

الحمد لله  
الذي هدانا لهذا  
الذي كنا لنهتدي لہ  
لو اننا لم نكن  
نؤمن بالله  
واليوم الآخر  
لكن الحمد لله  
الذي هدانا لهذا  
الذي كنا لنهتدي لہ



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای  
رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# مطالعه و بررسی انتقال حالات کوانتومی بر پایه ولگشت های کوانتومی گسسته

نگارنده: زینب کاووسی

استادان راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی  
دکتر مرتضی رفیعی

شهریور ۱۳۹۷

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



دانشگاه شهید بهشتی

مدیریت تحصیلات تکمیلی

### فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم زینب کاووسی با شماره دانشجویی ۹۴۱۴۴۴۴ رشته فیزیک گرایش ذرات بنیادی تحت عنوان مطالعه و بررسی روش های انتقال حالات کوانتومی بر پایه ولگشت های کوانتومی گسسته که در تاریخ ۹۷/۰۶/۱۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

|                                |                                                                 |
|--------------------------------|-----------------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> مردود | <input checked="" type="checkbox"/> قبول (با درجه: علمی شایسته) |
| <input type="checkbox"/> عملی  | <input checked="" type="checkbox"/> نظری                        |

| عضو هیأت داوران           | نام و نام خانوادگی           | مرتبه علمی | امضاء |
|---------------------------|------------------------------|------------|-------|
| ۱- استاداراهنمای اول      | دکتر مصطفی عنایتی            | استادیار   |       |
| ۲- استاداراهنمای دوم      | دکتر مرتضی رفیعی             | استادیار   |       |
| ۳- استاد مشاور            |                              |            |       |
| ۴- نماینده تحصیلات تکمیلی | دکتر احسان ابراهیمی          | استادیار   |       |
| ۵- استاد ممتحن اول        | دکتر کاظم بی تقصیر فدافن     | دانشیار    |       |
| ۶- استاد ممتحن دوم        | دکتر سید علی حسینی<br>منصوری | استادیار   |       |

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع

نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر سعید جسامی پبله رود تاریخ و امضاء و مهر دانشکده فیزیک



این پایانامه را ضمن تشکر و سپاس بیکران و در کمال افتخار و امتنان تقدیم می نمایم به والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم، چرا که این دو وجود، پس از پروردگار، مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

و همسر و دختر عزیزم که وجودشان مایه دلگرمی است.

## سپاس‌گزاری...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدر دانی از زحمات بی‌شائبه‌ی او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تأمین می‌کند و سلامت امانت‌هایی را که به دستش سپرده‌اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب ”من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّ و جلّ“ از اساتید محترم؛ جناب آقای دکتر مصطفی عنابستانی و دکتر مرتضی رفیعی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ کمال تشکر و قدر دانی را دارم.

از اساتید گرانقدر؛ جناب آقای دکتر سید علی حسینی منصوری و دکتر کاظم بی‌تقصیر که قبول زحمت نموده و داوری این رساله را به عهده گرفتند، کمال تشکر را دارم.

زینب کاووسی  
شهریور ۱۳۹۷

## تعهد نامه

اینجانب زینب کاووسی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک فیزیک و مهندسی هسته ای دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان مطالعه و بررسی انتقال حالات کوانتومی بر پایه ولگشت های کوانتومی گسسته، تحت راهنمایی مصطفی عنابستانی و مرتضی رفیعی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زینب کاووسی

شهریور ۱۳۹۷

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

## چکیده

انتقال حالت کوانتومی در بسیاری از سیستم‌های کوانتومی به شیوه‌های مختلفی صورت می‌گیرد. این انتقال حالت گاهی به منظور انتقال مستقیم یک پیام انجام می‌شود، گاهی برای دوربری همین‌طور ممکن است به هدف استفاده در سیستم‌های پردازش اطلاعات کوانتومی و کامپیوترهای کوانتومی که شاخه‌ای پیشرو در علوم میان‌رشته‌ای است، مد نظر قرار بگیرد. یکی از مهمترین بخش‌های یک سیستم پردازشگر کوانتومی بخش مربوط به انتقال اطلاعات می‌باشد. آن چه که در این سیستم‌ها منتقل می‌شود در واقع حالت کوانتومی است. و بستری که این انتقال در آن روی می‌دهد را کابل کوانتومی می‌نامیم. کابل کوانتومی را می‌توان به صورت یک شبکه کوانتومی در نظر گرفت و به دلیل ذات احتمالاتی (آماري) مکانیک کوانتومی، برای بررسی فرآیند انتقال حالت می‌توان از ولگشت که خود فرآیندی آماری می‌باشد، استفاده کرد. ولگشت کوانتومی به عنوان همتای کوانتومی ولگشت کلاسیکی تعریف می‌شود. یکی از اهداف آن یافتن الگوریتم‌هایی است که سریع‌تر و کارآمدتر از الگوریتم‌های کلاسیکی می‌باشند، و براساس آن دو نوع زمان گسسته و زمان پیوسته پایه ریزی شده است. ما در این پایان‌نامه انتقال حالت‌های کیوبیتی را که مبنای انتقال اطلاعات در کامپیوترهای کوانتومی می‌باشند در شبکه‌های کوانتومی مانند زنجیره‌های اسپینی و ... بر اساس مدل ولگشت کوانتومی زمان گسسته مورد مطالعه قرار داده‌ایم. به دلیل اهمیت بالای انتقال حالت در ارتباطات کوانتومی، شرایط انتقال حالت کامل را روی زنجیره‌های اسپینی و همین‌طور حلقه‌های اسپینی بررسی کرده‌ایم. نشان داده شده است که اگر بتوان برهم‌کنش‌های بین اسپین‌ها را مهندسی (تنظیم) کرد، یک حالت کوانتومی می‌تواند روی یک زنجیره با هر طولی به صورت کامل منتقل شود بدون این که نیازی به کنترل دینامیکی خارجی وجود داشته باشد. همچنین با استفاده از قیاس بین ولگشت کوانتومی زمان گسسته با معادله دیراک و ولگشت کوانتومی زمان پیوسته با معادله شرودینگر این دو نوع ولگشت با هم مقایسه شده است. یک طرح مسیریابی بهینه نیز برای انتقال حالت نامعلوم دلخواه، از مکان‌های ورودی به مکان‌های خروجی دلخواه بررسی شده است.

**کلید واژه ها:** ولگشت کوانتومی زمان گسسته، انتقال حالت کامل، زنجیره‌های اسپینی، مسیریابی بهینه

## پیش گفتار

انتقال حالت‌های کوانتومی بین دو مکان در بسیاری از سیستم‌های پردازش اطلاعات کوانتومی از اهمیت بالایی برخوردار است. این انتقال حالت می‌تواند به شکل‌های مختلفی روی بدهد، برای مثال ممکن است در سیستم‌های بوزونی مانند سیستم شامل فوتون‌ها و یا در سیستم‌های فرمیونی مانند سیستم شامل الکترون‌ها صورت گیرد. در سیستم‌های نوری، انتقال حالت از طریق فوتون‌ها انجام می‌گیرد. این فوتون‌ها ممکن است مستقیماً حامل یک پیام بوده و یا برای ایجاد درهم‌تنیدگی به منظور دوربری بین دو مکان مورد استفاده قرار بگیرند. همچنین می‌توان از فوتون در حفره  $QED$ <sup>۱</sup> [۲] و فونون‌ها در تله‌های یونی [۳] به عنوان حامل‌های اطلاعات برای انتقال حالت استفاده کرد.

البته بسیاری از فناوری‌های نوید بخش مانند کامپیوترهای کوانتومی، به جای حامل‌های اطلاعاتی منفرد، نیازمند استفاده جمعی از این حامل‌ها، مانند شبکه‌های نوری [۴] و آرایه‌های نقاط کوانتومی [۵] می‌باشند. در کامپیوترهای کوانتومی، این حامل‌های جمعی اطلاعات، کابل کوانتومی<sup>۲</sup> نام دارند. یک کابل کوانتومی به عنوان بنیادی ترین واحد هر دستگاه پردازش کوانتومی شناخته می‌شود. روش تحلیل انتقال حالت در طول کابل کوانتومی و یا هر شبکه کوانتومی دیگر، بررسی آن بر اساس مدل ولگشت کوانتومی<sup>۳</sup> می‌باشد. عبارت ولگشت (قدمزنی تصادفی) اولین بار توسط کارل پیرسون<sup>۴</sup> در سال ۱۹۰۵ معرفی شد [۶]. این پدیده یک فرآیند آماری است که توصیف کننده مسیری با گام‌های تصادفی بوده و ثابت شده است که روشی قدرتمند برای توسعه الگوریتم‌های آماری است [۷، ۸]. ولگشت کلاسیکی<sup>۵</sup> در بسیاری از علوم مختلف مانند فیزیک، زیست‌شناسی، اقتصاد، کامپیوتر و مدل سازی زلزله به کار گرفته می‌شود [۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲].

کامپیوترهای کلاسیکی به این دلیل که تنها بر اساس دو حالت قطع و وصل عمل کرده و خصوصیات فیزیکی سیستم‌های پردازش کننده را در نظر نمی‌گیرند دارای محدودیت‌های زیادی در محاسبات می‌باشند. اگر بخواهیم که این خصوصیات فیزیکی را در نظر بگیریم بهترین نظریه که می‌تواند مفید باشد، نظریه کوانتوم است که با استفاده از آن محاسبات کوانتومی نتیجه می‌شود. محاسبات کوانتومی می‌تواند به عنوان حوزه‌ای میان رشته‌ای تعریف شود که هدف آن ساخت کامپیوترهای کوانتومی و سیستم‌های پردازش اطلاعات کوانتومی است، یعنی ساختن کامپیوترها و سیستم‌های پردازش اطلاعاتی که از خصوصیات کوانتومی طبیعت استفاده می‌کنند. از دلایل عمده ای که اهمیت محاسبات کوانتومی را نشان می‌دهند

<sup>۱</sup>Quantum Electrodynamics

<sup>۲</sup>Quantum Wire

<sup>۳</sup>Quantum Walk

<sup>۴</sup>carl pearson

<sup>۵</sup>Classical Walk

عبارت اند از :

۱- محاسبات کوانتومی قدرت پردازش را به منظور حل مسائل خاصی به میزان قابل توجهی افزایش می دهد [۱۳، ۱۴، ۱۵].

۲- کاربردهای محاسبات کوانتومی در شاخه های مختلفی از علم و فناوری در حال رشد است [۱۶، ۱۷، ۱۸].

۳- شبیه سازی سیستم های فیزیکی و مسائل ریاضی پیچیده ای که هیچ الگوریتم دیجیتالی کلاسیکی ای را که بتواند آنها را شبیه سازی کند، وجود ندارد [۱۹، ۲۰، ۲۱].

ساخت الگوریتم های کوانتومی به دلیل طبیعت غیر ملموس و پیچیده مکانیک کوانتومی مشکل می باشد و باید به دنبال مدل هایی باشیم که به کمک آنها این کار را بهتر، آسان تر و کاربردی تر انجام بگیرد. یک ابزار پیشرفته و کاربردی برای ساخت الگوریتم های کوانتومی، ولگشت های کوانتومی می باشد که همتای کوانتومی ولگشت کلاسیکی است [۲۲، ۲۳، ۲۴].

اشاره ی به نسخه کوانتومی ولگشت به مقاله ای در سال ۱۹۵۸ توسط ریازانوف<sup>۶</sup>، با عنوان انتگرال مسیر فاینمن<sup>۷</sup> برای معادله دیراک<sup>۸</sup> باز می گردد [۲۵]. ولی کاربرد رسمی عبارت ولگشت کوانتومی مربوط به دهه نود میلادی میباشد. آهارانوف<sup>۹</sup> و همکاران در سال ۱۹۹۳ برای اولین بار ولگشت های کوانتومی را معرفی کردند [۲۶]. در سال ۱۹۹۶ حرکت ذرات در شبکه کوانتومی توسط میر<sup>۱۰</sup> مورد مطالعه قرار گرفت [۲۷]. همچنین فرهی<sup>۱۱</sup> و همکاران در سال ۱۹۹۸ در مقاله ای با عنوان محاسبات کوانتومی ولگشت کوانتومی را مورد مطالعه قرار دادند [۲۸]. تفاوت اصلی ولگشت کوانتومی با کلاسیکی، مربوط به خاصیت درهم نهی و تداخل می باشد که بر اثر همین خصوصیات، الگوریتم های حاصل از ولگشت کوانتومی، بسیار سریعتر و کارآمدتر از الگوریتم کلاسیکی می باشند [۲۹، ۳۰].

ولگشت های کوانتومی به دو دسته تقسیم می شوند:

ولگشت های کوانتومی زمان گسسته<sup>۱۲</sup> و ولگشت های کوانتومی زمان پیوسته<sup>۱۳</sup>. که تعریف هر یک در بخش (۱.۱۰.۱) آمده است. در این پایان نامه بر مدل ولگشت کوانتومی زمان گسسته متمرکز شده و انتقال حالت روی شبکه های کوانتومی مختلف مانند زنجیره های اسپینی<sup>۱۴</sup> و حلقه ها بر اساس این مدل بررسی شده است.

<sup>۶</sup>Riazanov

<sup>۷</sup>Feynman

<sup>۸</sup>Dirac Equation

<sup>۹</sup>Aharanov

<sup>۱۰</sup>Meyer

<sup>۱۱</sup>Farhi

<sup>۱۲</sup>Discreat Time Quantum Walk

<sup>۱۳</sup>Continuos Time Quantum Walk

<sup>۱۴</sup>Spin Chain

# فهرست مطالب

فهرست تصاویر

ف

فهرست جداول

ق

|    |                                                                     |        |
|----|---------------------------------------------------------------------|--------|
| ۱  | مفاهیم اولیه                                                        | ۱      |
| ۱  | مقدمه                                                               | ۱.۱    |
| ۲  | بیت و کیوبیت                                                        | ۲.۱    |
| ۷  | عملگر چگالی                                                         | ۳.۱    |
| ۷  | عملگرهای پائولی                                                     | ۴.۱    |
| ۸  | تحول                                                                | ۵.۱    |
| ۸  | عملگرهای کوانتومی                                                   | ۶.۱    |
| ۹  | عملگر کراوس                                                         | ۷.۱    |
| ۱۰ | ارسال حالت‌های کوانتومی                                             | ۸.۱    |
| ۱۳ | مخابرات کوانتومی                                                    | ۹.۱    |
| ۱۶ | انتقال حالت در زنجیره‌های اسپینی                                    | ۱۰.۱   |
| ۱۷ | برهم‌کنش هایزنبرگ                                                   | ۱.۱۰.۱ |
| ۱۸ | ولگشت‌های کوانتومی                                                  | ۱۱.۱   |
| ۱۹ | ولگشت‌های کوانتومی گسسته                                            | ۱.۱۱.۱ |
| ۲۰ | ولگشت کوانتومی روی خط                                               | ۲.۱۱.۱ |
| ۲۳ | انتقال حالت کوانتومی از طریق زنجیره‌ی اسپینی                        | ۲      |
| ۲۴ | دینامیک حاکم بر شبکه‌های اسپینی                                     | ۱.۲    |
| ۲۶ | انتقال حالت‌های کوانتومی در یک زنجیره اسپینی                        | ۲.۲    |
| ۳۳ | ساده‌ترین پروتکول مخابرات کوانتومی از طریق یک زنجیره اسپینی         | ۳.۲    |
| ۳۹ | روش‌های انتقال حالات کوانتومی بر پایه‌ی ولگشت کوانتومی زمان – گسسته | ۳      |
| ۴۰ | ولگشت کوانتومی زمان – گسسته و عملگرهای چرخش سکه‌ی مایل              | ۱.۳    |

|    |                                                                |      |
|----|----------------------------------------------------------------|------|
| ۴۱ | انتقال کامل حالت و مسیریابی مفید کوانتومی                      | ۲.۳  |
| ۴۵ | ولگشت کوانتومی زمان- گسسته در ابعاد بالاتر                     | ۳.۳  |
|    | مسیر یابی سکه‌های در هم تنیده در ولگشت کوانتومی زمان- گسسته دو | ۴.۳  |
| ۴۶ | بعدی                                                           |      |
| ۵۰ | انتقال حالت کیوبیتی از طریق ولگشت کوانتومی زمان- گسسته یک بعدی | ۵.۳  |
| ۵۳ | انتقال کامل حالت و عملگر بازیابی                               | ۶.۳  |
| ۵۵ | انتقال کامل حالت روی خط- $N$ ذره ای                            | ۷.۳  |
| ۵۸ | انتقال کامل حالت روی دایره ی- $N$ ذره ای                       | ۸.۳  |
| ۶۱ | ولگشت کوانتومی زمان پیوسته                                     | ۹.۳  |
| ۶۳ | حد پیوسته ی ولگشت کوانتومی                                     | ۱۰.۳ |
| ۶۷ | انتقال کامل حالت در ولگشت کوانتومی زمان گسسته                  | ۱۱.۳ |
| ۶۹ | حد جرم بزرگ                                                    | ۱۲.۳ |
| ۷۱ | حد جرم کوچک                                                    | ۱۳.۳ |
| ۷۱ | گذار بین دو نوع از منتقل کننده                                 | ۱۴.۳ |
| ۷۲ | روش های دیگر برای انتقال کامل حالت                             | ۱۵.۳ |

|    |            |   |
|----|------------|---|
| ۷۷ | نتیجه گیری | ۴ |
|----|------------|---|

|    |       |  |
|----|-------|--|
| ۸۱ | مراجع |  |
|----|-------|--|

# فهرست تصاویر

|    |                                                                               |
|----|-------------------------------------------------------------------------------|
| ۳  | ۱.۱ داده های نوعی برای آزمایش تک عاملی . . . . .                              |
|    | ۲.۱ هر نقطه روی سطح کره ی $یک$ حالت خاص و هر نقطه درون                        |
| ۵  | کره نمایش $یک$ حالت مخلوط کوانتومی است. . . . .                               |
| ۱۴ | ۳.۱ $یک$ کامپیوتر کوانتومی نوعی. . . . .                                      |
| ۱۵ | ۴.۱ اتصال پردازش گرهای کوانتومی با کیوبیت های متحرک. . . . .                  |
| ۱۶ | ۵.۱ اتصال پردازش گرهای کوانتومی با کیوبیت های ساکن. . . . .                   |
|    | ۱.۲ کوپلینگ $J_n$ که انتقال کامل حالت از $A$ به $B$ را در یک زنجیره ۶ کیوبیتی |
| ۳۱ | تصدیق می کند. . . . .                                                         |
| ۳۳ | ۲.۲ زنجیره اسپینی . . . . .                                                   |
| ۴۰ | ۱.۳ رابطه ی بین حالت های سکه و راستای ولگشت . . . . .                         |
|    | ۲.۳ انتقال حالت از طریق ولگشت کوانتومی گسسته یک بعدی از زمان $\circ$ به       |
| ۴۴ | مکان ۳. . . . .                                                               |
|    | ۳.۳ انتقال حالت از طریق ولگشت کوانتومی زمان- گسسته دو بعدی از مکان            |
| ۴۹ | $(\circ, \circ)$ به مکان $(۱, ۳)$ . . . . .                                   |
| ۵۱ | ۴.۳ خط $N$ تایی با مرزهای انعکاسی . . . . .                                   |
| ۵۲ | ۵.۳ حلقه ی $N$ تایی با مرزهای دوره ای . . . . .                               |
| ۵۳ | ۶.۳ رهیافت های مبتنی بر جهت در شبکه های یک بعدی . . . . .                     |
| ۵۵ | ۷.۳ هماندهی های انتقال برای حالت های کیوبیتی روی خط دو ذره ای . . . . .       |
|    | ۸.۳ شرایط مرزی دوره ای. رأس های ابتدایی و انتهایی $A$ و $B$ نامگذاری شده      |
|    | اند. که به ترتیب مربوط به مکان اولیه ولگشت و مکانی است که می خواهیم           |
| ۶۰ | حالت سکه را به آنجا منتقل کنیم. . . . .                                       |
| ۶۰ | ۹.۳ برچسب گذاری موضعی یالها در دایره $N$ تایی . . . . .                       |
|    | ۱۰.۳ براساس این حقیقت که پدیده تداخل برای دومین همسایگی نزدیک صورت            |
| ۶۴ | می گیرد، رأس های زوج می توانند بعنوان یال ها تفسیر شوند . . . . .             |

- ۱۱.۳  $DTQW$  در یک زنجیر محدود به طور مؤثری بوسیله گام‌های یک حلقه یا  
 ۶۵ با یک مرز وارونه یا برگشتی شبیه سازی شده است. . . . .
- ۱۲.۳ حالت گذار ایده آل از مکان ۱ به مکان  $N-1$  برای ولگشت کوانتومی زمان  
 گسسته با وابستگی مکانی سکه ( $\lambda = 0.3, N = 300$ ). خط آبی باریک -  
 احتمال جفت شدگی مکان ۱، خط بنفش ضخیم - احتمال جفت شدن  
 ۶۹ مکان  $N-1$ ؛ خط تیره - احتمال جفت شدگی باقیمانده رأس‌های زنجیر.
- ۱۳.۳ جمعیت ترازها برای  $N = 30, \theta = \frac{\pi}{4}$  و حالت اولیه  $|1, \rightarrow\rangle$ . چپ  $\theta_1 =$   
 $\theta_{N-1} = \theta = \pi/4$ . راست  $\theta_2 = \theta_{N-2} = \theta = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$  که  $\varepsilon = \frac{\pi}{4N}$  حالت‌های  
 اولیه تقریباً برابر با ورودی‌هایی است که فقط حالت ویژه حالت های چهار  
 ۷۴ گانه را پشتیبانی می‌کنند. . . . .
- ۱۴.۳ احتمال جمعیت موقعیت ۱ (خط ممتد) و  $N-1$  (خط تیره) در زمان.  
 ۷۴ . . . . .  $\varepsilon = \frac{\pi}{4N}$  و  $\theta = \frac{\pi}{4}, N = 30$

# فهرست جداول

- ۱.۳ مواردی که دوره ای بودن خط ۲ تایی را برای  $\theta = \phi = 0$  نشان می دهد. ۵۶
- ۲.۳ انتقال کامل حالت برای دایره ی ۴ تایی در صورتی که  $\theta, \phi = 0$  باشد. . . ۶۱

# فصل ۱

## مفاهیم اولیه

### ۱.۱ مقدمه

دنیای کنونی فیزیک را می توان به دو بخش عمده تقسیم کرد؛ یکی فیزیک کلاسیک و دیگری فیزیک کوانتوم. منظور از فیزیک کلاسیک مجموعه ای از قوانین و روابط فیزیکی است که تقریباً تا اوایل قرن بیستم به دست آمده بود و قادر بودند بسیاری از پدیده های عالم را توصیف کنند اما پدیده هایی وجود داشتند که یا توضیح آنها با این قوانین ممکن نبود و یا توجیه آن پدیده ها به صورت منحصر به فرد انجام می شد و امکان تعمیم آن به پدیده های دیگر وجود نداشت. آغاز قرن بیستم مصادف با آغاز دو واقعه ی مهم در فیزیک بود که دیدگاه بنیادی ما را درمورد ساختار جهان متحول کرد، یکی نظریه ی نسبیت اینشتین بود و دیگری پدیدار شدن فیزیک کوانتومی. نظریه ی نسبیت قوانین نیوتنی را به چالش می کشید و به تصحیح این قوانین در محدوده ی سرعت های بالا می پرداخت؛ همچنین خمیدگی فضا-زمان در اثر وجود گرانش از دیگر مباحث جدیدی بود که با ظهور نظریه ی نسبیت خودنمایی کرد. فیزیک کوانتومی نیز اساس علم را به دنیای میکروسکوپی بیشتر باز کرد و موجب درک بهتر و بیشتر از این دنیای پر رمز و راز شد. توصیف و توجیه بسیاری از پدیده ها مانند ابررسانایی و همچنین پیش بینی ساخت بسیاری از ابزارها مانند لیزرها و... بر اساس فیزیک کوانتومی صورت گرفته است. گذشته از مواردی که درباره ی فایده ها و راه گشایی های مکانیک کوانتومی بیان شد، باید گفت که در دنیای کنونی که به حق نام عصر اطلاعات را به خود گرفته است مهم ترین چیز

رسیدن به انتقال سریعتر، گسترده تر و با امنیت بالاتر اطلاعات است، که فیزیک کوانتومی نیز در این عرصه وارد شده و با بررسی هدف ساخت کامپیوترهای کوانتومی، موضوعاتی نظیر کدگذاری چگال سیستمهای اسپینی، فرابرد کوانتومی، نقاط کوانتومی، کلیدهای کوانتومی، اسپین های هسته، شبکه های اپتیکی و ... را دنبال می کند. اولین بار، ریچارد فایمن بیان کرد که شبیه سازی یک سیستم کوانتومی با کامپیوترهای کلاسیکی کار دشوار و طاقت فرسایی ست و برای انجام این شبیه سازی ها، پیشنهاد ساخت کامپیوترهای کوانتومی که بر اساس مکانیک کوانتومی کار کنند را ارائه داد. به دنبال بیان چنین ایده ای مقاله هایی توسط افرادی نظیر دیوید دویچ در زمینه ی محاسبه گرهای کوانتومی، پیتز شور در مورد الگوریتم کوانتومی و افرادی دیگر نیز در زمینه های ارتباطات کوانتومی و امنیت آنها انتشار یافت. با ادامه ی تحقیقات نظری و عملی و گسترده شدن این شاخه ی نوپای فیزیک کوانتومی نامی جدید تحت عنوان اطلاعات و محاسبات کوانتومی برای آن انتخاب شد. در ادامه این فصل به بیان مفاهیم پایه و بنیادی می پردازیم.

## ۲.۱ بیت و کیوبیت

بیت به عنوان مفهومی بنیادی در محاسبات و تئوری اطلاعات کلاسیکی شناخته شده است؛ که حاوی اطلاعات دیجیتالی صفر و یک می باشد. با کد نمودن اطلاعات به زبان صفر و یک ها می توان زنجیره ای از صفر و یک جهت انتقال و پردازش اطلاعات به دست آورد. هر بیت کلاسیکی به جای اختیار کردن مقادیر صفر و یک می تواند پهنه ی بزرگ تری از مقادیر را اختیار کند. به عنوان مثال اگر پردازش در مبنا ی سه صورت گیرد یک بیت می تواند مقادیر صفر، یک و دو اختیار کند. یک بیت کوانتومی را کیوبیت می نامیم. کیوبیت واحد بنیادی در سنجش اطلاعات کوانتومی در نظریه ی اطلاعات کوانتومی است که معادل بیت در نظریه ی اطلاعات کلاسیکی محسوب می شود. برخلاف بیت کلاسیکی که فقط یک متغیر مشخص (صفر یا یک) با مقادیر واقعی را ذخیره می کند، کیوبیت می تواند توسط یک بردار واحد در فضای برداری دو بعدی مختلط اندازه گیری شود. یک کیوبیت مقدار صفر یا یک و یا ترکیبی خطی از این دو را همزمان اختیار می کند.

اساس فرآیندهای اطلاعات کوانتومی نیز مانند اطلاعات کلاسیکی بر کدگذاری عددی استوار است. حامل های فیزیکی اطلاعات با پیشرفت علمی گسترده تر می شوند؛ اما در حال حاضر دو عامل ولتاژ و نور به عنوان ابزار فیزیکی عینیت بخشیدن به حالت های صفر و یک استفاده می شوند [۳۱، ۳۲، ۳۳].

در علم اطلاعات کوانتومی، ابزارهای کوانتومی، نقش حامل های اطلاعات را ایفا می کنند. وقتی که ما بتوانیم فرآیندی خاص را پیدا کنیم که شامل دو مجموعه ی ممکن باشد، می توانیم صفر و یک ها را بسته به آن ویژگی خاص تعریف کنیم. چند مورد از راه کارهای عملی برای اجرای فیزیکی سیستم های کیوبیتی عبارتند از:

- حالت های برانگیخته ی الکترون ها در یون ها و یا اتم های فوق سرد.
  - اتم های دو سطحی (همچنین اتم هایی با بیش از دو سطح، البته زمانی که دو سطح از آن در یک فرآیند خاص نقش اصلی را ایفا کنند) و یون هایی با دو سطح انرژی؛
  - قطبش ذرات با اسپین  $\frac{1}{2}$ ؛
  - قطبش فوتون های منفرد؛
  - نقاط کوانتومی؛
  - مدهای میدان الکترومغناطیسی در یک کاواک مشدد.
- البته این موارد به عنوان همه ی سیستم های کیوبیتی نیستند و سیستم های کیوبیتی دیگری نیز وجود دارند. جدول ۱-۱ می تواند به درک بهتر سیستم های کیوبیتی کمک کند. در این جدول به دلیل ویژگیهای دو حالتی، به موجودات فیزیکی مربوط به آن ها، کیوبیت گفته می شود [۳۱، ۳۲].

|                                           |                                                                    |
|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| کیوبیت (ویژگی دو حالتی)                   | $ 0\rangle$ $ 1\rangle$                                            |
| فوتون (قطبش خطی)                          | $\uparrow$ $\leftrightarrow$<br>$ V\rangle$ $ H\rangle$            |
| فوتون (قطبش دایره ای)                     | $\bigcirc$ $\bigcirc$<br>$ L\rangle$ $ R\rangle$                   |
| الکترون، نوترون، هسته های اتم (اسپین)     | $\uparrow$ $\downarrow$<br>$-\frac{1}{2}\hbar$ $-\frac{1}{2}\hbar$ |
| اتم، یون (لایه های داخلی)                 | $e^-$ $g^-$                                                        |
| نقاط کوانتومی (سطوح انرژی)                | $e^-$ $g^-$                                                        |
| ذرات (مدها در ابزار تقسیم کننده ی باریکه) | $a^-$ $b^-$<br>$a'^-$ $b'^-$                                       |

شکل ۱.۱: داده های نوعی برای آزمایش تک عاملی

توانایی اختیار کردن ترکیب خطی  $0^\circ$  و  $1^\circ$  در کیوبیت ها پایه ی توانایی محاسبات کوانتومی می باشد. در واقع تفاوت اصلی بین کیوبیت ها و بیت های کلاسیکی در توانایی اختیار کردن ترکیب خطی  $0^\circ$  و  $1^\circ$  است. در مکانیک کوانتومی اطلاعات را به صورت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  نمایش می دهیم که به زبان

جبر خطی متناظر با بردارهای  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  می باشد.

در حالت کلی يك کیوبیت با عبارت کلی زیر توصیف می‌شود:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (1.1)$$

که اعداد  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط دلخواه هستند. از مکانیکی کوانتومی مقدماتی می‌دانیم که، اگر حالت کوانتومی بالا را اندازه‌گیری نماییم، نتیجه‌ی حاصل با احتمال  $|\alpha|^2$  حالت  $|0\rangle$  و با احتمال  $|\beta|^2$  حالت  $|1\rangle$  می‌باشد. با توجه به بقای احتمال تنها شرط موجود در روی ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  به این صورت است که [۳۴، ۳۵]

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.1)$$

کیوبیت‌ها در دنیای واقعی و آزمایشگاه توسط سیستم‌های فیزیکی مختلف پیاده‌سازی می‌شوند. از برهم کنش دو سیستم فیزیکی، در بعضی مواقع نوعی همبستگی بین آن‌ها به وجود می‌آید که با قطع برهم کنش و جدا کردن دو سیستم همبستگی بین آن‌ها باقی می‌ماند؛ به طوری که هرگاه یک اندازه‌گیری بر روی سیستم اول انجام دهیم بدون اندازه‌گیری روی سیستم دوم بتوان اطلاعاتی از آن بدست آورد؛ در آن صورت دو سیستم درهم تنیده گفته می‌شوند. می‌دانیم که سیستم اسپینی  $S = \frac{1}{2}$  دارای فضای هیلبرت دوبعدی است و در اکثر مواقع به عنوان يك کیوبیت به کار می‌رود به طوری که گاهی اوقات این دو به جای یکدیگر استفاده می‌شوند. اما اسپین  $\frac{1}{2}$  تنها سیستمی نیست که می‌تواند مفهوم کیوبیت را داشته باشد. برخی از سطوح انرژی یون‌های به دام افتاده در میدان‌های الکتریکی به عنوان صفر و يك‌های کوانتومی استفاده کرده‌اند. برخی دیگر در قطبش فوتون‌ها به دنبال کیوبیت‌ها گشته‌اند اما هنوز برخی دیگر، از اسپین‌های کوانتومی درون مولکول‌های کلروفرم و اسپین‌های الکترون درون نانو کریستال‌ها که به عنوان نقطه‌های کوانتومی شناخته می‌شوند، استفاده می‌کنند. منشاء کیوبیت‌ها هرچه که باشد همیشه مشکل یکسانی به میان می‌آید، حفظ درهم تنیدگی و انجام محاسبات به صورت همزمان دشوار است. در حالت اتمی که کیوبیت‌ها به وسیله‌ی حالت الکترون‌ها توصیف می‌شوند، الکترون می‌تواند در حالت پایه و یا برانگیخته باشد که حالت پایه را با  $|0\rangle$  و حالت برانگیخته آن را با  $|1\rangle$  نشان می‌دهیم. با تابش نور توسط لیزر می‌توانیم الکترون را از حالت پایه  $|0\rangle$  به حالت برانگیخته  $|1\rangle$  منتقل نماییم و برعکس. مسأله هیجان‌انگیزتر آن است که اگر مدت تابش نور را کاهش دهیم، الکترونی که در ابتدا در حالت  $|0\rangle$  قرار دارد به حالت  $|+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  می‌رود. يك تصویر مفید از کیوبیت‌ها از طریق بازنویسی حالت  $|\psi\rangle$  با توجه به شرط  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  آن است که حالت يك کیوبیت دلخواه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۳۴، ۳۵].

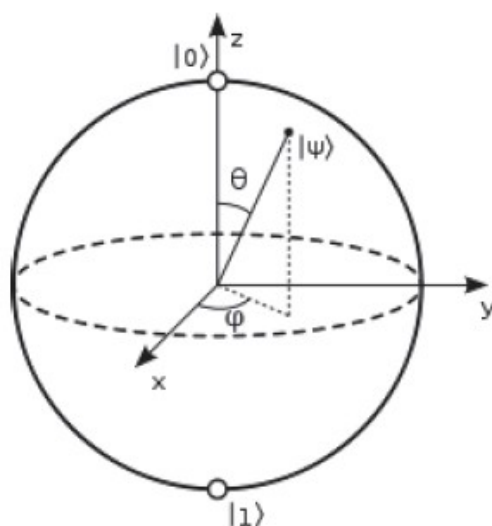
$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} \left( \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \right) \quad (3.1)$$

که  $\theta$  و  $\phi$  و  $\gamma$  اعداد حقیقی هستند. از مکانیک کوانتومی مقدماتی می‌دانیم که فاز  $\gamma$  هیچ اثر قابل مشاهده‌ای ندارد، لذا می‌توان از آن صرف نظر نماییم و حالت کوانتومی دلخواه را به

صورت زیر بنویسیم:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (4.1)$$

که  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  در واقع زوایایی هستند که در یک کره ۳ بعدی با شعاع واحد قابل نمایش می باشد (شکل ۲.۱). کره ۲.۱ را کره بلاخ می نامیم که هر نقطه روی سطح آن توصیف کننده یک حالت منحصر به فرد کوانتومی است. استفاده از تصویر کره بلاخ معمولاً برای توصیف اعمال کوانتومی روی کیوبیت مفید است ولی نکته ی قابل توجه آن است که برای چند کیوبیت و یا بیت های کوانتومی با ابعاد بالاتر از دو چنین تصویری قابل تعمیم نمی باشد [۳۴، ۳۵]:



شکل ۲.۱: هر نقطه روی سطح کره ی بلاخ معادل یک حالت خاص و هر نقطه درون کره نمایش یک حالت مخلوط کوانتومی است.

