





دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد فیزیک گرایش اتمی و مولکولی پلاسما

مطالعه ناپایداری های ریل-تیلور در پلاسماهای مغناطیده

کوانتومی در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی

نگارنده: فاطمه زمندی

استاد راهنما

دکتر مهدی مومنی

بهمن ۱۳۹۵



باد و دفر اوان به روح پر فتوح پدر بزرگوارم

تقدیم به

مقدس‌ترین واژه مادر لغت نامه دلم، مادر مهربانم که زندگیم را دیون مهر و عطوفت آن می‌دانم.  
برادران و خواهرانم، همایان، همیشگی و پشتوانه‌های زندگیم.  
به آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.

بشکر و قدردانی:

سپاس و ستایش خداوندی را سزااست که کسوت هستی را بر اندام موزون آفرینش پوشانید و تجلیات قدرت لایزال را در مظاهر و آثار طبیعت نمایان گردانید. بارالها! من بایاد تو، به تو تقرب می جویم و تو را به پیشگاه توشیح میآورم و از تو خواستارم، به کرمات، مراتب خودت نزدیک گردانی و یاد خود را به من الهام کنی و بر من رحمت آوری و به آنچه بهره و نصیب من ساخته ای، خشنودم قرار دهی و در همه حال به فروتنی ام واداری.

بابتشکرفراوان از استاد و کرامتدارم آقای دکتر مومنی، که در تمام مراحل کرد آوری این پایان نامه از راهنمایی ایشان

بهره بردم.

سپاسگذار کسانی هستم که سر آغاز تولد من هستند. از یکی زاده می‌شوم و از دیگری جاودانه. والدینی که بودندشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند و دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند.

# تعهد نامه

اینجانب فاطمه زمندی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش اتمی مولکولی-پلاسما دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه مطالعه ناپایداری های رله-تیلور در پلاسماهای مغناطیده کوانتومی در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی تحت راهنمایی دکتر مهدی مومنی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

## تاریخ

### امضای دانشجو

#### مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

\* متن این صفحه نیز باید در ابتدای نسخه های تکثیر شده پایان نامه وجود داشته باشد.

## چکیده

ناپایداری یکی از جالب ترین و مهم ترین پدیده های موجود در فیزیک می باشد. ناپایداری وقتی پدید می آید که انرژی آزاد زیادی در سیستم انباشته شده است و سیستم سعی بر رهائی از آن دارد. در فیزیک پلاسما دلایل فراوانی برای تحریک ناپایداری وجود دارد. ناهمگنی ممکن است هم در فضای واقعی وهم در فضای سرعت وجود داشته باشد. این ناهمگنی ها در ابتدا منجر به تولید ناپایداری و سپس فرایند روبه رشد آن، برای چنین انحرافات از تعادل گرمایی در پلاسما می شود. ناپایداری ها انواع میکروسکوپی و ماکروسکوپی را در بر می گیرند، که در آن ناپایداری ریلی تیلور از نوع ناپایداریهای ماکروسکوپی می باشد.

در این پایان نامه یک مفهوم کلی از ناپایداری را ارائه داده و در ادامه مفصلا به ناپایداری ریلی تیلور اشاره می کنیم. همچنین پس از معرفی یکی از مدل های توصیف پلاسما با عنوان مدل سیالی، معادلات  $MHD$  را بیان کرده ایم. یک پلاسمای مغناطیسهی کوانتومی در یک محیط متخلخل را یکبار درغیاب و سپس در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی مطالعه کرده ایم.

## کلمات کلیدی:

پلاسمای کوانتومی، مگنتوهیدرودینامیک، معادلات  $MHD$ ، محیط متخلخل، ناپایداری ریلی تیلور، نفوذ پذیری محیط.

مقاله مستخرج از پایان نامه

۱- " ناپایداری ریلی تیلور در حضور اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی ". کنفرانس

فوتونیک ایران. بهمن ماه ۱۳۹۵. تهران- ایران.



|                                       |    |
|---------------------------------------|----|
| فصل اول.....                          | ۱  |
| مقدمه.....                            | ۲  |
| ۱-۱ کلیات.....                        | ۲  |
| ۱-۱-۱ تعریف پلاسما.....               | ۲  |
| ۱-۲ تاریخچه.....                      | ۴  |
| ۱-۳ اصول کلی پلاسما.....              | ۵  |
| ۱-۳-۱ معیارهای پلاسما.....            | ۵  |
| ۱-۳-۱-۱ حفاظ و طول دبای.....          | ۵  |
| ۱-۳-۱-۲ پارامترهای پلاسما.....        | ۷  |
| ۱-۴ انواع پلاسما.....                 | ۸  |
| ۱-۴-۱ پلاسما های کلاسیکی.....         | ۸  |
| ۱-۴-۲ پلاسمای کوانتومی.....           | ۹  |
| ۱-۵ محدوده‌ی حضور اثرات کوانتومی..... | ۱۰ |
| ۱-۵-۱ طول موج دوبروی.....             | ۱۰ |
| ۱-۶ پارامتر جفت شدگی.....             | ۱۲ |
| ۱-۷ ضرورت و اهداف پایان نامه.....     | ۱۳ |
| ۱-۸ ساختار پایان نامه.....            | ۱۳ |

## فصل دوم: ناپایداری ..... ۱۵

|                |    |
|----------------|----|
| ۱-۲ مقدمه..... | ۱۶ |
|----------------|----|

|    |                                                                   |
|----|-------------------------------------------------------------------|
| ۱۶ | ۲-۲ مفهوم ناپایداری.....                                          |
| ۱۸ | ۳-۲ ناپایداری های خطی.....                                        |
| ۱۹ | ۱-۳-۲ نرخ رشد.....                                                |
| ۲۰ | ۴-۲ ناپایداری ضعیف .....                                          |
| ۲۱ | ۵-۲ حالت های جریان الکترونی .....                                 |
| ۲۲ | ۱-۵-۲ رابطه ی پاشندگی باریکه ی پلاسما.....                        |
| ۲۵ | ۲-۵-۲ ناپایداری دوجریانی.....                                     |
| ۲۸ | ۳-۵-۲ ناپایداری بونمان.....                                       |
| ۲۹ | ۱-۳-۵-۲ نرخ رشد و فرکانس .....                                    |
| ۳۲ | ۲-۲-۵-۲ مکانیزم (طرز کار).....                                    |
| ۳۵ | ۳-۲-۵-۲ فرونشستن (افت).....                                       |
| ۳۸ | ۵-۲ ناپایداری های ماکروسکوپیکی .....                              |
| ۳۹ | ۱-۵-۲ ناپایداری ریلی تیلور.....                                   |
| ۳۹ | ۲-۵-۲ مکانیزم (طرز کار).....                                      |
| ۴۲ | ۳-۵-۲ روابط پاشندگی.....                                          |
| ۴۳ | ۴-۵-۲ نرخ رشد و فرکانس.....                                       |
| ۴۷ | فصل سوم: معرفی مدل سیالی پلاسما و معادلات مگنتو هیدرودینامیک..... |
| ۴۸ | ۱-۳ مقدمه.....                                                    |
| ۴۸ | ۲-۳ مدل های توصیف پلاسما .....                                    |
| ۴۹ | ۱-۲-۳ بررسی مدل سیالی در پلاسما .....                             |

|         |                                                                  |
|---------|------------------------------------------------------------------|
| ۵۰..... | ۳-۲-۱-۱ معادله‌ی حرکت سیال                                       |
| ۵۲..... | ۳-۲-۱-۲ معادله‌ی پیوستگی                                         |
| ۵۲..... | ۳-۳ رابطه فیزیک پلاسما و الکترو مغناطیس                          |
| ۵۲..... | ۳-۳-۱ معادلات ماکسول                                             |
| ۵۳..... | ۴-۳ مگنتو هیدرودینامیک                                           |
| ۵۴..... | ۳-۴-۱ معادلات مگنتو هیدرودینامیک                                 |
| ۵۵..... | ۳-۵ ناپایداری مگنتو هیدرودینا میکی                               |
| ۵۶..... | ۳-۶ معادلات مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی                           |
| ۵۶..... | ۳-۷ سیال مگنتوهیدرودینامیک در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی       |
| ۵۷..... | فصل چهارم: ناپایداری ریلی تیلور در غیاب و حضور میدان مغناطیسی    |
| ۵۸..... | ۴-۱ مقدمه                                                        |
| ۵۸..... | ۴-۲ بررسی پلاسمای مغناطیده‌ی کوانتومی                            |
| ۶۰..... | ۴-۲-۱ معادلات حاکم و آشفتگی های خطی                              |
| ۶۴..... | ۴-۲-۲ رابطه‌ی پاشندگی و نرخ رشد                                  |
| ۶۷..... | ۴-۳ موارد خاص                                                    |
| ۶۸..... | ۴-۴ بحث                                                          |
| ۷۴..... | ۴-۵ بررسی پلاسمای مغناطیده کوانتومی در حضور میدان مغناطیسی خارجی |
| ۷۵..... | ۴-۶ مدل ریاضی                                                    |
| ۷۶..... | ۴-۷ خطی سازی معادلات                                             |
| ۷۹..... | ۴-۸ رابطه پاشندگی پلاسمای لایه ای در حضور میدان خارجی            |

|                                                                |    |
|----------------------------------------------------------------|----|
| ۹-۴ بحث                                                        | ۸۰ |
| ۹-۴-۱ ترکیب اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی در محیط متخلخل     | ۸۰ |
| ۹-۴-۲ در حضور میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی و در محیط متخلخل | ۸۱ |
| ۹-۴-۳ در غیاب میدان مغناطیسی، اثرات کوانتومی و تخلخل           | ۸۲ |
| ۹-۴-۴ در غیاب میدان مغناطیسی و در محیط نا متخلخل               | ۸۳ |
| ۹-۴-۵ اگر محیط متخلخل نباشد                                    | ۸۳ |
| ۹-۴-۶ در غیاب میدان مغناطیسی                                   | ۸۴ |
| ۵-۴ اختلال در طول جهت $k_x$                                    | ۸۶ |
| ۶-۴ اختلال در امتداد جهت $k_y$                                 | ۸۷ |
| فصل پنجم: نتیجه گیری و پیشنهادات                               | ۹۱ |
| ۵-۱ مقدمه                                                      | ۹۲ |
| ۵-۲ نتیجه گیری                                                 | ۹۳ |
| ۵-۳ یک بیان خلاصه از نتایج                                     | ۹۵ |
| ۵-۴ پیشنهادات                                                  | ۹۶ |
| منابع                                                          | ۹۷ |
| پیوست ها                                                       | ۹۹ |

## فهرست شکل ها

صفحه

شکل ۱-۱. حفاظ دبای ----- ۶

شکل ۲-۱. محدوده‌ی تقسیم بندی پلاسماهای کوانتومی و کلاسیکی ----- ۱۱

شکل ۳-۱. فلوچارت پایان نامه ----- ۱۳

شکل ۲-۱. پیکربندی های مختلف عدم تعادل منجر به ناپایداری ----- ۱۷

شکل ۲-۲. جفت شدگی مدلانگمیر و مد باریکه در ناپایداری دو جریانی ----- ۲۶

شکل ۳-۲. جواب های رابطه‌ی پاشندگی برای ناپایداری دو جریانی ----- ۲۶

شکل ۴-۲. توزیع سرعت اختلال برای ناپایداری بونمان ----- ۲۸

شکل ۵-۲. جواب های رابطه‌ی پاشندگی برای ناپایداری بونمان ----- ۳۳

شکل ۶-۲. نرخ رشد و فرکانس ناپایداری بونمان ----- ۳۴

شکل ۷-۲. پیکربندی ناپایداری ریلی تیلور در پلاسما ----- ۴۱

شکل ۱-۴. مربع نرخ رشد برحسب مربع عدد موج بصورت بی بعد شده برای مقادیر متفاوتی

از  $(\omega_q^* = 0, 0.5, 0.6, 0.7)$  ----- ۶۹

شکل ۲-۴. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  برحسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای مقادیر متفاوتی

از  $\omega_\varepsilon^* = 0.1, 0.5$  ----- ۷۰

شکل ۳-۴. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  برحسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای مقادیر متفاوتی

از  $\omega_{k_1}^* = 5, 15, 1 \times 10^9$  ----- ۷۲

شکل ۴-۴. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  برحسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای پارامتر هایی با

مقادیر  $g^* = 1, h^* = 0, n = 0, \omega_\varepsilon^* = 0, \omega_{v_0}^* = 1, \omega_q^* = 0.5, \omega_{k_1}^* = 1$  ----- ۷۳

شکل ۵-۴. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  برحسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای پارامتر های با

مقادیر  $g^* = 1, h^* = 0, \omega_\varepsilon^* = 0.5, \omega_q^* = 0.5, \omega_{v_0}^* = 1, \omega_{k_1}^* = 5, 15, 1 \times 10^9$  ----- ۷۴

شکل ۴-۶. نرخ رشد برحسب عدد موج بصورت بی بعد شده  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10, k_1 = 0.1$

۸۱-----,  $\varepsilon = 0.1, v^* = 0.5, V_A^* = 0.2, \theta = 45^0, \omega_q^* = 0.1, 0.2, 0.3$

شکل ۴-۷. نرخ رشد برحسب عدد موج بصورت بی بعد شده  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10, k_1 = 0.1$

۸۲-----  $\varepsilon = 0.1, v^* = 0.5, V_A^* = 0, 0/1, 0.2, 0/3, \theta = 45^0, \omega_q^* = 0.4$

شکل ۴-۸. نرخ رشد برحسب عدد موج بصورت بی بعد شده  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10, \omega_q^* = 0.4$

۸۵-----  $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3, k_1 = 0.1, v^* = 0.5, V_A^* = 0.2, \theta = 45^0$

شکل ۴-۹. نرخ رشد برحسب عدد موج بصورت بی بعد شده  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10, \omega_q^* = 0.4$

۸۶-----  $k_1 = 0.1, 0.2, 0.3, \varepsilon = 0.1, v^* = 0.5, V_A^* = 0.2, \theta = 45^0$

# فصل اول:

معرفی پلاسما

## فصل ۱: معرفی پلاسما

### ۱-۱ مقدمه

همانطور که می‌دانیم ماده در طبیعت به سه حالت جامد، مایع و گاز وجود دارد. اخیراً دانشمندان حالت چهارمی برای ماده کشف کرده‌اند و آن را با توجه به مشخصات فیزیکی‌اش پلاسما<sup>۱</sup> نام گذاری کرده‌اند. اغلب گفته می‌شود که ۹۹٪ ماده موجود در طبیعت در حالت پلاسما است، یعنی به شکل گاز الکتریسیته داری که اتم‌هایش به یون‌های مثبت و الکترون‌های منفی تجزیه شده باشند. گفته می‌شود که درون ستارگان و جو آن‌ها، ابرهای گازی و اغلب هیدروژن فضای بین ستارگان به صورت پلاسما هستند. در زندگی روزمره نیز با چند نمونه از پلاسماها مواجه هستیم از جمله آن‌ها می‌توان به جرقه رعد و برق، تابش ملایم شفق قطبی، گاز هادی داخل یک لامپ فلئورسان یا چراغ نئون و... اشاره کرد [1].

### ۱-۲ کلیات

#### ۱-۲-۱ تعریف پلاسما

پلاسما گاز شبه خنثایی<sup>۲</sup> از ذرات بار دار و خنثی است که از خود رفتار جمعی<sup>۳</sup> نشان می‌دهد. در تعریف شبه خنثائیت می‌توان گفت، پلاسما به لحاظ الکتریکی خنثی است یعنی  $n_i \cong n_e \approx n$ ، ولی آنقدر خنثی نیست که بتوان همه نیروهای الکترومغناطیسی قابل توجه موجود در آن، را صفر در نظر گرفت.  $n$  چگالی مشترک است که چگالی پلاسما خوانده می‌شود.

---

<sup>1</sup> -Plasma

<sup>2</sup> -Quasineutral

<sup>3</sup> -Collective behavior



برای توصیف رفتار جمعی نیروهای وارد بر یک مولکول، مثلاً مولکول های هوا را در نظر بگیرید. چون مولکول خنثی است، هیچ نیروی الکترومغناطیسی خالصی بر آن وارد نمی شود و نیروی ثقل قابل صرف نظر کردن است. این مولکول بدون مزاحمت حرکت می کند تا به مولکول دیگری برخورد کند، همین برخورد ها هستند که حرکت ذره ها را کنترل می کنند. نیروهای ماکروسکوپی که به یک گاز خنثی اعمال می شوند توسط برخوردها به اتمهای انفرادی منتقل می شوند. در پلاسما که مشتمل بر ذرات باردار است وضعیت کاملاً فرق می کند. این بارها با حرکت خود می توانند توده های متمرکزی از بارهای مثبت یا منفی را به طور موضعی به وجود آورند و بدین ترتیب موجب پیدایش میدانهای الکتریکی شوند. با حرکت بارها، جریان و در نتیجه میدان مغناطیسی هم تولید می شود. این میدانها بر حرکت سایر ذرات باردار که دورتر واقع شده اند اثر می گذارند. بنابراین اجزاء پلاسما حتی در فواصل دور نیرویی بر همدیگر وارد می کنند. در پلاسماهای به اصطلاح بی برخورد<sup>4</sup> نیروهای الکترومغناطیسی آن قدر از نیروهای ناشی از برخوردهای موضعی عادی بزرگترند که می توان از این نیروهای برخوردی چشم پوشی کرد.

به طور کلی منظور از رفتار جمعی حرکاتی است که نه تنها به شرایط موضعی، بلکه به حالت پلاسما در مناطق دور نیز بستگی دارند. پلاسما به علت رفتار جمعی که از خود نشان می دهد تمایلی به متاثر شدن در اثر عوامل خارجی ندارد، و اغلب طوری عمل می کند که گویا دارای رفتار مخصوص به خودش است. در تعریف ملموس تر می توان گفت پلاسما به حالتی از ماده یا بهتر است بگوییم به گازی اطلاق می شود که کسر بسیار مهمی از اتم های آن یونیزه<sup>5</sup> شده باشند. پدیده ی یونیزه شدن در دماهای بسیار بالا اتفاق می افتد. زیرا در این حالت انرژی الکترون های آزاد با ثابت بولتزمن<sup>6</sup> به دمای آن ها وابسته است. در این دما الکترون های آزاد انرژی کافی دارند تا طی برخوردهایی که با اتم ها دارند، بتوانند الکترون های دیگری را از

---

<sup>4</sup> -Collisionless

<sup>5</sup> - ionization

<sup>6</sup> -Boltzmann constant

قید هسته آزاد کنند. انرژی لازم برای جدا کردن الکترون از قید هسته، که انرژی یونش نامیده می‌شود، در فرایند برخورد با الکترون آزاد تامین شده و الکترون های آزاد دیگری تولید می‌شوند که خود موجب ادامه‌ی یونش می‌شوند و گاز به حالت پلاسما در می‌آید. طبق رابطه‌ی ساها<sup>۷</sup> هر گاه نسبت تعداد اتم های یونیزه در یک گاز به اتم های خنثی تقریباً برابر مقدار زیر باشد، می‌توان آن را پلاسما در نظر گرفت.

$$\frac{n_i}{n_n} = 2.4 \times 10^{21} \frac{T^{\frac{3}{2}}}{n_i} e^{-U_i/KT} \quad (۱-۱)$$

که در آن  $n_i$  و  $n_n$  به ترتیب تعداد اتم های یونیزه و خنثی هستند،  $T$  دمای پلاسما،  $K$  ثابت بولتزمن و  $U_i$  انرژی یونش گاز می‌باشد [1].

## ۲-۱ تاریخچه

مطالعه‌ی پلاسما از اواخر قرن بیستم شروع شد زمانی که دانشمندان متوجه اهمیت تخلیه های الکتریکی شدند. بعد از جنگ جهانی دوم پلاسما بخاطر اهمیتی که در همجواری هسته‌ای و بمب های هیدروژنی پیدا کرد، رشد و توسعه‌ی آن شدت گرفت. هم زمان با این مساله پیشرفت هایی هم در پدیده‌های پلاسمایی که در اختر فیزیک و فیزیک زمین مشاهده شد، انجام گرفت.

در سال ۱۸۷۹ یک فیزیکدان انگلیسی بنام ویلیام کروکس به هنگام بررسی ویژگی ماده در تخلیه‌ی الکتریکی پیشنهاد کرد که نوع خاص گاز به عنوان حالت چهارم ماده نام گذاری شود.

---

<sup>7</sup> -Saha

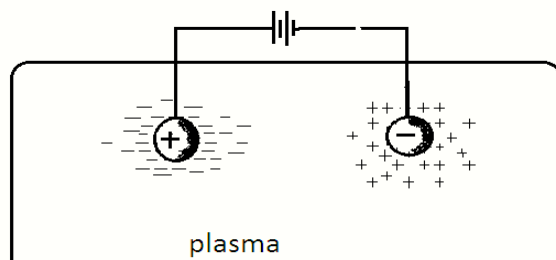
## ۳-۱ اصول کلی پلاسما

### ۱-۳-۱ معیار های پلاسما

برای اینکه یک گاز نظیر پلاسما عمل کند مستلزم وجود شرایطی است که در اینجا به آن ها می پردازیم. قبل از هر چیز حفاظ دبای را تعریف می کنیم.

### ۱-۳-۱-۱ حفاظ و طول دبای

یکی از مشخصات اساسی رفتار پلاسما، توانایی آن برای ایجاد حفاظ در مقابل پتانسیل های الکتریکی است که به آن اعمال می شوند. در توضیح این مطلب دو گلوله باردار متصل به باتری را در نظر بگیرید که به داخل پلاسما وارد کرده ایم با این کار یک میدان الکتریکی در درون پلاسما بوجود می آید. هر کدام از گلوله ها ذرات با بار مخالف خود را جذب می کنند و تقریباً بلافاصله ابری از یون ها اطراف گلوله ی منفی و ابری از الکترون ها اطراف گلوله ی مثبت را احاطه می کند. اگر پلاسما سرد باشد و هیچگونه حرکت حرارتی وجود نداشته باشد، تعداد بار ابر برابر تعداد بار گلوله بوده و حفاظ کامل می شود و هیچگونه میدان الکتریکی در پلاسما در خارج از ناحیه ابرها وجود نخواهد داشت. از طرف دیگر، اگر دما معین و محدود باشد، ذراتی که در لبه ابر یعنی در جایی که میدان الکتریکی ضعیف است قرار دارند، انرژی کافی برای فرار از چاه پتانسیل الکتروستاتیکی پیدا می کنند. در این صورت لبه ابر در شعاعی واقع می شود که در آن انرژی پتانسیل تقریباً برابر انرژی حرارتی ذرات است و حفاظ کامل نیست. [1]



شکل ۱-۱. حفاظ دبای

اندازه ای از حفاظ یا ضخامت ابر را طول دبای<sup>۸</sup> می نامند، که با  $\lambda_D$  نشان داده می شود و با استفاده از فرمول زیر بدست می آید.

$$\lambda_D = \left( \frac{\epsilon_0 K T_e}{n e^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۲-۱)$$

$k$  ثابت بولتزمن می باشد. همانطور که از فرمول بالا می توان فهمید هر چقدر پلاسما چگال تر باشد  $\lambda_D$  کاهش می یابد. ملاک پلاسما بودن یک گاز یونیزه این است که چگالی اش آنقدر بزرگ باشد، که  $\lambda_D$  بسیار کوچکتر از  $L$  شود.

$$\lambda_D \ll L \quad (۳-۱)$$

که  $L$  در این معادله ابعاد دستگاه می باشد.

تصویر ارائه شده از حفاظ دبای فقط زمانی معتبر است که در ابر بار، ذرات به تعداد کافی وجود داشته باشند. اگر فقط یک یادو ذره در ناحیه غلاف وجود داشته باشد، حفاظ دبای از لحاظ

<sup>۸</sup> -Debye length

آماری، مفهوم معتبری نخواهد داشت. برای محاسبه تعداد ذرات در یک کره دبای از معادله زیر بهره می گیریم:

$$N_D = n \frac{4}{3} \pi \lambda^3 D \quad (۴-۱)$$

بدین ترتیب دومین ملاک برای پلاسما بودن یک گاز یونیزه که خاصیت رفتار جمعی آن ایجاب می کند، را بیان می کنیم [1]:

$$N_D \gg \gg 1 \quad (۵-۱)$$

سومین شرط برای اینکه یک گاز یونیزه پلاسما خوانده شود مربوط به برخوردهاست. اگر  $\omega$  فرکانس نوسانات نوعی پلاسما و  $\tau$  زمان متوسط بین برخوردهای انجام شده با اتمهای خنثی باشد، شرط لازم برای اینکه که یک گاز نظیر پلاسما عمل کند این است که.

$$\omega \tau > 1 \quad (۶-۱)$$

### ۲-۱-۳-۱ پارامترهای پلاسما

دما و چگالی از مهمترین پارامترهای پلاسما به شمار می روند. اغلب دما و چگالی بالا را به پلاسما نسبت می دهند. در پلاسما دو پارامتر دما و چگالی نسبت به هم سنجیده می شوند. گستره ی دمای پلاسماها در حدود  $10^2 k$  (مانند پدیده های رعدوبرق) تا  $10^8 k$  (فرآیند های همجوشی) و چگالی در حدود  $10^7 m^{-3}$  (پلاسما های آزمایشگاهی) تا  $10^{36} m^{-3}$  (هسته ی ستارگان) تعریف می شود. حتی انرژی ذرات تابعی از دما بوده و بر همین اساس بین ۰/۱ تا  $10^6 eV$  متغیر است [1].

## ۴-۱ انواع پلاسما

در واقع پلاسما ها را با توجه به همین دو پارامتر مهم چگالی و دما، و نیز خواص ماکروسکوپیکی و میکروسکوپیکی آنها به دو نوع دسته بندی می کنند.

### ۱-۴-۱ پلاسماهای کلاسیکی<sup>۹</sup>

پلاسما های با دمای بالا و چگالی کم در محدودی پلاسما های کلاسیکی قرار می گیرند. دلیل نامگذاری این پلاسما ها به این عنوان توزیع ذرات تشکیل دهنده این نوع از پلاسما ها است. این ذرات از توابع توزیع کلاسیکی، یعنی تابع توزیع ماکسول-بولتزمن<sup>۱۰</sup> پیروی می کنند. ملموس ترین مثال برای این نوع از پلاسما ها، یونیسفر<sup>۱۱</sup> زمین است که از ۱۵۰ کیلو متری سطح زمین شروع می شود و به طرف بالا ادامه می یابد. لایه های بالایی یونیسفر به شکل پلاسما هستند که توسط تابش امواج کوتاه برد در حوزه ی وسیعی، از طیف اشعه ی فرابنفش گرفته تا پرتوهای ایکس و نیز پرتو های کیهانی و الکترونی که به آن برخورد می کنند، یونیزه می شوند. بادهای خورشیدی، تخلیه الکتریکی و پلاسمای درون راکتورهای همجوشی هسته ای از انواع دیگر این نوع پلاسما ها هستند [1].

---

<sup>9</sup> - Classical plasma

<sup>10</sup> -Maxwell Boltzmann

<sup>11</sup> -Ionospheric

## ۱-۴-۲ پلاسما های کوانتومی

با توجه به توصیف دما و چگالی به عنوان دو پارامتر مهم برای دسته بندی پلاسماها، در اینجا نیز پلاسما های با دمای پایین و چگالی بالا در رده ی پلاسماهای کوانتومی قرار می گیرند. به بیان دیگر هنگامی که طبیعت کوانتومی ذرات اثر قابل توجهی بر روی خواص ماکروسکوپیکی یک پلاسما داشته باشند آن را کوانتومی گویند. در این نوع پلاسما ذرات سبکتر مانند الکترون-ها و پوزیترون-ها (ذراتی با جرم برابر با الکترون و بار مخالف آن)، در دماهای نسبتاً پایین و چگالی های بالا تبهگن می شوند. به عبارت دیگر هنگامی که یک پلاسما سرد می شود انرژی آن کاهش یافته و ذرات به سمت تبهگن شدن پیش می روند. در پلاسما بخاطر این که الکترون-ها و پوزیترون-ها زودتر از ذرات سنگین تر تبهگن می شوند. در این حالت تابع توزیع ذرات رفتار متفاوتی از خود نشان می دهد، به این معنی که تابع توزیع آن ها از تابع توزیع ماکسول-بولتزمن به تابع توزیع فرمی-دیراک<sup>۱۲</sup> که یک تابع توزیع برای ذرات کوانتومی است، تغییر می یابد. در واقع کاهش انرژی ذرات و نزدیک شدن آن به سمت انرژی فرمی باعث می شود ماهیت کوانتومی فرمیون-ها به میزان قابل توجهی، خواص ماکروسکوپی شان را تحت تاثیر قرار دهد. بنابراین اصطلاحاً می توانیم بگوییم که پلاسما کوانتومی شده، یا اثرات کوانتومی در آن محسوس شده است. در این حالت فیزیک حاکم بر پلاسما با نظریات کلاسیکی توجیه پذیر نبوده و باید از مفاهیم کوانتومی بهره بگیریم [1].

---

<sup>12</sup> -Fermi Dirac

## ۱-۵ محدودی حضور اثرات کوانتومی در پلاسما

رفتارهای کوانتومی در پلاسماهایی با دما و چگالی معمولی قابل نظر کردن هستند. اما با کاهش دما هنگامی که دمای پلاسما به سمت دمای فرمی نزدیک می‌شود این رفتارها پررنگ تر می‌گردند. انرژی فرمی برای یک سیستم فرمیونی با رابطه ی زیر داده می‌شود:

$$E_F = \frac{h^2}{3m_e k_B} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{2/3} \quad (۷-۱)$$

و بنابراین دمای فرمی با این فرمول داده می‌شود:

$$T_F = \frac{E_F}{k_B} = \frac{\hbar^2}{2m_e k_B} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{2/3} \quad (۸-۱)$$

نسبت دمای فرمی به دمای پلاسما را با  $\chi$  نمایش می‌دهند و پارامتر تبهگنی می‌نامند.

$$\chi = \frac{T_F}{T} = \frac{\hbar^2}{2m_e k_B T} (3\pi^2)^{2/3} n_e^{2/3} \quad (۹-۱)$$

هر گاه این پارامتر بزرگتر یا مساوی یک باشد  $\chi \geq 1$ ، تمام ذرات در سطح فرمی قرار دارند به عبارت دیگر کاملاً تبهگن شده اند، بنابراین پلاسما کوانتومی می‌شود.

دمای پلاسما یک کمیت بسیار متغیر است و اندازه گیری آن کار دشواری است. اما اگر در پلاسما چشمه و چاه، یعنی عوامل افزایشده یا کاهشدهی چگالی نداشته باشیم، چگالی ذرات ثابت است.

## ۱-۵-۱ طول موج دو بروی<sup>۱۳</sup>

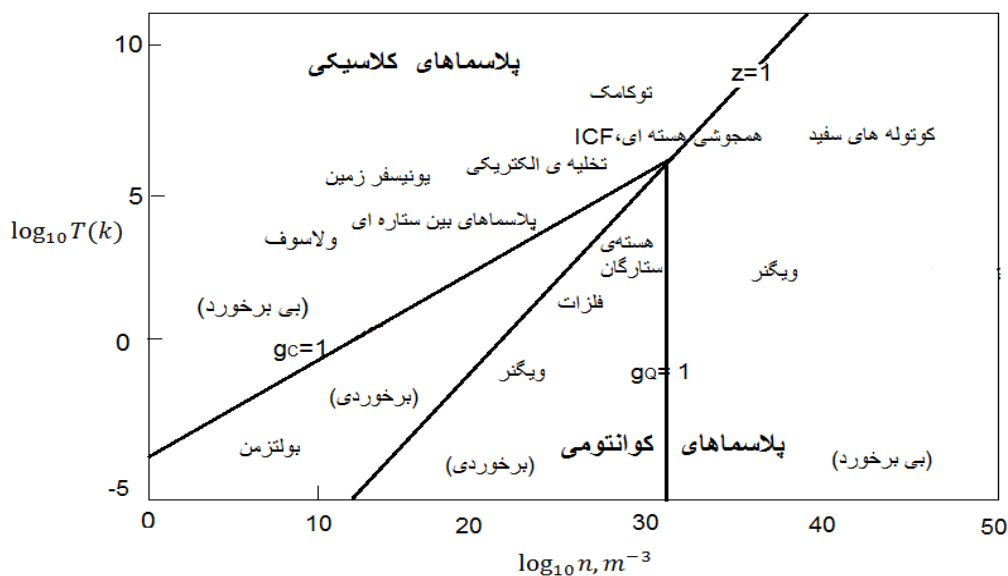
---

<sup>13</sup> -De Broglie



زمانی که چگالی خیلی زیاد باشد میانگین فاصله‌ی بین ذره‌ای با طول موج گرمایی دوبروی توصیف می‌شود. طول موج گرمایی دوبروی را بصورت  $\lambda_B = \frac{\hbar}{(2\pi m k_B T)^{1/2}}$  نمایش می‌دهند. این پارامتر در پلاسماهای کلاسیکی نقشی ندارد چرا که فاصله‌ی بین ذرات ( $n^{-1/3}$ ) در این پلاسمها از طول موج دوبروی بسیار کوچکتر است. بنابراین شرط اینکه پلاسما کوانتومی شود این است که  $\lambda_B \geq n^{-1/3}$ . به این ترتیب وبا توجه به این عبارت می‌توانیم بگوئیم که با افزایش چگالی در یک پلاسما اثرات کوانتومی در آن محسوس می‌شود. از این رو پلاسماهای کوانتومی را گاهی پلاسماهای چگال نیز می‌نامند.

به این ترتیب محدوده‌ی پلاسماهای کلاسیکی و کوانتومی به ازای مقادیر مختلف چگالی و دمای پلاسما از رسم لگاریتمی رابطه‌ی (۱-۹) به دست می‌آید. این مطلب در شکل (۱-۲) به نمایش درآمده است و همانطور که مشاهده می‌شود برای درک بهتر، پدیده‌های پلاسمایی با چگالی و دمای متفاوت نیز در آن گنجانیده شده است.



شکل ۱-۲. محدوده‌ی تقسیم بندی پلاسماهای کوانتومی و کلاسیکی ، برخوردی یا غیر برخوردی بودن و نیز چگالی و دما

## ۱-۶ پارامتر جفت شدگی<sup>۱۴</sup>

پدیده‌ی برخورد بین ذرات، بخاطر متحرک بودن ذرات پلاسما همواره در یک پلاسما وجود دارد. برخوردها در یک پلاسما از نوع کولنی هستند. این برخوردها بین ذرات همنام و یا غیر همنام صورت گیرند. این که چه هنگام اثر برخوردها در یک پلاسما مهم شده و بر روی رفتار سیستم تاثیر می‌گذارد، توسط پارامتر جفت شدگی تعیین می‌گردد. پارامتر جفت شدگی نسبت انرژی داخلی پلاسما  $E_{in}$  به متوسط انرژی جنبشی ذرات تشکیل دهنده‌ی آن  $E_k$  می‌باشد و آن را با  $\Gamma$  نشان می‌دهند. انرژی داخلی برای تمام پلاسماها بصورت زیر با چگالی شان رابطه دارد.

$$E_{int} = e^2 n_e^{1/3} \quad (۱۱-۱)$$

در این صورت پارامتر جفت شدگی برای پلاسماهای کلاسیکی بصورت زیر خواهد بود.

$$\Gamma_c = \frac{E_{int}}{E_k} = \frac{e^2 n_e^{1/3}}{k_B T} \quad (۱۲-۱)$$

اگر این پارامتر در یک پلاسما کلاسیکی بزرگتر از یک شود یعنی انرژی داخلی از انرژی جنبشی بزرگتر باشد، برخوردها مهم می‌شوند در غیر این صورت از برخوردها صرف نظر می‌کنیم. محدوده‌ی این برخوردها در شکل (۱-۲) نمایش داده شده است. برای یک پلاسما کاملاً تبیهگن تمام ذرات در سطح فرمی بوده و دارای انرژی فرمی هستند. پارامتر جفت شدگی برای این پلاسماهای کوانتومی با رابطه‌ی زیر داده می‌شود.

