



دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه : فیزیک ذرات بنیادی

جرم نوترینو در مدل‌های $SU(2)_L \times U(1)_Y$

دانشجو : حمیدرضا رضازاده

استاد راهنما :

پرفسور علی اکبر رجبی

چکیده:

تا مدتهای زیادی تصور می‌شد نوترینوها ذرات بدون جرم هستند. همین امر سبب آن می‌گشت که این ذرات با دیگر فرمیونهای مدل استاندارد (مانند لپتونهای باردار و کوارکها) که جرم دارند، بسیار متفاوت باشند. در دهه ۵۰ و ۶۰ میلادی چنان باوری به بدون جرم بودن نوترینو وجود داشت که قانون بنیادی برهمکنشهای ضعیف، نظریه V-A، برای جریان باردار ضعیف تا حد زیادی به این امر مربوط می‌گشت.^۱ این نظریه بر ناوردایی میدانهای فرمیونی بدون جرم تحت تبدیلات γ^5 بنا نهاده شده بود.

در دهه ۹۰ میلادی داده‌های حاصل از نوترینوهای خورشیدی و جوی، گواهی تجربی بر جرم‌دار بودن نوترینو نشان دادند. با این حال فرض جرم‌دار بودن نوترینو و پژوهش پدیدارشناختی آن به حدود دهه ۷۰ میلادی بازمی‌گردد. در دهه ۷۰ و ۸۰ میلادی بررسی‌های بسیاری با فرض جرم‌دار بودن نوترینو بر مبنای نظریه‌های پیمانه‌ای انجام شد.

جرم‌دار بودن نوترینوها سبب شباهت بسیار زیاد آنها به کوارکها شده است. بر همین اساس امکان آمیختگی بین طعمهای مختلف نوترینو و در نتیجه پدیده نوسانات نوترینو وجود دارد. با توجه به صفر بودن جرم نوترینو در مدل استاندارد مهمترین اثر گواهیهای تجربی مبنی بر جرم‌دار بودن نوترینو آن است که باید به سوی فیزیک ماورای مدل استاندارد برویم.

مدل استاندارد بر پایه گروه تقارنی $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ شکل گرفته است، و فرمول‌بندی آن به‌گونه‌ای است که نوترینوها در آن بدون جرم می‌باشند. اکنون با وجود گواهیهای تجربی بسیار زیاد مبنی بر جرم‌دار بودن نوترینو و همچنین دیگر مشکلات مدل استاندارد، مشخص شده است که برای درک این قضایا باید به فیزیک ماورای مدل استاندارد پرداخت. اما پا فراتر گذاشتن از محدوده مدل استاندارد به معنی آن نیست که نمی‌توان از گروههای تقارنی آن استفاده نکرد. مدل استاندارد در پدیده‌شناسی بسیار موفق عمل می‌کند. با همین گروه پیمانه‌ای مدل استاندارد می‌توان مدلهایی ایجاد کرد که نوترینوها در آن جرم‌دار باشند. در این پایان‌نامه تلاش بر تعمیم کوچکی بر مدل استاندارد برای توصیف جرم نوترینو بوده است. این تعمیم به‌صورت در نظر گرفتن امکان وجود نوترینوهای راستگرد و همچنین ماژورانا بودن نوترینو می‌باشد. بر این اساس پدیده آمیختگی نوترینو، نوسانات نوترینو، تقارن

^۱ این نظریه را سودارشان، مارشاک، فاینمن و گل‌من بنیان نهادند.

CP و نقض آن و امکان واپاشی‌های بتازای دوگانه توضیح داده شده است. در پایان درمی‌یابیم که همانند بیشتر مدل‌های ماورای مدل استاندارد با در نظر گرفتن نوترینو به صورت ذره‌ای ماژورانا امکان توضیح پدیده‌های مشاهده شده مربوط به آن میسر می‌باشد.

کلید واژه:

- ۱- جرم نوترینو،
- ۲- گروه $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ،
- ۳- ناپایستگی عدد لپتونی

فهرست

۱	مقدمه
۲	۱) مدل استاندارد فیزیک ذرات
۵	۱-۱ لاگرانژین الکتروضعیف
۱۱	۲-۱ بر همکنش‌های الکتروضعیف
۱۸	۳-۱ سه نسل لپتونها و کوارکها
۲۱	۴-۱ شکست خودبه‌خود تقارن و سازوکار هیگز
۲۲	۱-۴-۱ مثال برای روشن ساختن بحث
۲۳	۲-۴-۱ به‌دست آوردن جملات جنبشی
۲۴	۳-۴-۱ نکته‌ای درباره یکاها
۲۴	۴-۴-۱ شکست خودبه‌خود تقارن و جرم
۲۶	۵-۱ سازوکار هیگز در مدل استاندارد
۳۱	۶-۱ جرم فرمیونی و آمیختگی
۳۶	۱-۶-۱ جملات جرمی کوارکها
۴۱	۷-۱ بوزونهای پیمانه‌ای
۴۵	۱-۷-۱ میدان الکترومغناطیسی
۴۷	۲-۷-۱ بوزونهای W, Z

۵۰	۲) آمیختگی سه نسل کوارکها
۵۲	۲-۱ قطری کردن ماتریس جرم
۵۳	۲-۲ پارامترهای فیزیکی در ماتریس آمیختگی کوارکها
۵۵	۲-۳ پارامتربندی ماتریس آمیختگی کوارکها
۵۵	۲-۳-۱ دو نسل کوارکها
۵۷	۲-۳-۲ سه نسل کوارکها
۶۵	۲-۴ جرم تبهگن
۶۷	۲-۵ ماتریس آمیختگی کوارکها با یک عنصر صفر
۶۹	۲-۶ نقض CP
۷۶	۳ جرم نوترینو در مدل‌های $SU(2)_L \times U(1)_Y$
۷۸	۳-۱ آمیختگی نوترینوهای دیراکی
۷۹	۳-۱-۱ اعداد لپتونی
۸۲	۳-۱-۲ آمیختگی نوترینوهای دیراک
۸۶	۳-۲ نوترینوهای ماژورانا
۸۹	۳-۲-۱ جمله جرمی ماژورانا
۹۲	۳-۲-۲ درجه‌های آزادی

۹۴	۳-۲-۳ میدان ماژورانی کوانتیزه
۹۵	۳-۲-۴ عدد لپتونی برای نوترینوهای ماژورانا
۹۸	۳-۲-۵ تقارن CP برای نوترینوهای ماژورانا
۱۰۱	۳-۲-۶ جرم مؤثر ماژورانا
۱۰۴	۳-۳ آمیختگی سه نسل نوترینو ماژورانا
۱۰۶	۳-۳-۱ برهمکنشهای ضعیف در آمیختگی سه نسل نوترینوی ماژورانا
۱۰۸	۳-۳-۲ نوردایی CP در آمیختگی سه نسل نوترینوی ماژورانا
۱۱۰	۳-۳-۳ آمیختگی مؤثر سه نسل نوترینو
۱۱۱	۳-۴-۱ جمله جرمی دیراک-ماژورانا برای یک نسل
۱۱۴	۳-۴-۱ احتمال نوسان نوترینو
۱۲۰	۳-۴-۲ برهمکنشهای ضعیف در جمله جرمی دیراک-ماژورانا
۱۲۱	۳-۴-۳ نوردایی CP در جمله جرمی دیراک-ماژورانا
۱۲۲	۳-۴-۴ آمیختگی بیشینه
۱۲۳	۳-۴-۵ حد دیراک
۱۲۳	۳-۴-۶ نوترینوهای شبه دیراکی
۱۲۴	۳-۴-۷ سازوکار الاکلنگی

۱۲۵	۳-۵ آمیختگی دیراک- ماژورانا در سه نسل
۱۲۷	۳-۵-۱ برهمکنشهای ضعیف برای آمیختگی دیراک- ماژورانا در سه نسل
۱۲۸	۳-۵-۲ سازوکار الاکلنگی برای سه نسل نوترینو
۱۲۹	۳-۶ آمیختگی سه‌بیشینه برای سه نسل نوترینو
۱۳۱	۳-۷ آمیختگی N نسل نوترینو
۱۳۵	نتیجه‌گیری کلی
۱۳۶	پیوست الف
۱۴۲	پیوست ب
۱۴۴	پیوست ج
۱۴۷	مراجع

مقدمه

در فیزیک امروز گواههای تجربی محکمی مبنی بر نوسانات نوترینوها، به ویژه در نوترینوهای جوی و نوترینوهای خورشیدی وجود دارد. این گواههای تجربی دایره بر وجود جرم و همچنینی وجود ماتریس آمیختگی همانند ماتریس آمیختگی CKM در بخش کوارکی مدل استاندارد فیزیک ذرات برای نوترینوها می باشد. مطالعه جرم و آمیختگی در بخش لپتونی به همان اندازه بخش کوارکی دارای اهمیت است. اما ویژگیهایی مانند کوچک بودن بیش از حد جرم نوترینوها، نقض عدد لپتونی که شاید به خنثی بودن این ذره مربوط و همچنین ناشی از ماژورانا بودن این ذرات باشد، سبب توجه بسیار زیاد به نوترینوها گشته است. جرمهای ماژورانا ممکن است در نتیجه سازوکار الاکلنگی به وجود آیند. فیزیک نوترینو مهمترین حوزه فیزیک است که ما را به فیزیک ماورای مدل استاندارد رهنمون می سازد.

در این پایان نامه در آغاز در فصل نخست به کلیات مدل استاندارد در محدوده برهمکنشهای الکتروضعیف می پردازیم. سعی شده است که جزئیات روابط مورد استفاده و مفید آورده شود، گو اینکه در برخی جاها به منظور دوری گزیدن از اطاله کلام از آوردن همه جزئیات و اثبات روابط خودداری شده است.

در فصل دوم به آمیختگی کوارکها در مدل استاندارد و ماتریس CKM می پردازیم. بررسی و آگاهی از ماتریس آمیختگی کوارکها برای درک آمیختگی نوترینوها بسیار لازم است. آمیختگی نوترینوهای دیراکی کاملاً همانند کوارکها می باشد. همچنین در فصل دوم به ناوردای یارلسکوگ می پردازیم که در به دست آوردن احتمال نوسان نوترینوها بسیار مهم می باشد.

در فصل پایانی سوم جرم نوترینو را تحت گروههای پیمانه ای $SU(2)_L \times U(1)_Y$ بررسی می کنیم. در این فصل با جزئیات کامل جرم نوترینوها را چه در مورد نوترینوی دیراک و چه در مورد نوترینوی ماژورانا و همچنین دیراک-ماژورانا توصیف می کنیم. باور عمومی بر آن است که جرم نوترینو یکی از تظاهرات فیزیک ماورای مدل استاندارد است که خود را در محدوده انرژیهای پایین نشان می دهد. در همین راستا کوچک بودن جرم نوترینوها ناشی از فیزیک انرژی بالای جدید و شاید ناشی از اتحاد نیروها دانسته می شود. این موضوع در سازوکار الاکلنگی توضیح داده می شود که در این باره در بخش ۷-۴-۳ بحث می کنیم. مدلهای و فرضیههای بسیاری درباره جرم نوترینوها و کاربرد سازوکار الاکلنگی در آنها به ویژه در چند سال اخیر مطرح شده است. در این پایان نامه به آنها نمی پردازیم زیرا مستلزم مقدمه مفصلی درباره پایههای نظری آنها می باشد که بسیار فراتر از چشم انداز این پایان نامه می باشد. افراد علاقه مند به موضوع می توانند به مراجع [۳۵] و [۵۰] مراجعه کنند.

فصل اول

مدل استاندارد فیزیک ذرات

۱- مدل استاندارد فیزیک ذرات

مدل استاندارد برهمکنش‌های قوی، الکترومغناطیسی و ضعیف بنیادی را با استفاده از نظریه کوانتومی میدان توصیف می‌کند [۱].

نظریه پیمانه‌ای آن بر اساس تقارن موضعی^۱ گروه‌های $U(1)_Y \times SU(2)_L \times SU(3)_C$ می‌باشد. C نشان‌دهنده رنگ، L کایرالیته چپگرد (ر.ک. پیوست ج) و Y فوق‌بار ضعیف است.

ذرات واسطه برهمکنش قوی ۸ گلوئون بدون جرم متناظر با ۸ مولد گروه $SU(3)_C$ و ذرات واسطه برهمکنش ضعیف سه بوزون پیمانه‌ای جرم‌دار $W^\pm, Z$ متناظر با سه مولد گروه $SU(2)_L$ و ذرات واسطه برهمکنش الکترومغناطیسی ۱ بوزون پیمانه‌ای بدون جرم (γ فوتون) متناظر با ۱ مولد گروه $U(1)_Y$ هستند. در مدل استاندارد می‌توان برهمکنش الکترومغناطیسی را جدای از برهمکنش‌های قوی مطالعه کرد. زیرا تقارن گروه رنگ $SU(3)_C$ شکسته نشده است و بین $SU(3)_C$ و $U(1)_Y \times SU(2)_L$ هیچ آمیختگی^۲ وجود ندارد. از طرفی بین بوزون‌های پیمانه‌ای خنثی $U(1)_Y$ و $SU(2)_L$ آمیختگی وجود دارد. (این موضوع را نشان خواهیم داد). بنابراین برهمکنش‌های ضعیف و الکترومغناطیسی را باید با هم مطالعه کرد.

گروه تقارنی مدل استاندارد، برهمکنش‌ها را تثبیت می‌کند. تعداد و ویژگی‌های بوزون‌های پیمانه‌ای خنثی از روی آن تعیین می‌شود. البته سه ثابت جفت‌شدگی مستقل $U(1)_Y$ و $SU(2)_L$ و $SU(3)_C$ نامشخص می‌ماند که باید از آزمایش مقدار آنها را به دست آورد.

دو نقص عمده مدل استاندارد عبارتند از

(۱) ۱۹ پارامتر وجود دارد که نمی‌توان آنها را در چهارچوب مدل استاندارد تعیین کرد.

(۲) شامل گرانش نمی‌شود.

پارامترهایی که مدل استاندارد به آن بستگی دارد:

^۱ Local Symmetry

^۲ mixing

بخش فرمیونی مدل استاندارد به ۱۳ پارامتر بستگی دارد.

۶ جرم کوارک

۳ جرم لپتون‌های باردار

← همگی از آزمایش تعیین می‌شوند.

۳ زاویه آمیختگی لپتون‌ها

۱ فاز

بخش پیمانه‌ای ۳ پارامتر (سه ثابت جفت‌شدگی) دارد [۲].

Strong CP Problem ← 1 QCD parameter

بخش هیگز } جرم هیگز
ثابت جفت‌شدگی مرتبه چهارم

۱۹ پارامتر + وجود ۳ خانواده (نسل) + عدم دربرگیری گرانش همه این جنبه‌های نارضایت‌بخش

با هم این نظر را تلقین می‌کنند که مدل استاندارد نظریه نهایی فیزیک ذرات بنیادی نیست بلکه

باید نظریه‌ای مؤثر در انرژی پایین باشد.

از آنجایی که مدل استاندارد نظریه‌ای بازبهنجارپذیر^۱ است. تصحیحات کوانتومی آن نسبت به فیزیک

ماورای مدل استاندارد، غیر حساس می‌باشد. به همین دلیل مدل استاندارد در پدیده‌شناسی بسیار

موفق است و تقریباً همه پدیده‌های شناخته شده، بجز نوسانات نوترینو و مسائل مربوط به آن را می-

تواند توصیف کند.

در تجربه هم برهمکنش‌های مدل استاندارد نوترینو تایید شده‌اند. این برهمکنش‌ها در تحلیل داده-

های نوترینو به کار می‌روند. البته ویژگی‌های مدل استاندارد نوترینو پیامد مهم اخترفیزیک و کیهان-

شناسی می‌باشد.

¹ renormalizable

۱-۱ لاگرانژی الکتروضعیف

در این بخش می‌خواهیم به بخش الکتروضعیف لاگرانژی مدل استاندارد بپردازیم. بخش الکتروضعیف مدل استاندارد، برهمکنش‌های نوترینو را در مدل استاندارد توصیف می‌کند. بدین منظور کافیت تنها از گروه $SU(2)_L \times U(1)_Y$ استفاده می‌کنیم.

گروه $SU(2)_L$ را ایزواسپین ضعیف می‌گویند. زیروند L به این معناست که عناصر این گروه فقط بر مولفه‌های کایرال چپگرد میدان‌های فرمیونی اثر می‌کنند. (مولفه‌های راستگرد کایرال تحت تبدیلات ایزواسپین ضعیف، یکتایی^۱ هستند.) این گروه سه مولد دارد.

$$I_a, \quad (a=1,2,3) \quad (1-1)$$

که در رابطه جابجایی زیر صدق می‌کند.

$$[I_a, I_b] = i \varepsilon_{abc} I_c \quad (2-1)$$

ε_{abc} تانسور تماماً پادمتقارن است. در رابطه (۲-۱) ویژگی غیرآبلی^۲ گروه $SU(2)$ نشان داده می‌شود. مثلاً در نمایش دوبعدی، $I_a = \tau_a / 2$ هستند که τ_a ماتریس‌های پائولی می‌باشند. (به این دلیل از τ_a به جای σ_a برای نمایش ماتریس پائولی استفاده کردیم که با عملگرهای اسپین اشتباه نشوند.)

$I_a \rightarrow c_a I_a$ با ثابتهای دلخواه c_a منجر به آن می‌شود که رابطه جابجایی (۲-۱) برقرار نباشد. یعنی عمل مولد در هر نمایشی یکتاست.

گروه $U(1)_Y$ را فوق‌بار^۳ می‌گویند. این گروه با عملگر فوق‌بار Y تولید می‌شود.

^۱ singlet

^۲ non-Abelian

^۳ این واژه را برابر Hypercharge برگزیدیم، در مقابل supercharge (ابرچار) که در نظریه‌های ابرتقارنی سبب تبدیل فرمیون به بوزون و بالعکس می‌شود.

رابطه گِل من - نیشیجیما^۱

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} \quad \text{رابطه Gell-Mann - Nishijima} \quad (3-1)$$

این رابطه از آنجا لازم است که عمل عملگر فوق بار را بر روی میدانهای فرمیونی تثبیت می کند.

رابطه گل من - نیشیجیما بر اتحاد برهمکنشهای ضعیف و الکترومغناطیسی دلالت دارد. برای برقرار بودن ناوردایی پیمانه ای موضعی سه بوزون پیمانه ای برداری $(a=1,2,3)$ ، A_a^μ مربوط به سه مولد $(a=1,2,3)$ ، I_a گروه $SU(2)_L$ و یک میدان بوزونی پیمانه ای برداری B^μ مربوط به تنها مولد گروه $U(1)_Y$ را معرفی می کنیم. همچنین به جای مشتق معمولی ∂_μ مشتق هموردا D_μ را قرار می دهیم.

$$D_\mu = \partial_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i g' B_\mu \frac{Y}{2} \quad (4-1)$$

$$\underline{I} \equiv (I_1, I_2, I_3) , \quad \underline{A}^\mu \equiv (A_1^\mu, A_2^\mu, A_3^\mu)$$

$$A^\mu \cdot \underline{I} \equiv \sum_a A_a^\mu I_a \quad (5-1)$$

در رابطه (۴-۱) ثابت جفت شدگی برهمکنش ضعیف گروه $SU(2)_L$ و g' ثابت جفت شدگی گروه $U(1)_Y$ می باشد.

مولفه های کایرال چپگرد میدانهای فرمیونی در دوگانه های ایزواسپینی ضعیف^۲ گروه بندی می شوند.

برای سادگی تنها نسل اول لپتونها و کوارکها را در نظر می گیریم.

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \quad Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (6-1)$$

$$\underline{I} L_L = \frac{\underline{\tau}}{2} L_L \quad \underline{I} Q_L = \frac{\underline{\tau}}{2} Q_L \quad (7-1)$$

¹ Gell-Mann-Nishijima

² Weak isospin doublets

$$I L_L = \left(\frac{\tau_1}{2} + \frac{\tau_2}{2} + \frac{\tau_3}{2} \right) L_L = \frac{\tau}{2} L_L \quad \underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$$

$$Q = I_r + \frac{Y}{2} = \frac{\tau_r}{2} + \frac{Y}{2} \quad Q L_L = (\text{مقدار بار}) L_L \quad (8-1)$$

$$I_r = \frac{\tau_r}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad I_r L_L = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ -e_L \end{pmatrix}$$

نوترینو ذره بدون بار است. پس با اعمال Q باید ویژه مقدار صفر برای v_{e_L} و (-1) برای e_L به دست آید.

$$\begin{cases} Q L_L = Q \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e_L \end{pmatrix} \Rightarrow I_r L_L + \frac{Y}{2} L_L = \begin{pmatrix} 0 \\ -e_L \end{pmatrix} \Rightarrow \\ Q = I_r + \frac{Y}{2} \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ -e_L \end{pmatrix} + \frac{Y}{2} \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e_L \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{Y}{2} \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} \end{cases} \quad (9-1)$$

$$Y \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} v_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix} \Rightarrow Y L_L = -L_L \quad Y Q_L = \frac{1}{3} Q_L$$

عناصر گروه موضعی تبدیلات $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ، یعنی g ها را با $3+1$ پارامتر، پارامتر بندی می کنیم.

$$(\underline{\theta}(x), \eta(x)) \quad , \quad \underline{\theta}(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x)) \quad (10-1)$$

که به مختصات فضا زمان x بستگی دارند.

$$g(\underline{\theta}(x), \eta(x)) \in SU(2)_L \times U(1)_Y \quad (11-1)$$

نمایش یکانی $g(\underline{\theta}(x), \eta(x))$ در فضای برداری میدان ها به صورت زیر است.

$$U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = e^{i \underline{\theta}(x) \cdot \underline{L} + i \eta(x) \frac{Y}{2}} = U(\underline{\theta}(x)) U(\eta(x)) \quad (12-1)$$

$$U(\underline{\theta}(x)) = e^{i \underline{\theta}(x) \cdot \underline{L}} \quad U(\eta(x)) = e^{i \eta(x) \frac{Y}{2}}$$

تبدیل دوگانه های فرمیونی چپگرد تحت $g(\underline{\theta}(x), \eta(x))$ به شکل زیر می باشد.

$$L_L \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} L'_L = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) L_L = U_L^l(\underline{\theta}(x), \eta(x)) L_L$$

$$Q_L \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} Q'_L = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) Q_L = U_L^q(\underline{\theta}(x), \eta(x)) Q_L \quad (13-1)$$

$$\begin{aligned}
 U_L^l(\underline{\theta}(x), \eta(x)) &= e^{\frac{i}{\sqrt{3}}\underline{\theta}(x) \cdot \underline{L} - \frac{i}{\sqrt{3}}\eta(x)} \\
 U_L^q(\underline{\theta}(x), \eta(x)) &= e^{\frac{i}{\sqrt{3}}\underline{\theta}(x) \cdot \underline{L} + \frac{i}{\sqrt{3}}\eta(x)}
 \end{aligned}
 \quad (۱۴-۱)$$

در مدل استاندارد فرض می‌شود که نوترینوی راستگرد وجود ندارد تا نوترینوها بدون جرم باقی بمانند.

دیگر فرمیون‌های راستگرد در نسل اول عبارتند از

$$e_R, u_R, d_R \quad (۱۵-۱)$$

که تحت تبدیلات گروه ایزواسپین ضعیف، یکتایی هستند.

$$\underline{L} f_R = 0 \quad (f = e, u, d) \quad (۱۶-۱)$$

با استفاده از رابطه گل‌من - نیشیجیما (۳-۱)،

$$\begin{aligned}
 Q d_R &= -\frac{1}{\sqrt{3}} d_R \quad Q u_R = \frac{2}{\sqrt{3}} u_R \\
 Q &= I_{\tau} + \frac{Y}{\sqrt{3}} \xrightarrow{I_{\tau} f_R = 0} Q f_R = \frac{Y}{\sqrt{3}} f_R \Rightarrow Y \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} = \sqrt{3} Q \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} u_R \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} d_R \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \quad (۱۷-۱)$$

به‌همین ترتیب

$$Y e_R = -\frac{2}{\sqrt{3}} e_R, \quad Y u_R = \frac{2}{\sqrt{3}} u_R, \quad Y d_R = -\frac{1}{\sqrt{3}} d_R \quad (۱۸-۱)$$

مولفه‌های راستگرد تحت تبدیلات (۱۱-۱) به صورت زیر درمی‌آیند.

$$\begin{aligned}
 U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} &= e^{i \underline{\theta}(x) \cdot \underline{L} + i \eta(x) \frac{Y}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} \\
 U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} &= e^{i \eta(x) \frac{Y}{\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i \frac{Y}{\sqrt{3}} \eta(x)} u_R \\ e^{-i \frac{1}{\sqrt{3}} \eta(x)} d_R \end{pmatrix}
 \end{aligned}
 \quad (۱۹-۱)$$

$$f_R \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} f'_R = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) f_R = U_R^f(\eta(x)) f_R \quad (f = e, u, d)$$

$$U_R^e(\eta(x)) = e^{-i \eta(x)}, \quad U_R^u(\eta(x)) = e^{\frac{2}{\sqrt{3}} i \eta(x)}, \quad U_R^d(\eta(x)) = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}} i \eta(x)}$$

جدول (۱-۱): ویژه مقادیر ایزواسپین ضعیف I ، و مولفه سوم آن I_3 ، و فوق بار Y ، و بار $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ بر دوگانه‌ها و

یگانه‌های فرمیونی

I	I_3	Y	Q		
$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	-۱	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$L_L = \begin{pmatrix} \nu_{e_L} \\ e_L \end{pmatrix}$	دوگانه لپتونی
۰	۰	-۲	-۱	e_R	یگانه لپتونی
$\frac{1}{2}$	$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$	$\frac{1}{3}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	دوگانه کوارکی
۰	۰	$\begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} u_R \\ d_R \end{pmatrix}$	یگانه کوارکی

لاگرانژی مدل استاندارد الکتروضعیف کلی‌ترین لاگرانژی بازبهنجارپذیر تحت گروه تقارنی موضعی $SU(2)_L \times U(1)_Y$ می‌باشد، که بر حسب میدان‌های بوزونی پیمانه‌ای و دوگانه هیگز $\phi(x)$ نوشته می‌شود.

برای نسل اول لپتونها و کوارکها داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & i \bar{L}_L \not{D} L_L + i \bar{Q}_L \not{D} Q_L + \sum_{f=e,u,d} i \bar{f}_R \not{D} f_R \\ & - \frac{1}{4} \underline{A}_{\mu\nu} \underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad \text{جملات جنبشی و خود جفت‌شدگی بوزون‌های پیمانه‌ای} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - \mu^\dagger \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \quad \text{میدان هیگز- شکست خودبه‌خود تقارن} \quad (۲۰-۱) \\ & - y^e (\bar{L}_L \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger L_L) \quad \text{جفت‌شدگی‌های هیگز-فرمیون یوکاوا مولدهای جرم لپتونی} \\ & - y^d (\bar{Q}_L \phi d_R + \bar{d}_R \phi^\dagger Q_L) - y^u (\bar{Q}_L \tilde{\phi} u_R + \bar{u}_R \tilde{\phi}^\dagger Q_L) \end{aligned}$$

سطر نخست در معادله (۲۰-۱):

دیدیم که میدان‌های فرمیونی (کواری و لپتونی) طبق روابط (۱۳-۱) و (۱۹-۱) تبدیل می‌شوند. برای

اینکه نظریه تحت تبدیل پیمانه‌ای ناورد باشد، باید مشتق هموردا طبق رابطه زیر تبدیل شود.

$$D_{\mu} \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} D'_{\mu} = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) D_{\mu} U^{-1}(\underline{\theta}(x), \eta(x)) \quad (21-1)$$

در نتیجه میدان‌های بوزونی پیمانه‌ای باید به صورت زیر تبدیل شوند^۱.

$$\underline{A}_{\mu} \cdot \underline{I} \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} \underline{A}'_{\mu} \cdot \underline{I} = U(\underline{\theta}(x)) \left[\underline{A}_{\mu} \cdot \underline{I} - \frac{i}{g} \partial_{\mu} \right] U^{-1}(\underline{\theta}(x)) \quad (22-1)$$

$$B_{\mu} \cdot \frac{Y}{\gamma} \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} B'_{\mu} \cdot \frac{Y}{\gamma} = U(\eta(x)) \left[B_{\mu} \frac{Y}{\gamma} - \frac{i}{g} \partial_{\mu} \right] U^{-1}(\eta(x)) \quad (23-1)$$

تبدیل میدان B_{μ} را می‌توان به صورت زیر ساده کرد.

$$B_{\mu} \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} B'_{\mu} = B_{\mu} - \frac{1}{g'} \partial_{\mu} \eta(x) \quad (24-1)$$

زیرا مولفه‌های راستگرد و چپگرد میدان‌های فرمیونی تحت تبدیلات گروه پیمانه‌ای (۱۳-۱) به روش-

های مختلفی تبدیل می‌یابند (ر.ک. (۱۳-۱) و (۱۹-۱)). بنا به تقارن پیمانه‌ای در چگالی لاگرانژی

وجود جملاتی جرمی از قبیل

$$f \bar{f} = \bar{f}_L f_R + \bar{f}_R f_L \quad (f = e, u, d) \quad (25-1)$$

ممنوع می‌باشد، خواهیم دید که تولید جرم فریون‌ها در مدل استاندارد از طریق فرایند شکست تقارن

سازوکار هیگز صورت می‌گیرد.

^۱ اثبات این موارد در پیوست الف آمده است.

۲-۱ بر همکنش‌های الکتروضعیف

مشتق‌های هموردا را در سطر نخست (۱-۲۰) بسط داده و جملات جنبشی آن را حذف می‌کنیم در

نتیجه لاگرانژی جفت‌شدگی فرمیون‌ها با بوزون‌های پیمانه‌ای به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= i \bar{L}_L \not{D} L_L + i \bar{Q} \not{D} Q_L + \sum_{f=e,u,d} i \bar{f}_R \not{D} f_R \quad \text{بسط مشتق‌های هموردا} \\
 &= i \bar{L}_L \left(\not{\partial}_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i g' \underline{B}_\mu \cdot \frac{Y}{\sqrt{2}} \right) L_L + \\
 &+ i \bar{Q}_L \left(\not{\partial}_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i g' \underline{B}_\mu \cdot \frac{Y}{\sqrt{2}} \right) Q_L \\
 &+ \sum_{f=e,u,d} i \bar{f}_R \left(\not{\partial}_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{I} + i g' \underline{B}_\mu \cdot \frac{Y}{\sqrt{2}} \right) f_R = \quad (۲۶-۱) \\
 &+ i \bar{L}_L \left\{ \not{\partial}_\mu L_L + i g \underline{A}_\mu \cdot \frac{\underline{\tau}}{\sqrt{2}} L_L + i g' \underline{B}_\mu \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} L_L \right) \right\} \\
 &+ i \bar{Q}_L \left\{ \not{\partial}_\mu Q_L + i g \underline{A}_\mu \left(\frac{I}{\sqrt{2}} \right) Q_L + i g' \underline{B}_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{3} \right) Q_L \right\} \\
 &+ i \bar{e}_R \left\{ \not{\partial}_\mu + i g' \underline{B}_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) (-2) \right\} e_R + i \bar{u}_R \left\{ \not{\partial}_\mu + i g' \underline{B}_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{4}{3} \right) \right\} u_R \\
 &+ i \bar{d}_R \left\{ \not{\partial}_\mu + i g' \underline{B}_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(-\frac{2}{3} \right) \right\} d_R
 \end{aligned}$$

با حذف جملات جنبشی (حاوی $\not{\partial}_\mu$)

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_I &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \bar{L}_L (g \underline{A} \cdot \underline{\tau} - g' \underline{B}) L_L - \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{Q}_L \left(g \underline{A} \cdot \underline{\tau} + \frac{1}{\sqrt{2}} g' \underline{B} \right) Q_L \\
 &+ g' \bar{e}_R \underline{B} e_R - \frac{2}{\sqrt{2}} g' \bar{u}_R \underline{B} u_R + \frac{1}{\sqrt{2}} g' \bar{d}_R \underline{B} d_R \quad (۲۷-۱)
 \end{aligned}$$

برای به‌دست آوردن جملات برهمکنشی برای فرمیون‌ها به‌طور صحیح، در آغاز تنها لپتون‌ها را در نظر

می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
 g \underline{A} \cdot \underline{\tau} - g' \underline{B} &= g \left[\underline{A}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \underline{A}_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \underline{A}_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] - g' \underline{B} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= g \begin{pmatrix} \underline{A}_3 & \underline{A}_1 - i \underline{A}_2 \\ (\underline{A}_1 + i \underline{A}_2) & \underline{A}_3 \end{pmatrix} - g' \begin{pmatrix} \underline{B} & 0 \\ 0 & \underline{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \underline{A}_3 - g' \underline{B} & g (\underline{A}_1 - i \underline{A}_2) \\ g (\underline{A}_1 + i \underline{A}_2) & -g \underline{A}_3 - g' \underline{B} \end{pmatrix} \quad (۲۸-۱)
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{I,L} = -\frac{1}{2} \left(\overline{\nu_{eL}} \quad \overline{e_L} \right) \begin{pmatrix} g \underline{A}_r - g' \underline{B} & g (\underline{A}_\nu - i \underline{A}_\nu) \\ g (\underline{A}_\nu + i \underline{A}_\nu) & -g \underline{A}_r - g' \underline{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} + g' \overline{e_R} \underline{B} e_R \quad (29-1)$$

برهمکنش مذکور را به دو بخش جریان باردار^۱ CC (ناشی از جملات غیر اصلی) و جریان خنثی^۲ NC تقسیم می‌کنیم (جملات روی قطر اصلی).

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} = -\frac{g}{2} \left\{ \overline{\nu_{eL}} (\underline{A}_\nu - i \underline{A}_\nu) e_L + \overline{e_L} (\underline{A}_\nu - i \underline{A}_\nu) \nu_{eL} \right\} \quad (30-1)$$

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = -\frac{1}{2} \left\{ \overline{\nu_{eL}} (g \underline{A}_r - g' \underline{B}) \nu_{eL} - \overline{e_L} (g \underline{A}_r + g' \underline{B}) e_L - 2 g' \overline{e_R} \underline{B} e_R \right\} \quad (31-1)$$

ابتدا جریان باردار را در نظر می‌گیریم و میدان W^μ را تعریف می‌کنیم. این میدان بوزون‌های W^+ را نابود و W^- را می‌آفریند.

$$W^\mu = \frac{A_\nu^\mu - i A_\nu^\mu}{\sqrt{2}} \quad (32-1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ \overline{\nu_{eL}} \not{W} e_L + \overline{e_L} \not{W}^\dagger \nu_{eL} \right\} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \overline{\nu_{eL}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) e_L W_\mu + \text{H.C.} \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{W,L}^\mu W_\mu + \text{H.C.} \end{aligned} \quad (33-1)$$

که $j_{W,L}^\mu$ جریان باردار لپتون‌ی است.

$$j_{W,L}^\mu = \overline{\nu_e} \gamma^\mu \underbrace{(1 - \gamma^5)}_{2e_L} e_L = 2 \overline{\nu_e} \gamma^\mu e_L \quad (34-1)$$

¹ Charged current

² Neutral current

$$\frac{1 - \gamma^5}{2} f = f_L, \quad \frac{1 + \gamma^5}{2} f = f_R$$

$$(35-1) \quad j_{W,L}^{\mu\dagger} W_{\mu}^{\dagger} = \bar{e} \gamma^{\mu} (1 - \gamma^5) \nu_e W_{\mu}^{\dagger}$$

از جمله $j_{W,L}^{\mu} W_{\mu}$ به وجود می آید

لاگرانژی برهمکنش (۳۳-۱) جفت شدگی های سه ساقی تولید می کند.

اکنون لاگرانژی جریان خنثی را در نظر می گیریم. نظریه باید شامل برهمکنش های الکترومغناطیسی که لاگرانژی QED توصیف می کند، هم بشود.

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(\gamma)} = -e j_{\gamma,L}^{\mu} A_{\mu} \quad (36-1)$$

e بار الکتریکی بنیادی، A^{μ} میدان الکترومغناطیسی و $j_{\gamma,L}^{\mu}$ جریان الکترومغناطیسی لپتونی است.

$$j_{\gamma,L}^{\mu} = -\bar{e} \gamma^{\mu} e \quad (\text{علامت منفی به سبب بار منفی الکترون است}) \quad (37-1)$$

با بیان میدان الکترومغناطیسی A^{μ} به صورت ترکیب خطی مناسبی از A_{γ}^{μ} و B^{μ} می توان لاگرانژی QED را به صورت بخشی از لاگرانژی جریان خنثی معادله (۳۱-۱) به دست آورد.

این ترکیب خطی و ترکیب خطی عمود بر آن (که میدان بوزونی برداری Z^{μ} را تعریف می کند) دورانی را در صفحه میدان های A_{γ}^{μ} و B^{μ} به اندازه زاویه θ_W (زاویه آمیختگی ضعیف یا زاویه واینبرگ) انجام می دهند.

$$\begin{aligned} A^{\mu} &= \sin \theta_W A_{\gamma}^{\mu} + \cos \theta_W B^{\mu} \\ Z^{\mu} &= \cos \theta_W A_{\gamma}^{\mu} - \sin \theta_W B^{\mu} \end{aligned} \quad (38-1)$$

زاویه آمیختگی ضعیف (زاویه واینبرگ) به این دلیل برگزیده شده است که جفت شدگی بین میدان الکترومغناطیسی و میدان های فرمیونی را بدهد. (۳۸-۱) را در (۳۱-۱) وارد می کنیم.

$$\begin{cases} \cos \theta_W A^\mu - \sin \theta_W Z^\mu = B^\mu \\ \sin \theta_W A^\mu + \cos \theta_W Z^\mu = A'^\mu \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = & -\frac{1}{4} \left\{ \bar{\nu}_{e_L} [g (\sin \theta_W A'^\mu + \cos \theta_W Z'^\mu) - g' (\cos \theta_W A'^\mu - \sin \theta_W Z'^\mu)] \nu_{e_L} \right. \\ & - \bar{e}_L [g (\sin \theta_W A'^\mu + \cos \theta_W Z'^\mu) + g' (\cos \theta_W A'^\mu - \sin \theta_W Z'^\mu)] e_L \\ & \left. - \bar{\nu} g' e_R (\cos \theta_W A'^\mu - \sin \theta_W Z'^\mu) e_R \right\} \quad (39-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = & -\frac{1}{4} \left\{ \bar{\nu}_{e_L} [(g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W) Z'^\mu + (g \sin \theta_W - g' \cos \theta_W) A'^\mu] \nu_{e_L} \right. \\ & - \bar{e}_L [(g \cos \theta_W - g' \sin \theta_W) Z'^\mu + (g \sin \theta_W + g' \cos \theta_W) A'^\mu] e_L \\ & \left. - \bar{\nu} g' e_R [-\sin \theta_W Z'^\mu + \cos \theta_W A'^\mu] e_R \right\} \quad (40-1) \end{aligned}$$

نوترینوها ذرات خنثی هستند پس با میدان الکترومغناطیسی جفت شدگی ندارد. ضرایب متناظر را در (40-1) برابر صفر قرار می دهیم.

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W \Rightarrow \tan \theta_W = \frac{g'}{g} \quad (41-1)$$

این رابطه بسیار مهم می باشد زیرا ضرایب جفت شدگی g و g' را در مدل استاندارد با زاویه آمیختگی ضعیف (واینبرگ) به هم مربوط می کند. با جایگذاری (41-1) در (40-1)،

$$\begin{aligned} \xrightarrow{g' = \frac{g \sin \theta_W}{\cos \theta_W}} \mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = & -\frac{g}{4} \left\{ \bar{\nu}_{e_L} [(\cos \theta_W + \sin^2 \theta_W / \cos \theta) Z'^\mu] \nu_{e_L} \right. \\ & - \bar{e}_L [(\cos \theta_W - \sin \theta_W / \cos \theta \sin \theta_W) Z'^\mu + (\sin \theta_W + \sin \theta_W) A'^\mu] e_L \\ & \left. - \bar{\nu} e_R [-\sin^2 \theta_W / \cos \theta Z'^\mu + \sin \theta_W A'^\mu] e_R \right\} \quad (42-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = & -\frac{g}{4 \cos \theta_W} \left\{ \bar{\nu}_{e_L} [(\cos^2 \theta_W + \sin^2 \theta_W) Z'^\mu] \nu_{e_L} \right. \\ & - \bar{e}_L [(\cos^2 \theta_W - \sin^2 \theta_W) Z'^\mu] e_L - \bar{\nu} e_R [-\sin^2 \theta_W Z'^\mu] e_R \\ & \left. + g \sin \theta_W \bar{e}_L A'^\mu e_L + g \sin \theta_W \bar{e}_R A'^\mu e_R \right\} \quad (43-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = & -\frac{g}{4 \cos \theta_W} \left\{ \bar{\nu}_{e_L} Z'^\mu \nu_{e_L} - (1 - \sin^2 \theta_W) \bar{e}_L Z'^\mu e_L \right. \\ & \left. + \sin^2 \theta_W \bar{e}_R Z'^\mu e_R \right\} + g \sin \theta_W \bar{e} A' e \quad (44-1) \end{aligned}$$

جمله آخر جفت‌شدگی میدان الکترون با میدان الکترومغناطیسی است پس باید با لاگرانژی برهمکنش QED در معادله (۳۶-۱) یکی باشد.

$$\begin{cases} g \sin \theta_W \bar{e} \not{A} e = -e j_{\gamma,L}^\mu A_\mu \Rightarrow g \sin \theta_W \bar{e} \not{A} e = e \bar{e} \gamma^\mu e A_\mu \\ j_{\gamma,L}^\mu = -\bar{e} \gamma^\mu e \end{cases} \quad (۴۵-۱)$$

$$\Rightarrow g \sin \theta_W \bar{e} \gamma^\mu A_\mu e = e \bar{e} \gamma^\mu A_\mu e \Rightarrow \begin{cases} g \sin \theta_W = e \\ \xrightarrow{(۴۱-۱)} g' \cos \theta_W = e \end{cases}$$

این نتایج بسیار مهم بین ثوابت جفت‌شدگی g, g' و بار الکتریکی بنیادی e ایجاد ارتباط می‌کنند.

$$g = e \csc \theta_W, \quad g' = e \csc \theta_W \Rightarrow e = \frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (۴۶-۱)$$

لاگرانژی جریان خنثی را می‌توان به صورت زیر هم نوشت:

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(NC)} = \mathcal{L}_{I,L}^{(Z)} + \mathcal{L}_{I,L}^{(\gamma)} \quad (۴۷-۱)$$

همان لاگرانژی QDE در معادله (۳۶-۱) است و $\mathcal{L}_{I,L}^{(Z)}$ لاگرانژی جریان خنثی ضعیف می‌باشد.

$$\mathcal{L}_{I,L}^{(Z)} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} j_{Z,L}^\mu Z_\mu \quad (۴۸-۱)$$

$$j_{Z,L}^\mu = 2 g_L^V \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} + 2 g_L^I \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + 2 g_R^I \bar{e}_R \gamma^\mu e_R$$

که ضرایب g_L^V, g_L^I, g_R^I از مقایسه با (۴۴-۱) به دست می‌آید، همچنین برای میدان‌های فرمیونی

$$g_L^f = I_3^f - q_f \sin^2 \theta_W, \quad g_R^f = -q_f \sin^2 \theta_W \quad (۴۹-۱)$$

جدول ۱-۲ مقادیر g_L و g_R و g_V و g_A برای میدانهای فرمیونی ($s_W = \sin \theta_W$)

g_A	g_V	g_R	g_L	فرمیون‌ها
$g_A^V = \frac{1}{2}$	$g_V^V = \frac{1}{2}$	$g_R^V = 0$	$g_L^V = \frac{1}{2}$	ν_e, ν_μ, ν_τ
$g_A^I = -\frac{1}{2}$	$g_V^I = -\frac{1}{2} + 2s_W^2$	$g_R^I = s_W^2$	$g_L^I = -\frac{1}{2} + s_W^2$	e, μ, τ
$g_A^U = \frac{1}{2}$	$g_V^U = \frac{1}{2} - \frac{4}{3}s_W^2$	$g_R^U = \frac{2}{3}s_W^2$	$g_L^U = \frac{1}{2} - \frac{2}{3}s_W^2$	u, c, t
$g_V^D = -\frac{1}{2}$	$g_V^D = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3}s_W^2$	$g_R^D = \frac{1}{3}s_W^2$	$g_L^D = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}s_W^2$	d, s, b

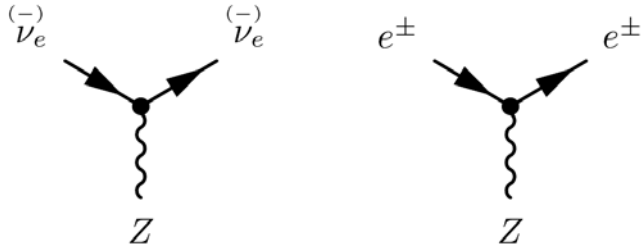
به سبب آمیختگی میدان‌های پیمانه‌ای A^μ و B^μ در (۳۸-۱) برهمکنش‌های جریان خنثی ضعیف برای میدان‌های فرمیونی باردار هم شامل مولفه‌های چپگرد و هم شامل مولفه‌های راستگرد می‌شوند. جریان خنثی ضعیف (۴۸-۱) را می‌توان به صورت زیر هم نوشت.

$$j_{Z,L}^\mu = \bar{\nu}_e \gamma^\mu (g_V^\nu - g_A^\nu \gamma^5) \nu_e + \bar{e} \gamma^\mu (g_V^l - g_A^l \gamma^5) e \quad (۵۰-۱)$$

که جفت‌شدگی‌های برداری و محوری $g_V^{\nu,L}$ ، $g_A^{\nu,L}$ در جدول ۲-۱ آمده‌اند.

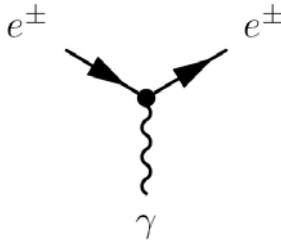
$$g_V^f = g_L^f + g_R^f = I_\mp^f - 2q_f \sin^2 \theta_W, \quad g_A^f = g_L^f - g_R^f = I_\mp^f \quad (۵۱-۱)$$

لاگرانژی برهمکنش جریان خنثی ضعیف (۴۸-۱) توصیف کننده جفت‌شدگیهای سه ساقی زیر است.



(۵۲-۱)

لاگرانژی برهمکنش الکترومغناطیسی لپتونی (۳۶-۱) جفت‌شدگیهای سه ساقی زیر را نشان می‌دهد.



