

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده (فیزیک و مهندسی هسته ای)

رشته فیزیک، گرایش هسته ای

رساله دکتری

تصحیحات نواقص هندسی فضا زمان بر سیستم های هسته ای بوزونی و فرمیون ها

نگارنده: منصوره حسین پور

استاد راهنما

دکتر حسن حسن آبادی

اردیبهشت ۱۳۹۷

تعهد نامه

اینجانب منصوره حسین پوردانشجوی دکتری رشته فیزیک فیزیک دانشکده (فیزیک و مهندسی هسته ای) دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **تصحیحات نواقص هندسی فضا زمان بر سیستم های هسته ای بوزونی و فرمیون ها** تحت راهنمایی دکتر حسن حسن آبادی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

منصوره حسین پور

اردیبهشت ۱۳۹۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

مطالعه ذرات نسبیتی در فضا زمان ایجاد شده توسط نواقص هندسی روز به روز در حال افزایش است. بررسی اثر فضا زمان ایجاد شده توسط نواقص هندسی بر روی طیف انرژی ذرات از دیدگاه های نسبیتی و غیر نسبیتی انجام شده است. با توجه به مفاهیم جدید در فیزیک نظری، نواقص هندسی می توانند توسط انتقال فاز خلاء در جهان اولیه ایجاد شود که شامل دیوارهای حوزه، ریسمان های کیهانی و تک قطبی ها می باشند. در میان آنها، رشته های کیهانی به عنوان بهترین کاندیدا مورد توجه قرار می گیرند و یکی از مهمترین نمونه نواقص هندسی است. اخیراً مطالعات مختلفی در فضا-زمان ریسمان کیهانی انجام شده است که نقش این نقص هندسی را در فضا زمان خمیده نشان می دهد. هدف ما در حال حاضر گسترش این نظریه به منظور بررسی آثار آن در انواع فضا زمان های خمیده است. در این بررسی ها فضا زمان های مختلف شامل ریسمان کیهانی، فرمی واکر، ریسمان کیهانی چرخان، فضا زمان های با اثرات غیر اینرسی، فضا زمان با تقارن کروی را معرفی و بررسی می کنیم. ما تأثیر هر فضا زمان را هم برای حالت های غیر نسبیتی و هم نسبیتی توسط معادله دیراک برای ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ و معادله دی-کی-پی برای ذرات با اسپین 0 و 1 بررسی می کنیم.

کلمات کلیدی:

نواقص هندسی، ریسمان های کیهانی، معادله دیراک، معادله دی-کی-پی، اثرات غیر اینرسی

ليست مقالات

1. "Scattering states of Dirac equation in the presence of cosmic string for Coulomb interaction", Int. J. Mod. Phys. A, Vol. 30, No. 21 (2015)
2. "DKP equation in a rotating frame with magnetic cosmic string background", Eur. Phys. J. Plus (2015) 130: 236.
3. "Thermodynamic properties of neutral particle in the presence of topological defects in magnetic cosmic string background", Eur. Phys. J. C (2016) 76:553.
4. "The spin-zero Duffin-Kemmer-Petiau equation in a cosmic-string space-time with the Cornell interaction", Int. J. Mod. Phys. A, Vol. 31 (2016)
5. "Scattering and bound states for the Hulthén potential in a cosmic string background", Eur. Phys. J. C (2017) 77:270.
6. "Duffin-Kemmer-Petiau equation in curved space-time with scalar linear interaction", Eur. Phys. J. Plus (2017) 132: 54.
7. "The DKP oscillator with a linear interaction in the cosmic string space-time", Eur. Phys. J. C (2018) 78:93
8. "On the Klein-Gordon field in spinning cosmic-string space-time with the Cornell potential", Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.(2018)(Revised)

فهرست مطالب

ک فهرست تصاویر

س فهرست جداول

ع ۱.۰ پیشگفتار

۱ نواقص هندسی و هندسه فضای خمیده

۱ ۱.۱ نواقص هندسی

۵ ۲.۱ هندسه فضای خمیده

۹ ۳.۱ تانسور متریک

۱۰ ۱.۳.۱ تانسور متریک پادوردا

۱۱ ۲.۳.۱ تانسورهای وابسته

۱۱ ۳.۳.۱ تبدیل شاخص های پادوردا و هموردا به یکدیگر

۱۲ ۴.۳.۱ تانسور متریک بر حسب بردارهای پایه

۱۳ ۴.۱ انتقال موازی

۱۶ ۵.۱ اتصال دهنده ی اسپینی

۱۷ ۶.۱ مشتق هم وردا

۲ بررسی فرمیون های با اسپین ۱/۲ در فضا زمان خمیده

۱۹ ۱.۲ بررسی فرمیون های با اسپین ۱/۲ در فضا زمان تخت

۲۰ ۱.۱.۲ فرم هموردای معادله دیراک

۲۰ ۲.۱.۲ چگالی جریان دیراک

۲۱ ۲.۲ فرمیون های با اسپین ۱/۲ در فضا زمان خمیده

۳.۲ فرمیون های با اسپین ۱/۲ در متریک کروی تحت پتانسیل های اسکالر و

۲۲ برداری

۱.۳.۲ بررسی فرمیون های با اسپین ۱/۲ در حضور برخی پتانسیل های

۲۵ پرکاربرد

۲۷	تغییر زاویه فاز در پراکندگی از پتانسیل کولنی	۲.۳.۲
۲۹	تغییر فاز در پراکندگی از پتانسیل هولسن	۳.۳.۲
۳۱	برهم کنش گشتاور چهارقطبی مغناطیسی با میدان الکتریکی	۴.۲
	فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در حضور برهم کنش چهار قطبی	۱.۴.۲
۳۲	مغناطیسی	
	خواص ترمودینامیکی فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در حضور برهم	۲.۴.۲
۳۵	کنش چهار قطبی مغناطیسی	
۳۹	بررسی فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در بستر ریسمان کیهانی چرخان	۵.۲
۴۲	نوسانگر دیراک در بستر ریسمان چرخان	۱.۵.۲
۴۶	اثر برهم کنش در ساختار فضا زمان	۶.۲

۳ بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاین-

۵۱	گوردون	
۵۲	معادله کلاین-گوردون در حضور پتانسیل های نرده ای و برداری	۱.۳
۵۴	برهم کنش نرده ایی کولونی	۱.۱.۳
۵۶	برهمکنش نرده ایی کرنل	۲.۱.۳
۶۲	برهمکنش برداری و نرده ای کرنل	۳.۱.۳
۶۵	خواص ترمودینامیک ذرات خنثی در حضور نواقص هندسی	۲.۳
۶۶	ذرات خنثی در پس زمینه ریسمان کیهانی	۱.۲.۳
۶۸	خواص ترمودینامیکی سیستم	۲.۲.۳

۴ بررسی بوزون های اسکالر و برداری در فضا زمان خمیده

۷۳	مقدمه	۱.۴
۷۴	بوزون های با اسپین ۰ و ۱ در فضا زمان تخت	۲.۴
۷۵	معادله پیوستگی در نظریه دی-کی-پی	۱.۲.۴
۷۷	بوزون های با اسپین ۰ و ۱ در فضا زمان خمیده	۳.۴
۷۸	بوزون های اسکالر در چارچوب مختصات چرخان	۱.۳.۴
	نوسانگر دی-کی-پی در بستر ریسمان کیهانی با حضور برهم کنش	۴.۴
۷۹	اسکالر خطی	
۸۲	حل معادله دی-کی-پی برای حالت های برانگیخته اول و دوم با $\omega \ll 1$ دلخواه	۵.۴
	حل معادله دی-کی-پی برای حالت های بدون گره و تک گره در حالت	۶.۴
۸۸	حدی $\omega \ll 1, r_0 \rightarrow \infty$	
۸۹	نوسانگر دی-کی-پی در حضور برهمکنش خطی با متریک استوانه ایی	۷.۴
۹۱	نوسانگر دی-کی-پی	۱.۷.۴

۲.۷.۴	حل نوسانگر دی-کی-پی در حضور برهم کنش خطی	۹۳
۸.۴	بوزون های اسکالر در چارچوب چرخان فرمی-واکر در بستر ریسمان کیهانی	۹۶
۱.۸.۴	حالت حدی $\beta \rightarrow 0$	۱۰۳
۹.۴	فرم هموردای معادله دی-کی-پی در حضور پتانسیل برداری	۱۰۵
۱.۹.۴	بوزون های اسکالر در حضور برهمکنش برداری خطی	۱۰۸
۲.۹.۴	بوزون های اسکالر در حضور برهمکنش برداری کرنل	۱۱۰
۱۰.۴	بررسی رنگین کمان گرانشی در فضای خمیده	۱۱۱
۱.۱۰.۴	نوسانگر دی-کی-پی در حضور رنگین کمان گرانشی	۱۱۳

۱۲۱ ۵ نتیجه گیری

۱۲۳ مراجع

فهرست تصاویر

۲	برهم کنش های متقابل ریسمان های بلند در کریستال مایع [۲۱]	۱.۱
	تحولات ریسمان ها در کریستال مایع. هر چهار عکس اندازه یکسانی دارند	۲.۱
۳	اما در زمان های مختلف گرفته شده اند [۲۱]	
	تشکیل زوج monopole-antimonopole همه عکس ها اندازه یکسانی دارند اما	۳.۱
۳	در زمان های مختلف گرفته شده اند [۲۱]	
۴	مکانیزم کیبل برای تشکیل دیوارهای حوزه.	۴.۱
۵	مکانیزم کیبل برای تشکیل ریسمان کیهانی.	۵.۱
۵	فضا- زمان مخروطی اطراف ریسمان کیهانی	۶.۱
۷	نمودار فضا زمان	۷.۱
۷	فضای خمیده با انحنای صفر مثبت و منفی	۸.۱
۸	وضعیت پرتو های نور رسیده به چشم در فضای اقلیدسی تخت	۹.۱
۸	وضعیت پرتو های نور رسیده به چشم در فضای با خمیدگی مثبت	۱۰.۱
۹	وضعیت پرتو های نور رسیده به چشم در فضای با خمیدگی منفی	۱۱.۱
۱۴	انتقال موازی یک بردار	۱۲.۱
۱۷	انتقال موازی بردار A	۱۳.۱
۳۷	مقایسه Q_1 بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت $s = 1$	۱.۲
	میانگین انرژی U/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت	۲.۲
۳۷	$s = 1$	
	ظرفیت گرمایی C/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای	۳.۲
۳۸	حالت $s = 1$	
۳۸	آنتروپی S/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت $s = 1$	۴.۲
۳۸	میانگین انرژی U/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای	۶.۲
	ظرفیت گرمایی C/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای	۵.۲
۳۹	حالت $s = -1$	
۳۹	آنتروپی S/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت $s = 1$	۷.۲

۸.۲	طیف انرژی در حالت $s = 1$ بر حسب ω . نتیجه مستقل از α و m با $M = 1$
۴۴	برای n های مختلف
۱۲.۲	طیف انرژی در مورد $s = -1$ برای α های دلخواه با $M=1, a=1, m=1$,
۴۴	$\omega = 1$ به ازای n های مختلف.
۹.۲	طیف انرژی در حالت $s = -1$ برای مقادیر مختلف α . با $M = 1, m = 1$
۴۵	$a = 1$ و $\omega = 1$ به ازای n های مختلف.
۱۰.۲	طیف انرژی در حالت $s = 1$ برای مقادیر دلخواه ω . با $M = 1, a = 1, m = 1$
۴۵	$\alpha = 0/2$ برای n های مختلف.
۱۳.۲	طیف انرژی منفی برای حالت $a=0$ با $M = 1, s = 1, \omega = 1$ برای $m = 1$
۴۵	های مختلف.
۱۱.۲	حالت $a = 0$ انرژی های مثبت و منفی به ترتیب به ازای $s = 1$ و $s = -1$ به
۴۶	صورت تابعی از ω با $M = 1$ به ازای n های مختلف.
۱.۳	تابع موج $R_{n,m}$ به ازای $\alpha = 0/2, 0/4, 0/6, 0/8$ ، در محدوده $0/0 \leq r \leq$
۵۵	$8/0 GeV^{-1}$ با پارامترهای $M = 1 GeV$ ، $m = -1$ ، $\eta_c = k_z = a = 1$
۲.۳	چگالی احتمال، $ R_{n,m} ^2$ به ازای $\alpha = 0/2, 0/4, 0/6, 0/8$ ، و در محدوده
۵۵	$8/0 GeV^{-1} \leq r \leq 0/0$ ، با پارامترهای $M = 1 GeV$ ، $m = -1$ و $\eta_c = k_z =$
۵۵	$a = 1$
۵۶	انرژی به صورت تابعی از α با پارامترهای $M = a = \eta_c = k_z = 1, m = -1$
۴.۳	تابع موج $R_{n,m}$ برای $N = 1$ و در محدوده $0/0 \leq \rho \leq 3/5 GeV^{-1}$ ، با پارامتر
۶۰	های $M = 1 GeV$ ، $a = 0/1$ ، $\alpha = 0/9$ ، $\eta_c = 0/2 GeV$ ، $\eta_L = 0/1$ و $m = 1$.
۵.۳	تابع موج $R_{n,m}$ برای $N = 1$ برای α های مختلف، در محدوده $0/0 \leq \rho \leq$
۶۱	$3/5 GeV^{-1}$ ، با پارامترهای $M = 1 GeV$ ، $a = 0/1$ ، $\eta_c = 0/2 GeV$ ، $\eta_L = 0/1$ و
۶۱	$m = 1$
۶.۳	چگالی احتمال $ R_{n,m} ^2$ برای $N = 1$ ، در محدوده $0/0 \leq \rho \leq 3/5 GeV^{-1}$
۶۱	$M = 1 GeV$ ، $a = 0/1$ ، $\eta_c = 0/2 GeV$ ، $\eta_L = 0/1$ و $m = 1$
۷.۳	چگالی احتمال $ \Phi ^2$ در محدوده $0/0 \leq \rho \leq 3/5 GeV^{-1}$ با پارامترهای
۶۵	$M = 1 GeV$ ، $a = 0/1$ ، $\kappa_L = 0/5$ ، $\eta_L = 1$ ، $\kappa_c = 0/1$ و $m = 1$
۷۰	۸.۳ مقایسه انرژی آزاد هلمهولتز بصورت تابعی از KT برای ℓ های مختلف
۷۰	۹.۳ انرژی میانگین بصورت تابعی از KT برای ℓ های مختلف
۷۱	۱۰.۳ مقایسه انرژی آزاد هلمهولتز بصورت تابعی از KT برای α های مختلف
۷۱	۱۱.۳ انرژی میانگین بصورت تابعی از KT برای α های مختلف
۷۱	۱۵.۳ ظرفیت گرمایی بصورت تابعی از KT برای $\omega = 1$
۷۲	۱۲.۳ آنتروپی بصورت تابعی از KT برای ω های مختلف

۷۲	۱۳.۳	ظرفیت گرمایی بصورت تابعی از KT برای ω های مختلف
۷۲	۱۴.۳	آنتروپی بصورت تابعی از KT برای $\omega = 1$
۸۴	۱.۴	تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = \frac{\sqrt{m+\alpha}}{\sqrt{\alpha}}, b_4 = \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$
۸۴	۲.۴	تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = M, b_2 = \frac{q}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = \frac{\sqrt{m+\alpha}}{\sqrt{\alpha}}, b_4 = \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$
	۳.۴	تابع موج حالت های تک گره به ازای پارامترهای $b_2 = \frac{q}{\sqrt{\alpha}}, b_1 = M, b_3 = \frac{\sqrt{m+\alpha}}{\sqrt{\alpha}}, b_4 = \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$
۸۵		$\frac{\sqrt{m+\alpha}}{\sqrt{\alpha}}, b_4 = \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$
۸۶	۴.۴	تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, b_4 = \frac{3}{\sqrt{\alpha}}$
۸۶	۵.۴	تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{\sqrt{\alpha}}, b_3 = \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, b_4 = \frac{-1}{\sqrt{\alpha}}$
۸۶	۶.۴	جواب های انرژی مثبت به صورت تابعی از α
۸۷	۷.۴	جواب های انرژی منفی به صورت تابعی از α
۸۷	۸.۴	توابع موج حالت تک گره به صورت تابعی از $\omega\alpha$
۸۷	۹.۴	جواب های انرژی مثبت به صورت تابعی از $\omega\alpha$ برای حالت تک گره
	۱۰.۴	تابع موج $\Phi_1(r)$ به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ در محدوده $0 \leq r \leq 5$ GeV^{-1}
۱۰۹		با پارامتر های $k_z = M = 1, \kappa_L = 1, \omega = 1, m = 1, \alpha = 0.9$
	۱۱.۴	چگالی احتمال $ \Phi_1 ^2$ برای $n = 1, 2, 3, 4$ در محدوده $0 \leq r \leq 5$ GeV^{-1}
۱۰۹		با پارامتر های $k_z = M = 1, \kappa_L = 1, \omega = 1, m = 1, \alpha = 0.9$
۱۱۰	۱۲.۴	انرژی به صورت تابعی از ϖ برای n های مختلف
	۱۳.۴	انرژی بصورت تابعی از α ، $k_z = M = 1, \zeta_L = 1, \zeta_C = 1, m = 1, \xi_L = 0.6, \xi_C = 0.6$
۱۱۱		برای n های مختلف، $\xi_C = 0.6, \xi_L = 0.6$
	۱۵.۴	تابع موج $\Phi_1(r)$ برای $n = 1, 2, 3, 4$ در محدوده $0 \leq r \leq 6$ GeV^{-1} با پارامتر های $k_z = M = 1, \zeta_L = 1, \zeta_C = 1, m = 1, \xi_L = 0.6, \xi_C = 0.6, n = 1$
۱۱۲		۱
	۱۶.۴	چگالی احتمال $ \Phi_1 ^2$ برای $n = 1, 2, 3, 4$ و در محدوده $0 \leq r \leq 5$ GeV^{-1} با پارامتر های $k_z = M = 1, \zeta_L = 1, \zeta_C = 1, m = 1, \xi_L = 0.6, \xi_C = 0.6, n = 1$
۱۱۲		$\xi_C = 0.6, \xi_L = 0.6, n = 1$
	۱۷.۴	انرژی بر حسب $\frac{\omega}{E_p}$ با پارامتر های $\frac{M}{E_p} = 0.8; \varepsilon = 1; m = 1; n = 1$ برای α های مختلف
۱۱۷		های مختلف
۱۱۸	۱۸.۴	انرژی بر حسب $\frac{\omega}{E_p}$ با پارامتر های $\frac{M}{E_p} = 0.8; \varepsilon = 1; m = 1; n = 1$
۱۱۹	۱۹.۴	انرژی بر حسب $\frac{\omega}{E_p}$ با پارامتر های $\frac{M}{E_p} = 0.8; m = 1; n = 1; \varepsilon = 1$

فهرست جداول

۱.۲	جرم $M(GeV)$ هادرون تشکیل شده از کوارک های با جرم $m(GeV)$ در	۴۹
	مقایسه با نتایج تجربی	
۱.۳	ویژه مقادیر انرژی E ، بر حسب GeV ، برای N های مختلف.	۵۹
۱.۴	انرژی حالت های بدون گره $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{3}; b_3 = \frac{2m+\alpha}{3\alpha}; b_4 = \frac{3}{4}$	۸۵
۲.۴	انرژی حالت های بدون گره $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{3}; b_3 = \frac{2m+\alpha}{3\alpha}; b_4 = \frac{-1}{3}$ به	
۸۵	ازای $\omega\alpha$ های مختلف	
۳.۴	انرژی حالت های تک گره برای $\omega\alpha$ های مختلف	۸۹

۱۰۰ پیشگفتار

در انرژی‌های بسیار بالا نیروهای الکترومغناطیسی، هسته‌ای ضعیف، و هسته‌ای قوی یک میدان نیروی واحد بوده‌اند. به دلایل ناشناخته، تقارن مرموزی که تمام چهار نیرو را متحد ساخته، شکسته شده است. سیر تکاملی جهان، با خنک شدن آن مراحل متفاوت و مستقلی را پیموده است. گذار از این مراحل مختلف بیانگر به هم ریختن تقارن و تجزیه نیروی واحد طبیعت است. انتقال فاز می‌تواند طیف گسترده‌ای از پیامدهای مهم از قبیل ریسمان‌های کیهانی، دیواره‌های حوزه، تک قطبی را شامل شود. ریسمان کیهانی یکی از مهمترین نمونه‌های نقص هندسی یک بعدی هستند که به طور کلی در نتیجه شکست خود به خود تقارن بوجود آمده‌اند. به طور خاص، ریسمان‌های کیهانی پلی بین نظریه‌های فیزیکی در مقیاس‌های میکروسکوپی و ماکروسکوپی فراهم می‌کند. در یک مدل اخت‌فیزیکی، یک نقص هندسی به عنوان یک موجود ایزوله در فضای خالی ظهور پیدا می‌کند.

اثر فضا-زمان در فیزیک کوانتومی و یا، اثر فیزیک کوانتومی در ساختار فضا-زمان، موضوعاتی جدید و بحث برانگیز می‌باشند. برای مثال، در بیشتر توصیفات سیستم‌های کوانتومی و فیزیک ذرات، این مساله مورد توجه قرار نگرفته است و فضای مسطح مینکوفسکی در نظر گرفته شده است و اثر خمیدگی ساختار فضا-زمان در معادلات حرکت در نظر گرفته نشده است. با تعمیم معادلات شرودینگر و دیراک در فضا زمان خمیده تئوری بنا شد که ترکیبی از نظریه نسبیت و کوانتم بود. میدان‌های اسپینوری ذرات برهم کنش کننده با میدان‌های گرانشی در بسیاری از کارها مورد بررسی قرار گرفته است. مطالعه حالت‌های تک ذره‌ای که جواب‌های معادله دیراک تعمیم یافته در فضا زمان خمیده می‌باشد عاملی مهمی در ایجاد نظریه‌ای بود که فیزیک کوانتمی و گرانش را با هم تلفیق می‌کرد به این دلیل بررسی رفتار ذرات نسبیتی در این شرایط جالب می‌باشد. نشان داده شده است که سطوح انرژی یک اتم که در یک میدان گرانشی قرار داده شده است در نتیجه برهم کنش اتم و خمیدگی فضا زمان شیف‌ت پیدا می‌کند. این شیف‌ت در ترازهای انرژی که وابسته به ماهیت فضا زمان است برای هر تراز انرژی متفاوت است در نتیجه با اثر دوپلر و انتقال به سرخ کیهانی و گرانشی که در آن‌ها مقدار شیف‌ت هر تراز برای همه خطوط طیفی یکسان است متمایز است. پیش از این نشان داده شده است که در هندسه شوارتز شیلد شیف‌ت در ترازهای انرژی در نتیجه اثرات گرانشی متفاوت با اثر اشتارک و زیمن است در نتیجه می‌شود آنرا از شیف‌ت انرژی با منشا اختلالات الکترومغناطیسی و گرانشی تمیز دهیم. به این ترتیب مطالعه طیف انرژی در چنین سیستمی در بردارنده اطلاعات واضحی در مورد ماهیت موضعی فضا زمان پس زمینه‌ای است که در آن سیستم اتمی قرار دارد. نظریه نسبیت عام به عنوان یه نظریه متریک پیشگویی می‌کند که گرانش بصورت خمیدگی فضا زمان نمود پیدا می‌کند. این خمیدگی توسط تانسور ریمان

نمایش داده می شود. نقص های هندسی^۱ می تواند در مدل پیمانه ایی از شکست خودبخود تقارن بوجود بیایند و دارای انواع مختلفی می باشند از قبیل تک قطبی^۲ دیواره ی حوزه^۳ و ریسمان کیهانی^۴. این نقص های هندسی ممکن است در طی انبساط کیهان بوجود آمده باشند که ماهیت آن ها بسته به هندسه خلا در نظریه مورد نظر است. میدان گرانشی یک ریسمان کیهانی کاملاً قبل توجه است و ذره ایی که در حال سکون حول یک ریسمان مستقیم نامتناهی قرار گرفته توسط آن جاذبه ایی را حس نمی کند و هیچگونه گرانش موضعی وجود ندارد فضا زمان اطراف یک ریسمان کیهانی بصورت موضعی تخت می باشد اما نه بصورت عام. به عبارت دیگر ارتباطی بین خواص هندسی فضا و قوانین فیزیکی موضعی وجود دارد. این اثرات دارای منشا هندسی هستند تا موضعی، در حقیقت خمیدگی فضا منجر به برخی اثرات گرانشی جالب می شود. بررسی برهم کنش بین دوقطبی های مغناطیسی و الکتریکی قسمت زیادی از مطالعات سال های اخیر را در بر گرفته است [۱-۱۰]. دینامیک کوانتومی در فضای مخروطی^۵ در حضور نواقص هندسی در سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۱۱-۱۳]. هندسه ساده اما با اهمیت مخروط به عنوان یک هندسه موثر در زمینه ریسمان های کیهانی ظهور یافت [۱۴]. دینامیک ذرات خنثی در پس زمینه مخروطی در بسیاری از کارها مطالعه شده است [۱۵-۱۸]. اما مطلب مهمی که در مورد مخروط وجود دارد این است که پس زمینه مخروطی ذاتاً با تکینگی انحنای نوک مخروط همراه است. دینامیک کوانتومی تک ذره در فضا زمان مخروطی توسط نویسندگان بسیاری مورد بررسی قرار گرفته است و تا کنون برخی مسائل در فضا زمان مخروطی شامل دینامیک ذرات غیر نسبیتی کوانتومی و کلاسیکی مورد بررسی قرار گرفته است [۱۹، ۲۰] و همچنین اثر تکینگی های مخروطی بر سطوح انرژی نوسانگر هارمونیک مورد مطالعه قرار گرفته است به این ترتیب باید هندسه فضا زمان را بررسی کنیم تا بتوانیم یک سیستم فیزیکی را توصیف کنیم.

^۱Topological defects

^۲Monopole

^۳Domain walls

^۴Cosmic String

^۵conical spaces

فصل ۱

نواقص هندسی و هندسه فضای خمیده

۱.۱ نواقص هندسی

نقص های هندسی، پیکربندی های پایدار ماده هستند که در انتقال فاز صورت گرفته در ابتدای عالم شکل گرفته اند. نوع نقص هندسی، توسط خواص تقارن ماده و ماهیت انتقال فاز تعیین می شود. در یک گذار فاز، فرم و خواص ماده تغییر می کند همانند آنچه که در انتقال حالت از جامد به مایع (به عنوان مثال، یخ به آب) یا از مایع به گاز (به عنوان مثال تبدیل آب به بخار) اتفاق می افتد. این موارد به عنوان انتقال فاز مرتبه ی اول شناخته شده اند. انجام یک گذار فاز پیوسته یا همان انتقال مرتبه ی دوم، منجر به شکل گرفتن نقص های همچون دیوار های حوزه، ریسمان کیهانی و تک قطبی شود.

دیوار های حوزه

دیوار های حوزه موجوداتی دو بعدی هستند و در نتیجه شکستن تقارن گسسته ایجاد می شوند. یک شبکه از دیواره های حوزه به طور مؤثری جهان را به سلول های مختلفی تقسیم می کند. از ویژگی های جالبی که آنها را خاص می کند می توان به داشتن میدان گرانشی دافعه نام برد.

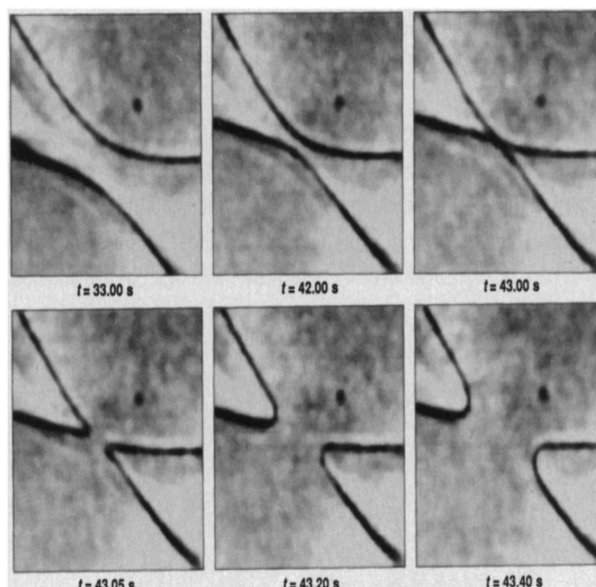
ریسمان کیهانی

موجودات یک بعدی (شبیه خط) هستند که در نتیجه شکسته شدن تقارن استوانه ای بوجود

می آیند و می توان آنها را در محدوده الکتروضعیف^۱ دسته بندی کرد. بسیار نازک هستند و ممکن است در سراسر جهان یافت شوند.

تک قطبی

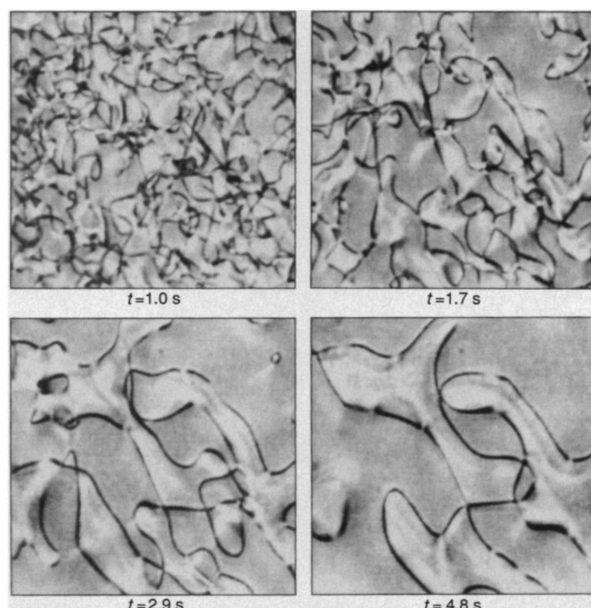
تک قطبی ها صفر بعدی (نقطه مانند) هستند و در نتیجه شکست تقارن کروی بوجود می آیند. پیش بینی می شود ابرسنگین^۲ بوده و شامل بار مغناطیسی باشند. با این حال نواقص هندسی منحصر به آغاز عالم نیست. آنها وجود دارند و در حوزه های مختلفی مورد بررسی و مطالعه قرار می گیرند. در آزمایشگاه، نقص های هندسی معمولا در سیستم های ماده چگال مشاهده می شود. یک نمونه ساده، حوزه های فرو مغناطیسی هستند که در هر حوزه دوقطبی های مغناطیسی موازی با هم و در جهتی متفاوت با حوزه های مجاور هستند. نقص های هندسی در بیوشیمی، به ویژه در فرایند پیچاندن پروتئین، نیز یافت می شود. در شکل های ۱.۱، ۲.۱ و ۳.۱ دو عکس (با میکروسکوپ نوری) از ریسمان ها در یک کریستال مایع نشان داده شده است. کریستال های مایع مجموعه ای از نقص های هندسی مانند ریسمان و تک قطبی ها را نشان می دهد [۲۱].



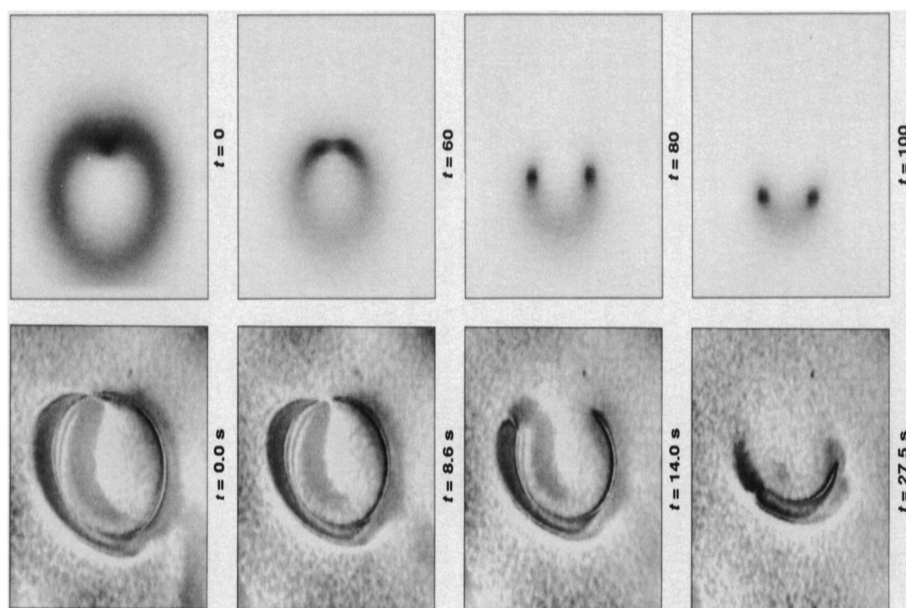
شکل ۱.۱: برهم کنش های متقابل ریسمان های بلند در کریستال مایع [۲۱]

^۱ electroweak

^۲ supermassive



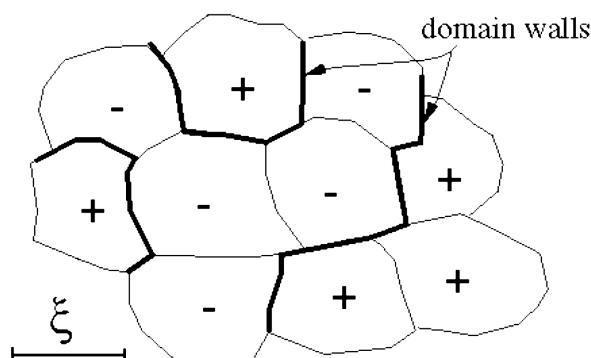
شکل ۲.۱: تحولات ریسمان ها در کریستال مایع. هر چهار عکس اندازه یکسانی دارند اما در زمان های مختلف گرفته شده اند [۲۱].



شکل ۳.۱: تشکیل زوج monopole-antimonopole همه عکس ها اندازه یکسانی دارند اما در زمان های مختلف گرفته شده اند [۲۱].

اگر ریسمان کیهانی یا سایر نواقص هندسی تحت گذارهای فاز کیهانی می توانستند در ابتدای عالم تشکیل شوند، باز هم می توانند تشکیل شوند. نظریه ریسمان کیهانی اولین بار در [۲۳-۲۵] مطرح شد. در مفهوم کیهان شناسی، فرایند تشکیل نواقص به عنوان مکانیزم

کیبل^۳ موسوم می باشد. یک واقعیت ساده این است که اثرات علیتی در جهان اولیه تنها می تواند به عنوان سرعت نور (همانند هر زمان) پخش شود. این بدان معنی است که در یک زمان t ، مناطقی از جهان با فاصله بیش از $d = ct$ نمی توانند هیچ چیز در مورد یکدیگر بدانند. در نتیجه شکستن تقارن و گذار فاز، مناطق مختلف جهان، از میان مجموعه ای از حالت های ممکن، می توانند انتخاب کنند که در نواحی قرار بگیرند که به زبان ریاضی به آنها منیفلد های خلا می گویند. نقص های هندسی دقیقاً مرزهای بین این مناطق هستند و شکل گیری آنها نتیجه ی اجتناب ناپذیری از این واقعیت است که مناطق مختلف نمی توانند در مورد انتخاب خود با هم سازگار باشند. به عنوان مثال در یک نظریه با دو حالت حداقلی $+$ و $-$ ، نواحی مجاور با فاصله های بیش از ct ، تمایل دارند به صورت تصادفی به حالت های مختلف شکل ۴.۱ درآیند. نواحی مرزی که این ناحیه های مختلف را از هم جدا کرده است دیواره ی حوزه نام دارد. در مکانیزم کیبل، ریسمان های کیهانی در نظریه های کمی پیچیده تر می توانند تشکیل

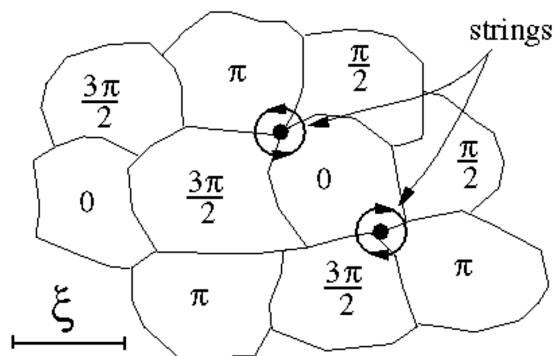


شکل ۴.۱: مکانیزم کیبل برای تشکیل دیوارهای حوزه.

شوند. محل آنها در شکل ۵.۱ مشخص شده است. در پاسخ به ضرورت مطالعه ریسمان های کیهانی مطابق با توضیحات قبل باید گفت که این موجودات پیوند منحصر به فردی با فیزیک آغاز جهان برقرار می کنند. علاوه بر این، آنها می توانند به شدت بر تکامل جهان تاثیر می گذارد. بنابراین با توجه به این که آنها همواره تشکیل می شوند، مطالعه آنها بخشی اجتناب ناپذیر از تلاش های جدی برای فهم جهان اولیه است. از یک سو، مطالعه دیوارهای حوزه و تک قطبی ها از نظر کیهان شناسی بسیار دشوار هستند. هر مدل کیهانشناختی که آنها در آن شکل می گیرد، به نحوی با واقعیت هایی که ما در مورد جهان می دانیم، تناقض دارد. از سوی دیگر، ریسمان های کیهانی این مشکل ندارند.

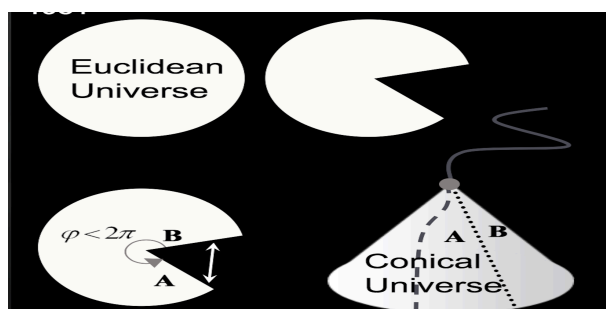
نظریه های موجود برای تشکیل ساختار جهان به ترتیب براساس تقویت نوسانات کوانتومی در یک میدان اسکالر در طی تورم یا بر مبنای انتقال فاز و شکستن تقارن در جهان اولیه که منجر به تشکیل نواقص هندسی می شود به دو دسته تقسیم می شوند که در این مورد اخیر کارهای

^۳Kibble



شکل ۵.۱: مکانیزم کیبل برای تشکیل ریسمان کیهانی.

اندکی صورت گرفته است. در میان نقص های دیگر، ثابت شده است که ریسمان های کیهانی بیشترین پتانسیل برای تشکیل ساختار کیهانی را دارد. می توان دید که مسیر ژئودزیک نور در فضای خمیده، زمانی که نور از آن عبور کند، به سمت ریسمان خمش پیدا می کند. شکل ۱.۱ هنگامی که ابعاد ریسمان ها از کوچک به بزرگ تکامل می یابد باعث ایجاد اختلالاتی در چگالی ماده و انرژی در جهان می شوند.



شکل ۶.۱: فضا-زمان مخروطی اطراف ریسمان کیهانی

ماهیت مخروطی فضا-زمان در حضور ریسمان کیهانی می تواند اثرات فیزیکی جالبی ایجاد کند. برای تجسم این ریسمان کیهانی یک بخش زاویه ای $2\pi(1 - \alpha)$ را حذف می کنیم. به این ترتیب تغییرات زاویه سمتی در محدوده $0 < \phi < 2\pi\alpha$ می باشد. $\alpha = 1 - 4\lambda$ زاویه کاستی از هندسه مخروطی است و پارامتر λ چگالی خطی جرم ریسمان است. پارامتر α در محدوده $0 < \alpha \leq 1$ می باشد.

۲.۱ هندسه فضای خمیده

هندسه ریمانی شاخه ای از هندسه دیفرانسیل است که به بررسی خمینه های ریمانی می پردازد. یک خمینه ریمانی خمینه ای است که مجهز به یک متریک ریمانی می باشد. هندسه ریمانی در

قرن نوزدهم توسط برنهارد ریمان پایه‌گذاری شد. هندسه ریمانی در نظریه نسبیت عام نقش پایه‌ای دارد. هندسه ریمانی کاربردی یعنی هندسه‌ای که در آن فضا و زمان خمیده است. برای نمونه اگر خطی واقع بر سطح یک کره را در نظر بگیرید، از هیچ نقطه بیرون آن خط نمی‌توان خطی به موازات خط نخست رسم کرد در حالی که در هندسه اقلیدسی این کار کاملاً ممکن است. در این هندسه مجموع زوایای مثلث می‌تواند 180° درجه نباشد. خمینه یا منیفلد^۴ یک فضای توپولوژیک است که به طور موضعی، اقلیدسی است. خط یک خمینه یک بعدی ساده است و دایره یک خمینه یک بعدی کمی پیچیده تر است، حول هر نقطه از دایره می‌توان یک همسایگی کوچک در نظر گرفت و نیز می‌توان این همسایگی را به عنوان یک پاره خط در نظر گرفت. پاره خط نیز یک فضای اقلیدسی است، به همین دلیل خمینه را "به طور موضعی اقلیدسی" می‌نامند. بر اساس فرضیات مفهوم فضای اقلیدسی، جهان، سه بعد مکانی و یک بعد زمانی مستقل از هم دارد. در فضا-زمان سه بعد فضا و یک بعد زمان درهم ادغام می‌شوند و یک پیوستار چهار بعدی را ایجاد می‌کنند. با ترکیب فضا و زمان و ایجاد یک محیط خمیده واحد، فیزیکدان‌ها توانسته‌اند تئوری‌های فیزیک را هم در سطح کیهانی و هم در بعد اتمی ساده‌سازی کنند. طرح کلی در فضا-زمان، ادغام فضا و زمان با یکدیگر و در نتیجه ایجاد یک محیط یکپارچه با دستگاه مختصاتی یکتا است. برای این کار به سه بُعد مکانی معمول (طول، عرض، ارتفاع) و یک بُعد زمان نیاز داریم؛ این بُعدها مؤلفه‌های مستقل لازم برای مشخص کردن یک نقطه خاص در یک فضای تعریف شده‌اند.

بازه‌های فضازمانی

در فضای اقلیدسی جدایی بین دو نقطه از طریق فاصله بین آن دو نقطه اندازه‌گیری می‌شود که این فاصله، تنها از جنس مکان است و همواره مثبت؛ ولی در فضا-زمان جدایی بین دو رویداد از طریق بازه بین آن دو رویداد اندازه‌گیری می‌شود که این بازه نه تنها اختلاف مکانی بلکه اختلاف زمانی بین آن دو رویداد را نیز در بر می‌گیرد. بازه بین دو رویداد به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$dS^2 = \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (1.1)$$

در حالی که c برابر با سرعت نور و Δt و Δr به ترتیب اختلاف زمانی و مکانی دو رویداد در دستگاه مختصات است. بازه‌های فضا-زمانی بر اساس اینکه اختلاف زمان ($c^2 \Delta t^2$) بزرگتر است یا اختلاف مکانی (Δr^2) به سه دسته تقسیم می‌شوند.

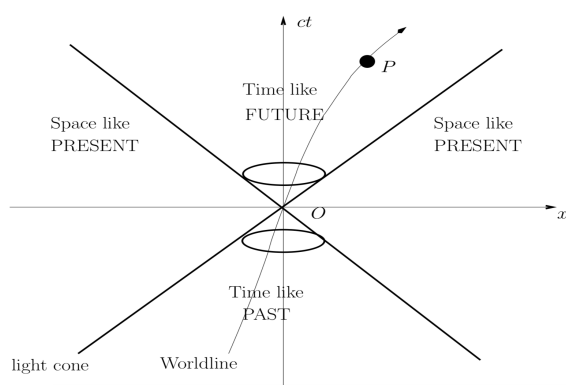
بازه زمان گونه: $dS^2 < 0, \Delta r^2 < c^2 \Delta t^2$

بازه نور گونه: $dS^2 = 0, \Delta r^2 = c^2 \Delta t^2$

بازه مکان گونه: $dS^2 > 0, \Delta r^2 > c^2 \Delta t^2$

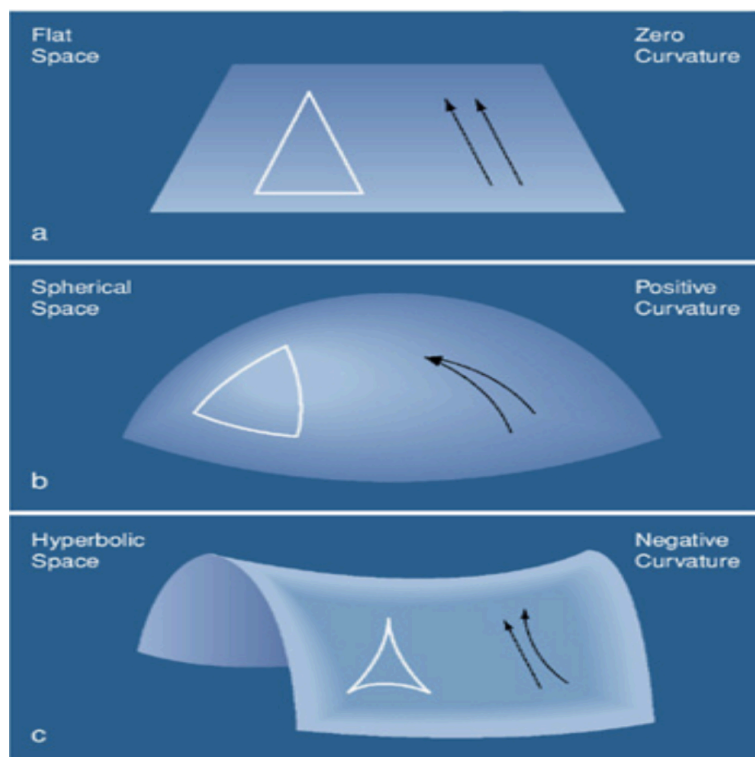
فضای خمیده^۳ بعدی قابل تجسم نیست اما می‌توان خمیدگی فضا را در دو بعد نشان داد.

^۴Manifold



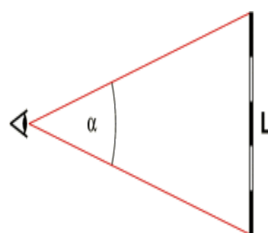
شکل ۷.۱: نمودار فضا زمان

می توان فضای با خمیدگی مثبت را مانند سطح یک کره و فضای با خمیدگی منفی را مانند زمین و فضای با خمیدگی صفر را مانند یک صفحه تجسم کرد. هندسه فضاهای خمیدی دو و سه بعدی متفاوت است. در فضای با خمیدگی مثبت خطوط موازی می توانند یکدیگر را قطع کنند یا در فضای با خمیدگی منفی میتوانند واگرا باشند. جمع زوایای داخلی یک مثلث در فضای با خمیدگی مثبت بیشتر از 180° درجه و در فضای با خمیدگی منفی کمتر از 180° درجه می باشد [۸.۱](#).



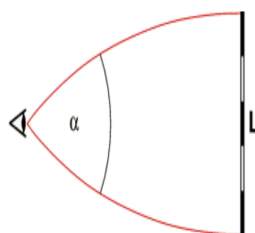
شکل ۸.۱: فضای خمیده با انحنای صفر مثبت و منفی

در فضای اقلیدسی معمولی زاویه دید یک جسم بصورت خطی با فاصله کاهش می یابد. شکل های ۹.۱، ۱۰.۱ و ۱۱.۱ رابطه بین طول یک میله، فاصله آن تا ناظر و زاویه آلفا را نشان می دهد. خطوط قرمز پرتو نور رسیده از جسم به چشم ناظر از دو انتهای میله می باشد.



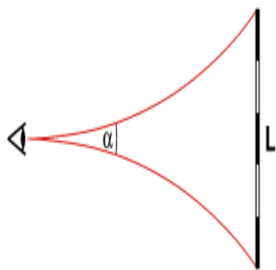
شکل ۹.۱: وضعیت پرتو های نور رسیده به چشم در فضای اقلیدسی تخت

در فضای با خمیدگی مثبت مساله تا اندازه ایی متفاوت است. در این فضا نور در یک مسیر مستقیم حرکت نمی کند در عوض به صورتی که در شکل زیر دیده می شود بصورت همگرا به ناظر می رسد.



