بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک، گرایش هسته‌ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

محاسبه پهنای واپاشی برای سیستم‌های وابسته به زمان نسبیتی و غیر نسبیتی

نگارنده: مهناز معظمی

اساتید راهنما

دکتر حسن حسن آبادی
دکتر صابر زرین‌کمر

خرداد ۱۳۹۷

شماره:
تاریخ:

باسمه‌تعالی

دانشگاه صنعتی شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم مهناز معظمی با شماره دانشجوی ۹۴۱۶۷۸۴ رشته فیزیک گرایش هسته‌ای تحت عنوان محاسبه پهنای واپاشی برای سیستم‌های وابسته به زمان نسبیتی و غیرنسبیتی که در تاریخ ۱۳۹۷/۳/۲۸ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می‌گردد:

قبول (با درجه: ......عالی......) ☑	مردود ☐
نوع تحقیق: نظری ☑	عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استادراهنمای اول	دکتر حسن حسن‌آبادی	استاد	
۲- استادراهنمای دوم	دکتر صابر زرین کمر	استادیار	
۳- استاد مشاور	--------------	----------	-------------
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر احسان ابراهیمی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر علی‌اکبر رجبی	استاد	
۶ـ استاد ممتحن دوم	دکتر مسلم سوهانی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی مؤمنی تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره: در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به
مادر عزیزم
که صادقانه و عاشقانه
به من آموخت
تا چگونه در عرصه زندگی
ایستادگی کنم.

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش رهنمونمان شد و به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و دانش را روزیمان ساخت.

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه‌ی درخت پر بار وجودش بیاسایم و از ریشه‌ی آن شاخ و برگ گیرم و از سایه‌ی وجودش در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم. فردی که بودنش تاج افتخاری است بر سرم و نامش دلیلی است بر بودنم، چرا که ایشان، پس از پروردگار، مایه‌ی هستی‌ام بوده است دستم را گرفته و راه رفتن را در این وادی زندگی پر فراز و نشیب آموخته است و آموزگارانی که برایم زندگی، بودن و انسان بودن را معنی کردند ...

استاد گرامیم جناب آقای دکتر حسن حسن‌آبادی بسیار از شما سپاسگزار می‌باشم که بدون راهنمایی‌های شما این مهم هرگز ممکن نمی‌بود.

همچنین از جناب آقای دکتر صابر زرین کمر که بنده را در این امر همراهی فرمودند سپاسگزار می‌باشم.

مهناز معظمی

خرداد ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب **مهناز معظمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **فیزیک فیزیک و مهندسی هسته‌ای** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **محاسبه پهنای واپاشی برای سیستم‌های وابسته به زمان نسبیتی و غیر نسبیتی** ، تحت راهنمایی **حسن حسن آبادی** و **صابر زرین کمر** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهناز معظمی
خرداد ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

تعیین تابع ساختار هادرون‌ها یکی از مهمترین مسائل فیزیکی در QCD می‌باشد. در این کار به مطالعه‌ی طیف جرمی و ویژگی‌های مزون‌ها در چارچوب مدل پتانسیل غیر نسبیتی پرداخته می‌شود. به همین منظور مدل‌های پتانسیلی را برای برهمکنش‌های مزونی که ترکیبی از پتانسیل‌های کراتزر، یوکاوا و خطی و همین‌طور ترکیب پتانسیل‌های کراتزر، گاؤوسی و خطی می‌باشد را پیشنهاد داده و برای بررسی تطابق آن‌ها از میان مدل‌های پتانسیلی سیستم‌های هادرونی از پتانسیل کرنل استفاده می‌شود و در ادامه به دلیل اهمیت و کاربرد تابع موج کل سیستم، از روش اختلال بررسی می‌شود. در نهایت به کمک تابع موج بدست آمده جرم، ثابت واپاشی، پهنای واپاشی لپتونی و شبه لپتونی مزون‌ها در چارچوب غیرنسبیتی محاسبه می‌شوند. مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی که وابستگی به زمان دارند به دلیل کاربرد زیاد آن‌ها در فیزیک بسیار مورد توجه قرار دارد و بسیاری از اثرات مکانیک کوانتومی جالب به این مفهوم مرتبط می‌شوند. در این پایان‌نامه معادله شرودینگر یک بعدی با موضوع شرایط مرزی وابسته به زمان برای ذره‌ی بدون اسپین داخل چاه پتانسیل محدود را مورد بررسی قرار داده و سپس به مطالعه‌ی ذرات نسبیتی با استفاده از معادله‌ی کلاین_گوردن پرداخته و در حالات پتانسیل متحرک (سد پتانسیل با دیواره‌های متحرک) مورد تحلیل قرار داده می‌شود. برای کاربردی از پتانسیل با دیواره‌ی متحرک فرض می‌شود که ذره‌ای در یک جعبه‌ی یک بعدی به دام افتاده و یکی از دیواره‌ها متحرک است این سیستم کوانتومی همانند یک چرخه‌ی ماشین گرمایی استرلینگ عمل کرده و پارامترهای مهم این چرخه محاسبه می‌شوند. برای بررسی پهنای واپاشی سیستم وابسته به زمان ابتدا باید پتانسیل وابسته به زمانی را پیشنهاد داده و با استفاده از اثبات قاعده طلایی فرمی رابطه‌ی بین پهنای واپاشی و نیمه عمر سیستم بدست می‌آید. برای مثال به بررسی پهنای واپاشی اتم هیدروژن پرداخته شده است. همین‌طور فرم عمومی برای بدست آوردن پهنای واپاشی سیستم‌های وابسته به زمان با استفاده از حالت تشدید (رزونانسی) بیان می شود. پهناهای واپاشی دیفرانسیلی، جزئی و کل مربوط به واپاشی حالت تشدید (رزونانسی) به حالت‌های پایدار پیوسته معرفی می‌شوند و وقتی که تشدید مدهای واپاشی مختلفی دارد پهنای واپاشی جزئي و کسر انشعاب مربوطه‌اش بدست خواهد آمد. در تقریبی که حالت تشدید تیز می‌باشد، از عبارات مربوط به پهناهای واپاشی کلی، جزئی و دیفرانسیلی یک حالت تشدید نشان داده می‌شود که نتیجه مشابه قاعده‌ی فرمی می‌باشد و همچنین به مقایسه‌ی ثابت‌های واپاشی بدون بعد با ثابت‌های واپاشی جزئی پرداخته می‌شود.

کلمات کلیدی: پهنای واپاشی، پتانسیل وابسته به زمان، معادله شرودینگر.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Moazami. M, Hassanabadi. H, Zarrinkamar. S. (2018). ”Heavy-light Mesons under a New Potential Containing Cornell, Gaussian and Inverse Square Terms ”, **Few-Body Syst**, 59,100.

2. Moazami. M, Hassanabadi. H, Zarrinkamar. S,” D, Ds, B and Bs mesons under the new type of potential model”, **EPJA**, submitted.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

بررسی خواص واپاشی مزون‌ها

۱.۱ مقدمه‌ای بر بررسی خواص واپاشی مزون ها

در طی سال‌های اخیر طیف سنجی هادرون‌ها و محاسبه‌ی سایر کمیت‌های مربوط به آن‌ها به دلیل وجود امکانات تجربی مورد توجه افراد زیادی قرار گرفته‌اند. به طور پیوسته اطلاعات و داده‌های جدیدی درباره‌ی هادرون‌ها از بخش‌های سبک تا سنگین طعمی توسط $CLEO$، $DELPHI$ ، $BELLE$، $BABAR$، BES و ...ارائه می‌شود. باید توجه داشت که مزون‌ها ذراتی با جرم متوسط هستند که حالت مقیدی از جفت کوارک– پاد کوارک می‌باشند و مزون‌ها از قوانین حاکم بر بوزون‌ها تبعیت می‌کنند و باریون‌ها از سه کوارک تشکیل شده و فرمیون می‌باشند [۱].

در توصیف هادرون‌ها مدل‌های پتانسیل غیرنسبیتی بسیار موفق بوده‌اند البته مدل‌های پتانسیلی زیادی وجود دارد که برای مطالعه‌ی طیف جرمی مناسب می‌باشند، به عنوان مثال به پتانسیل‌های مارتین، [1] لگاریتمی، [2] اسکرین [3] و کرنل [4] می‌توان اشاره کرد [۷–۱۰]. در هر یک از این پتانسیل‌ها باید به این دو ویژگی برهمکنش‌های آزادانه و محدودیت تقریبی توجه داشت، بنابراین به دلیل عدم قطعیت تئوری در پتانسیل‌ها در فواصل بزرگ و متوسط باید از

---

[1] Martin potential

[2] Logarithmic potential

[3] Screened potential

[4] Cornell potential

مدل‌های پتانسیلی استفاده کرد که خواص هادرونی مشاهده شده را توضیح دهد. مدل‌های پتانسیل محاسبه شده در توصیف طیف هادرون بسیار موفق بوده‌اند. در طی سال‌های اخیر تلاش‌های زیادی در معرفی انواع جدیدی از مدل‌های پتانسیل برای بررسی و مطالعه‌ی خواص هادرونی مشاهده شده، انجام شده است [۱۱]، به عنوان مثال در مدل پتانسیل غیر نسبیتی QCD ، Cea و همکارانش [۱۲] جرم‌ها و ثابت‌های واپاشی لپتونی را به خوبی مزون‌های شبه اسکالر و برداری بدست آوردند. جرم طیفی سیستم کوارک و آنتی‌کوارک نیمه سنگین توسط Liu و Yang مطالعه شده است [۱۳]. در مدل نسبیتی کوارک، ابرت [5] و همکارانش جرم طیفی مزون‌های سبک و نیمه سنگین را ارائه دادند [۱۴، ۱۵] پتانسیل هولسن [6] بعلاوه‌ی پتانسیل خطی [۱۶، ۱۷] [7]، پتانسیل هماهنگ بعلاوه‌ی پتانسیل دنگ_فنگ [8] [۱۸]، ترکیب پتانسیل‌های هماهنگ و یوکاوا [9] [۱۹] مثال‌های انواع جدید مدل‌های پتانسیلی هستند که برای بررسی طیف جرمی و خواص واپاشی هادرون‌ها مورد استفاده قرار گرفتند. نتایج بدست آمده از این مدل پتانسیل‌های جدید در توافق خوبی با نتایج تجربی و همینطور پیش‌بینی‌های تئوری از مدل‌های دیگر پتانسیلی می‌باشند. برای بررسی مدل‌های پتانسیلی ابتدا به معرفی ساختار هادرون‌ها پرداخته می‌شود.

۲.۱ ساختار مزون‌ها

با توجه به مدل استاندارد می‌توان به توضیح ویژگي‌های هادرون‌ها پرداخت. در این مدل ذرات بنیادی از دو گروه لپتون‌ها و کوارک‌ها تشکیل شده‌اند. به صورت کلی در مدل استاندارد شش نوع کوارک وجود دارد؛ کوارک بالا (u) [10]، کوارک پایین (d) [11]، کوارک شگفت (s) [12]، کوارک افسون (c) [13]، کوارک تحتانی [14] یا زیبا [15] (b) ، کوارک فوقانی (t) [16] می‌باشند. کوارک‌های بالا (u) و پایین (d) سبکترین آن‌ها می‌باشند و باقی کوارک‌ها ذرات ناپایداری می‌باشند که به کوارک‌های بالا و پایین واپاشی می‌کنند. مزون‌ها حالت مقیدی از جفت کوارک و پادکوارک می‌باشند. براساس ساختار تشکیل دهنده‌شان به صورت مزون‌های طعم‌دار و بدون طعم تقسیم می‌شوند. مزون‌های بدون طعم از جفت کوارک و پادکوارک با طعم یکسان

---

[5] Ebert
[6] Hulthen potential
[7] Linear potential
[8] Deng-Fan potential
[9] Yukawa
[10] up quark
[11] down quark
[12] strange quark
[13] charm quark
[14] bottom quark
[15] beauty quark
[16] top quark

ساخته شده‌اند، یعنی تمامی اعداد کوانتومی طعم این مزون‌ها صفر است و مزون‌های طعم‌دار سنگین [۱۷]، مزون‌هایی هستند که حداقل یک کوارک یا پادکوارک آن از کوارک‌های سنگین c یا b تشکیل شده باشند. ساختار مزون‌های نیمه سنگین که مزون‌های طعم‌دار هستند، از یک کوارک یا پادکوارک سبک و یک پادکوارک یا کوارک سنگین می باشد. در مدل کوارکی، کوارک‌های سبک به صورت s، d، u و پادکوارک‌های آن‌ها $\bar{s}$، $\bar{d}$، $\bar{u}$ می‌باشد. مزون B و D از ترکیب کوارک‌های c و b با یکی از سه کوارک s، d، u و یا پادکوارک‌های متناظرشان ایجاد می‌شوند. در این پایان‌نامه به بررسی مزون‌های B، B_s، D و D_s پرداخته می‌شود، ساختار مزون B از کوارک‌های $b\bar{u}$، مزون B_s از $b\bar{s}$، مزون D^+ از $c\bar{d}$، مزون D° از $c\bar{u}$، مزون D^- از $d\bar{c}$، مزون D_s از $c\bar{s}$ و ...می‌باشد. مزون‌های پایون [۱۸] و کائون [۱۹] نیز از یک کوارک و پادکوارک می‌باشند به طورکلی پایون‌ها سبک‌ترین مزون‌ها هستند زیرا ساختار کوارکی آن‌ها شامل کوارک‌های سبک d و u می‌باشد. مزون‌های B و D برای مطالعه و بررسی مناسبند زیرا این مزون‌ها نیمه سنگین، شامل یک کوارک سنگین بوده و بدلیل ساختارشان ناپایدار می‌باشند و به همین دلیل به ذرات سبکتر و پایدارتر واپاشی می‌کنند. بنابراین بررسی خواص واپاشی آن‌ها مناسب می‌باشد. واپاشی مزون‌ها، واپاشی‌های ضعیف هادرونی هستند و سه دسته می‌باشند؛ واپاشی لپتونی، نیمه‌لپتونی و غیر لپتونی.

بررسی و مطالعه‌ی ترازهای مقید و تابع موج‌های سیستم‌های کوارک_آنتی‌کوارک از موضوعات مورد علاقه بوده است. مطالعه‌ی تابع موج‌های ترازهای مقید یک سیستم کوارک_آنتی‌کوارک در مزون‌های B و D نه تنها اطلاعات مهم و قابل توجهی را درباره‌ی برهمکنش‌های قوی بین کوارک‌های نیمه‌سنگین ارائه می‌دهد بلکه برای بررسی مکانیزم مزون‌های سنگین هم دارای اهمیت می‌باشد. با بررسی و مطالعه‌ی تابع موج در سیستم‌های هادرونی می‌توان به محاسبه‌ی ویژگی‌ها و خواص هادرون‌ها از جمله ثابت واپاشی، پهنای واپاشی لپتونی، پهنای واپاشی نیمه لپتونی و ...پرداخت. در ادامه به بررسی و بدست آوردن تابع موج با استفاده از برهمکنش‌های پیشنهادی و در نهایت بررسی خواص واپاشی و طیف جرمی هادرون‌ها پرداخته می‌شود [۱].

۳.۱ حل معادله شرودینگر برای سیستم دو جسمی

همانطور که اشاره شد در توصیف هادرون‌ها مدل‌های پتانسیل غیر نسبیتی بسیار موفق بوده است. در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی برای اینکه توصیف دقیقی از واقعیت فیزیکی ارائه شود از معادله‌ی شرودینگر بهره می‌برند [۱]. معادله شرودینگر در سه بعد به صورت رابطه‌ی (۱.۱) نوشته می‌شود [۲۳]

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\Psi(r,\theta,\varphi)+(V(r,\theta,\varphi)-E)\Psi(r,\theta,\varphi)=0 \qquad (1.1)$$

[17] Heavy flavour mesons

[18] Pions

[19] Kaons

که μ جرم کاهیده سیستم دو جسمی و $V(r)$ پتانسیل برهمکنشی می‌باشد. برای بدست آوردن قسمت شعاعی آن تابع موج به صورت (۲.۱) در نظر گرفته می‌شود

$$\Psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi) \tag{۲.۱}$$

که در آن r شعاع موثر حالت مزونی است و $R(r)$ قسمت شعاعی و $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ قسمت زاویه‌ای به صورت هارمونیک کروی می‌باشد. با جداسازی بخش شعاعی آن و در نظر گرفتن لاپلاسین کروی و با توجه به مقدار L^2 ، ∇^2 به صورت (۳.۱) بدست می‌آید.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{\hat{L}^2}{r^2\hbar^2} \tag{۳.۱}$$

بنابراین معادله شرودینگر سیستم دو جسمی به صورت (۴.۱) بدست می‌آید.

$$\left\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d}{dr}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\right\} R(r) = 0 \tag{۴.۱}$$

در ادامه به معرفی روابط حاکم بر جرم و خواص واپاشی مزون‌ها با توجه به تابع موج بدست آمده پرداخته می‌شود.

۴.۱ بررسی برهمکنش با استفاده از پتانسیل کرنل

برای بدست آوردن مقادیر مرتبط به پارامترهای برهمکنش سیستم مزونی معمولا به این صورت عمل می‌شود که تصویر تقریبی که می‌توان از سیستم‌های مزونی بدست آورد به صورتی می‌باشد که می‌توان آن‌ها را به صورت حالت‌های مقیدی توصیف کرد که با نیروی بین کوارکی با یکدیگر برهمکنش می‌کنند، این نیرو در فواصل کوتاه تقریبا رفتار شبه‌کولنی دارند و در فواصل بزرگ بدلیل وجود قید کوارکی، رفتار خطی دارند. بنابراین برهمکنشی که در نظر گرفته می‌شود باید شامل یک بخش مقید کننده و یک بخش شبه‌کولنی باشد.

برای بخش مقید کننده برهمکنش‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شود، مانند پتانسیل خطی، نوسانی و در بخش شبه‌کولنی علاوه‌بر پتانسیل کولنی پتانسیل‌هایی مثل پتانسیل هولسن، پتانسیل یوکاوا و ...در نظر گرفته می‌شود.

برهمکنش کرنل که به صورت ترکیبی از برهمکنش‌های خطی و کولنی می‌باشد یکی از برهمکنش های بسیار مناسب برای مطالعه و بررسی سیستم‌های هادرونی می‌باشد. پتانسیل کرنل ذکر شده در منبع [۲۴]، $V(r) = a'r + \frac{b'}{r}$ باید با پتانسیل‌های پیشنهادی برازش شود. باید توجه داشت که این برهمکنش تاکنون نتایج بسیار خوبی را در مورد ویژگی‌های مربوط به سیستم‌های هادرونی از قبیل جرم، ثابت واپاشی و ...ارائه داده است.

۵.۱ جرم و خواص واپاشی هادرون‌ها

با توجه به اینکه یک مدل پتانسیلی را با در نظر گرفتن و بررسی طیف جرمی سیستم هادرونی آن نمی‌توان معتبر دانست نیازمند به بررسی خواص واپاشی آن سیستم مانند ثابت واپاشی، پهنای واپاشی لپتونی، پهنای واپاشی نیمه‌لپتونی و ...می‌باشند. البته واپاشی نیمه‌لپتونی هادرون‌ها به دو دلیل اهمیت دارند، اول اینکه آنها منبع اصلی اطلاعات برای استخراج عناصر ماتریسی کابیبو_ کوبایاشی_ ماسکاوا [20] CKM مدل استاندارد از تجربه هستند و دوم اینکه این واپاشی‌های نیمه‌لپتونی اطلاعاتی درباره‌ی ساختار هادرون‌ها را ارائه می‌دهند.

در مدل استاندارد، واپاشی ضعیف هادرون‌ها بستگی به عناصر ماتریس CKM دارند از عناصر پارامترهای بنیادی مدل استاندارد می‌باشند که تغییرات طعمی برهمکنش‌های ضعیف هادرون‌ها را توصیف می‌کند و نقش مهمی در ایجاد یک مکانیزم برای نقض_CP [21] در هادرون‌ها را ایفا می‌کند [۲۰] ، یعنی حالت‌های کوانتومی کوارک‌ها را هنگامی که آن‌ها آزادانه منتشر می‌شوند و در برهمکنش‌های ضعیف شرکت می‌کنند را معین می‌کند این ماتریس ۳×۳ به صورت V_{CKM} می‌باشد،

$$V_{CKM} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{td} \end{bmatrix}$$

ویژه حالت‌های ضعیف کوارک‌های d، s، b که قبل از گذار به صورت $\begin{bmatrix} d & s & b \end{bmatrix}$ بودند توسط ماتریس CKM به $\begin{bmatrix} d' & s' & b' \end{bmatrix}$ مرتبط می‌شوند و بین نسل جدید کوارک‌های تولید شده گذار صورت می‌گیرد [۲۱].

$$\begin{bmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{td} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ s \\ b \end{bmatrix}$$

بنابراین با پارامتری کردن ماتریس CKM می‌توان نقض_cp را در مدل استاندارد بدست آورد. بنابراین با توجه به مقادیر گزارش شده در PDG [22] و در نظر گرفتن یکی از عمومی‌ترین پارامترگذاری‌های آن عناصر ماتریس CKM به صورت

$$|V_{CKM}| = \begin{bmatrix} ۰/۹۷۴۲۸ \pm ۰/۰۰۰۱۵ & ۰/۲۲۵۳ \pm ۰/۰۰۰۷ & ۰/۰۰۳۴۷^{+۰/۰۰۰۱۶}_{-۰/۰۰۰۱۲} \\ ۰/۲۲۵۲ \pm ۰/۰۰۰۷ & ۰/۹۷۳۴۵^{+۰/۰۰۰۱۵}_{-۰/۰۰۰۱۶} & ۰/۰۴۱۰^{۰/۰۰۱۱}_{-۰/۰۰۰۷} \\ ۰/۰۰۸۶۲^{۰/۰۰۰۲۶}_{-۰/۰۰۰۲۰} & ۰/۰۴۰۳^{+۰/۰۰۱۱}_{-۰/۰۰۰۷} & ۰/۹۹۹۱۵۲^{+۰/۰۰۰۰۳۰}_{-۰/۰۰۰۰۴۵} \end{bmatrix}$$

[20] Cabibbo-Kobayashi-Maskawa

[21] cp-violating

[22] Particle Data Group

می‌باشد [۲۲]. باید توجه داشت که پهنای واپاشی لپتونی اطلاعات مکمل و مهمی درباره‌ی فاصله‌ی ترازها نیز ارائه می‌دهند که برای محاسبه‌ی آن باید از ثابت واپاشی بهره برد. بنابراین علاوه بر طیف جرمی هادرون‌ها سایر کمیت‌های مشاهده‌پذیر دیگر را نیز می‌توان در آن، مورد مطالعه و بررسی قرار داد [۱].

۱.۵.۱ بررسی طیف جرمی هادرون‌ها

برای اولین گام به محاسبه‌ی جرم‌های مزون‌ها باید پرداخته شود و در نهایت با مشخص کردن خواص دیگر آن‌ها و مقایسه‌شان می‌توان درستی طیف جرمی را نشان داد. جرم مزون‌های B، B_s، D و D_s را می‌توان با استفاده از معادله‌ی (۵.۱) بدست آورد [۲۵]،

$$M = m_q + m_Q + E + \langle H_{ss} \rangle + \langle H_{l.s} \rangle + V_\circ \qquad (۵.۱)$$

که درآن $\langle H_{ss} \rangle$ برهمکنش اسپین‑اسپین است و شکل عمومی استفاده شده‌ی آن به صورت (۶.۱) می‌باشد [۲۶]،

$$H_{SS} = \frac{۳۲\pi\alpha_s}{۹m_q m_Q}\vec{S}_Q.\vec{S}_q\,\delta\left(\overrightarrow{r}\right) \qquad (۶.۱)$$

البته باید توجه داشت که برای تراز پایه S-Wave این معادله به صورت (۷.۱) می‌باشد.

$$\langle H_{SS} \rangle = \begin{cases} \frac{۸\pi\alpha_s}{۹m_Q m_{\bar{q}}}|\Psi(\circ)|^۲ & \text{برای} \quad \vec{S}=۱ \\ -\frac{۸\pi\alpha_s}{۳m_Q m_{\bar{q}}}|\Psi(\circ)|^۲ & \text{برای} \quad \vec{S}=\circ \end{cases} \qquad (۷.۱)$$

اما با توجه به اینکه در رابطه‌ی (۷.۱)، $|\Psi(\circ)|^۲$ فقط تابع موج برای حالت S می‌باشد در نتیجه نمی‌توان این معادله را برای ترازهای بالاتر تابع موج در نظر گرفت. بنابراین برای موج P و ترازهای بالاتر برهمکنش اسپین ‑ اسپین به صورت رابطه‌ی (۸.۱) در نظر گرفته می‌شود،

$$\langle H_{SS} \rangle = \frac{۳۲\pi\alpha_s}{۹m_q m_Q}\left\langle S_Q.S_q \right\rangle \int ۴\pi r^۲ |\psi\left(r\right)|^۲ \delta\left(r\right) dr \qquad (۸.۱)$$

که در آن $\delta\left(r\right)$ هم به صورت (۹.۱) پیشنهاد می‌شود

$$\delta\left(r\right) = \left(\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}\right)^۳ \exp\left(-\sigma^۲ r^۲\right) \qquad (۹.۱)$$

که (۸.۱) به صورت عمومی برای همه‌ی حالت‌ها قابل استفاده می‌باشد. می‌توان $S_Q.S_q$ را به صورت (۱۰.۱) محاسبه کرد،

$$S_Q.S_q = \frac{۱}{۲}\left\{S_T^۲ - S_Q^۲ - S_q^۲\right\} \qquad (۱۰.۱)$$

$$\langle S_Q.S_q \rangle = \begin{cases} \frac{۱}{۴} & \text{برای} \quad S=۱ \\ -\frac{۳}{۴} & \text{برای} \quad S=\circ \end{cases} \qquad (۱۱.۱)$$

و همینطور برای محاسبه‌ی مقدار $|\Psi(0)|^2$ از رابطه‌ی (۱۲.۱) استفاده می‌شود.

$$|\Psi(0)|^2 = \frac{\mu}{2\pi\hbar^2}\left\langle \frac{dV(r)}{dr} \right\rangle \tag{۱۲.۱}$$

در معادله‌ي (۵.۱) برهمکنش اسپین‌ـ مدار [23] به صورت (۱۳.۱) تعریف می‌شود،

$$H_{L.S} = \left(-\frac{1}{2\mu^2 r}\frac{dV(r)}{dr}\right)\left(\overrightarrow{L}.\overrightarrow{S}\right) \tag{۱۳.۱}$$

که در آن $\left\langle \overrightarrow{L}.\overrightarrow{S} \right\rangle$ به صورت (۱۴.۱)

$$\left\langle \overrightarrow{L}.\overrightarrow{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\left(j\left(j+1\right)\right) - \left(l\left(l+1\right)\right) - \left(S\left(S+1\right)\right) \tag{۱۴.۱}$$

محاسبه می‌شود.

۲.۵.۱ بررسی ثابت واپاشی هادرون‌ها

یکی از مهمترین خواص مزون‌های نیمه‌سنگین ثابت واپاشی می‌باشد که در آزمایش‌ها به صورت مستقیم اندازه‌گیری می‌شود و می‌توان عناصر ماتریسی CKM را که توسط معادله‌های ون‌راین‌ـ وایسکوف [24] ارائه شده و با تصحیح تابشی QCD در نظر گرفته می‌شود را با ترکیب ثابت‌های واپاشی مزون‌های برداری و شبه اسکالر بدست آورد. ثابت واپاشی مزون‌های شبه اسکالر و برداری f_p و f_v توسط اجزای ماتریسی (۱۵.۱) و (۱۶.۱) تعریف می‌شوند [۲۷].

$$p^{\mu} f_p = i\left\langle o\left|\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi\right|p\right\rangle \tag{۱۵.۱}$$

$$m_v f_v \varepsilon^{\mu} = i\left\langle o\left|\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right|v\right\rangle \tag{۱۶.۱}$$

در اینجا p^{μ} تکانه‌ی مزون و $|p\rangle$ تراز مزون شبه اسکالر m_{μ}، ε^{μ} و v به ترتیب جرم و قطبش و بردار تراز مزون برداری می‌باشد محاسبه‌ی اجزای ماتریس (۱۵.۱) و (۱۶.۱) با استفاده از تابع موج مدل کوارک در فضای تکانه حاصل می‌شود.

$$f_p = \sqrt{\frac{3}{m_p}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{1+\frac{m_Q}{E_k}}\sqrt{1+\frac{m_{\overline{Q}}}{E_{\overline{k}}}}\left(1-\frac{k^2}{\left(E_k+m_Q\right)\left(E_{\overline{k}}+m_{\overline{Q}}\right)}\right)\phi\left(\overrightarrow{k}\right) \tag{۱۷.۱}$$

$$f_v = \sqrt{\frac{3}{m_v}}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{1+\frac{m_Q}{E_k}}\sqrt{1+\frac{m_{\overline{Q}}}{E_{\overline{k}}}}\left(1+\frac{k^2}{\left(E_k+m_Q\right)\left(E_{\overline{k}}+m_{\overline{Q}}\right)}\right)\phi\left(\overrightarrow{k}\right) \tag{۱۸.۱}$$

[23] Spin-Orbit
[24] Van Royen-Weisskopf formula

در حد غیر نسبیتی دو معادله‌ی بالا به نتیجه مشهور ون‌راین ـ وایسکوف [۲۸] کاهش می‌یابند، بنابراین ثابت واپاشی [25] مزون‌ها به صورت معادله‌ی (۱۹.۱) می‌باشد [۲۹]،

$$f_{\frac{p}{v}}^{۲} = \frac{۱۲\left|\Psi\left(۰\right)\right|^{۲}}{m_{\frac{p}{v}}} \tag{۱۹.۱}$$

ثابت واپاشی مزونی که شامل یک عامل تصحیح مرتبه‌ی اول QCD می‌باشد به صورت رابطه‌ی (۲۰.۱) داده می‌شود،

$$\overline{f_{\frac{p}{v}}^{۲}} = \frac{۱۲\left|\Psi\left(۰\right)\right|^{۲}}{m_{\frac{p}{v}}} C^{۲}\left(\alpha_s\right) \tag{۲۰.۱}$$

که در آن $C\left(\alpha_s\right)$ توسط رابطه‌ی (۲۱.۱) تعریف می‌شود [۲۹]،

$$C\left(\alpha_s\right) = ۱ - \frac{\alpha_s}{\pi}\left(\Delta_{\frac{p}{v}} - \frac{m_Q - m_q}{m_Q + m_q} Ln\frac{m_Q}{m_q}\right) \tag{۲۱.۱}$$

در این رابطه $\Delta_v = \frac{۸}{۳}$ و $\Delta_p = ۲$ می‌باشد. منظور از p مزون‌های شبه اسکالر می‌باشد که مزون‌های $J^{\pi} = ۰^{-}$ را شامل می‌شود و منظور از v مزون‌های برداری هستند که $J^{\pi} = ۱^{-}$ می‌باشد.

به صورت خلاصه باید بیان کرد که ثابت واپاشی از مقایسه‌ی دامنه‌ی واپاشی در دو حالت تئوری و پدیده‌شناسی بدست می‌آید. در فصل بعد با توجه به پتانسیل‌های پیشنهاد شده $f_{\frac{p}{v}}$ و $\bar{f}_{\frac{p}{v}}$ برای مزون‌های B، B_s، D و D_s محاسبه می‌شوند.

۳.۵.۱ پهنای واپاشی لپتونی

ذرات تشکیل دهنده‌ی مزون کوارک‌ها و پادکوارک‌ها می‌توانند به یک جفت لپتون باردار از طریق نابودی بوزون مجازی $W^{\pm}$ واپاشی کنند [۱]. واپاشی لپتونی مزون‌های B، B_s، D و D_s با وجود اینکه نادر است اما به دلیل وجود لپتون‌ها با انرژی بالا در حالت نهایی نشانه‌های تجربی واضحی دارند. پیش بینی‌های تئوری بسیار ناچیز منجر به عدم وجود هادرون در حالت نهایی می‌شوند. پهنای واپاشی لپتونی [26] خالص مزون‌های باردار B و D_q طبق مدل استاندارد (SM) به صورت رابطه‌ی (۲۲.۱) بدست می آید [۳۰]،

$$\begin{aligned}\Gamma\left(B^{+}, D_q \to l^{+}\upsilon_l\right) &= \frac{G_F^{۲} M_{B^{+},D_q}}{۸\pi} m_l^{۲}\left(۱ - \frac{m_l^{۲}}{M_{B^{+},D_q}^{۲}}\right)^{۲} f_{B^{+},D_q}^{۲} \\ &\times \begin{cases} \left|V_{ub}\right|^{۲}, & for\, B^{+}\, mesons \\ \left|V_{cq}\right|^{۲}\left(q \in d, s\right), & for\, D_q\, mesons \end{cases}\end{aligned} \tag{۲۲.۱}$$

[25] Decay constant

[26] Leptonic decay widths

و نسبت انشعابی [۲۷] را از رابطه‌ی (۲۳.۱) می‌توان بدست آورد [۳۰]،

$$Br\left(B^{+},D_{q}\to l^{+}\upsilon_{l}\right)=\Gamma\left(B^{+},D_{q}\to l^{+}\upsilon_{l}\right)\times\tau_{B+,D_{q}} \tag{۲۳.۱}$$

که $\tau_{B^+}=(1/638\pm0/004)\times10^{-12}\,(s)$، $\tau_{D_s}=0/5\times10^{-12}\,(s)$ و $\tau_{B^+}=1/04\times10^{-12}\,(s)$ می‌باشد [۳۱]. برای محاسبه پهنای واپاشی لپتونی از جرم‌های M_{B^+,D_q} و ثابت‌های واپاشی $\bar{f}_{B^+,D_q}$ استفاده می‌شود .

۴.۵.۱ پهنای واپاشی نیمه لپتونی

از واپاشی‌های نیمه لپتونی مزون‌های B و B_s می‌توان مدل استاندارد را آزمود و برای بدست آوردن عناصر ماتریسی کابیبو_کابایوشی_ماسکاوا (عناصر ماتریسی هادرونی) CKM مناسب می‌باشد. دیفرانسیل پهنای واپاشی فرآیند $B\to D^{*}l\bar{\upsilon}$ توسط رابطه‌ی (۲۴.۱) تعریف می‌شود [۳۳]،

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{d\omega}&=\frac{G_F^2}{48\pi^3}|V_{cb}|^2M_{D^*}^3(M_B-M_{D^*})^2\sqrt{(\omega^2-1)}(\omega+1)^2\\&\times\left[1+\frac{4\omega}{\omega+1}\frac{1-2\omega r^*+r^{*2}}{(1-r^*)^2}\right]F_{D^*}^2(\omega)\quad,\quad r^*=\frac{M_{D^*}}{M_B}\end{aligned} \tag{۲۴.۱}$$

در این رابطه G_F ثابت جفت شدگی فرمی می‌باشد، ω ضرب چارسرعت مزون‌های B و D^* قبل و بعد از واپاشی است. $F_{D^*}(\omega)$ عامل شکل [۲۸] است که به صورت رابطه‌ی (۲۵.۱) تعریف می‌شود.

$$F_{D^*}(\omega)=h_{A_1}(\omega)\sqrt{\frac{\tilde{H}_+^2(\omega)+\tilde{H}_-^2(\omega)+\tilde{H}_0^2(\omega)}{1+\frac{4\omega}{\omega+1}\frac{1-2\omega r^*+r^{*2}}{(1-r^*)^2}}} \tag{۲۵.۱}$$

دامنه‌ی هلیسیته [۲۹] در آن $\tilde{H}_j(\omega)$ از رابطه‌ی (۲۶.۱) و (۲۷.۱) محاسبه می‌شود،

$$\tilde{H}_\pm(\omega)=\frac{\sqrt{1-2\omega r^*+r^{*2}}}{(1-r^*)}\left[1\mp\sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}R_1(\omega)\right] \tag{۲۶.۱}$$

$$\tilde{H}_0(\omega)=1+\frac{\omega-1}{1-r^*}\left[1-R_2(\omega)\right]r^* \tag{۲۷.۱}$$

که از طریق نسبت عامل شکل [۳۰] به صورت (۲۸.۱) و (۲۹.۱) تعریف می‌شوند [۳۳].

$$R_1(\omega)=\frac{h_V(\omega)}{h_{A_1}(\omega)} \tag{۲۸.۱}$$

---

27 Branching ratio
28 Form factor
29 helicity amplitudes
30 form factor ratio

$$R_{۲}(\omega)=\frac{h_{A_{۳}}(\omega)+r^{*}h_{A_{۲}}(\omega)}{h_{A_{۱}}(\omega)} \tag{۲۹.۱}$$

در حد بینهایت کوارک سنگین $m_Q\to\infty$، $R_{۱}=R_{۲}=۱$ همه‌ی عامل شکل‌ها از طریق تابع ایسگور–وایس بیان می‌شوند.

$$h_{A_{۱}}(\omega)=h_{A_{۳}}(\omega)=h_V(\omega)=\xi(\omega) \tag{۳۰.۱}$$

$$h_{A_{۲}}(\omega)=۰ \tag{۳۱.۱}$$

تابع موج ایسگور_وایس بیانگر همپوشانی تابع موج دو هادرون است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت،

$$\xi(\omega)=\sqrt{\frac{۲}{\omega+۱}}\left\langle R^{B}(r)\right|\left. R^{D^{*}}(r)\right\rangle \tag{۳۲.۱}$$

بنابراین با انتگرال گیری از دیفرانسیل بر رنج $۱\leqslant\omega\leqslant\frac{M_B^{۲}+M_{D^*}^{۲}}{۲M_BM_{D^*}}$ ، پهنای واپاشی $B^{+}\to D^{\circ *}l\bar{\upsilon}$ بدست می‌آید.

فصل ۲

بررسی طیف جرمی و خواص واپاشی مزون‌های B، B_s، D و D_s

۱.۲ مطالعه‌ی مزون‌های B و B_s با پتانسیل کولنی و نمایی

در اینجا هدف یافتن تابع موج معادله شرودینگر غیر نسبیتی تحت پتانسیل پیشنهادی (۱.۲) می‌باشد و سپس با توجه به آن طیف جرمی، ثابت واپاشی، پهنای واپاشی لپتونی و پهنای واپاشی نیمه لپتونی مزون‌های B و B_s محاسبه می‌شود [۲۵]. بنابراین با استفاده از روش اختلالی برای سیستم مزونی محاسبات انجام می‌شود. پتانسیل کولنی بعلاوه‌ی پتانسیل نمایی مدل پتانسیلی است که برای بررسی سیستم مزونی تعریف می‌شود و به صورت رابطه‌ی (۱.۲) است،

$$V(r) = \frac{a}{r} + b e^{\alpha r} + V_{\circ} \tag{۱.۲}$$

که α، a، b و $V_{\circ}$ پارامترهای پتانسیل می‌باشند. اگر قسمت نمایی پتانسیل را بسط دهیم این پتانسیل شامل یک عبارت ثابت، یک عبارت خطی، یک عبارت هماهنگ و ...می‌باشد، با در نظر گرفتن $V_{\circ} = C + \lambda$، $b = -\frac{\lambda}{\mu}$ ، $a = \frac{۴a_c}{۳}$ و $\alpha = -\mu$ این برهمکنش به پتانسیل اسکرین تبدیل می‌شود [۲۵].

۱.۱.۲ تابع موج مزون‌های B، B_s، D و D_s برای برهمکنش پیشنهادی

در این بخش برای محاسبه‌ی تابع موج مزون‌های نیمه سنگین از معادله شرودینگر با پتانسیل (۱.۲) استفاده می‌شود. در اینجا جمله‌ی $\frac{a}{r}$ را قسمت اصلی و $be^{\alpha r}$ به صورت جمله‌ی اختلالی در نظر گرفته می‌شود. شکل هامیلتونی سیستم به صورت (۲.۲) می‌باشد،

$$H_\circ + H' = H \tag{۲.۲}$$

H و $H_\circ$ به تر تیب قسمت مختل شده و قسمت اصلی هامیلتونی می‌باشند. بنابر این به صورت

$$H_\circ = -\left(\frac{\hbar^۲}{۲\mu}\right)\nabla^۲ + \frac{a}{r} \tag{۳.۲}$$

$$H' = be^{\alpha r} \tag{۴.۲}$$

که در آن μ جرم کاهش یافته‌ي سیستم مزونی به صورت $\mu = \frac{m_{\bar{q}} m_Q}{m_{\bar{q}} + m_Q}$ تعریف می‌شود. که $m_{\bar{q}}$ و m_Q به ترتیب جرم مزون‌های سبک و سنگین هستند معادله شرودینگر این سیستم به صورت (۵.۲) تعریف می‌شود.

$$H\left|\Psi\right\rangle = \left(H_\circ + H'\right)\left|\Psi\right\rangle = E\left|\Psi\right\rangle \tag{۵.۲}$$

با در نظر گرفتن $\nabla^۲$ لاپلاسین در مختصات کروی و قسمت شعاعی تابع موج معادله شردینگر دو جسمی (اگر $\hbar = ۱$) به صورت رابطه‌ی (۴.۱) تعریف می‌شود. بنابراین معادله شرودینگر شعاعی مربوط به پتانسیل مختل نشده را به صورت رابطه‌ی (۶.۲) می‌توان نوشت.

$$\left\{-\frac{۱}{۲\mu}\left(\frac{d^۲}{dr^۲} + \frac{۲}{r}\frac{d}{dr}\right) + \frac{a}{r} + \frac{l\left(l+۱\right)}{۲\mu r^۲}\right\} R_{n,l}\left(r\right) = E_{n,l} R_{n,l}\left(r\right) \tag{۶.۲}$$

با استفاده از معادله‌ی (۶.۲) راه حل تابع موج متناظر با $H_\circ$ به کمک روش NU محاسبه می‌شود، بنابراین

$$R_{n,l} = N r^l e^{-\sqrt{-۲\mu E_{n,l}}\, r} L_n^{۲l+۱}\left(۲\sqrt{-۲\mu E_{n,l}}\, r\right) \tag{۷.۲}$$

$$E_{n,l} = -\left\{\frac{۲\mu a^۲}{\left(۲n + ۲l + ۲\right)}\right\} \tag{۸.۲}$$

رابطه‌های (۷.۲) و (۸.۲) به ترتیب تابع موج و انرژی متناظر برای قسمت مختل نشده پتانسیل پیشنهاد شده می‌باشند و N ثابت بهنجارش می‌باشد.

