

رسالة الخادم



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی و مطالعه‌ی موضعی شدن تابع توزیع احتمال در ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن یک بُعدی

نگارنده: فاطمه تنگی

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به

صورانه‌ها...

آرامشانه‌ها...

و محبتانه‌های بی دریغ...

پدر و مادر عزیزم
و خواهر خوبم

سپاس خدای را که نام هایش پاک
نعمت هایش سرشار
واحسانش وافر است...

و با تشکر از:

زحمات استاد ارجمندم جناب آقای دکتر مصطفی عنایتانی که با سعی صدر
فراوان راهنمایی اینجانب بودند.
و پدر و مادر مهربانم که همیشه امید و انگیزه را بدرقه‌ی زندگی ام نموده‌اند.

فاطمه تنگکی

بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب فاطمه تنگی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی و مطالعه‌ی موضعی‌شدن تابع توزیع احتمال در ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن یک بُعدی، تحت راهنمایی مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه تنگی

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

ولگشت‌های کوانتومی در مقایسه با ولگشت‌های تصادفی کلاسیکی تفاوت‌های عمده‌ای دارند که می‌توان به توزیع احتمال، واریانس، سرعت پخش و موضعی شدن اشاره کرد. پدیده موضعی شدن به عنوان یکی از ویژگی‌های قابل توجه ولگشت‌های کوانتومی به شمار می‌رود. این پدیده به صورت احتمال یافتن ولگرد کوانتومی پس از طی گام‌های زیاد در مکان اولیه‌ی خود، شناخته می‌شود. نشان داده شده که اثر موضعی شدن در ولگشت‌های کوانتومی می‌تواند کاربردهای بالقوه‌ای در الگوریتم‌های جستجوی کوانتومی داشته باشد. در این تحقیق با تمرکز بر ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن یک بُعدی، به عبارتی ولگشت‌هایی که در آن عملگر سکه برای مکان‌های مختلف روی خط متفاوت است به بررسی این کمیت مهم با استفاده از روش شمارش مسیر خواهیم پرداخت.

به این منظور ابتدا تعاریفی از مدل در نظر گرفته شده را ارائه داده و روش $PQRS$ را معرفی می‌کنیم. سپس یک عبارت ترکیبی برای ولگشت کوانتومی X_n^φ شروع شده از حالت کیوبیت اولیه φ توسط ماتریس یکانی $U(2)$ به دست می‌آوریم. همچنین با ارائه‌ی برخی نتایج شناخته شده‌ی مسائل جذب در موارد کلاسیکی و کوانتومی، به بررسی مسئله جذب در ولگشت هادامارد با دیواره جذب واقع در مکان صفر می‌پردازیم. سپس به ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن یک بُعدی پرداخته و احتمال بازگشت به مبدأ را به دست می‌آوریم. نشان می‌دهیم که توزیع حدی ولگشت کوانتومی مورد نظر به صورت $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}(\circ) > 0$ می‌باشد. و در نهایت مقایسه‌ای بین مدل در نظر گرفته شده و برخی مدل‌های مرتبط انجام می‌دهیم.

کلمات کلیدی: ولگشت‌های کوانتومی، موضعی شدن، ولگشت هادامارد، مسئله جذب

مقاله مستخرج از پایان نامه

۱. تنگی ف. و عنابستانی م، (۱۳۹۵)، کنفرانس فیزیک ایران، ”بررسی موضعی شدن در ولگشت کوانتومی یک بُعدی شتابدار”، ص ۱۲۴۸، دانشگاه شیراز.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ پیشگفتار
۵	۲ انواع ولگشت
۵	۱.۲ ولگشت تصادفی کلاسیکی
۵	۱.۱.۲ ولگشت تصادفی روی خط
۸	۲.۱.۲ محاسبه واریانس
۱۰	۲.۲ ولگشت کوانتومی
۱۰	۱.۲.۲ ولگشت کوانتومی روی خط
۱۳	۲.۲.۲ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط
۲۱	۳.۲ ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن
۲۵	۳ روش $PQRS$
۲۵	۱.۳ تعاریف پایه
۲۸	۲.۳ تابع مشخصه و قضیه حدی
۳۷	۳.۳ روش $PQRS$ در مسأله جذب
۳۷	۱.۳.۳ مسأله جذب
۳۹	۲.۳.۳ مسأله جذب در مورد ولگشت هادامارد
۴۷	۴ موضعی‌شدن در ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن
۴۷	۱.۴ عملگر تحول
۴۸	۲.۴ بازگشت به مبدأ
۵۱	۱.۲.۴ احتمال بازگشت
۵۲	۳.۴ مسئله جذب در ولگشت غیرهمگن
۵۴	۱.۳.۴ دامنه احتمال

۵۷		۲.۳.۴ احتمال بازگشت به مبدأ
۶۰		۴.۴ مقایسه ولگشت کوانتومی غیرهمگن با مدل‌های دیگر
۶۲		۵.۴ نتیجه‌گیری

۶۳ مراجع

۶۹		آ اثبات روابط
۷۰		۱.آ لم ۲.۲.۳
۷۱		۲.آ بازگشت به مبدأ
۷۳		۳.آ احتمال بازگشت
۷۶		۴.آ اثبات روابط ۶۲.۳
۷۷		۵.آ اثبات روابط ۸۷.۳
۷۸		۶.آ اثبات روابط ۳۶.۴

فهرست تصاویر

۸	۱.۲	نمودار توزیع احتمال ولگشت تصادفی کلاسیکی با سکه‌ی متوازن پس از ۱۰۰ گام .
	۲.۲	نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه‌ی $ \psi(0)\rangle$
۱۲		$ L\rangle \otimes x=0\rangle$
	۳.۲	نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه‌ی $ \psi(0)\rangle$
۱۲		$ R\rangle \otimes x=0\rangle$
	۴.۲	نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه‌ی $ \psi(0)\rangle$
۱۳		$\frac{1}{\sqrt{4}}(L\rangle - i R\rangle) \otimes x=0\rangle$
	۵.۲	انحراف معیار ولگشت کوانتومی (خطوط ضربدر) در مقایسه با ولگشت تصادفی کلاسیکی
۱۴		(خطوط دایره) پس از ۱۰۰ گام
	۶.۲	انحراف استاندارد ولگشت کوانتومی غیرهمگن یک بعدی با عملگر سکه‌ی و حالت
۲۳		اولیه‌ی $\frac{1}{\sqrt{4}}(0, L\rangle + 0, R\rangle)$ و $k=3$
	۷.۲	انحراف استاندارد ولگشت کوانتومی غیرهمگن یک بعدی با عملگر سکه‌ی و حالت
۲۳		اولیه‌ی $\frac{1}{\sqrt{4}}(0, L\rangle + 0, R\rangle)$ و $k=4$
	۸.۲	انحراف استاندارد ولگشت کوانتومی غیرهمگن یک بعدی با عملگر سکه‌ی و حالت
۲۴		اولیه‌ی $\frac{1}{\sqrt{4}}(0, L\rangle + 0, R\rangle)$ و $k=5$
۴۹	۱.۴	مسیرهای مختلف متناظر با $\Xi_2(1, 1)$
۴۹	۲.۴	مسیرهای مختلف متناظر با $\Xi_4(2, 2)$
۵۰	۳.۴	مسیرهای مختلف متناظر با $\Xi_6(3, 3)$
۶۰	۴.۴	نمودار احتمال موضعی شدن به ازای ω های مختلف

فهرست جداول

۱.۲	احتمال حضور ذره در مکان x و در زمان n ، برای ولگشت تصادفی کلاسیکی شروع شده از مبدا	۶
۲.۲	احتمال حضور ذره کوانتومی در مکان x و در زمان n ، برای ولگشت کوانتومی شروع شده از مبدا با حالت اولیه $ \psi(0)\rangle = L\rangle \otimes x=0\rangle$	۱۱
۱.۳	جدول ضرایب P, Q, R, S	۲۷

فصل ۱

پیشگفتار

رفتار هر دستگاه فیزیکی مورد استفاده برای محاسبه یا پردازش اطلاعات در نهایت باید توسط قوانین فیزیک پیش‌بینی شود. رویکردهای متعددی وجود دارند که بر روی نظریه محاسبات در زمینه فیزیکی متمرکز هستند که در میان نظریه‌های فیزیکی مورد استفاده، مکانیک کوانتومی در جایگاه اول قرار دارد. ایده‌ی کامپیوترهای کوانتومی در اوایل ۱۹۸۰ توسط بنیوف^۱ [۱] و فاینمن^۲ [۲] معرفی شد. آن‌ها نشان دادند که بیت‌های ارائه شده توسط حالت‌های مکانیک کوانتومی می‌توانند تحت عملگرهای مکانیک کوانتومی برای انجام محاسبات برگشت پذیر تحول یابند. در ۱۹۸۹ دویچ^۳ نشان داد که به دلیل تداخل حالت‌های کوانتومی، محاسبات کوانتومی قدرتمندتر از مورد دیجیتالی عمل می‌کند [۳]. در ۱۹۹۳، لوید^۴ انجام محاسبات کوانتومی با استفاده از پالس‌های الکترومغناطیسی را پیشنهاد می‌دهد که ناشی از انتقال تشدید یافته در زنجیره‌ای از اتم‌ها با برهمکنش ضعیف است [۴]. در ۱۹۹۴ و پس از کشف اولین الگوریتم کوانتومی توسط شر^۵، موج علاقه به محاسبات کوانتومی ایجاد می‌شود. الگوریتم کوانتومی شر^۵، اعداد صحیح دلخواه را با سرعتی نمایی بیش از مورد کلاسیکی به عوامل اول تجزیه می‌کرد [۵]. سپس گروور^۶ در ۱۹۹۶، الگوریتمی را معرفی می‌کند که سریع‌تر از هر الگوریتم کلاسیکی قادر به جستجوی داده‌ها از بین یک پایگاه داده نامرتب به صورت توان دوم از سرعت بود [۶].

^۱Benioff

^۲Feynman

^۳Deutsch

^۴Lloyd

^۵Shor

^۶Grover

به دنبال این پیشرفت‌ها ولگشت‌های کوانتومی^۷ یک مدل جهانی در زمینه‌ی محاسبات کوانتومی تشکیل می‌دهند و به عنوان تعمیمی از ولگشت‌های کلاسیکی مطرح می‌شوند که در جهان کوانتومی رخ می‌دهند. ارتباط بین ولگشت‌های تصادفی کلاسیکی و ولگشت‌های کوانتومی و همچنین فواید ولگشت‌های کوانتومی در علوم مختلف به عنوان دو حوزه‌ی باز در تحقیقات هستند. کونو^۸ از جمله افرادی است که در ارتباط بین ولگشت‌های کلاسیکی و کوانتومی سهم دارد [۷]؛ و با استفاده از روش $PQRS$ پیوندهای ریاضیاتی محکمی را در این زمینه ارائه می‌دهد [۸] [۹].

چیزی که ولگشت کوانتومی را از نوع کلاسیکی آن متمایز می‌سازد، وجود تداخل دامنه‌های احتمال و برهم نهی^۹ آن‌ها می‌باشد که منجر به ظهور رفتارهای متفاوتی از آن‌ها می‌شود [۱۰] [۱۱] [۱۲] [۱۳] [۱۴]. از ویژگی‌های بارز این ولگشت‌های تصادفی کوانتومی ایجاد یک چارچوب شهودی در ساخت و طراحی الگوریتم‌های جستجوی کوانتومی جدید [۱۵] [۱۶] می‌باشد.

ولگشت‌های کوانتومی گسسته [۱۷] و ولگشت‌های کوانتومی پیوسته [۱۸] به عنوان دو مدل استاندارد از ولگشت‌های کوانتومی شناخته می‌شوند که تفاوت اصلی بین آن‌ها در زمان اعمال عملگرهای تحول مربوطه می‌باشد. در مدل گسسته، عملگر تحول سیستم فقط در گام‌های زمانی گسسته اعمال می‌شود در حالی که در مدل پیوسته عملگر تحول، سیستم را به صورت پیوسته تغییر می‌دهد.

همچنین پدیده موضعی شدن^{۱۰} به عنوان یکی دیگر از ویژگی‌های غیر عادی ولگشت‌های کوانتومی شناخته می‌شود. این پدیده در فیزیک ماده چگال به عنوان یک پدیده فیزیکی به خوبی مورد مطالعه قرار گرفته است. به احتمال زیاد اولین مقاله‌ای که در آن موضعی شدن در چارچوب یک پدیده مکانیک کوانتومی مورد بحث واقع شده توسط اندرسون^{۱۱} ارائه گردیده است [۱۹] [۲۰]. از آن به بعد، موضعی شدن به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار می‌گیرد و تعاریف ریاضیاتی و کیفی مختلفی برای آن ارائه می‌شود. با این حال ایده اصلی در پشت موضعی شدن، عدم انتشار حالت مکانیک کوانتومی است؛ که این می‌تواند ناشی از محیط‌های تصادفی یا بی‌نظمی باشد که از شکست دوره تناوب در دینامیک سیستم‌های فیزیکی ایجاد می‌شود. علاوه بر این، با توجه به [۲۱] موضعی شدن می‌تواند توسط عملگرهای تحول (که مشابه رفتار محیط‌های بی‌نظم هستند) ایجاد شود.

در مورد ولگشت‌های کوانتومی، پدیده موضعی شدن می‌تواند ناشی از ویژه مقادیر تبهگن عملگر تحول ولگشت (که معمولاً با استفاده از عملگرهای تحولی که همگی آن‌ها به جز در معدودی از مکان‌ها یکسان‌اند، ایجاد می‌شوند) و یا ناشی از انتخاب عملگرهای سکه‌ای که وابسته به مکان‌اند باشد [۲۲].

در یک ولگشت تصادفی^{۱۲} روی خط یا یک شبکه مربعی، و نیز ولگشت هادامارد^{۱۳} یک بعدی احتمال یافتن ذره در اطراف مبدأ پس از طی گام‌های زیاد به سمت صفر میل می‌کند. اما در مورد ولگشت‌های کوانتومی دو بعدی که توسط عملگر سکه گروور کنترل می‌شوند، نشان داده شده است که ذره پس از

^۷Quantum Walk

^۸Konno

^۹superposition

^{۱۰}Localization

^{۱۱}P.W.Anderson

^{۱۲}Random Walk

^{۱۳}Hadamard

طی گام‌های زیاد با احتمال بسیار زیادی در مبدأ یافت خواهد شد؛ این پدیده که موضعی شدن نامیده می‌شود به صورت عددی و تحلیلی به طور گسترده‌ای مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۳] [۲۴] [۲۵] [۲۶] [۲۷].

به منظور مطالعه جامع و دقیق موضعی شدن در ولگشت‌های کوانتومی توجه خواننده را به [۲۲] [۲۸] [۲۹] [۳۰] جلب می‌کنیم. همچنین اینیویی^{۱۴} و کونو ارتباط بین موضعی شدن و ویژه مقادیر تبهگن در زمینه به دام افتان ذره در ولگشت‌های کوانتومی روی دایره را مورد مطالعه قرار دادند [۳۱]. به علاوه براساس مطالعه ولگشت‌های کوانتومی نامتناوب ارائه شده در [۳۲]، رومانلی^{۱۵} [۳۳] محاسبه اثر نگاشت را در مورد ولگشت‌های کوانتومی فیبوناچی^{۱۶} مطرح کرد و آمپادو^{۱۷} نشان داد که موضعی شدن در مورد این ولگشت‌ها اتفاق نمی‌افتد [۳۴]. در [۲۵]، استفانک^{۱۸} و دیگران معیاری برای موضعی شدن پیشنهاد دادند و کولار^{۱۹} و دیگران [۳۵] دریافتند که هنگام انجام ولگشت کوانتومی زمان گسسته روی شبکه‌ی مثلثی شکل با استفاده از عملگر گروور ۳ حالت، موضعی شدن حول مبدأ نمایان نمی‌شود. در [۳۶]، آمپادو با تجزیه و تحلیل حرکت M ذره در ولگشت هادامارد یک بعدی، یک معیار تئوری برای مشاهده ولگردهای کوانتومی در مکان اولیه با احتمال بالا ارائه داد. همچنین شرایطی را که ولگشت کوانتومی بایاس شده^{۲۰} روی سطح بازگشت می‌کند [۳۷] و نیز پدیده موضعی شدن در ولگشت‌های کوانتومی ۵ حالت دو بعدی را مورد بررسی قرار می‌دهد [۳۸]. براساس روش CMV ارائه شده در [۳۹]، آمپادو هر دو توزیع حدی^{۲۱} و موضعی شدن ولگشت‌های کوانتومی روی نیم صفحه را مطالعه کرد. به علاوه، کانترو^{۲۲} و دیگران [۴۰] تحلیل جامعی از رفتار مجانبی ولگشت‌های کوانتومی ارائه داده و با استفاده از روش $CGMV$ ویژگی‌های موضعی شدن و نیز عبارات‌های ماحوذ برای احتمال بازگشت به مبدأ را طبقه‌بندی کردند. با انجام مطالعات بیشتر، کونو [۴۱] به لحاظ ریاضی ثابت کرد که ولگشت‌های کوانتومی زمان گسسته غیر همگن^{۲۳}، موضعی شدن را نمایش می‌دهند. شیکانو^{۲۴} و کاتسورا^{۲۵} [۴۲] نشان دادند که برای یک گروه از ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن، یک توزیع حدی وجود دارد که حول مبدأ موضعی است و با انجام مطالعات عددی دریافتند که گستره ویژه مقادیر آن‌ها یک ساختار فراکتال^{۲۶} را نشان می‌دهد. همچنین ماچیدا^{۲۷} یک مدل برای موضعی شدن ولگشت‌های کوانتومی روی خط ارائه داد [۴۳] و یک توزیع محدود را برای ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن ۲ حالت با عملگرهای یونیتاری مختلف

^{۱۴}Inui

^{۱۵}Romanelli

^{۱۶}Fibonacci

^{۱۷}Ampadu

^{۱۸}Stefanak

^{۱۹}Kollar

^{۲۰}Biased quantum walk

^{۲۱}limit distribution

^{۲۲}Cantero

^{۲۳}inhomogeneous

^{۲۴}Shikano

^{۲۵}Katsura

^{۲۶}Fractal

^{۲۷}Machida

به کار رفته در زمان‌های مختلف محاسبه کرد [۴۴]. چاندراشکار^{۲۸} [۴۵] ضمن پیشنهاد هامیلتونی‌هایی برای ولگشت در شبکه‌های مختلف و یافتن ارتباط بین موضعی شدن و استاتیک فضایی عملگرهای مختل شده، یک مدل را برای نمایش موضعی شدن در چگالش بوز-اینشتین [۲۱] ارائه داد. سرانجام در [۴۶]، آلبریت^{۲۹} و دیگران روی ولگشت‌های کوانتومی یک بعدی مختل شده و دینامیک موضعی شدن بررسی‌هایی انجام دادند.

^{۲۸}Chandrashekar

^{۲۹}Ahlbrecht

فصل ۲

انواع ولگشت

۱.۲ ولگشت تصادفی کلاسیکی

۱.۱.۲ ولگشت تصادفی روی خط

ساده‌ترین نوع ولگشت تصادفی، حرکت کلاسیکی ذره روی مسیر یک بُعدی است؛ که در این حالت جهت حرکت براساس پرتاب سکه‌ی موجود در دست ولگرد^۱ تعیین می‌شود. به این گونه که با شیر(خط) آمدن سکه، ولگرد گام‌های خود را به سمت راست(چپ) بر می‌دارد. با تکرار این فرایند و پس از طی n گام زمانی، ولگرد در مکان x قرار می‌گیرد که در این صورت داریم

$$x = n_r - n_l, \quad n = n_r + n_l. \quad (۱.۲)$$

n_r و n_l به ترتیب تعداد دفعاتی هستند که ولگرد به سمت راست و چپ می‌رود. همچنین مکان ولگرد را نقاط گسسته‌ای با مقادیر صحیح در نظر می‌گیریم. احتمال راست و چپ رفتن ولگرد را p و q می‌نامیم به طوری که $p + q = ۱$. حال اگر در n بار پرتاب سکه در مسیر رسیدن به x ولگرد n_r بار به سمت راست حرکت کند آن‌گاه احتمال به راست رفتن به صورت

$$P(n, n_r) = \binom{n}{n_r} p^{n_r} q^{n_l} \quad (۲.۲)$$

^۱Walker

می‌باشد. که با جایگذاری روابط ۱.۲ خواهیم داشت:

$$P(n, x) = \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}}. \quad (3.2)$$

اگر ولگرد را در مکان اولیه‌ی $x = 0$ با $n = 0$ در نظر بگیریم؛ احتمال حضور در این حالت به صورت $P(n = 0, x = 0) = 1$ است. در گام بعد یعنی $n = 1$ ، ولگرد با احتمال $\frac{1}{2}$ در مکان $x = 1$ و یا در مکان $x = -1$ یافت می‌شود. احتمال یافتن ولگرد در چند گام بعد در جدول ۱.۲ مشاهده می‌شود.

جدول ۱.۲: احتمال حضور ذره در مکان x و در زمان n ، برای ولگشت تصادفی کلاسیکی شروع شده از مبدا

x/n	۵	۴	۳	۲	۱	۰	-۱	-۲	-۳	-۴	-۵
۰						۱					
۱					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
۲				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
۳			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
۴		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
۵	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

از آن‌جا که در تمامی این حالت‌ها احتمال راست و چپ رفتن با هم برابر است، بنابراین سکه از نوع متوازن^۲ بوده و تمام احتمالات ممکن به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$P(n, x) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\frac{n+x}{2}} = \frac{n!}{2^n (\frac{n+x}{2})! (\frac{n-x}{2})!}. \quad (4.2)$$

این رابطه فقط به ازای تعداد n ‌های زوج برای x ‌های زوج و همچنین تعداد n ‌های فرد برای x ‌های فرد اعتبار دارد؛ به عبارتی غیرصفر است [۴۷]. برای چنین ولگشتی احتمال به صورت تابعی از n دارای یک منحنی مشخصه است. شکل ۱.۲ نشان می‌دهد که تابع توزیع احتمال به صورت گاوسی یا دوجمله‌ای است. اثبات این نکته در ادامه آمده است. با توجه به تقریب استرلینگ

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n} \quad (5.2)$$

و با یک‌بار $\ln$ گرفتن از آن

$$\ln n! \simeq n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n} \quad (6.2)$$

^۲unbiased

رابطه ۴.۲ را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

$$\begin{aligned}
 \ln P(n, x) &= \ln n! - n \ln 2 - \ln \left(\frac{n+x}{2}\right)! - \ln \left(\frac{n-x}{2}\right)! \\
 &= n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi n} - n \ln 2 - \left(\frac{n+x}{2}\right) \ln \left(\frac{n+x}{2}\right) + \left(\frac{n+x}{2}\right) \\
 &\quad - \ln \sqrt{\pi(n+x)} - \left(\frac{n-x}{2}\right) \ln \left(\frac{n-x}{2}\right) + \left(\frac{n-x}{2}\right) - \ln \sqrt{\pi(n-x)} \\
 &= n \ln n + \frac{1}{2} \ln (2\pi n) - n \ln 2 - \left(\frac{n+x}{2}\right) \ln \left(\frac{n+x}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln \pi(n+x) \\
 &\quad - \left(\frac{n-x}{2}\right) \ln \left(\frac{n-x}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln \pi(n-x) \\
 &= n \ln n + \frac{1}{2} \ln (2\pi n) - n \ln 2 + \left(\frac{n+x}{2}\right) \ln 2 - \left(\frac{n+x}{2}\right) \ln (n+x) \\
 &\quad + \left(\frac{n-x}{2}\right) \ln 2 - \left(\frac{n-x}{2}\right) \ln (n-x) - \frac{1}{2} \ln \pi(n+x) - \frac{1}{2} \ln \pi(n-x) \\
 &= n \ln n + (\circ) \ln 2 - \left(\frac{n+x}{2}\right) \ln (n+x) - \left(\frac{n-x}{2}\right) \ln (n-x) + \frac{1}{2} \ln \frac{2\pi n}{\pi^2(n^2-x^2)} \\
 &= n \ln n - \left(\frac{n+x}{2}\right) \ln n - \left(\frac{n+x}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right) - \left(\frac{n-x}{2}\right) \ln n \\
 &\quad - \left(\frac{n-x}{2}\right) \ln \left(1 - \frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi n}\right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)
 \end{aligned}$$

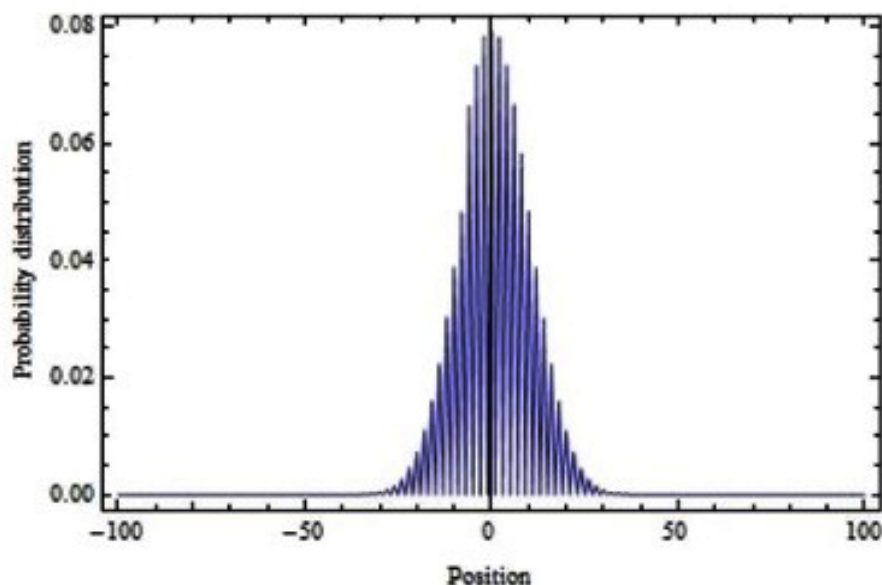
که در رابطه اخیر از n فاکتور گرفته ایم. حال با بهره گیری از بسط تیلور

$$\begin{aligned}
 \ln \left(1 + \frac{m}{n}\right) &= \frac{m}{n} - \frac{m^2}{2n^2} + \frac{m^3}{3n^3} - \dots \\
 \ln \left(1 - \frac{m}{n}\right) &= -\frac{m}{n} - \frac{m^2}{2n^2} - \frac{m^3}{3n^3} - \dots
 \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 \ln P(n, x) &= (\circ) \ln n - \left(\frac{n+x}{2}\right) \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}\right] - \left(\frac{n-x}{2}\right) \left[-\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2}\right] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{2}{\pi n}\right) - \frac{1}{2} \left[-\frac{x^2}{n^2} - \frac{x^4}{2n^4}\right]
 \end{aligned}$$

شکل ۱.۲: نمودار توزیع احتمال ولگشت تصادفی کلاسیکی با سکه‌ی متوازن پس از ۱۰۰ گام



و با در نظر گرفتن $n \gg x$ می‌رسیم به

$$\begin{aligned} \ln P(n, x) &= -\left(\frac{n+x}{2}\right)\frac{x}{n} + \left(\frac{n}{2}\right)\frac{x}{n} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2}{\pi n}\right) = -\frac{x^2}{2n} + \ln \sqrt{\frac{2}{\pi n}} \\ \Rightarrow P(n, x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi n}} e^{-\frac{x^2}{2n}}. \end{aligned} \quad (7.2)$$

که این معادله به طور واضح گویای یک توزیع گاوسی یا نرمال است.