(۵۳-۱)

اکنون به بخش کوارکی لاگرانژی برهمکنش معادله (۲۷-۱) می‌پردازیم.

$$\mathcal{L}_{L,Q} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} \bar{u}_L & \bar{d}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g \underline{A}_\mp + \frac{1}{3} g' \underline{B} & g (\underline{A}_\mp - i \underline{A}_\mp) \\ g (\underline{A}_\mp + i \underline{A}_\mp) & -g \underline{A}_\mp + \frac{1}{3} g' \underline{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \quad (۵۴-۱)$$

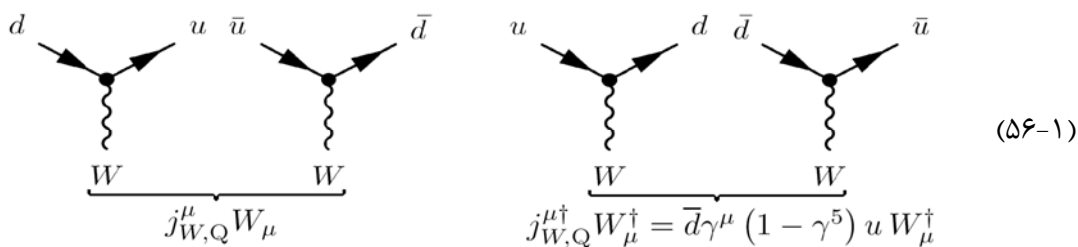
$$-\frac{2}{3} g' \bar{u}_R \underline{B} u_R + \frac{1}{3} \bar{d}_R \underline{B} d_R$$

با تکرار همان روند که برای لپتون‌ها انجام دادیم.

$$\mathcal{L}_{l,Q}^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_{W,Q}^\mu W_\mu + \text{H.C.} \quad (55-1)$$

$$j_{W,Q}^\mu = \bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) d = 2 \bar{u}_L \gamma^\mu d_L$$

لاگرانژی برهمکنش معادله (۳۳-۱) جفت‌شدگی سه ساقی زیر را ایجاد می‌کند.



$$j_{W,Q}^{\mu\dagger} W_\mu^\dagger = \bar{d} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u W_\mu^\dagger \quad (56-1)$$

همانند حالت لپتونی، می‌توان برهمکنش جریان خنثی کوارکی را هم به دو بخش ضعیف و الکترومغناطیسی جدا کرد.

$$\mathcal{L}_{l,Q}^{(NC)} = \mathcal{L}_{l,Q}^{(Z)} + \mathcal{L}_{l,Q}^{(\gamma)} \quad (57-1)$$

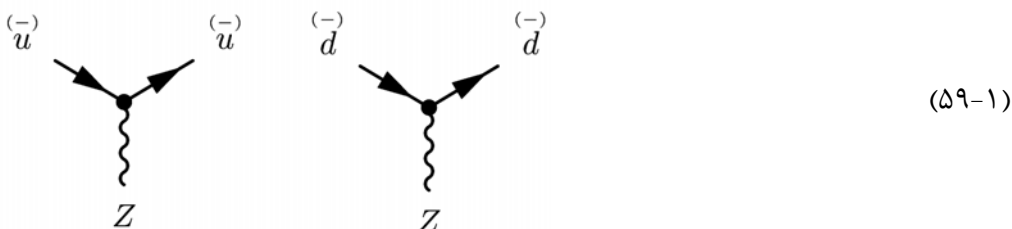
$$\mathcal{L}_{l,Q}^{(\gamma)} = -e j_{\gamma,Q}^\mu A_\mu, \quad \mathcal{L}_{l,Q}^{(Z)} = -\frac{g}{2\cos\theta_W} j_{Z,Q}^\mu Z_\mu$$

$$j_{\gamma,Q}^\mu = \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d$$

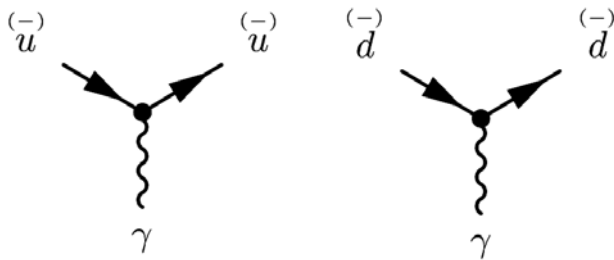
$$j_{Z,Q}^\mu = 2 g_L^U \bar{u}_L \gamma^\mu u_L + 2 g_R^U \bar{u}_L \gamma^\mu u_R + 2 g_L^D \bar{d}_L \gamma^\mu d_L + 2 g_R^D \bar{d}_L \gamma^\mu d_R \quad (58-1)$$

$$= \bar{u} \gamma^\mu (g_V^U - g_A^U \gamma^5) u + \bar{d} \gamma^\mu (g_V^D - g_A^D \gamma^5) d$$

ضرایب $g_L^U, g_L^D, g_R^U, g_R^D, g_V^U, g_V^D, g_A^U, g_A^D$ در معادلات (۵۷-۱) و (۵۸-۱) در جدول ۱-۲ آمده است، لاگرانژی برهمکنش جریان خنثی ضعیف کوارکی در (۵۷-۱) توصیف کننده جفت‌شدگی‌های زیر است.



$$\quad (59-1)$$



(۶۰-۱)

۳-۱ سه نسل لپتونها و کوارکها

در این بخش معادلات (۳۳-۱) و (۴۸-۱) و (۵۵-۱) و (۵۷-۱) را برای سه نسل لپتونها و کوارکها تعمیم می‌دهیم. سه نسل به قرار زیرند.

$$L'_{e_L} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{e_L} \\ e'_L \end{pmatrix}, \quad L'_{\mu_L} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{\mu_L} \\ \mu'_L \end{pmatrix}, \quad L'_{\tau_L} \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{\tau_L} \\ \tau'_L \end{pmatrix}$$

$$Q'_{u_L} \equiv \begin{pmatrix} u'_L \\ d'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{c_L} \equiv \begin{pmatrix} c'_L \\ s'_L \end{pmatrix}, \quad Q'_{t_L} \equiv \begin{pmatrix} t'_L \\ b'_L \end{pmatrix}$$

(۶۱-۱)

و یکتایی‌ها عبارتند از

$$l'_{e_R} = e'_R, \quad l'_{\mu_R} = \mu'_R, \quad l'_{\tau_R} = \tau'_R$$

$$q'^U_{u_R} = u'_R, \quad q'^U_{c_R} = c'_R, \quad q'^U_{t_R} = t'_R$$

$$q'^D_{d_R} = d'_R, \quad q'^D_{s_R} = s'_R, \quad q'^D_{b_R} = b'_R$$

(۶۲-۱)

منظور از علامت پریم (') آن است که این فرمیون‌ها در حالت کلی دارای جرم معینی نیستند بلکه ترکیب‌های خطی از میدان‌هایی با جرم معین‌اند. اعداد کوانتومی میدان‌های (۶۱-۱) و (۶۲-۱) همانند نسل اول هستند که در جدول ۱-۱ آمده‌اند.

لاگرانژی (۲۰-۱) برای سه نسل به صورت زیر درمی‌آید.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & i \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{L'_{\alpha L}} \not{D} L'_{\alpha L} + i \sum_{\alpha=\nu,\tau} \overline{Q'_{\alpha L}} \not{D} Q'_{\alpha L} + i \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{l'_{\alpha R}} \not{D} l'_{\alpha R} \\
& + i \sum_{\alpha=d,s,b} \overline{q'^D_{\alpha R}} \not{D} q'^D_{\alpha R} + i \sum_{\alpha=u,c,t} \overline{q'^U_{\alpha R}} \not{D} q'^U_{\alpha R} - \frac{1}{4} \underline{A}_{\mu\nu} \underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \underline{B}_{\mu\nu} \underline{B}^{\mu\nu} \\
& + (D_\rho \phi)^\dagger (D^\rho \phi)^\dagger - \mu^\dagger \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^\dagger \\
& - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} \left(Y_{\alpha\beta}^{\prime l} \overline{L'_{\alpha L}} \phi l'_{\beta R} + Y_{\alpha\beta}^{\prime l*} \overline{l'_{\beta R}} \phi^\dagger L'_{\alpha L} \right) \\
& - \sum_{\alpha=\nu,\tau} \sum_{\beta=d,s,b} \left(Y_{\alpha\beta}^{\prime D} \overline{Q'_{\alpha L}} \phi q'^D_{\beta R} + Y_{\alpha\beta}^{\prime D*} \overline{q'^D_{\beta R}} \phi^\dagger q'^D_{\alpha L} \right) \\
& - \sum_{\alpha=\nu,\tau} \sum_{\beta=u,c,t} \left(Y_{\alpha\beta}^{\prime U} \overline{Q'_{\alpha L}} \tilde{\phi} q'^U_{\beta R} + Y_{\alpha\beta}^{\prime U*} \overline{q'^U_{\beta R}} \tilde{\phi}^\dagger Q'_{\alpha L} \right)
\end{aligned}
\left. \vphantom{\sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau}} \right\} \begin{array}{l} \text{جفت شدگیهای} \\ \text{یوکاواای} \\ \text{فرمیون هیگز} \\ \text{سبب تولید} \\ \text{جرم فرمیون} \\ \text{و آمیختگی} \\ \text{کوارک} \end{array} \quad (۶۳-۱)$$

$$\tilde{\phi} = i \tau_\gamma \phi^*$$

لاگرانژی برهمکنش الکترومغناطیسی از دو خط اول (۶۳-۱) به دست می آید.

$$\mathcal{L}_1^{(\gamma)} = -e j_\gamma^\rho A_\rho, \quad j_\gamma^\rho = j_{\gamma,L}^\rho + j_{\gamma,Q}^\rho \quad (۶۴-۱)$$

$$j_{\gamma,L}^\rho = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{l'_\alpha} \gamma^\rho l'_\alpha, \quad j_{\gamma,Q}^\rho = \frac{2}{3} \sum_{\alpha=u,c,t} \overline{q'^U_\alpha} \gamma^\rho q'^U_\alpha - \frac{1}{3} \sum_{\alpha=d,s,b} \overline{q'^D_\alpha} \gamma^\rho q'^D_\alpha \quad (۶۵-۱)$$

لاگرانژی برهمکنش جریان باردار هم از خط اول (۶۳-۱) به دست می آید.

$$\mathcal{L}_I^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_W^\rho W_\rho + \text{H.C.} \quad (۶۶-۱)$$

$$\begin{aligned}
j_W^\rho &= j_{W,L}^\rho + j_{W,Q}^\rho \\
j_{W,L}^\rho &= 2 \left(\overline{v'_{eL}} \gamma^\rho e'_L + \overline{v'_{\mu L}} \gamma^\rho \mu'_L + \overline{v'_{\tau L}} \gamma^\rho \tau'_L \right) \\
j_{W,Q}^\rho &= 2 \left(\overline{u'_L} \gamma^\rho d'_L + \overline{c'_L} \gamma^\rho s'_L + \overline{t'_L} \gamma^\rho b'_L \right)
\end{aligned} \quad (۶۷-۱)$$

که جریان باردار فرمیونی j_W^ρ برابر با مجموع جریان های باردار لپتونی و کوارکی است. می توان جریان

باردار لپتونی را به فرم فشرده زیر هم نوشت.

$$\begin{aligned}
j_{W,L}^\rho &= 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{v'_{\alpha L}} \gamma^\rho l'_{\alpha L} \\
l'_{eL} &\equiv e'_L, \quad l'_{\mu L} \equiv \mu'_L, \quad l'_{\tau L} \equiv \tau'_L
\end{aligned} \quad (۶۸-۱)$$

عملگرهای بالابرنده و پایین برنده ایزواسپین را هم به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$\begin{aligned}
I_{\pm} &= I_1 \pm i I_2, \quad [I_a, I_b] = i \varepsilon_{abc} I_c \\
\Rightarrow [I_3, I_{\pm}] &= [I_3, I_1 \pm i I_2] = [I_3, I_1] \pm i [I_3, I_2] = i \varepsilon_{311} I_2 \pm i \varepsilon_{321} I_1 \\
&= i I_2 \mp (-1) I_1 = \pm I_1 + i I_2 = \pm I_{\pm} \Rightarrow I_3 I_{\pm} - I_{\pm} I_3 = \pm I_{\pm} \\
\Rightarrow I_3 I_{\pm} &= \pm I_{\pm} + I_{\pm} I_3 = I_{\pm} (I_3 \pm 1)
\end{aligned} \tag{۶۹-۱}$$

اکنون اگر $|i, i_3\rangle$ را ویژه حالت I_3 و I_+ با ویژه مقادیر i_3 و i در نظر بگیریم $|i, i_3\rangle$ ویژه حالتی از I_+ و I_3 با ویژه مقدار $i_3 \pm 1, i$ می باشد.

$$I_3 |i, i_3\rangle = i_3 |i, i_3\rangle \Rightarrow I_3 I_{\pm} |i, i_3\rangle = (i_3 \pm 1) I_{\pm} |i, i_3\rangle \tag{۷۰-۱}$$

عملگرهای $I_{\pm}$ در نمایش ماتریسی

$$\begin{aligned}
I_+ &\xrightarrow{\text{دوتایی}} \frac{\tau_+}{2} = \frac{\tau_1 + i \tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
I_- &\xrightarrow{\text{دوتایی}} \frac{\tau_-}{2} = \frac{\tau_1 - i \tau_2}{2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{۷۱-۱}$$

I_+ مولفه پایینی دوتایی را بالا می برد و ویژه مقدار I_3 را یک واحد افزایش می دهد. I_- هم مولفه بالایی را پایین آورده و ویژه مقدار I_3 را یک واحد کاهش می دهد. برای جریان ضعیف باردار فرمیونی:

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{L'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} I_+ L'_{\alpha L} \tag{۷۱-۱}$$

$$j_{W,Q}^{\rho} = 2 \sum_{\alpha=1,2,3} \overline{Q'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} I_+ Q'_{\alpha L}$$

$$j_{W,L}^{\rho\dagger} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{L'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} I_- L'_{\alpha L} \tag{۷۲-۱}$$

$$j_{W,Q}^{\rho\dagger} = 2 \sum_{\alpha=1,2,3} \overline{Q'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} I_- Q'_{\alpha L}$$

لاگرانژی برهمکنش جریان خنثی از دو خط اول معادله (۶۳-۱) به دست می آید.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{(Z)} &= -\frac{g}{\cos \theta_W} j_Z^{\rho} Z_{\rho}, \quad j_Z^{\rho} = j_{Z,L}^{\rho} + j_{Z,Q}^{\rho} \\
j_{Z,L}^{\rho} &= 2 g_L^{\nu} \sum_{\alpha=u,c,t} \overline{\nu'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} \nu'_{\alpha L} + 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left(g_L^l \overline{l'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} l'_{\alpha L} + g_R^l \overline{l'_{\alpha R}} \gamma^{\rho} l'_{\alpha R} \right) \\
j_{Z,Q}^{\rho} &= 2 \sum_{\alpha=u,c,t} \left(g_L^U \overline{q'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha L} + g_R^U \overline{q'_{\alpha R}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha R} \right) \\
&\quad + 2 \sum_{\alpha=d,s,b} \left(g_L^D \overline{q'_{\alpha L}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha L} + g_R^D \overline{q'_{\alpha R}} \gamma^{\rho} q'_{\alpha R} \right)
\end{aligned} \tag{۷۳-۱}$$

$$\begin{aligned} q'^U_{u_L} &\equiv u'_L, & q'^U_{c_L} &\equiv c'_L, & q'^U_{t_L} &\equiv t'_L \\ q'^D_{d_L} &\equiv d'_L, & q'^D_{s_L} &\equiv s'_L, & q'^D_{b_L} &\equiv b'_L \end{aligned} \quad (۷۴-۱)$$

مقدار ضرایب $g^V_L, g^I_L, g^U_L, g^D_L, g^V_R, g^I_R, g^U_R, g^D_R$ معادله (۴۹-۱) در جدول ۱-۲ آورده شده‌اند.

۴-۱ شکست خودبه‌خود تقارن و سازوکار هیگز

در نظریه کوانتومی میدان و در نتیجه در مدل استاندارد شکست خودبه‌خود تقارن و سازوکار هیگز اهمیت بسیاری دارد. بنابراین در این بخش سعی می‌شود این موضوع با جزئیات بیشتری روشن گردد. لاگرانژی مانند $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4$ را در نظر می‌گیریم، که تحت $\phi \rightarrow -\phi$ ناورد است. موارد بسیاری مانند لاگرانژی بالا، وجود دارد که سیستم دارای تقارنی است که در لاگرانژی وجود دارد اما حالت پایه (حالت خلاء) آن در همان تقارن صدق نمی‌کند. در چنین وضعیتی گوییم که سیستم دستخوش شکست خودبه‌خود تقارن می‌شود.

فرض کنیم مهره‌ای را بالای کاسه‌ای قرار دادیم و کاسه به‌صورت سرته روی زمین قرار گرفته است. از نقطه نظر مهره سیستم متقارن است و همه راستاها از بالا کاسه به پایین یکسان است. اما سیستم در واقع ناپایدار است هر چند به ظاهر مهره ساکن است اما اندک اختلالی منجر به فرو فرستادن مهره به پایین و سطح زمین می‌شود. اختلالی به‌طور خودبه‌خود تقارنی را که قبلاً وجود داشته است، می‌شکنند. بعلاوه تازه مهره به انرژی پتانسیل کمینه واقعی خود می‌رسد. حالت پایه واقعی انرژی پتانسیل زمان رخ می‌دهد که تقارن شکسته شود و مهره بر زمین قرار می‌گیرد.

در نظریه کوانتومی میدان هم با لاگرانژی‌هایی برمی‌خوریم که ویژگی‌هایی شبیه به این وضعیت دارند. حالت خلایی که به ظاهر حالت پایه است، اما حالت پایه یا حالت خلا واقعی با انرژی کمتر منجر به شکسته شدن تقارن می‌شود. خلا را حالتی با $\phi=0$ (بدون میدان) می‌دانیم. حول $\phi=0$ بسط می‌دهیم و از نظریه اختلال استفاده می‌کنیم. آنگاه میدان‌ها به‌صورت افت و خیزهایی حول حالت پایه خواهند بود. لاگرانژی $\mathcal{L} = T - V$ است. در نظریه کوانتومی میدان جملات جنبشی به

شکل $\phi \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi$ و پتانسیل به صورت $V = V(\phi)$ می باشد. برای یافتن پتانسیل کمینه $\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$ را حساب می کنیم.

۱-۴-۱ مثال برای روشن ساختن بحث

لاگرانژی زیر را در نظر می گیریم.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \quad (۷۵-۱)$$

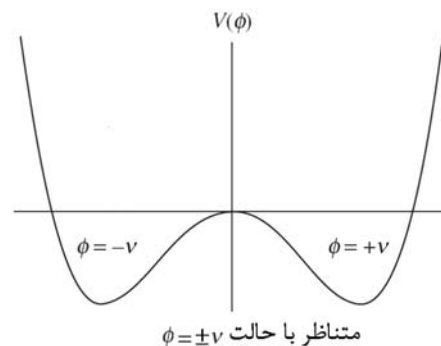
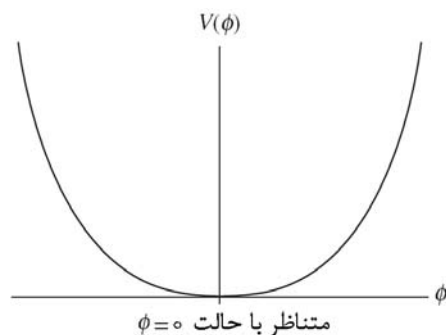
ϕ تابعی اسکالر است. جمله انرژی جنبشی $\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2$ می باشد. پتانسیل $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4$ پتانسیل ϕ است. نیروی ایجادکننده این پتانسیل:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \mu^2 \phi + \lambda \phi^3 = \phi(\mu^2 + \lambda \phi^2) \quad (۷۶-۱)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{الف) } \phi = 0 \\ \text{ب) } \mu^2 + \lambda \phi^2 = 0 \Rightarrow \phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} = \pm v \end{cases} \quad (۷۷-۱)$$

حالت (الف) متناظر با میدان اسکالری به جرم μ ، $\mu^2 > 0$ می باشد. جمله ϕ^4 نشان دهنده خودبرهمکنش های میدان با قدرت جفت شدگی λ است. اگر حالت پایه در $\phi = 0$ باشد، تحت $\phi \rightarrow -\phi$ متقارن است.

حالت (ب) برای آنکه ϕ حقیقی باشد باید $\mu^2 < 0$ باشد. مشابه حالتی که مهره به پایین می لغزد. در



این حالت ϕ می‌تواند هر یک از مقادیر $-v$ یا $+v$ را برگزیند. انتخاب هر یک از حالت‌های $\phi = -v$ یا $\phi = +v$ سبب شکسته شدن تقارن می‌شود. دریافتیم که کمینه واقعی $\phi = \pm v$ است (VEV)^۱، نه $\phi = 0$. حالت $\phi = 0$ حالت ناپایدار است و بسط حول آن همگرا نخواهد بود. اما بسط اختلالی حول یکی از $\phi = \pm v$ همگرا می‌باشد و می‌توانیم قواعد فاینمن را به کار ببریم.

۱-۴-۲ به دست آوردن جملات جنبشی

لاگرانژی کلین گوردون را در نظر می‌گیریم.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 \quad (78-1)$$

کوانتای میدان ϕ ذراتی به جرم $m = \mu$ هستند. باتوجه به لاگرانژی می‌بینیم که جمله جرمی به شکل $-\frac{1}{2}\mu^2 \phi^2$ پدیدار شده، به شرطی که $\mu^2 > 0$ باشد و $m = \mu$ جرم ذره مورد نظر است.

برای یافتن جمله جرمی شاید بتوان نتیجه گرفت که :

جمله جرمی در لاگرانژی جمله‌ای است که برحسب میدان از مرتبه ۲ باشد و به شکل $\alpha^2 \phi^2$ به ازای α ای در لاگرانژی قرار دارد.

توجه: در بسیاری از لاگرانژی‌ها جمله جرمی به طریقی پنهان است. مثلاً لاگرانژی

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi)^2 + \ln(1 - \alpha \phi) \quad (79-1)$$

در نظربگیریم. به ظاهر جمله جرمی (به شکل $\alpha^2 \phi^2$) ندارد و ممکن است به اشتباه تصور شود که این لاگرانژی میدان‌های بدون جرم ($m = \mu$) را توصیف می‌کند. اما اگر جمله دوم لاگرانژی رابطه را بسط به سری بدهیم.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi)^2 - \alpha \phi - \frac{1}{2}\alpha^2 \phi^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 \phi^3 - O(\phi^4) \quad (80-1)$$

¹ Vacuum Expectation Value

درمی‌یابیم با شرط آنکه $\alpha^2 > 0$ باشد، این لاگرانژی توصیف کننده ذراتی به جرم ($m = \alpha$) می‌باشد،

پس برای یافتن جمله جرمی در لاگرانژی (زمانی که آشکار نیست) باید:

۱. پتانسیل را بسط به سری دهیم.

۲. به جستجوی جملاتی مرتبه دوم بر حسب میدان‌ها باشیم.

۱-۴-۳ نکته‌ای درباره یکاها

اگر $\hbar$, c را در معادله کلین گوردون قرار دهیم.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi - \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0 \quad (1-1)$$

پس اگر در لاگرانژی جملاتی به صورت $\frac{1}{2} \alpha^2 \phi^2$ را در نظر بگیریم، جرم ذره به ثابت α مربوط می‌شود.

$$\alpha = \frac{\mu c}{\hbar} \quad , \quad m = \mu = \frac{\hbar \alpha}{c} \quad (1-2)$$

که α بدون بعد و عدد است و μ هم از جنس جرم است.

اگر جملات مرتبه دوم بدون ضریب $\frac{1}{2}$ باشند، یعنی شامل $\alpha^2 \phi^2$ شوند، باید ضریب $\frac{1}{2}$ را در نظر

بگیریم و بعد با معادله کلین گوردون مقایسه کنیم.

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \Rightarrow m = \mu = \sqrt{2} \frac{\hbar \alpha}{c} \quad (1-3)$$

۱-۴-۴ شکست خودبه‌خود تقارن و جرم

جملات جرمی در لاگرانژین (۷۵-۱) را یافتیم و همچنین فهمیدیم که حالت‌های پایه یا کمینه‌های

واقعی پتانسیل خودبه‌خود شکسته شده‌اند و برابر

$$\phi = \pm \sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (1-4)$$

هستند. کمینه در $\phi = 0$ قرار ندارد بلکه در $\phi = \pm v$ است.

حالت $\phi = v$ را در نظر می‌گیریم و میدان را دوباره مقیاس بندی^۱ می‌کنیم.

$$\phi(x) = v \pm \eta(x) \quad (۸۵-۱)$$

میدان را به صورت افت و خیزهایی با $\eta(x)$ حول کمینه سمت راست v نشان می‌دهیم. اکنون دوباره لاگرانژی را می‌نویسیم.

$$\begin{aligned} \begin{cases} \partial_\mu \phi(x) = \partial_\mu [v \pm \eta(x)] = \partial_\mu \eta(x) \\ \phi^2(x) = (v \pm \eta(x))^2 = v^2 \pm 2v\eta + \eta^2 \\ \phi^4(x) = (v \pm \eta(x))^4 = v^4 \pm 4v^3\eta + 6v^2\eta^2 \pm 4v\eta^3 + \eta^4 \end{cases} & \Rightarrow \\ \mathcal{L} = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{4}\mu^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4 = \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{4}\mu^2(v^2 \pm 2v\eta + \eta^2) & (۸۶-۱) \\ - \frac{1}{4}\lambda(v^4 \pm 4v^3\eta + 6v^2\eta^2 \pm 4v\eta^3 + \eta^4) & \end{aligned}$$

v فقط عدد است از آنجا که ثوابت در معادلات میدان (معادلات اولر- لاگرانژ) اهمیتی ندارد، می-

توانیم همه ثوابت را بیرون بکشیم. در این حال جمله نخست پتانسیل عبارتست از:

$$\begin{aligned} \phi = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} = \pm v & \Rightarrow \frac{1}{4}\mu^2(v^2 \pm 2v\eta + \eta^2) = -\frac{1}{4}\lambda v^2(v^2 \pm 2v\eta + \eta^2) \\ & = -\lambda v^3\eta - \frac{1}{4}\lambda v^2\eta^2 \end{aligned} \quad (۸۷-۱)$$

و جمله آخر پتانسیل هم خالی از ثوابت می‌کنیم، در پایان لاگرانژی به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{4}\mu^2(v^2 \pm 2v\eta + \eta^2) - \frac{1}{4}\lambda(v^4 \pm 4v^3\eta + 6v^2\eta^2 \pm 4v\eta^3 + \eta^4) \\ \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{4}(\partial_\mu \phi)^2 - \lambda v^3\eta - \frac{1}{4}\lambda v^2\eta^2 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4 \end{aligned} \quad (۸۸-۱)$$

اکنون مطابق با قاعده گفته شده به دنبال جملات مرتبه دوم بر حسب میدان η هستیم.

این جمله عبارتست از

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda v^3\eta^2 \\ &\frac{1}{4}\mu^2\phi^2 \text{ (جمله جرمی کلین گوردون)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow m = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{2\lambda} v \quad (۸۹-۱)$$

^۱ rescale

(ضریب $\frac{1}{4}$ را هم در نظر گرفتیم.) جملات دیگر در لاگرانژی نشان دهنده خودبرهمکنش هستند. η^3

نشان دهنده رأسی در نمودار فاینمن با سه ساق است که جفت‌شدگی آن هم برابر λv می‌باشد.

جمله آخر η^4 $\frac{1}{4}\lambda$ خودبرهمکنشی دیگر با چهار ساق است.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 \quad \text{جمله جنبشی} \\ & -\lambda v \eta^2 \quad \text{جمله جرمی} \\ & -\lambda v \eta^3 \quad \text{خودبرهمکنش سه ساق} \\ & -\frac{1}{4}\lambda \eta^4 \quad \text{خودبرهمکنش چهار ساق} \end{aligned} \quad (90-1)$$

۵-۱ سازوکار هیگز در مدل استاندارد

در مدل استاندارد فرمیون‌ها و بوزون‌های W و Z از طریق سازوکار هیگز جرم‌دار می‌شوند [۳-۸].
دوگانه هیگز^۱ را در نظر می‌گیریم.

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \quad (91-1)$$

جدول (۳-۱) ویژه مقادیر ایزواسپین، مؤلفه سوم آن، فوق‌بار و بار برای دوگانه هیگز

Q	Y	$\frac{I}{3}$	I
$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	$+\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

دوگانه هیگز $\Phi(x) \equiv \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}$

$\phi^+(x)$ میدان اسکالر مختلط باردار و $\phi^0(x)$ میدان اسکالر مختلط خنثی است.

$$\Phi \xrightarrow{g(\underline{\theta}(x), \eta(x))} \Phi' = U(\underline{\theta}(x), \eta(x)) = \exp\left(\frac{i}{2}\underline{\theta}(x) \cdot \underline{\tau} + \frac{i}{2}\eta(x)\right) \Phi \quad (92-1)$$

با توجه به تبدیل مشتق هموردا (۲۱-۱) می‌توان نوشت.

¹ Higgs Doublet

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - \mu^\dagger \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (93-1)$$

که تحت تبدیل پیمانه‌ای $g(\underline{\theta}(x), \eta(x))$ ناورد است. در (93-1) ضریب خود جفت‌شدگی مرتبه دوم میدان هیگز یعنی λ باید مثبت باشد $\lambda > 0$ تا پتانسیل زیر از پایین مقید¹ باشد.

$$V(\Phi) = \mu^\dagger \Phi^\dagger \Phi + \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \quad (94-1)$$

از طرفی باید $\mu^\dagger < 0$ باشد، تا شکست خودبه‌خود تقارن صورت گیرد. یعنی

$$\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y \longrightarrow \text{U}(1)_Q \quad (95-1)$$

که $\text{U}(1)_Q$ گروه تقارنی پیمانه‌ای برهمکنش‌های الکترومغناطیسی است. که مربوط به پایستگی بار الکتریکی می‌شود و مشخص است که ناشکسته می‌ماند. مطابق (97-1)

$$v \equiv \sqrt{\frac{-\mu^\dagger}{\lambda}} \quad (96-1)$$

را تعریف و از ثابت $\frac{v^4}{4}$ صرف‌نظر می‌کنیم. در نتیجه پتانسیل هیگز معادله (94-1) به صورت

$$V(\Phi) = \lambda \left(\Phi^\dagger \Phi - \frac{v^2}{2} \right)^2 \quad (97-1)$$

درمی‌آید. کمینه پتانسیل به ازای

$$\Phi^\dagger \Phi = \frac{v^2}{2} \quad (98-1)$$

رخ می‌دهد. همان‌گونه که گفته شد در نظریه کوانتومی میدان، کمینه پتانسیل متناظر با خلا (پایین‌ترین حالت انرژی) و حالت‌های برانگیخته کوانتیزه هر میدان بالای خلا متناظر با حالت‌های ذره می‌باشند. فرمیون‌ها، میدان‌های بوزونی برداری با اسپین غیر صفر، باید در خلا مقدار صفر داشته باشند (ناوردایی طبیعت تحت دوران فضایی). میدان‌های اسکالر باردار در خلا مقدار صفر دارند (خلا از نظر

¹ Bounded from below

الکتریکی خنثی است). میدان‌های اسکالر خنثی، بدون بار الکتریکی، می‌توانند در خلا مقدار غیر صفر داشته باشند. باید VEV میدانهای هیگز ناشی از Φ^0 باشند، تا خلا از نظر الکتریکی خنثی باشد.

$$\langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (99-1)$$

تقارن $SU(2)_L \times U(1)_Y$ با $\langle \Phi \rangle$ VEV به‌طور خودبه‌خود شکسته می‌شود.

$$I_1 \langle \Phi \rangle = \frac{\tau_1}{\sqrt{2}} \langle \Phi \rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$I_2 \langle \Phi \rangle = \frac{\tau_2}{\sqrt{2}} \langle \Phi \rangle = -\frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$I_3 \langle \Phi \rangle = \frac{\tau_3}{\sqrt{2}} \langle \Phi \rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0$$

$$Y \langle \Phi \rangle = \langle \Phi \rangle \neq 0$$

$$Q \langle \Phi \rangle = \left(I_3 + \frac{Y}{2} \right) \langle \Phi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = 0$$

بنابراین خلا تحت تبدیل پیمانه‌ای متعلق به گروه $U(1)_Q$ ناورداست.

$$e^{i\theta Q} \langle \Phi \rangle = \langle \Phi \rangle \quad (100-1)$$

ناوردایی بالا وجود بوزونی پیمانه‌ای متناظر با گروه تقارنی $U(1)_Q$ را مسلم می‌کند. این بوزون فوتون است.

توجه آنکه لاگرانژی کاملاً متقارن است، منظور از شکست خودبه‌خود تقارن آن است که تقارن در خلا شکسته می‌شود. در نتیجه حالت‌های فیزیکی از برانگیختگی‌های میدانها در بالای خلا به‌وجود می‌آید که تقارن لاگرانژی را ندارند. بسیاری ترجیح می‌دهند بگویند تقارن پنهان می‌شود. برای به‌دست آوردن ویژگی‌های فیزیکی ناشی از شکست خودبه‌خود تقارن بهتر است دوگانه هیگز را به‌صورت زیر بنویسیم.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left(\frac{i}{2v} \underline{\xi}(x) \cdot \underline{\tau} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (101-1)$$

میدانهای اسکالر حقیقی $H(x)$ ، $\underline{\xi}(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \xi_3(x))$

وجود v هم در آرگومان تابع نمایی به سبب آن است که بعد میدانهای اسکالر انرژی می-

باشد. $H(x)$ بوزون هیگز را (فیزیکی) توصیف می‌کند که از برانگیختگی‌های میدان هیگز در بالای

خلا به دست آمده است. میدانهای $\xi(x)$ غیر فیزیکی‌اند زیرا با تبدیل پیمانه‌ای (۹۲-۱) به شکل زیر

$$\underline{\theta}(x) = -\frac{1}{v} \underline{\xi}(x) \quad , \quad \eta(x) = 0 \quad (102-1)$$

به این تبدیلات، پیمانه یکانی^۱ گویند. که در آن حالت‌های فیزیکی نظریه به صراحت پدیدار می‌شود.

در پیمانه یکانی، دوگانه هیگز

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \\ D_\mu(x) \Phi(x) &= \left[\partial_\mu + \frac{i}{v} g \underline{A}_\mu \cdot \underline{\tau} + \frac{i}{v} g' \underline{B}_\mu(x) \right] \Phi(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{g}{\cos \theta_W} W_\mu(x) [v + H(x)] \\ \partial_\mu H(x) - \frac{i}{v} \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu [v + H(x)] \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (103-1)$$

در پیمانه یکانی، لاگرانژی هیگز در معادله (۹۳-۱) به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{2} (\partial H)^2 + \frac{g^2}{4} [v + H(x)]^2 W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} [v + H(x)]^2 Z_\mu Z^\mu \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (H^2 + 2vH)^2 \end{aligned} \quad (104-1)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Higgs}} &= \frac{1}{2} (\partial H)^2 - \lambda v H^2 - \lambda v H^3 - \frac{\lambda}{4} H^4 \\ &\quad + \frac{g^2 v}{4} W_\mu^\dagger W^\mu + \frac{g^2 v}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu + \frac{g^2 v}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H \\ &\quad + \frac{g^2 v}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu H + \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W^\mu H^2 + \frac{g^2}{4 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu H^2 \end{aligned} \quad (105-1)$$

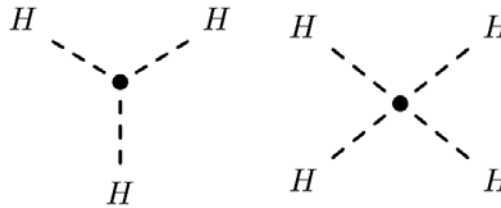
جمله اول جمله جنبشی برای بوزون هیگز است. جمله دوم، جمله جرمی بوزون هیگز است که از آن

جرم هیگز به دست می‌آید.

¹ unitary gauge

$$m_H = \sqrt{2\lambda v^2} = \sqrt{-2\mu^2} \quad (۱۰۶-۱)$$

μ^2 پارامتری منفی در مدل استاندارد است، مقدار m_H به دیگر کمیتها مربوط نمی‌شود و باید اندازه-گیری شود. در مدل استاندارد مقداری برای m_H پیش‌بینی نمی‌شود. جمله سوم و چهارم خود جفت-شدگی‌های سه‌ساقی و چهار ساقی میدان هیگز



$$(۱۰۷-۱)$$

جملات پنجم و ششم جملات جرمی بوزونهای پیمانه‌ای W, Z هستند.

$$m_W = \frac{g v}{2}, \quad m_Z = \frac{g v}{2 \cos \theta_W} \quad (۱۰۸-۱)$$

$$\rho = \frac{m_W^2}{m_Z^2 \cos^2 \theta_W}, \quad \rho = 1 \quad (۱۰۹-۱)$$

[۹]. این مقدار در مرتبه درختی برقرار است. تصحیحات تابشی منجر به انحراف از مقدار $\rho = 1$ می‌شود. اهمیت این مقدار برای ایزواسپین ضعیف هیگز می‌باشد. زیرا می‌توان بخش هیگز مدل استاندارد را به گونه‌ای بسط داد که شامل چندگانه‌های هیگز شود (در کنار دوگانه‌های هیگز معادله (۱-۹۱)) که همگی دارای VEVهایی باشند که در تولید جرم بوزونهای پیمانه‌ای W, Z از طریق سازوکار هیگز شرکت می‌کند. به‌ازای تعداد دلخواهی از چندگانه‌های هیگز Φ_k که شامل دوگانه استاندارد شود، از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\rho = \frac{\sum_k \left[I^k (I^k + 1) - (I_3^k)^2 \right] v_k^2}{2 \sum_k (I_3^k)^2 v_k^2} \quad (۱۱۰-۱)$$

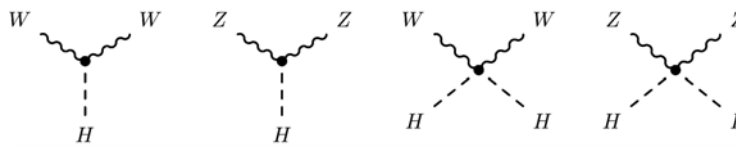
[۱۰].

I^k ایزواسپین ضعیف چندگانه هیگز Φ_k و I_3^k مؤلفه سوم ایزواسپین ضعیف مؤلفه Φ_k است که دارای VEV برابر با v_k می‌باشد. با استفاده از (۱۱۰-۱) مقدار ρ برابر با مقدار زیر شود.

$$\rho = 0.9998^{+0.0008}_{-0.0005} \quad (111-1)$$

[۹]. که با مقدار $\rho = 1$ کاملاً سازگار است. با توجه به داده‌های تجربی امکان آن وجود دارد که به غیر از دوگانه هیگز در مدل استاندارد دوگانه‌های دیگری هم وجود داشته باشند که در تولید جرم Z, W از طریق سازوکار هیگز شرکت کنند.

چهار جمله آخر هم جفت‌شدگیهای سه‌ساقی و چهارساقی میدان هیگز با بوزونهای پیمانه‌ای است.



$$(112-1)$$

۱-۶ جرم فرمیونی و آمیختگی

در مدل استاندارد جرم فرمیونها ناشی از سازوکار هیگز و در نتیجه جفت‌شدگی یوکاوی میدانهای فرمیونی با دوگانه هیگز می‌باشد. جرم فرمیون باید دربردارنده جفت‌شدگیهای چپگرد و راستگرد باشد. در مدل استاندارد نوترینوها بدون جرمند زیرا مؤلفه راستگرد ندارند که این خود دوری باطل است. با در نظر گرفتن لپتونهای باردار و فوق‌بار دوگانه هیگز، لاگرانژی یوکاوی لپتون هیگز به شکل زیر می‌باشد

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha, \beta = e, \mu, \tau} Y'_{\alpha\beta} \overline{L'_{\alpha L}} \Phi l'_{\beta R} + \text{H.C.} \quad (113-1)$$

که تحت تبدیلات گروه پیمانه‌ای $\text{SU}(2)_L \times \text{U}(1)_Y$ ناورداست. با توجه به عبارت مربوط به دوگانه

$$\text{هیگز در پیمانه یکانی، } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}, \text{ لاگرانژی مزبور به شکل زیر درمی‌آید.}$$

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v + H}{\sqrt{2}} \right) \sum_{\alpha, \beta = e, \mu, \tau} Y'_{\alpha\beta} \overline{l'_{\alpha L}} l'_{\beta R} + \text{H.C.} \quad (114-1)$$

$$l'_L \equiv \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \quad l'_R \equiv \begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \bar{l}'_L Y'^l l'_R + \text{H.C.} \quad (115-1)$$

ماتریس Y'^l را می‌توان با استفاده از تبدیلات دویکانی بسط داد.

$$V_L^{l\dagger} Y'^l V_R^l = Y^l, \quad Y_{\alpha\beta}^l = y_{\alpha\beta}^l \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau) \quad (116-1)$$

$$V_R^{l\dagger} = (V_R^l)^{-1}, \quad V_L^{l\dagger} = (V_L^l)^{-1}$$

با قطری کردن معادله (116-1) به عبارت زیر می‌رسیم

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \bar{l}_L Y^l l_R + \text{H.C.} \quad (117-1)$$

$$l_L = V_L^{l\dagger} l'_L \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad l_R = V_R^{l\dagger} l'_R \equiv \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix}$$

که مؤلفه‌های راستگرد و چپگرد میدانهای لپتونی باردار با جرم معین هستند. سرانجام یوکاوا لپتون

هیگز به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_{\alpha}^l v}{\sqrt{2}} l_{\alpha} l_{\alpha} - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_{\alpha}^l}{\sqrt{2}} \bar{l}_{\alpha} l_{\alpha} H \quad (118-1)$$

$$l_{\alpha} = l_{\alpha L} + l_{\alpha R} \xrightarrow{(\alpha=e,\mu,\tau)} l_e \equiv e, l_{\mu} \equiv \mu, l_{\tau} \equiv \tau$$

در سمت راست معادله (118-1)، جمله نخست جمله جرمی لپتونهای باردار است که جرم آنها از

رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha}^l v}{\sqrt{2}}, \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \quad (119-1)$$

ضرایب y_{α}^l در مدل استاندارد پارامترهایی نامعلومند. یعنی در مدل استاندارد جرم لپتونها را نمی‌توان

پیش‌بینی کرد بلکه باید از آزمایش اندازه‌گیری شوند.

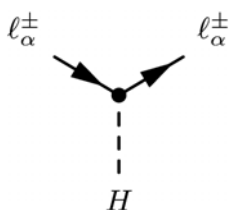
از جمله دوم در سمت راست معادله (118-1) و (119-1) درمی‌یابیم که جفت‌شدگیهای سه‌ساقی

بین لپتونهای باردار و بوزون هیگز متناسب با جرم لپتونهای باردار است.

$$- \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{m_\alpha}{v} \bar{l}_\alpha l_\alpha H \quad (120-1)$$

نوترینوها در مدل استاندارد بدون جرم هستند. پس با بوزون هیگز جفت نمی‌شوند. جفت‌شدگی سه-

ساقی (۱۲۰-۱) لپتون باردار l_α با بوزون هیگز به صورت زیر می‌باشد.



(۱۲۱-۱)

و با توجه به تبدیل موجود در (۱۱۷-۱)

$$v'_L \equiv \begin{pmatrix} v'_{eL} \\ v'_{\mu L} \\ v'_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (122-1)$$

$$j_{W,L}^\rho = \bar{v}'_L \gamma^\rho l'_L = \bar{v}'_L \gamma^\rho V_L^l l_L \quad (123-1)$$

برای نوترینوهای بدون جرم

$$v_L = V_L^{l\dagger} v'_L \equiv \begin{pmatrix} v_{eL} \\ v_{\mu L} \\ v_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (124-1)$$

و جریان ضعیف باردار لپتونی به صورت زیر می‌باشد.

$$j_{W,L}^\rho = \bar{v}'_L \gamma^\rho l'_L = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \bar{v}_{\alpha L} \gamma^\rho l_{\alpha L} \quad (125-1)$$

در مدل استاندارد، میدانهای طعم نوترینو (از این رو به آنها طعم گفته می‌شود که هریک فقط با

میدان لپتون باردار نظیر در جریان ضعیف باردار (۱۲۵-۱) جفت می‌شوند.) ویژه‌حالت‌های جرمی نیز

هستند. زیرا هر ترکیب خطی از میدانهای بدون جرم میدانی بدون جرم است. بعدا خواهیم دید که در

نظریه‌های ماورا مدل استاندارد که نوترینوها جرم‌دار هستند، میدانهای طعم نوترینو در حالت کلی

ویژه‌حالت‌های جرمی نیستند، پدیده‌ای که به آن نوسانات نوترینو گویند.

با جریان ضعیف باردار لپتونی در (۱-۱۲۵)، بخش لپتونی لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار

در (۱-۶۶) توصیف‌کننده جفت‌شدگیهای سه‌ساقی لپتونها با بوزون پیمانه‌ای W است.

(۱-۱۲۶)

هر لپتون باردار را با طعم نوترینوی متناظر جفت می‌کند. در نتیجه اعداد لپتونی هر طعم، L_e, L_μ, L_τ پایسته هستند.

جدول (۱-۴) اعداد لپتونی برای طعمهای مختلف

L_τ	L_μ	L_e		L_τ	L_μ	L_e	
۰	۰	-۱	$(\bar{\nu}_e, e^+)$	۰	۰	+۱	(ν_e, e^-)
۰	-۱	۰	$(\bar{\nu}_\mu, \mu^+)$	۰	+۱	۰	(ν_μ, μ^-)
-۱		۰	$(\bar{\nu}_\tau, \tau^+)$	+۱		۰	(ν_τ, τ^-)

در فصل ۳ خواهیم دید که ناپایستگی اعداد لپتونی در فیزیک ماورای مدل استاندارد اهمیتی بسیار دارد. پایستگی هر عدد طعم لپتونی از طریق قضیهٔ نوثر^۱ به ناوردایی لاگرانژی تحت تبدیلات جهانی $U(1)$ ، مربوط می‌شود.

$$\nu_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi_\alpha} \nu_{\alpha L} \quad l_{\alpha L} \longrightarrow e^{i\varphi_\alpha} l_{\alpha L} \quad l_{\alpha R} \longrightarrow e^{i\varphi_\alpha} l_{\alpha R} \quad (۱-۱۲۷)$$

در نتیجه جریان پایسته متناظر با آن $\partial_\rho j^\rho = 0$ برابر با عبارت زیر است.

$$j_\alpha^\rho = \overline{\nu_{\alpha L}} \gamma^\rho \nu_{\alpha L} + \overline{l_{\alpha L}} \gamma^\rho l_{\alpha L} \quad (۱-۱۲۸)$$

و بار پایسته هم $(\partial_\alpha L_\alpha = 0)$ برابر با عبارت زیر است

$$L_\alpha = \int d^3x j_\alpha^0(x) \quad (۱-۱۲۹)$$

با استفاده از بسط فوریه برای جواب معادلهٔ دیراک، به روابط زیر می‌رسیم

^۱ Noether's Theorem

$$\psi(x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (130-1)$$

(بسط میدان جرم دار دیراک)

$$\psi_R(x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2E} \left[a^{(+)}(p) u^{(+)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(-)\dagger}(p) v^{(-)}(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (131-1)$$

(میدان کایرال بدون جرم)

$$\psi_L(x) = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2E} \left[a^{(-)}(p) u^{(-)}(p) e^{-ip \cdot x} + b^{(+)\dagger}(p) v^{(+)}(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (132-1)$$

(میدان کایرال بدون جرم)

با استفاده از بسط فوریه برای میدان نوترینوی کایرال چپگرد $\nu_{\alpha L}(x)$ عملگر عدد لپتونی طعم نوترینو را که بسامان و بهنجار^۱ شده باشد، به دست می آوریم.

$$:L_{\alpha}:= \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2E} \left[a_{\nu_{\alpha}}^{(-)\dagger}(p) a_{\nu_{\alpha}}^{(-)}(p) - b_{\nu_{\alpha}}^{(+)\dagger}(p) b_{\nu_{\alpha}}^{(+)}(p) \right] \\ + \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a_{l_{\alpha}}^{(h)\dagger}(p) a_{l_{\alpha}}^{(h)}(p) - b_{l_{\alpha}}^{(h)\dagger}(p) b_{l_{\alpha}}^{(h)}(p) \right] \quad (133-1)$$

این رابطه بیانگر آن است که در مدل استاندارد، نوترینوها فقط چپگرد و پادنوترینوها فقط راستگرد هستند. با در نظر گرفتن جریان خنثی ضعیف برای میدانهای لپتونی در معادله^۲ دوم (۷۳-۱)،

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 g_L^{\nu} \overline{\nu_L'} \gamma^{\rho} \nu_L' + 2 g_L^l \overline{l_L'} \gamma^{\rho} l_L' + 2 g_R^l \overline{l_R'} \gamma^{\rho} l_R' \\ = 2 g_L^{\nu} \overline{\nu_L} V_L^{l\dagger} \gamma^{\rho} V_L^l \nu_L + 2 g_L^l \overline{l_L} V_L^{l\dagger} \gamma^{\rho} l_L + 2 g_R^l \overline{l_R} V_R^{l\dagger} \gamma^{\rho} V_R^l l_R \\ = 2 g_L^{\nu} \overline{\nu_L} \gamma^{\rho} \nu_L + 2 g_L^l \overline{l_L} \gamma^{\rho} l_L + 2 g_R^l \overline{l_R} \gamma^{\rho} l_R \\ \left(l_L = V_L^{l\dagger} l_L', \quad l_R = V_R^{l\dagger} l_R' \right) \quad (134-1)$$

$V_L^{l\dagger}$ و V_L^l هم یکانی اند.

بنابراین عبارت حاضر برای جریان خنثی ضعیف بر حسب میدانهای لپتونی بدون پرمیم با جرم معین

همانند عبارت بر حسب میدانهای لپتونی پرمیم دار هستند. به این پدیده سازوکار GIM^۳ گویند [۱۱].

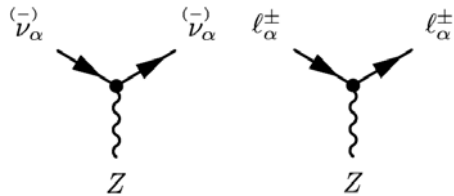
^۱ Normal ordered

^۲ Glashow- Iliopoulos- Maiani

سازوکار GIM برای جریان الکترومغناطیسی لپتونها هم در معادله دوم (۷۳-۱) صدق می کند.

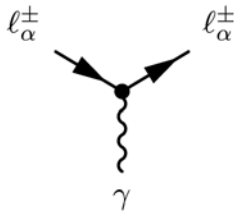
$$j_{\gamma, L}^{\rho} = - \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \overline{l'_{\alpha}} \gamma^{\rho} l_{\alpha} \quad (۱۳۵-۱)$$

بنابراین جفت شدگیهای سه ساقی لپتونها با بوزون پیمانه ای Z را می توان به صورت زیر نشان داد.



$$(۱۳۶-۱)$$

و جفت شدگی سه ساقی لپتون باردار l_{α} با فوتون به صورت زیر می باشد.



$$(۱۳۷-۱)$$

۱-۶-۱ جملات جرمی کوارمها

با استفاده از معادلات (۶۱-۱) دوگانه های چپگرد، و (۶۲-۱) دوگانه های راستگرد، حاصل ضربهای جرم-

گونه میدانهای راستگرد و چپگرد را در نظر می گیریم.