با توجه به این که روی سطح کره ی بلاخ بی نهایت نقطه وجود دارد لذا به نظر می رسد که یک کیوبیت برخلاف بیت های کلاسیکی که تنها دو مقدار صفر و یک را اختیار می کند قادر است بی نهایت مقدار گیرد و در نتیجه اطلاعات بسیار زیادی را ذخیره نماید که این در واقع مرتبط با مسأله اندازه گیری و بازیافت اطلاعات می باشد چرا که بدون اندازه گیری راهی برای استخراج اطلاعات از حالت کوانتومی وجود ندارد و از مکانیک کوانتوم می دانیم هرگاه یک کیوبیت را اندازه گیری نماییم تنها دو حالت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  به دست می آید و پس از آن حالت کوانتومی اولیه در قالب یکی از این دو حالت فرو می پاشد. لذا برای تعیین دقیق باید ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  را مشخص نمود.

برای حالتی که ۲ کیوبیت دارد، همانند حالت کلاسیکی که حالت  $00, 01, 10, 11$  ممکن بود

حالت‌های کوانتومی متناظر با  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$  ممکن می‌باشد. یک جفت کیوبیت در حالت کلی ترکیب خطی از هر چهار حالت می‌باشد که به صورت زیر نمایش داده می‌شود: [۳۴، ۳۵]:

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (5.1)$$

که هر یک از حالت‌های  $(x = 00, 01, 10, 11)$  ضرب تانسوری دو حالت تک کیوبیتی است. متناظر با حالت تک کیوبیت در این جا نیز در صورت اندازه‌گیری هر یک از حالت‌های  $|x\rangle$  با احتمال  $|\alpha_x|^2$  به دست می‌آیند و پس از آن حالت کوانتومی اولیه به حالت  $|x\rangle$  فروپاشی می‌کند. در این جا نیز تنها شرط موجود روی ضرایب  $\alpha_x$  بقای احتمال می‌باشد.

$$|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1 \quad (6.1)$$

می‌توانیم یکی از کیوبیت‌ها را اندازه‌گیری کنیم. (مثلاً کیوبیت اول) که در این صورت حالت  $|0\rangle$  با احتمال  $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2$  و حالت  $|1\rangle$  با احتمال  $|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2$  به دست می‌آیند. اگر کیوبیت اول در حالت  $|0\rangle$  به دست آید در این صورت حالت اولیه به حالت کوانتومی زیر فروپاشی می‌کند.

$$|\psi'\rangle = \frac{\alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle}{\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}} \quad (7.1)$$

که عبارت  $\sqrt{|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2}$  ضریب نرمالیزاسیون حالت نهایی است. به عنوان مثالی از حالت‌های دو کیوبیتی به حالت‌های بل<sup>۱</sup> اشاره می‌کنیم که کاربرد فراوانی در الگوریتم‌های کوانتومی نظیر دوربری کوانتومی<sup>۲</sup> و کدگذاری چگال<sup>۳</sup> ترند. این حالت‌ها عبارتند از:

$$\begin{aligned} |\phi_{\pm}\rangle &= \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ |\psi_{\pm}\rangle &= \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (8.1)$$

در حالت کلی ترکیب سیستم با  $n$  کیوبیت با ترکیب خطی حالت‌های  $|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle, x_i \in \{0, 1\}$  توصیف می‌شود که مقدار آن  $2^n$  می‌باشد و هر یک از این حالت‌های پایه به صورت ضرب تانسوری  $n$  حالت تک کیوبیتی است [۳۴، ۳۵]:

$$|x_1, x_2, \dots, x_n\rangle = \bigotimes_{i=1}^N |x_i\rangle \quad (9.1)$$

<sup>۱</sup> Bell State

<sup>۲</sup> Teleportation

<sup>۳</sup> Super Dense Coding

## ۳.۱ عملگر چگالی

هرگاه يك سيستم فیزیکی به طور دقیق و مشخص با يك حالت کوانتومی  $|\psi\rangle$  به طور کامل توصیف شود، حالت کوانتومی مربوطه را يك حالت خالص می‌گوییم. اگر آنسامبلی از سیستم‌های فیزیکی یکسان با حالت‌های کوانتومی مختلف داشته باشیم به طوری که  $P_1$  درصد از ذرات با حالت  $|\psi_1\rangle$  و  $P_2$  درصد از ذرات با حالت  $|\psi_2\rangle$  و همین طور تا  $P_n$  درصد از ذرات با حالت  $|\psi_n\rangle$  توصیف شوند. در این حالت اگر ذره‌ای از این آنسامبل را جدا کنیم حالت آن را نمی‌توان با يك حالت کوانتومی یکتا توصیف نمود. برای توصیف حالت کوانتومی این ذره از ماتریس چگالی استفاده می‌کنیم. در مکانیک کوانتومی عملگر چگالی<sup>۴</sup> را در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۴۵]

$$\rho = \sum_i P_i |\psi^{(i)}\rangle \langle \psi^{(i)}| \quad (10.1)$$

به طوری که  $|\psi^{(i)}\rangle$  ها ویژه کتهای کسری از اعضای آنسامبل با تابع احتمال کلاسیکی  $P_i$  هستند و ممکن است بر یکدیگر متعامد نباشند. همچنین داریم  $\sum_{i=1}^n P_i = 1$  در حالتی که بیش از یکی از احتمال‌های  $P_i$  غیر صفر باشد حالت را مخلوط می‌نامیم. خصوصیات کلی عملگر چگالی به صورت زیر می‌باشد:

۱. ماتریس چگالی هرمیتی می‌باشد:  $\rho^\dagger = \rho$
  ۲.  $tr(\rho) = 1$  یا به عبارتی در شرط بهنجارش صدق می‌کند.
  ۳. ماتریس چگالی همواره مثبت است.  $\langle \phi | \rho | \phi \rangle \geq 0$   $\forall |\phi\rangle$ .
- ماتریس چگالی را می‌توان در پایه ویژه بردارهای خودش نیز نوشت در این صورت ماتریس چگالی برابر است با:

$$\rho = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| \quad (11.1)$$

$|\alpha^{(i)}\rangle$  ویژه بردارها و  $\lambda_i$  ویژه مقادیر ماتریس چگالی بوده و تعداد آن‌ها برابر با بعد ماتریس چگالی  $N$  یا بعد فضای هیلبرت می‌باشد.

## ۴.۱ عملگرهای پائولی

نیاز ما به عملگرهای پائولی از آنجا ناشی می‌شود که ما با الکترون‌هایی با اسپین  $\frac{1}{2}$  که در فضای هیلبرت دو بعدی تفسیر می‌شود، مواجه می‌شویم؛ بنابراین سه عملگر هرمیتی را با نام عملگرهای پائولی معرفی می‌کنیم. در این مجموعه، عملگرهای پائولی را با  $\sigma_i$  نمایش

<sup>۴</sup> Density Operator

داده ایم که در برخی موارد،  $i$  را با نشانه های  $1, 2, 3$  و در بعضی مواقع با  $x, y, z$  نمایش خواهیم داد. نمایش جبری این عملگرها که شاید بیشتر به کار ما بیاید به صورت زیر است [۳۴، ۳۵]:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (12.1)$$

برخی از ویژگیهای این عملگرها عبارتند از:

$$\sigma_i = \sigma_i^t, \quad \sigma_i = \sigma_i^{-1}, \quad \text{tr}(\sigma_i) = 0, \quad \sigma_i^2 = I \quad (13.1)$$

که منظور از علامت  $I$ ، ماتریس واحد دو در دو به شکل  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  می باشد. اگر ویژه بردارهای  $|\circ\rangle$  و  $|1\rangle$  را به عنوان پایه های بردار متعامد  $\sigma_z$  انتخاب کنیم؛ که به ترتیب دارای ویژه مقادیر  $-1$  و  $+1$  باشند، می توان این عملگرها را به صورت نمایش برا-کتی نشان داد:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= |\circ\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle \circ| \\ \sigma_y &= -i(|\circ\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle \circ|) \\ \sigma_z &= |\circ\rangle\langle \circ| - |1\rangle\langle 1| \end{aligned} \quad (14.1)$$

## ۵.۱ تحول

یک سیستم با حالت  $|\psi\rangle$  چگونه با زمان تغییر می کند؟ در مکانیک کوانتومی تحول یک سیستم بسته با یک تبدیل یکانی توصیف می شود. اگر حالت  $|\psi\rangle$  یک سیستم در زمان  $t_1$  به حالت  $|\psi'\rangle$  در زمان  $t_2$  تحول پیدا کند، می توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم:

$$|\psi'\rangle = U(t_1, t_2) |\psi\rangle \quad (15.1)$$

با فرض اینکه بتوان سیستم را بسته در نظر گرفت، تحول زمانی یک سیستم با معادله ی شرودینگر داده می شود:

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle \quad (16.1)$$

که  $\hbar$  ثابت پلانک است و  $H$  یک عملگر هرمیتی است که به عنوان هامیلتونی سیستم بسته شناخته می شود.

## ۶.۱ عملگرهای کوانتومی

عملگرهای کوانتومی ابزارهایی برای توصیف تحول سیستم های کوانتومی می باشند که تغییرات حالت های کوانتومی را شامل می شوند. فرض کنیم که سیستمی دارای عملگر چگالی

$\rho$  باشد و  $\Phi(\rho)$  نگاشتی باشد که تحول سیستم را توصیف کند. این نگاشت روی عملگرهای چگالی  $\rho$  اثر کرده و آن‌ها را به عملگرهای چگالی جدید  $\rho'$  تبدیل می‌کند:

$$\rho' = \Phi(\rho) \quad (17.1)$$

نگاشت  $\Phi(\rho)$  را یک عملگر کوانتومی می‌نامیم. به عنوان مثال می‌توان عملگر یکانی را نام برد که عبارت است از:

$$\Phi(\rho) = U\rho U^\dagger \quad (18.1)$$

## ۷.۱ عملگر کراوس

سیستم‌های کوانتومی با محیط اطراف خود برهم کنش دارند. عملگر چگالی سیستم را با  $\rho$  و عملگر چگالی محیط را با  $\sigma$  نشان می‌دهیم. حال برهم کنش بین سیستم-محیط، در حالی که عملگر  $U$  اعمال شده است را در نظر می‌گیریم:

$$[U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger] \quad (19.1)$$

بعد از برهم کنش و اعمال عملگر یکانی، می‌خواهیم حالت مربوط به سیستم را بدانیم. این کار را می‌توانیم با گرفتن رد جزئی روی محیط انجام دهیم:

$$\Phi(\rho) = Tr_E(U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger) \quad (20.1)$$

رابطه‌ی بالا را به این صورت محاسبه می‌کنیم، ابتدا حالت‌های پایه‌ی محیط را با  $|e_k\rangle$  نشان داده و فرض می‌کنیم که محیط در حالت  $|e_o\rangle \langle e_o| = \sigma$  می‌باشد. این فرض منطقی می‌باشد، زیرا محیط می‌تواند آن قدر گسترده شود که در یک حالت خالص قرار بگیرد، با ادامه این فرآیند خواهیم دید که رابطه‌ی ۲۰.۱ به این صورت خواهد شد:

$$\Phi(\rho) = Tr_E(U(\rho \otimes \sigma)U^\dagger) = \sum_k \langle e_k|U[\rho \otimes |e_o\rangle \langle e_o|]U^\dagger|e_k\rangle \quad (21.1)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی ۲۰.۱ و ۲۱.۱  $A_k$  ها به این صورت می‌شوند:

$$A_k = \langle e_k|U|e_o\rangle \quad (22.1)$$

عناصر عملگری  $A_k$  به عملگرهای کراوس نیز معروف می‌باشند [۳۶]. عملگرهای کراوس روی سیستم اصلی عمل می‌کند. عملگرهای  $A_k$  رابطه‌ی مهمی را ارضا می‌کنند که رابطه‌ی تمامیت نام دارد. از آنجایی که این رابطه برای هر  $\rho$  دلخواه برقرار است بنابراین:

$$\sum_k A_k^\dagger A_k = I \quad (23.1)$$

رابطه تمامیت از اینجا ناشی می شود که رد هر ماتریس چگالی برابر یک است، بنابراین رد ماتریس چگالی حاصل از  $\Phi(\rho)$  نیز باید یک باشد:

$$I = \text{tr}(\Phi(\rho)) = \text{tr}\left(\sum_k A_k \rho A_k^\dagger\right) = \text{tr}\left(\sum_k A_k^\dagger \rho A_k\right) \quad (24.1)$$

به عبارت دیگر عملگرهای کوانتومی رد نگهدار هستند. با توجه به رابطه ی کاملیت نگاشت هایی به شکل ۲۱.۱ دارای خواص مهمی هستند:

۱. خطی است.

۲. ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می نگارد.

۳. ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می نگارد.

۴. رد ماتریس را حفظ می کند.

## ۸.۱ ارسال حالت های کوانتومی

مخابرات کوانتومی عبارت است از ارسال حالت های کوانتومی از يك نقطه به نقطه ی دیگر، شناخته شده ترین کاربرد آن عبارت است از ارسال کلید کوانتومی که امنیت آن توسط قوانین مکانیک کوانتومی تضمین می شود. در الگوریتم ارسال کلید کوانتومی يك حالت کوانتومی توسط يك شخص در نقطه ای ایجاد می گردد و با انتقال به نقطه ای دیگر توسط شخص دیگری اندازه گیری می شود [۳۵، ۳۶]. برای این منظور فوتون ها بهترین کاندید می باشند چرا که در فیبرهای نوری و همچنین در فضای آزاد به راحتی تا مسیرهای طولانی منتشر می شوند و توسط دریافت کننده نیز به سادگی اندازه گیری می گردند. با توجه به علاقه فزاینده به محاسبات کوانتومی در زمینه های مختلف اهمیت مخابرات کوانتومی برای برقراری ارتباط بین پردازنده های کوانتومی رو به افزایش است تا بتوان کامپیوترهای کوانتومی قوی تري تهیه کرد. جهت رسیدن به این هدف نه تنها ارسال حالت های کوانتومی از نقطه ای به نقطه ای دیگر حائز اهمیت است بلکه تغییر حامل حالت های کوانتومی نیز بسیار مهم می باشد. به عنوان مثال گاهی لازم است که حالت کوانتومی قطبش فوتون ها به حالت اسپینی تبدیل شود و یا برعکس.

استفاده از قوانین مکانیک کوانتوم، به جای فیزیک کلاسیک، نه تنها به حل بعضی از مسائلی که با کامپیوتر کلاسیک قابل حل هستند، سرعت می بخشد، حل بعضی از مسائلی را نیز که توسط کامپیوتر کلاسیک امکان پذیر نیست، ممکن می سازد. به عنوان مثال، در رمزنگاری کوانتومی با استفاده از مکانیک کوانتوم، امنیت مطلق مخابرات تضمین می شود، در صورتی که هیچ الگوریتم کلاسیک قادر به این امر نیست. همچنین طبیعت بعضی مسائل به گونه ای است که حل آنها تنها از يك کامپیوتر کوانتومی بر می آید. به عنوان مثال، ریچارد فاینمن ادعا کرد که يك کامپیوتر کوانتومی می تواند به عنوان نوعی شبیه ساز فیزیک کوانتوم عمل کند. با وجود

اینکه يك کامپیوتر کلاسیك از نظر تئوري مي‌تواند به شبیه‌سازي فرایندهای کوانتومي پردازد، اما در عمل بسیار ناکارآمد است. بنابراین بسیاری از مسائلي را که يك کامپیوتر، کوانتومي به سادگي حل مي‌کند، در کامپیوتر کلاسیك عملاً قابل حل نیست. مثلاً شبیه‌سازي سيستمي متشکل از تنها سي کیوبیت که بعد فزاي هیلبرت آن حدوداً  $10^9$  است مستلزم این است که کامپیوتر کلاسیك با ماتریس‌های بسیار بزرگي کار کند (برای انجام محاسبات روي يك حالت مشخص، که با يك ماتریس نمایش داده می‌شود)، یعنی زمان مورد نیاز برای انجام محاسبات از مرتبه نمایی بزرگ‌تر از زمان مورد نیاز در يك کامپیوتر کوانتومي است.

يك کامپیوتر کوانتومي دستگاهي است با قابلیت انجام اعمال یکانی روي ثبات‌های کوانتومي (رشته‌ای از  $n$  کیوبیت که مشابه کوانتوم مکانیکی يك ثبات پردازش‌گر کلاسیك است). محتویات هر ثبات را می‌توان بردار مختلطی  $n$  بعدی در نظر گرفت. يك الگوریتم برای يك کامپیوتر کوانتومي ابتدا باید این بردار را در يك حالت اولیه قرار دهد (بسته به طراحی کامپیوتر کوانتومي). در هر مرحله از الگوریتم، این بردار در يك ماتریس یکانی ضرب می‌شود. فیزیک دستگاه این ماتریس را تعیین می‌کند. از آن‌جا که این ماتریس یکانی است، بنابراین معکوس‌پذیر می‌باشد و هر مرحله برگشت‌پذیر است. در پایان الگوریتم، باید به گونه‌ای با اندازه‌گیری کوانتومي بردار مختلط  $n$  بعدی در ثبات را از کیوبیت‌های آن خواند.

تعدادی کاندید برای تحقق فیزیکی يك کامپیوتر کوانتومي وجود دارد:

کامپیوتر کوانتومي بر مبنای ابررسانایی

کامپیوتر کوانتومي بر مبنای یون‌های به دام افتاده

کامپیوتر کوانتومي بر مبنای تشدید مغناطیسی هسته در مولکول‌های يك محلول

کامپیوتر کوانتومي بر مبنای نقطه کوانتومي روي سطح

کامپیوتر کوانتومي بر مبنای الکترودینامیک کوانتومي کاواک

کامپیوتر کوانتومي بر مبنای تشدید مغناطیسی هسته در حالت جامد

کامپیوتر کوانتومي بر مبنای اپتیک

هر کدام از این پیشنهادات برای تحقق فیزیکی کامپیوتر کوانتومي دارای نقاط قوت و ضعف می‌باشند، در عین حال نمی‌توان ادعا کرد که یکی از این‌ها بهترین گزینه است. احتمالاً در آینده پیشنهادهای دیگری نیز خواهیم داشت که به ما اجازه انجام محاسبات کوانتومي می‌دهند. پنج معیار برای عملی بودن يك معماری محاسبات کوانتومي معرفی شده‌اند. با توجه به این پنج معیار، که به معیارهای *Divincenzo* معروفند، يك سیستم در صورتی يك کاندید برای اجرای محاسبات کوانتومي است که:

يك سیستم فیزیکی گسترش‌پذیر با کیوبیت‌های خوش تعریف باشد.

زمان واهمدوسی آن خیلی بیشتر از زمان اعمال درگاه‌های کوانتومي باشد.

دارای دسته‌ای از درگاه‌های کوانتومي جامع باشد.

دارای قابلیت اندازه‌گیری روي کیوبیت‌های با راندمان بالای کوانتومي باشد.

اکنون به طور مختصر به شرح معیارهای *Divincenzo* می‌پردازیم.

معیار اول دو خاصیت اساسی را که برای تحقق کارآمد محاسبات کوانتومی مورد نیاز است، توصیف می‌کند. کیوبیت‌ها برای ذخیره اطلاعات کوانتومی که در محاسبات کوانتومی با آن سر و کار داریم مورد نیاز می‌باشند. کیوبیت خوش تعریف به این معنی است که پارامترهای فیزیکی آن (از جمله هامیلتونی، جفت شدن به حالت‌های دیگر کیوبیت، ...) دقیقاً معلوم باشد. گسترش‌پذیری از این جهت اهمیت دارد که سیستم‌های غیرقابل گسترش ممکن است به ما اجازه حل بعضی مسائل مشخصی را بدهند، اما قادر به حل مسائل دیگر نیستند، بنابراین کامپیوتر کوانتومی جامع نخواهد بود.

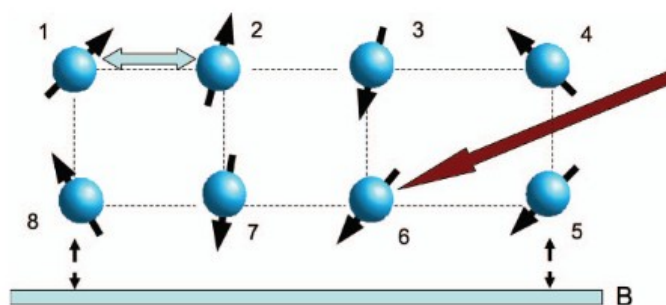
معیار دوم به این معنی است که قبل از محاسبات کوانتومی بتوان ثبات کیوبیت‌ها را به حالت معینی برد. معیار سوم به این معنی است که در حین محاسبات، اطلاعات کوانتومی نباید از دست برود و محاسبات کوانتومی نباید به محاسبات کلاسیک تقلیل یابد. زمان همدوسی، دینامیک کیوبیت در تماس با محیطش و مقیاس زمانی ظهور رفتار کلاسیک را توصیف می‌کند. معیار چهارم اساساً تعیین می‌کند که آیا سیستم یک کامپیوتر کوانتومی است. یعنی دستگاهی که قادر به اعمال عملگرهای یکانی دلخواه روی کیوبیت‌ها باشد. خوشبختانه، هر عملگر یکانی روی کیوبیت‌ها را می‌توان برحسب دسته‌ای از برهم‌کنش‌های تک کیوبیتی و دو کیوبیتی بیان کرد [۳۵].

که برهم‌کنش‌های دو کیوبیتی می‌توانند تنها از یک نوع باشند. یعنی می‌توان با استفاده از تعداد محدودی درگاه، که تعدادی از آن‌ها درگاه‌های تک کیوبیته و تعدادی درگاه‌های دو کیوبیته هستند، محاسبات کوانتومی انجام داد. البته محاسبات کوانتومی بدون استفاده از درگاه‌ها نیز انجام می‌شود، به عنوان مثال، محاسبات کوانتومی بر مبنای اندازه‌گیری روی حالت‌های خوشه‌ای [۳۸، ۳۹] اما همه معیارهای دیگر باید در این روش نیز ارضا شود. معیار پنجم به این معنی است که بتوان نتیجه محاسبات را خواند، یعنی روی کیوبیت‌های مشخصی اندازه‌گیری انجام داد.

در کامپیوترهای کوانتومی ارتباط میان پردازنده‌ها و همچنین ثبات‌های مختلف می‌بایست در فاصله‌های بسیار کم اتمی صورت پذیرد. در این فاصله‌های کوتاه تغییر حامل‌های کوانتومی (به عنوان مثال از فوتون به اسپین و یا برعکس) بسیار مهم و در عین حال کاری پیچیده است. لذا یافتن روش‌های معادل در ابعاد کوتاه مورد توجه قرار گرفته است [۳۸، ۳۹، ۴۰]. کامپیوترهای کوانتومی جهت حل برخی مسایل پیچیده در کامپیوترهای کلاسیک معرفی شده‌اند [۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴]. همچنین می‌توان از آن‌ها برای شبیه‌سازی سیستم‌های پیچیده استفاده نمود. به طور کلی یک کامپیوتر کوانتومی مجموعه‌ای از سیستم‌های دو بعدی کوانتومی است که به کیوبیت مشهورند و هر عمل یکانی دلخواه نیز روی تک‌تک و یا مجموعه‌ای از این کیوبیت‌ها قابل اعمال است.

## ۹.۱ مخابرات کوانتومی

مخابرات کوانتومی فرایند انتقال اطلاعات کوانتومی از مکانی به مکان دیگر است و شناخته شده‌ترین کاربرد آن در توزیع رمز کوانتومی است که طی آن رمزی سري بين دو طرف ایجاد می‌شود و مکانیک کوانتومی امنیت آن را تضمین می‌کند [۴۰، ۴۱]. در توزیع رمز کوانتومی حالت کوانتومی تهیه شده توسط یک طرف باید توسط طرف دیگر در فاصله‌ی اندازه‌گیری شود. فوتون‌ها از این جهت که می‌توانند مسافت‌های طولانی را از طریق فیبرهای نوری یا فضای خالی طی کنند و سپس توسط طرف دریافت‌کننده اندازه‌گیری شوند، گزینه بسیار مناسبی برای استفاده در مخابرات کوانتومی می‌باشند. اما امروزه اهمیت محوری مخابرات کوانتومی در حوزه‌ای دیگر از پردازش اطلاعات کوانتومی، یعنی محاسبات کوانتومی، روشن‌تر شده است. به طوری که لازمه ساخت یک کامپیوتر کوانتومی گسترش‌پذیر، اتصال پردازشگرهای کوانتومی مجزا می‌باشد [۴۲، ۴۳، ۴۴]. از این رو، علاوه بر انتقال حالت کوانتومی بین مکان‌های مختلف، تصویر کردن حالت کوانتومی از (بر) یک ثابت کوانتومی که آن حالت را می‌فرستد (دریافت می‌کند) از اهمیت زیادی برخوردار است. یعنی لازمه ساخت یک کامپیوتر کوانتومی قدرتمند تبادل ساده اطلاعات کوانتومی بین اجزای کامپیوتر و عناصر حامل اطلاعات بین این اجزا می‌باشد. به علاوه، انتقال اطلاعات تنها در فاصله‌های کوتاه، بین ثابت‌ها لازم است. بنابراین برای انتقال اطلاعات در فاصله‌های کوتاه در مواردی که تصویر کردن حالت انتقال یافته روی اجزا اهمیت پیدا می‌کند معرفی روشی غیر از انتقال اطلاعات با فوتون‌ها بسیار سودمند خواهد بود [۴۲، ۴۳، ۴۴]. قدرت یک کامپیوتر کوانتومی با تعداد کیوبیت‌ها افزایش پیدا می‌کند. اما موانع بنیادی متعددی در افزایش دلخواه تعداد کیوبیت‌ها در یک کامپیوتر کوانتومی وجود دارد. به عنوان مثال کامپیوتر ممکن است برمبنای یک گذرگاه مشترک که از طریق آن کیوبیت‌ها با هم برهم کنش دارند، کار کند. (۳.۱). در این صورت محدودیتی فیزیکی در تعدادی کیوبیت‌هایی وجود دارد که می‌توانند از طریق یک گذرگاه مشترک با هم برهم کنش داشته باشند. یا اگر کامپیوتر برمبنای برهم کنش مستقیم کیوبیت‌ها کار کند (۳.۱). آن‌گاه یا کیوبیت‌ها را باید آن‌قدر به هم نزدیک کرد تا با هم برهم کنش داشته باشند. یا باید بتوان حالت هر کیوبیت را به کیوبیت‌هایی که در محدوده برهم کنش یکدیگر قرار دارند منتقل کرد. بنابراین لازمه بهینه‌سازی کارآمدی یک کامپیوتر کوانتومی محدودیت تعداد کیوبیت‌ها خواهد بود. یک راه حل برای رفع این مشکل، ساخت کامپیوتری کوانتومی متشکل از اجزایی است که توسط کانال‌های مخابراتی کوانتومی به یکدیگر متصل می‌شوند. بیشتر محاسبات می‌تواند در این اجزا صورت گیرد و گاه از کانال‌های کوانتومی برای انتقال اطلاعات از یکی از اجزا به دیگری استفاده شود. بنابراین اعمال درگاه‌های مختلف بین کیوبیت‌های موجود در پردازش گرهای مجزای کامپیوتر امکان‌پذیر می‌شود. برخلاف کانال‌های کوانتومی مورد نیاز برای توزیع رمز کوانتومی، این کانال‌ها در یک کامپیوتر کوانتومی می‌توانند بسیار کوتاه باشند.



شکل ۳.۱: یک کامپیوتر کوانتومی نوعی.

حتی اگر در آینده بتوان تعداد کیوبیت‌های یک کامپیوتر کوانتومی را بدون نیاز به کانال‌های مخابراتی داخلی افزایش داد. برای اتصال کامپیوترهای کوانتومی مختلف ملزم به استفاده از چنین کانال‌هایی هستیم. ممکن است به عللی چون هزینه، جمع و جور و قابل حمل بودن، کامپیوترهای کوانتومی با اندازه کوچک را ترجیح دهیم. اما گاهی با مسائل بسیار پیچیده‌ای روبرو می‌شویم که قدرت یک کامپیوتر کوانتومی به تنهایی برای حل آن کافی نخواهد بود.

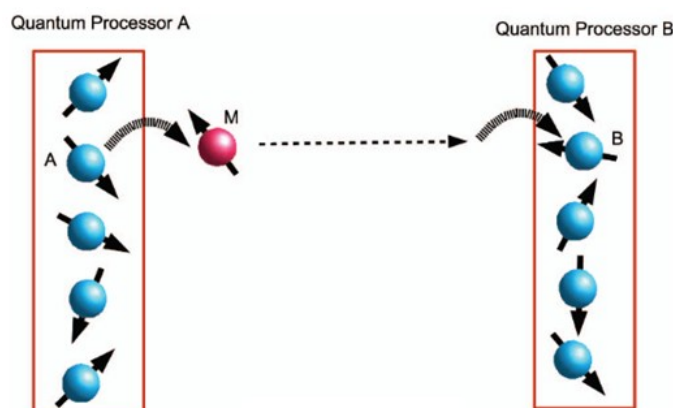
شکل ۳.۱ یک کامپیوتر کوانتومی نوعی را نشان می‌دهد. هر کره با فلش متصل به آن یک کیوبیت است، مثلاً یک سیستم اسپین  $\frac{1}{2}$ ، اعمال روی هر کیوبیت، همان‌طور که در شکل با فلش بلندی که کیوبیت ۶ را کنترل می‌کند نشان داده شده است، توسط میدان‌های موضعی صورت می‌گیرد. به علاوه، هر جفت کیوبیت باید با هم برهم کنش داشته باشند. این برهم کنش می‌تواند از طریق یک گذرگاه مشترک تحقق یابد. به عنوان مثال، کیوبیت ۵ و ۸، از طریق گذرگاه مشترک B با هم برهم کنش دارند. طبیعتاً، تعداد کیوبیت‌هایی که می‌توانند از طریق یک گذرگاه مشترک برهم کنش داشته باشند، محدود است، و این اندازه عملی یک کامپیوتر را محدود می‌کند.

استراتژی دیگر، در کامپیوترهایی بدون یک مد گذرگاه مشترک، این است که کیوبیت‌ها مستقیماً با یکدیگر برهم کنش داشته باشند. در این صورت اگر بخواهیم اعمال مشترک روی کیوبیت‌هایی که در فاصله قابل توجهی از هم قرار دارند را انجام دهیم. باید حالت آن‌ها را به کیوبیت‌های همسایه، مانند کیوبیت ۱ و ۲، منتقل کنیم و سپس همان‌طور که در شکل نشان داده شده، با برهم کنش این دو کیوبیت عمل مورد نظر انجام شود. جهت بهینه سازی عملکرد کامپیوتر، مقیاس زمانی برای این انتقال باید محدود باشد که این سبب محدودیت اندازه کامپیوتر می‌شود.

کامپیوترهای کوانتومی مجزا برای دست یافتن به کامپیوتری با قدرت پردازش بالا اهمیت خواهد یافت. به علاوه از آن‌جا که کانال کامپیوترهای کوانتومی را به هم متصل می‌کند، رمز کردن و گشودن رمز حالت کوانتومی باید در کامپیوتر امکان‌پذیر باشد و حالت منتقل شده باید قابل انتقال به یک کیوبیت یا گروهی از کیوبیت‌ها در کامپیوتر مقصد باشد.

به نظر می‌رسد که روش معمول در اتصال پردازش‌گرها (یا کامپیوترهای کوانتومی) این باشد

که ابتدا حالي که بايد انتقال پيدا کند را از کيوبيت هاي يك پردازش گر به يك کيوبيت متحرك تصوير کنيم. اين کيوبيت متحرك آن گاه از طريق يك کانال به پردازشگر دوم مي رسد و حالتش به کيوبيت هاي اين پردازشگر تصوير مي شود (۴.۱).



شکل ۴.۱: اتصال پردازش گر هاي کوانتومي با کيوبيت هاي متحرك.

اطلاعات کوانتومي ذخيره شده در کيوبيت هاي ساکن (درون کادر) يك ثابت بر يك کيوبيت متحرك (بيرون کادر) تصوير مي شوند.

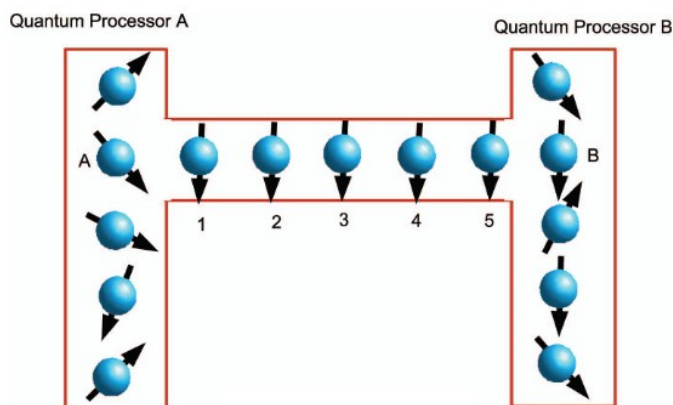
اين کيوبيت به ثابت ديگر منتقل شده و اطلاعات ذخيره شده در آن بر کيوبيت هاي ساکن (درون کادر) آن ثابت تصوير مي شود.

سؤالي که پيش مي آيد اين است که آیا ممکن است بتوان اطلاعات کوانتومي را تنها با استفاده از کيوبيت هاي ساکن منتقل کرد؟ اولين ايده اي که به ذهن مي رسد اين است که زنجيره اي از کيوبيت ها داشته باشيم و به صورت متوالي حالت هر کيوبيت را با کيوبيت بعدي معاوضه<sup>۵</sup> کنيم (۵.۱). اينگونه مي توان حالت کوانتومي يك کيوبيت را که در انتهاي زنجيره اي از کيوبيت ها قرار گرفته، با معاوضه حالات کيوبيت هاي مجاور به صورت متوالي، به کيوبيت انتهاي ديگر زنجيره منتقل کرد. اين نوع گذرگاه اطلاعات<sup>۶</sup> کانال معاوضه<sup>۷</sup> نام دارد. اما چنين گذرگاه اطلاعاتي مستلزم توانايي ما در تغيير قدرت يا طبيعت برهم کنش بين کيوبيت هاي مجاور نسبت به زمان است به طور نمونه، بايد ميدان هايي کنترلي اعمال کرد که در محدوده فاصله بين کيوبيت ها تغيير مي کنند.

<sup>۵</sup>Swap

<sup>۶</sup>Data Bus

<sup>۷</sup>Swapping Channel



شکل ۵.۱: اتصال پردازش‌گرهای کوانتومی با کیوبیت‌های ساکن.

