمودار توزیع طیفی انرژی افزایش می‌یابد تا به مقادیر ماکزیمم خود می‌رسد سپس با کاهش دما نمودار توزیع طیفی انرژی کاهش می‌یابد، همچنین با کاهش پارامتر ویگنر- ν ، مقدار ماکزیمم نمودار توزیع طیفی انرژی یک انتقال به سمت راست مشاهده می‌شود.

رابطه (۶۹.۵)، در حد دمای پایین $x \gg 1$ به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$y(x) \approx 2x^3 e^{-2x} + (2\nu+1)x^3 e^{-(2\nu+1)x}. \quad (73.5)$$

و در حد دمای بالا $x \ll 1$ این رابطه (۶۹.۵) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$y(x) \approx x^2 + \nu - \frac{1}{4}x^3. \quad (74.5)$$

۳.۴.۵ مدل دبای

در این مبحث ذره فونون که از جبر ویگنر تبعیت می‌کند را در نظر می‌گیریم. حال مدل دبای را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعداد مدها در یک جسم جامد با حجم V و تعداد ذره N به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$D(w)dw = \frac{Vw^2}{2\pi^2 v^3} dw, \quad (75.5)$$

که v سرعت انتشار از موج در جسم جامد است و $w = 2\pi\nu$ است. تعداد کل N اتم در این نمونه به فرکانس قطع w_D ^{۱۴} مربوط می‌شود که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\int_0^{w_D} D(w) d\nu = 3N. \quad (76.5)$$

که این فرکانس به فرم زیر است.

$$w_D = 6\pi^2 \frac{N^{1/3}}{V} v, \quad (77.5)$$

انرژی داخلی از این کریستال از نوسانگر i به صورت

$$U_i = \frac{1}{2} w_i + w_i \left[\frac{2}{e^{2\beta w_i} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)\beta w_i} + 1} \right]. \quad (78.5)$$

انرژی داخلی کل به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} U &= \sum_i U_i = \sum_i \frac{1}{2} w_i + \sum_i w_i \left[\frac{2}{e^{2\beta w_i} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)\beta w_i} + 1} \right] \\ &= U_0 + 3 \int_0^{w_D} w \left[\frac{2}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)\beta w} + 1} \right] D(w) dw, \end{aligned} \quad (79.5)$$

انرژی نقطه صفر به صورت

$$U_0 = \sum_i \frac{1}{2} w_i, \quad (80.5)$$

است. که در محاسبه ظرفیت گرمایی نادیده گرفته می‌شود. با جایگذاری رابطه (75.5) در رابطه (79.5) کل انرژی داخلی به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$U = U_0 + \frac{3V}{2\pi^2 v^3} \int_0^{w_D} w^3 \left[\frac{2}{e^{2\beta w} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)\beta w} + 1} \right] dw. \quad (81.5)$$

با معرفی متغیرهای زیر

$$x = \frac{w}{T} = \frac{\theta}{T} x_D = \frac{w_D}{T} = \frac{\theta_D}{T}$$

این رابطه (81.5) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$U = 3NTD_3(x_D; \nu), \quad (82.5)$$

که $D_3(x_D; \nu)$ تابع دبای تغییرشکل یافته- ν است که به صورت زیر معرفی می‌شود

$$D_3(x_D; \nu) = \frac{3}{x_D^3} \int_0^{x_D} x^3 \left[\frac{2}{e^{2x} - 1} + \frac{2\nu + 1}{e^{(2\nu+1)x} + 1} \right] dx. \quad (83.5)$$

ظرفیت گرمایی در حجم ثابت توسط رابطه زیر تعریف می‌شود

$$C_V = \frac{U}{T} = 9Nx_D^{-3} \int_0^{x_D} x^4 \left[\frac{4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} + \frac{(2\nu + 1)^2 e^{(2\nu+1)x}}{(e^{(2\nu+1)x} + 1)^2} \right] dx. \quad (84.5)$$

¹⁴The cut-off frequency

در حد دما بالا رابطه (۸۴.۵) به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$C_V \approx 3N, \quad (85.5)$$

که همان قانون دولنگ – پتی^{۱۵} است. در حد دمای پایین این ظرفیت گرمایی به صورت

$$C_V \approx \frac{4\pi^4 [1 + \nu(1 + \nu)(1 + 2\nu + 2\nu^2)]}{15(1 + 2\nu)^4} \frac{T^3}{\Theta_D}. \quad (86.5)$$

که در حالت حدی $\nu \rightarrow 0$ به رابطه دبای معمول کاهش می‌یابد. سپس، این ظرفیت گرمایی با افزایش ν کاهش می‌یابد.

¹⁵The Dulong-Petit

فصل ۶

هسته‌های تغییر شکل یافته براساس
بعضی از مدل‌های تغییر شکل یافته

۱.۶ مقدمه‌ای از مدل‌های هسته‌ای

مدل‌های هسته‌ای را به طور کلی، می‌توان به مدل ذره مستقل^۱ که در آن فرض می‌شود ذرات به طور مستقل در یک پتانسیل هسته‌ای مشترک حرکت می‌کنند و مدل تجمعی^۲ یا برهم‌کنش‌قوی که در آن نوکلئون‌ها قویاً به یکدیگر جفت می‌شوند، تقسیم کرد. در مدل لایه‌ای هسته، در گروه مدل ذره مستقل فرض می‌شود که نوکلئون‌ها تقریباً به طور مستقل در یک پتانسیل کروی ایستا که توسط توزیع چگالی هسته‌ای تعیین می‌شود، قرار دارند. در مدل تجمعی (برهم‌کنش‌قوی) حرکت‌های دسته جمعی هسته در نظر گرفته می‌شود. در مدل وحدت‌یافته^۳ ویژگی‌های مدل لایه‌ای و تجمعی ترکیب می‌شوند، یعنی فرض می‌شوند نوکلئون‌ها تقریباً مستقل از یکدیگر در یک پتانسیل مشترک غیر کروی با تغییرات جزئی حرکت می‌کنند.

۱.۱.۶ مروری بر مدل‌های هسته‌ای

معرفی مدل‌های هسته‌ای

۱- مدل قطره مایع

۲- مدل لایه‌ای

۳- مدل گاز فرمی

۴- مدل نیلسون

۵- مدل تجمعی

در این مبحث مدل گاز فرمی و مدل نیلسون را به طور مختصر توصیف می‌کنیم.

۲.۱.۶ مدل گاز فرمی

ابتدا مدل گاز فرمی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این مدل براساس رفتار میانگین تعداد زیاد نوکلئون‌ها داخل هسته متوسط یا بزرگ بیان می‌شود که هسته را شاره‌ای از فرمیون‌ها در نظر می‌گیرند که به طور تقریبی به مدل گاز فرمی معروف است. در این مدل، نوکلئون‌ها را به صورت مستقل در نظر گرفته می‌شود، که متناظر با یک گاز ایده‌آل که در حجم معینی محصور شده که این مدل از آمار فرمی دیراک و اصل طرد پاولی پیروی می‌کند [۱۸۳]. در این مدل از برهم‌کنش میان ذرات صرف‌نظر شده است. زمانی که ذرات مکانیک کوانتومی در یک محفظه صلب محصور باشند حالت‌های ثابتی را اشغال می‌کنند، که با عدد کوانتومی مناسب (n_x, n_y, n_z) ، با تکانه‌های (p_x, p_y, p_z) ، و یا اعداد موجی (k_x, k_y, k_z) ، مشخص می‌شوند. در این مدل نوکلئون‌ها را به صورت فرمیون‌هایی در نظر می‌گیریم. برای تک ذره معادله

¹Independent particle Model

²Collective

³Unified

شرودینگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi = E\Psi \quad (1.6)$$

برای سادگی پتانسیل را صفر در نظر می‌گیریم. سپس با معرفی روابط زیر

$$E = E_{nx} + E_{ny} + E_{nz},$$

$$\Psi = \psi_x(x) \psi_y(y) \psi_z(z)$$

رابطه (۱.۶) به صورت زیر تبدیل می‌شوند

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_x}{dx^2} &= E_{nx}\psi_x \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_y}{dy^2} &= E_{ny}\psi_y \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_z}{dz^2} &= E_{nz}\psi_z \end{aligned} \quad (2.6)$$

و با استفاده از شروط زیر

$$\psi(0) = 0, \quad \psi(l) = 0$$

تابع موج و ترازها انرژی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} \psi_x &= A \sin(k_x x), \quad E_{nx} = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{2m l^2} \\ \psi_y &= A \sin(k_y y), \quad E_{ny} = \frac{n_y^2 \pi^2 \hbar^2}{2m l^2} \\ \psi_z &= A \sin(k_z z), \quad E_{nz} = \frac{n_z^2 \pi^2 \hbar^2}{2m l^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

پس اگر کره‌ای را با اعداد n_x, n_y, n_z تشکیل دهیم تعداد ترکیبات مختلف اعداد کوانتومی صحیح - مثبت شامل $\frac{1}{8}$ حجم کره است.

$$N = 2 \left(\frac{1}{\lambda} \right)^3 \frac{4}{3} \pi n_f^3,$$

سپس انرژی فرمی مربوط به بالاترین انرژی تراز پر شده را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\varepsilon_f = \frac{\pi^2 \hbar^2 n_f^2}{2m l^2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (4.6)$$

اگر در ناحیه‌ای از فضا به حجم V ذرات کنارهم قرار گرفته باشند این ذرات دارای انرژی داخلی هستند رابطه انرژی داخلی با انرژی فرمی و همینطور فشار ناشی از تبهگنی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{8} N \varepsilon_f = \frac{3}{8} N \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{\frac{2}{3}}, \\ p &= -\frac{\partial u}{\partial V} = \frac{2}{3} \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{5}{3}} \end{aligned} \quad (5.6)$$

