

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک ذرات بنیادی

بررسی خواص ترمودینامیکی باریون ها در مدل کیسه ای MIT

اصلاح شده متشکل از سه کوارک

دانشجو: ثمره رستمی

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رجبی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۸۸

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار و از خود گذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان

به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است

به پاس محبت‌های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی‌کند

این مجموعه را به پدر و مادر عزیزم تقدیم می‌کنم

تشکر و قدرانی

سپاس بیکران پروردگار یکتا که به ما هستی بخشید و به طریق علم و دانش رهنمون شد.

سپاس خدایی که ما را به همنشینی رهروان علم و دانش مفتخر نمود.

اکنون در آستانه راهی نو به پاس نعمات بی حد پروردگارم بر خود لازم می دانم سپاسگزار تمام عزیزانی باشم که در برابر سختی های روزگار یاریم نمودند. شایسته است از استاد بزرگوارم جناب آقای پرفسور علی اکبر رجبی که همواره مشوق و راهنمای اینجانب بوده است تشکر و قدردانی نمایم . و از کلیه کسانی که مرا در انجام این رساله یاری نموده اند کمال تشکر را دارم و توفیق همگی را از خداوند متعال خواستارم. همچنین مراتب سپاس صمیمانه خود را از پدر و مادر عزیزم دارم که در تمامی مراحل زندگی همواره حامی و پشتیبان من بوده اند.

چکیده:

مدل کیسه ای MIT ، به دلیل سادگی ، مدلی نسبتاً مناسب برای محاسبه خواص متفاوت هادرونی می باشد [۱]. لذا مهم است تا این مدل را در شرایط متفاوتی بررسی کنیم که دینامیک مدل به صورت کلی تری فرمولبندی شده باشد . در مدل کیسه ای تابع موج کوارک های آزاد را با شرایط مرزی جریان صفر روی دیواره کیسه در نظر می گیرد . مطمئناً ، کوارک ها درون کیسه با یکدیگر برهمکنش می کنند و این نتایج استاندارد بدست آمده در این مدل را تغییر خواهد داد . بنابراین با اصلاحات معین انجام شده در این مدل ، نتایج بدست آمده در مقایسه با مدل کیسه ای MIT به نتایج تجربی نزدیک تر خواهند بود .

در این کار، اصلاحاتی با بسط دادن مدل کیسه ای پیشنهاد می شود که این اصلاحات شامل بر همکنش میان کوارک ها است . در مدل ما ، هر کوارک درون کیسه در میدانی تحت تاثیر از کوارک ها دیگر و گلوئون ها حرکت می کند . از آنجاییکه کوارک های سبک ذراتی کاملاً نسبیتی هستند ، معادله دیراک نسبیتی با پتانسیل مرکزی موثر برای هادرون ها که متشکل از سه کوارک می باشند ، به عنوان سیستم سه ذره ای ، بررسی و تابع موج حالات پایه و برانگیخته به صورت تحلیلی محاسبه شده است . همچنین خواص ترمودینامیکی این سیستم مورد مطالعه قرار گرفته است . و در پایان با تعیین فشار خارجی اعمال شده توسط خلا بر روی سیستم به بررسی انرژی خلا خواهیم پرداخت .

کلمات کلیدی : ترمودینامیک ، مدل کیسه ای ، باریون ، گرمای ویژه ، پتانسیل نوسانگر .

فهرست مطالب

فصل ۱- مقدمه ای بر ذرات بنیادی

۱-۱- مقدمه	3
۲-۱- مدل استاندارد و چهار نیروی حاکم بر طبیعت	4
۳-۱- فرمیون های بنیادی	6
۱-۳-۱- لپتون ها	6
۳-۱-۲- کوارک ها	8
۴-۱- گلوئون ها	11
۵-۱- تبدیل واحد ها	12

فصل ۲- بررسی کوارک ها در مدل کیسه ای MIT

۱-۲- مدل کیسه ای MIT	16
۲-۲- معادله دیراک	17
۳-۲- پتانسیل های اسکالر و برداری	۱۸
۴-۲- حل معادله دیراک در پتانسیل کروی	۱۹
۵-۲- فرمول لاگرانژی برای مدل کیسه ای MIT	۲۱
۶-۲- حل معادله دیراک در حفره کروی	۲۴

فصل ۳- خلاصه ای از ترمودینامیک آماری

۱-۳- آنسامبل کانونی	۳۳
۲-۳- نوسانگر هارمونیک یک بعدی در آنسامبل کانونی	۳۷
۳-۳- تعیین حجم در فضای N بعدی	۳۹
۴-۳- مختصات فوق کروی	۴۲
۵-۳- بررسی مدل کوارک ظرفیت در پتانسیل نوسانگر	۴۵

فصل ۴- بررسی خواص ترمودینامیکی هادرون ها با در نظر گرفتن پتانسیل $(ax^2 - \frac{c}{x})$

۴-۱- حل معادله دیراک برای سیستم تک ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$ ۵۰

۴-۲- حل معادله دیراک برای سیستم سه ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$ ۵۵

۴-۳- حل معادله دیراک برای حالت پایه ۵۹

۴-۴- محاسبه مراتب بالاتر انرژی ($\nu > 0$) در سیستم 64

۴-۵- روابط ترمودینامیکی حاکم بر مسئله 66

۴-۶- تعیین فشار خارجی وارد بر سطح کیسه در حالت پایه $\gamma = 0$ 69

پیوست ۱ 73

پیوست ۲ 77

پیوست ۳ 82

منابع 83

فهرست شکل ها

- ۱-۱- نمودار های فاینمن مربوط به بوزون های واسطه در مکانیک کوانتومی نسبیتی 5
- ۱-۳- سیستم مشخص A در حمام گرمایی A' قرار گرفته است و هر دو در تعادل گرمایی در دمای T هستند 33
- ۲-۳- نمودار برهمکنش سیستم سه جسمی 45
- ۱-۴- رسم نمودار مربوط به انرژی سیستم به ازای $c = 0.49$ بر حسب ν . که در آن نمودار خطی مربوط به $\gamma = 0$ و نمودار نقطه ای مربوط به $\gamma = 1$ می باشد 66
- ۲-۴- رسم گرمای ویژه سیستم به عنوان تابعی از دما برای $j = \frac{1}{2}$ 68

فهرست جدول ها

- ۱-۱- نمونه بوزون های مربوط به میدان های بر همکنش کننده 6
- ۱-۲- خانواده لپتون ها 7
- ۱-۳- خانواده کوارک ها 10
- ۱-۴- تبدیل واحد ها به واحد $\hbar = c = 1$ 13
- ۲-۱- تعیین ویژه مقدار های انرژی در واحد شعاع کیسه 28
- ۴-۱- مقایسه خواص استاتیکی پروتون در این مدل با مدل کیسه ای MIT و مقادیر تجربی 72

فصل ۱ :

مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی

۱-۱- مقدمه

۱-۲- مدل استاندارد و چهار نیروی حاکم بر طبیعت

۱-۳- فرمیون های بنیادی

۱-۳-۱- لپتون ها

۱-۳-۲- کوارک ها

۱-۴- گلوئون ها

۱-۵- تبدیل واحد ها

۱-۱- مقدمه

بشر تا قرن نوزدهم کوچکترین جزء تشکیل دهنده ماده را اتم فرض می کرد . ریشه یونانی کلمه اتم به معنی غیر قابل تقسیم می باشد و این گونه تصور می شد که اتمها آخرین ساختار غیر قابل تقسیم از ماده می باشند بنابراین اتمها را به عنوان ذرات بنیادی در نظر گرفتند .

یکی از موفقیت های اصلی فیزیک در قرن بیستم این بود که مشخص کرد اتمها ذرات بنیادی و غیر قابل تقسیم نیستند بلکه خود ، دارای ساختار پیچیده ای هستند .

اتم ها شامل هسته های کوچک و متراکم می باشند و بوسیله یک ابر از الکترون ها احاطه شده اند . سرانجام مشخص شد که هسته می تواند به ذرات دیگری مانند پروتون ها و نوترون ها شکسته شود . در سال های اخیر مشخص شد که این پروتون ها و نوترون ها نیز دارای ساختار پیچیده ای هستند . آنها از ذرات دیگری بنام کوارک تشکیل شده اند . به طور کلی دانشمندان کلیه ذرات را به سه دسته بزرگ هادرون ها و لپتون ها و ذرات واسطه تقسیم می کنند و مشخص کرده اند که لپتون ها ذرات بنیادی واقعی هستند زیرا آنها به اجزاء کوچکتر شکسته نمی شود و ساختار غیر قابل اندازه گیری ندارد . برعکس ، هادرون ها دارای ساختاری پیچیده ای هستند و دارای ساختار می باشند و می توانند به هادرون های دیگر واپاشی کنند .

همه هادرون ها شامل ترکیبی از دو یا سه ذره بنیادی هستند که کوارک نامیده می شوند . کوارک ها در شش طعم هستند که هر طعم در سه رنگ موجود می باشد . بنابراین دو دسته ذرات بنیادی بنام کوارک ها و لپتون ها وجود دارد که تفاوت خیلی مهمی بین این دو وجود دارد و به این صورت که کوارکها در بر همکنش های قوی شرکت می کنند اما لپتونها شرکت نمی کنند .

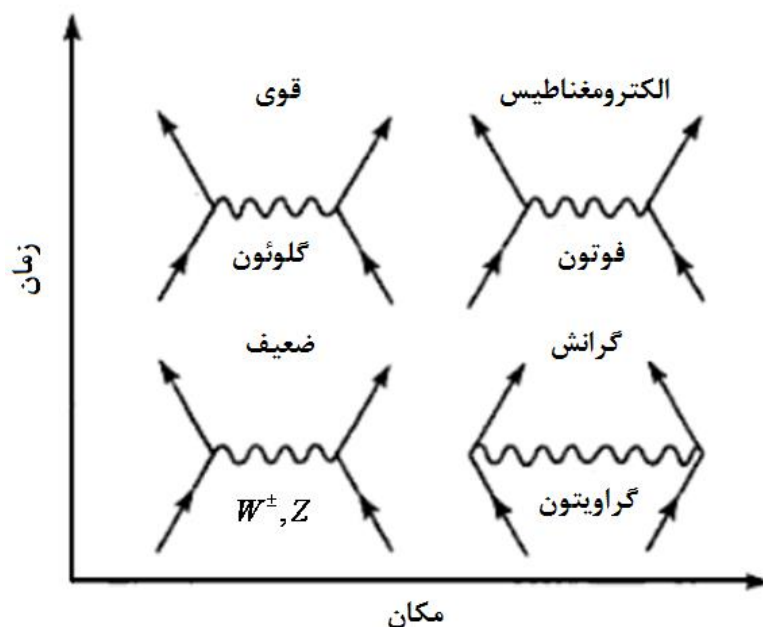
علی رغم آزمایشات بسیار زیاد انجام شده در زمینه ذرات بنیادی هنوز هیچ کوارک مجرد و تنهایی مشاهده نشده است . دانشمندان معتقدند که امکان ندارد یک کوارک تنها به دست آید آنها اعتقاد دارند که انرژی پتانسیل بین دو کوارک با افزایش فاصله بین آنها افزایش می یابد بنابراین انرژی نامحدودی برای جداسازی کوارکها لازم است . هنگامی که مقدار زیادی انرژی به یک سیستم کوارک اضافه شود یک جفت کوارک پاد کوارک خلق می شود و کوارک های اصلی همچنان در سیستم اولیه محبوس می مانند .

۱-۲- مدل استاندارد و چهار نیروی حاکم بر طبیعت

مدل استاندارد کالبد نظریه میدان کوانتومی را طراحی می کند و ابزاری در اختیار می گذارد تا نظریه ها طوری ساخته شود که شامل مکانیک کوانتوم و نسبیت خاص نیز باشند. با این ابزارها ، نظریه ها طوری طرح ریزی می شوند که موفقیت بزرگی برای توضیح چهار نیروی شناخته شده در طبیعت را داشته باشند .

آنچه به اندازه ی کوارک ها و لپتون ها به عنوان سنگ بناهای ماده اهمیت دارد، نیرو های عمل کننده بین آنها است که آنها را در قالب های قابل مشاهده در آورده اند . بر اساس مدل استاندارد ماده در جهان از فرمیون های بنیادی ای ساخته شده که از طریق میدان ها با هم برهم کنش می کنند . ذرات مبادله شونده در این بر همکنش ها بوزون نامیده می شود. به نظر می رسد چهار نیروی بنیادی بر مواد اثر دارند : نیروی گرانشی، نیروی الکترومغناطیسی، نیروی ضعیف و نیروی قوی.

برای نمونه، نیروی الکترومغناطیسی میان دو الکترون با مبادله فوتون ها صورت می‌پذیرد. با این حال نظریه فوق برای تمام نیروهای بنیادی به کار برده می‌شود. بردارهای بوزونی W^+ و W^- و خنثی Z ، نیروی ضعیف^۱ را تشکیل می‌دهند و همچنین گلوئون ها نیروی قوی^۲، و گراویتون ها نیروی گرانشی را برقرار می‌سازند. این ذرات حامل نیرو، ذراتی مجازی اند و طبق تعریف، زمانیکه حامل نیرو هستند امکان آشکارسازی آنها وجود ندارد، زیرا عملیات آشکارسازی گواه بر عدم حمل نیرو خواهد بود. می‌توان این میدان ها را در جدول (۱-۱) مشاهده کرد. این چهار نیرو کاملاً با هم متفاوت می‌باشند. قویترین آنها نیروی قوی است که نیرویی کوتاه برد است و تنها در مقیاس درون اتمی مفهوم پیدا می‌کند. قدیمی ترین این نیرو ها نیروی گرانش است که بلند برد است و عامل نگهدارنده تمام ستارگان و کهکشان ها در جهان می‌باشد و همچنین این نیرو همیشه به عنوان نیروی جاذب عمل خواهد کرد. نمودار های فاینمن^۳ مربوط به ذرات برهمکنش کننده با این نیرو ها در شکل ۱-۱ آورده شده اند. [2]



شکل ۱-۱: نمودار های فاینمن مربوط به بوزون های واسطه در مکانیک کوانتومی نسبیتی

^۱ Force weak

^۲ Force strong

^۳Diagram feynman

جدول ۱-۱ نمونه بوزون های مربوط به میدان های برهمکنش کننده

ذره واسطه	میدان	اسپین	برد
گراویتون	گرانش	1	∞
γ	الکترومغناطیس	1	∞
$W^{\pm}, Z$	برهمکنش ضعیف	1	خیلی کوتاه
گلوئون	برهمکنش قوی	1	کوتاه

۱-۳-فرمیون های بنیادی

فرمیون های بنیادی در مدل استاندارد شامل دو نمونه می باشند ، لپتون ها و کوارک ها ، که همگی دارای اسپین نیمه صحیح $\frac{1}{2}$ هستند . لپتون ها صرفا از طریق برهمکنش های الکترومغناطیس وضعیف برهمکنش می کنند و کوارک ها علاوه بر برهمکنش های الکترومغناطیسی و وضعیف به واسطه برهمکنش قوی نیز با هم برهمکنش می کنند . [3]

۱-۳-۱-لپتون ها

لپتون ها در کنار کوارک ها و بوزون ها جزء ذرات بنیادی محسوب می شوند . آنها فرمیون هایی با اسپین $\frac{1}{2}$ می باشند .

۶ نمونه از لپتون ها را می توان نام برد که از سه نسل متفاوت تشکیل شده اند . اولین نسل ، لپتون های الکترونی هستند که در برگیرنده الکترون e^{-} و نوترینوی الکترون ν_e می باشد . دومین نسل لپتونها میوئون (میوئون μ^{-} و نوترینوی میوئون ν_{μ}) و سومین نسل را لپتون های تاو یعنی تاو τ^{-} و نوترینوی تاو ν_{τ} تشکیل می دهند . معادله دیراک برای فرمیون های دارای جرم و بار وجود پاد ذرات را پیشگویی می کند که بر طبق آن پاد ذرات دارای جرم و اسپینی برابر با ذرات متناظرشان هستند ولی

با بار الکتریکی مخالف با آنها . در این صورت هر کدام از لپتون ها دارای پاد ذره ای متناظر با خود است که پاد ذرات آنها به نام پاد لپتون ها مشهور شده اند .

از میان لپتون های باردار ، تنها الکترون با بار $-e$ و پوزیترون با بار $+e$ پایدار می باشند . در یک برهمکنش ، یک لپتون می تواند صرفاً به یکی دیگر از همان خانواده تغییر کند و یک لپتون و یک پاد لپتون از همان نوع می توانند توسط یکدیگر خلق یا نابود شوند . باید ذکر کرد که در تمام برهمکنش ها بقای بار الکتریکی مشهود است . این قوانین در پراکندگی زیر به عنوان نمونه نمایش داده شده است .

$$\nu_e^- \rightarrow \nu_\mu + e^- + \mu$$

جدول ۱-۲ : خانواده لپتون ها

نام ذره	نماد	بار	اسپین	جرم	طول عمر
الکترون	e	-1	$\frac{1}{2}$	0.511	پایدار
نوترینوی الکترون	ν_e	0	$\frac{1}{2}$	$< 2.2 \times 10^{-6}$	—
میوئون	μ	-1	$\frac{1}{2}$	105.658	2.197×10^{-6}
نوترینوی میوئون	ν_μ	0	$\frac{1}{2}$	< 0.17	—
تاو	τ	-1	$\frac{1}{2}$	11776.84	2.906×10^{-13}
نوترینوی تاو	ν_τ	0	$\frac{1}{2}$	< 15.5	—

۱-۳-۲- کوارک ها

یکی دیگر از ذرات بنیادی کوارک ها هستند . بسیاری از ذرات موجود در طبیعت را ترکیباتی از کوارک ها تشکیل می دهند که هادرون نامیده می شوند . از مشهورترین هادرون ها می توان به پروتون و نوترون اشاره کرد که هسته اتم را تشکیل می دهند. بر اساس آزمایشات انجام شده در حوزه ذرات

بنیادی اثبات شده است که هیچ کوارک آزاد و منفردی را نمی‌توان در طبیعت یافت و آنها فقط می‌توانند بصورت حالات مقید ، یعنی هادرون ها ، ظاهر شوند .

تا کنون ۶ طعم متفاوت از کوارک ها کشف شده اند : up ، down ، charm ، strange ، top و bottom . کوارک های up و down سبکترین جرم را در بین تمام کوارک ها دارند و بعلاوه کوارک های سنگین از طریق فرآیند واپاشی ذرات بسرعت به کوارک های up و down تبدیل خواهند شد . یعنی از حالت جرمی سنگین تر به حالت جرمی سبکتر تبدیل می شوند . از اینرو کوارک های up و down معمولا پایدار و متداول ترین نوع کوارک در طبیعت هستند و کوارک های charm ، strange ، top و bottom صرفا می‌توانند در برخورد هایی با انرژی بالا تولید شوند .

از جمله خواص ذرات بنیادی می‌توان به اعداد کوانتومی آنها مانند عدد باریونی B و عدد لپتونی L اشاره کرد . تمام لپتون ها دارای عدد لپتونی 1 و عدد باریونی 0 و کوارک ها دارای عدد لپتونی 0 و عدد باریونی $\frac{1}{3}$ هستند . با توجه به این برای ذره ای مانند پروتون متشکل از سه کوارک که خود جزو باریون ها محسوب می‌شود عدد باریونی برابر با $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$ بدست خواهد آمد . این اعداد تنها یک علامتگذاری ساده برای کوارک ها و هادرون ها نیستند و بر طبق قوانین بقا در تمام فرایندهای پراکندگی ثابت خواهند ماند .

