

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای

رشته فیزیک، گرایش ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه‌ی ولگشت کوانتومی زمان گسسته‌ی بدون سکه

نگارنده: زهرا احمدی

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

بهمن ۱۳۹۵

تقدیم به

پدر و مادر مهربانم که هر لحظه وجودم را از چشمه سار پر از عشق
چشمانشان سیراب می کنند...

سپاس و ستایش مرخدايي راجل جلاله كه آثار قدرت او بر چهره روز روشن، تابان است و انوار حكمت او در دل شب تار، در فشان.
آفریدگاری كه خویشتن را به ما شناساند و درهای علم را بر ما كشود و عمری و فرصتی عطا فرمود تا بدان، بنده ضعیف خویش را در طریق علم
و معرفت بیازماید.

با سپاس از پدر و مادر عزیزم كه در سختی های زندگی، همواره یاورى دلسوز و خداكار و پشتیبانى محكم براىم بوده اند.

و سپاس یكران بر همراى و همگامى استاد مهربانم كه با نكته های دلاویز و صحیفه های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه كشای مكارنده
در اتمام پایان نامه بوده است.

زهرا احمدی

بهمن ۱۳۹۵

تعهد نامه

اینجانب **زهرا احمدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **فیزیک** دانشکده **فیزیک و مهندسی هسته‌ای** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **مطالعه‌ی ولگشت کوانتومی زمان گسسته‌ی بدون سکه**، تحت راهنمایی **مصطفی عنابستانی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

زهرا احمدی

بهمن ۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این تحقیق، ابتدا ولگشت کلاسیکی روی خط را با استفاده از یک سکه معرفی می‌کنیم. سپس به مطالعه ولگشت کوانتومی در یک بعد می‌پردازیم. فضای هیلبرت را برای ولگشت کوانتومی تعریف می‌کنیم که دارای فضای مکان و فضای سکه می‌باشد. در ولگشت کوانتومی به جای سکه از عملگر سکه استفاده می‌شود بنابراین اثر آن را بر حالت ولگشت بررسی می‌کنیم. نشان خواهیم داد که چگونه با داشتن هر حالت و استفاده از عملگر تحول می‌توانیم حالت بعد را بسازیم. با استفاده از تبدیل فوریه، فضای مکان مربوط به ولگرد به صورت یک ماتریس 2×2 تبدیل می‌شود که با قطری کردن ماتریس ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارهای ولگشت کوانتومی روی خط را تعیین می‌کنیم. با استفاده از عکس تبدیل فوریه توزیع دامنه ولگشت را در پایه مکان محاسبه می‌کنیم. در ادامه ویژگی‌های جانبی ولگشت کوانتومی را برای تعداد گامهای زیاد بررسی می‌کنیم. توزیع دامنه ولگشت کوانتومی در پایه‌ی مکان را برای تعداد گامهای زیاد با استفاده از روش فاز پایا تخمین می‌زنیم. سپس مدلی دیگر از ولگشت کوانتومی به نام ولگشت کوانتومی بدون سکه در یک بعد را معرفی می‌کنیم. این دسته از ولگشت‌های کوانتومی اولین بار توسط پاتل^۱ ارائه شده‌است. فضای هیلبرت مربوط به ولگشت کوانتومی فقط دارای فضای مکان می‌باشند و فضای سکه‌ای وجود ندارد. دو حالت سکه در اندیس مکان‌های زوج و فرد جایگزین می‌شود. با معرفی دو عملگر تحول می‌توان ولگشت کوانتومی ساخت. با استفاده از تبدیل فوریه ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارها را مشخص کرده و توزیع دامنه این نوع ولگشت کوانتومی را در فضای k بدست می‌آوریم. برای این نوع ولگشت نیز با کمک عکس تبدیل فوریه می‌توان دامنه ولگشت را در پایه مکان تعیین کرد. ویژگی‌های جانبی ولگشت کوانتومی در حد تعداد گامهای زیاد بررسی گردیده است و انتگرال‌های در حد بی‌نهایت را با استفاده از روش فاز پایا تخمین زده شده است. در این پایان‌نامه ولگشت کوانتومی بدون سکه را با ولگشت کوانتومی عادی مقایسه کرده، نقاط قوت، ضعف، شباهتها و تفاوت‌های آنها بررسی گردیده‌اند.

کلمات کلیدی: ولگشت تصادفی کلاسیک، ولگشت کوانتومی سکه‌دار، ولگشت کوانتومی بدون سکه، توزیع احتمال، فاز پایا

^۱Patel

فہرست مطالب

فهرست تصاویر	س
فهرست جداول	ف
۱ انواع ولگشت	۱
۱.۱ توصیف ولگشت کلاسیکی	۱
۱.۱.۱ نقطه جذب کلاسیکی	۴
۲.۱ ولگشت کوانتومی گسسته در یک بعد	۵
۳.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی در یک بعد	۱۲
۲ ویژگی مجانبی ولگشت کوانتومی	۱۷
۱.۲ ویژگی مجانبی ولگشت کوانتومی برای تعداد گامهای زیاد	۱۷
۲.۲ تحلیل رفتار مجانبی حدی با استفاده از قضیه ریاضی	۱۷
۳.۲ انتگرال در حد بی‌نهایت	۱۸
۴.۲ حل ولگشت کوانتومی برای تعداد گامهای زیاد	۱۸
۵.۲ توزیع احتمال مجانبی	۲۶
۶.۲ ولگشت عمومی روی یک خط	۳۱
۳ ولگشت کوانتومی بدون سکه در یک بعد	۳۹
۱.۳ حرکت ذره در غیاب سکه	۴۱
۲.۳ ارتباط با ولگشت کوانتومی سکه‌دار	۴۴
۳.۳ بررسی یکتایی عملگر تحول ولگشت کوانتومی بدون سکه	۴۶
۴.۳ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی بدون سکه	۵۰
۵.۳ رفتار مجانبی ولگرد	۵۶
۶.۳ ولگشت در حضور مرز جاذب	۶۳
۷.۳ مقایسه ولگشت کوانتومی سکه‌دار و بدون سکه	۶۵
۸.۳ نتیجه‌گیری	۶۶

۶۹	مراجع
۷۱	آ اثبات روابط
۷۱	۱.آ محاسبه انحراف معیار در ولگشت کلاسیکی روی خط
۷۴	۲.آ حل در مورد تحلیل ولگشت کوانتومی در یک بعد
۷۶	۳.آ محاسبه مشتقات در حل ولگشت کوانتومی برای تعداد گامهای زیاد
۷۷	۴.آ حل در مورد تحلیل ولگشت کوانتومی بدون سکه
۷۹	۵.آ محاسبه مشتقات مراتب بالاتر در ولگشت کوانتومی بدون سکه

فهرست تصاویر

۱	ولگشت یک بعدی	۱.۱
۳	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیک ، برای سه زمان ثابت t	۲.۱
۵	پهنای توزیع متقارن برای ولگشت کلاسیک	۳.۱
	ولگشت تصادفی متقارن کلاسیکی روی خط با یک مرز جاذب در نقطه 0 ، نقطه شروع	۴.۱
۵	ولگشت $x = 1$ است.	۵
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $ \psi\rangle$	۵.۱
۱۰	$ \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	۱۰
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $ \psi\rangle$	۶.۱
۱۱	$ \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	۱۱
	نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $ \psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	۷.۱
۱۱	$ \psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle + 1\rangle)$	۱۱
۱۲	مقایسه انحراف معیار ولگشت کلاسیکی و ولگشت کوانتومی	۸.۱
۲۵	مقایسه دو توزیع احتمال ولگشت کوانتومی	۱.۲
۲۸	تابع توزیع احتمال ولگشت هادامارد پس از ۱۰۰ گام	۲.۲
۵۳	تابع توزیع احتمال بعد از ۳۲ گام برای ولگشت تصادفی کوانتومی نامتقارن ψ_0	۱.۳
	تابع توزیع احتمال بعد از ۳۲ گام برای ولگشت تصادفی کوانتومی متقارن ψ_s است.	۲.۳
۵۷	منحنی تیره، توزیع یکنواخت معادله ۱۴۸.۳ مشخص می کند.	۵۷
	تابع توزیع احتمال بعد از ۳۲ گام برای ولگشت تصادفی کوانتومی متقارن، در حضور	۳.۳
۶۵	دیوار جاذب در سمت چپ $n = 0$	۶۵
	نمودار احتمال جذب نشدن ولگشت کوانتومی متقارن در حضور دیواره ی جذبی که در سمت چپ مبداء قرار دارد و با یک در صد قابل توجهی احتمال فرار بعد از دو گام را نشان می دهد.	۴.۳
۶۵		۶۵

فهرست جداول

۲		۱.۱	احتمال پیدا شدن ذره در مکان n و در زمان t
۸		۲.۱	احتمال پیدا شدن ذره در مکان n و در زمان t

پیش‌گفتار

طبق تحقیقات انجام شده جهان فیزیکی تحت قوانین مکانیک کوانتومی است [۱] [۲]. یوری مانین در سال ۱۹۸۰^۲ [۳] و فاینمن در سال ۱۹۸۲^۳ [۴] به این نتیجه رسیدند که می‌توان توسط رایانه‌های کوانتومی جهان فیزیکی را به صورت استاندارد شبیه سازی کرد و بر اساس قوانین کوانتومی کامپیوترهای کوانتومی را به یکی از حوزه‌های فعال تحقیقاتی تبدیل کرد.