۲.۱.۲ بررسی تراز پایه (S-Wave) برای مزون‌های B و B_s

در تراز پایه $l=0$ و $n=0$ می‌باشد بنابراین می‌توان به سادگی با استفاده از روابط (۷.۲) و (۸.۲) تابع موج و انرژی حالت پایه را تعیین کرد،

$$R_{0,0}\left(r\right)=N_{0,0}e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,0}}r} \tag{۹.۲}$$

$$E_{0,0}=-\left(\frac{\mu a^{2}}{2}\right) \tag{۱۰.۲}$$

که در آن $N_{0,0}$ ثابت بهنجارش تابع موج اصلی می‌باشد. در حقیقت هامیلتونی اصلی تعریف شد، اکنون می‌توان اختلال مرتبه‌ی اول ویژه تابع بدست آمده و ویژه انرژی متناظرش را به سادگی با توجه به معادلات (۷.۲) و (۸.۲) بدست آورد.

$$H_{0}R'_{0,0}\left(r\right)+H'R_{0,0}\left(r\right)=W^{0}R'_{0,0}\left(r\right)+W'R_{0,0}\left(r\right) \tag{۱۱.۲}$$

در رابطه‌ی (۱۱.۲)، $W^{0}=E_{0,0}$ می‌باشد و W' ویژه انرژی تابع موج مختل شده و $R'_{0,0}\left(r\right)$ هم تابع موج قسمت مختل شده می‌باشد. باید توجه داشت که ویژه انرژی مختل شده W' به صورت رابطه‌ی (۱۲.۲) تعریف می‌شود.

$$W'=4\pi\int_{0}^{\infty}r^{2}\left|R_{0,0}\left(r\right)\right|^{2}H'dr \tag{۱۲.۲}$$

با استفاده از روابط (۳.۲) و (۴.۲) و جایگذاری آن‌ها در معادله‌ی (۱۱.۲) معادله‌ی (۱۳.۲) بدست می‌آید.

$$\left\{\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2\mu a}{r}+2\mu E_{0,0}\right\}R'_{0,0}\left(r\right)=\left\{2\mu be^{\alpha r}-2\mu W'\right\}R_{0,0}\left(r\right) \tag{۱۳.۲}$$

با انتخاب تابع موج مختل شده به صورت معادله‌ی (۱۴.۲)

$$R'_{0,0}\left(r\right)=N'_{0,0}Q\left(r\right)R_{0,0}\left(r\right) \tag{۱۴.۲}$$

که در آن $N'_{0,0}$ ثابت بهنجارش تابع موج مختل شده می‌باشد بنابراین $Q\left(r\right)$ به صورت (۱۵.۲) تعریف می‌شود.

$$Q\left(r\right)=\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}r^{l'} \tag{۱۵.۲}$$

با جایگذاری روابط (۱۴.۲)، (۱۵.۲) و (۹.۲) در معادله‌ی (۱۳.۲) نهایتا رابطه‌ی (۱۶.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}l'\left(l'-1\right)r^{l'-2}-2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}l'r^{l'-1}+\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}l'r^{l'-2}\\&+\xi\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}r^{l'-1}=\left(2\mu be^{\alpha r}-2\mu W'\right)\end{aligned} \tag{۱۶.۲}$$

با توجه به بسط نمایی و توان‌های r متناظر $r^{-1}, r^{0}, r^{1}, r^{2}, r^{3}, r^{4}, r^{5}$ و با توجه به بسط سیگما روی l' ثابت‌های معادله‌ی (۱۶.۲) را می‌توان به صورت مجموعه معادله‌های (۱۷.۲) تعیین کرد.

$$\begin{aligned} A_0 &= -\left(\frac{2}{\xi}\right) A_1 \\ A_1 &= \frac{(2\mu b - 2\mu W' - 6A_2)}{\xi - 2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}} \\ A_2 &= \frac{2\mu b\alpha - 12A_3}{\xi - 4\sqrt{-2\mu E_{0,0}}} \\ A_3 &= \frac{\mu b\alpha^2 - 20A_4}{\xi - 6\sqrt{-2\mu E_{0,0}}} \\ A_4 &= \frac{\frac{\mu b\alpha^3}{3} - 30A_5}{\xi - 8\sqrt{-2\mu E_{0,0}}} \\ A_5 &= -\left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{\mu b\alpha^4}{14\mu a}\right) \end{aligned} \tag{۱۷.۲}$$

با جایگذاری ضرایب تابع $Q(r)$ و با استفاده از معادلات (۱۴.۲) و (۱۶.۲) تابع موج مختل شده به صورت معادله‌ی (۱۸.۲) بدست می‌آید.

$$R'_{0,0}(r) = N'\left(A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4 + A_5 r^5\right) e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\,r} \tag{۱۸.۲}$$

بنابراین تابع موج کل برای این پتانسیل به صورت (۱۹.۲) خواهد بود،

$$R^{total}_{0,0} = N^{total}_{0,0}\left(R'_{0,0}(r) + R_{0,0}(r)\right) \tag{۱۹.۲}$$

که $N^{total}_{0,0}$ در آن ضریب بهنجارش تابع موج کل می‌باشد.

۳.۱.۲ بررسی تراز موج_P (P-Wave) برای مزون‌های B و B_s با برهمکنش کولنی و نمایی

برای این مورد $n = 0$ و $l = 1$ در نظر گرفته می‌شود، بنابراین با توجه به روابط (۷.۲) و (۸.۲) ویژه انرژی و ویژه تابع آن به صورت رابطه‌های (۲۰.۲) و (۲۱.۲) محاسبه می‌شود.

$$E_{0,1} = -\left(\frac{\mu a^2}{8}\right) \tag{۲۰.۲}$$

$$R_{0,1}(r) = N_{0,1}\, r e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\,r} \tag{۲۱.۲}$$

با توجه به رویکرد بخش ۲.۱.۲ تابع موج مختل شده و تابع موج کل به صورت معادله‌ی (۲۳.۲) بدست می‌آید.

$$R'_{0,1}(r) = N'_{0,1}\left(A_0 r + A_1 r^2 + A_2 r^3 + A_3 r^4 + A_4 r^5 + A_5 r^6\right) e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\,r} \tag{۲۲.۲}$$

$$R_{0,1}^{total} = N_{0,1}^{total}\left(R'_{0,1}(r) + R_{0,1}(r)\right) \qquad (۲۳.۲)$$

که در آن ثابت‌ها به صورت مجموعه روابط (۲۴.۲) بدست می‌آید،

$$\begin{aligned}
A_0' &= \frac{4A_1}{-2\mu a - 4\sqrt{-2\mu E_{0,1}}}\\
A_1' &= \frac{2\mu b - 2\mu W' - 10A'_2}{-2\mu a - 6\sqrt{-2\mu E_{0,1}}}\\
A_2' &= \frac{2\mu b\alpha - 18A'_3}{-2\mu a - 8\sqrt{-2\mu E_{0,1}}}\\
A_3' &= \frac{\mu b\alpha^2 - 28A_4'}{-2\mu a - 10\sqrt{-2\mu E_{0,1}}}\\
A_4' &= \frac{\frac{\mu b\alpha^3}{3} - 40A'_5}{-2\mu a - 12\sqrt{-2\mu E_{0,1}}}\\
A_5' &= \left(\frac{1}{12}\right)\frac{\mu b\alpha^4}{-2\mu a - 14\sqrt{-2\mu E_{0,1}}}
\end{aligned} \qquad (۲۴.۲)$$

حال به بررسی طیف جرمی مزون‌ها برای این پتانسیل ترکیبی پرداخته می شود.

۴.۱.۲ بررسی طیف جرمی مزون‌های B و B_s

با استفاده از تابع موج بدست آمده از پتانسیل پیشنهادی (۱.۲) و روابط (۵.۱) الی (۱۴.۱) به بررسی طیف جرمی مزون‌ها پرداخته می‌شود، در جدول ۱.۲ مقدار پارامترهای مربوط به پتانسیل (۱.۲) گزارش شده است. و همچنین محاسبات جرم برای موج S و P در جدول‌های ۲.۲ و ۳.۲ گزارش می‌شود.

جدول ۱.۲: مقادیر استفاده شده در مدل پتانسیل کولنی بعلاوه‌ی نمایی [۲۵]

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
m_b	۴/۸۱۲ (GeV)	a	$-$۰/۵
m_u	۰/۴۵ (GeV)	α_s	۰/۳۲
m_s	۰/۳۵ (GeV)	b	۰/۳۸۵ (GeV)

۵.۱.۲ بررسی ثابت واپاشی مزون‌های B، B_s، D و D_s

همانطور که در بخش ۲.۵.۱ اشاره شد یکی از خواص مزون‌ها ثابت واپاشی می‌باشد و در حد غیرنسبیتی ثابت واپاشی مزون‌های برداری و شبه اسکالر با رابطه‌ی ون راین–وایسکوف

جدول ۲.۲: مقادیر جرم مزون‌های B برای $S-Wave$ به ازای مقادیر $\alpha=$ ۰/۰۷۵ (GeV) و $V_\circ=$ ۰/۱۹۲ (GeV) بر حسب (MeV) برای پتانسیل کولنی بعلاوه‌ی نمایی [۲۵].

$Meson$	$^{2S+1}L_j$	[۲۵] M	$M\,(Otherwork)$
$B^\pm$	$^1S_\circ$	۵۲۷۱/۷	۵۲۷۹/۲۹ $\pm$ ۰/۱۵[۳۱] ۵۳۰۲[۴۰]
B^*	$^3S_1$	۵۳۲۷/۰۵	۵۳۲۴/۸۳ $\pm$ ۰/۳۲[۳۱] ۵۳۵۶[۴۰]
B_s°	$^1S_\circ$	۵۳۸۴/۷	۵۳۶۶/۷۹ $\pm$ ۰/۲۳[۳۱] ۵۳۴۰[۴۰]
B_s^*	$^3S_1$	۵۴۰۸/۵	۵۴۱۵/۴$^{+۱/۸}_{-۱/۵}$[۳۱] ۵۳۸۴[۴۰]

جدول ۳.۲: مقادیر جرم مزون B و B_s برای $P-Wave$ به ازای مقادیر $\alpha=$ ۰/۰۲ (GeV) و $V_\circ=$ ۰/۵۹۲ (GeV) بر حسب MeV برای پتانسیل کولنی بعلاوه‌ی نمایی [۲۵].

B	M[۲۵]	M دیگران	B_s	M[۲۵]	M دیگران
$^3P_2$	۵۷۴۳/۱	۵۷۴۳[۳۱] ۵۷۴۱[۱۵] ۵۷۱۴[۴۱]	$^3P_2$	۵۸۴۰/۴۴	۵۸۴۰[۳۱] ۵۸۴۲[۱۵] ۵۸۲۰[۴۱]
$^3P_\circ$	۵۷۴۹/۱	۵۷۳۲[۳۱] ۵۷۴۱[۱۵] ۵۷۰۶[۴۱]	$^3P_\circ$	۵۸۴۲/۵۲	۵۸۳۳[۱۵] ۵۸۰۴[۴۱]
$^1P_1$	۵۷۴۳/۸۰		$^1P_1$	۵۸۴۱/۱۳	
$^3P_1$	۵۷۴۴/۴۵		$^3P_1$	۵۸۴۱/۸۳	

محاسبه می‌شود.بنابراین با استفاده از معادله‌های (۱۹.۱)، (۲۰.۱) و (۲۱.۱) ثابت واپاشی مزون‌های B و B_s برای پتانسیل (۱.۲) در جدول ۴.۲ گزارش شده است.

جدول ۴.۲: مقادیر ثابت واپاشی مزون شبه اسکالر و برداری B برحسب (MeV) برای پتانسیل کولنی بعلاوه‌ی نمایی [۲۵].

مزون	$f_{P/V}$[۲۵]	$\bar{f}_{P/V}$ [۲۵]	دیگران
$B^{\pm}$	۲۴۳/۶۴	۲۵۰/۲۳	۱۴۹[۴۰] ۱۸۹[۴۳] ۱۹۵[۴۴]
B^{*}	۲۴۲/۳۷	۲۳۲/۴۷	۲۳۸ ± ۱۸[۴۵] $۱۵۱^{+۱۸}_{-۱۳}$[۴۶]
B_s°	۱۷۹/۲۱	۱۷۸/۵۶	۱۸۷[۴۰] ۲۱۸[۴۳] ۱۹۳[۴۴]
B_s^{*}	۱۷۸/۸۲	۱۶۶/۰۳	۲۷۲ ± ۲۰[۴۵] $۲۳۶^{+۱۴}_{-۱۱}$[۴۶]

۶.۱.۲ بررسی پهنای واپاشی لپتونی مزون B برای برهمکنش کولنی و نمایی

با توجه به معادلات بیان شده در بخش ۳.۵.۱ وثابت‌های واپاشی گزارش شده در جدول ۴.۲ و البته با در نظر گرفتن تصحیحات QCD، پهنای واپاشی و نسبت انشعابی لپتونی با استفاده از روابط (۲۲.۱) و (۲۳.۱) محاسبه و در جدول ۵.۲ گزارش شده است که نتایج بدست آمده در تطابق خوبی با نتایج تجربی و نتایج محاسبه شده دیگران می‌باشد.

۷.۱.۲ بررسی پهنای واپاشی نیمه لپتونی مزون B

برای بدست آوردن پهنای واپاشی نیمه لپتونی با توجه به معادلات (۲۴.۱) الی (۳۲.۱) اقدام می‌شود. در اینجا واپاشی $B^{+} \to D^{\circ *} l\bar{\upsilon}$ با استفاده از این روابط بررسی می‌شود. پهنای واپاشی و نسبت انشعابی بدست آمده که در جدول ۶.۲ گزارش شده تطابق خوبی با نتایج تجربی و نتایج دیگران دارد.

همانطور که مشاهده می‌شود روش به کار گرفته شده و پتانسیل پیشنهاد شده برای سیستم مزونی نتایج خوبی را با تجربه و سایر مدل‌ها ارائه می‌دهد در نتیجه با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان این مدل پتانسیلی را نیز برای مطالعه‌ی هادرون‌ها به کار برد.

جدول ۵.۲: پهنای واپاشی لپتونی برحسب (GeV) و نسبت انشعابی محاسبه شده برای مزون B^+ برای پتانسیل کولنی بعلاوه‌ی نمایی [۲۵].

	Γ[۲۵]	Br[۲۵]	دیگران Br
$B^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۸/۶۲۳۵ \times ۱۰^{-۲۴}$	$۲/۱۴۶۷ \times ۱۰^{-۱۱}$	$< ۹/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۳۱] $۶/۲۲ \times ۱۰^{-۱۲}$[۴۰] $< ۷/۷ \times ۱۰^{-۶}$[۴۷]
$B^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۳/۶۸۵۲ \times ۱۰^{-۱۹}$	$۹/۱۷۴ \times ۱۰^{-۷}$	$< ۱/۰ \times ۱۰^{-۶}$[۳۱] $۲/۶۳ \times ۱۰^{-۷}$[۴۰] $< ۱۱ \times ۱۰^{-۶}$[۴۷] $۴/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۴۸]
$B^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۸/۱۹۵۵ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۲/۰۴۰ \times ۱۰^{-۴}$	$(۱/۱۴ \pm ۰/۲۷) \times ۱۰^{-۴}$[۳۱] $۰/۵۹ \times ۱۰^{-۴}$[۴۰] $(۱/۸ \pm ۰/۶) \times ۱۰^{-۴}$[۴۷] $(۰/۸ \pm ۰/۱۲) \times ۱۰^{-۴}$[۴۹]

جدول ۶.۲: پهنای واپاشی نیمه لپتونی برحسب GeV و نسبت انشعابی محاسبه شده برای مزون B^+ برای پتانسیل کولنی بعلاوه‌ی نمایی [۲۵].

	Γ[۲۵]	Br [۲۵]	دیگران Br [۳۱]
$B^+ \to D^{*\circ} l^+ \upsilon$	$۳/۵۷۷۱ \times ۱۰^{-۱۴}$	$(۸/۹۰۴)\%$	$(۵/۶۹ \pm ۰/۱۹)\ \%$

۲.۲ بررسی مزون‌های نیمه سنگین با پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی

همان‌طور که بیان شد به دلیل موفقیت پتانسیل‌های جدید در مطالعه‌ی سیستم‌های هادرونی در این بخش یک مدل پتانسیل جدید برای سیستم‌های هادرونی در نظر گرفته شده است. که این مدل پتانسیلی ترکیب پتانسیل‌های کراتزر و یوکاوا و خطی می‌باشد که به صورت رابطه‌ی (۲۵.۲) تعریف می‌شود،

$$V(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^۲} - k_\circ \frac{e^{-\alpha r}}{r} + cr \qquad (۲۵.۲)$$

جدول ۷.۲: مقادیر استفاده شده در مدل پتانسیل ترکیبی کراتزر، یوکاوا و خطی

مقدار	پارامتر	مقدار	پارامتر
$-۰/۵$	a	۱۰۵/۶۵ (GeV)	m_{μ^+}
۰/۸	α	۱/۷۷۶ (GeV)	m_{τ^+}
۰/۰۳ $(GeV^{-۱})$	b	۰/۵۱۱ (MeV)	m_{e^+}
۰/۰۳	$k_۰$	۰/۸۹۷ (GeV)	σ
۰/۰۰۴۳	V_{ub}	۱/۱۶۶۳۷ $(GeV)^{-۲}$	G_f
۰/۰۴۱	V_{cb}	۶/۵۸ $\times$ ۱۰$^{-۲۵}$ $(GeV.S)$	$\hbar$

که در آن $k_۰$، c، α، b و a پارامترهای پتانسیل می‌باشند و مقدار آن‌ها در جدول ۷.۲ گزارش شده است.

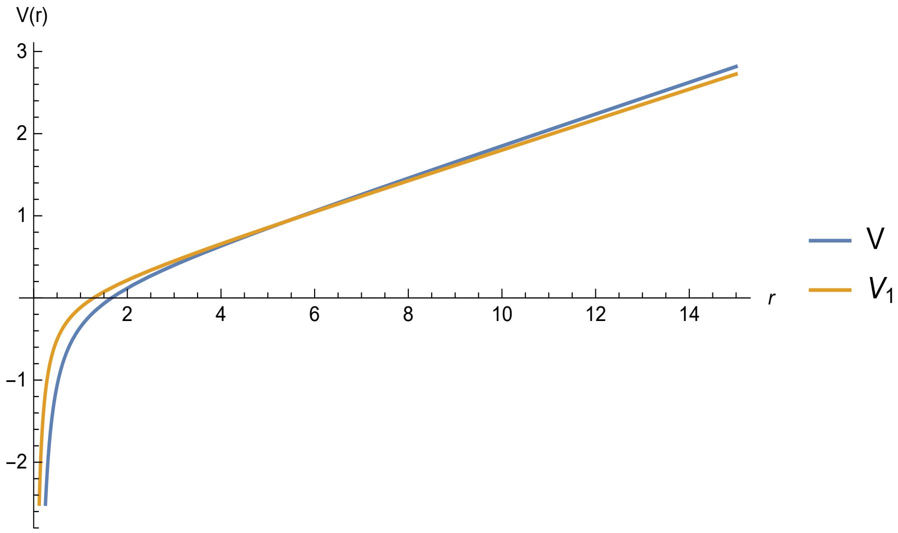
پتانسیل یوکاوا در ابتدا توسط یوکاوا به عنوان یک پتانسیل تبادلی در فیزیک ذرات در چند دهه پیش پیشنهاد شد، افراد بسیاری در تمام شاخه‌های فیزیک بر آن متمرکز می‌باشند [۳۴]. پتانسیل کراتزر در بین پتانسیل‌های فیزیکی یکی از جالبترین آن‌ها می‌باشد و به صورت یک عبارت مربعی معکوس به علاوه‌ی یک عبارت کولنی مرسوم می‌باشد. [۳۵، ۳۶].

در پتانسیل طرح شده جمله‌ی کولنی و یوکاوا بخش شبه‌کولنی برهمکنش بین کوارک‌ها را ایفا می‌کنند و جمله‌ی خطی نشان دهنده‌ی وجود قید خطی بین کوارک‌ها می‌باشد. بدلیل اینکه برهمکنش پیشنهادی رفتاری مشابه پتانسل کرنل دارد انتظار می‌رود با تغییر مقادیر پارامترهای این پتانسیل رفتاری همانند پتانسیل کرنل را پیدا کند. در اینجا رفتار پتانسیل (۲۵.۲) با توجه به مقادیر برازش شده و پتانسیل کرنل در شکل ۱.۲ نشان داده می‌شود و شکل ۲.۲ هم مربوط به مقایسه‌ی بین نمودارهای پتانسیل کرنل و پتانسیل پیشنهاد شده (۲۵.۲) با توجه به پارامترهای برازش شده با نتایج تجربی میباشد. در شکل ۲.۲ در مرکز هسته [۱] نمودار پتانسیل پیشنهادی از برهمکنش کرنل منحرف می‌شود.

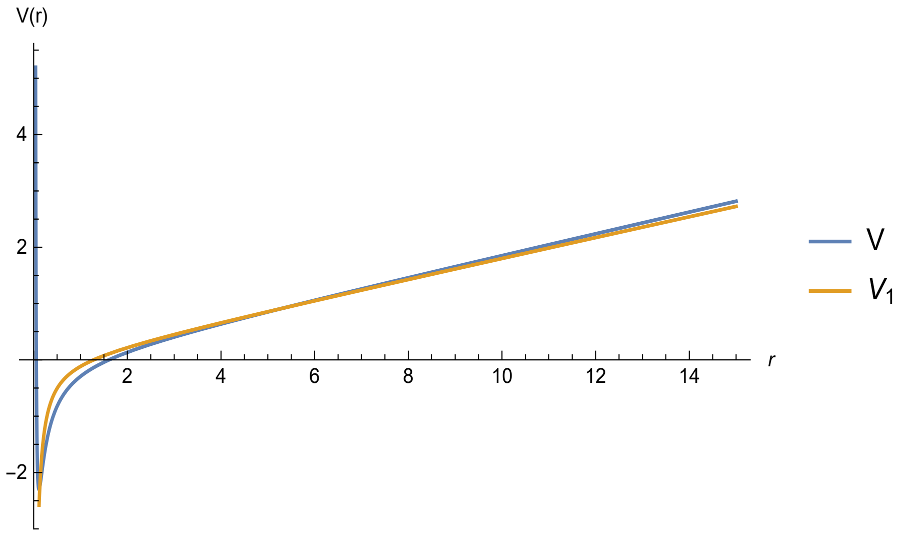
در اینجا مدل کوارک غیر نسبیتی با مدل پتانسیل پیشنهادی (۲۵.۲) بررسی می‌شود. به دلیل اینکه پیش بینی طیف جرمی و تطابق آن با نتایج تجربی موقعیت پتانسیل را تضمین نمی‌کند بنابراین خواص واپاشی لپتونی و نیمه لپتونی برای نشان دادن اعتبار این پتانسیل و برای توصیف سیستم هادرونی محاسبه می‌شود.

همانطور که قبلا اشاره شد ثابت واپاشی برای بدست آوردن عناصر ماتریسی CKM مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این بخش در ابتدا تابع موج مزون‌های نیمه سنگین با توجه به روش اختلالی بدست می‌آید و سپس جرم و خواص واپاشی مزون‌های B، B_s، D، D_s گزارش می‌شود.

[1] Core



شکل ۱.۲: نمودار $V(r)-r$: مقایسه نمودار کرنل V_1 و پتانسیل پیشنهادی V که حاصل ترکیب پتانسیل‌های کراتزر، یوکاوا و خطی می‌باشد.



شکل ۲.۲: نمودار $V(r)-r$: مقایسه نمودار کرنل V_1 و پتانسیل پیشنهادی V که شامل پتانسیل‌های کراتزر، یوکاوا و خطی با استفاده از پارامترهای برازش شده با نتایج تجربی.

۱.۲.۲ بررسی تابع موج مزون‌های نیمه‌سنگین

در این بخش برای محاسبه‌ی تابع موج مزون‌های نیمه سنگین از معادله شرودینگر با پتانسیل (۲۵.۲) استفاده می‌شود. در اینجا جمله‌ی پتانسیل کراتزر $\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}$ را به صورت قسمت اصلی و $-k_0\frac{e^{-\alpha r}}{r}+cr$ به صورت جمله‌ی اختلالی در نظر گرفته می‌شود. شکل هامیلتونی سیستم به

صورت (۲۶.۲) می‌باشد،

$$H_\circ + H' = H \tag{۲۶.۲}$$

H و $H_\circ$ به ترتیب قسمت مختل شده و قسمت اصلی هامیلتونی می‌باشد، بنابراین به صورت (۲۷.۲) و (۲۸.۲) تعریف می‌شوند،

$$H_\circ = -\left(\frac{\hbar^۲}{۲\mu}\nabla^۲\right) + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^۲} \tag{۲۷.۲}$$

$$H' = -k_\circ \frac{e^{-\alpha r}}{r} + cr \tag{۲۸.۲}$$

در آن μ جرم کاهش یافته‌ی سیستم مزونی به صورت $\mu = \frac{m_{\bar{q}} m_Q}{m_{\bar{q}} + m_Q}$ تعریف می‌شود. که $m_{\bar{q}}$ و m_Q به ترتیب جرم مزون‌های سبک و سنگین هستند معادله شرودینگر این سیستم به صورت (۲۹.۲) تعریف می‌شود.

$$H\left|\Psi\right> = \left(H_\circ + H'\right)\left|\Psi\right> = E\left|\Psi\right> \tag{۲۹.۲}$$

با توجه به اینکه $\nabla^۲$ لاپلاسین را در مختصات کروی می‌توان تعریف کرد. با در نظر گرفتن قسمت شعاعی تابع موج معادله شردینگر دو جسمی (با در نظر گرفتن $\hbar = ۱$) به صورت رابطه‌ی (۴.۱) تعریف می‌شود. بنابراین معادله شرودینگر شعاعی مربوط به پتانسیل مختل نشده را به صورت رابطه‌ی (۳۰.۲) می‌توان نوشت،

$$\left\{\frac{d^۲}{dr^۲} + \frac{۲}{r}\frac{d}{dr} + \frac{۲\mu}{\hbar^۲}E_{n,l} - \frac{l\left(l+۱\right)}{r^۲} - ۲\mu\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r^۲}\right)\right\} R_{n,l}\left(r\right) = \circ \tag{۳۰.۲}$$

با استفاده از معادله‌ی (۳۰.۲) راه حل تابع موج متناظر با $H_\circ$ به کمک روش NU محاسبه می‌شود. بنابراین تابع موج و انرژی متناظر آن برای قسمت مختل نشده به صورت رابطه‌ی (۳۱.۲) و (۳۲.۲) محاسبه می‌شود.

$$R_{n,l} = N r^{-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\left(۱+۲l\right)^۲+۸\mu b}} e^{-\sqrt{-۲\mu E_{n,l}}r} L_n^{\sqrt{\left(۱+۲l\right)^۲+۸\mu b}}\left(۲\sqrt{-۲\mu E_{n,l}}r\right) \tag{۳۱.۲}$$

$$E_{n,l} = \frac{-۲\mu a^۲}{\left(۲n+۱\right)^۲ + \left(۱+۲l\right)^۲ + ۸\mu b + \left(۴n+۲\right)\sqrt{\left(۱+۲l\right)^۲ + ۸\mu b}} \tag{۳۲.۲}$$

در ادامه به بررسی و محاسبه تابع موج در ترازهای موج S و P پرداخته می‌شود.

۲.۲.۲ بررسی تراز پایه (S-Wave) مزون‌های نیمه‌سنگین تحت پتانسیل پیشنهاد شده

در تراز پایه $l=\circ$ و $n=\circ$ می‌باشد بنابراین با توجه به روابط (۳۱.۲) و (۳۲.۲)، تابع موج و انرژی حالت پایه را می‌توان تعیین کرد.

$$R_{\circ,\circ}(r)=N_{\circ,\circ}r^{-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۸\mu b}}e^{-\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}r} \tag{۳۳.۲}$$

$$E_{\circ,\circ}=\frac{-۲\mu a^{۲}}{۲+۸\mu b+۲\sqrt{۱+۸\mu b}} \tag{۳۴.۲}$$

که در آن $N_{\circ,\circ}$ ثابت بهنجارش تابع موج اصلی می‌باشد. طیف هامیلتونی اصلی در بخش قبل تعریف شده است اکنون می‌توان اختلال مرتبه‌ی اول ویژه تابع و ویژه انرژی متناظرش را بدست آورد.

$$H_{\circ}R'_{\circ,\circ}(r)+H'R_{\circ,\circ}(r)=W^{\circ}R'_{\circ,\circ}(r)+W'R_{\circ,\circ}(r) \tag{۳۵.۲}$$

در رابطه‌ی (۳۵.۲) $W^{\circ}=E_{\circ,\circ}$ می‌باشد و W' ویژه انرژی تابع موج مختل شده و $R'_{\circ,\circ}(r)$ هم تابع موج قسمت مختل شده می‌باشد. باید توجه داشت که ویژه انرژی مختل شده W' به صورت رابطه‌ی (۱۲.۲) تعریف می‌شود. با استفاده از روابط (۲۷.۲) و (۲۸.۲) و جایگذاری آن‌ها در معادله‌ی (۳۵.۲) معادله‌ی (۳۶.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}+\frac{۲}{r}\frac{d}{dr}-\frac{۲\mu b}{r^{۲}}-\frac{۲\mu a}{r}+۲\mu E_{\circ,\circ}\right\}R'_{\circ,\circ}(r)\\&=\left\{-۲\mu k_{\circ}\frac{e^{-\alpha r}}{r}-۲\mu W'+۲\mu cr\right\}R_{\circ,\circ}(r)\end{aligned} \tag{۳۶.۲}$$

با جایگذاری روابط (۱۴.۲)، (۱۵.۲)، (۳۳.۲) و (۳۴.۲) در معادله‌ی (۳۶.۲) رابطه‌ی (۳۷.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\sum_{l'=\circ}^{\infty}A_{l'}r^{l'-۲}\left(l'(l'+\sqrt{۱+۸\mu b})\right)+\sum_{l'=\circ}^{\infty}A_{l'}r^{l'-۱}\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right)\\&\times\left(l'+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۱+۸\mu b}\right)\;-۲\mu a\sum_{l'=\circ}^{\infty}A_{l'}r^{l'-۱}=-۲\mu k_{\circ}\frac{e^{-\alpha r}}{r}-۲\mu W'+۲\mu cr\end{aligned} \tag{۳۷.۲}$$

با توجه به بسط exp و توان‌های r متناظر $r^{-۱},r^{\circ},r^{۱},r^{۲},r^{۳},r^{۴},r^{۵}$ و با توجه به بسط سیگما روی l' ثابت‌های معادله‌ی (۳۷.۲) را می‌توان به صورت مجموعه معادله‌های (۳۸.۲) تعیین

کرد.

$$
\begin{aligned}
A_0 &= \frac{-\left(1+\sqrt{1+8\mu b}\right)A_1 - 2\mu k_0}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A_1 &= \frac{-\left(4+2\sqrt{1+8\mu b}\right)A_2 + 2\mu k_0\alpha - 2\mu W'}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A_2 &= \frac{-\left(9+3\sqrt{1+8\mu b}\right)A_3 - \mu k_0\alpha^2 + 2\mu c}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A_3 &= \frac{-\left(16+4\sqrt{1+8\mu b}\right)A_4 + \frac{\mu k_0\alpha^3}{3}}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A_4 &= \frac{-\left(25+5\sqrt{1+8\mu b}\right)A_5 - \frac{\mu k_0\alpha^4}{12}}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\right)\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A_5 &= \frac{\frac{\mu k_0\alpha^5}{60}}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\right)\left(\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}\right)-2\mu a}
\end{aligned}
\tag{۳۸.۲}
$$

با توجه به روابط بدست آمده تابع موج مختل شده به صورت معادله‌ی (۳۹.۲) بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
R'_{0,0}(r) &= N'_{0,0}\left(A_0 + A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + A_4 r^4 + A_5 r^5\right)\\
&\times r^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}}e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,0}}r}
\end{aligned}
\tag{۳۹.۲}
$$

بنابراین تابع موج کل برای این پتانسیل به صورت (۴۰.۲) می‌باشد.

$$
R^{total}_{0,0}(r) = N^{total}_{0,0}\left(R'_{0,0}(r) + R_{0,0}(r)\right)
\tag{۴۰.۲}
$$

که در آن $N^{total}_{0,0}$ ضریب بهنجارش تابع موج کل می‌باشد.

۳.۲.۲ بررسی تراز موج P (P-Wave) مزون‌های B، B_s، D و D_s

در اینجا $n = 0$ و $l = 1$ می‌باشد، بنابراین با استفاده از روابط (۳۱.۲) و (۳۲.۲) ویژه انرژی و ویژه تابع متناظر این تراز به صورت (۴۱.۲) و (۴۲.۲) محاسبه می‌شود.

$$
R_{0,1} = N_{0,1} r^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}}e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,1}}r}
\tag{۴۱.۲}
$$

$$
E_{0,1} = \frac{-2\mu a^2}{10+8\mu b-2\sqrt{9+8\mu b}}
\tag{۴۲.۲}
$$

که در آن $N_{0,1}$ ثابت بهنجارش تابع موج مختل نشده می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی (۳۵.۲) برای موج P هم به صورت زیر باید همانند بخش ۲.۲.۲ عمل کرد بنابراین

$$
H_0 R'_{0,1}(r) + H' R_{0,1}(r) = W^0 R'_{0,1}(r) + W' R_{0,1}(r)
\tag{۴۳.۲}
$$

در معادله‌ی (۴۳.۲) ، $W^{\circ} = E_{\circ,1}$ ویژه انرژی متناظر با تابع موج مختل نشده و W' ویژه انرژی تابع موج مختل شده است که به صورت رابطه‌ی (۴۴.۲) تعریف می‌شود.

$$W' = 4\pi \int_{0}^{\infty} r^{2} \left| R_{0,1}(r) \right|^{2} H' dr \tag{۴۴.۲}$$

با استفاده از روابط (۲۷.۲) و (۲۸.۲) و جایگذاری آن‌ها در (۴۳.۲) معادله‌ی (۴۵.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d^{2}}{dr^{2}} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2}{r^{2}} - \frac{2\mu b}{r^{2}} - \frac{2\mu a}{r} + 2\mu E_{0,1} \right\} R'_{0,1}(r) \\ &= \left\{ -2\mu V_{0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} - 2\mu W' + 2\mu c r \right\} R_{0,1}(r) \end{aligned} \tag{۴۵.۲}$$

تابع موج مختل شده به صورت معادله‌ی (۴۶.۲) تعریف می‌شود.

$$R'_{0,1}(r) = N'_{0,1} Q(r) R_{0,1}(r) \tag{۴۶.۲}$$

با جایگذاری روابط (۱۴.۲)، (۱۵.۲)، (۴۱.۲) و (۴۲.۲) در معادله‌ی (۴۵.۲) در نهایت معادله‌ی (۴۷.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\sum_{l'=0}^{\infty} A_{l'} r^{l'-2} \left(l'(l' + \sqrt{9 + 8\mu b}) \right) + \sum_{l'=0}^{\infty} A_{l'} r^{l'-1} \left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}} \right) \\ &\times \left(l' + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 + 8\mu b} \right) - 2\mu a \sum_{l'=0}^{\infty} A_{l'} r^{l'-1} = -2\mu V_{0} \frac{e^{-\alpha r}}{r} - 2\mu W' + 2\mu c r \end{aligned} \tag{۴۷.۲}$$

بنابراین تابع موج مختل شده برای موج‐P به صورت معادله‌ی (۴۸.۲) می‌باشد،

$$\begin{aligned} R'_{0,1}(r) = N'_{0,1} &\left(A'_{0} + A_{1}' r + A'_{2} r^{2} + A'_{3} r^{3} + A'_{4} r^{4} + A'_{5} r^{5} \right) \\ &\times r^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 + 8\mu b}} e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,1}} r} \end{aligned} \tag{۴۸.۲}$$

و تابع موج کل آن به صورت معادله‌ی (۴۹.۲) و (۵۰.۲) تعریف می‌شود.

$$R^{total}_{0,1}(r) = N^{total}_{0,1} \left(R'_{0,1}(r) + R_{0,1}(r) \right) \tag{۴۹.۲}$$

$$\begin{aligned} R^{total}_{0,1}(r) = &N^{total}_{0,1} \left(A'_{0} + A_{1}' r + A'_{2} r^{2} + A'_{3} r^{3} + A'_{4} r^{4} + A'_{5} r^{5} \right) \\ &\times r^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{9 + 8\mu b}} e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,1}} r} \end{aligned} \tag{۵۰.۲}$$

همچنین با توجه به بسط exp و در نظر گرفتن توان‌های متناظر r در معادله‌ی (۵۱.۲) ثابت‌های A'_0, A'_1, A'_2 و ...به صورت مجموعه روابط (۴۸.۲) محاسبه می‌شود.

$$
\begin{aligned}
A'_0 &= \frac{-\left(1+\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_1 - 2\mu k_0}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_1 &= \frac{-\left(4+2\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_2 + 2\mu k_0\alpha - 2\mu W'}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_2 &= \frac{-\left(9+3\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_3 - \mu k_0\alpha^2 + 2\mu c}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_3 &= \frac{-\left(16+4\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_4 + \frac{\mu k_0\alpha^3}{3}}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_4 &= \frac{-\left(25+5\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_5 - \frac{\mu k_0\alpha^4}{12}}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_5 &= \frac{\frac{\mu k_0\alpha^5}{60}}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}
\end{aligned}
\tag{51.2}
$$

در ادامه به بررسی طیف جرمی و خواص واپاشی مزون‌های نیمه سنگین پرداخته می‌شود.

۴.۲.۲ بررسی طیف جرمی مزون‌های B، B_s، D و D_s تحت این پتانسیل ترکیبی

با استفاده از تابع موج بدست آمده از پتانسیل پیشنهادی (۱.۲) و روابط (۵.۱) الی (۱۴.۱) به بررسی طیف جرمی مزون‌ها پرداخته می‌شود، محاسبات جرم مزون‌های B، B_s، D_s و D برای موج S و P برای پتانسیل (۲۵.۲) به ترتیب در جدول‌های ۸.۲، ۹.۲، ۱۰.۲ و ۱۱.۲ گزارش می‌شود.

جدول ۸.۲: مقادیر جرم مزون‌های B برای $S-Wave$ با مقادیر $V_\circ = ۰/۱۷۳\ (GeV)$ و $c = ۰/۱۹\ (GeV)^۲$ بر حسب (MeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

مزون	$^{۲S+۱}L_j$	مقادیر ما M	سایر منابع M
$B^{\pm}$	$^۱S_\circ$	۵۲۷۹/۹	$۵۲۷۹/۲۹ \pm ۰/۱۵$[۳۱] ۵۳۰۲[۴۰] ۵۲۷۱[۲۵]
B^*	$^۳S_۱$	۵۳۰۱/۰۲	$۵۳۲۴/۸۳ \pm ۰/۳۲$[۳۱] ۵۳۵۶[۴۰] ۵۳۲۷/۰۵[۲۵]
B_s°	$^۱S_\circ$	۵۳۷۰/۳۵	$۵۳۶۶/۷۹ \pm ۰/۲۳$[۳۱] ۵۳۴۰[۴۰] ۵۳۸۴/۷[۲۵]
B_s^*	$^۳S_۱$	۵۳۹۱/۱۶	$۵۴۱۵/۴^{+۱/۸}_{-۱/۵}$[۳۱] ۵۳۸۴[۴۰] ۵۴۰۸/۵[۲۵]

جدول ۹.۲: مقادیر جرم مزون‌های D برای $S-Wave$ با مقادیر $c = ۰/۴۲\ (GeV)^۲$ و $V_\circ = ۰/۱۵۳\ (GeV)$ بر حسب (MeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

مزون	$^{۲S+۱}L_j$	مقادیر ما M	سایر M
$D^{\pm}$	$^۱S_\circ$	۱۸۷۱/۵۳	۱۸۶۴/۸۶[۳۱] ۱۸۹۵[۴۰]
D^*	$^۳S_۱$	۲۰۰۱/۰۷	۲۰۱۰/۲۸[۳۱] ۲۰۲۳[۴۰]
D_s°	$^۱S_\circ$	۱۹۶۹/۱۲	۱۹۶۸[۳۱] ۱۹۴۰[۳۷] ۱۹۶۲[۴۰]
D_s^*	$^۳S_۱$	۲۰۹۲/۲۱	۲۱۱۲[۳۱] ۲۰۵۷[۴۰]

جدول ۱۰.۲: مقادیر جرم مزون B و B_s برای $P-Wave$ با مقادیر $V_0 = 0/582\ (GeV)$ و $c = 0/19\ (GeV)^2$ برحسب (MeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

سایر منابع M	مقادیر ما M	B_s	سایر منابع M	مقادیر ما M	B
۵۸۴۰[۳۱] ۵۸۴۲[۱۵] ۵۸۲۰[۴۱] ۵۸۲۰[۲۵]	۵۸۱۵/۶	$^3P_2$	۵۷۴۳[۳۱] ۵۷۴۱[۱۵] ۵۷۱۴[۴۱] ۵۷۴۳/۱[۲۵]	۵۷۱۳/۸۶	$^3P_2$
۵۸۳۳[۱۵] ۵۸۰۴[۴۱] ۵۸۴۲/۵۲[۲۵]	۵۸۶۲/۵۳	$^3P_0$	۵۷۳۲[۳۱] ۵۷۴۱[۱۵] ۵۷۴۵/۹[۲۵] ۵۷۰۶[۴۱]	۵۷۷۳/۸۹	$^3P_0$
۵۸۴۱/۱۳[۲۵]	۵۸۳۱/۲۵	$^1P_1$	۵۷۴۳/۸[۲۵]	۵۷۳۳/۸۷	$^1P_1$
۵۸۴۱/۸۳[۲۵]	۵۸۴۶/۸۹	$^3P_1$	۵۷۴۴/۴۵[۲۵]	۵۷۵۳/۸۸	$^3P_1$

جدول ۱۱.۲: مقادیر جرم مزون D_s و D برای $P-Wave$ به ازای مقادیر $c = 0/19$ و $V_0 = 0/445\ (GeV)$ بر حسب (GeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

سایر منابع M	مقادیر ما M	D_s	سایر منابع M	مقادیر ما M	D
۲/۲۰۴[۴۰]	۲/۳۹۵	$^3P_2$	۲/۲۱۱[۴۰]	۲/۲۶۳	$^3P_2$
۲/۳۸۶[۴۵] ۲/۳۷۲[۴۰]	۲/۴۲۲	$^3P_0$	۲/۲۶۹[۴۵] ۲/۳۱۶[۴۰]	۲/۳۳۲	$^3P_0$
۲/۴۴۹[۴۵] ۲/۴۰۹[۴۰]	۲/۳۸۴	$^1P_1$	۲/۳۰۲[۴۵] ۲/۳۶۲[۴۰]	۲/۲۸۶	$^1P_1$
۲/۴۴۷[۴۵] ۲/۴۲۲[۴۰]	۲/۴۰۳	$^3P_1$	۲/۳۰۹[۴۵] ۲/۳۸۷[۴۰]	۲/۳۰۹	$^3P_1$

۵.۲.۲ ثابت واپاشی مزون‌های B، B_s، D و D_s

همانطور که در بخش ۲.۵.۱ اشاره شد یکی از خواص مزون‌ها ثابت واپاشی می‌باشد و در حد غیرنسبیتی ثابت واپاشی مزون‌های برداری و شبه اسکالر با رابطه‌ی ون راین–وایسکوف

محاسبه می‌شود. بنابراین با استفاده از معادله‌های (۱.۱۹)، (۱.۲۰) و (۱.۲۱) ثابت واپاشی مزون‌های B و B_s برای پتانسیل (۲.۲۵) در جدول ۲.۱۲ و برای مزون‌های D و D_s در جدول ۲.۱۳ گزارش شده است. همینطور نسبت‌های ثابت واپاشی تجربی $\frac{f_{D_s}}{f_D} = ۱/۲۵۸ \pm ۰/۰۳۸$ در مرجع [۳۱] و محاسبات تئوری در مرجع [۳۲] که به صورت $\frac{f_{D_s}}{f_D} = ۱/۰۸$ می‌باشد و نسبت $\frac{f_{D_s^*}}{f_{D^*}}$ در مرجع [۴۵] به صورت $(۱/۱۰ \pm ۰/۰۶)$ بدست آمده است و همینطور $\frac{f_{B_s^*}}{f_{B^*}} = ۱/۱۴ \pm ۰/۰۸$ در مرجع [۴۵] گزارش شده است. با توجه به محاسبات گزارش شده در جداول برای پتانسیل کراتزر، یوکاوا و خطی ۲.۸ و ۲.۹ این نتایج به صورت $\frac{f_{D_s}}{f_D} = ۱/۰۷۷$، $\left(\frac{\bar{f}_{D_s}}{\bar{f}_D} = ۱/۰۴۵\right)$ و $\frac{f_{D_s^*}}{f_{D^*}} = ۱/۰۸$، $\left(\frac{\bar{f}_{D_s^*}}{\bar{f}_{D^*}} = ۱/۰۴۶\right)$ و همینطور $\frac{f_{B_s^*}}{f_{B^*}} = ۱/۱۱۵$، $\left(\frac{\bar{f}_{B_s^*}}{\bar{f}_{B^*}} = ۱/۰۸\right)$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود این نتایج در تطابق خوبی با مقادیر گزارش شده می‌باشد.