شکل ۵.۱ امکان انتقال اطلاعات کوانتومی از یک پردازش‌گر به پردازش‌گر دیگر را با استفاده از دسته‌ای از کیوبیت‌های ساکن نشان می‌دهد. اگر تا این حد روی تعدادی کیوبیت کنترل داشته باشیم، استفاده از این کیوبیت‌ها برای انتقال اطلاعات نوعی استفاده غیربهرینه خواهد بود، زیرا می‌توان از آن‌ها به عنوان کیوبیت‌هایی محاسباتی استفاده کرد. به علاوه، اعمال کنترل بیش از حد روی سیستم برای انتقال حالت کوانتومی، سیستم را در معرض خطاهای زیادی قرار می‌دهد. این خطاها در مراحل متوالی معاوضه حالت بین کیوبیت‌های مجاور انباشته شده و باعث ایجاد خطایی قابل ملاحظه می‌شود. بنابراین سؤالی که پیش می‌آید این است که اگر برهم کنش بین کیوبیت‌ها در یک زنجیره، دائمی و غیرقابل کنترل باشند و اجازه اعمال هیچ‌گونه میدان کنترلی بر کیوبیت‌ها را نداشته باشیم. آیا این زنجیره می‌تواند به عنوان یک گذرگاه اطلاعات کوانتومی عمل کند؟ پاسخ به این سؤال مثبت است. یک زنجیره اسپینی مثالی از سیستم متشکل از کیوبیت‌ها است که برهم کنش بین آن‌ها دائمی است و می‌توان از آن برای انتقال اطلاعات کوانتومی استفاده کرد. ایده انتقال اطلاعات توسط زنجیره‌ای اسپینی با کوپلینگ‌های ثابت ابتدا در سال ۲۰۰۳ توسط بوز<sup>۸</sup> مطرح شد که در بخش‌های بعدی به آن می‌پردازیم.

## ۱۰.۱ انتقال حالت در زنجیره‌های اسپینی

در مکانیک کوانتومی اسپین‌ها به صورت دو قطبی‌های مغناطیسی کوانتیزه شده شناخته می‌شوند. بسیاری از مواد را می‌توان به صورت مجموعه‌ای بزرگ از اسپین‌های برهم کنش‌دار فرومغناطیس و پادفرومغناطیس در نظر گرفت که در آن‌ها اسپین‌ها به صورت موازی و یا حالت‌های پیچیده‌تر قرار می‌گیرند. زنجیره‌های اسپینی در واقع مجموعه‌ای یک بعدی از اسپین‌هایی هستند که به طور دائم با هم برهم کنش دارند و قدرت برهم کنش آن‌ها نیز

<sup>۸</sup>Bose

با افزایش فاصله کاهش می‌یابد [۴۵، ۴۶]. به عنوان مثال می‌توان به سیستم اسپین - فوتون و یا سیستم اسپین‌های ثابت و متحرک اشاره نمود. همچنین در مواردی مانند یون‌های متحرک و یا الکترون‌های متحرک در ابتدا سیستم فیزیکی منتقل شده و در آنجا ثابت می‌شود سپس حالت آن مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان طور که در شکل ۵.۱ نشان داده شده است با اثر عملگر جابه‌جاگر می‌توانیم حالت کوانتومی کویت ۱، را به کویت ۲ منتقل نماییم. سپس با اعمال گیت جابه‌جاگر بین کیوبیت‌های ۱ و ۲ حالت را به ۲ انتقال دهیم و با ادامه‌ی کار حالت کوانتومی کیوبیت  $A$  به کیوبیت  $B$  منتقل می‌شود. در این فرایند به کنترل برهم‌کنش بین کیوبیت‌های مجاور در طول زمان نیازمندیم که از نظر فیزیکی می‌بایست با میدان‌های متغیر در اندازه‌های اتمی صورت گیرد. نکته این است که اگر چنین کنترلی روی زنجیره وجود دارد می‌توان زنجیره را نیز به عنوان پردازنده مورد استفاده قرار داد. همچنین به عنوان نکته‌ی منفی دیگر می‌تواند به این مسأله اشاره کرد که برای انتقال حالت‌های کوانتومی در حد چند کیوبیت می‌بایست مرتباً برهم‌کنش‌ها را خاموش و روشن نمود و این کار باید به تعداد کیوبیت‌های زنجیره تکرار شود و لذا حساسیت نسبت به خطا بالا می‌رود چرا که در هر روشن و خاموش شدن برهم‌کنش‌ها امکان ایجاد و تکثیر خطا وجود دارد. بنابراین مطلوب آن است که بتوانیم با کیوبیت‌های ثابت بدون نیاز به کنترل بالا اطلاعات را از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر انتقال دهیم. در این حالت با آماده‌سازی یک زنجیره از کیوبیت‌ها با برهم‌کنش دائمی و ثابت تلاش می‌گردد تا انتقال اطلاعات با کیفیتی قابل قبول صورت پذیرد. زنجیره‌های اسپینی به عنوان کاندیداهای اصلی هدف فوق معرفی شده‌اند.

## ۱.۱۰.۱ برهم‌کنش‌های زنجیر

یک مدل شناخته شده و معتبر برای برهم‌کنش بین اسپین‌ها، برهم‌کنش هایزنبرگ می‌باشد. در این برهم‌کنش اسپین  $i$ ام و  $j$ ام به صورت زیر با هم برهم‌کنش دارند.

$$H_{ij} = J_{ij} \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (25.1)$$

که  $\sigma_i \cdot \sigma_j = \sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y + \sigma_i^z \sigma_j^z$  است. برهم‌کنش (۲۵.۱) یک برهم‌کنش خالص برای تعویض الکترون‌ها میان یون‌های مجاور می‌باشد و به دلیل همسانگرد بودن برهم‌کنش کلیه‌ی جهت‌های  $x$  و  $y$  و  $z$  برای آن معادل هستند. یک مدل مهم دیگر که بسیار مورد بررسی قرار گرفته است و به دلیل عدم تقارن همسانگردی توصیف‌کننده‌ی بسیاری از برهم‌کنش‌ها است، مدل  $XY$  می‌باشد که در آن اسپین‌های  $i$  و  $j$  از طریق هامیلتونی زیر با هم برهم‌کنش دارند.

$$H_{ij}^{xy} = J_{ij} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) \quad (26.1)$$

این مدل‌ها هم در طبیعت یافت می‌شود و هم برای کیوبیت‌های فیزیکی گوناگون قابل بازسازی هستند در واقع امتیاز زنجیره‌های اسپینی با برهم‌کنش دائمی مشخص نسبت به زنجیره‌هایی با برهم‌کنش‌های متغیر در زمان پیچیدگی کمتر آن‌ها در زمینه‌ی ساخت می‌باشد. اخیراً

زنجیره‌هایی با طول ۱۰ اسپین ساخته شده‌اند [۴۷، ۴۸]. و تلاش‌های زیادی نیز برای بهبودی و افزایش طول و همچنین مطالعه‌ی خواص این زنجیره‌ها در حال انجام است. هرگاه يك حالت دلخواه کوانتومی در ابتدای يك زنجیره‌ی اسپینی قرار داده شود که ترجیحاً در حالت پایه‌ی خود قرار دارد کل زنجیره‌ی اسپینی به خاطر برهم کنش بین اولین ذره و بقیه‌ی سیستم دچار تحول می‌گردد. تحول دینامیکی کل سیستم تحوли یکانی است که سبب می‌شود پس از گذشت زمانی خاص حالت کوانتومی ذره‌ی آخری شبیه به حالت دلخواه اولیه شود. برای ساده‌ترین زنجیره (برهم کنش یکنواخت) و همچنین ساده‌ترین نوع کدگذاری (استفاده از يك کیوبیت به عنوان حامل) در اثر پراکندگی حالت کوانتومی در زنجیره کیفیت ارسال اطلاعات کاهش می‌یابد. گرچه در این حالت نیز برای زنجیره‌هایی با طول ۸۰ اسپین همچنان کیفیت ارسال حالت‌ها از روش‌های کلاسیکی بالاتر است الگوریتم‌هایی نیز برای ارسال کامل اطلاعات ارائه شده‌اند که برخی از آن‌ها با تغییر جفت شدگی‌های زنجیره و برخی دیگر با تغییر کدگذاری ارسال اطلاعات و یا با افزایش تعداد زنجیره‌ها به دنبال دستیابی به ارسال کامل اطلاعات می‌باشند.

## ۱۱.۱ ولگشت‌های کوانتومی

از اوایل قرن بیستم، مطالعات نظری و شواهد آزمایشگاهی دیدگاه دانشمندان را به سمتی سوق می‌داد که بپذیرند، دنیای فیزیکی از قوانین مکانیک کوانتومی پیروی می‌کند. این نگرش در اوایل دهه ۱۹۸۰ باعث شد که مانین و فاینمن<sup>۹</sup> بطور مستقل این پیشنهاد را مطرح کنند که: ”جهان فیزیکی بطور کامل می‌تواند توسط رایانه‌های کوانتومی شبیه‌سازی شود.“ یک دهه بعد تحقیقات نظری و تلاش برای ساخت کامپیوترهای کوانتومی بر پایه قوانین مکانیک کوانتومی نظیر برهم نهی و تداخل کوانتومی به عنوان یکی از داغترین زمینه‌های تحقیقاتی مطرح شد.

ولگشت‌های کوانتومی که امروزه به عنوان تعمیم کوانتومی ولگشت‌های کلاسیکی شناخته می‌شوند، از قوانین مکانیک کوانتومی مثل برهم نهی و تداخل استفاده می‌کنند. در ولگشت‌های کلاسیکی، ولگشت با احتمال مشخصی در فضای مکان حرکت می‌کند در حالی که ولگشت‌های کوانتومی، که در آنها برهم نهی کوانتومی مجاز است، در یک زمان مسیرهای مختلفی توسط ولگشت پیموده می‌شود و دامنه حالت آن در یک مکان خاص حاصل تداخل کوانتومی تمامی مسیرهای ممکن منتهی به آن مکان است [۳۸، ۵۰].

همانند ولگشت‌های کلاسیکی، که کاربردهای متعددی در تمام شاخه‌های علمی پیدا کرده است، ثابت شده است که ولگشت‌های کوانتومی نیز می‌توانند ابزاری قدرتمند در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی و ابزاری برای مطالعه، کنترل و توضیح تحول بسیاری از پدیده‌های

<sup>۹</sup>Feynman

فیزیکی باشند.

با وجود اینکه ولگشت‌های کوانتومی برای اولین بار در سال ۱۹۹۳ توسط آهاروئف<sup>۱۰</sup> معرفی شد، اما ایده اصلی پیمایش همزمان مسیرهای مختلف به سالهای گذشته و کارهای ریاژانوف<sup>۱۱</sup> و فاینمن<sup>۱۲</sup> باز می‌گردد. میسر در سال ۱۹۹۶ حرکت ذرات کوانتومی را در شبکه کوانتومی مورد مطالعه قرار داد که در آن حرکت ذرات با توجه به تداخل کوانتومی دامنه‌های چپ و راست در نظر گرفته می‌شد [۵۱، ۵۲].

بر اساس این ایده‌ها مفهوم ولگشت کوانتومی شکل گرفته و امروزه به دو صورت استاندارد "پیوسته" و "گسسته" مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نوع خاصی از ولگشت‌های کوانتومی گسسته که به ولگشت‌های هاداماردی مشهور هستند توسط امباینیس و همکارانش در سال ۲۰۰۱ مورد مطالعه گرفت. هر دو نوع ولگشت کوانتومی کاربرد وسیعی در طراحی الگوریتم‌های کوانتومی برای حل مسائل مختلف دارند که از آن میان می‌توان الگوریتم‌های مختلف جستجو بر پایه ولگشت‌های کوانتومی را نام برد. همچنین ولگشت‌های کوانتومی در بسیاری از مسائل که بر اساس مدل جستجاری طراحی شده هستند قابل کاربرد است.

به موازات تمام پیشرفتهایی که در زمینه رایانش کوانتومی و الگوریتم‌های کوانتومی از ابتدای تولد مکانیک کوانتومی صورت پذیرفت، بررسی یکی دیگر از خواص مکانیک کوانتومی تحولی دیگر ایجاد کرده بود. این خاصیت مکانیک کوانتومی که به در هم تنیدگی معروف است و در حال حاضر سر منشأ بسیاری از پیشرفت‌های کنونی علمی محسوب می‌شود، چیزی بیش از برهم‌نهی حالات کوانتومی نیست. در برهم‌کنش حالات کوانتومی حالتی بوجود می‌آیند که موجودیتی واحد دارند و نمی‌توان آنها را بر اساس حالات موضعی توضیح داد. بطور مثال حالت یکتایی را که از برهم‌کنش دو ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  تشکیل می‌شود به هیچ عنوان نمی‌توان به صورت حالات ضربی از اسپین‌های  $\frac{1}{2}$  نوشت. در چنین حالتی یک نوع همبستگی کوانتومی وجود دارد که به آن در هم تنیدگی گفته می‌شود و به جرأت می‌توان گفت یکی از عجیب‌ترین پدیده‌های طبیعت است و بررسی آن انقلابی در عرصه رایانش و اطلاعات کوانتومی بوجود آورده است.

## ۱.۱۱.۱ ولگشت‌های کوانتومی گسسته

ولگشت‌های کوانتومی را می‌توان هم‌تای کوانتومی ولگشت‌های کلاسیکی در نظر گرفت. از آنجایی که ولگشت‌های کلاسیکی در حل بسیاری از مسائل و همچنین در توسعه الگوریتم‌های کلاسیکی بسیار موفق عمل کرده است، انتظار می‌رود بتوان از ولگشت‌های کوانتومی در ساخت الگوریتم‌های کوانتومی بهره‌جست به طوری که این الگوریتم‌ها بتوانند در حل مسائل

<sup>۱۰</sup> Aharanov

<sup>۱۱</sup> Riazanov

<sup>۱۲</sup> Feynman

بسیار سریع تر عمل کنند. ولگشت های کوانتومی یکی از جدیدترین زمینه های تحقیقاتی است که اولین مقاله آن کمتر از ۲۰ سال پیش توسط آهارونوف ارائه گردید. از آنجایی که نظریه ولگشت های کلاسیکی در توسعه الگوریتم های کلاسیکی بسیار موفق بوده و بسیاری از بهینه ترین الگوریتم های کلاسیکی بر پایه آن ساخته شده اند، گرایش بسیار زیادی به فهم و استخراج خواص ولگشت های کوانتومی در میان محققان ایجاد شده است که دور نمایی آن بسط و توسعه مفاهیم کوانتومی به منظور معرفی الگوریتم های کوانتومی بر پایه ولگشت های کوانتومی است. در حال حاضر الگوریتم هایی بر پایه ولگشت های کوانتومی معرفی شده است که بسیار سریع تر از هم تایی کلاسیکی خود عمل می کنند، اما این تحقیقات هنوز در ابتدای راه بوده و ادامه راه نیازمند تحقیقات گسترده تری است. به طور کلی تا کنون دو نوع از ولگشت های کوانتومی معرفی شده است. نوع اول ولگشت های کوانتومی گسسته نامیده می شود که شامل ولگشت و سکه کوانتومی و همچنین عملگر تحول است که این عملگر به صورت گسسته روی هر دو زیر سامانه کوانتومی (سکه و ولگشت) عمل می کند. نوع دوم، ولگشت های کوانتومی پیوسته نامیده می شود که در این مدل، عملگر تحول در هر زمانی روی سامانه می تواند عمل کند و قید گسسته بودن زمان در آن وجود ندارد [۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴].

مهمترین عاملی که باعث بوجود آمدن تفاوت های اساسی بین ولگشت های کلاسیکی و کوانتومی می شود این حقیقت است که در ولگشت های کوانتومی هیچ اندازه گیری روی سامانه تا آخرین مرحله انجام نمی گیرد. بنابراین سامانه به صورت کوانتومی باقی خواهد ماند و تداخل بین حالات کوانتومی باعث بوجود آمدن تفاوت های قابل توجهی در مقایسه با ولگشت های کلاسیکی می شود. به بیان دیگر اگر در هر گام اندازه گیری روی سامانه انجام گیرد، سامانه به یکی از حالت های خود تصویر خواهد شد و تداخل کوانتومی از بین خواهد رفت، بنابراین اگر در ولگشت های کوانتومی بعد از هر گام اندازه گیری روی سامانه انجام گیرد، در نهایت چیزی جز یک ولگشت کلاسیکی نخواهیم داشت.

## ۲.۱۱.۱ ولگشت کوانتومی روی خط

ولگشت های کوانتومی روی خط ساده ترین نوع ولگشت های کوانتومی است که بیشترین مطالعه نیز در مورد این نوع از ولگشت های کوانتومی صورت گرفته است. مطالعه ولگشت های کوانتومی روی خط به دلایل زیر بسیار حائز اهمیت است.

- ۱- ولگشت های کوانتومی روی خط می تواند برای ساخت مدل های پیچیده تری مثل ولگشت های کوانتومی روی دایره یا ولگشت های کوانتومی روی گرافها مورد استفاده قرار گیرد.
- ۲- مدل ساده و حل پذیر ولگشت های کوانتومی روی خط می تواند در درک بهتر ساختار و خواص ولگشت های کوانتومی بسیار مفید باشد.

۳- از ولگشت‌های کوانتومی روی خط می‌توان به عنوان آزمونی برای بررسی ماهیت کوانتومی در آزمایش‌های عملی رایانش کوانتومی بهره جست.

در ولگشت‌های کوانتومی روی خط سامانه شامل ولگشت و سکه است که عملگری بنام عملگر سکه روی زیر فضای سکه عمل کرده و عملگر دیگری که به عملگر انتقال معروف است براساس حالت سکه، ولگشت را به چپ یا راست منتقل می‌کند. واضح است که در ولگشت‌های کوانتومی روی خط کافی است سکه بتواند دو حالت متمایز داشته باشد تا بر اساس آن ولگشت بتواند به چپ یا راست برود. بنابراین داشتن فضای هیلبرت حداقل دو بعدی برای سکه کافی است.

مهمترین اجزای ولگشت‌های کوانتومی روی خط؛ سکه، ولگشت عملگرهای تحول روی سکه و ولگشت و مشاهده پذیرها هستند.

سکه و ولگشت: ولگشت، یک سامانه کوانتومی با فضای هیلبرت بینهایت بعدی  $H_P$  است که هر بردار در این فضا بر حالتی از ولگرد دلالت دارد که آن را با ”مکان” ولگرد  $|position\rangle$  نشان می‌دهیم. دقت کنید که پایه‌های این فضا  $|i\rangle_p$  و هر ترکیب خطی‌ای از آنها به شکل  $\sum_i \alpha_i |i\rangle_p$  می‌باشد.

سکه، یک سامانه کوانتومی با فضای هیلبرت ۲ بعدی  $H_C$  است. حالت سکه  $|coin\rangle$  می‌تواند یکی از پایه‌های این فضا یعنی  $\{|R\rangle, |L\rangle\}$  و یا هر ترکیب خطی از آنها باشد. بنابراین حالت کلی

$$|Coin\rangle = a|R\rangle_c + b|L\rangle_c \quad (27.1)$$

با  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  یک حالت مجاز برای  $|coin\rangle$  است. حالت کلی ولگشت کوانتومی در فضای هیلبرت کلی  $H_t = H_c \otimes H_p$  تعریف می‌شود. تا کنون در بررسی ولگشت‌های کوانتومی، حالت اولیه به صورت  $|\psi\rangle_{initial} = |position\rangle_{initial} \otimes |coin\rangle_{initial}$  در نظر گرفته شده است که مبتنی بر این فرض است که هیچ گونه در هم تنیدگی اولیه بین مکان ولگشت و سکه وجود ندارد. ما در فصل‌های آینده نشان خواهیم داد که وجود در هم تنیدگی اولیه بین مکان ولگرد و سکه چه تأثیراتی بر خواص ولگشت‌های کوانتومی خواهد داشت. تحول در ولگشت‌های کوانتومی شامل دو قسمت است که بسیار شبیه به هم‌تای کلاسیکی خود است. در ولگشت‌های کلاسیکی، شانس و احتمال نقش کلیدی در تحول ولگشت کلاسیکی دارد. به طور مثال ما سکه‌ای را می‌اندازیم و سپس بر اساس ”شیر” یا ”خط” بودن سکه که کاملاً به صورت تصادفی به وقوع می‌پیوندد به سمت ”راست” یا ”چپ” حرکت می‌کنیم. در ولگشت‌های کوانتومی نقش انداختن سکه بر عهده عملگر تحول در فضای سکه است که معمولاً با  $\hat{C}$  نشان داده می‌شود و وظیفه آن ایجاد ترکیب خطی از حالت‌های سکه است. مفهوم احتمال و شانس در اینجا نیز وارد می‌شود اما با این تفاوت که احتمال اینکه سکه در حالت خاصی باشد بعد از اندازه‌گیری مشخص می‌شود و قبل از اندازه‌گیری عملاً سکه در تمام حالات ممکن ترکیب خطی حالت خود وجود دارد [۵۴].

یکی از مشهورترین عملگرهای سکه، عملگر هادامارد  $\hat{H}$  است که به علت گستردگی کاربرد،

ولگشت‌های کوانتومی با عملگر سکه هادامارد را به نام خاص "ولگشت هادامارد"<sup>۱۳</sup> می‌شناسند. عملگر سکه  $\hat{H}$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle\langle R| + |R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L|) \quad (28.1)$$

که نمایش ماتریسی آن به صورت زیر است

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (29.1)$$

اثر این عملگر روی پایه‌های فضای سکه، تولید ترکیب خطی از آنهاست

$$\begin{aligned} \hat{H}|R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \\ \hat{H}|L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle) \end{aligned} \quad (30.1)$$

عملگر دیگری که در ولگشت‌های کوانتومی وجود دارد و نقش حرکت به چپ و راست در ولگشت‌های کلاسیک را ایفا می‌کند، عملگر جابه‌جاگر نام دارد که معمولاً با  $S$  نشان داده می‌شود. این عملگر یک عملگر یکانی است که با توجه به حالت سکه، ولگرد را یک گام به راست یا یک گام به چپ می‌برد

$$S = \sum_x |x+1\rangle\langle x| \otimes |R\rangle\langle R| + |x-1\rangle\langle x| \otimes |L\rangle\langle L| \quad (31.1)$$

بنابر این عملگر کلی که روی فضای هیلبرت کل ولگشت اثر می‌کند را می‌توان به صورت

$$U = S.(I_P \otimes H) \quad (32.1)$$

نوشت. برای هر گام باید یک بار این عملگر روی سامانه اعمال شود. بنابراین حالت یک ولگشت کوانتومی با حالت اولیه  $|\psi\rangle_{initial}$  بعد از  $t$  گام به صورت زیر خواهد بود:

$$|\psi\rangle_t = U^t |\psi\rangle_{initial} \quad (33.1)$$

<sup>۱۳</sup> Hadamard quantum walk

## فصل ۲

# انتقال حالت کوانتومی از طریق زنجیره‌ی اسپینی

### مقدمه

شبکه‌های اسپینی مجموعه‌ای از کیوبیت‌های درهمکنشی هستند که با اصول و قواعد خاصی مرتب شده‌اند. برای اینکه یک تصویر فیزیکی مناسب در ذهن مخاطب تجسم شود از اسپین‌ها به عنوان کیوبیت‌ها نام برده می‌شود. بنابراین هر جا از واژه‌ی اسپین استفاده شد منظور همان کیوبیت‌ها است. در این فصل به مسئله‌ی تنظیم  $N$  کیوبیت اندرکنشی در یک شبکه می‌پردازیم که اجازه می‌دهد انتقال کامل هر حالت کوانتومی در طولانی‌ترین فاصله‌ی ممکن انجام شود. در حالت کلی هر شبکه اسپینی را می‌توان به یک گراف نگاشت داد. هر گرافی مانند  $G = (V, E)$  از یک سری رئوس و یال تشکیل شده است که مجموعه رئوس را با  $V(G)$  و مجموعه یال‌ها را با  $E(G)$  نمایش می‌دهیم. در این نگاشت هر اسپین به صورت یک رأس در نظر گرفته می‌شود. همچنین هر یالی بین رئوس به منزله‌ی درهمکنش و جفت‌شدگی بین آنها است.

از مشخصه‌های هر گراف می‌توان به ماتریس مجاور آن اشاره کرد که آن را با  $A(G)$  نمایش

می‌دهند. ماتریس مجاورت چگونگی جفت شدن رئوس را نشان می‌دهد:

$$A_{i,j}(G) = \begin{cases} 1 & \text{if } (i,j) \in E(G) \\ 0 & \text{if } (i,j) \notin E(G) \end{cases} \quad (1.2)$$

باید خاطر نشان کرد که برای یک شبکه اسپینی که شامل  $N$  ذره با اسپین  $\frac{1}{2}$  است، فضای هر هیلبرت را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$H_G = \bigotimes_{i \in V(G)} H_i = (C^2)^{\otimes N} \quad (2.2)$$

$H_i \simeq (C^2)$  است.

## ۱.۲ دینامیک حاکم بر شبکه‌های اسپینی

عمومی‌ترین شکل هامیلتونی برای برهمکنش اسپین‌های واقع در مکان‌های  $i$ ام و  $j$ ام، هامیلتونی هایزنبرگ است.

$$H = \sum_{(i,j) \in E(G)} J_{ij} \sigma_i \cdot \sigma_j \quad (3.2)$$

که مولفه‌های  $i$ ام اسپین در راستای  $x, y$  و  $z$  می‌باشند. از طرفی چون تمام ذرات شبکه را ذراتی با اسپین  $\frac{1}{2}$  در نظر گرفتیم می‌توان از رابطه‌ی بین عملگر اسپین و ماتریس‌های پائولی استفاده کرد. به عبارتی یک تناظر بین  $S_i^x, S_i^y, S_i^z$  و ماتریس‌های پائولی  $\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z$  برقرار کرد که

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

هامیلتونی هایزنبرگ یک هامیلتونی هرمیتی و همسانگرد است. (یعنی در جهت‌های مختلف تغییری نمی‌کند.) شکل‌های دیگر هامیلتونی هایزنبرگ، هامیلتونی  $XY$  و  $XYZ$  می‌باشد.

$$H_{XY} = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in E(G)} J_{i,j} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) \quad (5.2)$$

و

$$H_{XYZ} = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in E(G)} J_{i,j} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y + \sigma_i^z \sigma_j^z) \quad (6.2)$$

شکل دیگر هامیلتونی  $XY$  به صورت زیر است:

$$H_{XY} = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in E(G)} J_{i,j} (\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y) + \omega_i (\sigma_i^z) \quad (7.2)$$

که  $\omega_i$  مقدار ثابتی است. ساده‌ترین و ابتدایی‌ترین شبکه ی اسپینی، زنجیره ی اسپینی است که اولین بار برای انتقال حالت‌های کوانتومی در نظر گرفته شد. زنجیره ی اسپینی را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از کیوبیت‌ها، که در یک بعد قرار گرفته‌اند در نظر گرفت. در این تعریف هر کیوبیت مجاز است تنها با کیوبیت‌های مجاور برهم کنش (جفت شدن) داشته باشد. به عبارتی برای یک زنجیره اسپینی با  $N$  کیوبیت، درجه هر کیوبیت دو است به غیر از کیوبیت ابتدایی  $A$  و انتهایی  $B$  که یک است. در شبکه‌های اسپینی، هر کیوبیت را می‌توان با بردارهای پایه دو حالت به صورت زیر:

$$\{|0\rangle \equiv |\uparrow\rangle, \quad |1\rangle \equiv |\downarrow\rangle\}$$

در هر لحظه از زمان مشخص کرد. در بحث انتقال حالت‌های کوانتومی نمادگذاری‌های متنوع و مختلفی برای مشخص کردن حالت سیستم بکار می‌رود از جمله

$$|\psi_0\rangle = |0\rangle = |000 \dots 00\rangle \quad (۸.۲)$$

که بیانگر قرار گرفتن کلیه ی کیوبیت‌ها در حالت  $|0\rangle$  است. حالت بالا ویژه بردار هامیلتونی  $XY$  با ویژه مقدار صفر است. حالت بالا یک حالت پایه<sup>۱</sup> برای سیستم به شمار می‌رود.

$$H_{XY} |\psi_0\rangle = E_0 |\psi_0\rangle, \quad E_0 = 0 \quad (۹.۲)$$

حالت دیگر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|j\rangle = |000 \dots 1_j \dots 000\rangle, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (۱۰.۲)$$

که مبین قرار گرفتن  $j$  امین کیوبیت در حالت  $|1\rangle$  و مابقی کیوبیت‌ها در حالت  $|0\rangle$  است. در مکانیک کوانتومی عملگر تحول زمانی را با  $U_G(t) = \exp\left(-\frac{iH_G t}{\hbar}\right)$  معرفی می‌کنند که در آن  $H_G$  هامیلتونی حاکم بر سیستم است. حالت سیستم در زمان  $t$  نیز به صورت

$$|\psi_t\rangle = e^{-iH_G t} |\psi_{t_0}\rangle, \quad \hbar = 1 \quad (۱۱.۲)$$

مشخص می‌شود که  $|\psi_{t_0}\rangle$  حالت اولیه است.

$$F_G(i, j, t) = \langle j | e^{-iH_G t} | i \rangle \quad (۱۲.۲)$$

بین دو کیوبیت  $i$  و  $j$  انتقال کامل صورت می‌گیرد. اگر و تنها اگر

$$F_G(i, j, t) = 1 \quad (۱۳.۲)$$

در معادله ی بالا  $i$  و  $j$  را معمولاً کیوبیت‌های (رئوس) مقابل انتخاب می‌کنند. یک گراف را متناوب با دوره تناوب  $t$  گویند اگر و تنها اگر

$$F_G(i, i, t) = 1 \quad (۱۴.۲)$$

<sup>۱</sup>Ground state

همانطور که در مقدمه نیز اشاره شد در حالت بحث انتقال حالت‌های کوانتومی روی انتقال کامل حالت‌های تمرکز می‌کنیم چون قصد داریم اطلاعات به صورت کامل و دست نخورده انتقال داده شوند.

## ۲.۲ انتقال حالت‌های کوانتومی در یک زنجیره اسپینی

دید فیزیکی مربوط کانال‌های کوانتومی ایده‌آل اهمیت خاصی برای فناوری‌هایی دارد که مسیر درگیری و وضعیت کوانتومی در شبکه‌ها را تعیین می‌کنند. گستره این فناوری‌ها از مقیاس کوچک، مانند اجزای یک ماشین خودکار کوانتومی، تا اندازه متوسط مانند درگاه اطلاعاتی یک کامپیوتر کوانتومی و اندازه‌های بسیار بزرگ است، مانند یک اینترنت کوانتومی که روی بسیاری از رایانه‌های کوانتومی قرار دارد، است. در این فصل، ما به مسئله تنظیم  $N$  کیوبیت اندرکنشی در یک شبکه می‌پردازیم یعنی شبکه‌ای که دارای  $N$  کیوبیت می‌باشد و هر کیوبیت با کیوبیت مجاور خود بر همکنش دارد.

انتقال با آماده‌سازی کیوبیت ورودی  $A$  در یک حالت کوانتومی تعیین شده و بعد از آن بازیابی حالت توسط کیوبیت خروجی  $B$  انجام می‌شود. شبکه توسط یک گراف  $G$  که در آن رأس‌های  $V(G)$  موقعیت‌های کیوبیت‌ها را نمایش می‌دهد و مجموعه‌ای از لبه‌های  $E(G)$  مشخص می‌کند که کدام جفت کیوبیت‌ها متصل هستند. گراف با ماتریس مجاورت  $A(G)$  مشخص می‌شود:

$$A_{ij}(G) := \begin{cases} 1 & \text{if } (i, j) \in E(G) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

این رابطه دارای دو رأس خاص است که به ترتیب  $A$  و  $B$  نام‌گذاری شده‌اند که به ترتیب کیوبیت‌های ورودی و خروجی را نشان می‌دهند. ما فاصله بین  $A$  و  $B$  را تعیین می‌کنیم که تعداد لبه‌هایی است که کوتاه‌ترین مسیر بین آنها را تشکیل می‌دهند. اگر چه این فاصله در یک گراف به طور مستقیم به جدایی فیزیکی بین کیوبیت‌های ورودی و خروجی تعریف شده است، به زمانی که لازم است تا یک گراف را در فضای فیزیکی تعبیه نمود، بستگی دارد.

مطلوبترین گراف برای اهداف ما یک زنجیره از  $N$  کیوبیت می‌باشد که  $A$  و  $B$  در دو انتهای آن می‌باشند. می‌توان با خاموش و روشن کردن کیوبیت‌های مجاور حالت‌های کیوبیتی را در طول زنجیره از ورودی به خروجی منتقل کنیم [۵۵]. چنین کنترل دینامیکی بر روی برهم کنش‌های بین کیوبیت‌ها هنوز یک چالش تجربی است. به لحاظ نظری، این چالش با پیشرفت قابل ملاحظه‌ای در کاهش میزان کنترل مورد نیاز برای انجام وظایف محاسبات کوانتومی روبرو شده است [۵۶]. افزون بر این، نشان داده شده است که تا زمانی که یک فرد بر روی کیوبیت‌های فردی کنترل داشته باشد، این را می‌توان بدون کنترل مستقیم بر برهم کنش

های بین-کیوبیتی به دست آورد [۵۷]. حتی اگر تنها یک کیوبیت در زنجیره کنترل شود، می‌توان ارتباطات کوانتومی را انجام داد [۵۸].

ارتباط کوانتومی در فواصل کوتاه از طریق یک زنجیره اسپینی بدون مدولاسیون به طور دقیق مورد مطالعه قرار گرفته است و عبارتی برای هماندهی<sup>۲</sup> حالت کوانتومی به دست آمده است. [۵۹] بر خلاف این آثار، بر وضعیتی که انتقال کامل حالت است متمرکز می‌شویم، یعنی هماندهی یک است و می‌توان به صورت قراردادی برای فاصله‌های طولانی بدست آورد. شبکه‌ای را در نظر می‌گیریم که در آن انتقال حالت از طریق تحول زمانی تحت یک هامیلتونی مستقل از زمان مناسب و بدون کنترل خارجی اضافی بدست می‌آید. این مکانیزم از خطای احتمالی ناشی از کنترل دینامیکی برهم کنش‌های بین کیوبیتی اجتناب می‌کند. نشان می‌دهیم که یک جفت شدگی  $xy$  اجازه می‌دهد حالت‌های کامل در طول زنجیره منتقل شود:

$$H_{xy} = \frac{1}{4} \sum_{(i,j) \in H_G} [\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y] \quad (15.2)$$

که در آن  $\sigma_i^x$  و  $\sigma_i^y$  ماتریس‌های پائولی بر روی کیوبیت  $i$  هستند. اثر این هامیلتونی روی زنجیره اسپینی به این صورت است که حالت را از سمت چپ به سمت راست منتقل می‌کند:

$$|1_A \circ \circ \circ \dots \circ_B\rangle \rightarrow |\circ_A \circ \circ \dots \circ 1_B\rangle$$

برای مثال اثر این هامیلتونی روی یک زنجیره دو کیوبیتی به صورت زیر نشان داده شده است:

$$|A\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \quad |B\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} \circ & -1 \\ i & \circ \end{pmatrix}$$

$$|A\rangle |B\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \\ \circ \\ \circ \end{pmatrix}$$

$$|B\rangle |A\rangle = \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \\ 1 \\ \circ \end{pmatrix}$$

$$H_G |A\rangle |B\rangle = \frac{1}{4} [\sigma_x |A\rangle \sigma_x |B\rangle + \sigma_y |A\rangle \sigma_y |B\rangle] = \frac{1}{4} \left[ \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \circ & -i \\ i & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \circ & -i \\ i & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -i \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |B\rangle |A\rangle$$

حالت  $|A\rangle$  از چپ به راست منتقل شده است.