شکل ۱۰.۱: وضعیت پرتو های نور رسیده به چشم در فضای با خمیدگی مثبت

در این فضا اندازه گیری میله که در همان فاصله اولیه از ما قرار دارد اندازه ظاهری بزرگتری و متناسب با آن زاویه دید بزرگتر آلفا خواهد داشت.



شکل ۱۱.۱: وضعیت پرتو های نور رسیده به چشم در فضای با خمیدگی منفی

در فضای با خمیدگی منفی پرتو های نور واگرا هستند در نتیجه اندازه میله با فاصله برابر با ناظر دارای طول ظاهری کوچکتر و در نتیجه آن زاویه دید کوچکتر آلفا را خواهد داشت.

۳.۱ تانسور متریک

در این قسمت مفهوم متریک یا فاصله را در فضای N بعدی معرفی می کنیم. فرض کنید x^i و $x^i + dx^i$ مختصات نقطه مجاور در فضای N بعدی نسبت به یک دستگاه مختصات باشند. فرض کنید ds فاصله ی بین این دو نقطه را نشان دهد. اگر مربع فاصله، ds^2 را بتوان بر حسب کمیت های بینهایت کوچک dx^i بیان کرد یعنی

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad (۲.۱)$$

که ضرایب $g_{i,j}$ ممکن است تابع x^i باشند، تنها با این محدودیت که دترمینان ماتریس ضرایب ناتکین باشد، یعنی $g \equiv \det(g_{ij}) \neq 0$ ، در این صورت به این فضا فضای ریمانی می گویند. در حالت خاص، اگر همه ضرایب g_{ij} مستقل از x^i باشند به این فضا، فضای اقلیدسی می گویند. به عنوان مثال در صفحه دو بعدی با مختصات دکارتی x و y فاصله بین دو نقطه (x, y) و $(x + dx, y + dy)$ را بصورت $ds^2 = dx^2 + dy^2$ نشان می دهند. این معادله به شکل معادله (۷.۱) است با

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (۳.۱)$$

بنابراین

$$g \equiv \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad (۴.۱)$$

همچنین متریک برای صفحه دو بعدی بر حسب مختصات قطبی r و θ برای فاصله بین نقاط (r, θ) و $(r + dr, \theta + d\theta)$ بصورت $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ نوشته می شود این بار

$$g_{11} = 1, g_{22} = r^2, \quad g_{12} = g_{21} = 0 \quad (۵.۱)$$

بنابراین

$$g \equiv \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^2 \quad (6.1)$$

دستگاه مختصات u, v, w را که با روابط زیر به مختصات دکارتی مربوط می شود، در نظر بگیرید

$$x = vw, \quad y = uw, \quad z = uv \quad (7.1)$$

المان فاصله چنین است

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (v^2 + w^2)du^2 + (w^2 + u^2)dv^2 + (u^2 + v^2)dw^2 + \\ 2uvdudv + 2vwdvdw + 2uwdudw \quad (8.1)$$

که به شکل

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} v^2 + w^2 & uv & uw \\ uv & w^2 + u^2 & vw \\ uw & vw & u^2 + v^2 \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

با

$$g = 4u^2v^2w^2 \quad (10.1)$$

با این مثال می توان فهمد که $g_{ij} + g_{ji}$ تانسور هموردای متقارن رتبه ی دو است. در فضای N بعدی دستگاه مختصاتی را که در آن، به ازای $i \neq j$ ، $g_{ij} = 0$ باشد دستگاه مختصات متعامد می نامند. به علاوه دستگاهی را که در آن، به ازای $1 \leq i \leq N$ ، $g_{ii} = 1$ و به ازای $i \neq j$ ، $g_{ij} = 0$ دستگاه مختصات دکارتی می نامند.

۱.۳.۱ تانسور متریک پادوردا

برای تانسور متقارن هموردای مفروض A_{ij} ، با دترمینان غیر صفر، می توان تانسور پادوردا و همچنین متقارن B^{ij} یی یافت که در ضرب داخلی این دو تانسور صدق کند. این تانسور پادوردا را مزدوج g_{ij} تعریف می کنیم و آن را با g^{ij} نشان می دهیم، در این حالت داریم

$$g^{ij} = g^{ji} \quad (11.1)$$

که

$$g_{ij}g^{ij} = \delta_i^i \quad (12.1)$$

بهتر است g_{ij} و g^{ij} را دو تانسور متمایز در نظر بگیریم بلکه به ترتیب مؤلفه های هموردا و پادوردای یک تانسور متریک به شمار آوریم. ضمن اینکه ماتریس g^{ij} وارون ماتریس g_{ij} است.

۲.۳.۱ تانسورهای وابسته

فرض کنید A^i بردار پادوردای دلخواهی باشد. حاصلضرب داخلی A^i در تانسور متریک هموردای g_{ij} برداری هموردا می شود. این ضرب داخلی را چنین نمایش می دهیم

$$A^i g_{ij} = A_j \quad (۱۳.۱)$$

و A^i و A_j به ترتیب مؤلفه های پادوردا و هموردای یک بردار تلقی می شوند.

$$A_j g^{jk} = A^i g_{ij} g^{jk} = A^i \delta_i^k = A^k \quad (۱۴.۱)$$

که نشان می دهد رابطه بین A^i و A_j رابطه معکوس است. تانسورهای A^i و A_j را تانسورهای وابسته می نامیم.

۳.۳.۱ تبدیل شاخص های پادوردا و هموردا به یکدیگر

فرض می کنیم A^{ij} یک تانسور پادوردای مرتبه دوم باشد با در نظر گرفتن ضرب نرده ای A^{ij} در تانسور متریک g_{ij} به طور متوالی، می توانیم تانسورهای زیر را تعریف کنیم

$$\begin{aligned} A^{ij} g_{ij} &= A_{\cdot k}^i \\ A^{ij} g_{ik} &= A_{\cdot k}^j \\ A_{\cdot k}^i g_{il} &= A_{\cdot l}^j g_{jk} = A^{ij} g_{il} g_{jk} = A_{lk} \end{aligned} \quad (۱۵.۱)$$

برای پرهیز از اشتباه، از یک نقطه در جای خالی زیر اندیس پادوردای تانسور آمیخته استفاده می شود. بنابر این، چهار تانسور $A^{ij}, A_{\cdot j}^i, A_j^i, A_{ij}$ داریم که هر یک به دیگری وابسته است. A^{ij} ها مؤلفه های پادوردا و A_{ij} مؤلفه های هموردا و A_j^i و $A_{\cdot j}^i$ دو نوع مؤلفه آمیخته یک تانسورند. می توان یکسان نبودن A_j^i و $A_{\cdot j}^i$ را نشان داد مگر آنکه $A^{ik} = A^{ki}$ باشد، یعنی در صورتی که A^{ik} متقارن باشد. این فرایند را پایین آوردن اندیس می نامند. چنانچه ضرب داخلی تانسوری را که حداقل یک اندیس پادوردا دارد در g_{ij} در نظر بگیریم، یک اندیس پادوردای آن تانسور پایین می آید و در مکان هموردا قرار می گیرد. در فرایند وارون که شامل ضرب داخلی تانسوری در تانسور متریک پادوردای g_{ij} است، اندیس هموردا به مکان پادوردا می رود، بنابراین به بالا بردن اندیس معروف است. رابطه وارون را می توان با ضرب داخلی در g^{ij} بدست آورد. به عنوان مثال

$$A_{\cdot k}^i g^{kj} = A^{ij}, A_{\cdot k}^i g^{kj} = A^{ji}, \quad A_{ij} g^{ki} g^{jl} = A^{kl} \quad (۱۶.۱)$$

در حالت خاص اگر در معادله (۱۶.۱) را بالا بردن یک اندیس g_{ij} یا پایین آوردن یک اندیس g^{ij} تلقی کنیم و بر این اساس تانسور متریک آمیخته بصورت زیر تعریف می شود

$$g_{\cdot i}^{\cdot k} = g_{\cdot i}^k = \delta_{\cdot i}^k \quad (۱۷.۱)$$

۴.۳.۱ تانسور متریک بر حسب بردارهای پایه

تانسور ها در فضا زمان خمیده نسبت به دستگاه های مختصات دلخواه معین می شوند. این تانسور ها الزاما موضعی هستند، یعنی وابسته به نقطه ایی در فضا زمان هستند. هنگامی که یک دستگاه مختصات عام به دستگاهی دیگر تبدیل می شود، مؤلفه های هر تانسور از یک تبدیل نوعی پیروی می کنند که عموما به نقطه ایی که تانسور در آن قرار دارد بستگی دارد. از آنجا که تانسورهای پادوردا را با شاخص بالا مشخص می کنند مختصات را نیز با شاخص بالا نوشتیم، تا dx^μ بصورت پادوردا ظاهر شود. اکنون تبدیل مختصات x^μ به x^a را در نظر بگیرید. بنابراین بنا به قاعده زنجیری، دیفرانسل های مختصات چنین تبدیل می شوند

$$dx^a = \sum_{\mu=0}^3 e_\mu^a dx^\mu, e_\mu^a = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} \quad (18.1)$$

و این مدل برای هر بردار پادورداست. با استفاده از قاعده جمع اینشتین، می توانیم رابطه قبل را بدون علامت $\sum$ بنویسیم

$$dx^a = e_\mu^a dx^\mu \quad (19.1)$$

اگر بنویسیم

$$dx^a = e_\mu^a dx^\mu \quad (20.1)$$

و e های دیگر را به همین ترتیب تعریف کنیم، بنا بر قاعده زنجیری داریم

$$e_{\mu'}^\mu e_{\mu''}^{\mu'} = e_{\mu''}^\mu \quad (21.1)$$

که μ'' به دستگاه مختصات سوم $x^{\mu''}$ مربوط است. به خصوص

$$e_{\mu'}^\mu e_\nu^{\mu'} = \delta_\nu^\mu \quad (22.1)$$

که در اینجا δ_ν^μ دلتای کرونکر است. این رابطه نشان می دهد که ماتریس های $e_{\mu'}^\mu$ و $e_\mu^{\mu'}$ وارون یکدیگرند. e_a^μ و e_μ^a ضرایبی هستند که در تعریف یک تانسور عام داخل می شوند. این ضرایب معمولا ثابت نیستند و وابسته به مکان اند. مدل یک تانسور مرتبه یک هموردا B_μ ، گرادیان یک تابع نرده ای φ است

$$\varphi_{\mu'} := \frac{\partial \varphi}{\partial x^{\mu'}} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^\mu} \right) e_{\mu'}^\mu = \varphi_\mu e_{\mu'}^\mu \quad (23.1)$$

اگر $A_{\nu \dots}^{\mu \dots}$ تحت تبدیل مختصات $x^\mu \rightarrow x^{\mu'}$ مطابق

$$A_{\nu' \dots}^{\mu' \dots} = A_{\nu \dots}^{\mu \dots} e_{\mu'}^\mu \dots e_{\nu'}^\nu \dots \quad (24.1)$$

تبدیل شوند، گوییم که $A_{\nu}^{\mu, \dots}$ مؤلفه های یک تانسور مرتبه n هستند که نسبت به شاخص های $\mu, \dots$ پادوردا و نسبت به شاخص های $\nu, \dots$ هم وردا هستند. به ازای هر شاخص یک e وجود دارد و در سمت راست جمع روی همه شاخص های بدون پریم انجام می شود. مهمترین خاصیت تانسور های عام این است که اگر یک اتحاد بین دو دسته مؤلفه های تانسوری در یک دستگاه برقرار باشد در هر دستگاه دیگری برقرار است. خاصیت دیگر خاصیت گروهی است برای مثال (۲۳.۱) را در $e_{\nu}^{\mu'}$ ضرب می کنیم داریم

$$\varphi_{\mu'} e_{\nu}^{\mu'} = \varphi_{\mu} \delta_{\nu}^{\mu} = \varphi_{\nu} \quad (25.1)$$

پس تقارن ثابت می شود. همچنین اگر $\varphi_{\mu''} = \varphi_{\mu'} e_{\mu''}^{\mu'}$ آنگاه داریم

$$\varphi_{\mu''} = \varphi_{\mu} e_{\mu'}^{\mu} e_{\mu''}^{\mu'} = \varphi_{\mu} e_{\mu''}^{\mu} \quad (26.1)$$

به این ترتیب تراگذاری اثبات می شود.
متریک یک فضا زمان عام را می توان بصورت

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, (g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}) \quad (27.1)$$

نوشت که در آن $g_{\mu\nu}$ تابع مختصات اند. تحت تغییر مختصات $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu'}$ ، (۲۷.۱) بصورت زیر در می آید.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu'} e_{\mu'}^{\mu} dx^{\nu'} e_{\nu'}^{\nu} = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} \quad (28.1)$$

که در آن

$$g_{\mu'\nu'} = g_{\mu\nu} e_{\mu'}^{\mu} e_{\nu'}^{\nu} \quad (29.1)$$

این نشان می دهد $g_{\mu\nu}$ یک تانسور است. دلتای کرونکر یک تانسور است، زیرا

$$\delta_{\nu}^{\mu} e_{\mu'}^{\mu'} e_{\nu'}^{\nu} = e_{\nu'}^{\mu'} e_{\nu'}^{\nu} = \delta_{\nu'}^{\mu'} \quad (30.1)$$

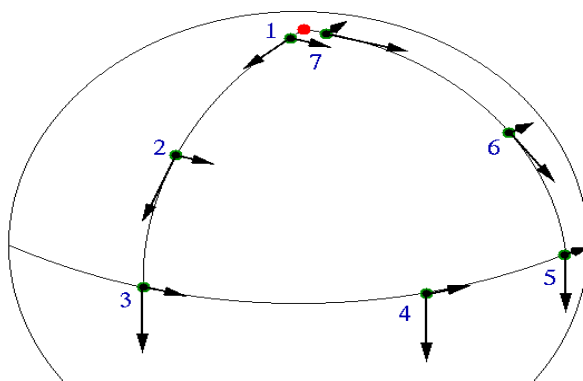
در نتیجه عناصر ماتریس وارون $g_{\mu\nu}$ یعنی $g^{\mu\nu}$ ها، مؤلفه های یک تانسور پادوردا هستند زیرا به طور یکتا توسط معادله $g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_{\mu}^{\sigma}$ تعریف می شوند. $g^{\mu\nu}$ و $g_{\mu\nu}$ برای بالا و پایین بردن شاخص ها استفاده می شوند.

۴.۱ انتقال موازی

انتقال موازی یک بردار در فضای اقلیدسی روشن است. بر روی یک خمینه دلخواه نمی دانیم بردارها را چگونه منتقل کنیم. یعنی ارتباط میان فضای مماس در نقاط مختلف وجود ندارد. انتقال موازی یک بردار در طول یک مسیر بسته روی سطح کره را در نظر بگیرید. در شکل

۱۲.۱ دو بردار در همه لحظات مماس بر صفحه خمیده باقی می ماند. از نقطه ۱ شروع به انتقال در طول مسیر می کنند و در حین انتقال با جهت خود در نقطه بی نهایت نزدیک خیلی به صورت موازی باقی می مانند. نوک بردار بلندتر همواره رو به جنوب و جهت بردار کوچکتر در حین انتقال همواره رو به شرق باقی می ماند.

بعد از طی شدن مسیر بسته، بردارها به نقطه شروع خود بازگشته اند اما نسبت به جهت اولیه خود تغییر کرده اند. توجه داشته باشید که بردارها با وجود اینکه ما مراقب بودیم که آنها را در حین حمل و نقل موازی نگه داریم. اگر مسیر کوچکتر بود، یعنی شامل یک قسمت کوچکتر از سطح کروی بود، زاویه چرخش کوچکتر بود. در مثال ما، جایی که مسیر بسته یک هشتم از کره را احاطه کرده است، زاویه چرخش 90° درجه است. یک مسیر بزرگتر که یک چهارم کره را در بر گرفته، بردارهای انتقال موازی 180° درجه می چرخند. یک مسیر بزرگتر، که کره را نصف می کند چرخش 360° درجه را به بردارها می دهد، یعنی هیچ چرخشی ندارد. برقرار کردن این



شکل ۱۲.۱: انتقال موازی یک بردار

ارتباط بین هر نقطه روی خم با نقطه قبل از خودش، کمک می کند که دو بردار را از هم کم کنیم، یکی منتقل شده به نقطه ای دیگر و یکی در همان نقطه. این اختلاف منجر به تعریف مشتق می شود (مشتق هموردا) به این ترتیب انتقال بردار در امتداد یک خم تعریفی برای مشتق بردار در امتداد آن خم به دست می دهد. بنابراین، انتظار این است اگر نوعی مشتق تعریف شود مبتنی بر مفهومی جدید که باید بتوان آن را از تعریف انتقال موازی تعبیر کرد. به عبارت دیگر از آنجایی که در فضا زمان خمیده در هر نقطه از منیفلد پاهای فضا زمان متفاوت هستند مقایسه تانسور امکان پذیر نیست. بنابراین با کمک انتقال موازی با ثابت نگه داشتن تانسور مورد نظر، آن را از طریق مسیری دلخواه در صفحه مماس مربوط به تانسور دیگر می رسانیم به گونه ایی که هر تانسور دارای پایه های یکسان باشند. در این صورت می توان تانسورهای مجاور را به کمک مشتق هموردا مقایسه کرد. تفاوت بین فضا زمان تخت و خمیده در این است که نتیجه انتقال موازی یک بردار از یک نقطه به نقطه دیگر به مسیری که از در نقطه می گذرد بستگی دارد همچنین دو بردار تنها زمانی قابل مقایسه اند که عناصر

یک فضای مماس باشند.

دو نقطه $P(x^\mu)$ و $Q(x^\mu + dx^\mu)$ را در نظر بگیرید. میدان برداری را تصور کنید که در نقطه P دارای مقادیر A^μ و در Q دارای مقادیر $A^\mu + dA^\mu$ است. dA^μ برابر است با

$$dA^\mu = A(x^\mu + dx^\mu) - A(x^\mu) = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\mu} dx^\mu = \partial_\nu A^\mu x^\nu \quad (31.1)$$

اما از آنجا که $\partial_\nu A^\mu$ تانسور نیست چرا که اختلاف دو بردار در دو نقطه متفاوت است یعنی

$$\partial_\nu A^\mu = \lim_{dx^\mu \rightarrow 0} \frac{A(x^\mu + dx^\mu) - A(x^\mu)}{dx^\mu} \quad (32.1)$$

همانطور که مشخص است مشتق یک بردار با مقایسه یک بردار در دو نقطه مختلف محاسبه می شوند و چون این تفاضل ویژگی های یک بردار را ندارد به این معنی که یک بردار در دو نقطه مختلف بر روی یک منیفلد نمی تواند متعلق به یک فضای مماس یکسان باشد، پس برای آنکه مشتق دارای ویژگی های هموردا باشد باید بردار را به صورت موازی به نقطه مجاور منتقل کرد، به نحوی که تفاضل این دو بردار یک بردار باشد. به همین ترتیب می توان نشان داد مشتق یک تانسور معمولاً تانسور نیست به همان دلیل که e_a^μ عموماً ثابت نیستند. با این حال راهی برای تعریف مشتقهای خاصی که خود تانسورند وجود دارد، وبعلاوه این مشتق در یک دستگاه لخت موضعی به مشتق معمولی تبدیل می شود. برای این منظور به نمادهای کریستوفل $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ نیاز داریم که با معادله زیر تعریف می شوند

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = \Gamma_{\sigma\nu}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\tau} (g_{\tau\nu,\sigma} + g_{\tau\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\tau}) \quad (33.1)$$

در این معادله ویرگول مشتق جزئی را نشان می دهد: $g_{\tau\nu,\sigma} = (\partial/\partial x^\sigma)g_{\tau\nu}$. Γ ها مؤلفه های یک تانسور نیستند و در مبدا هر دستگاه لخت موضعی صفر می شوند. اکنون اگر A^μ برداری پادوردا باشد، می توان ثابت کرد که DA^μ/ds که با معادله

$$\frac{D}{ds} A^\mu = \frac{d}{ds} A^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu A^\nu \frac{dx^\sigma}{ds} \quad (34.1)$$

تعریف می شود بک تانسور است. چنانچه گفتیم Γ ها در مبدا هر دستگاه لخت موضعی صفر می شوند پس در آنجا مشتق (34.1) به مشتق معمولی تبدیل می شود. انتقال موازی با مختصات ژئودزیک در فضاها ریمانی ارتباط دارد. برای اینکه بردار A^μ را در امتداد یک منحنی از پیش تعیین شده ای انتقال دهیم به یک دستگاه ژئودزیک موضعی در نقطه P از منحنی می رویم و در آن دستگاه انتقال موازی در نقطه P را توسط $dA^\mu/ds = 0$ تعریف می کنیم. با مراجعه به (34.1) می بینیم که معادله تانسوری $DA^\mu/ds = 0$ در همه دستگاه های مختصات صادق است.

۵.۱ اتصال دهنده ی اسپینی

در انتقال موازی یک بردار بر روی یک منیفلد با مؤلفه هایی در پایه های موضعی در آن نقطه به نقطه ای دیگر بر روی منیفلد با پایه های موضعی جدید مشتق هموردای تانسور های موضعی تعریف می شود و این تعریف از طریق مفهومی به نام اتصال دهنده اسپینی صورت می گیرد. رابطه مربوط به انتقال موازی یک بردار موضعی باید مشابه رابطه انتقال موازی یک بردار عام در منیفلد باشد با این تفاوت که دارای اتصال دهنده اسپینی متفاوتی خواهند بود. انتقال موازی یک بردار عام در منیفلد به شکل زیر می باشد

$$A^\mu(x^\mu \rightarrow x^\mu + dx^\mu) = A^\mu(x^\mu) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu A^\nu(x^\mu) dx^\lambda \quad (۳۵.۱)$$

حال انتقال موازی به صورت موضعی برای بردار در پایه های موضعی به شکل زیر است

$$A^a(x^\mu \rightarrow x^\mu + dx^\mu) = A^a(x^\mu) - \omega_{\mu b}^a A^b(x^\mu) dx^\mu \quad (۳۶.۱)$$

که $\omega_{\mu b}^a$ اتصال دهنده اسپینی می باشد. ارتباط بین بردارها در پایه موضعی با بردارها در پایه عام به صورت زیر است

$$A^\mu(x) = e_a^\mu A^a(x) \quad (۳۷.۱)$$

که اگر آن را از نقطه x نقطه $x + dx$ منتقل کنیم داریم

$$A^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_a^\mu(x \rightarrow x + dx) A^a(x \rightarrow x + dx) \quad (۳۸.۱)$$

با بسط تیلور $e_a^\mu(x \rightarrow x + dx)$ تا مرتبه اول خواهیم داشت

$$e_a^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_a^\mu(x) + dx^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu} e_a^\mu(x) \quad (۳۹.۱)$$

در نتیجه

$$A^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_a^\mu(x) A^a(x \rightarrow x + dx) + \partial_\nu e_a^\mu(x) A^a(x + dx) dx^\nu \quad (۴۰.۱)$$

حال با جایگذاری عبارت مربوط به $A^a(x \rightarrow x + dx)$ داریم

$$\begin{aligned} dA^\mu(x \rightarrow x + dx) &= e_a^\mu(x) A^a(x) - e_a^\mu(x) \omega_{\nu b}^a A^b(x) dx^\nu + \\ &\partial_\nu e_a^\mu(x) A^a(x) dx^\nu - \partial_\nu e_a^\mu(x) \omega_{\nu b}^a A^b(x) dx^\nu dx^\mu \end{aligned} \quad (۴۱.۱)$$

با در نظر گرفتن تقریب مرتبه اول و صرف نظر از ترم آخر و از آنجا که اندیس a در جمله سوم یک اندیس دلخواه است که بر روی همه مؤلفه ها جمع بسته می شود بنابراین می توان آن را با b نمایش داد، در نتیجه

$$A^\mu(x \rightarrow x + dx) = e_a^\mu(x) A^a(x) - (e_a^\mu(x) \omega_{\nu b}^a - \partial_\nu e_b^\mu(x)) A^b(x) dx^\nu \quad (۴۲.۱)$$

که

$$\begin{aligned} A^\mu(x \rightarrow x + dx) &= A^\mu(x) - (e_a^\mu(x)\omega_{\nu b}^a - \partial_\nu e_b^\mu(x))A^b(x)dx^\nu = \\ &A^\mu(x) - (e_a^\mu(x)\omega_{\nu b}^a - \partial_\nu e_b^\mu(x))e_\sigma^b A^\sigma(x)dx^\nu \end{aligned} \quad (۴۳.۱)$$

در نتیجه داریم

$$\omega_{\nu b}^a = e_\mu^a e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\nu}^\mu + e_\mu^a \partial_\nu e_b^\mu. \quad (۴۴.۱)$$

۶.۱ مشتق هم وردا

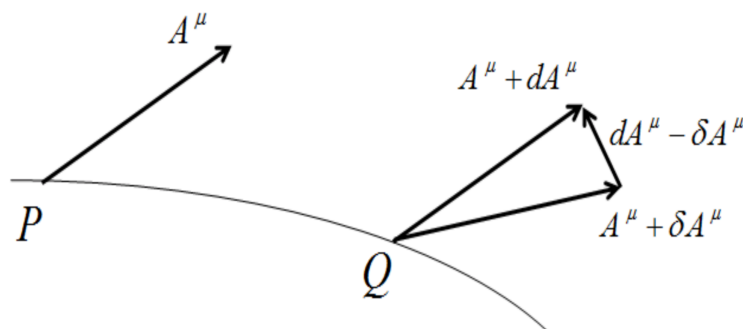
از آنجا که قوانین فیزیک باید از دید ناظر های مختلف یکسان باشند، بهترین راه نمایش تانسوری این قوانین می باشد. به این منظور می توانیم با استفاده از روابط هموردا از یک دستگاه عام به دستگاه موضعی و بالعکس برویم. کمیت های فیزیکی نیز از طریق روابط تانسوری در دستگاه های مختلف به هم مربوط می شوند. در فضای خمیده مشتق جزئی فرم تانسوری ندارد به این معنی که مشتق یک تانسور لزوما یک تانسور نیست. برای مثال بردار پادوردای A^μ را در نظر بگیرید طبق قانون تبدیل داریم

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \quad (۴۵.۱)$$

با مشتق گیری نسبت به x'^λ داریم

$$\frac{\partial A'^\mu}{\partial x'^\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x'^\mu}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\lambda} A^\nu \quad (۴۶.۱)$$

ترم اول تانسوراست اما ترم دوم رفتار تانسوری ندارد. اگر چه $\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\lambda}$ یک تانسور نیست. برای برطرف شدن این مشکل باید مشتق جزئی را با مشتق هموردا جایگزین کنیم.



شکل ۱۳.۱: انتقال موازی بردار A

مسیری را در فضا زمان خمیده در نظر بگیرید. مشکل از جایی آغاز می شود که ما بردار را طبق تعریف مشتق می خواهیم در دو نقطه متفاوت مقایسه کنیم اما مطابق شکل در فضا زمان

خمیده مؤلفه های بردار عوض می شوند. پس باید ابتدا بردار را منتقل کنیم (انتقال موازی) و سپس مشتق جزئی بگیریم. به عبارت دیگر به جای اینکه اختلاف میان A^μ و $A^\mu + dA^\mu$ را محاسبه کنیم باید اختلاف میان $A^\mu + \delta A^\mu$ و $A^\mu + dA^\mu$ را حساب کنیم. که $A^\mu + \delta A^\mu$ بردار انتقال یافته A^μ به نقطه Q است. این اختلاف برابر است با

$$DA^\mu = dA^\mu - \delta A^\mu \quad (47.1)$$

در این رابطه

$$\delta A^\mu = -\Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\rho dx^\nu \quad (48.1)$$

بنابراین معادله (47.1) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$DA^\mu = A^\mu_{,\nu} dx^\nu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\rho dx^\nu = (A^\mu_{,\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\rho) dx^\nu \quad (49.1)$$

به این ترتیب مشتق هموردای بردار A^μ

$$\nabla_\nu A^\mu = A^\mu_{,\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu A^\rho \quad (50.1)$$

در واقع این مشتق گیری تعمیمی از مشتق گیری در فضای تخت به فضای خمیده است.

فصل ۲

بررسی فرمیون های با اسپین ۱/۲ در فضا زمان خمیده

۱.۲ بررسی فرمیون های با اسپین ۱/۲ در فضا زمان تخت

در پی یافتن معادله ای که نرم مثبت داشته باشد و هامیلتونی ظاهر شده در معادله موج هرمیتی باشد به معادله دیراک دست می یابیم که نسبت به مکان و زمان، هر دو، مرتبه یک می باشد. معادله دیراک در صورتی که هیچ نیروی خارجی وجود نداشته باشد به صورت زیر نوشته می شود

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (\alpha.Pc + \beta mc^2) \Psi = H\Psi \quad (1.2)$$

ماتریس های α^i و β از روابط جبری زیر پیروی می کنند

$$\begin{aligned} \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i &= 2\delta_{ij} \\ \alpha_i \beta + \beta \alpha_i &= 0 \\ \alpha_i^2 = \beta^2 &= 1 \end{aligned} \quad (2.2)$$

۱.۱.۲ فرم هموردای معادله دیراک

متداول است ماتریس های دیراک را بر حسب ماتریس های α^i و β بصورت زیر معرفی می کنند

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

با توجه به خواص ماتریس های α^i و β به خواص زیر برای ماتریس های γ می رسیم

$$\begin{aligned} \gamma^{0\dagger} &= \gamma^0 \\ \gamma^{j\dagger} &= -\gamma^j \\ \gamma^{\mu\dagger} &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \\ \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu &= 2g^{\mu\nu} I \end{aligned} \quad (4.2)$$

با بازنویسی مجدد معادله دیراک به فرم هموردا داریم

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi = 0 \quad (5.2)$$

با استفاده از نمادگذاری فاینمن $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ معادله دیراک را به فرم فشرده زیر می نویسیم

$$\left(i \not{\partial} - \frac{mc}{\hbar} \right) \Psi = 0 \quad (6.2)$$

۲.۱.۲ چگالی جریان دیراک

به منظور محاسبه چهار بردار چگالی جریان و معادله پیوستگی دیراک ابتدا با ضرب معادله (۱.۲) از سمت چپ در $\Psi^\dagger$ داریم

$$i\hbar \Psi^\dagger \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \frac{\hbar c}{i} \Psi^\dagger \alpha_i \partial^i \Psi + mc^2 \Psi^\dagger \beta \Psi \quad (7.2)$$

همیوگ هرمیتی معادله دیراک بصورت زیر نوشته می شود

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^\dagger = -\frac{\hbar c}{i} \partial^i \Psi \alpha_i^\dagger + mc^2 \Psi^\dagger \beta^\dagger \quad (8.2)$$

با ضرب این معادله از سمت راست و با توجه به هرمیتی بودن ماتریس های دیراک داریم

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi^\dagger \Psi = -\frac{\hbar c}{i} \partial^i \Psi \alpha_i^\dagger \Psi + mc^2 \Psi^\dagger \beta \Psi \quad (9.2)$$

با کم کردن معادلات (۸.۲) و (۹.۲) از یکدیگر داریم

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (\Psi^\dagger \Psi) = \frac{\hbar c}{i} \partial^i \Psi^\dagger \alpha_i \Psi \quad (10.2)$$

و یا

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \cdot J = 0 \quad (11.2)$$

که در این رابطه $\rho = \Psi^\dagger \Psi$ و $j^i = c\Psi^\dagger \alpha^i \Psi$ می باشند. می توان نشان داد J و ρ تحت تبدیلات لورنتس مشابه مؤلفه های چهار بردار تبدیل می شوند در نتیجه می توان آن ها را بفرم چهار بردار J^μ نمایش داد.

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}) \quad (12.2)$$

با توجه به تعریف عملگر چهاربردار مشتق ∂^μ آنگاه معادله پیوستگی را می توان بصورت زیر نوشت

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (13.2)$$

۲.۲ فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در فضا زمان خمیده

معادله دیراک در فضا زمان خمیده بصورت زیر نوشته می شود. [۲۶، ۲۷]

$$[i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)) - M]\Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (14.2)$$

$\gamma^\mu(x)$ ماتریس های دیراک تعمیم یافته می باشند و از رابطه زیر پیروی می کنند.

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\mu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (15.2)$$

که در آن $\Gamma_\mu(x)$ اتصال دهنده های اسپینوری آفین^۱ هستند.

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{4}\omega_{\mu ab}[\gamma^a, \gamma^b] \quad (16.2)$$

γ^a ماتریس های دیراک استاندارد در فضا زمان مینکوفسکی تخت هستند و $\omega_{\mu ab}$ اتصال دهنده های اسپینی می باشند که از رابطه زیر محاسبه می شوند [۲۸، ۲۹]

$$\omega_{\mu b}^a = e_\nu^a e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu + e_\nu^a \partial_\mu e_b^\nu \quad (17.2)$$

که در این رابطه $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$ و $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$ هستند. اتصال دهنده های اسپینی امکان انتقال در یک فضا زمان خمیده از یک نقطه با مختصات موضعی به نقطه با مختصات موضعی جدید را فراهم می آورد. $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ نماد های کریستوفل نوع دوم^۲ می باشند و از رابطه زیر بدست می آیند.

$$\Gamma_{ij}^\mu = \frac{1}{2}g^{\mu k} \left[\frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right] \quad (18.2)$$

^۱ spinor affine connections

^۲ Christoffel symbols of the second kind

که در آن q^i مختصات یک نقطه یعنی (q^1, q^2, q^3) می باشند. γ^μ ماتریس های تعمیم یافته دیراک می توانند بر حسب ماتریس های استاندارد دیراک نوشته شوند

$$\gamma^\mu(x) = e_a^\mu(x) \gamma^a \quad (19.2)$$

که در آن $\gamma^a = (\gamma^0, \gamma^i), (i = 1, 2, 3)$ با استفاده از ماتریس های تبدیل e_μ^a و e_a^μ می توان به ترتیب از یک دستگاه مختصات موضعی تعمیم یافته در فضای خمیده به فضای تخت و برعکس انتقال پیدا کرد. بین این ماتریس های تبدیل رابطه زیر وجود دارد

$$\eta^{ab} e_b^\mu e_b^\nu = g^{\mu\nu} \quad (20.2)$$

که η^{ab} تانسور ریمان است. و در این رابطه $(\mu, \nu) = (0, 1, 2, 3)$ و $(a, b) = (0, 1, 2, 3)$ می باشد.

۳.۲ فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در متریک کروی تحت پتانسیل های اسکالر و برداری

نقطه دلخواه p در دستگاه مختصات کروی در نظر بگیرید که بر روی سطحی قرار گرفته و مختصات آن توسط پارامتر های (r, θ, φ) تعیین می شود. $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$ را مختصات نقطه p بگیرید. مربع فاصله بین دو نقطه p و p' که در همسایگی قرار دارد از رابطه زیر بدست می آید.

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu \quad \mu = \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (21.2)$$

$g_{\mu\nu}$ تانسور متریک ^۳ می باشد در اینجا از قاعده جمع انیشتین که وقتی یک اندیس دو بار ظاهر می شود جمع روی آن اندیس صورت می گیرد. المان طول متناظر با پس زمینه ریسمان کیهانی در دستگاه مختصات کروی بصورت زیر داده می شود [۲۵، ۳۰]

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \alpha^2 r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \quad (22.2)$$

که در آن $-\infty < t < \infty$ ، $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ، $r \geq 0$. در این رابطه $\alpha = 1 - \frac{4G}{c^2} \mu$ زاویه کاستی و در محدوده $(0, 1)$ می باشد و μ چگالی جرم طولی ریسمان کیهانی است. معادله دیراک در فضا زمان خمیده ریسمان کیهانی در حضور پتانسیل های اسکالر $S(r)$ و برداری بصورت زیر نوشته می شود.

$$[i\gamma^\mu(x)(\partial_\mu + \Gamma_\mu(x) + i\frac{V(r)}{\hbar c}) - (M + S(r))]\Psi(\vec{r}, t) = 0 \quad (23.2)$$

^۳ Metric tensor

$\gamma^\mu(x)$ ماتریس های دیراک تعمیم یافته می باشند به منظور نوشتن معادله دیراک در این فضا زمان ماتریس های انتقال را بصورت زیر قابل محاسبه می باشند.

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi \sin \theta & r \cos \theta \cos \varphi & -r\alpha \sin \theta \sin \varphi \\ 0 & \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r\alpha \cos \varphi \sin \theta \\ 0 & \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \quad (24.2)$$

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi \sin \theta & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ 0 & \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ 0 & -\frac{\csc \theta \sin \varphi}{r\alpha} & \frac{\cos \varphi \csc \theta}{r\alpha} & 0 \end{pmatrix}$$

از طرفی با توجه به معادله (۲۲.۲) داریم

$$g^{\circ\circ} = g^{11} = 1, \quad g^{22} = r^2, \quad g^{33} = \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \quad (25.2)$$

$$g_{\circ\circ} = g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^{-2}, \quad g_{33} = \alpha^{-2} r^{-2} \sin^{-2} \theta$$

مولفه های دیگر متریک صفر می باشند. به این ترتیب ماتریس های تعمیم یافته دیراک بصورت زیر محاسبه می شوند

$$\gamma^\circ = \gamma^{(\circ)}$$

$$\gamma^1 = \gamma^{(r)} = (\gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi) \sin \theta + \gamma^3 \cos \theta \quad (26.2)$$

$$\gamma^2 = \frac{\gamma^{(\theta)}}{r} = \frac{1}{r}(\gamma^1 \cos \varphi + \gamma^2 \sin \varphi) \cos \theta - \gamma^3 \sin \theta$$

$$\gamma^3 = \frac{\gamma^{(\varphi)}}{\alpha r \sin \theta} = \frac{1}{\alpha r \sin \theta}(-\gamma \sin \varphi + \gamma^2 \cos \varphi)$$

ماتریس های تعمیم یافته دیراک در دستگاه کرووی بصورت زیر بدست می آیند

$$\gamma^\circ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^{(\theta)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & \cos \theta e^{i\varphi} & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ -\cos \theta e^{i\varphi} & -\sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^{(r)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \\ -\cos \theta & -\sin \theta e^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ \sin \theta e^{i\varphi} & \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^{(\varphi)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ie^{-i\varphi} \\ 0 & 0 & ie^{-i\varphi} & 0 \\ 0 & ie^{-i\varphi} & 0 & 0 \\ -ie^{i\varphi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (27.2)$$

انحنای نرده ایی^۴ در این فضا زمان از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$\begin{aligned}
 R &= g_{ij}R^{ij} = g_{rr}R^{rr} + g_{\theta\theta}R^{\theta\theta} + g_{\varphi\varphi}R^{\varphi\varphi} = g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} \\
 R_{rr} &= g^{ab}R_{arbr} = g^{rr}R_{rrrr} + g^{\theta\theta}R_{\theta r\theta r} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi r\varphi r} \\
 R_{\theta\theta} &= g^{ab}R_{a\theta b\theta} = g^{rr}R_{r\theta r\theta} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\theta\varphi\theta} \\
 R_{\varphi\varphi} &= g^{ab}R_{a\varphi b\varphi} = g^{rr}R_{r\varphi r\varphi} + g^{\theta\theta}R_{\theta\varphi\theta\varphi} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi\varphi\varphi} \\
 R_{j\ell m}^i &= \partial_\ell \Gamma_{mj}^i - \partial_m \Gamma_{\ell j}^i + \Gamma_{mj}^k \Gamma_{\ell k}^i - \Gamma_{\ell j}^k \Gamma_{km}^i \\
 R_{rrrr} &= g_{rr}R_{rrrr} = \backslash (\partial_r \Gamma_{rr}^r - \partial_r \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{rr}^k \Gamma_{rk}^r - \Gamma_{rr}^k \Gamma_{kr}^r) = \circ \\
 R_{\theta r\theta r} &= g_{\theta\theta}R_{r\theta r}^\theta = r^\gamma (\partial_\theta \Gamma_{rr}^\theta - \partial_r \Gamma_{\theta r}^\theta + \Gamma_{rr}^k \Gamma_{\theta k}^\theta - \Gamma_{\theta r}^k \Gamma_{kr}^\theta) = \circ \\
 R_{\varphi r\varphi r} &= g_{\varphi\varphi}R_{r\varphi r}^\varphi = r^\gamma \sin^\gamma \theta (\partial_\varphi \Gamma_{rr}^\varphi - \partial_r \Gamma_{\varphi r}^\varphi + \Gamma_{rr}^k \Gamma_{\varphi k}^\varphi - \Gamma_{\varphi r}^k \Gamma_{kr}^\varphi) = \circ \\
 R_{r\theta r\theta} &= g_{rr}R_{\theta\varphi\theta}^r = \backslash (\partial_r \Gamma_{\theta\theta}^r - \partial_\theta \Gamma_{r\theta}^r + \Gamma_{\theta\theta}^k \Gamma_{rk}^r - \Gamma_{r\theta}^k \Gamma_{k\theta}^r) = \circ \\
 R_{\varphi\theta\varphi\theta} &= g_{\varphi\varphi}R_{\theta\varphi\theta}^\varphi = r^\gamma \alpha^\gamma \sin^\gamma \theta (\partial_\varphi \Gamma_{\theta\theta}^\varphi - \partial_\theta \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi + \Gamma_{\theta\theta}^k \Gamma_{\varphi k}^\varphi - \Gamma_{\varphi\theta}^k \Gamma_{k\theta}^\varphi) = \circ \\
 R_{r\varphi r\varphi} &= g_{rr}R_{\varphi r\varphi}^r = \backslash (\partial_r \Gamma_{\varphi\varphi}^r - \partial_\varphi \Gamma_{r\varphi}^r + \Gamma_{\varphi\varphi}^k \Gamma_{rk}^r - \Gamma_{r\varphi}^k \Gamma_{k\varphi}^r) = \circ \\
 R_{\theta\varphi\theta\varphi} &= g_{\theta\theta}R_{\varphi\theta\varphi}^\theta = r^\gamma (\partial_\theta \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta - \partial_\varphi \Gamma_{\theta\varphi}^\theta + \Gamma_{\varphi\varphi}^k \Gamma_{\theta k}^\theta - \Gamma_{\theta\varphi}^k \Gamma_{k\varphi}^\theta) = \circ
 \end{aligned} \tag{28.2}$$

چنانچه محاسبات نشان می دهد در این فضا زمان انحنا $R = \circ$ صفر است. فرم هم وردای معادله دیراک بصورت زیر بدست می آید

$$\begin{aligned}
 &i\hbar \Sigma^r \partial_r + i\hbar \frac{\Sigma^\theta}{r} \partial_\theta + i\hbar \frac{\Sigma^\varphi}{\alpha r \sin \theta} \partial_\varphi \\
 &+ i\hbar \frac{1}{\sqrt{r}} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) (\Sigma^r + \cot \theta \Sigma^\theta) + \frac{E - V(r)}{c} - \gamma^{(\circ)} (M + S(r)) \chi(r) = \circ
 \end{aligned} \tag{29.2}$$

که در این رابطه

$$\Sigma^r = \gamma^{(\circ)} \gamma^{(r)}, \Sigma^\theta = \gamma^{(\circ)} \gamma^{(\theta)}, \Sigma^\varphi = \gamma^{(\circ)} \gamma^{(\varphi)} \tag{30.2}$$

تابع موج را بصورت $\Psi(\vec{r}, t) = e^{-i\frac{Et}{\hbar}} \chi(\vec{r})$ در نظر گرفته و فرض می کنیم جواب های معادله دیراک بفرم زیر می باشند

$$\chi(\vec{r}) = r^{\frac{-1}{\sqrt{r}}} \sin \theta^{\frac{-1}{\sqrt{r}}(1-\frac{1}{\alpha})} R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \tag{31.2}$$

با جایگذاری رابطه (31.2) در رابطه (29.2) داریم

$$c\Sigma_r' P_r + i\hbar c \gamma^{(\circ)} \kappa(\alpha) + V(r) + (M + S(r) c^\gamma \gamma^{(\circ)}) R_{n,\kappa(\alpha)}(r) = E R_{n,\kappa(\alpha)}(r) \tag{32.2}$$

که در این رابطه $\kappa(\alpha)$ عملگر اسپین مدار در فضا زمان ریسمان کیهانی است و ویژه مقادیر آن بصورت زیر می باشند

$$\kappa(\alpha) = \pm(j(\alpha) + \frac{1}{\sqrt{r}}) = \pm[j + \frac{1}{\sqrt{r}} + m(\frac{1}{\alpha} - 1)] \tag{33.2}$$

^۴ scalar curvature

$j(\alpha)$ متناظر با ویژه مقدار اندازه حرکت زاویه ایی تعمیم یافته است و عملگر $\kappa(\alpha)$ بصورت زیر می باشد.

$$\hbar\gamma^{(\circ)}\kappa(\alpha) = \vec{\Sigma} \cdot \vec{L}(\alpha) + \hbar. \quad (34.2)$$

$$L^2(\alpha)Y_{l(\alpha)}^{m(\alpha)}(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(\alpha)(l(\alpha) + 1)Y_{l(\alpha)}^{m(\alpha)}(\theta, \varphi) \quad (35.2)$$

در این رابطه هماهنگ های کروی $Y_{l(\alpha)}^{m(\alpha)}(\theta, \varphi)$ تعمیم یافته اند و $l(\alpha)$ و $m(\alpha)$ لزوما اعداد صحیح نمی باشند. پارامتر های $m(\alpha)$ و $l(\alpha)$ به ترتیب توسط $m(\alpha) = \frac{m}{\alpha}$ و $l(\alpha) = n + m(\alpha)$ و $l + m(\frac{1}{\alpha}) - 1, l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ داده می شوند بطوری که اندازه حرکت زاویه ایی مدار است. و عدد کوانتومی مغناطیسی و عدد کوانتومی اصلی است. با انتخاب Σ' و $\gamma^{(\circ)}$ بصورت

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^{(\circ)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (36.2)$$

معادلات زیر حاصل می شوند.

$$\begin{aligned} -i(E - m - (S + V))F(r) + \frac{dG(r)}{dr} + \frac{\kappa(\alpha)}{r}G(r) &= 0 \\ -i(E + m + (S - V))G(r) + \frac{dF(r)}{dr} + \frac{\kappa(\alpha)}{r}F(r) &= 0 \end{aligned} \quad (37.2)$$

اکنون حالات خاصی در نظر گرفته می شود که در آن $S = V$ و $S = -V$. با نوشتن یک عامل بر حسب دیگری و در نظر گرفتن حالتی که پتانسیل اسکالر با برداری برابر است داریم

$$-\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left(\frac{\kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1)}{r^2} - (E - m - 2V(r))(E + m) \right)F(r) = 0 \quad (38.2)$$

و برای حالت $V = -S$ داریم

$$-\frac{d^2 G(r)}{dr^2} + \left(\frac{\kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) + 1)}{r^2} - (E + m - 2V(r))(E - m) \right)G(r) = 0 \quad (39.2)$$

۱.۳.۲ بررسی فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در حضور برخی پتانسیل های پرکاربرد

پتانسیل کولونی

پتانسیل کولونی می باشد که بفرم زیر است

$$V(r) = S(r) = -\frac{a}{r} \quad (40.2)$$

در این رابطه a پارامتری ثابت و فرم پتانسیل بصورت شبه کولنی است با قرار دادن در رابطه (۲۹.۲) ویژه مقادیر و ویژه حالات آن از رابطه زیر بدست می آید

$$\psi = r^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1)}} e^{-\sqrt{(m-E)(E+m)}r} L_n^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1)}} \left(\sqrt{(m-E)(E+m)}r \right) \quad (41.2)$$

$$2a(E+m) = \sqrt{(-E+m)(E+m)} \left((2n+1) + \sqrt{\frac{1}{4} - \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1)} \right) \quad (42.2)$$

مورد دوم حالت $S(r) = -V(r)$ در این حالت نیز ویژه توابع و طیف انرژی از رابطه زیر بدست می آیند

$$\psi = r^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) + 1)}} e^{-\sqrt{(E-m)(E+m)}r} L_n^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) + 1)}} \left(\sqrt{(E-m)(E+m)}r \right) \quad (43.2)$$

$$2a(E-m) = \sqrt{(-E+m)(E+m)} \left((2n+1) + \sqrt{\frac{1}{4} + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) + 1)} \right) \quad (44.2)$$

پتانسیل نوسانگر شبه هارمونیک^۵

این پتانسیل نوعی پتانسیل فیزیکی است و فرم آن در مختصات کروی بصورت زیر می باشد.

$$V(r) = ar^2 + \frac{b}{r^2} \quad (45.2)$$

برای $S = V$ داریم در نهایت معادله موج و طیف انرژی بصورت زیر بدست می آید.

$$\psi = r^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2b(E+m) + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1)}} e^{-\sqrt{\frac{2a(E+m)}{r}}r} L_n^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2b(E+m) + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1)}{r}}} \left(\sqrt{2a(E+m)}r \right) \quad (46.2)$$

$$\sqrt{\frac{2a(E+m)}{r}} \left((2n+1) + \sqrt{\left(\frac{1}{r} + 2b(E+m) + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) - 1) \right)} \right) - \frac{(E-m)(E+m)}{r} = 0 \quad (47.2)$$

اکنون پتانسیل نوسانی شبه هارمونیک را برای حالت $S = -V$ حل می کنیم طیف انرژی از رابطه زیر بدست می آید.

$$\sqrt{\frac{2a(E-m)}{r}} \left((2n+1) + \sqrt{\left(\frac{1}{r} + 2b(E-m) + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) + 1) \right)} \right) - \frac{(E-m)(E+m)}{r} = 0 \quad (48.2)$$

^۵ Pseudo-harmonic Oscillator Potential

و همچنین معادله موج نیز از رابطه زیر بدست می آید.

$$\psi = N_{nor} r^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 2b(E-m) + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha)+1)}} e^{-\sqrt{\frac{1}{4} + 2b(E-m) + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha)+1)}} r^{\frac{1}{2}} L_n^{\sqrt{\frac{1}{4} + 2b(E-m) + \kappa(\alpha)(\kappa(\alpha)+1)}} \left(\sqrt{2a(E-m)} r^{\frac{1}{2}} \right) \quad (49.2)$$

که در این رابطه N_{nor} ضریب نرمالیزاسیون است.