دوگونه حاصل ضرب را می توان در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} \overline{Q'_{\alpha L}} q'_{\beta R}{}^D & \quad \alpha=1, 2, 3 \\ & \quad \beta=d, s, b \\ \overline{Q'_{\alpha R}} q'_{\beta R}{}^U & \quad \alpha=1, 2, 3 \\ & \quad \beta=u, c, t \end{aligned} \quad (۱۳۸-۱)$$

حاصل ضرب سطر نخست (۱۳۸-۱) با فوق بار $Y = -1$ می تواند با دوگانه هیگز با فوق بار $Y = +1$ جفت

شود تا لاگرانژی یوکاواایی تحت تبدیلات $SU(2)_L \times U(1)_Y$ در (۱۰-۱) ناوردا بماند.

$$- \sum_{\alpha=1, 2, 3} \sum_{\beta=d, s, b} Y_{\alpha\beta}{}^D \overline{Q'_{\alpha L}} \Phi q'_{\beta R}{}^D \quad (۱۳۹-۱)$$

Y'^D ماتریس 3×3 مختلط جفت‌شدگیهای یوکاواست. این جمله لاگرانژی در سطر ششم لاگرانژی

مدل استاندارد معادله (۱-۶۳) هم پدیدار شد. این جمله همانند لاگرانژی یوکاوا هیگز لپتون در

معادله (۱-۱۱۳) می‌باشد و ایجاد جرم کوارکهای پایین‌گون d, s, b می‌گردد.

$$-\left(\frac{\nu + H}{\sqrt{2}}\right) \sum_{\alpha, \beta=d, s, b} Y'_{\alpha\beta}{}^D \overline{q'_{\alpha L}{}^D} q'_{\beta R}{}^D \quad (1-140)$$

$$Y'_{d\beta}{}^D \equiv Y'_{\beta}{}^D \quad Y'_{s\beta}{}^D \equiv Y'_{\beta}{}^D \quad Y'_{b\beta}{}^D \equiv Y'_{\beta}{}^D$$

$$\tilde{\Phi} = i \tau_{\gamma} \Phi^* \quad (1-141)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} \xrightarrow{g(\theta(x), \eta(x))} i \tau_{\gamma} e^{-i \theta(x) \cdot \frac{\tau^*}{2} - i \frac{\eta(x)}{2}} \Phi^* &= \left(\tau_{\gamma} e^{-i \theta(x) \cdot \frac{\tau^*}{2} - i \frac{\eta(x)}{2}} \tau_{\gamma} \right) i \tau_{\gamma} \Phi^* \\ &= e^{i \theta(x) \cdot \tau - i \frac{\eta(x)}{2}} \tilde{\Phi} \quad (\tau_{\gamma} \tau^* \tau_{\gamma} = -\tau) \end{aligned} \quad (1-142)$$

$\tilde{\Phi}$ به‌مانند دوگانه ایزواسپین ضعیف با فوق‌بار $Y = -1$ تبدیل می‌یابد. جرم کوارکهای بالا گون

$$-\sum_{\alpha=1,2,3} \sum_{\beta=u,c,t} Y'_{\alpha\beta}{}^D \overline{Q'_{\alpha L}{}^D} \tilde{\Phi} q'_{\beta R}{}^D \quad \text{در سطر آخر (۱-۶۳) بود} \quad (1-143)$$

$$\tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \nu + H(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{در پیمانه یکانی} \quad (1-144)$$

$$\begin{aligned} (1-143) \Rightarrow & -\left(\frac{\nu + H(x)}{\sqrt{2}}\right) \sum_{\alpha, \beta=u, c, t} Y'_{\alpha\beta}{}^U \overline{q'_{\alpha L}{}^U} \tilde{\Phi} q'_{\beta R}{}^U \\ & Y'_{u\beta}{}^U \equiv Y'_{\beta}{}^U, \quad Y'_{c\beta}{}^U \equiv Y'_{\beta}{}^U, \quad Y'_{t\beta}{}^U \equiv Y'_{\beta}{}^U \end{aligned} \quad (1-145)$$

در نتیجه با قرار دادن جملات یوکاوا ناوردای پیمانه‌ای و همیوگهای هرمیتی آنها در (۱-۱۳۹) و (۱-۱۴۳)

(۱-۱۴۳)، لاگرانژی یوکاوا کوارک به‌دست می‌آید.

$$\mathcal{L}_{H,Q} = - \sum_{\alpha=1,2,3} \left[\sum_{\beta=d,s,b} Y'_{\alpha\beta}{}^D \overline{Q'_{\alpha L}{}^D} \Phi q'_{\beta R}{}^D + \sum_{\beta=u,c,t} Y'_{\alpha\beta}{}^U \overline{Q'_{\alpha L}{}^U} \tilde{\Phi} q'_{\beta R}{}^U \right] + \text{H.C.} \quad (1-146)$$

$$\mathcal{L}_{H,Q} = - \left(\frac{\nu + H(x)}{\sqrt{2}} \right) \left[\sum_{\alpha, \beta=d,s,b} Y'_{\alpha\beta}{}^D \overline{q'_{\alpha L}{}^D} q'_{\beta R}{}^D + \sum_{\alpha, \beta=u,c,t} Y'_{\alpha\beta}{}^U \overline{q'_{\alpha L}{}^U} q'_{\beta R}{}^U \right] + \text{H.C.} \quad (1-147)$$

جملات متناسب با ν جملات جرمی کوارکها هستند. از آنجا که ماتریسهای مختلط Y'^U, Y'^D از

جفت‌شدگیهای یوکاوا در حالت کلی غیرقطری‌اند، میدانهای کوارکی پرم‌دار دارای جرم معینی نیستند. آرایه‌های زیر را همانند لپتونها معرفی می‌کنیم.

$$q_L'^U \equiv \begin{pmatrix} u_L' \\ c_L' \\ t_L' \end{pmatrix} \quad q_R'^U \equiv \begin{pmatrix} u_R' \\ c_R' \\ t_R' \end{pmatrix} \quad q_L'^D \equiv \begin{pmatrix} d_L' \\ s_L' \\ b_L' \end{pmatrix} \quad q_R'^D \equiv \begin{pmatrix} d_R' \\ s_R' \\ b_R' \end{pmatrix} \quad (۱۴۸-۱)$$

لاگرانژی یوکاوی هیگز-کوارک به شکل ماتریسی زیر می‌باشد.

$$\mathcal{L}_{H,Q} = \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left[\overline{q_L'^D} Y'^D q_R'^D + \overline{q_L'^U} Y'^U q_R'^U \right] + \text{H.C.} \quad (۱۴۹-۱)$$

$$V_L^{D\dagger} Y'^U V_R^D = Y^D, \quad Y_{\alpha\beta}^D = y_{\alpha}^D \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = d, s, b) \\ V_L^{U\dagger} Y'^U V_R^U = Y^U, \quad Y_{\alpha\beta}^U = y_{\alpha}^U \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = u, c, t) \quad (۱۵۰-۱)$$

$$q_L^U = V_L^{U\dagger} q_L'^U \equiv \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \\ t_L \end{pmatrix}, \quad q_R^U = V_R^{U\dagger} q_R'^U \equiv \begin{pmatrix} u_R \\ c_R \\ t_R \end{pmatrix} \\ q_L^D = V_R^{D\dagger} q_L'^D \equiv \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad q_R^D = V_R^{D\dagger} q_R'^D \equiv \begin{pmatrix} d_R \\ s_R \\ b_R \end{pmatrix} \quad (۱۵۱-۱)$$

$$\mathcal{L}_{H,Q} = \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left[\overline{q_L^D} Y^D q_R^D + \overline{q_L^U} Y^U q_R^U \right] + \text{H.C.} \\ = - \sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_{\alpha}^D v}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^D} q_{\alpha}^D - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_{\alpha}^U v}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^U} q_{\alpha}^U \\ - \sum_{\alpha=d,s,b} \frac{y_{\alpha}^D}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^D} q_{\alpha}^D H - \sum_{\alpha=u,c,t} \frac{y_{\alpha}^U}{\sqrt{2}} \overline{q_{\alpha}^U} q_{\alpha}^U H \\ q_{\alpha}^D \equiv q_{\alpha L}^D + q_{\alpha R}^D \quad q_{\alpha}^U \equiv q_{\alpha L}^U + q_{\alpha R}^U \quad (۱۵۲-۱)$$

$$m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha}^D v}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = d, s, b) \\ m_{\alpha} = \frac{y_{\alpha}^U v}{\sqrt{2}} \quad (\alpha = u, c, t) \quad (۱۵۳-۱)$$

$$(159-1)$$

همانند مورد لپتونها به دلیل نامعلوم بودن مقدار پارامترهای $q_{u,c,t}^U$ و $q_{d,s,b}^D$ در مدل استاندارد، نمی-توان جرم کوارها را پیش‌بینی کرد و باید آن را از آزمایش به دست آورد.

به سبب ناسازگاری بین میدانهای کوارکی بدون پریم با جرم معین و میدانهای کوارکی پریم دار با جرم نامعین (جریان باردار ضعیف کوارکی (۱۶۷-۱)) آمیختگی کوارکی پیش می‌آید. با استفاده از تعریفهای (۱۴۸-۱)، جریان باردار ضعیف کوارکی به صورت زیر در می‌آید.

$$j_{W,Q}^\rho = 2 \overline{q_L'^U} \gamma^\rho q_L'^D \quad (154-1)$$

$$j_{W,Q}^\rho = 2 \overline{q_L^U} V_L^{U\dagger} \gamma^\rho V_L^D q_L^D = 2 \overline{q_L^U} \gamma^\rho V_L^{U\dagger} V_L^D q_L^D \quad (155-1)$$

$$q_L^U V_L^{U\dagger} q_L'^U \rightarrow \overline{q_L^U} = \overline{q_L'^U} V_L^U \rightarrow \overline{q_L^U} V_L^{U\dagger} = \overline{q_L'^U} \quad (156-1)$$

$$V = V_L^{U\dagger} V_L^D \quad (157-1)$$

ماتریس آمیختگی کوارک، V ، را ماتریس کابیوکوبایاشی ماساکاوا^۱ (CKM) نیز می‌نامند که اثر فیزیکی آمیختگی کوارکها را دربر می‌گیرد. ماتریس آمیختگی کوارکی برهمکنشهای جریان باردار ضعیف را برای کوارکها با جریان زیر تعیین می‌کند.

$$j_{W,Q}^\rho = 2 \overline{q_L^U} \gamma^\rho V q_L^D \quad (158-1)$$

عبارت بالا در محاسبات مربوط به فرآیندهای برهم‌کنش ضعیف که کوارکها را دربر می‌گیرد، (که حالت‌های آغازین و نهایی دارای جرم معینی باشند) بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد. کمیتهای قابل اندازه‌گیری به عناصر ماتریس آمیختگی V بستگی دارند. با جریان باردار ضعیف در (۱۵۸-۱) بخش کوارکی لاگرانژی برهم‌کنش ضعیف جریان ضعیف در (۶۶-۱) جفت‌شدگیهای سه ساقی کوارکها (۱-۱۵۹) را با بوزون پیمانه‌ای W توصیف می‌کند.

¹ Cabbibo-Kobayashi-Masakawa

$$(159-1)$$

در رأس تغییر طعم رخ می‌دهد، عدد طعم کوارکها پایسته نیست. عدد باریونی در جریان باردار

کوارکی (۶۷-۱) پایسته است. عدد باریونی کوارکی برابر با $\frac{1}{3}$ و برای پادکوارکها برابر با $-\frac{1}{3}$ است.

اکنون به بررسی اثر آمیختگی کوارکها بر جریان ضعیف خنثی (۷۳-۱) می‌پردازیم. با استفاده از

(۱۵۱-۱) جریان خنثی کوارکی را برحسب میدانهای کوارکی با جرم معین بیان می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 j_{W,L}^\rho &= 2 g_L^U \overline{q_L'^U} \gamma^\rho q_L'^U + 2 g_R^U \overline{q_R'^U} \gamma^\rho q_R'^U + 2 g_L^D \overline{q_L'^D} \gamma^\rho q_L'^D \\
 &+ 2 g_R^D \overline{q_R'^D} \gamma^\rho q_R'^D = 2 g_L^U \overline{q_L^U} V_L^{U\dagger} \gamma^\rho V_L^U q_L^U + 2 g_R^U \overline{q_R^U} V_R^{U\dagger} \gamma^\rho V_R^U q_R^U \\
 &+ 2 g_L^D \overline{q_L^D} V_L^{D\dagger} \gamma^\rho V_L^D q_L^D + 2 g_R^D \overline{q_R^D} V_R^{D\dagger} \gamma^\rho V_R^D q_R^D \\
 &= 2 g_L^U \overline{q_L^U} \gamma^\rho q_L^U + 2 g_R^U \overline{q_R^U} \gamma^\rho q_R^U + 2 g_L^D \overline{q_L^D} \gamma^\rho q_L^D + 2 g_R^D \overline{q_R^D} \gamma^\rho q_R^D
 \end{aligned}
 \quad (160-1)$$

پس چه جریان خنثی را برحسب میدانهای کوارکی جرم‌دار و چه برحسب میدانهای پریم‌دار بیان

کنیم، (میدانهای پریم‌دار در جریان باردار ضعیف پدیدار می‌شوند) شکل آنها یکسان می‌باشد.

به این روند، سازوکار GIM گویند. جریان خنثی ضعیف تحت آمیختگی میدانهای کوارکی ناورد

می‌باشد. سازوکار GIM در جریان الکترومغناطیسی کوارکها هم کار می‌کند.

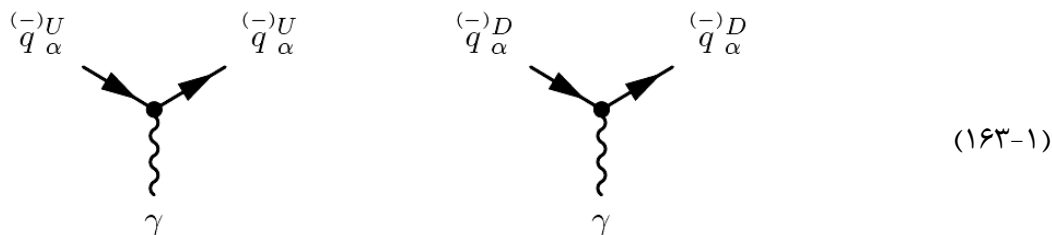
$$j_{\gamma,Q}^\rho = \frac{2}{3} \sum_{\alpha=u,c,t} \overline{q_\alpha^U} \gamma^\rho q_\alpha^U - \frac{1}{3} \sum_{\alpha=d,s,b} \overline{q_\alpha^D} \gamma^\rho q_\alpha^D \quad (161-1)$$

که برحسب میدانهای کوارکی جرم‌دار معادله (۱۵۲-۱) نوشته شد. بنابراین در مدل استاندارد هیچ

$$(162-1)$$

جریان خنثی که سبب تغییر طعم شود، وجود ندارد.

و جفت شدگیهای سه ساقی کوارکها با فوتون را هم با نمودار زیر نشان می دهیم



۷-۱ بوزونهای پیمانه‌ای

سطر دوم در لاگرانژی الکتروضعیف مدل استاندارد (۶۳-۱) را در نظر می گیریم

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} \underline{A}_{\mu\nu} \underline{A}^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} \quad (۱۶۴-۱)$$

این جملات بیان کننده میدانهای پیمانه‌ای و خودبرهمکنشهای آن می باشد.

$$\begin{aligned} \underline{A}^{\mu\nu} &= (A_1^{\mu\nu}, A_2^{\mu\nu}, A_3^{\mu\nu}) \\ A_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g \sum_{b,c=1}^3 \varepsilon_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (a=1,2,3) \\ B^{\mu\nu} &= \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu \end{aligned} \quad (۱۶۵-۱)$$

که $B^{\mu\nu}$ تعمیم تانسور الکترومغناطیسی $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ است. همان میدان الکترومغناطیسی معادله (۳۸-۱) می باشد. جمله جنبشی از رابطه زیر به دست می آید.

$$\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (۱۶۶-۱)$$

که تحت تبدیل پیمانه‌ای موضعی $U(1)_Q$ ناوردا می باشد [۱۲].

پس به همین روش جمله دوم در معادله (۱۶۴-۱) تحت تبدیلات موضعی $U(1)$ که در معادله (۱-۲۳) آمده، ناوردا می باشد.

در معادله (۱۶۵-۱) علاوه بر موارد بالا، جمله اضافی دیگری هم وجود دارد که برای منظور کردن

بوزونهای پیمانه‌ای $SU(2)_L$ و در نتیجه ناوردایی جمله نخست (۱۶۴-۱)، $-\frac{1}{4} \underline{A}_{\mu\nu} \underline{A}^{\mu\nu}$ ، تحت

تبدیلات پیمانه‌ای غیرآبلی موضعی $SU(2)_L$ ، همان تبدیلات معادله (۲۲-۱) نوشته شده است.

با استفاده از معادلات (۳۲-۱) و (۳۸-۱)، معادله (۱۶۴-۱) را برحسب میدانهای پیمانه‌ای

W^μ, Z^μ, A^μ می‌نویسیم.

$$\begin{cases} W^\mu = \frac{A_1^\mu - i A_2^\mu}{\sqrt{2}} \\ W^{\mu\dagger} = \frac{A_1^\mu + i A_2^\mu}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1^\mu = \frac{W^\mu + W^{\mu\dagger}}{\sqrt{2}} \\ A_2^\mu = \frac{W^\mu - W^{\mu\dagger}}{\sqrt{2} i} \end{cases} \quad (۱۶۷-۱)$$

$$\begin{cases} A^\mu = \sin \theta_W A_1^\mu + \cos \theta_W B^\mu \\ Z^\mu = \cos \theta_W A_1^\mu - \sin \theta_W B^\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1^\mu = \sin \theta_W A^\mu + \cos \theta_W Z^\mu \\ B^\mu = \cos \theta_W A^\mu - \sin \theta_W Z^\mu \end{cases}$$

$$A_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g \sum_{b,c=1}^2 \varepsilon_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (۱۶۸-۱)$$

$$B^{\mu\nu} = \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} = \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ (A_{1\mu\nu}, A_{2\mu\nu}, A_{3\mu\nu}) (A_1^{\mu\nu}, A_2^{\mu\nu}, A_3^{\mu\nu}) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ A_{1\mu\nu} A_1^{\mu\nu} + A_{2\mu\nu} A_2^{\mu\nu} + A_{3\mu\nu} A_3^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. + (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \right\} \end{aligned} \quad (۱۶۹-۱)$$

برای نمونه جمله نخست را به همراه میدانهای B در نظر می‌گیریم (با استفاده از (۱۶۷-۱)).

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} \left\{ \left[\partial_\mu A_{1\nu} - \partial_\nu A_{1\mu} - g (A_{2\mu} A_{3\nu} + A_{3\mu} A_{2\nu}) \right] \right. \\ &\quad \left. \times \left[\partial^\mu A_1^\nu - \partial^\nu A_1^\mu - g (A_2^\mu A_3^\nu + A_3^\mu A_2^\nu) \right] + (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \right\} \end{aligned} \quad (۱۷۰-۱)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4} \left\{ \left[\partial_\mu \left(\frac{W_\nu + W_\nu^\dagger}{\sqrt{2}} \right) - \partial_\nu \left(\frac{W_\mu + W_\mu^\dagger}{\sqrt{2}} \right) - g \left(\frac{W_\mu - W_\mu^\dagger}{\sqrt{2}i} \right) (\sin \theta_W A_\nu + \cos \theta_W Z_\nu) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - g (\sin \theta_W A_\nu + \cos \theta_W Z_\nu) \left(\frac{W_\nu - W_\nu^\dagger}{\sqrt{2}i} \right) \right] \left[\partial^\mu \left(\frac{W^\nu + W^{\nu\dagger}}{\sqrt{2}} \right) - \partial^\nu \left(\frac{W^\mu + W^{\mu\dagger}}{\sqrt{2}} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - g \left(\frac{W^\mu - W^{\mu\dagger}}{\sqrt{2}i} \right) (\sin \theta_W A^\nu + \cos \theta_W Z^\nu) - g (\sin \theta_W A^\mu + \cos \theta_W Z^\mu) \left(\frac{W^\nu - W^{\nu\dagger}}{\sqrt{2}i} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\partial_\mu (\cos \theta_W A_\nu - \sin \theta_W Z_\nu) - \partial_\nu (\cos \theta_W A_\mu - \sin \theta_W Z_\mu) \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\partial^\mu (\cos \theta_W A^\nu - \sin \theta_W Z^\nu) - \partial^\nu (\cos \theta_W A^\mu - \sin \theta_W Z^\mu) \right] \right\} \quad (141-1) \\
&= -\frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{\partial_\mu W_\nu + \partial_\mu W_\nu^\dagger}{\sqrt{2}} - \frac{\partial_\nu W_\mu + \partial_\nu W_\mu^\dagger}{\sqrt{2}} - \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W W_\mu A_\nu + \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W W_\mu Z_\nu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W W_\mu^\dagger A_\nu - \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W W_\mu^\dagger Z_\nu + \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W A_\mu W_\nu - \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W A_\mu W_\nu^\dagger \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W Z_\mu W_\nu - \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W Z_\mu W_\nu^\dagger \right] \left[\frac{\partial^\mu W^\nu + \partial^\mu W^{\nu\dagger}}{\sqrt{2}} - \frac{\partial^\nu W^\mu + \partial^\nu W^{\mu\dagger}}{\sqrt{2}} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W W^\mu A^\nu + \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W W^\mu Z^\nu - \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W W^{\mu\dagger} A^\nu + \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W W^{\mu\dagger} Z^\nu \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W A^\mu W^\nu - \frac{g}{\sqrt{2}} \sin \theta_W A^\mu W^{\nu\dagger} + \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W Z^\mu W^\nu - \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W Z^\mu W^{\nu\dagger} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left[\cos \theta_W \partial_\mu A_\nu - \sin \theta_W \partial_\mu Z_\nu - \cos \theta_W \partial_\nu A_\mu - \sin \theta_W \partial_\nu Z_\mu \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left[\cos \theta_W \partial^\mu A^\nu - \sin \theta_W \partial^\mu Z^\nu - \cos \theta_W \partial^\nu A^\mu + \sin \theta_W \partial^\nu Z^\mu \right] \right\} \quad (142-1)
\end{aligned}$$

به همین ترتیب برای دو جمله دیگر $A_{\nu\mu} A^{\mu\nu}$ و $A_{\nu\mu} A^{\mu\nu}$ هم می‌نویسیم. با توجه به رابطه‌های

$$\begin{aligned}
F_W^{\mu\nu} &= \partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu \\
F_Z^{\mu\nu} &= \partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu
\end{aligned} \quad (143-1)$$

لاگرانژی به صورت زیر در می‌آید

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{(\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu)}^{F_{W\mu\nu}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{(\partial_\mu W_\nu^\dagger - \partial_\nu W_\mu^\dagger)}^{F_{W\mu\nu}^\dagger} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{g}{\sqrt{2}} \cos \theta_W (W_\mu Z_\nu - W_\mu^\dagger Z_\nu + Z_\mu W_\nu - Z_\mu W_\nu^\dagger) \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g i}{\sqrt{2}} \sin \theta_W (W_\mu A_\nu - W_\mu^\dagger A_\nu + A_\mu W_\nu - A_\mu W_\nu^\dagger) \Big] \\
& \times \left[\left[\frac{\overbrace{\partial^\mu W^\nu - \partial^\nu W^\mu}^{F_{W\mu\nu}}}{\sqrt{2}} + \frac{\overbrace{\partial^\mu W^{\nu\dagger} - \partial^\nu W^{\mu\dagger}}^{F_{W\mu\nu}^\dagger}}{\sqrt{2}} \right. \right. \\
& + \frac{g i}{\sqrt{2}} \cos \theta_W (W^\mu Z^\nu + W^{\mu\dagger} Z^\nu + Z^\mu W^\nu - Z^\mu W^{\nu\dagger}) \\
& + \frac{g i}{\sqrt{2}} \sin \theta_W (W^\mu A^\nu - W^{\mu\dagger} A^\nu + A^\mu W^\nu - A^\mu W^{\nu\dagger}) \Big] \\
& + \left[\cos \theta_W \overbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}^{F_{\mu\nu}} + \sin \theta_W \overbrace{(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu)}^{F_{Z\mu\nu}} \right] \\
& \times \left[\cos \theta_W \overbrace{(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)}^{F^{\mu\nu}} + \sin \theta_W \overbrace{(\partial^\mu Z^\nu - \partial^\nu Z^\mu)}^{F_Z^{\mu\nu}} \right] \Big\} \quad (174-1)
\end{aligned}$$

در نهایت با توجه به اینکه $\frac{g g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = e$ و با در نظر گرفتن همه جملات به نتیجه زیر می‌رسیم:

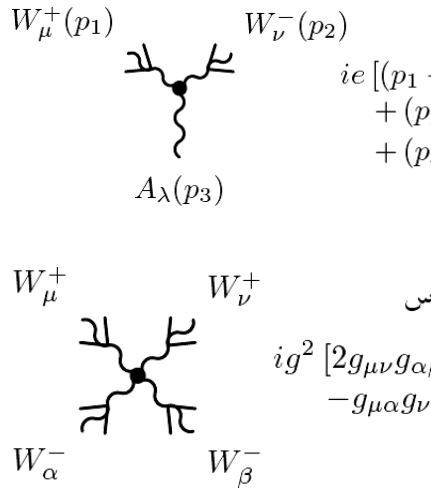
$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{Z\mu\nu} F_Z^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
& + i g \cos \theta_W \left[F_W^{\mu\nu} Z_\mu W_\mu^\dagger - F_W^{\mu\nu} Z^\mu W_\mu^\dagger + F_Z^{\mu\nu} W_\mu^\dagger W_\nu \right] \\
& + i e \left[F_W^{\mu\nu} A_\mu W_\nu^\dagger - F_W^{\mu\nu} A^\mu W_\nu^\dagger + F^{\mu\nu} W_\mu^\dagger W_\nu \right] \\
& + g^2 \cos^2 \theta_W \left[(W_\mu Z^\mu) (W_\nu^\dagger Z^\nu) - (W^\mu W_\mu^\dagger) (Z^\nu Z_\nu) \right] \\
& + e^2 \left[(W_\mu A^\mu) (W_\nu^\dagger A^\nu) - (W^\mu W_\mu^\dagger) (A^\nu A_\nu) \right] \\
& + e g \cos \theta_W \left[(W_\mu Z^\mu) (W_\nu^\dagger A^\nu) + (W^{\mu\dagger} Z^\mu) (W_\nu A^\nu) - 2 (W^\mu W_\mu^\dagger) (Z_\nu A^\nu) \right] \\
& + \frac{g^2}{4} \left[(W_\mu W^\mu) (W_\nu^\dagger W^{\nu\dagger}) - (W_\mu^\dagger W^\mu)^2 \right] \quad (175-1)
\end{aligned}$$

آخرین جمله در سطر نخست همان جمله جنبشی معادله (۱۶۶-۱) میدان الکترومغناطیسی می‌باشد.

دو جمله اول هم در سطر نخست به ترتیب جملات جنبشی برای بوزونهای Z و W هستند که بر حسب

تانسورهای $F_Z^{\mu\nu}$ و $F_W^{\mu\nu}$ نوشته شده‌اند. این تانسورها ساختاری همانند تانسور تعمیم‌یافته

الکترومغناطیسی $F^{\mu\nu}$ دارند. دیگر جملات هم جفت‌شدگیهای سه‌ساقی و چهارساقی بوزونهای پیمانه‌ای هستند.



رأس

$$ie [(p_1 - p_2)_\lambda g_{\mu\nu} + (p_2 - p_3)_\mu g_{\nu\lambda} + (p_3 - p_1)_\nu g_{\lambda\mu}]$$

رأس

$$ig^2 [2g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta} - g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} - g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha}]$$

(۱۷۶-۱)

۱-۷-۱ میدان الکترومغناطیسی

همانگونه که از سطر نخست معادله (۱۷۵-۱) برمی‌آید، این سطر لاگرانژی آزاد میدان الکترومغناطیسی در حالت کلاسیک (۱۶۶-۱)، $\mathcal{L}_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ، است. با توجه به معادله اولر-

لاگرانژ، $(r=1,2,\dots,n)$ ، $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_r)} \right) = 0$ ، به معادله میدان کلاسیک می‌رسیم

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = 0 \quad (177-1)$$

لاگرانژی الکترومغناطیسی (۱۶۶-۱) تحت تبدیلات پیمانه‌ای موضعی $U(1)_Q$ ناورداست.

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \varphi(x) \quad (178-1)$$

همچنین لاگرانژی کامل مدل استاندارد هم تحت تبدیلات پیمانه‌ای موضعی $U(1)_Q$ برای میدان الکترومغناطیسی ناوردا می‌باشد و تبدیل میدانهای فرمیونی در آن به‌صورت زیر می‌باشد.

$$f \rightarrow f' = e^{iQ\varphi(x)} f \quad (179-1)$$

برای بررسی فیزیکی مسأله پیمانه لورنتس را برمی‌گزینیم. در این پیمانه میدان الکترومغناطیسی به- صورت زیر می‌باشد.

$$\partial^\mu A^\mu = 0 \quad (180-1)$$

برای آنکه A'^μ هم در شرط لورنتس (180-1) صدق کند و تبدیل پیمانه‌ای (178-1) هم برقرار بماند، کافیهست تابع $\varphi(x)$ را به‌گونه‌ای برگزینیم که $\square \varphi(x) = -\partial^\mu A^\mu(x)$ باشد. میدان $A'^\mu(x)$ با تبدیل پیمانه‌ای به‌صورت $\square \varphi(x) = 0$ تعریف می‌شود.

میدان الکترومغناطیسی آزاد در پیمانه لورنتس در معادله دالامبری صدق می‌کند.

$$\square A^\mu = 0 \quad (181-1)$$

بسط انتگرال فوریه میدان الکترومغناطیسی به‌صورت زیر است.

$$A^\mu(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\omega} \sum_{\alpha=0}^3 \left[a_\gamma^{(\alpha)}(p) \varepsilon_\mu^{(\alpha)}(p) e^{-ip \cdot x} + a_\gamma^{(\alpha)\dagger}(p) \varepsilon_\mu^{(\alpha)*}(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (181-1)$$

و انرژی فوتون برابر مقدار زیر می‌باشد [13].

$$\omega = p^0 = |\vec{p}| \quad (182-1)$$

چاربردار قطبش $\varepsilon_\mu^{(\alpha)}(p)$ با $\alpha = 0, 1$ مجموعه‌ای از چهار بردار مستقل خطی تشکیل می‌دهد که در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\varepsilon^{(\alpha)}(p) \cdot \varepsilon^{(\beta)*}(p) = g^{\alpha\beta} \quad (183-1)$$

$$\sum_{\alpha=0}^3 \varepsilon_\mu^{(\alpha)}(p) \cdot \varepsilon_\nu^{(\alpha)*}(p) g^{\alpha\alpha} = g_{\mu\nu} \quad (183-1)$$

مرسوم است که $\varepsilon_\mu^{(0)}$ را زمان‌گونه (یعنی $\varepsilon_\mu^{(0)}(p) \cdot p = \omega$) و $\varepsilon_\mu^{(1,2)}(p)$ را بردارهای عرضی (یعنی $\varepsilon_\mu^{(1)}(p) \cdot p = \varepsilon_\mu^{(2)}(p) \cdot p = 0$) و $\varepsilon_\mu^{(3)}(p)$ را بردار طولی (یعنی $\varepsilon_\mu^{(3)}(p) \cdot p = -\omega$) در نظر بگیرند. این چهار قطبش با دو قطبش عرضی فوتونهای حقیقی کامل می‌باشند [13].

عملگرهای $a_\gamma^{(\alpha)}(p)$ در روابط جابجایی زیر صدق می‌کنند.

$$\left[a_\gamma^{(\alpha)}(p), a_\gamma^{(\alpha')\dagger}(p') \right] = -g^{\alpha\alpha'} (2\pi)^3 2\omega \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \quad (184-1)$$

$$\left[a_{\gamma}^{(\alpha)}(p), a_{\gamma}^{(\alpha')\dagger}(p') \right] = \left[a_{\gamma}^{(\alpha)\dagger}(p), a_{\gamma}^{(\alpha')\dagger}(p') \right] = 0 \quad (185-1)$$

که در نتیجه انتشارگر فوتون به صورت زیر درمی آید.

$$G_{\mu\nu}(x-x') = \left\langle 0 \left| T [A_{\mu}(x) A_{\nu}(x')] \right| 0 \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-g_{\mu\nu}}{p^2 + i\varepsilon} e^{-i p \cdot (x-x')} \quad (186-1)$$

۱-۷-۲ بوزونهای W, Z

در مدل استاندارد بوزونهای برداری $W^{\pm}, Z$ جرم خود را که در معادلات (۱۰۸-۱) آمده، از طریق سازوکار هیگز به دست می آورند. از طریق این سازوکار تقارن $SU(2)_L \times U(1)_Y$ خودبخود شکسته می شود. یعنی لاگرانژی تحت تبدیلات $SU(2)_L \times U(1)_Y$ متقارن است اما حالت های فیزیکی متقارن نیستند. تقارن لاگرانژی که پنهان در جهان واقعی است برای بازبهنجار بودن نظریه الزامی است. بنابراین جملات جرمی برای میدانهای بوزون پیمانه ای ممنوع هستند (همانند جرم فرمیونها).

مثلاً جمله جرمی صریح برای میدانهای بوزون پیمانه ای B^{μ} که به نوع زیر است

$$\frac{1}{2} m_B^2 B^{\mu} B_{\mu} \quad (187-1)$$

تحت تبدیلات پیمانه ای (۲۴-۱) ناوردا می باشد.

با استفاده از آخرین سطر معادله (۱۷۵-۱) و جملات جرمی (۱۰۵-۱)، لاگرانژی برای میدانهای بوزونی آزاد W, Z را در پیمانه یکانی به صورت زیر می نویسیم.

$$\mathcal{L}^{(W)} = -\frac{1}{4} F_{W\mu\nu}^{\dagger} F_W^{\mu\nu} + m_W W_{\mu}^{\dagger} W^{\mu} \quad (188-1)$$

$$\mathcal{L}^{(Z)} = -\frac{1}{4} F_{Z\mu\nu} F_Z^{\mu\nu} + m_Z Z_{\mu} Z^{\mu} \quad (189-1)$$

این لاگرانژیها منجر به معادلات پروکا برای میدانهای بوزونی W, Z آزاد می شود.

$$(\square + m_W^2) W^{\mu} - \partial^{\mu} (\partial_{\nu} W^{\nu}) = 0 \quad (190-1)$$

$$(\square + m_Z^2) Z^{\mu} - \partial^{\mu} (\partial_{\nu} Z^{\nu}) = 0 \quad (191-1)$$

اگر از دو معادله (۱۸۸-۱) و (۱۸۹-۱) دیورژانس بگیریم و با احتساب اینکه $m_Z \neq 0$, $m_W \neq 0$ است،

به معادلات قیدی زیر می‌رسیم که تعداد مؤلفه‌های مستقل میدانهای بوزون W , Z را از چهار به سه

و معادلات پروکا (۱۸۸-۱) و (۱۸۹-۱) را به معادلات کلاین گوردون تقلیل می‌دهند.

$$\partial_\mu W^\mu = 0 \quad (۱۹۲-۱)$$

$$\partial_\mu Z^\mu = 0 \quad (۱۹۳-۱)$$

معادلات کلاین گوردون عبارتند از

$$(\square + m_W^2)W^\mu = 0 \quad (۱۹۴-۱)$$

$$(\square + m_Z^2)Z^\mu = 0 \quad (۱۹۵-۱)$$

بسط انتگرالهای فوریه میدانهای W , Z عبارتند از

$$W_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_W} \sum_{r=1}^2 \left[a_W^{(r)}(p) \varepsilon_W^{(r)}{}_\mu(p) e^{-ip \cdot x} + b_W^{(r)\dagger}(p) \varepsilon_W^{(r)*}{}_\mu(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (۱۹۶-۱)$$

$$E_W = p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_W^2}$$

و

$$Z_\mu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E_Z} \sum_{r=1}^2 \left[a_Z^{(r)}(p) \varepsilon_Z^{(r)}{}_\mu(p) e^{-ip \cdot x} + b_Z^{(r)\dagger}(p) \varepsilon_Z^{(r)*}{}_\mu(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (۱۹۷-۱)$$

$$E_Z = p^0 = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m_Z^2}$$

چاربردارهای قطبش $\varepsilon_W^{(r)}(p)$ و $\varepsilon_Z^{(r)}(p)$ دو مجموعه از چاربردارهای مستقل خطی مکان گونه

متعامد بهنجار را تشکیل می‌دهند. به گونه‌ای که

$$\varepsilon_W^{(r)}(p) \cdot \varepsilon_W^{(s)*}(p) = \varepsilon_Z^{(r)}(p) \cdot \varepsilon_Z^{(s)*}(p) = -\delta_{rs} \quad (۱۹۸-۱)$$

با توجه به قیدهای (۱۹۲-۱) و (۱۹۳-۱)، چاربردارهای قطبش $\varepsilon_W^{(r)}(p)$ و $\varepsilon_Z^{(r)}(p)$ عرضی‌اند.

$$\varepsilon_W^{(r)}(p) \cdot p = \varepsilon_Z^{(r)}(p) \cdot p = 0 \quad (۱۹۹-۱)$$

به‌علاوه با توجه به معادلات (۱۹۸-۱) و (۱۹۹-۱) می‌توان روابط کامل بودن را نوشت.

$$\sum_{r=\downarrow}^{\Upsilon} \varepsilon_W^{(r)}{}_{\mu}(p) \varepsilon_W^{(r)*}{}_{\nu}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m_W^{\Upsilon}} \quad (200-1)$$

$$\sum_{r=\downarrow}^{\Upsilon} \varepsilon_Z^{(r)}{}_{\mu}(p) \varepsilon_Z^{(r)*}{}_{\nu}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m_Z^{\Upsilon}}$$

روابط جابجایی هم به صورت زیر هستند.

-۱)

$$\left[a_W^{(\alpha)}(p), a_W^{(\alpha')\dagger}(p') \right] = \left[b_W^{(\alpha)}(p), b_W^{(\alpha')\dagger}(p') \right] = -g^{\alpha\alpha'} (\Upsilon\pi)^{\Upsilon\Upsilon} E_W \delta^{\Upsilon}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (201)$$

$$\left[a_Z^{(\alpha)}(p), a_Z^{(\alpha')\dagger}(p') \right] = -g^{\alpha\alpha'} (\Upsilon\pi)^{\Upsilon\Upsilon} E_Z \delta^{\Upsilon}(\vec{p} - \vec{p}') \quad (202-1)$$

عملگرهای $a_W^{(\alpha)}(p)$ و $b_W^{(\alpha)}(p)$ و $a_Z^{(\alpha)}(p)$ هم با یکدیگر جابجا می شوند.

با توجه به روابط جابجایی و کامل بودن (200-1) می توان انتشارگرهای میدانهای پیمانه ای را نوشت

$$G_{\mu\nu}^{(W)}(x-x') = \left\langle \circ \left| T [W_{\mu}(x) W_{\nu}^{\dagger}(x')] \right| \circ \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow \circ} i \int \frac{d^{\Upsilon} p}{(\Upsilon\pi)^{\Upsilon}} \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m_W^{\Upsilon}}}{p^{\Upsilon} - m_W^{\Upsilon} + i \varepsilon} e^{-i p \cdot (x-x')} \quad (203-1)$$

$$G_{\mu\nu}^{(Z)}(x-x') = \left\langle \circ \left| T [Z_{\mu}(x) Z_{\nu}^{\dagger}(x')] \right| \circ \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow \circ} i \int \frac{d^{\Upsilon} p}{(\Upsilon\pi)^{\Upsilon}} \frac{-g_{\mu\nu} + \frac{p_{\mu} p_{\nu}}{m_Z^{\Upsilon}}}{p^{\Upsilon} - m_Z^{\Upsilon} + i \varepsilon} e^{-i p \cdot (x-x')} \quad (204-1)$$

فصل دوم

آمیختگی سه نسل کوارکها

۲ آمیختگی سه نسل کوارکها

آمیختگی نوترینوهای دیراک همانند آمیختگی کوارکها می باشد. در مورد نوترینوهای ماژورانا هم آمیختگی بسیار شبیه به آمیختگی کوارکها می باشد. در این رساله از ماتریس V برای نشان دادن ماتریس آمیختگی کوارکها و از ماتریس U برای نشان دادن ماتریس آمیختگی نوترینوها استفاده می شود. ماتریس یکانی 3×3 آمیختگی CKM را که در معادله (۱-۱۵۷) آمده است، در نظر می گیریم

$$V = V_L^{U\dagger} V_L^D = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & V_{33} \end{pmatrix} \quad (1-2)$$

V^D, V^U که به ترتیب ماتریسهای یکانی هستند که برای قطری کردن ماتریسهای جرمی کوارکهای بالا-گون و پایین-گون در معادلات (۱-۱۵۰) به کار می روند. برپایه داده های تجربی با ۹۰٪ سازگاری، مقادیر بازه های جرمی برای ماتریس آمیختگی کوارکها به شرح زیر است [۹]:

$$|V| = \begin{pmatrix} 0.9739_{-0.9751} & 0.221_{-0.227} & 0.0029_{-0.0045} \\ 0.221_{-0.227} & 0.9730_{-0.9744} & 0.039_{-0.044} \\ 0.0048_{-0.014} & 0.037_{-0.043} & 0.9990_{-0.9992} \end{pmatrix} \quad (2-2)$$

همه ویژگیهای ماتریس آمیختگی کوارکها V را می توان به ماتریس آمیختگی لپتونها U برای نوترینوهای دیراکی تعمیم داد.

$$V \rightarrow U = V_L^{I\dagger} V_L^V = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu1} & U_{\mu2} & U_{\mu3} \\ U_{\tau1} & U_{\tau2} & U_{\tau3} \end{pmatrix} \quad (3-2)$$

بنا به رسمی تاریخی، ماتریس آمیختگی کوارک ایزواسپین ضعیف کوارکهای چپگرد $I_3 = 1/2$ را به کوارکهای راستگرد $I_3 = -1/2$ متصل می کند، درحالیکه ماتریس آمیختگی لپتونی، لپتونهای باردار چپگرد $I_3 = -1/2$ را به نوترینوهای راستگرد متصل می سازد. البته می توان با تبدیل یکی از دو ماتریس آمیختگی به همیوغ هرمیتی آن، هر دو ماتریس آمیختگی را به یک شکل درآورد.

تعداد مولدها را با N نشان می‌دهیم. برای سادگی تنها حالت‌های $N=2$ و $N=3$ را در نظر می‌گیریم.

۲-۱ قطری کردن ماتریس جرم

با استفاده از تبدیل دویکانی می‌توان ماتریس $N \times N$ مختلط M' را قطری کرد.

$$V_L^\dagger M' V_R = M, \quad M_{\alpha\beta} = m_\alpha \delta_{\alpha\beta} \quad (۴-۲)$$

که V_R و V_L دو ماتریس یکانی $N \times N$ مناسب هستند ($V_L^\dagger = V_L^{-1}$, $V_R^\dagger = V_R^{-1}$) و m_α عدد صحیح مثبت می‌باشد [۱۴].

به‌منظور درک چگونگی قطری کردن دویکانی به طریق زیر عمل می‌کنیم. نخست تعداد پارامترهای مستقل را می‌شماریم. ماتریس $N \times N$ مختلط M' دارای $2N^2$ عنصر مستقل می‌باشد. از آنجا که هر یک از ماتریسهای یکانی V_R و V_L دارای N^2 عنصر مستقل و ماتریس M هم دارای N عنصر مستقل است، تعداد پارامترهای دسترس‌پذیر برای قطری کردن بیش از میزان لازم است.

برای آنکه ثابت کنیم قطری کردن مطابق معادله (۴-۲) ممکن است، حاصلضرب $M' M'^\dagger$ را در نظر می‌گیریم، که ماتریسی هرمیتی است و می‌توان آن را با استفاده از تبدیل یکانی $V_L^\dagger = V_L^{-1}$ قطری کرد.

$$V_L^\dagger M' M'^\dagger V_L = M^\dagger, \quad M_{\alpha\beta}^\dagger = m_\alpha^\dagger \delta_{\alpha\beta} \quad (۵-۲)$$

ویژه‌مقادیر حقیقی و مثبت آن عبارتند از

$$\begin{aligned} m_\alpha^\dagger &= \sum_\beta (V_L^\dagger M')_{\alpha\beta} (M'^\dagger V_L)_{\beta\alpha} = \sum_\beta (V_L^\dagger M')_{\alpha\beta} (V_L^\dagger M')_{\beta\alpha}^\dagger = \\ &= \sum_\beta (V_L^\dagger M')_{\alpha\beta} (V_L^\dagger M')_{\alpha\beta}^* = \sum_\beta \left| (V_L^\dagger M')_{\alpha\beta} \right|^2 \end{aligned} \quad (۶-۲)$$

ماتریس M' و ماتریس V_R را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$M' = V_L M V_R^\dagger, \quad M_{\alpha\beta} = \sqrt{m_\alpha^\dagger} \delta_{\alpha\beta} \quad (۷-۲)$$

$$V_R = (M')^{-1} V_L M \quad (۸-۲)$$

با توجه به معادلات (۵-۲) و (۸-۲) و $M^\dagger = M$ درمی یابیم که ماتریس V_R یکانی است:

$$V_R^\dagger V_R = M V_L^\dagger (M'^\dagger)^{-1} (M')^{-1} V_L M = M V_L^\dagger (M M'^\dagger)^{-1} V_L M = M M^{-1} M = 1 \quad (۹-۲)$$

$$V_R V_R^\dagger = (M')^{-1} V_L M^\dagger V_L^\dagger (M'^\dagger)^{-1} = (M')^{-1} M' M'^\dagger (M'^\dagger)^{-1} = 1 \quad (۱۰-۲)$$

با استفاده از یکانی بودن V_L و V_R ، می توان قطری کردن دویکانی در معادله (۴-۲) را با استفاده از

$$\text{معادله (۷-۲) با توجه به مقدار } m_\alpha = \sqrt{m_\alpha^2} \text{ دریافت.}$$

۲-۲ پارامترهای فیزیکی در ماتریس آمیختگی کوارکها

بطور کلی هر ماتریس $N \times N$ ای به N^2 پارامتر حقیقی مستقل بستگی دارد. این پارامترها بر دو

دسته اند

$$\text{تعداد } \frac{N(N-1)}{2} \text{ زوایای آمیختگی} \quad (۱۱-۲)$$

$$\text{تعداد } \frac{N(N+1)}{2} \text{ فاز} \quad (۱۲-۲)$$

ماتریس آمیختگی کوارک با $N=3$ برحسب سه زاویه آمیختگی و شش فاز نوشته می شود. اما

همانگونه که پیشتر گفته شد همه فازها دارای معنای فیزیکی نیستند، زیرا اثر فیزیکی ماتریس

آمیختگی کوارک به سبب حضور آن در جریان باردار ضعیف معادله (۱۵۸-۱) کوارکها می باشد

$$j_{W,Q}^\nu = 2 \overline{q_L^U} \gamma^\mu V q_L^D \quad (۱۳-۲)$$

(به سبب سازوکار GIM ماتریس آمیختگی کوارک هیچ اثری بر جریان خنثی ضعیف کوارکی ندارد،

ر.ک. معادله (۱۷۸-۱)). به جز مورد جریان باردار ضعیف، لاگرانژی تحت تبدیل فاز جهانی به شکل زیر

برای میدانهای کوارکی ناورد است.

$$q_\alpha^U \rightarrow e^{i\psi_\alpha^U} q_\alpha^U, \quad q_k^D \rightarrow e^{i\psi_k^D} q_k^D \quad (۱۴-۲)$$

که $\alpha = u, c, t$, $k = d, s, b$ است. با انجام دادن این تبدیلات جریان باردار کواری در

معادله (۱۳-۲) به صورت زیر درمی آید

$$j_{W,Q}^\dagger = 2 \sum_{\alpha=u,c,t} \sum_{k=d,s,b} \overline{q_L^U} \gamma^\mu e^{-i\psi_\alpha^U} V_{\alpha k} e^{i\psi_\alpha^D} q_{kL}^D \quad (15-2)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت

$$j_{W,Q}^\mu = 2 \underbrace{e^{-i(\psi_c^U - \psi_s^D)}}_1 \sum_{\alpha=u,c,t} \sum_{k=d,s,b} \overline{q_{\alpha L}^U} \gamma^\mu \underbrace{e^{-i(\psi_\alpha^U - \psi_c^D)}}_{N-1=2} V_{\alpha k} \underbrace{e^{-i(\psi_k^U - \psi_s^D)}}_{N-1=2} q_{kL}^D \quad (16-2)$$

که از فاز $e^{-i(\psi_c^U - \psi_s^D)}$ فاکتور گرفتیم و در هر جمله تعداد فازهای مستقل را نشان دادیم. تعداد

$$1 + (N-1) + (N-1) = 2N-1 = 5 \quad (17-2)$$

فاز دلخواه برای میدانهای کواری وجود دارد که می توان به گونه ای آنها را برگزید تا تعداد پنج فاز از شش فاز ماتریس آمیختگی کواری حذف شود. دلیل آنکه چرا $2N-1$ و نه $2N$ فاز از ماتریس آمیختگی را می توان حذف کرد، آن است که فازبندی دوباره^۱ همه میدانهای کواری سبب می شود که جریان باردار کواری ناوردا باقی بماند. این ناوردایی از طریق قضیه نوثر به پایستگی عدد باریونی مربوط می شود.

بنابراین ماتریس آمیختگی کواری شامل

$$\frac{N(N+1)}{2} - (2N-1) = \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 1 \quad (18-2)$$

حالت فیزیکی می شود و تعداد کل پارامترهای فیزیکی (زوایای آمیختگی و فازها) در ماتریس آمیختگی کواری برابر با

^۱ rephasing

$$\frac{N(N-1)}{2} + \frac{(N-1)(N-2)}{2} = (N-1)^2 = 4 \quad (19-2)$$

مرسوم است که ماتریس آمیختگی کوارکی را تنها برحسب این چهار پارامتر فیزیکی، سه زاویه آمیختگی و یک فاز، بیان کنیم که همه آنها کمیت‌های قابل اندازه‌گیری هستند.