علاوه بر این اگر بتوانیم قدرت جفت شدگی بین کیوبیت‌ها را مهندسی کنیم، می‌توان از بین دو انتهای یک زنجیره‌ی خطی نیز انتقال کامل حالت را انجام داد. این‌ها همچنین می‌توانند با تعامل هایزنبرگ یا تبادلی بوسیله‌ی یک مدولاسیون مناسب شبکه انجام شوند، به عنوان مثال، با قرار دادن آن در یک میدان مغناطیسی خارجی ایستا، اما به طور کلی، غیرمعمول. اگر چه کیوبیت‌های ما نشان‌دهنده دو سیستم حالت عمومی هستند، برای راحتی نمایش نیز از عبارت اسپین استفاده خواهیم کرد زیرا یک تصویر فیزیکی ساده از شبکه را فراهم می‌کند. [۵۹]

– ابتدا فرض بر این است که تمام اسپین‌ها به سمت پایین محور هستند.

به طور مثال شبکه در حالت  $|^{\circ} \rangle = |^{\circ} A ^{\circ} \dots ^{\circ} B \rangle$  می‌باشد که  $|^{\circ} \rangle$  یک ویژه حالت هامیلتونی مربوط به انرژی صفر است.

– فضای هیبرت  $H_G$  که با آن  $N$  کیوبیت در ارتباط است ابعادش  $2^N$  است. دینامیک انتقال حالت به طور کامل توسط چرخش در زیرمجموعه  $N$  بُعدی براساس  $S_G$  بردارهای پایه تعیین می‌شود:

$$|n\rangle, n = 1, \dots, N$$

– مطابق پیکربندی اسپین که در آن تمام اسپین‌ها به سمت پایین هستند ”به جز” تنها یک اسپین که در رأس است و به سمت ”بالا” است. در حقیقت وقتی ما کیوبیت ورودی  $A$  را در حالت  $|\alpha|^{\circ} + \beta|1\rangle$  آماده می‌کنیم وضعیت شبکه به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\alpha|^{\circ} A ^{\circ} \dots ^{\circ} B \rangle + \beta|1 A ^{\circ} \dots ^{\circ} B \rangle = \alpha|^{\circ} \rangle + \beta|1\rangle$$

– ضریب  $\alpha$  در زمان تغییر نمی‌کند زیر  $|^{\circ} \rangle$  ویژه حالت هامیلتونی مربوط به انرژی صفر است.

– مجموعه مؤلفه‌های  $Z$  اسپین  $\sigma_i^z = \sum_{i \in V(G)} \sigma_i^z$  با  $H_G$  جابه‌جا می‌شود.

$$[H_G, \sigma_i^z] = \frac{1}{2} \left[ \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x, \sum_i \sigma_i^z \right] + \left[ \sum_i \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y, \sum_i \sigma_i^z \right]$$

جابه‌جاگر برای اندیس‌های متفاوت صفر می‌شوند، تنها اندیس‌های یکسان با  $i$  و  $i+1$  را در نظرمی‌گیریم، و  $\sum$ ‌ها از جابه‌جاگر بیرون می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 [H_G, \sigma_t^z] &= \sum_i [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x, \sigma_i^z] + \sum_i [\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x, \sigma_{i+1}^z] \\
 &+ \sum_i [\sigma_i^y \sigma_{i+1}^y, \sigma_i^z] + \sum_i [\sigma_i^y \sigma_{i+1}^y, \sigma_{i+1}^z] \\
 &= \sum_i [\sigma_i^x \cdot \sigma_i^z] \sigma_{i+1}^z + \sum_i \sigma_i^x [\sigma_{i+1}^x, \sigma_{i+1}^z] + \\
 &\sum_i [\sigma_i^y \cdot \sigma_i^z] \sigma_{i+1}^y + \sum_i \sigma_i^y [\sigma_{i+1}^y, \sigma_{i+1}^z] \\
 &= \sum_i (-2i \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x - 2i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y) + \sum_i (2i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^y + 2i \sigma_i^y \sigma_{i+1}^x) = 0 \\
 [H_G, \sum_i \sigma_{tot}^z] &= 0
 \end{aligned}$$

که منجر به حفظ مجموعه مؤلفه‌های  $Z$  اسپین می‌شود. به این معنی است که حالت  $|\uparrow\rangle$   $|\uparrow_A \dots \uparrow_B\rangle$

– بایدبر هم نهی حالت‌ها دقیقاً با یک اسپین بالا و همه‌ی اسپین‌های دیگر پایین باشد. بنابراین وضعیت اولیه شبکه در زمان  $t$

$$\alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \sum_{n=1}^N \beta_n(t) |n\rangle, \quad \begin{cases} \sum_n |n\rangle \langle n| = 1 \\ \beta_n(t) = \langle n | e^{-iH_G t} | \uparrow \rangle \end{cases} \quad (16.2)$$

– دینامیک به طور مؤثر محدود به زیرفضای  $S_G$  است. با معادل قرار دادن هامیلتونی  $H_G$  با ماتریس مجاورت  $A_{(G)}$  می‌توان تحول زمانی شبکه در زیر فضای  $S_G$  را به صورت یک قدم زنی (ولگشت) کوانتومی زمان پیوسته روی گراف  $G$  در نظر گرفت. سؤال مورد نظر ما این است: چه زمانی حرکت کوانتومی از  $A$  به  $B$  با هماندهی واحد منتشر می‌شود؟ پاسخ این است، اگر کیوبیت  $A$  را با  $|\uparrow\rangle$  و کیوبیت  $B$  را با  $|N\rangle$  مشخص کنیم، باید دامنهٔ احتمال را محاسبه کنیم که شبکه ابتدا در حالت  $|\uparrow\rangle$  مربوط به  $|\uparrow_A \dots \uparrow_B\rangle = |\uparrow\rangle$ ، پس از زمان  $t$  به حالت  $|N\rangle$  متناظر با  $|N\rangle = |\downarrow_A \dots \downarrow_B\rangle$  می‌رود. به عنوان مثال:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \langle N | e^{-iH_G t} | \uparrow \rangle, \quad \hbar = 1 \\
 F(t) &= \langle N | e^{-iH_G t} | \uparrow \rangle = \langle N | \alpha \rangle
 \end{aligned}$$

که  $\langle N | \alpha \rangle$  دامنهٔ احتمال پرتاب  $|\alpha\rangle$  به حالت  $|N\rangle$  می‌باشد. که یک ضرب داخلی است که حداکثر آن باید باشد.

– انتقال کامل حالت برای زمان  $t$  برای  $F(t) = 1$  بدست می‌آید.

– زنجیره‌ی خطی  $XY$  از  $N$  کیوبیت داریم که نمایش ماتریسی  $H_{XY}(G)$  برای زنجیره‌ی  $N$  کیوبیتی در پایه‌های  $|j\rangle$  به صورت زیر است:

$$H_{XY}(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17.2)$$

همچنین ویژه مقادیر و ویژه بردارها را می‌توان با قطری کردن ماتریس بالا بدست آورد. مشخص شده است که ویژه بردارها و ویژه مقادیر این نوع ماتریس‌ها به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$|\tilde{K}\rangle = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi kn}{N+1}\right) |n\rangle \quad (18.2)$$

$$E_k = -2 \cos\left(\frac{k\pi}{N+1}\right) \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (19.2)$$

در این حالت می‌توان  $F(t)$  را به طور صریح با تعویض هامیلتونی یا ماتریس مجاورت مربوط تقریبی محاسبه کرد.

$$F(t) = \langle N | e^{-iHt} | 1 \rangle \quad (20.2)$$

برای بدست آوردن  $F(t)$  می‌توان از این نکته کوانتومی استفاده کنیم اگر هامیلتونی را بتوان برحسب ویژه بردارها و ویژه مقادیر قطری کرد می‌توان از این نکته استفاده کنیم که اگر  $H$  را در عملگر  $e^{i\in H}$  بتوان  $H = \sum_i \Phi_i |v_i\rangle \langle v_i|$  نوشت. آن گاه خواهیم داشت:

$$U = e^{i\in H} = \sum_i i\Phi_i |v_i\rangle \langle v_i|$$

با اعمال این نکته در رابطه ۲۰.۲ داریم:

$$e^{-iHt} = \sum_{k=1}^N e^{-i E_k t} |\tilde{K}\rangle \langle \tilde{K}|$$

$$F(t) = \sum_{k=1}^N \langle N | \tilde{K} \rangle \langle \tilde{K} | 1 \rangle e^{-i E_k t} \quad (1)$$

$$\langle N | \tilde{K} \rangle = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi kn}{N+1}\right) \langle N | n \rangle, \quad \langle N | n \rangle = \delta_{Nn}$$

$$\langle N | \tilde{K} \rangle = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi kN}{N+1}\right) \quad (2)$$

$$\langle \tilde{K} | 1 \rangle = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sum_{n=1}^N \sin\left(\frac{\pi kn}{N+1}\right) \langle n | 1 \rangle, \quad \langle n | 1 \rangle = \delta_{n,1}$$

$$\langle \tilde{K} | 1 \rangle = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin\left(\frac{\pi k}{N+1}\right) \quad (3)$$

(۲) و (۳) را در رابطه (۱) قرار داده پس داریم:

$$F(t) = \frac{2}{N+1} \sum_{k=1}^N \sin\left(\frac{\pi k}{N+1}\right) \sin\left(\frac{\pi kN}{N+1}\right) e^{-i E_k t} \quad (21.2)$$

انتقال حالت کامل از یک انتها به انتهای دیگر زنجیره تنها با  $N = 2$  و  $N = 3$  امکان پذیر است:

$$N = 2 \Rightarrow F(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{-i E_k t}$$

$$F(t) = \frac{1}{2} \left[ \sin\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} e^{i(-2 \cos \frac{\pi}{2})t} + \sin\frac{\pi}{2} \sin\frac{\pi}{2} e^{i(-2 \cos \frac{\pi}{2})t} \right]$$

$$F(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} (e^{+it} - e^{-it}) \right] = \frac{1}{4} (e^{it} - e^{-it}) = -i \sin t$$

$$N = 2 \Rightarrow F(t) = -i \sin(t) \quad (22.2)$$

برای  $N = 3$  هم به همین روش یعنی باز کردن  $\Sigma$  می‌توانیم ثابت کنیم که:

$$N = 3 \Rightarrow F(t) = -\left[\sin\frac{t}{\sqrt{3}}\right]^2 \quad (23.2)$$

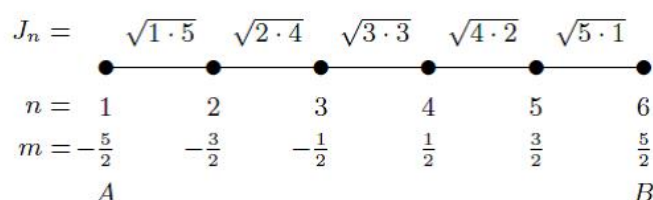
– عدم وجود انتقال کامل حالت برای  $N \geq 4$  را می‌توان با نشان دادن اینکه شرایط فوق ارضا نمی‌شود اثبات کرد.

اینکه آیا با  $N$  کیوبیت می‌توان یک شبکه با جفت شدگی‌های یکسان ساخت که هر حالت کوانتومی بتواند به صورت کامل در فاصله‌ی بزرگتری منتقل شود، یک مسئله باز جالب می‌باشد. با این وجود بهبود فاصله ارتباط کوانتومی کامل به  $N$  (یعنی افزایش فاصله‌ای که انتقال کامل حالت روی می‌دهد به  $(N)$  اگر کوپلینگ‌های ثابت ولی متفاوت با هم در بین کیوبیت‌ها را در نظر بگیریم، ممکن می‌باشد. به منظور مشاهده چگونگی انجام این کار، با برچسب‌گذاری دوباره کیوبیت‌ها شروع می‌کنیم.

می‌توان یک ذره خیالی (غیرواقعی) را با اسپین  $\frac{-(N-1)}{2}$  را به یک زنجیره‌ی  $N$  کیوبیتی نسبت داد (این اسپین خیالی را به کل زنجیره نسبت داده است.) و بردارهای پایه را به صورت  $|m\rangle$  برچسب‌گذاری کرد که در آن داریم:

$$m = -\frac{1}{2}(N-1) + n - 1 \quad (n = 1, 2, \dots, N)$$

کیوبیت ورودی  $|A\rangle$  هم می‌تواند به شکل  $|n=1\rangle$  برچسب‌گذاری شود و هم به شکل  $m = -\frac{1}{2}(N-1) + \frac{1}{2}$  یا  $m = -\frac{1}{2}(N-1)$  نشان داده شود. یک مثال برای  $N=6$  در شکل ۱.۲ به تصویر کشیده شده است.



شکل ۱.۲: کوپلینگ  $J_n$  که انتقال کامل حالت از  $A$  به  $B$  را در یک زنجیره ۶ کیوبیتی تصدیق می‌کند.

این بار تحول زنجیره را تحت اصلاح شده رابطه ۱۵.۲ در نظر می‌گیریم:

$$H_G = \sum_{n, n+1 \in E_G} \frac{Jn}{2} [\sigma_n^x \sigma_{n+1}^x + \sigma_n^y \sigma_{n+1}^y] \quad (24.2)$$

که وقتی محدود به زیرفضای  $S_G$  باشد، به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \circ & j_1 & \circ & \circ & \dots & \circ \\ j_1 & \circ & 1 & \circ & \dots & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & j_{N-1} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & j_{N-1} & \circ \end{pmatrix}$$

ماتریس مجاورت این بار دیگر عناصر غیر قطری یکسان ندارد.

ماتریس بالا معادل نمایش هامیلتونی  $H$  برای یک ذره خیالی با اسپین  $S = -\frac{1}{2}(N-1)$  می‌باشد:

حالت، عناصر ماتریسی  $J_x$  برابر با:  $H = \lambda S_x$ ، که  $S_x$  عملگر اندازه حرکت زاویه‌ای بوده و  $\lambda$  یک ضریب ثابت می‌باشد، در این

$$J_x = \frac{J_+ + J_-}{2}$$

$$J_+ = \sqrt{(j-m)(j+m+1)} \delta_{m', m+1}, J_- = \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m', m-1}$$

بعد از جایگزاری  $j = \frac{N-1}{2}$  و  $m = \frac{-(N+1)}{2}$  داریم:

$$J_+ = \sqrt{n(N-n)} \delta_{m', m+1}$$

$$J_- = \sqrt{(n-1)(N-n+1)} \delta_{m', m-1}$$

سپس:

$$J_x = \frac{\sqrt{n(N-n)} \delta_{m', m+1} + \sqrt{(n-1)(N-n+1)} \delta_{m', m-1}}{2}$$

با توجه به اینکه:

$$\begin{cases} m' = 2 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow m' = m + 1 \begin{cases} \delta_{m', m+1} = 1 \\ \delta_{m', m-1} = 0 \end{cases}$$

بنابراین جمله دوم صفر می‌شود. در نتیجه عناصر ماتریسی  $J_x$  برابر با  $\frac{\lambda}{2} \sqrt{n(N-n)}$  می‌باشند. عملگر تحول  $U(t) = e^{(-i\lambda S_x t)}$  روی شبکه، نشان دهنده یک چرخش برای این ذره خیالی می‌باشد. عناصر ماتریسی  $\langle n' | U(t) | n \rangle$  مربوط به این ماتریس چرخش به خوبی شناخته شده می‌باشند (با آن آشنا هستیم) و به ویژه، دامنه احتمال برای انتقال با استفاده از فرمول ویگنر به روش زیر بدست می‌آید:

$$F(t) = \langle N|U(t)|\mathbb{1}\rangle = \langle j, m'|R_x(\theta)|j, m\rangle = \\ [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{1/2} \\ \times \sum_n \frac{(-1)^k (\cos \frac{\theta}{2})^{j+m'-m-2k} (i \sin \frac{\theta}{2})^{m-m'+2k}}{(m-m'+k)!(j+m'-k)!(j-m-k)!k!}$$

حال برای بدست آوردن  $\langle N|U(t)|\mathbb{1}\rangle$  باید در رابطه بالا  $j = \frac{N-1}{2}$  و  $m' = \frac{-1}{2}(N-1)$  و  $m = \frac{1}{2}(N-1)$  قرار دهیم.  $k = 0, 1, \dots, j+m$

$$\langle N|U(t)|\mathbb{1}\rangle = [(N-1)!(\circ)!(\circ)!(N-1)!]^{1/2} \\ \times \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(-1)^k (\cos \frac{\theta}{2})^{-2k} (i \sin \frac{\theta}{2})^{N-1+2k}}{(N-1+k)!(-k)!k!}, k = 0 \\ \Rightarrow \langle N|U(t)|\mathbb{1}\rangle = (N-1)! \times \frac{(i \sin \frac{\theta}{2})^{N-1}}{(N-1)!} = \left[i \sin \frac{\theta}{2}\right]^{N-1}$$

$$F(t) = \langle N|U(t)|\mathbb{1}\rangle = \left[-i \sin \left(\frac{\lambda t}{2}\right)\right]^{N-1} \quad (25.2)$$

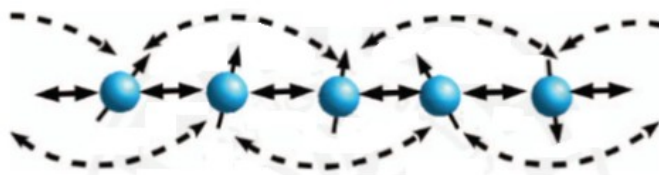
بنابراین انتقال کامل یک حالت کوانتومی بین دو انتهای  $A$  و  $B$  در یک زمان ثابت حاصل می‌شود:

$$t = \frac{\pi}{\lambda}$$

به هر زنجیره کیوبیتی که این چنین مهندسی (تنظیم) شده باشد می‌توان به عنوان تصویری از یک گراف با جفت شدگی های یکسان نگاه کرد.

## ۳.۲ ساده‌ترین پروتکول مخابرات کوانتومی از طریق یک زنجیره اسپینی

مواد، معمولاً از دسته بزرگی از اسپین‌ها تشکیل می‌شوند که به طور دائمی با یکدیگر جفت شده‌اند. برهم کنش دو به دو اسپین‌ها باعث می‌شود که اسپین‌ها در یکی از دو حالت هم سو یا غیر هم سو نسبت به اسپین‌های مجاور قرار گیرند، که دسته اول مواد فرومغناطیس و دسته دوم مواد پادفرومغناطیس نام دارند. یک زنجیره اسپینی دسته بزرگی از این مواد را که در آنها اسپین‌ها در یک بعد به طور دائمی با یکدیگر جفت شده‌اند، مدل می‌کند. (شکل ۲.۲)



شکل ۲.۲: زنجیره اسپینی

دسته‌ای از اسپین‌ها که با برهم کنشی که قدرتش با فاصله کاهش می‌یابد، به یکدیگر جفت شده‌اند. برهم کنش‌هایی که با نقطه‌چین نشان داده شده‌اند ضعیف‌تر از برهم کنش‌هایی هستند که با خط ممتد نشان داده شده‌اند.

کلی‌ترین شکل هامیلتونی یک گراف اسپینی را می‌توان به صورت

$$H_G = \sum_{i,j=1}^N (J_{x,ij} X_i X_j + J_{y,ij} Y_i Y_j + J_{z,ij} Z_i Z_j) + \sum_{i=1}^N B_i \sigma_i^z \quad (26.2)$$

نوشت، که  $X_i, Y_i, Z_i$  عملگرهای مربوط به اسپین موجود در سایت  $i$ ام و  $J_{\alpha,i}$  انتگرال‌های تبدالی  $\alpha = x, y, z$  و  $B_i$  شدت میدان مغناطیسی خارجی در سایت  $i$ ام است. چنین برهم کنشی را برهم کنش تبدالی می‌نامند. در اینجا منظور از گراف اسپینی، گرافی است که رئوس آن اسپین‌ها و یال‌های آن اسپین‌هایی را که با هم برهم کنش دارند به هم متصل می‌کند. ابتدا طرح کلی را برای یک گراف اسپینی بررسی می‌کنیم، به زنجیره اسپینی می‌پردازیم.

ساده‌ترین گراف اسپینی، گرافی متشکل از سیستم‌های اسپین  $\frac{1}{2}$  یا کیوبیت‌ها است (در این صورت عملگرهای  $X_i, Y_i, Z_i$  در معادله ۲.۱ همان عملگرهای پائولی خواهند بود). نه تنها نمونه‌هایی از این سیستم‌ها در طبیعت وجود دارد، بلکه از آن‌جا که کیوبیت‌ها با سیستم‌های اسپین  $\frac{1}{2}$  ایزومورف هستند، قابل تعبیه به عنوان سیستم‌هایی از انواع کیوبیت‌ها نیز می‌باشند.

همچنین اگر فرض کنیم  $J_x = J_y = J_z < 0$  برهم کنش حاصل، برهم کنش همسانگرد هاینبرگ فرو مغناطیس نامیده می‌شود که هامیلتونی گراف اسپینی حاصل را تنها با در نظر گرفتن برهم کنش همسایه‌های نزدیک، می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$H_G = - \sum_{i,j} J_{ij} \tilde{\sigma}_i \cdot \tilde{\sigma}_j - \sum_{i=1}^N B_i \sigma_i^z \quad (27.2)$$

که  $\tilde{\sigma}_i = (\sigma_i^x, \sigma_i^y, \sigma_i^z)$  و  $\sigma_i^{x/y/z}$  ماتریس‌های پائولی برای اسپین  $i$ ام،  $B_i > 0$  شدت میدان مغناطیسی در سایت  $i$ ام،  $J_{ij} > 0$  شدت جفت‌شدگی‌ها می‌باشد و  $\langle i, j \rangle$  نشان دهنده جفت اسپین‌ها است. در ابتدای پروتکول با سرد کردن سیستم یا با اعمال میدان مغناطیسی ضعیف حالت شبکه به حالت پایه خود می‌رسد. [۶۰]

در این حالت همه اسپین‌ها در حالت  $|0\rangle$  قرار می‌گیرند و حالت کل سیستم برابر است با  $|0\rangle = |0 \dots 0\rangle$ ، مثلاً جهت‌گیری همه اسپین‌ها به سمت بالا خواهد بود. انرژی حالت پایه را  $E_0$  در نظر می‌گیریم (یعنی  $H_G$  را به صورت  $H_G + E_0$  باز تعریف می‌کنیم). همچنین کلاس حالات  $|j\rangle = |0 \dots 0 1 0 \dots 0\rangle$  را که در آن اسپین سایت  $j$ ام در حالت  $|1\rangle$  و بقیه اسپین‌ها در حالت  $|0\rangle$  قرار دارند و  $j = 1, 2, \dots, s, \dots, r, \dots, N$  که  $s$  سایت اسپین فرستنده حالت و  $r$  سایت اسپین دریافت‌کننده حالت است. ابتدا آلایس حالتی را که می‌خواهد به باب بفرستد، در زمان  $t = 0$  روی اسپین  $s$ ام قرار می‌دهد. فرض کنید این حالت  $|1\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + \exp(i\phi)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle$  باشد.

باشد. در این صورت حالت کل سیستم در زمان  $t = 0$  برابر خواهد بود با

$$|\Psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + \exp(i\phi)\sin\frac{\theta}{2}|s\rangle \quad (28.2)$$

اکنون باب زمان مشخصی منتظر می‌ماند تا حالت  $|\Psi(0)\rangle$  به یک حالت نهایی که تا حد ممکن به  $\cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + \exp(i\phi)\sin\frac{\theta}{2}|r\rangle$  نزدیک است، تحول یابد. از آنجا که  $[H_G, \sum_{i=1}^N \sigma_i^z] = 0$ ، حالت  $|j\rangle$  تحول می‌یابد و حالت گراف اسپینی در زمان  $t$  با در نظر گرفتن  $h=1$  به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} |\psi(t)\rangle &= e^{iH_G t} |\psi(0)\rangle \\ |\psi(t)\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}e^{-iH_G t}|s\rangle \\ \sum_j |j\rangle\langle j| &= 1 \end{aligned}$$

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\sum_{j=1}^N |j\rangle\langle j|e^{-iH_G t}|s\rangle \quad (29.2)$$

اکنون باب زمان مشخصی منتظر می‌ماند تا حالت  $|\Psi(0)\rangle$  به یک حالت نهایی که تا حد ممکن به  $\cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + \exp(i\phi)\sin\frac{\theta}{2}|r\rangle$  نزدیک است، تحول یابد. حالت  $|s\rangle$  تنها به حالت  $|j\rangle$  تحول می‌یابد. حالت اسپین  $r$ ام به طور کلی یک حالت مخلوط است و با رد گرفتن روی همه اسپین‌های دیگر، از  $|\Psi(t)\rangle$  به دست می‌آید. ماتریس چگالی حالت خروجی از  $Tr_{1,2,\dots,N-1}(|\Psi(t)\rangle\langle\Psi(t)|)$  به دست می‌آید که به معنی رد گرفتن روی حالت  $N-1$  اسپین دیگر است. تحول زمانی این ماتریس چگالی به صورت زیر است:

$$\rho_{out}(t) = P(t)|\psi_{out}(t)\rangle\langle\psi_{out}(t)| + (1-P(t))|\circ\rangle\langle\circ| \quad (30.2)$$

که

$$|\psi_{out}(t)\rangle = \frac{1}{[P(t)]^{\frac{1}{2}}} \left( \cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + \exp(i\phi)\sin\frac{\theta}{2}f_{s,r}(t)|1\rangle \right) \quad (31.2)$$

$$\begin{aligned} P(t) &= \cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)|f_{r,s}(t)|^2, \quad f_{r,s}(t) = \langle r|\exp\{-iH_G t\}|s\rangle \\ |\psi_{out}(t)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{P(t)}}(\cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + e^{+i\phi}\sin\frac{\theta}{2}f_{s,r}(t)|1\rangle) \\ \rho_{out}(t) &= |\psi_{out}(t)\rangle\langle\psi_{out}(t)| = \frac{1}{\sqrt{P(t)}} \left( \cos\frac{\theta}{2}|\circ\rangle + e^{+i\phi}\sin\frac{\theta}{2}f_{r,s}(t)|1\rangle \right) \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{P(t)}} \left( \cos\frac{\theta}{2}\langle\circ| + e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}f_{r,s}^*(t)\langle 1| \right) \\ &= \frac{1}{P(t)} \left( \cos^2\frac{\theta}{2}|\circ\rangle\langle\circ| + e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}f_{r,s}^*(t)|\circ\rangle\langle 1| + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}f_{r,s}(t)|1\rangle\langle\circ| \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\frac{\theta}{2}|f_{r,s}^*(t)|^2|1\rangle\langle 1| + (1-P(t))|\circ\rangle\langle\circ| \right) \end{aligned}$$

$$\rho_{out}(t) = (\cos^2\frac{\theta}{2} + (1-P(t))|\circ\rangle\langle\circ| + e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}f_{r,s}^*(t)|\circ\rangle\langle 1| \quad (32.2)$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} f_{r,s}^*(t) |\uparrow\rangle \langle \circ| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |f_{r,s}^*(t)|^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \\
 & P(t) = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
 & \Rightarrow \rho_{out} = \cos^2 \frac{\theta}{2} + \left(1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) |\circ\rangle \langle \circ| \\
 & + e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} f_{r,s}^*(t) |\circ\rangle \langle \uparrow| + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} f_{r,s}^*(t) |\uparrow\rangle \langle \circ| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |f_{r,s}|^2 |\circ\rangle \langle \circ| \\
 & \Rightarrow \rho_{out}(t) = \left(1 - \sin^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2\right) |\circ\rangle \langle \circ| + \frac{e^{i\phi}}{2} \sin \frac{\theta}{2} f_{r,s} |\uparrow\rangle \langle \circ| \\
 & + \frac{e^{-i\phi}}{2} \sin \theta f^* |\circ\rangle \langle \uparrow| + \sin^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 |\uparrow\rangle \langle \uparrow|
 \end{aligned}$$

توجه کنید که  $f_{r,s}(t)$  دامنه گذار یک برانگیختگی (حالت  $|\uparrow\rangle$  از سایت  $s$  به سایت  $r$  ام یک گراف  $N$  اسپینه است).

اکنون فرض کنید باب در یک زمان از قبل تعیین شده  $t = t_0$  اسپین  $r$  ام را برمی دارد و پروتکل مخابرات را کامل می کند. میانگین فیدلیتی مخابرات کوانتومی از این کانال روی همه حالات خالص ورودی  $|\psi_{in}\rangle$  در کره بلوخ، یعنی  $\int |\psi_{in}\rangle \langle \rho_{out}(t_0) | \psi_{in}\rangle d\Omega$  برابر است با:

$$\begin{aligned}
 F(t) &= \left(\frac{1}{4\pi}\right) \int \langle \psi_{in} | \rho_{out}(t_0) | \psi_{in} \rangle d\Omega \\
 |\psi_{in}\rangle &= \cos \frac{\theta}{2} |\circ\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle \\
 \langle \psi_{in}| &= \cos \frac{\theta}{2} \langle \circ| + e^{-i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \langle \uparrow| \\
 \rho_{out} |\psi_{in}\rangle &= \left[ \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 \right] |\circ\rangle + \frac{1}{2} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} f_{r,s} |\uparrow\rangle \\
 &+ \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta f_{r,s}^* |\circ\rangle + e^{i\phi} \sin^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 |\uparrow\rangle \\
 \langle \psi_{in} | \rho_{out} | \psi_{in} \rangle &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 + \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta f_{r,s}^* \\
 &+ \frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta f_{r,s}(t) + \sin^4 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 \\
 &= \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta f_{r,s}^* + \frac{1}{2} \sin^2 \theta f_{r,s} + \sin^4 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 \\
 \Rightarrow F &= \frac{1}{4\pi} \int \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) - \frac{1}{2} \sin^2 \theta f_{r,s}^2 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta f_{r,s}^* + \frac{1}{2} \sin^2 \theta f_{r,s} + \sin^4 \frac{\theta}{2} f_{r,s}^2 d\Omega
 \end{aligned}$$

بعد از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{4\pi} \underbrace{(f_{r,s} + f_{r,s}^*)}_{2|f_{r,s}|\cos\gamma} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} f_{r,s}^2 = \frac{1}{2} |f_{r,s}| \cos\gamma + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} f_{r,s}^2 \\
 &= \frac{1}{3} |f_{r,s}| \cos\gamma + \frac{1}{6} |f_{r,s}|^2 + \frac{1}{4\pi} \\
 \Rightarrow F &= \frac{|f_{r,s}(t_0)| \cos\gamma}{3} + \frac{|f_{r,s}(t_0)|^2}{6} + \frac{1}{4\pi}
 \end{aligned}$$

که  $\gamma = \arg\{f_{r,s}(t_0)\}$  می باشد. هماندهی معیاری از شباهت حالت فرستاده شده توسط آلیس با حالت دریافت شده توسط باب است و همیشه عددی بین صفر و یک است، که مقادیر نزدیکتر به یک معنی شباهت بیشتر دو حالت است. اکنون برای اینکه میانگین هماندهی را بیشینه کنیم باید میدان‌های مغناطیسی  $B_i$  را طوری انتخاب کنیم که  $\gamma$  مضرب صحیحی از  $2\pi$  باشد. در نتیجه  $\cos\gamma$  این سیستم در حقیقت یک کانال کوانتومی میراکننده دامنه است [۶۱، ۶۲] که

حالت ورودی  $\rho_{in} = |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}|$  را به  $\rho_{out} = M_0 \rho_{in} M_0^\dagger + M_1 \rho_{in} M_1^\dagger$  با عملگرهای کراوس  $M_0$  و  $M_1$  به صورت زیر تبدیل می‌کند.

$$M_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |f_{r,s}(t_0)| \end{bmatrix}, M_1 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{|f_{r,s}(t_0)|} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33.2)$$

با فرض اینکه یک حالت با بیشینه درهم تنیدگی مانند  $|\psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$  داریم،  $\rho_{out}$  به صورت زیر می‌شود:

$$\rho_{out} = I \otimes M_0 |\psi^+\rangle \langle \psi^+| I \otimes M_0^\dagger + I \otimes M_1 |\psi^+\rangle \langle \psi^+| I \otimes M_1^\dagger$$

$$|\psi^+\rangle \langle \psi^+| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$I \otimes M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & |f_{r,s}^N(t)| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |f_{r,s}^N(t)| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |f_{r,s}^N(t)| \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$I \otimes M_0 = I \otimes M_0^\dagger$$

$$I \otimes M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1 - |f_{r,s}^N(t)|} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1 - |f_{r,s}^N(t)|} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{1 - |f_{r,s}^N(t)|} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$I \otimes M_1^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1 - |f_{r,s}^N(t)|} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1 - |f_{r,s}^N(t)|} & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

با قرار دادن رابطه ۱، ۲، ۳، ۴ در رابطه  $\rho_{out}$  بدست می‌آید.

(34.2)

$$\rho_{out}(t_0) = \frac{1}{4} \{ (1 - |f_{r,s}^N(t_0)|^2) |00\rangle \langle 00| + (|10\rangle + |f_{r,s}^N(t_0)| |01\rangle) (\langle 10| + \langle f_{r,s}^N(t_0)| \langle 01|) \}$$

توافق  $\varepsilon$  به عنوان معیاری از درهم‌تنیدگی این حالت، به صورت زیر به دست می‌آید

$$\varepsilon = |f_{r,s}(t_0)| \quad (35.2)$$

بنابراین به ازای هر مقدار غیرصفر  $f_{r,s}(t_0)$  مقدار درهم تنیدگی از طریق کانال به اشتراک گذاشته می‌شود.

## فصل ۳

# روش‌های انتقال حالات کوانتومی بر پایه‌ی ولگشت کوانتومی زمان – گسسته

### مقدمه

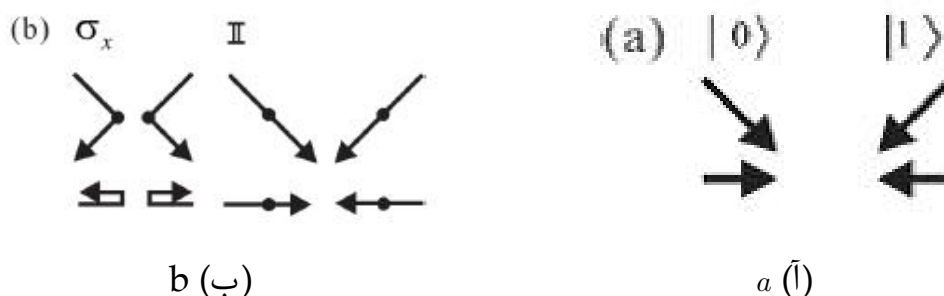
در این فصل نشان داده می‌شود که انتقال کامل حالت برای یک حالت دو کیوبیتی ناشناخته‌ی دلخواه می‌تواند از طریق یک ولگشت کوانتومی زمان – گسسته با تنظیمات مختلفی برای چرخش‌های سکه بدست آید. همچنین انتقال حالت کیوبیتی از طریق ولگشت کوانتومی زمان گسسته بررسی و نشان داده می‌شود که همه‌ی حالت‌های سکه نمی‌توانند با هماندهی یکسان منتقل شوند و عملگرهای بازیابی را به منظور دست یافتن به یک رفتار مشابه از هماندهی روی حالت‌های سکه و همین‌طور برای انتقال کامل حالت معرفی می‌شود و در آخر نشان داده خواهد شد که انتقال حالت کوانتومی، که قبلاً به عنوان یک فرآیند زمان پیوسته در شبکه‌ای از اسپین‌های برهم کنش کننده مورد مطالعه قرار گرفته است، می‌تواند در طرح ولگشت کوانتومی زمان گسسته با سکه‌ی وابسته به مکان، به دست آید.

