

دانشکده فیزیک و مهندسی هستهای

رساله دکتری فیزیک هستهای

# محاسبه ویژگیهای استاتیکی هستههای نیمه سنگین دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی

نگارنده: محسن موسوی

استاد راهنما

دكتر محمدرضا شجاعى

شهريور ۱۳۹۷

i



# دانشگاه شاهرود دانشکده: فیزیک و مهندسی هستهای گروه: فیزیک هستهای

#### پایان نامه دکتری محسن موسوی

تحت عنوان:

#### محاسبه ویژگیهای استاتیکی هستههای نیمه سنگین دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی

در تاریخ ...... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک دکتری مورد ارزیابی و با درجه ...... مورد

پذيرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتيد راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			دکتر محمد رضا شجاعی
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگ <u>ی:</u>		نام و نام خانوادگی <u>:</u>
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی <u>:</u>



# تقديم به دوستداران علم

سمر وقدردانی

سپاس از استاد گرامی جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی

اینجانب محسن موسوی دانشجوی دوره دکتری رشته فیزیک هستهای دانشکده فیزیک و مهندسی هستهای دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایاننامه محاسبه ویژگیهای استاتیکی هستههای نیمه سنگین دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی تحت راهنمائی دکتر محمد رضا شجاعی متعهد میشوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
  - در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود میباشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایح اصلی پایاننامه تأثیرگذار بودهاند در مقالات مستخرج از پایاننامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و
   اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است
   اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاريخ

امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامههای رایانهای ، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود میباشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .

استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایاننامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.



مدل پوستهای الگویی برای درک ما از هستههای اتمی است و هستههای جادویی سنگ بنای آن هستند. آنها خواص هسته را در کل محدوده نمودارهای هستهای تعیین میکنند. برخی از خواص استاتیکی هسته مانند سطوح انرژی و شعاع باری برای توصیف ساختار هسته مفید هستند. شعاع باری هسته نقش کلیدی در مطالعه شخصیت هسته و آزمایش مدلهای نظری هسته و همچنین در مطالعه اختر فیزیک و فیزیک اتمی بازی میکند. هستههایی با پوسته بسته پروتون، مانند ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca ،<sup>41</sup>Ca <sup>41</sup>Ca و... یک منطقه ایدهآل برای بررسی تشکیل پوسته و تکامل در هستههای با جرم متوسط فراهم میکنند. ما ایزوتوپهایی مانند Ni <sup>,41-49</sup>Ca <sup>,41</sup>Sc <sup>,17</sup>F ، <sup>17</sup>O و ... در نظر می گیریم، از آنجا که این ایزوتوپها به صورت دو گانه جادویی با یک نوترون در بالای هسته بسته هستند، بنابراین این ایزوتوپها در ناحیه مناسبی برای بررسی با این روش می باشند. از آن جایی که اینگونه ایزوتوپها دارای نوکلئون هایی درخارج از بخش مرکزی جادویی می باشند، ابتدا به مطالعهی نیروی بین نوکلئونها در سیستمهای چند جسمی پرداختیم و سپس با در نظر گرفتن مدل لایه ای به حل معادلات نسبیتی و غیرنسبیتی در حضور پتانسیلهای مناسب با استفاده از روش-های تحلیلی NU و سایر روشها پرداخته و ویژه مقادیر انرژی حالت پایه و توابع موج حالت پایه و انرژی حالت برانگیخته و جذر میانگین مربع شعاع باری ایزوتوپها را محاسبه نمودیم. به عنوان مثال ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca و <sup>49</sup>Ca را می توان به صورت یک ایزوتوپ دوگانه جادویی (N=Z=20 و <sup>49</sup>Ca=n+(N=28,Z=20) به همراه یک نوترون اضافی به ترتیب در لایه 1f<sub>7/2</sub> و لایه 2P<sub>3/2</sub> در نظر گرفت. اسپين و پاريته حالت پايه کلسيم ۴۱ و ۴۹ به ترتيب  $J^{\pi}=7/2$  و  $J^{\pi}=3/2$  مي باشد که مربوط به اسپين و پاریته آخرین لایهای است که نوکلئون ظرفیت در آن قرار دارد. مطالعه اثرات نسبیتی در سیستمهای کوانتمی معمولا مفید میباشد. بنابراین معادله دیراک که ذرات با اسپین 1⁄2 را توصیف میکند برای بررسی

مسائل زیادی در زمینه فیزیک هستهای و انرژی بالا مورد استفاده قرار گرفته است. معادله دیراک برای بررسی آنها در مدل پوستهای نسبیتی و معادله شرودینگر برای بررسی آنها در مدل پوستهای غیرنسبیتی بکار برده شده است.

**کلمات کلیدی:** معادله شرودینگر؛ معادله دیراک؛ روش تحلیلی NU ؛ جذر میانگین مربع شعاع باری؛ ویژه مقادیر انرژی؛ هستههای جادویی به همراه نوترون اضافی.

د

ليت مقالات متخرج ازمامان نامه

[1] Mohammad Reza Shojaei, Mohsen Mousavi, Solutions of the Klein-Gordon equation for  $l\neq 0$  with position-dependent mass for modified Eckart potential plus Hulthen potential, Int. J. Phys. Sci. **10** (9) 324–328 (2015).

[2] Mohsen Mousavi, Mohammad Reza Shojaei, Solutions of Eckart potential plus Hulthen potential in the Presence of Spin Symmetry and Pseudo spin Symmetry, Second International conference on Research in Science and Technology Turkey 14 march (2016).

[3] Mohammad Reza Shojaei, Mohsen Mousavi, The effect of tensor interaction in splitting the energy levels of relativistic systems, Advances in High Energy Physics, Article ID 8314784 (2016).

[4] Mohsen Mousavi, Mohammad Reza Shojaei, Calculation of energy and charge radius for doublymagic nuclei of <sup>41</sup>Ca and <sup>41</sup>Sc with extra nucleon, Chinese Journal of Physics, **54**, 750–755, (2016).

[5] Mohsen Mousavi, Mohammad Reza Shojaei, Remove degeneracy in Relativistic Symmetries for Manning-Rosen plus quasi-Hellman potentials by tensor interaction, Communications in Theoretical Physics, **66**, 483–490, (2016).

[6] Mohammad Reza Shojaei, Mohsen Mousavi, "Bound state energy of double close plus one nucleon nuclei with relativistic mean field approach" Pramana - Journal of Physics, **88**:21, (2017).

[7] Mohsen Mousavi, Mohammad Reza Shojaei, Azadeh Hejazi Juybari, "Investigation of N-identical few-body bound systems in the relativistic and non-relativistic description", Chinese Journal of Physics, **55**, 583–593, (2017).

[8] Mohsen Mousavi and Mohammad Reza Shojaei, Mirror Nuclei of <sup>17</sup>O and <sup>17</sup>F in Relativisticand Nonrelativistic Shell Model, Advances in High Energy Physics Volume 2017, Article ID 5841701, 5 pages, (2017).

[9] Mohsen Mousavi and Mohammad Reza Shojaei, Relativistic solution of Eckart plus Hulthen potentials in the presence of spin and pseudospin symmetry, Indian Journal of Pure & Applied Physics, **56**, 218-225, (2018).

[11] Mohsen Mousavi and Mohammad Reza Shojaei, Relativistic Few-Body Bound Systems with Tietz-Hua (TH) Potential, Iranian Conference on Mathematical Physics (ICMP2016), (2016).

. فهرست مطالب

ش	فهرست جداول
ط	فهرست اشكال
١	فصل ۱: مدلهای هستهای
۲	۱-۱ دستهبندی هستهها
۴	۲-۱ مدلهای هستهای
۴	۱-۲-۱ مدل قطره مایع
۵	۱–۲–۲ مدل پوستهای
۵	۱–۲–۳ انواع مدل پوستهای
۶	۲-۱-۴ مدل جمعی
۶	۱–۲–۵ مدل اپتیکی
γ	۱–۲–۶ مدل خوشهای
۷	۱-۳ نیرو و ذرات تبادلی بین نوکلئونها
٨	۱-۳-۱ ویژگیهای نیروی بین نوکلئونها
۹	۱–۳–۲ مدل نیروی تبادل
11	۱–۳–۳ نظریه یوکاوا
۱۳	۱-۴ نیروی چند جسمی
١٧	فصل ۲:روشهای حل مساله
۱۸	۲–۱ مقدمه
۱۹	۲-۲ کلیات روش NU
77	۲-۳ روشهای رایانهای و عددی
۲۳	۲-۴ ذرات نسبیتی با اسپین صفر

۲-۴-۲ بررسی معادله کلاین-گوردن با پتانسیل بهبود یافته هولسن و ایکارت به همراه وابستگی مکانی
جرم
۲-۴-۲ بررسی حالت خاص مسئله
۲-۴-۲ مروری بر روش PNU:
۲۵ بررسی معادله کلاین-گوردن با پتانسیل (Tietz-Hua (TH
۱–۵–۲ بررسی نتایج مسئله ۳۴
۲-۶ بررسی سیستمهای چند جسمی در حالت نسبیتی و غیرنسبیتی با استفاده از پتانسیل بهبود یافته
هولسن و یوکاوای مرتبه دوم
۱-۶-۲ بررسی غیرنسبیتی مسئله با استفاده از روش PNU PNL بررسی غیرنسبیتی مسئله با
۲-۶-۲ بررسی غیرنسبیتی مسئله با استفاده از روش SUSYQM ۳۷
۲-۶-۲ بررسی نسبیتی مسئله با استفاده از روش PNUPNL بررسی نسبیتی مسئله با استفاده از روش
۲-۶-۲ بررسی نسبیتی مسئله با استفاده از روش ابر-تقارن SUSYQM
۲-۷ طیف انرژی معادله دیراک با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبهاسپینی
۲-۲-۱ معادله اساسی دیراک
۲-۷-۲ مروری بر روش Formula
۲-۷-۳ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی۵۳
۲-۷-۴ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبهاسپینی ۵۷
۲-۷-۵ ویژه مقادیر انرژی در تقارن اسپینی با پتانسیل کولمبی و یوکاوا به عنوان برهم کنش تانسوری۶۱
۲-۷-۶ ویژه مقادیر انرژی در تقارن شبهاسپینی با پتانسیل کولمبی و یوکاوا به عنوان برهم کنش تانسوری ۶۳
۶۷۶۷ جمع بندی
۸-۲ بررسی پتانسیل Manning-Rosen و quasi-Hellman در سیستم نسبیتی معادله دیراک
۲–۸–۱ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی۶۸
۲-۸-۲ ویژه مقادیر انرژی در تقارن شبهاسپینی:۷۳
فصل ۳: محاسبات طیف انرژی ۲۹

۸۰۸۰ مقدمه
۲-۳ محاسبه طیف انرژی ایزوتوپهای آینهای a <sup>41</sup> Ca و <sup>41</sup> Sc
۳-۳ محاسبه طیف انرژی ایزوتوپهای آینهای <sup>17</sup> 0 و <sup>17</sup> F
۳-۳-۱ بررسی نسبیتی ایزوتوپهای آینهای <sup>17</sup> 0 و <sup>17</sup> <sup>۲</sup> ۸۷
۳–۳–۲ بررسی غیرنسبیتی ایزوتوپهای آینهای <sup>17</sup> 0 و <sup>17</sup> <sup>۲</sup> ۸۹
۳-۴ محاسبه انرژی برخی از ایزوتوپهای دوگانه جادویی با یک نوترون اضافی در لایه ظرفیت۹۱
۵-۳ محاسبه انرژی برخی از ایزوتوپهای اکسیژن به کمک معادله شرودینگر D-بعدی ۹۵
۳-۶ محاسبه انرژی ایزوتوپهای فرد <sup>41-49</sup> Ca به کمک معادله شرودینگر D-بعدی
۲-۳ بررسی تحلیلی ایزوتوپهای <sup>41</sup> Ca و <sup>49</sup> Ca در توصیف نسبیتی و غیرنسبیتی
۳-۷-۱ بررسی طیف انرژی در معادله دیراک
۳-۷-۲ بررسی طیف انرژی در معادله شرودینگر
۳-۷-۳ نتیجه گیری
پیشنهادات
مراجع

هرست حدول کم

جدول (۲-۱) ضرایب (c<sub>i</sub> (i=4, 5 ...13) جدول (۲-۱) ضرایب جدول (۲-۲) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت غیرنسبیتی با استفاده از دو lpha=0.01 fm $^{-1}$ , v $_0$ =70 fm $^{-1}$ , روش يارامترى NU و ابر تقارن بر حسب مقادير مختلف v $_1$  و مقادير ثابت NU و ابر تقارن بر حسب مقادير مختلف v $_1$ ۴۲ ..... h=1, m=1fm<sup>-1</sup> and N=2 جدول (۲–۳) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت غیرنسبیتی با استفاده از دو روش يارامتري NU و ابر تقارن بر حسب مقادير مختلف v<sub>0</sub> و مقادير ثابت NU و ابر تقارن بر حسب مقادير مختلف v<sub>0</sub> جدول (۲–۴) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت نسبیتی با استفاده از دو روش  $\alpha$ =0.01 fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=60, h=c=1, المترى NU و ابر تقارن بر حسب مقادير مختلف v<sub>1</sub> و مقادير ثابت NU و ابر تقارن بر حسب مقادير مختلف v<sub>1</sub> جدول (۲–۵) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت نسبیتی با استفاده از دو روش  $\alpha$ =0.01 fm<sup>-1</sup>,  $v_1$ =40fm, h=c=1, المترى  $v_0$  و مقادير مختلف  $v_0$  و مقادير  $v_0$  و ابر تقارن بر حسب مقادير مختلف NU و المترى NU و المترى  $v_0$  $m=15 \text{ fm}^{-1} \text{ and } N=2$ جدول (۲–۶) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) در حالت تقارن اسپینی برای حضور و عدم حضور پتانسیل The main market of the marke جدول (۲–۷) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) برای حالت تقارن اسپینی برای آلفاهای مختلف با  $\Delta \mathcal{F}$ .... M=10fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, V<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, V<sub>0</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=2fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub> =5fm<sup>-1</sup>. يار امتر هاى جدول (λ-۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>-1</sup>fm) برای حالت تقارن اسپینی برای جرمهای مختلف با  $M=10 \text{fm}^{-1}$ , c=1, h=1, V<sub>1</sub>=4 fm<sup>-1</sup>, V<sub>0</sub>=3 fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1 fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=2 fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub> =5 fm<sup>-1</sup>. يا, امتر هاى جدول (۲–۹) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) در حالت تقارن شبهاسیینی برای حضور و عدم حضور  $M=10~{
m fm}^{-1},~c=1,~\hbar=1,~lpha=0.05{
m fm}^{-1},~V_1=0.4{
m fm}^{-1},$  يتانسيل تانسوري كولني با يارمترهاي  $v_0 = 0.3 \text{ fm}^{-1}, q_1 = 0.1 \text{ fm}^{-1}, q_2 = -0.2 \text{ fm}^{-1}, C_{\text{ps}} = -5 \text{ fm}^{-1}.$ جدول (۲-۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) برای حالت تقارن شبهاسیینی برای آلفاهای مختلف با ۵۹ M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, V<sub>1</sub>=4 fm<sup>-1</sup>, V<sub>0</sub>=3 fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1 fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=2 fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> = -5 fm<sup>-1</sup>. يار امتر هاى

جدول (۱۱-۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) برای حالت تقارن شبهاسیینی برای جرمهای مختلف با ۶۰ c=1, h=1, α=0.05 fm<sup>-1</sup>, V<sub>1</sub>=4 fm<sup>-1</sup>, V<sub>0</sub>=3 fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1 fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=-2 fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5 fm<sup>-1</sup>, L<sub>1</sub>=4 fm<sup>-1</sup>, V<sub>1</sub>=4 fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5 fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5 fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-1 fm<sup>-1</sup>, جدول(۲-۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) در حالت تقارن اسپینی برای حضور و عدم حضور پتانسیل  $M=10 \text{ fm}^{-1}, c=1, h=1, \alpha=0.4 \text{ fm}^{-1}, a=1 \text{ fm}^{-1}, b=1 \text{ fm}^{-1}, u=1 \text{ fm}^{-1}$  تركيبي تانسوري هولسن و يوكاوا با پارمترهاي جدول (۲–۱۳) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب fm<sup>-1</sup>) برای حالت تقارن اسپینی برای آلفاهای مختلف با M=10  $\forall 1$  ..... fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub>=5fm<sup>-1</sup> جدول (۲–۱۴) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) برای حالت تقارن اسپینی برای جرمهای مختلف با V۱ ..... c=1, h=1, α=0.4 fm<sup>-1</sup>, a=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, B=1 fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub>=5 fm<sup>-1</sup> یار امتر های جدول(۲–۱۵) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) در حالت تقارن شبهاسیینی برای حضور و عدم حضور M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, يتانسيل تانسورى كولنى با يارمترهاى M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup> جدول (۲–۱۶) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) برای حالت تقارن شبهاسیینی برای آلفاهای مختلف با ۷۵ ......M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>. يارمترهاى جدول (۲–۱۷) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) برای حالت تقارن شبهاسپینی برای جرمهای مختلف با ۷۵ ...... c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>. يارمترهاى جدول (۱–۳) سایر ضرایب (۱3… ٤، (i=4, 5) نیز با توجه به روش یارامتری NU ...... ۸۵ جدول (۲-۳) انرژی حالت یایه و برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca و <sup>41</sup>Sc در توصیف نسبیتی از معادله ديراک ..... جدول (۳–۳) شعاع باری این ایزوتوپهای <sup>41</sup>Sc و <sup>41</sup>Ca در حالت یابه ...... جدول(۳-۴) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>17</sup>F و <sup>17</sup>C در توصیف نسبیتی و غیرنسبیتی  $(\alpha = 0.012 \text{ fm}^{-1})$ جدول(۳–۵) مقایسه انرژی حالت برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>17</sup>F و <sup>17</sup>C نسبت به انرژی حالت یایه (حالت ۹۱ ..... برای ایزوتوپهای  $^{17}$ و  $^{17}$ ی تمام داده ها بر حسب MeV می باشد.  $^{17}$  و  $^{17}$ جدول(۳-۶) انرژی حالت یایه و برانگیخته برای ایزوتوپها در توصیف نسبیتی معادله دیراک به ازای 9۴.....α(fm<sup>-1</sup>)=0.0127 جدول (۲–۷) شعاع باری ایزوتوپها در حالت یایه به ازای ۵.0127 (fm<sup>-1</sup>)=0.0127) شعاع باری ایزوتوپها در

٩٨	جدول (۳-۸) ضرایب(13 ٤ <sub>i</sub> (i=4, 5
زوتوپهای اکسیژن(α=0.014fm <sup>-1</sup> )	جدول (۳–۹) مقادیر انرژی حالت پایه برخی از ای
در حالت پایه	جدول (۳-۱۰) شعاع باری ایزوتوپهای <sup>41-49</sup> Ca
ی ایزوتوپهای <sup>41</sup> Ca و <sup>49</sup> Ca در توصیف نسبیتی از معادله	جدول (۳-۱۱) انرژی حالت پایه و برانگیخته برا
111	ديراک (α=0.0181fm <sup>-1</sup> )
ای ایزوتوپهای <sup>41</sup> Ca و <sup>49</sup> Ca در توصیف غیر نسبیتی از	جدول (۳-۱۲) انرژی حالت پایه و برانگیخته بر
111	معادله شرودينگر (\alpha=0.0181fm <sup>-1</sup> )

فهرست شكل كم

شکل(۱-۱) انرژی حالتهای SQP در پوسته N=3 بر حسب تابعی از تعداد نوترونها [۱]۲
شکل (۱-۲) پیکربندیها و جمله های <sup>۱۹</sup> 0 [۱]۳
شکل (۱-۳) پارامترهای ماکروسکوپی مدل قطره مایع۴
شکل (۱-۴) نیروهای چند جسمی (a) نیروی دو جسمی (b) نیروی سه جسمی ۱۴
شکل (۱–۵) نمودار فایمن نیروی سه جسمی [۸].
شکل (۲-۱) تغییرات ترازهای انرژی معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات bh برای مقادیر ثابت m=50, شکل (۲-۱) تغییرات ۳۴ برای مقادیر ثابت m=50, معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات bh برای مقادیر ثابت m=50, معادله کلاین-
شکل (۲-۲) تغییرات ترازهای انرژی معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات c <sub>h</sub> برای مقادیر ثابت m=20, h=c=1, D=10, re=0.8, and δ=0.89 and c <sub>h</sub> =0.1., برای سستم های (a) دو جسمی و (b) سه جسمی.
شکل (۲–۳) تغییرات ترازهای انرژی معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات re برای مقادیر ثابت m=50,h=c=1, D=10, re=0.85, and δ=0.89 برای سیستمهای (a) دو جسمی و (b) سه جسمی ۳۵
شکل (۴-۲) مقایسه تراز انرژی برای سیستم دو، سه و چهار جسمی بر حسب تغییرات b <sub>h</sub> برای مقادیر ثابت m=50, h=c=1, D=10, r <sub>e</sub> =0.85, and δ=0.2
شکل (۲-۵) تغییرات انرژی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب تغییرات (m <sup>-1</sup> ) v <sub>0</sub> برای مقادیر مختلف v <sub>1</sub> (fm <sup>-1</sup> ) و v <sub>1</sub> (fm <sup>-1</sup> برای سیستم (a) دو جسمی (b) سه جسمی و (c) چهار جسمی
شکل (۲-۶) تغییرات انرژی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب تغییرات ( $v_1 (fm^{-1}) v_1 (fm^{-1})$ برای مقادیر مختلف $v_0 (fm^{-1}) v_0 (fm^{-1}) v_0 (fm^{-1})$ برای سیستم (a) دو جسمی (b) سه جسمی و (c) چهار جسمی.
شکل (۲-۲) مقایسه بین انرژی حالت پایه معادله شرودینگر برای سیستم دو، سه وچهار جسمی بر حسب تغییرات (a) v1(fm <sup>-1</sup> ) و v0(fm <sup>-1</sup> ) (b) و α=0.08fm <sup>-1</sup>
شکل (۲-۸) تغییرات انرژی حالت پایه معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات (۷ <sub>0</sub> (fm <sup>-1</sup> ) برای مقادیر مختلف (fm <sup>-1</sup> ) برای ماه α–0 08 fm <sup>-1</sup> برای محسب (h) در حسب (h) به حسب د (c) حوا
محنتك (

شکل (۲-۹) تغییرات انرژی حالت پایه معادله کلاین گوردن بر حسب تغییرات (۷۱ (fm<sup>-1</sup>) برای مقادیر مختلف v<sub>0</sub> (fm<sup>-1</sup>) و α=0.08 fm<sup>-1</sup> برای سیستم (a) دو جسمی (b) سه جسمی و (c) چهار جسمی. شکل (۲-۱۰) مقایسه بین انرژی حالت پایه معادله کلاین گوردن برای سیستم دو، سه وچهار جسمی بر حسب تغییرات (a) v₁(fm<sup>-1</sup>) و v₀(fm<sup>-1</sup>) و v₀(fm<sup>-1</sup>) و مقدار ثابت α=0.08 fm<sup>-1</sup> ثابت α=0.08 fm<sup>-1</sup> شکل (۱۱-۲) , فتار تقریب بکار برده شده برای a=0.05 fm<sup>-1</sup>، a=0.01 fm<sup>-1</sup> و a=0.1 fm<sup>-1</sup> د.... شکل(۲–۱۲) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و (b) تقارن شبه اسپینی بر حسب پارامتر H برای برهم کنش  $\gamma_1 = 1 \text{ fm}^{-1}, q_2^{\text{ps}} = -2 \text{ fm}^{-1}, q_2^{\text{s}} = 2 \text{ fm}^{-1}, C_s = 5 \text{ fm}^{-1}, C_{\text{ps}} = -5 \text{ fm}^{-1}.$ شکل (۲–۱۳) (a) مولفه بالایی و(b) پایینی برای 1f<sub>7/2</sub> تحت تقارن اسپینی در حضور برهمکنش تانسوری H=0 h =1,  $\alpha=0.05$  fm<sup>-1</sup>,  $V_1=4$  fm<sup>-1</sup>,  $V_0=3$  fm<sup>-1</sup>, M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1,  $u_1$  المترهاي يارامترهاي يارامترهاي M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1 $q_1 = 1 \text{ fm}^{-1}, q_2 = 2 \text{ fm}^{-1}, C_s = 5 \text{ fm}^{-1},$ شکل (a) (۱۴-۲) (a) مولفه بالایے و (b) یایینی برای 1d5/2 تحت تقارن اسپینی در حضور برهم کنش تانسوری  $M=10 \text{ fm}^{-1}$ , c=1,  $\hbar=1$ ,  $\alpha=0.05 \text{ fm}^{-1}$ ,  $V_1=4 \text{ fm}^{-1}$ ,  $V_0=3 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_1=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_1=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_1=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_1=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_1=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_1=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_1=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_2=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_3=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_4=1 \text{ fm}^{-1}$ ,  $q_5=1 \text{ fm}^$ ۶۵..... $C_{ps}$ =-5fm<sup>-1</sup>. q<sub>2</sub>=-2fm<sup>-1</sup> شکل (۲–۱۵) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و (b) شبهاسپینی بر حسب پارامتر A برای برهم کنش  $M=10 \text{ fm}^{-1}, c=1, \hbar=1, \alpha=0.05 \text{ fm}^{-1}, v_1=4 \text{ fm}^{-1}, v_0=3 \text{ fm}^{-1}, q_1=1 \text{ fm}^{-1}, u_1=1 \text{ fm}^{-1},$  $q_2^{ps} = -2fm^{-1}, q_2^{s} = 2fm^{-1}, C_s = 5fm^{-1}, C_{ps} = -5fm^{-1}.$ شکل (۲-۱۶) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و(b) شبه اسپینی بر حسب پارامتر A=H برای برهم- $M=10 \text{ fm}^{-1}, c=1, h=1, \alpha=0.05 \text{ fm}^{-1},$  كنش تانسوري يوكاوا به همراه كولمبي با يارامترهاي 99..... $v_1 = 4fm^{-1}$ ,  $v_0 = 3fm^{-1}$ ,  $q_1 = 1fm^{-1}$ ,  $q_2^{ps} = -2fm^{-1}$ ,  $q_2^s = 2fm^{-1}$ ,  $C_s = 5fm^{-1}$ ,  $C_{ps} = -5fm^{-1}$ . شکل (۲–۱۷) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و (b) شبه اسپینی بر حسب پارامتر A و H برای مقایسه بین  $M=10 {
m ~fm^{-1}},$  ابرهم کنش تانسوری کولنی با پارامترهای  $M=10 {
m ~fm^{-1}},$  $c=1, h=1, \alpha=0.05 fm^{-1}, V_1=4 fm^{-1}, V_0=3 fm^{-1}, q_1=1 fm^{-1}, q_2^{ps}=-2 fm^{-1}, q_2^{s}=2 fm^{-1}, C_s=5 fm^{-1}, C_s=0.05 fm^{-1}$ 

۶۶..... $C_{ps} = -5 \text{fm}^{-1}.$ شکل (۲–۱۸) , فتار تقریب بکار برده شده برای  $\alpha = 0.07 \text{ fm}^{-1}$  شکل (۲–۱۹) (a) مولفه بالایی و (b) پایینی برای 1f<sub>5/2</sub> تحت تقارن اسپینی در حضور برهم کنش تانسوری M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4 fm<sup>-1</sup>, a=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, يوكاوا و هولسن براي يارامترهاي M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4 fm<sup>-1</sup>, a=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4 fm<sup>-1</sup>, a=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4 fm<sup>-1</sup>, a=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4 fm<sup>-1</sup>, a=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup></sup>  $VY = B = 1 \text{ fm}^{-1}, v_0 = v_1 = 0.1, Cs = 5 \text{ fm}^{-1}.$ شکل (۲-۲) (a) مولفه بالایی و (b) پایینی برای 1g<sub>7/2</sub> تحت تقارن اسپینی در حضور برهم کنش تانسوری M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, μe  $V \mathcal{P}$ ..... B=1fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=v<sub>1</sub>=0.1, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>. شکل (۲۱-۲) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و (b) شبهاسپینی بر حسب پارامتر v<sub>0</sub>=v<sub>1</sub> برای مقایسه  $M=10~{
m fm}^{-1},~{
m c}=1,~{
m h}=1,~{lpha}=0.4{
m fm}^{-1},$  بين برهم كنش تانسوري يوكاوا به همراه هولسن با يارامترهاي  $\forall \textbf{\textit{P}}....a=1 fm^{-1}, \ b=1 fm^{-1}, \ A=1 fm^{-1}, \ B=1 fm^{-1}, \ C_s=5 fm^{-1}, \ C_{ps}=-5 fm^{-1}.$ شکل (۳-۱) طرح واره حالت یایه و چند حالت برانگیخته برای <sup>17</sup>0 [۷۹]..... شکل (۲–۳) رفتار ویژه مقدار انرژی در حالت مقید بر حسب  $v_0$  برای مقادیر مختلف  $v_1$  برای مقادیر ثابت ٩٨ ..... ۲ (a در حالت α=0.08fm<sup>-1</sup>, m=8fm<sup>-1</sup> شکل (۳–۳) رفتار ویژه مقدار انرژی در حالت مقید بر حسب ۷۱ برای مقادیر مختلف ۷۷ برای مقادیر ثابت α=0.08fm<sup>-1</sup>, m=8fm<sup>-1</sup> در حالت α در حالت α=0.08fm<sup>-1</sup>, m=8fm<sup>-1</sup> شکل (۳-۴) مقایسه ویژه مقدار انرژی حالت مقید بر حسب ۵ vo (a و vi (b برای مقادیر مختلف N (سیستم ۲، ۳ و ۴ نوکلئونی) و مقادیر ثابت α=0.08fm<sup>-1</sup>, m=8fm<sup>-1</sup> برای سیستم مقید..... شکل (۵–۳) رفتار تقریب بکار گرفته شده با مقدار ثابت  $\alpha = 0.08 \; \mathrm{fm}^{-1}$ شکل (۳-۶) مقایسه ویژه مقدار انرژی حالت پایه بر حسب a) v1 و b) v0 برای مقادیر مختلف N (سیستم ۲، ۳ و ۴ جسمی) و مقدار ثابت α=0.08fm<sup>-1</sup> .... شکل (۳-۷) مقایسه بین ترازهای انرژی محاسبه شده و تجربی برای ایزوتوپهای فرد کلسیم. .....۱۰۵ شکل (۸–۳) رفتار تقریب بکار برده شده برای مقادیر (α=0.02, 0.1(fm<sup>-1</sup>) رفتار تقریب بکار برده شده برای مقادیر

فس اول: مدل بری ستای

#### ۱–۱ دستهبندی هستهها

در حالت کلی هستهها را بر حسب تعداد نوکلئونهایشان میتوان به سه دسته تقسیم کرد: زوج-فرد، فرد-فرد و زوج-زوج.

۱- هستههای زوج -فرد: هستههایی که تعداد پروتونهای زوج و نوترونهای فرد و بالعکس دارند.
 ۱۱۳Sn <sup>207</sup>Pb <sup>17</sup>O, مانند:

مدل لایهای در هستههای زوج – فرد به دو نوع تقسیم می شود: الف) مدل لایهای ذره خیلی مستقل: اگر در هستههای زوج – فرد به استثنا یکی از نوکلئونها، بقیه نوکلئونهای موجود در هسته تزویج شده باشند و خواص هسته از حرکت همین نوکلئون تزویج نشده ناشی می شود، به آن مدل لایهای ذره خیلی مستقل می گویند.

ب) مدل لایه ای کامل: (در مورد این هسته ها می توان از مدل خوشه ای نیز استفاده کرد اگر در هسته های زوج – فرد چند نوکلئون تزویج نشده در خارج از بخش مرکزی جادویی قرار بگیرد، به آن مدل لایه ای کامل گویند.

سادهترین حالتهای یک هسته با Z زوج و N فرد حالتهای شبه ذرهای منفرد (SQP) هستند. این حالت ها، حالتهایی هستند که با اضافه کردن یک ذره یا یک حفره به نزدیکترین هستههای زوج- زوج بدست میآیند.



شکل (۱-۱) انرژی حالتهای SQP در پوسته N=3 بر حسب تابعی از تعداد نوترونها [۱].

در <sup>19</sup>O چگونگی کار در شکل (۱–۲) نشان داده شده است. با گذاشتن ۳ نوترون در ۳ مدار موجود، تعداد ۹ پیکربندی امکان پذیر است که انرژی هر کدام از آنها برابر حاصل جمع انرژیهای آن مدار است. با توجه به امکانات مختلف جمع کردن تکانههای زاویهای مداری جملههای حاصل از این پیکربندیها در سمت راست شکل (۲–۱) نشان داده شده است. تمام جملهها دارای پاریته مثبت هستند زیرا که جمع سه مقدار L زوج همیشه زوج است. برای مثال ۵ حالت (1/2) وجود دارد که هر یک ترکیب خطی از این جملهها



شکل ۱-۲ پیکربندیها و جملههای <sup>19</sup>0 [۱].

**۲- هستههای فرد- فرد:** هستههایی که تعداد پروتونهای فرد و نوترونهای فرد دارند بررسی مدل لایهای در هستههای با تعداد فرد پروتون و نوترون پیچیده است.

۳- هستههای زوج - زوج: هستههایی که تعداد پروتونهای زوج و نوترونهای زوج دارند که به صورت مدل معنی و یا مدل خوشهای مورد بررسی قرار می گیرد، مانند: <sup>16</sup>O، <sup>118</sup>Sn [۱].

# ۱–۲ مدلهای هستهای

۱- مدل باید بتواند خواص هستهای که تا کنون اندازه گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد. ۲- مدل بابد خواص دیگری را پیشبینی کند که در آزمایشهای جدید قابل اندازه گیری باشد. برخی از این مدلها عبارتند از: مدل قطره مایع، مدل پوستهای، مدل جمعی، مدل اپتیکی، مدل خوشهای و...

## 1-۲-۱ مدل قطره مایع

در این مدل ماده هستهای مانند یک قطره مایع باردار رفتار می کند و باید حرکت کلی مایع را برای محاسبه ویژگیهای مختلف هسته در نظر گرفت. مدل قطره مایع توسط وایزاکر<sup>۱</sup> برای یافتن جرمهای هستهای و انرژی بستگی بر حسب پارامترهای ماکروسکوپی نظیر انرژی حجمی، انرژی سطحی، انرژی کولنی، انرژی تزویج هسته با در نظر گرفتن هسته به صورت یک قطره مایع توسعه یافت تا انرژی بستگی آن با رابطه زیر داده شود و در شکل (۳–۱) طرح واره این پارامترها نیز نشان داده شده است [۱].

$$B(A,Z) = a_{v}A - a_{s}A^{\frac{2}{3}} - a_{c}Z(Z-1)A^{\frac{-1}{3}} - \frac{a_{sym}(A-2Z)^{2}}{A} \pm \delta$$
(1-1)

که در آن جملات بالا از سمت چپ، به ترتیب جمله انرژی حجمی، جمله انرژی سطحی، جمله انرژی کولونی و جمله انرژی تقارنی و جمله تصحیح انرژی زوجیت میباشند و مقادیر a<sub>s</sub> *a<sub>s</sub> و a<sub>sym</sub> و a<sub>sym</sub> به تر*تیب ثابتهای مربوط به این جملات میباشند.



شکل ۱-۳ پارامترهای ماکروسکوپی مدل قطره مایع.

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup>C.F.Von weisazaacker

## ۱–۲–۲ مدل پوستهای

مدل پوستهای در درک اولیه از اتمها و هستهها به ویژه در فیزیک هستهای نقش اساسی ایفا میکند. این مدل بهترین درک از پوسته هستهای sd را ارایه میدهد. تا به امروز این مدل یک روش اساسی در فیزیک هستهای و به عنوان نقطه شروع نظریه پایه در استخراج کاربردیترین مدلها برای هستههای بزرگتر باقی مانده است.

فرض اساسی مدل پوستهای به نکتهای متکی است که هر نوکلئون در هسته در یک مد منسجم تحت یک پتانسیل میانگین حرکت می کند. که نشان دهنده این واقعیت است که نوکلئونها میتوانند در مدار مختل نشده با توجه به اصل طرد پاولی حرکت کنند. در این مدل ترازهای انرژی به صورت لایهها و زیر لایههایی در نظر گرفته میشوند که نوکلئونها در آن جای گرفتهاند. این لایهها (پوستههای اصلی) متناظر با اعدادی هستند که به آنها اعداد جادویی گفته میشود که عبارتند از ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶ [۱].

## ۲-۲-۱ انواع مدل پوستهای

**الف** – مدل پوستهای ذره خیلی مستقل: این مدل تمام نوکلئونهای تزویج شده را کنار میگذارد و خواص هسته را با استفاده از نوکلئون تزویج نشده محاسبه میکند.

**ب** – **مدل پوستهای کامل:** در این مدل به جای تک نوکلئون منفرد تمام نوکلئونهای موجود در زیر لایه پر نشده در نظر گرفته می شود.

مدل پوستهای در مورد پیشبینی اسپین و پاریته حالت پایه تقریبا تمام هستهها با A فرد موفق است. این مدل در سادهترین شکل، به خوبی قادر به پیشگویی خواص هستههایی با یک نوکلئون بیشتر یا کمتر از اعداد جادویی است. مدل پوستهای همچنین میتواند برای پیکربندیهای پیچیده مربوط به هستههایی که تعداد نوکلئونهای آنها در حد واسط اعداد جادویی است نیز، توسعه یابد.