جدول ۲.۱۲: مقادیر ثابت واپاشی مزون شبه اسکالر و برداری B برحسب (MeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی

مزون	مقادیر ما $f_{P/V}$	مقادیر ما $\bar{f}_{P/V}$	سایر منابع
$B^{\pm}$	۱۵۰/۳۹	۱۵۴/۴۵	۲۴۳/۶۴[۲۵] ۱۴۹[۴۰] ۱۸۹[۴۳] ۱۹۵[۴۴]
B^*	۱۵۰/۰۹	۱۴۳/۹۶۵	۲۴۲/۳۷[۲۵] ۲۳۸ ± ۱۸[۴۵] $۱۵۱^{+۱۸}_{-۱۳}$[۴۶]
B_s°	۱۶۷/۸۲	۱۶۷/۲۱	۱۷۹/۲۱[۲۵] ۱۸۷[۴۰] ۲۱۸[۴۳] ۱۹۳[۴۴]
B_s^*	۱۵۰/۵۱	۱۶۷/۵۰	۱۷۸/۸۲[۲۵] ۲۷۲ ± ۲۰[۴۵] $۲۳۶^{+۱۴}_{-۱۱}$[۴۶]

جدول ۱۳.۲: مقادیر ثابت واپاشی مزون شبه اسکالر و برداری D برحسب (MeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی

سایر مراجع	محاسبه شده $\bar{f}_{P/V}$	محاسبه شده $f_{P/V}$	مزون
$۲۴۳^{+۲۱}_{-۱۷}$[۳۸] ۳۷۶[۴۳]	۳۱۰/۳	۳۴۹/۳	$D^{\pm}$
$۲۲۳^{+۲۳}_{-۱۹}$[۳۸] ۳۴۱ ± ۲۳[۴۵] ۳۹۱[۴۳]	۲۷۷/۲	۳۳۷/۸	D^{*}
۴۳۶[۴۳] $۳۴۱^{+۷}_{-۵}$[۳۸]	۳۲۴/۵	۳۷۶/۴	D_s°
۴۴۷[۴۳] ۳۷۵ ± ۲۴[۴۵] $۳۲۶^{+۲۱}_{-۱۷}$[۳۸]	۲۹۰/۰	۳۶۵/۱	D_s^{*}

۶.۲.۲ پهنای واپاشی لپتونی مزون B

با توجه به معادلات بیان شده در بخش ۳.۵.۱ وثابت‌های واپاشی گزارش شده در جدول ۱۲.۲ و البته با در نظر گرفتن تصحیحات QCD، پهنای واپاشی و نسبت انشعابی لپتونی با استفاده از روابط (۲۲.۱) و (۲۳.۱) محاسبه می‌شود که برای مزون B و B_s در جدول ۱۴.۲ و ۱۵.۲ و همچنین برای مزون B و B_s در جدول ۱۶.۲ و ۱۷.۲ گزارش شده استهمانطور که مشاهده می‌شود نتایج بدست آمده در تطابق خوبی با نتایج تجربی و نتایج محاسبه شده توسط دیگران می‌باشد.

جدول ۱۴.۲: پهنای واپاشی لپتونی محاسبه شده برای مزون B^+ برحسب (GeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

	محاسبه شده Γ	سایر منابع Γ
$B^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۳/۲۹ \times ۱۰^{-۲۴}$	$۸/۶۲۳۵ \times ۱۰^{-۲۴}$[۲۵] $۸/۰۹۴۴ \times ۱۰^{-۲۴}$[۱۷]
$B^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۱/۴۱ \times ۱۰^{-۱۹}$	$۳/۶۸۵۲ \times ۱۰^{-۱۹}$[۲۵] $۳/۴۵۹۱ \times ۱۰^{-۱۹}$[۱۷]
$B^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۳/۱۳ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۸/۱۹۵۵ \times ۱۰^{-۱۷}$[۲۵] $۷/۶۹۶۷ \times ۱۰^{-۱۷}$[۱۷]

جدول ۱۵.۲: نسبت انشعابی محاسبه شده برای مزون B^+ برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

	محاسبه شده Br	سایر مراجع Br
$B^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۸/۲۱ \times ۱۰^{-۱۲}$	$< ۹/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۳۱] $۶/۲۲ \times ۱۰^{-۱۲}$[۴۰] $< ۷/۷ \times ۱۰^{-۶}$[۴۷]
$B^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۳/۵۱ \times ۱۰^{-۷}$	$< ۱/۰ \times ۱۰^{-۶}$[۳۱] $۲/۶۳ \times ۱۰^{-۷}$[۴۰] $< ۱۱ \times ۱۰^{-۶}$[۴۷] $۴/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۴۸]
$B^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۰/۷۸ \times ۱۰^{-۴}$	$(۱/۱۴ \pm ۰/۲۷) \times ۱۰^{-۴}$[۳۱] $۰/۵۹ \times ۱۰^{-۴}$[۴۰] $(۱/۸ \pm ۰/۶) \times ۱۰^{-۴}$[۴۷] $(۰/۸ \pm ۰/۱۲) \times ۱۰^{-۴}$[۴۹]

۷.۲.۲ پهنای واپاشی نیمه لپتونی مزون B

برای بدست آوردن پهنای واپاشی نیمه‌لپتونی واپاشی $B^+ \to D^{\circ *} l\bar{\upsilon}$ با توجه به معادلات (۲۴.۱) الی (۳۲.۱) بررسی می‌شود. پهنای واپاشی و نسبت انشعابی بدست آمده که در جدول ۱۸.۲ گزارش می‌شود تطابق خوبی با نتایج تجربی و نتایج دیگران دارد.

جدول ۱۶.۲: پهنای واپاشی لپتونی محاسبه شده برای مزون‌های D^+ و D_s^+ برحسب (GeV) برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

	Γ محاسبه شده	Γ[۲۵]
$D^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۱/۳۱ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۱/۴۸۷۷ \times ۱۰^{-۲۰}$
$D^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۵/۵۱ \times ۱۰^{-۱۶}$	$۶/۳۲۱۶ \times ۱۰^{-۱۶}$
$D^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۱/۵۷ \times ۱۰^{-۱۵}$	$۱/۲۱۵۲ \times ۱۰^{-۱۵}$
$D_s^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۳/۰۷ \times ۱۰^{-۱۹}$	$۲/۹۶۲۲ \times ۱۰^{-۱۹}$
$D_s^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۱/۲۸ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۱/۲۵۹۶ \times ۱۰^{-۱۴}$
$D_s^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۱/۲۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۱/۲۹۵۸ \times ۱۰^{-۱۳}$

جدول ۱۷.۲: نسبت انشعابی واپاشی لپتونی محاسبه شده برای مزون‌های D^+ و D_s^+ برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

	Br محاسبه شده	Br سایر منابع
$D^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۲/۱ \times ۱۰^{-۸}$	$< ۸/۸ \times ۱۰^{-۶}$[۳۱] $۱/۵ \times ۱۰^{-۸}$[۵۰]
$D^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۸/۷ \times ۱۰^{-۴}$	$(۳/۷۴ \pm ۰/۱۷) \times ۱۰^{-۴}$[۳۱] $۲/۷۸ \times ۱۰^{-۴}$[۵۱]
$D^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$	$< ۱/۲ \times ۱۰^{-۳}$[۳۱] $۷/۵۴ \times ۱۰^{-۴}$[۵۱]
$D_s^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۲/۳۳ \times ۱۰^{-۷}$	$< ۸/۳ \times ۱۰^{-۵}$[۳۱] $۱/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۵۰]
$D_s^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۹/۷ \times ۱۰^{-۳}$	$(۵/۵۸ \pm ۰/۲۵) \times ۱۰^{-۳}$[۳۱] $۷/۷ \times ۱۰^{-۳}$[۵۰]
$D_s^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۹/۷ \times ۱۰^{-۲}$	$(۵/۵۵ \pm ۰/۲۴) \times ۱۰^{-۴}$[۳۱] $۸/۴ \times ۱۰^{-۲}$[۵۰]

همانطور که مشاهده می‌شود روش به کار گرفته شده و پتانسیل پیشنهاد شده برای سیستم مزونی نتایج خوبی را با تجربه و سایر مدل‌ها ارائه می‌دهد در نتیجه با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان این مدل پتانسیلی را نیز برای مطالعه‌ی هادرون‌ها به کار برد.

جدول ۱۸.۲: پهنای واپاشی نیمه لپتونی برحسب GeV و نسبت انشعابی محاسبه شده برای مزون B^+ برای پتانسیل ترکیبی: کراتزر، یوکاوا و خطی.

	مقادیر ما Γ	سایر Γ	مقادیر ما Br	سایر Br
$B^+ \to D^{*\circ} l^+ v$	$۴/۵۱ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۳/۵۷۷۱ \times ۱۰^{-۱۴}$ [۲۵] $۳/۷۶۵ \times ۱۰^{-۱۴}$ [۱۹]	۱۱/۲۵٪	$(۵/۶۹ \pm ۰/۱۹)$٪ [۳۱] ۸/۹۰۴٪[۲۵] ۹/۳۷۲٪[۱۹]

۳.۲   بررسی مزون‌های B، B_s، D و D_s تحت پتانسیل ترکیبی:کراتزر،گاوسی و خطی

در این بخش شکل جدیدی برای سیستم‌های مزونی معرفی می‌شود. این پتانسیل شامل ترکیبی از پتانسیل‌های کراتزر، گاوسی و خطی می‌باشد که به صورت معادله‌ی (۵۲.۲) تعریف می‌شود،

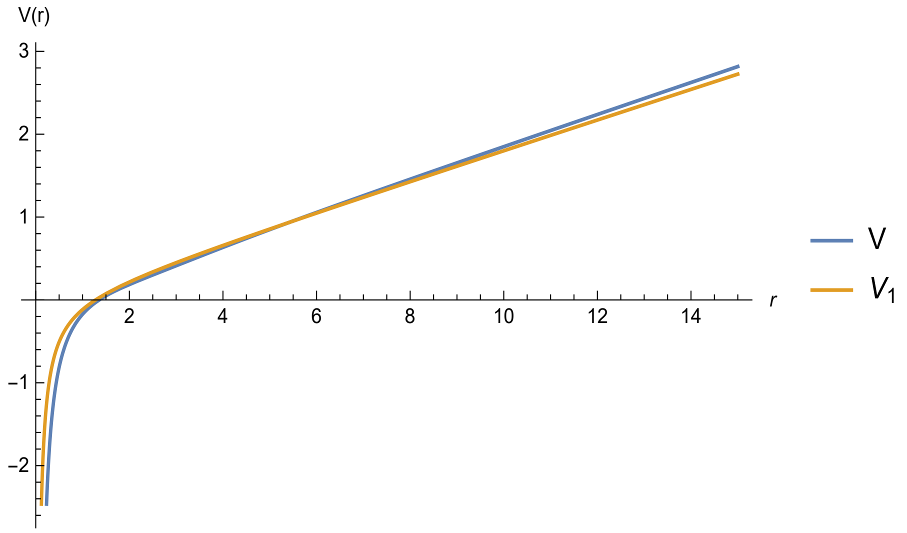
$$V\left(r\right)=\frac{a}{r}+\frac{b}{r^{۲}}+k_{\circ}e^{-\frac{\alpha^{۲}r^{۲}}{۲}}+cr \qquad (۵۲.۲)$$

که در آن $k_{\circ}, c, \alpha, b, a$ پارامترهای پتانسیل هستند که در جدول ۱۹.۲ گزارش شده است. در اینجا مدل کوارک غیر نسبیتی با مدل پتانسیل (۵۲.۲) بررسی می‌شود.

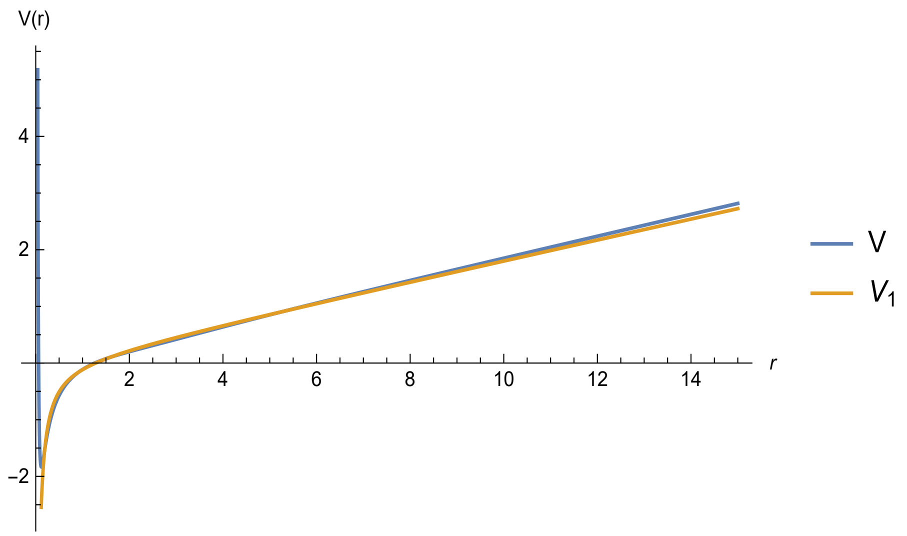
جدول ۱۹.۲: مقادیر استفاده شده در مدل پتانسیل ترکیبی: کراتزر، گاوسی و خطی.

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
$k_{\circ}$	$۰/۲۳\ (GeV)$	a	$-۰/۵$
b	$۰/۰۳\ (GeV)$	α	$۰/۸\ (GeV)$
V_{cd}	۰/۲۲۷	V_{cs}	۱/۰۲۳

بدلیل اینکه برهمکنش پیشنهادی رفتاری مشابه پتانسیل کرنل را دارا می‌باشد نمودار این پتانسیل هم با نمودار پتانسیل کرنل مقایسه می‌شود. شکل ۳.۲ و ۴.۲ به ترتیب به مقایسه‌ی این دو پتانسیل با مقدار منفی برای b و همینطور مقایسه‌ی آن‌ها با توجه به مقادیر مورد استفاده در جدول ۱۹.۲ می‌پردازد. در شکل ۴.۲ در مرکز هسته نمودار پتانسیل پیشنهادی از برهمکنش کرنل منحرف می‌شود .



شکل ۳.۲: نمودار $V(r)-r$: مقایسه نمودار کرنل V_1 و پتانسیل پیشنهادی V که حاصل ترکیب پتانسیل‌های کراتزر، خطی و گاوسی می‌باشد.



شکل ۴.۲: نمودار $V(r)-r$: مقایسه نمودار کرنل V_1 و پتانسیل پیشنهادی V که حاصل ترکیب پتانسیل‌های کراتزر، خطی و گاوسی می‌باشد که با استفاده از پارامترهای گزارش شده در جدول ۱۹.۲ رسم شده‌اند.

در ادامه طیف جرمی و خواص واپاشی برای نشان دادن اعتبار این پتانسیل و توصیف سیستم هادرونی محاسبه می‌شود.

۱.۳.۲ تابع موج مزون‌های B، B_s، D و D_s

در این بخش برای محاسبه‌ی تابع موج مزون‌های B، B_s، D و D_s مانند بخش‌های قبل از معادله شرودینگر با در نظر گرفتن پتانسیل (۵۲.۲) استفاده می‌شود. در اینجا نیز پتانسیل کراتزر $\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}$ قسمت اصلی و $k_0 e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}}+cr$ به صورت جمله‌ی اختلالی می‌باشد که به صورت رابطه‌ی (۵۳.۲) و (۵۴.۲) تعریف می‌شوند.

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \tag{۵۳.۲}$$

$$H' = k_0 e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} + cr \tag{۵۴.۲}$$

در این روابط μ جرم کاهیده‌ی سیستم مزونی و $m_{\bar{q}}$ و m_Q به ترتیب جرم مزون‌های سبک و سنگین هستند با در نظر گرفتن قسمت شعاعی تابع موج معادله شرودینگر به صورت رابطه‌ی (۴.۱) معادله شرودینگر شعاعی مربوط به پتانسیل مختل نشده به صورت رابطه‌ی (۵۶.۲) نوشته می‌شود بنابراین

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} + k_0 e^{-\frac{\alpha^2 r^2}{2}} + cr\right)|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \tag{۵۵.۲}$$

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2}E_{n,l} - \frac{l\,(l+1)}{r^2} - 2\mu\left(\frac{a}{r}+\frac{b}{r^2}\right)\right\}R_{n,l}\,(r) = 0 \tag{۵۶.۲}$$

بنابراین با استفاده از روش NU تابع موج و انرژی به صورت معادلات (۵۷.۲) و (۵۸.۲) بدست می‌آیند.

$$R_{n,l} = N r^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(1+2l)^2+8\mu b}}\, e^{-\sqrt{-2\mu E_{n,l}}\,r}\, L_n^{\sqrt{(1+2l)^2+8\mu b}}\left(2\sqrt{-2\mu E_{n,l}}\,r\right) \tag{۵۷.۲}$$

$$E_{n,l} = \frac{-2\mu a^2}{(2n+1)^2 + (1+2l)^2 + 8\mu b + (4n+2)\sqrt{(1+2l)^2+8\mu b}} \tag{۵۸.۲}$$

در ادامه به محاسبه‌ی تابع موج در ترازهای پایه و اول برانگیخته پرداخته می‌شود.

۲.۳.۲ بررسی تراز پایه(S-Wave) برای برهمکنش پیشنهاد شده

در تراز پایه تابع موج مختل نشده و ویژه انرژی متناظر با آن به صورت معادلات (۵۹.۲) و (۶۰.۲) تعیین می‌شوند.

$$R_{0,0}(r) = N_{0,0}\, r^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+8\mu b}}\, e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,0}}\,r} \tag{۵۹.۲}$$

$$E_{\circ,\circ} = \frac{-۲\mu a^۲}{۲ + ۸\mu b + ۲\sqrt{۱ + ۸\mu b}} \tag{۶۰.۲}$$

با استفاده از روابط (۳۵.۲) و جایگذاری معادلات (۵۳.۲) و (۵۴.۲) در معادله‌ی (۳۵.۲) معادله‌ی (۶۱.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\left\{\frac{d^۲}{dr^۲} + \frac{۲}{r}\frac{d}{dr} - \frac{۲\mu b}{r^۲} - \frac{۲\mu a}{r} + ۲\mu E_{\circ,\circ}\right\} R'_{\circ,\circ}(r) \\ &= \left\{۲\mu k_\circ e^{-\frac{\alpha^۲ r^۲}{۲}} - ۲\mu W' + ۲\mu c r\right\} R_{\circ,\circ}(r) \end{aligned} \tag{۶۱.۲}$$

با جایگذاری روابط (۱۴.۲)، (۱۵.۲)، (۵۹.۲) و (۶۰.۲) در معادله‌ی (۶۱.۲)، معادله‌ی (۶۲.۲) محاسبه می‌شودکه با توجه به آن تابع موج مختل شده بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} &\sum_{l'=\circ}^{\infty} A_{l'} r^{l'-۲}\left(l'(l' + \sqrt{۱ + ۸\mu b})\right) + \sum_{l'=\circ}^{\infty} A_{l'} r^{l'-۱}\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right) \\ &\times\left(l' + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) - ۲\mu a \sum_{l'=\circ}^{\infty} A_{l'} r^{l'-۱} = ۲\mu k_\circ e^{-\frac{\alpha^۲ r^۲}{۲}} - ۲\mu W' + ۲\mu c r \end{aligned} \tag{۶۲.۲}$$

بنابراین با باز کردن بسط نمایی، ضرایب معادله‌ی (۶۲.۲) به صورت (۶۳.۲) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} A_\circ &= \frac{-\left(۱ + \sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) A_۱}{\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right)\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) - ۲\mu a} \\ A_۱ &= \frac{-\left(۴ + ۲\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) A_۲ + ۲\mu k_\circ - ۲\mu W'}{\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right)\left(\frac{۳}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) - ۲\mu a} \\ A_۲ &= \frac{-\left(۹ + ۳\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) A_۳ + ۲\mu c}{\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right)\left(\frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) - ۲\mu a} \\ A_۳ &= \frac{-\left(۱۶ + ۴\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) A_۴ - \mu k_\circ \alpha^۲}{\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right)\left(\frac{۷}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) - ۲\mu a} \\ A_۴ &= \frac{-\left(۲۵ + ۵\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) A_۵}{\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right)\left(\frac{۹}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) - ۲\mu a} \\ A_۵ &= \frac{\frac{\mu k_\circ \alpha^۴}{۸}}{\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\right)\left(\frac{۱۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}\right) - ۲\mu a} \end{aligned} \tag{۶۳.۲}$$

با توجه به روابط بدست آمده تابع موج مختل شده را برای موج S به صورت معادله‌ی (۶۴.۲) می‌توان تعریف کرد.

$$\begin{aligned} R'_{\circ,\circ}(r) &= N'_{\circ,\circ}\left(A_\circ + A_۱ r + A_۲ r^۲ + A_۳ r^۳ + A_۴ r^۴ + A_۵ r^۵\right) \\ &\times r^{-\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۱ + ۸\mu b}} e^{-\sqrt{-۲\mu E_{\circ,\circ}}\, r} \end{aligned} \tag{۶۴.۲}$$

بنابراین تابع موج کل برای موج S به صورت (۶۵.۲) بدست می‌آید،

$$R^{total}_{\circ,\circ}(r) = N^{total}_{\circ,\circ}\left(R'_{\circ,\circ}(r) + R_{\circ,\circ}(r)\right) \qquad (۶۵.۲)$$

که $N^{total}_{\circ,\circ}$ ضریب بهنجارش تابع موج کل و $N'_{\circ,\circ}$ ضریب بهنجارش تابع موج قسمت مختل شده می‌باشد.

۳.۳.۲ بررسی تراز موج P- (P-Wave)

برای این موج $l = ۱$ می‌باشد، بنابراین از معادله‌های (۵۷.۲) و (۵۸.۲) ویژه انرژی و ویژه تابع آن در تراز موج P محاسبه می‌شود.

$$R_{\circ,۱}(r) = N_{\circ,۱} r^{-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۸\mu b}} e^{-\sqrt{-۲\mu E_{\circ,۱}}r} \qquad (۶۶.۲)$$

$$E_{\circ,۱} = \frac{-۲\mu a^۲}{۱۰ + ۸\mu b + ۲\sqrt{۹ + ۸\mu b}} \qquad (۶۷.۲)$$

با توجه به طیف هامیلتونی اصلی که محاسبه شد، اختلال مرتبه‌ی اول ویژه تابع و ویژه انرژی متناظرش محاسبه می‌شود، بنابراین با استفاده از روابط (۳۵.۲) و جایگذاری $W^\circ = E_{\circ,۱}$ و W' که به صورت معادله‌ی (۴۴.۲) تعریف می‌شود و معادلات (۵۳.۲) و (۵۴.۲) معادله‌ی (۶۸.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{d^۲}{dr^۲} + \frac{۲}{r}\frac{d}{dr} - \frac{۲\mu b}{r^۲} - \frac{۲\mu a}{r} + ۲\mu E_{\circ,۱}\right\} R'_{\circ,۱}(r)\\ &= \left\{۲\mu k_\circ e^{-\frac{\alpha^۲ r^۲}{۲}} - ۲\mu W' + ۲\mu c r\right\} R_{\circ,۱}(r)\end{aligned} \qquad (۶۸.۲)$$

حال با جایگذاری روابط (۱۴.۲) و (۱۵.۲) برای موج P و معادلات (۶۶.۲) و (۶۷.۲) رابطه‌ی (۶۹.۲) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}&\sum_{l'=\circ}^{\infty} A_{l'} r^{l'-۲}\left(l'(l' + \sqrt{۹+۸\mu b})\right) + \sum_{l'=\circ}^{\infty} A_{l'} r^{l'-۱}\left(-۲\sqrt{-۲\mu E_{\circ,۱}}\right)\\ &\times\left(l' + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۹+۸\mu b}\right) - ۲\mu a \sum_{l'=\circ}^{\infty} A_{l'} r^{l'-۱} = ۲\mu k_\circ e^{-\frac{\alpha^۲ r^۲}{۲}} - ۲\mu W' + ۲\mu c r\end{aligned} \qquad (۶۹.۲)$$

بنابراین ضرایب این معادله به صورت (۶۹.۲) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
A'_0 &= \frac{-\left(1+\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_1}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_1 &= \frac{-\left(4+2\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_2+2\mu k_0-2\mu W'}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_2 &= \frac{-\left(9+3\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_3+2\mu c}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_3 &= \frac{-\left(16+4\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_4-\mu k_0\alpha^2}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_4 &= \frac{-\left(25+5\sqrt{9+8\mu b}\right)A'_5}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}\\
A'_5 &= \frac{\frac{\mu k_0\alpha^4}{8}}{\left(-2\sqrt{-2\mu E_{0,1}}\right)\left(\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}\right)-2\mu a}
\end{aligned} \tag{۷۰.۲}$$

بنابراین تابع موج مختل شده به صورت معادله‌ی (۷۰.۲) و تابع موج کل برای موج P به صورت معادله‌ی (۷۲.۲) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}
R'_{0,1}(r) &= N'_{0,1}\left(A'_0+A'_1 r+A'_2 r^2+A'_3 r^3+A'_4 r^4+A'_5 r^5\right)\\
&\times r^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{9+8\mu b}}e^{-\sqrt{-2\mu E_{0,1}}r}
\end{aligned} \tag{۷۱.۲}$$

$$R^{total}_{0,1}(r) = N^{total}_{0,1}\left(R'_{0,1}(r)+R_{0,1}(r)\right) \tag{۷۲.۲}$$

که $N'_{0,1}$ ضریب بهنجارش تابع موج قسمت مختل شده و $N^{total}_{0,1}$ ضریب بهنجارش تابع موج کل برای موج P می‌باشد.

۴.۳.۲ بررسی طیف جرمی پتانسیل معرفی شده

با توجه به تابع موج بدست آمده برای پتانسیل پیشنهاد شده (۵۲.۲) می‌توان به بررسی معادلات (۵.۱) الی (۱۴.۱) که برای محاسبه و بررسی طیف جرمی می‌باشند پرداخت. مقادیر محاسبه شده برای طیف جرمی مزون‌های B و B_s برای موج S و P به ترتیب در جدول‌های ۲۰.۲ و ۲۲.۲ همچنین برای طیف جرمی مزون‌های D و D_s برای موج S و P به ترتیب در جدول‌های ۲۱.۲ و ۲۳.۲ گزارش شده است.

جدول ۲۰.۲: مقادیر جرم مزون‌های B برای $S-Wave$ با مقادیر $V_\circ = $ ۰/۱۷۳ (GeV) و $c =$ ۰/۱۹ $(GeV)^۲$ بر حسب MeV برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

مزون	${}^{۲S+۱}L_j$	M محاسبه شده	M سایر منابع
$B^\pm$	${}^۱S_\circ$	۵۲۷۹/۹	۵۲۷۹/۲۹ $\pm$ ۰/۱۵[۳۱] ۵۳۰۲[۴۰] ۵۲۷۱[۲۵]
B^*	${}^۳S_۱$	۵۳۰۰/۹۹	۵۳۲۴/۸۳ $\pm$ ۰/۳۲[۳۱] ۵۳۵۶[۴۰] ۵۳۲۷/۰۵[۲۵]
B_s°	${}^۱S_\circ$	۵۳۷۰/۴۶	۵۳۶۶/۷۹ $\pm$ ۰/۲۳[۳۱] ۵۳۴۰[۴۰] ۵۳۸۴/۷[۲۵]
B_s^*	${}^۳S_۱$	۵۳۹۱/۱۲	۵۴۱۵/۴$^{+۱/۸}_{-۱/۵}$[۳۱] ۵۳۸۴[۴۰] ۵۴۰۸/۵[۲۵]

۵.۳.۲ بررسی ثابت واپاشی مزون‌های نیمه سنگین

با توجه به معادلات بخش ۲.۵.۱ در حد غیر نسبیتی ثابت واپاشی مزون‌های برداری و شبه اسکالر با رابطه‌ی ون راین–وایسکوف که به صورت معادله‌های (۱۹.۱)، (۲۰.۱) و (۲۱.۱) می‌باشد محاسبه می‌شود. ثابت واپاشی مزون‌های B و B_s برای تابع موج بدست آمده از پتانسیل (۵۲.۲) در جدول ۲۴.۲ و ثابت واپاشی مزون‌های D و D_s برای این تابع موج در جدول ۲۵.۲ گزارش می‌شود. همینطور نسبت‌های ثابت واپاشی تجربی $\frac{f_{D_s}}{f_D} =$ ۱/۲۵۸$\pm$۰/۰۳۸ در مرجع [۳۱] و محاسبات در مرجع [۳۲] که به صورت $\frac{f_{D_s}}{f_D} =$ ۱/۰۸ می‌باشد و نسبت $\frac{f_{D_s^*}}{f_{D^*}}$ در مرجع [۴۵] به صورت (۱/۱۰ $\pm$ ۰/۰۶) بدست آمده است و همینطور $\frac{f_{B_s^*}}{f_{B^*}} =$ ۱/۱۴ $\pm$ ۰/۰۸ در مرجع [۴۵] گزارش شده است. با توجه به مقادیر گزارش شده برای جرم مزون‌ها در جداول ۲۰.۲ و ۲۱.۲ برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی نتایج به ترتیب به صورت $\frac{f_{D_s}}{f_D} =$ ۱/۰۸ ، $\left(\frac{f_{D_s}}{f_D} = \text{۱/۰۵}\right)$ و $\frac{f_{D_s^*}}{f_{D^*}} =$ ۱/۰۸ ، $\left(\frac{f_{D_s^*}}{f_{D^*}} = \text{۱/۰۵}\right)$ و $\frac{f_{B_s^*}}{f_{B^*}} =$ ۱/۰۲ ، $\left(\frac{f_{B_s^*}}{f_{B^*}} = \text{۱/۰۴}\right)$ می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود این نتایج در تطابق خوبی با مقادیر گزارش شده می‌باشد.

جدول ۲.۲۱: مقادیر جرم مزون‌های D برای $S-Wave$ با مقادیر $c = ۰/۴۲\ (GeV)^۲$ و $V_۰ = ۰/۱۵۳\ (GeV)$ بر حسب MeV برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

سایر مراجع M	محاسبه شده M	$^{۲S+۱}L_j$	مزون
۱۸۶۴/۸۶[۳۱] ۱۸۹۵[۴۰]	۱۸۷۱/۶۹	$^۱S_۰$	$D^{\pm}$
۲۰۱۰/۲۸[۳۱] ۲۰۲۳[۴۰]	۲۰۰۱/۰۲	$^۳S_۱$	D^*
۱۹۶۸[۳۱] ۱۹۴۰[۳۷] ۱۹۶۲[۴۰]	۱۹۶۹/۳۶	$^۱S_۰$	D_s°
۲۱۱۲[۳۱] ۲۰۵۷[۴۰]	۲۰۹۲/۱۳	$^۳S_۱$	D_s^*

جدول ۲.۲۲: مقادیر جرم مزون B و B_s برای $P - Wave$ با مقادیر $V_۰ = ۰/۵۸۲\ (GeV)$ و $c = ۰/۱۹\ (GeV)^۲$ برحسب MeV برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

سایر M	مقادیر ما M	B_s	سایر M	مقادیر ما M	B
۵۸۴۰[۳۱] ۵۸۴۲[۱۵] ۵۸۲۰[۴۱] ۵۸۴۰/۴۴[۲۵]	۵۸۲۰/۰۶	$^۳P_۲$	۵۷۴۳[۳۱] ۵۷۴۱[۱۵] ۵۷۱۴[۴۱] ۵۷۴۳/۱[۲۵]	۵۷۱۹/۷۵	$^۳P_۲$
۵۸۳۳[۱۵] ۵۸۰۴[۴۱] ۵۸۴۲/۵۲[۲۵]	۵۸۵۳/۶۲	$^۳P_۰$	۵۷۳۲[۳۱] ۵۷۴۱[۱۵] ۵۷۴۵/۹[۲۵] ۵۷۰۶[۴۱]	۵۷۶۲/۱۲	$^۳P_۰$
۵۸۴۱/۱۳[۲۵]	۵۸۳۱/۲۵	$^۱P_۱$	۵۷۴۳/۸[۲۵]	۵۷۳۳/۸۷	$^۱P_۱$
۵۸۴۱/۸۳[۲۵]	۵۸۴۲/۴۳	$^۳P_۱$	۵۷۴۴/۴۵[۲۵]	۵۷۴۷/۹۹	$^۳P_۱$

جدول ۲.۲۳: مقادیر جرم مزون D_s و D برای $P-Wave$ به ازای مقادیر $c = ۰/۱۹\ (GeV)^۲$ و $V_۰ = ۰/۳۹۵\ (GeV)$ برای $^۳P_۲$ و $^۳P_۰$ و $V_۰ = ۰/۴۸۵\ (GeV)$ برای $^۱P_۱$ و $^۳P_۱$ بر حسب (GeV) برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

D	مقادیر ما M	دیگران M	D_s	مقادیر ما M	دیگران M
$^۳P_۲$	۲/۲۱۹	۲/۲۱۱[۴۰]	$^۳P_۲$	۲/۳۲۱	۲/۲۰۴[۴۰]
$^۳P_۰$	۲/۲۶۹	۲/۲۶۹[۴۵] ۲/۳۱۶[۴۰]	$^۳P_۰$	۲/۳۶۱	۲/۳۸۶[۴۵] ۲/۳۷۲[۴۰]
$^۱P_۱$	۲/۳۲۰	۲/۳۰۲[۴۵] ۲/۳۶۲[۴۰]	$^۱P_۱$	۲/۴۲۴	۲/۴۴۹[۴۵] ۲/۴۰۹[۴۰]
$^۳P_۱$	۲/۳۴۲	۲/۳۰۹[۴۵] ۲/۳۸۷[۴۰]	$^۳P_۱$	۲/۴۳۷	۲/۴۴۷[۴۵] ۲/۴۲۲[۴۰]

۶.۳.۲ پهنای واپاشی لپتونی مزون B

با توجه به معادلات بیان شده در بخش ۳.۵.۱ و ثابت‌های واپاشی گزارش شده در جدول ۲۴.۲ و البته با در نظر گرفتن تصحیحات QCD، پهنای واپاشی و نسبت انشعابی لپتونی با استفاده از روابط (۲۲.۱) و (۲۳.۱) محاسبه می‌شود که برای مزون B و B_s در جدول ۲۶.۲ و ۲۸.۲ و برای مزون D و D_s در جدول ۲۷.۲ و ۲۹.۲ نتایج بدست آمده گزارش می‌شود، مشاهده شد که نتایج بدست آمده در این بخش تطابق خوبی با نتایج تجربی و نتایج محاسبه شده توسط دیگران دارد.

جدول ۲۴.۲: مقادیر ثابت واپاشی مزون شبه اسکالر و برداری B و B_s برحسب (MeV) برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

مزون	$f_{P/V}$ محاسبه شده	$\bar{f}_{P/V}$ محاسبه شده	دیگران
$B^{\pm}$	۱۵۰/۳	۱۵۴/۰۹	۲۴۳/۶۴[۲۵] ۱۴۹[۴۰] ۱۸۹[۴۳] ۱۹۵[۴۴]
B^{*}	۱۴۹/۷۳	۱۴۳/۶۱	۲۴۲/۳۷[۲۵] ۲۳۸ $\pm$ ۱۸[۴۵] ۱۵۱$^{+۱۸}_{-۱۳}$[۴۶]
B_s°	۱۶۷/۲۵	۱۶۶/۶۴	۱۷۹/۲۱[۲۵] ۱۸۷[۴۰] ۲۱۸[۴۳] ۱۹۳[۴۴]
B_s^{*}	۱۶۶/۹۳	۱۵۴/۹۸	۱۷۸/۸۲[۲۵] ۲۷۲ $\pm$ ۲۰[۴۵] ۲۳۶$^{+۱۴}_{-۱۱}$[۴۶]

۷.۳.۲ پهنای واپاشی نیمه لپتونی مزون B

پهنای واپاشی نیمه لپتونی واپاشی $B^{+} \to D^{\circ *} l \bar{\upsilon}$ را با استفاده از معادلات (۲۴.۱) الی (۳۲.۱) می‌توان بررسی کرد. پهنای واپاشی و نسبت انشعابی بدست آمده در این بخش در جدول ۳۰.۲ گزارش می‌شود که در تطابق خوبی با نتایج تجربی و نتایج دیگران می‌باشد.

جدول ۲۵.۲: مقادیر ثابت واپاشی مزون شبه اسکالر و برداری D برحسب (MeV) برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

مزون	$f_{P/V}$	$\bar{f}_{P/V}$	دیگران
$D^{\pm}$	۳۴۸/۹۷	۳۱۰/۰۳	$۲۴۳^{+۲۱}_{-۱۷}$[۳۸] ۳۷۶[۴۳]
D^{*}	۳۳۷/۵۱	۲۷۶/۹۳	$۲۲۳^{+۲۳}_{-۱۹}$[۳۸] ۳۴۱ ± ۲۳[۴۵] ۳۹۱[۴۳]
D_s°	۳۷۵/۸۵	۳۲۴/۱۰	۴۳۶[۴۳] $۳۴۱^{+۷}_{-۵}$[۳۸]
D_s^{*}	۳۶۴/۶۶	۲۸۹/۶۹	۴۴۷[۴۳] ۳۷۵ ± ۲۴[۴۵] $۳۲۶^{+۲۱}_{-۱۷}$[۳۸]

جدول ۲۶.۲: پهنای واپاشی لپتونی محاسبه شده برای مزون B^+ برحسب (GeV) تحت پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

	محاسبه شدهΓ	دیگران Γ
$B^+ \to e^+ \bar{\upsilon}_e$	$۳/۲۸ \times ۱۰^{-۲۴}$	$۸/۶۲۳۵ \times ۱۰^{-۲۴}$[۲۵] $۸/۰۹۴۴ \times ۱۰^{-۲۴}$[۱۷]
$B^+ \to \mu^+ \bar{\upsilon}_\mu$	$۱/۴ \times ۱۰^{-۱۹}$	$۳/۶۸۵۲ \times ۱۰^{-۱۹}$[۲۵] $۳/۴۵۹۱ \times ۱۰^{-۱۹}$[۱۷]
$B^+ \to \tau^+ \bar{\upsilon}_\tau$	$۳/۱۱ \times ۱۰^{-۱۷}$	$۸/۱۹۵۵ \times ۱۰^{-۱۷}$[۲۵] $۷/۶۹۶۷ \times ۱۰^{-۱۷}$[۱۷]

جدول ۲.۲۷: پهنای واپاشی لپتونی محاسبه شده برای مزون‌های D^+ و D_s^+ برحسب (GeV) برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

	Γ محاسبه شده	Γ[۲۵]
$D^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۱/۳۱۱ \times ۱۰^{-۲۰}$	$۱/۴۸۷۷ \times ۱۰^{-۲۰}$
$D^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۵/۵۴ \times ۱۰^{-۱۶}$	$۶/۳۲۱۶ \times ۱۰^{-۱۶}$
$D^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۱/۵۷۱ \times ۱۰^{-۱۵}$	$۱/۲۱۵۲ \times ۱۰^{-۱۵}$
$D_s^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۳/۰۶ \times ۱۰^{-۱۹}$	$۲/۹۶۲۲ \times ۱۰^{-۱۹}$
$D_s^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۱/۲۸۵ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۱/۲۵۹۶ \times ۱۰^{-۱۴}$
$D_s^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۱/۲۸۹ \times ۱۰^{-۱۳}$	$۱/۲۹۵۸ \times ۱۰^{-۱۳}$

جدول ۲.۲۸: نسبت انشعابی واپاشی لپتونی محاسبه شده برای مزون $\boldsymbol{B^+}$ برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

	Br محاسبه شده	Br دیگران
$B^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۸/۸ \times ۱۰^{-۱۲}$	$< ۹/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۳۱] $۶/۲۲ \times ۱۰^{-۱۲}$[۴۰] $< ۷/۷ \times ۱۰^{-۶}$[۴۷]
$B^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۳/۴۹ \times ۱۰^{-۷}$	$< ۱/۰ \times ۱۰^{-۶}$[۳۱] $۲/۶۳ \times ۱۰^{-۷}$[۴۰] $< ۱۱ \times ۱۰^{-۶}$[۴۷] $۴/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۴۸]
$B^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۷/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$(۱/۱۴ \pm ۰/۲۷) \times ۱۰^{-۴}$[۳۱] $۰/۵۹ \times ۱۰^{-۴}$[۴۰] $(۱/۸ \pm ۰/۶) \times ۱۰^{-۴}$[۴۷] $(۰/۸ \pm ۰/۱۲) \times ۱۰^{-۴}$[۴۹]

جدول ۲.۲۹: نسبت انشعابی واپاشی لپتونی محاسبه شده برای مزون‌های D^+و D_s^+ تحت پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

	Br محاسبه شده	Br دیگران
$D^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۲/۱ \times ۱۰^{-۸}$	$< ۸/۸ \times ۱۰^{-۶}$[۳۱] $۱/۵ \times ۱۰^{-۸}$[۵۰]
$D^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۸/۶ \times ۱۰^{-۴}$	$(۳/۷۴ \pm ۰/۱۷) \times ۱۰^{-۴}$[۳۱] $۲/۷۸ \times ۱۰^{-۴}$[۵۱]
$D^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۲/۴ \times ۱۰^{-۳}$	$< ۱/۲ \times ۱۰^{-۳}$[۳۱] $۷/۵۴ \times ۱۰^{-۴}$[۵۱]
$D_s^+ \to e^+\bar{\upsilon}_e$	$۲/۳ \times ۱۰^{-۷}$	$< ۸/۳ \times ۱۰^{-۵}$[۳۱] $۱/۸ \times ۱۰^{-۷}$[۵۰]
$D_s^+ \to \mu^+\bar{\upsilon}_\mu$	$۹/۸ \times ۱۰^{-۳}$	$(۵/۵۸ \pm ۰/۲۵) \times ۱۰^{-۳}$[۳۱] $۷/۷ \times ۱۰^{-۳}$[۵۰]
$D_s^+ \to \tau^+\bar{\upsilon}_\tau$	$۹/۸ \times ۱۰^{-۲}$	$(۵/۵۵ \pm ۰/۲۴) \times ۱۰^{-۴}$[۳۱] $۸/۴ \times ۱۰^{-۲}$[۵۰]

جدول ۲.۳۰: پهنای واپاشی نیمه‌لپتونی برحسب GeV و نسبت انشعابی محاسبه شده برای مزون B^+ تحت پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی.