---

<sup>14</sup> - Coupling Parameter

$$\Gamma_Q = \frac{E_{int}}{E_f} = \frac{2}{(3\pi^2)^{2/3}} \frac{m_e e^2}{\hbar^2 n_e^{1/3}} \sim \left( \frac{\hbar \omega_p}{2k_B T_f} \right)^2 \quad (13-1)$$

این پارامتر نیز مشابه کلاسیک خود عمل می‌کند. یعنی هر گاه پارامتر جفت شدگی برای یک پلاسمای کوانتومی بزرگتر از یک شود، نقش برخوردها<sup>۱۵</sup> برجسته تر شده و باید در معادلات توصیف پلاسماهای کوانتومی در نظر گرفته شود.

## ۷-۱ ضرورت و اهداف پایان نامه

برای پایدار تر کردن پلاسما هایی که در آزمایشگاه ها پدید می‌آیند لازم است که یک شناخت کلی از این ماده بدست آوریم. مثلاً یکی از راه های شناخت این حالت از ماده این است که بدانیم چه نوع ناپایداری هایی ممکن است درون آن وجود داشته باشد و چه پارامترهایی این ناپایداری های درون پلاسما را افزایش یا کاهش می‌دهند. طبیعتاً بعد از اینکه پی بردیم چه پارامتری باعث کاهش ناپایداری درون پلاسما می‌شود، می‌توانیم راه هایی برای ایجاد شرایطی برای قوی تر کردن و یا افزایش آن پارامتر یافته و به پایداری هرچه بیشتر پلاسما کمک کنیم. هدف از این پایان نامه اینست که اثر پارامترهای مختلف فیزیکی را روی نرخ رشد یکی از انواع ناپایداری های موجود در پلاسما بنام ناپایداری ریلی تیلور مطالعه کرده و بفهمیم چگونه می‌توان نرخ رشد این ناپایداری را کاهش داده و پلاسما را پایدار تر کرد.

## ۸-۱ ساختار پایان نامه

این پایان نامه مشتمل بر پنج فصل می‌باشد. در فصل اول پس از مقدمه و تعریف پلاسما به توصیف انواع پلاسما و ویژگی های آن پرداخته ایم در فصل دوم با مروری بر مفهوم کلی ناپایداری و انواع آن، بطور

---

<sup>15</sup> -Collisions

اخص ناپایداری ریلی تیلور را توصیف کرده ایم و سپس در فصل سوم به تعریف کلی مدل سیالی از مدل‌های توصیف پلاسما پرداخته و نیز معادلات مگنتو هیدرودینامیک را معرفی کرده ایم. بعد از آن و در فصل چهارم به بررسی رابطه‌ی پاشندگی و نرخ رشد معادلات سیالی برای یک پلاسمای لایه‌ای، مغناطیده‌ی کوانتومی در نبود وسپس در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی می‌پردازیم و همچنین اثر چند پارامتر فیزیکی از جمله نفوذپذیری، تخلخل، میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی در پایداری یا ناپایداری پلاسما در محیط متخلخل را برای ناپایداری ریلی تیلور مطالعه کرده و نتایج را بررسی می‌کنیم. سپس در فصل پنجم یک نتیجه‌گیری موردی از اثر این پارامترها در نرخ رشد ناپایداری ریلی تیلور و در نهایت پایداری پلاسما را آورده ایم.



شکل ۱-۳. فلوچارت ساختار پایان نامه

# فصل دوم:

مفهوم نماینداری و

نماینداری ریپی تیلور

## فصل دوم: مفهوم ناپایداری و ناپایداری ریلی تیلور

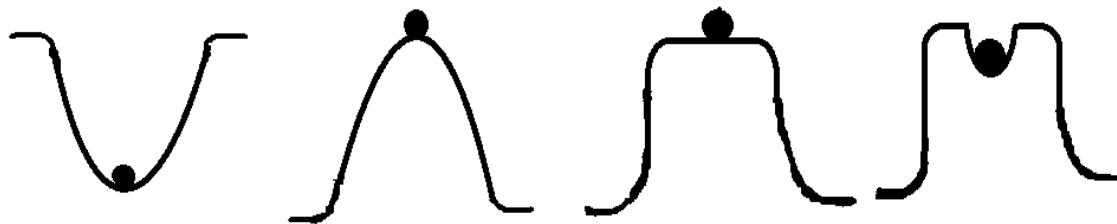
### ۱-۲ مقدمه

در این فصل با مفهوم ناپایداری و انواع آن آشنا شده و سپس به بررسی چند نمونه از ناپایداری های موجود در پلاسما و به طور اخص به بررسی ناپایداری ریلی تیلور می پردازیم.

### ۲-۲ مفهوم ناپایداری

برای تعریف ناپایداری ابتدا اشاره‌ی مختصری به تعادل و انواع آن داریم. در واقع تعادل حالتی است، که در آن تمامی نیروها در حالت موازنه باشند. تعادل را بسته به اینکه یک اختلال کوچک در آن مستهلک یا تقویت گردد، پایدار یا ناپایدار می نامند. تولید ناپایداری، روشی عمومی از پخش مجدد انرژی انباشته شده در یک حالت نامتعادل می باشد. شکل (۱-۲)، یک نظیر مکانیکی ساده از یک جسم کروی، که در یک میدان پتانسیلی خارجی واقع شده است، را نشان می دهد. این جسم در موقعیت های متفاوتی که می توانند پایدار یا ناپایدار باشند، یافت می شود. اولین مورد از این موقعیت ها، حالت تعادل است که در آن جسم کروی در پایین ترین نقطه از یک فرورفتگی پتانسیلی بی نهایت بزرگ قرار گرفته است. در این وضعیت جسم کروی فقط می تواند نوسان هایی اطراف موقعیت تعادلی خودش اجرا کند، اصطکاک منجر به میرایی خواهد شد تا اینکه جسم در قعر فرو رفتگی پتانسیلی جایگزیده می شود (ته نشین می شود). در موقعیت معکوس جسم در بالای تپه‌ی پتانسیلی قرار دارد، کمترین اعوجاج خطی از آن موقعیت به جسم اجازه غلتیدن به پایین تپه را خواهد داد. این یک مورد ناپایدار است، یک ناپایداری خطی که خودبه خود تنظیم می شود.

حالت شبه پایدار، حالتی است که در آن جسم کروی بالای تپه‌ای به شکل مسطح قرار دارد و می‌تواند به اطراف منحرف شود تا وقتی که به قسمت انتهایی قله رسیده و به پایین بغلتد. در مثال اخیر ناپایداری غیر خطی، جسم کروی در مقابل اختلالات دامنه-کوچک پایدار است، اما برای دامنه‌های بزرگتر ناپایدار می‌شود.



شکل ۱-۲. پیکربندی‌های مختلف عدم تعادل منجر به ناپایداری

در فیزیک پلاسما فرو رفتگی پتانسیلی و چشمه‌ها بوسیله منابعی از انرژی آزاد جایگزین شده‌اند، و جسم کروی سنگین مشابه با یک حالت موج واقعی بوده، و حتی در اغلب موارد یک ویژه حالت از پلاسما است. گروهی از منابع انرژی آزاد در محیط زمین وجود دارند، یونیسفر و مگنتوسفر<sup>۱۶</sup> هیچکدام سیستم‌های بسته در تعادل گرمایی نیستند، انرژی، تکانه و جرم از بیرون به داخل این سیستم‌ها رانده می‌شوند. بادهای خورشیدی را نمونه‌ای از این مورد می‌توان نام برد. در مقیاس میکروسکوپی این ورودی، گرادیان‌ها و ناهمگنی‌هایی از پلاسما را تولید می‌کند که منجر به تغییر شکل و اعوجاج توابع توزیع جایگزیده می‌شود. منابع انرژی آزاد پیشین موجبات ماکرو ناپایداری‌های بزرگ مقیاس را فراهم می‌کند [3].

<sup>16</sup> -Magnetosphere

## ۳-۲ ناپایداری های خطی

مفهوم ناپایداری از توجه جدی به تابع موج<sup>۱۷</sup> ناشی می شود، در تئوری امواج خطی، دامنه امواج، بسیار کوچکتر از بردار حالت ایستا است، تا جاییکه می توان یک اختلال کوچک موج را بررسی کرد. برای مثال، اگر موج یک اختلال کوچک  $\delta n$  از چگالی  $n$  داشته و  $n_0 \ll \delta n(x, t)$  باشد، درحالیکه که  $n_0$  میتواند تابعی از مکان و زمان باشد، فرض شده است که تغییرات بسیار کندتر از آنچه دراختلال صورت می گیرد، باشد. برای مثال، تابع موج می تواند توسط یک برهم نهی از نوسان های امواج تخت در فرکانس  $\omega(k)$  نشان داده شود که  $\omega$  جواب رابطه ی پاشندگی خطی  $D(\omega, k) = 0$  می باشد. هر یک از اجزای میدان موج  $\delta A(x, t)$  را می توان به صورت زیر تبدیل فوریه زد:

$$\delta A = \sum_k A_k \exp(ik \cdot x - i\omega t) \quad (۱-۲)$$

بطور عمومی رابطه ی پاشندگی یک معادله ی مختلط است و تعدادی راه حل فرکانسی دارد که آنها نیز مختلط هستند  $\omega = \omega_r + i\gamma$ . از معادله ی (۱-۲) واضح است که، برای قسمت حقیقی  $\omega$  اختلالات امواج، نوسانی هستند (بصورت سینوسی یا کسینوسی). ازسویی دیگر، برای جواب های مختلط، رفتار دامنه ی موج به شدت به بخش موهومی فرکانس  $\gamma(\omega_r, k)$  بستگی دارد. بطوریکه، اگر  $\gamma < 0$ ، بخش حقیقی دامنه یک کاهش نمایی که تابعی از زمان است را تجربه کرده، و موج میرا می شود. به طور متفاوت، برای  $\gamma > 0$  دامنه ی موج بصورت نمایی با زمان رشد می کند، و ما با یک ناپایداری خطی روبرو می شویم. در این مورد میزان کاهش  $\gamma$ ، نرخ رشد متناظر با ویژه حالت (حالت خاص) نامیده می شود. توجه داشته باشید که، ناپایداری تنها زمانی می تواند رخ دهد، که منابع انرژی آزادی در پلاسما وجود داشته باشند که رشد امواج را

---

<sup>17</sup>-Wave Function



تشدید(فراهم) کنند. اگر این مورد اتفاق نیفتد، پس یک جواب با  $\gamma$  مثبت یک جواب ساختگی است که پایستگی انرژی و علیت را نقض می‌کند. به عبارت دیگر، اگر منابع انرژی آزادی در پلاسما وجود نداشته باشد، در نظر گرفتن یک جواب با  $\gamma$  مثبت، با توجه به آنچه در بالا ذکر شد که موجب رشد دامنه‌ی موج، و بروز ناپایداری می‌شود نقض قانون پایستگی و علیت است.

## ۲-۳-۱ نرخ رشد

دامنه‌ی یک موج ناپایدار بصورت زیر افزایش می‌یابد

$$A_k(t) = A_k \exp[\gamma(\omega_r, k)t] \quad (2-2)$$

بنابراین، زمانی که دامنه با مقدار زمینه‌ی میدان قابل مقایسه باشد، تقریب خطی را می‌شکند. این مطلب به این معنی است که  $A_k(t)/A_0 \approx 1$  وقتی تقریب خطی نقض شود، فرآیند-های دیگری رخ می‌دهند. به این خاطر که این فرآیندها شامل برهم کنش امواج با یکدیگر و با زمینه‌ی پلاسما می‌باشند، و نمی‌توانند شبیه روش خطی رفتار کنند، غیر خطی نامیده می‌شوند.

هنگامی که نرخ رشد موج بزرگتر از فرکانس آن شود،  $\gamma > \omega$ ، دامنه‌ی موج فراگسترده تر می‌شود و موج هیچ فرصتی برای اجرای حتی یک نوسان طی یک دوره تناوب را پیدا نمی‌کند. مفهوم موج در این مورد از بین می‌رود(منسوخ می‌شود). این عبارت به این معنی است که دامنه‌ی موج آنچنان بزرگ می‌شود که موج در زمان مذکور فرصت اجرای حتی یک نوسان طی یک دوره را پیدا نمی‌کند. و منطقی است که در وهله‌ی اول تنها ناپایداریهایی به نسبت با نرخ رشد کوچک، که شرایط خطی بودن طی بسیاری از دوره های تناوب موج برآورده می‌کند، را در نظر بگیریم. بدین منظور داریم:

$$\gamma/\omega \ll 1$$

(۳-۲)

این بیان مانع از وجود ناپایداریهای با نرخ رشد بزرگتر از فرکانس موج، نمی‌شود. در واقع، یکی از اولین مثالها برای ناپایداری با این مورد بالا در ارتباط خواهد بود. از این پس از ناپایداری روبه رشد یا غیر نوسانی با فرکانس واقعی ( $\omega_r$ ) نزدیک صفر صحبت می‌کنیم. چنین ناپایداری‌هایی تنها در محدوده‌ی مدل پلاسماهای مگنتوهیدرودینامیک با پایین ترین فرکانس ها ظاهر می‌شوند [3].

## ۴-۲ ناپایداری ضعیف

ناپایداریها می‌توانند ضعیف یا قوی باشند. ناپایداری های قوی نرخ رشدی دارند که شرایط (۲)-۳ را نقض می‌کند، بنابر این در بسیاری از موارد با ناپایداریهای غیر نوسانی منطبق اند. برای ناپایداریهای روبه رشد ضعیف نرخ رشد، معادله‌ی (۳-۲) را برآورده می‌کند.

رابطه‌ی پاشندگی  $D(\omega, k) = 0$ ، یک رابطه‌ی مطلق (بی شرط) بین فرکانس و عدد موج است. عدد موج داده شده، ممکن است فرکانس را تعیین کند. بطور معمول،  $D(\omega, k)$  یک تابع مختلط بصورت زیر می‌باشد.

$$D(\omega, k) = D_r(\omega, k) + iD_i(\omega, k) \quad (۴-۲)$$

بنابراین، این تابع دو معادله مهیا کرده که می‌توان برای هریک از معادلات فرکانس  $\omega$ ، را مستقل از  $k$  یا وابسته به آن تعیین کرد و یا برعکس. راحت تر است که فرض کنیم  $k$  حقیقی است. پس فرکانس موهومی بوده و داریم:

$$\omega(k) = \omega_r(k) + i\gamma(\omega_r, k) \quad (۵-۲)$$

جهت برآورده شدن معادله (۳-۲) این بیان را می‌توان با بسط دادن  $D(\omega, k)$  حول بخش حقیقی فرکانس  $\omega_r$ ، تا مرتبه‌ی اول، ساده تر کرد. داریم:

$$D(\omega, k) = D_r(\omega, k) + (\omega - \omega_r) \frac{\partial D_r(\omega, k)}{\partial \omega} \Big|_{\gamma=0} + iD_i(\omega, k) = 0 \quad (۶-۲)$$

تا زمانیکه  $\omega - \omega_r = i\gamma$ ، این معادله ما را قادر می‌سازد که یک رابطه‌ی پاشندگی برای بخش حقیقی فرکانس و همزمان یک بیان برای نرخ رشد بصورت زیر بدست آوریم:

$$D_r(\omega, k) = 0 \quad (۷-۲)$$

$$\gamma(\omega_r, k) = - \frac{D_i(\omega, k)}{\partial D_r(\omega, k) / \partial \omega \Big|_{\gamma=0}} \quad (۸-۲)$$

رابطه اول پاشندگی برای فرکانس‌های حقیقی و رابطه‌ی دوم نرخ رشد خطی  $\gamma$  را مشخص می‌کنند [3].

## ۵-۲ حالت‌های جریان الکترونی

ساده ترین رابطه‌ی پاشندگی الکترواستاتیک که منجر به ناپایداری می‌شود را بررسی می‌کنیم. برای رد کردن هرگونه پیچیدگی که بعلت اثرات حرارتی ایجاد می‌شوند یک پلاسمای سرد را در نظر می‌گیریم. و فرض می‌کنیم که به اندازه‌ی کافی فرکانس بالاست تا جایکه از اثرات یونی می‌توان چشم پوشید. به منظور (تهیه‌ی) فراهم کردن یک منبع انرژی آزاد، فرض می‌کنیم یک باریکه‌ی الکترونی سرد با چگالی  $n_{eb}$  و سرعت  $v_{b0}$  از میان الکترون زمینه با چگالی  $n_{e0}$

و سرعت  $v_{e0} = 0$ ، بصورت جریانی<sup>۱۸</sup> عبور می‌کند. واضح است که این سیستم در حالت تعادل نیست و واکنش الکتروستاتیکی بین دو پلاسما سرانجام منجر به اتلاف انرژی اضافی انباشته شده در حرکت جریانی باریکه می‌شود. باریکه کند شده و باریکه‌ی الکترون‌ها درون زمینه‌ی پلاسما آمیخته می‌شوند. طی این فرآیند پلاسما گرم خواهد شد. احتراق این فرآیند پیچیده منجر به تعادل ترمودینامیک شده که موجب ناپایداری خواهد شد [3].

## ۲-۵-۱ رابطه‌ی پاشندگی باریکه‌ی پلاسما

رابطه‌ی پاشندگی یک سیستم باریکه پلاسما، با یادآوری اینکه تابع پاسخ پلاسما  $\epsilon(\omega, k)$ ، از مداخله‌ی (مشارکت) جمعی از مولفه‌های پلاسما، ساخته می‌شود، و با در نظر گرفتن اینکه دو مولفه یون و الکترون سرد بوده ( $kT_e = kT_i = 0$ ) و پلاسما همسانگرد (دارای خواص فیزیکی مشابه در هر نقطه مستقل از جهت) است، ونیز میدان مغناطیسی نداریم. همچنین مولفه‌ی زمینه با اندیس صفر و مولفه‌ی باریکه با سرعت اولیه‌ی  $v_{b0}$  نمایش داده می‌شوند، داریم:

$$Mn_0 \frac{\partial v_{e0}}{\partial t} = en_0 E \quad (۹-۲)$$

$$mn_0 \left[ \frac{\partial v_{eb}}{\partial t} + (v_{b0} \cdot \nabla) v_{eb} \right] = -en_0 E \quad (۱۰-۲)$$

ما در جستجوی امواج الکتروستاتیکی به شکل

$$E = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{X} \quad (۱۱-۲)$$

هستیم که در آن  $\hat{X}$  امتداد  $v_b$  و  $k$  را نشان می‌دهد. معادلات (۹-۲) و (۱۰-۲) چنین می‌شوند:

---

<sup>18</sup>- stream

$$-i\omega M v_{e0} = eE \quad v_{e0} = \frac{ie}{M\omega} E \hat{X} \quad (۱۲-۲)$$

$$m[-i\omega + ikv_{b0}]v_{eb} = -eE \quad v_{eb} = -\frac{ie}{m} \frac{EX}{\omega - kv_{b0}} \quad (۱۳-۲)$$

سرعت های  $v_{eb}$  در امتداد  $X$  هستند و می توانیم  $\hat{X}$  را از معادله حذف کنیم معادله پیوستگی مولفه زمینه چنین نتیجه می دهد:

$$\frac{\partial n_{e0}}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot v_{e0} = 0 \quad n_{e0} = \frac{k}{\omega} n_0 v_{e0} = \frac{ien_0 k}{M\omega^2} E \quad (۱۴-۲)$$

سایر عبارات  $\nabla \cdot (nv_{e0})$  بخاطر اینکه  $\nabla n_0 = v_{e0} = 0$  صفر می شوند. معادله ی پیوستگی باریکه الکترون بصورت:

$$\frac{\partial n_{eb}}{\partial t} + n_{eb} \nabla \cdot v_{b0} + (v_{eb} \cdot \nabla) n_{eb} = 0 \quad (۱۵-۲)$$

$$(-i\omega + ikv_{b0})n_{eb} + ikn_{eb}v_{eb} = 0 \quad (۱۶-۲)$$

$$n_{eb} = \frac{kn_{eb}}{\omega - kv_{b0}} v_{eb} = \frac{iek n_{eb}}{m(\omega - kv_{b0})^2} E \quad (۱۷-۲)$$

چون امواج ناپایدار، نوسانات فرکانس بالای پلاسما هستند، تقریب پلاسمایی ( $n_e = n_i$ ) قابل استفاده نخواهد بود، ولی می توانیم از معادله ی پواسون استفاده می کنیم:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot E = e(n_{e0} + n_{eb}) \quad (۱۸-۲)$$

$$ik\varepsilon_0 E = \frac{ie^2 n_{e0} k E}{M\omega^2} + \frac{ie^2 n_{eb} k E}{m(\omega - kv_{b0})^2} \quad (۱۹-۲)$$

$$\omega_{p0}^2 = \frac{e^2 n_0}{M\varepsilon_0} \quad , \quad \omega_{pb}^2 = \frac{e^2 n_b}{m\varepsilon_0} \quad (۲۰-۲)$$

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kv_{b0})^2} = 0 \quad (۲۱-۲)$$

اولین عبارت سمت چپ مشارکت الکترونهاى زمینه‌ی پلاسما در غیاب باریکه بوده، حاصل نوسانات لانگمیر<sup>۱۹</sup> است. عبارت دوم ساختار مشابهی دارد، اما فرکانس پلاسمای زمینه با فرکانس باریکه‌ی پلاسما،  $\omega_{pb}^2 = e^2 n_b / m \epsilon_0$ ، و جابجائی دوپلری<sup>۲۰</sup> نوسانات بوسیله‌ی سرعت جایگزین شده اند. با جایگذاری  $v_{b0} = 0$ ، براحتی دیده می‌شود که رابطه‌ی پاشندگی بالا نوسانات لانگمیر را در فرکانس اصلی پلاسما بازتولید می‌کند،  $\omega_{pe}^2 = \omega_{p0}^2 + \omega_{pb}^2$ . برای  $v_{b0} \neq 0$ ، معادله‌ی (۲۱-۲) یک معادله‌ی درجه‌ی چهار برای فرکانس است که میتواند جواب های مزدوج مختلط داشته باشد. یکی از این جواب ها با یک بخش موهومی مثبت منجر به ناپایداری می‌شود، جواب دیگر یک بخش موهومی منفی دارد و بنابراین میرا می‌شود و به هر حال در یک محدوده‌ی زمانی طولانی از بین می‌رود. اگر پلاسمای زمینه را نادیده بگیریم یعنی  $\omega_{p0}^2 = 0$  رابطه‌ی پاشندگی برای بخش جریانی بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\omega = k \cdot v_b \pm \omega_{pb} \quad (22-2)$$

دوموجی که توسط این رابطه توصیف می‌شود مدهای باریکه هستند. این مدها فقط در حضور باریکه وجود داشته و پاشندگی آنها کاملاً خطی است. علاوه بر این، اگر علامت منفی که در کنار فرکانس باریکه پلاسما در این رابطه وجود دارد را در نظر بگیریم مد باریکه بزرگتر از فرکانس  $k \cdot v_b < \omega$  می‌شود، درحالیکه برای علامت مثبت فرکانس بزرگتر می‌شود و  $\omega > k \cdot v_b$ . امواج مذکور حامل انرژی منفی می‌باشند و معادله‌ی انرژی منفی امواج از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

<sup>19</sup> -Langmuir

<sup>20</sup> -Doppler shifted

$$W_{\omega}(\omega, k) = \frac{\epsilon_0}{2} \langle |\delta E(\omega, k)|^2 \rangle \frac{\partial [\omega \epsilon(\omega, k)]}{\partial \omega} \quad (23-2)$$

و  $W_E = \epsilon_0 |\delta E|^2 / 2$  <sup>۲۱</sup> این می‌تواند با محاسبه‌ی انرژی امواج در دو حالت تغییر کند (از معادله‌ی (۲-۲۱) استفاده کنید):

$$\frac{W_{\omega}}{W_E} = \frac{\partial [\omega \epsilon(\omega, k)]}{\partial \omega} = \omega \frac{\partial \epsilon(\omega, k)}{\partial \omega} = \frac{2\omega p_0^2}{\omega^2} + \frac{2\omega \omega_{pb}^2}{(\omega - kv_{b0})^3} \quad (24-2)$$

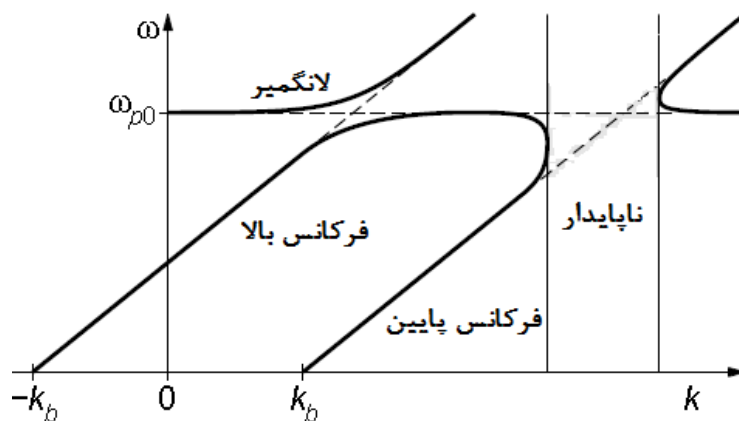
بخش اول فرمول انرژی لانگمیر است، در حالیکه بخش دوم انرژی است که باریکه به امواج منتقل می‌کند. نکته‌ی جالب در مورد این انتقال (مشارکت) اینست که آن به توان سوم جابجائی دوپلری نوسانات در مقسوم علیه وابسته است. بنابراین، هنگامی که جابجائی دوپلری فرکانس منفی باشد، انرژی مد باریکه منفی می‌شود، که این بیانی برای مد باریکه با فرکانس پایین محسوب می‌شود. گرفتن انرژی از این حالت به ناپایداری منجر خواهد شد، که این عمل در حضور مورد مذکور به معنی انباشتگی "انرژی منفی" در موج و رشد دامنه‌ی این موج است.

## ۲-۵-۲ ناپایداری دوجریانی

ناپایداری ای که از جفت شدگی مد باریکه حامل انرژی منفی و مد لانگمیر پلاسما نتیجه می‌شود، ناپایداری دو جریانی نامیده می‌شود. جفت شدگی این دو حالت در شکل (۲-۲) نشان داده شده است. در نمودار  $(\omega, k)$  مدهای باریکه اطراف محور  $k = 0$  با شیب  $v_b$  (سرعت) متمرکز شده است، در حالیکه حالت لانگمیر یک خط ثابت در  $\omega = \omega_{p0}$  می‌باشد. جایی که مدهای باریکه، مد لانگمیر را قطع می‌کنند، منحنی‌های پراکندگی‌شان با هم جفت می‌شوند. برای فرکانس‌های پایین نقطه‌ی جفت شدگی مد باریکه یک ناحیه (فضایی) وجود دارد، که در

<sup>21</sup> -Both equation from companion book of Advanced space plasma physics

این نواحی برای  $k$  یا  $\omega$  جواب حقیقی وجود ندارد. به عبارت دیگر جواب ها در این ناحیه موهومی اند. این حوزه‌ی (ناحیه‌ی) مزدوج مختلط منجر به ناپایداری می‌شود.

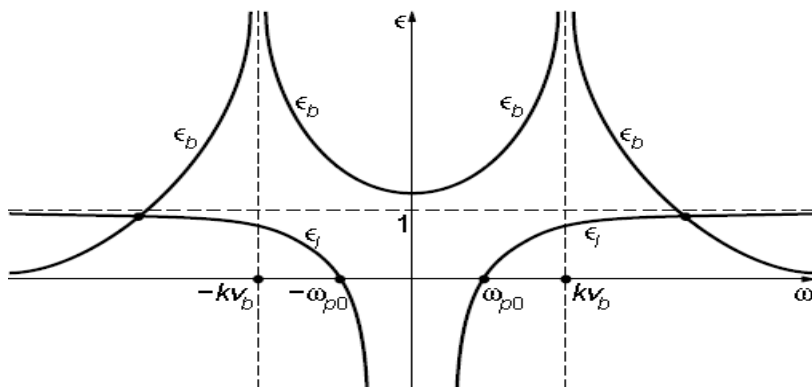


شکل ۲-۲. جفت شدگی مد لانگمیر و مد باریکه در ناپایداری دو جریانی

به منظور محاسبه‌ی نرخ رشد ناپایداری دو جریانی، باید رابطه‌ی پاشندگی حل شود. بطور ترسیمی این رابطه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$1 - \frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} = \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kv_b)^2} \quad (2-25)$$

این رابطه در بخش قبل بصورت مفصل آمده است. حال دوطرف این معادله را به صورت دو تابع جدا در  $\epsilon_l$  و  $1 - \epsilon_b$  برحسب فرکانس  $\omega$  رسم می‌کنیم.



شکل ۲-۳. جواب های رابطه‌ی پاشندگی برای ناپایداری دو جریانی



شکل (۳-۲) جزئیات این توابع را نشان می‌دهد، در  $\epsilon_l = 0$  یک قطب منفی دارد و در ۱ برای  $|\omega|$  های بزرگ به خط افقی نزدیک می‌شود، درحالی‌که  $1 - \epsilon_b$  همیشه مثبت بوده و قطب هایش در  $\omega = \pm k$  می‌باشند.  $v_b$  برای نقاطی که  $|\omega| \rightarrow \infty$  ناپدید شده و در  $\omega = 0$  یک مینیمم دارد. دونقطه قطع بیرون از قطبها، جواب های حقیقی با فرکانس بالا، برای رابطه‌ی پاشندگی هستند. این‌ها دو تا از چهار جواب برای معادله‌ی درجه چهار پاشندگی می‌باشند. دو جواب باقیمانده مزدوج مختلط هستند و متناظر با قطع های موهومی فرکانس پایین در فرکانس  $\omega < kv_b$  می‌باشند. یکی از این چهار جواب، ناپایدار هستند. اگر فرض کنیم که آخرین عبارت در رابطه‌ی (۲۲-۲) برای فرکانس های نزدیک به  $\omega \approx kv_b$  خیلی بزرگتر از ۱ باشد. برای این مورد یک جواب تحلیلی می‌توان یافت ، که به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\omega_{p0}^2}{\omega^2} = \frac{\omega_{pb}^2}{(\omega - kv_b)^2} \quad (۲۶-۲)$$

$$\omega_{p0}^2(\omega - kv_b)^2 + \omega_{pb}^2\omega^2 = 0 \quad (۲۷-۲)$$

می‌توان نشان داد که جوابی به صورت زیر دارد:

$$\omega = \frac{kv_b}{1+n_b/n_0} \left[ 1 \pm i \left( \frac{n_b}{n_0} \right)^{1/2} \right] \quad (۲۸-۲)$$

که یک نوسان برحسب مد انرژی منفی با فرکانسی کم تر از  $kv_b$  را به ما می‌دهد.

$$\omega_{ts} = \frac{kv_b}{1+n_b/n_0} \quad (۲۹-۲)$$

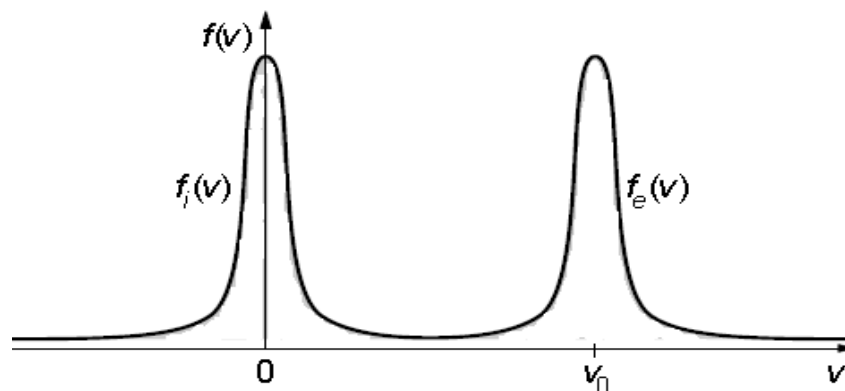
و ناپایداری این حالت با نرخ رشد زیر به دست می‌آید:

$$\gamma_{ts} = \omega_{ts} \left( \frac{n_b}{n_0} \right)^{1/2} \quad (۳۰-۲)$$

ناپایداری دو جریانی ساده ترین ناپایداری شناخته شده است. آن یک ناپایداری سیال الکترونی سرد می باشد که در عمل به ندرت رخ می دهد، چون دیگر ناپایداری های جنبشی قبل از شروع این ناپایداری، توسعه می یابند.

## ۲-۵-۳ ناپایداری بونمان

ناپایداری دیگری که وابستگی نزدیکی با ناپایداری دوجریانی دارد، ناپایداری بونمان یا دوجریانی یون - الکترون می باشد. این ناپایداری ناشی از یک جریان عبوری از یک پلاسمای نامغناطیده است و این رفتار می تواند در تصویر سیالی اتفاق بیفتد. جریان ها با حرکت نسبی الکترون و یون مرتبط هستند. شکل (۲-۴) یک ناپایداری بونمان اختلال یون-الکترون معمولی را نشان می دهد.