طبق الگوریتم دویچ در سال ۱۹۵۸^۴ [۵] و الگوریتم دویچ-جوزا^۵ [۶] کامپیوترهای کوانتومی می‌توانند مسائل خاص را از کامپیوترهای غیراحتمالی کلاسیکی محاسبه کنند. اولین الگوریتمی که نشان داد می‌تواند مساله یک تابع ناشناخته را سریع‌تر از الگوریتم کلاسیکی حل کند الگوریتم سایمون بود^۶ [۷]. در سال ۱۹۹۴، تنها الگوریتم کوانتومی که اعداد صحیح را با سرعت نمایی بیش از همتای کلاسیکی‌اش به اعداد اول تجزیه کرد توسط شور^۷ انجام شد [۸] [۹]. و دقیقاً این الگوریتم آغازگر تحقیقات در حوزه اطلاعات و محاسبات کوانتومی در فیزیک کوانتومی علوم کامپیوتر، ریاضیات و مهندسی است. نتایج این تحقیق نشان داد که کاملاً با همتهای کلاسیکی خود فرق دارند. الگوریتم‌ها بهترین روش برای حل مسائل در ولگشت کوانتومی هستند. الگوریتم گروور^۸ می‌تواند داده‌های طبقه بندی نشده را با سرعت توان دوم زمان از سرعت هر نوع الگوریتم کلاسیکی جستجو کند [۱۰] الگوریتم‌های کلاسیک مبتنی بر ولگشت‌های تصادفی‌اند. شبیه‌سازی زنجیره مارکوف^۹ یک نمونه از ابزار الگوریتمی قوی است [۱۱]. ولگشت کوانتومی شکل تعمیم یافته ولگشت تصادفی کلاسیکی است و چیزی که ولگشت کوانتومی را از نوع کلاسیکی آن متمایز می‌سازد امکان استفاده از برهم‌نهی حالت‌ها (ترکیب خطی حالت‌ها) در این ساختار است. واریانس ولگشت کوانتومی روی یک خط با توان دوم تعداد گام‌ها متناسب است که با ولگشت تصادفی کلاسیکی مقایسه می‌شود [۱۲] [۱۳]. ولگشت تصادفی کوانتومی توسط آهارونوف^{۱۰} معرفی شد. جستجوی مسیرهای چند گانه با استفاده از انتگرال مسیر توسط

^۲Yuri Manin

^۳Feynman

^۴Deutsch

^۵Deutsch-Jozsa

^۶Simon

^۷Shor

^۸Grover

^۹Markov

^{۱۰}Aharonov

ریازانوف^{۱۱} [۱۴] و فاینمن و هیبز^{۱۲} مورد مطالعه قرار گرفت [۱۵]. مطالعه دینامیک ذره کوانتومی در یک فرمول بندی شبکه‌ای کوانتومی توسط میر^{۱۳} انجام شد. الگوریتم‌های کوانتومی مبنی بر ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته است بنابراین مفهوم ولگشت کوانتومی به دو صورت ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته مورد مطالعه قرار گرفت. ولگشت کوانتومی زمان-پیوسته توسط فرهی^{۱۴} و گوتمن^{۱۵} [۱۶] و ولگشت کوانتومی زمان-گسسته توسط واتروس^{۱۶} بیان شدند. ولگشت هادامارد^{۱۷} توسط آمباینیس^{۱۸} [۱۷] به عنوان ولگشت کوانتومی زمان-گسسته معرفی شد. مقاله مروری توسط کمپه [۱۸] این دو نوع ولگشت را مورد بررسی قرار می‌دهد. در واقع ولگشت کوانتومی به عنوان ابزار قوی برای درک پدیده‌های گوناگون در سیستم‌های فیزیکی می‌باشد.

^{۱۱}Riazanov

^{۱۲}Hibbs

^{۱۳}Meyer

^{۱۴}Farhi

^{۱۵}Gutmann

^{۱۶}Watrous

^{۱۷}Hadamard

^{۱۸}Ambainnis

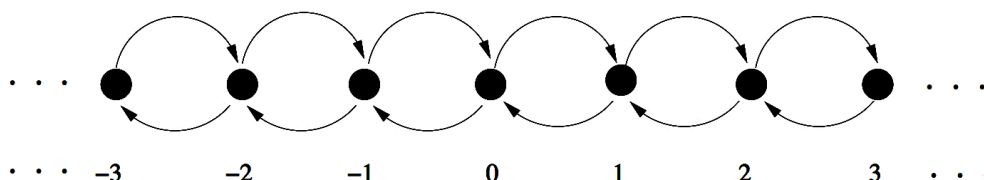
فصل ۱

انواع ولگشت

۱.۱ توصیف ولگشت کلاسیکی

ساده‌ترین نوع ولگشت کلاسیکی که می‌توان بیان کرد، محدود به یک بعد و بر روی یک خط راست می‌باشد که آن را ولگشت یک بعدی می‌نامند. در این حالت ولگرد گام‌های خود را تنها در دو جهت مخالف هم، راست و یا چپ بر می‌دارد. بنابراین انتخاب جهت‌های تصادفی می‌تواند توسط یک سکه که در دست ولگرد است مشخص شود. در این حالت به سادگی می‌توان مکان ولگرد را بر روی یک خط راست نشان داد [۱۹].

شکل ۱.۱: ولگشت یک بعدی



جدول ۱.۱: احتمال پیدا شدن ذره در مکان n و در زمان t

$t \backslash n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

مثلا اگر شخصی را در نظر بگیرید که سکه‌ای در دست دارد و قرار است روی مسیر یک بعدی ولگشت انجام دهد. احتمال آن که سکه شیر یا خط بیاید یکسان می‌باشد. بنابراین ولگشت متقارن خواهد بود زیرا هیچ ترجیحی برای حرکت به راست و چپ وجود ندارد به این ترتیب می‌توان نشان داد که توزیع احتمال برای گام‌های زیاد یک مقدار گاوسی خواهد بود. در لحظه اول اگر فرض کنیم که ابتدا ولگرد در مکان صفر باشد بنابراین احتمال حضور در اولین گام قبل از حرکت، $t = 0$ برابر یک خواهد بود و بنابراین ولگرد پس از اولین گام $t = 1$ با احتمال $\frac{1}{2}$ در موقعیت $n = 1$ و با احتمال $\frac{1}{2}$ در موقعیت $n = -1$ می‌باشد. از روی شکل ۲.۱ می‌بینیم که هر چه از مبداء دور می‌شویم احتمال حضور ولگشت در نقاط دور از مبداء کمتر می‌شود و بیشترین احتمال حضور ولگشت مربوط به مبداء است. احتمال حضور ذره در مکان‌های مختلف n به ازای تعداد گام‌های t را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد. (پیوست آ.۱)

$$p(t, n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{t}{t+n} \right) \quad (1.1)$$