کوارک ها دارای خواص ذاتی متفاوت مانند بار الکتریکی ، بار رنگ ، اسپین و جرم می‌باشند . آنها تنها ذرات بنیادی در طبیعت هستند که همه چهار نیروی ابتدایی (گرانج ، الکترومغناطیسی ، برهمکنش ضعیف و برهمکنش قوی) را تجربه می‌کنند و تنها ذراتی هستند که بار الکتریکی آنها مضرب صحیحی از بار ابتدایی e نمی‌باشد. برای هر طعم کوارک یک نمونه متناظر از پاد ذرات معروف به پاد کوارک وجود دارد که تنها در تعدادی خواص با مقداری برابر ولی با علامت مخالف با هم تفاوت دارند. کوارک ها بسته به طعمشان یکی از مقدار های بار الکتریکی $\frac{2}{3}e$ یا $-\frac{1}{3}e$ را به خود اختصاص می‌دهند . کوارک های up ، down ، top دارای بار $\frac{2}{3}e$ و strange ، down و bottom دارای بار $-\frac{1}{3}e$

می‌باشند و پاد کوارک ها دارای بار مخالف با کوارک متناظرشان هستند. بنابراین بار الکتریکی هادرون ها مجموع بار تک تک کوارک های تشکیل دهنده آن است و تمام آنها مضرب صحیحی از بار را دارا هستند . ترکیبی از سه کوارک (باریون ها) ، سه پاد کوارک (پاد باریون ها) و همین طور یک کوارک و یک پاد کوارک (مزون ها) همیشه بار صحیح دارند . برای مثال نوترون (udd) و پروتون (uud) دارای بارهای 0 و 1 می‌باشند .

همانطور که مشهود است هیچ کوارکی با مشخصه qq (برای مثال uu با بار $\frac{4}{3}$) تا کنون مشاهده نشده است . برای توجیه این عدم وجود مشخصه جدیدی را برای کوارک ها معرفی می‌کنیم که بار رنگ نامیده می‌شود . فرض کنیم کوارک ها در سه رنگ ابتدایی سبز و آبی و قرمز ظاهر شوند و بطور نمادین آنها را G ، B و R می‌نامیم . البته این رنگ ها ارتباطی با رنگ های طبیعی ندارند و تنها بخاطر شباهت آنها با تمام رنگ های طبیعی ساخته شده با این سه رنگ در نظر گرفته شده اند . هر کوارک یکی از این سه رنگ را حمل و بطور مشابه هر پاد کوارک یک پاد رنگ را حمل می‌کند و این بار رنگ ها منبع نیرو های جاذب یا دافع بین کوارک ها هستند . این خاص مشابه خاصیت جاذبه یا دافعه بین بار های الکتریکی می باشد با این تفاوت که علاوه بر اینکه هر رنگ پاد رنگ اش را جذب می‌کند ، هر رنگ می‌تواند دو رنگ دیگر را نیز جذب کند .

طبیعتا جذب یک پاد رنگ توسط رنگ متناظرش منجر به شکل گیری یک $q\bar{q}$ می‌شود که ذره ای با این مشخصه مزون نامیده می‌شود . شکل دیگر ترکیب کوارک ها به صورت qqq (باریون) و $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$ (پاد باریون) خواهد بود که اینها از خواص سفید (بی رنگ) بودن تمام ذرات ناشی شده است.

جرم کوارک را به دو صورت می‌توان بیان کرد : جرم کوارک جریان^۱ و جرم کوارک ظرفیت^۲. جرم کوارک جریان برای جرم خود کوارک ها بکار برده می‌شوند در حالیکه جرم کوارک ظرفیت ، جرمی است که از جمع جرم کوارک جریان بعلاوه جرم ذرات میدان گلوئونی ، که کوارک را احاطه کرده اند

¹ current quark mass

² constituent quark mass

بوجود می‌آید. این جرم ها مقدارهای بسیار متفاوتی دارند بطور نمونه برای کوارک u یا d جرم جریان ($4 \sim 5 \text{ MeV}$) و جرم ظرفیت ($100 \sim 350 \text{ MeV}$) در نظر می‌گیریم . اکثر جرم هادرون ها بخاطر گلوئون هایی است که کوارک های جریان را به یکدیگر متصل می‌کنند و نه از جرم خود کوارک ها [4]. برای مثال اگر پروتون را با جرم تقریبی 938 MeV در نظر بگیریم جرم سه کوارک جریان فقط در حدود 11 MeV در جرم آن شریک اند و بیشتر مابقی به گلوئون ها تعلق دارد .

جدول ۱-۳ : خانواده کوارک ها

نام ذره		بار	اسپین	عدد باریونی	جرم (MeV)
بالا	up	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$1.5 - 3.3$
پایین	$down$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$3.5 - 6$
افسون	$charm$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$1,270$
شگفت	$strange$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	104
	top	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$171,200$
زیبا	$bottom$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$4,200$

۱-۴- گلوئون ها

همانطور که در بالا ذکر شد هر کوارک یکی از سه رنگ را به خود اختصاص می‌دهد و نیروی قوی بین کوارک ها ناشی از رنگشان می‌باشد . که این مشابه نیروی بوجود آمده از طریق بار الکتریکی در بین ۲ الکترون است . نیرو های الکترومغناطیسی به واسطه فوتون ها حمل می‌شوند . گلوئون ها یکی دیگر از حمل کننده های نیرو هستند که بار رنگ ها را حمل می‌کنند . [5]

در تئوری QCD نقش بنیادی را گلوئون ها به عنوان منبع نیروی بین کوارک ها بازی می کنند . از آنجایی که گلوئون ها هم مانند کوارک ها حامل رنگ هستند ، تحت قوانین حاکم در طبیعت ، که ذرات قابل مشاهده واقعی نباید هیچ رنگ خالصی داشته باشند ، مشاهده مستقیم هر دو کوارک و گلوئون غیر ممکن است و این نشان می دهد که گلوئون ها می توانند همدیگر را احساس کنند و بطور مستقیم با یکدیگر برهمکنش کنند . این خاصیتی است که گلوئون ها را با فوتون ها متمایز می کند . فوتون ها ذراتی هستند که هیچ باری را حمل نمی کنند و به همین جهت آنها نمی توانند بطور مستقیم با یکدیگر برهمکنش الکتریکی (هیچ برهمکنشی) داشته باشند . بر خلاف فوتون ها ، گلوئون ها بخاطر رنگشان قادر به برهمکنش مستقیم با یکدیگر هستند و می توانند تشکیل گروه $SU(3)$ دهند . یعنی ما می توانیم گره هایی داشته باشیم که شامل برهمکنش ۲ یا تعداد بیشتری گلوئون باشد . گلوئون مانند فوتون دارای اسپین ۱ می باشد و یک بوزون است .

در برهمکنش بین ۲ الکترون ، بر طبق نمودار فاینمن ، الکترون یک فوتون ساطع می کند و الکترون دیگر آنرا جذب می کند . برای مسئله پراکندگی الکترون تنها یک راه ممکن وجود دارد . در تمام مسائل هر الکترون بار e (پوزیترون بار $-e$) و فوتون بی بار است و یک حالت برای نمودار فاینمن در نظر می گیریم . در QCD ساختار بسیار قوی تری داریم ، با سه رنگ و سه آنتی رنگ بعلاوه ذرات واسطه رنگ دار . بر طبق QCD هر کوارک با ساطع کردن یا جذب کردن یک گلوئون می تواند در همان رنگ باقی مانده یا تغییر رنگ دهد . به دلیل وجود بقای رنگ ، رنگ کوارک باید با گلوئونی که با آن برهمکنش می کند تطابق داشته باشد . ۹ احتمال ممکن برای تغییر رنگ کوارک وجود دارد که در ۶ تای آن کوارک ها تغییر رنگ می دهند $r \rightarrow b$ و $r \rightarrow g$ یا یکی از ۴ حالت دیگر آن و سه حالتی که در آن رنگ ها ثابت می مانند $r \rightarrow r$ و $b \rightarrow b$ و $g \rightarrow g$. برای این حالات ۸ گلوئون متفاوت در نظر گرفته شده است . این ۸ حالت از ترکیب $3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8$ تولید شده اند و هر کدام

رنگ مخصوص به خود را دارند . که این ۸ تا گلوئون عبارتند از :

$$r\bar{g}, b\bar{g}, r\bar{b}, g\bar{b}, g\bar{r}, b\bar{r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(r\bar{r} - g\bar{g}), \frac{1}{\sqrt{6}}(r\bar{r} + g\bar{g} - 2b\bar{b})$$

۱-۵- تبدیل واحد ها

در این مرحله لازم است تا در جریان توصیفات فیزیکی ، واحد هایی را که تعریف کننده فیزیک ذرات هستند را معرفی کنیم . از جمله ثابت های مکانیک کوانتومی نسبیتی می توان به ثابت پلانک h و سرعت نور c اشاره کرد.[6]

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.055 \times 10^{-34} \text{ J sec}$$

$$c = 2.998 \times 10^8 \text{ sec}^{-1}$$

در فیزیک ذرات مرسوم این است که اندازه گیری کمیت ها در واحد GeV صورت گیرد . با انتخاب واحد ها به صورت $\hbar = c = 1$ دیگر نیازی به نوشتن $\hbar$ و c در فرمول ها نداریم و محاسبات به صورت ساده تری تعریف خواهند شد . بنابراین با توجه به این قرارداد می توانیم واحد های جرم (m) ، تکانه (cm) و انرژی (mc^2) را در واحد GeV و همین طور واحد های طول ($\hbar/mc$) و زمان ($\hbar/mc^2$) را در واحد GeV^{-1} اندازه گیری کرد . که در جدول (۱-۴) تعدادی از این تبدیل واحد ها در قرارداد $\hbar = c = 1$ را ذکر کرده ایم .

در فیزیک ذرات بنیادی معمولاً با سیستم هایی سر و کار داریم که پارامتر های آن در مقیاس های درون اتمی و فوق ریز به اندازه شعاع باری ذرات ($1 fm$) تعریف می شوند . در این صورت واحد فرمی را معرفی می کنیم که این واحد 10^{-13} برابر سانتی متر است و برای تبدیل آن به GeV از تبدیل

واحد‌های

$$1\text{fermi} = 1\text{fm} = 10^{-13}\text{cm} = 5.07\text{GeV}^{-1}$$

و یا معادل آن

$$1\text{MeV} = 197.24\text{fm}^{-1}$$

استفاده خواهیم کرد .

جدول ۴-۱ : تبدیل واحد ها به واحد $\hbar = c = 1$

واحد SI	واحد $\hbar = c = 1$	تبدیل واحد
$\frac{\text{GeV}}{c^2}$	GeV	$1\text{kg} = 5.61 \times 10^{26} \text{GeV}$
$\frac{\hbar c}{\text{GeV}}$	GeV^{-1}	$1\text{m} = 5.07 \times 10^{15} \text{GeV}^{-1}$
$\frac{\hbar}{\text{GeV}}$	GeV^{-1}	$1\text{sec} = 1.52 \times 10^{24} \text{GeV}^{-1}$

فصل 2 :

بررسی کوآرک ها در مدل کیسه ای

MIT

۲-۱- مدل کیسه ای MIT

۲-۲- معادله دیراک

۲-۳- پتانسیل های اسکالر و برداری

۲-۴- حل معادله دیراک در پتانسیل کروی

۲-۵- فرمول لاگرانژی برای مدل کیسه ای MIT

۲-۶- حل معادله دیراک در حفره کروی

۲-۱- مدل کیسه ای MIT^۱

علی رغم تحقیقات گسترده در حوزه ذرات بنیادی هنوز هیچ کوارک آزادی در طبیعت مشاهده نشده است. دانشمندان معتقدند که امکان ندارد یک کوارک تنها بدست آید و همچنین انرژی پتانسیل بین دو کوارک با افزایش فاصله بین آنها افزایش می یابد. بنابراین انرژی نامحدودی برای جداسازی کوارک ها لازم است. هنگامی که مقدار انرژی زیادی به یک سیستم کوارک اضافه شود یک جفت کوارک-آنتی کوارک خلق می شود و کوارک های اصلی همچنان در سیستم اولیه محبوس باقی می ماند.

واضح است که ما احتیاج به صورت های متعددی از محبوسیت ذرات داریم. مدلی ساده از این نوع محبوسیت توسط $goliubovBo$ ارائه شده است. مدل او یعنی مدل کیسه ای MIT پیشنهاد می کند که کوارک ها در داخل کیسه یا حبابی به شعاع R به دام افتاده اند و نمی توانند به سطح این کیسه نفوذ کنند اما بوسیله فشارهایی که از داخل اعمال می کنند [1]، می توانند در داخل کیسه شناور بمانند. انرژی خود کیسه با حجم آن متناسب است بنابراین برای جداسازی کوارک ها انرژی فوق العاده زیاد و نامحدودی لازم است. طبق این مدل فضا را می توان به دو ناحیه تقسیم کرد: ناحیه درونی که در آن کوارک ها دارای جرمی بسیار کوچک هستند و تنها نیروی برهمکنش ضعیف را احساس می کنند، و ناحیه بیرونی که در آن به کوارک ها اجازه انتشار داده نشده که جرم آنها در این

¹ Massachusetts Institute of Technology bag model

محدوده بینهایت است و انرژی خلاء ای ، متفاوت از انرژی داخلی دارد [7]. مدل کیسه ای MIT به خاطر سادگی اش مدلی مناسب برای محاسبه خواص هادرونی می باشد.

۲-۲- معادله دیراک

به علت سبک بودن جرم کوارک ها ، حرکت آنها بسیار نسبیتی می باشد . روش های نسبیتی و مدل کوارکی مربوط به حرکت کوارک ها (که در پتانسیل استاتیکی^۱ یا یک حفره^۲ محبوس شده اند) از معادله دیراک^۳ تبعیت می کنند . در این قسمت ذره ای آزاد با جرم m را بررسی می کنیم که از معادله دیراک پیروی می کند.

در این صورت ما معادله $H = \alpha \cdot p + \beta m$ را با $H\psi = E\psi$ می نویسیم که در آن α و β عملگرهای دیراک هستند . این عملگر ها لازم است تا در شرایط زیر صدق کنند. [8, 9]

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0 \quad (1-2)$$

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \quad (2-2)$$

معادله دیراک برای ذره آزاد به صورت زیر تعریف می شود .

$$(\alpha \cdot p + \beta m)\psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (3-2)$$

که در آن $\psi(x, t)$ برداری ستونی با چهار مولفه می باشد . با تعیین α و β به صورت زیر :

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

¹Static potential

² Cavity

³Dirac equation

$$\gamma = \beta \alpha = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (۶-۲)$$

می‌توان معادله دیراک را به صورت زیر خلاصه کرد .

$$(\gamma_\mu p^\mu - m)\psi = 0 \quad (۷-۲)$$

که در آن داریم :

$$\gamma_\mu p^\mu = \gamma_0 p^0 - \gamma \cdot p \quad (۸-۲)$$

در این قسمت از چهاربردار مکان^۱ به صورت زیر استفاده کرده ایم .

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$$

$$x \cdot x = x_\mu x^\mu = x_0 x^0 - x_i x^i = t^2 - \vec{x} \cdot \vec{x} \quad (۱۰-۲)$$

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) \quad (۱۱-۲)$$

از اینرو با قرار دادن $p^\mu = i\partial^\mu$ ، معادله (۸-۲) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\gamma_\mu p^\mu = i\gamma_\mu \partial^\mu = i(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t}, \gamma \cdot \nabla) \quad (۱۲-۲)$$

و معادله دیراک را می‌توان نهایتاً به صورت زیر نوشت:

$$i(\gamma_0 \frac{\partial}{\partial t}, \gamma \cdot \nabla)\psi = i\gamma_\mu \partial^\mu \psi = m\psi \quad (۱۳-۲)$$

۲-۳- پتانسیل های اسکالر و برداری

به طور معمول دو شکل متفاوت پتانسیل ، پتانسیل برداری $V_0(x)$ و اسکالر $U(x)$ وجود دارد که

آنها را در معادله دیراک به صورت

$$[\alpha \cdot p + \beta(m + U(x)) + V_0(x)]\psi(x, t) = i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (۱۴-۲)$$

^۱ in the Bjorken-Drell notation

در نظر می‌گیریم و با نوشتن $\psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt}$ معادله بالا به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$[\alpha.p + \beta(m + U(x)) + V_0(x)]\psi(x) = E\psi(x) \quad (15-2)$$

در این صورت اگر $\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$ بنویسیم، باحل معادله دیراک به معادلات جفت شده زیر می‌رسیم

$$\begin{cases} (\sigma.p)\chi + (m + U + V_0)\varphi = E\varphi \\ (\sigma.p)\varphi - (m + U - V_0)\chi = E\chi \end{cases} \quad (16-2)$$

که در آن $p = -i\nabla$ می‌باشد

۲-۴- حل معادله دیراک در پتانسیل کروی^۱

از مکانیک کوانتومی نسبیتی داریم [10]

$$j = (l + \frac{1}{2} \sum) \quad (17-2)$$

که در آن

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad (18-2)$$

و عملگر K را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$K = \beta(\sum.l + 1) \quad (19-2)$$

$$K\psi = -\kappa\psi \quad (20-2)$$

که این روابط منجر به معادلات زیر می‌شود

$$\begin{cases} (\sigma.l + 1)\varphi = -\kappa\varphi \\ (\sigma.l + 1)\chi = \kappa\chi \end{cases} \quad (21-2)$$

¹ central potential

و اگر بخواهیم معادله دیراک را برای پتانسیل کروی حل کنیم خواهیم داشت [8]

$$\psi_{j\bar{j}_3} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r)y_{j\bar{l}}^{j_3}(\hat{r}) \\ if_{\kappa}(r)y_{j\bar{l}'}^{j_3}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (22-2)$$

حل معادله عملگری $K^2 = j^2 + \frac{1}{4}$ بر این دلالت دارد که $\kappa = \pm(j + \frac{1}{2})$ باشد. و از مکانیک

کوانتومی داشتیم $l^2 = (j^2 - \sigma.l - \frac{3}{4})$ و با بکار بردن $l + l' = 2j$ و همین طور عملگر l^2 روی φ

و روابط زیر به دست خواهد آمد .

$$\kappa = j + \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad l = \kappa = j + \frac{1}{2} \quad , \quad l' = (\kappa - 1) = j - \frac{1}{2} \quad (23-2)$$

$$\kappa = -(j + \frac{1}{2}) \quad \rightarrow \quad l = -(\kappa + 1) = j - \frac{1}{2} \quad , \quad l' = -\kappa = j + \frac{1}{2} \quad (24-2)$$

که در این صورت انرژی پایه سیستم با قرار دادن $j = \frac{1}{2}$ و $\kappa = -1$ به دست می‌آید که برای آن از

$l = 0, l' = 1$ استفاده شده است و حالت $1s^{\frac{1}{2}}$ را نشان می‌دهد. حالات برانگیخته شامل $2s^{\frac{1}{2}}$ ، $3s^{\frac{1}{2}}$

و ... می‌باشند . با استفاده از روابط

$$\sigma.\vec{p} = \frac{(\sigma.\vec{r})}{r^2} [(\sigma.\vec{r})(\sigma.\vec{p})]$$

$$(\sigma.\vec{r})(\sigma.\vec{p}) = (\vec{r}.\vec{p}) + i\sigma.l \quad (25-2)$$

$$(\sigma.l)\varphi = -(\kappa + 1)\varphi$$

می‌توانیم $(\sigma.\vec{p})\varphi$ را به صورت زیر بدست آوریم

$$(\sigma.\vec{p})g_{\kappa}(r)y_{j\bar{l}}^{j_3} = -i \left[\frac{dg_{\kappa}}{dr} + (\kappa + 1)\frac{g_{\kappa}}{r} \right] (\sigma.\vec{r})y_{j\bar{l}}^{j_3} \quad (26-2)$$

$$(\sigma.\vec{r})y_{j\bar{l}}^{j_3} = -y_{j\bar{l}'}^{j_3}$$

که در این صورت معادله (۲-۲۱) برای سیستم ای با پتانسیل کروی تبدیل می شود به

$$\begin{aligned}\frac{dg_{\kappa}}{dr} + (\kappa + 1) \frac{g_{\kappa}}{r} - (m + U - V_0) f_{\kappa} &= E f_{\kappa} \\ \frac{df_{\kappa}}{dr} + (1 - \kappa) \frac{f_{\kappa}}{r} - (m + U + V_0) g_{\kappa} &= E g_{\kappa}\end{aligned}\quad (2-27)$$

و در پایان برای حل معادله دیراک با پتانسیل معلوم کروی ملزم به حل معادله بالا هستیم و در بخش های بعد با استفاده از آن به حل معادله دیراک مربوط به ذرات درون کیسه در مدل MIT با شرایط مرزی مشخص می پردازیم .