	Γ مقادیر ما	Γ دیگران	Br مقادیر ما	Br دیگران
$B^+ \to D^{*\circ} l^+ \upsilon$	$۴/۴۷ \times ۱۰^{-۱۴}$	$۳/۵۷۷۱ \times ۱۰^{-۱۴}$ [۲۵] $۳/۷۶۵ \times ۱۰^{-۱۴}$ [۱۹]	۱۱/۱۶٪	$(۵/۶۹ \pm ۰/۱۹)$٪ [۳۱] ۸/۹۰۴٪[۲۵] ۹/۳۷۲٪[۱۹]

فصل ۳

سیستم‌های وابسته به زمان در چارچوب نسبیتی و غیر نسبیتی

بررسی فرآیند وابسته به زمان به طور کلی در مقابل فرآیندهای ثابت سخت‌تر می‌باشد اغلب در برخی از طرح‌های تقریبی مثل نظریه‌ی اختلال، تقریب بی‌دررو و تقریب ناگهانی مربوط شده‌اند. از این رو مطلوب است مثال‌ها و مدل‌هایی با راه‌حل‌های دقیق که بتوان آن‌ها را به شکل مدل های ساده بیان کرد را در نظر گرفت ، با این مدل‌ها می‌توان درستی تقریب‌های مختلف را بررسی کرد [۵۲].

یکی از این مدل‌ها نوسانگر هماهنگ یک بعدی با بسامد وابسته به زمان می‌باشد، بعد از مقاله‌ی اصلی Husimi [۵۳] تعداد زیادی مقاله نوشته شده است [۵۴، ۵۸]. البته مراجع زیادی وجود دارد اما این مراجع بنیادی‌تر می باشند.
دینامیک یک ذره کوانتومی در چاه بینهایت یک بعدی با دیواره‌های متحرک با رهیافت‌های گوناگونی مطالعه شده است. اولین مقاله ی موثق در مجموعه کارهای مرتبط با پتانسیل‌های وابسته به زمان به کار داشر [۱] و رایس [۲] در سال ۱۹۶۹ باز می‌گردد [۵۹]، درباره‌ی مدل DR در میان کتاب‌های کوانتومی تنها در کتاب گریفیث (هر چند به اختصار) بحث شده است [۶۰]. آن‌ها مسئله را توسط مجموعه‌ای کامل از توابع که پاسخ‌های دقیق معادله شرودینگر وابسته

[1] Doescher
[2] Rice

به زمان هستند، بررسی نمودند. کار آن‌ها به عنوان مرجعی برای روش های تقریبی [۶۱] و هم به عنوان یک مثال مقایسه‌ای برای سایر مطالعات دقیق [۶۲، ۶۳] یک منبع اصلی محسوب می‌شود.

در مکانیک کوانتومی، مسئله ذره در جعبه و چاه کوانتومی از جمله مسائلی است که به صورت تحلیلی حل می‌شود. به علت سادگی این مسئله، بسیاری از سیستم‌های کوانتومی پیچیده با آن تقریب زده می‌شوند برای مثال در اپتوالکترونیک [۳] وابزارهایی مانند لیزرهای چاه کوانتومی [۴] کاربرد دارد. همچنین برای مدل کردن یک شبکه در مدل کرونیگ پنی [۵] از مسئله چاه کوانتومی استفاده می‌شود [۶۴].

در برخی مقالات [۶۵،۶۶] این مسئله ذره‌ی کوانتومی در چاه پتانسیل با دیواره‌های متحرک در مدل DR در زمینه شتاب فرمی کوانتومی [۶] به کار گرفته شده است، در برخی موارد هم رهیافت جامعتر و به لحاظ ریاضی غنی‌تر برای آن اتخاذ شده است [۶۷–۶۹]. یک دیدگاه متفاوت هندسی نیز برای این مسئله توسط پرشوگین و پرونین ارائه شده است [۷۰] که با رهیافت‌های دیگر متفاوت می‌باشد، در این روش با استفاده از هندسه‌ی فایبر باندل‌ها نشان می‌دهند که هامیلتونی مؤثر بایستی تغییر یابد. آن‌ها مسئله ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی وابسته به زمان را به مسئله‌ای با شرایط مرزی ثابت اما با یک هامیلتونی موثر جدید تبدیل نمودند و سپس با استفاده از نظریه‌ی اختلال به بررسی مسئله در حضور این هامیلتونی مؤثر پرداختند. در اینجا هامیلتونی مؤثر معرفی شده در [۷۰] به کار گرفته می‌شود و نشان داده می‌شود که شرایط مرزی وابسته به زمان منجر به ظهور یک فاکتور فاز در تابع موج ذره می‌شود که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد. فاکتورهای فاز در بسیاری از حوزه‌های فیزیک ظاهر شده و کاربردهای مختلفی دارند. در مراجع [۷۱–۷۸] می‌توان مشاهده کرد که کاربرد فاز دیراک تنها به حوزه‌های الکترومغناطیس محدود نمی‌شود، در بسیاری از حوزه‌های دیگر فیزیک مانند گردابه‌های آکوستاتیکی و الکترون‌ها در محیط‌هایی با دررفتگی پیچشی [۷] نیز کاربرد دارد [۶۴]. هدف مطالعه‌ی مسئله‌ی یک ذره در چاه پتانسیل متناهی یک بعدی با شرایط مرزی وابسته به زمان (دیواره‌ی متحرک) می‌باشد.

۱.۳ ذره در چاه کوانتومی با دیواره متحرک

با توجه به رهیافت پرشوگین و پرونین و براساس هامیلتونی مؤثر ارائه شده در [۷۰] مسئله‌ی یک ذره در چاه پتانسیل متناهی با دیواره‌ی متحرک، متناظر با مسئله‌ی یک ذره در پتانسیل

[3] Optoelectronics
[4] Quantum well lasers
[5] Kronig-Penny
[6] Quantum Fermi acceleration
[7] Screw dislocation

پیمانه‌ای می‌شود. از آنجا که دیراک نشان داد تابع موج یک ذره‌ی متحرک در یک میدان الکترومغناطیسی خارجی (به عنوان یک نمونه از یک میدان پیمانه‌ای) [۶۴]، علاوه بر فاکتور فاز دینامیکی متعارف فاز دیگری هم بدست می‌آورد، این فاز اضافی را فاکتور فاز دیراک می‌نامند. بنابراین، این مسئله با استفاده از رهیافت پرشوگین و پرونین به اختصار بررسی شده و سپس فاکتور فاز دیراک را با توجه به آن بدست آورده و در نهایت تابع موج ذره در چاه پتانسیل متناهی با دیواره‌ی متحرک بدست آورده می‌شود.

۱.۱.۳ بررسی هامیلتونی مؤثر

این مسئله با هامیلتونی مؤثر ذره در چاه پتانسیل متناهی با دیواره‌ی متحرک بررسی می‌شود که ضابطه پتانسیل ذره به صورت (۱.۳) بیان می‌شود.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -V_0 & 0 < x < L(t) \\ 0 & x > L(t) \end{cases} \tag{۱.۳}$$

$L(t)$ عرض چاه پتانسیل می‌باشد. دینامیک کوانتومی ذره به جرم m با معادله‌ی شرودینگر داده می‌شود، بنابراین

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x,t) \tag{۲.۳}$$

که $\Psi(x,t)$ تابع موج ذره می‌باشد و در شرایط مرزی باید صدق کند.

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathrm{I}}(0,t) &= \Psi_{\mathrm{II}}(0,t) \\ \Psi_{\mathrm{II}}(L(t),t) &= \Psi_{\mathrm{III}}(L(t),t) \end{aligned} \tag{۳.۳}$$

تابع موج $\Psi(x,t)$ بر حسب توابع موج پایه $u_n(x,t)$ به صورت (۴.۳) تعریف می‌شود،

$$\Psi(x,t) = \sum_n C_n(t) u_n(x,t) \tag{۴.۳}$$

که $C_n(t)$ توابع ناشناخته‌ای هستند. شرط تعامد ویژه تابع هامیلتونی به صورت (۵.۳) می‌باشد،

$$\int_{-L(t)}^{L(t)} u_m^* u_n dx = \delta_{mn} \tag{۵.۳}$$

که بیان می‌کند $u_n(x,t)$ درناحیه‌ی $[0, L(t)]$ تعریف می‌شود برای حل معادله شرودینگر (۲.۳) می‌بایست اثر عملگر $\frac{\partial}{\partial t}$ بر $u_n(x,t)$ را در نظر گرفته و باید توجه داشت که تعریف ساده مشتق جزئی به صورت (۶.۳) است [۶۴].

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{u_n(x,t+\delta t) - u_n(x,t)}{\delta t} \tag{۶.۳}$$

در استفاده از این عبارت باید دقت شود زیرا طبق معادله‌ی (۳.۳)، $u_n\left(x,t+\delta t\right)$ و $u_n\left(x,t\right)$ در ناحیه‌های متفاوت تعریف می‌شوند که این مشکل از وابسته به زمان بودن شرایط مرزی ایجاد می‌شود. پرشوگین و پرونین همانطور که اشاره شد برای تعریف دقیق مشتق جزئی از هندسه فایبر باندل‌ها استفاده کردند. [۷۰] آن‌ها نشان دادند که می‌توان در معادله‌ی شرودینگر، مشتق زمانی معمولی را به کار برد، به شرطی که هامیلتونی مؤثری به شکل (۷.۳) جایگزین نمود،

$$H_{eff}=\frac{P^{۲}}{۲m}+\frac{\dot{L}}{۲L}\left(xp+px\right) \tag{۷.۳}$$

و رابطه‌ی (۸.۳) معادله شرودینگر متناظرش می‌باشد.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi\right\rangle=H_{eff}\left|\Psi\right\rangle \tag{۸.۳}$$

در هامیلتونی مؤثر (۷.۳)، P عملگر تکانه، L اندازه‌ی دیواره و $\dot{L}=\frac{dL}{dt}$ سرعت دیواره است. به بیان دیگر با معرفی یک هامیلتونی مؤثر جدید می‌توان مسئله‌ی پیچیده ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی وابسته به زمان را به مسئله‌ی ساده و متعارف ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی ثابت کاهش داد و به حل آن پرداخت .

۲.۱.۳ فاز دیراک ذره‌ی کوانتومی

به منظور محاسبه‌ی تابع موج ذره در چاه پتانسیل متناهی با شرایط مرزی وابسته به زمان معرفی شده در بخش ۱.۱.۳ ابتدا باید هامیلتونی مؤثر (۷.۳) را به صورت (۹.۳) بازنویسی کرد.

$$H_{eff}=\frac{۱}{۲m}\left(P+\frac{m\dot{L}}{L}x\right)^{۲}-\frac{\dot{L}^{۲}}{۲mL^{۲}}x^{۲} \tag{۹.۳}$$

از آنجا که فقط حرکت آهسته‌ی دیواره در نظر گرفته شده است می‌توان جمله‌ی آخر که از مرتبه‌ی $\dot{L}^{۲}$ است را نادیده گرفت و هامیلتونی مؤثر را به شکل (۱۰.۳) در نظر گرفت،

$$H_{eff}=\frac{۱}{۲m}(P-A)^{۲} \tag{۱۰.۳}$$

که در آن $A(x,t)=-\frac{m\dot{L}}{L}x$ در نظر گرفته می‌شود. این یک نمونه از ظهور میدان پیمانه‌ای در یک سیستم کوانتومی می‌باشد. اثر شرط مرزی متحرک به عنوان یک پتانسیل پیمانه‌ای در هامیلتونی ظاهر می‌شود که به سرعت دیواره بستگی دارد، که برای ثابت در نظر گرفتن شرایط مرزی لازم می‌باشد [۶۴]. در واقع مطابق آنچه در [۷۰] توسط پرشوگین و پرونین آمده است می‌توان به سادگی نشان داد که اولین تصحیح ناشی از حرکت دیواره برای ویژه مقادیر انرژی از مرتبه $\dot{L}^{۲}$ است؛ در حالیه تصحیح مرتبه‌ی اول تابع موج از مرتبه‌ی $\dot{L}$ می باشد. بنابراین در حالت حرکت آهسته دیواره و در حد جابه‌جایی‌های کوچک، می توان از تصحیح وارد بر انرژی ذره صرف نظر نمود و فقط تغییر تابع موج را در نظر گرفت.

از سوی دیگر به علت حرکت آهسته دیواره، قضیه‌ی بی دررو نیز معتبر است [۸۰]. طبق این قضیه، اگر ذرات در حالت کوانتومی n باشد، در هنگام حرکت آهسته دیواره در همان حالت کوانتومی n خواهد ماند [۶۴]. حال برای یافتن تابع موج، دو معادله شرودینگر مستقل از زمان در فضای مختصات در نظر گرفته می‌شود که دارای انرژی مشابه هستند اما یکی از آن‌ها شامل میدان پیمانه‌ای A است. این دو معادله عبارتند از (۱۱.۳) و (۱۲.۳)

$$P^2 \Psi_{1n}(x) = 2mE\Psi_{1n}(x) \tag{۱۱.۳}$$

$$(P-A)^2 \Psi_{2n}(x) = 2mE\Psi_{2n}(x) \tag{۱۲.۳}$$

که $P=-i\hbar\frac{d}{dx}$ می باشد. معادله‌های (۱۱.۳) و (۱۲.۳) به ترتیب برای ذره‌ای در چاه پتانسیل متناهی با شرایط مرزی ثابت و ذره‌ای در چاه پتانسیل متناهی با دیواره‌های متحرک نوشته می‌شود.

با توجه به اینکه پتانسیل در نظر گرفته شده چاه پتانسیل متناهی می‌باشد سه ناحیه وجود دارد؛ در ناحیه‌ی I و III که $V(x)=0$ می‌باشد روابط (۱۱.۳) و (۱۲.۳) به صورت (۱۳.۳) (۱۴.۳) بدست می‌آید.

$$P^2 \Psi_{1n}(x) = 2mE\Psi_{1n}(x) \tag{۱۳.۳}$$

$$(P-A)^2 \Psi_{2n}(x) = 2mE\Psi_{2n}(x) \tag{۱۴.۳}$$

در ناحیه‌ی دوم $0<x<L(t)$ ، $V(x)=-V_0$ می‌باشد این معادلات به صورت (۱۵.۳) و (۱۶.۳) ظاهر می‌شود.

$$P^2 \Psi_{1n}(x) = 2m(E+V_0)\Psi_{1n}(x) \tag{۱۵.۳}$$

$$(P-A)^2 \Psi_{2n}(x) = 2m(E+V_0)\Psi_{2n}(x) \tag{۱۶.۳}$$

همانطور که قبلا اشاره شد هدف یافتن پاسخی برای معادله‌ی (۱۴.۳) و (۱۶.۳) با استفاده از برقراری رابطه‌ی بین Ψ_{1n} و Ψ_{2n} می‌باشد با توجه به این رابطه می‌توان تابع موج یک ذره در چاه پتانسیل با دیواره‌های متحرک را با داشتن تابع موج یک ذره در چاه پتانسیل با شرایط مرزی مستقل از زمان یا همان دیواره ثابت بدست آورد.

بدین منظور باید A را به صورت $A=\frac{d\Lambda(x)}{dx}$ و نشان داد که این ارتباط به صورت (۱۷.۳) می‌باشد.

$$\Psi_{2n}(x) = e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}\Psi_{1n}(x) \tag{۱۷.۳}$$

با قرار دادن (۱۷.۳) در (۱۴.۳) رابطه‌ی (۱۸.۳) محاسبه می‌شود، که مربوط به ناحیه‌ی اول می‌باشد.

$$e^{-\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}(P-\frac{d\Lambda}{dx})e^{-\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}(P-\frac{d\Lambda}{dx})e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}\Psi_{1n}(x)=2mE\Psi_{1n}(x) \tag{۱۸.۳}$$

و همچنین با قرار دادن (۱۷.۳) در (۱۶.۳) رابطه‌ی (۱۹.۳) بدست می‌آید، که مربوط به ناحیه‌ی دوم می‌باشد.

$$e^{-\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}(P-\frac{d\Lambda}{dx})e^{-\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}(P-\frac{d\Lambda}{dx})e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}\Psi_{1n}(x)=2m(E+V_0)\Psi_{1n}(x) \tag{۱۹.۳}$$

با مقایسه رابطه‌های (۱۸.۳) با (۱۳.۳) و (۱۹.۳) با (۱۵.۳) می‌توان دریافت که درستی ادعای مطرح شده در (۱۷.۳) زمانی اثبات می‌شود که نشان داده شود (۲۰.۳) برقرار است،

$$e^{-\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}(P-\frac{d\Lambda}{dx})e^{\frac{i\Lambda(x)}{\hbar}}=P \tag{۲۰.۳}$$

که این موضوع را با نوشتن عملگر تکانه به صورت $P=-i\hbar\frac{d}{dx}$ و اثر دادن دو سمت تساوی بر روی یک تابع دلخواه، ثابت نمود. حال طبق رابطه (۱۷.۳) و با استفاده از این واقعیت که $A=\frac{d\Lambda(x)}{dx}$ است به صورت رابطه‌ی

$$\Lambda(x)=\int Adx \tag{۲۱.۳}$$

در نتیجه معادله‌ی (۲۲.۳) بدست می‌آید.

$$\Psi_{2n}(x,t)=\exp\{\frac{i}{\hbar}\int Adx\}\Psi_{1n}(x) \tag{۲۲.۳}$$

با توجه به پاسخ‌های رابطه‌ی (۲۲.۳) Ψ_{1n} و Ψ_{2n} توسط فاکتور فاز $e^{i\gamma}$ با یکدیگر ارتباط پیدا می‌کنند.

$$\gamma=\{\frac{1}{\hbar}\int Adx\} \tag{۲۳.۳}$$

بنابر این

$$\Psi_{2n}(x)=e^{i\gamma}\Psi_{1n}(x) \tag{۲۴.۳}$$

این فاکتور فاز، فاز دیراک نامیده می‌شود. به این ترتیب اثر دیواره‌ی متحرک به صورت یک فاکتور فاز دیراک در تابع موج ظاهر می‌شود که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد [۶۴]. از آنجا که تابع موج برای یک چاه یک بعدی متناهی با دیواره‌ی ثابت به صورت (۲۵.۳) می‌باشد،

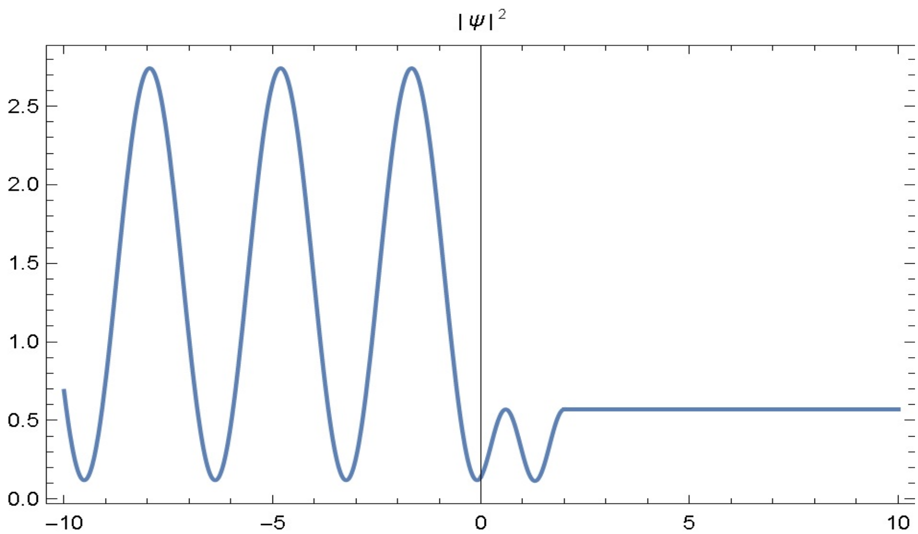
$$\begin{aligned}\Psi_I&=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}\\ \Psi_{II}&=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}\\ \Psi_{III}&=Ge^{ikx}\end{aligned} \tag{۲۵.۳}$$

باید توجه داشت که پایستگی چگالی جریان در بین نواحی I و III برای حالت مستقل از زمان برقرار می‌باشد، همچنین $R+T=1$ می‌شود.

حال با به کارگیری پتانسیل پیمانه‌ای $A(x,t) = -\frac{m\dot{L}}{L}x$ در معادله‌ی (۲۲.۳) معادله‌ی (۲۶.۳) که تابع موج ذره در چاه پتانسیل متناهی با دیواره‌ی متحرک است، بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\Psi_{2nI}(x,t) =&(Ae^{ikx}+Be^{-ikx})\exp\{-\frac{-im\dot{L}}{2\hbar L}x^2\}\\ \Psi_{2nII}(x,t) =&(Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x})\exp\{-\frac{-im\dot{L}}{2\hbar L}x^2\}\\ \Psi_{2nIII}(x,t) =&Ge^{ikx}\exp\{-\frac{-im\dot{L}}{2\hbar L}x^2\}\end{aligned} \tag{۲۶.۳}$$

به این ترتیب تفاوت تابع موج ذره در چاه متناهی یک بعدی در حالت دیواره‌ی ثابت و متحرک در فاکتور فاز $\exp\{-\frac{-im\dot{L}}{2\hbar L}x^2\}$ می‌باشد که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد [۶۴]. همانطور که در نمودار ۲.۱.۳ می‌توان مشاهده کرد این تابع موج در سه ناحیه پیوسته می‌باشد.



شکل ۱.۳: نمودار $|\Psi|^2 - x$ چگالی احتمال برای تابع موج ذره در چاه پتانسیل با دیواره متحرک پیوسته می‌باشد.

برای محاسبه‌ی $R+T$ برای تابع موج وابسته به زمان به روش زیر باید عمل کرد،

$$T = \frac{J_{tra}}{J_{inc}} \tag{۲۷.۳}$$

$$R = \frac{J_{ref}}{J_{inc}} \tag{۲۸.۳}$$

تابع موج ذره در چاه پتانسیل متناهی با دیواره‌ی متحرک (۲۶.۳) تابع‌های موج فرودی،

بازتابی و عبوری از چاه پتانسیل به صورت (۲۹.۳) نشان داده می‌شود.

$$\begin{aligned}\Psi_{inc} =& Ae^{ikx}\exp\left\{-\frac{im\dot{L}}{2\hbar L}x^2\right\}\\ \Psi_{ref} =& Be^{-ikx}\exp\left\{-\frac{im\dot{L}}{2\hbar L}x^2\right\}\\ \Psi_{tra} =& Ge^{ikx}\exp\left\{-\frac{im\dot{L}}{2\hbar L}x^2\right\}\end{aligned} \tag{۲۹.۳}$$

$$J=\Psi^*\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\Psi\frac{\partial\Psi^*}{\partial x} \tag{۳۰.۳}$$

$$J_{inc}=2iAA^*\left(k-\frac{m\dot{L}x}{\hbar L}\right) \tag{۳۱.۳}$$

$$J_{ref}=-2iBB^*\left(k-\frac{m\dot{L}x}{\hbar L}\right) \tag{۳۲.۳}$$

$$J_{tra}=2iGG^*\left(k-\frac{m\dot{L}x}{\hbar L}\right) \tag{۳۳.۳}$$

$$R=-\left(-1+\frac{2k\hbar L\left(t\right)}{k\hbar L\left(t\right)-mx\dot{L}\left(t\right)}\right)BB^* \tag{۳۴.۳}$$

$$T=GG^* \tag{۳۵.۳}$$

با توجه به اینکه $|R|+|T|=1$ می‌باشد باید رابطه‌ی (۳۶.۳) برقرار باشد.

$$GG^*+\left(-1+\frac{2k\hbar L\left(t\right)}{k\hbar L\left(t\right)-mx\dot{L}\left(t\right)}\right)BB^*=1 \tag{۳۶.۳}$$

با توجه به قسمت مستقل از زمان $|B|^2+|G|^2=1$ می‌باشد، اگر ضریب BB^* برابر یک باشد $|R|+|T|=1$ می‌شود در نتیجه بقای انرژی در حالت وابسته به زمان هم وجود خواهد داشت بنابراین

$$-1+\frac{2k\hbar L\left(t\right)}{k\hbar L\left(t\right)-mx\dot{L}\left(t\right)}=1 \quad\Rightarrow\quad L\left(t\right)=1 \tag{۳۷.۳}$$

یعنی پایستگی انرژی در صورتی امکان پذیر است که $L\left(t\right)$ یا همان دیواره‌ی متحرک ثابت باشد.

۲.۳ معادله شرودینگر یک بعدی با دو مرز متحرک

به تازگی ماکوسکی [۸] و همکارانش [۶۷–۶۹] راه‌حلی دقیق برای معادله شرودینگر [۹] در شرایط مرزی وابسته به زمان گزارش کرده‌اند. در این گزارش آنها ذره‌ی مقیدی [۱۰] بین دو دیواره‌ی نامتناهی ،که در آن یکی از دیواره‌ها ثابت در نظر گرفته شده و دیگری اجازه دارد که با توجه به تابع $L(t)$ حرکت کند را بررسی نموده‌اند. در مکانیک کوانتومی یکی از نتایج مهمی که دنبال می‌شود حل معادله شرودینگر است و یکی از ویژگی‌های شناخته شده و معروف معادله شرودینگر هموردایی گالیله [۱۱] می‌باشد بیشتر تمرکز بر حل معادله شرودینگر برای یک ذره در بین دو دیواره نامتناهی می‌باشد که یکی از آن‌ها ثابت در نظر گرفته شده است [۸۱، ۸۲].
در این مطالعه دو انگیزه وجود دارد، اول یافتن تبدیل های پذیرفته شده گروهی در مسئله، دوم بررسی فیزیکی مسئله می‌باشد. البته راه‌حل‌های دیگری هم برای بررسی معادله شرودینگر وجود دارد. در ادامه معادله شرودینگر با شرایط مرزی وابسته به زمان برای ذره‌ی بدون اسپین داخل چاه پتانسیل نامتناهی بررسی شده است که در آن هر دو دیواره در جهت‌های مخالف با سرعت‌های متفاوت $v_۱$ و $v_۲$ حرکت می‌کنند، اگر سرعت حرکت دیوارها ثابت باشد یک مجموعه راه حل دقیق برای هر مقدار از سرعت دیوارهای متحرک بدست می‌آید.

۱.۲.۳ هموردایی گالیله در یک پتانسیل اسکالر

فرض شده است که تعدادی چارچوب لختی S نسبت به معادله شرودینگر برای یک ذره بدون اسپین که در حضور یک پتانسیل اسکالر V معتبر است وجود دارد. معادله شرودینگر آن (۳۸.۳) تحت تبدیل شرایط مرزی دیریکله [۱۲] حل می‌شود [۶۷].

$$i\hbar\frac{\partial\Psi\left(x,t\right)}{\partial t}=\left[-i\frac{\hbar}{۲m}\nabla^{۲}+V\left(x,t\right)\right]\Psi\left(x,t\right) \tag{۳۸.۳}$$

با توجه به چارچوب لختی جدید S' که در سرعت $v_۱$ نسبت به S در حال حرکت است، مقدار تابع موج در موقعیت فضا_زمان دلخواه مرتبط است با Ψ در همان موقعیت توسط یک عامل فاز [۱۳] که این عامل فاز برای اطمینان از تغییر ناپذیری چگالی احتمال [۱۴] در آن موقعیت اعمال می‌شود که به صورت (۳۹.۳) می‌باشند.

$$\Psi\left(x,t\right)=e^{-i\varphi}\Psi'\left(x',t'\right) \tag{۳۹.۳}$$

---
[8] Makowski
[9] Schrödinger equation
[10] particle bounding
[11] Galilean covariance
[12] Dirichlet boundary conditions
[13] phasefactor
[14] probability density

در حالت کلی کار کردن با راه‌حل‌های دقیق برای یک سیستم با مرز متحرک منجر به شرایط مرزهای متحرک داده شده در رابطه‌ی (۴۰.۳) می‌شود.

$$\begin{aligned}\Psi\left(-\nu_1 t, t\right) &= 0\\ \Psi\left(a+\nu_2 t, t\right) &= 0\end{aligned} \tag{۴۰.۳}$$

معادله (۳۸.۳) تحت تبدیلات (۴۱.۳) که همان تبدیلات گالیله می‌باشند هموردا شناخته می‌شود.

$$\begin{aligned}& x' = x - \nu_1 t \qquad , \qquad t = t'\\ & \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad , \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial x'}\\ & V\left(x,t\right) = V\left(x',t'\right)\end{aligned} \tag{۴۱.۳}$$

در اینجا $V=0$ در نظر گرفته می‌شود، باید توجه داشت که تحت تبدیلات گالیله مشتق زمان Ψ و $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ به صورت (۴۲.۳) و (۴۳.۳) تغییر می‌کند.

$$\dot{\Psi}\left(x,t\right) = -i\dot{\varphi}e^{-i\varphi}\Psi'\left(x',t'\right) + e^{-i\varphi}\dot{\Psi}'\left(x',t'\right) \tag{۴۲.۳}$$

که $\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial t'}$ و $\dot{\varphi} = \frac{\partial \varphi}{\partial t'}$ می‌باشد، بنابراین

$$\begin{aligned}& \frac{\partial^2 \Psi\left(x,t\right)}{\partial x^2} = e^{-i\varphi}\left[-i\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)^2\right]\Psi'\left(x',t'\right)\\ & -2ie^{-i\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\frac{\partial \Psi'\left(x,t\right)}{\partial x'} + e^{-i\varphi}\frac{\partial^2 \Psi'\left(x,t\right)}{\partial^2 x'}\end{aligned} \tag{۴۳.۳}$$

حال معادله شرودینگر (۳۸.۳) را تحت تبدیلات گالیله می‌توان بدست آورد.

$$\begin{aligned}& -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi'\left(x,t\right)}{\partial x'^2} + \left(\frac{i\hbar^2}{m}\frac{\partial \varphi}{\partial x'} + i\hbar\nu_1\right)\frac{\partial \Psi'\left(x,t\right)}{\partial x'}\\ & + \left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right)^2 + i\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - \hbar\frac{\partial \varphi}{\partial t'} + \hbar\frac{\partial \varphi}{\partial x'}\right]\Psi'\left(x',t'\right) = i\hbar\frac{\partial \Psi'\left(x,t\right)}{\partial x'}\end{aligned} \tag{۴۴.۳}$$

این مسئله با همین روش غیر قابل حل می‌باشد و نیازمند تغییراتی است. در ادامه مختصات جدیدی تعریف می‌شود و حل معادله شرودینگر در این مختصات ادامه می‌یابد.

۲.۲.۳ تبدیل بنیادی

اصلی‌ترین پیشنهاد تغییر مسئله‌ی مرزی متحرک غیرقابل حل به مسئله‌ی قابل حل با یک مرز ثابت توسط تبدیلات (۴۵.۳)، (۴۶.۳)، (۴۷.۳) و (۴۸.۳) داده شده است [۸۳]. یک مختصات فضای مقیاس‌بندی جدید را تعریف کرده و در مسیر حل از t' به جای t استفاده می‌شود،

$$\bar{x} = \frac{x'}{L\left(t'\right)} \tag{۴۵.۳}$$

که در آن $L(t') = \left[1 + \frac{(\nu_1+\nu_2)t'}{a} \right]$ است که مشتق آن به صورت روابط (۴۶.۳) و (۴۷.۳) می‌باشد.

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{L(t')} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \tag{۴۶.۳}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2} = \frac{1}{L^2(t')} \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \tag{۴۷.۳}$$

مشتق زمانی آن به صورت (۴۸.۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\frac{\partial}{\partial t'} \to \frac{\partial}{\partial t'} - \frac{\bar{x}\dot{L}(t')}{L(t')} \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \tag{۴۸.۳}$$

شکل جدید معادله شرودینگر توسط این تبدیلات و جایگزین کردن $x' = \bar{x}L(t)$ به صورت معادله‌ی (۴۹.۳) می‌باشد.

$$\begin{aligned} &-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2 \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}^2} + \left(\frac{i\hbar^2}{mL^2}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} + \frac{i\hbar\nu_1}{L} + \frac{i\hbar\bar{x}\dot{L}}{L} \right)\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{x}} \\ &+ \left[\frac{\hbar^2}{2mL^2}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}}\right)^2 + \frac{i\hbar^2}{2mL^2}\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} - \hbar\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t'} + \hbar\frac{\bar{x}\dot{L}}{L}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} + \hbar\frac{\nu_1}{L}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \right]\Psi \\ &= i\hbar\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial t'} \end{aligned} \tag{۴۹.۳}$$

جملات دوم و سوم در معادله (۴۹.۳) به صورت جداگانه صفر در نظر گرفته شده است با صفر قرار دادن جمله‌ی دوم می‌توان $\bar{\varphi}$ را بدست آورد،

$$\left(\frac{i\hbar^2}{mL^2}\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} + \frac{i\hbar\nu_1}{L} + \frac{i\hbar\bar{x}\dot{L}}{L} \right) = 0 \tag{۵۰.۳}$$

به سادگی $\bar{\varphi}$ به صورت رابطه‌ی (۵۱.۳) بدست می‌آید.

$$\bar{\varphi} = -\frac{m}{\hbar}\left[\frac{\bar{x}^2\dot{L}}{2} + \nu_1\bar{x} \right] L + f(t') \tag{۵۱.۳}$$

به راحتی می‌توان $\bar{\varphi}'' = \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2}$ و $\dot{\bar{\varphi}} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t'}$ را به صورت (۵۲.۳) و (۵۳.۳) محاسبه کرد .

$$\bar{\varphi}'' = -\frac{m}{\hbar}L\dot{L} \tag{۵۲.۳}$$

$$\dot{\bar{\varphi}} = -\frac{m}{\hbar}\left[\frac{\bar{x}^2\dot{L}}{2} + \nu_1\bar{x} \right]\dot{L} - \frac{m}{\hbar}\frac{\bar{x}^2\ddot{L}L}{2} + \dot{f}(t') \tag{۵۳.۳}$$

دومین جمله از معادله (۵۳.۳) صفر خواهد شد زیرا $\ddot{L} = 0$ می‌باشد. با صفر قرار دادن جمله‌ی سوم معادله‌ی (۴۹.۳) به صورت (۵۴.۳) می‌شود.

$$\frac{1}{L^2}\left[\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}}\right)^2 + \frac{i\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}^2} - \hbar L^2\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t'} + \hbar\left(v_1 + \bar{x}\dot{L}\right)L\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} \right]\bar{\Psi} = 0 \tag{۵۴.۳}$$

با جایگذاری معادلات (۵۱.۳)، (۵۲.۳)، (۵۳.۳) درمعادله‌ی (۵۴.۳)، معادله‌ی (۵۵.۳) بدست می‌آید،

$$\frac{1}{2}mL^2\nu_1^2-\frac{i\hbar}{2}L\dot{L}-\hbar L^2\dot{f}\left(t'\right)=0 \tag{۵۵.۳}$$

بعد از اعمال تغییرات $\dot{f}\left(t'\right)$ به صورت (۵۶.۳) بدست می‌آید،

$$\dot{f}\left(t'\right)=\frac{m}{2\hbar}\nu_1^2-\frac{i\dot{L}}{2L} \tag{۵۶.۳}$$

و محاسبه‌ی $f\left(t'\right)$ توسط رابطه‌ی $L\left(t'\right)=\left[1+\frac{(\nu_1+\nu_2)t'}{a}\right]$ به سادگی صورت می‌پذیرد.

$$f\left(t'\right)=\frac{m}{2\hbar}\nu_1^2t'-\frac{i\dot{L}a}{2}\int\frac{dt'}{a+\left(\nu_1+\nu_2\right)t'} \tag{۵۷.۳}$$

جملات باقی مانده در (۴۹.۳) که مخالف صفر بودند به صورت (۵۸.۳) نوشته می‌شود.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{L^2}\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial\bar{x}^2}=i\hbar\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t'} \tag{۵۸.۳}$$

معادله (۵۸.۳) باید برابر یک ثابت در نظر گرفته شود که می‌توان از معادله ویژه مقداری استفاده کرد.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\bar{\Psi}}{\partial\bar{x}^2}=i\hbar L^2\frac{\partial\bar{\Psi}}{\partial t'}=E\bar{\Psi} \tag{۵۹.۳}$$

که E انرژی است با استفاده از تفکیک پذیری متغیرها به صورت (۶۰.۳) بدست می‌آید.

$$\bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=X\left(\bar{x}\right)T\left(t'\right) \tag{۶۰.۳}$$

قسمت فضایی معادله (۵۸.۳) به صورت (۶۱.۳) نوشته می‌شود،

$$-\frac{d^2X\left(\bar{x}\right)}{d\bar{x}^2}=k^2X(\bar{x}) \tag{۶۱.۳}$$

که در آن $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$ می باشد، بنابراین قسمت فضایی تابع موج به صورت (۶۲.۳) بدست می‌آید.

$$X\left(\bar{x}\right)=A\sin k\bar{x}+B\cos k\bar{x} \tag{۶۲.۳}$$

برای قسمت وابسته به زمان آن باید به صورت زیر عمل کرد

$$i\hbar L^2\dot{T}\left(t'\right)=ET\left(t'\right) \tag{۶۳.۳}$$

بایستی قسمت زمانی تابع موج به صورت معادله‌ی (۶۴.۳) محاسبه شود.

$$T\left(t'\right)=\exp(-\frac{iE}{\hbar}\int\frac{dt'}{L^2(t')}) \tag{۶۴.۳}$$

بنابراین تابع موج که در معادله‌ی (۶۰.۳) در نظر گرفته شده به صورت (۶۵.۳) بدست می‌آید

$$\bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=\exp(-\frac{iE}{\hbar}\int\frac{dt'}{L^{2}(t')})\left[A\sin k\bar{x}+B\cos k\bar{x}\right] \tag{۶۵.۳}$$

معادله (۶۵.۳) حل صحیح معادله‌ی (۴۹.۳) می‌باشد اگر برای هر دو مورد $\bar{x}=a$ و $\bar{x}=0$ صرف نظر شود. برای $\bar{x}=0$ تابع $\bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=0$ بدیهی می‌باشد. بنابراین با اعمال شرط مرزی دوم، ثابت k را باید به صورتی انتخاب کرد که وقتی $\bar{x}=a$ می‌باشد $\bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=0$ بدست آید.

تحت تبدیلات (۴۱.۳) و معادله‌ی (۴۵.۳) شرایط مرزی در معادله‌ی (۴۰.۳) به صورت (۶۶.۳) تبدیل می‌شود.

$$\bar{\Psi}\left(a,t'\right)=0 \quad , \quad \bar{\Psi}\left(0,t'\right)=0 \tag{۶۶.۳}$$

k را با استفاده از شرایط مرزی می‌توان بدست آورد،

$$\bar{x}=0: \qquad \bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=\Psi'\left(\frac{x'}{L\left(t'\right)},t'\right)=0\Rightarrow \quad B=0 \tag{۶۷.۳}$$

$$\bar{x}=0: \qquad \bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=0\Rightarrow \quad k=\frac{n\pi}{a} \tag{۶۸.۳}$$

بنابراین راه حل دقیق مسئله به صورت (۶۹.۳) می‌شود.

$$\Psi\left(x,t\right)=A\exp(-\frac{iE}{\hbar}\int\frac{dt'}{L^{2}(t)})\sin\left[\frac{n\pi}{a}\frac{x-\nu_{1}t}{1+\frac{(\nu_{1}+\nu_{2})t'}{a}}\right]e^{-i\varphi} \tag{۶۹.۳}$$

که A در آن ثابت بهنجارسازی و φ و $f(t)$ هم به صورت (۷۰.۳) و (۷۱.۳) بدست می‌آید.

$$\varphi=-\frac{m}{\hbar}\left[\frac{1}{2}\frac{\left(x-\nu_{1}t\right)^{2}}{L}\dot{L}+\nu_{1}\left(x-\nu_{1}t\right)\right]+f\left(t\right) \tag{۷۰.۳}$$

$$f\left(t\right)=\frac{m}{2\hbar}{\nu_{1}}^{2}t-\frac{i\dot{L}a}{2}\int\frac{dt}{a+(\nu_{1}+\nu_{2})t} \tag{۷۱.۳}$$

در بخش بعد با توجه به این روش چاه پتانسیل با مرزهای متقارن مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۳.۲.۳ چاه پتانسیل با مرزهای متقارن متحرک

همانطور که ملاحظه شد در مثال قبل چاه پتانسیل نامتناهی با دیواره‌های متحرک بررسی شد و با حل و بررسی معادله شرودینگر با استفاده از تبدیلات گالیله و با اعمال یکسری تغییرات اساسی در حل، تابع موج ذره‌ی بدون اسپین در چاه پتانسیل نامتناهی متحرک بدست آمد.
در این بخش ذره‌ی بدون اسپین در چاه پتانسیل متقارن دیواره‌های متحرکی قرار دارد که با

سرعت‌های ثابت v_1 و v_2 در دو جهت مخالف در حال حرکتند با این تفاوت که مرزهای این چاه به صورت متقارن در نظر گرفته می‌شود.

معادله شرودینگر را مانند معادله‌ی (۳۸.۳) در نظر گرفته و تحت تبدیلات مطرح شده در بخش ۱.۲.۳ تابع موج بدست می‌آید، با این تفاوت که به دلیل تقارن چاه پتانسیل شرایط مرزی متحرک به صورت رابطه‌ی (۷۲.۳) تعریف می‌شود.

$$\Psi\left(+a+\nu_2 t,t\right)=0 \quad , \quad \Psi\left(-a+\nu_1 t,t\right)=0 \tag{۷۲.۳}$$

تابع موج صریح شبیه به رابطه‌ی (۶۵.۳) محاسبه می‌شود و تحت تبدیلات (۴۱.۳) و (۴۵.۳) شرایط مرزی در معادله‌ی (۷۲.۳) به صورت (۷۳.۳) تبدیل می‌شود.

$$x=\pm a: \qquad \bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=0 \tag{۷۳.۳}$$

شرط مرزی را طوری باید اعمال کرد که ثابت k بدست آمده منجر به صفر شدن $\bar{\Psi}\left(\bar{x},t'\right)=0$ در $\bar{x}=\pm a$ شود. بنابراین

$$\bar{\Psi}\left(a,t'\right)=0 \quad , \quad \bar{\Psi}\left(-a,t'\right)=0 \tag{۷۴.۳}$$

در نظر گرفته می‌شود.

$$A\sin ka+B\cos ka=0 \tag{۷۵.۳}$$

$$-A\sin ka+B\cos ka=0 \tag{۷۶.۳}$$

با استفاده از (۷۵.۳) و (۷۶.۳)، k محاسبه می‌شود.

$$2B\cos ka=0 \Rightarrow \quad \cos ka=0: \quad k=\frac{n\pi}{a}-\frac{n\pi}{2} \tag{۷۷.۳}$$

بنابراین تابع موج برای n های زوج و فرد به صورت (۷۷.۳) عمل می‌کند.

$$\text{زوج}: \quad n=2,4,6,\ldots \quad \rightarrow \quad \bar{\Psi}\propto\sin\frac{n\pi\bar{x}}{a} \tag{۷۸.۳}$$

$$\text{فرد}: \quad n=1,3,5,\ldots \quad \rightarrow \quad \bar{\Psi}\propto\cos\frac{n\pi\bar{x}}{a} \tag{۷۹.۳}$$

در نهایت تابع موج صریح برای چاه پتانسیل با مرزهای متقارن متحرک برای n های فرد و زوج به ترتیب به صورت (۸۰.۳) و (۸۱.۳) بدست می‌آید.

$$\text{زوج}: \quad \Psi\left(x,t\right)=B\exp(-\frac{iE}{\hbar}\int\frac{dt}{L^2(t)})\sin\left[\frac{n\pi}{a}\frac{x-\nu_1 t}{1+\frac{(\nu_1+\nu_2)t}{a}}\right]e^{-i\varphi} \tag{۸۰.۳}$$

$$\text{فرد}: \quad \Psi\left(x,t\right)=B\exp(-\frac{iE}{\hbar}\int\frac{dt}{L^2(t)})\cos\left[\frac{n\pi}{a}\frac{x-\nu_1 t}{1+\frac{(\nu_1+\nu_2)t}{a}}\right]e^{-i\varphi} \tag{۸۱.۳}$$

بنابراین با توجه به شرایط مرزی می‌توان نتیجه گرفت که تابع موج برای پاریته زوج و فرد برقرار است و تقارن دارد.

