

اللَّهُمَّ احْمِزْنِي بِرَأْسِي



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رساله دکتری فیزیک هسته‌ای

مطالعه و بررسی باریون‌ها به عنوان حالت مقید سیستم سه-کوارکی

نگارنده: مهدی اصلان زاده

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رجبی

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به

محضر ارزشمند پدر و مادر عزیز و مهربانم به خاطر همه‌ی تلاش‌ها و فداکاری‌های بی‌دریغ‌شان و پشتیبانی اطمینان بخش‌شان در دوران زندگی‌ام.

به استادان فرزانه و فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و دانش و معرفت راهنما و یاری‌گر من بودند.

به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.

پروردگارا حسن عاقبت ، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر کن و به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.

خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه با علم و دانش و پژوهش به همه‌ما عنایت بفرما.

قدردانی و تشکر

خداوند را شاکرم که پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته و در سایه وجودشان فرصت تحصیل علم و دانش را به من ارزانی داشته است. کسب علم در کنار استاد گرانقدری چون جناب دکتر رجبی برای من افتخاری بزرگ بود و بر خود لازم می دانم که از ایشان به خاطر تمام تشویق‌ها و حمایت‌هایشان در طول تحصیل در این مقطع، کمال تشکر را داشته باشم. همچنین جا دارد از اساتید محترم گروه هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، به‌ویژه اساتید گرامی که زحمت داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند کمال قدردانی را داشته باشم. در پایان از تمامی دوستان عزیزی که در طول این مدت یاری‌گر من بودند تشکر کرده و از خداوند منان برای تمامی‌شان آرزوی موفقیت می‌کنم.

چکیده

به دلیل اهمیت حل تحلیلی در مدل‌های کوآرک سازنده و نیز به دلیل اهمیت تأثیرات نسبیتی دینامیک کوآرک‌ها در بررسی ساختار داخلی باریون‌ها، در این پژوهش سعی کرده‌ایم که به مدل‌سازی دقیق‌تری از دینامیک کوآرک‌ها در داخل باریون دست بیابیم و در قدم بعدی نسبیت را به نوعی وارد مسئله کرده و در یک حل تحلیلی به مطالعه ساختار باریونی پردازیم. بر اساس مدل کوآرک سازنده فوق مرکزی، ابتدا باریون‌ها را به عنوان یک سیستم مقید سه-جسمی، با اسپین صفر، در نظر گرفته و معادله شرودینگر غیر نسبیتی یا نسبیتی (معادله کلاین-گوردون) سه-جسمی را حل می‌کنیم و سپس اثرات برهم‌کنش‌های وابسته به اسپین و ایزواسپین را به صورت اختلالی وارد مسئله می‌کنیم. در این تحقیق، ابتدا با ارائه یک تقریب مناسب برای جمله خطی و در ادامه با اضافه کردن جمله‌های مناسب دیگری به پتانسیل فوق مرکزی "خطی+ کولنی"، مشکل حل تحلیلی مسئله را در حالت غیر نسبیتی مرتفع کرده‌ایم. در ادامه، با ارائه یک رهیافت نیمه نسبیتی، معادله کلاین-گوردون سه-جسمی را با در نظر گرفتن پتانسیل‌های اسکالر و برداری مساوی (متفاوت) به طور تحلیلی تقریبی (دقیق) حل کرده‌ایم. در نهایت، با استفاده از ویژه انرژی‌ها و ویژه توابع به دست آمده از حل‌های ارائه شده هم در مدل‌های غیر نسبیتی و هم در مدل-های نیمه نسبیتی، به ارزیابی مشاهده‌پذیرهای مختلفی از جمله: طیف جرمی باریون‌ها در حالت پایه و حالت‌های برانگیخته (رزونانس‌های باریونی)، فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی، گشتاورهای مغناطیسی و شعاع‌های باری نوکلئون پرداخته‌ایم. مقادیر نظری با داده‌های آزمایشگاهی و نتایج مدل‌های دیگر مقایسه شده و در هر مورد بهبود نتایج به دست آمده نشان داده شده است. پیشنهادهای مفید و مناسبی نیز برای علاقه‌مندان به پیگیری موضوع مورد مطالعه ارائه شده است.

کلیدواژه‌ها: حل تحلیلی، مدل سه-کوآرکی، رهیافت فوق مرکزی، رزونانس‌های باریونی، طیف جرمی، فرم

فاکتورهای باری و مغناطیسی، شعاع باری و گشتاور مغناطیسی

فهرست مقالات

الف: مقالات چاپ شده در مجلات بین المللی (ISI journals)

- 1) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2014) "Analytical solution of relativistic three-body bound systems" Eur. Phys. J. A **50**, 151
- 2) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2015) "Relativistic three-body quark model of light baryons based on hypercentral approach" Int. J. Mod. Phys. E **24**, 1550032
- 3) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2015) "Mass spectrum of baryons in a relativistic hypercentral constituent quark mode" Chin. J. Phys. **53**, 100301
- 4) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "A simple semi-relativistic hypercentral constituent quark model for light baryons" Can. J. Phys. **94**, 236
- 5) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Analytical Solution of Relativistic Few-Body Bound Systems with a Generalized Yukawa Potential" Few-Body Syst. **57**, 145
- 6) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Baryon spectroscopy in a three-quark model" Eur. Phys. J. Plus **131**, 118
- 7) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Investigation of light baryons in a simple analytical treatment" Chin. J. Phys. **54**, 607
- 8) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Systematic Study of Baryons in a Three-Body Quark Model" J. Kor. Phys. Soc. **69**, 716
- 9) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2017) "Investigation of light baryons in a three-body quark model" Ind. J. Phys. **91**, 197
- 10) M Aslanzadeh, A A Rajabi (2017) "Exact Solutions of Relativistic Bound State Problem for Spinless Bosons" Few-Body Syst. **58**, 15

ب: مقالات ارائه شده به صورت سخنرانی و پوستر در کنفرانس های داخلی

۱- مهدی اصلانزاده، علی اکبر رجبی، "یک مدل کوارکی نسبیتی برای حالت های پایه و تشدید باریون

های سبک"، بیست و دومین کنفرانس بهار فیزیک، شماره مقاله (سخنرانی) ۱۰، اردیبهشت ۹۴

۲- مهدی اصلانزاده، علی اکبر رجبی، "یک مدل سه جسمی نسبیتی برای باریون های سبک"، کنفرانس

فیزیک ایران، مقاله نامه کنفرانس صفحه ۲۲۰۵، شهریور ۹۴

۳- مهدی اصلانزاده، علی اکبر رجبی، "ارائه یک مدل تحلیلی ساده برای بررسی طیف جرمی باریون‌های

سبک و فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی پروتون"، بیست و سومین کنفرانس بهاره فیزیک، شماره

مقاله ۸، اردیبهشت ۹۵

۴- مهدی اصلانزاده، علی اکبر رجبی، "بررسی ساختار باریون‌های سبک در یک مدل سه جسمی

کوارکی نیمه نسبیتی"، کنفرانس فیزیک ایران، (سخنرانی)، مقاله‌نامه کنفرانس صفحه ۳۲۴، شهریور

۹۵

۵- مهدی اصلانزاده، علی اکبر رجبی، "یک توصیف ساده نسبیتی برای سیستم مقید سه جسمی"،

کنفرانس فیزیک ریاضی ایران، آبان ۹۵ (انتخاب شده به عنوان پوستر برتر کنفرانس)

۶- مهدی اصلانزاده، علی اکبر رجبی، "بررسی حالت مقید نسبیتی سیستم چند جسمی"، سیزدهمین

کنفرانس ماده چگال، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، بهمن ۹۵

۷- مهدی اصلانزاده، علی اکبر رجبی، "ارائه حل‌های تقریبی و دقیق مسئله حالت مقید نسبیتی

بوزون‌های اسپین -صفر"، هفتمین کنفرانس فیزیک ذرات و میدان‌ها، دانشگاه دامغان، بهمن ۹۵

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: بررسی باریون‌ها در مدل‌های کوارک سازنده
۲	۱-۱ مقدمه
۳	۲-۱ باریون‌ها و ساختار کوارکی آن‌ها
۵	۳-۱ مدل‌های کوارک سازنده
۸	۴-۱ مدل کوارکی سه-جسمی برای باریون‌ها و معرفی سازنده فوق‌مرکزی و مختصات فوق‌کروی
۱۳	۵-۱ مدل کوارک سازنده فوق‌مرکزی
۱۶	۶-۱ برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین و نتایج برای طیف جرمی باریون‌های سبک
۱۸	۷-۱ فرمول جرم گورسی-رادیکاتی تعمیم‌یافته و طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت
۲۴	۸-۱ حالت‌های باریونی
۲۹	فصل دوم: ارائه مدل‌های کوارکی غیر نسبیتی بهبود یافته برای محاسبه طیف جرمی باریون‌ها
۳۰	۱-۲ مقدمه
۳۱	۲-۲ حل مستقیم مسئله سه-کوارکی با احتساب برهم‌کنش‌های وابسته به اسپین و ایزواسپین، بدون استفاده از روش اختلالی
۳۳	۱-۲-۲ حل تحلیلی معادله شرودینگر سه-جسمی برای پتانسیل "فوق‌مرکزی+برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین"
۳۶	۲-۲-۲ نتایج برای طیف جرمی باریون‌های سبک و توابع موج ابرشعاعی برای حالت‌های مختلف

۳-۲	ارائه مدل دقیق‌تری برای باریون‌ها بر مبنای مدل کوآرک سازنده فوق‌مرکزی	۳۹
۱-۳-۲	ارائه یک پتانسیل فوق‌مرکزی مناسب و حل مسئله باریونی	۴۰
۲-۳-۲	اعمال فرمول جرم گورسی-رادیکاتی و نتایج مدل برای باریون‌های سبک و شگفت	۴۴
۴-۲	افزودن برهمکنش‌های چندقطبی به پتانسیل "خطی+ کولنی" و حل تحلیلی مسئله سه-جسمی	۴۸
۱-۴-۲	حل تحلیلی معادله شرودینگر سه-جسمی برای پتانسیل "خطی + کولنی + دوقطبی- دوقطبی + برهمکنش کوآرک-گلوئون"	۴۸
۲-۴-۲	اعمال فرمول جرم گورسی-رادیکاتی و نتایج مدل ارائه شده برای باریون‌های سبک و شگفت	۵۳
۵-۲	حل تحلیلی دقیق مسئله سه-جسمی برای باریون‌ها	۵۶
۱-۵-۲	حل تحلیلی معادله شرودینگر سه-جسمی برای پتانسیل فوق‌مرکزی "نوسانگری+ خطی+ کولنی"	۵۷
۲-۵-۲	تأثیر برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین و نتایج برای طیف جرمی باریون‌های سبک	۵۹
۶۲	فصل سوم: ارائه مدل کوآرکی سه-جسمی نیمه نسبیتی برای بررسی باریون‌ها	
۱-۳	مقدمه	۶۳
۲-۳	بررسی باریون به‌عنوان یک سیستم مقید سه جسمی در یک تقریب نیمه نسبیتی	۶۴
۱-۲-۳	معادله کلاین-گوردون سه-جسمی برای سیستم مقید سه-کوآرکی	۶۴
۲-۲-۳	انتخاب جفت‌شدگی‌های برداری و اسکالر برای حل معادله کلاین-گوردون سه-جسمی	۶۶
۳-۳	پتانسیل‌های برداری و اسکالر مساوی و حل تحلیلی مسئله حالت مقید نسبیتی کوآرک‌ها	۶۸

۱-۳-۳	پتانسیل فوق مرکزی "خطی+ کولنی" و رهیافت‌های اختلالی و تقریبی در حل مسئله
۶۹	سه-کوارکی
۲-۳-۳	وارد کردن برهم‌کنش وابسته به اسپین-طعم، و طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت
۷۲	
۳-۳-۳	حل دقیق مسئله سه-کوارکی با پتانسیل فوق مرکزی "نوسانگری+خطی+کولنی"
۷۷	
۴-۳-۳	اثر برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین و نتایج برای باریون‌های سبک
۷۷	
۴-۳	حل دقیق مسئله سه-کوارکی نیمه نسبیتی با پتانسیل‌های برداری و اسکالر متفاوت
۸۰	
۱-۴-۳	حل دقیق معادله کلاین-گوردون سه-کوارکی با پتانسیل برداری کولنی و اسکالر خطی
۸۰	
۲-۴-۳	اعمال فرمول جرم گورسی-رادیکاتی و نتایج برای باریون‌های سبک و شگفت
۸۲	

فصل چهارم: بررسی ساختار الکترومغناطیسی نوکلئون‌ها در مدل‌های ارائه‌شده

۸۷	
۱-۴	مقدمه
۸۸	
۲-۴	پراکندگی الکترون از پروتون نقطه‌ای
۸۸	
۳-۴	پراکندگی الکترون-نوکلئون و فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی
۹۱	
۴-۴	فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی نوکلئون در مدل کوارک سازنده فوق مرکزی
۹۵	
۵-۴	گشتاور مغناطیسی و شعاع باری نوکلئون‌ها
۹۸	
۶-۴	نتایج برای فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی و شعاع‌های باری نوترون و پروتون
۱۰۰	

جمع‌بندی و پیشنهادهایی برای کارهای آینده

۱۱۰	
۱۱۲	پیوست: روش نیکیفوروف-اوواروف برای حل معادلات مشتقی

	منابع و مآخذ
۱۱۴	

فهرست شکل‌ها

شکل	عنوان	صفحه
۱-۱	حالت‌های هشت‌تایی باریونی $J = 1/2$ و ده‌تایی باریونی $J = 3/2$ در نمایش ابربار	
۴	$Y = S + B$ بر حسب مؤلفه سوم ایزواسپین T_3	
۲-۱	طیف آزمایشگاهی رزونانس‌های غیرشگفت سه و چهار ستاره	۷
۳-۱	مختصات و تکانه‌های ژاکوبی برای سیستم مقید سه-جسمی	۹
۴-۱	نمایش ابرشعاع و ابرزاویه بر حسب مختصات ژاکوبی برای سیستم سه-جسمی	۱۰
۵-۱	نمودار پایین‌ترین مرتبه منجر به برهم‌کنش سه-جسمی غیرصفر کوارک‌ها در	
۱۲	باریون (a)، پیکربندی ریسمانی Y-شکل (b) و پیکربندی ریسمانی Δ -شکل (c)	
۶-۱	پتانسیل کوارک-پادکوارک در QCD شبکه برای کوارک‌های ایستا در حد $SU(3)$	۱۵
۷-۱	طیف جرمی به‌دست آمده برای رزونانس‌های N و Δ در مدل hCQM در مقایسه با	
۱۸	مقادیر آزمایشگاهی	
۸-۱	نتایج به‌دست‌آمده برای طیف جرمی رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت در	
	مدل hCQM به‌ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۲-۱) در قیاس با	
۲۳	مقادیر آزمایشگاهی	
۱-۲	نمایش پتانسیل "خطی + کولنی" با پارامترهای برازش یافته $\alpha = 1.3 \text{ fm}^{-2}$ و	
	$\tau = 5.29$ ، با و بدون تقریب اعمال‌شده برای جمله خطی، به‌ازای مقدار ثابت	
۳۴	$\delta = 2325 \text{ fm}^{-1}$	
۲-۲	طیف جرمی رزونانس‌های سه و چهار ستاره N و Δ ، از معادله (۲-۱۳) به ازای	
۳۸	مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۲-۱)، در مقایسه با مقادیر تجربی	

- ۳-۲ توابع موج ابرشعاعی (۱۶-۲) برای رزونانس‌های مختلف که با اعداد کوانتومی (n, γ, S, T) مشخص شده‌اند. ۳۹
- ۴-۲ پتانسیل فوق‌مرکزی (۱۷-۲) با و بدون تقریب‌های (۱۹-۲) و (۲۰-۲) برای جمله‌های خطی و لگاریتمی، با پارامترهای داده شده در جدول (۳-۲). ۴۱
- ۵-۲ ساختار کیفی قسمت $SU(6)$ -ناوردای طیف جرمی نظری، برای پتانسیل فوق‌مرکزی (۱۷-۲)، به‌ازای $\kappa \neq 0, \rho \neq 0$ در قسمت (a) و $\kappa = 0, \rho = 0$ در قسمت (b)، تا سه تراز اول. ۴۳
- ۶-۲ نتایج به‌دست آمده برای طیف جرمی رزونانس‌های باریون‌های سبک، از معادله (۲)-۲۷ به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۳-۲)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی. ۴۷
- ۷-۲ نتایج به‌دست آمده برای طیف جرمی رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت از معادله (۶۴-۲) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۵-۲)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی. ۵۶
- ۸-۲ شکل (۸-۲) طیف جرمی نظری باریون‌های سبک، با استفاده از معادله (۸۱-۲) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۷-۲)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی و نتایج مدل hCQM. ۶۱
- ۱-۳ برهم‌کنش جفتی ذرات در سیستم مقید سه ذره‌ای و حالت‌های مختلف تأثیر گرفتن یک ذره از دو ذره دیگر. ۶۴
- ۲-۳ نمایش دقیق و تقریبی جمله خطی $y = x$ به ازای پارامتر ثابت $\delta = 2.1 \text{ fm}^{-1}$. ۷۱
- ۳-۳ طیف جرمی به‌دست‌آمده برای باریون‌های سبک و شگفت از معادله (۱۸-۳)، در ۷۶

- رهیافت اختلالی (a) (به ازای مقادیر پارامترهای سطر اول جدول (۱-۳))، و رهیافت تقریبی (b) (به ازای مقادیر پارامترهای سطر دوم جدول (۱-۳)). مقادیر نظری با مثلث‌های رنگی و مقادیر آزمایشگاهی که با بازه‌های آبی رنگ مشخص شده‌اند.....
- ۴-۳ طیف جرمی باریون‌های سبک، از معادله (۲۴-۳)، در قیاس با مقادیر تجربی..... ۷۹
- ۵-۳ طیف جرمی نظری رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت، از معادله (۳۷-۳) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۵-۳)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی ۸۵
- ۱-۴ پایین‌ترین مرتبه پراکندگی الکترونی با یک آبرِ باری..... ۹۰
- ۲-۴ پراکندگی الکترون-نوکلئون در تقریب تبادل یک فوتونی..... ۹۱
- ۳-۴ پراکندگی الاستیک الکترون-نوکلئون در انرژی‌های بالا و برهم‌کنش فوتون مجازی با کوارک‌های سازنده..... ۹۵
- ۴-۴ فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل ارائه شده در (۳-۲)، با پارامترهای جدول (۳-۲) در قیاس با داده‌های آزمایشگاهی..... ۱۰۳
- ۵-۴ فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل ارائه شده در بخش (۴-۲)، با پارامترهای جدول (۵-۲)، (مثلث‌های توپر) در قیاس با فرم فاکتورهای دوقطبی (دایره‌های توپر)..... ۱۰۵
- ۶-۴ فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل‌های غیرنسبیتی و نیمه نسبیتی ارائه شده در بخش‌های (۵-۲) و (۲-۳-۳)، با پارامترهای c و ω داده شده در جدول‌های (۷-۲) و (۳-۳)، در قیاس با فرم فاکتور دوقطبی..... ۱۰۷
- ۷-۴ فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل ارائه شده در بخش (۴-۳) و با پارامترهای جدول (۵-۳) در قیاس با داده‌های تجربی..... ۱۰۹

فهرست جدول‌ها

صفحه	عنوان	جدول
۱۷	مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۳۴-۱) که از طریق یک فرایند تحلیلی تعیین شده‌اند.	۱-۱
۲۱	مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۳۸-۱) که از طریق یک فرایند تحلیلی، تعیین و ثابت شده‌اند.	۲-۱
۲۱	طیف جرمی به‌دست‌آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت در مدل hCQM و در قیاس با نتایج کار بیکر و مقادیر آزمایشگاهی	۳-۱
۲۵	ترکیبات مختلف هماهنگ‌های فوق‌کروی $Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}$ با تقارن S_3 مشخص، $(Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda})S_3$	۴-۱
۲۶	حالت‌های سه کوارکی با پارите مثبت.	۵-۱
۲۷	حالت‌های سه کوارکی با پارите منفی.	۶-۱
۳۶	مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله جرم (۱۳-۲) که از طریق یک فرایند تحلیلی تعیین شده‌اند.	۱-۲
۳۷	طیف جرمی رزونانس‌های N و Δ با استفاده از معادله (۱۳-۲)، در قیاس با نتایج مدل hCQM و مقادیر آزمایشگاهی	۲-۲
۴۵	مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۲۷-۲) که از طریق یک فرایند تحلیلی، تعیین و ثابت شده‌اند.	۳-۲
۴۶	طیف جرمی به‌دست آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک با استفاده از معادله	۴-۲

(۲۷-۲)، با رهیافت اختلالی ($M_{calc.I}$) و رهیافت تقریبی ($M_{calc.II}$)	
در قیاس با نتایج کار بیکر و مقادیر آزمایشگاهی.....	
۵-۲ مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۶۴-۲) که از طریق یک فرایند تحلیلی،	
تعیین و ثابت شده‌اند.	۵۴
۶-۲ طیف جرمی به‌دست‌آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت، از معادله	
(۶۴-۲)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی	۵۴
۷-۲ مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله طیف جرمی (۸۱-۲)	۶۰
۸-۲ طیف جرمی نظری رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت، با استفاده از رابطه	
(۸۱-۲)، در قیاس با نتایج کار جییانینی و مقادیر آزمایشگاهی.....	۶۰
۱-۳ مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله جرم (۱۸-۳) که از طریق یک فرایند	
تحلیلی، برای رهیافت‌های اختلالی (سطر اول) و تقریبی (سطر دوم)، تعیین	
شده‌اند.	۷۳
۲-۳ طیف جرمی به‌دست‌آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت. در روش-	
های اختلالی و تقریبی در قیاس با نتایج مقادیر آزمایشگاهی.....	۷۴
۳-۳ مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله طیف جرمی (۲۴-۳).....	۷۸
۴-۳ طیف جرمی به‌دست‌آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت، در مدل	
کنونی با معادله (۲۴-۳) در قیاس با نتایج کار جییانینی و مقادیر	
آزمایشگاهی.....	۷۸
۵-۳ مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۳۷-۳) که طی فرایند تحلیلی تعیین	
شده‌اند.....	۸۳

- ۶-۳ طیف جرمی به دست آمده برای رزونانس های باریون های سبک و شگفت، از معادله
 (۳-۳۷)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی ۸۴
- ۱-۴ تابع موج اسپین-طعم و گشتاور مغناطیسی پروتون و نوترون بر حسب گشتاور
 مغناطیسی کوارک های سازنده ۹۹
- ۲-۴ شعاع های باری، برای مدل ارائه شده در بخش (۲-۳)، در قیاس با داده های
 آزمایشگاهی ۱۰۳
- ۳-۴ شعاع های باری، برای مدل ارائه شده در بخش (۲-۴)، در قیاس با داده های
 آزمایشگاهی ۱۰۸
- ۴-۴ شعاع های باری، برای مدل ارائه شده در بخش (۳-۴)، در قیاس با داده های
 آزمایشگاهی ۱۰۹

فصل اول

بررسی باریونها در مدل های کوارک سازنده

۱-۱ مقدمه

پروتون و نوترون که با نام مشترک نوکلئون شناخته می‌شوند، به همراه باریون‌ها ذرات مرکبی هستند که از ذرات بنیادی به نام کوارک‌ها تشکیل شده‌اند و تا به امروز بررسی ویژگی‌های باریونی موضوع مطالعات نظری زیادی بوده است [۱-۱۰]. وجود یک طیف غنی از حالت‌های برانگیخته، مخصوصاً در ناحیه جرمی مهم ۱-۲ گیگا الکترون ولت برای باریون‌های سبک، ماهیت مرکب باریون‌ها را برای ما آشکار می‌سازد [۱۱]. برای توضیح این ویژگی‌ها، ابتدا ایده کوارک‌ها به‌عنوان ذرات مؤثر موسوم به کوارک‌های سازنده شکل گرفت و با معرفی اعداد کوانتومی رنگ توسعه بیشتری یافت. در این فصل، بر روی مدل‌های کوارک سازنده (CQM)^۱ برای باریون‌ها متمرکز می‌شویم. این مدل حدود پنج دهه قبل به منظور فهم و ادراک تقارن $SU(3)$ معرفی شد و تاکنون برای توضیح بسیاری از ویژگی‌های مهم هادرون‌ها مانند وجود چندگانه‌های باریونی، اعداد کوانتومی آن‌ها و گشتاورهای مغناطیسی، با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲]. بعد از کار پیش‌تازانه ایسگور و کارل (IK)^۲، یک سری از مدل‌های کوارک سازنده ارائه و دنبال شد که عبارتند از: مدل کاپستیک-ایسگور نسبیتی شده (CI)^۳ [۱۳]، تقریب جبری (BIL)^۴ [۱۴]، مدل کوارک سازنده فوق‌مرکزی (hCQM)^۵ [۱۵-۱۷]، مدل کایرال تبادل بوزون گلدستون (χ CQM)^۶ [۱۸-۲۱] و مدل شبه ذره‌ای بُن (BN)^۷ [۲۲-۲۵]. تمامی این مدل‌ها طیف باریونی را، که اولین کمیتی است که هنگام ساخته شدن یک مدل برای ساختار باریونی محاسبه می‌شود، بازتولید می‌کنند و به‌طور گسترده برای توصیف ویژگی‌های باریونی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از بین مدل‌های موجود، مدل کوارک سازنده فوق‌مرکزی، مزیت‌هایی همچون سادگی فرمول‌بندی و تحلیلی بودن را داراست که اهمیت زیادی در

¹ Constituent Quark Models

² Isgur and Karl model

³ Algebraic approach

⁴ Relativized Capstick-Isgur model

⁵ Hypercentral Constituent Quark Model

⁶ Chiral Goldstone Boson Exchange model

⁷ Bonn instanton model

تحلیل پارامتری کمیت‌های به‌دست آمده دارد. از این‌رو، در این فصل مرور مفصلی روی این مدل خواهیم داشت و با تأکید و توجه بر جنبه‌های موفق این مدل، در ادامه و در فصول بعدی سعی خواهیم کرد تا کاستی‌ها و جنبه‌های احیاناً ناکارآمد این مدل را اصلاح و در صورت امکان رفع کنیم.

۱-۲ باریون‌ها و ساختار کوارکی آن‌ها

درک بهتر نوکلئون و به‌طور کلی باریون‌ها به‌عنوان یک حالت مقید از کوارک‌ها و گلوئون‌ها، و همچنین طیف و ساختار درونی باریون‌های برانگیخته یک هدف و چالش اساسی در فیزیک هادرونی باقی مانده است. به‌ویژه، نگاشت برانگیختگی‌های نوکلئون امکان دسترسی به برهم‌کنش‌های قوی در حوزه محبوس شدگی کوارک را فراهم می‌کند. درحالی‌که این پدیده منحصر به فرد از نظر تجربی به‌خوبی تثبیت شده است، اما به‌طور تحلیلی اثبات نشده و ارتباط آن با QCD^۸، کرومودینامیک کوانتومی (به‌عنوان نظریه بنیادی برهم‌کنش‌های قوی)، به‌طور کافی و وافی شناخته‌شده نیست. باریون‌ها مرکب از کوارک‌هایی هستند که با یکدیگر برهم‌کنش قوی دارند و تمام باریون‌های شناخته‌شده از یک پیکربندی سه-کوارکی تشکیل شده‌اند. باریون‌های عجیب نیز پیشنهاد شده‌اند: مانند پنج-کوارکی‌ها که ترکیبی از چهار کوارک و یک آنتی-کوارک هستند اما وجود آن‌ها کاملاً پذیرفته‌شده نیست. همچنین در کرومودینامیک کوانتومی، هفت-کوارکی‌ها (پنج کوارک و دو آنتی-کوارک)، نه-کوارکی‌ها (شش کوارک و سه آنتی-کوارک) و ... می‌توانند وجود داشته باشند. باریون‌هایی که تنها دارای کوارک‌های بالا و پایین هستند، اگر دارای ایزواسپین کل $\frac{1}{2}$ باشند، نوکلئون نامیده می‌شوند یا رزونانس‌های Δ هستند اگر دارای ایزواسپین کل $\frac{3}{2}$ باشند. باریون‌های شامل کوارک شگفتی^۹، هایپرون^{۱۰} نامیده می‌شوند و بسته به تعداد کوارک‌های شگفتی و ایزواسپین کل‌شان با برچسب‌های Λ ، Σ ، Ξ و Ω مشخص می‌شوند. باریون‌هایی که دارای انواع دیگر

^۸ Quantum ChromoDynamics

^۹ Strangeness

^{۱۰} Hyperon

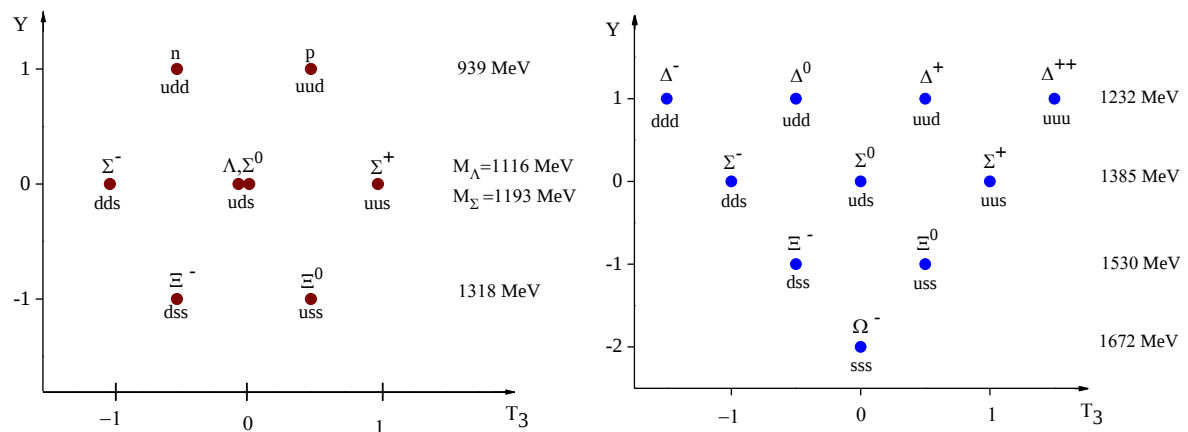
کوارک هستند با اندیس برچسب‌گذاری می‌شوند. برای مثال Λ_c^+ باریونی است که ایزواسپین صفر دارد و محتوای کوارکی‌اش udc است، Ξ_c^+ دارای محتوای کوارکی usc و Ξ_{cc}^{++} محتوای کوارکی ucc دارد [۲۶]. به عنوان فرمیون، باریون‌ها از اصل پائولی تبعیت می‌کنند چنان‌که تابع موج کل

$$|qqq\rangle_A = |\text{color}\rangle_A \times |\text{space, spin, flavour}\rangle_S \quad (۱-۱)$$

باید تحت تعویض هر دو کوارک با جرم یکسان پادمتقارن باشد. از آنجایی که تمامی هادرون‌های مشاهده شده متعلق به یکتایی‌های رنگ هستند، مؤلفه رنگ تابع موج باید کاملاً پادمتقارن باشد. برای باریون‌های سبک-طعم می‌توان با سه طعم u ، d و s در یک چارچوب $SU(3)$ تقریبی رفتار کرد که در آن هر کوارک عضوی از یک چندگانه $SU(3)$ است. سپس تابع موج طعم حالت‌های باریونی می‌توانند به شکل زیر ساخته شوند.

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10_S \oplus 8_M \oplus 8_M \oplus 1_A \quad (۲-۱)$$

پروتون و نوترون که شالوده تمام مواد هستی را تشکیل می‌دهند، هر دو متعلق به هشت‌تایی‌ها هستند.



شکل (۱-۱): حالت‌های هشت‌تایی باریونی $J = 1/2$ و ده‌تایی باریونی $J = 3/2$ در نمایش ابربار $Y = S + B$ بر حسب مؤلفه سوم ایزواسپین T_3

نمودار نمایش هشت‌تایی و ده‌تایی $SU(3)$ در شکل (۱) نشان داده می‌شود. با توجه به اینکه اسپین هر کوارک $1/2$ است، اسپین کل باریون دو مقدار ممکن دارد $S = 1/2$ یا $S = 3/2$ که پیکربندی مربوط به

$S = 3/2$ یک تابع موج اسپینی کاملاً متقارن به دست می‌دهد، درحالی‌که حالت $S = 1/2$ یک تقارن آمیخته را نشان می‌دهد. طعم و اسپین می‌توانند در یک گروه تقارنی $SU(6)$ طعم-اسپین تقریبی ترکیب شوند که چندگانه‌ها به این صورت هستند [۲۷].

$$6 \otimes 6 \otimes 6 = 56_S \oplus 70_M \oplus 70_M \oplus 20_A \quad (۳-۱)$$

که این‌ها نیز می‌توانند به صورت زیر به چندگانه‌های $SU(3)$ طعم تجزیه شوند.

$$\begin{aligned} 56 &= {}^4 10 \oplus {}^2 8, \\ 70 &= {}^2 10 \oplus {}^4 8 \oplus {}^2 8 \oplus {}^2 1, \\ 20 &= {}^2 8 \oplus {}^4 1. \end{aligned} \quad (۴-۱)$$

که در اینجا بالانویس $(2S + 1)$ اسپین هر ذره در چندگانه $SU(3)$ را می‌دهد. پروتون و نوترون متعلق به حالت پایه 56 هستند که در آن تکانه زاویه‌ای مداری بین هر جفت کوارک صفر است و از اعضای هشت‌تایی با اسپین و پاریته $J^P = \frac{1}{2}^+$ هستند. رزونانس Δ یک عضو از پیکربندی ده‌تایی با اسپین و پاریته $J^P = \frac{3}{2}^+$ است. توابع موج 70 و 20 مستلزم برانگیختگی قسمت فضایی است تا مؤلفه غیر رنگی (اسپین $\times$ فضا $\times$ طعم) تابع موج را کاملاً متقارن سازد.

۳-۱ مدل‌های کوارک سازنده

ارزیابی ویژگی‌های باریونی با شروع از یک مدل کوارکی، منوط به شناسایی برهم‌کنش بین کوارک‌های تشکیل‌دهنده است. اما تاکنون شکل این پتانسیل برهم‌کنش برای ما معلوم نیست، بنابراین ما باید بر روی ساختار عمومی و الزام‌های کلی که برهم‌کنش کوارک-کوارک باید ارضا کنند، تکیه کنیم. با توجه به مشاهدات آزمایشگاهی و عدم مشاهده کوارک‌های آزاد درمی‌یابیم که کوارک‌ها ذراتی هستند که درون هادرون‌های مشاهده‌شده محبوس هستند. هم‌چنین، از طیف آزمایشگاهی باریون‌ها مشاهده می‌شود که طیف رزونانس‌های باریونی یک تقارن $SU(6)$ اساسی را نشان می‌دهند و بنابراین می‌توانند در

چندگانه‌های $SU(6)$ ^{۱۱} مرتب‌سازی شوند (شکل (۱-۲)). این ملاحظات منجر به معرفی یک پتانسیل متشکل از دو جمله اصلی می‌گردد: یک جمله $SU(6)$ -ناوردای^{۱۲} اصلی محبوس کننده که مسئول تشکیل فاصله بین هر چندگانه $SU(6)$ است و یک جمله $SU(6)$ -شکننده^{۱۳} جزئی که باید شکافتگی بین هر چندگانه $SU(6)$ را توضیح دهد. برای مثال، حالت‌های N و Δ متعلق به یک پیکربندی تقلیل ناپذیر $SU(6)$ هستند و تفاوت جرم آن‌ها به‌طور کلی از برهم‌کنش $SU(6)$ -شکننده (که موجب شکست تقارن $SU(6)$ اسپین-طعم در طیف باریون‌ها می‌شود) ناشی می‌شود. همچنین، محاسبات QCD شبکه نشان می‌دهد که برهم‌کنش کوارکی می‌تواند به دو بخش تقسیم شود: یک بخش بلند برد که مستقل از اسپین و طعم است و شامل محبوس شدگی است، و یک قسمت کوتاه برد وابسته به اسپین [۲۸-۳۱]. بنابراین، برهم‌کنش سه کوارک به‌طور کلی به این صورت است $V_{3q} = V_{SU(6)\text{-ناوردا}} + V_{SU(6)\text{-شکننده}}$ که در اینجا بخش غالب برهم‌کنش $SU(6)$ -ناوردا است. تابع موج کل که از ضرب تانسوری توابع موج فضایی، اسپینی، طعم و رنگ ساخته می‌شود.

$$\Psi_{3q} = \Psi_{space} \chi_{spin} \Theta_{flavour} \theta_{color} \quad (۵-۱)$$

در تطابق با اصل پائولی، تابع موج Ψ_{3q} باید به ازای تعویض هر جفت کوارک کاملاً پادمتقارن باشد. باریون‌ها باید حالت یکتایی رنگی باشند و از آنجایی که تابع موج θ_{color} خود پادمتقارن است، عامل‌های باقی‌مانده باید کاملاً متقارن باشند. می‌توانیم بخش غالب را $SU(6)$ -ناوردا فرض کنیم و تابع موج (۵-۱) می‌شود:

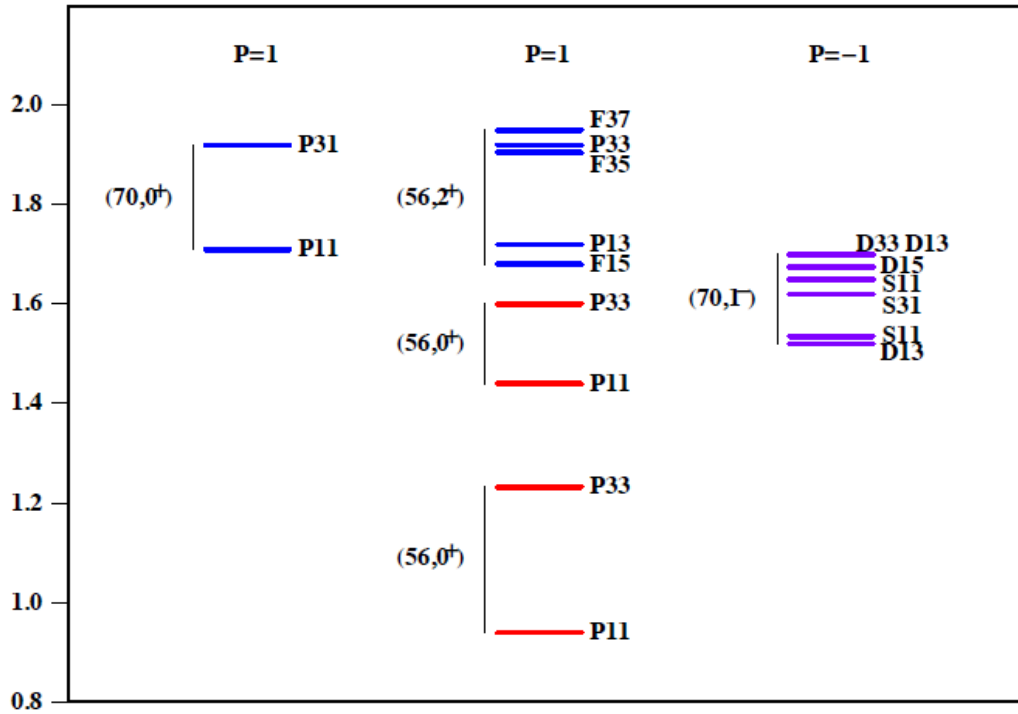
$$\Psi_{3q} = \psi_{space} \Phi_{SU(6)} \theta_{color} \quad (۶-۱)$$

که در اینجا بخش غالب برهم‌کنش $SU(6)$ -ناوردا است. تابع موج کل که از ضرب تانسوری توابع موج فضایی، اسپینی، طعم و رنگ ساخته می‌شود.

^{۱۱} $SU(6)$ -multiplets

^{۱۲} $SU(6)$ -invariant term

^{۱۳} $SU(6)$ -breaking term



شکل (۲-۱): طیف آزمایشگاهی رزونانس‌های غیرشگفت سه و چهار ستاره (که بیشتر یا تمام ویژگی‌هایشان شناخته شده است)، چندگانه‌های SU(6) با تخصیص تکانه زاویه‌ای مداری کل و پاریته مشخص شده‌اند.

$$\Psi_{3q} = \Psi_{space} \chi_{spin} \Theta_{flavour} \theta_{color} \quad (۷-۱)$$

در تطابق با اصل پائولی، تابع موج Ψ_{3q} باید به ازای تعویض هر جفت کوارک کاملاً پادمتقارن باشد. باریون‌ها باید حالت یکتایی رنگی باشند و از آنجایی که تابع موج θ_{color} خود پادمتقارن است، عامل‌های باقی‌مانده باید کاملاً متقارن باشند. می‌توانیم بخش غالب را SU(6) -ناوردا فرض کنیم و بنابراین تابع موج (۷-۱) می‌شود :

$$\Psi_{3q} = \psi_{space} \Phi_{SU(6)} \theta_{color} \quad (۸-۱)$$

برای تطابق با اصل پائولی حاصلضرب $\psi_{space} \Phi_{SU(6)}$ باید متقارن باشد. در نتیجه هر دو عامل ψ_{space} و $\Phi_{SU(6)}$ باید تقارن جایگشتی یکسانی داشته باشند، یعنی متقارن S، پادمتقارن A یا یکی از دو نوع تقارن آمیخته (MS, MA) که توسط تقارن یا پادتقارن نسبت به یک جفت کوارک مشخص می‌شوند، باشند. مدل کوارک سازنده CQM، یک مدل‌سازی از باریون (مزون) به عنوان سیستمی از سه کوارک (کوارک-

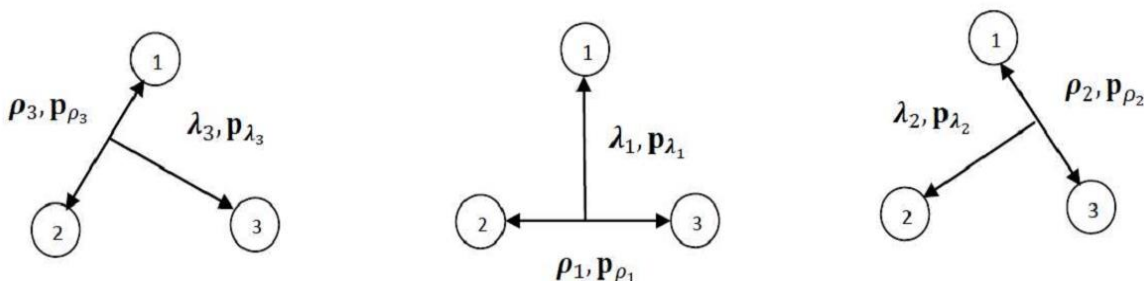
آنتی‌کوارک) سازنده است که توسط چند برهم‌کنش محبوس کننده مقید شده‌اند. با این فرض ساده می‌توان مدلی ساخت که قادر به توضیح کیفی برخی ویژگی‌های هادرونی باشد. مدل کوارک سازنده یا به اختصار CQM برخی ویژگی‌های مهم QCD را در خود دا را، اما باید تأکید کنیم که نباید کوارک‌های QCD اختلالی را با کوارک‌های سازنده یکی بدانیم. یک دلیل خیلی واضح برای این واقعیت این است که جرم کوارک‌های QCD خیلی کوچک‌تر (از مرتبه چند MeV برای کوارک‌های سبک) از کوارک‌های سازنده (از مرتبه چند صد MeV) هستند. در واقع در CQM تمام تأثیراتی که فراتر از توضیح یک باریون به عنوان سیستمی متشکل از سه کوارک محبوس شده هستند (به عنوان مثال اثرات گلوئون‌ها، کوارک‌های دریا، جفت‌های کوارک-آنتی کوارک)، در یک روش مؤثر، با معرفی یک جرم کوارک سازنده بزرگ، لحاظ می‌شوند. به عبارت دیگر، مدل کوارک سازنده هادرون‌ها را برحسب کوارک‌های سازنده توضیح می‌دهد که حامل اعداد کوانتومی کوارک‌های ظرفیت هستند اما با گلوئون‌ها و جفت‌های کوارک-آنتی کوارک پوشیده شده‌اند و به همین دلیل سنگین‌تر هستند [۳۲]. مشاهده آزمایشگاهی واقعی چنین ساختارهای شبه ذرات مرکب داخل نوکلئون‌ها هنوز یک مسئله باز است؛ اما همان‌طور که نشان داده خواهد شد، این مفهوم دارای اهمیت پدیده شناختی جالب توجهی است به‌طوری‌که تحقیقات و مطالعات زیادی را به خود معطوف داشته است.