۲.۱.۲ محاسبه واریانس

واریانس و میانگین از مواردی هستند که حاوی اطلاعات مهمی در مورد تابع توزیع یک متغیر تصادفی می‌باشند. واریانس به صورت $\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ و میانگین در مورد متغیرهای تصادفی به صورت $\langle x \rangle = \sum_i x_i p(x_i)$ معرفی می‌شود. یکی از روش‌های محاسبه‌ی واریانس در مورد ولگشت کلاسیک موسوم به تابع مولد^۳ است. که با در نظر گرفتن متغیر جدید k تابع مولد برای حالت‌های گسسته به صورت زیر تعریف می‌شود [۴۸]:

$$\tilde{P}(n, k) = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} P(n, x) e^{kx}. \quad (8.2)$$

اگر از این رابطه نسبت به k مشتق گرفته و قرار دهیم $k = 0$ ، داریم:

$$\left. \frac{d\tilde{P}(n, k)}{dk} \right|_{k=0} = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x P(n, x) = \langle x \rangle \quad (9.2)$$

^۳generating function

که با مشتق‌گیری مجدد خواهیم داشت:

$$\left. \frac{d^2 \tilde{P}(n, k)}{dk^2} \right|_{k=0} = \sum_{x=-\infty}^{+\infty} x^2 P(n, x) = \langle x^2 \rangle. \quad (10.2)$$

حال روابط ۱.۲ و ۳.۲ را در ۸.۲ جایگذاری می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \tilde{P}(n, k) &= \sum_{x=-\infty}^{+\infty} \binom{n}{\frac{n+x}{2}} p^{\frac{n+x}{2}} q^{\frac{n-x}{2}} e^{kx} \\ &= \sum_{n_r - n_l = -\infty}^{+\infty} \binom{n}{n_r} p^{n_r} q^{n_l} e^{k(n_r - n_l)} \end{aligned}$$

از آنجایی که n_r تعداد تکرارهایی است که ولگرد به سمت راست می‌رود، بنابراین مقدار r در بازه $[0, n]$ تغییر می‌کند و تابع مولد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tilde{P}(n, k) &= \sum_{n_r=0}^n \binom{n}{n_r} (pe^k)^{n_r} (qe^{-k})^{n-n_r} \\ \text{حال با بهره‌گیری از بسط دوجمله‌ای } (x+y)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \text{ داریم:} \\ \tilde{P}(n, k) &= (pe^k + qe^{-k})^n. \end{aligned} \quad (11.2)$$

اکنون می‌توانیم روابط میانگین ۹.۲ و ۱۰.۲ را به صورت زیر نتیجه بگیریم:

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \left. \frac{d\tilde{P}(n, k)}{dk} \right|_{k=0} = n(p - q)(p + q)^{n-1} = n(p - q) \\ \langle x^2 \rangle &= \left. \frac{d^2 \tilde{P}(n, k)}{dk^2} \right|_{k=0} = n(p + q)(p + q)^{n-1} + n(n-1)(p - q)^2 (p + q)^{n-2} \\ &= n[1 + (n-1)(p - q)^2] \end{aligned} \quad (12.2)$$

که در آن از $p + q = 1$ استفاده کرده‌ایم.

بنابراین با توجه به تعریف، مشاهده می‌کنیم که واریانس متناسب با n محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = n + n(n-1)(p - q)^2 - n^2(p - q)^2 \\ &= n - n(p - q)^2 = n - n[p^2 + q^2 - 2pq + 2pq - 2pq] \\ &= n - n[(p + q)^2 - 4pq] = n - n(1 - 4pq) = 4npq \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma^2 \propto n. \quad (13.2)$$

همچنین انحراف معیار^۴

$$\sigma = \sqrt{npq} \quad (14.2)$$

که متناسب با $\sqrt{n}$ می باشد.

۲.۲ ولگشت کوانتومی

۱.۲.۲ ولگشت کوانتومی روی خط

ولگشت کوانتومی به عنوان تعمیمی از ولگشت تصادفی کلاسیکی؛ برای انجام ولگشت روی خط مستلزم یک ولگرد کوانتومی با فضای هیلبرت بی نهایت بُعدی $\mathcal{H}_p$ (هر بردار این فضا بر مکان دلالت دارد) و یک سکه با فضای هیلبرت ۲ بُعدی $\mathcal{H}_c$ است که دارای یک درجه آزادی اضافی به نام کایرالیته^۵ می باشد. کایرالیته دو ارزش چپ (L) و راست (R) را می گیرد و جهت حرکت را مشخص می کند. در هر گام زمانی این امکان وجود دارد که ولگرد در یک برهم نهی از حالت های کایرالیته چپ و راست قرار گیرد، از این رو توسط یک تابع موج دومولفه ای که در آینده به آن می پردازیم توصیف می شود [۴۹]. این حالت زمانی اتفاق می افتد که معادل پرتاب سکه در مورد کلاسیکی، عملگر تحول سکه C روی حالت کایرالیته اعمال شود. در بین عملگرهای تحول سکه، عملگر هادامارد

$$C = H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (15.2)$$

دارای بیشترین کاربرد است. بنابراین:

$$H |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + |R\rangle) \quad , \quad H |R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle - |R\rangle). \quad (16.2)$$

که در آن، حالت های کایرالیته L و R به صورت زیر تعریف می شوند:

$$|L\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |R\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17.2)$$

حال برای جابه جایی ولگرد، عملگر انتقال شرطی

$$S = \sum_x |x+1\rangle \langle x| \otimes |R\rangle \langle R| + |x-1\rangle \langle x| \otimes |L\rangle \langle L| \quad (18.2)$$

را معرفی می کنیم. این عملگر تحول که عملگری یکانی است براساس حالت سکه، ولگرد را یک گام به سمت راست و یا یک گام به سمت چپ جابه جا می کند. بنابراین عملگر تحول کلی ولگشت کوانتومی به صورت

$$U = (S \otimes I_c) \cdot (I_p \otimes C) \quad (19.2)$$

^۴standard deviation

^۵Chirality

جدول ۲.۲: احتمال حضور ذره کوانتومی در مکان x و در زمان n ، برای ولگشت کوانتومی شروع شده از مبدا با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |L\rangle \otimes |x=0\rangle$

-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵	x/n
۱											۰
					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				۱
				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{4}$			۲
			$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{8}$		۳
		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{5}{8}$		$\frac{1}{16}$	۴
$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		$\frac{17}{32}$		$\frac{1}{32}$	۵

بیان می‌شود [۵۰]. که در آن I_c و I_p به ترتیب عملگرهای یکانی در فضای سکه و مکان هستند. و حالت کلی ولگرد کوانتومی پس از طی n گام زمانی به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$|\psi(n)\rangle = U^n |\psi(0)\rangle. \quad (20.2)$$

به عنوان مثال حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |L\rangle \otimes |x=0\rangle$ را در نظر می‌گیریم. اولین مرحله شامل اعمال عملگر سکه روی حالت $|L\rangle$ می‌باشد. سپس با اعمال عملگر انتقال شرطی، مکان ولگرد به صورت برهم‌نهی از حالت‌های سکه در $x=1$ و $x=-1$ قرار می‌گیرد.

$$|L\rangle \otimes |x=0\rangle \xrightarrow{H \otimes I_p} \left(\frac{|L\rangle + |R\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes |x=0\rangle \quad (21.2)$$

$$\xrightarrow{S} \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |R\rangle + |-1\rangle \otimes |L\rangle)$$

که این رابطه به عنوان اولین گام محسوب می‌شود:

$$|\psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle \otimes |R\rangle + |-1\rangle \otimes |L\rangle). \quad (22.2)$$

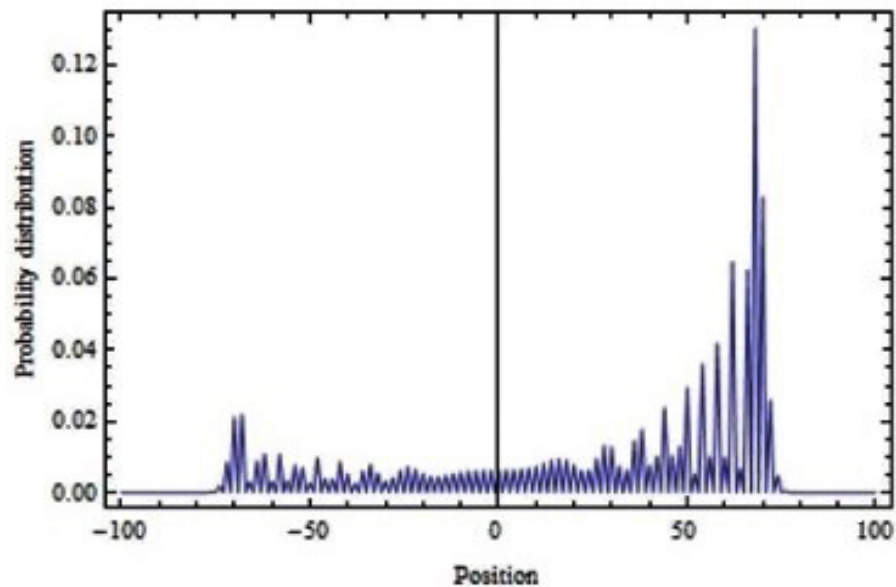
اگر احتمال حضور ولگرد کوانتومی در مکان x و در گام n به صورت

$$P(n, x) = |\langle L | \langle x | \psi(n) \rangle|^2 + |\langle R | \langle x | \psi(n) \rangle|^2 \quad (23.2)$$

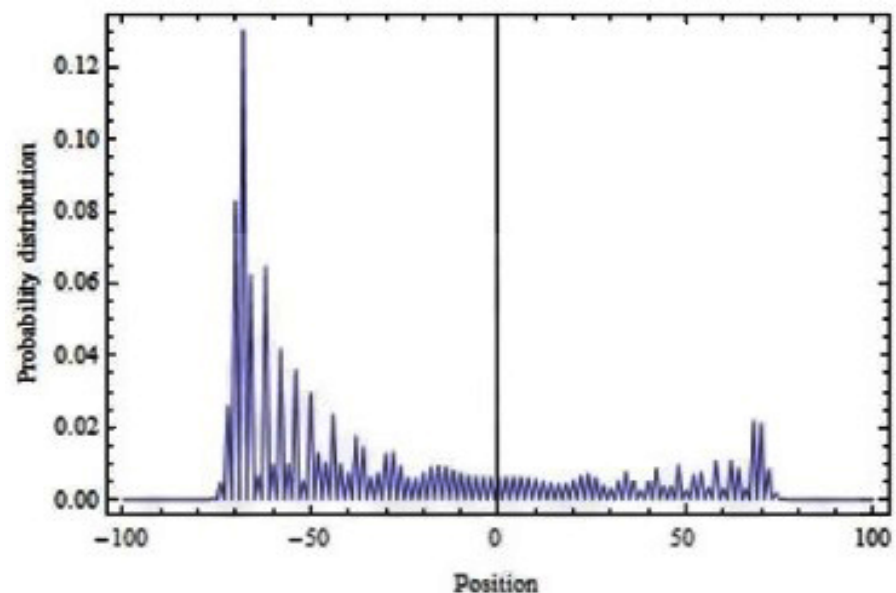
باشد، نتایج حاصل از محاسبه‌ی چند گام بعد در جدول ۲.۲ آمده است. نمودار ۲.۲، توزیع احتمال را پس از طی ۱۰۰ گام زمانی نشان می‌دهد.

همچنین در موردی که حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |R\rangle \otimes |x=0\rangle$ در نظر گرفته شود، نتایج حاصل در نمودار ۳.۲ قابل مشاهده می‌باشد.

شکل ۲.۲: نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی پس از 100 گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |L\rangle \otimes |x=0\rangle$



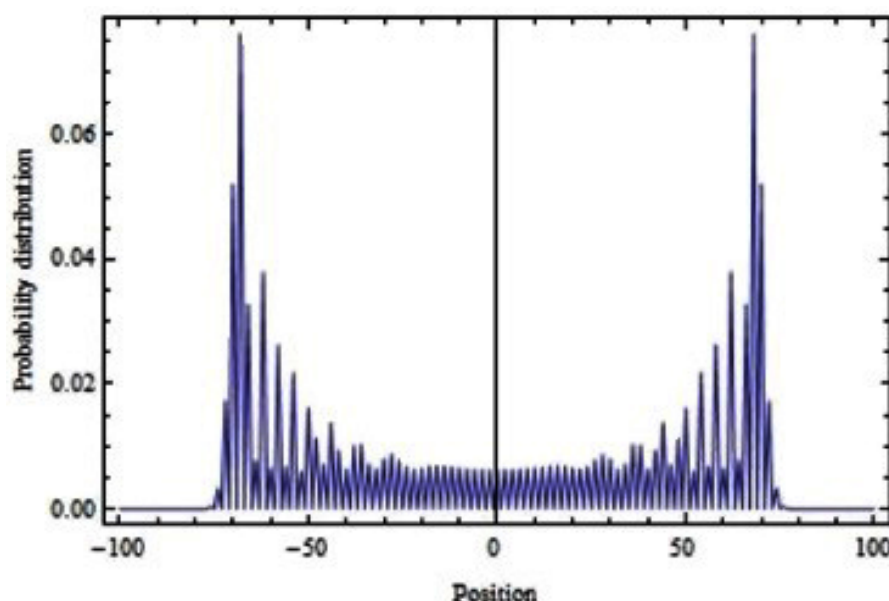
شکل ۳.۲: نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی پس از 100 گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = |R\rangle \otimes |x=0\rangle$



همان‌طور که در شکل ۲.۲ و ۳.۲ مشاهده می‌شود، توزیع احتمال نامتقارن است. اما می‌توان با در نظر گرفتن حالت اولیه ولگرد به صورت $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle - i|R\rangle) \otimes |x=0\rangle$ شکل ولگشت کوانتومی را به صورت متقارن به دست آورد (شکل ۴.۲) [۴۷].

تداخل دامنه‌های احتمال در ولگشت‌های کوانتومی، توزیع احتمال متفاوتی را نسبت به ولگشت‌های کلاسیکی از آن‌ها نشان می‌دهد. درحالی‌که ولگشت کلاسیکی باعث پهن‌شدگی احتمالات در سطح نمودار می‌شود، ولگشت کوانتومی منجر به گسترش دامنه‌ی احتمال می‌شود. در ولگشت هادامارد فوق می‌بینیم که برخلاف توزیع گاوسی شکل کلاسیکی، توزیع احتمال کوانتومی دارای پیک بلند در دو طرف توزیع می‌باشد. از این‌رو انحراف معیار ولگشت کوانتومی $\sigma = n$ به‌صورت توانی سریع‌تر از ولگشت کلاسیکی منتشر می‌شود که یک رابطه خطی با تعداد گام دارد (شکل ۵.۲) [۵۱].

شکل ۴.۲: نمودار توزیع احتمال ولگشت کوانتومی پس از ۱۰۰ گام با حالت اولیه‌ی $|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle - i|R\rangle) \otimes |x=0\rangle$



۲.۲.۲ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی روی خط

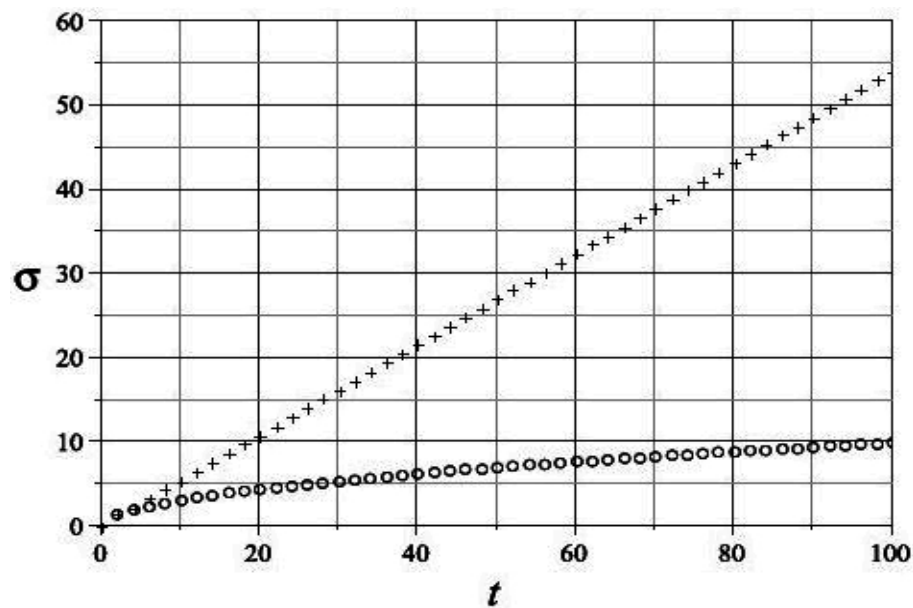
برای مطالعه‌ی ویژگی‌های ولگشت که در بخش قبل معرفی شد، تابع موج را به عنوان توصیف کننده‌ی مکان ولگرد و تحلیل چگونگی تحول در زمان در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که رابطه‌ی ۲۰.۲ را می‌توان به صورت

$$|\psi(n)\rangle = \sum_{x'} [a(n, x') |R\rangle + b(n, x') |L\rangle] \otimes c(n, x') |x'\rangle \quad (24.2)$$

بیان کرد [۵۰]. از این‌رو داریم:

$$\begin{aligned} \langle x | \psi(n) \rangle &= \sum_{x'} a(n, x') |R\rangle \otimes c(n, x') \langle x | x'\rangle + b(n, x') |L\rangle \otimes c(n, x') \langle x | x'\rangle \\ &= a(n, x) c(n, x) |R\rangle + b(n, x) c(n, x) |L\rangle = \psi_R(n, x) |R\rangle + \psi_L(n, x) |L\rangle. \end{aligned} \quad (25.2)$$

شکل ۵.۲: انحراف معیار ولگشت کوانتومی (خطوط ضربدر) در مقایسه با ولگشت تصادفی کلاسیکی (خطوط دایره) پس از ۱۰۰ گام



بنابراین تابع موج

$$\psi(n, x) = \begin{pmatrix} \psi_L(n, x) \\ \psi_R(n, x) \end{pmatrix} \quad (26.2)$$

به صورت دو مولفه‌ی برداری از دامنه‌ی ولگرد واقع در مکان x و زمان n تعریف می‌شود. حال برای تحلیل رفتار ولگشت هادامارد در مکان x بعد از $n + 1$ گام، با اعمال عملگر هادامارد روی حالت‌های سکه به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\begin{aligned} |\psi(n+1)\rangle &= U |\psi(n)\rangle = (S \otimes I_c) \cdot (I_p \otimes H) |\psi(n)\rangle \\ &= \left(\sum_{x'} |x'+1\rangle \langle x'| \otimes |R\rangle \langle R| H + |x'-1\rangle \langle x'| \otimes |L\rangle \langle L| H \right) |\psi(n)\rangle \\ \xrightarrow{\langle x|} \langle x| \psi(n+1)\rangle &= \left(\sum_{x'} \langle x| x'+1\rangle \langle x'| \otimes |R\rangle \langle R| H + \langle x| x'-1\rangle \langle x'| \otimes |L\rangle \langle L| H \right) |\psi(n)\rangle \\ &= \langle x-1| \psi(n)\rangle \otimes |R\rangle \langle R| H + \langle x+1| \psi(n)\rangle \otimes |L\rangle \langle L| H \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \psi(n, x-1) + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \psi(n, x+1) \end{aligned} \quad (27.2)$$

با معرفی ماتریس‌های فوق به صورت M_+ و M_- داریم:

$$\psi(n+1, x) = M_+ \psi(n, x-1) + M_- \psi(n, x+1). \quad (28.2)$$

از آنجایی که این رابطه تابع توزیع احتمال را به صورت تحلیلی به دست نمی‌آورد، بنابراین حل مسئله در قلمرو فوریه مناسب است.

تبدیل فوریه‌ی $\tilde{\psi}(n, k)$ به‌ازای $k \in [-\pi, \pi]$ برای تابع موج $\psi(n, k)$ به‌صورت

$$\tilde{\psi}(n, k) = \sum_x \psi(n, x) e^{ikx} \quad (29.2)$$

داده می‌شود.

به طور خاص، به‌ازای همه k ها برای یک ولگشت شروع شده از مبدأ با کایرالیته اولیه‌ی چپ داریم [۴۹]:

$$\tilde{\psi}(\circ, k) = \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix}.$$

با استفاده از معادله ۲۸.۲ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(n+1, k) &= \sum_x [M_+ \psi(n, x-1) + M_- \psi(n, x+1)] e^{ikx} \\ &= M_+ e^{ik} \sum_x \psi(n, x-1) e^{ik(x-1)} + M_- e^{-ik} \sum_x \psi(n, x+1) e^{ik(x+1)} \\ &= (M_+ e^{ik} + M_- e^{-ik}) \tilde{\psi}(n, k) = M_k \tilde{\psi}(n, k). \end{aligned} \quad (30.2)$$

که در آن

$$M_k = M_+ e^{ik} + M_- e^{-ik} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix}. \quad (31.2)$$

به این ترتیب شکل ساده‌ای از بازگشت در فضای تبدیل فوریه به صورت $\tilde{\psi}(n+1, k) = M_k \tilde{\psi}(n, k)$ داریم که منجر می‌شود به

$$\tilde{\psi}(n, k) = M_k^n \tilde{\psi}(\circ, k). \quad (32.2)$$

از آنجا که M_k یک ماتریس یکانی است، به راحتی می‌توانیم M_k^n (و سپس $\tilde{\psi}(n, k)$) را از طریق قطری‌سازی ماتریس M_k محاسبه کنیم. اگر M_k دارای ویژه حالت‌هایی به صورت $|\Phi_k^1\rangle$ و $|\Phi_k^2\rangle$ و همچنین ویژه مقادیر λ_k^1 و λ_k^2 باشد، داریم:

$$M_k = \lambda_k^1 |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| + \lambda_k^2 |\Phi_k^2\rangle \langle \Phi_k^2|, \quad (33.2)$$

و بنابراین تحول زمانی ماتریس را به صورت

$$M_k^n = (\lambda_k^1)^n |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| + (\lambda_k^2)^n |\Phi_k^2\rangle \langle \Phi_k^2| \quad (34.2)$$

به دست می‌آوریم. به این منظور ابتدا ویژه مقادیر M_k را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} - \lambda_k & \frac{e^{-ik}}{\sqrt{2}} \\ \frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} & -\frac{e^{ik}}{\sqrt{2}} - \lambda_k \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_k^2 + i\sqrt{2}\lambda_k \sin k = 0$$

در نتیجه

$$\lambda_k^1 = -\frac{i \sin k}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 k}$$

$$\lambda_k^2 = -\frac{i \sin k}{\sqrt{2}} - \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 k}.$$

اگر ω_k را به صورت زاویه‌ای در $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ تعریف کنیم به طوری که $\sin(\omega_k) = \frac{\sin k}{\sqrt{2}}$ باشد، ویژه مقادیر به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\lambda_k^1 = e^{-i\omega_k}$$

$$\lambda_k^2 = e^{i(\pi + \omega_k)} = -e^{i\omega_k}$$

همچنین برای یافتن ویژه حالات به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\text{به ازای } \lambda_k^1 = e^{-i\omega_k} :$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e^{-i\omega_k} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha e^{-ik} + \beta e^{-ik}) = \alpha e^{-i\omega_k}$$

$$\Rightarrow (\alpha + \beta)e^{-ik} = \alpha\sqrt{2}e^{-i\omega_k} \quad (35.2)$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha(\sqrt{2}e^{-i(\omega_k - k)} - 1)$$

و با جایگذاری در شرط بهنجارش $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ داریم:

$$|\alpha|^2 + |\alpha|^2(\sqrt{2}e^{-i(\omega_k - k)} - 1)^2 = 1 \Rightarrow |\alpha|^2(4 - \sqrt{2}e^{-i(\omega_k - k)} + e^{i(\omega_k - k)})$$

$$\Rightarrow |\alpha|^2(4 - 2\sqrt{2}\cos(\omega_k - k)) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}\cos(\omega_k - k)}} \quad (36.2)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}(\cos \omega_k \cos k + \sin \omega_k \sin k)}}$$

که با توجه به $\sin(\omega_k) = \frac{\sin k}{\sqrt{2}}$ می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}(\sqrt{1 - \frac{\sin^2 k}{2}} \cos k + \frac{\sin^2 k}{\sqrt{2}})}} = \frac{1}{\sqrt{4 - 2(\sqrt{2} - \sin^2 k \cos k + \sin^2 k)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 - 2(\sqrt{1 + \cos^2 k} \cos k + \sin^2 k)}} = \frac{1}{\sqrt{2(2 - \sin^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}}.\end{aligned}\quad (37.2)$$

حال با استفاده از رابطه‌ی ۳۵.۲ مقدار β به صورت زیر می‌باشد:

$$\beta = \frac{(\sqrt{2}e^{-i(\omega_k - k)} - 1)}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}}.\quad (38.2)$$

بنابراین ویژه حالت متناظر با این ویژه مقدار به دست می‌آید.

$$|\Phi_k\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \\ \frac{(\sqrt{2}e^{-i(\omega_k - k)} - 1)}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \end{pmatrix}\quad (39.2)$$

$$= \frac{e^{ik}}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2}e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix}$$

که در آن می‌توان از e^{ik} چشم‌پوشی کرد.