شکل ۲-۴. توزیع سرعت اختلال برای ناپایداری بونمان

## ۲-۵-۳-۱ نرخ رشد و فرکانس

برای ناپایداری بونمان مشارکت یون‌های زمینه را برای ناپایداری دوجریانی در نظر بگیرید. با فرض اینکه همه‌ی مولفه‌های پلاسما سرد هستند، رابطه‌ی پاشندگی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Mn_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} = en_0 E \quad (۳۱-۲)$$

$$mn_0 \left[ \frac{\partial v_e}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) v_e \right] = -en_0 E \quad (۳۲-۲)$$

امواج الکتروستاتیکی به شکل زیر می‌باشند:

$$E = E e^{i(kx - \omega t)} \hat{X} \quad (33-۲)$$

که در آن  $\hat{X}$  امتداد  $v_0$  و  $k$  را نشان می‌دهد. معادلات حرکت چنین نوشته می‌شوند:

$$-i\omega M v_i = eE \quad v_i = \frac{ie}{M\omega} E \hat{X} \quad (۳۴-۲)$$

$$m[-i\omega + ikv_0]v_e = -eE \quad v_e = -\frac{ie}{m} \frac{EX}{\omega - kv_0} \quad (۳۵-۲)$$

سرعت‌های  $v_i$  در امتداد  $X$  هستند و می‌توانیم  $\hat{X}$  را حذف کنیم معادله پیوستگی یون چنین نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot v_i = 0 \quad n_i = \frac{k}{\omega} n_0 v_i = \frac{ien_0 k}{M\omega^2} E \quad (۳۶-۲)$$

سایر عبارات  $\nabla \cdot (nv_i)$  بخاطر اینکه  $\nabla n_0 = v_{i0} = 0$  صفر می‌شوند. معادله پیوستگی الکترون بصورت:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \nabla \cdot v_e + (v_0 \cdot \nabla) n_e = 0 \quad (37-2)$$

$$(-i\omega + ikv_0)n_e + ikn_0 v_e = 0 \quad (38-2)$$

$$n_e = \frac{kn_0}{\omega - kv_0} v_e = \frac{iek n_0}{m(\omega - kv_0)^2} E \quad (39-2)$$

از آنجاییکه امواج ناپایدار، نوسانات فرکانس بالای پلاسما هستند، تقریب پلاسمایی قابل استفاده نخواهد بود، ولی باید از معادله‌ی پواسون استفاده می‌کنیم:

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot E = e(n_i + n_e) \quad (40-2)$$

$$ik\varepsilon_0 E = \frac{ie^2 n_0 k E}{M\omega^2} + \frac{ie^2 n_0 k E}{m(\omega - kv_0)^2} \quad (41-2)$$

$$\omega_{pi}^2 = \frac{e^2 n_0}{M\varepsilon_0} \quad , \quad \omega_{pe}^2 = \frac{e^2 n_e}{m\varepsilon_0} \quad (42-2)$$

$$\varepsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_0)^2} = 0 \quad (43-2)$$

در اینجا یون‌ها ثابت اند، درحالی‌که همه‌ی الکترون‌ها بصورت جریانی با سرعت  $v_0$  فرض شده اند که از میان سیال یونی عبور می‌کنند، واضح است که این عمل موجب یک جریان شناور در پلاسما خواهد شد. بخاطر اینکه فرکانس یونی پلاسما خیلی کوچکتر از فرکانس الکترونی پلاسما است عبارت غالب (حاکم)، عبارت الکترونی می‌باشد. ناپایداری با مد انرژی منفی کند روبرو خواهد شد.

$$\omega_n \approx kv_0 - \omega_{pe} \quad (44-2)$$

---

<sup>۲۲</sup> - مدی که به ازای آن انرژی منفی می‌شود.

در حالیکه امواج با انرژی مثبت  $\omega_p = k\nu_0 + \omega_{pe}$  با ناپایداری جفت نمی‌شوند. پس رابطه‌ی بالا را بصورت زیر باز نویسی می‌کنیم:

$$(\omega - \omega_n)\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2(\omega - k\nu_0)^2}{\omega - \omega_p} \quad (۴۵-۲)$$

محدوده‌ی عدد موج  $k \approx \omega_{pe}/\nu_0$  است. چون برای یک ناپایداری دوجریانی این عدد موج با موج انرژی منفی جفت می‌شود. در مقایسه با ناپایداری دوجریانی الکترونی، فرکانس کوچکتر از فرکانس پلاسمای الکترونی است  $\omega_{pe} \ll \omega$ . با این تقریب‌ها رابطه‌ی پاشندگی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(\omega - k\nu_0 + \omega_{pe})\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2(\omega - k\nu_0)^2}{\omega - k\nu_0 - \omega_{pe}} \quad (۴۶-۲)$$

با استفاده از دوشروط  $k \approx \omega_{pe}/\nu_0$  و  $\omega \ll \omega_{pe}$  در نهایت ضرب یک  $\omega_{pe}$  در صورت و مخرج طرف دوم و نیز استفاده از (۴۲-۲) داریم:

$$\omega^3 \approx -\frac{m_e}{2m_i} \omega_{pe}^3 \quad (۴۷-۲)$$

یکی از ریشه‌های این معادله درجه‌ی سه یک فرکانس منفی و واقعی موج به صورت زیر می‌باشد:

$$\omega = -\left(\frac{m_e}{2m_i}\right)^{1/3} \omega_{pe} \quad (۴۸-۲)$$

دو جواب دیگر مزدوج مختلط هستند، و یکی از آنها بخش موهومی مثبت دارد. برای یافتن این دو جواب فرکانس را به صورت  $\omega \rightarrow \omega_r + i\gamma$  می‌نویسیم، دو معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$(\omega^2 - 3\gamma^2)\omega = -\frac{m_e}{2m_i} \omega_{pe}^3$$

$$\gamma^2 = 3\omega^2 \quad (۴۹-۲)$$

معادله‌ی دوم  $\gamma = \pm\sqrt{3}\omega$  را بدست می‌دهد. این مقدار را در معادله‌ی اول (۴۹-۲) برای بیشترین فرکانس (ماکسیمم) جایگذاری می‌کنیم، حالت ناپایدار بونمان را می‌دهد.

$$\gamma_{bun}^2 = \left(\frac{m_e}{16m_i}\right)^{1/3} \omega_{pe} \approx 0.03 \omega_{pe} \quad (۵۰-۲)$$

برای بدست آوردن نرخ رشد اینبار به جای تمام  $\omega$  ها در معادله اول (۴۹-۲)  $\gamma$ ، را جایگذاری کرده و نرخ رشد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\gamma_{bun} = \left(\frac{3m_e}{16m_i}\right)^{1/3} \omega_{pe} \approx 0.05 \omega_{pe} \quad (۵۱-۲)$$

این نرخ رشد بسیار بزرگ و از مرتبه‌ی فرکانس این ناپایداری است. از این رو، ناپایداری بونمان یک ناپایداری قوی است که بوسیله‌ی حرکت توده‌ی سریعی از الکترونهايي که از پلازما عبور می‌کنند، استخراج می‌شود.

یک پیش بینی می‌تواند این باشد که، این ناپایداری اثرات بسیار شدیدی را روی شار جریان موجب خواهد شد، از جمله اینکه جریان را به تاخیر می‌اندازد و انرژی آن را درون پلاسمای حرارتی فراهم می‌کند.

## ۲-۲-۵-۲ مکانیزم (طرز کار):

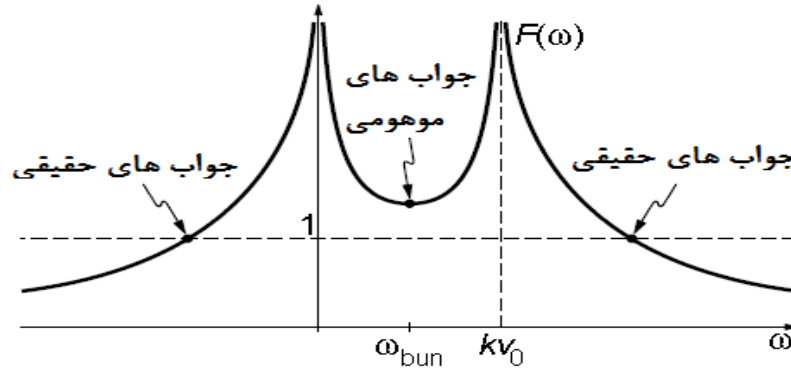
برای بدست آوردن مکانیزم ناپایداری بونمان، رابطه‌ی پاشندگی را به صورت تابعی از فرکانس مانند زیر در نظر می‌گیریم:

---

<sup>۲۳</sup> - کمترین فرکانسی است که ناپایداری در آن رخ می‌دهد.

$$1 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_0)^2} = F(\omega) \quad (52-2)$$

تابع  $F(\omega)$  در شکل (52-2) نشان داده شده است. این شکل در  $\omega = kv_0$  و  $\omega = 0$  دو قطب دارد.



شکل 52-2. جواب های رابطه ی پاشندگی برای ناپایداری بونمان

در بین این دو قطب یک مینیمم وجود دارد، که این مینیمم از محاسبه  $\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega} = 0$  بدست می آید.

$$\frac{\partial F(\omega)}{\partial \omega} = \frac{2\omega_{pi}^2}{\omega^3} + \frac{2\omega\omega_{pe}^2}{(\omega - kv_0)^3} = 0 \rightarrow \omega_{pi}^2(\omega - kv_0)^3 = -\omega^3\omega_{pe}^2$$

$$\rightarrow \omega^3(\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2) - 3\omega_{pi}^2\omega^2kv_0 - 3(kv_0)^2\omega\omega_{pi}^2 = 0$$

این عبارت شبیه یک معادله درجه سه است که همیشه یکی از جواب های آن حقیقی است در نهایت داریم:

$$\omega_{bun} = \frac{kv_0}{1 + (m_i/m_e)^{1/3}} \quad (53-2)$$

این مقدار را در  $F(\omega)$  جایگذاری می کنیم و مطمئن هستیم که مینیمم  $F(\omega_{bun}) > 1$  می -

باشد(همانطور که در شکل هم دیده می شود)، شرط ناپایداری به صورت زیر می باشد:

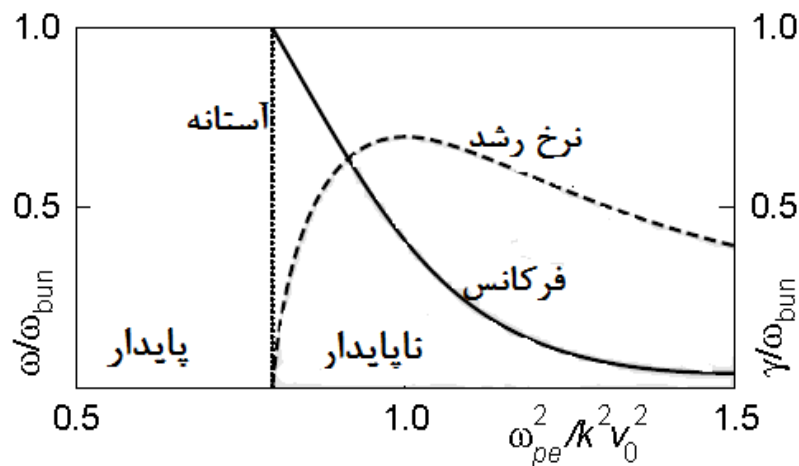
$$k^2 v_0^2 < \omega_{pe}^2 \left[ 1 + \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right]^3 \quad (54-2)$$

که عدد موج ناپایدار، را توجیه می‌کند به علاوه هر موج دامنه بلند در مقابل شار الکترون ناپایدار خواهد شد. مقدار آستانه<sup>۲۴</sup> برای ناپایداریهای جزئی که نرخ رشد آنها به سمت صفر میل می‌کند،  $\gamma \rightarrow 0$ ، را، با جایگزین کردن علامت مساوی در معادله‌ی (۵۴-۲) به جای علامت کوچکتر، پیدا می‌کنیم. امواج پایدار به طور جزئی طول موج بونمان دارند:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda_{bun} = \frac{2\pi v_0}{\omega_{pe}} \left[ 1 + \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/3} \right]^{-3/2} \quad (55-2)$$

حل عددی رابطه‌ی پاشندگی بونمان، مستقل از شرایط ناپایداری در معادله‌ی (۵۴-۲) است. این مطلب در شکل (۶-۲) نشان داده شده است.



شکل ۶-۲. نرخ رشد و فرکانس ناپایداری بونمان

<sup>24</sup> - threshold



با توجه به شکل (۶-۲) ناپایداری تنها در نواحی با مقادیر بیشتر از آستانه اتفاق می‌افتد، فرکانس درمرز آستانه بالاترین مقدار را دارد. بیشترین نرخ رشد در معادله‌ی (۵۱-۲) برای فرکانس بونمان  $\omega_{bun}$  نرمالایز شده، در ناحیه‌ای که این پارامتر به ۱ نزدیک است، یافت می‌شود. برای سرعت‌های بزرگتر نرخ رشد کاهش می‌یابد. جالبتر اینکه مشاهده می‌شود که فرکانس نرمالایز شده‌ی ناپایداری بونمان  $\omega/\omega_{bun}$ ، بطور شیب‌داری به مقادیر خیلی پایین فرکانس بونمان در معادله‌ی (۵۰-۲) کاهش می‌یابد، به عبارت بهتر فرکانس در آستانه بیشترین مقدار را دارد و با افزایش سرعت مقدار آن کاهش می‌یابد [3].

### ۲-۵-۳ فرونشستن (افت ناپایداری)

در این بخش یک چشم انداز برای تکامل بیشتر ناپایداری بونمان را معرفی می‌کنیم. بخاطر داریم که در پلاسما، الکترون و یون هر دو سرد فرض می‌شود یعنی  $(kT_e = kT_i = 0)$ . از اینرو، حتی هر طغیان بالقوه‌ی الکتروستاتیک کوچک در پلاسما قادر خواهد بود مسیر حرکت ذرات الکترونی را تحریف کند (خم کند). و بنابراین این طغیان جریان الکتریکی را، که محرک منبع ناپایداری بونمان است، تغییر می‌دهد. در چارچوب موج انرژی شار الکترون بصورت زیر است:

$$W_e = \frac{m_e}{2} \left( v_0 - \frac{\omega_{bun}}{k_{bun}} \right)^2 \quad (۵۶-۲)$$

بنابراین شرایط برای مسیر خمیدگی (انحراف) الکترون به صورت زیر در می‌آید:

$$W_\omega(t) > nW_e = \frac{1}{2} n m_e v_0^2 \quad (۵۷-۲)$$

حرکت الکترون را می‌توان سریع تر از موج به حساب آورد. حال، از آنجاییکه ناپایداری بونمان یک ناپایداری سریع پیش رونده است. بنابراین دامنه‌ی موج به سرعت به مقدار بسیار بزرگی خواهد رسید بطوریکه مقدار آن برای به دام انداختن الکترون‌ها کافی بوده و آنها را کند می‌کند، تا اینکه اندازه‌ی سرعت آنها به مقدار سرعت فاز موج که در پایین آستانه نهفته است، برسند. با این حساب جریان مختل شده و ناپایداری ناگهان افت می‌کند (جریان الکترونی ناگهان افت می‌کند چون الکترون‌ها به قله می‌رسند). با توجه به مطالب بالا می‌توانیم زمانی که طول می‌کشد تا افت اتفاق بیفتد را تخمین بزنیم، فرض می‌کنیم دامنه‌ی امواج از سطح حرارتی رشد یابد، انرژی نوسانات حرارتی<sup>۲۵</sup> (انرژی یک الکترون در یک کره‌ی دبابی) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$W_{tf} \approx k_B T_e / \lambda_D^3 \quad (۵۸-۲)$$

که به شکل زیر داده شده است:

$$W_E(t) \approx W_{tf} \exp(2\gamma_{bunt} t) \quad (۵۹-۲)$$

چگالی انرژی را از تابع پاسخ دی‌الکتریک بونمان پیدا می‌کنیم:

$$W_\omega(t) \approx \left(\frac{16m_i}{m_e}\right)^{2/3} W_E(t) \quad (۶۰-۲)$$

---

<sup>25</sup> - Thermal fluctuation

می‌توانیم فرض کنیم که سطح حرارتی مذکور تقریباً با سطح حرارتی امواج لانگمیر که قبلاً نشان داده شد، متناظر است. تمام این معادلات را در معادله‌ی (۲-۵۶) جایگذاری کرده و جوابی برای زمان اختلال فعلی  $t_{cd}$  بدست می‌آوریم:

$$\omega_{pe} t_{cd} \approx \left(\frac{2m_i}{3m_e}\right)^{1/3} \ln\left[\left(\frac{16m_i}{m_e}\right)^{2/3} \frac{v_0^2}{v_{the}^2} n\lambda_D^3\right] \quad (۲-۶۱)$$

این بیان بطور بسیار کمی به سرعت جریان الکترون بالاتر از آستانه بستگی دارد. عدد دامنه در چارچوب لگاریتمی عدد دبای می‌باشد.  $N_D = n\lambda_D^3$  که یک عبارت لگاریتمی معمولی از مرتبه-۱۵ الی ۳۰ می‌باشد. از اینرو، در عبارت فرکانس پلاسمای الکترونی معادله‌ی (۲-۶۱) خوداختلالی جریان، بعلت ناپایداری بونمان در یک پلاسمای الکترون-یون حدود ۲۰۰ دوره پلاسمای الکترونی یا حدود ۱۰ نوسان بونمان زمان می‌برد. بنابراین، ناپایداری بونمان در پیک منفی نوسان‌های جریان و در انتشار انفجاری امواج الکتروستاتیک پایین و بالای فرکانس بونمان آشکار خواهد شد  $\omega < \omega_{bun} \approx 0.03\omega_{pe}$  [3].

فرکانس طبیعی نوسانات سیال الکترون برابر  $\omega_p$ ، و فرکانس طبیعی نوسانات سیال یونی  $\Omega_p = \omega_p \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2}$ ، است. تعبیر فیزیکی ناپایداری بونمان اینست که، اگر  $kv_0$  مقدار مشخصی داشته باشد، به علت جابجائی دوپلری نوسانات  $\omega_p$  در سیال الکترونی متحرک، این دو فرکانس در چارچوب مرجع آزمایشگاهی برهم منطبق می‌شوند. در این صورت افت و خیز چگالی الکترونی یونی می‌تواند از معادله‌ی پواسون تبعیت کند. همچنین می‌توان نشان داد که نوسانات الکترونی دارای انرژی منفی هستند. به این معنی که، انرژی جنبشی کل الکترون‌ها در حضور نوسان، کمتر از انرژی جنبشی کل در غیاب نوسان می‌باشد. در باریکه‌ی غیر مختل، انرژی در هر متر مکعب برابر  $\frac{1}{2}n_0 m_e v_0^2$  است. و در حضور نوسانات انرژی جنبشی به صورت

$\frac{1}{2}(n_0 + n_1)m_e(v_0 + v_1)^2$  می‌باشد. هنگامی که میانگین فضائی این انرژی گرفته شود، با توجه به رابطه‌ی فاز بین  $n_1$  و  $v_1$  که به اقتضای معادله‌ی پیوستگی برقرار است، مقدارش از  $\frac{1}{2}m_en_0v_0^2$  کمتر می‌گردد، در نتیجه نوسانات الکترونی دارای انرژی منفی و نوسانات یونی دارای انرژی مثبت هستند. هر دو موج می‌توانند با ثابت نگه داشتن انرژی کل دستگاه، با هم رشد کنند [1].

## ۲-۵ ناپایداری‌های ماکروسکوپیک

بخاطر وجود گروهی از منابع انرژی آزاد، شمار زیادی از ناپایداری‌ها می‌توانند در پلاسما توسعه یابند که بعضی اوقات تقسیم آنها به دو گروه بزرگ برطبق مقیاس‌های فضایی که در ناپایداری نقش دارند، راحت است. اگر اندازه این مقیاس ماکروسکوپیک باشد با مقیاس‌های عظیمی از پلاسما قابل مقایسه است، این ناپایداری‌ها، ناپایداری ماکروسکوپیک نامیده می‌شود. از سویی دیگر، اگر مشخصه اندازه‌ی ناپایداری میکروسکوپیک باشد مقیاس، اندازه‌ی لختی دورانی ذره است و ناپایداری، ناپایداری میکروسکوپیک نامیده می‌شود.

طبیعی است که اثرات جنبشی در ناپایداری‌های میکروسکوپیک مهم تر از ناپایداری‌های ماکروسکوپیک می‌باشند. بنابراین میکرو ناپایداری‌ها معمولاً ناپایداری جنبشی‌اند در حالیکه ماکرونایپایداری‌ها در چارچوب تئوری سیالی پلاسما می‌توانند اینگونه رفتار کنند. در برخی موارد در نظر گرفتن اثرات جنبشی در ماکرو ناپایداری‌ها مفید است، بخش حاضر مهمترین ماکرو ناپایداری‌هایی که در پلاسما ظاهر می‌شوند را توضیح می‌دهد [1].

## ۲-۵-۱ ناپایداری ریلی تیلور

در مقیاس کلی نمی‌توان از ناهمگنی‌های پلاسما چشم پوشی کرد و گرادیان پلاسما موجب چندین ماکرو ناپایداری می‌شود. ساده ترین مورد از چنین ناپایداری هایی، ناپایداری ریلی تیلور یا ناپایداری مبادله ای است، که در آن مرز پلاسما تحت تاثیر میدان گرانشی است به همین دلیل آنرا ناپایداری گرانشی نیز می‌گویند. به عبارت دیگر امواج گرانشی در یک پلاسمای لایه ای ناپایدارند، اگر گرادیان چگالی در جهت مخالف گرانش باشد، این ناپایداری، ناپایداری ریلی تیلور نامیده می‌شود.

از آنجا که نیروی گریز از مرکز روی ذره در حال حرکت در طول منحنی خطوط میدان در یک روش مشابه بعنوان یک نیروی گرانشی عمل می‌کند و می‌تواند منجر به اثرات مشابه شود. این ناپایداری، ناپایداری فلوتی<sup>۲۶</sup> نیز نامیده می‌شود [1].

## ۲-۵-۲ مکانیزم (طرز کار):

یک پلاسمای سنگین که در مقابل نیروی گرانشی بوسیله‌ی یک میدان مغناطیسی نگه داشته شده است، را بررسی می‌کنیم. مرز بین پلاسما و میدان مغناطیسی در صفحه افقی  $(x, y)$  است و نقاط میدان مغناطیسی در جهت  $x$  هستند بنابراین  $B_0 = B_0 \hat{e}_x$  شتاب گرانشی روبه پایین

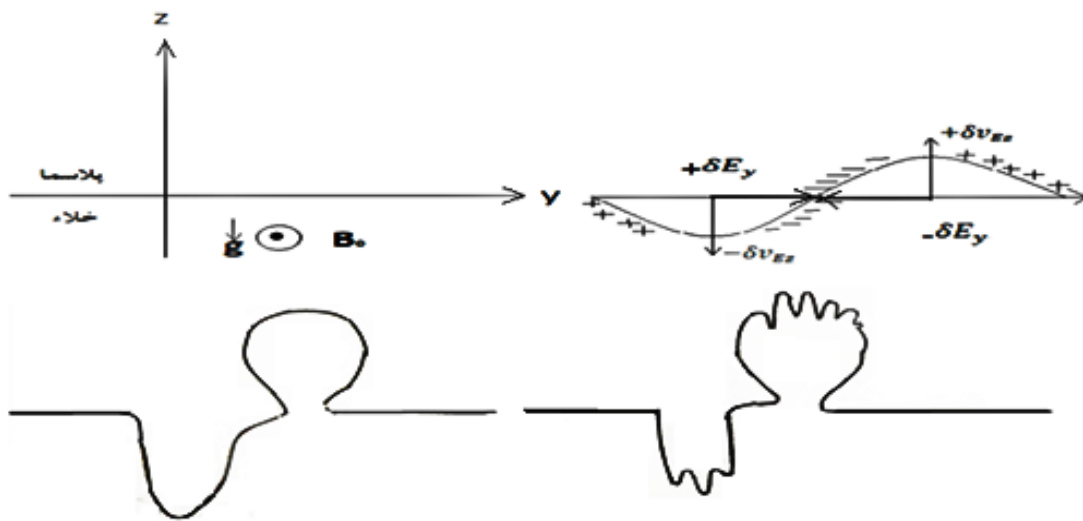
عمل می‌کند  $g = g \hat{e}_z$  در حالیکه گرادیان چگالی پلاسما رو به بالاست  $\nabla n_0 = \frac{\partial n_0}{\partial z} \hat{e}_z$  و

$$\nabla n_0 \cdot g < 0 \quad (۶۲-۲)$$

<sup>26</sup> -Flute Instability

اگر اثرات گرمایی را نادیده بگیریم و فرض کنیم پلاسما غیر برخوردی باشد، وقتی مرز پلاسما توسط یک اختلال الکتروستاتیکی خالص کوچکی در صفحه  $(x, y)$  آشفته شود. (به عبارت بهتر وقتی یک اعوجاج توسط اختلال الکتروستاتیکی خالص در مرز پلاسما در صفحه  $(x, y)$  ایجاد شود)، یک ناپایداری می‌تواند توسعه یابد. بررسی اعوجاج مرزی نتیجه می‌دهد که چگالی پلاسما یک انحراف سینوسی در جهت  $z$  ایجاد می‌کند. میدان گرانشی موجب ایجاد یک سوق یونی و جریان در جهت  $(-y)$  می‌شود.

الکترون‌ها بخاطر جرم ناچیز شان در این حرکت شرکت نمی‌کنند. از این رو، در مناطقی که اختلال چگالی ناشی از افزایش چگالی در زیر مرز بین پلاسما و خلا می‌باشد. حرکت یون منجر به جدایی بار و تجمع بار مثبت می‌شود در نتیجه جدایی بار میدان الکتریکی  $\delta E_y$ ، را موجب می‌شود. میدان الکتریکی مختل افقی در جهت  $+y$ ،  $+\delta E_y$  است که موجب سوق رو به بالای میدان الکتریکی می‌شود  $\delta v_{Ez} = +\delta E_y / B_0$ . در  $-\delta E_y$  که در ناحیه‌ی میدان مغناطیسی خارجی قرار دارد. سوق، رو به پایین است.  $\delta v_{Ez} = -\delta E_y / B_0$ ، با توجه به شکل، این حرکت های در خلاف جهت، هر دو اعوجاج اولیه از پیکر بندی متعادل چگالی در مرز پلاسما و میدان مغناطیسی (خلاء) را تقویت می‌کند.



شکل ۷-۲. پیکربندی ناپایداری ریلی تیلور در پلاسما

از این رو رقیق شدگی پلاسما موجب شده، ناحیه با چگالی کم درون پلاسما شروع به افزایش کند. در حالیکه، چگالی اولیه زیر مرز افزایش می‌یابد و به پایین سقوط می‌کند (به این معنی که میدان مغناطیسی به درون پلاسما نفوذ می‌کند و پلاسما به درون نقاط میدان مغناطیسی). این مکانیزم، باعث می‌شود که رقیق شدگی حباب‌های کوچک درون پلاسمای چگال افزایش یابد و تحت تاثیر گرانش، که گرانش موجب می‌شود که پلاسما به منطقه‌ی میدان مغناطیسی سقوط کند. بنابر این موجب خورده شدگی مرز و اتلاف پلاسما می‌شود این موضوع در شکل (۷-۲) نشان داده شده است. حباب‌ها خودشان را در مرزهای پلاسما بطور شیب دار، توسعه می‌دهند. مرز، شبیه ناپایداری ریلی تیلور، ناپایداری می‌شود. و این امر در طی ناپایداری بیشتر و افت وخیز حباب‌ها، درون حباب‌های کوچکتر ادامه می‌یابد. در مرحله‌ی نهایی غیر خطی، ناپایداری مرزها منتشر خواهند شد و طیف طول موج حالت ریلی تیلور، پهنای باندی می‌شود، شامل دسته‌ای از طول موج‌ها که از یک طول موج بلند اولیه به کوچکترین مقیاس ممکن می‌رسند.

## ۲-۵-۳ روابط پاشندگی

به منظور سنجش بحث، معادله‌ی حرکت یون سرد که شامل نیروی گرانشی جداسازی متغیرهای موج تخت برای سرعت یون و میدان الکتریکی می‌باشد، را خطی می‌کنیم.

$$v_i = \delta v_i(\omega, k) \exp[i(k \cdot x - \omega t)]$$

$$\delta E = -ik\delta\varphi(\omega, k) \exp[i(k \cdot x - \omega t)] \quad (۶۳-۲)$$

معادله‌ی حرکت را بدست می‌آوریم:

$$\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right) \delta v_{i\perp} = \frac{e}{m_i} (k_{\perp} \delta\varphi - iB_0 \hat{e}_x \times \delta v_{i\perp}) \quad (۶۴-۲)$$

تازمانیکه فرکانس اختلال کوچکتر از فرکانس چرخش یون باشد ( $\omega \ll \omega_{gi}$ )، جواب اختلال سرعت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\delta v_{i\perp} = \delta\varphi \left[ \frac{i}{B_0} \hat{e}_x \times k_{\perp} + \frac{k_{\perp}}{B_0 \omega_{gi}} \left( \omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}} \right) \right] \quad (۶۵-۲)$$

از این معادله برای حذف سرعت اختلالی از معادله پیوستگی یون استفاده می‌کنیم، داریم:

$$\omega \delta n_i = n_0 k \delta u_i - i \delta u_i \nabla n_0 \quad (۶۶-۲)$$

یکی از جوابهایی که برای چگالی اختلالی یافته می‌شود:

$$\delta n_i = n_0 \delta\varphi \left[ \frac{e}{m_i} \left( \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{gi}^2} \right) + \frac{k_{\perp}}{B_0 L_n} \left( \omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}} \right)^{-1} \right] \quad (۶۷-۲)$$

ما در اینجا مقیاس گرادیان چگالی غیر اختلالی معکوس را معرفی می‌کنیم:



$$L_n^{-1} = \frac{d \ln n_0(z)}{dz} > 0 \quad (۶۸-۲)$$

بخاطر اینکه الکترونها در مدلی که در نظر گرفتیم سردند  $kT_e = 0$  و سوق ندارند، معادلات حرکت و پیوستگی آنها به صورت زیر بدست می آید<sup>۲۷</sup>:

$$\delta n_e = -\delta\phi \frac{n_0}{B_0} \left( \frac{\omega_{ge}}{\omega} \frac{k_{\parallel}^2}{\omega} - \frac{k_{\perp}}{\omega L_n} \right) \quad (۶۹-۲)$$

برای این فرکانس های پایین می توان فرض کرد که شرط شبه خنثائیت  $\delta n_i = \delta n_e$  برقرار است. مساوی قرار دادن این دو چگالی نوسان کننده منجر به رابطه ی پاشندگی می شود:

$$\frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{L_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) - \frac{\omega_{gi}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) + 1 = 0 \quad (۷۰-۲)$$

که این معادله، رابطه ی عمومی پاشندگی برای ناپایداری ریلی تیلور می باشد [3].

## ۴-۵-۲ نرخ رشد و فرکانس:

بیشترین نرخ رشد این ناپایداری صرفا برای انتشار عمود بر اختلال، در این مورد دامنه ی میدان الکتريکی، یافت می شود. که به بزرگترین سوق عمودی پلاسما برای مد طولی منجر خواهد شد. بنابراین  $k_{\parallel} = 0$  قرار می دهیم و فرض می کنیم یک اثر ضعیف گرانشی وجود دارد به طوریکه  $\frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \gg \omega$ ، می توان عبارت داخل پرانتز در معادله ی (۷۰-۲) را برای مرتبه ی اول این پارامتر کوچک بسط داده و بدست می آوریم :

$$\omega^2 = -\frac{g}{L_n} \quad (۷۱-۲)$$

<sup>۲۷</sup> - محاسبات در پیوست الف آمده است

که صرفا دارای جواب موهومی است بنابراین با راه حل زیر، مقدار نرخ رشد را بدست می آوریم:

$$\omega = \omega_r + i\gamma \Rightarrow (i\gamma)^2 = -\frac{g}{L_n} \Rightarrow -\gamma^2 = -\frac{g}{L_n} \Rightarrow$$

$$\gamma = \left(\frac{g}{L_n}\right)^{1/2} \quad (72-2)$$

توان دوم یک عبارت با یک عبارت منفی برابر شده است این در صورتی ممکن است که  $\omega$  موهومی باشد. این مورد شبیه حالتی است که برای سیالات تحت عمل گرانش پیدا می شود. مشخصه غیر نوسانی این ناپایداری از خیلی کوچک فرض کردن  $\frac{k_{\perp}g}{\omega\omega_{gi}}$  ناشی می شود.

در اینجا معادله ی (70-2) را تا مرتبه ی دوم بسط می دهیم:

$$\omega^3 + \omega \frac{g}{L_n} - \frac{g^2 k_{\perp}}{L_n \omega_{gi}} = 0 \quad (73-2)$$

این معادله یک جواب حقیقی و دو جواب مزدوج مختلط دارد. جواب ناپایدار فرکانس زیر را دارد [3]:

$$\omega_{rt} = \gamma_{0rt} \cosh \left[ \frac{1}{3} \cosh^{-1} \left( \frac{k_{\perp} L_n \gamma_{0rt}}{2\omega_{gi}} \right) \right] \quad (74-2)$$

متناسب با نرخ رشد مرتبه ی صفر،  $\gamma_{0rt}$  نرخ رشد تصحیح شده ی این حالت نوسانی ریلی تیلور بصورت زیر است [3]:

$$\gamma_{rt} = \sqrt{3} \gamma_{0rt} \sinh \left[ \frac{1}{3} \sinh^{-1} \left( \frac{k_{\perp} L_n \gamma_{0rt}}{2\omega_{gi}} \right) \right] \quad (75-2)$$

یک تقریب دقیق از معادله ی (73-2) می تواند با ساختار مختلط فرکانس  $\omega \rightarrow \omega_{rt} + i\gamma$  باشد. جداسازی بخش های حقیقی و موهومی معادله ی (73-2) به صورت زیر بدست می آید:

$$\gamma^2 - 3\omega^2 = \frac{g}{l_n}$$

$$\omega \left( \omega^2 - 3\gamma^2 + \frac{g}{l_n} \right) = \frac{g^2 k_{\perp}}{l_n \omega_{gi}} \quad (76-2)$$

از معادله‌ی (۷۲-۲) و معادله‌ی اول از این دو معادله لازم است که  $\sqrt{3}\omega \gg \gamma_{rt}$  باشد و دومین معادله برای فرکانس نتیجه زیر را در بر دارد:

$$\omega_{rt} = -\frac{gk_{\perp}}{4\omega_{gi}} \quad (77-2)$$

سازگاری با شرایط بالا نیازمند برقراری شرط  $k_{\perp} l_n \ll 4\omega_{gi} (l_n/g)^{1/2}$  یا در عبارت طول موج ریلی تیلور که به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\lambda_{rt}}{l_n} \gg \frac{\pi \gamma_{ort}}{2 \omega_{gi}} \quad (78-2)$$

سمت راست این نامساوی کوچک است بنابر این شرایط طول موج‌های بلند را در تمام موارد (مورد بررسی) به آسانی برآورده می‌کند.

برای انتشار مورب اختلال،  $k_{\parallel} \neq 0$ ، بخشی از میدان الکتریکی عمود بر میدان مغناطیسی است و می‌تواند توسط حرکت سریع الکترون در طول میدان مغناطیسی اتصال کوتاه، داشته باشد، بدین ترتیب باعث ایجاد یک میدان هم راستا با جریان الکترون می‌شود، البته در زمان مشابه (همزمان) ناپایداری تاحدی فرو می‌نشیند. اجازه دهید رابطه‌ی پاشندگی را برای این مورد که شامل عبارت دوم معادله‌ی (۷۰-۲) می‌شود را بنویسیم:

$$\omega^2 = -\frac{g}{l_n} + \omega_{gi}^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \frac{m_i}{m_e} \quad (79-2)$$

وقتی شرایط

$$\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} > \left( \frac{m_i}{m_e} \frac{g}{\omega_{gi}^2 l_n} \right)^{1/2} = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega_{gi}} \left( \frac{g}{l_n} \right)^{1/2} = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{\gamma_{ort}}{\omega_{gi}} \quad (۸۰-۲)$$

برآورده شود، طرف راست معادله‌ی (۸۰-۲) مثبت می‌شود و ناپایداری متوقف می‌شود. بنابراین برای یک مقیاس گرادیان چگالی  $l_n$ ، شرایط قبلی یک زاویه‌ی حاشیه‌ای پیرامون عمود بر جهت تعریف می‌کند، اطراف این زاویه ناپایداری ریلی تیلور تکامل می‌یابد این محدوده زاویه‌ای، باریک است، در یونیسفر معمولاً کمتر از یک درجه است و حالت ریلی تیلور تقریباً عمود بر این زاویه است [3].