۱-۴ مدل کوارکی سه-جسمی برای باریون‌ها و معرفی مختصات فوق‌کروی

باریون‌ها (و رزونانس‌های باریونی) به عنوان یک سیستم مقید سه-کوارکی بررسی می‌شوند. با در نظر گرفتن برهم‌کنش جفتی ذرات، معادله شرودینگر برای این سیستم عبارت‌است از:

$$\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^3 V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right) |\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \quad (9-1)$$

که در اینجا E انرژی بستگی سیستم سه-جسمی، V_{ij} پتانسیل برهم‌کنش بین دو ذره (i, j) و $|\Psi\rangle$ تابع موج کل سیستم سه-جسمی است. نقطه شروع مدل کوآرک سازنده فوق‌مرکزی، معرفی مختصات فوق‌کروی است. با توجه به شکل (۳-۱) در مختصات فوق‌کروی، درجات آزادی فضایی برحسب مختصات (و تکانه‌های) ژاکوبی توضیح داده می‌شوند.



شکل (۳-۱): مختصات و تکانه‌های ژاکوبی برای سیستم مقید سه-جسمی

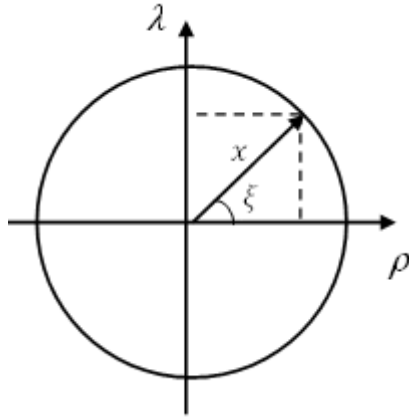
مختصات و تکانه‌های ژاکوبی برحسب مختصات دکارتی و تکانه‌های انتقالی ذرات به‌صورت زیر داده می‌شوند [۳۳-۳۵]:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{\sqrt{2}}, & \mathbf{p}_\rho &= \frac{\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2}{\sqrt{2}} \\ \lambda &= \frac{2\mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)}{\sqrt{6}}, & \mathbf{p}_\lambda &= \frac{2\mathbf{k}_3 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)}{\sqrt{6}} \\ \mathbf{R} &= \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{\sqrt{3}}, & \mathbf{P}_R &= \frac{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (۱۰-۱)$$

که $\mathbf{r}_i$ و $\mathbf{k}_i$ به ترتیب مختصات دکارتی و تکانه انتقالی ذره i -ام است. ابرشعاع و ابرزاویه، مطابق شکل (۱-۱) به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}, \quad \xi = \arctan\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \quad (۱۱-۱)$$

ابرشعاع یک مختصه جمعی است و تحت جابجایی سه ذره متقارن است و می‌تواند برحسب فواصل بین ذره‌ای r_{ij} به شکل $x = [(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{13}^2)/3]^{1/2}$ نوشته شود. در مختصات فوق‌کروی، علاوه بر ابرشعاع و ابرزاویه چهار متغیر زاویه‌ای مربوط به بردارهای ρ و λ نیز حضور دارند، یعنی $\Omega_\rho \equiv (\theta_\rho, \phi_\rho)$



شکل (۴-۱): نمایش ابرشعاع و ابرزاویه برحسب مختصات ژاکوبی برای سیستم سه-جسمی

و $\Omega_\lambda \equiv (\theta_\lambda, \phi_\lambda)$ در مجموعه مختصات فوق کروی که آن را به شکل $(x, \xi, \Omega_\rho, \Omega_\lambda)$ می‌دهیم، تنها یک متغیر دارای بعد طول است و بقیه، متغیرهای زاویه‌ای هستند. همچنین این مجموعه را می‌توان به صورت خلاصه‌تر (x, Ω_5) نیز نشان داد. در دستگاه مختصات فوق کروی، عملگر لاپلاسی مربوط به درجات آزادی مختلف سیستم از جمله شعاعی و زاویه‌ای را معرفی می‌کنیم. در چهارچوب مرکز جرم $P_R = 0$ ، عملگر لاپلاسی برای سه ذره یکسان در شش بعد به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۶].

$$\sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i^2 = \mathbf{p}_\rho^2 + \mathbf{p}_\lambda^2 = -(\nabla_{\rho_l}^2 + \nabla_{\lambda_l}^2) = -\nabla_x^2 = -\frac{1}{x^5} \frac{\partial}{\partial x} \left(x^5 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{L^2(\Omega_5)}{x^2} \quad (۱۲-۱)$$

در اینجا $L^2(\Omega_5)$ عملگر کازیمیر^{۱۴} گروه دورانی در شش بعد، $O(6)$ ، است. به عبارت دیگر، $L^2(\Omega_5)$ سد گریز از مرکز تعمیم یافته برای فضای شش بعدی (شامل مختصات زاویه‌ای Ω_ρ و Ω_λ و ابرزاویه) است.

$$L^2(\Omega_5) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + 4 \cot 2\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{l_\rho^2(\Omega_\rho)}{\sin^2 \xi} - \frac{l_\lambda^2(\Omega_\lambda)}{\cos^2 \xi} \quad (۱۳-۱)$$

برای سیستم سه-جسمی، ویژه مقادیر آن به صورت زیر داده می‌شود [۳۷].

$$L^2(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = \gamma(\gamma + 4) Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (۱۴-۱)$$

¹⁴ Casimir operator

که در اینجا γ عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای بزرگ و برابر با $\gamma = 2n + l_\rho + l_\lambda$ است که در آن n یک عدد صحیح مثبت و l_ρ و l_λ به ترتیب عدد کوانتومی تکانه‌های زاویه‌ای مربوط به مختصات ρ و λ هستند. توابع $Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi)$ موسوم به هماهنگ‌های فوق کروی هستند که به شکل زیر داده می‌شوند.

$$Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = Y_{l_\rho m_\rho}(\Omega_\rho) \cdot Y_{l_\lambda m_\lambda}(\Omega_\lambda) \cdot {}^{(2)}P_n^{l_\lambda, l_\rho}(\xi) \quad (15-1)$$

که در آن توابع ابرزاویه‌ای ${}^{(2)}P_n^{l_\rho, l_\lambda}(\xi)$ برحسب توابع مثلثاتی و چندجمله‌ای‌های ژاکوبی $P_n^{\alpha, \beta}(z)$ ، به صورت زیر داده می‌شوند [۳۳]:

$${}^{(2)}P_n^{l_\lambda, l_\rho}(\xi) = N_n^{l_\rho, l_\lambda} (\sin \xi)^{l_\rho} (\cos \xi)^{l_\lambda} P_n^{l_\rho + \frac{1}{2}, l_\lambda + \frac{1}{2}}(\cos 2\xi) \quad (16-1)$$

و ثابت بهنجارش به صورت زیر به دست آمده است.

$$N_n^{l_\rho, l_\lambda} = \sqrt{\frac{2(2\gamma + 2)\Gamma(\gamma + 2 - n)\Gamma(n + 1)}{\Gamma(n + l_\rho + 3/2)\Gamma(n + l_\lambda + 3/2)}} \quad (17-1)$$

هماهنگ‌های فوق کروی یک پایه متعامد کامل در ابرکره Ω فضای توابعی از Ω_ρ و Ω_λ و ξ تشکیل می‌دهند.

$$\int Y_{[\gamma]}^*(\Omega_5) Y_{[\gamma']}(\Omega_5) d\Omega = \delta_{[\gamma], [\gamma']} \quad (18-1)$$

سپس تابع موج سه-جسمی می‌تواند برحسب یک سری از هارمونیک‌های فوق کروی بسط داده شود.

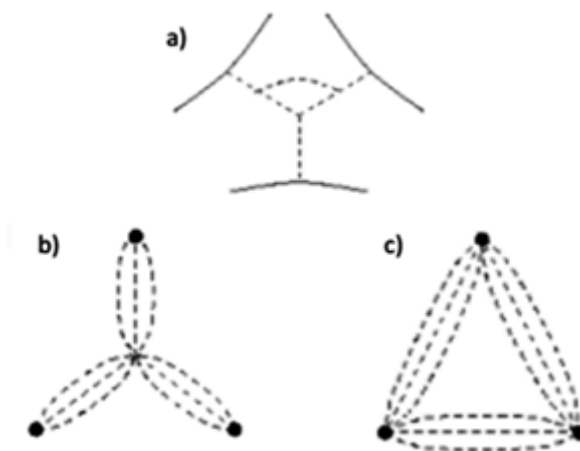
$$\Psi(\rho, \lambda) = \sum_{\gamma, l_\rho, l_\lambda} c_{[\gamma]l_\rho l_\lambda} \psi_\gamma(x) Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega) \quad (19-1)$$

تابع موج ابرشعاعی $\psi_\gamma(x)$ ، تنها به ابرشعاع وابسته است که به ازای تعویض مختصات کواری متقارن است. طبق فرضیه فوق مرکزی، پتانسیل برهم کنش کواریک‌ها را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sum_{i < j} V(r_{ij}) = V(x) + \dots \quad (20-1)$$

با نگره داشتن تنها جمله اول وابسته به ابرشعاع، به تقریب به اصطلاح "فوق مرکزی" می‌رسیم. این تقریب با موفقیت برای توضیح سیستم‌های چند نوکلئونی بکار برده شده است [۳۹، ۳۸]، درحالی‌که در مورد

باریون‌ها نشان داده شده است که عناصر ماتریسی پتانسیل دو کوارکی مورد استفاده، در فضای سه-کوارکی، رفتار تقریباً کامل فوق‌مرکزی نشان می‌دهند [۴۰]. در تقریب فوق‌مرکزی، پتانسیل سه-کوارکی تنها به ابرشعاع بستگی دارد و در نتیجه یک ماهیت سه-جسمی دارد. احتمال نیروهای سه-جسمی مرتبط است به وجود یک برهم‌کنش گلوئون-گلوئون مستقیم که یکی از ویژگی‌های اساسی QCD است. نمودار نشان داده‌شده در قسمت (a) شکل (۵-۱) پایین‌ترین مرتبه منجر به برهم‌کنش غیرصفر سه-جسمی بین کوارک‌ها در باریون است، البته مکانیزم‌های بسیاری می‌تواند در نظر گرفته شود. یک مکانیسم سه-کوارکی هم در مدل‌های لوله شار در نظر گرفته می‌شود که به‌عنوان یک توصیف مبتنی بر QCD برای برهم‌کنش‌های کوارکی ارائه شده است [۴۱].



شکل (۵-۱): نمودار پایین‌ترین مرتبه منجر به برهم‌کنش سه-جسمی غیرصفر کوارک‌ها در باریون (a). پیکربندی ریسمانی Y -شکل (b) و پیکربندی ریسمانی Δ -شکل (c).

پیکربندی‌های لوله شار در باریون‌ها: لوله‌های شار می‌توانند سه کوارک را مستقیماً به هم متصل کنند. همان‌طور که در قسمت‌های (b) و (c) شکل (۵-۱) نشان داده می‌شود، این مکانیسم علاوه بر پیکربندی استاندارد دو-جسمی Δ -مانند، منجر به یک پیکربندی سه-کوارکی Y -شکل نیز می‌شود [۴۲]. علاوه بر این، تقریب بورن-اوپنهایمر^{۱۵} برای پتانسیل محبوس‌شدگی در یک مدل کیسه‌ای^{۱۶} که الهام گرفته از

¹⁵ Born-Oppenheimer treatment

QCD است، به طور طبیعی منجر به نیروهای سه-جسمی می‌گردد که به طور خطی با افزایش شعاع جمعی^{۱۶} افزایش می‌یابد [۴۳، ۴۰].

۱-۵ مدل کوآرک سازنده فوق مرکزی

همان طور که توضیح داده شد، در مدل کوآرکی مبتنی بر تقریب فوق کروی، برهم کنش سه-کوآرکی فوق مرکزی در نظر گرفته می‌شود [۴۴].

$$V_{3q}(\rho, \lambda) = V(x) \quad (21-1)$$

اگر ناوردایی ابر-دورانی $O(6)$ وجود داشته باشد، به این معنا که اگر پتانسیل کوآرکی تنها به ابرشعاع x وابسته باشد، تنها یک جمله معادله (۱-۱۹) لازم است یعنی تابع موج سه-کوآرکی شامل یک قسمت ابرشعاعی و یک قسمت زاویه ای-ابرهاویه ای به صورت زیر است.

$$\Psi_{3q}(\rho, \lambda) = \psi_{n\gamma}(x) Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (22-1)$$

تابع موج ابرشعاعی $\psi_{n\gamma}(x)$ با عدد کوانتومی زاویه ای بزرگ γ و با تعداد گره ها، ν ، برچسب گذاری می‌شود. بخش زاویه ای-ابرهاویه ای حالت سه-کوآرکی توسط هماهنگ های فوق کروی، در معادله (۱-۱۵)، کاملاً توضیح داده می‌شود و برای تمام پتانسیل های فوق کروی یکسان است. درحالی که تابع موج ابرشعاعی $\psi_{n\gamma}(x)$ دینامیک مسئله را در بر دارد و از حل معادله ابرشعاعی به دست می‌آید.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 2m(E - V_{3q}(x)) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (23-1)$$

بنابراین با استفاده از فرمالیسم فوق کروی، معادله (۱-۹) به شکل یک معادله مشتقی تک متغیره در می‌آید که تنها شامل متغیر ابرشعاع است [۱۶، ۱۵]. با انتخاب پتانسیل فوق مرکزی، حل های معادله فوق مرکزی (۱-۲۳) یک سری از توابع موج $\psi_{n\gamma}(x)$ تولید می‌کند و ما می‌توانیم حالت های باریونی مدل

¹⁶ Bag model

¹⁷ Collective radius

را که برهم نهی پیکربندی‌های $SU(6)$ هستند، بسازیم که جزئیات آن در بخش (۸-۱) ارائه خواهد شد. لازم به ذکر است که معادله (۲۳-۱) تنها به‌ازای پتانسیل‌های نوسانگری و فوق‌کولنی به‌صورت تحلیلی دقیق حل می‌شود. ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع مسئله فوق‌کولنی می‌تواند با تعمیم محاسبات انجام داده شده در سه بعد به شش بعد به دست آید.

$$E_{v\gamma} = -\frac{m\tau^2}{2(v+\gamma+5/2)^2} \quad (24-1)$$

که در اینجا $v = 0, 1, 2, \dots$ عدد کوانتومی ابرشعاعی است که تعداد گره‌های تابع موج را می‌شمارد. ویژه توابع معادله (۲۳-۱) با پتانسیل فوق‌کولنی می‌تواند به‌طور تحلیلی به دست آید و برابر است با:

$$\Psi_{v\gamma}(x) = (2g)^{\gamma+3} \sqrt{\frac{v!}{2(v+\gamma+5/2)(v+2\gamma+4)!}} x^\gamma e^{-gx} L_v^{2\gamma+4}(2gx) \quad (25-1)$$

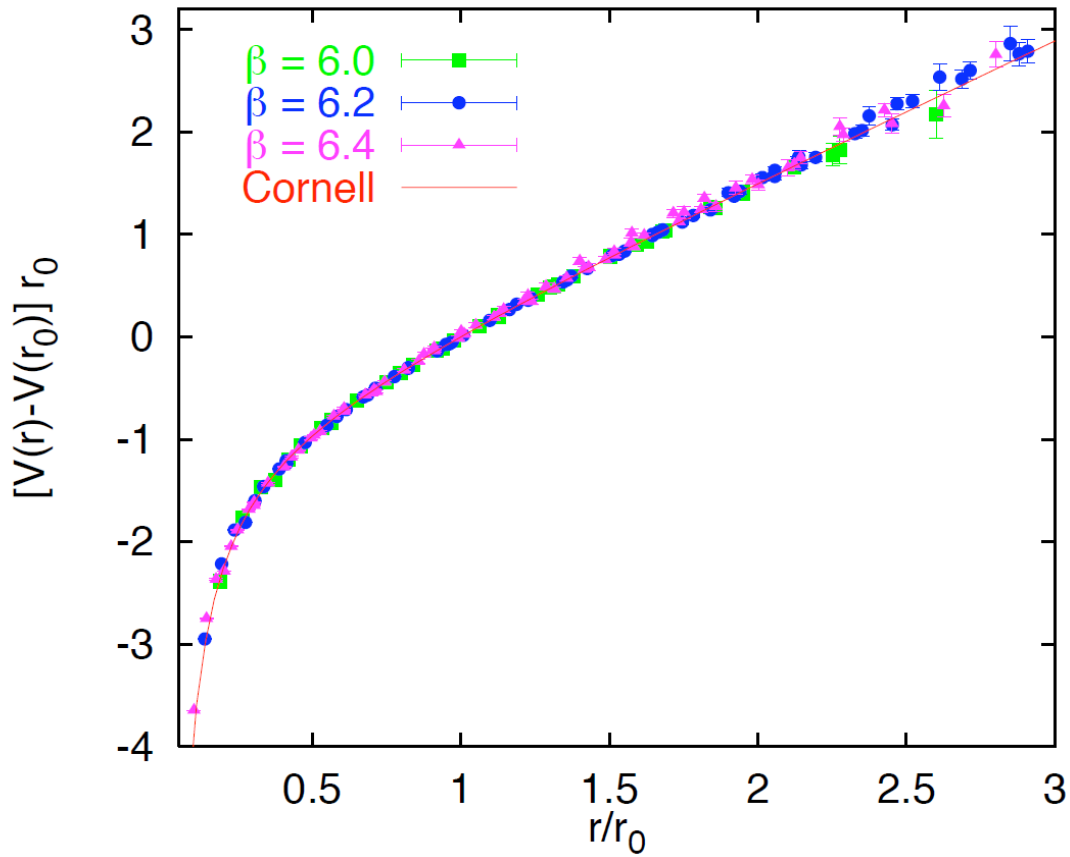
که در اینجا $g = \frac{m\tau}{v+\gamma+5/2}$ و $L_n^\alpha(x)$ ها چندجمله‌ای‌های لاگر تعمیم یافته^{۱۸} هستند [۳۳]. اما پتانسیل کولنی کوارک‌ها را داخل باریون محبوس نمی‌کند، لذا پتانسیل نگه‌دارنده به‌صورت یک جمله خطی اضافه می‌شود. بنابراین پتانسیل مورد استفاده، پتانسیل فوق‌مرکزی با ماهیت دو-جسمی، به‌صورت زیر است.

$$V(x) = \alpha x - \frac{\tau}{x} \quad (26-1)$$

ساختار پتانسیل (۲۶-۱) از نظر شکل شبیه پتانسیل کرنل^{۱۹} کوارک-آنتی کوارک است که به‌طور گسترده برای توصیف مزون‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌طور که در شکل (۶-۱) مشاهده می‌شود نتایج QCD شبکه برای جفت‌های کوارک-پادکوارک ایستا در حد $SU(3)$ گزارش شده است که به خوبی نشان می‌دهد محاسبات QCD شبکه قادر به بازتولید پتانسیل کرنل است [۴۶-۴۹]. در پتانسیل (۲۶-۱) عبارت اول به خاطر آزادی مجانبی بین کوارک‌ها در نظر گرفته می‌شود و عبارت دوم بیانگر پتانسیل کولنی بار رنگ است. اما مسئله اینجاست که معادله (۲۳-۱) به‌ازای پتانسیل "خطی + کولنی" حل تحلیلی ندارد،

¹⁸ Generalized Laguerre polynomials

¹⁹ Cornell potential



شکل (۶-۱): پتانسیل کوآرک-پادکوآرک محاسبه شده در QCD شبکه برای کوآرک‌های ایستا در حد $SU(3)$. ثابت β ضریب QCD معکوس است و $r_0 = 0.5 \text{ fm}$, $V(r_0) = 0$

مگر اینکه با جمله خطی بصورت اختلال رفتار کنیم که این شرط برای حالت‌های تراز پایین کاربردی است. در این صورت، انرژی کل در غیاب برهم‌کنش فوق‌ریز برابر می‌شود با:

$$E_{v\gamma} = E_0 - \frac{m\tau^2}{2(v + \gamma + 5/2)^2} + \frac{\alpha}{2m\tau} \left[3(v + \gamma + \frac{5}{2})^2 - \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \left(\gamma + \frac{5}{2} \right) \right] \quad (۲۷-۱)$$

برای یافتن مقادیر پارامترها، در غیاب برهم‌کنش فوق‌ریز، یک میانگین‌گیری روی حالت‌های مختلف با اعداد کوانتومی یکسان v و γ و اسپین و ایزواسپین متفاوت $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ انجام می‌شود. با ثابت فرض کردن جرم کوآرک در حدود یک سوم جرم نوکلئون، مقدار پارامترهای $\tau = 4.59$ و $\alpha = 1.61 \text{ fm}^{-2}$ به دست می‌آید [۵۱، ۵۰].

۱-۶ برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین و نتایج برای طیف جرمی

باریون‌های سبک

بعد از اینکه قسمت SU(6)-ناوردای طیف باریونی در مدل فوق مرکزی حل شد، جداسازی بین چندگانه‌های SU(6) و ترکیب‌شدگی بین پیکربندی‌های مختلف SU(6) توسط یک جمله SU(6)-شکننده اختلالی توصیف می‌شود. به عنوان تقریب مرتبه اول می‌تواند به صورت برهم‌کنش فوق‌ریز استاندارد فرض شود [۳۱].

$$H_{hyp} = \sum_{i < j} \frac{2\alpha_s}{3m^2} \left\{ \frac{8\pi}{3} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r}_{ij}) + \frac{1}{r_{ij}^3} \left[3 \frac{(\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\mathbf{s}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2} - \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j \right] \right\} \quad (۲۸-۱)$$

این برهم‌کنش شامل یک جمله دلتای دیراک و یک برهم‌کنش تانسوری به شکل زیر است.

$$V^T(x) = \frac{B}{x^3} \sum_{i < j} \left[\frac{(\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{r}_{ij})(\boldsymbol{\sigma}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})}{r_{ij}^2} - \frac{1}{3} (\boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\sigma}_j) \right] \quad (۲۹-۱)$$

مشابه جمله برهم‌کنش اسپینی، یک قسمت وابسته به ایزواسپین نیز در مدل‌های کوآرک سازنده معرفی شده است. به هر حال چنین وابستگی ایزواسپین (طعم) برای توصیف طیف جرمی مهم هستند. به طور کلی‌تر، می‌توان انتظار داشت که تولید جفت کوآرک-آنتی کوآرک می‌تواند منجر به یک برهم‌کنش کوآرکی مؤثر شود که شامل یک جمله وابسته به ایزواسپین (طعم) است. بنابراین جملات وابسته به ایزواسپین در مدل کوآرک سازنده معرفی شدند. با این توضیحات برهم‌کنش کامل به صورت زیر داده می‌شود.

$$H_{int} = V(x) + V_{hyp}, \quad V_{hyp} = H_S + H_I + H_{SI} \quad (۳۰-۱)$$

که در اینجا $V(x)$ پتانسیل SU(6)-ناوردای "کولنی + خطی" است و مابقی جملات، برهم‌کنش SU(6)-شکننده را فراهم می‌کنند که مسئول جداسازی بین چندگانه‌ها است. با استفاده از تابع گاوسی به جای جمله دلتای دیراک، می‌توان جملات وابسته به اسپین و ایزواسپین در برهم‌کنش فوق‌ریز را به صورت زیر نوشت [۵۰]:

$$H_{Spin} = A_S \sum_{i < j} \frac{1}{(\sqrt{\pi} \sigma_S)^3} e^{-r_{ij}^2 / \sigma_S^2} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j) \quad (31-1)$$

جمله مربوط به برهم‌کنش اسپین-اسپین،

$$H_{Isospin} = A_I \sum_{i < j} \frac{1}{(\sqrt{\pi} \sigma_I)^3} e^{-r_{ij}^2 / \sigma_I^2} (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j) \quad (32-1)$$

جمله مربوط به برهم‌کنش ایزواسپین-ایزواسپین و

$$H_{Spin-Isospin} = A_{SI} \sum_{i < j} \frac{1}{(\sqrt{\pi} \sigma_{SI})^3} e^{-r_{ij}^2 / \sigma_{SI}^2} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j) (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j) \quad (33-1)$$

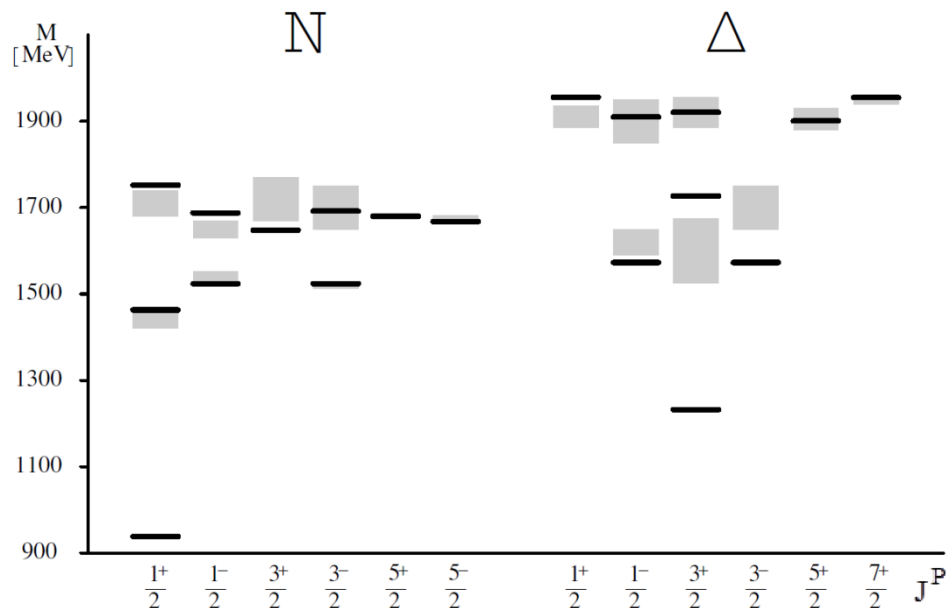
جمله مربوط به برهم‌کنش اسپین-ایزواسپین است. در روابط فوق، $\mathbf{s}_i$ ($\mathbf{t}_i$) عملگر اسپین (ایزواسپین) کوارک i -ام و r_{ij} فاصله نسبی جفت کوارک‌ها است و بقیه پارامترها ثوابتی هستند که باید تعیین شوند. در اینجا، اثرات برهم‌کنش اسپین، ایزواسپین و اسپین-ایزواسپین را به صورت پتانسیل اختلالی، با استفاده از توابع موج (۱-۲۵)، وارد مسئله می‌کنند که برای توصیف طیف انرژی‌های پایین‌تر از ۲ GeV مناسب است. طیف باریونی مجموع طیف جرمی در غیاب برهم‌کنش فوق‌ریز و انرژی سیستم مختل شده توسط برهم‌کنش فوق‌ریز است.

$$M_{baryon} = M_{n,\gamma} + \langle H_{hyp} \rangle \quad (34-1)$$

شدت برهم‌کنش فوق‌ریز از تفاضل جرم $N - \Delta$ به دست می‌آید و ضرایب معادله (۱-۳۴) در یک برازش هم‌زمان برای رزونانس‌های سه و چهار ستاره N و Δ تعیین می‌شود. در شکل (۱-۷) نتایج محاسبات برای طیف جرمی نوکلئون و رزونانس Δ ، به ازای مقادیر برازش یافته پارامترهای جدول (۱-۱)، نشان داده شده است. تطابق خوب نتایج به دست آمده در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی [۵۲] نشان می‌دهد که مدل پتانسیل فوق‌مرکزی در بازتولید مقادیر آزمایشگاهی طیف جرمی موفق عمل می‌کند.

جدول (۱-۱): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۱-۳۴) که از طریق یک فرایند تحلیلی تعیین شده‌اند.

Parameter	$A_S (\text{fm}^2)$	$A_I (\text{fm}^2)$	$A_{SI} (\text{fm}^2)$	$\sigma_S (\text{fm})$	$\sigma_I (\text{fm})$	$\sigma_{SI} (\text{fm})$
value	67.4	51.7	-106.2	2.87	3.45	2.31



شکل (۷-۱): طیف جرمی به دست آمده برای رزونانس‌های N و Δ در مدل hCQM (خط‌ها) [۵۰]، در مقایسه با مقادیر آزمایشگاهی (جعبه‌ها) [۵۲].

۷-۱ فرمول جرم گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته و طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت

برهم‌کنش فوق‌مرکزی (۲۶-۱) انرژی‌های میانگین چندگانه‌های $SU(6)$ را توصیف می‌کند، درحالی‌که جدادگی بین هر یک از چندگانه‌ها توسط برهم‌کنش فوق‌ریز (۲۸-۱) یا برهم‌کنش اسپین-ایزواسپین (۳۰-۱) بازتولید می‌شود. در مورد دومی، وابستگی طعم تنها به سبب عملگرهای ایزواسپین است با این شرط که مطالعه ما محدود به باریون‌های غیرشگفت باشد. به منظور توصیف طیف جرمی باریون‌های شگفت لازم است که یک وابستگی طعم هم معرفی کنیم که شامل ایزواسپین و شگفتی باشد. بنابراین، فرمول جرمی گورسی-رادیکاتی^{۲۰} به عنوان یک برهم‌کنش $SU(6)$ -شکننده (که موجب شکست تقارن $SU(6)$ در طیف باریون‌ها می‌شود) به کار می‌رود. فرمول اصلی گورسی-رادیکاتی برای توصیف طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت به این صورت است [۵۱]:

²⁰ Gürsey-Radicati mass formula

$$M_{Baryon} = M + CS(S + 1) + DY + E(T(T + 1) - \frac{1}{4}Y^2) \quad (35-1)$$

که M جرم مرکزی یک چندگانه $SU(3)$ است، S اسپین کل، Y ابربار و T ایزواسپین کل است. معادله (۱)-۳۵

(۳۵) برحسب عملگرهای کازیمیر^{۲۱} به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$M_{Baryon} = M + CC_2[SU_S(2)] + DC_1[U_Y(1)] + E\left(C_2[SU_I(2)] - \frac{1}{4}(C_1[U_Y(1)])^2\right) \quad (36-1)$$

که در آن $C_2[SU_S(2)]$ و $C_2[SU_I(2)]$ ، به ترتیب عملگرهای کازیمیر (مربعی) $SU(2)$ برای اسپین و ایزواسپین هستند و $C_1[U_Y(1)]$ عملگر کازیمیر خطی برای زیرگروه $U(1)$ با مولد ابربار Y است. این معادله شامل جمله های اسپین و ایزواسپین است که بیانگر برهم کنش های اسپین-اسپین و ایزواسپین-ایزواسپین و جمله مربوط به ابربار معرف وابستگی برهم کنش ها به ابربار است. این فرمول جرمی، توصیفی برای جدادگی انرژی بین چندگانه های باریونی $SU(6)$ به دست می دهد و نتایج طیف به دست آمده در این روش می تواند یک نقطه شروع خوب برای گسترش برهم کنش های $SU(6)$ -شکننده واقعی تر باشد. حال می توان یک فرمول جرم عمومی تر، بر پایه تقارن $SU(6)$ شکسته شده نوشت. مکانیسم شکست تقارن $SU_{SF}(6)$ می تواند بوسیله تعمیم فرمول جرمی گورسی-رادیکاتی توصیف شود که برحسب عملگرهای کازیمیر به صورت زیر نوشته شده است [۵۱]:

$$M_{Baryon} = M + AC_2[SU_{SF}(6)] + BC_2[SU_F(3)] + CC_2[SU_S(2)] + DC_1[U_Y(1)] + E\left(C_2[SU_I(2)] - \frac{1}{4}(C_1[U_Y(1)])^2\right) \quad (37-1)$$

که در آن $C_2[SU_{SF}(6)]$ عملگر کازیمیر $SU(6)$ برای اسپین-طعم و $C_2[SU_F(3)]$ عملگر کازیمیر $SU(3)$ برای طعم هستند. فرمول جرمی گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته قادر است یک توصیف نسبتاً خوب از جدادگی های انرژی مشاهده شده بین هر چندگانه $SU(6)$ به دست بدهد. بنابراین در صورتی که M های مختلف برای هر چندگانه $SU(6)$ به درستی قرار داده شوند، معادله (۱)-۳۷ می تواند برای

²¹ Casimir operators

توصیف تمام طیف باریونی مورد استفاده قرار گیرد. برای این منظور ما نیاز به یک برهم‌کنش $SU(6)$ -ناوردا داریم که به طور صحیح مقدار انرژی نامختل (میانگین) هر چندگانه را توصیف کند. بنابراین جرم هر باریون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M_{\text{baryon}} = M_{n,\gamma} + \langle H_{G.R.} \rangle \quad (38-1)$$

$M_{n,\gamma} = 3\epsilon_{n,\gamma}$ مقدار انرژی میانگین هر چندگانه $SU(3)$ است که در معادله (1-27) داده شده است و $H_{G.R.}$ به گورسی-رادیکیاتی تعمیم یافته اشاره می‌کند که شامل وابستگی اسپین-طعم به صورت زیر است:

$$H_{G.R.} = AC_2[SU_{SF}(6)] + BC_2[SU_F(3)] + CC_2[SU_S(2)] + DC_1[U_Y(1)] + E \left(C_2[SU_I(2)] - \frac{1}{4} (C_1[U_Y(1)])^2 \right) \quad (39-1)$$

از آنجایی که $H_{G.R.}$ شامل درجات آزادی فضایی نیست، جمله $SU(6)$ -شکننده معرفی شده در این مدل نسبت به حالت‌های باریونی قطری است. برای شناسایی مقادیر چشم‌داشتی $H_{G.R.}$ ، ما نیاز به مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای کازیمیر داریم که برابر هستند با [51]:

$$\begin{aligned} \langle C_2[SU_{SF}(6)] \rangle &= \begin{cases} 45/4 & \text{for } [56] \\ 33/4 & \text{for } [70] \\ 21/4 & \text{for } [20] \end{cases}, \\ \langle C_2[SU_F(3)] \rangle &= \begin{cases} 3 & \text{for } [8] \\ 6 & \text{for } [10] \\ 0 & \text{for } [1] \end{cases}, \\ \langle C_2[SU_I(2)] \rangle &= T(T+1), \\ \langle C_2[SU_S(2)] \rangle &= S(S+1), \\ \langle C_2[U_Y(1)] \rangle &= Y. \end{aligned} \quad (40-1)$$

که ابربار Y و ایزواسپین T برای چندگانه‌های باریونی در شکل (1-1) داده شده است. برای محاسبه جرم باریون‌ها مطابق معادلات (1-27) و (1-38)، نیاز است که پارامترهای مجهول را پیدا کنیم. برای تعیین این پارامترها، تعداد محدودی از رزونانس‌های شگفت و غیر شگفت به صورت زیر انتخاب و اختلاف جرم آن‌ها با استفاده از $H_{G.R.}$ و مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای کازیمیر بیان می‌شود.

$$\begin{aligned}
N(1650)S_{11} - N(1535)S_{11} &= 3C, \\
\Delta(1232)P_{33} - N(938)P_{11} &= 3B + 3C + 3E, \\
N(1535)S_{11} - N(1440)P_{11} &= (E_{01} - E_{10}) - 3A, \\
\Sigma(1193)P_{33} - N(938)P_{11} &= 3E/2 - D, \\
\Lambda(1116)P_{33} - N(938)P_{11} &= -D - E/2.
\end{aligned} \tag{۴۱-۱}$$

از این طریق ضرایب معادله (۳۸-۱)، در یک برازش هم‌زمان برای رزونانس‌های سه و چهار ستاره، تعیین می‌شود که مقادیر برازش یافته پارامترها در جدول (۲-۱) و نتایج محاسبات برای طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت در جدول (۳-۱) و شکل (۸-۱) داده شده است.

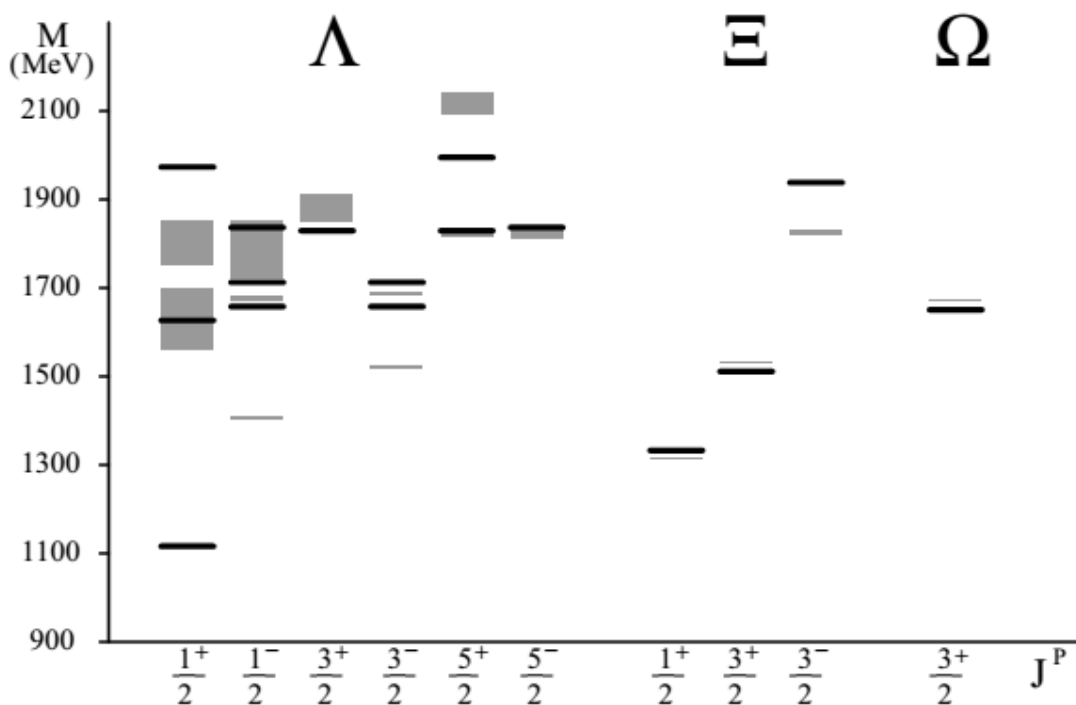
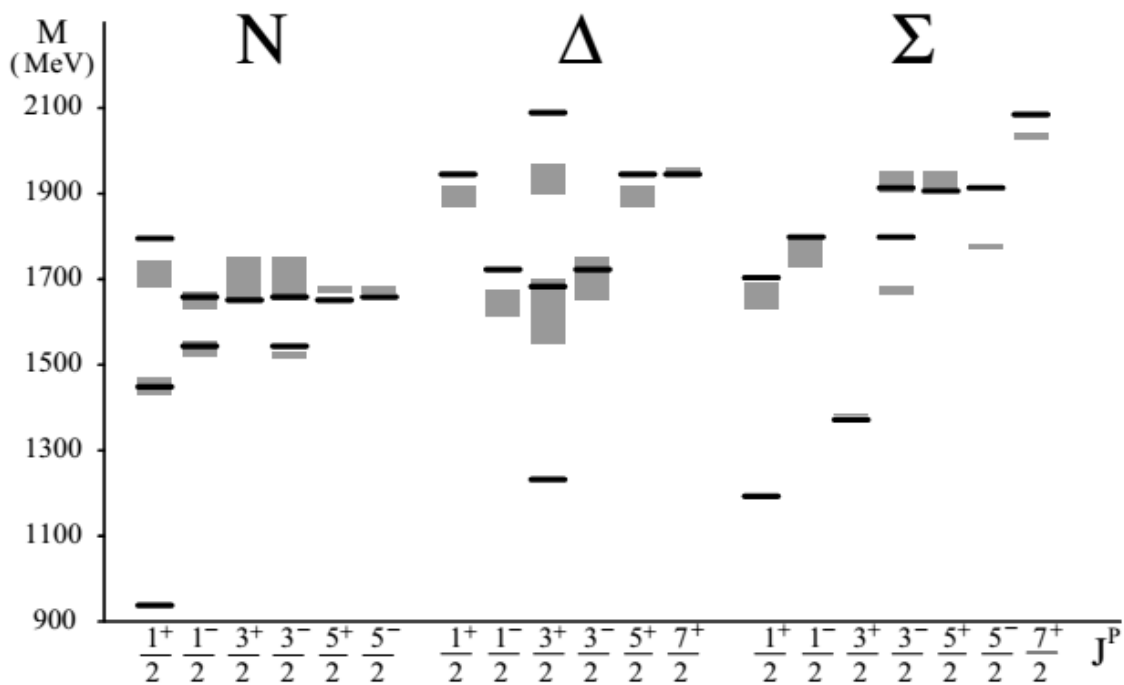
جدول (۲-۱): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۳۸-۱) که از طریق یک فرایند تحلیلی، تعیین و ثابت شده‌اند.

Parameter	τ	α (fm ⁻²)	m (MeV)	A (MeV)	B (MeV)	C (MeV)	D (MeV)	E (MeV)
value	4.8	1.4	313	-13.8	7.1	38.3	-197.3	38.5

جدول (۳-۱): طیف جرمی به‌دست‌آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت در مدل hCQM [۵۱] و در قیاس با نتایج کار بیکر [۱۴] و مقادیر آزمایشگاهی [۵۲].

Baryon	$L_{2T\ 2J}$	Status	State	$M_{\text{Exp.}[52]}$	$M_{[51]\ \text{calc.}}$	$M_{[14]\ \text{calc.}}$
N(938)	P_{11}	****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	938	938	939
N(1440)	P_{11}	****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1420-1470	1448.7	1444
N(1535)	S_{11}	****	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	1525-1545	1543.7	1563
N(1520)	D_{13}	****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	1515-1525	1543.7	1563
N(1650)	S_{11}	****	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	1645-1670	1658.6	1683
N(1700)	D_{13}	***	$^4 8_{3/2}[70, 1^-]$	1650-1750	1658.6	1683
N(1675)	D_{15}	****	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	1670-1680	1658.6	1683
N(1710)	P_{11}	***	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1680-1740	1795.4	1683
N(1720)	P_{13}	****	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	1650-1750	1651.4	1737
N(1680)	F_{15}	****	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	1675-1690	1651.4	1737
$\Delta(1232)$	P_{33}	****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1230-1234	1232	1246
$\Delta(1600)$	P_{33}	***	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1550-1700	1683	1660
$\Delta(1620)$	S_{31}	****	$^2 10_{1/2}[70, 1^-]$	1615-1675	1722.8	1649
$\Delta(1700)$	D_{33}	****	$^2 10_{3/2}[70, 1^-]$	1650-1750	1722.8	1649
$\Delta(1910)$	P_{31}	****	$^4 10_{1/2}[56, 2^+]$	1870-1920	1945.4	1921
$\Delta(1920)$	P_{33}	***	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1900-1970	2089.4	1921

$\Delta(1905)$	F_{35}	*****	$^4 10_{5/2}[56, 2^+]$	1865-1915	1945.4	1921
$\Delta(1950)$	F_{37}	*****	$^4 10_{7/2}[56, 2^+]$	1915-1950	1945.4	1921
$\Sigma(1193)$	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1193	1193	1170
$\Sigma(1660)$	P_{11}	***	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1630-1690	1703.7	1604
$\Sigma(1670)$	D_{13}	*****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	1665-1685	1798.7	1711
$\Sigma(1750)$	S_{11}	***	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	1730-1800	1798.7	1711
$\Sigma(1775)$	D_{15}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	1770-1780	1913.6	1822
$\Sigma(1915)$	F_{15}	*****	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	1900-1935	1906.4	1872
$\Sigma(1940)$	D_{13}	***	$^2 8_{3/2}[56, 1^-]$	1900-1950	1913.6	1974
$\Sigma^*(1385)$	P_{13}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1383-1385	1371.6	1382
$\Sigma^*(2030)$	F_{17}	*****	$^4 10_{7/2}[56, 2^+]$	2025-2040	2085	2012
$\Lambda(1116)$	P_{01}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1116	1116	1133
$\Lambda(1600)$	P_{01}	***	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1560-1700	1626.7	1577
$\Lambda(1670)$	S_{01}	*****	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	1660-1680	1721.7	1686
$\Lambda(1690)$	D_{03}	*****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	1685-1695	1721.7	1686
$\Lambda(1800)$	S_{01}	***	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	1720-1850	1836.6	1799
$\Lambda(1810)$	P_{01}	***	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1750-1850	1973.4	1799
$\Lambda(1820)$	F_{05}	*****	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	1815-1825	1829.4	1849
$\Lambda(1830)$	D_{05}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	1810-1830	1836.6	1799
$\Lambda(1890)$	P_{03}	*****	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	1850-1910	1829.4	1849
$\Lambda(2110)$	F_{05}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 2^+]$	2090-2140	1995	2074
$\Lambda^*(1405)$	S_{01}	*****	$^2 1_{1/2}[70, 1^-]$	1402-1410	1657.9	1641
$\Lambda^*(1520)$	D_{01}	*****	$^2 1_{3/2}[70, 1^-]$	1518-1520	1657.9	1641
$\Xi(1318)$	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1314-1316	1332.6	1334
$\Xi(1820)$	D_{13}	***	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	1818-1828	1938.3	1828
$\Xi(1530)$	P_{13}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1531-1532	1511.1	1524
$\Omega(1672)$	P_{03}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1672-1673	1650.7	1670



شکل (۸-۱): نتایج به دست آمده برای طیف جرمی رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت در مدل hCQM به‌ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۲-۱) (خط‌های سیاه) در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی (جعبه‌ها) [۵۲].