پس از خلاصه کردن، ماتریس آمیختگی کوارکی به صورت زیر درمی‌آید

$$N=3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 3 & \text{آمیختگی} & \text{زاویه} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 1 & \text{فیزیکی} & \text{فاز} \end{cases} \quad (20-2)$$

و اگر از نسل سوم چشم‌پوشی کنیم

$$N=2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} = 1 & \text{آمیختگی} & \text{زاویه} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} = 0 & \text{فیزیکی} & \text{فاز} \end{cases} \quad (21-2)$$

بنابراین اگر دو نسل مد نظر باشند، ماتریس آمیختگی تنها به یک پارامتر فیزیکی، زاویه آمیختگی، بستگی دارد که به آن زاویه کابیو^۱ می‌گویند [۱۵].

۲-۳ پارامتربندی ماتریس آمیختگی کوارکها

۲-۳-۱ دو نسل کوارکها

هر ماتریس 2×2 یکانی را می‌توان برحسب زاویه آمیختگی θ و سه فاز ω_1, ω_2, η به صورت زیر

نوشت

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\omega_1} & \sin \theta e^{i(\omega_1 + \eta)} \\ -\sin \theta e^{i(\omega_1 - \eta)} & \cos \theta e^{i\omega_2} \end{pmatrix} \quad (22-2)$$

^۱ Cabibbo angle

می‌توان ماتریس بالا را به شکل هم‌ارز زیر نوشت

$$V = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\eta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\eta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (23-2)$$

خوبی شکل بالا در این است که به صراحت نشان می‌دهد که می‌توان با فازبندی دوباره میدانهای

کوارکی هر سه فاز را حذف کرد. در جریان ضعیف باردار کوارکی در معادله (۱-۱۵۸)

$$j_{W,Q}^\mu = 2 \overline{q_L^U} \gamma^\mu V q_L^D \quad (24-2)$$

برای q_L^D و q_L^U دونسِل عبارتند از

$$q_L^U = \begin{pmatrix} u_L \\ c_L \end{pmatrix}, \quad q_L^D = \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} \quad (25-2)$$

با فازبندی دوباره، می‌توان فازهای ω_1, ω_2, η را در V حذف کرد.

$$u_L \rightarrow e^{i(\omega_1+\eta)} u_L, \quad c_L \rightarrow e^{i\omega_1} c_L, \quad d_L \rightarrow e^{i\eta} d_L \quad (26-2)$$

بنابراین مرسوم است که ماتریس V را بدون فازهای فیزیکی به صورت زیر بنویسند:

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \quad (27-2)$$

که زاویه آمیختگی θ_C همان زاویه کابیو می‌باشد [۱۵].

مقدار تجربی زاویه کابیو برابر است با

$$\sin\theta_C \approx 0.2243 \pm 0.016 \quad (28-2)$$

توجه آنکه گزینش پارامتربندی ماتریس آمیختگی کوارکی برای دو نسل، یکتا نیست و می‌توان مثلاً

شکل زیر را برگزید.

$$V = \begin{pmatrix} \cos\theta'_C & -\sin\theta'_C \\ \sin\theta'_C & \cos\theta'_C \end{pmatrix} \quad \text{یا} \quad V = \begin{pmatrix} \sin\theta''_C & \cos\theta''_C \\ -\cos\theta''_C & \sin\theta''_C \end{pmatrix} \quad (29-2)$$

همه شکلهای مختلف پارامتربندی به یکدیگر مربوطند (مثلاً $\theta'_C = -\theta_C$, $\theta''_C = \frac{\pi}{2} - \theta_C$) و منجر به

نتایج فیزیکی یکسانی می‌شوند. بنابراین می‌توان هرگونه پارامتربندی را برگزید تنها مهم است که در

طی محاسبات گزینش نخستین تغییر نکند. برای مقایسه با نتایج دیگر باید تبدیل مناسب را اعمال کرد.

محدوده زاویه θ_C بازه زیر می باشد

$$0 \leq \theta_C \leq \frac{\pi}{2} \quad (30-2)$$

مثلاً ماتریس آمیختگی زیر را در نظر می گیریم

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta}_C & \sin \tilde{\theta}_C \\ -\sin \tilde{\theta}_C & \cos \tilde{\theta}_C \end{pmatrix} \quad (31-2)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \tilde{\theta}_C \leq \pi \quad (32-2)$$

با گزینش

$$\theta_C = \pi - \tilde{\theta}_C \quad (33-2)$$

که بازه θ_C در معادله (30-2) داده شده است. می توانیم $\tilde{V}$ را به صورت زیر بنویسیم.

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & -\cos \theta_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_C & \sin \theta_C \\ -\sin \theta_C & \cos \theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (34-2)$$

که با تغییر علامت u_L و s_L می توان دو ماتریس قطری در سمت راست معادله را حذف کرد. بنابراین ماتریس آمیختگی $\tilde{V}$ در (31-2) با بازه $\tilde{\theta}_C$ در (32-2)، هم ارز فیزیکی ماتریس آمیختگی V در معادله (27-2) با بازه θ_C در (30-2) می باشد.

۲-۳-۲ سه نسل کوارکها

زمانی که سه نسل لپتونها را در نظر بگیریم، وضعیت پیچیده تر می شود زیرا پارامتربندیهای ممکن بیشتر (گزینشهای بسیاری برای فازها متناظر با یک فاز فیزیکی) می گردد، ر.ک. (20-2). در زیر روش مرسوم پارامتربندی ماتریس آمیختگی کوارکی می آید [20-16].

N^* مولد دوران یکانی را به صورت ماتریسهای A^{ab} با عناصر

$$\left[A^{ab} \right]_{rs} = \delta_{ar} \delta_{bs} \quad (۳۵-۲)$$

در نظر می گیریم. به گونه ای که

$$A^{ab} A^{cd} = A^{ad} \delta_{bc} \quad (۳۶-۲)$$

با در نظر گرفتن ماتریسهای یکانی و تکمدول زیر

$$W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) \equiv W^{ab}(\zeta_{ab}) = \exp(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta_{ab}^* A^{ba}) \quad a \neq b \quad (۳۷-۲)$$

$$\zeta_{ab} = \theta_{ab} e^{i\eta_{ab}} \quad (۳۸-۲)$$

به آسانی می توان دریافت که

$$(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta_{ab}^* A^{ba})^k = (-1)^k \theta_{ab}^k (A^{aa} + A^{bb}), k \geq 1 \quad \text{به ازای} \quad (۳۹-۲)$$

$$(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta_{ab}^* A^{ba})^{k+1} = (-1)^k \theta_{ab}^{k+1} (e^{i\eta_{ab}} A^{ab} - e^{-i\eta_{ab}} A^{ba}), k \geq 0 \quad \text{به ازای} \quad (۴۰-۲)$$

و در نتیجه

$$\begin{aligned} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta_{ab}^* A^{ba})^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta_{ab}^* A^{ba})^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta_{ab} A^{ab} - \zeta_{ab}^* A^{ba})^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= 1 - (A^{aa} + A^{bb}) + (A^{aa} + A^{bb}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta_{ab}^{2k}}{(2k)!} \\ &\quad + (e^{i\eta_{ab}} A^{ab} - e^{-i\eta_{ab}} A^{ba}) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\theta_{ab}^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= 1 + (\cos \theta_{ab} - 1)(A^{aa} + A^{bb}) + \sin \theta_{ab} (e^{i\eta_{ab}} A^{ab} - e^{-i\eta_{ab}} A^{ba}) \end{aligned} \quad (۴۱-۲)$$

بنابراین عناصر $W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab})$ عبارتند از

$$\begin{aligned} \left[W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) \right]_{rs} &= \delta_{rs} + (c_{ab} - 1)(\delta_{ra} \delta_{sa} + \delta_{rb} \delta_{sa}) \\ &\quad + s_{ab} (e^{i\eta_{ab}} \delta_{ra} \delta_{sb} + e^{-i\eta_{ab}} \delta_{rb} \delta_{sa}) \end{aligned} \quad (۴۲-۲)$$

که $c_{ab} \equiv \cos \theta_{ab}$ و $s_{ab} \equiv \sin \theta_{ab}$ است. مثلاً برای مورد $a=1, b=2, N=3$ داریم،

$$W^{12}(\theta_{12}, \eta_{12}) = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} e^{i\eta_{12}} & 0 \\ -\sin \theta_{12} e^{i\eta_{12}} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43-2)$$

می‌توان دید که ماتریس یکانی و تک‌مدول $W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab})$ دورانی مختلط را در صفحه $a-b$ نشان می‌دهد که اگر $\eta_{ab} = 0$ باشد، به دورانی حقیقی به اندازه زاویه θ_{ab} تبدیل می‌شود.

همچنین گزینش A^{ab} با $a=b$ هم سودمند می‌باشد. زیرا ماتریسهای یکانی قطری ایجاد می‌کند.

هر ماتریس یکانی قطری را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$D(\omega) = \text{diag}(e^{i\omega_1}, \dots, e^{i\omega_N}) = \exp\left(i \sum_{a=1}^N \omega_a A^{aa}\right) \quad (44-2)$$

که ω مجموعه N فاز $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ می‌باشد. هر ماتریس یکانی $N \times N$ ای را می‌توان به صورت حاصل ضرب نوشت.

$$V = D(\omega) \left[\prod_{a < b} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) \right] \quad (a, b = 1, \dots, N) \quad (45-2)$$

با N^2 مولد معادله (۳۵-۲). زاویه θ_{ab} هم در بازه

$$0 \leq \theta_{ab} \leq \frac{\pi}{2} \quad (46-2)$$

قرار دارد. درحالی‌که فازهای ω_k و η_{ab} می‌توانند هر مقداری بین 0 تا 2π را اختیار کند.

$$0 \leq \omega_k \leq 2\pi, \quad 0 \leq \eta_{ab} \leq 2\pi \quad (47-2)$$

ترتیب ضرب کردن ماتریسهای W^{ab} دلخواه است به گونه‌ای که هر ترتیب ضرب منجر به پارامتربندی جدیدی می‌شود. همساز با معادلات (۱۱-۲) و (۱۲-۲) تعداد $N(N-1)/2$ زاویه آمیختگی θ_{ab} و $N(N+1)/2$ فاز وجود دارد که تعداد $N(N-1)/2$ آن فاز η_{ab} و تعداد N آن فاز ω_k می‌باشد.

عبارت معادله (۴۵-۲) را برای V می‌توان به صورت زیر بازنوشت:

$$V = D(\omega - \varphi) \left[\prod_{a < b} D(\varphi) W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) D^\dagger(\varphi) \right] D(\varphi) \quad (a, b = 1, \dots, N) \quad (48-2)$$

که $\varphi = \varphi_1, \dots, \varphi_N$ مجموعه دلخواهی از فازها هستند. به ازای هر فاز φ ، ماتریسهای $D(\varphi)$ و W^{ab} در اتحاد زیر صدق می کنند.

$$D(\varphi) W^{ab} D^\dagger(\varphi) = W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab} + \varphi_a - \varphi_b) \quad (49-2)$$

$$\begin{aligned} [D(\varphi) W^{ab} D^\dagger(\varphi)]_{rs} &= \sum_{t,u} e^{i\varphi_r} \delta_{rt} [\delta_{tu} + (c_{ab} - 1)(\delta_{ta}\delta_{ua} + \delta_{tb}\delta_{ub}) \\ &\quad + s_{ab}(e^{i\eta_{ab}}\delta_{ta}\delta_{ua} - e^{-i\eta_{ab}}\delta_{tb}\delta_{ub})] e^{-i\varphi_s} \delta_{us} \\ &= \delta_{rs} + (c_{ab} - 1)(\delta_{ra}\delta_{sa} - \delta_{rb}\delta_{sb}) \\ &\quad + s_{ab} \left(e^{i(\eta_{ab} + \varphi_a - \varphi_b)} \delta_{ra}\delta_{sb} - e^{-i(\eta_{ab} + \varphi_a - \varphi_b)} \delta_{rb}\delta_{sa} \right) \\ &= W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab} + \varphi_a - \varphi_b) \end{aligned} \quad (50-2)$$

با گزینش $\omega = \varphi$ و بکار بردن اتحاد (50-2) در (45-2)، به رابطه زیر می رسیم

$$V = \left[\prod_{a < b} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab} + \omega_a - \omega_b) \right] D(\omega) \quad (a, b = 1, 2, 3) \quad (51-2)$$

همچنین با استفاده از اتحاد (49-2) و گزینش $\varphi_a = -\eta_{ab}$ ، $\varphi_b = 0$ ، $\varphi_c = 0$ $c \neq a, b$ می توان

ماتریس $W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab})$ را به صورت زیر نوشت

$$W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) = D^a(\eta_{ab}) R^{ab} D^{a\dagger}(\eta_{ab}) = D^{b\dagger}(\eta_{ab}) R^{ab} D^b(\eta_{ab}) \quad (52-2)$$

که

$$[D^a(\eta)]_{rs} = \delta_{rs} + (e^{i\eta} - 1)\delta_{ra}\delta_{sa} \quad (53-2)$$

$$\begin{aligned} [R^{ab}]_{rs} &= [R^{ab}(\theta_{ab})]_{rs} = \delta_{rs} + (\cos \theta_{ab} - 1)(\delta_{ra}\delta_{sa} + \delta_{rb}\delta_{sb}) \\ &\quad + \sin \theta_{ab}(\delta_{ra}\delta_{sb} - \delta_{rb}\delta_{sa}) \end{aligned} \quad (54-2)$$

بجز عناصر $[D^a(\eta)]_{aa} = e^{i\eta}$ همه عناصر ماتریس یکانی و قطری $D^a(\eta)$ با

ویژگی $D^{a\dagger}(\eta) = D^a(-\eta)$ برابر با یک است. ماتریس متعامد R^{ab} ($R^{abT} = R^{ab^{-1}}$) دورانی به-

اندازه زاویه θ_{ab} در صفحه $a-b$ می دهد. مثلاً

$$R^{12} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{12} & \sin \theta_{12} & 0 \\ -\sin \theta_{12} & \cos \theta_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^1(\eta_{12}) = \begin{pmatrix} e^{i\eta_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (55-2)$$

با استفاده از اتحاد (۴۹-۲) از معادله (۴۸-۲) رابطه زیر به دست می آید.

$$V = D(\omega - \varphi) \left[\prod_{a < b} W^{ab}(\theta_{ab}, \varphi_a + \eta_{ab} - \varphi_b) \right] D(\varphi) \quad (a, b = 1, 2, 3) \quad (56-2)$$

می توان مجموعه دلخواه از فازهای $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ را به گونه ای برگزید که $N-1$ فاز از $N(N-1)/2$ فاز η_{ab} را از حاصل ضرب $\prod_{a < b} W^{ab}$ بیرون کشید. تنها $N-1$ فاز η_{ab} را می توان بیرون کشید زیرا تنها $N-1$ عدد $\varphi_a - \varphi_b$ مستقل وجود دارد.

برای کوارکها که $N=3$ است، ماتریس یکانی V بر حسب سه زاویه آمیختگی $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ و شش فاز $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \eta_{12}, \eta_{13}, \eta_{23}$ پارامتر بندی می شود. مجموعه فازهای دلخواه $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ را می توان به گونه ای برگزید که دو فاز از سه فاز η_{ab} تشکیل حاصل ضرب

$$\prod_{a < b} W^{ab} \text{ را بدهند. } \eta_{12} \text{ و } \eta_{23} \text{ را با گزینش زیر}$$

$$\varphi_1 - \varphi_3 = -\eta_{12}, \quad \varphi_2 - \varphi_3 = -\eta_{23} \quad (57-2)$$

پس نمی توان η_{13} را بیرون کشید، زیرا $\varphi_1 - \varphi_3 = -\eta_{12} - \eta_{23}$ دلخواه نیست.

با گزینش ویژه ای در معادله (۵۷-۲)، به رابطه زیر می رسیم

$$\varphi = (\varphi_3 - \eta_{12}, \varphi_3, \varphi_3 + \eta_{23}) \quad (58-2)$$

و می توان با گزینش ویژه ای برای ترتیب بندی حاصل ضرب ماتریسها، ماتریس آمیختگی را در معادله

(۵۷-۲) به صورت زیر نوشت

$$V = D(\omega - \varphi) R^{*2} W^{12} R^{12} D(\varphi) \quad (59-2)$$

$$D(\omega - \varphi) = e^{-i\varphi_3} \text{diag} \left(e^{i(\omega_1 + \eta_{12})}, e^{i\omega_2}, e^{i(\omega_3 + \eta_{23})} \right) \quad (60-2)$$

$$W^{\prime\prime} = W^{\prime\prime}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) = D^{\dagger}(\eta_{\prime\prime}) R^{\prime\prime} D^{\dagger}(\eta_{\prime\prime}) \quad (61-2)$$

$$D(\varphi) = e^{-i\varphi_{\prime}} \text{diag} \left(e^{-i\eta_{\prime}}, 1, e^{i\eta_{\prime\prime}} \right) \quad (62-2)$$

از معادلات بالا برمی آید که مقدار $\varphi_{\prime}$ اثری در معادلات ندارد، و می توان مقدار آن را برابر با صفر اختیار کرد. در معادله (59-2) از $e^{i\omega_{\prime}}$ فاکتور می گیریم و ماتریس یکانی را به صورت زیر می نویسیم.

$$V = e^{i\omega_{\prime}} D^L R^{\prime\prime} W^{\prime\prime} R^{\prime\prime} D^R \quad (63-2)$$

$$D^L \equiv \text{diag} \left(e^{i(\omega_{\prime} - \omega_{\prime} + \eta_{\prime\prime})}, 1, e^{i(\omega_{\prime} - \omega_{\prime} + \eta_{\prime\prime})} \right) \quad (64-2)$$

$$D^R \equiv \text{diag} \left(e^{-i\eta_{\prime}}, 1, e^{i\eta_{\prime\prime}} \right) \quad (65-2)$$

در معادله (59-2) از سه فاز $\omega_{\prime}$ ، $\omega_{\prime} - \omega_{\prime} + \eta_{\prime\prime}$ و $\omega_{\prime} - \omega_{\prime} - \eta_{\prime\prime}$ در سمت چپ، و از دو فاز $\eta_{\prime\prime}$ و $\eta_{\prime\prime}$ در سمت حاصلضرب ماتریسی $R^{\prime\prime} W^{\prime\prime} R^{\prime\prime}$ فاکتور گرفته شد.

دو تعریف زیر را در نظر می گیریم

$$D^U \equiv \text{diag} \left(e^{-i(\psi_u^U - \psi_c^U)}, 1, e^{i(\psi_t^U - \psi_c^U)} \right) \quad (66-2)$$

$$D^D \equiv \text{diag} \left(e^{i(\psi_d^D - \psi_s^D)}, 1, e^{i(\psi_b^D - \psi_s^D)} \right) \quad (67-2)$$

با وارد کردن ماتریس یکانی معادله (63-2) در عبارت معادله (16-2) جریان باردار کوارکی، به عبارت زیر می رسیم.

$$j_{W,Q}^{\mu} = 2 e^{-i(\psi_c^U - \psi_s^D)} e^{i\omega_{\prime}} \overline{q_L^U} \gamma^{\mu} D^{U\dagger} D^L R^{\prime\prime} W^{\prime\prime} R^{\prime\prime} D^R D^D q_L^D \quad (68-2)$$

با گزینش زیر برای فازهای دلخواه میدانهای کوارکی، و به ازای هر مقداری برای فاز آزاد ψ^B ، می توان

حاصلضربهای $e^{-i(\psi_c^U - \psi_s^D)} e^{i\omega_{\prime}}$ ، $D^{U\dagger} D^L$ و $D^R D^D$ را حذف کرد.

$$\psi_u^U = \psi^B + \omega_{\prime} + \eta_{\prime\prime} \quad (69-2)$$

$$\psi_c^U = \psi^B + \omega_{\prime} \quad (70-2)$$

$$\psi_t^U = \psi^B + \omega_{\prime} - \eta_{\prime\prime} \quad (71-2)$$

$$\psi_d^D = \psi^B + \eta_{12} \quad (72-2)$$

$$\psi_s^D = \psi^B \quad (73-2)$$

$$\psi_b^D = \psi^B - \eta_{12} \quad (74-2)$$

با توجه به روابط بالا درمی‌یابیم که دلخواه بودن و ماندن فاز آزاد مشترک میدانهای کوارکی بسیار مهم است، زیرا بنا به قضیهٔ نوثر ناوردایی لاگرانژین تحت دوران فاز مشترک میدانهای کوارکی دلیل پایستگی عدد باریونی می‌باشد.

با توجه به مطالب گفته شده، درمی‌یابیم که با گزینش مناسبی برای فاز دلخواه میدانهای کوارکی، می‌توان جریان باردار کوارکی را به صورت زیر نوشت

$$j_{W,Q}^\mu = 2 \overline{q_L^U} \gamma^\mu V q_L^D \quad (75-2)$$

و ماتریس آمیختگی کوارک هم بسته به سه زاویهٔ آمیختگی $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ و یک فاز فیزیکی η_{12} عبارتست از

$$V = R^{12} W^{13} R^{23} \quad (76-2)$$

با قرار دادن

$$\delta_{12} = -\eta_{12} \quad (77-2)$$

می‌توان شکل صریح ماتریس آمیختگی را نوشت [21]:

$$V = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{12} e^{-i\delta_{12}} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{12}} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{12}} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{12}} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{12}} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix} \quad (78-2)$$

که $s_{ab} \equiv \sin \theta_{ab}$ و $c_{ab} \equiv \cos \theta_{ab}$ است. مقادیر تجربی آن هم برابر است با

$$s_{12} \equiv 0.2243 \pm 0.0016, \quad s_{23} \equiv 0.0413 \pm 0.0015, \quad s_{13} \equiv 0.0037 \pm 0.0005 \quad (79-2)$$

مقدار تجربی فاز δ_{12} هم برابر است با [9]

$$\delta_{12} = 1.05 \pm 0.24 = 6.0^\circ \pm 14^\circ \quad (80-2)$$

از آنجا که θ_{13} و θ_{23} بسیار کوچک هستند، مقدار زاویه آمیختگی θ_{12} در عمل با مقدار زاویه کابیو، معادله (۲۸-۲)، سازگار است. در فرآیندهایی که شامل کوارکهای b و t نمی‌شود، نسخه دو نسلی ماتریس آمیختگی (۲۷-۲) بسیار مناسب است. با قراردادن در معادله (۷۹-۲)

$$s_{12} = \lambda, \quad s_{23} = A\lambda^2, \quad s_{13}e^{-i\delta_{13}} = A\lambda^2(\rho - i\eta) \quad (۸۱-۲)$$

پارامتربندی تقریبی به دست می‌آید که سلسله مراتب $1 \ll s_{12} \ll s_{23} \ll s_{13}$ را نشان می‌دهد [۲۲].

با بسط هر درایه ماتریس آمیختگی کوارکی برحسب توانهای λ و نگه داشتن تنها جملات ابتدایی، به پارامتربندی ولفنشتاین^۱ می‌رسیم.

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & A\lambda^2(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & A\lambda^2 \\ A\lambda^2(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4) \quad (۸۲-۲)$$

که در آن تنها V_{ub} دقیق است. داده‌های تجربی با استفاده از پارامتربندی ولفنشتاین تا مرتبه λ^6 برازش می‌شود [۲۳، ۲۴]:

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{8} & \lambda + O(\lambda^5) & A\lambda^2(\rho - i\eta) \\ -\lambda + \frac{A^2\lambda^6}{2}[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^4}{8}(1 + 4A^2) & A\lambda^2 + O(\lambda^6) \\ A\lambda^2(1 - \bar{\rho} - i\bar{\eta}) & -A\lambda^2 + \frac{A\lambda^4}{2}[1 - 2(\rho + i\eta)] & 1 - \frac{A^2\lambda^4}{2} \end{pmatrix} \quad (۸۳-۲)$$

$$\bar{\rho} = \rho \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right), \quad \bar{\eta} = \eta \left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right) \quad (۸۴-۲)$$

^۱ Wolfenstein

۲-۴ جرم تبهگن

اگر کوارکهای بالا گون و پایین گون تبهگن جرمی یکدیگر باشند، ساختار ماتریس آمیختگی ساده‌تر می‌شود. اما همانگونه که می‌دانیم و در جدول (۱-۱) هم آمده جرم کوارکها بسیار متفاوت با یکدیگر است. با این حال در آزمایشهایی که به جرم کوارک خیلی وابسته نیست مانند آزمایشهای در انرژی بالا می‌توان جرم کوارکهای d و s را تقریباً تبهگن جرمی هم در نظر گرفت. البته این روند برای بخش لپتونی بسیار سودمند است، زیرا جرم نوترینوها تقریباً تبهگن می‌باشند.

با فرض آنکه کوارکهای d و s تبهگن باشند یعنی تمیزناپذیر باشند، (زیرا همهٔ ویژگیهای آنها یکسان است)، آنگاه همهٔ مشاهده‌پذیرها تحت دوران یکانی دلخواهی در فضای میدان $d-s$ ناوردا می‌باشند.

$$q^D \rightarrow U^{12} q^D \quad (۸۵-۲)$$

که U^{12} هم یکانی می‌باشد.

$$U^{12} = \begin{pmatrix} U_{11}^{12} & U_{12}^{12} & 0 \\ U_{21}^{12} & U_{22}^{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۸۶-۲)$$

با نوشتن ماتریس آمیختگی به شکل (۵۶-۲) با گزینش زیر می‌توان فازهای η_{12} و η_{23} را بیرون کشید.

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\eta_{12} \quad , \quad \varphi_2 - \varphi_3 = -\eta_{23} \quad (۸۷-۲)$$

که در نتیجه ماتریس آمیختگی به شکل زیر درمی‌آید:

$$V = D^L R^{12} R^{23} W^{12} D^R \quad (۸۸-۲)$$

$$D^L \equiv \text{diag} \left(e^{i(\omega_1 + \eta_{12})}, e^{i(\omega_2 + \eta_{23})}, e^{i\omega_3} \right) \quad (۸۹-۲)$$

$$D^R \equiv \text{diag} \left(e^{-i\eta_{12}}, e^{-i\eta_{23}}, 1 \right) \quad (۹۰-۲)$$

با جایگذاری عبارت (۲-۸۸) در چگالی جریان باردار (۲-۱۶) و انتخاب فازهای دلخواه به صورت زیر

(به ازای هر مقداری برای ψ^B) برای میدانهای کوارکی فازهای $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \eta_{12}, \eta_{23}$ حذف می شوند.

$$\psi_u^U = \psi^B + \omega_1 + \eta_{12} \quad (۲-۹۱)$$

$$\psi_c^U = \psi^B + \omega_2 + \eta_{23} \quad (۲-۹۲)$$

$$\psi_t^U = \psi^B + \omega_3 \quad (۲-۹۳)$$

$$\psi_d^D = \psi^B + \eta_{12} \quad (۲-۹۴)$$

$$\psi_s^D = \psi^B + \eta_{23} \quad (۲-۹۵)$$

$$\psi_b^D = \psi^B \quad (۲-۹۶)$$

و در نتیجه ماتریس آمیختگی به صورت زیر درمی آید که فاقد فازهای غیرفیزیکی است.

$$V = R^{23} R^{12} W^{12} \quad (۲-۹۷)$$

اگر جرم d و s تبهگن باشد، با انتخاب $U^{12} = (W^{12})^\dagger$ می توان W^{12} را از ماتریس آمیختگی حذف کرد و ماتریس مذکور را تنها برحسب زوایای آمیختگی θ_{12} و θ_{23} (به ترتیب دوران در صفحه $s-b$ و $d-b$ کوارکهای پایین-گون تمایزپذیر) نوشت. بدین ترتیب هم زاویه آمیختگی سوم و هم فاز حذف می شود.^۱

$$V = R^{23} R^{12} \quad (۲-۹۸)$$

^۱ در بخش ۲-۶ درباره حقیقی بودن ماتریس آمیختگی (پایسته بودن CP) و تبهگنی جرمی کوارکهای بالاگون یا پایین گون بحث خواهیم کرد.

اگر همه کوارکهای بالاگون و یا همه کوارکهای پایینگون دارای جرم تبهگن باشند، آمیختگی مشاهده‌پذیر نخواهد بود و به تفاوت جرمی کوارکهای بالاگون یا پایینگون بستگی نخواهد داشت.

۲-۵ ماتریس آمیختگی کوارکها با یک عنصر صفر

اگر ماتریس آمیختگی حداقل دارای یک عنصر صفر باشد، با توجه به پارامتربندی ماتریس با جایگشت دلخواه سطرها و ستونها، به‌گونه‌ای که روابط یکانی حفظ شوند، می‌توان پارامتربندیهای دیگری هم به‌دست آورد.

$$V V^\dagger = 1 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^3 V_{\alpha k} V_{\beta k}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3) \quad (2-99)$$

$$V^\dagger V = 1 \Leftrightarrow \sum_{\alpha=1}^3 V_{\alpha k} V_{\alpha j}^* = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3) \quad (2-100)$$

با جایگشت مناسب سطرها و ستونها در ماتریس آمیختگی (۲-۷۸) می‌توان $s_{13} e^{-i\delta_{13}}$ را به محل عنصر صفر انتقال داد و در پارامتربندی جدید $s_{13} = 0$ می‌شود و فاز δ_{13} ناپدید می‌گردد و در نتیجه ماتریس آمیختگی حقیقی به‌دست می‌آید که نشان‌دهنده تقارن CP می‌باشد.

مثلاً با فرض صفر بودن عنصر V_{22} و سپس تعویض ستون دوم و سوم، ماتریس آمیختگی به‌صورت

زیر درمی‌آید

$$V = \begin{pmatrix} -s_{12} c_{23} - c_{13} s_{12} e^{i\delta_{13}} & s_{23} c_{13} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} \\ c_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta_{13}} & s_{12} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} & c_{23} c_{13} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta_{13}} \end{pmatrix} \quad (2-101)$$

البته پس از این دوران زاویه θ_{ab} دیگر نشان‌دهنده دوران در صفحه $a-b$ نیست. اگر $V_{22} = 0$ و

در نتیجه $s_{13} = 0$ باشد (ماتریس آمیختگی حقیقی باشد)

$$V|_{V_{22}=0} = \begin{pmatrix} -s_{12} c_{23} & s_{23} & c_{12} c_{23} \\ c_{12} c_{13} & 0 & s_{12} \\ s_{12} s_{23} & c_{23} & -c_{12} s_{23} \end{pmatrix} \quad (2-102)$$

اگر هر يك از سه زاويه صفر باشد، فاز ناپديد مي‌شود. اگر يكي از سه زاويه آميختگي صفر شود آنگاه يك عنصر از ماتريس آميختگي صفر مي‌شود: اگر $\theta_{12} = 0$ باشد، $V_{12} = 0$ مي‌شود. اگر $\theta_{23} = 0$ باشد، $V_{23} = 0$ مي‌شود. اگر $\theta_{13} = 0$ باشد، $V_{13} = 0$ مي‌شود. در هر يك از اين حالاتها مي‌توان فاز را حذف كرد. مي‌توان اين كار را حتي بدون جايگشت سطرها يا ستونها انجام داد. مثلاً اگر $\theta_{12} = 0$ باشد، ماتريس آميختگي معادله (۷۸-۲) مي‌شود

$$V|_{\theta_{12}=0} = \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23} & s_{23}c_{13} \\ -c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -s_{23} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (۱۰۳-۲)$$

$$V|_{\theta_{12}=0} = \begin{pmatrix} c_{13}e^{-i\delta_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{13} & 0 & s_{13} \\ -s_{23}s_{13} & c_{23} & s_{23}c_{13} \\ -c_{23}s_{13} & -s_{23} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\delta_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۱۰۴-۲)$$

با فازبندي دوباره کواركه‌هاي u, d به صورت $u \rightarrow e^{-i\delta_{13}}u$ و $d \rightarrow e^{-i\delta_{13}}d$ مي‌توان فاز δ_{13} را حذف كرد.

$$\begin{aligned} D^{ab}(\eta)W^{ab}(\theta_{ab} = \pi / 2, \eta_{ab}) &= W^{ab}(\theta_{ab} = \pi / 2, \eta_{ab} + \eta) \\ &= W^{ab}(\theta_{ab} = \pi / 2, \eta_{ab})D^{ab\dagger}(\eta) \end{aligned} \quad (۱۰۵-۲)$$

$$[D^{ab}(\eta)]_{rs}\delta_{rs} + (e^{i\eta} - 1)\delta_{ra}\delta_{sa} + (e^{-i\eta} - 1)\delta_{rb}\delta_{sb} \quad (۱۰۶-۲)$$

$$W^{ab}(\theta_{ab} = \pi / 2, \eta_{ab}) = D^{ab}(\eta_{ab})R^{ab}(\theta_{ab} = \pi / 2) = R^{ab}(\theta_{ab} = \pi / 2)D^{ab\dagger} \quad (۱۰۷-۲)$$

$$\overline{q_L^U} \xrightarrow{\text{CP}} -q_L^{UT} C^{-1} \gamma^\circ D^\dagger(\vec{\xi}_U) \quad (۱۰۸-۲)$$

$$q_L^D \xrightarrow{\text{CP}} D(\vec{\xi}_D) \gamma^\circ C \overline{q_L^D}^T \quad (۱۰۹-۲)$$

$$\begin{aligned} j_{W,Q}^\mu &\xrightarrow{\text{CP}} -2q_L^{UT} C^{-1} \gamma^\circ \gamma^\mu \gamma^\circ C D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) \overline{q_L^D}^T \\ &= -2q_L^{UT} C^{-1} \gamma^{\mu\dagger} C D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) \overline{q_L^D}^T \\ &= 2q_L^{UT} \gamma^{\mu*} D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) \overline{q_L^D}^T = -2\overline{q_L^D} \gamma^{\mu\dagger} D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) q_L^U \\ &= -2\overline{q_L^D} D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) \gamma_\mu q_L^U \end{aligned} \quad (۱۱۰-۲)$$

۲-۶ نقض CP

برای درک چگونگی رابطه نقض CP در برهمکنشهای ضعیف و ماتریس آمیختگی کوارکها به رفتار جریان باردار کوارکی (۷۵-۲) تحت تبدیلات CP می‌پردازیم. برای تبدیل آرایه‌های $q_L^D, \bar{q}_L^U$ در (۲-۷۵) تحت CP از روابط زیر (۲-۱۰۸) و (۲-۱۰۹) استفاده می‌کنیم و به (۲-۱۱۰) و (۲-۱۱۱) می‌رسیم، $(D(\vec{\xi}_D), D(\vec{\xi}_U))$ ماتریسهای قطری فاز نامعین CP برای میدانهای کوارکی می‌باشند:

$$\psi(x) \xrightarrow{\text{CP}} \psi^{\text{CP}}(x_p) = \xi_{\text{CP}} \gamma^0 C \bar{\psi}^T(x) = -\xi_{\text{CP}} C \psi^*(x) \quad (۲-۱۰۸)$$

$$\bar{\psi}(x) \xrightarrow{\text{CP}} \bar{\psi}^{\text{CP}}(x_p) = -\xi_{\text{CP}}^* C \psi^T(x) C^\dagger \gamma^0 \quad (۲-۱۰۹)$$

$$\bar{q}_L^U \xrightarrow{\text{CP}} -\bar{q}_L^U C^{-1} \gamma^0 D^\dagger(\vec{\xi}_U) \quad (۲-۱۱۰)$$

$$q_L^D \xrightarrow{\text{CP}} D(\vec{\xi}_U) \gamma^0 C \bar{q}_L^D{}^T \quad (۲-۱۱۱)$$

$$\begin{aligned} j_{W,Q}^\mu &\xrightarrow{\text{CP}} -2 q_L^U{}^T C^{-1} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 C D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) \bar{q}_L^D{}^T \\ &= -2 q_L^U{}^T C^{-1} \gamma^\mu{}^\dagger C D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) \bar{q}_L^D{}^T \quad (۲-۱۱۲) \\ &= 2 q_L^U{}^T \gamma^\mu{}^* D^\dagger(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) \bar{q}_L^D{}^T = -2 \bar{q}_L^D \gamma^\mu{}^\dagger D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) q_L^U \\ &= -2 \bar{q}_L^D D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) \gamma_\mu q_L^U \quad \left((\gamma^\mu)^\dagger = \gamma_\mu \right) \end{aligned}$$

$$W_\mu \xrightarrow{\text{CP}} e^{i\xi_W} W_\mu{}^\dagger \quad (۲-۱۱۳)$$

رابطه بالا برای بوزونهای W است و به سبب تغییر علامت مؤلفه‌های فضایی آن تحت وارونی فضا، فاز نامعین ξ_W و اندیس لورنتسی بالا می‌رود. با ترکیب دو معادله بالا به (۲-۱۱۴) می‌رسیم. اندیس لورنتس بالابرنده و پایین‌آورنده W_μ و $j_{W,Q}^\mu$ هم را خنثی کرده و ناوردایی لورنتسی برقرار می‌ماند.

$$j_{W,Q}^\mu W_\mu \xrightarrow{\text{CP}} -2 e^{i\xi_W} \bar{q}_L^D D(\vec{\xi}_D) V^T D^\dagger(\vec{\xi}_U) \gamma_\mu q_L^U W_\mu{}^\dagger \quad (\text{تبدیل CP}) \quad (۲-۱۱۴)$$

$$(j_{W,Q}^\mu W_\mu)^\dagger \xrightarrow{\text{CP}} 2 \bar{q}_L^D V^\dagger \gamma^\mu q_L^U W_\mu{}^\dagger \quad (\text{همیوگ هرمتیتی}) \quad (۲-۱۱۵)$$

بخشی از لاگرانژی جریان باردار کوارکی (۱-۷۶) است و لاگرانژی در صورتی تحت CP ناورداست که

$$j_{W,Q}^\mu W_\mu \xrightarrow{\text{CP}} (j_{W,Q}^\mu W_\mu)^\dagger \Rightarrow -e^{i\xi_W} D(\vec{\xi}_D) V^T = V^\dagger$$

$$\Rightarrow W_\mu \xrightarrow{\text{CP}} -W^\mu{}^\dagger \quad (\xi_W = \pi \text{ اگر }) \quad (116-2)$$

$$j_{W,Q}^\mu W_\mu \xrightarrow{\text{CP}} (j_{W,Q}^\mu W_\mu)^\dagger \xRightarrow{\text{transposing}} \Rightarrow D^{-1}(\vec{\xi}_U) V D(\vec{\xi}_D) = V^* \Leftrightarrow e^{-i\xi_a} V_{\alpha k} e^{i\xi_k} = V_{\alpha k}^*$$

$$(117-2)$$

$$(118-2)$$

$$\Rightarrow V = D^{1/2}(\vec{\xi}_U) \mathcal{O} D^{-1/2}(\vec{\xi}_D) \Leftrightarrow V_{\alpha k} e^{i\xi_{\alpha}/2} \mathcal{O}_{\alpha k} e^{-i\xi_k/2}$$

$$\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{-1} \text{ و } \vec{\xi}_U = (\xi_u, \xi_c, \xi_t) \text{ و } \vec{\xi}_D = (\xi_d, \xi_s, \xi_b)$$

همان گونه که در بخش ۲-۳ گفته شد، نمی توان از فاز فیزیکی ماتریس آمیختگی V فاکتور گرفت تا ماتریسهای قطری در دو طرف آن بنشینند. پس اگر فاز فیزیکی در ماتریس آمیختگی صفر نباشد، به- ازای هیچ مقداری از فازهای CP، یعنی فازهای $\vec{\xi}_U, \vec{\xi}_D$ ، معادله (۱۱۷-۲) نمی تواند صادق باشد^۱ [۲۵].

یعنی تقارن CP مستلزم آن است که ماتریس آمیختگی کوآرک حقیقی باشد.

$$V = V^* \Leftrightarrow \text{تقارن CP} \quad (119-2)$$

اگر فاز فیزیکی ماتریس آمیختگی غیرصفر باشد، لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار کوآرکی تقارن لاگرانژی تحت تبدیل CP را می شکند. اگر فاز فیزیکی ماتریس برابر با صفر باشد، CP پایسته است و فاز همه میدانهای کوآرکی یکسان و طبق قرارداد برابر با صفر اختیار می شود.

^۱ این مطلب در کمتر مرجعی ارائه شده. در برخی از کتابها عنوان می گردد اگر V مختلط باشد، لاگرانژی حقیقی نیست و نقض T و CP پیش می آید. در صورتیکه این موضوع بی معناست زیرا اساساً ساختار لاگرانژی به گونه ای است که هرمیتی باشد، و هر جمله غیر هرمیتی با همیوگ هرمیتی خود همراه است. در فصل ۳ همین بحث را به روشی دیگر برای نوترینوهای ماژورانا عنوان خواهیم کرد.

$$\xi_u = \xi_c = \xi_t = \xi_d = \xi_s = \xi_b = 0 \quad (120-2)$$

اکنون در پی بررسی ماتریسهای جرمی کوارکهای بالاگون و پایینگون تحت CP هستیم. به این منظور از معادله (۱۶۲-۱) جمله جرمی لاگرانژی کوارکی را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & \left\{ M'^U = Y'^U v / \sqrt{2}, \quad M'^D = Y'^D v / \sqrt{2} \right. \\ & \left. \mathcal{L}_{H,Q} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left[\sum_{\alpha,\beta=d,s,b} Y'_{\alpha\beta} \overline{q'_{\alpha L}} q'_{\beta R} + \sum_{\alpha,\beta=u,c,t} Y'_{\alpha\beta} \overline{q'_{\alpha L}} q'_{\beta R} \right] + \text{h.c.} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \mathcal{L}_{q,\text{mass}} = - \overline{q'_L{}^U} M'^U q'_R{}^U - \overline{q'_R{}^U} M'^U q'_L{}^U - \overline{q'_L{}^D} M'^D q'_R{}^D - \overline{q'_R{}^D} M'^D q'_L{}^D \end{aligned} \quad (121-2)$$

دیگر بخشهای لاگرانژی هم که تحت تبدیل CP ناورد هستند. ماتریسهای یکانی W_L, W_R^U, W_R^D میدانهای کوارکی را درهم می‌آمیزند.

$$\begin{aligned} q'_L{}^U & \xrightarrow{\text{CP}} W_L \gamma^\circ C \overline{q'_L{}^U}^T, & q'_R{}^U & \xrightarrow{\text{CP}} W_R^U \gamma^\circ C \overline{q'_R{}^U}^T \\ q'_L{}^D & \xrightarrow{\text{CP}} W_L \gamma^\circ C \overline{q'_L{}^D}^T, & q'_R{}^D & \xrightarrow{\text{CP}} W_R^D \gamma^\circ C \overline{q'_R{}^D}^T \end{aligned} \quad (122-2)$$

ناوردایی لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار سبب می‌شود که آمیختگی کوارکهای چپگرد بالا و پایین یکسان باشد، درحالیکه کوارکهای راستگرد بالا و پایین می‌توانند مستقل از هم آمیخته شوند. تبدیل جمله جرمی کوارک در (۱۲۱-۲) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{q,\text{mass}} & \xrightarrow{\text{CP}} - \overline{q'_L{}^U} W_R^U M'^U W_L^* q'_L{}^U - \overline{q'_L{}^U} W_L^T M'^U W_R^U q'_R{}^U \\ & - \overline{q'_R{}^D} W_R^D M'^D W_L^* q'_L{}^D - \overline{q'_R{}^D} W_L^T M'^D W_R^D q'_R{}^D \end{aligned} \quad (123-2)$$

$$(123-2), (121-2) \Rightarrow \begin{cases} W_L^\dagger M'^U W_R^U = M'^U{}^* \\ W_L^\dagger M'^D W_R^D = M'^D{}^* \end{cases} \quad (124-2)$$

تا جمله جرمی لاگرانژی (۱۲۲-۲) تحت تبدیل CP ناورد بماند.

$$\begin{cases} W_L^* M'^U W_R^U{}^T = M'^U{}^* \\ W_L^* M'^D W_R^D{}^T = M'^D{}^* \end{cases} \Rightarrow \text{ماتریسهای یکانی } W_L, W_R^U, W_R^D \text{ متقارن هم هستند} \quad (125-2)$$

همواره یکی از دو معادله (۱۲۴-۲) برقرار است و اگر W_L در یکی از دو شرط (۱۲۴-۲) صدق کند در دیگری نمی تواند صادق باشد. مثلاً فرض کنیم که W_L, W_R^D در معادله دوم (۱۲۴-۲) صادق هستند.

برای این کار از معادله قطری ساز (۱۶۵-۱) با $M'^D = \frac{Y'^D v}{\sqrt{2}}$ بهره می بریم.

$$\left\{ \begin{array}{l} V_L^{D\dagger} Y'^D V_R^D = Y^D, Y_{\alpha\beta}^D = y_{\alpha}^D \delta_{\alpha\beta} \rightarrow V_L^{D\dagger} \frac{M'^D \sqrt{2}}{v} V_R^U = m_{\alpha}^D \delta_{\alpha\beta} \\ (\alpha, \beta = d, s, b) \end{array} \right. \quad (126-2)$$

$$\Rightarrow V_L^{D\dagger} M'^D V_R^U = M^D, M^D = m_{\alpha}^D \delta_{\alpha\beta}$$

$$\left. \begin{array}{l} (126-2) \quad (M'^D = V_L^D M^D V_R^{U*}) \\ \text{معادله دوم (124-2)} \end{array} \right\} \Rightarrow V_L^{D^T} W_L^{\dagger} V_L^D M^D V_R^{D\dagger} W_R^D V_R^{D*} = M^D \quad (127-2)$$

با فرض تبهگن نبودن ویژه مقدارهای M^D ، معادله بالا تنها زمانی برقرار خواهد بود که

$$\left\{ \begin{array}{l} V_L^{D^T} W_L^{\dagger} V_L^D = D^{D\dagger} \\ V_L^{D\dagger} W_R^D V_R^{D*} = D^D \end{array} \right. \quad (128-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_L = V_L^D D^D V_L^{D^T} \\ W_R^D = V_R^D D^D V_R^{D^T} \end{array} \right. \quad \text{یکانی و متقارن هستند} \quad (130-2)$$

اکنون با استفاده از شرط (۱۲۴-۲) $W_L^{\dagger}$ را در (۱۳۰-۲) وارد می کنیم:

$$M'^U = \frac{Y'^U v}{\sqrt{2}}, (166-1) \Rightarrow V_L^{U\dagger} M'^U V_R^U = M^U \quad (M_{\alpha\beta}^U = m_{\alpha}^U \delta^{\alpha\beta}, m_{\alpha}^U \in \mathbb{R}^+) \quad (131-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (131-1) \\ V = V_L^{U\dagger} V_L^D \quad (176-1) \end{array} \right. \Rightarrow V^* D^{D\dagger} V^{\dagger} M^U V_R^{U\dagger} W_R^U V_L^{U*} = M^U \quad (132-2)$$

با فرض تبهگن نبودن ویژه مقدارهای M^U ، معادله بالا تنها زمانی برقرار خواهد بود که

$$\left\{ \begin{array}{l} V^* D^{D\dagger} V^{\dagger} = D^{U\dagger} \\ V_R^{U\dagger} W_R^U V_R^{U*} = D^U \end{array} \right. \quad (133-2)$$

و درنتیجه رابطه زیر باید برای W_R^U یکانی و متقارن برقرار باشد.

$$W_R^U = V_R^U D^U V_R^{U\text{T}} \quad (134-2)$$

از طرفی چون V ثابت می‌شود معادله اول (133-2) در حالت کلی برقرار نیست. تنها اگر ماتریسهای آمیختگی V با ماتریسهای قطری فاز D^D, D^U در (133-2) صدق کنند، تقارن CP وجود دارد. می‌توان معادله اول (133-2) را به‌گونه‌ای نوشت که با (117-2) منطبق باشد:

$$(134-2) \Rightarrow D^{U\dagger} V D^D = V^* \quad (135-2)$$

انطباق (117-2) و (133-2) نشان می‌دهد ناوردایی لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار تحت CP با فرض قطری بودن جملات جرمی با ناوردایی جملات جرمی تحت CP با فرض قطری بودن لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار، سازگار است و این دو روش یکی هستند.

اکنون دوباره با استفاده از معادلات (124-2) در پی آنیم که برای ماتریسهای جرمی M'^D, M'^U شرطهای بیابیم تا ناوردایی تحت تبدیل CP برقرار بماند. از معادلات (124-2) W_L را حذف می‌کنیم:

$$W_R^{D\dagger} [M'^{D\dagger} M'^U] W_R^U = [M'^{D\dagger} M'^U]^* \quad (136-2)$$

اگر

$$M'^{D\dagger} M'^U = P^\dagger R Q \quad R = R^* \quad P^\dagger = P^{-1} \quad Q^\dagger = Q^{-1} \quad (137-2)$$

$$\begin{cases} (136-2) \\ (137-2) \end{cases} \Rightarrow W_R^D = P^\dagger P^*, W_R^U = Q \quad R = R^* \quad P^\dagger = P^{-1} \quad Q^\dagger = Q^{-1} \quad (138-2)$$

در این صورت جواب معادله (136-2) به‌صورت زیر است.

$$W_R^D = P^\dagger P^*, \quad W_R^U = Q^\dagger Q^* \quad (139-2)$$

که یکانی و متقارن می‌باشد. شرط (138-2) و برقرار بودن تقارن CP در دو مورد زیر رخ می‌دهد:

۱. $M'^D = 0$ یا $M'^U = 0$ چون جرم کوارکها غیر صفر است این مورد برای کوارکها رخ نمی‌دهد.