# فصل سوم:

معرفی مدل سیالی پلازما

و معادلات مکتوبیدرودینامیک

## فصل ۳: معرفی مدل سیالی پلاسما و معادلات مگنتو هیدرودینامیک

### ۳-۱ مقدمه

در این فصل، بخاطر اینکه بررسی ما در این پایان نامه روی معادلات مگنتو هیدرودینامیک انجام می‌شود و این معادلات در مدل سیالی ظاهر می‌شوند، ابتدا به تعریف مختصری از مدل‌های توصیف پلاسما پرداخته و در ادامه، مدل سیالی را مد نظر قرار داده و اشاره ای گذرا به آن داریم. سپس به تعریف معادلات مگنتو هیدرودینامیک می‌پردازیم.

### ۳-۲ مدل‌های توصیف پلاسما

برای توصیف پلاسما از مدل‌های مختلفی استفاده می‌شود که معروفترین آنها به سه دسته تقسیم می‌شوند که می‌توان چنین نام برد:

**مدل ذره ای :** مطالعه رفتار تک تک ذرات و دنبال کردن مسیر آن‌ها به صورت انفرادی. این روش با توجه به تراکم ذرات در داخل پلاسما بسیار مشکل و در عین حال در برخی موارد کاربردی است. پیرو این مطلب می‌دانیم که تاکنون کامپیوتر هایی طراحی شده اند که حافظه‌ی آنها برای ذخیره کردن مکان و مولفه های سرعت تنها حدود  $10^4$  ذره کافی است و غیر از چند مورد استثنائی، فقط می‌توانند مساله را در یک یا دو بعد حل کنند.

**مدل سیالی:** ساده ترین شکل توصیف پلاسما است البته این تقریب برای توصیف قسمت اعظم پدیده های مشاهده شده از دقت کافی برخوردار است. توزیع سرعت در این مدل از نوع توزیع ماکسولی است همچنین متغیرهای وابسته در این مدل توصیفی فقط چهار متغیر  $x, y, z, t$  می‌باشند، این توزیع منحصرأً توسط یک عدد یعنی  $T$  مشخص می‌شود [1].

مدل جنبشی: در پلاسما های با دمای کم و چگالی بالا برخوردها اهمیت بیشتری پیدا می کنند و توزیع سرعت ماکسولی از عهده ی تشریح مسائل بر نمی آید در نتیجه توزیع را با ابعاد بیشتر و در انواع دیگری توصیف می کنند معادلات ولاسوف<sup>۲۸</sup> و فوکر پلانک<sup>۲۹</sup>، معادلات حرکت در این مدل را در برمی گیرند. ذرات تشدید ی (ذراتی که سرعت آنها با سرعت فاز برابر است) و میرائی لاندائو<sup>۳۰</sup> در این مدل توصیفی بررسی می شود متغیر های وابسته در این مدل بیشتر از مدل سیالی می باشند.

### ۳-۲-۱ بررسی مدل سیالی در پلاسما

می دانیم که پلاسما یک محیط بسیار پیچیده می باشد که در آن نیروهای مختلف، میدانهای متفاوت، امواج و... وجود دارند. میدان های  $B, E$  معین نیستند و به وسیله ی موقعیت ها و حرکت بارها تعیین می شوند. در واقع در اینجا با یک مساله خودسازگار سرو کار داریم که باید آن را حل کنیم، یعنی باید چنان مجموعه ای از مسیرهای ذرات و طرح های میدان را پیدا کرد که ذرات به هنگام حرکت بر روی مداراتشان، آن میدانها را به وجود آورند و میدانها نیز سبب حرکت ذرات بر روی آن مدارات دقیق گردند. همچنین این امر باید در شرایطی که زمان هم تغییر می کند صورت گیرد.

چگالی یک پلاسمای نوعی ممکن است در حدود  $10^{12}$  جفت یون الکترون بر  $cm^3$  باشد. اگر هر کدام از این ذرات مسیر پیچیده ای را طی کند و پیگیری هر کدام از این ذرات ضروری باشد، امیدی بر پیشگویی رفتار پلاسما وجود ندارد. خوشبختانه، این پیگیری همیشه لازم نیست، زیرا می توان گفت اکثریت و حتی حدود ۸۰ درصد پدیده های پلاسما هایی که در آزمایشهای واقعی مشاهده می شوند را می توان توسط یک

<sup>28</sup> -Velasov

<sup>29</sup> -Fokker-Planck

<sup>30</sup> - یکی از مشخصات پلاسماهای بی برخورد است. توضیح بیشتر آن در کتاب مقدمه ای بر فیزیک پلاسما، اف. چن آمده است

مدل نسبتاً خام تشریح کرد. این مدل در مکانیک سیالات کاربرد دارد. که در آن از هویت و رفتار یک ذره‌ی تنها صرف نظر شده و فقط حرکت عناصر سیال بررسی می‌شود. البته در حالت پلاسما، سیال مشتمل بر الکترون و یون می‌باشد. در یک سیال معمولی، ذرات در اثر برخوردهای متعدد بین خودشان، در یک عنصر سیال نگه داشته شده و با هم حرکت می‌کنند. با کمال تعجب، یک چنین مدلی در پلاسما ها که برخوردهای کمتری در آن ها اتفاق می‌افتد نیز کاربرد دارد. البته دلایلی نیز برای این اتفاق وجود دارد که بعداً به آن اشاره خواهیم کرد.

### ۳-۲-۱-۱ معادله‌ی حرکت سیال

معادلات ماکسول،  $E$  و  $B$  مربوط به یک حالت معین از پلاسما را به ما می‌دهند. برای حل مسأله‌ی خود سازگار، لازم است که معادله‌ای هم داشته باشیم که پاسخ پلاسما را به  $E$  و  $B$  معین بدهد. در تقریب سیالی پلاسما را متشکل از دو یا چند سیال به هم نفوذ کننده<sup>۳۱</sup>، که هر کدام مربوط به یک ذره است، در نظر می‌گیرند. در ساده ترین حالت که فقط یک نوع یون وجود دارد به دو معادله‌ی حرکت نیاز داریم، یکی برای سیال یونهای باردار مثبت، و دیگری مربوط به سیال مربوط به الکترونهای باردار منفی. در یک گازی که به صورت جزئی یونیزه است به یک معادله‌ی دیگر برای سیال مربوط به اتم های خنثی نیز نیازمند خواهیم بود. سیال خنثی فقط از طریق برخوردها با یونها و الکترونها وارد برهم کنش می‌شود. درحالیکه، سیالات مربوط به یونها و الکترونها حتی در غیاب هر نوع برخورد، به علت میدانهای  $E$  و  $B$  که خود به وجود می‌آورند، با هم وارد برهم کنش می‌شوند.

برای بدست آوردن معادله‌ی حرکت سیال ابتدا معادله‌ی حرکت یک ذره‌ی تنها رامی نویسیم:

---

<sup>31</sup> -Interpenetrating Fluids



$$m \frac{dv}{dt} = q(E + v \times B) \quad (۱-۳)$$

سپس دوطرف این معادله را در چگالی  $n$  ضرب کرده و معادله‌ی سیال را بدست می‌آوریم. البته این معادله شکل مناسبی برای بکارگیری نیست. پس در این معادله مشتق زمانی در چارچوبی گرفته می‌شود که با ذره در حرکت است. همچنین برای قابل قبول شدن این معادله برای عناصر سیال، آن را در فضای ثابت در نظر می‌گیریم. بدین صورت که فرض می‌کنیم عنصری از سیال در محل ثابتی از کل فضا قرار دارد و علی‌رغم اینکه ذراتی مرتباً به آن وارد یا از آن خارج می‌شوند، هویت خود را حفظ می‌کند. این تغییر خاصیت، بازمان در چارچوب متحرک با سیال، را مشتق همرفتی<sup>۳۲</sup> می‌نامند و به صورت زیر در معادله‌ی حرکت ظاهر می‌شود:

$$mn \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right] = qn \cdot (E + v \times B) \quad (۲-۳)$$

که در آن  $(u \cdot \nabla)u$  نمایانگر تغییری در یک نقطه‌ی ثابت در فضای سه بعدی است و  $\frac{\partial u}{\partial t}$  نشانگر تغییر خاصیت عنصر از دیدگاه ناظر می‌باشد (البته این عبارت مشتق زمانی نسبت به یک چارچوب ثابت است).

در ادامه وقتی حرکات حرارتی و برخوردها و... را نیز در نظر بگیریم عباراتی مثل گرادیان فشار  $-\nabla p$  برای سیال‌های همسانگرد و تانسور تنش برای سیالات ناهمسانگرد و همچنین عبارت  $mn \frac{(u-u_0)}{\tau}$  برای زمانی که گاز خنثائی وجود داشته باشد که سیال باردار از طریق برخوردها با آن مبادله‌ی اندازه حرکت می‌کند، به طرف دوم معادله‌ی حرکت سیال افزوده می‌شوند.

---

<sup>32</sup> -Convective Derivative

### ۲-۱-۲-۳ معادله‌ی پیوستگی

قانون بقای ماده ایجاب می‌کند که تعداد کل ذرات  $N$  در یک حجم  $V$  فقط وقتی قابل تغییر است که شار خالصی از ذرات از سطح محصور کننده‌ی  $S$  وجود داشته باشد. با توجه به اینکه چگالی شار ذرات  $nu$  است و بنابر قضیه‌ی استوکس برای هر حجم  $V$  داریم:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \int_V \frac{\partial n}{\partial t} dV = - \oint u \cdot dS = \int_V \nabla \cdot (nu) dv \quad (۳-۳)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0 \quad (۴-۳)$$

این معادله مربوط به یکی از انواع ذره است و هرنوع نشت (اتلاف) یا منبع باید به طرف راست آن اضافه شود.

معادله‌ی بعدی معادله‌ی حالت است که برای تکمیل مجموعه معادلات لازم است. برای این منظور می‌توان از معادله‌ی حالت ترمودینامیکی که  $p$  را به  $n$  مربوط می‌سازد استفاده کرد پس معادله‌ی حالت را به صورت زیر داریم:

$$P = C\rho^\gamma \quad (۵-۳)$$

که در آن  $C$  یک ثابت و  $\gamma$  نسبت گرماهای ویژه  $C_p/C_v$  است.

### ۳-۳ رابطه فیزیک پلاسما و الکترو مغناطیس

#### ۱-۳-۳ معادلات ماکسول

$$\epsilon_0 \nabla \cdot E = \sigma \quad (۶-۳)$$

$$\nabla \times E = -\dot{B} \quad (۷-۳)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (۸-۳)$$

$$\nabla \times B = \mu_0(j + \varepsilon_0 \dot{E}) \quad (۹-۳)$$

در فیزیک پلاسما عموماً با (۳-۱) و (۳-۴) معادلات خلاء که در آنها  $j$  و  $\sigma$  شامل تمام بارها و جریانهای داخلی و خارجی می‌باشند کار می‌کنند [1]. در ضمن در معادلات خلاء از  $B, E$  بخاطر

وابستگی نیروهای  $qE$  و  $j \times E$  استفاده می‌شود تا معادل های آنها یعنی  $H$  و  $D$  [1] .

در ادامه می‌توانیم بگوئیم که، با توجه به برخی روابط که در اینجا مجال اشاره به آنها را نداریم. پلاسما یک محیط مغناطیسی نیست. در مورد میدانهای الکتریکی که توسط جریان بار به وجود می‌آیند نیز می‌توانیم بگوئیم که این میدانها اختلافات زیادی با میدانهای اعمال شده‌ی خارجی دارند. می‌توان اینچنین تشریح کرد که یک پلاسما با ثابت دی الکتریک  $\varepsilon$  بزرگ در مقابل میدانهای متناوب یک حفاظ تشکیل می‌دهد. درست نظیر پلاسما هایی با  $\lambda_D$  کوچک که حفاظی در میدان dc ایجاد می‌کند.

که در اینجا ثابت دی الکتریک  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{\rho}{B^2}$  یا  $\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{j_p}{E}$  بوده و  $\hat{j}_p$  در این معادله همان جریان قطبشی است که در صورت نبود میدان الکتریکی در پلاسما، ظاهر نمی‌شود.

### ۳-۴ مگنتو هیدرو دینامیک

مگنتو هیدرو دینامیک یا به بیان کوتاهتر  $MHD$ ، رفتار ماکروسکوپی یک سیال معمولی رسانای الکتریکی یا یک گاز یونیده می‌باشد، که پلاسما نامیده می‌شود. ماکروسکوپی به این معنی که مقیاس فضایی بزرگتر از مقیاس طول ذاتی<sup>۳۳</sup> پلاسما است، مانند طول دبای<sup>۳۴</sup>  $\lambda_D$  و شعاع لارمور<sup>۳۵</sup>  $\rho_j$  ذرات باردار [4].

<sup>33</sup> -Intrinsic Scale Length of the Plasma

<sup>34</sup> -Debye length

<sup>35</sup> -Larmor radii

### ۳-۴-۱ معادلات مگنتو هیدرودینامیک

همانطور که قبل نیز اشاره شد بدلیل اینکه دنبال کردن مسیر تک تک ذرات امکان پذیر نیست جنبه‌ی سیالی پلاسما در نظر گرفته می‌شود، معادلات حرکت و پیوستگی همراه با معادلات ماکسول یک مجموعه‌ی خودسازگار را تشکیل می‌دهند. در یک پلاسمای چند مولفه ای یعنی پلاسمایی که شامل یون، الکترون، و ذرات گرد و غبار<sup>۳۶</sup> می‌باشد، معادلات حرکت را می‌توان بطور جداگانه برای هر کدام از مولفه ها نوشت. یون، الکترون و گردوغبار سیال هایی هستند که بدلیل میدان‌های  $E$  و  $B$  که توسط خودشان تولید می‌شوند، برهم کنش می‌کنند. برهم کنش های الکترومغناطیسی که در یک مقیاس ماکروسکوپیک بسط داده می‌شوند اول از همه ظهور یک مجموعه ای از نوسانات را نشان می‌دهند که یک تعداد بسیار زیادی از ذرات به طور همزمان در آن شرکت دارند. برای سادگی کار با ترکیب معادلات حرکت یون و الکترون می‌توان به معادلات ساده شده‌ای که نشان دهنده‌ی یک سیال تنها با چگالی جرمی و هدایت ویژه‌ی معین است، رسید. به این معادلات، معادلات  $MHD$  گفته می‌شود که یک مجموعه ای از معادلات با مشتقات جزئی هستند.

برای بدست آوردن مجموعه معادلات  $MHD$  بجای اینکه  $v_i$  سرعت یون و  $v_e$  سرعت الکترون بطور جداگانه مجهول باشند،  $v_i - v_e$  مجهول خواهد بود. در این صورت پلاسما نه به عنوان ترکیبی از دو سیال بلکه به عنوان یک سیال تنها در نظر گرفته می‌شود که این همان چارچوب مگنتو هیدرودینامیک می‌باشد. برای یک پلاسمای شبه خنثی با یون های تک باردار می‌توانیم چگالی جرمی  $\rho$  و سرعت جرمی  $v$  و جریان  $j$  را مطابق زیر تعریف می‌کنیم:

$$\rho = n_i M + n_e m \approx n(M + m) \quad (۳-۱۰)$$

<sup>36</sup> - dust

$$v = \frac{1}{\rho} (n_i M v_i + n_e m v_e) \cong \frac{M v_i + m v_e}{M + m} \quad (۱۱-۳)$$

$$j = e(n_i v_i + n_e v_e) \cong ne(v_i - v_e) \quad (۱۲-۳)$$

معادلات پیوستگی برای جرم  $\rho$  و بار  $\sigma$  را می‌توان از جمع و تفریق معادلات پیوستگی یون و الکترون بدست آورد. در این صورت مجموعه معادلات  $MHD$  مطابق زیر خواهد بود:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = j \times B - \nabla p + \rho g \quad (۱۳-۳)$$

$$E + v \times B = \eta j \quad (۱۴-۳)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (۱۵-۳)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \nabla \cdot j = 0 \quad (۱۶-۳)$$

این مجموعه معادلات، همراه با معادلات ماکسول اغلب برای توصیف حالت تعادل پلاسما به کار می‌روند. همچنین می‌توان از آن برای امواج پلاسما استفاده کرد ولی دقتش بطور قابل ملاحظه ای از معادلات دوسیالی کمتر است. در مسائلی که مشتمل بر مقاومت ویژه است سادگی معادلات  $MHD$  بر معایب آن می‌چربد. معادلات  $MHD$  به طور گسترده توسط متخصصین نجوم در الکتروپلاسمیک کیهانی، متخصصین هیدروپلاسمیک در تبدیل انرژی  $MHD$  و متخصصین نظریه های همجوشی در بررسی اشکال مغناطیسی پیچیده بکار برده می‌شود [1].

### ۳-۵ ناپایداری مگنتو هیدروپلاسمیک

در بررسی امواج پلاسما حالت غیر اختلالی یک حالت تعادل ترمودینامیکی کامل محسوب می‌شود. در این حالت ذرات توزیع ماکسولی دارند و چگالی و میدان مغناطیسی یکنواخت می‌باشد. همچنین، در چنین حالتی آنتروپی بیشترین مقدار را دارد. هیچگونه انرژی آزادی برای برانگیختن امواج وجود ندارد و ما مجبوریم امواجی را در نظر بگیریم که توسط عوامل خارجی

برانگیخته می‌شوند. اکنون حالاتی را در نظر می‌گیریم که در تعادل ترمودینامیکی کامل نیستند هر چند از لحاظ وجود موازنه بین تمامی نیروها و داشتن جواب مستقل از زمان در حال تعادل هستند. انرژی آزاد موجود می‌تواند سبب خود برانگیختگی امواج گردد بنابراین تعادل یک تعادل ناپایدار می‌باشد. ناپایداری همیشه حرکتی است که انرژی آزاد را کاهش داده و پلاسما را به تعادل ترمودینامیکی واقعی نزدیکتر می‌سازد [3].

### ۳-۶ معادلات مگنتوهیدرودینامیک کوانتومی

در شرایط واقعی یک سیستم سیالی می‌تواند به اثراتی مانند برخوردها، حرکت دورانی سیستم، اندازه و جهت میدان مغناطیسی، ضرایب پخش یا همان ویسکوزیته جنبشی، پخش گرمایی، پخش مغناطیسی و اخیراً هم به اثرات کوانتومی وابسته باشد. بنابراین بسیار شایسته است که مجموعه معادلات حاکم بر سیال مغناطیده را در مدل مگنتو هیدرودینامیک  $MHD$  بنویسیم.

### ۳-۷ سیال مگنتو هیدرو دینامیک در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی

معادلات مگنتوهیدرودینامیک هفت متغیر مستقل دینامیکی که عبارتند از سه مولفه‌ی سرعت دو مولفه‌ی میدان (به خاطر  $\nabla \cdot B = 0$ ) و چگالی و فشار، را در بر می‌گیرند. برای یک پلاسمای همگن و همسانگرد مجموع معادلات به چهار معادله کاهش می‌یابد دو مولفه‌ی سرعت (به خاطر  $\nabla \cdot v = 0$ ) و دو مولفه‌ی میدان مغناطیسی. یک میدان مغناطیسی قوی  $B_z$  اعمال شده به پلاسما منجر به کاهش معادلات مگنتو هیدرودینامیک می‌شود.

# فصل چهارم:

بررسی ناپایداری ریلی تیلور

در حضور و یا عدم حضور میدان

مغناطیسی خارجی

## فصل ۴: بررسی ناپایداری ریلی تیلور در حضور میدان مغناطیسی خارجی

### ۴-۱ مقدمه

در این فصل به بررسی معادلات حاکم بر پلاسمای مغناطیده کوانتومی در محیط متخلخل، ابتدا در غیاب و سپس در حضور میدان مغناطیسی خارجی پرداخته ایم و سپس تاثیر هر کدام از پارامتر های میدان مغناطیسی، اثرات کوانتومی، تخلخل و نفوذ پذیری روی نرخ رشد ناپایداری ریلی تیلور پلاسمای لایه ای را بطور جداگانه بررسی می کنیم.

### ۴-۲ بررسی پلاسمای مغناطیده ی کوانتومی در غیاب میدان مغناطیسی خارجی $B = 0$

در اینجا ابتدا به تعاریفی از کلماتی که در این بخش استفاده کرده ایم می پردازیم:

**پلاسمای مغناطیده:** یک پلاسمای مغناطیده، پلاسمایی است که میدان مغناطیسی محیط،  $B$  در آن بسیار قوی بوده و بطور قابل توجهی مسیر ذرات را عوض می کند. به عبارت بهتر در این نوع پلاسمای ها الکترون ها مغناطیده اند در حالیکه، یونها این خاصیت را ندارند. بطور خاص می توان گفت، پلاسمای مغناطیده نا همسانگرد است. به این معنی که، پاسخ متفاوتی به نیروهایی که عمود و موازی بر جهت میدان مغناطیسی هستند، می دهد. توجه داشته باشید که پلاسمای مغناطیده با سرعت متوسط  $u$  حرکت کرده و شامل میدان الکتریکی  $E = u \times B$  است، که تحت تاثیر حفاظ دبای قرار نمی گیرد. البته، در چارچوب ساکن میدان الکتریکی اساسا صفر است.

**پلاسمای کوانتومی:** همانطور که در فصل اول به طور کلی به آن پرداختیم در اینجا نیز توضیح مختصری درباره پلاسمای کوانتومی ارائه می دهیم. تمام ذرات در این نوع پلاسمای ها در سطح فرمی قرار می گیرند و کاملاً تبهگن هستند. همچنین ذرات در دماهای نسبتاً پایین و چگالی های



بالا تبهگن می‌شوند. توزیع سرعت در این نوع از پلاسما ها به صورت توزیع فرمی-دیراک می-باشد. زمانی که چگالی زیاد باشد فاصله‌ی بین ذرات باطول موج گرمایی دوبروی توصیف می-شود. پارامتر جفت شدگی در این نوع پلاسما ها بیشتر از یک بوده و از نوع پلاسما های برخوردی هستند مانند کوتوله های سفید.

**محیط متخلخل:** در حالت عادی تخلخل یا کسر تهی، مقیاسی از تهی (یعنی خالی) بودن، یا همان فاصله در مواد را گویند. مواد شامل این کسر تهی را یک محیط متخلخل می‌نامند. اسکلت‌بندی<sup>۳۷</sup> مواد معمولاً بصورت جامد می‌باشد و برای محیط متخلخل "فوم" می‌تواند مثال جالبی می‌باشد. رفتار سیال در محیط متخلخل به صورت جریان یافتن در خلل و فرج محیط می‌باشد. مشاهده شده که، قسمتی از سیال در محیط جریان می‌یابد در حالیکه قسمتی از آن در خلل و فرج های محیط ذخیره می‌شود.

**نفوذپذیری** (که معمولاً با نماد  $K$  نمایش داده می‌شود): در مکانیک سیالات و علوم زمین، مقیاسی از توانایی یک ماده‌ی متخلخل برای عبور مایعات از درون آن را گویند. نفوذپذیری یک سیستم نه تنها به تخلخل آن، بلکه به شکل خلل و فرج محیط و سطح ارتباط آنها نیز وابسته است. ابتدا یک پلاسما ی مغناطیده کوانتومی در محیط متخلخل و در غیاب میدان مغناطیسی خارجی را بررسی کرده و در ادامه به مطالعه‌ی یک پلاسما با همان شرایط ولی اینبار در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی می‌پردازیم.

## ۴-۲-۱ معادلات حاکم و آشفته‌گی های خطی

---

<sup>37</sup>-Skeletal

با معادلاتی برای حرکت و مومنتوم در پلاسمای کوانتومی بعنوان سیالی متشکل از یونهای ثابت و الکترونها در محیط متخلخل شروع می‌کنیم [6]:

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{u}{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \right) u = -\nabla P + \rho g - \frac{\mu}{k_1} u + Q \quad (1-4)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (2-4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{u}{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \right) \rho = 0 \quad (3-4)$$

که  $u = (u_x, u_y, u_z)$  سرعت /ست،  $\rho$  چگالی،  $P$  فشارحرارتی،  $g$  شتاب گرانشی،  $\mu$  چسبندگی (ویسکوزیته‌ی) سیال،  $\frac{1}{k_1}$  نفوذپذیری محیط و  $\varepsilon$  تخلخل می‌باشند، که در آن  $(0 < \varepsilon < 1)$  است. توجه کنید که وقتی  $\varepsilon \rightarrow 1$  و  $k_1 \rightarrow \infty$  سیستم (معادله‌ی) مربوط به یک محیط بدون تخلخل بدست می‌آید، اثرات کوانتومی  $Q$  که در معادله‌ی (1-4) وارد شده، بوسیله‌ی عبارت پتانسیل بوهیم

$Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \rho \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)$  نمایش داده می‌شود که در آن ثابت پلانک،  $m_i$  جرم یون و  $m_e$  جرم الکترون می‌باشند.

حال آشفتگی کوچکی به سیستم اعمال می‌کنیم، که آشفتگی در آن با سرعت  $u$  فشارحرارتی  $P$ ، ویسکوزیته‌ی  $\mu$ ، فشار کوانتومی  $Q$  و چگالی  $\rho$  می‌باشد که به ترتیب به صورت  $u = u_1(x, y, z)$

$$Q = Q_0 + Q_1 \text{ و } \rho = \rho_0(z) + \rho_1(x, y, z), \mu = \mu_0(z) + \mu_1(x, y, z), P = P_0(z) + P_1(x, y, z),$$

هستند. پس معادلات خطی شده براحتی از معادلات (1-4) تا (3-4) به فرم زیراستخراج می‌شوند:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{\partial u_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \rho_1 g - \frac{\mu_0}{k_1} u_1 + Q_1 \quad (4-4)$$

$$\nabla \cdot u_1 = 0 \quad (5-4)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \left( \frac{u_1}{\varepsilon} \cdot \nabla \right) \rho_0 = 0 \quad (۶-۴)$$

همچنین بعد از خطی سازی عبارت کوانتومی به معادله زیر می‌رسیم:

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \left[ \frac{1}{2} \nabla (\nabla^2 \rho_1) - \frac{1}{2\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_0 \frac{1}{2\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_1 + \right. \\ \left. \frac{\rho_1}{2\rho_0^2} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_0 - \frac{1}{2\rho_0} \nabla (\nabla \rho_0 \cdot \nabla \rho_1) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} \nabla (\nabla \rho_0)^2 + \frac{1}{2\rho_0^2} \nabla \rho_1 (\nabla \rho_0)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 (\nabla \rho_0 \cdot \nabla \rho_1) - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} (\nabla \rho_0)^3 \right] \quad (۷-۴)$$

اکنون،  $u = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$  و  $\mu_0 = \rho_0 v_0$  که  $v_0$  چسبندگی می‌باشد

$Q_1 = (Q_{1x}, Q_{1y}, Q_{1z})$  و  $g = (0, 0, -g)$  را جایگذاری می‌کنیم. توجه به این نکته که مرز

سیال و میدان مغناطیسی در صفحه  $(x, y)$  قرار دارد و اینکه  $\rho_0$  تنها تابعی از مختصات عمودی

$z$  بصورت  $\rho_0 = \rho_0(z)$  می‌باشد، ضروری است. در هر حال سیستمی از معادلات (۴-۴) تا

(۷-۴) را بصورت تجزیه مولفه‌ای شده‌ی زیر بدست می‌آوریم:

از معادله‌ی (۴-۴) داریم:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{1x} = - \frac{\partial P_1}{\partial x} + Q_{1x} \quad (۸-۴)$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{1y} = - \frac{\partial P_1}{\partial x} + Q_{1y} \quad (۹-۴)$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{1z} = - \frac{\partial P_1}{\partial x} - \rho_1 g + Q_{1z} \quad (۱۰-۴)$$

همچنین از معادله‌ی (۵-۴)

$$\frac{\partial u_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = 0 \quad (۱۱-۴)$$

و از معادله‌ی (۶-۴) و با توجه به  $\rho_0 = \rho_0(z)$  داریم:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} u_{1z} \frac{d\rho_0(z)}{dz} = 0 \quad (۱۲-۴)$$

همچنین از تجزیه مولفه ای معادله (۷-۴) داریم:

$$Q_{x1} = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d\rho_1}{dz} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \rho_1 \right] \quad (۱۳-۴)$$

از آنجائیکه  $\rho_0$  در جهت  $y$  هم مولفه ندارد بنابراین این مولفه نیز مثل  $x$  بدست می آید.

$$Q_{y1} = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d\rho_1}{dz} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \rho_1 \right] \quad (۱۴-۴)$$

در نهایت با توجه به این فرض که  $\rho_0$  تنها در جهت  $z$  وجود دارد مولفه  $y$  از این معادله را نیز بدست می آوریم:

$$Q_{z1} = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left[ \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_1}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \frac{d\rho_1}{dz} - \left[ \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right] \rho_1 \right] \quad (۱۵-۴)$$

در اینجا جواب معادلات (۸-۴) تا (۱۲-۴) که به مختصات  $(x, y, z)$  و زمان  $t$  وابسته هستند، را جستجو

می کنیم. این جواب می تواند به فرم

$$\exp(ik_x x + ik_y y - \omega t) \quad (۱۶-۴)$$

باشد، که در آن  $k_x$  و  $k_y$  مولفه های افقی عدد موج بردار  $\vec{k}$  هستند، چنان که  $k^2$  بصورت  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

می‌باشد. و  $\omega$  فرکانس اختلال، یا همان عاملی است که سیستم را از حالت تعادل به سمت حالت اولیه نزدیک می‌کند (فرکانس ممکن است موهومی نیز باشد  $\omega = \omega_r + i\gamma$ ). از معادله‌ی (۴-۱۶) در سیستم معادلات (۴-۸) تا (۴-۱۲) استفاده کرده، داریم:

با استفاده از معادله‌ی (۴-۸) داریم:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{x1} = -ik_x P_1 + \bar{Q}_{x1} \quad (۴-۱۷)$$

و بهمین ترتیب از معادله‌ی (۴-۹) معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{y1} = -ik_x P_1 + \bar{Q}_{y1} \quad (۴-۱۸)$$

و برای مولفه‌ی z

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{z1} = -\frac{\partial P_1}{\partial z} - \rho_1 g + \bar{Q}_{z1} \quad (۴-۱۹)$$

$$ik_x u_{x1} + ik_y u_{y1} + \frac{\partial u_{1z}}{\partial z} = 0 \quad (۴-۲۰)$$

$$-i\omega \rho_1 + \frac{1}{\varepsilon} u_{z1} \frac{d\rho_0(z)}{dz} = 0 \quad (۴-۲۱)$$

که از اینجا می‌توانیم  $\rho_1$  را بدست آوریم و در مولفه‌های  $Q_1$  جایگزین کرده به معادلات زیر برسیم:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{x1} = \frac{\hbar^2 k_x}{2m_i m_e \varepsilon \omega} & \left[ \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{z1}}{dz^2} \frac{d\rho_0}{dz} + \left[ \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \frac{du_{z1}}{dz} + \right. \\ & \left. \left[ \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{k^2}{2} \frac{d\rho_0(z)}{dz} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right] u_{z1} \right] \end{aligned} \quad (۴-۲۲)$$

$$\bar{Q}_{y1} = \frac{k_y}{k_x} \bar{Q}_{x1} \quad (۴-۲۳)$$

$$\bar{Q}_{z1} = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e i \varepsilon \omega} \left[ \frac{1}{2} \frac{d^3 U_z}{dz^3} \frac{d\rho_0}{dz} + \left\{ \frac{3}{2} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right\} \frac{d^2 u_{z1}}{dz^2} + \right. \\ \left. \left[ \frac{3}{2} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \frac{3}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{k^2}{2} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right] \frac{du_{z1}}{dz} + \left[ \frac{1}{2} \frac{d^4 \rho_0}{dz^4} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right) \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{k^2}{2} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right)^2 + \frac{5}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^4 \right] u_{z1} \right] \quad (24-4)$$

حال، با انجام عملیات ریاضی و حذف برخی از متغیرها از مولفه‌ی  $z$  معادلات بالا، از معادله‌ی زیر نیز استفاده می‌کنیم:

$$\omega' = \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - i\omega \right\} \quad (25-4)$$

و بدین ترتیب یک معادله دیفرانسیل برای  $u_{1z}$  بدست می‌آوریم:

$$\left[ \rho_0 \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' + k^2 A \right] \frac{d^2 u_{z1}}{dz^2} + \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right) + \right. \\ \left. k^2 B \right] \frac{du_{z1}}{dz} - k^2 \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - (C - g) \frac{d\rho_0}{dz} \right] u_{z1} = 0 \quad (26-4)$$

که در آن

$$A = -\frac{\hbar^2}{4m_i m_e \rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2, \quad B = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e \rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left\{ \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 - 2\rho_0 \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right\}, \\ C = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e \rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right) \quad (27-4)$$

$\varepsilon \rightarrow 1$  و  $k_1 \rightarrow \infty$  تنظیم می‌کنیم (مورد محیط نامتخلخل)، معادله‌ی (۲۶-۴) یک معادله دیفرانسیل

مرتبه‌ی دوم در جهت  $y$ ، در غیاب میدان مغناطیسی می‌باشد.