۲-۵- فرمول لاگرانژی^۱ برای مدل کیسه ای MIT

مانند مکانیک کلاسیک ، با استفاده از اصل حرکت سکون می توان معادله حرکت سیستم تعیین کرد . در تئوری میدان ، حرکت ، S به صورت مقابل

$$S = \int d^4x L(\varphi_i(x), \partial_{\mu} \varphi_i(x)) \quad (2-28)$$

معرفی می گردد که در آن L چگالی لاگرانژی سیستم است و همچنین تابعی از $\varphi_i(x)$ و مشتق اول آن $\partial_{\mu} \varphi_i(x)$ می باشد . تحت تغییر بینهایت کوچک $\delta \varphi_i(x)$ از میدان ، با توجه به اینکه S تحت

تبدیلات ناورد است می توانیم بنویسیم

$$\delta S = \int d^4x \frac{\partial L}{\partial \varphi_i} \delta \varphi_i + \frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_i)} \delta (\partial_{\mu} \varphi_i) = 0 \quad (2-29)$$

با حل معادله (۲-۲۹) به معادله حرکت زیر می رسیم . باید توجه داشت که $\varphi_i(x)$ ها میدان هایی مستقل هستند

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_i} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_{\mu} \varphi_i)} \right) = 0 \quad (2-30)$$

^۱ Lagrangian formalism

این معادله موثری جهت نوشتن چگالی لاگرانژی هموردای^۱ لورنتس برای کیسه می باشد. به منظور به دست آوردن چگالی لاگرانژی کیسه ، توابع^۲ زیر را تعریف می کنیم [8]

$$\begin{aligned} \theta_v &= 1 & \text{درون کیسه} \\ &= 0 & \text{بیرون کیسه} \end{aligned} \quad (31-2)$$

بعلاوه

$$\frac{\partial \theta_v}{\partial x^\mu} = n_\mu \Delta_s \quad (32-2)$$

که در آن Δ_s تابع دلتای^۳ سطح نامیده می شود. در مورد کروی داریم

$$\begin{aligned} \theta_v &= \theta(R-r) \\ \Delta_s &= \delta(R-r) \end{aligned} \quad (33-2)$$

در این صورت چگالی لاگرانژی را برای کیسه می توان به صورت زیر نوشت.

$$L = \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi) - B \right] \theta_v(x) - \frac{1}{2} \bar{\psi} \psi \Delta_s \quad (34-2)$$

بنابراین معادله حرکت (۳۰-۲) تبدیل می شود به

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = 0 \quad (35-2)$$

با قرار دادن L از معادله (۳۴-۲) داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \bar{\psi}} &= \left(\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right) \theta_v - \frac{1}{2} \psi \Delta_s \\ \partial_\mu \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} &= - \left(\frac{i}{2} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \right) \theta_v - \frac{i}{2} \gamma^\mu n_\mu \psi \Delta_s \end{aligned} \quad (36-2)$$

اکنون با جایگذاری اینها در معادله (۳۵-۲) و همین طور برابر قرار دادن مولفه های θ_v و Δ_s با صفر

¹ Lorentz covariant

² step-function

³ delta-function

می‌توان رابطه زیر را استخراج کرد

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0 \quad \text{درون کیسه} \quad (۳۷-۲)$$

بنابراین چگالی لاگرانژی را تنها برای معادله دیراک درون کیسه استفاده می‌کنیم. و شرایط $i\gamma^\mu n_\mu \psi = \psi$ نیز باید در روی سطح کیسه برقرار باشد. که این شرط مرزی برای حل مرزی معادلات مربوط در بخش های بعد نقش موثری ایفا می‌کند.

همچنین اگر تانسور تکانه انرژی را بیان کنیم.

$$\begin{aligned} T^{\mu \nu} &= -g^{\mu \nu} L + \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \partial^\nu \bar{\psi} \frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})} \right) \\ &= -g^{\mu \nu} L + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) \theta_V \end{aligned} \quad (۳۷-۲)$$

بقای تکانه انرژی ایجاب می‌کند که $\partial_\mu T^{\mu \nu} = 0$ باشد. بنابراین با بکار بردن این شرط در رابطه (۲-۳۷)

(۳۷) و استفاده از رابطه (۲-۳۲) و (۲-۳۴) می‌توانیم بنویسیم:

$$B\Delta_s n^\nu + \frac{i}{2} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial^\nu \psi - \partial^\nu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi) n_\mu \Delta_s = 0 \quad (۳۸-۲)$$

همچنین شرط بقا رابطه $\partial_\mu (\bar{\psi} \psi \Delta_s) = 0$ را در پی دارد. در معادله (۲-۳۸) می‌توانیم از شرایط

مرزی روی سطح $i n_\mu \gamma^\mu \psi = \psi$ استفاده کنیم. بدست آوریم

$$B n^\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\nu} (\bar{\psi} \psi) \quad (۳۹-۲)$$

در قسمت بعد اثبات می‌کنیم که این معادله، فشار تعادل کیسه را نشان می‌دهد و از اینرو B ثابت

کیسه نامیده می‌شود. از آنجایی که $n^\nu n_\nu = -1$ است داریم

$$B = -\frac{1}{2} n_\nu \partial^\nu (\bar{\psi} \psi) \quad (۴۰-۲)$$

و برای کیسه کروی ، $n^\nu = (0, \hat{r})$ ، و معادله بالا به صورت زیر کاهش می‌یابد

$$B = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (\bar{\psi} \psi) \quad (41-2)$$

که این فشار ، B ، را به عنوان فشار خارجی وارد شده بوسیله خلا بر سطح کیسه در حالت تعادل در نظر می‌گیریم . باید توجه داشت که فشار کیسه را می‌توان فقط در حالت پایه در نظر گرفت . از اینرو در حالات برانگیخته شکل کیسه تغییر خواهد کرد.

۲-۶- حل معادله دیراک در حفره کروی

در این قسمت به حل معادله دیراک مربوط به ذره ای به جرم m خواهیم پرداخت . این ذره در حفره ای به شعاع R قرار دارد و درون آن پتانسیل اسکالر ثابت U_0 احساس می‌شود . این مدل ابتدا بدست ovBogoliub حل شد و سپس به عنوان مدل کیسه ای MIT توسعه داده شد. پس داریم:

$$U(r) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ U_0 & r > R \end{cases} \quad (42-2)$$

با حل معادله دیراک و بدست آوردن تابع موج ψ از معادله (۲۲-۲) مولفه های تابع موج برای درون کیسه ، $r < R$ ، مانند زیر خواهند بود :

$$g_k(r) = N j_l(pr) \quad , \quad l = \begin{cases} k & , k > 0 \\ -(k+1) & , k < 0 \end{cases} \quad (43-2)$$

و

$$f_k(r) = N \frac{k}{|k|} \sqrt{\frac{E-m}{E+m}} j_{l'}(pr) \quad , \quad l' = \begin{cases} k-1 & , k > 0 \\ -k & , k < 0 \end{cases} \quad (44-2)$$

که در آن $P = |p| = \sqrt{E^2 - m^2}$ و N ثابت بهنجارش می باشد .

و برای بیرون کیسه ، $r > R$ ، $m \gg E$ را در نظر می گیریم . در این صورت داریم

$$g_k(r) = h_0^{(1)}(imr) \quad (45-2)$$

$$f_k(r) = h_1^{(1)}(imr)$$

که با استفاده از تعریف تابع $h^{(1)}(ix)$ به شکل

$$h_1^{(1)}(ix) = -\frac{e^{-x}}{x} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \quad \text{و} \quad h_0^{(1)}(ix) = \frac{-e^{-x}}{x} \quad (46-2)$$

بنابراین تابع موج برای بیرون کیسه عبارت است از

$$\psi(r) = -\frac{N}{mr} e^{-mr} \left[\frac{1}{i\sigma \cdot \hat{r} \left(1 + \frac{1}{mr}\right)} \right] y_{jl}^{j_3}(\hat{r}) \quad (47-2)$$

اگر پاسخ را برای $r = R$ بررسی کنیم و با توجه به شرط $m \rightarrow \infty$ در خارج از کره ، N را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$N = -mN_0 e^{mR} \quad (48-2)$$

که در آن N_0 محدود است . در این صورت تابع موج مانند

$$\psi = \frac{N_0}{r} e^{-m(r-R)} \left(\frac{1}{i\sigma \cdot \hat{r} \left(1 + \frac{1}{mr}\right)} \right) \quad (49-2)$$

$$m \rightarrow \infty \Rightarrow \psi = \begin{cases} \frac{N_0}{R} \left(\frac{1}{i\sigma \cdot \hat{r}} \right) & r = R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

به علت پایستگی تابع موج روی مرز باید تابع موج بیرون و درون را به ازای $r = R$ برابر گرفت .

بنابراین برای حالت پایه داریم :

$$\psi_{in}(R) = \psi_{out}(R) \Rightarrow \begin{cases} Nj_0(pr) = \frac{N_0}{R} \\ N\sqrt{\frac{E-m}{E+m}}j_1(pr) = \frac{N_0}{R} \end{cases} \quad (50-2)$$

که با برابر قرار دادن مولفه بالایی و پایینی تابع موج به معادله

$$j_0(pr) = \sqrt{\frac{E-m}{E+m}}j_1(pr) \quad (51-2)$$

با قرار دادن $m=0$ برای جرم کوارک های درون کیسه ، معادله بالا به شکل ساده $j_0(Er) = j_1(Er)$ تبدیل خواهد شد و ویژه مقدار حالات مجاز $s^{1/2}$ را به ما می دهد . در مورد ذره با جرم صفر ، کلی ترین معادله ویژه مقداری برای $U_0 \rightarrow \infty$ معادله

$$j_l(E_{nk}r) = (-1)^\lambda j_{l+1}(E_{nk}r) \quad (52-2)$$

محسوب می شود . با داشتن $\lambda = 1$ برای $l = k = j + \frac{1}{2}$ و همینطور $\lambda = 0$ برای $l = -(k+1) = j - \frac{1}{2}$ ویژه مقدارها را می توان مانند مقابل نوشت

$$E_{nk} = \frac{\omega_{nk}}{R} \quad (53-2)$$

با استفاده از جواب های معادله (52-2) می توان ω_{nk} ها را مشخص کرد که تعدادی از آنها در جدول (1-2) ذکر شده اند.

باید توجه داشت که برای پتانسیلی به عمق محدود ، چگالی ρ در لبه $r=R$ غیر صفر است . ما در

حالت سکون (n, κ) ، برای $r \leq R$ داریم

$$\rho_{nk} = \psi_{nk}^t \psi_{nk} = \left[g_{nk}^2(r)(y_{jl}^{j_3})^t y_{jl}^{j_3} + f_{nk}^2(r)(y_{jl'}^{j_3})^t y_{jl'}^{j_3} \right] \quad (54-2)$$

و برای $r > R$ ، بخاطر شرایط مرزی جریان صفر خارج از کیسه ، این مقدار صفر است . با داشتن

$$(y_{jl'}^{j_3})^t y_{jl'}^{j_3} = (y_{jl'}^{j_3})^t (\sigma.\hat{r})(\sigma.\hat{r}) y_{jl'}^{j_3} \quad (55-2)$$

و همچنین رابطه

$$(\sigma.\hat{r}) y_{jl}^{j_3} = -y_{jl'}^{j_3}$$

می توان معادلات زیر را برای چگالی تعریف کرد

$$\rho_{nk} = [g_{nk}^2(r) + f_{nk}^2(r)] (y_{jl}^{j_3})^t y_{jl}^{j_3} \quad r \leq R \quad (56-2)$$

$$= 0 \quad r > R$$

و به طور مشابه

$$\bar{\psi}_{nk} \psi_{nk} = [g_{nk}^2(r) - f_{nk}^2(r)] (y_{jl}^{j_3})^t y_{jl}^{j_3} \quad r \leq R \quad (57-2)$$

$$= 0 \quad r > R$$

چگالی فقط وقتی که $l = 0$ باشد تقارن کروی دارد . از معادلات (57-2) و (43-2) و (44-2) برای

جرم صفر نتیجه باشد

$$\bar{\psi}_{nk}(r) \psi_{nk}(r) \Big|_{r=R} = 0 \quad (58-2)$$

ما این معادله را به عنوان شرط مرزی موجود تلقی می کنیم . برای حالت پایه داریم

$$\bar{\psi} \psi = \frac{N^2}{4\pi} \left(j_0^2 \left(\frac{xr}{R} \right) - j_1^2 \left(\frac{xr}{R} \right) \right) \quad (59-2)$$

که در آن N از معادله زیر بدست می آید .

$$N_{n,-1} = \frac{\omega_{n,-1}^3}{2R^3 (\omega_{n,-1} - 1) \sin^2(\omega_{n,-1})} \quad (60-2)$$

جدول ۱-۲: تعیین ویژه مقدار های انرژی در واحد شعاع کیسه [8]

κ	j	l	l'	state	$\omega_{n\kappa}$
-1	$\frac{1}{2}$	0	1	$s^{\frac{1}{2}}$	2.04, 5.40
1	$\frac{1}{2}$	1	0	$p^{\frac{1}{2}}$	3.81
-2	$\frac{3}{2}$	1	2	$p^{\frac{3}{2}}$	3.20
2	$\frac{3}{2}$	2	1	$d^{\frac{3}{2}}$	5.12
-3	$\frac{5}{2}$	2	3	$d^{\frac{5}{2}}$	4.33
3	$\frac{5}{2}$	3	2	$f^{\frac{5}{2}}$	5.43

در این صورت نشان می دهیم که

$$\frac{d}{dr}(\bar{\psi}\psi)|_{r=R} = -\frac{x}{2\pi R^4} = -\frac{2.04}{2\pi R^4} \quad (۶۱-۲)$$

با استفاده کردن از $E = \frac{x}{R}$ و همینطور با توجه به رابطه ترمودینامیکی $P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)$ برای یافتن فشار

، روی سطح کیسه داریم

$$P = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right) = -\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right)\left(\frac{\partial R}{\partial V}\right) \quad (۶۲-۲)$$

که با استفاده از مشتق گیری های زیر می توان فشار را تعیین کرد .

$$\left(\frac{\partial E}{\partial R}\right) = \left(\frac{\partial \frac{x}{R}}{\partial V}\right) = -\frac{x}{R^2} \quad , \quad \left(\frac{\partial V}{\partial R}\right) = 4\pi R^2 \quad (۶۳-۲)$$

در این صورت فشاری برابر

$$P = \frac{\chi}{4\pi R^4} \quad (۶۴-۲)$$

خواهیم داشت . که با توجه به روابط (۶۱-۲) و (۴۱-۲) به نتیجه زیر می‌رسیم

$$P = -\frac{1}{2} \frac{d}{dr} (\bar{\psi} \psi) \Big|_{r=R} = B \quad (۶۵-۲)$$

که به ما نشان می‌دهد که ثابت کیسه B همان فشار وارد از طرف خلا بر سطح کیسه می‌باشد .

با بدست آوردن ثابت کیسه می‌توانیم هامیلتونی سیستم سه کوارکی را از لاگرانژی (۴۳-۲) بدست

آوریم . برای کوارک های با جرم صفر در حالت پایه ، جرم باریون (N یا Δ) از رابطه

$$M(R) = \frac{3 \times 2.04}{R} + \frac{4\pi}{3} BR^3 + \frac{Z_0}{R} \quad (۶۶-۲)$$

که در آن جمله اول انرژی جنبشی سه کوارک در حفره ای کروی با شعاع R است و جمله دوم

می‌تواند به عنوان انرژی خارجی که از طرف خلا تولید شده تفسیر کرد . و جمله آخر فرض می‌شود

که تمام تاثیرات موثری که در محاسبات در نظر گرفته نشده را دربر دارد . (مانند تصحیحات مرکز جرم

، خود انرژی مغناطیسی رنگ و ...) در مدل کروی ساکن ، معادله تعادل فشار برابر با مینیمم

$M(R)$ به عنوان تابعی از R است . از معادله (۶۶-۲) می‌نویسیم :

$$M(V) = E(V) + BV \quad (۶۷-۲)$$

که در آن V حجم کیسه و $E(V)$ شامل مجموع انرژی های جنبشی و برهمکنشی کوارک ها است

بنابراین ، در حجم تعادل $V_N = \frac{4\pi}{3} R_N^3$ ، شرط $\frac{\partial M}{\partial V} \Big|_{V=V_N} = 0$ نتیجه می‌دهد

$$-\frac{\partial E}{\partial V} \Big|_{V_N} = B \quad (۶۸-۲)$$

از اینرو برای شعاع تعادل $R = R_N$ ،

$$\left. \frac{\partial M}{\partial R} \right|_{R_N} = -\frac{a_N}{R_N^2} + 4\pi B R_N^2 = 0 \quad (۶۹-۲)$$

که برای نوکلئون $a_N = (6.12 + Z_0)$ که در این صورت می توانیم شعاع کیسه را برحسب Z_0 پیدا

کنیم . بنابراین با جایگذاری شرط تعادل (۶۹-۲) در معادله (۶۷-۲) ، جرم را می توان به صورت

$$M_N = \frac{16\pi}{3} B R_N^3 = \frac{4}{3} \frac{a_N}{R_N} \quad (۷۰-۲)$$

تعریف خواهد شد . که با در نظر گرفتن $B^{\frac{1}{4}} = 145 \text{ MeV}$ و همینطور جرم نوکلئون $M = 938 \text{ MeV}$

می توانیم شعاع کیسه را به اندازه $R \approx 1 \text{ fm}$ بدست آوریم .

فصل 3 :

خلاصه ای از ترمودینامیک آماری

۳-۱- آنسامبل کانونی

۳-۲- نوسانگر هارمونیک یک بعدی در آنسامبل کانونی

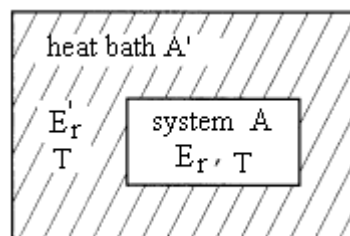
۳-۳- تعیین حجم در فضای N بعدی

۳-۴- مختصات فوق کروی

۳-۵- بررسی مدل کوآرک ظرفیت در پتانسیل نوسانگر

۳-۱- آنسامبل کانونی^۱

برای بررسی خواص ترمودینامیکی سیستم باید از آمار شروع کنیم. در آنسامبل کانونی، انرژی E یک سیستم لزوماً باید متغیر باشد. در اصل انرژی سیستم می‌تواند هر مقداری بین صفر تا بینهایت را به خود اختصاص دهد. برای پیدا کردن وابستگی احتمال P_r با انرژی سیستم می‌توانیم سیستم را در حالتی بررسی کنیم که آن در تعادل گرمایی با یک حمام گرمایی در دمای معمول T باشد و حالات مبادله انرژی بین ۲ سیستم را مطالعه کنیم [11,12]. حال به بررسی سیستم معین A که در حمام گرمایی A' غوطه‌ور است می‌پردازیم. دو سیستم در تعادل گرمایی متقابل با یکدیگر هستند و دارای انرژی متغیری هستند که در هر زمان می‌تواند مقداری بین ۰ تا $E^{(0)}$ داشته باشد ($E^{(0)}$ انرژی سیستم مرکب $A^{(0)} (\equiv A + A')$ است).