۳.۱.۶ مدل نیلسون

وضعیت گسترده در ساختار هسته را می‌توان با ویژگی‌های حرکت یک تک ذره در یک پتانسیل مرکزی با تقارن کروی توضیح داد. حال ساختار هسته را می‌توان با در نظر گرفتن حالت‌های تک ذره‌ای که در یک پتانسیل هسته‌ای تغییر شکل یافته حرکت می‌کند، به دست آورد. اس. جی. نیلسون این مساله را در سطح گسترده‌ای مطالعه کرده است، و مدل ساختار هسته حاصل به مدل نیلسون معروف است. این مدل معمولاً برای هسته‌های تغییر شکل یافته به کار می‌رود، اما می‌توان هنگامی که پارامتر تغییر شکل صفر است آن را برای هسته‌های کروی نوشت. مدل نیلسون که در سال ۱۹۵۵ توسط نیلسون معرفی شد یکی از بهترین مدل‌ها در تعیین ساختار هسته‌های استاتیک و تغییر شکل یافته می‌باشد [۱۸۳، ۱۸۴]. در واقع در مدل نیلسون سه نوسانگر در راستای x, y, z معرفی می‌شوند. سپس نوسانات در راستاهای x, y هم بسامد هستند ولی نوسانات در راستای z بسامد متفاوتی دارد. در این مدل از پتانسیل نوسانگر هارمونیک تغییر شکل یافته به همراه جملات اسپین - مدار و تکانه زاویه‌ای مداری به عنوان پتانسیل میانگین استفاده می‌شود. در این مدل، پتانسیل نوسانگر هماهنگ تغییر شکل یافته به همراه جملات تصحیحی اسپین - مدار و تکانه زاویه‌ای مداری به کار می‌رود. در سال ۱۹۶۷ گوستافسن^۴ و همکارانش جمله $\langle L^2 \rangle_N$ را به پتانسیل نیلسون اضافه کردند و به این ترتیب ویژه مقادیر انرژی تولید شده توسط پتانسیل نیلسون بیش از پیش به انرژی‌های تجربی نزدیکتر شد [۱۸۵]. با قرار دادن پتانسیل نیلسون به هامیلتونی نیلسون به رابطه زیر خواهیم رسید

$$H_{ho} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} M \left(\omega_{x,y}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right) \quad (۶.۶)$$

$$V = -2 \hbar \omega_0 k \left(\vec{L} \cdot \vec{S} \right) - \hbar \omega_0 k \mu \left[\vec{L}^2 - \langle \vec{L}^2 \rangle_N \right].$$

که $M, \vec{L}^2, \vec{L} \cdot \vec{S}$ به ترتیب معرف جرم، مربع تکانه زاویه‌ای و برهم‌کنش اسپین - مدار است. سپس هامیلتونی نوسانگر هارمونیک تعمیم یافته به فرم دیگر معرفی می‌شود [۱۸۶-۱۸۸].

$$H_{ho} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} M \left(\omega_{x,y}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right) - C \left(\vec{L} \cdot \vec{S} \right) - D \left[\vec{L}^2 - \langle \vec{L}^2 \rangle_N \right]. \quad (۷.۶)$$

که L^2 مربع تکانه زاویه‌ای است و $L \cdot S$ برهم‌کنش اسپین - مدار است. متوسط مقدار $\langle L^2 \rangle$ برای هر N - لایه به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\langle L^2 \rangle_N = \frac{N(N+3)}{2} \quad (۸.۶)$$

^۴Gustafson

با کمک روابط زیر

$$\begin{aligned}\omega_z &= \omega_0(\varepsilon) \left(1 - \frac{2}{3}\varepsilon\right), \varepsilon = \frac{(\omega_{x,y} - \omega_z)}{\omega_0} \\ \omega_{x,y} &= \omega_0(\varepsilon) \left(1 + \frac{1}{3}\varepsilon\right)\end{aligned}\quad (9.6)$$

با فرض کوچک بودن ε هامیلتونی را به صورت زیر محاسبه کنیم

$$H = H_{ho} + H_\varepsilon = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} M \omega_0^2 \left(1 + \frac{2}{3}\varepsilon\right) (x^2 + y^2) + \quad (10.6)$$

$$\frac{1}{2} M \omega_0^2 \left(1 - \frac{4}{3}\varepsilon\right) z^2 = \frac{\hbar \omega_0}{2} [-\Delta + \rho^2] - \frac{4}{3} \hbar \omega_0 \varepsilon \sqrt{\frac{\pi}{\Delta}} \rho^2 Y_2.$$

با داشتن هامیلتونی، انرژی رابطه (۱۰.۶)، را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم [۱۸۹-۱۹۲].

$$\begin{aligned}E(n_z, n_{x,y}) &= \hbar \omega_z \left(n_z + \frac{1}{2}\right) + \hbar \omega_{x,y} (n_{x,y} + \frac{1}{2}) \\ &= \hbar \omega_0 \left(N + \frac{3}{2} + (n_{x,y} - 2n_z) \frac{\varepsilon}{3}\right), N = n_{x,y} + n_z\end{aligned}\quad (11.6)$$

اگر به این انرژی ترم زیر را

$$-D \left(\ell^2 - \langle \ell^2 \rangle_N \right), C(\ell.s)$$

اضافه کنیم انرژی مدل نیلسون در مدل لایه‌ای به‌دست می‌آید. واحد انرژی $\hbar \omega$ است.

هامیلتونی به‌دست آمده از مدل نیلسون را به دو صورت می‌توان بررسی کرد [۱۹۳].

حالت اول: زمانی که پارامتر ε خیلی بزرگ باشد

حالت دوم: زمانی که پارامتر ε خیلی کوچک باشد

حال به طور مختصر انرژی مدل نیلسون را براساس این دو حالت مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ابتدا حالت اول زمانی که پارامتر ε بین دو مقدار $0.3 - 0.2$ در نظر می‌گیریم در این حالت هامیلتونی را در مختصات کشیده^۵ بررسی می‌کنیم.

$$H = H_0 + H', \quad (12.6)$$

$$H_0 = -\frac{\hbar}{2M} \nabla^2 + \frac{M}{2} \left[\omega_{x,y}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right]$$

در مختصات کشیده پارامترهای زیر را معرفی می‌کنیم

$$\xi = x \left(\frac{M \omega_{x,y}}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \eta = y \left(\frac{M \omega_{x,y}}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varsigma = z \left(\frac{M \omega_z}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (13.6)$$

با قرار دادن روابط (۱۳.۶)، در رابطه (۱۲.۶) هامیلتونی نوسانی به فرم زیر تبدیل می‌شوند

$$H_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega_{x,y} \left[-\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + (\xi^2 + \eta^2) \right] + \frac{\hbar \omega_z}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \varsigma^2} + \varsigma^2 \right) \quad (14.6)$$

⁵Stretched

در حالت کروی، اگر دو ترم زیر را به هامیلتونی اضافه کنیم هامیلتونی مدل نیلسون به دست می‌آید

$$H' = -\frac{1}{2} k \hbar \omega_0 \ell.s - \mu' \hbar \omega_0 \left(\ell^2 - \langle \ell^2 \rangle_N \right) \quad (15.6)$$

با معرفی ℓ_t ، در مختصات کشیده به صورت زیر

$$(\ell_t)_x = -i \hbar \left(\eta \frac{\partial}{\partial \rho} - \varsigma \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (16.6)$$

سپس رابطه (۱۵.۶)، در حالت تغییر شکل به صورت زیر تغییر می‌کند.

$$H'_{def} = -\frac{1}{2} k \hbar \omega_0 \ell_t.s - \mu' \hbar \omega_0 \left(\ell_t^2 - \langle \ell_t^2 \rangle_N \right) \quad (17.6)$$

با معرفی روابط زیر

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi \quad (18.6)$$

بخش نوسانی رابطه هامیلتونی (۱۴.۶)، را در مختصات استوانه‌ای به دست می‌آوریم

$$H_0 = \left[\frac{\hbar \omega_{x,y}}{2} \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \rho^2 \right) + \frac{\hbar \omega_z}{2} \left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \xi^2 \right) - E \right] \psi = 0 \quad (19.6)$$

با جداسازی متغیرها رابطه (۱۹.۶)، به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2 U(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dU(\rho)}{d\rho} - \frac{\Lambda^2}{\rho^2} U(\rho) = -\frac{2E_{x,y}}{\hbar \omega_{x,y}} U(\rho) \quad (20.6)$$

با فرض تابع موج به صورت زیر

$$U(\rho) = \rho^{|\Lambda|} e^{-\frac{\rho^2}{2}} W(\rho) \quad (21.6)$$

با استفاده از روابط (۲۰.۶)–(۲۱.۶)، و با جایگذاری $z = \rho^2$ ، به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$z W''(\rho) + (|\Lambda| + 1 - z) W'(\rho) - \frac{1}{2} \left(2|\Lambda| + 1 - \frac{E_{x,y}}{\hbar \omega} \right) W(\rho) = 0 \quad (22.6)$$

این معادله دیفرانسیل (۲۲.۶)، مشابه رابطه کومر^۶ است. این راه‌حل به صورت تابع فوق هندسی کانفلوئنت^۷ به صورت زیر معرفی می‌شود

$$W = F \left(\frac{1}{2} \left(|\Lambda| + 1 - \frac{E_{x,y}}{\hbar \omega_{x,y}} \right), |\Lambda| + 1; z \right) \quad (23.6)$$

سپس انرژی رابطه (۲۳.۶)، به صورت زیر به دست می‌آید

$$E_{x,y} = \hbar \omega_{x,y} (n_{x,y} + 1) \quad (24.6)$$

^۶Kummer

^۷Confluent hypergeometric function

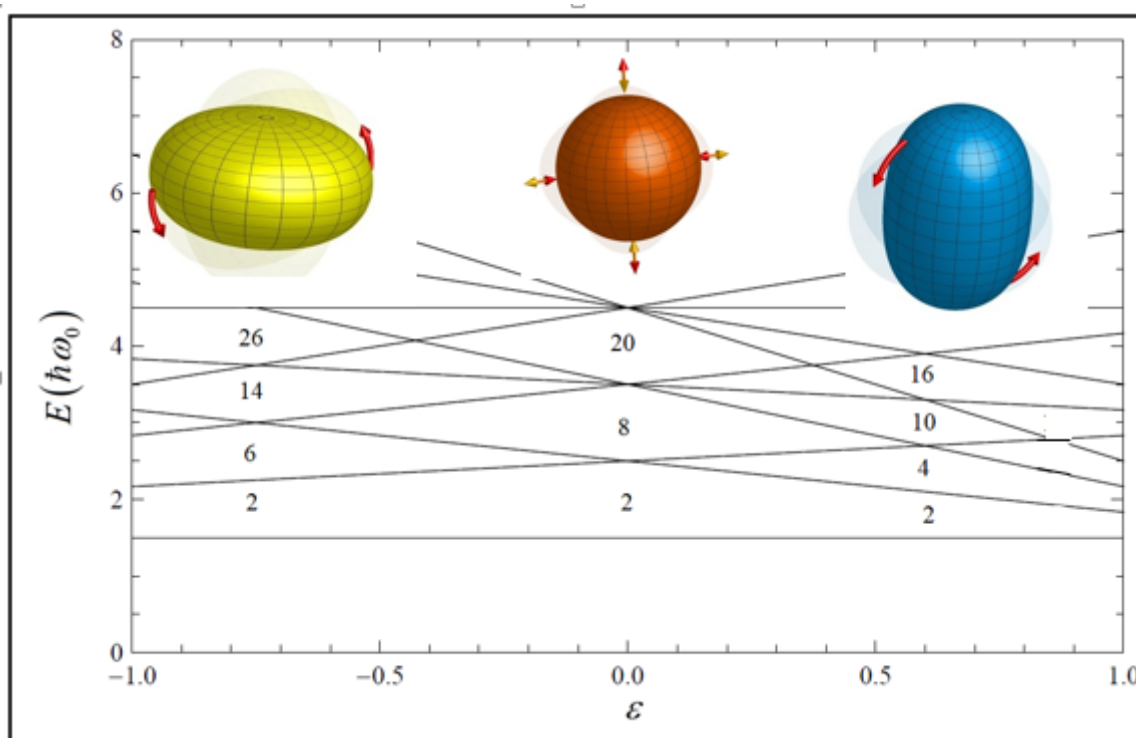
سرانجام رابطه انرژی برای حالت نوسانگراستوانه‌ای به صورت زیر است

$$E(n_z, n_{x,y}) = \hbar\omega_0 \left(N + \frac{3}{4} + (n_{x,y} - 2n_z) \frac{\varepsilon}{4} \right) \quad (25.6)$$

که

$$N = n_{x,y} + n_z, \quad n_{x,y} = 0, 1, \dots, N.$$

سپس سطوح انرژی را برحسب پارامتر ε در شکل ۱.۶ نمایش می‌دهیم.