ویژه حالت به ازای $\lambda_k = e^{i(\pi + \omega_k)}$ نیز به طور مشابه به دست می‌آید.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = e^{i(\pi + \omega_k)} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow (\alpha + \beta)e^{-ik} = \alpha\sqrt{2}e^{i(\pi + \omega_k)}\quad (40.2)$$

$$\Rightarrow \beta = \alpha(\sqrt{2}e^{i(\pi + \omega_k + k)} - 1)$$

مشابه قبل با استفاده از شرط بهنجارش، مقدار α به صورت زیر به دست می‌آید.

$$|\alpha|^2 + |\alpha|^2 (\sqrt{2} e^{i(\pi+\omega_k+k)} - 1)^2 = 1 \quad (41.2)$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2} \cos(\omega_k + k)}} = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) + 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}}.$$

و مقدار β که به صورت زیر می‌باشد:

$$\beta = \frac{(\sqrt{2} e^{i(\pi+\omega_k+k)} - 1)}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) + 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}}. \quad (42.2)$$

بنابراین برای ویژه حالت متناظر با این ویژه مقدار داریم:

$$|\Phi_k^2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) + 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \\ \frac{(\sqrt{2} e^{i(\pi+\omega_k+k)} - 1)}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) + 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \end{pmatrix} \quad (43.2)$$

$$= \frac{e^{ik}}{\sqrt{2(1 + \cos^2 k) + 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{i(\pi+\omega_k)} - e^{-ik} \end{pmatrix}.$$

حال با توجه به ویژه مقادیر و ویژه حالات به دست آمده، رابطه ۳۲.۲ به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$\tilde{\psi}(n, k) = \left[e^{-in\omega_k} |\Phi_k^1\rangle \langle \Phi_k^1| + e^{i(\pi+\omega_k)n} |\Phi_k^2\rangle \langle \Phi_k^2| \right] \tilde{\psi}(\circ, k)$$

$$= \frac{e^{-in\omega_k} e^{ik}}{\left[2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right]} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix}$$

$$+ \frac{(-1)^n e^{in\omega_k} e^{ik}}{\left[2(1 + \cos^2 k) + 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right]} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2} e^{i\omega_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (44.2)$$

$$= \left(\frac{e^{-in\omega_k}}{2[(1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}]} + \frac{(-1)^n e^{in\omega_k}}{2[(1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}]} \right)$$

$$\left(\frac{e^{ik} e^{-in\omega_k} (\sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{-ik})}{2[(1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}]} + \frac{e^{ik} (-1)^n e^{in\omega_k} (-\sqrt{2} e^{i\omega_k} - e^{-ik})}{2[(1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}]} \right)$$

به منظور ساده‌تر شدن این رابطه، ساده سازی‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{(1 + \cos^2 k) \pm \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}} \\
 &= \frac{1}{(1 + \cos^2 k) \pm \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}} \times \frac{(1 + \cos^2 k) \mp \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{(1 + \cos^2 k) \mp \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}} \\
 &= \frac{(1 + \cos^2 k) \mp \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{(1 + \cos^2 k)^2 - \cos^2 k (1 + \cos^2 k)} = \frac{(1 + \cos^2 k) \mp \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{(1 + 2 \cos^2 k + \cos^4 k - \cos^2 k - \cos^4 k)} \\
 &= \frac{(1 + \cos^2 k)(1 \mp \frac{\cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{1 + \cos^2 k})}{1 + \cos^2 k} = 1 \mp \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}}, \tag{۴۵.۲}
 \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned}
 & \pm \sqrt{2} e^{-i\omega_k} - e^{-ik} = \pm \sqrt{2} (\cos \omega_k - i \sin \omega_k) - \cos k + i \sin k \\
 &= \pm \sqrt{2} \cos \omega_k - i \sqrt{2} \frac{\sin k}{\sqrt{2}} - \cos k + i \sin k = \pm \sqrt{2} \cos \omega_k - \cos k \\
 &= \pm \sqrt{2} \sqrt{1 - \sin^2 \omega_k} - \cos k = \pm \sqrt{2 - \frac{2 \sin^2 k}{2}} - \cos k \tag{۴۶.۲} \\
 &= \pm \sqrt{1 + (1 - \sin^2 k)} - \cos k = (\pm \sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos k) \times \frac{2 \sqrt{1 + \cos^2 k}}{2 \sqrt{1 + \cos^2 k}} \\
 &= \frac{\pm 2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{2 \sqrt{1 + \cos^2 k}}.
 \end{aligned}$$

بنابراین با اعمال این ساده سازی‌ها در رابطه ۴۴.۲ می‌رسیم به:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}(n, k) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-in\omega_k} + \frac{1}{2} (-1)^n \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{in\omega_k} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-in\omega_k} e^{ik} \times \frac{2 \left[(1 + \cos^2 k) - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right]}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \\ - \frac{1}{2} (-1)^n \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{in\omega_k} e^{ik} \times \frac{2 \left[(1 + \cos^2 k) + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} \right]}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-in\omega_k} + \frac{1}{2} (-1)^n \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{in\omega_k} \\ e^{ik} \left\{ \frac{e^{-in\omega_k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \left[1 + \cos^2 k - \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} (1 + \cos^2 k) - \cos^2 k \right] \right. \\ \left. - \frac{(-1)^n e^{in\omega_k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \left[1 + \cos^2 k + \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k} - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} (1 + \cos^2 k) - \cos^2 k \right] \right\} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-in\omega_k} + \frac{1}{2} (-1)^n \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{in\omega_k} \\ e^{ik} \left\{ \frac{e^{-in\omega_k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \left[1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} (1 + \cos^2 k) + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} (1 + \cos^2 k) \right] \right. \\ \left. - \frac{(-1)^n e^{in\omega_k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \left[1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} (1 + \cos^2 k) - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} (1 + \cos^2 k) \right] \right\} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-in\omega_k} + \frac{1}{2} (-1)^n \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{in\omega_k} \\ \frac{e^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} [e^{-in\omega_k} - (-1)^n e^{in\omega_k}] \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{۴۷.۲}$$

در نتیجه دامنه‌های تبدیل فوریه در فضای k به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\tilde{\psi}_L(n, k) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-in\omega_k} + \frac{1}{2} (-1)^n \left(1 - \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{in\omega_k}, \tag{۴۸.۲}$$

$$\tilde{\psi}_R(n, k) = \frac{e^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} [e^{-in\omega_k} - (-1)^n e^{in\omega_k}].$$

که با استفاده از عکس تبدیل فوریه می‌توان این دامنه‌ها را در فضای حقیقی بیان کرد:

$$\psi_L(n, x) = \frac{1 + (-1)^{x+n}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i(\omega_k n + kx)} \tag{۴۹.۲}$$

$$\psi_R(n, x) = \frac{1 + (-1)^{x+n}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{e^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i(\omega_k n + kx)}.$$

همان‌طور که از این روابط مشهود است و از تعریف ولگشت کوانتومی انتظار می‌رود، دامنه‌ها به ازای تعداد n های زوج (فرد) در x های فرد (زوج) صفر می‌باشند. عبارتهای تحلیلی به دست آمده در ۴۹.۲ جهت تعیین رفتار مجانبی $\psi(n, x)$ و $P(n, x)$ و همچنین یافتن نتایج مفید مناسب هستند [۴۹].

۳.۲ ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن

تاکنون ولگشت‌های کوانتومی را مورد بررسی قرار دادیم که به عنوان ولگشت‌های کوانتومی همگن^۶ شناخته می‌شوند. در این نوع ولگشت‌ها عملگر سکه، مستقل از مکان یا فضای سکه عمل می‌کند. ولگشت هادامارد روی خط نمونه‌ای بارز از این قبیل ولگشت‌ها می‌باشد. عملگر سکه هادامارد، با توجه به حالت سکه $(|L\rangle, |R\rangle)$ در هر گام حالت سکه را در یک برهم نهی مساوی از حالات ممکن قرار می‌داد و سپس عملگر انتقال، ذره را در راستای مشخص به نقطه‌ی مجاور منتقل می‌نمود. که شکل توزیع احتمال و نیز انحراف استاندارد را برای ولگشت هادامارد نشان دادیم. در این بخش نوع دیگری از ولگشت‌های کوانتومی را معرفی می‌کنیم که به ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن مشهورند. در این نوع ولگشت، عملگر سکه نه تنها به حالت سکه بلکه به مکان ذره نیز وابسته می‌باشد. این امر به رفتارهای جالبی منجر می‌شود، از جمله این که ولگرد می‌تواند مقید به یک ناحیه‌ی مشخص از فضا در تمام زمان‌ها باشد. ولگشت کوانتومی غیرهمگن را به شیوه‌ای مشابه با ولگشت کوانتومی استاندارد تعریف می‌کنیم با این تفاوت که حالا عملگر سکه C وابسته به مکان m کنونی ذره می‌باشد. بنابراین تحول یکانی ولگشت به صورت

$$U = S \left(\sum_m |m\rangle \langle m| \otimes C_m \right) \quad (۵۰.۲)$$

توصیف می‌شود [۵۲]. در مورد ولگشت‌های روی خط، C_m می‌تواند هر عملگر یکانی دلخواه در فضای سکه دو بعدی باشد. در واقع لزومی ندارد که ولگشت‌ها را محدود به حرکت به نقاط مجاور کنیم، بلکه ذره می‌تواند از یک نقطه به هر نقطه دیگری روی خط منتقل شود. به عنوان یک مثال ساده عملگر سکه‌ی متناوب را در نظر می‌گیریم که ماتریس یکانی آن در پایه‌های $|L\rangle$ و $|R\rangle$ توسط

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) & -\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) \\ \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) & \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) \end{pmatrix} \quad (۵۱.۲)$$

^۶homogeneous

داده می‌شود. دوره‌ی این ولگشت $2k$ می‌باشد که k یک عدد صحیح دلخواه است. عملگر سکه‌ی فوق، حالت سکه را به صورت زیر تحول می‌دهد:

$$\begin{aligned} C_n |n, L\rangle &= \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, L\rangle + \sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, R\rangle, \\ C_n |n, R\rangle &= -\sin\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, L\rangle + \cos\left(\frac{n\pi}{k}\right) |n, R\rangle. \end{aligned} \quad (52.2)$$

نمودار انحراف استاندارد برای این نوع ولگشت در شکل‌های ۶.۲، ۷.۲ و ۸.۲ نشان داده شده است [۵۲]. همان‌طور که مشاهده می‌شود شکل ۶.۲ و ۸.۲ یک حرکت خطی در زمان و شکل ۷.۲ یک حرکت دوره‌ای در زمان را نمایش می‌دهند. با استفاده از لم زیر به بررسی این مورد می‌پردازیم. به این منظور ابتدا شرایط عمومی برای این که ولگشت در همه‌ی زمان‌ها در یک محدوده مشخص از خط باقی بماند را در نظر می‌گیریم.

لم ۱.۳.۲. فرض می‌کنیم حالت اولیه ولگشت به صورت زیر باشد

$$|n_0\rangle (a_0 |L\rangle + b_0 |R\rangle), \quad (53.2)$$

در این صورت ولگشت کوانتومی غیرهمگن با عملگر سکه‌ی یکانی، محدود خواهد ماند اگر و فقط اگر در سمت چپ و راست n_0 عملگر سکه‌ای به صورت زیر وجود داشته باشد:

$$\begin{pmatrix} \circ & e^{i\theta} \\ e^{i\phi} & \circ \end{pmatrix} \quad (54.2)$$

وجود داشته باشد.

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم که ولگشت محدود باشد. بنابراین کوچکترین کران بالا و بزرگترین کران پایین برای ولگشت وجود دارد. n_l را بیانگر مکان بزرگترین کران پایین و n_u را بیانگر مکان کوچکترین کران بالا در نظر می‌گیریم. از آن‌جا که n_l بزرگترین کران پایین برای ولگشت است، بنابراین ولگرد باید به این نقطه رسیده و احتمال این که از آن نقطه بیشتر به سمت چپ برود صفر است. بنابراین عملگر سکه در n_l به صورت

$$C_{n_l} = \begin{pmatrix} \circ & a \\ b & c \end{pmatrix} \quad (55.2)$$

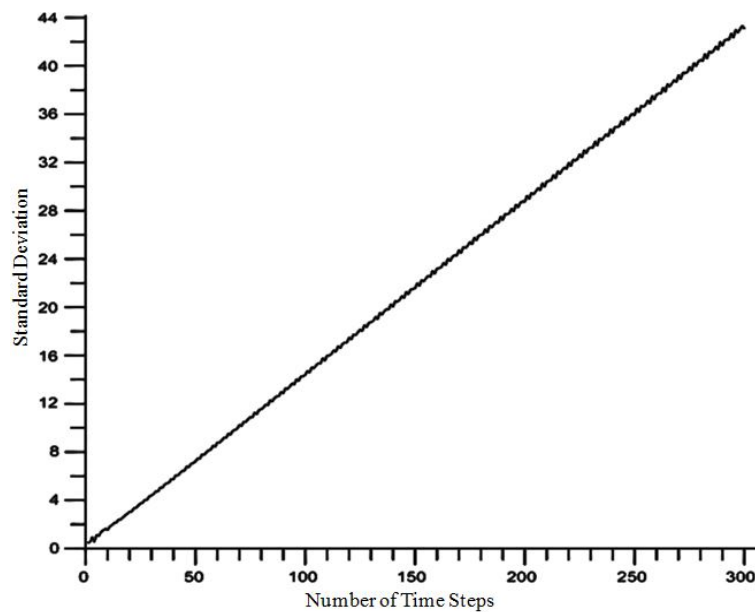
می‌باشد. و از آن جایی که این عملگر باید یکانی باشد در نتیجه c نیز صفر خواهد شد و داریم:

$$C_{n_l} = \begin{pmatrix} \circ & e^{i\theta} \\ e^{i\phi} & \circ \end{pmatrix}. \quad (56.2)$$

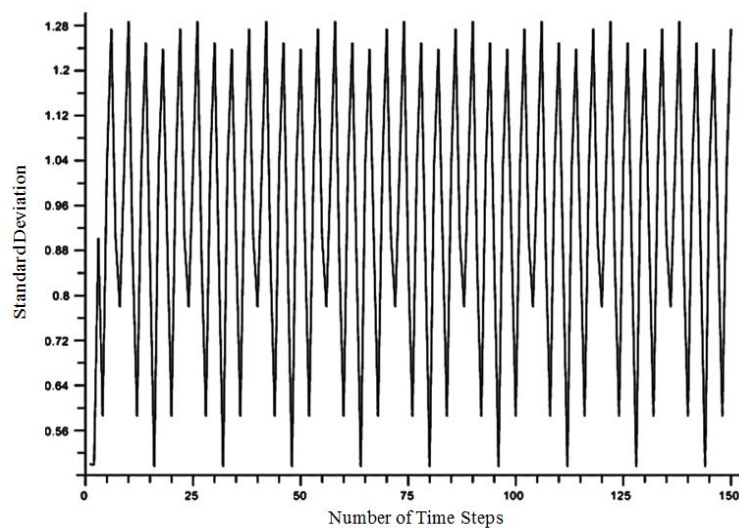
به طور مشابه، از آن‌جا که n_u کوچکترین کران بالا برای ولگشت است، ولگرد باید به این نقطه رسیده و احتمال این که از آن نقطه بیشتر به سمت راست برود صفر خواهد بود. بنابراین عملگر سکه در n_u به صورت زیر است

$$C_{n_u} = \begin{pmatrix} e & f \\ g & \circ \end{pmatrix}. \quad (57.2)$$

شکل ۶.۲: انحراف استاندارد ولگشت کوانتومی غیرهمگن یک بعدی با عملگر سکه‌ی و حالت اولیه‌ی $k = ۳$ و $\frac{1}{\sqrt{4}}(|\circ, L\rangle + |\circ, R\rangle)$



شکل ۷.۲: انحراف استاندارد ولگشت کوانتومی غیرهمگن یک بعدی با عملگر سکه‌ی و حالت اولیه‌ی $k = ۴$ و $\frac{1}{\sqrt{4}}(|\circ, L\rangle + |\circ, R\rangle)$

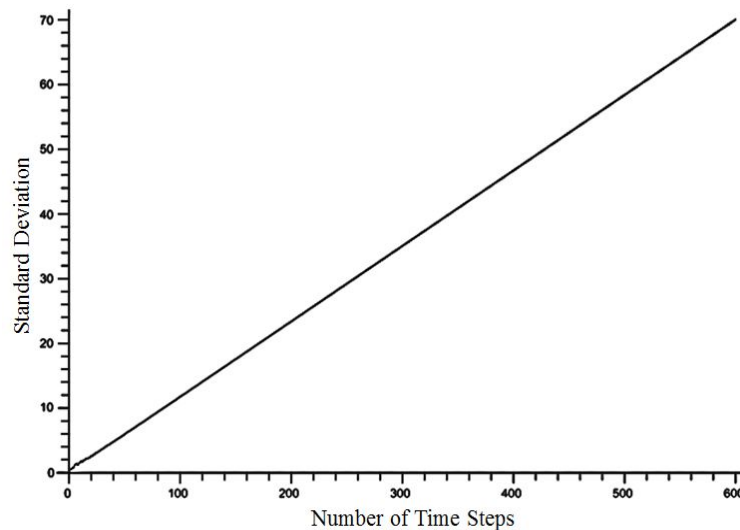


که با استدلالی مشابه حالت قبل داریم:

$$C_{n_u} = \begin{pmatrix} \circ & e^{i\theta'} \\ e^{i\phi'} & \circ \end{pmatrix}. \quad (۵۸.۲)$$

بنابراین اگر ولگشت تصادفی محدود باشد، عملگرهای سکه آن باید به صورت ۵۶.۲ و ۵۸.۲ باشند.

شکل ۸.۲: انحراف استاندارد ولگشت کوانتومی غیرهمگن یک بعدی با عملگر سکه‌ای و حالت اولیه‌ی $k = 5$ و $\frac{1}{\sqrt{k}}(|\circ, L\rangle + |\circ, R\rangle)$



بالعکس فرض می‌کنیم عملگر سکه‌ای به صورت ۵۶.۲ در دو طرف حالت اولیه وجود داشته باشد. ابتدا اگر در نظر بگیریم که این عملگر سکه در سمت راست باشد، ولگرد اولین بار باید از سمت چپ به نقطه‌ای که این عملگر سکه در آن وجود دارد برسد. همان‌طور که از شکل این عملگر مشخص است، هر حالت راست را به چپ تغییر جهت می‌دهد. بنابراین ولگشت نمی‌تواند از این نقطه عبور کند و این نقطه کران بالای ولگشت خواهد بود.

به طور مشابه اگر فرض کنیم عملگری به صورت ۵۸.۲ در سمت چپ حالت اولیه وجود داشته باشد، با استدلالی مشابه ولگشت از آن نقطه عبور نخواهد کرد و آن نقطه کران پایین خواهد بود. از این رو ولگشت کوانتومی محدود است.

باید توجه داشت که حالت اولیه عمومی، می‌تواند ترکیب خطی از حالت‌های ۵۳.۲ باشد. بنابراین جملاتی از این برهم‌نهی می‌تواند شرایط محدود بودن را داشته و جملاتی این شرایط را نداشته باشند. در نتیجه بخش‌هایی از تابع موج محدود باقی مانده و قسمت‌های دیگر از محدوده خارج می‌شود. با استفاده از این لم برای سکه‌ای که در ۵۱.۲ تعریف کردیم، می‌توان دید که ولگشت به ازای k زوج محدود و به ازای k فرد غیر محدود خواهد بود.

فصل ۳

روش PQRS

۱.۳ تعاریف پایه

تحول زمانی ولگشت کوانتومی یک بُعدی توسط ماتریس یکانی زیر داده می‌شود.

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2), \quad (1.3)$$

که در آن $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ و مجموعه‌ای از اعداد مختلط است و داریم:

$$a\bar{c} + b\bar{d} = 0, \quad |\bar{a}|^2 + |\bar{c}|^2 = |\bar{b}|^2 + |\bar{d}|^2 = 1, \quad c = -\Delta\bar{b}, \quad d = \Delta\bar{a} \quad (2.3)$$

که در آن $\bar{z}$ مزدوج مختلط $z \in \mathbb{C}$ و $\Delta = \det U = ad - bc$ است که در مورد ماتریس یونیتاری U ، $|\Delta| = 1$ می‌باشد. ماتریس U حالت کایرالیته را قبل از جابه‌جایی دوران می‌دهد و به عنوان رفتار ولگشت معرفی می‌شود [۵۳]. با توجه به روابط ۲۷.۲ رفتار ولگشت های کوانتومی در مورد $\psi(n, x)$ با تبدیل

$$\psi(n+1, x) = \psi(n, x+1) |L\rangle \langle L| U + \psi(n, x-1) |R\rangle \langle R| U \quad (3.3)$$

داده می‌شود که این معادله می‌تواند به فرم زیر نوشته شود

$$\psi(n+1, x) = P\psi(n, x+1) + Q\psi(n, x-1). \quad (4.3)$$

که در آن

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

به طوری که $U = P + Q$ بیانگر عملگری است که در هر گام زمانی ذره را به سمت چپ (راست) حرکت می دهد.

مجموعه حالت های کیوبیت اولیه^۱ در مبدا در مورد ولگشت های کوانتومی به صورت

$$\Phi = \{\varphi = {}^T[\alpha, \beta] \in \mathbb{C}^2, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\} \quad (6.3)$$

داده می شود که در آن T عملگر ترانهاده^۲ است.

همچنین در بررسی رفتار ولگشت های کوانتومی، همانند P و Q معرفی ماتریس های

$$R = |L\rangle \langle R| U = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = |R\rangle \langle L| U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}. \quad (7.3)$$

مناسب می باشد. P ، Q ، R و S شکل پایه ی متعامد بهنجار $M_2(\mathbb{C})$ هستند که فضای برداری ماتریس های 2×2 مختلط را تشکیل می دهند. اگر

$$X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}, \quad (8.3)$$

یک ماتریس دلخواه باشد، آن گاه به ازای $ad - bc \neq 0$ داریم

$$X = c_p P + c_q Q + c_r R + c_s S, \quad (9.3)$$

که در آن ضرایب c_p ، c_q ، c_r و c_s به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\begin{pmatrix} c_p \\ c_q \\ c_r \\ c_s \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & -c \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}. \quad (10.3)$$

بنابراین هر ماتریس 2×2 به صورت X با فرض $ad - bc \neq 0$ را می توان به راحتی به صورت

$$X = \frac{1}{ad - bc} \{(dx - cy)P + (-bz + aw)Q + (-bx + ay)R + (dz - cw)S\} \\ = \text{tr}(P^* X)P + \text{tr}(Q^* X)Q + \text{tr}(R^* X)R + \text{tr}(S^* X)S. \quad (11.3)$$

بیان کرد. که * بیانگر عملگر الحاقی^۳ است. روش تحلیل مبنی بر چنین ماتریس هایی $\{P, Q, R, S\}$ ، به روش PQRS موسوم است [۷].

به طور کلی، حاصلضرب ماتریس های P, Q, R, S را در جدول ۱.۳ نشان داده ایم؛ که در محاسبه ی برخی کمیت ها قابل استفاده می باشد.