## ۱.۳ ولگشت کوانتومی زمان - گسسته و عملگرهای چرخش سکه‌ی مایل

ولگشت کوانتومی دارای دو فضای هیلبرت سکه و مکان است که فضای هیلبرت سکه دو بعدی و پایه‌های آن  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  می‌باشد. پس فضای کلی سیستم ولگشت-سکه را به صورت  $H = H_\omega \otimes H_c$  توصیف می‌شود که اندیس‌های  $\omega$  و  $c$  به ترتیب مخفف ولگشت و سکه هستند. حرکت ولگشت به وسیله‌ی حالت سکه از طریق عملگر جابه‌جایی مشخص می‌شود که این عملگر برابر است با:

$$s = \sum_x (|x+1\rangle \langle x| \otimes |0\rangle \langle 0| + |x-1\rangle \langle x| \otimes |1\rangle \langle 1|) \quad (1.3)$$

که علامت جمع در ابتدای این عملگر نشان دهنده‌ی جمع روی تمامی مکان‌های ممکن است. و عملگر چرخش سکه به صورت  $I \otimes c$  می‌باشد؛ که  $I$  عملگر واحد ولگشت و  $C$  عملگر سکه در فضای دو بعدی سکه عمل می‌کند. ولگشت کوانتومی زمان گسسته استاندارد، از عملگر چرخش سکه‌ی متقارن (سکه‌ای که احتمال پشت و رو آمدن آن یکسان باشد) و عملگر هادامارد تشکیل شده است. در این طرح از دو عملگر چرخش سکه‌ی نامتقارن، عملگر واحد و عملگر پائولی  $\sigma_x$  استفاده شده است. باید دید حالت‌های سکه که در واقع حالت‌های کوانتومی مورد مطالعه‌ی ما هستند، چگونه نسبت به ولگشت حرکت می‌کنند. حالت‌های اصلی سکه تحت عملگر واحد بدون تغییر باقی می‌مانند پس جهت ولگشت همان جهت قبلی است (شکل a). عملگر  $\sigma_x$  بر عکس عملگر واحد است و این باعث می‌شود جهت ولگشت عوض شود (شکل b). در شکل زیر رابطه‌ی بین حالت‌های سکه و راستای ولگشت نشان داده شده است.



شکل ۱.۳: رابطه‌ی بین حالت‌های سکه و راستای ولگشت

تمامی فرآیند اثرگذاری مرحله به مرحله‌ی ولگشت روی حالت سکه توسط تکرار متوالی عملگر جابه‌جایی صورت می‌گیرد که این نوع از انتقال حالت توسط ولگشت را گسسته

می‌نامند. حال به معرفی عملگر سکه وارون<sup>۱</sup> پرداخته می‌شود. این عملگر به شکل  $I \otimes \sigma_x$  است که  $I$  نشان دهنده‌ی عملگر واحد ولگشت و  $\sigma_x$  عملگر وارون است که روی سکه عمل می‌کند. نحوه‌ی اثر این عملگر نیز به این شرح است که  $|0\rangle$  را به  $|1\rangle$  و  $|1\rangle$  را به  $|0\rangle$  تبدیل می‌کند.

## ۲.۳ انتقال کامل حالت و مسیریابی مفید کوانتومی

انتقال حالت کوانتومی در محاسبات کوانتومی به عنوان یک پروتکل معرفی شده است که می‌تواند بر همکنش بین کیوبیت های مجزا روی شبکه را ایجاد کند. شبکه می‌تواند برای انتقال و توزیع کیوبیت های نامعلوم دلخواه و درهم تنیدگی چند کیوبیتی مورد استفاده قرار گیرد که یکی از نیازهای اساسی دوربری، تصحیح خطا و... در اطلاعات و محاسبات کوانتومی است. تحت تحول ولگشت کوانتومی، با کنترل کامل سیستم سکه-ولگشت حالت هدف می‌تواند بین نقاط ورودی و خروجی دلخواه در یک شبکه با ایجاد فضایی دلخواه منتقل شود. کار مدنظر را مسیریابی کامل در نظر گرفته می‌شود که در ساختار محاسباتی، مفیدتر از انتقال حالت می‌باشد. در این قسمت مدلی ارائه می‌شود که در آن انتقال کامل حالت کوانتومی بر مبنای ساختار ولگشت کوانتومی روی شبکه های منظم می‌باشد. حالت های سکه بین مکان های دلخواه به وسیله ی تنظیم چرخش های سکه، منتقل می‌شود. این پروتکل از کنترل کامل روی سیستم سکه-ولگشت استفاده می‌کند [۶۶]. حالت اولیه ی سکه-ولگشت به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$|\psi^0\rangle = |0\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \quad (2.3)$$

که  $|\psi^i\rangle$  نشان دهنده ی حالت سیستم بعد از  $i$  گام می‌باشد.  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط هستند که دارای شرط  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  می‌باشد. در این طرح (شبکه) حالت سکه  $|0\rangle + \beta|1\rangle$  بعد از  $n$  گام دلخواه در ولگشت کوانتومی زمان-گسسته، به مکان خاص  $x$  منتقل می‌شود. این فرآیند می‌تواند به صورت زیر توصیف شود:

$$|\psi^0\rangle = |0\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \xrightarrow{n \text{ steps}} |\psi^n\rangle = |x\rangle(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \quad (3.3)$$

حالت مربوط به  $n-1$  گام باید در مکان  $|x+1\rangle$  یا  $|x-1\rangle$  باشد، زیرا حالت های مربوط به دیگر مکان ها نمی‌توانند با یک گام به مکان  $x$  بروند که باعث کوچکتر از یک شدن احتمال ولگشت در مکان  $x$  می‌شود. بنابراین بعد از  $n-1$  امین گام، حالت به صورت زیر خواهد بود:

$$|\psi^{n-1}\rangle = A_1|x-1\rangle|\phi\rangle_{(n-1),(x-1)} + A_2|x+1\rangle|\phi\rangle_{(n-1),(x+1)} \quad (4.3)$$

<sup>۱</sup>Coin Flipping Operator

که در آن  $A_j$  ( $j = 1, 2$ ) دامنه‌ی مختلط  $|A_1|^2 + |A_2|^2 = 1$  و  $|\phi\rangle_{n,x}$  نشان دهنده‌ی حالت سکه‌ی متناظر با ولگشت در مکان  $x$  بعد از  $n$  امین گام می‌باشد. از آنجایی که ولگشت قادر است در  $n - 1$  امین گام به  $x + 1$  یا  $x - 1$  انتشار یابد، داریم:

$$n - 2 \leq x \leq n + 2 \quad (5.3)$$

که بازه‌ی مکان‌هایی که حالت سکه می‌تواند به صورت کامل منتقل شود را محدود می‌کند. محدودیت دیگر این است که برای تعداد گام‌های زوج (فرد) حالت سکه تنها به مکان‌های زوج (فرد) منتقل می‌شود. مثلاً اگر ولگشت از  $|\circ\rangle$  شروع شود، خواهیم داشت:

$$\frac{n-x}{2} \in \mathbb{Z} \quad (6.3)$$

که  $n$  شماره‌ی گام،  $x$  مکان و  $z$  نشان دهنده‌ی مجموعه اعداد صحیح می‌باشد. می‌توان حالت در  $n$  امین گام را به صورت زیر نشان داد:

$$|\psi\rangle^n = S(I \otimes C) |\psi\rangle^{n-1} \quad (7.3)$$

$$= S(A_1 |x-1\rangle (C_{n-1,x-1} \otimes |\phi\rangle_{(n-1),(x-1)}) + A_2 |x+1\rangle (C_{n-1,x+1} \otimes |\phi\rangle_{(n-1),(x+1)}))$$

که در آن  $C_{n,x}$  نشان دهنده‌ی عملگر سکه‌ی اعمال شده روی مکان  $x$  در گام  $n$  ام می‌باشد. بعد از  $n - 1$  گام ولگشت در مکان‌های  $(x \pm 1)$ ، در  $n$  امین گام به سوی مکان  $x$  حرکت می‌کند. بنابراین خواهیم داشت:  $C_{n-1,x-1} \otimes |\phi\rangle_{(n-1),(x-1)} \rightarrow |\circ\rangle$  و  $C_{n-1,x+1} \otimes |\phi\rangle_{(n-1),(x+1)} \rightarrow |1\rangle$  و وقتی حالت سکه  $|\circ\rangle$  باشد، عملگر جابه‌جاگر موجب جابه‌جایی به سمت راست می‌شود. این همان چیزی است تا از  $x - 1$  به  $x$  برسیم. و وقتی حالت سکه  $|1\rangle$  باشد، عملگر جابه‌جاگر موجب جابه‌جایی به سمت چپ می‌شود، دقیقاً این همان چیزی است تا از  $x + 1$  به  $x$  برسیم. بنابراین  $\alpha$  وابسته به  $A_1$  و  $\beta$  وابسته به  $A_2$  می‌باشد.

در این طرح، اطلاعات ناشناخته‌ای که به وسیله‌ی  $\alpha$  و  $\beta$  حمل می‌شود می‌تواند بعد از  $n - 1$  گام به مکان  $(x \pm 1)$  منتقل و سپس بعد از  $n$  امین گام حالت  $\alpha|\circ\rangle + \beta|1\rangle$  به مکان  $x$  منتقل شوند. در ادامه این فرآیند را با جزئیات نشان داده خواهد شد. سیستم کل سکه-ولگشت بعد از اولین گام به صورت:

$$|\psi\rangle^1 = S(I \otimes C_{\circ,\circ}) |\psi\rangle^\circ$$

می‌باشد. اگر عملگر سکه در گام اول با  $C_{\circ,\circ} = \sigma_x$  نشان داده شود و با توجه به اثر  $\sigma_x$  روی  $|\circ\rangle$  و  $|1\rangle$  که به صورت زیر است:

$$\sigma_x |\circ\rangle = |1\rangle$$

$$\sigma_x |1\rangle = |\circ\rangle$$

حالت  $|\psi\rangle^1$  به صورت زیر خواهد شد:

$$|\psi\rangle^1 = S|\circ\rangle(\alpha|1\rangle + \beta|\circ\rangle)$$

از آنجایی که عملگر جابه جاگر با توجه به حالت سکه اعمال می شود پس در نهایت حالت در گام به صورت زیر می شود:

$$|\psi\rangle^1 = \alpha|1\rangle|-1\rangle + \beta|\circ\rangle|1\rangle \quad (۸.۳)$$

حال نشان داده خواهد شد که ولگشت بین اولین و  $n-1$  امین گام (به صورت کلی  $n-2$  گام) چگونه عمل خواهد کرد. همچنین در طول فرآیند از  $\sigma_x$  یا  $I$  به عنوان عملگرهای چرخش سکه استفاده می شود. ولگشت در مکان یک، به تعداد  $a$  گام به سمت راست حرکت می کند و سپس به تعداد  $b$  گام به چپ باز می گردد تا در گام  $n-1$  ام به مکان  $x+1$  برسد. لذا داریم:

$$\begin{cases} 1 + a - b = x + 1 \\ a + b = n - 2 \end{cases}$$

تعداد کل گام ها  $n-1$  می باشد، چون یک گام را طی کرده است پس تعداد کل گام ها  $n-2$  می باشد با کمی عملیات جبری:

$$\begin{cases} 1 + a - b = x + 1 \\ a + b = n - 2 \end{cases} \Rightarrow 1 + 2a = x + 1 + n - 2 \Rightarrow 2a = x + n - 2$$

$$a = \frac{n+x}{2} - 1 \quad (۹.۳)$$

و به همین ترتیب:

$$b = \frac{n-x}{2} - 1 \quad (۱۰.۳)$$

می باشد. به صورت همزمان ولگشت در مکان  $-1$ ، تعداد  $b$  گام به سمت چپ حرکت کرده و تعداد  $a$  گام به سمت راست برمی گردد. با همان مقادیر  $a$  و  $b$  ولگشت از مکان  $1$  شروع شده و در  $n-1$  امین گام که توسط حالت سکه کنترل می شود، به مکان  $x+1$  می رسد. با تکرار این فرایند، سیستم ولگشت-ولگشت که بعد از  $i$  امین گام به حالت زیر می رسد:

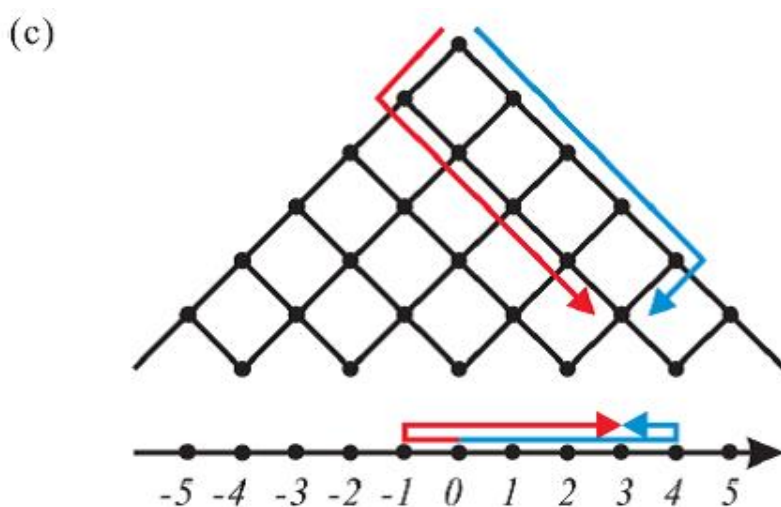
$$|\psi\rangle^i = \alpha|-i+2(i-b-1)\varepsilon(i-b-2)\rangle|\varepsilon(b+1-i)\rangle + \beta|i-2(i-a-1)\varepsilon(i-a-2)\rangle|\varepsilon(i-a-2)\rangle \quad (۱۱.۳)$$

که در آن  $\varepsilon(x)$  تابع گام واحد نام دارد، به طوری که  $\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$  با توجه به مقادیر  $a$  و  $b$ ، بعد از  $n$  گام حالت نهایی سکه-ولگشت به صورت زیر می شود:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle^n &= \alpha \left| -i + 2 \left( i - \frac{n-x}{2} - 1 \right) - 1 \right\rangle \varepsilon \left( i - \frac{n-x}{2} - 1 \right) - 2 \rangle \\
 &+ \beta \left| i - 2 \left( i - \frac{n+x}{2} - 1 \right) - 1 \right\rangle \varepsilon \left( \frac{n+x}{2} - 1 \right) - 2 \rangle \\
 &+ \varepsilon \left( i - \left( \frac{n-x}{2} + 1 \right) - 2 \right) \rangle \\
 |\psi\rangle^n &= \alpha \left| -i + (2i - 2 \left( \frac{n-x}{2} \right) + 2 - 2) \varepsilon \left( i - \frac{n-x}{2} + 1 - 2 \right) \right\rangle \\
 &+ \beta \left| i - 2i + 2 \left( \frac{n+x}{2} \right) - 2 + 2 \varepsilon \left( i - \frac{n+x}{2} + 1 - 2 \right) \right\rangle \\
 &+ \varepsilon \left( i - \frac{n+x}{2} - 1 - 2 \right) \rangle \\
 |\psi\rangle^n &= \alpha \left| i - n + x \varepsilon \left( i - \frac{n-x}{2} - 1 \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( \frac{n-x}{2} - i \right) \right\rangle \\
 &+ \beta \left| -i + n + x \varepsilon \left( i - \frac{n+x}{2} - 1 \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( i - \frac{n+x}{2} - 3 \right) \right\rangle \\
 |\psi\rangle^n &= \alpha \left| x \varepsilon \left( n - \frac{n+x}{2} - 1 \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( \frac{n-x}{2} - n \right) \right\rangle \\
 &+ \beta \left| x \varepsilon \left( n + \frac{n+x}{2} - 1 \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( n - \frac{n+x}{2} - 3 \right) \right\rangle \\
 |\psi\rangle^n &= \alpha \left| x \varepsilon \left( \frac{2n-n-x-2}{2} \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( \frac{n-x}{2} - n \right) \right\rangle \\
 &+ \beta \left| x \varepsilon \left( \frac{2n-n-x-2}{2} \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( \frac{2n-n-x-6}{2} \right) \right\rangle \\
 |\psi\rangle^n &= \alpha \left| x \varepsilon \left( \frac{n-x}{2} - 1 \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( \frac{n-x-2n}{2} \right) \right\rangle \\
 &+ \beta \left| x \varepsilon \left( \frac{n-x}{2} - 1 \right) \right\rangle \left| \varepsilon \left( \frac{n-x}{2} - 3 \right) \right\rangle \\
 |\psi\rangle^n &= \alpha |x\rangle | \circ \rangle + \beta |x\rangle | 1 \rangle \\
 &= |x\rangle \otimes (\alpha | \circ \rangle + \beta | 1 \rangle)
 \end{aligned}$$

بنابراین به هدف خود، که انتقال حالت سکه‌ی نامعلوم به یک مکان خاص در  $n$  گام دلخواه، است منجر شد.

یک مثال ساده در مورد انتقال حالت‌های سکه از مکان  $| \circ \rangle$  به  $| 3 \rangle$  در ۵ گام در ولگشت کوانتومی زمان – گسسته نشان داده شده است.



شکل ۲.۳: انتقال حالت از طریق ولگشت کوانتومی گسسته یک بعدی از زمان  $\circ$  به مکان ۳.

حالت سکه- ولگشت در گام صفرم در مکان صفر به صورت زیر می باشد:

$$|\psi\rangle^0 = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle$$

در گام اول عملگر سکه  $\sigma_x$  در نظر گرفته می شود. بنابراین حالت در گام اول به صورت زیر خواهد شد:

$$|\psi\rangle^1 = \alpha|1\rangle|-1\rangle + \beta|0\rangle|1\rangle \quad (12.3)$$

در گام دوم برای مکان ۱- عملگر  $\sigma_x$  و برای مکان ۱ عملگر  $I$  اعمال می شود. بنابراین :

$$|\psi\rangle^2 = \alpha|0\rangle|0\rangle + \beta|0\rangle|2\rangle \quad (13.3)$$

در گام سوم و چهارم برای تمام مکان ها عملگر  $I$  اعمال می شود:

$$|\psi\rangle^3 = \alpha|0\rangle|1\rangle + \beta|0\rangle|3\rangle \quad (14.3)$$

$$|\psi\rangle^4 = \alpha|0\rangle|2\rangle + \beta|0\rangle|4\rangle \quad (15.3)$$

در گام پنجم در مکان ۴ عملگر  $\sigma_x$  و مکان ۲ عملگر  $I$  اعمال می شود:

$$|\psi\rangle^5 = \alpha|0\rangle|3\rangle + \beta|1\rangle|3\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |3\rangle \quad (16.3)$$

## ۳.۳ ولگشت کوانتومي زمان- گسسته در ابعاد بالاتر

به صورت كلي مي توان فرمول بندي ولگشت هاي کوانتومي يك بعدي را به ابعاد بالاتر تعميم داد. در ولگشت هاي کوانتومي يك بعدي براي حرکت به چپ يا راست روي خط به حالي با حداقل دو درجه آزادي نياز بود. بنابراین در ولگشت هاي کوانتومي با ابعاد بالاتر، حالت سکه بايد فضاي هيلبرتي بزرگتر از دو داشته باشد. راه هاي مختلفي براي داشتن فضاي هيلبرتي با ابعاد بزرگتر از دو وجود دارد. براي مثال ذره اي با  $j > 1$  فضاي هيلبرت بزرگتر از ۳ خواهد داشت اما تعميم استاندارد ي که به طور معمول استفاده مي شود، استفاده از تعداد کيوبيت هاي بيشتري در فضاي سکه است.

به طور مثال با استفاده از ۲ کيوبيت در فضاي سکه، فضاي هيلبرت ۴ بعدي خواهيم داشت که براي حرکت ولگشت کوانتومي روي صفحه کافي خواهد بود. در حقيقت در اکثر تحقيقات يك کيوبيت را براي حرکت ولگشت در جهت  $x$  و کيوبيتي ديگر را براي حرکت در جهت  $y$  در نظر گرفته می شود.

ولگشت هاي کوانتومي شامل سه جزء اساسي حالت اوليه، عملگر سکه و عملگر انتقال هستند. يك تعميم ساده براي ولگشت کوانتومي  $d$  بعدي اين است که تمام اجزاء  $a$  به صورت ضرب

مستقیم اجزاء ولگشت‌های ۱ بعدی در نظر گرفته شود. در حقیقت حالت اولیه را به صورت  $|\psi_d\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_1\rangle$  عملگر سکه را به صورت  $H \otimes H \otimes \dots \otimes H$  و عملگر انتقال را به شکل  $S_{x_1} \otimes S_{x_2} \otimes \dots \otimes S_{x_D}$  در نظر گرفته می‌شود. به وضوح این نوع تعمیم نشان دهنده‌ی  $d$  ولگشت خطی مستقل در فضای  $d$  بعدی است که خواص چندان متفاوتی با ولگشت‌های کوانتومی يك بعدی ندارد. از طرفی دیگر باید دقت داشت که وجود فضای هیلبرتی با ابعاد بالاتر در ولگشت‌های کوانتومی با ابعاد بالاتر در ولگشت‌های کوانتومی می‌تواند تفاوت‌های اساسی بین آنها با ولگشت‌های کوانتومی روی خط ایجاد کند. این تفاوت‌ها را می‌توان به شکل زیر خلاصه کرد:

۱. در ولگشت‌های کوانتومی روی خط عملگرهای سکه متفاوت را می‌توان با عملگر هادامارد معادل گرفت در حالی که در ولگشت‌های کوانتومی با ابعاد بالا عملگرهای بسیار مختلف و متنوعی را می‌توان در نظر گرفت که به هیچ عنوان نمی‌توان آنها را معادل در نظر گرفت.
۲. عملگر سکه در ولگشت‌های ابعاد بالا را می‌توان به صورت جدا ناپذیر در نظر گرفت به صورتی که نتوان آن را به شکل عملگرهای موضعی روی کیوبیت‌های منفرد در این حالت عملگر سکه می‌تواند بین حالات سکه در هم تنیدگی ایجاد کند که در ولگشت‌های کوانتومی يك بعدی چنین کاری میسر نیست.
۳. حالت سکه در ابعاد بالا می‌تواند شامل حالات در هم تنیده باشد به طوریکه همبستگی کوانتومی بین آن‌ها باعث حرکت همبسته در ابعاد مختلف مکان ولگشت شود.
۴. از آنجایی که ولگشت‌های کوانتومی ابعاد بالا در مکانی با ابعاد بیشتر از ۲ تعریف می‌شود این امکان وجود دارد که حالت اولیه در مکان‌های موضعی همبسته تعریف شود. به عبارتی در هم تنیدگی بین ابعاد مکان ولگشت وجود داشته باشد.
۵. از آنجایی که فضای سکه در ولگشت‌های کوانتومی ابعاد بالا بیش از يك کیوبیت دارد، اندازه‌گیری روی مکان يك ولگشت کوانتومی ابعاد بالا، شامل چندین کیوبیت خواهد بود که در هم تنیدگی بین آنها قابل بررسی است.

## ۴.۳ مسیر یابی سکه‌های در هم تنیده در ولگشت کوانتومی زمان – گسسته دو بعدی

در حال حاضر در مورد ولگشت‌های کوانتومی زمان گسسته ی دو بعدی که در آن حالت سکه – ولگشت در پیاده روی به جهت‌های مختلف کنترل می‌کند بررسی میکنیم. در این مورد دو سکه در هم تنیده هستند عمگر مربوط به حالت کلی دو سکه به صورت  $C = C' \otimes C''$  در نظر گرفته می‌شود، که  $C'$  مربوط به سکه ی اول و  $C''$  مربوط به سکه ی دوم است. نشان خواهیم داد که چگونه حالت ناشناخته ی در هم تنیده سکه  $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$  از مکان

اولیه ( $^{\circ}\circ$ ) به مکان نهایی بعد از  $n$  گام انتقال می‌یابد. کل فرآیند به این صورت است:

$$|^{\circ}\circ\rangle^{\circ} (\alpha|^{\circ}1\rangle + \beta|1^{\circ}\rangle) \xrightarrow{nstep} |xy\rangle^n (\alpha|^{\circ}1\rangle + \beta|1^{\circ}\rangle) \quad (17.3)$$

چهار نوع عملگر چرخش سکه وجود دارد که در پروتکل دو بعدی استفاده می‌شود.

$$I \otimes I, I \otimes \sigma_x, \sigma_x \otimes I, \sigma_x \otimes \sigma_x$$

در واقع می‌توان عملگر  $C_{nm}^i$  از  $i$  امین ولگشت در مکان  $m$  در گام  $n$  ام را به گونه‌ای تنظیم کرد که برابر  $\sigma_x$  شود تا به ولگشتی برسد که در آن، ولگشت بعد از چند گام به مکان اول خود باز گردد، در غیر این صورت برابر  $I$  گرفته می‌شود. طرح کل به صورت زیر می‌شود.

$$C'_{\circ\circ} = C''_{\circ\circ} = \sigma_x$$

در نتیجه عملگر کلی سکه برابر است با:

$$C = \sigma_x \otimes \sigma_x$$

پس حالت در گام اول به این صورت به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle^{\circ} &= |^{\circ}\circ\rangle^{\circ} (\alpha|^{\circ}1\rangle + \beta|1^{\circ}\rangle) \\ |\psi\rangle^1 &= s(\sigma_x \otimes \sigma_x) |\psi\rangle^{\circ} \end{aligned}$$

از آنجایی که

$$\sigma_x|^{\circ}1\rangle = |1^{\circ}\rangle, \sigma_x|1^{\circ}\rangle = |^{\circ}1\rangle$$

پس :

$$|\psi\rangle^1 = |1, -1\rangle \beta|^{\circ}1\rangle + |-1, 1\rangle \alpha|1^{\circ}\rangle \quad (18.3)$$

حالت سکه‌ی اول در  $|^{\circ}\rangle$  و  $|1\rangle$  است که مربوط به ولگشت در مکان ۱ و -۱ می‌باشد. مسیر یابی آن به  $(x+1)$  و  $(x-1)$  در واقع مشابه مورد یک بعدی می‌باشد.

با توجه به معادلات ۵.۳ و ۶.۳ ولگشت در مکان  $i$ ، به اندازه  $y = \frac{n+x}{4} - 1$  گام به سمت راست رفته، سپس در گام  $(a_1 + 1)$  ام در  $|a_1 + 1\rangle$  باز می‌گردد. پس به اندازه  $y = \frac{n-x}{4} - 1$  گام مستقیماً به چپ می‌رود تا در گام  $n-1$  ام به مکان  $x-1$  برسد.

در همان زمان ولگشت از مکان -۱ به اندازه  $b_1$  گام به سمت چپ رفته، سپس در  $b_1 + 1$  امین گام در مکان  $1-b$  باز گشته و به اندازه  $y = a_1$  گام به سمت راست می‌رود تا در گام  $n-1$  ام به  $|x+1\rangle$  برسد. از آنجایی که حالت سکه‌ی دوم شامل  $|^{\circ}\rangle$  و  $|1\rangle$  متناظر با ولگشت در مکان‌های  $|x+1\rangle$  و  $|x-1\rangle$  می‌باشد، دقیقاً با پروسه مشابه سکه اول می‌توان مسیریابی را انجام داد، به عبارتی  $a_2$  و  $b_2$  این گونه تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{n+y}{2} - 1 \\ b_2 = \frac{n+y}{2} - 1 \end{cases}$$

حالت زیر را می‌توان به طور مشابه بیان کرد:

$$\begin{aligned} & \left| \psi \right\rangle^i = \alpha \left| [-i + 2(i - b_1 - 1) \varepsilon(i - b_1 - 2)], [-i + 2(i - a_1 - 1) \varepsilon(i - a_1 - 2)] \right\rangle^2 \\ & \left| \varepsilon(b_1 + 1 - i), \varepsilon(a_2 - 2 - i) + \beta \right| [i - 2(i - a_1 - 1) \varepsilon(i - a_1 - 2)], \\ & [-i + 2(i - b_2 - 1) \varepsilon(i - b_2 - 2)] \rangle^2 \\ & \left| \varepsilon(i - a_1 - 2), \varepsilon(b_2 + 1 - i) \right\rangle. \end{aligned}$$

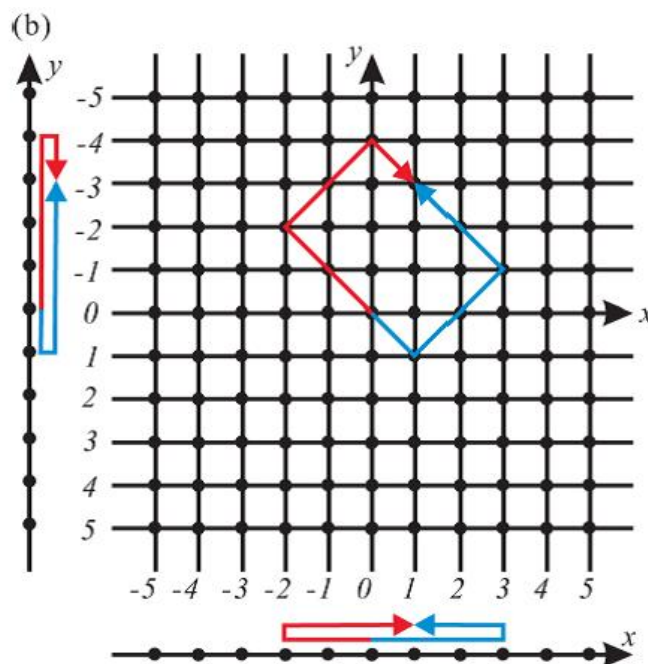
با جایگذاری روابط زیر در معادله بالا

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{n+x}{2} - 1 \\ a_2 &= \frac{n+y}{2} - 1 \\ b_1 &= \frac{n-x}{2} - 1 \\ b_2 &= \frac{n-y}{2} - 1 \end{aligned} \quad (19.3)$$

حالت بعد از  $n$  گام برابر است با:

$$|\psi\rangle^n = |xy\rangle^n = (\alpha | \circ 1 \rangle + \beta | 1 \circ \rangle) \quad (20.3)$$

بنابراین حالت سکه‌ی درهم تنیده‌ی نامعلوم با موفقیت به مکان هدف مسیریابی شد. فرآیند اطلاعات کوانتومی بر پایه‌ی اشتراک گذاری درهم تنیدگی بعد از مسیریابی بهینه می‌تواند به صورت موفقیت آمیز صورت گیرد. يك مثال ساده از انتقال يك حالت سكه‌ی نامعلوم  $(\alpha | \circ 1 \rangle + \beta | 1 \circ \rangle)$  از مکان  $(\circ$  و  $\circ)$  به  $(1$  و  $3)$  در شکل زیر نشان داده شده است. با توجه به شکل حالت در هم تنیده سکه ابتدا در مکان  $(\circ$  و  $\circ)$  به صورت زیر است:



شکل ۳.۳: انتقال حالت از طریق ولگشت کوانتومی زمان – گسسته دو بعدی از مکان  $(0, 0)$  به مکان  $(1, 3)$

$$|\psi\rangle^0 = \alpha |0, 1\rangle + \beta |1, 0\rangle \otimes |0, 0\rangle \quad (21.3)$$

در گام اول عملگر سکه به صورت  $\sigma_x \otimes \sigma_x$  در نظر گرفته می شود. پس حالت در گام اول به صورت زیر نوشته می شود:

$$|\psi\rangle^1 = |1, -1\rangle \beta |0, 1\rangle + |-1, 1\rangle \alpha |1, 0\rangle \quad (22.3)$$

در گام دوم عملگر مربوط به مکان  $|1, -1\rangle$  را  $I \otimes \sigma_x$  و عملگر مربوط به مکان  $I \otimes I, |-1, 1\rangle$  در نظر گرفته می شود. پس حالت در گام دوم به صورت زیر می باشد:

$$|\psi\rangle^2 = |2, 0\rangle \beta |0, 0\rangle + |-2, 2\rangle \alpha |1, 0\rangle \quad (23.3)$$

در گام سوم عملگر مربوط به مکان  $I \otimes I, |2, 0\rangle$  و عملگر مربوط به مکان  $\sigma_x \otimes I, |-2, 2\rangle$  در نظر گرفته شده است پس حالت در گام سوم به این صورت بدست می آید:

$$|\psi\rangle^3 = |3, 1\rangle \beta |0, 0\rangle + |-1, 3\rangle \alpha |0, 0\rangle \quad (24.3)$$

در گام چهارم عملگر سکه  $\sigma_x \otimes I$  مربوط به مکان  $|3, 1\rangle$  و عملگر مربوط به مکان  $I \otimes I, |-1, 3\rangle$  در نظر گرفته می شود. پس حالت به این صورت بدست می آید:

$$|\psi\rangle^4 = |2, 2\rangle \beta |1, 0\rangle + |0, 4\rangle \alpha |0, 0\rangle \quad (25.3)$$

## ۵۰ روش‌های انتقال حالات کوانتومی بر پایه‌ی ولگشت کوانتومی زمان – گسسته

و در گام پنجم عملگر مربوط به مکان  $|2,2\rangle$  را  $I \otimes I$  و عملگر مربوط به مکان  $|0,4\rangle$  را  $I \otimes \sigma_X$  در نظر گرفته می‌شود. پس حالت این صورت می‌شود:

$$|\psi\rangle^5 = |1,3\rangle \beta |1,0\rangle + |1,3\rangle \alpha |0,1\rangle = (\alpha |0,1\rangle + \beta |1,0\rangle) \otimes |1,3\rangle \quad (26.3)$$

پس حالت ناشناخته‌ی سکه بعد از پنج گام از مکان  $(0,0)$  به مکان  $(1,3)$  منتقل می‌شود.