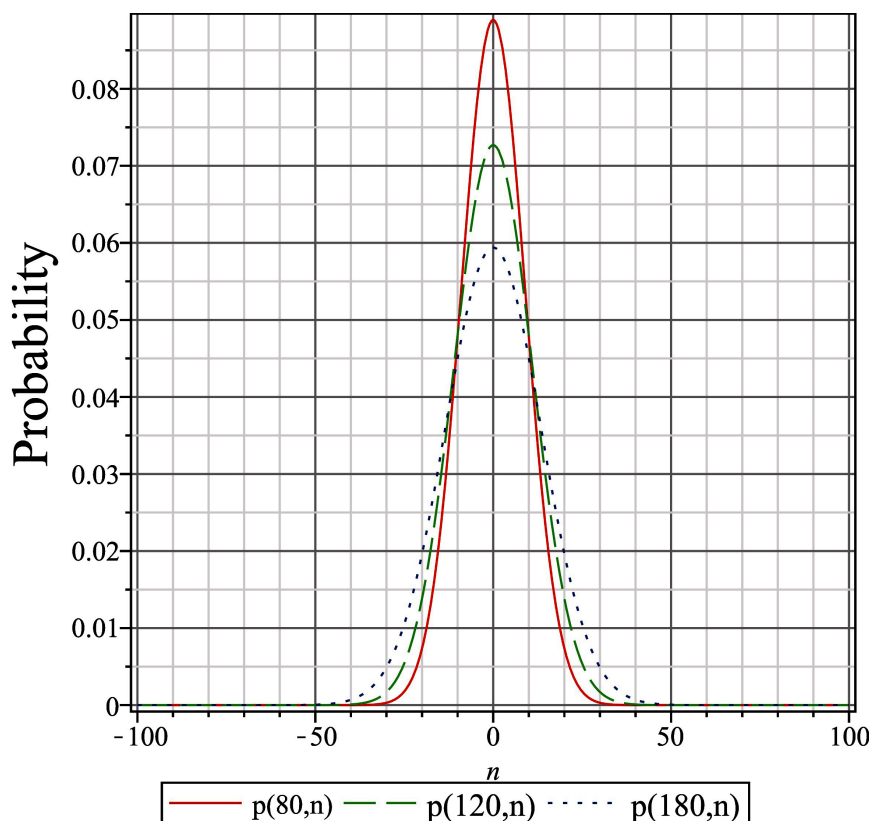
که

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{(a-b)!b!} \quad (2.1)$$

برای این معادله عبارت داخل پرانتز باید صحیح باشد، پس $t+n$ باید زوج باشد. احتمال کمیتی مثبت است پس داخل پرانتز هم باید مثبت باشد، یعنی باید $(n \leq t)$ باشد. به ازای تعداد گام‌های زوج احتمال حضور ولگرد در مکان‌های فرد صفر است. و به ازای تعداد گام‌های فرد احتمال حضور ولگرد در مکان‌های زوج صفر است. برای مقدار ثابت t ، $p(t, n)$ یک توزیع دو جمله‌ای به صورت منحنی گاوسی است.

برای مقادیر بزرگ t ، ثابت احتمال به عنوان تابعی از n یک منحنی مشخصه دارد. شکل ۲.۱ این منحنی‌ها را برای t های برابر ۸۰، ۱۲۰، ۱۸۰ نشان می‌دهد. همان طور که می‌بینیم با افزایش تعداد

شکل ۲.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کلاسیک، برای سه زمان ثابت t



گام‌ها نمودار شکل تیزی خود را از دست می‌دهد و منحنی‌های توزیع نقاط، پهن‌تر شده‌اند و به مبداء نزدیکتر می‌شود [۱۹].

محاسبه‌ی انحراف معیار

برای محاسبه انحراف معیار از تقریب استرلینگ استفاده می‌کنیم:

$$t! \approx \sqrt{2\pi t} t^t e^{-t} \quad (3.1)$$

به ازای t ‌های بزرگ و n ‌های کوچک $\ln$ بگیریم تابع توزیع احتمال به صورت زیر می‌شود:

$$p(t, n) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} e^{\left(\frac{-n^2}{2t}\right)} \quad (4.1)$$

معادله به دست آمده بسیار شبیه توزیع گاوسی و نرمال می‌باشد. محاسبه‌ی تقریب استرلینگ در ۱.۴ می‌باشد.

در توزیع گاوسی t یک عدد ثابت است. پهنای توزیع گاوسی نصف فاصله میان دو نقطه عطف است و با انحراف معیار برابر است. پس فاصله میان دو نقطه عطف $2\sqrt{t}$ است و انحراف معیار برابر با $\sqrt{t}$

است. و از طرفی انحراف معیار هم با پهنای توزیع گاوسی برابر است. بنابراین برای بدست آوردن نقاط عطف باید از تابع $p(t, n)$ نسبت به n دوبار مشتق بگیریم و آن را مساوی صفر قرار دهیم [۱۹].

$$\frac{\partial^2 f}{\partial n^2} = -e^{-\frac{n^2}{2t}} \sqrt{2t}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + n^2 e^{-\frac{n^2}{2t}} \sqrt{2t}^{-2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = 0 \quad (5.1)$$

$$e^{-\frac{n^2}{2t}} \sqrt{2t}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = n^2 e^{-\frac{n^2}{2t}} \sqrt{2t}^{-2} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \quad (6.1)$$

$$\frac{n^2}{t} = 1 \Rightarrow n = \pm \sqrt{t} \quad (7.1)$$

در ولگشت کلاسیکی توزیع احتمال متقارن است. بنابراین چشم داشتی مکان n صفر می شود.

$$\langle n \rangle = \sum np(t, n) = 0 \quad (8.1)$$

انحراف معیار برای ولگشت کلاسیک، به صورت زیر محاسبه می شود [۱۹].

$$\sigma = \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = \sqrt{t} \quad (9.1)$$

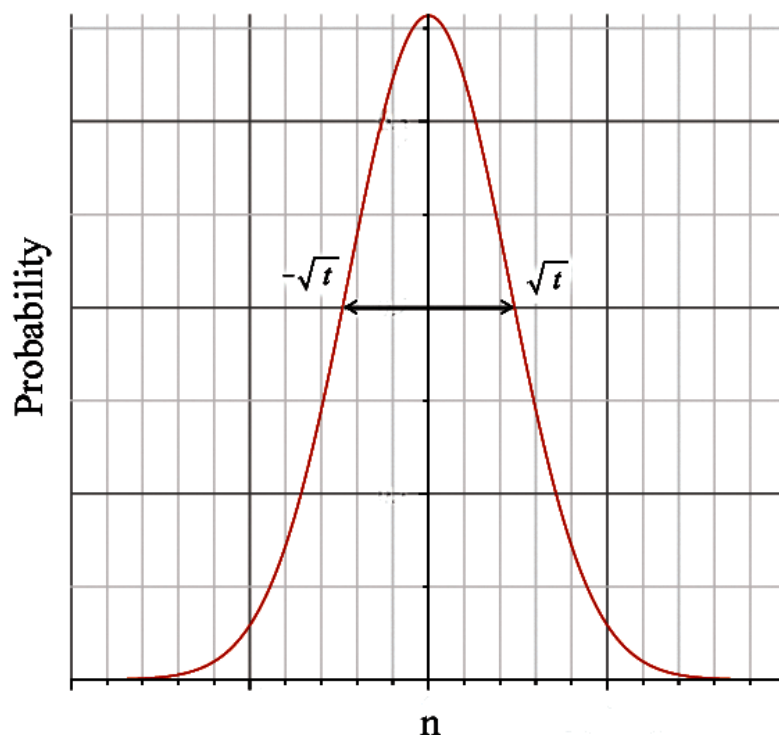
۱.۱.۱ نقطه جذب کلاسیکی

می توان نشان داد که در مورد ولگشت کلاسیکی اگر یک نقطه جذب داشته باشیم ولگشت در هر صورت جذب این نقطه خواهد شد. می توان این مطلب را به گونه ای تفسیر کرد که در ولگشت های کلاسیکی یک بعدی حتما ولگرد به مکان اولیه باز خواهد گشت برای اثبات فرض می کنیم که ولگرد از نقطه $x = 1$ شروع به حرکت می کند. در مبدا یک مرز جاذب تعبیه شده است ذره کلاسیکی یا با احتمال $\frac{1}{4}$ به نقطه صفر می رسد که در این صورت جذب شده است و یا با احتمال $\frac{1}{4}$ به نقطه ۲ می رود. احتمال آنکه از نقطه دو به مبدا باز گردد به صورت حاصل ضرب احتمال (رفتن از مکان ۲ به مکان ۱) و (رفتن از مکان ۱ به ۰) تعریف می شود از آنجایی که احتمال ولگشت در فضا همگن می باشد $p = p_{10} = p_{21}$ اینگونه تعریف می شود. مهم است که ولگشت در هر گام زمانی با احتمال برابر به سمت جلو و به سمت عقب حرکت کند.

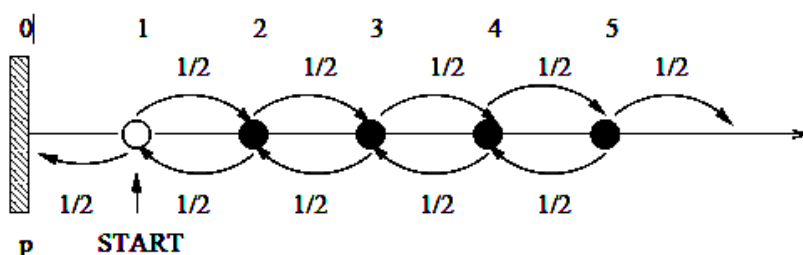
$$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} p_{21} p_{10} = \frac{1}{4} (1 + p^2) \quad (10.1)$$

با حل این معادله خواهیم داشت: $p = 1$ یعنی هر چه قدر هم ذره از مرز جاذب دور باشد با گذشت زمان در نهایت حتما به مرز جاذب خواهد افتاد [۱۸].

شکل ۳.۱: پهنای توزیع متقارن برای ولگشت کلاسیک



شکل ۴.۱: ولگشت تصادفی متقارن کلاسیکی روی خط با یک مرز جاذب در نقطه ۰، نقطه شروع ولگشت $x = 1$ است.