^۱initial qubit state

^۲Transposed Operator

^۳Adjoint Operator

جدول ۱.۳: جدول ضرایب P, Q, R, S

	P	Q	R	S
P	aP	bR	aR	bP
Q	cS	dQ	cQ	dS
R	cP	dR	cR	dP
S	aS	bQ	aQ	bS

اکنون به منظور در نظر گرفتن مسائل جذب^۴ بیان شده در بخش ۳.۳، احتمال جذب و لگشت شروع شده از مکان m روی دنباله‌ی $(N \leq \infty)$ $\{0, 1, \dots, N\}$ با دیواره‌های جذب^۵ واقع در مکان 0 و N را توصیف می‌کنیم [۸]. به این منظور $\Xi_n^{(N,m)}$ را جمع روی مسیرهای ممکن در نظر می‌گیریم که ذره شروع شده از مکان m با طی n گام زمانی قبل از رسیدن به N با دیواره 0 برخورد کند. ابتدا مورد $N < \infty$ را در نظر می‌گیریم که در آن دو دیواره جذب در مکان‌های 0 و N واقع هستند. بنابراین مکانیزم تحول به قرار زیر است:

مرحله ۱: به سیستم $\varphi \in \Phi$ در مکان m یک مقدار اولیه نسبت می‌دهیم.
 مرحله ۲: (آ) اعمال معادله ۴.۳ برای انجام اولین گام تحول زمانی. (ب) اندازه‌گیری سیستم به منظور بررسی این که در مکان 0 هست یا نه. (پ) اندازه‌گیری سیستم به منظور بررسی این که در مکان N هست یا نه.

مرحله ۳: اگر نتایج اندازه‌گیری نشان داد که سیستم در مکان 0 و یا در مکان N است، فرآیند پایان یافته و در غیر این صورت مرحله ۲ تکرار می‌شود.
 به طور مثال، مجموع مسیرهایی که ذره شروع شده از مکان ۱ طی می‌کند به طوری که قبل از رسیدن به دیواره ۳ جذب دیواره 0 شود به صورت زیر است:

$$\Xi_{\delta}^{(3,1)} = P^2 Q P Q.$$

احتمال این که ذره شروع شده از m با n گام زمانی با حالت کیوبیت اولیه‌ی $\varphi \in \Phi$ ، قبل از رسیدن به N جذب دیواره 0 شود به صورت

$$P_n^{(N,m)}(\varphi) = \|\Xi_n^{(N,m)}\varphi\|^2 \quad (12.3)$$

است. بنابراین برای احتمال این که ذره شروع شده از m با حالت کیوبیت اولیه‌ی $\varphi \in \Phi$ ، قبل از رسیدن به N با 0 برخورد کند، داریم

$$P^{(N,m)}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(N,m)}(\varphi). \quad (13.3)$$

^۴absorption problems

^۵absorbing boundary

مورد بعد $N = \infty$ است که در این حالت تنها یک دیواره جذب در مکان $\circ$ واقع می‌باشد. در این حالت نیز مکانیزم تحول به قرار زیر است:

مرحله ۱: به سیستم $\varphi \in \Phi$ در مکان m یک مقدار اولیه نسبت می‌دهیم.

مرحله ۲: (آ) اعمال معادله ۴.۳ برای انجام اولین گام تحول زمانی. (ب) اندازه‌گیری سیستم به منظور بررسی این که در مکان $\circ$ هست یا نه.

مرحله ۳: اگر نتایج اندازه‌گیری نشان داد که سیستم در مکان $\circ$ واقع است، فرآیند پایان یافته و در غیر این صورت مرحله ۲ تکرار می‌شود.

به طور مثال، مجموع مسیرهایی که ذره‌ی شروع شده از مکان ۱ طی می‌کند تا این که با دیواره $\circ$ برخورد کند به صورت

$$\Xi_{\delta}^{(\infty,1)} = P^2 Q P Q + P^3 Q^2$$

است. $P_n^{(\infty,m)}(\varphi)$ و $P^{(\infty,m)}(\varphi)$ نیز به طور مشابه معرفی می‌شوند.

۲.۳ تابع مشخصه و قضیه حدی

X_n^φ را ولگشت تصادفی شروع شده از حالت اولیه‌ی $\varphi \in \Phi$ در زمان n در نظر می‌گیریم به طوری که $X_n^\varphi = \circ$ بیانگر ذره‌ای است که در مبدأ قرار دارد. بنابراین احتمال این که ذره پس از طی n گام زمانی در مکان x واقع باشد به صورت $P(X_n^\varphi = x)$ تعریف می‌شود. ممان^۶های توزیع احتمال از مهم‌ترین کمیت‌ها در توزیع‌های احتمال هستند که می‌توان از آن‌ها در محاسبه‌ی کمیت‌های مهمی مانند میانگین، واریانس و غیره استفاده کرد.

ممان‌ها از طریق محاسبه‌ی تابع مولد ممان^۷ به دست می‌آیند. با استفاده از قضایای این بخش ممان m ام را به دست آورده و نشان می‌دهیم که به ازای m های زوج مستقل از حالت کیوبیت اولیه است. بنابراین در ابتدا یک عبارت ترکیبی^۸ برای ولگشت تصادفی کوانتومی X_n^φ ارائه می‌دهیم.

با توجه به رابطه ۱۱.۳، $\Xi_n(l, m)$ به صورت

$$\Xi_n(l, m) = p_n(l, m)P + q_n(l, m)Q + r_n(l, m)R + s_n(l, m)S \quad (14.3)$$

تعریف می‌شود و بیانگر مجموع تمام مسیرهایی ممکن است که ذره شروع شده از مبدأ پس از طی n گام زمانی شامل گام‌های چپ l و گام‌های راست m به مکان x می‌رسد. به طوری که $x = -l + m$ و $n = l + m$ می‌باشد.

بنابراین مسئله بعد به دست آوردن شکل واضحی از $p_n(l, m)$ ، $q_n(l, m)$ ، $r_n(l, m)$ و $s_n(l, m)$ می‌باشد. به این منظور لم زیر را با استفاده از یک روش ترکیبی بیان می‌کنیم.

^۶moment

^۷moment generating function

^۸combinatorial expression

لم ۱.۲.۳. ولگشت کوانتومی یک بعدی با $abcd \neq \circ$ را در نظر می گیریم. اگر فرض کنیم $l, m \geq \circ$ و $l + m = n$ باشد آن گاه

$$(A) \quad l \wedge m = (\min\{l, m\}) \geq 1$$

$$\Xi(l, m) = a^l d^m \sum_{\gamma=1}^{l \wedge m} \left(\frac{bc}{ad}\right)^\gamma \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma-1} \times \left[\frac{l-\gamma}{a^\gamma} P + \frac{m-\gamma}{d^\gamma} Q + \frac{1}{c} R + \frac{1}{b} S \right],$$

(ب) برای $l (= n) \geq 1$ و $m = \circ$

$$\Xi(l, \circ) = a^{l-1} P,$$

(پ) و برای $l = \circ$ و $m (= n) \geq 1$ داریم

$$\Xi(\circ, m) = d^{m-1} Q.$$

قسمت های (ب) و (پ) بدیهی هستند. اثبات قسمت (A) نیز براساس شمارش مسیرهای ولگشت $l + m = n$ امکان پذیر می باشد [۷].

اثبات: به این منظور ۴ مسیر متناظر با $p_n(l, m)$ ، $q_n(l, m)$ ، $r_n(l, m)$ و $s_n(l, m)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$\begin{aligned} p_n(l, m) &: \overbrace{PP \dots PQ}^{\omega_1} \overbrace{Q \dots Q}^{\omega_2} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_3} \dots \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_{2\gamma}} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_{2\gamma+1}} \\ q_n(l, m) &: \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_1} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_2} \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_3} \dots \overbrace{PP \dots P}^{\omega_{2\gamma}} \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_{2\gamma+1}} \\ r_n(l, m) &: \overbrace{PP \dots PQ}^{\omega_1} \overbrace{Q \dots Q}^{\omega_2} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_3} \dots \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_{2\gamma}} \\ s_n(l, m) &: \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_1} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_2} \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_3} \dots \overbrace{PP \dots P}^{\omega_{2\gamma}} \end{aligned} \quad (15.3)$$

که در آن $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma+1} \geq 1$ و $\gamma \geq 1$ می باشد.

(الف) برای محاسبه $p_n(l, m)$ فرض می کنیم که $l \geq 2$ و $m \geq 1$ باشد. بنابراین داریم

$$C(p, \omega)_n^{2\gamma+1}(l, m) = \overbrace{PP \dots PQ}^{\omega_1} \overbrace{Q \dots Q}^{\omega_2} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_3} \dots \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_{2\gamma}} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_{2\gamma+1}} \quad (16.3)$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma+1}) \in \mathbb{Z}_+^{2\gamma+1}$ با $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma+1} \geq 1$ و $\gamma \geq 1$ است. به طور مثال، رشته PQP موردی با $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ و $\gamma = 1$ می باشد. باید توجه کنیم که l تعداد p و m تعداد Q است، بنابراین

$$\begin{aligned} l &= \omega_1 + \omega_3 + \dots + \omega_{2\gamma+1} = \sum_{k=\circ}^{\gamma} \omega_{2k+1}, \\ m &= \omega_2 + \omega_4 + \dots + \omega_{2\gamma} = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{2k}. \end{aligned} \quad (17.3)$$

همچنین $2\gamma + 1$ تعداد خوشه‌های P و Q است. بنابراین محدوده‌ی γ را با کمترین مقدار $\gamma = 1$ شامل ۳ خوشه به صورت

$$P \dots PQ \dots QP \dots P,$$

و بیشترین مقدار $\gamma = (l - 1) \wedge m$ در نظر می‌گیریم که به طور مثال شامل الگوهایی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} PQPQPQ \dots PQPQP \dots PP \quad (l - 1 \geq m), \\ PQPQPQ \dots PQPQPQ \dots QQP \quad (l - 1 \leq m). \end{aligned}$$

حال مجموعه‌ای از دنباله‌ها با مولفه‌های $2\gamma + 1$ را معرفی می‌کنیم.

بنابراین به‌ازای $\gamma \in [1, (l - 1) \wedge m]$ ثابت داریم

$$\begin{aligned} W(p, 2\gamma + 1) = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma+1}) \in \mathbb{Z}_+^{2\gamma+1} : l = \sum_{k=0}^{\gamma} \omega_{2k+1}, \quad m = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{2k}, \\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma+1} \geq 1\}. \end{aligned}$$

با استفاده از مسیر متناظر با $p_n(l, m)$ در ۱۵.۳ و جدول ۱.۳ داریم:

$$\begin{aligned} C(p, \omega)_n^{2\gamma+1}(l, m) &= a^{\omega_1-1} P d^{\omega_2-1} Q a^{\omega_3-1} P \dots d^{\omega_{2\gamma}-1} Q a^{\omega_{2\gamma+1}-1} P \\ &= a^{\omega_1-1+\omega_3-1+\dots+\omega_{2\gamma+1}-1} d^{\omega_2-1+\dots+\omega_{2\gamma}-1} PQP \dots QP \\ &= a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} (PQ)^\gamma P = a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} (bR)^\gamma P \quad (18.3) \\ &= a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} b^\gamma R^\gamma P = a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} b^\gamma c^{\gamma-1} R P \\ &= a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} b^\gamma c^{\gamma-1} c P = a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} b^\gamma c^\gamma P \end{aligned}$$

که در آن $\omega \in W(p, 2\gamma + 1)$ می‌باشد. باید توجه کنیم که سمت راست معادله بالا مستقل از $\omega \in W(p, 2\gamma + 1)$ است؛ بنابراین به‌ازای $\omega \in (p, 2\gamma + 1)$ می‌توانیم بنویسم

$$C(p, \omega)_n^{2\gamma+1}(l, m) = C(p)_n^{2\gamma+1}(l, m). \quad (19.3)$$

سپس با یک استدلال ترکیبی استاندارد به صورت

$$|W(p, 2\gamma + 1)| = \binom{l-1}{\gamma} \binom{m-1}{\gamma-1} \quad (20.3)$$

و با استفاده از رابطه‌ی ۱۸.۳ داریم

$$\begin{aligned}
 p_n(l, m)P &= \sum_{\gamma=1}^{(l-1) \wedge m} \sum_{\omega \in W(p, \gamma+1)} C(p, \omega)_n^{\gamma+1}(l, m) \\
 &= \sum_{\gamma=1}^{(l-1) \wedge m} |W(p, \gamma+1)| C(p)_n^{\gamma+1}(l, m) \\
 &= \sum_{\gamma=1}^{(l-1) \wedge m} \binom{l-1}{\gamma} \binom{m-1}{\gamma-1} a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} b^{\gamma} c^{\gamma} P.
 \end{aligned} \tag{۲۱.۳}$$

در نتیجه

$$p_n(l, m) = \sum_{\gamma=1}^{(l-1) \wedge m} \binom{l-1}{\gamma} \binom{m-1}{\gamma-1} a^{l-(\gamma+1)} d^{m-\gamma} b^{\gamma} c^{\gamma}. \tag{۲۲.۳}$$

با فرض $l \geq 1$ و $m = 0$ داریم

$$\begin{aligned}
 p_n(l, 0) &= \sum_{\gamma=1}^{(l-1) \wedge 0} \binom{l-1}{\gamma} \binom{0-1}{\gamma-1} a^{l-(\gamma+1)} d^{0-\gamma} b^{\gamma} c^{\gamma} \\
 &= \binom{l-1}{0} \binom{-1}{-1} a^{l-1} d^0 b^0 c^0 = a^{l-1} P = P^l
 \end{aligned}$$

به عبارتی $p_n(l, 0) = a^{l-1}$. همچنین زمانی که $l = 1$ و $m \geq 1$ یا $l = 0$ و $m \geq 0$ باشد، واضح است که

$$p_n(l, m) = 0.$$

$q_n(l, m)$ ، $r_n(l, m)$ و $s_n(l, m)$ نیز به شیوه‌ای مشابه قابل محاسبه‌اند.
(ب) حال برای محاسبه‌ی $q_n(l, m)$ با فرض $l \geq 1$ و $m \geq 2$ به مطالعه‌ی

$$C(q, \omega)_n^{\gamma+1}(l, m) = \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_1} \overbrace{PP \dots P}^{\omega_2} \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_3} \dots \overbrace{PP \dots P}^{\omega_{2\gamma}} \overbrace{QQ \dots Q}^{\omega_{2\gamma+1}} \tag{۲۳.۳}$$

می‌پردازیم. که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma+1}) \in \mathbb{Z}_+^{\gamma+1}$ با $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma+1} \geq 1$ و $\gamma \geq 1$ است. به طور مثال، رشته‌ی QPQ موردی با $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$ و $\gamma = 1$ می‌باشد. از آن‌جا که l تعداد p و m تعداد q است، بنابراین

$$\begin{aligned}
 l &= \omega_2 + \omega_4 + \dots + \omega_{2\gamma} = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{2k}, \\
 m &= \omega_1 + \omega_3 + \dots + \omega_{2\gamma+1} = \sum_{k=0}^{\gamma} \omega_{2k+1}.
 \end{aligned} \tag{۲۴.۳}$$

حال با معرفی مجموعه‌ای از دنباله‌ها با مولفه‌های $\gamma + 1$

$$W(q, \gamma + 1) = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\gamma+1}) \in \mathbb{Z}_+^{\gamma+1} : l = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{2k}, \quad m = \sum_{k=0}^{\gamma} \omega_{2k+1}, \quad \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\gamma+1} \geq 1\}$$

و به ازای $\gamma \in [1, l \wedge (m - 1)]$ ثابت داریم:

$$\begin{aligned} C(q, \omega)_n^{\gamma+1}(l, m) &= d^{\omega_1-1} Q a^{\omega_2-1} P d^{\omega_3-1} Q \dots a^{\omega_{2\gamma}-1} P d^{\omega_{2\gamma+1}-1} Q \\ &= d^{m-(\gamma+1)} a^{l-\gamma} (QP)^{\gamma} Q = d^{m-(\gamma+1)} a^{l-\gamma} c^{\gamma} S^{\gamma} Q \\ &= d^{m-(\gamma+1)} a^{l-\gamma} c^{\gamma} b^{\gamma-1} S Q = d^{m-(\gamma+1)} a^{l-\gamma} c^{\gamma} b^{\gamma-1} b Q \\ &= d^{m-(\gamma+1)} a^{l-\gamma} c^{\gamma} b^{\gamma} Q \end{aligned} \quad (25.3)$$

که در آن $\omega \in W(p, \gamma + 1)$ می‌باشد. همچنین مشابه قبل با در نظر گرفتن

$$\begin{aligned} C(q, \omega)_n^{\gamma+1}(l, m) &= C(q)_n^{\gamma+1}(l, m), \\ |W(q, \gamma + 1)| &= \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma}, \end{aligned} \quad (26.3)$$

می‌رسیم به:

$$q_n(l, m) = \sum_{\gamma=1}^{l \wedge (m-1)} \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma} d^{m-(\gamma+1)} a^{l-\gamma} c^{\gamma} b^{\gamma}. \quad (27.3)$$

اگر فرض کنیم $l = 0$ و $m \geq 1$ باشد، آن‌گاه

$$q_n(0, m) = d^{m-1}$$

و به ازای $m = 1$ و $l \geq 1$ یا $m = 0$ و $l \geq 0$ ، واضح است که

$$q_n(l, m) = 0.$$

(پ) با فرض $l \geq 1$ و $m \geq 1$ و با توجه به

$$C(r, \omega)_n^{\gamma}(l, m) = \overbrace{PP \dots PQ}^{\omega_1} \overbrace{Q \dots PQ}^{\omega_2} \overbrace{Q \dots PQ}^{\omega_3} \dots \overbrace{P \dots PQ}^{\omega_{2\gamma}} \quad (28.3)$$

به محاسبه‌ی $r_n(l, m)$ می‌پردازیم. که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma}) \in \mathbb{Z}_+^{2\gamma}$ با $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2\gamma} \geq 1$ و $\gamma \geq 1$ است. به طور مثال، رشته‌ی $PQPQ$ موردی با $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1$ و $\gamma = 2$ می‌باشد. همچنین

$$\begin{aligned} l &= \omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{2\gamma-1} = \sum_{k=0}^{\gamma} \omega_{2k-1}, \\ m &= \omega_2 + \omega_4 + \dots + \omega_{2\gamma} = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{2k}. \end{aligned} \quad (29.3)$$

که ۲γ تعداد رشته‌های P و Q است. محدوده‌ی γ به این صورت است که کمترین مقدار آن مربوط به $\gamma = ۱$ و شامل رشته‌ای به صورت $P \cdots PQ \cdots Q$ و بیشترین مقدار مربوط به $\gamma = l \wedge m$ است که به طور مثال شامل مسیرهای

$$PQPQPQ \cdots PQPP \cdots PPQ \quad (l \geq m),$$

$$PQPQPQ \cdots PQPQQ \cdots QQ \quad (l \leq m),$$

می‌باشد. حال با معرفی مجموعه‌ای از دنباله‌ها با مولفه‌های ۲γ

$$W(r, ۲\gamma) = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{۲\gamma}) \in \mathbb{Z}_+^{۲\gamma} : l = \sum_{k=0}^{\gamma} \omega_{۲k-1}, \quad m = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{۲k}, \\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{۲\gamma-1}, \omega_{۲\gamma} \geq 1\}.$$

به‌ازای $\gamma \in [1, l \wedge m]$ ثابت داریم:

$$\begin{aligned} C(r, \omega)_n^{۲\gamma}(l, m) &= a^{\omega_1-1} P d^{\omega_2-1} Q a^{\omega_3-1} P \cdots d^{\omega_{۲\gamma}-1} Q \\ &= a^{l-\gamma} d^{m-\gamma} (PQ)^\gamma = a^{l-\gamma} d^{m-\gamma} b^\gamma R^\gamma \\ &= a^{l-\gamma} d^{m-\gamma} b^\gamma c^{\gamma-1} R \end{aligned} \quad (۳۰.۳)$$

که در آن $\omega \in W(r, ۲\gamma)$ می‌باشد. بنابراین مشابه قبل با در نظر گرفتن

$$|W(r, ۲\gamma)| = \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma-1} \quad (۳۱.۳)$$

می‌رسیم به

$$r_n(l, m) = \sum_{\gamma=1}^{l \wedge m} \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma-1} a^{l-\gamma} d^{m-\gamma} b^\gamma c^{\gamma-1}. \quad (۳۲.۳)$$

و به ازای $l \wedge m = 0$ داریم

$$r_n(l, m) = 0.$$

(ت) ابتدا فرض می‌کنیم $l \geq 1$ و $m \geq 1$ باشد. با مطالعه‌ی

$$C(s, \omega)_n^{۲\gamma}(l, m) = \overbrace{QQ \cdots Q}^{\omega_1} \overbrace{PP \cdots P}^{\omega_2} \overbrace{PQQ \cdots Q}^{\omega_3} \cdots \overbrace{PP \cdots P}^{\omega_{۲\gamma}} \quad (۳۳.۳)$$

که در آن $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{۲\gamma}) \in \mathbb{Z}_+^{۲\gamma}$ با $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{۲\gamma} \geq 1$ و $\gamma \geq 1$ به محاسبه‌ی $s_n(l, m)$ می‌پردازیم. به طور مثال، رشته‌ی $QPQP$ موردی با $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4 = 1$ و $\gamma = ۲$ است. همچنین داریم

$$\begin{aligned} l &= \omega_2 + \omega_4 + \cdots + \omega_{۲\gamma} = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{۲k}, \\ m &= \omega_1 + \omega_3 + \cdots + \omega_{۲\gamma-1} = \sum_{k=0}^{\gamma} \omega_{۲k-1}. \end{aligned} \quad (۳۴.۳)$$

مشابه قبل با معرفی مجموعه‌ای از دنباله‌ها با مولفه‌های $\Upsilon\gamma$

$$W(s, \Upsilon\gamma) = \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\Upsilon\gamma}) \in \mathbb{Z}_+^{\Upsilon\gamma} : l = \sum_{k=1}^{\gamma} \omega_{\Upsilon k}, \quad m = \sum_{k=0}^{\gamma} \omega_{\Upsilon k-1}, \\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{\Upsilon\gamma-1}, \omega_{\Upsilon\gamma} \geq 1\}$$

و به‌ازای $\gamma \in [1, l \wedge m]$ ثابت داریم

$$\begin{aligned} C(s, \omega)_n^{\Upsilon\gamma}(l, m) &= d^{\omega_1-1} Q a^{\omega_2-1} P d^{\omega_3-1} Q \dots a^{\omega_{\Upsilon\gamma}-1} P \\ &= d^{m-\gamma} a^{l-\gamma} (QP)^{\gamma} = d^{m-\gamma} a^{l-\gamma} c^{\gamma} S^{\gamma} \\ &= d^{m-\gamma} a^{l-\gamma} c^{\gamma} b^{\gamma-1} S \end{aligned} \quad (35.3)$$

که در آن $\omega \in W(s, \Upsilon\gamma)$ می‌باشد. بنابراین با توجه به

$$|W(s, \Upsilon\gamma)| = \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma-1} \quad (36.3)$$

می‌رسیم به

$$s_n(l, m) = \sum_{\gamma=1}^{l \wedge m} \binom{l-1}{\gamma-1} \binom{m-1}{\gamma-1} d^{m-\gamma} a^{l-\gamma} c^{\gamma} b^{\gamma-1}. \quad (37.3)$$

و به‌ازای $l \wedge m = 0$ داریم

$$s_n(l, m) = 0.$$

درنهایت با جایگذاری روابط به دست آمده در ۱۴.۳، لم ۱.۲.۳ اثبات می‌شود. که در مورد ولگشت کوانتومی داریم

$$\frac{bc}{ad} = -\frac{(1 - |d|^2)}{|a|^2} = -\frac{|b|^2}{|a|^2}. \quad (38.3)$$

توزیع احتمال X_n^{φ} می‌تواند با استفاده از لم ۱.۲.۳ و با محاسبه‌ی مستقیم به دست آید؛ که در لم زیر و به‌ازای n های متفاوت قابل مشاهده است.

لم ۲.۲.۳. به ازای $n \geq ۲$ و $k = ۱, ۲, \dots, [n/۲]$ داریم

$$\begin{aligned}
 P(X_n^\varphi = n - ۲k) = & |a|^{۲(n-۱)} \sum_{\gamma=۱}^k \sum_{\delta=۱}^k \left(-\frac{|b|^{۲}}{|a|^{۲}} \right)^{\gamma+\delta} \left(\frac{\kappa_{\gamma,\delta,n,k}}{\gamma\delta} \right) \\
 & \times [\{k^{۲}|a|^{۲} + (n-k)^{۲}|b|^{۲} - (\gamma+\delta)(n-k)\}|\alpha|^{۲} \\
 & + \{k^{۲}|b|^{۲} + (n-k)^{۲}|a|^{۲} - (\gamma+\delta)k\}|\beta|^{۲} \\
 & + \frac{۱}{|b|^{۲}} [\{(n-k)\gamma - k\delta + n(۲k-n)|b|^{۲}\}a\alpha\overline{b\beta} \\
 & + \{-k\gamma + (n-k)\delta + n(۲k-n)|b|^{۲}\}\overline{a\alpha}b\beta + \gamma\delta],
 \end{aligned} \tag{۳۹.۳}$$

$$\begin{aligned}
 P(X_n^\varphi = -(n - ۲k)) = & |a|^{۲(n-۱)} \sum_{\gamma=۱}^k \sum_{\delta=۱}^k \left(-\frac{|b|^{۲}}{|a|^{۲}} \right)^{\gamma+\delta} \left(\frac{\kappa_{\gamma,\delta,n,k}}{\gamma\delta} \right) \\
 & \times [\{k^{۲}|b|^{۲} + (n-k)^{۲}|a|^{۲} - (\gamma+\delta)k\}|\alpha|^{۲} \\
 & + \{k^{۲}|a|^{۲} + (n-k)^{۲}|b|^{۲} - (\gamma+\delta)(n-k)\}|\beta|^{۲} \\
 & + \frac{۱}{|b|^{۲}} [\{k\gamma - (n-k)\delta - n(۲k-n)|b|^{۲}\}a\alpha\overline{b\beta} \\
 & + \{-(n-k)\gamma + k\delta - n(۲k-n)|b|^{۲}\}\overline{a\alpha}b\beta + \gamma\delta],
 \end{aligned}$$

و به ازای $n \geq ۱$

$$\begin{aligned}
 P(X_n^\varphi = n) = & |a|^{۲(n-۱)} \{ |b|^{۲}|\alpha|^{۲} + |a|^{۲}|\beta|^{۲} - (a\alpha\overline{b\beta} + \overline{a\alpha}b\beta) \}, \\
 P(X_n^\varphi = -n) = & |a|^{۲(n-۱)} \{ |a|^{۲}|\alpha|^{۲} + |b|^{۲}|\beta|^{۲} + (a\alpha\overline{b\beta} + \overline{a\alpha}b\beta) \}.
 \end{aligned} \tag{۴۰.۳}$$

که در آن

$$\kappa_{\gamma,\delta,n,k} = \binom{k-۱}{\gamma-۱} \binom{k-۱}{\delta-۱} \binom{n-k-۱}{\gamma-۱} \binom{n-k-۱}{\delta-۱}, \tag{۴۱.۳}$$

و $[x]$ بیانگر قسمت صحیح x می باشد. برای جزئیات بیشتر به پیوست ۱.۴ مراجعه شود. حال با استفاده از این لم، تابع مولد ممان یا تابع مشخصه $(E(e^{i\zeta X_n^\varphi}))$ را برای X_n^φ به دست می آوریم که در آن $\zeta \in \mathbb{R}$ است. بنابراین با فرض

$$\begin{aligned}
 \mu_{\alpha,\beta} = & (|a|^{۲} - |b|^{۲})(|\alpha|^{۲} - |\beta|^{۲}) + ۲(a\alpha\overline{b\beta} + \overline{a\alpha}b\beta), \\
 \nu_{\gamma,\delta,n,k} = & (n-k)^{۲} + k^{۲} - n(\gamma+\delta) + ۲\gamma\delta/|b|^{۲}.
 \end{aligned} \tag{۴۲.۳}$$

قضیه زیر را بیان می کنیم [۵۵].