شکل ۱.۶: رسم انرژی برحسب پارامتر ε

همانطور که ملاحظه می‌کنید برای پارامتر $\varepsilon = 0$ ، شکل هسته کروی^۸ است. سپس برای پارامتر $\varepsilon > 0$ ، شکل هسته از حالت کروی به حالت کشیده^۹ تبدیل می‌شود و برای پارامتر $\varepsilon < 0$ ، شکل هسته از حالت کروی به حالت پخت^{۱۰} تبدیل می‌شود. در نتیجه، زمانی که $\varepsilon \neq 0$ ، هسته از حالت کروی خارج می‌شود و در رابطه هامیلتونی دو ترم اضافه می‌شود و برای محاسبه انرژی از روش اختلالی استفاده می‌کنیم و با استفاده از این روش نیاز به ترم‌های قطری داریم با معرفی روابط زیر

$$\langle N n_z \Lambda \Sigma | \ell_t \cdot s | N n_z \Lambda \Sigma \rangle = \Lambda \Sigma \quad (26.6)$$

$$\langle N n_z \Lambda \Sigma | \ell_t^2 | N n_z \Lambda \Sigma \rangle = \Lambda^2 + 2 n_{x,y} n_z + 2 n_z + n_{x,y}$$

⁸Spherical shape

⁹Prolate Shape

¹⁰Oblate Shape

و معرفی هامیلتونی در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر

$$H = H_0 - 2 k \hbar \omega_0 \ell_{t,s} - \mu' \hbar \omega_0 \left(\ell_t^2 - \langle \ell_t^2 \rangle_N \right) \quad (27.6)$$

در نهایت ویژه مقادیر انرژی به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E = \left(N + \frac{3}{4} \right) \hbar \omega_0 + \frac{\hbar \omega_0 \varepsilon}{4} (N - 3 n_z) - 2 k \hbar \omega_0 \Lambda \Sigma - \mu' \hbar \omega_0 \left(\Lambda^2 + 2 n_{x,y} n_z + 2 n_z + n_{x,y} - \frac{N(N+3)}{2} \right) \quad (28.6)$$

در مرحله بعد به بررسی هامیلتونی نیلسون برای ε ، خیلی کوچک می‌پردازیم. با استفاده از روابط (۷.۶)، (۹.۶) هامیلتونی به صورت زیر به دست می‌آید [۱۹۳].

$$H_{ho} = -\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{4} M \left(\omega_{x,y}^2 (x^2 + y^2) + \omega_z^2 z^2 \right) - \frac{M}{4} \frac{\varepsilon}{3} \hbar \omega_0^2 (\varepsilon) \rho^2 p^2 (\cos \theta_t) \quad (29.6)$$

و با روش قطری کردن هامیلتونی می‌توان ویژه مقادیر انرژی را محاسبه کرد. با استفاده از روابط زیر

$$p_\ell^\Lambda = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} (1 - x^2)^{\frac{\Lambda}{2}} \frac{d^{\ell+\Lambda}}{dx^{\ell+\Lambda}} (1 - x^2)^\ell, \quad (30.6)$$

$$Y_\ell^\Lambda(\theta, \varphi) = (-1)^\Lambda \sqrt{\frac{2^\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - \Lambda)!}{(\ell + \Lambda)!}} e^{i\Lambda\varphi} p_\ell^\Lambda(\cos\theta),$$

$$Y_{\ell,\Lambda}(\theta, \varphi) Y_{\ell',\Lambda'}(\theta, \varphi) = \sum_{\ell\Lambda} \left[\frac{(2^\ell + 1)(2^{\ell'} + 1)}{4\pi(2^\ell + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} C_{\Lambda\Lambda}^{\ell\ell'} C_{\Lambda\Lambda}^{\ell\ell'}$$

ویژه مقادیر رابطه (۲۹.۶)، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$E = \frac{\hbar \omega_0}{4} \left(N + \frac{3}{4} \right) + 2 k \hbar \omega_0 \Lambda \Sigma - \mu' \hbar \omega_0 \left(\ell(\ell+1) - \frac{N(N+3)}{4} \right) - \frac{M}{4} \frac{\varepsilon}{3} \hbar \omega_0^2 (\varepsilon) \frac{3}{8} \rho^2 \left(C_{\Lambda\Lambda}^{\ell\ell'} C_{\Lambda\Lambda}^{\ell\ell'} \right) \quad (31.6)$$

۲.۶ بررسی فرمالیسم تغییر شکل یافته بر پایه مدل اندرکنش بوزونی

در این قسمت ابتدا به طور مختصر ۳ مدل را برای توصیف هسته‌های تغییر شکل یافته معرفی می‌کنیم سپس طیف انرژی ایزوتوپ زوج - زوج $^{120}_{54}Xe$ را براساس مدل اندرکنش بوزونی^{۱۱} مورد بررسی قرار می‌دهیم. در انتها محاسبات خود را با داده‌هایی که از دو فرمالیسم معمولی و تغییر شکل یافته (در حالت حدی) محاسبه کردیم مورد مقایسه قرار می‌دهیم.

¹¹ Interacting bosons model

۳.۶ مدل اندرکنش بوزونی

هسته‌های تغییر شکل یافته را از ۳ دیدگاه مورد بررسی قرار می‌دهیم.

اولین دیدگاه: مدل ماکروسکوپیکی (قطره مایع)

دومین دیدگاه: مدل میکروسکوپیکی (لایه‌ای)

سومین دیدگاه: مدل اندرکنش بوزونی

اولین مدل هسته‌ای، مدل قطره مایع بود که در سال ۱۹۳۵ و بنابر پیشنهاد بوهر ارائه شد. در این مدل بر نیروی جاذبه قوی بین ذرات هسته‌ای تاکید و از بعضی ویژگی‌های ظریفتر هسته صرف نظر شده بود. در همان زمان ایده مدل هسته‌ای، براساس لایه‌های انرژی مطرح شد با عنوان مدل لایه‌ای هسته بیان شد. براساس این مدل پروتون‌ها و نوترون‌ها در لایه‌هایی متشکل از ترازهای انرژی قرار می‌گرفتند که در حول و حوش لایه‌های پر شده، هسته‌ها از پایداری خوبی برخوردار بودند. این مدل نیز موفقیت‌هایی در پیش بینی خواص هسته کسب کرد. از طرفی مدل لایه‌ای برای بررسی سیستم‌هایی با تعداد ذرات خیلی زیاد یا سیستم‌های بس ذره‌ای مدل خوبی نیستند زیرا برای ذرات خیلی زیاد ما با کمبود تراز مواجه هستیم. در این حالت از برهم‌کنش میان ذرات صرف نظر می‌شود. در آغاز دهه پنجاه میلادی توسط بوهر^{۱۲} و متلسون^{۱۳} مدلی هندسی از هسته معرفی شد [۱۹۴]. این مدل، ساختمان هسته‌هایی را که نوکلئون‌های قابل توجهی در خارج از پوسته بسته داشتند، بخوبی توصیف می‌کرد. کمتر از ۲۰ سال است مدلی براساس یک شیوه جبری مبتنی بر نظریه گروه‌ها ارائه شده گرچه از جهت نتایج شبیه مدل بوهر و متلسون بود، که این مدل، مدل اندرکنش بوزونی هسته نام دارد. این مدل برای هسته‌های زوج – زوج موفق بوده است [۱۹۵–۱۹۷]. منشا این مدل از طرفی در مدل پوسته‌ای است و از طرف دیگر، در وضعیت‌های زیادی، خواصی مانند مدل جمعی دارد. مدل اندرکنش بوزونی در سال ۱۹۷۴ توسط یاکلو^{۱۴} و آریما^{۱۵} معرفی شد [۱۹۸–۲۰۱]. مدل اندرکنش بوزونی ریشه در مدل لایه‌ای دارد که در مورد هسته‌هایی با حداکثر ۵۰ نوکلئون، یک مدل بسیار عالی است اما در هسته‌هایی که تعداد نوکلئون آن‌ها از این تعداد بیشتر است با محدودیت‌هایی همراه است از جمله از این محدودیت‌ها تعداد ترازها خیلی افزایش یافته و تعداد حالت‌های هسته ای بیشتر از لحظه‌ای خواهد بود که مدل لایه‌ای بتواند آن‌ها را توجیه کند، در این مدل تمام توجه به نوکلئون‌های جفت شده‌ی آخرین لایه که به عنوان بوزون‌های برهم‌کنش کننده در نظر گرفته شده، متمرکز می‌شود. سپس این نوکلئون‌های ظرفیتی به گونه‌ای در نظر گرفته می‌شوند، که جفت‌هایی با تکانه زاویه‌ای $L = 0$ ، معرف s - بوزون و $L = 2$ ، معرف d - بوزون را تشکیل می‌دهند. ایده اولیه مدل اندکنش بوزون بر این است که