## ۱–۲–۴ مدل جمعی

این مدل در اوایل سالهای ۱۹۵۰ بوسیله بوهر و موتلسون توسعه یافت. این مدل سعی دارد ویژگیهای هر دو مدل لایهای و قطره مایع را با در نظر گرفتن هسته بطور کامل، حرکتهای اختصاصی نوکلئونهای خارجی تلفیق نماید.

در صدها مورد هستهای زوج – زوج شناخته شده معلوم میشود که همگی آنها دارای یک حالت بی هنجار <sup>+</sup>۲ هستند. خواص کلی دیگری نیز وجود دارند که در همه هستهها مشترکاند، پس بهتر است این خواص را نه با حرکت چند نوکلئون ظرفیت بلکه با تمام هسته مرتبط بدانیم. اینگونه خواص را که منشا آنها در حرکت دسته جمعی اجزای هسته است و بسیاری از نوکلئونهای هسته در ایجادشان شرکت دارند، خواص جمعی گویند. برای توصیف این خصوصیات باید دو نوع ساختار جمعی را در نظر بگیریم زیرا به نظر می رسد که یک دسته از خواص به هستههای 150>A و دسته دیگر به هستههای 190 > A > 150 مربوط میشوند. هستههای با عدد جرمی 150>A را عموما به کمک مدلی مبتنی بر ارتعاشات حول شکل تعادل کروی بررسی می کنند، در حالی که خواص هستههای با عدد جرمی بین ۱۵۰ و ۱۹۰ خیلی شبیه اثرات دورانی سیستمهای غیر کروی است. ارتعاش و دوران، دو نوع اصلی حرکت جمعی در هستهها است [۱].

## ۱–۲–۵ مدل ایتیکی

این مدل در سالهای ۱۹۴۰ پیشنهاد گردید. هسته در این مدل به عنوان یک توپ کریستال مات دیده میشود که میتواند ذرات ورودی را منعکس، منحرف، جذب، یا عبور دهد. روشهای ریاضی متداول در اپتیک برای توضیح این پدیدهها که ممکن است در واکنشهای هستهای رخ دهند، بکار میروند. مدل اپتیکی از نظر توضیح نتایج پراکندگی ذرات ورودی بوسیله یک هسته بهترین مدل است. این مدل نمیتواند بطور دقیق نتایج را برای پراکندگی غیرالاستیک یا برای واکنشهایی که در آنها یک ذره به وسیله یک هسته جذب میگردد، پیش بینی نماید [۱].

## ۱-۲-۶ مدل خوشهای

مدل خوشهای بر اساس این فرضیه بنا شده است که میتوان هستهها را به صورت خوشههای کوچک از نوکلئونها که در کنار هم گرد آمدهاند در نظر گرفت. مهمترین خوشهی نوکلئونی، ذرات آلفا (دو پروتون، دو نوترون) میباشد. انرژی بستگی زیاد ذرهی آلفا ویژگیهای خاصی را برای هسته های نظیر  $1^{2}$ ،  $0^{3}$ ،  $1^{6}$  و غیره که حاوی تعداد درستی از ذره آلفا هستند بوجود میآورد. انرژی بستگی این هستهها مساوی با مجموع انرژی بستگی ذرات آلفای آنها به علاوهی یک سهم کوچک از انرژی بستگی حاصل پیوند بین ذرات آلفا با یکدیگر میباشد، که با انتخاب پتانسیل مناسب  $\alpha$ - $\alpha$  میتوان شعاع و انرژی بستگی هستههای خوشه آلفا را محاسبه کرد. در سال ۱۹۶۸، ایکدا<sup>۲</sup> برای کلیه هستهها دارای N=Z و N=A پیشنهاد کرد که حالت خوشهای با یک برجستگی مربوط به انرژی آستانه واپاشی میتواند ایجاد شود که به دیاگرام ایکدا معروف است. بنابراین، انتظار میرود ساختار خوشهای در آستانه ی واپاشی خوشه و احتمالاً کمی پایین تر،

# ۱-۳ نیرو و ذرات تبادلی بین نوکلئونها

در اینجا یک سوال پیش میآید که چه چیزی اجزای هسته را کنار هم نگه میدارد؟ چون پروتونها با بار مثبت باید همدیگر را به شدت دفع کنند، ولی کنار هم فشرده و چیده شدهاند. روشن است که نیروی دیگری باید وجود داشته باشد که قویتر از نیروی دافعه الکتریکی است و پروتونها و نوترونها را در کنار هم نگه میدارد. فیریکدانان آن را نیروی قوی نامیدند، اما اگر چنین نیروی قوی در طبیعت موجود است چرا آن را در زندگی روزمره خود حس نمی کنیم؟ نکته اینجاست که تقریبا هر نیرویی که ما مستقیما تجربه می کنیم از انقباض ماهیچه گرفته تا انفجار یک دینامیت منشا الکترومغناطیسی دارد. پاسخ این است که آن نیرو اگر

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Ikeda

چه قوی است ولی برد آن کوتاه است. نیروی الکترومغناطیسی و جاذبه دارای برد بینهایت هستند ولی برد نیروی هستهای به اندازه خود هسته است[۱].

## ۱-۳-۱ ویژگیهای نیروی بین نوکلئونها

۱ - برهم کنش بین دو نوکلئون از پایین ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه حاصل می شود. این نیرو غالباً
 جاذبه است، در غیر این صورت دافعه یکولنی بین نوکلئون ها موجب فروپاشی هسته می گردید.
 ۲ - برهم کنش نوکلئون – نوکلئون قویاً وابسته به اسپین است. این نتیجه گیری از عدم موفقیت مشاهده ی
 حالت مقید تک تایه دوترون و هم چنین از اندازه گیری اختلاف سطح مقطعهای حالت تکتایه و سهتایه
 حاصل می شود.

۳- نیروهای هادرونی اشباع پذیرند، اگر هر نوکلئون، تک تک نوکلئونهای دیگر را جذب می کرد تعداد A(A-1)/2 زوج برهم کنش متمایز وجود می داشت. در آن صورت انتظار می دفت که انرژی بستگی با A<sup>2</sup>-(A-1)/A متناسب باشد و تمام هستهها قطری برابر با برد نیروی هستهای داشته باشند. هر دو پیش بینی یعنی: انرژی بستگی متناسب با A<sup>2</sup> و حجم هستهای ثابت برای هستههای 4<A شدیداً با تجربه مخالفت می کند. حجم و انرژی بستگی برای اغلب هستهها با عدد جرمی A متناسب اند. پس هر نوکلئون فقط تعداد محدودی از سایر نوکلئونهای اطراف خود را تحت تأثیر قرار می دهد.

۴- پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جملهٔ غیرمرکزی به نام پتانسیل تانسوری (غیر مرکزی) است. عمده-ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهدهٔ گشتاور چارقطبی در حالت پایهٔ دوترون حاصل میشود. حالت پایه در یک پتانسیل مرکزی همیشه یک حالت S است بنابراین وجود حالت d در دوترون حاکی از این واقعیت است که نیروی هستهای به طور خالص نمیتواند مرکزی باشد.

۵- نیروی هادرونی به سرعت نسبی نوکلئونها وابسته است. از آزمایشات برخورد شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه نیروی نوکلئون- نوکلئون به سرعت نسبی نوکلئونها وابسته است ۶- نیروهای هادرونی مستقل از بار هستند و پس از تصحیح برهم کنش الکترومغناطیسی نیروهای p-p و p-n بین نوکلئونهایی که در یک حالت باشند یکسان است.

قرار دهیم متوجه می شویم که رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریبا ثابت است از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون ها جلوگیری کند [۱].

۱-۳-۲ مدل نیروی تبادل

خصوصیت اشباع نیروهای هستهای و وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی np را میتوان با استفاده از نیروی تبادل توضیح داد: در مورد اولی گفته می شود برای آنکه نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئونها وجود داشته باشد باید بین آنها چیزی رد و بدل شود و در مورد دومی گفته می شود که بین نوکلئونها «چیزی» مبادله میشود که عملا خصوصیت آنها را تغییر میدهد. طبیعی است که آن چیزی را که در برهم کنش نوکلئون – نوکلئون مبادله میشود کوانتوم میدان هستهای در نظر گرفته شود. روشن است که برای تبدیل یک نوترون با اسپین  $\frac{1}{2}$  به یک پروتون با اسپین  $\frac{1}{2}$  ذره مبادله شده باید دارای اسپین درست (صفر یا یک) و بار الکتریکی باشد. بعلاوه اگر بخواهیم همان مفهوم نیروی تبادل را برای برهم کنش nn هم به کار ببریم نوع بدون بار ذره مبادله شونده نیز باید وجود داشته باشد. با استفاده از برد نیروی هستهای که در عمل مشاهده شده است میتوان جرم ذره تبادلی را برآورد کرد. فرض کنید که نوکلئون (که آن را با N نشان

 $N_1 \to N_1 + X \tag{(7-1)}$ 

$$X + N_2 \rightarrow N_3 \tag{(-1)}$$

یک نوکلئون چگونه میتواند یک ذره با انرژی جرم  $m_xc^2$  از خود گسیل کند و بدون نقض پایستگی انرژی همچنان به صورت نوکلئون باقی بماند؟ چنین عملی ممکن نیست مگر اینکه گسیل و جذب مجدد نوکلئون در چنان فاصله کوتاه  $\Delta t$  صورت بگیرد که ما از نقض پایستگی انرژی مطلع نشویم. چون اصل عدم قطعیت توانایی ما را در اندازه گیری انرژی (و در نتیجه در تعیین پایستگی انرژی) محدود میکند. اگر  $\Delta t < \hbar/m_xc^2$  باشد ما از نقض پایستگی انرژی) محدود میکند. اگر  $\Delta t < \hbar/m_xc^2$ 

بیشینه برد نیرو را بیشینه فاصلهای که ذره X میتواند در زمان ∆ طی کند، تعیین میکند. اگر سرعت ذره را از مرتبه C بگیریم، حداکثر برد ذره (R) چنین میشود:

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{200 \text{MeV.fm}}{m_x c^2}$$
(f-1)

که در آن به جای  $\mathfrak{g}$ از تقریب سادهای استفاده شده است. معادله (۱–۴) حاکی از وجود رابطهای مفید بین انرژی جرمی ذرات مبادله شونده و برد نیروی تبادل است. روشن است که اگر برد نیروی هستهای در حدود ۱fm باشد انرژی جرمی ذره تبادلی میباید در حدود MeV ۲۰۰ شود. چنین ذراتی را که فقط برای لحظاتی زودگذر دوام میآورند و میتوانند قانون پایستگی انرژی و تکانه را نقض کنند (در نوکلئونهای جذب کننده و گسیل کننده پس زنی دیده نمیشود)، ذرات مجازی میگویند. میتوان نیروی حاصل از تبادل ذرات مجازی را مشاهده کرد ولی نمیتوان خود این ذرات را در حین تبادل مشاهده کرد (اما ذرات مجازی مبادله شونده را میتوان همانند ذرات معمولی در نظر گرفت. بنا بر نظریه میدان، برهم کنش کولنی بین بارهای الکتریکی را میتوان به صورت تبادل فوتونهای مجازی که خواصی مشابه فوتونهای حقیقی و معمولی دارند در نظر گرفت). ذرات تبادلی حامل نیروی هستهای را « مزون » مینامند (واژه « مزو » یونانی و به معنای میانه است که به جرم متوسط این ذرات که از الکترون بیشتر و از پروتون کمتر است اشاره دارد). سبکترین مزون، مزون  $\pi$  یا پیون نامیده میشود، سه جزء برهم کنش سیستم دو نوکلئونی عبارتند از: پتانسیل تبادل تک – پیون ( OPEP ) به واسطه جرم کوچک پیون، بلند بردترین قسمت برهم کنش نوکلئون – نوکلئون است. شکل کلی برهم کنش نوکلئون – نوکلئون به صورت زیر است[۴، ۵]:  $V_{OPEP} = \frac{g^2}{(\tau_1, \tau_2)} \int_{S_{12}} \frac{3}{\tau_1 + \frac{3}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_2}} \int_{T} f(\mathbf{r}) + \frac{(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)}{2} f(\mathbf{r}) - 4\pi(\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2)\delta(\mathbf{r})$ 

$$V_{\text{OPEP}} = \frac{3}{3} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left\{ s_{12} \left[ \frac{\tau_3}{r^3} + \frac{\tau_2}{\rho_{\pi} r} + \frac{\tau_2}{\rho_{\pi}^2} \right] f(r) + \frac{(\tau_1 \cdot \tau_2)}{\rho_{\pi}^2} f(r) - 4\pi (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(r) \right\}$$

$$(\omega - 1)$$

$$(\omega - 1)$$

$$(\omega - 1)$$

در این بخش تبادل به صورت دو پیون (دو پیون و مزونهای سنگین) صورت می گیرد. چرا که با دو پیون جرم ذره تبادلی دو برابر شده و برد نصف میشود.

۳- بخش کوتاه برد (از۲۵/۰ تا ۱۵/۰ فرمی):

تبادل مزون w ( با انرژی سکون معادل ۷۸۳ MeV) ممکن است در تشکیل مغز دافعه دخالت داشته باشد و تبادل مزون  $\rho$  (با انرژی سکون معادل ۷۶۹ MeV) میتواند تامین کننده اثر اسپین– مدار در برهم کنش هستهای باشد. برای آنکه انواع تبادلهای لازم در سیستم دو نوکلئونی امکان پذیر باشد باید سه نوع پیون با بارهای الکتریکی e+، صفر و e- وجود داشته باشد. پیونها اسپین صفر دارند و انرژی سکونشان معادل با بارهای الکتریکی e+، صفر و e- وجود داشته باشد. پیونها اسپین صفر دارند و انرژی سکونشان معادل با بارهای الکتریکی e+، صفر و e- وجود داشته باشد. پیونها اسپین صفر دارند و انرژی سکونشان معادل با براهای الکتریکی e+، صفر و e- وجود داشته باشد. پیونها اسپین صفر دارند و انرژی سکونشان معادل با بارهای الکتریکی e+، صفر و e- وجود داشته باشد. پیونها اسپین صفر دارند و انرژی سکونشان معادل با این برهم کنش نوترون–پروتون با تبادل هر دو نوع پیون باردار و خنثی تحقق پذیر است و در رابطه (۱–۶) این برهمکنش ها نشان داده شده است [1].

 $\mathbf{n}_1 \rightarrow \mathbf{n}_1 + \pi^0 \qquad \pi^0 + \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{p}_2 \qquad \mathbf{n}_1 \rightarrow \mathbf{p}_1 + \pi^- \qquad \pi^- + \mathbf{p}_2 \rightarrow \mathbf{n}_2 \qquad (\not P - \mathbf{1})$ 

#### ۱-۳-۳ نظریه یوکاوا

مفهوم نیروهای تبادلی اولین بار توسط یوکاوا در نظریه مزونیاش بیان شد. طبق این نظریه اگر ما رفتار نیروهای هستهای را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مورد بررسی قرار دهیم، یک رفتار طبیعی را مبنی بر این که برد نیروهای هستهای کوتاه برد است مشاهده خواهیم کرد. برد نیروهای هستهای از مرتبه میباشد که در آن  $m_{\pi}$  جرم مزون  $\pi$  یا پیون است. طبق این نظریه عامل برهم کنش بین نوکلئونها  $\hbar/m_{\pi}c$ مزون  $\pi$  است. اساس نظریه مزونی یوکاوا معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین-گوردن

می گوییم. همان طور که میدانیم انرژی نسبیتی برای یک ذره آزاد به صورت زیر نوشته می شود [۱]. $E^2 = p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4$ 

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$
 (A-1)

$$\mathbf{P} \rightarrow -\mathbf{i}\hbar\vec{\nabla} \tag{(9-1)}$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Phi + m_\pi^2 c^4 \Phi$$
(1.-1)

با در نظر گرفتن چهار بردار X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, X<sub>3</sub> برای قسمت فضایی و X<sub>4</sub>=ict قسمت وابسته به زمان رابطه بالا به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[-\hbar^2 \mathbf{c}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_4^2} + \frac{\mathbf{m}_\pi^2 \mathbf{c}^2}{\hbar^2}\right)\right] \Phi = 0$$
(1)-1)

که معادله کلاین-گوردن را در دو حالت وابسته به زمان و مستقل از زمان به صورتهای زیر می توانیم بنویسیم.

وابسته به زمان:

$$(\Box^{2} + \mu^{2})\Phi = 0 \qquad \Box^{2} = -\sum_{i=1}^{4} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{i}^{2}}$$
 (17-1)

مستقل از زمان:

$$\left(\nabla^2 + \mu^2\right) \Phi = 0 \qquad \nabla^2 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} , \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar}$$
(1۳-1)  
and the Sullivi-Zerce:  

$$\left( \Box^2 + \mu^2 \right) \Phi = 0$$
(14-1)

که برای حالت پایا معادله کلاین-گوردن به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \quad \rightarrow \quad \Box^2 = \nabla^2 \quad \rightarrow \quad \left(\nabla^2 + \mu^2\right) \Phi = 0 \tag{10-1}$$

 $\hbar/m_{\pi}c$  با حل معادله اخیر برای  $\Phi$  به جواب  $\Phi^{-\mu r/r}$  میرسیم. که برد نیروی هستهای از مرتبه  $4/\mu$  یا  $\hbar/m_{\pi}c$  میشود. اگر برد نیروی هستهای  $10^{-13}$  فرمی) به نتیجه میشود. اگر برد نیروی هستهای  $\hbar/m_{\pi}c$  فرمی) به نتیجه  $m_{\pi}=200m_{e}$  می شود. اگر برد نیروی هستهای تا فرمی با جواب به دست آمده از آزمایشات قابل مقایسه است. پس معادله کلاین-گوردن مزون  $\pi$  را توجیه می کند [۱].

## ۱-۴ نیروی چند جسمی

تا اینجا بطور ضمنی فرض شد که نیروی هستهای نیروی دو جسمی است همانطور که در شکل (۱-۴) نیز مشاهده می کنید نیروی دو جسمی  $F_{AB}$  میان دو نوکلئون A و B وجود دارد. بنابراین برهم کنشهای دو جسمی به طور طبیعی در زمینه یتئوری نظریه تبادل مزون و در سطح بنیادی تر از QCD به وجود می آیند. حال اگر نوکلئونهای A، B و C مطابق شکل (۱-۴) نزدیک هم باشند، نیروی اعمال شده بر A،  $F_{AB}+F_{AC}$  است که اگر C نبود اعمال شده بر A، S و C می آیند. است که اگر C نبود Rab نیروی میان A و B بود و اگر B نبود نیروی Fac میان A و C می شد [۱، ۶].



شکل (۱-۴) نیروهای چند جسمی: (a) نیروی دو جسمی (b) نیروی سه جسمی.

البته این رفتار نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی است. از آنچه در مدل نیروی تبادل در بخشهای پیشین دیدیم، چنین بر میآید که نیروی تبادل مزونی فقط میان جفتها عمل میکنند، اما تبادلهای دیگری نیز وجود دارند. برای مثال هنگامی که دو نوکلئون حضور دارند و یکی از نوکلئونها دو مزون گسیل میکند، هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند، ولی هر گاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول حضور داشته باشند دو مزون گسیل شده میتوانند جداگانه جذب هر یک از دو نوکلئون شوند. این امر منجر به «نیروی سه جسمی» میشود، نیرویی که در آن دیگر تعریف بالا از نیروی دو جسمی برقرار نیست. به سادگی میتوان نتیجه گرفت که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهار جسمی و پنج جسمی و غیره (که به طور کلی نیروی

در فیزیک ذرات بنیادی، بر هم کنش ما بین سه کوارک، که هادرونها را تشکیل میدهند، میتوانند با مدل کوارکی که همارز نیروی سهجسمی میباشد توصیف شوند. بنابراین نیروی سهجسمی مربوط به بخش هادرون (باریون) است. مهمترین جمله در پتانسیل سه نوکلئونی که بزرگترین برد احتمال دارد به فرآیند شناخته شدهای مانند (TPE-3NP)<sup>۳</sup> مربوط است. یک پیون که به وسیلهی یکی از نوکلئونها تابش شده است، قبل از جذب شدن بهوسیلهی سومین نوکلئون، توسط نوکلئون دوم پراکنده میشود [۷]. همچنین مدل پدیده شناختی موفقیتهای متعددی در نیروی هستهای داشته است، که به طور معمول چندین مدل

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> Two-pion exchange three-nucleon potential

پدیده شناختی نیروی سه جسمی حاصل از سهم تبادل دو پیون وجود دارد (درشکل (۱−۵) نمودار فایمن نیروی سه جسمی، تبادل دو پیون نشان داده شده است) [۸].



شکل (۱–۵) نمودار فایمن نیروی سه جسمی [۸].

از آنجا که باید مزونهای زیادی به طور همزمان در این فرآیندها ایجاد شوند، با توجه به مدل نیروی تبادل می توان نتیجه گرفت که برد نیروها با افزایش تعداد جسمها کاهش می یابد. می توان به طور تقریبی تخمین زد که برد نیروی n جسمی، (1-n)/1 برابر برد نیروی دو جسمی است. اگر برد را μ/1 بگیریم این مقدار برای نیروهای ۲ ، ۳ ، ۴ و ۵ جسمی به ترتیب حدود ۱/۴ ، ۲/۰ ، ۲/۰ و ۳/۰ فرمی است. برآیند بحث این است که در تعیین ساختار هسته، نیروی دو جسمی است که اهمیت زیادی دارد و نیروهای چند جسمی – به استثنای نیروی سه جسمی – بی اهمیتند. این نیرو به راحتی در سیستمهایی که شامل سه نوکلئون هستند مطالعه می شوند. محققان با توجه به اختلاف در بین دادههای تجربی و محاسبات تئوری بر اساس نیروی دوجسمی، این اختلاف را به عنوان یک نشانه از وجود نیروی سه جسمی دانستند [۸]. برای نمونه می توان به کارهای کیفسکی و همکارانش در مراجع اشاره کرد [۹، ۱۰].

$$\left\langle \mathbf{V}_{2N} \right\rangle \geq \left\langle \mathbf{V}_{3N} \right\rangle \geq \left\langle \mathbf{V}_{4N} \right\rangle \tag{19-1}$$

یک روش رهیافت به مسئله، مطالعه سیستمهای سه نوکلئونی است تا ببینیم که آیا میتوان خصوصیات نیروی سه جسمی را از نیروی دو جسمی محاسبه کرد یا نه؟ جواب منفی شاهدی بر وجود نیروهای سه جسمی خواهد بود. سیستمهای سه نوکلئونی را میتوان به صورت حالتهای مقید نظیر هستههای H<sup>8</sup> و <sup>3</sup>He یا توسط پراکندگی نوترون یا پروتون از دوترون مطالعه کرد که در این زمینه اطلاعات زیادی موجود است. تجزیه و تحلیل این اطلاعات بسیار مشکل است، زیرا مسئله سه جسم در مکانیک کلاسیک نیز هنوز دقیقا حل نشده است. به هر حال کوشش زیادی صرف محاسبه انرژی بستگی H<sup>8</sup> (تریتون) شده است که مقدار تجربی آن ۸/۴۸۲ MeV است [۱۱]. نتایج نشان میدهند که انرژی بستگی ناشی از نیروی دو جسم فقط برابر MeV ۲ است و در نتیجه حدود MeV از انرژی بستگی آن از نیروی سهجسمی و سایر نیروها ناشی میشود. این نتیجه با تخمینهایی که از روشهای دیگر بدست آمده است تفاوت دارد. از اینجا میتوان نتیجه گرفت که اهمیت نیروهای سه جسمی و سایر نیروها در هسته در حدود کمتر از ۲۰ درصد اهمیت نیروهای دو جسمی است. در هستههای پیچیدهتر این تخمین در حدود ۵ درصد است [۱].

فسل دوم: روش پی حل مساله

#### ۲-۱ مقدمه

در فصل اول به بررسی مفاهیم اولیه فیزیک هستهای پرداختیم. حال در این فصل میخواهیم به روشهای حل مساله هم به روش تحلیلی و هم روش عددی و رایانهای نگاه مختصری داشته باشیم. معادلات شـرودینگر<sup>†</sup>، دیراک<sup>۵</sup>، کلاین-گوردن<sup>۶</sup> و DKP<sup>۷</sup> از مهمترین معادلاتی هســتند که برای توصــیف فیزیک سیستمهای غیرنسبیتی و نسبیتی به کار میروند. در این میان میتوان این پتانسیلها را با روشهای متفاوت تحلیلی و عددی حل کرد. از انجایی که فقط پتانسیلهای محدودی به روش تحلیلی دقیق قابل حل میباشند روشهای حل عددی از اهمیت ویژهای برخوردار است. در ادامه بحث ابتدا به معرفی روش تحلیلی NU می پردازیم و سپس به بررسی روش های حل عددی مساله خواهیم پرداخت. در سالهای اخیر به حل سیستمهای کوانتوم مکانیکی در چارچوب روش NU تمایل زیادی نشان داده شده است. این تکنیک جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم پایهریزی شده است که با موفقیت برای حل معادلات موج شرودینگر، دیراک، کلاین-گوردن و DKP در حضور پتانسیل های مرکزی و غیرمرکزی بکار برده شده است. برای مطالعه و بررسی بیشتر موفقیت این روش، مراجع [۱۳، ۱۳] را ببینید. بکارگیری این روش در حل معادله شرودینگر، دستورالعمل روشنی برای بدست آوردن جوابهای دقیق حالتهای مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسـته اشان، بر حسب چند جملهایهای متعامد ارائه میدهد که در عین سادگی بسیار موثر است. از آنجایی که یافتن جوابهای دقیق معادله شرودینگر جز در مواردی خاص هم چون سیستمی با پتانسیل کولنی و یا نوسانگر هماهنگ به روشهای معمول و سنتی غیرممکن است، لذا بکار بســتن این روش می تواند ما را در حل این مشکل پاری رساند و گامی به جلو محسوب می شود. از جمله مواردی که ناگزیر به کنار گذاشتن روشهای معمول و جستجوی روشهای جدید هستیم، حل

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup>Schrodinger

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Dirac

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Klein-Gordon

<sup>&</sup>lt;sup>7</sup> Duffin - Kemmer - petiau
معادله شرودینگر با پتانسیلهای غیرمرکزی است. اینگونه پتانسیلها در شیمی کوانتومی بسیار مورد توجهاند و اخیراً مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده و در حال انجام است. روشهای مختلفی برای حل معادله شرودینگر با پتانسیلهای غیرمرکزی استفاده شده است. ابرتقارن<sup>^</sup>، ایده SIP [۱۵، ۱۴]، انتگرال مسیر [۱۷، ۱۶]، روش فاکتورگیری [۱۹، ۱۸] از آن دسته روشهایی هستند که بدین منظور بکار برده شدهاند. البته باید توجه داشت که روش NU مانند روشهای قبلی در حل معادله شرودینگر با هر نوع پتانسیل معین دلخواه ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیلها که الزامات روش را برآورده می کنند می توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید.

در ادامه این فصل روشNU در حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم بررسی و معرفی میشود. اساس کار این روش بر پایه تقلیل یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، به طور خاص در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه ریزی شده است.

### NU<sup>۹</sup> کلیات روش ۲-۲

این روش براساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایهریزی شده است [۲۰]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، (s=s(r معادله تبدیلیافته را به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^{\gamma}(s)} \Psi_n(s) = \cdot$$
(1-7)

<sup>&</sup>lt;sup>8</sup> SUSY

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> Nikiforov – Uvarov Method

که  $\sigma$  و  $\widetilde{\sigma}$  چند جملهایهایی حداکثر از درجه دوم و  $\widetilde{\tau}$  یک چندجملهای حداکثراز درجه اول است. با درنظرگرفتن تابع موج  $\Psi_n(s)$  به صورت زیر:

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \tag{7-7}$$

معادله (۱-۲) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می شود.

$$\sigma(s)y_n''(s) + \tau(s)y_n'(s) + \lambda y_n(s) = \cdot$$
(Y-Y)

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \tag{4-7}$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + \tau \pi(s) \, \cdot \tau' < \cdot \tag{\Delta-\tau}$$

#### پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شود [۲۰]: $\lambda$

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{\gamma}\sigma''(s) \quad n = \cdot, 1, \gamma, \dots$$
(9-17)

چند جملهای 
$$au(s)$$
 با علامت پریم نشان میدهد که باید مشتق مرتبه اولش منفی باشد.

باید به این نکته توجه کرد که 
$$\mathcal{A}$$
 و  $_n \mathcal{A}$  از یک جواب خاص شـکل  $(s) = y_n(s)$  که چند جملهای درجه  
 $n$  اسـت بدسـت میآیند، بعلاوه اینکه جمله  $(y_n(s)$  تابع موج معادله (۲–۳)، یک تابع از نوع فوق هندسی  
که از رابطه رودریگرز ذیل بدست میآید [۲۰]:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s)\rho(s))$$
(Y-Y)

که در آن $B_n$  ثابت بهنجارش است و ho(s) تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند.

$$\frac{d}{ds}\omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)}\omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s)\rho(s) \tag{A-T}$$

تابع  $\pi(s)$  و پارامتر  $\lambda$  به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{\tau}\right)^{\tau} - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)}$$
(9-7)

$$\lambda = K + \pi'(s) \tag{1.-1}$$

از آنجایی که باید (ε)π حداکثر یک چند جملهای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله (۲-  
۹) باید به صورت یک چند جملهای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص  
کننده آن، 
$$-4ac - b^2 - 4ac$$
، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای K بدست میآید که پس از حل  
معادله مقادیر بدست آمده برای K را در معادله (۲-۹) جایگذاری می کنیم و با مقایسه با معادلات (۲-۶) و  
(۲-۱۰) ویژه مقادیر انرژی را بدست میآوریم. قابل ذکر است که ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع  
وابستهاشان را برای سیستمی تحت یک پتانسیل غیر مرکزی معین به آسانی میتوان با بکار بستن روش  
NU بدست آورد البته باید توجه داشت همان طور که قبلاً هم اشاره شد، این روش همچون روشهای دیگر  
بتانسیلها که الزامات روش را برآورده می کنند، میتوان از این روش به نتیجه مطلوب رسید. در این میان  
روشهای رایانهای در حل مسایل پر دردسر و طاقت فرسا نقش مهمی را ایفا می کنند لذا در ادامه کار  
میخواهیم به طور مختصر با برخی از روشهای رایانهای حل مسایل آشنا شویم [۲۱].

### ۲-۳ روشهای رایانهای و عددی

یکی از بهترین روشهای موجود برای بررسی ساختار و رفتار مواد، روشهای رایانهای و عددی میباشد. روشهای رایانهای از لحاظ کم هزینه بودن کنترل پذیر بودن و برخی مزایای دیگر نسبت به روشهای آزمایشگاهی برترند. امروزه با پیشرفت فناوری رایانهها، روشهای رایانهای نقش به سزایی در پیشبرد و اثبات نظریه و فرضیههای علمی دارد. حتی جهت بررسی و تحلیل سیستمهای چند ذرهای نیز میتوان از روشهای رایانهای و عددی بهره جست. به این منظور در ابتدای امر باید پتانسیلی برای بین ذرات در نظر بگیریم. این کار یعنی انتخاب پتانسیل بین ذرات اصول و قواعد خاص خود را میطلبد.

شناخت پتانسیل بین ذرات یکی از پایههای اصلی برای شناخت، توصیف و پیش بینی رفتار ذرات می باشد. معمولا به دلیل وجود تعداد زیاد ذرهها در یک دستگاه تعیین شکل دقیق پتانسیل واقعی میسر نیست. در عمل پتانسیل با تقریب و بر اساس ملاحظات پدیده شناختی انتخاب می شود. اهمیت و درستی اکثر نتایج حاصل از محاسبات رایانه ی و آنچه آن ها از رفتار واقعی حالتهای مختلف مواد و گذار حالت تحت شرایط مختلف را نشان می دهند به انتخاب صحیح انرژی پتانسیل بستگی دارد. در شبیه سازی های کلاسیک همه اثرهای کوانتومی دستگاههای بس ذره ای در پتانسیل بین ذره ای نهفته است. برای مدل سازی فیزیکی اقسام مختلف مواد مثل فلزها، نیم رساناها و غیره پتانسیل های بس ذره ای مختلفی توسعه داده شده اند. پتانسیل های مورد استفاده در شبیه سازی ها اغلب مرکزی اند. یعنی فقط به فاصله ذرات وابسته اند. یک

در این رابطه شاخصهای i, j مشخص کننده ذرهها هستند. جمله اول سمت راست نشان دهنده وجود پتانسیل خارجی اعمال شده بر ذرههای دستگاه است. این جمله معمولا در نظر گرفته نمی شود. جمله دوم عبارت است از برهم کنشهای دو ذرهای بین ذرهها که معمولا مقدار آن فقط به فاصله نسبی دو ذره از یکدیگر یعنی  $\left| \vec{r}_i - \vec{r}_j \right| = r_i$  بستگی دارد. جملههای بالاتر برهم کنشهای سه ذرهای و چهار ذرهای و ... را نشان میدهند [۲۱].

### ۲-۴ ذرات نسبیتی با اسپین صفر

توصیف پدیدهها در انرژی بالا مستلزم بکارگیری معادلات موج نسبیتی میباشد. معادلات موج نسبیتی مانند کلاین-گوردن و دیراک از مسئلههای جالب در فیزیک انرژی بالا است. در سالهای اخیر مطالعه و بررسی معادلات موج نسبیتی به ویژه معادله کلاین گوردن توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است زیرا حل این معادله نقش مهمی را در فیزیک کوانتوم نسبیتی بازی می کند. این معادله حرکت ذرات با اسپین صفر را در یک میدان پتانسیل توصیف می کند. که شامل عملگر چار-بردار تکانه خطی و جرم سکون اسکالر میباشد. که این دو عامل به ما اجازه میدهند که دو نوع پتانسیل جفت شده یعنی پتانسیل برداری V(r) و پتانسیل اسکالر S(r) را معرفی کنیم. بسیاری از محققین با استفاده از روشهای مختلف حالتهای مقید معادله کلاین-گوردن و دیراک را با پتانسیلهای مختلف، و با استفاده از روشهای گوناگونی از قبیل ابرتقارن، NU و ... مطالعه و بررسی کردهاند [۲۲، ۲۲]. از طرف دیگر مفهوم وابستگی مکانی جرم در سیستمهای مکانیک کوانتمی مورد توجه بسیاری از محققین بوده است. این تحقیقات در زمینههای مختلفی مانند فیزیک نیمه هادیها، کوانتمداتها، مایعهای کوانتمی و ... بسیار مفید بوده و کاربرد فراوانی دارد. به همین خاطر ما به بررسی معادله کلاین-گوردن در سه بعد با پتانسیل بهبود یافته هولسن و ایکارت و جرم وابسته به مکان پرداخته و معادله ویژه مقادیر انرژی و ویژه تابع سیستم را با استفاده از روش تحلیلی NU بدست می آوریم.

$$\frac{d^{2}U(r)}{dr^{2}} + \frac{1}{\hbar^{2}c^{2}}\left\{\left[E - V(r)\right]^{2} - \left[Mc^{2} + S(r)\right]^{2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^{2}}\hbar^{2}c^{2}\right\}U(r) = 0$$
(17-7)

که در آن M جرم سکون، E انرژی نسبیتی، C سرعت نور، ħ ثابت کاهش یافته پلانک، (V(r) و S(r) به ترتیب پتانسیل برداری و اسکالر هستند. از معادله (۲–۱۲) داریم:

$$\frac{d^{2}U(r)}{dr^{2}} + \frac{1}{\hbar^{2}c^{2}} \left\{ E^{2} - M^{2}c^{4} - 2EV(r) - 2Mc^{2}S(r) + V^{2}(r) - S^{2}(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^{2}}\hbar^{2}c^{2} \right\} U(r) = 0 \quad (1\%-7)$$

پتانسیل برداری و اسکالر را با در نظر گرفتن پتانسیل بهبود یافته هولسن [۲۵] و ایکارت [۲۷، ۲۶] به صورت زیر مینویسیم:

$$V(r) = \operatorname{coth}(\alpha r) + \frac{V_0}{(1 - e^{-2\alpha r})}$$
,  $S(r) = \operatorname{coth}(\alpha r) + \frac{S_0}{(1 - e^{-2\alpha r})}$  (14-7)

که <sub>s0</sub> و v0 عمق پتانسیل و مقدار ثابت هستند و وابستگی مکانی جرم را به صورت معادله زیر در نظر

می گیریم.  

$$M(r) = m_0 + m_1 \coth(\alpha r) + m_2 \frac{1}{(1 - e^{-2\alpha r})}$$
(۱۵-۲)

که در آن m<sub>1</sub> ،m<sub>0</sub> و m<sub>2</sub> پارامترهای جرم و m<sub>0</sub>≠m<sub>1</sub> میباشد. اگر تغییر متغیر U(r)=rR(r) را در نظر بگیریم و در معادله (۲–۱۳) جایگزینی کنیم، معادله شعاعی کلاین-گوردن را به صورت زیر داریم:

و در معادله (۱–۱۱) جایترینی کنیم، معادله سعاعی کاین-توردن را به صورت زیر داریم:  
$$d^2 R(r) = 2 dR(r) = 1$$

$$\frac{d R(1)}{dr^{2}} + \frac{2}{r} \frac{dR(1)}{dr} + \frac{1}{\hbar^{2}c^{2}} \left\{ E^{2} - M^{2}c^{4} - 2EV(r) - 2Mc^{2}S(r) + V^{2}(r) - S^{2}(r) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^{2}}\hbar^{2}c^{2} \right\} R(r) = 0$$
(19-7)

معادله بالا به صورت دقیق قابل حل نیست به همین خاطر از تقریب پکریس به صورت زیر استفاده می *کن*یم که این تقریب با شرط 1 </< ar به خوبی برقرار است [۲۸].