۸-۱ حالت‌های باریونی

حالت‌های باریونی برهم‌نهی‌هایی از پیکربندی‌های $SU(6)$ هستند که می‌توانند به عوامل زیر تجزیه شوند (نگاه کنید به معادله (۱-۱)):

$$\Psi_{3q} = \Psi_{3q}(\rho, \lambda) \cdot \chi_{spin} \cdot \Theta_{isospin} \cdot \theta_{color} \quad (۴۳-۱)$$

همان‌طور که در متن اشاره شد، قسمت‌های مختلف باید ترکیب شوند تا یک تابع موج سه-کوارکی متقارن کامل داشته باشیم. برای این منظور، لازم است که رفتار عوامل مختلف را با توجه به جایگشت‌های سه جسم مطالعه کنیم. در کل، هر تابع موج سه-ذره‌ای متعلق به یکی از این انواع تقارن‌هاست: پاد متقارن (A)، متقارن (S)، تقارن آمیخته با جفت متقارن (MS) و تقارن آمیخته با جفت پاد متقارن (MA). برای قسمت رنگی θ_{color} باید ترکیب یکتایی رنگی متقارن را انتخاب کنیم. حالت‌های اسپینی سه-کوارکی به این صورت تعریف می‌شوند [۵۴]:

$$\chi_{MS} = |((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, \frac{1}{2})\frac{1}{2}\rangle, \quad \chi_{MA} = |((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})0, \frac{1}{2})\frac{1}{2}\rangle, \quad \chi_S = |((\frac{1}{2}, \frac{1}{2})1, \frac{1}{2})\frac{3}{2}\rangle \quad (۴۴-۱)$$

ترکیب پادمقارن به این دلیل غایب است که تنها دو حالت در آرایش سه-ذره‌ای وجود دارد. به‌طور مشابه می‌توان حالت‌های ایزواسپینی ϕ_{MS} ، ϕ_{MA} و ϕ_S را تعریف کرد. حال اگر برهم‌کنش مستقل از اسپین و ایزواسپین (طعم) باشد، باید حاصل ضرب‌های حالت‌های χ و ϕ را با تقارن S_3 معین تعریف کنیم. موردی که هر دو عامل تقارن آمیخته دارد به این صورت است:

$$\begin{aligned} \Omega_S &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MA} + \chi_{MS} \phi_{MS}], \quad \Omega_A = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MS} - \chi_{MS} \phi_{MA}], \\ \Omega_{MS} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MA} - \chi_{MS} \phi_{MS}], \quad \Omega_{MA} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\chi_{MA} \phi_{MS} + \chi_{MS} \phi_{MA}] \end{aligned} \quad (۴۵-۱)$$

و تابع موج فضایی به این صورت است:

$$\Psi_{3q}(\rho, \lambda) = \Psi_{\nu\gamma}(x) Y_{[Y]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (۴۶-۱)$$

که در آن توابع فوق‌کروی به شکل زیر داده می‌شوند.

$$Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = Y_{l_\rho m_\rho}(\Omega_\rho) \cdot Y_{l_\lambda m_\lambda}(\Omega_\lambda) \cdot {}^{(2)}P_n^{l_\lambda, l_\rho}(\xi) \quad (47-1)$$

و در اینجا توابع ابرزاویه‌ای ${}^{(2)}P_n^{l_\rho, l_\lambda}(\xi)$ به صورت زیر، برحسب توابع مثلثاتی و چندجمله‌ای‌های ژاکوبی،
 $P_n^{\alpha, \beta}(z)$ داده می‌شوند [۳۱]:

$${}^{(2)}P_n^{l_\lambda, l_\rho}(\xi) = \sqrt{\frac{2(2\gamma+2)\Gamma(\gamma+2-n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+l_\rho+\frac{3}{2})\Gamma(n+l_\lambda+\frac{3}{2})}} (\sin\xi)^{l_\rho} (\cos\xi)^{l_\lambda} \\ \times P_n^{l_\rho+\frac{1}{2}, l_\lambda+\frac{1}{2}}(\cos 2\xi) \quad (48-1)$$

از آنجایی که ابرشعاع $\mathcal{X}$ کاملاً متقارن است، ویژگی تقارنی تابع موج (۴۶-۱) تنها با قسمت فوق‌کروی تعریف می‌شود. در جدول (۴-۱) ترکیبات مختلف هماهنگ‌های فوق‌کروی که تقارن S_3 معینی دارند داده شده است. در جدول‌های (۵-۱) و (۶-۱)، به ترتیب، فرم صریح حالت‌های سه-کوارکی با تقارن مثبت و منفی داده شده است. در این جدول‌ها توابع موج ابرشعاعی $\psi_{\nu\gamma}(x)$ از حل معادله ابرشعاعی (۲۳-۱) به دست می‌آیند و شکل تابعی‌شان وابسته به پتانسیل فوق‌مرکزی است.

جدول (۴-۱): ترکیبات مختلف هماهنگ‌های فوق‌کروی $Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}$ با تقارن S_3 مشخص، $(Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda})S_3$. هر ترکیب با نمادگذاری $L_{S_3}^P$ نشانگر تکانه زاویه‌ای مداری کل L ، پاریته P و نوع تقارن S_3 مشخص شده است.

γ	L_t^P	$(Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda})S_3$	S_3
0	0_S^+	$Y_{[0]00}$	S
1	1_M^-	$Y_{[1]10}$	MA
		$Y_{[1]01}$	MS
2	2_S^+	$\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{[2]20} + Y_{[2]02}]$	S
	2_M^+	$Y_{[2]11}$	MA
		$\frac{1}{\sqrt{2}}[Y_{[2]20} - Y_{[2]02}]$	MA
	1_A^+	$Y_{[2]11}$	A
	0_M^+	$Y_{[2]11}$	MA
		$Y_{[2]00}$	MA

جدول (۵-۱): حالت‌های سه-کوارکی با پارامتر مثبت [۵۴]. ستون‌های دوم و سوم و چهارم نشانگر تکانه زاویه‌ای، پارامتر و تقارن S_3 ، $L_{S_3}^P$ ، اسپین S و ایزواسپین T. حالت‌هایی که در ستون آخر نشان داده شده‌اند برحسب توابع موج ابرشعاعی $\psi_{\nu\gamma}(x)$ ، هماهنگ‌های فوق‌کروی $(Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda})S_3$ جدول (۴-۱) و حالت‌های اسپینی و ایزواسپینی داده شده‌اند.

State	$L_{S_3}^P$	S T	SU(6)-configurations
P_{11}	0_S^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{00} Y_{[0]00} \Omega_S$
	0_S^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{10} Y_{[0]00} \Omega_S$
	0_S^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{20} Y_{[0]00} \Omega_S$
	0_M^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]00} \Omega_{MS} + Y_{[2]11} \Omega_{MA}]$
P_{13}	2_M^+	$\frac{3}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \phi_{MS} + Y_{[2]11} \phi_{MA} \right] \chi_S$
	2_M^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \Omega_{MS} + Y_{[2]11} \Omega_{MA} \right]$
	2_M^+	$\frac{3}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \phi_{MS} + Y_{[2]11} \phi_{MA} \right] \chi_S$
	0_M^+	$\frac{3}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]00} \phi_{MS} + Y_{[2]11} \phi_{MA}] \chi_S$
F_{15}	2_S^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]20} + Y_{[2]02}] \Omega_S$
	2_M^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \Omega_{MS} + Y_{[2]11} \Omega_{MA} \right]$
	2_M^+	$\frac{3}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \phi_{MS} + Y_{[2]11} \phi_{MA} \right] \chi_S$
	2_S^+	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]20} + Y_{[2]02}] \Omega_S$
F_{17}	2_M^+	$\frac{3}{2} \frac{1}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \phi_{MS} + Y_{[2]11} \phi_{MA} \right] \chi_S$
P_{31}	2_S^+	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]20} + Y_{[2]02}] \chi_S \phi_S$
	0_M^+	$\frac{1}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]00} \chi_{MS} + Y_{[2]11} \chi_{MA}] \phi_S$
P_{33}	0_S^+	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{00} Y_{[0]00} \chi_S \phi_S$
	0_S^+	$\frac{2}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{10} Y_{[0]00} \chi_S \phi_S$
	0_S^+	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{20} Y_{[0]00} \chi_S \phi_S$
	2_S^+	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]20} + Y_{[2]02}] \chi_S \phi_S$

F_{35}	2_M^+	$\frac{1}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \chi_{MS} + Y_{[2]11} \chi_{MA} \right] \phi_S$
	2_M^+	$\frac{1}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{02} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (Y_{[2]20} - Y_{[2]02}) \chi_{MS} + Y_{[2]11} \chi_{MA} \right] \phi_S$
	2_S^+	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{22} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]20} + Y_{[2]02}] \chi_S \phi_S$
F_{37}	2_S^+	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	$\psi_{22} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[2]20} + Y_{[2]02}] \chi_S \phi_S$

جدول (۶-۱): همانند جدول (۵-۱) برای حالت‌های سه-کوارکی با پارینه منفی.

حالت‌ها	S	T	$L_{S_3}^P$	رزونانس‌ها
S_{11}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{01} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \Omega_{MA} + Y_{[1]01} \Omega_{MS}]$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \Omega_{MA} + Y_{[1]01} \Omega_{MS}]$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{01} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \phi_{MA} + Y_{[1]01} \phi_{MS}] \chi_S$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \phi_{MA} + Y_{[1]01} \phi_{MS}] \chi_S$
D_{13}	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{01} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \Omega_{MA} + Y_{[1]01} \Omega_{MS}]$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \Omega_{MA} + Y_{[1]01} \Omega_{MS}]$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{01} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \phi_{MA} + Y_{[1]01} \phi_{MS}] \chi_S$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \phi_{MA} + Y_{[1]01} \phi_{MS}] \chi_S$
D_{15}	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{01} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \phi_{MA} + Y_{[1]01} \phi_{MS}] \chi_S$
	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1_M^-	$\psi_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \phi_{MA} + Y_{[1]01} \phi_{MS}] \chi_S$
S_{31}	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1_M^-	$\psi_{01} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \chi_{MA} + Y_{[1]01} \chi_{MS}] \chi \phi_S$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1_M^-	$\psi_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \chi_{MA} + Y_{[1]01} \chi_{MS}] \chi \phi_S$
S_{33}	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1_M^-	$\psi_{01} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \chi_{MA} + Y_{[1]01} \chi_{MS}] \chi \phi_S$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1_M^-	$\psi_{11} \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_{[1]10} \chi_{MA} + Y_{[1]01} \chi_{MS}] \chi \phi_S$

فصل دوم

ارائه مدل‌های کوارکی غیر نسبیتی بهبود یافته برای
محاسبه طیف جرمی باریون‌ها

۲-۱ مقدمه:

در این فصل، هدف ما ارائه مدل‌های دقیق‌تری بر مبنای مدل کوآرک سازنده فوق‌مرکزی برای بررسی ساختار باریونی است. در اینجا ما سعی خواهیم کرد با ارائه مدل‌های بهتر، یا به عبارت صحیح‌تر ارائه مدل‌هایی با تقریب بهتر و دقیق‌تر، باریون‌ها را به عنوان سیستم سه-جسمی بررسی کنیم. همچنین در این فصل (و فصل‌های بعدی پایان‌نامه) نشان داده خواهد شد که مدل‌های ارائه شده، با داشتن ویژگی‌هایی همچون سادگی و تحلیلی بودن که امکان بررسی پارامتریک کمیت‌های به دست آمده را به ما می‌دهد و همچنین زمان محاسبات را به طور چشم‌گیری کاهش می‌دهد، در بررسی ویژگی‌های باریونی از جمله: طیف جرمی، فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی، گشتاورهای مغناطیسی و شعاع‌های باری و... به طور قابل ملاحظه‌ای موفق ظاهر می‌شوند.

برای ساده‌سازی می‌توان در قدم اول این مسئله را بدون در نظر گرفتن اسپین (ایزواسپین) ذرات، به صورت غیر نسبیتی حل کرد و درجات آزادی اسپین و ایزواسپین را به صورت اختلالی وارد کرد. دلیل قابل قبول بودن این فرض این است که مشاهدات نشان می‌دهد که طیف باریونی آزمایشگاهی، دارای یک تقارن $SU(6)$ بنیادین برای طیف رزونانس‌های باریونی است. لذا برای بخش $SU(6)$ - نوردای طیف جرمی، می‌توانیم باریون‌ها را به عنوان یک سیستم سه-کوآرکی با اسپین صفر در نظر گرفته و یک توصیف غیر نسبیتی مستقل از اسپین برای این قسمت طیف باریونی معرفی کنیم. برای این منظور، با حل معادله سه-جسمی شرودینگر مقادیر انرژی میانگین باریون‌ها را بازتولید می‌کنیم. سپس برای توصیف ساختار فوق‌ریز باریون‌ها، شکافتگی بین طیف چندگانه $SU(6)$ را از طریق جملات اختلالی وابسته به اسپین و ایزواسپین (طعم) بازتولید می‌کنیم. پتانسیل بین کوآرک‌ها را، همان‌طور که از محاسبات QCD و مدل‌های کوآرک سازنده پیشنهاد می‌شود، یک برهم‌کنش کوآرکی فوق‌مرکزی در نظر می‌گیریم که از دو جمله خطی و کولنی-مانند تشکیل شده است. در قدم بعدی، جملات مناسب دیگری نیز اضافه خواهند شد. از آنجایی که

بیشتر هدف ما حل تحلیلی مسئله است، با ارائه تقریب‌های مناسب برای جمله‌های مشکل‌ساز مانند جمله خطی، معادله شرودینگر سه-جسمی را حل نموده و فرمول‌های تحلیلی برای انرژی‌ها و توابع موج به دست می‌آوریم. سپس با استفاده از توابع موج به‌دست‌آمده، مقدار چشم‌داشتی پتانسیل‌های وابسته به اسپین و ایزواسپین را محاسبه نموده و بدین ترتیب اثرات برهم‌کنش‌های اسپین-اسپین، ایزواسپین-ایزواسپین و اسپین-ایزو اسپین را بر روی طیف انرژی نسبیتی باریون‌ها محاسبه می‌کنیم.

۲-۲ حل مستقیم مسئله سه-کوارکی با احتساب برهم‌کنش‌های وابسته به اسپین و

ایزواسپین، بدون استفاده از روش اختلالی

بر اساس مدل کوارک سازنده، نوکلئون‌ها و به‌طور کلی باریون‌ها (و رزونانس‌های باریونی) به‌عنوان یک سیستم مقید سه-کوارکی، در چهارچوب سکون باریون بررسی می‌شوند. با در نظر گرفتن فقط برهم‌کنش جفتی ذرات، و با فرض انرژی و جرم یکسان برای هر سه ذره و با چشم‌پوشی از اثرات نسبیتی و اسپین ذرات، معادله توصیف‌کننده قسمت $SU(6)$ -ناوردای طیف جرمی، معادله شرودینگر سه-جسمی به شکل زیر خواهد بود.

$$\left(\sum_{i=1}^3 \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^3 V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right] \right) |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (۱-۲)$$

که در اینجا p_i تکانه خطی، m جرم هر ذره، E انرژی بستگی سیستم سه-جسمی نسبیتی، $|\Psi\rangle$ تابع موج کل سیستم سه-جسمی و V_{ij} پتانسیل‌های برهم‌کنش بین دو ذره (i, j) است. در این مسئله، در فضای سه بعدی، نه درجه آزادی وجود دارد و اگر مسئله را در دستگاه مختصات مرکز جرم بررسی کنیم و همچنین اندرکنش بین هر دو ذره دارای تقارن کروی باشد مسئله دارای پایستگی تکانه زاویه‌ای کل خواهد بود که این تقارن، ابعاد مسئله را به شش بعد تقلیل می‌دهد. این معادله هم در فضای مختصات و

هم در فضای تکانه خطی با استفاده از مختصات و تکانه‌های ژاکوبی قابل حل خواهد بود. در دستگاه مختصات فوق کروی، داریم:

$$[\mathbf{p}_x^2 + 2mV(x) + 2mE]\psi_{\nu\gamma}(x)Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = 0 \quad (2-2)$$

تابع موج ابرشعاعی $\psi_{\nu\gamma}(x)$ با عدد کوانتومی زاویه‌ای بزرگ γ و با تعداد گره‌ها، ν ، برچسب‌گذاری می‌شود. بخش زاویه‌ای-ابرهاویه‌ای حالت سه-کوارکی توسط هماهنگ‌های فوق کروی کاملاً توضیح داده می‌شود و برای تمام پتانسیل‌های فوق کروی یکسان است. درحالی‌که تابع موج ابرشعاعی $\psi_{\nu\gamma}(x)$ دینامیک مسئله را در بر دارد و از حل معادله ابرشعاعی زیر به دست می‌آید.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 2mE - 2mV_{3q}(x) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (2-3)$$

بنابراین با استفاده از فرمالیسم فوق کروی، معادله (2-1) به شکل یک معادله مشتقی تک متغیره درآمد که تنها شامل متغیر ابرشعاع است [55]. همچنان که ذکر شد، معادله (2-3) به‌ازای پتانسیل‌های نوسانگری و فوق کولنی به‌صورت تحلیلی دقیق حل می‌شود. اما پتانسیل فوق کولنی، کوارک‌ها را داخل باریون محبوس نمی‌کند، لذا پتانسیل نگه‌دارنده به‌صورت یک جمله خطی اضافه می‌شود. بنابراین پتانسیل مورد استفاده، پتانسیل فوق مرکزی $V(x) = \alpha x - \frac{\tau}{x}$ با ماهیت دو-جسمی است. در عبارت فوق، عبارت اول را پتانسیل کولنی بار رنگ و عبارت دوم را به‌خاطر آزادی جانبی بین کوارک‌ها در نظر گرفته‌ایم. در اینجا، پتانسیل برهمکنش کوارک‌ها در داخل باریون را متشکل از یک جمله خطی محبوس کننده (که در فواصل بین کوارکی بزرگ مهم است)، جمله تبادل یک-گلوئونی²² که (در جدادگی‌های کوچک مهم است و) با یک پتانسیل کولنی-مانند فوق مرکزی داده می‌شود، و یک قسمت وابسته به اسپین و ایزواسپین که مسئول جدادگی فوق‌ریز جرم‌های باریونی است، در نظر می‌گیریم [56].

²² One-gluon-exchange (OGE) term

$$V_{3q} = \sum_{i < j} ar_{ij} - \frac{b}{r_{ij}} + \frac{e^{-\mu r_{ij}}}{r_{ij}} [c(\sigma_i \cdot \sigma_j) + d(\tau_i \cdot \tau_j) + e(\sigma_i \cdot \sigma_j)(\tau_i \cdot \tau_j)] \quad (4-2)$$

در اینجا، σ_i (τ_i) عملگر اسپین (ایزواسپین) کوآرک i -ام است. تابع دلتا در برهم‌کنش‌های تبدیلی اسپین و ایزواسپین را با تقریب خوبی توسط یک تابع یوکاوا-مانند (از فاصله نسبی جفت کوآرک‌ها) جایگزین کرده‌ایم.

۲-۲-۱ حل تحلیلی معادله شرودینگر سه-جسمی برای "پتانسیل فوق‌مرکزی + برهمکنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین"

با در نظر گرفتن تابع موج ابرشعاعی به صورت $\psi_{v\gamma}(x) = x^{-5/2} \phi_{v\gamma}(x)$ معادله (۳-۲) با پتانسیل فوق‌مرکزی (۴-۲) به صورت

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - \frac{(2\gamma + 3)(2\gamma + 5)}{4x^2} + 2mE - 2m \left(\alpha x - \frac{\tau}{x} + \frac{e^{-\mu x}}{x} A_{hyp}(S, T) \right) \right] \phi_{v\gamma}(x) = 0 \quad (5-2)$$

درمی‌آید که در آن

$$A_{hyp}(S, T) = A_S \left(S^2 - \frac{9}{4} \right) + A_I \left(T^2 - \frac{9}{4} \right) + A_{SI} \left(S^2 - \frac{9}{4} \right) \left(T^2 - \frac{9}{4} \right) \quad (6-2)$$

از آنجایی که معادله (۴-۲) نمی‌تواند به صورت دقیق حل شود، ما از تقریب‌های مناسبی برای جملات خطی

محبوس کننده و کولنی-مانند استفاده می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا یک تغییر متغیر به صورت $x = \frac{1}{t}$

می‌دهیم و سپس تقریب زیر را برای جمله $\frac{\alpha}{t}$ به کار می‌بریم. ما فرض می‌کنیم که یک شعاع مشخصه

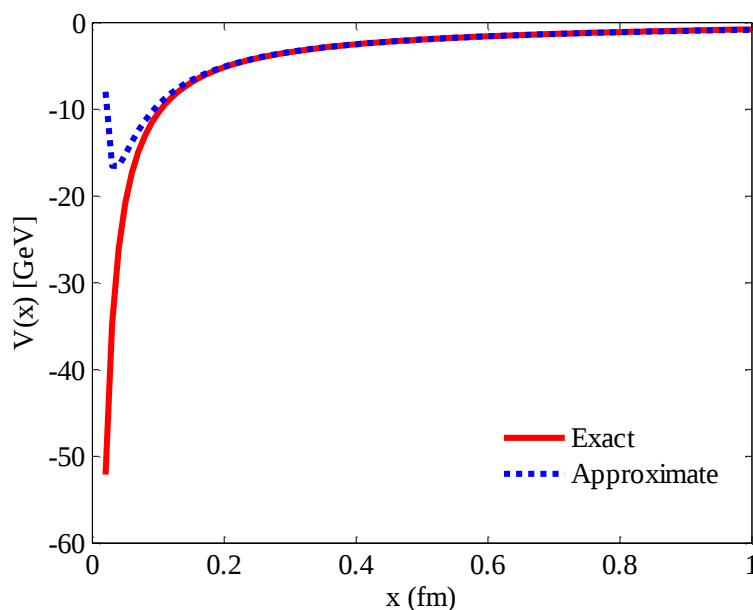
باریون x_0 وجود دارد و تقریب موردنظر بر مبنای بسط جمله $\frac{\alpha}{t}$ در یک سری توانی حول x_0 تا مرتبه دوم

(حول $\beta \equiv \frac{1}{x_0}$ در فضای- t) است. با قرار دادن $s = t - \beta$ و بسط سری توانی حول $s = 0$ می‌توان

نوشت:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{\beta} \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\beta}\right)} = \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{s}{\beta} + \frac{s^2}{\beta^2} + \dots \right) \approx \frac{1}{\beta^3} (3\beta^2 - 3\beta t + t^2). \quad (7-2)$$

می‌توان نشان داد که تقریب فوق در بازه $0.1 < x < 1.2 \text{ fm}$ (در حدود ابعاد باریون) مناسب است و هدف ما را برای تقریب جمله خطی بلند برد برآورده می‌سازد. به‌طور کلی هر قدر جملات بیشتری را اضافه کنیم، تقریب بهتری خواهیم داشت. اما در اینجا جملات تا درجه دوم برای منظور ما کافی هستند. با جایگذاری تقریب (۷-۲) در معادله (۵-۲) دیده می‌شود که معادله (۵-۲) در حضور و در غیاب جمله وابسته به α شکل یکسانی دارد. برای دریافت درک بهتری از دقت تقریب، پتانسیل فوق‌مرکزی "خطی + کولنی" با و بدون تقریب بکار رفته برای جمله خطی، به ازای یک پارامتر ثابت δ در شکل (۱-۲) نشان داده شده است.



شکل (۱-۲): نمایش پتانسیل "خطی + کولنی" با پارامترهای برازش یافته $\alpha = 1.3 \text{ fm}^{-2}$ و $\tau = 5.29$ ، با و بدون تقریب اعمال شده برای جمله خطی. به‌ازای مقدار ثابت $\delta = 2.325 \text{ fm}^{-1}$ (شعاع مشخصه باریونی $x_0 = 0.43 \text{ fm}$).

تقریب به‌کار برده شده، پتانسیل مورد نظر را به‌خوبی بازتولید می‌کند و علاوه بر آن یک دافعه شدید کوتاه برد نیز تولید شده است که به‌طور طبیعی در برهم‌کنش دو ذره نقطه‌ای حضور این نیروی دافعه الزامی است و دلیل آن، این است که کوارک‌ها فرمیون هستند و از حضور در ناحیه یکسان منع شده‌اند. هم‌چنین جمله کولنی-مانند می‌تواند به‌صورت زیر تقریب زده شود:

$$\frac{1}{x} \cong \frac{\mu}{1 - e^{-\mu x}} \quad (۸-۲)$$

که برای $1 \ll \mu x$ معتبر است و از آنجایی که ابعاد ابرشعاع x در حدود یک فرمی است، شرط ذکر شده با تقریب خوبی برای $1 \text{ fm}^{-1} \ll \mu$ صادق است. بنابراین، با به کارگیری تقریب‌های (۷-۲) و (۸-۲) پتانسیل برهم‌کنشی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V(x) \cong 3\alpha x_0 - \frac{\mu}{1 - e^{-\mu x}} (\tau + 3\alpha x_0^2 - A_{hyp}(S, T)e^{-\mu x}) + \alpha \frac{\mu^2 x_0^3}{(1 - e^{-\mu x})^2} \quad (۹-۲)$$

با معرفی متغیر جدید $y = e^{-\mu x}$ ، معادله (۵-۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(y)}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dR(y)}{dy} + \frac{1}{y^2(1-y)^2} \left[\frac{2m(E - 3\alpha x_0)}{\mu^2} (1-y)^2 - \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \left(\gamma + \frac{5}{2} \right) \right. \\ \left. - 2m\alpha x_0^3 + \frac{2m}{\mu} (\tau + 3\alpha x_0^2 - A_{hyp}(S, T)y)(1-y) \right] R(y) = 0 \end{aligned} \quad (۱۰-۲)$$

شکل ساده معادله بالا به این صورت است:

$$\frac{d^2 R(y)}{dy^2} + \frac{1-y}{y(1-y)} \frac{dR(y)}{dy} + \left[\frac{-B_1 y^2 + B_2 y - B_3}{y^2(1-y)^2} \right] R(y) = 0 \quad (۱۱-۲)$$

که در اینجا

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{2m(3\alpha x_0 - E)}{\mu^2} - \frac{2m}{\mu} A_{hyp}(S, T), \\ B_2 &= \frac{4m(3\alpha x_0 - E)}{\mu^2} - \frac{2m}{\mu} (\tau + 3\alpha x_0^2 + A_{hyp}(S, T)) \\ B_3 &= \frac{2m(3\alpha x_0 - E)}{\mu^2} + 2m\alpha x_0^3 + \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \left(\gamma + \frac{5}{2} \right) - \frac{2m}{\mu} (\tau + 3\alpha x_0^2) \end{aligned} \quad (۱۲-۲)$$

با استفاده از روش نیکیفوروف-وواروف (NU) [۵۷]، می‌توانیم طیف انرژی حالت مقید را به صورت مستقیم به دست بیاوریم (رجوع شود به پیوست الف).

²³ Nikiforov-Uvarov method

$$E_{n,\gamma}^{S,T} = 3\alpha x_0 - \mu\tilde{\tau} + \frac{\mu^2}{2m}(\tilde{\gamma} + \frac{3}{2})(\tilde{\gamma} + \frac{5}{2}) - \frac{m}{2} \left(\frac{\tilde{\tau} - A_{hyp}(S,T) - \frac{\mu}{2m}(\tilde{\gamma} + \frac{3}{2})(\tilde{\gamma} + \frac{5}{2})}{n + \tilde{\gamma} + 5/2} - \frac{\mu}{2m}(n + \tilde{\gamma} + \frac{5}{2}) \right)^2 \quad (۱۳-۲)$$

که در آن

$$\tilde{\tau} = \tau + 3\alpha x_0^2, \quad \tilde{\gamma} + 2 = (\gamma + 2) \left[1 + \frac{2m\alpha x_0^3}{(\gamma + 2)^2} \right]^{1/2} \quad (۱۴-۲)$$

و $A_{hyp}(S,T)$ با معادله (۶-۲) داده می‌شود. جرم باریون از رابطه

$$M = 3m + E_{n,\gamma}^{S,T} \quad (۱۵-۲)$$

به دست می‌آید و توابع موج ابرشعاعی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\psi_{n\gamma}^{S,T}(x) = \frac{C_n}{x^{5/2}} \frac{(1 - e^{-\mu x})^{\frac{1}{2} + \sqrt{B_1 - B_2 + B_3 + \frac{1}{4}}}}{e^{\mu\sqrt{B_3}x}} P_n \left(\frac{2\sqrt{B_3} - 2\sqrt{B_1 - B_2 + B_3 + \frac{1}{4}}}{2\sqrt{B_3}} \right) (1 - 2e^{-\mu x}) \quad (۱۶-۲)$$

که در اینجا توابع $P_n^{(\alpha,\beta)}(z)$ چندجمله‌ای‌های ژاکوبی هستند.

۲-۲-۲ نتایج برای طیف جرمی باریون‌های سبک و توابع موج ابرشعاعی برای حالت‌های مختلف

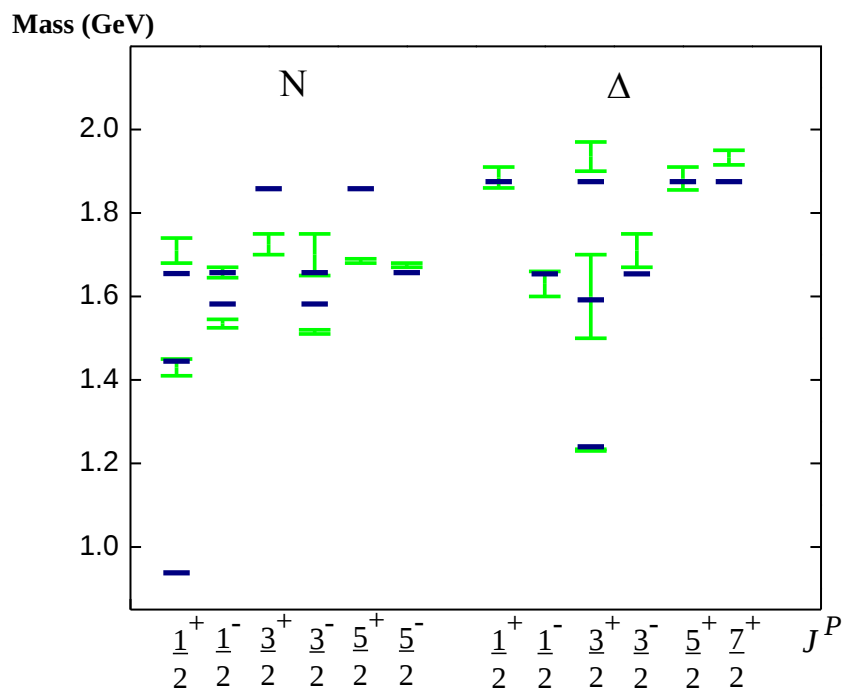
با فرض کردن مقدار $m = 360 \text{ MeV}$ برای جرم کوارک‌ها، بقیه پارامترهایی که در محاسبات وارد می‌شوند از طریق یک فرآیند تحلیلی به دست آمده و در جدول (۱-۲) نشان داده شده‌اند. نتایج برای طیف جرمی باریون‌های سبک در جدول (۲-۲) و همچنین در شکل (۲.۲) نشان داده شده و با مقادیر آزمایشگاهی [۵۸] مقایسه شده‌اند. همچنین در شکل (۲-۲)، توابع موج برای حالت پایه و حالت‌های برانگیخته داده شده است.

جدول (۱-۲): مقادیر برازش داده شده پارامترهای معادله (۱۳-۲) که از طریق فرآیند تحلیلی تعیین شده‌اند.

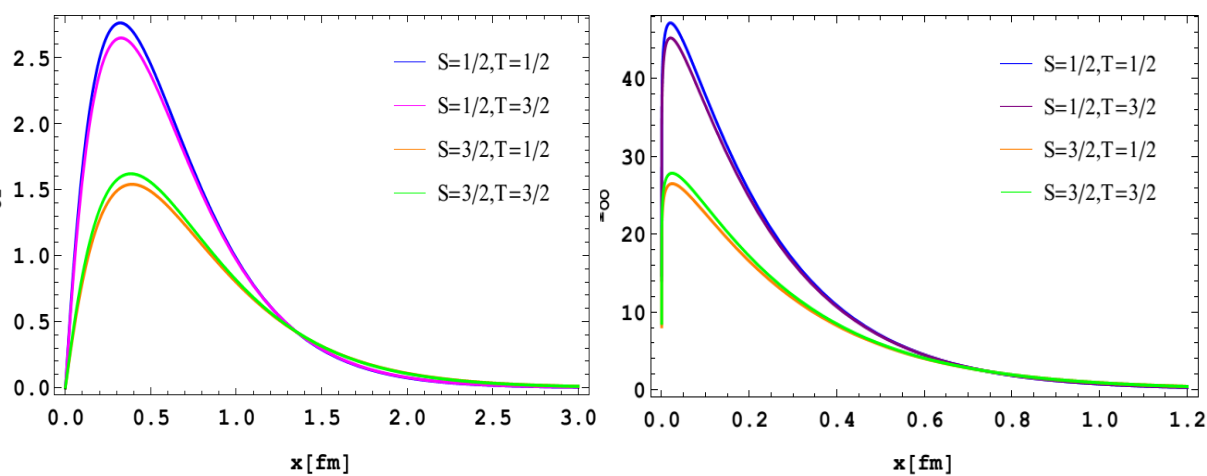
Parameter	τ	$\alpha \text{ (fm}^{-2}\text{)}$	$x_0 \text{ (fm)}$	$\mu \text{ (fm}^{-1}\text{)}$	$A_S \text{ (MeV.fm)}$	$A_I \text{ (MeV.fm)}$	$A_{SI} \text{ (MeV.fm)}$
Value	5.29	1.3	0.43	0.054	35.46	33.49	-3.94

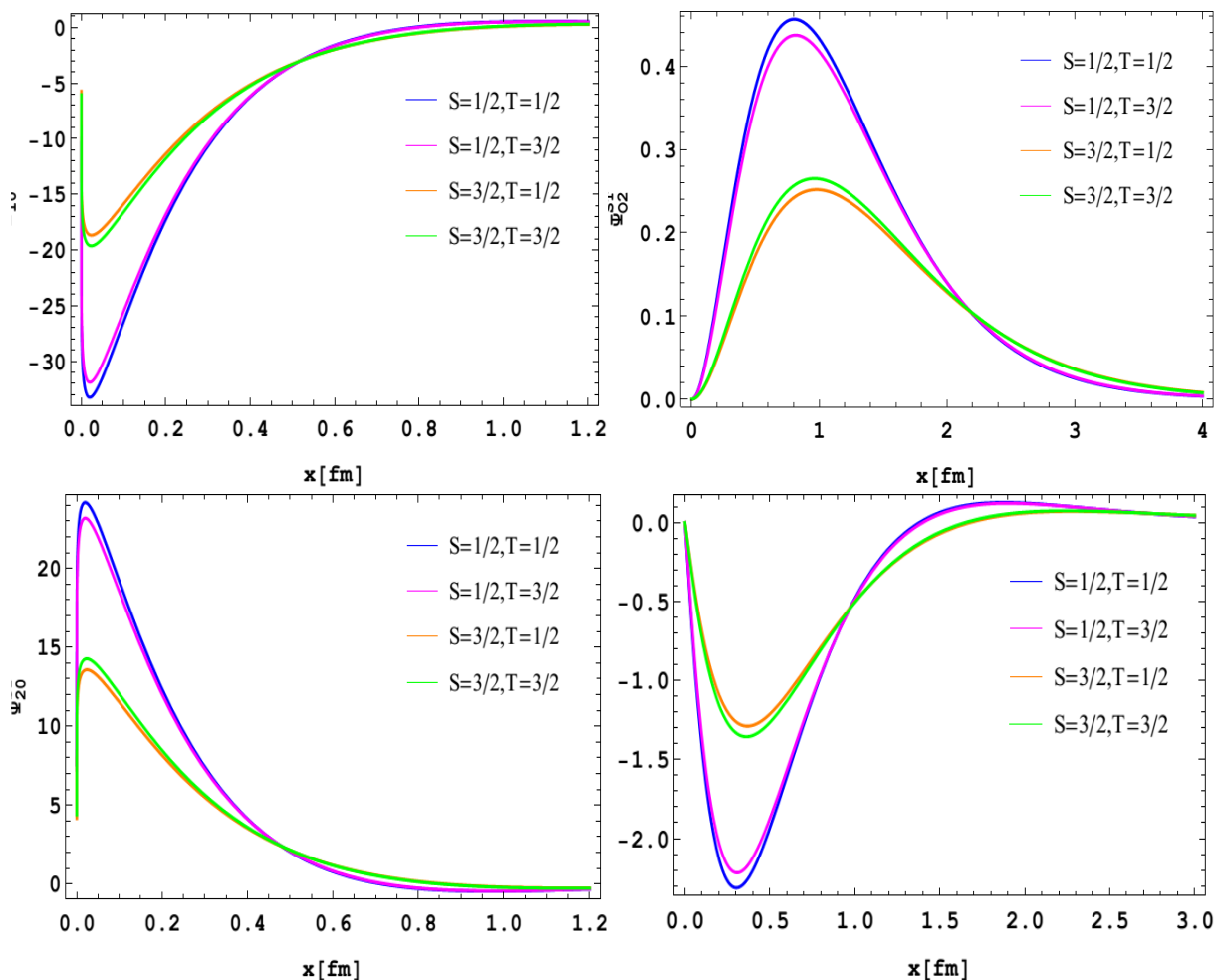
جدول (۲-۲): طیف جرمی رزونانس‌های Δ و N با استفاده از معادله (۲-۱۳)، در قیاس با نتایج مدل hCQM [۵۰] و مقادیر آزمایشگاهی [۵۸].

Baryon	$L_{2T\ 2J}$	status	J^P	(n, γ)	S	T	$M_{Theor.}$	$M_{[50] calc.}$	$M_{Exp.}$
N(938)	P_{11}	*****	$\frac{1}{2}^+$	(0, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	938	938	939
N(1440)	P_{11}	*****	$\frac{1}{2}^+$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1445	1463	1410-1450
N(1520)	D_{13}	*****	$\frac{3}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1582	1524	1510-1520
N(1535)	S_{11}	*****	$\frac{1}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1582	1524	1525-1545
N(1650)	S_{11}	*****	$\frac{1}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1657	1688	1645-1670
N(1675)	D_{15}	*****	$\frac{5}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1657	1668	1670-1680
N(1680)	F_{15}	*****	$\frac{5}{2}^+$	(0, 2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1858	1680	1680-1690
N(1700)	D_{13}	***	$\frac{3}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1657	1692	1650-1750
N(1710)	P_{11}	***	$\frac{1}{2}^+$	(2, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1655	1752	1680-1740
N(1720)	P_{13}	*****	$\frac{3}{2}^+$	(0, 2)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1858	1648	1700-1750
Δ (1232)	P_{33}	*****	$\frac{3}{2}^+$	(0, 0)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1240	1232	1230-1234
Δ (1600)	P_{33}	***	$\frac{3}{2}^+$	(1, 0)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1592	1727	1500-1700
Δ (1620)	S_{31}	*****	$\frac{1}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1654	1573	1600-1660
Δ (1700)	D_{33}	*****	$\frac{3}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1654	1573	1670-1750
Δ (1910)	P_{31}	*****	$\frac{1}{2}^+$	(0, 2)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1875	1953	1860-1910
Δ (1920)	P_{33}	***	$\frac{3}{2}^+$	(2, 0)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1875	1921	1900-1970
Δ (1905)	F_{35}	*****	$\frac{5}{2}^+$	(0, 2)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	1875	1901	1855-1910
Δ (1950)	F_{37}	*****	$\frac{7}{2}^+$	(0, 2)	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	875	1955	1915-1950



شکل (۲-۲): طیف جرمی رزونانس‌های سه و چهار ستاره N و Δ از معادله (۲-۱۳) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۲-۱)، (خط‌های سیاه)، در مقایسه با مقادیر تجربی (بازه‌های سبز رنگ) [۵۸].





شکل (۲-۳): توابع موج ابرشعاعی (۲-۱۶) برای رزونانس‌های مختلف، که با اعداد کوانتومی (n, γ) مشخص می‌شوند و در هر مورد، ترکیب‌های ممکن (S, T) در نظر گرفته شده است.

۳-۲ ارائه مدل دقیق‌تری برای باریون‌ها بر مبنای مدل کوارک سازنده فوق‌مرکزی

در این قسمت برای دستیابی به یک مدل دقیق‌تر، دو جمله به پتانسیل فوق‌مرکزی اضافه می‌کنیم: یک جمله لگاریتمی و یک جمله مربع معکوس x^{-2} ، که جمله لگاریتمی به همراه جمله خطی، قسمت محبوس‌شدگی را تشکیل می‌دهند و حضور جمله کولنی-مانند با وجود جمله مربع معکوس (چنانکه در فصل ۴ ملاحظه خواهیم کرد) به توصیف بهتری از ساختار الکترومغناطیسی باریون منجر می‌شود. در ادامه، با ملاحظات ذکر شده، به حل تحلیلی مسئله خواهیم پرداخت.

۲-۳-۱ ارائه یک پتانسیل فوق مرکزی مناسب و حل مسئله باریونی

همچنان که گفته شد، در یک مدل سازی دقیق تر، برای داشتن یک محبوس شدگی ملایم تر و هموارتر، یک جمله لگاریتمی به جمله خطی پتانسیل فوق مرکزی اضافه می کنیم و نیز یک جمله مربع معکوس در کنار جمله کولنی-مانند در نظر می گیریم که در فصل چهارم مشاهده خواهیم کرد که اضافه کردن این جمله نقش زیادی در بهبود توصیف ساختار الکترومغناطیسی باریون ها ایفا می کند. بنابراین، پتانسیل فوق مرکزی را به صورت زیر در نظر می گیریم [۵۹]:

$$V(x) = \varrho \ln x + \alpha x - \frac{\tau}{x} + \frac{\kappa}{x^2} \quad (۱۷-۲)$$

و معادله شرودینگر شش بعدی به صورت زیر است:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 3(\epsilon^2 - m^2) - (m + \epsilon) \left(\varrho \ln x + \alpha x - \frac{\tau}{x} + \frac{\kappa}{x^2} \right) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۱۸-۲)$$

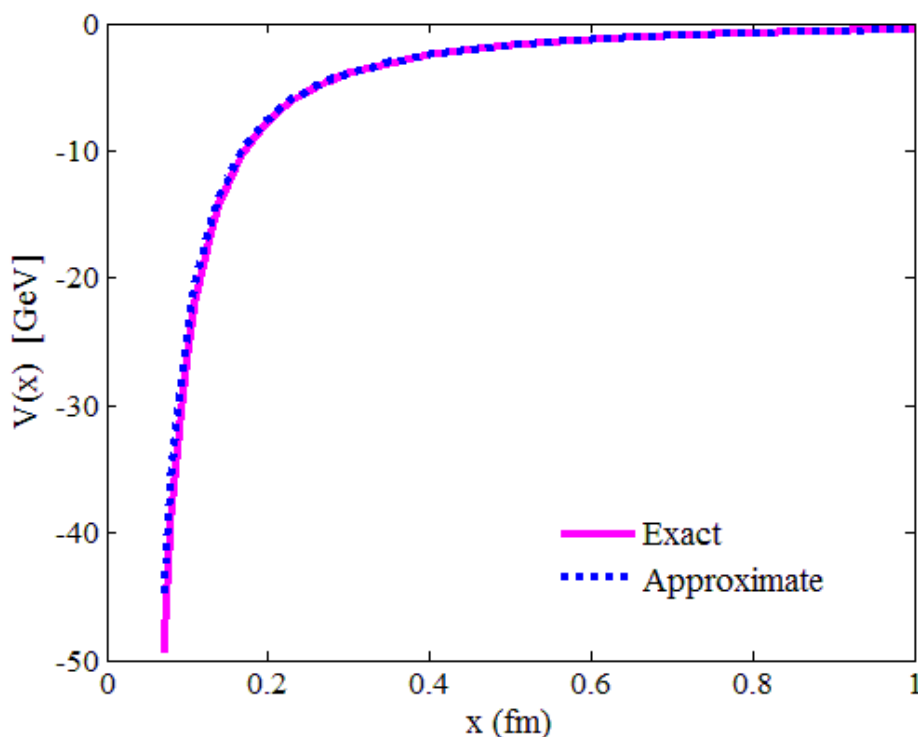
اما مسئله اینجاست که معادله (۱۸-۲) حل تحلیلی دقیق ندارد. برای حل این مشکل، می توانیم مانند زیربخش (۱-۲-۲)، از تقریب های مناسبی برای جمله خطی و لگاریتمی استفاده کنیم. بنابراین، ابتدا با یک تغییر متغیر $u = \frac{1}{x}$ ، معادله (۱۸-۲) را بر حسب متغیر جدید بازنویسی می کنیم. با فرض یک شعاع مشخصه x_0 برای باریون، تقریب مورد نظر بر مبنای بسط جمله های $\frac{\alpha}{u}$ و $\varrho \ln u$ در یک سری توانی حول x_0 تا مرتبه دوم (حول $\sigma \equiv \frac{1}{x_0}$ در فضای u) است. با قرار دادن $v = u - \sigma$ و بسط سری توانی حول $v = 0$ ، داریم:

$$\ln u = \ln \sigma + \ln \left(1 + \frac{v}{\sigma} \right) = \ln \sigma + \frac{v}{\sigma} - \frac{1}{2} \left(\frac{v}{\sigma} \right)^2 + \dots \cong \ln \sigma - \frac{3}{2} + \frac{2u}{\sigma} - \frac{u^2}{2\sigma^2} \quad (۱۹-۲)$$

و همچنین برای جمله $1/u$ داریم:

$$\frac{1}{u} \cong \frac{3}{\sigma} - \frac{3}{\sigma^2} u + \frac{1}{\sigma^3} u^2 \quad (۲۰-۲)$$

به‌طورکلی هر قدر جملات بیشتری را اضافه کنیم، تقریب بهتری خواهیم داشت. اما در اینجا تا جملات درجه دوم برای منظور ما کافی هستند و در حدود ابعاد باریون تقریب خوبی محسوب می‌شوند. با جاگذاری تقریب‌های (۱۹-۲) و (۲۰-۲) در معادله (۱۸-۲) دیده می‌شود که معادله (۱۸-۲) در حضور و در غیاب جمله‌های خطی و لگاریتمی شکل یکسانی دارد. برای دریافت درک بهتری از دقت تقریب‌های اعمال شده، پتانسیل فوق‌مرکزی (۱۷-۲)، با و بدون تقریب‌های بکار رفته برای جمله‌های خطی و لگاریتمی، در شکل (۴-۲) نشان داده شده است.