دهد. اما در مدل استاندارد جرم نوترینوها صفر در نظر گرفته می‌شود. در دوگانه‌های $SU(2)_L$

نوترینوها همانند کوارکهای بالاگون هستند که مؤلفه سوم ایزواسپین ضعیف آنها $I_3 = \frac{1}{2}$

است، لپتونهای باردار هم همانند کوارکهای پایین‌گون می‌باشند. از آنجا که در مدل استاندارد نوترینوها بدون جرم هستند، به‌ازای هر مقداری از ماتریس جرمی لپتون باردار تقارن CP در بخش لپتونی حفظ می‌شود. اما مشکلی دارد و آن این است که نمی‌تواند توضیحی برای آمیختگی لپتون‌ها ارائه بدهد (این موضوع را در بخش ۱-۵ دیدیم).

۲. $M'^{D\dagger} M'^U$ حقیقی باشد) در این مورد W_R^D, W_R^U برابر با ماتریس همانی با فازی دلخواه هستند. مورد بسیار ساده آن

$$M'^U = M'^{U*}, \quad M'^D = M'^{D*} \quad (۱۴۰-۲)$$

است. که با شرط حقیقی بودن ماتریس آمیختگی، (۱۱۹-۲)، همساز است. اگر هم M'^U و

هم M'^D حقیقی باشند، می‌توان آنها را با ماتریسهای متعامد $V_R^U = \mathcal{O}_R^U$ و $V_L^U = \mathcal{O}_L^U$

و $V_R^D = \mathcal{O}_R^D$ مطابق با معادلات (۱۶۵-۱) و (۱۶۶-۱) قطری کرد.

فصل سوم

جرم نوترینو در مدل‌های $SU(2)_L \times U(1)_Y$

۳ جرم نوترینو در مدل‌های $SU(2)_L \times U(1)_Y$

برای توضیح جرم نوترینو باید در فیزیک ماورای مدل استاندارد به جستجو پرداخت. اما این موضوع به این معنی نیست که الزاماً از گروه پیمانه‌ای مدل استاندارد خارج شویم. همانگونه که در فصل نخست توضیح داده شد، این گروه تنها بوزونهای تبادلی را فیکس می‌کند. لپتون‌ها و محتوای هیگز تاحد زیادی اختیاری انتخاب می‌شوند. با همین گروه پیمانه‌ای $SU(2)_L \times U(1)_Y$ می‌توان فرمیون‌ها یا بوزونهای هیگز بیشتری را در این مدل حدس زد، به‌گونه‌ای که مدل نوترینوهای جرم‌دار را پیش‌بینی کند.

همانگونه که در فصل نخست توضیح داده شد، مدل استاندارد دربرگیرنده هم تصویر راستگرد و هم چپگرد کایرال برای همه فرمیون‌ها بحر نوترینوها می‌باشد. اگر متناظر با هر لپتون، نوترینوی راستگردی، $\nu_{\alpha R}$ ($\alpha = e, \mu, \tau$)، را به مدل استاندارد بیفزاییم، ناتقارنی ناشی از نبود میدانهای راستگرد نوترینو بین بخش کوارکی و لپتونی مدل استاندارد از بین می‌رود و به مدل استاندارد/اندک تعمیم‌یافته^۱ دست می‌یابیم. میدانهای $\nu_{\alpha R}$ یکتایی کل گروه $Y = 0$ با فوق‌بار $SU(2)_L \times U(1)_Y$ هستند، یعنی هیچ برهمکنشی با بوزونهای پیمانه‌ای ندارند و به‌همین دلیل به آنها نوترینوهای سترون^۲ گویند. نوترینوهای سترون تنها برهمکنش گرانشی دارند [۲۶].

در برابر این نامگذاری، به نوترینوهای چپگرد معمولی که در برهمکنشهای ضعیف شرکت می‌کنند، نوترینوهای فعال^۳ می‌گویند. ویژگی اساسی نوترینوهای سترون راستگرد بودن آنها نیست، چرا که می‌توانستیم با میدانهای کایرال چپگرد $\tilde{\nu}_{\alpha L} = \nu_{\alpha L}^C$ هم به‌همان ترتیب کار کنیم، ویژگی مهم آنها یکتایی بودنشان تحت تقارنهای مدل استاندارد است و به‌همین دلیل هم سترون می‌باشند.

در مدل استاندارد اندک تعمیم‌یافته با سه نوترینوی راستگرد، به لاگرانژی یوکاوا هیگز-لپتون (۱-)

(۱۱۳)، جمله‌ای همانند جمله دوم (۱-۱۴۶) اضافه می‌کنیم:

^۱ minimally extended standard model

^۲ Sterile

^۳ active

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}'^l \overline{L}_{\alpha L} \Phi l_{\beta R}' + \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha\beta}'^\nu \overline{L}_{\alpha L} \tilde{\Phi} \nu_{\beta R}' + \text{H.C.} \quad (1-3)$$

که Y'^ν ماتریس جدیدی از جفت‌شدگیهای یوکاواست. در پیمانه یکانی می‌توان لاگرانژی یوکاوی هیگز لپتون را به صورت

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{\nu + H}{\sqrt{2}} \right) \left[\overline{l}_L' Y'^l l_R' + \overline{\nu}_L' Y'^\nu \nu_R' \right] + \text{H.C.} \quad (2-3)$$

$$l_L' \equiv \begin{pmatrix} e_L' \\ \mu_L' \\ \tau_L' \end{pmatrix}, \quad l_R' \equiv \begin{pmatrix} e_R' \\ \mu_R' \\ \tau_R' \end{pmatrix}, \quad \nu_L' \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL}' \\ \nu_{\mu L}' \\ \nu_{\tau L}' \end{pmatrix}, \quad \nu_R' \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eR}' \\ \nu_{\mu R}' \\ \nu_{\tau R}' \end{pmatrix} \quad (3-3)$$

می‌توان جفت‌شدگیهای یوکاوی لپتون باردار، Y'^l و ماتریس جفت‌شدگی یوکاوی نوترینو، Y'^ν را همانند معادله (۱-۱۶) قطری کرد.

$$V_L^{\nu\dagger} Y'^\nu V_R^\nu = Y^\nu, \quad Y_{kj}^\nu = y_k^\nu \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3) \quad (4-3)$$

$$V_R^{\nu\dagger} = (V_R^\nu)^{-1}, \quad V_L^{\nu\dagger} = (V_L^\nu)^{-1}$$

با تعریف آرایه لپتونهای باردار کایرال مطابق (۱-۱۷) و آرایه نوترینوهای جرم‌دار کایرال به صورت زیر

$$n_L = V_L^{\nu\dagger} \nu_L' \equiv \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix}, \quad n_R = V_R^{\nu\dagger} \nu_R' \equiv \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \quad (5-3)$$

لاگرانژی یوکاوی هیگز-لپتون را به صورت زیر در می‌آید

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{\nu + H}{\sqrt{2}} \right) \left[\overline{l}_L Y'^l l_R + \overline{n}_L Y^\nu n_R \right] + \text{H.C.} \quad (6-3)$$

$$= - \left(\frac{\nu + H}{\sqrt{2}} \right) \left[\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y_\alpha^l \overline{l}_{\alpha L} l_{\alpha R} + \sum_{k=1} y_k^\nu \overline{\nu}_{kL} \nu_{kR} \right] + \text{H.C.}$$

با استفاده از میدانهای لپتون دیراکی باردار (همانند آنچه در (۱-۱۸) تعریف شده است) و میدانهای دیراکی نوترینو

$$\begin{aligned} l_{\alpha} &= l_{\alpha L} + l_{\alpha R} & (\alpha=e, \mu, \tau) \\ \nu_k &= \nu_{k L} + \nu_{k R} & (k=1, 2, 3) \end{aligned} \quad (7-3)$$

در نهایت به لاگرانژی زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{H,L} = & - \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \frac{y_{\alpha}^l \nu}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha}} l_{\alpha} - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^{\nu} \nu}{\sqrt{2}} \overline{\nu_k} \nu_k \\ & - \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \frac{y_{\alpha}^l}{\sqrt{2}} \overline{l_{\alpha}} l_{\alpha} H - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^{\nu}}{\sqrt{2}} \overline{\nu_k} \nu_k H \end{aligned} \quad (8-3)$$

که در نتیجه جرم نوترینوهای دیراکی که در جمله آخر با میدان هیگز جفت شده‌اند، به دست می‌آید.

$$m_k = \frac{y_k^{\nu} \nu}{\sqrt{2}} \quad (k=1, 2, 3) \quad (9-3)$$

۳-۱ آمیختگی نوترینوهای دیراکی

آمیختگی نوترینوهای دیراکی همانند آمیختگی کوارکهاست که در فصل دوم درباره آن بحث شد. با استفاده از معادلات (۱۱۷-۱) و (۵-۳) جریان باردار ضعیف لپتونی معادله (۶۸-۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 \overline{\nu'_L} \gamma^{\rho} l'_L = 2 \overline{n_L} V_L^{\nu \dagger} \gamma^{\rho} V_L^l l_L = 2 \overline{n_L} V_L^{\nu \dagger} V_L^l \gamma^{\rho} l_L \quad (10-3)$$

جریان باردار ضعیف لپتونی بر حسب ماتریس آمیختگی U بخش لپتونی (همانند ماتریس آمیختگی CKM کوارکها) به صورت زیر درمی‌آید

$$U = V_L^{l \dagger} V_L^{\nu} \quad (11-3)$$

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 \overline{n_L} U^{\dagger} \gamma^{\rho} l_L \quad (12-3)$$

$$\nu_L = U n_L = V_L^{l \dagger} \nu'_L \quad , \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (13-3)$$

با تعریف میدانهای نوترینوی چپگرد به صورت بالا می‌توان جریان باردار ضعیف لپتونی را در مدل

استاندارد، (۱۲۵-۱)، به شکل زیر نوشت:

$$j_{W,L}^{\rho} = 2 \overline{v_L} \gamma^{\rho} l_L = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{v_{\alpha L}} \gamma^{\rho} l_{\alpha L} \quad (14-3)$$

در عمل طعم‌های مختلف نوترینو تنها در محاسباتی سودمندند که در حد مدل استاندارد، یعنی با چشم‌پوشی از جرم آنها، انجام شود. زمانی که جرم نوترینوها به حساب می‌آید، میدانهای نوترینو با طعم‌های مختلف دارای جرم معین و مستقل از هم نیستند، بلکه با جملات جرمی به هم جفت می‌شوند. در این حالت بطور مرسوم با میدانهای نوترینوی جرم‌دار مستقل کار می‌شود.

۳-۱-۱ اعداد لپتونی

پیامد بلافصل آمیختگی نوترینوها آن است که اعداد لپتونی مربوط به هر نسل، L_e, L_{μ}, L_{τ} ، دیگر تقارن جهانی خوبی حتی در سطح کلاسیک نیز نیستند. زیرا ویژه‌حالت جرمی آمیزه‌ای از $\nu_e, \nu_{\mu}, \nu_{\tau}$ می‌باشد. در حد کلاسیک تنها تقارن جهانی که در بخش لپتونی باقی می‌ماند، عدد لپتونی کل $L_e + L_{\mu} + L_{\tau}$ می‌باشد. این ویژگی منجر به رخ‌دادن فرآیندهایی همچون $\mu \rightarrow e \gamma, \mu + e \rightarrow \tau + e$ می‌شود که در آنها پایستگی عدد لپتونی هر طعم نقض می‌گردد. این مباحث درباره هر مدلی که در آن آمیختگی نوترینوها وجود داشته باشد، صادق است.

بخش مربوط به نوترینوی لاگرانژی یوکاوا لپتون-هیگز (۳-۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} L_{H,L} &= - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left[\overline{l_L} Y^l l_R + \overline{\nu_L} U Y^{\nu} n_R \right] + H.C \\ &= - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \left[y_{\alpha}^l \overline{l_{\alpha L}} l_{\alpha R} + \overline{\nu_{\alpha L}} \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k} y_k^{\nu} \nu_{k R} \right] + H.C \end{aligned} \quad (15-3)$$

در واقع، جریان باردار ضعیف در معادله (۳-۱۴) تحت تبدیلات جهانی پیمانه‌ای (۱) U،

$$l_{\alpha L} \rightarrow e^{i\varphi_{\alpha}} l_{\alpha L}, \quad \nu_{\alpha L} \rightarrow e^{i\varphi_{\alpha}} \nu_{\alpha L} \quad (\alpha=e,\mu,\tau) \quad (16-3)$$

با فازهای مختلف برای هر طعم، ناورداست. برای آنکه جملات لپتونی باردار معادله (۳-۱۵) ناوردا بمانند باید مؤلفه‌های کایرال راستگرد میدانهای لپتونی باردار مطابق زیر تغییر فاز بدهند

$$l_{\alpha R} \rightarrow e^{i\varphi_{\alpha}} l_{\alpha R}, \quad (\alpha=e,\mu,\tau) \quad (17-3)$$

بخش جنبشی لاگرانژی نوترینو به شکل زیر است

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(\nu)}_{\text{جنبشی}} &= \sum_{k=1}^3 \overline{\nu_k} i \not{\partial} \nu_k = \sum_{k=1}^3 \left(\overline{\nu_{kL}} i \not{\partial} \nu_{kL} + \overline{\nu_{kR}} i \not{\partial} \nu_{kR} \right) \\ &= \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \overline{\nu_{\alpha L}} i \not{\partial} \nu_{\alpha L} + \sum_{k=1}^3 \overline{\nu_{kR}} i \not{\partial} \nu_{kR} \end{aligned} \quad (18-3)$$

تنها راه برای آنکه بخش نوترینوی لاگرانژی یوکاوا هیگز-لپتون تحت تبدیلات (3-16) ناوردا بماند آن است که ترکیب $\sum_{k=1}^3 U_{\alpha k} \gamma_k^\nu \nu_{kR}$ به صورت $e^{i\varphi_\alpha} \sum_{k=1}^3 U_{\alpha k} \gamma_k^\nu \nu_{kR}$ تبدیل یابد. اما حتی تحت همین تبدیل هم بخش جنبشی لاگرانژی نوترینو ناوردا باقی نمی ماند. علی الاصول نمی توان تبدیلی برای میدانهای نوترینوی راستگرد یافت که تحت آن بخش نوترینوی لاگرانژی یوکاوا هیگز-لپتون در معادله (3-15) و بخش جنبشی لاگرانژی نوترینو (3-17) همزمان ناوردا بماند. ناپایستگی عدد طعم لپتونی منجر به پدیده نوسانات نوترینو می شود. اما برای نوترینوهای دیراکی جرم دار عدد لپتونی کل پایسته $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ می ماند. یعنی لاگرانژی تحت تبدیلات پیمانه ای $U(1)$ ناوردا می ماند.

$$\begin{aligned} \nu_{kL} &\rightarrow e^{i\varphi} \nu_{kL}, & \nu_{kR} &\rightarrow e^{i\varphi} \nu_{kR} & (k=1,2,3) \\ l_{\alpha L} &\rightarrow e^{i\varphi} l_{\alpha L}, & l_{\alpha R} &\rightarrow e^{i\varphi} l_{\alpha R} & (\alpha=e, \mu, \tau) \end{aligned} \quad (19-3)$$

که فاز φ برای نوترینوی کایرال مستقل و میدانهای لپتونی باردار یکسان است.

تنها استثنا بر نوسانات نوترینو حالتی است که همه جفت شدگیهای یوکاوا γ_k^ν برابر باشند، یعنی جرم نوترینوها (3-9) با هم برابر باشد، به دیگر سخن آنکه ماتریس آمیختگی U یکانی باشد، یعنی هیچ آمیختگی صورت نمی گیرد. در این حالت اعداد لپتونی طعم پایسته هستند و نوسانی رخ نمی دهد.

جریان پایسته ($\partial_\rho j^\rho = 0$) با توجه به بخش جنبشی لاگرانژین نوترینو و لپتونهای باردار به صورت

زیر می شود:

$$j^\rho = \sum_{k=1}^3 \overline{\nu_k} \gamma^\rho \nu_k + \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} \overline{l_\alpha} \gamma^\rho l_\alpha \quad (20-3)$$

و بار پایسته ($\partial \cdot Q = 0$) هم برابر با عبارت زیر می‌شود:

$$Q = \int d^3x j^0(x) = \int d^3x \left[\sum_{k=1}^3 v_k^\dagger(x) v_k(x) + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} l_\alpha^\dagger(x) l_\alpha(x) \right] \quad (21-3)$$

میدانهای نوترینوی دیراکی در معادله (۷-۳) را می‌توان به روش معمول میدانهای دیراکی کوانتیزه کرد. با استفاده از بسط فوریه لاگرانژی نوترینوی دیراکی و لپتون باردار، بار پایسته همان عدد لپتونی می‌شود (در اینجا آن را با L نشان می‌دهیم):

$$L = \sum_{k=1}^3 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a_{\nu k}^{(h)\dagger}(p) a_{\nu k}^{(h)}(p) - b_{\nu k}^{(h)\dagger}(p) b_{\nu k}^{(h)}(p) \right] \\ + \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{k=1}^3 \left[a_{l\alpha}^{(h)\dagger}(p) a_{l\alpha}^{(h)}(p) - b_{l\alpha}^{(h)\dagger}(p) b_{l\alpha}^{(h)}(p) \right] \quad (22-3)^1$$

بنا به این معادله، همانند مدل استاندارد (جدول ۱-۴) لپتونها با بار منفی و نوترینوها دارای $L = 1$ و پادنوترینوها و لپتونهای باردار مثبت دارای $L = -1$ می‌باشد. یعنی در مورد نوترینوهای دیراکی اعداد کوانتمی لپتونی برای نوترینوها و پادنوترینوها با هم متفاوت هستند. این موضوع در تمایز نوترینوهای دیراکی از پادذراتشان مهم است اما در مورد لپتونها اهمیت چندانی ندارد زیرا لپتونهای باردار از روی بارشان نیز از هم تمیز داده می‌شوند. نوترینوهای جرم‌دار دیراکی، از پادذراتشان متفاوت می‌شوند. این امر به ناوردایی کل لاگرانژی تحت تبدیل پیمانه‌ای جهانی (۱) U در معادلات (۳-۱۹) مربوط می‌گردد. به سبب ویژگی سترون بودن مؤلفه‌های راستگرد میدانهای نوترینوی دیراکی تعریفی همانند تعریف (۳-۱۳) برای برهم‌نهی مؤلفه‌های راستگرد بی‌فایده خواهد بود. زیرا آمیختگی میدانهای نوترینوی چپگرد در معادله (۳-۱۳) مستقل از میدانهای نوترینوی راستگرد است. در حضور آمیختگی دیراکی درجات آزادی سترون و فعال جفت شده و نوسان بین حالت‌های سترون و فعال ممکن نیست.

در عمل امکان وجود میدانهای نوترینوی دیراکی سترون، یعنی فرمیونهای خنثی دیراکی که یکتایی گروه تقارن الکتروضعیف $SU(2)_L \times U(1)_Y$ هستند، در نظر گرفته نمی‌شود. چنین میدانهایی در

^۱ علامت :: به معنای بسامان و بهنجار کردن normal ordering می‌باشد. این کار برای نسبت دادن بار صفر به خلا ضروری می‌باشد.

برهمکنش ضعیف با هردو مؤلفه راستگرد و چپگرد خود شرکت نمی‌کنند، اما می‌توانند از طریق جمله جرمی با نوترینوهای معمولی جفت شوند و ایجاد آمیختگی پیچیده‌ای بین درجات آزادی فعال و سترون کنند. اما تا کنون هیچ گواه با اشاره‌ای بر وجود چنین میدانهای نوترینوی دیراکی سترونی نبوده است.

۳-۱-۲ آمیختگی نوترینوهای دیراک

همانند آمیختگی کوارکها که در فصل ۲ گفته شد، آمیختگی نوترینوهای دیراکی هم به چهار پارامتر فیزیکی بستگی دارد: سه زاویه آمیختگی و یک فاز ناقص CP. همانند مورد کوارکها، پنج فاز از شش فاز موجود در ماتریس آمیختگی یکانی غیرفیزیکی هستند، زیرا می‌توان آنها را با فازبندی دوباره میدانهای لپتونی باردار و نوترینوها حذف کرد. علت امکان چنین امری جدا از بخش جریان باردار ضعیف، ناوردا بودن لاگرانژی تحت تبدیلات فازی جهانی با سه فاز مستقل φ_k برای میدانهای نوترینوی جرم‌دار و سه فاز مستقل φ_α برای میدانهای لپتون باردار جرم‌دار می‌باشد:

$$\begin{aligned} \nu_{kL} &\rightarrow e^{i\varphi_k} \nu_{kL}, & \nu_{kR} &\rightarrow e^{i\varphi_k} \nu_{kR} & (k=1,2,3) \\ l_{\alpha L} &\rightarrow e^{i\varphi_\alpha} l_{\alpha L}, & l_{\alpha R} &\rightarrow e^{i\varphi_\alpha} l_{\alpha R} & (\alpha=e,\mu,\tau) \end{aligned} \quad (23-3)$$

ویژگیهای ماتریس آمیختگی برای سه نسل نوترینوی دیراکی همانند ویژگیهای ماتریس آمیختگی کوارکهاست که در فصل ۲ درباره آن توضیح داده شد. نقض CP را می‌توان با استفاده از ناوردایی تحت فازبندی دوباره برحسب ناوردهای یارلسکوگ توضیح داد [۲۷-۳۰].

$$J = \text{Im} \left[U_{\mu 3} U_{e 2} U_{\mu 2}^* U_{e 3}^* \right] \quad (24-3)$$

که ناتقارنی CP و T در نوسانات نوترینو به J بستگی دارد.

در آمیختگی سه نسل نوترینوی دیراکی (همانند آمیختگی کوارکها) علامت همه بخشهای موهومی

حاصلضربهای ناوردا تحت فازبندی دوباره $U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*$ برابر با

$$\text{Im} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] = s_{\alpha\beta; k j} J \quad (25-3)$$

است. زیرا روابط یکانی برقرار است

$$\sum_{k \neq j} \text{Im} [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \quad (26-3)$$

$$\sum_{\alpha \neq \beta} \text{Im} [U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*] = 0 \quad (k \neq j)$$

ضرایب $s_{\alpha\beta;kj} = \pm 1$ بر حسب زیروندهای α, β و k, j پادمتقارن هستند.

$$s_{\alpha\beta;kj} = -s_{\beta\alpha;kj} = s_{\beta\alpha;jk} \quad (27-3)$$

این مقادیر در جدول ۳-۱ آمده است. پارامتربندی معمول برای ماتریس آمیختگی نوترینوهای دیراکی همانند ماتریس (۷۸-۲) است.

$$U = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (28-3)$$

که همانند مورد پیشین $c_{ab} \equiv \cos \theta_{ab}$, $s_{ab} \equiv \sin \theta_{ab}$ می باشد. مقدار سه زاویه آمیختگی $\theta_{12}, \theta_{13}, \theta_{23}$ در گستره $0 \leq \theta_{ab} \leq \pi/2$ و δ_{13} زاویه نقض CP است که مقدار آن در گستره $0 \leq \delta_{13} \leq 2\pi$ می باشد. در این پارامتربندی ناوردای یارلسکوگ برابر با

$$J = c_{12}s_{12}c_{23}s_{23}c_{13}^2s_{13}\sin\delta_{13} = \frac{1}{8}\sin 2\theta_{12}\sin 2\theta_{23}\cos\theta_{13}\sin 2\theta_{13}\sin\delta_{13} \quad (29-3)$$

همانند مدل استاندارد، یکانی بودن ماتریس آمیختگی نوترینو و لپتون باردار V_L^l, V_R^l, V_L^{ν} به وجود سازوکار GIM اشاره دارد. عبارت جریان ضعیف باردار بر حسب میدانهای لپتونی با جرم معین همانند همین عبارت بر حسب میدانهای لپتونی پریم دار می باشد.

$$\begin{aligned} j_{Z,L}^{\rho} &= 2g_L^{\nu}\overline{V_L^{\nu}}\gamma^{\rho}V_L^{\nu} + 2g_L^l\overline{V_L^l}\gamma^{\rho}V_L^l + 2g_R^l\overline{V_R^l}\gamma^{\rho}V_R^l \\ &= 2g_L^{\nu}\overline{n_L}V_L^{\nu\dagger}\gamma^{\rho}V_L^{\nu}n_L + 2g_L^l\overline{l_L}V_L^{l\dagger}\gamma^{\rho}V_L^ln_L + 2g_R^l\overline{l_R}V_R^{l\dagger}\gamma^{\rho}V_R^ll_R \\ &= 2g_L^{\nu}\overline{n_L}\gamma^{\rho}n_L + 2g_L^l\overline{l_L}\gamma^{\rho}l_L + 2g_R^l\overline{l_R}\gamma^{\rho}l_R \end{aligned} \quad (30-3)$$

تنها ویژگی برای تمایز سه نسل لپتون باردار جرم آنها و طعم لپتون باردارست که از اندازه گیری جرم آنها به دست می آید. جرم آنها ویژگیهای سینماتیک و مدهای واپاشی آنها را تعیین می کند. لپتونهای باردار با جرم معین بنا به تعریف ذراتی با طعم معین هستند. از طرفی نوترینوها را تنها می توان به-

طریق غیرمستقیم با تعیین هویت ذرات باردار تولید شده در برهمکنشهای ضعیف آشکارسازی کرد. از سوی دیگر بنا به تعریف طعم نوترینوهای آفریده یا نابود شده در فرآیندهای برهمکنش ضعیف جریان باردار، طعم لپتون باردار همراه آنهاست. بنابراین نیازی نیست که نوترینوهای دارای طعمهای مختلف، جرم معینی داشته باشند. وجود آمیختگی حاکی از آن است که نوترینوهای طعمدار برهم‌نهی نوترینوهای با جرمهای معین هستند. بنا بر همین دلایل همواره آمیختگی زمانی بکار می‌رود که با لپتونهای باردار به مثابه ذراتی با جرم معین رفتار شود.

سادگی مدل نوترینوهای دیراکی در این است که نوترینوها ذراتی دیراکی همانند دیگر فرمیونها فرض می‌شوند و جرم آنها همانگونه که دیدیم همانند جرم لپتونهای باردار و کوارکها متناسب با VEV^1 هیگز می‌باشد. اما دارای کاستی نیز می‌باشد. هیچ توضیحی برای کوچک بودن بسیار زیاد مقادیر ویژه مقدار ν_k ماتریس جفت‌شدگی یوکاوا^۱ هیگز-لپتون و در نتیجه کوچکی بیش از حد معمول جرم نوترینوها وجود ندارد. در واقع سازوکار هیگز در مدل استاندارد (که در فصل ۱ توضیح داده شد) پاسخی درباره مقدار جفت‌شدگی یوکاوا^۱ ذرات با هیگز ارائه نمی‌دهد. یعنی منشاء جرم لپتونها و کوارکها در چارچوب مدل استاندارد نامعلوم است.

¹ VEV: vacuum expectation value

$\alpha\beta$	kj	$\Re[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*]$	$s_{\alpha\beta;kj}$
$e\mu$	21	$-\frac{1}{4} \sin 2\vartheta_{12} c_{13}^2 [\sin 2\vartheta_{12} (c_{23}^2 - s_{23}^2 s_{13}^2) + \cos 2\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} s_{13} \cos \delta_{13}]$	+1
	32	$-s_{12} s_{23} c_{13}^2 s_{13} (s_{12} s_{23} s_{13} - c_{12} c_{23} \cos \delta_{13})$	+1
	31	$-c_{12} s_{23} c_{13}^2 s_{13} (c_{12} s_{23} s_{13} + s_{12} c_{23} \cos \delta_{13})$	-1
$\mu\tau$	21	$\frac{1}{16} \sin^2 2\vartheta_{12} \sin^2 2\vartheta_{23} (1 + s_{13}^2)^2 - \frac{1}{4} (\sin^2 2\vartheta_{12} + \sin^2 2\vartheta_{23}) s_{13}^2$ $-\frac{1}{16} \sin 4\vartheta_{12} \sin 4\vartheta_{23} (1 + s_{13}^2) s_{13} \cos \delta_{13}$ $+\frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta_{12} \sin^2 2\vartheta_{23} s_{13}^2 \cos^2 \delta_{13}$	+1
	32	$-\frac{1}{4} \sin 2\vartheta_{23} c_{13}^2 [\sin 2\vartheta_{23} (c_{12}^2 - s_{12}^2 s_{13}^2) + \sin 2\vartheta_{12} \cos 2\vartheta_{23} s_{13} \cos \delta_{13}]$	+1
	31	$\frac{1}{4} \sin 2\vartheta_{23} c_{13}^2 [\sin 2\vartheta_{23} (c_{12}^2 s_{13}^2 - s_{12}^2) + \sin 2\vartheta_{12} \cos 2\vartheta_{23} s_{13} \cos \delta_{13}]$	-1
τe	21	$\frac{1}{4} \sin 2\vartheta_{12} c_{13}^2 [\sin 2\vartheta_{12} (c_{23}^2 s_{13}^2 - s_{23}^2) + \cos 2\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} s_{13} \cos \delta_{13}]$	+1
	32	$-s_{12} c_{23} c_{13}^2 s_{13} (s_{12} c_{23} s_{13} + c_{12} s_{23} \cos \delta_{13})$	+1
	31	$-c_{12} c_{23} c_{13}^2 s_{13} (c_{12} c_{23} s_{13} - s_{12} s_{23} \cos \delta_{13})$	-1
ee	21	$\frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta_{12} c_{13}^4$	0
	32	$\frac{1}{4} s_{12}^2 \sin^2 2\vartheta_{13}$	0
	31	$\frac{1}{4} c_{12}^2 \sin^2 2\vartheta_{13}$	0
$\mu\mu$	21	$\frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta_{12} (c_{23}^4 + s_{23}^4 s_{13}^2) + \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\vartheta_{12}) \sin^2 2\vartheta_{23} s_{13}^2$ $+\frac{1}{4} \sin 4\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} (c_{23}^2 - s_{23}^2 s_{13}^2) s_{13} \cos \delta_{13}$ $-\frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta_{12} \sin^2 2\vartheta_{23} s_{13}^2 \cos^2 \delta_{13}$	0
	32	$s_{23}^2 c_{13}^2 (c_{12}^2 c_{23}^2 + s_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} s_{13}^2 \cos^2 \delta_{13})$	0
	31	$s_{23}^2 c_{13}^2 (s_{12}^2 c_{23}^2 + c_{12}^2 s_{23}^2 s_{13}^2 + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} s_{13}^2 \cos^2 \delta_{13})$	0
$\tau\tau$	21	$\frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta_{12} (s_{23}^4 + c_{23}^4 s_{13}^2) + \frac{1}{4} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\vartheta_{12}) \sin^2 2\vartheta_{23} s_{13}^2$ $+\frac{1}{4} \sin 4\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} (s_{23}^2 - c_{23}^2 s_{13}^2) s_{13} \cos \delta_{13}$ $-\frac{1}{4} \sin^2 2\vartheta_{12} \sin^2 2\vartheta_{23} s_{13}^2 \cos^2 \delta_{13}$	0
	32	$c_{23}^2 c_{13}^2 (c_{12}^2 s_{23}^2 + s_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 + \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} s_{13}^2 \cos^2 \delta_{13})$	0
	31	$c_{23}^2 c_{13}^2 (s_{12}^2 s_{23}^2 + c_{12}^2 c_{23}^2 s_{13}^2 - \frac{1}{2} \sin 2\vartheta_{12} \sin 2\vartheta_{23} s_{13}^2 \cos^2 \delta_{13})$	0

۳-۲ نوترینوهای ماژورانا

اسپینورهای کایرال کوچکترین نمایشهای کاهش‌ناپذیر گروه لورنتس هستند، که همه نمایشها را می‌توان از آنها ساخت، به‌همین دلیل است که میدانهای فرمیونی کایرال سنگ بنای مدل استاندارد و نظریه‌های پیمانه‌ای هستند.

معادله دیراک $(i \gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$ برای فرمیون $\psi = \psi_L + \psi_R$ هم‌ارز دو معادله زیر است

$$\begin{aligned} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= m \psi_R \\ i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= m \psi_L \end{aligned} \quad (31-3)$$

معادلات ویل^۱ برای فرمیونهای بدون جرم عبارتند از:

$$\begin{aligned} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= 0 \\ i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= 0 \end{aligned} \quad (32-3)$$

هرچند در آغاز پائولی این معادلات را به‌دلیل نقض پاریتی رد کرد، اما پس از کشف نقض پاریتی در سال ۱۹۵۶-۵۷ و با توجه به نبود هیچ گواهی در آن دوران مبنی بر جرم‌دار بودن نوترینو و همچنین تصور اینکه نوترینو از طریق مؤلفه‌های چپگرد خود در برهمکنشهای ضعیف شرکت می‌کند، لاندائو [۳۱]، لی و یانگ [۳۲]، سلام [۳۳] نشان دادند که می‌توان نوترینوها بدون جرم را با اسپینورهای چپگرد ویل ψ_L توصیف کرد. این موضوع در مدل استاندارد جا داده شده است.

اتوره ماژورانا در سال ۱۹۳۷ کشف کرد که با توجه به فرض مستقل نبودن ψ_L ، ψ_R رابطه بین آن دو باید با معادلات (۳۱-۳) سازگار باشد [۳۴]. یعنی این دو معادله باید دو روش برای نوشتن معادله‌ای یکسان برای یک میدان مستقل مثلاً ψ_L باشد. بنابراین هرچند اسپینور دومؤلفه‌ای برای توصیف فرمیون بدون جرم کافیست، لزومی به وجود اسپینور چهار مؤلفه‌ای برای توصیف ذره جرم‌دار نمی‌باشد. برای به‌دست آوردن معادله نخست (۳۱-۳) از معادله دوم آن:

^۱ Weyl

$$\begin{aligned} (i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R)^\dagger &= (m \psi_L)^\dagger \Rightarrow -i \partial_\mu \psi_R^\dagger \gamma^{\mu\dagger} = m \psi_L^\dagger \\ \Rightarrow (-i \partial_\mu \psi_R^\dagger \gamma^\circ \gamma^\mu \gamma^\circ = m \psi_L^\dagger) \gamma^\circ &\xrightarrow{\psi^\dagger \gamma^\circ = \bar{\psi}} -i \partial_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu = m \bar{\psi}_L \end{aligned} \quad (33-3)$$

$$\begin{cases} C(-i \partial_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu = m \bar{\psi}_L)^T \\ C \gamma_\mu^T C^{-1} = -\gamma_\mu, \quad C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = \gamma^\mu \end{cases} \Rightarrow i \gamma^\mu \partial_\mu C \bar{\psi}_R^T = m C \bar{\psi}_L^T \quad (34-3)$$

که با توجه به

$$\psi_R = \xi C \bar{\psi}_L^T, \quad |\xi|^2 = 1 \quad (35-3)$$

که رابطهٔ ماژورانا بین ψ_L ، ψ_R است (با توجه به راستگرد بودن $(C \bar{\psi}_L^T)$).

با استفاده از $C(\gamma^\mu)^T C^{-1} = \gamma^\mu$ و رابطهٔ $P_L C = C P_L^T$ ،

$$P_L (C \bar{\psi}_L^T) = C (\bar{\psi}_L P_L)^T = C \left[(P_R \psi_L)^\dagger \gamma^\circ \right]^T = 0 \quad (36-3)$$

برقرار است. با استفاده از معادلهٔ نخست (31-3) و (35-3) معادلهٔ ماژورانا را برای میدان کایرال ψ_L

به دست می آوریم:

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m \xi C \bar{\psi}_L^T \quad (37-3)$$

با فازبندی دوبار این میدان به صورت $\psi_L \rightarrow \xi^{1/2} \psi_L$ ، ضریب فاز ξ نیز حذف می شود و معادلهٔ

ماژورانا به صورت زیر در می آید

$$i \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m C \bar{\psi}_L^T \quad (38-3)$$

شرط ماژورانا

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_R = \psi_L + C \bar{\psi}_L^T \\ \bar{\psi} &= C \bar{\psi}^T \end{aligned} \quad (39-3)$$

$C \bar{\psi}_L^T$ (بغیر از فاز) با میدان همیوگ مختلط ψ_L^C یکسان است. برهمکنشهای ضعیف جریان باردار

$V - A$ تقارن تحت همیوگی بار را نقض می کنند. از آنجا که نوترینوها تنها از طریق برهمکنشهای

ضعیف برهمکنش دارند، پاریتی باری میدانهای نوترینو هیچ معنی فیزیکی ندارد و می‌توانیم آنها را دلبخواه انتخاب کنیم، که برای سادگی آن را برابر با یک برگزیده‌ایم.

$$\psi_L^C = C \overline{\psi_L}^T \quad (۴۰-۳)$$

و در نتیجه میدان و شرط مازورنا در معادله (۳۹-۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_L + \psi_L^C \\ \psi &= \psi^C \quad (\text{شرط مازورنا}) \end{aligned} \quad (۴۱-۳)$$

شرط مازورنای بالا حکایت از یکسانی ذره و پادذره دارد. بنابراین تنها فرمیون‌ها خنثی را می‌توان با آن توصیف کرد.

جریان الکترومغناطیسی برای میدانهای مازورنا صفر می‌شود.

$$\begin{aligned} j^\mu &= q \overline{\psi} \gamma^\mu \psi \\ \overline{\psi} \gamma^\mu \psi &= \overline{\psi^C} \gamma^\mu \psi^C = -\psi^T C^\dagger \gamma^\mu C \overline{\psi}^T = \overline{\psi} C \gamma^{\mu T} C^\dagger \psi = -\overline{\psi} \gamma^\mu \psi = 0 \end{aligned} \quad (۴۲-۳)$$

همان‌گونه که خود مازورنا نیز بیان کرده، در میان همه ذرات بنیادی شناخته شده، تنها نوترینوها ذرات خنثی هستند که می‌توان آنها را ذرات مازورنا دانست [۳۴]. چون اسپینور مازورنا دارای دو مؤلفه مستقل است، کار کردن با آن به مراتب راحت‌تر از کار کردن با اسپینورهای چهار مؤلفه‌ای دیراکی می‌باشد. در بیشتر نظریه‌های ماورای مدل استاندارد نوترینوها ذرات مازورنا می‌باشند.

تنها در صورت جرم‌دار بودن نوترینوهاست که پیامدهای پدیدارشناختی دیراکی بودن یا مازورنا بودن نوترینوها با هم متفاوت است. اگر نوترینوها را بدون جرم در نظر بگیریم توصیف نوترینو چه با معادله مازورنا و چه با معادله دیراک از نظر فیزیکی یکسان می‌باشد.

پی بردن به اینکه آیا نوترینوها واقعاً ذرات مازورنا هستند یا خیر تنها با اندازه‌گیری مستقیم پدیده‌های مربوط به جرم نوترینو مستقیماً درک می‌شود. پدیده‌های مانند واپاشی بتازای دوگانه بدون نوترینو.

۳-۲-۱ جمله جرمی ماژورانا

ابتدا جمله جرمی دیراکی را برای $\nu = \nu_L + \nu_R$ در نظر می گیریم.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^D = -m \bar{\nu} \nu = -m \left(\bar{\nu}_R \nu_L + \bar{\nu}_L \nu_R \right) = -m \bar{\nu}_R \nu_L + \text{H.c.} \quad (۴۲-۳)$$

توجه آنکه تنها جفت شدگیهای $\bar{\nu}_L \nu_R$ ، $\bar{\nu}_R \nu_L$ باقی می ماند، زیرا با توجه $P_R \nu_L = 0$ ، $P_L \nu_L = \nu_L$

$$\bar{\nu}_L \nu_L = \nu_L^\dagger \gamma^0 \nu_L = \nu_L^\dagger \gamma^0 P_L \nu_L = \nu_L^\dagger P_R \gamma^0 \nu_L = (P_R \nu_L)^\dagger \gamma^0 \nu_L = 0 \quad (۴۳-۳)$$

و مشابهاً برای $\bar{\nu}_R \nu_R = 0$ برقرار است. جمله جرمی دیراکی در لاگرانژی (۴۲-۳) همانند بقیه جملات

آن باید اسکالر لورنتسی باشد. زیرا میدانهای کایرال $\nu_L(x)$ ، $\nu_R(x)$ همانند میدان دیراکی و

میدانهای کایرال الحاقی $\bar{\nu}_L(x)$ ، $\bar{\nu}_R(x)$ نیز مانند میدان الحاقی دیراکی تحت تبدیل لورنتس تبدیل

می یابند.

$$\begin{aligned} \nu_L \rightarrow \nu'_L(x') = S \nu_L(x) \quad , \quad \nu_R \rightarrow \nu'_R(x') = S \nu_R \\ \bar{\nu}_L(x) \rightarrow \bar{\nu}'_L(x') = \bar{\nu}_L(x) S^{-1} \quad , \quad \bar{\nu}_R(x) \rightarrow \bar{\nu}'_R(x') = \bar{\nu}_R(x) S^{-1} \end{aligned} \quad (۴۴-۳)$$

$$S(1 + \varepsilon \omega) = 1 - \frac{i}{4} \varepsilon \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} \quad , \quad [\gamma^5, \sigma^{\mu\nu}] = 0$$

در نتیجه

$$\nu'_L(x') = P_L \nu'(x') = P_L S \nu(x) = S P_L \nu(x) = S \nu_L(x) \quad (۴۵-۳)$$

برای آنکه جمله جرمی ماژورانا را تنها با استفاده از ν_L بنویسیم، باید تابعی راستگرد از ν_L به دست

آوریم که همانند ν_L تحت تبدیلات لورنتس، تبدیل یابد و بتوان آن را بجای ν_R در معادله (۴۲-۳)

جایگزین کرد. این تابع از ν_L همان میدان همیوگ باری می باشد.

$$\nu_L^C = C \bar{\nu}_L^T \quad (۴۶-۳)$$

که پاریتی باری ذاتی آن را برابر با یک اختیار کردیم. دلیل آن در توضیح برای معادله (۴۰-۳) گفته

شده است. همانگونه که در (۳۶-۳) نشان داده شد، ν_L^C راستگرد است. جفت شدگی $\bar{\nu}_L^C \nu_L$ صفر نمی -

شود. تحت تبدیل لورنتس میدان همیوگ باری $\nu_L^C(x)$ به صورت زیر تبدیل می یابد

$$\nu_L^C(x) = C \left(\nu_L^\dagger(x) \gamma^0 \right)^T \rightarrow C \left(\nu_L'^\dagger(x') \gamma^0 \right)^T = C (S^{-1})^T C^{-1} \nu_L^C(x) \quad (۴۷-۳)$$

با استفاده از $C \left(\sigma^{\mu\nu} \right)^T C^{-1} = -\sigma^{\mu\nu}$ ، رابطه $C \left(S^{-1} \right)^T C^{-1} = S$ به دست می‌آید. در نتیجه $\nu_L^C(x)$

همانند $\nu_L(x)$ ، و $\overline{\nu_L^C}(x)$ همانند $\overline{\nu_L}(x)$ تبدیل می‌یابد. بنابراین ν_L^C دارای ویژگیهای مناسبی است تا بجای ν_R در لاگرانژی (۳-۴۲) بنشیند و منجر به جمله جرمی مازورانا شود.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{M}} = -\frac{1}{2} m \overline{\nu_L^C} \nu_L + \text{H.c.} \quad (۳-۴۸)$$

کل لاگرانژی مازورانا شامل جمله جرمی، جملات جرمی برای ν_L و ν_L^C به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{L}^{\text{M}} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nu_L} i \not{\partial} \nu_L + \overline{\nu_L^C} i \not{\partial} \nu_L^C - m \left(\overline{\nu_L^C} \nu_L + \overline{\nu_L} \nu_L^C \right) \right] \quad (۳-۴۹)$$

در همه این روابط ضریب $\frac{1}{2}$ برای دوری گزیدن از احتساب دوباره میدان آورده شده است. زیرا

$$\nu_L^C = C \overline{\nu_L}^T \text{ و در نتیجه } \overline{\nu_L^C} \text{ و } \nu_L^C \text{ از هم مستقل نیستند. با در نظر گرفتن (۳-۴۶) و همچنین}$$

$$\overline{\nu_L^C} = C \left(\overline{\nu_L}^T \right)^\dagger \gamma^\circ = C \left((\nu_L^\dagger \gamma^\circ)^T \right)^\dagger \gamma^\circ = \nu_L^T (\gamma^\circ)^T C^\dagger \gamma^\circ = -\nu_L^T C^\dagger \quad (۳-۵۰)$$

لاگرانژی مازورانا (۳-۴۹) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathcal{L}^{\text{M}} = \frac{1}{2} \left[\overline{\nu_L} i \not{\partial} \nu_L + \nu_L^T i \overline{\not{\partial}^T} \overline{\nu_L}^T - m \left(-\nu_L^T C^\dagger \nu_L + \overline{\nu_L} C \overline{\nu_L}^T \right) \right] \quad (۳-۵۱)$$

اکنون با استفاده از معادلات اولر لاگرانژ، معادله مازورانا را می‌یابیم

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{M}}}{\partial (\partial_\mu \overline{\nu_L})} - \frac{\partial \mathcal{L}^{\text{M}}}{\partial \overline{\nu_L}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{M}}}{\partial (\partial_\mu \overline{\nu_L})} = -\frac{1}{2} i \gamma^\mu \nu_L \quad (۳-۵۲)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{\text{M}}}{\partial \overline{\nu_L}} = \frac{1}{2} i \gamma^\mu \nu_L - m C \overline{\nu_L}^T$$

$$i \not{\partial} \nu_L = m C \overline{\nu_L}^T \quad (۳-۵۳)$$

توجه به ویژگی پادجابجایی میدانها در مشتق‌گیری $\mathcal{L}^{\text{M}}$ نسبت به $\partial_\mu \overline{\nu_L}$ و $\overline{\nu_L}$ ضروری است. این کار

را با اضافه کردن علامت منفی زمانی که $\overline{\nu_L}$ سمت راست انجام می‌دهیم، یعنی مثلاً

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu \overline{\nu_L})} \overline{\nu_L}^T i \overleftrightarrow{\partial}^T \overline{\nu_L}^T = -\frac{1}{2} i \gamma^\mu \nu_L \quad (54-3)$$

این امر را می‌توان با تغییر جزئی $\nu_L^T i \overleftrightarrow{\partial}^T \overline{\nu_L}^T$ تحت $\delta_\nu(\partial_\mu \overline{\nu_L})$ بررسی کرد، که علامت منفی ناشی از پادجابجایی میدانهای تحت انتقال می‌باشد.

$$\delta_\nu(\nu_L^T i \overleftrightarrow{\partial}^T \overline{\nu_L}^T) = \frac{1}{2} \nu_L^T i \gamma^\mu \delta_\nu(\partial_\mu \overline{\nu_L}^T) = \delta_\nu(\partial_\mu \overline{\nu_L}) \left(-\frac{1}{2} i \gamma^\mu \nu_L \right) \quad (55-3)$$

این مشکل در روند به‌دست آوردن معادله دیراک $(i \not{\partial} - m) \psi(x) = 0$ از لاگرانژی دیراک $\mathcal{L}(x) = \overline{\psi}(x)(i \not{\partial} - m) \psi(x)$ پیش نمی‌آید، زیرا $\overline{\psi}(x)$ همواره در سمت چپ می‌باشد.

مرسوم است که میدان ماژورانا را به‌صورت

$$\nu = \nu_L + \nu_L^C \quad (56-3)$$

نوشته شود، که در شرط ماژورانا

$$\nu = \nu^C \quad (57-3)$$

صدق می‌کند. بدین ترتیب لاگرانژی ماژورانا با لاگرانژی دیراک در ضریب $\frac{1}{2}$ فرق می‌کند.

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{2} \overline{\nu}(i \not{\partial} - m) \nu \quad (58-3)$$

ویژگی پادجابجایی میدانهای فرمیونی در روند به‌دست آوردن لاگرانژی ماژورانا بسیار اساسی است.