¹² A. Bohr

¹³ B. Mottelson

¹⁴ F. Iachello

¹⁵ A. Arima

ترازهای انرژی در هسته‌های زوج - زوج می‌توانند توسط یک سیستم از برهم‌کنش بوزون‌های d, s که به ترتیب تکانه صفر و دو را حمل می‌کنند، توصیف شوند. در واقع در این مدل هر زوج نوکلئون به عنوان بوزون در نظر گرفته می‌شود. به علاوه بوزون‌ها همیشه از نزدیکترین عدد جادویی شمرده می‌شوند. مثلاً هسته $^{12}_4\text{Xe}$ ، دارای دو پروتون $N_\pi = \frac{54-50}{2} = 2$ ، و هشت نوترون $N_\theta = \frac{66-50}{2} = 8$ دارد. بنابراین در چارچوب این مدل این هسته $N = N_\pi + N_\theta = 10$ ، بوزون $s (L=0)$ و بوزون $d (L=2)$ ، روی هم شش زیر تراز دارند و بنابراین یک فضای ۶ بعدی را به وجود می‌آورند. در واقع اساس این فرض به مدل پوسته‌ای برمی‌گردد، جایی که حالت‌هایی با تکانه و پاریته $(2^+, 0^+)$ ، دارای انرژی به مراتب کمتر از دیگر حالت‌ها هستند. هامیلتونی در این مدل حاوی بوزون‌ها و برهم‌کنش‌های دو جسمی بین آن‌ها در نظر گرفته می‌شود. حال به بررسی هامیلتونی برای انتقال از حالت $U(5) \leftrightarrow SO(6)$ ، بر پایه مدل اندرکنش بوزون s, d توسط استفاده از گروه $SU(2)$ ، در فرمالیسم تغییر شکل یافته - q می‌پردازیم. همانطور که می‌دانید این گروه ماتریس‌های 2×2 مختلط با دترمینان ۱ و این گروه شامل سه بعد است در نتیجه شامل سه زیرگروه که این زیرگروه‌ها نیز ماتریس‌های 2×2 با دترمینان واحد هستند. حال سیستمی که شامل دو بوزون s, d با اندازه حرکت ۲، $L=0$ را در نظر می‌گیریم. سنگ بنای این مدل به صورت مولدهای زیر

$$(S^+, S^0, S^-)$$

معرفی می‌شوند که باید روابط زیر را برآورد کنند [۲۰۲، ۲۰۳]

$$[S^0, S^\pm] = \pm S^\pm, [S^+, S^-] = -2 S^0 \quad (32.6)$$

هامیلتونی مربوط به این سیستم دو بوزونی که از گروه $SU(2)$ تشکیل شده است به صورت زیر است

$$H_{sd} = g S_0^+ S_0^- + \varepsilon S_1^0 + \gamma C(SO(5)) + \delta C(U(1)) + \eta J^2 \quad (33.6)$$

برای محاسبه رابطه (۳۳.۶)، ابتدا به چند رابطه اولیه نیازمندیم که در ادامه به معرفی این روابط می‌پردازیم. حال اگر $|LM\rangle$ کت حالت پایه‌ی نمایش این گروه باشد در نتیجه روابط زیر برای این گروه صادق است.

$$C(SU(2)) |LM\rangle = \vartheta_L \left(\vartheta_L + \frac{N+1}{2} \right) |LM\rangle, \quad (34.6)$$

$$C(SO(5)) |LM\rangle = \vartheta_{L=2} \left(\vartheta_{L=2} + \frac{N+1}{2} \right) |LM\rangle,$$

$$C(U(1)) |LM\rangle = \vartheta_{L=0} \left(\vartheta_{L=0} + \frac{N+1}{2} \right) |LM\rangle.$$

رابطه هامیلتونی (۳۳.۶)، را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم و در ادامه هر کدام از این هامیلتونی‌های

تفکیک شده را محاسبه می‌کنیم [۲۰۳]

$$H_{Sd} = H_1 + H_2 + H_3 + H_4, \quad (35.6)$$

$$H_1 = g S_0^+ S_0^-,$$

$$H_2 = \varepsilon S_1^0,$$

$$H_3 = \gamma C(SO(5)) + \delta C(U(1)),$$

$$H_4 = \eta J^2$$

ابتدا از عبارت اول هامیلتونی رابطه (35.6)، استفاده می‌کنیم. با معرفی روابط زیر

$$S_0^+ = C_s S^+(s) + C_d S^+(d), \quad (36.6)$$

$$S_0^- = C_s S^-(s) + C_d S^-(d),$$

$$S^+(l) |l M\rangle = \frac{1}{2} \left(\vartheta_l + \frac{N}{2} \right),$$

$$S^-(l) |l M\rangle = 0.$$

عبارت اول رابطه هامیلتونی (35.6)، به صورت زیر تبدیل می‌شود.

$$H_1 |l M\rangle = E_1 |l M\rangle, \quad (37.6)$$

$$g S_0^+ S_0^- |l M\rangle = E_1 = g \left[\frac{C_s}{2} \left(\vartheta_s + \frac{1}{2} \right) + \frac{C_d}{2} \left(\vartheta_d + \frac{5}{2} \right) \right]$$

عبارت دوم رابطه هامیلتونی (35.6)، به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$S_n^0 |l M\rangle = \frac{C_s^2 n}{2} \left(n_s + \frac{1}{2} \right) + \frac{C_d^2 n}{2} \left(n_d + \frac{5}{2} \right), \quad (38.6)$$

$$H_2 |l M\rangle = E_2 |l M\rangle,$$

$$\varepsilon S_1^0 |l M\rangle = E_2 = \varepsilon \left[\frac{C_s^2}{2} \left(n_s + \frac{1}{2} \right) + \frac{C_d^2}{2} \left(n_d + \frac{5}{2} \right) \right].$$

عبارت سوم و چهارم هامیلتونی به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\gamma C(SO(5)) |l M\rangle = \gamma \vartheta_d (\vartheta_d + 3), \quad (39.6)$$

$$\delta C(U(1)) |l M\rangle = \delta \vartheta_s (\vartheta_s + 1),$$

$$\eta J^2 |l M\rangle = \eta j (j + 1),$$

$$(H_3 + H_4) |l M\rangle = (E_3 + E_4) |l M\rangle,$$

$$\left[\gamma C(SO(5)) + \delta C(U(1)) + \eta J^2 \right] |l M\rangle = (E_3 + E_4),$$

$$(E_3 + E_4) = \gamma \vartheta_d (\vartheta_d + 3) + \delta \vartheta_s (\vartheta_s + 1) + \eta j (j + 1).$$

در نهایت انرژی کل طبق روابط فوق و تحت گروه $SU(2)$ به فرم زیر تبدیل می‌شود [۲۰۳]

$$E^k = g h^{(k)} + \varepsilon \Lambda_1^\circ + \gamma \vartheta_d (\vartheta_d + 3) + \delta \vartheta_s (\vartheta_s + 1) + \eta j (j + 1) \quad (40.6)$$

که

$$\begin{aligned} h^{(k)} &= \frac{C_s}{4} \left(\vartheta_s + \frac{1}{4} \right) + \frac{C_d}{4} \left(\vartheta_d + \frac{5}{4} \right), \\ \Lambda_1^\circ &= \frac{C_s^\gamma}{4} \left(n_s + \frac{1}{4} \right) + \frac{C_d^\gamma}{4} \left(n_d + \frac{5}{4} \right) \end{aligned} \quad (41.6)$$

۱.۳.۶ بررسی هامیلتونی بر پایه مدل برهم کنش بوزونی در فرمالیسم تغییر شکل یافته

مولدهای این گروه در فرمالیسم تغییر شکل یافته - q به صورت زیر

$$S_q^\circ(l) = S^\circ(l), \quad (42.6)$$

$$S_q^+(l) = \left[\frac{[S^\circ(l) + S(l) - 1]_q [S^\circ(l) - S(l)]_q}{(S^\circ(l) + S(l) - 1)(S^\circ(l) + S(l))} \right]^{\frac{1}{2}} S^+(l),$$

$$S_q^-(l) = S^-(l) \left[\frac{[S^\circ(l) + S(l) - 1]_q [S^\circ(l) - S(l)]_q}{(S^\circ(l) + S(l) - 1)(S^\circ(l) + S(l))} \right]^{\frac{1}{2}}$$

معرفی می‌شوند که باید از روابط زیر تبعیت کنند [۲۰۳]

$$[S_q^\circ, S_q^\pm] = \pm S_q^\pm, \quad [S_q^+, S_q^-] = -2 S_q^\circ \quad (43.6)$$

هامیلتونی مربوط به این سیستم دو بوزونی که از گروه $SU(2)$ در فرمالیسم تغییر شکل یافته به صورت زیر است

$$H_q = g S_{\circ,q}^+ S_{\circ,q}^- + \varepsilon S_{1,q}^\circ + \gamma C_\gamma(SO_q(5)) + \delta C_\gamma(U_q(1)) + \eta J^2. \quad (44.6)$$

به روش مشابه قسمت قبل انرژی مربوط به این هامیلتونی را محاسبه می‌کنیم که به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$E_q^k = g h_q^{(k)} + \varepsilon \Lambda_{1,q}^\circ + \gamma [\vartheta_d]_q [\vartheta_d + 3]_q + \delta [\vartheta_s]_q [\vartheta_s + 1]_q + \eta [j]_q [j + 1]_q. \quad (45.6)$$

که

$$h_q^{(k)} = \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{x_i} = \sum_{i=1}^k \left(\frac{g C_s^\gamma [\vartheta_s + \frac{1}{4}]_q}{1 - C_s^\gamma x_i} + \frac{g C_d^\gamma [\vartheta_d + \frac{5}{4}]_q}{1 - C_d^\gamma x_i} \right), i = 1, 2, 3, \dots, k, \quad (46.6)$$

$$\Lambda_{1,q}^\circ = \frac{C_s^\gamma}{4} \left(n_s + \frac{1}{4} \right) + \frac{C_d^\gamma}{4} \left(n_d + \frac{5}{4} \right) = \Lambda_1^\circ.$$

پارامتر تغییرشکل یافته- q را حقیقی به فرم $q = e^\tau$ در نظر می‌گیریم سپس عدد - q ^{۱۶} به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[x]_q = \frac{\sin \tau x}{\sin \tau}$$

حال که انرژی را براساس مدل اندرکنش بوزونی در فرمالیسم معمولی و تغییرشکل یافته محاسبه کردیم به بررسی انرژی در یک نمونه هسته می‌پردازیم به طور مثال هسته $^{120}_{54}Xe$ در نظر بگیرید و انرژی را در هردو فرمالیسم براساس مدل اندرکنش بوزونی محاسبه کنید. با فرض داشتن پارامترهای زیر

$$C = 0.78, \tau = 0.2, \varepsilon = 118/25, \delta = -51/7, \eta = 36/5, \gamma = 61/16, \tau' = 0.15, \tau'' = 0.4$$

انرژی در فرمالیسم تغییرشکل یافته به ازای پارامترهای زیر

$$N_\pi = \frac{54 - 50}{2} = 2, N_\vartheta = \frac{66 - 50}{2} = 8 \rightarrow N = 10$$

و با استفاده از روابط زیر

$$N = 2k + \vartheta_d + \vartheta_s \begin{cases} 10 = 2 \times 5 + 0 + 0, & \vartheta_d = l = \vartheta_s = 0, & j = 0^+ \\ 10 = 2 \times 4 + 1 + 1, & \vartheta_d = l = \vartheta_s = 1, & j = 2^+ \\ 10 = 2 \times 4 + 2 + 0, & \vartheta_d = l = 2, \vartheta_s = 0, & j = 4^+ \end{cases}$$