شکل ۳-۱: سیستم مشخص A در حمام گرمایی A' قرار گرفته است و هر دو در تعادل گرمایی در دمای T هستند

^۱ Canonical ensemble

در هر زمان اگر سیستم A در حالتی باشد که از طریق مقدار انرژی E_r مشخص شود ، حمام گرمایی انرژی E'_r خواهد داشت همانطور که

$$E_r + E'_r = E^{(0)} = \text{const} \quad (۱-۳)$$

البته از آنجایی که فرض شده است حمام گرمایی بسیار بزرگتر از سیستم معین است ، هر مقدار قابل قبول برای E_r بسیار کوچک تر از مقدار انرژی $E^{(0)}$ خواهد بود .

$$\frac{E_r}{E^{(0)}} = \left(1 - \frac{E'_r}{E^{(0)}}\right) \ll 1 \quad (۲-۳)$$

اگر A سیستم بسته ای باشد ، احتمال P_r با تعداد میکرواحالات $\Omega(E_r)$ متناسب است. به طور مشابه P_r با تعداد میکرواحالات سیستم کل A' ، $\Omega'(E'_r)$ ، می تواند متناسب باشد در این صورت داریم

$$P_r \propto \Omega'(E'_r) \equiv \Omega'(E^{(0)} - E_r) \quad (۳-۳)$$

با استفاده از معادله (۲-۳) می توانیم تعداد حالات $\Omega'(E'_r)$ را نسبت به E_r در محدوده $E_r = 0$ بسط دهیم . پس داریم

$$\begin{aligned} \ln \Omega'(E'_r) &= \ln \Omega'(E^{(0)}) + \left(\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} \right)_{E'=E^{(0)}} (-E_r) + \dots \\ &\cong \ln \Omega'(E^{(0)}) - \beta E_r \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

که در رابطه بالا از نمادگذاری

$$\left(\frac{\partial \ln \Omega'}{\partial E'} \right)_{E'=E^{(0)}} = \beta$$

استفاده شده است . با استفاده از تعریف آنتروپی

$$S = k \ln \Omega(E) \quad (۵-۳)$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial}{\partial E}(k \ln \Omega(E)) = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T} \Rightarrow \beta = \frac{1}{kT} \quad (۳-۶)$$

از معادلات (۳-۳) و (۳-۴) نتیجه مطلوب زیر بدست می‌آید .

$$\Omega'(E^{(0)} - E_r) \approx \Omega'(E^{(0)}) \exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right) \quad (۳-۷)$$

بنابراین تعداد میکروحالات ، در حمام گرمایی ، بطور نمایی با افزایش انرژی سیستم کاهش می‌یابد .

احتمال P_r از رابطه زیر بدست می‌آید .

$$P_r \propto \exp(-\beta E_r) \quad (۳-۸)$$

در پایان احتمال باید بهنجار شود بنابراین اگر $\sum_r P_r = 1$ باشد، داریم

$$P_r = \frac{\exp(-\beta E_r)}{\sum_r \exp(-\beta E_r)} \quad (۳-۹)$$

که برای سیستم A با دمای ثابت ، تمام انرژی های ممکن E_r با احتمال P_r در نظر گرفته شده

است . بنابراین می‌توانیم تعریف کنیم

$$Z = \sum_r \exp(-\beta E_r) \quad (۳-۱۰)$$

که به اختصار آنرا تابع پارش کانونی می‌نامیم . با بررسی توزیع کانونی ، برای مثال احتمال به صورت

زیر می‌شود

$$P_r = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial E_r} \ln Z \quad (۳-۱۱)$$

و کمیت U که مقدار متوسط آماری تمام انرژی های E_r می‌باشد به صورت مقابل تعریف می‌شود .

$$U = \langle E_r \rangle = \sum_r P_r E_r = \frac{\sum_r E_r \exp(-\beta E_r)}{\sum_r \exp(-\beta E_r)} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z \quad (۳-۱۲)$$

از قوانین ابتدایی ترمودینامیک و با استفاده از آنتروپی می‌توان پارامترهای دما و فشار را بدست آورد

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V = \frac{1}{T}$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E = \frac{P}{T} \quad (۱۳-۳)$$

متقابلاً ما می‌توانیم بنویسیم

$$P = \frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_E}{\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_V} \equiv -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S \quad (۱۴-۳)$$

که در نوشتن این فرمول از رابطه معروف در محاسبات مشتق‌های جزئی استفاده شده است که با داشتن سه متغیر x ، y و z داریم:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

دیگر کمیت‌های ترمودینامیکی را هم می‌توان به عنوان تابعی از S یا E بدست آورد. کمیت‌هایی مانند انرژی آزاد هلمهولتز^۱ و انرژی آزاد گیبس^۲ و آنتالپی^۳ با روابط زیر تعریف می‌شوند.

$$A = U - TS \quad (\text{الف } (۱۵-۳))$$

$$G = A + PV = U - TS + PV \quad (\text{ب } (۱۵-۳))$$

$$H = U + PV = G + TS \quad (\text{ج } (۱۵-۳))$$

با استفاده از تعریف A و ارتباط آن با تابع پارش^۴ سیستم به صورت

$$A(V, T) \equiv -\frac{1}{\beta} \ln Z \quad (۱۶-۳)$$

^۱ Helmholtz free energy

^۲ Gibbs free energy

^۳ Enthalpy

^۴ Partition function

کمیت های ترمودینامیکی به شکل زیر خلاصه خواهند شد.

$$S = -\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_V = k\left(\frac{\partial}{\partial T}(T \ln Z)\right)_V \quad (۱۷-۳) \text{ (الف)}$$

$$S = -\left(\frac{\partial A}{\partial V}\right)_T = kT\left(\frac{\partial}{\partial V} \ln Z\right)_T \quad (۱۷-۳) \text{ (ب)}$$

و نهایتاً از رابطه (۱۵-۳) الف و (۱۲-۳) ، ارتباط گرمای ویژه در حجم ثابت با تابع پارش سیستم بدست خواهد آمد .

$$C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = k\beta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z\right)_V \quad (۱۸-۳)$$

۲-۳-نوسانگر هارمونیک یک بعدی در آنسامبل کانونی

ما می‌خواهیم خواص ترمودینامیکی مجموعه‌ای از نوسانگر های هارمونیک را با فرکانس ω بررسی کنیم. برای اینکار از ۲ روش کلاسیکی و کوانتومی استفاده می‌کنیم.

در روش کلاسیکی ، هامیلتونی سیستم عبارت است از

$$H(q_\nu, p_\nu) = \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{p_\nu^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q_\nu^2 \right) \quad (۱۹-۳)$$

که این فرمول برای محاسبه تابع پارش استفاده می‌شود. [12]

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{h^N} \int dq^N dp^N \exp\{-\beta H(q_\nu, p_\nu)\} \quad (۲۰-۳)$$

از آنجایی که H تنها یک جمع روی هامیلتونی های تک ذره ای است پس داریم

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{h^N} \prod_{\nu=1}^N \left[\int_{-\infty}^{\infty} dq_\nu \exp\{-\beta \frac{1}{2} m \omega^2 q_\nu^2\} \right] \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} dp_\nu \exp\{-\beta \frac{p_\nu^2}{2m}\} \right] \quad (۲۱-۳)$$

جواب این انتگرال ها به صورت زیر می باشد

$$Z(T, V, N) = \frac{1}{h^N} \left[\left(\frac{2\pi}{\beta m \omega^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2m\pi}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^N \quad (22-3)$$

$$Z(T, V, N) = \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right)^N$$

بنابراین انرژی آزاد به صورت

$$A = -NkT \ln \left(\frac{kT}{\hbar\omega} \right) \quad (23-3)$$

تعریف می شود و در نتیجه کمیت های ترمودینامیکی P و S به صورت زیر بدست می آیند .

$$P = - \left. \frac{\partial A}{\partial V} \right|_T = 0 \quad (24-3)$$

$$S = - \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_V = Nk \left[1 + \ln \left\{ \frac{kT}{\hbar\omega} \right\} \right]$$

در روش مکانیک کوانتومی همانطور که می دانیم ویژه مقدار های انرژی مربوط به نوسانگر هارمونیک یک بعدی از طریق [11]

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad n = 0, 1, 2 \quad (25-3)$$

مشخص می شوند . ما برای تابع پارش نوسانگر تک بعدی داریم :

$$Z(T, V, 1) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \hbar \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \exp \left\{ -\beta \hbar \omega \right\}^n \quad (26-3)$$

با استفاده از سری های هندسی به آسانی می توانیم محاسبه کنیم

$$Z(T, V, 1) = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right)}{1 - \exp \left(-\beta \hbar \omega \right)} = \left\{ 2 \sinh \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right) \right\}^{-1} \quad (27-3)$$

بنابراین تابع پارش N ذره ای از این معادله به صورت

$$Z(T, V, N) = \left\{ 2 \sinh\left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega\right) \right\}^{-N} \quad (۲۸-۳)$$

تعریف می شود . انرژی آزاد عبارت است از:

$$A = \frac{N}{2} \hbar \omega + NkT \ln\{1 - \exp(-\beta \hbar \omega)\} \quad (۲۹-۳)$$

در این صورت خواص ترمودینامیکی را می توان محاسبه کرد .

$$P = - \left. \frac{\partial A}{\partial V} \right|_T = 0 \quad (۳۰-۳) \text{ الف}$$

$$U = \frac{1}{2} N \hbar \omega \coth\left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega\right) = N \left[\frac{1}{2} \hbar \omega + \frac{\hbar \omega}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right] \quad (۳۰-۳) \text{ ب}$$

$$C_P = C_V = Nk \left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega \right)^2 \operatorname{cosech}^2\left(\frac{1}{2} \beta \hbar \omega\right) = Nk (\beta \hbar \omega)^2 \frac{e^{\beta \hbar \omega}}{(e^{\beta \hbar \omega} - 1)^2} \quad (۳۰-۳) \text{ ج}$$

۳-۳- تعیین حجم در فضای N بعدی

سیستم هایی که ما با آنها سرو کار داریم همیشه در ۳ بعد نیستند و ممکن است دارای ابعاد متفاوتی باشند از اینرو برای بررسی سیستم ای با N بعد لازم است از مختصات تعمیم یافته استفاده کنیم . بنابراین ما در این قسمت و قسمت بعد تعریف های اولیه حجم و مختصات را در فضای N بعدی ارائه خواهیم داد. [11]

ما اکنون می خواهیم تا حجم $V_N(R)$ را برای کره ای N بعدی با شعاع R بررسی کنیم . در این صورت حجم را می توان به صورت زیر تعریف کرد :

$$V_N(R) = \int \sum_{i=1}^{3N} x_i^2 \leq R^2 dx_1 \dots dx_N \quad (۳۱-۳)$$

که با تغییر متغیر $y_i = \frac{x_i}{R}$ خواهیم داشت :

$$V_N(R) = R^N \int_{\sum_{i=1}^{3N} y_i^2 \leq 1} dy_1 \dots dy_N \quad (32-3)$$

انتگرال آخر هیچ وابستگی ای به R ندارد و تنها به N بعد فضا وابسته است بنابراین

$$V_N(R) = R^N C_N \quad (33-3)$$

$$C_N = \int_{\sum_{i=1}^{3N} y_i^2 \leq 1} dy_1 \dots dy_N \quad (34-3)$$

که C_N حجم کره واحد N بعدی می باشد . به منظور محاسبه حجم کره ما روش زیر را بکار خواهیم گرفت :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp(-x^2) = \sqrt{\pi} \quad (35-3)$$

و بنابراین

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dx_N \exp\{-(x_1^2 + \dots + x_N^2)\} = \pi^{N/2} \quad (36-3)$$

انتگرال (34-3) به $R = (x_1^2 + \dots + x_N^2)$ مربوط است ، بنابراین مولفه های حجم $dx_1 \dots dx_N$ را می توان بوسیله پوسته های کروی بسط داد و از معادله (33-3) داریم :

$$dx_1 \dots dx_N \Big|_{shell} = dV_N \Big|_{shell} = NR^{N-1} C_N dR \quad (37-3)$$

که این مطابق با انتقال به مختصات قطبی در فضای N بعدی می باشد. در این صورت معادله بالا به صورت زیر تعریف خواهد شد :

$$NC_N \frac{1}{2} \int_0^{\infty} dR R^{N/2-1} \exp(-R^2) = \pi^{N/2} \quad (38-3)$$

با استفاده از این ما می‌توانیم به آسانی C_N را محاسبه کنیم. اگر $R^2 = x$ را بالا جایگزین کنیم جوابی جز تابع Γ نخواهیم داشت.

$$NC_N \frac{1}{2} \int_0^\infty dx x^{N/2-1} e^{-x} = \pi^{N/2} \quad (39-3)$$

از تعریف تابع Γ داریم:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dx x^{z-1} e^{-x} \quad (40-3)$$

که در این صورت حجم کره واحد در فضای N بعدی به دست می‌آید:

$$C_N = \frac{\pi^{N/2}}{N/2 \Gamma(N/2)} \quad (41-3)$$

اکنون حجم کره V_N تعیین خواهد شد:

$$V_N(R) = \frac{\pi^{N/2}}{N/2 \Gamma(N/2)} R^N \quad (42-3)$$

طبق خواص تابع Γ

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (43-3)$$

در این صورت با داشتن $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ و بدست آوردن $\Gamma(3/2) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ، حجم در فضای ۳ بعدی برابر خواهد بود با:

$$V_3(R) = \frac{\pi^{3/2}}{3/2(1/2\sqrt{\pi})} R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (44-3)$$

و برای حجم در فضای ۶ بعدی بدست می‌آوریم:

$$V_6(R) = \frac{\pi^3}{3(2)} R^6 = \frac{\pi^3}{6} R^6 \quad (45-3)$$

۳-۴- مختصات فوق کروی^۱

حرکت مرکز جرم یک سیستم تک ذره ای را می توان به طور ساده در مختصات ژاکوبی^۲ بیان کرد . در این مختصات ξ_1 ، ξ_2 ، ... و ξ_{N-1} را به صورت تابعی از مکان نسبی ذرات $\vec{r}_{12}$ ، $\vec{r}_{23}$ ، ... و $\vec{r}_{N1}$ بیان می کنیم [13]

$$\begin{aligned}\xi_1^2 &= \frac{r_{12}^2}{2} = \frac{1}{2}(r_1 - r_2)^2 = 2(R - r_2)^2 \\ \xi_2^2 &= \frac{1}{6}(r_1 + r_2 - 2r_3)^2 = \frac{3}{2}(R - r_3)^2\end{aligned}\quad (۴۶-۳)$$

⋮

$$\xi_{N-1}^2 = \frac{1}{N(N-1)}[r_1 + r_2 + \dots + r_{N-1} - (N-1)r_N]^2 = \frac{N}{N-1}(R - r_N)^2$$

بر طبق این روابط ابر شعاع^۳ برای این مختصات به صورت

$$x = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{i+1}{i} (R - r_{i+1})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴۷-۳)$$

تعریف خواهد شد. پس می توانیم تمام موقعیت ها و نیروهای سیستم را بر اساس آنها توصیف کنیم .

برای مثال پتانسیل نوسانگر هارمونیک برای سیستمی N ذره ای مانند زیر بدست خواهد آمد . [14]

$$V_{h.o} = \frac{1}{2} k \sum_{i,j} (r_i - r_j)^2 = \frac{N}{2} k x^2 = a x^2 \quad (۴۸-۳)$$

که در آن x^2 ، مربع فاصله نسبی ذرات از هر ذره دیگر است و همینطور این می تواند از فاصله هر ذره از مختصات مرکز جرم حرکت بدست آید .

$$x^2 = \frac{1}{N} (r_{12}^2 + r_{23}^2 + \dots + r_{N1}^2) = (r_1 - R)^2 + (r_2 - R)^2 + \dots + (r_N - R)^2 \quad (۴۹-۳)$$

¹ Hypercentral coordinates

² Jacobi coordinates

³ Hyper-radius

با داشتن این رابطه ، دیگر توان های x را می توان نتیجه گرفت :

$$x^{2n} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^n = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \frac{i+1}{i} (R-r_{i+1})^2 \right]^n = \left[\frac{1}{N} (r_{12}^2 + r_{23}^2 + \dots + r_{N1}^2) \right]^n \quad (50-3)$$

که n می تواند هر عدد دلخواهی مانند $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, -3, -\frac{3}{4}, \dots$ باشد

با استفاده از متغیر های تعریف شده در بالا می توان ذرات را در روش های کلی تری مورد بحث قرار داد . در حقیقت ما آزادی بیشتری برای توصیف نیروهای چند جسمی بین ذرات داریم . در مختصات فوق کروی ، ∇^2 لاپلاسی^۱ سیستم چند ذره ای را در فضای D بعدی با اعمال روابط فوق می توان

بدست آورد

$$\sum_{i=1}^{N-1} \nabla_{\xi_i}^2 = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} = - \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2} \right) \quad (51-3)$$

$L^2(\Omega)$ در رابطه فوق ، عملگر مداری بزرگ^۲ می باشد . این عملگر شامل مختصات زاویه ای^۳ Ω_{ξ_1}

، Ω_{ξ_2} ، ... و ابر زاویه های^۴ $t_1, t_2, \dots$ است که در آن $t_1 = \arctg(\frac{\xi_1}{\xi_2})$ و ... در نظر می گیریم . ویژه

مقادیر این $L^2(\Omega)$ به صورت زیر تعریف می شوند .

$$L^2(\Omega) = -\gamma(\gamma + D - 2) \quad (52-3)$$

در آن γ عدد کوانتومی زاویه ای بزرگ^۵ است که از طریق $\gamma = 2n + l_{\xi_1} + l_{\xi_2} + \dots$ معین می شود. n

مقداری صحیح مثبت دارد و $l_{\xi_1}, l_{\xi_2}, \dots$ تکانه های زاویه ای^۶ وابسته به مختصات ژاکوبی نسبی ξ_1 ،

ξ_2 ، ... هستند . اکنون می خواهیم این مختصات را برای سیستمی سه جسمی با سه ذره یکسان

¹ Laplace operator

² Grand orbital operation

³ angular coordinates

⁴ hyperangle

⁵ grand angular quantum number

⁶ angular momentums

بررسی کنیم . که نمودار آن در شکل (۳-۲) نمایش داده شده است . در این صورت برای سه ذره بردار

مرکز جرم سیستم و بردار های نسبی ذرات عبارتند از

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \quad (۳-۵۳)$$

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \text{و} \quad \vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 \quad \text{و} \quad \vec{r}_{23} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 \quad (۳-۵۴)$$

با توجه به مواردی که گفته شد از مختصات ژاکوبی داریم :

$$\rho = \xi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (۳-۵۵)$$

$$\lambda = \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3)$$

در این صورت برای ابر شعاع از معادله (۳-۴۷) داریم

$$x = \sqrt{\lambda^2 + \rho^2} \quad (۳-۵۶)$$

از آنجایی که سیستم سه جسمی تشکیل فضای ۶ بعدی می دهد بنابراین پس از صرف نظر کردن از

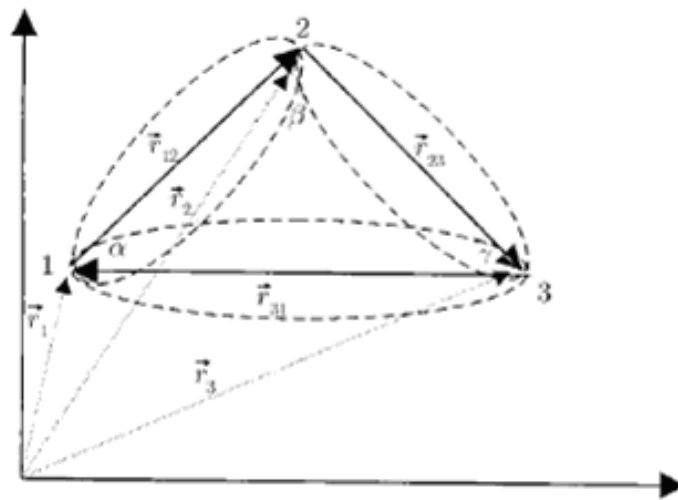
مختصات مرکز جرم ، عملگر لاپلاسی از معادله (۳-۵۱) به صورت زیر بدست خواهد آمد .

$$\nabla^2 = \nabla_{\rho}^2 + \nabla_{\lambda}^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{5}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2} \right) \quad (۳-۵۷)$$

که ویژه مقدار های $L^2(\Omega)$ تعریف می شوند

$$L^2(\Omega) = -\gamma(\gamma + 4) \quad (۳-۵۸)$$

و در آن $\gamma = 2n + l_{\lambda} + l_{\rho}$ در نظر گرفته می شود .