## ۲-۲-۴ رابطه‌ی پاشندگی و نرخ رشد

برای یک لایه با ضخامت محدود از یک پلاسمای تراکم ناپذیر که درون محیط متخلخل

مرزبندی شده و از مرز مشترک دیگری بوسیله‌ی یک مرز سخت (صلب) در  $z = 0, z = h$

مرزبندی شده است، فرض می‌کنیم  $\rho_0(z) = \rho_0(0)\exp(\frac{z}{L_D})$  می‌باشد، که  $L_D$  مقیاس شدت

چگالی است. پس از اعمال شرایط مذکور معادله‌ی (۴-۲۶) فرم زیر را به خود می‌گیرد:

$$\left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \frac{d^2 u_{z1}}{dz^2} + \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \frac{du_{z1}}{dz} - k^2 \left\{ \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] + g \frac{1}{L_D} \right\} u_{z1} = 0 \quad (۴-۲۸)$$

در آن  $\omega_q^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{4m_i m_e} \left(\frac{1}{L_D}\right)^2$  را جایگذاری کرده ایم و  $m_i$  و  $m_e$  به ترتیب جرم الکترون و یون بوده و  $L_D$

مقیاس سنجش شدت چگالی است. حال جواب عمومی بصورت  $u_{z1} = \sin(\frac{n\pi}{h}z)\exp(\lambda z)$  را برای معادله‌ی

(۴-۲۸) حدس زده و در داخل این معادله جایگذاری می‌کنیم، رابطه‌ی پاشندگی به شکل زیر بدست می‌-

آید:

$$\omega'^2 - \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \omega' + \left[ \omega_q^2 - \frac{h^2 4k^2 g L_D}{n^2 \pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2} \right] = 0 \quad (۴-۲۹)$$

می‌توان رابطه‌ی پاشندگی را مانند یک معادله درجه دو در نظر گرفته وجواب های آن را از روش دلتا

بدست آورد:

$$\omega' = \frac{\varepsilon v_0}{2k_1} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon v_0}{2k_1}\right)^2 - \left(\omega_q^2 - \frac{h^2 4k^2 g L_D}{n^2 \pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2}\right)} \quad (۴-۳۰)$$

با استفاده از تعریف (۴-۲۵) چون می‌خواهیم قسمت موهومی این معادله را بدست آوریم داریم:

$$\omega = i\omega' - \frac{i\varepsilon v_0}{k_1}$$

$$\omega = i \left\{ -\frac{\varepsilon v_0}{2k_1} \mp \sqrt{\left(\frac{\varepsilon v_0}{k_1}\right)^2 - \left(\omega_q^2 - \frac{h^2 4k^2 g L_D}{n^2 \pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2}\right)} \right\} \quad (۴-۳۱)$$

حال کمیت های بی بعد را معرفی می‌کنیم :

$$h^{*2} = \frac{\hbar^2}{L_D^2}, k^{*2} = k^2 L_D^2, g^* = \frac{g}{\omega_{pe}^2 L_D}, \omega^* = \frac{\omega}{\omega_{pe}},$$

$$\omega_q^{*2} = \frac{\hbar^2}{4m_e m_i \omega_{pe}^2 L_D^4}, \omega_\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2\omega_{pe}}, \omega_{v_0}^* = \frac{v_0}{L_D \omega_{pe}}, \omega_{k_1}^* = \frac{k}{k_1 \omega_{pe}}$$

$\omega_{pe} = (\frac{\rho_0 e^2}{m_e^2 \varepsilon_0})^{1/2}$  فرکانس پلاسما است در نتیجه معادله‌ی (۴-۳۱) بصورت بی بعد اینچنین بدست می-آید:

$$\omega^* = i \left\{ -\frac{\omega_\varepsilon^* \omega_{v_0}^*}{\omega_{k_1}^*} k^* \mp \sqrt{\frac{\omega_\varepsilon^{*2} \omega_{v_0}^{*2}}{\omega_{k_1}^{*2}} k^{*2} - (\omega_q^{*2} k^{*2} - \frac{4h^{*2} k^{*2} g^*}{h^{*2} + 4n^2 \pi^2 + 4h^{*2} k^{*2}})} \right\} \quad (۴-۳۲)$$

فرکانس مجموعی از یک بخش حقیقی و یک بخش موهومی است  $\omega = \omega_r + i\gamma$  در اینجا برای بدست

آوردن نرخ رشد باید بخش موهومی فرکانس را بدست آوریم:

$$\omega^* = i\gamma, \quad \gamma = \frac{\omega^*}{i}$$

$$\gamma = \frac{\omega_\varepsilon^* \omega_{v_0}^*}{\omega_{k_1}^*} k^* \pm \sqrt{\frac{\omega_\varepsilon^{*2} \omega_{v_0}^{*2}}{\omega_{k_1}^{*2}} k^{*2} - (\omega_q^{*2} k^{*2} - \frac{4h^{*2} k^{*2} g^*}{h^{*2} + 4n^2 \pi^2 + 4h^{*2} k^{*2}})}$$

بنابر این مجذور نرخ رشد نرمالایز شده بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\gamma^2 = \frac{2\omega_\varepsilon^{*2} \omega_{v_0}^{*2}}{\omega_{k_1}^{*2}} k^{*2} - \left( k^{*2} \omega_q^{*2} - \right. \quad (۴-۳۳)$$

$$\left. \frac{4h^{*2} k^{*2} g^*}{h^{*2} + 4n^2 \pi^2 + 4h^{*2} k^{*2}} \right) \mp 2 \frac{\omega_\varepsilon^* \omega_{v_0}^*}{\omega_{k_1}^*} k^* \sqrt{\frac{\omega_\varepsilon^{*2} \omega_{v_0}^{*2}}{\omega_{k_1}^{*2}} k^{*2} - \left( k^{*2} \omega_q^{*2} - \frac{4h^{*2} k^{*2} g^*}{h^{*2} + 4n^2 \pi^2 + 4h^{*2} k^{*2}} \right)}$$



### ۳-۴ موارد خاص

(i) در غیاب دو اثر کوانتومی و تخلخل معادله‌ی (۳۴-۴) بصورت زیر در می‌آید.

$$\gamma^2 = \frac{4h^{*2}k^{*2}g^*}{h^{*2}+4n^2\pi^2+4h^{*2}k^{*2}} \quad (۳۴-۴)$$

از معادله‌ی (۳۴-۴) واضح است که سیستم تنها متأثر از مجذور عدد موج نرمالایز شده خواهد بود، تا جایی که مجذور نرخ رشد نرمالایز شده با افزایش یا کاهش مقدار مجذور عدد موج نرمالایز شده تغییر می‌کند.

(ii) برای  $\omega_q^* \neq 0$  و محیط نامتخلخل معادله (۳۳-۳) بصورت زیر در می‌آید:

$$\gamma^2 = -\left(\omega_q^{*2}k^{*2} - \frac{4h^{*2}k^{*2}g^*}{h^{*2}+4n^2\pi^2+4h^{*2}k^{*2}}\right) \quad (۳۵-۴)$$

از معادله‌ی (۳۵-۴) در می‌یابیم که  $\frac{\partial \gamma^2}{\partial \omega_q^{*2}} = -k^{*2}$  می‌باشد این مطلب نشان می‌دهد که عبارت کوانتومی  $\omega_q^*$  سیستم مورد بررسی را پایدار می‌کند و این پایداری با افزایش  $\omega_q^*$  افزایش می‌یابد. همچنین از معادله‌ی (۳۵-۴) متوجه می‌شویم که  $\gamma^2$  برای همه‌ی اعداد موج بین رنج<sup>۳۸</sup>  $0 < k^{*2} < k_c^{*2}$  ناپایدار است و داریم:

$$k_c^{*2} = \left[ \frac{g^*}{\omega_q^{*2}} - \frac{1}{4} - \frac{n^2\pi^2}{h^{*2}} \right] \quad (۳۶-۴)$$

به هر حال  $\gamma^2$  برای همه‌ی مقادیر اختلال با  $k^{*2} < k_c^{*2}$  پایدار است ( $k_c^{*2}$  مقدار بحرانی برای پایداری است، توجه داشته باشید که  $k_c^*$  نرخ رشد را به سمت صفر می‌برد).

(iii) برای موردی که  $k \gg 1$  و  $n = 0$  باشد، می‌توانیم معادله‌ی (۴-۳۳) را به فرم زیر بنویسیم:

$$\gamma^2 = \frac{2\omega_\varepsilon^{*2}\omega_{v0}^{*2}}{\omega_{k1}^{*2}} k^{*2} - (\omega_q^{*2} k^{*2} - g^*) \mp \quad (۴-۳۷)$$

$$\left( \frac{2\omega_\varepsilon^* \omega_{v0}^*}{\omega_{k1}^*} k^* \right) \sqrt{\frac{\omega_\varepsilon^{*2} \omega_{v0}^{*2}}{\omega_{k1}^{*2}} k^{*2} - (\omega_q^{*2} k^{*2} - g^*)}$$

واضح است که، مربع نرمالایز شده‌ی نرخ رشد به ضخامت بی بعد ( $h^*$ ) در لایه مورد بررسی، وابسته نیست. برای محیط نامتخلخل ( $\omega_\varepsilon^* = 0$ ) معادله (۴-۳۷) ممکن است به فرم  $\gamma^2 + \omega_q^{*2} k^{*2} - g^* = 0$  نوشته شود، این نشان می‌دهد که، مربع نرخ رشد نرمالایز شده‌ی  $\gamma^2$  با مربع عدد موج نرمالایز شده‌ی  $k^{*2}$ ، بصورت خطی مرتبط است.

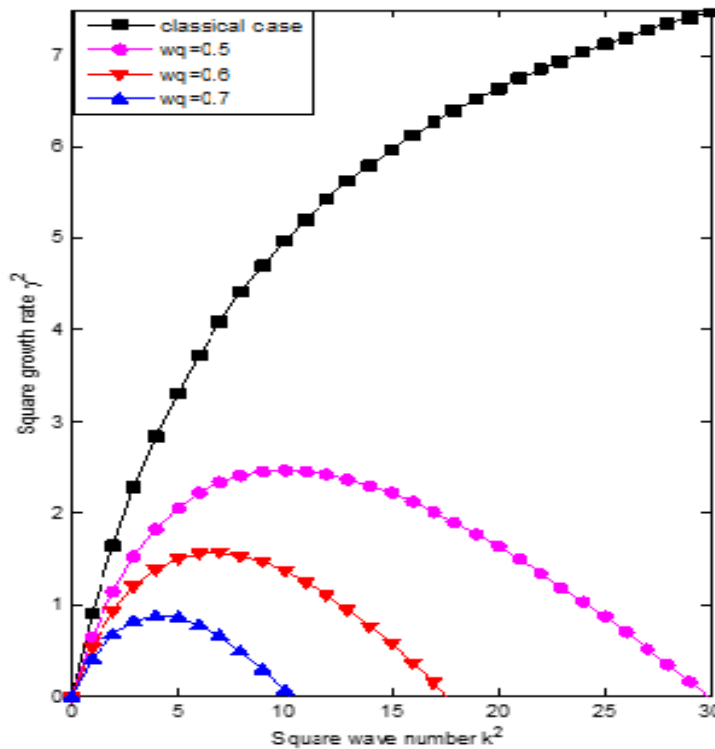
#### ۴-۴ بحث

حال، برای تحقیق اثر  $\omega_q^*$ ،  $\omega_\varepsilon^*$  (در اینجا اثر  $\omega_{v0}^*$  نیز شبیه اثر  $\omega_\varepsilon^*$  است) و  $\omega_{k1}^*$  روی سیستم مورد بررسی، مربع نرخ رشد نرمالایز شده (۴-۳۳) برای مقادارهای متفاوتی از پارامترهای فیزیکی بصورت عددی حل شده است. نتایج در شکل‌های (۴-۱) تا (۴-۵) نمایش داده شده است، که در آن مربع نرخ رشد نرمالایز شده‌ی  $\gamma^2$  بر حسب مربع عدد موج نرمالایز شده‌ی  $k^{*2}$  رسم شده است.

نقش عبارت کوانتومی به تنهایی روی سیستم در شکل (۴-۱) نشان داده شده است، در این شکل  $\gamma^2$  مربع نرخ رشد بی بعد<sup>۳۹</sup> شده بر حسب  $k^{*2}$  مربع عدد موج نرمالایز شده برای مقدار

<sup>39</sup> -Normalized

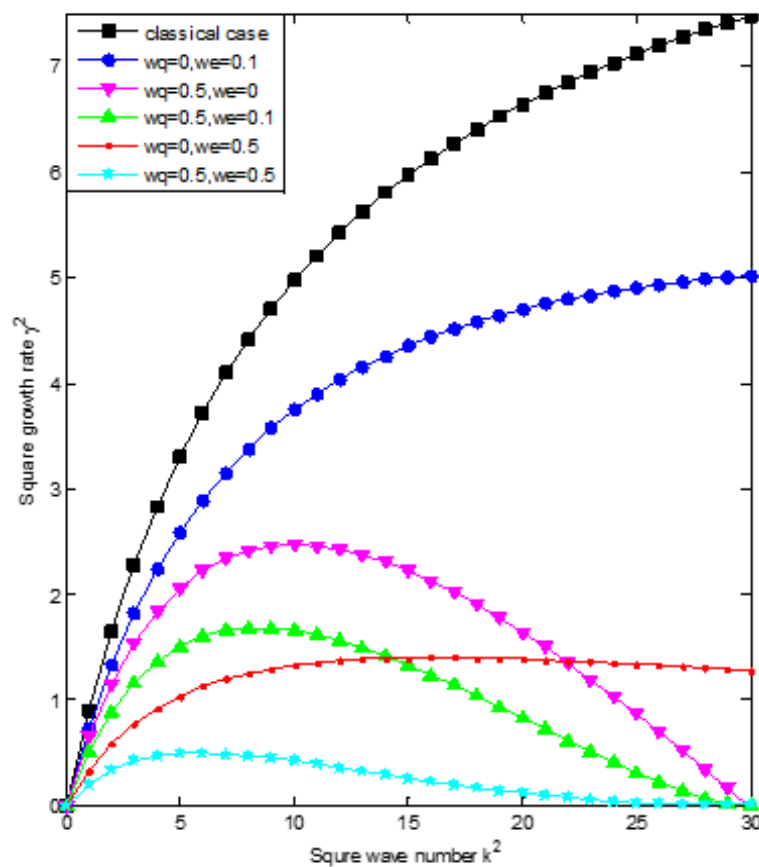
های متفاوتی از  $\omega_q^*$  ( $\omega_q^* = 0/5, 0/6, 0/7$ ) رسم شده است، با توجه به شکل (۴-۱)، می‌توان مشاهده کرد که، افزایش  $\omega_q^*$  موجب کاهش نرخ رشد ناپایداری ریلی تیلور می‌شود. این نشان می‌دهد که افزایش  $\omega_q^*$  منجر به پایداری بیشتر سیستم مطرح شده می‌گردد.



شکل ۴-۱. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  برحسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای مقادیر متفاوتی از  $(\omega_q^*=0, 0.5, 0.6, 0.7)$  با پارامترهای  $\omega_{v_0}^*=0$ ،  $\omega_\varepsilon^*=0$ ،  $\omega_{k_1}^*=1$ ،  $h^*=1$ ،  $n=1$  و  $g^*=10$

شکل (۴-۲) اثر تخلخل محیط ( $\omega_\varepsilon^*=0.1, 0.5$ ) روی ناپایداری ریلی تیلور برای سیستم مطرح شده در غیاب و حضور اثرات کوانتومی ( $\omega_q^*=0, 0.5$ ) برای  $\omega_{v_0}^*=1$  و  $\omega_{k_1}^*=1$  را نشان می‌دهد. مربع نرخ رشد نرمالایز شده  $\gamma^2$  برحسب مربع نرمالایز شده‌ی عدد موج  $k^2$  رسم شده است. همانطور که می‌بینیم، در غیاب اثرات کوانتومی ( $\omega_q^*=0$ ) و در حضور  $\omega_\varepsilon^*$  مقادیر  $\gamma^2$  کمتر از مقادیرشان در غیاب همزمان اثرات کوانتومی و  $\omega_\varepsilon^*$  می‌باشند (مورد کلاسیکی)، یعنی اینکه با افزایش  $\omega_\varepsilon^*$  مقادیر  $\gamma^2$  کاهش می‌یابند و این اثر اغلب برای عدد موج های بزرگ اتفاق می‌افتد.

در حضور اثرات کوانتومی ( $\omega_q^* = 0.5$ )، سیستم به سمت بیشترین ناپایداری در قله‌ها می‌رود و سپس به سمت مورد پایداری کامل در  $k_c^* = 30$  می‌رود ( $k_c^*$  مقدار عدد موج برای وقتی است که نرخ رشد به صفر می‌رسد). در حضور هردو  $\omega_q^*$  و  $\omega_\varepsilon^*$ ، توجه داریم که،  $\omega_\varepsilon^*$  نقش پایدار فوق‌الذکر را بازی می‌کند. از آنجائیکه مقادیر بحرانی  $k_c^* = 10$  برای پایداری در حضور و یا غیاب  $\omega_\varepsilon^*$  ثابت است، می‌توان گفت که  $\omega_\varepsilon^*$  روی  $k_c^*$  تاثیر نمی‌گذارد،



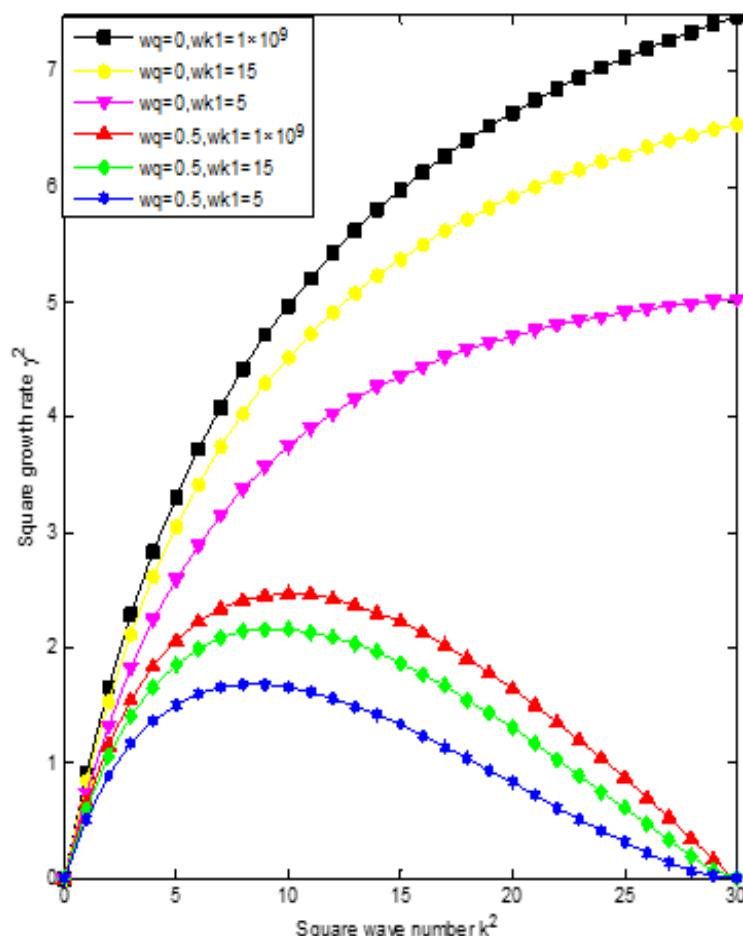
شکل ۴-۲. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  بر حسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای مقادیر متفاوتی از  $\omega_\varepsilon^*$

$$\omega_{v_0}^* = 1, \omega_{k_1}^* = 1, h^* = 1, n = 1, g^* = 10, \omega_q^* = 0.5, \text{ با پارامترهای } 0.1, 0.5$$

شکل (۳-۴) اثر نفوذپذیری (گذردهی) محیط ( $\omega_{k_1}^* = 1 \times 10^9, 15, 5$ ) روی پایداری سیستم مطرح شده در حضور و غیاب اثرات کوانتومی ( $\omega_q = 0.5, 0$ )، برای  $\omega_\varepsilon^* = 0.5$  و  $\omega_{v_0}^* = 1$ ، که

مربع نرخ رشد نرمالایز شده  $\gamma^2$  برحسب مربع نرمالایز شده  $k^{*2}$  رسم شده است، را نشان می‌دهد.

واضح است که مقدار  $\gamma^2$  در  $\omega_{k_1}^* = 5$  کمتر از مقدار آن در  $\omega_{k_1}^* = 15$  می‌باشد، و مقدار هردوی آنها آن‌ها کمتر از مورد کلاسیکی هستند. این یعنی، نفوذپذیری محیط، پایداری سیستم را تحت تاثیر قرار می‌دهد، یعنی این پایداری با افزایش نفوذپذیری کاهش می‌یابد. برای مقادیر خیلی بزرگ از نفوذپذیری محیط ( $\omega_{k_1}^* = 1 \times 10^9$ ) ناپایداری سیستم، بر روی ناپایداری کلاسیک در غیاب اثرات کوانتومی، متلاقی (همرویده) است، به این معنی که مقادیر بزرگ نفوذپذیری محیط برای پلاسمای کوانتومی و کلاسیکی مقادیر مشابهی از ناپایداری را در غیاب اثرات کوانتومی ارائه می‌دهد یعنی در غیاب اثرات کوانتومی نفوذپذیری تاثیر چندانی روی ناپایداری نخواهد داشت. مقادیر بحرانی  $k_c^*$  برای پایداری، در اینجا نیز، در حضور  $\omega_{k_1}^*$  تغییر نمی‌کند. تا آنجائیکه  $k_c^* = 30$  در حضور و عدم حضور  $\omega_{k_1}^*$  تغییر نمی‌کند.

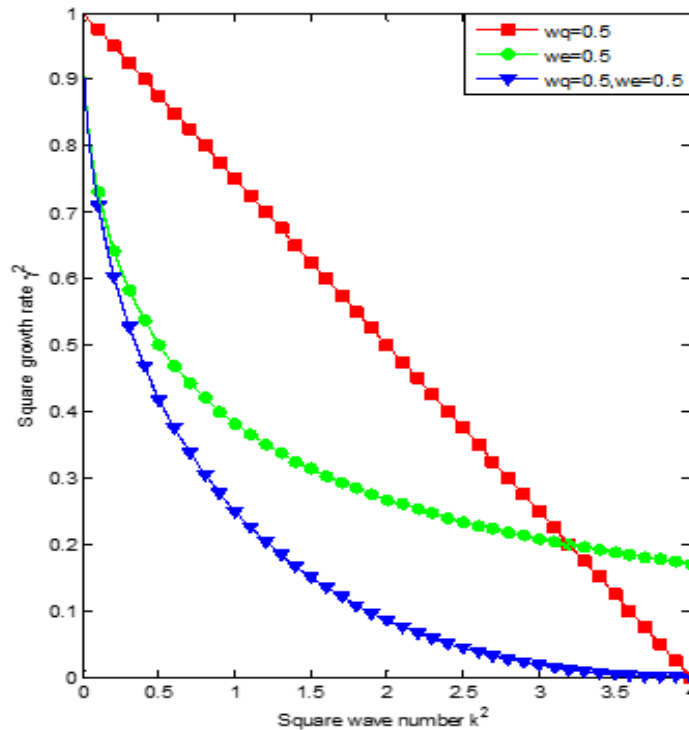


شکل ۳-۴. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  برحسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای مقادیر متفاوتی از

$$g^* = 10, n = 1, h^* = 1, \omega_\varepsilon^* = 0.5, \omega_{v_0}^* = 1, \omega_q^* = 0.5 \text{ با پارامترهای } \omega_{k_1}^* = 1 \times 10^9, 15, 5$$

مورد خاص (iii) در شکل (۴-۴) و (۵-۴) نشان داده شده است، که در آنها مربع نرخ رشد نرمالایز شده  $\gamma^2$  برحسب مربع نرمالایز شدهی عدد موج  $k^{*2}$  رسم شده است. در حضور  $\omega_q^*$  یک پایداری کامل رخ می‌دهد.  $\gamma^2$  از بیشترین مقدار آغاز می‌شود و با افزایش  $k^{*2}$  با رابطه‌ی یک خط راست، کاهش می‌یابد. در حضور هردوی  $\omega_\varepsilon^*$  و  $\omega_q^*$  (شکل ۴-۴ را ببینید)، مربع نرمالایز شدهی نرخ رشد  $\gamma^2$  تغییر رفتار می‌دهد (یک خط راست نیست)، و حضور آن با اثرات کوانتومی

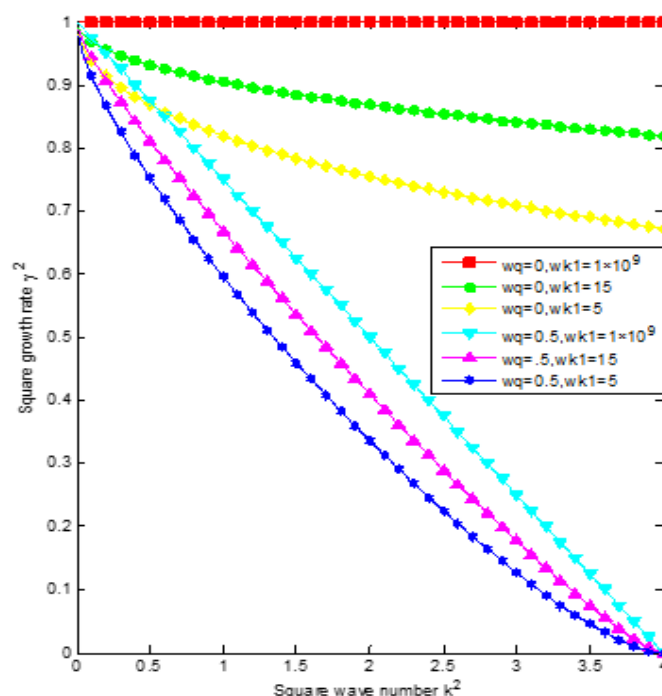
پایداری بیشتری ایجاد می‌کند، اما حضور  $\omega_\varepsilon^*$  به تنهایی، نقاط بحرانی  $k_c^{*2}$  را برای پایداری، تا زمانیکه هنوز  $k_c^{*2} = 4$  است، تغییر نمی‌دهد.



شکل ۴-۴. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  بر حسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای پارامترهایی با مقادیر

$$g^* = 1, h^* = 0, n = 0, \omega_\varepsilon^* = 0, \omega_{v_0}^* = 1, \omega_q^* = 0.5, \omega_{k_1}^* = 1$$

در شکل (۵-۴) رفتار نفوذپذیری محیط  $\omega_{k_1}^*$  که در شکل (۳-۴) مشاهده شد تا زمانیکه تحت نفوذ مربع نرخ رشد نرمالایز شده  $\gamma^2$  است، که با افزایش  $\omega_{k_1}^*$  افزایش می‌یابد، هنوز رابطه‌ی خطی بین مربع نرخ رشد نرمالایز شده و مربع عدد موج نرمالایز شده در مقادیر بزرگ  $\omega_{k_1}^* = 1 \times 10^9$  در حضور یا عدم حضور  $\omega_q^*$  برقرار است. در حالیکه برای مقادیر کوچک ( $= 5.10$ )  $\omega_{k_1}^*$  این رفتار تغییر می‌کند.



شکل ۴-۵. مربع نرخ رشد  $\gamma^2$  برحسب مربع عدد موج  $k_c^{*2}$  بصورت بی بعد شده برای پارامترهای با

$$g^* = 1, n = 0, h^* = 0, \omega_\varepsilon^* = 0.5, \omega_q^* = 0.5, \omega_{v0}^* = 1, \omega_{k1}^* = 5, 15, 1 \times 10^9$$

در نهایت، می‌توان گفت، ما اثر عبارت کوانتومی را روی ناپایداری ریلی-تیلور در یک پلاسمای لایه‌ای، درون یک محیط متخلخل بررسی کردیم. مربع نرمالایز شده‌ی نرخ رشد  $\gamma^2$  را بعنوان تابعی از پارامترهای فیزیکی سیستم مطرح شده در معادله‌ی (۴-۳۳) استخراج کرده، و بعضی موارد خاص خلاصه و تحلیل عددی شد [6].

#### ۴-۵ بررسی پلاسمای مغناطیده کوانتومی در حضور میدان مغناطیسی

حال این مساله را در حضور میدان مغناطیسی خارجی بررسی میکنیم

در اینجا نیز محیط با رسانایی بالا و تراکم ناپذیر فرض شده است. ارتباط معادلات مگنتو هیدرودینامیک کوانتومی بوسیله استفاده مناسب از شرایط مرزی محاسبه شده و روابط



پاشندگی بدست می‌آید. روابط پاشندگی برای موردی که پلاسما بوسیله دو صفحه ثابت مرزبندی شده، استخراج گردیده و نرخ رشد حالت ناپایدار ریلی-تیلور و شرایط پایداری محیط به صورت تحلیلی با اثرات پارامتر کوانتومی، میدان مغناطیسی، تخلخل و نفوذپذیری درسیال لایه ای ارزیابی شده است.

#### ۴-۶ مدل ریاضی

یک پلاسمای تراکم ناپذیر سیال لایه ای با عمق  $h$  را که بوسیله دو صفحه  $z = 0$  و  $z = h$  مرزبندی شده است ولی در صفحه افقی، جهت های  $(x, y)$  هیچگونه مرزبندی ندارد، را در نظر می‌گیریم. سیال به عنوان رسانای نامحدود، چسبنده و متخلخل در نظر گرفته شده است. سیال در یک میدان مغناطیسی متغیر  $B(B_x(z), 0, 0)$  و میدان گرانشی  $g(0, 0, -g)$  جاسازی شده است. در اینجا معادلات اساسی کوانتوم هیدرودینامیکی به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla P + \rho g - \frac{\mu}{k_1} U + Q + \left( \frac{\nabla \times B}{\mu_0} \right) \times B \quad (38-4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho U) = 0 \quad (39-4)$$

$$\nabla \cdot U = 0 \quad (40-4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (U \times B) \quad (41-4)$$

که در اینجا  $k_1, \varepsilon, \mu, P, U, \rho$  نیز به ترتیب نشان دهنده‌ی چگالی سیال، سرعت سیال،

فشار ویسکوزیته (گرانروی)، تخلخل و نفوذپذیری می‌باشند.  $Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \rho \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)$  فشار

کوانتومی است که به عنوان پتانسیل بوهم شناخته می‌شود، که  $\hbar$  ثابت پلانک است،  $m_e$  جرم

الکترون و  $m_i$  جرم یون می‌باشد.

## ۷-۴ خطی سازی معادلات

برای بدست آوردن اختلال مرتبه‌ی اول از معادله بالا بوسیله روش حالت معمولی، فرض می‌کنیم همه‌ی کمیت‌های فیزیکی ترکیبی از بخش‌های تعادلی اختلالی هستند. بنابراین می‌نویسیم :

$$Q = Q_0 + Q_1, U = U_0 + U_1, B = B_0 + B_1, \rho = \rho_0 + \rho_1 \quad (۴۲-۴)$$

$$, P = P_0 + P_1, U_0 = 0$$

در اینجا کمیت‌های با زیرنویس (اندیس) ۰ نشان دهنده‌ی مقادیر غیر اختلالی اند، در حالیکه  $Q_1(Q_{1x}, Q_{1y}, Q_{1z})$  و  $U_1(U_x, U_y, U_z)$ ،  $B_1(B_x, B_y, B_z)$ ،  $\rho_1, P_1$  نشان دهنده‌ی اختلال خلی کوچکی از حالت تعادل فشار، چگالی سیال، میدان مغناطیسی، سرعت سیال و فشار کوانتومی هستند. با استفاده از معادله (۴۲-۴)، معادلات (۳۸-۴)-(۴۱-۴) می‌تواند در فرم خطی‌اش به صورت زیر نوشته شود:

پس از خطی سازی داریم:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \rho_1 g - \frac{\mu}{k_1} U_1 + Q_1 + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times B_1) \times \quad (۴۴-۴)$$

$$B_0 + (\nabla \times B_0) \times B_1]$$

$$\varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 U_1) = 0 \quad (۴۴-۴)$$

$$\nabla \cdot U_1 = 0 \quad (۴۵-۴)$$

$$\varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla) U_1 - (U_1 \cdot \nabla) B_0 \quad (۴۶-۴)$$

حال جمله کوانتومی را خطی سازی می کنیم، بدین ترتیب داریم:

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \left[ \frac{1}{2} \nabla (\nabla^2 \rho_1) - \frac{1}{2\rho_0} \nabla \rho_1 \nabla^2 \rho_0 - \right. \\ \left. \frac{1}{2\rho_0} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_1 + \frac{\rho_1}{2\rho_0^2} \nabla \rho_0 \nabla^2 \rho_0 - \frac{1}{2\rho_0} \nabla (\nabla \rho_0 \cdot \nabla \rho_1) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} \nabla (\nabla \rho_0)^2 + \right. \\ \left. \frac{1}{2\rho_0^2} \nabla \rho_1 (\nabla \rho_0)^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 (\nabla \rho_0 \cdot \nabla \rho_1) - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} (\nabla \rho_0)^3 \right] \quad (47-4)$$

فرض می کنیم همه ی کمیت های اختلالی در فضای  $(x, y, z)$  و زمان  $t$  به صورت زیر تغییر می کنند:

$$f_1(x, y, z, t) = f_1(z) \exp(ik_x x + ik_y y + i\omega t) \quad (48-4)$$

که  $k_x$  و  $k_y$  نشان دهنده ی اعداد موج در جهت های  $x$  و  $y$  بوده و  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  عدد موج اختلالی است، در حالیکه  $\omega = \omega_r + i\gamma$  فرکانس اختلالات هارمونیک می باشد. با استفاده از اختلال تعریف شده بوسیله ی معادله  $(42-4)$  و جایگذاری در معادله های  $(44-4)$  تا  $(47-4)$  معادلات مولفه ای آنها را بدست می آوریم:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v}{k_1} \right) v_x = -ik_x P_1 + Q_{1x} + \frac{B_{1z}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \quad (49-4)$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v}{k_1} \right) v_y = -ik_y P_1 + Q_y + \frac{B_{0x}(z)(ik_x B_{1y} - ik_y B_{1x})}{\mu_0} \quad (50-4)$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v}{k_1} \right) v_z = -\nabla P_1 + Q_z - \rho_1 g + \frac{B_{0x}(z)(ik_x B_{1z} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial z})}{\mu_0} - \quad (51-4)$$

$$\frac{B_{1x}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}$$

$$- \varepsilon i \omega \rho_1 + U_z \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad (52-4)$$

$$ik_x u_x + ik_y u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (53-4)$$

$$(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}) = \quad (\Delta 4-4)$$

$$\left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega \varepsilon}, \frac{[B_{0x}(z)ik_x u_y]}{i\omega \varepsilon}, \frac{[B_{0x}(z)ik_x u_z]}{i\omega \varepsilon} \right)$$

$$\bar{Q}_x = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{k_x}{\varepsilon \omega} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left\{ \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \right. \quad (\Delta 5-4)$$

$$\left. \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \right] u_z \right]$$

$$\bar{Q}_y = \frac{k_y}{k_x} \bar{Q}_x \quad (\Delta 6-4)$$

$$\bar{Q}_z = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{i\varepsilon \omega} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \right. \quad (\Delta 7-4)$$

$$\left. \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{3}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right)^2 + \frac{5}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^4 \right] u_z \right]$$

حال  $ik_x$  و  $ik_y$  را به ترتیب در معادله های (4-49) و (4-50) ضرب کرده و این دو معادله را با یکدیگر

جمع می کنیم و سپس نتایج را در معادله ی (4-51) قرار داده و با انجام یک سری عملیات ریاضی مولفه-

ی Z سرعت را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\left( \rho_0 \omega^* + k^2 A - \frac{B_{0x}^2(z) k_x^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \quad (\Delta 8-4)$$

$$\left[ \omega^* \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + k^2 B - \frac{2B_{0x}(z) k_x^2}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \right] \frac{\partial u_z}{\partial z} - \left[ \rho_0 \omega^* k^2 - \frac{B_{0x}^2(z) k^2 k_x^2}{\mu_0} - \right.$$

$$\left. (C - g) k^2 \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right] u_z = 0$$

که در اینجا نیز A, B, C و  $\omega'$  بصورت زیر تعریف شده اند.

$$A = -\frac{\hbar^2}{4m_i m_e} \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2, \quad B = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e} \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \left( \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 - 2\rho_0 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right)$$

$$C = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e} \frac{k^2}{2\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \quad (59-4)$$

$$\omega' = i\omega \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v}{k_1} \right) \quad (60-4)$$

#### ۸-۴ رابطه پاشندگی پلاسمای لایه‌ای در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی

حال با توجه به فرض اولیه که در آن پلاسمای لایه‌ای با ضخامت محدود، از  $z = h$  تا  $z = 0$  مرزبندی شده است. در اینجا نیز فرض کرده ایم که چگالی و میدان مغناطیسی به صورت نمایی به  $z$  وابسته اند. بنابراین، چگالی و توزیع میدان مغناطیسی به ترتیب به صورت زیر داده شده اند:

$$\rho_0(z) = \rho_0 \exp\left(\frac{z}{L_D}\right); \quad B_{0x}(z) = B_{0x}(z) \exp\left(\frac{z}{2L_D}\right) \quad (61-4)$$

که  $L_D$  مقیاس ارتفاع چگالی است. یک جواب عمومی برای معادله (۵۸-۴) با استفاده از شرایط مرزی  $U_z = 0$  در  $z = 0$  و  $z = h$  را اینطور حدس می‌زنیم:

$$u_z = u_0 \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) \exp(\lambda z) \quad (62-4)$$

در اینجا  $n$  یک عدد صحیح و  $\lambda = \left(-\frac{1}{2L_D}\right)$  می‌باشند.