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2}{(e^{-2\alpha r} - 1)^2}$$
(1Y-T)

با استفاده از تغییر متغیر (s =(1−exp(−2αr)) معادله (۱۶−۲) به صورت زیر بدست میآید.

$$\frac{d^{2}R(r)}{dr^{2}} + \frac{(-4\alpha)}{s}\frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{\hbar^{2}c^{2}}\left\{E^{2} + \frac{(2-s)^{2}}{s^{2}} + \frac{v_{0}^{2}}{s^{2}} + \frac{2(2-s)v_{0}}{s^{2}} - \frac{2E(2-s)}{s} - \frac{2Ev_{0}}{s} - \frac{2Ev_{0}}{s}\right\}$$

$$-m_{0}^{2}c^{4} - \frac{\left[m_{1}c^{2}(2-s) + m_{2}c^{2}\right]^{2}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}\left[m_{1}c^{2}(2-s) + m_{2}c^{2}\right]}{s} - \frac{(2-s)^{2}}{s^{2}} - \frac{s_{0}^{2}}{s^{2}} - \frac{s_{0}^{2}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}(2-s)}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}(2-s)}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}(2-s)}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}(2-s)}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s} - \frac{2m_{1}c^{2}s_{0}(2-s)}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}(2-s)}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}(2-s)}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}c_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}c_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}c_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}c_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}s_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2}c_{0}}{s^{2}} - \frac{2m_{0}c^{2$$

حال معادله (۲–۱۸) را به صورت زیر خلاصه نویسی میکنیم.

$$R'' + \frac{(-4\alpha)}{s}R' + \frac{1}{s^2} \Big[ A's^2 + B's + c' \Big] R = 0$$
 (19-7)

که پارامترهای 'A، 'B، و 'C به صورت زیر در نظر گرفته میشوند:

و

$$A' = -\frac{1}{\hbar^2 c^2} \{ \gamma - (E^2 + 2E) \}$$

$$B' = \frac{1}{\hbar^2 c^2} (aE + b)$$

$$C' = \frac{1}{\hbar^2 c^2} \{ (v_0 + 2)^2 - (s_0 + 2)^2 - (2m_1 c^2 + m_2 c^2) (2m_1 c^2 + m_2 c^2 + 2s_0 + 4) \} - 4\alpha^2 \ell (\ell + 1)$$

$$\begin{split} \gamma &= \left(m_0 c^2 - m_1 c^2\right) \left(m_0 c^2 - m_1 c^2 - 2\right) \\ a &= -\left(4 + 2v_0\right) \\ b &= 2m_1 c^2 \left(m_1 c^2 + m_2 c^2 - 2m_0 c^2 + s_0 + 4\right) - 2m_0 c^2 \left(m_2 c^2 + s_0 + 2\right) + 2\left(s_0 - v_0 + m_2 c^2\right) \\ \end{array}$$

$$\tilde{\tau} = -4\alpha$$
 ,  $\sigma(s) = s$  ,  $\tilde{\sigma}(s) = A's^2 + B's + C'$  (YY-Y)

$$\pi(s) = 1 \pm \left[ \left( -A' \right)^{1/2} s \pm (1 - C') \right] \quad \text{for} \quad k = B \pm 2\sqrt{A'(C' - 1)} \tag{277-7}$$

با توجه به شرط داده شده در رابطه (۲–۵) بهترین جواب برای k و  $\pi$  را بدست میآوریم.

$$\pi(s) = 1 - \left[ \left( -A' \right)^{1/2} s - (1 - C') \right] \text{ for } k = B - 2\sqrt{A'(C' - 1)}$$
 (14)

با دنبال کردن رابطه  $\lambda = \lambda_n$  در روش NU معادله ویژه مقداری انرژی را بدست می آوریم.

$$\mathbf{B}^{\prime 2} = [(2n+1) + 2(1-\mathbf{C}^{\prime})^{1/2}]^{2}(-\mathbf{A}^{\prime})$$
(Ya-Y)

$$a^{2}E^{2} + b^{2} + 2abE = -\alpha'\hbar^{2}c^{2}(E^{2} + 2E - \gamma)$$
,  $\alpha' = [(2n+1) + 2(1-C')^{1/2}]^{2}$  (Y9-Y)

با حل رابطه (۲۶–۲) معادله ویژه مقادیر انرژی برای معادله کلاین-گوردن به صورت زیر بدست می آید.  

$$E_{n,\ell} = \frac{-(ab + \alpha'\hbar^2c^2) \pm \sqrt{\alpha'\hbar^2c^2[(1+\gamma)(\alpha'\hbar^2c^2 + a^2) - (a-b)]}}{2(\alpha'\hbar^2c^2 + a^2)}$$
(۲۷-۲)

$$\phi(s) = s^{[1+(1-c')^{1/2}]} \exp[-(-A')^{1/2}s]$$
(YA-Y)

$$\rho(s) = s^{2[2\alpha + \frac{1}{2} + (1 - c')^{1/2}]} \exp[-2(-A')^{1/2}s]$$
(Y9-Y)

با استفاده از رابطه (۲-۲) بخش دوم تابع موج را بدست می آوریم.

$$y_{n} = B_{n} s^{-2[2\alpha + \frac{1}{2} + (1-c')^{1/2}]} \exp[2(-A')^{1/2} s] \frac{d^{n}}{ds^{n}} [s^{n+2[2\alpha + \frac{1}{2} + (1-c')^{1/2}]} \exp[-2(-A')^{1/2} s]]$$
 (\mathbf{T} \cdot -\mathbf{T})

با استفاده از چند جملهایهای لاگر [۲۹] 
$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k})$$
 تابع موج را به ورا به موج را به

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{B}_{n} s^{[1+(1-c')^{1/2}]} \exp[-(-\mathbf{A}')^{1/2} s] \mathbf{n} ! \mathbf{L}_{n}^{k} (2(-\mathbf{A}')^{1/2} s)$$
(\mathbf{T} \-\mathbf{T})

حال با استفاده از تغییر متغیر داده شده در بخش قبل U(r) = rR(r) تابع موج شعاعی را به صورت رابطه (۲–۳۲) بازنویسی می کنیم.

$$U(r) = Nr[1 - exp(-2\alpha r)]^{[1 + (1 - c')^{1/2}]} exp[-(-A')^{1/2}(1 - exp(-2\alpha r))]n!L_n^k$$
(\mathcal{T}-\mathcal{T})

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد.

$$Y - Y - Y$$
 بررسی حالت خاص مسئله  
در این قسمت برخی حالتهای خاص را برای حل مسئله در نظر می گیریم .حالتی که در آن جرم وابستگی  
مکانی نداشته و پتانسیلهای برداری و اسکالر با هم برابر باشند یعنی،  
 $M(r) = m_0, m_1 = m_2 = 0$  (۳۳-۲)

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{S}(\mathbf{r}), \ \mathbf{v}_0 = \mathbf{s}_0 \tag{(TF-T)}$$

مانند حالت کلی از معادلات (۲-۲۱) روابط زیر را داریم:

$$A'' = E^{2} + 2E - \gamma', \gamma' = m_{0}(m_{0} + 1)$$
  

$$B'' = a'E + b', a' = -2(v_{0} + 2), b' = -2m_{0}(v_{0} + 2)$$
  

$$C'' = -4\alpha^{2}\ell(\ell + 1)$$
(Ya-Y)

که با استفاده از آنها معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج به صورت زیر بدست میآیند.

$$E_{n,\ell} = \frac{-(4m_0(2+v_0)^2 + \alpha') \pm \alpha'(m_0 - 1)}{4(2+v_0)^2 + \alpha'} , \ \alpha' = [(2n+1) + 2(1-C'')^{1/2}]^2$$
 (rg-r)

$$U(r) = Nr[1 - exp(-2\alpha r)]^{[1+(1-c'')^{1/2}]} exp[-(-A'')^{1/2}(1 - exp(-2\alpha r))]n!L_n^k$$
(YV-Y)

در نهایت معادله کلاین-گوردن برای پتانسیل بهبود یافته هولسن و ایکارت در حالت جرم وابسته به مکان و حالت جرم غیر وابسته و تقارن اسپینی با استفاده از روش تحلیلی NU مورد بررسی قرار گرفت که نتایج آن داده شده است .

# **۲-۴-۳ مروری بر روش PNU:** برای دستیابی کاربردی و سادهتر به روش NU (Nikiforov–Uvarov) بدون نیاز به بررسی توابع مختلف ما یک روش مستقیم ارایه میدهیم. ابتدا فرم عمومی معادله شرودینگر گونهای را به صورت رابطه زیر معرفی میکنیم [۳۱–۳۰].

$$\left[\frac{d^2}{ds^2} + \frac{c_1 - c_2 s}{s(1 - c_3 s)}\frac{d}{ds} + \frac{(-\chi_2 s^2 + \chi_1 s - \chi_0)}{s^2(1 - c_3 s)^2}\right]\Psi_n(s) = 0$$
 (YA-Y)

برای معادله شرودینگر مانند در حضور پتانسیلهایی که بتوان به صورت معادله بالا نوشت، رابطه ویژه مقداری انرژی و تابع موج به ترتیب با روابط زیر داده میشوند.

$$nc_{2} - (2n+1)c_{5} + (2n+1)(\sqrt{c_{9}} + c_{3}\sqrt{c_{8}}) + n(n-1)c_{3} + c_{7} + 2c_{3}c_{8} + 2\sqrt{c_{8}c_{9}} = 0$$
 (3.4)

$$\Psi_{n,k}(s) = N_{n,k} s^{c_{12}} (1 - c_3 s)^{c_{13}} P_n^{(c_{10}, c_{11})} (1 - 2c_3 s)$$
(\*--\*)

که در آن (x) چند جملهایهای ژاکوبی میباشند. و ضرایب ثابت E<sub>i</sub> مورد استفاده در معادلات بالا به صورت زیر داده می شوند. که در جدول زیر آورده شدهاند.

		ci (i=4, 513) ضرایب (۱-۲)
$c_4 = \frac{1}{2}(1-c_1)$	$c_5 = \frac{1}{2}(c_2 - 2c_3)$	$c_6 = c_5^2 + \chi_2$
$c_7 = 2c_4c_5 - \chi_1$	$c_8 = c_4^2 + \chi_0$	$c_9 = c_3(c_7 + c_3c_8) + c_6$
$c_{10} = c_1 + 2c_4 + 2\sqrt{c_8} - 1\rangle - 1$	$c_{11} = 1 - c_1 - 2c_4 + \frac{2}{c_3}\sqrt{c_9} > -1, c_3 \neq 0$	$c_{12} = c_4 + \sqrt{c_8} \rangle 0$
	$c_{13} = -c_4 + \frac{1}{c_3} \left( \sqrt{c_9} - c_5 \right) 0, c_3 \neq 0$	

با استفاده از این ضرایب و روابط (۲–۳۹) و (۲–۴۰) می توان روابط مربوط به طیف انرژی و تابع موج را بدست آورد.

## ۵-۲ بررسی معادله کلاین-گوردن با پتانسیل (Tietz-Hua (TH

V(r) معادله شعاعی کلاین-گوردن در حالت D-بعدی برای مقادیر دلخواه l با پتانسیلهای برداری و اسکالر V(r) و S(r)

$$\nabla_{D}^{2}\Psi_{\ell_{1}\ldots\ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}-1}(r) + \frac{1}{\hbar^{2}c^{2}} \left\{ \left[ E_{n,\ell} - V(r) \right]^{2} - \left[ Mc^{2} + S(r) \right]^{2} \right\} \Psi_{\ell_{1}\ldots\ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}-1}(r) = 0$$
(F1-T)

که در آن M،  $E_{nl}$  و  $\nabla^2_D$  به ترتیب انرژی، جرم و لاپلاسی D-بعدی میباشد. برای حل مسئله ما مختصات ژاکوبی حذف نمود ژاکوبی را به صورت زیر تعریف میکنیم. که در آن مرکز جرم (R) را میتوان در مختصات ژاکوبی حذف نمود و x بردار مکان D-بعدی در مختصات ژاکوبی میباشد.

برای یک سیستم A ذره ای میتوان I-A=N بردار ژاکوبی و در نتیجه 3N مختصه ژاکوبی تعریف کرد. هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقیمانده وصل میکند [۳۴]. وقتی ذرات مورد بررسی نوکلئونها باشند میتوان با چشم پوشی از اختلاف جرم بین پروتون و نوترون، ذرات سیستم را همجرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی میتوان N بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [۳۵].

$$\vec{\xi}_{i} = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left( \vec{r}_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} \vec{r}_{j} \right) \qquad i = 1, 2, \dots, N - 1$$
(47-7)

بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. مختصه مرکز جرم و فوق مرکزی برای هر A ذره  $\dot{\xi}_i$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$x^{2} = \sum_{i=1}^{N-1} \left(\zeta_{i}^{2}\right) = \sum_{i=1}^{N-1} \left(r_{i} - R\right)^{2} = \frac{2}{N-1} \sum_{k;\ell > k} r_{k\ell}^{2}, \quad R = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} r_{i}$$
(FT-T)

برای یک سیستم سه ذرهای مختصات ژاکوبی به صورت زیر تعریف میشود:

$$\zeta_1 = \frac{r_1 - r_2}{\sqrt{2}}, \qquad \zeta_2 = \frac{r_1 + r_2 - 2r_3}{\sqrt{6}}, \qquad R_3 = \frac{r_1 + r_2 + r_3}{3}$$
(FF-T)

و مختصه فوق کروی با استفاده از مقادیر ۲٫, ۲۵ با رابطه زیر داده میشود:

$$x = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \quad t = \arctan\left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)$$
 (FA-T)

همچنین برای عملگر لاپلاسی در مختصات فوق کروی برای N ذره در فضای D-بعدی داریم (۳۹، ۳۹،۳۷]:

$$-\sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\zeta_i}^2 = -\sum_{i=1}^{N-1} \nabla_x^2 = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2}\right)$$
(\*9-Y)

با بكار گیری روش جداسازی متغیرها داریم:

$$\Psi_{n\ell m}\left(x,\Omega_{D}\right) = U_{n\ell}\left(x\right)Y_{\ell}^{m}\left(\Omega_{D}\right)$$
(Y-Y)

رابطه بالا دو معادله جداگانه ایجاد می کند که در آن  $Y_{\ell}^{m}(\Omega_{D}) = Y_{\ell}^{m}(\Omega_{D})$  رابطه بالا دو معادله جداگانه ایجاد می کند که در آن  $Y_{\ell}^{m}(\Omega_{D}) = \ell(\ell + D - 2)Y_{\ell}^{m}(\Omega_{D})$  (۴۸-۲)

در حالتی که پتانسیلهای برداری و اسکالر برابر باشند با استفاده از مختصات نسبی ژاکوبی، معادله فوق شعاعی شرودینگر مانند در D-بعد به صورت زیر داده می شود [۴۰].

$$\left\{\frac{d^{2}}{dx^{2}} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+D-2)}{x^{2}} + \frac{\left(E^{2}-M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} - 2\frac{\left(E+Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}V(x)\right\}U_{n\ell}(x) = 0$$
(F9-T)

$$V(r) = D\left[\frac{1 - e^{-b_{h}(r - r_{e})}}{1 - c_{h}e^{-b_{h}(r - r_{e})}}\right]^{2}; b_{h} = \delta(1 - c_{h})$$
( $\Delta \cdot - \Upsilon$ )

که در آن پارامترهای D، δ، re، r و Ch و Ch به ترتیب فاصله داخلی هستهای، طول قید مولکولی، ثابت مورس، عمق چاه پتانسیل و ثابت پتانسیل میباشند [۴۳].

$$\lambda = \ell + \frac{(D-3)}{2}$$
و  $\Phi(x) = x^{\binom{D-1/2}{2}} U_{n\ell}(x)$  با انتخاب یک پیشنهاد برای تابع موج به صورت رابطه  $U_{n\ell}(x)$ 

$$\frac{d^{2}\Phi_{n\ell}(x)}{dx^{2}} + \left\{ \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} - 2\frac{\left(E + Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}D\left[\frac{1 - e^{-b_{h}(x - r_{e})}}{1 - c_{h}e^{-b_{h}(x - r_{e})}}\right]^{2} - \frac{\lambda(\lambda + 1)}{x^{2}}\right\}\Phi_{n\ell}(x) = 0 \quad (\Delta 1 - \Upsilon)$$

معادله بالا تنها برای 1-,0
$$\lambda=0$$
 به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی این معادله ما تقریب زیر را  
در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری میکنیم که در آن ( $y=(x-r_e)/r_e \in (-1,\infty)$ .

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{r_e^2(1+y)^2} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{r_e^2} (1-2y+3y^2-4y^3+...), y \ll 1$$
 ( $\Delta$ Y-Y)

نگه داشتن ضرایب تا مرتبه دوم کافی میباشد. قسمت اسپین مداری بالا را میتوان بوسیله توابع نمایی شبیه پتانسیل بازنویسی کرد [۴۶].

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{r_e^2} \left[ D_0 + D_1 \frac{e^{-\alpha y}}{1 - c_h e^{-\alpha y}} + D_2 \frac{e^{-2\alpha y}}{\left(1 - c_h e^{-\alpha y}\right)^2} \right]$$
 ( $\Delta \Upsilon - \Upsilon$ )

که در آن  $\alpha = b_h r_e$  و  $D_i$  و  $D_i$  (i=0, 1, 2) که در آن  $\alpha = b_h r_e$  و  $\alpha = b_h r_e$  فرم و مقایسه آن با رابطه قبلی پارامترهای  $D_i$  به صورت تابعی از پارامترهای پتانسیل  $b_h$ ,  $c_h$  و  $r_e$  به صورت زیر بدست میآیند [۴۶].

$$D_{0} = 1 - \frac{1}{\alpha} (1 - c_{h}) (3 + c_{h}) + \frac{3}{\alpha^{2}} (1 - c_{h})^{2}$$

$$D_{1} = \frac{2}{\alpha} (1 - c_{h})^{2} (2 + c_{h}) - \frac{6}{\alpha^{2}} (1 - c_{h})^{3}$$

$$D_{2} = -\frac{1}{\alpha} (1 - c_{h})^{3} (1 + c_{h}) + \frac{3}{\alpha^{2}} (1 - c_{h})^{4}$$
( $\Delta F - Y$ )

$$\frac{d^{2}\Phi_{n\ell}(y)}{dy^{2}} + \left\{ r_{e}^{2}\gamma - 2r_{e}^{2}\beta D \left[ \frac{1 - e^{-\alpha y}}{1 - c_{h}e^{-\alpha y}} \right]^{2} - \lambda(\lambda + 1) \left[ D_{0} + D_{1}\frac{e^{-\alpha y}}{1 - c_{h}e^{-\alpha y}} + D_{2}\frac{e^{-2\alpha y}}{\left(1 - c_{h}e^{-\alpha y}\right)^{2}} \right] \right\} \Phi_{n\ell}(y) = 0$$
( $\Delta\Delta$ -Y)

$$\gamma = \frac{\left(E^2 - M^2 c^4\right)}{\hbar^2 c^2}, \quad \beta = \frac{\left(E + M c^2\right)}{\hbar^2 c^2}$$
(39-7)

با بکارگیری تقریب ارائه شده برای جمله مداری و استفاده از تغییر متغیر جدید s=exp(-αy) رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^{2}\Phi_{n\ell}}{ds^{2}} + \frac{(1-c_{h}s)}{s(1-c_{h}s)}\frac{d\Phi_{n\ell}}{ds} + \frac{1}{s^{2}(1-c_{h}s)^{2}}\left\{\frac{r_{e}^{2}\gamma}{\alpha^{2}} - \frac{2r_{e}^{2}\beta D}{\alpha^{2}}\left[\frac{1-s}{1-c_{h}s}\right]^{2} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{\alpha^{2}}\left[D_{0} + D_{1}\frac{s}{1-c_{h}s} + D_{2}\frac{s^{2}}{(1-c_{h}s)^{2}}\right]\right\}\Phi_{n\ell} = 0$$

$$(\Delta Y-Y)$$

معادله بالا بعد از خلاصه شدن به صورت زیر داده میشود:

$$\Phi_{n,\ell}''(s) + \frac{(1-c_{h}s)}{s(1-c_{h}s)} \Phi_{n,\ell}'(s) + \frac{1}{s^{2}(1-c_{h}s)^{2}} \left[ -\eta_{2}s^{2} + \eta_{1}s - \eta_{0} \right] \Phi_{n,\ell}(s) = 0$$
(ΔΛ-Υ)

که در آن پارامترهای ۹<sub>2</sub>، <sub>۹</sub>۱ و <sub>۹</sub>0 به صورت زیر در نظر گرفته میشوند:

$$\begin{split} \eta_{2} &= \frac{1}{\alpha^{2}} \Big\{ \lambda \big( \lambda + 1 \big) \Big[ D_{0} c_{h}^{2} - D_{1} c_{h} + D_{2} \Big] + r_{e}^{2} \Big( 2\beta D - \gamma c_{h}^{2} \Big) \Big\} \\ \eta_{1} &= \frac{1}{\alpha^{2}} \Big\{ \lambda \big( \lambda + 1 \big) \Big[ 2D_{0} c_{h} - D_{1} \Big] + 2r_{e}^{2} \Big( 2\beta D - \gamma c_{h} \Big) \Big\} \\ \eta_{0} &= \frac{1}{\alpha^{2}} \Big\{ -\lambda \big( \lambda + 1 \big) D_{0} + r_{e}^{2} \big( 2\beta D - \gamma \big) \Big\} \end{split}$$

$$(\Delta P-Y)$$

$$\begin{split} \Big[ (2n+1) + 2\sqrt{\eta_0} \Big] \sqrt{\eta_2 - \eta_1 c_h + \eta_0 c_h^2 + \frac{1}{4} (1 - 2c_h)^2} \\ + (2n+1) \Big[ c_h \sqrt{\eta_0} - \frac{1}{2} (1 - 2c_h) \Big] + n^2 c_h + 2\eta_0 c_h - \eta_1 = 0 \end{split}$$
(5.-7)

تابع موج فوق کروی را نیز میتوان به کمک این روش بدست آورد.

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n,\ell}(\mathbf{x}) &= \mathbf{N}' \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{r}_{e} \\ \mathbf{r}_{e} \end{pmatrix}^{\left(-\frac{D-1}{2}\right)} \left( e^{-\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{r}_{e} \\ \mathbf{r}_{e} \end{pmatrix}} \right)^{\left(\sqrt{\eta_{0}}\right)} \left( 1 - c_{h} e^{-\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{r}_{e} \\ \mathbf{r}_{e} \end{pmatrix}} \right)^{\frac{1}{c_{h}}} \left( \sqrt{\eta_{2} - \eta_{1} c_{h} + \eta_{0} c_{h}^{2} + \frac{1}{4} (1 - 2c_{h})^{2}} - \frac{1}{2} (1 - 2c_{h}) \right) \\ & P_{n}^{\left(2\sqrt{\eta_{0}}, \frac{2}{c_{h}}\sqrt{\eta_{2} - \eta_{1} c_{h} + \eta_{0} c_{h}^{2} + \frac{1}{4} (1 - 2c_{h})^{2}} \right)} \left( 1 - 2c_{h} e^{-\alpha \begin{pmatrix} \mathbf{x} - \mathbf{r}_{e} \\ \mathbf{r}_{e} \end{pmatrix}} \right) \end{aligned}$$
(\$1-7)

که در آن N' ثابت بهنجارش و تابع  $P_n^{(lpha,eta)}(\mathbf{x})$  چند جملهای های ژاکوبی میباشند.

#### ۲-۵-۱ بررسی نتایج مسئله

معادله نسبیتی کلاین-گوردن تحت تقارن نسبیتی در D-بعد برای پتانسیل (Tietz-Hua (TH با مقادیر دلخواه عدد کوانتومی مداری مورد بررسی قرار گرفت و روش پارامتری NU برای بدست آوردن معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج برای سیستم چند جسمی بکار گرفته شد.

ما برخی محاسبات را برای سیستمهای چند جسمی با توجه به رابطه (۲- ۶۰) انجام دادیم و در آن وابستگی ترازهای انرژی سیستمهای دو و سه جسمی را به پارامترهای پتانسیل  $b_h$ ,  $c_h$  و  $r_e$  در شکلهای (۲-۱) تا (۳-۲) نشان دادهایم. همانطور که در شکلها مشخص است ترازهای انرژی با افزایش  $c_h$  افزایش یافته اند و با افزایش  $b_h$  و  $r_e$  کاهش یافتهاند.



m=50, h=c=1, D=10, تغییرات ترازهای انرژی معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات  $b_h$  برای مقادیر ثابت m=50, h=c=1, D=10, شکل (۲-۱) تغییرات رازهای انرژی معادله کلاین- $e=0.85, and c_h=0.1.,$ 



m=20, h=c=1, D=10, تغییرات ترازهای انرژی معادله-کلاین گوردن بر حسب تغییرات  $c_h$  برای مقادیر ثابت  $re=0.8, and \delta=0.89$  and  $c_h=0.1.,$ 



m=50, h=c=1, D=10, تغییرات ترازهای انرژی معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات r<sub>e</sub> برای مقادیر ثابت r<sub>e</sub>=0.85, and δ=0.89 (b) مه جسمی.

در شکل (۴-۲) تراز انرژی برای سیستم دو، سه وچهار جسمی بر حسب b<sub>h</sub> رسم شده است که به روشنی با افزایش b<sub>h</sub> روند کاهشی را دارا میباشد.



شکل (۴-۲) مقایسه تراز انرژی برای سیستم دو، سه و چهار جسمی بر حسب تغییرات b<sub>h</sub> برای مقادیر ثابت (۴-۲) مقایسه تراز انرژی برای مقادیر ثابت . m=50, h=c=1, D=10, re=0.85, and  $\delta$ =0.2

این اهداف می تواند برای بررسی تصحیحات نسبیتی در خواص سیستم های چند جسمی با یک رویکرد ساده مفید واقع گردد.

۲-۶ بررسی سیستمهای چند جسمی در حالت نسبیتی و غیرنسبیتی با استفاده از پتانسیل بهبود یافته هولسن و یوکاوای مرتبه دوم در این قسمت سعی در بررسی یک سیستم چند جسمی در حالت نسبیتی و غیرنسبیتی با استفاده از معادله کلاین-گوردن و شرودینگر برای پتانسیل بهبود یافته هولسن و یوکاوای مرتبه دوم با استفاده از دو روش پارامتری NU و روش ابر تقارن (SUSYQM) نموده و به بررسی برخی از نتایج این کار برآمدهایم.

۱–۶–۲ بررسی غیرنسبیتی مسئله با استفاده از روش PNU معادله فوق شعاعی شرودینگر به کمک مختصات ژاکوبی به صورت زیر داده می شود [۴۸، ۴۷]:

$$\left\{\frac{d^{2}}{dx^{2}} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+D-2)}{x^{2}} - \frac{2m}{\hbar^{2}}\left[V(x) - E_{n\ell}\right]\right\}R_{n\ell}(x) = 0$$
 (97-7)

که در آن  $E_{n\ell}(x)$ ,  $E_{n\ell}(x)$ , به ترتیب ویژه مقادیر انرژی و قسمت فوق شعاعی تابع موج میباشند[۴۹]. پتانسیل بهبود یافته هولسن [۲۵،۴۵] و یوکاوای مرتبه دوم [۵۱، ۵۰] را به صورت زیر تعریف میکنیم:

$$V(x) = -v_0 \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})} + v_1 \frac{e^{-\alpha x}}{x^2}$$
(97-7)

که در آن v<sub>0</sub> و v<sub>1</sub> پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف می کنند. و پارامتر ۵ نیز محدوده پتانسیل را تعیین می کند.

$$U(x) = x^{\binom{D-1/2}{2}} R_{n\ell}(x), \quad \lambda = \ell + \frac{(D-3)}{2}$$
 با در نظر گرفتن قسمت شعاعی تابع موج به صورت  $\frac{1}{2}$  معادله فوق شعاعی شرودینگر با پتانسیل فوق مرکزی به صورت زیر داده می شود.

$$\frac{d^{2}U_{n\ell}(x)}{dx^{2}} + \frac{2m}{\hbar^{2}} \left\{ E_{n\ell} + \frac{v_{0}\alpha e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})} - v_{1}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{2}} - \frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\lambda(\lambda + 1)}{x^{2}} \right\} U_{n\ell}(x) = 0$$
(FY-T)

معادله بالا تنها برای 1-,0 $= \lambda$  به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی معادله ما تقریب پیشنهادی توسط Greene و Greene [۵۲] را در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری می کنیم این تقریب برای ax < 1 معتبر است [۵۳].

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} \approx \frac{\lambda(\lambda+1)\alpha^2 e^{-\alpha x}}{\left(1-e^{-\alpha x}\right)^2}$$
(\$\Lambda-\mathbf{T})

با بکار بردن تغییر متغیر  $s = exp(-\alpha x)$  رابطه بالا به صورت زیر نوشته می شود:

$$U_{n,\ell}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}U_{n,\ell}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[-\chi_2 s^2 + \chi_1 s - \chi_0\Big]U_{n,\ell}(s) = 0$$
(99-7)

که در آن ۱٬۷2 و ۲۵ به صورت زیر درنظر گرفته می شوند:

$$\chi_{2} = \frac{2m}{\hbar^{2}\alpha^{2}} \Big[ v_{1}\alpha^{2} + v_{0}\alpha - E_{n\ell} \Big]$$

$$\chi_{1} = -\frac{2m}{\hbar^{2}\alpha^{2}} \Big[ 2E_{n\ell} - v_{0}\alpha + \frac{\hbar^{2}\alpha^{2}}{2M}\lambda(\lambda+1) \Big]$$

$$\chi_{0} = -\frac{2m}{\hbar^{2}\alpha^{2}} E_{n\ell}$$
(FY-Y)

در نهایت با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج بدست میآیند.

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\textbf{FA-T})$$

$$R_{n,\ell}(x) = Nx^{\left(-\frac{D-1}{2}\right)} \left(e^{-\alpha x}\right)^{\left(\sqrt{\chi_0}\right)} \left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}\right)} P_n^{\left(2\sqrt{\chi_0}, 2\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}\right)} \left(1 - 2e^{-\alpha x}\right)$$
(89-7)

## **SUSYQM بررسی غیرنسبیتی مسئله با استفاده از روش SUSYQM** قسمت فوق شعاعی معادله شرودینگر را می توان به صورت خلاصه شده زیر در نظر گرفت:

$$\frac{d^2 U_{n\ell}(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ E_{n\ell} - V_{eff}(x) \right\} U_{n\ell}(x) = 0 \qquad (\forall \cdot - \forall)$$

که در آن:

$$V_{eff}(x) = -v_{0}\alpha \frac{e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})} + v_{1}\alpha^{2} \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^{2}} + \frac{\hbar^{2}\alpha^{2}\lambda(\lambda + 1)}{2m} \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^{2}}$$
(YI-Y)

برای حل معادله بالا به روش ابر-تقارن ما ابر-پتانسیل زیر را پیشنهاد میدهیم:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left[ A - B \frac{e^{-\alpha x}}{\left(1 - e^{-\alpha x}\right)} \right]$$
(YT-T)

با استفاده از ابر-پتانسیل بالا و معادله ریکاتی در روش ابر-تقارن داریم [۵۵، ۵۴]:

$$W^{2}(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}}W'(x) = V_{eff}(x) - E_{n\ell}$$
(YT-T)

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left[ A^2 + \left( B^2 + \alpha B \right) \frac{e^{-2\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^2} + \left( \alpha B - 2AB \right) \frac{e^{-\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)} \right] = V_{eff} \left( x \right) - E_{n\ell} \quad (Y - Y)$$

با جایگذاری پتانسیل موثر و مقایسه ضرایب دو طرف معادله بالا داریم:

$$A^{2} = \frac{2m}{\hbar^{2}} E_{0}$$

$$(\alpha B - 2AB) = -\beta, \quad \beta = \frac{2m}{\hbar^{2}} v_{0} \alpha$$

$$(\forall \Delta - \forall)$$

$$(B^{2} + \alpha B) = \gamma, \quad \gamma = \frac{2m}{\hbar^{2}} \left( v_{1} \alpha^{2} + \frac{\hbar^{2} \alpha^{2} \lambda (\lambda + 1)}{2m} \right)$$

با حل معادلات بالا داريم:

$$E_{0} = -\frac{\hbar^{2}}{2m}A^{2}$$

$$B = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^{2} + 4\gamma}}{2}$$

$$A = \frac{(\gamma + \beta)}{2B} - \frac{B}{2}$$
(Y8-7)

که به کمک این ضرایب جفت پتانسیلهای همسان ابر-تقارنی به صورت زیر داده میشود:

$$V_{-} = \frac{\hbar^{2}}{2m} \left[ A^{2} + \left( B^{2} + \alpha B \right) \frac{e^{-2\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} + \left( \alpha B - 2AB \right) \frac{e^{-\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} \right]$$

$$V_{+} = \frac{\hbar^{2}}{2m} \left[ A^{2} + \left( B^{2} - \alpha B \right) \frac{e^{-2\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} + \left( -\alpha B - 2AB \right) \frac{e^{-\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} \right]$$
(VY-Y)

$$S(a_{i}) = V_{+}(B - i\alpha, x) - V_{-}(B - (i - 1)\alpha, x),$$
  

$$S(a_{i}) = -\frac{\hbar^{2}}{2m} \left\{ \left[ \frac{(\gamma + \beta)}{2(B - i\alpha)} - \frac{(B - i\alpha)}{2} \right]^{2} - \left[ \frac{(\gamma + \beta)}{2(B - (i - 1)\alpha)} - \frac{(B - (i - 1)\alpha)}{2} \right]^{2} \right\}$$
(YA-Y)

حال با کمک رابطه زیر در روش ابر-تقارن می توان معادله ویژه مقداری را بدست آوریم [۵۶،۳۷].

$$E_{n,\ell} = \sum_{i=1}^{n} S(a_i) + E_0 \tag{Y9-T}$$

نهایتا معادله ویژه مقداری انرژی به صورت زیر نوشته میشود:

$$E_{n,\ell} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \left[ \frac{(\gamma+\beta)}{2(B-n\alpha)} - \frac{(B-n\alpha)}{2} \right]^2 - \left[ \frac{(\gamma+\beta)}{2B} - \frac{B}{2} \right]^2 + \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} \right)^2 \right\} \quad (\Lambda \cdot -\Upsilon)$$

در روش ابر-تقارن معادله ویژه تابع در حالت پایه با رابطه زیر داده میشود:

$$U_{0}(x) = N_{0} \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^{x} W(y) dy\right)$$
 (A1-T)

که با کمک ابر-پتانسیل معرفی شده و معادله بالا ویژه تابع در حالت پایه با رابطه زیر داده میشود:

$$U_{0,\ell}(x) = N_0 e^{Ax} \left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{-\frac{B}{\alpha}}$$
(AT-T)

سپس داريم:

$$R_{0,\ell}(x) = N_0 x^{\left(-\frac{D-1}{2}\right)} e^{Ax} \left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{-\frac{B}{\alpha}}$$
(AT-T)

که در آن *N*o ضریب بهنجارش میباشد.

با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی به کمک روش پارامتری NU در معادله (۲-۶۸)، برخی محاسبات انرژی در حالت پایه برای سیستمهای دو، سه و چهار جسمی غیرنسبیتی در شکلهای پایین بررسی شده است.



شکل (۲-۵) تغییرات انرژی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب تغییرات (m<sup>-1</sup>) v<sub>0</sub> (fm<sup>-1</sup>) برای مقادیر مختلف (m<sup>-1</sup>) v<sub>1</sub> و α=0.08 fm<sup>-1</sup> برای سیستم (a) دو جسمی (b) سه جسمی و (c) چهار جسمی.

برای یک سیستم چند جسمی وابستگی انرژی به پارامترهای پتانسیل ۷۵ و ۷۱ بررسی شده است. که برای یک مقدار خاص از ۷۱ انرژی با افزایش مقدار ۷۵ کاهش مییابد و برای یک مقدار خاص از ۷۵ انرژی با افزایش مقدار ۷۱ افزایش می یابد.



شکل (۲-۶) تغییرات انرژی حالت پایه معادله شرودینگر بر حسب تغییرات (1، fm<sup>-1</sup>) برای مقادیر مختلف (0، fm<sup>-1</sup>) و میرای سیستم (a) دو جسمی (c) سه جسمی و (c) چهار جسمی.



شکل (۲-۲) مقایسه بین انرژی حالت پایه معادله شرودینگر برای سیستم دو، سه و چهار جسمی بر حسب تغییرات (۲-۲) مقایسه بین انرژی حالت پایه معادله شرودینگر (α=0.08fm<sup>-1</sup>) v<sub>0</sub>(fm<sup>-1</sup>) (**b**) و v<sub>1</sub>(fm<sup>-1</sup>).

توافق بین ویژه مقادیر انرژی بدست آمده در حالت غیرنسبیتی با استفاده دو روش پارامتری NU و ابر تقارن بر حسب مقادیر مختلف vo و v1 در جدولهای زیر نشان داده شده است.

جدول (۲-۲) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت غیرنسبیتی با استفاده از دو روش پارامتری NU و ابر-تقارن بر حسب مقادیر مختلف v1 و مقادیر ثابت α=0.01 fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=70 fm<sup>-1</sup>, h=1, m=1fm<sup>-1</sup> and N=2 .