۲.۱ ولگشت کوانتومی گسسته در یک بعد

ولگشت کوانتومی را می‌توان به نوعی تعمیمی از ولگشت کلاسیک دانست. چیزی که ولگشت کوانتومی را از نوع کلاسیکی آن متمایز می‌سازد امکان استفاده از برهم‌نهی حالت‌ها (ترکیب خطی حالت‌ها) در این ساختار است که این امر رفتارهای متفاوتی را نتیجه می‌دهد. در این بخش ولگشت کوانتومی گسسته در یک بعد را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

ساده‌ترین نوع ولگشت کوانتومی [۲۰] حرکت یک ولگرد کوانتومی بر روی یک خط راست است. این

مدل با دو فضای هیلبرت مجزا توصیف می‌شود. اولین فضای مربوط به سکه H_c و دومین فضا مشخص کننده‌ی مکان ولگرد بر روی خط راست H_s می‌باشد. بردار $|n\rangle$ در فضای هیلبرت H_s که پایه‌های محاسباتی این فضا به صورت $\{|n\rangle | n \in \mathbb{Z}\}$ هستند. جهت حرکت در فضای مکان توسط فضای سکه تعیین می‌شود. مثلاً الکترونی که روی یک شبکه یک بعدی در حال حرکت است، الکترون یک ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ است. بنابراین برای فضای دو بعدی، می‌توانیم اسپین الکترون را به عنوان فضای سکه معرفی کرد. یعنی

$$\{|s, m_s\rangle | s = \frac{1}{2}, m_s = \pm \frac{1}{2}\} \quad (11.1)$$

اگر $m_s = +\frac{1}{2}$ باشد الکترون یک گام به سمت راست و اگر $m_s = -\frac{1}{2}$ باشد الکترون یک گام به سمت چپ حرکت می‌کند. بنابراین فضای هیلبرت الکترون شامل یک فضای مکان n بعدی است و یک فضای اسپین (سکه) دو بعدی است. بنابراین ولگشت کوانتومی از فضای هیلبرت (n بعدی) مکان و فضای هیلبرت (دو بعدی) سکه تشکیل شده است:

$$H = H_c \otimes H_p \quad (12.1)$$

در ولگشت کوانتومی به جای سکه از عملگر سکه استفاده می‌شود که باید این عملگر یکانی باشد زیرا فرض ما است که ولگرد کوانتومی از بین نمی‌رود و تولید نمی‌شود بنابراین احتمالات حفظ خواهد شد، و به همین دلیل عملگر اعمالی ولگشت کوانتومی یکانی می‌باشد. تغییر در مکان ولگشت به وسیله عملگر جابه‌جایی (انتقال شرطی) اعمال می‌شود. که عملگر جابه‌جایی شرطی از دو قسمت تشکیل شده که یکی بر فضای سکه اثر می‌کند و دیگری بر فضای مکان. که اثر عملگر جابه‌جایی شرطی به این صورت هست که با توجه به حالت اولیه سکه فضای مکان را تغییر می‌دهد. اگر حالت اولیه $|0\rangle$ باشد ولگرد یک گام به جلو حرکت می‌کند، و اگر حالت اولیه $|1\rangle$ باشد ولگرد یک گام به عقب حرکت می‌کند.

$$S|0\rangle|n\rangle = |0\rangle|n+1\rangle \quad (13.1)$$

$$S|1\rangle|n\rangle = |1\rangle|n-1\rangle \quad (14.1)$$

بنابراین عملگر انتقال را اینگونه تعریف می‌کنیم:

$$S = |0\rangle\langle 0| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle\langle n| + |1\rangle\langle 1| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle\langle n| \quad (15.1)$$

در ولگشت کوانتومی ابتدا باید عملگر سکه را روی حالت اولیه سکه اعمال کنیم. که شبیه پرتاب سکه در ولگشت تصادفی کلاسیکی می‌باشد. عملگر سکه دوران حالت سکه را ایجاد می‌کند که با اعمال عملگر سکه روی حالت سکه نتیجه برهم‌نهی از حالات می‌باشد. هر جمله در این برهم‌نهی یک انتقال را در یکی از این جهات تولید خواهد کرد. برای مثال می‌خواهیم یک سکه دلخواه را برای تولید یک ولگشت

مقارن در اطراف مبدا انتخاب کنیم اگر ولگرد در مبداء $|n = 0\rangle$ حضور داشته باشد حالت اولیه ولگشت به صورت:

$$|\psi(0)\rangle = |0\rangle \otimes |n = 0\rangle \quad (16.1)$$

می باشد.

حالت ولگشت در زمان t را نشان می دهد. عملگر سکه ای که معمولاً برای ولگشت های کوانتومی یک بعدی استفاده می شود عملگر هادامارد است که به صورت:

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

در ولگشت کوانتومی اگر بخواهیم مکان ولگرد را بعد از گام اول بدست آوریم باید روی مکان ولگشت اندازه گیری انجام دهیم. با عمل اندازه گیری 50° درصد شانس پیدا شدن ولگرد در مکان $n = 1$ و 50° درصد شانس پیدا کردنش را در $n = -1$ داریم.

اولین گام اعمال عملگر هادامارد روی حالت سکه است. که با اعمال $H \otimes I$ برهم نهی مکان به وسیله عملگر سکه ایجاد می شود. و در ادامه عملگر جابه جایی S را اعمال می کنیم.

$$H \otimes I(|0\rangle \otimes |0\rangle) \rightarrow S\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |0\rangle\right) \quad (18.1)$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |-1\rangle) \quad (19.1)$$

عملگر هادامارد H یک سکه مقارن می باشد به این معنی که اندازه دامنه قسمت راست با دامنه قسمت چپ مستقل از حالتی که H روی آن اعمال می شود یکسان است. اگر مراحل را به درستی اعمال کنیم در ابتدا عملگر هادامارد (مرحله ۱) و بعد عملگر جابه جایی S را اعمال کنیم (مرحله ۲) و اندازه گیری کنیم (مرحله ۳) دوباره ولگشت کلاسیکی را به دست می آوریم. هدف ما این است که خصوصیات کوانتومی را به کار گیریم تا به نتایج جدیدی برسیم که با مفهوم کلاسیکی نمی توان به آنها رسید. وقتی که مکان ذره را بعد از اولین گام اندازه گیری می کنیم، برهم نهی بین مکان های مختلف را که یکی از ویژگی های سیستم های کوانتومی است، از بین می بریم. اگر اندازه گیری انجام ندهیم و عملگر سکه و عملگر جابه جایی را نیز به درستی اعمال کنیم، این برهم نهی بین مکان های مختلف می تواند به تداخل سازنده یا ویرانگر منجر شود و همین اثر است که رفتاری متفاوت از مفهوم کلاسیکی تولید می کند و این خصوصیت ولگشت کوانتومی است. می بینیم که در ولگشت کوانتومی توزیع احتمال دیگر توزیع نرمال نیست و انحراف معیار از مرتبه $\sqrt{t}$ نمی باشد.

بنابراین عملگر تحول برای ولگشت کوانتومی که عملگری یکانی می باشد به صورت:

$$U = S(C \otimes I) \quad (20.1)$$

که اگر روی گام اول عملگر U را اعمال کنیم، گام بعدی ولگرد را نشان خواهد داد. با اعمال t بار عملگر تحول حالت ولگرد را بعد از t گام $|\psi(t)\rangle = U^t |\psi(0)\rangle$ نشان خواهد داد.

جدول ۲.۱: احتمال پیدا شدن ذره در مکان n و در زمان t

$t \backslash n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
0						1					
1					$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				
2				$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$			
3			$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$		
4		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{16}$	
5	$\frac{1}{32}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{16}$		$\frac{5}{32}$		$\frac{1}{32}$

با توجه به حالت اولیه ولگرد چند گام از ولگشت کوانتومی را محاسبه می‌کنیم [۱۹] [۱۸]. معادله $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ را به عنوان شرایط اولیه در نظر می‌گیریم.

$$|\psi(1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|-1\rangle) \quad (21.1)$$

$$|\psi(2)\rangle = \frac{1}{2}(-|1\rangle|-2\rangle + (|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle + |0\rangle|2\rangle) \quad (22.1)$$

$$|\psi(3)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|1\rangle|-3\rangle - |0\rangle|-1\rangle + (2|0\rangle + |1\rangle)|1\rangle + |0\rangle|3\rangle) \quad (23.1)$$

جدول (۲.۱) توزیع احتمال را پس از گام پنجم (بدون اندازه‌گیری کردن) نشان می‌دهد. تابع توزیع احتمال در نقاط مرکزی متمرکز نشده است و در کناره‌ها متقارن می‌شود. اگر توزیع احتمال را برای گام‌های بیشتر از ۵ بیابیم. روش دستی برای محاسبه مفید نخواهد بود. برای مثال اگر توزیع احتمال بعد از صد گام را بخواهیم، ابتدا باید $|\psi(100)\rangle$ را محاسبه کنیم. یک روش که برای انجام این کار محاسباتی وجود دارد، استفاده از روابط بازگشتی است که در ادامه به دست خواهیم آورد. حالت کلی ولگشت کوانتومی می‌تواند این گونه نوشته شود [۱۹]:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (A_n(t)|0\rangle + B_n(t)|1\rangle)|n\rangle \quad (24.1)$$