۲.۳.۲ تغییر زاویه فاز در پراکندگی از پتانسیل کولنی

پتانسیل کولنی را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$V(r) = S(r) = -\frac{V_0}{r} \quad (50.2)$$

یک پارامتر ثابت است با وارد کردن رابطه (50.2) در معادله (38.2) داریم

$$\frac{d^2}{dr^2} + \left(-\frac{\ell'(\ell' - 1)}{r^2} + k^2 + \frac{2\lambda}{r} \right) U_{n,\ell'}(r) = 0 \quad (51.2)$$

که در این رابطه $k = \sqrt{E^2 - m^2}$, $\lambda = V_0(E + m)$, $\ell' = \kappa(\alpha)$ می باشند. با در نظر گرفتن شرایط مرزی حالت های پراکنده شده یعنی $U_{n,\ell'}(r=0) = 0$ تابع موج زیر را با توجه به رفتار مرزی آن در مبدا در نظر می گیریم

$$U_{n,\ell'}(r) = A(kr)^{\ell'+1} e^{ikr} f_{n,\ell'}(r) \quad (52.2)$$

با معرفی $s = -2ikr$ معادله (51.2) می تواند بصورت زیر نوشته شود

$$\left[s \frac{d^2}{ds^2} + (2\ell' + 2 - s) \frac{d}{ds} - \left(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k} \right) \right] f_{n,\ell'}(s) = 0 \quad (53.2)$$

بطوری که در این رابطه $s = |s| e^{-i\frac{\pi}{2}}$ می باشد. معادله (53.2) در واقع معادله فوق هندسی هم شار است و جواب های آن توابع فوق هندسی هم شار است. حل تحلیلی در $r \rightarrow 0$ بصورت زیر است

$$f_{n,\ell'}(r) = F\left(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k}, 2\ell' + 2, -2ikr\right) \quad (54.2)$$

تابع موج شعاعی حالت های پراکنده شده

$$U_{n,\ell'}(r) = A(kr)^{\ell'+1} e^{ikr} F\left(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k}, 2\ell' + 2, -2ikr\right) \quad (55.2)$$

رفتار مجانبی تابع موج را در $r \rightarrow 0$ بررسی کرده و در ادامه تغییر زاویه فاز و ثابت نرمالیزاسیون را محاسبه می کنیم. برای پرداختن به این کار از فرمول تحول تابع فوق هندسی هم شار زمانی که $s \rightarrow \infty$ استفاده می کنیم

$$F(\alpha, \gamma, s) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{zs^{\alpha-\gamma}} + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} e^{\pm i\pi\alpha} s^{-\alpha} \quad (56.2)$$

در این صورت معادله (۲.۳.۲) بصورت زیر در خواهد آمد.

$$\begin{aligned} F\left(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k}, \gamma\ell' + \gamma, -\gamma ikr\right) = \\ \frac{\Gamma(\gamma\ell' + \gamma)}{\Gamma(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k})} e^{-\gamma ikr} (\gamma kr)^{-(\ell' + 1 + i\lambda/k)} e^{i(\ell' + 1 + i\lambda/k)\pi/\gamma} \\ + \frac{\Gamma(\gamma\ell' + \gamma)}{\Gamma(\ell' + 1 + \frac{i\lambda}{k})} (\gamma kr)^{-(\ell' + 1 - i\lambda/k)} e^{-i(\ell' + 1 - i\lambda/k)\pi/\gamma} \end{aligned} \quad (57.2)$$

از طرفی داریم

$$\Gamma\left(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k}\right) = \left|\Gamma\left(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k}\right)\right| e^{i\delta'}, \Gamma\left(\ell' + 1 + \frac{i\lambda}{k}\right) = \left|\Gamma\left(\ell' + 1 + \frac{i\lambda}{k}\right)\right| e^{-i\delta'} \quad (58.2)$$

معادله می توند بصورت زیر نوشته شود

$$\begin{aligned} F\left(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k}, \gamma\ell' + \gamma, -\gamma ikr\right) = \\ \frac{\Gamma(\gamma\ell' + \gamma)}{\Gamma(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k})} \frac{e^{-\frac{\lambda\pi}{\gamma k}} e^{-\gamma ikr}}{(\gamma kr)^{(\ell' + 1)}} \gamma \sin\left(kr + \frac{\lambda}{k} \ln \gamma kr + \delta' - \ell' \pi/\gamma - \pi/\gamma\right) \end{aligned} \quad (59.2)$$

با قرار دادن معادله (۵۹.۲) در معادله (۵۵.۲) داریم

$$U_{n,\ell'}(r \rightarrow \infty) = A \frac{\Gamma(\gamma\ell' + \gamma)}{\Gamma(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k})} \frac{e^{-\frac{\pi\lambda}{\gamma k}}}{(\gamma)^{(\ell' + 1)}} \gamma \sin\left(kr + \frac{\lambda}{k} \ln \gamma kr + \delta' - \ell' \pi/\gamma\right) \quad (60.2)$$

از طرف دیگر داریم

$$U_{n,\ell}(r \rightarrow \infty) = \gamma \sin\left(kr + \frac{\lambda}{k} \ln \gamma kr + \delta_\ell - \ell \pi/\gamma\right) \quad (61.2)$$

بنابراین تغییر فاز و ثابت نرمالیزاسیون می تواند از رابطه زیر حاصل شود

$$\delta_\ell = \pi/\gamma (\ell - \ell') + \delta' = \pi/\gamma (\ell - \kappa(\alpha)) + \delta' \quad (62.2)$$

$$\delta' = \arg\left(\Gamma\left(\kappa(\alpha) + 1 - \frac{i\lambda}{k}\right)\right) \quad (63.2)$$

$$A = \frac{\Gamma(\ell' + 1 - \frac{i\lambda}{k})}{\Gamma(\gamma\ell' + \gamma)} \gamma^{(\ell' + 1)} e^{\frac{\pi\lambda}{\gamma k}} \quad (64.2)$$

اکنون می توانیم مورد $S = -V$ را در نظر بگیریم. به این ترتیب با توجه به معادله (۳۸.۲) داریم

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \left(-\frac{\kappa(\alpha)(\kappa(\alpha) + 1)}{r^2} + (E^2 - m^2) - \gamma \frac{V_0}{r} (E - m)\right)\right) U_{n,\ell}(r) = 0 \quad (65.2)$$

مشابه آنچه که در قسمت قبل انجام شد داریم

$$U_{n,l}(r \rightarrow \infty) = \sqrt{2} \sin \left(kr + \frac{\lambda}{k} \ln \sqrt{2} kr + \delta_\ell - \ell\pi/\sqrt{2} \right) \quad (66.2)$$

$$\delta_\ell = \pi/\sqrt{2} (\ell - \ell') + \delta' = \pi/\sqrt{2} (\ell - \kappa(\alpha) - 1) + \delta' \quad (67.2)$$

۳.۳.۲ تغییر فاز در پراکندگی از پتانسیل هولسن

در این قسمت با استفاده از نتایج قبل جواب حالت های پراکندگی در معادله دیراک تحت پتانسیل هولسن را بدست می آوریم و در ادامه تغییر فاز و ثابت نرمالیزاسیون نیز محاسبه خواهند شد. در ابتدا پتانسیل های نرده ای و هولسن را مطابق زیر در نظر می گیریم:

$$V(r) = S(r) = \frac{-V_0}{e^{\alpha r} - 1} \quad (68.2)$$

که در آن V_0 و α ثابت هستند. این پتانسیل به خاطر ماهیت کوتاه برد خورد دارای اهمیت زیادی است. این پتانسیل حالت خاصی از پانسیل اکرت^۶ است [۳۲]. با وارد کردن معادله (۶۸.۲) در (۳۸.۲) داریم

$$F'' + \left(-\frac{\ell'(\ell' - 1)}{r^2} + k^2 + \frac{\sqrt{2}\lambda e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} \right) F = 0 \quad (69.2)$$

که در آن $k = \sqrt{(E^2 - m^2)}$, $\lambda = V_0(E + m)$, $\ell' = \kappa(\alpha)$ می باشند. با استفاده از تقریب [۳۳، ۳۲]

$$\frac{1}{r^2} \simeq \frac{\sqrt{2}\alpha^2(1-y)^2}{y^2} \quad (70.2)$$

و تغییر متغیر $y = 1 - e^{-\alpha r}$ داریم

$$\left(y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} - y \frac{d}{dy} - \frac{A'}{\alpha^2} \frac{(1-y)}{y} + \frac{C'}{\alpha^2} \frac{y}{(1-y)} + \frac{B'}{\alpha^2} \right) F = 0 \quad (71.2)$$

که

$$A' = \ell'(\ell' - 1)\sqrt{2}\alpha^2, C' = k^2, B' = \sqrt{2}\lambda \quad (72.2)$$

به منظور حل معادله (۷۱.۲) تابع موج شعاعی را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$F(y) = y^\gamma (1-y)^\lambda h(y) \quad (73.2)$$

^۶Eckert

با جایگزاری معادله (۷۳.۲) در (۷۱.۲) داریم

$$\left(y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + (\eta_1 - (1 + \eta_2 + \eta_3) y) \frac{d}{dy} - \eta_2 \eta_3 \right) h(y) = 0 \quad (74.2)$$

جواب آن بفرم توابع فوق هندسی است [۳۴]

$$h(y) = {}_2F_1(\eta_2, \eta_3, \eta_1; y) \quad (75.2)$$

که

$$\lambda^2 = -\frac{C'}{\alpha^2}, \lambda = -i\frac{k}{\alpha}, k = \sqrt{C'} \\ \gamma^2 - \gamma = \frac{A'}{\alpha^2}, \gamma = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{4A'}{\alpha^2}} \right) \quad (76.2)$$

و

$$\eta_2 = \frac{1}{2} \left(2\gamma + 2\lambda + \sqrt{\frac{4(A'+B'-C')}{\alpha^2}} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(2\gamma - \frac{2ik}{\alpha} + \sqrt{\frac{4(A'+B'-C')}{\alpha^2}} \right) \\ \eta_3 = \frac{1}{2} \left(2\gamma + 2\lambda - \sqrt{\frac{4(A'+B'-C')}{\alpha^2}} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(2\gamma - \frac{2ik}{\alpha} - \sqrt{\frac{4(A'+B'-C')}{\alpha^2}} \right) \\ \eta_1 = 2\gamma \quad (77.2)$$

با استفاده از معادله (۷۷.۲) تابع موج شعاعی را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$F(y) = Ny^\gamma (1-y)^\lambda {}_2F_1(\eta_2, \eta_3, \eta_1; y) \quad (78.2)$$

یا به عبارتی

$$F(r) = Ne^{ikr} (1 - e^{-\alpha r})^\gamma {}_2F_1(\eta_2, \eta_3, \eta_1; 1 - e^{-\alpha r}) \quad (79.2)$$

با استفاده از فرم تقریبی تابع موج معادله (۷۹.۲) تغییر فاز پراکندگی و ثابت نرمالیزاسیون را می آوریم. به این منظور ویژگی های توابع فوق هندسی را بیان می کنیم [۳۵]

$${}_2F_1(a, b, c; 0) = 1 \\ {}_2F_1(a, b, c; s) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b, a+b-c+1; 1-s) + \\ (1-s)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-s) \quad (80.2)$$

با در نظر گرفتن $r \rightarrow \infty$ می توان نوشت

$${}_2F_1(\eta_2, \eta_3, \eta_1; 1 - e^{-\alpha r}) = \\ \Gamma(\eta_1) \left(\left(\frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)} + \left(\frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)} \right)^* \right) e^{-2ikr\alpha} \right) \quad (81.2)$$

که

$$\begin{aligned}\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 &= 2ik/\alpha = (\eta_2 + \eta_3 - \eta_1)^* \\ \eta_1 - \eta_2 &= \eta_2^*, \eta_1 - \eta_3 = \eta_3^*\end{aligned}\quad (۸۲.۲)$$

با در نظر گرفتن

$$\frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)} = \left| \frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)} \right| e^{i\delta'} \quad (۸۳.۲)$$

با ساده سازی معادله (۸۱.۲) داریم

$$\begin{aligned}{}_2F_1(\eta_2, \eta_3, \eta_1; 1 - e^{-\alpha r}) = \\ \Gamma(\eta_1) \left(\left(\frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)} \right) e^{-ikr} \left(e^{i(kr + \delta')} + e^{-i(kr + \delta')} \right) \right)\end{aligned}\quad (۸۴.۲)$$

به این ترتیب حالت حدی معادله (۸۴.۲) در حد $r \rightarrow \infty$ بصورت زیر است [۳۶]

$$F(r) = 2N\Gamma(\eta_1)\Gamma(\eta_1) \left| \frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)} \right| \sin\left(kr + \frac{\pi}{2} + \delta'\right) \quad (۸۵.۲)$$

با توجه به شرایط مرزی در $r \rightarrow \infty$

$$F(\infty) \rightarrow 2 \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right) \quad (۸۶.۲)$$

تغیر فاز و ثابت نرمالیزاسیون بصورت زیر بدست می آیند

$$\delta_\ell = \frac{\pi}{2} + \frac{\ell\pi}{2} + \delta' = \frac{\pi}{2} + \frac{\ell\pi}{2} + \arg\left(\frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)}\right) - \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (۸۷.۲)$$

$$N = \frac{1}{\Gamma(\eta_1)} \left| \frac{\Gamma(\eta_1 - \eta_2)\Gamma(\eta_1 - \eta_3)}{\Gamma(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3)} \right| \quad (۸۸.۲)$$

۴.۲ برهم کنش گشتاور چهارقطبی مغناطیسی با میدان الکتریکی

در این قسمت به بررسی ذرات دیراکی دارای گشتاور چهارقطبی مغناطیسی در ناحیه ای که میدان مغناطیسی یکنواخت وجود دارد می پردازیم. برهم کنش این ذرات را با میدان الکتریکی شعاعی که منجر به ایجاد میدان مغناطیسی عمود بر صفحه حرکت ذره می شود تحلیل می کنیم. همه این محاسبات با در نظر گرفتن تصحیحات فضا زمان خمیده ناشی از ریسمان کیهانی انجام می شود.

۱.۴.۲ فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در حضور برهم کنش چهار قطبی مغناطیسی

فضای ریسمان کیهانی در مختصات استوانه ای با المان طول زیر توصیف می شود

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (۸۹.۲)$$

که در آن $-\infty < z < \infty$ ، $\rho \geq 0$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ می باشد. مؤلفه های غیر صفر ضرایب کریستوفل بصورت زیر می باشند

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r\alpha^2, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} \quad (۹۰.۲)$$

ماتریس های تتراد $e_{\mu}^{\bar{a}}$ و e_a^μ متناظر با المان طول (۸۹.۲) را بفرم زیر انتخاب می کنیم

$$e_{\mu}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -r\alpha \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & -r\alpha \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \frac{-\sin(\varphi)}{r\alpha} & \frac{\cos(\varphi)}{r\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (۹۱.۲)$$

مؤلفه ی غیر صفر اتصال دهنده های اسپینی بصورت زیر است

$$\omega_{\varphi}^{12} = -\omega_{\varphi}^{21} = 1 - \alpha \quad (۹۲.۲)$$

در نتیجه تنها اتصال دهنده اسپینوری آفین غیر صفر از رابطه زیر بدست می آید

$$\Gamma_{\varphi} = \frac{-1}{4}(1 - \alpha)\gamma^1\gamma^2. \quad (۹۳.۲)$$

ماتریس های تعمیم یافته γ^μ در این فضا زمان از رابطه های زیر حاصل می شوند

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (۹۴.۲)$$

که σ^i ماتریس های پائولی می باشند. با توجه به تقارن سیستم تحت تبدیلات مؤلفه z ، $z = 0$ در نظر می گیریم. به این ترتیب معادله دیراک چهار مؤلفه ای به دو مؤلفه ای تبدیل می شود. در این حالت ماتریس های γ^a بر حسب ماتریس های پائولی بصورت زیر می باشند [۵۶، ۵۷]

$$\beta = \gamma^0 = \sigma^z, \gamma^1 = i\sigma^2, \gamma^2 = -i\sigma^1. \quad (۹۵.۲)$$

به این ترتیب اتصال دهنده اسپینوری آفین بصورت زیر می باشند

$$\Gamma_\varphi = i \frac{(1-\alpha)}{2} s \sigma^z \quad (96.2)$$

برای ذرات متحرک خنثی بدون بار در بستر ریسمان کیهانی معادله دیراک را در فضا زمان خمیده می نویسیم

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \hat{\beta} M) \Psi(r) = \varepsilon \Psi(r). \quad (97.2)$$

$\Psi(r)$ اسپینور دو مؤلفه ای و $\vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma}$ می باشند. اندازه حرکت تعمیم یافته در حضور برهمکنش چهارقطبی بصورت زیر نوشته می شود [۵۸، ۵۹]

$$\vec{\pi} = -i(\vec{\nabla}_\alpha + \vec{\Gamma}) - \mathcal{M} \times \vec{E} \quad (98.2)$$

که

$$\vec{\nabla}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\alpha \rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (99.2)$$

عملگر گرادیان در مختصات قطبی است. در معادله (۹۸.۲)، $\vec{E}$ میدان الکتریکی است. مؤلفه های بردار $\vec{M}$ توسط $M_i = \sum_j M_{ij} \partial_j$ تعیین می شوند که در آن M_{ij} تانسور گشتاور چهارقطبی مغناطیسی است. در اینجا تنها مؤلفه های غیر صفر گشتاور چهارقطبی مغناطیسی را $M_{\rho z} = M_{z\rho} = M$ ، در نظر می گیریم که در آن M یک ثابت مثبت است. میدان الکتریکی را بصورت $\vec{E} = \frac{1}{2} \lambda \rho^2 \hat{\rho}$ می گیریم. اندازه حرکت تعمیم یافته بصورت زیر در می آید [۶۰]

$$\vec{\pi} = -i(\vec{\nabla}_\alpha + (-M\lambda\rho + \frac{(1-\alpha)}{2\alpha\rho} s \sigma^z) \hat{\varphi}). \quad (100.2)$$

از آنجا که برهم کنش مستقل از زمان است می توان نوشت: $\Psi(t, r, \varphi) = e^{-i(Et - m\varphi)} \Psi(r)$ ، که در آن E انرژی فرمیون است. اسپینور دو مؤلفه ای را می توان بصورت زیر در نظر گرفت

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \phi(r) \\ \chi(r) \end{pmatrix} \quad (101.2)$$

$\sigma^3 \phi_+ = \phi_+$ دو مؤلفه اسپینور هستند بطوری که $\sigma^3 \phi_- = -\phi_-$ به همین نحو برای $\chi_\pm$. با جایگذاری $\Psi(r)$ در معادله دیراک دو معادله جفت شده زیر را بر حسب Φ و χ بدست می آوریم

$$\begin{pmatrix} \circ & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(r) \\ \chi(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon - M & \circ \\ \circ & \varepsilon + M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi(r) \\ \chi(r) \end{pmatrix} \quad (102.2)$$

$$\begin{aligned}(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\chi(r) &= (\varepsilon - M)\Phi(r) \rightarrow \Phi(r) = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\chi(r)}{(\varepsilon - M)} \\(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\Phi(r) &= (E + M)\chi(r) \rightarrow \chi(r) = \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\Phi(r)}{(E + M)}\end{aligned}\quad (103.2)$$

با حذف Φ از معادله (103.2) داریم

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})(\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi})\chi(r) = (\varepsilon^2 - M^2)\chi(r) \quad (104.2)$$

$$\vec{\pi}^2 \chi(r) = (\varepsilon^2 - M^2)\chi(r) \quad (105.2)$$

برای نوشتن این دو معادله در یک فرم فشرده از اندیس های χ_s ، $s = \pm 1$ و $\sigma_3 \chi_s = \chi_s = s \chi_s$ استفاده می کنیم. به این ترتیب به معادله شعاعی زیر می رسیم

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{\left(\frac{m}{\alpha} + \frac{(1-\alpha)}{2\alpha}s\right)^2}{\rho^2} - \mathcal{M}^2 \lambda^2 \rho^2 + \kappa^2\right)\phi(\rho) = 0 \quad (106.2)$$

بصورت زیر در می آید [۶۱] $\kappa^2 = E^2 - M^2 + 2\mathcal{M}\lambda \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{(1-\alpha)}{2\alpha}s\right)$ با اعمال تغییر متغیر $r = \mathcal{M}\lambda \rho^2$ معادله (106.2)

$$\left(r \frac{d^2}{dr^2} + \frac{d}{dr} - \left(\frac{j^2}{4r} + \frac{r}{4} - \frac{\kappa^2}{4\mathcal{M}\lambda}\right)\right)\phi(r) = 0. \quad (107.2)$$

بطوری که

$$j^2 = \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{(1-\alpha)}{2\alpha}s\right)^2 \quad (108.2)$$

$$\kappa^2 = E^2 - M^2 + 2\mathcal{M}\lambda \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{(1-\alpha)}{2\alpha}s\right)$$

حد تقریبی معادله (107.2) ما را به دو حالت با قاعده + و بی قاعده - زیر رهنمون می کند [۶۱]

$$\phi(r) = r^{\frac{\pm|j|}{4}} e^{-\frac{r}{4}} F(r) \quad (109.2)$$

به این ترتیب معادله (107.2) بصورت زیر بازنویسی می شود

$$rF''(r) + (1 \pm |j| - r)F'(r) - \left(\frac{1 \pm |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4\mathcal{M}\lambda}\right)F(r) = 0 \quad (110.2)$$

حل کلی معادله (110.2) توابع فوق هندسی می باشد

$$\phi(r) = ar^{\frac{|j|}{4}} e^{-\frac{r}{4}} F(d_+, 1 + |j|, r) + br^{\frac{-|j|}{4}} e^{-\frac{r}{4}} F(d_-, 1 - |j|, r) \quad (111.2)$$

به دلیل واگرایی تابع $F(\rho)$ به ازای مقادیر بزرگ آرگومان جواب های مقید تنها با فرض تابع بصورت چند جمله ای درجه n بدست می آیند. به این ترتیب جواب های بخش شعاعی رفتار قابل قبولی در بی نهایت خواهد داشت.

$$d_{\pm} = \frac{1 \pm |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4\mathcal{M}\lambda} = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (112.2)$$

این شرط منجر به کوانتیزه شدن طیف انرژی ذره می شود. طیف انرژی برای ویژه مقادیر مثبت توسط معادله (۱۱۲.۲) بدست می آید. در معادله (۱۱۰.۲)، $F(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ تابع فوق هندسی نوع اول و a و b ضرایب حل های باقاعده و بی قاعده هستند. طیف انرژی از طریق رابطه (۱۱۲.۲) بدست می آید.

$$E_{n,m} = \pm \sqrt{4n\lambda\mathcal{M} + s^2\lambda\mathcal{M} - \frac{2ms\lambda\mathcal{M}}{\alpha} - \frac{s^2\lambda\mathcal{M}}{\alpha} + M^2 + 2\lambda\mathcal{M} \left(1 \pm \left| \frac{m}{\alpha} + \frac{s(1-\alpha)}{2\alpha} \right| \right)} \quad (113.2)$$

با توجه به اینکه $0 < \alpha \leq 1$ ، یک ویژگی جالب در مقادیر ویژه انرژی وجود دارد. در حل باقاعده ویژه مقادیر مستقل از مقادیر m و α به ازای $s = 1$ می باشد. اما این حالت در مورد $s = -1$ وجود ندارد. از طرف دیگر در حل بی قاعده ویژه مقادیر مستقل از m و α به ازای $s = -1$ است. همچنین برای $s = -1$ با کاهش α انرژی افزایش می یابد
حل با قاعده $s=1$

$$E = \sqrt{M^2 + 2(1 + 2n)\lambda\mathcal{M}} \quad (114.2)$$

حل بی قاعده $s=-1$

$$E = \sqrt{M^2 + \frac{2(-1 + 2m + 2(1+n)\alpha)\lambda\mathcal{M}}{\alpha}} \quad (115.2)$$

۲.۴.۲ خواص ترمودینامیکی فرمیون های با اسپین $\frac{1}{2}$ در حضور برهم کنش چهار قطبی مغناطیسی

تابع پارش در دمای T از طریق عامل بولتزمن بدست می آید [۶۲]

$$Q_1(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(E_n - E_0)\beta} = e^{\sqrt{b}\beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\sqrt{an+b}\beta} \quad (116.2)$$

تابع پارش برای سیستم N ذره بدون برهمکنش با هم از رابطه زیر بدست می آید

$$Q_N(\beta) = Q_1^N(\beta) \quad (117.2)$$

که در آن $\beta = 1/T$ و ثابت بولتزمان را ۱ گرفتیم. به منظور بررسی خواص ترمودینامیکی ذره ابتدا تابع پارش را حساب می کنیم (۱۱۶.۲) تابع $f(x) = \exp(-\sqrt{ax+b}\beta)$ بطور یکنواخت کاهش می یابد و انتگرال

$$I(\beta) = \int_0^\infty e^{-\sqrt{ax+b}\beta} dx = \frac{2}{a\beta^2} e^{-\sqrt{b}\beta} (1 + \sqrt{b}\beta) \quad (118.2)$$

همگراست. بنابراین با نظریه سری های همگرا، تابع پارش نیز همگراست. به منظور محاسبه تابع پارش از فرمول Euler-MacLaurin استفاده می کنیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{1}{\beta} f(0) + \int_0^\infty f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\beta p)!} B_{\beta p} f^{(\beta p-1)}(0) \quad (119.2)$$

به این ترتیب تابع پارش را می توان تا $p=2$ بصورت زیر نوشت

$$Q_1(\beta) = -\frac{a^3\beta(b\beta^2 + 3\sqrt{b}\beta + 3)}{576\sqrt{b}} + \frac{2\beta\sqrt{b} + 2}{a\beta^2} + \frac{a\beta}{24\sqrt{b}} + \frac{1}{2} \quad (120.2)$$

با محاسبه انرژی آزاد هلمهولتز دیگر کمیت های آماری بدست خواهند آمد

$$A = \frac{-1}{\beta} \ln Q_N \quad (121.2)$$

پتانسیل شیمیای بصورت زیر بدست می آید

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial N} \quad (122.2)$$

فشار صفر است

$$P = -\frac{\partial A}{\partial V} = 0. \quad (123.2)$$

متوسط انرژی

$$U = -\frac{\partial \ln Q_N}{\partial \beta}. \quad (124.2)$$

می باشد. آنتروپی سیستم

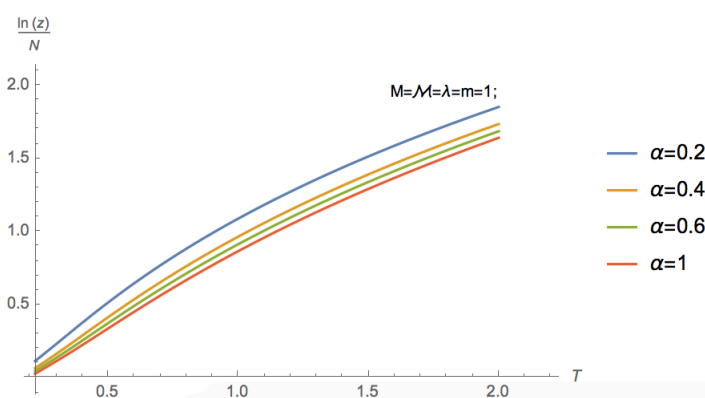
$$S = -\beta^2 \frac{\partial A}{\partial \beta}. \quad (125.2)$$

و ظرفیت گرمایی در حجم ثابت از رابطه

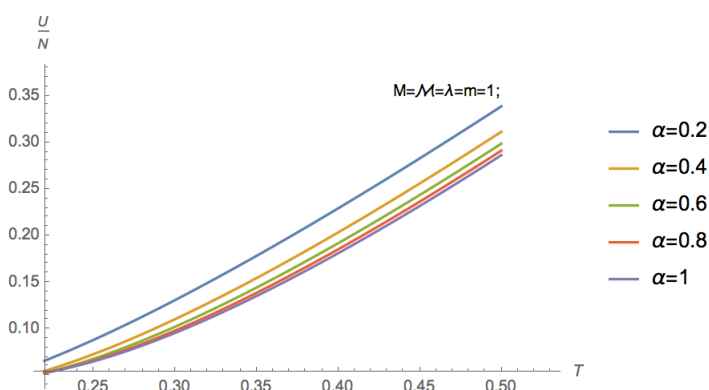
$$C = -\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta} \quad (126.2)$$

بدست می آید. در ادامه خواص ترمودینامیکی سیستم بر حسب T برای مقادیر مختلف α ترسیم شده است. چنانچه در شکل ۲.۲ مشاهده می شود با افزایش α به عبارتی هر چه میزان

خمیدگی فضا زمان کمتر می شود میزان انرژی میانگین کاهش می یابد. به ازای $\alpha = 1$ که معادل فضا زمان تخت است کمترین انرژی میانگین را داریم. در شکل ۴.۲ وابستگی ظرفیت گرمایی به پارامتر α نشان داده شده است. با افزایش α ظرفیت گرمایی کاهش می یابد. همچنین مشاهده می شود در حد دماهای بالا هر چهار نمودار به مقدار کلاسیکی میل می کند. همچنین وابستگی آنتروپی با پارامتر کسری زاویه در شکل ۵.۲ نشان داده شده است که مشاهده می شود هر چه انحنای فضا زمان بیشتر شود به عبارتی با کاهش α آنتروپی افزایش می یابد.

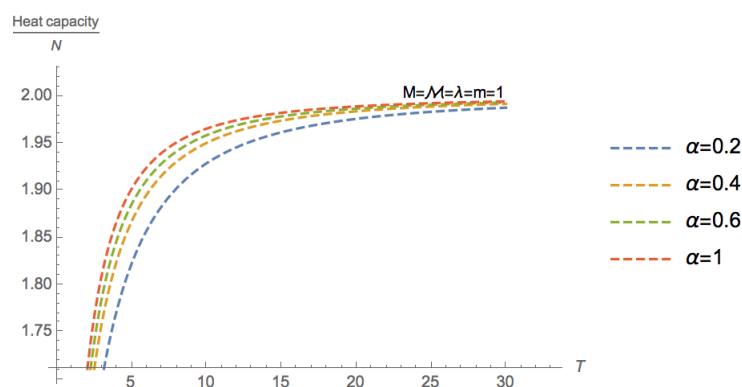


شکل ۱.۲: مقایسه Q_1 بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت $s = 1$

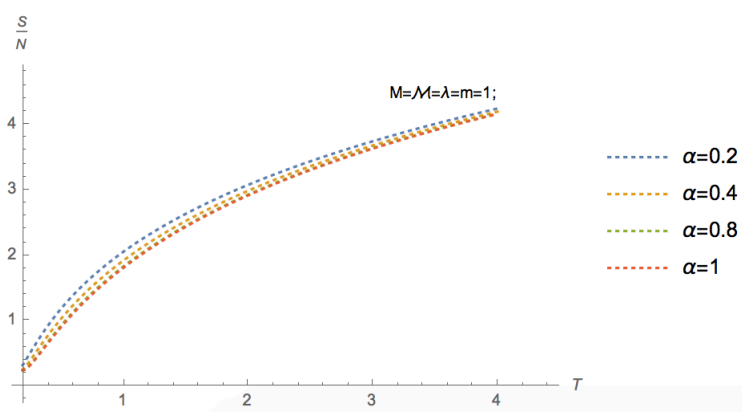


شکل ۲.۲: میانگین انرژی U/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت

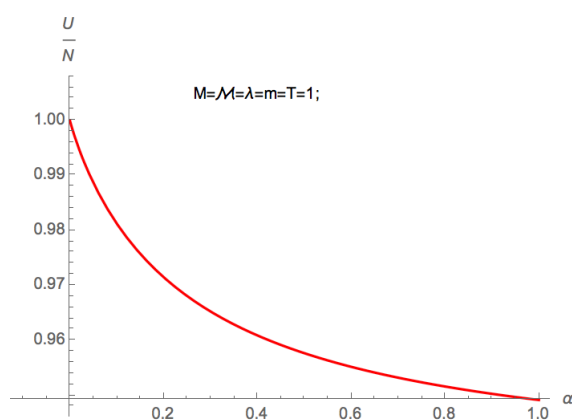
$s = 1$



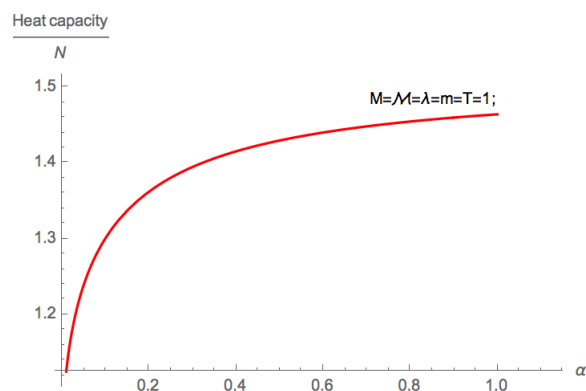
شکل ۳.۲: ظرفیت گرمایی C/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت $s = 1$



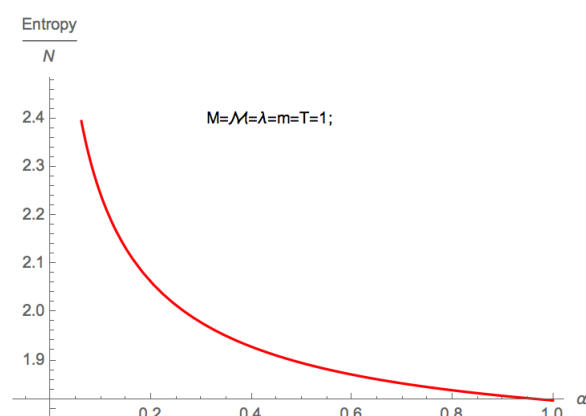
شکل ۴.۲: آنترپی S/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت $s = 1$



شکل ۶.۲: میانگین انرژی U/N بصورت تابعی از α برای حالت $s = -1$



شکل ۵.۲: ظرفیت گرمایی C/N بصورت تابعی از T به ازای مقادیر مختلف α برای حالت $s = -1$



شکل ۷.۲: آنترپی S/N بصورت تابعی از α برای حالت $s = 1$

۵.۲ بررسی فرمیون های با اسپین ۱/۲ در بستر ریسمان کیهانی چرخان

المان طول بستر ریسمان کیهانی را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 \quad (127.2)$$

فضای زمان تولید شده توسط یک رشته کیهانی چرخشی می تواند با تبدیل مختصات به دست آید

$$\begin{aligned} T &= t + a\alpha^{-1}\varphi \\ X &= r\cos(\varphi) \\ Y &= r\sin(\varphi) \\ \varphi &= \alpha\varphi' \end{aligned} \quad (128.2)$$

با این تبدیلات المان طول (127.2) بصورت زیر در می آید [63-66]

$$\begin{aligned} ds^2 &= -(dt + ad\varphi)^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2 \\ &= -dt^2 - 2adtd\varphi + (\alpha^2 r^2 - a^2)d\varphi^2 + dz^2 \end{aligned} \quad (129.2)$$

که در آن $-\infty < z < \infty$ ، $r \geq 0$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ و در آن G ثابت جهانی گرانش j اندازه حرکت زاویه ای ریسمان چرخان است. به این ترتیب a پارامتری است که میزان چرخش ریسمان را نشان می دهد. در این مورد، منبع میدان گرانشی وابسته به ریسمان کیهانی چرخشی دارای حرکت زاویه ای است و متریک (129.2) دارای عناصر غیرقطری است که شامل مؤلفه های فضا زمان هستند. مؤلفه های غیر صفر نمادهای کریستوفل متریک (137.4) بصورت زیر است

$$\Gamma_{r\varphi}^t = \Gamma_{\varphi r}^t = \frac{-a}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r\alpha^2, \quad \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} \quad (130.2)$$

ماتریس های تتراد $e_{\bar{a}}^\mu$ و $e_\mu^{\bar{a}}$ بصورت زیر انتخاب می شوند

$$e_{\bar{a}}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -r\alpha \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \sin(\varphi) & -r\alpha \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a \sin(\varphi)}{r\alpha} & \frac{-a \cos(\varphi)}{r\alpha} & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & \frac{-\sin(\varphi)}{r\alpha} & \frac{\cos(\varphi)}{r\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (131.2)$$

مؤلفه های غیر صفر اتصال دهنده های اسپینی از قرار زیر می باشند

$$\omega_\varphi^{12} = -\omega_\varphi^{21} = 1 - \alpha \quad (132.2)$$

در نتیجه داریم

$$\Gamma_\varphi = \frac{-1}{r}(1 - \alpha)\gamma^1\gamma^2. \quad (133.2)$$

ماتریس های تعمیم یافته دیراک γ^μ

$$\begin{aligned}\gamma^t &= e_a^t \gamma^a = \gamma^0 - \frac{a}{r\alpha} \gamma^r \\ \gamma^1 &= e_a^1 \gamma^a = \gamma^r \\ \gamma^2 &= e_a^2 \gamma^a = \frac{\gamma^\varphi}{r\alpha} \\ \gamma^z &= e_a^z \gamma^a = \gamma^3\end{aligned}\quad (134.2)$$

می باشند. با استفاده از شرایط تقارن حول محور z ، می توانیم اسپینور چهار مؤلفه ای دیراک را به اسپینور دو مؤلفه ایی کاهش دهیم و $pz = z = 0$ در نظر بگیریم. به این ترتیب ماتریس های دیراک بر حسب ماتریس های پائولی بصورت زیر نوشته می شوند

$$\beta = \gamma^0 = \sigma^z, \gamma^1 = i\sigma^2, \gamma^2 = -i\sigma^1. \quad (135.2)$$

با استفاده از نمایش (۱۳۵.۲)، معادله (۱۳۳.۲) بفرم زیر خلاصه می شود

$$\Gamma_\varphi = i \frac{(1-\alpha)}{r} s\sigma^z \quad (136.2)$$

با در نظر گرفتن برهمکنش مستقل از زمان می توان نوشت $\Psi(t, r, \varphi, z) = e^{-i(Et-m\varphi)} \Psi(r)$ ، که در آن E انرژی فرمیون است. با انتخاب تابع موج بصورت

$$\Psi(r) = \begin{pmatrix} \phi(r) \\ \chi(r) \end{pmatrix}. \quad (137.2)$$

که $\Phi(r) = (\varphi_+ \varphi_-)^T$ و $\chi(r) = (\chi_+ \chi_-)^T$ دو مؤلفه اسپینورند و ضمن اینکه: $\sigma^3 \varphi_+ = \varphi_+$ ، $\sigma^3 \varphi_- = -\varphi_-$ ، با در نظر گرفتن مؤلفه شعاعی جایگزینی غیر کمینه داریم

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \left(\kappa^2 - \frac{\eta^2}{r^2} \right) \right) \varphi(r) = 0 \quad (138.2)$$

که

$$\kappa_{s,\eta}^2 = E_{s,\eta}^2 - M^2, \eta^2 = \left(\frac{s\sigma_z}{r} - \frac{aE}{\alpha} + \frac{m}{\alpha} \right)^2 \quad (139.2)$$

بطوری که

$$\varphi_n(r) = J_\eta(\kappa_{s,\eta} r) \quad (140.2)$$

اکنون می توان معادله (۱۳۷.۲) را بفرم زیر نوشت:

$$\Phi''(r) + \frac{\Phi'(r)}{r} + \left(-2k^2 - mm^2 + E^2 - \frac{1}{r^2} + \frac{m^2}{\alpha^2} - \frac{m}{\alpha} \right) \Phi(r) = 0. \quad (141.2)$$

با اعمال تغییر متغیر $r = \eta x$ ، که $\eta = (E^2 - M^2)^{-1/2}$ داریم

$$\Phi''(x) + \frac{\Phi'(x)}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) \Phi(x) = 0. \quad (142.2)$$

بطوری که

$$n^2 = \left(\frac{s\sigma_z}{2} - \frac{aE}{\alpha} + \frac{m}{\alpha}\right)^2. \quad (143.2)$$

جواب های معادله (۱۴۲.۲) توابع بسل هستند. بنابراین توابع موج شعاعی بفرم زیر می باشند

$$\psi_2(r) = r^{\frac{1}{2\alpha}} J_n\left(\frac{r}{\eta}\right). \quad (144.2)$$

۱.۵.۲ نوسانگر دیراک در بستر ریسمان چرخان

با جایگزینی غیر کمینه زیر

$$\partial_r \rightarrow \partial_r + M\omega\vec{r}\beta \quad (145.2)$$

که ω فرکانس سیکلوترونی است به معادله نوسانگر دیراک می رسمیم. به این ترتیب معادله دیراک بصورت زیر می آید

$$(\alpha.(\vec{\pi} - iM\omega\vec{r}\beta))\psi(r) = (E - \gamma^0 M)\psi(r). \quad (146.2)$$

$\psi(r)$ اسپینور دو مؤلفه ای است و $\vec{\pi}$ اندازه حرکت تعمیم یافته است

$$\vec{\pi} = -i\nabla_\alpha - i\Gamma_\mu + \frac{aE}{\alpha r}\hat{\varphi} \quad (147.2)$$

به این ترتیب داریم

$$(E^2 - M^2)\phi(r) = (\alpha.(\vec{\pi} - iM\omega\vec{r}\beta))(\alpha.(\vec{\pi} + iM\omega\vec{r}\beta))\phi(r). \quad (148.2)$$

با در نظر گرفتن مؤلفه شعاعی جایگزینی غیرکمینه داریم

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{\left(\frac{m}{\alpha} + \left(\frac{s(1-\alpha)\sigma_z}{2\alpha} + \frac{aE}{\alpha}\right)\sigma_z\right)^2}{r^2} - M^2\omega^2 r^2 + 2M\omega\left(1 + \left(\frac{m}{\alpha} + \left(\frac{s(1-\alpha)\sigma_z}{2\alpha} + \frac{aE}{\alpha}\right)\sigma_z\right)\right) + E^2 - M^2\right)\phi(r) = 0. \quad (149.2)$$

با اعمال تغییر متغیر $\rho = M\omega r^2$ معادله شعاعی (۱۴۹.۲) بصورت زیر در می آید

$$\left(\rho\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \left(\frac{j^2}{4\rho} + \frac{\rho}{4} - \frac{\kappa^2}{4M\omega}\right)\right)\phi(\rho) = 0. \quad (150.2)$$

که در آن

$$j^2 = \left(\frac{m}{\alpha} + \left(\frac{s(1-\alpha)\sigma_z}{2\alpha} + \frac{aE}{\alpha} \right) \right)^2 \quad (151.2)$$

$$\kappa^2 = 2M\omega \left(1 + \left(\frac{m}{\alpha} + \left(\frac{s(1-\alpha)\sigma_z}{2\alpha} + \frac{aE}{\alpha} \right) \sigma_z \right) \right) + E^2 - M^2$$

معادله (۱۵۰.۲) منجر به حل زیر می شود:

$$\phi(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} F(\rho) \quad (152.2)$$

بنابراین معادله (۱۵۰.۲) بصورت زیر بازنویسی می شود

$$\rho F''(\rho) + (1 + |j| - \rho) F'(\rho) - \left(\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4M\omega} \right) F(\rho) = 0 \quad (153.2)$$

به این ترتیب جواب های کلی معادله (۱۵۳.۲) توابع فوق هندسی هستند

$$\phi(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} F\left(\left(\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4M\omega}\right), 1 + j, \rho\right) \quad (154.2)$$

جهت شرط همگرایی تابع $F(\rho)$ در بی نهایت آن را بصورت چند جمله ای درجه n در نظر می گیریم. ضمن اینکه شرط زیر نیز برقرار است

$$\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4M\omega} = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (155.2)$$

همانطور که قبلا گفته شد این معادله طیف انرژی را کوانتیده می کند. معادله انرژی برای ویژه مقادیر مثبت از طریق رابطه (۱۵۵.۲) بصورت زیر حساب می شود

$$E_{n,m} = \frac{aM\omega}{\alpha} - \frac{asM\omega}{\alpha} + 2M\omega \left(\left(\frac{a}{2\alpha} - \frac{as}{2\alpha} \right)^2 + \frac{n + \frac{(-1+s)(-2m+s(-1+\alpha))}{4\alpha}}{M\omega} + \frac{M}{4\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (156.2)$$

برای حالت $s = 1$ چنانچه در شکل ۸.۲ نشان داده شده است ویژه مقادیر مستقل از m, a و α می باشد.

$$E_{n,m} = (M^2 + 4nM\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (157.2)$$

با این حال این حالت برای $s = -1$ ، برقرار نیست و ویژه مقادیر بصورت زیر می باشند

$$E_{n,m} = \frac{2aM\omega}{\alpha} + 2M\omega \left(\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{n + \frac{1}{4} \left(2 + \frac{-2+4m}{\alpha} + \frac{M}{\omega} \right)}{M\omega} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (158.2)$$

در حالت $a = 0$ طیف انرژی از رابطه زیر بدست می آید

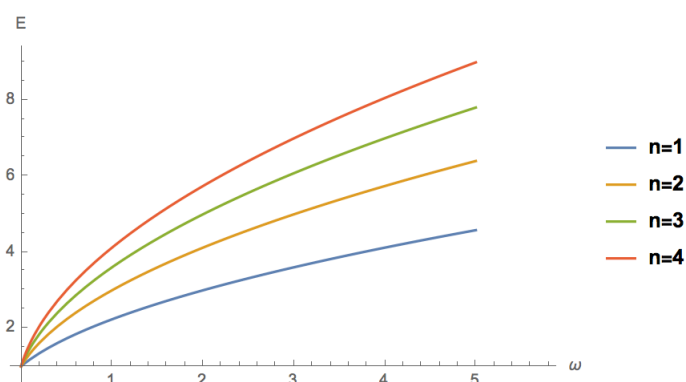
$$E_{n,m} = \pm \sqrt{M^2 + 4nM\omega + s^2 M\omega - \frac{2msM\omega}{\alpha} - \frac{s^2 M\omega}{\alpha} \pm 2M\omega \left| \frac{m}{\alpha} + \frac{s(1-\alpha)}{2\alpha} \right|} \quad (159.2)$$

در موارد $s = 1$ و $s = -1$ که به ترتیب متناظر با علامتهای مثبت و منفی در معادله (۱۵۹.۲) می باشد انرژی مستقل از m و α است. شکل ۱۱.۲.