	$E_{0,0} (fm^{-1})$		E <sub>1,1</sub> (	$fm^{-1}$ )	$E_{2,1}$ (fm <sup>-1</sup> )	
$v_1 (fm^{-1})$	PNU	SUSY	PNU	SUSY	PNU	SUSY
١٠	-۹۷/۹۳۰۰	-9V/9 <b>~•</b> •	-%٣/٢١٩٠	-83/2201	-46/8221	-46/8280
۱۵	-&1/99/2	-&1/997	-41/2121	-41/4.54	- 36/427 •	-36/4474
۲۰	$-\Delta T/TF9A$	$-\Delta T/T$ 49 $\lambda$	-34/12.1	-38/181.	- <b>~ ·</b> / • <b>V</b> • •	-3.1.4
٢۵	-41/4989	-41/4989	-77/•787	-77/•474	$-T\Delta/VTTI$	-20/2290

جدول (۲–۳) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت غیرنسبیتی با استفاده از دو روش پارامتری NU و ابر-تقارن بر حسب مقادیر مختلف v₀ و مقادیر ثابت α=0.01 fm<sup>-1</sup>, v<sub>1</sub>=10fm, h=1, m=1fm<sup>-1</sup> and N=2.

	$E_{0,0} (fm^{-1})$		$E_{1,1}$ (fm <sup>-1</sup> )		$E_{2,1}$ (fm <sup>-1</sup> )	
V0 (fm <sup>-1</sup> )	PNU	SUSY	PNU	SUSY	PNU	SUSY
٨٠	-177/97	-177/97	$-\lambda r/\Delta q q r$	-87/8199	-61/1919	-81/2.72
٨۵	-144/410.	-146/610.	-93/7298	-93/7818	-89/•987	-89/1180
٩٠	-181/91	-181/91・・	-1•4/6998	-1•4/29•1	-71/68.5	$-\gamma\lambda/\epsilon$ any
٩۵	-11.4.16.0.	-1X•/4• <b>&amp;</b> •	-118/22.4	-118/2424	-86/2669	-88/3871

۲–۶–۳ بررسی نسبیتی مسئله با استفاده از روش PNU معادله شعاعی کلاین-گوردن برای عدد مداری *I*-دلخواه در D-بعد با پتانسیل اسکالر و برداری *S(r) و V(r)* به صورت فرم کلی زیر درنظر گرفته می شود [۵۷،۳۳].

$$\nabla_{D}^{2} \Psi_{\ell_{1} \dots \ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}-1}(r) + \frac{1}{\hbar^{2} c^{2}} \left\{ \left[ E_{n,\ell} - V(r) \right]^{2} - \left[ M c^{2} + S(r) \right]^{2} \right\} \Psi_{\ell_{1} \dots \ell_{D-2}}^{\ell_{D-1}-1}(r) = 0 \qquad (\Lambda \mathfrak{F} - \mathfrak{Y})$$

در حالتی که پتانسیل اسکالر و برداری با هم برابر باشند بوسیله مختصات نسبی ژاکوبی معادله فوق شعاعی شبیه شرودینگر در D-بعد به صورت زیر بدست میآید.

$$\left\{\frac{d^{2}}{dx^{2}} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+D-2)}{x^{2}} + \frac{\left(E^{2}-M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} - 2\frac{\left(E+Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}V(x)\right\}\Psi_{n\ell}(x) = 0 \quad (A\Delta-Y)$$

$$V(x) = -v_0 \frac{\alpha e^{-\alpha x}}{\left(1 - e^{-\alpha x}\right)} + v_1 \frac{e^{-\alpha x}}{x^2}$$
 (A9-7)

با انتخاب یک پیشنهاد برای تابع موج به صورت  $\chi = \ell + \frac{(D-3)}{2} \Phi(x) = x^{\binom{D-1}{2}} \psi_{n\ell}(x)$  معادله

بالا با پتانسیل فوق مرکزی به صورت زیر داده میشود.

$$\frac{d^{2}\Phi_{n\ell}(x)}{dx^{2}} + \begin{cases} \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} - 2\frac{\left(E + Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} \left(-v_{0}\frac{\alpha e^{-\alpha x}}{\left(1 - e^{-\alpha x}\right)} + v_{1}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{2}}\right) \\ -\frac{\lambda(\lambda + 1)}{x^{2}} \end{cases} \Phi_{n\ell}(x) = 0 \quad (\Lambda \forall - \forall)$$

 $s = exp(-\alpha x)$  با بکارگیری تقریب ارایه شده در قسمت قبلی برای جمله مرکزی و با معرفی تغییر متغیر s

$$\frac{d^{2}\Phi}{ds^{2}} + \frac{(1-s)}{s(1-s)}\frac{d\Phi}{ds} + \frac{1}{s^{2}(1-s)^{2}} \left\{ \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}\alpha^{2}} (1-s)^{2} - \frac{2\left(E + Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}\alpha^{2}} \left[ -v_{0}\alpha s (1-s) + v_{1}\alpha^{2}s^{2} \right] - \lambda(\lambda+1)s \right\} \Phi = 0$$
(AA-Y)

که به صورت زیر خلاصه میشود:

$$\Phi_{n,\ell}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)} \Phi_{n,\ell}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[ -\eta_2 s^2 + \eta_1 s - \eta_0 \Big] \Phi_{n,\ell}(s) = 0$$
 (A9-7)

که در آن η1،η2 و η0 به صورت زیر درنظر گرفته میشوند:

$$\begin{split} \eta_{2} &= \left[\beta' v_{1} \alpha^{2} + \beta' v_{0} \alpha - \gamma'\right] \\ \eta_{1} &= -\left[2\gamma' - \beta' v_{0} \alpha + \lambda \left(\lambda + 1\right)\right], \quad \gamma' = \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}\alpha^{2}}, \quad \beta' = 2\frac{\left(E + Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}\alpha^{2}} \end{split} \tag{9.-17}$$
$$\eta_{0} &= -\gamma'$$

در نهایت با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج بدست می آیند.  

$$(2n+1)\left(\sqrt{\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\eta_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\eta_0(\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4})} + 2\eta_0 - \eta_1 + \frac{1}{4} = 0$$
 (۹۱-۲)  
 $\Psi_{n,\ell}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}' \mathbf{x}^{\left(-\frac{D-1}{2}\right)} \left(e^{-\alpha \mathbf{x}}\right)^{\left(\sqrt{\eta_0}\right)} (1 - e^{-\alpha \mathbf{x}})^{\left(\sqrt{\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}\right)} \mathbf{P}_n^{\left(2\sqrt{\eta_0}, 2\sqrt{\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4}}\right)} (1 - 2e^{-\alpha \mathbf{x}})$  (۹۲-۲)  
 $\nabla_{n,\ell}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}' \mathbf{x}^{\left(-\frac{D-1}{2}\right)} \left(e^{-\alpha \mathbf{x}}\right)^{\left(\sqrt{\eta_0}\right)} (1 - e^{-\alpha \mathbf{x}})^{\left(\sqrt{\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}\right)} \mathbf{P}_n^{\left(2\sqrt{\eta_0}, 2\sqrt{\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4}}\right)} (1 - 2e^{-\alpha \mathbf{x}})$ 

$$\left\{-\frac{d^{2}}{dx^{2}}+\tilde{V}_{eff}\left(x\right)\right\}\Phi_{n\ell}\left(x\right)=\tilde{E}_{n\ell}\Phi_{n\ell}\left(x\right)$$
(97-7)

که در آن،

$$\tilde{V}_{eff}(x) = \tilde{V}_{1} \frac{e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})} + \tilde{V}_{2} \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})^{2}}$$

$$\tilde{E}_{n\ell} = \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}$$
(94-7)

و

$$\tilde{V_1} = -\frac{2\left(E + Mc^2\right)}{\hbar^2 c^2} v_0 \alpha$$

$$\tilde{V_2} = \frac{2\left(E + Mc^2\right)}{\hbar^2 c^2} v_1 \alpha^2 + \lambda (\lambda + 1) \alpha^2$$
(9Δ-T)

برای حل معادله بالا به روش ابر-تقارن ما ابر-پتانسیل زیر را پیشنهاد میدهیم:

$$W(x) = -A' + B' \frac{e^{-\alpha x}}{\left(1 - e^{-\alpha x}\right)}$$
(99-T)

با استفاده از ابر-پتانسیل بالا و معادله ریکاتی در روش ابر- تقارن داریم [۵۸، ۵۸]:  $W^{2}(x) - W'(x) = V_{eff}(x) - \tilde{E}_{n\ell}$  (۹۷-۲)

$$\left[A'^{2} + \left(B'^{2} + \alpha B'\right)\frac{e^{-2\alpha x}}{\left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{2}} + \left(\alpha B' - 2A'B'\right)\frac{e^{-\alpha x}}{\left(1 - e^{-\alpha x}\right)}\right] = \tilde{V}_{eff}(x) - \tilde{E}_{0,\ell} \qquad (9\lambda - \gamma)$$

با جایگذاری پتانسیل موثر و مقایسه ضرایب دو طرف معادله بالا داریم:

$$\tilde{E}_{0,\ell} = -A'^{2}$$

$$\left(\alpha B' - 2A'B'\right) = \tilde{V}_{2}$$

$$\left(B'^{2} + \alpha B'\right) = \tilde{V}_{1}$$
(99-T)

با حل معادلات بالا داريم:

$$A' = \frac{\left(\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1\right)}{2B'} - \frac{B'}{2}$$
  
$$B' = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\tilde{V}_2}}{2}$$
  
(1...-٢)

که به کمک این ضرایب جفت پتانسیلهای همسان ابر-تقارنی به صورت زیر داده میشود:

$$V_{-} = \left[ A'^{2} + \left( B'^{2} + \alpha B' \right) \frac{e^{-2\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} + \left( \alpha B' - 2A'B' \right) \frac{e^{-\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} \right]$$

$$V_{+} = \left[ A'^{2} + \left( B'^{2} - \alpha B' \right) \frac{e^{-2\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} + \left( -\alpha B' - 2A'B' \right) \frac{e^{-\alpha x}}{\left( 1 - e^{-\alpha x} \right)^{2}} \right]$$

$$(1 \cdot 1 - 7)$$

و

$$S(a_{i}) = V_{+}(B' - i\alpha, x) - V_{-}(B' - (i-1)\alpha, x),$$
  

$$S(a_{i}) = -\left\{ \left[ \frac{(\tilde{V}_{2} - \tilde{V}_{1})}{2(B' - i\alpha)} - \frac{(B' - i\alpha)}{2} \right]^{2} - \left[ \frac{(\tilde{V}_{2} - \tilde{V}_{1})}{2(B' - (i-1)\alpha)} - \frac{(B' - (i-1)\alpha)}{2} \right]^{2} \right\} (1 \cdot 7 - 7)$$

حال با کمک رابطه زیر در روش ابر-تقارن می توان معادله ویژه مقداری را بدست آوریم. $\tilde{E}_{n,\ell} = \tilde{E}_{n,\ell}^- + \tilde{E}_{0,\ell}$ (۱۰۳-۲)

كە،

$$\tilde{E}_{n,\ell}^{-} = \sum_{i=1}^{n} S(a_i) = \left[\frac{\left(\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1\right)}{2(B' - n\alpha)} - \frac{(B' - n\alpha)}{2}\right]^2 - \left[\frac{\left(\tilde{V}_2 - \tilde{V}_1\right)}{2B'} - \frac{B'}{2}\right]^2$$
(1.4)

سرانجام معادله ویژه مقداری انرژی به صورت زیر نوشته میشود:

$$E_{n,\ell}^{2} = M^{2}c^{4} - \hbar^{2}c^{2} \left[ \frac{\left(\tilde{V}_{2} - \tilde{V}_{1}\right)}{2(B' - n\alpha)} - \frac{\left(B' - n\alpha\right)}{2} \right]^{2}$$
(1.2-7)

در روش ابرتقارن معادله ویژه تابع موج در حالت پایه با رابطه زیر داده میشود:

$$\Phi_{0,\ell}(x) = N_0 \exp\left(-\int^x W(y) dy\right)$$
(1.9-7)

که با کمک ابر پتانسیل معرفی شده و معادله بالا ویژه تابع در حالت پایه با رابطه زیر داده می شود:

$$\Phi_{0,\ell}(x) = N_0 e^{A'x} \left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{-\frac{B'}{\alpha}}$$

$$(1 \cdot Y - Y)$$

که در آن *N*<sub>0</sub> ثابت بهنجارش میباشد.

با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی بدست آمده در روش پارامتری NU برخی محاسبات انرژی در حالت پایه برای سیستمهای دو، سه و چهار جسمی نسبیتی در شکلهای پایین بررسی شده است. در شکل (۲-۸) و (۲-۹) وابستگی انرژی به پارامترهای پتانسیل ۷۵ و ۷۱ نشان داده شده است. که با افزایش ۷۰ کاهش و با افزایش ۱۷ افزایش انرژی را شاهد هستیم.



شکل (۲-۸) تغییرات انرژی حالت پایه معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات (۰ (fm) v، برای مقادیر مختلف (۰ (fm) و مرای سیستم (a) دو جسمی (b) سه جسمی و (c) چهار جسمی.



شکل (۲-۹) تغییرات انرژی حالت پایه معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات (۱۰ (fm) برای مقادیر مختلف (۱۰ «v و شکل (۲-۹) میرات انرژی حالت پایه معادله کلاین-گوردن بر حسب تغییرات (c) تغییرات انرژی حالت پایه معادله کلاین-

در شکل (۲–۱۰) انرژی حالت پایه برای یک سیستم دو، سه و چهار جسمی بر حسب پارامترهای پتانسیل v0 و v1 نشان داده شده است که با افزایش v0 کاهش و با افزایش v1 افزایش انرژی را شاهد هستیم.



شکل (۲-۱۰) مقایسه بین انرژی حالت پایه معادله کلاین-گوردن برای سیستم دو، سه وچهار جسمی بر حسب تغییرات ( $v_0(fm^{-1})$  و  $v_0(fm^{-1})$  و مقدار ثابت  $a=0.08~fm^{-1}$  .

توافق بین ویژه مقادیر انرژی بدست آمده در حالت نسبیتی با استفاده دو روش پارامتری NU و ابر-تقارن بر حسب مقادیر مختلف vo و v1 در جدولهای (۲-۴) و (۲-۵) نشان داده شده است.

جدول (۲-۴) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت نسبیتی با استفاده از دو روش پارامتری NU و ابر-تقارن بر حسب مقادیر مختلف v1 و مقادیر ثابت m<sup>-1</sup>, v0=60, h=c=1, m=15fm<sup>-1</sup> and N=2.

	E	0,0	E	1,1	E <sub>2,1</sub>		
$\mathbf{V}_1$	PNU	SUSY	PNU	SUSY	PNU	SUSY	
۴.	-14/978451	-14/973451	-14/37.521	-14/377.7.	-17/87 • 1 • 7	-17/881897	
40	-14/888180	-14/888180	-14/••0848	-14/••4771	- <i>\\</i> /• <i>\\</i> / <i>\</i>	-17/980889	
۵۰	-14/418492	-14/111404	-17/797776	-17/782787	-17/1977•7	-17/•78•88	
۵۵	-14/201412	-14/201410	-17/368898	-17/301891	-1•/936•7•	-1•/986871	
۶.	-17/•294•9	-17/•294•9	-11/•۵۹۵۹۴	-11/•811•1	-9/884	-9/882•794	

	E <sub>0,0</sub>		E	E <sub>1,1</sub>			E <sub>2,1</sub>	
<b>V</b> 0	PNU	SUSY	PNU	SUSY	-	PNU	SUSY	
40	-9/148961	-9/148961	-V/ TFAFA  )	-٧/٣۶٩٧٨۵		-8/100.3.	-8/•39008	
۵۰	-17/48982	-17/48982	-11/777987	-11/226012		-9/827797	-9/8242•7	
۵۵	-14/77491	-14/77491	- <i>۱۳/۵</i> ۳۹۹・۱	-13/9618•8		-17/370874	-17/77177•	
۶.	-14/97349	-14/97849	-14/77+871	-14/37.4.		-17/87 • 1 • 7	-17/871797	

جدول (۲–۵) مقایسه بین مقادیر بدست آمده ویژه مقداری انرژی در حالت نسبیتی با استفاده از دو روش پارامتری NU و ابر-تقارن بر حسب مقادیر مختلف v0 و مقادیر ثابت α=0.01 fm<sup>-1</sup>, v1=40fm, h=c=1, m=15fm<sup>-1</sup> and N=2.

در این کار ما یک سیستم چند جسمی را با ارایه حل تحلیلی برای معادله کلاین-گوردن و شرودینگر در چند بعد به کمک دو روش پارامتری NU و ابر-تقارن را مورد بررسی قرار داده، و روابط مربوط به معادله ویژه مقداری انرژی و توابع موج را بدست آوردیم. این اهداف میتواند برای بررسی تصحیحات نسبیتی و غیرنسبیتی در خواص سیستمهای چند جسمی و سیستمهای هستهای با یک رویکرد ساده مفید واقع گردد.

# ۲–۷ طیف انرژی معادله دیراک با در نظر گرفتن تقارن اسپینی و شبه اسپینی

معادله دیراک یکی از کامل ترین نمونه های معادله نسبیتی است که می تواند یک سیستم نسبیتی از ذرات با اسپین (۱/۲) را توصیف کند. در سال های اخیر توجه قابل ملاحظه ای به حل معادله دیراک شده است. در حقیقت معادله دیراک برای پتانسیل های محدودی به طور دقیق قابل حل می باشد. تحقیقاتی نیز در چند سال اخیر برای پتانسیل های نوسانگر هماهنگ، ایکارت و وود-ساکسون انجام شده است [۵۹، ۶۰]. هم چنین روش های متفاوتی مانند ابر-تقارن و روش تحلیلی NU نیز برای حل این معادله به کار گرفته شده است. در این قسمت برای حل معادله دیراک ما از روش Bourmoula از ۲۱ استفاده می کنیم. در حدود ۳۰ سال قبل یک شبه تبهگنی در هسته های سنگین در یک نوکلئون با اعداد کوانتومی جغت  $(\frac{2}{2}+1=2,1)$  استفاده می کنیم. در مست و  $(\frac{1}{2}+1=1,1)$  مشاهده شد که در آن ایراز اعداد کوانتومی شعاعی و مداری و تکانه زاویه ای کل هستند [۶۲، ۶۲]. این شبه تبهگنی پدیده های طبیعی در ساختار هسته شامل تغییر هسته و ابر تغییر هسته و گشتاور مغناطیسی و ترازهای یکسان را به خوبی توصیف میکند. به خاطر همین موفقیت ها تلاش های بسیاری برای کشف و درک منشا این شبه تبهگنی انجام گرفته است [۶۴، ۶۵]. بر اساس تئوری (''RMF)، Ginocchio این تقارن را حاصل یکسانی تقریبی در اندازه اسکالر پتانسیل جاذب (s(r) و بردار پتانسیل دافع V(r) فرض کرده است [۶۶]. این تقارن منجر به ساده سازی و حل معادله دیراک می گردد.

۲–۷–۲ معادله اساسی دیراک  
شکل کلی معادله دیراک برای تک ذره ای به جرم M، شامل برهم کنش تانسوری (U(r) و پتانسیلهای اسکالر  
جاذب (S(r) و برداری دافع (V(r) به صورت رابطه (۲–۱۰۸) داده می شود [۲۴].  
$$[-i\hbar c\hat{a}.\hat{\nabla} + \hat{\beta}(Mc^2 + S(r)) - i\beta \hat{a}.\hat{r}U(r)]$$

که در آن β و α ماتریسهای ۴×۴ دیراک می باشند. با در نظر گرفتن تابع موج به صورت زیر معادلات جفت شده شعاعی را بدست می آوریم.

$$\psi_{\mathbf{n}_{r},k}\left(\mathbf{r},\theta,\phi\right) = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} F_{\mathbf{n}_{r},k}\left(\mathbf{r}\right) & Y_{jm}^{1}\left(\theta,\phi\right) \\ iG_{\mathbf{n}_{r},k}\left(\mathbf{r}\right) & Y_{jm}^{1}\left(\theta,\phi\right) \end{bmatrix}$$
(1.9-Y)

با جایگذاری معادله (۲-۱۰۹) در معادله (۲-۱۰۸) معادلات جفت شده دیراک برای بخش شعاعی با در نظر

گرفتن h=c=1 به صورت زیر در میآید:

<sup>&</sup>lt;sup>10</sup> Relativistic Mean Field

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U(r)\right) F_{n_r,k}(r) = [M + E_{n,k} - \Delta(r)]G_{n_r,k}(r) \\ \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + U(r)\right) G_{n_r,k}(r) = [M - E_{n,k} + \Sigma(r)]F_{n_r,k}(r) \end{cases}$$

$$(11 \cdot -7)$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{2kU(r)}{r} - \frac{dU(r)}{r} - U^2(r) - [M + E_{n,k} - \Delta(r)][M - E_{n,k} + \Sigma(r)] \\ + \frac{\frac{d\Delta(r)}{dr} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U(r)\right)}{(M + E_{n,k} - \Delta(r))} \end{cases} F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (111-1)$$

$$\begin{cases} \frac{d^{2}}{dr^{2}} - \frac{k(k-1)}{r^{2}} + \frac{2kU(r)}{r} + \frac{dU(r)}{r} - U^{2}(r) - [M + E_{n,k} - \Delta(r)][M - E + \Sigma(r)] \\ + \frac{\frac{d\Sigma(r)}{dr} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + U(r)\right)}{(M - E_{n,k} + \Sigma(r))} \end{cases} G_{n_{r},k}(r) = 0 \quad (117-7)$$

برای توجیه حالت تبه گنی در هسته های سنگین سعی شده که معادله دیراک به ازای این حاصل جمع و تفاضل حل شود که در آن  $\Delta(r) = V(r) - S(r)$  و  $\Sigma(r) = V(r) + S(r)$  میباشد. حالت اول را با تقارن اسپینی و حالت دوم را با تقارن شبه اسپینی نشان میدهند.

### Formula مروری بر روش

روش فرمولا برای بررسی معادلات موج نسبیتی و غیرنسبیتی شرودینگر، دیراک و کلاین گوردن برای برخی پتانسیلهای معین استفاده میشود. در این روش معادله دیفرانسیلی به صورت زیر نوشته میشود [۶۱].

$$\Psi_{n}''(s) + \frac{(k_{1} - k_{2}s)}{s(1 - k_{3}s)}\Psi_{n}'(s) + \frac{(As^{2} + Bs + C)}{s^{2}(1 - k_{3}s)^{2}}\Psi_{n}(s) = 0$$
(117-7)

برای معادله شرودینگر مانند در حضور پتانسیلهایی که بتوان به صورت معادله بالا نوشت، رابطه ویژه مقداری انرژی و تابع موج به ترتیب با روابط زیر داده می شوند:

$$\left[\frac{k_4^2 - k_5^2 - \left[\frac{1 - 2n}{2} - \frac{1}{2k_3}\left(k_2 - \sqrt{\left(k_3 - k_2\right)^2 - 4A}\right)\right]^2}{2\left[\frac{1 - 2n}{2} - \frac{1}{2k_3}\left(k_2 - \sqrt{\left(k_3 - k_2\right)^2 - 4A}\right)\right]}\right]^2 - k_5^2 = 0, k_3 \neq 0$$
 (1) (1) (1)

$$\Psi_{n}(s) = N_{n}s^{k_{4}}(1-k_{3}s)^{k_{5}} {}_{2}F_{1}\left(-n, n+2(k_{4}+k_{5})+\frac{k_{2}}{k_{3}}-1; 2k_{4}+k_{1}, k_{3}s\right)$$
(1) $\Delta$ -Y)

که در آن،

$$k_{4} = \frac{(1-k_{1}) + \sqrt{(1-k_{1})^{2} - 4C}}{2}$$

$$k_{5} = \frac{1}{2} + \frac{k_{1}}{2} - \frac{k_{2}}{2k_{3}} + \sqrt{\left[\frac{1}{2} + \frac{k_{1}}{2} - \frac{k_{2}}{2k_{3}}\right]^{2} - \left[\frac{A}{k_{3}^{2}} + \frac{B}{k_{3}} + C\right]}$$
(119-7)

و  $N_n$  ثابت بهنجارش میباشد. در حالت خاصی که  $0 \to k_3$  معادله ویژه مقداری و تابع موج به صورت زیر داده می شود:

$$\left[\frac{\mathbf{B} - \mathbf{k}_4 \mathbf{k}_2 - \mathbf{n} \mathbf{k}_2}{2\mathbf{k}_4 + \mathbf{k}_1 + 2\mathbf{n}}\right]^2 - \mathbf{k}_5^2 = 0 \tag{11V-T}$$

$$\Psi_{n}(s) = N_{n}s^{k_{4}}\exp(-k_{5}s)_{1}F_{1}(-n;2k_{4}+k_{1};(2k_{5}+k_{2})s)$$
(1)A-7)

این روش حل و بررسی یک راه معتبر برای بهبود مدلها و روشهای عددی برای سیستمهای کوانتمی معرفی می کند. **Y**-**V**-**۳ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی** این تقارن از نزدیکی مقدار دو پتانسیل جاذب و دافع ناشی میشود زیرا در پتانسیل میانگین نسبیتی مقادیر (r)S(r) (r)S(r) تقریبا یکسان است [۶۷]. تحت این شرایط یعنی تقارن اسپینی  $^{\circ}_{s}$  (r) $^{\circ}$  میشود. در ادامه معادله دیراک را برای پتانسیل هولسن و ایکارت با در نظر گرفتن پتانسیل تانسوری کولمبی و یوکاوا تحت تقارنهای اسپینی و شبه اسپینی بررسی میکنیم. برای بدست آوردن رابطه ویژه مقداری انرژی و توابع موج از روش alornul اسپینی و شبه اسپینی بررسی میکنیم. برای بدست آوردن رابطه ویژه مقداری انرژی و توابع موج پتانسیل خطی تانسوری در تقارن اسپینی و شبه اسپینی توسط Lisboa و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین Akcay برای چاربردار پتانسیلهای برداری و اسکالر و پتانسیل تانسوری کولنی شکل کمونته است. همچنین و شبه اسپینی به بررسی معادله دیراک برای و اسکالر و پتانسیل تانسوری کولنی شکل کرفته است. همچنین و شبه اسپینی و شبه اسپینی و شبه اسپینی توسط Lisboa و همکارانش مورد مطالعه قرار که تبه گنی بین دوگانههای اسپینی و شبه اسپینی میتواند توسط برهم کنش تانسوری از بین رود [۸۶، ۶۹]. که ته گری بین دوگانه ای اسپینی و شبه اسپینی میتواند توسط برهم کنش تانسوری از بین رود [۸۶، به]. زیر نوشته می شود:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{2kU(r)}{r} - \frac{dU(r)}{r} - U^2(r) - [M + E_{n,k} - C_s][M - E_{n,k} + \Sigma(r)] \right\} F_{n_r,k}(r) = 0 \quad ( 119 - 7 )$$
 در معادله بالا (r) به صورت پتانسیل هولسن[۲۵] و ایکارت [۲۶، ۲۷] در نظر گرفته می شود.

$$\sum(\mathbf{r}) = 4q_1 \frac{e^{-2\alpha \mathbf{r}}}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})^2} - q_2 \frac{(1 + e^{-2\alpha \mathbf{r}})}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})} + \frac{\mathbf{v}_0}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})} - \frac{\mathbf{v}_1}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})^2}$$
(11.1.1)

که در آن q1، q1، q2، v1 و v1 پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف میکنند. و پارامتر ۵ نیز محدوده پتانسیل را تعیین میکند. همچنین برای جمله تانسوری پتانسیل کولمبی را در نظر می گیریم [۷۰].

$$U(r) = -\frac{H}{r}, \quad H = \frac{Z_f Z_g e^2}{4\pi\epsilon_0}, \quad r \rangle R_c$$
(171-7)

R<sub>c</sub> شعاع کولمبی، Z<sub>f</sub> و Z<sub>f</sub> بار ذرات هدف و پرتابی هستند. با جایگذاری روابط (۲–۱۲۰) و (۲–۱۲۱) در رابطه (۲–۱۱۹) مولفه بالایی معادله شعاعی دیراک را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\left\{\frac{d^{2}}{dr^{2}} - \frac{\tau_{k}(\tau_{k}+1)}{r^{2}} - \gamma - \beta \left(4q_{1}\frac{e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})^{2}} - q_{2}\frac{(1+e^{-2\alpha r})}{(1-e^{-2\alpha r})} + \frac{v_{0}}{(1-e^{-2\alpha r})} - \frac{v_{1}}{(1-e^{-2\alpha r})^{2}}\right)\right\}F_{n_{r},k}(r) = 0 \quad (1 \text{ YY-Y})$$

.
$$\beta = (M + E_{n,k} - C_s)$$
 و  $T_k = k + H$ ,  $\gamma = (M + E_{n,k} - C_s)(M - E_{n,k})$  که در آن

معادله (۲–۱۲۲) تنها برای  $T_k=0,-1$  به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی این معادله ما تقریب پیشنهادی توسط Greene و Aldrich [۷۲، ۷۱] را در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری میکنیم این تقریب برای 1 >> $\alpha$ r معتبر است [۷۳].

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2}{(1 - e^{-2\alpha r})^2}$$
(177-7)

رفتار تقریب در نظر گرفته شده در شکل (۲–۱۱) نشان میدهد که میتوان توافق خوبی برای آلفاهای کوچک مشاهده کرد.



شکل (۱۱-۲) رفتار تقریب بکار برده شده برایα=0.05 fm<sup>-1</sup>، α=0.01 fm<sup>-1</sup> و

با بکار بردن تغییر متغیر  $s = exp(-2\alpha r)$  رابطه (۲–۱۲۲) به صورت زیر نوشته می شود:
$$F_{n,k}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}F_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[As^2 + Bs + C\Big]F_{n,k}(s) = 0$$
(174-7)

که در آن A، B و C به صورت زیر درنظر گرفته میشوند:

$$\begin{split} \mathbf{A} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ \gamma + \beta \mathbf{q}_2 \big] \\ \mathbf{B} &= \frac{1}{4\alpha^2} \big[ 2\gamma - 4\beta \mathbf{q}_1 + \beta \mathbf{v}_0 \big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{q}_2 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_k \left( \tau_k - 1 \right) + \gamma - \beta \mathbf{v}_1 + \beta \mathbf{v}_0 - \beta \mathbf{v}_1 \Big] \\ \mathbf{C} &= -\frac{1}{4\alpha^2} \big[ 4\alpha^2 \tau_1 + \beta \mathbf{v}_1 +$$

K به اسانی بدست می

 $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ (179-7)

و سایر ضرایب k<sub>i</sub> نیز با توجه به رابطه (۲-۱۱۶) بدست میآیند:

$$k_{4} = \sqrt{-C}$$

$$k_{5} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - [A + B + C]}$$
(17V-7)

سپس با استفاده از رابطه (۲-۱۱۴) معادله ویژه مقداری انرژی به صورت زیر بدست میآید

$$\left[\frac{-C - \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left[A + B + C\right]}\right]^2 - \left[\frac{1 - 2n}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{-4A}\right)\right]^2}{2\left[\frac{1 - 2n}{2} - \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{-4A}\right)\right]}\right]^2 - \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \left[A + B + C\right]}\right]^2 = 0 \quad (1 \text{ YA} - \text{Y})$$

در جداول (۲-۶) تا (۲-۸) نتایج عددی برای معادله ویژه مقداری انرژی در حالت تقارن اسپینی را (در واحد نسبیتی بر حسب fm<sup>-1</sup>) نشان دادهایم.

1	n,k>0	State(l,j)	$E^{s}_{n,k}(H=0)$	$E^{s}_{n,k}(H=0,65)$	n,k<0	State(l,j+1)	$E^{s}_{n,k}(H=0)$	E <sup>s</sup> <sub>n,k</sub> (H=0.65)
١	١,١	$p_{1/r}$	3/10412.041	۵/۲۳۰۹۳۲۵۰۲	۱,-۲	$p_{r/r}$	3/10412.041	<b>٢/• ٢٢٣٣٣۴</b> ٨٣
٢	١,٢	$d_{r/r}$	۵/۸۱۶۹۳۸۷۹۱	8/883441908	۳-۳	$d_{\Delta/r}$	۵/۸۱۶۹۳۸۷۹۱	F/FF9VF7WVW
٣	١,٣	۱f <sub>۵/۲</sub>	V/• 84777482	٧/۶١٢٢٢۶٠٠٧	۴۱	۱f <sub>۷/۲</sub>	V/• 84777482	6/31222246
۴	۱,۴	$g_{\nu/\tau}$	V/100878477	٨/٢٢٧۶٧٠۶٠٢	۵-,۱	١g <sub>٩/٢</sub>	V/100878477	V/TVT977879
١	۲,۱	$rp_{\nu/r}$	۵/۷۷۰۹۸۹۰۹۸	8/884808180	۲,-۲	${}^{\tau}p_{{}^{\tau/\tau}}$	۵/۷۷۰۹۸۹۰۹۸	4/807200779
٢	۲,۲	$rd_{r/r}$	V/••0094400	٧/۵۶۲۹۹۶۵۰۳	۲,-۳	$rd_{a/r}$	V/++6694466	\$/T\$VFTT1TT
٣	۲,۳	${}^{Y} f_{\Delta/Y}$	۷/۸۰۶۸۰۶۱۴۹	٨/١٨٠٠٢١٧٩۴	۲,-۴	۲f <sub>v/۲</sub>	۷/۸۰۶۸۰۶۱۴۹	V/874974878
۴	۲,۴	۲g <sub>v/r</sub>	٨/٣۴۶۴٧٠٠٠۴	٨/٦٠٥٩٠٣۶۶٣	۲,-۵	۲g <sub>۹/۲</sub>	٨/٣۴۶۴٧٠٠٠۴	۸/۰۱۹۲۱۰۳۹۵

جدول (۲-۶) ویژه مقادیر انرژی(بر حسب<sup>-1</sup>mm) در حالت تقارن اسپینی برای حضور و عدم حضور پتانسیل تانسوری کولنی با پارامترهای M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.05fm<sup>-1</sup>, v<sub>1</sub>=0.4fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=0.3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=0.1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=0.2fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub>=5fm<sup>-1</sup>

M=10fm<sup>-1</sup>, اویژه مقادیر انرژی(بر حسب $fm^{-1}$ ) برای حالت تقارن اسپینی برای آلفاهای مختلف با پارامترهای (۲–۲) ویژه مقادیر انرژی(بر حسب $fm^{-1}$ , v<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, v<sub>2</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=2fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub>=5fm<sup>-1</sup>.

$\alpha(\text{fm}^{-1})$	$E_{n,k}$	H=0)	E <sub>n,k(</sub> H	=0.65)
	1d <sub>3/2</sub>	1d <sub>5/2</sub>	1d <sub>3/2</sub>	1d <sub>5/2</sub>
۰/٣	7/387211780	۲/۳۶۷۲۱۱۷۸۵	2/826011.16	•/938•9378
۰/۳۵	٣/۵٣٩٨٩۵١۴	٣/۵٣٩٨٩۵١۴	4/771297269	7/080878787
۰/۴	4/221194921	4/221194921	۵/۶۹・۹۹۶۵۸۶	87/089989108
•/۵	۵/۹۹۸۹۶۸۹۷۵	۵/۹۹۸۹۶۸۹۷۵	٧/٠٠٩۵٠٠۴۵۴	4/801222918
۰/۶	۶/٩٩۵۸۵۲۰۳۹	۶/٩٩۵۸۵۲۰۳۹	۷/۸۵۳۳۱۸۰۴۷	۵/۸۲۷۲۹۹۹۵۳
• /Y	٧/٦٧•۵٧٢۵•٧	٧/٦٧٠۵٧٢۵٠٧	٨/٤٠٠۵٩۴٧٨٩	<i>\$</i> /\$&TA&9&9A

M=10fm<sup>-1</sup>, اویژه مقادیر انرژی(بر حسب fm<sup>-1</sup>), برای حالت تقارن اسپینی برای جرمهای مختلف با پارامترهای (M-7) ویژه مقادیر انرژی(بر حسب fm<sup>-1</sup>), برای حالت تقارن اسپینی برای جرمهای مختلف با پارامترهای  $\alpha=0.05$ fm<sup>-1</sup> c=1, h=1, v<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=2fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub> =5fm<sup>-1</sup>.

$M(fm^{-1})$	E <sub>n/k</sub> (I	H=0)	E <sub>n/k</sub> (H=	=0.65)	
	1d <sub>3/2</sub>	1d <sub>5/2</sub>	1d <sub>3/2</sub>	1d <sub>5/2</sub>	
$\Delta/\Delta$	٣/٣٣۵۶٧٧٨٩۵	٣/٣٣۵۶٧٧٨٩۵	٣/៱٩٣۵٢۵۵۶٢	2/882020880	
۶	3649947780	3/409947020	4/1.00.0408	7/72071499	
۶/۵	۳/۶۱۸۲۱۱۰۹۶	٣/۶١٨٢١١٠٩۶	4/3111.8.24	2/222010	
٧	W/VATAVTAA9	<i>۳/۷۵۲۵</i> ۷۲۸۸۹	4/214025021	٢/٨٢•۴١٩۴٩٣	
٨	4/.18901.88	4/•12901•22	4/911040489	7/9•11•9041	
٩	4/789808779	4/7898089779	۵/۳۰۳۰۸۸۲۹۸	४/११।•۶४१४४	
1.	4/021194901	4/021194901	۵/۶۹۰۹۹۶۵۸۶	۳/۰۶۹۹۲۹۱۰۴	

در ادامه با توجه به رابطه های (۲–۱۱۵) و (۲–۱۱۷) می توان مولفه بالایی تابع موج را بدست آوریم:  

$$F_{n,k}^{s}(\mathbf{r}) = N(e^{-2\alpha \mathbf{r}})^{(\sqrt{-c})}(1-e^{-2\alpha \mathbf{r}})^{\left(\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+A+B+C}\right)}{}_{2}F_{i}\left(-n,n+2\left(\sqrt{-c}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+A+B+C}\right);2\sqrt{-c}+1,e^{-2\alpha \mathbf{r}}\right)(174-7)$$
که در آن N ثابت بهنجارش می باشد. هم چنین مولفه پایینی معادله دیراک با توجه به رابطه زیر داده می شود:  

$$G_{n,k}^{s}(\mathbf{r}) = \frac{1}{M+E_{n,k}^{s}} - C_{s}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U(r)\right)F_{n,k}^{s}(r) \qquad (174-7)$$

در این قسمت معادله ویژه مقداری و توابع موج برای پتانسیل ایکارت و هولسن با در نظر گرفتن پتانسیل کولنی برای قسمت تانسوری را در حالت تقارن اسپینی بدست آوردیم.