که ضرایب A_n و B_n باید در شرط زیر صدق کنند (شرط بهنجارش):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2 = 1 \quad (25.1)$$

عملگر S را روی $|\psi(t)\rangle$ اعمال می‌کنیم، می‌توانیم روابط بازگشتی که ضرایب A_n و B_n در آن هستند را به دست بیاوریم.
ابتدا با اعمال $H \otimes I$ داریم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[A_n \left(\frac{|\circ\rangle + |\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) + B_n \left(\frac{|\circ\rangle - |\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right] \otimes |n\rangle \quad (26.1)$$

و بعد با اعمال عملگر انتقال S در رابطه (26.1) داریم:

$$S = |\circ\rangle \langle \circ| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+1\rangle \langle n| + |\uparrow\rangle \langle \uparrow| \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n-1\rangle \langle n| \quad (27.1)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(t) \frac{|\circ\rangle \langle \circ| \circ\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |n+1\rangle \langle n|n\rangle \\ & + B_n(t) \frac{|\circ\rangle \langle \circ| \circ\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |n+1\rangle \langle n|n\rangle \\ & + A_n(t) \frac{|\uparrow\rangle \otimes |n-1\rangle}{\sqrt{2}} \langle n|n\rangle \\ & - B_n(t) \frac{|\uparrow\rangle \otimes |n-1\rangle}{\sqrt{2}} \langle n|n\rangle \end{aligned} \quad (28.1)$$

$$\begin{aligned} |\psi(t+1)\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(t) + B_n(t) |\circ\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |n+1\rangle \\ &+ \frac{A_n(t) - B_n(t) |\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \otimes |n-1\rangle \end{aligned} \quad (29.1)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب در دو سمت رابطه خواهیم داشت:

$$A_n(t+1) = \frac{A_{n+1}(t) - B_{n+1}(t)}{\sqrt{2}} \quad (30.1)$$

$$B_n(t+1) = \frac{A_{n-1}(t) + B_{n-1}(t)}{\sqrt{2}} \quad (31.1)$$

با توجه به شرایط اولیه:

$$A_n(\circ) = \begin{cases} 1 & n = \circ \\ \circ & n \neq \circ \end{cases} \quad (32.1)$$

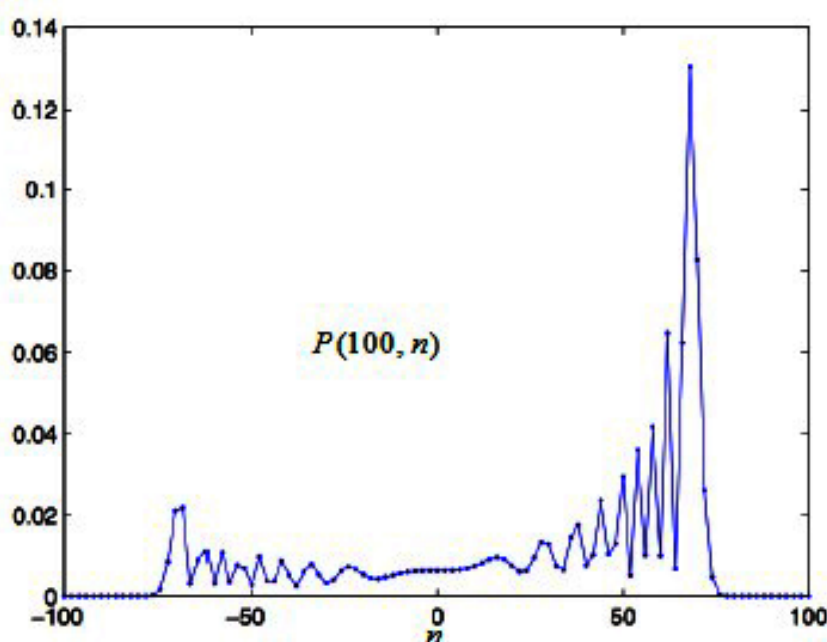
$$B_n(0) = 0 \text{ و}$$

با به کارگیری این فرمول‌ها توزیع احتمال را محاسبه می‌کنیم:

$$p(t, n) = |A_n(t)|^2 + |B_n(t)|^2 \quad (33.1)$$

در ولگشت کوانتومی ولگرد تمایل دور شدن از مبداء را دارد و به سمت چپ و راست پیشروی می‌کند. تابع توزیع احتمال به حالت اولیه وابسته خواهد بود به طوری که اگر حالت اولیه سکه $|0\rangle$ باشد، شکل (5.1) ولگرد به سمت راست پیشروی می‌کند. و اگر حالت اولیه سکه $|1\rangle$ باشد، شکل (6.1) ولگرد به سمت چپ پیشروی می‌کند. این عدم تقارن ناشی از تداخل‌های سازنده و مخرب بین دامنه‌های احتمال و در واقع اثر عملگر هادامارد روی سکه است. وجود فاز منفی در حالات $|1\rangle$ باعث آثار تداخلی شده و احتمال حضور را تغییر خواهد داد. وجود این فاز منفی به حالت اولیه بستگی دارد، بنابراین تابع توزیع احتمال به حالت اولیه وابسته خواهد بود.

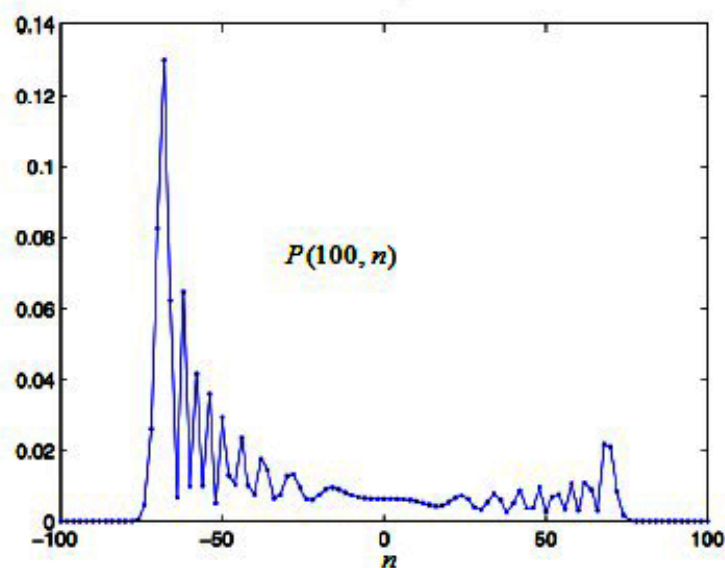
شکل 5.1: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = |0\rangle|0\rangle$



اما می‌توان شکل دیگری از ولگشت کوانتومی نیز پیدا کرد که در آن تابع توزیع احتمال به صورت متقارن توزیع شده باشد، مانند شکل (7.1) برای این کار می‌توان از دو روش استفاده کرد. چون اثر عملگر هادامارد بر روی حالت اولیه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ باعث آثار تداخلی می‌شود، پس می‌توان با تغییر عملگر سکه این آثار تداخلی را از بین برد مانند

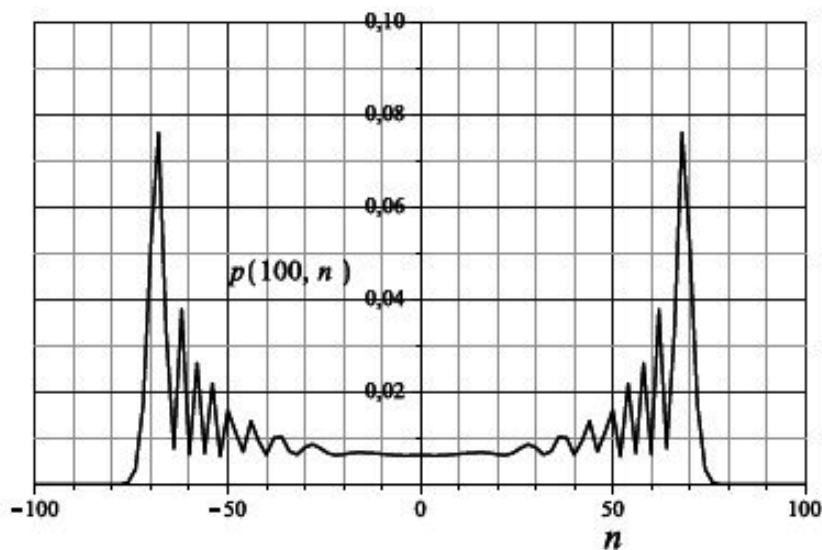
$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (34.1)$$

شکل ۶.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $|\psi\rangle = |1\rangle|0\rangle$



راه دیگر، استفاده از یک حالت متفاوت است. اگر حالت اولیه $|n=0\rangle$ باشد مشاهده می‌شود که توزیع احتمال به صورت متقارن در می‌آید [۱۳] [۲۰].