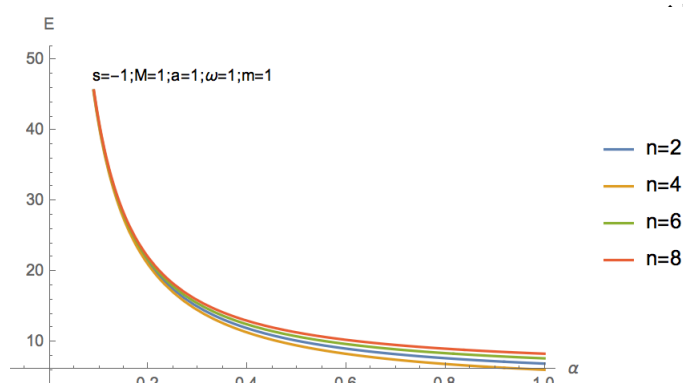
$$E_{n,m} = \pm (M^2 + 4nM\omega)^{\frac{1}{2}} \quad (160.2)$$

در حالت $s = 1$ و $s = -1$ به ترتیب با علامت های مثبت و منفی در (۱۵۹.۲) متناظر هستند طیف انرژی از رابطه زیر بدست می آید

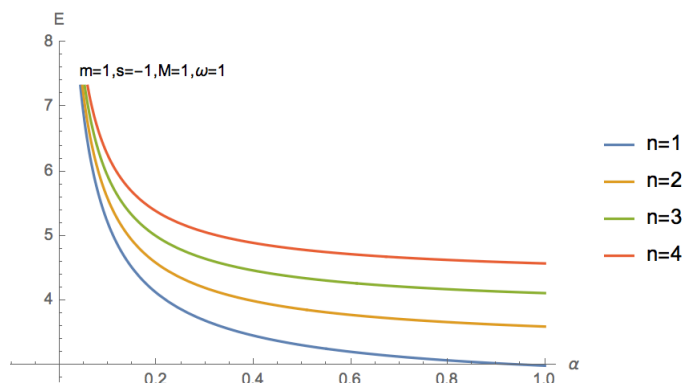
$$E_{n,m} = \pm \sqrt{M^2 + \frac{2(-1 \pm 2m + \alpha + 2n\alpha)M\omega}{\alpha}} \quad (161.2)$$



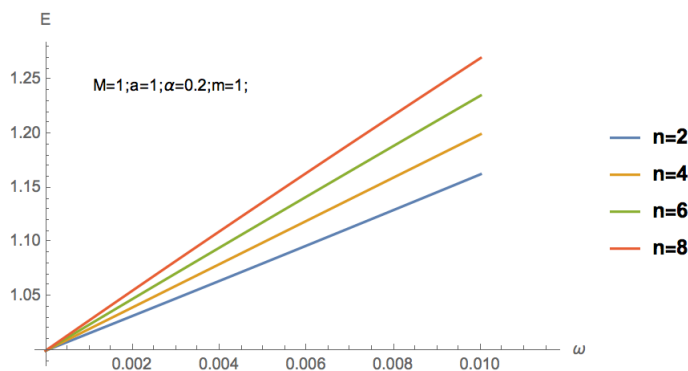
شکل ۸.۲: طیف انرژی در حالت $s = 1$ بر حسب ω . نتیجه مستقل از α و m با $M = 1$ برای n های مختلف



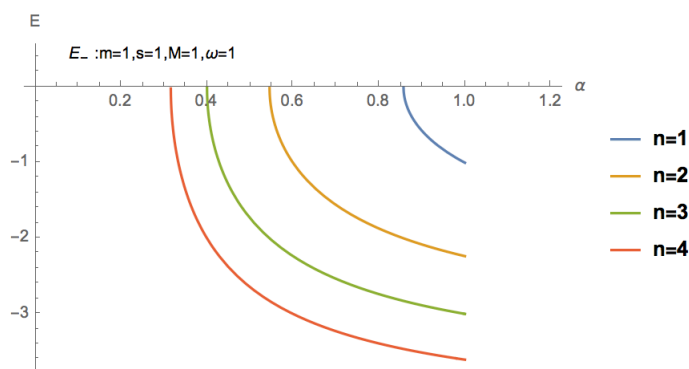
شکل ۱۲.۲: طیف انرژی در مورد $s = -1$ برای α های دلخواه با $M=1, a=1, m=1$ ، $\omega = 1$ به ازای n های مختلف.



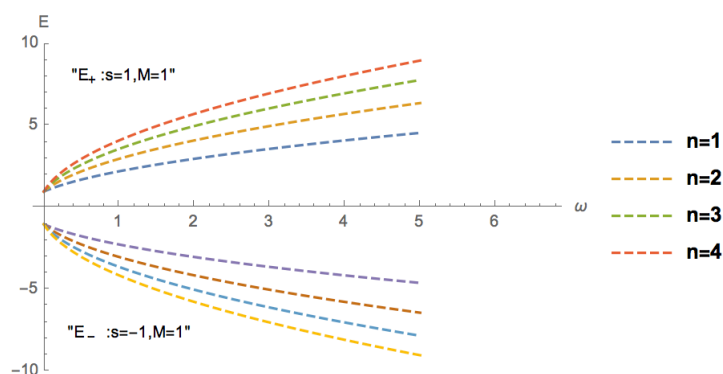
شکل ۹.۲: طیف انرژی در حالت $s = -1$ برای مقادیر مختلف α . با $M = 1, m = 1$ و $a = 1, \omega = 1$ به ازای n های مختلف.



شکل ۱۰.۲: طیف انرژی در حالت $s = 1$ برای مقادیر دلخواه ω . با $M = 1, a = 1, m = 1$ و $\alpha = 0.2$ برای n های مختلف.



شکل ۱۳.۲: طیف انرژی منفی برای حالت $a = 0$ با $m = 1, s = 1, M = 1, \omega = 1$ برای n های مختلف.



شکل ۱۱.۲: حالت $a = 0$ انرژی های مثبت و منفی به ترتیب به ازای $s = 1$ و $s = -1$ به صورت تابعی از ω با $M = 1$ به ازای n های مختلف.

۶.۲ اثر برهم کنش در ساختار فضا زمان

در این قسمت قصد داریم به حالتی اشاره داشته باشیم که در آن متریک فضا زمان متأثر از برهمکنش های موجود در سیستم است. فرمالیسم ریاضی ارائه شده نتیجه این اصل است که ذرات مختلف فضا زمان را به گونه ایی متفاوت درک می کنند و یا به عبارتی ذرات مختلف بصورت متفاوت تحت تاثیر فضا زمان قرار می گیرند. بنابراین آنچه گفته می شود این است که با این رویکرد فضای مطلق برای همه ذرات وجود ندارد. هنگامی که ما با سیستم های کوانتومی برخورد می کنیم تفاوت ها ظاهر می شوند. به عنوان مثال، کوارک یک فضای خمیده توسط میدان گلوئون قوی کوارک دیگری می بیند با این حال این فضا برای فوتون و یا برای لپتون تخت است. لازم به ذکر است که نظریه ارائه شده در این هنوز در مرحله اولیه قرار دارد. بسیاری از جنبه ها، در پایه های این نظریه، باید بیشتر مورد بررسی قرار گیرد و معیارهای مختلف باید مورد توجه قرار گیرند. برهم کنش های برداری لحاظ نشده و می توان در ادامه با توسعه کار اثر آنها را در نظر گرفت. با وجود همه محدودیت ها، در تمام سیستم های مورد مطالعه، نتایج به دست آمده بسیار خوب است و کاملاً با آزمایش همخوانی دارد و این انگیزه ای برای ادامه مطالعات در این زمینه می شود.

اثر فضا زمان در فیزیک کوانتومی و یا اثر فیزیک کوانتومی در ساختار فضا-زمان، موضوعاتی جدید و بحث برانگیز می باشند. با این حال یک سوال اساسی که باقی می ماند این است که چگونه برهمکنش های الکترومغناطیسی و قوی می تواند ساختار فضا و زمان را تحت تاثیر قرار دهد. این اثرات توسط [۶۹-۷۱] بررسی و نتایج بسیار جالبی به دست آمده است. برای مثال در توافق با نتایج طیف اتم دوتریم در مقایسه با نتایج دیراک [۷۲-۷۴] نتایج یک رقم اعشار اصلاح می شود. این واقعیت که به سختی می تواند تصادفی در نظر گرفته شود، نشان می دهد الگوی مناسبی برای بررسی تمام سطوح انرژی می باشد. نتایج تئوری در مورد فیزیک

هادرون نیز بسیار جالب است و مجیوس شدگی کوارک^۷ بصورت طبیعی ظاهر می شود. فرمالیسم بکار رفته به این صورت است که در گام اول یک سیستم با تقارن کروی را در نظر بگیریم، اما ایده های اساسی را می توان به سیستم هایی با متریک های دلخواه تعمیم داد. اگر تقارن کروی در نظر گرفته شود، فضای زمان با متریک اثبات شده در [۶۹] توصیف شده است، که بسیار شبیه متریک شوارتسچیلد است.

$$ds^2 = d\tau^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \xi^{-1}dr^2 \quad (162.2)$$

که در آن r ، θ و φ مختصه های کروی، $\xi(r)$ با توجه به پتانسیل برهم کنش $V(r)$ تعیین می شود و برای برهمکنش های مستقل از زمان بصورت تابعی از r می باشد. رابطه انرژی سیستم بصورت

$$\frac{E}{\sqrt{\xi}} = \sqrt{p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \quad (163.2)$$

می باشد که

$$\sqrt{\xi} = 1 + \frac{V}{m_0 c^2} \quad (164.2)$$

V پتانسیل کولنی

$$\sqrt{\xi} = 1 + \frac{V}{m_0 c^2} \quad (165.2)$$

α ثابت ساختار ریز و Z عدد اتمی می باشد. به این ترتیب تابع ξ بفرم زیر می باشد

$$\xi = 1 - \frac{2\alpha Z}{m_0 c^2 r} + \frac{\alpha^2 Z^2}{m_0^2 c^4 r^2} \quad (166.2)$$

که در آن m ، جرم الکترون است. این عبارات افق رویداد را در r_0 تعیین می کند که از تکینگی متریک $\xi(r_0) = 0$ ، ظاهر می شود. با توجه به [۷۵] بصورت زیر می باشد

$$r_0 = \frac{\alpha Z}{m_0 c^2} = 2/818 Z \text{ fm} \quad (167.2)$$

که در مقیاس اتمی مقادیر ناچیزی نیست. در این قسمت معادله دیراک را برای ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ برای متریک (۱۶۲.۲) می نویسیم

$$\frac{i\hbar}{\xi} \frac{\partial}{\partial t} \Psi = (-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_0 c^2) \Psi \quad (168.2)$$

با جدا کردن بخش زمانی داریم

$$(-i\hbar c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m_0 c^2 - \frac{E}{\sqrt{\xi}}) \psi(r) = 0 \quad (169.2)$$

^۷quark confinement

که در آن

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} = \alpha_r \sqrt{\xi} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\alpha_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\alpha_\varphi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (170.2)$$

با توجه به بخش زاویه ایی عملگر بالا می توان دریافت که بخش زاویه ای تابع موج می تواند بر حسب اسپینور دو مؤلفه ای χ_κ^μ توصیف شود

$$\chi_\kappa^\mu = \sum_{m=\pm\frac{1}{2}} C(\ell, 1/2, j; \mu - m, m) Y_\ell^{\mu-m}(\theta, \varphi) \chi^m \quad (171.2)$$

به طوری که $C(\ell, 1/2, j; \mu - m, m)$ ضرایب کلبش-گوردن می باشد.

$$\begin{aligned} \kappa = l, j = l - 1/2 \\ \kappa = -l - 1, j = l + 1/2 \end{aligned} \quad (172.2)$$

در نتیجه

$$\kappa = \pm(j + 1/2) \quad (173.2)$$

انتظار می رود تابع موج به شکل زیر باشد

$$\Psi = \begin{pmatrix} F(r) \chi_\kappa^\mu \\ iG(r) \chi_{-\kappa}^\mu \end{pmatrix} \quad (174.2)$$

به این ترتیب به معادلات زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \sqrt{\xi} \frac{dF}{dr} + (1+k) \frac{F}{r} &= \left(\frac{E}{\sqrt{\xi}} + m_0 \right) G \\ \sqrt{\xi} \frac{dG}{dr} + (1-k) \frac{F}{r} &= - \left(\frac{E}{\sqrt{\xi}} - m_0 \right) F \end{aligned} \quad (175.2)$$

با در نظر گرفتن پتانسیل کولونی تابع ξ بصورت زیر در می آید

$$\xi = \left(1 - \frac{\alpha Z}{m_0 c^2 r} \right)^2 \quad (176.2)$$

با جایگزاری (۱۷۶.۲) در (۱۷۵.۲) و تغییر متغیر $\rho = \beta r$ داریم

$$\begin{aligned} \xi \frac{dF}{d\rho} + \sqrt{\xi} (1+k) \frac{F}{r} &= \left(\frac{E}{\beta} + \sqrt{\xi} \frac{m_0}{\beta} \right) G \\ \xi \frac{dG}{d\rho} + \sqrt{\xi} (1-k) \frac{G}{r} &= - \left(\frac{E}{\beta} - \sqrt{\xi} \frac{m_0}{\beta} \right) F \end{aligned} \quad (177.2)$$

برای $r \neq r_0$. با حل این توابع با روش فروبنیوس طیف انرژی بصورت زیر در می آید

$$E_N = \pm m_0 c^2 \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{N^2}{\lambda \alpha^2} \pm \frac{N}{4\alpha} \sqrt{\frac{N^2}{4\alpha^2} + 2}} \quad (178.2)$$

M_{exp}	M	$r_0(fm)$	α	m	
۰/۹۳۸	۰/۹۳۸	۰/۳۸	۱/۶۰	۰/۳۸	$N(qqq)$
۳/۱۰	۳/۱۰	۰/۱۱	۱/۰۰	۱/۷۹	$J/\psi(c\bar{c})$
۹/۴۶	۹/۴۷	۰/۰۵	۱/۰۵	۵/۵۰	$\Upsilon(b\bar{b})$
—	۳۱۰	۰/۰۰۲	۱/۰۰	۱۷۴	$t\bar{t}$

جدول ۱.۲: جرم $M(GeV)$ هادرون تشکیل شده از کوارک های با جرم $m(GeV)$ در مقایسه با نتایج تجربی [۸۱]. محاسبات با در نظر گرفتن رابطه (۱۷۸.۲) و برای پتانسیل کولنی بدست آمده است. [۸۲]

که جواب فیزیکی به ازای مقادیر مثبت است. این نتایج را می توان به مطالعه هادرون ها تعمیم داد. در این سیستم کوارک ها از طریق گلئون بر هم کنش می کنند و اثر مؤثر این برهم کنش ها می تواند بصورت یک پتانسیل مؤثر در نظر گرفته شود. در مدل ام آی تی کوارک ها ذرات دیراک در نظر گرفته شده و با پتانسیل پله ای کروی مقید شده اند. مدل های دیگر شکل های متفاوتی را برای پتانسیل در نظر گرفته اند که به عنوان مثال شامل ترم r^n [۷۶-۷۸] و پتانسیل کرنل می باشند

$$V = \frac{a}{r} + br \quad (۱۷۹.۲)$$

فرض کنید که کوارک ها در داخل هادرون ها توسط معادله (۱۶۸.۲) توصیف شده اند و اثر میانگین برهمکنش با یک پتانسیل قوی کولونی ارائه شده است. پتانسیل کولنی با $a = ۱$ (به عنوان مثال، در یک باریون، جرم توسط

$$M = \sum_{i=1}^3 E_N(q_i) \quad (۱۸۰.۲)$$

داده می شود. که E_N توسط رابطه داده شده است. برخی نتایج در جدول ارائه شده است. باید توجه داشت که $t\bar{t}$ و $b\bar{b}$ مزون های بسیار سبکی باید باشند. برای مثال در topponium، $r_{t\bar{t}} \sim ۰/۰۰۲ fm$ چنانچه در جدول ملاحظه می شود توافق با تجربه بسیار خوب است. تابع موج کوارک توسط معادله توصیف می شود. یک نتیجه مهم از این رویکرد این است که محبوس شدگی بدون نیاز به یک پتانسیل محدود کننده رخ می دهد چرا که در r_0 ، $\Psi(r_0) = ۰$ است. این ناپیوستگی در افق رویداد یک محبوس شدگی قوی را نشان می دهد. افق رویداد یک ویژگی انحصاری پتانسیل کولنی نیست بلکه برای هر نوع پتانسیل جاذبه ای که شرایط زیر را داشته باشد می تواند رخ دهد

$$\xi(r_0) = ۰ \quad (۱۸۱.۲)$$

با استفاده از این نتایج می توان نسبت زیر را حساب کرد [۱۱، ۱۲]

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \langle \sigma_Z \rangle = \frac{5}{3} (1 - 2\delta) \quad (182.2)$$

$$\delta = \frac{\frac{2}{3} \int |G(r)|^2 dr}{\int (|F(r)|^2 + |G(r)|^2) dr} = 0.59\% \quad (183.2)$$

که در آن یک نوکلئون تشکیل شده از سه کوارک با j_z در نظر گرفته شده اند. به این ترتیب $\frac{g_A}{g_V} = 1/47$ بدست می آید که یک انحراف ۱۷٪ را از مقدار تجربی که ۱.۲۵۹ است را نشان می دهد [۸۲]. گشتاور مغناطیسی پروتن و نوترون نیز به صورت زیر محاسبه می شوند

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{(1 - \delta)m_p}{E_0} = 2/82 \\ \mu_n &= -\frac{2}{3} \frac{(1 - \delta)m_p}{E_0} = -1/88 \end{aligned} \quad (184.2)$$

که توافق خوبی با مقادیر تجربی $\mu_p = 2/79$ و $\mu_n = -1/91$ دارد.

فصل ۳

بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاين-گوردون

معادله کلاين - گوردون

نخستین تلاش برای یافتن یک معادله کوانتومی نسبیتی توسط کلاين-گوردون انجام شده است. معادله کلاين-گوردون، معادله ای برای توصیف بوزون های نسبیتی اسپین صفر در حضور برهم کنشهای مختلف می باشد. در فرمول بندی نسبیت مکان و زمان بصورت هم ارز ظاهر می شوند، این امر سبب می شود مشتقات مکانی و زمانی بصورت هم مرتبه در معادلات نسبیتی ظاهر شوند. چنانچه می دانیم در معادله شرودینگر که یک معادله غیر نسبیتی است مشتق زمانی و مکانی، به ترتیب به صورت مشتق مرتبه های اول و دوم ظاهر می شود.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (1.3)$$

از آنجا که مشتق زمانی در سمت چپ این معادله و مشتق مکانی در سمت راست به ترتیب با مرتبه های اول و دوم ظاهر شده اند، معادله شرودینگر یک معادله غیر نسبیتی است. اما این شرایط در معادله کلاين-گوردون برآورده شده است و در آن مشتقات زمانی و مکانی هم

۵۲ بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاین-گوردون

مرتبه ، هر دو از مرتبه دو می باشند. معادله کلاین-گوردون از اصل بنیادی که از نسبیت خاص و مکانیک کوانتومی بر گرفته شده است، تبعیت می کند. رابطه جرم و انرژی و اندازه حرکت در نسبیت بفرم زیر است

$$E^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4 \quad (2.3)$$

با نوشتن فرم عملگری هر یک از مشاهده پذیرهای در رابطه بالا یعنی

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \vec{P} = -i\hbar \vec{\nabla} \quad (3.3)$$

معادله کلاین-گوردون به شکل عملگری زیر در می آید

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2} \Psi \quad (4.3)$$

با در نظر گرفتن $c = \hbar = 1$ معادله کلاین-گوردون را می توان به صورت زیر نوشت

$$(\square + m_0^2) \Psi = 0 \quad (5.3)$$

که، $\square$ عملگر دالامبر است. هرگاه که چهاربردار فضا-زمان را به صورت

$$x^\mu = (ct, x) \quad (6.3)$$

تعریف کنیم، که در نتیجه آن

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, \nabla \right), \partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c} \partial_t, -\nabla \right) \quad (7.3)$$

آنگاه معادله بالا به صورت هموردا نوشته می شود:

$$[\partial^\mu \partial_\mu + \left(\frac{m_0 c}{\hbar} \right)^2] \Psi = 0 \quad (8.3)$$

اگر چنانچه که معمول است در دستگاهی واحدهایی کار کنیم که $\hbar = c = 1$ باشد، معادله بالا به صورت بازهم ساده تر

$$[\partial^\mu \partial_\mu + m_0^2] \Psi = 0 \quad (9.3)$$

در خواهد آمد. این معادله همان چیزی است که معادله کلاین-گوردون خوانده می شود و اولین تعمیم نسبیتی معادله شرودینگر است.

۱.۳ معادله کلاین-گوردون در حضور پتانسیل های نرده ای و برداری

در این قسمت قصد داریم رفتار نسبیتی بوزون های اسکالر را که تحت پتانسیل کرنل قرار دارند را در فضا زمان ریسمان کیهانی بررسی کنیم. این بررسی در حضور پتانسیل های اسکالر و

برداری انجام می شود و توابع موج و تراز های انرژی نسبیتی بدست آمده اند. پتانسیل مد نظر در اینجا پتانسیل کرنل است که نخستین بار در [۶۷] به منظور پارامتریزه کردن پتانسیل کوآرکونیم $Q\bar{Q}$ به صورت ترکیب خطی پتانسیل های خطی و کولونی معرفی شد

$$V(\rho) = \eta_L \rho - \frac{\eta_c}{\rho}, \quad (۱۰.۳)$$

که ρ شعاع مؤثر حالت کوآرکونیم است. المان طول توصیف کننده ریسمان کیهانی را در مختصات استوانه ایی بصورت زیر در نظر می گیریم

$$ds^2 = -(cdt + ad\varphi)^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (۱۱.۳)$$

$$= -c^2 dt^2 - 2ac dt d\varphi + d\rho^2 + (\alpha^2 \rho^2 - a^2) d\varphi^2 + dz^2,$$

در این متریک ، $c = ۱$ می باشد. در این متریک $a = 4Gj$ ، که G ثابت جهانی گرانش و j اندازه حرکت زاویه ای ریسمان چرخان می باشد. در طول تحول ریسمان کیهانی، میدان گرانشی و خواص فضا زمان تغییر می کنند. در دو ناحیه حدی که متناظر با اندازه حرکت زاویه ایی ثابت در بی نهایت هستند در دو ناحیه حدی متریک فضا-زمان بصورت های زیر در می آید

$$ds_{-\infty}^2 = -(dt + ad\varphi)^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (\bar{۱}۲.۳)$$

$$ds_{+\infty}^2 = -dt^2 + d\rho^2 + (\alpha^2 \rho^2 - a^2) d\varphi^2 + dz^2. \quad (۱۲.۳ب)$$

دو متریک بالا ساختار فضا-زمان را در دو ناحیه چرخشی و غیرچرخشی دسته بندی می کنند. معادله کلاین گوردون در ریسمان کیهانی غیر چرخشی (۱۲.۳ب) بصورت زیر است [۶۸]

$$(\nabla^2 + E^2 - M^2) \Phi(t, \rho, \varphi, z) = 0, \quad (۱۳.۳)$$

عملگر لاپلاس در فضا زمان خمیده بصورت زیر است

$$\nabla^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu, \quad (۱۴.۳)$$

M جرم بوزون، E انرژی و با توجه به متریک (۱۲.۳)، $g = \det(g_{\mu\nu}) = -(\alpha^2 \rho^2)$ می باشد. دو نوع جفت شدگی را به ترتیب در نظر می گیریم: پتانسیل اسکالر $S(\rho)$ ، که با جایگزاری $P_\mu \rightarrow P_\mu - gA_\mu$ و پتانسیل برداری، $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ ، که با جفت شدگی کمینه $P_\mu \rightarrow P_\mu - gA_\mu$ معرفی می شود. پیمانه $\mathbf{A} = 0$ را در نظر گرفته و پتانسیل اسکالر $V \equiv gA_0$ بصورت V می نویسیم. برای متریک (۱۲.۳) داریم

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{-g}} [(\partial_0 + gA_0) \sqrt{-g} g^{00} (\partial_0 + gA_0) \Phi + (\partial_0 + gA_0) \sqrt{-g} g^{01} \partial_1 \Phi + \\ & \partial_1 \sqrt{-g} g^{10} (\partial_0 + gA_0) \Phi + \partial_1 \sqrt{-g} g^{11} \partial_1 \Phi + \partial_2 \sqrt{-g} g^{22} \partial_2 \Phi + \partial_3 \sqrt{-g} g^{33} \partial_3 \Phi - (M + S(\rho))^2 \Phi] = 0 \end{aligned} \quad (۱۵.۳)$$

۵۴ بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاین-گوردون

با اندیس های $(t, \rho, \varphi, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. حالت های مانا را بصورت

$$\Phi(t, \rho, \varphi, z) \propto e^{i(kz+m\varphi-Et)} f(\rho), \quad (16.3)$$

در نظر می گیریم که در آن E انرژی ، k عدد کوانتومی است. به این ترتیب معادله (۱۵.۳) بصورت زیر در می آید

$$f''(\rho) + \frac{f'(\rho)}{\rho} + \left(\left(1 - \frac{a^2}{\alpha^2 \rho^2} \right) (E - V(\rho))^2 - \frac{2am(E - V(\rho))}{\alpha^2 \rho^2} - \frac{m^2}{\alpha^2 \rho^2} - kz^2 - (M + S(\rho))^2 \right) f(\rho) = 0 \quad (17.3)$$

بطور خلاصه Eq.(۱۷.۳) برهم کنش میدان کلاین-گوردن، $\Phi(t, \rho, \varphi, z)$ را با جرم M در فضا زمان ریسمان کیهانی با پتانسیل های نرده ای $S(\rho)$ و برداری $V(\rho)$ نشان می دهد.

۱.۱.۳ برهم کنش نرده ایی کولونی

در مرحله اول پتانسیل نرده ای را به صورت برهمکنش کولونی داده شده در (۱۰.۳) در نظر میگیریم که در آن $\eta_L = 0$ است. در غیاب پتانسیل برداری، پتانسیل نرده ای را در معادله (۱۵.۳) بصورت زیر در نظر می گیریم

$$S(\rho) = -\frac{\eta_c}{\rho}, \quad V(\rho) = 0, \quad (18.3)$$

به این ترتیب معادله ۱۷.۳ بصورت زیر در می آید.

$$f_{n,m}''(\rho) + \frac{1}{\rho} f_{n,m}'(\rho) + \frac{1}{\rho^2} \left(-\xi_1 \rho^2 + \xi_2 \rho - \xi_3 \right) f_{n,m}(\rho) = 0 \quad (19.3)$$

که

$$\begin{aligned} \xi_1 &= k_z^2 + M^2 - E^2 \\ \xi_2 &= 2M\eta_{1c}, \\ \xi_3 &= \frac{(aE + m)^2 + \alpha^2 s^2}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (20.3)$$

ترازهای انرژی معادله کلاین-گوردون از رابطه زیر بدست می آید

$$(2n+1)\sqrt{\xi_1} - \xi_2 + 2\sqrt{\xi_3 \xi_1} = 0, \quad (21.3)$$

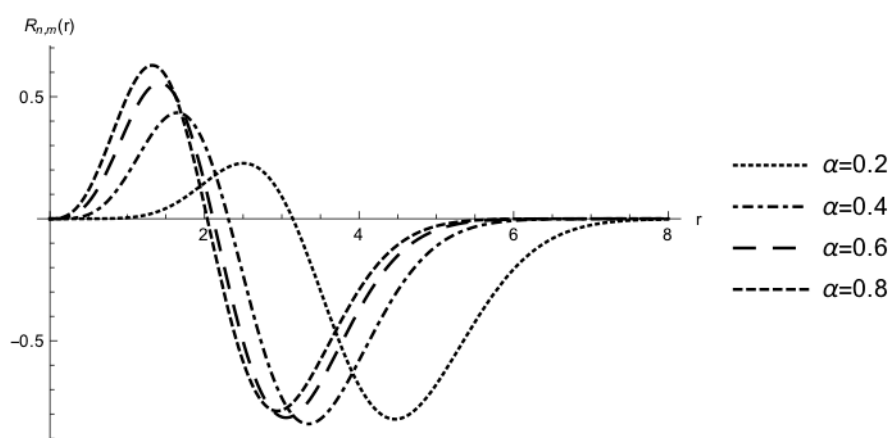
که

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0 = \alpha_6 = \xi_1, \\ \alpha_7 &= -\xi_2, \alpha_8 = \xi_3, \alpha_9 = \xi_1, \alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\xi_3}, \alpha_{11} = 2\sqrt{\xi_1}, \\ \alpha_{12} &= \sqrt{\xi_3}, \alpha_{13} = -\sqrt{\xi_1} \end{aligned} \quad (22.3)$$

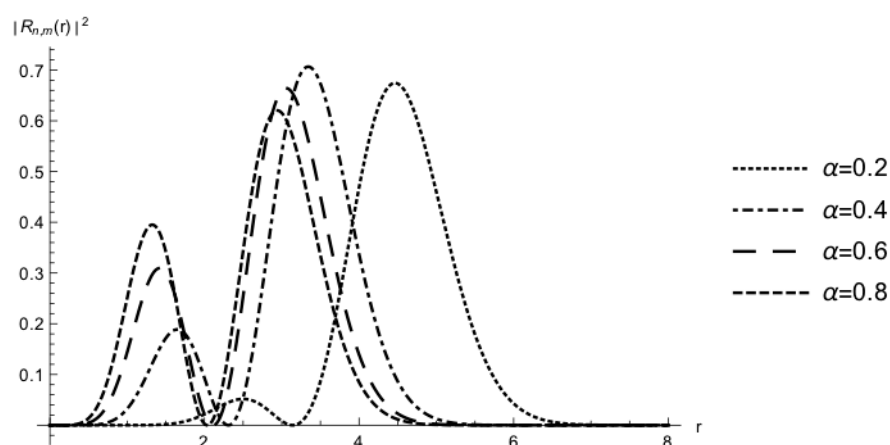
ویژه توابع نیز به فرم زیر می باشد

$$R_{n,m}(r) = N r^{2\alpha_1} e^{\alpha_1 r^2} L_n^{\alpha_1-1}(\alpha_1 r^2). \quad (23.3)$$

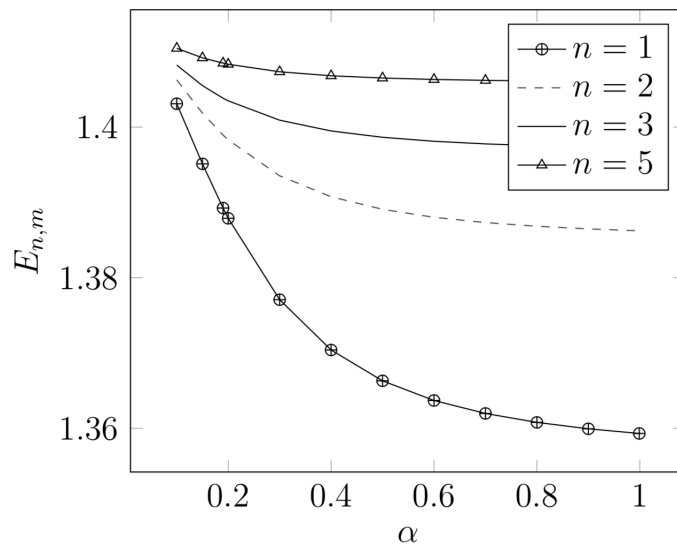
N ثابت نرمالیزاسیون است. تابع موج و چگالی احتمال برای مقادیر مختلف α در شکل های ۱.۳ و ۲.۳ نشان داده شده است. همچنین مشاهده شد زمانی که α زیاد می شود قله نمودار چگالی احتمال به سمت مقادیر کوچک ρ میل می کند. طیف انرژی بر حسب α به ازای مقادیر مختلف $n=1, 2, 3$ و $n=5$ در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. چنانچه در شکل ۳.۳ دیده می شود، با افزایش α انرژی کاهش می یابد.



شکل ۱.۳: تابع موج $R_{n,m}$ به ازای $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ، در محدوده $0 \leq r \leq 8$ با پارامترهای $M = 1 \text{ GeV}$ ، $m = -1$ ، $\eta_c = k_z = a = 1$



شکل ۲.۳: چگالی احتمال $|R_{n,m}|^2$ به ازای $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ ، و در محدوده $0 \leq r \leq 8$ با پارامترهای $M = 1 \text{ GeV}$ ، $m = -1$ ، $\eta_c = k_z = a = 1$



شکل ۳.۳: انرژی به صورت تابعی از α با پارامترهای $M = a = \eta_c = k_z = 1, m = -1$

۲.۱.۳ برهمکنش نرده ایی کرنل

در این قسمت پتانسیل نرده ای را بصورت برهمکنش کرنل، (۱۰.۳)، در نظر می گیریم. در غیاب پتانسیل برداری، پتانسیل نرده ایی در معادله (۱۵.۳) جایگزین می کنیم. با اعمال تغییر متغیر زیر

$$f(\rho) = \frac{U(\rho)}{\sqrt{\rho}}, \quad (24.3)$$

مشتق اول را از معادله حذف می کنیم.

$$U''(\rho) + \left(-k_z^2 + E^2 + 2\eta_C\eta_L - M^2 + \frac{-4(m + aE)^2 + \alpha^2(1 - 4\eta_C^2)}{4\alpha^2\rho^2} + \frac{2\eta_CM}{\rho} - 2\eta_L M\rho - \eta_L^2\rho^2 \right) U(\rho) = 0. \quad (25.3)$$

اگر $R(\rho)$ را بصورت زیر در نظر بگیریم

$$U(\rho) = \rho^A e^{B\rho} e^{C\rho^2} R(\rho), \quad (26.3)$$

که در پارامترهای A ، B و C بر حسب پارامترهای فیزیکی در ادامه تعیین خواهند شد. به این ترتیب معادله (۲۵.۳) بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} R''(\rho) + \left(\frac{\gamma_A}{\rho} + \gamma_B + \gamma_C \rho \right) R'(\rho) \\ \left[B^2 + \gamma_C + \gamma_C A + E^2 - k z^2 - M^2 + \gamma_{\eta_C} \eta_L + \right. \\ \left. \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{-\gamma(m+aE)^2 + \alpha^2 \left((1-\gamma_A)^2 - \gamma_{\eta_C}^2 \right)}{\gamma \alpha^2} \right) \right] + \\ + \frac{\gamma}{\rho} (AB + \eta_C M) + (\gamma_{CB} - \gamma_{\eta_L} M) \rho + \left(\gamma_C^2 - \eta_L^2 \right) \rho^2 \Big] R(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (27.3)$$

مشاهده می شود که اگر $C = -\frac{1}{\rho}$ باشد عبارت بالا بصورت معادله فوق هندسی در می آید. [۸۳-۸۵]

$$H''(z) + \left(\frac{1+a}{z} - b - \gamma z \right) H'(z) + \left(c - a - \gamma - \frac{D}{z} \right) H(z) = 0, \quad (28.3)$$

که در آن $H = R$ متغیر مستقل و $z = \rho$ متغیر وابسته است

$$D \equiv \frac{1}{\gamma} [d + b(1+a)], \quad (29.3)$$

و جواب های آن بصورت توابع فوق هندسی $H(a, b, c, d; z)$ و یا $HeunB(a, b, c, d; z)$ می باشند. به منظور رفتار مناسب تابع در بی نهایت جواب را بصورت چندجمله ای فوق هندسی درجه N در نظر می گیریم. به این ترتیب پارامترهای A ، B و C در معادله (۲۶.۳) انتخاب می کنیم چرا که این ترمها در معادله (۲۸.۳) برابر صفر است:

$$\begin{aligned} \rho^2 : \quad & \gamma_C^2 - \eta_L^2 = 0, \\ \rho : \quad & \gamma_{BC} - \gamma_{\eta_L} M = 0, \\ \frac{1}{\rho^2} : \quad & \frac{-\gamma(m+aE)^2 + \alpha^2 \left((1-\gamma_A)^2 - \gamma_{\eta_C}^2 \right)}{\gamma \alpha^2} = 0. \end{aligned} \quad (30.3)$$

به این ترتیب پارامترهای A ، B و C بصورت زیر است

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\gamma} \pm \sqrt{\frac{(m+aE)^2}{\alpha^2} + \eta_C^2}, \\ B &= \pm M, \\ C &= \pm \frac{\eta_L}{\gamma}, \end{aligned} \quad (31.3)$$

از نظر علامتی پارامترهای B و C مشابه هم اند و A از نظر علامتی مستقل است. چنانچه ذکر شد معادله های (۲۸.۳) و (۲۷.۳) مشابه اند اگر

$$C = -\frac{1}{\gamma}, \quad (32.3)$$

از معادله (۲۷.۳) استنتاج می شود که با در نظر گرفتن پارامتر $\eta_L = 1$ معادله به فرم تابع هیون در می آید. با انتخاب علامت مثبت برای A و علامت منفی برای پارامترهای B و C

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\rho} + \sqrt{\frac{(m+aE)^2}{\alpha^2} + \eta c^2}, \\ B &= -M, \\ C &= -\frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (33.3)$$

به این ترتیب معادله (۲۷.۳) بصورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} R''(\rho) + \left(\frac{2A}{\rho} + 2B + 4C\rho \right) R'(\rho) + \\ [B^2 + 2C + 4CA + E^2 - kz^2 - M^2 + 2\eta_C\eta_L + \frac{2}{\rho}(AB + \eta_CM)]R(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (34.3)$$

که در آن $C = -\frac{1}{\rho}$. با مقایسه معادله (۳۴.۳) با تابع هیون ، (۲۸.۳) پارامترهای a ، b ، c و d بصورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} a &= 2\sqrt{\frac{(m+aE)^2}{\alpha^2} + \eta c^2}, \\ b &= 2M, \\ c &= B^2 + 2C + 4CA + E^2 - kz^2 - M^2 + 2\eta_C\eta_L + 2A + 1 \\ &= -k_z^2 + E^2 + 2\eta_C\eta_L, \\ d &= -4\eta_CM, \end{aligned} \quad (35.3)$$

ضمن اینکه

$$\eta_L = 1. \quad (36.3)$$

ما بدنیال جوابی بصورت یک سری نامتناهی $H(z)$ در معادله (۳۴.۳) هستیم که پارامترهای $a, \dots, d$ با معادله (۳۵.۳) داده شده اند

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \\ H'(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z^{n-1}, \\ H''(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n z^{n-2}. \end{aligned} \quad (37.3)$$

با جایگزاری (۳۷.۳) در (۲۸.۳) به معادله زیر برای ضرایب سری می رسیم:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{D}{a+1} c_0, \\ c_{n+2} &= \frac{1}{(2+n)(2+a+n)} [(b(1+n) + D)c_{n+1} + (2+a+2n-c)c_n], \quad n \geq 1. \end{aligned} \quad (38.3)$$

در اینجا $c_0 = 1$ در نظر گرفته می شود. با تعیین چند جمله ای درجه N برای $R(\rho)$ می توانیم حل دقیق را بدست آوریم. از معادله (۲۸.۳) می بینیم که تابع $HeunB(a, b, c, d; z)$ یک چند جمله ای درجه N است اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

$$c_{N+1} = 0 \quad (39.3)$$

$E_- [\text{GeV}]$	$E_+ [\text{GeV}]$	N
-۳/۳۴۴۴۲	۴/۱۸۰۹۲	۰
-۳/۷۵۴۱	۴/۴۹۰۹۵	۱
-۴/۱۰۸۴۳	۴/۷۷۴۸۶	۲
-۴/۴۲۵۱۵	۵/۰۳۸۲۹	۳
-۴/۷۱۴۱۷	۵/۲۸۵۱۴	۴
-۴/۹۸۱۶۹	۵/۵۱۸۱۹	۵
-۵/۲۳۱۸۹	۵/۷۳۹۵۲	۶
-۵/۴۶۷۷۶	۵/۹۵۰۷۴	۷
-۵/۶۹۱۵۱	۶/۱۵۳۱۲	۸
-۵/۹۰۴۸۲	۶/۳۴۷۶۸	۹
-۶/۱۰۹۰۵	۶/۵۳۵۲۸	۱۰
-۱۵/۴۲۸۱	۱۵/۵۸۲۴	۱۰۰
-۴۵/۸۸۸	۴۵/۹۳۷۶	۱۰۳
-۱۴۲/۵۵	۱۴۲/۵۶۶	۱۰۴

جدول ۱.۳: ویژه مقادیر انرژی E ، بر حسب Gev ، با توجه به معادله (۴۱.۳) برای N های مختلف، با پارامتر های $M = ۳/۷ \text{GeV}$ ، $\eta_{\text{CL}} = ۰/۱ \text{GeV}$ ، $\eta_{\text{NC}} = ۰/۲ \text{GeV}$ و $a = ۱, K = ۲, m = ۱, \alpha = ۰/۹$ (ریشه مثبت) منفی (معادله (۴۱.۳) است.

و

$$c - ۲ - a = ۲N. \quad (۴۰.۳)$$

معادله (۳۹.۳) بیان می کند که ترم مرتبه $N + ۱$ ام برابر صفر است، از آنجا که c_N می تواند غیر صفر است. معادله (۴۰.۳) بیان می کند ترم دوم در سمت راست معادله (۲۸.۳) صفر می شود در نتیجه از ظهور هر ترم با درجه بالاتر از N جلوگیری می کند. با جایگذاری a و c از معادله (۳۵.۳) در (۴۰.۳) به عبارت درجه دو زیر برای E می رسمیم

$$\left(-۲\sqrt{\frac{(aE+m)^2}{\alpha^2} + \eta_C^2} + E^2 + ۲\eta_C\eta_L - kZ^2 - ۲ \right) = ۲N, \quad (۴۱.۳)$$

اکنون حالت $c_1 = ۰$ را در نظر میگیریم. از معادله های (۳۸.۳)، (۳۹.۳) و (۲۹.۳) داریم:

$$c_1 = M - \frac{\eta_C M}{\sqrt{\frac{(aE+m)^2}{\alpha^2} + \eta_C^2} + \frac{1}{4}}. \quad (۴۲.۳)$$

۶۰ بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاین-گوردون
با در نظر گرفتن $c_1 = 0$ داریم

$$E = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha^2 (1 - 4\eta_C)}{a^2}} - \frac{m}{a} \quad (43.3)$$

اکنون ساده ترین حالت را که چند جمله ای درجه $N = 1$ است را در نظر می گیریم. از معادلات (38.3) و (42.3) می توان نوشت

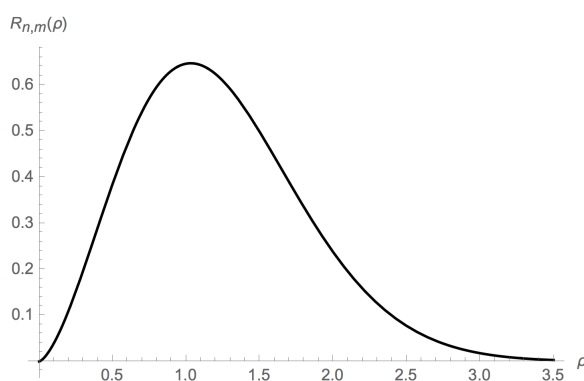
$$\begin{aligned} R_1(\rho) &= c_0 + c_1 \rho, \\ &= 1 + \left(M - \frac{c\eta M}{\sqrt{\frac{(aE+m)^2}{\alpha^2} + c\eta^2 + \frac{1}{4}}} \right) \rho, \end{aligned} \quad (44.3)$$

انرژی E توسط رابطه (41.3) با در نظر گرفتن $N = 1$ بدست می آید: از معادلات (44.3) و (26.3) و (16.3) تابع موج کلی را بفرم زیر پیدا می کنیم

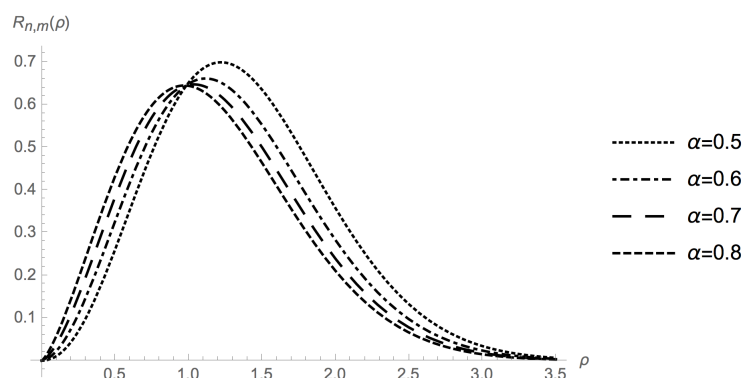
$$\Phi(t, \rho, \varphi, z) \propto e^{-iEt} e^{im\varphi} e^{ikz} \rho^{A-\frac{1}{2}} e^{B\rho} e^{C\rho^2} R_1(\rho), \quad (45.3)$$

A ، B و C توسط معادله (33.3) که در آن علامت مثبت را در نظر گرفتیم با پارامترهای a ، ...، d در معادله (35.3) بدست می آیند. چگالی احتمال بصورت زیر بدست می آید

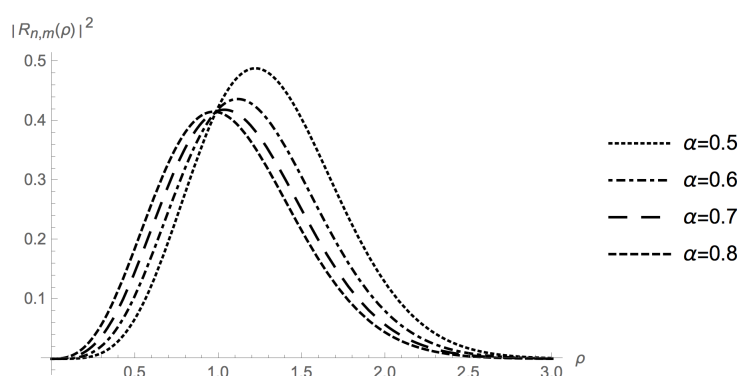
$$|\Phi(\rho)|^2 \propto \rho^{2A-1} e^{2B\rho} e^{2C\rho^2} |R_1(\rho)|^2. \quad (46.3)$$



شکل 4.3: تابع موج $R_{n,m}$ برای $N = 1$ و در محدوده $0 \leq \rho \leq 3/5 \text{ GeV}^{-1}$ ، با پارامترهای $M = 1 \text{ GeV}$ ، $a = 1$ ، $\alpha = 9$ ، $\eta_c = 2$ ، $\eta_L = 1$ و $m = 1$.



شکل ۵.۳: تابع موج $R_{n,m}$ برای $N = 1$ برای های مختلف α ، در محدوده $0 \leq \rho \leq 3.5$ ، با پارامترهای $3/5 \text{ GeV}^{-1}$ ، $M = 1 \text{ GeV}$ ، $a = 0.1$ ، $\eta_c = 0.2 \text{ GeV}$ ، $\eta_L = 0.1$ و $m = 1$.