۳.۳ حل معادله کلاین_ گوردن با استفاده از پتانسیل با دیواره‌ی متحرک

معادله‌ی کلاین –گوردن [۱۵] حالت نسبیتی معادله شرودینگر است و برای توجیح ذرات با اسپین صفر به کار می‌رود این معادله به اسم دو فیزیکدان به نام های اسکار کلاین [۱۶] و والتر گوردن [۱۷] نامگذاری شده است. معادله ی‌کلاین –گوردن برای یک ذره‌ی آزاد با اسپین صفر به صورت (۸۲.۳) می‌باشد.

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi=\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi \qquad (۸۲.۳)$$

برای ذره با اسپین صفر [۲]، معادله‌ی کلاین گوردن با پتانسیل متحرک به صورت معادله‌ی (۸۳.۳) ظاهر می‌شود [۸۴].

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial t}-V(x-vt)\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m^2\right]\psi=0 \qquad (۸۳.۳)$$

یک روش استاندارد حل معادله کلاین –گوردن، انتقال این معادله در پتانسیل متحرک به یک معادله مشابه به آن در پتانسیل مستقل از زمان می باشد. با توجه به اینکه این معادله نسبت به تبدیلات لورنتس هموردا هستند؛ بنابراین حل مسئله وابسته به زمان می‌تواند با توجه به هموردا بودن معادله‌ی کلاین_ گوردن نسبت به تبدیلات لورنتس بهبود یابد. تبدیلات لورنتس به صورت (۸۴.۳) و (۸۵.۳) در نظر گرفته می‌شود [۸۴].

$$\tau=\lambda(t-vx) \qquad (۸۴.۳)$$

$$y=\lambda(x-vt) \qquad (۸۵.۳)$$

که در آن $\lambda=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ می‌باشد، همچنین ψ به صورت (۸۶.۳) تعریف می‌شود.

$$\psi=e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\bar{\psi} \qquad (۸۶.۳)$$

با استفاده از تبدیلات لورنتس، روابط (۸۴.۳)، (۸۵.۳)، (۸۶.۳) و با جایگذاری رابطه (۸۷.۳) در (۸۳.۳) شکل جدید معادله کلاین_ گوردن به صورت (۸۸.۳) تبدیل می‌شود.

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t}\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x}=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}-v\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\\ \frac{\partial}{\partial t}=\lambda\left(\frac{\partial}{\partial \tau}-v\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{array} \qquad (۸۷.۳)$$

[15] Klein-Gordon equation
[16] Oskar Klein
[17] Walter Gordon

$$\left[\underbrace{\left(i\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-v\frac{\partial}{\partial y}\right)-V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)^{۲}}_{I}+\underbrace{\lambda^{۲}\left(\frac{\partial}{\partial y}v\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}v\frac{\partial}{\partial\tau}\right)}_{II}-m^{۲}\right]\psi=۰ \qquad (۸۸.۳)$$

در این مرحله محاسبات هر قسمت از معادله‌ی (۸۸.۳) به صورت جداگانه در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned}I&=\left(i\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-v\frac{\partial}{\partial y}\right)-V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)^{۲}\psi\\&=\left(i\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-v\frac{\partial}{\partial y}\right)-V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)\left(i\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-v\frac{\partial}{\partial y}\right)-V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)\psi\\&=[-\lambda^{۲}v^{۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial\tau^{۲}}+\lambda^{۲}v\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{\partial}{\partial y}-i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}+\lambda^{۲}v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\tau}-\lambda^{۲}v^{۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}\\&+i\lambda vV\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial y}+i\lambda v\frac{\partial V\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{\partial y}-i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}+i\lambda vV\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial y}+V^{۲}\left(\frac{y}{\lambda}\right)]\psi\end{aligned} \qquad (۸۹.۳)$$

و همچنین محاسبات قسمت دوم رابطه‌ی (۸۸.۳) به صورت (۹۰.۳) می‌باشد.

$$\begin{aligned}II&=\lambda^{۲}\left(\frac{\partial}{\partial y}-v\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}-v\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\psi\\&=\left[\lambda^{۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}-\lambda^{۲}v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\tau}-\lambda^{۲}v\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\tau}-\lambda^{۲}v^{۲}\frac{\partial^{۲}}{\partial\tau^{۲}}\right]\psi\end{aligned} \qquad (۹۰.۳)$$

بنابراین با جمع رابطه های (۸۹.۳) و (۹۰.۳) معادله (۸۸.۳) به شکل (۹۱.۳) در می‌آید.

$$\begin{aligned}&\left\{\left(i\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-v\frac{\partial}{\partial y}\right)-V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)^{۲}+\lambda^{۲}\left(\frac{\partial}{\partial y}v\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}v\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\right\}\psi\\&=\left[-\frac{\partial^{۲}}{\partial\tau^{۲}}-۲i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}+۲i\lambda vV\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial y}+i\lambda v\frac{\partial V\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{\partial y}+V^{۲}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right]\psi\end{aligned} \qquad (۹۱.۳)$$

حال $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ به صورت (۹۲.۳) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\bar{\psi}\right]\\&=-iv\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\bar{\psi}+\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\right)e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\end{aligned} \qquad (۹۲.۳)$$

همچنین $\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial y^{۲}}$ به صورت (۹۳.۳) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{۲}\psi}{\partial y^{۲}}&=\frac{\partial^{۲}}{\partial y^{۲}}\left[e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\bar{\psi}\right]\\&=\frac{\partial}{\partial y}\left[-iv\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\bar{\psi}+\left(\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}\right)e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\right]\\&=e^{-iv\lambda\int ydyV\left(\frac{y}{\lambda}\right)}\left\{\frac{\partial^{۲}\bar{\psi}}{\partial y^{۲}}-۲iv\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial y}-\left(iv\lambda\frac{\partial V\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{\partial y}+v^{۲}\lambda^{۲}V^{۲}\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)\bar{\psi}\right\}\end{aligned}$$

(۹۳.۳)

با جایگذاری روابط (۹۱.۳)، (۹۲.۳) و (۹۳.۳) در رابطه‌ی (۸۸.۳) شکل جدیدی از معادله‌ی کلاین گوردن با پتانسیل به صورت (۹۴.۳) بدست می‌آید.

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-2i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+v^2\lambda^2V^2\left(\frac{y}{\lambda}\right)+V^2\left(\frac{y}{\lambda}\right)-m^2\right]\bar{\psi}=0$$
$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-2i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\frac{\partial}{\partial\tau}+\lambda^2V^2\left(\frac{y}{\lambda}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-m^2\right]\bar{\psi}=0 \qquad (۹۴.۳)$$
$$\Rightarrow\quad\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}-\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)^2+\frac{\partial^2}{\partial y^2}-m^2\right]\bar{\psi}=0$$

در اینجا به بررسی معادله پیوستگی پرداخته می‌شود اگر

$$\rho=\bar{\rho}+v\bar{J} \qquad (۹۵.۳)$$

$$J=\bar{J}+v\bar{\rho} \qquad (۹۶.۳)$$

باشد معادله پیوستگی در سیستم (x,t) به صورت $\frac{\partial}{\partial t}\rho+\frac{\partial}{\partial x}J=0$ می‌باشد با جایگذاری تبدیلات پیمانه‌ای $\rho\to\bar{\rho}$ و $J\to\bar{J}$ معادله پیوستگی در سیستم (y,τ) باید به شکل (۹۷.۳) برقرارشود.

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\rho}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{J}=0 \qquad (۹۷.۳)$$

این تبدیلات باید در معادله پیوستگی در سیستم (x,t) جایگذاری شود.

$$\lambda\left(\frac{\partial}{\partial\tau}-v\frac{\partial}{\partial y}\right)(\bar{\rho}+v\bar{J})+\lambda\left(\frac{\partial}{\partial y}-v\frac{\partial}{\partial\tau}\right)(\bar{J}+v\bar{\rho})=0$$
$$\lambda\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\rho}+\lambda v\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{J}-\lambda v\frac{\partial}{\partial y}\bar{\rho}-\lambda v^2\frac{\partial}{\partial y}\bar{J}+\lambda\frac{\partial}{\partial y}\bar{J}+\lambda v\frac{\partial}{\partial y}\bar{\rho}-\lambda v\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{J}-\lambda v^2\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\rho}=0$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\rho}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{J}=0$$

با در نظر گرفتن تبدیلات فوق، معادله پیوستگی در سیستم (y,τ) نیز برقرار می‌باشد. در معادله‌ی کلاین_ گوردن برای چگالی جریان و چگالی بار در سیستم (y,τ) برقرار می‌باشد [۸۴].

$$\bar{J}=\bar{\psi}^*\frac{\partial}{\partial y}\bar{\psi}-\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial y}\bar{\psi}^* \qquad (۹۸.۳)$$

$$\bar{\rho}=\bar{\psi}\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\psi}^*-\bar{\psi}^*\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{\psi}-2i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)|\bar{\psi}|^2 \qquad (۹۹.۳)$$

۱.۳.۳ ذره‌ی کلاین_ گوردن در سد پتانسیل با دیواره‌ی متحرک

برای مثال ذره کلاین_ گوردن در سد پتانسیل متحرک بررسی می‌شود. در سیستم (y,τ) ابتدا جواب‌های معادله‌ی کلاین_ گوردن باید بدست آورده شوند. برای حل معادله‌ی (۹۴.۳) به

روش جداسازی متغیرها عمل کرده و با توجه به مرجع [۸۴] تابع موج (۱۰۰.۳) پیشنهاد داده می‌شود.

$$\bar{\psi} = e^{-i\varepsilon\tau}\eta(y) \tag{۱۰۰.۳}$$

پتانسیل به صورت سد ظاهر شده است بنابراین باید به صورت معادله‌ی (۱۰۱.۳) در سه ناحیه در نظر گرفته شود.

$$V(y) = \begin{cases} 0 & y \succ a \\ V_0 & -a \leqslant y \leqslant a \\ 0 & y \prec -a \end{cases} \tag{۱۰۱.۳}$$

برای انجام محاسبات ابتدا از رابطه‌ی (۹۴.۳) استفاده می‌شود.

$$\left[\left(i\tfrac{\partial}{\partial\tau} - \lambda V\left(\tfrac{y}{\lambda}\right)\right)^2 + \tfrac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2\right]\bar{\psi} = 0$$

$$\left[\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right)\left(i\frac{\partial}{\partial\tau} - \lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2\right]\bar{\psi} = 0$$

$$-\frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\tau^2} - 2i\lambda\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\tau}V\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \lambda^2V^2\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial y^2} - m^2\bar{\psi} = 0 \tag{۱۰۲.۳}$$

$\bar{\psi}$ پیشنهاد شده در رابطه‌ی (۱۰۰.۳) را در (۱۰۲.۳) جایگذاری کرده و معادله‌ی (۱۰۳.۳) بدست می‌آید.

$$-i^2\varepsilon^2\eta(y)e^{-i\varepsilon\tau} - 2i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right)i\varepsilon\eta(y)e^{-i\varepsilon\tau} + \lambda^2V^2\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \frac{\partial^2\eta(y)}{\partial y^2}e^{-i\varepsilon\tau} - m^2e^{-i\varepsilon\tau}\eta(y) = 0$$

$$\left[\left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right) + \lambda^2V^2\left(\frac{y}{\lambda}\right)\right) - m^2\right]\eta(y) + \frac{\partial^2\eta(y)}{\partial y^2} = 0 \tag{۱۰۳.۳}$$

جواب معادله‌ی (۱۰۳.۳) در هر یک از ناحیه‌های سد پتانسیل به صورت مجزا محاسبه می‌شود. معادله‌ی (۱۰۳.۳) در ناحیه‌ی اول سد پتانسیل به معادله‌ی (۱۰۵.۳) تبدیل می‌شود.

$$if \qquad y \prec -a \quad \rightarrow \quad V\left(\frac{y}{\lambda}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2\eta(y)}{\partial y^2} + \left[\varepsilon^2 - m^2\right]\eta(y) = 0 \tag{۱۰۴.۳}$$

$$\frac{\partial^2\eta(y)}{\partial y^2} + p^2\eta(y) = 0 \tag{۱۰۵.۳}$$

که در آن $p^2 = \left[\varepsilon^2 - m^2\right]$ می‌باشد. بنابراین معادله‌ی (۱۰۵.۳) معادله‌ی یک نوسانگر در ناحیه‌ی $y \prec -a$ می‌باشد که جواب این معادله به صورت (۱۰۶.۳) می‌باشد.

$$\eta_I(y) = Ae^{ipy} + Be^{-ipy} \tag{۱۰۶.۳}$$

ضریب عبور ذره $A=1$ در نظر گرفته می‌شود.

برای ناحیه‌ی دوم سد پتانسیل، معادله‌ی (۱۰۳.۳) به صورت معادله‌ی (۱۰۷.۳) بدست می‌آید.

$$if \qquad y \prec |a| \quad \rightarrow \quad V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=V_0$$

$$\left[\left(\varepsilon^2-2\varepsilon\lambda V_0+\lambda^2 V_0{}^2\right)-m^2\right]\eta(y)+\frac{\partial^2\eta(y)}{\partial y^2}=0$$

اگر $\lambda V_0=\lambda_0$ باشد

$$\frac{\partial^2\eta(y)}{\partial y^2}+\left[(\varepsilon-\lambda_0)^2-m^2\right]\eta(y)=0$$

باید توجه داشت که $(\varepsilon-\lambda_0)^2-m^2=q^2$ در نظر گرفته می‌شود بنابراین یک معادله‌ی نوسانگر هماهنگ ایجاد می‌شود.

$$\frac{\partial^2\eta(y)}{\partial y^2}+q^2\eta(y)=0 \tag{۱۰۷.۳}$$

از حل این معادله جواب در ناحیه‌ی دوم سد پتانسیل به صورت (۱۰۸.۳) بدست می‌آید.

$$\eta_{II}(y)=Ce^{qy}+De^{-qy} \tag{۱۰۸.۳}$$

برای ذره کلاین_گوردن در ناحیه سوم سد پتانسیل مشابه ناحیه‌ی اول آن عمل کرده با این تفاوت که دیگر برگشت موج ندارد.

$$if \qquad y \succ a \quad \rightarrow \quad V\left(\frac{y}{\lambda}\right)=0$$

$$\eta_{III}(y)=Fe^{ipy} \tag{۱۰۹.۳}$$

با جایگذاری روابط (۱۰۶.۳)، (۱۰۸.۳) و (۱۰۹.۳) در رابطه‌ی (۱۱۰.۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\bar\psi_I&=e^{-i\tau\varepsilon}\left(e^{ipy}+Be^{-ipy}\right)\\ \bar\psi_{II}&=e^{-i\tau\varepsilon}\left(Ce^{qy}+De^{-qy}\right)\\ \bar\psi_{III}&=e^{-i\tau\varepsilon}\left(Fe^{ipy}\right)\end{aligned} \tag{۱۱۰.۳}$$

حالا شرایط مرزی را اعمال کرده و ضرایب بدست می‌آید. اگر $\bar\psi'=\frac{d\bar\psi}{dy}$ باشد

$$\begin{aligned}\bar\psi_I=\bar\psi_{II}\big|_{y=-a} &\quad\rightarrow\quad e^{-ipa}+Be^{ipa}=Ce^{-qa}+De^{qa}\\ \bar\psi'_I=\bar\psi'_{II}\big|_{y=-a} &\quad\rightarrow\quad ip\left(e^{-ipa}-Be^{ipa}\right)=q\left(Ce^{-qa}-De^{qa}\right)\\ \bar\psi_{II}=\bar\psi_{III}\big|_{y=a} &\quad\rightarrow\quad Ce^{qa}+De^{-qa}=Fe^{ipa}\\ \bar\psi_{III}=\bar\psi_{II}\big|_{y=a} &\quad\rightarrow\quad q\left(Ce^{qa}+De^{-qa}\right)=ip\left(Fe^{ipa}\right)\end{aligned} \tag{۱۱۱.۳}$$

با استفاده از ضرایب پایستگی چگالی جریان به صورت (۱۱۲.۳) بررسی می‌شود.

$$\frac{\hbar p}{m}\left[1-|B|^2\right]=\frac{\hbar q}{m}\left[|C|^2-|D|^2\right]=\frac{\hbar p}{m}\left[|F|^2\right] \tag{۱۱۲.۳}$$

بنابراین پایستگی چگالی جریان در ناحیه‌ی اول و سوم برقرار می‌باشد. حال برای بررسی معادله‌ی پیوستگی (۹۷.۳) باید با استفاده از روابط (۹۵.۳) و (۹۶.۳) به ترتیب زیر بررسی شود. ابتدا ρ و J در هر ناحیه به صورت مجزا محاسبه می‌شود.

در ناحیه‌ی اول:

$$\bar{J}_I=\bar{\psi}_I^*\frac{\partial\bar{\psi}_I}{\partial y}-\bar{\psi}_I\frac{\partial\bar{\psi}_I^*}{\partial y}$$

$$\bar{J}_I=2ip\,(1-B^*B) \tag{۱۱۳.۳}$$

$$\bar{\rho}_I=\bar{\psi}_I\frac{\partial\bar{\psi}_I^*}{\partial\tau}-\bar{\psi}_I^*\frac{\partial\bar{\psi}_I}{\partial\tau}-2i\lambda_0 V\left(\frac{y}{\lambda}\right)|\bar{\psi}_I|^2$$

$$\bar{\rho}_I=2i\varepsilon\left(1+Be^{-2ipy}+B^*e^{2ipy}+B^*B\right) \tag{۱۱۴.۳}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}J_I&=\bar{J}_I+v\bar{\rho}_I\\&=2ip\,(1-B^*B)+v2i\varepsilon\left(1+Be^{-2ipy}+B^*e^{2ipy}+B^*B\right)\end{aligned} \tag{۱۱۵.۳}$$

در ناحیه‌ی دوم:

$$\bar{J}_{II}=0 \tag{۱۱۶.۳}$$

$$\bar{\rho}_{II}=(2i\varepsilon-2i\lambda_0V_0)\left(CC^*e^{2qy}+DD^*e^{-2qy}+DC^*+CD^*\right) \tag{۱۱۷.۳}$$

$$\begin{aligned}J_{II}&=\bar{J}_{II}+v\bar{\rho}_{II}\\&=(2i\varepsilon-2i\lambda_0V_0)\left(CC^*e^{2qy}+DD^*e^{-2qy}+DC^*+CD^*\right)\end{aligned} \tag{۱۱۸.۳}$$

در ناحیه‌ی سوم:

$$\bar{J}_{III}=2ipF^*F \tag{۱۱۹.۳}$$

$$\bar{\rho}_{III}=-2i\varepsilon|F|^2 \tag{۱۲۰.۳}$$

$$J_{III}=\bar{J}_{III}+v\bar{\rho}_{III}=(2ip-2i\varepsilon v)\,|F|^2 \tag{۱۲۱.۳}$$

حال باید نشان داد که برای تابع موج سد پتانسیل با مرزهای متحرک $R+T=1$ برقرار می‌باشد.

$$\begin{aligned}J_{tra}&=J_{III}\\J_I&=J_{inc}-J_{ref}\end{aligned} \tag{۱۲۲.۳}$$

$$\bar{\psi}_{inc} = e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy} \tag{۱۲۳.۳}$$

با توجه به (۲۷.۳) و (۲۸.۳) و روابط مربوط به $\bar{\rho}_{inc}$ ، $\bar{J}_{inc}$ و J_{inc} که به صورت زیر می‌باشد R و T بدست می‌آید.

$$\bar{\rho}_{inc} = \bar{\psi}_{inc} \frac{\partial \bar{\psi}^*_{inc}}{\partial \tau} - \bar{\psi}^*_{inc} \frac{\partial \bar{\psi}_{inc}}{\partial \tau}$$

$$\bar{J}_{inc} = \bar{\psi}^*_{inc} \frac{\partial \bar{\psi}_{inc}}{\partial y} - \bar{\psi}_{inc} \frac{\partial \bar{\psi}^*_{inc}}{\partial y}$$

$$J_{inc} = \bar{J}_{inc} + v\bar{\rho}_{inc}$$

بنابراین

$$\bar{\rho}_{inc} = ۲i\left(\varepsilon - \lambda_۰\right) \tag{۱۲۴.۳}$$

$$\bar{J}_{inc} = ۲ip \tag{۱۲۵.۳}$$

$$J_{inc} = ۲i\left(p + v\varepsilon - v\lambda_۰\right) \tag{۱۲۶.۳}$$

$$J_{ref} = ۲i\left(v\lambda_۰ + p\left(B^*B\right) - \varepsilon v\left(Be^{-۲ipy} + B^*e^{۲ipy} + B^*B\right)\right) \tag{۱۲۷.۳}$$

حال اگر $v = ۰$ باشد و $p = ۰$ و q حقیقی باشد $R + T = ۱$ می‌شود.

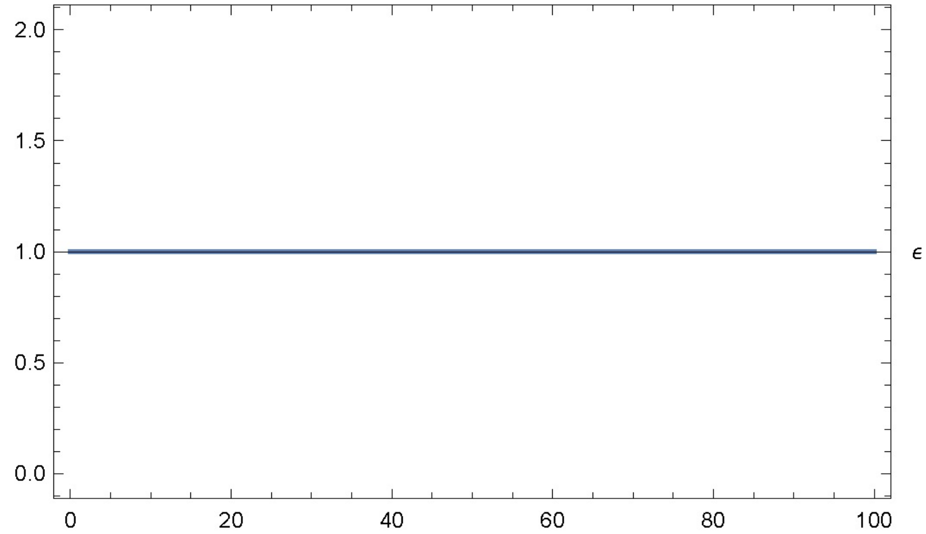
اگر $v \neq ۰$ در نظر گرفته شود ، $p = ۰$ و q حقیقی باشد $R + T = ۱$ می‌شود.

اگر $v \neq ۰$ ، $p = ۰$ و q حقیقی نباشد $R + T = ۱$ می‌باشد.

بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با وجود حرکت همزمان ذره و دیوارهای سد پتانسیل بقای انرژی برقرار می‌باشد و می‌توان آن را در نمودار ۱.۳.۳ مشاهده کرد. (باید $V_۰ = ۱$ باشد در غیر اینصورت بقا وجود ندارد.)

۴.۳ کاربردی از پتانسیل با دیواره‌ی متحرک

در این بخش به بررسی مثالی کاربردی برای پتانسیل‌هایی با دیواره‌های متحرک (وابسته به زمان) پرداخته می‌شود. نظریه‌ی ترمودینامیک زمان متناهی ETT یک ابزار مفید و قدرتمند برای بررسی و بهینه‌سازی عملکرد سیستم‌های گرمایی مختلف می‌باشد. در این بین ماشین‌های استرلینگ برای تبدیل گرما به کار مکانیکی که منجر به بازده بالای آن می‌شود توجه بسیاری را جلب کرده است. بازده ایده‌آل ماشین گرمایی استرلینگ می‌تواند مشابه بازده ماشین گرمایی کارنو باشد که بالاترین بازده و راندمان را دارد. با توسعه فناوری نانو تکنولوژی خواص کوانتومی که همان محیط کار می‌باشد در تجزیه و تحلیل و بهینه سازی چرخه‌ی ترمودینامیک کوانتومی مورد توجه قرار گرفت [۸۵].



شکل ۲.۳: نمودار $\varepsilon - (R+T)$ بقای انرژی را برای ذره‌ی کلاین_گوردن در سد پتانسیل متحرک نشان می‌دهد.

اسکوویل [۱۸] و شولتز_دوبیش [۱۹] مفهوم ماشین گرمایی را ارائه دادند [۸۶] سیستم‌های کوانتومی متفاوت به عنوان مواد کار در نظر گرفته شده‌اند مانند نوسانگر هماهنگ بدون برهمکنش، سیستم‌های اسپینی و یا سیستم‌های دو ترازی و چندترازی. در سال ۱۹۸۴ کاسلوف [۲۰] [۸۷] یک ماشین گرمایی کوانتومی که در آن ماده‌ی کار بی شمار نوسانگر هماهنگ بدون برهمکنش بود را بررسی کرد و برخی از پارامترهای عملکرد اساسی آن را بدست آورد. در سال ۲۰۰۰ بندر [۲۱] و همکارانش یک ماشین گرمایی رو به جلوی کارنوی کوانتومی را بررسی کردند [۸۸] که در آن یک ذره که در جعبه‌ی یک بعدی قرار داشت را به عنوان محیط کار قرار دادند و در آن توان، آنتروپی و بازده ماشین را بدست آوردند. بازده به دست آمده در این ماشین مشابه بازده ماشین گرمایی کارنو بود.

Abe پیشنهاد داد [۸۹] که اگر پهنای چاه پتانسیل با یک سرعت متناهی تغییر کند $\tau = \frac{۲(L_C - L_A)}{\bar{v}}$ [که τ در آن زمان تناوب چرخه، $(L_C - L_A)$ ۲ تغییرات کل طول پتانسیل در هر چرخه می‌باشد و $\bar{v}$ سرعت میانگین تغییر مکان دیواره‌ی پتانسیل است.] بدست می‌آید، وی توان خروجی و بازده این سیستم را هم بررسی نمود. انواع مختلف سیستم‌های برگشت ناپذیر [۹۰] مانند آهنگ محدود انتقال گرما، نشت گرمای بیهوده، بازسازی ناقص و اصطکاک داخلی در تحلیل بهینه سازی برای چرخه‌های ترمودینامیک کوانتومی در نظر گرفته شده‌اند. Wu و همکارانش [۹۱] یک چرخه‌ی ماشین گرمایی استرلینگ برگشت‌ناپذیر که در آن بازسازی

[18] Scovil
[19] Schultz-Dubish
[20] Kaslof
[21] Bender

غیرایده‌آل در نظر گرفته شده بود را بررسی کردند. وانگ [22] و همکارانش [۹۲] یک ماشین گرمایی کوانتومی برگشت ناپذیر سه ترازی را ایجاد کردند که در آن یک فرمیون غیر برهمکنشی که در تله‌ی یک جعبه‌ی یک بعدی محدود شده بود بررسی می‌شد.

در این سیستم‌های کوانتومی که توسط افراد زیادی مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته شده است ذره ماده‌ی کار و چرخه‌ی این سیستم‌ها برگشت ناپذیر در نظر گرفته می‌شدند. بنابراین تحت شرایط ذکر شده، ایجاد یک ماشین گرمایی استرلینگ کوانتومی با نمونه‌های بیشمار از یک ذره‌ی موجود در جعبه‌ی یک بعدی که شامل بازسازی ناقص و نشت گرما است با معنا می‌باشد. سیستم کوانتومی مورد نظر یک ذره در جعبه‌ی یک بعدی (چاه پتانسیل نامتناهی) می‌باشد که دیواره‌ی این چاه در $x=\circ$ و $x=L$ در نظر گرفته می‌شود یکی از دیواره‌ها $x=L$ متحرک در نظر گرفته می‌شود. می‌توان آن را مانند نقش پیستون در ترمودینامیک کلاسیکی در نظر گرفت که در استوانه جابه‌جا می‌شود. چرخه‌ی مورد مطالعه از دو فرآیند همدما و دو فرآیند هم‌حجم ساخته شده است. ابتدا براساس معادلات شرودینگر عبارات توان خروجی و بازده آن بدست می‌آید و در آن اثرات بازسازی ناقص و نشت گرما بر بازده هم مورد تحلیل قرار می‌گیرد [۸۵]. برای بررسی راحت‌تر این سیستم کوانتومی باید آن را شامل تعداد زیادی کپی از ذرات در نظر گرفت.

۱.۴.۳ دینامیک کوانتومی سیستم وابسته به زمان

با توجه به اینکه ذره در چاه پتانسیل نامتناهی (جعبه‌ی یک بعدی) می‌باشد، معادله شرودینگر به صورت (۱۲۸.۳) خواهد بود.

$$\frac{d^{۲}\psi}{dx^{۲}}+\frac{۲mE}{\hbar^{۲}}\psi=\circ \qquad (۱۲۸.۳)$$

در آن $\psi(x)$ تابع موج است و باید شرایط مرزی $\psi(L)=\circ$ و $\psi(\circ)=\circ$ را شامل شود. m و E به ترتیب جرم و انرژی ذره هستند، ثابت پلانک $h=۶/۶۳\times۱\circ^{-۳۴}$ و $\hbar=\frac{h}{۲\pi}=۱/\circ۵\times۱\circ^{-۳۴}\,(Js)$ در سیستم بین‌المللی در نظر گرفته می‌شود. راه حل کلی این معادله‌ی شرودینگر ترکیب خطی ویژه تابع‌های این حالت‌ها می‌باشد،

$$\psi(x)=\sum_{n=۱}^{\infty}a_n\varphi_n \qquad (۱۲۹.۳)$$

که در آن

$$\varphi_n(x)=\sqrt{\frac{۲}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad , \quad n=۱,۲,۳,... \qquad (۱۳\circ.۳)$$

می‌باشد. در آن با استفاده از احتمال بورن و توضیحات مربوط به تابع موج، ضرایب متناظر با ویژه توابع به صورت $P_n=|a_n|^{۲}$ می‌باشد، یعنی ضرایب همان احتمال اشغال سیستم در تراز

[22] Wang

مربوطه می‌باشد. این ضرایب $|a_n|^۲$ شرایط بهنجارش سیستم را هم فراهم می‌کنند.

$$\sum_{n=۱}^{\infty}|a_n|^۲=\sum_{n=۱}^{\infty}P_n=۱ \tag{۱۳۱.۳}$$

ویژه انرژي E_n متناظر با ویژه تابع ϕ_n را می‌توان به صورت (۱۳۲.۳) نوشت.

$$E_n=\frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{۲mL^۲} \tag{۱۳۲.۳}$$

که در آن n همان عدد کوانتومی تراز اشغال شده می‌باشد. بنابراین انرژی کل سیستم که وابسته به L پهنای چاه می‌باشد به صورت (۱۳۳.۳) بدست می‌آید البته باید توجه داشت که ویژه تابع ϕ_n و ویژه انرژی متناظرش E_n نیز تابع L می‌باشند.

$$E\left(L\right)=\sum_{n=۱}^{\infty}E_n|a_n|^۲=\sum_{n=۱}^{\infty}E_nP_n \tag{۱۳۳.۳}$$

دیواره‌ی متحرک چاه پتانسیل نامتناهی می‌تواند مانند چرخه در ترمودینامیک کلاسیکی عمل کند نیروی تعمیم یافته مانند رابطه‌ی (۱۳۴.۳) تعریف می‌شود.

$$Y_n=-\frac{dW}{dy_n} \tag{۱۳۴.۳}$$

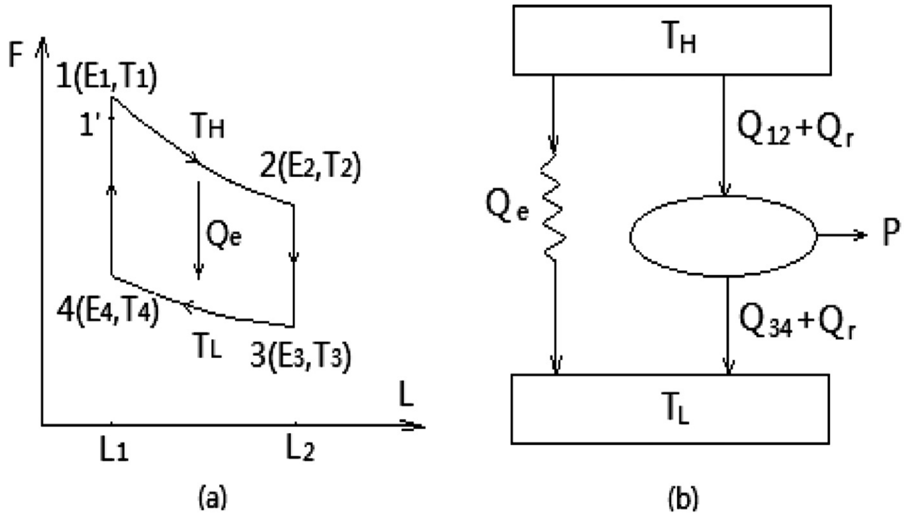
که در آن y_n مختصات تعمیم یافته با توجه به Y_n نیروی تعمیم یافته می‌باشد. بنابراین نیروی F به صورت (۱۳۵.۳) بیان می شود.

$$F=-\frac{dE\left(L\right)}{dL}=\sum_{n=۱}^{\infty}P_n\frac{n^۲\pi^۲\hbar^۲}{mL^۳} \tag{۱۳۵.۳}$$

۲.۴.۳ چرخه‌ی سیستم کوانتومی وابسته به زمان

یک ذره‌ی کوانتومی در جعبه‌ی $۱D$ مطالعه می‌شود. ماده‌ی کار ماشین گرمایی استرلینگ واقعی شامل بیشمار کپی از ذرات است که هر کدام در چاه پتانسیل خودشان محدود شده‌اند که احتمال اشغال آن‌ها را می‌توان توسط تعادل گرمایی توزیع گیبس بیان کرد [۹۱] و [۹۳]. این چرخه از دو فرآیند همدما و دو فرآیند باز سازنده تشکیل شده است و مجموع انرژي داخلی سیستم در آن ثابت باقی می‌ماند [۹۴] و [۹۵]. بازسازی ناقص و نشت گرما در نظر گرفته شده است بنابراین ماشین گرمایی می‌تواند با عنوان یک ماشین گرمایی استرلینگ کوانتومی برگشت ناپذیر نامیده شود. مقداری گرما از یک منبع گرم در دمای T_H جذب می‌شود و مقدار دیگری گرما به یک منبع سرد در دمای T_L، آزاد می‌شود.

مدل نمودار $F-L$ در شکل ۱.۴.۳ نمایش داده می‌شود. در فرآیند ۱ به ۲ سیستم با یک منبع گرم در دمای T_H همراه می باشد این فرآیند انبساط همدماست که در آن $T_۱=T_۲=$ T_H می‌باشد. بنابراین مقدار گرمایی که در حین این فرآیند از منبع گرم جذب می‌شود $Q_{۱۲}$



شکل ۳.۳: a) نمودار $F-L$ برای چرخه‌ی موتور گرمایی استرلینگ کوانتومی b) نمودار شماتیک موتور گرمایی استرلینگ کوانتومی [۸۵].

می‌باشد. در ترمودینامیک کلاسیکی، یک فرآیند هم انرژی و یک فرآیند همدما برای یک گاز ایده‌آل یکسان می‌باشد. اگرچه این برای سیستم‌های کوانتومی همیشه درست نمی‌باشد اما خوشبختانه وقتیکه اثر کوانتومی نادیده گرفته می‌شود نیز برقرار است، یعنی این دو فرآیند برای ذره در جعبه‌ی $1D$ نیز یکسان هستند. همانطور که در رابطه‌ی (۱۳۳.۳) تعریف شده است و با توجه به اینکه چشمداشتی هامیلتونی و یا انرژی کل سیستم یکسان می‌باشد انرژی سیستم توسط معادله‌ی (۱۳۶.۳) داده می‌شود.

$$E_h = P_{11}E_{11} + P_{12}E_{12} = P_{L1}E_{L1} + P_{L2}E_{L2} = P_{21}E_{21} + P_{22}E_{22} \qquad (۱۳۶.۳)$$

که در آن P و E احتمالات اشغال و انرژی متناظر در ترازهای ۱ و ۲ می‌باشند و L تراز دلخواهی است که توسط ذره اشغال می‌شود. از جایگذاری معادله‌ی (۱۳۱.۳) و (۱۳۲.۳) در معادله‌ی (۱۳۶.۳) در نهایت تساوی (۱۳۷.۳) برقرار می‌شود.

$$\frac{1}{L_1^2}(3P_{12}+1) = \frac{1}{L^2}(3P_{L2}+1) = \frac{1}{L_2^2}(3P_{22}+1) \qquad (۱۳۷.۳)$$

انرژی مربوط به فرآیند ۲ → ۱ به صورت (۱۳۸.۳) محاسبه می‌شود.

$$E_{1\to2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL_1^2}(3P_{12}+1) \qquad (۱۳۸.۳)$$

با استفاده از معادله‌ی (۱۳۵.۳) و (۱۳۷.۳) نیرو در فرآیند ۲ → ۱ را می‌توان به صورت (۱۳۹.۳) نوشت.

$$F_{1\to2} = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL_1^2 L}(3P_{12}+1) \qquad (۱۳۹.۳)$$

گرمای ورودی به سیستم در فرآیند ۲ → ۱ توسط رابطه‌ی (۱۴۰.۳) داده می‌شود.

$$\begin{aligned} Q_{۱\to۲} = W_{۱\to۲} &= \int_{L_۱}^{L_۲} \frac{\pi^۲\hbar^۲}{m}\frac{۱}{L_۱^۲}\left(۳P_{۱۲}+۱\right)\frac{۱}{L}dL \\ &= \frac{\pi^۲\hbar^۲}{m}\frac{۱}{L_۱^۲}\left(۳P_{۱۲}+۱\right)Ln\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right) \end{aligned} \tag{۱۴۰.۳}$$

در فرآیند ۴ → ۳ سیستم با یک منبع سرد در دمای T_L همراه است و این فرآیند تراکم همدماست و در آن $T_۳ = T_۴ = T_L$ می‌باشد. انرژی ، نیرو و گرمای آزاد شده توسط سیستم در فرآیند ۴ → ۳ به ترتیب با روابط (۱۴۱.۳)، (۱۴۲.۳) و (۱۴۳.۳) داده می‌شود.

$$E_{۳\to۴} = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲mL_۲^۲}\left(۳P_{۳۲}+۱\right) \tag{۱۴۱.۳}$$

$$F_{۳\to۴} = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{mL_۲^۲L}\left(۳P_{۳۲}+۱\right) \tag{۱۴۲.۳}$$

$$\begin{aligned} Q_{۳\to۴} = \left|W_{۳\to۴}\right| &= \int_{L_۲}^{L_۱} \frac{\pi^۲\hbar^۲}{m}\frac{۱}{L_۲^۲}\left(۳P_{۳۲}+۱\right)\frac{۱}{L}dL \\ &= \frac{\pi^۲\hbar^۲}{m}\frac{۱}{L_۲^۲}\left(۳P_{۳۲}+۱\right)Ln\left(\frac{L_۲}{L_۱}\right) \end{aligned} \tag{۱۴۳.۳}$$

فرآیند ۳ → ۲ و ۱ → ۴ فرآیندهای سازنده هستند، انرژی ، نیرو و مقدار گرمای مبادله شده در بازمولد برای فرآیند ۳ → ۲ به صورت رابطه‌های (۱۴۴.۳)، (۱۴۵.۳) و (۱۴۶.۳) محاسبه می‌شود.

$$E_{۲\to۳} = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲mL_۲^۲}\left(۳P_{۲۲}+۱\right) \tag{۱۴۴.۳}$$

$$F_{۲\to۳} = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{mL_۲^۲L}\left(۳P_{۲۲}+۱\right) \tag{۱۴۵.۳}$$

$$Q_{۲\to۳} = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{m}\left(\frac{۱}{L_۱^۲}\right)\left[\left(۳P_{۱۲}+۱\right)+\frac{L_۱^۲}{L_۲^۲}\left(۳P_{۳۲}+۱\right)\right] \tag{۱۴۶.۳}$$

همچنین انرژي ، نیرو و مقدار گرمای مبادله شده در بازمولد برای فرآیند ۱ → ۴ به صورت رابطه‌های (۱۴۷.۳)، (۱۴۸.۳) و (۱۴۹.۳) محاسبه می‌شود.

$$E_{۴\to۱} = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{۲mL_۱^۲}\left(۳P_{۱۲}+۱\right) \tag{۱۴۷.۳}$$

$$F_{۴\to۱} = \frac{\pi^۲\hbar^۲}{mL_۱^۲L}\left(۳P_{۱۲}+۱\right) \tag{۱۴۸.۳}$$

$$Q_{4\to 1} = \frac{\pi^2\hbar^2}{m}\left(\frac{1}{L_1^2}\right)\left[(3P_{12}+1) + \frac{L_1^2}{L_2^2}(3P_{32}+1)\right] \tag{۱۴۹.۳}$$

با توجه به معادله‌ی (۱۴۶.۳) و (۱۴۹.۳) می‌توان دریافت که مقدار گرمای جذب شده از بازمولد در فرآیند ۳ $\rightarrow$ ۲ و گرمای خارج شده در فرآیند ۱ $\rightarrow$ ۴ برابر هستند، که به مفهوم بازسازی کامل در فرآیند بازسازی می‌باشد. فرض بر این است که نشت گرما بین منبع گرم و منبع سرد وجود دارد. مقدار نشت گرما در هر چرخه را می‌توان به صورت

$$Q_e = \tau \dot{Q}_i \tag{۱۵۰.۳}$$

که در آن $\dot{Q}_i$ تابع متوسط آهنگ نشت گرما در هر چرخه و τ دوره تناوب می‌باشد بدست آورد. به علت تاثیر بازسازی ناقص در چرخه، سیستم باز مولد را در حالت '۱ به جای حالت ۱ ترک می‌کند. از دست دادن گرما در فرآیند بازسازی به صورت (۱۵۱.۳) نشان داده می‌شود [۹۱].

$$Q_r = \mu Q_{4\to 1} \tag{۱۵۱.۳}$$

$\mu \succ 0$ ضریب بازسازی ناقص در از دست دادن گرما برای فرآیند بازسازی می‌باشد، با توجه به بازسازی ناقص مقدار گرمای اضافی Q_r باید توسط محفظه انبساط جذب شود. برای حفظ تعادل دما بازمولد باید گرمای اضافی Q_r را به محفظه‌ی متراکم کننده تحویل دهد. در نتیجه گرمای خالص جذب شده از منبع گرم و گرمای خالص آزاد شده به منبع سرد به ترتیب Q_h و Q_l می‌باشد.

$$Q_h = Q_{1\to 2} + Q_r + Q_e \tag{۱۵۲.۳}$$

$$Q_l = Q_{3\to 4} + Q_r + Q_e \tag{۱۵۳.۳}$$

بنابراین با داشتن این پارامترها می توان پارامترهای مهم عملکرد چرخه را بدست آورد.