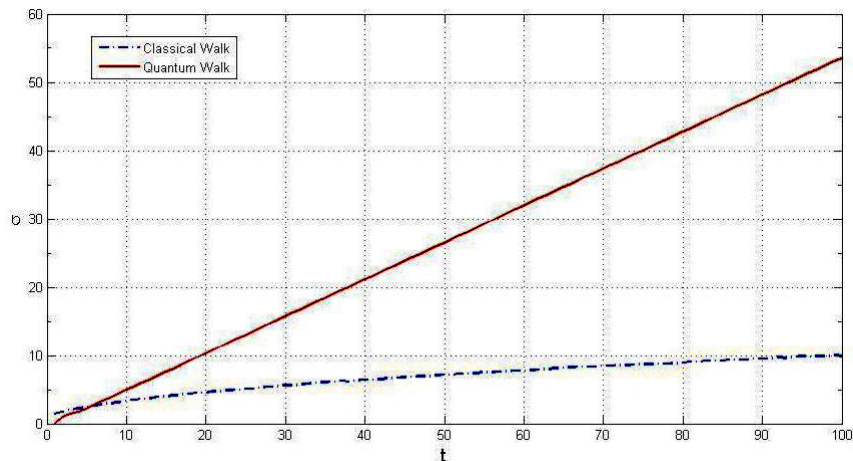
شکل ۷.۱: نمودار توزیع احتمال برای ولگشت کوانتومی پس از صد گام با حالت اولیه $|\psi(0)\rangle = \frac{|0\rangle - i|1\rangle}{\sqrt{2}}$



از تفاوت ولگشت کلاسیک و کوانتوم در می‌یابیم که در ولگشت کوانتومی نمودار توزیع احتمال بر خلاف ولگشت کلاسیک یک نمودار نامتقارن است. انحراف معیار میزان پهن شدگی توزیع احتمال را

نشان می‌دهد. و در حالت کلاسیکی به ریشه دوم زمان تغییر می‌کند. ولی در کوانتومی رابطه‌ی خطی با تعداد گام‌ها دارد. به این معنی که امکان دسترسی ولگرد به نقاط دورتر به ازای تعداد گام‌های کمتر در مقایسه با ولگشت کلاسیک وجود دارد.

شکل ۸.۱: مقایسه انحراف معیار ولگشت کلاسیکی و ولگشت کوانتومی



الگوریتم‌های کوانتومی که بر پایه ولگشت‌های کوانتومی بنا شده‌اند، از هم‌تاهای کلاسیکی خود بسیار سریع‌تر می‌باشند.

۳.۱ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی در یک بعد

برای حل تحلیلی ولگشت کوانتومی یک بعدی روش‌های مختلفی ارائه شده است که یکی از بهترین روش‌های آن استفاده از تبدیل فوریه می‌باشد [۱۳] [۲۰]. در این تبدیل تابع گسسته $f(n)$ ، $n \in \mathbb{Z}$ است که به تابع پیوسته متناوبی مثل $\tilde{f}(k)$ تبدیل می‌شود. فرض کنید $f: \mathbb{Z} \rightarrow C$ که تابعی از اعداد صحیح و اعداد مختلط است. در این صورت تبدیل فوریه گسسته آن $\tilde{f}: [-\pi, \pi] \rightarrow C$ است.

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{ink} \quad (35.1)$$

و عکس این تبدیل به صورت زیر می‌باشد.

$$f(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{f}(k)}{2\pi} e^{-ink} dk \quad (36.1)$$

حال تابع موج مربوط به ولگرد در مکان n و در زمان t (زمان متناسب با گام است) به صورت ماتریس زیر مشخص می‌شود:

$$\psi(k, \circ) = \begin{pmatrix} \psi_R(n, t) \\ \psi_L(n, t) \end{pmatrix} \quad (37.1)$$

یا به شکل عملگری، معادل با $\psi(n, t) = \psi_R(n, t)|0\rangle + \psi_L(n, t)|1\rangle$ طبق تعریف $\psi(n, t) = \langle n|\psi(n, t)\rangle$ است. تحول ولگشت کوانتومی توسط عملگر U صورت می‌گیرد. طبق رابطه (۳۷.۱) $\psi_R(n, t)$ و $\psi_L(n, t)$ تابع موج ولگرد در مکان n و در زمان t به ترتیب در حالتی که سکه $|0\rangle$ و $|1\rangle$ است را نشان می‌دهد. تابع موج در زمان $t + 1$ و در مکان n به صورت زیر بیان می‌شود.

$$|\psi(n, t + 1)\rangle = U |\psi(n, t)\rangle \quad (38.1)$$

تحول ولگشت توسط عملگر U صورت می‌گیرد، ابتدا H را اثر می‌دهیم بعد عملگر انتقال (S) را اعمال می‌کنیم.

$$|\psi(t + 1)\rangle = \left(\sum_n |n + 1\rangle \langle n| \otimes |R\rangle \langle R| + |n - 1\rangle \langle n| \otimes |L\rangle \langle L| \right) (I \otimes H) |\psi(t)\rangle \quad (39.1)$$

$$|\psi(t + 1)\rangle = \left(\sum_n |n + 1\rangle \langle n| \otimes |R\rangle \langle R| H + |n - 1\rangle \langle n| \otimes |L\rangle \langle L| H \right) |\psi(t)\rangle \quad (40.1)$$

$$\begin{aligned} \langle n' | \psi(t + 1) \rangle &= \left(\sum_n \langle n' | n + 1 \rangle \langle n| \otimes |R\rangle \langle R| H \right. \\ &\quad \left. + \langle n' | n - 1 \rangle \langle n| \otimes |L\rangle \langle L| H \right) |\psi(t)\rangle \end{aligned} \quad (41.1)$$

$$\begin{aligned} \psi(n', t + 1) &= \langle n' | \psi(t + 1) \rangle = |R\rangle \langle R| H \langle n' - 1 | \psi(t) \rangle \\ &\quad + |L\rangle \langle L| H \langle n' + 1 | \psi(t) \rangle \end{aligned} \quad (42.1)$$

$$\psi(n', t + 1) = M_+ \psi(n' - 1, t) + M_- \psi(n' + 1, t) \quad (43.1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t + 1) &= \sum_{n'} (M_+ \psi(n' - 1, t) + M_- \psi(n' + 1, t)) e^{ikn} \\ &= e^{ik} M_+ \sum_n \psi(n - 1, t) e^{ik(n' - 1)} \end{aligned} \quad (44.1)$$

$$\begin{aligned}
 & + e^{-ik} M_- \sum_n \psi(n+1, t) e^{ik(n'+1)} \\
 & = (e^{ik} M_+ + e^{-ik} M_-) \tilde{\psi}(k, t)
 \end{aligned} \tag{۴۵.۱}$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(k, 0) \tag{۴۶.۱}$$

حال با تعریف M_k به صورت زیر خواهیم داشت:

$$M_k = e^{-ik} M_+ + e^{-ik} M_- = e^{ik} |R\rangle \langle R| H + e^{-ik} |L\rangle \langle L| H \tag{۴۷.۱}$$

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & 0 \\ 0 & -e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{۴۸.۱}$$

$$M_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-ik} & e^{-ik} \\ e^{ik} & -e^{ik} \end{pmatrix} \tag{۴۹.۱}$$

$$\psi(k, t+1) = M_k \psi(k, t) \tag{۵۰.۱}$$

هدف بعدی ما قطری کردن این ماتریس است، این کار را با یافتن ویژه توابع و ویژه مقادیر انجام می‌دهیم. برای بدست آوردن ویژه مقادیر، معادله مشخصه را محاسبه کرده و در آن جایگذاری $\sin k = \sqrt{2} \sin k$ را انجام می‌دهیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\lambda^2 + \sqrt{2} i \lambda \sin k - 1 = 0 \implies \begin{cases} \lambda_k^1 = e^{-iw_k} \\ \lambda_k^2 = -e^{iw_k} \end{cases} \tag{۵۱.۱}$$

متناظر با این دو ویژه مقدار، دو ویژه حالت φ_+ و φ_- را بدست می‌آوریم. با اندکی محاسبه ویژه حالت متناظر با ویژه مقدار $\lambda_k^1 = e^{-iw_k}$ خواهیم داشت:

$$|\varphi_+\rangle = \frac{1}{N_+} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{2} e^{-iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \tag{۵۲.۱}$$

و ویژه حالت متناظر با ویژه مقدار $\lambda_k^2 = -e^{iw_k}$ داریم:

$$|\varphi_{-}\rangle = \frac{1}{N_{-}} \begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{2}e^{iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \quad (53.1)$$

و ضرایب بهنجارش به صورت زیر هستند:

$$|N_{\pm}|^2 = 2(1 + \cos^2 k \mp \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}) \quad (54.1)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = M_k^t \tilde{\psi}(k, 0) \quad (55.1)$$