شکل ۶.۳: چگالی احتمال $|R_{n,m}|^2$ برای $N = 1$ ، در محدوده $0 \leq \rho \leq 3/5 \text{ GeV}^{-1}$ ، با پارامترهای $3/5 \text{ GeV}^{-1}$ ، $M = 1 \text{ GeV}$ ، $a = 0.1$ ، $\eta_c = 0.2 \text{ GeV}$ ، $\eta_L = 0.1$ و $m = 1$.

رفتار $R_{n,m}$ برای $\alpha = 0.9$ در شکل ۴.۳ رسم شده است. در شکل ۵.۳ و ۶.۳ تابع موج، $R_{n,m}$ و چگالی احتمال، $|R_{n,m}|^2$ برای مقادیر مختلف پارامتر α رسم شده اند تا تاثیر پارامتر زاویه کاستی بر تابع موج و چگالی احتمال مشخص شوند. در شکل ۶.۳، $0 \leq \rho \leq 3.5$ ، $N = 1$ و $m = 1$ ، $3/5 \text{ GeV}^{-1}$ ، $M = 1 \text{ GeV}$ ، $\eta_c = 0.2 \text{ GeV}$ ، $\eta_L = 0.1 \text{ GeV}$ ، $a = 0.1$ و $m = 1$ ، $0 \leq \rho \leq 3/5 \text{ GeV}^{-1}$ ، $N = 1$ ، $M = 1 \text{ GeV}$ ، $\eta_c = 0.2 \text{ GeV}$ ، $\eta_L = 0.1 \text{ GeV}$ ، $a = 0.1$ و $m = 1$ نشان می دهد چگالی احتمال کاملاً به افزایش α حساس است و با افزایش α قله نمودار به سمت ρ های کوچکتر میل می کند و همچنین چگالی احتمال کاهش می یابد.

۳.۱.۳ برهمکنش برداری و نرده ای کرنل

در اینجا برهمکنش برداری و نرده ای را به صورت پتانسیل کرنل در نظر می گیریم به این ترتیب پتانسیل های اسکالر و نرده ای را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$S(\rho) = \eta_{\pi L} \rho - \frac{\eta_{\pi c}}{\rho}, \quad V(\rho) = \kappa_{\pi L} \rho - \frac{\kappa_{\pi c}}{\rho}, \quad (47.3)$$

ضمن اینکه باید عنوان کرد که رابطه ای بین $\eta_{\pi L}$ و $\kappa_{\pi L}$ و یا $\eta_{\pi C}$ و $\kappa_{\pi C}$ وجود ندارد. با اعمال تغییر متغیر

$$f(\rho) = \frac{R(\rho)}{\sqrt{\rho}}, \quad (48.3)$$

مشتق اول را حذف کنیم :

$$\begin{aligned} R_{n,m}''(\rho) + (-kz^2 + E^2 + 2\eta_{\pi C}\eta_{\pi L} - 2\kappa_{\pi C}\kappa_{\pi L} - \frac{a^2\kappa_{\pi L}^2}{\alpha^2} - M^2 - \frac{a^2\kappa_{\pi C}^2}{\alpha^2\rho^4} - \frac{2a(m+aE)\kappa_{\pi C}}{\alpha^2\rho^3} + \\ - 4(m+aE)^2 + \alpha^2(1 - 4\eta_{\pi C}^2 + 4\kappa_{\pi C}^2) + 8a^2\kappa_{\pi C}\kappa_{\pi L} + \frac{2(a(m+aE)\kappa_{\pi L} + \alpha^2(E\kappa_{\pi C} + \eta_{\pi C}M))}{\alpha^2\rho} \\ - 2(E\kappa_{\pi L} + \eta_{\pi L}M)\rho - (\eta_{\pi L}^2 - \kappa_{\pi L}^2)\rho^2) R_{n,m}(\rho) = 0 \end{aligned} \quad (49.3)$$

به منظور حل معادله (49.3) ، $R_{n,m}(\rho)$ را به فرم زیر می نویسیم

$$R_{n,m}(\rho) = U_n(\rho)e^{g_m(\rho)}, \quad (50.3)$$

که [۸۶-۸۹]

$$U_n(\rho) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ \prod_{i=1}^n (\rho - \alpha_i^n) & n \geq 1. \end{cases} \quad (51.3)$$

نوع وابستگی معادله (49.3) به ρ نشان می دهد ، $g_m(\rho)$ می تواند به فرم زیر باشد

$$g_m(\rho) = b_1\rho + b_2\rho^2 + b_3Ln(\rho) + \frac{b_4}{\rho}, \quad (52.3)$$

پارامترهای $b_1, \dots, b_5$ بر حسب ثابت های فیزیکی $\alpha, a, \eta_{\pi L}, \eta_{\pi C}, \kappa_{\pi L}, \kappa_{\pi C}, M, m, k_z$ و E بیان می شوند.

در حالت بدون گره، $n = 0$ از معادله های (50.3) و (51.3) داریم

$$R_{0,m}(\rho) = e^{g_m(\rho)}, \quad (53.3)$$

در نتیجه

$$R_{0,m}''(\rho) + (-g_m'' - g_m'^2)R_{0,m}(\rho) = 0. \quad (54.3)$$

با جایگزاری (۵۲.۳) در (۵۴.۳) معادله اخیر به فرم زیر درمی آید:

$$R''_{\circ, m}(\rho) + \left(-b_1^2 - 2b_2 - 4b_2b_3 - \frac{b_4^2}{\rho^4} + \frac{2(-1+b_3)b_4}{\rho^3} + \frac{b_3-b_4^2+2b_1b_4}{\rho^2} + \frac{-2b_1b_3+4b_2b_4}{\rho} - 4b_1b_2\rho - 4\rho^2b_1^2 \right) R_{\circ, m}(\rho) = 0. \quad (55.3)$$

با مقایسه معادله (۴۹.۳) و (۵۵.۳) به نه معادله زیر می رسیم

$$-\frac{a^2\kappa_{2C}^2}{\alpha^2} + b_4^2 = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho^4} \right), \quad (56.3)$$

$$-\frac{2a(m+aE)\kappa_{2C}}{\alpha^2} - 2(-1+b_3)b_4 = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho^3} \right), \quad (57.3)$$

$$\frac{-4(m+aE)^2 + \alpha^2(1-4\eta_{2C}^2+4\kappa_{2C}^2) + 4a^2\kappa_{2C}\kappa_{2L}}{4\alpha^2} - b_3 + b_4^2 - 2b_1b_4 = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho^2} \right), \quad (58.3)$$

$$\frac{2(a(m+aE)\kappa_{2L} + \alpha^2(E\kappa_{2C} + \eta_{2C}M))}{\alpha^2} + 2b_1b_3 - 4b_2b_4 = 0, \quad \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (59.3)$$

$$-2(E\kappa_{2L} + \eta_{2L}M) + 4b_1b_2 = 0, \quad (\rho), \quad (60.3)$$

$$-(\eta_{2L}^2 - \kappa_{2L}^2) + 4b_2^2 = 0, \quad (\rho^2), \quad (61.3)$$

$$-kz^2 + E^2 + 2\eta_{2C}\eta_{2L} - 2\kappa_{2C}\kappa_{2L} - \frac{a^2\kappa_{2L}^2}{\alpha^2} - M^2 + b_1^2 + 2b_2 + 4b_2b_3 = 0, \quad (1), \quad (62.3)$$

با حل این معادلات پارامتر های، $b_1, \dots, b_5$ بر حسب پارامتر های فیزیکی محاسبه خواهند شد. معادلات (۵۸.۳) و (۶۰.۳) به جواب زیر منجر می شوند

$$b_3 = \pm \frac{\sqrt{\eta_{2L}^2 - \kappa_{2L}^2} \left(\pm(\alpha^2 E\kappa_{2C} + am\kappa_{2L} + a^2 E\kappa_{2L}) + a\alpha\kappa_{2C}\sqrt{\eta_{2L}^2 - \kappa_{2L}^2} + \alpha^2 \eta_{2C}M \right)}{\alpha^2 (E\kappa_{2L} + \eta_{2L}M)} \quad (63.3)$$

از معادلات (۵۶.۳) و (۶۱.۳) داریم

$$b_4 = \pm \frac{a\kappa_{2C}}{\alpha}, \quad (64.3)$$

$$b_2 = \pm \frac{1}{4} \sqrt{\eta_{2L}^2 - \kappa_{2L}^2}.$$

$$b_1 = \pm \frac{E\kappa_L + \eta_L M}{\sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2}}. \quad (۶۵.۳)$$

را محاسبه می کنیم. در ادامه با انتخاب علامت منفی برای پارامتر b_1 انتخاب در معادله (۶۴.۳) و b_2 در معادله (۶۵.۳) و b_3 در معادله (۶۴.۳) به نتیجه زیر برای انرژی می رسیم

$$E = \pm \sqrt{kz^2 - 2\eta_C\eta_L + 2\kappa_C\kappa_L - b_1^2 - 2b_2(1 + 2b_3)}. \quad (۶۶.۳)$$

به این ترتیب می توانیم معادله ۵۲.۳ را بر حسب پارامتر های فیزیکی بصورت زیر بنویسیم

$$g_m(\rho) = \frac{a\kappa_C}{\alpha\rho} - \frac{(E\kappa_L + \eta_L M)\rho}{\sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2}} - \frac{1}{\rho} \sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2} \rho^2 +$$

$$\frac{\sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2} \left(\alpha^2 E\kappa_C + am\kappa_L + a^2 E\kappa_L + a\alpha\kappa_C \sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2} + \alpha^2 \eta_C M \right) \ln(\rho)}{\alpha^2 (E\kappa_L + \eta_L M)} \quad (۶۷.۳)$$

از معادله (۶۷.۳) تابع موج، ۵۳.۳، به صورت زیر درمی آید

$$R_{o,1}(\rho) = \exp\left[\frac{a\kappa_C}{\alpha\rho} + \frac{(-E\kappa_L + \eta_L M)\rho}{\sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2}} - \frac{1}{\rho} \sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2} \rho^2 + \right.$$

$$\left. \frac{\sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2} \left(\alpha^2 E\kappa_C + am\kappa_L + a^2 E\kappa_L + a\alpha\kappa_C \sqrt{\eta_L^2 - \kappa_L^2} + \alpha^2 \eta_C M \right) \ln(\rho)}{\alpha^2 (E\kappa_L - \eta_L M)} \right] \quad (۶۸.۳)$$

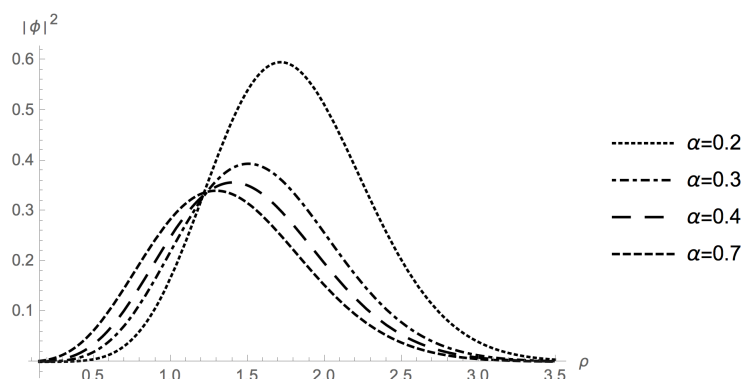
از معادلات (۴۸.۳)، (۵۳.۳)، و (۱۶.۳) با در نظر گرفتن $n = 0$ ، تابع موج بصورت زیر درمی آید

$$\Phi(t, \rho, \varphi, z) \propto e^{i(kz + m\varphi - Et)} \rho^{-\frac{1}{2}} R_{o,1}(\rho), \quad (۶۹.۳)$$

به این ترتیب چگالی احتمال بفرم

$$|\Phi(\rho)|^2 \propto \rho^{-1} |R_{o,1}(\rho)|^2. \quad (۷۰.۳)$$

می باشد.



شکل ۷.۳: چگالی احتمال $|\Phi|^2$ در محدوده $0 \leq \rho \leq 3/5 \text{ GeV}^{-1}$ با پارامترهای $m = 1$ ، $\eta_{\kappa_c} = \kappa_{\kappa_c} = 0/1$ ، $\eta_{\kappa_L} = 1$ ، $\kappa_{\kappa_L} = 0/5$ ، $a = 0/1$ ، $M = 1 \text{ GeV}$.

در نهایت در شکل ۷.۳ چگالی احتمال، $|\Phi(\rho)|^2$ ، برای مقادیر مختلف پارامتر α رسم شده است. در این شکل $0 \leq \rho \leq 3/5 \text{ GeV}^{-1}$ ، $M = 1 \text{ GeV}$ ، $\eta_{\kappa_c} = \kappa_{\kappa_c} = 0/1 \text{ GeV}$ ، $\eta_{\kappa_L} = 1 \text{ GeV}$ ، $\kappa_{\kappa_L} = 0/5 \text{ GeV}$ ، $a = 0/1$ و $K_z = 1$ و $m = 1$. در این مورد انرژی E بر حسب پارامتر α مطابق با رابطه (۶۶.۳) تغییر می کند. همچنین مشاهده می شود مانند دو مورد قبل در این مورد نیز با افزایش α قله چگالی احتمال به سمت ρ های کوچک می رود.

۲.۳ خواص ترمودینامیک ذرات خنثی در حضور نواقص هندسی

در ادامه به بررسی فرم هم وردای غیر نسبیتی معادله شرودینگر پائولی در فضا زمان ایجاد شده توسط ریسمان کیهانی می پردازیم و به مطالعه جواب های این معادله در حضور برهم کنش بین گشتاور دوقطبی مغناطیسی و میدان گرانشی می پردازیم. حل بخش شعاعی این معادله را بدست آورده و سطوح انرژی را محاسبه می کنیم و در ادامه همه خواص ترمودینامیکی ذرات خنثی در پس زمینه ریسمان کیهانی را بر مبنای تقریب تابع پارش بدست می آوریم. بررسی برهم کنش بین دوقطبی های مغناطیسی و الکتریکی قسمت زیادی از مطالعات سال های اخیر را در بر گرفته است. دینامیک کوانتومی در فضای مخروطی در حضور نواقص توپولوژیکی در سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته است [۳۷-۴۶]. هندسه ساده اما با اهمیت مخروط به عنوان یک هندسه موثر در زمینه ریسمان های کیهانی ظهور یافت [۴۷-۵۰]. در ادامه ما قصد داریم نخست فرم هم وردای معادله شرودینگر پائولی در فضا زمان تولید شده توسط ریسمان

۶۶ بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاین-گوردون

کیهانی را بررسی کرده سپس حل شعاعی و ویژه مفادیر انرژی را ارائه خواهیم کرد و سپس با استفاده از تقریب تابع پارش خواص ترمودینامیکی ذرات خنثی در پس زمینه ریمان کیهانی را بدست می آوریم.

۱.۲.۳ ذرات خنثی در پس زمینه ریمان کیهانی

عنصر طول در فضا زمان ریمان کیهانی در دستگاه مختصات استوانه ایی به صورت زیر می باشد. [۵۱-۵۴]

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (۷۱.۳)$$

که در آن $-\infty < z < \infty$ ، $r \geq 0$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. پارامتر α مرتبط با چگالی جرمی ریمان کیهانی است و در محدوده $(0, 1]$ می باشد. متریک در این فضا زمان بصورت زیر نوشته می شود

$$g^{\mu\nu}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۷۲.۳)$$

در نتیجه ماتریس های تبدیل از فضا زمان تخت به خمیده و بر عکس بصورت زیر می باشند.

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & \frac{-\sin \varphi}{\alpha r} & \frac{\cos \varphi}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e_{\bar{\mu}}^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\alpha r \sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \alpha r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (۷۳.۳)$$

و مولفه های اتصال دهنده های اسپینی از رابطه زیر بدست می آیند

$$\omega_{\bar{\mu}\bar{b}}^{\bar{a}} = e_{\bar{\nu}}^{\bar{a}} e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu + e_{\bar{\nu}}^{\bar{a}} \partial_\mu e_b^\nu \quad (۷۴.۳)$$

که در این رابطه $\Gamma_{\sigma\mu}^\nu$ نماد های کریستوفل نوع دوم می باشد که در این متریک بصورت زیر می باشند.

$$\Gamma_{ij}^r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_{ij}^\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (۷۵.۳)$$

به این ترتیب مولفه های غیر صفر اتصال دهنده ی اسپینی از روابط زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}\omega_{\varphi}^{\bar{1}\bar{2}} &= e_{\mu}^{\bar{1}} e^{\nu\bar{2}} \Gamma_{\varphi\nu}^{\mu} - e^{\nu\bar{2}} \partial_{\varphi} e_{\mu}^{\bar{1}} = 1 - \alpha \\ \omega_{\varphi}^{\bar{1}\bar{2}} &= -\omega_{\varphi}^{\bar{2}\bar{1}}\end{aligned}\quad (76.3)$$

با فرض اینکه گشتاور دوقطبی مغناطیسی موازی با محور z است معادله غیر نسبیتی بصورت زیر است [۵۵]

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = m\psi + \left[\frac{1}{2m} \vec{\pi}^2 - \frac{\mu^2 E^2}{2m} + \frac{\mu}{2m} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \mu \hat{n} \cdot \vec{B} \right] \psi \quad (77.3)$$

بردار یکه $\hat{n}$ متناظر با جهت گشتاور دوقطبی مغناطیسی است. اندازه حرکت تعمیم یافته در حضور میدان الکترو مغناطیسی بصورت زیر است

$$\vec{\pi} = -i\hbar\vec{\nabla} + \left(\mu (\hat{n} \times \vec{E}) + \frac{(1-\alpha)}{2} \hat{\varphi} \right)_j \quad (78.3)$$

که در این رابطه

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{\alpha r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (79.3)$$

می باشد. میدان الکتریکی را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$\vec{E} = \frac{\lambda \rho}{r} \hat{\rho} \quad (80.3)$$

حل معادله شرودینگر پائولی می تواند به فرم زیر نوشته شود

$$\psi_{nl}(\rho, \varphi, z) = e^{il\varphi} e^{ikz} R_{nl}(\rho) \quad (81.3)$$

$\omega = \mu \frac{\lambda}{m}$ و $\gamma = l + \frac{(1-\alpha)}{2}$ را تعریف می شوند و سپس با تغییر متغیر $\xi = \frac{m\omega}{2} \rho^2$ داریم

$$R_{nl}'' + \frac{1}{\xi} R_{nl}' + \frac{1}{\xi^2} \left(\xi \beta - \frac{\gamma^2}{4\alpha^2} - \frac{\xi^2}{4} \right) R_{nl} = 0 \quad (82.3)$$

بطوری که در این رابطه

$$\beta = \frac{E}{\omega} - \frac{k^2}{2m\omega} - \frac{\gamma}{2\alpha} - \frac{1}{2} \quad (83.3)$$

اکنون می توان این معادله را حل کرد و ویژه مقادیر و ویژه توابع آن بصورت زیر خواهد بود

$$\psi_{nl} = N \xi^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{4\alpha^2}}} e^{-\frac{\xi}{2}} L_n^{1+2\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\gamma^2}{4\alpha^2}}}(\xi) \quad (84.3)$$

$$\varepsilon = \left(n + \frac{a}{2} \right) \omega \quad (85.3)$$

بطوری که در این رابطه

$$a = \left(2 + \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2}} + \frac{k^2}{m\omega} + \frac{\gamma}{\alpha} \right) \quad (86.3)$$

N ثابت نرمالیزاسیون می باشد.

۲.۲.۳ خواص ترمودینامیکی سیستم

به منظور اینکه خواص ترمو دینامیکی ذرات خنثی در حضور پس زمینه ریسمان کیهانی به ازای یک l ثابت بررسی شود نخست فرم تابع پارش را برای این سیستم محاسبه می شود

$$Q_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+\frac{a}{2})\omega} = e^{-\beta\frac{a}{2}\omega} + e^{-\beta(1+\frac{a}{2})\omega} + \dots = \frac{e^{-\beta\frac{a}{2}\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} = \frac{e^{-\beta\omega(\frac{a}{2}-\frac{1}{2})}}{e^{\frac{\beta\omega}{2}} - e^{-\frac{\beta\omega}{2}}} = e^{-\beta\omega(\frac{a-1}{2})} \left\{ 2 \sinh \frac{\beta\omega}{2} \right\}^{-1} \quad (۸۷.۳)$$

در این رابطه ، $\beta = \frac{1}{\kappa}t$ ، تابع پارش برای سیستم N ذره ایی بدون بر هم کنش بصورت زیر است

$$Q_N = (Q_1)^N = e^{-N\beta\omega\frac{a}{2}} \left\{ e^{\beta\omega} - 1 \right\}^{-N} \quad (۸۸.۳)$$

بطوری که

$$\ln Q_N = -N\beta\omega\frac{(a-1)}{2} - N \ln \left(2 \sinh \frac{\beta\omega}{2} \right) \quad (۸۹.۳)$$

انرژی آزاد هلمهولتز و دیگر کمیت های آماری با روش سر راست محاسبه می شوند.

$$A = -\frac{1}{\beta} \ln Q_N = N\omega\frac{(a-1)}{2} + NKT \ln \left(2 \sinh \frac{\beta\omega}{2} \right) \quad (۹۰.۳)$$

پتانسیل شیمیایی از رابطه زیر محاسبه می شود

$$\mu = \frac{\partial A}{\partial N} = \omega\frac{(a-1)}{2} + KT \ln \left(2 \sinh \frac{\beta\omega}{2} \right) \quad (۹۱.۳)$$

و فشار محاسبه شده نیز صفر می باشد.

$$P = -\frac{\partial A}{\partial V} = 0 \quad (۹۲.۳)$$

انرژی میانگین نیز از رابطه زیر محاسبه می شود

$$U = -\frac{\partial \ln Q_N}{\partial \beta} = N\omega \left(\frac{a-1}{2} + \coth \frac{\beta\omega}{2} \right) \quad (۹۳.۳)$$

کمیت اصلی آماری یعنی آنتروپی نیز از رابطه زیر حاصل می شود

$$\frac{S}{K} = \beta^2 \frac{\partial A}{\partial \beta} = \left(-N \ln \left(2 \sinh \frac{\beta\omega}{2} \right) + N\beta\omega \coth \frac{\beta\omega}{2} \right) \quad (۹۴.۳)$$

و ظرفیت گرمایی در حجم ثابت بفرم زیر می باشد

$$\frac{C}{K} = -\beta^2 \frac{\partial U}{\partial \beta} = -\beta^2 \omega^2 N \frac{e^{-\beta\omega}}{1 - e^{-\beta\omega}} \quad (۹۵.۳)$$

می توان ثابت کرد که در حد $1 \rightarrow \alpha$ فضا زمان پس زمینه از خمیده به تخت تبدیل شده و نتایج حل معادله در فضا زمان تخت بازیابی خواهد شد در این حالت حدی معادله (۸۲.۳) بفرم زیر نوشته می شود

$$R''_{nl} + \frac{1}{\xi} R'_{nl} + \frac{1}{\xi^2} \left(\xi \beta - \frac{\gamma^2}{4} - \frac{\xi^2}{4} \right) R_{nl} = 0 \quad (96.3)$$

و در این حالت $\gamma = l$

$$\beta = \frac{E}{\omega} - \frac{k^2}{2m\omega} - \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \quad (97.3)$$

تابع موج متناظر و ویژه حالات انرژی استخراج می شوند [۹۸]

$$\psi = N' \xi^{\frac{1}{2}} (1 + \sqrt{1+l^2}) e^{-\frac{\xi}{2}} L_n^{1+\sqrt{1+l^2}}(\xi) \quad (98.3)$$

$$\varepsilon = \left(n + \frac{a'}{2} \right) \omega \quad (99.3)$$

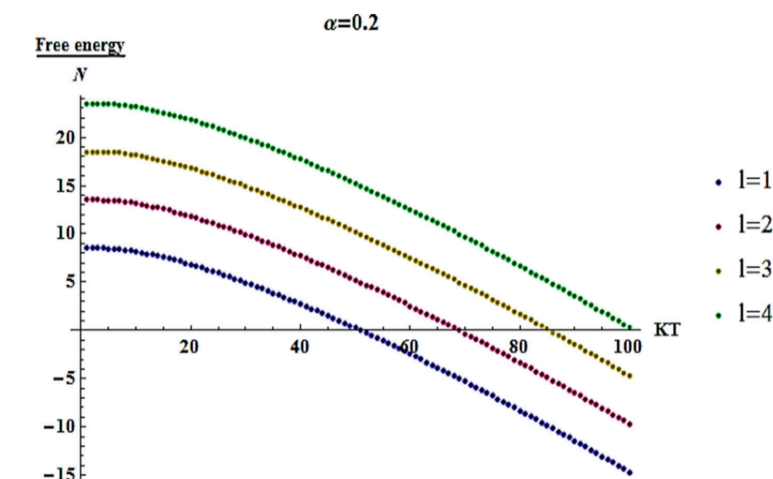
بطوری که

$$a' = \left(2 + \sqrt{1+l^2} + \frac{k^2}{m\omega} + l \right) \quad (100.3)$$

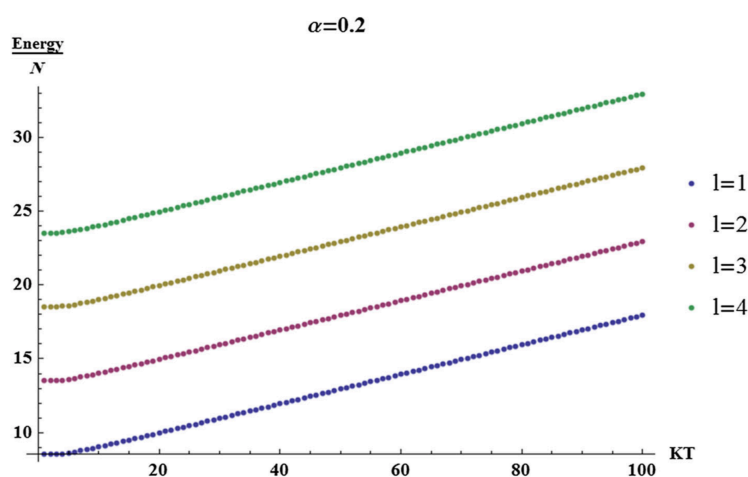
N' ثابت نرمالیزاسیون می باشد. در حد $1 \rightarrow \alpha$ خواص ترمودینامیکی سیستم از معادلات (۸۷.۳) الی (۹۵.۳) بدست می آیند و باید پارامتر a در این معادلات با a' جایگزین شود. در ادامه خواص ترمودینامیکی سیستم بر حسب KT نشان داده شده است. در شکل ۸.۳ انرژی آزاد هلمهولتز بر حسب KT برای مقادیر مختلف عدد کوانتمی مداری ترسیم شده است. در محدوده $0 \leq KT \leq 100$ مشاهده می شود انرژی تقریباً بصورت خطی بر حسب KT کاهش می یابد. در شکل ۹.۳ انرژی ترمودینامیکی بر حسب KT برای مقادیر متفاوت اندازه حرکت مداری در محدوده $1 \rightarrow \alpha$ ترسیم شده است. چنانچه مشاهده می شود با افزایش KT انرژی بصورت خطی افزایش می یابد چنانچه در شکل های ۸.۳ و ۹.۳ مشاهده می شود انرژی آزاد هلمهولتز و انرژی ترمودینامیکی هر دو با افزایش اندازه حرکت مداری افزایش می یابند. شکل ۱۰.۳) انرژی آزاد هلمهولتز بر حسب KT برای پارامترهای مختلف رسم شده است در محدوده $1 \rightarrow \alpha$ انرژی تقریباً بصورت خطی با افزایش KT کاهش می یابد. شکل ۱۱.۳ رفتار انرژی بر حسب KT برای مقادیر مختلف α در محدوده $1 \rightarrow \alpha$ رسم شده است. چنانچه انتظار می رود در حد به سمت ۱ خواص ترمودینامیکی این سیستم به این خواص در فضا زمان تخت تبدیل خواهند شد. در شکل ۱۲.۳ مشاهده می شود که آنتروپی به آهستگی به ازای مقادیر بزرگ KT افزایش می یابد. همچنین منحنی به ازای مقادیر مختلف تکرار شده است. تغییرات ظرفیت گرمایی بر حسب KT برای مقادیر مختلف $\omega = 1, 2, 3, 4$ در شکل ۱۳.۳ نشان

۷۰ بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاین-گوردون

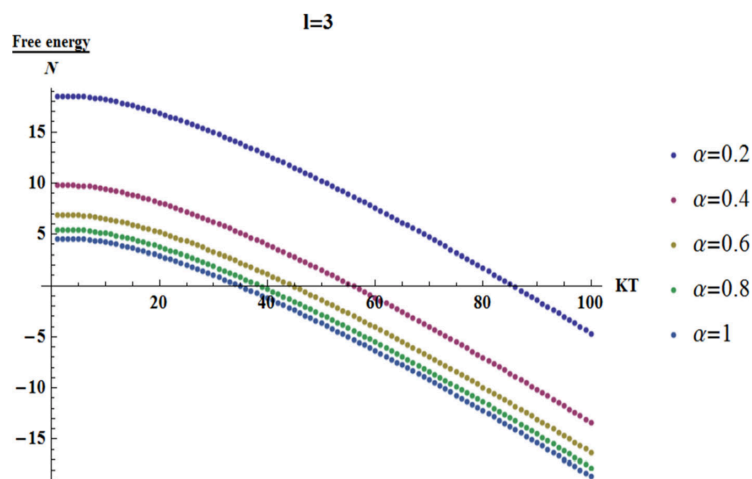
داده شده است. w چنانچه در شکل های ۱۲.۳ و ۱۳.۳ مشاهده می شود انتروپی و ظرفیت گرمایی با افزایش w کاهش می یابد. چنانچه در شکل ۱۵.۳ مشاهده می شود با افزایش KT ظرفیت گرمایی به مقدار اشباع خود در دماهای بالا میل می کند.



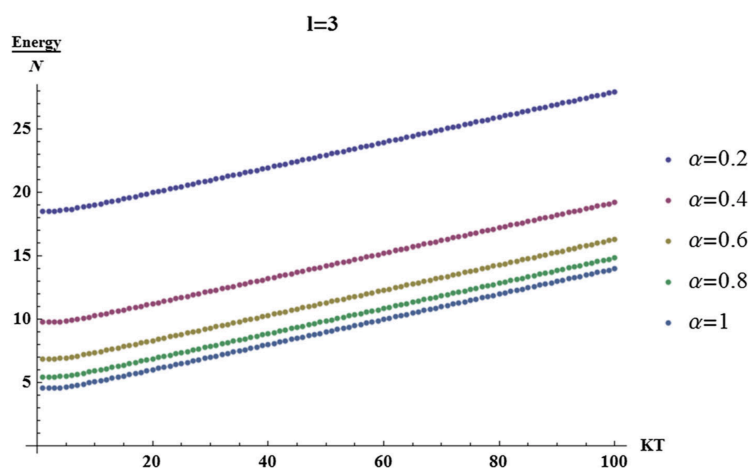
شکل ۸.۳: مقایسه انرژی آزاد هلمهولتز بصورت تابعی از KT برای l های مختلف



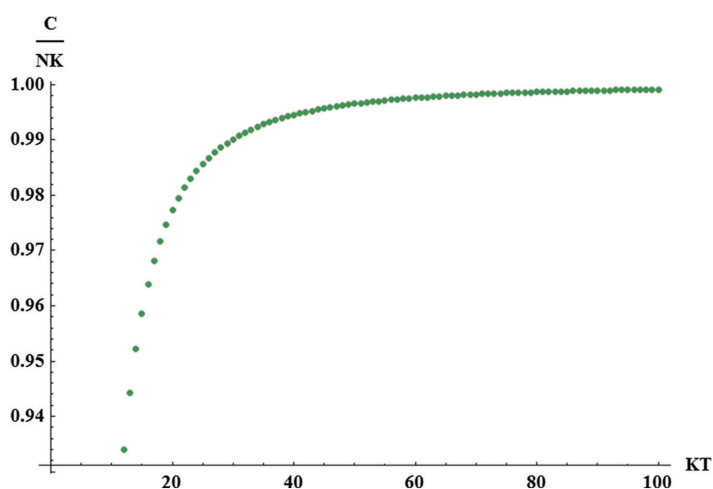
شکل ۹.۳: انرژی میانگین بصورت تابعی از KT برای l های مختلف



شکل ۱۰.۳: مقایسه انرژی آزاد هلمهولتز بصورت تابعی از KT برای α های مختلف

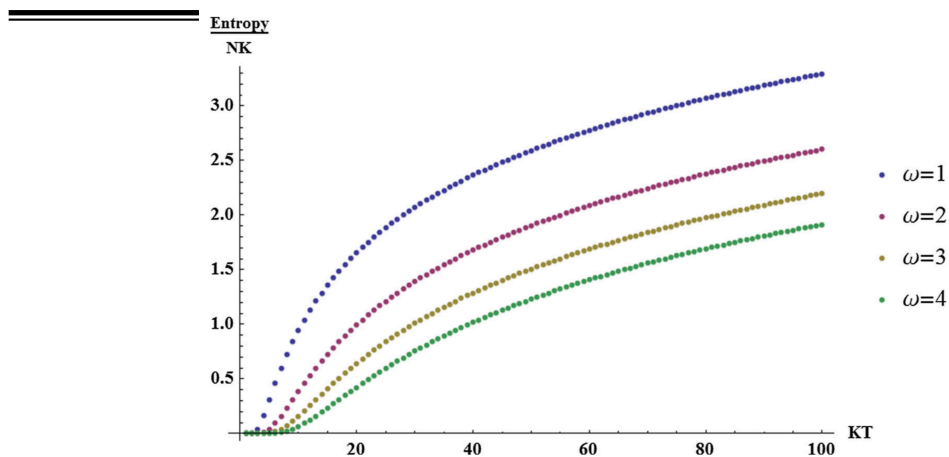


شکل ۱۱.۳: انرژی میانگین بصورت تابعی از KT برای α های مختلف

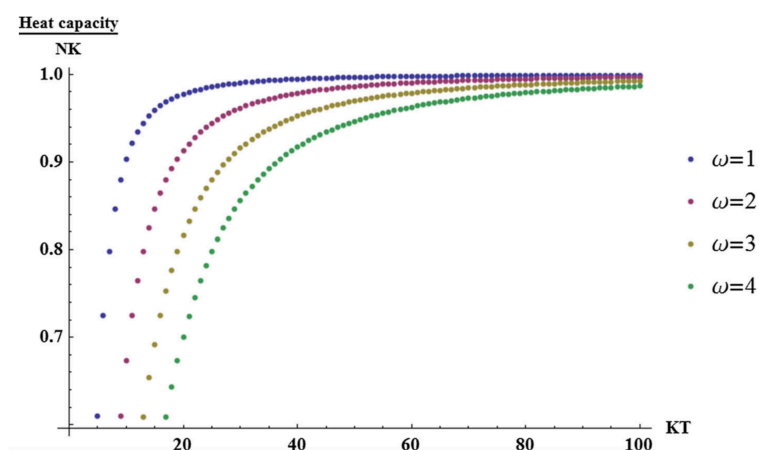


شکل ۱۵.۳: ظرفیت گرمایی بصورت تابعی از KT برای $\omega = 1$

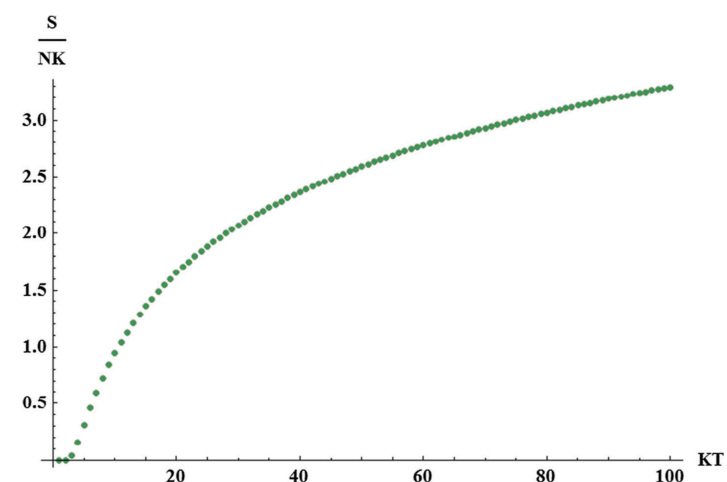
۷۲ بررسی نسبیتی بوزون های اسکالر با استفاده از فرم هموردای معادله کلاین-گوردون



شکل ۱۲.۳: آنترپی بصورت تابعی از KT برای ω های مختلف



شکل ۱۳.۳: ظرفیت گرمایی بصورت تابعی از KT برای ω های مختلف



شکل ۱۴.۳: آنترپی بصورت تابعی از KT برای $\omega = 1$

فصل ۴

بررسی بوزون های اسکالر و برداری در فضا زمان خمیده

۱.۴ مقدمه

معادله دی-کی-پی یک معادله نسبیتی مرتبه اول برای بوزون های با اسپین صفر و یک می باشد که در ابتدا در دهه ۱۹۳۰ توسط دافین-کیمر-پتیو^۱ ارائه شد. این نظریه ۱۹۳۹ تا ۱۹۷۰ در زمینه های مختلف توسعه یافت. این معادله در بسیاری از شاخه های فیزیک از جمله کیهان شناسی، برهم کنش هادرون- هسته و طیف سنجی مزون ها کاربرد دارد. از این رو می توان ذراتی مانند فوتون، گلئون، مزون و ... را توسط معادله دی-کی-پی مورد مطالعه قرار داد. در ابتدا در مورد مطالعه معادله دی-کی-پی و مفاهیم اولیه آن در فضا زمان تخت و خصوصیات جبری ماتریس های دی-کی-پی می پردازیم و سپس به معرفی معادله دی-کی-پی در فضا زمان خمیده می پردازیم.

^۱Duffin-Kemmer-Petiau

۲.۴ بوزون های با اسپین ۰ و ۱ در فضا زمان تخت

معادله موج نسبیتی مرتبه اول دی-کی-پی بوزون های اسپین صفر و یک را توصیف می کند از این رو برهم کنش های نسبیتی هادرون- هسته توسط این معادله تجزیه تحلیل می شود. از لحاظ تاریخی این معادله به دهه ۱۹۳۰ برمی گردد. برای اولین بار پتیو جبر 16×16 دی-کی-پی را با ضرب مستقیم ماتریس های دیراک بسط داد و نشان داد که این ماتریس ها می توانند به سه نمایش ۱، ۵ و ۱۰ مؤلفه ای تجزیه شوند. در ادامه کمر به طور جداگانه از معادله پروکا دستگاهی از معادلات جفت شده مرتبه اول را بدست آورد. اگر چه این دستگاه معادلات قادر بودند بطور جداگانه بصورت فرم های ماتریسی 5×5 و 10×10 نوشته شوند ولی روابط جبری واضحی بین این ماتریس ها وجود نداشت تا زمانی که دافین توانست روابط جبری حاکم بر این ماتریس ها را ارائه دهد و این نتیجه انگیزه ای شد برای کمر تا معادله موج دی-کی-پی را بطور کامل برای ذرات با اسپین صفر و یک بدست آورد.

معادله دی-کی-پی از نظر ظاهر بسیار شبیه معادله دیراک است. با این تفاوت که در معادله دیراک از ماتریس های گاما و در معادله دی-کی-پی از ماتریس های بتا استفاده می شود علاوه بر این جبر معادله دی-کی-پی دستگاهی از ۱۲۶ عنصر مستقل از ماتریس ها را تولید می کند که به سه نمایش کاهش ناپذیر منجر می شود. نمایش یک مؤلفه ایی که یک نمایش بدیهی است، نمایش ۵ مؤلفه ایی که برای بوزون های اسپین صفر و نمایش ده مؤلفه ایی که برای بوزون های اسپین ۱ می باشد. در سال های اخیر رویکرد های نسبیتی کاملاً موفقی در توصیف داده های پراکندگی پروتون- هسته ارائه شده است بخصوص معادله دیراک که در تحلیل های پدیده شناسی بسیار معتبر بوده است یکی از برتری های بررسی این معادلات نسبیتی با روش های غیر نسبیتی استاندارد در تحقیقات هسته ایی می باشد. بهترین کاندید برای این منظور دوترون است. به علت قید کمی که ساختار آن پیشنهاد می کند پراکندگی دوترون- هسته ضرورتاً می تواند در جملات پراکندگی هسته- هسته آزاد توصیف شود. از این رو برای مطالعه رفتار نسبیتی دوترون- هسته می توان از فرمالیزم دی-کی-پی استفاده کرد.

معادله دی-کی-پی در فضا زمان مینکوفسکی در غیاب پتانسیل برای بوزون های با اسپین صفر و یک عبارت است از [۹۰-۹۲]

$$[i\beta^\mu \nabla_\mu - M] \Psi(r, t) = 0. \quad (1.4)$$

که β^μ در روابط جبری زیر صدق می کند:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\mu + g^{\lambda\nu} \beta^\mu.$$

بطوری که g^{ij} متریک فضا زمان تخت می باشد

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) \quad (2.4)$$

$$(g^{\mu\nu})^2 = 1$$

β^μ ها ماتریس های دی-کی-پی هستند که برای ذرات با اسپین صفر این ماتریس ها به شکل زیر نمایش داده می شوند.

$$\beta^\circ = \begin{pmatrix} \theta & \vec{\rho} \\ \vec{\rho}^T & 0 \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \vec{\rho} & 0 \\ -\vec{\rho}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

$$\circ = \circ_{3 \times 3}, \vec{\rho} = \circ_{2 \times 2}, \vec{\rho}^T = \circ_{2 \times 3}, \theta = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix},$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}.$$

برای ذرات با اسپین یک ماتریس های β بفرم زیر می باشند

$$\beta^\circ = \begin{pmatrix} \circ & \vec{\rho} & \vec{\rho} & \vec{\rho} \\ \vec{\rho}^T & \circ & I & \circ \\ \vec{\rho}^T & I & \circ & \circ \\ \vec{\rho}^T & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \circ & \vec{\rho} & e_i & \vec{\rho} \\ \vec{\rho}^T & \circ & \circ & -iS_i \\ -e_i^T & \circ & \circ & \circ \\ \vec{\rho}^T & -iS_i & \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

بطوری که I و $\circ$ به ترتیب ماتریس های واحد و $\circ_{3 \times 3}$ می باشند. S_i ها ماتریس های 3×3 هستند و $(S_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$ و e_i ماتریس های 1×3 هستند و به این صورت تعریف می شوند

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \circ & 1 & \circ \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & 1 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

۱.۲.۴ معادله پیوستگی در نظریه دی-کی-پی

به منظور بدست آوردن معادله پیوستگی ابتدا مزدوج مختلط معادله دی-کی-پی را بدست می آوریم

$$\{[i\beta^\mu \partial_\mu - M] \Psi\}^\dagger = \circ. \quad (6.4)$$

$$-i\partial_\mu \Psi^\dagger \beta^{\mu\dagger} - M\Psi^\dagger = \circ \quad (7.4)$$

$$i\partial_\mu \Psi^\dagger \eta^\circ \beta^\mu \eta^\circ + M\Psi^\dagger = \circ \quad (8.4)$$

با ضرب معادله (۸.۴) در η° داریم

$$i\partial_\mu \Psi^\dagger \eta^\circ \beta^\mu \eta^\circ \eta^\circ + M\Psi^\dagger \eta^\circ = \circ \quad (9.4)$$

$$i\partial_\mu \Psi^\dagger \eta^\circ \beta^\mu + M\Psi^\dagger \eta^\circ = \circ \quad (10.4)$$

اسپینور الحاقی به صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \eta^\circ \quad (11.4)$$

معادله مزدوج دی-کی-پی عبارت است از

$$i\partial_\mu \bar{\Psi} \beta^\mu + M \bar{\Psi} = 0 \quad (12.4)$$

از ضرب Ψ و $\bar{\Psi}$ در معادلات (۱۲.۴) داریم

$$i\bar{\Psi} \beta^\mu \partial_\mu \Psi - M \bar{\Psi} \Psi = 0 \quad (13.4)$$

$$i\bar{\Psi} \beta^\mu \partial_\mu \Psi + M \bar{\Psi} \Psi = 0 \quad (14.4)$$

با جمع کردن دو رابطه بالا داریم

$$i\bar{\Psi} \beta^\mu \partial_\mu \Psi + i\bar{\Psi} \beta^\mu \partial_\mu \Psi = 0 \quad (15.4)$$

به عبارت دیگر

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \beta^\mu \Psi) = 0 \quad (16.4)$$

چهار بردار چگالی جریان عبارت است از

$$J^\mu \equiv \frac{1}{c} (\bar{\Psi} \beta^\mu \Psi)$$

$$J^\circ \equiv \frac{1}{c} (\bar{\Psi} \beta^\circ \Psi) \equiv \rho \quad (17.4)$$

$$J^i \equiv \frac{1}{c} (\bar{\Psi} \beta^i \Psi)$$

از رابطه (۱۷.۴) می توان نوشت

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (18.4)$$

این معادله پایستگی چگالی جریان است مؤلفه صفر چگالی جریان به عنوان چگالی بار تفسیر می شود.

۳.۴ بوزون های با اسپین ۰ و ۱ در فضا زمان خمیده

معادله دی-کی-پی رای یک بوزن اسکالر در یک فضای زمان خمیده و با برهم کنش اسکالر را در نظر می گیریم.

$$[i\beta^\mu \nabla_\mu - (M + U(r))] \Psi(r, t) = 0. \quad (19.4)$$

در واحد های انتخابی $c = \hbar = 1$ و مشتق هم وردا بصورت

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu. \quad (20.4)$$

می باشد. M جرم بوزون و U پتانسیل است که در اینجا بفرم خطی انتخاب شده است. اتصالات آفین Γ_μ از طریق روابط زیر بدست می آیند.

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} [\beta^a, \beta^b], \quad (21.4)$$

بطوری که

$$\beta^\mu = e_a^\mu \beta^a \quad (22.4)$$

ماتریس های کمر هستند و از روابط زیر پیروی می کنند:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\mu + g^{\lambda\nu} \beta^\mu.$$

پایستگی چهار بردار جریان از رابطه زیر بدست می آید

$$J^\mu = \frac{1}{2} \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi,$$

و قانون پایستگی برای J^μ بفرم زیر است:

$$\nabla_\mu J^\mu + \frac{i}{2} \bar{\Psi} (U - \eta^\circ U^\dagger \eta^\circ) \Psi = \frac{1}{2} \bar{\Psi} (\nabla_\mu \beta^\mu) \Psi \quad (23.4)$$

اسپینور الحاقی $\bar{\Psi}$ بصورت $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta^\circ$ تعریف می شود که $\eta^\circ = 2\beta^\circ \beta^\circ - 1$ ضمن اینکه $(\eta^\circ \beta^\mu)^\dagger = \eta^\circ \beta^\mu$ وجود فاکتور $\frac{1}{2}$ که در $\bar{\Psi} \beta^\mu \Psi$ ضرب شده است برای قانون پایستگی جریان مهم نیست ضمن اینکه تضمین می کند که چگالی بار با آنچه که در نظریه کلاین گوردن و محدوده غیر نسبیتی آن استفاده شده است سازگار است. بدین ترتیب اگر U نسبت به η° هرمیتی باشد و ماتریس های بتا در فضای خمیده بصورت هموردا ثابت باشند آنگاه چهار بردار جریان بقا دارد اگر

$$\nabla_\mu \beta^\mu = 0. \quad (24.4)$$

۱.۳.۴ بوزون های اسکالر در چارچوب مختصات چرخان

فضا زمان ریسمان کیهانی با چگالی جرم خطی μ توسط المان طول زیر توصیف شده است

$$ds^2 = -dT^2 + dR^2 + \alpha^2 R^2 d\phi^2 + dZ^2, \quad (25.4)$$

در این رابطه $\alpha = 1 - 4\mu$ زاویه کاستی و در محدوده $[0, 1]$ می باشد. چارچوب چرخان با استفاده از تبدیل مختصات زیر بدست می آید

$$T = t, R = r, \phi = \omega t + \varphi, Z = z, \quad (26.4)$$

ω سرعت زاویه ای چارچوب چرخان است. به این ترتیب المان طول دستگاه چرخان معادله (25.4) بصورت زیر در می آید [93-95]

$$ds^2 = -(1 - \omega^2 \alpha^2 r^2) dt^2 + 2\omega \alpha^2 r^2 d\varphi dt + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (27.4)$$

این معادله پس زمینه ریسمان کیهانی را در یک قاب در حال چرخش توصیف می کند. در این معادله $0 < r < r_0$ بطوری که $r_0 = 1/\alpha\omega$ ، و برای $r < r_0$ ، متناظر با یک ذره در خارج از مخروط خط می باشد. از این رو هندسه بالا معادل با پتانسیل محدود کننده دیواره سخت^۲ است به این صورت که تابع موج وقتی r به r_0 نزدیک می شود ناپدید می شود. همچنین این اتفاق به دو دسته از راه حل ها منجر می شود: ۱: $\alpha\omega$ دلخواه اما متناهی است ۲: $\alpha\omega \ll 1$. در ادامه ماتریس های 5×5 را بصورت زیر انتخاب می کنیم.