شکل (۴-۲): پتانسیل فوق‌مرکزی (۱۷-۲) با و بدون تقریب‌های (۱۹-۲) و (۲۰-۲) برای جمله‌های خطی و لگاریتمی، با پارامترهای داده شده در جدول (۳-۲).

می‌توان مشاهده کرد که تقریب‌های به‌کار رفته پتانسیل موردنظر را به‌خوبی بازتولید می‌کند. با این ملاحظات، معادله (۱۸-۲) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} + \left(-\frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x} - B_3 \right) \right] \psi_{\nu\gamma}(x) = 0 \quad (21-2)$$

که در آن

$$\begin{aligned} B_1 &= \gamma(\gamma + 4) + 2m \left(\kappa + \frac{1}{2} \rho x_c^2 + \alpha x_c^3 \right), \\ B_2 &= 2m(\tau + 2\rho x_c + 3\alpha x_c^2), \\ B_3 &= 2m \left(\rho \ln x_c + 3\alpha x_c + \frac{3}{2} \rho - E \right). \end{aligned} \quad (22-2)$$

یک مقایسه با مسئله فوق کولنی نشان می‌دهد که معادله (21-2) را می‌توانیم به عنوان معادله مشتقی برای توابع لاگر تعمیم یافته شناسایی کرده و ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع مسئله را به دست بیاوریم [45]. در نتیجه ویژه توابع مستقیماً به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi_{v\gamma}(x) = \left[\frac{v! (2k)^{2\tilde{\gamma}+6}}{(2v + 2\tilde{\gamma} + 5)\Gamma(v + 2\tilde{\gamma} + 5)} \right]^{1/2} x^{\tilde{\gamma}} e^{-kx} L_v^{2\tilde{\gamma}+4}(2kx) \quad (23-2)$$

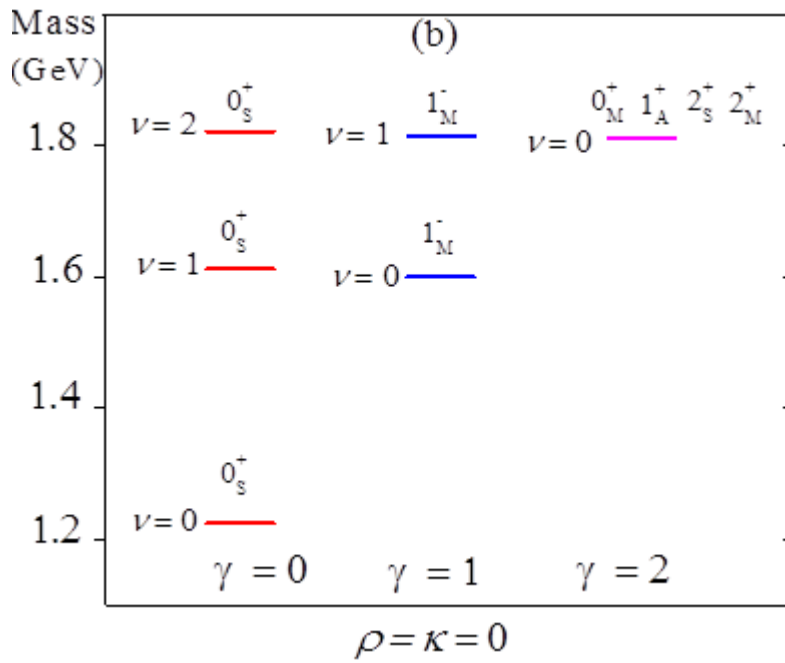
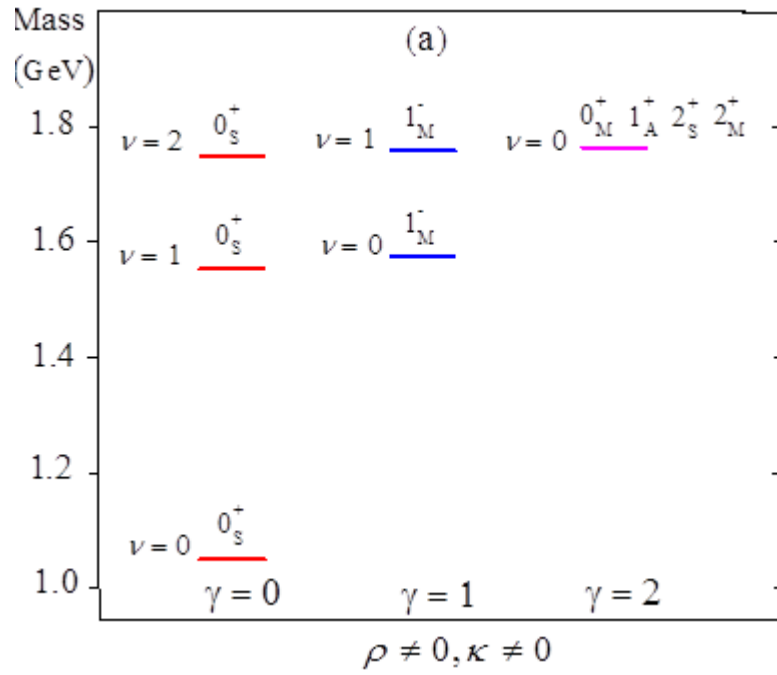
که در آن

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} + 2 &= \left[(\gamma + 2)^2 + 2m \left(\kappa + \frac{1}{2} \rho x_c^2 + \alpha x_c^3 \right) \right]^{1/2}, \\ k &= \frac{m\tilde{\tau}}{v + \tilde{\gamma} + 5/2}, \quad \tilde{\tau} = \tau + 2\rho x_c + 3\alpha x_c^2. \end{aligned} \quad (24-2)$$

و معادله انرژی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E_{v,\gamma} &= \rho \ln x_c + 3\alpha x_c + \frac{3}{2} \rho \\ &\quad - \frac{m(\tau + 2\rho x_c + 3\alpha x_c^2)^2}{2 \left(v + \frac{1}{2} + \left[(\gamma + 2)^2 + 2m \left(\kappa + \frac{1}{2} \rho x_c^2 + \alpha x_c^3 \right) \right]^{1/2} \right)^2} \end{aligned} \quad (25-2)$$

همچنان که ذکر شد، طیف جرمی در غیاب برهم کنش فوق ریز با $M_{n,\gamma} = 3m + E_{v,\gamma}$ داده می‌شود. در شکل (2-5)، ساختار کیفی طیف جرمی نظری برای قسمت SU(6)-ناوردای طیف، با پتانسیل فوق مرکزی (17.2) در قسمت (a) و پتانسیل فوق مرکزی "خطی + کولنی" در قسمت (b)، تا سه تراز اول نشان داده شده است.



شکل (۵-۲): ساختار کیفی قسمت $SU(6)$ -ناوردای طیف جرمی نظری، برای پتانسیل فوق‌مرکزی (۲-۱۷) به‌ازای
 در قسمت (a) و $\rho = 0, \kappa \neq 0$ در قسمت (b)، تا سه تراز اول.
 توضیح: در اینجا ν و γ اعداد کوانتومی بیانگر برانگیختگی‌های ابرشعاعی و تکانه زاویه‌ای مداری بزرگ (برای حالت سه-
 کوارکی) هستند. بالای هر تراز نمادگذاری L_t^P نشانگر تکانه زاویه‌ای مداری کل L ، پاریته P و نوع تقارن t (متقارن S ،
 پادمتقارن A و متقارن آمیخته M نسبت به تعویض سه ذره) است.

همان طور که از مقایسه دو قسمت شکل (۲-۵) می توان مشاهده کرد، در قسمت (a) نه تنها تبهگنی بین حالت های 0_S^+ و $1_{\bar{M}}$ که یک مشخصه برهم کنش فوق کولنی است، از بین می رود بلکه ترتیب درست قرارگیری پارите های مثبت و منفی نیز بازتولید شده است. اولین حالت برانگیخته 0_S^+ که به رزونانس روپر^{۲۴} معروف است، در انواع مدل های کوارک سازنده، همیشه بالاتر از حالت $1_{\bar{M}}$ ظاهر می شد و این مشکل در اینجا مرتفع شده است.

۲-۳-۲ اعمال فرمول جرم گورسی-رادیکاتی و نتایج مدل برای باریون های سبک

بعد از اینکه قسمت SU(6)-ناوردای طیف را در مدل ارائه شده حل کردیم، جدادگی بین چندگانه های SU(6) و ترکیب شدگی بین پیکربندی های مختلف SU(6) توسط یک جمله SU(6)-شکننده اختلالی توصیف می شود. بنابراین، در اینجا ما فرمول جرمی گورسی-رادیکاتی^{۲۵} تعمیم یافته را به عنوان یک برهم کنش SU(6)-شکننده به کار می گیریم. فرمول جرمی گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته برحسب عملگرهای کازیمیر به صورت زیر نوشته می شود [۵۱]:

$$M_{\text{Baryon}} = M + C_2[SU_{SF}(6)] + BC_2[SU_F(3)] + CC_2[SU_S(2)] + DC_2[SU_I(2)] + EC_1[U_Y(1)] + FC_2[U_Y(1)] \quad (2-26)$$

که در آن $C_2[SU_{SF}(6)]$ عملگر کازیمیر SU(6) برای اسپین-طعم، $C_2[SU_F(3)]$ عملگر کازیمیر SU(3) برای طعم و $C_2[SU_S(2)]$ و $C_2[SU_I(2)]$ ، به ترتیب عملگرهای کازیمیر (مربعی) SU(2) برای اسپین و ایزواسپین هستند و $C_1[U_Y(1)]$ عملگر کازیمیر خطی برای زیرگروه U(1) با مولد ابربار Y است. بنابراین جرم هر باریون به صورت زیر نوشته می شود :

$$M_{\text{baryon}} = M_{n,Y} + \langle H_{G.R.} \rangle \quad (2-27)$$

²⁴ Roper resonance

²⁵ Gürsey-Radicati mass formula

که $M_{n,\gamma}$ مقدار انرژی میانگین هر چندگانه $SU(3)$ است که در معادله (۲-۲۵) داده شده است و $H_{G.R.}$ به عملگر گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته اشاره می کند که شامل وابستگی اسپین-طعم است. برای شناسایی مقادیر چشم‌داشتی $H_{G.R.}$ ، ما نیاز به مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای کازیمیر داریم که در معادله (۱-۴۰) داده شده است. از آنجایی که برای باریون‌های سبک $Y = 1$ است، جمله‌های E و F در معادله (۲-۲۶) مورد نیاز نیستند و همچنین جمله‌های C و D را می توان در یک گروه و با یک جمله نشان داد. بدین ترتیب، شکل ساده معادله فرمول گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته برای باریون‌های سبک به شکل زیر است:

$$H_{G.R.} = AC_2[SU_{SF}(6)] + BC_2[SU_F(3)] + CC_2[SU_S(2)] \quad (2-28)$$

برای محاسبه جرم باریون‌ها مطابق معادل (۲-۲۷) نیاز است که پارامترهای مجهول را پیدا کنیم. برای تعیین این پارامترها، تعداد محدودی از رزونانس‌های غیر شگفت را به صورت زیر انتخاب می کنیم و اختلاف جرم آن‌ها را با استفاده از $H_{G.R.}$ و مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای کازیمیر، بیان می کنیم.

$$\begin{aligned} M_{\Delta(1232)} - M_{N(938)} &= 3(B + C), \\ M_{N(1650)} - M_{N(1535)} &= 3C, \end{aligned} \quad (2-29)$$

از این طریق، پارامترهای مستقل از مدل B و C تعیین می شوند و پارامتر وابسته به مدل A از رابطه

$$M_{N(1535)} - M_{N(1440)} = E_{01} - E_{10} - 3A \quad (2-30)$$

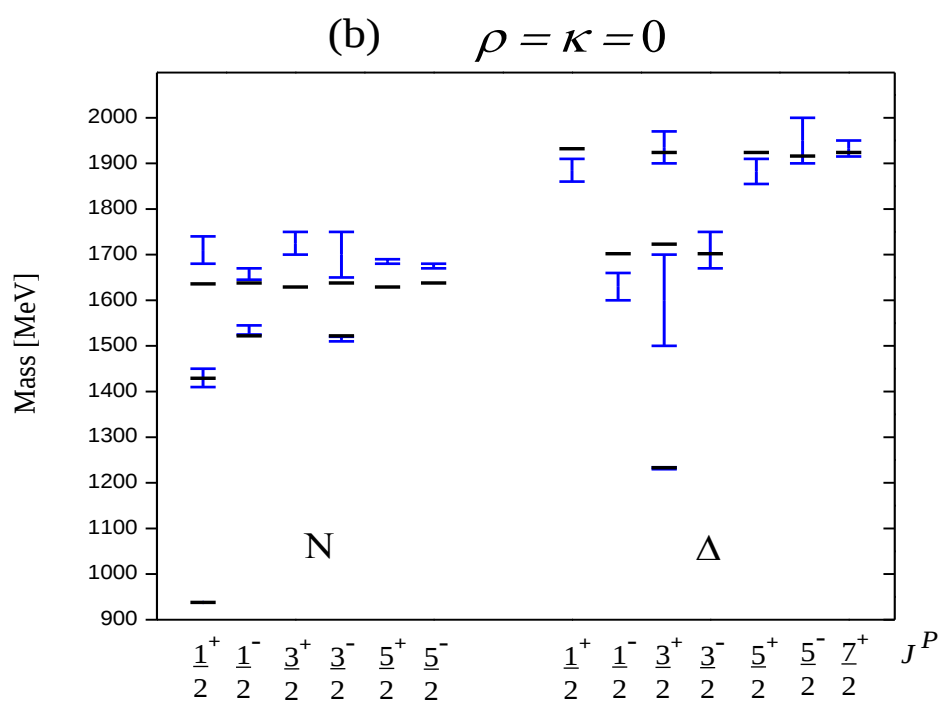
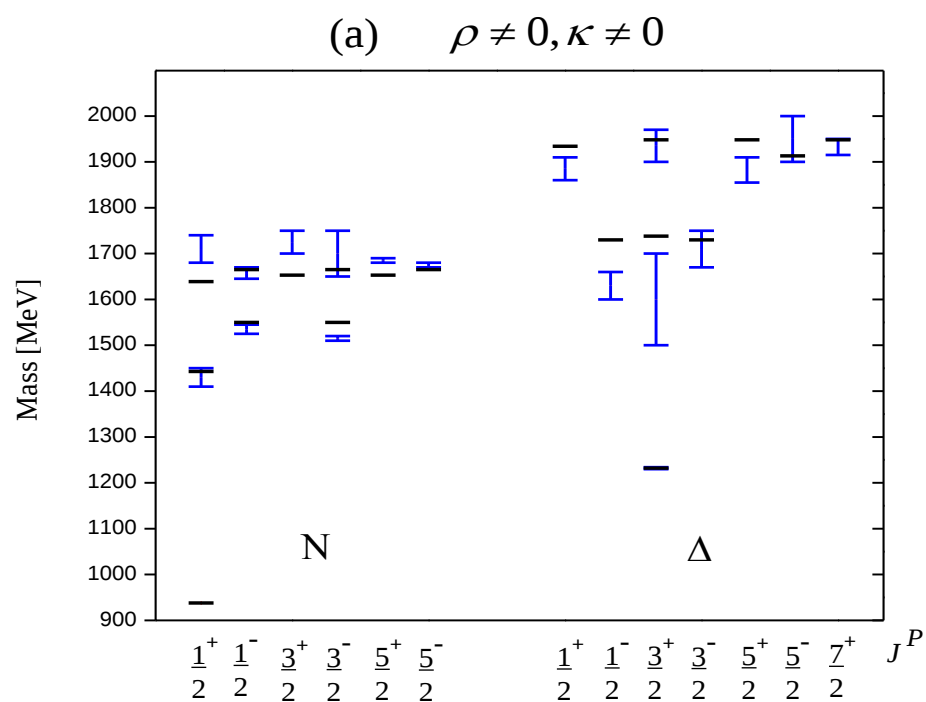
مشخص می شود. بدین ترتیب، ما ضرایب معادله (۲-۲۷) را، در یک برازش هم زمان برای رزونانس‌های سه و چهار ستاره، تعیین می کنیم که مقادیر برازش یافته پارامترها در جدول (۲-۳) و نتایج محاسبات برای طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت در جدول (۲-۴) و شکل (۲-۶) داده شده است.

جدول (۲-۳): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۲-۲۷) که از طریق یک فرایند تحلیلی، تعیین و ثابت شده اند.

Parameter	τ	$\alpha(\text{fm}^{-2})$	$\rho(\text{fm}^{-1})$	$\kappa(\text{fm})$	$x_c(\text{fm})$	$A(\text{MeV})$	$B(\text{MeV})$	$C(\text{MeV})$
Value I	4.63	1.1	0.35	0.42	0.47	-28.3	60	38.3
Value II	5.8	1.2	---	---	0.507	-35	60	38.3

جدول (۲-۴): طیف جرمی به دست آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک با استفاده از معادله (۲-۲۷)، با رهیافت اختلاقی (ستون $M_{\text{calc.I}}$) و رهیافت تقریبی (ستون $M_{\text{calc.II}}$) در قیاس با نتایج کار بیکر [۱۴] و مقادیر آزمایشگاهی [۵۸].

Resonance		status	State	$M_{\text{Expt.}}$	$M_{\text{calc.I}}$	$M_{\text{calc.II}}$	$M_{\text{Ref. [14]}}$
N(938)	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	939	938	938	939
N(1440)	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1410-1450	1443	1429	1462
N(1520)	D_{13}	*****	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	1510-1520	1550	1522	1548
N(1535)	S_{11}	*****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	1525-1545	1550	1522	1497
N(1650)	S_{11}	*****	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	1645-1670	1665	1637	1650
N(1675)	D_{15}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	1670-1680	1665	1637	1655
N(1680)	F_{15}	*****	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	1680-1690	1653	1629	1738
N(1700)	D_{13}	***	$^4 8_{3/2}[70, 1^-]$	1650-1750	1665	1638	1731
N(1710)	P_{11}	***	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	1680-1740	1639	1636	1748
N(1720)	P_{13}	*****	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	1700-1750	1653	1629	1734
$\Delta(1232)$	P_{33}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1230-1234	1232	1233	1231
$\Delta(1600)$	P_{33}	***	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1500-1700	1738	1723	1673
$\Delta(1620)$	S_{31}	*****	$^2 10_{1/2}[70, 1^-]$	1600-1660	1730	1702	1668
$\Delta(1700)$	D_{33}	*****	$^2 10_{3/2}[70, 1^-]$	1670-1750	1730	1702	1668
$\Delta(1930)$	D_{35}	***	$^2 10_{5/2}[70, 1^-]$	1900-2000	1913	1916	----
$\Delta(1910)$	P_{31}	*****	$^4 10_{1/2}[56, 2^+]$	1860-1910	1948	1924	1900
$\Delta(1920)$	P_{33}	***	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	1900-1970	1934	1932	1904
$\Delta(1905)$	F_{35}	*****	$^4 10_{5/2}[56, 2^+]$	1855-1910	1948	1924	1931
$\Delta(1950)$	F_{37}	*****	$^4 10_{7/2}[56, 2^+]$	1915-1950	1948	1924	1902



شکل (۲-۶): نتایج به دست آمده برای طیف جرمی رزونانس های باریون های سبک، از معادله (۲-۲۷) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۲-۳)، (خط های سیاه)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی (بازه های آبی رنگ) [۵۸].

۴-۲. افزودن برهم کنش های چندقطبی به پتانسیل "خطی + کولنی" و حل تحلیلی

مسئله سه-جسمی

در این بخش، به دلیل اهمیت تأثیر هر چند کوچک برهم کنش تانسوری و برهم کنش کوارک-گلوئون، این دو پتانسیل را با تقریب خوبی به صورت فوق مرکزی در نظر گرفته و به پتانسیل "خطی + کولنی" اضافه کرده ایم. معادله شرودینگر مربوطه را به صورت تحلیلی حل کرده و انرژی ها و توابع موج را به صورت فرمول های تحلیلی به دست می آوریم و با به دست آوردن طیف جرمی باریون های دارای کوارک های سبک و شگفت نشان خواهیم داد که افزودن این جملات به بهبود نتایج طیف جرمی می انجامد.

۴-۲-۱ حل تحلیلی معادله شرودینگر سه-جسمی برای پتانسیل "خطی + کولنی + برهم کنش

دوقطبی-دوقطبی + برهم کنش کوارک-گلوئون"

جدا از الزامات کلی که باید توسط پتانسیل ارضا شود (محبوس شدگی و ...)، انتخاب فرم صریح برهم کنش اصلی ترین وجه تمایز مدل های مختلف کوارک سازنده است. در اینجا ما دو پتانسیل برهم کنشی فوق مرکزی اضافه کرده ایم. نخست، پتانسیل برهم کنش یک میدان مغناطیسی رنگ با میدان مغناطیسی خارجی برهم کنش دیگر که شامل اسپین-اسپین است.

$$V(x) = \frac{B}{x^3} \sum_{i < j} \left(\frac{3(\vec{S}_i \cdot \vec{r}_{ij})(\vec{S}_j \cdot \vec{r}_{ij})}{|\vec{r}_{ij}|^2} - \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j \right) \quad (۳۱-۲)$$

برهم کنش تانسوری (۳۱-۲) درجات آزادی داخلی را جدا می کند و باعث تفکیک انرژی می شود. اما ما در

اینجا به دلیل تأثیر نسبتاً کوچک این جمله، این رابطه را در یک تقریب جبری به صورت ساده $V(x) = \frac{q}{x^3}$

در نظر می گیریم. به هر حال جمله $\frac{q}{x^3}$ با یک q ثابت فقط ترازهای انرژی را جابجا می کند و درجات آزادی

داخلی را بر روی طیف جرمی نشان نمی دهد. جمله دوم پتانسیل برهم کنش یک کوارک با یک گلوئون

خنثی است که می‌تواند به صورت $V(x) = \frac{\kappa}{x^4}$ نشان داده شود که منشأ آن بار الکتریکی است. با این

توضیحات، پتانسیل برهم‌کنشی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۶۰].

$$V(x) = \alpha x - \frac{\tau}{x} + \frac{\varrho}{x^3} + \frac{\kappa}{x^4} \quad (۳۲-۲)$$

با جاگذاری پتانسیل فوق‌مرکزی (۳۲-۲) در معادله شرودینگر شش بعدی، داریم:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 2mE - 2m\left(\alpha x - \frac{\tau}{x} + \frac{\varrho}{x^3} + \frac{\kappa}{x^4}\right) \right] \psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۳۳-۲)$$

با در نظر گرفتن تابع موج به صورت $\psi_{n\gamma}(x) = x^{-5/2} \phi_{n\gamma}(x)$ جمله دیفرانسیل مرتبه اول از معادله (۳۳-۲)

(۳۳) حذف می‌شود. بنابراین، داریم:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2mE - 2m\left(\alpha x - \frac{\tau}{x} + \frac{\gamma(\gamma+4) + 15/4}{2mx^2} + \frac{\varrho}{x^3} + \frac{\kappa}{x^4}\right) \right] \phi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۳۴-۲)$$

در اینجا هم وجود جمله خطی برای یک حل تحلیلی مشکل‌ساز می‌شود. بنابراین از تقریب (۷-۲) استفاده

می‌کنیم. با اعمال این تقریب، معادله (۳۴-۲) را می‌توان به شکل

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - D_0 + \frac{D_1}{x} - \frac{D_2}{x^2} - \frac{D_3}{x^3} - \frac{D_4}{x^4} \right] \phi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۳۵-۲)$$

نوشت که در آن:

$$\begin{aligned} D_0 &= 2mE + 6m\alpha x_0, & D_1 &= 2m(3\alpha x_0^2 + \tau), \\ D_2 &= (\gamma + 3/2)(\gamma + 5/2) + 2m\alpha x_0^3, & D_3 &= 2m\varrho, & D_4 &= 2m\kappa \end{aligned} \quad (۳۶-۲)$$

برای حل تحلیلی معادله (۳۵.۲)، تابع موج را به صورت:

$$\phi_{n\gamma}(x) = f_n(x) \exp[g_\gamma(x)] \quad (۳۷-۲)$$

فرض می‌کنیم و توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$f_n(x) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i^n) & n = 1, 2, 3, \dots \text{ (excited states)} \\ 1 & n = 0 \text{ (ground state)} \end{cases} \quad (۳۸-۲)$$

$$g_\gamma(x) = \delta \ln x - gx - \frac{h}{x} \quad (39-2)$$

تابع $f(x)$ را می‌توانیم به فرم صریح زیر بنویسیم:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_n = 1 \quad (40-2)$$

با وارد کردن معادلات (39-2) و (40-2) در معادله (35-2) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0} a_n S_n x^{n+\delta-4} + \sum_{n=1} a_{n-1} T_{n-1} x^{n+\delta-4} + \sum_{n=2} a_{n-2} U_{n-2} x^{n+\delta-4} \\ + \sum_{n=3} a_{n-3} V_{n-3} x^{n+\delta-4} + \sum_{n=4} a_{n-4} W_{n-4} x^{n+\delta-4} = 0 \end{aligned} \quad (41-2)$$

که در اینجا داریم:

$$S_n = h^2 - D_4, \quad (42-2)$$

$$T_{n-1} = 2h(n + \delta - 2) - D_3, \quad (43-2)$$

$$U_{n-2} = (n + \delta - 2)(n + \delta - 3) - 2hg - D_2, \quad (44-2)$$

$$V_{n-3} = -2g(n + \delta - 3) + D_1, \quad (45-2)$$

$$W_{n-4} = g^2 - D_0, \quad (46-2)$$

می‌توانیم ضرایب بسط معادله (41-2) را به صورت روابط بازگشتی به دست بیاوریم. برای اولین حالت برانگیخته داریم:

$$[h^2 - D_4]a_1 + [2h(\delta - 1) - D_3]a_0 = 0 \rightarrow a_0 \neq 0 \quad (47-2)$$

و به طور مشابه برای حالت‌های برانگیخته مرتبه بالاتر، روابط زیر صادق است.

$$[h^2 - D_4]a_2 + [2h\delta - D_3]a_1 + [\delta(\delta - 1) - 2hg - D_2]a_0 = 0, \quad (48-2)$$

$$\begin{aligned} [h^2 - D_4]a_3 + [2h(\delta + 1) - D_3]a_2 + [\delta(\delta + 1) - 2hg - D_2]a_1 \\ + [-2g\delta + D_1]a_0 = 0, \end{aligned} \quad (49-2)$$

$$[h^2 - D_4]a_4 + [2h(\delta + 2) - D_3]a_3 + [(\delta + 1)(\delta + 2) - 2hg - D_2]a_2 + [-2g(\delta + 1) + D_1]a_1 + [g^2 - D_0]a_0 = 0, \quad (50-2)$$

...

$$[h^2 - D_4]a_n + [2h(n + \delta - 2) - D_3]a_{n-1} + [(n + \delta - 2)(n + \delta - 3) - 2hg - D_2]a_{n-2} + [-2g(n + \delta - 3) + D_1]a_{n-3} + [g^2 - D_0]a_{n-4} = 0. \quad (51-2)$$

برای اینکه تابع $\psi(x)$ در بی‌نهایت خوش رفتار باشد، سری‌ها باید به ازای $n = n_r$ پایان‌پذیر (محدود) باشند. بنابراین داریم:

$$a_n \neq 0, \quad a_{n+i} = a_{-i} = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (52-2)$$

و از اینجا از روابط (42-2) و (46-2) و (47-2) معادله‌های زیر را به دست می‌آوریم.

$$D_3 = 2h(\delta - 1), \quad D_4 = h^2, \quad D_1 = 2g(n + \delta), \quad D_0 = g^2 \quad (53-2)$$

که از این طریق پارامترهای تابع موج (37-2) را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$g = \frac{m(\tau + 3\alpha x_0^2)}{n + \delta}, \quad h = \frac{m\varrho}{\delta - 1} = \sqrt{2m\kappa} \quad (54-2)$$

رابطه (54-2) هم‌چنین یک قید به شکل زیر روی ضرایب پتانسیل ϱ و κ اعمال می‌کند.

$$\kappa = \frac{m\varrho^2}{2(\delta - 1)^2} \quad (55-2)$$

با قراردادن $a_1 = 0$ در معادله (48-2) می‌توانیم پارامتر δ را به دست بیاوریم:

$$a_2 = a_0 \neq 0, \quad a_1 = 0 \rightarrow \delta(\delta - 1) - 2hg - D_2 = 0, \quad (56-2)$$

با استفاده از روابط (56-2) و (56-2) داریم:

$$\delta(\delta - 1) = \left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\left(\gamma + \frac{5}{2}\right) + 2m\alpha x_0^3 + \frac{2m(\tau + 3\alpha x_0^2)\varrho}{\delta(\delta - 1)} \quad (57-2)$$

که می‌دهد:

$$\delta = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \left(\gamma + \frac{5}{2} \right) + m\alpha x_0^3 \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sqrt{\left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \left(\gamma + \frac{5}{2} \right) + 2m\alpha x_0^3 \right]^2 + 8m^2(\tau + 3\alpha x_0^2)\varrho} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (58-2)$$

با استفاده از رابطه

$$D_0 = g^2 = 2mE + 6m\alpha x_0 \quad (59-2)$$

و معادله (54-2)، می‌توانیم معادله انرژی را به صورت زیر به دست بیاوریم:

$$E - 3\alpha x_0 + \frac{m(\tau + 3\alpha x_0^2)^2}{2(n + \delta)^2} = 0 \quad (60-2)$$

با جایگذاری معادلات (58-2) در معادله (60-2) ویژه مقادیر انرژی برابر است با [60]:

$$M_{n,\gamma} = 3m + 3\alpha x_0 - \frac{2m(\tau + 3\alpha x_0^2)^2}{\left(2n+1+2 \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \left(\gamma + \frac{5}{2} \right) + 2m\alpha x_0^3 \right]} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{8m^2(\tau + 3\alpha x_0^2)\varrho}{\left[\left(\gamma + \frac{3}{2} \right) \left(\gamma + \frac{5}{2} \right) + 2m\alpha x_0^3 \right]^2}} \right] \right)^2} \quad (61-2)$$

که $M_{n,\gamma}$ انرژی کل باریون در غیاب برهم‌کنش‌های SU(6)-شکننده است. از رابطه (61-2) می‌توان ملاحظه کرد که جواب حل پتانسیل معروف "خطی + کولنی" را می‌توان با قرارداد $\varrho = 0$ (و بنابر رابطه (55-2)، $\kappa = 0$) به دست آورد. تابع موج ابرشعاعی برابر است با:

$$\psi_{n\gamma}(x) = A_{n,\gamma} x^{\delta - \frac{5}{2}} \exp(-gx - \frac{h}{x}) f_n^\gamma(x) \quad (62-2)$$

که در آن $A_{n,\gamma}$ ثابت بهنجارش است و پارامترهای δ ، g و h از معادله‌های (55.2) و (59.2) تعیین می‌شوند. $f_n^\gamma(x)$ طبق رابطه (40.2) یک چندجمله‌ای درجه n است که در آن a_m -ها از معادله (41-2) به همراه معادله (40-2) تعیین می‌شوند.

$$a_n = 1, \quad a_{n-1} = - \frac{[(n + \delta - 2)(n + \delta - 3) - \delta(\delta - 1)]a_{n-2} + 6ga_{n-3}}{[2h(n - 1)]} \quad (63-2)$$

۲-۴-۲ اعمال فرمول جرم گورسی-رادیکاتی و نتایج مدل ارائه شده برای باریون‌های سبک و

شگفت

جرم هر باریون به صورت زیر نوشته می شود :

$$M_{\text{baryon}} = M_{n,\gamma} + \langle H_{G.R.} \rangle \quad (۶۴-۲)$$

که $M_{n,\gamma}$ مقدار انرژی میانگین هر چندگانه $SU(3)$ است که در معادله (۶۱-۲) داده شده است و $H_{G.R.}$ به معادله گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته اشاره می کند که شامل وابستگی اسپین-طعم به صورت زیر است:

$$H_{G.R.} = AC_2[SU_{SF}(6)] + BC_2[SU_F(3)] + CC_2[SU_S(2)] + DC_1[U_Y(1)] \\ + E \left(C_2[SU_I(2)] - \frac{1}{4}(C_1[U_Y(1)])^2 \right) \quad (۶۵-۲)$$

برای شناسایی مقادیر چشم‌داشتی $H_{G.R.}$ ، ما نیاز به مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای کازیمیر داریم که در معادله (۴۰-۱) داده شده است. برای محاسبه جرم باریون‌ها، مطابق معادلات (۶۴-۲) و (۶۵-۲)، نیاز است که پارامترهای مجهول را پیدا کنیم. برای تعیین این پارامترها، تعداد محدودی از رزونانس‌های شگفت و غیر شگفت را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم و اختلاف جرم آن‌ها را با استفاده از $H_{G.R.}$ و مقادیر چشم‌داشتی عملگرهای کازیمیر، بیان می‌کنیم.

$$M_{\Delta(1232)} - M_{N(938)} = 3(b + c + e),$$

$$M_{N(1650)} - M_{N(1535)} = 3c ,$$

$$M_{\Sigma(1193)} - M_{\Lambda(1116)} = 2e ,$$

$$4M_{N(938)} - M_{\Sigma(1193)} - 3M_{\Lambda(1116)} = 4d . \quad (۶۶-۲)$$

از این طریق، پارامترهای مستقل از مدل d, c, b و e تعیین می‌شوند و پارامتر وابسته به مدل a از رابطه:

$$M_{N(1535)} - M_{N(1440)} = E_{01} - E_{10} - 3a \quad (۶۷-۲)$$

مشخص می‌شود. بدین ترتیب، ما ضرایب معادله (۶۴-۲) را، در یک برازش هم‌زمان برای رزونانس‌های سه و چهار ستاره، تعیین می‌کنیم که مقادیر برازش یافته پارامترها در جدول (۵-۲) و نتایج محاسبات برای طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت در جدول (۶-۲) و شکل (۷-۲) داده شده است. می‌توان مشاهده کرد که توصیف کلی خوبی از طیف جرمی باریون‌ها به‌دست آمده است. اما برخی رزونانس‌ها، یعنی رزونانس‌های با n و γ و اسپین کل یکسان، هنوز هم تبهگن ظاهر می‌شوند که این مسئله ناشی از عدم حضور نیروهای اسپین-مدار در برهم‌کنش کوآرک-کوآرک است. به‌جز این مورد، اختلاف بین جرم‌های نظری و آزمایشگاهی کاملاً کوچک بوده و نتایج به‌دست آمده توافق خوبی با داده‌های تجربی دارند.

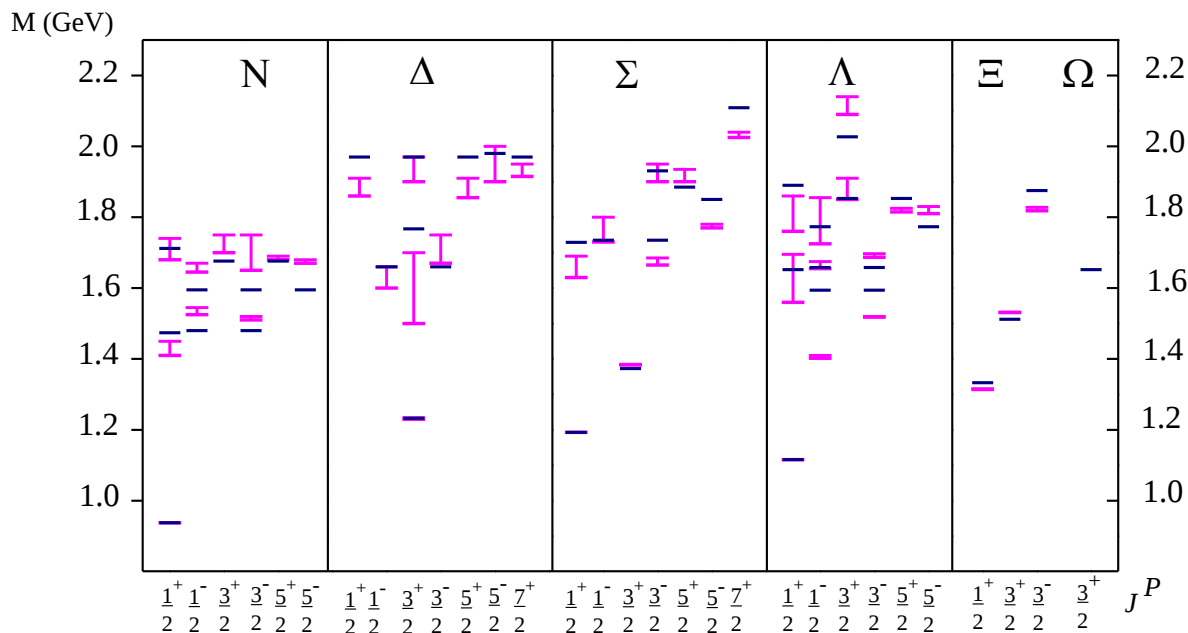
جدول (۵-۲): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۶۴-۲) که از طریق یک فرایند تحلیلی، تعیین و ثابت شده‌اند (پارامترهای a, b, c, d و همگی بر حسب MeV داده شده‌اند).

Parameter	τ	$\alpha(\text{fm}^{-2})$	$\varrho(\text{fm}^2)$	$x_0(\text{fm})$	$a,$	$b,$	$c,$	$d,$	e (MeV)
Value	6.5	1.6	0.1	0.5	-19.6	21.3	38.3	-197.3	38.5

جدول (۶-۲): طیف جرمی به‌دست‌آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت، از معادله (۶۴-۲)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی [۵۸].

Resonance	$^{2S+1}[F]_I[SF], L^P]$	J^P	$M_{\text{Theor.}}$
N(938) P_{11}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	939
N(1440 $^{+10}_{-30}$) P_{11}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1474
N(1535 $^{+10}_{-10}$) S_{11}	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1480
N(1520 $_{-10}$) D_{13}	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1480
N(1650 $^{+20}_{-5}$) S_{11}	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1595
N(1700 $^{+50}_{-50}$) D_{13}	$^4 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1595
N(1675 $^{+5}_{-5}$) D_{15}	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	$5/2^-$	1595
N(1710 $^{+30}_{-30}$) P_{11}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1712
N(1720 $^{+30}_{-20}$) P_{13}	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	$3/2^+$	1676
N(1680 $^{+10}$) F_{15}	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1676
$\Delta(1232^{+2}_{-2})$ P_{33}	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1233
$\Delta(1600^{+100}_{-100})$ P_{33}	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1767
$\Delta(1620^{+40}_{-20})$ S_{31}	$^2 10_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1660
$\Delta(1700^{+50}_{-30})$ D_{33}	$^2 10_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1660

$\Delta(1905^{+5}_{-50})F_{35}$	$^410_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1970
$\Delta(1910_{-50})P_{31}$	$^410_{1/2}[56, 2^+]$	$1/2^+$	1970
$\Delta(1920^{+50}_{-20})P_{33}$	$^410_{3/2}[56, 2^+]$	$3/2^+$	1970
$\Delta(1930^{+70}_{-30})D_{35}$	$^410_{5/2}[56, 1^-]$	$5/2^-$	1980
$\Delta(1950_{-35})F_{37}$	$^410_{7/2}[56, 2^+]$	$7/2^+$	1970
$\Lambda(1116)P_{01}$	$^28_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1116
$\Lambda(1600^{+100}_{-40})P_{01}$	$^28_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1652
$\Lambda(1670^{+10}_{-10})S_{01}$	$^28_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1658
$\Lambda(1690^{+5}_{-5})D_{03}$	$^28_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1658
$\Lambda(1800^{+50}_{-80})S_{01}$	$^48_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1773
$\Lambda(1810^{+40}_{-60})P_{01}$	$^28_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1890
$\Lambda(1820^{+5}_{-5})F_{05}$	$^28_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1853
$\Lambda(1830_{-20})D_{05}$	$^48_{5/2}[70, 1^-]$	$5/2^-$	1773
$\Lambda(1890^{+20}_{-40})P_{03}$	$^28_{3/2}[56, 2^+]$	$3/2^+$	1853
$\Lambda(2110^{+30}_{-20})F_{05}$	$^48_{5/2}[70, 2^+]$	$3/2^+$	2027
$\Lambda^*(1405^{+1}_{-1})S_{01}$	$^21_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1594
$\Lambda^*(1520_{-2})D_{01}$	$^21_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1594
$\Sigma(1193)P_{11}$	$^28_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1193
$\Sigma(1660^{+30}_{-30})P_{11}$	$^28_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1729
$\Sigma(1670^{+15}_{-5})D_{13}$	$^28_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1735
$\Sigma(1750^{+50}_{-20})S_{11}$	$^28_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1735
$\Sigma(1775^{+5}_{-5})D_{15}$	$^48_{5/2}[70, 1^-]$	$5/2^-$	1850
$\Sigma(1915^{+20}_{-15})F_{15}$	$^28_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1885
$\Sigma(1940^{+10}_{-40})D_{13}$	$^28_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1931
$\Sigma^*(1385_{-2})P_{13}$	$^410_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1373
$\Sigma^*(2030^{+10}_{-5})F_{17}$	$^410_{7/2}[56, 2^+]$	$7/2^+$	2109
$\Xi(1318^{+2}_{-4})P_{11}$	$^28_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1333
$\Xi(1820^{+8}_{-2})D_{13}$	$^28_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1875
$\Xi(1530^{+2}_{+1})P_{13}$	$^410_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1512
$\Omega(1672^{+1})P_{03}$	$^410_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1652



شکل (۲-۷): نتایج به دست آمده برای طیف جرمی رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت از معادله (۲-۶۴) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۲-۵)، (خط‌های سیاه)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی (بازه‌های رنگی) [۵۸].

۲-۵ حل تحلیلی دقیق مسئله سه-جسمی برای باریون‌ها

همچنان که ذکر شد برای اینکه کوارک‌ها را داخل باریون محبوس کنیم یک جمله خطی به عنوان پتانسیل نگه‌دارنده به جمله کولنی اضافه می‌شود. اما مشکل این پتانسیل فوق‌مرکزی این است که این پتانسیل حل تحلیلی دقیق ندارد و روش معمول این است که با جمله خطی به صورت اختلالی رفتار می‌کنند. ما برای بهبود دقت مسئله یک تقریب مناسب برای جمله خطی ارائه دادیم و مسئله را به صورت تقریبی حل کردیم. در این قسمت قصد داریم یک جمله نوسانگری به پتانسیل فوق‌مرکزی اضافه کنیم که منجر به حل دقیق مسئله می‌شود. بنابراین، در این قسمت ما آزادی مجانبی بین کوارک‌ها در داخل باریون‌ها را به صورت پتانسیل "خطی+نوسانگری" در نظر می‌گیریم. این مورد قبلاً در دو رساله دکتری در دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود مورد بررسی قرار گرفته است [۶۱، ۶۲]. لازم به ذکر است که در هر دو پژوهش مورد اشاره، مسئله را برای یک حالت خاص با $n = 0$ حل کرده و ویژه توابع و ویژه مقادیر

انرژی مربوطه، یعنی $\Psi_{0\gamma}(x)$ و $E_{0\gamma}$ ، را به دست آورده‌اند. اما روش حل ما در اینجا مبتنی بر حل کامل مسئله است، یعنی با ارائه حل تحلیلی دقیق مسئله سه-کوارکی، فرمول‌های تحلیلی برای توابع موج و ترازهای مختلف انرژی $(\Psi_{n\gamma}(x), E_{n\gamma})$ به دست می‌آوریم و در ادامه توابع موجی را که از این طریق به دست می‌آیند، در محاسبه تأثیر برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین برای رزونانس‌های مختلف مورد استفاده قرار داده‌ایم.