شرایط اولیه ولگرد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\psi(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (56.1)$$

برای پیشروی در حل مسئله می‌توان از تبدیل فوریه فضایی زیر استفاده کرد.

$$\tilde{\psi}(k, t) = \sum_n e^{ikn} \psi(n, t) \quad (57.1)$$

با توجه به شرایط اولیه ولگرد می‌توان نشان داد که به ازای تمام مقادیر k نتیجه می‌دهد:

$$\psi(k, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (58.1)$$

$$M_k^t = e^{-iw_k t} |\varphi_{+}\rangle \langle \varphi_{+}| + (-1)^t e^{iw_k t} |\varphi_{-}\rangle \langle \varphi_{-}| \quad (59.1)$$

با توجه به شرایط اولیه:

$$\psi(k, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (60.1)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = e^{-iw_k t} \langle \varphi_{+} | \tilde{\psi}(k, 0) \rangle |\varphi_{+}\rangle + (-1)^t e^{iw_k t} \langle \varphi_{-} | \tilde{\psi}(k, 0) \rangle |\varphi_{-}\rangle \quad (61.1)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = \frac{e^{-iw_k t}}{\sqrt{(\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k - \cos k \sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k})}} \left[\begin{pmatrix} e^{-ik} \\ \sqrt{\sqrt{}} e^{-iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \right. \\ \left. \begin{pmatrix} e^{-ik} & \sqrt{\sqrt{}} e^{-iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \circ \end{pmatrix} \right] \quad (62.1)$$

$$+ \frac{(-\mathbf{1})^t e^{iw_k t}}{\sqrt{(\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k + \cos k \sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k})}} \left[\begin{pmatrix} e^{-ik} \\ -\sqrt{\sqrt{}} e^{iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \right. \\ \left. \begin{pmatrix} e^{-ik} & \sqrt{\sqrt{}} e^{-iw_k} - e^{-ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \circ \end{pmatrix} \right] \quad (63.1)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = \frac{e^{-iw_k t}}{\sqrt{(\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k - \cos k \sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k})}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \sqrt{\sqrt{}} e^{-i(w_k - k)} - \mathbf{1} \end{pmatrix} \\ + \frac{(-\mathbf{1})^t e^{iw_k t}}{\sqrt{(\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k + \cos k \sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k})}} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -\sqrt{\sqrt{}} e^{i(w_k + k)} - \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (64.1)$$

جزئیات مربوط به حل در پیوست ۲.آ می باشد.

$$\tilde{\psi}(k, t) = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_R(k, t) \\ \tilde{\psi}_L(k, t) \end{pmatrix} \quad (65.1)$$

$$\tilde{\psi}_R = \frac{\mathbf{1}}{\sqrt{}} \left(\mathbf{1} + \frac{\cos k}{\sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k}} \right) e^{-iw_k t} + \frac{(-\mathbf{1})^t}{\sqrt{}} \left(\mathbf{1} - \frac{\cos k}{\sqrt{\mathbf{1} - \cos^{\sqrt{}} k}} \right) e^{iw_k t} \quad (66.1)$$

$$\tilde{\psi}_L = \frac{e^{ik}}{\sqrt{\sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k}}} (e^{-iw_k t} - (-\mathbf{1})^t e^{iw_k t}) \quad (67.1)$$

حال برای اینکه شکل تابع موج را در فضای حقیقی داشته باشیم از تبدیل فوریه معکوس استفاده می کنیم. این توابع در پایه مکان به صورت [۱۳]:

$$\psi_R(n, t) = \frac{\mathbf{1} + (-\mathbf{1})^{n+t}}{\sqrt{}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} \left(\mathbf{1} + \frac{\cos k}{\sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k}} \right) e^{-i(w_k t + nk)} \quad (68.1)$$

$$\psi_L(n, t) = \frac{\mathbf{1} + (-\mathbf{1})^{n+t}}{\sqrt{}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{ik}}{\sqrt{\mathbf{1} + \cos^{\sqrt{}} k}} e^{-i(w_k t + nk)} \quad (69.1)$$

احتمال حضور ولگرد نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$p(n, t) = |\psi_R(n, t)|^{\sqrt{}} + |\psi_L(n, t)|^{\sqrt{}} \quad (70.1)$$

فصل ۲

ویژگی مجانبی ولگشت کوانتومی

۱.۲ ویژگی مجانبی ولگشت کوانتومی برای تعداد گامهای زیاد

در فصل قبل توابع موج را برای ولگشت کوانتومی به صورت تحلیلی بدست آوردیم. که در این قسمت با استفاده از قضیه فاز پایا^۱ می‌خواهیم رفتار مجانبی حدی ولگشت کوانتومی را مورد تحلیل قرار دهیم.

۲.۲ تحلیل رفتار مجانبی حدی با استفاده از قضیه ریاضی

ما نتایج بدست آمده از تبدیل فوریه را با استفاده از یک قضیه ریاضی محاسبه خواهیم کرد [۱۳]. فرض

کنید که $f, f : Z \rightarrow C$

تابعی از اعداد صحیح و اعداد مختلط است. تبدیل فوریه $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow C$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{f}(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{ink} \quad (1.2)$$

و عکس این تبدیل به صورت زیر می‌باشد.

$$f(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{f}(k)}{2\pi} e^{-ink} dk \quad (2.2)$$

^۱Stationry phase

در فصل قبل حل تحلیلی ولگشت کوانتومی را با استفاده از روش تبدیل فوری و عکس تبدیل فوری بیان کردیم. توابع موج را به شکل انتگرال‌هایی در پایه مکان محاسبه کردیم که مکان n ام ذره را در زمان t مشخص می‌کند. وقتی t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند یعنی تعداد گام‌ها زیاد باشد انتگرال‌ها را با استفاده از قضیه فاز پایا تخمین خواهیم زد. برای جزئیات بیشتر به [۲۱] مراجعه شود.

۳.۲ انتگرال در حد بی‌نهایت

در این قسمت رفتار ولگشت کوانتومی را در زمان بی‌نهایت مورد مطالعه قرار می‌دهیم. که رفتار ولگشت انتگرال‌هایی به شکل زیر

$$I(t) = \int_a^b g(k) e^{it\phi(k)} dk \quad (3.2)$$

می‌باشد. وقتی t به بی‌نهایت میل کند برای حل دقیق چنین انتگرال‌هایی یک شیوه‌ی مهم را شرح خواهیم داد که به عنوان روش فاز پایا شناخته می‌شود. [۲۲، ۲۳] در این نوع انتگرال‌ها در حد بی‌نهایت ($t \rightarrow \infty$) می‌توان نتیجه را با رابطه زیر تخمین زد.

$$I(t) \sim g(a) e^{it\phi(a) \pm \frac{i\pi}{2p} \left[\frac{p!}{t|\phi^{(p)}(a)|} \right] \left(\frac{1}{p} \right) \Gamma\left(\frac{1}{p}\right)} \frac{1}{p} \quad (4.2)$$

$$(t \rightarrow \infty)$$

به این ترتیب $e^{\frac{i\pi}{2p}}$ اگر $\phi^{(p)}(a) > 0$ و $e^{-\frac{i\pi}{2p}}$ اگر $\phi^{(p)}(a) < 0$ که در آن a نقطه فاز پایا است و p مرتبه آن است که به صورت زیر محاسبه می‌شود. نقطه فاز پایا نقطه‌ای است که ϕ' در آن نقطه صفر می‌شود. اگر در همین نقطه فاز پایا ϕ'' و ϕ''' و ϕ^{p-1} نیز صفر باشند اما $\phi^p \neq 0$ باشد مرتبه آن p است. برای مثال اگر c نقطه فاز پایا باشد، ϕ' در نقطه c صفر خواهد بود. اگر $\phi'' \neq 0$ باشد انتگرال متناسب با $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ، اگر $\phi'' = 0$ اما $\phi''' \neq 0$ انتگرال متناسب با $\frac{1}{t^{1/3}}$ می‌باشد. پس بنابراین می‌توانیم انتگرال را تخمین بزنیم. برای بررسی جزئیات بیشتر در مورد این موضوع به [۲۲، ۲۳] مراجعه شود.

۴.۲ حل ولگشت کوانتومی برای تعداد گام‌های زیاد

در فصل قبل توابع موج ولگشت کوانتومی را به صورت روابط ۶۸.۱ و ۶۹.۱ بدست آوردیم.

$$\psi_R(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i(w_k t + nk)} \quad (5.2)$$

$$\psi_L(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} e^{-i(w_k t + nk)} \quad (6.2)$$

بنابراین می‌توان آن‌ها را براساس ویژگی مجانبی ولگشت کوانتومی تخمین زد که $\psi_R(n, t)$ و $\psi_L(n, t)$ انتگرال‌هایی شبیه انتگرال زیر می‌باشند.

$$I(\alpha, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} g(k) e^{i\phi(k, \alpha)t} \quad (7.2)$$

که $\phi(k, \alpha) = -(w_k + \alpha k)$ و $\alpha \in [-1, 1]$ ، برای انتگرال $I(\alpha, t)$ به ازای t بزرگ، سه حالت متفاوت وجود دارد. که به اندازه‌ی $|\alpha|$ بستگی دارد. رفتارهای $I(\alpha, t)$ را برای وقتی که $|\alpha| > \frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$ ، $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon$ ، نشان خواهیم داد [۱۲].