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \vec{\tau} \\ -\vec{\tau}^T & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (28.4)$$

ماتریس های e_a^μ که معرف تتراد است به فرم زیر انتخاب می شود [96]

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-\rho^2} & 0 & \omega\alpha r/\sqrt{1-\rho^2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-\rho^2}/\alpha r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho = \omega\alpha r. \quad (29.4)$$

^۲hard-wall confining potential

انتخاب می شود. با توجه به فرم انتخابی برای تتراد (۱۴۲.۴) از معادله (۱۴۰.۴) فرم ماتریس های بتا در فضای خمیده را بدست می آوریم.

$$\beta^{\circ} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(\beta^{\circ} + \omega\alpha r\beta^{\bar{2}}), \quad (130.4)$$

$$\beta^r = \beta^{\bar{1}}, \quad (30.4)$$

$$\beta^{\varphi} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\alpha r}\beta^{\bar{2}}, \quad (ج30.4)$$

$$\beta^z = \beta^{\bar{3}}, \quad (د30.4)$$

اتصال دهنده های اسپینی بفرم زیر بدست می آیند.

$$\Gamma_{\circ} = \frac{\omega\alpha}{\sqrt{1-\rho^2}}(\omega\alpha r[\beta^{\circ}, \beta^{\bar{1}}] - [\beta^{\bar{1}}, \beta^{\bar{2}}]), \quad (131.4)$$

$$\Gamma_r = \frac{-\omega\alpha}{1-\rho^2}[\beta^{\circ}, \beta^{\bar{2}}], \quad (ب31.4)$$

$$\Gamma_{\varphi} = \frac{\Gamma_{\circ}}{\omega}. \quad (ج31.4)$$

۴.۴ نوسانگر دی-کی-پی در بستر ریسمان کیهانی با حضور برهم کنش اسکالر خطی

نوسانگر دی-کی-پی را طریق جایگزینی جفت شدگی غیر کمینه^۳ زیر معرفی می کنیم [۹۷]

$$\frac{1}{i}\vec{\nabla}_{\alpha} \rightarrow \frac{1}{i}\vec{\nabla}_{\alpha} - iM\varpi\eta_{\circ}\vec{r} \quad (32.4)$$

فقط مولفه شعاعی را در جفت شدگی غیر کمینه نظر می گیریم. از آنجا برهمکنش مستقل از زمان است می توان نوشت $\Psi(r, t) = \Phi(r) \exp(-iEt)$ که E انرژی بوزون های اسکالر است. اسپینور های پنج مولفه ای دی-کی-پی را بصورت $\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)$ می نویسیم به این ترتیب معادله (۱۹.۴) منجر به پنج معادله زیر می شود:

$$-(M+U)\Phi_1 + \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}E\Phi_2 - i\left(\partial_r - M\varpi r + \frac{1}{r}\right)\Phi_3 - \left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\omega\alpha rE + i\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\alpha r}\partial_{\varphi}\right)\Phi_4 - i\partial_z\Phi_5 = 0, \quad (133.4)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}E\Phi_1 - (M+U)\Phi_2 = 0, \quad (ب33.4)$$

$$i(\partial_r + M\varpi r)\Phi_1 - (M+U)\Phi_3 = 0, \quad (ج33.4)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}E\omega\alpha r + i\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\alpha r}\partial_{\varphi}\right)\Phi_1 - (M+U)\Phi_4 = 0, \quad (د33.4)$$

$$i\partial_z\Phi_1 - (M+U)\Phi_5 = 0. \quad (ه33.4)$$

^۳non-minimal coupling

با فرض $\Phi_1 \propto e^{im\varphi} e^{ikz} F(r)$ که m عدد کوانتومی مغناطیسی و k عدد موج است. به این ترتیب معادله حرکت زیر را برای Φ_1 ، مولفه اول اسپینور دی-کی-پی بدست می آوریم.

$$\left[\partial_r^2 + \left(\frac{-\partial_r U}{(M+U)} + \frac{1}{r} \right) \partial_r - \frac{\partial_r U}{(M+U)} (M\varpi r) - \frac{1-(\omega\alpha)^2}{\alpha^2 r^2} m^2 + 2\omega Em - k^2 - (M+U)^2 + E^2 + 2\varpi M - M^2 \varpi^2 r^2 \right] F(r) = 0. \quad (34.4)$$

با فرض $F(r)$ بصورت

$$F(r) = (M+U)^{1/2} r^{-1/2} R_{n,\ell}(r). \quad (35.4)$$

و در نظر گرفتن پتانسیل اسکالر بصورت تابعی از r بفرم:

$$U(r) = qr.$$

معادله (34.4) بفرم زیر درمی آید:

$$R_{n,\ell}''(r) + \left[\frac{1/4 - m^2 \alpha}{r^2} + \frac{q}{4Mr} - 2Mqr - (q^2 + M^2 \varpi^2) r^2 - \frac{3q^2}{4(M+qr)^2} + \frac{-q^2 + 2M^2 \varpi}{4M(M+qr)} + m_\alpha^2 (\omega\alpha)^2 + M\varpi + \kappa^2 \right] R_{n,\ell}(r) = 0, \quad (36.4)$$

که $m_\alpha = \frac{m}{\alpha}$ ، $\kappa^2 = E^2 - k^2 - M^2 + 2Em\omega$ ، به منظور حل معادله (36.4) فرض می کنیم

$$R_{n,\ell}(r) = f_n(r) e^{g_\ell(r)}, \quad (37.4)$$

که

$$f_n(r) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ \prod_{i=1}^n (r - \alpha_i^n) & n \geq 1, \end{cases} \quad (38.4)$$

و $g_\ell(r)$ از رابطه زیر معرفی می شود

$$g_\ell = b_1 r + b_2 r^2 + b_3 \ln(r) + b_4 \ln(M+qr). \quad (39.4)$$

برای حالت های بدون ریشه، $n = 0$ ، داریم $R_{0,\ell}(r) = e^{g_\ell(r)}$ به این ترتیب

$$R_{0,\ell}''(r) + (-g_\ell'' - g_\ell'^2) R_{0,\ell}(r) = 0. \quad (40.4)$$

پس معادله (40.4) بصورت زیر نوشته می شود

$$R_{0,\ell}''(r) + \left[-b_1^2 - 2b_2 - 4b_2 b_3 - 4b_2 b_4 - \frac{b_3(b_3-1)}{r^2} - \frac{2(Mb_1 b_3 + b_3 b_4 q)}{Mr} - 4b_1 b_2 r - 4b_2^2 r^2 - \frac{b_4(b_4-1)q^2}{(M+qr)^2} + \frac{2(2b_2 b_4 M^2 - b_1 b_4 Mq + b_3 b_4 q^2)}{M(M+qr)} \right] R_{0,\ell}(r) = 0. \quad (41.4)$$

$$\begin{aligned} m_\alpha^2(\omega\alpha)^2 + M\varpi + \kappa^2 + b_1^2 + 2b_2 + 4b_2b_3 + 4b_2b_4 &= 0, \\ b_3(b_3 - 1) + \frac{1/4 - m_\alpha^2}{r^2} &= 0, \\ \frac{2(Mb_1b_3 + b_3b_4q)}{M} + \frac{q}{4M} &= 0 \\ 4b_1b_2 - 2Mq &= 0, \\ 4b_2^2 - (q^2 + M^2\varpi^2) &= 0, \\ b_4(b_4 - 1) - \frac{3}{4} &= 0, \\ 2(2b_2b_4M^2 - b_1b_4Mq + b_3b_4q^2) + q^2 - 2M^2\varpi &= 0. \end{aligned} \quad (42.4)$$

با حل معادله (۴۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} b_2 &= -\frac{1}{4}\sqrt{q^2 + M^2\varpi^2} \rightarrow b_1 = -\frac{Mq}{\sqrt{q^2 + M^2\varpi^2}}, \\ b_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{q^2 + M^2\varpi^2} \rightarrow b_1 = \frac{Mq}{\sqrt{q^2 + M^2\varpi^2}}, \\ b_4 &= -\frac{1}{4}, b_4 = \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (43.4)$$

همان طور که در (۲۵.۴) اشاره شد پارامتر α در فاصله $(0, 1]$ می باشد که نشان دهنده ی انحنای مثبت و زاویه ی کاستی است که مربوط به فضا زمان مخروطی است. از طرف دیگر $\alpha > 1$ نشان دهنده انحنای منفی و مربوط به فضا زمان زین مانند است. در نهایت $\alpha = 1$ متناظر فضا زمان تخت است. در اینجا ما بر فضای زمان مخروطی تمرکز می کنیم. برای به دست آوردن یک تابع موج فیزیکی که در حد $\alpha \rightarrow 0$ برای مقادیر منفی m واگرا نشود می توان جواب را متناسب با $r^{|\frac{m}{\alpha}| + \frac{1}{4}}$ در نظر گرفت. به این ترتیب به منظور داشتن حل فیزیکی قابل قبول پارامتر b_3 در معادله (۴۱.۴) بصورت $|\frac{m}{\alpha}| + \frac{1}{4}$ تعیین می شود.

همانطور که در بخش قبل ذکر شد رفتار عجیب این پس زمینه این است که در محدوده $0 < r < r_0$ است، که $r_0 = 1/\alpha\omega$ بطوری که دو راه حل مختلف را با توجه به مقدار $\omega\alpha$ که متناهی باشد و دلخواه یا بسیار کوچکتر از یک ارائه می کند. نتایج به دو دسته تقسیم می شود: $\alpha\omega \ll 1$ دلخواه و $\alpha\omega \gg 1$ در ادامه این دو دسته راه حل برای حالت های فاقد ریشه ($n = 0$) و با یک ریشه ($n = 1$) را بررسی می کنیم. در هر دو مورد قید صفر شدن اسپینور دی-کی-پی در r_0 را لحاظ می کنیم.

۵.۴ حل معادله دی-کی-پی برای حالت های برانگیخته اول و دوم با $\alpha\omega$ دلخواه

در این قسمت اول به حل معادله دی-کی-پی بدون در نظر گرفتن ترم نوسانگر می پردازیم
یعنی در معادله (۳۶.۴): $\varpi = 0$

$$R_{n,\ell}''(r) + \left[\frac{1/4 - m_\alpha^2}{r^2} + \frac{q}{2Mr} - 2Mqr - q^2 r^2 - \frac{q^2}{4(M+qr)^2} - \frac{q^2}{2M(M+qr)} + m_\alpha^2(\omega\alpha)^2 + \kappa^2 \right] R_{n,\ell}(r) = 0, \quad (44.4)$$

برای حالت برانگیخته اول، $n = 0$ ، با مقایسه معادلات (۴۴.۴) و (۴۱.۴) داریم

$$\begin{aligned} m_\alpha^2(\omega\alpha)^2 + \kappa^2 + b_1^2 + 2b_2 + 4b_2b_3 + 4b_2b_4 &= 0, \\ b_3(b_3 - 1) + 1/4 - m_\alpha^2 &= 0, \\ 4(Mb_1b_3 + b_3b_4q) + q &= 0, \\ 4b_1b_2 - 2Mq &= 0, \\ 4b_2^2 - q^2 &= 0, \\ b_4(b_4 - 1) - 3 &= 0, \\ 4(2b_2b_4M^2 - b_1b_4Mq + b_3b_4q^2) + q^2 &= 0. \end{aligned} \quad (45.4)$$

با استفاده از این دسته معادلات پارامترهای زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} b_2 &= +\frac{q}{4} \rightarrow b_1 = +M, \\ b_2 &= -\frac{q}{4} \rightarrow b_1 = -M, \\ b_3 &= \left| \frac{m}{\alpha} \right| + \frac{1}{4}, \\ b_4 &= -\frac{1}{4}, \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (46.4)$$

به منظور بدست آوردن تابع موج، جواب به ازای $0 < r < r_0$ می تواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\Phi_{0,\ell} = e^{im\varphi} e^{ikz} e^{b_1r + b_2r^2} r^{b_3} (M + qr)^{b_4}. \quad (47.4)$$

با توجه به آنچه که در قسمت قبل به آن اشاره شد به دلیل قیدی که روی مختصه شعاعی وجود داشت یک حل فیزیکی تنها زمانی ممکن است که تابع موج در $r = r_0 = 1/\alpha\omega$ صفر باشد،

$$R_{0,\ell}(r_0) = R_{0,\ell}(1/\omega\alpha_0) = e^{g_\ell(r)} = 0.$$

این قید به نتیجه زیر منجر می شود:

$$M + qr_0 = 0. \quad (48.4)$$

به منظور حل معادله (۴۴.۴) برای برانگیختگی اول، $n = 1$ ، فرض می کنیم

$$R_{n=1,l}(r) = f_1(r)e^{g_l(r)}.$$

در این حالت از معادله (۳۸.۴) داریم

$$f_1(r) = r - \alpha_1'. \quad (۴۹.۴)$$

به این ترتیب از معادله (۴۴.۴) برای حالت های تک ریشه، $n = 1$ ، داریم

$$R_{1,\ell}(r)'' - \left(\frac{2g_\ell'(r)}{r - \alpha_1'} + g_\ell''(r) \right) R_{1,\ell}(r) = 0. \quad (۵۰.۴)$$

با جایگذاری $g(r)$ در معادله (۵۰.۴) و مقایسه با (۴۴.۴)، داریم:

$$4b_2^2 - q^2 = 0, \quad (۵۱.۴)$$

$$b_3(1 - b_3) + (m_\alpha^2 - 1/4) = 0, \quad (۵۱.۴ب)$$

$$3Mq + 4b_4Mq - 4b_4^2Mq + 3\alpha_1'q^2 + 4\alpha_1'b_4q^2 - 4\alpha_1'b_4^2q^2 = 0, \quad (۵۱.۴ج)$$

$$(4b_1b_2 - 4\alpha_1'b_2^2 - 2Mq + \alpha_1'q^2) = 0, \quad (۵۱.۴د)$$

$$4b_2b_4M - 2b_1q + \alpha_1'b_1^2q + 2\alpha_1'b_2q - 2b_1b_3q + 4\alpha_1'b_2b_3q - 2b_1b_4q \quad (۵۱.۴ه)$$

$$+ 4\alpha_1'b_2b_4q + \alpha_1'\kappa^2q + \alpha_1'm_\alpha^2\omega^2q = 0, \quad (۵۱.۴و)$$

$$- 4m_\alpha^2M + M + 4b_3M - 8\alpha_1'b_1b_3M + 4b_3^2M - 2\alpha_1'q - 8\alpha_1'b_3b_4q = 0, \quad (۵۱.۴ز)$$

$$(b_1^2 + 6b_2 - 4\alpha_1'b_1b_2 + 4b_2b_3 + 4b_2b_4 + \kappa^2 + 2\alpha_1'Mq + m_\alpha^2\omega^2) = 0, \quad (۵۱.۴ح)$$

$$16b_2b_4M^2 - 8b_1b_4M^2q + 16\alpha_1'b_2b_4M^2q - Mq^2 + 4b_4Mq^2 - 8\alpha_1'b_1b_4Mq^2 \quad (۵۱.۴ط)$$

$$+ 8b_3b_4Mq^2 + 4b_4^2Mq^2 + 2\alpha_1'q^3 + 8\alpha_1'b_3b_4q^3 = 0. \quad (۵۱.۴ی)$$

از معادله (۵۱.۴) داریم

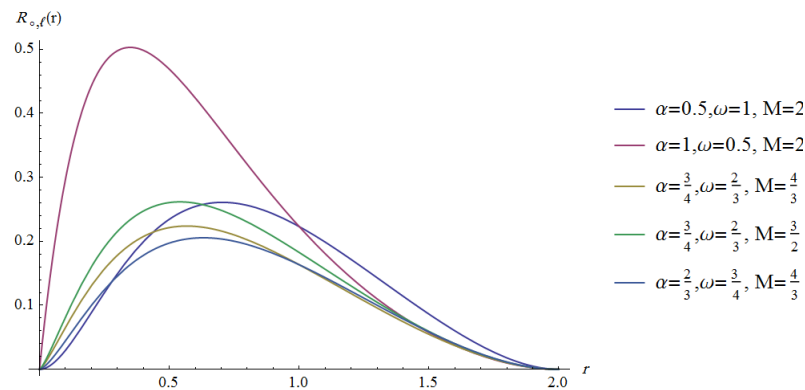
$$\begin{cases} b_2 = \frac{\pm q}{4} \rightarrow b_1 = M \\ b_2 = \frac{-q}{4} \rightarrow b_1 = -M \end{cases}, \begin{cases} b_3 = \left| \frac{m}{\alpha} \right| + \frac{1}{4} \\ b_4 = \frac{3}{4} \\ b_4 = \frac{-1}{4} \end{cases} \quad (۵۲.۴)$$

به این ترتیب به ازای $0 < r < r_0$ حل ما بصورت زیر در می آید [۹۹]

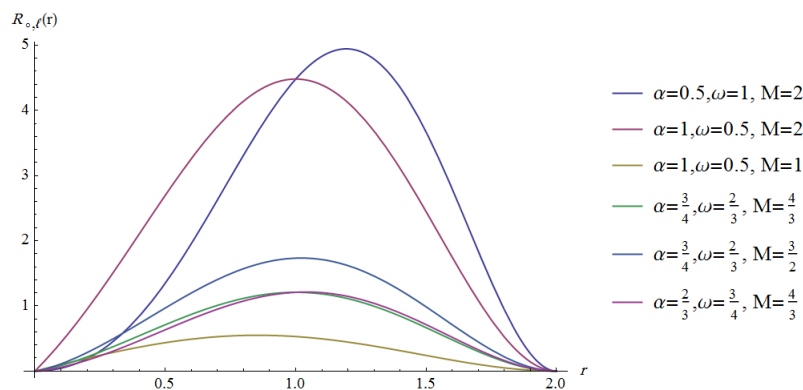
$$\Phi_{1,\ell} = (r - \alpha_1')e^{im\varphi}e^{ikz}e^{b_1r + b_2r^2}r^{b_3}(M + qr)^{b_4}. \quad (۵۳.۴)$$

قید صفر شدن اسپینور دی-کی-پی در r_0 دلالت دارد بر اینکه یا $M + qr_0 = 0$ و یا $r_0 - \alpha_1' = 0$ ، اما عبارت دوم برای حالت $n = 1$ به علت صفر شدن تابع موج در $r = 0$ غیر قابل قبول است، $\alpha_1' < r_0$ (در ریشه) و در r_0 (کره سخت) بر این دلالت دارد که باید داشته باشیم $r_0 \neq \alpha_1'$. حالت های بدون ریشه تنها با $b_4 = \frac{3}{4}; b_3 = \frac{2m+\alpha}{4\alpha}; b_2 = \frac{-q}{4}; b_1 = -M$ و یا

های ۱.۴ و ۲.۴ رسم شده است. هر دو شکل به ازای $m = k = 1$ ترسیم شده اند. در هر دو شکل شرایط قیدی یکسان است و بنابراین راه حل محدود به فاصله $0 \leq r \leq 2$ است. در حالت یک گره، α_1 باید یک پارامتر مثبت باشد. در معادله (۵۱.۴) تنها به ازای جواب فیزیکی داشته باشیم. ویژه توابع یک گره در شکل ۳.۴ بصورت تابعی از r با راه حل محدود شده به فاصله $0 \leq r \leq 1/5$ رسم شده است.



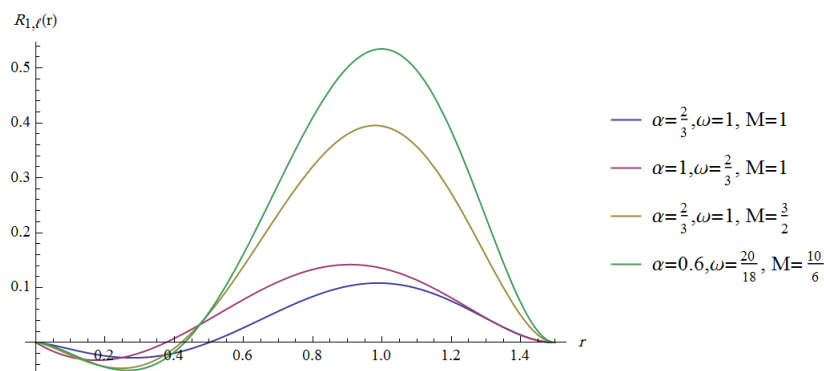
شکل ۱.۴: تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{r}; b_3 = \frac{2m+\alpha}{r\alpha}; b_4 = \frac{3}{r}$



شکل ۲.۴: تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = M, b_2 = \frac{q}{r}; b_3 = \frac{2m+\alpha}{r\alpha}; b_4 = \frac{3}{r}$

$\omega\alpha$	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵
$E_{o,\ell}$	-۵/۱۰۹۰	-۴/۰۱۰	-۳/۵۶۹۰	-۳/۳۲۶۶	-۳/۱۷۲۲
$\omega\alpha$	۵/۰۸۹۰	۳/۹۹	۳/۵۴۹۰	۳/۳۰۶۶	۳/۱۵۲۲
$E_{o,\ell}$	-۳/۰۶۵۰	-۲/۹۸۶۱	-۲/۹۲۵۴	-۲/۸۷۷۴	-۲/۸۳۸۴
$\omega\alpha$	۳/۰۴۵۰	۲/۹۸۶۱	۲/۹۰۵۴	۲/۸۵۷۴	۲/۸۳۸۴

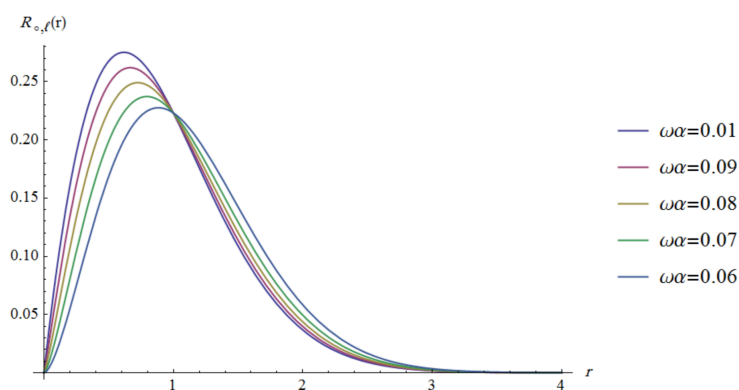
جدول ۱.۴: انرژی های بدون گره $b_4 = \frac{3}{4}$; $b_3 = \frac{2m+\alpha}{4\alpha}$; $b_2 = \frac{-q}{4}$; $b_1 = -M$



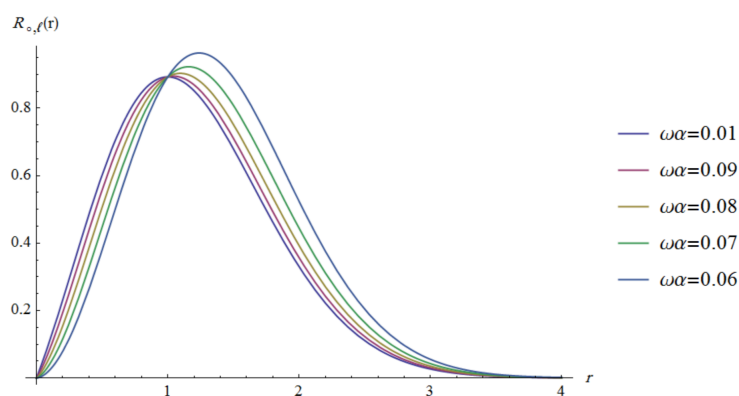
شکل ۳.۴: تابع موج حالت های تک گره به ازای پارامترهای $b_4 = \frac{3}{4}$, $b_1 = M$, $b_3 = \frac{2m+\alpha}{4\alpha}$

$\omega\alpha$	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵
$E_{o,\ell}$	-۴/۷۰۰۴	-۳/۴۷۴۱	-۲/۹۵۳۹	-۲/۶۵۵۷	-۲/۴۵۹۴
$\omega\alpha$	۴/۶۸۰۴	۳/۴۵۴۱	۲/۹۳۳۹	۲/۶۳۵۷	۲/۴۳۹۴
$E_{o,\ell}$	-۲/۳۱۹۴	-۲/۲۱۳۸	-۲/۱۳۱۳	-۲/۰۴۴۸	-۲/۰۱۰
$\omega\alpha$	۲/۲۹۹۴	۲/۱۹۳۸	۲/۱۱۱۳	۲/۰۴۴۸	۲/۹۹۰

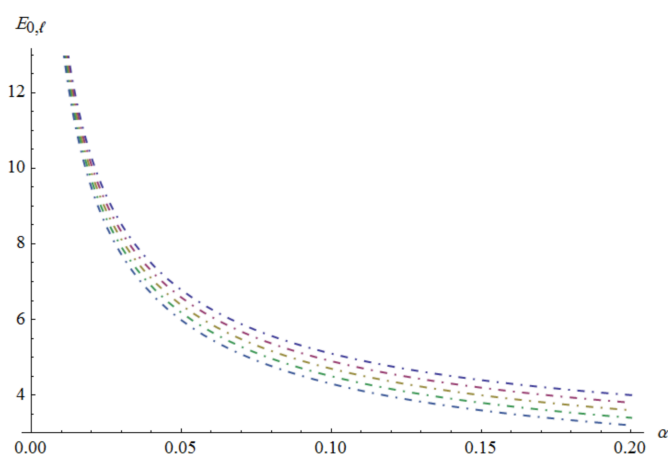
جدول ۲.۴: انرژی های بدون گره $b_4 = \frac{1}{4}$; $b_3 = \frac{2m+\alpha}{4\alpha}$; $b_2 = \frac{-q}{4}$; $b_1 = -M$ به ازای $\omega\alpha$ های مختلف



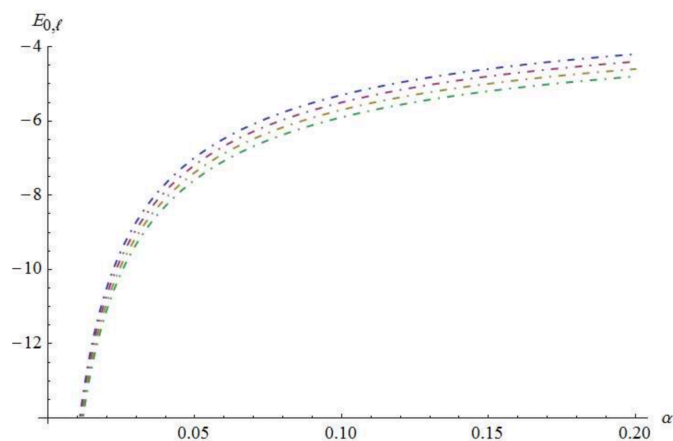
شکل ۴.۴: تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{r}; b_3 = \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{r}; b_4 = \frac{3}{r}$



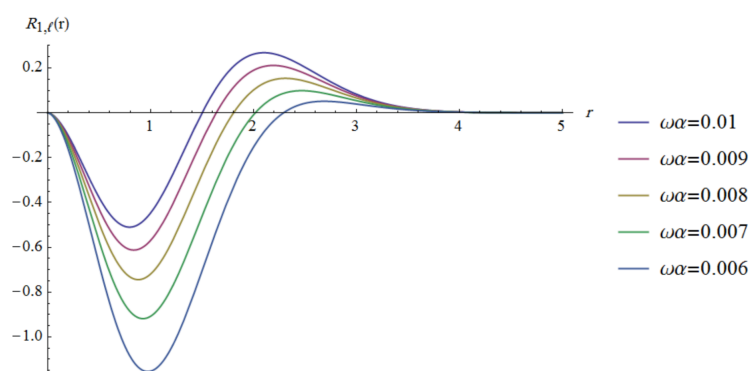
شکل ۵.۴: تابع موج به ازای پارامترهای $b_1 = -M, b_2 = \frac{-q}{r}; b_3 = \frac{m}{\alpha} + \frac{1}{r}; b_4 = \frac{-1}{r}$



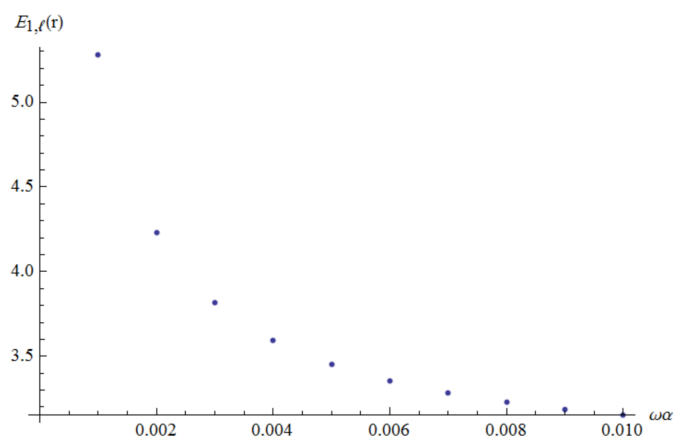
شکل ۶.۴: جواب های انرژی مثبت به صورت تابعی از α



شکل ۷.۴: جواب های انرژی منفی به صورت تابعی از α



شکل ۸.۴: توابع موج حالت تک گره به صورت تابعی از $\omega\alpha$



شکل ۹.۴: جواب های انرژی مثبت به صورت تابعی از $\omega\alpha$ برای حالت تک گره

۶.۴ حل معادله دی-کی-پی برای حالت های بدون گره

و تک گره در حالت حدی $\omega\alpha \ll 1, r_0 \rightarrow \infty$

در ادامه، تغییرات اصلی شامل شرایط مرزی و محدودیتی است که اسپینور دی-کی-پی در دیوار r_0 صفر است. هنگامی که $r_0 \rightarrow \infty$ را در محدوده ای که $\omega\alpha \ll 1$ ، در نظر می گیریم، معادله (۴۴.۴) به فرم زیر بازنویسی می شود

$$R_{n,\ell}''(r) + \left[\frac{1/4 - m_\alpha^2}{r^2} + \frac{q}{4Mr} - 2Mqr - q^2 r^2 - \frac{2q^2}{4(M+qr)^2} - \frac{q^2}{4M(M+qr)} + \kappa^2 \right] R_{n,\ell}(r) = 0, \\ \kappa^2 = E^2 - K^2 - M^2 + 2Em\omega, \quad m_\alpha = \frac{m}{\alpha}. \quad (54.4)$$

برای حالت های بدون گره، با $n = 0$ ، فرم معادلات (۵۱.۴) را به صورت زیر بازمی یابیم

$$\begin{aligned} \kappa^2 + b_1^2 + 2b_2 + 4b_2b_3 + 4b_2b_4 &= 0, \\ b_3(b_3 - 1) + 1/4 - m_\alpha^2 &= 0, \\ 4(Mb_1b_3 + b_3b_4q) + q &= 0, \\ 4b_1b_2 - 2Mq &= 0, \\ 4b_2^2 - q^2 &= 0, \\ b_4(b_4 - 1) - 3 &= 0, \\ 4(2b_2b_4M^2 - b_1b_4Mq + b_3b_4q^2) + q^2 &= 0. \end{aligned} \quad (55.4)$$

این معادله منجر به پارامترهای مشابه با معادله (۵۲.۴) می شود. بنابراین راه حل برای $0 < r < \infty$ برای حالت های بدون گره می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\Phi_{0,\ell} = e^{im\varphi} e^{ikz} e^{b_1r + b_2r^2} r^{b_3} (M + qr)^{b_4}. \quad (56.4)$$

حالت های فیزیکی تنها زمانی مشخص می شود که پارامترها بصورت: $b_1 = -M, b_2 =$ یا $b_2 = -\frac{q}{4}, b_3 = \left| \frac{m}{\alpha} \right| + \frac{1}{4}, b_4 = -\frac{1}{4}$ باشند. برای حالت های یک گره، نتایج همان معادله (۵۱.۴) و (۵۲.۴) با در نظر گرفتن $\alpha\omega \ll 1$ می باشد. به این ترتیب راه حل برای $0 < r < \infty$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\Phi_{1,\ell} = (r - \alpha_1) e^{im\varphi} e^{ikz} e^{b_1r + b_2r^2} r^{b_3} (M + qr)^{b_4}. \quad (57.4)$$

برای حالت های یک گره، متوجه می شویم که فقط به ازای: $b_2 = -\frac{q}{4}, b_1 = -M, b_3 = \frac{2m+\alpha}{4\alpha}$ و $b_4 = \frac{3}{4}$ می توانیم یک پارامتر مثبت α_1 و در نتیجه یک حالت فیزیکی داشته باشیم.

$\omega\alpha$	۰/۰۰۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۳	۰/۰۰۴	۰/۰۰۵
α_1'	۱۰/۹۰۹۱	۵/۸۳۳۳	۴/۱۰۲۵	۳/۲۱۴۲	۲/۶۶۶۶
$E_{\circ,\ell}$	-۵/۳۰۱۵	-۴/۲۵۲۶	-۳/۸۳۹۷	-۳/۶۱۵۵	-۳/۴۷۴۲
	۵/۲۸۱۵	۴/۲۳۲۶	۳/۸۱۹۷	۳/۵۹۵۵	۳/۴۵۴۱
$\omega\alpha$	۰/۰۰۶	۰/۰۰۷	۰/۰۰۸	۰/۰۰۹	۰/۰۱
α_1'	۲/۲۹۱۶	۲/۰۱۶۸	۱/۸۰۵۵	۱/۶۳۷۴	۱/۵
$E_{\circ,\ell}$	-۳/۳۷۶۵	-۳/۳۰۵۰	-۳/۲۵۰۳۹	-۳/۲۰۷۲	-۳/۱۷۲۲
	۳/۳۵۶۴	۳/۲۸۵۰	۳/۲۳۰۳۹	۳/۱۸۷۲	۳/۱۵۲۲

جدول ۳.۴: انرژی های تک گره برای $\omega\alpha$ های مختلف

۷.۴ نوسانگر دی-کی-پی در حضور برهمکنش خطی با متریک استوانه ایی

فضا زمان ریسمان کیهانی با یک میدان مغناطیسی داخلی در مختصات استوانه ای توسط المان خطی زیر در دستگاه استوانه ایی توصیف شده است

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2, \quad (58.4)$$

که در آن $-\infty < z < \infty$ ، $\rho \geq 0$ و $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. پارامتر زاویه ای در بازه $[0, 1]$ می باشد و از طریق رابطه $\alpha = 1 - 4\mu$ به چگالی خطی جرم ریسمان مرتبط می باشد. از نقطه نظر هندسی متریک (۵۸.۴) توصیف کننده فضا زمان مینکوفسکی با تکینگی مخروطی است. از آنجایی که ما با مختصات منحنی کار می کنیم در نتیجه فرمالیسم ریاضی که برای توصیف معادله دی-کی-پی بکار می بریم باید در فضای خمیده نوشته شود. از سوی دیگر، این هندسه دارای یک تکینگی مخروطی است که توسط تانسور انحنا $R_{r,\varphi}^{r,\varphi} = \frac{1-\alpha}{4\alpha} \delta_2(\vec{r})$ نشان داده شده است که در آن $\delta_2(\vec{r})$ تابع دلتای دوبعدی است. این رفتار تانسور انحنا به عنوان تکینگی مخروطی تعیین می شود. تکینگی مخروطی منجر به انحنا در محور رشته کیهانی می شود که این تکینگی در همه نقاط دیگر برابر صفر است. این پیکربندی یک تکینگی مخروطی را توصیف می کند. معادله دی-کی-پی برای یک بوزون آزاد در فضای زمان منحنی بوسیله رابطه زیر توصیف می شود که در آن $(C = \hbar = 1)$

$$(i\beta^\mu \nabla_\mu - M)\psi = 0. \quad (59.4)$$

فرم هم وردای مشتق از رابطه

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu(x), \quad (60.4)$$

که در آن اتصالات آفین Γ_μ ، از طریق رابطه

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{r} \omega_{\mu ab} [\beta^a, \beta^b]. \quad (61.4)$$

داده می شود. ماتریس های $\beta^a(x)$ ماتریس های استاندارد کمر در فضا زمان مینکوفسکی می باشند. به لحاظ مختصات فضا زمان تخت مینکوفسکی جبر حاکم بر β^a دارای سه نمایش تقلیل ناپذیر است: نمایش 1° بعدی مربوط به ذرات اسپین یک، نمایش 5° بعدی برای ذرات با اسپین صفر و نمایش یک بعدی می باشد. در نمایش اسپین صفر، β^a ماتریسهای 5×5 می باشند و بصورت زیر تعیین می شوند

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (62.4)$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (63.4)$$

نشان $\omega_{\mu}^a{}_b$ دهنده اتصال دهنده های اسپینی می باشند.

$$\omega_{\mu}^a{}_b = e_a^\rho e_b^\nu \Gamma_{\mu\rho}^{\nu} - e_a^\nu \partial_\mu e_b^\nu. \quad (64.4)$$

مولفه های غیر صفر اتصال دهنده های اسپینی

$$\omega_\varphi^{12} = -\omega_\varphi^{21} = 1 - \alpha. \quad (65.4)$$

می باشند. با استفاده از ماتریس های تبدیل e_a^μ و $\bar{e}_\mu^a$ می توان چارچوب مرجع موضعی را توسط پایه های غیر مختصاتی ایجاد کرد. مولفه های غیر صفر $\bar{e}_\mu^a$ چارچوب مرجع موضعی ما را می سازند. با توجه به متریک (58.4) ماتریس های تبدیل e_a^μ و $\bar{e}_\mu^a$ به صورت زیر می باشند

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & \frac{-\sin \varphi}{\alpha r} & \frac{\cos \varphi}{\alpha r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_\mu^a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\alpha r \sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \alpha r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (66.4)$$

تتراد ها دستگاه مرجع محلی ما را ایجاد می کنند و در شرایط تعامل زیر صدق می کنند

$$\begin{aligned} e_a^\mu(x) e_\nu^a(x) &= \delta_\nu^\mu, \\ e_\mu^a(x) e_b^\mu(x) &= \delta_b^a. \end{aligned} \quad (67.4)$$

همچنین شرایط زیر برقرار می باشد

$$g_{\mu\nu}(x) = e_{\mu}^{(a)}(x) e_{\nu}^{(b)}(x) \eta_{ab}. \quad (68.4)$$

ماتریس های کمر در فضا زمان خمیده از طریق رابطه زیر به ماتریس های کمر در فضا زمان تخت مرتبط می شوند

$$\beta^{\mu}(x) = e_a^{\mu} \beta^a. \quad (69.4)$$

فرم صریح ماتریس های $\beta^{\mu}(x)$ در معادله (69.4) بصورت زیر است

$$\begin{aligned} \beta^t &= \beta^0 \\ \beta^r &= \beta^1 \\ \beta^{\varphi} &= -\omega \beta^0 + \frac{1}{r\eta} \beta^2 \\ \beta^z &= \beta^3 \end{aligned} \quad (70.4)$$

β^0 ، β^r و β^z فرم عام ماتریس های کمر در این فضا زمان می باشند.

۱.۷.۴ نوسانگر دی-کی-پی

به این منظور جایگزینی زیر را انجام می دهیم.

$$\partial_r \rightarrow \partial_r + M\omega r\eta^{\circ}, \quad (71.4)$$

ω فرکانس نوسانگر دی-کی-پی و $\eta^{\circ} = 1 - (\beta^0)^2$ می باشد. با در نظر گرفتن تنها مولفه های شعاعی داریم

$$[i\beta^0\partial_t + i\beta^r(\partial_r + M\omega r\eta^{\circ}) + i\beta^{\varphi}(\partial_{\varphi} - \Gamma_{\varphi}) + i\beta^z\partial_z - M] \Psi(t, r, \varphi, z) = 0. \quad (72.4)$$

از آنجا که برهم کنش مستقل از زمان است می توان اسپینور ها را به صورت زیر نوشت

$$\Psi(t, r, \varphi, z) = e^{-i(Et - m\varphi - k_z z)} \Psi(r), \quad (73.4)$$

E انرژی بوزون ها، m عدد کوانتومی گشتاور زاویه ایی، k_z ویژه مقادیر اندازه حرکت در جهت z می باشد. با در نظر گرفتن اسپینور پنج مولفه ایی بصورت $\Psi(r) = (\psi_1(r), \dots, \psi_5(r))^T$ معادله

دی-کی-پی بوزون های اسکالر بصورت زیر می باشد.

$$-m \sin \varphi \psi_1 - \alpha r M \psi_3 - i \alpha r \cos \varphi [M \omega r \psi_1 + \psi'_1] = 0, \quad (\bar{174.4})$$

$$m \cos \varphi \psi_1 - \alpha r M \psi_4 - i \alpha r \sin \varphi [M \omega r \psi_1 + \psi'_1] = 0, \quad (\bar{74.4})$$

$$k_z \psi_1 - M \psi_5 = 0, \quad (\bar{74.4})$$

$$E \psi_1 - M \psi_2 = 0, \quad (\bar{574.4})$$

$$\alpha r \left[-M \psi_1 + E \psi_2 + k_z \psi_5 + i \cos \varphi (1 - \alpha + \alpha M \omega r^2) \psi_3 - i m \psi_4 - \alpha r \psi'_3 \right]$$

$$+ i \sin \varphi \left[i m \psi_3 + (1 - \alpha + \alpha M \omega r^2) \psi_4 - r \alpha \psi'_4 \right] = 0.$$

با حل دستگاه معادلات بالا برحسب $\psi_1(r)$ داریم

$$\psi_2 = \frac{E \psi_1}{M}, \quad (\bar{175.4})$$

$$\psi_3 = \frac{-m \sin \varphi \psi_1 + i [-\alpha M \omega r^2 \cos \varphi \psi_1 - \alpha r \cos \varphi \psi'_1]}{\alpha r M}, \quad (\bar{75.4})$$

$$\psi_4 = \frac{m \cos(\varphi) \psi_1 + i [-\alpha M \omega r^2 \sin \varphi \psi_1 - r \alpha \sin \varphi \psi'_1]}{\alpha r M} \quad (\bar{75.4})$$

$$\psi_5 = \frac{k_z \psi_1}{M}. \quad (\bar{575.4})$$

$$(\bar{575.4})$$

با ترکیب نتایج بالا معادله حرکت مولفه اول اسپینور دی-کی-پی را بدست می آوریم

$$\psi''_1(r) + \frac{\alpha - 1}{\alpha r} \psi'_1(r) - \left(E^2 - M^2 + k_z^2 - \frac{(2\alpha - 1)M\omega}{\alpha} + \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} + M^2 \omega^2 r^2 \right) \psi_1(r) = 0. \quad (76.4)$$

اکنون برای حل معادله بالا تغییر متغیر $s = r^2$ را اعمال می کنیم، در نتیجه معادله (۷۶.۴) بفرم زیر در می آید

$$\psi''_1(s) + \frac{(2\alpha - 1)}{2\alpha s} \psi'_1(s) + \frac{1}{4s^2} (-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3) \psi_1(s) = 0, \quad (77.4)$$

که

$$\xi_1 = M^2 \omega^2, \quad (\bar{178.4})$$

$$\xi_2 = -E^2 - k_z^2 + M^2 + \frac{(2\alpha - 1)}{\alpha} M\omega, \quad (\bar{78.4})$$

$$\xi_3 = \frac{m^2}{\alpha^2}. \quad (\bar{78.4})$$

به این ترتیب تراز های انرژی نسبیتی از عبارت

$$\alpha_2 n - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0, \quad (79.4)$$

بدست می آید که در آن

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha - \frac{1}{2}, & \alpha_2 &= 0, & \alpha_3 &= 0, & \alpha_4 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - \alpha \right), & \alpha_5 &= 0, \\ \alpha_6 &= \xi_1, & \alpha_7 &= -\xi_2, & \alpha_8 &= \alpha_4^2 + \xi_3, & \alpha_9 &= \xi_1, & \alpha_{10} &= 1 + 2\sqrt{\alpha_8}, \\ \alpha_{11} &= 2\sqrt{\alpha_6}, & \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, & \alpha_{13} &= -\sqrt{\alpha_6}. \end{aligned}$$

در نهایت تابع موج مربوطه به صورت زیر می باشد

$$\psi_1(r) = N r^{2\alpha_{12}} e^{\alpha_{13} r^2} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11} r^2). \quad (80.4)$$

که در آن N ثابت نرمالیزاسیون است.