زیرا برای میدانها جابجاشونده

$$\nu_L^T = C^\dagger \nu_L = \nu_L^T (C^{\dagger T}) \nu_L = -\nu_L^T C^\dagger \nu_L \quad (59-3)$$

و در این صورت جمله جرمی و جمله جنبشی هر دو صفر می‌شوند. از طرفی با توجه به ویژگی

پادجابجایی میدانهای فرمیونی

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_\alpha(x), \overline{\psi}_\beta(y) \right\} &= (i \not{\partial}^{(x)} + m)_{\alpha\beta} \Delta(x-y) \\ \Delta(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} E} \left(e^{-i p \cdot (x-y)} - e^{i p \cdot (x-y)} \right) \\ &= -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\not{p} E} \sin[p \cdot (x-y)] \end{aligned} \quad (60-3)$$

$$\begin{aligned} v_L^T(x) i \not{\partial}^T \overline{v}_L^T(x) &= \\ &= \frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow x} \partial_\mu^{(x)} \left[v_L^T(y) i \gamma^{\mu T} \overline{v}_L^T(x) - v_L^T(x) i \gamma^{\mu T} \overline{v}_L^T(y) \right] \\ &= \overline{v}_L(x) i \not{\partial} v_L(x) + \delta \end{aligned} \quad (61-3)$$

$$\begin{aligned} \delta &= -\frac{1}{i} \lim_{y \rightarrow x} \partial_\mu^{(x)} \left\{ \text{Tr} \left[(1 - \gamma^5) \not{\partial}^{(y)} \gamma^\mu \right] \Delta(y-x) - \text{Tr} \left[(1 - \gamma^5) \not{\partial}^{(x)} \gamma^\mu \right] \Delta(x-y) \right\} \\ &= -\lim_{y \rightarrow x} \partial_\mu^{(x)} \left[\partial_{(y)}^\mu \Delta(y-x) - \partial_{(x)}^\mu \Delta(x-y) \right] \\ \partial_{(x)}^\mu &= \partial / \partial x_\mu, \quad \partial_{(y)}^\mu \Delta(y-x) = -\partial_{(x)}^\mu \Delta(x-y) \\ \Delta(y-x) &= -\Delta(x-y) \end{aligned} \quad (62-3)$$

و در نتیجه

$$\delta = 0 \quad (63-3)$$

که با استفاده از آن بخش دوم جمله جنبشی در معادله (۴۹-۳) برای میدانهای جابجا شونده را می-توان به صورت زیر نوشت.

$$v_L^T i \not{\partial}^T \overline{v}_L^T = \overline{v}_L i \not{\partial} v_L \quad (64-3)$$

بنابراین می توان لاگرانژی ماژورانا (۵۱-۳) را به صورت زیر نوشت که جمله جرمی آن همانند جمله جنبشی نوترینوی بدون جرم در مدل استاندارد باشد. در شکل زیر برای لاگرانژی ماژورانا جمله جرمی اثر فیزیکی ماورای مدل استاندارد را نمایش می دهد.

$$\mathcal{L}^M = \overline{v}_L i \not{\partial} v_L - \frac{m}{i} \left(-v_L^T C^\dagger v_L + \overline{v}_L C \overline{v}_L^T \right) \quad (65-3)$$

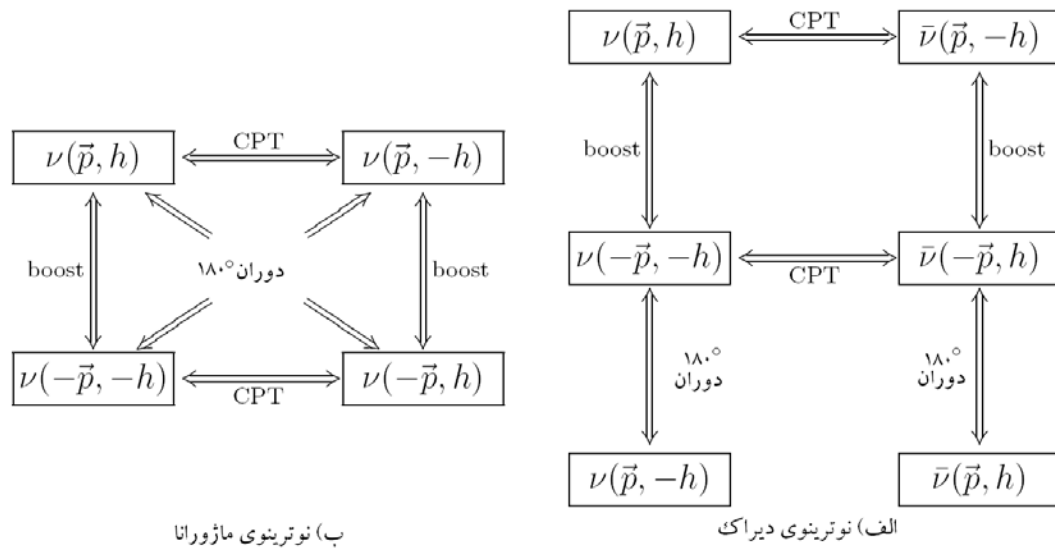
۳-۲-۲ درجه های آزادی

با توجه به ناوردایی لاگرانژی تحت CPT و تبدیلات لورنتس می توان با استفاده از تکانه معلوم، تفاوت در شمار درجه های آزادی را برای نوترینو دیراک و ماژورانا درک کرد. نوترینوی دیراک و ماژورانی را

با تکانه $\vec{p}$ و هلیسیتی h در نظر می‌گیریم و آن را تحت تبدیلات CPT و تبدیلات لورنتس قرار می‌دهیم. به‌ازای هر مقدار $\vec{p}$ شمار حالت‌هایی که پس از اعمال این تبدیلات دارای تکانه $\vec{p}$ باشند، برابر با شمار درجه‌های آزادی است.

برای درک ساده‌تر این موضوع، همهٔ این تبدیلات را در ریخت دو جدول زیر نشان می‌دهیم.

جدول ۲-۳ درجه‌های آزادی نوترینوی دیراک و مازورانا



با توجه به جدول درمی‌یابیم که به‌ازای هر مقدار از تکانه $\vec{p}$ چهار حالت ممکن برای نوترینو دیراک

$$\nu(\vec{p}, h), \nu(\vec{p}, -h), \bar{\nu}(\vec{p}, h), \bar{\nu}(\vec{p}, -h) \quad (۶۴-۳)$$

وجود دارد که عبارتند از نوترینو و پادنوترینو دیراک با هلیسیتی مثبت و منفی. همچنین به‌ازای هر مقدار از تکانه $\vec{p}$ تنها دو حالت ممکن برای نوترینو مازورانا وجود دارد.

$$\nu(\vec{p}, h), \nu(\vec{p}, -h) \quad (۶۵-۳)$$

یعنی تعداد درجات آزادی نوترینوی مازورانا نصف تعداد درجات آزادی نوترینوی دیراک است. این امر

به‌سبب وجود قید (۵۷-۳) است که بیان از یکسانی ذره و پادذرهٔ مازورانا دارد.

۳-۲-۳ میدان ماژورانی کوانتیزه

میدان ماژورانا علاوه بر آنکه همه ویژگیهای میدان دیراک را دارد دارای شرط (۵۷-۳)، $\nu = \nu^C$ ، نیز می باشد. با توجه به ویژگی

$$u^{(h)}(p) = C \overline{v^{(h)}}^T(p) \quad (۶۶-۳)$$

برای اسپینورهای دیراکی $v^{(h)}(p)$ ، $u^{(h)}(p)$ ، شرط (۵۷-۳) برای میدانهای ماژورانا بیان می دارد که ضرایب بسط فوریه در جواب معادله دیراک

$$\psi(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-i p \cdot x} + b^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{i p \cdot x} \right] \quad (۶۷-۳)$$

برای میدان ماژورانا به صورت شرط

$$b^{(h)}(p) = a^{(h)}(p) \quad (۶۸-۳)$$

درمی آید و در نتیجه بسط فوریه میدان نوترینوی ماژورانا $\nu(x)$ به شکل زیر می باشد.

$$\nu(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(h)}(p) u^{(h)}(p) e^{-i p \cdot x} + a^{(h)\dagger}(p) v^{(h)}(p) e^{i p \cdot x} \right] \quad (۶۹-۳)$$

با توجه به کوانتیزه بودن میدانهای ماژورانا، ضرایب $a^{(h)}(p)$ در روابط پادجابجایی کانونی صدق می کنند.

$$\begin{aligned} \left\{ a^{(h)}(p), a^{(h')\dagger}(p') \right\} &= (2\pi)^3 2E \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \delta_{hh'}, \\ \left\{ a^{(h)}(p), a^{(h')}(p') \right\} &= \left\{ a^{(h)\dagger}(p), a^{(h)\dagger}(p') \right\} = 0 \end{aligned} \quad (۷۰-۳)$$

از آنجا که تنها یک عملگر وجود دارد هیچ تمایزی بین ذره ماژورانا و پادذره ماژورانا وجود ندارد.

جرم نوترینوها کمتر از ۱ eV است، از طرفی تنها نوترینوهای آشکار می شوند که انرژی آنها بیشتر

از ۱۰۰ keV باشد. نوترینوها به دو روش زیر آشکار می شوند:

۱. در فرآیندهای پراکندگی ضعیف جریان خنثی یا جریان باردار که آستانه انرژی آنها در

جدول ۳-۳ آمده است. همانگونه که از جدول برمی آید، آستانه های تجربی کنونی همواره

اندکی بیش از کسری از MeV هستند. کمترین آستانه‌ای که تاکنون به‌دست آمده مربوط به

نخستین واکنش جدول، $\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ga} + e^-$ ، می‌باشد.

۲. فرآیند پراکندگی کشسان، $\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$ ، که سطح‌مقطع آن متناسب با انرژی نوترینو،

$\sigma(E_\nu) \sim \sigma_0 E_\nu / m_e$ ($\sigma_0 \sim 10^{-44} \text{cm}^2$)، است. در چنین فرآیندهایی به آستانه انرژی

چند MeV نیاز است تا سیگنالی بالای سیگنال زمینه به‌دست آید.

از این مباحث روشن است که در آشکارسازهای کنونی از نوسانات نوترینو تنها نوترینوهای فوق-

نسبیتی آشکار می‌شوند. به‌همین دلیل مرسوم است که در عمل از نوترینو و پادنوترینوی ماژورانا

صحبت می‌شود.

جدول ۳-۳: انرژی آستانه نوترینو برای برهمکنشهای جریان باردار مورد استفاده در آشکارسازی آن

Reaction	Masses	E_ν^{th}
$\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow {}^{71}\text{Ge} + e^-$	$m({}^{71}\text{Ga}) = 66050.093 \text{ MeV}$ $m({}^{71}\text{Ge}) = 66049.814 \text{ MeV}$	0.23 MeV
$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow {}^{37}\text{Ar} + e^-$	$m({}^{37}\text{Cl}) = 34424.829 \text{ MeV}$ $m({}^{37}\text{Ar}) = 34425.132 \text{ MeV}$	0.82 MeV
$\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$	$m_p = 938.272 \text{ MeV}$ $m_n = 939.565 \text{ MeV}$	1.81 MeV
$\nu + d \rightarrow p + n + \nu$	$m_d = 1875.613 \text{ MeV}$	2.23 MeV
$\nu_\mu + n \rightarrow p + \mu^-$	$m_\mu = 105.658 \text{ MeV}$	110.16 MeV
$\nu_\tau + n \rightarrow p + \tau^-$	$m_\tau = 1777.03 \text{ MeV}$	3.45 GeV
$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$	$m_e = 0.511 \text{ MeV}$	10.92 GeV

۳-۲-۴ عدد لپتونی برای نوترینوهای ماژورانا

در ابتدای همین فصل دیدیم که اگر نوترینوهای جرم‌دار ذرات دیراکی باشند، عدد لپتونی

کل $L = L_e + L_\mu + L_\tau$ پایسته است. همچنین دیدیم که عدد لپتونی کل از طریق قضیهٔ نوثر به

تبدیلات پیمانه‌ای $U(1)$ مربوط می‌باشد (۳-۱۹). این امر در مورد نوترینوهای ماژورانا، برقرار نیست.

زیرا جملهٔ جرمی ماژورانا در معادلهٔ (۳-۴۸) تحت تبدیلات پیمانه‌ای جهانی $U(1)$ ناوردان نیست.

$$\nu_L \rightarrow e^i \varphi \nu_L \quad (۳-۷۱)$$

جمله جرمی ماژورانا در معادله (۳-۴۸) را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{M}} = \frac{1}{2} m \left(\nu_L^T C^\dagger \nu_L + \nu_L^\dagger C \nu_L^* \right) \quad (۳-۷۲)$$

جمله بالا تحت تبدیلات (۳-۷۱) به صورت زیر تبدیل می یابد

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{M}} \rightarrow \frac{1}{2} m \left(e^{2i\varphi} \nu_L^T C^\dagger \nu_L + e^{-2i\varphi} \nu_L^\dagger C \nu_L^* \right) \quad (۳-۷۳)$$

شایان توجه است که نمی توان به جای تبدیل (۳-۷۱) برای میدان کایرال چپگرد، میدان ماژورانا (۳-۳۰)

(۵۶) را به صورت

$$\nu \rightarrow e^{i\varphi} \nu \quad (۳-۷۴)$$

تبدیل داد و انتظار داشت که لاگرانژی ماژورانا در معادله (۳-۵۸) بدون تغییر باقی بماند. زیرا

$$\nu^C \rightarrow e^{-i\varphi} \nu^C \quad (۳-۷۵)$$

می باشد و در نتیجه تبدیلی به مانند (۳-۷۴) با شرط ماژورانا (۳-۵۷) سازگار نیست. همچنین تبدیل

(۳-۷۴) با تعریف میدان ماژورانا (۳-۵۶) ناسازگار است، زیرا اگر $\nu_L \rightarrow e^{i\varphi} \nu_L$ تبدیل یابد، آنگاه

$$\nu_L^C \rightarrow e^{-i\varphi} \nu_L^C \text{ تبدیل می یابد.}$$

نبود پایستگی عدد لپتونی را می توان این گونه هم توضیح داد که در مورد نوترینوی دیراک، $L=1$ و

پادنوترینوی دیراک $L=-1$ است. اما از آنجا که نوترینوها و پادنوترینوهای ماژورانا یک ذره هستند،

مشخص است که عدد لپتونی نمی تواند پایسته باشد. در واقع بخش لپتونی عملگر عدد لپتونی دیراک

در معادله (۳-۲۲) تحت قید ماژورانا $b_{\nu_k}^{(h)}(p) = a_{\nu_k}^{(h)}(p)$ صفر می شود.

با این حال از آنجا که جرم نوترینوها بسیار کوچک است و تنها جمله جرمی نوترینوهای ماژورانا در

لاگرانژی تحت تبدیلات پیمانه ای $U(1)$ ، (۳-۱۹)، ناوردا نمی باشد. می توان به نوترینوها و لپتونهای

باردار، عدد لپتونی کل مؤثری نسبت داد که در همه فرآیندهای غیرحساس به جرم نوترینوها

ماژورانای، پایسته بماند. در چنین فرآیندهایی نوترینوها را می توان بدون جرم در نظر گرفت. این

عملگر عدد لپتونی از ناوردایی لاگرانژی مؤثر زیر

$$\mathcal{L}_{\text{eff}} = \overline{\nu_L^{\text{eff}}} i \not{\partial} \nu_L^{\text{eff}} + \overline{l} (i \not{\partial} - m_l) l - \frac{g}{\sqrt{2}} \left(\overline{\nu_L^{\text{eff}}} \gamma^\mu l_L W_\mu + \overline{l_L} \gamma^\mu \nu_L^{\text{eff}} W_\mu^\dagger \right) \quad (۷۶-۳)$$

تحت تبدیلات پیمانه‌ای U(۱)

$$\nu_L^{\text{eff}} \rightarrow e^{i\varphi} \nu_L^{\text{eff}}, \quad l_L \rightarrow e^{i\varphi} l_L, \quad l_R \rightarrow e^{i\varphi} l_R \quad (۷۷-۳)$$

به دست می‌آید. ν_L^{eff} میدان نوترینو ویل بدون جرم مؤثر است. با توجه به رابطه (ب-) جریان پایسته

مؤثر، $\partial_\mu j_{\text{eff}}^\mu$ ، برابر می‌شود با

$$j_{\text{eff}}^\mu = \overline{\nu_L^{\text{eff}}} \gamma^\mu \nu_L^{\text{eff}} + \overline{l_\alpha} \gamma^\mu l_\alpha \quad (۷۸-۳)$$

و بار مؤثر پایسته ($\partial_\mu L = 0$) هم برابر با عبارت زیر می‌شود:

$$L_{\text{eff}} = \int d^3x j_{\text{eff}}^0(x) \quad (۷۹-۳)$$

در این حالت میدان کایرال نوترینوی بدون جرم ν_L^{eff} کوانتیزه می‌شود:

$$\nu_L^{\text{eff}}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a^{(-)}(p) u^{(-)}(p) e^{-ip \cdot x} + a^{(+)\dagger}(p) v^{(+)}(p) e^{ip \cdot x} \right] \quad (۸۰-۳)$$

که $b^{(+)}(p) \rightarrow a^{(+)}(p)$ انجام داده‌ایم تا ارتباط با میدان ماژورانای جرم‌دار در معادله (۶۹-۳) را

نشان دهیم. با استفاده از روابط

$$\left(\gamma^0 \right)^\dagger = \gamma^0, \quad \left(\gamma^k \right)^\dagger = -\gamma^k \Leftrightarrow \left(\gamma^\mu \right)^\dagger = \gamma_\mu \quad (۸۱-۳)$$

برای اسپینورهای u, v می‌بینیم که حد بی‌جرمی بخش چپگرد میدان ماژورانای جرم‌دار در معادله

(۶۷-۳) به $\nu_L^{\text{eff}}(x)$ تبدیل می‌یابد.

با استفاده از (۸۰-۳) و بسط فوریه برای میدان لپتون باردار دیراکی $l(x)$ ، می‌توان عملگر عدد

لپتونی مؤثر بسامان و بهنجار را به دست آورد.

$$\begin{aligned} :L_{\text{eff}}: &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \left[a^{(-)\dagger}(p) a_{r\alpha}^{(-)}(p) e^{-ip \cdot x} + a^{(+)\dagger}(p) a_{r\alpha}^{(+)}(p) e^{ip \cdot x} \right] \\ &+ \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} \left[a_{l\alpha}^{(h)\dagger}(p) a_{l\alpha}^{(h)}(p) - b_{l\alpha}^{(h)\dagger}(p) b_{l\alpha}^{(h)}(p) \right] \end{aligned} \quad (۸۲-۳)$$

می‌بینیم که نوترینوهایی با هلیسیتی منفی دارای $L_{\text{eff}} = +1$ و نوترینوهایی با هلیسیتی مثبت دارای $L_{\text{eff}} = -1$ هستند. همانگونه که گفته شد، همه این موارد تنها در فرآیندهای غیرحساس به جرم نوترینوهای ماژورانای برقرار است. زیرا در چنین فرآیندهایی لپتون باردار با $L_{\text{eff}} = +1$ تنها می‌تواند نوترینو با هلیسیتی منفی و پادلپتون باردار با $L_{\text{eff}} = -1$ تنها می‌تواند نوترینو با هلیسیتی مثبت تولید کند.

اگر جرم ماژورانا را در معادله (۷۲-۳) به صورت اختلالی در لاگرانژی بدون جرم در نظر بگیریم، گذارهایی با

$$\Delta L_{\text{eff}} = \pm 2 \quad (83-3)$$

رخ می‌دهد. محتملترین فرآیندهایی که کشف چنین گذارهایی را ممکن می‌دارند واپاشی‌های بتازای دوگانه بدون نوترینو می‌باشد.

۳-۲-۵ تقارن CP برای نوترینوهای ماژورانا

از آنجا که تنها برهمکنش نوترینوها برهمکنشهای ضعیف می‌باشد که نقض کننده بیشینه تقارنهای پاریتی و همیوگی بار هستند، ویژگیهای نوترینوها تنها این تبدیلات منجر به هیچ قید فیزیکی نمی‌شود. از طرفی برهمکنشهای ضعیف لزوماً تقارن تحت تبدیلات CP را نقض نمی‌کنند. نقض تقارن CP در برهمکنشهای ضعیف ممکن است پیامد ساختار بنیادی برهمکنشهای ضعیف باشد، اما اکنون فرض بر آن است که این امر به مقدار ماتریسهای جرمی فرمیون و ماتریس آمیختگی حاصل از آن بستگی دارد. می‌توان همانند بحث ۲-۶ برای کوارکها، برای نوترینوهای دیراک نیز بحث کرد.

در ساده‌ترین حالت، برای یک نوترینوی ماژورانا امکان نقض CP وجود ندارد.

لاگرانژی ماژورانا در معادله (۴۹-۳) را در نظر می‌گیریم. تحت تبدیل CP، میدان کایرال ν_L به صورت زیر تبدیل می‌یابد:

$$U_{CP} \nu_L(x) U_{CP}^{-1} = \xi_V^{CP} \gamma^0 \nu_L^{CP}(x_P) \quad (84-3)$$

که ξ_{ν}^{CP} فاز CP و $x_p^{\mu} = (x^{\circ}, -\vec{x})$ می‌باشد. نظریه در صورتی تحت CP متقارن است که مقدار فاز ξ_{ν}^{CP} آن به گونه‌ای باشد تا لاگرانژی به شکل زیر تبدیل شود:

$$U_{\text{CP}} \mathcal{L}(x) U_{\text{CP}}^{-1} = \mathcal{L}(x_p) \quad (۸۵-۳)$$

با استفاده از معادله (۸۴-۳)، تبدیل CP برای

$$\nu_L^C(x) = C \overline{\nu_L^T} = C(\gamma^{\circ})^T \nu_L^*(x) \quad (۸۶-۳)$$

به صورت زیر درمی‌آید:

$$U_{\text{CP}} \nu_L^{\text{CP}} U_{\text{CP}}^{-1} = -\xi_{\nu}^{\text{CP}*} C(\gamma^{\circ})^T C^* \nu_L(x_p) = -\xi_{\nu}^{\text{CP}*} \gamma^{\circ} \nu_L(x_p) \quad (۸۷-۳)$$

در رابطه بالا از ویژگی $C^* = -C^{-1}$ استفاده شده است. بنابراین $\overline{\nu_L^C}(x)$ ، به صورت زیر تبدیل می‌یابند

$$\begin{aligned} U_{\text{CP}} \overline{\nu_L^C}(x) U_{\text{CP}}^{-1} &= \xi_{\nu}^{\text{CP}*} \overline{\nu_L^C}(x_p) \gamma^{\circ} \\ U_{\text{CP}} \overline{\nu_L^C}(x) U_{\text{CP}}^{-1} &= -\xi_{\nu}^{\text{CP}}(x_p) \gamma^{\circ} \end{aligned} \quad (۸۸-۳)$$

جمله جنبشی

$$\mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{M}}(x) = \frac{1}{\gamma} \overline{\nu_L^C}(x) i \not{\partial} \nu_L(x) + \overline{\nu_L^C}(x) i \not{\partial} \nu_L^C(x) \quad (۸۹-۳)$$

به ازای هر مقداری از فاز ξ_{ν}^{CP} ناوردای CP می‌باشد:

$$\begin{aligned} U_{\text{CP}} \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{M}}(x) U_{\text{CP}}^{-1} &= \frac{1}{\gamma} \left(\overline{\nu_L^C}(x_p) \gamma^{\circ} i \not{\partial} \gamma^{\circ} \nu_L^C(x_p) + \overline{\nu_L^C}(x_p) \gamma^{\circ} i \not{\partial} \gamma^{\circ} \nu_L(x_p) \right) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\overline{\nu_L^C}(x_p) i \not{\partial}^{\text{P}} \nu_L^C(x_p) + \overline{\nu_L^C}(x_p) i \not{\partial}^{\text{P}} \nu_L(x_p) \right) = \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{M}}(x_p) \end{aligned} \quad (۹۰-۳)$$

$$\not{\partial}^{\text{P}} = \partial / \partial x_p^{\mu}$$

از طرفی جمله جرمی مائورانا در معادله (۴۸-۳)،

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{M}} = -\frac{1}{\gamma} m \left[\overline{\nu_L^C}(x) \nu_L(x) + \overline{\nu_L}(x) \nu_L^C(x) \right] \quad (۹۱-۳)$$

به صورت زیر تبدیل می‌یابد.

$$U_{\text{CP}} \mathcal{L}_{\text{kin}}^{\text{M}}(x) U_{\text{CP}}^{-1} = -\frac{1}{\gamma} m \left[-(\xi_{\nu}^{\text{CP}})^{\dagger} \overline{\nu_L^C}(x_p) \nu_L^C(x_p) - (\xi_{\nu}^{\text{CP}*})^{\dagger} \overline{\nu_L^C}(x_p) \nu_L(x_p) \right] \quad (۹۲-۳)$$

بنابراین با توجه به شرط (۳-۸۵)، مقدار فاز برابر می شود با

$$\xi_v^{CP} = \pm i \quad (۳-۹۳)$$

در اینجا بین ذره ماژورانی آزاد و ذره دیراکی آزاد تفاوت است. در مورد ذره دیراکی، فاز ξ_v^{CP} دلبخواه است.

موهومی بودن پاریتی CP نوترینوی ماژورانا هیچ مشکلی برای نوردایی لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار تحت CP به وجود نمی آورد. از تبدیل CP برای میدان لپتونی باردار l

$$U_{CP} l U_{CP}^{-1} = \xi_l^{CP} \gamma^0 \bar{l}^T \quad (۳-۹۴)$$

و تبدیل CP در معادله (۲-۱۱۶) برای میدان بوزونی پیمانه ای W_μ ،

$$U_{CP} W_\mu U_{CP}^{-1} = -W^{\mu\dagger} \quad (۳-۹۵)$$

تبدیل CP را برای لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار به دست می آوریم.

$$U_{CP} \mathcal{L}_{I,L}^{CC}(x) U_{CP}^{-1} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\xi_v^{CP*} \xi_l^{CP} \bar{l}_L \gamma^{\mu\dagger} \nu_L W^{\mu\dagger} - \xi_v^{CP} \xi_l^{CP*} \bar{\nu}_L \gamma^{\mu\dagger} l_L W^\mu \right) \quad (۳-۹۶)$$

$$\gamma^{\mu\dagger} = (\gamma^{0\dagger}, \vec{\gamma}^\dagger) = (\gamma^0, -\vec{\gamma}) = \gamma_\mu$$

$$U_{CP} \mathcal{L}_{I,L}^{CC}(x) U_{CP}^{-1} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \left(\xi_v^{CP*} \xi_l^{CP} \bar{l}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^\dagger - \xi_v^{CP} \xi_l^{CP*} \bar{\nu}_L \gamma^\mu l_L W_\mu \right) \quad (۳-۹۷)$$

لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار با شرط زیر تحت CP نورداست.

$$\xi_v^{CP*} \xi_l^{CP} = 1 \quad (۳-۹۸)$$

بنابراین پاریتی موهومی محض CP برای نوترینوی ماژورانا بیانگر وجود پاریتی موهومی محض CP برای لپتون باردار می باشد:

$$\xi_v^{CP} = \pm i \Rightarrow \xi_l^{CP} = \pm i \quad (۳-۹۹)$$

با چنین گزینشی از پاریتی های CP، پایداری CP برقرار می ماند.

۳-۲-۶ جرم مؤثر مازورانا

جمله جرمی مازورانا در معادله (۳-۴۸) تنها شامل میدان کایرال چپگرد نوترینو ν_L می باشد که در مدل استاندارد هم (به ازای هر نسل لپتون، یکی) وجود دارد. در نتیجه این پرسش پیش می آید که نوترینوهای مدل استاندارد هم دارای جرم مازورانا هستند یا خیر؟ برای پاسخ به این پرسش با مراجعه به (جدول ۱-۱) درمی یابیم مؤلفه سوم ایزواسپین ضعیف و فوق بار برای میدان کایرال چپگرد

نوترینو ν_L ، برابر با $Y = -1$ ، $I_3 = \frac{1}{2}$ است. اما با توجه به

$$\overline{\nu_L^C} \nu_L = -\nu_L^T C^\dagger \nu_L \quad (۳-۱۰۰)$$

$Y = -2$ ، $I_3 = 1$ می باشد. بنابراین پاسخ پرسش مطرح شده منفی است. زیرا در مدل استاندارد هیچ سه گانه ایزواسپین ضعیف با $Y = 2$ وجود ندارد و امکان وجود جمله لاگرانژی بازبهنجارپذیری که بتواند جرم نوترینوی مازورانا ایجاد کند، منتفی است. بنا به محاسبات توانی نمودارهای توانی، جملات لاگرانژی شامل حاصلضرب میدانها با بعد انرژی بیشتر از چهار، بازبهنجارپذیر نیستند [۱۳].

از لاگرانژی دیراک

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x) (i \vec{\partial} - m) \psi(x) \quad (۳-۱۰۱)$$

با توجه به این امر که کنش $\int d^4x \mathcal{L}(x)$ بدون بعد است و در نتیجه $[E] \sim \mathcal{L}(x)$ می باشد، به آسانی درک می شود که میدانهای فرمیونی با اسپین $\frac{1}{2}$ دارای بعد انرژی $[E]^{3/2}$ هستند. از طرفی میدانهای بوزونی دارای بعد انرژی هستند.

با در نظر گرفتن یک نسل (برای سادگی) جمله ای با کمترین بعد که بتواند جرم نوترینوی مازورانا تولید کند و بتوان آن را با میدانهای مدل استاندارد موجود در جدولهای (۱-۱) و (۳-۱) ساخت و تقارنهای مدل استاندارد را هم نمایش دهد، جمله نقض کننده عدد لپتونی است

$$\mathcal{L}_5 = \frac{g}{\mathcal{M}} (L_L^T \tau_\gamma \Phi) C^\dagger (\Phi^T \tau_\gamma L_L) + \text{H.c.} \quad (۳-۱۰۲)$$

g ضریب بدون بعد جفت شدگی و $\mathcal{M}$ ثابتی با بعد جرم است. در معادله (۳-۱۰۲)، L_L دوگانه لپتونی مدل استاندارد در یک نسل در (۱-۶) و Φ دوگانه هیگز در معادله (۱-۹۱) می باشد. $\mathcal{L}_\delta$ را می توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\mathcal{L}_\delta = \frac{1}{2} \frac{g}{\mathcal{M}} (L_L^T C^\dagger \tau_\nu \bar{\tau} L_L) \cdot (\Phi^T \tau_\nu \bar{\tau} \Phi) + \text{H.c.} \quad (۳-۱۰۳)$$

پیامد شکست تقارن الکتروضعیف (ر.ک. بخش ۱-۴)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{شکست تقارن}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu + H \end{pmatrix} \quad (۳-۱۰۴)$$

می باشد. $\mathcal{L}_\delta$ جمله جرمی ماژورانا را برای ν_L ایجاد می کند.

$$\mathcal{L}_{\text{mas}}^M = \frac{1}{2} \frac{g \nu^2}{\mathcal{M}} \nu_L^T C^\dagger \nu_L + \text{H.c.} \quad (۳-۱۰۵)$$

که در مقایسه با (۳-۷۲)، متناظر با جرم ماژورانا زیر می باشد.

$$m = \frac{g \nu^2}{\mathcal{M}} \quad (۳-۱۰۶)$$

جمله لاگرانژی $\mathcal{L}_\delta$ در چارچوب مدل استاندارد قابل قبول نیست، زیرا شامل حاصلضرب میدانهایی با بعد انرژی پنج می باشد که بازبهنجارپذیر نیستند. مدل استاندارد نظریه نهایی نیست، بلکه نظریه انرژی پایین مؤثری است که حاصل شکست تقارن نظریه متحد انرژی بالا می باشد [۳۵، ۳۶].

بنابراین پذیرفتنی است که جملات لاگرانژی انرژی پایین مؤثری وجود داشته باشند که تقارن مدل استاندارد را نشان می دهند اما بازبهنجارپذیر نیستند [۳۷-۴۱].

این جملات لاگرانژی مؤثر باید تقارن مدل استاندارد را در بالای مقیاس انرژی الکتروضعیف نشان دهند، زیرا از نظریه انرژی بالایی ایجاد می شوند که باید شامل تقارنهای پیمانه ای مدل استاندارد باشد تا در انرژیهای پایین به مدل استاندارد کاهش یابد. این رویه همانند آن چیزی است که در مطالعه برهمکنشهای ضعیف در انرژیهای زیر مقیاس انرژی الکتروضعیف از طریق نظریه بازبهنجارپذیر فرمی برای برهمکنشهای ضعیف پذیرفته شده است، که تظاهری از مدل استاندارد در انرژیهای پایین است.

جمله لاگرانژی را که شامل حاصلضرب میدانها با بعد انرژی d باشد، عملگر بعد d خوانند، زیرا میدانها در نظریه کوانتمی میدان، عملگر هستند.

از آنجا که بعد کل انرژی هر جمله لاگرانژی باید از مرتبه $[E]^4$ باشد، ثابت جفتشدگی عملگر بعد d با $d > 4$ متناسب با M^{4-d} می باشد. M مشخصه جرمی سنگین از مقیاس شکست تقارن در نظریه متحد انرژی بالاست.

تناسب ثابت جفتشدگی عملگر بعد d با M^{4-d} در عمل ضریب کاهنده بسیار قوی را نشان می دهد که مشاهده پذیری آثار انرژی پایین فیزیک ماورای مدل استاندارد را محدود می سازد. واضح است که مشکل مشاهده آثار عملگرهای بازبهنجارناپذیر انرژی پایین مؤثر با بعد به سرعت افزایش می یابد. عملگر بازبهنجارناپذیر انرژی پایین مؤثر با پایین ترین بعد، که با تقارنهای مدل استاندارد سازگار باشد، عملگر مؤثر بعد پنج L_5 در معادله (۳-۱۰۲) می باشد، که جرم نوترینوی ماژورانا را در (۳-۱۰۶) متناسب با M^{-1} تولید می کند. با این ملاحظات چشم آن می رود که پژوهش درباره جرم نوترینو دسترس پذیرترین درجه بر دنیای فیزیک ماورای مدل استاندارد باشد.

عملگر مؤثر بعد پنج را نمی توان برای کوارکها نوشت زیرا جمله جرمی ماژورانا برای کوارکها ایجاد می کند که بنا بر باردار بودن کوارکها ممنوع است. یعنی جایگذاری Q_L به جای L_L در معادله (۳-۱۰۲) جمله لاگرانژی ایجاد می کند که تحت تبدیلات پیمانه ای $U(1)_Y$ ناوردا نمی باشد، زیرا $Y(Q_L) = 1/3$ ، $Y(\Phi) = 1$ می باشد. این عملگر مؤثر با پایین ترین بعد که شامل میدانهای کوارکی می شود عملگرهای بعد شش نقض کننده عدد باریونی و لپتونی هستند.

$$(q_R^{D^T} q_R^U)(Q_L^T Q_L), (Q_L^T Q_L)(q_R^{U^T} L_R), (Q_L^T Q_L)(Q_L^T L_L) \\ (q_R^{D^T} q_R^U)(q_R^{U^T} l_R), (q_R^{U^T} q_R^U)(q_R^{D^T} l_R) \quad (107-3)$$

ضرایب متناسب با M^{-2} جملات لاگرانژی شامل این عملگرها را ضعیف می کند. با این حال این جملات بسیار جذاب هستند و بالقوه مشاهده پذیر هستند زیرا واپاشی پروتون $p \rightarrow e^+ \pi^0$ را سبب می شوند.

اهمیت عملگر بعد پنج L_5 در آن است که جرم نوترینو را در معادله (۳-۱۰۶) متناسب با $\nu^2/\mathcal{M}$ ایجاد می‌کند. از آنجا که ν مقیاس شکست تقارن الکتروضعیف است، مقیاس جرم فرمیون دیراکی ایجاد شده از طریق سازوکار هیگز را تنظیم می‌سازد. پس می‌توان معادله (۳-۱۰۶) را به صورت زیر نوشت.

$$m \propto \frac{m_D^2}{\mathcal{M}} \quad (3-108)$$

که m_D جرم دیراک نوعی است که می‌تواند از همان مرتبه جرم لپتون باردار یا از مرتبه جرم کوآرک در همان نسل باشد. رابطه (۳-۱۰۸) همان ساختاری را دارد که با سازوکار ν ^۱ به دست می‌آید. نیک بهانگی این نامگذاری در آن است که هرچه جرم $\mathcal{M}$ بیشتر باشد، جرم نوترینو m سبکتر است. با استفاده از رابطه (۳-۱۰۸) می‌توان کوچک بودن جرمهای مشاهده شده برای نوترینو را توضیح داد. مثلاً اگر $\mathcal{M} \sim 10^5 \text{ GeV}$, $m_D \sim \nu \sim 10^2 \text{ GeV}$ ، که مقیاسی پذیرفتنی در نظریه اتحاد بزرگ است [۴۲]، مقدار $m \sim 10^{-2} \text{ eV}$ به دست می‌آوریم که مطابق با داده‌های تجربی مقیاسی پذیرفتنی برای جرم نوترینو می‌باشد.

۳-۳ آمیختگی سه نسل نوترینو ماژورانا

برای آمیختگی سه نسل نوترینوی ماژورانا، ابتدا میدانهای نوترینوی طعم‌دار چپگرد در معادله (۱-۱۲۲) را در نظر می‌گیریم.

$$\nu'_L \equiv \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (3-109)$$

می‌توانیم جمله جرمی ماژورانا را بسازیم

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^M(x) = \frac{1}{2} \nu_L'^T C^\dagger M^L \nu_L' + \text{H.c.} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu_{\alpha L}'^T C^\dagger M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L}' + \text{H.c.} \quad (3-110)$$

^۱ see-saw mechanism

در حالت کلی، ماتریس M^L متقارن مختلط است.

$$\sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} v_{\alpha L}^{\prime T} C^\dagger M_{\alpha \beta}^L v_{\beta L}' = - \sum_{\alpha, \beta} v_{\beta L}^{\prime T} M_{\alpha \beta}^L (C^\dagger)^T v_{\alpha L}' \quad (111-3)$$

برای به دست آوردن عبارت آخر، ترانهاده گرفتیم و به سبب ویژگی پادجابجایی میدانهای فرمیونی تغییر علامت دادیم. از آنجا که $C^T = -C$ می باشد،

$$\sum_{\alpha, \beta} v_{\alpha L}^{\prime T} C^\dagger M_{\alpha \beta}^L v_{\beta L}' = \sum_{\alpha, \beta} v_{\beta L}^{\prime T} C^\dagger M_{\alpha \beta}^L v_{\alpha L}' = \sum_{\alpha, \beta} v_{\alpha L}^{\prime T} C^\dagger M_{\beta \alpha}^L v_{\beta L}' \quad (112-3)$$

به دست می آید. در آخرین عبارت $\alpha \rightleftharpoons \beta$ کردیم. با مقایسه سمت چپ و راست معادله (112-3)، درمی یابیم که M^L متقارن است.

$$M_{\alpha \beta}^L = M_{\beta \alpha}^L \quad (113-3)$$

همانگونه که درباره نوترینوهای دیراک بحث شد، میدان نوترینوهای جرم دار با قطری کردن جمله جرمی مائورانا در معادله (110-3) به دست می آید. ماتریس متقارن جرمی M^L را می توان با تبدیلات زیر

$$(V_L^\nu)^T M^L V_L^\nu = M$$

$$M_{kj} = m_k \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3) \quad (114-3)$$

قطری کرد (V_L^ν ماتریس یکانی با جرمهای حقیقی و مثبت m_k). قطری کردن با بیان میدانهای طعم دار چپگرد به صورت ترکیبهای خطی از مؤلفه های چپگرد میدانهای با جرم معین، به دست می آید.

$$v_L' = V_L^\nu n_L, \quad n_L = \begin{pmatrix} v_{1L} \\ v_{2L} \\ v_{3L} \end{pmatrix} \quad (115-3)$$

با استفاده از رابطه بالا می توان جمله جرمی مائورانا (110-3) را به شکل قطری نوشت:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^M(x) = \frac{1}{2} n_L^T C^\dagger M n_L + \text{H.c.} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k v_{kL}^T C^\dagger v_{kL} + \text{H.c.} \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^M(x) = -\frac{1}{2} \overline{n_L^C} M n_L + \text{H.c.} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 m_k \overline{v_{kL}^C} v_{kL} + \text{H.c.} \quad (116-3)$$

میدان مائورانی نوترینوهای جرم‌دار

$$\nu_k = \nu_{kL} \nu_{kL}^C \quad (117-3)$$

در شرط مائورانا صدق می‌کنند

$$\nu_k^C = \nu_k \quad (118-3)$$

پس می‌توان لاگرانژی مائورانا را برای سه نسل به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{L}^M = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^3 \overline{\nu_k} (i \vec{\partial} - m_k) \nu_k = \frac{1}{4} \overline{n} (i \vec{\partial} - m_k) n \quad (119-3)$$

$$n = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} \quad (\text{میدانهای نوترینوی مائورانا برای جرم دار})$$

جمله جرمی مائورانا در معادله نخست (3-116) تحت تبدیلات پیمانه‌ای جهانی (1) U

$$\nu_{kL} \rightarrow e^{i\varphi} \nu_{kL} \quad k=1,2,3 \quad (120-3)$$

ناوردا نیست (فاز φ برای همه نوترینوهای جرم‌دار یکسان است). همان گونه که پیش از این گفته شد، این موضوع بیانگر نقض پایداری عدد لپتونی است، که منجر به پدیده‌های جالبی مانند واپاشی بتازای دوگانه بدون نوترینو می‌شود.

3-3-1 برهمکنشهای ضعیف در آمیختگی سه نسل نوترینوی مائورانا

اثر روابط آمیختگی (3-115) را بر جریان باردار ضعیف (1-68) می‌آزماییم. همانند مورد نوترینو

دیراک

$$j_{W,L}^\rho = 2 \overline{n_L} U^\dagger \gamma^\rho l_L \quad (121-3)$$

$$U = V_L^{l\dagger} V_L^\nu$$

$$\nu_L = U n_L = V_L^{l\dagger} \nu'_L, \quad \nu_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ \nu_{\mu L} \\ \nu_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (122-3)$$

تا بتوانیم جریان باردار ضعیف لپتونی را همانند معادله مدل استاندارد (1-125) بنویسیم

$$j_{W,L}^{\rho} = \sqrt{2} \overline{v_L} \gamma^{\rho} l_L = \sqrt{2} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{v_{\alpha L}} \gamma^{\rho} l_{\alpha L} \quad (123-3)$$

تفاوت مهم با آمیختگی نوترینوهای دیراک آن است که ماتریس آمیختگی ماژورانا سه فاز ناقض CP دارد نه یکی. زیرا جمله جرمی ماژورانا در معادله (3-116) تحت تبدیلات پیمانه‌ای $U(1)$ ناوردا نیست.

$$v_{kL} = e^{i\varphi_k} v_{kL} \quad (124-3)$$

در فصل ۲ توضیح داده شد که چرا پنج فاز از شش فاز ماتریس آمیختگی CKM حذف می‌شود. برای نوترینوهای دیراک هم به همان صورت است زیرا بجز بخش CC ضعیف لاگرانژی تحت تبدیلات فاز (3-23) میدانهای لپتون باردار و نوترینو ناورداست. اما جمله جرمی ماژورانا تحت تبدیلات فاز (3-24) ناوردا نیست، و نمی‌توان میدانهای نوترینو جرم‌دار چپگرد را فازبندی دوباره کرد تا دو فاز (که می‌توان در سمت راست ماتریس آمیختگی از آنها فاکتور گرفت) حذف شود. بنابراین ماتریس آمیختگی یکانی نوترینوهای ماژورانا به سه زاویه آمیختگی و سه فاز فیزیکی ناقض CP بستگی دارد. می‌توان آن را به صورت حاصلضرب ماتریس یکانی U^D با سه زاویه آمیختگی و یک فاز (همانند مورد دیراکی) در ماتریس یکانی قطری D^M با دو فاز مستقل نوشت:

$$U = U^D D^M \quad (125-3)$$

به فاز U^D فاز دیراکی و به دو فاز D^M فازهای ماژورانا گویند. ویژگی‌های U^D همانند ماتریس آمیختگی کوراکهاست. نقض CP ناشی از فاز دیراکی را می‌توان به روش نوردایی تحت فازبندی دوباره برحسب ناورداهای یارلسکوگ حذف کرد [27-30].

$$\text{Im} [U_{\mu 3} U_{e 2} U_{\mu 2}^* U_{e 3}^*] = \text{Im} [U_{\mu 3}^D U_{e 2}^D U_{\mu 2}^{D*} U_{e 3}^{D*}] \quad (126-3)$$

تساوی دوم ناشی از نوردایی J تحت فازبندی دوباره است که بیانگر عدم شرکت فازهای ماژورانا است. همه تقارنهای CP و T ناشی از فاز دیراکی به J بستگی دارد. پارامتربندی U^D با (3-28) یکسان است.

ماتریس یکانی قطری D^M را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$D^M = \text{diag}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, e^{i\lambda_3}) , \quad \lambda_1 = 0 \quad (127-3)$$

فازهای λ_2, λ_3 دو فاز فیزیکی ماژورانی ناقض CP است. از آنجا که همه کمیت‌های قابل اندازه‌گیری به تفاوت سه فاز $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ بستگی دارد، از دید فیزیکی، گزینش $\lambda_1 = 0$ با هر گزینش دیگری یکسان است. بر اثر فازبندی دوباره همه میدانهای لپتونی باردار با $e^{i\varphi}$ ، تغییر $e^{i\lambda_k} \rightarrow e^{i(\lambda_k - \varphi)}$ رخ می‌دهد، درحالی‌که $e^{i\lambda_k} \rightarrow e^{i(\lambda_k - \lambda_j)}$ ثابت می‌ماند.

۳-۲-۳ ناوردایی CP در آمیختگی سه نسل نوترینوی ماژورانا

اکنون می‌خواهیم شرایط حاکم بر عناصر ماتریس آمیختگی را برای ناوردایی CP بررسی کنیم. پیش از این در بخش ۳-۲-۶ دیدیم برای آنکه جمله جرمی ماژورانا تحت CP ناوردا باشد، میدان نوترینوی جرم‌دار چپگرد باید به شکل زیر تبدیل یابد.

$$U_{CP} \nu_{kL}(x) U_{CP}^{-1} = \eta_k i \gamma^0 C \overline{\nu_{kL}}^T(x_P) , \quad \eta_k = \pm 1 \quad (128-3)$$

در آغاز شرایط ناوردایی CP را برای لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار لپتونی بررسی می‌کنیم.

$$\mathcal{L}_{I,L}^{CC}(x) = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \left(U_{\alpha k}^* \overline{\nu_{kL}} \gamma^\rho l_{\alpha L} W_\rho + U_{\alpha k} \overline{l_{\alpha L}} \gamma^\rho \nu_{kL} W_\rho^\dagger \right) \quad (129-3)$$

$$\Rightarrow U_{CP} l_\alpha U_{CP}^{-1} = \xi_{l\alpha}^{CP} \gamma^0 C \overline{l_\alpha}^T \quad (l: \text{میدان لپتون باردار دیراکی}) \quad (130-3)$$

با توجه به تبدیل W_μ در معادله (۱۱۶-۲)،

$$U_{CP} W_\mu U_{CP}^{-1} = -W^{\mu\dagger} \quad (131-3)$$

و با استفاده از رابطه (۹۶-۳)

$$U_{CP} \mathcal{L}_{I,L}^{(CC)} U_{CP}^{-1} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_{k=1}^3 \left(-U_{\alpha k}^* \eta_k i \xi_{l\alpha}^{CP} \overline{l_{\alpha L}} \gamma^\rho \nu_{kL} W_\rho^\dagger + U_{\alpha k} \eta_k i \xi_{l\alpha}^{CP*} \overline{\nu_{kL}} \gamma^\rho l_{\alpha L} W_\rho \right) \quad (132-3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (129-3) \\ (132-3) \end{array} \right\} \Rightarrow U_{\alpha k} \eta_k i \xi_{l\alpha}^{CP*} U_{\alpha k}^* \quad (133-3)$$

همان‌گونه که پیش از این نشان داده شد، می‌توان همواره ماتریس آمیختگی را به صورت حاصلضرب ماتریس یکانی دیراک و ماتریس قطری فاز نوشت

$$\begin{cases} U_{\alpha k} = U_{\alpha k}^D e^{i\lambda_k} \\ (133-3) \end{cases} \Rightarrow U_{\alpha k}^D e^{i\lambda_k} \eta_k i \xi_{l\alpha}^{CP*} = U_{\alpha k}^{D*} \quad (134-3)$$

ماتریس یکانی دیراک U^D را می‌توان برحسب سه زاویه آمیختگی و یک فاز حذف ناشدنی پارامتربندی کرد. پس شرط لازم برای ناوردایی CP حقیقی بودن U^D می‌باشد، درست همانند نوترینوهای دیراک:

$$U^D = U^{D*} = \mathcal{O}, \quad (\mathcal{O}^T = \mathcal{O}^{-1}) \quad (135-3)$$

پس شرط ناوردایی CP در پارامتربندی (3-28)، آن است که

$$\delta_{13} = 0 \text{ یا } \pi \quad (136-3)$$

به سبب وجود فازهای مازورانی λ_k حقیقی بودن U^D برای ناوردایی CP کافی نیست. برقراری (3-135) سبب می‌شود که معادله (3-134) به صورت زیر درآید.

$$\begin{aligned} \eta_k &= -i \xi_{l\alpha}^{CP} e^{-i\lambda_k}, \quad \eta_k = \pm 1 \\ \xi_{l\alpha}^{CP} &= i \quad (\text{برای همه لپتونهای باردار}) \Rightarrow \eta_k = e^{-i\lambda_k}, \quad 0 \leq \lambda_k \leq 2\pi \end{aligned} \quad (137-3)$$

جدول 3-1 تناظر بین پاریتی CP، η_k ، برای ν_k ، فاز مازورانا، λ_k ، و ضرب $e^{i\lambda_k}$ در ماتریس قطری (3-127)

η_k	λ_k	$e^{i\lambda_k}$
+1	$0, \pi$	± 1
-1	$\pi/2, 3\pi/2$	$\pm i$

از آنجا که ماتریس قطری در معادله (3-127) دارای ضرایب $e^{i\lambda_k}$ در سمت راست ماتریس آمیختگی می‌باشد، لاگرانژی در صورتی تحت تبدیل CP ناورداست که همه عناصر هر ستون از ماتریس آمیختگی یا حقیقی و یا موهومی محض باشند. اگر یک ستون دارای مقادیر حقیقی و ستون دیگر دارای مقادیر موهومی محض باشد، نوترینوهای جرم‌دار دارای مقادیر η_k با علامت مختلف می‌شوند یعنی پاریتی CP آنها مخالف یکدیگر می‌شود. مقدار η_k و پاریتی CP مربوط به آن به خودی خود و فی

نفسه معنای فیزیکی ندارد، بلکه به گزینش اختیاری فازهای CP لپتون باردار $\xi_{l\alpha}^{\text{CP}}$ ها بستگی دارد^۱. تنها تفاوت پاریتی‌های CP است که برای نوترینوهای جرم‌دار مختلف معنای فیزیکی دربر دارد. اختیاری بودن مقدار η_k در اختیاری بودن فاز λ_k (۳-۱۲۷)، و معنادار بودن فازهای نسبی CP از لحاظ فیزیکی، در معنادار بودن تفاوت فازهای ماژورانا در ماتریس آمیختگی بازنمایانده می‌شود. از (۳-۱۳۷)،

$$\frac{\eta_k}{\eta_j} = e^{-2i(\lambda_k - \lambda_j)} \quad (۳-۱۳۸)$$

که مستقل از $\xi_{l\alpha}^{\text{CP}}$ است و تحت فازبندی دوباره میدانهای لپتونی باردار ناورداست (۳-۱۲۷). البته می‌توان رویه‌ای همانند آنچه در بخش ۲-۶ ارائه شد، نیز در پیش گرفت. در آن صورت به‌طور خلاصه نتایج به‌صورت زیر درمی‌آید.