- ۲-۷-۲ ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن شبه اسپینی تحت شرایط تقارن شبه اسپینی یعنی dΣ(r) dr = 0 یا یینی معادله دیراک به صورت زیر نوشته می شود:
- $\left\{ \frac{d^2}{dr^2} \frac{k(k-1)}{r^2} + \frac{2kU(r)}{r} + \frac{dU(r)}{r} U^2(r) [M + E_{n,k} \Delta(r)][M E + \Sigma(r)] \right\} G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (1\text{T}1 \text{T})$   $\text{ splitting} \quad \text{ sp$

$$\Delta(\mathbf{r}) = 4q_1 \frac{e^{-2\alpha \mathbf{r}}}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})^2} - q_2 \frac{(1 + e^{-2\alpha \mathbf{r}})}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})} + \frac{\mathbf{v}_0}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})} - \frac{\mathbf{v}_1}{(1 - e^{-2\alpha \mathbf{r}})^2}$$
(1977-7)

$$U(r) = -\frac{H}{r}, \quad H = \frac{Z_f Z_g e^2}{4\pi\varepsilon_0}, \quad r \rangle R_c$$
(1777-7)

با جایگذاری رابطه (۲–۱۳۲) و (۲–۱۳۳) در رابطه (۲–۱۳۱) مولفه پایینی معادله دیراک را بدست می آوریم:  

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{\lambda_k(\lambda_k - 1)}{r^2} - \gamma' + \beta' \left(4q_1 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2} - q_2 \frac{(1 + e^{-2\alpha r})}{(1 - e^{-2\alpha r})} + \frac{v_0}{(1 - e^{-2\alpha r})} - \frac{v_1}{(1 - e^{-2\alpha r})^2}\right)\right\} G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (1 \% - 7)$$

که در آن ۵<sub>k</sub> = k + H، (M - E<sub>n,k</sub> + C<sub>ps</sub>) و γ' = (M + E<sub>n,k</sub>)(M - E<sub>n,k</sub> + C<sub>ps</sub>)، 
$$\lambda_k = k + H$$
 که در آن  
با استفاده از تغییر متغیر (s = exp(-2ar) و بکار بردن تقریب مناسب رابطه (۲-۱۳٤) به صورت زیر در  
میآید:

$$G_{n,k}'(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}G_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[A's^2 + B's + C'\Big]G_{n,k}(s) = 0$$
(170-7)

که در آن پارامترهای 'A، 'B و 'C به صورت زیر در نظر گرفته شدهاند:

$$\begin{split} \mathbf{A}' &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ \gamma' - \beta' q_2 \Big] \\ \mathbf{B}' &= \frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 2\gamma' + 4\beta' q_1 - \beta' v_0 \Big] \\ \mathbf{C}' &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' q_2 - \beta' v_0 + \beta' v_1 \Big] \\ &= -\frac{1}{4\alpha^2} \Big[ 4\alpha^2 \lambda_k \left( \lambda_k - 1 \right) + \gamma' + \beta' v_1 + \beta' v_1$$

$$k'_1 = k'_2 = k'_3 = 1$$
 (177)

$$k'_{4} = \sqrt{-C'}$$

$$k'_{5} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - [A' + B' + C']}$$
(137A-7)

با استفاده از رابطه (۲–۱۱۴) معادله ویژه مقداری انرژی توسط رابطه (۲–۱۳۹) داده میشود:

$$\left[\frac{-C'-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[A'+B'+C'\right]}\right]^2-\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4A'}\right)\right]^2}{2\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4A'}\right)\right]}\right]^2-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[A'+B'+C'\right]}\right]^2=0 \quad (1724-7)$$

در جداول (۲–۹) تا (۲–۱۱) نتایج عددی برای رابطه انرژی در حالت تقارن شبه اسپینی را (در واحد نسبیتی بر جداول (۳–۹) تشان داده ایم. بر حسب<sup>1</sup>-fm) نشان داده ایم.

جدول (۲–۹) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب $fm^{-1}$ ) در حالت تقارن شبه اسپینی برای حضور و عدم حضور پتانسیل تانسوری (M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1,  $\alpha$ =0.05fm<sup>-1</sup>, v<sub>1</sub>=0.4fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=0.3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=0.1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=-0.2fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>.

1	n,k<0	State	$E^{ps}_{n,k}$	$E^{ps}_{n,k}$	n,k>0	State	$E^{ps}_{n,k}$	$E^{ps}_{n,k}$
		(l,j)	(H=0)	(H=0.65)		(l+2,j+1)	(H=0)	(H=0.65)
١	۱,-۱	۱s <sub>۱/۲</sub>	-४/•۶۵۷۶۴۲•۵	-۵/۷・۱۶۴۵۸۵۲	١,٢	$d_{r/r}$	-٧/•۶۵٧۶۴٢•۵	-४/९१۶۶۱۵۵۸۷
٢	۱,-۲	${}^{N}p_{{}^{T/T}}$	-8/2428.1198	- 4/24 • 912 • 21	۱,۳	۱f <sub>۵/۲</sub>	-8/2428.1198	-8/891210076
٣	۳-, ۱	$d_{\Delta/r}$	-8/872228828	-8/0.0266.02	۱,۴	$g_{\nu/r}$	-λ/λγγγγ۶λγλ	-9/177415778
۴	۴-, ۱	$hf_{\nu/\tau}$	-9/261982610	-9/•778186•9	۱,۵	${}^{N}h_{{}^{N/Y}}$	-9/261982610	-9/404946158
١	۲,-۱	۲s <sub>۱/۲</sub>	-8/20842526	-٧/۵۴٠٠٩٧٣٣٩	۲,۲	$rd_{r/r}$	-8/20842826	-8/808819185
٢	۲,-۲	$\tau p_{\tau/\tau}$	-&/&TV9VT&11	-8/41.929201	۲,۳	۲f ۵/۲	-8/82242611	-9/•9898•177
٣	۲,-۳	$rd_{a/r}$	-9/5•91155•5	-8/9889.689	۲,۴	$rg_{r/r}$	-9/50911550	-9/77776567
۴	۲,-۴	۲f	-9/44498488	-9/30714601	۵, ۲	۲h <sub>۹/۲</sub>	-9/44498488	-9/2247.2412

جدول (۲–۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-m<sup>-1</sup>) برای حالت تقارن شبه اسپینی برای آلفاهای مختلف با پارامترهای M=10fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, v<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=2fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub>=-5fm<sup>-1</sup>.

$\alpha(\text{fm}^{-1})$	E <sup>ps</sup> <sub>n/k</sub>	E <sup>ps</sup> <sub>n/k(</sub> H=0)		$E^{ps}_{n/k}$ (H=0.65)	
	$1 s_{1/2}$	1d <sub>3/2</sub>	$1s_{1/2}$	1d <sub>3/2</sub>	
۰/٣	-4/212211740	-۴/۳۱۳۲۱۱۷۴۷	-7/7•4229779	-۵/۸۵۱۶۱۰۸۷۹	
۰/۳۵	-0/46196•110	-0/46196•110	-٣/۴٩۶٨٣٢۶٨۶	-8/848897808	
٠/۴	-8/8206611996	-8/86•481894	-4/2•1128011	-7/2972764	
•/۵	-4/08 • 1 1 • 28	-4/28.11.28	-8/•29144480	-8/284.424	
• /۶	-8/36819966	-8/3661276.6	-4/•766•211	-9/1789171.4	
• /Y	-8/221664216	-8/201889219	_V/V१४٣١٩۶V٩	-9/27707888	

$M(fm^{-1})$	$E^{ps}_{n,k}(H=0)$		$E^{ps}{}_{n,k}(H=0.65)$	
	$1s_{1/2}$	1d <sub>3/2</sub>	$1s_{1/2}$	1d <sub>3/2</sub>
۵/۵	-\$/7	-4/28284	-٣/۴۳۵۳۴۵•۴٩	-4/891201189
۶	-4/219488498	-4/019488498	-٣/۵۶۲۱۲٩・٩٧	-۵/۲・・۸۴۶・۴۱
۶/۵	-۴/۷۵۱۸۶۳۰۷۶	-4/401824.48	-٣/۶۸۵・۴・۴۵۳	-۵/۵・۶۱۶۵۸۹۱
۷	-4/981424947	-4/981424947	-٣/٨•۵٣۶٧•۶	$-\Delta/\Lambda\cdot\Lambda\Delta$ ۳۹۷۷۵
٨	-0/420100181	-0/420100161	-4/•41•8•01	-8/4•102219•9
٩	-۵/۸۸۴۱۸۹۸۹۱	-۵/۸۸۴۱۸۹۸۹۱	-4/27280172	-٧/••١۶٧٣٢٨٢
١.	-8/22. 481148	-8/8208	-4/2017282012	-٧/۵٩٢٨٣۶٠٠۴

c=1, دول (۲–۱۱) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب $fm^{-1}$  برای حالت تقارن شبه اسپینی برای جرمهای مختلف با پارامترهای (۴–۱۱) محول (۲–۱۱) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب $fm^{-1}$ , v<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, v<sub>2</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub>=-2fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>

سرانجام با استفاده از رابطههای (۲–۱۱۵) و (۲–۱۳۸) مولفه پایینی معادله دیراک را بدست می آوریم.

$$G_{n,k}^{ps}(\mathbf{r}) = N\left(e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{-c'}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right)} {}_{2}F_{1}\left(-n, n + 2\left(\sqrt{-c'} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) \left(1 + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right)$$

$$F_{n,k}^{ps}(r) = \frac{1}{M - E_{n,k}^{ps} + C_{ps}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + U(r)\right) G_{n,k}^{ps}(r)$$
(141-7)

در این قسمت معادله ویژه مقداری و توابع موج برای پتانسیل ایکارت و هولسن با در نظر گرفتن پتانسیل کولمبی برای قسمت تانسوری را در حالت تقارن شبه اسپینی بدست آوردیم. در شکل (۲–۱۲) رفتار انرژی را بر حسب پارامتر H برای تقارن اسپینی و شبهاسپینی نشان دادهایم.



۲–۷–۵ ویژه مقادیر انرژی در تقارن اسپینی با پتانسیل کولمبی و یوکاوا  
به عنوان برهمکنش تانسوری  
در این قسمت برای تقارن اسپینی 
$$C(r) = C_s$$
 (r) را به صورت زیر در نظر میگیریم:  
 $\Sigma(r) = 4q_1 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})^2} - q_2 \frac{(1+e^{-2\alpha r})}{(1-e^{-2\alpha r})} + \frac{V_0}{(1-e^{-2\alpha r})^2} - \frac{V_1}{(1-e^{-2\alpha r})^2}$ 

$$U(r) = -\frac{H}{r} - A \frac{\exp(-2\alpha r)}{r}$$
(147-7)

$$F_{n,k}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}F_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[\chi_2 s^2 + \chi_1 s + \chi_0\Big]F_{n,k}(s) = 0$$
 (144-7)

که پارامترهای  $\chi_2$ ،  $\chi_1$  و  $\chi_2$  را به صورت زیر داریم:

$$\begin{split} \chi_{2} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \big[ \gamma + \beta q_{2} \big] + A \big( A - 1 \big) \\ \chi_{1} &= \frac{1}{4\alpha^{2}} \big[ 2\gamma - 4\beta q_{1} + \beta v_{0} \big] - 2A\tau_{k} \end{split} \tag{150-7} \\ \chi_{0} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \Big[ 4\alpha^{2}\tau_{k} \left( \tau_{k} - 1 \right) + \gamma - \beta q_{2} + \beta v_{0} - \beta v_{1} \Big] \\ N_{0} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \Big[ 4\alpha^{2}\tau_{k} \left( \tau_{k} - 1 \right) + \gamma - \beta q_{2} + \beta v_{0} - \beta v_{1} \Big] \\ N_{0} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \Big[ 4\alpha^{2}\tau_{k} \left( \tau_{k} - 1 \right) + \gamma - \beta q_{2} + \beta v_{0} - \beta v_{1} \Big] \\ N_{0} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \Big[ 4\alpha^{2}\tau_{k} \left( \tau_{k} - 1 \right) + \gamma - \beta q_{2} + \beta v_{0} - \beta v_{1} \Big] \\ N_{0} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \Big[ 4\alpha^{2}\tau_{k} \left( \tau_{k} - 1 \right) + \gamma - \beta q_{2} + \beta v_{0} - \beta v_{1} \Big] \\ &= k_{1} = k_{2} = k_{3} = 1 \end{aligned}$$

$$k_{4} = \sqrt{-\chi_{0}}$$

$$k_{5} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - [\chi_{2} + \chi_{1} + \chi_{0}]}$$
(147)

با استفاده از رابطه (۲–۱۱۴) معادله ویژه مقداری انرژی به صورت رابطه (۲–۱۴۸) داده می شود.

$$\left[\frac{-\chi_{0}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\chi_{2}+\chi_{1}+\chi_{0}\right]}\right]^{2}-\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\chi_{2}}\right)\right]^{2}}{2\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\chi_{2}}\right)\right]}\right]^{2}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\chi_{2}+\chi_{1}+\chi_{0}\right]}\right]^{2}=0 \quad (1 \notin \lambda-\Upsilon)$$

همچنین با توجه به رابطه (۲–۱۱۵) و رابطه (۲–۱۴۷) و رابطه (۲–۱۴۷) مولفه بالایی تابع موج داده می شود.  $F_{n,k}^{s}(r) = N(e^{-2\alpha r})^{\left(\sqrt{-\chi_{0}}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \chi_{2} + \chi_{1} + \chi_{0}}\right)} {}_{2}F_{1}\left(-n, n + 2\left(\sqrt{-\chi_{0}} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \chi_{2} + \chi_{1} + \chi_{0}}\right); 2\sqrt{-\chi_{0}} + 1, e^{-2\alpha r}\right) (149-7)$ 

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد همچنین مولفه پایینی معادله دیراک با توجه به رابطه زیر داده میشود:  $G_{n,k}^{s}(r) = \frac{1}{M + E_{-}^{s} - C_{s}} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U(r)\right) F_{n,k}^{s}(r) \qquad (12 \cdot -7)$ 

اثر برهم کنش تانسوری بر مولفه بالایی و پایینی تابع موج در حالت تقارن اسپینی در شکل (۲-۱۳) نشان داده شده است.



شکل (۲) (مولفه بالایی و (b) پایینی برای  $1f_{7/2}$  تحت تقارن اسپینی در حضور برهم کنش تانسوری یوکاوا برای (b) مولفه بالایی و (b) پایینی برای H=0  $\hbar=1,$   $\alpha=0.05$  fm<sup>-1</sup>,  $v_1=4$  fm<sup>-1</sup>,  $v_0=3$  fm<sup>-1</sup>,  $q_1=1$  fm<sup>-1</sup>,  $q_2=2$  fm<sup>-1</sup>,  $C_s=5$  fm<sup>-1</sup>, M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, پارامترهای

در این قسمت معادله ویژه مقداری انرژی و مولفههای تابع موج دیراک برای پتانسیل ایکارت و هولسن تحت تقارن اسپینی در حضور و عدم حضور برهم کنش تانسوری به صورت یوکاوا بررسی شدند.

$$\Delta(\mathbf{r}) = 4q_1 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2} - q_2 \frac{(1 + e^{-2\alpha r})}{(1 - e^{-2\alpha r})} + \frac{v_0}{(1 - e^{-2\alpha r})} - \frac{v_1}{(1 - e^{-2\alpha r})^2}$$
(1Δ1-7)

$$U(r) = -\frac{H}{r} - A \frac{\exp(-2\alpha r)}{r}$$
(127-7)

که در آن H و A پارامترهای حقیقی می باشند. با جایگذاری روابط (۲-۱۵۱) و (۲-۱۵۲) در رابطه (۲-۱۳۱) داریم:

$$G_{n,k}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}G_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[\chi_2's^2 + \chi_1's + \chi_0'\Big]G_{n,k}(s) = 0$$
(127-7)

که پارامترهای 2'، 1' و 3' را به صورت زیر داریم:

$$\begin{split} \chi'_{2} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} [\gamma - \beta q_{2}] + A(A+1) \\ \chi'_{1} &= \frac{1}{4\alpha^{2}} [2\gamma + 4\beta q_{1} - \beta v_{0}] - 2A(\lambda_{k} - 1) \\ \chi'_{0} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \Big[ 4\alpha^{2}\lambda_{k}(\lambda_{k} - 1) + \gamma + \beta q_{2} - \beta v_{0} + \beta v_{1} \Big] \\ \chi'_{0} &= -\frac{1}{4\alpha^{2}} \Big[ 4\alpha^{2}\lambda_{k}(\lambda_{k} - 1) + \gamma + \beta q_{2} - \beta v_{0} + \beta v_{1} \Big] \\ \chi'_{1} &= k'_{1} = k'_{1} = 1, 2, 3 \end{split}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'_{1} &= \mathbf{k}'_{2} = \mathbf{k}'_{3} = 1 \end{aligned}$$

$$(1 \Delta \delta - \mathbf{r})$$

$$k'_{4} = \sqrt{-\chi'_{0}}$$

$$k'_{5} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - [\chi'_{2} + \chi'_{1} + \chi'_{0}]}$$
(109-7)

با استفاده از رابطه (۲–۱۱۴) معادله ویژه مقداری انرژی به صورت رابطه (۲–۱۵۷) داده می شود.

$$\left[\frac{-\chi_{0}^{\prime}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\chi_{2}^{\prime}+\chi_{1}^{\prime}+\chi_{0}^{\prime}\right]}\right]^{2}-\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\chi_{2}^{\prime}}\right)\right]^{2}}{2\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\chi_{2}^{\prime}}\right)\right]}^{2}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\chi_{2}^{\prime}+\chi_{1}^{\prime}+\chi_{0}^{\prime}\right]}\right]^{2}=0 \quad (1\Delta Y-Y)$$

همچنین با توجه به رابطه (۲–۱۱۵) و رابطه (۲–۱۵۶) مولفه پایینی تابع موج داده می شود.

$$G_{n,k}^{ps}(\mathbf{r}) = N\left(e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{-\chi_{0}^{\prime}}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \chi_{2}^{\prime} + \chi_{1}^{\prime} + \chi_{0}^{\prime}}\right)}$$

$${}_{2}F_{1}\left(-n, n + 2\left(\sqrt{-\chi_{0}^{\prime}} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \chi_{2}^{\prime} + \chi_{1}^{\prime} + \chi_{0}^{\prime}}\right); 2\sqrt{-\chi_{0}^{\prime}} + 1, e^{-2\alpha r}\right)$$

$$(1 \Delta \lambda - Y)$$

که در آن N' ثابت بهنجارش میباشد. همچنین مولفه بالایی معادله دیراک با توجه به رابطه زیر داده می شود:

$$F_{n,k}^{ps}(r) = \frac{1}{M - E_{n,k}^{ps} + C_{ps}} \left( \frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + U(r) \right) G_{n,k}^{ps}(r)$$
(109-7)

اثر برهم کنش تانسوری بر مولفه بالایی و پایینی تابع موج در حالت تقارن شبه اسپینی در شکل (۲-۱۴) نشان داده شده است.



شکل (۲) (۵) مولفه بالایی و (b) پایینی برای  $1d_{5/2}$  تحت تقارن شبه اسپینی در حضور برهم کنش تانسوری یوکاوا برای (b) مولفه بالایی و (b) پایینی برای  $M=10 \text{ fm}^{-1}, c=1, h=1, \alpha=0.05 \text{ fm}^{-1}, v_1=4 \text{ fm}^{-1}, v_0=3 \text{ fm}^{-1}, q_1=1 \text{ fm}^{-1}, q_2=-2 \text{ fm}^{-1}, C_{ps}=-5 \text{ fm}^{-1}$ 

در این قسمت معادله ویژه مقداری انرژی و مولفههای تابع موج دیراک برای پتانسیل ایکارت و هولسن تحت تقارن شبه اسپینی در حضور و عدم حضور برهمکنش تانسوری به صورت یوکاوا بررسی شدند. در شکل (۲–۱۵) و (۲–۱۶) اثر برهمکنش تانسوری کولمبی و برهمکنش تانسوری یوکاوا به همراه کولمبی در حذف تبه گنی ویژه مقادیر انرژی نشان داده شده است.



شکل (۲–۱۵) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و (b) شبهاسپینی بر حسب پارامتر A برای برهم کنش تانسوری یوکاوا با M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h =1, α=0.05fm<sup>-1</sup>, v<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub><sup>ps</sup>=-2fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub><sup>s</sup>=2fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub> =5fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>.



شکل (۲–۱۶) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و(b) شبه اسپینی بر حسب پارامتر A=H برای برهم کنش تانسوری یوکاوا M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1,  $\hbar$  =1,  $\alpha$ =0.05fm<sup>-1</sup>, v<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub><sup>ps</sup>=-2fm<sup>-1</sup>, c=1,  $\hbar$  =1,  $\alpha$ =0.05fm<sup>-1</sup>, v<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=3fm<sup>-1</sup>, c<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub><sup>ps</sup>=-2fm<sup>-1</sup>, c<sub>2</sub>=2fm<sup>-1</sup>, c<sub>1</sub>=-2fm<sup>-1</sup>, c<sub>2</sub>=-2fm<sup>-1</sup>.

در شکل (۲–۱۷) طیف انرژی در حالت تقارن اسپینی و شبهاسپینی برای برهم کنش تانسوری یوکاوا و برهم کنش تانسوری کولمبی مقایسه شده است.



شکل (۲–۱۷) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و (b) شبهاسپینی بر حسب پارامتر A و H برای مقایسه بین برهمکنش M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h =1, α=0.05fm<sup>-1</sup>, V<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, پارامترهای M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h =1, α=0.05fm<sup>-1</sup>, V<sub>1</sub>=4fm<sup>-1</sup>, V<sub>0</sub>=3fm<sup>-1</sup>, q<sub>1</sub>=1fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub><sup>ps</sup>=-2fm<sup>-1</sup>, q<sub>2</sub><sup>s</sup>=2fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub> =5fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>.

در شکلهای (۲–۱۵)، تا (۲–۱۷) نشان دادیم که تبه گنی ویژه مقادیر انرژی با حضور برهم کنش تانسوری از بین میرود همچنین با افزایش پارامترهای A و H میزان رفع تبه گنی نیز افزایش مییابد.

#### ۲-۷-۲ جمع بندی

در این قسمت معادله ویژه مقداری انرژی را در حضور و غیاب برهم کنش تانسوری کولمبی برای مقادیر مختلف اعداد کوانتمی n و k بدست آوردیم. در جداول (۲-۶) تا (۲-۱۱) در غیاب عامل تانسوری (H = 0) تبه گنی بین دو گانه های اسپینی و شبه اسپینی مشاهده می شود. برای مثال تبه گنی بین دو گانه های  $(1s_{1/2}, 1d_{3/2}),$ (1d<sub>3/2</sub>, 1d<sub>5/2</sub>) و ... در حالت تقارن اسپینی و تبه گنی بین دوگانههای (1d<sub>3/2</sub>, 1d<sub>5/2</sub>) (1p<sub>3/2</sub>, 1f<sub>5/2</sub>) و ... در حالت شبه اسپینی مشاهده می شود. اما هنگامی که عامل برهم کنش تانسوری را (H=0.65) در نظر می گیریم تبه گنی بین دو گانه های اسپینی و شبه اسپینی از بین می رود. در جداول (۲-۶) و (۲–۷) در حالت تقارن اسپینی و در جداول (۲–۹) و (۲–۱۰) در حالت تقارن شبه اسپینی برای پارامترهای مختلف آلفا و جرم وجود تبه گنی و عدم تبه گنی در غیاب و حضور عامل تانسوری نشان داده شده است. در شکل (۲–۱۲) اثر برهم کنش تانسوری برای حذف تبه گنی نشان داده شده است که با افزایش پارامتر H این میزان جدا شدگی بیشتر می شود. اثر برهم کنش تانسوری یو کاوا بر روی مولفه های بالایی و پایینی تابع موج دیراک در شکلهای (۲–۱۳) و (۲–۱۴) نشان داده شده است. همچنین تاثیر برهم کنش تانسوری یوکاوا و برهمکنش تانسوری کولمبی بر روی دوگانههای اسپینی (1d5/2, 1f7/2&1d3/2, 1d5/2) و شبهاسپینی (1p3/2, 1f5/2&1d5/2, 1g7/2) در شکلهای (۲–۱۵) و (۲–۱۶) نشان داده شده است. در شکل (۲-۱۷) نشان داده شده است که اثر برهم کنش تانسوری کولمبی در حذف تبه گنی بیشتر از برهم کنش تانسوري يوكاوا ميباشد.

## ۸–۲ بررسی پتانسیل Manning-Rosen و quasi-Hellman در سیستم نسبیتی معادله دیراک

با روندی مشابه بحث مطرح شده در قسمت قبل این بار پتانسیل ترکیبی دیگری را مورد بررسی قرار میدهیم و به بررسی ترازهای انرژی با کمک روش Formula در حالت تقارن اسپینی و شبهاسپینی برای معادله دیراک می پردازیم.

# - A - Y ویژه مقادیر انرژی با در نظر گرفتن تقارن اسپینی اسپینی تحت شرایط تقارن اسپینی معادله دیراک به صورت زیر $\frac{d\Delta(r)}{dr} = 0$ یا $\Delta(r) = C_s = const$ نوشته می شود:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{2kU(r)}{r} - \frac{dU(r)}{r} - U^2(r) - [M + E_{n,k} - C_s][M - E_{n,k} + \Sigma(r)]\right\} F_{n_r,k}(r) = 0 \quad (15.-7)$$

که در آن (r)∑ به صورت پتانسیل Manning-Rosen [۷۵ ،۷۴] و ۷۵] [۷۶] در نظر گرفته میشود.

$$\Sigma(r) = -A \frac{e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})} + B(\frac{e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}})^2 + b \frac{e^{-\alpha r}}{r^2} - \frac{a}{r} \text{ and } A = \alpha^2 \frac{z}{q}, B = \alpha^2 \frac{v(v-1)}{q}$$
(191-7)

که در آن q ،z ،b ،a و v پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف می کنند و پارامتر α نیز محدوده پتانسیل را تعیین می کند و برای جمله تانسوری پتانسیل ترکیبی هولسن [۲۵] و یو کاوا [۳۱] را در نظر می گیریم.

$$U(r) = -\frac{V_0}{(1 - e^{-\alpha r})} - \frac{V_1}{r} e^{-\alpha r}$$
(197-7)

که در آن v<sub>0</sub> و v<sub>1</sub> پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف میکنند.

$$\begin{cases} \frac{d^{2}}{dr^{2}} - \frac{1}{r^{2}} \left( k(k+1) + 2kv_{1}e^{-\alpha r} + v_{1}e^{-\alpha r} + v_{1}^{2}e^{-2\alpha r} \right) - \frac{1}{r} \left( \frac{2kv_{0}}{(1-e^{-\alpha r})} + \alpha v_{1}e^{-\alpha r} + 2v_{0}v_{1}\frac{e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})} \right) \\ - \frac{v_{0}}{(1-e^{-\alpha r})^{2}} \left( v_{0} + \alpha e^{-\alpha r} \right) - \gamma - \delta \left( -A\frac{e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})} + B(\frac{e^{-\alpha r}}{1-e^{-\alpha r}})^{2} + b\frac{e^{-\alpha r}}{r^{2}} - a\frac{1}{r} \right) \end{cases} F_{n_{r},k}(r) = 0$$

 $\delta = (M + E_{n,k} - C_s)$  و  $\gamma = (M + E_{n,k} - C_s)(M - E_{n,k})$  که در آن

معادله بالا تنها برای k=0,-1 به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی این معادله ما تقریب پیشنهادی توسط Greene و Aldrich [۷۷] را در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری می کنیم این تقریب برای 1 </ar>

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{(1 - e^{-\alpha r})^2}$$
(194-7)

رفتار تقریب در نظر گرفته شده در شکل (۲–۱۸) نشان داده شده است که می وان توافق خوبی برای آلفاهای کوچک مشاهده کرد.



 $\alpha$ =0.07 fm<sup>-1</sup> شکل (۲–۱۸) رفتار تقریب بکار برده شده برای (۱۸–۲

با بکار بردن تغییر متغیر  $s = \exp(-\alpha r)$  رابطه (۲–۱۶۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$F_{n,k}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}F_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[\zeta_2 s^2 + \zeta_1 s + \zeta_0\Big]F_{n,k}(s) = 0$$
(19Δ-T)

که در آن 22،13 و 50 به صورت زیر درنظر گرفته میشوند:

$$\begin{aligned} \zeta_{2} &= -\frac{1}{\alpha^{2}} \left[ \gamma + \delta A + \delta B \right] - v_{1} \left( v_{1} - 1 \right) \\ \zeta_{1} &= \frac{1}{\alpha^{2}} \left[ 2\gamma + \delta A \right] - \frac{1}{\alpha} \left[ v_{0} + \delta a \right] - \delta b - 2v_{1} \left( \eta_{k} + 1 \right) \quad \text{And} \quad \eta_{k} = \left( k + \frac{v_{0}}{\alpha} \right) \\ \zeta_{0} &= -\frac{\gamma}{\alpha^{2}} + \frac{1}{\alpha} \left[ v_{0} - \delta a \right] - \eta_{k} \left( \eta_{k} + 1 \right) \end{aligned}$$
(199-Y)

حال با مقایسه رابطه (۲–۱۶۵) با روش فرمولا ضرایب (i = 1, 2, 3) به آسانی بدست می آیند  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ 

و سایر ضرایب k<sub>i</sub> نیز با توجه به روش فرمولا بدست میآیند:

$$k_{4} = \sqrt{-\zeta_{0}}$$

$$k_{5} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - [\zeta_{2} + \zeta_{1} + \zeta_{0}]}$$
(18A-T)

سپس با استفاده از رابطه (۲–۱۱۴) در روش فرمولا معادله ویژه مقداری انرژی به صورت زیر بدست میآید

$$\left[\frac{-\zeta_{0}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\zeta_{2}+\zeta_{1}+\zeta_{0}\right]}\right]^{2}-\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\zeta_{2}}\right)\right]^{2}}{2\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\zeta_{2}}\right)\right]}\right]^{2}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\zeta_{2}+\zeta_{1}+\zeta_{0}\right]}\right]^{2}=0 \quad (189-1)$$

در جداول (۲-۱۲) تا (۲-۱۴) نتایج عددی برای رابطه انرژی در حالت تقارن اسپینی را (بر حسب<sup>1</sup>-fm) نشان دادهایم.

1	n,k>0	State	E <sup>s</sup> <sub>n,k</sub>	E <sup>s</sup> <sub>n,k</sub>	n,k<0	State	E <sup>s</sup> <sub>n,k</sub>	E <sup>s</sup> <sub>n,k</sub>
		(l,j)	(v <sub>0</sub> =v <sub>1</sub> =0)	(v <sub>0</sub> =v <sub>1</sub> =0.65)		(l,j+1)	$(v_0 = v_1 = 0)$	(v <sub>0</sub> =v <sub>1</sub> =0.65)
١	١,١	$p_{1/r}$	1./42.14991	1.14002.422	۱,-۲	$p_{r/r}$	1./42.04991	1.14002.422
٢	١,٢	$d_{r/r}$	1.1491799	10/24091828	۳-۳	$d_{d/r}$	1.1481788	1./28629128
٣	۱,۳	$\int f_{\Delta/r}$	1./01712699	10/81417799	۴,-۴	$hf_{V/Y}$	1./01812699	1.1411
۴	١,۴	$g_{\gamma/\gamma}$	1.7022246971	10/89887784	۱,-۵	$g_{\rm g/r}$	1.7022246971	1./49024094

جدول (۲–۲۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب  $fm^{-1}$ ) در حالت تقارن اسپینی برای حضور و عدم حضور پتانسیل ترکیبی تانسوری (M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1,  $\alpha$ =0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub>=5fm<sup>-1</sup> هولسن و یوکاوا با پارامترهای (M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1,  $\alpha$ =0.4fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup></sup>

جدول (۲–۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب fm<sup>-1</sup>) برای حالت تقارن اسپینی برای آلفاهای مختلف با پارامترهای M=10 جدول (۱۳–۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, Cs=5fm<sup>-1</sup>

$\alpha(\text{fm}^{-1})$	E <sup>s</sup> <sub>n,k(</sub> v <sub>0</sub>	=v <sub>1</sub> =0)	$E^{s}_{n,k}$ (v <sub>0</sub> =	=v <sub>1</sub> =0.7)
	$1f_{5/2}$	$1f_{7/2}$	$1f_{5/2}$	$1f_{7/2}$
•/•۵	٩/٨۶٨۴۴۴٠۵٧	٩/٨۶٨۴۴۴٠۵٧	१/१४•४९४•४१	१/११०۶۴११।८
•/10	۱۰/۰۸۷۹۲۶۳۹	۱۰/۰۸۷۹۲۶۳۹	1.7.17408	۱۰/۰۷۰۹۰۰۸۳
۰/۲۵	1 • / ۲ ۸ • ۱ ۸ ۶ ۴ ۸	1 • / ۲ ۸ • ۱ ۸ ۶ ۴ ۸	1./29780969	1•/71418••8
۰/۳۵	1./44010701	1./44010701	۱ • /۵۵۹۸۸۳ • ۹	1./8424.478
۰/۴۵	1./07022227	1./07022227	۱۰/۶۸۱۹۹۳۷۷	1./40278780
• / ۶ •	۱۰/۸・۴۸・۲・۶	1•/8•48•2•8	1./8289008.	1 • / ۶ ۴ • ۸ ۳ ۶ ۳ ۳
• /¥ •	۱۰/۸۴۸۸۷۲۰۹	۱۰/۸۴۸۸۷۲۰۹	۱ • / ٩ • • ٢٨٢٩ •	1.1/14/48.91

c=1, h=1, ابرامترهای مختلف با پارامترهای (fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب fm<sup>-1</sup>) برای حالت تقارن اسپینی برای جرمهای مختلف با پارامترهای c=1, h=1) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, Cs=5fm<sup>-1</sup>) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, b

$M(fm^{-1})$	E <sup>s</sup> <sub>n,k</sub> (v <sub>0</sub>	=v <sub>1</sub> =0)	$E_{n,k}^{s}$ (v <sub>0</sub> =	=v <sub>1</sub> =0.75)	
	$1f_{5/2}$	$1f_{7/2}$	$1f_{5/2}$	$1f_{7/2}$	
۵	۵/۷۲۶۰۸۶۵۱۶	۵/۷۲۶۰۸۶۵۱۶	۵/۹۲۵۷۸۰۲۱۱	۵/۴۰۲۸۰۱۴۳۹	
۵/۵	8/1889.2018	8/1889.2018	6/36898460	0/9.40.494	
۶	8/844902191	6/944987191	8/822608012	8/402601298	
۶/۵	8/938991V · V	F/93FF9111 V	٧/٢٨٣٧٨٣٢١۶	۶/۹・۵۸۵۳۹۸۵	
٧	٧/٤٣١١٨۵٧٨٩	٧/٤٣١١٨۵٧٨٩	٧/٧۵١٢٠۶٢٢٩	٧/۴۰۶۰۴۰۹۸۶	
٨	٨/٤٢٢٥١٢١٢٧	٨/٤٢٢٥١٢١٢٧	٨/۶٩٩۵١٨٨۴٩	۸/۴۰۵۹۸۴۹۳۴	
٩	9/418072097	9/418072097	9/9904789	٩/۴۰۵۸۴۰۱۸۷	
1.	1./411.1789	1./411.1789	1./40899849	1./6.02.787	

در ادامه با توجه به رابطههای (۲–۱۱۵) و (۲–۱۶۸) می توان مولفه بالایی تابع موج را بدست آوریم:

$$F_{n,k}^{s}(\mathbf{r}) = N\left(e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{-c}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A + B + C}\right)}$$

$${}_{2}F_{1}\left(-n, n + 2\left(\sqrt{-c} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A + B + C}\right); 2\sqrt{-c} + 1, e^{-2\alpha r}\right)$$

$$(1 \vee \cdot - \vee)$$

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد همچنین مولفه پایینی معادله دیراک با توجه به رابطه زیر داده میشود:

$$G_{n,k}^{s}(r) = \frac{1}{M + E_{n,k}^{s} - C_{s}} \left( \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U(r) \right) F_{n,k}^{s}(r)$$
(1Y1-7)

اثر برهم کنش تانسوری بر مولفه بالایی و پایینی تابع موج در حالت تقارن اسپینی در شکل (۲–۱۹) نشان داده شده است.



شکل (a) (۱۹-۲) (a) مولفه بالایی و (b) پایینی برای 1f<sub>5/2</sub> تحت تقارن اسپینی در حضور برهم کنش تانسوری یوکاوا و هولسن M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=v<sub>1</sub>=0.1, Cs=5fm<sup>-1</sup>. برای پارامترهای

در این قسمت معادله ویژه مقداری و توابع موج را برای پتانسیل Manning-Rosen و quasi-Hellman و

پتانسیل هولسن و یوکاوا برای قسمت تانسوری در حالت تقارن اسپینی بدست آوردیم.