۳.۴.۳ دوره تناوب سیستم وابسته به زمان

به منظور تعیین دوره تناوب چرخه، می‌توان در نظر گرفت که دیواره‌ی چاه پتانسیل با سرعت $v(t)$ حرکت می‌کند و میانگین سرعت $\bar{v}$ می‌باشد. در این مورد با توجه به مرجع [۹۶] رابطه‌ی (۱۵۴.۳) را بدست آورد.

$$L_2 - L_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \bar{v}\tau_{1\to 2} \tag{۱۵۴.۳}$$

در فرآیند همدما زمان انجام فرآیند به صورت (۱۵۵.۳) محاسبه می‌شود.

$$\tau_{1\to 2} = \tau_{3\to 4} = \frac{L_2 - L_1}{\bar{v}} \tag{۱۵۵.۳}$$

فرض می‌شود که انرژی ذره هم نسبت به زمان به صورت یکسان در فرآیندهای بازسازی کامل تغییر می‌کند و از تابع تبعیت می‌کند [۹۴] یعنی مشتق زمانی آن هم برابر ثابت می‌باشد.

$$\frac{dT}{dt} = \pm M_i \quad , \quad i = 1, 2 \tag{۳.۱۵۶}$$

که M یک ثابت است که به اختلاف انرژی بستگی ندارد اما به خواص مواد بازمولد بستگی دارد. علامت مثبت مربوط به فرآیندی است که افزایش دما دارد فرآیند ۱ ← ۴ و علامت منفی برای فرآیند ۳ ← ۲ می‌باشد که در آن کاهش دما دارد. $i = 1$ برای فرآیند ۱ ← ۴ و $i = 2$ برای فرآیند ۳ ← ۲ در نظر گرفته می‌شود. زمان برای فرآیندهای بازسازنده ۳ ← ۲ و ۱ ← ۴ از معادلات (۳.۱۵۶) نتیجه می‌شود.

$$\tau_{4\to 1} = \frac{T_H - T_L}{M_1} \tag{۳.۱۵۷}$$

$$\tau_{2\to 3} = \frac{T_H - T_L}{M_2} \tag{۳.۱۵۸}$$

$$\tau = \tau_{1\to 2} + \tau_{2\to 3} + \tau_{3\to 4} + \tau_{4\to 1} = \frac{2\left(L_2 - L_1\right)}{\bar{v}} + \left(T_H - T_L\right)\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right) \tag{۳.۱۵۹}$$

بنابراین τ دوره تناوب چرخه را می‌توان به صورت (۳.۱۵۹) محاسبه کرد.

۳.۴.۴ پارامترهای مهم عملکرد

پارامترهای مهمی که می‌توان بدست آورد توان خروجی و بازده می‌باشد برای محاسبه‌ی آن‌ها با استفاده از معادله‌ی (۳.۱۴۰) و (۳.۱۴۳) کار خالص خروجی را می‌توان به صورت (۳.۱۶۰) بدست آورد.

$$W = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL_1^2}\left[\left(3P_{12} + 1\right) - \frac{1}{x^2}\left(3P_{32} + 1\right)\right] \tag{۳.۱۶۰}$$

که در آن $x = \frac{L_2}{L_1}$ فرض می‌شود. توان خروجی را می‌توان با استفاده از $P = \frac{W}{\tau}$ بدست آورد.

$$P = \frac{W}{\tau} = \frac{\pi^2\hbar^2}{mL_1^2} Lnx \frac{\left[\left(3P_{12} + 1\right) - \frac{1}{x^2}\left(3P_{32} + 1\right)\right]}{\frac{2L_1}{\bar{v}}\left(x - 1\right) + \left(T_H - T_L\right)\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)} \tag{۳.۱۶۱}$$

و توان خروجی بدون بعد این چرخه را با توجه به اینکه $P^* = \frac{W}{A\tau}$ می‌باشد می‌توان محاسبه کرد. بنابراین

$$P^* = \frac{W}{A\tau} = \frac{Lnx\left[\left(3P_{12} + 1\right) - \frac{1}{x^2}\left(3P_{32} + 1\right)\right]}{2\left(x - 1\right) + \frac{\bar{v}}{L_1}\left(T_H - T_L\right)\left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)} \tag{۳.۱۶۲}$$

از ترکیب معادلات (۱۵۲.۳) و (۱۶۰.۳) بازده ماشین گرمایی استرلینگ کوانتومی برگشت‌ناپذیر به صورت (۱۶۳.۳) محاسبه می‌شود.

$$\eta = \frac{W}{Q_h} \tag{۱۶۳.۳}$$

باید توجه داشت که در آن نشت گرما اعمال می‌شود اما در توان خروجی بدون بعد نشت گرما و بازسازی ناقص مشاهده نمی‌شوند. بنابراین با توجه به اینکه بازده مقدار منفی ندارد [۹۷] می‌توان تابع متوسط آهنگ نشت گرما در هر چرخه را به صورت

$$\dot{Q}_i = \frac{\pi^2 \hbar^2}{m L_1^2}\alpha \tag{۱۶۴.۳}$$

بدست آورد که $\alpha \succ 0$ و معکوس زمان است $\left(s^{-1}\right)$.

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{Lnx\left[\left(3P_{12}+1\right) - \frac{1}{x^2}\left(3P_{32}+1\right)\right]}{\left(3P_{12}+1\right)\left(Lnx+\mu\right) - \frac{\mu}{x^2}\left(3P_{32}+1\right) + \frac{2\alpha L_1}{\bar{v}}\left(x-1\right) + \alpha\left(\frac{1}{M_1}+\frac{1}{M_2}\right)\left(T_H - T_L\right)} \tag{۱۶۵.۳}$$

باید توجه داشت که بازده ماشین گرمایی استرلینگ کوانتومی برگشت‌پذیر به صورت (۱۶۶.۳) تعریف می‌شود.

$$\eta_r = 1 - \frac{Q_{3\to4}}{Q_{1\to2}} = 1 - \frac{E_{3\to4}}{E_{1\to2}} = 1 - \frac{T_L}{T_H}\left(\frac{E_{3\to4}}{E_{1\to2}}\frac{T_H}{T_L}\right) \tag{۱۶۶.۳}$$

حال با استفاده از قانون دوم ترمودینامیک آنتروپی S به صورت رابطه‌ی (۱۶۷.۳) تعریف می‌شود.

$$S = \frac{Q_{3\to4}}{T_L} - \frac{Q_{1\to2}}{T_H} = \frac{E_{3\to4}}{T_L} - \frac{E_{1\to2}}{T_H} \geqslant 0 \tag{۱۶۷.۳}$$

از ترکیب معادلات (۱۶۶.۳) و (۱۶۷.۳) بازده فرآیند برگشت‌پذیر به صورت (۱۶۸.۳) می‌باشد.

$$\eta_r \leqslant 1 - \frac{T_L}{T_H} = \eta_c \tag{۱۶۸.۳}$$

در فرآیندهای ۲ → ۱ و ۴ → ۳ که در همسایگی منبع گرم می‌باشند احتمال اشغال آن‌ها را می‌توان توسط تعادل گرمایی توزیع گیبس بیان کرد بنابراین

$$P_{12} = \frac{1}{1+\exp\left[\frac{\Delta_1}{k_B T_L}\right]} \tag{۱۶۹.۳}$$

$$P_{32} = \frac{1}{1+\exp\left[\frac{\Delta_3}{k_B T_H}\right]} \tag{۱۷۰.۳}$$

که در آن k ثابت بولتزمن است و $\Delta_{۱}$ فاصله انرژی حالت ۱ و $\Delta_{۳}$ فاصله انرژی حالت ۳ می‌باشد، که به صورت (۱۷۱.۳) در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \Delta_{۱} &= E_{۱۲} - E_{۱۱} = \frac{۳\pi^{۲}\hbar^{۲}}{۲mL_{۱}^{۲}} \\ \Delta_{۳} &= E_{۳۲} - E_{۳۱} = \frac{۳\pi^{۲}\hbar^{۲}}{۲mL_{۲}^{۲}} \end{aligned} \tag{۱۷۱.۳}$$

باید توجه داشت از آنجایی که در ماشین گرمایی استرلینگ کوانتومی برگشت‌ناپذیر بازسازی ناقص وجود دارد، فرآیندها در محفظه‌ی تراکم و انبساط (به خصوص در محفظه‌ی انبساط) از فرآیند همدما منحرف می‌شوند؛ بنابراین دمای T_H و T_L در معادلات (۱۶۹.۳) و (۱۷۰.۳) میانگین دماها در محفظه‌ی تراکم و انبساط می‌باشند. بنابراین همانطور که مشاهده شد موتور گرمایی استرلینگ کوانتومی مثال خوبی برای کاربرد ذره در پتانسیل با دیواره‌های متحرک می‌باشد.

فصل ۴

بررسی پهنای واپاشی سیستم‌های وابسته به زمان

۱.۴ پهنای واپاشی سیستم‌های وابسته به زمان و جابه‌جایی انرژی

برای محاسبه‌ی پهنای واپاشی سیستم‌های وابسته به زمان پتانسیل وابسته به زمانی را باید پیشنهاد داد. برای اجتناب از اثرات تغییرات ناگهانی در هامیلتونی، پیشنهاد می‌شود هامیلتونی به آرامی افزایش یابد [۳]. فرض می‌شود پتانسیل وابسته به زمان در گذشته‌ی بسیار دور $t \to -\infty$ صفر باشد سپس به تدریج اختلال به مقدار کامل خود برسد. پتانسیل وابسته به زمان به صورت صریح رابطه‌ی (۱.۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$V\left(t\right) = e^{\eta t} V \tag{۱.۴}$$

که در آن V ثابت و η مثبت و کوچک فرض می‌شود. باید توجه داشت که در انتهای کار η صفر می‌باشد، یعنی پتانسیل در همه‌ی زمان‌ها ثابت خواهد بود. در گذشته‌ی بسیار دور $t \to -\infty$ فرض می‌شود که کت حالت در تصویر بر همکنش $|i\rangle$ باشد. هدف اصلی از این محاسبات بدست آوردن $c_i\left(t\right)$ می‌باشد. در اینجا ابتدا فرمول قاعده طلایی را که به صورت زیر بیان می‌شود با

استفاده از روش روشن شدن آهسته [1] بدست می‌آید.

$$w_{i\to n}=\left(\frac{۲\pi}{\hbar}\right)\left|V_{ni}\right|^{۲}\delta\left(E_n-E_i\right) \tag{۲.۴}$$

در ادامه می‌توان مشاهده کرد که نرخ گذار_ یعنی احتمال گذار بر واحد زمان _به صورت زیر است که همان $w_{i\to n}$ می‌باشد.

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_n\left|c_n^{(۱)}\right|^{۲}\right) \tag{۳.۴}$$

$c_n\left(t\right)$ ، اگر $n\neq i$ با استفاده از رابطه‌های تعریف شده‌ی (۴.۴) الی (۶.۴) برای $V\left(t\right)$ را می‌توان محاسبه کرد.

$$c_n^{(\circ)}\left(t\right)=\delta_{ni} \tag{۴.۴}$$

$$c_n^{(۱)}\left(t\right)=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_\circ}^{t}\langle n\left|V_I\left(t'\right)\right|i\rangle dt'=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_\circ}^{t}e^{i\omega_{ni}t'}V_{ni}\left(t'\right)dt' \tag{۵.۴}$$

$$c_n^{(۲)}\left(t\right)=\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^{۲}\sum_m\int_{t_\circ}^{t}dt'\int_{t_\circ}^{t'}dt''e^{i\omega_{nm}t'}V_{nm}\left(t'\right)e^{i\omega_{ni}t''}V_{mi}\left(t''\right) \tag{۶.۴}$$

که در آن

$$e^{i(E_n-E_i)t/\hbar}=e^{i\omega_{ni}t} \tag{۷.۴}$$

احتمال گذار برای حالت‌های $|i\rangle$ به $|n\rangle$ با $n\neq i$ به صورت (۸.۴) می‌باشد.

$$P\left(i\neq n\right)=\left|c_n^{(۱)}\left(t\right)+c_n^{(۲)}\left(t\right)+\cdots\right| \tag{۸.۴}$$

بنابراین قاعده طلایی فرمی با توجه به پتانسیل (۱.۴) و با در نظر گرفتن (۹.۴) و (۱۰.۴) برای $n\neq i$ به صورت زیر بررسی می‌شود.

$$c_n^{(\circ)}\left(t\right)=\circ \tag{۹.۴}$$

$$\begin{aligned}c_n^{(۱)}\left(t\right)&=-\frac{i}{\hbar}\int_{t_\circ}^{t}e^{i\omega_{ni}t'}V_{ni}e^{\eta t'}dt'\\&=-\frac{i}{\hbar}V_{ni}\lim_{t_\circ\to-\infty}\int_{t_\circ}^{t}e^{i\omega_{ni}t'}e^{\eta t'}dt'\\&=-\frac{i}{\hbar}V_{ni}\left(\frac{e^{i\omega_{ni}t+\eta t}}{i\omega_{ni}+\eta}\right)\end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

بنابراین احتمال گذار در پایین‌ترین مرتبه‌ی غیر صفر به صورت (۱۱.۴) بدست می‌آید.

$$P_n=\left|c_n^{(۱)}\left(t\right)\right|^{۲}\simeq\frac{\left|V_{ni}\right|^{۲}}{\hbar^{۲}}\frac{e^{۲\eta t}}{\eta^{۲}+\omega_{ni}^{۲}} \tag{۱۱.۴}$$

[1] Slow-turn-on method

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_n \left|c_n^{(1)}\right|^2\right) \simeq \frac{2|V_{ni}|^2}{\hbar^2}\frac{\eta e^{2\eta t}}{\eta^2+\omega_{ni}^2} \qquad (۱۲.۴)$$

باید توجه داشت که احتمال گذار بر واحد زمان همان $w_{i\to n}$ یا قاعده طلایی فرمی می‌باشد. البته در ابتدا باید $\eta \to 0$ بنابراین $e^{\eta t}$ واحد می‌باشد.

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\eta e^{2\eta t}}{\eta^2+\omega_{ni}^2} = \pi\delta\left(\omega_{ni}\right) = \pi\delta\left(E_n - E_i\right) \qquad (۱۳.۴)$$

باید توجه داشت که با جایگذاری این رابطه در $\frac{d}{dt}|c_n|^2$ در نهایت قاعده طلایی فرمی محاسبه می‌شود.

$$w_{i\to n} = \left(\frac{2\pi}{\hbar}\right)|V_{ni}|^2\delta\left(E_n - E_i\right) \qquad (۱۴.۴)$$

حال با استفاده مجدد از روابط (۴.۴) الی (۶.۴) برای $n=i$، $c_i^{(0)}$ ، $c_i^{(1)}$ و $c_i^{(2)}$ را برای پتانسیل (۱.۴) می‌توان محاسبه کرد.

$$c_i^{(0)} = 1 \qquad (۱۵.۴)$$

$$c_i^{(1)} = -\frac{i}{\hbar}V_{ni}\lim_{t_0\to-\infty}\int_{t_0}^{t} e^{i\omega_{ii}t'}e^{\eta t'}dt' = -\frac{i}{\hbar\eta}V_{ii}e^{\eta t} \qquad (۱۶.۴)$$

$$\begin{aligned}
c_i^{(2)} =& \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_m |V_{mi}|^2\lim_{t_0\to-\infty}\int_{t_0}^{t}dt'\int_{t_0}^{t'}dt'' e^{i\omega_{im}t'}e^{\eta t'}e^{i\omega_{mi}t''}e^{\eta t''}\\
=& \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\sum_m |V_{mi}|^2\lim_{t_0\to-\infty}\int_{t_0}^{t}dt' e^{i\omega_{im}t'+\eta t'}\frac{e^{i\omega_{im}t'+\eta t'}}{i\left(\omega_{im}+i\eta\right)}\\
=& \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2|V_{ii}|^2\frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{m\neq i}|V_{mi}|^2\frac{e^{2\eta t}}{2\eta\left(E_i - E_m + i\eta\right)}
\end{aligned} \qquad (۱۷.۴)$$

بنابراین $c_i\left(t\right)$ تا مرتبه‌ی دوم به صورت معادله‌ی (۱۸.۴) می‌باشد [۳].

$$c_i\left(t\right) \simeq 1 - \frac{i}{\hbar\eta}V_{ii}e^{\eta t} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2|V_{ii}|^2\frac{e^{2\eta t}}{2\eta^2} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{m\neq i}|V_{mi}|^2\frac{e^{2\eta t}}{2\eta\left(E_i - E_m + i\eta\right)} \qquad (۱۸.۴)$$

با استفاده از (۱۸.۴) و مشتق زمانی آن $\dot{c}_i \equiv \frac{dc_i(t)}{dt}$ و تقسیم آن بر c_i و قرار دادن $\eta \to 0$ و واحد در نظر گرفتن $e^{2\eta t}$ و $e^{\eta t}$ می توان بسط (۱۹.۴) را ایجاد کرد.

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{c}_i}{c_i} =& \frac{-\frac{i}{\hbar}V_{ii} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2\frac{|V_{ii}|^2}{\eta} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{m\neq i}\frac{|V_{mi}|^2}{(E_i - E_m + i\eta\hbar)}}{1 - \frac{i}{\hbar\eta}V_{ii}e^{\eta t}}\\
\simeq& -\frac{i}{\hbar}V_{ii} + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)\sum_{m\neq i}\frac{|V_{mi}|^2}{\left(E_i - E_m + i\eta\hbar\right)}
\end{aligned} \qquad (۱۹.۴)$$

این بسط تا مرتبه‌ی دوم V صحیح است . $\frac{\dot{c}_i}{c_i}$ مستقل از t می‌باشد. معادله‌ی (۱۹.۴) معادله دیفرانسیلی است که برای تمام زمان‌ها برقرار است باید c_i را بهنجار کرد یعنی $c_i^{(0)} = 1$ باید توجه داشت که

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}_i(t)}{c_i(t)} &= -\frac{i}{\hbar}\Delta_i \\ c_i(t) &= e^{-i\Delta_i t/\hbar} \end{aligned} \tag{۲۰.۴}$$

در آن الزاما Δ_i نسبت به زمان ثابت است و نه الزاما حقیقی. با توجه به اینکه در تصویر برهمکنش $e^{-i\Delta_i t/\hbar}|i\rangle$ ایجاب می‌کند که کت در تصویر شرودینگر به صورت $e^{-i\Delta_i t/\hbar}e^{-iE_i t/\hbar}|i\rangle$ باشد. می‌توان معنی فیزیکی Δ_i را دریافت بنابراین نتیجه اختلال به صورت (۲۱.۴) می‌باشد.

$$E_i \to E_i + \Delta_i \tag{۲۱.۴}$$

یعنی جابه‌جایی تراز با استفاده از نظریه‌ی اختلال وابسته به زمان بدست می‌آید. بسط (۲۲.۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$\Delta_i = \Delta_i^{(1)} + \Delta_i^{(2)} + \cdots \tag{۲۲.۴}$$

حالا با مقایسه (۲۰.۴) با (۲۱.۴) جابه‌جایی انرژی در مرتبه اول به صورت (۲۳.۴) بدست می‌آید.

$$\Delta_i^{(1)} = V_{ii} \tag{۲۳.۴}$$

از نظریه‌ی اختلال مستقل از زمان هم این انتظار می‌رفت. با توجه به اینکه رابطه‌ی (۲۴.۴) برقرار است یعنی

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x+i\varepsilon} = \mathrm{Pr}.\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \tag{۲۴.۴}$$

از آنجایی که Δ_i به صورت زیر بدست آمد

$$\Delta_i = V_{ii} + \sum_{m\neq i}|V_{mi}|^2\frac{1}{E_i - E_m + i\hbar\eta} \tag{۲۵.۴}$$

بنابراین با توجه به (۲۴.۴) و (۲۵.۴) رابطه‌ی (۲۶.۴) بدست می‌آید.

$$\Delta_i^{(2)} = \mathrm{Pr}.\sum_{m\neq i}\frac{|V_{mi}|^2}{E_i - E_m} - i\pi\sum_{m\neq i}|V_{mi}|^2\delta(E_i - E_m) \tag{۲۶.۴}$$

$$\mathrm{Re}\left(\Delta_i^{(2)}\right) = \mathrm{Pr}.\sum_{m\neq i}\frac{|V_{mi}|^2}{E_i - E_m} \tag{۲۷.۴}$$

$$\mathrm{Im}\left(\Delta_i^{(2)}\right) = -\pi\sum_{m\neq i}|V_{mi}|^2\delta(E_i - E_m) \tag{۲۸.۴}$$

سمت راست معادله‌ی (۲۸.۴) همان قاعده‌ی طلایی فرمی می‌باشد. بنابراین

$$\sum_{m\neq i} w_{i\to m} = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{mi}|^2\delta\left(E_i - E_m\right) = -\frac{2}{\hbar}\operatorname{Im}\left(\Delta_i^{(2)}\right) \tag{۲۹.۴}$$

اکنون به $c_i\left(t\right)$ در رابطه‌ی (۲۰.۴) رجوع باید کرد.

$$c_i\left(t\right) = e^{\frac{t}{\hbar}\operatorname{Im}\left(\Delta_i^{(2)}\right)} e^{\frac{-it}{\hbar}\operatorname{Re}\left(\Delta_i^{(2)}\right)} \tag{۳۰.۴}$$

حال اگر Γ_i به صورت (۳۱.۴) تعریف شود.

$$\frac{\Gamma_i}{\hbar} \equiv -\frac{2}{\hbar}\operatorname{Im}\left(\Delta_i^{(2)}\right) \tag{۳۱.۴}$$

که با توجه به این معادله

$$|c_i|^2 = e^{\frac{2}{\hbar}\operatorname{Im}\left(\Delta_i^{(2)}\right)} = e^{\frac{\Gamma_i t}{\hbar}} \tag{۳۲.۴}$$

می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت Γ_i آهنگ ناپدید شدن $|i\rangle$ را مشخص می‌کند. بررسی پایستگی احتمال تا مرتبه‌ی دوم V به ازای t کوچک ارزشمند است .

$$|c_i|^2 + \sum_{m\neq i}|c_m|^2 = 1 - \frac{\Gamma_i t}{\hbar} + \sum_{m\neq i} w_{i\to m} t = 1 \tag{۳۳.۴}$$

بنابراین احتمال یافتن حالت اولیه بعلاوه‌ی تمام حالت‌های دیگر یک می‌باشد. یعنی تهی شدن حالت $|i\rangle$ با پر شدن حالت‌های دیگر به جز $|i\rangle$ جبران می‌شود.

جمع بندی که از این بخش می‌توان داشت این است که قسمت حقیقی جابه‌جایی انرژی معمولا آن چیزی است که به جابه‌جایی ترازها منتسب می‌شود و قسمت موهومی جابه جایی انرژی صرف نظر از ضریب ۲ آن پهنای واپاشی می‌باشد. بنابراین

$$\frac{\hbar}{\Gamma_i} = \tau_i \tag{۳۴.۴}$$

که τ_i همان متوسط نیمه عمر حالت $|i\rangle$ می‌باشد. زیرا

$$|c_i|^2 = e^{-\frac{t}{\tau_i}} \tag{۳۵.۴}$$

می‌باشد، که اگر $\hbar$ واحد باشد رابطه‌ی عکس با پهنای واپاشی دارد.

چرا Γ_i پهنا نامیده می‌شود. با توجه به این نکته که احتمالات گذار وقتی روی حالات نهایی با انرژی $E_n \simeq E_i$ جمع خورده باشد.

$$\sum_{n,E_n\simeq E_i}\left|c_n^{(1)}\right|^2 \tag{۳۶.۴}$$

چگالی حالات نهایی را به صورت تعداد حالات درون بازه‌ای انرژی $(E, E+dE)$ به صورت $\rho\left(E\right)dE$ باید در نظر گرفت. بنابراین رابطه‌ی (۳۶.۴) را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$\sum_{n,E_n\simeq E_i}\left|c_n^{(1)}\right|^2 \Rightarrow \int \rho\left(E_n\right)dE_n\left|c_n^{(1)}\right|^2 \tag{۳۷.۴}$$

با توجه به معادله‌ی (۳۰.۴) و (۳۷.۴) می‌توان نوشت؛

$$\int f\left(E\right)dEe^{-\frac{iEt}{\hbar}}=e^{-i[E_i+\mathrm{Re}(\Delta_i)]t/\hbar-\Gamma_i t/2\hbar} \tag{۳۸.۴}$$

حال با استفاده از وارون فوریه

$$\left|f\left(E\right)\right|^2\propto\frac{1}{\left\{E-\left[E_i+\mathrm{Re}\left(\Delta_i\right)\right]\right\}^2+\frac{\Gamma_i^2}{4}} \tag{۳۹.۴}$$

بنابراین Γ_i معنی معمول پهنای کل نصف بیشینه را دارد [۳]. با توجه به رابطه‌ی (۳۴.۴) عدم قطعیت انرژی–زمان را می‌توان در نظر گرفت که به صورت

$$\Delta E\Delta t\sim\hbar$$

می‌باشد، در آن انرژی به صورت Γ_i و زمان همان متوسط نیمه عمر τ_i می‌باشد.

هر چند موضوع جابه جایی انرژی و پهنای واپاشی با استفاده از اختلال ثابت بررسی شد. می توان به راحتی این ملاحظات رادر حالت اختلال هماهنگ هم بررسی کرد. فقط کافیست در رابطه‌های (۷.۴)، (۹.۴)، (۱۳.۴)، (۲۷.۴) و (۲۸.۴) رابطه‌ی (۴۰.۴) جایگذاری شود.

$$E_{n(m)}-E_i\rightarrow E_{n(m)}-E_i\pm\hbar\omega \tag{۴۰.۴}$$

این توصیف کوانتومی حالت‌های ناپایدار که در اینجا مورد بحث قرار گرفت، اولین بار توسط ویگنر و وایسکوف در سال ۱۹۳۰ بررسی شده است [۳].

۱.۱.۴ بررسی پهنای واپاشی اتم هیدروژن

یک اتم هیدروژن در حالت برانگیخته $2p$ قرار دارد. برای بررسی آهنگ گذار در واحد زمان یا پهنای واپاشی مربوط به گذارهای $2p\rightarrow 1s$ لیمان و نیمه عمر آن در حالت $2p$ ابتدا باید آهنگ گذار مربوط به گسیل فوتون بررسی شود [۴، ۶]. با استفاده از رابطه‌ی (۴۱.۴) می‌توان نشان داد که آهنگ گسیل فوتون از اتم حتی در نبود میدان تابشی خارجی $\left(n_{\lambda,\vec{k}}=0\right)$ صفر نیست. این تابش ناشی از گسیل خود به خود یک فوتون است. آهنگ گذار با تقریب دو قطبی برای گسیل فوتون با انرژی $\hbar\omega_k$ توسط اتم به صورت (۴۱.۴) می‌باشد [۵].

$$\Gamma^{emi}_{i\rightarrow f}=\frac{4\pi^2e^2\omega^2_{fi}}{\omega_kV}\left(n_{\lambda,k}+1\right)\left|\vec{\varepsilon}^{*}_{\lambda}.\left\langle\psi_f\left|\vec{r}\right|\psi_i\right\rangle\right|^2\delta\left(E_f-E_i+\hbar\omega_k\right) \tag{۴۱.۴}$$

ε_λ بردار یکه قطبش می‌باشد، حالا اگر $n_{\lambda,k}=0$ باشد بنابراین معادله‌ی (۴۲.۴) بدست می‌آید.

$$\Gamma^{emi}_{i\rightarrow f}=\frac{4\pi^2\omega^2_{fi}}{\omega_kV}\left|\vec{\varepsilon}^{*}_{\lambda}.\vec{d}_{fi}\right|^2\delta\left(E_f-E_i+\hbar\omega_k\right) \tag{۴۲.۴}$$

عنصر ماتریسی $\vec{d}_{fi}$ برای گشتاور دو قطبی الکتریکی الکترون

$$\vec{d}=q\vec{r}=-e\vec{r} \tag{۴۳.۴}$$

را می‌توان به صورت (۴۴.۴) در نظر گرفت،

$$\vec{d}_{fi} = \left\langle \psi_f \left| \vec{d} \right| \psi_i \right\rangle = -e \left\langle \psi_f \left| \vec{r} \right| \psi_i \right\rangle \tag{۴۴.۴}$$

رابطه‌ی (۴۲.۴) همان احتمال گذار در واحد زمان یا پهنای واپاشی مربوط به گذار اتم از حالت ابتدایی $|\psi_i\rangle$ به حالت نهایی $|\psi_f\rangle$ ناشی از گسیل خودبه‌خود فوتونی با انرژی $\hbar\omega$ می‌باشد. فوتون گسیل شده در حالت کلی، دارای اندازه حرکتی در بازه‌ی $(p, p+dp)$ واقع در حول $p = \hbar k = \frac{\hbar\omega}{c}$ است. آهنگ گذار (۴۲.۴) را باید روی حالت‌های نهایی فوتونی جمع بندی کرد. تعداد حالت‌های فوتونی نهایی در واحد حجم v که اندازه حرکت آن در بازه‌ی $(p, p+dp)$ قرار دارد برابرند با (۴۵.۴)

$$d^۳n = \frac{Vd^۳p}{(۲\pi\hbar)^۳} = \frac{Vp^۲dpd\Omega}{(۲\pi\hbar)^۳} = \frac{V\hbar^۳\omega^۲}{(۲\pi\hbar)^۳c^۳}d\Omega d\omega = \frac{V\omega^۲}{(۲\pi c)^۳}d\Omega d\omega \tag{۴۵.۴}$$

بنابراین آهنگ گذار مربوط به گسیل یک فوتون در زاویه‌ی فضایی $d\Omega$، با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۴۲.۴) روی $d\omega$ بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} d\Gamma_{i\to f}^{emi} &= \frac{۱}{۲\pi c^۳}\left|\vec{\varepsilon}_\lambda^*.\vec{d}_{fi}\right|^۲ d\Omega \int \omega_{fi}^۲\omega\delta\left(E_f - E_i + \hbar\omega\right)d\omega \\ &= \frac{۱}{۲\pi c^۳}\left|\vec{\varepsilon}_\lambda^*.\vec{d}_{fi}\right|^۲ d\Omega \int \omega_{fi}^۲\omega\delta\left(\hbar\omega_{fi} + \hbar\omega\right)d\omega \\ &= \frac{۱}{۲\pi\hbar c^۳}\left|\vec{\varepsilon}_\lambda^*.\vec{d}_{fi}\right|^۲ d\Omega \int \omega_{fi}^۲\omega\delta\left(\omega_{fi} - \omega\right)d\omega \end{aligned} \tag{۴۶.۴}$$

که در آن از رابطه‌های $\delta\left(E_f - E_i + \hbar\omega\right) = \frac{۱}{\hbar}\delta\left(\omega_{fi} - \omega\right)$ و $\omega_{fi} = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$ استفاده شده است. بنابراین با حل انتگرال رابطه‌ی (۴۶.۴) به صورت معادله‌ی (۴۷.۴) می شود.

$$d\Gamma_{i\to f}^{emi} = \frac{\omega^۳}{۲\pi\hbar c^۳}\left|\vec{\varepsilon}_\lambda^*.\vec{d}_{fi}\right|^۲ d\Omega \tag{۴۷.۴}$$

این آهنگ گذار مربوط به قطبش خاصی است یعنی فوتون گسیل شده در امتداد $\vec{n}$ (زیرا $\vec{k} = k\vec{n}$) که عمود بر $\vec{\varepsilon}_\lambda^*$ است حرکت می‌کند.
برای یافتن آهنگ گذار مربوط به هر قطبش به جمع‌بندی روی دو قطبش مورد نیاز است.

$$\sum_{\lambda=۱}^{۲}\left|\vec{\varepsilon}_\lambda^*.\vec{d}_{fi}\right|^۲ = \left|\varepsilon_۱^*\left(\vec{d}_{fi}\right)_۱\right|^۲ + \left|\varepsilon_۲^*\left(\vec{d}_{fi}\right)_۲\right|^۲ = \left|\vec{d}_{fi}\right|^۲ - \left|\left(\vec{d}_{fi}\right)_۳\right|^۲ \tag{۴۸.۴}$$

از آنجا که سه جهت $\vec{d}_{fi}$ هم ارزند بنابر این به صورت زیر می‌باشند.

$$\left\langle\left|\left(\vec{d}_{fi}\right)_۱\right|^۲\right\rangle = \left\langle\left|\left(\vec{d}_{fi}\right)_۲\right|^۲\right\rangle = \left\langle\left|\left(\vec{d}_{fi}\right)_۳\right|^۲\right\rangle = \frac{۱}{۳}\left\langle\left|\vec{d}_{fi}\right|^۲\right\rangle \tag{۴۹.۴}$$

حال با میانگین‌گیری روی قطبش رابطه‌ی (۴۸.۴) به صورت (۵۰.۴) می‌شود.

$$\sum_{\lambda=۱}^{۲}\left|\vec{\varepsilon}_\lambda^*.\vec{d}_{fi}\right|^۲ = \left|\vec{d}_{fi}\right|^۲ - \frac{۱}{۳}\left|\vec{d}_{fi}\right|^۲ = \frac{۲}{۳}\left|\vec{d}_{fi}\right|^۲ \tag{۵۰.۴}$$

حال با جایگذاری (۵۰.۴) در (۴۷.۴) آهنگ گذار میانگین مربوط به گسیل فوتون در زاویه‌ی فضایی $d\Omega$ بدست می‌آید.

$$d\Gamma_{i\to f}^{emi} = \frac{\omega^{3}}{3\pi\hbar c^{3}}\left|\vec{d}_{fi}\right|^{2} d\Omega \tag{۵۱.۴}$$

انتگرال‌گیری روی همه‌ی جهت‌های ممکن (فوتونی) $\left|\vec{d}_{fi}\right|^{2}$ شامل انتگرال‌گیری نیست زیرا انتگرال‌گیری روی بخش زاویه‌ای درجه‌ی آزادی فوتونی انجام می‌شود نه روی الکترون در نتیجه $\int d\Omega = 4\pi$ می‌باشد. بنابراین آهنگ گذار مربوط به گسیل فوتون برابر است با (۵۲.۴)

$$\Gamma_{i\to f}^{emi} = \frac{4\omega^{3}}{3\hbar c^{3}}\left|\vec{d}_{fi}\right|^{2} = \frac{4\omega^{3}e^{2}}{3\hbar c^{3}}\left|\langle\psi_f\left|\vec{r}\right|\psi_i\rangle\right|^{2} \tag{۵۲.۴}$$

که در آن $\omega = \frac{E_f - E_i}{\hbar}$ می باشد.حال متوسط طول عمر τ یک حالت برانگیخته برای همه‌ی حالت‌های نهایی به صورت (۵۳.۴) می‌باشد.

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{1}{\sum\limits_{f}\Gamma_{i\to f}} \tag{۵۳.۴}$$

اکنون برای محاسبه‌ی آهنگ گذار یا پهنای واپاشی اتم هیدروژن در گذار از حالت برانگیخته‌ی $2p$ به تراز $1s$ باید از رابطه‌ی (۵۲.۴) استفاده شود، بنابراین پهنای این گذار به صورت رابطه‌ی (۵۴.۴) در نظر گرفته می‌شود.

$$\Gamma_{2p\to 1s} = \frac{4\omega_{2p\to 1s}^{3}}{3\hbar c^{3}}\left|\vec{d}_{2p\to 1s}\right|^{2} \tag{۵۴.۴}$$

که در آن با استفاده از رابطه‌های (۴۳.۴) و (۴۴.۴) $\left|\vec{d}_{2p\to 1s}\right|^{2}$ را می‌توان محاسبه کرد. بنابراین در این مثال

$$\begin{aligned}\left|\vec{d}_{2p\to 1s}\right|^{2} &= e^{2}\left|\langle 2p\left|\vec{\varepsilon}.\vec{r}\right|1s\rangle\right|^{2}\\ &= e^{2}\left|\int_{0}^{\infty} r^{3}R_{21}^{*}(r)\,R_{10}(r)\,dr\int d\Omega Y_{1m}^{*}(\theta,\varphi)\,\vec{\varepsilon}.\hat{r}Y_{00}(\theta,\varphi)\right|^{2}\end{aligned} \tag{۵۵.۴}$$

می‌باشد که با توجه به رابطه‌ی (۵۶.۴) بدست می‌آید.

$$\langle\psi_f\left|\vec{\varepsilon}_{\lambda}.\vec{r}\right|\psi_i\rangle = \sqrt{\frac{4\pi}{3}}\int_{0}^{\infty} r^{3}R_{n_f l_f}^{*}(r)\,R_{n_i l_i}(r)\,dr\int d\Omega Y_{l_f m_f}^{*}(\theta,\varphi)\,\vec{\varepsilon}_{\lambda}.\vec{r}Y_{l_i m_i}(\theta,\varphi) \tag{۵۶.۴}$$

که در آن هم از روابط (۵۷.۴) و (۵۸.۴) استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned}\langle\vec{r}\mid\psi_i\rangle &= R_{n_i l_i}(r)\,Y_{l_i m_i}(\Omega)\\ \langle\vec{r}\mid\psi_f\rangle &= R_{n_f l_f}(r)\,Y_{n_f l_f}(\Omega)\end{aligned} \tag{۵۷.۴}$$

ابتدا عبارت $\langle ۲p\,|\vec{\varepsilon}.\vec{r}|\,۱s\rangle$ باید محاسبه شود. بنابراین ابتدا قسمت شعاعی آن به صورت (۵۸.۴) محاسبه می‌شود.

$$\int_{\circ}^{\infty} r^{۳} R_{۲۱}^{*}(r)\,R_{۱\circ}(r)\,dr = \frac{۱}{a_{\circ}\sqrt{۶}}\int_{\circ}^{\infty} r^{۴} e^{\frac{-۳r}{۲a_{\circ}}}dr = \frac{۲^{۸}a_{\circ}}{۳^{۴}\sqrt{۶}} \tag{۵۸.۴}$$

و بخش زاویه‌ای رابطه‌ی (۵۵.۴) به صورت زیر بدست می‌آید. در دستگاه مختصات کروی $\vec{r}$ به صورت (۵۹.۴) می‌باشد [۵].

$$\vec{r} = (r\sin\theta\cos\varphi)\,\hat{i} + (r\sin\theta\sin\varphi)\,\hat{j} + (r\cos\theta)\,\hat{k} \tag{۵۹.۴}$$

بنابراین

$$\vec{\varepsilon}_{\lambda}.\vec{r} = r\left(\varepsilon_x\sin\theta\cos\varphi + \varepsilon_y\sin\theta\sin\varphi + \varepsilon_z\cos\theta\right) \tag{۶۰.۴}$$

که از روابط (۶۱.۴) برای ساده کردن آن استفاده می‌شود.

$$\begin{aligned} \sin\theta\sin\varphi &= i\sqrt{\frac{۲\pi}{۳}}\left(Y_{۱۱}+Y_{۱-۱}\right)\\ \sin\theta\cos\varphi &= \sqrt{\frac{۲\pi}{۳}}\left(Y_{۱۱}-Y_{۱-۱}\right)\\ \cos\theta &= \sqrt{\frac{۴\pi}{۳}}Y_{۱\circ} \end{aligned} \tag{۶۱.۴}$$

بنابراین

$$\vec{\varepsilon}_{\lambda}.\vec{r} = \sqrt{\frac{۴\pi}{۳}}r\left(\frac{-\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱۱} + \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱-۱} + \varepsilon_z Y_{۱\circ}\right) \tag{۶۲.۴}$$

در نتیجه با جایگذاری رابطه‌ی (۶۲.۴) در (۵۵.۴) آن را به صورت زیر نوشت،

$$\begin{aligned} \langle ۲p\,|\vec{\varepsilon}.\vec{r}|\,۱s\rangle &= \sqrt{\frac{۴\pi}{۳}}\int_{\circ}^{\infty} r^{۳}R_{۲۱}^{*}(r)\,R_{۱\circ}(r)\,dr\\ &\times\int d\Omega Y_{۱m}^{*}(\theta,\varphi)\left(\frac{-\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱۱}+\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱-۱}+\varepsilon_z Y_{۱\circ}\right)Y_{\circ\circ}(\theta,\varphi) \end{aligned} \tag{۶۳.۴}$$

بنابراین برای بخش زاویه‌ای این مثال با استفاده از (۶۳.۴) محاسبات انجام می‌شود،

$$\begin{aligned} &\int d\Omega Y_{۱m}^{*}(\theta,\varphi)\,Y_{\circ\circ}(\theta,\varphi)\\ =&\sqrt{\frac{۴\pi}{۳}}\int d\Omega Y_{۱m}^{*}(\theta,\varphi)\left(\frac{-\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱۱}+\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱-۱}+\varepsilon_z Y_{۱\circ}\right)Y_{\circ\circ}(\theta,\varphi)\\ =&\sqrt{\frac{۱}{۳}}\int d\Omega Y_{۱m}^{*}(\theta,\varphi)\left(\frac{-\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱۱}+\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}Y_{۱-۱}+\varepsilon_z Y_{۱\circ}\right)Y_{\circ\circ}(\theta,\varphi)\\ =&\frac{۱}{\sqrt{۳}}\left(\frac{-\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}\delta_{m,۱}+\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{\sqrt{۲}}\delta_{m,-۱}+\varepsilon_z\delta_{m,\circ}\right) \end{aligned} \tag{۶۴.۴}$$

که در آن از $\int Y^{*}_{l_f m_f}(\theta,\varphi)\, Y_{l_i m_i}(\theta,\varphi)\, d\Omega = \delta_{l_i,l_f}\delta_{m_i,m_f}$ استفاده می‌شود. حال باید روابط (۵۸.۴) و (۶۴.۴) را در (۵۵.۴) جایگذاری کرد.

$$\left|\vec{d}_{2p\to 1s}\right|^2 = 32\left(\frac{2}{3}\right)^{10} e^2 a_\circ^2 \left(\frac{1}{2}\left({\varepsilon_x}^2+{\varepsilon_y}^2\right)\left(\delta_{m,-1}+\delta_{m,1}\right)+{\varepsilon_z}^2\delta_{m,0}\right) \tag{۶۵.۴}$$

این رابطه را در معادله‌ی آهنگ گذار کل باید گذاشت. می‌توان مشاهده کرد که آهنگ گذار کل با توجه به عدد کوانتومی سمتی m بدست می‌آید.

$$\Gamma_{2p\to 1s} = \frac{128 e^2 a_\circ^2 \omega^3}{3\hbar c^3}\left(\frac{2}{3}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\left({\varepsilon_x}^2+{\varepsilon_y}^2\right)\left(\delta_{m,-1}+\delta_{m,1}\right)+{\varepsilon_z}^2\delta_{m,0}\right) \tag{۶۶.۴}$$

حال با جمع‌بندی روی سه حالت ممکن m یعنی $-1,0,1$ به صورت زیر

$$\sum_{m=-1}^{1}\left(\frac{1}{2}\left({\varepsilon_x}^2+{\varepsilon_y}^2\right)\left(\delta_{m,-1}+\delta_{m,1}\right)+{\varepsilon_z}^2\delta_{m,0}\right) = {\varepsilon_x}^2+{\varepsilon_y}^2+{\varepsilon_z}^2 = 1 \tag{۶۷.۴}$$

و در نظر گرفتن بسامد گذار $2p$ به $1s$ به صورت رابطه‌ی (۶۸.۴)

$$\omega_{2p\to 1s} = \frac{E_{2p}-E_{1s}}{\hbar} = \frac{1}{\hbar}\left(\frac{1}{4}E_{1s}-E_{1s}\right) = -\frac{3}{4\hbar}E_{1s} = \frac{3R_y}{4\hbar} = \frac{3}{8}\frac{e^2}{\hbar a_\circ} \tag{۶۸.۴}$$

که در آن $R_y = \frac{e^2}{2\hbar a_\circ}$ ثابت ریدبرگ می‌باشد، پهنای واپاشی به صورت (۶۹.۴) ساده می‌شود.

$$\Gamma_{2p\to 1s} = \left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^4\frac{c}{a_\circ} \tag{۶۹.۴}$$

باید توجه داشت که $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}$ ثابت ساختار ریز و $a_\circ = 0/529\times 10^{-10}$ شعاع بور می‌باشد. بنابراین

$$\Gamma_{2p\to 1s} = \left(\frac{2}{3}\right)^8\left(\frac{1}{137}\right)^4\frac{3\times 10^8}{0/529\times 10^{-10}} = 6/28\times 10^8\left(s^{-1}\right) \tag{۷۰.۴}$$

$$\tau = \frac{1}{\Gamma_{2p\to 1s}} = \frac{1}{6/28\times 10^8\left(s^{-1}\right)} = 1/6\times 10^{-9}\,(s) \tag{۷۱.۴}$$

روابط (۷۰.۴) و (۷۱.۴) به ترتیب پهنای واپاشی در گذار $2p\to 1s$ و میانگین طول عمر اتم هیدروژن در تراز $2p$ می‌باشند .