۳. $M^L = 0$ که اساساً در مدل استاندارد بی‌معناست زیرا به‌معنای ناآمیختگی در بخش لپتونی می‌باشد. $M'^L = 0$ نیز بی‌معنا می‌شود زیرا به‌معنی آن است که جرم لپتونها برابر با صفر است.

۴. M'^L, M^L, M'^{L^T} حقیقی باشد. در این مورد $P = \pm 1, W_R = \pm i 1$ است $M'^L = M'^{L*}, M^L = M^{L*}$ در این مورد می‌توان M'^L را با ماتریسهای متعامد V_L^L قطری کرد.

۳-۳-۳ آمیختگی مؤثر سه نسل نوترینو

همانگونه که توضیح داده شد، مدل استاندارد نظریه مؤثر در گستره انرژی پایین است که ناشی از شکست تقارن نظریه اتحاد بزرگ در انرژی بالا می‌باشد. نحوه پدیدار شدن آثار نظریه اتحاد از طریق جملات لاگرانژی مؤثر بازبهنجارناپذیر نیز توضیح داده شد. برای یک نوترینو، جمله لاگرانژی مؤثر با

^۱ مثلاً اگر $\xi_{l\alpha}^{\text{CP}} = -i$ برگزینیم، $\eta_k \rightarrow -\eta_k$ تبدیل می‌شود.

کمترین بعد ممکن، جمله بعد پنج ناقص عدد لپتونی در معادله (۳-۱۰۲) می‌باشد. می‌توان آن لاگرانژی را به سادگی برای سه نوترینو تعمیم داد:

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} (L'^T_{\alpha L} \tau_\nu \Phi) C^\dagger (\Phi^T \tau_\nu L'_{\beta L}) + \text{H.c.} \quad (3-139)$$

که g ماتریس متقارن 3×3 از ثوابت جفت‌شدگی است. VEV شکنده تقارن الکتروضعیف برای میدان هیگز (بخش ۱-۵) منجر به جمله جرمی مازورانا برای نوترینو می‌شود

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^M = \frac{1}{2} \frac{v^2}{\mathcal{M}} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nu'^T_{\alpha L} C^\dagger \nu'_{\beta L} + \text{H.c.} \quad (3-140)$$

پس عناصر ماتریس جرمی مازورانا (۳-۱۱۰) هم به صورت زیر درمی‌آیند

$$M^L_{\alpha\beta} = \frac{v^2}{\mathcal{M}} g_{\alpha\beta} \quad (3-141)$$

بنابراین مقیاس جرمی کوچک نوترینوهای مازورانا با کسر کوچک $v^2/\mathcal{M}$ تعیین می‌شود که توضیحی طبیعی برای کوچک بودن جرم نوترینوها در مقایسه با مقیاس الکتروضعیف می‌باشد.

۳-۴ جمله جرمی دیراک-مازورانا برای یک نسل

در بحث‌های پیشین دیدیم که میدانهای کایرال ν_L و ν_R سنگ‌بنای لاگرانژی نوترینو بودند. با توجه به مدل استاندارد و لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار، شکی در وجود ν_L نیست. از طرفی تقارنهای مدل استاندارد وجود ν_R را مجاز می‌دارد. اگر تنها ν_L وجود داشته باشد، لاگرانژی نوترینو تنها می‌تواند دربردارنده جمله جرمی مازورانا باشد، و نوترینو ذره مازورانا خواهد بود.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^L = \frac{1}{2} m_L \nu_L^T C^\dagger \nu_L + \text{H.c.} \quad (3-142)$$

اگر ν_R هم وجود داشته باشد، لاگرانژی نوترینو می‌تواند جمله جرمی دیراک را در برگیرد.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^D = -m_D \overline{\nu_R} \nu_L + \text{H.c.} \quad (3-143)$$

که بیانگر دیراکی بودن نوترینو است. لاگرانژی نوترینو علاوه بر دارا بودن جمله جرمی دیراک (۳-۳)

(۱۴۲) می‌تواند به‌ازای ν_L شامل جمله جرمی مازورانا (۳-۱۴۱) و به‌ازای ν_R شامل جمله جرمی مازورانا

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^R = \frac{1}{2} m_R \nu_R^T C^\dagger \nu_R + \text{H.c.} \quad (144-3)$$

باشد. یعنی امکان وجود جمله جرمی دیراک ماژورانا برای نوترینو می‌باشد.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{D+M} = \mathcal{L}_{\text{mass}}^D + \mathcal{L}_{\text{mass}}^L + \mathcal{L}_{\text{mass}}^R \quad (145-3)$$

بین همه ذرات بنیادی با دو مؤلفه میدان کایرال راستگرد و چپگرد تنها نوترینو می‌تواند هم جرم دیراک و هم جرم ماژورانا داشته باشد. این امر چراغ راهی برای فیزیکی جدید ماورای مدل استاندارد باشد. در مدل استاندارد جمله جرمی ماژورانا در (3-141) برای ν_L مجاز نیست زیرا تحت تبدیلهای $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ناورد نیست، اما همانگونه که در بخش (3-142) [جرم مؤثر ماژورانا] گفته شد، در فیزیک ماورای مدل استاندارد مجاز می‌باشد. ν_R تحت $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ یکتایی است، پس جمله جرمی ماژورانا در (3-144) در مدل استاندارد مجاز است. بنابراین با افزودن ν_R ، (3-145) با $m_L = 0$ در چارچوب مدل استاندارد مجاز است. در (3-144)، با فازبندی دوباره و مناسب ν_R می‌توان $m_R \in \mathbb{R}^+$ برگزید. فاز ν_R که ثابت شد، می‌توان با فازبندی دوباره و مناسب ν_L در (3-142)، $m_D \in \mathbb{R}^+$ برگزید. همینکه فاز ν_L و ν_R ثابت شد، امکان از بین بردن فاز m_L ماژورانا در (3-142) وجود ندارد. از این پس $m_R, m_D \in \mathbb{R}^+$ و $m_L \in \mathbb{C}$ برمی‌گزینیم. از دید فیزیکی، دیگر گزینشهای ممکن همه با این گزینش هم‌ارزند.

ماتریس ستونی از میدانهای کایرال چپگرد در نظر می‌گیریم:

$$N_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_L \\ -C \nu_R^T \end{pmatrix} \quad (146-3)$$

$$(50-3), (146-3) \xrightarrow{(145-3)} \mathcal{L}_{\text{mass}}^{D+M} = \frac{1}{2} N_L^T C^\dagger M N_L + \text{H.c.} \quad (147-3)$$

$$M = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$$

از معادله بالا معلوم است که میدانهای کایرال ν_L, ν_R جرم معینی ندارند^۱. برای یافتن میدانهای نوترینو جرم‌دار، ماتریس بالا را با تبدیل یکانی میدانهای کایرال قطری می‌کنیم.

$$N_L = U n_L, n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, U^T M U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, m_k \geq 0 \quad (۱۴۸-۳)$$

با تبدیل (۱۴۸-۳)، جمله جرمی دیراک-ماژورانا در (۱۴۵-۳) به صورت زیر درمی‌آید

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{D+M}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \nu_{kL}^T C^\dagger \nu_{kL} + \text{H.c.} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1,2} m_k \bar{\nu}_k \nu_k \quad (۱۴۹-۳)$$

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C = \nu_{kL} + C \bar{\nu}_{kL}^T$$

این جمله جرمی دیراک-ماژورانا بیانگر آن است که نوترینوهای جرم‌دار ذرات ماژورانا هستند. زیرا $\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{D+M}}$ در (۱۴۷-۳) دارای ساختار جمله جرمی ماژورانا برای هر دو میدان کایرال ν_L و ν_R^C می‌باشد.

$m_L \in \mathbb{C}$ و $m_R, m_D \in \mathbb{R}^+$ برگزیدیم، m_1, m_2 دو ویژه مقدار مثبت برای ماتریس زیر هستند

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \text{Re}[m_L] & m_D & -\text{Im}[m_L] & 0 \\ m_D & m_R & 0 & 0 \\ -\text{Im}[m_L] & 0 & -\text{Re}[m_L] & -m_D \\ 0 & 0 & -m_D & -m_R \end{pmatrix} \quad (۱۵۰-۳)$$

$$m_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[|m_L|^2 + m_R^2 + m_D^2 \pm \left((\text{Re}[m_L] + m_R)^2 (\text{Re}[m_L] - m_R)^2 + 4m_D^2 \right)^{1/2} \right. \\ \left. + (\text{Im}[m_L])^2 + 2(\text{Im}[m_L])^2 \left((\text{Re}[m_L])^2 - m_R^2 + m_D^2 \right)^{1/2} \right] \quad (۱۵۱-۳)$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{>0}$

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta e^{i\lambda} & \sin \theta \\ -\sin \theta e^{i\lambda} & \cos \theta \end{pmatrix}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \lambda \leq 2\pi \quad (۱۵۲-۳)$$

$$\begin{pmatrix} \text{Re}[m_L] & m_D & -\text{Im}[m_L] & 0 \\ m_D & m_R & 0 & 0 \\ -\text{Im}[m_L] & 0 & -\text{Re}[m_L] & -m_D \\ 0 & 0 & -m_D & -m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m_2 \begin{pmatrix} \sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (۱۵۳-۳)$$

^۱ به سبب عناصر غیر قطری جرم دیراکی

$$\Rightarrow \tan \vartheta = \frac{\vartheta m_D}{m_R - \text{Re}[m_L]} \quad (154-3)$$

$$\begin{pmatrix} \text{Re}[m_L] & m_D & -\text{Im}[m_L] & 0 \\ m_D & m_R & 0 & 0 \\ -\text{Im}[m_L] & 0 & -\text{Re}[m_L] & -m_D \\ 0 & 0 & -m_D & -m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \sin \lambda \end{pmatrix} = m_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \lambda \\ -\sin \theta \cos \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda \\ -\sin \theta \sin \lambda \end{pmatrix} \quad (155-3)$$

$$\Rightarrow \tan \vartheta \lambda = -\frac{\vartheta \text{Im}[m_L]}{\text{Re}[m_L] + m_R - \sqrt{(\text{Re}[m_L] - m_R)^2 + \vartheta m_D^2}}, \quad 0 \leq \vartheta \lambda \leq 4\pi \quad (156-3)$$

با توجه به مطالبی که تاکنون گفته شد و همچنین سترون بودن ν_R و فعال بودن ν_L ، نوسان بین ν_L فعال و ν_R^C به تفاوت مجذور جرمی آنها بستگی دارد.

$$\Delta m^2 = \left[(\text{Re}[m_L] + m_R)^2 [(\text{Re}[m_L] - m_R)^2 + \vartheta m_D^2] + (\text{Im}[m_L])^2 + \vartheta (\text{Im}[m_L])^2 + ((\text{Re}[m_L])^2 - m_R^2 + \vartheta m_D^2) \right]^{\vartheta/2} \quad (157-3)$$

۳-۴-۱ احتمال نوسان نوترینو

فرآیندهای برهمکنش ضعیف جریان باردار سبب می‌شوند نوترینو با طعم‌های مختلف $\nu_\alpha (\alpha = e, \mu, \tau)$ از لپتونی باردار l_α^- تولید (گذارهای $l_\alpha^- \rightarrow \nu_\alpha$) و یا همراه با پادلپتونی باردار تولید شود (جفت $l_\alpha^+ \nu_\alpha$) (ر.ک. (۶۶-۱) و (۶۷-۱)).

همچنین نوترینوها ممکن است در فرآیندهای ضعیف جریان خنثی ناشی از لاگرانژین ضعیف (۱-۷۳) هم به شکل $Z \rightarrow \nu \bar{\nu}$ بوجود آیند. ذره Z ممکن است حقیقی (وایشی Z) یا مجازی (مثلاً در $\nu \bar{\nu} \rightarrow e^- e^-$) باشد. در این حال نوترینوها دارای جرم معینی نیستند. با این حال نوترینوهای به-وجود آمده فعال هستند و در صورت وجود نوترینوهای سترون سبک می‌توانند به آنها نوسان کنند. در این پایان‌نامه به بررسی این نوسانات نمی‌پردازیم اما به سادگی با تعمیم نظریه نوسانات طعم نوترینو می‌توان به آن دست یافت.

(۶۶-۱) و (۶۷-۱) را بازنویسی می‌کنیم.

$$L_I^{(CC)} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left(j_{W,L}^\rho W_\rho + j_{W,L}^{\rho\dagger} W_\rho^\dagger \right) \quad (۱۵۸-۳)$$

$$j_{W,L}^\rho = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu_{\alpha L}} \gamma^\rho l_{\alpha L} = 2 \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \sum_k U_{\alpha k}^* \overline{\nu_{kL}} \gamma^\rho l_{\alpha L}$$

که هر دو برای نوترینوهای دیراکی (۱۴-۳) و (۱۲۳-۳) یا نوترینوهای جرم‌دار ماژورانا (۱۲۱-۳) برقرارند. بسط فوریه برای عملگرهای میدان نوترینوی دیراکی $\overline{\nu_k}$ به صورت زیر است:

$$\overline{\nu_{kL}}(x) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2E} \sum_{h=\pm 1} [a_{\nu k}^{(h)\dagger}(p) \overline{u_{\nu kL}^{(h)}}(p) e^{-i p \cdot x} + b_{\nu k}^{(h)}(p) \overline{v_{\nu kL}^{(h)}}(p) e^{i p \cdot x}] \quad (۱۵۹-۳)$$

بنابراین جریان باردار لپتونی در معادله (۱۵۸-۳) دربردارنده عملگر آفرینش $a_{\nu k}^{(h)\dagger}(p)$ نوترینوها با جرم m_k و همچنین از طریق میدان لپتونی باردار l_α دربردارنده عملگرهای نابودی l_α^- و آفرینش l_α^+ است، که منجر به گذارهای $l_\alpha^- \rightarrow \nu_k$ یا آفرینش زوجهای $l_\alpha^+ \nu_k$ شود. برای نوترینوهای ماژورانا که $b_{\nu k}^{(h)}(p) = a_{\nu k}^{(h)}(p)$ است (۶۹-۳) عملگرهای آفرینش نوترینو با $a_{\nu k}^{(h)\dagger}(p)$ برای نوترینوهای با جرم m_k در هر دو جریان $j_{W,L}^\rho$ و $j_{W,L}^{\rho\dagger}$ وجود دارند. در گذارهای $l_\alpha^- \rightarrow \nu_k$ یا تولید زوج $l_\alpha^+ \nu_k$ شرکت نمی‌کند، زیرا دربردارنده میدان لپتونی بارداری در شکل الحاقی آن $\overline{l_\alpha}$ است و دربردارنده عملگرهای نابودی l_α^- و آفرینش l_α^+ نیست. جریان باردار لپتونی (۱۵۸-۳) برهم‌نهی از نوترینوهای جرم‌دار ایجاد می‌کند. در نوسانات نوترینو ν_α برهم‌نهی از نوترینوهای جرم‌دار ν_k با وزن متناسب با $U_{\alpha k}^*$ می‌باشد.

فرض کنیم نوترینویی با طعم α و تکانه خطی $\vec{p}$ در فرآیند برهمکنش جریان باردار ضعیف از لپتون باردار l_α^- یا به همراه پادلپتون باردار l_α^+ تولید شود و به صورت زیر آن را توصیف می‌کنیم.

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* |\nu_k\rangle \quad (\alpha=e,\mu,\tau) \quad (۱۶۰-۳)$$

وزن $U_{\alpha k}^*$ برای $|\nu_k\rangle$ در حالت طعم $|\nu_\alpha\rangle$ ناشی از تجزیه معادله (۱۵۸-۳) در جریان باردار لپتونی برحسب نوترینوهای جرم‌دار $j_{W,L}^\rho$ می‌باشد.

برای سادگی فرض می‌کنیم در حجم بهنجارش V حالت‌های نوترینوی جرم‌دار متعامد

$$\langle v_k | v_j \rangle = \delta_{kj} \quad \text{یکانی بودن ماتریس آمیختگی} \quad \langle v_\alpha | v_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad (۱۶۱-۳)$$

در معادله (۱۶۰-۳) تعداد نوترینوها را محدود نکردیم. اما از آنجا که سه طعم نوترینوی فعال وجود دارد، تعداد نوترینوهای جرم‌دار باید برابر یا بزرگتر از سه باشد. اگر تعداد نوترینوهای جرم‌دار بیشتر از سه باشد، نوترینوهای اضافی در پایه طعم سترون هستند^۱.

حالت‌های نوترینوی جرم‌دار $|v_k\rangle$ ویژه‌حالت‌های همیلتونی $\mathcal{H}$ با ویژه‌مقادیر E_k هستند که منجر به معادله شرودینگر می‌شود. معنای آن این است که حالت‌های نوترینو در زمان به صورت امواج تخت تحول می‌یابند.

$$\begin{cases} \mathcal{H} |v_k\rangle = E_k |v_k\rangle \\ E_k = \sqrt{\vec{p}^2 + m_k^2} \end{cases} \Rightarrow i \frac{d}{dt} |v_k(t)\rangle = \mathcal{H} |v_k(t)\rangle \quad (۱۶۲-۳)$$

$$\Rightarrow |v_k(t)\rangle = e^{-i E_k t} |v_k\rangle \quad (\text{نوترینو با طعم } \alpha \text{ در زمان صفر})$$

با استفاده از معادلات (۱۶۰-۳) و (۱۶۲-۳)، درمی‌یابیم تحول زمانی حالت نوترینو از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} |v_\alpha(t)\rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* e^{-i E_k t} |v_k\rangle, \quad |v_\alpha(t=0)\rangle = |v_\alpha\rangle \\ U^\dagger U = 1 \Leftrightarrow \sum_\alpha U_{\alpha k}^* U_{\alpha j} = \delta_{jk} \end{cases} \Rightarrow |v_k\rangle = \sum_\alpha U_{\alpha k} |v_\alpha\rangle \quad (۱۶۳-۳)$$

با جایگذاری نتیجه (۱۶۳-۳) در نخستین معادله (۱۶۳-۳)، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$|v_\alpha(t)\rangle = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} (U_{\alpha k}^* e^{-i E_k t} U_{\beta k}) |v_\beta\rangle \quad (۱۶۴-۳)$$

برهم‌نهی حالت‌های نوترینوی جرم‌دار $|v_\alpha(t)\rangle$ که در زمان صفر و معادله (۱۶۰-۳) حالت طعم‌دار خالص بود، به صورت برهم‌نهی از حالت‌های طعم‌دار در زمان $t > 0$ می‌باشد (به شرط آنکه ماتریس

^۱ گذار نوترینوهای طعم دار فعال را به نوترینوهای سترون تنها از طریق ناپایداری نوترینوهای فعال می‌توان مشاهده کرد.

آمیختگی U قطری نباشد، یعنی نوترینوها آمیخته باشند). ضریب $\langle \nu_\beta |$ ، دامنه گذار $\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta$ به صورت تابعی از زمان می باشد.

$$A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} = \langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} e^{-i E_k t} \quad (۱۶۵-۳)$$

احتمال گذار

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \left| A_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta} \right|^2 = \sum_k U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* e^{-i(E_k - E_j)t} \quad (۱۶۶-۳)$$

برای نوترینوهای فوق نسبیتی: $E_k - E_j \approx \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E}$, $\Delta m_{kj}^2 = m_k^2 - m_j^2$, $E = |\vec{p}|$

بنابراین احتمال گذار در معادله (۱۶۶-۳) به صورت زیر تقریب می خورد

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(t) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} t\right) \Bigg|_{c=1}^{t=L} \\ P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_{k,j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp\left(-i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L\right) \end{array} \right. \quad (۱۶۷-۳)$$

فاصله بین چشمه تا آشکارساز L و انرژی E کمیت‌های وابسته به آزمایش هستند که مقادیر فاز Φ_{kj} نوسان نوترینو را مشخص می کنند.

$$\Phi_{kj} = -i \frac{\Delta m_{kj}^2}{2E} L \quad (۱۶۸-۳)$$

این فازها از روی اختلاف مجذور جرمی هم که کمیتی فیزیکی است مشخص می شوند. دامنه نوسانات تنها با عناصر ماتریس آمیختگی U که ثابت‌های طبیعتند معین می شوند. پس با اندازه گیری نوسانات نوترینو، می توان مقادیر اختلاف مجذور جرمی Δm_{kj}^2 و عناصر ماتریس آمیختگی U را تا حدودی درک کرد. اندازه مثبت نوسانات نوترینو حاکی از جرم دار بودن نوترینو است، اما نمی توان با آن مقدار مطلق جرم نوترینو را به دست آورد. تنها می توان پی برد که m_k^2 و m_j^2 باید بزرگتر از $|\Delta m_{kj}^2|$ باشد.

^۱ در آزمایش نمی توان t را اندازه گرفت. با احتساب $c=1$ ، به جای آن L اندازه گرفته می شود.

بستگی احتمال نوسانات به عناصر ماتریس آمیختگی U در معادله (۳-۱۶۷) از طریق حاصل ضرب

$$U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \quad (۳-۱۶۹)$$

است، که به پارامتربندی خاصی از ماتریس آمیختگی و گزینش خاصی از فازها^۱ (متناظر با فازبندی دوباره میدانهای لپتونی باردار و نوترینوها) بستگی ندارد و تحت تبدیلات فازبندی دوباره زیر ناورداست.

$$U_{\alpha k} \rightarrow e^{i\psi_a} U_{\alpha k} e^{i\psi_k} \quad (۳-۱۷۰)$$

همانگونه که در بخش ۳-۳ بحث شد، ماتریس آمیختگی سه نسل نوترینوی ماژورانا علاوه بر فاز دیراکی (همانند ماتریس آمیختگی CKM کوارکها) دو فاز ماژورانا هم دارد که در ماتریس قطری در سمت راست ماتریس آمیختگی پدیدار می شود. یعنی همانند (۳-۱۲۵) می توانیم بنویسیم

$$U_{\alpha k} = U_{\alpha k}^D e^{i\lambda_k} \quad (۳-۱۷۱)$$

در ناوردهای فازبندی دوباره معادله (۳-۱۶۹) فازهای ماژورانا وجود ندارد. نوسانهای نوترینو مستقل از فازهای ماژورانا هستند. نقض CP و T در نوسانهای نوترینو تنها به فازهای دیراکی مربوط می شود.

گذار بین طعمهای مختلف به ازای $L > 0$ رخ می دهد، زیرا بنا به رابطه یکانی بودن

$$U^\dagger U = 1 \Leftrightarrow \sum_k U_{\alpha k} U_{\alpha k}^* = \delta_{\alpha\beta} \rightarrow P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L=0, E) = \delta_{\alpha\beta} \quad (۳-۱۷۲)$$

احتمال (۳-۱۶۷) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = \sum_k |U_{\alpha k}|^2 |U_{\beta k}|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{k>j} U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \exp(-2\pi i \frac{L}{L_{kj}^{\text{osc}}}) \quad (۳-۱۷۳)$$

$$L_{kj}^{\text{osc}} = \frac{4\pi E}{\Delta m_{kj}^2} \quad \text{طول نوسان}$$

^۱ که در سمت چپ یا راست ماتریس آمیختگی از آنها فاکتور گرفته شود.

^۲ دو قاعده پایستگی احتمال از آن به دست می آید: (۱) مجموع احتمالات گذار از یک طعم به همه طعمها^۱ $P_{\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1$ و

(۲) مجموع احتمالات گذار از هر طعم به یک طعم $P_{\nu_\alpha (\alpha=\beta \text{ شامل}) \rightarrow \nu_\beta}(L, E) = 1$ می باشد.

طول نوسان فاصله‌ای است که فاز ایجاد شده با Δm_{kj}^2 برابر با 2π شود.

می‌توان احتمال نوسان در معادلهٔ دوم (۳-۱۶۷) را به صورت بخشهای حقیقی و موهومی

نوشت. از مجذور رابطهٔ یکانی بودن (۳-۱۷۲) درمی‌یابیم که

$$\sum_k \left| U_{\alpha k} \right|^2 \left| U_{\beta k} \right|^2 = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{k>j} \text{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \quad (۳-۱۷۴)$$

که در نتیجه می‌توان احتمال نوسان را به صورت زیر نوشت:

$$P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 2 \sum_{k>j} \text{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \left[1 - \cos \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \right] \\ + 2 \sum_{k>j} \text{Im} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \quad (۳-۱۷۵)$$

$$P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \text{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \left[\sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) \right] \\ + 2 \sum_{k>j} \text{Im} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right)$$

احتمال نوسان کانالهایی با $\alpha \neq \beta$ را احتمال گذار می‌گویند، درحالی که احتمال نوسان کانالهایی با $\alpha = \beta$ را احتمال ابقا^۱ می‌گویند.

همانگونه که در بخش ۳-۱ گفته شد، در آمیختگی سه نوترینو همهٔ بخشهای موهومی حاصلضرب

ناوردا تحت فازبندی دوباره در معادلهٔ (۳-۱۶۹) با ضرایب $s_{\alpha\beta;kj} = \pm 1$ (جدول ۳-۱) برابرند با

$$\text{Im} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] = s_{\alpha\beta;kj} J \quad (۳-۱۷۶)$$

که ناوردای یارلسکوگ J در معادلهٔ (۳-۲۴) آمده است. با استفاده از رابطهٔ بالا، احتمال نوسان

نوترینو، معادلهٔ دوم (۳-۱۷۵) به صورت زیر درمی‌آید:

^۱ Survival probability

$$P_{\nu_{\alpha} \rightarrow \nu_{\beta}}(L, E) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{k>j} \text{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right] \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{4E} \right) + 2J \sum_{k>j} s_{\alpha\beta;kj} \sin \left(\frac{\Delta m_{kj}^2 L}{2E} \right) \quad (177-3)$$

ضرایب $s_{\alpha\beta;kj} = \pm 1$ و مقدار $\text{Re} \left[U_{\alpha k}^* U_{\beta k} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \right]$ در (جدول ۳-۱) آمده است.

۳-۴-۲ برهمکنشهای ضعیف در جمله جرمی دیراک-ماژورانا

روابط آمیختگی در معادله (۳-۱۴۸)، عبارتند از

$$\begin{aligned} \nu_L &= U_{11} \nu_{1L} + U_{12} \nu_{2L}, \\ \nu_R^C &= U_{21} \nu_{1L} + U_{22} \nu_{2L} \end{aligned} \quad (178-3)$$

یعنی میدان نوترینوی ν_L و میدان نوترینوی سترون ν_R ترکیبهای خطی از میدانهای نوترینوی جرم-دار ν_{1L}, ν_{2L} می باشند. در این حال نوسان بین نوترینوهای سترون و فعال ممکن است. برهمکنشهای ضعیف جریان باردار سبب ایجاد برهم نهی دو نوترینوی جرم دار می شوند. از آنجا که گسترش فاز آنها در فضا-زمان به جرم آنها بستگی دارد، می توان این برهم نهی را به صورت ترکیب خطی از نوترینوهای فعال و سترون با احتمال نوسانی برای آشکارسازی مؤلفه فعال در نظر گرفت. تظاهر مؤلفه سترون از راه ناپیدایی نوترینوهای فعال است که متناظر با احتمال کمتر از یک برای بازماندن نوترینوها می باشد.

بخش نوترینوی لاگرانژی ضعیف جریان خنثی را برای یک نسل (۱-۴۴) در نظر می گیریم

$$\mathcal{L}_{I,\nu}^{(NC)} = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L Z_\mu \xrightarrow{(157-3)} \mathcal{L}_{I,\nu}^{(NC)} = \sum_{k,j=1,2} U_{1k}^* U_{1j} \bar{\nu}_{kL} \gamma^\mu \nu_{jL} Z_\mu \quad (179-3)$$

یعنی امکان گذارهای جریان خنثی بین نوترینوهای جرم دار مختلف وجود دارد.

۳-۴-۳ ناوردایی CP در جمله جرمی دیراک-ماژورانا

حقیقی بودن ماتریس جرمی به معنای ناوردایی CP می باشد. یعنی در کنار $m_R, m_D \in \mathbb{R}^+$ مقدار m_L را هم حقیقی (مثبت یا منفی) در نظر گرفتیم. در این حالت ماتریس جرمی M در (۳-۱۴۷) حقیقی و متقارن است و می توان آن را با تبدیلات (۳-۱۴۸) و ماتریس یکانی U در زیر قطری کرد.

$$U = \mathcal{O} \rho, \quad \mathcal{O} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix}, \quad \rho_k = \pm 1 \quad (۳-۱۸۰)$$

ماتریس متعامد $\mathcal{O}$ باید به گونه ای برگزیده شود که ماتریس جرمی (۳-۱۴۷) را قطری کند.

$$\mathcal{O}^T M \mathcal{O} = \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix} \quad (۳-۱۸۱)$$

که m'_1, m'_2 ویژه مقادیر ماتریس جرمی هستند.

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R \pm \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right], \quad \tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \quad (۳-۱۸۲)$$

$$\text{If } m_L m_R < m_D^2 \Rightarrow m'_1 < 0$$

اهمیت ماتریس ρ آن است که اگر $m'_1 < 0$ باشد، علامت نخستین ویژه مقدار جرمی را تغییر می دهد.

$$U^T M U = \rho^T \mathcal{O}^T M \mathcal{O} \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m'_1 & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \\ 0 & \rho_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1^2 m'_1 & 0 \\ 0 & \rho_2^2 m'_2 \end{pmatrix} \quad (۳-۱۸۳)$$

بنابراین دو مقدار حقیقی و مثبت جرم نوترینو عبارتند از:

$$m_k = \rho_k^2 m'_k, \quad \rho^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} \rho_1^2 = -1 \\ m'_1 < 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \rho_2^2 = +1 \\ m'_2 > 0 \end{cases} \quad (۳-۱۸۴)$$

که با عبارت کلی (۳-۱۵۱) در حالت $\text{Im}[m_k] = 0$ سازگار است. در نتیجه همواره $m'_2 > 0$ و داریم

$$m_2 = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R + \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \quad (۳-۱۸۵)$$

$$\begin{cases} (۳-۱۸۵) \\ m_L m_R \geq m_D^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m'_1 \geq 0 \\ \rho_1^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \left[m_L + m_R - \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \right] \quad (۳-۱۸۶)$$

$$\rho_1 = 1, \rho_2 = 1 \Rightarrow U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (185-3) \\ m_L m_R \leq m_D^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m'_1 < 0 \\ \rho_1^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} - (m_L + m_R) \right] \quad (187-3)$$

$$\rho_1 = i, \rho_2 = 1 \Rightarrow U = \begin{pmatrix} i \cos \theta & \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

نوسان بین نوترینوی فعال ν_L و نوترینوی سترون ν_R^C به زاویه آمیختگی θ در (۱۸۳-۳) و تفاوت

مجذور جرمی زیر بستگی دارد

$$\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2 = (m_L + m_R) \sqrt{(m_L - m_R)^2 + 4m_D^2} \quad (188-3)$$

If $m_L < -m_R \Rightarrow \Delta m^2$ منفی شود

هرچند عناصر U می توانند موهومی شوند، لاگرانژی تحت تبدیلات CP ناورداست و فاز

$$\xi_k^{CP} = i \rho_k^2 \quad (189-3)$$

پاریتی CP برای ν_k می باشد. تبدیل CP ماتریس N_L در معادله (۱۴۶-۳) از ناوردایی جمله جرمی

دیراک-ماژورانا (۱۴۶-۳) تحت CP تعیین می شود که در نتیجه $\xi_l^{CP} = -i$ به دست می آید.

۳-۴-۴ آمیختگی بیشینه

با توجه به زاویه آمیختگی (۱۸۲-۳)، آمیختگی زمانی بیشینه می شود که

$$m_L = m_R \xrightarrow{(182-3)} m'_{\nu,1} = m_L \pm m_D \quad (190-3)$$

اگر $\rho_1^2 = 1, m'_1 > 0, m_D < m_L$ باشد، آمیختگی از گونه (۱۸۶-۳) و $\theta = \pi/4$ می باشد. اگر

$\rho_1^2 = -1, m'_1 < 0, m_D > m_L$ باشد، آنگاه آمیختگی از گونه (۱۸۷-۳) و $\theta = \pi/4$ می باشد که منجر

به نتایج زیر می شود.

$$\begin{cases} \nu_{1L} = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\nu_L - \nu_R^C) \\ \nu_{2L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\nu_L + \nu_R^C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nu_{1L} = \nu_{1L} + \nu_{1L}^C = \frac{-i}{\sqrt{2}} [(\nu_L + \nu_R) - (\nu_L^C + \nu_R^C)] \\ \nu_{2L} = \nu_{2L} + \nu_{2L}^C = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\nu_L + \nu_R) - (\nu_L^C + \nu_R^C)] \end{cases} \quad (191-3)$$

و در نتیجه مقادیر جرمی و تفاوت مجذور جرمی برابر با مقادیر زیر می شود.

$$\begin{cases} m_1 = m_D - m_L \\ m_2 = m_D + m_L \end{cases} \Rightarrow \Delta m^2 = m_2^2 - m_1^2 = 4 m_L m_D \quad (192-3)$$

۳-۴-۵ حد دیراک

اگر $m_L = m_R = 0$ باشد، از آنجا که جمله جرمی دیراک-ماژورانا در معادله (۳-۱۴۵) به جمله جرمی دیراک (۳-۱۴۲) منجر می‌شود، باید نوترینوی جرم‌دار دیراک را در این حالت به دست آوریم.

$$(۳-۱۹۰) \Rightarrow m'_{\nu,1} = \pm m_D \Rightarrow \begin{cases} \rho_1^\nu = -1, & m_1 = m_D \\ \rho_2^\nu = +1, & m_2 = m_D \end{cases} \quad (۳-۱۹۳)$$

یعنی دو نوترینوی ماژورانا باید جرم یکسان و پاریتی‌های CP متضاد هم داشته باشد. در این حالت دو میدان ماژورانا ν_1, ν_2 می‌توانند با هم ترکیب شوند و یک میدان دیراک ν به دست دهند.

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(i\nu_1 + \nu_2) = \nu_L + \nu_R \quad (۳-۱۹۴)$$

همچنین می‌توان همواره میدان دیراک را به دو میدان ماژورانا تجزیه کرد:

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\nu - \nu^C) + (\nu + \nu^C)] = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(-i\frac{\nu - \nu^C}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\nu + \nu^C}{\sqrt{2}}\right) = \frac{i\nu_1 + \nu_2}{\sqrt{2}} \quad (۳-۱۹۵)$$

$$\nu_1 = \frac{-i}{\sqrt{2}}(\nu - \nu^C), \quad \nu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\nu + \nu^C); \quad (\nu_1 = \nu_1^C, \quad \nu_2 = \nu_2^C) \quad (۳-۱۹۶)$$

(میدانهای ماژورانا ν_1, ν_2)

بنابراین در حالت کلی، میدان دیراک هم‌ارز دو میدان ماژورانا با جرمهای یکسان و پاریتی‌های CP

متضاد است. از آنجا که $\xi_1^{CP} = -i, \xi_2^{CP} = i \Rightarrow \rho_1^\nu = -1, \rho_2^\nu = 1$ است، پس

$$\begin{cases} \nu_1 \xrightarrow{CP} i \gamma^0 \nu_1 \\ \nu_2 \xrightarrow{CP} i \gamma^0 \nu_2 \end{cases} \xrightarrow{(۳-۱۹۶)} \nu = (i\nu_1 + \nu_2) \xrightarrow{CP} i \gamma^0 \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\nu_1 - \nu_2) = i \gamma^0 \nu^C \quad (۳-۱۹۷)$$

نتیجه می‌گیریم که میدان دیراک ν دارای پاریتی CP معین برابر با $\xi_\nu^{CP} = i$ می‌باشد.

۳-۴-۶ نوترینوهای شبه دیراکی

اگر $m_L \ll m_R$ باشد، با توجه به معادله (۳-۱۸۲)

$$m'_{\nu,1} \simeq \frac{m_L + m_R}{2} \pm m_D \xrightarrow{\rho_1^\nu = -1} m_{\nu,1} \simeq m_D \pm \frac{m_L + m_R}{2} \quad (۳-۱۹۸)$$

این دو نوترینوی ماژورانا تقریباً تبهگن جرمی هستند و جرم بین آنها به صورت $m_L + m_R \ll m'_{\nu_1}$ بخش شده است. به آنها نوترینوهای شبه دیراکی گویند. زیرا تمایز آنها از نوترینوهای دیراکی، که متناظر با یک جفت نوترینوی ماژورانای تبهگن هستند، بسیار مشکل است. بهترین راه برای معلوم ساختن نوترینوهای شبه دیراکی نوسانات نوترینوی فعال-سترون است، که ناشی از تفاوت مجذور جرمی هستند.

$$\Delta m^2 \approx m_D (m_L + m_R), \quad \tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L} \gg 1 \Rightarrow \theta \approx \pi/4 \quad (199-3)$$

۳-۴-۷ سازوکار الاکلنگی^۱

اگر $m_L = 0$ ، $m_D \ll m_R$ باشد، با توجه به معادله (۱۸۲-۳)

$$m'_1 = -\frac{m_D^2}{m_R}, \quad m'_2 \approx m_R \xrightarrow[\rho_1 = -1]{m'_1 < 0} m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R}, \quad m_2 \approx m_R \quad (200-3)$$

بنابراین ν_2 به سنگینی m_R و ν_1 بسیار سبک است، زیرا نسبت m_D/m_R بسیار کوچک است. این سازوکار موسوم به سازوکار الاکلنگی است. جرم سنگین ν_2 ، $m_2 \approx m_R$ سبب سبک بودن ν_1 می باشد [۴۸-۴۵].

زاویه آمیختگی بسیار کوچک $\tan 2\theta = 2m_D/m_R \ll 1$ بیانگر آن است که ν_1 بیشتر از ν_L فعال و ν_2 بیشتر از ν_R سترون تشکیل شده است.

$$\nu_{1L} \approx -i\nu_L, \quad \nu_{2L} \approx \nu_R^C \quad (201-3)$$

اهمیت بسیار زیاد سازوکار الاکلنگی در آن است که توضیح بسیار خوبی درباره کوچک بودن جرم نوترینو در مقایسه با جرم دیگر فرمیونها در مدل استاندارد ارائه می دهد. فرض $m_L = 0$ طبیعی است، زیرا جمله جرمی ماژورانا برای ν_L در مدل استاندارد ممنوع است. چشم آن می رود که جرم دیراکی m_D ، که در مدل استاندارد از طریق سازوکار هیگز تولید می شود، از مرتبه جرم یکی از فرمیونهای

^۱ با توجه به مدنظر بودن اصطلاح عامیانه see-saw در اینجا هم به عمد لفظ عامیانه الاکلنگی و نه الله کلنگی استفاده شده است.

باردار همان نسل خودش باشد. اما مرتبه بزرگی m_D نمی‌تواند از مقیاس الکتروضعیف، مرتبه 10^2 GeV ، بسیار بیشتر باشد. زیرا جمله جرمی دیراکی در تقارنهای ناشکسته مدل استاندارد ممنوع است و همانند دیگر ویژگیهای مدل استاندارد تنها می‌تواند پیامد شکست تقارن باشد. پس m_D متناسب با مقیاس شکست تقارن است^۱. جرم ماژورانی m_R در فیزیک ماورای مدل استاندارد تولید می‌شود. میدان ν_R متعلق به چندگانه تقارنهای نظریه انرژی بالا است و مرتبه بزرگی m_R متناظر با مقیاس شکستن این تقارنهاست، که در مقیاس تقارن بزرگ از مرتبه $10^{16} - 10^{14} \text{ GeV}$ است [۴۳، ۴۴، ۴۹].

بنابراین می‌توان از عبارت الاکنگی در (۳-۱۹۵) جرم m_1 را با نسبت کوچک $10^{-12} - 10^{-14} m_D/m_R$ به‌دست آورد. عبارت به‌دست آمده برای جرم ماژورانی سبک m_1 در سازوکار الاکنگی، همان ویژگیهای جرم ماژورانا در معادله (۳-۱۰۸) را دارند. این امر تصادفی نیست زیرا سازوکار الاکنگی متناظر با مورد ویژه‌ای از عملگر مؤثر بعد پنج $\mathcal{L}_5$ می‌باشد. این امر با روش دیگری برای به‌دست آوردن سازوکار الاکنگی نشان داده می‌شود [۵۰].

۳-۵ آمیختگی دیراک-ماژورانا در سه نسل

علاوه بر سه میدان نوترینوی چپگرد فعال، $\nu'_{eL}, \nu'_{\mu L}, \nu'_{\tau L}$ ، امکان وجود تعداد N_s میدان نوترینوی راستگرد سترون ν_{sR} ($s = s_1, \dots, s_N$) نیز فراهم است. می‌توان با این میدانهای کلی‌ترین جمله جرمی در جمله جرمی دیراک-ماژورانا را نوشت

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{D+M}} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{mass}}^L + \mathcal{L}_{\text{mass}}^R}_{\text{جملات جرمی ماژورانا}} + \underbrace{\mathcal{L}_{\text{mass}}^D}_{\text{جمله جرمی دیراک}} \quad (202-3)$$

^۱ اغلب این‌گونه بیان می‌شود که تقارنهای مدل استاندارد m_D را حفظ می‌کنند. در حالیکه برای m_R این‌گونه نیست.

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^L = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \nu_{\alpha L}'^T C^\dagger M_{\alpha\beta}^L \nu_{\beta L}' + \text{H.c.}, \quad \mathcal{L}_{\text{mass}}^R = \frac{1}{2} \sum_{s, s'=1}^{N_s} \nu_{sL}^T C^\dagger M_{ss'}^R \nu_{s'R} + \text{H.c.} \quad (203-3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^D = - \sum_{s, s'=1}^{N_s} \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \overline{\nu_{sR}} M_{s\alpha}^D \nu_{\alpha L}' + \text{H.c.}$$

سه ماتریس M^L, M^R, M^D مختلط هستند. ماتریسهای جرمی ماژورانی M^L, M^R متقارند (۳-).
 (۱۱۰). M^L ماتریسی 3×3 ، M^R ماتریس مربعی $N_s \times N_s$ ، و ماتریس جرمی دیراک M^D ماتریسی مستطیلی به ابعاد $N_s \times 3$ است. میدانهای نوترینو با جرم معین حاصل قطری کردن جمله جرمی دیراک-ماژورانا در معادله (۲۰۲-۳) است. مرسوم است که برای میدانهای چپگرد، ماتریسی ستونی از مرتبه $N = 3 + N_s$ تعریف شود

$$\mathbf{N}'_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L' \\ \nu_R^C \end{pmatrix}, \quad \nu_R^C \equiv \begin{pmatrix} \nu_{s_1 R}^C \\ \vdots \\ \nu_{s_{N_s} R}^C \end{pmatrix}, \quad \nu_L' : (103-6) \xrightarrow{(202-3)} \mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{D+M}} = \frac{1}{2} \mathbf{N}'_L{}^T C^\dagger M^{\text{D+M}} \mathbf{N}'_L + \text{H.c.} \quad (204-3)$$

$$M^{\text{D+M}} \equiv \begin{pmatrix} M^L & M^{D^T} \\ M^D & M^R \end{pmatrix}$$

همانند قطری کردن جمله جرمی ماژورانا در بخش ۳-۳، اینجا هم ماتریس جرمی دیراک-ماژورانا را قطری می‌کنیم. میدانهای طعم چپگرد را به صورت ترکیب خطی یکانی از مؤلفه‌های چپگرد N میدان با جرم معین می‌نویسیم:

$$\mathbf{N}'_L = V_L^\nu n_L, \quad n_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \vdots \\ \nu_{NL} \end{pmatrix} \quad (205-3)$$

$$\left(V_L^\nu \right)^T M^{\text{D+M}} V_L^\nu = M, \quad M_{kj} = m_k \delta_{kj} \quad (k, j = 1, \dots, N), m_k \in \mathbb{R}^+$$

$$(204-3), (205-3) \Rightarrow \mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{D+M}} = \frac{1}{2} n_L^T C^\dagger M n_L + \text{H.c.} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \nu_{kL}^T C^\dagger \nu_{kL} + \text{H.c.} \quad (206-3)$$

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{D+M}} = -\frac{1}{2} \overline{n_L^C} M n_L + \text{H.c.} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \overline{\nu_{kL}^C} \nu_{kL} + \text{H.c.} \quad (\text{با استفاده از میدانهای همیوگ باری})$$

ماتریس ستونی میدانهای نوترینوی ماژورانا عبارتست از

$$n = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix}, \quad v_k = v_{kL} + v_{kL}^C, \quad (v_k^C = v_k) \quad (207-3)$$

با استفاده از این میدانهای مازورانا، می‌توانیم لاگرانژی نوترینوی آزاد را بنویسیم:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}}^{\text{D+M}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \overline{v_k} (i \vec{\partial} - m_k) v_k = \overline{n} (i \vec{\partial} - M) n \quad (208-3)$$

نتیجه کلی قطری کردن جمله جرمی دیراک-ماژورانا آن است که نوترینوها ذرات مازورانا هستند.

۳-۵-۱ برهمکنشهای ضعیف برای آمیختگی دیراک-ماژورانا در سه نسل

در اینجا پیامد آمیختگی نوترینوهای سترون و فعال را بر برهمکنشهای ضعیف بررسی می‌کنیم. بخش

لپتونی لاگرانژی برهمکنش جریان باردار (۶۸-۱) را در نظر می‌گیریم.

$$j_{W,L}^\rho = \overline{\nu_L'} \gamma^\rho l_L' \xrightarrow[(184-3)]{(114-1)} j_{W,L}^\rho = \overline{n_L} U^\dagger \gamma^\rho l_L, \quad U_{\alpha k} = \sum_{\beta=e,\mu,\tau} (V_L^{l\dagger})_{\alpha\beta} (V_L^{\nu})_{\beta k} \quad (209-3)$$

ماتریس یکانی V_L^l که ماتریس جرمی لپتون باردار را قطری می‌کند 3×3 و ماتریس یکانی V_L^ν که

ماتریس جرمی دیراک-ماژورانا را قطری می‌کند $N \times N$ است. پس ماتریس U در بالا باید ماتریسی

مستطیلی $3 \times N$ باشد. این ماتریس یکانی نیست، زیرا $U^\dagger U \neq 1$ ، $U U^\dagger = 1$ است. هرچند عبارت

(۲۰۹-۳) برای مورد دیراک با (۱۲-۳) و برای سه نسل نوترینوی مازورانا با (۱۲۱-۳) یکی است، مورد

دیراک-ماژورانا که در اینجا بررسی می‌کنیم بسیار متفاوت با آن دو می‌باشد. زیرا این ماتریسی $3 \times N$

است که سه نوترینوی طعم‌دار فعال را به N نوترینوی جرم‌دار مربوط می‌سازد. یادآوری این امر بسیار

مهم است که میدانهای نوترینو طعم‌دار چپگرد همانند معادلات (۱۲-۳) و (۱۱۲-۳) تعریف می‌شوند.

$$v_L = U n_L = V_L^{l\dagger} v_L', \quad v_L = \begin{pmatrix} v_{eL} \\ v_{\mu L} \\ v_{\tau L} \end{pmatrix} \quad (210-3)$$

به این ترتیب می‌توان جریان باردار ضعیف را همانند مدل استاندارد نوشت:

$$j_{W,L}^\rho = \overline{\nu_L'} \gamma^\rho l_L' = \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{\nu_{\alpha L}} \gamma^\rho l_{\alpha L} \quad (211-3)$$

پارامتربندی این ماتریس آمیختگی برحسب $3+3N_s$ زاویه آمیختگی و $3+3N_s$ فاز می باشد. فازها به $1+2N_s$ فاز دیراک و $2+N_s$ فاز ماژورانا تقسیم می شوند. آمیختگی نوترینوهای فعال و سترون به صورت زیر می باشد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_{\alpha L} = \sum_{k=1}^N U_{\alpha k} \nu_{k L} \quad (\alpha = e, \mu, \tau) \\ \nu_{s R}^C = \sum_{k=1}^N (V_L^\nu)_{s k} \nu_{k L} \quad (s = s_1, \dots, s_{N_s}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} N_L = u n_L \\ N_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix}, u \equiv \begin{pmatrix} U \\ V_L^\nu|_{N_s \times N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_L^{l\dagger} V_L^\nu|_{3 \times N} \\ V_L^\nu|_{N_s \times N} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \quad (212-3)$$

بحثی که درباره امکان نوسان بین نوترینوهای سترون و فعال در بخش ۳-۴-۲ برای یک نسل شد، اکنون با توجه به نایکانی بودن ماتریس آمیختگی U که بیانگر ناپایستگی احتمال کل طعمهای فعال است، مشاهده می شود. اگر بخش نوترینوی لاگرانژی برهمکنش جریان خنثی را در نظر بگیریم.

$$j_{Z,\nu}^\rho = \overline{\nu_L'} \gamma^\rho \nu_L' = \overline{\nu_L} \gamma^\rho \nu_L \quad (213-3), (201-3) \Rightarrow$$

V_L^l یکانی است. نایکانی بودن U بیانگر آن است که سازوکار GIM کار نمی کند. یعنی جریان خنثی نوترینو برحسب میدانهای جرم دار قطری نیست.

$$j_{Z,\nu}^\rho = \overline{n_L} \gamma^\rho U^\dagger U n_L \quad (214-3)$$

یعنی درمورد نوترینوی دیراک-ماژورانا گذارهای جریان خنثی می تواند بین نوترینوهای جرم دار مختلف برقرار باشد.