۲-۵-۱ حل تحلیلی معادله شرودینگر سه-جسمی برای پتانسیل فوق مرکزی "نوسانگری +

خطی + کولنی"

معادله شرودینگر سه-جسمی با پتانسیل "نوسانگری + خطی + کولنی" به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 2mE - 2m(ax^2 + bx - \frac{c}{x}) \right] \Psi(x) = 0 \quad (۶۸-۲)$$

با در نظر گرفتن تابع موج به صورت $\Psi(x) = x^{-5/2} \phi(x)$ معادله (۶۸-۲) به شکل ساده زیر درمی‌آید:

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \left[\frac{D_1}{x^2} + \frac{D_2}{x} - D_3 - D_4 x - D_5 x^2 \right] \phi(x) = 0 \quad (۶۹-۲)$$

که در آن

$$D_1 = -\left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\left(\gamma + \frac{5}{2}\right), \quad D_2 = 2mc, \quad D_3 = 2mE, \quad D_4 = 2mb, \quad D_5 = 2ma. \quad (۷۰-۲)$$

با لحاظ کردن رفتار تابع موج در مبدأ و در بی‌نهایت، تابع موج را به شکل زیر در نظر می‌گیریم [۶۴، ۶۳].

$$\phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}ax^2 - \beta x\right) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\delta} \quad (۷۱-۲)$$

با وارد کردن معادله (۷۱-۲) در معادله (۶۹-۲) به رابطه زیر می‌رسیم.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n [(n+\delta)(n+\delta-1) + D_1] + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} [-2\beta(n+\delta-1) + D_2] \quad (۷۲-۲)$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} [\beta^2 - 2\alpha(n + \delta - 2) - \alpha - D_3] + \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} [2\alpha\beta - D_4] \\ + \sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4} [\alpha^2 - D_5] = 0$$

برای اینکه تابع موج $\phi(x)$ در بی‌نهایت خوش‌رفتار باشد، سری‌ها باید به ازای $n = n_r$ پایان‌پذیر (محدود) باشند. این شرط الزام می‌دارد که

$$a_k \neq 0, \quad a_{k+1} = a_{k+2} = 0, \quad \& \quad a_{-m} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (73-2)$$

معادله (72-2) همراه با شروط (73-2) منجر به روابط زیر می‌شود.

$$D_1 = -\delta(\delta - 1), \quad D_2 = 2\beta(\delta + n), \quad D_3 = -2\alpha\left(n + \delta + \frac{1}{2}\right) + \beta^2, \\ D_4 = 2\alpha\beta, \quad D_5 = \alpha^2. \quad (74-2)$$

و از اینجا پارامترهای تابع موج (71-2) به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\delta = \gamma + \frac{5}{2}, \quad \alpha = \sqrt{2ma}, \quad \beta = \frac{b}{2} \sqrt{\frac{2m}{a}}, \quad a \neq 0 \quad (75-2)$$

همچنین رابطه $D_2 = 2\beta(\delta + n) = 2mc$ قیدی به صورت زیر روی پارامترهای پتانسیل اعمال می‌کند.

$$\frac{b^2}{a} = \frac{2mc^2}{(n + \gamma + 5/2)^2} \quad (76-2)$$

با استفاده از رابطه $D_3 = -2\alpha\left(\delta + n + \frac{1}{2}\right) + \beta^2 = 2mE$ و معادله (75-2) و با در نظر گرفتن ضریب

جمله نوسانگری به‌صورت $a = \frac{1}{2}m\omega^2$ ، ویژه مقادیر انرژی به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$E_N = 3m + (N + 3)\omega - \frac{mc^2}{2(N + 5/2)^2} \quad (77-2)$$

که در اینجا یک عدد کوانتومی اصلی به‌صورت $N = n + \gamma$ داریم. رابطه (77-2) جرم رزونانس‌ها را در

غیاب برهم‌کنش فوق‌ریز بیان می‌کند. تابع موج ابرشعاعی برابر است با:

$$\Psi_{N\gamma}(x) = A_{N\gamma} x^\gamma \exp\left(-\frac{1}{2}m\omega x^2 - \frac{mc}{N + 5/2} x\right) \sum_{n=0}^{n=n_{max}} a_n x^n, \quad (78-2)$$

ثابت بهنجارش $A_{N\gamma}$ از شرط $\int_0^\infty x^5 |\Psi_{N\gamma}(x)|^2 dx = 1$ تعیین می‌شود و ضرایب بسط a_n از معادله (۲-۷۲) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{mc}{\left(\gamma + \frac{5}{2}\right)\left(\gamma + \frac{7}{2}\right)},$$

$$a_2 = -\frac{mc}{\gamma + 3} + \frac{m^2 c^2}{2(\gamma + 3)^2(\gamma + 7/2)^2}, \dots \quad (۲-۷۹)$$

روش حلی که در اینجا شرح داده شد و نتایج به دست آمده را می‌توان برای تخمین ترازهای انرژی برای پتانسیل $V(x) = bx - \frac{c}{x}$ نیز مورد استفاده قرار داد. برای این منظور کافی است با استفاده از توابع موج (۲-۷۸) مقدار چشم‌داشتی جمله نوسانگری $\langle ax^2 \rangle$ را حساب کرده و تفاضل آن را از ویژه مقادیر انرژی (۲-۷۷) محاسبه کنیم.

2-5-2 تأثیر برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین و نتایج برای طیف جرمی

باریون‌های سبک

همان‌طور که در فصل اول گفته شد، برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین که مسئول جداسازی بین چندگانه‌ها است به صورت زیر داده می‌شود [۵۰].

$$V_{hyp} = \sum_{i < j} \left[\frac{A_S e^{-r_{ij}^2/\sigma_S^2} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j)}{(\sqrt{\pi}\sigma_S)^3} + \frac{A_I e^{-r_{ij}^2/\sigma_I^2} (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j)}{(\sqrt{\pi}\sigma_I)^3} + \frac{A_{SI} e^{-r_{ij}^2/\sigma_{SI}^2} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j)(\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j)}{(\sqrt{\pi}\sigma_{SI})^3} \right] \quad (۲-۸۰)$$

که جمله اول مربوط به برهم‌کنش اسپین-اسپین، جمله دوم مربوط به برهم‌کنش ایزواسپین-ایزواسپین و جمله سوم مربوط به برهم‌کنش اسپین-ایزواسپین است. در رابطه فوق $\mathbf{s}_i$ عملگر اسپین (ایزواسپین) کوارک i -ام و r_{ij} فاصله نسبی جفت کوارک‌ها است و بقیه پارامترها ثابتی هستند که باید تعیین شوند. در اینجا، اثرات برهم‌کنش اسپین، ایزواسپین و اسپین-ایزواسپین را به صورت پتانسیل اختلالی، با استفاده از توابع موج (۲-۷۸)، وارد مسئله می‌کنیم که برای توصیف طیف انرژی‌های کمتر از

2 GeV مناسب است. طیف باریونی، مجموع طیف جرمی در غیاب برهم کنش فوق ریز و انرژی سیستم مختل شده توسط برهم کنش فوق ریز است.

$$M_{baryon} = M_{n,\gamma} + \langle H_{hyp} \rangle \quad (۸۱-۲)$$

شدت برهم کنش فوق ریز از تفاضل جرم $N - \Delta$ به دست می آید. با ثابت گرفتن جرم مشترک کوارک ها به صورت $m = 360 \text{ MeV}$ ، ضرایب معادله (۸۱-۲) در یک برازش هم زمان برای رزونانس های سه و چهار ستاره N و Δ تعیین می شود که در جدول شماره (۷-۲) داده شده اند. در جدول (۸-۲) و شکل (۸-۲) نتایج محاسبات برای طیف جرمی نوکلئون و رزونانس Δ نشان داده شده است.

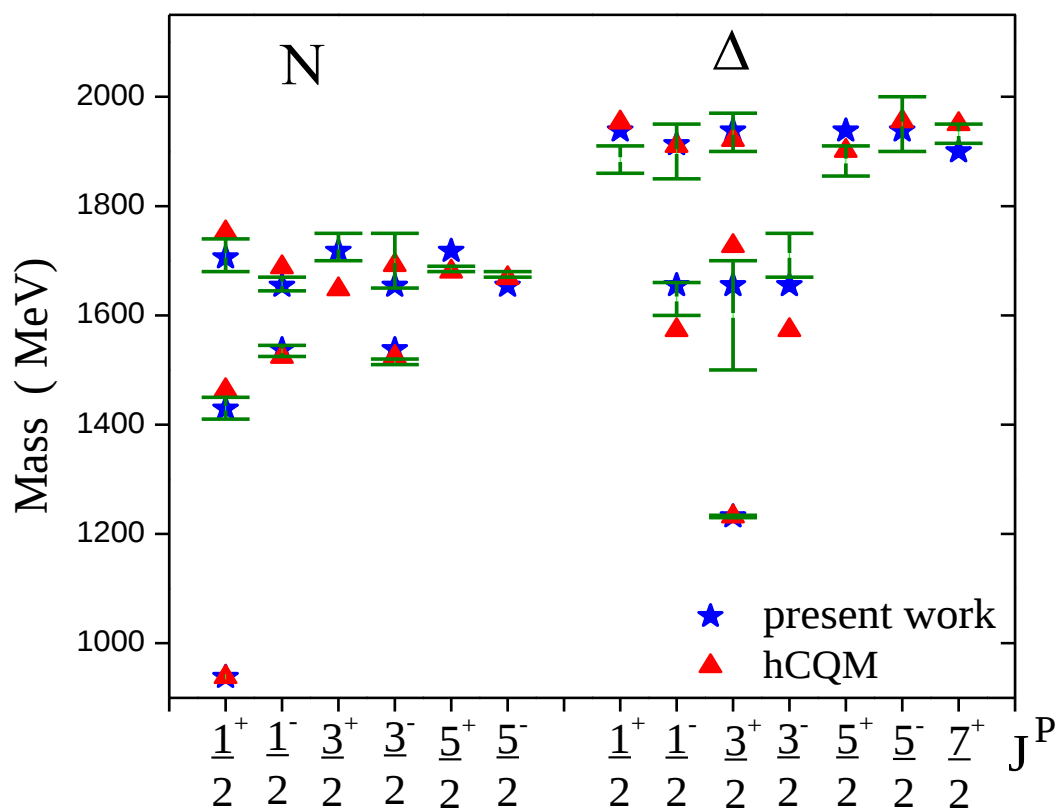
جدول (۷-۲): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله طیف جرمی (۸۱-۲).

Parameter	c	$\omega \text{ (fm}^{-1}\text{)}$	$A_S \text{ (fm}^2\text{)}$	$A_I \text{ (fm}^2\text{)}$	$A_{SI} \text{ (fm}^2\text{)}$	$\sigma_S \text{ (fm)}$	$\sigma_I \text{ (fm)}$	$\sigma_{SI} \text{ (fm)}$
Value	4.52	1.06	67.4	51.7	-106.2	2.87	3.45	2.31

جدول (۸-۲): طیف جرمی نظری رزونانس های باریون های سبک و شگفت، با استفاده از رابطه (۸۱-۲)، در قیاس با نتایج کار جیبیانی [۵۰] و مقادیر آزمایشگاهی [۵۸].

Baryon	L_{2T2}	status	J^P	(n, γ)	$S \quad T$	$M_{Theor.}$	$M_{[50] \text{ calc.}}$	$M_{Expt.}$
N(938)	P_{11}	****	$\frac{1}{2}^+$	(0, 0)	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	938	938	939
N(1440)	P_{11}	****	$\frac{1}{2}^+$	(1, 0)	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	1427	1463	1410-1450
N(1520)	D_{13}	****	$\frac{3}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	1546	1524	1510-1520
N(1535)	S_{11}	****	$\frac{1}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	1546	1524	1525-1545
N(1650)	S_{11}	****	$\frac{1}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}$	1643	1688	1645-1670
N(1675)	D_{15}	****	$\frac{5}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}$	1643	1668	1670-1680
N(1680)	F_{15}	****	$\frac{5}{2}^+$	(0, 2)	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	1716	1680	1680-1690
N(1700)	D_{13}	***	$\frac{3}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2} \quad \frac{1}{2}$	1643	1692	1650-1750
N(1710)	P_{11}	***	$\frac{1}{2}^+$	(2, 0)	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	1704	1752	1680-1740
N(1720)	P_{13}	****	$\frac{3}{2}^+$	(0, 2)	$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$	1716	1648	1700-1750
$\Delta(1232)$	P_{33}	****	$\frac{3}{2}^+$	(0, 0)	$\frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}$	1232	1232	1230-1234

$\Delta(1600)$	P_{33}	***	$\frac{3}{2}^+$	$(1, 0)$	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1683	1727	1500-1700
$\Delta(1620)$	S_{31}	*****	$\frac{1}{2}^-$	$(0, 1)$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2}$	1735	1573	1600-1660
$\Delta(1700)$	D_{33}	*****	$\frac{3}{2}^-$	$(0, 1)$	$\frac{1}{2} \frac{3}{2}$	1735	1573	1670-1750
$\Delta(1910)$	P_{31}	*****	$\frac{1}{2}^+$	$(0, 2)$	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1938	1953	1860-1910
$\Delta(1920)$	P_{33}	***	$\frac{3}{2}^+$	$(2, 0)$	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1911	1921	1900-1970
$\Delta(1930)$	D_{35}	***	$\frac{5}{2}^-$	$(1, 1)$	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1967	---	1900-2000
$\Delta(1905)$	F_{35}	*****	$\frac{5}{2}^+$	$(0, 2)$	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1938	1901	1855-1910
$\Delta(1950)$	F_{37}	*****	$\frac{7}{2}^+$	$(0, 2)$	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1938	1955	1915-1950



شکل (۸-۲) طیف جرمی نظری باریون‌های سبک، با استفاده از معادله (۲-۸۱) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۲-۷)، (ستاره‌های آبی رنگ) در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی [۵۸] (بازه‌های سبز رنگ) و نتایج مدل hCQM (مثلث‌های قرمز رنگ) [۵۰].

فصل سوم

ارائه مدل‌های کوارکی نیمه نسبیتی برای باریون‌ها

۳-۱ مقدمه:

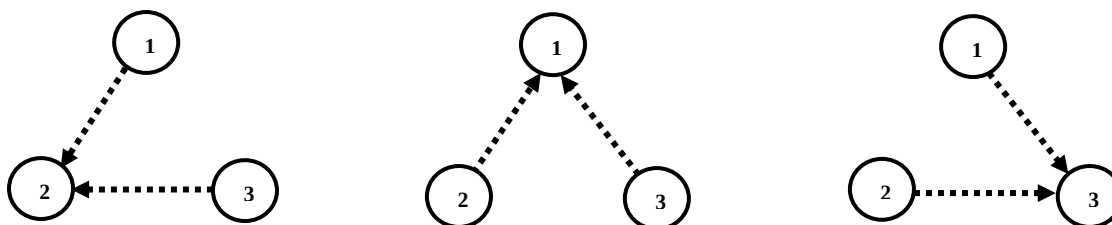
در این فصل، هدف ما مطالعه و بررسی ساختار باریونی با معرفی یک مدل نیمه نسبیتی بر مبنای مدل کوآرک سازنده فوق‌مرکزی است. به دلیل اهمیت زیادی که بررسی نسبیتی رفتار ذرات داخل سیستم‌های مقید دارد، ما سعی می‌کنیم باریون‌ها را به‌عنوان سیستم سه-کوآرکی، با لحاظ کردن اثرات نسبیتی، بررسی کنیم. بررسی کاملاً نسبیتی باریون، مستلزم حل معادله دیراک به ازای هر کوآرک (با در نظر گرفتن برهم‌کنش بین کوآرک‌ها) است. اما حل مسئله سه-جسمی به‌صورت کاملاً نسبیتی مقدور نیست و ما مجبوریم برای حل این مسئله یک سری ساده‌سازی انجام دهیم. در قدم اول، برای ساده‌سازی می‌توان این مسئله را بدون در نظر گرفتن اسپین (و ایزواسپین) ذرات، به‌صورت بوزونی حل کرد و درجات آزادی اسپین و ایزواسپین را به‌صورت اختلالی وارد کرد. دلیل و گواه قابل قبول بودن این فرض این است که مشاهدات نشان می‌دهد که طیف باریونی آزمایشگاهی دارای یک تقارن $SU(6)$ بنیادین برای طیف رزونانس‌های باریونی است. لذا برای بخش $SU(6)$ -ناوردای طیف جرمی می‌توانیم باریون‌ها را به‌عنوان یک سیستم سه-کوآرکی با اسپین صفر در نظر گرفته و یک توصیف نسبیتی مستقل از اسپین برای این قسمت طیف باریونی معرفی کنیم. برای این منظور، با حل معادله سه-جسمی کلاین-گوردون مقادیر انرژی میانگین باریون‌ها را بازتولید می‌کنیم. سپس برای توصیف ساختار فوق‌ریز باریون‌ها، شکافتگی بین طیف چندگانه $SU(6)$ را از طریق جملات اختلالی وابسته به اسپین و ایزواسپین (طعم) بازتولید می‌کنیم. پتانسیل بین کوآرک‌ها را، همان‌طور که از محاسبات QCD و مدل‌های کوآرک سازنده پیشنهاد می‌شود، یک برهم‌کنش کوآرکی فوق‌مرکزی در نظر می‌گیریم که از دو جمله کولنی-مانند و خطی تشکیل شده است. در ادامه، با ارائه حل‌های تحلیلی تقریبی و دقیق، معادله کلاین-گوردون سه-جسمی را حل نموده و سپس برای به دست آوردن جزئیات طیف جرمی باریون‌ها، اثرات برهم‌کنش‌های وابسته به اسپین و ایزواسپین (طعم) بر روی طیف انرژی نسبیتی باریون‌ها محاسبه می‌شود.

۲-۳ بررسی باریون به عنوان حالت مقید سه-کوارکی در یک تقریب نیمه نسبیتی

بر اساس مدل کوارکی، باریون‌ها و رزونانس‌های باریونی به عنوان حالت مقید سه کوارک سازنده (سنگین)، در چهارچوب ساکن باریون، می‌باشند. همان‌طور که گفته شد، در اینجا مسئله را مستقل از اسپین ذرات حل کرده و درجات آزادی اسپین و ایزواسپین را به صورت اختلالی وارد مسئله می‌کنیم. در زیربخش (۱-۲-۳) باریون‌ها را به عنوان یک سیستم مقید سه-کوارکی در نظر گرفته و معادله کلاین-گوردون سه-جسمی^{۲۶} را به عنوان یک توصیف نسبیتی مستقل از اسپین معرفی می‌کنیم و در زیربخش (۲-۲-۳) امکان انتخاب جفت‌شدگی‌های برداری و اسکالر مختلف برای حل معادله کلاین-گوردون سه-جسمی را بررسی می‌کنیم.

۱-۲-۳ معادله کلاین-گوردون سه-جسمی برای سیستم مقید سه-کوارکی

نوکلئون‌ها و به‌طور کلی باریون‌ها به عنوان یک سیستم مقید سه-کوارکی بررسی می‌شوند. برای یک سیستم سه-جسمی، با سه جسم یکسان که متقابلاً باهم برهم‌کنش داشته و یک سیستم مقید را تشکیل می‌دهند، همان‌طوری که در شکل (1.3) نشان داده شده است، سه حالت می‌توان متصور شد که هر ذره با دو ذره دیگر برهم‌کنش داشته باشد [۶۵، ۶۶].



شکل (۱-۳): برهم‌کنش جفتی ذرات در سیستم مقید سه ذره‌ای و حالت‌های مختلف تأثیر گرفتن یک ذره از دو ذره دیگر.

با صرف نظر از درجات آزادی اسپین و ایزواسپین، می‌توانیم یک ذره بدون اسپین با جرم m و انرژی ϵ را که تحت تأثیر میدان‌های برداری V_v و اسکالر V_s حرکت می‌کند با معادله کلاین-گوردون توصیف کنیم

²⁶ Three-body Klein-Gordon equation

که در آن پتانسیل اسکالر با جرم ذره و پتانسیل برداری با انرژی ذره جفت می‌شوند. معادله کلاین-گوردون در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{p}^2 c^2 + (mc^2 + V_s)^2 - (\epsilon - V_v)^2 |\phi\rangle = 0 \quad (۱-۳)$$

که در اینجا p تکانه خطی و m جرم ذره، ϵ انرژی نسبیتی ذره و $|\phi\rangle$ تابع موج (فضایی) است. V_s و V_v به ترتیب پتانسیل‌های برداری و اسکالر می‌باشند. بسط برحسب توان‌های p/m و در نظر گرفتن جملات اول، حد غیر نسبیتی معادله (۱-۳) یعنی معادله شرودینگر را به صورت $\epsilon \cong m + \frac{p^2}{2m} + V$ با یک برهم‌کنش مؤثر $V = V_s + V_v$ به ما می‌دهد. با این توصیفات، ما در اینجا یک توصیف نیمه نسبیتی، با معرفی معادله کلاین-گوردون سه-جسمی، برای قسمت $SU(6)$ -ناوردای طیف جرمی ارائه می‌کنیم. با فرض انرژی و جرم یکسان برای هر سه ذره و با احتساب اثرات نسبیتی و چشم‌پوشی از اسپین ذرات، معادله توصیف‌کننده سیستم سه-جسمی به شکل زیر به دست می‌آید (۶۶).

$$\left(\mathbf{p}_1^2 + \left(m_1 + \frac{1}{2} \sum_{j \neq 1} V_s(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|) \right)^2 - \left(\epsilon_1 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq 1} V_v(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_j|) \right)^2 \right) |\phi_1\rangle = 0$$

$$\left(\mathbf{p}_2^2 + \left(m_2 + \frac{1}{2} \sum_{j \neq 2} V_s(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j|) \right)^2 - \left(\epsilon_2 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq 2} V_v(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_j|) \right)^2 \right) |\phi_2\rangle = 0$$

$$\left(\mathbf{p}_3^2 + \left(m_3 + \frac{1}{2} \sum_{j \neq 3} V_s(|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_j|) \right)^2 - \left(\epsilon_3 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq 3} V_v(|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_j|) \right)^2 \right) |\phi_3\rangle = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^3 \left[\mathbf{p}_i^2 + \left(m_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V_s(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right)^2 - \left(\epsilon_i - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} V_v(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \right)^2 \right] \right) |\Psi\rangle = 0 \quad (۲-۳)$$

که در اینجا $|\Psi\rangle$ تابع موج کل سیستم سه-جسمی است. برای ساده‌سازی مسئله می‌توان انرژی و جرم هر سه ذره را یکسان فرض کرد ($m_u = m_d \approx m_s = m$)، که در این صورت انرژی بستگی سیستم سه-

جسمی نسبیتی برابر می شود با: $E_{\text{bind.}} = 3(\epsilon - m)$. بنابراین، نقطه آغاز حل مسئله سه-جسمی مقید، معادله (۲-۳) است که می تواند هم در فضای مختصات و هم در فضای تکانه خطی با استفاده از مختصات و تکانه های ژاکوبی حل شود.

۲-۲-۳ انتخاب جفت شدگی های برداری و اسکالر برای حل معادله کلاین-گوردون سه-جسمی

همچنان که در فصل های قبل ذکر شد، پتانسیل برهمکنش بین ذره ای را پتانسیل مرکزی (پتانسیل تنها به شعاع r ، فاصله بین ذره ای، وابسته است) در نظر می گیریم که از دو جمله کولنی و خطی تشکیل شده است. این پتانسیل بیشتر برای توصیف برهمکنش بین کوارک ها، همان طور که از محاسبات QCD و مدل های کوارک سازنده پیشنهاد می شود [۶۸، ۶۷]. با دقت در معادله (۳) مشاهده می شود که ما دو امکان برای انتخاب پتانسیل های برداری و اسکالر داریم، الف: انتخاب پتانسیل های برداری و اسکالر مساوی و ب: انتخاب پتانسیل برداری کولنی و اسکالر خطی. در ادامه در مورد روش های حل معادله کلاین-گوردون سه-جسمی با توجه به این انتخاب ها بحث خواهیم کرد.

الف: انتخاب پتانسیل های برداری و اسکالر مساوی: با انتخاب پتانسیل های برداری و اسکالر برابر به صورت $V_s = V_v = \frac{1}{2}V$ که در طیف باریون ها و مزون ها اتفاق می افتد [۶۹]، معادله (۳-۲) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$[\mathbf{p}_1^2 + \mathbf{p}_2^2 + \mathbf{p}_3^2 + (m + \epsilon)(V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|) + V(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|) + V(|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3|)) + 3(m^2 - \epsilon^2)]|\Psi\rangle = 0 \quad (3-3)$$

شکل معادله (۳.۳)، یعنی وابستگی تکانه های خطی و برهم کنش های جفتی ذرات، پیشنهاد می کند که مسئله را در دستگاه مختصات فوق کروی بررسی کنیم. در اینجا برهمکنش سه-کوارکی فوق مرکزی در نظر گرفته می شود، $\sum_{i < j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \approx V_{3q}(x)$ ، یعنی پتانسیل تنها به ابرشعاع x وابسته است و در نتیجه یک ماهیت سه-جسمی دارد. در این مسئله، در فضای سه بعدی، نه درجه آزادی وجود دارد و اگر

مسئله را در دستگاه مختصات مرکز جرم بررسی کنیم و همچنین اندرکنش بین هر دو ذره دارای تقارن کروی باشد مسئله دارای پایستگی تکانه زاویه‌ای کل خواهد بود که این تقارن، ابعاد مسئله را به شش بعد تقلیل می‌دهد. این معادله هم در فضای مختصات و هم در فضای تکانه خطی با استفاده از مختصات و تکانه‌های ژاکوبی قابل حل است. در تقریب فوق کروی، معادله (۳-۳) به شکل زیر در می‌آید.

$$[\mathbf{p}_x^2 + (m + \epsilon)V(x) + 3(m^2 - \epsilon^2)]\psi_{\nu\gamma}(x)Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = 0 \quad (۴-۳)$$

تابع موج ابرشعاعی $\psi_{\nu\gamma}(x)$ با عدد کوانتومی زاویه‌ای بزرگ γ و با تعداد گره‌ها، ν ، برچسب‌گذاری می‌شود. بخش زاویه‌ای-برزاویه‌ای حالت سه-کوارکی توسط هماهنگ‌های فوق کروی کاملاً توضیح داده می‌شود و برای تمام پتانسیل‌های فوق کروی یکسان است. درحالی‌که تابع موج ابرشعاعی $\psi_{\nu\gamma}(x)$ دینامیک مسئله را در بر دارد و از حل معادله ابرشعاعی به دست می‌آید:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 3(\epsilon^2 - m^2) - (m + \epsilon)V_{3q}(x) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۵-۳)$$

در بخش (۳-۳) با ارائه رهیافت‌های اختلالی و تقریبی به حل این معادله خواهیم پرداخت.

ب: انتخاب پتانسیل‌های برداری و اسکالر متفاوت: در برخی از موارد پیشنهاد می‌شود که پتانسیل‌های برداری و اسکالر متفاوت از هم در نظر گرفته شوند. به‌عنوان مثال، در محاسبات مدل‌های کوارکی یا محاسبات QCD شبکه، پتانسیل تبادل گلوئونی را به‌طور خالص برداری و پتانسیل محبوس کننده را اسکالر در نظر می‌گیرند [۷۱، ۷۰]. با پتانسیل‌های برداری و اسکالر متفاوت، برای حل معادله (۲-۳) در تقریب فوق کروی، یک شرط دیگری که باید توسط پتانسیل فوق مرکزی برآورده شود به‌صورت $\sum_{i < j} V^2(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \approx V^2(x)$ است. می‌توان ملاحظه کرد که به‌عنوان مثال پتانسیل محبوس کننده خطی شرط ذکر شده را ارضا می‌کند. بنابراین، با در نظر گرفتن پتانسیل‌های اسکالر و برداری متفاوت، قسمت ابرشعاعی تابع موج توسط معادله زیر داده می‌شود.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 3(\epsilon^2 - m^2) - mV_s(x) - \epsilon V_v(x) + \frac{1}{2}(V_v(x)^2 - V_s(x)^2) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۶-۳)$$

که این حالت را با انتخاب پتانسیل برداری کولنی و اسکالر خطی در بخش (۴-۳) مورد بحث و بررسی قرار خواهیم داد.

۳-۳ پتانسیل‌های برداری و اسکالر مساوی و حل تحلیلی مسئله حالت مقید

نسبیتی کوارک‌ها

در این بخش با انتخاب پتانسیل‌های برداری و اسکالر مساوی به حل تحلیلی معادله کلاین-گوردون سه-جسمی خواهیم پرداخت. در زیربخش (۱-۳-۳) با ارائه رهیافت‌های اختلالی و تقریبی برای رفع مشکل حل تحلیلی معادله کلاین-گوردون سه-جسمی با وجود جمله محبوس کننده خطی، مسئله سه-کوارکی را به‌طور تحلیلی حل کرده و ترازهای انرژی مربوطه را به دست می‌آوریم و در زیربخش (۲-۳-۳) با اعمال فرمول جرم گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته به‌عنوان برهم‌کنش ریز فوق‌مرکزی اسپین و ایزواسپین (طعم)، طیف جرمی باریون‌ها را برای هر دو رهیافت ذکر شده محاسبه کرده و نتایج را با هم‌دیگر و با طیف آزمایشگاهی مقایسه می‌کنیم. سپس، در زیربخش (۳-۳-۳) با اضافه کردن جمله نوسانگری به پتانسیل فوق‌مرکزی مسئله را به‌طور دقیق حل می‌کنیم و از این طریق توابع موج مناسبی به دست می‌آوریم که در محاسبه اثر برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین بر روی طیف جرمی قابل استفاده است. نتایج محاسبات برای طیف جرمی باریون‌های سبک در زیربخش (۴-۳-۳) گزارش شده و با مقادیر تجربی متناظر مورد مقایسه قرار گرفته است.

۳-۳-۱ پتانسیل فوق مرکزی "خطی + کولنی" و رهیافت‌های اختلالی و تقریبی در حل مسئله

سه-کوارکی

همان‌طور که در معادله (۳-۵) مشاهده شد، با استفاده از فرمول‌بندی فوق‌کروی به یک معادله (تک متغیره) شرودینگر-مانند می‌رسیم که تنها شامل متغیر ابرشعاع است. معادله ذکر شده تنها به ازای پتانسیل‌های کولنی و نوسانگری به صورت تحلیلی دقیق حل می‌شود. ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع مسئله فوق‌کولنی می‌تواند با تعمیم محاسبات انجام داده شده در سه بعد به شش بعد دست آید [۷۲].

$$3\epsilon_{\nu\gamma} = 3m - \frac{(m + \epsilon_{\nu\gamma})\tau^2}{2(\nu + \gamma + \frac{5}{2})^2}, \quad (۷-۳)$$

$$\Psi_{n\gamma}(x) = (2a)^{\gamma+3} \left[\frac{\nu!}{2\left(\nu + \gamma + \frac{5}{2}\right)(\nu + 2\gamma + 4)!} \right]^{1/2} x^\nu e^{-ax} L_\nu^{2\gamma+4}(2ax). \quad (۸-۳)$$

که در اینجا $a = (m + \epsilon_{\nu\gamma})\tau/(2\nu + 2\gamma + 5)$ و $L_n^\alpha(x)$ ها چندجمله‌ای‌های لاگر تعمیم یافته هستند. اما پتانسیل فوق‌کولنی، کوارک‌ها را داخل باریون محبوس نمی‌کند، لذا پتانسیل نگه‌دارنده به صورت یک جمله خطی اضافه می‌شود. بنابراین پتانسیل مورد استفاده، پتانسیل فوق‌مرکزی $V(x) = \alpha x - \frac{\tau}{x}$ با ماهیت سه-جسمی است که در عبارت فوق، عبارت اول به خاطر آزادی مجانبی بین کوارک‌ها در نظر گرفته می‌شود و عبارت دوم ناشی از پتانسیل کولنی بار رنگ است.

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma + 4)}{x^2} + 3(\epsilon^2 - m^2) - (m + \epsilon) \left(\alpha x - \frac{\tau}{x} \right) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۹-۳)$$

معادله (۹-۳) را به دو روش می‌توان به‌طور تحلیلی حل کرد: نخست این‌که با جمله خطی به صورت اختلالی رفتار کنیم که این شرط برای حالت‌های تراز پایین کاربردی است، و دوم اینکه با ارائه یک تقریب مناسب برای جمله خطی مسئله را به شکلی دریاوریم که به‌طور تحلیل قابل حل باشد [۷۳]. در روش

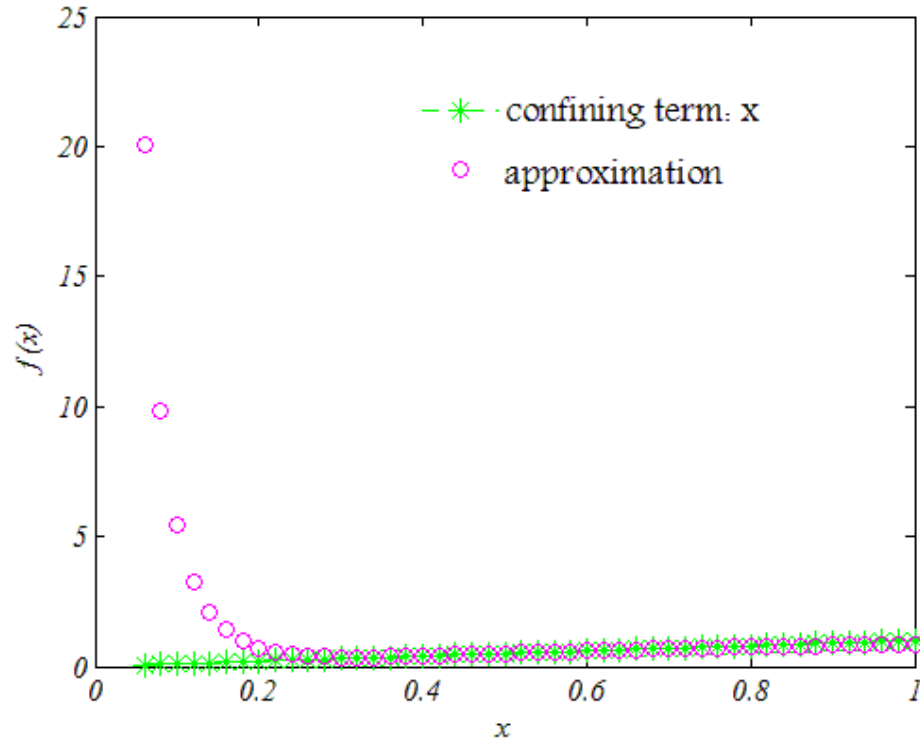
اول، با استفاده از تابع موج (۸-۳)، مقدار چشم‌داشتی جمله خطی را پیدا کرده و به معادله انرژی (۷-۳) اضافه می‌کنیم. از این طریق رابطه زیر برای انرژی کل به دست می‌آید [۷۴]:

$$M_{v,\gamma} = -\frac{\tau^2 m}{(2v + 2\gamma + 5)^2} \left(1 + \frac{\tau^2}{3(2v + 2\gamma + 5)^2}\right)^{-1} + 3m \frac{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{3m^2\tau} \left[3\left(v + \gamma + \frac{5}{2}\right)^2 - \gamma(\gamma + 4) - \frac{15}{4}\right] \left[1 + \frac{\tau^2}{3(2v + 2\gamma + 5)^2}\right]}}{1 + \frac{\tau^2}{3(2v + 2\gamma + 5)^2}} \quad (۱۰-۳)$$

اما در یک روش بهتر، برای مدل‌سازی بهتری از مسئله می‌توان از یک تقریب پکریس-مانند [۷۵-۷۷] برای جمله خطی استفاده کرد، و همان‌طور که نشان داده خواهد شد، این رویکرد منجر به یک مدل‌سازی بهتری از مسئله می‌شود. برای این منظور، ابتدا با تغییر متغیر $s = \frac{1}{x}$ معادله (۹-۳) را برحسب متغیر جدید بازنویسی می‌کنیم. سپس یک شعاع مشخصه x_0 برای باریون در نظر می‌گیریم. تقریب موردنظر بر مبنای بسط جمله $\frac{\alpha}{s}$ در یک سری توانی حول x_0 تا مرتبه دوم (حول $\delta \equiv \frac{1}{x_0}$ در فضای s) است. با قرار دادن $z = s - \delta$ و بسط سری توانی حول $z = 0$ ، داریم [۷۸]:

$$\frac{\alpha}{s} = \frac{\alpha}{(z + \delta)} = \frac{\alpha}{\delta} \left(1 - \frac{z}{\delta} + \left(\frac{z}{\delta}\right)^2 + \dots\right) \approx \frac{\alpha}{\delta^3} (3\delta^2 - 3\delta s + s^2) \quad (۱۱-۳)$$

به‌طورکلی هر قدر جملات بیشتری را اضافه کنیم، تقریب بهتری خواهیم داشت، اما در اینجا جملات تا درجه دوم برای منظور ما کافی هستند. با جایگذاری تقریب (۱۱-۳) در معادله (۹-۳) دیده می‌شود که معادله (۹-۳) در حضور و در غیاب جمله وابسته به α شکل یکسانی دارد. برای مشاهده دقت تقریب، جمله خطی $\gamma = x$ با و بدون تقریب (۱۱-۳) به ازای پارامتر ثابت $\delta = 2.1 \text{ fm}^{-1}$ در شکل (۲-۳) نشان داده شده است. تقریب بکار برده شده، علاوه بر اینکه پتانسیل موردنظر را به‌خوبی بازتولید می‌کند، یک دافعه شدید کوتاه برد نیز به خاطر حضور جمله x^{-2} تولید شده است که به‌طور طبیعی در برهم‌کنش دو ذره نقطه‌ای حضور این نیروی دافعه الزامی است و دلیل آن این است که کوارک‌ها ذرات فرمیونی بوده و



شکل (۳-۲): نمایش دقیق و تقریبی جمله خطی $y = x$ به ازای پارامتر ثابت $\delta = 2.1 \text{ fm}^{-1}$.

از حضور در ناحیه یکسان منع شده‌اند. با این ملاحظات، معادله (۳-۹) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} + \left(-\frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x} - B_3 \right) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۳-۱۲)$$

که در آن

$$B_1 = (m + \epsilon) \frac{\alpha}{\delta^3} + \gamma(\gamma + 4), \quad B_2 = (m + \epsilon) \left(\tau + \frac{3\alpha}{\delta^2} \right),$$

$$B_3 = 3(m^2 - \epsilon^2) + 3(m + \epsilon) \frac{\alpha}{\delta}. \quad (۳-۱۳)$$

یک مقایسه با مسئله فوق‌کولنی نشان می‌دهد که معادله (۳-۱۲) را می‌توانیم به‌عنوان معادله مشتقی

برای توابع لاگر تعمیم یافته شناسایی کرده و ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع مسئله را به دست بیاوریم. در

نتیجه ویژه توابع مستقیماً به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Psi_{n\gamma}(x) = \frac{(2h)^{\tilde{\gamma}+3} x^{\tilde{\gamma}} e^{-hx} L_n^{2\tilde{\gamma}+4}(2hx)}{\sqrt{(2n + 2\tilde{\gamma} + 5) \Gamma(n + 2\tilde{\gamma} + 5) / n!}} \quad (۳-۱۴)$$

که در آن

$$\tilde{\gamma} + 2 = \left[(\gamma + 2)^2 + (m + \epsilon) \frac{\alpha}{\delta^3} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad h = \frac{(m + \epsilon_{n,\gamma})(\tau + 3\alpha/\delta^2)}{2(n + \tilde{\gamma} + 5/2)}. \quad (15-3)$$

و انرژی به صورت زیر به دست می آید:

$$3\epsilon_{n,\gamma} = \left[3m + 3\frac{\alpha}{\delta} - m \left(\frac{\tau + \frac{3\alpha}{\delta^2}}{2n + 2\tilde{\gamma} + 5} \right)^2 \right] \left[1 + \frac{1}{3} \left(\frac{\tau + \frac{3\alpha}{\delta^2}}{2n + 2\tilde{\gamma} + 5} \right)^2 \right]^{-1} \quad (16-3)$$

طیف جرمی در غیاب برهم کنش فوق ریز برابر است با $M_{n,\gamma} = 3\epsilon_{n,\gamma}$ برای توصیف ساختار کیفی طیف جرمی نظری برای قسمت $SU(6)$ -ناوردای طیف، با توجه به معادلات (3-10) و (3-16) می توان ملاحظه کرد که انرژی میانگین چندگانه ها بازتولید شده و هم چنین تبهگنی بین حالت های پاریده مثبت 0_S^+ و پاریده منفی $1_{\bar{M}}$ ، که یک مشخصه برهم کنش فوق کولنی است، (به طور محسوسی) از بین رفته است.

۲-۳-۳ وارد کردن برهم کنش وابسته به اسپین-طعم، و طیف جرمی باریون های سبک و

شگفت

طیف باریونی، مجموع انرژی میانگین (در غیاب برهم کنش فوق ریز) و انرژی سیستم مختل شده (توسط برهم کنش های فوق ریز) است. در اینجا برای قسمت اسپین-طعم از فرمول جرم گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته، بر حسب عملگرهای کازیمیر، استفاده می کنیم.

$$\begin{aligned} \hat{M}_{sf} = & A\hat{C}_2[SU_{SF}(6)] + B\hat{C}_2[SU_F(3)] + C\hat{C}_2[SU_S(2)] + D\hat{C}_1[U_Y(1)] \\ & + E \left(\hat{C}_2[SU_I(2)] - \frac{1}{4}\hat{C}_2[U_Y(1)] \right) \end{aligned} \quad (17-3)$$

که به عنوان یک مکانیسم شکست تقارن $SU_{SF}(6)$ عمل می کند و طیف جرمی باریون ها را توصیف می کند. بنابراین، جرم هر باریون به صورت زیر نوشته می شود

$$M_{Baryon} = M_{v,\gamma} + \langle \hat{M}_{sf} \rangle \quad (18-3)$$

که $M_{n,\gamma}$ مقدار انرژی میانگین هر چندگانه $SU(3)$ است که در معادله‌های (۳-۱۰) و (۳-۱۶) داده شده است و $\hat{M}_{sf}$ به درجات آزادی اسپین، ایزواسپین و طعم وابسته است. عملگر $\hat{C}_2[SU(N)]$ عملگر کازیمیر درجه دو گروه $SU(N)$ برای درجات آزادی اسپین-طعم، طعم، اسپین، ایزواسپین و $\hat{C}_1[U(1)]$ عملگر کازیمیر خطی زیرگروه $SU(1)$ مربوط به ابربار است. با استفاده از مقدار چشمداشتی عملگرهای کازیمیر که در معادله (۱-۴۰) داده شده است و همچنین با انتخاب برخی رزونانس‌های باریونی و اختلاف جرم آن‌ها با استفاده از $\hat{M}_{sf}$ و مقدار چشمداشتی عملگرهای کازیمیر که در بخش‌های قبل توضیح داده شد، مقادیر پارامترهای معادله (۳-۱۸) را برای هر دو مورد اختلالی و تقریبی به دست آورده و در جدول (۳-۱) نشان داده‌ایم. نتایج محاسبات برای طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت، با هر دو روش، در جدول (۳-۲) و همچنین در قسمت‌های (a) و (b) شکل (۳-۳) نشان داده شده و با یکدیگر و نیز با مقادیر آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند. در هر دو روش، رزونانس‌های با n و γ و اسپین کل یکسان، تبهگن ظاهر می‌شوند که این مسئله به عدم حضور نیروهای اسپین-مدار در برهم‌کنش کوآرک-کوآرک برمی‌گردد. در کل، اختلاف بین جرم‌های نظری و تجربی کاملاً کوچک بوده و نتایج توافق خوبی با داده‌های تجربی دارند. تطابق نتایج خوب به دست آمده از مدل کنونی در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی [۵۸] نشان می‌دهد که مدل‌های ارائه شده کنونی با لحاظ کردن اثرات نسبیتی و به‌ویژه مدل تقریبی نیز با بهره‌گیری از یک تقریب مناسب برای جمله خطی پتانسیل فوق مرکزی، در بازتولید مقادیر آزمایشگاهی طیف جرمی موفق عمل می‌کند.