قضیه ۱. (الف) به ازای $abcd \neq \circ$ داریم

$$\begin{aligned}
 E(e^{i\zeta X_n^\varphi}) = & |a|^{\mathfrak{r}(n-1)} \left[\cos(n\zeta) - i\mu_{\alpha,\beta} \sin(n\zeta) + \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{\mathfrak{r}}]} \sum_{\gamma=1}^k \sum_{\delta=1}^k \left(-\frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} \right)^{\gamma+\delta} \left(\frac{\kappa_{\gamma,\delta,n,k}}{\gamma\delta} \right) \right. \\
 & \times [\nu_{\gamma,\delta,n,k} \cos((n-\mathfrak{r}k)\zeta) - (n-\mathfrak{r}k) \\
 & \times \{ \mu_{\alpha,\beta}n + \frac{\gamma+\delta}{\mathfrak{r}|b|^{\mathfrak{r}}} (|\alpha|^{\mathfrak{r}} - |\beta|^{\mathfrak{r}} - \mu_{\alpha,\beta}) \} i \sin((n-\mathfrak{r}k)\zeta)] \\
 & \left. + I\left(\frac{n}{\mathfrak{r}} - [\frac{n}{\mathfrak{r}}]\right) \times \sum_{\gamma=1}^{\frac{n}{\mathfrak{r}}} \sum_{\delta=1}^{\frac{n}{\mathfrak{r}}} \left(-\frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} \right)^{\gamma+\delta} \left(\frac{\kappa_{\gamma,\delta,n,n/\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}\gamma\delta} \right) \nu_{\gamma,\delta,n,n/\mathfrak{r}} \right],
 \end{aligned}
 \tag{۴۳.۳}$$

که در آن $I(x) = 1 (= \circ)$ در صورتی که $x = \circ (x \neq \circ)$.
(ب) به ازای $b = \circ$

$$E(e^{i\zeta X_n^\varphi}) = \cos(n\zeta) + i(|\beta|^{\mathfrak{r}} - |\alpha|^{\mathfrak{r}}) \sin(n\zeta). \tag{۴۴.۳}$$

(پ) و به ازای $a = \circ$ داریم

$$E(e^{i\zeta X_n^\varphi}) = \begin{cases} \cos \zeta + i(|\alpha|^{\mathfrak{r}} - |\beta|^{\mathfrak{r}}) \sin \zeta & \text{فرد } n \\ 1 & \text{زوج } n \end{cases} \tag{۴۵.۳}$$

این قضیه، ممان m ام $(E((X_n^\varphi)^m))$ را برای X_n^φ به دست می‌دهد. بنابراین نتایج زیر می‌توانند به منظور مطالعه‌ی توزیع احتمال X_n^φ مورد استفاده قرار گیرند [۵۵].

نتیجه ۳.۲.۳. (الف) با فرض $abcd \neq \circ$ و به ازای m فرد،

$$\begin{aligned}
 E((X_n^\varphi)^m) = & -|a|^{\mathfrak{r}(n-1)} \left[\mu_{\alpha,\beta} n^m + \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{\mathfrak{r}}]} \sum_{\gamma=1}^k \sum_{\delta=1}^k \left(-\frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} \right)^{\gamma+\delta} \frac{(n-\mathfrak{r}k)^{m+1} \kappa_{\gamma,\delta,n,k}}{\gamma\delta} \right. \\
 & \left. \times \{ \mu_{\alpha,\beta}n + \frac{\gamma+\delta}{\mathfrak{r}|b|^{\mathfrak{r}}} (|\alpha|^{\mathfrak{r}} - |\beta|^{\mathfrak{r}} - \mu_{\alpha,\beta}) \} \right],
 \end{aligned}
 \tag{۴۶.۳}$$

و به ازای m زوج داریم

$$E((X_n^\varphi)^m) = |a|^{\mathfrak{r}(n-1)} \left\{ n^m + \sum_{k=1}^{[\frac{n-1}{\mathfrak{r}}]} \sum_{\gamma=1}^k \sum_{\delta=1}^k \left(-\frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} \right)^{\gamma+\delta} \frac{(n-\mathfrak{r}k)^m \kappa_{\gamma,\delta,n,k} \nu_{\gamma,\delta,n,k}}{\gamma\delta} \right\}.
 \tag{۴۷.۳}$$

(ب) با فرض $b = 0$ ،

$$E((X_n^\varphi)^m) = \begin{cases} n^m(|\beta|^2 - |\alpha|^2) & \text{فرد } m \\ n^m & \text{زوج } m \end{cases} \quad (48.3)$$

(پ) و با فرض $a = 0$ ، داریم

$$E((X_n^\varphi)^m) = \begin{cases} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & \text{فرد } m \text{ و } n \\ 1 & \text{زوج } m \text{ و } n \text{ فرد} \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \quad (49.3)$$

مشاهده می‌کنیم که در هر مورد و به ازای m زوج، $E((X_n^\varphi)^m)$ مستقل از حالت کیوبیت اولیه φ می‌باشد.

با استفاده از [لم ۲.۲.۳](#) و نتیجه [۳.۲.۳](#) (الف) به ازای $m = 1$ در مورد توزیع متقارن برای ولگشت‌های کوانتومی داریم:

$$\Phi_s = \Phi_0 = \Phi_\perp \quad (50.3)$$

که در آن

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \{\varphi \in \Phi : P(X_n^\varphi = k) = P(X_n^\varphi = -k) \text{ به ازای هر } n \in \mathbb{Z}_+ \text{ و } k \in \mathbb{Z}\}, \\ \Phi_0 &= \{\varphi \in \Phi : E(X_n^\varphi) = 0 \text{ به ازای هر } n \in \mathbb{Z}_+\}, \\ \Phi_\perp &= \{\varphi = {}^T[\alpha, \beta] \in \Phi : |\alpha| = |\beta|, \quad a\alpha\bar{b}\beta + \bar{a}\alpha b\beta = 0\}, \end{aligned} \quad (51.3)$$

و $\mathbb{Z}_+ \mathbb{Z}$ مجموعه اعداد صحیح مثبت (غیر منفی) می‌باشد [\[۵۵\]](#). نایاک^۹ در [\[۴۹\]](#) توزیع متقارن را مطرح کرد و برای ولگشت هادامارد نشان داد که ${}^T[1/\sqrt{2}, \pm i/\sqrt{2}] \in \Phi_s$ است.

۳.۳ روش PQRS در مسأله جذب

۱.۳.۳ مسأله جذب

در این بخش مسأله‌ی جذب را در مورد ولگشت‌های کوانتومی روی مجموعه‌ی $\{0, 1, \dots, N\}$ یا $\{0, 1, \dots\}$ با استفاده از روش PQRS در مورد ولگشت‌های کوانتومی [\[۵۷\]](#) مطرح می‌کنیم. قبل از ورود به حوزه‌ی کوانتومی، ابتدا مورد ولگشت تصادفی کلاسیکی روی مجموعه‌ی متناهی $\{0, 1, \dots, N\}$ یا $\{0, 1, \dots\}$ را ببینید. با دو دیواره جذب واقع در مکان‌های 0 و N را توصیف می‌کنیم (به طور مثال [\[۵۸\]](#) و [\[۵۹\]](#) را ببینید). در هر گام زمانی ذره یک واحد به سمت چپ با احتمال p و یا یک واحد به سمت راست با احتمال

^۹Nayak

$q = 1 - p$ حرکت می کند تا این که با یکی از دیواره های جذب برخورد کرده و متوقف می شود و مجاز به ادامه ولگشت نخواهد بود (به عبارتی جذب دیواره می شود). باید توجه داشته باشیم که جهت گام های مختلف مستقل از یکدیگرند.

ولگشت تصادفی کلاسیکی شروع شده از $m \in \{0, 1, \dots, N\}$ با گام زمانی توسط Y_n^m نمایش داده می شود. فرض می کنیم

$$T_k = \min\{n \geq 0 : Y_n^m = k\}$$

زمان اولین برخورد به $k \in \{0, 1, \dots, N\}$ باشد. با توجه به این که $Y_0^m = m$ می باشد،

$$P^{(N,m)} = P(T_0 < T_N)$$

را به صورت احتمال این که ذره شروع شده از m قبل از رسیدن به مکان N با دیواره 0 برخورد کند، در نظر می گیریم. مسأله جذب همچنین به عنوان مسأله *Gambler's ruin* شناخته می شود. در ادامه برخی نتایج و حدسیات را در مورد مسأله جذب برای هر دو نوع ولگشت کلاسیکی و کوانتومی در یک بعد بررسی می کنیم.

ابتدا مورد کلاسیکی را بررسی می کنیم. به منظور یافتن $P^{(N,m)}$ ، معادله تفاضلی

$$P^{(N,m)} = pP^{(N,m-1)} + qP^{(N,m+1)} \quad (52.3)$$

را که در آن $1 \leq m < N - 1$ است، با شرایط مرزی

$$P^{(N,0)} = 1, \quad P^{(N,N)} = 0$$

در نظر می گیریم. راه حل چنین معادله تفاضلی به ازای هر $0 \leq m \leq N$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} P^{(N,m)} &= 1 - \frac{m}{N} \quad (p = \frac{1}{2}), \\ P^{(N,m)} &= \frac{(\frac{p}{q})^m - (\frac{p}{q})^N}{1 - (\frac{p}{q})^N} \quad (p \neq \frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (53.3)$$

بنابراین در صورتی که $N = \infty$ باشد، آن گاه

$$\begin{aligned} P^{(\infty,m)} &= 1 \quad (\frac{1}{2} \leq p \leq 1), \\ P^{(\infty,m)} &= (\frac{p}{q})^m \quad (0 \leq p < \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (54.3)$$

همچنین

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} P^{(\infty,m)} &= 1 \quad (\frac{1}{2} \leq p \leq 1), \\ \lim_{m \rightarrow \infty} P^{(\infty,m)} &= 0 \quad (0 \leq p < \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

T_0 را زمان اولین برخورد به $\circ$ می‌نامیم. و چشمداشتی شرطی T_0 شروع شده از $m = 1$ را با توجه به پیشامد $\{T_0 < \infty\}$ به صورت

$$E^{(\infty, 1)}(T_0 | T_0 < \infty) = \frac{E^{(\infty, 1)}(T_0; T_0 < \infty)}{P^{(\infty, 1)}(T_0 < \infty)} = \frac{E^{(\infty, 1)}(T_0; T_0 < \infty)}{P^{(\infty, 1)}}$$

در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$E^{(\infty, 1)}(T_0 | T_0 < \infty) = \frac{2p}{\sqrt{1 - 4pq}} - 1 \quad \left(\frac{1}{2} < p \leq 1\right),$$

$$E^{(\infty, 1)}(T_0 | T_0 < \infty) = \infty \quad (p = \frac{1}{2}),$$

$$E^{(\infty, 1)}(T_0 | T_0 < \infty) = \frac{2q}{\sqrt{1 - 4pq}} - 1 \quad (0 \leq p < \frac{1}{2}).$$

سپس مورد کوانتومی را بررسی می‌کنیم. برای $U = H$ (ولگشت هادامارد) وقتی که $N = \infty$ یا به عبارتی $\{0, 1, \dots\}$ فضای حالت است. آمبینیس و دیگران [۱۲] ثابت کردند که

$$P^{(\infty, 1)}(T[0, 1]) = P^{(\infty, 1)}(T[1, 0]) = \frac{2}{\pi}, \quad (55.3)$$

و همچنین باخ^{۱۰} و دیگران [۶۰] نشان دادند که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P^{(\infty, m)}(\varphi) = \left(\frac{1}{2}\right)|\alpha|^2 + \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2}\right)|\beta|^2 + 2\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}\right)\Re(\bar{\alpha}\beta). \quad (56.3)$$

با این وجود در مقایسه با $\frac{2}{\pi} = P^{(\infty, 1)}(T[0, 1])$ ، آمبینیس و دیگران [۱۲] ثابت کردند که

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^{(N, 1)}(T[0, 1]) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (57.3)$$

باید توجه داشته باشیم که به ازای هر $0 \leq m \leq N$ در مورد کلاسیکی (روابط ۵۳.۳ و ۵۴.۳) داریم

$$P^{(\infty, m)} = \lim_{N \rightarrow \infty} P^{(N, m)}. \quad (58.3)$$

۲.۳.۳ مسأله جذب در مورد ولگشت هادامارد

رویکرد اصلی ما بررسی معادله‌ای مشابه در مورد کوانتومی و به کارگیری روش PQRS برای آن است. بنابراین مسأله جذب را برای ولگشت هادامارد ($U \equiv H$) شروع شده از مکان m روی $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$ با یک دیواره جذب واقع در مکان $\circ$ ، با استفاده از رویکرد شمارش مسیر بررسی می‌کنیم [۴۱].
(آ) ابتدا روی ولگشت هادامارد شروع شده از مکان $m (\geq 1)$ با $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$ تمرکز می‌کنیم. و فقط $n \geq 1$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به آنچه که قبلاً گفتیم، برای $N = \infty$ داریم

$$\Xi_n^{(\infty, m)} = p_n^{(\infty, m)}P + q_n^{(\infty, m)}Q + r_n^{(\infty, m)}R + s_n^{(\infty, m)}S. \quad (59.3)$$

^{۱۰}Bach

با توجه به تعریف $\Xi_n^{(\infty, m)}$ واضح است که در این حالت فقط دو نوع مسیر به صورت

$$P \rightarrow \dots \rightarrow P, \quad Q \rightarrow \dots \rightarrow P$$

وجود دارد. بنابراین با توجه به مسیرهای ۱۵.۳ می بینیم که

$$q_n^{(\infty, m)} = s_n^{(\infty, m)} = 0 \quad (n \geq 1). \quad (60.3)$$

همچنین به ازای $m \geq 1$ داریم

$$\Xi_n^{(\infty, m)} = \Xi_{n-1}^{(\infty, m-1)} P + \Xi_{n-1}^{(\infty, m+1)} Q. \quad (61.3)$$

که این معادله نسخه‌ی کوانتومی معادله‌ی تفاضلی ۵۲.۳ در مورد ولگشت تصادفی کلاسیکی است. بنابراین به دست می آوریم (پیوست ۴.آ):

$$\begin{aligned} p_n^{(\infty, m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(\infty, m-1)}, & q_n^{(\infty, m)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(\infty, m+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(\infty, m+1)} \\ r_n^{(\infty, m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(\infty, m+1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(\infty, m+1)}, & s_n^{(\infty, m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(\infty, m-1)}. \end{aligned} \quad (62.3)$$

که در آن از ماتریس‌های

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

استفاده کرده‌ایم. به طور مثال، $P^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} P$. معادله ۱۲.۳ دلالت دارد که

$$\begin{aligned} P_n^{(\infty, m)}(\varphi) &= \|\Xi_n^{(\infty, m)} \varphi\|^2 = C_1(n) |\alpha|^2 + C_2(n) |\beta|^2 + 2 \Re(C_3(n) \bar{\alpha} \beta) \\ &= (a\alpha + b\beta) p_n^{(\infty, m)} + (c\alpha + d\beta) r_n^{(\infty, m)}. \end{aligned} \quad (63.3)$$

که در آن $\Re(z)$ قسمت حقیقی $z \in \mathbb{C}$ و $\varphi = {}^T[\alpha, \beta] \in \Phi$ است و همچنین

$$\begin{aligned} C_1(n) &= |ap_n^{(\infty, m)} + cr_n^{(\infty, m)}|^2 + |as_n^{(\infty, m)} + cq_n^{(\infty, m)}|^2, \\ C_2(n) &= |bp_n^{(\infty, m)} + dr_n^{(\infty, m)}|^2 + |bs_n^{(\infty, m)} + dq_n^{(\infty, m)}|^2, \\ C_3(n) &= \overline{(ap_n^{(\infty, m)} + cr_n^{(\infty, m)})} (bp_n^{(\infty, m)} + dr_n^{(\infty, m)}) + \overline{(as_n^{(\infty, m)} + cq_n^{(\infty, m)})} (bs_n^{(\infty, m)} + dq_n^{(\infty, m)}). \end{aligned} \quad (64.3)$$

بنابراین برای حل $p^{(\infty, m)}(\varphi)$ ، معرفی توابع مولد $p_n^{(\infty, m)}$ و $r_n^{(\infty, m)}$ به صورت

$$p^{(\infty, m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n^{(\infty, m)} z^n, \quad r^{(\infty, m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n^{(\infty, m)} z^n \quad (۶۵.۳)$$

مناسب خواهد بود [۷]. همگرایی این سری ایجاب می‌کند که $|z| < ۱$ باشد. سپس با جایگذاری روابط ۶۲.۳ در این توابع مولد داریم:

$$\begin{aligned} p^{(\infty, m)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(\infty, m-1)} \right] z^n \\ &= \frac{z}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}^{(\infty, m-1)} z^{n-1} + \frac{z}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1}^{(\infty, m-1)} z^{n-1} \\ &= \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m-1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} r^{(\infty, m-1)}(z) \end{aligned} \quad (۶۶.۳)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} r^{(\infty, m)}(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(\infty, m+1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(\infty, m+1)} \right] z^n \\ &= \frac{z}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} p_{n-1}^{(\infty, m+1)} z^{n-1} - \frac{z}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} r_{n-1}^{(\infty, m+1)} z^{n-1} \\ &= \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m+1)}(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} r^{(\infty, m+1)}(z). \end{aligned} \quad (۶۷.۳)$$

برای ذره شروع شده از $m = ۱$ با $n = ۱$ گام‌زمانی

$$p_1^{(\infty, 1)} = ۱ \quad (۶۸.۳)$$

می‌باشد، چرا که تنها با طی مسیر P ، به دیواره $\circ$ برخورد می‌کند. اما به ازای $n \geq ۲$ مسیرهایی شامل

$$Q \rightarrow \dots \rightarrow P \quad (۶۹.۳)$$

داریم، که چنین مسیری با توجه به مسیرهای متناظر با $p_n^{(\infty, m)}$ در ۱۵.۳ ممکن نیست. بنابراین

$$p_n^{(\infty, 1)} = ۰ \quad (n \geq ۲). \quad (۷۰.۳)$$

در نتیجه با استفاده از تابع مولد $p^{(\infty, m)}(z)$ رابطه ۶۵.۳ داریم،

$$p^{(\infty, 1)}(z) = p_1^{(\infty, 1)} z + p_2^{(\infty, 1)} z^2 + \dots = p_1^{(\infty, 1)} z = z. \quad (۷۱.۳)$$

با حل روابط ۶۶.۳ و ۶۷.۳، مشاهده می‌کنیم که هر دو $p^{(\infty, m)}(z)$ و $r^{(\infty, m)}(z)$ بازگشت مشابهی را به دست می‌دهند. برای حل ابتدا در رابطه اول یک بار تبدیل $m \rightarrow m + ۲$ و بار دیگر تبدیل $m \rightarrow m + ۱$ را انجام می‌دهیم:

$$m \rightarrow m + ۲ : p^{(\infty, m+2)}(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m+1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} r^{(\infty, m+1)}(z), \quad (۷۲.۳)$$

$$\begin{aligned}
 m \rightarrow m+1 : p^{(\infty, m+1)}(z) &= \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} r^{(\infty, m)}(z) \\
 &= \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} \left[\frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m+1)}(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} r^{(\infty, m+1)}(z) \right] \\
 &= \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m)}(z) + \frac{z^2}{2} p^{(\infty, m+1)}(z) - \frac{z^2}{2} r^{(\infty, m+1)}(z).
 \end{aligned}
 \tag{۷۳.۳}$$

حال طرفین رابطه ۷۲.۳ را در $\frac{z}{\sqrt{2}}$ ضرب کرده و با رابطه ۷۳.۳ جمع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m+2)}(z) + p^{(\infty, m+1)}(z) &= \frac{z^2}{2} p^{(\infty, m+1)}(z) + \frac{z^2}{2} r^{(\infty, m+1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m)}(z) \\
 &\quad + \frac{z^2}{2} p^{(\infty, m+1)}(z) - \frac{z^2}{2} r^{(\infty, m+1)}(z) \\
 \Rightarrow \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m+2)}(z) + (1 - z^2) p^{(\infty, m+1)}(z) - \frac{z}{\sqrt{2}} p^{(\infty, m)}(z) &= 0.
 \end{aligned}$$

در نتیجه

$$p^{(\infty, m+2)}(z) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z \right) p^{(\infty, m+1)}(z) - p^{(\infty, m)}(z) = 0, \tag{۷۴.۳}$$

و به طور مشابه برای $r^{(\infty, m)}(z)$ ،

$$r^{(\infty, m+2)}(z) + \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z \right) r^{(\infty, m+1)}(z) - r^{(\infty, m)}(z) = 0. \tag{۷۵.۳}$$

برای روابط بازگشتی بهترین راه حل استفاده از معادله مشخصه است. به این منظور روابط بالا را مشابه رابطه‌ای که برای جمله‌ی m ام فیبوناچی داریم

$$F_m = F_{m-1} + F_{m+1} \tag{۷۶.۳}$$

در نظر می‌گیریم. و با فرض $F_m = \lambda^m = p^{(\infty, m)}(z)$ (λ عددی ثابت)، داریم

$$\lambda^{m+2} + \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z \right) \lambda^{m+1} - \lambda^m = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z \right) \lambda - 1 = 0.$$

که این معادله مشخصه دارای ریشه‌های مشخصه‌ای به صورت

$$\lambda_{\pm} = \frac{-1 + z^2 \pm \sqrt{1 + z^4}}{\sqrt{2}z}. \tag{۷۷.۳}$$

می‌باشد. برای حل چنین معادله‌هایی با استفاده از روابط فیبوناچی می‌توانیم

$$F_m = p^{(\infty, m)}(z) = c_1 \lambda_+^m + c_2 \lambda_-^m \tag{۷۸.۳}$$

را در نظر بگیریم. که با توجه به محدوده z به ازای $1 < \lambda_+ < \infty$ ، می‌باشد و داریم

$$p^{(\infty, m)}(z) = c_1 \lambda_+^m. \quad (79.3)$$

حال برای یافتن c_1 و با توجه به $p^{(\infty, 1)}(z) = z$ داریم

$$p^{(\infty, 1)}(z) = c_1 \lambda_+ = z \Rightarrow c_1 = \frac{z}{\lambda_+}$$

در نتیجه

$$p^{(\infty, m)}(z) = \frac{z}{\lambda_+} \lambda_+^m = z \lambda_+^{m-1}. \quad (80.3)$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی ۶۶.۳ به ازای $m = 2$ و با استفاده از رابطه بالا داریم

$$p^{(\infty, 2)}(z) = \frac{z}{\sqrt{4}} p^{(\infty, 1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{4}} r^{(\infty, 1)}(z) \Rightarrow r^{(\infty, 1)}(z) = \frac{-1 + \sqrt{1 + z^4}}{z} \quad (81.3)$$

سپس مشابه قبل

$$r^{(\infty, 1)}(z) = c_1 \lambda_+^m = \frac{-1 + \sqrt{1 + z^4}}{z} \quad (82.3)$$

و در نتیجه:

$$r^{(\infty, m)}(z) = \frac{-1 + \sqrt{1 + z^4}}{z} \lambda_+^{m-1}. \quad (83.3)$$

ب) اکنون ولگشت هادامارد شروع شده از مکان $m(\leq -1)$ روی $\mathbb{Z}_- = \{0, -1, \dots\}$ با دیواره جذب واقع در 0 را در نظر می‌گیریم. در این مورد ($N = -\infty$)

$$\Xi_n^{(-\infty, m)} = p_n^{(-\infty, m)} P + q_n^{(-\infty, m)} Q + r_n^{(-\infty, m)} R + s_n^{(-\infty, m)} S. \quad (84.3)$$