سپس با در نظر گرفتن حالت دوم انرژی در فرمالیسم تغییرشکل یافته به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$E_q = g \left[\frac{C^2 \left[\frac{3}{4} \right]_q}{1 - C^2} + \frac{C^2 \left[\frac{5}{4} \right]_q}{1 - C^2} \right] + \varepsilon \left[\frac{C^2 \left[\frac{3}{4} \right]_q}{2} + \frac{C^2 \left[\frac{5}{4} \right]_q}{2} \right] + \gamma [1]_{q'} [4]_{q'} + \delta [1]_{q''} [2]_{q''} + \quad (47.6)$$

$$\eta [2]_{q'''} [3]_{q'''} = \frac{g C^2}{1 - C^2} \left(\frac{\sin \left(\frac{3}{4} \tau \right)}{\sin \tau} + \frac{\sin \left(\frac{5}{4} \tau \right)}{\sin \tau} \right) + \frac{5}{4} \varepsilon C^2 + \gamma \frac{\sin \left(\frac{4}{4} \tau' \right)}{\sin \tau'} + \delta \frac{\sin \left(\frac{2}{4} \tau'' \right)}{\sin \tau''} + \eta \frac{\sin \left(\frac{2}{4} \tau'' \right)}{\sin \tau''} \frac{\sin \left(\frac{3}{4} \tau'' \right)}{\sin \tau''} = 483/986$$

همانطور که مشاهده می‌کنید در حالت حدی زمانی که

$$q \rightarrow 1 (\tau \rightarrow 0)$$

رابطه انرژی در فرمالیسم تغییرشکل یافته- q (۴۷.۶)، به انرژی در فرمالیسم معمولی (۴۰.۶)، تبدیل می‌شود.

فصل ۷

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

۱.۷ نتیجه‌گیری

در این رساله، ابتدا به معرفی فرمالیسم تغییرشکل یافته و انواع آن پرداخته شده است. همانطور که مشاهده شد فرمالیسم تغییرشکل یافته فضای پهن‌تر و گسترده‌تری را شامل می‌شود که اگر در حالت حدی این فرمالیسم را مورد بررسی قرار دهیم به روابط متناظر در فرمالیسم معمولی متناظر خود تبدیل می‌شوند. لذا شرط اساسی برای قابل قبول بودن این فرمالیسم تغییرشکل یافته این است که در حالت حدی به فرمالیسم معمولی متناظر خود تبدیل شوند. فرمالیسم تغییرشکل یافته در بسیاری از زمینه‌های فیزیک کاربرد دارند که یکی از کاربردهای مهم فرمالیسم تغییرشکل یافته به صورت یک فضای خمیده رفتار می‌کند. به علاوه، این فرمالیسم در مکانیک آماری و مکانیک کلاسیک هم کاربرد دارند. به طور مثال، معادله انرژی داخلی گاز کامل تغییرشکل یافته در حالت حدی به معادله انرژی داخلی گاز واندروالس تبدیل می‌شود. همچنین با استفاده از تعریف مشتق در فرمالیسم تغییرشکل یافته که حالت عام‌تری با تعریف مشتق در فرمالیسم معمولی خود دارد تئوری‌های مکانیک کلاسیک نیوتنی و مکانیک کوانتومی تغییرشکل یافته‌ای را ایجاد کرده‌ایم که در حالت حدی به فرمالیسم معمولی متناظر خود تبدیل می‌شوند. سپس با استفاده از نمایش‌های متفاوت جبر تغییرشکل یافته در مکانیک کوانتومی، هامیلتونی‌های تغییرشکل یافته‌ای در سیستم‌های بوزونی و فرمیونی ایجاد می‌کنیم و سپس طیف انرژی به دست آمده از این هامیلتونی‌ها در حالت حدی با طیف انرژی هامیلتونی معمولی متناظر خود یکسان‌اند. در بخش بعدی با اعمال پارامتر تغییرشکل یافته q روی یک سیستم نوسانگر بدون برهم‌کنش در مکانیک آماری معمولی باعث ایجاد یک تغییر در عامل بولتزمن معمول شد که به این تغییر در عامل بولتزمن معمول، آمار متمایز گفته شد که این آمار حالت عام‌تر و گسترده‌تری نسبت به آمار معمولی دارد که در حالت حدی به همان عامل بولتزمن معمول در مکانیک آماری منجر می‌شود. یعنی به طور کلی با بازنویسی عامل بولتزمن در فیزیک آماری بتوانیم آمار فرمی - دیراک و بوزانیشتین را برای سیستم‌های فرمیون و بوزون بازیابی کنیم. به علاوه این فرمالیسم تغییرشکل یافته را در فیزیک هسته‌ای هم به کاربرد. یعنی با استفاده از نظریه مدل اندرکنش بوزونی می‌توان هسته‌های تغییرشکل یافته را مورد بررسی قرار داد و طیف انرژی به دست آمده در این فرمالیسم را در حالت حدی به طیف انرژی در حالت معمولی بازتولید کرد. در نهایت می‌توان این‌طور بیان کرد فرمالیسم تغییرشکل یافته باعث ایجاد برهم‌کنش در سیستم‌های متناظر معمولی خود می‌شوند.

۲.۷ پیشنهادها

- ۱- مطالعه نوع‌های متفاوت تغییرشکل یافته و بررسی حالت حدی آن‌ها
- ۲- بررسی چرخه‌های گرمایی با استفاده از این فرمالیسم تغییرشکل یافته
- ۳- بررسی نظریه پارافرمیون با استفاده از جبر تغییرشکل یافته q
- ۴- بررسی خواص آماری در مسائل جسم سیاه و گرانش با استفاده از فرمالیسم تغییرشکل یافته
- ۵- بررسی اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در فرمالیسم تغییرشکل یافته
- ۶- بررسی مدل لایه‌ای با درنظر گرفتن اثرات تغییرشکل یافته (اثر اسپین - مدار)
- ۷- بررسی نیلسون تعمیم یافته با درنظر گرفتن عباراتی از قبیل اسپین - مدار
- ۸- محاسبه ترازهای انرژی در مدل نیلسون تعمیم یافته
- ۹- بررسی مدل برهم کنشی بوزون با درنظر گرفتن ایزواسپین
- ۱۰- بررسی هسته‌ها با استفاده از انواع مدل برهم کنشی بوزون

مراجع

- [1] M. Arik and D. Coan, "Hilbert spaces of analytic functions and generalized coherent states", J.Math.Phys.17 524 (1976).
- [2] A. J. Macfarlane, "On q-analogues of the quantum harmonic oscillator and the quantum group $SU(2)_q$ ", J. Phys. A22(1989) 4581, L.C. Biedenharn, "The quantum group $SU_q(2)$ and a q-analogue of the boson operators", J.Phys.A22 L873(1989).
- [3] A. Lorek, A. Ruffing and J. Wess, "A q-deformation of the harmonic oscillator", Z. Phys. C 74, 369–377(1997).
- [4] I. L. Cooper and R. K. Gupta, "q-deformed Morse oscillator", Phys. Rev. A, 52, 941 (1995).
- [5] W. S. Chung, "New q-Deformed Fermionic Oscillator Algebra and Thermodynamics", Journal of Advanced Physics. 4, 160-163 (2015).
- [6] P. P. Kulish and E. V. Damaskinsky, "On the q oscillator and the quantum algebra $SU_q(1, 1)$ ", J. Phys. A: Math. Gen. 23, L415 (1990).
- [7] Y. Ng, "q-deformed oscillator algebra as a quantum group", J. Phys. A: Math. Gen. 23, 1023 (1990).
- [8] H. Ui and N. Aizawa, "q-Analogue of Boson commutator and the Quantum Groups $SU_q(2)$ and $SU_q(1, 1)$ ", Mod. Phys. Lett. A 5, 237 (1990).
- [9] G. Vinod and K. Babu. Joseph, "Studies in quantum oscillators and q-deformed quantum mechanics", India, 27-11-(1997).
- [10] N. Hatami and M. R. Setare, "The q-deformed Dirac oscillator in 2 +1 dimensions", Phys. Lett. A 380, 3469–3472 (2016).
- [11] A. Lavagno, A.M. Scarfone and P. N. Swamy, "Classical and quantum q-deformed physical systems", Eur. Phys. J. C 47, 253–261 (2006).

-
- [12] J. Crnugelj, M. Martinis and V. Mikuta-Martinis, "Jaynes-Cummings model and the deformed-oscillator algebra", Phys. Lett. A 188, 347-354 (1994).
- [13] S. Cai, G. Su and J. Chen, "Thermostatistic properties of a q-deformed ideal Fermi gas with a general energy spectrum", J. Phys. A: Math. Theor. 40, 11245–11254 (2007).
- [14] W. S. Chung and H. Hassanabadi, "q-deformed classical mechanics based on the q-addition", Submitted (2019).
- [15] C. Quesne and N. Vansteenkiste, "q", Phys. Lett. A 240 21 (1998).
- [16] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, "Quantum Groups and Their Applications in Nuclear Physics", Prog. Part. Nucl. Phys. 43, 537–618 (1999).
- [17] P. K. Bera and J. Datta, "Spectral inverse problem for q-deformed harmonic oscillator", Pram. J. Phys. 67, 1023–1035 (2006).
- [18] O. Greenberg, "Particles with small violations of Fermi or Bose statistics", Phys. Rev. D 43 4111 (1991).
- [19] J. J. Sakurai, "Modern Quantum Mechanics", ISBN 978-964-03-4473-6, (1933-1982).
- [۲۰] ک زارع، پایانامه ارشد: "مکانیک کوانتومی و کلاسیکی تغییر شکل یافته - q ، دانشکده علوم، دانشگاه فردوسی مشهد، زمستان (۱۳۷۵).
- [21] V.V. Eremin, A.A. Meldianov, "The q -deformed harmonic oscillator, coherent states, and the uncertainty relation", Theor. Math. Phys. 147 709 (2006).
- [22] V. V. Kuryshkin, Ann. Fond. Louis de Broglie 5 111 (1980).
- [23] G. Brodimas, A. Jannussis and R. Mignani, "Two-parameter quantum algebras, twin-basic numbers, and associated generalized hypergeometric series", U. di Roma preprint N. 820 (1991).
- [24] A. Jannussis, G. Brodimas and R. Mignani, "Quantum groups and Lie-admissible time evolution", J. Phys. A 24 L775 (1991).
- [25] R. Chakrabarti and R. Jagannathan, "A (p, q) -oscillator realization of two-parameter quantum algebras", J. Phys. A 24 L711 (1991).
- [26] K. S. Viswanathan, R. Parthasarathy and R. Janannathan, "On the number operators of multimode systems of deformed oscillators covariant under quantum groups", J. Phys. A 25 L335 (1992).