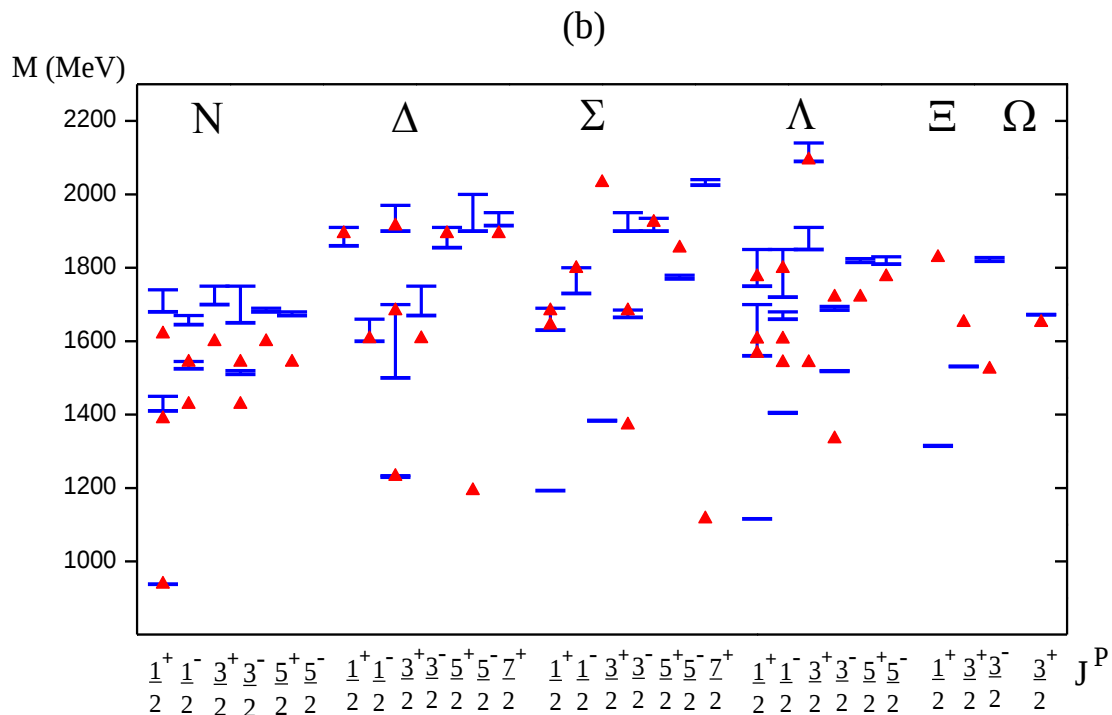
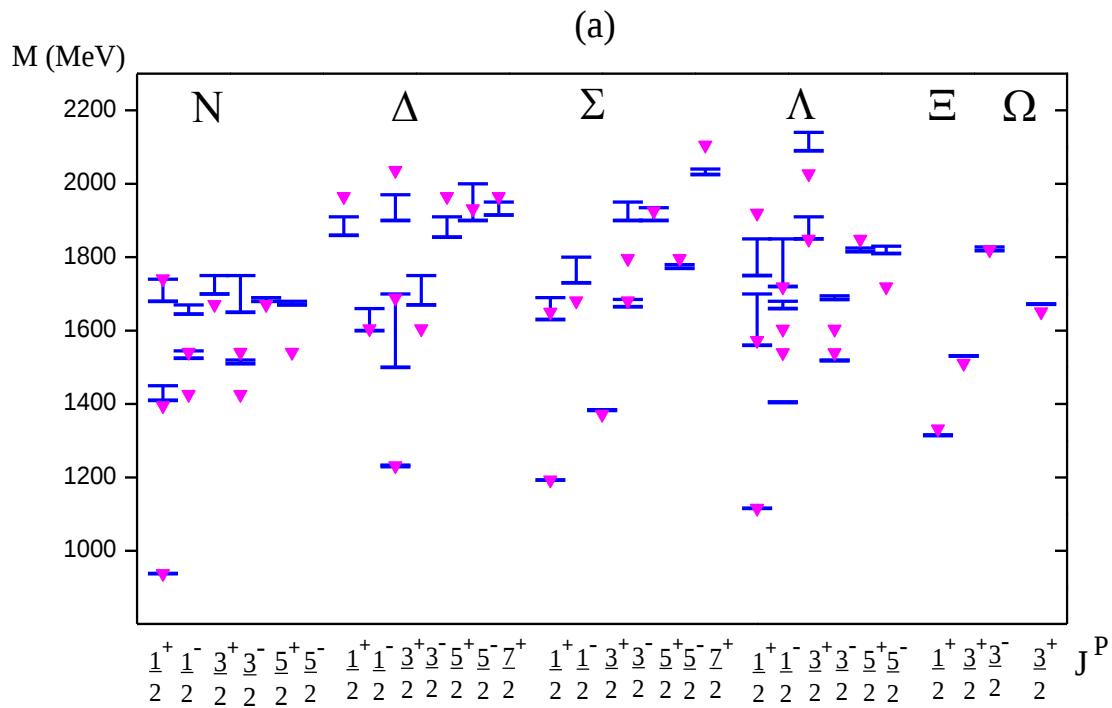
جدول (۳-۱): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله جرم (۳-۱۸) که از طریق فرایند تحلیلی، برای رهیافت‌های اختلالی (سطر اول) و تقریبی (سطر دوم)، تعیین شده‌اند (جرم m و پارامترهای A, B, C, D و E بر حسب MeV داده شده‌اند).

Parameter	τ	$\alpha(\text{fm}^{-2})$	$\beta(\text{fm}^{-1})$	m	A	B	C	D	E
Value I	7.7	1.19	-----	360	-21.25	21.3	38.3	-197.3	38.5
Value II	4.52	1.55	2.1	650	-21	21.3	38.3	-197.3	38.5

جدول (۲-۳): طیف جرمی به دست آمده برای رزونانس های باریون های سبک و شگفت. در روش های اختلالی ($M_{\text{calc.I}}$) و تقریبی ($M_{\text{calc.II}}$) در قیاس با نتایج مقادیر آزمایشگاهی [۵۸].

Baryon	$L_{2T} 2J$	status	State	J^P	$M_{\text{calc.I}}$	$M_{\text{calc.II}}$	$M_{\text{Expt.}}$
N(938)	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1}{2}^+$	938	938	938
N(1440)	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1}{2}^+$	1395	1389	1420-1470
N(1535)	S_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	$\frac{1}{2}^-$	1426	1428	1525-1545
N(1520)	D_{13}	*****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3}{2}^-$	1426	1428	1515-1525
N(1650)	S_{11}	*****	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	$\frac{1}{2}^-$	1541	1543	1645-1670
N(1700)	D_{13}	****	$^4 8_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3}{2}^-$	1541	1543	1650-1750
N(1675)	D_{15}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	$\frac{5}{2}^-$	1541	1543	1670-1680
N(1710)	P_{11}	****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1}{2}^+$	1741	1620	1680-1740
N(1720)	P_{13}	*****	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	$\frac{3}{2}^+$	1671	1599	1650-1750
N(1680)	F_{15}	*****	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	$\frac{5}{2}^+$	1671	1599	1675-1690
$\Delta(1232)$	P_{33}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$\frac{3}{2}^+$	1232	1232	1230-1234
$\Delta(1600)$	P_{33}	****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$\frac{3}{2}^+$	1689	1683	1550-1700
$\Delta(1620)$	S_{31}	*****	$^2 10_{1/2}[70, 1^-]$	$\frac{1}{2}^-$	1605	1607	1615-1675
$\Delta(1700)$	D_{33}	*****	$^2 10_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3}{2}^-$	1605	1607	1650-1750
$\Delta(1910)$	P_{31}	*****	$^4 10_{1/2}[56, 2^+]$	$\frac{1}{2}^+$	1965	1893	1870-1920
$\Delta(1920)$	P_{33}	****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$\frac{3}{2}^+$	2036	1914	1900-1970
$\Delta(1905)$	F_{35}	****	$^4 10_{5/2}[56, 2^+]$	$\frac{5}{2}^+$	1965	1893	1865-1915
$\Delta(1950)$	F_{37}	*****	$^4 10_{7/2}[56, 2^+]$	$\frac{7}{2}^+$	1965	1893	1915-1950
$\Sigma(1193)$	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1}{2}^+$	1193	1193	1193
$\Sigma(1660)$	P_{11}	****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1}{2}^+$	1650	1644	1630-1690
$\Sigma(1670)$	D_{13}	*****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3}{2}^-$	1681	1683	1665-1685
$\Sigma(1750)$	S_{11}	****	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	$\frac{1}{2}^-$	1681	1683	1730-1800

$\Sigma(1775)$	D_{15}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	$\frac{5^-}{2}$	1796	1798	1770-1780
$\Sigma(1915)$	F_{15}	*****	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	$\frac{5^+}{2}$	1926	1854	1900-1935
$\Sigma(1940)$	D_{13}	****	$^4 8_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3^-}{2}$	1796	1924	1900-1950
$\Sigma^*(1385)$	P_{13}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$\frac{3^+}{2}$	1372	1372	1383-1385
$\Sigma^*(2030)$	F_{17}	*****	$^4 10_{7/2}[56, 2^+]$	$\frac{7^+}{2}$	2105	2032	2025-2040
$\Lambda(1116)$	P_{01}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1^+}{2}$	1116	1116	1116
$\Lambda(1600)$	P_{01}	****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1^+}{2}$	1573	1567	1560-1700
$\Lambda(1670)$	S_{01}	*****	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	$\frac{1^-}{2}$	1604	1606	1660-1680
$\Lambda(1690)$	D_{03}	*****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3^-}{2}$	1604	1606	1685-1695
$\Lambda(1800)$	S_{01}	****	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	$\frac{1^-}{2}$	1719	1720	1720-1850
$\Lambda(1810)$	P_{01}	****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1^+}{2}$	1920	1798	1750-1850
$\Lambda(1820)$	F_{05}	*****	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	$\frac{5^+}{2}$	1849	1776	1815-1825
$\Lambda(1830)$	D_{05}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	$\frac{5^-}{2}$	1719	1720	1810-1830
$\Lambda(1890)$	P_{03}	*****	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	$\frac{3^+}{2}$	1849	1776	1850-1910
$\Lambda(2110)$	F_{05}	*****	$^4 8_{5/2}[70, 2^+]$	$\frac{5^+}{2}$	2027	2094	2090-2140
$\Lambda^*(1405)$	S_{01}	*****	$^2 1_{1/2}[70, 1^-]$	$\frac{1^-}{2}$	1540	1542	1402-1410
$\Lambda^*(1520)$	D_{01}	*****	$^2 1_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3^-}{2}$	1540	1542	1518-1520
$\Xi(1318)$	P_{11}	*****	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$\frac{1^+}{2}$	1332	1334	1314-1316
$\Xi(1820)$	D_{13}	****	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$\frac{3^-}{2}$	1820	1828	1818-1828
$\Xi(1530)$	P_{13}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$\frac{3^+}{2}$	1511	1524	1531-1532
$\Omega(1672)$	P_{03}	*****	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$\frac{3^+}{2}$	1651	1651	1672-1673



شکل (۳-۳): طیف جرمی به دست آمده برای باریون‌های سبک و شگفت از معادله (۳-۱۸)، در رهیافت اختلالی (a) (به ازای مقادیر پارامترهای سطر اول جدول (۳-۱))، و رهیافت تقریبی (b) (به ازای مقادیر پارامترهای سطر دوم جدول (۳-۱)). مقادیر نظری با مثلث‌های رنگی و مقادیر آزمایشگاهی [۵۸] با بازه‌های آبی رنگ مشخص شده‌اند.

۳-۳-۳ حل دقیق مسئله سه-کوارکی نیمه نسبیتی با پتانسیل فوق مرکزی "نوسانگری +

خطی + کولنی"

معادله کلاین-گوردون سه-جسمی با پتانسیل فوق مرکزی "نوسانگری + خطی + کولنی" به شکل زیر است:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 3(\epsilon^2 - m^2) - (m + \epsilon) \left(\alpha x^2 + \beta x - \frac{\tau}{x} \right) \right] \Psi_{n\gamma}(x) = 0 \quad (۱۹-۳)$$

این معادله شبیه معادله (۶۸-۲) در بخش (۱-۵-۲) است که در اینجا عبارت‌های $3(\epsilon^2 - m^2)$ و $m + \epsilon$

به ترتیب به جای عبارت‌های $2mE$ و $2m$ در معادله غیر نسبیتی قرار گرفته‌اند. بنابراین، با جایگزینی این

عبارت‌ها می‌توانیم جواب مسئله را به‌طور مستقیم به‌دست آوریم. ویژه مقادیر انرژی به‌صورت زیر به دست

می‌آید [۷۹].

$$E_N = \left[3m + (N + 3)\omega - \frac{m\tau^2}{(2N + 5)^2} \right] \left[1 + \frac{\tau^2}{3(2N + 5)^2} \right]^{-1} \quad (۲۰-۳)$$

که در اینجا عدد کوانتومی N برابر است با $N = n + \gamma$ و تابع موج ابرشعاعی به‌صورت زیر است.

$$\Psi_{N\gamma}(x) = A_{N\gamma} x^\gamma \exp \left(-\frac{1}{4}(m + \epsilon)\omega x^2 - \frac{(m + \epsilon)\tau}{2N + 5} x \right) \sum_{n=0}^{n=n_{max}} a_n x^n, \quad (۲۱-۳)$$

ثابت بهنجارش $A_{N\gamma}$ از شرط $\int_0^\infty x^5 |\Psi_{N\gamma}(x)|^2 dx = 1$ تعیین می‌شود و ضرایب بسط a_n مشابه رابطه

(۷۹-۲) به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{(m + \frac{1}{3}E_1)\tau}{(2\gamma + 5)(\gamma + \frac{7}{2})}, a_2 = -\frac{(m + \frac{1}{3}E_2)\tau}{2\gamma + 6} + \frac{(m + \frac{1}{3}E_2)^2 \tau^2}{8(\gamma + 3)^2(\gamma + \frac{7}{2})^2}, \dots \quad (۲۲-۳)$$

۴-۳-۳ اثر برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین و نتایج برای باریون‌های سبک

جداشدگی بین چندگانه‌های باریونی توسط برهم‌کنش فوق‌ریز وابسته به اسپین و ایزواسپین:

$$V_{hyp} = \sum_{i < j} \left[\frac{A_S e^{-r_{ij}^2/\sigma_S^2}}{(\sqrt{\pi}\sigma_S)^3} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j) + \frac{A_I e^{-r_{ij}^2/\sigma_I^2}}{(\sqrt{\pi}\sigma_I)^3} (\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j) + \frac{A_{SI} e^{-r_{ij}^2/\sigma_{SI}^2}}{(\sqrt{\pi}\sigma_{SI})^3} (\mathbf{s}_i \cdot \mathbf{s}_j)(\mathbf{t}_i \cdot \mathbf{t}_j) \right] \quad (۲۳-۳)$$

ایجاد می‌شود که در اینجا جمله اول مربوط به برهم‌کنش اسپین-اسپین، جمله دوم مربوط به برهم‌کنش ایزواسپین-ایزواسپین و جمله سوم مربوط به برهم‌کنش اسپین-ایزواسپین است. در رابطه فوق، $s_i(t_i)$ عملگر اسپین (ایزواسپین) کوارک i -ام و r_{ij} فاصله نسبی جفت کوارک‌ها است و بقیه پارامترها ثوابتی هستند که باید تعیین شوند. در اینجا ما اثرات برهم‌کنش فوق‌ریز (۳-۲۳) را به صورت پتانسیل اختلالی با استفاده از توابع موج (۳-۲۱) وارد مسئله می‌کنیم. به این ترتیب، طیف باریونی مجموع طیف جرمی در غیاب برهم‌کنش فوق‌ریز و انرژی سیستم مختل شده توسط برهم‌کنش فوق‌ریز است.

$$M_{baryon} = M_{n,\gamma} + \langle H_{hyp} \rangle \quad (۳-۲۴)$$

شدت برهم‌کنش فوق‌ریز از تفاضل جرم $N - \Delta$ به دست می‌آید. با ثابت گرفتن جرم مشترک کوارک‌ها به صورت $m = 360 \text{ MeV}$ ، ضرایب معادله (۳-۲۴) در یک برازش هم‌زمان برای رزونانس‌های سه و چهار ستاره N و Δ تعیین می‌شود که در جدول شماره (۳-۳) داده شده‌اند. نتایج محاسبات برای طیف جرمی نوکلئون و رزونانس Δ در جدول (۳-۴) و شکل (۳-۴) نشان داده شده و با مقادیر تجربی مقایسه شده‌اند.

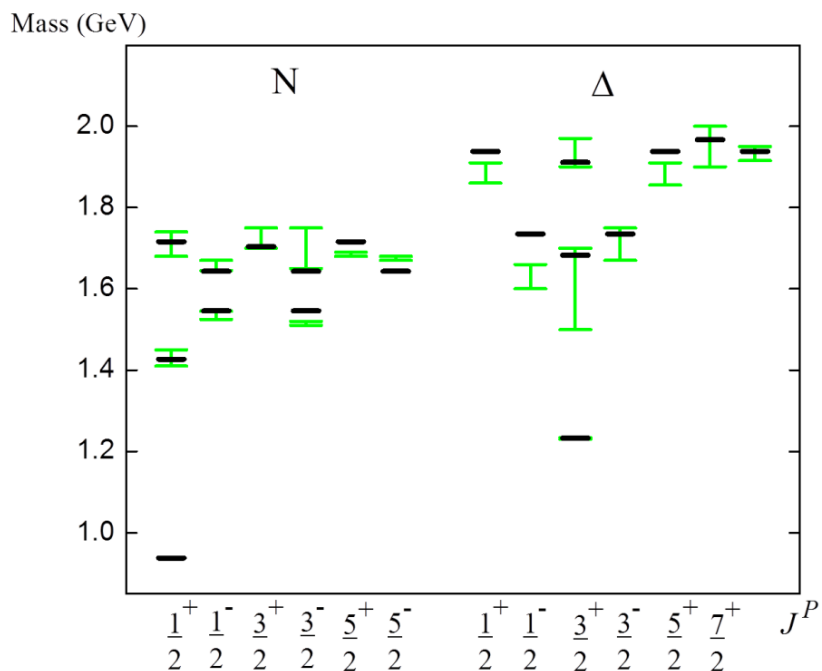
جدول (۳-۳): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله طیف جرمی (۳-۲۴).

Parameter	c	$\omega \text{ (fm}^{-1}\text{)}$	A_S	A_I	$A_{SI} \text{ (fm}^2\text{)}$	σ_S	σ_I	$\sigma_{SI} \text{ (fm)}$
Value	4.52	1.06	67.4	51.7	-106.2	2.87	3.45	2.31

جدول (۳-۴): طیف جرمی به دست آمده برای رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت، در مدل کنونی با معادله (۳-۲۴) در قیاس با نتایج کار جیبانی [۵۱] و مقادیر آزمایشگاهی [۵۸].

Baryon	$L_{2T\ 2J}$	status	J^P	(n, γ)	S	T	$M_{Theor.}$	$M_{[38] \text{ calc.}}$	$M_{Expt.}$
N(938)	P_{11}	****	$\frac{1}{2}^+$	(0, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	938	938	939
N(1440)	P_{11}	****	$\frac{1}{2}^+$	(1, 0)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1427	1463	1410-1450
N(1520)	D_{13}	****	$\frac{3}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1546	1524	1510-1520
N(1535)	S_{11}	****	$\frac{1}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1546	1524	1525-1545
N(1650)	S_{11}	****	$\frac{1}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1643	1688	1645-1670
N(1675)	D_{15}	****	$\frac{5}{2}^-$	(0, 1)	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1643	1668	1670-1680

N(1680)	F_{15}	****	$\frac{5}{2}^{+}$	(0, 2)	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	1716	1680	1680-1690
N(1700)	D_{13}	***	$\frac{3}{2}^{-}$	(0, 1)	$\frac{3}{2} \frac{1}{2}$	1643	1692	1650-1750
N(1710)	P_{11}	***	$\frac{1}{2}^{+}$	(2, 0)	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	1704	1752	1680-1740
N(1720)	P_{13}	****	$\frac{3}{2}^{+}$	(0, 2)	$\frac{1}{2} \frac{1}{2}$	1716	1648	1700-1750
$\Delta(1232)$	P_{33}	****	$\frac{3}{2}^{+}$	(0, 0)	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1232	1232	1230-1234
$\Delta(1600)$	P_{33}	***	$\frac{3}{2}^{+}$	(1, 0)	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1683	1727	1500-1700
$\Delta(1620)$	S_{31}	****	$\frac{1}{2}^{-}$	(0, 1)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2}$	1735	1573	1600-1660
$\Delta(1700)$	D_{33}	****	$\frac{3}{2}^{-}$	(0, 1)	$\frac{1}{2} \frac{3}{2}$	1735	1573	1670-1750
$\Delta(1910)$	P_{31}	****	$\frac{1}{2}^{+}$	(0, 2)	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1938	1953	1860-1910
$\Delta(1920)$	P_{33}	***	$\frac{3}{2}^{+}$	(2, 0)	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1911	1921	1900-1970
$\Delta(1930)$	D_{35}	***	$\frac{5}{2}^{-}$	(1, 1)	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1967	---	1900-2000
$\Delta(1905)$	F_{35}	****	$\frac{5}{2}^{+}$	(0, 2)	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1938	1901	1855-1910
$\Delta(1950)$	F_{37}	****	$\frac{7}{2}^{+}$	(0, 2)	$\frac{3}{2} \frac{3}{2}$	1938	1955	1915-1950



شکل (۳-۴): طیف جرمی باریون‌های سبک، از معادله (۳-۲۴) (خط‌ها)، در قیاس با مقادیر تجربی (بازه‌های رنگی) [۵۸].

۳-۴. حل دقیق مسئله سه-کوارکی نیمه نسبیتی با پتانسیل‌های برداری و اسکالر

متفاوت

لازم به ذکر است که محاسبات مدل‌های کوارکی و داده‌های QCD شبکه پیشنهاد می‌کنند که پتانسیل تبادل یک گلوئون باید به‌طور خالص برداری باشد، درحالی‌که پتانسیل محبوس کننده باید به‌طور خالص اسکالر در نظر گرفته شود (یا دست‌کم قسمت عمده‌اش اسکالر باشد). در اینجا با در نظر گرفتن پتانسیل کولنی (تبادل یک گلوئون) برداری و پتانسیل محبوس کننده خطی که به‌طور خالص اسکالر در نظر گرفته می‌شود، معادله ابرشعاعی مربوطه را حل کرده و ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی را به‌دست می‌آوریم.

۳-۴-۱ حل تحلیلی دقیق معادله کلاین-گوردون سه-کوارکی با پتانسیل برداری کولنی و

اسکالر خطی

با در نظر گرفتن پتانسیل خطی اسکالر و کولنی برداری به‌صورت $[۸۰, ۸۱]$:

$$V_S(x) = \alpha x, \quad V_V(x) = -\frac{\tau}{x} \quad (۳-۲۵)$$

و با جاگذاری معادله (۳-۲۵) در معادله (۳-۶)، به معادله زیر می‌رسیم:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{5}{x} \frac{d}{dx} - \frac{\gamma(\gamma+4)}{x^2} + 3(\epsilon^2 - m^2) - 2max + 2\epsilon \frac{\tau}{x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\tau^2}{x^2} - \alpha^2 x^2 \right) \right] \psi_{V\gamma}(x) = 0 \quad (۳-۲۶)$$

مشاهده می‌شود که حضور جمله α^2 باعث ظاهر شدن یک جمله نوسانگری می‌شود و حضور جمله τ^2

منجر به یک جمله دافعه کوتاه برد با تابعیت x^{-2} می‌گردد. با در نظر گرفتن تابع موج به‌صورت

$$\psi_{V\gamma}(x) = x^{-5/2} \phi_{V\gamma}(x)$$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{B_1}{x^2} + \frac{B_2}{x} - B_3 - B_4 x - B_5 x^2 \right) \right] \phi_{V\gamma}(x) = 0 \quad (۳-۲۷)$$

که در آن

$$B_1 = \frac{\tau^2}{2} - \left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\left(\gamma + \frac{5}{2}\right), \quad B_2 = 2\epsilon\tau, \quad B_3 = 3(m^2 - \epsilon^2), \quad B_4 = 2m\alpha, \quad B_5 = \frac{1}{2}\alpha^2 \quad (28-3)$$

برای حل تحلیلی معادله (۲۷-۳)، تابع موج را به صورت $\phi_{\nu}(x) = F(x)\exp[G(x)]$ فرض می‌کنیم و توابع $F(x)$ و $G(x)$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} x^{\nu}, \quad G(x) = \delta \ln(x) - \eta x - \frac{1}{2}\kappa x^2 \quad (29-3)$$

با وارد کردن معادله (۲۹-۳) در معادله (۲۷-۳) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} [(\nu + \delta)(\nu + \delta - 1) + B_1] + \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu-1} [-2\eta(\nu + \delta - 1) + B_2] \\ + \sum_{\nu=2}^{\infty} b_{\nu-2} [\eta^2 - 2\kappa(\nu + \delta - 2) - \kappa - B_3] = 0 \end{aligned} \quad (30-3)$$

همراه با

$$B_4 = 2\eta\kappa, \quad B_5 = \kappa^2 \quad (31-3)$$

برای اینکه تابع موج $\phi(x)$ در بی‌نهایت خوش‌رفتار باشد، سری‌ها باید به ازای $\nu = \nu_{max}$ پایان‌پذیر (محدود) باشند. نتیجتاً تابع $F(x)$ طبق رابطه (۲۹-۳) یک چندجمله‌ای درجه ν است به شرط اینکه: $b_{-m} = 0$ و $b_{\nu} \neq 0$, $b_{\nu+1} = b_{\nu+2} = 0$ که در آن $m = 0, 1, 2, \dots$ است. این ملاحظات به روابط زیر منجر می‌شود:

$$B_1 = -\delta(\delta - 1), \quad B_2 = 2\eta(\nu + \delta), \quad B_3 = \eta^2 - 2\kappa\left(\nu + \delta + \frac{1}{2}\right) \quad (32-3)$$

که از این طریق پارامترهای تابع موج (۲۹-۳) را به صورت زیر به دست می‌آوریم.

$$\delta = \frac{1}{2} + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}}, \quad \kappa = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{\epsilon\tau}{\nu + \frac{1}{2} + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}}} \quad (33-3)$$

با استفاده از روابط (۳۲-۳) و (۳۳-۳) ترازهای انرژی نسبیتی سه-ذره‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$M_{\nu,\gamma} = 3m \left(\frac{1 + \frac{\sqrt{2}\alpha}{3m^2} \left(\nu + 1 + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}} \right)}{1 + \frac{1}{3}\tau^2 / \left(\nu + \frac{1}{2} + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}} \right)^2} \right)^{1/2} \quad (34-3)$$

که در اینجا ν و γ ، به ترتیب، اعداد کوانتومی مربوط به برانگیختگی‌های ابرشعاعی و تکانه زاویه‌ای بزرگ هستند. ویژه توابع نسبیتی به صورت زیر در می‌آیند:

$$\Psi_{\nu\gamma}(x) = N_{\nu\gamma} x^{-2 + \sqrt{(\gamma+2)^2 - \frac{\tau^2}{2}}} \exp \left[-\frac{\alpha}{2\sqrt{2}} x^2 - \frac{\tau\epsilon_{\nu,\gamma}}{\nu + \frac{1}{2} + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}}} x \right] F_{\nu}^{\gamma}(x) \quad (35-3)$$

ثابت بهنجارش $N_{\nu\gamma}$ از شرط $\int_0^{\infty} dx x^5 |\Psi_{\nu\gamma}(x)|^2 = 1$ تعیین می‌شود و $F_{\nu}^{\gamma}(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ν است که در آن ضرایب b_{ν} از معادله (30-3) به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$b_0 = 1, b_1 = -\frac{\tau\epsilon_{1,\gamma}}{\left[\left(1 + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]}, b_2 = -\frac{\alpha}{1 + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}}} + \frac{\tau^2 \epsilon_{1,\gamma} \epsilon_{2,\gamma}}{\left[1 + 2\sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}} \right] \left[1 + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}} \right] \left[\left(2 + \sqrt{(\gamma + 2)^2 - \frac{\tau^2}{2}} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]}, \dots \quad (36-3)$$

۳-۴-۲ اعمال فرمول جرم گورسی-رادیکاتی و نتایج مدل برای باریون‌های سبک و شگفت

جرم هر باریون به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$M_{\text{Baryon}} = M_{\nu,\gamma} + \langle \hat{M}_{\text{sf}} \rangle \quad (37-3)$$

که $M_{n,\gamma}$ مقدار انرژی میانگین هر چندگانه $SU(3)$ است که در معادله (34-3) داده شده است و $\hat{M}_{\text{sf}}$ به درجات آزادی اسپین، ایزواسپین و طعم وابسته است. در اینجا برای قسمت اسپین-طعم از فرمول جرم گورسی-رادیکاتی تعمیم یافته، بر حسب عملگرهای کازیمیر، استفاده می‌کنیم.

$$\hat{M}_{sf} = A\hat{C}_2[SU_{SF}(6)] + B\hat{C}_2[SU_F(3)] + C\hat{C}_2[SU_S(2)] + D\hat{C}_1[U_Y(1)] \\ + E\left(\hat{C}_2[SU_I(2)] - \frac{1}{4}\hat{C}_2[U_Y(1)]\right) \quad (3-38)$$

که به عنوان یک مکانیسم شکست تقارن $SU_{SF}(6)$ عمل می‌کند و طیف جرمی باریون‌ها را توصیف می‌کند. در اینجا عملگر $(\hat{C}_1[U(1)])(\hat{C}_2[SU(N)])$ عملگر کازیمیر درجه دو (خطی) گروه $SU(N)$ (زیرگروه $SU(1)$) مربوطه برای درجات آزادی داخلی (اسپین-طعم، طعم، اسپین، ایزواسپین و ابربار) است. برای باریون‌های سبک و شگفت، ابربار برابر است با مجموع عدد شگفتی و عدد باریونی $Y = B + S$ و مؤلفه ایزواسپین طبق رابطه $I_3 = \frac{1}{2}(n_u - n_d)$ مربوط است به محتوای کوارکی (تعداد کوارک‌های u و d) باریون‌ها. با استفاده از مقدار چشمداشتی عملگرهای کازیمیر که در معادله (۳-۴۰) داده شده است و همچنین با انتخاب برخی رزونانس‌های باریونی و اختلاف جرم آن‌ها با استفاده از $\hat{M}_{sf}$ و مقدار چشمداشتی عملگرهای کازیمیر که در بخش‌های قبل توضیح داده شد، مقادیر پارامترهای معادله (۳-۳۷) را به دست آورده و در جدول (۳-۵) نشان داده‌ایم.

جدول (۳-۵): مقادیر برازش یافته پارامترهای معادله (۳-۳۷) که طی فرایند تحلیلی تعیین شده‌اند.

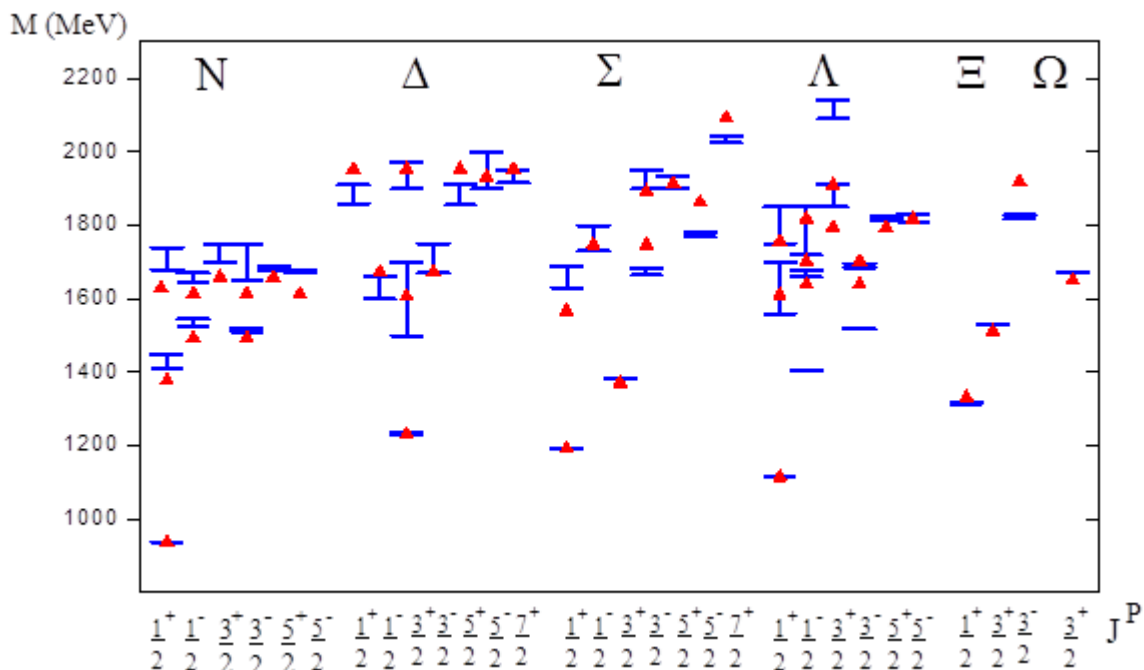
Parameter	m (MeV)	τ	α (fm ⁻²)	A (MeV)	B(MeV)	C(MeV)	D (MeV)	E (MeV)
Value	693	2.82	0.31	8.2	21.3	38.3	-197.3	38.5

نتایج محاسبات برای طیف جرمی باریون‌های سبک و شگفت در جدول (۳-۵) و همچنین شکل (۳-۷) داده شده و با مقادیر آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند. توصیف کلی طیف جرمی که به دست می‌آوریم نسبتاً خوب است. اما طیف جرم نظری برای برخی رزونانس‌ها، مانند $N(1440)$ و $N(1710)$ ، اختلاف اندکی با مقادیر تجربی متناظر دارند و همچنین رزونانس‌های با ν و γ و اسپین کل یکسان، هنوز هم تبهگن ظاهر می‌شوند که این مسئله به عدم حضور نیروهای اسپین-مدار در برهم‌کنش کوارک-کوارک برمی‌گردد. فرای این مسئله، اختلاف بین جرم‌های نظری و آزمایشگاهی کاملاً کوچک بوده و نتایج به دست آمده توافق خوبی با داده‌های تجربی دارند.

جدول (۳-۶): طیف جرمی به دست آمده برای رزونانس های باریون های سبک و شگفت، از معادله (۳-۳۷)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی [۵۸].

Resonance	$^{2S+1}[F]_J[[SF], L^P]$	J^P	$M_{\text{Theor.}}$
N (938) P_{11}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	939
N(1440 $^{+10}_{-30}$) P_{11}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1390
N(1535 $^{+10}_{-10}$) S_{11}	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1480
N(1520 $_{-10}$) D_{13}	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1480
N(1650 $^{+20}_{-5}$) S_{11}	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1607
N(1700 $^{+50}_{-50}$) D_{13}	$^4 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1607
N(1675 $^{+5}_{-5}$) D_{15}	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	$5/2^-$	1607
N(1710 $^{+30}_{-30}$) P_{11}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1623
N(1720 $^{+30}_{-20}$) P_{13}	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	$3/2^+$	1676
N(1680 $^{+10}$) F_{15}	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1676
$\Delta(1232^{+2}_{-2})$ P_{33}	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1233
$\Delta(1600^{+100}_{-100})$ P_{33}	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1597
$\Delta(1620^{+40}_{-20})$ S_{31}	$^2 10_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1660
$\Delta(1700^{+50}_{-30})$ D_{33}	$^2 10_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1660
$\Delta(1905^{+5}_{-50})$ F_{35}	$^4 10_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1957
$\Delta(1910_{-50})$ P_{31}	$^4 10_{1/2}[56, 2^+]$	$1/2^+$	1957
$\Delta(1920^{+50}_{-20})$ P_{33}	$^4 10_{3/2}[56, 2^+]$	$3/2^+$	1957
$\Delta(1930^{+70}_{-30})$ D_{35}	$^4 10_{5/2}[56, 1^-]$	$5/2^-$	1942
$\Delta(1950_{-35})$ F_{37}	$^4 10_{7/2}[56, 2^+]$	$7/2^+$	1957
$\Lambda(1116)$ P_{01}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1116
$\Lambda(1600^{+100}_{-40})$ P_{01}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1652
$\Lambda(1670^{+10}_{-10})$ S_{01}	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1658
$\Lambda(1690^{+5}_{-5})$ D_{03}	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1658
$\Lambda(1800^{+50}_{-80})$ S_{01}	$^4 8_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1773
$\Lambda(1810^{+40}_{-60})$ P_{01}	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1890
$\Lambda(1820^{+5}_{-5})$ F_{05}	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1853
$\Lambda(1830_{-20})$ D_{05}	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	$5/2^-$	1773
$\Lambda(1890^{+20}_{-40})$ P_{03}	$^2 8_{3/2}[56, 2^+]$	$3/2^+$	1853
$\Lambda(2110^{+30}_{-20})$ F_{05}	$^4 8_{5/2}[70, 2^+]$	$3/2^+$	2027
$\Lambda^*(1405^{+1}_{-1})$ S_{01}	$^2 1_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1594

$\Lambda^*(1520_{-2}) D_{01}$	$^2 1_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1594
$\Sigma (1193) P_{11}$	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1193
$\Sigma (1660^{+30}_{-30}) P_{11}$	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1729
$\Sigma (1670^{+15}_{-5}) D_{13}$	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1735
$\Sigma (1750^{+50}_{-20}) S_{11}$	$^2 8_{1/2}[70, 1^-]$	$1/2^-$	1735
$\Sigma (1775^{+5}_{-5}) D_{15}$	$^4 8_{5/2}[70, 1^-]$	$5/2^-$	1850
$\Sigma (1915^{+20}_{-15}) F_{15}$	$^2 8_{5/2}[56, 2^+]$	$5/2^+$	1885
$\Sigma (1940^{+10}_{-40}) D_{13}$	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1931
$\Sigma^* (1385_{-2}) P_{13}$	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1373
$\Sigma^* (2030^{+10}_{-5}) F_{17}$	$^4 10_{7/2}[56, 2^+]$	$7/2^+$	2109
$\Xi (1318^{+2}_{-4}) P_{11}$	$^2 8_{1/2}[56, 0^+]$	$1/2^+$	1333
$\Xi (1820^{+8}_{-2}) D_{13}$	$^2 8_{3/2}[70, 1^-]$	$3/2^-$	1875
$\Xi (1530^{+2}_{+1}) P_{13}$	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1512
$\Omega(1672^{+1}) P_{03}$	$^4 10_{3/2}[56, 0^+]$	$3/2^+$	1652



شکل (۵-۳): طیف جرمی نظری رزونانس‌های باریون‌های سبک و شگفت با استفاده از معادله (۳-۳۷) به ازای مقادیر پارامترهای برازش یافته جدول (۵-۳)، (مثلث‌های قرمز رنگ)، در قیاس با مقادیر آزمایشگاهی (بازه‌های آبی رنگ) [۵۸].

فصل چهارم

ساختار الکترومغناطیسی باریونها

۴-۱ مقدمه

در اینجا سعی خواهیم کرد ساختار باریون و راه‌های دستیابی به آن را بررسی کنیم. از واریسی نوکلئون‌ها با فوتون‌های مجازی، در پراکندگی الکترون-نوکلئون، می‌توانیم اطلاعات زیادی درباره ساختار الکترومغناطیسی نوکلئون‌ها به دست بیاوریم. این نوع سنجش همچنین به ما امکان می‌دهد که به فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی نوکلئون دست پیدا کنیم. این فرم فاکتورها نه تنها یک زمینه سنجش برای مدل‌های مؤثر فراهم می‌کنند بلکه همچنین به عنوان یک ورودی برای کاربردهایی در زمینه‌های زیادی از فیزیک هسته‌ای و ذره‌ای می‌باشند. برعکس الکترون‌ها (در حالت کلی، لپتون‌ها) که ذره‌های نقطه‌ای بدون ساختارند، باریون‌ها (و کلاً هادرون‌ها) ساختار پیچیده‌ای از کوارک‌ها و گلوئون دارند. بنابراین، برای توصیف آن‌ها برحسب اجزای سازنده‌شان باید توابع موج آن‌ها را پیدا کنیم. یعنی، برای مثال، نوکلئون را برحسب توزیع کوارک‌های درونش توصیف کنیم. در اینجا ما ابتدا به معرفی فرمول‌بندی و وضعیت آزمایشگاهی می‌پردازیم و در ادامه روی محاسبات و نتایجی که می‌توانیم از مدل‌های ارائه شده بگیریم، متمرکز می‌شویم. در بخش بعد، پراکندگی کشسان الکترون از پروتون را، با در نظر گرفتن پروتون به صورت یک ذره نقطه‌ای و سپس یک جسم غیر نقطه‌ای دارای ساختار، بررسی می‌کنیم. در ادامه فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی و شعاع‌های باری نوکلئون‌ها را مورد بررسی قرار داده و نتایج محاسبات برای مدل‌های معرفی شده در فصل دوم و سوم را ارائه می‌کنیم.

۴-۲ پراکندگی الکترون از پروتون

می‌دانیم که در پراکندگی الاستیک الکترون از پروتون، ماهیت برهم‌کنش فوتون‌های مجازی با پروتون شدیداً به طول موج فوتون بستگی دارد. در طول موج‌های بزرگ (در قیاس با ابعاد پروتون، $\lambda \gg r_p$) که

متناظر با انرژی‌های خیلی پایین الکترون فرودی است، فرآیند پراکندگی را پراکندگی از یک هدف بدون اسپین نقطه‌ای (بدون ساختار) در نظر می‌گیریم و سطح مقطع مرجع به این صورت است [۸۲]:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{point}} \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{(Z\alpha)^2 E^2}{4k^4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(1 - v^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (۱-۴)$$

که در اینجا $v = k/E$, $k = |\mathbf{k}| = |\mathbf{k}'|$ و θ زاویه پراکندگی الکترون است. اگر پروتون بدون ساختار می‌بود و پس‌زنی هم نمی‌داشت، می‌توانستیم آن را یک جسم نقطه‌ای باردار بسیار سنگین بپنداریم. در این صورت می‌دانیم که سطح مقطع پراکندگی الکترون-پروتون همان سطح مقطع موت است که در رابطه (۱-۴) داده شده است. اگر پروتون را ذره نقطه‌ای با بار الکتریکی e و گشتاور مغناطیسی $e/2m_p$ در نظر می‌گیریم و سطح مقطع پراکندگی الکترون-پروتون در این صورت برابر است با:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\Omega}\right|_{\text{lab}} = \left(\frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta_{\text{lab}}/2)}\right) \frac{E_2}{E_1} \left(\cos^2(\theta_{\text{lab}}/2) - \frac{q^2}{2m_p^2} \sin^2(\theta_{\text{lab}}/2)\right) \quad (۲-۴)$$

که در اینجا ضریب

$$\frac{E_2}{E_1} = \left(1 + \frac{2E_1}{m_p} \sin^2(\theta_{\text{lab}}/2)\right)^{-1} \quad (۳-۴)$$

اثر پس‌زنی پروتون است، داخل پرانتز رابطه (۲-۴)، جمله متناسب با $\cos(\theta/2)$ به پراکندگی کولنی (از بار الکتریکی) مربوط است و جمله متناسب با $\sin(\theta/2)$ مربوط به گشتاور مغناطیسی ذره هدف (برهم‌کنش مغناطیسی ناشی از برهم‌کنش اسپین-اسپین) است.

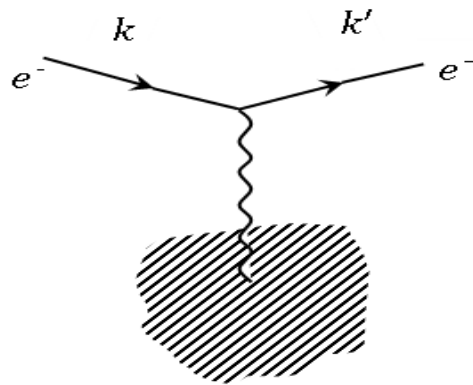
در انرژی‌های پایین الکترون فرودی که با طول موج فوتون متناظر در ابعاد پروتون است ($\lambda \sim r_p$)، سطح مقطع پراکندگی به دلیل اینکه باریون‌ها دارای ساختار می‌باشند، رفتارشان در برهم‌کنش الکترومغناطیسی متفاوت از رفتار ذره نقطه‌ای است و در واقع پراکندگی از یک شی باردار گسترده^{۲۷} صورت می‌گیرد. فرض کنیم که می‌خواهیم توزیع بار نشان داده شده در شکل (۱-۴) را تعیین کنیم که برای مثال می‌تواند ابر

²⁷ Extended charged object

الکترونی یک اتم باشد. روش کار، اندازه‌گیری توزیع زاویه‌ای الکترون‌های پراکنده شده و مقایسه آن با سطح مقطع (شناخته شده) برای الکترون‌های پراکندگی از یک بار نقطه‌ای، به صورت

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{point} |F(q)|^2 \quad (4-4)$$

است که در آن q انتقال تکانه بین الکترون فرودی و هدف، $q = k - k'$ است.