با استفاده از این تعریف، واضح است که فقط دو نوع مسیر به صورت

$$Q \rightarrow \dots \rightarrow Q, \quad P \rightarrow \dots \rightarrow Q$$

ممکن می‌باشد. بنابراین با توجه به مسیرهای ۱۵.۳ می‌بینیم که

$$p_n^{(-\infty, m)} = r_n^{(-\infty, m)} = 0 \quad (n \geq 1). \quad (85.3)$$

همچنین به ازای $m \leq -1$

$$\Xi_n^{(-\infty, m)} = \Xi_{n-1}^{(-\infty, m+1)} P + \Xi_{n-1}^{(-\infty, m-1)} Q. \quad (86.3)$$

که مشابه قبل (پیوست ۵.آ) داریم

$$p_n^{(-\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(-\infty, m+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(-\infty, m+1)}, \quad q_n^{(-\infty, m)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(-\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(-\infty, m-1)}$$

$$r_n^{(-\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(-\infty, m-1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(-\infty, m-1)}, \quad s_n^{(-\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(-\infty, m+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(-\infty, m+1)}.$$

(۸۷.۳)

حال مشابه قبل، با در نظر گرفتن توابع مولد

$$q^{(-\infty, m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n^{(-\infty, m)} z^n, \quad s^{(-\infty, m)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{(-\infty, m)} z^n \quad (۸۸.۳)$$

و با جایگذاری روابط ۸۷.۳ در این توابع مولد داریم

$$q^{(-\infty, m)}(z) = -\frac{z}{\sqrt{2}} q^{(-\infty, m-1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} s^{(-\infty, m-1)}(z),$$

$$s^{(-\infty, m)}(z) = \frac{z}{\sqrt{2}} q^{(-\infty, m+1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} s^{(-\infty, m+1)}(z).$$

(۸۹.۳)

که برای ذره شروع شده از $m = -1$ با $n = 1$ گام زمانی

$$q_1^{(-\infty, -1)} = 1 \quad (۹۰.۳)$$

می باشد، چرا که تنها با طی مسیر Q ، به دیواره $\circ$ برخورد می کند. اما به ازای $n \geq 2$ مسیرهایی شامل

$$P \rightarrow \dots \rightarrow Q \quad (۹۱.۳)$$

داریم، که چنین مسیری با توجه به ۱۵.۳ ممکن نیست. لذا

$$q_n^{(-\infty, -1)} = 0 \quad (n \geq 2). \quad (۹۲.۳)$$

در نتیجه با استفاده از تابع مولد $q^{(-\infty, m)}(z)$ ،

$$q^{(-\infty, -1)}(z) = q_1^{(-\infty, -1)} z = z. \quad (۹۳.۳)$$

روابط ۸۸.۳ نیز بازگشت مشابهی را نشان می دهند که مشابه قبل به صورت زیر هستند:

$$m \rightarrow m+2 : q^{(-\infty, m+2)}(z) = -\frac{z}{\sqrt{2}} q^{(-\infty, m+1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} s^{(-\infty, m+1)}(z), \quad (۹۴.۳)$$

$$m \rightarrow m+1 : p^{(-\infty, m+1)}(z) = -\frac{z}{\sqrt{2}} q^{(-\infty, m)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} s^{(-\infty, m)}(z)$$

$$= -\frac{z}{\sqrt{2}} q^{(-\infty, m)}(z) + \frac{z^2}{2} q^{(-\infty, m+1)}(z) + \frac{z^2}{2} s^{(-\infty, m+1)}(z).$$

(۹۵.۳)

سپس طرفین رابطه ۹۴.۳ را در $\frac{z}{\sqrt{2}}$ ضرب و از رابطه ۹۵.۳ کم می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{z}{\sqrt{2}} q^{(-\infty, m+2)}(z) - q^{(-\infty, m+1)}(z) &= \frac{z^2}{2} q^{(-\infty, m+1)}(z) + \frac{z^2}{2} s^{(-\infty, m+1)}(z) + \frac{z}{\sqrt{2}} q^{(-\infty, m)}(z) \\ &\quad - \frac{z^2}{2} q^{(-\infty, m+1)}(z) - \frac{z^2}{2} s^{(-\infty, m+1)}(z) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$q^{(-\infty, m+2)}(z) - \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z \right) q^{(-\infty, m+1)}(z) - q^{(-\infty, m)}(z) = 0, \quad (96.3)$$

همچنین به طور مشابه برای $s^{(-\infty, m)}(z)$ ،

$$s^{(-\infty, m+2)}(z) - \sqrt{2} \left(\frac{1}{z} - z \right) s^{(-\infty, m+1)}(z) - s^{(-\infty, m)}(z) = 0. \quad (97.3)$$

که دارای ریشه‌های مشخصه‌ای به صورت

$$\lambda_{\pm} = \frac{1 - z^2 \pm \sqrt{1 + z^4}}{\sqrt{2}z}. \quad (98.3)$$

هستند. مشابه قبل برای حل چنین روابط بازگشتی، با در نظر گرفتن جمله‌ی m ام فیبوناچی

$$F_m = q^{(-\infty, m)}(z) = c_1 \lambda_+^m + c_2 \lambda_-^m, \quad (99.3)$$

و با توجه به شرط همگرایی داریم

$$q^{(-\infty, m)}(z) = c_2 \lambda_-^m. \quad (100.3)$$

بنابراین با توجه به این که $q^{(-\infty, -1)}(z) = z$ می‌باشد، آنگاه

$$q^{(-\infty, m)}(z) = z \lambda_-^{m+1}. \quad (101.3)$$

همچنین با استفاده از رابطه ۸۹.۳ و به‌ازای $m = 0$ داریم:

$$s^{(-\infty, -1)}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 + z^4}}{z}, \quad (102.3)$$

بنابراین با توجه به $s^{(-\infty, -1)}(z) = c_2 \lambda_-^{-1}$ ،

$$s^{(-\infty, m)}(z) = \frac{1 - \sqrt{1 + z^4}}{z} \lambda_-^{m+1}. \quad (103.3)$$

فصل ۴

موضعی شدن در ولگشت های کوانتومی غیرهمگن

۱.۴ عملگر تحول

در این فصل موضعی شدن را در مورد ولگشت کوانتومی دو حالت فضا-غیرهمگن^۱ یک بُعدی بررسی می کنیم که در آن ها عملگر سکه به مکان ذره نیز وابسته می باشد. بنابراین با انتخاب یک عملگر سکه ی مناسب، دامنه و احتمال را برای این نوع ولگشت به دست آورده و توزیع احتمال آن را بررسی می کنیم. اگر عملگر یکانی را که باعث تحول در فاز نسبی بین حالت های پایه $|L\rangle$ و $|R\rangle$ می شود به صورت

$$R_z(\omega_x) = e^{\frac{i}{\hbar}\omega_x\hat{\sigma}_z} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega_x}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega_x}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

در نظر بگیریم، آن گاه برای مجموعه ی $\{\omega_x : x \in \mathbb{Z}\}$ داریم:

$$\begin{aligned} U(\omega_x) &= R_z(\omega_x) U R_z^{-1}(\omega_x) = \begin{pmatrix} e^{\frac{i\omega_x}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i\omega_x}{\hbar}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i\omega_x}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i\omega_x}{\hbar}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & be^{i\omega_x} \\ ce^{-i\omega_x} & d \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

^۱space-inhomogeneous

که در آن $\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ماتریس اسپین پائولی و $\omega_x \in [0, 2\pi)$ یک فاز دلخواه است [۵۴]. بنابراین اگر برای دنباله‌ی فوق در بازه‌ی $\omega_x \in [0, 2\pi)$ تبدیل هادامارد را به عنوان تبدیل داخلی اعمال کنیم، داریم:

$$U_x = U_x(\omega_x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega_x} \\ e^{-i\omega_x} & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

در این صورت با تجزیه‌ی U_x به دو ماتریس داریم

$$P_x = P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_x = Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\omega} & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

به ازای $\omega \neq 0$ ، ولگشت به جز در مبدأ همگن خواهد بود و به ازای $\omega = 0$ نیز همگن و با ولگشت هادامارد تعیین شده توسط گیت هادامارد $U_x = U_x(0) \equiv H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ معادل می شود [۴۱]. در این جا مدل ناهمگن ساده‌ای را در نظر می گیریم که فقط به پارامتر $\omega_x \in [0, 2\pi)$ به صورت زیر وابسته باشد

$$\begin{aligned} U_0 &= U_0(\omega) \quad , \quad x = 0 \\ U_x &= U_x(0) \quad , \quad x \neq 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

همچنین حالت متقارن $\varphi_* = {}^T[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}]$ را به عنوان حالت کیوبیت اولیه در نظر می گیریم.

۲.۴ بازگشت به مبدأ

در این بخش می خواهیم بازگشت ذره به مکان اولیه‌ی خود را بررسی کنیم. بنابراین مجموع تمامی مسیرهای شروع شده از حالت کیوبیت اولیه $\varphi_* \in \Phi$ که پس از طی n گام زمانی به مبدأ مسیر باز می گردند را به صورت

$$\Xi_n(l, m) = \sum_{l_j, m_j \geq 0} P_{x(l_1)}^{l_1} Q_{x(m_1)}^{m_1} P_{x(l_2)}^{l_2} Q_{x(m_2)}^{m_2} \cdots P_{x(l_{n-1})}^{l_{n-1}} Q_{x(m_{n-1})}^{m_{n-1}} P_0^{l_n} Q_0^{m_n} \quad (6.4)$$

در نظر می گیریم [۵۶]. که در آن روابط زیر برقرار است:

$$l_1 + \cdots + l_n = l \quad , \quad m_1 + \cdots + m_n = m \quad , \quad l_j + m_j = 1. \quad (7.4)$$

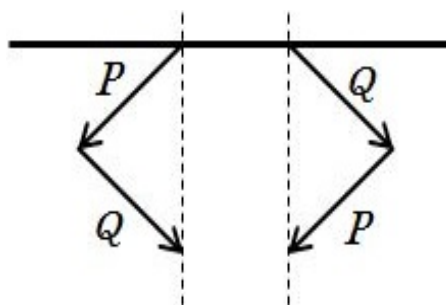
به بیانگر این است که ذره پس از n گام زمانی با گام چپ (راست) به مبدأ مسیر باز می گردد. به طور مثال در موردی که ذره مسیری را از مکان $x = 0$ شروع کرده باشد، پس از طی دو گام

زمانی ($n = 2$) شامل یک گام به چپ ($l = 1$) و یک گام به راست ($m = 1$) به مبدأ مسیر باز می‌گردد (شکل ۱.۴) که مجموع تمامی مسیرهای آن به صورت زیر است:

$$\Xi_2(1, 1) = PQ_0 + QP_0, \quad (۸.۴)$$

که در آن $l_1 + m_1 = 1$ و $l_2 + m_2 = 1$ می‌باشد.

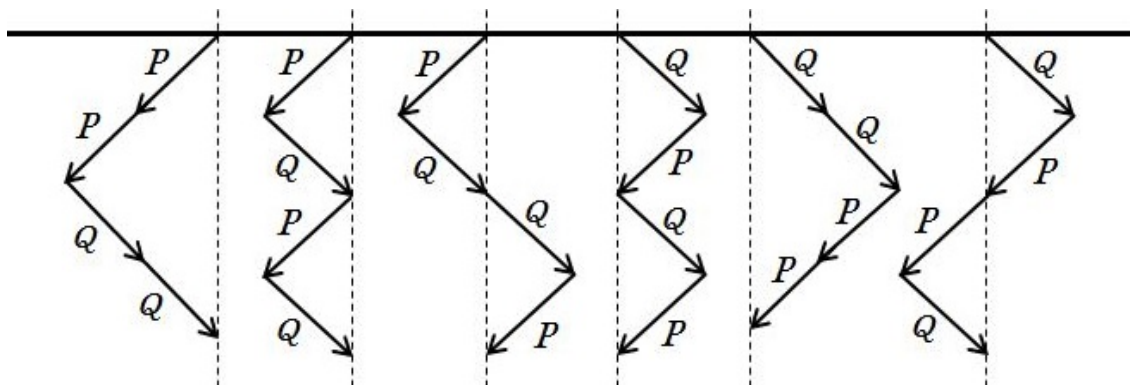
شکل ۱.۴: مسیرهای مختلف متناظر با $\Xi_2(1, 1)$



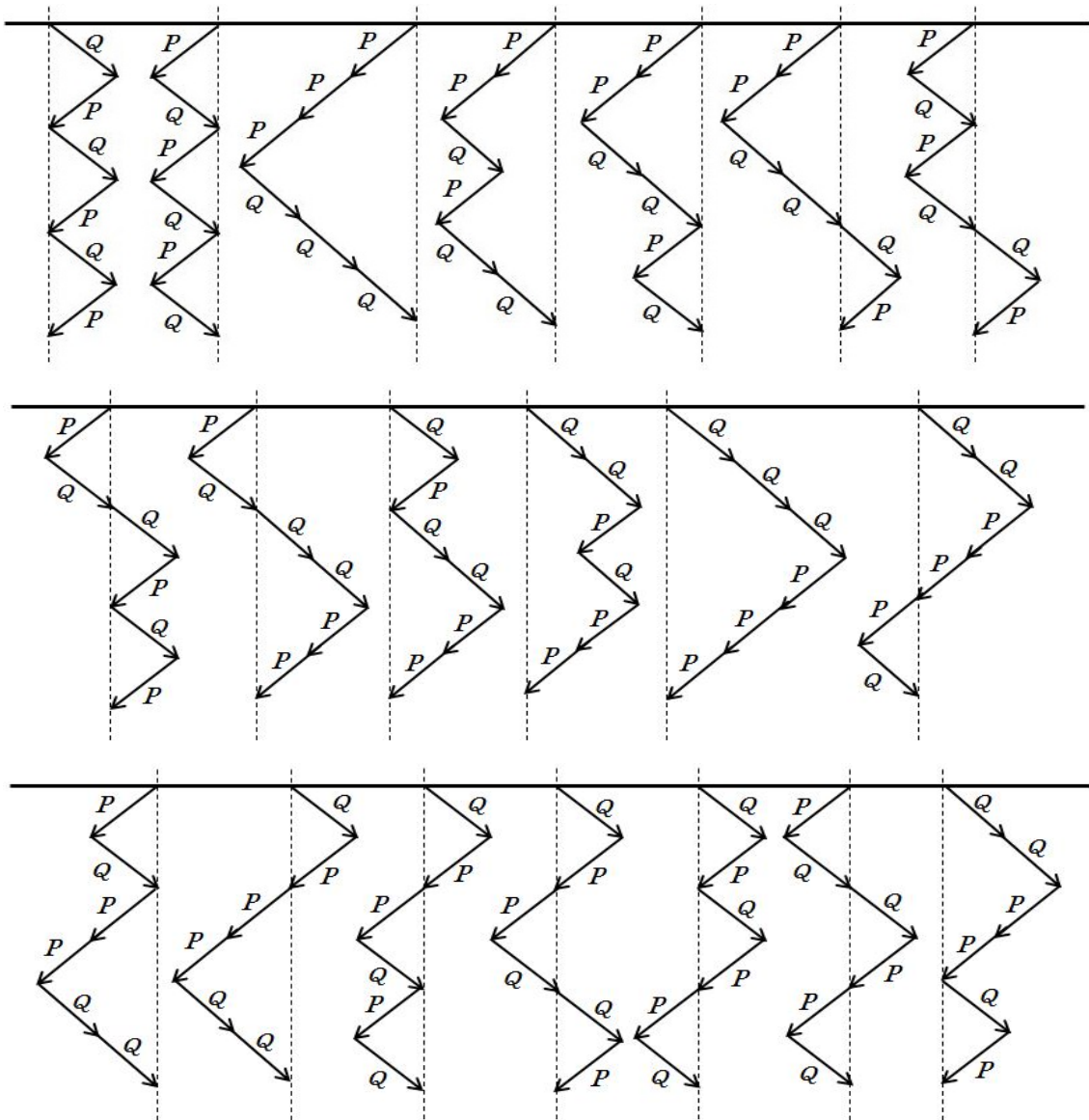
همچنین برای ولگشتی شامل گام‌های $l = 2$ و $m = 2$ با $n = 4$ گام زمانی داریم (شکل ۲.۴):

$$\Xi_4(2, 2) = P^2QQ_0 + PQ_0PQ_0 + PQ_0QP_0 + QP_0QP_0 + Q^2PP_0 + QP_0PQ_0. \quad (۹.۴)$$

شکل ۲.۴: مسیرهای مختلف متناظر با $\Xi_4(2, 2)$



شکل ۳.۴: مسیرهای مختلف متناظر با $\Xi_6(3, 3)$



و نیز برای ولگشتی با $l = 3$ ، $m = 3$ و $n = 6$ گام زمانی (شکل ۳.۴):

$$\begin{aligned} \Xi_6(3, 3) = & QP.QP.QP. + PQ.PQ.PQ. + P^3Q^3Q. + P^2QPQQ. + P^2QQ.PQ. \\ & + P^2QQ.QP. + PQ.PQ.QP. + PQ.QP.QP. + PQ.Q^2PP. \\ & + Q^2PQPP. + Q^3P^2P. + Q^2PP.PQ. + PQ.P^2QQ. + QP.P^2QQ. \\ & + QP.PQ.PQ. + QP.PQ.QP. + QP.QP.PQ. + PQ.QP.PQ. \\ & + Q^2PP.QP.. \end{aligned}$$

برای جزییات بیشتر به پیوست ۲.۱ مراجعه شود.

۱.۲.۴ احتمال بازگشت

احتمال این که ذره کوانتومی شروع شده از مبدأ با حالت کیوبیت اولیه φ_* پس از طی n گام زمانی در مکان x باشد، به صورت

$$P(X_n^\varphi = x) = |\Psi_n(x)|^2 = \|\Xi_n(l, m)\varphi_*\|^2 = \|\Xi_n(l, m)\varphi_*\|^* \|\Xi_n(l, m)\varphi_*\| \quad (11.4)$$

تعریف می شود [۴۱]. بنابراین

$$P(X_n = \circ) = p_n(\circ)$$

بیانگر احتمال بازگشت به مبدأ $x = \circ$ در زمان n می باشد. باید توجه داشته باشیم که به ازای n های فرد، احتمال بازگشت در زمان n صفر است. به عبارتی

$$p_{2n+1}(\circ) = 0 \quad (n \geq 0)$$

چرا که به ازای n های فرد، ذره بازگشتی به مبدأ ندارد ($\Xi_n(l, m) = 0$). ولی به ازای n های زوج و با توجه به رابطه ۱۱.۴ داریم:

$$p_{2n}(\circ) = |\Psi_{2n}(\circ)|^2 = \|\Xi_{2n}(n, n)\varphi_*\|^2 \quad (12.4)$$

که در این حالت $l = m = n$ می باشد.

بنابراین در مورد هر یک از مثال های بالا می بینیم که به ازای $\omega = \pi$ و پس از انجام محاسبات مستقیم داریم:

$$\begin{aligned} p_2(\circ) &= |\Xi_2(1, 1)\varphi_*|^* |\Xi_2(1, 1)\varphi_*| \\ &= \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^* \left| \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{2^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(\circ) &= |\Xi_4(2, 2)\varphi_*|^* |\Xi_4(2, 2)\varphi_*| \\ &= \left| \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^* \left| \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right| = \frac{10}{2^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_6(\circ) &= |\Xi_6(3, 3)\varphi_*|^* |\Xi_6(3, 3)\varphi_*| \\ &= \left| \frac{1}{2^3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right|^* \left| \frac{1}{2^3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right| = \frac{40}{2^6} \end{aligned}$$

همچنین برای ولگشت هادامارد که در مورد آن $\omega = 0$ می باشد؛ داریم:

$$p_2^{(H)}(0) = |\Xi_2(1, 1)\varphi_*|^* |\Xi_2(1, 1)\varphi_*| = \frac{2}{2^2} ,$$

$$p_4^{(H)}(0) = |\Xi_4(2, 2)\varphi_*|^* |\Xi_4(2, 2)\varphi_*| = \frac{2}{2^4} ,$$

$$p_8^{(H)}(0) = |\Xi_8(3, 3)\varphi_*|^* |\Xi_8(3, 3)\varphi_*| = \frac{1}{2^6} .$$

برای جزییات محاسبات به پیوست ۳.آ مراجعه شود.

در رابطه ۱۲.۴ ،

$$\Psi_{2n}(0) = \begin{pmatrix} \Psi_{2n}^L(0) \\ \Psi_{2n}^R(0) \end{pmatrix} = \Xi_{2n}(n, n)\varphi_* \quad (n \geq 0) \quad (13.4)$$

به صورت دامنه احتمال حول مبدأ در زمان $2n$ تعریف می شود، که در آن مولفه بالا (پایین) متناظر با حالت کایرالیته چپ (راست) می باشد.
به طور واضح برای n های فرد داریم

$$\Psi_{2n+1}(0) = \begin{pmatrix} \Psi_{2n+1}^L(0) \\ \Psi_{2n+1}^R(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (n \geq 0). \quad (14.4)$$

۳.۴ مسئله جذب در ولگشت غیرهمگن

به منظور به دست آوردن رابطه ای برای دامنه ای احتمال در ولگشت کوانتومی غیرهمگن در نظر گرفته شده، مسئله ای جذب را در مورد آن ها بررسی می کنیم.
بنابراین $(\Xi_n^-)\Xi_n^+$ را مجموع تمام مسیرهای ممکن شروع شده از مبدأ که پس از n گام زمانی در محدوده $(\mathbb{Z}_-)\mathbb{Z}_+$ با دیواره ی واقع در مکان 0 برخورد می کند در نظر می گیریم که به صورت

$$\Xi_n^+ = \Xi_n^{(\infty, 1)}Q_0, \quad \Xi_n^- = \Xi_n^{(-\infty, -1)}P_0. \quad (15.4)$$

نمایش می دهیم [۴۱] . $(P_0)Q_0$ در رابطه اول (دوم) به این معناست که ذره شروع شده از مبدأ اولین گام خود را به سمت راست (چپ) برداشته و به مکان $m = -1$ ($m = 1$) رسیده است. که با توجه به ۳.۴ ،

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\omega} & -1 \end{pmatrix} \quad (16.4)$$

می‌باشند. که نتایج حاصل از بررسی مسیرهای شروع شده از مبدأ و به ازای گام‌های زمانی مختلف در لم زیر آمده است.

لم ۱.۳.۴. (ا) به ازای $n \geq 4$ و n های زوج داریم

$$\Xi_n^+ = \Xi_n^{(\infty, 1)} Q_0 = r_{n-1}^{(\infty, 1)} R Q_0 = \frac{r_{n-1}^{(\infty, 1)}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\omega} & -1 \end{pmatrix} = \frac{r_{n-1}^{(\infty, 1)}}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (17.4)$$

که در آن

$$\Xi_n^{(\infty, 1)} = p_n^{(\infty, 1)} P + q_n^{(\infty, 1)} Q + r_n^{(\infty, 1)} R + s_n^{(\infty, 1)} S = r_n^{(\infty, 1)} R \quad (18.4)$$

می‌باشد. با توجه به شرایط در نظر گرفته شده، ذره با $n-1$ گام زمانی با دیواره 0 برخورد می‌کند، از این رو $\Xi_n^{(\infty, 1)}$ را به صورت

$$\Xi_n^{(\infty, 1)} = r_{n-1}^{(\infty, 1)} R \quad (19.4)$$

بیان کردیم. به طور مشابه

$$\Xi_n^- = \Xi_n^{(-\infty, -1)} P_0 = s_{n-1}^{(-\infty, -1)} S P_0 = \frac{s_{n-1}^{(-\infty, -1)}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\omega} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{s_{n-1}^{(-\infty, -1)}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{i\omega} \end{pmatrix}. \quad (20.4)$$

همچنین

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^{(\infty, 1)} z^n = \frac{-1 + \sqrt{1+z^4}}{z}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} s_n^{(-\infty, -1)} z^n = \frac{1 - \sqrt{1+z^4}}{z}. \quad (21.4)$$

(ب) به ازای $n=2$ ،

$$\begin{aligned} \Xi_2^+ &= \Xi_2^{(\infty, 1)} Q_0 = P Q_0 = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Xi_2^- &= \Xi_2^{(-\infty, -1)} P_0 = Q P_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{i\omega} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (22.4)$$

(پ) و به ازای n های فرد داریم

$$\begin{aligned} \Xi_n^+ &= \Xi_n^{(\infty, 1)} Q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Xi_n^- &= \Xi_n^{(-\infty, -1)} P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23.4)$$

از روابط ۸۲.۳ و ۱۰۲.۳ فصل قبل می‌دانیم که $r_n^{(\infty,1)} + s_n^{(-\infty,-1)} = 0$ بنابراین با استفاده از لم ۱.۳.۴ و با در نظر گرفتن $\Xi_n^* = \Xi_n^+ + \Xi_n^-$ برای $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned}\Xi_n^* &= \frac{r_{n-1}^{(\infty,1)}}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{s_{n-1}^{(-\infty,-1)}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & e^{i\omega} \end{pmatrix} = \frac{r_{n-1}^{(\infty,1)}}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ -1 & -e^{i\omega} \end{pmatrix} \\ &= \frac{r_{n-1}^*}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ -1 & -e^{i\omega} \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (24.4)$$

که در آن

$$r_n^* = \begin{cases} (-1)^{m-1} \frac{(2m-1)!}{2^{2m-1}(m-1)!m!} & n = 2m-1, \quad m \geq 1 \\ 0 & n \neq 2m-1, \quad n \geq 2, \quad m \geq 1 \\ -1 & n = 1 \end{cases} \quad (25.4)$$

یا به عبارتی

$$r_1^* = -1, \quad r_2^* = 0, \quad r_3^* = \frac{1}{2}, \quad r_4^* = r_5^* = r_6^* = 0, \quad r_7^* = -\frac{1}{8}, \quad \dots \quad (26.4)$$

می‌باشد. بنابراین تابع مولد r_n^* به صورت

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n^* z^n = \frac{-1 - z^2 + \sqrt{1+z^4}}{z}. \quad (27.4)$$

به دست می‌آید.