- [27] C. P. Sun and H. C. Fu, "The q -deformed boson realisation of the quantum group $SU(n)_q$ and its representations", J. Phys. A 22 L983(1989).
- [28] L. Frappat, P. Sorba, A. Sciarrino, "q-fermionic operators and quantum exceptional algebras", J. Phys. A, Math. Gen. 24 L179(1991).
- [29] T. Hayashi, "Q-analogues of Clifford and Weyl algebras-spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras", Commun. Math. Phys. 127 129(1990).
- [30] S. Jing, J.J. Xu, "Comment on the q -deformed fermionic oscillator", J. Phys. A, Math. Gen. 24 L891(1991).
- [31] R. J. Finkelstein, "Observable Properties of q -Deformed Physical Systems", Lett. Math. Phys., 49, 105 (1999).
- [32] S. Chaturvedi, V. Srinivasan and R. Jagannathan, "Tamm-Dancoff deformation of bosonic oscillator algebras", Mod. Phys. Lett. A 8, 3727 (1993).
- [33] W.S. Chung, K.S. Chung, S.T. Nama and Ch.-In Um, "Generalized deformed algebra", Phys. Lett. A 183, 363 (1993).
- [34] C. Daskaloyannis, "Generalized deformed oscillator and nonlinear algebras", J. Phys. A 24 L789(1991).
- [35] C. Daskaloyannis and K. Ypsilantis, "A deformed oscillator with Coulomb energy spectrum", J. Phys. A 25 4157(1992).
- [36] C. Daskaloyannis, "Generalized deformed oscillator corresponding to the modified Poschl-Teller energy spectrum", J. Phys. A 25 2261(1992).
- [37] K. Odaka, T. Kishi and S. Kamefuchi, "On quantization of simple harmonic oscillators", J. Phys. A: Math. Gen. 24, L591 (1991).
- [38] S. Chaturvedi, V. Srinivasan and R. Jagannathan, "Tamm-Dancoff deformation of bosonic oscillator algebras", Mod. Phys. Lett. A 8, 3727 (1993).
- [39] W. S. Chung and J. Y. Kim, "On the q -deformed circular imaginary unit and hyperbolic imaginary unit: q -deformed rotation and q -deformed special relativity in $1 + 1$ dimension", Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 14, 1750057 (2017).

-
- [40] F. J. Herranz, R. Ortega, M. Santander, "Trigonometry of spacetimes: a new self-dual approach to a curvature/signature (in)dependent trigonometry", *J. Phys A: Math Gen.* 33, 4525 (2000).
 - [41] I. M. Yaglom, "A simple non-euclidean geometry and its physical basis", Springer (1979).
 - [42] G. S. Birman, K. Nomizu, "Trigonometry in Lorentzian Geometry", *Am. Math. Mon.* 91, 543 (1984).
 - [43] V. Scheidemann, "Introduction to complex analysis in several variables", (Birkhauser, 2005).
 - [44] Victor J. Katz. , "The calculus of the trigonometric functions", *Historia Mathematica*, 311-324(1987).
 - [45] F. Jackson, "A q-form of Taylor's theorem", *Mess.Math.* 38 , 57 (1909).
 - [46] Won Sang Chung and H. Hassanabadi, "q-Deformed Quantum Mechanics Based on the q-Addition ", *Fortschr. Phys*, 1800111(2019).
 - [47] C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics", *J. Stat. Phys.* 52, 479 (1988).
 - [48] E. Curado and C. Tsallis, "Generalized statistical mechanics: connection with thermodynamics", *J. Phys. A* 24 L69(1991).
 - [49] L. Nivanen, A. Le Mehaute and Q. Wang, "Generalized algebra within a nonextensive statistics", *Rep. Math. Phys.* 52 437(2003).
 - [50] S. Abe, "A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics", *Phys. Lett. A* 224 326(1997).
 - [51] E. Borges, "A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatics", *Physica A* 340 95(2004).
 - [52] E. M. F. Curado and F. D. Nobre, "On the stability of analytic entropic forms", *Physica A* 335 94(2004).
 - [53] C. Tsallis, "What are the numbers that experiments provide", *Quimica Nova.* 17, 468-471 (1994).
 - [54] C.R. Lee and J.P. Yu, "On q-analogues of the statistical distribution", *Phys. Lett. A* 150, 63 (1990).

- [55] G. Su and M. Ge, "Thermodynamic characteristics of the q-deformed ideal Bose gas", Phys. Lett. A 173, 17 (1993).
- [56] Won Sang Chung and H. Hassanabadi, "q-deformed classical mechanics based on the q-addition", Submitted, (2019).
- [57] A. Boumali and H. Hassanabadi, "The Statistical Properties of the-Deformed Dirac Oscillator in One and Two Dimensions", Advanced Studies in Theoretical Physics, (2017).
- [58] X. C. Song, "The construction of the q-analogues of the harmonic oscillator operators from ordinary oscillator operators", J. Phys. A 23 L821 (1990).
- [59] H. Yan, "On q-deformed oscillator systems and the q-oscillator algebra $H_q(4)$ ", Phys. Lett. B 262 459 (1991).
- [60] L. Baulieu and E. G. Floratos, "Path integral on the quantum plane", Phys. Lett. B 258 171 (1991).
- [61] A. Jannussis, ed. H. C. Mueyng, "in Hadronic Mechanics and Non-Potential Interactions, ed", (Nova Science, Commack, NY, 1991).
- [62] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W. S. Chung, "Study of Schrödinger equation in terms of Heun functions in the Commutative vs. Non-Commutative Spaces", MPLA (2018).
- [63] H. Hassanabadi, Z. Derakhshani, S. Zarrinkamar, "Commutative vs. Noncommutative Space Statistical Properties of Two-Dimensional Harmonic Oscillator in Magnetic Field", Acta Phys. Pol. 129, 3 (2016).
- [64] R. L. L. Vitoria, C. Furtado and K. Bakke, EPJC, (2018).
- [65] A. Ronveaux, "Heun's Differential Equations", (Oxford Univ. Press, 1995).
- [66] H. Hassanabadi, S.S. Hosseini, A. Boumali, S. Zarrinkamar, "The statistical properties of Klein-Gordon oscillator in noncommutative space", J. Math. Phys. 55, 033502 (2014).
- [67] H. Sobhani, H. Hassanabadi and W. S. Chung, Nucl. Phys. A 973 33 (2018).
- [68] M. Hosseini, H. Hassanabadi, S. Hassanabadi and H. Sobhani, submitted to journal (2018).
- [69] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, "The Dirac oscillator", J. Phys. A, Math. Gen. 22 L817 (1989).

- [70] A. Boumali,"The One-dimensional Thermal Properties for the Relativistic Harmonic Oscillators", EJTP , 12, No. 32, 121–130 (2015).
- [71] M. Torres, E. Sadurni, T. H. Seligman,"The Dirac-Moshinsky oscillator coupled to an external field and its connection to quantum optics", AIP Conference Proceedings , 1323 , 301 (2010).
- [72] A. I. Arbab,"The complex quantum harmonic oscillator model", EPL 98, 30008 (2012).
- [73] A. Boumali and H. Hassanabadi,"The thermal properties of a two-dimensional Dirac oscillator under an external magnetic field", Eur. Phys. J. Plus 128: 124(2013).
- [74] B.P. Mandal, S. Verma,"Dirac oscillator in an external magnetic field", Phys. Lett. A 374, 1021 (2010).
- [75] B.P. Mandal, S. K. Rai,"Noncommutative Dirac oscillator in an external magnetic field",Phys. Lett. A 376, 2467 (2012).
- [76] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado,"Chirality Quantum Phase Transition in the Dirac oscillator",A. Luis, Phys. Rev. A 77, 063815 (2008).
- [77] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, E. Solano,"Exact mapping of the 2+1 Dirac oscillator onto the Jaynes-Cummings model: Ion-trap experimental proposal", Phys. Rev. A 76, 041801 (2007).
- [78] A. Bermudez, M.A. Martin-Delgado, E. Solano,"Mesoscopic Superposition States in Relativistic Landau Levels", Phys. Rev. Lett. 99, 123602 (2007).
- [79] R. P. Martinez-y-Romero and A. L. Salas-Brito,"Conformal invariance in a Dirac oscillator", J. Math. Phys, 33 , 1831 (1992).
- [80] V.Buzek,"Dynamics of a Q -analogue of the Quantum Harmonic Oscillator",Journal of modern optic, Vol. 38, NO. 4, 801-812, (1991).
- [81] Y. Luo, Y. Cui, Z. Long, J. Jing,"2+1 Dimensional Noncommutative Dirac Oscillator and (Anti)-Jaynes-Cummings Models",Int. J. Theor. Phys. 50 2992(2011).
- [82] A. Jellal, A.El. Mouhafid, M. Daoud,"Massless Dirac Fermions in Electromagnetic Field",J. Stat. Mech. 01 P01021(2012).
- [83] N. Ferkous, A. Bounames,"Energy Spectrum of a 2D Dirac Oscillator in the Presence of the Aharonov-Bohm Effect",Phys. Lett. A 325 21(2004).

- [84] J. Munarriz, F. Dominguez-Adame, R. Lima, "Spectroscopy of the Dirac oscillator perturbed by a surface delta potential", Phys. Lett. A 376 3475(2012).
- [85] J. Grineviciute, D. Halderson, "Relativistic R matrix and continuum shell model", Phys. Rev. C 85 054617(2012).
- [86] G. Melo, M. Montigny, P. Pompeia, "Dirac Oscillator in a Galilean Covariant Non-commutative Space", E. Santos, Int. J. Theor. Phys. 52 441(2013).
- [87] Z.Y. Luo, Q. Wang, X. Li, J. Jing, "Dirac oscillator in noncommutative phase space and (anti)-Jaynes-Cummings models", Int. J. Theor. Phys. 51 2143(2012).
- [88] R.V. Maluf, Int. J. Mod. Phys. A 26 4991(2011).
- [89] C. Quimby, P. Strange, "Graphene physics via the Dirac oscillator in (2+ 1) dimensions", arXiv:1311.2021, (2013).
- [90] L. Frappat, P. Sorba, A. Sciarrino, "q-fermionic operators and quantum exceptional algebras", J. Phys. A, Math. Gen. 24 L179(1991).
- [91] T. Hayashi, "Q-analogues of Clifford and Weyl algebras-spinor and oscillator representations of quantum enveloping algebras", Commun. Math. Phys. 127 129(1990).
- [92] S. Jing, J. J. Xu, "Comment on the q-deformed fermionic oscillator", J. Phys. A, Math. Gen. 24L891 (1991).
- [93] M. Chaichian, P. Kulish, "q-deformed Jacobi identity, q-oscillators and q-deformed infinite-dimensional algebras", Phys. Lett. B 234 72(1990).
- [94] A. A. Marinho, F.A. Brito, C. Chesman, "Thermal properties of a solid through q-deformed algebra", Physica A 391 3424(2012).
- [95] L.C. Biedenharn, M.A. Lohe, "Quantum Group Symmetry and q-Tensor Algebras", World Scientific, Singapore, (1995).
- [96] N. Osakabe, T. Matsuda, T. Kawasaki, J. Endo, A. Tonomura, S. Yano, and H. Yamada, "Experimental confirmation of Aharonov-Bohm effect using a toroidal magnetic field confined by a superconductor", Phys. Rev. A 34, 815 (1986).
- [97] U. Carow-Watamura, S. Wata Mura, International journal of modern physics A, Vol.9, No.22(1994)