شکل ۳-۲: نمودار برهمکنش سیستم سه جسمی

۳-۵- بررسی مدل کوارک ظرفیت در پتانسیل نوسانگر

ما اکنون می‌خواهیم برای توصیف تابع موج کوارک های درون یک باریون، حالتی خاص را بررسی کنیم. یکی از مدل های مناسب برای اینکار مدل نوسانگر غیر نسبیتی است [8]. از آنجایی که کوارک های سبک از قوانین نسبیت تبعیت می‌کنند نمی‌توان آنها را در این مدل بررسی کرد بنابراین این مدل برای کوارک های u و d مناسب نیست. بخاطر اینکه باریون ها شامل سه کوارک هستند پس مسئله را در مختصات فوق کروی بررسی خواهیم کرد. فرض می‌کنیم کوارک ها دارای جرم باشند و درون حجمی به شعاع R محبوس شده اند و در چهار چوب غیر نسبیتی حرکت می‌کنند. برای هامیلتونی حالت پایه داریم:

$$H_0 = \frac{1}{2m}(P_1^2 + P_2^2) + \frac{1}{2m'}P_3^2 + \frac{1}{2}k \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2 \quad (3-59)$$

در اینجا فرض شده است که کوارک های ۱ و ۲ دارای جرم m و کوارک ۳ دارای جرم متفاوت با آنها است. کوارک ها در یک پتانسیل نوسانی که مستقل از طعم آنها است محبوس شده اند.

با استفاده از مختصات ژاکوبی و از معادله (۳-۵۵)، متغیرهای زیر را داریم :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{2}}(\bar{r}_1 - \bar{r}_2) \quad \text{و} \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{6}}(\bar{r}_1 + \bar{r}_2 - 2\bar{r}_3)$$

$$R_{cm} = \frac{m(r_1 + r_2) + m'r_3}{(2m + m')} \quad (۳-۶۰)$$

که در آن R_{cm} مختصات مرکز جرم سیستم است. باید توجه کرد که در روابط بالا تحت جابجایی r_1 و r_2 ، مختصات ρ و λ متقارن و λ متقارن هستند.

جرم تعمیم یافته را تعریف می کنیم :

$$M = 2m + m' \quad \text{و} \quad m_\rho = m \quad \text{و} \quad m_\lambda = \frac{3mm'}{(2m + m')} \quad (۳-۶۱)$$

و تکانه متناظر با آنها :

$$P_\lambda = m_\lambda \dot{\lambda} \quad \text{و} \quad P_\rho = m_\rho \dot{\rho} \quad \text{و} \quad P_{cm} = M \dot{R}_{cm} \quad (۳-۶۲)$$

اکنون اگر معادلات (۳-۶۲) و (۳-۶۱) را در هامیلتونی سیستم قرار دهیم معادله (۳-۵۹) کاهش می یابد به :

$$H_0 = \left(\frac{P_\rho^2}{2m_\rho} + \frac{3}{2}k\rho^2 \right) + \left(\frac{P_\lambda^2}{2m_\lambda} + \frac{3}{2}k\lambda^2 \right) + \frac{P_{cm}^2}{2M} \quad (۳-۶۳)$$

باید در نظر داشت که مرکز جرم نقشی در طیف ذاتی باریون ها ندارد و به آسانی می توان از آن صرف نظر کرد . در این صورت برای فرکانس سیستم داریم :

$$\omega_\rho = \left(\frac{3k}{m_\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{و} \quad \omega_\lambda = \left(\frac{3k}{m_\lambda} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۶۴)$$

که $m = m'$ ایجاب می کند که $\omega_\rho = \omega_\lambda = \omega = \left(\frac{3k}{m} \right)^{\frac{1}{2}}$ باشد . بنابراین تابع موج، از حالات نوسانگر

λ و نوسانگر ρ حاصل می شود . از اینرو با استفاده از حالات استاندارد ، اگر عدد کوانتومی مربوط به

نوسانگر ρ را $N_\rho = (2n_\rho + l_\rho)$ و بطور مشابه برای λ ، N_λ ، انرژی حالات را می توان بدست آورد .

$$E_N = (N + \frac{3}{2})\omega \quad , \quad N = N_\rho + N_\lambda = (2n_\rho + l_\rho) + (2n_\lambda + l_\lambda) \quad (۶۵-۳)$$

همچنین تکانه زاویه ای کل L برای یک حالت به صورت زیر می باشد .

$$L = l_\lambda + l_\rho \quad (۶۶-۳)$$

فصل ۴ :

بررسی خواص ترمودینامیکی هادرون ها

با در نظر گرفتن پتانسیل $(ax^2 - \frac{c}{x})$

۴-۱- حل معادله دیراک برای سیستم تک ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$

۴-۲- حل معادله دیراک برای سیستم سه ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$

۴-۳- حل معادله دیراک برای حالت پایه

۴-۴- محاسبه مراتب بالاتر انرژی ($\nu > 0$) در سیستم

۴-۵- روابط ترمودینامیکی حاکم بر مسئله

۴-۶- تعیین فشار خارجی وارد بر سطح کیسه در حالت پایه $\gamma = 0$

۴-۱- حل معادله دیراک برای سیستم تک ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$

در طبیعت سیستم های بسیاری وجود دارند که شامل کوارک ها می شوند از جمله این سیستم ها می توان به هادرون ها و در مقیاس بزرگتر ، به QGP^1 ها مانند ستاره های کوارکی^۲ اشاره کرد . در این سیستم ها ذرات به وسیله پتانسیل ها ، به طور نمونه نوسانگر هارمونیک یا کولنی ، محبوس شده اند و در تعادل ترمودینامیکی با محیط اطرافشان می باشند . بنابراین ما نیاز به مطالعه مکانیک آماری چنین سیستم هایی داریم . سیستم QGP شکل جدیدی از ماده می باشند که مانند سوپی از کوارک ها و گلوئون ها در نظر گرفته می شوند [15] . هادرون ها حالات مقید کوارک ها و گلوئون ها هستند و در دماها و چگالی های بالا ، آنها به QGP تبدیل خواهند شد . این QGP ها شامل کوارک ها و گلوئون هایی هستند که در حجمی بسیار بزرگ در مقایسه با حجم هادرون ها محبوس شده اند . از اینرو می توان سیستم کوارکی را از طریق تعیین تابع موج برای کوارک ها و بدست آوردن ویژه مقادیر انرژی برای توصیف آنها بررسی کرد . [16,17] که ما مسئله را از روش حل نوسانگر هارمونیک با اضافه کردن پتانسیل کولنی بین کوارک ها بررسی می کنیم .

از آنجایی که کوارک های سبک ذراتی نسبیتی هستند و از رابطه دیراک تبعیت می کنند به حل این معادله خواهیم پرداخت . ما فرض می کنیم که هر کوارک در پتانسیل مرکزی $U(r)$ که توسط دو

¹ Quark Gloun plasma

^۲ ستارگان کوارکی نوع خاصی از ستارگان هستند که به طور کامل از ماده کوارکی تشکیل شده اند.

کوارک دیگر تولید شده است قرار گرفته باشد [18]. از اینرو تابع موج تک ذره ای از معادله زیر تبعیت می کند .

$$[\gamma_0 \varepsilon + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - (m + U(r))] \psi(r) = 0 \quad (1-4)$$

که در آن

$$U(r) = \frac{1}{2}(1 + e\gamma_0)A(r) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+e) & 0 \\ 0 & 1-e \end{pmatrix} A(r)$$

و پارامتر e به مدلی که در آن سیستم را بررسی می کنیم بستگی دارد . [19] که در مدل ما این پارامتر برابر یک می باشد . برای سادگی بجای استفاده از پتانسیل $U(r)$ به صورت ماتریس در معادله (۱-۴) فرض می کنیم پتانسیل از ترکیب برابر دو پتانسیل اسکالر U_0 و پتانسیل برداری V_0 تولید شده است. که به طور معمول شکل معادله دیراک برای پتانسیل اسکالر U_0 و پتانسیل برداری V_0 استفاده می شود مانند زیر است :

$$-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi(r) + \beta[m + U_0] \psi(r) + V_0 \psi(r) = \varepsilon \psi(r) \quad (2-4)$$

بنابراین پتانسیل را می توانیم به شکل زیر بنویسیم :

$$U_0 = V_0 = \frac{1}{2} A(r) = \frac{1}{2} (ar^2 - \frac{c}{r}) \quad (3-4)$$

که در آن ترم اول پتانسیل نوسانگر هارمونیک است و ترم دوم پتانسیل کولنی است که از بار رنگها ناشی می شود . بنابراین حل معادله دیراک (۲-۴) جوابی مانند معادله (۲۲-۲) دارد [8]

$$\psi_{jj_3} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(r) y_{jl}^{j_3}(\hat{r}) \\ i f_{\kappa}(r) y_{jl'}^{j_3}(\hat{r}) \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

که در فصل ۲ به آن اشاره کردیم . از معادلات (۲-۴) و (۴-۴) ما معادلات جفت شده

$$\begin{cases} \frac{dg_{\kappa}(r)}{dr} + \frac{k+1}{r} g_{\kappa}(r) - m f_{\kappa}(r) = \varepsilon f_{\kappa}(r) \\ \frac{df_{\kappa}(r)}{dr} + \frac{1-k}{r} f_{\kappa}(r) - (m + A(r)) g_{\kappa}(r) = -\varepsilon g_{\kappa}(r) \end{cases} \quad (5-4)$$

را بدست می آوریم . با استفاده از تعریف

$$g_k(r) = \frac{1}{r} \phi_k(r) \quad (۴-۶)$$

معادله (۴-۵) به شکل زیر خلاصه خواهد شد .

$$\phi_k''(r) + \left[\frac{-k(k+1)}{r^2} + \varepsilon^2 - m^2 - (\varepsilon + m)A(r) \right] \phi_k(r) = 0 \quad (۴-۷)$$

برای سادگی از علامت گذاری های

$$\lambda = \varepsilon^2 - m^2, \quad a_1 = (\varepsilon + m)a, \quad c_1 = (\varepsilon + m)c \quad (۴-۸)$$

استفاده می کنیم . که معادله (۴-۷) به

$$\phi_k''(r) = \left[\frac{k(k+1)}{r^2} - \lambda + a_1 r^2 - \frac{c_1}{r} \right] \phi_k(r) \quad (۴-۹)$$

تبدیل خواهد شد . اکنون فرض می کنیم که بتوانیم برای معادله بالا جوابی به شکل

$$\phi_k(r) = h(r) \exp(Z(r)) \quad (۴-۱۰)$$

تعریف کنیم . با در نظر گرفتن

$$\begin{cases} h(x) = \prod_{i=0}^v (1 + \alpha_i^{(v)} r) & \alpha_i \neq 0 \\ Z(x) = -\frac{1}{2} \alpha r^2 + \delta \ln(r) \end{cases} \quad (۴-۱۱)$$

و جایگذاری کردن معادله (۴-۱۰) در معادله (۴-۱۱) می توان مولفه های مجهول در معادله (۴-۱۱) را

به صورت زیر پیدا کرد

$$\delta = \begin{cases} -k & k < 0 \\ k+1 & k > 0 \end{cases} \quad (۴-۱۲)$$

$$\alpha = \sqrt{(\varepsilon_{k,\nu} + m)a} \quad (13-4)$$

$$\alpha_0^{(\nu)} = -\frac{(\varepsilon_{k,\nu} + m)c}{2\delta} - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^{(\nu)} \quad (14-4)$$

$$\lambda = (3 + 2\delta + 2\nu)\alpha \quad (15-4)$$

که ν در فرمول بالا به معنای مرتبه های متفاوت انرژی می باشد. حال فرض می کنیم

$$\omega_{k,\nu} = \sqrt{\frac{a}{(\varepsilon_{k,\nu} + m)}} \quad \text{باشد. در این صورت رابطه بین پارامترهای مجهول پتانسیل و جرم و انرژی به}$$

صورت زیر خواهند بود:

$$\varepsilon_{k,\nu}^2 - m^2 = (3 + 2\delta + 2\nu)\sqrt{(\varepsilon_{k,\nu} + m)a} = (3 + 2\delta + 2\nu)(\varepsilon_{k,\nu} + m)\omega_{k,\nu} \quad (16-4)$$

$$c = (1 + \nu)\sqrt{\frac{(4\delta + \nu)\omega_{k,\nu}}{(\varepsilon_{k,\nu} + m)}} \quad (17-4)$$

ابتدا مسئله را در حالت پایه بررسی خواهیم کرد. در بالا حالت پایه وقتی اتفاق می افتد که $\nu = 0$ و

$k = -1$ باشد. با استفاده از معادلات (4-5) و (4-7) مولفه بالا و پایین اسپینور دیراک پیدا خواهند شد

$$\varphi_k(r) = (1 + \alpha_0^{(0)}) \exp(-\frac{1}{2}\alpha x^2 + \delta \ln(x)) = r^\delta (1 - \frac{y}{\sqrt{\delta}}r) e^{-\frac{1}{2}y^2 r^2}$$

$$g_k(r) = \frac{\varphi_k(r)}{r} = r^{\delta-1} (1 - \frac{y}{\sqrt{\delta}}r) e^{-\frac{1}{2}y^2 r^2}$$

$$\begin{aligned} f_k(r) &= \frac{1}{(\varepsilon_{k,0} + m)} \left(\frac{\varphi'_k(r)}{r} + \frac{k}{r^2} \varphi_k(r) \right) \\ &= r^{\delta-1} \left(\frac{\delta^{\frac{3}{2}} - y^2 r^2 \sqrt{\delta} + y^3 r^3 + k\sqrt{\delta} - (k+1+\delta)yr}{\sqrt{\delta} r^2 (\varepsilon_{k,0} + m)} \right) e^{-\frac{1}{2}y^2 r^2} \end{aligned}$$

که در روابط بالا $y = \left(\frac{(\varepsilon_{k,0}^2 - m^2)}{(3 + 2\delta)} \right)^{\frac{1}{2}}$ را تعریف کرده ایم . بنابراین تابع موج یک کوارک منفرد تحت

تاثیر پتانسیل (۲-۴) مانند مقابل بدست می آید .

$$\psi_{jj_3}(r) = \frac{N}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{1 - \frac{y}{\sqrt{\delta}} r}{i \frac{\delta^{\frac{3}{2}} - y^2 r^2 \sqrt{\delta} + y^3 r^3 + k \sqrt{\delta} - (k+1+\delta) y r}{\sqrt{\delta} r^2 (\varepsilon_{k,0} + m)}} \right) r^{\delta-1} e^{-\frac{1}{2} y^2 r^2} \quad (۱۸-۴)$$

که در آن N ثابت بهنجارش است می باشد . اگر به معادله (۱۶-۴) برگردیم ، انرژی هر کوارک به شکل زیر پیدا خواهد شد .

$$\varepsilon_{k,\nu} = (3 + 2\delta + 2\nu) \omega_{k,\nu} + m \quad (۲۰-۴)$$

این معادله با شرط اینکه $\omega_{k,\nu}$ در کل حالات پایه و برانگیخته و مراتب بالاتر انرژی ثابت بماند به شکل مقابل تبدیل می شود

$$\varepsilon_{k,\nu} = (3 + 2\delta + 2\nu) \omega + m \quad (۲۱-۴)$$

که این معادله بسیار مشابه انرژی ذره نسبیتی در پتانسیل نوسانگر هارمونیک است [17] . با استفاده از تعریف انرژی در این مدل و همچنین مشخص کردن تابع پارش برای آن ، می توان خواص ترمودینامیکی سیستم های کوارکی را بدست آورد [16] و همینطور با در نظر گرفتن پتانسیل تعریف شده در این مدل به نتایج نزدیکتری به مقادیر تجربی در مقایسه با نتایج مدل کیسه ای MIT خواهیم رسید [20] . در سیستم ای با پتانسیل نوسانگر هارمونیک انرژی کوارک u به اندازه $E_u = 328.6 \text{ MeV}$ و همچنین انرژی کوارک d به اندازه $E_d = 281.7 \text{ MeV}$ محاسبه شده است که این انرژی ها در محدوده جرم ظرفیت کوارک های u و d می باشند [21] .

۴-۲- حل معادله دیراک برای سیستم سه ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$

برای بررسی خواص باریون ها می توان علاوه بر استفاده از روش کوآرک های ظرفیت به عنوان سیستم تک ذره ای که در بخش پیش بررسی شد می توان باریون ها را به عنوان سیستم سه جسمی مورد مطالعه قرار داد . که در این بخش به بررسی تابع موج برای سیستمی سه ذره ای با پتانسیل نوسانگر هارمونیک خواهیم پرداخت . از آنجایی که باریون ها شامل سه کوآرک ظرفیت هستند می توان آنها را به عنوان سیستم سه ذره ای در فضای ۹ بعدی در نظر گرفت . همانطور که می دانیم کوآرک های سبک ذراتی نسبیتی هستند و از معادله دیراک تبعیت می کنند از اینرو به حل این معادله خواهیم پرداخت . [22,23] با توجه به تابع موج نسبیتی برای معادله دیراک داریم

$$[\gamma_0 \mathcal{E} + i \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - (m + U(x))] \psi(x) = 0 \quad (۲۲-۴)$$

پتانسیل فوق کروی که برای حل تحلیلی معادله دیراک استفاده می شود را به صورت مقابل تعریف می کنیم

$$U(x) = \frac{1}{2}(1 + e\gamma_0)A(x) \quad (۲۳-۴)$$

پارامتر e می تواند هر مقداری داشته باشد که ما در مدلمان آن را ۱ در نظر می گیریم .

پتانسیلی که ما برای برهمکنش کوآرک ها در نظر گرفته ایم شامل یک ترم نوسانی و ترم کولنی است. در ابتدا پتانسیل نوسانگر هارمونیک ۶ بعدی را بررسی می کنیم که مشخصه ۲ بعدی دارد .

از معادله (۳-۴۸) داریم

$$V_{h.o} = \frac{1}{2}k \sum_{i,j} (r_i - r_j)^2 = \frac{N}{2}kx^2 = ax^2 \quad (۲۴-۴)$$

و دومین ترم پتانسیل فوق کولنی ۶ بعدی است که از بار رنگ ها ناشی می شود و در فاصله های

کوچک در نظر گرفته خواهد شد . با استفاده از معادله (۳-۵۱) می نویسیم

$$V_{hyc} = b\alpha_s \sum_{i,j} \frac{1}{|r_i - r_j|} = \frac{b\alpha_s}{x} \quad (۴-۲۵)$$

که در آن $b\alpha_s = -c$ در نظر می گیریم . بنابراین پتانسیلی که برای حل معادله دیراک بررسی خواهیم کرد مانند مقابل است :

$$A(x) = ax^2 - \frac{c}{x} \quad (۴-۲۶)$$

این پتانسیل خواص فیزیکی و نتایج مورد قبولی را برای مسئله ما در بر خواهد داشت .