۳-۵-۲ سازوکار الاکلنگی برای سه نسل نوترینو

سازوکار الاکلنگی بخش ۳-۴-۶ را به سه نسل تعمیم می دهیم. در $(204-3)$ $M^L = 0$ قرار می دهیم.

$$M^{D+M} \equiv \begin{pmatrix} 0 & M^{D^T} \\ M^D & M^R \end{pmatrix} \quad (215-3)$$

عناصر ماتریس جرمی ماژورانا راستگرد M^R بزرگتر از عناصر ماتریس جرمی دیراک M^D هستند. مباحث فیزیکی اینجا هم همانند مورد یک نسل است. اگر همه عناصر M^R بسیار بزرگتر از همه

عنصر M^D باشند، این ماتریس جرمی را می‌توان تا تصحیح مرتبه $(M^R)^{-1} M^D$ با بلوکها قطری کرد [۵۱، ۵۲].

$$W^T M^{D+M} W \approx \begin{pmatrix} M_{\text{سبک}} & \circ \\ \circ & M_{\text{سنگین}} \end{pmatrix}$$

$$W \approx \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{4} M^{D\dagger} (M^R M^{R\dagger})^{-1} & [(M^R)^{-1} M^D]^\dagger \\ -(M^R)^{-1} M^D & 1 - \frac{1}{4} (M^R)^{-1} M^D M^{D\dagger} (M^{R\dagger})^{-1} \end{pmatrix} \quad (216-3)$$

(ماتریس جرمی 3×3) $M_{\text{سبک}} \approx -M^{D\dagger} (M^R)^{-1} M^D$

(ماتریس جرمی $N_s \times N_s$) $M_{\text{سنگین}} \approx M^R$

جرمهای سنگین ویژه مقادیر M^R ، و جرمهای سبک ویژه مقادیر $M_{\text{سبک}}$ هستند. مقادیر جرمهای سبک نوترینو و اندازه تقریبی آنها بسته به مقادیر ویژه عناصر M^D و M^R در گستره‌های بزرگی تغییر می‌کنند [۵۳].

۳-۶ آمیختگی سه‌بیشینه برای سه نسل نوترینو

منظور از آمیختگی سه‌بیشینه آن است که مقدار مطلق هر سه عنصر ماتریس آمیختگی با هم برابر باشد. با توجه به روابط یکانی بودن

$$\sum_k |U_{\alpha k}|^2 = 1, \sum_\alpha |U_{\alpha k}|^2 = 1 \Rightarrow |U_{\alpha k}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (217-3)$$

اما امکان ساخت ماتریسهای آمیختگی حقیقی با این شرط وجود ندارد [۵۴، ۵۵].

یعنی نقض CP برای برقراری آمیختگی سه‌بیشینه لازم است. با استفاده از پارامتربندی U^D (۲۸-۳) برای بخش دیراک ماتریس آمیختگی، آمیختگی سه‌بیشینه به‌ازای $\theta_{12} = \theta_{23} = \pi/4$ و $s_{13} = 1/\sqrt{3}$ و $\delta_{13} = \pm 1$ به‌دست می‌آید.

$$U^D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \pm \frac{i}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \mp \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mp i \\ e^{\mp i 5\pi/6} & e^{\mp i \pi/6} & 1 \\ e^{\mp i \pi/6} & e^{\mp i 5\pi/6} & 1 \end{pmatrix} \quad (218-3)$$

و ناوردای یارلسکوگ در معادله (3-126) دارای بیشترین مقدار مطلق خود می‌شوند.

$$J = \pm \frac{1}{6\sqrt{3}} \Rightarrow |J| = \frac{1}{6\sqrt{3}} = |J|_{\max} \quad (219-3)$$

بنابراین در آمیختگی سه‌بیشینه نقض CP بیشینه است [56].

می‌توان با فازبندی دوباره و مناسب، U^D را در (3-209) را به شکل مناسب‌تری نوشت. به‌گونه‌ای که هر عنصر آن $1/\sqrt{3}$ برابر یکی از سه‌ریشه‌های معادله $z^3 = 1$ ، یعنی $(1, e^{\pm i 2\pi/3})$ باشد. با ضرب سطر دوم و سوم در $\mp i$ و ستون سوم در $\pm i$ (یعنی از میدانهای μ, τ, ν_τ فاز $\pm i$ را بیرون می‌کشیم)، می‌رسیم به

$$U^D = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{\pm i 2\pi/3} & e^{\mp i 2\pi/3} & 1 \\ e^{\mp i 2\pi/3} & e^{\pm i 2\pi/3} & 1 \end{pmatrix} \quad (220-3)$$

اگر ν_τ ذرهٔ ماژورانا باشد، می‌توان فاز $\pm i$ را از فاز ماژورانا $e^{i\lambda_\tau}$ بیرون کشید. همچنین با بیرون کشیدن فاز $e^{\pm i 2\pi/3}$ از میدانهای ν_τ, μ, τ, e و فاز $e^{\mp i 2\pi/3}$ از میدان ν_τ به عبارت زیر می‌رسیم

$$U^D = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{\mp i 2\pi/3} & e^{\pm i 2\pi/3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ e^{\pm i 2\pi/3} & e^{\mp i 2\pi/3} & 1 \end{pmatrix} \quad (221-3)$$

این دو ماتریس آمیختگی از دید فیزیکی هم‌ارزند و می‌توان با جایگشت دوره‌ای سطرهای ماتریس آمیختگی آنها را به‌دست آورد. این جایگشت دوره‌ای هم‌ارز جایگشت دوره‌ای طعم‌ها می‌باشد $(e, \mu, \tau \rightarrow \mu, \tau, e)$. همچنین جایگشت دوره‌ای $\mu, \tau, e \rightarrow \tau, e, \mu$ منجر به ماتریس آمیختگی هم-ارزی می‌شود.

$$U^D = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} e^{\pm i 2\pi/3} & e^{\mp i 2\pi/3} & 1 \\ e^{\mp i 2\pi/3} & e^{\pm i 2\pi/3} & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (222-3)$$

می‌توان ماتریسهای آمیختگی هم‌ارز را با جایگشت دوره‌ای ستونها، که همان جایگشت دوره‌ای نوترینوهای جرم‌دار $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \rightleftharpoons \nu_2, \nu_3, \nu_1 \rightleftharpoons \nu_3, \nu_1, \nu_2$ باشد، نیز به‌دست آورد. با استفاده از این ویژگیها درمی‌یابیم که جابجایی دو ستون یا جابجایی دو سطر هم‌ارز با همیوغ هرمیتی گرفتن است که همه فازهای ماتریس آمیختگی سه‌بیشینه را متضاد هم می‌کند. بنابراین دو ماتریس آمیختگی ناهم‌ارز با ناوردای یارلسکوگ متضاد در (3-219) را با هم جابجا می‌سازد. نتیجه آنکه ماتریس آمیختگی سه‌بیشینه تحت جایگشت‌های $e, \mu, \tau \rightleftharpoons \mu, \tau, e \rightleftharpoons \tau, e, \mu$ و $e \rightleftharpoons \mu$ یا $\mu \rightleftharpoons \tau, \tau \rightleftharpoons e$ درحالی‌که جابجایی $\nu_1, \nu_2, \nu_3 \rightleftharpoons \nu_2, \nu_3, \nu_1 \rightleftharpoons \nu_3, \nu_1, \nu_2$ یا $\nu_1 \rightleftharpoons \nu_2, \nu_2 \rightleftharpoons \nu_3, \nu_3 \rightleftharpoons \nu_1$ دو ماتریس آمیختگی دیراکی ناهم‌ارز و سه‌بیشینه با ناوردهای یارلسکوگ متضاد را به یکدیگر تبدیل می‌کند. این ویژگیها پیامد مهمی در نوسانات نوترینو دارد.

۳-۷ آمیختگی N نسل نوترینو

در اینجا ماتریس جرمی $N \times N$ نوترینوی ماژورانا را با $N > 3$ همانند آمیختگی دیراک-ماژورانا در بخش ۳-۵ در نظر می‌گیریم. همانگونه که در بخش ۳-۵ توضیح داده شد، ماتریس آمیختگی U در لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار

$$\mathcal{L}_{1,L}^{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^N \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \overline{l_{\alpha L}} \gamma^\rho U_{\alpha k} \nu_{kL} + \text{H.c.} = -\frac{g}{\sqrt{2}} \overline{l_L} \gamma^\rho U n_L + \text{H.c.} \quad (223-3)$$

ماتریسی $3 \times N$ است.

$$U = V_L^{l\dagger} V_L^\nu \quad (224-3)$$

که V_L^l ماتریسی یکانی است که در قطری کردن ماتریس جرمی لپتون باردار در معادله (1-116) شرکت می‌کند. ماتریس U همانگونه که پیش از این هم نشان دادیم یکانی نیست.

برای بحث کلی درباره پارامتربندی U ، $N = N_A + N_s$ را می‌نویسیم، که $N_A = 3$ تعداد طعمهای فعال و N_s تعداد میدانهای نوترینوی سترون است. بنابراین U ماتریسی مستطیلی با ابعاد $N_A \times N$ است که در رابطه

$$UU^\dagger = \mathbf{1} \quad (225-3)$$

$$U^\dagger U \neq \mathbf{1} \quad (226-3)$$

صدق می‌کند. بطور کلی ماتریس مستطیلی مختلط $N_A \times N$ به $N_A N$ پارامتر حقیقی بستگی دارند. از آنجا که $\mathbf{1}$ در $(226-3)$ ماتریس یکه $N_A \times N_A$ است، معادله $(202-3)$ تعداد N_A^2 قید اعمال می‌کند که شمار پارامترهای مستقل حقیقی را به

$$N_A(N_A + 2N_s) \quad (227-3)$$

کاهش می‌دهد. برای آنکه دریابیم چه شمار از این پارامترهای حقیقی، زاویه‌های آمیختگی و چه شماری فاز هستند، ماتریس V با ابعاد $N \times N$ را بررسی می‌کنیم. این ماتریس به $N(N-1)/2$ زاویه و $N(N+1)/2$ فاز بستگی دارد. می‌توانیم V را با استفاده از همان روش بخش 2-3-2 بسازیم.

$$V = D(\omega) \left[\prod_{a < b} W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) \right] \quad (a, b = 1, \dots, N) \quad (45-2)$$

پارامترها و متغیرها همانهایی هستند که در بخش $(2-3-2)$ توضیح داده شد. اکنون با گرفتن N_A سطر نخست از ماتریس V ، ماتریس مستطیلی U را با ابعاد $N_A \times N$ می‌سازیم.

$$U = [D(\omega)]_{N_A \times N_A} \left[\prod_{a=1}^{N_A} \prod_{b=a+1}^N W^{ab}(\theta_{ab}, \eta_{ab}) \right]_{N_A \times N} \quad (228-3)$$

با استفاده از ماتریس $(228-3)$ می‌توانیم زوایای آمیختگی و فازها را در U تعیین کنیم. ترکیب اندیسهای ab در معادله $(228-3)$ عبارتند از

$$\left. \begin{array}{cccc} ۱۲ & & & \\ ۱۳ & ۲۳ & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ ۱N_A & ۲N_A & \cdots & (N_A-۱)N_A \end{array} \right\} \frac{N_A(N_A-۱)}{۲} \quad (۲۲۹-۳)$$

$$\left. \begin{array}{cccccc} ۱(N_A+۱) & ۲(N_A-۱) & \cdots & (N_A-۱)(N_A+۱) & N_A(N_A+۱) & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ ۱N & ۲N & \cdots & (N_A-۱)N & N_A N & \end{array} \right\} N_A N_s$$

بنابراین

$$\frac{N_A(N_A-۱)}{۲} + N_A N_s = ۳+۳N_s \quad \text{شمار زوایای آمیختگی} \quad (۲۳۰-۳)$$

$$\frac{N_A(N_A+۱)}{۲} + N_A N_s = ۶+۳N_s \quad \text{شمار فازها} \quad (۲۳۱-۳)$$

می‌باشد که کل فازهای η_{ab} و ω_a را می‌شمارد. مجموع این تعداد زاویه آمیختگی و فاز دقیقاً برابر با شمار پارامترهای حقیقی معادله (۲۲۷-۳) می‌باشد. می‌توان N_A فاز را با فازبندی دوباره و مناسب میدانهای لپتونى باردار در لاگرانژی برهمکنش ضعیف جریان باردار (۲۲۳-۳) حذف کرد، بنابراین همه فازهای شمرده شده در (۲۳۱-۳) فیزیکی نیستند. شمار فازهای فیزیکی برابر با

$$\frac{N_A(N_A-۱)}{۲} + N_A N_s = ۳+۳N_s \quad \text{فاز فیزیکی} \quad (۲۳۲-۳)$$

که دقیقاً برابر با (۲۳۰-۳) می‌باشد. این موضوع از (۲۲۸-۳) نیز روشن بود، زیرا نشان می‌داد که فازهای ω_a را می‌توان با فازبندی دوباره و مناسب میدانهای لپتون باردار حذف کرد و به‌ازای هر زاویه آمیختگی θ_{ab} ، یک فاز فیزیکی η_{ab} برجای می‌گذارد. بنابراین پارامتربندی ممکن آمیختگی برحسب پارامترهای فیزیکی از معادله (۲۲۸-۳) با حذف ماتریس یکانی قطری $[D(\omega)]_{N_A \times N_A}$ به‌دست می‌آید. ماتریس آمیختگی U را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$U = [ماتریس]_{N_A \times N_A} D^M \quad (۲۳۳-۳)$$

$$D^M = \text{diag}(e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_1}, \dots, e^{i\lambda_N})$$

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 = \eta_{12}$$

$$\lambda_3 = \eta_{12} + \eta_{23}$$

$$\eta'_{ab} = \eta_{ab} + \lambda_b - \lambda_a \quad (a = 1, \dots, N_A; b = N_A + 1, \dots, N)$$

(۲۳۴-۳)

می‌توان تعداد N_s فاز λ_b را به گونه‌ای برگزید تا N_s فاز η'_{ab} حذف شود. به این ترتیب فازهای

فیزیکی به دو دسته زیر جدا می‌شوند:

$$N - 1 = 2 + N_s \quad \lambda_a \quad (a = 2, \dots, N) \quad \text{تعداد فازهای ماژورانا}$$

(۲۳۵-۳)

که می‌توان از آنها در ماتریس قطری D^M معادله (۲۳۳-۳) فاکتورگیری کرد و تعداد

$$\frac{(N_A - 1)(N_A - 2)}{2} + (N_A - 1)N_s = 1 + 2N_s \quad \text{فاز دیراک}$$

(۲۱۲-۳)

مثلاً می‌توان به ازای $b = 4, \dots, N$ فاز $\eta'_{ab} = 0$ برگزید.

نتیجه‌گیری کلی:

پدیده‌شناسی جرمهای نوترینو و ماتریس آمیختگی دریچه‌ای بر فیزیک ماورای مدل استاندارد همچون نظریه‌های ابرتقارنی می‌باشد. درحالی‌که از دید پدیدارشناسی می‌توانیم جرم نوترینوها و آمیختگی نوترینوها را توصیف کنیم، اطلاعات بسیار اندکی برای تصمیم‌گیری دربارهٔ بنیان فیزیک نهان در جرم نوترینوها در اختیار داریم. هرچند تعمیم اندکی که بر مدل استاندارد دادیم نظریه‌ای الکتروضعیف در انرژی پایین می‌باشد و سه حالت راستگرد نوترینو را هم در بر می‌گیرد اما کامل و دقیق نمی‌باشد. نظریهٔ جامع ممکن است بسیار پیچیده‌تر باشد. اندیشه‌های اصلی مبنی بر ماژورانا بودن نوترینوها و تفاوت نوترینوهای ماژورانا و دیراک به تفصیل بیان شد. همچنین با جزئیات نشان داده شد که چگونه ماژورانا بودن نوترینو (یعنی یکسانی ذره و پادذره) منجر به نقض پایستگی عدد لپتونی می‌شود. نوسانات نوترینو و تبدیل طعمهای مختلف نوترینو به یکدیگر و نیز احتمال نوسان نوترینو بررسی شد. سازوکار الاکلنگی را شرح دادیم و نشان دادیم که چگونه هر دو جملهٔ جرمی دیراکی و ماژورانا در آن وجود دارد. بدین ترتیب که حالت آغازین نوترینو به صورت ذرهٔ دیراکی می‌باشد اما تحت تأثیر جملهٔ جرمی ماژورانا به دو حالت نوترینویی شکسته می‌شود، به گونه‌ای که حاصلضرب این دو جرم جدید برابر با مجذور جرم دیراکی می‌باشد. این رابطه همانند دونیم‌شدگی حالتها در مکانیک کوانتومی تحت اختلالی کوچک است. همچنین نقض CP به تفصیل بررسی شد. نوسانات نوترینو تنها مقدار تفاوت مجذور جرمی را برای نوترینوها تعیین می‌کنند. آشکارسازی واپاشی‌های بتازای دوگانهٔ بدون نوترینو برای تعیین مقیاس جرم نوترینوها و تأیید محکم سرشت ماژورانای نوترینو بسیار مهم است. وجود نوترینوهای سترون بررسی شد، که در حل مشکلات مربوط به فیزیک ماورای مدل استاندارد به‌ویژه منشای ناتقارنی بین ماده و پادماده بسیار زیاد است.

با توجه به مطالب گفته شده در این پایان‌نامه، پرسشهای بنیادین و اصلی دربارهٔ فیزیک نوترینو را می‌توان به خلاصه چنین عنوان کرد:

(۱) سبب کوچکی جرم نوترینو و $U_{e\tau}$ در چیست؟ (۲) سرشت فازهای CP در بخش لپتونی مدل استاندارد و رابطهٔ آن با فازهای CP که ممکن است سبب لپتون‌زایی (و همچنین باریون‌زایی-در-این-پایان‌نامه به این امر اشاره‌ای نشده است) چیست؟ (۳) طیف جرمی نوترینو به صورت کامل به چه شکلی می‌باشد؟

با حرکت به سوی اندازه‌گیری دقیق نوترینو این پرسشها و همچنین دیگر پرسشها که مربوط به اختریفیزیک نوترینو، مدل‌های ابرتقارنی، و... می‌شود، حوزه‌ای بس جذاب برای پژوهش دربارهٔ نوترینو می‌باشد.

پیوست الف

مختصری درباره‌ی نظریه‌های پیمان‌های

مختصری درباره‌ی نظریه‌های پیمانه‌ای

گروه لی G از مرتبه N را در نظر می‌گیریم که دارای N مولد $T_a (a=1, \dots, N)$ می‌باشد. این مولدها در رابطه جابجایی (جبر لی) زیر صدق می‌کنند.

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c \quad (\text{الف-۱})$$

که f_{abc} اعداد حقیقی و در واقع ثوابت ساختاری گروه می‌باشند. این مولدها عناصر infinitesimal گروه هستند، یعنی بسیار بسیار نزدیک به واحد می‌باشد.

$$g(\varepsilon) = 1 + i \varepsilon \cdot T \quad (\text{الف-۲})$$

که $\varepsilon \equiv (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)$ و $T \equiv (T_1, \dots, T_N)$ از N پارامتر حقیقی infinitesimal می‌باشد. عناصر متناهی گروه $g(\theta)$ با $\theta \equiv (\theta_1, \dots, \theta_N)$ با از انتگرال‌گیری عناصر infinitesimal به دست می‌آید. در نظریه میدان، نمایش یکانی n بعدی گروه G به شکل زیر بدست می‌آید.

$$1. \text{ مجموعه } n \text{ میدان } \psi_r, (r=1 \dots N) \text{ که می‌توان آنها را به شکل } \Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix} \text{ نوشت. به}$$

این میدانها، میدانهای مادی گویند. زیرا برای توصیف فرمیون‌ها و بوزون‌های اسکالر هیگز به کار می‌آیند.

۲. مجموعه $\underline{L} \equiv (L_1, \dots, L_N)$ از N ماتریس هرمیتی $n \times n$ تشکیل شده است که نمایش n بعدی از مولدها می‌باشد. یعنی در روابط جابجایی

$$[L_a, L_b] = i \sum_{c=1}^N f_{abc} L_c \quad (\text{الف-۳})$$

ماتریسهای L_a مستقلند و معمولاً به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در روابط تعامد بهنجاری^۱ صدق می‌کند.

$$\text{Tr}(L_a L_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (\text{الف-۴})$$

به ازای هر عضو گروه، نگاشتی $g(\theta) \mapsto U(\theta)$ وجود دارد که $U(\theta)$ ماتریس $n \times n$ یکانی است.

$$U(\theta) = e^{i \theta \cdot \underline{L}} \equiv \exp \left(i \sum_{a=1}^N \theta_a L_a \right) \quad (\text{الف-۵})$$

که تبدیلات میدانهای مادی را ایجاد می‌کند.

^۱ Orthonormality

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U(\underline{\theta}) \Psi(x) \quad (\text{الف-۶})$$

با معلوم بودن نمایش ماتریس n بعدی مولدها، می توان مقادیر ثوابت ساختاری را به طریق زیر معلوم کرد.

$$[L_a, L_b] L_c = i \sum_{c=1}^N f_{abc} L_c L_c \Rightarrow \text{Tr}([L_a, L_b] L_c) = i \text{Tr}(\sum_{c=1}^N f_{abc} L_c L_c) = i \frac{1}{4} \delta_{cc} f_{abc}$$

$$(\text{الف-۷}), (\text{الف-۴}), (\text{الف-۳}) \Rightarrow f_{abc} = -2i \text{Tr}([L_a, L_b] L_c)$$

تحت تبدیلات پیمانه ای موضعی $L(x) = L(\psi_r(x), \partial_\mu \psi_r(x))$ ناوردا نمی شود زیرا مشتق میدانی $\partial_\mu \psi_r(x)$ مانند $\psi_r(x)$ تبدیل نمی یابد و تبدیل آن ناهمگن است.

$$\partial_\mu \psi_r(x) \rightarrow \partial_\mu \psi'_r(x) = \partial_\mu (U(\underline{\theta}) \psi(x)) = U(\underline{\theta}) \partial_\mu (\psi(x)) + \partial_\mu (U(\underline{\theta})) \psi(x) \quad (\text{الف-۸})$$

مثلاً برای فرمیون ها، میدان های مادی ψ_r جمله جنبشی در لاگرانژی دیراک

$$\bar{\Psi}(x) \not{\partial}_\mu \Psi(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) \not{\partial}_\mu \Psi'(x) = \bar{\Psi}(x) \not{\partial}_\mu \Psi(x) + \bar{\Psi}(x) [U^\dagger(\underline{\theta}(x)) \not{\partial} (U(\underline{\theta}))] \Psi(x) \quad (\text{الف-۹})$$

اگر به جای ∂_μ ، مشتق هموردای D_μ را قرار دهیم، لاگرانژین تحت تبدیلات پیمانه ای موضعی ناوردا می شوند و تبدیل $D_\mu \psi$ همگن و برابر با تبدیل ψ می باشد.

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = U(\underline{\theta}) D_\mu \psi \quad (\text{الف-۱۰})$$

و چون $\Psi(x) = U^{-1}(\underline{\theta}) \Psi'(x)$ می باشد، تبدیل D_μ به صورت زیر است.

$$D_\mu \rightarrow D'_\mu = U(\underline{\theta}) D_\mu U^{-1}(\underline{\theta}) \quad (\text{الف-۱۱})$$

این تبدیل با تعریف زیر برای D_μ حاصل می شود.

$$D_\mu \equiv \partial_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{L} \quad (\text{الف-۱۲})$$

که g ثابتی حقیقی و $\underline{A}_\mu \equiv (A_1, \dots, A_N)$ مجموعه ای از N میدان پیمانه ای برداری حقیقی می باشد. تبدیل D_μ به صورت زیر درمی آید.

$$\begin{aligned} (\partial_\mu + i g \underline{A}' \cdot \underline{L}) \psi &= U(\underline{\theta}) [\partial_\mu + i g \underline{A} \cdot \underline{L}] U^{-1}(\underline{\theta}) \psi = \\ U(\underline{\theta}) \left\{ U^{-1}(\underline{\theta}) \partial_\mu \psi + \left[\partial_\mu U^{-1}(\underline{\theta}) \right] \psi \right\} + i g U(\underline{\theta}) \underline{A}_\mu \cdot \underline{L} U^{-1}(\underline{\theta}) & \quad (\text{الف-۱۳}) \\ = \partial_\mu + U(\underline{\theta}) \left[\partial_\mu U^{-1}(\underline{\theta}) \right] + i g U(\underline{\theta}) \underline{A}_\mu \cdot \underline{L} U^{-1}(\underline{\theta}) \end{aligned}$$

بنابراین تبدیل $\underline{A} \cdot \underline{L}$ از رابطه زیر به دست می آید.

$$\underline{A} \cdot \underline{L} \rightarrow \underline{A}' \cdot \underline{L} = U(\underline{\theta}) \left[\underline{A}_\mu \cdot \underline{L} - \frac{i}{g} \partial_\mu \right] U^{-1}(\underline{\theta}) \psi \quad (\text{الف-۱۴})$$

تبدیل صریح میدان های پیمانه ای A_a^μ را می توان با در نظر گرفتن تبدیل infinitesimal

$$U(\varepsilon(x)) = 1 + i \varepsilon(x) \cdot \underline{L} \quad (\text{الف-۱۵})$$

$$\delta \underline{A}_\mu \cdot \underline{L} = i [\varepsilon \cdot \underline{L}, \underline{A}_\mu \cdot \underline{L}] - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon \cdot \underline{L} \quad (\text{الف-۱۶})$$

$$\sum_{a=1}^N \delta A_a^\mu L_a = - \sum_{a,b,c=1}^N f_{abc} \varepsilon_a A_b^\mu L_c - \frac{1}{g} \sum_{a=1}^N \partial_\mu \varepsilon_a L_a \quad (\text{الف-۱۷})$$

با استفاده از رابطه تعامدبهنجاری $\text{Tr}(L_a L_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ درمی‌یابیم که variation، A_a^μ از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\delta A_a^\mu = \sum_{b,c=1}^N f_{abc} A_b^\mu \varepsilon_c - \frac{1}{g} \partial_\mu \varepsilon_a \quad (\text{الف-۱۸})$$

تبدیل میدان‌های پیمانه‌ای مستقل از نمایش $\underline{L}$ مولدهای گروه است.

$$\delta \underline{A}_\mu = A_\mu \times \underline{\varepsilon} - \frac{1}{g} \partial_\mu \underline{\varepsilon} \quad (\text{الف-۱۹})$$

(توجه: اگر گروه موردنظر $SU(2)$ باشد، آنگاه $N=3$ و $f_{abc} = \varepsilon_{abc}$ می‌باشد. در این حالت نمادگذاری فوق همان نمادگذاری معمول در ضرب برداری دو، سه بردار می‌باشد.)

$$(A^\mu \times \varepsilon)_a = \sum_{b,c=1}^N f_{abc} A_b^\mu \varepsilon_c \quad (\text{الف-۲۰})$$

شایان ذکر است که تغییر جزئی^۱ میدان‌های پیمانه‌ای A_a^μ تعمیمی بر حالت غیر آبلی تغییر جزئی شناخته شده میدان الکترومغناطیسی می‌باشد.

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu \theta \quad (\text{الف-۲۱})$$

^۱variation: به نظر می‌آید واژه وردش واژه مناسبی نباشد. زیرا در زبان فارسی مصدر وردیدن وجود ندارد که بخواهیم اسم مصدر وردش بسازیم.

تحت تقارن موضعی $U(1)$ می‌باشد. جمله اضافی $\sum_{b,c=1}^N f_{abc} A_b^\mu \varepsilon_c$ ویژگی گروه‌های ناآبلی می‌باشد.

انتخاب D_μ بجای ∂_μ سبب ایجاد جملات جفت‌شدگی میدان‌های پیمانه‌ای A^μ با میدان‌های مادی ψ_f می‌شود. مثلاً برای میدان‌هایی با اسپین $\frac{1}{2}$ ، لاگرانژی دیراک، جمله جنبشی منجر می‌شود به

$$i \bar{\Psi} \not{D} \Psi = i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - g \bar{\Psi} \underline{A} \cdot \underline{L} \Psi \quad (\text{الف}-۲۲)$$

بنابراین تقارن پیمانه‌ای موضعی لاگرانژین دلالت بر وجود

(۱) مجموعه‌ای از میدان‌های پیمانه‌ای برداری

(۲) برهمکنش میدان‌های پیمانه‌ای با میدان‌های مادی می‌باشد. این برهمکنش با قدرت ثابت جفت‌شدگی g انجام می‌شود.

تعیین جمله جنبشی لاگرانژین برای میدان‌های پیمانه‌ای A_a^μ

برای این منظور باید حالت غیرآبلی تانسور الکترومغناطیسی را تعمیمی مناسب بدهیم.

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad (\text{الف}-۲۳)$$

و جمله جنبشی الکترومغناطیسی

$$\mathcal{L}_{(\gamma)} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad (\text{الف}-۲۴)$$

تعمیم جمله جنبشی به حالت غیرآبلی راحت است.

$$\mathcal{L}_{(\gamma)} = -\frac{1}{4} \underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{A}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \text{Tr}[(\underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{L})(\underline{A}_{\mu\nu} \cdot \underline{L})], \quad \underline{A}_\mu \equiv (A_1, \dots, A_N) \quad (\text{الف}-۲۵)$$

از طرفی تعمیم معمول و ساده (الف-۲۳) برقرار نمی‌باشد، زیرا جمله جنبشی متناظر تحت تبدیل پیمانه‌ای (الف-۱۴) ناوردا نمی‌باشد.

برای آنکه عبارت صحیحی برای $\underline{A}^{\mu\nu}$ بیابیم، جابجاگر $[D^\mu, D^\nu]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} [D^\mu, D^\nu] &= [\partial_\mu + i g \underline{A}_\mu \cdot \underline{L}, \partial^\nu + i g \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] = \\ &= [\partial^\mu, \partial^\nu] + i g [\partial^\mu, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] + i g [\underline{A}^\mu \cdot \underline{L}, \partial^\nu] - g^2 [\underline{A}_\mu \cdot \underline{L}, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] \\ &= 0 + i g \partial^\mu \underline{A}^\nu \cdot \underline{L} + i g (-\partial^\nu \underline{A}^\mu \cdot \underline{L}) - g^2 [\underline{A}_\mu \cdot \underline{L}, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] \\ &= i g \left(\partial^\mu \underline{A}^\nu \cdot \underline{L} - \partial^\nu \underline{A}^\mu \cdot \underline{L} + i g [\underline{A}_\mu \cdot \underline{L}, \underline{A}^\nu \cdot \underline{L}] \right) = \\ &= i g \left(\partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu - g \underline{A}^\mu \times \underline{A}^\nu \right) \cdot \underline{L} \end{aligned} \quad (\text{الف}-۲۶)$$

می‌بینیم که در حاصل جابجاگر، مشتق‌هایی که بر میدان‌های پیمانه‌ای عمل نمی‌کنند، ناپدید می‌شوند، علاوه بر آن با توجه به قانون تبدیل مشتق هموردا (الف-۱۱) تبدیل $[D^\mu, D^\nu]$ به صورت زیر درمی‌آید.

$$[D^\mu, D^\nu] \rightarrow [D'^\mu, D'^\nu] = U(\underline{\theta})[D^\mu, D^\nu]U^{-1}(\underline{\theta}) \quad (\text{الف-۲۷})$$

بنابراین $\text{Tr}\{[D^\mu, D^\nu][D_\mu, D_\nu]\}$ تحت تبدیل پیمانه‌ای موضعی ناورد است و عبارت صحیح برای $\underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{L}$ در معادله (الف-۲۵) به صورت زیر است.

$$\underline{A}^{\mu\nu} \cdot \underline{L} = -\frac{i}{g}[D^\mu, D^\nu] = (\partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu - g \underline{A}^\mu \times \underline{A}^\nu) \cdot \underline{L} \quad (\text{الف-۲۸})$$

در نتیجه

$$A_a^{\mu\nu} = \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g \sum_{b,c=1}^N f_{abc} A_b^\mu A_c^\nu \quad (a=1, \dots, N) \quad (\text{الف-۲۹})$$

شایان توجه است که تعمیم به حالت غیرآبلی تانسور الکترومغناطیسی در معادله (الف-۲۳) مستلزم اضافه نمودن جمله جدیدی است که برحسب میدان‌های پیمانه‌ای از درجه دوم باشد. بنابراین لاگرانژین در معادله (الف-۲۵) نه تنها شامل جمله جنبشی از میدان‌های پیمانه‌ای می‌شود، بلکه جملات خود انرژی میدان‌های پیمانه‌ای را هم دربر دارد.

$$\begin{aligned} L_{(A)} = & -\frac{1}{4}(\partial^\mu \underline{A}^\nu - \partial^\nu \underline{A}^\mu) \cdot (\partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu) \quad \text{جملات جنبشی} \\ & + \frac{1}{4}(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) f_{abc} A_{b\mu} A_{c\nu} \quad \text{رئوس برهمکنش سه ساقی} \\ & - \frac{1}{4} g^2 f_{abc} f_{ade} A_b^\mu A_c^\nu A_{d\mu} A_{e\nu} \quad \text{رئوس برهمکنش چهارساقی} \end{aligned} \quad (\text{الف-۳۰})$$

در حالت آبلی میدان‌های پیمانه‌ای با خود برهمکنش نمی‌کنند. (فوتون که بار الکتریکی ندارد). در حالت غیرآبلی میدان‌های پیمانه‌ای می‌توانند حامل بار باشند و بین خودشان برهمکنش کنند. ثابت جفت‌شدگی g اهمیتی بنیادین دارد، زیرا هم قدرت خودبرهمکنش میدان‌های پیمانه‌ای و هم قدرت برهمکنش این میدان‌ها را با میدان‌های مادی تعیین می‌کند.

پیوست ب

لاگرانژین در نظریه کوانتومی میدان

لاگرانژین در نظریه کوانتومی میدان

در نظریه کوانتومی میدان، کوانتش کانونی با تعریف تکانه همیوگ کانونی برای میدانهای ψ_r ، به صورت

$$\pi_r = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\circ \psi_r)} \quad (\text{ب-۱})$$

و اعمال روابط زیر در همه زمانها بین آنها انجام می گیرد.

$$\begin{aligned} [\psi_r(t, \vec{x}), \pi_s(t, \vec{y})]_{\pm} &= i \delta_{rs} \delta^3(\vec{x}, \vec{y}) \\ [\psi_r(t, \vec{x}), \psi_s(t, \vec{y})]_{\pm} &= [\pi_r(t, \vec{x}), \pi_s(t, \vec{y})]_{\pm} = 0 \end{aligned} \quad (\text{ب-۲})$$

علامت مثبت مربوط به پادجابهایی برای میدانهای فرمیونی و علامت منفی مربوط به جابهایی برای میدانهای بوزونی می شود.

قضیه نورث بین تقارنهای تحت تبدیلات پیوسته و قوانین پایستگی ارتباط برقرار می کند. برای تبدیل بسیار ناچیز n میدان ψ_r ،

$$\psi_r(x) \rightarrow \psi_r(x) + \varepsilon \delta \psi_r(x) \quad (\text{ب-۳})$$

که مقدار ε بسیار کوچک و تغییر $\delta \psi_r$ تحت هیچ قیدی نیست، میدانها باید در معادلات اولر-لاگرانژ صدق کنند.

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_r)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_r} = 0 \quad (r=1, 2, \dots, n) \quad (\text{ب-۴})$$

تبدیلات معادله (ب-۳) تفارن است، اگر معادلات میدان (ب-۴) ناوردا بمانند، یعنی کنش تبدیلات معادله (ب-۳) تفارن است، $I_\Omega \equiv \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\psi_r(x), \partial_\mu \psi_r(x))$ تا جمله سطحی $\delta_V \psi_r|_S = 0$ ناوردا بماند که به معنای عدم شرکت جمله سطحی در معادلات میدان است. بنابراین تبدیل (ب-۳) تقارن است اگر لگرانژین تا چهار-دیورژانس ناوردا باقی بماند.

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \varepsilon \partial_\mu \delta \psi_r(x) \quad (\text{ب-۵})$$

از طرفی بنا بر اصل وردش، باید میدانها به گونه ای باشند که کنش $I(\Omega)$ پایا باشد.

$$\delta_V I(\Omega) \equiv \delta_V \int_\Omega d^4x \mathcal{L}(\psi_r(x), \partial_\mu \psi_r(x)) = 0 \quad (\text{ب-۶})$$

که این شرط به ازای تغییرات بسیار کوچک و جزئی میدانها است. یعنی میدانها بر ابرسطح S دواردور ناحیه ناحیه فضا زمان Ω صفر شوند.

پیوست ج

کایرالیتی Chirality

واژه chirality از واژه یونانی χeip به معنای دست مشتق شده است. کایرالیته ویژگی ناتقارنی بسیار مهمی در شاخه‌های مختلف از دانش (فیزیک، شیمی، ریاضی) است. جسمی را کایرال می‌گویند که با تصویر آینه‌ای خود متفاوت باشد. به دیگر سخن نتوان تصویر آینه‌ای را بر جسم اصلی منطبق کرد.

مشاهده می‌شود که تنها فرمیونهای چپگرد در برهمکنشهای ضعیف شرکت می‌کنند. آزمایشهایی که برای آزمودن این موضوع انجام گرفته است حاکی از آن است که جهان دارای ارجحیت چپگردی است، که تقارن بین دیگر نیروهای طبیعت را برهم می‌زند.

کایرالیته میدانهای فرمیونی با عملگر γ^5 با ویژه‌مقادیر ± 1 تعریف می‌شود. بنابراین هر میدان دیراکی را می‌توان با استفاده از اعمال عملگر تصویر $\frac{1-\gamma^5}{2}$ یا $\frac{1+\gamma^5}{2}$ بر ψ به دو مؤلفه چپگرد یا راستگرد تصویر کرد. جفت‌شدگی برهمکنش ضعیف با فرمیونها متناسب با چنین عملگر تصویری انجام می‌شود که سبب نقض تقارن پاریتی می‌گردد.

باید دقت شود که تنها برای ذرات بدون جرم عملگر کایرالیته یا عملگر هلیسیتی یکسان است. برای ذرات جرم‌دار هلیسیتی وابسته به چارچوب ذره است و در نتیجه ممکن است به نظر آید که ذره-ای در یک چارچوب مرجع برهمکنش ضعیف دارد اما در چارچوب مرجع دیگر چنین برهمکنشی ندارد. (به‌همین دلیل در مدل استاندارد نوترینو ذره بدون جرم است نوترینوی راستگرد در این مدل وجود ندارد. در مدل استاندارد نوترینو ذره بدون جرم در نظر گرفته می‌شود تا با سرعت c سیر کند و هیچ چارچوب مرجعی نباشد که نوترینو در آن دارای هلیسیتی راستگرد باشد، یا به دیگر سخن هلیسیتی آن مستقل از چارچوب مرجع باشد).

برای ذرات جرم‌دار، هلیسیتی با کایرالیته یکسان نیست و بنابراین برهمکنش ضعیف هیچ وابستگی به چارچوب ندارد و ذره در هر چارچوبی با نیروی ضعیف برهمکنش می‌کند.

توضیح این نکته ضروری به نظر می‌آید که «دستینگی» و «دستوارگی» هیچ کدام ترجمه مناسبی برای واژه کایرالیتی نمی‌باشد. در زبان فارسی دستینه به معنای النگو و حلقه طلا و نقره و امثال آن باشد که زنان بر دست کنند.^۱ همچنین به معنای دستکش و پوشاک دست، و به معنای دستبندی است که روز جنگ به دست بندند.^۲ نیز به معنای دسته طنبور و عود و رباب و مانند آن است.^۳ همچنین به معنای مکتوبی است که به دست خود بنویسند. دستواره به معنای عصا و چوب دست شبانان و نیز به معنای رنج دست است [۵۷].

^۱ گاهی دستینه از دستش ربودی بازوبندیش بازو نمودی (نظامی).

^۲ اساوره و دستینه های زر در دست راست کرد برسپیل اکرام . (فارسنامه ابن البلخی)

^۳ دستینه بسته بربط و گیسو گشاده چنگ یعنی درم خریده عیدیم و چاکرش (خاقانی).

- [١] S. L. Glashow, Nucl. Phys., 22, 579–588, 1961.
- [٢] E. Leader & E. Predazzi, Camb. Monogr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmol., 4, 1-431, 1966.
- [٣] P. W. Higgs, Phys. Lett. 12, 132-133, 1964.
- [٤] P. W. Higgs, Phys. Rev. Lett., 13, 508-509, 1964.
- [٥] P. W. Higgs, Phys. Rev., 145, 1156-1163, 1966.
- [٦] F. Englert & R. Brout, Phys. Rev. Lett., 13, 321-322, 1964.
- [٧] G.S. Guralnik , C.R. Hagon, & T. W. B. Kibble, Phys. Rev. Lett., 13, 585-587, 1964.
- [٨] T. W. B. Kibble, Phys. Rev., 155, 1554-1561, 1967.
- [٩] S. Eidelman et al., Phys. Lett., B592, 1, 2004.
- [١٠] S. F. Novaes, 2000, hep-ph/0001283, 10th Jorge Andre Swieca Summer School: Particle and Fields, Sao Paulo, Brazil, 31 Jan – 12 Feb 1999.
- [١١] S.L. Glashow, J. Iliopoulos, & L. Maiani, P.R.D. 2, 1285-1292, 1970
- [١٢] E. Leader & Predazzi, Camb. Mngr. Part. Phys. Nucl. Phys. Cosmo., 4, 1-431, 1996
- [١٣] C. Itzykson & J. B. Zuber, Quantum Field Theory, McGraw-Hill, 1980, International Series in Pure and Applied Physics.
- [١٤] S. M. Bilenky and S. T. Petcov, Rev. Mod. Phys., 59, 671, 1987.
- [١٥] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett., 10, 531–532, 1963.
- [١٦] F. D. Murnaghan, The Unitary and Rotation Groups, Spartan Articles, 1962.
- [١٧] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev., D21, 309, 1980.

- [18] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev., D22, 2227, 1980.
- [19] C. Giunti, C. W. Kim, and M. Monteno, Nucl. Phys. , B521, 3-36, 1998, hep-ph/9709439.
- [20] C. Giunti and M. Tanimoto, Phys. Rev., D66, 113006, 2002, hep-ph/0209169.
- [21] L.-L. Chau and W.-Y. Keung, Phys. Rev. Lett., 53, 1802, 1984.
- [22] L. Wolfenstein, Phys. Rev. Lett., 51, 1945, 1983.
- [23] A. J. Buras, M. E. Lautenbacher, and G. Ostermaier, Phys. Rev., D50, 3433–3446, 1994, hep-ph/9403384.
- [24] M. Battaglia et al., 2003, hep-ph/0304132, First Workshop on the CKM Unitarity Triangle, CERN 13–16 February 2002.
- [25] O. Nachtmann, Elementary Particle Physics: Concepts and Phenomena, Springer-Verlag, 1990. Sec 26.2
- [26] B. Pontecorvo, Sov. Phys. JETP, 26, 984–988, 1968.
- [27] C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett., 55, 1039, 1985.
- [28] O. W. Greenberg, Phys. Rev., D32, 1841, 1985.
- [29] I. Dunietz, O. W. Greenberg, and D. di Wu, Phys. Rev. Lett., 55, 2935, 1985.
- [30] D.-d. Wu, Phys. Rev., D33, 860, 1986.
- [31] L. Landau, Nucl. Phys., 3, 127, 1957.
- [32] T. D. Lee and C. N. Yang, Phys. Rev., 105, 1671, 1957.
- [33] A. Salam, Nuovo Cim., 5, 299, 1957.
- [34] E. Majorana, Nuovo Cim., 14, 171–184, 1937.
- [35] R. N. Mohapatra and P. B. Pal, Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics, World Scientific, 2004, Lecture Notes in Physics, Vol. 72.

- [٣٦] P. Langacker, Phys. Rep., 72, 185, 1981.
- [٣٧] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., 43, 1566–1570, 1979.
- [٣٨] F. Wilczek and A. Zee, Phys. Rev. Lett., 43, 1571–1573, 1979.
- [٣٩] S. Weinberg, Phys. Rev., D22, 1694, 1980.
- [٤٠] H. A. Weldon and A. Zee, Nucl. Phys., B173, 269, 1980.
- [٤١] G. Costa and F. Zwirner, Riv. Nuovo Cim., 9N3, 1–134, 1986.
- [٤٢] C. Giunti, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys., 34, R93–R109, 2007, hep-ph/0608070.
- [٤٣] U. Amaldi, W. de Boer, and H. Furstenau, Phys. Lett., B260, 447–455, 1991.
- [٤٤] J. R. Ellis, S. Kelley, and D. V. Nanopoulos, Phys. Lett., B260, 131–137, 1991.
- [٤٥] P. Minkowski, Phys. Lett., B67, 421, 1977.
- [٤٦] T. Yanagida, 1979, Workshop on the Baryon Number of the Universe and Unified Theories, Tsukuba, Japan, 13–14 Feb 1979.
- [٤٧] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky, 1979, In “Supergravity”, p. 315, edited by F. van Nieuwenhuizen and D. Freedman, North Holland, Amsterdam.
- [٤٨] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic, Phys. Rev. Lett., 44, 912, 1980.
- [٤٩] C. Giunti, C.W. Kim, J. A. Lee, and U.W. Lee, Phys. Rev., D48, 4310–4317, 1993, hep-ph/9305276.
- [٥٠] G. Altarelli and F. Feruglio, Phys. Rep., 320, 295–318, 1999, hep-ph/9905536.
- [٥١] K. Kanaya, Prog. Theor. Phys., 64, 2278, 1980.
- [٥٢] J. Schechter and J. W. F. Valle, Phys. Rev., D25, 774, 1982.
- [٥٣] S. A. Bludman, D. C. Kennedy, and P. G. Langacker, Phys. Rev., D45, 1810–1813, 1992.
- [٥٤] S. Nussinov, Phys. Lett., B63, 201–203, 1976.

[۵۵] L. Wolfenstein, Phys. Rev., D18, 958–960, 1978.

[۵۶] I. Dunietz, O. W. Greenberg, and D. di Wu, Phys. Rev. Lett., 55, 2935, 1985.

[۵۷] علی اکبر دهخدا، لغت نامه دهخدا، جلد ۷، چاپ اول از دوره جدید بهار ۷۳، مؤسسه انتشارات دانشگاه تهران

Abstract:

For a long time, it was believed that neutrinos were massless, spin-half particles, making them drastically different from their other standard model spin-half cousins such as the charged leptons (e, μ, τ) and the quarks (u, d, s, c, t, b), which are known to have mass. In fact, the masslessness of the neutrino was considered so sacred in the 1950s and 1960s that the fundamental law of weak interaction physics, the successful V-A theory for charged current weak processes proposed by Sudarshan, Marshak, Feynman and Gell-Mann, was considered to be intimately linked to this fact. The argument went as follows: a massless fermion field equation is invariant under the γ_5 transformation; since the neutrino is one such particle and it participates exclusively in weak interactions.

The accumulating evidences for neutrino mass from the solar and atmospheric neutrino data compiled in the 1990s and still are ongoing. However the possibility of a nonzero neutrino mass at phenomenological level goes back almost 1970s. In the context of gauge theories, they were discussed extensively in the 1970s and 1980s long before there was any firm evidence for it.

The existence of a nonzero neutrino mass makes neutrinos more like the quarks, and allows for mixing between the different neutrino flavors leading to the phenomenon of neutrino oscillation. More importantly, the simple fact that neutrino masses vanish in the standard model implies that evidence for neutrino mass is solid evidence for the existence of new physics beyond the standard model.

The standard model itself is based on the gauge group $SU(2)_L \times U(1)_Y$ and neutrinos are massless particles within it.

Existence of many observed evidences for neutrino masses besides other problems of standard model implies that one must seek physics beyond the standard model to explain them. This does not necessarily mean going beyond the gauge group of the standard model. Standard model is very successful in describing many phenomena. Even with the same gauge group as the standard model, one can make models so that the model predicts massive neutrinos. In this thesis, I will discuss some such simple modifications of the standard model to describe the massive neutrinos.

KeyWords: Neutrino mass,

$SU(2)_L \times U(1)_Y$ groups,

Non-conservation of total lepton number



Shahrood University of Technology

Faculty : Physics

Particle Physics

Neutrino Mass in $SU(2)_L \times U(1)_Y$ Models

Student: Hamidreza Rezazadeh

Supervisor: Prof. Ali Akbar Rajabi