۲.۷.۴ حل نوسانگر دی-کی-پی در حضور برهم کنش خطی

اکنون به بررسی حالتی می پردازیم که در آن میدان دی-کی-پی با پتانسیل اسکالر $U(r)$ که از طریق جایگزینی $M \rightarrow M + U(r)$ معرفی می شود برهم کنش می کند. به این ترتیب معادله (۱۹.۴) بفرم زیر تغییر می کند

$$\{i\beta^0 \partial_t + i\beta^r (\partial_r + M\omega r \eta^0) + i\beta^\varphi (\partial_\varphi - \Gamma_\varphi) + i\beta^z \partial_z - [M + U(r)]\} \Psi(t, r, \varphi, z) = 0. \quad (81.4)$$

در اینجا پتانسیل را بفرم خطی در نظر می گیریم که به پتانسیل محدود کننده نیز معروف می باشد یعنی

$$U(r) = a r. \quad (82.4)$$

در این رابطه $1 > a > 0$ که $a = 1$ متناظر با محدود کنندگی بیشینه است. برای حل معادله (۸۱.۴) تغییر متغیر زیر را انجام می دهیم

$$\psi_1(r) = r^{\frac{1-\alpha}{2}} (M + a r)^{\frac{1}{2}} R_{n,m}(r). \quad (83.4)$$

با انجام این تغییر متغیر مشتق اول را حذف می کنیم

$$R''_{n,m}(r) + \left[-E^2 - k_z^2 + M \left(M + \omega - \frac{\omega}{\alpha} \right) + \frac{\alpha^2 - 4m^2 - 1}{4\alpha^2 r^2} - \frac{a(1-\alpha)}{2M\alpha r} + 2aMr + \right. \\ \left. (a^2 - M^2 \omega^2) r^2 - \frac{3a^2}{4(M+ar)^2} + \frac{a^2(1-\alpha) + 2M^3 \alpha \omega}{2M\alpha(M+ar)} \right] R_{n,m}(r) = 0. \quad (۸۴.۴)$$

در مرحله بعدی $R_{n,m}(r)$ را بصورت زیر در نظر می گیریم

$$R_{n,m}(r) = R_n(r) e^{g_m(r)}. \quad (۸۵.۴)$$

با توجه به نوع وابستگی معادله (۸۴.۴) به r $g_m(r)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$g_m(r) = b_1 r + b_2 r^2 + b_3 \log(r) + b_4 \log(M+ar). \quad (۸۶.۴)$$

ثوابت $b_1, \dots, b_4$ بر حسب پارامترهای فیزیکی $\alpha, a, \omega, M, m, k_z$ و E بدست خواهند آمد. بطور کلی برای یک n دلخواه حل این معادله مشکل است اما حل آن برای حالت های بدون گره $n=0$ ساده تر است. در این مورد $R_n(r) = 1$ در نتیجه داریم

$$R_{0,m}(r) = e^{g_m(r)}. \quad (۸۷.۴)$$

به این ترتیب از معادله (۸۷.۴) داریم

$$R''_{0,m}(r) + (-g''_m - g'_m{}^2) R_{0,m}(r) = 0. \quad (۸۸.۴)$$

با جایگذاری معادله (۸۶.۴) در (۸۸.۴) داریم

$$R''_{0,m}(r) + \left(-b_1^2 - 2b_2 - 4rb_1b_2 - 4b_2b_3 - 4b_2b_4 - 4b_2^2 r^2 + \frac{b_3 - b_3^2}{r^2} - \right. \\ \left. \frac{2Mb_1b_3 + 2ab_2b_4}{Mr} + \frac{a^2b_4 - a^2b_4^2}{(M+ar)^2} + \frac{4M^2b_2b_4 - 2Mab_1b_4 + 2a^2b_3b_4}{M(M+ar)} \right) R_{0,m}(r) = 0. \quad (۸۹.۴)$$

با مقایسه معادلات (۸۹.۴) و (۸۴.۴) به هفت معادله زیر می رسیم

$$-E^2 - k_z^2 + M(M + \omega - \frac{\omega}{\alpha}) + b_1^2 + 2b_2 + 4rb_1b_2 + 4b_2b_4 + 4b_2b_3 = 0, \quad (190.4)$$

$$-2ab_1b_4 + 4Mb_2b_4 + 2a^2b_3b_4 + \frac{a^2(-1 + \alpha)}{2M\alpha} - M^2\omega = 0, \quad (90.4 \text{ ب})$$

$$\frac{2ab_3b_4}{M} + 2b_1b_3 + \frac{a(-1 + \alpha)}{2M\alpha} = 0, \quad (90.4 \text{ ج})$$

$$\frac{-1 + \alpha^2 - 4m^2}{4\alpha^2} - b_3 + b_4^2 = 0, \quad (90.4 \text{ د})$$

$$(b_4 - b_4^2) + \frac{3}{4} = 0. \quad (90.4 \text{ ه})$$

$$4b_4^2 + (a^2 - M^2\omega^2) = 0 \quad (90.4 \text{ و})$$

$$4b_1b_2 + 2aM = 0. \quad (90.4 \text{ ز})$$

با حل این معادلات پارامترهای b_1, b_2, b_3 و b_4 و همچنین انرژی سیستم بدست می آیند.

$$\begin{aligned} b_1 &= \mp \frac{aM}{\sqrt{-a^2 + M^2\omega^2}}, \\ b_2 &= \pm \frac{1}{4} \sqrt{-a^2 + M^2\omega^2}, \\ b_3 &= \pm \frac{a^2 + \sqrt{a^2 + 4\alpha^2 m^2}}{2\alpha^2}, \\ b_4 &= \frac{1 \pm 2}{4}. \end{aligned} \quad (91.4)$$

همچنین انرژی سیستم بصورت زیر بدست می آید

$$E = \pm \left[-k_z^2 + M^2 + M\omega - \frac{M\omega}{\alpha} + b_1^2 + 2b_2 + 4b_1b_2 + 4b_2b_3 + 4b_2b_4 \right]^{1/2}. \quad (92.4)$$

در نهایت تابع موج نوسانگر دی-کی-پی برای حالت های بدون گره در حضور برهمکنش خطی بدست می آید

$$\Psi_{\circ, m}(t, r, \varphi, z) = N_{\circ, m} e^{i(kz + m\varphi - Et)} e^{b_1 r + b_2 r^2} r^{b_3 + \frac{1-\alpha}{4\alpha}} (M + ar)^{b_4 + \frac{1}{4}}, \quad (93.4)$$

$N_{\circ, m}$ ثابت نرمالیزاسیون است.

۸.۴ بوزون های اسکالر در چارچوب چرخان فرمی-واکر در بستر ریسمان کیهانی

در این قست به بررسی اثرات غیر اینرسی^۴ در فرم هموردای معادله دی-کی-پی در فضا زمان خمیده در بستر ریسمان کیهانی می پردازیم. محاسبات را در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی برداری انجام داده ایم و طیف انرژی را بدست آورده ایم.

اثرات غیر اینرسی که از یک چارچوب چرخشی بوجود می آیند، ما را در درک بهتر پدیده های فیزیکی یاری می کنند و همچنین مبانی ریاضی نظری پیش رویمان را گسترش می دهد. در مکانیک کوانتومی چنین در مکانیک کوانتومی، چنین اثراتی اغلب به جفت شدگی بین اندازه حرکت زاویه ای و سرعت زاویه ای مرتبط است. یک نوع خاص از فضا-زمان با توپولوژی غیر متعارف فضا زمان ریسمان کیهانی است. هامیلتونی دی-کی-پی برای ذره آزاد بصورت

$$H_f^{DKP} = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta^\circ M \quad (94.4)$$

می باشد. که در آن $\alpha^i = \beta^\circ \beta^i$ فضا زمان در بستر ریسمان کیهانی را در یک چارچوب مرجع اینرسی که توسط المان خطی طول

$$ds^2 = -d\tau^2 + dR^2 + R^2 \eta^2 d\Phi^2 + dZ^2 \quad (95.4)$$

تعیین می شود، در نظر می گیریم که در آن $\eta = 1 - 4\tilde{m}$ پارامتر مربوط به زاویه کاستی است که در محدوده $0 < \eta < 1$ می باشد. $\tilde{m}$ چگالی خطی جرم می باشد. در محاسبات $\hbar = c = 1$ و محدوده قابل قبول پارامترهای فیزیکی بصورت $-\infty < z < \infty$ ، $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ و $\rho \geq 0$ می باشند. ما چارچوب مرجع فرمی-واکر را با چرخاندن چارچوب اینرسی با سرعت زاویه ای ثابت و در نتیجه تغییر مختصات زیر را اعمال می کنیم:

$$T = t, \quad R = \rho, \quad \Phi = \varphi + \omega t, \quad Z = z \quad (96.4)$$

ω سرعت زاویه ای چرخش چارچوب مختصات با قید $\omega \rho \ll 1$ است. با این تبدیل مختصات المان خطی طول (95.4) بصورت زیر در می آید:

$$ds^2 = -\left(1 - \omega^2 \eta^2 \rho^2\right) dt^2 + 2\omega \eta^2 \rho^2 d\varphi dt + d\rho^2 + \eta^2 \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (97.4)$$

چنانچه قبلا اشاره شد انتخاب های زیادی برای انتخاب ماتریس های تبدیل تتراد و معکوس آن ها وجود دارد. به منظور حل معادله دی-کی-پی در فضا زمان جدید

^۴ non-inertial effects

تتراد ها را به فرم زیر انتخاب می کنیم

$$e_{\mu}^a(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-\beta^2} & 0 & -\frac{\omega\eta^2\rho^2}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (98.4)$$

$$e_a^{\mu}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & \frac{\omega\eta\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\eta\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

در این حالت فرم ماتریس های دیراک بصورت زیر است

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= e_0^0\gamma^0 + e_1^0\gamma^1 + e_2^0\gamma^2 + e_3^0\gamma^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\gamma^0 + \frac{\omega\eta\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}\gamma^2 = \frac{\gamma^0 + \omega\eta\rho\gamma^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\gamma^t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \gamma^1 &= e_a^1\gamma^a = e_0^1\gamma^0 + e_1^1\gamma^1 + e_2^1\gamma^2 + e_3^1\gamma^3 = \gamma^1 = \gamma^\rho \\ \gamma^2 &= e_a^2\gamma^a = e_0^2\gamma^0 + e_1^2\gamma^1 + e_2^2\gamma^2 + e_3^2\gamma^3 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\eta\rho}\gamma^2 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\gamma^2}{\eta\rho} = \frac{\gamma^\varphi}{\eta\rho} \\ \gamma^3 &= e_0^3\gamma^0 + e_1^3\gamma^1 + e_2^3\gamma^2 + e_3^3\gamma^3 = \gamma^3 = \gamma^z \end{aligned} \quad (99.4)$$

و با توجه به تعریف ماتریس های β داریم

$$\begin{aligned} \beta^0 &= e_0^0\beta^0 + e_1^0\beta^1 + e_2^0\beta^2 + e_3^0\beta^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta^0 + \frac{\omega\eta\rho}{\sqrt{1-\beta^2}}\beta^2 = \frac{\beta^0 + \omega\eta\rho\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\beta^t}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \beta^1 &= e_a^1\beta^a = e_0^1\beta^0 + e_1^1\beta^1 + e_2^1\beta^2 + e_3^1\beta^3 = \beta^1 = \beta^\rho \\ \beta^2 &= e_a^2\beta^a = e_0^2\beta^0 + e_1^2\beta^1 + e_2^2\beta^2 + e_3^2\beta^3 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\eta\rho}\beta^2 = \frac{\sqrt{1-\beta^2}\beta^2}{\eta\rho} = \frac{\beta^\varphi}{\eta\rho} \\ \beta^3 &= e_0^3\beta^0 + e_1^3\beta^1 + e_2^3\beta^2 + e_3^3\beta^3 = \beta^3 = \beta^z \end{aligned} \quad (100.4)$$

مشتق هموردا را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu} &= \partial_{\mu} + \Omega_{\mu} \\ \Omega_{\mu} &= \Gamma_{\mu} \otimes I + I \otimes \Gamma_{\mu} \end{aligned} \quad (101.4)$$

مؤلفه های غیر صفر اتصال دهنده های اسپینی بصورت زیر خواهند بود

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= -\frac{1}{4} \frac{\omega^2 \eta^2 \rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \hat{\alpha}^1 - \frac{i}{4} \frac{\omega \eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Sigma^3 \\ \Gamma_\rho &= \frac{1}{4} \frac{\omega \eta}{(1-\beta^2)} \hat{\alpha}^2 \\ \Gamma_\varphi &= -\frac{1}{4} \frac{\omega \eta^2 \rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \hat{\alpha}^1 - \frac{i}{4} \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Sigma^3\end{aligned}\quad (102.4)$$

و به این ترتیب اتصال دهنده های اسپینی آفین از روابط زیر بدست می آیند

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= -\frac{1}{4} \frac{\omega^2 \eta^2 \rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \hat{\alpha}^1 - \frac{i}{4} \frac{\omega \eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Sigma^3 \\ \Gamma_\rho &= \frac{1}{4} \frac{\omega \eta}{(1-\beta^2)} \hat{\alpha}^2 \\ \Gamma_\varphi &= -\frac{1}{4} \frac{\omega \eta^2 \rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \hat{\alpha}^1 - \frac{i}{4} \frac{\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \Sigma^3\end{aligned}\quad (103.4)$$

که در آن

$$\Sigma^3 = \begin{pmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{pmatrix} \quad (104.4)$$

با جایگزاری Γ_φ در معادله (101.4) داریم

$$\begin{aligned}\Omega_t &= -\frac{1}{4} \frac{\omega^2 \eta^2 \rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{4} \frac{2\omega\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \\ \Omega_\rho &= \frac{1}{4} \frac{\omega\eta}{(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \\ \Omega_\varphi &= -\frac{1}{4} \frac{\omega\eta^2\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{i}{4} \frac{2\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (105.4)$$

به این ترتیب فرم هموردای معادله دی-کی-پی در این فضا زمان بصورت زیر می باشد

$$\begin{aligned}[i\beta^\circ \partial_\circ + i\beta^a \partial_a - M] \Psi &= 0, (a = 1, 2, 3) \\ [i(I \otimes \gamma^\circ + \gamma^\circ \otimes I) \partial_\circ + i(I \otimes \gamma^i + \gamma^i \otimes I) \partial_i - M] \Psi &= 0\end{aligned}\quad (106.4)$$

با ضرب معادله (۱۰۶.۴) از سمت راست در $\gamma^\circ \otimes \gamma^\circ$ داریم

$$[i(\gamma^\circ \otimes \gamma^\circ)(I \otimes \gamma^\circ + \gamma^\circ \otimes I) \partial_\circ + i(\gamma^\circ \otimes \gamma^\circ)(I \otimes \gamma^i + \gamma^i \otimes I) \nabla_i - (\gamma^\circ \otimes \gamma^\circ) M] \Psi = 0 \quad (107.4)$$

با استفاده از

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD \quad (108.4)$$

داریم

$$[i(\gamma^\circ \otimes I + I \otimes \gamma^\circ) \partial_\circ + i(\gamma^\circ \otimes \alpha^i + \alpha^i \otimes \gamma^\circ) \nabla_i - (\gamma^\circ \otimes \gamma^\circ) M] \Psi = 0 \quad (109.4)$$

با جایگزاری ∇_i از معادله (۱۰۱.۴) در معادله (۱۰۹.۴) داریم

$$\Psi = 0 \quad (110.4)$$

اکنون با جایگزاری $\gamma^\circ, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3$ از معادله (۹۹.۴) معادله (۱۱۰.۴) را بفرم زیر می نویسیم

$$\begin{aligned} & \left\{ i \left((\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \otimes I + I \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \right) \sqrt{1 - \beta^2} (\partial_t + \Omega_t) \right. \\ & + i \left((\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \gamma^{\bar{1}} + (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \gamma^{\bar{1}} \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \right) (\partial_\rho + \Omega_\rho) \\ & + i \left((\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \gamma^{\bar{2}} + (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \gamma^{\bar{2}} \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \right) \left(\frac{\partial_\varphi + \Omega_\varphi}{\eta \rho} \right) \\ & + i \left((\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \gamma^{\bar{3}} + (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \gamma^{\bar{3}} \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \right) (\partial_z) \\ & \left. - M((\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}}) \otimes (\gamma^\circ + \omega \eta \rho \gamma^{\bar{2}})) \right\} \Psi = 0 \end{aligned} \quad (111.4)$$

پتانسیل برداری مغناطیسی را در پیمانه کولنی بصورت زیر در نظر می گیریم

$$e\vec{A} = \frac{B_\circ}{r} r \hat{\varphi} \quad (112.4)$$

اکنون اندازه حرکت تعمیم یافته را بصورت زیر معرفی می کنیم

$$\vec{\pi} = -i(\vec{\nabla} + \vec{\Omega}) - e\vec{A} \quad (113.4)$$

که در آن

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\eta \rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \quad (114.4)$$

عملگر گرادیان در مختصات قطبی می باشد. فرم هموردای معادله دی-کی-پی در این فضا زمان بصورت زیر در می آید

$$\left\{ i (\tilde{\gamma}^t \otimes I + I \otimes \tilde{\gamma}^t) \sqrt{1 - \beta^2} (\partial_t + \Omega_t) + i (\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\gamma}^t \bar{\gamma}^1 + \tilde{\gamma}^t \bar{\gamma}^1 \otimes \tilde{\gamma}^t) (\partial_\rho + \Omega_\rho) \right. \\ \left. + i (\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\gamma}^t \bar{\gamma}^2 + \tilde{\gamma}^t \bar{\gamma}^2 \otimes \tilde{\gamma}^t) \left(\frac{\partial_\varphi + \Omega_\varphi}{\eta \rho} \right) + i (\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\gamma}^t \bar{\gamma}^3 + \tilde{\gamma}^t \bar{\gamma}^3 \otimes \tilde{\gamma}^t) (\partial_z) - M (\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\gamma}^t) \right\} \Psi = 0 \quad (115.4)$$

$$\left\{ i (\tilde{\gamma}^t \otimes I + I \otimes \tilde{\gamma}^t) \sqrt{1 - \beta^2} (\partial_t + \Omega_t) + i (\tilde{\gamma}^t \otimes \vec{\tilde{\alpha}} + \vec{\tilde{\alpha}} \otimes \tilde{\gamma}^t) . \vec{\pi} - M (\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\gamma}^t) \right\} \Psi = 0 \quad (116.4)$$

با توجه به تعریف

$$\tilde{\alpha}^i = \tilde{\gamma}^t \gamma^i = \begin{pmatrix} -\beta \sigma^3 \sigma^i & \sigma^i \\ -\sigma^i & -\beta \sigma^3 \sigma^i \end{pmatrix} \quad (117.4)$$

$$\begin{aligned}
 & \tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\alpha}^i + \tilde{\alpha}^i \otimes \tilde{\gamma}^t = \\
 & \begin{pmatrix} -2\beta\sigma^2\sigma^i & \sigma^i - \beta^2\sigma^2\sigma^i\sigma^2 & (1-\beta^2)\sigma^i & \beta(\sigma^2\sigma^i + \sigma^i\sigma^2) \\ -\sigma^i + \beta^2\sigma^2\sigma^i\sigma^2 & \circ & -\beta(\sigma^2\sigma^i + \sigma^i\sigma^2) & -(1+\beta^2)\sigma^i \\ - (1-\beta^2)\sigma^i & -\beta(\sigma^2\sigma^i + \sigma^i\sigma^2) & \circ & -(\sigma^i + \beta^2\sigma^2\sigma^i\sigma^2) \\ \beta(\sigma^2\sigma^i + \sigma^i\sigma^2) & (1+\beta^2)\sigma^i & \sigma^i + \beta^2\sigma^2\sigma^i\sigma^2 & 2\beta\sigma^2\sigma^i \end{pmatrix} \\
 & \{i(\tilde{\gamma}^t \otimes I + I \otimes \tilde{\gamma}^t) \sqrt{1-\beta^2}(\partial_t + \frac{1}{2} \frac{\omega^2\eta^2\rho}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \circ & \sigma_1 & \sigma_1 & \circ \\ \sigma_1 & \circ & \circ & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \circ & \circ & \sigma_1 \\ \circ & \sigma_1 & \sigma_1 & \circ \end{pmatrix} - \\
 & \frac{i}{2} \frac{2\omega\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \sigma_3 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \sigma_3 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \sigma_3 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \sigma_3 \end{pmatrix}) + i(\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\alpha}^1 + \tilde{\alpha}^1 \otimes \tilde{\gamma}^t). \\
 & \left(\partial\rho + \frac{1}{2} \frac{\omega\eta}{(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} \circ & \sigma_2 & \sigma_2 & \circ \\ \sigma_2 & \circ & \circ & \sigma_2 \\ \sigma_2 & \circ & \circ & \sigma_2 \\ \circ & \sigma_2 & \sigma_2 & \circ \end{pmatrix} \right) + i(\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\alpha}^2 + \tilde{\alpha}^2 \otimes \tilde{\gamma}^t). \\
 & \left(\frac{\partial\varphi}{\eta\rho} - \frac{1}{2} \frac{\omega\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \circ & \sigma_1 & \sigma_1 & \circ \\ \sigma_1 & \circ & \circ & \sigma_1 \\ \sigma_1 & \circ & \circ & \sigma_1 \\ \circ & \sigma_1 & \sigma_1 & \circ \end{pmatrix} - \frac{i}{\rho\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} \sigma_3 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \sigma_3 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \sigma_3 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \sigma_3 \end{pmatrix} \right) \\
 & i(\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\alpha}^3 + \tilde{\alpha}^3 \otimes \tilde{\gamma}^t).(\partial z) - M(\tilde{\gamma}^t \otimes \tilde{\gamma}^t) \left\{ \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} \right\} = \circ
 \end{aligned}$$

(۱۱۸.۴)

حالت مانای Ψ در معادله (۱۱۸.۴) یک تابع موج چهار مولفه ایست. با جایگذاری در معادله (۱۱۸.۴) داریم

$$\left\{ E\sqrt{1-\beta^2} \begin{pmatrix} 2 & \beta\sigma^2 & \beta\sigma^2 & 0 \\ -\beta\sigma^2 & 0 & 0 & \beta\sigma^2 \\ -\beta\sigma^2 & 0 & 0 & \beta\sigma^2 \\ 0 & -\beta\sigma^2 & -\beta\sigma^2 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\omega^2 \eta^2 \rho i}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} -2i\beta\sigma^2 & 2\sigma^1 & 2\sigma^1 & -2i\beta\sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i\beta\sigma^2 & -2\sigma^1 & -2\sigma^1 & 2i\beta\sigma^2 \end{pmatrix} \right. \\ + \omega\eta \begin{pmatrix} 2\sigma^2 & i\beta\sigma^1 & i\beta\sigma^1 & 0 \\ -i\beta\sigma^1 & 0 & 0 & i\beta\sigma^1 \\ -i\beta\sigma^1 & 0 & 0 & i\beta\sigma^1 \\ 0 & -i\beta\sigma^1 & -i\beta\sigma^1 & 2\sigma^2 \end{pmatrix} + i\partial_\rho \begin{pmatrix} 2i\beta\sigma^2 & \sigma^1(1+\beta^2) & \sigma^1(1-\beta^2) & 0 \\ \sigma^1(1-\beta^2) & 0 & -2i\beta\sigma^2 & -\sigma^1(1+\beta^2) \\ \sigma^1(1+\beta^2) & 2i\beta\sigma^2 & 0 & -\sigma^1(1-\beta^2) \\ 0 & -\sigma^1(1-\beta^2) & -\sigma^1(1+\beta^2) & -2i\beta\sigma^2 \end{pmatrix} \\ + \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\omega\eta}{(1-\beta^2)} \begin{pmatrix} 2i\sigma^2 & 2\beta\sigma^1 & 2\beta\sigma^1 & 2i\sigma^2 \\ -2\beta\sigma^1 & -2i\beta^2\sigma^2 & -2i\beta^2\sigma^2 & -2\beta\sigma^1 \\ 2\beta\sigma^1 & 2i\beta^2\sigma^2 & 2i\beta^2\sigma^2 & 2\beta\sigma^1 \\ -2i\sigma^2 & 2\beta\sigma^1 & -2\beta\sigma^1 & -2i\sigma^2 \end{pmatrix} + i \frac{\partial_\varphi}{\eta\rho} \begin{pmatrix} \sigma^2(1+\beta^2) & 0 & 0 & -\sigma^2(1+\beta^2) \\ \sigma^2(1+\beta^2) & 0 & 0 & -\sigma^2(1+\beta^2) \\ -2\beta & -\sigma^2(1-\beta^2) & \sigma^2(1-\beta^2) & 2\beta \\ -2\beta & -\sigma^2(1-\beta^2) & \sigma^2(1-\beta^2) & 2\beta \end{pmatrix} \\ - \frac{i}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{\omega\eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} -2i\sigma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & -2i\sigma^2(1-\beta^2) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2i\sigma^2(1-\beta^2) & 0 & 0 & 2i\sigma^2(1-\beta^2) \end{pmatrix} + \frac{1}{\rho\sqrt{1-\beta^2}} \begin{pmatrix} -2\beta\sigma^2 & i\sigma^1(1-\beta^2) & i\sigma^1(1-\beta^2) & 2\beta\sigma^2 \\ i\sigma^1(1-\beta^2) & 0 & 0 & -i\sigma^1(1-\beta^2) \\ i\sigma^1(1-\beta^2) & 0 & 0 & -i\sigma^1(1-\beta^2) \\ -2\beta\sigma^2 & -i\sigma^1(1-\beta^2) & -i\sigma^1(1-\beta^2) & 2\beta\sigma^2 \end{pmatrix} \\ \left. i\partial_z \begin{pmatrix} -2i\beta\sigma^1 & \sigma^2(1+\beta^2) & \sigma^2(1-\beta^2) & 0 \\ \sigma^2(1-\beta^2) & 0 & 2i\beta\sigma^1 & -\sigma^2(1+\beta^2) \\ \sigma^2(1+\beta^2) & -2i\beta\sigma^1 & 0 & -\sigma^2(1-\beta^2) \\ 0 & -\sigma^2(1-\beta^2) & -\sigma^2(1+\beta^2) & 2i\beta\sigma^1 \end{pmatrix} - M \begin{pmatrix} 1 & \beta\sigma^2 & \beta\sigma^2 & \beta^2 \\ -\beta\sigma^2 & -1 & -\beta^2 & -\beta\sigma^2 \\ -\beta\sigma^2 & -\beta^2 & -1 & -\beta\sigma^2 \\ \beta^2 & \beta\sigma^2 & \beta\sigma^2 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0. \quad (119.4)$$

به چهار معادله زیر می رسیم

$$\begin{aligned} A_1 \Psi_1 + B_1 \Psi_2 + C_1 \Psi_3 + D_1 \Psi_4 &= 0 \\ A_2 \Psi_1 + B_2 \Psi_2 + C_2 \Psi_3 + D_2 \Psi_4 &= 0 \\ A_3 \Psi_1 + B_3 \Psi_2 + C_3 \Psi_3 + D_3 \Psi_4 &= 0 \\ A_4 \Psi_1 + B_4 \Psi_2 + C_4 \Psi_3 + D_4 \Psi_4 &= 0 \end{aligned} \quad (120.4)$$

ضرایب معادلات بالا بصورت زیر می باشند

$$\begin{aligned} A_1 &= 2E\sqrt{1-\beta^2} - \omega^2 \eta^2 \rho \beta \sigma^2 + 2\omega\eta\sigma^2 - 2\beta\sigma^2\partial_\rho - \frac{\omega\eta\sigma^2}{(1-\beta^2)} - 2i\beta\frac{\partial_\varphi}{\eta\rho} - \frac{\omega\eta}{\sqrt{1-\beta^2}}\sigma^2(1-\beta^2) - \frac{2\beta\sigma^2}{\rho\sqrt{1-\beta^2}} + 2\beta\sigma^1\partial_z - M \\ B_1 &= E\sqrt{1-\beta^2}\sigma^2 - \omega^2 \eta^2 \rho i\sigma^1 + i\omega\eta\beta\sigma^1 + i\sigma^1(1+\beta^2)\partial_\rho + \frac{i\omega\eta\beta}{(1-\beta^2)}\sigma^1 + i\sigma^2\frac{(1-\beta^2)}{\eta\rho}\partial_\varphi + i\sigma^1\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\rho} + i(1+\beta^2)\sigma^2\partial_z - M\beta\sigma^2 \\ C_1 &= E\sqrt{1-\beta^2}\beta\sigma^2 - \omega^2 \eta^2 \rho i\sigma^1 + i\omega\eta\beta\sigma^1 + i\sigma^1(1-\beta^2)\partial_\rho + \frac{i\omega\eta\beta}{(1-\beta^2)}\sigma^1 + i\sigma^2\frac{(1-\beta^2)}{\eta\rho}\partial_\varphi + i\sigma^1\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\rho} + i(1-\beta^2)\sigma^2\partial_z - M\beta\sigma^2 \\ D_1 &= -\omega^2 \eta^2 \rho \beta \sigma^2 - \frac{\omega\eta}{(1-\beta^2)}\sigma^2 + 2i\beta\frac{\partial_\varphi}{\eta\rho} - \omega\eta\sigma^2\sqrt{1-\beta^2} + \frac{2\beta\sigma^2}{\rho\sqrt{1-\beta^2}} - M\beta^2 \end{aligned} \quad (121.4)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= -E\sqrt{1-\beta^2}\beta\sigma^2 - i\omega\eta\beta\sigma^1 + i\sigma^1(1-\beta^2)\partial_\rho - \frac{i\omega\eta}{(1-\beta^2)}\sigma^1 + i\sigma^2\frac{(1+\beta^2)}{\eta\rho}\partial_\varphi + i\sigma^1\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\rho} + i(1-\beta^2)\sigma^2\partial_z + M\beta\sigma^2 \\ B_2 &= \frac{\omega\eta\sigma^2\beta^2}{1-\beta^2} + M, \quad C_2 = 2\beta\sigma^2\partial_\rho + \frac{\omega\eta}{(1-\beta^2)}\sigma^2\beta^2 - 2\beta\sigma^1\partial_z + M\beta^2 \\ D_2 &= E\sqrt{1-\beta^2}\beta\sigma^2 + i\omega\eta\beta\sigma^1 - i\sigma^1(1+\beta^2)\partial_\rho - \frac{i\omega\eta\beta}{(1-\beta^2)}\sigma^1 - i\sigma^2\frac{(1+\beta^2)}{\eta\rho}\partial_\varphi - i\sigma^1\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\rho} - i(1-\beta^2)\sigma^2\partial_z + M\beta\sigma^2 \end{aligned} \quad (122.4)$$

$$\begin{aligned} A_3 &= -E\sqrt{1-\beta^2}\beta\sigma^2 - i\omega\eta\beta\sigma^1 + i\sigma^1(1+\beta^2)\partial_\rho + \frac{\omega\eta}{(1-\beta^2)}\beta\sigma^1 + i\sigma^2\frac{(1+\beta^2)}{\eta\rho}\partial_\varphi + i\sigma^1\frac{(1+\beta^2)}{\rho\sqrt{1-\beta^2}} + i(1+\beta^2)\sigma^2\partial_z + M\beta\sigma^2 \\ B_3 &= -2\beta\sigma^2\partial_\rho - \frac{\omega\eta}{(1-\beta^2)}\sigma^2\beta^2 + 2\beta\sigma^1\partial_z + M\beta^2, \quad C_3 = \frac{-\omega\eta\sigma^2\beta^2}{1-\beta^2} + M \\ D_3 &= E\sqrt{1-\beta^2}\beta\sigma^2 + i\omega\eta\beta\sigma^1 - i\sigma^1(1-\beta^2)\partial_\rho + \frac{i\omega\eta\beta}{(1-\beta^2)}\sigma^1 - i\sigma^2\frac{(1+\beta^2)}{\eta\rho}\partial_\varphi - i\sigma^1\frac{(1+\beta^2)}{\rho\sqrt{1-\beta^2}} - i(1-\beta^2)\sigma^2\partial_z + M\beta\sigma^2 \end{aligned} \quad (123.4)$$

$$\begin{aligned}
 A_F &= \omega^2 \eta^1 \rho \beta \sigma^2 + \frac{\omega \eta}{(1-\beta^2)} \sigma^2 - 2i\beta \frac{\partial \varphi}{\eta \rho} + \omega \eta \sigma^2 \sqrt{1-\beta^2} - \frac{2\beta \sigma^2}{\rho \sqrt{1-\beta^2}} - M\beta^2 \\
 B_F &= -E \sqrt{1-\beta^2} \beta \sigma^2 + \omega^2 \eta^1 \rho i \sigma^1 - i\omega \eta \beta \sigma^1 - i\sigma^1 (1-\beta^2) \partial_\rho - \frac{i\omega \eta \beta}{(1-\beta^2)} \sigma^1 - i\sigma^2 \frac{(1-\beta^2)}{\eta \rho} \partial_\varphi - i\sigma^1 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\rho} - i(1-\beta^2) \sigma^2 \partial_Z - M\beta \sigma^2 \\
 C_F &= -E \sqrt{1-\beta^2} \beta \sigma^2 + \omega^2 \eta^1 \rho i \sigma^1 - i\omega \eta \beta \sigma^1 - i\sigma^1 (1+\beta^2) \partial_\rho - \frac{i\omega \eta \beta}{(1-\beta^2)} \sigma^1 - i\sigma^2 \frac{(1-\beta^2)}{\eta \rho} \partial_\varphi - i\sigma^1 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\rho} - i(1+\beta^2) \sigma^2 \partial_Z - M\beta \sigma^2 \\
 D_F &= -2E \sqrt{1-\beta^2} + \omega^2 \eta^1 \rho \beta \sigma^2 - 2\omega \eta \sigma^2 + 2\beta \sigma^2 \partial_\rho + \frac{\omega \eta \sigma^2}{(1-\beta^2)} + 2i\beta \frac{\partial \varphi}{\eta \rho} + \frac{\omega \eta}{\sqrt{1-\beta^2}} \sigma^2 (1-\beta^2) + \frac{2\beta \sigma^2}{\rho \sqrt{1-\beta^2}} - 2\beta \sigma^1 \partial_Z - M
 \end{aligned} \tag{۱۲۴.۴}$$

۱.۸.۴ حالت حدی $\beta \rightarrow 0$

در این قسمت شرایط اینرسی را با در نظر گرفتن حالت حدی $\beta \rightarrow 0$ بررسی می کنیم. در این حالت متریک (۹۷.۴) بصورت زیر تغییر می کند

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \eta^2 \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \tag{۱۲۵.۴}$$

و مؤلفه ی غیر صفر $\vec{\Omega}$ ، $\Omega_\varphi = -i\eta \Sigma^3 \hat{\varphi}$ می باشد. اندازه حرکت تعمیم یافته بصورت

$$\vec{\pi} = -i \left(\partial_\rho \hat{\rho} + \frac{1}{\eta \rho} \left(\partial_\varphi - i\eta \Sigma^3 \right) \hat{\varphi} + \partial_z \hat{z} \right) = -i \left(\vec{\nabla} - i \frac{\eta \sigma^3}{\rho} \hat{\varphi} \right) \tag{۱۲۶.۴}$$

است. و چهار معادله خطی (۱۲۰.۴) بصورت زیر در می آید

$$\begin{aligned}
 (2E - M) \Psi_1 + \left(-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_2 + \left(-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_3 &= 0 \\
 \left(-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_1 + M \Psi_2 + \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_4 &= 0 \\
 \left(-\vec{\sigma} \cdot \vec{p} + i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_1 + M \Psi_3 + \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_4 &= 0 \\
 \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_2 + \left(\vec{\sigma} \cdot \vec{p} - i \frac{\sigma^1}{\rho} \right) \Psi_3 - (2E + M) \Psi_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{۱۲۷.۴}$$

اکنون از معادله (۱۲۶.۴) داریم

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} = -i \left(\sigma^1 \partial_\rho + \frac{\sigma^2}{\eta \rho} \left(\partial_\varphi - i\eta \Sigma^3 \right) \hat{\varphi} + \sigma^3 \partial_z \hat{z} \right) = -i\sigma^1 \partial_\rho - i \frac{\sigma^2}{\eta \rho} \partial_\varphi - i \frac{\sigma^1}{\rho} - i\sigma^3 \partial_z \tag{۱۲۸.۴}$$

و با بازنویسی معادله (۱۲۷.۴) بصورت زیر در می آید

$$\begin{aligned}
 (2E - M) \Psi_1 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_2 - \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_3 &= 0 \\
 -\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_1 + M \Psi_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_4 &= 0 \\
 -\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_1 + M \Psi_3 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_4 &= 0 \\
 \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_2 + \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \Psi_3 - (2E + M) \Psi_4 &= 0
 \end{aligned} \tag{۱۲۹.۴}$$

با حل دستگاه معادلات بالا بر حسب Ψ_2 داریم

$$\Psi_1 = \frac{2\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} (\Psi_2)}{(2E - M)}, \Psi_2 = \Psi_3, \quad \Psi_4 = \frac{2\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} (\Psi_2)}{(2E + M)} \quad (130.4)$$

و

$$\left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) + E^2 - \frac{M^2}{4} \right\} \Psi_2 = 0 \quad (131.4)$$

یا

$$\begin{aligned} & \left\{ (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) \cdot (\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi}) + E^2 - \frac{M^2}{4} \right\} \Psi_2 = \\ & \left(\pi^2 + i\vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \times \vec{\pi} + E^2 - \frac{M^2}{4} \right) \Psi_2 = \\ & \left(-\nabla^2 - 2\frac{\sigma^r}{\eta\rho}m - \sigma^3 B_0 + E^2 - \frac{M^2}{4} \right) \Psi_2 = 0 \end{aligned} \quad (132.4)$$

که در آن ∇^2 عملگر لاپلاسین در پس زمینه ریسمان کیهانی است. با استفاده از تعریف فرم صریح لاپلاسین داریم

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \left(\sigma^3 - \frac{m}{\eta} \right)^2 + \frac{B_0^2}{4} \rho^2 + B_0 \left(\sigma^3 - \frac{m}{\eta} \right) - B_0 \sigma^3 + \frac{M^2}{4} - E^2 \right) \psi_2 = 0 \quad (133.4)$$

تراز های انرژی از رابطه

$$n = \frac{k_3}{4\sqrt{k_2}} - \frac{\sqrt{k_1} + 1}{2} \quad (134.4)$$

بدست می آیند که در آن

$$\begin{aligned} K_1 &= \left(\sigma^3 - \frac{m}{\eta} \right)^2 \\ K_2 &= \frac{B_0^2}{4} \\ K_3 &= B_0 \left(\sigma^3 - \frac{m}{\eta} \right) - B_0 \sigma^3 + \frac{M^2}{4} - E^2 \end{aligned} \quad (135.4)$$

در مرحله آخر نیز تابع موج بصورت زیر می باشد [۱۰۲]

$$\Psi_2 = N r \sqrt{k_1} e^{-\frac{r^2}{4}} \sqrt{k_2} L_n^{\frac{\sqrt{k_1}}{4}-1} \left(r^2 \sqrt{k_2} \right) \quad (136.4)$$

که در آن N ثابت نرمالیزاسیون و $L_n^{\frac{\sqrt{k_1}}{4}-1}$ چند جمله ای لاگراست.

۹.۴ فرم هموردای معادله دی-کی-پی در حضور پتانسیل برداری

در این قسمت به بررسی معادله دی-کی-پی برای بوزون های نرده ای (اسپین صفر) نسبیتی در فضا زمان خمیده می پردازیم. برهمکنش غیرکمینه^۵ پتانسیل برداری بوزون ها با میدان گرانشی را به منظور درک بهتر اثرات میدان های گرانشی ایجاد شده توسط نواقص هندسی بر طیف انرژی بوزون ها مورد ارزیابی قرار خواهیم داد. معادله دی-کی-پی را در حضور برهمکنش برداری غیرکمینه خطی و کرنل حل خواهیم کرد. المان طول توصیف کننده فضا زمان را بفرم زیر انتخاب می کنیم

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\phi^2 + dz^2, \quad (137.4)$$

که در آن $\alpha = 1 - 4\mu$ پارامتر زاویه کاستی و در محدوده $[0, 1]$ می باشد. فرم هموردای معادله دی-کی-پی برای بوزون های نرده ایی بصورت زیر است

$$[i\beta^\mu \nabla_\mu - M - U] \Psi(r, t) = 0. \quad (138.4)$$

و مشتق هموردا بصورت زیر تعریف می شود

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu. \quad (139.4)$$

چهار بردار جریان از رابطه زیر بدست می آید

$$J^\mu = \frac{1}{\hbar} \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi, \quad (140.4)$$

و قانون پایستگی چگالی جریان J^μ بصورت زیر است

$$\nabla_\mu J^\mu + \frac{i}{\hbar} \bar{\Psi} (U - \eta^\circ U^\dagger \eta^\circ) \Psi = \frac{1}{\hbar} \bar{\Psi} (\nabla_\mu \beta^\mu) \Psi \quad (141.4)$$

اسپیتور الحاقی $\bar{\Psi}$ بصورت $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \eta^\circ$ تعیین می شود که در آن $\eta^\circ = 2\beta^\circ \beta^\circ - 1$ می باشد بطوری که $(\eta^\circ \beta^\mu)^\dagger = \eta^\circ \beta^\mu$. اگر U نسبت به η° هرمیتی باشد و ماتریس های بتا آنگاه چهار بردار جریان ثابت خواهد بود اگر

$$\nabla_\mu \beta^\mu = 0. \quad (142.4)$$

در حضور برهم کنش برداری غیرکمینه معادله دی-کی-پی بصورت زیر نوشته می شود

$$[i\beta^\mu \nabla_\mu - M - i[P, \beta^\mu]A_\mu] \Psi(r, t) = 0 \quad (143.4)$$

^۵ nonminimal

که در آن P ، عملگر تصویر ($P^\dagger = P$ و $P^2 = P$) است. به این ترتیب $\bar{\Psi}[P, \beta^\mu]\Psi$ تحت تبدیلات لورنتس مثل یک بردار عمل می کند مانند $\bar{\Psi}\beta^\mu\Psi$. ماتریس های 5×5 بتا را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$\beta^\circ = \begin{pmatrix} \theta & \circ_{2 \times 3} \\ \circ_{3 \times 2} & \circ_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} \circ_{2 \times 2} & \vec{\tau} \\ -\vec{\tau}^T & \circ_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} \circ & 1 \\ 1 & \circ \end{pmatrix}, \tau^1 = \begin{pmatrix} -1 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \tau^2 = \begin{pmatrix} \circ & -1 & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}, \tau^3 = \begin{pmatrix} \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}. \quad (144.4)$$

e_a^μ تتراد ها هستند که بصورت زیر انتخاب شده اند

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \cos \varphi & \sin \varphi & \circ \\ \circ & \frac{-\sin \varphi}{r\alpha} & \frac{\cos \varphi}{r\alpha} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 1 \end{pmatrix}. \quad (145.4)$$

با توجه به تتراد های انتخابی ماتریس های تعمیم یافته بتا در فضای خمیده بصورت زیر می باشند

$$\begin{aligned} \beta^{(\circ)} &= e_a^\circ \beta^a = \beta^\circ \\ \beta^{(1)} &= e_a^r \beta^a = \beta^r \\ \beta^r &= \cos \varphi \beta^1 + \sin \varphi \beta^2 \\ \beta^{(2)} &= e_a^\varphi \beta^a = \frac{\beta^\varphi}{r\alpha} \\ \beta^\varphi &= -\sin \varphi \beta^1 + \cos \varphi \beta^2 \\ \beta^{(3)} &= e_a^z \beta^a = \beta^3 = \beta^z \end{aligned} \quad (146.4)$$

و اتصال دهنده های آفین بصورت زیر خواهند بود

$$\Gamma_\varphi = (1 - \alpha)[\beta^1, \beta^2] \quad (147.4)$$

به این ترتیب معادله دی-کی-پی بصورت زیر در می آید

$$\left[i\beta^{(\circ)}\partial_\circ + i\beta^{(1)}\partial_1 + i\beta^{(2)}(\partial_\varphi + \Gamma_\varphi) - i\left[P, \beta^{(\circ)}\right]A_{(\circ)} - i\left[P, \beta^{(1)}\right]A_{(1)} - M \right] \Psi(r, t) = \circ \quad (148.4)$$

تنها مؤلفه های شعاعی را در جایگذاری غیرکمیینه در نظر می گیریم. از آنجا که بر همکنش

مستقل از زمان است، می توان نوشت: $E \Psi(r, t) \propto e^{im\varphi} e^{ik_z z} e^{-iEt} \Phi(r)$ که

انرژی بوزون های اسکالر، m عدد کوانتومی مغناطیسی و k_z عدد موج است. اسپینور پنج مؤلفه ای دی-کی-پی بصورت $\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)$ می نویسیم. به این ترتیب معادله دی-کی-پی به صورت پنج معادله در می آید

$$\begin{aligned} & r\alpha (-M\Phi_1(r) + (E - iA_0(r)) \Phi_2(r) + k_z\Phi_5(r)) + \\ & i \cos \varphi ((1 - \alpha + r\alpha A_r(r)) \Phi_3(r) - im\Phi_4(r) - r\alpha\Phi_3'(r)) + \\ & i \sin \varphi (im\Phi_3(r) + (1 - \alpha + r\alpha A_r(r)) \Phi_4(r) - r\alpha\Phi_4'(r)) = 0 \\ & (E + iA_0(r)) \Phi_1(r) - M\Phi_2(r) = 0 \end{aligned} \quad (149.4)$$

$$\begin{aligned} & m \sin \varphi \Phi_1(r) - Mr\alpha\Phi_3(r) + i r\alpha \cos \varphi (A_r(r)\Phi_1(r) + \Phi_1'(r)) = 0 \\ & -m \cos \varphi \Phi_1(r) - Mr\alpha\Phi_4(r) + i r\alpha \sin \varphi (A_r(r)\Phi_1(r) + \Phi_1'(r)) = 0 \\ & k_z\Phi_1(r) + M\Phi_5(r) = 0 \end{aligned}$$

با حل دستگاه معادلات بالا بر حسب Φ_1 داریم

$$\begin{aligned} \Phi_2(r) &= \frac{E + iA_0(r)}{M} \Phi_1(r) \\ \Phi_3(r) &= \frac{m \sin \varphi \Phi_1(r) + i (r\alpha A_r(r) \cos \varphi \Phi_1(r) + r\alpha \cos \varphi \Phi_1'(r))}{Mr\alpha} \\ \Phi_4(r) &= \frac{-m \cos \varphi \Phi_1(r) + i (r\alpha A_r(r) \sin \varphi \Phi_1(r) + r\alpha \sin \varphi \Phi_1'(r))}{Mr\alpha} \\ \Phi_5(r) &= -\frac{k_z}{M} \Phi_1(r) \end{aligned} \quad (150.4)$$

به این ترتیب به معادله حرکت زیر بر حسب مؤلفه Φ_1 می رسیم

$$\begin{aligned} & \Phi_1''(r) + \left(\frac{\alpha - 1}{r\alpha}\right) \Phi_1'(r) + \\ & \left(E^2 - k_z^2 - M^2 - \frac{m^2}{r^2\alpha^2} + A_0(r)^2 + \left(\frac{\alpha - 1}{r\alpha}\right) A_r(r) - A_r(r)^2 + A_r'(r)\right) \Phi_1(r) = 0 \end{aligned} \quad (151.4)$$

با جایگذاری

$$\Phi_1 = r^{\frac{1}{\alpha}} R_{n,\ell}(r). \quad (152.4)$$

معادله (151.4) به صورت زیر در می آید

$$\begin{aligned} & R_{n,m}''(r) + \frac{R_{n,m}'(r)}{r} + \\ & \left(E^2 - k_z^2 - M^2 - \frac{1}{r^2\alpha^2} + \frac{m^2}{\alpha^2} + A_0(r)^2 + \left(\frac{\alpha - 1}{r\alpha}\right) A_r(r) - A_r(r)^2 + A_r'(r)\right) R_{n,m}(r) = 0 \end{aligned} \quad (153.4)$$

بطور خلاصه معادله (۱۵۳.۴) توصیف کننده برهمکنش میدان دی-کی-پی در بستر ریسمان کیهانی با پتانسیل برداری $A_\mu = (A_0, A_r, 0, 0)$ است.