فرض می کنیم که پتانسیل $U(x)$ تعریف شده در معادله (۴-۲۳) تنها به ابر شعاع x وابسته است . شکل ای که معمولاً برای پتانسیل معادله دیراک استفاده می شود شامل پتانسیل فوق کروی اسکالر $U_0(x)$ و پتانسیل فوق کروی برداری $V_0(x)$ است و به صورت زیر نوشته می شود

$$-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi(x) + \beta[m + U_0(x)]\psi(x) + V_0(x)\psi(x) = \varepsilon\psi(x) \quad (۴-۲۷)$$

فرض می کنیم که پتانسیل های فوق کروی اسکالر و برداری ، بر طبق معادله (۴-۲۳) ، به صورت مقابل تعریف شوند .

$$V_0(x) = U_0(x) = \frac{1}{2} A(x) \quad (۴-۲۸)$$

برای پیدا کردن جواب معادله دیراک ، اسپینور $\psi(x)$ را به صورت مقابل در نظر گرفته می شود

$$\psi_{jj_3} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{\kappa}(x)y_{jl}^{j_3}(\bar{x}) \\ if_{\kappa}(x)y_{jl'}^{j_3}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (۴-۲۹)$$

از معادله (۴-۲۷) برای ذره ۱ داریم

$$-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \psi_1(x) + \beta[m_1 + U_0(x)]\psi_1(x) + V_0(x)\psi_1(x) = \varepsilon_1\psi_1(x)$$

که با ضرب طرفین رابطه بالا در رابطه $\psi_2(x) \otimes \psi_3(x)$ و در نظر گرفتن

$$\psi_1(x) \otimes \psi_2(x) \otimes \psi_3(x) = \psi_{\gamma, \nu} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}$$

به حل معادله خواهیم پرداخت. اکنون با قرار دادن معادله (۴-۲۹) در معادله (۴-۲۷) به معادلات

جفت شده زیر برای هر ذره خواهیم رسید که اندیس i مربوط به ذره i ام می باشد [24]

$$(\sigma \cdot p_i) \chi + (m_i + U_0(x) + V_0(x)) \varphi = \varepsilon_i \varphi \quad (۴-۳۰) \text{ الف}$$

$$(\sigma \cdot p_i) \varphi - (m_i + U_0(x) - V_0(x)) \chi = \varepsilon_i \chi \quad (۴-۳۰) \text{ ب}$$

با قرار دادن معادله (۴-۲۸) در روابط (۴-۳۰) ، رابطه (۴-۳۰) ب مانند زیر تعریف می شود:

$$\chi = \frac{(\sigma \cdot p_i) \varphi}{m_i + \varepsilon_i} \quad (۴-۳۱)$$

از ترکیب این معادله و معادله (۴-۳۰) الف ، جواب ساده شده مقابل را بدست می آوریم .

$$\frac{p_i^2 g_{\gamma}(x)}{m_i + \varepsilon_i} + (m_i - \varepsilon_i + A(x)) g_{\gamma}(x) = 0 \quad (۴-۳۲)$$

$$p_i^2 g_{\gamma}(x) = (\varepsilon_i^2 - m_i^2 + (\varepsilon_i + m_i) A(x)) g_{\gamma}(x)$$

که در این معادله از روابط زیر استفاده کرده ایم .

$$\varphi = g_{\gamma}(x) Y_{jl}^{j_3}(\hat{x}) \quad (۴-۳۳)$$

$$\chi = i f_{\gamma}(x) Y_{jl}^{j_3}(\hat{x})$$

حرکت کوارک های درونی معمولاً بوسیله مختصات ژاکوبی توصیف می شود . با استفاده از دستگاه

مختصات ژاکوبی برای سیستم متشکل از ۳ کوارک اپراتور p^2 به صورت زیر تعریف می شود [25]

$$p^2 = \sum_{i=1}^3 p_i^2 = -(\nabla_{\rho}^2 + \nabla_{\lambda}^2) = -\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2}\right) \quad (۴-۳۴)$$

که در آن عملگر بزرگ مداری $L^2(\Omega) = -\gamma(\gamma+4)$ و عدد کوانتمی زاویه ای γ را $\gamma = 2n + l_\lambda + l_\rho$ تعیین می شوند . در این صورت از معادله (۳۲-۴) داریم :

$$\sum_{i=1}^3 p_i^2 g_\gamma(x) = \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_i^2 - m_i^2) g_\gamma(x) + \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_i + m_i) A(x) g_\gamma(x) \quad (35-4)$$

بنابراین

$$g_\gamma''(x) + \frac{5}{x} g_\gamma'(x) + \frac{L^2(\Omega)}{x^2} g_\gamma(x) + 3(\varepsilon^2 - m^2 + (m + \varepsilon)A(x)) g_\gamma(x) = 0 \quad (36-4)$$

$A(x)$ را در معادله تعریف کردیم

$$A(x) = ax^2 - \frac{c}{x}$$

از اینرو مؤلفه بالایی اسپینور دیراک را می توان از معادله (۳۶-۴) بدست آورد. با نماد گذارهای زیر

$$3\varepsilon = E$$

$$3(\varepsilon^2 - m^2) = \frac{1}{3}(E^2 - 3m^2) \quad (37-4)$$

$$a_1 = a(E + 3m)$$

$$c_1 = c(E + 3m)$$

در معادله (۳۶-۴) به حل آن می پردازیم . برای تعیین ویژه تابع $g_\gamma(x)$ فرض می کنیم که آن به

صورت

$$g_\gamma(x) = h(x) \exp(Z(x)) \quad (38-4)$$

قابل تعریف باشد . با استفاده از $h(x)$ و $Z(x)$:

$$\begin{cases} h(x) = \prod_{i=0}^{\nu} (1 + \alpha_i^{(\nu)} x) & \alpha_i \neq 0 \\ Z(x) = -\frac{1}{2} \alpha x^2 + \delta \ln(x) \end{cases} \quad (39-4)$$

که در آن ν به مراتب انرژی سیستم بستگی دارد. با قرار دادن معادله (۴-۳۹) در معادله (۴-۳۸) داریم:

$$g''_{\gamma}(x) + \frac{5}{x} g'_{\gamma} = \left[Z''(x) + Z'^2(x) + \frac{h''(x) + 2Z'(x)h'(x)}{h(x)} + \frac{5(h'(x) + h(x)Z'(x))}{h(x)x} \right] g_{\gamma}(x) \quad (4-40)$$

با مقایسه معادله (۴-۴۰) با معادله (۴-۳۶) و برابر قرار دادن ضرایب توان های برابر x می توانیم مجهولات را تعیین کنیم.

۴-۳- حل معادله دیراک برای حالت پایه

ابتدا مسئله را برای مرتبه صفرم انرژی یعنی $\nu = 0$ بررسی خواهیم کرد. در این حالت

$$\alpha = \sqrt{a_1} = \sqrt{a(E_{\gamma,0} + 3m)} = \frac{\frac{1}{3}(E_{\gamma,0}^2 - 9m^2)}{2(\gamma + 4)} \quad (4-41) \text{ الف}$$

$$c_1 = [(4\gamma + 10)\sqrt{a_1}]^{\frac{1}{2}} \quad (4-41) \text{ ب}$$

$$\alpha_0^{(0)} = - \left[\frac{2\sqrt{a(E_{\gamma,0} + 3m)}}{2\gamma + 5} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4-41) \text{ ج}$$

$$\frac{1}{3}(E_{\gamma,0}^2 - 9m^2) = 2(\gamma + 4)\sqrt{a_1} \quad (4-41) \text{ د}$$

$$\delta = \gamma, -\gamma - 4$$

با قرار دادن $\delta = \gamma$ نتایج خوش تعریفی در منطقه مورد نظر خواهیم داشت. با استفاده از روابط (۴-

(۴۱) ارتباط بین پارامترهای پتانسیل (a و c) با انرژی و جرم کوارک به صورت

$$a = \frac{1}{9} \frac{(E_{\gamma,0} - 3m)^2 (E_{\gamma,0} + 3m)}{4(\gamma + 4)^2} \quad (4-42)$$

$$c_1 = \left(\frac{2\gamma+5}{3(\gamma+4)} (E_{\gamma,0}^2 - 9m^2) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (43-4)$$

$$c = \left(\frac{2\gamma+5}{3(\gamma+4)} \frac{(E_{\gamma,0} - 3m)}{E_{\gamma,0} + 3m} \right)^{\frac{1}{2}}$$

محاسبه می‌شوند. اکنون کمیت جدیدی به عنوان $\omega_{\gamma,0}$ را تعریف می‌کنیم به طوری که [26]

$$a = (E_{\gamma,0} + 3m)\omega_{\gamma,0}^2 \quad (44-4)$$

از معادله (43-4) داریم

$$\omega_{\gamma,0} = \frac{(E_{\gamma,0} - 3m)}{6(\gamma+4)} \quad \text{یا} \quad E_{\gamma,0} = 6(\gamma+4)\omega_{\gamma,0} + 3m \quad (45-4)$$

بنابراین با استفاده از روابط بدست آمده، مولفه $g_\gamma(x)$ به صورت

$$g_\gamma(x) = x^\gamma \left(1 - \frac{yx}{(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} \right) e^{-\frac{y^2 x^2}{4}} \quad (46-4)$$

یافت می‌شود که در آن y را

$$y = \left(\frac{\frac{1}{3}(E_{\gamma,0}^2 - 9m^2)}{(\gamma+4)} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (47-4)$$

تعریف کرده ایم. از رابطه زیر

$$p = \sum_i p_i$$

می‌توانیم بنویسیم

$$\chi_{\gamma,\nu} = \frac{\sum_i \vec{\sigma} \cdot \vec{p}_i}{(E_{\gamma,\nu} + 3m)} \varphi_{\gamma,\nu} = \frac{\sigma \cdot p}{(E_{\gamma,\nu} + 3m)} \varphi_{\gamma,\nu} \quad (48-4)$$

که با استفاده از تعریف ماتریس های پائولی [10]

$$(\sigma.\hat{x})(\sigma.\hat{x}) = |\hat{x}|^2 = 1 \quad \text{و} \quad (\sigma.\hat{x})(\sigma.p) = (\hat{x}.p) + i\sigma.l$$

با ضرب عبارت $(\sigma.\hat{x})(\sigma.\hat{x})$ در طرف چپ معادله (۴-۴۸)

$$\begin{aligned} \chi_{\gamma,\nu} &= if_{\gamma}(x) = \frac{(\sigma.\hat{x})}{E_{\gamma,\nu} + 3m} [(\sigma.\hat{x})(\sigma.p)] g_{\gamma}(x) \\ &= -i \frac{(\sigma.\hat{x})}{E_{\gamma,\nu} + 3m} \left(\frac{dg_{\gamma}(x)}{dx} - (\sigma.l) g_{\gamma}(x) \right) \end{aligned} \quad (۴۹-۴)$$

و با توجه به اینکه با مساوی قرار دادن اسکالر و برداری در سیستم برهمکنش اسپینی $\sigma.l$ برابر صفر می شود ، ویژه تابع به صورت مقابل بدست خواهد آمد :

$$\psi_{\gamma,0}(x) = \begin{pmatrix} x^{\gamma} - \frac{yx^{\gamma+1}}{(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} \\ \frac{-i\vec{\sigma}.\hat{x}}{E+3m} \left(\gamma x^{\gamma-1} - \frac{y^2}{2} x^{\gamma+1} + \frac{y^3 x^{\gamma+2} - 2y(\gamma+1)x^{\gamma}}{2(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} \right) \end{pmatrix} e^{-\frac{y^2 x^2}{4}}$$

با توجه به اینکه ذرات در کره ای به شعاع x_b محدود شده اند ، چگالی جریان باید در سطح کره صفر شود . با توجه شرایط مرزی روی سطح کیسه

$$i\gamma^{\mu} n_{\mu} \psi = \psi$$

و همچنین جایگذاری مولفه های بالا و پایین اسپینور دیراک در فرمول زیر

$$\bar{\psi}_{\gamma,0} \psi_{\gamma,0} \Big|_{x=x_b} = \left[g_{\gamma,0}^2(r) - f_{\gamma,0}^2(r) \right] \Big|_{x=x_b} = 0$$

به رابطه مقابل خواهیم رسید:

$$\frac{\xi_{\gamma} y^3 x_b^3}{(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} - 2 \left[\frac{y}{(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\xi_{\gamma} y^2}{2} \right] x_b^2 + 2 \left[1 - \frac{\xi_{\gamma} y(\gamma+1)}{(2\gamma+5)^{\frac{1}{2}}} \right] x_b + 2\xi_{\gamma} \gamma = 0 \quad (۵۰-۴)$$

که در آن از نماد گذاری زیر استفاده شده است .

$$\xi_\gamma = \frac{1}{E_{\gamma,0} + 3m} \quad (51-4)$$

بنابراین با حل معادله (50-4) می توانیم شعاع کیسه x_b را محاسبه کنیم .

اگر سیستم را در حالت پایه یعنی $\gamma = 0$ را بررسی کنیم تابع موج به صورت

$$\psi_{0,0}(x) = \left(1 - \frac{yx}{\sqrt{5}} - i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{x}}{E_{0,0} + 3m} \left(-\frac{y^2}{2} x + \frac{y^3 x^2 - 2y}{2\sqrt{5}} \right) \right) e^{-\frac{y^2 x^2}{4}} \quad (52-4)$$

تعریف می شود . بنابراین برای پیدا کردن شعاع کیسه در حالت پایه از معادله استفاده می کنیم :

$$x_b = \frac{1 + \frac{\sqrt{5}\xi_0 y}{2} + \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{5}\xi_0 y}{2} \right)^2 + 2\xi_0 y(-\sqrt{5} + \xi_0 y)}}{\xi_0 y^2} \quad (53-4)$$

یکی از خواصی که برای هادرون ها تعریف می شود متوسط شعاع باری $\sqrt{\langle r_{cm}^2 \rangle}$ آن است که تعریف

می شود:

$$\langle r_{cm}^2 \rangle = \sum e_q \langle r^2 \rangle_q$$

در آن

$$\langle r^2 \rangle_q = \int_{bag} r^2 \psi_0^*(r) \psi_0(r) dr$$

می باشد . حال اگر بخواهیم این فرمول را به فضای ۶ بعدی تعمیم دهیم لازم است تا از قوانین

انتگرال گیری در فضای D بعدی استفاده کنیم . انتگرال گیری حجم در فضای D بعدی به صورت

$$\int dr_1 dr_2 \dots dr_D = \int x^{D-1} dx d\Omega$$

تعریف می‌شود که در این صورت شعاع باری در فضای ۶ بعدی به صورت

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{bag} x^7 (|g_0(x)|^2 + |f_0(x)|^2) dx \int d\Omega}{\int_{bag} x^5 (|g_0(x)|^2 + |f_0(x)|^2) dx \int d\Omega}$$

بدست خواهد آمد. از دیگر کمیت های مهم در بررسی خواص هادرون ها تعیین نسبت $\frac{g_A}{g_V}$ برای

آنهاست. نسبت ثابت جفت شدگی شبه برداری g_A^1 به ثابت جفت شدگی برداری g_V^2

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} \langle \sigma_z \rangle$$

در مورد نسبیتی $\frac{g_A}{g_V}$ را

$$\frac{g_A}{g_V} = \frac{5}{3} (1 - 2\delta) \quad (4-54)$$

$$\delta = \frac{2}{3} \frac{\int_{bag} x^5 |f_0(x)|^2 dx \int d\Omega}{\int_{bag} x^5 (|f_0(x)|^2 + |g_0(x)|^2) dx \int d\Omega}$$

قرار می‌دهیم. این کمیت برای هادرون، کمیتی معلوم در نظر گرفته می‌شود و برای پروتون این

مقدار به طور آزمایشگاهی $\frac{g_A}{g_V} = 1.254 \pm 0.006$ اندازه گیری شده است.

حال اگر بخواهیم این مدل را برای باریونی مانند پروتون که متشکل از سه کوارک uud با جرم

مشابه است بررسی کنیم، با قرار دادن جرم کوارک برابر با جرم ظرفیت آن ($100 MeV$) و قرار دادن

شعاع باری برابر با شعاع باری پروتون $\sqrt{\langle x^2 \rangle} = 0.88$ به عنوان کمیت های ثابت در این مسئله،

می‌توانیم دیگر کمیت های مجهول سیستم را بدست بیاوریم. از اینرو کمیت های a و ω

¹ axial-vector coupling constant

² vector coupling constant

و c برای حالت پایه با $\gamma = 0$ و $\nu = 0$ برابر مقابل خواهند شد .

$$a = 0.216 \quad \omega = 0.173 \quad c = 0.49$$

که نسبت $\frac{g_A}{g_V}$ برای پروتون در این مدل مساوی 1.29 خواهد شد که بسیار نزدیک به مقدار واقعی

آن است و به اندازه 0.03% با آن اختلاف دارد . و همینطور شعاع کیسه برابر با 1.23 fm تعیین می‌گردد و انرژی E مقدار 5.68 fm^{-1} پیدا خواهد کرد.