۱.۳.۴ دامنه احتمال

اکنون با استفاده از رابطه‌ی ۱۳.۴ و برای دامنه‌ی احتمال حول مبدأ با $2n$ گام زمانی داریم:

$$\Psi_{2n}(0) = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k \Xi_{2a_j}^* \right) \varphi^*. \quad (28.4)$$

که در آن $\mathbb{P} = \{1, 2, \dots\}$ می‌باشد. که با جایگذاری رابطه ۲۴.۴ می‌رسیم به

$$\begin{aligned}\Psi_{2n}(0) &= \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left[\prod_{j=1}^k \frac{r_{2a_j-1}^*}{2} \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ -1 & -e^{i\omega} \end{pmatrix} \right] \varphi^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{2a_j-1}^* \right) \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ -1 & -e^{i\omega} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (29.4)$$

در ادامه با قطری سازی ماتریس

$$D = \begin{pmatrix} -e^{-i\omega} & 1 \\ -1 & -e^{i\omega} \end{pmatrix} \quad (30.4)$$

به حل رابطه بالا می پردازیم. به این منظور ابتدا ویژه مقادیر ماتریس D را به صورت زیر می یابیم

$$\begin{vmatrix} -e^{-i\omega} - \lambda & 1 \\ -1 & -e^{i\omega} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\cos \omega \pm i\sqrt{1 + \sin^2 \omega}.$$

سپس ویژه حالت های بهنجار شده آن را محاسبه می کنیم، که به ازای $\lambda_1 = -\cos \omega + i\sqrt{1 + \sin^2 \omega}$ به صورت

$$|D_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\{(1 + \sin^2 \omega) - \sin \omega \sqrt{1 + \sin^2 \omega}\}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \sin \omega + i\sqrt{1 + \sin^2 \omega} \end{pmatrix}, \quad (31.4)$$

و به ازای $\lambda_2 = -\cos \omega - i\sqrt{1 + \sin^2 \omega}$ داریم

$$|D_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\{(1 + \sin^2 \omega) + \sin \omega \sqrt{1 + \sin^2 \omega}\}}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \sin \omega - i\sqrt{1 + \sin^2 \omega} \end{pmatrix}. \quad (32.4)$$

بنابراین با استفاده از

$$D^k = \lambda_1^k |D_1\rangle \langle D_1| + \lambda_2^k |D_2\rangle \langle D_2|$$

حل رابطه ۲۹.۴ میسر می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \Psi_{\Upsilon n}(\circ) &= \frac{1}{\sqrt{\Upsilon}} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{\Upsilon a_j - 1}^* \right) \frac{1}{\Upsilon^k} \\
 &\times \left[\frac{(-\cos \omega + i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})^k}{\Upsilon[(1 + \sin^{\Upsilon} \omega) - \sin \omega \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}]} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \sin \omega + i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega} \end{pmatrix} \right. \\
 &\times \left(1 - i \sin \omega - i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega} \right) + \frac{(-\cos \omega - i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})^k}{\Upsilon[(1 + \sin^{\Upsilon} \omega) + \sin \omega \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}]} \\
 &\times \begin{pmatrix} 1 \\ -i \sin \omega - i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega} \end{pmatrix} \left(1 + i \sin \omega + i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega} \right) \left. \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\Upsilon}} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{\Upsilon a_j - 1}^* \right) \frac{1}{\Upsilon^k} \\
 &\times \left(\frac{(-\cos \omega + i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})^k (1 - \sin \omega + \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})}{\Upsilon[(1 + \sin^{\Upsilon} \omega) - \sin \omega \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}]} + \frac{(-\cos \omega - i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})^k (1 - \sin \omega - \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})}{\Upsilon[(1 + \sin^{\Upsilon} \omega) + \sin \omega \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}]} \right. \\
 &\times \left(\frac{(-\cos \omega + i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})^k (-i) (\sin \omega - \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}) [1 - (\sin \omega - \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})]}{\Upsilon[(1 + \sin^{\Upsilon} \omega) - \sin \omega \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}]} \right. \\
 &\left. \left. + \frac{(-\cos \omega - i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})^k (-i) (\sin \omega + \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}) [1 - (\sin \omega + \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega})]}{\Upsilon[(1 + \sin^{\Upsilon} \omega) + \sin \omega \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}]} \right) \right). \tag{۳۳.۴}
 \end{aligned}$$

اگر در رابطه اخیر قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{\pm} &= -\cos \omega \pm i\sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega} \quad , \quad \mu_{\pm} = \sin \omega \mp \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega} \\
 c_{\pm} &= \sqrt{\Upsilon[(1 + \sin^{\Upsilon} \omega) \mp \sin \omega \sqrt{1 + \sin^{\Upsilon} \omega}]} \tag{۳۴.۴}
 \end{aligned}$$

بنابراین برای دامنه احتمال حول مبدأ با $\mathfrak{z}n$ گام زمانی داریم:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{z}n}(\circ) &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{z}}} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{\mathfrak{z}a_j-1}^* \right) \frac{1}{\mathfrak{z}^k} \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c} \frac{\gamma_+^k (1-\mu_+)}{c_+^{\mathfrak{z}}} + \frac{\gamma_-^k (1-\mu_-)}{c_-^{\mathfrak{z}}} \\ - \left\{ \frac{\gamma_+^k \mu_+ (1-\mu_+)}{c_+^{\mathfrak{z}}} + \frac{\gamma_-^k \mu_- (1-\mu_-)}{c_-^{\mathfrak{z}}} \right\} i \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{z}}} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{\mathfrak{z}a_j-1}^* \right) \\ &\quad \times \left(\begin{array}{c} \frac{1-\mu_+}{c_+^{\mathfrak{z}}} \left(\frac{\gamma_+}{\mathfrak{z}} \right)^k + \frac{1-\mu_-}{c_-^{\mathfrak{z}}} \left(\frac{\gamma_-}{\mathfrak{z}} \right)^k \\ - \left\{ \frac{\mu_+ (1-\mu_+)}{c_+^{\mathfrak{z}}} \left(\frac{\gamma_+}{\mathfrak{z}} \right)^k + \frac{\mu_- (1-\mu_-)}{c_-^{\mathfrak{z}}} \left(\frac{\gamma_-}{\mathfrak{z}} \right)^k \right\} i \end{array} \right). \end{aligned} \quad (35.4)$$

در نتیجه دامنه‌ی احتمال حول مبدأ به دست می‌آید.

۲.۳.۴ احتمال بازگشت به مبدأ

حال با استفاده از دامنه احتمال به دست آمده، به محاسبه $p_{\mathfrak{z}n}(\circ)$ می‌پردازیم. به این منظور ابتدا تابع مولد $\Psi_n^{(L)}(\circ)$ را به دست می‌آوریم. با در نظر گرفتن $u_{\pm} = \frac{\gamma_{\pm}}{\mathfrak{z}}$ و $x_n = r_{\mathfrak{z}n-1}^*$ داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n^{(L)}(\circ) z^{\mathfrak{z}n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{z}}} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{\mathfrak{z}a_j-1}^* \right) \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1-\mu_+}{c_+^{\mathfrak{z}}} \left(\frac{\gamma_+}{\mathfrak{z}} \right)^k + \frac{1-\mu_-}{c_-^{\mathfrak{z}}} \left(\frac{\gamma_-}{\mathfrak{z}} \right)^k \right] \Big\} z^{\mathfrak{z}n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{z}}} \left[\frac{1-\mu_+}{c_+^{\mathfrak{z}}} \frac{(-1-z^{\mathfrak{z}} + \sqrt{1+z^{\mathfrak{z}}})u_+}{1-(-1-z^{\mathfrak{z}} + \sqrt{1+z^{\mathfrak{z}}})u_+} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-\mu_-}{c_-^{\mathfrak{z}}} \frac{(-1-z^{\mathfrak{z}} + \sqrt{1+z^{\mathfrak{z}}})u_-}{1-(-1-z^{\mathfrak{z}} + \sqrt{1+z^{\mathfrak{z}}})u_-} \right] \end{aligned} \quad (36.4)$$

و نیز

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\gamma n}^{(R)}(\circ) z^{\gamma n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{\gamma a_j - 1}^* \right) \right. \\ \left. \times \left[- \left\{ \frac{\mu_+(1 - \mu_+)}{c_+^{\gamma}} \left(\frac{\gamma_+}{2} \right)^k + \frac{\mu_-(1 - \mu_-)}{c_-^{\gamma}} \left(\frac{\gamma_-}{2} \right)^k \right\} i \right] \right\} z^{\gamma n} \quad (37.4)$$

$$= \frac{-i}{\sqrt{2}} \left[\frac{\mu_+(1 - \mu_+)}{c_+^{\gamma}} \frac{(-1 - z^{\gamma} + \sqrt{1 + z^{\gamma}}) u_+}{1 - (-1 - z^{\gamma} + \sqrt{1 + z^{\gamma}}) u_+} \right. \\ \left. + \frac{\mu_-(1 - \mu_-)}{c_-^{\gamma}} \frac{(-1 - z^{\gamma} + \sqrt{1 + z^{\gamma}}) u_-}{1 - (-1 - z^{\gamma} + \sqrt{1 + z^{\gamma}}) u_-} \right].$$

برای مشاهده جزئیات ساده سازی به پیوست ۶.۱ مراجعه شود.

حال با توجه به حالت اولیه $\Psi_{\circ}^{(L)}(\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ و

$$\frac{1 - \mu_+}{c_+^{\gamma}} + \frac{1 - \mu_-}{c_-^{\gamma}} = 1, \quad (38.4)$$

داریم:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(L)}(\circ) z^n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{1 - \mu_+}{c_+^{\gamma}} \frac{1}{1 - Z u_+} + \frac{1 - \mu_-}{c_-^{\gamma}} \frac{1}{1 - Z u_-} \right\}. \quad (39.4)$$

همچنین با توجه به حالت اولیه $\Psi_{\circ}^{(R)}(\circ) = \frac{i}{\sqrt{2}}$ و

$$\frac{\mu_+(1 - \mu_+)}{c_+^{\gamma}} + \frac{\mu_-(1 - \mu_-)}{c_-^{\gamma}} = -1, \quad (40.4)$$

به طور مشابه برای تابع مولد $\Psi_n^{(R)}(\circ)$ می‌رسیم به:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(R)}(\circ) z^n = \frac{-i}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\mu_+(1 - \mu_+)}{c_+^{\gamma}} \frac{1}{1 - Z u_+} + \frac{\mu_-(1 - \mu_-)}{c_-^{\gamma}} \frac{1}{1 - Z u_-} \right\}. \quad (41.4)$$

که در آن $Z = -1 - z^{\gamma} + \sqrt{1 + z^{\gamma}}$ بنابراین

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(L, \Re)}(\circ) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(R, \Im)}(\circ) z^n = - \frac{2 + Z \cos \omega}{\sqrt{2}(2 + 2Z \cos \omega + Z^2)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(L, \Im)}(\circ) z^n = \frac{(1 + \sin \omega) Z}{\sqrt{2}(2 + 2Z \cos \omega + Z^2)} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(R, \Re)}(\circ) z^n = - \frac{(1 - \sin \omega) Z}{\sqrt{2}(2 + 2Z \cos \omega + Z^2)} \quad (42.4)$$

که در آن $(\Psi_n^{(A, \Im)}(\circ)) \Psi_n^{(A, \Re)}(\circ)$ قسمت حقیقی (موهومی) $\Psi_n^{(A)}(\circ)$ به ازای $A = L, R$ می باشد. با انجام محاسبات مستقیم داریم

$$\begin{aligned} \sum_{n=\circ}^{\infty} \Psi_n^{(L, \Re)}(\circ) z^n &= \sum_{n=\circ}^{\infty} \Psi_n^{(R, \Im)}(\circ) z^n \\ &= \frac{\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega + \mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} + (\mathfrak{F} - \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} + (\mathfrak{F} - \cos \omega)(\mathfrak{F} + z^{\mathfrak{F}}) \sqrt{\mathfrak{F} + z^{\mathfrak{F}}}}{\mathfrak{F} \sqrt{\mathfrak{F}} \{ \mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega + \mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} + (\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} \}} \\ \sum_{n=\circ}^{\infty} \Psi_n^{(L, \Im)}(\circ) z^n &= - \frac{(\mathfrak{F} + \sin \omega) \{ \mathfrak{F} + \mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} + z^{\mathfrak{F}} + (-\mathfrak{F} + z^{\mathfrak{F}}) \sqrt{\mathfrak{F} + z^{\mathfrak{F}}} \}}{\mathfrak{F} \sqrt{\mathfrak{F}} \{ \mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega + \mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} + (\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} \}} \\ \sum_{n=\circ}^{\infty} \Psi_n^{(R, \Re)}(\circ) z^n &= \frac{(\mathfrak{F} - \sin \omega) \{ \mathfrak{F} + \mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} + z^{\mathfrak{F}} + (-\mathfrak{F} + z^{\mathfrak{F}}) \sqrt{\mathfrak{F} + z^{\mathfrak{F}}} \}}{\mathfrak{F} \sqrt{\mathfrak{F}} \{ \mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega + \mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} + (\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega) z^{\mathfrak{F}} \}} \end{aligned} \quad (43.4)$$

در نتیجه به دست می آوریم:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathfrak{F}n}^{(L, \Re)}(\circ) &= \Psi_{\mathfrak{F}n}^{(R, \Im)}(\circ) \sim \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - \cos \omega)}{\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega} \cos(n\theta_{\circ}), \\ \Psi_{\mathfrak{F}n}^{(L, \Im)}(\circ) &\sim - \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - \cos \omega)(\mathfrak{F} + \sin \omega)}{(\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega) \sqrt{\mathfrak{F} + \sin^{\mathfrak{F}} \omega}} \sin(n\theta_{\circ}), \\ \Psi_{\mathfrak{F}n}^{(R, \Re)}(\circ) &\sim - \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - \cos \omega)(\mathfrak{F} - \sin \omega)}{(\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega) \sqrt{\mathfrak{F} + \sin^{\mathfrak{F}} \omega}} \sin(n\theta_{\circ}), \end{aligned} \quad (44.4)$$

که در آن

$$\sin \theta_{\circ} = \frac{(\mathfrak{F} - \cos \omega) \sqrt{\mathfrak{F} + \sin^{\mathfrak{F}} \omega}}{\mathfrak{F} \cos \omega - \mathfrak{F}}, \quad \cos \theta_{\circ} = - \frac{(\mathfrak{F} - \cos \omega)^{\mathfrak{F}}}{\mathfrak{F} \cos \omega - \mathfrak{F}}$$

است و $f(n) \sim g(n)$ ، به عبارتی $1 \rightarrow f(n)/g(n)$ به طوری که $n \rightarrow \infty$ [۴۱]. بنابراین برای احتمال بازگشت در زمان $\mathfrak{F}n$ و با توجه به رابطه ۱۲.۴ می رسیم به

$$\begin{aligned} p_{\mathfrak{F}n}(\circ) &= |\Psi_{\mathfrak{F}n}^{(L, \Re)}(\circ)|^{\mathfrak{F}} + |\Psi_{\mathfrak{F}n}^{(L, \Im)}(\circ)|^{\mathfrak{F}} + |\Psi_{\mathfrak{F}n}^{(R, \Re)}(\circ)|^{\mathfrak{F}} + |\Psi_{\mathfrak{F}n}^{(R, \Im)}(\circ)|^{\mathfrak{F}} \\ &= \left| \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - \cos \omega)}{\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega} \cos(n\theta_{\circ}) \right|^{\mathfrak{F}} + \left| - \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - \cos \omega)(\mathfrak{F} + \sin \omega)}{(\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega) \sqrt{\mathfrak{F} + \sin^{\mathfrak{F}} \omega}} \sin(n\theta_{\circ}) \right|^{\mathfrak{F}} \\ &\quad + \left| - \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - \cos \omega)(\mathfrak{F} - \sin \omega)}{(\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega) \sqrt{\mathfrak{F} + \sin^{\mathfrak{F}} \omega}} \sin(n\theta_{\circ}) \right|^{\mathfrak{F}} + \left| \frac{\sqrt{\mathfrak{F}}(\mathfrak{F} - \cos \omega)}{\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega} \cos(n\theta_{\circ}) \right|^{\mathfrak{F}} \\ &= \frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega)^{\mathfrak{F}}}{(\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega)^{\mathfrak{F}}} [\mathfrak{F} \cos^{\mathfrak{F}}(n\theta_{\circ}) + \mathfrak{F} \sin^{\mathfrak{F}}(n\theta_{\circ})] = \frac{\mathfrak{F}(\mathfrak{F} - \cos \omega)^{\mathfrak{F}}}{(\mathfrak{F} - \mathfrak{F} \cos \omega)^{\mathfrak{F}}} \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}(\circ) = \left(\frac{2(1 - \cos \omega)}{3 - 2 \cos \omega} \right)^2 =: c(\omega) \quad (45.4)$$

همان‌طور که از نمودار ۴.۴ مشخص است، حد بالا ویژگی‌های زیر را برآورده می‌کند.

(الف) $c(\omega) = c(2\pi - \omega)$.

(ب) در $\omega \in [0, \pi]$ ، $c(\omega)$ اکیدا صعودی است.

(پ) و به ازای هر $\omega \in [0, \pi]$ ، $c(0) = 0 \leq c(\omega) \leq c(\pi) = (\frac{4}{5})^2$.

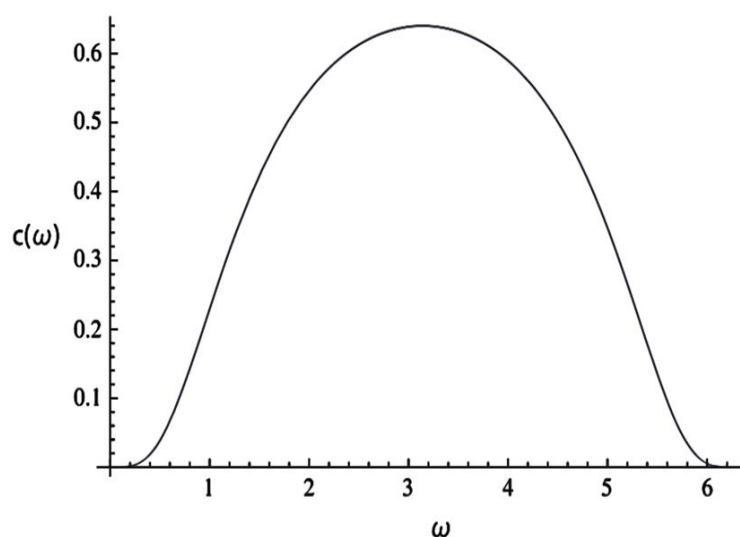
بنابراین در صورتی که مدلمان غیرهمگن باشد؛ به عبارتی $\omega \in (0, 2\pi)$ ، موضعی شدن نمایان می‌شود

$(c(\omega) > 0)$. هنگامی که ω توزیع یکنواختی روی $[0, 2\pi]$ داشته باشد، می‌بینیم که

$$E[c(\cdot)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c(\omega) d\omega = (25 - 7\sqrt{5})/25 = 0.3739 \dots \quad (46.4)$$

که در آن $E[c(\cdot)]$ مقدار چشمداشتی $c(\omega)$ است.

شکل ۴.۴: نمودار احتمال موضعی شدن به ازای ω های مختلف



۴.۴ مقایسه ولگشت کوانتومی غیرهمگن با مدل‌های دیگر

در این بخش، به بررسی ارتباط بین مدل خود و برخی ولگشت‌های مرتبط می‌پردازیم. با استدلالی مشابه آنچه که از روابط ۴۳.۴ برای ولگشت هادامارد به عبارتی ولگشت همگن ($\omega = 0$) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(L, \Re)}(\circ) z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(R, \Im)}(\circ) z^n = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1+z^2}{\sqrt{1+z^4}} \right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(L, \Im)}(\circ) z^n &= - \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n^{(R, \Re)}(\circ) z^n = - \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(1 + \frac{-1+z^2}{\sqrt{1+z^4}} \right) \end{aligned} \quad (47.4)$$

و با توجه به نتیجه به دست آمده از [۵۶]

$$p_{2n}^{(H)}(\circ) \sim \frac{1}{\pi n} \quad (48.4)$$

داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}^{(H)}(\circ) = \circ. \quad (49.4)$$

همچنین در مورد یک ولگشت غیرهمگن دیگر با عملگر تحول

$$U_x = U_x(\omega_x) = \begin{pmatrix} e^{i\omega_x} & 1 \\ 1 & -e^{-i\omega_x} \end{pmatrix} \quad (50.4)$$

که در [۵۶] مورد مطالعه قرار گرفته است؛ شاهد رفتاری مشابه ولگشت همگن هستیم به طوری که در آن $p_{2n}^*(\circ) = p_{2n}^{(H)}$ می باشد. به عبارتی

$$p_{2n}^*(\circ) \sim \frac{1}{\pi n} \quad (51.4)$$

و در نتیجه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}^*(\circ) = \circ. \quad (52.4)$$

که در آن $p_{2n}^*(\circ)$ به صورت احتمال بازگشت به مبدأ در زمان $2n$ تعریف می شود. بنابراین در این مورد ولگشت کوانتومی موضعی شدن را نمایش نمی دهد. که این امر در تقابل با مدل ما می باشد. همچنین برای ولگشت تصادفی کلاسیکی غیرهمگن شروع شده از مبدأ روی $\mathbb{Z}$ ، به طور مشابه می رسمیم به:

$$f^{(c)}(z) = \sum_{n=\circ}^{\infty} p_n^{(c)}(\circ) z^n = \left\{ 1 - \left(\frac{p_{\circ}}{p} + \frac{q_{\circ}}{q} \right) \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2} \right\}^{-1}, \quad (53.4)$$

که در آن $p_n^{(c)}(\circ)$ احتمال بازگشت در زمان $2n$ برای ولگشت کلاسیکی است [۴۱]. در این مدل، ذره ی واقع در مکان x با احتمال p_x یک گام به سمت راست و با احتمال q_x یک گام به سمت چپ حرکت می کند که به ازای هر $x \in \mathbb{Z}$ ، $p_x + q_x = 1$ و به ازای $x \in \mathbb{Z}/\{\circ\}$ ، $p_x = p, q_x = q$ ، از معادله ۵۳.۴ داریم

$$p_{2n}^{(c)}(\circ) \sim \frac{2}{\frac{p_{\circ}}{p} + \frac{q_{\circ}}{q}} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}. \quad (54.4)$$

بنابراین در این مورد $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}^{(c)}(\circ) = \circ$ و موضعی شدن اتفاق نمی افتد. در صورتی که $p \neq q$ باشد $p_n^{(c)}(\circ)$ به طور نمایی به سمت صفر میل می کند و در صورتی که $p = q = \frac{1}{4}$ داریم

$$p_{2n}^{(c)}(\circ) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}. \quad (55.4)$$

همان طور که انتظار می رود نتیجه ولگشت کلاسیکی در تقابل با مدل ما می باشد.

۵.۴ نتیجه‌گیری

یافتن الگوریتم‌های جستجوی مناسب همواره به‌عنوان یک حوزه‌ی باز در علوم مختلف به شمار می‌رود. ماهیت سیستم‌های کوانتومی و امکان محاسبات موازی، به‌طور موفقیت‌آمیزی ایجاد الگوریتم‌های سریع و کارآمد را فراهم نموده است. در این بین نقش ولگشت‌های کوانتومی در ایجاد الگوریتم‌های جستجوی کوانتومی قابل توجه می‌باشد؛ که هدف مشترک آن‌ها تبدیل سیستم به حالتی خاص با احتمال $O(1)$ می‌باشد. در پیش‌برد الگوریتم‌های کوانتومی انتخاب یک عملگر سکه‌ی مناسب حائز اهمیت است. در این پایان‌نامه ولگشت‌های کوانتومی از نوع فضا-غیرهمگن را در نظر گرفتیم که در آن‌ها عملگر سکه نه تنها به حالت سکه بلکه به مکان ذره نیز وابسته است. بنابراین عملگر سکه‌ای به صورت ۳.۴ را انتخاب نمودیم. سپس با استفاده از رویکرد شمارش مسیر به بررسی پدیده موضعی شدن در ولگشت‌های کوانتومی زمان گسسته دو حالت فضا-غیرهمگن یک بُعدی پرداختیم. نتیجه بررسی توزیع احتمال نشان می‌دهد که در ولگشت‌های کوانتومی عادی اشغال مکان‌ها توسط ذره محدود به نقاط دور از مرکز بوده و احتمال یافتن ذره در اطراف مبدأ با افزایش تعداد گام‌ها به سمت صفر میل می‌کند. اما در مورد ولگشت‌های کوانتومی غیرهمگن یک بُعدی ذره مایل به حفظ جایگاه خود در اطراف مبدأ بوده و اثر موضعی شدن با احتمال زیادی ظاهر می‌شود. از آن‌جا که به ازای گام‌های زمانی n فرد ذره بازگشتی به مبدأ نخواهد داشت بنابراین استنباط می‌شود که احتمال بازگشت به مبدأ فقط به ازای n های زوج غیرصفر می‌باشد. در ولگشت‌های کوانتومی ذره از یک مکان اولیه شروع شده و به‌طور خطی در زمان انتشار می‌یابد و تقریباً تمام حالت‌های ممکن را در بر می‌گیرد. ولگشت‌های کوانتومی همچنین می‌توانند با اعمال شرایطی به مکان اولیه‌ی خود بازگشت نموده و حول جایگاه خاصی موضعی شوند. در تقابل با این امر، الگوریتم‌های جستجوی کوانتومی از تعداد زیادی حالت‌های ممکن شروع شده و به یک نقطه خاص می‌رسند. بنابراین اثر موضعی شدن در ولگشت‌های کوانتومی می‌تواند پتانسیل تولید الگوریتم‌های جستجوی کوانتومی را داشته باشد.