## ۲–۸–۲ ویژه مقادیر انرژی در تقارن شبه اسپینی: تحت شرایط تقارن شبه اسپینی یعنی $\frac{d\Sigma(r)}{dr} = 0$ یا $(r) = C_{ps} = const$ ، مولفه پایینی معادله دیراک به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} - \frac{k(k-1)}{r^2} + \frac{2kU(r)}{r} + \frac{dU(r)}{r} - U^2(r) - [M + E_{n,k} - \Delta(r)][M - E + \Sigma(r)]\right\}G_{n_r,k}(r) = 0 \quad (1 \forall \Upsilon - \Upsilon)$$

پتانسیل اسکالر و برداری و تانسوری را به صورت زیر درنظر می گیریم

$$\Delta(\mathbf{r}) = -\mathbf{A} \frac{e^{-\alpha \mathbf{r}}}{(1 - e^{-\alpha \mathbf{r}})} + \mathbf{B} (\frac{e^{-\alpha \mathbf{r}}}{1 - e^{-\alpha \mathbf{r}}})^2 + \mathbf{b} \frac{e^{-\alpha \mathbf{r}}}{r^2} - \frac{a}{r}$$
(1YW-T)

$$\begin{cases} \frac{d^{2}}{dr^{2}} - \frac{1}{r^{2}} \Big( k(k-1) + 2kv_{1}e^{-\alpha r} - v_{1}e^{-\alpha r} + v_{1}^{2}e^{-2\alpha r} \Big) - \frac{1}{r} \Big( \frac{2kv_{0}}{(1-e^{-\alpha r})} - \alpha v_{1}e^{-\alpha r} + 2v_{0}v_{1}\frac{e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})} \Big) \\ - \frac{v_{0}}{(1-e^{-\alpha r})^{2}} \Big( v_{0} + \alpha e^{-\alpha r} \Big) - \gamma' - \delta' \Big( -A\frac{e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})} + B(\frac{e^{-\alpha r}}{1-e^{-\alpha r}})^{2} + b\frac{e^{-\alpha r}}{r^{2}} - a\frac{1}{r} \Big) \Big\} F_{n_{r},k}(r) = 0 \end{cases}$$

$$\delta' = (M - E_{n,k} + C_{ps}) \ e^{-\alpha r} + C_{n,k}(M - E_{n,k} + C_{ps}) \ e^{-\alpha r} + C_{n,k}(r) = 0$$

$$\delta' = (M - E_{n,k} + C_{ps}) \ e^{-\alpha r} + C_{n,k}(m) + C_$$

$$G_{n,k}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}G_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[\zeta_2's^2 + \zeta_1's + \zeta_0'\Big]G_{n,k}(s) = 0$$
(119-7)  

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{k=1}^{n$$

$$\begin{aligned} \zeta_{2}' &= -\frac{1}{\alpha^{2}} [\gamma' - \delta' A - \delta' B] - v_{1} (v_{1} + 1) \\ \zeta_{1}' &= \frac{1}{\alpha^{2}} [2\gamma' - \delta' A] - \frac{1}{\alpha} [\delta' a - v_{0}] - \delta' b - 2v_{1} \eta_{k} \end{aligned} \tag{197-7} \\ \zeta_{0}' &= -\frac{\gamma'}{\alpha^{2}} - \frac{1}{\alpha} [\delta' a + v_{0}] - \eta_{k} (\eta_{k} - 1) \\ &= -\frac{\gamma'}{\alpha^{2}} - \frac{1}{\alpha} [\delta' a + v_{0}] - \eta_{k} (\eta_{k} - 1) \end{aligned}$$

 $k'_1 = k'_2 = k'_3 = 1$  (1YA-T)

$$k'_{4} = \sqrt{-\zeta'_{0}}$$

$$k'_{5} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - [\zeta'_{2} + \zeta'_{1} + \zeta'_{0}]}$$
(1Y9-Y)

با استفاده از رابطه (۲–۱۱۴) معادله ویژه مقداری انرژی توسط رابطه زیر داده میشود.

$$\left[\frac{-C'-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\zeta_{2}'+\zeta_{1}'+\zeta_{0}'\right]}\right]^{2}-\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\zeta_{2}'}\right)\right]^{2}}{2\left[\frac{1-2n}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-4\zeta_{2}'}\right)\right]}\right]^{2}-\left[\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\left[\zeta_{2}'+\zeta_{1}'+\zeta_{0}'\right]}\right]^{2}=0 \quad (1 \land \cdot -\Upsilon)$$

در جداول (۲–۱۵) تا (۲–۱۷) نتایج عددی برای رابطه انرژی در حالت تقارن شبه اسپینی را (بر حسب<sup>1</sup>-fm) نشان دادهایم.

جدول(۲–۱۵) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب<sup>1</sup>-fm) در حالت تقارن شبهاسپینی برای حضور و عدم حضور پتانسیل تانسوری کولنی با پارامترهای .M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>

1	n,k<0	State	$E^{ps}_{n,k}$	$E^{ps}_{n,k}$	n,k>0	State	$E^{ps}_{n,k}$	E <sup>ps</sup> <sub>n,k</sub>
		(l,j)	$(v_0 = v_1 = 0)$	(v <sub>0</sub> =v <sub>1</sub> =0.65)		(l+2,j+1)	$(v_0 = v_1 = 0)$	$(v_0 = v_1 = 0.65)$
١	۱,-۱	۱s <sub>۱/۲</sub>	۵/۰۱۹۹۱۹۱۳۱	0/014611079	١,٢	$d_{r/r}$	۵/•۱٩٩١٩١٣١	۵/•٩۶٩٣•٩١٨
٢	١,-٢	${}^{N}p_{{}^{T/T}}$	۵/۰۵۵۹۷۰۷۷۵	0/071049089	۱,۳	۱f <sub>۵/۲</sub>	۵/۰۵۵۹۷۰۷۷۵	0/144901794
٣	٦,-٣	$d_{d/r}$	۵/۱۰۲۲۴۱۳۹۰	۵/•۴۷۸۳۱۶۸۸	1,4	$g_{\gamma/\gamma}$	۵/۱۰۲۲۴۱۳۹۰	۵/۱۹۷۸۷۱۴۰۳
۴	1,-4	$f_{\gamma/\gamma}$	0/104892404	۵/•۸۸۵۶۴۳۲۴	۱,۵	${}^{N} h_{{}^{N/N}}$	0/104892404	0/206025015

$\alpha(\text{fm}^{-1})$	$E^{ps}_{n,k}(v_{0})$	<sub>0</sub> =v <sub>1</sub> =0)	$E^{ps}_{n,k}(v_0)$	=v <sub>1</sub> =0.7)
	1d <sub>5/2</sub>	$1g_{7/2}$	1d <sub>5/2</sub>	1g <sub>7/2</sub>
•/•۵	4/980111004	4/980111004	4/821147907	۵/۰ ۱۶۵۳۶۸۵۲
•/10	4/2922.1452	4/2932.1452	4/188911808	۵/۰۵۶۲۶۰۳۳۶
۰/۲۵	4/9749794679	F/9VF9A9FA9	4/940731088	۵/۱۰۷۲۴۶۵۱۸
۰/۳۵	۵/•۷۸۵۵۸۹۸۸	۵/•۷۸۵۵۸۹۸۸	4/188222111	۵/۱۶۹۸۰۸۱۲۸
٠/۴۵	0/177916262	۵/۱۲۸۹۱۴۳۴۲	۵/۰۰۶۹۲۰۹۳۴	۵/۲۴۳۷۲۶۹۱
• / ۶ •	۵/۲۲۶۳۸۲۴۱۸	۵/۲۲۶۳۸۲۴۱۸	۵/۰۱۰۴۹۲۴۴	۵/۳۷۵۱۰۳۱۹۴
• / ٧ •	۵/۳۰۵۳۷۲۸۴۵	۵/۳۰۵۳۷۲۸۴۵	۵/۰۱۳۲۸۹۷۶۷	۵/۴۷۵۷۳۹۶۸۱

جدول (۲–۱۶) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب $fm^{-1}$ ) برای حالت تقارن شبه اسپینی برای آلفاهای مختلف با پارامترهای M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, a=1 fm<sup>-1</sup>, b=1 fm<sup>-1</sup>, A=1 fm<sup>-1</sup>, B=1 fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5 fm<sup>-1</sup>.

c=1, جدول (۱۷–۲) ویژه مقادیر انرژی (بر حسب $fm^{-1}$  برای حالت تقارن شبه اسپینی برای جرمهای مختلف با پارامترهای (h=1,  $\alpha$ =0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>.

$M(fm^{-1})$	$E^{ps}{}_{n,k}(v_0=v_1=0)$		$E^{ps}_{n,k}(v_0 =$	v <sub>1</sub> =0.75)
	1d <sub>5/2</sub>	1g <sub>7/2</sub>	1d <sub>5/2</sub>	1g <sub>7/2</sub>
۵	•/299072.16	•/299072.16	•/١٢٢٢٣٨٩۶١	•/8132178
۵/۵	•/V&T&&VA•9	•/V&T&&VA•9	•/۵۲۱۱•٧۶٧٨	1/+2182200+
۶	<b>١/٢١٧٩٣۴٧٩</b>	1/71798479	1/01242194	1/401890478
۶/۵	1/4077444	1/4077444	1/014971879	1/29200226
۷	7/17088181	7/170889141	۲/•۱۳•۱•۱۱۱	2/206696760
٨	٣/١٣٩۵۴۵٣٢۴	8/189262826	٣/• ۵٧٣٩ ١• ٨۶	8/29.5877445
٩	4/118.01209	4/118.01209	4/048809898	4/240292460
1.	۵/۱۰۲۲۴۱۳۹۰	0/1.774189.	۵/۰۰۷۳۴۹۱۱۸	0/515778906

سرانجام با استفاده از رابطههای (۲–۱۱۵) و (۲–۱۷۷) مولفه پایینی معادله دیراک را بدست می آوریم.

$$G_{_{n,k}}^{ps}(r) = N\left(e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{-c'}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right)} {}_{2}F_{1}\left(-n, n + 2\left(\sqrt{-c'} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + A' + B' + C'}\right); 2\sqrt{-c'} + 1, e^{-2\alpha r}\right) (1 \land 1 - \Upsilon)$$

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد. همچنین مولفه بالایی معادله دیراک به صورت زیر داده میشود:

$$F_{n,k}^{ps}(r) = \frac{1}{M - E_{n,k}^{ps} + C_{ps}} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + U(r)\right) G_{n,k}^{ps}(r)$$
(1A7-7)

اثر برهم کنش تانسوری بر مولفه بالایی و پایینی تابع موج در حالت تقارن شبه اسپینی در شکل (۲-۲۰) نشان داده شده است.



شکل (۲۰-۲) (a) مولفه بالایی و (b) پایینی برای 1g<sub>7/2</sub> تحت تقارن شبه اسپینی در حضور برهم کنش تانسوری یوکاوا برای M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, B=1fm<sup>-1</sup>, v<sub>0</sub>=v<sub>1</sub>=0.1, C<sub>ps</sub> =-5fm<sup>-1</sup>. پارامترهای

در شکل (۲–۲۱) اثر برهم کنش تانسوری در حذف تبه گنی ویژه مقادیر انرژی بین دوگانههای (۱p<sub>1/2</sub>, 1p<sub>3/2</sub>)، (1d<sub>5/2</sub>, 1f<sub>5/2</sub>)، (1d<sub>5/2</sub>, 1g<sub>7/2</sub>)) در حالت تقارن شبه اسپینی و تبه گنی بین دو گانههای (1p<sub>3/2</sub>, 1f<sub>5/2</sub>)، (1d<sub>5/2</sub>, 1g<sub>7/2</sub>)) در حالت اسپینی مشاهده می شود



شکل (۲۱-۲) طیف انرژی در (a) تقارن اسپینی و (b) شبهاسپینی بر حسب پارامتر v<sub>0</sub>=v<sub>1</sub> برای مقایسه بین برهم کنش M=10 fm<sup>-1</sup>, c=1, h=1, α=0.4fm<sup>-1</sup>, a=1fm<sup>-1</sup>, b=1fm<sup>-1</sup>, A=1fm<sup>-1</sup>, c=5fm<sup>-1</sup>, c=5fm<sup>-1</sup>, c=5fm<sup>-1</sup>. B=1fm<sup>-1</sup>, C<sub>s</sub>=5fm<sup>-1</sup>, C<sub>ps</sub>=-5fm<sup>-1</sup>.

در این قسمت نیز حل تحلیلی معادله دیراک برای پتانسیل ترکیبی Manning-Rosen و quasi-Hellman و quasi-Hellman با بهره گیری از اثر پتانسیل تانسوری هولسن و یوکاوا در حالت اسپینی و شبه اسپینی به کمک روش Formula بررسی شد و در رابطه با تابع موج و معادله ویژه مقداری انرژی بحث شد.

فسل موم: محاسبات طیف انرژی

#### ۳–۱ مقدمه

اهداف مطالعه فیزیک هستهای درک نیروی بین نوکلئونها، ساختار هسته و ماهیت برهم کنشهای هستهای با یکدیگر و با دیگر ذرات زیر اتمی است. مطالعات ساختار هستهای روی خواص هستهها مثل انرژی حالت برانگیخته، شکلهای هستهای، گشتاور الکترومغناطیسی و احتمال گذار بین حالتهای برانگیخته و حالت پایه و چگونگی تبدیل به هستههای مختلف تمرکز میکند. تبدیل بین هستهها از طریق فرآیندهای وایاشی بتا، شکافت، همجوشی و انتقال نوکلئون رخ میدهد. تکنیکهای تجربی مورد استفاده برای مطالعه ساختار هسته شامل برانگیختگی کولنی، واپاشی بتا، واکنشهای همجوشی-تبخیر، واکنشهای انتقالی، تفکیک کولنی و واکنشهای فروپاشی هستند. علاوه بر ارایه اطلاعات در مورد ساختار هسته منفرد، مطالعات ساختار هستهای دادههای تجربی فراهم میکند که میتواند توسط نظریه پردازان برای توصیف ماهیت نیروهای هستهای بکار رود. با کشف هسته در آغاز قرن بیستم تلاشهای بسیاری برای توضیح ساختار هسته شکل گرفته است. در حالی که نیروی قوی نقش غالب در نیروهای بین نوکلئونها بازی میکند، نیروهای الکترومغناطیسی و ضعیف نیز برهم کنش نوکلئونها را تحت تاثیر قرار میدهند. با این وجود برخلاف نیروهای الكترومغناطيس نيروي قوى باقيمانده بين نوكلئونها هنوز كاملا درك نشده است. بنابراين مدلهاي هسته ای یا نمایش ساده شده از ساختار هستهای که از ملزومات فیزیک هستهای است، برای توضیح ساختار هسته های پایدار و رادیواکتیو توسعه یافتهاند. یک مدل هستهای باید بتواند خواص هستهای اندازهگیری شده گذشته را بدست آورد و قادر به پیشبینی منطقی برای اندازه گیریهای آینده باشد. مدلهای هستهای که تا اکنون توسعه یافتهاند در دو دسته جمعی و میکروسکوپی قرار می گیرند. مدلهای جمعی روی رفتار هسته ها با این عنوان که نوکلئونها با هم عمل میکنند تمرکز میکنند. مدل ارتعاشی، که در آن حالتهای برانگیخته هستهای توسط ارتعاش نوکلئونها به صورت جمعی توصیف میشود مثالی از یک مدل جمعی است. مثال دیگر مدل چرخشی است که در آن برانگیختگی توسط چرخش هسته تغییر شکل یافته-

استاتیکی ناشی شده است. مدلهای میکروسکوپی هستهها را بر حسب درجات آزادی انفرادی نوکلئونها، در مقایسه با درجات آزادی جمعی برای همه A نوکلئون توصیف میکند. شناخته شده ترین مدل میکروسکوپی از ساختار هستهای مدل پوستهای است. در این مدل نوکلئونهای منفرد در پتانسیل ناشی از A-1 نوکلئون دیگر در حرکت است. این پتانسیل میدان میانگین نامیده می شود و شکلهای مختلف برای پتانسیل در تلاش برای توصیف روند ساختار هستهای استفاده شده است. به عنوان مثال گاف انرژی بزرگی بین گروهی از ترازهای انرژی (پوستهها) در طیف انرژی تک ذرهای وجود دارد. اگر پتانسیل نوسانگر هارمونیک سه بعدی برای میدان میانگین استفاده شود تعداد کمی از اولین اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰ و ۴۰ بدست میآیند. شواهد تجربی مجموعهای متفاوت از اعداد جادویی را نشان می دهد به طوری که برهم کنش

اسپین مدار برای توضیح شواهد تجربی به پتانسیل نوسانگر هماهنگ اضافه شده است [۲۹]. با برهم کنش اسپین مدار اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶ هستند. بهترین گواه برای رفتار تک ذرهای در نزدیکی هستههای جادویی (همچنین پوسته بسته نامیده میشود) پیدا شده است، جایی که تعدادی از پروتونها و یا نوترونها در یک هسته آخرین پوسته قبل از یک گاف بزرگ یا کوچک را پر می کنند. برای مثال هسته  $0^{71}$  را میتوان به عنوان یک هسته (core) بسته  $0^{61}$  دوگانه جادویی (8=Z=X) با یک نوترون اضافی (نوترون ظرفیت) در تراز  $0^{5/2}$  مدل سازی کرد. اسپین و پاریته حالت پایه  $0^{71}$ , +5/2با یک نوترون اضافی (نوترون ظرفیت) در تراز  $0^{5/2}$  مدل سازی کرد. اسپین و پاریته حالت پایه  $0^{71}$ , +5/2با یک نوترون اضافی (نوترون ظرفیت) در تراز  $0^{5/2}$  مدل سازی کرد. اسپین و پاریته حالت پایه  $0^{71}$ , +5/2با یک نوترون اضافی (نوترون ظرفیت) در تراز  $0^{5/2}$  مدل سازی کرد. اسپین و پاریته حالت پایه  $0^{71}$ , +5/2با یک نوترون اضافی (نوترون ظرفیت) در تراز  $0^{5/2}$  مدل سازی کرد. اسپین و پاریته حالت پایه  $0^{71}$ , +5/2



شکل (۳-۱) طرح واره حالت پایه و چند حالت برانگیخته برای <sup>17</sup>0 [۷۹].

اولین قدم شناسایی یک هسته "core" است، که درجاتی از آزادی در هامیلتونی مدل پوستهای "منجمد"در نظر گرفته میشود. بهترین انتخاب ساخته شده در زمینههای فیزیکی، هستههایی با تعدادی از پروتون و نوترون برابر با شماره "اعداد جادویی" است، یعنی یک هسته دوگانه جادویی مانند: <sup>4</sup>He, <sup>16</sup>O, <sup>40</sup>Ca, <sup>48</sup>Ca, <sup>56</sup>Ni, <sup>100</sup>Sn, <sup>132</sup>Sn, <sup>208</sup>Pb, ...

این محدودیت اجازه میدهد تا به مطالعه تنها هستههای با Z و N بزرگتر از  $Z_c$  و N بپردارزیم. فیزیک این هستهها تنها از نظر نوکلئونهای اضافه بر نوکلئونهای Ac از هسته بسته که به اصطلاح" نوکلئونهای ظرفیت" نامیده می شوند توصیف خواهند شد. این انتخاب تعداد هستههایی را که می توان مطالعه کرد به هسته هایی با نامیده می شوند توصیف خواهند شد. این انتخاب تعداد هستههایی را که می توان مطالعه کرد به هسته هایی با یامیده می شوند توصیف خواهند شد. این انتخاب تعداد هسته می ای که می توان مطالعه کرد به هسته هایی با یامیده می شوند توصیف خواهند شد. این انتخاب تعداد هسته هایی را که می توان مطالعه کرد به هسته هایی با یوسته می شوند توصیف خواهند شد. این انتخاب تعداد هسته هایی را که می توان مطالعه کرد به هسته هایی با یوسته به به می توان مطالعه کرد می کند که  $Z_{co}$  می می می توان مطالعه کرد به هسته هایی با یوسته بسته دو گانه بعدی است برای مثال  $C_1$  و  $C_1$ 

### <sup>41</sup>Sc محاسبه طیف انرژی ایزوتوپهای آینهای <sup>41</sup>Ca و

بهترین گواه برای مدل پوستهای تک ذرهای در نزدیکی هستههای جادویی (closed-shell) مشاهده شده است، جایی که در آن پروتون یا نوترون در آخرین لایه اصلی یا زیر لایه وجود دارد. به عنوان مثال ایزوتوپهای <sup>41</sup>Sc=p+(N=Z=20) <sup>41</sup>Ca=n+(N=Z=20) دو گانه جادویی (Ca=n+(N=Z=20) و (Ca=n)<sup>41</sup> و (Sc=p+(N=Z=20) به همراه یک نوکلئون اضافی در لایه If<sub>7/2</sub> در نظر گرفت. اسپین و پاریته حالت پایه ایزوتوپهای A<sup>41</sup>Ca و <sup>41</sup>Ca می باشد که مربوط به اسپین و پاریته آخرین لایه ای است که نوکلئون ظرفیت در آن قرار دارد [1]. مطالعه اثرات نسبیتی در سیستمهای کوانتمی معمولا مفید می باشد. بنابراین معادله دیراک که ذرات با اسپین 2<sup>/4</sup> را توصیف می کند برای بررسی مسائل زیادی در زمینه فیزیک هسته و انرژی بالا مورد استفاده قرار گرفته است [7]. مطالعه اثرات نسبیتی در سیستمهای کوانتمی معمولا مفید می باشد. بنابراین معادله دیراک که ذرات با اسپین 2<sup>/4</sup> را توصیف می کند برای بررسی مسائل زیادی در زمینه فیزیک هسته و انرژی بالا مورد استفاده قرار گرفته است [7].

در این کار ما از مدل پوستهای برای محاسبه ترازهای انرژی ایزوتوپهای  $^{41}$ Ca و  $^{21}$ <sup>4</sup> استفاده نمودهایم. از آنجایی که این ایزوتوپها یک نوکلئون در بیرون از پوسته بسته دوگانه جادویی دارند، معادله دیراک برای بررسی آنها در مدل پوستهای نسبیتی بکار برده شده است. سپس پتانسیل بهبود یافته هولسن و ایکارت به عنوان برهم کنش بین پوسته بسته و نوکلئون ظرفیت در نظر گرفته شد. از روش پارامتری NU [۲۸] برای بدست آوردن معادله ویژه مقداری انرژی و توابع موج برای معادله دیراک در حالت نسبیتی استفاده نمودیم. برای بررسی ایزوتوپها در مدل پوستهای نسبیتی از معادله دیراک استفاده می کنیم که تحت شرایط تقارن اسپینی یعنی 0 =  $\frac{d\Delta(r)}{dr}$  یا  $\frac{d\Delta(r)}{dr}$ .

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [Mc^2 + E][Mc^2 - E + \Sigma(r)]\right) F_{n_r,k}(r) = 0$$
 (1-7)

پتانسیل بهبود یافته ایکارت و هولسن را به صورت زیر در نظر می گیریم [۴۵، ۲۷]:

$$V(r) = v_0 \csc^2(\alpha r) + v_1 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})}$$
(Y-Y)

که در آن v<sub>0</sub> و v<sub>1</sub> پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف می کنند. و پارامتر α نیز محدوده پتانسیل را تعیین می کند. با استفاده از این پتانسیل و جایگذاری آن در مولفه بالایی معادله دیراک شکل معادله به صورت زیر ساده می شود.

$$\left\{\frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} - \frac{\left(E + Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} \left[2v_{0}\cosh^{2}(\alpha r) + 2v_{1}\frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})}\right] - \frac{k(k+1)}{r^{2}}\right\}F_{n_{r},k}(r) = 0 \quad (\Upsilon - \Upsilon)$$

معادله بالا تنها برای k =0,-1 به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی معادله ما تقریب پیشنهادی تویب Greene و Greene و Greene این تقریب میکنیم این تقریب برای 1>> ۲ معتبر است [۷۸].

$$\frac{k(k+1)}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2 k(k+1)}{(e^{-2\alpha r} - 1)^2}$$
(4-7)

با بکار بردن تغییر متغیر (s=exp(-2αr رابطه (۳-۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$F''(s) + \frac{1}{s}F'(s) + \frac{1}{4\alpha s^2} \left\{ \frac{(E^2 - M^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - \frac{(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} \left[ 8v_0 \frac{s}{(1-s)^2} + 2v_1 \frac{s}{(1-s)} \right] - 4\alpha^2 \frac{k(k+1)}{(1-s)^2} \right\} F(s) = 0$$

$$(\Delta - \mathfrak{V})$$

حال معادله بالا را با استفاده از روش پارامتری NU مرتب می کنیم.

$$F_{n,k}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}F_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2}[-\chi_2 s^2 + \chi_1 s - \chi_0]F_{n,k}(s) = 0$$
 (9-7)

که پارامترهای <sub>2</sub>x ، <sub>1</sub>x و <sub>0</sub>x را به صورت زیر داریم:

$$\chi_{2} = -\frac{(E + Mc^{2})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}} [2v_{1} + (E - Mc^{2})]$$

$$\chi_{1} = -\frac{(E + Mc^{2})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}} [8v_{0} + 2v_{1} + 2(E - Mc^{2})]$$

$$\chi_{0} = k(k+1) - \frac{(E^{2} - M^{2}c^{4})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}}$$
(Y-\vec{w})

حال با مقایسه رابطه (۳–۶) با روش پارامتری NU ضرایب (۵, 
$$\epsilon_i$$
 (i=1, 2, 3) جال با مقایسه رابطه ( $-7$ ) با روش  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$ 

و سایر ضرایب (٤i (i=4, 5 ...13 نیز با توجه به روش پارامتری NU بدست میآیند که در جدول زیر آورده شده است.

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$	$\mathcal{E}_4 = 0$	$\mathcal{E}_5 = -\frac{1}{2}$			
$\varepsilon_6 = \chi_2 + \frac{1}{4}$	$\varepsilon_7 = -\chi_1$	$\mathcal{E}_8 = \chi_0$			
$\varepsilon_9 = \chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}$	$\varepsilon_{10} = 2\sqrt{\chi_0}$	$\varepsilon_{12} = \sqrt{\chi_0}$			
$\varepsilon_{11} = 2\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}$	$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} + \sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}$				

.NU جدول (۳-۱) سایر ضرایب ( $\epsilon_i$  (i=4, 5...13) نیز با توجه به روش پارامتری

در نهایت با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج بدست میآیند.

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \qquad (9-\%)$$

$$F_{n_{r},k}(r) = N\left(e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{\chi_{0}}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{\chi_{2} - \chi_{1} + \chi_{0} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)}} P_{n}^{\left(2\sqrt{\chi_{0}}, 2\sqrt{\chi_{2} - \chi_{1} + \chi_{0} + \frac{1}{4}}\right)} \left(1 - 2e^{-2\alpha r}\right)$$
(1.-7)

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد. مولفه پایینی معادله دیراک با توجه به رابطه زیر داده میشود:

$$G_{n_r,k}(r) = \frac{\hbar^2 c^2}{E + Mc^2} (\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}) F_{n_r,k}(r)$$
(11- $\mathcal{V}$ )

همچنین تابع موج کلی معادله دیراک به صورت زیر محاسبه میشود:

$$\psi_{n_{r},k}(r,\theta,\varphi) = N \begin{bmatrix} Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi) \\ i \\ [M + E_{n_{r},k}] \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \end{bmatrix} Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi) \end{bmatrix} (e^{-2\alpha r})^{(\sqrt{z_{0}})} (1 - e^{-2\alpha r})^{(\sqrt{z_{2}-z_{1}+z_{0}}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2})} (17 - Y) \\ P_{n}^{(2\sqrt{z_{0}},2\sqrt{z_{2}-z_{1}+z_{0}}+\frac{1}{4})} (1 - 2e^{-2\alpha r})^{(1 - 2e^{-2\alpha r})}$$

با داشتن تابع موج می توان شعاع باری را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\langle \mathbf{r}^{2} \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\int \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}^{*}(\mathbf{r}) \mathbf{r}^{2} \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}(\mathbf{r}) \mathbf{d}^{3} \mathbf{r}}{\int \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}^{*}(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}(\mathbf{r}) \mathbf{d}^{3} \mathbf{r}} \right)^{\frac{1}{2}}$$
(1)7-7)

تراز انرژی حالت پایه و یک حالت برانگیخته را برای ایزوتوپهای مورد بررسی با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی بدست آمده در معادله (۳–۹) محاسبه کرده و در جدول زیر نشان دادهایم.

جدول (۳-۲) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca و <sup>41</sup>Sc در توصیف نسبیتی از معادله دیراک.

	Parameters of modified potential						
Isotope	α(fm <sup>-1</sup> )	$\mathbf{V}_0$	<b>V</b> <sub>1</sub>	state	E <sub>our</sub> (MeV)	$E_{other}(MeV)[\Lambda "]$	$E_{exp}(Mev)[\Lambda ]$
<sup>41</sup> Ca	•/•141	•/۴۶۳۷	-114/498	$f_{\nu/\tau}$	-30.124	-۳۵•/۷۵۶۱	-40.16168
				$\tau p_{\tau/\tau}$	-367/4128		-74/4141
<sup>41</sup> Sc	•/• ١٣٩	•/۴٧١٧	-110/14.4	$f_{\nu/\tau}$	-344/•48	-847/4208	-347/1371
				$\tau p_{\tau/\tau}$	-341/2428		-341/42•1

همچنین شعاع باری این ایزوتوپها در حالت پایه به کمک روابط (۳-۱۲) و (۳-۱۳) بدست آمده است و با

کار دیگران و مقدار تجربی مقایسه شده است.

 $< r^{2} > \frac{1}{2}$   $< r^{2} > \frac{1}{2}$   $< r^{2} > \frac{1}{2}$  other work  $< r^{2} >_{FXP}^{\frac{1}{2}}$ Parameter of modified potential Isotope  $(\mathrm{fm})[\Lambda \delta]$ (fm) (fm) [<sup>\\\\</sup>]  $\alpha(\text{fm}^{-1})$  $V_0$  $V_1$ <sup>41</sup>ca ./.141 ./4987 -114/498 3/4821 7/4477 ۳/۴۷۸۰  $^{41}Sc$ ./. 189 ./411 3/08.1 3/4971 -110/14

جدول (۳-۳) شعاع باری این ایزوتوپهای <sup>41</sup>Sc و <sup>41</sup>Ca در حالت پایه.

نتایج بدست آمده توافق قابل قبولی با کار گذشتگان و مقادیر تجربی را داراست که نشان دهنده موفقیت مدل پیشنهادی و بکار گرفته شده میباشد.

۳–۳ محاسبه طیف انرژی ایزوتوپهای آینهای <sup>17</sup>0 و <sup>17</sup>F و <sup>17</sup>F در این قسمت طیف انرژی ایزوتوپهای <sup>17</sup><sup>10</sup> د <sup>17</sup> در دو حالت نسبیتی و غیر نسبیتی مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که این ایزوتوپها هر کدام یک نوکلئون بیرون از پوسته بسته دوگانه جادویی دارند ما از معادله دیراک در قسمت نسبیتی و از معادله شرودینگر در قسمت غیرنسبیتی بهره گرفتهایم.

ایزوتوپهای <sup>17</sup>O و <sup>17</sup>F را میتوان به صورت یک ایزوتوپ دوگانه جادویی (N=Z=8 (N=Z=8 و پایته حالت پایه <sup>17</sup>O=n+(N=Z=8) در نظر گرفت. اسپین و پاریته حالت پایه <sup>17</sup>F=p+(N=Z=8) در نظر گرفت. اسپین و پاریته حالت پایه ایزوتوپهای <sup>17</sup>G و <sup>17</sup>F و <sup>17</sup>F میباشد. به دلیل اینکه اسپین پوسته بسته صفر است اثر برهمکنش ایزوتوپهای <sup>17</sup>O و <sup>17</sup>F و <sup>17</sup>F میباشد. به دلیل اینکه اسپین پوسته بسته صفر است اثر برهمکنش اسپین – اسپین در معادله دیراک بررسی نمی شود. پتانسیل بهبود یافته هلمن به عنوان برهم کنش بین پوسته بسته و نوکلئون ظرفیت در نظر گرفته شد. از روش پارامتری NU برای بدست آوردن معادله ویژه مقداری انرژی و توابع موج برای معادله دیراک در حالت نسبیتی و معادله شرودینگر در قسمت غیر نسبیتی استفاده نمودیم [۸۲].

$$T - T - T$$
 بررسی نسبیتی ایزوتوپهای آینهای  $O^{17}$ و  $T^7$ و  $T^7$  و  $d^{7F}$  و  $d^{7F}$  تحت شرایط تقارن اسپینی یعنی  $d\Delta(r) = C_{
m s} = {
m const}$  یا  $\Delta(r) = C_{
m s} = {
m const}$ ، مولفه بالایی معادله دیراک به صورت زیر نوشته می شود [40]:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [Mc^2 + E][Mc^2 - E + \Sigma(r)]\right) F_{n_r,k}(r) = 0$$
 (1\mathbf{v}-\mathbf{v})

در این بررسی پتانسیل بهبود یافته هلمن را به صورت زیر در نظر گرفتهایم [۷۶، ۸۶]؛

$$V(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} e^{-\alpha r}$$
(14-7)

در رابطه بالا a و b پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف می کنند. و پارامتر ۵ نیز محدوده پتانسیل را تعیین می کند.

با بکار بردن تغییر متغیر 
$$F_{n,k}(r) = rU_{n,k}(r)$$
 رابطه (۱۳–۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$U''(r) + \frac{1}{r}U'(r) + \left\{\frac{(E^2 - M^2c^4)}{\hbar^2c^2} - \frac{(E + Mc^2)}{\hbar^2c^2}\Sigma(r) - \frac{k(k+1)}{r^2}\right\}U(r) = 0$$
 (10-7)

معادله بالا تنها برای k=0,-1 به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی معادله ما تقریب پیشنهادی توسط Greene و Aldrich را در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری می کنیم این تقریب برای  $\alpha r << 1$ 

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{\left(e^{-\alpha r} - 1\right)^2} \tag{19-7}$$

همچنین این تقریب را میتوان به صورت معکوس بکار گرفت. با بکار گرفتن تقریب بکار برده شده و تغییر متغیر داده شده رابطه (۳–۱۵) به صورت زیر خلاصه می شود.

$$U_{n,k}''(r) + \frac{2}{r}U_{n,k}'(r) + \frac{1}{r^2} \Big[ -\chi_2 r^2 + \chi_1 r - \chi_0 \Big] U_{n,k}(r) = 0$$
 (1Y-Y)

که پارامترهای 2%، 1% و 1% را به صورت زیر داریم:

$$\chi_{2} = -\gamma$$

$$\chi_{1} = 2\beta [a + 2b\alpha] \quad ; \quad \gamma = \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}, \quad \beta = \frac{\left(E + Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} \quad (1 \wedge - \gamma)$$

$$\chi_{0} = k(k+1) + 2b\beta$$

در نهایت با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی بدست میآید.  
(۱۹-۳) 
$$\sqrt{\chi_2} + 2\sqrt{\chi_2(\chi_0 + \frac{1}{4})} - \chi_1 = 0$$

که با جایگذاری روابط (۳–۱۸) در رابطه بالا معادله ویژه مقداری انرژی را به صورت زیر داریم:

$$(2n+1)\sqrt{\frac{\left(M^{2}c^{4}-E^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}}+2\sqrt{\frac{\left(M^{2}c^{4}-E^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}}\left(k\left(k+1\right)+2b\frac{\left(E+Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}+\frac{1}{4}\right)}-2\frac{\left(E+Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}}\left[a+2b\alpha\right]=0\left(\Upsilon \cdot -\Upsilon\right)$$

اکنون با توجه به روش پارامتری NU مولفه بالایی تابع موج بدست میآید.

$$F_{n_{r},k}(r) = N r^{\left(\sqrt{\chi_{0} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}\right)} \exp\left(-\sqrt{\chi_{2}}r\right) L_{n}^{\left(2\sqrt{\chi_{0} + \frac{1}{4}}\right)} \left[\left(2 + 2\sqrt{\chi_{2}}\right)r\right]$$
(71-7)

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد. مولفه پایینی معادله دیراک با توجه به رابطه زیر داده میشود:

$$G_{n_r,k}(r) = \frac{\hbar^2 c^2}{E + Mc^2} (\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}) F_{n_r,k}(r)$$
(YY-Y)

همچنین تابع موج کلی معادله دیراک به صورت زیر محاسبه میشود:

$$\psi_{n_{r},k}(r,\theta,\varphi) = N \begin{bmatrix} Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi) \\ \frac{i}{[M+E_{n_{r},k}]} \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \end{bmatrix} Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi) \end{bmatrix} r^{\left(\sqrt{\chi_{0}+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\right)} \\ \exp\left(-\sqrt{\chi_{2}}r\right) L_{n}^{\left(2\sqrt{\chi_{0}+\frac{1}{4}}\right)} \left[ \left(2+2\sqrt{\chi_{2}}\right)r \right]$$
(YT-T)

**۳–۳–۲ بررسی غیرنسبیتی ایزوتوپهای آینهای O<sup>17</sup> و <sup>17</sup>F** قسمت شعاعی معادله شرودینگر به صورت رابطه زیر داده می شود [۵۵، ۶۷].

$$\frac{d^{2}R_{n,l}(r)}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dR_{n,l}(r)}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^{2}}\left[E_{n,l} - V(r) - \frac{\hbar^{2}}{2\mu}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^{2}}\right)\right]R_{n,l}(r) = 0$$
(YF-Y)

با استفاده از پتانسیل هلمن و جایگذاری آن در رابطه بالا معادله به صورت زیر ساده میشود:

$$\frac{d^{2}R_{n,l}(r)}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dR_{n,l}(r)}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^{2}}\left[E_{n,l} + \frac{a}{r} - \frac{b}{r^{2}}e^{-\alpha r} - \frac{\hbar^{2}}{2\mu}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^{2}}\right)\right]R_{n,l}(r) = 0$$
(YΔ-Y)

از آنجایی که معادله بالا تنها برای *I=0,-1* دارای حل دقیق میباشد از تقریب مطرح شده در قسمت قبل بهره می گیریم و معادله بالا را به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\frac{d^{2}R_{n,l}(r)}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dR_{n,l}(r)}{dr} + \frac{1}{r^{2}}\left[-\chi_{2}'r^{2} + \chi_{1}'r - \chi_{0}'\right]R_{n,l}(r) = 0$$
(Y9-Y)

که پارامترهای 2′۲، 1′۲ و 0′۲ را به صورت زیر داریم:

$$\chi_{2}' = -\frac{2\mu}{\hbar^{2}} E$$

$$\chi_{1}' = \frac{2\mu}{\hbar^{2}} [a + b\alpha]$$

$$\chi_{0}' = \frac{2\mu}{\hbar^{2}} b + \ell (\ell + 1)$$
(YV-Y)

در نهایت با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی بدست میآید.

$$(2n+1)\sqrt{\chi'_{2}} + 2\sqrt{\chi'_{2}(\chi'_{0} + \frac{1}{4})} - \chi'_{1} = 0$$
(YA-Y)

با جایگذاری رابطه (۳-۲۷) در (۳-۲۸) برای معادله ویژه مقداری انرژی داریم:

$$E_{n,\ell} = -\frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{(a+b\alpha)^2}{\left[(2n+1)+2\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}b+\ell(\ell+1)+\frac{1}{4}}\right]^2}$$
(79-77)

در ادامه با توجه به روش پارامتری NU میتوان قسمت شعاعی تابع موج را برای معادله شرودینگر به صورت زیر بدست آوریم:

$$R_{n_r,k}(r) = N' r^{\left(\sqrt{\chi_0 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}}\right)} \exp\left(-\sqrt{\chi_2'}r\right) L_n^{\left(2\sqrt{\chi_0' + \frac{1}{4}}\right)} \left[\left(2 + 2\sqrt{\chi_2'}\right)r\right]$$
(\mathbf{\mathcal{T}} - \mathbf{\mathcal{T}})

که در آن 
$$\mathrm{N}'$$
 ثابت بهنجارش میباشد.