۴-۴- محاسبه مراتب بالاتر انرژی ($\nu > 0$) در سیستم

در گام اول با قرار دادن $\nu = 1$ در معادله (۴-۳۹) و محاسبه مولفه بالایی اسپینور دیراک $g_\nu(x)$ از رابطه (۴-۳۸) به حل معادله دیراک خواهیم پرداخت . از رابطه (۴-۳۹) داریم [27]

$$\begin{cases} h(x) = (1 + \alpha_0^{(1)}x)(1 + \alpha_1^{(1)}x) \\ Z(x) = -\frac{1}{2}\alpha x^2 + \delta \ln(x) \end{cases} \quad (۴-۵۵)$$

با قرار دادن معادله (۴-۵۵) در معادله (۴-۳۸) و با استفاده از معادله (۴-۴۰) و (۴-۳۶) ، پارامتر های α, δ و دیگر پارامتر های مجهول در معادله (۴-۵۵) محاسبه خواهند شد . بنابراین

$$\frac{1}{3}(E_{\gamma,1}^2 - 9m^2) = 2(\gamma + 5)\sqrt{a_1} \quad (۴-۵۶) \text{ الف}$$

$$\alpha = \sqrt{a_1} = \sqrt{a(E_{\gamma,1} + 3m)} = \frac{\frac{1}{3}(E_{\gamma,1}^2 - 9m^2)}{2(\gamma + 5)} = (E_{\gamma,1} + 3m)\omega_{\gamma,1} \quad (۴-۵۶) \text{ ب}$$

$$c_1 = 2[(4\gamma + 11)\sqrt{a_1}]^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۵۶) \text{ ج}$$

$$\alpha_0^{(1)} = -\frac{[(4\gamma + 11)\sqrt{a_1}]^{\frac{1}{2}} + [\sqrt{a_1}]^{\frac{1}{2}}}{2\gamma + 5} \quad (۴-۵۶) \text{ د}$$

$$\alpha_1^{(1)} = -\frac{\left[(4\gamma+11)\sqrt{a_1}\right]^{\frac{1}{2}} - \left[\sqrt{a_1}\right]^{\frac{1}{2}}}{2\gamma+5} \quad (56-4) \text{ هـ}$$

$$\delta = \gamma, -\gamma - 4 \quad (56-4) \text{ و}$$

با استفاده از روابط بدست آمده در بالا ویژه تابع $g_\gamma(x)$ به سادگی از رابطه

$$g_\gamma(x) = (1 + \alpha_0^{(1)}x)(1 + \alpha_1^{(1)}x) \exp\left(-\frac{1}{2}\alpha x^2 + \delta \ln(x)\right) \quad (57-4)$$

بدست خواهد آمد. با تعمیم روابط (56-4) برای مراتب بالاتر، $\nu = 2, 3, \dots$ ، می‌توانیم بنویسیم [26]

$$\frac{1}{3}(E_{\gamma,\nu}^2 - 9m^2) = 2(\gamma + 4 + \nu)\sqrt{a_1} \quad (58-4) \text{ الف}$$

$$c_1 = (1 + \nu)[(4\gamma + 10 + \nu)\sqrt{a_1}]^{\frac{1}{2}} \quad (58-4) \text{ ب}$$

$$\alpha = \sqrt{a_1} = \sqrt{a(E_{\gamma,\nu} + 3m)} = \frac{\frac{1}{3}(E_{\gamma,1}^2 - 9m^2)}{2(\gamma + 4 + \nu)} = (E_{\gamma,\nu} + 3m)\omega_{\gamma,\nu} \quad (58-4) \text{ ج}$$

برای حل عددی این معادلات علاوه بر اینکه جرم کوارک‌ها ثابت هستند نیاز به کمیت ثابت دیگری داریم که با برانگیخته شدن سیستم ثابت بماند. که اگر فرض کنیم پارامتر c در حالت پایه و برانگیخته ثابت بماند از معادله (58-4) ب

$$c_{\gamma,\nu} = (1 + \nu) \left[\frac{4\gamma + 10 + \nu}{6(\gamma + 4 + \nu)} \frac{E_{\gamma,\nu} - 3m}{E_{\gamma,\nu} + 3m} \right]^{\frac{1}{2}} = c_{0,0} = c \quad (59-4)$$

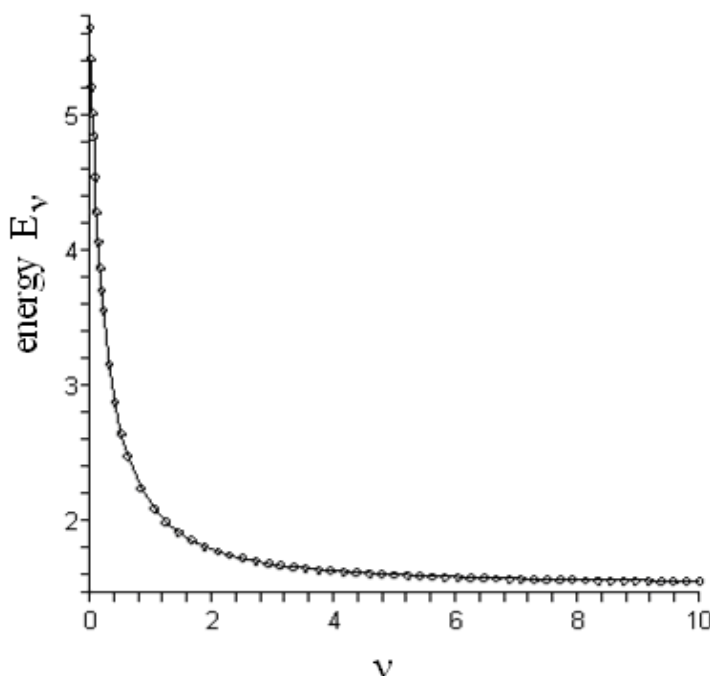
با توجه به شکل (4-1) در می‌یابیم که با افزایش ν یا γ با کاهش انرژی مواجه خواهیم شد. بنابراین می‌توانیم کمیت ثابت را $\omega_{\gamma,\nu}$ فرض کنیم که در این صورت نتیجه بسیار مطلوبی خواهیم داشت. از معادله (58-4) الف انرژی سیستم به صورت

$$E_{\gamma,\nu} = 6(\gamma + 4 + \nu)\omega_{\gamma,\nu} + 3m \quad (60-4)$$

تعرف می‌شود. از اینرو اختلاف بین انرژی حالت پایه با مرتبه یکم انرژی

$$E_{\gamma,1} - E_{\gamma,0} = 6(\gamma + 4 + 1)\omega + 3m - (6(\gamma + 4)\omega + 3m) = 6\omega$$

خواهد شد. از قسمت قبل ω به مقدار 0.173 محاسبه شده است.



شکل ۴-۱: رسم انرژی سیستم به ازای $c = 0.49$ بر حسب ν . که در آن نمودار خطی مربوط به $\gamma = 0$ و نمودار نقطه ای مربوط به $\gamma = 1$ می‌باشد.

۴-۵- روابط ترمودینامیکی حاکم بر مسئله

با توجه به فرمول بدست آمده برای انرژی سیستم (۴-۶۰) می‌توانیم بوسیله تعریف تابع پارش برای این سیستم روابط ترمودینامیکی را بدست آوریم. از آنجایی که جواب های بدست آمده برای مراتب مختلف انرژی به حل مسئله از طریق ریاضی بستگی دارد و طبق قوانین مربوط به حل معادلات دیفرانسیل تمام انرژی های بدست آمده با مراتب متفاوت، می‌توانند با احتمال مربوط به خود، انرژی حالت پایه $\gamma = 0$ یا برانگیخته $\gamma > 0$ سیستم باشند.

به دلیل اینکه سیستم ما تنها شامل سه ذره می باشد و تعداد ذرات ثابت هستند ما سیستم ترمودینامیکی را در آنسامبل کانونی تعریف می کنیم . با استفاده از فرمول (۳-۱۰) تابع پارش را تعریف می کنیم :

$$Z_{\gamma} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp(-\beta E_{\gamma, \nu}) \quad (۴-۶۱)$$

بنابراین با استفاده از معادله (۴-۶۰) و جایگذاری آن در بالا تابع پارش به صورت

$$Z_{\gamma} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \exp[-\beta(6(\gamma+4+\nu)\omega+3m)] \quad (۴-۶۲)$$

مشخص خواهد شد . که اگر این فرمول را برای ν های از صفر تا بینهایت بسط دهیم در این صورت جوابی مانند

$$Z_{\gamma} = \frac{e^{(-6(4+\gamma)\omega-3m)\beta} e^{6\beta\omega}}{e^{6\beta\omega} - 1} \quad (۴-۶۳)$$

خواهیم داشت . بنابراین با استفاده از فرمول (۳-۱۲) می توانیم متوسط انرژی سیستم را به ازای هر γ پیدا کنیم . از اینرو داریم

$$E_{\gamma} = U_{\gamma} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_{\gamma} = \frac{3[(2(4+\gamma)\omega+m) e^{6\beta\omega} - 6\omega - 2\omega\gamma - m]}{e^{6\beta\omega} - 1} \quad (۴-۶۴)$$

که اگر این سیستم را در دمای صفر بررسی کنیم

$$T = 0 \rightarrow \beta = \frac{1}{T} = \infty$$

$$E_{\gamma} = 6(4+\gamma)\omega+3m \quad (۴-۶۵)$$

که این انرژی با انرژی مرتبه صفر $\nu = 0$ مطابقت دارد و این بیانگر این امر است که انرژی یک سیستم نسبیتی در دمای صفر، مقداری مخالف صفر دارد .

برای یافتن گرمای ویژه سیستم لازم است تا تابع پارش را روی تمام حالات ممکن γ جمع کنیم . در این صورت تابع پارش

$$Z = \sum_{\gamma} Z_{\gamma} = \sum_{\gamma} \frac{e^{(-6(4+\gamma)\omega-3m)\beta} e^{6\beta\omega}}{e^{6\beta\omega} - 1} \quad (۴-۶۶)$$

خواهد شد . بنابراین با استفاده از فرمول (۳-۱۸)

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V \equiv \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \beta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z \right)_V \quad (۴-۶۷)$$

می توان گرمای ویژه سیستم را بدست آورد .

ما اکنون برای حل عددی این معادلات سیستم را در حالت $J = \frac{1}{2}$ بررسی خواهیم کرد . همانطور که

می دانیم اسپین پروتون $S = \frac{1}{2}$ است و با در نظر گرفتن تکانه مداری صفر برای کل سیستم

$$L = l_{\rho} + l_{\lambda} = 0 \text{ به حل مسئله می پردازیم . در این صورت از رابطه زیر}$$

$$\gamma = 2n + l_{\lambda} + l_{\rho}$$

برای حالت پایه $n = 0$ و اولین حالت برانگیخته $n = 1$ ، گرمای ویژه را محاسبه می کنیم . از n های

بالتر بخاطر بالا بودن انرژی و همچنین زیاد بودن احتمال تولید ذرات ثانویه (تولید جفت کوارک -

پاد کوارک و تبدیل نوکلئون به یک نوکلئون و یک پایون) صرف نظر می کنیم . بنابراین با استفاده از

تابع پارش برای $n = 0, 1$ به صورت مقابل

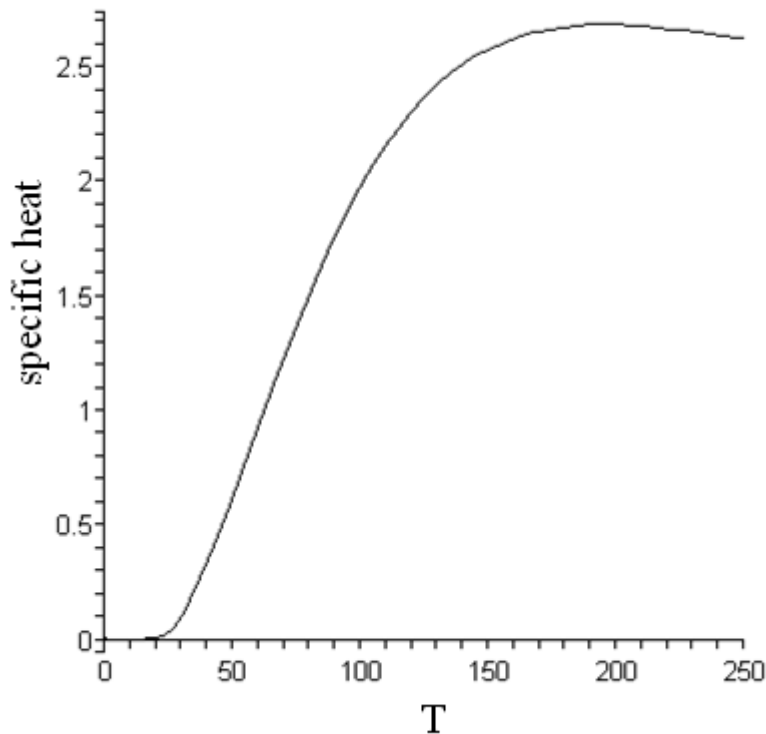
$$Z = \sum_{n=0,1} Z_{\gamma} = \frac{e^{(-24\omega-3m)\beta} e^{6\beta\omega}}{e^{6\beta\omega} - 1} + \frac{e^{(-36\omega-3m)\beta} e^{6\beta\omega}}{e^{6\beta\omega} - 1}$$

استفاده از معادله (۴-۶۷) می توان گرمای ویژه سیستم را محاسبه کرد . با رسم گرمای ویژه به عنوان

تابعی از T ، شکل (۴-۲) ، مشاهده می کنیم که منحنی ماکزیمم ای در دمای حدود

$180 < T < 200 \text{ MeV}$ خواهد داشت که این دما به عنوان دمای بحرانی برای سیستم معرفی خواهد

شد. از آنجایی که دمای بحرانی برای هادرون ها به طور تجربی در محدوده $160 < T < 200 \text{ MeV}$ اندازه گیری شده است، در این صورت دمای بدست آمده توسط این مدل توافق خوبی با سیستم آزمایشگاهی دارد



نمودار ۴-۲: رسم گرمای ویژه سیستم به عنوان تابعی از دما برای $j = \frac{1}{2}$

۴-۶- تعیین فشار خارجی وارد بر سطح کیسه در حالت پایه $\gamma = 0$

همانطور که از ترمودینامیک می دانیم فشار وارد بر سطح را می توان از تغییرات انرژی سیستم نسبت به تغییرات حجم آن در دمای ثابت محاسبه کرد

$$P = - \left(\frac{dE}{dV} \right)_T \quad (۴-۶۸)$$

بنابراین با استفاده از این فرمول، می توانیم فشار وارد بر سطح کیسه را در دمای صفر محاسبه

کنیم . داریم

$$P = -\left(\frac{dE}{dV}\right) = -\left(\frac{dV}{dE}\right)^{-1} \Big|_{x=x_b} = -\left(\frac{dV}{dx}\right)^{-1} \left(\frac{dx}{dE}\right)^{-1} \Big|_{x=x_b} \quad (۶۹-۴)$$

در این صورت با استفاده از فرمول (۴۵-۳) حجم کیسه در فضای ۶ بعدی تعریف می شود

$$V = \frac{\pi^3}{6} x_b^6$$

بنابراین تغییرات حجم نسبت به تغییرات شعاع x

$$\frac{dV}{dx} = \pi^3 x_b^5 \quad (۷۰-۴)$$

می شود و برای بدست آوردن $\frac{dx}{dE}$ از رابطه

$$\frac{dx}{dE} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dE} + \frac{dx}{d\xi_0} \frac{d\xi_0}{dE} \quad (۷۱-۴)$$

استفاده کرده ایم . از معادلات (۴۷-۴) و (۵۳-۴) و (۵۱-۴)

$$\frac{dy}{dE} = \frac{\sqrt{3}E}{6\sqrt{E^2 - 9m^2}}$$

$$\frac{d\xi_0}{dE} = -\frac{1}{(E + 3m)^2} \quad (۷۲-۴)$$

$$\frac{dx_b}{dy} = -\frac{(-\xi_0 y \sqrt{5} + 4)\mu + 13\xi_0^2 y^2 - 6\sqrt{5}\xi_0 y + 8}{2\mu\xi_0 y^3}$$

که برای سادگی از نماد گذاری

$$\mu = \sqrt{(2 + \sqrt{5}\xi_0 y)^2 + 8\xi_0 y(\xi_0 y - \sqrt{5})}$$

استفاده کرده ایم . از اینرو با قرار دادن معادله (۷۲-۴) در معادله (۷۱-۴) و جایگذاری معادله (۴-۴) و (۷۱) در معادله (۶۹-۴) فشار بدست خواهد آمد و این فشار را می توان به عنوان فشار وارد بر سطح کیسه از طریق خلا در نظر گرفت . بعلاوه انرژی وارد شده بر سطح کیسه هم از رابطه

$$E_{out} = PV = P \frac{\pi^3}{6} x_b^6 \quad (۷۳-۴)$$

محاسبه می شود . با توجه به اعداد بدست آمده برای پروتون در قسمت های قبل ، می توانیم فشار وارد بر سطح کیسه را به اندازه $P = 0.045 \text{ fm}^{-7}$ اندازه گیری کنیم . از اینرو انرژی خارجی برابر $E_{out} = 0.839 \text{ fm}^{-1}$ خواهد شد .

از نتایج بدست آمده در مدل کیسه ای MIT ، انرژی خارجی برای این مدل برابر با $E_{bag} = B \frac{4}{3} \pi R_b^3 = 1.22 \text{ fm}^{-1}$ خواهد شد . حال اگر انرژی این مدل را با انرژی خلا در مدل کیسه ای MIT مقایسه کنیم متوجه خواهیم شد که در این مدل بخاطر وجود پتانسیل بین کوارک ها فشار وارد بر کیسه و در نتیجه انرژی خلا کاهش خواهد یافت . و از آنجایی که این فشار توسط آزمایشات تجربی به اثبات نرسیده است ، پس هر قدر این فشار کاهش یابد ، نتایج بدست آمده به مقادیر تجربی نزدیک تر خواهند شد .

در جدول (۴-۱) مقادیر بدست آمده در این مدل با مقادیر بدست آمده در مدل کیسه ای MIT و مقادیر آزمایشگاهی مقایسه شده است .

جدول ۴-۱ : مقایسه خواص استاتیکی پروتون در این مدل با مدل کیسه ای MIT و مقادیر تجربی

پروتون	مدل کیسه ای MIT	مدل ما	تجربی
m_q	0	$100MeV$	$\sim 100 \sim 350MeV$
g_A/g_V	1.09	1.29	$1.254 \pm .006$
$\langle r_{cm}^2 \rangle^{\frac{1}{2}}$	$0.73 fm$	0.88	$0.88 \pm 0.03 fm$
x_b	$1 fm$	$1.23 fm$	—
E_{out}	$1.22 fm^{-1}$	$0.839 fm^{-1}$	—

پیوست ۱

حل معادله دیراک برای سیستم تک ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$

با استفاده از معادلات جفت شده دیراک برای سیستم با پتانسیل کروی به حل این معادله خواهیم پرداخت .

$$\begin{cases} \frac{dg_k(r)}{dr} + \frac{k+1}{r} g_k(r) - mf_k(r) = \varepsilon f_k(r) \\ \frac{df_k(r)}{dr} + \frac{1-k}{r} f_k(r) - (m+A(r))g_k(r) = -\varepsilon g_k(r) \end{cases} \quad (1)$$

را بدست می آوریم . با استفاده از تعریف

$$g_k(r) = \frac{1}{r} \phi_k(r) \quad (2)$$

معادله (۱) به شکل زیر خلاصه خواهد شد .

$$\phi_k''(r) + \left[\frac{-k(k+1)}{r^2} + \varepsilon^2 - m^2 - (\varepsilon+m)A(r) \right] \phi_k(r) = 0 \quad (3)$$

برای سادگی از علامت گذاری های

$$\lambda = \varepsilon^2 - m^2, \quad a_1 = (\varepsilon+m)a, \quad c_1 = (\varepsilon+m)c \quad (4)$$

استفاده می کنیم . که معادله (۳) به

$$\phi_k''(r) = \left[\frac{k(k+1)}{r^2} - \lambda + a_1 r^2 - \frac{c_1}{r} \right] \phi_k(r) \quad (4)$$

تبدیل خواهد شد . اکنون فرض می کنیم که بتوانیم برای معادله بالا جوابی به شکل

(۵)

$$\varphi_k(r) = h(r) \exp(Z(r))$$

تعریف کنیم . با در نظر گرفتن

$$\begin{cases} h(r) = \prod_{i=0}^{\nu} (1 + \alpha_i^{(\nu)} r) & \alpha_i \neq 0 \\ Z(r) = -\frac{1}{2} \alpha r^2 + \delta \ln(r) \end{cases} \quad (۷)$$

جایگذاری کردن معادله (۵) در معادله (۶) می توان مولفه های مجهول در معادله (۶) را پیدا کرد .