## ۵.۳ انتقال حالت کیوبیتی از طریق ولگشت کوانتومی زمان – گسسته یک بعدی

در قسمت قبل پروتکلی برای انتقال کامل حالت معرفی شد که در آن عملگر سکه وابستگی به مکان داشت. در این قسمت به بررسی پروتکلی متفاوت پرداخته می‌شود که در آن عملگر سکه وابستگی مکانی نداشته باشد. حالت اولیه در ولگشت یک بعدی را می‌توان به شکل زیر نشان داد [۷۹]:

$$|\psi_0\rangle = |\psi_{0,x'}\rangle \otimes |x'\rangle \quad (27.3)$$

که

$$|\psi_{0,x'}\rangle = \alpha_{0,x'} |\uparrow\rangle + \beta_{0,x'} |\downarrow\rangle \quad (28.3)$$

حالت اولیه سکه را نشان می‌دهد [۷۹]. نمایش دیگر از حالت کیوبیت، نمایش کروی بلاخ است که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta_b}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\varphi_b} \sin \frac{\theta_b}{2} |\downarrow\rangle \quad (29.3)$$

که  $\theta_b$  و  $\phi_b$  زوایای کیوبیت مورد نظر روی کره‌ی بلاخ<sup>۲</sup> را به نمایش می‌گذارند و اندیس  $b$  نیز بیانگر مقادیر مربوط به کره‌ی بلاخ است. بعد از  $t$  امین مرحله، حالت اولیه در فضای موقعیت مکان خود را از دست می‌دهد و تابع موج ولگشت به صورت زیر در می‌آید:

$$U^t |\psi\rangle \rightarrow |\psi_t\rangle = \sum_x (\alpha_{t,x} |\uparrow\rangle + \beta_{t,x} |\downarrow\rangle) \otimes |x\rangle \quad (30.3)$$

بنابراین، احتمال پیدا کردن حالت مورد نظر در موقعیت  $x$  به صورت زیر می‌باشد:

$$P_{t,x} = |\alpha_{t,x}|^2 + |\beta_{t,x}|^2 \quad (31.3)$$

اکنون حالت مورد نظر خود را یک کیوبیت در نظر گرفته می‌شود. با اثر دادن عملگر سکه روی فرم کلی یک کیوبیت که در رابطه‌ی ۲۹.۳ به آن اشاره شده است، رابطه‌ی زیر به دست آمده است:

<sup>۲</sup> Bloch sphere

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta_b}{2} |\uparrow\rangle + e^{i\phi_b} \sin \frac{\theta_b}{2} |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta_b}{2} \\ \sin \frac{\theta_b}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{t,x} \\ \beta_{t,x} \end{pmatrix}$$

$$C_V^{(gen)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-\rho}e^{i\varphi} & -\sqrt{\rho}e^{i(\theta+\varphi)} \end{pmatrix}$$

(۳۲.۳)

$$|\psi\rangle \xrightarrow{C \otimes I} \left[ \left( \alpha_{t,x}\sqrt{\rho} + \beta_{t,x}\sqrt{1-\rho}e^{i\theta} \right) |\uparrow\rangle + \left( \alpha_{t,x}\sqrt{1-\rho}e^{i\phi} - \beta_{t,x}\sqrt{\rho}e^{i\theta}e^{i\phi} \right) |\downarrow\rangle \right] \otimes |x\rangle$$

بنابراین دامنه ی احتمال انتقال یک کیوبیت کلی در حالت های  $|\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\rangle$  در ولگشت های کوانتومی گسسته ی وابسته به زمان به ترتیب برابر است با:

$$\alpha_{t+1,x} = \alpha_{t,x-1}\sqrt{\rho} + \beta_{t,x-1}\sqrt{1-\rho}e^{i\theta}$$

$$\beta_{t+1,x} = \alpha_{t,x+1}\sqrt{1-\rho} - \beta_{t,x+1}\sqrt{\rho}e^{i\theta}e^{i\phi}$$

(۳۳.۳)

رابطه های بدست آمده سبب می شود که به جای حل معادله ی  $4N^2$  در ولگشت های کوانتومی گسسته ی وابسته به زمان از معادله  $2N$  استفاده شود. حال یک گراف درجه ۲ مطابق شکل زیر در نظر گرفته می شود و هر یک از این رئوس به عنوان یک کیوبیت در نظر گرفته می شود [۶].



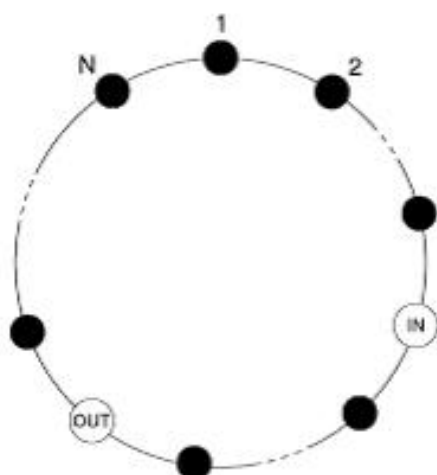
شکل ۴.۳: خط  $N$  تایی با مرزهای انعکاسی

حلقه هایی که در ابتدا و انتها روی خود راس بازگشته اند، نشان دهنده ی این است که دامنه های احتمال، بعد از اینکه عملگر جابه جاگر اعمال شد، به جهتی دیگر منعکس می شوند. بنابراین حرکت از جهت چپ (راست) در اولین رأس (آخرین) به حرکت به سمت راست (چپ) در همان رأس هدایت می شود، تا جریان احتمال را حفظ کند. بنابراین در حالت کلی عملگر جابه جاگر برای تمام رئوس را می توان به شکل زیر بیان کرد.

$$S = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |1\rangle\langle 1| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |N\rangle\langle N|$$

(۳۴.۳)

حال گراف دایره ای در نظر گرفته می شود:



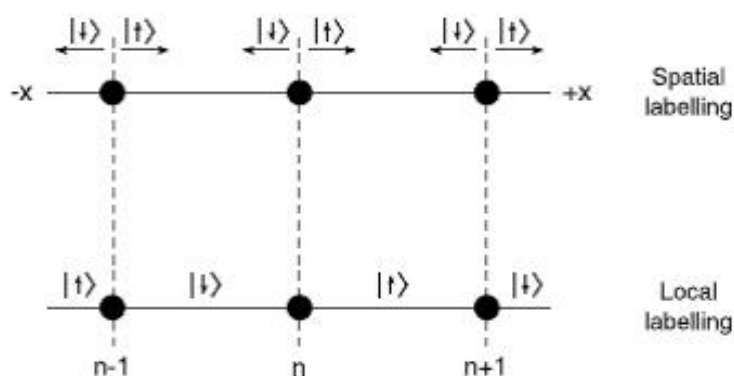
شکل ۵.۳: حلقه‌ی  $N$  تایی با مرزهای دوره‌ای

به جای مرزهای انعکاسی می‌توان رهیافت مرزهای دوره‌ای را در نظر گرفت که منجر به ساختارهای دایره‌ای مانند می‌شود. حلقه‌ی  $N$  تایی گرافی از درجه‌ی ۲ است، که رأس‌های ابتدایی و انتهایی آن به وسیله‌ی یک یال اضافی به هم متصل هستند که دوره‌ای بودن را ممکن می‌سازد. در این مورد رفتار عملگر جابه‌جاگر در مرزها، مشابه رفتار این عملگر در رأس‌های میانی می‌باشد. بنابراین می‌توان عملگر جابه‌جاگر را باز هم به صورت زیر نوشت:

$$S = |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |N\rangle\langle 1| + |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |1\rangle\langle N| + \text{other terms} \quad (35.3)$$

در این مورد اثر عملگر سکه روی فضای حالت خودش، به حالت ذره در فضای موقعیت بستگی ندارد، به عبارت دیگر، عملگر سکه مستقل از مکان است.

همان‌طور که در فرم کلی یک کیوبیت واضح است بخشی از کیوبیت مربوط به بخش فضایی و بخش دیگر آن مربوط به بخش موضعی آن است. در شکل ۶.۳ نحوه‌ی تحول و انتقال هر یک از این بخش‌ها به صورت جدا از هم به نمایش گذاشته شده است. شکل ۶.۳ بیان‌گر دو رهیافت (رویکرد) مختلف در مورد جهت‌گیری شبکه می‌باشد. رهیافت ابتدایی، حالت سکه‌ی هر رأس را در نظر گرفته است. که اگر  $|\uparrow\rangle$  باشد، به راست و اگر  $|\downarrow\rangle$  باشد، به چپ می‌رود. رهیافت دومی به این صورت است، که جهت یال‌ها را از قبل مشخص کرده است. در واقع این که جهت حرکت از کدام رأس به کدام رأس دیگر باشد را مشخص می‌کند.



شکل ۶.۳: رهیافت های مبتنی بر جهت در شبکه های یک بعدی

## ۶.۳ انتقال کامل حالت و عملگر بازیابی

ولگشت کوانتومی زمان گسسته با یک حالت سکه ی اولیه در ابتداء در یک مکان که با علامت  $IN$  نشان داده می شود، جایگزیده می باشد. می خواهیم انتقال حالت شبکه از مکان  $IN$  به مکان  $OUT$  به صورت کامل، را مورد بررسی قرار دهیم. به این منظور هماندهی (اندازه گیری شباهت بین حالت اولیه ی سکه و حالت سکه در مکان دیگر) در زمان  $t$  و مکان  $OUT$  به این صورت تعریف می شود:

$$f_{t,OUT} = |\langle \psi_{OUT} | \psi_t \rangle| \quad (۳۶.۳)$$

و  $|\psi_t\rangle$  حالت کوانتومی ولگشت در گام  $t$  می باشد. مقدار  $f_{t,out}$  را هماندهی در زمان  $t$  و مکان  $OUT$  می باشد. و  $|\psi_{OUT}\rangle$  حالتی را نشان می دهد که در مکان  $OUT$  قرار دارد و به صورت  $|\psi_{OUT}\rangle = |\psi_{\circ,IN}\rangle \otimes |OUT\rangle$  بیان می شود که  $|\psi_{\circ,IN}\rangle$  حالت سکه در زمان  $t = \circ$  و مکان  $IN$  است. بنابراین بعد از  $t$  گام،  $f_{t,OUT} = \circ$  نشان می دهد که سکه در مکان  $OUT$  متعامد با حالت اولیه سکه است، که نشان می دهد هیچ ارتباطی بین این دو حالت وجود ندارد. بدیهی است انتقال کامل حالت زمانی روی می دهد که،  $f_{t,OUT} = ۱$  باشد. بنابراین به دنبال دسته ای از تحولات زمانی به شکل زیر هستیم:

$$|\psi_{\circ,IN}\rangle \otimes |IN\rangle \xrightarrow{U^t} |\psi_{\circ,IN}\rangle \otimes |OUT\rangle \quad (۳۷.۳)$$

به طور کلی، موقعیت های  $IN$  و  $OUT$  را می توان به عنوان یک نقطه در شبکه تعریف کرد و یا آنها را می توان به نقاط مختلفی نیز مطابقت دارد. برای اولین مورد با  $f_{t,OUT} = ۱$  و  $IN = OUT$ ، به این معنی است که ولگشت دوره ای می باشد. یعنی حالت کوانتومی اولیه بعد از  $t$  گام زمانی تا حد یک فاز ثابت، به حالت اولیه باز می گردد. مورد دوم حالتی است که  $f_{t,OUT} = ۱$  با

$IN \neq OUT$ ، این همان چیزی است که به عنوان انتقال کامل حالت شناخته می‌شود. در پایان ولگشت کوانتومی، به صورت ایده آل انتظار داریم که حالت سکه در مکان  $OUT$  معادل حالت سکه ی اولیه باشد. با این حال تعدادی حالت وجود دارد که دقیقاً مشابه با حالت اولیه نیستند. اما از طریق برخی از عملگرهای یکانی دیگر قابل تبدیل هستند. تعیین این عملگرها به شدت وابسته به نوع شبکه و عملگر سکه است. بنابراین در بعضی موارد، نشان داده شده است که این عملگرها می‌توانند به صورت تابعی از فاز و عملگر سکه تعیین شوند. [۷۳]

عام ترین حالت سکه ی قابل تبدیل (قابل تبدیل به حالت اولیه) می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$|\psi'_{t,out}\rangle = e^{i\zeta(\theta,\phi)}\beta|\uparrow\rangle + e^{i\xi(\theta,\phi)}\alpha|\downarrow\rangle \quad (38.3)$$

واضح است که حالت فوق، با اعمال عملگر یکانی زیر:

$$\begin{aligned} U_p &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow|e^{-i\xi(\theta,\phi)} + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|e^{-i\zeta(\theta,\phi)} \\ U_f &= |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \end{aligned} \quad (39.3)$$

به حالت اولیه‌ی خود بر می‌گردد، که اندیس  $f$  برای بازگرداندن سکه به حالت اولیه و اندیس  $p$  نیز برای بازگرداندن فازها به حالت اولیه هستند. در انتها نیز  $U_R$  را به عنوان عملگر بازساز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_R = U_p U_f \otimes I \quad (40.3)$$

با اعمال  $U_R$  روی  $|\psi'_{t,out}\rangle$ ، به حالت اولیه می‌رسیم.

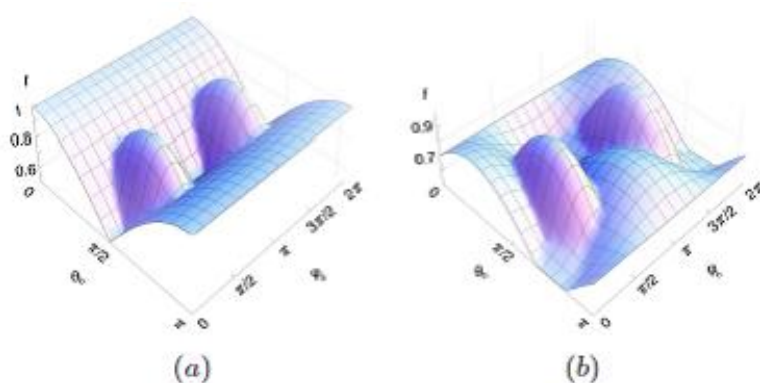
$$\begin{aligned} U_R |\psi'_{t,out}\rangle &= U_p (|\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow|) (e^{i\zeta(\theta,\phi)}\beta|\uparrow\rangle + e^{i\xi(\theta,\phi)}\alpha|\downarrow\rangle) = \\ &= U_p (e^{i\zeta(\theta,\phi)}\beta|\downarrow\rangle + e^{i\xi(\theta,\phi)}\alpha|\uparrow\rangle) = \alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle \end{aligned}$$

توجه شود که خاصیت تبادلی بین ترتیب  $U_p$  و  $U_f$  معادل تغییر ضرایب  $|\uparrow\rangle\langle\uparrow|$  و  $|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$  با یکدیگر در  $U_p$  می‌باشد. رابطه ی ۳۸.۳ تنها اختلاف های نوع چرخش و فاز در حالت نهایی را در نظر می‌گیرد. ولی نشان داده می‌شود که در بعضی موارد  $U_R$  می‌تواند به سادگی به عنوان یک عملگر سکه ی اضافه شده با پارامترهای  $(\rho', \theta', \phi')$  مناسب، انتخاب شود. از آنجایی که عملگر بازیابی معرفی شده در رابطه ی ۴۰.۳ مورد خاصی از  $C_p^{(gen)}$  می‌باشد، پس یک سکه ی اضافی با پارامترهای مناسب، صورت کلی عملگر بازیابی می‌باشد. بنابراین گاهی به جای یک بودن هماندهی، برای بهبود کارآمدی انتقال حالت، از چنین مواردی (عملگر بازیابی) استفاده می‌کنیم. اشاره کردن این موضوع مهم می‌باشد که بعد از  $t$  گام، صرفه نظر از اینکه عملگر سکه چه باشد، یافتن تابع موج کل در یک رأس متفاوت با رأس اولیه با احتمال یک، توصیف خوبی از انتقال کامل حالت می‌باشد. انتظاری رود که حالت سکه ی نهایی مشابه

حالت سکه ی اولیه باشد و یا حالت سکه بوسیله ی عملگر های بازیابی به حالت اولیه تبدیل شود. عملگرهای بازیابی می تواند به صورت توابعی از عملگر سکه ی استفاده شده، نوشته شوند.

## ۷.۳ انتقال کامل حالت روی خط-N ذره ای

به طور کلی یک عملگر  $C_r^{(gen)}$  دلخواه نمی تواند انتقال کامل همه ی حالت های کیوبیتی را ممکن سازد. در شکل ۷.۳ توزیع های هماندهی روی حالت های سکه ی اولیه در کره ی بلاخ، برای خط دو ذره ای را نشان می دهد. هماندهی با استفاده رابطه ی ۳۶.۳ بدون استفاده از  $U_R$  محاسبه شده است.



شکل ۷.۳: هماندهی های انتقال برای حالت های کیوبیتی روی خط دو ذره ای

شکل ۷.۳ قسمت a نشان می دهد که عملگر سکه ی همانی منجر به انتقال کامل حالت تنها برای حالت هایی با  $\theta_b = \pi$  و  $\theta_b = 0$  می شود. در شکل b عملگر سکه ی هادامارد مورد استفاده قرار گرفته است و هیچ انتقال کامل حالتی روی نمی دهد. بنابراین به صورت کلی می توان نتیجه گرفت که برای یک عملگر سکه ی دلخواه ولگشت کوانتومی زمان گسسته انتقال کامل حالت را همیشه ممکن نمی سازد. ولی نشان داده می شود که این موارد (مواردی که برای آنها انتقال کامل حالت غیر ممکن است)، نیز با استفاده از عملگرهای یکانی اضافه شده ای، می توانند به منظور انتقال کامل یک حالت کیوبیتی، مورد استفاده قرار بگیرند. استفاده ی مکرر از رابطه ی ۳۳.۳ این حقیقت را آشکار می سازد که خط های ۲ تایی (دو ذره ای) این حقیقت را آشکار می سازد که خط های ۲ تایی با عملگر های سکه ی مختلف، دوره ای می باشند.  $\theta = \phi = 0$  این شرایط دوره ای بودن در جدول ۱ نشان داده شده است. با شبیه سازی عددی نشان دادن که این نتایج تنها مواردی هستند که خط ۲ تایی، دوره ای بودن را نشان می دهد، و هیچ عملگر سکه  $C_r^{(gen)}$  با مقادیر  $\rho, \theta, \phi$ ، برای خط ۲ تایی، دوره ای بودن را ممکن نمی سازد.

جدول ۱.۳: مواردی که دوره‌ای بودن خط ۲ تایی را برای  $\theta = \phi = 0$  نشان می‌دهد.

| $\rho$        | $Time(t)$ | $position(x)$ | $coin\ state$                                       |
|---------------|-----------|---------------|-----------------------------------------------------|
| $\frac{1}{4}$ | ۶         | ۲             | $-\beta \uparrow\rangle + \alpha \downarrow\rangle$ |
| $\frac{1}{4}$ | ۱۲        | ۱             | $ \psi_{0,1}\rangle$                                |
| $\frac{2}{4}$ | ۴         | ۲             | $-\beta \uparrow\rangle + \alpha \downarrow\rangle$ |
| $\frac{2}{4}$ | ۸         | ۱             | $ \psi_{0,1}\rangle$                                |
| $\frac{3}{4}$ | ۶         | ۱             | $ \psi_{0,1}\rangle$                                |

از جدول ۱/۳ می‌توان مشاهده کرد که در بعضی موارد تابع موج به صورت زیر می‌شود:

$$|\psi_t\rangle = [-\beta|\uparrow\rangle + \alpha|\downarrow\rangle] \otimes |2\rangle \quad (41.3)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان برای  $\rho = 1$  و  $\theta = \phi = 0$  در چهار گام را به صورت زیر به دست آورد:

$$C_2^{(gen)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-\rho}e^{i\phi} & -\sqrt{\rho}e^{i(\theta+\phi)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

با این شرایط عملگر سکه همان عملگر هادامارد می‌شود. و به صورت قراردادی، وقتی حالت سکه  $|\uparrow\rangle$  باشد، عملگر جابه‌جاگر، ولگشت را به رأس سمت راست، و وقتی که حالت سکه  $|\downarrow\rangle$  باشد، به چپ می‌برد:

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes \sum_x |x-1\rangle\langle x| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes \sum_x |x+1\rangle\langle x|$$

در نتیجه برای حالتی که تنها دو رأس دارد، خواهیم داشت:

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |2\rangle\langle 1| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |1\rangle\langle 2| + \text{other terms}$$

ولی در واقع این عملگر جابه‌جاگر مربوط به خط دو تایی نمی‌باشد و باید بحث مربوط به مرزهای منعکس‌کننده که در شکل ۴.۳ آمده نیز، در نظر گرفته شود. زمانی که ولگشت از چپ به رأس انتهایی  $N$  با حالت سکه  $|\uparrow\rangle$  برسد در مرحله‌ی بعد نمی‌توان به سمت راست برود، و برای رأس ابتدایی نیز به همین صورت است. در نتیجه عملگر جابه‌جاگر به این صورت نوشته می‌شود:

$$S = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |1\rangle\langle 1| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |N\rangle\langle N| + \text{other terms}$$

در نتیجه عملگر جابه‌جاگر برای خط دو تایی (دو رأسی) به صورت زیر می‌شود:

$$S = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |2\rangle\langle 1| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |1\rangle\langle 2| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |1\rangle\langle 1| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |2\rangle\langle 2|$$

و حالت اولیه ی کلی  $|\psi_0\rangle$  برابر حالت سکه اولیه در مکان  $|1\rangle$  می شود:

$$|\psi_0\rangle = |\psi_{0,1}\rangle \otimes |1\rangle \Rightarrow |\psi_0\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |1\rangle$$

اثر عملگر  $U = S.(C_2 \otimes I)$  روی  $|\psi_0\rangle$  به صورت زیر می شود:

$$U|\psi_0\rangle = S \left[ \left( \begin{array}{cc} \alpha \underbrace{C_2|1\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle+|2\rangle)} + \beta \underbrace{C_2|2\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle-|2\rangle)} \end{array} \right) \otimes |1\rangle \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|1\rangle|2\rangle + \alpha|1\rangle|1\rangle + \beta|1\rangle|2\rangle - \beta|1\rangle|1\rangle)$$

و اثر عملگر  $U^2$  روی  $|\psi_0\rangle$  به صورت زیر می شود:

$$U^2|\psi_0\rangle = U(U|\psi_0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} U [(\alpha + \beta)|1\rangle|2\rangle + (\alpha - \beta)|1\rangle|1\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} S \left[ \underbrace{(\alpha + \beta)(|1\rangle + |2\rangle)|2\rangle}_{(\alpha + \beta)(|1\rangle|2\rangle + |2\rangle|2\rangle)} + \underbrace{(\alpha - \beta)(|1\rangle + |2\rangle)|1\rangle}_{(\alpha - \beta)(|1\rangle|2\rangle + |1\rangle|1\rangle)} \right]$$

و اثر عملگر  $U^3$  نیز به صورت زیر می شود:

$$U^3|\psi_0\rangle = U(U^2|\psi_0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} S [\alpha|1\rangle|2\rangle + \alpha|1\rangle|1\rangle - \beta|2\rangle|2\rangle - \beta|2\rangle|1\rangle]$$

و اثر عملگر  $U^4$  به صورت زیر می شود:

$$U^4|\psi_0\rangle = U(U^3|\psi_0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} S \left[ \left( \underbrace{[\alpha|1\rangle - \alpha|2\rangle + \alpha|1\rangle + \alpha|2\rangle]}_{2\alpha|1\rangle} \right) \otimes |2\rangle - \underbrace{([\beta|1\rangle - \beta|2\rangle + \beta|1\rangle + \beta|2\rangle])}_{2\beta|1\rangle} \otimes |1\rangle \right] = S. [\alpha|1\rangle \otimes |2\rangle - \beta|1\rangle \otimes |1\rangle] = \alpha|2\rangle \otimes |2\rangle - \beta|1\rangle \otimes |2\rangle = (-\beta|1\rangle + \alpha|2\rangle) \otimes |2\rangle$$

آشکار است که حالت سکه ی اولیه می تواند با استفاده از رابطه ی ۴۰.۳ با شرایط  $\zeta(\theta) = 0$  بازیابی شود. این فرآیند به صورت کلی به صورت زیر می شود:

$$U_R U^t |\psi_{0,in}\rangle \otimes |1\rangle \rightarrow |\psi_{0,in}\rangle \otimes |2\rangle \quad (42.3)$$

بنابراین هر حالت سکه می تواند به وسیله ی  $\rho$  و  $t$  که در جدول آمده است، روی خط ۲ تایی (دو ذره ای) منتقل شود. واضح است که برای انتقال کامل، به دلیل تقارن موجود در تحول دامنه ی احتمال، دوره ای بودن شرط لازم می باشد. همچنین مشاهده می شود که در بعضی موارد مانند  $\rho = \frac{3}{4}$  خط ۲ تایی دوره ای می باشد، ولی انتقال کامل حالت اتفاق نمی

افتد. (چون مکان عوض نشده.) بنابراین دوره ای بودن برای انتقال کامل شرط لازم بوده ولی شرط کافی نمی باشد. با گذشت زمان تابع موج باید روی بیش از یک نقطه از شبکه متمرکز شود، تا منجر به انتقال کامل حالت شود. همچنین باید توجه داشت که با اعمال  $U_R$  تقارن تحول را معکوس می کنیم. برای مثال، وقتی  $\rho = \frac{1}{2}$  باشد، اگر زنجیره ای از عملگرها مانند  $U_R U^4 U_R U^4 \dots$  به صورت مکرر اعمال شود، نقش رأس های ۱ و ۲ بعد از هر بار اعمال  $U_R$  عوض می شود. ولی این عدم تقارن به ما اجازه می دهد که یک دسته بندی جدید از ولگشت کوانتومی زمان گسسته تعریف کنیم که آن را  $n$  دوره ای بودن حالت سکه می نامیم. حال یک گام به صورت  $U' = U_R U^t$  فرض می شود. آن گاه بعد از هر گام، حالت سکه حفظ شده، و تنها در فضای مکان، تغییر روی می دهد. به عبارت دیگر، اثر کلی  $U'$  به صورت  $I \otimes U'_f$  می باشد.  $I \otimes U'_f$  به این صورت تعریف می شود:

$$U'_f = |2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 2| \quad (43.3)$$

این همان چیزی است که ۲- دوره ای بودن نامیده می شود. و شبکه ی مورد نظر ۲- دوره ای خواهد بود. بنابراین  $n$  تعداد رأس هایی که حالت سکه اولیه روی آن ها جایگزیده است را نشان می دهد، با این دیدگاه اگر یک شبکه دوره ای باشد، به این معنی است که دارای خاصیت ۱- دوره ای بودن می باشد. با این تعریف دوره ای بودن تبدیل به یک عضوی از دسته ی  $n$ - دوره ای بودن عام می شود. و البته یک خط  $N$ - تایی و یا دایره ی  $N$  - تایی حداکثر می تواند،  $N$  دوره ای باشد. تنها  $n$  دوره ای بودن هایی با  $n > 1$  می توانند بیان کننده ی انتقال حالت کامل باشند. شبیه سازی عددی نشان می دهد که خط ۲- تایی تنها موردی می باشد که انتقال کامل حالت را برای  $\rho \neq 1$  ممکن می سازد. هیچ عملگر سکه ی  $C_2^{(gen)}$  دیگری نه انتقال کامل حالت و نه دوره ای بودن را برای خط های  $N$ - تایی مهیا نمی کند. روش عددی که چنین دسته بندی را آشکار می کند شامل یک بررسی ساده از احتمال ها در مکان های  $IN$  و  $OUT$  با استفاده از معادله ی  $p_{t,x} = |\alpha_{t,x}|^2 + |\beta_{t,x}|^2$  برای خط های  $N$  تایی و عملگرهای سکه ی مختلف می شود. به عبارت دیگر از آنجایی که قطعاً می خواهیم روی یک نقطه از شبکه ظاهر شود، به عنوان یک شرط ضروری برای انتقال کامل حالت، انتظار می رود احتمال در نقطه ی  $OUT$  برابر ۱ باشد. با این حال هیچ مورد این چنینی برای  $N > 2$ ، به جز در  $\rho = 1$ ، ظاهر نمی شود.

### ۸.۳ انتقال کامل حالت روی دایره ی $N$ -ذره ای

رویکرد ما بر انتقال کامل حالت متمرکز شده است و انتقال کامل حالت روی دایره های  $N$ - تایی را برای دو مورد بررسی می کند. مورد اول زمانی که  $\rho \neq 1$  باشد. برای دایره های ۲- تایی، تحول کامل می تواند به سادگی به

شکل ماتریسی زیر نوشته شود:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-\rho}e^{i\phi} & -\sqrt{\rho}e^{i(\theta+\phi)} \end{pmatrix}^t \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^t$$

در رابطه ی بالا مشاهده می شود که عملگر جابه جاگر، مکان ولگشت را مستقل از حالت سکه ی آن جابه جا می کند. اگر  $t$  فرد باشد تابع موج در مکان دوم قرار دارد، و اگر  $t$  زوج باشد، تابع موج در مکان اول قرار می گیرد. پس در  $t = 1$  حالت کلی با قرار دادن  $x = 2$  همان رابطه ی ۳۲.۳ می شود. از آنجایی که عملگر سکه یکانی می باشد، عملگر  $U_R = U^\dagger \otimes I$  بعد از اولین گام منجر به انتقال کامل حالت می شود. اگر یک گام به صورت زیر تعریف شود:

$$U' = (U^\dagger \otimes I) S(U \otimes I)$$

آن گاه ولگشت کوانتومی ۲- دوره ای شده و حالت سکه ی اولیه را ثابت (بدون تغییر) نگه می دارد. به عبارت دیگر، حالت سکه اولیه بین دو مکان ۱ و ۲ دائماً رفت و برگشت می کند. برخلاف خط ۲ تایی، دایره ی ۲ تایی انتقال کامل حالت را برای همه ی عملگر های سکه، به کمک عملگر بازیابی مناسب، ممکن می سازد. برای  $N > 2$  این موضوع صدق نمی کند و انتقال کامل حالت تنها برای تعداد محدودی از دایره ی های  $N$  تایی و عملگر های سکه ممکن می باشد. مورد  $\rho = 1, \theta \neq 0, \phi \neq 0$  را در نظر گرفته می شود و  $N$  زوج باشد. عملگر سکه قطری می باشد، جملات مربوط به  $|\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\rangle$  آمیخته نمی شوند. و این موجب می شود که در جهت های مختلف منتشر شود.

$$C_2^{(gen)} = \begin{pmatrix} \sqrt{\rho} & \sqrt{1-\rho}e^{i\theta} \\ \sqrt{1-\rho}e^{i\phi} & -\sqrt{\rho}e^{i(\theta+\phi)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -e^{i(\theta+\phi)} \end{pmatrix}$$

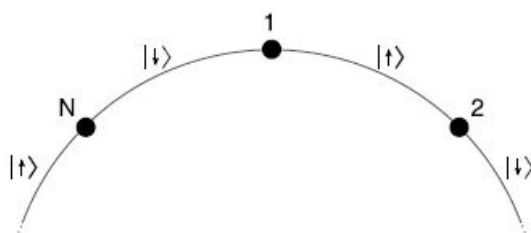
اثر این عملگر روی  $|\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\rangle$  به صورت زیر می شود:

$$C_2^{(gen)} |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$C_2^{(gen)} |\downarrow\rangle = e^{i(\theta+\phi+\pi)} |\downarrow\rangle$$

پس بعد از  $\frac{N}{2}$  گام ولگشت را در نقطه ی  $B$  یافت می شود. عملگر سکه فاز  $e^{i(\theta+\phi+\pi)}$  را در هر گام به  $|\downarrow\rangle$  اضافه می کند. حالت کلی بعد از  $\frac{N}{2}$  به صورت زیر می شود:

$$|\psi_{\frac{N}{2}}\rangle = (\alpha |\uparrow\rangle + e^{i\frac{N}{2}\Theta} |\downarrow\rangle) \otimes \left| \frac{N}{2+1} \right\rangle \quad (44.3)$$

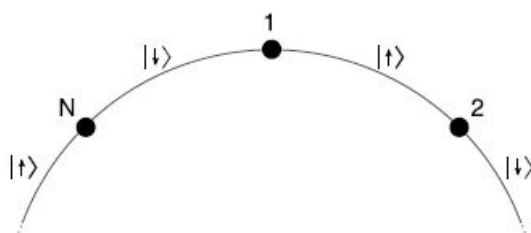


شکل ۸.۳: شرایط مرزی دوره ای. رأس‌های ابتدایی و انتهایی  $A$  و  $B$  نامگذاری شده‌اند. که به ترتیب مربوط به مکان اولیه ولگشت و مکانی است که می‌خواهیم حالت سکه را به آنجا منتقل کنیم.

که  $\Theta = \theta + \phi + \pi$  می‌باشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توانیم  $\theta' = 0$  را انتخاب کرده و از عملگر بازیابی با  $(\rho', \theta', \phi') = (1, 0, -[\frac{N(\theta + \phi + \pi)}{4}] + \pi)$  استفاده می‌شود. که انتقال کامل حالت حاصل می‌شود. اگر  $N$  فرد باشد، تابع موج در هیچ مکانی به جز مکان اولیه جایگزیده نخواهد بود. حالت کل بعد از  $N$  گام این گونه می‌شود:

$$|\psi_N\rangle = (\alpha|\uparrow\rangle + e^{iN\Theta}|\downarrow\rangle) \otimes |1\rangle \quad (45.3)$$

یک انتخاب مناسب برای عملگر بازیابی می‌تواند به صورت  $(\rho', \theta', \phi') = (1, 0, -N(\theta + \phi + \pi))$  در  $t = N$  باشد. عملگر گام  $U' = U_R U^N$  ولگشت را ۱- دوره ای (دوره ای از مرتبه ی یک) و یا به بیان ساده تر، دوره ای می‌سازد. در بعضی موارد عملگرهای سکه  $\rho = 1$  و  $\rho = 0$  معادل هم هستند. اگر دایره ی  $N$  تایی را به ترتیب با برچسب گذاری فضایی و موضعی که در شکل ۶.۳ نشان داده شده است، تعریف کنیم. در بحث مربوط به دایره ی  $N$  تایی از برچسب گذاری فضایی استفاده می‌شود. چرخش‌های ساعت گرد را با  $|\uparrow\rangle$  و چرخش‌های پادساعتگرد را با  $|\downarrow\rangle$  نشان داده شده است.



شکل ۹.۳: برچسب گذاری موضعی یالها در دایره  $N$  تایی

اگر  $\rho = 1$  انتخاب شود و از برچسب گذاری موضعی استفاده شود منجر به انتقال کامل حالت می‌شود. دایره‌های با  $N$  فرد نسبت به برچسب گذاری موضعی خوش تعریف نمی‌باشند. زیرا در آن صورت نیاز به حداقل دو یال با حالت پایه ی یکسان است. که انتقال کامل حالت را غیر ممکن می‌سازد. بنابراین فقط دایره‌هایی با  $N$  زوج در نظر گرفته می‌شود. با

توجه به برچسب گذاری شکل بالا بعد از  $\frac{N}{4}$  گام تابع موج به صورت زیر می شود:

$$|\psi_{\frac{N}{4}}\rangle = e^{i[\frac{N}{4}](\theta+\phi)} \left\{ \alpha [U_f e^{i\phi}]^{\mu(\frac{N}{4})} |\uparrow\rangle + \beta [U_f e^{i\theta}]^{\mu(\frac{N}{4})} |\downarrow\rangle \right\} \otimes \left| \frac{N}{4} + 1 \right\rangle \quad (46.3)$$

شرایط ممکن برای تابع موج به صورت زیر است:

$$|\frac{N}{4}\rangle = \begin{cases} |\psi_{\circ, in}\rangle & \text{if } \frac{N}{4} \text{ is odd} \\ \alpha e^{i\phi} |\uparrow\rangle + \beta e^{i\theta} |\downarrow\rangle & \text{if } \frac{N}{4} \text{ is even} \end{cases}$$

با فاز کلی  $e^{i[\frac{N}{4}](\theta+\phi)}$  برای هر دو مورد واضح است که می توان با استفاده از  $U_R$  با پارامترهای  $\xi(\theta, \phi) = \phi$  و  $\zeta(\theta, \phi) = \theta$  مورد دوم بازیابی می شود. یک مورد خاص از انتقال کامل حالت روی دایره ها، دایره ی ۴ تایی می باشد. در این مورد انتقال کامل حالت با استفاده از عملگر سکه ی هادامارد (با ۴) یا به وسیله ی عملگر سکه ی مایل (کج)،  $\rho = \frac{1}{4}$  (با ۶ گام) بدون نیاز به هیچ عملگر بازیابی ای، حاصل می شود. این نتایج در جدول ۲ نشان داده شده اند.