برای بدست آوردن انرژی حالت پایه و یک حالت برانگیخته این ایزوتوپها از معادله ویژه مقداری انرژی یعنی رابطه (۳–۲۰) در حالت نسبیتی و رابطه (۳–۲۹) در حالت غیرنسبیتی استفاده نمودیم که نتایج آن در جدول زیر آورده شده است. همچنین پارامترهای پتانسیل با استفاده از برازش با مقادیر تجربی به صورت بهینه بدست آمدند. درصد خطای نسبی محاسبات انجام شده در جدول (۳–۴) و (۳–۵) به ازای  $\alpha$ =0.012fm<sup>-1</sup>

جدول (۳-۴) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>17</sup>F و <sup>17</sup> در توصیف نسبیتی و غیرنسبیتی (α=0.012fm<sup>-1</sup>).

Isotope	state –	E-Our(N	ſeV)	$- E_{-Other}(MeV) \\ [AV]$	E <sub>-Exp</sub> (MeV) [ <b>A</b> ¥]
		Non-Relativistic	Relativistic		
۰ <sup>۷</sup> ۴ –	$d_{\Delta/r}$	-178/8480	-178/0118	129/16	-178/2198
	۲۶ ۱/۲	-178/2284	-128/••40		-177/7748
- ٥٣	$d_{\Delta/r}$	-137/1422	-171/9477	١٣٢/٨٨	-181/1876
	YS 1/1	- ) ٣ ) /٣٢ ) ٣	-131/•420		- <b>\</b> \ <b>\\\\\</b>
جدول (۳–۵) مقایسه اختلاف انرژی حالت برانگیخته برای ایزوتوپهای  $^{17}$ و  $^{17}$  نسبت به انرژی حالت پایه (حالت  $\binom{5/2}{2}_1$  برای ایزوتوپهای  $^{17}$ و  $^{17}$  و  $^{17}$  و  $^{17}$  و  $^{17}$  و  $^{17}$  و  $^{17}$ 

Isotono	Ensited	Others work			Our		
Isotope	state	N <sup>3</sup> LO [//]	CD-Bonn [A¶]	V <sub>18</sub> [٩.]	Non- Relativistic	Non- Relativistic Relativistic	
۱۳F	$\left(\frac{1}{2}\right)_{1}^{+}$	•/۴۲٨	۰/۸۰۵	•/•۶۲	•/۴•٩۶	•/ <b>Δ</b> •¥١	•/۴۹۵
٥٣/	$(\frac{1}{2})_{1}^{+}$	-•/•Y۵	•/٣١١	-•/٣٩•	•/821•	•/太٩٧٢	•/ <b>\</b> Y•

اختلاف بین انرژی حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>17</sup>F و <sup>17</sup>C در توصیف نسبیتی و غیرنسبیتی با دادههای تجربی و کار دیگران در جدول بالا مقایسه نمودهایم که توافق خوبی با دادههای تجربی بدست آمده است.

## ۳-۴ محاسبه انرژی برخی از ایزوتوپهای دوگانه جادویی با یک نوترون اضافی در لایه ظرفیت

در این قسمت به بررسی برخی از خواص استاتیکی ایزوتوپهای <sup>10</sup>، <sup>40</sup>Ca و <sup>40</sup>Ca و <sup>70</sup> و <sup>70</sup> به صورت یک ایزوتوپ هستهای پوسته ای در حالت نسبیتی پرداختهایم. این ایزوتوپها را میتوان برای <sup>17</sup>O به صورت یک ایزوتوپ دوگانه جادویی مانند (<sup>17</sup>Ca = <sup>17</sup>O) (<sup>17</sup>Ca به همراه یک نوکلئون اضافی در لایه <sup>17</sup>Cb، برای ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca دو <sup>41</sup>Ca دوگانه جادویی مانند (<sup>17</sup>Ca= <sup>10</sup>Ca) (<sup>17</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) به همراه یک نوترون اضافی به ترتیب در <sup>41</sup>Ca مصورت (22<sup>2</sup>Ca) (<sup>17</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) به همراه یک نوترون اضافی به ترتیب در <sup>41</sup>Ca مصورت (22<sup>2</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) به همراه یک نوترون اضافی در <sup>41</sup>Ca مصورت (22<sup>2</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca = <sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca) (<sup>10</sup>Ca)

تحت شرایط تقارن اسپینی یعنی 
$$d\Delta(r) = \frac{d\Delta(r)}{dr}$$
 یا  $\Delta(r) = C_s = const$ ، مولفه بالایی معادله دیراک به صورت زیر

نوشته میشود:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [Mc^2 + E][Mc^2 - E + \Sigma(r)]\right) F_{n_r,k}(r) = 0$$
 (\mathbf{T} \-\mathbf{T})

پتانسیل بهبود یافته ایکارت و هولسن را به صورت زیر در نظر می گیریم [۲۵، ۲۶، ۲۷]:

$$V(r) = v_0 \cosh^2(\alpha r) + v_1 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})}$$
(\mathbf{T}-\mathbf{T})

که در آن v<sub>0</sub> و v<sub>1</sub> پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف میکنند و پارامتر ۵ نیز محدوده پتانسیل را تعیین میکند.

r)∑ در معادله (۳–۳۱) به صورت پتانسیل زیر در نظر گرفته میشود:

$$\Sigma(\mathbf{r}) = 8v_0 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2} + 2v_1 \frac{e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})}$$
(\mathbf{rm})

با بکار بردن تغییر متغیر (s = exp(-2ar رابطه (۳۱-۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$F''(s) + \frac{1}{s}F'(s) + \frac{1}{4\alpha s^2} \left\{ \frac{(E^2 - M^2 c^4)}{\hbar^2 c^2} - \frac{(E + Mc^2)}{\hbar^2 c^2} \left[ 8v_0 \frac{s}{(1-s)^2} + 2v_1 \frac{s}{(1-s)} \right] - 4\alpha^2 \frac{k(k+1)}{(1-s)^2} \right\} F(s) = 0$$
(\mathbf{T}-\mathbf{T})

معادله بالا تنها برای k=0,-1 به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی معادله ما تقریب پیشنهادی توسط Greene و Aldrich را در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری می کنیم این تقریب برای ar<<1 معتبر است [۷۸، ۷۳].

$$\frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}+1)}{\mathbf{r}^2} \approx \frac{4\alpha^2 \mathbf{k}(\mathbf{k}+1)}{(\mathbf{e}^{-2\alpha \mathbf{r}}-1)^2} \tag{\mathcal{T}}$$

با بکار گرفتن تقریب بکار برده شده و تغییر متغیر داده شده رابطه (۳–۳۴) به صورت زیر خلاصه می شود:

$$F_{n,k}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}F_{n,k}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2}[-p_2s^2 + p_1s - p_0]F_{n,k}(s) = 0$$
(\mathcal{P}-\mathcal{P})

که پارامترهای p1 ،p2 و p0 را به صورت زیر داریم:

$$\begin{split} p_{2} &= -\frac{(E + Mc^{2})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}}[2v_{1} + (E - Mc^{2})] \\ p_{1} &= -\frac{(E + Mc^{2})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}}[8v_{0} + 2v_{1} + 2(E - Mc^{2})] \\ p_{0} &= k(k+1) - \frac{(E^{2} - M^{2}c^{4})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}} \\ \end{split}$$
(77)  
$$\begin{aligned} m_{0} &= k(k+1) - \frac{(E^{2} - M^{2}c^{4})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}} \\ &= -k(k+1) - \frac{(E^{2} - M^{2}c^{4})}{4\alpha^{2}\hbar^{2}c^{2}} \\ \end{aligned}$$

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_3 = 1 \tag{\vec{max}}$$

و ساير ضرايب (i=4, 5 ...13) نيز با توجه به روش پارامتری NU بدست میآيند.  

$$c_4 = 0$$
 $c_5 = -\frac{1}{2}$ 
 $c_6 = \frac{1}{4} + p_2$ 
 $c_7 = -p_1$ 
 $c_8 = p_0$ 
 $c_9 = p_2 - p_1 + p_0 + \frac{1}{4}$ 
 $c_{10} = 2\sqrt{p_0}$ 
 $c_{11} = 2\sqrt{p_2 - p_1 + p_0 + \frac{1}{4}}$ 
 $c_{12} = \sqrt{p_0}$ 
 $c_{13} = \frac{1}{2} + \sqrt{p_2 - p_1 + p_0 + \frac{1}{4}}$ 
(٣٩-٣)
 $c_{12} = \sqrt{p_0}$ 
 $c_{13} = \frac{1}{2} + \sqrt{p_2 - p_1 + p_0 + \frac{1}{4}}$ 

$$2\sqrt{p_0(p_2 - p_1 + p_0 + \frac{1}{4})} + (2n + 1)\sqrt{p_2 - p_1 + p_0 + \frac{1}{4}} + (2n + 1)\sqrt{p_0} + 2p_0 - p_1 + (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\texttt{f} \cdot -\texttt{T})$$
Provide the set of the set o

$$F_{n_{r},k}(r) = N\left(e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{p_{0}}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}}\right)} P_{n}^{\left(2\sqrt{p_{0}},2\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}}\right)} \left(1 - 2e^{-2\alpha r}\right)$$
(\*1-7)

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد. مولفه پایینی معادله دیراک با توجه به رابطه زیر داده میشود:

$$G_{n_{r},k}(r) = \frac{\hbar^2 c^2}{E + Mc^2} (\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}) F_{n_{r},k}(r)$$
 (47-77)

همچنین تابع موج کلی معادله دیراک به صورت زیر محاسبه میگردد:

$$\psi_{n_{r},k}(r,\theta,\varphi) = N \begin{bmatrix} Y_{jm}^{l}(\theta,\varphi) \\ \frac{i}{[M+E_{n_{r},k}]} \begin{bmatrix} \frac{d}{dr} + \frac{k}{r} \end{bmatrix} Y_{jm}^{\tilde{l}}(\theta,\varphi) \end{bmatrix} \frac{(e^{-2\alpha r})^{(\sqrt{p_{0}})}}{r} (1-e^{-2\alpha r})^{(\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2})} (4\pi - \pi) P_{n}^{(2\sqrt{p_{0}},2\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}})} (1-2e^{-2\alpha r})^{(\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2})}$$

با داشتن تابع موج میتوان شعاع باری را از رابطه زیر بدست آورد.

$$\langle \mathbf{r}^{2} \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\int \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}^{*}(\mathbf{r}) \mathbf{r}^{2} \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}(\mathbf{r}) \mathbf{d}^{3} \mathbf{r}}{\int \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}^{*}(\mathbf{r}) \psi_{\mathbf{n}_{r,k}}(\mathbf{r}) \mathbf{d}^{3} \mathbf{r}} \right)^{\frac{1}{2}}$$
(**FF**-**T**)

تراز انرژی حالت پایه و یک حالت برانگیخته را برای ایزوتوپهای مورد بررسی با استفاده از معادله ویژه مقداری انرژی بدست آمده محاسبه کرده و در جدول زیر نشان دادهایم.

جدول (۳-۶) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپها در توصیف نسبیتی معادله دیراک به ازای α(fm<sup>-1</sup>)=0.0127.

Isotope	state	Our work	Exp[ <b>^</b> ♥]
<sup>17</sup> O	E <sub>1d5/2</sub>	-171/7742	-171/7874
	E281/2	- 1 T • / X T 1 •	-13•/8118
<sup>41</sup> Ca	$E_{1f7/2}$	-80./6.28	-30.16162
Cu	E <sub>2p3/2</sub>	-٣۴٨/۴٣٧٧	-36/6768
<sup>49</sup> Ca	E <sub>2p3/2</sub>	-411/1.41	-421/1420
Cu	$E_{1f5/2}$	-417/22.2	-411/2822
<sup>57</sup> Ni	E <sub>2p3/2</sub>	-416/1926	-494/2412
1 (1	$E_{1f5/2}$	-492/4282	-492/477X

هم چنین شعاع باری این ایزوتوپ ها در حالت پایه به کمک روابط (۳–۴۳) و (۳–۴۴) بدست آمده است و با مقادیر تجربی مقایسه شده است.

Isotope	$< r^2 >_{our work}^{\frac{1}{2}}$ (fm)	$< r^{2} >_{EXP}^{\frac{1}{2}}$ (fm)
<sup>17</sup> O	7/8818	۲/۶۹۵۳[۸۵]
<sup>41</sup> Ca	۳/۴۶۸۸	٣/٤٧٨٠[٨٥]
<sup>49</sup> Ca	٣/۴٨٢٢	
<sup>57</sup> Ni	r/vrar	

جدول (۳-۷) شعاع باری ایزوتوپها در حالت پایه به ازای α(fm<sup>-1</sup>)=0.0127.

## ۵-۳ محاسبه انرژی برخی از ایزوتوپهای اکسیژن به کمک معادله شرودینگر D-بعدی

در این قسمت به بررسی یک سیستم چند جسمی به روش تحلیلی میپردازیم. برای این کار معادله شرودینگر را برای سیستم چند جسمی با استفاده از مختصات ژاکوبی و توابع فوق کروی مورد بررسی قرار می دهیم. از پتانسیل بهبود یافته هولسن و یوکاوای مرتبه دوم برای برهم کنش بین نوکلئونها استفاده کرده و با استفاده از روش پارامتری NU به بررسی معادله شرودینگر D-بعدی در حالت 04 می بردازیم و روابط و با استفاده از روش پارامتری و تابع موج را بدست می آوریم. تاثیر پارامترهای پتانسیل بر معادله ویژه مقداری

انرژی بررسی شده و در نهایت انرژی حالت پایه برخی از ایزوتوپهای اکسیژن را بدست می آوریم. برای یک سیستم A ذرهای می توان N=A-1 بردار ژاکوبی و در نتیجه 3N مختصه ژاکوبی تعریف کرد. هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیسیتم را به ذرات باقیمانده وصل می کند. وقتی ذرات مورد

بررسی نوکلئونها باشـند میتوان با چشـمپوشـی از اختلاف جرم بین پروتون و نوترون، ذرات سـیستم را  
همجرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی میتوان N بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [۴۷].  
(۴۵-۳) 
$$\int_{i+1}^{i} \frac{1}{i} \sum_{j=1}^{i} r_i$$
, i=1,2,...,N-1 (۴۵-۳) بردار  $i_j = i_j$  مکان هر نقطه نسـبت به مرکز جرم نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای A ذره به صورت زیر

$$R = \frac{1}{A}(r_1 + r_2 + \dots + r_A) = \frac{1}{A}\sum_{i=1}^{A} r_i = \frac{1}{N+1}\sum_{i=1}^{N+1} r_i$$
 (49-7)

المان حجم در این مختصات به صورت زیر است:

$$\prod_{i=1}^{N} dr_{i} = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\xi_{i} = dx$$
 (47-7)

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توانهایی از فاصله نسبی آنها باشند، میتوان آنها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیلها، پتانسیلهای فوق مرکزی میگویند. معادله شرودینگر در D-بعد به صورت زیر داده میشود [۹۱].

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{(D-1)}{x}\frac{dR}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[ E_{n,l} - V(x) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left( \frac{\ell(\ell+D-2)}{x^2} \right) \right] R = 0$$
(FA-T)

که در آن D=3N-3 میباشد. ما در این بررسی پتانسیل بهبود یافته هولسن [۲۵] و یوکاوای مرتبه دوم [۹۲] را به صورت زیر در نظر گرفتهایم:

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{v}_0 \alpha e^{-\alpha \mathbf{r}}}{(1 - e^{-\alpha \mathbf{r}})} + \mathbf{v}_1 \frac{e^{-\alpha \mathbf{r}}}{\mathbf{r}^2}, \quad \mathbf{v}_0 \rangle \mathbf{v}_1$$
 (F9-T)

که در آن v<sub>0</sub> و v<sub>1</sub> پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف می کنند. و پارامتر α نیز محدوده پتانسیل را تعیین می کند. با استفاده از تغییر متغیرهای

یر U(x) = x
$$\frac{D-1}{2}$$
R(x),  $\lambda = \ell + \frac{D-3}{2}$   
داده میشود.

$$\frac{d^{2}U(x)}{dx^{2}} + \frac{2\mu}{\hbar^{2}} \left[ E_{n,1} + \frac{v_{0}\alpha e^{-\alpha x}}{(1 - e^{-\alpha x})} - v_{1}\frac{e^{-\alpha x}}{x^{2}} - \frac{\hbar^{2}\lambda(\lambda + 1)}{2\mu x^{2}} \right] U(x) = 0 \qquad (\Delta \cdot -\nabla)$$

معادله بالا تنها برای  $\lambda=0,-1$  به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی معادله بالا ما تقریب  $\lambda=0,-1$  و Greene و Aldrich را در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری می کنیم این تقریب برای 1>> lpha r معتبر است [۷۸، ۷۳].

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{\left(1 - e^{-\alpha r}\right)^2} \tag{(\Delta 1-\mathcal{T})}$$

با بکار بردن تغییر متغیر (s = exp(-ar و تقریب بالا رابطه (۳-۵۰) به صورت زیر نوشته می شود:

$$U_{n,\ell}'(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}U_{n,\ell}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[-\chi_2 s^2 + \chi_1 s - \chi_0\Big]U_{n,\ell}(s) = 0$$
 (\$\Delta Y-\$\mathbf{T}\$)

که در آن 
$$\chi_1 \, \chi_2$$
 و  $\chi_1$  به صورت زیر درنظر گرفته می شوند:

$$\begin{split} \chi_2 &= \frac{2\mu}{\hbar^2 \alpha^2} \Big[ v_1 \alpha^2 + v_0 \alpha - E \Big] \\ \chi_1 &= \frac{2\mu}{\hbar^2 \alpha^2} \big( v_0 \alpha - 2E \big) - \lambda \big( \lambda + 1 \big) \\ \chi_0 &= -\frac{2\mu E}{\hbar^2 \alpha^2} \\ &: \lambda_0 = -\frac{2\mu E}{\hbar^2 \alpha^2} \end{split}$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$$
 (af-r)

جدول (۸-۳) ضرایب (i=4, 5 ... 13).

$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 1$	$\mathcal{E}_4 = 0$	0	$\varepsilon_5 = -\frac{1}{2}$
$\varepsilon_6 = \chi_2 + \frac{1}{4}$	$\mathcal{E}_7 = -2$	$\chi_1$	$\mathcal{E}_8=\chi_0$
$\varepsilon_9 = \chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}$	$\varepsilon_{10} = 2.$	$\sqrt{\chi_0}$	$\varepsilon_{12} = \sqrt{\chi_0}$
$\varepsilon_{11} = 2\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}$		$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2} + $	$\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}$

ســـپس با توجه به روش پارامتری NU و روابط جدول (۳–۸) معادله ویژه مقداری انرژی به صــورت زیر بدست میآید:

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\Delta\Delta - \Upsilon)$$

در ادامه با توجه به روش پارامتری NU و روابط جدول (۳-۸) می توان تابع موج را بدست آوریم:

$$R_{n,\ell}(x) = Nr^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)} \left(e^{-\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{\chi_0}\right)} \left(1 - e^{-\alpha r}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \chi_2 - \chi_1 + \chi_0}\right)} P_n^{\left(2\sqrt{\chi_0}, 2\sqrt{\frac{1}{4} + \chi_2 - \chi_1 + \chi_0}\right)} \left(1 - e^{-\alpha r}\right)$$
( $\Delta \mathcal{F} - \mathcal{V}$ )

در شکل (۳–۲)و (۳–۳) رفتار ویژه مقدار انرژی در حالت مقید بر حسب مقادیر مختلف v<sub>0</sub> و v<sub>1</sub> (پارامترهای پتانسیل) برای سیستم ۲ و ۳ نوکلئونی نشان داده شده است. برای سادگی تنها محاسبات مربوط به این شکلها در واحد نسبیتی انجام شده است (ħ=c=1).





lpha=0.08fm<sup>-1</sup>, رفتار ویژه مقدار انرژی در حالت مقید بر حسب  $v_1$  برای مقادیر مختلف  $v_0$  برای مقادیر ثابت m=8fm<sup>-1</sup>) شکل (m-m) رفتار ویژه مقید.

همان طور که مشخص است با افزایش ۷۵ مقدار انرژی کاهش و با افزایش ۷۱ مقدار انرژی افزایش مییابد. همچنین انرژی حالت مقید برای سیستم ۲، ۳ و ۴ نوکلئونی با هم مقایسه شدهاند. که این مقایسه برای مقادیر مختلف پارامترهای پتانسیل بر حسب ۷۵ و ۷۱ در شکل (۳–۴) نشان داده شده است.



نوکلئونی) و مقادیر ثابت α=0.08fm<sup>-1</sup>, m=8fm<sup>-1</sup> برای سیستم مقید.

در نهایت به عنوان کاربردی از این بحث انرژی حالت پایه برخی از ایزوتوپهای اکسـیژن را با اسـتفاده از معادله ویژه مقداری (۳–۵۵) بدسـت میآوریم. برای این کار ایزوتوپهای اکسیژن را به صورت یک پوسته بسـته (<sup>16</sup>0) به همراه نوکلئونهایی در بیرون از این پوسـته بسـته در نظر می گیریم. نتایج بدست آمده با بسـته (<sup>16</sup>0) به همراه نوکلئونهایی در بیرون از این پوسـته بسـته در نظر می گیریم. نتایج بدست آمده با نتایج تجربی و دیگر کارها مقایسه شده که در جدول (۳–۸) نشان داده شده است. همچنین درصد خطای نسـبی محاسـبات انجام شـده در جدول (۹–۳) به ازای <sup>1</sup>-۹۰ که در معادله تقریبی (۵–۳) وارد نشده، کمتر از ۲۰۰۹ میباشد.

Oxygen	potential	parameters	E (MeV)			
Isotopes	V <sub>0</sub> (MeV,fm)	$V_1$ (MeV,fm <sup>2</sup> )	Our	Other	Exp[84]	
<sup>17</sup> O	87/4220	٣/٢١٨٢	-137/1473	-177/XX+[ <b>^V</b> ]	-131/1826	
<sup>18</sup> O	94/4201	•/۵۳۸٧	- <i>\</i> ٣٩/ <b>\</b> ٩٣	۱۳۹/۹۰۹[۸۵]	-181/X•XV	
<sup>19</sup> O	708/4088	41/0770	-140/••40	-148/XV·[VV]	-147/78	
<sup>20</sup> O	103/0.21	۲/۱・۹۳	-101/3•73	-187/700[88]	-101/2016	

جدول (۳-۹) مقادیر انرژی حالت پایه برخی از ایزوتوپهای اکسیژن (<sup>۱</sup>-α=0.014fm).

می توان گفت که روش پیشنهادی ما می تواند در بررسی اصلاحات مربوط به مشاهدات و توصیف خواص سیستمهای چند جسمی هستهای، به عنوان یک روش ساده مفید باشد.

۳-۶ محاسبه انرژی ایزوتوپهای فرد <sup>41-49</sup>Ca به کمک معادله شرودینگر D-بعدی

در این قسمت انرژی برخی از ترازهای ایزوتوپهای زوج فرد کلسیم را در یک سیستم غیرنسبیتی غیر میکروسکوپیک با کمک یک پتانسیل مناسب بدست میآوریم. ایزوتوپهای فرد کلسیم ۴۱ تا ۴۹ را میتوان به صورت یک دوگانه جادویی به همراه نوکلئونهایی در ترازهای 17/2 و 2p<sub>3/2</sub> در نظر گرفت. با کمک پتانسیل Nikiforov–Uvarov و استفاده از روش پارامتری Nikiforov–Uvarov معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج را بدست میآوریم.

در مدل غیر میکروسکوپیک چند جسمی، نوکلئونها و پوسته بسته به عنوان ذرات بدون ساختار داخلی در نظر گرفته میشوند. سپس به بررسی معادله ویژه مقادیر انرژی و توابع موج برای این هستهها در یک سیستم غیرنسبیتی با بکارگیری یک پتانسیل مناسب و روشهای ریاضی موجود می پردازیم.

پتانسیل بهبود یافته ایکارت و هولسن یکی از مفیدترین پتانسیلها برای بررسی حالتهای مقید و پارامترهای پراکندگی در فیزیک هستهای میباشند [۲۷، ۴۵].

$$V(r) = v_0 \cosh^2(\alpha x) + v_1 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-2\alpha x})} = 4v_0 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-2\alpha x})^2} + v_1 \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-2\alpha x})}$$
( $\Delta V - V$ )

بحث نیروهای چند جسمی در یک راهکار بوسیله هماهنگهای فوق کروی راحت تر مورد بررسی قرار می گیرد. برای بررسی معادله ویژه مقداری انرژی در یک سیستم چند جسمی که تنها تابعی از فاصله بین ذرات است ما باید معادله شرودینگر غیر وابسته به زمان را بررسی کنیم. در این روش برای حل معادله شرودینگر برای یک سیستم چند جسمی با یک راهکار فوق کروی، قسمتی از معادله شرودینگر که مربوط به فوق شعاع x می شود با رابطه زیر بیان می شود [۴۸، ۴۷].

$$\left\{\frac{d^{2}}{dx^{2}} + \frac{D-1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\ell(\ell+D-2)}{x^{2}} - \frac{2m}{\hbar^{2}}\left[V(x) - E_{n\ell}\right]\right\}R_{n\ell}(x) = 0 \qquad (\Delta \Lambda - \Upsilon)$$

که در آن  $E_{n\ell}(x)$ ,  $E_{n\ell}(x)$ , ابه ترتیب ویژه مقادیر انرژی و قسمت فوق شعاعی تابع موج میباشند. با در نظر گرفتن تغییر متغیر به صورت  $\frac{(D-3)}{2} + \beta = \lambda$ ,  $\lambda = \ell + \frac{(D-3)}{2}$  معادله فوق شعاعی شرودینگر با پتانسیل فوق مرکزی به صورت زیر داده می شود.

$$\frac{d^{2}U_{n\ell}(x)}{dx^{2}} + \frac{2m}{\hbar^{2}} \left\{ E_{n\ell} - 4v_{0} \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-2\alpha x})^{2}} - v_{1} \frac{e^{-2\alpha x}}{(1 - e^{-2\alpha x})} - \frac{\hbar^{2}}{2m} \frac{\lambda(\lambda + 1)}{x^{2}} \right\} U_{n\ell}(x) = 0 \quad (\Delta 9 - \Upsilon)$$

معادله بالا تنها برای 1-0,-1 به طور دقیق قابل حل است. به منظور حل تحلیلی معادله بالا ما تقریب پیشنهادی توسط Greene و Aldrich را در نظر گرفته و جایگزین قسمت اسپین مداری می کنیم این تقریب برای 1>> αr معتبر است. ویژگی اصلی این تقریب در جایگزینی قسمت اسپین مداری با یک تقریب که توانایی حل معادله فوق هندسی را میدهد، میباشد [۷۸، ۲۸].

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{x^2} \approx \frac{\lambda(\lambda+1)4\alpha^2 e^{-2\alpha x}}{\left(1-e^{-2\alpha x}\right)^2}$$
 (8.-m)

رفتار این تقریب بکار گرفته شده در شکل زیر نشان داده شده است. که می توان توافق خوبی برای مقادیر کوچک a مشاهده کرد.



با بکار گرفتن تقریب معرفی شده برای قسمت مداری و پتانسیل فوق کروی و تغییر متغیر (s=exp(-2ar

$$U_{n,\ell}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}U_{n,\ell}'(s) + \frac{1}{s^{2}(1-s)^{2}} \left[-\chi_{2}s^{2} + \chi_{1}s - \chi_{0}\right]U_{n,\ell}(s) = 0$$
 (\$1-\$)

که در آن  $\chi_2$ ،  $\chi_2$  و  $\chi_2$  به صورت زیر درنظر گرفته می شوند:

$$\chi_{2} = -\frac{m}{2\alpha^{2}\hbar^{2}} \left[ \mathbf{E}_{n\ell} + \mathbf{v}_{1} \right]$$

$$\chi_{1} = -\frac{m}{\alpha^{2}\hbar^{2}} \left[ \mathbf{E}_{n\ell} + 2\mathbf{v}_{0} + \frac{\mathbf{v}_{1}}{2} \right] - \lambda \left( \lambda + 1 \right)$$

$$\chi_{0} = -\frac{m}{2\alpha^{2}\hbar^{2}} \mathbf{E}_{n\ell}$$
(FY-W)

همان طور که مشخص است معادله شرودینگر با در نظر گرفتن پتانسیل معرفی شده برای برهم کنش بین نوکلئونها به یک معادله درجه دوم در توافق با شکل عمومی معادله در روش پارامتری NU تبدیل می شود این روش می تواند برای حل معادله بالا بکار گرفته شود. در نهایت با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی بدست می آید.

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\$\%-\%)$$

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\$\%-\%)$$

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\$\%-\%)$$

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\$\%-\%)$$

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\$\%-\%)$$

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\$\%-\%)$$

$$(2n+1)\left(\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\chi_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\chi_0(\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4})} + 2\chi_0 - \chi_1 + \frac{1}{4} = 0 \quad (\$\%-\%)$$

$$E_{n\ell} = -\frac{2\alpha^{2}\hbar^{2}}{m} \left\{ \frac{\frac{\left[2n+2\gamma+1\right]^{2}}{4} + \frac{mv_{1}}{2\alpha^{2}\hbar^{2}}}{\left[2n+2\gamma+1\right]} \right\}^{2}; \gamma = \left[\frac{2m}{\alpha^{2}\hbar^{2}}v_{0} + \lambda(\lambda+1) + \frac{1}{4}\right]$$
(84-7)

در ادامه با توجه به روش پارامتری NU میتوان قسمت فوق شعاعی تابع موج را نیز برای معادله شرودینگر بدست آوریم:

$$R_{n,\ell}(x) = N'x^{-\left(\frac{D-1}{2}\right)} \left(e^{-2\alpha x}\right)^{\left(\sqrt{\chi_0}\right)} \left(1 - e^{-2\alpha x}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}\right)} P_n^{\left(2\sqrt{\chi_0}, 2\sqrt{\chi_2 - \chi_1 + \chi_0 + \frac{1}{4}}\right)} \left(1 - 2e^{-2\alpha x}\right)$$
(\$\varphi - \vec{L}]

که در آن 'N ثابت بهنجارش میباشد. در شکل زیر آنرژی حالت پایه با توجه به معادله (۳–۶۴) برای یک سیستم دو، سه و چهار جسمی بر حسب مقادیر مختلف ۷۱ و ۷۵ برای مقدار ثابتی از α=0.08fm<sup>-1</sup> بررسی شده است.



شکل (۳-۶) مقایسه ویژه مقدار انرژی حالت پایه بر حسب a) v<sub>1</sub> (و b) v<sub>1</sub> (b) برای مقادیر مختلف N (سیستم ۲، ۳ و ۴ جسمی) و مقدار ثابت α=0.08fm<sup>-1</sup>.

ایزوتوپهای کلسیم با یک پوسته بسته پروتونی یک ناحیه ایده آل برای بررسی نحوه شکل گیری و تغییرات پوسته ای در هسته ای با جرم متوسط فراهم می کنند. ایزوتوپهای کلسیم ۴۱ و ۴۹ را به صورت یک نوکلئون در تراز 1<sub>7/2</sub> و 1<sub>8</sub> و 2p<sub>3/2</sub> در بالای پوسته بسته کلسیم ۴۰ و ۴۸ در نظر می گیریم. و ایزوتوپهای کلسیم ۴۳،

۴۵ و ۴۷ را به صورت نوکلئونهایی در بالای پوسته بسته کلسیم ۴۰ در نظر می گیریم. به عنوان مثال کلسیم ۴۵ را می توان به صورت یک دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی در تراز  $If_{7/2}$  به صورت ۴۷ را می توان به صورت یک دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی در تراز  $If_{7/2}$  به صورت ۲/۶ را می توان به صورت یک دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی در تراز  $If_{7/2}$  به صورت  $If_{7/2}$  را می توان به مورت یک دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی در تراز  $If_{7/2}$  به صورت  $If_{7/2}$  را می توان به مورت یک دوگانه جادویی با نوکلئونهای اضافی در تراز  $If_{7/2}$  به صورت  $If_{7/2}$  در نظر گرفت با اسپین و پاریته  $If_{7/2}$  که مربوط به اسپین و پاریته نوکلئون های موجود در این تراز می باشد. از آنجایی که این هسته ها در حالت پایه دارای اسپین  $If_{7/2}$  می باشند لذا اثر اسپین مداری به کمک رابطه (۳–۶۶) به عنوان اولین اثر اختلالی بر روی انرژی حالتهای هسته ها بر سی می کنیم.

$$\mathbf{E}_{n,\ell}^{(1)} = \langle n \left| \mathbf{V}_{\text{LS}}(\mathbf{x}) \vec{L} \vec{S} \right| n \rangle = \int \mathbf{R}_{n,\ell}^{(0)*}(\mathbf{x}) \frac{\hbar^2}{2m_0^2 c^2} \frac{1}{x} \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} \vec{L} \vec{S} \mathbf{R}_{n,\ell}^{(0)}(\mathbf{x}) \mathbf{x}^2 d\mathbf{x}$$
(\$\$\mathcal{F}\_{-\mathcal{V}}]

در این معادله ( $\mathbf{R}_{n,\ell}^{(0)}(\mathbf{x})$  تابع موج بدست آمده به کمک رابطه (۳–۶۵) میباشد.  $\mathbf{m}_0$  جرم نوکلئون و  $\mathbf{r}$  سرعت نور میباشد [۹۴]. انرژیهای حالت پایه و برانگیخته برای این ایزوتوپها با توجه به رابطه ویژه مقداری انرژی بدست آمده و اثر اختلالی با مقادیر تجربی در شکل (۳–۲) مقایسه شده است.



شکل (۳-۷) مقایسه بین ترازهای انرژی محاسبه شده و مقادیر تجربی برای ایزوتوپهای فرد کلسیم [۸۴].

با داشتن تابع موج میتوان شعاع باری را از رابطه زیر بدست آورد.  

$$\langle x^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{\int R^*_{n,\ell}(x) x^2 R_{n,\ell}(x) d^3 x}{\int R^*_{n,\ell}(x) R^3_{n,\ell}(x) d^3 x} \right)^{\frac{1}{2}}$$
(۶۷-۳)

در ادامه شعاع باری این ایزوتوپها در حالت پایه به کمک روابط (۳–۶۵) و (۳–۶۷) بدست آمده و با مقادیر تجربی مقایسه شده است.

Isotope	Parameters of potential			$2 \frac{1}{2}$ (6)	$\frac{1}{2}$ (Cu)	
	$\alpha(\text{fm}^{-1})$	Vo (MeV)	V1 (MeV)	$\langle x^2 \rangle_{our work}^2$ (fm)	$\langle x \rangle_{EXP}^2$ (JM)	
					[٨۵]	
<sup>41</sup> Ca	•/•744	7/8788	-142/22•8	31/2514	٣/۴٧٨٠	
<sup>43</sup> Ca	•/•749	41.224	-198/1•47	۴/۰۰۶۰	3019/17	
<sup>45</sup> Ca	•/•747	۵/۴۸۶۷	-748/1•48	٣/٩٧٣٠	37/4944	
<sup>47</sup> Ca	•/•749	F/T91V	-787/8942	٣/٨١٠٣	٣/۴٧٨٣	
<sup>49</sup> Ca	•/•754	٣/٣٣۶١	-197/7488	٣/٧٩ • ٩		

جدول (۳–۱۰) شعاع باری ایزوتوپهای <sup>41-49</sup>Ca در حالت پایه.