- [98] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W. S. Chung, "The q -Deformed Dirac Oscillator in the Presence of a Magnetic Field in $(1+2)$ -Dimensions in Noncommutative Phase Space", *Journal of the Korean Physical Society*, 70,6, 557-560 (2007).
- [99] Z. H. Yang, C.Y. Long, S. J. Qin and Z.W. Long, "DKP Oscillator with Spin-0 in Three-dimensional Noncommutative Phase Space", *Int. J. Theor. Phys.* 49, 644 (2010).
- [100] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari and A. Tureanu, "Hydrogen Atom Spectrum and the Lamb Shift in Noncommutative QED", *Phys. Rev. Lett.* 86, 2716 (2001).
- [101] K. Li and J. Wang, "The topological AC effect on non-commutative phase space", *Eur. Phys. J. C* 50, 1007 (2007).
- [102] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, "Statistical properties of the q -deformed relativistic Dirac oscillator in minimal length quantum mechanics", *Can. J. Phys.* 96(1): 25-29(2018).
- [103] S. Z. Benczik, "Investigations on the Minimal-Length Uncertainty Relation ", January 22, Blacksburg, Virginia, (2007)
- [104] Z. Lewis, A. Roman, T. Takeuchi, " Position and momentum uncertainties of a particle in a V-shaped potential under the minimal length uncertainty relation", *Int. J. Mod. Phys. A* 30, no.35, 1550206 arXiv:1402.7191 [hep-th] IPMU13-0139, (2015).
- [105] K. Konishi, G. Paffuti, and P. Provero, "Minimum physical length and the generalized uncertainty principle in string theory", *Phys. Lett. B*, 234, 276 (1990).
- [106] R.K. Pathria, " Statistical mechanics", Pergamon Press, Oxford (1972).
- [107] N. Kemmer, "Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction", *Proceedings of the Royal Society of London. Series A* 166 127 (1938).
- [108] R. J. Duffin, "On The Characteristic Matrices of Covariant Systems", *Phys. Rev.* 54, 1114 (1938).
- [109] G. Petiau, University of Paris thesis (1936), published in *Acad. R. Belg., Classe Sci., Mem. in 8o* 16, No. 2 (1936).
- [110] H. Umezawa, "Quantum Field Theory", (North-Holland, Amsterdam, 1956).

- [111] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, "Quantum Electrodynamics" [in Russian] (Nauka, Moscow, 1969), English transl. Prev. edn., (Old bourne, London, 1972). T. Kinoshita, "On the Interaction of Mesons with the Electromagnetic Field. I ", Progr. Theor. Phys. 5 473(1950).
- [112] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and A. Boumali, "Morse potential of the q-deformed in the Duffin–Kemmer–Petiau equation", International Journal of Geometric Methods in Modern Physics 14, No. 7 1750112(2017).
- [113] Y. Nedjadi and R. C. Barret, "On the properties of the Duffin-Kemmer-Petiau equation", J. Phys. G 19 87(1993).
- [114] T. R. Cardoso, L. B. Castro and A. S. de Castro, "Confining solutions of massive spin-0 bosons by a linear nonminimal vector coupling in the Duffin-Kemmer-Petiau theory", Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 199 203–206(2010).
- [115] R. F. Guertin and T. L. Wilson, "Noncausal propagation in spin-0 theories with external field interactions", Phys. Rev. D 15 1518(1977).
- [116] M. R. Setare and O. Hatami, "An algebraic approach to the q-deformed Morse potential", Mod. Phys. Lett. A 24(5) 361(2009).
- [117] P. M. Morse, "Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels", Phys. Rev. 34 57(1929).
- [118] W. C. Qiang and S. H. Dong, "An Alternative Approach to Calculating the Mean Values r^k for Hydrogen-Like Atoms", Physica Script. 70 276–279(2004).
- [119] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhlik, "Tables of Integrals, Series and Products", 5th edn.(Academic Press, 1994).
- [120] S. H. Dong, F. L. Rosana and G. H. Sun, "The controllability of the pure states for the Morse potential with a dynamical group $SU(1, 1)$ ", Phys. Lett. A 325 218(2004).
- [121] C. Beck and E. G. Cohen, "Superstatistics", Physica 322A, 267 (2003).
- [122] C. Tsallis and A. M. C. Souza, "Constructing a statistical mechanics for Beck-Cohen superstatistics", Phys. Rev. E 67, 026106 (2003).
- [123] H. Touchette and C. Beck, "Asymptotics of superstatistics", Phys. Rev. E 71, 016131 (2005).

- [124] C. Beck, E. G. D. Cohen and H. L. Swinney, "From time series to superstatistics", *Phys. Rev. E* 72, 056133 (2005).
- [125] C. Vignat, A. Plastino and A. R. Plastino, "Superstatistics based on the microcanonical ensemble", *Nuovo Cimento B* 120, 951 (2005).
- [126] P. H. Chavanis, "Coarse-grained distributions and superstatistics", *Physica A* 359, 177 (2006).
- [127] T. Yamano, "Thermodynamical and informational structure of superstatistics", *Theor. Phys. Suppl.* 162, 87 (2006).
- [128] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, "Superstatistics with different kinds of distributions in the deformed formalism", *Eur. Phys. J. Plus*, 133: 125(2018).
- [129] C. Beck, E.G.D. Cohen, S. Rizzo, "Atmospheric turbulence and superstatistics", *Europhys. News* 36, 189 (2005).
- [130] F. Sattin, L. Salasnich, "Multiparameter generalization of nonextensive statistical mechanics", *Phys. Rev. E* 65, 035106(R) (2002).
- [131] C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics", *J. Stat. Phys.* 52, 479 (1988).
- [132] C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino, "The role of constraints within generalized nonextensive statistics", *Physica A* 261, 534 (1998).
- [133] S. Abe, Y. Okamoto (Editors), "Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications", (Springer, Berlin, 2001).
- [134] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, and W.S. Chung, "q-deformed superstatistics of the Schrödinger equation in commutative and noncommutative spaces with magnetic field", *Eur. Phys. J. Plus* 133: 5(2018).
- [135] H. Hassanabadi, Z. Molaei, S. Zarrinkamar, "DKP oscillator in the presence of magnetic field in (1+ 2)-dimensions for spin-zero and spin-one particles in noncommutative phase space", *Eur. Phys. J. C* 72, 2217 (2012).
- [136] H. Hassanabadi, S.S. Hosseini, A. Boumali, S. Zarrinkamar, "The statistical properties of Klein-Gordon oscillator in noncommutative space", *J. Math. Phys.* 55, 033502 (2014).

- [137] M. Baiesi, M. Paczuski, A.L. Stella, "Intensity thresholds and superstatistics in the temporal occurrence of solar flares", *Phys.Rev.Lett.* 96 051103(2006).
- [138] H. Sobhani, H. Hassanabadi, W. S. Chung, "Effects of cosmic string framework on the thermodynamical properties of anharmonic oscillator using the ordinary statistic and the q-deformed superstatistics approaches", *Eur. Phys. J. C* 78: 106 (2018).
- [139] C. Tsallis, "Nonextensive statistics: theoretical, experimental and computational evidences and connections", *Braz. J. Phys.* 29, 1 (1999).
- [140] A. Kempf, G. Mangano, R.B. Mann, "Hilbert space representation of the minimal length uncertainty relation", *Phys. Rev. D* 52 1108(1995); F. Scardigli, "Generalized uncertainty principle in quantum gravity from micro-black hole gedanken experiment", *Phys. Lett. B* 452 39(1999).
- [141] H. Hassanabadi, S. Sargolzaei and W.S. Chung, "Superstatistics properties of q-deformed Morse potential in one dimension", *Physica A* 508 740–747(2018) .
- [142] R. N. Costa Filho, G. Alencar, B. S. Skagerstam, J. S. Andrade Jr, "Morse potential derived from first principles", *Europhys. Lett.* 101 (1) (2013);
- [143] A. Boumali, "The statistical properties of q-deformed Morse potential for some diatomic molecules", *JOMC* (2018).
- [144] Y. Xu, S. He and C. S. Jia, "Approximate analytical solutions of the Klein–Gordon equation with the Pöschl–Teller potential including the centrifugal term", *Phys. Scripta* 81, 045001 (2010).
- [145] M. Simsek and H. Egrifes, "The Klein–Gordon equation of generalized Hulthén potential in complex quantum mechanics", *J. Phys. Lon. Math. Gen.* 27, 4379 (2004).
- [146] L. B. Castro, "Relating pseudospin and spin symmetries through chiral transformation with tensor interaction", *Phys. Rev. C* 86, 052201 (2012).
- [147] A. L. Cavalcanti de Oliveira and E. R. Bezerra de Mello, "Exact solutions of the Klein–Gordon equation in the presence of a dyon, magnetic flux and scalar potential in the space-time of gravitational defects", *Class. Quantum Grav.* 23 5249 (2005).
- [148] T. T. Wu and C. N. Yang, "Dirac monopole without strings: monopole harmonics", *Nucl. Phys. B* 107, 365 (1976).