معادله‌ی (۵۸-۴) با کمک معادله‌ی (۶۱-۴) و (۶۲-۴) حل شده و مقدار زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\omega' = \omega_q^2 k^2 + k_x^2 v_A^2 - \left[ \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} \right] \quad (63-4)$$

که  $\omega_q^2 = \frac{\hbar^2}{4m_i m_e l_D^2}$  اثرات کوانتومی را توصیف می‌کند و  $v_A^2 = \frac{B_0 x(z)}{\mu_0 \rho_0}$  که با عنوان سرعت آلفونی شناخته می‌شود. معادله‌ی (۴-۶۳) رابطه‌ی پاشندگی ناپایداری ریلی-تیلور در پلاسمای کوانتومی مغناطیده را نشان می‌دهد. رابطه‌ی پاشندگی ترکیبی از اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی روی پلاسمای لایه‌ای را در خود دارد. معادله‌ی (۴-۶۳)، رابطه‌ی پاشندگی عمومی در غیاب محیط متخلخل نیز هست.

#### ۹-۴ بحث

#### ۱-۹-۴ ترکیب اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی در محیط متخلخل

برای راحتی در عملیات ریاضی، رابطه‌ی پاشندگی عمومی برای ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای در حضور اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی در محیط متخلخل می‌تواند با استفاده از  $\omega = i\gamma$  و  $k_x = k \cos \theta$  نوشته شود که  $\theta$  تمایل (انحراف) بردار موج  $k$  به جهت میدان مغناطیسی  $H$  است، مانند:

$$\gamma^2 + \gamma \left( \frac{\varepsilon v}{k_1} \right) + \omega_q^2 k^2 + k_x^2 v_A^2 - \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} = 0 \quad (۴-۶۴)$$

معادله (۴-۶۴) مبنای تحلیل پایداری یا ناپایداری است. نرخ رشد برای این پیکربندی مانند زیر استخراج می‌شود:

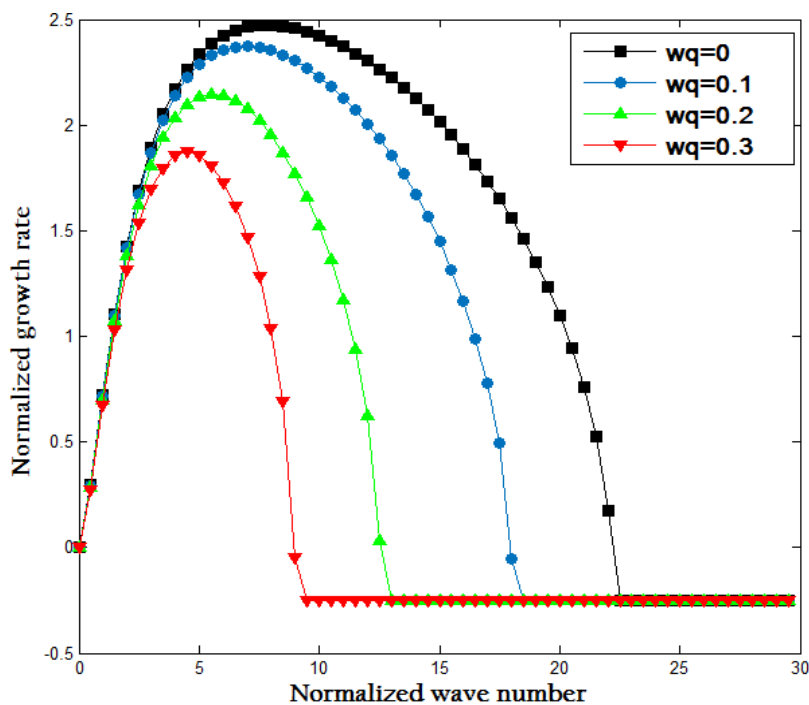
$$\gamma = -\frac{\varepsilon v}{2k_1} \pm \quad (۴-۶۵)$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\varepsilon v}{k_1} \right)^2 + 4 \left\{ \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} - \omega_q^2 k^2 - k_x^2 v_A^2 k \cos \theta \right\}}$$

برای مشاهده‌ی نقش فاکتورهای متفاوت در ناپایداری، معادله‌ی (۴-۶۴) را در موارد خاص مورد بحث می‌دهیم. این موارد خاص در زیر بررسی شده است.

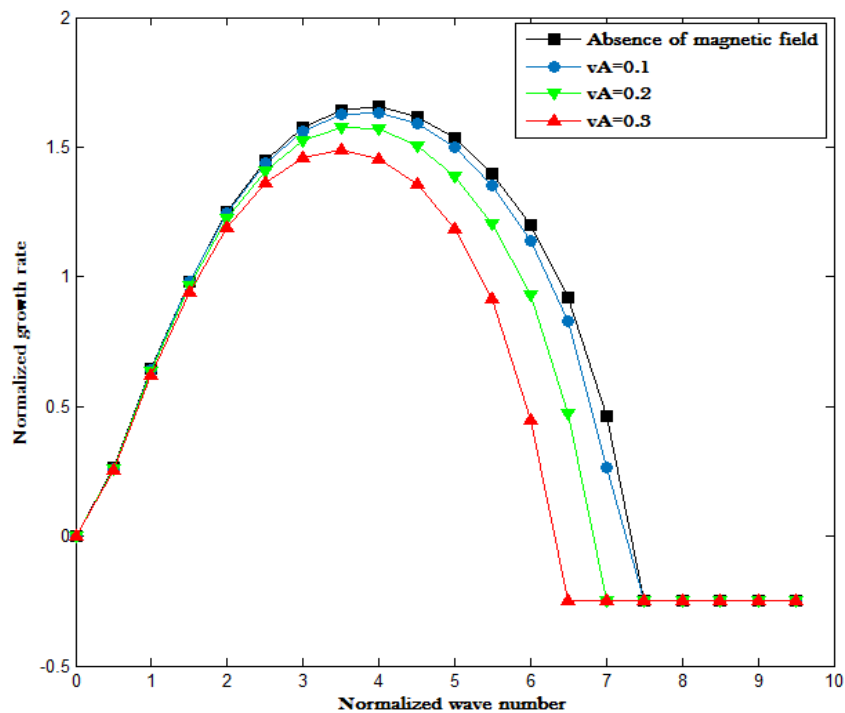
## ۴-۹-۲ در حضور میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی و در محیط متخلخل

برای بررسی نقش این فاکتورها از معادلات (۴-۶۴) و (۴-۶۵) استفاده می‌کنیم. با توجه به این معادلات می‌توان گفت که وضعیت پایداری یا ناپایداری سیستم مورد بررسی تحت تاثیر عوامل میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی، تغییر می‌کند. با توجه به شکل‌های (۴-۶) و (۴-۷) هر چه مقدار این پارامترها افزایش می‌یابد نرخ رشد ناپایداری ریلی تیلور کاهش می‌یابد و به عبارت بهتر، سیستم پایدارتر می‌گردد.



شکل ۴-۶. نرخ رشد بر حسب عدد موج بصورت بی بعد شده  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10, k_1 = 0.1$

$$, \varepsilon = 0.1, v^* = 0.5, V_A^* = 0.2, \theta = 45^\circ, \omega_q^* = 0.1, 0.2, 0.3$$



شکل ۴-۷. نرخ رشد برحسب عدد موج بصورت بی بعد شده،  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10, k_1 = 0.1$ ،  
 $\varepsilon = 0.1, v^* = 0.5, V_A^* = 0, 0.1, 0.2, 0.3$ ،  $\theta = 45^\circ, \omega_q^* = 0.4$

#### ۳-۹-۴ در غیاب میدان مغناطیسی، اثرات کوانتومی و تخلخل

عبارات  $\omega_q^2 = 0$ ،  $v_A^2 = 0$ ،  $\varepsilon = 1$ ،  $k_1 = \infty$  را در معادله‌ی (۴-۶۴) جایگذاری می‌کنیم و به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\gamma^2 - \frac{4gk^2h^2L_D}{h^2 + 4n^2\pi^2L_D^2 + 4h^2k^2L_D^2} = 0 \quad (۴-۶۶)$$

معادله‌ی (۴-۶۶) رابطه‌ی پاشندگی برای ناپایداری ریلی-تیلور کلاسیک است. و نرخ رشد آن بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\gamma_{classical} = \sqrt{\frac{4gk^2h^2L_D}{h^2 + 4n^2\pi^2L_D^2 + 4h^2k^2L_D^2}} \quad (۴-۶۷)$$



بنابراین، واضح است که رابطه‌ی پاشندگی داده شده توسط معادله‌ی (۴-۶۴) تحت تاثیر میدان مغناطیسی، اثرات کوانتومی، تداخل و نفوذپذیری محیط تغییر می‌کند و در غیاب عوامل مذکور نتایج مشابهی با ناپایداری کلاسیکی ریلی-تیلور را بدست می‌دهد.

#### ۴-۹-۴ در غیاب میدان مغناطیسی و در محیط نا متخلخل

حال از اثرات میدان مغناطیسی، تداخل و نفوذپذیری (0 =  $v_A^2$ ،  $\varepsilon = 1$ ،  $k_1 = \infty$ ) چشم پوشی می‌کنیم. در نتیجه معادله‌ی (۴-۶۴) به معادله‌ی زیر کاهش می‌یابد.

$$\gamma^2 + \omega_q^2 k^2 - \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} = 0 \quad (۴-۶۸)$$

معادله‌ی (۴-۶۸) یک رابطه‌ی پاشندگی برای ناپایداری ریلی-تیلور در حضور تنها اثرات کوانتومی است. نرخ رشد آن بصورت زیر می‌باشد:

$$\gamma_{quantum} = \sqrt{\frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} - \omega_q^2 k^2} \quad (۴-۶۹)$$

از معادله‌ی (۴-۶۷) و (۴-۶۹) در می‌یابیم که  $\gamma_{quantum} < \gamma_{classical}$  که نشان می‌دهد افزایش اثرات کوانتومی ناپایداری ریلی تیلور را کاهش و پایداری سیستم را افزایش می‌دهد [5].

#### ۴-۹-۵ اگر محیط متخلخل نباشد

در معادله‌ی (۴-۶۴)،  $\varepsilon = 1$  و  $k_1 = \infty$  را جایگذاری می‌کنیم و رابطه‌ی پاشندگی را بصورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$\gamma^2 + \omega_q^2 k^2 + k_x^2 v_A^2 - \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} = 0 \quad (۴-۷۰)$$

در این رابطه می‌توانیم تاثیرات میدان مغناطیسی بر روی ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای کوانتومی را بررسی کنیم.

همچنین، نرخ رشد مانند زیر بدست می‌آید:

$$\gamma_{q,A} = \sqrt{\frac{4gk^2h^2L_D}{h^2+4n^2\pi^2L_D^2+4h^2k^2L_D^2} - (\omega_q^2k^2 + k_x^2v_A^2)} \quad (71-4)$$

از معادلات (۶۷-۴) و (۶۹-۴) و (۷۱-۴) در می‌یابیم که:

$$\gamma_{q,A} < \gamma_{quantum} < \gamma_{classical}$$

میزان نرخ رشد با معرفی میدان مغناطیسی در سیستم کاهش می‌یابد. این نشان می‌دهد که میدان مغناطیسی اثرات ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای را کاهش می‌دهد و سیستم را به سمت هرچه پایدار شدن پیش می‌برد [5].

#### ۶-۹-۴ در غیاب میدان مغناطیسی

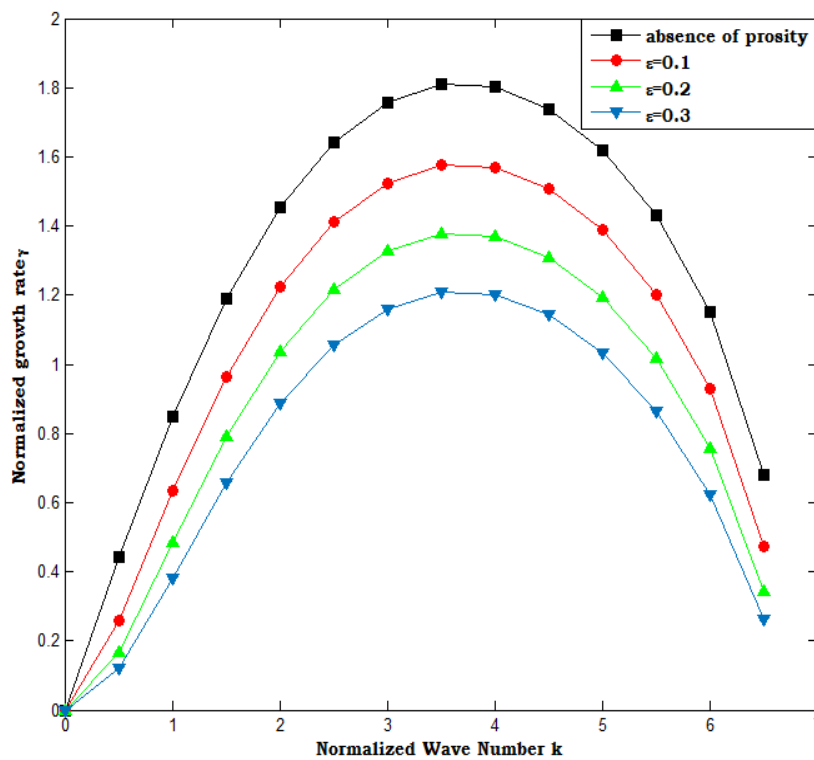
اکنون اثرات میدان مغناطیسی را از معادله‌ی (۶۴-۴) حذف می‌کنیم. آن معادله بصورت زیر کاهش می‌یابد (حذف اثرات میدان مغناطیسی یعنی باتوجه به معادله  $v_A^2 = \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0\rho_0}$  سرعت الفونی نداشته باشیم).

$$\gamma^2 + \gamma\left(\frac{\varepsilon v}{k_1}\right) + \omega_q^2k^2 - \frac{4gk^2h^2L_D}{h^2+4n^2\pi^2L_D^2+4h^2k^2L_D^2} = 0 \quad (72-4)$$

رابطه‌ی پاشندگی معادله‌ی (۷۲-۴) نشان دهنده‌ی ناپایداری ریلی-تیلور در محیط متخلخل با اثرات فشار کوانتومی است. ثابت شده که نرخ رشد به علت وجود تخلخل ثابت است نرخ رشد این ساختار بصورت زیر داده می‌شود:

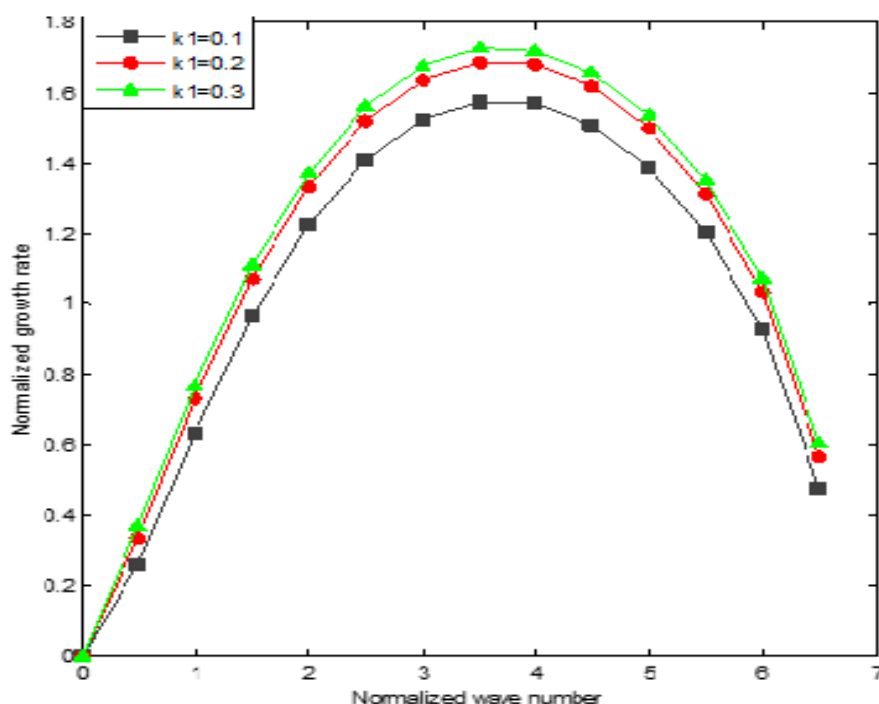
$$\gamma = -\left(\frac{\varepsilon v}{k_1}\right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\varepsilon v}{k_1}\right)^2 + 4 \left\{ \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} - \omega_q^2 k^2 \right\}} \quad (73-4)$$

معادله‌ی (۷۳-۴) نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای، و اینکه سیستم بوسیله‌ی تخلخل و نفوذپذیری محیط تحت تاثیر قرار گرفته است، را نشان می‌دهد. پایداری یا ناپایداری آنها در شکل‌های (۸-۴) و (۹-۴) دیده می‌شود.



شکل ۸-۴: نرخ رشد بر حسب عدد موج بصورت بی بعد شده  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10$

$\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3$  ,  $k_1 = 0.1$  ,  $v^* = 0.5$  ,  $V_A^* = 0.2$  ,  $\theta = 45^\circ$  ,  $\omega_q^* = 0.4$



شکل ۴-۹: نرخ رشد بر حسب عدد موج بصورت بی بعد شده  $h^* = 1, n = 1, g^* = 10$

$k_1 = 0.1, 0.2, 0.3$  ,  $\varepsilon = 0.1$  ,  $v^* = 0.5$  ,  $V_A^* = 0.2$  ,  $\theta = 45^\circ$  ,  $\omega_q^* = 0.4$

از تحلیل بالا واضح است که رابطه‌ی پاشندگی عمومی ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای در محیط متخلخل در حضور میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی، نتایج کلاسیکی ناپایداری ریلی تیلور را تغییر می‌دهد. در بخش بعد دو مد متمایز از انتشار اختلال را بررسی می‌کنیم.

#### ۴-۵ اختلال در طول جهت $k_x$

برای مد طولی ( $k_y = 0$  و  $k_x = k$ ) معادله‌ی (۴-۶۴) بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$\gamma^2 + \gamma \left( \frac{\varepsilon v}{k_1} \right) + \omega_q^2 k^2 + k^2 v_A^2 - \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} = 0 \quad (۷۴-۴)$$

شرایط روث هورویتز<sup>۴۰</sup> (یک معیار ریاضی است) را روی معادله‌ی (۷۴-۴) اعمال می‌کنیم.

سیستم ما به این خاطر ناپایدار است که عبارت ثابت در معادله (۷۴-۴) منفی است، و از آنجایی که این عبارت اجازه‌ی تغییر علامت را می‌دهد و در نتیجه یک ریشه مثبت دارد.

وضعیت ناپایداری از عبارت ثابت معادله‌ی (۷۴-۴) که مورد بحث واقع شده است مانند زیر بدست می‌آید :

$$k_c = \sqrt{\frac{g}{(\omega_q^2 + v_A^2)L_D} - \left(\frac{1}{4L_D^2} + \frac{n^2\pi^2}{h^2}\right)} \quad (۷۵-۴)$$

که  $k_c$  نشان دهنده‌ی عدد موج بحرانی است. پایداری سیستم به عدد موج بحرانی وابسته است و سیستم برای  $k < k_c$  ناپایدار است. از معادله‌ی (۷۵-۴) واضح است که ناپایداری بوسیله‌ی میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی تحت تاثیر قرار می‌گیرد، در حالیکه تداخل و نفوذپذیری مغناطیسی مستقل از شرایط ناپایداری است.

#### ۴-۶ اختلال در امتداد جهت $k_y$

برای حالت متقاطع ( $k_x = 0$  و  $k = k_y$ ) معادله‌ی (۶۴-۴) به صورت زیر در می‌آید.

$$\gamma^2 + \gamma \left( \frac{\varepsilon v}{k_1} \right) + \omega_q^2 k^2 - \frac{4gk^2 h^2 L_D}{h^2 + 4n^2 \pi^2 L_D^2 + 4h^2 k^2 L_D^2} = 0 \quad (۷۶-۴)$$

حال شرایط بحران روث هورویتز<sup>۴۱</sup> را روی سیستم ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای اعمال می‌کنیم و شرایط ناپایداری از عبارت ثابت معادله‌ی (۷۶-۴) را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

<sup>40</sup> -Ruth Hurwitz

<sup>41</sup> -Routh Hurwitz criterion

$$k'_c = \sqrt{\frac{g}{\omega_q^2} - \left(\frac{1}{4l_D} + \frac{n^2\pi^2}{4h^2}\right)} \quad (۷۷-۴)$$

در اینجا  $k'_c$  عدد موج بحرانی برای وقتی که اختلال در جهت  $k_y$  است، بوده و پایداری سیستم بستگی به این عدد موج بحرانی دارد. در اینجا، سیستم برای  $k > k'_c$  پایدار و برای  $k < k'_c$  ناپایدار است. همچنین مشاهده می‌کنیم که نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور توسط میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی متاثر شده است، در حالیکه تخلخل و نفوذپذیری روی نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور اثر می‌گذارند اما این پارامترها تحت تاثیر نقاط بحرانی پایداری قرار نمی‌گیرند.

بخاطر آسان تر ساختن محاسبات ریاضی و یافتن اثر میدان مغناطیسی، اثرات کوانتومی، تخلخل و نفوذپذیری روی نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور، برخی متغیرهای بی بعد را در زیر استفاده می‌کنیم.

$$\gamma^* = \frac{\gamma}{\omega_{pe}} ; v^* = \frac{v}{\omega_{pe}} ; g^* = \frac{g}{L_D \omega_{pe}^2} ; k^* = k L_D$$

$$h^* = \frac{h}{L_D} ; \omega_q^{*2} = \frac{\hbar^2}{4m_e m_i L_D^4 \omega_{pe}^2} ; V_A^{*2} = \frac{V_A^2}{L_D^2 \omega_{pe}^2}$$

که  $\omega_{pe}^2 = \frac{\rho e^2}{m_e^* \epsilon_0}$  فرکانس پلاسما است، این متغیرهای بی بعد را در معادله‌ی (۴-۶۴) استفاده

می‌کنیم و رابطه‌ی نرمالایز شده‌ی آن را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\gamma^{*2} + \gamma^* \left( \frac{\epsilon v^*}{k_1} \right) + \omega_q^{*2} k^{*2} + V_A^{*2} k^{*2} \cos^2 \theta - \frac{4g^* k^{*2} h^{*2}}{h^{*2} + 4n^2 \pi^2 + 4h^{*2} k^{*2}} = 0 \quad (۷۸-۴)$$

برای یافتن نرخ رشد با توجه به عدد موج، میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی از معادله‌ی (۴-۷۸) دیفرانسیل می‌گیریم با توجه به میدان مغناطیسی، اثرات کوانتومی و عدد موج به صورت زیر داریم:

$$\frac{d\gamma^*}{dV_A^*} = -\frac{2V_A^* k^{*2} \cos\theta}{2\gamma^* + \left(\frac{\varepsilon v^*}{k_1}\right)} \quad (۴-۷۹)$$

$$\frac{d\gamma^*}{d\omega_q^*} = -\frac{2\omega_q^* k^{*2}}{2\gamma^* + \left(\frac{\varepsilon v^*}{k_1}\right)} \quad (۴-۸۰)$$

$$\frac{d\gamma^*}{dk^*} = \frac{2k^* \left\{ \frac{g^* \left( \frac{1}{4} + \frac{n^2 \pi^2}{h^{*2}} \right)}{\left( \frac{1}{4} + \frac{n^2 \pi^2}{h^{*2}} + k^{*2} \right)} - \omega_q^{*2} - V_A^{*2} \cos^2 \theta \right\}}{2\gamma^* + \left(\frac{\varepsilon v^*}{k_1}\right)} \quad (۴-۸۱)$$

رفتار نرخ رشد با توجه به میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی تحلیل شد. از معادله‌ی (۴-۷۹) و (۴-۸۰) مشاهده شد که با افزایش میدان مغناطیسی و اثرات کوانتومی در یک محیط متخلخل، نرخ رشد کاهش می‌یابد. بطور مشابه نرخ رشد با توجه به عدد موج از معادله‌ی (۴-۸۱) نشان می‌دهد که نرخ رشد با افزایش عدد موج بطور خطی افزایش می‌یابد و در یک عدد موج خاص ماکزیمم می‌شود. این عدد موج خاص بعنوان  $k_{max}$  یا عدد موج قطع شناخته می‌شود. و همچنانکه که  $k$  افزایش می‌یابد نرخ رشد کاهش می‌یابد (وقتی  $k$  بزرگتر از  $k_{max}$  می‌شود). این تغییر در طبیعت نرخ رشد به علت اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی اتفاق می‌افتد.

این رفتار نرخ رشد در رابطه با عدد موج در شکل (۴-۶) و (۴-۷) تایید شده است. همچنین مشاهده کردیم که تخلخل رفتار نرخ رشد را تغییر نمی‌دهد.

به منظور مشاهده‌ی تاثیر پارامترهایی مانند تخلخل و نفوذ پذیری روی نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای، معادله‌ی (۷۸-۴) بصورت عددی حل شده و نتایج در شکل (۸-۴) و (۹-۴) نمایش داده شده‌اند. شکل‌ها را برحسب نرخ رشد ( $\gamma^*$ ) و عدد موج ( $k^*$ ) برای مقادیر متفاوتی از تخلخل و نفوذ پذیری رسم کردیم. در شکل (۸-۴) با جایگزین کردن پارامترهای

$$h^* = 1, n = 1, g^* = 10, \omega_q^* = 0.4, V_A^* = 0.2, v^* = 0.5, \theta = 45^0$$

که نشان داده ایم که نرخ رشد با افزایش مقادیری از تخلخل، کاهش می‌یابد. و این نشان دهنده‌ی اینست که تخلخل نرخ رشد ناپایداری ریلی-تیلور را کاهش داده و سیستم را پایدار می‌کند. بطور مشابه مقادیر  $\varepsilon = 0.1, 0.2, 0.3, k_1 = 0.1$ ،  $\varepsilon = h^* = 1, \omega_q^* = 0.4, V_A^* = 0.2$ ،  $\theta = 45^0, k_1 = 0.1, 0.2, 0.3, n = 1, g^* = 10, v^* = 0.5$  را در معادله‌ی (۴-۷۸) گذاشتیم و نتایج نشان داده شده در شکل (۹-۴) بدست آمد. با توجه به این شکل دریافتیم که با افزایش مقدار نفوذ پذیری نرخ رشد افزایش می‌یابد بنابراین نفوذ پذیری محیط سیستم را به سمت هرچه ناپایدارتر شدن پیش می‌برد.



# فصل پنجم:

## نتیجه گیری و پیشنهادات

## فصل ۵: نتیجه گیری و پیشنهادات

### ۵-۱ مقدمه

هدف از این تحقیق بررسی ناپایداری ریلی تیلور برای یک پلاسمای مغناطیسه‌ی کوانتومی در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی می‌باشد. به منظور دستیابی به این هدف، پس از معرفی پلاسما و بیان مفهوم ناپایداری به مطالعه‌ی ناپایداری ریلی تیلور در حضور و عدم حضور یک میدان مغناطیسی خارجی پرداخته و نتایج بدست آمده را بررسی کرده ایم. بطور کلی آنچه در این پایان نامه بررسی شده و نتایج حاصله از آن به شرح زیر می‌باشد.

- ابتدا یک مفهوم کلی در مورد ناپایداری های موجود در یک پلاسما و دلیل بوجود آمدن یا وجود داشتن این ناپایداری ها در پلاسما ارائه شد
- سپس توصیفی کلی از مدل سیالی و معادلات مگنتوهیدرودینامیک برای یک پلاسما را بیان نمودیم.
- با استفاده از روش های حل عددی روابط پاشندگی و نرخ رشد ناپایداری ریلی تیلور را برای یک پلاسمای مغناطیسه‌ی کوانتومی در غیاب یک میدان مغناطیسی خارجی را بدست آوردیم
- همچنین با استفاده از همان روش حل عددی و برای همان پلاسمای مغناطیسه‌ی کوانتومی اینبار در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی روابط پاشندگی و نیز رابطه ی نرخ رشد را محاسبه کردیم.

با استفاده از روابط پاشندگی ، نرخ رشد و نمودارهایی که برای هر کدام از این وضعیت ها بدست آمد یک سری نتایج برای ناپایداری ریلی تیلور در حضور یا نبود برخی پارامترها بدست آمد که به صورت موردی در زیر به آنها پرداخته ایم.

## ۵-۲ نتیجه گیری

ابتدا نتایج بدست آمده برای یک پلاسمای مغناطیسهی کوانتومی در یک محیط متخلخل و بدون حضور یک میدان مغناطیسی خارجی را بررسی می کنیم:

(i) عبارت کوانتومی  $\omega_q^*$  توانایی (شدیدی) بحرانی برای متوقف کردن ناپایداری را دارد در حالی که دو عبارت  $\omega_{v_0}^* \omega_{\varepsilon}^*$  و  $\omega_{k_1}^*$  این توانایی را ندارند، بنابراین ، برای اثرات کوانتومی،

ممکن است سیستم قطع کوانتومی را به شکل  $k_{ctq} = \sqrt{\frac{g^*}{\omega_q^{*2}} - \frac{1}{4} - \frac{n^2 \pi^2}{h^{*2}}}$  تجربه کند.

(ii) تخلخل در یک محیط متخلخل  $\omega_{\varepsilon}^*$  تاثیر ثابتی روی ناپایداری سیستم مطرح شده دارد، بطوریکه با افزایش  $\omega_{\varepsilon}^*$  پایداری سیستم افزایش می یابد.

(iii) نفوذپذیری محیط  $(\omega_{k_1}^*)$  تاثیر متقابل تخلخل را روی ناپایداری سیستم مطرح شده دارد. چنانکه پایداری سیستم با افزایش  $\omega_{k_1}^*$  کاهش می یابد. به عبارت دیگر ، نفوذپذیری محیط نقش دو جانبه ای روی پایداری سیستم مطرح شده دارد به این معنی که ، ثبات (برای مقادیر کوچک  $\omega_{k_1}^*$ ) به خوبی بی ثباتی (برای مقادیر بزرگ) می باشد (یعنی همان اندازه که سیستم برای مقادیر کوچک  $\omega_{k_1}^*$  پایدار است به همان اندازه در مقابل مقادیر بزرگ این پارامتر ناپایدار می شود). علاوه بر این، مقادیر  $\gamma^2$  که در غیاب  $\omega_q^*$  داده شده اند مقادیر کلاسیک را نیز در بر

می‌گیرند و پایداری‌ای که در حضور عبارت کوانتومی داده شده را از قلم نمی‌اندازد (حذف نمی‌کند).

(iv) بر طبق معادله‌ی (۴-۳۷) حضور دو عبارت  $\omega_{\varepsilon}^*$  و  $(\omega_{v_0}^*)$  و  $\omega_{k_1}^*$  تأثیری روی نقاط بحرانی پایداری ( $k_c^*$ ) که بوسیله‌ی اثر  $\omega_q^*$  اتفاق می‌افتد، ندارد.

(v) تأثیر دو عبارت  $\omega_{\varepsilon}^*$  و  $\omega_{k_1}^*$  برای اثرات سطحی (صوری) بررسی شد، که مقادیر  $\gamma^2$  در حضور  $\omega_{\varepsilon}^*$  و  $\omega_{k_1}^*$  کمتر از مقادیر شان در غیاب  $\omega_{\varepsilon}^*$  و  $\omega_{k_1}^*$  می‌باشند. در حالیکه این مطلب در حضور  $\omega_q^*$  برای سیستم مطرح شده، بطور کامل حاصل نمی‌شود. به عبارت دیگر، در حضور اثرات کوانتومی، انرژی هر اختلال بیشتر از زمانی که  $\omega_{\varepsilon}^*$  و  $\omega_{k_1}^*$  حضور دارند، پراکنده می‌شود. این نشان می‌دهد که، رفتار  $\gamma^2$  تسلیم اثرات عبارت کوانتومی برای سیستم مطرح شده است. همچنین برای همان سیال و با همان شرایط قبل و اینبار در حضور یک میدان مغناطیسی خارجی نتیجه زیر بدست آمد:

برای این شرایط، مشخص شد که سیستم پایداری اش را در حضور اثرات کوانتومی، میدان مغناطیسی و تداخل بدست می‌آورد. علاوه بر این، متوجه شدیم که وقتی انتشار موج در امتداد جهت ( $k_x$ ) است، عدد موج بحرانی توسط اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی متأثر می‌شود. در حالیکه وقتی انتشار در جهت ( $k_y$ ) است، عدد موج بحرانی تنها تحت تأثیر اثرات کوانتومی قرار می‌گیرد.

محاسبات عددی نرخ رشد ریلی-تیلور نشان می‌دهد که اثرات کوانتومی، میدان مغناطیسی، تداخل و زاویه‌ی شیب حالت ناپایدار، نرخ رشد ناپایداری ریلی تیلور را تغییر می‌دهند. در حالیکه نفوذ پذیری محیط متداخل این حالت ناپایدار را تقویت می‌کند. بنابراین، ناپایداری

ریلی-تیلور پلاسمای لایه‌ای در حضور اثرات کوانتومی همراه با میدان مغناطیسی در محیط متخلخل به سمت پایداری بیشتر پیش می‌رود.

### ۳-۵ یک بیان خلاصه از نتایج

در این جا به دنبال بررسی اثرات پارامترهای متفاوتی از قبیل تخلخل نفوذ پذیری ، اثرات کوانتومی و میدان مغناطیسی در یک پلاسمای مغناطیده‌ی کوانتومی ابتدا در غیاب و سپس در حضور یک میدان مغناطیسی دریافتیم که :

۱- با افزایش مقدار پارامتر تخلخل پایداری سیستم مورد بررسی بالا می‌رود. یعنی

تخلخل محیط در پایداری سیستم تاثیر مستقیمی می‌گذارد.

۲- با افزایش مقدار پارامتر نفوذ پذیری در یک پلاسمای مغناطیده‌ی کوانتومی

ناپایداری این سیستم افزایش می‌یابد در نتیجه می‌توان گفت برای پایداری کردن سیستم این گزینه باید تضعیف شود.

۳- آنچه در اینجا مشاهده و با توجه به فرمولهای بدست آمده هم می‌توان گفت

اینست که اثرات کوانتومی تاثیری ثابت در پایداری سیستم دارد. به این معنی که

در یک پلاسمای مغناطیده‌ی کوانتومی چه در حضور یا در غیاب یک میدان

مغناطیسی خارجی، هرچه مقدار پارامتر کوانتومی سیستم افزایش یابد پایداری آن

نیز افزایش می‌یابد. نتیجه اینکه سیستم های کوانتومی پایدارترند.