برای مرتبه صفرم ($\nu = 0$) داریم

$$\varphi_k(r) = (1 + \alpha_0^{(0)} r) \exp(-\frac{1}{2} \alpha r^2 + \delta \ln(r)) \quad (۸)$$

که برای حل این معادله از برنامه زیر استفاده شده است . لازم به ذکر است که در این برنامه $\mu = \alpha_0^{(0)}$ در نظر گرفته شده است .

```
> eq3 := diff(phi(r),r$2)+(-a_1*r^2+c_1/r+lambda-k*(k+1)/r^2)*phi(r);
> h(r):=1+mu*r;y(r):=-1/2*alpha*r^2+delta*ln(r);
> phi(r):=h(r)*exp(y(r));
> factor(eq3);
> s:=factor(eq3*r^2/exp(y(r))):
for i from 1 by 1 to 7 do
print(pove(r)=i-1);
print(rem(s,r^i,r));
s:=s-rem(s,r^i,r);
end do:
> #.....
> k:=-delta;
> alpha:=sqrt(a_1);
```

```

> lambda:=(3+2*delta)*sqrt(a_1);
> mu:=-c_1/(2*delta);
> c_1:=sqrt(+4*delta*sqrt(a_1));
> #.....
> a_1:=((epsilon^2-m^2)/(3+2*delta))^2;
> c:=c_1/(epsilon+m);
> alpha; lambda;mu;

```

برای حالت $\nu = 1$ ، با در نظر گرفتن

$$\varphi_k(r) = (1 + \alpha_0^{(1)} r)(1 + \alpha_1^{(1)} r) \exp\left(-\frac{1}{2} \alpha r^2 + \delta \ln(r)\right)$$

همچنین $\mu = \alpha_0^{(1)}$ و $\eta = \alpha_1^{(1)}$ با استفاده از برنامه زیر به حل معادله می پردازیم

```

> eq3 := diff(phi(r),r$2)+(-a_1*r^2+c_1/r+lambda-k*(k+1)/r^2)*phi(r);
> h(r):=1+mu*r;y(r):=-1/2*alpha*r^2+delta*ln(r);
> phi(r):=h(r)*(1+eta*r)*exp(y(r));
> factor(eq3);
> s:=factor(eq3*r^2/exp(y(r))):
for i from 1 by 1 to 9 do
print(pove(r)=i-1);
print(rem(s,r^i,r));
s:=s-rem(s,r^i,r);
end do:
> R5 := solve( {1/2/delta*(-c_1^2+16*a_1^(1/2)*delta+4*a_1^(1/2))*r^2}, {c_1} );
> R4 := solve( {-1/2*c_1*(c_1*eta+2*eta^2*delta+2*a_1^(1/2))/delta*r^3}, {eta} );
> R2 := solve( {(2*mu*delta+c_1+2*eta*delta)*r}, {mu} );
> R1 := solve( {(lambda*mu*upsilon-5*mu*upsilon*a_1^(1/2)-
2*mu*upsilon*a_1^(1/2)*delta)*r^4}, {lambda} );
> #.....
> k:=-delta;
> alpha:=sqrt(a_1);
> lambda:=(5+2*delta)*sqrt(a_1);
> mu:=-c_1/(2*delta)-eta;

```

```

> eta:= 1/4*(-c_1+(c_1^2-16*a_1^(1/2)*delta)^(1/2))/delta;
> c_1:= 2*(4*a_1^(1/2)*delta+a_1^(1/2))^(1/2);
> #.....
> a_1:=((epsilon^2-m^2)/(5+2*delta))^2;
> c:=c_1/(epsilon+m);
> alpha;beta;lambda;mu;eta;

```

برای مراتب بالاتر ν ، با استفاده از برنامه های متفاوت می توان پارامتر های مجهول را بدست آورد که به علت پیچیده بودن باقی برنامه ها ، از آوردن آنها صرف نظر شده است . و در حالت کلی می توان آنها را به صورت زیر دسته بندی کرد .

$$\delta = \begin{cases} -k & k < 0 \\ k+1 & k > 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \sqrt{(\varepsilon_{k,\nu} + m)a}$$

$$\alpha_0^{(\nu)} = -\frac{(\varepsilon_{k,\nu} + m)c}{2\delta} - \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i^{(\nu)}$$

$$\lambda = (3 + 2\delta + 2\nu)\alpha$$

که ν در فرمول بالا به معنای مرتبه های متفاوت انرژی می باشد. حال فرض می کنیم

$$\omega_{k,\nu} = \sqrt{\frac{a}{(\varepsilon_{k,\nu} + m)}} \text{ باشد. در این صورت رابطه بین پارامترهای مجهول پتانسیل و جرم و انرژی به}$$

صورت زیر خواهند بود:

$$\varepsilon_{k,\nu}^2 - m^2 = (3 + 2\delta + 2\nu)\sqrt{(\varepsilon_{k,\nu} + m)a} = (3 + 2\delta + 2\nu)(\varepsilon_{k,\nu} + m)\omega_{k,\nu}$$

$$c = (1 + \nu)\sqrt{\frac{(4\delta + \nu)\omega_{k,\nu}}{(\varepsilon_{k,\nu} + m)}}$$

پیوست ۲

حل معادله دیراک برای سیستم سه ذره ای با پتانسیل $ax^2 - \frac{c}{x}$

با استفاده از معادله (۴-۳۶) که در فصل ۴ توضیح داده شده به حل معادله دیراک می پردازیم

$$g''_{\gamma}(x) + \frac{5}{x}g'_{\gamma} + \frac{L^2(\Omega)}{x^2}g_{\gamma}(x) + 3(\varepsilon^2 - m^2 + (m + \varepsilon)A(x))g_{\gamma}(x) = 0 \quad (۱)$$

که در آن $A(x)$ به صورت مقابل می باشد .

$$A(x) = ax^2 - \frac{c}{x}$$

با نماد گذارهای زیر

$$3\varepsilon = E$$

$$3(\varepsilon^2 - m^2) = \frac{1}{3}(E^2 - 3m^2)$$

$$a_1 = a(E + 3m)$$

$$c_1 = c(E + 3m)$$

در معادله (۱) به حل آن می پردازیم . برای تعیین ویژه تابع $g_{\gamma}(x)$ فرض می کنیم که آن به صورت

$$g_{\gamma}(x) = h(x)\exp(Z(x))$$

قابل تعریف باشد . با استفاده از $h(x)$ و $Z(x)$:

$$\begin{cases} h(x) = \prod_{i=0}^{\nu} (1 + \alpha_i^{(\nu)} x) & \alpha_i \neq 0 \\ Z(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \delta \ln(x) \end{cases}$$

به حل معادله (۱) می پردازیم . که برای حل آن از برنامه زیر استفاده شده است .

لازم به ذکر است که $\mu = \alpha_0^{(0)}$ و $\iota = \gamma$ می باشد.

```

> eq:=diff(g(x),x$2)+5/x*diff(g(x),x)+(-
iota*(iota+4))*g(x)/x^2+3*(e^2-m^2-(e+m)*(a*x^2-c/x))*g(x);
> eq:=diff(g(x),x$2)+5/x*diff(g(x),x)+(-
iota*(iota+4))*g(x)/x^2+(lambda-(a1*x^2-c1/x))*g(x);
> g(x):=x^delta*exp(-1/2*alpha*x^2)*(1+mu*x);
> factor(eq);

> eq1:=factor(collect(eq/g(x),x));

> s:=eq1*x^2*(1+mu*x):
for i from 1 by 1 to 8 do
print(pove(x)=i-1);
print(rem(s,x^i,x));
s:=s-rem(s,x^i,x):
end do:
> #=====
> alpha:=sqrt(a1);
> delta:=iota;
> lambda:=2*(4+iota)*alpha;
> mu:=-c1/(2*iota+5);
> c1:=sqrt(2.*(5+2*iota)*alpha);
> #*****
> mu;
> 1/3*(E^2-9*m^2)-lambda;
> R := solve( {1/3*E^2-3*m^2-2*(iota+4)*a1^(1/2)}, {a1} );
> a1:= 1/36*(-E^2+9*m^2)^2/(iota+4)^2;
> alpha:=1/6*(E^2-9*m^2)/(iota+4);
> y:=sqrt(1/3*(E^2-9*m^2)/(iota+4));
> beta:=1/(E+3*m);

```

برای حالت پایه $\gamma = 0$ داریم

```

> iota:=0;
> #####
> g:=(x^iota-y*x^(iota+1)/sqrt(2*iota+5))*exp(-y^2*x^2/4);
> f:=beta*diff(g,x);
> x_bag:=solve(f+g,x)[2];

> #-----
> m:=100/197.24;E:=5.68;E1:=E;
> y;

> #####
> rho:=g^2+f^2;
K:=int(rho*x^7,x=0..infinity)/int(rho*x^5,x=0..infinity):
K1:=sqrt(K);
g_a:=5/3*(1-4/3*int(f^2*x^5,x=0..infinity)
/int(rho*x^5,x=0..infinity));
N:=int(rho*x^5,x=0..x_bag);

======> #
> y:=sqrt(1/3*(E^2-9*m^2)/(iota+4));
> beta:=1/(E+3*m);
> iota:=0;
> E:='E';
> x_bag := 1/5*(5*E^2-45*m^2+4*3^(1/2)*(E-
3*m)*(E+3*m))^(1/2)*5^(1/2)*E+12*3^(1/2)*(E-
3*m)*(E+3*m))^(1/2)*5^(1/2)*m-(305*E^4-1170*E^2*m^2-
40*E^3*3^(1/2)*(E-3*m)*(E+3*m))^(1/2)*5^(1/2)-
120*E^2*3^(1/2)*(E-3*m)*(E+3*m))^(1/2)*5^(1/2)*m-
14175*m^4+360*m^2*3^(1/2)*(E-
3*m)*(E+3*m))^(1/2)*5^(1/2)*E+1080*m^3*3^(1/2)*(E-
3*m)*(E+3*m))^(1/2)*5^(1/2)+1440*E^3*m-
12960*E*m^3)^(1/2))*5^(1/2)*3^(1/2)/((E-
3*m)*(E+3*m))^(1/2)*(E^2-9*m^2)):

```

```

> P1:=factor(1/(Pi^3*x_bag^5)*(1/diff(x_bag,E))):
> E:=E1;factor(P1);
> Eb:=factor(P1*Pi^3/6*x_bag^6);

```

برای حالت $\nu = 1$ ، با در نظر گرفتن

$$g_{\gamma}(r) = (1 + \alpha_0^{(1)}x)(1 + \alpha_1^{(1)}x)\exp(-\frac{1}{2}\alpha x^2 + \delta \ln(x))$$

همچنین $\mu = \alpha_0^{(1)}$ و $\rho = \alpha_1^{(1)}$ با استفاده از برنامه زیر به حل معادله می پردازیم

```

> #=====
eq:=diff(g(x),x$2)+5/x*diff(g(x),x)+(-
iota*(iota+4))*g(x)/x^2+3*(e^2-m^2-(e+m)*(a*x^2-c/x))*g(x);
> eq:=diff(g(x),x$2)+5/x*diff(g(x),x)+(-
iota*(iota+4))*g(x)/x^2+(lambda-(a1*x^2-c1/x))*g(x);
> g(x):=x^delta*exp(-1/2*alpha*x^2)*(1+mu*x)*(1+rho*x);

> factor(eq);
> eq1:=factor(collect(eq/g(x),x));
>> s:=eq1*x^2*(1+mu*x)*(1+rho*x):
for i from 1 by 1 to 9 do
print(pove(x)=i-1);
print(rem(s,x^i,x));
s:=s-rem(s,x^i,x):
end do:
> R5 := solve( {(16*iota*a1^(1/2)+44*a1^(1/2)-
c1^2)/(5+2*iota)*x^2}, {c1} );
> R2 := solve( {-
c1*(2*a1^(1/2)+5*rho^2+2*rho^2*iota+c1*rho)/(5+2*iota)*x^3}
, {rho} );
> R1 := solve( {(5*mu+5*rho+2*iota*rho+c1+2*iota*mu)*x},
{mu} );

```

```

> R := solve( {(-10*a1^(1/2)*mu*rho+lambda*mu*rho-
2*iota*a1^(1/2)*mu*rho)*x^4}, {lambda} );
> #=====
> alpha:=sqrt(a1);
> iota:='iota';
> delta:=iota;
> lambda:=2*(5+iota)*alpha;
> mu:= -(5*rho+2*iota*rho+c1)/(5+2*iota);
> rho:= -1/2*(c1-(c1^2-40*a1^(1/2)-
16*iota*a1^(1/2))^(1/2))/(5+2*iota);
> c1:= 2*(4*iota*a1^(1/2)+11*a1^(1/2))^(1/2);

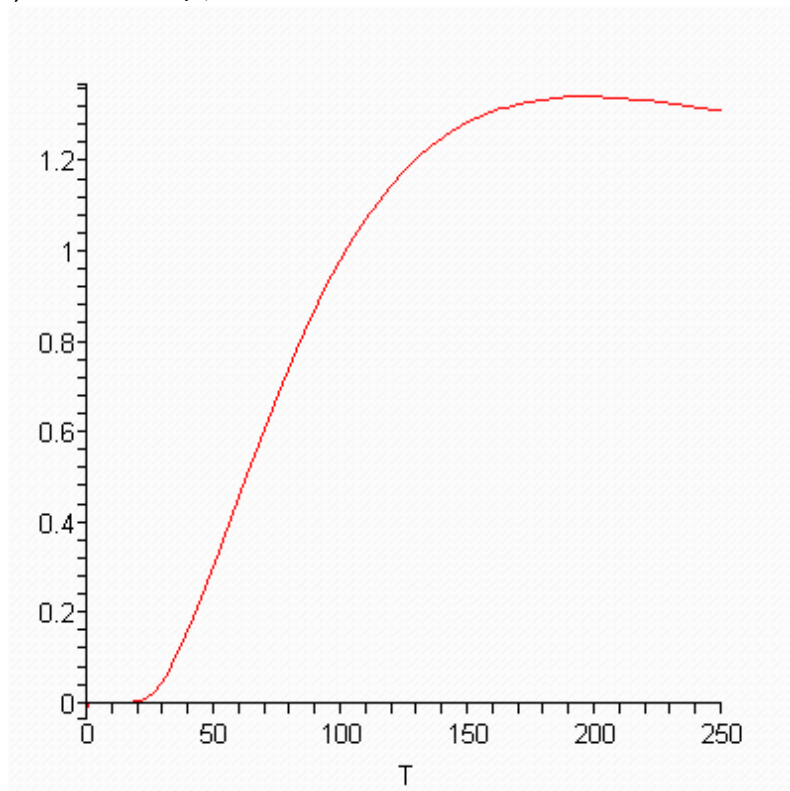
```

برای مراتب بالاتر ν ، با استفاده از برنامه های متفاوت می توان پارامتر های مجهول را بدست آورد که به علت پیچیده بودن باقی برنامه ها ، از آوردن آنها صرف نظر شده است .

پیوست ۳

برنامه مربوط به بدست آوردن گرمای ویژه سیستم سه ذره ای

```
> Z:=sum(sum(exp(-  
beta*197.24*(6*(4+2*l+nu)*omega+3*m)),nu=0..infinity),l=0..  
1);  
> omega:=.173;  
>  
> m:=.5069965524;  
> Z;  
> E:=-diff(ln(Z),beta);  
> factor(E);  
> Cv:=-beta^2*diff(E,beta):factor(Cv);  
> beta:=1/T;  
> plot(Cv,T=0..250);
```



منابع :

- [١] Close F E (1979) “ *an introduction to quarks and partons* ” , Academic Press , New York
- [٢] Frank. H. shu (1982) “*The physical universe*” . Universe science books
- [٣] Cottingham. W. N. & Greenwood . D. A. (1991)“*An Introduction to the standard Model of Particle Physics*” Cambridge university press
- [٤] Abbas. A. (1992) “*Deformed nucleon and the constituent quark mass*” . J Phys G . Nuclear Part Physics . V 18. N 5.
- [٥] Watson A. (2005) “*The quantum quarks*” Cambridge university press
- [٦] Halzen. F & Martin . A . D (1984) “*Quarks and leptons* ” John Wiley and Sons
- [٧] Tomas . A.W & Weise . W. (2001) “*The structure of the nucleon* ” Wiley-VCH . p 223-232.
- [٨] Bhaduri. R. K. ,(1988), “*Models of the Nucleon: From Quarks to Soliton*” Addison-Wesley. p 1-12 0
- [٩] Griffiths .D (1942) “*Introduction to Elementary Particles*” John Wiley and Sons
- [١٠] Sakurai. J. J. (1985) “*Quantum Mechanics*” Benjamin/Cummings Pub
- [١١] Greiner W., Neise, Stocker. (1994)“*Thermodynamics and statistical*” Springer
- [١٢] Pathria . R . K. (1997) “*Statistical Mechanics*” Butterworth-Heinemann, Oxford

- [١٣] fabre de la Ripelle. M, Fieldeldey . H , and S.A. Sofianos (1988)
“Integrodifferential equation for few-and many-body systems” Phys. Rev C. V 38 .
 p 449.
- [١٤] Rajabi . A.A.(2007) *“A Method to Solve the Schrödinger Equation for Any power Hypercentral Potentials”* Commun. Theor. Phys. (Beijing, China) V 48. p 151–158.
- [١٥] Yagi. K , hatusuda. T. & Miake. Y. (2005) *“Quark-Gluon Plasma”* Cambridge university press
- [١٦] Bannur V. M. & Udayanandan. K. M. (2006) *“Statistical mechanics of confined quantum particles”* arxiv:hep-ph / 0602017 v1
- [١٧] Rai. A. K. , Pandya. J. N. & Vinodkumar. P. C. (2005) *“Decay rates of quarkonia and potential models”* J Phys G: Nucl. Part. Phys. 31. p 1453–1464
- [١٨] Rajabi . A.A. (2003) *“Static properties of hadrons from MIT bag...”* Indian J of pure & Appl Phys . V41. p 89.
- [1٩] Tegen. R. , Schedl. M.& Weise .(1983) *“[On the axial charge and other static properties of the quark core in nucleons](#)”*. Phys Lett B. V 125. p 9-13.
- [٢٠] Bannur V. M. (2008) *“Relativistic harmonic oscillator model for quark stars”* arxiv:hep-ph / 08100894 v1
- [٢١] Trevisan. L. A. *“ the nucleon structure function”* . structure and interaction of hadronic systems . Word Scientific .
- [٢٢] Rajabi . A.A. (2006) *“Determining the relation between effective coupling and quark mass ...”* Indian J of pure & Appl Phys . V44. p 312.
- [٢٣] Rajabi . A.A. (2004) *“Improved MIT bag model with hyper central interacting potential”* Iranian Journal of Science & Technology , Transation A. V28. No A2

[۲۴] حسن آبادی. ح. (۱۳۸۶) رساله دکتری "محاسبه ویژگیهای استاتیکی باریون ها با استفاده از معادله

دیراک" دانشکده فیزیک . دانشگاه صنعتی شاهرود

[۲۵] Giannini. M. M. , Santopinto. E. & Vassallo. A. (1997) "[*Exactly solvable models of baryon spectroscopy*](#)" Nuclear Phys , A623 p 100-109

[۲۶] Hassanabadi.H & Rajabi . A. A.(2009) "*Energy levels of a spherical quantum dot in a confining potential*" .Phys. Lett. A. 373 . p 679–681

[۲۷] Rajabi A.A.(2005) "*A three-body force model for the harmonic and anharmonic oscillator*". Iranian Journal of Physics Research, Vol. 5, No.2

Abstract

Because of its simplicity, the MIT bag model [1] is rather convenient for calculating various hadronic properties. The MIT bag model possesses many desirable feature

inspired by QCD and relativity. Thus it is important to test the model in a situation other than those in which the dynamics of the model were originally formulated.

The MIT bag model uses free quark wave-function with no-current boundary condition in the bag's wall. Certainly, quarks interact within the bag, which will change the standard results. In the past, certain modification of the model was introduced, giving rise to better results compared to experimental values.

In this paper, a modification is proposed by extending the model to include certain residual interaction among quarks. The relativistic wave-function is also taken. In our model, each quark moves inside the bag in the effective field of other quarks and gluons. the relativistic Dirac equation is considered with effective central potential for hadrons composed of three quarks as a three-body system and the ground-state wave-function and excited states is calculated analytically . also thermodynamic properties of this system are studied . and in the end by determining the outward pressure forced via vacuum we will consider outside energy .

Key words : thermodynamic , bag model , baryon , specific heat , oscillation potential .



Shahrood University of Technology

Faculty of physics

MSc thesis

**Considering of thermodynamic properties of baryons
in modified MIT bag model composed of three quarks**

By:

Samareh Rostami

Supervisors:

Dr. A.A. Rajabi

February 2010