شکل (۴-۱): پایین‌ترین مرتبه پراکندگی الکترونی با یک ابر باری (Charge cloud)

سپس می‌توان ساختار ذره هدف را از فرم فاکتور $F(q)$ مشخص شده، استنتاج کرد. در واقع، فرم فاکتورها اثرهای برهمکنشی اجزای سازنده باریون را برحسب تابعی از تکانه انتقالی q^2 که ناوردای لورنتس است، به دست می‌دهد. فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی، توزیع بار درون باریون را تعیین می‌کند و فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی، توزیع بار درون باریون را تعیین می‌کند و شیب این تابع اندازه باریون را به دست می‌دهد. برای یک هدف ایستا، فرم فاکتور در معادله (۴-۴) به صورت تبدیل فوریه توزیع بار (بهنجار) است.

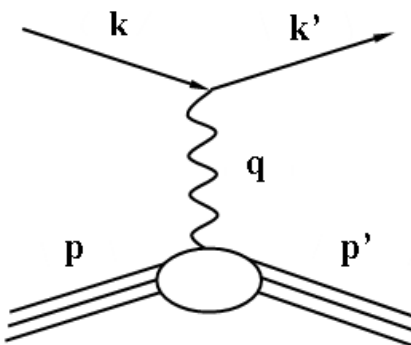
$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r, \quad \left(\int \rho(\mathbf{r}) d^3r = 1 \right) \quad (4-5)$$

در پراکندگی الکترون از پروتون دارای ساختار، بار نقطه‌ای نداریم. بنابراین یک فرم فاکتور برای توصیف غیر نقطه‌ای بودن بار الکتریکی لازم است و یک عامل شکل هم برای توصیف گشتاور مغناطیسی غیر نقطه‌ای بودن نیاز داریم. پس می‌توان انتظار داشت که برای توصیف غیر نقطه‌ای بودن پروتون، دو عامل

شکل برای توزیع بار الکتریکی و توزیع گشتاور مغناطیسی پروتون نیاز است. در ادامه می‌خواهیم نشان دهیم که به‌راستی به دو عامل شکل برای توصیف پراکندگی کسان الکترون- پروتون نیاز است.

۳-۴ پراکندگی الکترون-نوکلئون و فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی

در اینجا باید تأکید کنیم که نسبت یکی از عنصرهای اصلی مورد نیاز برای ارائه یک توصیف مناسب از داده‌های موجود است. اولین مزیت پراکندگی الکترونی این است که نظریه‌ای که برهم‌کنش الکترومغناطیسی را توضیح می‌دهد (QED)، خیلی خوب شناخته‌شده است. ثابت جفت‌شدگی الکترومغناطیسی کوچک است ($\alpha = 1/137$) و بنابراین می‌توانیم از نظریه اختلال استفاده کنیم. نمودار مرتبه نخست واکنش پراکندگی الاستیک در شکل (۲-۴) نشان داده شده است.



شکل (۲-۴): پراکندگی الکترون-نوکلئون در تقریب تبادل یک فوتونی. چارممنتوم فوتون مبادله شده به‌صورت انتقال ممنتوم $q = k - k'$ است.

برهم‌کنش الکترومغناطیسی فوتون-نوکلئون به‌صورت زیر توضیح داده می‌شود :

$$H_{e.m.} = e \int d^4x j_\mu(x) A^\mu(x) \quad (۴-۶)$$

که در اینجا e بار پروتون، $A^\mu(x)$ میدان فوتونی و $j_\mu(x)$ چگالی جریان نوکلئون است. این هامیلتونی نسبت به میدان فوتونی خطی است و فرآیندهایی را توصیف می‌کند که تنها یک فوتون با نوکلئون برهم‌کنش می‌کند. دامنه پراکندگی برای $e^- + N \rightarrow e^- + N$ به‌صورت زیر است:

$$T_{fi} = -i \int j_\mu^e \left(-\frac{1}{q^2} \right) J^\mu d^4x \quad (۷-۴)$$

که در آن $\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ است. جریان‌های گذار الکترون و نوکلئون در فضای مکان عبارت‌اند از :

$$j_e^\mu = -e \bar{u}(\mathbf{k}') \gamma^\mu u(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \quad (۸-۴)$$

اما برای جریان گذار نوکلئون، به دلیل اینکه نوکلئون ذره نقطه‌ای نبوده و دارای ساختار است، نمی‌توان جمله‌ای همانند رابطه بالا نوشت. بنابراین جفت‌شدگی نقطه‌ای γ_μ باید با عبارت مناسبی جایگزین شود. هنوز هم می‌توان حالت‌های ابتدایی و انتهایی نوکلئون را ذره دیراک در نظر گرفت. شکل چگالی جریان نوکلئون از اصول کلی، با فرض معتبر بودن معادله دیراک برای حالت‌های نوکلئون، هم‌وردایی و ناوردایی پیمانه‌ای، تعریف می‌شود. لذا، عمومی‌ترین عبارت برای عناصر ماتریس j_μ بین حالت‌های نوکلئون به صورت زیر است [۸۴، ۸۳]:

$$\langle \mathbf{p}' | j_\mu(0) | \mathbf{p} \rangle = \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\gamma_\mu F_1(Q^2) + \frac{i}{2M} \kappa \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(Q^2) \right] u(\mathbf{p}) \quad (۹-۴)$$

که در اینجا F_1 و F_2 به ترتیب فرم فاکتورهای دیراک و پائولی هستند، κ گشتاور مغناطیسی نابهنجار نوکلئون، M جرم نوکلئون، $Q^2 = -q^2$ و $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ است. لازم به ذکر است که عنصر ماتریسی یک عملگر کلی $F(x)$ بین ویژه حالت‌های خاص انرژی و تکانه که در نقطه x فضای مینکوفسکی ارزیابی می‌شود، از طریق رابطه زیر، مربوط است به عنصر ماتریسی همان عملگر که در مبدأ فضای مینکوفسکی ارزیابی شده است.

$$\langle q_f | F(x) | q_i \rangle = e^{-i(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_f) \cdot \mathbf{x}} \langle q_f | F(0) | q_i \rangle \quad (۱۰-۴)$$

وقتی $Q^2 \rightarrow 0$ میل می‌کند، طول موج فوتون متناظر بزرگ می‌شود و در نتیجه پروتون به صورت جسم نقطه‌ای دیده می‌شود. به بیان دیگر، فوتون با طول موج بزرگ‌تر از حدود یک فرمی، پروتون را بدون ساختار می‌بیند. در این صورت، جریان آن هم باید به جریان جسم نقطه‌ای بدون ساختار (مانند جریان الکترون یا میون) کاهش پیدا کند. این شرط لازم می‌دارد که

$$F_1(Q^2 = 0) = 1 \quad , \quad F_2(Q^2 = 0) = 0 \quad (۱۱-۴)$$

باشند. برعکس گشتاور مغناطیسی الکترون یا میون، گشتاور مغناطیسی پروتون یک مگنتون بوهر، $\mu_B = e/2m_p$ نیست، بلکه مقدار آن $2.79 \mu_B$ است. به این دلیل κ را گشتاور مغناطیسی نابهنجار پروتون می‌نامند. وقتی پروتون با فوتون حقیقی (یعنی $Q^2 = 0$) مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرد، پروتون به صورت ذره‌ای با بار الکتریکی e و گشتاور مغناطیسی $(1 + \kappa)/2m_p$ دیده می‌شود که در آن $\kappa = 1.79$ است. علاوه بر این، آزمایش نشان می‌دهد که گشتاور مغناطیسی نوترون صفر نیست (چیزی که در شاید در یک نگاه ساده‌انگارانه برای ذره بدون بار انتظار داریم)، بلکه $-1.91 \mu_B$ است. این گشتاورهای مغناطیسی نابهنجار را می‌توان اثر جابجایی کوارک‌ها در نوکلئون پنداشت.

اما برای ساده‌تر کردن معادله (۹-۴) می‌توان با استفاده از جداسازی گوردون، جمله $\sigma_{\mu\nu} q^\nu$ را از رابطه حذف کرد.

$$\bar{u}(\mathbf{p}') \gamma_\mu u(\mathbf{p}) = \frac{1}{2M} \bar{u}(\mathbf{p}') [(p' + p)_\mu + i\sigma_{\mu\nu}(p' - p)^\nu] u(\mathbf{p}) \quad (۱۲-۴)$$

با فرض $F'_2 = \kappa F_2$ ، رابطه (۹-۴) را می‌توان به این صورت نوشت

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{p}' | j_\mu(0) | \mathbf{p} \rangle &= \bar{u}(\mathbf{p}') \left[\gamma_\mu F_1(Q^2) + \frac{F'_2}{2M} \{ 2M\gamma_\mu - (\mathbf{p}' + \mathbf{p})^\mu \} \right] u(\mathbf{p}) \\ &= \bar{u}(\mathbf{p}') \left[(F_1 + F'_2)\gamma_\mu - \frac{K_\mu}{2M} F'_2 \right] u(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (۱۳-۴)$$

که در آن $\mathbf{K} = \mathbf{p}' + \mathbf{p}$ است. تعبیر فیزیکی فرم فاکتورها به آسانی می‌تواند در چهارچوب بریت^{۲۸} به دست آید. در چهارچوب مذکور، مجموع تکانه‌های ابتدایی و انتهای حالت‌های نوکلئون صفر می‌شود: $\mathbf{p}' + \mathbf{p} = 0$. در چهارچوب بریت، با استفاده از نمایش غیر نسبیتی ماتریس‌های دیراک و اسپینورهای نوکلئون، می‌توان نوشت :

²⁸Breit frame

$$\langle \mathbf{p}' | j_0(0) | \mathbf{p} \rangle = \left[F_1(Q^2) + \frac{Q^2}{4M^2} \kappa F_2(Q^2) \right] \quad (۱۴-۴)$$

و

$$\langle \mathbf{p}' | j^i(0) | \mathbf{p} \rangle = -\frac{1}{2M} [F_1(Q^2) + \kappa F_2(Q^2)] \varepsilon_{ikl} q_k \chi^\dagger \sigma^l \chi \quad (۱۵-۴)$$

بر پایه معادلات (۱۴-۴) و (۱۵-۴)، طبیعی است که فرم فاکتورهای ساچز^{۲۹} را از ترکیب‌های خطی F_1 و F_2 به صورت زیر تعریف کنیم [۸۵].

$$G_E = F_1 + \frac{Q^2}{4M^2} \kappa F_2, \quad G_M = F_1 + \kappa F_2 \quad (۱۶-۴)$$

که به ترتیب فرم فاکتور الکتریکی و مغناطیسی نامیده می‌شوند. فرم فاکتورهای ساچز G_E و G_M تفسیر شهودی بهتری نسبت به فرم فاکتورهای دیراک و پائولی، F_1 و F_2 ، ارائه می‌دهند. در حد $Q^2 = 0$ داریم:

$$G_E^{p,n}(Q^2 = 0) = \begin{cases} 1 & \text{for } p \\ 0 & \text{for } n \end{cases}, \quad G_M^{p,n}(Q^2 = 0) = \mu_{p,n} \quad (۱۷-۴)$$

که به ترتیب به بار و گشتاور مغناطیسی نوکلئون مربوط هستند. ساچز نشان داد که G_E و G_M می‌توانند به عنوان تبدیل‌های فوریه توزیع فضایی بار و مغناطش نوکلئون در چهارچوب بریت ($\mathbf{p}' = -\mathbf{p}$) تعبیر شوند [۸۶].

کوتاه آنکه وقتی با جریان‌های الکترومغناطیسی (یا ضعیف) هادرون‌ها را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم (یعنی اگر ذره باردار نقطه‌ای الکترون، میون (یا نوترینو) را از پروتون پراکنده کنیم) ویژگی‌های الکترومغناطیسی، مانند توزیع بار و جریان (و همچنین ویژگی‌های برهمکنش ضعیف) پروتون را می‌توان با فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی (و ضعیف) توصیف کرد. فرم فاکتورها اثرهای برهمکنش قوی اجزاء درون پروتون را در خود دارند. عامل‌های شکل را معمولاً با توابعی از نوع

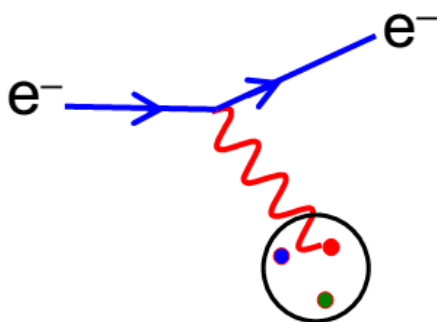
$$F(Q^2) = \frac{F(0)}{(1 - Q^2/\Lambda^2)^n} \quad (۱۸-۴)$$

پارامتری می‌کنند که در اینجا توان‌های $n = 1, 2$ به ترتیب تک‌قطبی و دوقطبی نامیده می‌شوند.

²⁹ Sachs form factors

۴-۴ فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی در مدل کوارک سازنده فوق مرکزی

همان طوری که در شکل (۳-۴) مشاهده می‌کنیم، در انرژی‌های بالای الکترون فرودی، طول موج فوتون متناظر کوچک‌تر از ابعاد نوکلئون است ($\lambda < r_N$) و برای تفکیک زیرساختار به اندازه کافی کوتاه است. در این حالت، پراکندگی از کوارک‌های سازنده رخ می‌دهد.



شکل (۳-۴): پراکندگی الاستیک الکترون-نوکلئون در انرژی‌های بالا و برهم‌کنش فوتون مجازی با کوارک‌های سازنده.

بیکر و همکاران [۱۴]، نشان دادند که تمامی فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی (که بسته به جهت اسپین نوکلئون و جهت تکانه انتقالی می‌توانند از نوع عرضی، طولی و اسکالر باشند) می‌توانند برحسب دو عنصر ماتریسی فضایی بنیادی بیان شوند.

$$F(k) = \langle f | U | i \rangle, \quad G_\mu(k) = \langle f | T_\mu | i \rangle \quad (۱۹-۴)$$

این عناصر ماتریسی شامل تمام اطلاعات ساختاری هادرون‌ها بوده و شدیداً به تابع موج هادرونی حساس هستند. در معادله (۱۹-۴)، i و f نشان‌دهنده حالت‌های ابتدایی و انتهایی نوکلئون هستند و

$$U = e^{-ik\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_z}, \quad T_\mu = imk_0 \sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_\mu e^{-ik\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_z}, \quad \mu = 0, \pm 1 \quad (۲۰-۴)$$

که در اینجا $(k_0, \mathbf{k})$ چاربردار تکانه فوتون مجازی است که فرض می‌شود $\mathbf{k} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ در جهت z باشد. فرم فاکتور باری نوکلئون با عنصر ماتریسی عملگر چگالی بار داده می‌شود [۸۷].

$$G_E^N(Q^2) = \left\langle N \left| \frac{1}{2}(1 + 3\tau_0(3))e^{-i\eta k\lambda_z} \right| N \right\rangle \quad (۲۱-۴)$$

که در آن $\tau_0(3)$ مؤلفه سوم عملگر ایزواسپین کوآرک سوم است و در سیستم بریت، $Q^2 = k^2$ است. فرم فاکتورهای $F(k)$ و $G_\mu(k)$ می‌توانند به صورت تحلیلی در این مدل ارزیابی شوند. عناصر ماتریسی عملگر U که باید ارزیابی شوند از نوع

$$F(k) = \int d^3\rho d^3\lambda \Psi_{\nu\gamma'}(x) Y_{[\gamma]}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) e^{-i\eta k \lambda_z} \Psi_{\nu\gamma}(x) Y_{[\gamma]}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) \quad (22-4)$$

هستند که در آن $\eta = \sqrt{2/3}$ و حالت اولیه همان حالت پایه است. با استفاده از توابع موج ابرشعاعی که در فصل‌های دوم و سوم به دست آمد و هماهنگ‌های فوق‌کروی به شکل

$$Y_{[\gamma]l_\rho l_\lambda}(\Omega_\rho, \Omega_\lambda, \xi) = \frac{Y_{l_\rho m_\rho}(\Omega_\rho) Y_{l_\lambda m_\lambda}(\Omega_\lambda) (\sin\xi)^{l_\rho} (\cos\xi)^{l_\lambda} P_n^{l_\rho+1/2, l_\lambda+1/2}(\cos 2\xi)}{\left[\frac{\Gamma(n+l_\rho+3/2)\Gamma(n+l_\lambda+3/2)}{2(2\gamma+2)\Gamma(\gamma+2-n)\Gamma(n+1)} \right]^{1/2}} \quad (23-4)$$

همراه با تبدیل فضای انتگرال‌گیری از فضای مختصات ژاکوبی به فضای فوق‌کروی به صورت

$$\int d^3\rho d^3\lambda = \int x^5 dx \cos\xi \sin^2\xi d\xi d\Omega_\rho d\Omega_\lambda \quad (24-4)$$

می‌توانیم محاسبات موردنیاز را انجام دهیم. انتگرال‌های موردعلاقه می‌توانند برحسب یک انتگرال پایه ارزیابی شوند، یعنی نمایش انتگرالی توابع بسل استوانه‌ای به صورت:

$$\int_0^\pi d\xi \sin^{2\beta}\xi e^{iz \cos\xi} = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) 2^\beta \frac{J_\beta(z)}{z^\beta} \quad (25-4)$$

که با مشتق‌گیری نسبت به z خواهیم داشت :

$$\int_0^\pi d\xi \sin^{2\beta}\xi \cos^\alpha\xi e^{iz \cos\xi} = \sqrt{\pi} \Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right) 2^\beta \frac{d^\alpha}{dz^\alpha} \left[\frac{J_\beta(z)}{z^\beta} \right] (-i)^\alpha \quad (26-4)$$

و از اینجا می‌توانیم مستقیماً رابطه زیر را نتیجه بگیریم.

$$\int_0^\pi d\xi \sin^2\xi \cos^2\xi J_0(z \cos\xi) = \frac{\pi J_2(z)}{2 z^2} \quad (27-4)$$

برای به دست آوردن انتگرال‌های شامل $J_l(z)$ از روابط بازگشتی توابع بسل کروی به شکل زیر استفاده می‌کنیم.

$$J_l(z) = z^l \left(-\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^l J_0(z) \quad (۲۸-۴)$$

با استفاده از روابط ذکرشده، در نهایت چیزی که باقی می‌ماند، انتگرال‌هایی از نوع

$$F_0(k) = \frac{8}{\eta^2 k^2} \int_0^\infty dx x^3 \psi_{00}(x)^2 J_2(\eta k x) \quad (۲۹-۴)$$

هستند که به راحتی قابل حل هستند و از معادله (۲۱-۴) می‌توان فرم فاکتور باری نوکلئون را به صورت

زیر نوشت:

$$G_E^N(Q^2) = \frac{1 + \tau_0}{2} F(k) \quad (۳۰-۴)$$

که در اینجا τ_0 مؤلفه ایزواسپین نوکلئون است. از آنجایی که برای نوترون $\tau_0 = -1$ است، بنابراین G_E^n مساوی صفر است، یعنی $G_E^n(Q^2)|_{hCQM} = 0$ و این مشکل تا زمانی که هامیلتونی مدل استفاده شده SU(6)-ناوردا باشد اتفاق می‌افتد. یک مقیاس‌دهی کامل برای فرم فاکتور مغناطیسی به شکل زیر وجود دارد:

$$G_M^{p,n}(Q^2)|_{hCQM} = \mu_{p,n} G_E^p(Q^2)|_{hCQM} \quad (۳۱-۴)$$

که در آن، μ_p و μ_n گشتاورهای مغناطیسی پروتون و نوترون هستند که در مدل کوآرک سازنده فوق‌مرکزی محاسبه می‌شوند. اما با به دست آوردن فرم فاکتورهای نظری باید نتایج را با نتایج تجربی مقایسه کنیم. داده‌های آزمایشگاهی برای فرم فاکتورهای کشسان معمولاً با یک شکل دوقطبی برازش داده می‌شوند [۸۸].

$$G_E^p(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{0.71 \text{ GeV}^2} \right)^{-2} \equiv G_D(Q^2), \quad G_M^{p,n}(Q^2) = \mu_{p,n} G_D(Q^2) \quad (۳۲-۴)$$

که در اینجا μ_p و μ_n گشتاور مغناطیسی پروتون و نوترون هستند که از آزمایش‌های مختلف با دقت بالایی تعیین شده‌اند. درحالی‌که مقادیر آزمایشگاهی فرم فاکتور الکتریکی نوترون، که از پراکندگی کشسان الکترون از هدف دوترون یا هیدروژن به دست می‌آید، در ناحیه $G_E^n = 0$ to $+0.05$ قرار می‌گیرند

که از مقدار نظری که صفر در نظر گرفته می‌شود چندان دور نیست. علاوه بر این، تعیین پدیده‌شناختی فرم فاکتور باری نوترون تحت تأثیر عدم قطعیت‌هایی است که به دلیل این واقعیت است که هدف‌های دوترونی مورد استفاده قرار می‌گیرند و سهم G_E^n در سطح مقطع پراکندگی الکترون-دوترون خیلی کم است. با این وجود، یک توصیف پدیده‌شناختی نسبتاً خوبی از رفتار $G_E^n(Q^2)$ توسط فرمول گالستر^{۳۰} داده می‌شود [۸۹]:

$$G_E^n(Q^2) = -\frac{\mu_n \eta}{1 + b\eta} G_E^p(Q^2), \quad \eta = \frac{Q^2}{4M^2} \quad (۳۳-۴)$$

که در آن b پارامتر آزادی است که معمولاً برابر 5.6 در نظر گرفته می‌شود و M جرم نوکلئون است.

۴-۵ گشتاور مغناطیسی و شعاع باری نوکلئون‌ها

با نسبت دادن یک جرم کوارکی مؤثر به کوارک‌های u و d ، می‌توان فرض کرد که جرم باریون مجموع جرم مؤثر کوارک‌هاست.

$$M_{\text{baryon}} = \sum_q m_q^{\text{eff}} \quad (۳۴-۴)$$

می‌توانیم گشتاور مغناطیسی باریون را بر حسب گشتاور مغناطیسی کوارک‌های سازنده آن به صورت زیر بنویسیم:

$$\mu_B = \sum_q \langle \phi_{sf} | \mu_q \vec{\sigma}_q | \phi_{sf} \rangle \quad (۳۵-۴)$$

که در اینجا μ_q و σ_q به ترتیب گشتاور مغناطیسی و اسپین کوارک تشکیل‌دهنده حالت باریونی را نشان می‌دهند و ϕ_{sf} نمایانگر تابع موج اسپین-طعم حالت باریونی مربوطه است. در جدول (۴-۱) تابع موج اسپین-طعم و گشتاور مغناطیسی پروتون و نوترون بر حسب گشتاور مغناطیسی کوارک‌های سازنده‌شان داده شده‌اند.

³⁰ Galster formula

جدول (۴-۱): تابع موج اسپین-طعم و گشتاور مغناطیسی پروتون و نوترون برحسب گشتاور مغناطیسی کوارک‌های سازنده.

گشتاور مغناطیسی	تابع موج اسپین-طعم
$\frac{4}{3}\mu_u - \frac{1}{3}\mu_d$	$\frac{1}{\sqrt{18}}[2(u \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle + u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle + d \downarrow u \uparrow u \uparrow\rangle) - (u \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle + u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle + d \uparrow u \downarrow u \uparrow\rangle) + (u \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle + u \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle + d \uparrow u \uparrow u \downarrow\rangle)]$
$\frac{4}{3}\mu_d - \frac{1}{3}\mu_u$	$\frac{1}{\sqrt{18}}[2(d \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle + d \uparrow d \uparrow u \downarrow\rangle + u \downarrow d \uparrow d \uparrow\rangle) - (d \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle + d \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle + u \uparrow d \downarrow d \uparrow\rangle) + (d \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle + d \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle + u \uparrow d \uparrow d \downarrow\rangle)]$

با توجه به رابطه:

$$\mu_q = \frac{e_q}{2m_q^{\text{eff}}} \quad (۴-۳۶)$$

برای گشتاور مغناطیسی کوارک‌ها، مقادیر گشتاور مغناطیسی پروتون و نوترون را به ترتیب به صورت $\mu_p = 2.99 \mu_N$ و $\mu_n = -2.00 \mu_N$ به دست می‌آوریم. هم‌چنین در ناحیه Q^2 کوچک، رفتار فرم فاکتورها به شعاع باری و مغناطیسی نوکلئون مربوط است. با داشتن فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی می‌توانیم شعاع‌های باری نوکلئون را به دست بیاوریم. با بسط دادن فرم فاکتور (۴-۳۰) برحسب توان‌های تکانه انتقالی، به ازای Q^2 کوچک، عبارت زیر را به دست می‌آوریم:

$$G_E(Q^2) \sim G_E(0) + Q^2 \frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2} + \mathcal{O}(Q^4) \quad (۴-۳۷)$$

و با توجه به رابطه (۴-۵) که فرم فاکتور را برای یک توزیع بار متقارن کروی بیان می‌کند، می‌توان نوشت:

$$F(Q^2) = \int \varrho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r = \frac{4\pi}{q} \int r dr \varrho(r) \sin(qr) \quad (۴-۳۸)$$

که در اینجا $\varrho_N(\mathbf{r})$ تابع توزیع و r فاصله از مرکز بار (که فرض می‌شود منطبق بر مرکز جرم نوکلئون است) می‌باشند. با بسط تابع $\sin(qr)$ داریم:

$$F(Q^2) = \int \varrho(\mathbf{r}) \left(1 - \frac{q^2 r^2}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n q^{2n} r^{2n}}{(2n+1)!} \right) d^3r \quad (۴-۳۹)$$

حد $Q^2 \rightarrow 0$ این رابطه می‌دهد:

$$G_E(Q^2) \sim G_E(0) - \frac{1}{6} Q^2 \langle r^2 \rangle + \mathcal{O}(Q^4) \quad (40-4)$$

که در اینجا $Q^2 = -q^2 > 0$ است. از مقایسه دو رابطه (4-37) و (4-40)، میانگین مربعی شعاع باری به صورت زیر به دست می آید.

$$\langle r^2 \rangle_N = -6 \left. \frac{dG_E(Q^2)}{dQ^2} \right|_{Q^2=0} \quad (41-4)$$

همچنین از معادله (4-31) ملاحظه می شود که شعاع های مغناطیسی پروتون و نوترون با شعاع باری پروتون یکسان هستند.

۶-۴ نتایج برای فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی و شعاع های باری نوترون و

پروتون

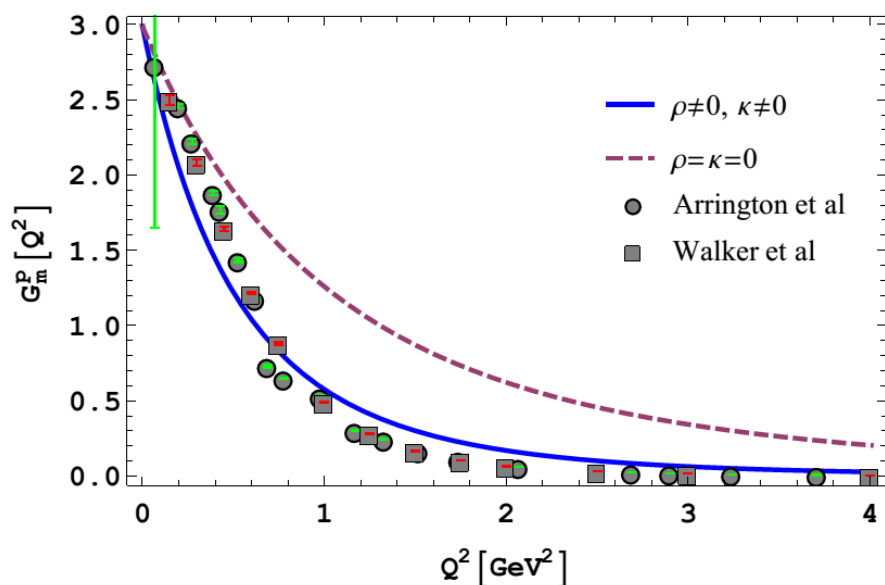
در این بخش، با استفاده از مدل های مختلفی که در فصل های دوم و سوم ارائه شد (تابع موج بهنجار شده، با پارامترهایی که در قسمت های مربوطه داده شده است) و از طریق معادله های (4-30)، (4-31) و (4-33)، فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون را در بازه $Q^2 < 4 (GeV/c)^2$ محاسبه کرده ایم و شعاع باری پروتون و نوترون را، طبق معادله (4-41)، از فرم فاکتور الکتریکی آنها به دست می آوریم و در هر مورد مقادیر نظری با مقادیر تجربی مقایسه شده است. یک نکته جالب توجه این است که هم در مدل های نظری و هم در مشاهدات تجربی، میانگین مربعی شعاع باری نوترون یک مقدار کوچک منفی ظاهر می شود. منشأ این مسئله به ساختار داخلی نوترون بر می گردد که از سه کوارک با مجموع بار الکتریکی خنثی تشکیل شده است. یک توضیح کیفی مناسب برای این پدیده نسبتاً عجیب در مدل کیسه ای ابری^{۳۱} به صورت زیر ارائه می شود [۹۰]. در این مدل، در حد $Q^2 \rightarrow 0$ ، نوترون به صورت یک پروتون (کیسه ای به شعاع تقریبی 0.8 fm که شامل سه کوارک است) در نظر گرفته می شود که توسط

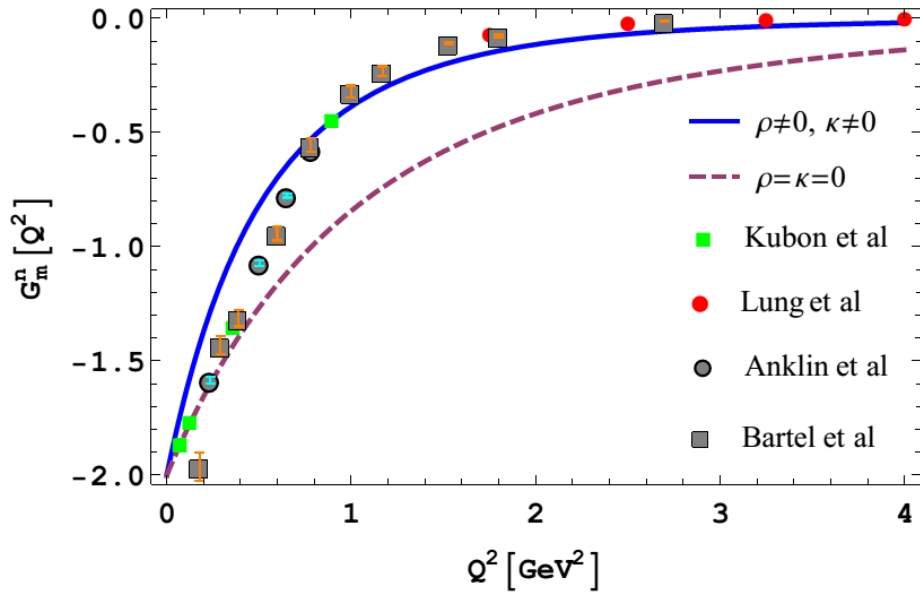
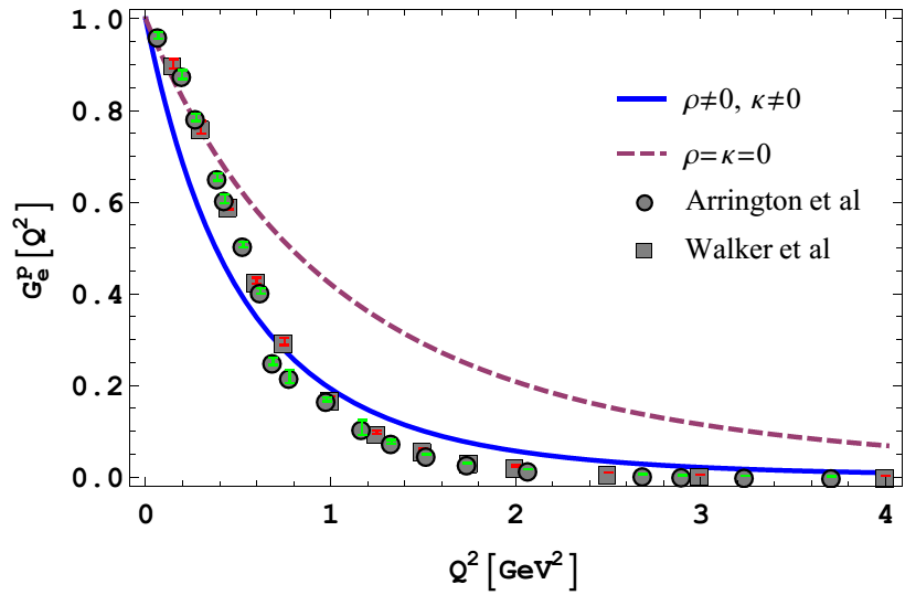
³¹ Cloudy bag model

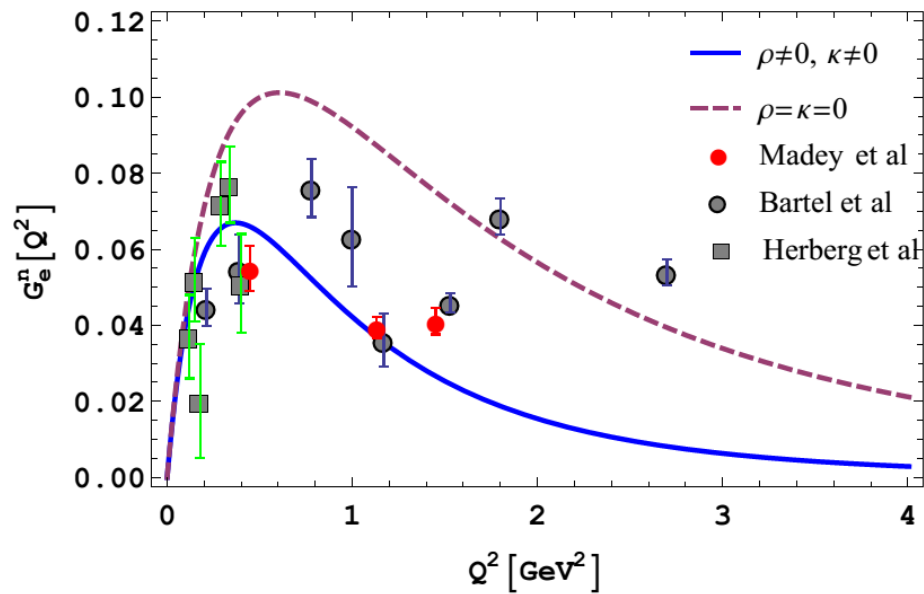
یک ابر پایونی احاطه شده است. از آنجایی که بار منفی در نوترون خنثی توسط پایون‌ها حمل می‌شود، نتیجتاً یک مقدار منفی برای (میانگین مربعی) شعاع باری نوترون حاصل می‌شود.

الف: مدل ارائه شده در بخش (۲-۳)

در بخش (۲-۳) مشاهده شد که این مدل طیف جرمی را به خوبی بازتولید کرد. در اینجا نیز، همچنان که در شکل (۴-۴) مشاهده می‌شود، این مدل علی‌رغم ماهیت غیر نسبیتی آن، در بازتولید فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی نوکلئون‌ها نیز موفق ظاهر می‌شود و نتایج به دست آمده هم‌خوانی خوبی با داده‌های تجربی دارند [۹۱].







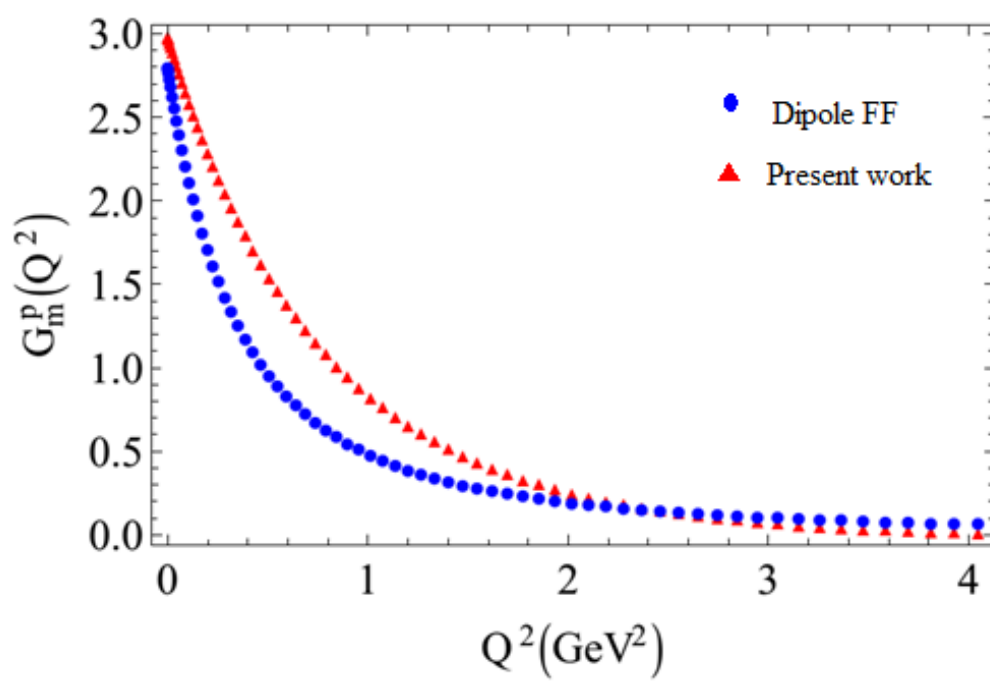
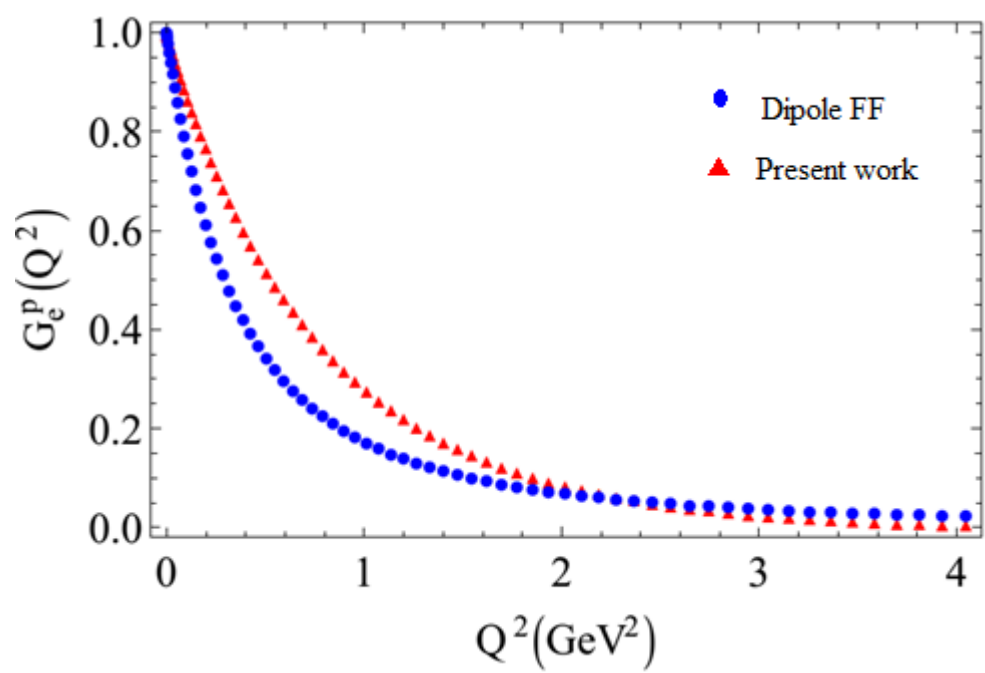
شکل (۴-۴): فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل ارائه شده در بخش (۳-۲)، با پارامترهای جدول (۳-۲) در قیاس با داده‌های آزمایشگاهی. داده‌های تجربی برای فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون از مرجع‌های [۹۳، ۹۲] و برای فرم فاکتور مغناطیسی نوترون از مرجع‌های [۹۷-۹۴] و برای فرم فاکتور الکتریکی نوترون از مرجع‌های [۹۹، ۹۸] گرفته شده‌اند.

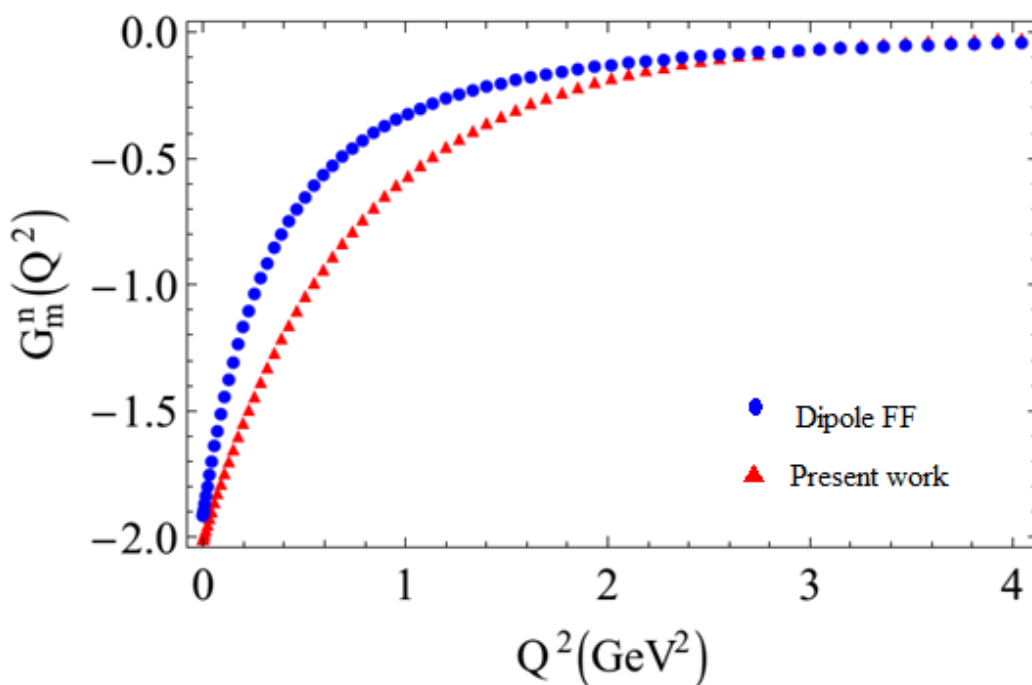
جدول (۴-۴): شعاع‌های باری، برای مدل ارائه شده در بخش (۳-۲)، در قیاس با داده‌های آزمایشگاهی [۱۰۱، ۱۰۰]

		Experimental	Theoretical
$\langle r^2 \rangle \text{ (fm}^2\text{)}$	Proton:	0.78	0.71
	Neutron:	-0.113	-0.15

ب: مدل ارائه شده در بخش (۴-۲)

با توجه به شکل (۵-۴) مشاهده می‌شود که فرم فاکتورهای نظری تطابق خوبی با فرم فاکتورهای دوقطبی به‌ویژه در ناحیه $Q^2 > 2 \text{ (GeV/c)}^2$ دارند، درحالی‌که یک اختلاف اندکی در ناحیه Q^2 پایین بین فرم فاکتورهای نظری و دوقطبی وجود دارد که این اختلاف را می‌توان به ماهیت غیر نسبیتی مدل نسبت داد [۶۰].