- [149] L. B. Castro, "Relating pseudospin and spin symmetries through chiral transformation with tensor interaction", *Phys. Rev. C* 86, 052201(R) (2012).
- [150] A. Ronveaux, "Heun's Differential Equations", (Oxford Univ. Press, 1995).
- [151] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W. S. Chung, "Superstatistics of the Klein Gordon equation in deformed formalism for modified Dirac delta distribution", *Modern Physics Letters A*, 33, 10 11 1850060(2018) .
- [152] A. G. Bashkurov and A. D. Sukhanov, "The distribution function for a subsystem experiencing temperature fluctuations", *J. Exp. Theor. Phys.* 95, 440 (2002).
- [153] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, "Study of the statistical physics bases on superstatistics from the β -fluctuated to the T-fluctuated form", *Eur. Phys. J. Plus* 133: 157(2018).
- [154] D. Youm, " q -deformed conformal quantum mechanics", *Phys. Rev. D*, 62, 095009 (2000).
- [155] H. Sobhani, W. S. Chung and H. Hassanabadi, " q -Deformed Relativistic Fermion Scattering", *Adv.High Energy Phys*, 9530874, 9(2017).
- [156] H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, R. Oudi, S. Zarrinkamar and H. Rahimov, "Exact solution Dirac equation for an energydependent potential", *Eur. Phys. J. Plus*, 127, 120(2012).
- [157] O. W. Greenberg and A. M. L. Messiah, "Selection rules for parafields and the absence of para particles in nature", *Phys. Rev. B* 138 1155(1965) .
- [158] V. A. Rubakov and V. P. Spiridonov, "Parasupersymmetric quantum mechanics", *Mod. Phys. Lett. A* 3 1337(1988).
- [159] A. Isihara, "Statistical Physics", (Academic Press, New York, 1971).
- [160] Y. Ohnuki and S. Kamefuchi, "Quantum Field Theory and Parastatistics", (Springer-Verlag, Berlin, 1982).
- [161] V. L. Safonov, "On a concept of quasiparticles with parastatistics", *Phys. Status Solidi B* 167 109(1991).
- [162] A. Khare, "Parasupersymmetric quantum mechanics of arbitrary order", *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 L749(1992).

- [163] M. Tomiya, "Comment on generalized parasupersymmetric quantum mechanics", J. Phys. A: Math. Gen. 25 4699(1992).
- [164] J. Beckers and N. Debergh, "Parastatistics and supersymmetry in quantum mechanics", Nucl. Phys. B 340 767(1990).
- [165] E. P. Wigner, "Do the Equations of Motion Determine the Quantum Mechanical Commutation Relations?", Phys. Rev. 77, 711 (1950).
- [166] L. M. Yang, "A Note on the Quantum Rule of the Harmonic Oscillator", Phys. Rev. 84, 788 (1951).
- [167] H.S. Green, "A generalized method of field quantization", Phys. Rev. 90 270(1953).
- [168] R. C. King, T. D. Palev, N. I. Stoilova and J. Van der Jeugt, "The non-commutative and discrete spatial structure of a 3D Wigner quantum oscillator", J. Phys. A: Math. Gen. 36, 4337(2003).
- [169] N. Mukunda, "Algebraic aspects of the Wigner distribution in quantum mechanics", Pragma - J Phys 11, 1 (1978).
- [170] A.J. Macfarlane, "Algebraic structure of parabose Fock space. I. The Green's ansatz revisited", J. Math. Phys 35, 1054 (1994).
- [171] M.S. Plyushchay, "Deformed Heisenberg algebra and fractional spin field in 2+ 1 dimensions", Phys. Lett. B 320, 91 (1994).
- [172] M.S. Plyushchay, "Deformed Heisenberg algebra, fractional spin fields, and supersymmetry without fermions", Annals Phys. 245, 339 (1996).
- [173] M.S. Plyushchay, "Hidden nonlinear supersymmetries in pure parabosonic systems", Int. J. Mod. Phys. A 15, 3679 (2000).
- [174] P.A. Horvathy and M.S. Plyushchay, "Anyon wave equations and the noncommutative plane", Phys. Lett. B 595, 547 (2004).
- [175] M.S. Plyushchay, "Deformed Heisenberg algebra with reflection", Nucl. Phys. B 491 619(1997).
- [176] P.A. Horvathy, M.S. Plyushchay and M. Valenzuela, "Bosons, fermions and anyons in the plane, and supersymmetry", Annals Phys. 325, 1931 (2010).

-
- [177] A. Chenaghlou and H. Fakhri, "On the generalized unitary parasupersymmetry algebra of beckers-debergh", *Int. J. Mod. Phys. A* 18 939(2003) .
- [178] V. A. Rubakov and V. P. Spiridonov, "Parasupersymmetric quantum mechanics", *Mod. Phys. Lett. A* 3 1337(1988).
- [179] A. Khare, "Parasupersymmetric quantum mechanics of arbitrary orde", *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 L749(1992).
- [180] M. Tomiya, "Comment on generalized parasupersymmetric quantum mechanics", *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 4699(1992).
- [181] J. Beckers and N. Debergh, "Parastatistics and supersymmetry in quantum mechanics", *Nucl. Phys. B* 340 767(1990).
- [182] W. S. Chung, H. Hassanabadi and S. Sargolzaeipor, "Thermodynamics of Wignons", *Physics Letters A* (2019).
- [183] W. Loveland, D. J. Morrissey and G. T. Seaborg, "Modern Nuclear Chemistry", print ISBN: 9780471115328, online ISBN:9780471768623, |DOI:10.1002/0471768626, 7 October (2005).
- [184] S. G. Nilsson, *Mat.-Fys. Medd. K. Dan Vidensk. Selsk.* 29 (16)(1955).
- [185] C. Gustafson, I. L. Lamm, B. Nilsson, and S.G. Nilsson. *Ark.Fys.*,36,613(1967).
- [186] P. P. Raychevy, R. P. Roussev, N. Lo. Iudicey and P. A. Terziev, "An application of the 3-dimensional q-deformed harmonic oscillator to the nuclear shell model", *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* 24 1931(1998) .
- [187] M. Micu and Fl. Stancu, "On a q-analogue of the spin-orbit coupling", *J. Phys. A: Math. Gen.* 33 5693,(2000).
- [188] T. Bengtsson and I. Ragnarsson, "Rotational bands and particle-hole excitations at very high spin", *Nucl. Phys. A* 436 14(1985).
- [189] P. Raychev, R. Roussev, P. Terziev, D. Bonatsos, Lo Iudice N, "Simplified boson realization of the subalgebra of and matrix elements of quadrupole operators", *J. Phys. A: Math. Gen.* 29 6939(1996).
- [190] V. d. Jeugt, "On the principal subalgebra of quantum enveloping algebras $gl_q(1+1)$ ", *J. Phys. A: Math. Gen.* 25 L213(1992).

- [191] V. d. Jeugt, "Dynamical algebra of the q -deformed three-dimensional oscillator", J. Math. Phys. 34 1799(1993).
- [192] V. d. Jeugt, "Quantum algebra embeddings: deforming functionals and algebraic approach", Can. J. Phys. 72 519(1994).
- [193] S. G. Nilsson and I. Ragnarsson, "Shapes and shells in nuclear structure", ISBN-13 978-0-521-37377-7, (2005) (Book).
- [194] A. Bohr, B. R. Mottelson (1998), "Nuclear Deformations", Nuclear Structure, Volume II, ISBN 9810239807. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. (1998) (Book).
- [195] F. Pan, " q - deformations in the interacting boson model for nuclei", Phys. Rev. C 50, 4(1994).
- [196] F. Pan and J. P. Draayer, "Exact Solutions for Some Nuclear Many-Body Problems", Annals of Physics 271, 120140 (1999).
- [197] F. Pan, X. Zhang and J. P. Draayer, "Algebraic solutions of an sl -boson system in the $U(2l+1) \leftrightarrow O(2l+2)$ transitional region", J. Phys. A: Math. Gen. 35, 7173–7185(2002).
- [198] F. Iachello, A. Arima, "The Interacting Boson Model", (Cambridge University Press, Cambridge, England. (1987)).(Book).
- [199] F. Iachello, A. Arima, "Interacting Boson Model of Collective Nuclear states II. Rotational limit", Ann. Phys. (N.Y.) 111, 201(1978).
- [200] F. Iachello, A. Arima, "Interacting Boson Model of Collective Nuclear states II. The $O(6)$ limit", Ann. Phys. (N.Y.) 123, 468.(1979).
- [201] F. Iachello, A. Arima, "Interacting Boson Model of Collective Nuclear states II. The vibrational limit", Ann. Phys. (N.Y.) 99, 253.(1976).
- [202] M. A. Jafarizadeh, N. Amiri, M. Ghapanvari and N. Fouladi, "Algebraic solutions for $q - sdl -$ and $q - sdll'$ -boson systems in the transitional region", Nuclear Physics A 977, 129-145 (2018).
- [203] M. A. Jafarizadeh, N. Amiri, N. Fouladi, M. Ghapanvari and Z. Ranjbar, "Study of phase transition of even and odd nuclei based on q -deformed $SU(1, 1)$ algebraic model", Nuclear Physics A 972 86–106(2018).

Aabstract

Quantum algebras have been receiving much attention in physics and mathematics in the past four decades. In this dissertation, we investigated the deformed formalism. We know, deformed formalism is general form than its corresponding initial theory. So that, in the limited case of deformed parameter, the initially formalism is recover. Such as, Newton mechanics is a special case of relativistic mechanics that deformed parameter is $\beta = \frac{V}{C}$ and when $\beta \rightarrow 0$ the well-know Newton mechanics is recover. as well as, quantum mechanics is generalize Classical mechanics and deformed parameter is $\frac{1}{\hbar}$ in quantum mechanics, when $\frac{1}{\hbar} \rightarrow \infty$, quantum mechanics change to Classical mechanics. It is now, assumed the deformed theories are obtained by introducing a dimensionless deformed parameter into one of the fundamental relations of initially theories. The structure of this dissertation is as follows: first, we introduced a deformed formalism. Then, we studied deformed Heisenberg - Weil algebra and the q-deformed trigonometric function. The deformed complex number and its conjugate is also investigated. In addition to, we discussed the creation and annihilation operators in this deformed formalism according to the creation and annihilation operators in ordinary quantum space. Then, by using of the deformed formalism, deformed Quantum and Classical harmonic oscillator are investigated. The free particle behavior in this space is similar to the particle with charge which moving in ordinary space in the presence of magnetic field. In each section, we introduce the deformed quantum and classical Hamiltonians and we obtain the energy spectrum. Then, at each step of these steps, the results Compare with result of the corresponding initially theories. In next section, we investigated statistical mechanics in deformed formalism which we will call superstatistics. In the limited case, superstatistics reduce to the Boltzmann factor of ordinary statistical mechanics. By using of this description, we studied relativistic and non-relativistic systems in the deformed formalism. As well as, we discussed the temperature fluctuation instead of the inverse temperature fluctuation in the superstatistics. Then, the relativistic scattering problem in deformed version of Dirac equation is derived. in addition to, we studied the applications of deformed formalism in nuclear physics. Also, we investigated the nuclear models, which including the Nilsson model and the Interacting bosons model. In addition to, we studied the Interacting bosons model in deformed formalism. With removed the deformed parameter, a good agreement between the deformed formalism and ordinary formalism is found. Finally, our conclusion is appeared in last section.

Keywords: deformed formalism; deformed Classical and quantum harmonic oscillator; superstatistics; relativistic and non-relativistic systems; relativistic scattering problem.



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

PhD Thesis in: Nuclear Physics

**Investigation of relativistic and
non-relativistic systems in the deformed
formalism**

By: Sepideh Sargolzaeipor

Supervisor

Hassan Hassanabadi

June 2019