۲.۴ بررسی شکل عمومی پهنای واپاشی وابسته به زمان

همانطور که بررسی شد با توجه به قاعده‌ی طلایی فرمی می‌توان آهنگ انتقال از ویژه تراز انرژی یک سیستم کوانتومی به ویژه حالت‌های انرژی پیوسته (یا احتمال انتقال در واحد زمان) را بدست آورد [۹۸]. اگر با یک تراز $|E_f\rangle$ که توسط V ویژه تراز هامیلتونی غیراختلالی $H_\circ$ $|E_i\rangle$

اختلالی می‌باشد جفت شود، احتمال گذار در واحد زمان از حالت ابتدایی $|E_i\rangle$ به حالت پایانی $|E_f\rangle$ از مرتبه‌ی اول اختلال توسط رابطه‌ی (۷۲.۴) بدست می‌آید.

$$R_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle E_f\,|V|\,E_i\rangle|^2\,\delta\left(E_i-E_f\right) \qquad (۷۲.۴)$$

که در آن $\langle E_f\,|V|\,E_i\rangle$ عنصر ماتریسی اختلال V بین حالت‌های ابتدایی و پایانی می‌باشد. اگر حالت ابتدایی با یک حالت پایانی پیوسته $|E_f\rangle$ جفت شود و اگر چگالی حالت‌های پایانی $\rho\left(E_f\right)$ (تعداد حالت‌ها در واحد انرژی) باشد، احتمال گذار در واحد زمان از $|E_i\rangle$ به حالت پایانی پیوسته $|E_f\rangle$ توسط رابطه‌ی (۷۳.۴) داده می‌شود.

$$\bar{R}_{i\to f}=\int dE_f\rho\left(E_f\right)R_{i\to f}=\frac{2\pi}{\hbar}|\langle E_f\,|V|\,E_i\rangle|^2\rho\left(E_i\right) \qquad (۷۳.۴)$$

در اینجا فرض می‌شود که عنصر ماتریسی $\langle E_f\,|V|\,E_i\rangle$ برای همه‌ی حالت‌های پیوسته یکسان است. پهنای واپاشی از حالت ابتدایی $|E_i\rangle$ به حالت پایانی $|E_f\rangle$ توسط رابطه‌ی (۷۴.۴) داده می‌شود.

$$\Gamma_{i\to f}=\hbar R_{i\to f}=2\pi|\langle E_f\,|V|\,E_i\rangle|^2\,\delta\left(E_i-E_f\right) \qquad (۷۴.۴)$$

پهنای واپاشی از حالت ابتدایی $|E_i\rangle$ به حالت پایانی پیوسته‌ی $|E_f\rangle$ نیز توسط رابطه‌ی (۷۵.۴) بدست می‌آید.

$$\bar{\Gamma}_{i\to f}=\hbar\bar{R}_{i\to f}=2\pi|\langle E_f\,|V|\,E_i\rangle|^2\rho\left(E_i\right) \qquad (۷۵.۴)$$

انحراف استاندارد از معادله‌ی (۷۲.۴) الی (۷۵.۴) نتیجه‌ی تئوری اختلال مرتبه‌ی اول هنگامی که حالت‌های ابتدایی و پایانی پایدار هستند می‌باشد. هدف از این بررسی معرفی و مقایسه‌ی معادلات (۷۲.۴) الی (۷۵.۴) با فرض اینکه حالت ابتدایی توسط حالت تشدید (رزونانس) گاموف توصیف شده است و این حالت به یک حالت پیوسته‌ی پایدار و حالت پراکنده واپاشی می‌کند، می‌باشد. بخش های بعدی پهناهای واپاشی دیفرانسیلی و کل یک حالت تشدید (رزونانسی) که تنها یک مد واپاشی دارد را معرفی کرده و یک عبارت برای این پهناهای واپاشی در جملات لورنتسی [2] و عنصر ماتریسی برهمکنش بدست می‌آید و البته در این بررسی نشان داده می‌شود که وقتی تشدید (رزونانس) تیز است و دور از آستانه‌ی انرژي است، عبارت بدست آمده برای پهنای واپاشی تشدید (رزونانسی) شباهت زیادی با قاعده‌ی طلایی فرمی دارد. با قبول کردن نتایج بدست آمده پتانسیل پوسته‌ـدلتا را مورد بررسی قرار داده و در ادامه هم پهنای واپاشی جزئی را برای حالت تشدید (رزونانسی) که بیش از یک مد واپاشی دارد بررسی کرده و کسر انشعابی [3] را برای هر مد واپاشی تعریف کرده سپس با معرفی ثابت‌های واپاشی کلی و جزئی و همراه آن ثابت‌های واپاشی دیفرانسیلی مرتبط با آن‌ها را معرفی کرده از کسرهای انشعابی در جملات آن می‌توان استدلال کرد که ثابت واپاشی دیفرانسیل مربوط به اندازه‌گیری توزیع انرژی رویدادهای واپاشی می‌باشد [۹۸].

---

[2] Lorentzian

[3] branching fraction

۱.۲.۴ مقدماتی درباره‌ی تراز تشدید (رزونانسی)

اگر $H=H_\circ+V$ هامیلتونی باشد که تشدیدها (رزونانس‌ها) را می‌سازد و در آن $H_\circ$ هامیلتونی آزاد و V پتانسیل برهمکنشی باشد طیف پیوسته‌ی H و $H_\circ$ در $[\circ,\infty)$ فرض می‌شود، (اغلب در مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی به این صورت می‌باشد) . برای ساده‌سازی فرض می‌شود که طیف پیوسته ناتبهگن می‌باشد بنابراین ویژه حالت‌های هامیلتونین آزاد $H_\circ$ را می‌توان توسط یک عدد کوانتومی تکی، انرژی E تعیین کرد. ویژه حالت‌های هامیلتونین آزاد $H_\circ$ توسط $|E\rangle$ مشخص می‌شود [۹۸].

$$H_\circ\,|E\rangle = E\,|E\rangle \tag{۷۶.۴}$$

و حالت تشدید (رزونانسی) را توسط $|z_R\rangle$ تعیین می‌کنند بنابراین

$$H\,|z_R\rangle = z_R\,|z_R\rangle \tag{۷۷.۴}$$

که در آن $z_R=E_R-\frac{i\Gamma_R}{۲}$ انرژي تشدید (رزونانسی) مختلط یک حالت واپاشی می‌باشد، که آن را از $e^{-iH\tau/\hbar}\,|z_R\rangle$ که تحول زمانی حالت تشدید است تعیین می‌کنند. τ پارامتر زمان است که در معادله شرودینگر ظاهر می‌شود، هنگامی‌که $|E\rangle$ بهنجار شده‌ی دلتا باشد و $|z_R\rangle$ با توجه به بهنجارش زلدویچ [۴] بهنجار شده باشد، ضرب اسکالر $\left\langle E\left|e^{-iH\tau/\hbar}\right|z_R\right\rangle$ بعد $\left(\sqrt{energy}\right)^{-۱}$ را دارد، بنابراین $\left|\left\langle E\left|e^{-iH\tau/\hbar}\right|z_R\right\rangle\right|^{۲}$ بعد $(energy)^{-۱}$ را دارد و می‌توان آن را به صورت چگالی احتمال تفسیر کرد برای مثال احتمال واحد انرژی را می‌توان در نظر گرفت. به این دلیل $\left|\left\langle E\left|e^{-iH\tau/\hbar}\right|z_R\right\rangle\right|^{۲}$ را می‌توان با چگالی احتمال $\frac{dP_\tau}{dE}$ شناسایی کرد که در آن تشدید (رزونانسی) به یک ذره‌ی پایدار با انرژی E در زمان τ واپاشی کرده است.

$$\frac{dP_\tau}{dE} \equiv \left|\left\langle E\left|e^{-iH\tau/\hbar}\right|z_R\right\rangle\right|^{۲} \tag{۷۸.۴}$$

همانطور که مشخص شد احتمال بقای یک حالت تشدید (رزونانسی) مطابق قانون نمایی باقی می‌ماند، یعنی

$$p_s(\tau) = e^{\frac{-\Gamma_R\tau}{\hbar}} \tag{۷۹.۴}$$

آهنگ واپاشی ابتدایی $\dot{p}_s(\circ)$ مطابق با احتمال بقا برآورده می‌شود.

$$\Gamma_R = -\hbar\dot{p}_s(\circ) = -\hbar\left.\frac{dp_s(\tau)}{d\tau}\right|_{\tau=\circ} \tag{۸۰.۴}$$

در مقایسه‌ی با رابطه‌ی (۸۰.۴) دیفرانسیل پهنای واپاشی حالت تشدید به صورت (۸۱.۴) تعریف می‌شود.

$$\frac{d\bar{\Gamma}(E)}{dE} \equiv -\hbar\frac{d\dot{P}_{\tau=\circ}}{dE} = -\hbar\frac{d}{d\tau}\left.\left(\frac{dP_\tau}{dE}\right)\right|_{\tau=\circ} \tag{۸۱.۴}$$

[4] Zeldovich

که $\frac{d\dot{P}_\tau}{dE}$ مشتق زمانی $\frac{dP_\tau}{dE}$ (یا آهنگ تغییر آن) می‌باشد. پهنای واپاشی کل توسط انتگرال‌گیری بر طیف پراکندگی هامیلتونی آزاد به صورت رابطه‌ی (۸۲.۴) بدست می‌آید.

$$\bar{\Gamma} = \int_{0}^{\infty} dE \frac{d\bar{\Gamma}(E)}{dE} \qquad (۸۲.۴)$$

در اینجا سه نظر وجود دارد اول اینکه در رویکرد استاندارد می‌توان از قاعده‌ی طلایی فرمی برای محاسبه‌ی پهنای $\bar{\Gamma}_{i\to f}$ با استفاده از (۷۵.۴) بهره برد و سپس می‌توان فرض کرد که $\bar{\Gamma}_{i\to f}$ با پهنای Γ_R که از قطب ماتریس S به وجود می‌آید همخوانی دارد. با این حال همانطور که در ۲.۲.۴ نشان داده می‌شود، مقدار پهنای واپاشی $\bar{\Gamma}$ در معادله‌ی (۸۲.۴) به صورت کلی با مقدار Γ_R متفاوت می‌باشد، بنابراین باید $\bar{\Gamma}$ به عنوان روش دیگری برای توصیف قدرت برهمکنش بین تشدید و پیوستگی تفسیر شود. دوم بدلیل احتمال در معادله‌ی (۷۸.۴)، می‌توان آن را برای یک تابع موج انتگرال پذیر مربعی φ نیز توصیف کرد. همچنین می‌توان پهنای واپاشی کل و پهنای واپاشی دیفرانسیلی را برای گذار از تراز φ به حالت پیوسته تعریف کرد و φ را در جملات حالت‌های تشدید (رزونانسی) گاموف و یک حالت پس زمینه [5] به صورت $|\varphi\rangle = c_R|z_R\rangle + |bg\rangle$ می‌توان بسط داد.که bg همان $background$ می‌باشد، در آن فرض می‌شود که سیستم فقط یک حالت تشدید (رزونانسی) دارد. در عبارت نتیجه شده فقط یک جزء تشدید (رزونانسی) منحصرا با $|z_R\rangle$ مرتبط می‌شود و دیگر جملات شامل $|bg\rangle$ می‌باشد و همچنین همراه یک بسط تشدید (رزونانسی) اتفاق می‌افتد که جمله‌ی انحصاری مربوط به $|z_R\rangle$ سهم از تشدید (رزونانسی) را به خودی خود دارند. سهم تشدید شامل معادلات (۷۸.۴)، (۸۱.۴) و (۸۲.۴) می‌باشد. جملات دیگر شامل سهم غیرنمایی برای ثابت واپاشی می‌باشد البته در اینجا تمرکز در قسمت تشدید (رزونانسی) می‌باشد.

سوم؛ پهنای واپاشی تشدید (رزونانسی) از معادله‌ی (۸۲.۴) به ترازهای گاموف بهنجار شده بستگی دارد. هنگامیکه از بهنجارش زلدویچ استفاده می‌شود پهنای واپاشی بعد انرژی را دارد. اگر از شرایط بهنجارش دیگری استفاده شود، مقدار و احتمال بعد $\bar{\Gamma}$ تغییر می‌کند.

در این قسمت درباره‌ی نقش بسط تشدید (رزونانسی) در مکانیک کوانتوم بحث می‌شود. در یک بسط رزونانس مانند $|\varphi\rangle = c_R|z_R\rangle + |bg\rangle$ حالت تشدید (رزونانسی) $|z_R\rangle$، سهم تشدید را در حالت φ باید حمل کند که شامل واپاشی نمایی است و قرار است که سهم‌های غیر رزونانسی که شامل انحراف از واپاشی نمایی می‌باشد را قسمت پس زمینه حمل کند. هنگامی که برای مثال احتمال بقا را با استفاده از یک تابع موج $|\varphi_1\rangle = c_{R,1}|z_R\rangle + |bg_1\rangle$ محاسبه می‌کنند، معمولا واپاشی نمایی را برای زمان‌های متوسط و انحراف از واپاشی نمایی را در زمان‌های کوتاه و طولانی بدست می‌آورند. با این حال اگر از یک تابع موج $|\varphi_2\rangle = c_{R,2}|z_R\rangle + |bg_2\rangle$ که فقط کمی متفاوت از φ_1 می‌باشد استفاده شود، باید احتمال بقای کمی متفاوت از انحرافات واپاشی نمایی بدست آید. حال سؤالی که مطرح می‌شود این است که آیا تابع موج تشدید (رزونانسی) همان φ_1 و φ_2 است یا چیز دیگری است؟ یا شاید بدتر آیا φ_1 و φ_2 توابع موج از

[5] background

دو تشدید (رزونانس) را نشان می دهند. در مثال ما فقط یک تشدید وجود دارد، $\varphi_۱$ و $\varphi_۲$ دو تقریب متفاوت از یک حالت منحصر به فرد که تابع موج رزونانسی مشابه هستند می‌باشد بنابراین یک راه هر آنچه که تشدید است از آنچه که تشدید نیست را تعیین می کند [۹۸].

۲.۲.۴ ارتباط بین Γ_R و $\bar{\Gamma}$

هنگامی که احتمال بقا توسط رابطه‌ی $p_s(\tau) = e^{\frac{-\Gamma_R \tau}{\hbar}}$ داده می شود آهنگ واپاشی اولیه Γ_R توسط رابطه‌ی (۸۳.۴) داده می‌شود.

$$\Gamma_R = -\hbar \dot{p}_s(\circ) \tag{۸۳.۴}$$

با این حال، اگر احتمال بقا با رابطه‌ی $p_s(\tau) = p_\circ e^{\frac{-\Gamma_R \tau}{\hbar}}$ بیان می شود آهنگ واپاشی اولیه Γ_R به صورت رابطه‌ی (۸۴.۴) خواهد بود.

$$\Gamma_R p_\circ = -\hbar \dot{p}_s(\circ) \tag{۸۴.۴}$$

بنابراین، تنها زمانی که احتمال توسط تابع نمایی بدون هیچ پیش‌فاکتوری نمایش داده می‌شود معادله‌ی (۸۳.۴) صادق می‌باشد بدلیل اینکه احتمال در معادله‌ی (۷۸.۴) یک پیش فاکتور در جلوی تابع نمایی دارد پهنای واپاشی بدست آمده از (۸۲.۴) متفاوت با پهنای ماتریس S، Γ_R می‌باشد. رابطه‌ی (۷۸.۴) را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۸۵.۴) نوشت.

$$\frac{dP_\tau}{dE} \equiv e^{\frac{-\Gamma_R \tau}{\hbar}} |\langle E | z_R \rangle|^۲ \tag{۸۵.۴}$$

بنابراین دیفرانسیل پهنای واپاشی (۸۱.۴) به صورت رابطه‌ی (۸۶.۴) نوشته می‌شود،

$$\frac{d\bar{\Gamma}(E)}{dE} = \Gamma_R |\langle E | z_R \rangle|^۲ \tag{۸۶.۴}$$

و پهنای واپاشی کل نیز به صورت رابطه‌ی (۸۷.۴) می‌باشد.

$$\bar{\Gamma} = \Gamma_R \int_\circ^\infty dE |\langle E | z_R \rangle|^۲ \tag{۸۷.۴}$$

بنابراین باید $\bar{\Gamma}$ با Γ_R برابر باشد اگر رابطه‌ی (۸۸.۴) برقرار باشد.

$$\int_\circ^\infty dE |\langle E | z_R \rangle|^۲ = ۱ \tag{۸۸.۴}$$

از آنجایی که این انتگرال به صورت رابطه‌ی (۸۹.۴) می‌باشد.

$$\int_\circ^\infty dE |\langle E | z_R \rangle|^۲ = \int_\circ^\infty dr |\langle r | z_R \rangle|^۲ \tag{۸۹.۴}$$

پهنای واپاشی $\bar{\Gamma}$ باید با پهنای ماتریس S یا همان Γ_R برابر شود. اگر مجذور مقدار قدرمطلق تراز گاموف $u(r, z_R) = \langle r | z_R \rangle$ به یک نرمال شود، یعنی

$$\int_\circ^\infty dr |u(r, z_R)|^۲ = ۱ \tag{۹۰.۴}$$

با این حال، از آنجایی که نرمالیزاسیون زلدویچ به صورت رسمی توسط رابطه‌ی (۹۱.۴) داده می‌شود،

$$\int_{\circ}^{\infty} dr[u\left(r, z_R\right)]^{۲} = ۱ \qquad (۹۱.۴)$$

پهنای واپاشی $\bar{\Gamma}$ به صورت کلی متفاوت از Γ_R پهنای واپاشی ماتریس S می‌باشد. در نهایت باید توجه کرد که در انحراف استاندارد قاعده ی طلایی فرض می‌شود که احتمال انتقال در واحد زمان (آهنگ واپاشی) مستقل از زمان می‌باشد. با این حال، آهنگ واپاشی مرتبط با بقای احتمال حالت تشدید $\dot{p}_s\left(\tau\right) = -\left(\frac{\Gamma_R}{\hbar}\right) e^{\frac{-\Gamma_R \tau}{\hbar}}$ مستقل از زمان نیست مگر اینکه به تقریب مرتبه‌ی صفر محدود شود. به همین دلیل برای هر توزیع احتمال دیگری که از واپاشی نمایی پیروی می کند صادق می‌باشد.

۳.۲.۴ محاسبه‌ی پهنای واپاشی برای حالت تشدید (رزونانسی)

فرض می‌شود که سیستم در یک حالت تشدید (رزونانسی) $\left|z_R\right\rangle$ فراهم شده است. چنین حالتی باید معادله‌ی انتگرال (۹۲.۴) را برآورد کند.

$$\left|z_R\right\rangle = \frac{۱}{z_R - H_{\circ} + i\varepsilon} V \left|z_R\right\rangle \qquad (۹۲.۴)$$

با ضرب معادله‌ی (۹۲.۴) در $e^{\frac{-iz_R \tau}{\hbar}}$ با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۹۳.۴)

$$e^{\frac{-iz_R \tau}{\hbar}} \left|z_R\right\rangle = e^{\frac{-iH\tau}{\hbar}} \left|z_R\right\rangle \qquad (۹۳.۴)$$

رابطه‌ی (۹۴.۴) بدست می‌آید.

$$e^{\frac{-iH\tau}{\hbar}} \left|z_R\right\rangle = e^{\frac{-iz_R \tau}{\hbar}} \frac{۱}{z_R - H_{\circ} + i\varepsilon} V \left|z_R\right\rangle \qquad (۹۴.۴)$$

از ضرب اسکالری معادله‌ی (۹۴.۴) در $\left\langle E\right|$ می‌توان به رابطه‌ی (۹۵.۴) دست یافت

$$\left\langle E \left| e^{\frac{-iH\tau}{\hbar}} \right| z_R \right\rangle = e^{\frac{-iz_R \tau}{\hbar}} \left\langle E \left| \frac{۱}{z_R - H_{\circ} + i\varepsilon} V \right| z_R \right\rangle \qquad (۹۵.۴)$$

وقتی $\frac{۱}{z_R - H_{\circ} + i\varepsilon}$ در رابطه‌ی (۹۵.۴) بر سمت چپ اثر می کند به صورت (۹۶.۴) می‌باشد.

$$\left\langle E\right| \frac{۱}{z_R - H_{\circ} + i\varepsilon} = \frac{۱}{z_R - E} \left\langle E\right| \qquad (۹۶.۴)$$

با جایگذاری (۹۶.۴) در (۹۵.۴):

$$\left\langle E \left| e^{\frac{-iH\tau}{\hbar}} \right| z_R \right\rangle = e^{\frac{-iz_R \tau}{\hbar}} \frac{۱}{z_R - E} \left\langle E \left| V \right| z_R \right\rangle \qquad (۹۷.۴)$$

با ترکیب معادلات (۹۷.۴) و (۷۸.۴) رابطه‌ی (۹۸.۴) بدست می‌آید.

$$\frac{dP_\tau\left(E\right)}{dE} \equiv \left|\left\langle E \left| e^{\frac{-iH\tau}{\hbar}} \right| z_R \right\rangle\right|^{۲} = e^{\frac{-\Gamma_R \tau}{\hbar}} \frac{۱}{\left(E - E_R\right)^{۲} + \left(\frac{\Gamma_R}{۲}\right)^{۲}} \left|\left\langle E \left| V \right| z_R \right\rangle\right|^{۲} \qquad (۹۸.۴)$$

بنابراین مشتق زمانی عبارت (۹۸.۴) به صورت (۹۹.۴) می‌شود.

$$\frac{d\dot{P}_{\tau}\left(E\right)}{dE}=e^{\frac{-\Gamma_R\tau}{\hbar}}\frac{\frac{\Gamma_R}{\hbar}}{\left(E-E_R\right)^{۲}+\left(\frac{\Gamma_R}{۲}\right)^{۲}}\left|\left\langle E\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^{۲} \tag{۹۹.۴}$$

از جایگذاری معادله‌ی (۹۹.۴) در (۸۱.۴) نتیجه دیفرانسیل پهنای واپاشی حالت تشدید می‌باشد.

$$\frac{d\bar{\Gamma}\left(E\right)}{dE}=\frac{\Gamma_R}{\left(E-E_R\right)^{۲}+\left(\frac{\Gamma_R}{۲}\right)^{۲}}\left|\left\langle E\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^{۲} \tag{۱۰۰.۴}$$

از جایگذاری معادله‌ی (۱۰۰.۴) در (۸۲.۴) نتیجه پهنای واپاشی کل در یک حالت تشدید می‌شود.

$$\bar{\Gamma}=\int_{۰}^{\infty}dE\frac{\Gamma_R}{\left(E-E_R\right)^{۲}+\left(\frac{\Gamma_R}{۲}\right)^{۲}}\left|\left\langle E\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^{۲} \tag{۱۰۱.۴}$$

بنابراین پهنای واپاشی یک حالت تشدید به مجذور عنصر ماتریسی برهمکنش پتانسیلی و شکل خطی لورنتسی بستگی دارد. معادله‌های (۱۰۰.۴) و (۱۰۱.۴) شامل هیچ تقریبی نیست، آنچنان که در ادامه مشاهده می‌شود، آن‌ها یک شباهت قوی با قانون طلایی فرمی معادلات (۷۴.۴) و (۷۵.۴) در تقریبی که تشدید تیز و دور از آستانه می‌باشد دارند. به منظور ارتباط معادلات (۱۰۰.۴) و (۱۰۱.۴) با قاعده‌ی طلایی فرمی از نتایج آشنایی استفاده می‌شود که وقتی پهنای آن به صفر می‌رسد لورنتسی به تابع دلتا منجر می‌شود.

$$\delta\left(x\right)=\lim_{\varepsilon\to ۰}\frac{\varepsilon/\pi}{x^{۲}+\varepsilon^{۲}} \tag{۱۰۲.۴}$$

باید اجازه داد که $x=E-E_R$ و $\varepsilon=\frac{\Gamma_R}{۲}$ باشد از رابطه (۱۰۲.۴) می‌توان نتیجه گرفت که

$$\delta\left(E-E_R\right)=\lim_{\Gamma_R\to ۰}\frac{\frac{\Gamma_R}{۲\pi}}{\left(E-E_R\right)^{۲}+\left(\frac{\Gamma_R}{۲}\right)^{۲}} \tag{۱۰۳.۴}$$

با ترکیب روابط (۱۰۰.۴)، (۱۰۱.۴) و (۱۰۳.۴) دیفرانسیل پهنای واپاشی و پهنای واپاشی به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$\frac{d\bar{\Gamma}\left(E\right)}{dE}\approx ۲\pi\left|\left\langle E\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^{۲}\delta\left(E-E_R\right) \tag{۱۰۴.۴}$$

$$\bar{\Gamma}\approx ۲\pi\left|\left\langle E\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^{۲} \tag{۱۰۵.۴}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود رابطه‌ی (۱۰۴.۴) مشابه رابطه‌ی (۷۴.۴) و رابطه‌ی (۱۰۵.۴) مشابه رابطه‌ی (۷۵.۴) می‌باشد. به جز اینکه در معادله‌ی (۱۰۵.۴) چگالی حالت‌ها یک می‌باشد. این تعجب آور است که پهنای واپاشی (۱۰۰.۴) و (۱۰۱.۴) مشابه قانون طلایی فرمی در تقریبی که تشدید تیز است می‌شود از آنجایی که محاسباتی که منجر به قانون طلایی

استاندارد می‌شود به صورت کلی متفاوت از محاسباتی که منجر به (۱۰۴.۴) و (۱۰۵.۴) می‌شود. اگرچه دلیل کاملا مشخص نیست اما می‌توان در ۴.۲.۴ یک توضیح احتمالی را بررسی کرد.

در اینجا می توان عبارت احتمال گذار از معادله‌ی (۹۸.۴) و پهنای واپاشی را از روابط (۱۰۰.۴) و (۱۰۱.۴) مطابق آنچه در مرجع [۹۹] ارائه شده است می‌باشد. اگرچه عبارت داده شده در این مرجع از یک احتمال وابسته به زمان که با معادلهٔ (۹۸.۴) تفاوت دارد، حاصل می‌شود.

۴.۲.۴ دلیل شباهت پهنای واپاشی رزونانسی با قاعده طلایی

در این بخش یک توضیح ممکن برای اینکه چرا پهنای واپاشی تشدید (رزونانسی) از معادله‌ی (۱۰۰.۴) و (۱۰۱.۴) چنین شباهت نزدیکی به قانون طلایی در معادله‌ی (۷۴.۴) و (۷۵.۴) در تقریبی که تشدید تیز است اشاره شده است. معادله ی لیپمن شوینگر برای حالت‌های داخلی به صورت (۱۰۶.۴) نوشته می شود.

$$\left|E^{+}\right\rangle = |E\rangle + \frac{1}{E - H_{0} + i\varepsilon} V \left|E^{+}\right\rangle \tag{۱۰۶.۴}$$

با در نظر گرفتن $G_{0} = \frac{1}{E-H_{0}+i\varepsilon}$ و با جایگذاری موفقیت آمیز آن در (۱۰۶.۴) بسط بورن از معادله‌ی لیپمن_شوینگر بدست می‌آید.

$$\left|E^{+}\right\rangle = |E\rangle + G_{0}V|E\rangle + (G_{0}V)^{2}|E\rangle + \cdots \tag{۱۰۷.۴}$$

در این بسط، $|E\rangle$ جمله‌ای می‌باشد که اگر هیچ‌گونه برهمکنشی هم نباشد بدست می‌آید برای مثال اگر $V = 0$ باشد، بنابراین معمولا حالت پراکندگی به صورت $|E_{s}\rangle = |E^{+}\rangle - |E\rangle$ تعریف می‌شود، مثل حالتی که شامل تاثیر واقعی برهمکنش می‌باشد. بنابراین می‌توان رابطه‌ی (۱۰۷.۴) را نوشت.

$$|E_{s}\rangle = G_{0}V|E\rangle + (G_{0}V)^{2}|E\rangle + \cdots \tag{۱۰۸.۴}$$

تقریب مرتبه‌ی اول حالت پراکنده شده توسط رابطه‌ی (۱۰۹.۴) داده می‌شود.

$$|E_{s}\rangle \approx G_{0}V|E\rangle \tag{۱۰۹.۴}$$

از سوی دیگر، معادله‌ی انتگرال توسط حالت رزونانسی برآورده می‌شود بنابراین معادله‌ی (۹۲.۴) به صورت (۱۱۰.۴) نوشته می‌شود.

$$|z_{R}\rangle = G_{0}(z_{R})V|z_{R}\rangle \tag{۱۱۰.۴}$$

هنگامیکه تشدید تیز می‌باشد، می‌توان حالت تشدید (رزونانسی) را توسط یک حالت مقید $|E_{R}\rangle$ تقریب زد.

$$|z_{R}\rangle \approx G_{0}(E_{R})V|E_{R}\rangle \tag{۱۱۱.۴}$$

تشابه بین معادله‌ی (۱۰۹.۴) و (۱۱۱.۴) ممکن است که دلیل پشت شباهت بین قانون طلایی استاندارد روابط (۷۴.۴) الی (۷۵.۴) و پهناهای واپاشی تقریب زده شده در روابط (۱۰۴.۴) و (۱۰۵.۴) باشد. اگرچه معادله‌های (۱۰۹.۴) و (۱۱۱.۴) مشابه‌اند اما تفاوت عمده ای بین آن‌ها می‌باشد. تقریب در معادله‌ی (۱۰۹.۴) بر این فرض استوار است که پتانسیل V ضعیف باشد، در حالیکه تقریب معادله‌ی (۱۱۱.۴) بر این فرض استوار است که پتانسیل V به اندازه‌ی کافی قوی باشد که تشدید بتواند تقریبا نزدیک یک حالت مقید در نظر گرفته شود.

۵.۲.۴ بررسی پهنای واپاشی پتانسیل دلتا

در اینجا هدف این است که با استفاده از معادلات (۱۰۰.۴) و (۱۰۱.۴) پهنای واپاشی ذره‌ی به دام افتاده توسط پتانسیل دلتا را که در $r = a$ واقع شده است محاسبه کرد.

$$V(r) = g\delta(r-a) \tag{۱۱۲.۴}$$

g برای قدرت پتانسیل حساب می شود، از آنجایی که این پتانسیل متقارن کروی می‌باشد می‌توان موقعیت را به صورت شعاعی نمایش داد برای ساده‌تر شدن محاسبات را به امواج S محدود باید کرد. (تکانه‌ی زاویه‌ای صفر می‌باشد.) زیرا موارد مراتب بالاتر به صورت مشابه مورد بررسی قرار می‌گیرد. ویژه تابع‌های $\chi_0(r;E)$ از هامیلتونی آزاد H_0 برآورد می‌شود.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}\chi_0(r;E) = E\chi_0(r;E) \tag{۱۱۳.۴}$$

راه‌حل دلتای_بهنجار شده با استفاده از معادله‌ی (۱۱۳.۴) معروف است. (با توجه به مرجع [۱۰۰]).

$$\chi_0(r;E) = \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{2m}{\hbar^2 k}}\sin(kr) \quad , \quad 0 \prec r \prec \infty \tag{۱۱۴.۴}$$

که $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ عدد موج می‌باشد. ویژه تابع $\chi(r;E)$ از هامیلتونی H برآورد می‌شود.

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2} + g\delta(r-a)\right)\chi(r;E) = E\chi(r;E) \tag{۱۱۵.۴}$$

بنابراین تحت شرایط مرزی

$$\chi(0;E) = 0 \tag{۱۱۶.۴}$$

$$\chi(a+;E) = \chi(a-;E) \tag{۱۱۷.۴}$$

$$\chi'(a+;E) - \chi'(a-;E) = \frac{2mg}{\hbar^2}\chi(a;E) \tag{۱۱۸.۴}$$

راه‌حل معادله‌ی (۱۱۵.۴) با توجه به معادله‌ی (۱۱۶.۴) الی (۱۱۸.۴) به صورت رابطه‌ي (۱۱۹.۴) می‌شود.

$$\chi(r;E)=A(E)\begin{cases}\sin(kr) & 0\prec r\prec a\\ \Im_1(E)e^{ikr}+\Im_2(E)e^{-ikr} & a\prec r\prec\infty\end{cases}\tag{۱۱۹.۴}$$

که در آن

$$\Im_1(E)=\frac{e^{-ika}}{2}\left[\left(1-i\frac{2mg}{\hbar^2 k}\right)\sin(ka)-i\cos(ka)\right]\tag{۱۲۰.۴}$$

$$\Im_2(E)=\frac{e^{ika}}{2}\left[\left(1+i\frac{2mg}{\hbar^2 k}\right)\sin(ka)+i\cos(ka)\right]\tag{۱۲۱.۴}$$

می‌باشد و همچنین $A(E)$ به صورت کلی ثابت بهنجارش است و ماتریس S به صورت (۱۲۲.۴) داده می‌شود.

$$S(E)=-\frac{\Im_1(E)}{\Im_2(E)}\tag{۱۲۲.۴}$$

حالت‌های تشدید (رزونانسی) با اعمال شرایط مرزی صرفا خروجی بر معادله‌ی شرودینگر بدست می‌آید یعنی این معادل اعمال $\Im_2(E)=0$ می‌باشد.

$$\left(1+i\frac{2mg}{\hbar^2 k}\right)\sin(ka)+i\cos(ka)=0\tag{۱۲۳.۴}$$

با استفاده از راه‌حل‌های پیچیده‌ای که از معادله‌ی (۱۲۳.۴) توسط Z_n، که $n=1,2,3,\ldots$ می‌باشد نشان داده می شود که حالت‌های تشدید (رزونانسی) مربوط به آن به صورت رابطه‌ی (۱۲۴.۴) می‌باشد [۹۸].

$$u(r;z_n)=N_n\begin{cases}\frac{1}{\Im_1(z_n)}\sin(k_n r) & 0<r<a\\ e^{ik_n r} & a<r<\infty\end{cases}\tag{۱۲۴.۴}$$

ثابت بهنجارش زلدویچ N_n مانده‌ی ماتریس S در عدد موج تشدید مختلط k_n داده می‌شود $N_n^2=ires[S(q)]_{q=k_n}$، جزء ماتریسی این پتانسیل توسط رابطه‌ی (۱۲۵.۴) می‌باشد.

$$\begin{aligned}\langle E|V|z_n\rangle=&\int_0^\infty dr\overline{\chi_0(r;E)}g\delta(r-a)u(r;z_n)\\=&g\sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{2m}{\hbar^2 k}}\sin(ka)N_n e^{ik_n a}\end{aligned}\tag{۱۲۵.۴}$$

بنابراین معادله‌ی (۱۰۰.۴) به صورت رابطه‌ی (۱۲۶.۴) بدست می‌آید.

$$\frac{d\bar\Gamma_n(E)}{dE}=\frac{\Gamma_n}{(E-E_n)^2+\left(\frac{\Gamma_n}{2}\right)^2}\frac{2g^2m}{\pi\hbar^2k}\sin^2(ka)|N_n|^2e^{2\beta_n a}\tag{۱۲۶.۴}$$

β_n بخش موهومی عدد موج مختلط k_n می‌باشد. برای مثال $k_n = \alpha_n - i\beta_n$ بنابراین پهنای واپاشی کل به صورت (۱۲۷.۴) محاسبه می‌شود.

$$\bar{\Gamma}_n = \frac{2g^2 m}{\pi\hbar^2}|N_n|^2 e^{2\beta_n a} C_n \tag{۱۲۷.۴}$$

که در آن C_n به صورت (۱۲۸.۴) بدست می‌آید.

$$C_n = \int_0^\infty dE \frac{\Gamma_n}{(E-E_n)^2 + \left(\frac{\Gamma_n}{2}\right)^2} \frac{1}{k}\sin^2(ka) \tag{۱۲۸.۴}$$

بدلیل اینکه پتانسیل پوسته_ دلتا ساده می‌باشد می‌توان پهنای واپاشی را به صورت تحلیلی محاسبه کرد. با این حال، برای پتانسیل‌های پیچیده‌تر، ممکن است مناسب نباشد که حالت‌های تشدید (رزونانسی) به صورت صریح محاسبه شوند.

۶.۲.۴ پهنای واپاشی جزئی و کسر انشعابی

هنگامی‌که تشدید مدهای واپاشی مختلفی دارد معمولا کسر انشعابی برای تشخیص اینکه چطور تشدید به هر مد واپاشی می‌کند تعریف می‌شود. به صورت تجربی کسر انشعابی به صورت تعداد ذراتی که به یک مد داده شده واپاشی می‌کند تقسیم بر تعداد کل واپاشی‌ها اندازه‌گیری می‌شود. برای بدست آوردن کسر انشعابی تئوری باید پهنای واپاشی جزئی را تعریف کرد. برای سادگی فرض می‌شود که تشدید دو مد واپاشی دارد و هر یک از مدهای واپاشی توسط یک عدد کوانتومی گسسته $j = 1, 2$ توصیف می‌شود. مشابه معادله‌ی (۹۸.۴) احتمال (در واحد انرژی) اینکه تشدید در زمان τ به مد j واپاشی می‌کند به صورت (۱۲۹.۴) می‌باشد.

$$\begin{aligned} \frac{dP_{j,\tau}(E)}{dE} &= \left|\left\langle E, j \left| e^{\frac{-iH\tau}{\hbar}} \right| z_R \right\rangle\right|^2 \\ &= e^{\frac{-\Gamma_R \tau}{\hbar}} \frac{1}{(E-E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma_R}{2}\right)^2} \left|\left\langle E, j \left| e^{\frac{-iH\tau}{\hbar}} \right| z_R \right\rangle\right|^2 \end{aligned} \tag{۱۲۹.۴}$$

مشابه معادله‌ی (۱۰۰.۴) دیفرانسیل پهنای واپاشی جزئی یک حالت تشدید (رزونانسی) به صورت (۱۳۰.۴) می‌باشد.

$$\frac{d\bar{\Gamma}_j(E)}{dE} = \frac{\Gamma_R}{(E-E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma_R}{2}\right)^2} |\langle E, j | V | z_R \rangle|^2 \tag{۱۳۰.۴}$$

پهنای واپاشی جزئی به صورت (۱۳۱.۴) محاسبه می‌شود.

$$\bar{\Gamma}_j = \int_0^\infty dE \frac{\Gamma_R}{(E-E_R)^2 + \left(\frac{\Gamma_R}{2}\right)^2} |\langle E, j | V | z_R \rangle|^2 \tag{۱۳۱.۴}$$

در نتیجه کسر انشعابی به صورت رابطه‌ی (۱۳۲.۴) بدست می‌آید.

$$B\left(R\rightarrow j\right)=\frac{\bar{\Gamma}_j}{\bar{\Gamma}_۱+\bar{\Gamma}_۲} \tag{۱۳۲.۴}$$

مشابه رابطه‌ي (۱۰۵.۴) یعنی هنگامی‌که تشدید به صورت تیز است پهنای واپاشی جزئی را می‌توان به صورت رابطه‌ی (۱۳۳.۴) تقریب زد،

$$\bar{\Gamma}_j\approx ۲\pi\left|\left\langle E_R,j\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^۲ \tag{۱۳۳.۴}$$

که در این تقریب کسر انشعابی به صورت (۱۳۴.۴) می‌باشد.

$$B\left(R\rightarrow j\right)\approx\frac{\left|\left\langle E_R,j\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^۲}{\left|\left\langle E_R,۱\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^۲+\left|\left\langle E_R,۲\left|V\right|z_R\right\rangle\right|^۲} \tag{۱۳۴.۴}$$

و این نتیجه‌ی یکسانی با پهنای واپاشی است که از معادله‌ی (۷۵.۴) با استفاده از $|E_f\rangle\equiv|E_R\rangle$ و $|E_i\rangle\equiv|z_R\rangle$ بدست آورده می‌شود.

بنابراین در تقریبی که تشدید تیز است کسر انشعابی بدست آمده از توزیع احتمال داده شده در رابطه‌ی (۱۲۹.۴) مشابه آن‌هایی می‌باشد که از قاعده‌ی طلایی بدست آمده‌اند. با این حال، وقتی که تشدید تیز نیست باید کسر انشعابی متفاوتی بدست بیاید. به این دلیل که کسر انشعابی به بهنجارش حالت تشدید (رزونانسی) بستگی ندارد، معادله‌ی (۱۳۲.۴) به صورت کلی یک نتیجه‌ی متفاوت از معادله‌ی (۱۳۴.۴) را می‌دهد و موردی ندارد که از چه بهنجارشی برای حالت تشدید (رزونانسی) استفاده می‌شود.