مراجع

- [1] P. Benioff, “The computer as a physical system: A microscopic quantum mechanical hamiltonian model of computers as represented by turing machines,” *Journal of Statistical Physics*, vol. 22, no. 5, pp. 563–591, 1980.
- [2] R. P. Feynman, “Simulating physics with computers,” *International journal of theoretical physics*, vol. 21, no. 6, pp. 467–488, 1982.
- [3] D. Deutsch, “Quantum computational networks,” in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 425, pp. 73–90, The Royal Society, 1989.
- [4] S. Lloyd *et al.*, “A potentially realizable quantum computer,” *Science*, vol. 261, no. 5128, pp. 1569–1571, 1993.
- [5] P. W. Shor, “Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring,” in *Foundations of Computer Science, 1994 Proceedings., 35th Annual Symposium on*, pp. 124–134, IEEE, 1994.
- [6] L. K. Grover, “Quantum mechanics helps in searching for a needle in a haystack,” *Physical review letters*, vol. 79, no. 2, p. 325, 1997.
- [7] N. Konno, “Limit theorems and absorption problems for one-dimensional correlated random walks,” *arXiv preprint quant-ph/0310191*, 2003.
- [8] N. Konno, “Limit theorems and absorption problems for quantum random walks in one dimension,” *arXiv preprint quant-ph/0210011*, 2002.
- [9] N. Konno, “Quantum random walks in one dimension,” *Quantum Information Processing*, vol. 1, no. 5, pp. 345–354, 2002.
- [10] Y. Aharonov, L. Davidovich, and N. Zagury, “Quantum random walks,” *Physical Review A*, vol. 48, no. 2, p. 1687, 1993.

- [11] D. Aharonov, A. Ambainis, J. Kempe, and U. Vazirani, "Quantum walks on graphs," in *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 50–59, ACM, 2001.
- [12] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, "One-dimensional quantum walks," in *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 37–49, ACM, 2001.
- [13] E. Farhi and S. Gutmann, "Quantum computation and decision trees," *Physical Review A*, vol. 58, no. 2, p. 915, 1998.
- [14] A. M. Childs, E. Farhi, and S. Gutmann, "An example of the difference between quantum and classical random walks," *Quantum Information Processing*, vol. 1, no. 1-2, pp. 35–43, 2002.
- [15] N. Shenvi, J. Kempe, and K. B. Whaley, "Quantum random-walk search algorithm," *Physical Review A*, vol. 67, no. 5, p. 052307, 2003.
- [16] A. Ambainis, "Quantum walks and their algorithmic applications," *International Journal of Quantum Information*, vol. 1, no. 04, pp. 507–518, 2003.
- [17] J. Watrous, "Quantum simulations of classical random walks and undirected graph connectivity," in *Computational Complexity, 1999. Proceedings. Fourteenth Annual IEEE Conference on*, pp. 180–187, IEEE, 1999.
- [18] E. Farhi, J. Goldstone, and S. Gutmann, "A quantum algorithm for the hamiltonian nand tree," *arXiv preprint quant-ph/0702144*, 2007.
- [19] B. Kramer and A. MacKinnon, "Localization: theory and experiment," *Reports on Progress in Physics*, vol. 56, no. 12, p. 1469, 1993.
- [20] P. W. Anderson, "Absence of diffusion in certain random lattices," *Physical review*, vol. 109, no. 5, p. 1492, 1958.
- [21] C. Chandrashekar, "Disordered-quantum-walk-induced localization of a bose-einstein condensate," *Physical Review A*, vol. 83, no. 2, p. 022320, 2011.
- [22] A. Joye, "Dynamical localization for d-dimensional random quantum walks," *Quantum Information Processing*, vol. 11, no. 5, pp. 1251–1269, 2012.

- [23] N. Inui, N. Konno, and E. Segawa, "One-dimensional three-state quantum walk," *Physical Review E*, vol. 72, no. 5, p. 056112, 2005.
- [24] K. Watabe, N. Kobayashi, M. Katori, and N. Konno, "Limit distributions of two-dimensional quantum walks," *Physical Review A*, vol. 77, no. 6, p. 062331, 2008.
- [25] M. Štefaňák, I. Jex, and T. Kiss, "Recurrence and pólya number of quantum walks," *Physical review letters*, vol. 100, no. 2, p. 020501, 2008.
- [26] M. Štefaňák, T. Kiss, and I. Jex, "Recurrence properties of unbiased coined quantum walks on infinite d-dimensional lattices," *Physical Review A*, vol. 78, no. 3, p. 032306, 2008.
- [27] B. Kollár, T. Kiss, and I. Jex, "Strongly trapped two-dimensional quantum walks," *Physical Review A*, vol. 91, no. 2, p. 022308, 2015.
- [28] A. Joye, "Random time-dependent quantum walks," *Communications in mathematical physics*, vol. 307, no. 1, pp. 65–100, 2011.
- [29] A. Joye and M. Merkli, "Dynamical localization of quantum walks in random environments," *Journal of Statistical Physics*, vol. 140, no. 6, pp. 1025–1053, 2010.
- [30] E. Hamza and A. Joye, "Correlated markov quantum walks," in *Annales Henri Poincaré*, vol. 13, pp. 1767–1805, Springer, 2012.
- [31] N. Inui and N. Konno, "Localization of multi-state quantum walk in one dimension," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 353, pp. 133–144, 2005.
- [32] P. Ribeiro, P. Milman, and R. Mosseri, "Aperiodic quantum random walks," *Physical review letters*, vol. 93, no. 19, p. 190503, 2004.
- [33] A. Romanelli, "The fibonacci quantum walk and its classical trace map," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 388, no. 18, pp. 3985–3990, 2009.
- [34] C. Ampadu, "Limit theorems for the fibonacci quantum walk," *arXiv preprint arXiv:1108.5198*, 2011.
- [35] B. Kollár, M. Štefaňák, T. Kiss, and I. Jex, "Recurrences in three-state quantum walks on a plane," *Physical Review A*, vol. 82, no. 1, p. 012303, 2010.
- [36] C. Ampadu, "Localization of m-particle quantum walks," *arXiv preprint arXiv:1106.5234*, 2011.

-
- [37] C. Ampadu, “On the recurrence character of the hadamard walk in the plane,” *arXiv preprint arXiv:1110.0681*, 2011.
 - [38] C. Ampadu, “Localization of two-dimensional five-state quantum walks,” *arXiv preprint arXiv:1108.0984*, 2011.
 - [39] M.-J. Cantero, L. Moral, F. A. Grünbaum, and L. Velázquez, “Matrix-valued szegő polynomials and quantum random walks,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 63, no. 4, pp. 464–507, 2010.
 - [40] M. J. Cantero, F. Grünbaum, L. Moral, and L. Velázquez, “One-dimensional quantum walks with one defect,” *Reviews in Mathematical Physics*, vol. 24, no. 02, p. 1250002, 2012.
 - [41] N. Konno, “Localization of an inhomogeneous discrete-time quantum walk on the line,” *Quantum Information Processing*, vol. 9, no. 3, pp. 405–418, 2010.
 - [42] Y. Shikano and H. Katsura, “Localization and fractality in inhomogeneous quantum walks with self-duality,” *Physical Review E*, vol. 82, no. 3, p. 031122, 2010.
 - [43] T. Machida, “Limit theorems for a localization model of 2-state quantum walks,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 9, no. 03, pp. 863–874, 2011.
 - [44] T. Machida, “Limit distribution with a combination of density functions for a 2-state quantum walk,” *arXiv preprint arXiv:1010.3481*, 2010.
 - [45] C. Chandrashekar, “Quantum walk through lattice with temporal, spatial and fluctuating disordered operations,” *arXiv preprint arXiv:1103.2704*, 2011.
 - [46] A. Ahlbrecht, V. B. Scholz, and A. H. Werner, “Disordered quantum walks in one lattice dimension,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 52, no. 10, p. 102201, 2011.
 - [47] R. Portugal, *Quantum walks and search algorithms*. Springer Science & Business Media, 2013.
 - [48] C. M. Grinstead and J. L. Snell, *Introduction to probability*. American Mathematical Soc., 2012.
 - [49] A. Nayak and A. Vishwanath, “Quantum walk on the line,” *arXiv preprint quant-ph/0010117*, 2000.

- [50] S. E. Venegas-Andraca, “Quantum walks: a comprehensive review,” *Quantum Information Processing*, vol. 11, no. 5, pp. 1015–1106, 2012.
- [51] T. J. KHOO, *Disorder, Localization and Decay in Quantum Walks*. PhD thesis, Cite-seer.
- [52] N. Linden and J. Sharam, “Inhomogeneous quantum walks,” *Physical Review A*, vol. 80, no. 5, p. 052327, 2009.
- [53] N. Konno, T. Łuczak, and E. Segawa, “Limit measures of inhomogeneous discrete-time quantum walks in one dimension,” *Quantum information processing*, vol. 12, no. 1, pp. 33–53, 2013.
- [54] T. D. Mackay, S. D. Bartlett, L. T. Stephenson, and B. C. Sanders, “Quantum walks in higher dimensions,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 35, no. 12, p. 2745, 2002.
- [55] N. Konno, “A new type of limit theorems for the one-dimensional quantum random walk,” *Journal of the Mathematical Society of Japan*, vol. 57, no. 4, pp. 1179–1195, 2005.
- [56] N. Konno, “One-dimensional discrete-time quantum walks on random environments,” *Quantum Information Processing*, vol. 8, no. 5, pp. 387–399, 2009.
- [57] N. Konno, T. Namiki, T. Soshi, and A. Sudbury, “Absorption problems for quantum walks in one dimension,” *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, no. 1, p. 241, 2002.
- [58] R. Durrett, *Essentials of stochastic processes*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [59] G. Grimmett and D. Stirzaker, *Probability and random processes*. Oxford university press, 2001.
- [60] E. Bach, S. Coppersmith, M. P. Goldschen, R. Joynt, and J. Watrous, “One-dimensional quantum walks with absorbing boundaries,” *Journal of Computer and System Sciences*, vol. 69, no. 4, pp. 562–592, 2004.

پیوست

اثبات روابط

۱.۲.۳ لم ۲.۲.۳

از معادله ۱.۳ و لم ۱.۲.۳ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
 P(X_n^\varphi = x) &= |\Xi_n(l, m)\varphi_*|^* |\Xi_n(l, m)\varphi_*| \\
 &= |a|^{\mathfrak{r}l} |d|^{\mathfrak{r}m} \sum_{\gamma=\mathfrak{r}}^k \sum_{\delta=\mathfrak{r}}^k \left(-\frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} \right)^{\gamma+\delta} \binom{k-\mathfrak{r}}{\gamma-\mathfrak{r}} \binom{k-\mathfrak{r}}{\delta-\mathfrak{r}} \binom{n-k-\mathfrak{r}}{\gamma-\mathfrak{r}} \binom{n-k-\mathfrak{r}}{\delta-\mathfrak{r}} \\
 &\quad \times \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{pmatrix} \left[\frac{l-\delta}{\bar{a}\delta} P^* + \frac{m-\delta}{\bar{d}\delta} Q^* + \frac{\mathfrak{r}}{\bar{c}} R^* + \frac{\mathfrak{r}}{\bar{b}} S^* \right] \\
 &\quad \times \left[\frac{l-\gamma}{a\gamma} P + \frac{m-\gamma}{d\gamma} Q + \frac{\mathfrak{r}}{c} R + \frac{\mathfrak{r}}{b} S \right] \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
 &= |a|^{\mathfrak{r}l} |d|^{\mathfrak{r}m} \sum_{\gamma=\mathfrak{r}}^k \sum_{\delta=\mathfrak{r}}^k \left(-\frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} \right) \left(\frac{\kappa_{\gamma, \delta, n, k}}{\gamma\delta} \right) \\
 &\quad \times \{ l^{\mathfrak{r}} + \frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} (m-\delta)(m-\gamma) - m(\gamma+\delta) + \mathfrak{r}\gamma\delta + \frac{|a|^{\mathfrak{r}}}{|b|^{\mathfrak{r}}} \gamma\delta \} |\alpha|^{\mathfrak{r}} \\
 &\quad + \{ \frac{b}{a} [l(l-\gamma) - m(m-\delta)] + \frac{\bar{a}}{\bar{b}} (m\delta - l\gamma) \} \bar{\alpha}\bar{\beta} \\
 &\quad + \{ \frac{\bar{b}}{\bar{a}} [l(l-\delta) - m(m-\gamma)] + \frac{a}{b} (m\gamma - l\delta) \} \alpha\bar{\beta} \\
 &\quad + \{ m^{\mathfrak{r}} + \frac{|b|^{\mathfrak{r}}}{|a|^{\mathfrak{r}}} (l-\delta)(l-\gamma) - l(\gamma+\delta) + \mathfrak{r}\gamma\delta + \frac{|a|^{\mathfrak{r}}}{|b|^{\mathfrak{r}}} \gamma\delta \} |\beta|^{\mathfrak{r}}
 \end{aligned}$$

۲.آ بازگشت به مبدأ

با توجه به رابطه‌ی ۶.۴ برای ذره شروع شده از مبدأ $x = \circ$ و به ازای گام‌های زمانی مختلف، مجموع مسیرها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\Xi_2(1, 1) &= \sum_{l_j, m_j \geq \circ} P_{x(l_1)}^{l_1} Q_{x(m_1)}^{m_1} P_{x(l_2)}^{l_2} Q_{x(m_2)}^{m_2} \\ &= P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} + P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} = PQ_{\circ} + QP_{\circ},\end{aligned}$$

که در آن $l_1 + m_1 = 1$ و $l_2 + m_2 = 1$ می‌باشد.

$$\begin{aligned}\Xi_4(2, 2) &= \sum_{l_j, m_j \geq \circ} P_{x(l_1)}^{l_1} Q_{x(m_1)}^{m_1} P_{x(l_2)}^{l_2} Q_{x(m_2)}^{m_2} P_{x(l_3)}^{l_3} Q_{x(m_3)}^{m_3} P_{x(l_4)}^{l_4} Q_{x(m_4)}^{m_4} \\ &= P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} \\ &\quad + P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} \\ &\quad + P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} \\ &\quad + P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} \\ &\quad + P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} \\ &\quad + P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(1)}^{(1)} Q_{x(\circ)}^{(\circ)} P_{x(\circ)}^{(\circ)} Q_{x(1)}^{(1)} \\ &= P^2 Q Q_{\circ} + P Q_{\circ} P Q_{\circ} + P Q_{\circ} Q P_{\circ} + Q P_{\circ} Q P_{\circ} + Q^2 P P_{\circ} + Q P_{\circ} P Q_{\circ}.\end{aligned}$$

۳.آ احتمال بازگشت

با توجه به روابط ۴.۴ و به ازای $\omega = \pi$ که در آن

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

می‌باشند، داریم:

$$\begin{aligned} \Xi_2(1, 1) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_2(2, 2) &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i\pi} & -1 \end{pmatrix} \\
 & + \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & e^{i\pi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & = \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

همچنین در مورد ولگشت هادامارد و به ازای $\omega = 0$ که در آن

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

می‌باشند، داریم:

$$\Xi_2(1, 1) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Xi_4(2, 2) = \frac{1}{2^2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Xi_6(3, 3) = \frac{1}{2^3} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

۴.آ اثبات روابط ۶۲.۳

با جایگذاری رابطه ۵۹.۳ در ۶۱.۳ داریم

$$\begin{aligned}
 & p_n^{(\infty, m)} P + q_n^{(\infty, m)} Q + r_n^{(\infty, m)} R + s_n^{(\infty, m)} S \\
 &= \left[p_{n-1}^{(\infty, m-1)} P + q_{n-1}^{(\infty, m-1)} Q + r_{n-1}^{(\infty, m-1)} R + s_{n-1}^{(\infty, m-1)} S \right] P \\
 &\quad + \left[p_{n-1}^{(\infty, m+1)} P + q_{n-1}^{(\infty, m+1)} Q + r_{n-1}^{(\infty, m+1)} R + s_{n-1}^{(\infty, m+1)} S \right] Q \\
 &= p_{n-1}^{(\infty, m-1)} P^2 + q_{n-1}^{(\infty, m-1)} QP + r_{n-1}^{(\infty, m-1)} RP + s_{n-1}^{(\infty, m-1)} SP \\
 &\quad + p_{n-1}^{(\infty, m+1)} PQ + q_{n-1}^{(\infty, m+1)} Q^2 + r_{n-1}^{(\infty, m+1)} RQ + s_{n-1}^{(\infty, m+1)} SQ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(\infty, m-1)} P + \frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(\infty, m-1)} S + \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(\infty, m-1)} P + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(\infty, m-1)} S \\
 &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(\infty, m+1)} R - \frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(\infty, m+1)} Q - \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(\infty, m+1)} R + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(\infty, m+1)} Q \\
 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(\infty, m-1)} \right] P + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(\infty, m-1)} \right] S \\
 &\quad + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(\infty, m+1)} - \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(\infty, m+1)} \right] R + \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(\infty, m+1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(\infty, m+1)} \right] Q
 \end{aligned}$$

و با مقایسه دو طرف رابطه می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
 p_n^{(\infty, m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(\infty, m-1)} \quad , \quad q_n^{(\infty, m)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(\infty, m+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(\infty, m+1)} \\
 r_n^{(\infty, m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(\infty, m+1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(\infty, m+1)} \quad , \quad s_n^{(\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(\infty, m-1)} \quad .
 \end{aligned}$$

۵.آ اثبات روابط ۸۷.۳

با جایگذاری رابطه ۸۴.۳ در ۸۶.۳ داریم

$$\begin{aligned}
 & p_n^{(-\infty, m)} P + q_n^{(-\infty, m)} Q + r_n^{(-\infty, m)} R + s_n^{(-\infty, m)} S \\
 &= \left[p_{n-1}^{(-\infty, m+1)} P + q_{n-1}^{(-\infty, m+1)} Q + r_{n-1}^{(-\infty, m+1)} R + s_{n-1}^{(-\infty, m+1)} S \right] P \\
 &+ \left[p_{n-1}^{(-\infty, m-1)} P + q_{n-1}^{(-\infty, m-1)} Q + r_{n-1}^{(-\infty, m-1)} R + s_{n-1}^{(-\infty, m-1)} S \right] Q \\
 &= p_{n-1}^{(-\infty, m+1)} P^2 + q_{n-1}^{(-\infty, m+1)} QP + r_{n-1}^{(-\infty, m+1)} RP + s_{n-1}^{(-\infty, m+1)} SP \\
 &+ p_{n-1}^{(-\infty, m-1)} PQ + q_{n-1}^{(-\infty, m-1)} Q^2 + r_{n-1}^{(-\infty, m-1)} RQ + s_{n-1}^{(-\infty, m-1)} SQ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(-\infty, m+1)} P + \frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(-\infty, m+1)} S + \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(-\infty, m+1)} P + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(-\infty, m+1)} S \\
 &+ \frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(-\infty, m-1)} R - \frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(-\infty, m-1)} Q - \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(-\infty, m-1)} R + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(-\infty, m-1)} Q \\
 &= \left[\frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(-\infty, m+1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(-\infty, m+1)} \right] P + \left[\frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(-\infty, m+1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(-\infty, m+1)} \right] S \\
 &+ \left[\frac{\sqrt{2}}{2} p_{n-1}^{(-\infty, m-1)} - \frac{\sqrt{2}}{2} r_{n-1}^{(-\infty, m-1)} \right] R + \left[-\frac{\sqrt{2}}{2} q_{n-1}^{(-\infty, m-1)} + \frac{\sqrt{2}}{2} s_{n-1}^{(-\infty, m-1)} \right] Q
 \end{aligned}$$

و با مقایسه دو طرف رابطه می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
 p_n^{(-\infty, m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(-\infty, m+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(-\infty, m+1)} & , & \quad q_n^{(-\infty, m)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(-\infty, m-1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(-\infty, m-1)} \\
 r_n^{(-\infty, m)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} p_{n-1}^{(-\infty, m-1)} - \frac{1}{\sqrt{2}} r_{n-1}^{(-\infty, m-1)} & , & \quad s_n^{(-\infty, m)} = \frac{1}{\sqrt{2}} q_{n-1}^{(-\infty, m+1)} + \frac{1}{\sqrt{2}} s_{n-1}^{(-\infty, m+1)} .
 \end{aligned}$$

آ.۶ اثبات روابط ۳۶.۴

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_{\mathfrak{r}n}^{(L)}(\circ) z^{\mathfrak{r}n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}}} \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k r_{\mathfrak{r}a_j - 1}^* \right) \right. \\
 &\quad \times \left. \left[\frac{1 - \mu_+}{c_+^{\mathfrak{r}}} \left(\frac{\gamma_+}{\mathfrak{r}} \right)^k + \frac{1 - \mu_-}{c_-^{\mathfrak{r}}} \left(\frac{\gamma_-}{\mathfrak{r}} \right)^k \right] \right\} z^{\mathfrak{r}n} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}}} \left[\frac{1 - \mu_+}{c_+^{\mathfrak{r}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) u_+^k \right\} z^{\mathfrak{r}n} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - \mu_-}{c_-^{\mathfrak{r}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) u_-^k \right\} z^{\mathfrak{r}n} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}}} \left[\frac{1 - \mu_+}{c_+^{\mathfrak{r}}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) z^{\mathfrak{r}n} \right\} u_+^k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - \mu_-}{c_-^{\mathfrak{r}}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) z^{\mathfrak{r}n} \right\} u_-^k \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}}} \left[\frac{1 - \mu_+}{c_+^{\mathfrak{r}}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1 - z^{\mathfrak{r}} + \sqrt{1 + z^{\mathfrak{r}}})^k u_+^k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - \mu_-}{c_-^{\mathfrak{r}}} \sum_{k=1}^{\infty} (-1 - z^{\mathfrak{r}} + \sqrt{1 + z^{\mathfrak{r}}})^k u_-^k \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{r}}} \left[\frac{1 - \mu_+}{c_+^{\mathfrak{r}}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1 - z^{\mathfrak{r}} + \sqrt{1 + z^{\mathfrak{r}}}) u_+ \right\}^k \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - \mu_-}{c_-^{\mathfrak{r}}} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ (-1 - z^{\mathfrak{r}} + \sqrt{1 + z^{\mathfrak{r}}}) u_- \right\}^k \right] .
 \end{aligned}$$

که در آن از ساده سازی زیر استفاده کرده ایم:

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} \left(\prod_{j=1}^k x_{a_j} \right) z^{\mathfrak{Y}n} &= \sum_{n=k}^{\infty} \sum_{\substack{(a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{P}^k: \\ a_1 + \dots + a_k = n}} (x_{a_1} x_{a_2} \cdots x_{a_k}) z^{\mathfrak{Y}n} \\
 &= \sum_{n=k}^{\infty} (x_n)^k z^{\mathfrak{Y}n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n z^{\mathfrak{Y}n} \right)^k \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_{\mathfrak{Y}n-1}^* z^{\mathfrak{Y}n} \right)^k = \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_{\mathfrak{Y}n-1}^* z^{\mathfrak{Y}n-1} \right)^k z^k \\
 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} r_n^* z^n \right)^k z^k = \left(\frac{-1 - z^{\mathfrak{Y}} + \sqrt{1 + z^{\mathfrak{Y}}}}{z} \right)^k z^k \\
 &= (-1 - z^{\mathfrak{Y}} + \sqrt{1 + z^{\mathfrak{Y}}})^k
 \end{aligned}$$

Abstract

The quantum walks in comparison to the classical random walks, have some major differences in the probability distribution, variance, diffusion velocity, etc. The localization phenomenon is one of the distinctive features of the quantum walks. This phenomenon is known as the probability of finding the walker in its initial position after long time walking. It has been demonstrated that the localization effect in the quantum walks can have potential applications for the quantum search algorithms. In this thesis, by focusing on the inhomogeneous one-dimensional quantum walks namely those have different coin operator for different spaces, we will investigate the localization probability by using a path counting approach.

To this end, we firstly introduce the given model and the PQRS method. Then we obtain a combinatorial expression for the quantum walk (X_n^φ) started from the initial qubit state φ , by utilizing a unitary matrix $U(2)$. Also, by using some known results regarding the absorption problems for both classical and quantum walks, we study the absorption problem for the Hadamard walk with an absorbing boundary at 0. We proceed with an inhomogeneous one-dimensional quantum walks and estimating the return probability at the origin. It is shown that we have nonzero return probability for even number of steps after long time walking ($\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2n}(0) > 0$). Finally, we make a comparison between the given model and the other related models.

Keywords: Quantum walk, Localization, Hadamard walk, Absorption problem



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in: Particle Physics

**Investigation of the probability distribution's
Localization in one dimensional
inhomogeneous Quantum Walk**

By: Fatemeh Tangaki

Supervisor

Dr. Mostafa Annabestani

February 2017