جدول ۲.۳: انتقال کامل حالت برای دایره ی ۴ تایی در صورتی که  $\theta, \phi = 0$  باشد.

| $\rho$        | $Time(t)$ | $position(x)$ | $coin\ state$                                        |
|---------------|-----------|---------------|------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{4}$ | ۶         | ۳             | $ \psi_{\circ, 1}\rangle$                            |
| $\frac{1}{4}$ | ۱۲        | ۱             | $ \psi_{\circ, 1}\rangle$                            |
| $\frac{2}{4}$ | ۴         | ۳             | $(e^{i\pi})  \psi_{\circ, 1}\rangle$                 |
| $\frac{2}{4}$ | ۸         | ۱             | $\alpha  \uparrow\rangle + \beta  \downarrow\rangle$ |

این ها تنها مقادیر  $\rho$  هستند که در بازه ی  $\rho \in (0, 1)$  انتقال کامل حالت را ممکن می سازند. در تمام محاسبات عددی که در مورد دایره ی ۴-تایی به کار گرفته شده،  $\phi = 0$  در نظر گرفته شده است و  $\theta$  تنظیم می باشد. اهمیت دایره ۴-تایی از این جنبه است که بدون نیاز به هیچ عملگر بازیابی ای، انتقال کامل حالت را ممکن می سازد. و مشاهده می شود که برای هر مورد از انتقال کامل حالت، ولگشت دوره ای نیز می باشد. در واقع از نوع ۲-دوره ای طبیعی تحت اثر عملگرهای گام معمول در ولگشت کوانتومی زما-گسسته می باشد.

## ۹.۳ ولگشت کوانتومی زمان پیوسته

حالت در ولگشت کوانتومی زمان پیوسته (CTQW)<sup>۳</sup> بوسیله ی مکان یک ذره روی یک گراف توصیف می شود [۶۹]. تحول پیوسته، که معادله شرودینگر بر آن حاکم می باشد، توسط

<sup>۳</sup>Continuous Time Quantum Walks

هامیلتونی  $H$  مشخص می‌شود که هامیلتونی  $H$  یک ماتریس هرمیتی  $n \times n$  می‌باشد، و متناسب با ماتریس مجاورت<sup>۴</sup>  $G$  با  $n$  رأس می‌باشد.

$$H_{ij} \begin{cases} \neq 0, & \text{if } (i, j) \in E(G); \\ = 0, & \text{else;} \end{cases} \quad (47.3)$$

که  $E(G)$  مجموعه یال‌های گراف  $G$  می‌باشد. احتمال این که ولگشت، که حالت آن  $|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle$  می‌باشد، در زمان  $t$  در رأس  $x$  جایگزیده باشد، می‌شود:

$$P_x(t) = |\langle x | \psi(t) \rangle|^2 \quad (48.3)$$

که مجموعه ی  $\{|x\rangle\}$  پایه ی متعامد و بهنجاری می‌باشد. برای ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته‌هایی که همه ی یال‌های آن دارای وزن یکسان می‌باشند، هامیلتونی متناظر به سادگی همان لاپلاس گراف مورد نظر یعنی  $L = D - A$  می‌باشد، که شامل یک ماتریس قطری  $D$  منهای ماتریس مجاورت  $A$  می‌شود. (که درایه‌های ماتریس  $A_{ij}$  وقتی که رئوس  $i, j$  متصل باشند برابر یک، و وقتی که متصل نباشند برابر صفر می‌شوند) عناصر قطری  $D_{ij} = d_j$  درجه رأس  $j$  را نشان می‌دهد. یعنی تعداد یال‌هایی که به رأس  $j$  متصل است. در نتیجه حاصل جمع تمام عناصر در هر سطر و هر ستون از لاپلاسیان، صفر می‌شود. زمانی که لاپلاسیان نقش هامیلتونی را ایفا می‌کند؛ درایه‌های ماتریس قطری، تنها در مورد گراف‌های نامنظم اهمیت خواهند داشت. برای گراف‌های منظم همه ی آنها برابر بوده، و از آن جا که بون هیچ تغییری در دینامیک سیستم، می‌توان آزادانه از هامیلتونی<sup>۵</sup>، چندین ماتریس همانی کم کرده و یا به آن اضافه کنیم، در این حالت (منظم) می‌توان آن‌ها (درایه‌های قطری) را نادیده گرفت. برای مورد عام (کلی) ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته روی یک زنجیره، تنها عناصر غیر صفر از هامیلتونی،  $H_{j,j-1}$ ،  $H_{j,j}$  و  $H_{j,j+1}$  می‌باشند. یعنی تنها المان‌های زیر قطر اصلی، بالای قطر اصلی و روی قطر اصلی غیر صفر هستند. در ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته عملگر گام یا یکی به مکان اضافه می‌کند یا یکی از مکان کم می‌کند، پس ماتریس همسایگی را به این صورت تعریف می‌کنیم، یال‌هایی که به هم وصل هستند باید به یک رأس قبل یا به یک رأس بعد از خود وصل باشند. برای مورد یک زیر فضا از یک شبکه اسپینی، با برانگیختگی منفرد (یک تک برانگیختگی)، عناصر مربوط به هامیلتونی ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته دقیقاً بوسیله ی قدرت جفت شدگی‌های اسپینی داده می‌شوند:  $H_{i,j} = J_{ij}$  [۶۷] یعنی ZZ تحولی که در زنجیره ی اسپینی در نظر گرفته می‌شد با تحول ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته رابطه دارد. بنابراین هر کاری که با زنجیره ی اسپینی می‌توانستیم انجام دهیم برای ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته نیز می‌توان انجام داد.

<sup>۴</sup> Adjacency matrix

<sup>۵</sup> Hamiltonian

## ۱۰.۳ حد پیوسته ی ولگشت کوانتومی

عملگر سکه مربوط به ولگشت کوانتومی زمان گسسته به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$\begin{aligned} C|x, \rightarrow\rangle &= \cos\theta|x, \rightarrow\rangle - \sin\theta|x, \leftarrow\rangle, \\ C|x, \leftarrow\rangle &= \sin\theta|x, \rightarrow\rangle + \cos\theta|x, \leftarrow\rangle, \end{aligned}$$

و عملگر جابه جاگر شرطی نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} S|x, \rightarrow\rangle &= |x+1, \rightarrow\rangle, \\ S|x, \leftarrow\rangle &= |x-1, \leftarrow\rangle, \end{aligned}$$

در نهایت یک گام بصورت زیر داده می شود:

$$\begin{aligned} U = SC \Rightarrow U|x, \rightarrow\rangle &= S(C|x, \rightarrow\rangle) = S(\cos\theta|x, \rightarrow\rangle - \sin\theta|x, \leftarrow\rangle) = \\ &= \cos\theta(S|x, \rightarrow\rangle) - \sin\theta(S|x, \leftarrow\rangle) = \cos\theta|x+1, \rightarrow\rangle - \sin\theta|x-1, \leftarrow\rangle \Rightarrow U|x, \rightarrow\rangle = \\ &= \cos\theta|x+1, \rightarrow\rangle - \sin\theta|x-1, \leftarrow\rangle \end{aligned}$$

برای  $U|x, \leftarrow\rangle$  نیز به همین روش عمل می شود و نتیجه به صورت زیر می شود:

$$U|x, \leftarrow\rangle = \sin\theta|x+1, \rightarrow\rangle + \cos\theta|x-1, \leftarrow\rangle,$$

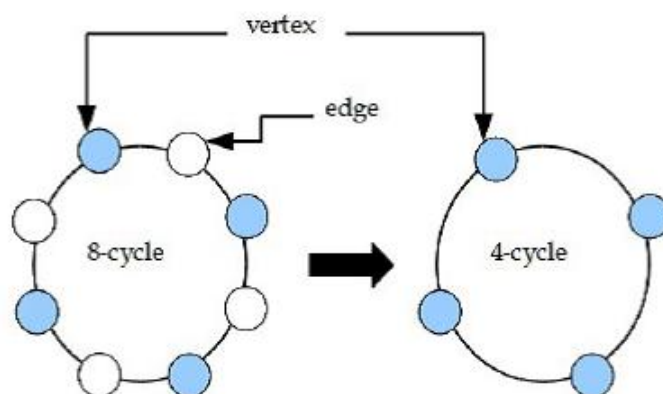
که  $\theta$  نرخ جهش سکه<sup>۶</sup> است. به همین ترتیب عملگر تحول یکانی یک ولگشت می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$U = e^{ip\sigma_z} e^{i\sigma_y} \quad (۴۹.۳)$$

که در آن  $p$  عملگر تکانه و  $\sigma_j$  ماتریس پائولی فعال در فضای سکه است. اثر  $U$  روی رأس  $X$ ، یک برهم نهی از حالت های مربوط به رأس قبل ( $X-1$ ) و رأس بعد از آن ( $X+1$ ) را نتیجه می دهد. در نتیجه اگر  $U^2$  را در نظر بگیریم آنگاه، نتیجه ی اعمال آن تنها در رأس های زوج و یا فرد خواهد بود. در ولگشت کوانتومی زمان گسسته یک زنجیره و حلقه های زوج، تداخل فقط بین موقعیت های مکانی جدا شده بوسیله فاصله دو ذره که در نزدیکترین همسایگی دوم هم هستند رخ می دهد. (یعنی تداخل بین ذراتی رخ می دهد که در داخل محدوده ای باشند که شعاع این محدوده برابر با فاصله ذره با ذره ای در نزدیک ترین همسایگی دوم است). بنابراین می توان دو ولگشت مستقل از هم تصور کرد که: یکی در رأس های زوج باشد و دیگری در رأس های فرد، براساس این حقیقت، رأس های زوج می توانند همانطور که در شکل ۱۰.۳ نشان داده شده است، به عنوان یال در نظر گرفته شوند، که برای کار ما حیاتی می باشد. از آنجایی

<sup>۶</sup> Coin Flip

که ما علاقمند به قدم زنی روی رئوس هستیم، نه روی یال‌ها، برای کار ما مهم هستند. در این مورد یک گام از تحول بوسیله  $U^2$  داده می‌شود و حالت اولیه همیشه روی فضای رأس را پوشش داده می‌شود [۷۰].



شکل ۱۰.۳: براساس این حقیقت که پدیده تداخل برای دومین همسایگی نزدیک صورت می‌گیرد، رأس‌های زوج می‌توانند بعنوان یال‌ها تفسیر شوند

علاوه بر این، در طول این کار ولگشت کوانتومی زمان گسسته را در زنجیره ای متناهی در نظر گرفته می‌شود که می‌تواند بوسیله ولگشت روی دایره با یک سکه معکوس کننده در یک رأس، یعنی سکه ای که با نرخ جهش سکه برابر با  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، شبیه سازی شود. (با جایگذاری  $\theta = \frac{\pi}{4}$  در رابطه عملگر سکه مکانش را حفظ می‌کند و حالت سکه را عکس می‌کند).  $\theta = \frac{\pi}{4}$  را در رابطه ی

$$C|x, \rightarrow\rangle = \cos\theta|x, \rightarrow\rangle - \sin\theta|x, \leftarrow\rangle,$$

$$C|x, \leftarrow\rangle = \sin\theta|x, \rightarrow\rangle + \cos\theta|x, \leftarrow\rangle,$$

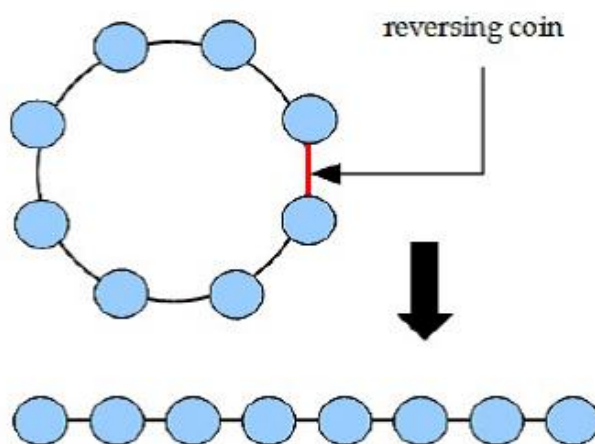
جایگذاری می‌کنیم.

$$C|x, \rightarrow\rangle = \cos\frac{\pi}{4}|x, \rightarrow\rangle - \sin\frac{\pi}{4}|x, \leftarrow\rangle = -|x, \leftarrow\rangle$$

$$C|x, \leftarrow\rangle = C|x, \rightarrow\rangle$$

همانطور که مشخص است حالت سکه عوض می‌شود. قبلاً دیدیم که در زنجیره روی رئوس ابتدایی و انتهایی حالت سکه باید معکوس شود، همین مطلب را می‌توان روی یک یال دایره اعمال کرد.

شکل ۳.۳ را ببینید.



شکل ۱۱.۳:  $DTQW$  در یک زنجیر محدود به طور مؤثری بوسیله گام‌های یک حلقه یا با یک مرز وارونه یا برگشتی شبیه سازی شده است.

حد<sup>۷</sup> پیوسته  $DTQW$  هاروی یک زنجیره، معادله دیراک یک بعدی را نتیجه می‌دهد [۷۱]، [۷۳، ۷۲]. عملگر رابطه ۴۹.۳ می‌تواند به این صورت بازنویسی شود:

$$U = U(t) = e^{ip\sigma_z vt} e^{i\sigma_y \omega t} \quad (۵۰.۳)$$

که در آن  $v$  سرعت  $w$  فرکانس زاویه‌ای می‌باشد. دو پارامتر به گونه ای انتخاب شده اند که یک گام زمانی واحد به صورت  $vt = 1$  و  $\omega t = \theta$  وجود داشته باشد که بهبود یافته رابطه ۴۹.۳ هستند. با در نظر گرفتن گام‌های زمانی بی‌نهایت کوچک و استفاده از قضیه تروتتر:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{iA\theta}{n}\right)^n = 1 + niA\frac{\theta}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{iA\theta}{n}\right)^2 + \dots = e^{iA\theta}$$

رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U(t/n)^n = e^{i(p\sigma_z v + \sigma_y \omega)t} \quad (۵۱.۳)$$

جمله داخل پرانتز بالا هامیلتونی سیستم می‌باشد که دقیقاً به شکل هامیلتونی دیراک یک بعدی است:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left( -i\hbar c \sigma_y \frac{\partial}{\partial x} + mc^2 \sigma_y \right) \psi \Rightarrow H = cp\sigma_z + mc^2 \sigma_y \quad (۵۲.۳)$$

تناظر بین رابطه ۵۱.۳ و ۵۲.۳ زمانی منطبق می‌شود که  $v$  با سرعت نور و  $w$  با جرم ذره داده شوند. بویژه، این که  $\omega t = \theta$  و  $t = 1$  در نظر در نظر گرفته می‌شود. و در نتیجه جرم ولگشت کوانتومی مشابه نرخ جهش سکه  $\theta$  می‌باشد. با این حال، براساس طبیعت گسسته ی زمان و دوره ای بودن عملگر سکه  $e^{ip\sigma_y \theta}$  نمی‌توان تفاوتی بین  $\theta$  و  $\theta + k2\pi$  قائل شد. زیرا عملگر سکه

<sup>۷</sup>Limit

به صورت مثلثاتی (بر حسب  $\sin$  و  $\cos$ ) تعریف شده است و  $2k\pi$  دوره‌ی تناوب آن می‌باشد. عبارتی، در حد جرم بی‌نهایت ذره باید تقریباً ساکن بوده و رابطه بین معادله دیراک و ولگشت کوانتومی زمان گسسته ایجاب می‌کند که  $\theta = \frac{\pi}{4}$ ، از این رو می‌توان در نظر گرفت:  $m = \tan\theta$  که به ازای  $\theta = \frac{\pi}{4}$  جرم بی‌نهایت می‌شود و عملگر سکه یک می‌شود. توجه داشته باشید که برای زوایای کوچک  $\theta \approx \tan\theta$  [۷۱].

اثبات: با در نظر گرفتن  $\theta = \frac{\pi}{4}$  و  $V = 0$  (ذره تقریباً ساکن است) عملگر  $U(t)$  به صورت زیر می‌شود:

$$U(t) = e^{ip\sigma_z vt} e^{i\sigma_y \omega t} = e^0 e^{i\sigma_y \frac{\pi}{4}} = e^{i\sigma_y \frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = i\sigma_y$$

پس با هر بار اعمال عملگر  $U(t) = i\sigma_y$  ذره حالت رفت و برگشتی پیدا می‌کند و می‌توان این گونه تصور کرد که ذره تقریباً ساکن است. همچنین مهم است که بدانید، براساس ساختار عملگر انتقال شرطی پیوستگی زمانی ذاتاً با پیوستگی مکانی کوپل شده است. پس یا هر دو پیوسته و ممتد هستند یا هر دو گسسته هستند [۷۵].

هامیلتونی ولگشت کوانتومی زمان پیوسته یک زنجیر با کوپل شدگی یکنواخت از روابط زیر پیروی می‌کند،  $H_{i,i+1} = H_{i+1,i} = J$  و  $H_{i,i} = 2J$  با این حال می‌توان برای گراف‌های منظم عناصر قطری را نادیده گرفت و آنها را برابر با صفر قرار داد. عمل هامیلتونی روی یک حالت جایگزیده در  $x$  بصورت زیر است:

$$H|x\rangle = -J(|x+1\rangle - 2|x\rangle + |x-1\rangle) \quad (53.3)$$

رابطه بالانسخه‌ی گسسته لاپلاسین است. رابطه‌ی پیوسته‌ی معادله‌ی بالا بصورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} H|x\rangle &= -J\{(|x+dx\rangle - |x\rangle) - (|x\rangle - |x-dx\rangle)\} \\ &= -J\left(\frac{d}{dx}|x\rangle - \frac{d}{dx}|x-dx\rangle\right) \\ &= -J\left(\frac{d}{dx}|x\rangle - |x-dx\rangle\right) = -J\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}|x\rangle\right) = -J\frac{d^2}{dx^2}|x\rangle \\ \Rightarrow H|x\rangle &= -J\frac{d^2}{dx^2}|x\rangle \Rightarrow \end{aligned}$$

$$H = -J\frac{d^2}{dx^2} \quad (54.3)$$

مشخص است که این هامیلتونی یک ذره‌ی آزاد در یک بعد را با  $J = 1/2m$  توصیف می‌کند. بنابراین ثابت جفت شدگی  $J$  به صورت معکوس جرم ولگشت تفسیر شود. در حد پیوسته، ولگشت کوانتومی می‌تواند به صورت یک ذره‌ی آزاد نسبیتی (ولگشت کوانتومی زمان گسسته)، یا غیرنسبیتی (ولگشت کوانتومی زمان پیوسته) فرض شود. پارامتر اصلی

حاکم بر دینامیک ولگشت، که سکه‌ها وجفت شدگی هستند، وابسته به جرم ذرات می باشند. دیگر ویژگی مهم ولگشتهای کوانتومی این است که در هر دو مدل، هم در زمان گسسته و هم در زمان پیوسته فضا (مکان) گسسته می باشد. ولی برای ولگشت کوانتومی زمان گسسته ها زمان نیز گسسته می باشد.

دو گام کوانتومی با نسخه ی گسسته ای از معادله ی دیراک و شروینگر برای ذره ی آزاد در نظر گرفته می شود. در یک مدل غیر نسبیتی، زمان و مکان بصورت جداگانه رفتار می کنند، بنابراین هیچ چیز عجیبی در گسستگی فقط یکی از آنها وجود ندارد. با این حال در فیزیک نسبیتی، زمان و مکان با هم در آمیخته اند و باید همه ی فضا-زمان به صورت یک پارچه در نظر گرفته می شود. از این رو ممکن است تبدیلات لورنتس پایه ای روی فضا-زمان که تنها به صورت جزئی گسسته می باشد، مشکل باشد [۷۹].

### ۱۱.۳ انتقال کامل حالت در ولگشت کوانتومی زمان گسسته

در این قسمت مقایسه‌ای بین جرم، سکه‌ها و کوپل شدگی<sup>۸</sup> به کار گرفته می شود تا بتوان انتقال کامل حالت از یک مکان به مکان دیگر را با ولگشت کوانتومی زمان گسسته انجام داد. این پروتکل بر مشخصه طراحی جفت شدگی تکیه می کند مانند ویژگی انتخاب ترم‌های هامیلتونی حاکم بر مؤلفه‌های ولگشت کوانتومی زمان گسسته این جفت شدگی ها وابسته به مکان می باشند، بنابراین برای مقایسه، مؤلفه‌های مکان ذره به جرم وابسته است. بعبارت دیگر، جرم وابسته به نرخ جهش سکه است. بنابراین متناظرهای ولگشت کوانتومی زمان گسسته باید مکان وابسته به سکه داشته باشد. در ادامه چگونگی اثرات دینامیکی انتخاب این سکه‌ها در ولگشت کوانتومی زمان گسسته بررسی می شود.

زنجیره کوپل شده بین گره  $n$ ،  $n+1$  در پروتکل بوسیله  $J_n = \frac{\lambda}{2} \sqrt{n(N-n)}$  داده می شود که  $n = 1, 2, \dots, N-1$  و  $\lambda$  پارامتر حقیقی مشترک بین همه جفت شدگی ها است. بعنوان یک نتیجه، جرم مؤثر ذره برای گذار بین مکان  $n$  و  $n+1$  بصورت زیر است:

$$m_n = \frac{1}{2J_n} = \frac{1}{\lambda \sqrt{n(N-n)}} \quad (55.3)$$

سپس عملگر گام به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$U = U(n) = e^{ip\sigma_z} e^{i\sigma_y \theta_n} \quad (56.3)$$

که در آن  $\theta_n$  وابسته به مکان است. فرم ماتریسی عملگر سکه نیز به صورت زیر داده می شود:

$$C_n = \begin{pmatrix} \cos\theta_n & \sin\theta_n \\ -\sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix} \quad (57.3)$$

<sup>۸</sup>Couplings

عملگر گام دو مرحله‌ای<sup>۹</sup> به صورت  $U^2$  در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که ولگشت در یک زنجیر به طول  $\frac{N}{2}$  به وسیله‌ی یک ولگشت در یک حلقه‌ی  $N$  ذره‌ای زوج برای حالتی که مکان‌های زوج متناظر با یال‌ها هستند، شبیه‌سازی می‌شود و ما علاقمندیم که یک ولگشت در مکانی متناظر با رأس‌ها باشد، سکه‌های مربوط به یال‌ها متناظر با جرم است. اما سکه‌های مربوط به رأس‌ها نیز وجود دارد که مکان‌های فرد در حلقه‌ها است. که همه‌ی آن‌ها را با مشخصه  $\theta_{2K-1} = 0$  تنظیم می‌کنیم. اگرچه توجه داریم که یک انتخاب متفاوت (برابر با همه رأس‌ها) منجر به نتایج مشابه می‌شود. مکان‌های زوج متناسب با مقایسه بین جفت شدگی و جرم ( $m = \tan\theta$ ) انتخاب می‌شوند.

$$\theta_{2k} = \arctan \frac{1}{2\lambda \sqrt{k \left( \frac{N}{2} - k \right)}} \quad (58.3)$$

که  $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1$

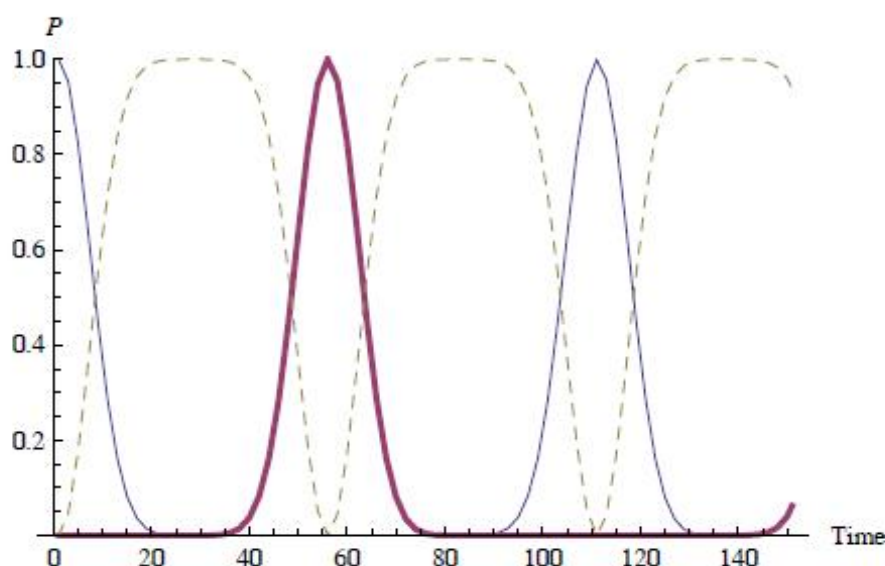
مطالعات نشان می‌دهد که انتقال، به شدت وابسته به پارامتر  $\lambda$  می‌باشد. برای مقادیر کوچک  $\lambda$  (حد جرم بزرگ) موجب می‌شود که آرگومان تابع  $\arctan$  به بی‌نهایت میل کند و در نتیجه  $\theta = \frac{\pi}{2}$  شود و در  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ، همانطور که از قبل طبق تعریف، می‌دانیم عملگر سکه، معکوس کننده خواهد بود. ولی با توجه به این موضوع که در اینجا عملگر سکه را دو بار اعمال می‌کنیم (تنها رأس‌های زوج یا فرد را در نظر می‌گیریم) پس حالت سکه بدون تغییر خواهد ماند. در نتیجه انتقال کامل حالت روی می‌دهد. در حد  $\lambda = \pi/N$  افت کرده، و برای  $\lambda$  از مرتبه  $O(1)$  و بزرگتر (حد جرم کوچک) دوباره به انتقال کامل باز می‌گردد. نشان داده شد که طبیعت گذار (انتقال) برای این دو مورد محدود شدگی به شدت متفاوت است (در حد جرم کوچک، گذار (انتقال) ایده‌آل براساس طبیعت پراکندگی کم اپراتور  $e^{ip\sigma z}$  رخ می‌دهد که در آن طیف خطی است، در حالی که در حد جرم بزرگ عملگر تحول  $U^2$  به طور مؤثر توسط یک عملگر هامیلتونی داده می‌شود [۷۴].

جالب است که در هر دو مورد به این نتیجه رسیدیم که انتقال به راستی وابسته به حالت اولیه سکه نیست. در مورد ولگشت کوانتومی زمان گسسته نه تنها ذره بلکه حالت اولیه سکه بصورت ایده‌آلی منتقل می‌شود:

$$\alpha |1, \rightarrow\rangle + \beta |1, \leftarrow\rangle \rightarrow \alpha |N-1, \rightarrow\rangle + \beta |N-1, \leftarrow\rangle \quad (59.3)$$

انتقال ذره از مکان ۱ به مکان  $N-1$  بر حسب عملگر تحول  $U^2$  در ولگشت‌های کوانتومی زمان گسسته در شکل ۱۲.۳ نشان داده شده است. در این مورد خاص  $N = 30$  و  $\lambda = 0.3$  می‌باشد. همان گونه که مشاهده می‌شود انتقال کامل حالت می‌باشد. علاوه بر این دینامیک ولگشت، دوره‌ای می‌باشد. زیرا بعد از دو برابر شدن زمان انتقال، سیستم به حالت اولیه باز می‌گردد. همانطور که در مورد زمان پیوسته روی می‌داد.

<sup>۹</sup>Double- step operator



شکل ۱۲.۳: حالت گذار ایده آل از مکان ۱ به مکان  $N - 1$  برای ولگشت کوانتومی زمان گسسته با وابستگی مکانی سکه  $(\lambda = 0.3, N = 300)$ . خط آبی باریک - احتمال جفت شدگی مکان ۱، خط بنفش ضخیم - احتمال جفت شدن مکان  $N - 1$ ؛ خط تیره - احتمال جفت شدگی باقیمانده رأس‌های زنجیر.

## ۱۲.۳ حد جرم بزرگ

فرمولهای مربوط به سکه ی وابسته به مکان (۵۷.۳) و نرج جهش سکه (۵۸.۳) را در نظر می گیریم. و می دانیم که  $\arctan \theta$  را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\arctan \theta = \arcsin \left( \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} \right) = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} \right) \quad (60.3)$$

درایه های ماتریس سکه می توانند این گونه نوشته شوند:

$$\begin{aligned} \cos \left( \underbrace{\arctan \theta}_{\theta_{\gamma_k}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4\lambda^2\gamma_k}}} = \frac{2\lambda\gamma_k}{\sqrt{1+4\lambda^2\gamma_k}} \\ \sin \left( \underbrace{\arctan \theta}_{\theta_{\gamma_k}} \right) &= \frac{\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{\frac{1}{2\lambda\gamma_k}}{\frac{1}{2\lambda\gamma_k}\sqrt{1+4\lambda^2\gamma_k}} = \frac{1}{\sqrt{1+4\lambda^2\gamma_k}} \end{aligned} \quad (61.3)$$

که در آن  $\gamma_k = \sqrt{k \left( \frac{N}{\gamma} - k \right)}$  می باشد. در حد جرم بزرگ  $\lambda \rightarrow 0$  (به سمت صفر میل می کند) که اجازه می دهد تنها بزرگترین جملات بسط تیلور را در نظر بگیریم. بسط تیلور به این صورت است که برابر حاصل جمع توان های مختلف یک متغیر می باشد، و اگر آن متغیر خیلی کوچک باشد، توان دوم و بیشتر از آن را صفر در نظر می گیریم، پس در اینجا هم چون  $\lambda \rightarrow 0$

میل می‌کند، پس می‌توان در رابطه‌ی (۶۱.۳) به جای  $\lambda^2$ ، صفر در نظر گرفت و از آنجا رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود:

$$\cos\theta_{\gamma_k} \approx 2\lambda\gamma_k, \quad \sin\theta_{\gamma_k} \approx 1 \quad (62.3)$$

اگر به رابطه‌ی (۵۸.۳) توجه کنیم:

$$\tan\theta_{\gamma_k} = \frac{\sin\theta_{\gamma_k}}{\cos\theta_{\gamma_k}} = \frac{1}{2\lambda\gamma_k}$$

$$\sin\theta_{\gamma_k} = 1, \quad \cos\theta_{\gamma_k} = 2\lambda\gamma_k \sim 0$$

به معنی  $\theta_{\gamma_k} \rightarrow \pi/2$  می‌باشد. اثر عملگر دو مرحله‌ای  $U^2$  روی مکان‌های متناظر با رأس‌ها (مکان‌های فرد) می‌تواند به صورت زیر تقریب زده شود:

$$\begin{aligned} U^2 |2k-1, \rightarrow\rangle &\approx 2\lambda\gamma_k |2k+1, \rightarrow\rangle + |2K-1, \leftarrow\rangle \\ U^2 |2k-1, \leftarrow\rangle &\approx 2\lambda\gamma_{k-1} |2k-3, \leftarrow\rangle + |2K-1, \rightarrow\rangle \end{aligned} \quad (63.3)$$

همچنین حالت‌های تقریباً بهنجار شده‌ی زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}(k) &= \\ \frac{1}{\sqrt{2}} &(|2K-1, \rightarrow\rangle \pm i|2K-1, \leftarrow\rangle + i2\lambda\gamma_k |2k+1, \rightarrow\rangle - i2\lambda\gamma_{k-1} |\phi_{\pm}(2k-3, \leftarrow\rangle)) \end{aligned}$$

و حالت‌های بهنجار شده:

$$\phi_{\pm}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2K-1, \rightarrow\rangle \pm i|2K-1, \leftarrow\rangle)$$

توجه شود که  $|\psi_{\pm}(k)\rangle$  و  $|\phi_{\pm}(k)\rangle$  با تقریبی از مرتبه‌ی  $O(\lambda)$  با هم برابر هستند. اثر عملگر  $U^2$  روی  $|\psi_{\pm}(K)\rangle$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$U^2 |\psi_{\pm}(k)\rangle = i(|\phi_{\pm}(k)\rangle i2\lambda\gamma_k |\phi_{\pm}(k+1)\rangle - i2\lambda\gamma_{k-1} |\phi_{\pm}(k-1)\rangle) + O(\lambda^2) \quad (64.3)$$

حال کافی است که تشخیص دهیم  $2\lambda\gamma_k = J_{k,k+1}$  (که در فصل دوم مورد بحث قرار گرفته است) و اینکه برای زمان‌های کوتاه اثر عملگریکانی<sup>۱۰</sup> می‌تواند بوسیله  $U \approx 1 - iHt$  تقریب زده شود که  $H$  هامیلتونی است. بنابراین:

$$U^2 |\psi_{\pm}(k)\rangle \approx i(1 - iH) |\phi_{\pm}(k)\rangle \quad (65.3)$$

هامیلتونی بالا دقیقاً هامیلتونی ای است که کریستندل<sup>۱۱</sup> و همکارانش بدست آوردند. بنابراین رفتار ولگشت کوانتومی زمان گسسته بازایی شده است. علاوه بر این،  $H$  موجب آمیخته شدن حالت‌های مثبت و منفی نمی‌شود. و این علت آن است که ما نه تنها انتقال ولگشت را بلکه انتقال حالت سکه‌ی ذاتی آن را نیز مشاهده می‌کنیم.

<sup>۱۰</sup>Unitary Operator

<sup>۱۱</sup>Christand

### ۱۳.۳ حد جرم کوچک

فرض شود  $\lambda \rightarrow \infty$  در این مورد یک حرکت (جابه جایی) بدون پراکندگی بر تحول سیستم حکم فرما می باشد. از آنجایی که رابطه ی (۶۱.۳) به طور تقریبی به رابطه ی (۶۲.۳) می رسد، بنابراین عملگر  $U^2$  به صورت  $U^2 = e^{-2ip\sigma_z}$  ساده می شود. به جز در مکان  $N$  که سکه ی معکوس کننده اعمال می شود که منجر به یک تغییر فاز  $\pi$  در ذره ای می شود که از طرف چپ می آید. انتقال در  $\frac{N}{4}$  گام دوبل (به صورتی که هر گام، در واقع دو گام باشد) رخ می دهد. حالت اولیه  $\alpha|1, \rightarrow\rangle + \beta|1, \leftarrow\rangle$  به صورتی که در ادامه توضیح داده می شود متحول می شود. اولین قسمت این حالت که بخش راست رونده می باشد، به راست رفته در مکان  $N$  بازگردانده می شود و به مکان  $N-1$  می رود تا در نهایت به حالت  $-\alpha|N-1, \leftarrow\rangle$  برسد. دومین قسمت یعنی بخش چپ رونده، به چپ رفته تا به مکان  $N$  برسد، سپس بازگردانده می شود و به راست می رود تا در مکان  $N-1$  و در نهایت در حالت  $\beta|N-1, \rightarrow\rangle$  قرار گیرد. این مطالب (فرایند) برای هر حالت اولیه ای در مکان  $x$  صادق است، که نقطه ی انتهایی آن  $N-x$  خواهد بود. برای بازگرداندن حالت سکه ی اولیه، باید عملگر  $\sigma_y$  اعمال شود.