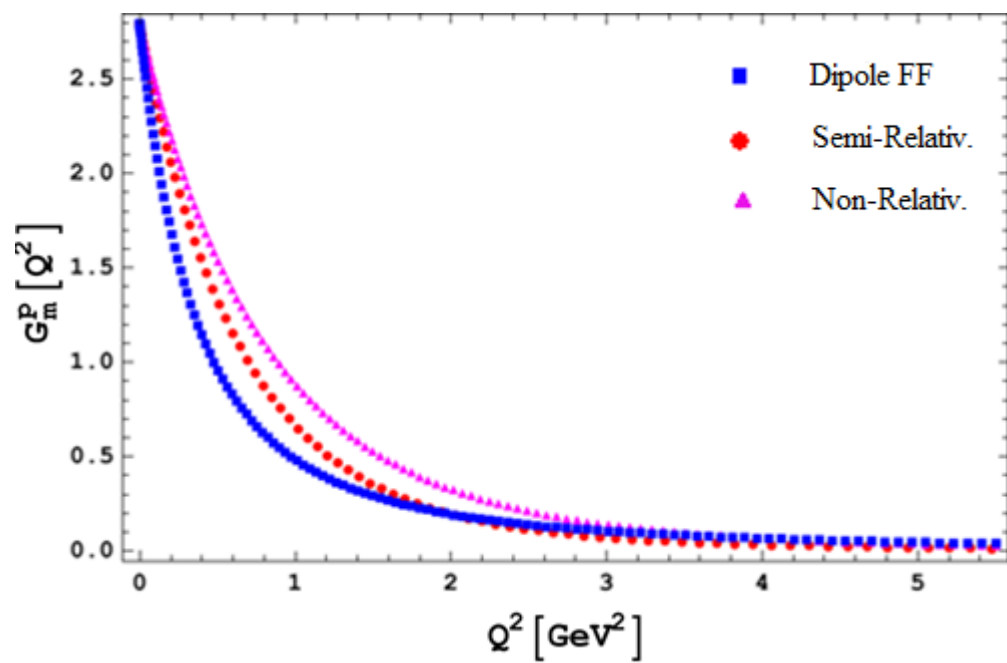
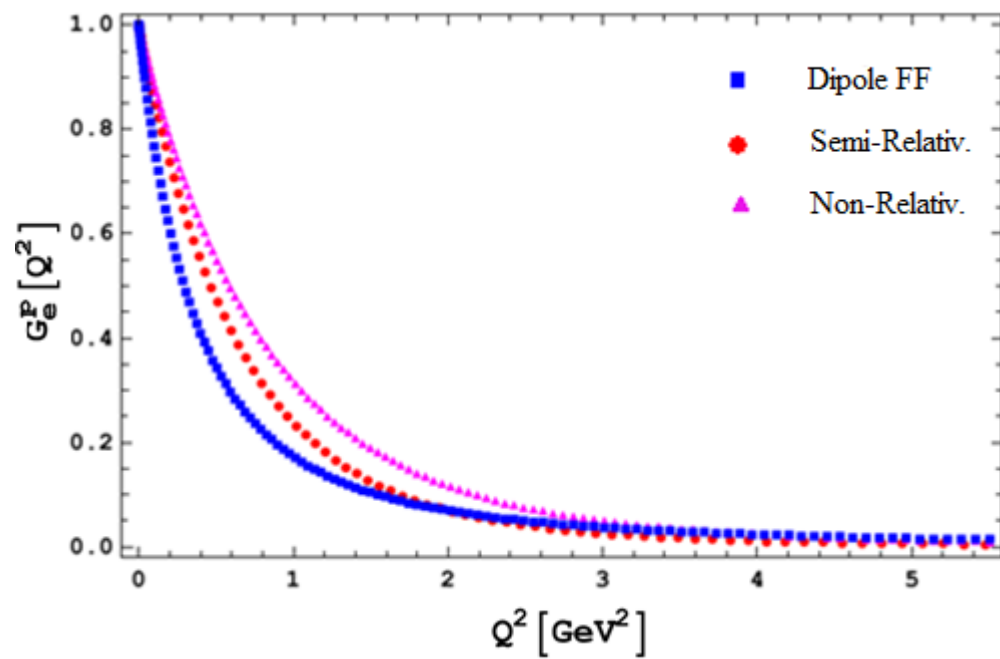
شکل (۴-۵): فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل ارائه شده در بخش (۲-۴)، با پارامترهای جدول (۲-۵)، (مثلث‌های توپر) در قیاس با فرم فاکتورهای دوقطبی (دایره‌های توپر) [۱۰۳، ۱۰۲].

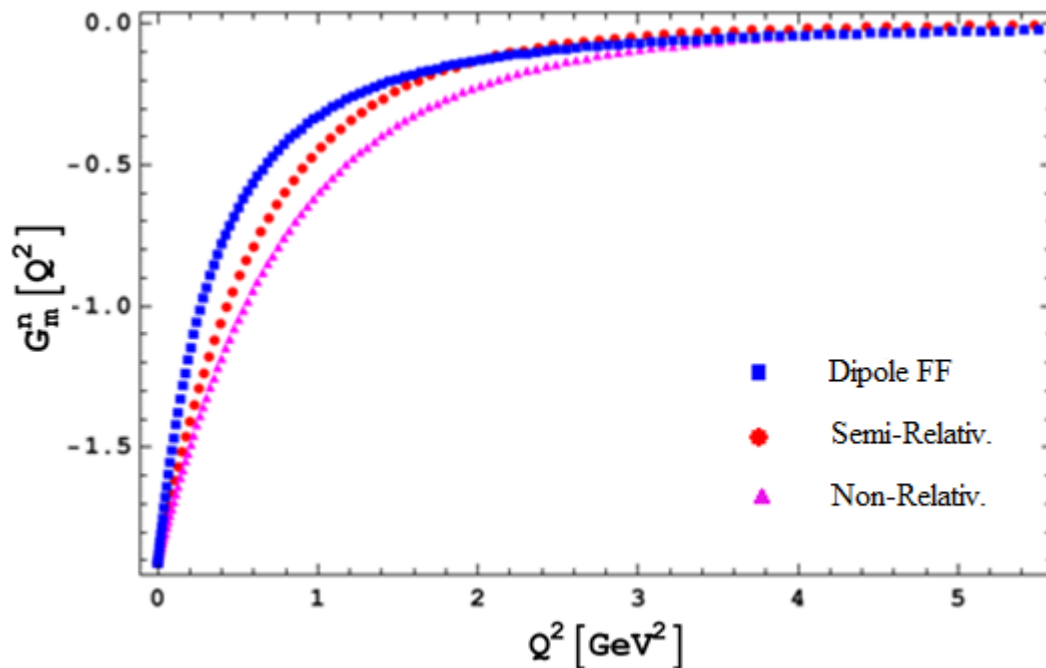
جدول (۴-۳): شعاع‌های باری، برای مدل ارائه شده در بخش (۲-۴) در قیاس با داده‌های آزمایشگاهی.

		Experimental	Theoretical
$\langle r^2 \rangle \text{ (fm}^2\text{)}$	Proton:	0.78	0.73
	Neutron:	-0.113	-0.21

ج: مدل ارائه شده در بخش (۲-۵) و زیربخش (۳-۳-۲)

در اینجا نتایج برای مدل‌های ارائه شده در بخش (۲-۵) و زیربخش (۳-۳-۲)، که اولی یک مدل غیر نسبیتی است و دومی مشابه نیمه نسبیتی این مدل است، ارائه شده است. با توجه به شکل (۴-۶) می‌توان مشاهده کرد که در هر دو مورد، به دلیل وارد نکردن تأثیر برهم‌کنش فوق ریز، بین فرم فاکتورهای نظری و دوقطبی اختلاف اندکی در ناحیه Q^2 پایین وجود دارد اما همان‌طور که انتظار می‌رود، مدل نیمه نسبیتی نسبت به مدل مشابه غیر نسبیتی، در بازتولید فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی موفق‌تر عمل می‌کند [۱۰۴].

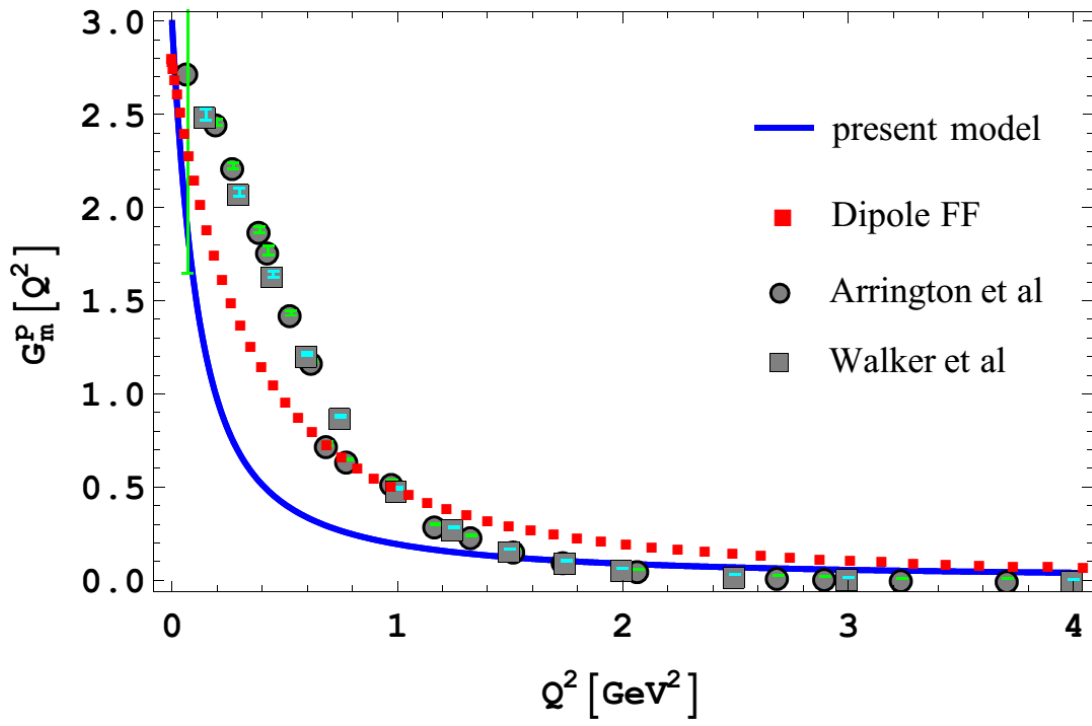
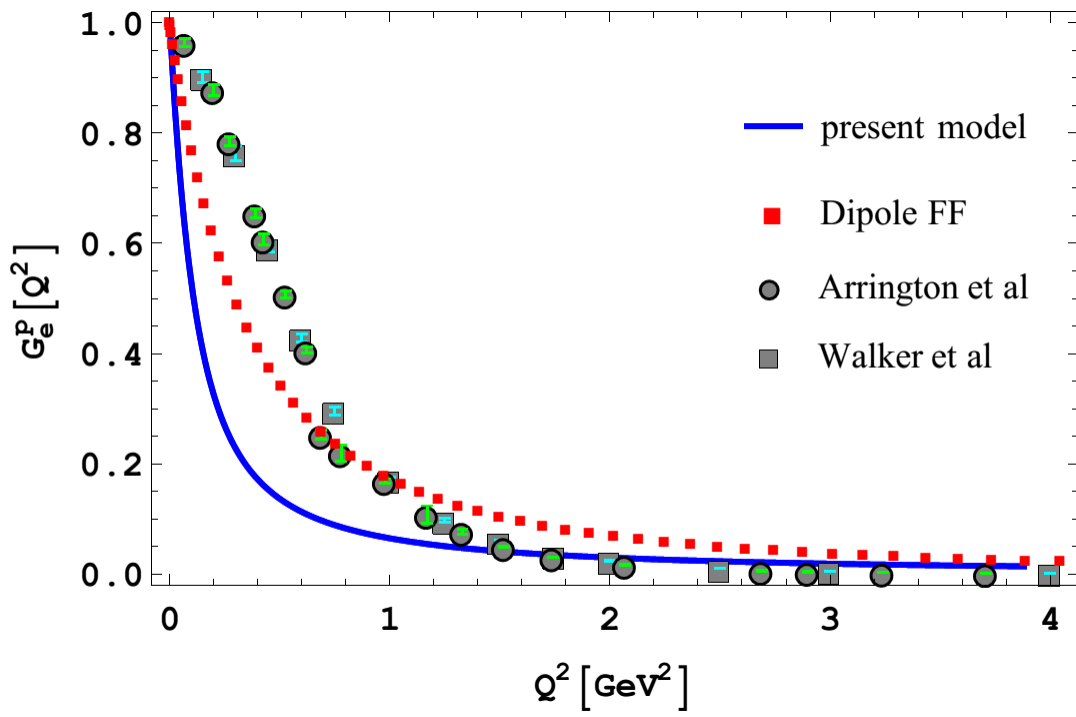


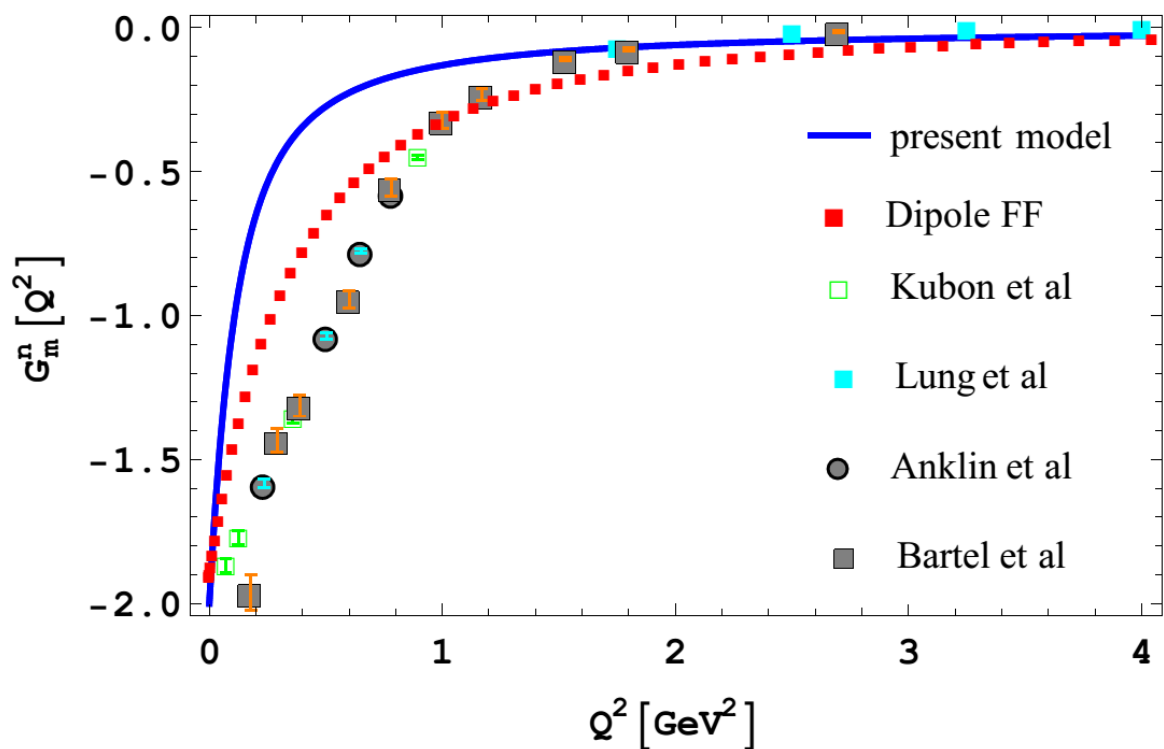


شکل (۴-۶): فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل‌های غیرنسبیتی و نیمه نسبیتی ارائه شده در بخش‌های (۲-۵) و (۳-۲)، با پارامترهای c و ω داده شده در جدول‌های (۲-۷) و (۳-۳)، (که به ترتیب با مثلث‌ها و دایره‌های توپر نشان داده شده است) در قیاس با فرم فاکتور دوقطبی (مربع‌های توپر) [۱۰۲، ۱۰۳].

۵: مدل ارائه شده در بخش (۳-۴)

با توجه به شکل (۴-۷) مشاهده می‌شود که فرم فاکتورهای (الکتریکی و مغناطیسی) نظری تطابق خوبی با داده‌های آزمایشگاهی به‌ویژه در ناحیه $Q^2 > 1 \text{ (GeV/c)}^2$ دارند، درحالی‌که یک اختلاف اندکی در ناحیه Q^2 پایین بین فرم فاکتورهای نظری و داده‌های تجربی وجود دارد. این اختلاف را می‌توان به این صورت درک کرد که مدل ارائه شده یک ماهیت نیمه نسبیتی (و نه به‌طور کامل نسبیتی) دارد و همچنین تابع موج مربوطه مستقل از برهمکنش فوق‌ریز است [۸۱].





شکل (۴-۷): فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی پروتون و نوترون، برای مدل ارائه شده در بخش (۳-۴) و با پارامترهای جدول (۳-۵) در قیاس با داده‌های تجربی که در قسمت الف همین بخش مورد اشاره قرار گرفته است.

جدول (۴-۴): شعاع‌های باری، برای مدل ارائه شده در بخش (۳-۴) در قیاس با داده‌های آزمایشگاهی.

		Experimental	Theoretical
$\langle r^2 \rangle \text{ (fm}^2\text{)}$	Proton:	0.78	0.65
	Neutron:	-0.113	-0.18

جمع‌بندی و پیشنهادهایی برای کارهای آینده

با ارائه حل‌های تحلیلی برای مسئله سه-کوارکی، به بررسی ساختار باریون‌ها پرداختیم. در فصل‌های دوم و سوم که به بررسی طیف جرمی باریون‌ها اختصاص داده شد، جمله‌هایی را به پتانسیل فوق‌مرکزی اضافه کردیم که نه تنها موجب از بین رفتن تبهگنی بین حالت‌های 0_S^+ و 1_M^- ، که یک مشخصه برهمکنش کولنی است، می‌گردد بلکه ترتیب صحیح قرارگیری پاریت‌های مثبت و منفی را نیز بازتولید می‌کند. این مسئله از آنجایی حائز اهمیت است که در طیف SU(6)-ناوردای باریونی، اولین حالت برانگیخته 0_S^+ که به رزونانس روپر معروف است، در انواع مدل‌های کوارک سازنده، همیشه بالاتر از حالت 1_M^- ظاهر می‌شد و ما این مشکل را در بخش 2-2 مرتفع کردیم. سپس، جداشدگی بین چندگانه‌ها را به عنوان اختلال‌هایی در نظر گرفتیم که به ترازهای SU(6)-ناوردا اضافه می‌شوند و طیف جرمی باریون‌ها را با جزئیات به دست آوردیم. در فصل چهارم نیز از نتایج به دست آمده برای فرم فاکتورهای الکترومغناطیسی می‌توان مشاهده کرد که فرم فاکتورهای نظری یک رفتار دوقطبی-مانند دارند که تطابق نسبتاً خوبی با داده‌های آزمایشگاهی مخصوصاً در ناحیه $Q^2 > 2 (GeV/c)^2$ دارند، درحالی‌که در برخی موارد یک اختلاف اندکی در ناحیه Q^2 پایین بین فرم فاکتورهای (الکتریکی و مغناطیسی) نظری و دوقطبی وجود دارد. این اختلاف به این دلیل است که مدل‌های ارائه شده ماهیت غیر نسبیتی و نیمه نسبیتی دارند و همچنین تابع موج مستقل از برهمکنش فوق‌ریز است. گشتاورهای مغناطیسی و شعاع‌های باری، که به عنوان کمیت‌های حد Q^2 پایین شناخته می‌شوند، به خوبی بازتولید شده و تطابق نسبتاً خوبی با مقادیر آزمایشگاهی دارند. در کل می‌توان گفت تطابق نتایج به دست آمده با داده‌های آزمایشگاهی و بهبود نتایج در مقایسه با مدل‌های قبلی نشان می‌دهد که مدل‌های ارائه شده در این پایان‌نامه، با ارائه حل‌های تحلیلی مناسب و همچنین با لحاظ کردن اثرات نسبیتی، به ما اجازه می‌دهد تا به توصیف بهبودیافته‌تری برای ساختار باریون‌های دارای کوارک سبک و شگفت، فرم فاکتورهای الکتریکی و مغناطیسی و شعاع‌های باری نوکلئون‌ها دست بیابیم.

برای ادامه کار چندین پیشنهاد می‌توان ارائه کرد که در زیر به چند مورد اشاره می‌کنیم:

۱. با توجه به اینکه فرم فاکتورها وابسته به تابع موج حالت باریونی هستند، با وارد کردن اثر برهمکنش فوق‌ریز در تابع موج مربوطه می‌توان به نتایج بهتری دست یافت.
۲. می‌توان باریون‌ها را با در نظر گرفتن به‌صورت یک سیستم مقید سه-کوارکی فرمیونی حل کرد. با حل معادله دیراک برای سیستم سه-جسمی می‌توان مسئله را به‌صورت کاملاً نسبیتی بررسی کرد. با توجه به اینکه این کار تا به حال انجام نشده است، در صورت حل شدن ارزش علمی زیادی خواهد داشت.
۳. می‌توان برای حل دقیق، مسئله سه-کوارکی را در فضای تکانه خطی با استفاده از تکانه‌های ژاکوبی انجام داد. با انجام این کار به یک معادله انتگرالی سه‌بعدی می‌رسیم که به‌طور عددی قابل حل است و به لحاظ علمی ارزشمند است. تنها ایراد این روش زمان بالای محاسبات عددی مربوطه است.
۴. از آنجایی که در مرتبه‌های بالاتر پراکندگی الکترون-نوکلئون، نوکلئون به یک باریون و یک مزون واپاشیده می‌شود، می‌توان باریون‌ها را به‌صورت یک سیستم مقید پنج-کوارکی (چهار کوارک و یک پادکوارک) در نظر گرفت و محاسبات را پیش برد.
۵. در مسئله پراکندگی الکترون-نوکلئون می‌توان احتمال جذب فوتون مجازی توسط نوکلئون و برانگیخته شدن به حالت‌های رزونانسی را در نظر گرفت، و فرم فاکتورهای انتقالی و دامنه‌های هلیسیتی را برای رزونانس‌های مربوطه بررسی کرد.

پیوست: روش نیکیفوروف-اوواروف برای حل معادلات مشتقی

روش نیکیفوروف-اوواروف [۵۷] به عنوان یک ابزار ریاضی برای حل معادلات موج شرودینگر، دیراک و کلاین-گوردون برای انواع معینی از پتانسیل‌ها مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش، معادلات مشتقی از نوع زیر است.

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0 \quad (\text{الف. ۱})$$

در اینجا، $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چندجمله‌ای‌هایی از مرتبه دو و $\tilde{\tau}(s)$ یک چندجمله‌ای درجه اول است. با استفاده از روش جداسازی به صورت

$$\psi(s) = \phi(s)y(s) \quad (\text{الف. ۲})$$

معادله (الف. ۱) به صورت یک معادله مشتقی به شکل زیر درمی‌آید:

$$\sigma(s)y''(s) + \tau(s)y'(s) + \lambda y(s) = 0 \quad (\text{الف. ۳})$$

که در آن

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''(s), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{الف. ۴})$$

و تابع $\phi(s)$ از حل معادله مشتقی مرتبه اول زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\phi'(s)}{\phi(s)} = \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} \quad (\text{الف. ۵})$$

معادله (الف. ۳) به شکل یک معادله فوق هندسی است و جواب‌های آن با استفاده از رابطه معروف رودریگز به دست می‌آید [۱۰۵].

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^2(s)\rho(s)] \quad (\text{الف. ۶})$$

که در اینجا B_n ضریب بهنجارش است و تابع وزنی $\rho(s)$ باید توسط شرط زیر ارضا شود:

$$[\sigma(s)\rho(s)]' = \tau(s)\rho(s), \quad \tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s). \quad (\text{الف. ۷})$$

که در اینجا برای دستیابی به یک حل حالت مقید، مشتق $\tau(s)$ باید منفی باشد. تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ موردنیاز برای این روش از روابط زیر به دست می آیند:

$$\pi(s) = \frac{1}{2}(\sigma'(s) - \bar{\tau}(s)) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma'(s) - \bar{\tau}(s))^2 - \bar{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (\text{الف. ۸})$$

$$\lambda = k + \pi'(s) \quad (\text{الف. ۹})$$

تابع $\pi(s)$ یک چندجمله‌ای حداکثر درجه یک است و k ثابتی است که عبارت زیر رادیکال را مربع می کند و طوری انتخاب می شود که مشتق $\pi(s)$ منفی شود. با اعمال این روش به معادلات مشتقی از نوع

$$\frac{d^2 R(s)}{ds^2} + \frac{1-s}{s(1-s)} \frac{dR(s)}{ds} + \left[\frac{-A_1 s^2 + A_2 s - A_3}{s^2(1-s)^2} \right] R(s) = 0 \quad (\text{الف. ۱۰})$$

معادله ویژه مقداری انرژی را می توان با برابر قرار دادن معادله های (الف. ۹) و (الف. ۴) به دست آورد.

$$n + \frac{1}{2} - \sqrt{A_1} + \sqrt{-A_3} + \sqrt{A_1 - A_2 + A_3 + \frac{1}{4}} = 0 \quad (\text{الف. ۱۱})$$

سپس می توان توابع $\phi_n(s)$ و $\gamma_n(s)$ را با استفاده از معادلات (الف. ۵) و (الف. ۶) به دست آورد. ابتدا تابع وزنی را از معادله (الف. ۷) به صورت زیر پیدا می کنیم.

$$\rho(s) = s^{2\sqrt{-A_3}}(1-s)^{2\sqrt{A_1-A_2+A_3+1/4}} \quad (\text{الف. ۱۲})$$

و از آنجا روابط زیر را به دست می آوریم.

$$\gamma_n(s) = \frac{B_n s^{-2\sqrt{-A_3}}}{(1-s)^{2\sqrt{A_1-A_2+A_3+1/4}}} \frac{d^n}{ds^n} [s^{n+2\sqrt{-A_3}}(1-s)^{n+2\sqrt{A_1-A_2+A_3+1/4}}] \quad (\text{الف. ۱۳})$$

$$\phi(s) = s^{\sqrt{-A_3}}(1-s)^{\frac{1}{2}+\sqrt{A_1-A_2+A_3+\frac{1}{4}}} \quad (\text{الف. ۱۴})$$

و سپس با جاگذاری معادله (الف. ۱۴) و (الف. ۱۵) در معادله (الف. ۲) تابع موج را به دست می آوریم.

$$\begin{aligned} \psi(s) &= B_n s^{-\sqrt{-A_3}}(1-s)^{\frac{1}{2}-\sqrt{A_1-A_2+A_3+\frac{1}{4}}} \frac{d^n}{ds^n} \left[s^{n+2\sqrt{-A_3}}(1-s)^{n+2\sqrt{A_1-A_2+A_3+\frac{1}{4}}} \right] \\ &= 2^n n! B_n s^{\sqrt{-A_3}}(1-s)^{\frac{1}{2}+\sqrt{A_1-A_2+A_3+\frac{1}{4}}} P_n \left(2\sqrt{-A_3}, 2\sqrt{A_1-A_2+A_3+\frac{1}{4}} \right) [1-2s] \end{aligned} \quad (\text{الف. ۱۵})$$

که در آن تابع $P_n^{(a,b)}(x)$ چندجمله‌ای های ژاکوبی هستند.

1. S Capstick and W Roberts (2000) "Quark Models of Baryon Masses and Decays" Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, pp 241
2. F E Close and Z Li (1990) "Photo-and electroproduction of N^* in a quark model" Phys. Rev. D **42**, 2194
3. S Capstick and B D Keister (1995) "Baryon current matrix elements in a light-front framework" Phys. Rev. D **51**, 3598
4. M Ronniger and B Ch Metsch (2013) "Effects of a spin-flavour-dependent interaction on light-flavoured baryon helicity amplitudes" Eur. Phys. J. A **49**, 8
5. D Merten, U Löring, K Kretzschmar, B Metsch and H R Petry (2002) "Electroweak form factors of non-strange baryons" Eur. Phys. J. A **14**, 477
6. M De Sanctis, J Ferretti, E Santopinto and A Vassallo (2011) "Electromagnetic form factors in the relativistic interacting quark-diquark model of baryons" Phys. Rev. C **84**, 055201
7. E Santopinto and M M Giannini (2012) "Systematic study of longitudinal and transverse helicity amplitudes in the hypercentral constituent quark model" Phys. Rev. C **86**, 065202
8. Y B Dong, M M Giannini, E Santopinto and A Vassallo (2014) "Electromagnetic $N - \Delta(1232)$ transitions within the point-form of relativistic quantum mechanics" Few Body Syst. **55**, 873
9. T Van Cauteren, J Ryckebusch, B Metsch and H-R. Petry (2005) "Helicity amplitudes and electromagnetic decays of hyperon resonances" Eur. Phys. J. A **26**, 339; (2007) "Electromagnetic properties of strange baryons in a relativistic quark model" A **31**, 613
10. M M Giannini (1991) "Electromagnetic excitations in the constituent quark model" Rep. Prog. Phys. **54**, 453
11. R H Dalitz (1965). Quark Models for the Elementary Particles, pp 251-323, In: "**High Energy Physics**", Les Houches, Summer School 1965 Session, eds.: C DeWitt and M Jacob, Gordon and Breach, New York.
12. M Gell-Mann (1964) "A schematic model of baryons and mesons" Phys. Lett. **8**, 214
13. S Capstick and N Isgur (1986) "Baryons in a relativized quark model with chromodynamics" Phys. Rev. D **34**, 2809
14. R Bijker, F Iachello, and A Leviatan (1994) "Algebraic models of hadron structure: I. Nonstrange baryons" Ann. Phys. (N.Y.) **236**, 69; (2000) "Algebraic Models of Hadron Structure: II. Strange Baryons" Ann. Phys. **284**, 89.
15. M Ferraris, M M Giannini, M Pizzo, E Santopinto, and L Tiator (1995) "A three-body force model for the baryon spectrum" Phys. Lett. B **364**, 231.
16. M M Giannini (2015) "The hypercentral Constituent Quark Model and its application to baryon properties" Chin. J. Phys. **53**, 020301

17. M Aiello, M M Giannini and E Santopinto (1998) "Electromagnetic transition form factors of negative parity nucleon resonances" J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. **24**, 753
18. L Ya Glozman and D O Riska (1996) "The spectrum of the nucleons and the strange hyperons and chiral dynamics" Phys. Rep. C **268**, 263
19. L Ya Glozman, Z Papp, and W Plessas (1996) "Light baryons in a constituent quark model with chiral dynamics" Phys. Lett. B **381**, 311
20. L Ya Glozman, Z Papp, W Plessas, K Varga, and R F Wagenbrunn (1998) "Effective Q-Q interactions in constituent quark models" Phys. Rev. C **57**, 3406.
21. L Ya Glozman, W Plessas, K Varga, and R F Wagenbrunn (1998) "Unified description of light- and strange-baryon spectra" Phys. Rev. D **58**, 094030.
22. U Löring, K Kretzschmar, B Ch Metsch, and H R Petry (2001) "Relativistic quark models of baryons with instantaneous forces" Eur. Phys. J. A **10**, 309.
23. U Löring, B Ch Metsch, and H R Petry (2001) "The light-baryon spectrum in a relativistic quark model with instanton-induced quark force" Eur. Phys. J. A **10**, 447.
24. H R Petry et al. (1985) "An Application of QCD in Nuclear Structure" Phys. Lett. **159**, 363
25. M Ronniger and B C Metsch (2011) "Effects of a spin-flavour-dependent interaction on the baryon mass spectrum" Eur. Phys. J. A **47**, 162.
26. The Review of Particle Physics (Particle data group), <http://www-pdg.lbl.gov>
27. F Halzen and A D Martin (1984) "Quarks and leptons", America, John Wiley & Sons Inc., 1st edition
28. K Wilson (1974) "Confinement of quarks" Phys. Rev. D **10**, 2445
29. N Isgur and G Karl (1978) "P-wave baryons in the quark model" Phys. Rev. D **18**, 4187
30. Y Sumino (2003) "QCD potential as a "Coulomb-plus-linear" potential" Phys. Lett. B **571**, 173
31. A De Rújula, H Georgi and S L Glashow (1975) "Hadron masses in a gauge theory" Phys. Rev. D **12**, 147.
32. D Griffiths, (2008) "Introduction to Elementary Particles", America, John Wiley & Sons Inc., 2nd edition
33. J Ballot and M Fabre de la Ripelle (1980) "Application of the hyperspherical formalism to the trinucleon bound state problems" Ann. of Phys. (N.Y.) **127**, 62.
34. C D Lin (1995) "Hyperspherical coordinate approach to atomic and other Coulombic three-body systems" Phys. Rep. **257**, 1
35. Yu A Simonov (1966) "The Three body problem. a complete system of angular functions" Sov. J. Nucl. Phys. **3**, 461.
36. V Aquilanti and S Tonzano (2004) "Three-body problem in quantum mechanics: hyperspherical elliptic coordinates and harmonic basis sets" J. Chem. Phys. **126**, 4066.
37. F Zernike and H C Brinkman (1935) "Hypersphärische Funktionen und die in sphärischen Bereichen orthogonalen Polynome" Proc. Kon. Ned. Acad. Wet. **33**, 3.

38. M Fabre de la Ripelle and J Navarro (1979) "The first order of the hyperspherical harmonic expansion method" *Ann. Phys. (N.Y.)* **123**, 185.
39. M Fabre de la Ripelle, H Fiedeldey, and S A Soflanos (1988) "Integrodifferential equation for few- and many-body systems" *Phys. Rev. C* **38**, 449.
40. P Hasenfratz, R R Horgan, J Kuti and J M Richard (1980) "Heavy baryon spectroscopy in the QCD bag model" *Phys. Lett. B* **94**, 401.
41. N Isgur and J Paton (1985) "A flux tube model for hadrons" *Phys. Lett. B* **124**, 247 (1983); "Flux-tube model for hadrons in QCD" *Phys. Rev. D* **31**, 2910.
42. J Carlson, J B Kogut, and V R Pandharipande (1983) "Quark model for baryons based on quantum chromodynamics" *Phys. Rev. D* **27**, 233; (1983) "Hadron spectroscopy in a flux-tube quark model" *D* **28**, 2807.
43. L Heller (1982). In: "**Quarks and Nuclear Forces**", eds.: D C Vries and B Zeitnitz, Springer Tracts in Modern Physics **100**, Springer, Berlin, pp 145-183
44. M M Giannini and E Santopinto (1999) "Hypercentral Constituent Quark Model" *Few-Body Syst.* **11**, 37
45. P M Morse and H Feshbach (1953) "**Methods of Theoretical Physics**" McGraw-Hill, New York, pp 13
46. G S Bali et al. (2000) "Static potentials and glueball masses from QCD simulations with Wilson sea quarks" *Phys. Rev. D* **62**, 054503
47. G S Bali (2001) "QCD forces and heavy quark bound states" *Phys. Rep.* **343**, 1
48. C Alexandrou, P de Forcrand, and O Jahn (2003) "The ground state of three quarks" *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **119**, 667
49. H Suganuma, T T Takahashi, F Okiharu, and H Ichie (2005) "Study of Quark Confinement in Baryons with Lattice QCD" *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **141**, 92.
50. M M Giannini, E Santopinto, A Vassallo (2001) "Hypercentral constituent quark model and isospin dependence" *Eur. Phys. J. A* **12**, 447
51. M M Giannini, E Santopinto, A Vassallo (2005) "A new application of the Gürsey and Radicati mass formula" *Eur. Phys. J. A* **25**, 241.
52. K Nakamura et al (Particle Data Group) (2010) "Review of Particle Physics" *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **37**, 075021
53. F Gürsey and L A Radicati (1964) "Spin and Unitary Spin Independence of Strong Interactions" *Phys. Rev. Lett.* **13**, 173.
54. E Santopinto, F Iachello, and M M Giannini (1998) "Nucleon form factors in a simple three-body quark model" *Eur. Phys. J. A* **1**, 307.
55. M M. Giannini, E Santopinto, and A Vassallo (2003) "An overview of the hypercentral constituent quark model" *Prog. Part. Nucl. Phys.* **50**, 263.
56. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Investigation of light baryons in a simple analytical treatment" *Chin. J. Phys.* **54**, 607
57. A F Nikiforov, V B Uvarov (1988) "**Special Functions of Mathematical Physics**", Birkhauser, Basel, Switzerland, 1st edition, pp 1

58. K A. Olive, et al., (Particle Data Group Collaboration) (2014) "Review of Particle Physics" Chin. Phys. C **38**, 090001.
59. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Baryon spectroscopy in a three-quark model" Eur. Phys. J. Plus **131**, 118
60. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Systematic Study of Baryons in a Three-Body Quark Model" J. Kor. Phys. Soc. **69**, 716
۶۱. ن صالحی، (۱۳۹۰)، پایان‌نامه دکتری: "محاسبه طیف باریون‌ها به کمک گروه‌های تقارنی و با در نظر گرفتن پتانسیل‌های برهم‌کنش فوق کروی کوارک‌های تشکیل‌دهنده"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود،
۶۲. ز قلعه نوی، (۱۳۹۲)، پایان‌نامه دکتری: "تبادل مزونی و گلوئونی و طیف جرمی هادرون‌ها"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود،
63. N Salehi and A A Rajabi (2009) "Proton Static Properties by Using Hypercentral Constituent Quark Model and Isospin" Mod. Phys. Lett. A **24**, 2631
64. N Salehi, A A Rajabi and Z. Ghalenovi (2011) "Spectrum of Strange and Nonstrange Baryons by Using Generalized Gürsey Radicati Mass Formula and Hypercentral Potential" Acta Phys. Pol. B **42**, 1247
65. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2014) "Analytical solution of relativistic three-body bound systems" Eur. Phys. J. A **50**, 151
66. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "Analytical Solution of Relativistic Few-Body Bound Systems with a Generalized Yukawa Potential" Few-Body Syst. **57**, 145
67. T Kawanai and S Sasaki (2011) "Interquark Potential with Finite Quark Mass from Lattice QCD" Phys. Rev. Lett. **107**, 091601
68. N Isgur and G Karl (1979) "Ground-state baryons in a quark model with hyperfine interactions" Phys. Rev. D **20**, 1191
69. J N Ginocchio (2005) "Relativistic symmetries in nuclei and hadrons" Phys. Rep. **414**, 165
70. W Melnitchouk et al. (2003) "Excited baryons in lattice QCD" Phys. Rev. D **67**, 114506
71. S Aoki et al. (JLQCD Collaboration) (2003) "Light hadron spectroscopy with two flavors of $O(a)$ -improved dynamical quarks" Phys.Rev. D **68**, 054502
72. E Santopinto, M M Giannini and F Iachello (1995), In: "**Symmetries in Science VII**", ed.: B Gruber, Plenum Press, New York, pp 445; F Iachello, (1995) In: "**Symmetries in Science VII**", ed.: B Gruber, Plenum Press, New York, pp 213
73. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2017) "Spectroscopy of light baryons in a semi-relativistic constituent three-quark model" (Unpublished)
74. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2015) "Relativistic three-body quark model of light baryons based on hypercentral approach" Int. J. Mod. Phys. E **24**, 1550032

75. C L Pekeris (1934) "The Rotation-Vibration Coupling in Diatomic Molecules" Phys. Rev. **45**, 98.
76. C Tezcan and R Sever (2009) "A General Approach for the Exact Solution of the Schrödinger Equation" Int. J. Theor. Phys. **48**, 337
77. V H Badalov, H I Ahmadvov and A I Ahmadvov (2009) "Analytical Solutions of the Schrödinger Equation with the Woods–Saxon Potential for Arbitrary l State" Int. J. Mod. Phys. E **18**, 631
78. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2015) "Mass spectrum of baryons in a relativistic hypercentral constituent quark mode" Chin. J. Phys. **53**, 100301
79. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2016) "A simple semi-relativistic hypercentral constituent quark model for light baryons" Can. J. Phys. **94**, 236
80. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2017) "Exact Solutions of Relativistic Bound State Problem for Spinless Bosons" Few-Body Syst. **58**, 15
81. M Aslanzadeh, A A Rajabi "Structure of Baryons in a Semi-relativistic Quark Model" (Unpublished)
82. N F Mott and H S W Massey (1965) "**The Theory of Atomic Collisions**", Oxford University Press, Oxford, 3rd edition
83. Hai-yan Gao (2003) "Nucleon electromagnetic form factors" Int. J. Mod. Phys. E **12**, 1.
84. F Scheck (1983) "**Leptons, hadrons and nuclei**", North-Holland Physics Pub., Amsterdam, 1st edition
85. F J Ernst, R G Sachs and K C Wali (1960) "Electromagnetic Form Factors of the Nucleon" Phys. Rev. **119**, 1105
86. R G Sachs (1962) "High-Energy Behavior of Nucleon Electromagnetic Form Factors" Phys. Rev. **126**, 2256
87. E Santopinto, F Iachello and M M Giannini (1998) "Nucleon form factors in a simple three-body quark model" Eur. Phys. J. A **1**, 307
88. K Hagiwara et al. (2002) "Review of Particle Properties" Phys. Rev. D **66**, 010001
89. S Galster *et al.* (1971) "Elastic electron-deuteron scattering and the electric neutron form factor at four-momentum transfers $5 \text{ fm}^{-2} < q^2 < 14 \text{ fm}^{-2}$ " Nucl. Phys. B **32**, 221
90. A W Thomas and S Theberge (1981) "Cloudy bag model of the nucleon" Phys. Rev. D **24**, 216
91. M Aslanzadeh, A A Rajabi (2017) "Investigation of light baryons in a three-body quark model" Ind. J. Phys. **91**, 197
92. J Arrington, W Melnitchouk, J A Tjon (2007) "Global analysis of proton elastic form factor data with two-photon exchange corrections" Phys. Rev. C **76**, 035205
93. R C Walker et al. (1994) "Measurements of the proton elastic form factors for $1 \leq Q^2 \leq 3 \text{ (GeV}/c)^2$ at SLAC" Phys. Rev. D **49**, 5671
94. H Anklin et al., (1998) "Precise measurements of the neutron magnetic form factor" Physics Letters B **428**, 248

95. W Bartel et al. (1973) "Measurement of proton and neutron electromagnetic form factors at squared four-momentum transfers up to 3 (GeV/c)^2 " Nucl. Phys. B **58**, 429
96. A Lung et al. (1993) "Measurements of the electric and magnetic form factors of the neutron from $Q^2=1.75$ to 4.00 (GeV/c)^2 " Phys. Rev. Lett. **70**, pp 718
97. G Kubon et al. (2002) "Precise Neutron Magnetic Form Factors" Phys. Lett. B **524**, 26
98. R Madey et al. (2003) "Measurements of G_E^n/G_M^n from the $^2\text{H}(\vec{e}, e'\vec{n})^1\text{H}$ Reaction to $Q^2=1.45 \text{ (GeV/c)}^2$ " Phys. Rev. Lett. **91**, 122002
99. C Herberg et al. (1999) "Determination of the neutron electric form factor in the $D(e, e'n)p$ reaction and the influence of nuclear binding" Eur. Phys. J. A **5**, 131
100. K Melnikov and T van Ritbergen (2000) "Three-Loop Slope of the Dirac Form Factor and the 1S Lamb Shift in Hydrogen" Phys. Rev. Lett. **84**, 1673
101. S Kopecky et al. (1995) "New Measurement of the Charge Radius of the Neutron" Phys. Rev. Lett. **74**, 2427
102. A F Sill et al. (1993) "Measurements of elastic electron-proton scattering at large momentum transfer" Phys. Rev. D **48**, 29
103. C F Perdrisat, V Punjabi and M Vanderhaeghen (2007) "Nucleon Electromagnetic Form Factors" Prog. Part. Nucl. Phys. **59**, 694
104. M Aslanzadeh, A A Rajabi "A semi-relativistic versus non-relativistic study of low-lying light baryon spectrum and nucleon electromagnetic form factors" (Unpublished)
105. G Szego (1959) "**Orthogonal Polynomials**", American Mathematical Society, New York, 1st edition, pp 94

Abstract

Due to the importance of analytical solution in various constituent quark models and also due to the importance of relativistic effects of quarks dynamics in investigation of the internal structure of baryons, our efforts has been dedicated, to a better and more precise modeling of quarks dynamics in baryons, in first step, and to insert the relativistic effects, in next step. So, after a detailed review of the hypercentral constituent quark model, we presented some improved nonrelativistic and semi-relativistic three-quark models for investigating the internal structure of the light and strange baryons. Based on hypercentral approach, we considered the baryons as a three-body bound system without spin and isospin degrees of freedom and solved the relevant three-body Schrödinger and Klein-Gordon equations analytically. Thoroughly, we obtain the dominant $SU(6)$ -invariant spectrum which accounts for the average multiplet energies. Then we treated the spin- and isospin (flavour)-dependent interactions perturbatively. Due to the fact that there is not exact analytical solution of Schrödinger (and Klein-Gordon) equation for the well-known “linear-plus-Coulombic” potential, we developed a suitable approximation for the problematic linear confining term so that the modified potential is suitable for analytical purposes. In semi-relativistic case, we considered equal (different) scalar and vector potentials, and solved the three-body Klein-Gordon equation approximately (exactly). In both nonrelativistic and semi-relativistic cases, the analytically obtained energy eigenvalues and eigenfunctions of the three-body problem have been used in the calculations of the mass spectrum of baryons and electromagnetic elastic form factors of nucleon. The magnetic moments and charge radii of nucleon have also been calculated. We have compared the evaluated observables with experimental data and it has been shown that the presented models provide a good description of the observed resonances.

Keywords: Analytical solution, Three-quark model, Hypercentral approach, Baryon resonances, Mass spectrum, Charge and magnetic form factors, Charge radii and magnetic moments



Shahrood University of Technology

Faculty of Physics and Nuclear Engineering

Ph.D Thesis in Nuclear Physics

Investigation of baryons as a bound state of three-quark system

Mehdi Aslantzadeh

Supervisor:
Prof. Ali Akbar Rajabi

February 2017