۱.۹.۴ بوزون های اسکالر در حضور برهمکنش برداری خطی

در این قسمت پتانسیل برداری را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$A_0 = \eta_L r, \quad A_r = \kappa_L r \quad (154.4)$$

به این ترتیب معادله (۱۵۳.۴) بصورت زیر در می آید

$$R''_{n,m}(r) + \frac{R'_{n,m}(r)}{r} + \left(\kappa^2 - \varpi^2 r^2 - \frac{1 + 4m^2}{4r^2 \alpha^2} \right) R_{n,m}(r) = 0 \quad (155.4)$$

که در آن $\kappa^2 = E^2 - k_z^2 - M^2 + 2\kappa_L - \frac{\kappa_L}{\alpha}$ و $\varpi^2 = \kappa_L^2 - \eta_L^2$ می باشند. با اعمال تغییر متغیر $\varpi r^2 = \rho$ ، معادله شعاعی (۱۵۵.۴) بفرم زیر در می آید

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \left(\frac{j^2}{4\rho} + \frac{\rho}{4} - \frac{\kappa^2}{4\varpi} \right) \right) R_{n,m}(\rho) = 0. \quad (156.4)$$

که در آن

$$j^2 = \frac{1 + 4m^2}{4\alpha^2} \quad (157.4)$$

معادله (۱۵۶.۴) به راه حل زیر منجر می شود

$$R_{n,m}(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{\rho}{4}} F(\rho) \quad (158.4)$$

به این ترتیب معادله (۱۵۶.۴) بصورت زیر بازنویسی می شود

$$\rho F''(\rho) + (1 + |j| - \rho) F'(\rho) - \left(\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4\varpi} \right) F(\rho) = 0 \quad (159.4)$$

جواب های معادله (۱۵۹.۴) به فرم توابع فوق هندسی می باشد

$$R_{n,m}(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{\rho}{4}} F\left(\left(\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4\varpi}\right), 1 + j, \rho\right) \quad (160.4)$$

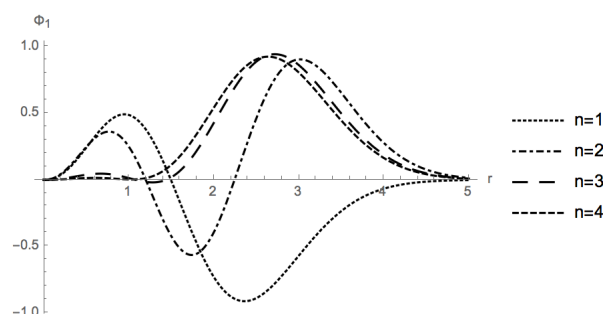
با توجه به واگرایی تابع $F(\rho)$ به ازای مقادیر بزرگ آرگومان حالات مقید تنها با در نظر گرفتن تابع به صورت چند جمله ای درجه n حاصل می شود. به این ترتیب جواب های شعاعی رفتار قابل قبولی در بی نهایت خواهند داشت.

$$\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4\varpi} = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (161.4)$$

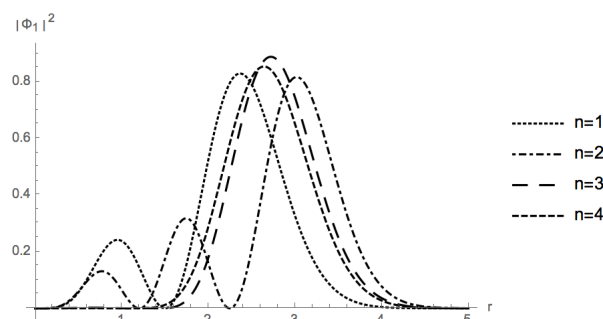
این معادله شرط کوانتیزه شدن طیف انرژی را فراهم می آورد. طیف انرژی برای ویژه مقادیر مثبت با استفاده از معادله (۱۶۱.۴) بدست می آید.

$$E_{n,m} = \pm \sqrt{k_z^2 + M^2 - 2\kappa_L + \frac{\kappa_L}{\alpha} + (2n+1)2\varpi + \sqrt{\frac{1+4m^2}{\alpha^2}\varpi}} \quad (162.4)$$

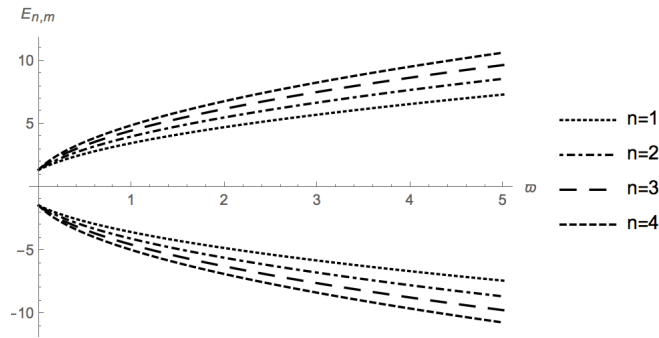
تابع موج و چگالی احتمال به ازای مقادیر مختلف n به ترتیب در شکل های ۱۰.۴ و ۱۱.۴ ترسیم شده است. مشاهده می شود با افزایش n قله نمودار به سمت r های کوچک میل می کند. انرژی بر حسب ϖ در شکل ۱۲.۴ برای $n = 1, 2, 3, 4$ رسم شده است. چنانچه در شکل ۱۲.۴ مشاهده می کنیم انرژی با افزایش n افزایش می یابد.



شکل ۱۰.۴: تابع موج $\Phi_1(r)$ به ازای $n = 1, 2, 3, 4$ در محدوده $0 \leq r \leq 5$ با GeV^{-1} پارامترهای $k_z = M = 1, \kappa_L = 1, \omega = 1, m = 1, \alpha = 0.9$.



شکل ۱۱.۴: چگالی احتمال $|\Phi_1|^2$ برای $n = 1, 2, 3, 4$ در محدوده $0 \leq r \leq 5$ با GeV^{-1} پارامترهای $k_z = M = 1, \kappa_L = 1, \omega = 1, m = 1, \alpha = 0.9$.



شکل ۱۲.۴: انرژی به صورت تابعی از ϖ برای n های مختلف

۲.۹.۴ بوزون های اسکالر در حضور برهمکنش برداری کرنل

در این قسمت در مرحله اول پتانسیل برداری در رابطه (۱۹۰.۴) را بفرم زیر انتخاب می کنیم

$$A_0 = \xi_L r - \frac{\xi_C}{r}, \quad A_r = \zeta_L r - \frac{\zeta_C}{r} \quad (163.4)$$

به این ترتیب معادله (۱۵۳.۴) به فرم زیر در می آید

$$R_{n,m}''(r) + \frac{R'_{n,m}(r)}{r} + \left(\zeta^2 - r^2 \varpi^2 - \frac{1 + 4m^2 - 4\alpha\zeta_C + 4\alpha^2\omega^2}{4r^2\alpha^2} \right) R_{n,m}(r) = 0, \quad (164.4)$$

که در آن $\omega^2 = \zeta_C^2 - \xi_C^2$ و $\varpi^2 = \zeta_L^2 - \xi_L^2$ ، $\zeta^2 = E^2 - k_z^2 - M^2 + 2\zeta_L - \frac{\zeta_L}{\alpha} - 2\xi_C\xi_L + 2\zeta_C\zeta_L$ با اعمال تغییر متغیر $\varpi r^2 = \rho$ معادله (۱۶۴.۴) بصورت زیر در می آید

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \left(\frac{j^2}{4\rho} + \frac{\rho}{4} - \frac{\zeta^2}{4\varpi} \right) \right) R_{n,m}(\rho) = 0. \quad (165.4)$$

که

$$j^2 = \frac{1 + 4m^2 - 4\alpha\zeta_C + 4\alpha^2\omega^2}{4r^2\alpha^2} \quad (166.4)$$

معادله (۱۶۵.۴) ما را به جواب زیر رهنمون می شود

$$R_{n,m}(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{4}} e^{-\frac{\rho}{4}} F(\rho) \quad (167.4)$$

با در نظر گرفتن این جواب معادله (۱۶۵.۴) بصورت زیر نوشته می شود

$$\rho F''(\rho) + (1 + |j| - \rho) F'(\rho) - \left(\frac{1 + |j|}{4} - \frac{\zeta^2}{4\varpi} \right) F(\rho) = 0 \quad (168.4)$$

به این ترتیب حل کلی معادله (۱۶۸.۴) توابع فوق می باشد

$$R_{n,m}(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{\rho}{2}} F\left(\left(\frac{1+|j|}{2} - \frac{\zeta^2}{4\omega}\right), 1+j, \rho\right) \quad (169.4)$$

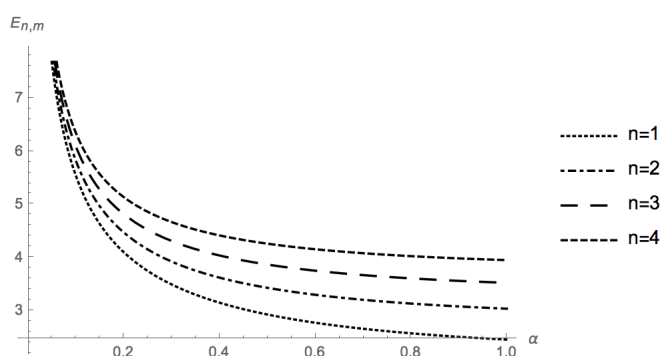
در این جا نیز با توجه به واگرایی $F(\rho)$ به ازای آرگومان های بزرگ این تابع را بفرم بک چند جمله ایی درجه n در نظر می گیریم. به این ترتیب شرط زیر برقرار است

$$\frac{1+|j|}{2} - \frac{\zeta^2}{4\omega} = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (170.4)$$

نتیجه این شرط کوانتیده شدن انرژی است. طیف انرژی با ویژه مقادیر مثبت از رابطه (۱۷۰.۴) حاصل می شود.

$$E_{n,m} = \pm [2(2n+1)\omega + \sqrt{\frac{1+4m^2 - 4\alpha\zeta_C + 4\alpha^2\omega^2}{\alpha^2}}\omega + k_z^2 + M^2 + 2\xi_C\xi_L - 2\zeta_L + \frac{\zeta_L}{\alpha} - 2\zeta_C\zeta_L]^{\frac{1}{2}} \quad (171.4)$$

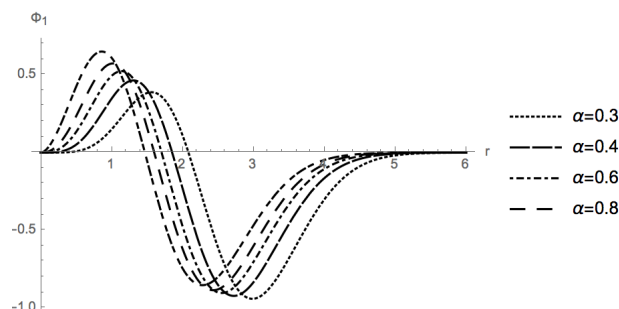
انرژی بر حسب α در شکل ۱۳.۴ برای $n = 1, 2, 3$ و $n = 5$ رسم شده است. مشاهده می شود قدر مطلق انرژی با افزایش α کاهش می یابد. تابع موج و چگالی احتمال برای مقادیر مختلف α به ترتیب در شکل های ۱۵.۴ و ۱۶.۴ رسم شده اند. همچنین مشاهده می شود قله چگالی احتمال با افزایش α به سمت r های کوچک میل می کند.



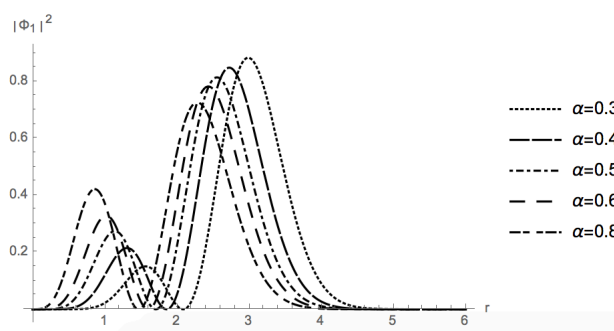
شکل ۱۳.۴: انرژی بصورت تابعی از α ، $k_z = M = 1, \zeta_L = 1, \zeta_C = 1, m = 1, \xi_L = 0.6$ ، برای n های مختلف $\xi_C = 0.6$

۱۰.۴ بررسی رنگین کمان گرانشی در فضای خمیده

بر اساس نظریه نسبیت عام اینشتین، اجرام پرجرم باعث تاب برداشتن فضا زمان می شوند به نحوی که هر چیزی که درون آن در حال حرکت است (از جمله نور)



شکل ۱۵.۴: تابع موج $\Phi_1(r)$ برای $n = 1, 2, 3, 4$ در محدوده $0 \leq r \leq 6$ GeV^{-1} با پارامترهای $k_z = M = 1, \zeta_L = 1, \zeta_C = 1, m = 1, \xi_L = 0.6, \xi_C = 0.6, n = 1$



شکل ۱۶.۴: چگالی احتمال $|\Phi_1|^2$ برای $n = 1, 2, 3, 4$ و در محدوده $0 \leq r \leq 5$ GeV^{-1} ، با پارامترهای $k_z = M = 1, \zeta_L = 1, \zeta_C = 1, m = 1, \xi_L = 0.6, \xi_C = 0.6, n = 1$.

مسیری منحنی را خواهد پیمود. فیزیک استاندارد میگوید این مسیر نباید به انرژی ذرات در حال حرکت از میان فضا زمان وابسته باشد، اما در ایده گرانش رنگین کمانی^۶ این اتفاق رخ می دهد.

ذرات با انرژی های متفاوت در واقع فضا زمان های متفاوتی را درک می کنند، یعنی میدان های گرانشی مختلفی را تجربه می کنند. رنگ نور توسط بسامد آن تعیین می شود و از آنجایی که بسامدهای متفاوت متناظر با انرژی های متفاوت هستند، ذرات نور (فوتون ها) با رنگ های متفاوت به دلیل انرژی خود، در ساختار فضا زمان در مسیرهایی اندکی متفاوت حرکت می کنند.

^۶Rainbow's gravity

۱.۱۰.۴ نوسانگر دی-کی-پی در حضور رنگین کمان گرانشی

المان طول را بفرم زیر در نظر می گیریم

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2 \quad (172.4)$$

تحت چارچوب گرانش رنگین کمانی، انرژی ذره می تواند فضا-زمان پس زمینه را تحت تاثیر قرار دهد، این بستگی فضا زمان به انرژی فرم متریک را تغییر می دهد و حساسیت متریک به انرژی ذره به روابط پراکندگی جدیدی بفرم زیر می شود [۱۰۳]

$$E^2 g_0^2\left(\frac{E}{E_p}\right) - p^2 g_1^2\left(\frac{E}{E_p}\right) = M^2. \quad (173.4)$$

که در آن $x = \frac{E}{E_p}$ نسبت انرژی ذره به انرژی پلانک می باشد. توابع $g_0(x)$ و $g_1(x)$ توابع رنگین کمانی نامیده می شوند که در محدوده انرژی های پایین $E \rightarrow 0$ داریم

$$\lim_{x \rightarrow 0} g_i(x) = 1, i = 0, 1. \quad (174.4)$$

[۱۰۵-۱۰۳]

$$ds^2 = -\frac{1}{g_0^2(x)} dt^2 + \frac{1}{g_1^2(x)} [dr^2 + \alpha^2 r^2 d\varphi^2 + dz^2] \quad (175.4)$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{g_0^2(x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_1^2(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha^2 r^2}{g_1^2(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_1^2(x)} \end{pmatrix} \quad (176.4)$$

در اینجا قصد داریم سه تابع رنگین کمانی پذیرفته شده را مورد بررسی قرار دهیم که به صورت زیر می باشند

$$g_0(x) = g_1(x) = \frac{1}{1 - \varepsilon x} \quad (177.4)$$

$$g_0(x) = 1, g_1(x) = \sqrt{1 - \varepsilon x^2} \quad (178.4)$$

$$g_0(x) = \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon x}, g_1(x) = 1 \quad (179.4)$$

با استفاده از این توابع قصد داریم نوسانگر دی-کی-پی را در حضور رنگین کمان گرانشی با توجه به متریک (۱۷۵.۴) مورد بررسی قرار دهیم. معادله دی-کی-پی در این فضا زمان بصورت زیر می باشد

$$(i\beta^\mu(x)\nabla_\mu - M)\Psi(x) = 0. \quad (180.4)$$

و مشتق هم وردا از رابطه زیر بدست می آید

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu(x) \quad (181.4)$$

Γ_μ اتصال دهنده های اسپینی آفین هستند

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}[\beta^a, \beta^b]. \quad (182.4)$$

ماتریس های β^a ماتریس های کمر در فضای مینکوفسکی می باشند

$$\beta^\mu = e_a^\mu \beta^a \quad (183.4)$$

و $\omega_{\mu}^a{}_b$ اتصال دهنده های اسپینی آفین هستند که از روابط زیر بدست می آیند

$$\omega_{\mu}^a{}_b = e_a^\rho e_v^b \Gamma_{\mu\rho}^v - e_a^v \partial_\mu e_v^b. \quad (184.4)$$

ماتریس های e_a^μ ، تتراد، بصورت زیر انتخاب می شوند

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_0(x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r\alpha}{g_1(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{g_1(x)} \end{pmatrix}, e_a^\mu = \begin{pmatrix} g_0(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g_1(x)}{r\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_1(x) \end{pmatrix} \quad (185.4)$$

و مؤلفه های غیر صفر اتصال دهنده اسپینی بصورت زیر می باشد

$$\omega_\varphi^{12} = -\omega_\varphi^{21} = \alpha. \quad (186.4)$$

ماتریس های 5×5 بتا را بصورت زیر انتخاب می کنیم

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \vec{\tau} \\ -\vec{\tau}^T & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix},$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tau^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tau^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (187.4)$$

با توجه به تتراد های انتخاب شده در معادله (۱۸۵.۴) ماتریس های بتا در فضا زمان خمیده بصورت زیر می باشند

$$\begin{aligned}\beta^t &= e_a^t \beta^a = g_0 \beta^0 \\ \beta^r &= e_a^r \beta^a = g_1 \beta^1 \\ \beta^\varphi &= e_a^\varphi \beta^a = \frac{g_1 \beta^2}{r\alpha} \\ \beta^z &= e_a^z \beta^a = g_1 \beta^3\end{aligned}\quad (188.4)$$

ماتریس های β^a توسط معادله (۱۸۷.۴) داده شده است. نوسانگر دی-کی-پی توسط جایگزینی غیر کمینه زیر معرفی می شود

$$\frac{1}{i} \vec{\nabla}_\alpha \rightarrow \frac{1}{i} \vec{\nabla}_\alpha - iM\omega\eta_0 \vec{r} \quad (189.4)$$

ω فرکانس نوسانات و M ، جرم بوزون می باشد. از آنجا که برهمکنش مستقل از زمان است می توان نوشت $\Psi(r, t) \propto e^{im\varphi} e^{ik_z z} e^{-iEt} \Phi(r)$ ، انرژی بوزون های اسکالر، m عدد کوانتومی مغناطیسی و k_z عدد موج می باشد. اسپینور پنج مؤلفه ای دی-کی-پی را بصورت $\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)$ در نظر می گیریم به این ترتیب معادله دی-کی-پی به صورت پنج معادله زیر در می آید

$$\begin{aligned}-r\alpha M\Phi_1(r) + Eg_0(x)r\alpha\Phi_2(r) + g_1(x)m\Phi_4(r) + \\ g_1(x)\alpha \left(i \left(-1 + r^2 M\omega \right) \Phi_2(r) + r \left(k_z \Phi_5(r) - i\Phi_3'(r) \right) \right) &= 0 \\ Eg_0(x)\Phi_1(r) - M\Phi_2(r) &= 0 \\ g_1(x)rM\omega\Phi_1(r) + iM\Phi_2(r) + g_1(x)\Phi_1'(r) &= 0 \\ -g_1(x)m\Phi_1(r) - r\alpha M\Phi_4(r) &= 0 \\ g_1(x)k_z\Phi_1(r) + M\Phi_5(r) &= 0\end{aligned}\quad (190.4)$$

با حل دستگاه معادلات بالا بر حسب Φ_1 داریم

$$\begin{aligned}\Phi_2(r) &= \frac{Eg_0(x)\Phi_1(r)}{M} \\ \Phi_3(r) &= \frac{i \left(g_1(x)rM\omega\Phi_1(r) + g_1(x)\Phi_1'(r) \right)}{M} \\ \Phi_4(r) &= -\frac{g_1(x)m\Phi_1(r)}{r\alpha M} \\ \Phi_5(r) &= -\frac{g_1(x)k_z\Phi_1(r)}{M}\end{aligned}\quad (191.4)$$

در ادامه سه تابع رنگین کمانی معرفی شده در (۱۷۷.۴) را استفاده می کنیم و در ادامه محاسبات فرض $kz = z = 0$ را در نظر می گیریم.

حالت اول: $g_0(x) = g_1(x) = \frac{1}{1-\varepsilon x}$

با جایگزاری در معادله (۱۹۱.۴) به معادله حرکت زیر برای مؤلفه اول اسپیتور دی-کی-پی می رسیم

$$\Phi''_1(r) + \frac{\Phi'_1(r)}{r} + \left(E^2 - (1 - x\varepsilon)^2 M^2 + 2M\omega - \frac{m^2}{r^2 \alpha^2} - r^2 M^2 \omega^2 \right) \Phi_1(r) = 0 \quad (192.4)$$

با اعمال تغییر متغیر $\rho = M\omega r^2$ ، معادله (۱۹۲.۴) به صورت زیر در می آید

$$\left(\rho \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{d}{d\rho} - \left(\frac{j^2}{4\rho} + \frac{\rho}{4} - \frac{\kappa^2}{4M\omega} \right) \right) \phi(\rho) = 0. \quad (193.4)$$

که در آن

$$j^2 = \frac{m^2}{\alpha^2} \quad (194.4)$$

$$\kappa^2 = E^2 - (1 - x\varepsilon)^2 M^2 + 2M\omega \quad (195.4)$$

معادله (۱۹۳.۴) به حل زیر رهنمون می شود

$$\phi(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{\rho}{4}} F(\rho) \quad (196.4)$$

به این ترتیب معادله (۱۹۳.۴) به صورت زیر در می آید

$$\rho F''(\rho) + (1 + |j| - \rho) F'(\rho) - \left(\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4M\omega} \right) F(\rho) = 0 \quad (197.4)$$

جواب های معادله (۱۹۷.۴) به صورت توابع فوق هندسی هستند

$$\phi(\rho) = \rho^{\frac{|j|}{2}} e^{-\frac{\rho}{4}} F\left(\left(\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4M\omega}\right), 1 + j, \rho\right) \quad (198.4)$$

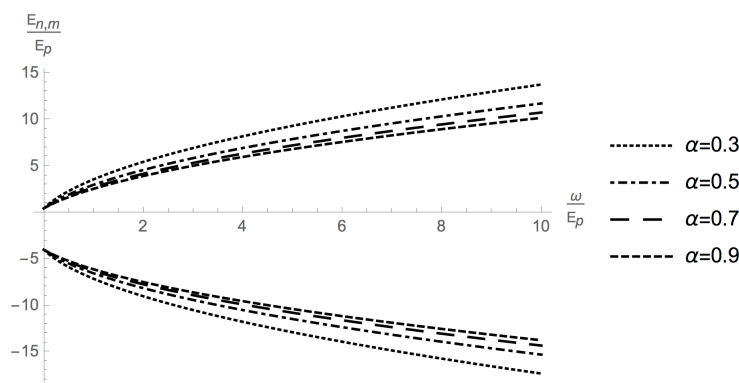
در اینجا نیز با توجه به واگرایی تابع $F(\rho)$ در ρ های بزرگ، آن را بصورت چندجمله ایی درجه n در نظر می گیریم. به این ترتیب جواب های شعاعی رفتار قابل قبولی در بی نهایت دارند. به این منظور قید زیر حاصل می شود

$$\frac{1 + |j|}{2} - \frac{\kappa^2}{4M\omega} = -n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (199.4)$$

این شرط به کوانتیزه شدن انرژی منجر می شود. فرم صریح انرژی در این مورد به صورت زیر است

$$E = \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{\omega^2} + \frac{4n}{M\omega} + \frac{2|m|}{M\omega} - \frac{4n\varepsilon^2 M}{E_P^2 \omega} - \frac{2|m| \varepsilon^2 M}{E_P^2 \omega} + \frac{\varepsilon M}{E_P \omega}}}{-\frac{1}{M\omega} + \frac{\varepsilon^2 M}{E_P^2 \omega}} \quad (200.4)$$

طیف انرژی در این حالت در شکل ۱۷.۴ در واحد انرژی پلانک بر حسب نسبت فرکانس دی-کی-پی در واحد انرژی پلانک به ازای مقادیر مختلف زاویه کاستی رسم شده است



شکل ۱۷.۴: انرژی بر حسب $\frac{\omega}{E_p}$ با پارامترهای $n=1; m=1; \varepsilon=1; \frac{M}{E_p}=0.8$ برای α های مختلف

حالت دوم: $g_0(x)=1, g_1(x)=\sqrt{1-\varepsilon x^2}$

با این انتخاب و جایگذاری در رابطه (۱۹۱.۴) به معادله حرکت زیر بر حسب مؤلفه اول اسپینور دی-کی-پی می رسمیم

$$\Phi_1''(r) + \frac{\Phi_1'(r)}{r} + \left(\frac{E^2 - M^2}{1 - \varepsilon x^2} + 2M\omega - \frac{m^2}{r^2 \alpha^2} - r^2 M^2 \omega^2 \right) \Phi_1(r) = 0 \quad (201.4)$$

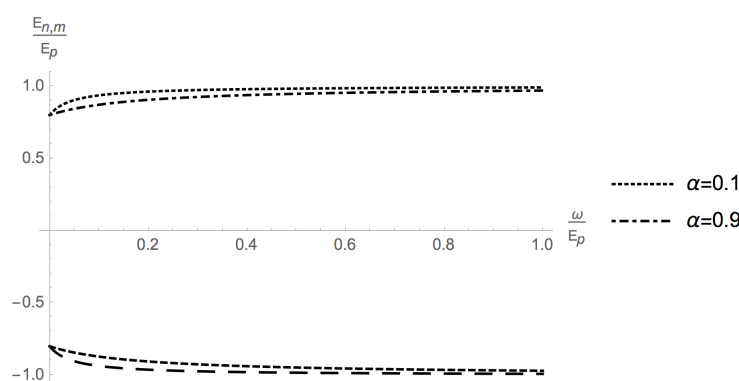
که جواب آن نیز تابع فوق هندسی می باشد اما باید κ^2 را با

$$\kappa^2 = \frac{E^2 - M^2}{1 - \varepsilon x^2} + 2M\omega \quad (202.4)$$

جایگزین کنیم. به این ترتیب به عبارت زیر برای انرژی می رسمیم

$$E = \pm \frac{\sqrt{E_p^2 M^2 + 4nE_p M\omega + 2E_p^2 \left| \frac{m}{\alpha} \right| M\omega}}{\sqrt{E_p^2 + 4n\varepsilon M\omega + 2\varepsilon M\omega \left| \frac{m}{\alpha} \right|}} \quad (203.4)$$

در شکل ۱۸.۴ $\frac{E}{E_p}$ بر حسب $\frac{\omega}{E_p}$ برای مقادیر مختلف زاویه کاستی رسم شده است.



شکل ۱۸.۴: انرژی بر حسب $\frac{\omega}{E_p}$ با پارامترهای $\frac{M}{E_p} = 0.8$; $\varepsilon = 1$; $m = 1$; $n = 1$

حالت سوم: $g_0(x) = \frac{e^{\varepsilon x} - 1}{\varepsilon x}$, $g_1(x) = 1$

با انتخاب تابع رنگین کمانی به فرم بالا معادله حرکت نوسانگر دی-کی-پی برای مؤلفه اول اسپینور دی-کی-پی بصورت زیر در می آید

$$\Phi_1''(r) + \frac{\Phi_1'(r)}{r} + \left(\frac{(1 - e^{\varepsilon x})^2 E^2}{(\varepsilon x)^2} - M^2 + 2M\omega - \frac{m^2}{r^2 \alpha^2} - r^2 M^2 \omega^2 \right) \Phi_1(r) = 0 \quad (204.4)$$

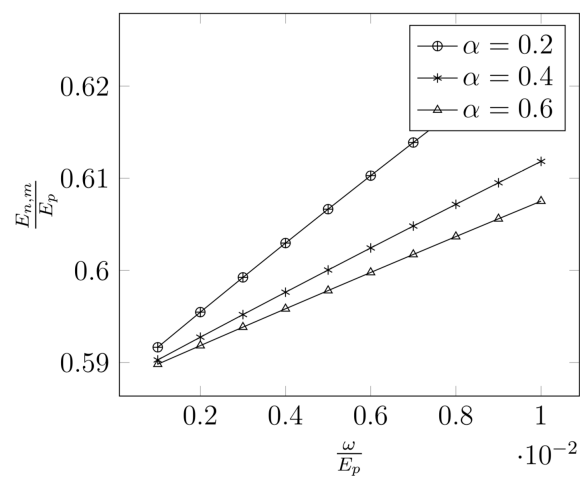
حل این معادله بالا نیز مانند دو مورد قبل به صورت توابع فوق هندسی است با این تفاوت که در آن

$$\kappa^2 = \frac{(1 - e^{\varepsilon x})^2 E^2}{(\varepsilon x)^2} - M^2 + 2M\omega \quad (205.4)$$

به این ترتیب عبارت زیر را برای انرژی در این حالت بدست می آوریم

$$2n - \left(\frac{(e^{\varepsilon x} - 1)^2 E^2}{\varepsilon^2 x^2} - M^2 \right) + \left| \frac{m}{\alpha} \right| = 0 \quad (206.4)$$

طیف انرژی در این حالت در شکل ۱۹.۴ رسم شده است.



شکل ۱۹.۴: انرژی بر حسب $\frac{\omega}{E_p}$ با پارامترهای $\frac{M}{E_p} = 0.8; m = 1; n = 1; \varepsilon = 1$

فصل ۵

نتیجه گیری

در پاسخ به ضرورت مطالعه نواقص هندسی باید گفت که این موجودات پیوند منحصر به فردی با فیزیک آغاز جهان برقرار می کنند. علاوه بر این، آنها می توانند به شدت بر تکامل جهان تاثیر می گذارد. بنابراین با توجه به این که آنها همواره تشکیل می شوند، مطالعه آنها بخشی اجتناب ناپذیر از تلاش های جدی برای فهم جهان اولیه است. اثر فضا-زمان در فیزیک کوانتومی و یا، اثر فیزیک کوانتومی در ساختار فضا-زمان، موضوعاتی جدید و بحث برانگیز می باشند. در بیشتر توصیفات سیستم های کوانتومی و فیزیک ذرات، این مساله مورد توجه قرار نگرفته است و فضای مسطح مینکوفسکی در نظر گرفته شده ایت و اثر خمیدگی ساختار فضا-زمان در معادلات حرکت در نظر گرفته نشده است. به این منظور در بررسی صورت گرفته رفتار دینامیکی ذرات در متریک های مختلف مطالعه شد. طیف انرژی ذرات محاسبه و تاثیر خمیدگی فضا زمان در تابع موج و طیف انرژی و خواص ترمودینامیکی بررسی شد. مشاهده شد طیف انرژی ذرات اعم از بوزون یا فرمیون متاثر از میزان خمیدگی فضا زمان می باشد که در پارامتر زاویه کاستی α نهفته است. تاثیر خمیدگی فضا زمان بر انرژی سیستم های بوزونی و فرمیونی و همچنین توابع موج آنها مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد برای ذرات نسبیتی با افزایش پارامتر α طیف انرژی به سمت انرژی های کمتر میل می کند همچنین تابع موج به مبدا متمایل می شود. همچنین خواص ترمودینامیکی این سیستم ها در فضا زمان خمیده مورد مطالعه قرار گرفت. در یک سیستم شامل ذرات نسبیتی غیر بر همکنشی نتایج نشان می دهد با افزایش پارامتر α انرژی آزاد

هلمهولتز، انرژی میانگین و آنتروپی کاهش می یابند اما ظرفیت گرمایی تا یک مقدار حدی افزایش یافته و سپس ثابت می ماند.

در بررسی صورت گرفته دریافتیم عوامل مؤثر بر متریک فضا زمان علاوه بر وجود نواقص هندسی می تواند متاثر از بر هم کنش های موجود در سیستم نیز باشد. چنانکه ذرات مختلف به گونه ای متفاوت می توانند تحت تاثیر فضا زمان قرار گیرند. به عنوان مثال کوارک ها با توجه به میدان گلئون قوی ناشی از یکدیگر فضا زمان را بصورت خمیده درک می کنند و تاثیر این بر هم کنش در متریک ظاهر شده و معادلات نسبیتی حاکم بر آن ها را متاثر می سازد. به عنوان نمونه تاثیر این بر هم کنش در یک سیستم کوارکی نظیر هادرون بررسی شده و نتیجه جالبی که بدست آمده این است که محبوس شدگی کوارک بصورت طبیعی بدون نیاز به پتانسیل محدود کننده بروز پیدا می کند. همچنین گشتاور مغناطیسی پروتون و نوترون نیز محاسبه گردیده که این نتایج توافق خوبی با مقادیر تجربی دارد. این نتایج ضرورت بررسی مجدد سیستم های نسبیتی در این ساختار جدید و مطالعه تاثیر هندسه فضا زمان بر سیستم را اجتناب ناپذیر می کند. جا دارد ضمن توسعه نظریه موجود به سیستم های نسبیتی مختلف، آنها را در ساختار فضا زمان های با متریک های متفاوت بررسی کنیم. متریک هایی که علاوه بر خمیدگی فضا زمان حالات کلی تری که شامل خمش و پیچش است را در بر بگیرد.

مراجع

- [1] Peshkin M and Tonomura A, "The Aharonov-Bohm Effect" (Springer-Verlag, Berlin)(1989).
- [2] Hamilton J, "Aharonov-Bohm and other cyclic phenomena" (Springer-Verlag, Berlin) (1997).
- [3] He X G and McKellar B H J, "Topological phase due to electric dipole moment and magnetic monopole interaction"Phys. Rev. A 47, 3424 (1993); M. Wilkens, Phys. Rev. Lett.72, 5 (1994).
- [4] Zeilinger A, "Generalized Aharonov-bohm and Wheeler-type Delayed Choice Experiments With Neutrons"J. Phys. Colloq. (France) 45, C3-213 (1984).
- [5] Zeilinger A, "in Fundamental Aspects of Quantum Theory" (Plenum, New York)(1985).
- [6] Anandan J,"Electromagnetic effects in the quantum interference of dipoles " Phys. Lett. A 138, 347 (1989)
- [7] Spavieri G, "Quantum Effect of the Aharonov-Bohm Type for Particles with an Electric Dipole Moment "Phys. Rev. Lett. 82, 3932 (1999)
- [8] Wei H, Han R and Wei X, "Quantum Phase of Induced Dipoles Moving in a Magnetic Field",Phys. Rev. Lett. 75, 2071 (1995).
- [9] Bakke K, "On the interaction between an electric quadrupole moment and electric fields"Ann. Phys. (Berlin) 524, 338 (2012).
- [10] Bakke K, Ribeiro L R, Furtado C and Nascimento J R,"Landau quantization for a neutral particle in the presence of topological defects", phys.Rev.D 79, 024008 (2009).
- [11] Bakke K, Int. J. Mod. Phys. A 26, 4239 (2011).

- [12] Aharonov Y and Bohm D, "Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory", Phys. Rev. 115, 485 (1959).
- [13] Vilenkin A and Shellard E. P. S., "Strings and Other Topological Defects" (Cambridge University Press, Cambridge, UK) (1994).
- [14] Marques G de A and Bezerra V B, "Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects ", Phys. Rev. D 66, 105011 (2002).
- [15] Bausch R, Schmitz R and L. A. Turski, "Single-Particle Quantum States in a Crystal with Topological Defects" ,Phys. Rev. Lett. 80, 2257 (1998).
- [16] Aurell E, "Torsion and electron motion in quantum dots with crystal lattice dislocations", J. Phys. A: Math. Gen. 32, 571 (1999).
- [17] Bakke K and Furtado C, "Relativistic Landau quantization for a neutral particle ", Phys. Rev. A 80, 032106 (2009).
- [18] Bakke K and Furtado C, "Anandan quantum phase for a neutral particle with Fermi–Walker reference frame in the cosmic string background ", Eur. Phys. J. C 69, 531 (2010).
- [19] Furtado C, Bezerra V B and Moraes F, "Quantum scattering by a magnetic flux screw dislocation ", Phys. Lett. A 289, 160 (2001).
- [20] Furtado C et al., "Landau levels in the presence of disclinations" Phys. Lett. A 195, 90 (1994).
- [21] Chuang I, Durrer R, Turok N, Yurke B, "Cosmology in the Laboratory: Defect Dynamics in Liquid Crystals", Science, 251 4999 (1991).
- [22] . Chuang I, Durrer R, Turok N, Yurke B, "Cosmology in the Laboratory: Defect Dynamics in Liquid Crystals", Science. 15;251(1991)
- [23] Kibble T W B, "Topology of cosmic domains and strings", J. Phys. A 9, 1387 (1976)
- [24] Vilenkin A, "Cosmic strings", Phys. Rev. D, 23, 852 (1981).
- [25] Vilenkin A, "Cosmic strings and domain walls", Phys. Rep. 121, 263 (1985).
- [26] Lawrie I, "in A Unified Grand Tour of Theoretical Physics", Third Edition (Taylor and Francis, London) (2012).
- [27] Birrell N D, Davies P C W, "Quantum Fields in Curved Space" (Cambridge Univ. Press, Cambridge) (1984).

- [28] Nakahara N, Geometry, "Topology and Physics"(Institute of Physics, Bristol)(1998).
- [29] Carrol S M, "Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity" (Addison-Wesley)(2003).
- [30] Linet B , "The static metrics with cylindrical symmetry describing a model of cosmic strings", Gen. Relativ. Gravit. 17, 1109 (1985).
- [31] Marques G de A and Bezerra V B, "Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects ",Phys. Rev. D 66, 105011 (2002).
- [32] Dong S H, Qiang W C, Sun G H, Bezerra V B, "Analytical approximations to the l-wave solutions of the Schrödinger equation with the Eckart potential",J. Phys. A 40(34), 10535 (2007).
- [33] Qiang W C, Dong S H "Analytical approximations to the solutions of the Manning–Rosen potential with centrifugal term", Phys. Lett. A 368(1–2), 13 (2007).
- [34] Landau L D, Lifschitz E M, "Quantum Mechanics" (Pergamon, Oxford)(1981).
- [35] Gradshteyn, I S, Ryzhikif I M, "Table of Integrals, Series, and Products" (Academic)(2007).
- [36] Hosseinpour M, Hassanabadi H, "Scattering states of Dirac equation in the presence of cosmic string for Coulomb interaction", Int. J. Mod. Phys. A 30(21), 1550124 (2015)
- [37] Peshkin M, Tonomura A, " The Aharonov-Bohm effect", vol. 340. In: Lecture Notes in Physics (Springer, Berlin)(1989).
- [38] Hamilton J, " Aharonov-Bohm and Other Cyclic Phenomena" (Springer, Berlin, 1997).
- [39] He X G, McKellar B H J, "CP violation in $J\psi \rightarrow \Lambda\Lambda^-$ ", Phys.Rev.A47,3424(1993).
- [40] Wilkens M , "Quantum phase of a moving dipole", Phys.Rev.Lett.72,5(1994).
- [41] Zeilinger A, "GENERALIZED AHARONOV-BOHM AND WHEELER-TYPE DELAYED CHOICE EXPERIMENTS WITH NEUTRONS", J.Phys.Colloq.(France)45,C3–213(1984).
- [42] Zeilinger A, " in Fundamental Aspects of Quantum Theory" (Plenum, New York)(1985).
- [43] Anandan J, "Global Topology and Local Violation of Discrete Symmetries", Phys.Lett.A138,347(1989).

-
- [44] Anandan J, "Classical and Quantum Interaction of the Dipole", Phys.Rev.Lett.85,1354(2000).
- [45] Spavieri G, "Quantum Effect of the Aharonov-Bohm Type for Particles with an Electric Dipole Moment", Phys.Rev.Lett.82,3932(1999).
- [46] Spavieri G, "Quantum effect for an electric dipole", Phys.Rev.A59,3194(1999).
- [47] Marques G A, Bezerra V B, "Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects", Phys.Rev.D66,105011(2002).
- [48] Bausch R, Schmitz R, Turski L A, "Single-Particle Quantum States in a Crystal with Topological Defects", Phys. Rev. Lett. 80, 2257(1998).
- [49] Aurell E, "Torsion and electron motion in quantum dots with crystal lattice dislocations", J.Phys.A:Math.Gen.32,571(1999).
- [50] Bakke K, Furtado C, "Relativistic Landau quantization for a neutral particle", Phys.Rev.A80,032106(2009).
- [51] Bakke K, Furtado C, "Relativistic Landau quantization for a neutral particle", Phys.Rev.D80,024033(2009).
- [52] Vilenkin A, "Monopole annihilation and causality", Phys.Rep.121,263(1985).
- [53] Dowker J S, "Spinors on a tetrahedron", Phys.Rev.D36,3095(1987).
- [54] Frolov V P, Serebriany E M, "Vacuum polarization in the gravitational field of a cosmic string", Phys.Rev.D35,3779(1987).
- [55] Bakke K, "On the interaction between an electric quadrupole moment and electric fields", Ann.Phys.(Berlin)524,338(2012).
- [56] Andrade F M, Silva E O, "Effects of spin on the dynamics of the 2D Dirac oscillator in the magnetic cosmic string background", Eur. Phys. J. C (2014).
- [57] Hassanabadi H, Hosseinpour M and Montigny M, "The spin-zero Duffin-Kemmer-Petiau equation in a cosmic-string space-time with the Cornell interaction", Int. J. Mod. Phys. A . 31 (2016).
- [58] Fonseca I C and Bakke K, "Aharonov–Anandan quantum phases and Landau quantization associated with a magnetic quadrupole moment", Ann. Phys 363, 253 (2015).

- [59] Fonseca I C and Bakke K ,”On an atom with a magnetic quadrupole moment subject to harmonic and linear confining potentials”, Proc. R. Soc. A 471, 20150362 (2015).
- [60] Fonseca I C and Bakke K,”Some aspects of the interaction of a magnetic quadrupole moment with an electric field in a rotating frame”,JMP,58, 102103 (2017).
- [61] Andrade F M, Silva E O,”Effects of spin on the dynamics of the 2D Dirac oscillator in the magnetic cosmic string background”, Eur. Phys. J. C 74:3187(2014).
- [62] Pacheco M H, Landim R R, C. Almeida C A S,”One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath”.Phys.Lett. A311 93-96(2003).
- [63] Pawel O Mazurt, ”Spinning Cosmic Strings and Quantization of Energy”,Phys.Rev.lett.57.929(1986).
- [64] Muniz C R, Bezerra V B, Cunha M S,”Landau quantization in the spinning cosmic string spacetime”, Ann. Phys. 350 105-111(2014) .
- [65] Bezerra V B, ”Global effects due to a chiral cone”,J. Math. Phys. 38 2553-2564(1997).
- [66] Bekenstein J D,”Chiral cosmic strings”, Phys. Rev. D 45 2794-2801(1992) .
- [67] Eichten E, Gottfried K, Kinoshita T, Lane K D, Yan T M,”Spectrum of Charmed Quark-Antiquark Bound States.”, Phys. Rev. D 17 3090-3117(1978).
- [68] Cunha, M S et al,”Relativistic Landau levels in the rotating cosmic string spacetime”, Eur. Phys. J. C 76 512(2016).
- [69] Barros C C ,”Quantum mechanics in curved space-time”,Jr., Eur. Phys. J. C 42, 119 (2005).
- [70] Barros C C ,”Quark confinement and curved spaces”, Jr., Eur. Phys. J. C 45, 421 (2006).
- [71] Barros C C,”Space-time and hadrons”,Jr., physics/0609115 (2006).
- [72] Dirac P A M,”On the Annihilation of Electrons and Protons”, Proc. Roy. Soc. Lon. A 117, 610 (1930).
- [73] Schiff L I, ”Quantum mechanics”, (McGraw-Hill, Singapore)(1968).
- [74] Sommerfeld A, ”Zur Quantentheorie der Spektrallinien”,Ann. Physik. 51, 1 (1916).
- [75] Eidelman S et al,”Particle Data Group”, Phys. Lett. B 592, (2004).

-
- [76] Tegen R, "Relativistic harmonic oscillator potential for quarks in the nucleon", *Ann. Phys.* 197, 439 (1990).
- [77] Ferreira P L, Helayel J A, and Zagury N, "A linear-potential model for quark confinement", *Nuovo Cim. A* 55, 215 (1980).
- [78] Isgur N and Karl G, *Phys. Rev. D* 18, 4187 (1978).
- [79] Bogolioubov P N, "P-wave baryons in the quark model", *Ann. Inst. Henri Poincaré* 8, 163 (1967).
- [80] Close F E, "An introduction to quarks and partons". Academic Press, London, (1979).
- [81] Hagiwara K et al., "Particle Data Group", *Phys. Rev. D* 66, 010001 (2002).
- [82] Barros C C Jr, "Quantum mechanics in curved space-time", *Eur. Phys. J. C* 42, 119–126 (2005).
- [83] Ronveaux A, "Heun's Differential Equations" (Oxford University Press) (1995).
- [84] Maroni P, "Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris" 264 503-505 (1967).
- [85] Belmehdi S, Chehab J P, "Integral representation of the solutions to Heun's biconfluent equation", *Abst. Appl. Anal. Hindawi* 4 295-306 (2004).
- [86] Dong S H, "Factorization in Quantum Mechanics" (Springer, New York) (2007).
- [87] Dong S H, "Exact Solutions of the Two-Dimensional Schrödinger Equation with Certain Central Potentials", *Int. J. Theor. Phys.* 39 1119-1128 (2000).
- [88] Dong S H, "The Ansatz Method for Analyzing Schrödinger's Equation with Three Anharmonic Potentials in D Dimensions", *Found. Phys. Lett.* 15 385-395 (2002).
- [89] Hassanabadi H, Rajabi A A, "Relativistic versus nonrelativistic solution of the N-fermion problem in a hyperradius-confining potential", *Few-Body Syst.* 41 201-210 (2007).
- [90] Kemmer N. "The wave equation for spin 1 in Hamiltonian form.", *Proc. R. Soc. A*, 173 (1952).
- [91] Duffin R J. "On The Characteristic Matrices of Covariant Systems", *Phys. Rev.* 54(12) (1938).
- [92] Petiau G. PhD thesis, 1936. *Acad R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect* 8: 16 (1936).

- [93] Nedjadi Y , Barret R C, "Solution of the central field problem for a Duffin–Kemmer–Petiau vector boson", J. Phys. A 27, 4301 (1994).
- [94] Guo G, Long C, Yang Z et al., "DKP oscillator in noncommutative phase space", Can. J. Phys. 87, 989 (2009).
- [95] Boztosun I, Karakoc M, Yasuk F , Durmus A, "Asymptotic iteration method solutions to the relativistic Duffin-Kemmer-Petiau equation", J. Math. Phys. 47, 062301 (2006).
- [96] Bakke K, "Bound states for neutral particles in a rotating frame in the cosmic string space-time", Phys. Rev. D 82, 084025 (2010).
- [97] Moshinsky M , Szczepaniak A, "The Dirac oscillator ", J. Phys. A: Math. Gen. 22, L817 (1989).
- [98] Hosseinpour M , Hassanabadi H, "Scattering states of Dirac equation in the presence of cosmic string for Coulomb interaction", Int. J. Mod. Phys. A. 31 (2016).
- [99] Hosseinpour M , Hassanabadi H, Andrade F M, "The DKP oscillator with a linear interaction in the cosmic string space-time", Eur. Phys. J. C, 78.93(2018).
- [100] Hosseinpour M, Andrade F M, Silva E O, Hassanabadi H, " Scattering and bound states for the Hulthén potential in a cosmic string background", Eur. Phys. J. C , 77.270(2017).
- [101] Hassanabadi H, Hosseinpour M, "Thermodynamic properties of neutral particle in the presence of topological defects in magnetic cosmic string background ", Eur. Phys. J. C, 76.553(2016).
- [102] Hosseinpour M and Hassanabadi H , "DKP equation in a rotating frame with magnetic cosmic string background", Eur. Phys. J. Plus. 130: 236(2015).
- [103] Magueijo J and Smolin L, "Gravity's rainbow", Class. Quantum Grav., 21 (2004).
- [104] Magueijo J and Smolin L, "Charged dilatonic black holes in gravity's rainbow", Class. Quant. Grav. 21, 1725 (2004).
- [105] Hendi S H and Faizal M, "Black holes in Gauss-Bonnet gravity's rainbow", Phys. Rev. D 92, 044027 (2015).

Aabstract

The study of relativistic particles in space-time of topological defects has been developing research field. The analysis of the influence of the spacetime produced by topological defects on the energy spectrum of the particles, has been considered under both non- relativistic and relativistic points of view. According to the modern concepts of theoretical physics, different types of topological defects may be produced by the vacuum phase transition in the early Universe. These include domain walls, cosmic strings and monopoles. Among them, cosmic strings seem to be the best candidates to be considered and is one of the most important examples of topological defects. Recently, several examples of studies in a space-time with a cosmic string were done revealing the role played by this topological defect in curved space-time. Our intention now is to extend these studies to consider this dynamics in general background of curved space time. So we introduce different curved space time such as cosmic string, Fermi-walker, spinning cosmic string, space time with noninertial effect, space time with spherical symmetry. We consider the effect of these space time on both non- relativistic and relativistic particles described by Dirac equation for spin half particles ,DKP equation for spin 0 and 1 particles in these kind of curved space-time.

Keywords: topological defects, cosmic strings, DKP equation, Dirac equation,noninertial effect.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics and Nuclear Engineering

PhD Thesis in: Nuclear Physics

**Corrections of topological defects on the
nuclear bosonic systems and fermions**

By: Mansoureh Hosseinpour

Supervisor

Hassan Hassanabadi

May 2018