۷.۲.۴ ثابت‌های واپاشی (بدون بعد)

دو نوع اصلی از واپاشی تجربی وجود دارد. در یک نوع آن، تعداد رویدادهای واپاشی آن مانند یک تابع زمان اندازه‌گیری می‌شود که مربوط به اندازه‌گیری یک توزیع احتمال وابسته به زمان مانند احتمال بقا می‌باشد. در نوع دیگر تعداد رویدادهای واپاشی مانند یک تابع انرژی اندازه‌گیری می‌شود و یک توزیع انرژی رویدادهای واپاشی مشابه توزیع‌های جرمی ثابت فیزیک ذرات را بدست می‌آورد. (برای مثال می‌توان به مراجع [۱۰۱–۱۰۹] مراجعه کرد.) هدف از این بخش توصیف توزیع انرژی رویدادهای واپاشی در جملات ترازهای رزونانسی می‌باشد. چنین مقادیر مستقل از زمانی را می‌توان از حل معادله شرودینگر مستقل از زمان بدست آورد. به همین ترتیب فرآیند واپاشی یک پدیده‌ی وابسته به زمان می‌باشد اما می‌توان آن را توسط کمیت‌های مستقل از زمان مانند توزیع انرژی رویدادهای واپاشی توصیف کرد. توزیع انرژی تجربی رویدادهای واپاشی به صورت ساده تعداد رویدادهای واپاشی در واحد انرژی هستند که همچنین تابع انرژی می‌باشد.

$$\left(\frac{\#decay\quad events}{energy}vs.energy\right) \tag{۱۳۵.۴}$$

هنگامی‌که تعداد رویدادهای واپاشی بر تعداد کل رویدادها $N_\circ$ تقسیم شود، توزیع تجربی، متناظر با توزیع احتمال تئوری واپاشی رابطه‌ی (۱۳۶.۴) می‌باشد.

$$\frac{dP\left(E\right)}{dE}=\left(\frac{\#decay \quad probability}{energy}vs.energy\right)\leftrightarrow\left(\frac{1}{N_\circ}\frac{\#decay \quad events}{energy}vs.energy\right) \tag{۱۳۶.۴}$$

که در آن $\frac{dP(E)}{dE}$ احتمال در واحد انرژی (البته به صورت تئوری) می باشد که درآن رزونانس به یک ذره‌ی پایدار با انرژی E واپاشی کرده است. هنگامی که $|E\rangle$ با دلتا بهنجار شده و $|z_R\rangle$ با توجه به بهنجارش زلدویچ بهنجار شده است، ضرب اسکالری $\langle E \mid z_R\rangle$ بعد $\left(\sqrt{energy}\right)^{-1}$ را دارد، بنابراین $|\langle E \mid z_R\rangle|^2$ بعد $(energy)^{-1}$ را دارد بنابراین برای شناسایی آن رابطه‌ی (۱۳۷.۴) طبیعی می‌باشد.

$$\frac{dP\left(E\right)}{dE}\equiv|\langle E \mid z_R\rangle|^2 \tag{۱۳۷.۴}$$

بدیهی است که احتمال در رابطه‌ی (۱۳۷.۴) یک نسخه‌ی مستقل از زمان احتمال در معادله‌ی (۷۸.۴) می‌باشد. احتمال کل ذره‌ای که به حالت پیوسته واپاشی می‌کند به صورت (۱۳۸.۴) می‌باشد.

$$P=\int_\circ^\infty\frac{dP\left(E\right)}{dE}dE \tag{۱۳۸.۴}$$

همین‌طور با تعریف پهنای واپاشی $\frac{d\bar{\Gamma}}{dE}$ و $\bar{\Gamma}$ می‌توان ثابت‌های واپاشی کل و دیفرانسیل آن را به صورت روابط (۱۳۹.۴) و (۱۴۰.۴) تعریف کرد.

$$\frac{d\Gamma\left(E\right)}{dE}\equiv\frac{dP\left(E\right)}{dE}=|\langle E \mid z_R\rangle|^2 \tag{۱۳۹.۴}$$

$$\Gamma\equiv P=\int_\circ^\infty|\langle E \mid z_R\rangle|^2dE \tag{۱۴۰.۴}$$

با استفاده از معادله‌ی (۹۲.۴) و با استفاده از مراحل مشابه در ۳.۲.۴ می توان ثابت واپاشی را از معادله‌های (۱۳۹.۴) و (۱۴۰.۴) بیان کرد بنابراین

$$\frac{d\Gamma\left(E\right)}{dE}=\frac{1}{\left(E-E_R\right)^2+\left(\frac{\Gamma_R}{2}\right)^2}|\langle E\,|V|\,z_R\rangle|^2 \tag{۱۴۱.۴}$$

$$\Gamma=\int_\circ^\infty dE\frac{1}{\left(E-E_R\right)^2+\left(\frac{\Gamma_R}{2}\right)^2}|\langle E\,|V|\,z_R\rangle|^2 \tag{۱۴۲.۴}$$

این عبارات بسیار مشابه پهنای واپاشی در روابط (۱۰۰.۴) و (۱۰۱.۴) می‌باشد، یعنی می‌توان گفت که این روابط (۱۰۰.۴)، (۱۰۱.۴)، (۱۴۱.۴) و (۱۴۲.۴) از روابط (۱۴۳.۴) و (۱۴۴.۴) پیروی می‌کنند.

$$\frac{d\Gamma\left(E\right)}{dE}=\frac{1}{\Gamma_R}\frac{d\bar{\Gamma}\left(E\right)}{dE} \tag{۱۴۳.۴}$$

$$\Gamma = \frac{\bar{\Gamma}}{\Gamma_R} \tag{۱۴۴.۴}$$

همان‌طور که از رابطه‌ی (۱۳۸.۴) و از رابطه‌ي (۱۴۰.۴) مشاهده می شود، Γ یک ثابت بدون بعد است که می تواند روش دیگری برای اندازه گیری قدرت کلی برهمکنش بین رزونانس و پیوستگی تفسیر شود. در مقابل $\frac{d\Gamma(E)}{dE}$ واحد $(energy)^{-۱}$ رادارد. از این رو می‌تواند به عنوان چگالی احتمالی تفسیر شود که رونانس به یک ذره‌ی پایدار با انرژی E واپاشی می کند. مشابه پهنای واپاشی $\bar{\Gamma}$، می‌توان Γ ثابت واپاشی بدون بعد را از یک تابع موج φ مربعی ـ انتگرال پذیر تعریف کرد. هنگامی‌که یک بسط تشدید (رزونانسی) φ انجام می‌شود و این بسط را در عباراتی که برای Γ است جایگذاری کرده یک سهم آن منحصرا به حالت تشدید (رزونانسی) ارتباط دارد و سهم دیگری هم که شامل پس‌زمینه می‌باشد بدست می‌آید. سهمی که منحصرا با $|z_R\rangle$ در ارتباط است و توسط معادله‌ی (۱۴۱.۴) و (۱۴۲.۴) داده می‌شود به خودی خود یک سهم تشدید (رزونانسی) است. باید توجه داشت که ثابت واپاشی کل Γ با یک تابع موج φ نرمال شده به یک مرتبط می‌باشد، همان‌طور که باید باشد، از آنجایی که تعداد رویدادها در واحد انرژی باید به تعداد کل رویدادها اضافه شود و همین‌طور با توجه به $\frac{d\bar{\Gamma}_j(E)}{dE}$ ، $\bar{\Gamma}_j$ می‌توان ثابت‌های واپاشی جزئی را به صورت (۱۴۵.۴) و (۱۴۶.۴) تعریف کرد.

$$\frac{d\Gamma_j(E)}{dE} = \frac{dP_j(E)}{dE} = \frac{۱}{(E-E_R)^۲ + \left(\frac{\Gamma_R}{۲}\right)^۲} |\langle E, j|V|z_R\rangle|^۲ \tag{۱۴۵.۴}$$

$$\Gamma_j = P_j = \int_۰^\infty dE \frac{۱}{(E-E_R)^۲ + \left(\frac{\Gamma_R}{۲}\right)^۲} |\langle E, j|V|z_R\rangle|^۲ \tag{۱۴۶.۴}$$

که در آن P_j احتمالی می‌باشد که تشدید به مد j واپاشی می‌کند. با پیگیری معادلات (۱۳۰.۴)، (۱۳۱.۴)، (۱۴۵.۴) و (۱۴۶.۴) می‌توان رابطه‌ی بین پهناهای واپاشی و ثابت‌های واپاشی را به صورت (۱۴۷.۴) و (۱۴۸.۴) بدست آورد.

$$\frac{d\Gamma_j(E)}{dE} = \frac{۱}{\Gamma_R}\frac{d\bar{\Gamma}_j(E)}{dE} \tag{۱۴۷.۴}$$

$$\Gamma_j = \frac{\bar{\Gamma}_j}{\Gamma_R} \tag{۱۴۸.۴}$$

مزیت اصلی ثابت‌های واپاشی جزئی Γ_j بیش از پهنای واپاشی جزئي $\bar{\Gamma}_j$ می‌باشد این است که ثابت واپاشی Γ_j راه ارتباطی بین نسبت انشعاب تئوری و تجربی را بیشتر آشکار می‌سازد. به منظور مشاهده‌ی این موضوع اگر N_j تعداد رویدادهای واپاشی به مد j باشد بنابراین کسرهای انشعابی تجربی به صورت (۱۴۹.۴) تعریف می‌شوند.

$$B(R \to j) = \frac{N_j}{N_۱ + N_۲} \tag{۱۴۹.۴}$$

اگر این آزمایش $N_\circ = N_۱ + N_۲$ بار انجام شود(یا هم‌ارز آن اگر $N_\circ$ کپی از رزونانس یکسان وجود داشته باشد) ، تعداد رویدادهای واپاشی به مد j برابر است با تعداد ممکن رویدادهای واپاشی ضربدر احتمال آنکه رزونانس به مد j واپاشی کند.

$$N_j = N_\circ P_j = N_\circ \Gamma_j \tag{۱۵۰.۴}$$

که از معادله‌ی (۱۴۶.۴) در مرحله‌ی دوم استفاده شده است. حال با جایگذاری رابطه‌ی (۱۵۰.۴) در (۱۴۹.۴) کسر انشعابی به صورت (۱۵۱.۴) بدست می‌آید.

$$B\left(R \to j\right) = \frac{\Gamma_j}{\Gamma_۱ + \Gamma_۲} \tag{۱۵۱.۴}$$

بدلیل رابطه‌ی (۱۴۸.۴)، کسر انشعابی تئوری از رابطه‌ی (۱۵۱.۴) مشابه کسر انشعابی بدست آمده در (۱۳۲.۴) می‌باشد، با این حال در (۱۳۲.۴) کسرهای انشعابی مانند خارج قسمت دو کمیت بعددار بیان می‌شوند در حالیکه در (۱۵۱.۴) و (۱۴۹.۴) آن‌ها مانند کمیت‌های بدون بعد بیان می‌شوند. بنابراین، بیان کسر انشعابی تئوری در جملات ثابت‌های واپاشی جزئی (بدون بعد) Γ_j نسبت به پهنای واپاشی جزئی $\bar{\Gamma}_j$ قابل ترجیح‌تر به نظر می‌رسند [۹۸].

فصل ۵

نتیجه‌گیری

در این پایان نامه به بحث و بررسی سیستم‌های وابسته به زمان و پهنای واپاشی مربوط به این سیستم‌ها پرداخته شده است. تعیین تابع ساختار هادرون‌ها یکی از مهمترین مسائل فیزیکی در QCD می‌باشد ، بنابراین خواص واپاشی و اهمیت مطالعه‌ی سیستم‌های مزونی معرفی گردید و با توجه به مطالب بیان شده به بررسی و مطالعه‌ی سیستم‌های مزونی غیر نسبیتی و بدست آوردن تابع موج و کمیت‌های دینامیکی آن‌ها پرداخته شد. برای سیستم‌های مزونی علاوه بر پتانسیل‌های رایج معرفی شده مانند پتانسیل کرنل مدل‌های جدیدی از برهمکنش‌ها معرفی شدند. این مدل‌های جدید پتانسیل در نظر گرفته شده برای بررسی سیستم‌های مزونی غیرنسبیتی، ترکیبی از پتانسیل‌های کولنی بعلاوه‌ی نمایی، برهمکنش دیگر حاصل ترکیب پتانسیل‌های کراتزر، یوکاوا و خطی و پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی بودند.

با استفاده از روش اختلال و با در نظر گرفتن پتانسیل کرنل و با استفاده از روش NU به محاسبه‌ی تابع موج و انرژی سیستم‌های ذکر شده تا مرتبه‌ی اول اختلال پرداخته شد.سپس خواص واپاشی سیستم‌های مزونی B ، B_s ، D و D_s مانند طیف جرمی، ثابت واپاشی، پهنای واپاشی لپتونی و پهنای واپاشی نیمه لپتونی بررسی شدند که در اکثر موارد توافق خوبی بین نتایج تجربی و نتایج پیش‌بینی شده توسط دیگران حاصل شد. نتایج بدست آمده برای مدل‌های پتانسیل پیشنهادی در ادامه گزارش می‌شود و همان‌طور که مشاهده می‌شود این نتایج در تطابق خوبی با مقادیر گزارش شده می‌باشد. برای نسبت‌های ثابت واپاشی پتانسیل کراتزر، یوکاوا و خطی این نتایج به صورت $\frac{f_{D_s}}{f_D} = ۱/۰۷۷$ ، $\left(\frac{\bar{f}_{D_s}}{\bar{f}_D} = ۱/۰۴۵\right)$ و $\frac{f_{D_s^*}}{f_{D^*}} = ۱/۰۸$ ،

$\left(\frac{\bar{f}_{D_s^*}}{\bar{f}_{D^*}} = ۱/۰۴۶\right)$ و همینطور $\frac{f_{B_s^*}}{f_{B^*}} = ۱/۱۱۵$، $\left(\frac{\bar{f}_{B_s^*}}{\bar{f}_{B^*}} = ۱/۰۸\right)$ می‌باشد. برای پتانسیل ترکیبی کراتزر، گاوسی و خطی نتایج به صورت $\frac{f_{D_s}}{f_D} = ۱/۰۸$، $\left(\frac{\bar{f}_{D_s}}{\bar{f}_D} = ۱/۰۵\right)$ و $\frac{f_{D_s^*}}{f_{D^*}} = ۱/۰۸$، $\left(\frac{\bar{f}_{D_s^*}}{\bar{f}_{D^*}} = ۱/۰۵\right)$ و $\frac{f_{B_s^*}}{f_{B^*}} = ۱/۰۲$، $\left(\frac{\bar{f}_{B_s^*}}{\bar{f}_{B^*}} = ۱/۰۴\right)$ می‌باشد.

در ادامه به بررسی برخی از سیستم‌های کوانتومی وابسته به زمان پرداخته و احتمال بقا در آن‌ها مورد بررسی قرار داده شد. ذره در چاه کوانتومی با دیواره‌ی متحرک را با رهیافت پروشوگین و پرونین براساس هامیلتونی مؤثر ارائه شده بررسی کرده و در نهایت تابع موج ذره در چاه پتانسیل متناهی با دیواره‌ی متحرک بدست آمد، که در آن اثر دیواره‌ی متحرک به صورت یک فاکتور فاز دیراک در تابع موج ظاهر می‌شود و با بررسی‌های انجام شده تفاوت تابع موج ذره در چاه متناهی یک بعدی در حالت دیواره‌ی ثابت و متحرک در فاکتور فاز ظاهر شده می‌باشد که به سرعت حرکت دیواره بستگی دارد. چگالی احتمال برای تابع موج این سیستم پیوسته می‌باشد، اما پایستگی انرژی در صورتی امکان‌پذیر می‌باشد که $L(t)$ یا همان دیواره‌ی متحرک ثابت باشد.

سپس معادله شرودینگر برای چاه پتانسیل نامتناهی متقارن و نامتقارن بررسی شد که در آن هر دو دیواره در جهت‌های مخالف با سرعت‌های متفاوت حرکت می‌کنند در نهایت تابع موج این سیستم محاسبه شد و نشان داده شد که با توجه به شرایط مرزی برای چاه پتانسیل متقارن تابع موج برای پاریته‌ی زوج و فرد برقرار می باشد. با استفاده از معادله‌ی کلاین-گوردن به بررسی سد پتانسیل با دیواره‌های متحرک پرداخته شد و در نهایت تابع موج مربوط به آن محاسبه شد و نشان داده شد که با وجود حرکت همزمان ذره و دیواره‌های پتانسیل بقای انرژی برقرار می‌باشد، البته این در شرایطی خاص یعنی در $V_\circ = ۱$ برقرار می‌باشد.

در ادامه به بررسی مثالی کاربردی از پتانسیل با دیواره‌های متحرک پرداخته شد، فرض می‌شود یکی از دیواره‌های جعبه که ذره در آن به دام افتاده متحرک می‌باشد مانند یک پیستون در ترمودینامیک کلاسیکی عمل می‌کند. این سیستم کوانتومی، چرخه‌ی ماشین گرمایی استرلینگ کوانتومی برگشت‌ناپذیر می‌باشد در این چرخه که شامل دو فرآیند همدما و دو فرآیند هم‌حجم می‌باشد انرژي مراحل انجام چرخه و همینطور میزان کار و گرمای مبادله شده در این چرخه بین محیط گرم و سرد و سیستم محاسبه شد و در نهایت پارامترهای مهم عملکرد مانند توان خروجی و بازده و آنتروپی چرخه بدست آمد.

برای بررسی پهنای واپاشی سیستم‌های وابسته به زمان یک پتانسیل وابسته به زمان در نظر گرفته شد و با استفاده از روش اختلال و با مقایسه‌ی روابط بدست آمده برای نرخ گذار (یا احتمال گذار در واحد زمان) با قاعده‌ی طلایی فرمی پهنای واپاشی بدست آمد ، در این قسمت می‌توان مشاهده کرد که قسمت موهومی جابه‌جایی انرژی همان پهنای واپاشی می‌باشد و τ_i که همان متوسط نیمه عمر حالت $|i\rangle$ می‌باشد اگر $\hbar$ در آن واحد باشد رابطه‌ی عکس با پهنای واپاشی دارد و نشان داده شد بدلیل اینکه Γ_i معنی معمول پهنای کل نصف بیشینه را دارد پهنای واپاشی نامیده می‌شود. برای مثال یک اتم هیدروژن در حالت برانگیخته $۲p$ قرار گرفت،

برای بررسی آهنگ گذار در واحد زمان یا پهنای واپاشی مربوط به گذارهای $۲p \rightarrow ۱s$ لیمان و نیمه عمر آن در حالت $۲p$ ابتدا آهنگ گذار مربوط به گسیل فوتون بررسی شد. نتیجه‌ی پهنای واپاشی در این گذار به صورت $\Gamma_{۲p\rightarrow ۱s} = ۶/۲۸ \times ۱۰^{۸} \left(s^{-۱}\right)$ و میانگین طول عمر اتم هیدروژن در حالت برانگیخته‌ی $۲p$ آن ، $\tau = ۱/۶ \times ۱۰^{-۹} \left(s^{-۱}\right)$ می‌باشد.

حالت‌های تشدید(رزونانسی) که تابع موج‌های طبیعی تشدید می‌باشند، منجر به عباراتی برای پهنای واپاشی کلی، جزئی و دیفرانسیلی یک تشدید می‌شوند. در ادامه محاسباتی برای پهنای واپاشی در تقریبی که تشدید تیز می‌باشد ارائه شد و نشان داده شد که این عبارات شباهت بسیار نزدیکی با قاعده‌ی طلایی فرمی دارند هنگامی‌که پتانسیل ساده می‌باشد مانند پتانسیل دلتا_ پوسته می‌توان یک عبارت دقیق برای پهنای واپاشی بدست آورد، اگرچه برای بیشتر پتانسیل‌ها باید مقید به استفاده از تقریب‌ها بود. همچنین کسرهای انشعابی را برای یک تشدید که مدهای زیادی دارد ایجاد کرده نتیجه‌ی کسرهای انشعابی بدست آمده در این مورد با کسرهای انشعابی بدست آمده با استفاده از روش قاعده‌ی طلایی فرمی تنها در زمانی که تشدید آن تیز می باشد همزمان شده است. بنابراین هنگامی‌که رزونانس تیز نیست کسر انشعابی محاسبه شده حداقل از استاندارد مبتنی‌بر قانون طلایی متمایز می‌شود. همچنین ثابت‌های واپاشی کلی و جزئی بدون بعد یک حالت تشدید (رزونانسی) معرفی شد، با استفاده از این ثابت‌های واپاشی بدون بعد می‌توان هر دوی کسرهای انشعابی تئوری و تجربی را به صورت کمیت‌های بدون بعد بیان کرد. علاوه‌براین دیفرانسیل ثابت واپاشی را می‌توان با توزیع انرژی رویدادهای واپاشی که یک مقایسه‌ی غیرنسبیتی توزیع جرم ثابت فیزیک ذرات می‌باشد شناسایی کرد.

مراجع

[۱] یازرلو ب، (۱۳۹۵)، پایان‌نامه دکتری : **"مطالعه‌ی کمیت‌های دینامیکی هادرون‌ها در مدل کوارکی "** دانشکده فیزیک، دانشگاه سمنان.

[۲] سعیدی جوزچال خ ،(۱۳۹۵)، پایان‌نامه ارشد: " **بررسی ذرات نسبیتی و فرا نسبیتی با استفاده از میدان های وابسته به زمان"** ،دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[۳] ساکورایی. جی . جی،مترجمان :علیمحمدی م ، مشفق ح ر،(۱۳۸۰)، **"مکانیک کوانتومی مدرن"** ،چاپ دهم،موسسه انتشارات دانشگاه تهران، صفحه ۴۱۵ـ ۴۲۰ .

[۴] ساکورایی.جی.جی، مترجمان :علیمحمدی م ، مشفق ح ر،(۱۳۸۰)، **"مکانیک کوانتومی مدرن"** ،چاپ دهم،موسسه انتشارات دانشگاه تهران،مسئله ۴۰، صفحه۴۳۱.

[۵] زتیلی ن ،مترجمان، جلیلیان نصرتی م ر،نور علیشاهی ف ،(۱۳۹۲)، **"مکانیک کوانتومی مفاهیم و کاربردها"** ویرایش دوم،چاپ دوم،انتشارات صفار،صفحه ۶۶۹ـ ۶۷۲.

[۶] زتیلی ن ،مترجمان، جلیلیان نصرتی م ر،نور علیشاهی ف ،(۱۳۹۲)، **"مکانیک کوانتومی مفاهیم و کاربردها"** ویرایش دوم،چاپ دوم،انتشارات صفار،مسئله ۱۰،صفحه۶۸۲ـ ۶۸۴ .

[7] González .P., Valcarce . A., Garcilazo, H. and Vijande J. (2003)." Heavy meson description with a screened potential", **Phys. Rev. D**, 68 , 3, .034007

[8] Zalewski K. (1998). "Nonrelativistic description of heavy quarkonia " **APPL** , 29, 2535-.2538

[9] Ciftci . H and Koru . H .(2001). "Radiative decay of light and heavy mesons in an independent quark model", **Modern Physics Letters A**, 16 , 27, .1785-1794

[10] Matrasulov. D. U., Khanna. F. C. and Yusupov, H. (2003)." Spectra of heavy–light mesons." **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.**, 29, 3, .475

[11] Kumar. K. V. and Monteiro, A. P .(2011). "Heavy quarkonium spectra and its decays in a nonrelativistic model with Hulthen potential", **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.**, 38 ,8, 085001.

[12] Cea. P., Colangelo. P., Cosmai. L.and Nardulli, G. (1988)." Decay constants of heavy mesons from a QCD relativistic potential model", **Phys. Lett. B**, 206 ,4, .691-695

[13] Liu J. B. and Yang M. Z., arXiv:1307.4636.

[14] Ebert. D., Faustov. R. N. and Galkin. V. O. (2009)." Mass spectra and Regge trajectories of light mesons in the relativistic quark model", **Phys. Rev. D.**, 79(11), .114029

[15] Ebert. D., Faustov. R. N. and Galkin. V. O. (2010). "Heavy-light meson spectroscopy and Regge trajectories in the relativistic quark model", **Eur. Phys.J. C**, 66 ,1 , 197-206.

[16] Kumar. K. V.and Monteiro, A. P. (2011)." Heavy quarkonium spectra and its decays in a nonrelativistic model with Hulthen potential". **J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.**, 38 ,8, 085001.

[17] Hassanabadi. H., Rahmani, S.and Zarrinkamar. S. (2014)." The semileptonic $\bar{B} \to D\ell\bar{\nu}$ and $\bar{B}_s \to D_s\ell\bar{\nu}$decays in Isgur–Wise approach.", **Eur. Phys. J. C**, 74, 10, .3104

[18] Hassanabadi. H., Rahmani, S. and Zarrinkamar, S. (2016). "The Semileptonic Decay Modes $\bar{B} \to D\ell\bar{\nu}$ and $\bar{B}_s \to D_s\ell\bar{\nu}$: A New Analysis in Potential Model." **Few-Body Syst**, 57 ,4, 241-247.

[19] Yazarloo. B. H., and Mehraban, H. (2017). "Mass spectrum and decay properties of heavy-light mesons: D, Ds, B and Bs mesons". **Eur. Phys. J. Plus**, 132 , 2, .80

[20] Kobayashi. M., and Maskawa. T. (1973)." CP-violation in the renormalizable theory of weak interaction." **Prog. of Theor. Phys.**, 49(2), 652-657.

[21] Pham. T. N .(2011). "CKM Matrix Elements" ,arXiv1110.6050v5

[22] Nakamura, K., Particle Data Group. (2010). "Review of particle physics". **J. Phys. G: Nucl and Particle Phys**, 37(7A), .075021

[23] Schrödinger.E. (1940, January). ”Further studies on solving eigenvalue problems by factorization”, **Proc.R.IrishAcad**. Section A: Mathematical and Physical Sciences, 46, 183-206

[24] Roy.S, Brdoloi.N.S and Chudhury.D.K.(2013). ”Isgur-Wise Function within a QCD quark model with Airy’s function as the wavefunction of heavy-light mesons”, **Can J.Phys.**, 1, 91, 34.

[25] Yazarloo. B. H . and Mehraban. H. (2016).” Study of B and Bs mesons with a Coulomb plus exponential type potential”, **EPL** , 116 ,3, 31004.

[26] Li. B. Q and Chao. K. T. (2009). ”Higher charmonia and X, Y, Z states with screened potential” **Phys Rev D**, 79,(9), .094004

[27] Lakhina. O and Swanson. E. S. (2006).” Dynamic properties of charmonium ” , **Phys. Rev. D.**, 74, 1, 014012.

[28] Van Royen. R and Weisskopf.V. F. (1967). ”Hardon decay processes and the quark model”, **Nuovo Cimento A (1971-1996)**, 50, 3, .617-645

[29] Braaten.E and Fleming. S. (1995). ”QCD radiative corrections to the leptonic decay rate of the B c meson” **Phys. Rev. D.**, 52, 1, 181.

[30] Villa. S. (2007). ”Review of B_u leptonic decays” **arXiv:0707.0263**

[31] Particle Data Group (Olive K. A. et al.).(2014). **Chin. Phys. C**, 38 ,9, 090001.

[32] Cvetič. G, Kim, C. S, Wang, G. L and Namgung. W. (2004). ”Decay constants of heavy meson of 0− state in relativistic Salpeter method”, **Phys. Lett. B**, 596,(1-2), 84-89.

[33] Ebert. D. Faustov .R. N and Galkin. V. O.(2007).” Analysis of semileptonic B decays in the relativistic quark model”,**Phys. Rev. D.**, 75 ,7, 074008.

[34] Yukawa. H. (1935). ” On the interaction of elementary particles. I”, **Phys. Math. Soc. JPN.**,(3rd Series), 17, .48-57

[35] Chen. C. Y. and Dong .S. H. (2005). ”Exactly complete solutions of the Coulomb potential plus a new ring-shaped potential” , **Phys. Lett. A**, 335 , 5, .374-382

[36] Yazarloo .B. H., Hassanabadi. H and Zarrinkamar, S. (2013).” DKP equation under scalar and vector Kratzer potentials”, Turkish Journal of Physics, 37 , 1, .83-89

[37] Zeng. J., Van Orden. J. W. and Roberts. W. (1995). ”Heavy mesons in a relativistic model”, **Phys. Rev. D**, 52, 9 , 5229.

[38] Albertus. C, Hernandez. E., Nieves. J. and Verde-Velasco. J. M. (2005). ”Study of the leptonic decays of pseudoscalar$B$, D and vector B^*, D^* mesons and of the semileptonic$B \to D$and $B \to D^*$ decays” ,**Phys. Rev. D.**, 71(11), 113006.

[39] Bai-Qing. L. and Kuang-Ta. C. (2009). ”Bottomonium Spectrum with Screened Potential”. **Commun. Theor. Phys.**, 52 ,4 , .653

[40] Hassanabadi. H., Ghafourian. M. and Rahmani. S. (2016).” Study of Heavy-Light Mesons Properties Via the Variational Method for Cornell Interaction”, **Few-Body Syst**, 57 ,4 , .249-254

[41] Di Pierro. M. and Eichten. E. (2001).” Excited heavy-light systems and hadronic transitions”, **Phys Rev D**, 64, 11, .114004

[42] Van Royen. R. and Weisskopf. V. F. (1967).” Hardon decay processes and the quark model”, **Il Nuovo Cimento A** (1971-1996), 50 ,3, .617-645

[43] Ebert. D, Faustov .R. N. and Galkin. V. O. (2006).” Relativistic treatment of the decay constants of light and heavy mesons”, **Phys. Lett. B.**, 635 ,2, .93-99

[44] Wang. Z. G., Yang. W. M. and Wan. S. L. (2004). ”Decay constants of the pseudoscalar mesons in the framework of the coupled Schwinger–Dyson equation and Bethe–Salpeter equation”, **Nucl. Phys. A**, 744, .156-167

[45] Wang. G. L. (2006). ”Decay constants of heavy vector mesons in relativistic Bethe–Salpeter method”,**Phys. Lett. B**, 633 , 4, 492-496.

[46] Albertus. C, Hernandez. E, Nieves. J. and Verde-Velasco. J. M. (2005). ”Study of the leptonic decays of pseudoscalar B, D and vector $B*$, $D*$ mesons and of the semileptonic BD and $BD*$ decays”.**Phys. Rev. D**, 71 ,11, .113006

[47] Corwin L. A , The Ohio State University.(2008). **SLAC Report**, SLAC-R-914 .

[48] Pathak. K. K, Choudhury. D. K and Bordoloi, N. S. (2013). ”Leptonic decay of heayy-light mesons in a QCD potential model”, **Int. J. Mod. Phys. A** , 28 ,02 , .1350010

[49] Altmannshofer. W, Buras. A. J, Gori. S, Paradisi. P and Straub, D. M. (2010). ”Anatomy and Phenomenology of FCNC and CPV Effects in SUSY Theories”. **Nucl. Phys. B.**, 830, 1, .17-94

[50] Patel. B and Vinodkumar. P. C. (2010). ”Decay properties of D and Ds mesons in coulomb plus power potential (CPPv)”, **Chin. phys. C.**, 34, 9,1497 .

[51] Ciftci. H and Koru. H. (2000). Meson decay in an independent quark model. **Int. J. Mod. Phys. E.**, 9 ,5, .407-415

[52] Melnichuk S. V, van Dijk W and Nogami Y,(2005).”Approximations of time-dependent phenomena in quantum mechanics: adiabatic versus sudden processes”, **Eur. J. Phys**.3, 26 ,543

[53] Husimi .K (1953),”Miscellanea in elementary quantum mechanics”**Prog. Theor. Phys**,4 , 9 , 381–402.

[54] Gol’dman I.I, Krivchenkov V.D, Kogan V.I and Galitskii V.M, (1960) .Problems in Quantum Mechanics(Academic, New York),308. ed D Ter Haar, chapter 3, problem 14.

[55] Dykhne. A. M. (1960) .”Quantum transitions in the adiabatic approximation”. **Sov. Phys. JETP** ,11 , 411.

[56] Popov. V. S and Perelomov. A. M .(1969)”.Parametric excitation of a quantum oscillator” ,**Sov. Phys.JETP**, 4 , 29 , 738–745.

[57] Lewis. Jr, Ralph. H and Riesenfeld. WB. (1969).”An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field”, **J. Math. Phys**.8 , 10 , 1458–1473.

[58] Khandekar. D.C and Lawande.S.V (1986).”Feynman path integrals: some exact results and applications” **Phys. Rep**.2–3, 137, 115–229

[59] Doescher,S.W and Rice,M.H, (۱۹٦۹).”Infinite square-well potential with a moving wall” **Am.J. Phys** .12, ۳۷,1246–1249.

[60] Griffiths. D. J. (1995).” Introduction to Quantum Mechanics” ,**Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall**, chapter 10 problem 10.1.

[61] D. N. Pinder.(۱۹۹۰).”The contracting square quantum well”, **Am. J. Phys.** 1, 58 , 54–58.

[62] Dembinski.S.T, Makowski.A.J and Peplowski. P.(1995).”Asymptotic behaviour of a particle in a uniformly expanding potential well” **J. Phys. A: Math. Gen**. 5, 28 , 1449.

[63] Da Luz. MGE and Cheng. Bin Kang.(۱۹۹۲).”Exact propagators for moving hard-wall potentials” **J. Phys. A: Math. Gen**.17,25 , L1043.

[64] Torabi.R, Rezaei.Z .(2017).”Particle in a quantum well with a moving wall”,**Iranian Journal of Physics Research**, 1, 17, 133–137

[65] Seba.P. (۱۹۹۰).”Quantum chaos in the Fermi-accelerator model” ,**Phys. Rev. A** ,5 ,41, ۲۳۰٦.

[66] Scheininger .C and Kleber. M. (۱۹۹۱).”Quantum to classical correspondence for the Fermi-acceleration model”, **Physica D** ,3 ,۵۰, 391–404.

[67] Makowski.A.J and Dembiński. S.T.(۱۹۹۱).”Exactly solvable models with time-dependent boundary conditions”,**Phys. Lett. A** , 5–6 ,154 , 217–220.

[68] Makowski.A.J and Pepłowski .P. (۱۹۹۲).”On the behaviour of quantum systems with time-dependent boundary conditions”, **Phys. Lett. A**, 3 , 163 ,143–151.

[69] Makowski.A.J(۱۹۹۲).”Two classes of exactly solvable quantum models with moving boundaries”, **J. Phys. A: Math. Gen**. 11 , 25, ۳٤۱۹.

[70] Pereshogin. P and Pronin .P.(۱۹۹۱).”Effective Hamiltonian and Berry phase in a quantum mechanical system with time dependent boundary conditions”,**Phys. Lett. A**, 1–2 , 156, 12–16.

[71] Shapere.A and Wilczek.F.(۱۹۸۹). ”Geometric Phases in Physics”,**World Scientific** ,5.

[72] Mehrafarin. M and Torabi. R.(۲۰۰۹). ”Geometric aspects of phonon polarization transport”, **Phys. Lett. A** , 25 , ۳۷۳, 2114–2116 .

[73] Torabi .R and Mehrafarin .M .(۲۰۱۲).”Berry effect in unmagnetized inhomogeneous cold plasmas” **JETP Lett.**, 6, ۹۵,277–281.

[74] Leek.P .J, Fink.J. M, Blais. A, Bianchetti. R, Göppl.M, Gambetta J. M, Schuster D. I , Frunzio.L, SchoelkopfR. J and Wallraff. A.(2007).”Observation of Berry’s phase in a solid-state qubit”, **Science** , 5858, ۳۱۸ , 1889–1892.

[75] Abdumalikov Jr. A. A., Fink. J. M., Juliusson. K., Pechal. M., Berger, S., Wallraff. A. and Filipp. S. (2013). ”Experimental realization of non-Abelian non-adiabatic geometric gates”.**Nature**, 496(7446), .482-485

[76] Dirac, P. A. (1931, September).” Quantised singularities in the electromagnetic field”, **Proc. Roy. Soc. A**, 133,, 821 , 60-72.

[77] Bliokh.K .Yu and Bliokh. Yu. P.(۲۰۰۵). **Ann . Phys**. ۳۱۹ ,۱۳..

[78] Torabi. R.and Rezaei. Z. (2013). ”The effect of Dirac phase on acoustic vortex in media with screw dislocation”.**Physics Letters A**, 377, 28, 1668-1671.

[79] Torabi, R. (2012). ”The effect of noise on the dirac phase of electron in the presence of screw dislocation”.**Physica B: Condensed Matter**, 407, 12, .2109-2111

[80] A. Messiah.(۱۹٦٦). “Quantum mechanics”, North-Holland, Amsterdam ,2.

[81] Morales. D. A., Parra. Z. and Almeida, R. (1994).” On the solution of the Schrödinger equation with time dependent boundary conditions”, **Phys Lett A**, 185 ,3, .273-276

[82] Munier. A., Burgan. J. R., Feix. M. and Fijalkow, E. (1981). ”Schrödinger equation with time-dependent boundary conditions”, **J. Math. Phys**, 22 , 6, 1219-1223.

[83] Yilmaz. E. (2003). ”One Dimensional Schrodinger Equation With Two Moving Boundaries”,**arXiv preprint math**-ph/0302006.

[84] Hamil. B. and L. Chetouni. (2016).”Moving potential for Dirac and Klein-Gordon equations.”**Pramana** , 86, (4), .737-746

[85] Yin Y, Chen. L and Wu. F. (2017).”Optimal power and efficiency of quantum Stirling heat engines”. **Eur.Phys. JPlus** , 132 ,(1), 45.

[86] Scovil, H. E. D and Schulz-DuBois. E. O. (1959). ”Three-level masers as heat engines.”**Phys Rev Lett**, 2, (6), .262

[87] Kosloff, R. (1984).” A quantum mechanical open system as a model of a heat engine”, **J.Chem. Phys.**, 80,(4), .1625-1631

[88] Bender. C. M , Brody. D. C and Meister, B. K. (2000).” Quantum mechanical Carnot engine”, **J. Phys. A**, 33,(24), .4427

[89] Abe. S. (2011).” Maximum-power quantum-mechanical Carnot engine”, **Phys Rev E**, 83,(4), .041117

[90] Abe. S. (2013).” General formula for the efficiency of Quantum-Mechanical analog of the Carnot engine”**Entropy**, 15,(4), .1408-1415

[91] Wu F, Chen. L, Wu. Cand Sun, F. (1998). ”Optimum performance of irreversible Stirling engine with imperfect regeneration”.**Energy Convers. Manag**, 39,(8), .727-732

[92] Wang. J and He. J. (2012). "Optimization on a three-level heat engine working with two noninteracting fermions in a one-dimensional box trap", **J. Appl. Phys.**, 111 ,(4), .043505

[93] Açıkkalp. E. and Caner. N. (2015). "Application of exergetic sustainable index to the quantum irreversible Diesel refrigerator cycles for 1D box system",**Eur. Phys .J.Plus**, 130,(4), .73

[94] Wu. F, Chen. L , Sun. F , Wu. C, Guo. F. and Li. Q. (2006). Quantum degeneracy effect on performance of irreversible Otto cycle with ideal Bose gas. **Energy. Conver. Manag.**, 47,(18-19), .3008-3018

[95] Quan. H. T, Liu.Y. X, Sun. C. P. and Nori. F. (2007)." Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engines",**Phys.Rev. E**, 76,(3), .031105

[96] von Spakovsky. M. R.and Gemmer. J. (2014). "Some trends in quantum thermodynamics",**Entropy**, 16 ,(6), .3434-3470

[97] Liu. M, Liu. C , Xing. L, Zhang. X, Wang. Q. and Wang, X. (2014). "Quality oriented assembly grouping optimal allocation method for remanufactured complex mechanical products" **J. Mech. Eng**, 50, 150-155.

[98] de la Madrid. R. (2015). "The decay widths, the decay constants, and the branching fractions of a resonant state", **Nuc Phys A**, 940, .297-310

[99] Bohm. A. (1993). "Quantum mechanics: foundations and applications". **Springer**.

[100] De la Madrid. R. (2003). "The rigged Hilbert space of the free hamiltonian", **Int. J. Theo. Phys**, 42, (10), .2441-2460

[101] Bezrukov. F, Kalmykov. M. Y, Kniehl. B. A and Shaposhnikov. M. (2012). "Higgs boson mass and new physics". **Jour. High Energy. Phys.**, 2012,(10), .140

[102] CMS Collaboration, Phys. Lett. B 716 (2012) 30–61, arXiv:1207.7235.

[103] LHCb Collaboration, 113 (2014) **Phys. Rev. Lett.** 172001, arXiv:1407.5873.

[104] CDF Collaboration.(2014).**Phys. Rev. D** ,90, 091101, arXiv:1409.4906.

[105] BESIII Collaboration .(2014). **Phys. Rev. D** ,89, 112006, arXiv:1405.1571.

[106] Belle Collaboration. (2014).**Phys. Rev. D** ,90, 112008, arXiv:1409.7644.

[107] D0 Collaboration.(2015).**Phys. Rev. Lett.** , 114 ,062001, arXiv:1410.1568.

[108] BaBar Collaboration. (2015). **Phys. Rev. D**, 91, 012003, arXiv:1407.7244.

[109] ALICE Collaboration.(2015).**Phys. Lett. B**, 740 , 105–117, arXiv:1410.2234.

[110] M.E. Peskin, D.V. Schroeder.(1995) An Introduction to Quantum Field Theory, Addison–Wesley.

Abstract

Determination structure function of Hadrons is one of the most important Physical problems in QCD. In this thesis, we study the mass spectrum and decay properties of mesons in the non-relativistic potential model. Therefore, we propose new potential models for mesons interactions such as combination of Kratzer, Yukawa and Linear potentials and combination of Kratzer, Gausian and Linear potentials. To investigate agreement of our considering potential model with hadron systems, we use Cornell potential. In the following, we use perturbation method and find wave-function of system because of its importance and application to obtain the mass spectrum, the decay constant, the leptonic and semileptonic decay width of mesons in the non-relativistic framework. Studying time-dependent quantum systems is interesting issues because of their usage in physics. Many of interesting quantum mechanics effect are related to this concept. Here are investigated a one-dimensional Schrödinger equation with the subject of time dependent boundary conditions for particle without spin in a finite potential well, and then we study relativistic particles by using Klein-Gordon equations and analyzed them in moving potential (potential barrier with moving wall). To show application of a time-dependent potential we are assumed a particle is trapped in a one-dimensional box and one of the wall is movable. This quantum system acts like a Stirling heat engines and we calculate it's important performance parameters. At first to investigate the decay width of a time-dependent system,we must porpose a time-dependent potential and then by using the Fermi-Golden-Rule we obtain relation between the decay width and Half-Life of the system. For example we calculate the decay width of Hydrogen atom. Then we express the general form to obtain the decay width of time-dependent systems by using the resonant state. The differential, partial and total decay widths associated with the decay of resonant state to continuum of stable sates are introduced. And when resonant has different decay modes we will be obtain corresponding the partial decay width and branching fraction. In the approximation that resonant is sharp, we see the differential and total decay width of a resonant state is such as the Fermi-Golden-Rule. Also we compare the (dimensionless) partial decay constants with the partial decay width.

Key Words: Decay Width, Time Dependent Potential, Schrödinger Equation.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics and Nuclear Engeering

MSc Thesis in: Nuclear Physics

Evaluation of decaying width for relativistic and non-relativistic time-dependent systems

By: Mahnaz Moazami

Supervisors

Dr. Hassan Hassanabadi
Dr. Saber Zarrinkamar

June 2018