۴- میدان مغناطیسی نیز تاثیر ثابتی روی پایداری یک پلاسما دارد. آنچه که در اینجا

مشاهده کردیم نشان می‌دهد که وجود یک میدان مغناطیسی خارجی در پایداری

هرچه بیشتر یک پلاسما موثر است. به این معنی که هرچه میدان مغناطیسی

قویتر باشد سیستم مورد بررسی که یک پلاسمای لایه ای مغناطیده‌ی کوانتومی است پایدار تر می‌شود.

در نهایت می‌توان چنین نتیجه گرفت که هر چه پلازما کوانتومی تر بوده و میدان مغناطیسی خارجی که آن را احاطه کرده قویتر باشد پلازما پایداری بیشتری از خود نشان می‌دهد.

#### ۴-۵ پیشنهادات

۱- در این تحقیق به بررسی رفتار خطی معادلات مگنتو هیدرودینامیک کوانتومی برای یک پلاسمای مغناطیده‌ی کوانتومی در حضور یا عدم حضور میدان مغناطیسی خارجی پرداخته شد. پیشنهاد می‌کنیم در آینده برای بررسی ناپایداری ریلی تیلور به روشهای غیر خطی نیز پرداخته شود. از جمله‌ی این روش ها بدست آوردن معادلات کورته وگ ده وری یا همان  $kdv$  می‌باشد.

۲- در این پایان نامه به بررسی پارامترهایی چون تخلخل و نفوذپذی و اثرات کوانتومی در حضور یا عدم حضور یک میدان مغناطیسی خارجی پرداخته شد. بنابر این پیشنهاد می‌شود اثر ویسکوزیته در ناپایداری ریلی تیلور بررسی شود.

۳- در کار حاضر معرفی مختصری از ناپایداری دوجریانی و ناپایداری بونمان ارائه شد پیشنهاد می‌شود در آینده به این ناپایداری ها و نیز ناپایداری های غیر خطی درون یک پلازما پرداخته شود.

- [1] F.F.Chen, **“Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion”**, Vol. 1, Springer, New York. Second Edition.
- [2] Swanson.D.G(1983), **“Plasma Waves”**, Vol. 1, Auburn University Press, USA. second edition.
- [3] Rudolf A. Treumann & Wolfgang Baumjohann (1997) **“Advanced Space plasma Physics”**, Vol.London.
- [4]Robert H. Kraichnan **“Magnetohydrodynamic Turbulence”** Dieter Biskamp 2003.
- [5]A Tiwari, S Argal and P K Sharma(2015)” Rayleigh Taylor instability of a stratified quantum magnetized plasma in a porous and incompressible medium”.Indian J Phys.p 1313-1319.
- [6] G.A. Hoshoudy (2009)”Quantum effects on the Rayleigh–Taylor instability of stratified fluid/plasma through porous media” ,physics letter A 3732560-2567.
- [7] L. Rayleigh, Proc(1883). London Math. Soc. 14 170.
- [8] G I Taylor Proc. R. Soc. A Math. (1950) Phys. Eng. Sci. 201 192.
- [9] S Chandrasekhar (1961).” Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability” (Oxford: Clarendon press).
- [10] A Ghasemizad, H Zarringhalam and L Gholamzadeh J. (2009), "Plasma Fusion Res". Ser. 8 1234.
- [11] J J Hester(1996). Astrophys. J. 456 225.
- [12] H Alfven (1954)"on the Origin of the Solar System" (Oxford: Clarendon Press).
- [13] G.A. Lawrence, F.K. Browand, L.G. Redekopp(1991), Phys. Fluids A 3 236.
- [14] K. Masters (1985), "Spray Drying Handbook", fourth ed., Wiley, New York,.
- [15] A.H. Lefebvre(1989), "Atomization and Sprays, Hemisphere", New York,.
- [16] Y. Liao, S.M. Jeng, M.A. Jog, M.A. Benjamin, J. Fluid Mech(2000).424 1.
- [17] P H Roberts (1963)Astrophys. J. 137 679.
- [18] J D Jukes J(1963). Fluid Mech. 16 177.
- [19] N T Eldabe(1989) J. Phys. Soc. Japan 5 115 .
- [20] K O Mikaelian (1983),Phys. Rev. A 28 1637.
- [21] E.M. Campbell(1991), Laser Part. Beams 9 209.
- [22] R A Goldston and P H Rutherford(1997) , "Introduction to Plasma Physics" (London: Institute of Physics).
- [23] P K Shukla and S Ali (2005).Phys. Plasmas 12 114502.
- [24] S Ali and P K Shukl(2006),A Phys. Plasmas 13 022313.
- [25] Y D Jung Phys(2002). Plasmas 8 3842.
- [26] M. Modestov, V. Bychkov, R. Betti, L.-E. Eriksson(2008), Phys. Plasmas 15 042703.
- [27] L. Smarr, J.R. Wilson, R.T. Barton, R.L. Bowers, Astrophys. J. 246 (1981) 515.

- [28] S.T. Weir, E.A. Chandler, B.T. Goodwin(1998), Phys. Rev. Lett. 80 3763.
- [29] D Kremp, T Bornath Th M Bonitz and M Schlanges(1999) Phys. Rev. E 60 4725.
- [30] P A Markowic, C A Ringhofer and C Schmeiser Semiconductor Equations (New York: Springer) (1990).
- [31] Z.-W. Wu, W.-L. Zhang, D. Li, W.-H. Yang(2004), Chin. Phys. Lett. 21 200.
- [32] P.K. Bhatia, A. Sharma(1998), Proc. Natl. Acad. Sci. India A 68 239.
- [33] P.A. Markowich, C. Ringhofer, C. Schmeiser(1990), “Semiconductor Equations”, Springer-Verlag, New York.
- [34] G. Chabrier, F. Douchin, A.Y. Potekhin(2002), J. Phys. Condens. Matter 14 9133.
- [35] G Manfredi and F Hass(2001) , Phys. Rev. B 64 075316.
- [36] G Manfredi(2005) , Fields Inst. Commun. 46 263.
- [37] F Hass(2005), Phys. Plasmas 12 062117.
- [38] M. Opher, L.O. Silva, D.E. Dauger, V.K. Decyk, J.M. Dawson(2001), Phys. Plasmas 8 2454.
- [39] Y.D. Jung, Phys. Plasmas 8 (2001) 3842.
- [40] D. Kremp, Th. Bornath, M. Bonitz, M. Schlanges(1999), Phys. Rev. E 60 4725.
- [41] C. Gardner, SIAM J(1994). Appl. Math. 54 409.
- [42] O M Philips(2009) “Geological Fluid Dynamics Sub-surface Flow and Reactions” (New York: Cambridge University Press).
- [43] J A M McDonnell Cosmic Dust (Toronto: Wiley), p 330 (1978).
- [44] A Khan, S S Tak and P Patni Turk(2010). J. Eng. Environ. Sci. 34 59.



پوست

پیوست الف:

محاسبات عددی برای معادلات فصل دوم برای دستیابی به روابط پاشندگی و نرخ رشد ریلی

تیلور

$$v = v_0 + v_1, n = n_0 + n_1, B = B_0 \hat{x}, g = -g \hat{k}, E = \delta E$$

ابتدا معادله‌ی حرکت را می‌نویسیم:

$$m \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v = e n (v \times B + E) + m n g$$

$$m \left( \frac{\partial (v_0 + v_1)}{\partial t} + ((v_0 + v_1) \cdot \nabla) (v_0 + v_1) \right) = e ((v_0 + v_1) \times B + \delta E) + m g$$

بعد از خطی سازی

$$m \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) v_1 \right) = e ((v_0 + v_1) \times B + \delta E) + m g$$

ابتدا جملات تعادلی را می‌نویسیم:

$$0 = e v_0 \times B + m g, \quad 0 = e v_0 \hat{y} \times B_0 \hat{x} - m g \hat{k}$$

$$m g \hat{k} = -e v_0 B_0 \hat{k} \Rightarrow v_0 = \frac{-m g \hat{k}}{e B_0 \hat{k}} = -\frac{m g}{e B_0}$$

$$v_0 = -\frac{g}{\omega_{gi}} \quad \text{از طرفی } \omega_{gi} = \frac{e B_0}{m_i} \text{ (فرکانس چرخش) می‌باشد در نتیجه می‌توان گفت:}$$

حال جملات غیر تعادلی را از معادله‌ی (۵-۲) بررسی می‌کنیم:

$$E = -\nabla \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \delta v_i = \delta v_i(\omega, \vec{k}) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)};$$

$$v = v_0 + v_1, \quad n = n_0 + n_1; \quad E = \delta E \quad \delta E = -i\vec{k}\delta\varphi(\omega, \vec{k})e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

$$m_i \left( \frac{\partial \delta v_i}{\partial t} + (v_0 \cdot \nabla) \delta v_i \right) = e(\delta v_i \times B_0 \hat{e}_x + \delta E)$$

$$m_i(-i\omega\delta v_i + v_0 ik\delta v_i) = e(\delta v_i \times B_0 \hat{e}_x - ik\delta\varphi)$$

$$-im_i(\omega - kv_0)\delta v_i = -ie(k\delta\varphi - iB_0\hat{e}_x \times \delta v_i)$$

$$\left(\omega + \frac{kg}{\omega_{gi}}\right)\delta v_i = \frac{e}{m_i}(k\delta\varphi - iB_0\hat{e}_x \times \delta v_i)$$

$\delta v_i$  در جهت عمود بر میدان مغناطیسی است انتشار موج را نیز در جهت عمود در نظر می گیریم

$$\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right)\delta v_{i\perp} = \frac{e}{m_i}(k_{\perp}\delta\varphi - iB_0\hat{e}_x \times \delta v_{i\perp}) \quad (\text{پ-الف-۱})$$

$$(\omega + i\gamma)^3 = -\frac{m_e}{2m_i}\omega_{pe}^2$$

$$\omega(\omega^2 - 3\gamma^2) + i\gamma(3\omega^2 - \gamma^2) = -\frac{m_e}{2m_i}\omega_{pe}^3$$

قسمت موهومی برابر صفر است چون طرف دوم چنین عبارتی ندارد:  $\gamma^2 = 3\omega^2$

قسمت های حقیقی دوطرف را مساوی قرا می دهیم

$$\omega(\omega^2 - 3\gamma^2) = -\frac{m_e}{2m_i}\omega_{pe}^3 \quad (\text{پ-الف-۲})$$

$$\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right)\delta v_{i\perp} = \frac{e}{m_i}(k_{\perp}\delta\varphi - iB_0\hat{e}_x \times \delta v_{i\perp})$$

کل معادله‌ی بالا را از سمت چپ در  $\hat{e}_x \times$  ضرب می‌کنیم:

$$\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right) \hat{e}_x \times \delta v_{i\perp} = \frac{e}{m_i} (\hat{e}_x \times k_{\perp} \delta \varphi - \hat{e}_x \times iB_0 \hat{e}_x \times \delta v_{i\perp})$$

برای جمله‌ی آخر از قاعده‌ی بک کب استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right) \hat{e}_x \times \delta v_{i\perp} &= \frac{e}{m_i} (\hat{e}_x \times k_{\perp} \delta \varphi - (iB_0 \hat{e}_x (\hat{e}_x \cdot \delta v_{i\perp}) - \delta v_{i\perp} (iB_0 \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x))) \\ &= \frac{e}{m_i} (\hat{e}_x \times k_{\perp} \delta \varphi - iB_0 \delta v_{i\perp}) \end{aligned}$$

$(iB_0 \hat{e}_x (\hat{e}_x \cdot \delta v_{i\perp}))$  صفر است چون  $\delta v_{i\perp}$  در راستای  $y$  می‌باشد

$$\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right) \hat{e}_x \times \delta v_{i\perp} = \frac{e}{m_i} (\hat{e}_x \times k_{\perp} \delta \varphi + iB_0 \delta v_{i\perp})$$

$$\hat{e}_x \times \delta v_{i\perp} = \frac{e}{m_i} (\hat{e}_x \times k_{\perp} \delta \varphi + iB_0 \delta v_{i\perp}) \left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right)^{-1}$$

معادله‌ی بالا را در معادله‌ی (۵-۲) قرار می‌دهیم

$$\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right) \delta v_{i\perp} = \frac{e}{m_i} \left( k_{\perp} \delta \varphi - iB_0 \left( \frac{e}{m_i} (\hat{e}_x \times k_{\perp} \delta \varphi + iB_0 \delta v_{i\perp}) \left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right)^{-1} \right) \right)$$

$$\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right) \delta v_{i\perp} = \frac{ek_{\perp}\delta\varphi}{m_i} - \frac{iB_0e^2}{m_i^2} \frac{\hat{e}_x \times k_{\perp}\delta\varphi}{\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right)} + \frac{e^2B_0^2}{m_i^2} \frac{\delta v_{i\perp}}{\left(\omega + \frac{k_{\perp}g}{\omega_{gi}}\right)}$$

$$\omega_{gi}^2 = \frac{e^2B_0^2}{m_i^2}$$

$$\left[ \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) - \frac{\omega_{gi}^2}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right] \delta v_{i\perp} = \delta \varphi \left[ \frac{ek_{\perp}}{m_i} - \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \frac{\hat{e}_x \times k_{\perp}}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right]$$

اگر  $\omega \ll \omega_{gi}$  و در جمله‌ی  $\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)$  جمله‌ی دوم مخرج بزرگی خواهد داشت در نتیجه اثر آن کم

می‌شود و حتی می‌توان از آن صرف نظر کرد، در نتیجه ابتدا تمامی جملات را هم مخرج می‌کنیم داریم:

$$\cdot \left[ \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) - \frac{\omega_{gi}^2}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right] \delta v_{i\perp} = \delta \varphi \left[ \frac{\frac{ek_{\perp}}{m_i} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) - \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \hat{e}_x \times k_{\perp}}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right]$$

$$\hookrightarrow \left[ \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) - \frac{\omega_{gi}^2}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right] \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) \delta v_{i\perp} = \delta \varphi \left[ \frac{ek_{\perp}}{m_i} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) - \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \hat{e}_x \times k_{\perp} \right] \Rightarrow$$

$$\hookrightarrow \left[ \left( \omega - \frac{\omega_{gi}^2}{\omega} \right) \omega \right] \delta v_{i\perp} = \delta \varphi \left[ \frac{ek_{\perp}}{m_i} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) - \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \hat{e}_x \times k_{\perp} \right]$$

$$-(\omega_{gi}^2 - \omega^2) \delta v_{i\perp} = -\delta \varphi \left[ \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \hat{e}_x \times k_{\perp} + \frac{ek_{\perp}}{m_i} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) \right]$$

وباز هم با شرط  $\omega \ll \omega_{gi}$  در نتیجه از جمله‌ی کوچکتر چشم پوشی می‌کنیم:

$$\omega_{gi}^2 \delta v_{i\perp} = \delta \varphi \left[ \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \hat{e}_x \times k_{\perp} + \frac{ek_{\perp}}{m_i} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) \right]$$

$$\frac{\omega_{gi}^2}{\omega_{gi}^2} \delta v_{i\perp} = \frac{\delta \varphi \left[ \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \hat{e}_x \times k_{\perp} + \frac{ek_{\perp}}{m_i} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) \right]}{\omega_{gi}^2}$$

$$\delta v_{i\perp} = \delta\varphi \left[ \frac{iB_0 e^2}{m_i^2} \frac{m_i^2}{e^2 B_0^2} \hat{e}_x \times k_{\perp} + \frac{m_i^2}{e^2 B_0^2} \frac{e k_{\perp}}{m_i} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) \right]$$

$$\delta v_{i\perp} = \delta\varphi \left[ \frac{i}{B_0} \hat{e}_x \times k_{\perp} + \frac{m_i k_{\perp}}{e B_0^2} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) \right]$$

$$\delta v_{i\perp} = \delta\varphi \left[ \frac{i}{B_0} \hat{e}_x \times k_{\perp} + \frac{k_{\perp}}{B_0 \omega_{gi}} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right) \right] \quad (\text{پ-الف-۳})$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0 \quad n = n_0 + \delta n_i ; \quad u = u_0 + \delta u_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_0 + \delta n_i) + \nabla \cdot ((n_0 + \delta n_i)(u_0 + \delta u_i)) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_i + \nabla \cdot (n_0 u_0 + \delta n_i u_0 + n_0 \delta u_i + \delta n_i \delta u_i) = 0 \quad \text{خطی سازی}$$

چون  $u_0 = \text{const}$  پس  $\nabla \cdot u_0 = 0$  و از آنجایی که  $\nabla n_0 \cdot u_0 = 0$  چون بر هم عمودند در نتیجه

جمله‌ی اول صفر می‌شود، همچنین جمله‌ی آخر بخاطر توان بیشتر از یک با قاعده‌ی خطی سازی منافات

دارد پس حذف می‌شود داریم:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n_i + n_0 \nabla \delta u_i + \delta u_i \nabla n_0 = 0$$

با تبدیل فوریه داریم:

$$-i\omega \delta n_i + n_0 i k \delta u_i + \delta u_i \nabla n_0 = 0$$

$$\omega \delta n_i = n_0 k \delta u_i - i \delta u_i \nabla n_0 \quad (\text{پ-الف-۴})$$

با توجه به شرط شبه خنثائیت  $\delta n_i = \delta n_e$  داریم

$$n_0 \delta\varphi \left[ \frac{e}{m_i} \left( \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{gi}^2} \right) + \frac{k_{\perp}}{B_0 l_n} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)^{-1} \right] = -\delta\varphi \frac{n_0}{B_0} \left( \frac{\omega_{ge}}{\omega} \frac{k_{\parallel}^2}{\omega} - \frac{k_{\perp}}{\omega l_n} \right)$$

پس از جابجایی و فاکتورگیری

$$\frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} \left( \frac{e}{m_i} + \frac{\omega_{ge}}{B_0} \right) - \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{gi}^2} \frac{e}{m_i} = \frac{k_{\perp}}{\omega B_0 l_n} \left( \frac{1}{\omega} - \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)^{-1} \right)$$

$$\omega_{ge} = \frac{e B_0}{m_e}$$

$$\frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} \left( \frac{e}{m_i} + \frac{e B_0}{m_e B_0} \right) - \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{gi}^2} \frac{e}{m_i} = \frac{k_{\perp}}{\omega B_0 l_n} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right)$$

$$\rightarrow \rightarrow \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{gi}^2}{k_{\perp}^2} \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) - 1 = \frac{k_{\perp}}{\omega B_0 l_n} \frac{\omega_{gi}}{k_{\perp}^2} \frac{e B_0}{m_i} \frac{m_i}{e} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right)$$

$$\frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} \frac{\omega_{gi}^2}{k_{\perp}^2} \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) - 1 = \frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right)$$

$$\frac{\omega_{gi}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) - 1 = \frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) \rightarrow \rightarrow$$

$$\frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) - \frac{\omega_{gi}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) + 1 = 0 \quad (\text{پ-الف-۵})$$

$$\frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) - \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \frac{\omega_{gi}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} + 1 = 0$$

با توجه به فرض  $k_{\parallel} = 0$ ،  $\omega \gg \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}}$

از فرض اولیه یعنی  $k_{\parallel} = 0$  عبارت باقیمانده بصورت:

$$\frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) + 1 = 0 \rightarrow \frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) = -1$$

$$\rightarrow \rightarrow \rightarrow \frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( \frac{\omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} - \omega}{\omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}}} \right) = -1$$

طرفین وسطین کرده بدست می‌آوریم:

$$k_{\perp} g = -\omega l_n k_{\perp} \left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)$$

طبق فرض دوم  $\omega \gg \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}}$  جمله دوم داخل پرانتز خیلی کوچکتر از جمله‌ی اول است پس می‌توان از آن

صرف نظر کرد در نتیجه:

$$g = -\omega^2 l_n \rightarrow \omega^2 = -\frac{g}{l_n} \quad (\text{پ-الف-۶})$$

$$(\omega_{rt} + i\gamma)^3 + (\omega_{rt} + i\gamma) \frac{g}{l_n} - \frac{g^2 k_{\perp}}{2\omega_{gi} l_n} = 0$$

$$(\omega_{rt})^3 - (i\gamma)^3 + 3(\omega_{rt})^2 - 3(i\gamma)^2 \omega_{rt} + \frac{g}{l_n} \omega_{rt} + \frac{g}{l_n} i\gamma - \frac{g^2 k_{\perp}}{2\omega_{gi} l_n} = 0$$



$$\omega \left( \omega^2 - 3\gamma^2 + \frac{g}{l_n} \right) = \frac{g^2 k_{\perp}}{2\omega_{gi} l_n} \quad \text{بخش حقیقی:}$$

بخش موهومی :

$$-\gamma(i\gamma^2 - 3i\omega_{rt}^2) = -i\frac{g}{l_n}\gamma \quad \rightarrow \rightarrow \gamma^2 - 3\omega^2 = \frac{g}{l_n} \quad (\text{پ-الف-۷})$$

$$\gamma_{ort} = \left( \frac{g}{L_n} \right)^{1/2} ; \quad \gamma^2 - 3\omega^2 = \frac{g}{L_n} \Rightarrow \gamma_{rt}^2 - 3\omega^2 = \gamma_{ort}^2$$

$$\Rightarrow \gamma_{rt} \gg \sqrt{3}\omega \Rightarrow \gamma_{rt}^2 \gg 3\omega^2 \quad (\text{پ-الف-۸})$$

$$\omega \left( \omega^2 - 3\gamma^2 + \frac{g}{L_n} \right) = \frac{g^2 k_{\perp}}{L_n 2\omega_{gi}} \Rightarrow \omega(\omega^2 - 3\gamma^2 + \gamma^2 - 3\omega^2) = (\gamma^2 - 3\omega^2) \frac{gk_{\perp}}{2\omega_{gi}}$$

$$\omega(-2\gamma^2 - 2\omega^2) = (\gamma^2 - 3\omega^2) \frac{gk_{\perp}}{2\omega_{gi}} \Rightarrow -2\omega(\gamma^2 + \omega^2) = (\gamma^2 - 3\omega^2) \frac{gk_{\perp}}{2\omega_{gi}}$$

$$-2\omega(\gamma^2) = (\gamma^2) \frac{gk_{\perp}}{2\omega_{gi}} \Rightarrow \omega_{rt} = -\frac{gk_{\perp}}{4\omega_{gi}} \quad (\text{پ-الف-۹}) \quad \text{با استفاده از (پ-الف-۸) داریم:}$$

$$k_{\perp} = \frac{2\pi}{\lambda_{rt}} \quad ; \quad \frac{2\pi}{\lambda_{rt}} l_n \ll \frac{4\omega_{gi}}{\gamma_{ort}} \quad ; \quad \frac{l_n}{\lambda_{rt}} \ll \frac{4\omega_{gi}}{2\pi\gamma_{ort}}$$

$$\frac{\lambda_{rt}}{l_n} \gg \frac{\pi \gamma_{ort}}{2 \omega_{gi}} \quad (\text{پ-الف-۱۰}) \quad \text{کسرهای طرفین نامساوی را بر عکس می کنیم داریم:}$$

$$\frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{l_n k_{\perp}} \left( 1 - \frac{\omega}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) - \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \frac{\omega_{gi}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} + 1 = 0.$$

$$\frac{\omega_{gi}}{\omega} \frac{1}{k_{\perp} l_n} \left( \frac{\frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}}}{\left( \omega + \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}} \right)} \right) - \left( 1 + \frac{m_i}{m_e} \right) \frac{\omega_{gi}^2}{\omega^2} \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} + 1 = 0.$$

با شرط های  $k_{\parallel} \neq 0$  و  $\omega \gg \frac{k_{\perp} g}{\omega_{gi}}$  جمله ی داخل پرانتز حذف می شود، داریم:

$$\frac{g}{\omega^2 l_n} - \left(1 + \frac{m_i}{m_e}\right) \frac{\omega_{gi}^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2 k_{\perp}^2} + 1 = 0 \Rightarrow - \left( -\frac{g}{\omega^2 l_n} + \left(1 + \frac{m_i}{m_e}\right) \frac{\omega_{gi}^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2 k_{\perp}^2} \right) = -1$$

$$\frac{1}{\omega^2} \left( -\frac{g}{l_n} + \left(1 + \frac{m_i}{m_e}\right) \omega_{gi}^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \right) = 1$$

$$\omega^2 = -\frac{g}{l_n} + \omega_{gi}^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} + \omega_{gi}^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \frac{m_i}{m_e} \quad (\text{پ-الف-۱۱})$$

$$\text{وقتی شرط: } \omega^2 = -\frac{g}{l_n} + \omega_{gi}^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} + \omega_{gi}^2 \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2} \frac{m_i}{m_e} \text{ داریم:}$$

$$\omega^2 = -\frac{g}{l_n} \frac{m_e}{m_i} \frac{1}{\omega_{gi}^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{k_{\perp}^2}$$

$$\frac{k_{\parallel}}{k_{\perp}} > \left( \frac{m_i}{m_e} \frac{g}{\omega_{gi}^2 l_n} \right)^{1/2} = \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega_{gi}} \left( \frac{g}{l_n} \right)^{1/2} = \frac{\gamma_{ort}}{\omega_{gi}} \left( \frac{m_i}{m_e} \right)^{1/2} \quad (\text{پ-الف-۱۲}) \quad \text{اگر}$$

پیوست ب:

$$\frac{(\rho_0 + \rho_1)}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} = -\nabla(p_0 + p_1) + (\rho_0 + \rho_1)g - \frac{\mu}{k_1}(U_0 + U_1) + (Q_0 + Q_1) + \left(\frac{\nabla \times (B_0 + B_1)}{\mu_0}\right) \times (B_0 + B_1)$$

در هنگام خطی سازی تنها عبارت های مرتبه ی اول را نگه می داریم:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \rho_1 g - \frac{\mu}{k_1} U_1 + Q_1 + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times B_1) \times B_0 + (\nabla \times B_0) \times B_1].$$

----- (پ-ب-۱)

$$\varepsilon \frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (U \times B)$$

برای خطی سازی این عبارت از قاعده ی زیر استفاده می کنیم:

$$\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B - B(\nabla \cdot A) + A(\nabla \cdot B)$$

$$\varepsilon \frac{\partial B}{\partial t} = (B \cdot \nabla)U - (U \cdot \nabla)B - B(\nabla \cdot U) + U(\nabla \cdot B)$$

طبق فرض  $\nabla \cdot U = 0$  ,  $(\nabla \cdot B) = 0$

$$\varepsilon \frac{\partial B}{\partial t} = (B \cdot \nabla)U - (U \cdot \nabla)B$$

$$\varepsilon \frac{\partial (B_0 + B_1)}{\partial t} = ((B_0 + B_1) \cdot \nabla)(U_0 + U_1) - ((U_0 + U_1) \cdot \nabla)(B_0 + B_1)$$

$$\varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla)U_0 + (B_0 \cdot \nabla)U_1 + (B_1 \cdot \nabla)U_0 + (B_1 \cdot \nabla)U_1 - (U_0 \cdot \nabla)B_0 - (U_0 \cdot \nabla)B_1 - (U_1 \cdot \nabla)B_0 - (U_1 \cdot \nabla)B_1$$

( $U_0 = 0$ ) پس داریم:

$$(B_0 \cdot \nabla)U_0 = (B_1 \cdot \nabla)U_0 = (U_0 \cdot \nabla)B_0 = (U_0 \cdot \nabla)B_1 = 0$$

و عبارات  $(U_1 \cdot \nabla)B_1$  و  $(B_1 \cdot \nabla)U_1$  بخاطر خطی سازی حذف می شوند پس در نهایت داریم:

$$\varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla) U_1 - (U_1 \cdot \nabla) B_0 \quad (\text{پ-ب-۲})$$

خطی سازی عبارت کوانتومی،

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} \rho \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \right)$$

$$Q = \frac{\hbar^2}{2m_e m_i} (\rho_0(z) + \rho_1(x, y, z)) \nabla \left( \frac{\nabla^2 \sqrt{(\rho_0(z) + \rho_1(x, y, z))}}{\sqrt{(\rho_0(z) + \rho_1(x, y, z))}} \right).$$

با استفاده از بسط  $(1 + x)^n$  و اینکه جملات بعدی این بسط برای توان کوچکی مثل  $\frac{1}{2}$  بسیار کوچک و قابل صرف نظر می شود داریم:

$$\rightarrow (\rho_0 + \rho_1) \nabla \frac{\nabla^2 \sqrt{(\rho_0 + \rho_1)}}{\sqrt{(\rho_0 + \rho_1)}} \quad \text{جمله اول} \rightarrow \nabla^2 \left( \rho_0^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0^{1/2}} \right) \rightarrow **$$

$$** \rightarrow \nabla \cdot \nabla \left( \rho_0^{1/2} + \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0^{1/2}} \right) = \nabla \cdot \nabla \rho_0^{1/2} + \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla \left( \frac{\rho_1}{\rho_0^{1/2}} \right) = \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} \rho_0^{-1/2} \nabla \rho_0 \right) +$$

$$\frac{1}{2} \nabla \cdot \left( \frac{\nabla \rho_1}{\rho_0^{1/2}} \right) + \frac{1}{2} \nabla \cdot \left( \rho_1 \left( -\frac{1}{2} \rho_0^{-3/2} \nabla \rho_0 \right) \right) + \frac{1}{2} \nabla \rho_0^{-1/2} \nabla \rho_0 + \frac{1}{2} \rho_0^{-1/2} \nabla \cdot \nabla \rho_0 +$$

$$\frac{1}{2} \nabla \rho_0^{-1/2} \rho_1 \nabla \rho_1 + \frac{1}{2} \frac{\nabla \cdot \nabla \rho_1}{\rho_0^{1/2}} - \frac{1}{4} \left( \frac{\nabla \rho_1}{\rho_0^{3/2}} \nabla \rho_0 \right) - \frac{1}{4} \rho_1 \nabla \rho_0^{-3/2} \nabla \rho_0 - \frac{1}{4} \frac{\rho_1}{\rho_0^{3/2}} \nabla \cdot \nabla \rho_0 \Rightarrow.$$

پس از اعمال گرادیان و دیورژانس به معادله‌ی بالا و سپس ضرب آن در مخرج کسرداریم:

$$\Rightarrow \frac{\nabla^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} \Rightarrow \left( -\frac{1}{4} \rho_0^{-3/2} (\nabla \rho_0)^2 + \frac{1}{2} \rho_0^{-1/2} \nabla^2 \rho_0 - \frac{1}{4} \rho_0^{-3/2} \nabla \rho_0 \nabla \rho_1 + \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 \rho_1}{\rho_0^{1/2}} - \right.$$

$$\left. \frac{1}{4} \frac{\nabla \rho_0 \nabla \rho_1}{\rho_0^{3/2}} + \frac{3}{8} \frac{\rho_1}{\rho_0^{5/2}} (\nabla \rho_0)^2 - \frac{1}{4} \frac{\rho_1}{\rho_0^{3/2}} \nabla^2 \rho_0 \right) \cdot \left( \rho_0^{-1/2} - \frac{1}{2} \frac{\rho_1}{\rho_0^{3/2}} \right) =$$

$$= -\frac{1}{4 \rho_0} (\nabla \rho_0)^2 + \frac{1}{2 \rho_0} \nabla^2 \rho_0 - \frac{1}{4 \rho_0^2} \nabla \rho_0 \nabla \rho_1 + \frac{1}{2} \frac{\nabla^2 \rho_1}{\rho_0} - \frac{1}{4} \frac{\nabla \rho_0 \nabla \rho_1}{\rho_0^2} + \frac{3}{8} \frac{\rho_1}{\rho_0^3} (\nabla \rho_0)^2 -$$

$$\frac{1}{4} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \nabla^2 \rho_0 + \frac{1}{8} \frac{\rho_1}{\rho_0^3} (\nabla \rho_0)^2 - \frac{1}{4} \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \nabla^2 \rho_0.$$

پس از جمع و تفریق و حذف جملات مشابه معادله به صورت زیر در می آید:

$$\Rightarrow -\frac{1}{4\rho_0^2}(\nabla\rho_0)^2 + \frac{1}{2\rho_0}\nabla^2\rho_0 - \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_0\nabla\rho_1 + \frac{1}{2\rho_0}\nabla^2\rho_1 + \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0^3}(\nabla\rho_0)^2 - \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0^2}\nabla^2\rho_0$$

و در ادامه

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = & -\frac{1}{4}\nabla\rho_0^{-2}(\nabla\rho_0)^2 - \frac{1}{4}\frac{1}{\rho_0^2}\nabla(\nabla\rho_0)^2 + \frac{1}{2}\nabla\rho_0^{-1}\cdot\nabla^2\rho_0 + \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0}\nabla(\nabla^2\rho_0) - \\ & \frac{1}{2}\nabla\rho_0^{-2}(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1) - \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla(\nabla\rho_1\cdot\nabla\rho_0) + \frac{1}{2}\nabla\rho_0^{-1}\nabla^2\rho_1 + \frac{1}{2\rho_0}\nabla(\nabla^2\rho_0) + \\ & \frac{1}{2}\frac{\nabla\rho_1}{\rho_0^3}(\nabla\rho_0)^2 + \frac{1}{2}\rho_1\nabla\rho_0^{-3}(\nabla\rho_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0^3}\nabla(\nabla\rho_0)^2 \\ & - \frac{1}{2}\frac{\nabla\rho_1}{\rho_0^2}\nabla^2\rho_0 - \frac{1}{2}\rho_0\nabla\rho_0^{-2}\nabla^2\rho_0 - \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0^2}\nabla(\nabla^2\rho_0) \end{aligned}$$

پس از گزاردن گیری دوباره داریم:

$$\begin{aligned} \nabla\left(\frac{\nabla^2\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = & \frac{1}{2\rho_0^3}(\nabla\rho_0)^3 - \frac{1}{4\rho_0^2}\nabla(\nabla\rho_0)^2 - \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0 + \frac{1}{2\rho_0}\nabla(\nabla^2\rho_0) + \\ & \frac{1}{\rho_0^3}\nabla\rho_0(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1) - \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1) - \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_1 + \frac{1}{2\rho_0}\nabla(\nabla^2\rho_1) + \\ & \frac{1}{2\rho_0^3}\nabla\rho_1(\nabla\rho_0)^2 - \frac{3}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0^4}(\nabla\rho_0)^3 + \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0^3}\nabla(\nabla\rho_0)^2 - \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_1\nabla^2\rho_0 + \frac{\rho_1}{\rho_0^3}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0 - \\ & \frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0^2}\nabla(\nabla^2\rho_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\rho_0 + \rho_1)\nabla\left(\frac{\nabla\sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}}\right) = & \frac{1}{2}\nabla(\nabla^2\rho_1) - \frac{1}{2\rho_0}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0 - \frac{1}{2\rho_0}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_1 + \frac{\rho_1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0 - \\ & \frac{1}{2\rho_0}\nabla(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2}\nabla(\nabla\rho_0)^2 + \frac{1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_1(\nabla\rho_0)^2 + \frac{1}{\rho_0^2}\nabla\rho_0(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1) - \\ & \frac{\rho_1}{\rho_0^3}(\nabla\rho_0)^3 \end{aligned}$$

.....