حالت اولیه

$$\alpha|1, \rightarrow\rangle + \beta|1, \leftarrow\rangle \quad \sigma_y|0\rangle = i|1\rangle$$

حالت نهایی

$$-\alpha|N-1, \leftarrow\rangle + \beta|N-1, \rightarrow\rangle \quad \sigma_y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$\sigma_y(-\alpha|N-1, \leftarrow\rangle + \beta|N-1, \rightarrow\rangle) = i(\alpha|N-1, \rightarrow\rangle + \beta|N-1, \leftarrow\rangle)$$

### ۱۴.۳ گذار بین دو نوع از منتقل کننده

عملگر تحول یکانی  $U$  برابر با حاصلضرب دو عملگر  $S$  و  $C$  می باشد. خصوصیات انتقال، به اثر متقابل این جفت یعنی بستگی ( $S$  و  $C$ ) دارد. در حد جرم کوچک،  $C$  به دلیل اینکه نزدیک به یک می باشد، هیچ نقش مهمی ایفا نمی کند. از طرف دیگر، در حد جرم بزرگ، عملگر  $C$  بسیار مهم و حیاتی می باشد، زیرا مستقیماً بر تحول اثر قابل توجهی خواهد داشت [۷۴]. همانطور که قبلاً اشاره شد، مشاهده می شود که تغییر رفتار، از نوعی به نوع دیگر، در  $\lambda = \pi/N$  اتفاق می افتد. حال یک توضیح شهودی برای این مقدار ارائه داده می شود.

زمان انتقال حالت روی یک زنجیره با طول  $N$  در پروتکلی که در فصل دوم مورد بحث قرار گرفت، به صورت  $T = \pi/N$  می باشد [۷۴]. در این قسمت زنجیره ای در نظر گرفته می شود که به صورت مفید (مؤثر) دارای طول  $\frac{N}{4}$  می باشد. (یعنی از رأس  $N$  به رأس  $\frac{N}{4}$  رسیده است) که این دلیلی است برای دو مقداری کردن  $\lambda$  مانند سند موجود در رابطه ۲۲.۳. در نتیجه

زمان انتقال معادل باید به صورت  $T = \pi/2\lambda$  داده شود. در حقیقت این تقریباً چیزی است که مشاهده می‌کنیم. حال یاد آوری می‌کنیم که، ولگشت کوانتومی زمان گسسته از طریق شباهتی که به معادله دیراک دارد، به مکانیک نسبیتی مربوط می‌شود. در نسبیت مسافتی که توسط یک ذره در زمان  $t$  طی شود، تقریباً برابر با  $ct$  می‌باشد. به صورت مشابه در ولگشت کوانتومی گسسته در یک گام ذره تنها می‌تواند به مکانی که در همسایگی قرار دارد برود که این دلیلی است که چرا برای رفتن از یک انتهای زنجیره به انتهای دیگر آن دست کم به تعداد  $\frac{N}{2}$  گام نیاز می‌باشد. از اینجا به مقدار بحرانی (حدی)  $\lambda_{cr} = \pi/N$  میرسیم که اگر بیش از این باشد، ذره با سرعتی بالاتر از سرعت نور حرکت خواهد کرد.

$$T = \frac{\pi}{2\lambda} \xrightarrow{T=\frac{N}{2}} \frac{N}{2} = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{\pi}{N}$$

واز آن جایی که این غیر ممکن می‌باشد (سرعت بیشتر از سرعت نور)، یک رفتار نسبیتی باید بر تحول حاکم باشد. می‌توان نتیجه گرفت که گذار بین دو نوع انتقال، می‌تواند بصورت یک گذار غیر نسبیتی به نسبیتی تفسیر شود.

## ۱۵.۳ روش‌های دیگر برای انتقال کامل حالت

همانطور که قبلاً ذکر شد، انتقال تقریباً کامل حالت در شبکه‌های اسپینی می‌تواند از راه‌های مختلفی به دست آید در اصل، همه‌ی تکنیک‌های انتقال، می‌توانند در ولگشت‌های کوانتوی زمان گسسته بکار گرفته شوند [۷۶]. برای مثال، کدگذاری بسته‌ی موج سر راست می‌باشد، زیرا می‌تواند همان بسته‌ی موج فضایی موجود در ولگشت‌های کوانتومی زمان گسسته را برای ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته در نظر گرفت. به هر حال جفت شدگی وابسته به مکان، روشی است که تطابق بین ولگشت‌های کوانتومی زمان گسسته و ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته در آن بسیار بدیهی می‌باشد. در ادامه به مثالی دیگر اشاره می‌شود که بر پایه‌ی مقایسه و تشابه سکه-جرم-کوپل شدگی می‌باشد. نسخه‌ی ولگشت‌های کوانتومی زمان گسسته از پروتکلی ارائه داده می‌شود که در آن ابتدا یک زنجیره اسپینی<sup>۱۲</sup> با جفت شدگی یکنواخت در نظر گرفته می‌شود و سپس به ابتدا و انتهای آن دو اسپین باجفت شدگی بسیار ضعیف<sup>۱۳</sup> با زنجیره اضافه می‌شود. [۷۷].

هامیلتونی ولگشت‌های کوانتومی زمان پیوسته یک زنجیره که دو انتهای آن دارای جفت شدگی ضعیف می‌باشد، به وسیله‌ی ثابت‌های جفت شدگی  $H_{i,i+1} = J$  برای  $i = 2, \dots, N-2$  و  $J_{1,2} = J_{N-1,N} = aJ$  نشان داده می‌شود. که  $a \ll 1$  می‌باشد. به علت جفت شدگی ضعیف نسبت به بقیه‌ی زنجیره (نسبت به دیگر اسپین‌های زنجیره)، برهم کنش اولین و آخرین اسپین با بخش میانی زنجیره، می‌تواند به صورت یک اختلال در نظر گرفته شود. بدون در

<sup>۱۲</sup> Spin chain

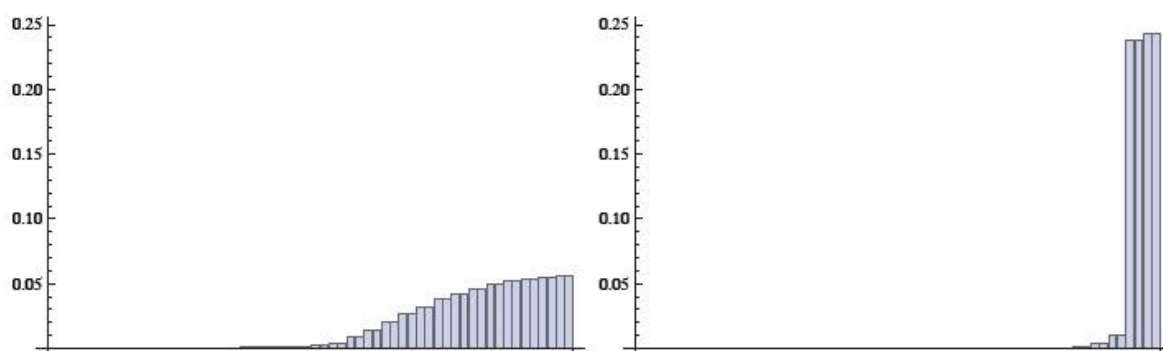
<sup>۱۳</sup> Uniform couplings

نظر گرفتن این برهم کنش دو اسپین می توانند در یک حالت تبهگن باشند. کوپل شدگی ضعیف می تواند تبهگنی<sup>۱۴</sup> را بشکند و حالت تبهگن غیر اختلالی، با در نظر گرفتن اختلال، به حالت هایی به صورت برهم نهی های دو حالت یا سه حالت تبدیل می شود. یک حالت اینکه اولین اسپین در حالت بالا و بقیه ی اسپین های زنجیره در حالت پایین باشند و یا اینکه آخرین اسپین در حالت بالا و بقیه ی اسپین های زنجیره در حالت پایین باشند. و حالت دوم که به صورت برهم نهی از سه حالت است به این صورت است که اولین اسپین بالا، آخرین اسپین بالا یا اینکه وسط زنجیره یکی از ویژه حالت های غیر اختلالی (مختل نشده) آن باشد. دومین حالت زمانی رخ می دهد که ویژه مقدار تبهگن شده از ابتدا و انتها، دقیقاً یکی از ویژه مقدارهای زنجیره باشد. انتقال تقریباً کامل حالت به این دلیل ممکن است که حالت های اولیه و نهایی تقریباً به صورت کامل، تنها روی این دو و یا سه حالت پوشش داده می شوند.

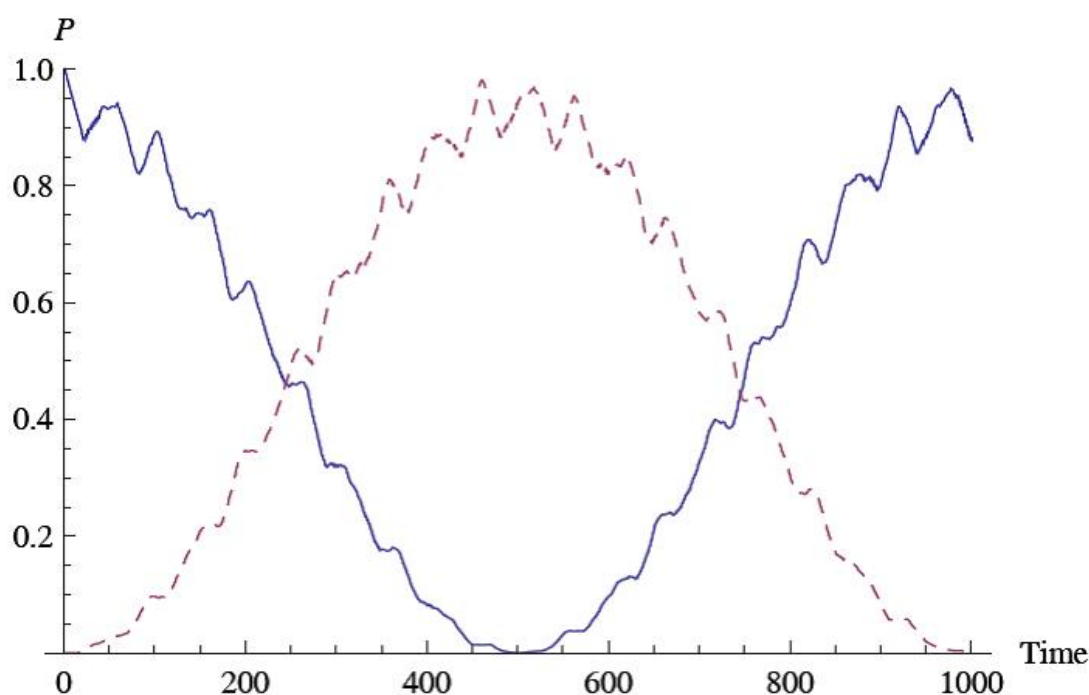
درولگشت کوانتومی زمان گسسته، پروتکل توضیح داده شده در بالا (برای ولگشت های کوانتومی پیوسته) می تواند به صورتی که در ادامه می آید، محقق شود. مانند گذشته می توان یک زنجیره ی  $\frac{N}{4}$  تایی روی یک حلقه ی  $N$  تایی با یک یال معکوس کننده، شبیه سازی شود. همه ی سکه ها مانند هم هستند  $\theta_k = \theta$ ، به جز  $\theta = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$ ،  $\theta_2 = \theta_{N-2} = \theta$  مشاهده می کنیم که ولگشت کوانتومی گسسته دقیقاً مانند ولگشت کوانتومی زمان پیوسته متناظر آن رفتار می کند. که در منبع [۷۷] و [۷۸] به شرح این پروتکل پرداخته اند که مورد خاصی از کار ما می باشد.

علاوه بر این انتقال حالت سکه را نیز مشاهده می کنیم. در شکل ۱۳.۳ تراکم ویژه حالت ها برای  $N = 3$  و  $\theta = \frac{\pi}{4}$  و حالت اولیه  $(|1, \rightarrow\rangle)$  نشان داده شده است [۷۸]. برای مورد  $\varepsilon \ll 1$  حالت اولیه تقریباً به صورت کامل روی چهار ویژه حالت (دو ویژه حالت با انرژی مثبت و دو ویژه حالت با انرژی منفی) پوشش داده می شود. در شکل ۱۴.۳ تراکم در مکان های ۱ و  $N-1$  بر حسب زمان را نشان می دهد. زمان انتقال از مرتبه  $O\left(\frac{1}{\varepsilon^3}\right)$  می باشد.

<sup>۱۴</sup>Degeneracy



شکل ۱۳.۳: جمعیت ترازها برای  $\theta = \frac{\pi}{4}, N = 30$  و حالت اولیه  $|\downarrow, 1\rangle$ . چپ  $\theta_1 = \theta_{N-1} = \text{چپ}$ . راست  $\theta = \pi/4$ . راست  $\theta_2 = \theta_{N-2} = \theta = \frac{\pi}{4} - \varepsilon$  که  $\varepsilon = \frac{\pi}{4N}$  حالت‌های اولیه تقریباً برابر با ورودی‌هایی است که فقط حالت ویژه حالت‌های چهار گانه را پشتیبانی می‌کنند.



شکل ۱۴.۳: احتمال جمعیت موقعیت ۱ (خط ممتد) و  $N-1$  (خط تیره) در زمان.  $\theta = \frac{\pi}{4}, N = 30$  و  $\varepsilon = \frac{\pi}{4N}$

اگر عملگر سکه در مکان ۲ را از  $e^{i\sigma_y \frac{\theta_2}{2}}$  به  $e^{i\sigma_x \frac{\theta_2}{2}}$  تغییر دهیم، دیگر انتقال صورت نمی‌گیرد و حالت در مکان ۱ برای همیشه جایگزیده خواهد شد. علت این رفتار این است که انرژی اولیه در مکان ۱ با انرژی ای که ذره در مکان  $N-1$  می‌تواند داشته باشد متفاوت است، بنابراین به دلیل پایستگی انرژی انتقال ممنوع می‌باشد.





## فصل ۴

### نتیجه گیری

در این پایانامه، انتقال حالت کوانتومی بررسی شد. در فصل دوم این انتقالات حالت در زنجیره ای از  $N$  کیوبیت مطالعه شد که به گونه ای تنظیم شده است که انتقال کامل هر حالت کوانتومی در بالاترین فاصله ی ممکن، قابل انجام باشد. ثابت شد که انتقال کامل حالت کوانتومی بین نقاط انتهایی زنجیره های یک و دو اتصال ممکن بوده ولی برای زنجیره های  $N \geq 3$  اتصال با  $N$  غیرممکن می باشد. علاوه بر این نشان داده شد که حالت کوانتومی روی یک زنجیره با هر طولی که بتوان برهم کنش های بین کیوبیتی را در آن مهندسی کرد، می تواند به صورت کامل منتقل شود. این شبکه ها به ویژه از این جهت جذاب هستند که هیچ کنترل دینامیکی لازم ندارند، درست برخلاف بسیاری دیگر از پروتکل های مربوط به اطلاعات کوانتومی. همچنین یک پروتکل برای ارتباطات کوانتومی در یک زنجیره ی اسپینی مدول نشده و اندازه گیری نشده در نظر گرفته شده است. این پروتکل امکان ارتباط کوانتومی بین کامپیوترهای مجاور را می دهد، بدون اینکه از سیستم های فیزیکی مختلف به عنوان واسطه استفاده شود. به خوبی می دانیم که یک سری از مبادله ها (انتقال حالت رأس به رأس) می باشد، که نیاز به یک سری پیچیده از میدان های وابسته به زمان دارد. ولی مشاهده می شود که با استفاده از این پروتکل حتی بدون انجام هیچ کاری، حالت های کوانتومی می توانند با هماندهی بالایی منتقل شوند و درهم تنیدگی می تواند در یک زنجیره با طول  $N$ ، به اشتراک گذاشته شود. در فصل سوم بر روش های انتقال حالت کوانتومی بر پایه ی ولگشت کوانتومی زمان-گسسته متمرکز شده ایم. یک طرح مسیریابی بهینه برای انتقال

حالت کوانتومی نامعلوم دلخواه از پورت ورودی به پورت خروجی دلخواه مورد بررسی قرار داده شد، که می تواند به صورت عملی به کار برده شود. حالت سکه ی نامعلوم در ولگشت کوانتومی زمان- گسسته ی یک بعدی، می تواند از مکان ابتدایی به هر مکان دیگر به عنوان هدف، به صورت کامل منتقل شود. همچنین تنظیمات لازم ساده بوده و مستقل از تعداد مکان های هدف می باشند. لازم است که سه عملگر چرخش  $\sigma_x$  را تنظیم کرده و بقیه را  $I$  در نظر بگیریم. مسیر یابی بهینه می تواند بر پایه ی انتقال کامل حالت، انجام شود. این طرح همچنین برای مسیر یابی درهم تنیدگی چند کیوبیتی نیز کارآمد است. تعداد تنظیمات خاصی در مسیر یابی حالت های چند سکه ای در ولگشت های با ابعاد بالا، نسبت به تعداد سکه ها به صورت خطی افزایش می یابد، که این موجب عملی بودن این پروتکل برای به کارگیری آن در تکنولوژی تجربی می شود. همین طور نشان داده شد که خاصیت های انتقال حالت کیوبیتی از نوع ولگشت کوانتومی زمان گسسته ( $DTQW$ ) که معمولاً امکان انتقال کامل حالت ( $PST$ ) را روی خط  $N$  تایی و دایره های  $N$  تایی نمی دهند، می توانند با معرفی عملگرهای بازیابی، بهبود یابند. از این راه، عملگرهای سکه ای را مشخص شد که انتقال کامل حالت را ممکن می سازد. تنها تعداد محدودی از عملگرهای سکه، حتی اگر از عملگرهای بازیابی استفاده شود، انتقال کامل حالت را ممکن می سازد. با اضافه کردن عملگرهای بازیابی به تحول ولگشت های کوانتومی زمان گسسته مفهوم  $n$  دوره ای بودن برای ولگشت تعریف می شود. مفهوم دوره ای بودن به شکلی است که شامل شرایط انتقال کامل حالت باشد. بنابراین تنها ولگشت های کوانتومی زمان گسسته هایی با  $n > 1$  انتقال کامل حالت را ممکن می سازد. مفهوم  $n$  دوره ای بودن موجب شکل گیری ایده ی بسط مفهوم گام به صورتی شود که عملگرهای بازیابی را در بر گیرد. بنابراین نوع جدیدی از ولگشت کوانتومی معرفی شد که امکان  $PST$  را برای همه ی عملگرهای سکه مهیا می سازد. مشاهده شد که عملگر سکه ی همانی برای خط  $N$  تایی و دایره ی  $N$  تایی با  $N$  زوج، منجر به انتقال کامل حالت می شود. انتخاب های ویژه ای از عملگرهای سکه با پارامترهای  $\rho = \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$  و  $\theta = \phi = 0$ ، امکان انتقال کامل حالت برای خط ۲ تایی و دایره ی ۴ تایی را می دهد، ولی دایره ی ۴ تایی نیازی به عملگرهای بازیابی ندارد. در این کار همچنین نسخه ای از انتقال حالت توسط ولگشت کوانتومی زمان گسسته بررسی شد که در اصل به عنوان یک فرآیند زمان پیوسته توصیف شده است. در حالی که در حالت زمان پیوسته، خصوصیات انتقال، وابسته به جفت شدگی های بین مکان های همسایه است، در مورد ولگشت کوانتومی زمان- گسسته، این عملگر سکه است که مسئول انتقال کامل حالت از یک مکان به مکان دیگر است. قیاس بین ولگشت های کوانتومی زمان گسسته و معادله دیراک و ولگشت های کوانتومی زمان پیوسته و معادله شرودینگر به کار گرفته شد تا نشان داده شود که هم جفت شدگی ها و هم سکه ها می توانند به عنوان جرم یک ذره تفسیر شوند که تبدیل ولگشت کوانتومی زمان پیوسته به ولگشت کوانتومی زمان گسسته را ممکن می سازد. نسخه های مربوط به ولگشت های کوانتومی زمان گسسته مربوط به پروتکل های انتقال کامل حالت مورد مطالعه قرار داده شد و به این نتیجه رسیدیم که در ولگشت های زمان

گسسته ها نه تنها ذره، بلکه حالت سکه ی ذاتی آن نیز انتقال می یابد.



# مراجع

- [1] Bennett CH, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters WK. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. Physical review letters. 1993 Mar 29;70(13):1895.
- [2] Guthöhrlein GR, Keller M, Hayasaka K, Lange W, Walther H. A single ion as a nanoscopic probe of an optical field. Nature. 2001 Nov;414(6859):49.
- [3] Leibfried D, DeMarco B, Meyer V, Lucas D, Barrett M, Britton J, Itano WM, Jelenković B, Langer C, Rosenband T, Wineland DJ. Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate. Nature. 2003 Mar;422(6930):412.
- [4] Mandel O, Greiner M, Widera A, Rom T, Hänsch TW, Bloch I. Controlled collisions for multi-particle entanglement of optically trapped atoms. Nature. 2003 Oct;425(6961):937.
- [5] Loss D, DiVincenzo DP. Quantum computation with quantum dots. Physical Review A. 1998 Jan 1;57(1):120.
- [6] Pearson K. The problem of the random walk. Nature. 1905 Aug;72(1867):342.
- [7] Motwani R, Raghavan P. Randomized Algorithms Cambridge Univ Press UK.
- [8] Schoning T. A probabilistic algorithm for k-SAT and constraint satisfaction problems. In: Foundations of Computer Science, 1999. 40th Annual Symposium on 1999 (pp. 410-414). IEEE.
- [9] L.D. Landau and E.M. Lifshitz. Statistical Physics, Third Edition, Part 1: Volume 5 (Course of Theoretical Physics, Volume 5). Butterworth-Heinemann, 1980.
- [10] H.C. Berg. Random walks in Biology. Princeton University Press, 1993.
- [11] Grady L. Random walks for image segmentation. IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence. 2006 Nov;28(11):1768-83.

- [12] S.N. Ward. Earthquake simulation by restricted random walks. Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 94(6), pp. 2079:2089, 2004.
- [13] Kitaev AY, Shen AH, Vyalyi MN. Classical and Quantum Computation (Graduate Studies in Mathematics vol 47)(Providence, RI: American Mathematical Society).
- [14] Aharonov D, Van Dam W, Kempe J, Landau Z, Lloyd S, Regev O. Adiabatic quantum computation is equivalent to standard quantum computation. SIAM review. 2008 Nov 5;50(4):755-87.
- [15] Briegel HJ, Browne DE, Dür W, Raussendorf R, Van den Nest M. Measurement-based quantum computation. Nature Physics. 2009 Jan;5(1):19.
- [16] Venegas-Andraca SE, Bose S. Quantum computation and image processing: New trends in artificial intelligence. InIJCAI 2003 Aug 9 (p. 1563).
- [17] Venegas-Andraca SE, Ball JL. Processing images in entangled quantum systems. Quantum Information Processing. 2010 Feb 1;9(1):1-1.
- [18] D. Horn and A. Gottlieb. Algorithm for data clustering in pattern recognition problems based on quantum mechanics. Phys. Rev. Lett., 88:18702, 2002.
- [19] Kassal I, Aspuru-Guzik A. Quantum algorithm for molecular properties and geometry optimization. The Journal of chemical physics. 2009 Dec 14;131(22):224102.
- [20] I. Kassal, J.D. Whit-eld, A. Perdomo-Ortiz, M.H. Yung, and A. Aspuru-Guzik. Simulating chemistry using quantum computers. Annu. Rev. Phys. Chem, vol. 62, pp. 185:207, 2011.
- [21] Pérez A, Romanelli A. Spatially dependent decoherence and anomalous diffusion of quantum walks. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. 2013 Jul 1;10(7):1591-5.
- [22] Ambainis A. Quantum search algorithms. ACM SIGACT News. 2004 Jun 1;35(2):22-35.
- [23] Mohseni M, Rebentrost P, Lloyd S, Aspuru-Guzik A. Environment-assisted quantum walks in photosynthetic energy transfer. The Journal of chemical physics. 2008 Nov 7;129(17):11B603.
- [24] N. Shenvi, J. Kempe, and R.B. Whaley. A quantum random walk search algorithm. Phys. Rev. A, 67(5):052307, 2003.

- [25] Riazanov GV. The Feynman path integral for the Dirac equation. Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics. 1958;6:1107.
- [26] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N. Quantum random walks. Physical Review A. 1993 Aug 1;48(2):1687.
- [27] Meyer DA. From quantum cellular automata to quantum lattice gases. Journal of Statistical Physics. 1996 Dec 1;85(5-6):551-74.
- [28] Farhi E, Gutmann S. Quantum computation and decision trees. Physical Review A. 1998 Aug 1;58(2):915.
- [29] Childs AM, Cleve R, Deotto E, Farhi E, Gutmann S, Spielman DA. Exponential algorithmic speedup by a quantum walk. In Proceedings of the thirty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing 2003 Jun 9 (pp. 59-68). ACM.
- [30] Childs AM, Goldstone J. Spatial search by quantum walk. Physical Review A. 2004 Aug 23;70(2):022314.
- [31] Bose.S . Quantum communication through an unmodulated spin chain. Phys. Rev. Lett., 91(20):207901, 2003.
- [32] Casaccino.A , Lloyd.S , Mancini.S , and Severini.S . Quantum state transfer through a qubit network with energy shifts and fluctuations. Int. J. Quant. Inf., 7(8):1417–1427, 2009.
- [33] Tsomokos.D , Plenio.M , de Vega.I , and Huelga.S . State transfer in highly connected networks and a quantum babinet principle. Phys. Rev. A, 78:062310, 2008.
- [34] Weisner.S (1983). "Conjugate coding". Association for Computing Machinery, Special Interest Group in Algorithms and Computation Theory. 15: 78–88.
- [35] Bose.S . Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. Contemp. Phys., 48(13–30):13, 2007.
- [36] McMahon. D. Quantum computing explained. John Wiley & Son;2007 Dec 14,pp. 254-255.
- [37] Zeilinger. A, Dance of the Photons: From Einstein to Quantum Teleportation, Farrar, Straus & Giroux, New York, 2010, pp. 189, 192, ISBN 0374239665
- [38] Kempe. J. Quantum random walks hit exponentially faster. In Proc. 7th Int. Workshop on Rand. and Approx. in Comp. Sci., Lect. Notes in Comp. Sci., pages 354–369. Springer, Heidelberg, 2003. quant-ph/0205083.

- [39] Kempe. J. Discrete quantum walks hit exponentially faster. *Probability Th. and Related Fields*, 133:215–235, 2005. quant-ph/0205083
- [40] Childs. A, R. Cleve, E. Deotto, E. Farhi, S. Gutmann, and D. Spielman. Exponential algorithmic speedup by a quantum walk. In *Proc. 35th ACM Symp. Theory of Computing*, pages 59–68, 2003.
- [41] Kendon.V. Decoherence in quantum walks – a review. *Math. Struct. in Comp. Sci.*, 17(6):1169–1220, 2007. [8] A. Ambainis. Quantum walks and their algorithmic applications. *Int. J. Quant. Inf.*, 1(4):507–518, 2003.
- [42] Kay. A. A review of perfect state transfer and its applications as a constructive tool, 2009. quant-ph/0903.4274.
- [43] Graham. R, Knuth.D, and Patashnik.O . *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, second edition, 1994. [12] L. Lov’asz. *Combinatorial Problems and Exercises*. American Mathematical Society, second edition, 2007.
- [44] Schwenk. A and Wilson. R. Eigenvalues of graphs. In L. Beineke and R. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, pages 307–336. Academic Press, 1978.
- [45] Bose. S, Casaccino.Mancini .A, S , and Severini. S. Communication in xyz all-to-all quantum networks with a missing link. *Int. J. Quant. Inf.*, 7(4):713–723, 2009.
- [46] Angeles-Canul.R.J, Angeles-Canul, Norton. R, Opperman. M, Paribello.C, Russell. M, and Tamon. C. On quantum perfect state transfer on weighted join graphs. *Int. J. Quant. Inf.*, 7(8):1429–1445, 2009.
- [47] So. W. Integral circulant graphs. *Discrete Mathematics*, 306:153–158, 2005.
- [48] Ba’si’c. M,Petkovi’c. M, and Stefanovi’c. D. Perfect state transfer in integral circulant graphs. *Applied Mathematics Letters*, 22(7):1117–1121, 2009.
- [49] Diaconis. P. *Group Representations in Probability and Statistics*. Institute of Mathematical Statistics, 1988.
- [50] Adamczak. W, Andrew. K, Bergen.L, Ethier. D, Hernberg. P, Lin. J, and Tamon. C. Non-uniform mixing of quantum walk on cycles. *Int. J. Quant. Inf.*, 5(6):781–793, 2007.
- [51] Bernasconi. A, Godsil.C, and Severini. S. Quantum networks on cubelike graphs. *Phys. Rev. A*, 78:052320, 2008.

- [52] Moore.C and Russell. A. Quantum walks on the hypercube. In Proc. 6th Int. Workshop on Rand. and Approx. in Comp. Sci., volume 2483 of Lect. Notes in Comp. Sci., pages 164–178. Springer, 2002.
- [53] Kendon. V. M and Sanders. B. C. Complementarity and quantum walks. Phys. Rev. A, 71:022307, 2004. quant-ph/0404043.
- [54] Kendon. V. M. Quantum walks on general graphs. Int. J. Quant. Inf., 4(5):791–805, 2006.
- [55] Christandl M, Datta N, Ekert A, Landahl AJ. Perfect state transfer in quantum spin networks. Physical review letters. 2004 May 4;92(18):187902.
- [56] Jaksch D, Bruder C, Cirac JI, Gardiner CW, Zoller P. Cold bosonic atoms in optical lattices. Physical Review Letters. 1998 Oct 12;81(15):3108.
- [57] Knill E, Laflamme R, Milburn GJ. A scheme for efficient quantum computation with linear optics. nature. 2001 Jan;409(6816):46.
- [58] Delerue CJ, Lannoo M. Nanostructures: theory and modeling. Springer Science & Business Media; 2013 Jun 29.
- [59] Childs AM. Universal computation by quantum walk. Physical review letters. 2009 May 4;102(18):180501.
- [60] Bose S. Quantum communication through an unmodulated spin chain. Physical review letters. 2003 Nov 10;91(20):207901.
- [61] Preskill J. Physics 219: Quantum Computation(1999).
- [62] Nielsen MA, Chuang IL. Quantum computation and quantum information. Cambridge University Press, 2000.
- [63] Wootters WK. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. Physical Review Letters. 1998 Mar 9;80(10):2245.
- [64] Kempe J. Quantum random walks: an introductory overview. Contemporary Physics. 2003 Jul 1;44(4):307-27.
- [65] Nayak A, Vishwanath A. Quantum walk on the line. arXiv preprint quant-ph/0010117. 2000 Oct 31.

- [66] Zhan X, Qin H, Bian ZH, Li J, Xue P. Perfect state transfer and efficient quantum routing: A discrete-time quantum-walk approach. *Physical Review A*. 2014 Jul 21;90(1):012331.
- [67] Tregenna B, Flanagan W, Maile R, Kendon V. Controlling discrete quantum walks: coins and initial states. *New Journal of Physics*. 2003 Jul 2;5(1):83.
- [68] Zwick A, Álvarez GA, Stolze J, Osenda O. Robustness of spin-coupling distributions for perfect quantum state transfer. *Physical Review A*. 2011 Aug 8;84(2):022311.
- [69] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N. Quantum random walks. *Physical Review A*. 1993 Aug 1;48(2):1687.
- [70] Strauch FW. Connecting the discrete-and continuous-time quantum walks. *Physical Review A*. 2006 Sep 7;74(3):030301.
- [71] Strauch FW. Relativistic quantum walks. *Physical Review A*. 2006 May 23;73(5):054302.
- [72] Bracken AJ, Ellinas D, Smyrnakis I. Free-Dirac-particle evolution as a quantum random walk. *Physical Review A*. 2007 Feb 21;75(2):022322.
- [73] Kurzyński P. Relativistic effects in quantum walks: Klein's paradox and zitterbewegung. *Physics Letters A*. 2008 Sep 29;372(40):6125-9.
- [74] Christandl M, Datta N, Ekert A, Landahl AJ. Perfect state transfer in quantum spin networks. *Physical review letters*. 2004 May 4;92(18):187902.
- [75] Di Franco C, Paternostro M, Kim MS. Perfect state transfer on a spin chain without state initialization. *Physical review letters*. 2008 Dec 3;101(23):230502.
- [76] Bose S. Quantum communication through spin chain dynamics: an introductory overview. *Contemporary Physics*. 2007 Jan 1;48(1):13-30.
- [77] Wójcik A, Łuczak T, Kurzyński P, Grudka A, Gdala T, Bednarska M. Unmodulated spin chains as universal quantum wires. *Physical Review A*. 2005 Sep 8;72(3):034303.
- [78] Kurzyński P, Wójcik A. Discrete-time quantum walk approach to state transfer. *Physical Review A*. 2011 Jun 13;83(6):062315.
- [79] Yalçinkaya İ, Gedik Z. Qubit state transfer via discrete-time quantum walks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*. 2015 May 15;48(22):225302.

## **Aabstract**

Quantum state transfer can be occurred for many quantum systems via different ways. Quantum state transfer done either by direct transfer or via quantum teleportation. Moreover, it may be considered for using in quantum information processes and quantum computers, that is a promising interdisciplinary field. One of the most important parts of the quantum processing systems is information transferring part. Indeed, the quantum states transfer via these systems occurs in a channel called, quantum wire. Quantum wire can be considered as a quantum network and also random walk can be used to analyses state transfer in these quantum systems due to statistical nature of quantum mechanics. Quantum walk is defined as a quantum counterpart of the classical random walk. One of its goals is finding such algorithms that are faster and more efficient than classical algorithms. There are two distinct types of Quantum walks, discrete-time and continuous-time. In this thesis, we study the transfer of qubit states, the basis of information transferring in quantum computers, in a quantum networks like spin chains and so on by discrete-time quantum walk model. Since state transfer is one of the most important tasks in quantum communications, we study the conditions of the perfect state transferring via spin chains and spin cycles. We show that it could be possible to reach it by engineering the spin interactions without any external dynamical control for a chain with arbitrary length. Moreover, we compare discrete-time quantum walk with Dirac equation and Continuous time quantum walk with Schrödinger equation. We also study an efficient routing scheme, in order to transfer an arbitrary unknown state from input ports to arbitrary output ports.

**Keywords:** *discrete-time quantum walk , perfect state transfer, spin chains, efficient routing.*



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Physics and Nuclear Engineering**

**MSc Thesis in: Particles Physics**

# **Study of quantum state transfer based on discrete quantum Walks**

**By: zeynab kavosi**

**Supervisors**

**Dr. Mostafa Annabestani**

**Dr. Morteza Rafiee**

**september 2018**