نتایج بدست آمده توافق قابل قبولی با کار گذشتگان و مقادیر تجربی را داراست که نشان دهنده موفقیت مدل پیشنهادی بکار گرفته شده می باشد.

## ۳-۷ بررسی تحلیلی ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca و <sup>49</sup>Ca در توصیف نسبیتی و غیرنسبیتی

در ادامه پتانسیل دیگری را برای بررسی ایزوتوپهای کلسیم ۴۱ و ۴۹ در نظر گرفتهایم و از مدل پوستهای برای محاسبه ترازهای انرژی این ایزوتوپها استفاده نمودهایم. از آنجایی که این ایزوتوپها یک نوترون در بیرون از پوسته بسته دوگانه جادویی دارند، معادله دیراک برای بررسی آنها در مدل پوستهای نسبیتی و معادله شرودینگر برای بررسی آنها در مدل پوستهای غیرنسبیتی بکار برده شده است. این بار پتانسیل بهبود یافته هولسن و یوکاوای مرتبه دوم به عنوان برهمکنش بین پوسته بسته کلسیم و نوترون ظرفیت در نظر گرفته شده است. و از روش پارامتری NU برای بدست آوردن معادله ویژه مقداری انرژی و توابع موج در حالت نسبیتی و غیرنسبیتی استفاده نمودهایم.

# $- \nabla - \nabla - 1$ بررسی طیف انرژی در معادله دیراک استفاده می کنیم که تحت شرایط تقارن برای بررسی ایزوتوپها در مدل پوسته ای نسبیتی از معادله دیراک استفاده می کنیم که تحت شرایط تقارن اسپینی یعنی $0 = \frac{d\Delta(r)}{dr}$ یا $\Delta(r) = C_s = const$ اسپینی یعنی $\frac{d\Delta(r)}{dr} = 0$ دیراک به صورت زیر نوشته می شود [43]:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{1}{\hbar^2 c^2} [Mc^2 + E][Mc^2 - E + \Sigma(r)]\right) F_{n_r,k}(r) = 0$$
 (\$\mathcal{F}\_n(r) = 0

در این بررسی پتانسیل بهبود یافته هولسن و یوکاوای مرتبه دوم را به صورت زیر در نظر گرفتهایم [۲۵، ۹۲]:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{v}_0 \alpha \mathbf{e}^{-\alpha \mathbf{r}}}{(1 - \mathbf{e}^{-\alpha \mathbf{r}})} + \mathbf{v}_1 \frac{\mathbf{e}^{-\alpha \mathbf{r}}}{\mathbf{r}^2}, \qquad \mathbf{v}_0 \rangle \mathbf{v}_1$$
(99-7)

در رابطه بالا v<sub>0</sub> و v<sub>1</sub> پارامترهای حقیقی هستند، این پارامترها عمق چاه پتانسیل را توصیف می کنند و پارامتر α نیز محدوده پتانسیل را تعیین می کند. با استفاده از این پتانسیل و جایگذاری آن در مولفه بالایی معادله دیراک شکل معادله به صورت زیر ساده می شود.

$$\left\{\frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{\left(E^{2} - M^{2}c^{4}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} - \frac{\left(E + Mc^{2}\right)}{\hbar^{2}c^{2}} \left[-\frac{2v_{0}\alpha e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})} + 2v_{1}\frac{e^{-\alpha r}}{r^{2}}\right] - \frac{k\left(k+1\right)}{r^{2}}\right\}F_{n_{r},k}(r) = 0 \qquad (\gamma \cdot -\gamma)$$

به کمک تقریب زیر مانند قسمتهای قبلی و با بکار بردن تغییر متغیر (s = exp(-ar رابطه (۳-۷۰) به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})^2}$$
(YI-W)

$$F''(s) + \frac{1}{s}F'(s) + \frac{1}{\alpha^2 s^2} \left\{ \frac{\left(E^2 - M^2 c^4\right)}{\hbar^2 c^2} - \frac{\left(E + M c^2\right)}{\hbar^2 c^2} \left[ -\frac{2v_0 \alpha s}{(1-s)} + \frac{2v_1 \alpha^2 s^2}{(1-s)^2} \right] - \frac{k\left(k+1\right)\alpha^2 s}{(1-s)^2} \right\} F(s) = 0 \quad (\forall \forall -\forall ) = 0$$

حال معادله بالا را با استفاده از روش پارامتری NU مرتب می کنیم.

$$F''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}F'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \left\{-p_2 s^2 + p_1 s - p_0\right\}F(s) = 0$$
 (VT-T)

مقادیر p1 ،p2 و p0 را به صورت زیر داریم:

$$p_{2} = 2\beta (v_{0}\alpha + v_{1}\alpha^{2}) - \gamma$$

$$p_{1} = 2\beta v_{0}\alpha - 2\gamma - k(k+1)$$

$$p_{0} = -\gamma$$

$$(Y - \gamma)$$

و مقادیر β و γ را به صورت زیر داده میشود.

$$\gamma = \frac{\left(E^2 - M^2 c^4\right)}{\alpha^2 \hbar^2 c^2}, \qquad \beta = \frac{\left(E + M c^2\right)}{\alpha^2 \hbar^2 c^2}$$
(Ya-Y)

در نهایت با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج بدست میآیند.

$$2\sqrt{p_{0}\left(p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}\right)}+(2n+1)\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}}+(2n+1)\sqrt{p_{0}}+\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2}+2p_{0}-p_{1}+\frac{1}{4}=0 \quad (\forall \mathcal{P}-\mathcal{V})$$

$$\psi_{n_{r},k}\left(r,\theta,\varphi\right)=\frac{N}{r}\left[\frac{Y_{jm}^{l}\left(\theta,\varphi\right)}{\left[M+E_{n_{r},k}\right]}\left[\frac{d}{dr}+\frac{k}{r}\right]Y_{jm}^{\tilde{l}}\left(\theta,\varphi\right)\right]\left(e^{-\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{p_{0}}\right)}\left(1-e^{-\alpha r}\right)^{\left(\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}\right)} \quad (\forall \mathcal{V}-\mathcal{V})$$

$$P_{n}^{\left(2\sqrt{p_{0}},2\sqrt{p_{2}-p_{1}+p_{0}+\frac{1}{4}}\right)}\left(1-2e^{-\alpha r}\right)$$

که در آن N ثابت بهنجارش میباشد.

۳–۷–۲ بررسی طیف انرژی در معادله شرودینگر
برای بررسی ایزوتوپها در مدل پوسته ای غیرنسبیتی از معادله شرودینگر استفاده می کنیم. قسمت شعاعی معادله شرودینگر به صورت رابطه زیر داده می شود [۵۲].

$$\frac{\mathrm{d}^{2}R}{\mathrm{d}r^{2}} + \frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + \frac{2\mu}{\hbar^{2}}\left[E_{\mathrm{n},\mathrm{I}} - \mathrm{V}(\mathrm{r}) - \frac{\hbar^{2}}{2\mu}\left(\frac{\ell(\ell+1)}{\mathrm{r}^{2}}\right)\right]\mathrm{R} = 0 \tag{VA-V}$$

با استفاده از این پتانسیل رابطه (۳-۶۹) و جایگذاری آن در رابطه بالا، معادله به صورت زیر ساده میشود.

$$\frac{d^{2}R}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^{2}} \left[ E_{n,l} - \left( -\frac{v_{0}\alpha e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})} + v_{1}\frac{e^{-\alpha r}}{r^{2}} \right) - \frac{\hbar^{2}}{2\mu} \left( \frac{\ell(\ell+1)}{r^{2}} \right) \right] R = 0$$
 (Y9- $\mathcal{V}$ )

$$\frac{d^{2}U(r)}{dr^{2}} + \frac{2\mu}{\hbar^{2}} \left[ E_{n,l} + \frac{v_{0}\alpha e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})} - v_{1}\frac{e^{-\alpha r}}{r^{2}} - \frac{\hbar^{2}\ell(\ell+1)}{2\mu r^{2}} \right] U(r) = 0 \qquad (\lambda \cdot - \nabla)$$

برای حل معادله بالا تقریب زیر را مانند قبل در نظر می گیریم:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2 e^{-\alpha r}}{(1 - e^{-\alpha r})^2}$$
(A)- $\mathcal{V}$ )

رفتار تقریب بکار برده شده در رابطه بالا برای مقادیر مختلف آلفا در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل (۸–۳) رفتار تقریب بکار برده شده برای مقادیر ( $\Lambda$ –۳) شکل (۸–۳) متادیر ( $\alpha$ =0.02, 0.1 (fm<sup>-1</sup>)

با بکار بردن تغییر متغیر  $s = exp(-\alpha r)$  رابطه (۲-۸۰) به صورت زیر نوشته می شود:

$$U_{n,\ell}''(s) + \frac{(1-s)}{s(1-s)}U_{n,\ell}'(s) + \frac{1}{s^2(1-s)^2} \Big[-\eta_2 s^2 + \eta_1 s - \eta_0\Big]U_{n,\ell}(s) = 0$$
 (AY-Y)

که در آن η1.η2 و η0 به صورت زیر درنظر گرفته میشوند:

$$\eta_{2} = \frac{2\mu}{\hbar^{2}\alpha^{2}} \Big[ v_{1}\alpha^{2} + v_{0}\alpha - E \Big]$$
  

$$\eta_{1} = \frac{2\mu}{\hbar^{2}\alpha^{2}} (v_{0}\alpha - 2E) - \ell (\ell + 1)$$
  

$$\eta_{0} = -\frac{2\mu E}{\hbar^{2}\alpha^{2}}$$
  
(AT-T)

سپس با توجه به روش پارامتری NU معادله ویژه مقداری انرژی به صورت زیر بدست می آید:  

$$\left(\sqrt{\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4}} + \sqrt{\eta_0} + \frac{1}{4}(2n+1)\right) + 2\sqrt{\eta_0}\left(\eta_2 - \eta_1 + \eta_0 + \frac{1}{4}\right) + 2\eta_0 - \eta_1 + \frac{1}{4} = 0$$
 (۸۴-۳)  
که با جایگزاری روابط (۳-۸۳) در رابطه بالا معادله ویژه مقداری انرژی به صورت زیر بدست می آید:

$$E_{n,\ell} = -\frac{\hbar^{2}\alpha^{2}}{2\mu} \left\{ \frac{-(2n+1)\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\hbar^{2}\alpha^{2}}v_{1}\alpha^{2} + \ell\left(\ell+1\right) + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{4}(2n+1)^{2} + \frac{2\mu}{\hbar^{2}\alpha^{2}}v_{0}\alpha - \ell\left(\ell+1\right) - \frac{1}{4}}{\left[(2n+1) + 2\sqrt{\left(\frac{2\mu}{\hbar^{2}\alpha^{2}}v_{1}\alpha^{2} + \ell\left(\ell+1\right) + \frac{1}{4}\right)}\right]}}\right\}^{2} \quad (\Lambda\Delta - \Upsilon)$$

همچنین با توجه به روش پارامتری NU می توان تابع موج را بدست آوریم:

$$R_{n,\ell}(x) = \frac{N'}{r} \left( e^{-\alpha r} \right)^{\left(\sqrt{\eta_0}\right)} \left( 1 - e^{-\alpha r} \right)^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \eta_2 - \eta_1 + \eta_0}\right)} P_n^{\left(2\sqrt{\eta_0}, 2\sqrt{\frac{1}{4} + \eta_2 - \eta_1 + \eta_0}\right)} \left( 1 - e^{-\alpha r} \right)$$
(A9-Y)

که در آن <sup>′</sup>N ثابت بهنجارش میباشد.

### ۳-۷-۳ نتیجه گیری

در توصیف نسبیتی معادله دیراک به همراه پتانسیل بهبود یافته هولسن و یوکاوای مرتبه دوم، که به عنوان برهم کنش بین پوسته و نوترون در نظر گرفته شده بود با استفاده از روش پارامتری NU بررسی شد و معادله ویژه مقداری انرژی و تابع موج با روابط (۳–۷۶) و (۳–۷۷) بدست آمدند. برای بدست آوردن انرژی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته این ایزوتوپها از معادله ویژه مقداری انرژی یعنی رابطه (۳–۷۶) استفاده کردیم که نتایج آن در جدول (۳–۱۱) آورده شده است. همچنین پارامترهای پتانسیل با استفاده از برازش با مقادیر تجربی به صورت بهینه بدست آمدند.

جدول (۳-۱۱) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca و <sup>49</sup>Ca در توصیف نسبیتی از معادله دیراک (α=0.0181fm<sup>-1</sup>).

ايزوتوپ	پارامترهای پتانسیل		حالت	n	k	E(MeV)		
	v <sub>0</sub> ( MeV,fm)	v <sub>1</sub> (MeV,fm <sup>2</sup> )	-			Our	Other[٩٣]	Exp[^٤]
<sup>41</sup> Ca	120/0299	٧/٥٤٩٩ ٣/١٤٢٠		١	-٤	30/2310	-٣٤٩/٨٤٠٠	-30.18181
			2P <sub>3/2</sub>	٢	۲_	-۳٤٨/٤٩٧٣		-٣٤٨/٤٧٤٨
<sup>49</sup> Ca	101/170.	r/r7ar	2P <sub>3/2</sub>	٢	۲_	-271/12.9	-27./18	-271/12V0
			1f5/2	١	٣	-211/0/12		-211/0770

و در توصیف غیرنسبیتی از معادله شرودینگر برای بررسی ایزوتوپها استفاده نمودیم. پتانسیل بهبود یافته هولسن و یوکاوای مرتبه دوم را به عنوان برهم کنش بین پوسته و نوترون در نظر گرفته و از روش پارامتری NU برای محاسبه مقادیر انرژی و تابع موج استفاده کردیم. برای بدست آوردن انرژی حالت پایه و یک حالت برانگیخته این ایزوتوپها از معادله ویژه مقداری انرژی (۳–۸۵) استفاده نمودیم که نتایج آن در جدول زیر آورده شده است.

جدول (۳–۱۲) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای ایزوتوپهای <sup>41</sup>Ca و <sup>49</sup>Ca در توصیف غیر نسبیتی از معادله شرودینگر (α=0.0181fm<sup>-1</sup>)

ايزوتوپ	پارامترهای پتانسیل		حالت	E(MeV)			
	<b>V</b> 0	<b>V</b> 1	-	Our	Other[٩٣]	Exp [^٤]	
<sup>41</sup> Ca			1f <sub>7/2</sub>	-20+/2014	-****	-30.18181	
Ca	~~~~	1/•11•	2P <sub>3/2</sub>	2P3/2 - WEA/OIGG		-٣٤٨/٤٧٤٨	
<sup>49</sup> Ca	91/7199	10/11/0	2P <sub>3/2</sub>	-271/77	-27./18	-271/1200	
		1/0 (04	1f5/2	-211/7+17		-211/0770	

همچنین درصد خطای نسبی محاسبات انجام شده در جداول (۱۱–۳) و (۳–۳) به ازای α=0.0181fm<sup>-1</sup> که در معادله تقریبی (۳–۸۳) وارد شده، کمتر از ۰/۰۵۹۳ میباشد.

نتایج بدست آمده با نتایج تجربی و دیگر کارها مقایسه شده که در جداول بالا نشان داده شده است. در توصیف نسبیتی به خاطر وجود تقارنهای اسپینی و شبهاسپینی و همچنین وجود پتانسیلهای جاذب و دافع نتایج بهتری مشاهده می شود. با توجه به توافق بدست آمده بین مقادیر محاسبه شده و مقادیر تجربی می توان گفت که روش پیشنهادی ما می تواند در بررسی اصلاحات مربوط به مشاهدات و توصیف خواص سیستمهای چند جسمی هسته ای به عنوان یک روش ساده مفید باشد.

ییشنهادات:

- بررسی پتانسیلهای مناسب و روشهای تحلیلی دیگر به منظور استفاده در بدست آوردن ویژگی های استاتیکی (ترازهای انرژی و شعاع باری) ایزوتوپهای مورد بررسی
  - الله محاسبه ترازهای انرژی و شعاع باری برای سایر ایزوتوپهای مشابه 🛠
  - ا محاسبه سایر خصوصیات هستهها از قبیل گشاورهای چند قطبی

[1] B. L. Cohen (1971) "Concepts of Nuclear physics" McGraw-Hill, New York.

[2] K. Wildermuth and T. Kanellopoulos (**1958**) "The cluster model of the atomic nuclei" **Nucl. Phys.**, **7**, pp **150–162**.

[3] H. Horiuchi and K. Ikeda (**1968**) "A Molecule-like Structure in Atomic Nuclei of <sup>16</sup>O and <sup>10</sup>Ne" **Prog. Theor. Phys.**, **40**, **2**, pp **277–287**.

[4] H .Garcilazo (1981) "The one-pion-exchange potential in the three-body model of nucleon-nucleon scattering" Phys. Lett. B, 99, 3, pp 195-199.

[5] M. Taketani, S. Machida and S. Ohanuma (**1952**) "The meson theory of nuclear forces I: The deuteron ground state and low energy neutron-proton scattering" **Prog .Theor .Phys.**, **7**, pp **45**.

[6] P. Doleschall, I. Borbely, Z. Papp and W .Plessas (2003) "interaction and threenucleon bound states" **Phys. Rev. C**, 67, pp 064005.

[7] M. Naghdi (**2013**) "Nucleon-Nucleon Interaction: A Typical/Concise Review Department of Physics", Faculty of Basic Sciences.

[8] N. Kalantar-Nayestanaki, E. Epelbaum, J. G. Messchendorp and A. Nogga (2012) "Signatures of three-nucleon interactions in few-nucleon systems" **Rep. Prog. Phys.**, 75, pp 016301.

[9] A. Kievsky (2011) "Analysis of Three-Nucleon Forces Effects in the A = 3 System" Few-Body Syst., 49, pp 19-25.

[10] A. Kievsky, A. Viviani, L. Girland, L. E. Maecucci and S. Rosatti (2009) "Analysis of the Effects of Three-nucleon Forces in A = 3, 4 Systems" Few-Body Syst., 45, pp 115-118.

[11] S. B. Doma (**2002**) "Ground State Characteristics of the Light Nuclei with A≤6 on the Basis of the Translation Invariant Shell Model by Using Nucleon-Nucleon Interactions" **High Energy Physics and Nuclear Physics**, **26**, **9**, pp **941-948**.

[12] H. Eğrifes, D. Demirhan, F. Büyükkılıç (**1999**) "Polynomial Solutions of the Schrödinger Equation for the "Deformed" Hyperbolic Potentials by Nikiforov–Uvarov Method" **Phys. Scr.**, **59**, **2**, pp **90**.

[13] Ö. Yeşiltaş (**2007**) "PT/non-PT symmetric and non-Hermitian Pöschl–Teller-like solvable potentials via Nikiforov–Uvarov method" **Phys. Scr.**, **75**, **1**, pp **41**.

[14] F. Yasuk, A. Durmus and I. Boztosun (2006) "Exact analytical solution to the relativistic Klein-Gordon equation with noncentral equal scalar and vector potentials" J. Math. Phys., 47, 8, pp 082302.

[15] F. Cooper, J. Ginocchio A. Khare (1988) "Derivation of the S matrix using Supersymmetry" Phys. Lett. A, 129, 3, pp 145-147.

[16] R. Dutt, A. Khare and U. P. Sukhatme (**1988**) "Supersymmetry and shape invariance and exactly solvable potentials" **Am. J. Phys.**, **56**, **2**, pp **163-168**.

[17] H. F. Jones, R. J. Rivers (2009) "Which Green Function does the path integral for quassi hermitian Hamiltonians represent" **Phys. Lett. A**, **373**, **37**, pp **3304-3308**.

[18] S. Sakoda (2008) "Exactness in the path integral of the coulomb potential in one dimension" Mod. Phys. Lett. A, 23, 36, pp 3057-3076.

[19] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme (1995) "Supersymmetry and quantum mechanics" Phys. Rep., 251, 5-6, pp 267.

[20] A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov (**1988**) "Special Functions of Mathematical Physics" Birkhauser, Basel.

[21] مهدی نیک عمل، امین الله واعظ و امیر لهراسبی "آشنایی با روش های شبیه سازی در فیزیک" ناشر :تهران: دانشگاه صنعتی شریف، مؤسسه انتشارات علمی، ۱۳۸۶.

[22] S. M. Ikhdair (2009) "Bound states of the klein-gordon equation for vector and scalar general hulthén-type potentials in D-dimension" Int. J. Mod. Phys. C, 20, 1, pp 25–45.

[23] A. N. Ikot and E. J. Uwah (2011) "Bound State Solutions of the Klein Gordon Equation with the Hulth'en Potential" Electron. J. Theor. Phys., 8, 25, pp 225–232.

[24] W. Greiner (2000) "Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations" (Springer, 2000).

[25] M. Farrokh, M. R. Shojaeia and A. A. Rajabi (2013) "Klein-Gordon equation with Hulth'en potential and position-dependent mass" **Eur. Phys. J. Plus**, **128**, pp **14**.

[26] C. Eckart (**1930**) "The Penetration of a Potential Barrier by Electrons" **Phys. Rev**, **35**, pp **1303**.

[27] B. J. Falaye (**2012**) "Any *l*-state solutions of the Eckart potential via asymptotic iteration method" **Cent. Euro. J. Phys.**, **10**, **4**, pp **960**.

[28] E. H. Hill (**1954**) "The Theory of Vector Spherical Harmonics" **Am. J. Phys.**, **22**, **4**, pp **211**.

[29] P. R. Auvil and L. M. Brown (**1978**) "The relativistic hydrogen atom: A simple solution" **Am. J. Phys.**, **46**, **6**, pp **679-681**.

[30] M. Mousavi, M. R. Shojaei, A. Hejazi Juybari (**2017**) "Investigation of N-identical fewbody bound systems in the relativistic and non-relativistic description" **Chin. J. Phys.**, **55**, **3**, pp **583–593**.

[31] M. R. Shojaei, M. Mousavi (2015) "Solutions of the Klein-Gordon equation for  $l\neq 0$  with position-dependent mass for modified Eckart potential plus Hulthen potential" Int. J. Phys. Sci., 10, 9, pp 324–328.

[32] M. Aslanzadeh, A. A. Rajabi (2016) "Analytical Solution of Relativistic Few-Body Bound Systems with a Generalized Yukawa Potential" Few-Body Syst., 57, 2, pp 145–154.

[33] A. Rajabi, M. R. Shojaei (**2011**) "Determination of energy levels of the Klein–Gordon equation, with pseudo harmonic potential plus the ring shaped potential" **Int. J. Phy. Sci.**, **6**, pp **33**.

[34] A. Kievsky, M. Viviani, L. Girlanda, L. E. Marcucci and S. Rosati (2009) "Analysis of the Effects of Three-nucleon Forces in A = 3, 4 Systems" **Few-Body Syst.**, 45, 2-4, pp 115-118.

[35] A. Kievsky, M. Viviani, L. E. Marcucci and S. Rosati (2006) "Variational Description of Bound States in Three- and Four-Nucleon Systems" **Few-Body Syst.**, 38, 2-4, pp 63-66.

[36] J. Avery (**1989**) "Hyperspherical Harmonics: Applications in Quantum Theory" Dordrecht: Kluwer.

[37] M. M. Giannini, E. Santopinto and A. Vassallo (2002) "The hypercentral constituent quark model" Nucl. Phys. A, 699, 1-2, pp 308.

[38] S. M. Ikhdair, Sever R. (2088) "Exact solutions of the D-dimensional Schrödinger equation for a ring-shaped pseudoharmonic potential" Cent. Eur. J. Phys., 6, 3, pp 685-696.

[39] F. Jing-Jing, H. Ling, and Y. Shi-Jie (2011) "Solutions of Laplace Equation in n-Dimensional Spaces" Commun. Theor. Phys., 56, pp 623–625.

[40] M. M. Giannini, E. Santopinto and A. Vassallo (**2001**) "Hypercentral constituent quark model and isospin dependence" **Eur. Phys. J. A**, **12**, **4**, pp **447**.

[41] T. Tietz (1963) "Potential-Energy Function for Diatomic Molecules" J. Chem. Phys., 38, 12, pp 3036.

[42] W. Hua (1990) "Four-parameter exactly solvable potential for diatomic molecules" **Phys. Rev. A**, 42, 5, pp 2524.

[43] J. A. Kunc and F. J. Gordillo-Vázquez (**1997**) "Rotational–Vibrational Levels of Diatomic Molecules Represented by the Tietz–Hua Rotating Oscillator" **J. Phys. Chem. A**, **101**, **8**, **pp 1595**.

[44] S. M. Ikhdaira and M. Hamzavi (**2013**) "Spin and pseudospin symmetric Dirac particles in the field of Tietz—Hua potential including Coulomb tensor interaction" **Chin. Phys. B**, **22**, **9**, pp **090305**.

[45] M. R. Shojaei, M. Mousavi (2016) "The effect of tensor interaction in splitting the energy levels of relativistic systems" Adv. High Energy Phys., 12 Article ID 8314784.

[46] S. M. Ikhdaira and M. Hamzavi (**2012**) "Approximate Relativistic Bound State Solutions of the Tietz–Hua Rotating Oscillator for Any *κ*-State" **Few-Body Syst.**, **53**, **3-4**, pp **473–486**.

[47] A. A. Rajabi (2005) "Exact Analytical Solution of the Schrödinger Equation for an *N*-Identical Body-Force System" **Few-Body Syst.**, 37, 4, pp 197—213.

[48] U. A. Deta and S. Cari (2013) "Approximate solution of Schrodinger equation in Ddimensions for scarf hyperbolic potential using Nikiforov-Uvarov method" Adv. Studies Theor. Phys., 7, 13, pp 647–656.

[49] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar and A. A. Rajabi (2011) "Exact Solutions of *D*-Dimensional Schrödinger Equation for an Energy-Dependent Potential by NU Method" Commun. Theor. Phys., 55, pp 541.

[50] M. Hamzavi, M. Movahed, K.E. Thylwe and A. A. Rajabi (**2012**) "Approximate Analytical Solution of the Yukawa Potential with Arbitrary Angular Momenta" **Chin. Phys.** Lett., **29**, **8**, pp **080302**.

[51] B. I. Ita and A. I. Ikeuba (2013) "Solutions to the Schrödinger Equation with Inversely Quadratic Yukawa Plus Inversely Quadratic Hellmann Potential Using Nikiforov-Uvarov Method" J. At. Mol. Phys., 2013, Article ID 582610.

[52] M. Mousavi, M. R. Shojaei (2016) "Remove degeneracy in Relativistic Symmetries for Manning-Rosen plus quasi-Hellman potentials by tensor interaction" Commun. Theor. Phys., 66, pp 483–490.

[53] F. J. S. Ferreira and F. V. Prudente (2013) "Pekeris approximation – another perspective" Phys. Lett. A, 377, 42, pp 3027-3032.

[54] C. S. Jia, P. Gao and X. L. Peng (2006) "Exact solution of the Dirac–Eckart problem with spin and pseudospin symmetry" J. Phys. A: Math. Gen., 39, 24, pp 7737.

[55] H. Feizi, A. A. Rajabi, and M. R. Shojaei (2011) "Supersymmetric Solution of the Schrödinger Equation for Woods–Saxon Potential by Using the Pekeris Approximation" Acta Phys. Pol. B, 42, pp 2143.

[56] A. N. Ikot, H. P. Obong, T. M. Abbey, S. Zare, M. Ghafourian and H. Hassanabadi (2016) "Bound and Scattering State of Position Dependent Mass Klein–Gordon Equation with Hulthen Plus Deformed-Type Hyperbolic Potential" Few-Body Syst., 57, 9, pp 807–822.

[57] O. Bayrak, I. Boztosun (**2006**) "Arbitrary  $\ell$ -state solutions of the rotating Morse potential by the asymptotic iteration method" **J. Phys. A: Math. Gen.**, **39**, **22**, pp **6955**.

[58] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar and H. Rahimov (**2011**) "Approximate Solution of D-Dimensional Klein—Gordon Equation with Hulthén-Type Potential via SUSYQM" **Commun. Theor. Phys.**, **56**, **3**, pp **423–428**.

[59] A. D. Alhaidari, H. Bahlouli and A. Al-Hasan (2006) "Dirac and Klein–Gordon equations with equal scalar and vector potentials" **Phys. Lett. A**, 349, pp 87-97.

[60] A. Schulze-Halberg (2006) "Exactly solvable combinations of scalar and vector potentials for the Dirac equation interrelated by Riccati equations" Chin. Phys. Lett., 23, pp 1365.

[61] B. J. Falaye, S. M. Ikhdair and M. Hamzavi (2015) "Formula Method for Bound State Problems" **Few-Body Syst.**, 56, 1, pp 63–78.

[62] A. Arima, M. Harvey and K. Shimizu (1969) "Pseudo LS coupling and pseudo SU3 coupling schemes" **Phys. Lett. B**, 30, pp 517-522.

[63] K. T. Hecht, and A. Adler (**1969**) "Generalized seniority for favored J [not equal to] 0 pairs in mixed configurations" **Nucl. Phys. A**, **137**, pp **129-143**.

[64] A. L. Blokhin, C. Bahri and J. P. Draayer (1995) "Origin of Pseudospin Symmetry" Phys. Rev. Lett., 74, pp 4149.

[65] C. Bahri, J. P. Draayer and S. A. Moszkowski (1992) "Pseudospin symmetry in nuclear physics" Phys. Rev. Lett., 65, pp 2133.

[66] J. N. Ginocchio (**2005**) "Relativistic symmetries in nuclei and hadrons" **Phys. Rep.**, **414**, pp **165-261**.

[67] H. Feizi, M. R. Shojaei and A. A. Rajabi (**2012**) "Raising and lowering operators for the Dirac-Woods-Saxon potential in the presence of spin and pseudospin symmetry" **Eur. Phys.** J. Plus, **127**, pp **41**.

[68] H. Akcay (2009) "Dirac equation with scalar and vector quadratic potentials and Coulomb-like tensor potential" Phys. Lett. A, 373, 6, pp 616-620.

[69] P. Alberto, R. Lisboa, M. Malheiro, and A. S. de Castro (2005) "Tensor coupling and pseudospin symmetry in nuclei" **Phys. Rev. C**, **71**, **3**, **034313**.

[70] G. R. Satchler (1983) "Direct Nuclear Reactions" Oxford University Press, London.

[71] E. H. Hill (**1954**) "The Theory of Vector Spherical Harmonics" **Am. J. Phys.**, **22**, **4**, pp **211**.

[72] R. L. Greene and C. Aldrich (**1976**) "Variational wave functions for a screened Coulomb potential" **Phys. Rev. A**, **14**, **6**, pp **2363**.

[73] C. S. Jia, T. Chen and L. G. Cui (2009) "Approximate analytical solutions of the Dirac equation with the generalized Pöschl–Teller potential including the pseudo-centrifugal term" Phys. Lett. A, 373, 18–19, pp 1621–1626.

[74] P. Q. Wang, L. H. Zhang, C. S. Jia, J. Y. Liu (**2012**) "Equivalence of the three empirical potential energy models for diatomic molecules" **J. Mol. Spectrosc.**, **274**, pp **5-8**.

[75] C. S. Jia, T. Chen and S. He (**2013**) "Bound state solutions of the Klein–Gordon equation with the improved expression of the Manning–Rosen potential energy model" **Phys. Lett. A**, **377**, **9**, pp **682-686**.

[76] A. Arda and R. Server (**2014**) "Pseudospin and Spin Symmetric Solutions of the Dirac Equation: Hellmann Potential, Wei–Hua Potential, Varshni Potential" **Z. Naturforsch**, **69**a, pp **163**.

[77] R. L. Greene and C. Aldrich (**1976**) "Variational wave functions for a screened Coulomb potential" **Phys. Rev. A**, **14**, **6**, pp **2363**.

[78] C. S. Jia, J. W. Dai, L. H. Zhang, J. Y. Liu and X. L. Peng (**2015**) "Relativistic energies for diatomic molecule nucleus motions with the spin symmetry" **Phys. Lett. A**, **379**, **3**, pp **137-142**.

[79] M. G. Mayer and J. H. D. Jensen (**1955**) "Elementary Theory of Nuclear Shell Structure, Wiley" New York.

[80] D. R. Tilley, C. M. Cheves, J. H. Kelley, S. Raman, and H. R. Weller (**1998**) "Energy levels of light nuclei, A=20" **Nucl. Phys. A**, **636**, **3**, pp **249**.

[81] I. C. Wang and C. Y. Wong (1988) "Finite-size effect in the Schwinger particleproduction mechanism" **Phys. Rev. D**, 38, 1, pp 348.

[82] M. Mousavi, M. R. Shojaei (**2016**) "Calculation of energy and charge radius for doublymagic nuclei of <sup>41</sup>Ca and <sup>41</sup>Sc with extra nucleon" **Chin. J. Phys.**, **54**, pp **750–755**.

[83] H. Chen, H. Mei, J. Meng and J. M. Yao (2007) "Binding energy differences of mirror nuclei in a time-odd triaxial relativistic mean field approach" **Phys. Rev. C**, 76, 4, pp 044325.

[84] G. Audi, A. H. Wapstra and C. Thibaul (**2003**) "The Ame2003 atomic mass evaluation: (II), Tables, graphs and references" **Nucl. Phys. A**, **729**, **1**, pp **337-676**.

[85] I. Angeli and K. P. Marinova (**2013**) "Table of experimental nuclear ground state charge radii: An update" **At. Data Nucl. Data Tables**, **99**, pp **69-95**.

[86] M. Hamzavi and A. A. Rajabi (2013) "Tensor coupling and relativistic spin and pseudospin symmetries with the Hellmann potential" Can. J. Phys., 91, 5, pp 411–419.

[87] Q. Zhi and Z. Ren (2007) "Systematic studies on the exotic properties of isotopes from oxygen to calcium" Nucl. Phys. A, 794, 1-2, pp 10–28.

[88] D. R. Entem and R. Machleidt (2003) "Accurate charge-dependent nucleon-nucleon potential at fourth order of chiral perturbation theory" **Phys. Rev. C**, 68, 4, pp 041001.

[89] R. Machleidt (2001) "High-precision, charge-dependent Bonn nucleon-nucleon potential" Phys. Rev. C, 63, 2, pp 024001.

[90] R. B. Wiringa, V. G. J. Stoks and R. Schiavilla (**1995**) "Accurate nucleon-nucleon potential with charge-independence breaking" **Phys. Rev. C**, **51**, **1**, pp **38**.

[91] A. Niknam, A. A. Rajabi and M. Solaimani (**2016**) "Solutions of D-dimensional Schrodinger equation for Woods–Saxon potential with spin–orbit, coulomb and centrifugal terms through a new hybrid numerical fitting Nikiforov–Uvarov method" **J. Theor. Appl. Phys.**, **10**, pp **53**.

[92] M. Hamzavi, S. M. Ikhdair and B. I. Ita (2012) "Approximate spin and pseudospin solutions to the Dirac equation for the inversely quadratic Yukawa potential and tensor interaction," **Phys. Scr.**, 85, 4, Article ID 045009.

[93] M. Bhattacharya and G. Gangopadhyay (2007) "Continuum states in neutron-rich calcium and nickel nuclei" Fizika B (Zagreb), 16, 3, pp 113–128.

[94] N. Roshanbakht and M. R. Shojaei (2017) "Two-Center Gaussian potential well for studying light nucleus in cluster structure" Adv. High Energy Phys., vol 2017.

#### Abstract

The shell model is a model for our understanding of atomic nuclei. And magic cores are the cornerstone of it. They determine the properties of the nucleus in the entire range of nuclear graphs. Some of the static properties of the nucleus, such as energy levels and bar radii, are useful for describing the core structure. The core radius plays a key role in the study of the core character and theoretical nuclear models and also in the study of astrophysics and atomic physics. Proton-close shell nuclei, such as <sup>17</sup>O, <sup>41</sup>Ca, <sup>49</sup>Ca, and ..., provide an ideal area for investigating shell formation and evolution in medium-sized nuclei. We consider isotopes such as <sup>17</sup> O, <sup>17</sup>F, <sup>41</sup>Sc, <sup>41-49</sup>Ca, <sup>57</sup>Ni, etc., because these isotopes are double magically with a neutron above the core, so these isotopes in the proper area to check this method. Since these isotopes have nucleons outside the central magical section, we first studied the force between nucleons in the multi-systems. Then, considering the layered model, the solvability of relativistic and non-relative equations in the presence of suitable potentials using analytical methods and other methods has been investigated. In particular, the values of the ground state energy and the base state and state energy wave modes are excited and we calculated the mean square radius of the isotopes. For example, 41Ca and 49Ca isotopes can be considered as a magic double dual isotope  ${}^{41}Ca=n+(N=Z=20)$  and  ${}^{49}Ca=n+(N=28,Z=20)$  with an additional neutron in the  $lf_{7/2}$  layer, respectively and the  $2P_{3/2}$  layer. Spin and Parity The basic state of calcium 41 and 49 are  $J^{\pi} = 7/2^{-}$  and  $J^{\pi} = 3/2^{-}$ , respectively, which is related to the spin and parity of the last layer in which the nucleon has a capacity. The study of relativistic effects in quantum systems is usually useful. Therefore, the Dirac equation describing particles with spin <sup>1</sup>/<sub>2</sub> is used to study many issues in the field of nuclear physics and high energy. The Dirac equation is used to investigate them in the relativistic shell model and the Schrödinger equation to investigate them in the non-positive shell model.

**Keywords**: Schrödinger equation; Dirac equation; NU analytical method; Root mean square radius of radius; Energy levels values; Magic nuclei with additional nucleons.



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

Ph.D. Thesis in Nuclear Physics

## Calculation of the static properties double magic nuclei medium plus extra nucleon

By:Mohsen Mousavi

Supervisor: Dr. Mohammadreza Shojaei

August 2018