با توجه به شرایط  $B(B_x(z), 0, 0), \quad g(0, 0, -g)$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\nabla P_1 + \rho_1 g - \frac{\mu}{k_1} U_1 + Q_1 + \frac{1}{\mu_0} [(\nabla \times B_1) \times B_0 + (\nabla \times B_0) \times B_1]$$

$$\nabla \times B_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_{1x} & B_{1y} & B_{1z} \end{vmatrix}$$

$$= i \left( \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \right) - j \left( \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right) + k \left( \frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \right)$$

$$\nabla \times B_1 \times B_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \left( \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \right) & - \left( \frac{\partial B_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right) & \left( \frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \right) \\ B_{0x}(z) & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i(0) - j \left( 0 - \left( \frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \right) B_{0x}(z) \right) + k \left( 0 - \left( \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \right) B_{0x}(z) \right)$$

$$= j \left( \frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y} \right) B_{0x}(z) - k \left( \frac{\partial B_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \right) B_{0x}(z)$$

و همینطور برای جمله‌ی بعدی داریم:

$$\nabla \times B_0 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_{0x} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= i(0) - j\left(-\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}\right) + k\left(-\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial y}\right)$$

$$\nabla \times B_0 \times B_1 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} & -\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial y} \\ B_{1x} & B_{1y} & B_{1z} \end{vmatrix}$$

$$= i\left(\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} B_{1z} + \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial y} B_{1y}\right) - j\left(0 + \frac{\partial B_{0xx}(z)}{\partial y} B_{1x}\right) + k\left(0 - \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} B_{1x}\right) =$$

$$i\left(\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} B_{1z} + \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial y} B_{1y}\right) - j\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial y} B_{1x} - k\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} B_{1x}$$

$$\Rightarrow [(\nabla \times B_1) \times B_0 + (\nabla \times B_0) \times B_1] = j\left(\frac{\partial B_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial y}\right) B_{0x}(z) - k\left(\frac{\partial B_{1z}}{\partial y} - \frac{\partial B_{1y}}{\partial z}\right) B_{0x}(z) + i\left(\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} B_{1z} + \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial y} B_{1y}\right) - j\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial y} B_{1x} - k\frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} B_{1x}$$

با حذف جملات مشابه تجزیه مولفه ای معادله (۶) را به صورت زیر داریم:

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \frac{\partial v_{1x}}{\partial t} + \frac{\mu}{k_1} v_{1x} = -\nabla P_1 + Q_{1x} + \frac{B_{1z}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} ; \quad \mu = \rho_0 \mathcal{V}$$

سپس با تبدیل فوریه معادلات ۱۲ تا ۱۴ را بدست می آوریم

$$\varepsilon \frac{\partial B_1}{\partial t} = (B_0 \cdot \nabla) U_1 - (U_1 \cdot \nabla) B_0$$

$$\begin{aligned}
-i\omega\varepsilon (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}) &= \left( (B_{0x}(z), 0, 0) \cdot \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (u_x, u_y, u_z) - \\
&\quad \left( (u_x, u_y, u_z) \cdot \left( i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) (B_{0x}(z), 0, 0) = B_{0x}(z) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \\
-i\omega\varepsilon (B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}) &= \left( B_{0x}(z) i k_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \right) + B_{0x}(z) \frac{\partial u_y}{\partial y} + \\
&\quad B_{0x}(z) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}) &= \\
&\quad \left( -\frac{(B_{0x}(z) i k_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon}, \frac{[B_{0x}(z) i k_x u_y]}{i\omega\varepsilon}, \frac{[B_{0x}(z) i k_x u_z]}{i\omega\varepsilon} \right) \\
&\quad (\Delta\text{-ب-ب-}\ddot{\text{پ}})
\end{aligned}$$


---

از تجزیه مولفه ای تک تک مولفه‌های معادله (۷) شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \nabla (\nabla^2 \rho_1) &= \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dx} i + \frac{d}{dy} j + \frac{d}{dz} k \right) \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right); \frac{d}{dy} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right); \frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) \right\} \\
-\frac{1}{2\rho_0} \nabla \rho_1 \nabla^2 \rho_0 &= -\frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_1}{dx} i + \frac{d\rho_1}{dy} j + \frac{d\rho_1}{dz} k \right) \left( \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) = \\
&= -\frac{1}{2\rho_0} \left\{ \left( \frac{d\rho_1}{dx} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) \right); \left( \frac{d\rho_1}{dy} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) \right); \left( \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{d^2 \rho_0}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) \right) \right\}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\rho_0}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_1 &= -\frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{d\rho_0}{dx}i + \frac{d\rho_0}{dy}j + \frac{d\rho_0}{dz}k\right)\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right) = \\
-\frac{1}{2\rho_0}\left\{\left(\frac{d\rho_0}{dx}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)\right); \left(\frac{d\rho_0}{dy}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)\right); \left(\frac{d\rho_0}{dz}\left(\frac{d^2\rho_1}{dx^2} + \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left.\frac{d^2\rho_1}{dy^2} + \frac{d^2\rho_1}{dz^2}\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_1}{2\rho_0^2}\nabla\rho_0\nabla^2\rho_0 &= \frac{\rho_1}{2\rho_0^2}\left(\frac{d\rho_0}{dx}i + \frac{d\rho_0}{dy}j + \frac{d\rho_0}{dz}k\right)\left(\frac{d^2\rho_0}{dx^2} + \frac{d^2\rho_0}{dy^2} + \frac{d^2\rho_0}{dz^2}\right) = \\
\frac{\rho_1}{2\rho_0^2}\left\{\left(\frac{d\rho_0}{dx}\left(\frac{d^2\rho_0}{dx^2} + \frac{d^2\rho_0}{dy^2} + \frac{d^2\rho_0}{dz^2}\right)\right); \left(\frac{d\rho_0}{dy}\left(\frac{d^2\rho_0}{dx^2} + \frac{d^2\rho_0}{dy^2} + \frac{d^2\rho_0}{dz^2}\right)\right); \left(\frac{d\rho_0}{dz}\left(\frac{d^2\rho_0}{dx^2} + \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left.\frac{d^2\rho_0}{dy^2} + \frac{d^2\rho_0}{dz^2}\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\rho_0}\nabla(\nabla\rho_0\cdot\nabla\rho_1) &= -\frac{1}{2\rho_0}\left(\frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k\right)\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}i + \frac{d\rho_0}{dy}j + \right.\right. \\
&\left.\left.\frac{d\rho_0}{dz}k\right)\cdot\left(\frac{d\rho_1}{dx}i + \frac{d\rho_1}{dy}j + \frac{d\rho_1}{dz}k\right)\right)= \\
&= -\frac{1}{2\rho_0}\left\{\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}\cdot\frac{d\rho_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\rho_0}{dy}\cdot\frac{d\rho_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\rho_0}{dz}\cdot\frac{d\rho_1}{dz}\right)\right); \frac{d}{dy}\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}\cdot\frac{d\rho_1}{dx}\right) + \right.\right. \\
&\left.\left.\left(\frac{d\rho_0}{dy}\cdot\frac{d\rho_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\rho_0}{dz}\cdot\frac{d\rho_1}{dz}\right)\right); \frac{d}{dz}\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}\cdot\frac{d\rho_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\rho_0}{dy}\cdot\frac{d\rho_1}{dy}\right) + \left(\frac{d\rho_0}{dz}\cdot\frac{d\rho_1}{dz}\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_1}{4\rho_0^2}\nabla(\nabla\rho_0)^2 &= \frac{\rho_1}{4\rho_0^2}\left(\frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k\right)\left(\frac{d\rho_0}{dx}i + \frac{d\rho_0}{dy}j + \frac{d\rho_0}{dz}k\right)^2 = \\
\frac{\rho_1}{4\rho_0^2}\left(\frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k\right)\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2\right) &= \frac{\rho_1}{4\rho_0^2}\left\{\left(\frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}\right)^2 + \right.\right.\right. \\
\left.\left.\left(\frac{d\rho_0}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2\right)\right); \frac{d}{dy}\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2\right); \frac{d}{dz}\left(\left(\frac{d\rho_0}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\rho_0}{dy}\right)^2 + \right. \\
&\left.\left.\left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2\right)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\rho_0^2} \nabla \rho_1 (\nabla \rho_0)^2 &= \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_1}{dx} i + \frac{d\rho_1}{dy} j + \frac{d\rho_1}{dz} k \right) \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2\rho_0^2} \left\{ \left( \frac{d\rho_1}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right); \frac{d\rho_1}{dy} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right); \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \frac{d\rho_1}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0^2} \nabla \rho_0 (\nabla \rho_0 \cdot \nabla \rho_1) &= \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dx} i + \frac{d\rho_0}{dy} j + \frac{d\rho_0}{dz} k \right) \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} i + \frac{d\rho_0}{dy} j + \frac{d\rho_0}{dz} k \right) \cdot \left( \frac{d\rho_1}{dx} i + \frac{d\rho_1}{dy} j + \frac{d\rho_1}{dz} k \right) \right) \\ &= \frac{1}{\rho_0^2} \left\{ \frac{d\rho_0}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \cdot \frac{d\rho_1}{dx} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \cdot \frac{d\rho_1}{dy} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \right); \frac{d\rho_0}{dy} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \cdot \frac{d\rho_1}{dx} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \cdot \frac{d\rho_1}{dy} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \right); \right. \\ &\quad \left. \frac{d\rho_0}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \cdot \frac{d\rho_1}{dx} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \cdot \frac{d\rho_1}{dy} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \right) \right\} \\ -\frac{\rho_1}{\rho_0^3} (\nabla \rho_0)^3 &= -\frac{\rho_1}{\rho_0^3} \nabla \rho_0 (\nabla \rho_0)^2 = -\frac{\rho_1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dx} i + \frac{d\rho_0}{dy} j + \frac{d\rho_0}{dz} k \right) \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) \\ &= -\frac{\rho_1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right); \frac{d\rho_0}{dy} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right); \right. \\ &\quad \left. \frac{d\rho_0}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

با توجه به شرط  $\rho_0 = \rho_0(z)$  به ترتیب مولفه ها را مرتب میکنیم:

$$\begin{aligned} Q_{1x} &= \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dx} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) \right) + \right. \\ &\quad \frac{\rho_1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dx} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \cdot \frac{d\rho_1}{dx} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \cdot \frac{d\rho_1}{dy} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \right) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) + \frac{1}{2\rho_0} \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) + \frac{1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_1}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \cdot \frac{d\rho_1}{dx} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \cdot \frac{d\rho_1}{dy} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \right) - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \frac{d\rho_0}{dx} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) \}$$

$$Q_{x1} = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d\rho_1}{dz} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \left( \frac{d^2}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \rho_1 \right\}$$

.....

$$\begin{aligned} Q_{z1} &= \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) + \frac{\rho_1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\rho_0} \frac{d}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \cdot \frac{d\rho_1}{dx} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \cdot \frac{d\rho_1}{dy} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \right) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} \frac{d}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) + \frac{1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_1}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \cdot \frac{d\rho_1}{dx} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{d\rho_0}{dy} \cdot \frac{d\rho_1}{dy} \right) + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \right) - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \left( \frac{d\rho_0}{dx} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dy} \right)^2 + \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right) \} \\ &= \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) + \frac{\rho_1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) + \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} \frac{d}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 + \\ &\quad \left. \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{z1} &= \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) + \frac{\rho_1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \cdot \frac{d\rho_1}{dz} \right) \left\{ = -\frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{d\rho_1}{dz} + \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} \right) \right\} + \\ &\quad \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} \frac{d}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \left\{ = \frac{\rho_1}{4\rho_0^2} 2 \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right\} + \frac{1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{d\rho_1}{dz} - \\ &\quad \left. \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_1}{dz^3} + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} - \right. \\
&\quad \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} \right) + \frac{\rho_1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{d\rho_1}{dz} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} + \\
&\quad \left. \frac{\rho_1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} + \frac{1}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 + \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{d\rho_1}{dz} - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right\} \\
Q_{z1} &= \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_1}{dz^3} + \frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_1}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} - \right. \\
&\quad \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_1}{dx^2} + \frac{d^2 \rho_1}{dy^2} \right) + \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) + \frac{3}{2\rho_0^2} \frac{d\rho_1}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 - \frac{\rho_1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 = \\
&\quad \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_1}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right\} \frac{d\rho_1}{dz} + \right. \\
&\quad \left. \left\{ -\frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right\} \rho_1 \right\} \\
Q_{z1} &= \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_1}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_1}{dz^2} + \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \frac{1}{\rho_0} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} + \right. \quad (\text{ب-ب-}\gamma) \\
&\quad \left. \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right\} \frac{d\rho_1}{dz} + \left\{ -\frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) + \frac{1}{\rho_0^2} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right\} \rho_1 \right\}
\end{aligned}$$

.....

که از اینجا می‌توانیم  $\rho_1$  را بدست آوریم و در مولفه‌های  $Q_1$  جایگزین کرده چنین بدست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\varepsilon} u_{1z} \frac{d\rho_0(z)}{dz} = i\omega \rho_1 \Rightarrow \rho_1 = \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz}$$

جایگذاری در معادله (۱۳)

$$Q_{x1} = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz} + \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) - \right. \right. \\
\left. \left. \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} \\
&= \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{du_{1z}}{dz} + \frac{1}{2} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{du_{1z}}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d}{dz} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} &= -\frac{1}{2\rho_0} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{du_{1z}}{dz} \left(\frac{d\rho_0}{dz}\right)^2 - \frac{1}{2\rho_0} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2\rho_0}{dz^2} \\
\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} \right) \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz} &= -\frac{1}{2} (k_x^2 + k_y^2) \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \\
&= -\frac{1}{2} k^2 \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz} \\
&\quad - \frac{1}{2\rho_0} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2\rho_0}{dz^2} \right) \\
\frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} &= \frac{1}{2\rho_0^2} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{x1} &= \frac{\hbar^2 i k_x}{2m_i m_e} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{1}{2} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{du_{1z}}{dz} + \frac{1}{2} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{du_{1z}}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \right. \\
&\quad \frac{1}{2\rho_0} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \frac{du_{1z}}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 - \frac{1}{2\rho_0} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{k^2}{2} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0(z)}{dz} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) + \\
&\quad \left. \frac{1}{2\rho_0^2} \frac{u_{1z}}{i\varepsilon\omega} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right\} = \frac{\hbar^2 k_x}{2m_i m_e \varepsilon\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \frac{d\rho_0}{dz} + \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{du_{1z}}{dz} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{du_{1z}}{dz} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2} u_{1z} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} u_{1z} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{k^2}{2} u_{1z} \frac{d\rho_0(z)}{dz} + \frac{1}{2\rho_0^2} u_{1z} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{x1} &= \frac{\hbar^2 k_x}{2m_i m_e \varepsilon\omega} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \frac{d\rho_0}{dz} + \left[ \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \frac{du_{1z}}{dz} + \right. \\
&\quad \left. \left( \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{k^2}{2} \frac{d\rho_0(z)}{dz} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right) u_{1z} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \rho_1 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} = \frac{u_z}{2i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) = \\
&= \frac{u_z}{2i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \right) &= \frac{1}{2i\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + u_z \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) \right) \\
&= \frac{1}{2i\omega\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + u_z \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} \right) = \frac{1}{2i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \right. \\
&\quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^4} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} + U_z \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} \Big) = \frac{1}{2i\omega\varepsilon} \left( 3 \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \right. \\
&\quad \left. 3 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} + u_z \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} \right)
\end{aligned}$$

۱۲.

$$\frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \left( \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \cdot \frac{\partial \rho_1}{\partial z} \right) \right) = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \right) = \frac{1}{\rho_0^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \cdot \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \right. \right. \\ \left. \left. u_z \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) \right) = \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 + u_z \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right)$$

$$-\frac{\rho_1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 = -\frac{1}{\rho_0^3} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 = -\frac{1}{\rho_0^3} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^4$$

$$\bar{Q}_z = \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{\varepsilon\omega} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \\ & + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ & + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{3}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ & - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \left\{ \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} \\ & - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right)^2 \\ & + \frac{5}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \\ & + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^4 \end{aligned} \right\} u_z \end{aligned} \right] \quad (\text{پ-ب-۹})$$

بدین ترتیب یک معادله دیفرانسیل برای  $u_{1z}$  بدست می آوریم

$$ik_x(17) + ik_y(18) \rightarrow \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) (ik_x u_{1x} + ik_y u_{1y}) \\ = (k_x^2 + k_y^2) P_1 + ik_x \bar{Q}_{1x} + ik_y \bar{Q}_{1y}$$

نکته : طبق معادله (۲۰)

$$ik_x u_{1x} + ik_y u_{1y} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad , \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= k^2 P_1 + ik_x \bar{Q}_{1x} + ik_y \bar{Q}_{1y} \\
&= k^2 P_1 + ik_x \bar{Q}_{1x} + ik_y \bar{Q}_{1y} \\
P_1 &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon k^2} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{k^2} \{ ik_x \bar{Q}_{1x} + ik_y \bar{Q}_{1y} \} \Rightarrow \\
P_1 &= -\frac{\rho_0}{\varepsilon k^2} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{1}{k^2} \left\{ ik_x \left[ \frac{\hbar^2 k_x}{2m_i m_e \varepsilon \omega} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \frac{d\rho_0}{dz} + \left[ \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \frac{du_{1z}}{dz} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{k^2}{2} \frac{d\rho_0(z)}{dz} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right) u_{1z} \right] \right\} \\
&\quad + ik_y \left[ \frac{\hbar^2 k_y}{2m_i m_e \varepsilon \omega} \left( \frac{1}{2} \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \frac{d\rho_0}{dz} + \left[ \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \right] \frac{du_{1z}}{dz} \right) \right. \\
&\quad \left. \left. + \left( \frac{1}{2} \frac{d^3 \rho_0}{dz^3} - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \left( \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \right) - \frac{k^2}{2} \frac{d\rho_0(z)}{dz} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \right) u_{1z} \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_1 &= -\frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\rho_0}{\varepsilon k^2} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) - \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{i\varepsilon \omega} \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \left\{ \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \right\} u_z \right] - \\
&\quad ik_x \frac{B_{1z}}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} - ik_y \frac{B_{0x}(z)(ik_x B_{1y} - ik_y B_{1x})}{\mu_0 k^2}
\end{aligned}$$



$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_z = -\nabla \left( \begin{array}{c} -\frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\rho_0}{\varepsilon k^2} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) \\ + \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ + \left\{ \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ + \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) \right\} \\ - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \end{array} \right] u_z \\ -ik_x \frac{B_{1z}}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} - ik_y \frac{B_{0x}(z)(ik_x B_{1y} - ik_y B_{1x})}{\mu_0 k^2} \end{array} \right)$$

$$+ \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{\varepsilon\omega} \left[ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \\ + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} - \frac{3}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right\} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \end{array} \right] \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ + \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} \\ - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right)^2 \\ + \frac{5}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \\ - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^4 \end{array} \right\} u_z \right] - \left( \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) g. \\ + \frac{B_{0x}(z)(ik_x B_{1z} - \frac{\partial B_{1x}}{\partial z})}{\mu_0} - \frac{B_{1x}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \frac{\rho_0}{\varepsilon k^2} + \frac{1}{\varepsilon k^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) \\
&\quad + \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \\ &\frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ &+ \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &- \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} - \frac{1}{2\rho_0} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \right\} \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} u_z + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &+ \frac{1}{\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) u_z - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right)^2 u_z \\ &- \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} \right) u_z - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &- \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} u_z - \frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ &- \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^4 u_z + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} u_z \\ &+ \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \right\} \\
&\quad - ik_x \frac{1}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{1z}}{\partial z} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} - ik_x \frac{B_{1z}}{\mu_0 k^2} \frac{\partial^2 B_{0x}(z)}{\partial z^2} \\
&\quad - ik_y \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{(ik_x B_{1y})}{\mu_0 k^2} - ik_y \frac{\partial B_{1y}}{\partial z} \frac{(ik_x B_{0x}(z))}{\mu_0 k^2} \\
&\quad + ik_y \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{(ik_y B_{1x})}{\mu_0 k^2} + ik_y \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \frac{(ik_y B_{0x}(z))}{\mu_0 k^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{\varepsilon \omega} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^3 u_z}{\partial z^3} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \\ & + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right\} \\ & + \left\{ \frac{3}{2} \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{3}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} \\ & + \left\{ -\frac{k^2}{2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{3}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^3 \frac{\partial u_z}{\partial z} \right\} \\ & + \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^4 \rho_0}{\partial z^4} u_z - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) \frac{\partial^3 \rho_0}{\partial z^3} u_z \\ & - \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} u_z - \frac{1}{\rho_0} \left( \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} \right)^2 u_z \\ & + \frac{5}{2\rho_0^2} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 \rho_0}{\partial z^2} u_z + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^2 u_z \\ & - \frac{1}{\rho_0^3} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right)^4 u_z \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right] - \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \right) g +. \\
& ik_x \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} (B_{1z}) - \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right) - \frac{B_{1x}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} y
\end{aligned}$$

با استفاده از معادله‌ی (۱۷)

$$(B_{1x}, B_{1y}, B_{1z}) = \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon}, \frac{-[B_{0x}(z)ik_x u_y]}{i\omega\varepsilon}, \frac{-[B_{0x}(z)ik_x u_z]}{i\omega\varepsilon} \right)$$

معادله‌ی بالا را در عبارت بدست آمده جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_z &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( \begin{aligned} & -ik_x \frac{B_{1z}}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \\ & -ik_y B_{0x}(z) \frac{(ik_x B_{1y})}{\mu_0 k^2} \\ & +ik_y B_{0x}(z) \frac{(ik_y B_{1x})}{\mu_0 k^2} \end{aligned} \right) + ik_x \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} (B_{1z}) \\
& - \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \left( \frac{\partial B_{1x}}{\partial z} \right) \\
& - \frac{B_{1x}}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \quad \Rightarrow \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \begin{aligned} & -\frac{ik_x}{\mu_0 k^2} \left( \frac{-[B_{0x}(z)ik_x u_z]}{i\omega\varepsilon} \right) \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \\ & -ik_y \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} ik_x \left( \frac{-[B_{0x}(z)ik_x u_y]}{i\omega\varepsilon} \right) \\ & +ik_y \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} ik_y \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon} \right) \end{aligned} \right).$$

$$+ik_x \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \left( \frac{-[B_{0x}(z)ik_x u_z]}{i\omega\varepsilon} \right) - \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon} \right) -$$

$$\frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon} \right) \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}.$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \begin{aligned} & -\frac{k_x^2 B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \\ & -ik_y u_y \frac{1}{\mu_0 k^2} \frac{k_x^2}{i\omega\varepsilon} (B_{0x}(z))^2 \\ & +k_y^2 \frac{(B_{0x}(z))^2}{\mu_0 k^2} \frac{ik_x u_x}{i\omega\varepsilon} \\ & -k_y^2 \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \end{aligned} \right) +$$

$$ik_x \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \left( \frac{-[B_{0x}(z)ik_x u_z]}{i\omega\varepsilon} \right) - \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon} \right)$$

$$- \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon} \right) \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}.$$

$$ik_x u_x + ik_y u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad -ik_x u_x = ik_y u_y + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (16)$$

$$\frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_z = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \begin{aligned} & -\frac{k_x^2 B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \\ & +ik_x u_x \frac{1}{\mu_0 k^2} \frac{k_x^2}{i\omega\varepsilon} (B_{0x}(z))^2 \\ & +\frac{1}{\mu_0 k^2} \frac{k_x^2}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial u_z}{\partial z} (B_{0x}(z))^2 \\ & +k_y^2 \frac{(B_{0x}(z))^2}{\mu_0 k^2} \frac{ik_x u_x}{i\omega\varepsilon} \\ & -k_y^2 \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \end{aligned} \right)$$

$$\begin{aligned}
& +ik_x \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \left( \frac{-[B_{0x}(z)ik_x u_z]}{i\omega\varepsilon} \right) - \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon} \right) - \\
& \frac{1}{\mu_0} \left( -\frac{(B_{0x}(z)ik_x u_x - u_z \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z})}{i\omega\varepsilon} \right) \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z}. \\
\\
& \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\mu}{k_1} \right) u_z = \frac{k_x^2}{\mu_0 k^2} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \right)^2 + \frac{k_x^2}{\mu_0 k^2} \frac{B_{0x}(z)u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 B_{0x}(z)}{\partial z^2} + \\
& \frac{k_x^2}{\mu_0 k^2} \frac{B_{0x}(z)}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - k_x^2 \frac{2B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{ik_x u_x}{i\omega\varepsilon} - \frac{k_x^2}{\mu_0 k^2} \frac{2B_{0x}(z)}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \\
& \frac{k_x^2}{\mu_0 k^2} \frac{(B_{0x}(z))^2}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - k_y^2 \frac{2B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{ik_x u_x}{i\omega\varepsilon} + \frac{k_y^2}{\mu_0 k^2} \frac{B_{0x}(z)}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \\
& \frac{k_y^2}{\mu_0 k^2} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \right)^2 + k_y^2 \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0 k^2} \frac{\partial^2 B_{0x}(z)}{\partial z^2} + k_x^2 \frac{(B_{0x}(z))^2}{\mu_0} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} + \\
& \frac{ik_x u_x}{i\omega\varepsilon} \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} - \frac{1}{\mu_0} \frac{B_{0x}(z)}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{u_z}{i\omega\varepsilon} \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \frac{\partial^2 B_{0x}(z)}{\partial z^2} + \\
& \frac{B_{0x}(z)}{\mu_0} \frac{ik_x u_x}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} - \frac{u_z}{\mu_0 i\omega\varepsilon} \left( \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \right)^2. \\
\\
& = -\frac{k_x^2}{\mu_0 k^2} \frac{2B_{0x}(z)}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial B_{0x}(z)}{\partial z} \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{k_x^2}{\mu_0 k^2} \frac{(B_{0x}(z))^2}{i\omega\varepsilon} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + k_x^2 \frac{(B_{0x}(z))^2}{\mu_0} \frac{u_z}{i\omega\varepsilon}.
\end{aligned}$$

پس از حذف و جمع و تفریق جملات مشابه سر انجام معادله زیر بدست می آید:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\rho_0}{\varepsilon} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{1z} = \\ & \frac{1}{\varepsilon k^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ & + \frac{\rho_0}{\varepsilon k^2} \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\ & + \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{i\varepsilon\omega} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \\ & -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{du_{1z}}{dz} \\ & + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \frac{du_{1z}}{dz} \\ & + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 U_{z1} \end{aligned} \right\} - \frac{U_{z1}}{i\omega\varepsilon} \frac{d\rho_0}{dz} g \end{aligned} \right\} \times i\varepsilon\omega k^2$$

و اینکه  $\omega^* = \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - i\omega \right\}$  را داخل معادله جایگذاری کنیم ، داریم:

$$\begin{aligned}
\frac{\rho_0}{\varepsilon} i \varepsilon \omega k^2 \left( -i \omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{1z} &= \frac{1}{\varepsilon k^2} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} i \varepsilon \omega k^2 \left( -i \omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
&+ \frac{\rho_0}{\varepsilon k^2} i \varepsilon \omega k^2 \left( -i \omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\
&+ \frac{\hbar^2}{2m_i m_e} \frac{1}{i \varepsilon \omega} i \varepsilon \omega k^2 \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \\ & - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{du_{1z}}{dz} \\ & + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \frac{du_{1z}}{dz} \\ & + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 u_{z1} \end{aligned} \right\} - i \varepsilon \omega k^2 \frac{u_{z1}}{i \omega \varepsilon} \frac{d\rho_0}{dz} g \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\rho_0 i \omega k^2 \left( -i \omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{1z} \\
= \frac{\partial \rho_0}{\partial z} i \omega \left( -i \omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \rho_0 i \omega \left( -i \omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \\
+ \frac{\hbar^2 k^2}{2m_i m_e} \left\{ \begin{aligned} & - \frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \\ & - \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{du_{1z}}{dz} \\ & + \frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \frac{du_{1z}}{dz} \\ & + \frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 u_{z1} \end{aligned} \right\} - k^2 u_{z1} \frac{d\rho_0}{dz} g \Rightarrow
\end{aligned}$$

با اضافه و کم کردن عبارت  $\frac{\varepsilon v_0}{k_1}$  داریم:

$$\rho_0 k^2 \left( i \omega - \frac{\varepsilon v_0}{k_1} + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \left( -i \omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) u_{1z}$$

$$= \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \left( i\omega - \frac{\varepsilon v_0}{k_1} + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \rho_0 \left( i\omega - \frac{\varepsilon v_0}{k_1} + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \left( -i\omega + \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_i m_e} \left\{ \begin{aligned} & -\frac{1}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} \\ & -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \frac{d^2 \rho_0}{dz^2} \frac{du_{1z}}{dz} \\ & +\frac{1}{2\rho_0^2} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^3 \frac{du_{1z}}{dz} \\ & +\frac{k^2}{2\rho_0} \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right)^2 u_{z1} \end{aligned} \right\} - k^2 u_{z1} \frac{d\rho_0}{dz} g \Rightarrow$$

$$\left[ \rho_0 \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' + k^2 A \right] \frac{d^2 u_{1z}}{dz^2} + \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' \left( \frac{d\rho_0}{dz} \right) + k^2 B \right] \frac{du_{1z}}{dz} - k^2 \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - (C - g) \frac{d\rho_0}{dz} \right] u_{1z} = 0 \quad (\text{پ-ب-۱})$$

حال جوابی از معادله‌ی (پ-ب-۱) را بصورت  $u_{1z} = \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z)$  در داخل این معادله جایگذاری می‌کنیم، رابطه‌ی پاشندگی به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \frac{d^2}{dz^2} \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) \\ & + \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \frac{d}{dz} \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) \\ & - k^2 \left\{ \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] + g \frac{1}{L_D} \right\} \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) = 0 \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dz^2} \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) \\ & = \frac{d}{dz} \left( \frac{n\pi}{h} \cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) + \lambda \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) \right) \\ & = -\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) + \lambda \frac{n\pi}{h} \cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) \\ & + \lambda \frac{n\pi}{h} \cos\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) + \lambda^2 \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)\exp(\lambda z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left( - \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + \right. \\
& \left. \lambda \frac{2n\pi}{h} \cos \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + \lambda^2 \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) \right) + \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \right. \\
& \left. \omega_q^2 \right] \left( \frac{n\pi}{h} \cos \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + \lambda \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) \right) - k^2 \left\{ \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_q^2 \right] + g \frac{1}{L_D} \right\} \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) = 0 \\
& \left( - \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_q^2 \right] \lambda \frac{2n\pi}{h} \cos \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_q^2 \right] \lambda^2 \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) \right) + \left( \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \right. \right. \\
& \left. \left. \omega_q^2 \right] \frac{n\pi}{h} \cos \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \lambda \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) \right) - \\
& \cdot k^2 \left\{ \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + g \frac{1}{L_D} \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) \right\} = 0
\end{aligned}$$

ضرایب سینوس و کسینوس را جدا می‌کنیم

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left\{ \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 \right\} + \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \lambda - \\
& k^2 \left\{ \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] + g \frac{1}{L_D} \right\} \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) + \left\{ \left( \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \frac{n\pi}{h} + \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \lambda \frac{2n\pi}{h} \right\} \cos \left( \frac{n\pi}{h} z \right) \exp(\lambda z) = 0
\end{aligned}$$

از آنجائیکه یک طرف معادله صفر است می‌توان طرفین آن را به در  $\exp(-\lambda z)$  ضرب کرده و سپس

شرایط مرزی را اعمال نمود برای  $z=h$  وقتی  $n$  ها اعداد صحیح باشند داریم:

$\sin(n\pi) = 1$  و برای  $\cos(n\pi) = 0$  پس فقط جملاتی که ضرایب سینوس هستند باقی می‌مانند

$$\begin{aligned}
& - \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left\{ \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 \right\} + \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \lambda \\
& - k^2 \left\{ \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] + g \frac{1}{L_D} \right\} \sin \left( \frac{n\pi}{h} z \right) = 0 \Rightarrow
\end{aligned}$$



$$- \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left\{ \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 \right\} + \frac{1}{L_D} \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \lambda - k^2 \left\{ \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] + g \frac{1}{L_D} \right\} = 0$$

$$- \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left\{ \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \lambda^2 - \frac{1}{L_D} \lambda + k^2 \right\} + k^2 g \frac{1}{L_D} = 0$$

با توجه به مقدار  $\lambda = -\frac{1}{2L_D}$  محاسبات را ادامه می‌دهیم:

$$- \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left\{ \left( \frac{n\pi}{h} \right)^2 - \frac{1}{4L_D^2} + \frac{1}{2L_D^2} + k^2 \right\} - \frac{k^2 g}{L_D} = 0$$

$$- \left[ \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' - \omega_q^2 \right] \left\{ \frac{4n^2\pi^2 - h^2 + 2h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2}{h^2 4L_D^2} \right\} - \frac{k^2 g}{L_D} = 0$$

با توجه به اینکه طرف دوم معادله صفر است جملات را بر ضریب جمله‌ی اول تقسیم می‌کنیم، داریم:

$$\left[ \omega_q^2 - \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' \right] - \frac{\frac{k^2 g}{L_D}}{\left\{ \frac{4n^2\pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2}{h^2 4L_D^2} \right\}} = 0$$

$$\left[ \omega_q^2 - \left\{ \frac{\varepsilon v_0}{k_1} - \omega' \right\} \omega' \right] - \frac{\frac{h^2 4L_D^2 k^2 g}{L_D}}{n^2\pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2} = 0$$

$$\omega'^2 - \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \omega' + \omega_q^2 - \frac{h^2 4k^2 g L_D}{n^2\pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2} = 0$$

$$\omega'^2 - \frac{\varepsilon v_0}{k_1} \omega' + \left[ \omega_q^2 - \frac{h^2 4k^2 g L_D}{n^2\pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2} \right] = 0 \quad (\text{پ-ب-۱۲})$$

در اینجا نیز یک معادله درجه دو داریم که به روش دلتا جواب آن را بدست می‌آوریم:

$$\omega' = \frac{\varepsilon v_0}{2k_1} \pm \sqrt{\left( \frac{\varepsilon v_0}{2k_1} \right)^2 - \left( \omega_q^2 - \frac{h^2 4k^2 g L_D}{n^2\pi^2 + h^2 + 4L_D^2 h^2 k^2} \right)} \quad (\text{پ-ب-۱۳})$$

## **Abstract**

Instability have turned out to be the most interesting and important phenomena in physics. They arise when free energy has accumulated in a system which the system want to get rid of. In plasma physics there is a multitude of reason for the excitation of instabilities. In homogeneities may evolve both in real space and in velocity space. These in homogeneities lead to the generation of instabilities as a first linear and straightforward reaction of the plasma to such deviations from thermal equilibrium. The instabilities have cover a representative selection of many macro-and micro instabilities in space plasma such as Rayleigh-Taylor instability, that the Rayleigh-Taylor instability is a macro instability type.

We represented the general concept of instability and then we have specially pointed to the Rayleigh-Taylor instability. Also, after the introduction of one of the description model of the plasma as a fluid model, we have offer to the magnetohydrodynamic MHD equations as a dynamic model to introduce. The magnetohydrodynamic stratified plasma considered in absence of external magnetic field and then it have studied in presence of external magnetic field.

## **Keywords:**

magneto hydrodynamic, MHD equations, porosity media, quantum plasma, Rayleigh-Taylor instability.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Physics and Nuclear Engineering**

**M.S.c Thesis in Atomic and Molecular Physics**

**Study of the Rayleigh-Taylor instabilities in magnetized  
quantum plasma and in the presence of an external  
magnetic field**

**By:**

**Fatemeh Zamandi**

**Supervisor:**

**Dr Mehdi Momeni**

**February 2017**