برای حالتی که $|\alpha|$ بزرگتر از $\frac{1}{\sqrt{2}} + \epsilon$ باشد، با توجه به محدوده‌ی مشخص α ، ϕ هیچ نقطه فاز پایایی ندارد بنابراین $I(\alpha, t)$ به صفر میل می‌کند. پس ما دو حالت دیگر را محاسبه خواهیم کرد که قبل از آن محاسباتی را انجام می‌دهیم. k نقطه فاز پایا است و $\phi(k, \alpha) = -(w_k + \alpha k)$ ، از نسبت به k مشتق می‌گیریم و برابر صفر قرار می‌دهیم. (اثبات مشتقات در پیوست ۳.۱ بیان شده است)

$$\sin w_k = \frac{\sin k}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2 w_k} = \frac{\sin k}{\sqrt{2}} \quad (8.2)$$

$$\cos w_k = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 k}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \cos^2 k}{2}} \quad (9.2)$$

$$\frac{d(\sin w_k)}{dk} = \frac{dw_k}{dk} \cos w_k \quad (10.2)$$

$$\frac{d(\sin w_k)}{dk} = \frac{d\left(\frac{\sin k}{\sqrt{2}}\right)}{dk} = \frac{\cos k}{\sqrt{2}} \quad (11.2)$$

$$\frac{dw_k}{dk} = \frac{\frac{d(\sin w_k)}{dk}}{\cos w_k} = \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (12.2)$$

$$\frac{d\phi}{dk} = -\frac{d(w_k)}{dk} - \alpha = -\frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} - \alpha \quad (13.2)$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{d}{dk} \left(-\frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k}} - \alpha \right) = \frac{\sin k}{(1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{3/2}} \quad (14.2)$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{d}{dk} \left(\frac{\sin k}{(1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{3/2}} \right) = \frac{\mathfrak{Y} \cos k (1 + \sin^{\mathfrak{Y}} k)}{(1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{5/2}} \quad (15.2)$$

محدوده‌ی α را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{d\phi}{dk} = 0 \Rightarrow \frac{-\cos k}{\sqrt{1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k}} - \alpha = 0 \quad (16.2)$$

$$\cos^{\mathfrak{Y}} k = \alpha^{\mathfrak{Y}} (1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k) \Rightarrow \cos^{\mathfrak{Y}} k (1 - \alpha^{\mathfrak{Y}}) \quad (17.2)$$

$$\cos^{\mathfrak{Y}} k = \frac{\alpha^{\mathfrak{Y}}}{1 - \alpha^{\mathfrak{Y}}} \quad (18.2)$$

$$(0 \leq \cos^{\mathfrak{Y}} k \leq 1)$$

$$0 \leq \frac{\alpha^{\mathfrak{Y}}}{1 - \alpha^{\mathfrak{Y}}} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha^{\mathfrak{Y}} \leq 1 - \alpha^{\mathfrak{Y}}$$

$$0 \leq \alpha^{\mathfrak{Y}} \leq \frac{1}{2} \quad (19.2)$$

$$|\alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (20.2)$$

پس بنابراین $\alpha \in [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ است.

(۱) وقتی $|\alpha| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ در این محدوده ϕ دارای یک نقطه فاز پایا $k = 0, \pi$ از مرتبه ۲ است.

$$\frac{d\phi}{dk} = 0 \Rightarrow \frac{-\cos k}{\sqrt{1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k}} - \alpha = 0 \Rightarrow \frac{-\cos k}{\sqrt{1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k}} = \alpha \quad (21.2)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ اگر}$$

$$\frac{-\cos k}{\sqrt{1 + \cos^{\mathfrak{Y}} k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (22.2)$$

$k = \pm\pi$ می‌باشد. که با جایگذاری مقدار k در مشتقات ϕ ، اولین جایی که غیر صفر شد مرتبه مشتق (p) مشخص می‌شود. وقتی $p = ۳, k = \pi$ است.

$$I(\alpha, t) \sim g(a)e^{it\phi(a) \pm \frac{i\pi}{2}p} \left[\frac{p!}{t|\phi^{(p)}(a)|} \right] \left(\frac{1}{p} \right) \frac{\Gamma(\frac{1}{p})}{p} \quad (۲۳.۲)$$

$$w_k = \sin^{-1}\left(\frac{\sin k}{\sqrt{2}}\right) \Rightarrow w_k = 0 \quad (۲۴.۲)$$

$$\phi = -k\alpha \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (۲۵.۲)$$

$$I_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) \sim \frac{g(\pi)\Gamma(\frac{1}{3})}{6\pi} \left[\frac{12\sqrt{2}}{t} \right]^{1/3} \exp\left[-\frac{i\pi t}{\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{6}\right] \quad (۲۶.۲)$$

اکنون برای وقتی که $k = -\pi$ و $p = ۳$ است $I_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\phi = -k\alpha \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (۲۷.۲)$$

$$I_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) \sim \frac{g(-\pi)\Gamma(\frac{1}{3})}{6\pi} \left[\frac{12\sqrt{2}}{t} \right]^{1/3} \exp\left[\frac{i\pi t}{\sqrt{2}} + \frac{i\pi}{6}\right] \quad (۲۸.۲)$$

خواهیم داشت:

$$I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) = \frac{g(\pi)\Gamma(\frac{1}{3})}{6\pi} \left[\frac{12\sqrt{2}}{t} \right]^{1/3} \left(\exp\left[-\frac{i\pi t}{\sqrt{2}} - \frac{i\pi}{6}\right] + \exp\left[\frac{i\pi t}{\sqrt{2}} + \frac{i\pi}{6}\right] \right) \quad (۲۹.۲)$$

$$I\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) = \frac{g(\pi)\Gamma(\frac{1}{3})\sqrt{2}}{3\pi} \left[\frac{6}{t} \right]^{1/3} \cos\left(\frac{\pi t}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{6}\right) \quad (۳۰.۲)$$

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ وقتی}$$

$$\frac{-\cos k}{\sqrt{1+\cos^2 k}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad (31.2)$$

پس $k = 0$ ، $p = 3$ است.

$$I_1\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) \sim \frac{g(0)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{6\pi} \left[\frac{12\sqrt{2}}{t}\right]^{1/3} \exp\left(-\frac{i\pi}{6}\right) \quad (32.2)$$

$$I_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) \sim \frac{g(0)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{6\pi} \left[\frac{12\sqrt{2}}{t}\right]^{1/3} \exp\left(\frac{i\pi}{6}\right) \quad (33.2)$$

خواهیم داشت:

$$I\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, t\right) = \frac{g(0)}{6\pi} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \sqrt{\frac{3}{2}} \left[\frac{6}{t}\right]^{1/3} \quad (34.2)$$

۲) وقتی α در محدوده $-\frac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ϕ دارای دو نقطه فاز پایا k_α و $-k_\alpha$ ، $k_\alpha \in [0, \pi]$ است.

$$\frac{d\phi}{dk} = \frac{-\cos k_\alpha}{\sqrt{1+\cos^2 k_\alpha}} - \alpha = 0 \Rightarrow \frac{-\cos k_\alpha}{\sqrt{1+\cos^2 k_\alpha}} = \alpha \quad (35.2)$$

$$\cos^2 k_\alpha = \alpha^2 (1 + \cos^2 k_\alpha) \quad (36.2)$$

$$\cos^2 k_\alpha (1 - \alpha^2) = \alpha^2 \quad (37.2)$$

$$\cos k_\alpha = \left| \frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \right| \quad (38.2)$$

با توجه به محدوده α و k_α

$$\begin{cases} 0 < k_\alpha < \pi/2 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < 0 \end{cases} \quad (39.2)$$

9

$$\begin{cases} \pi/2 < k_\alpha < \pi \\ 0 < \alpha < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad (40.2)$$

داریم:

$$\cos k_\alpha = \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}} \quad (41.2)$$

فاز و مشتق دوم آن به صورت زیر می باشند.

$$\phi(\pm k_\alpha, \alpha) = \mp(w_k + \alpha k_\alpha) \quad (42.2)$$

و

$$\frac{d^2 \phi}{dk^2}(\pm k_\alpha, \alpha) = \mp w_k'' = \pm \frac{\sin k}{(1 + \cos^2 k_\alpha)^{3/2}} \quad (43.2)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dk^2}(\pm k_\alpha, \alpha) = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 k_\alpha}}{(1 + \cos^2 k_\alpha)^{3/2}} = \pm \frac{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{(1 + \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2})^{3/2}} \quad (44.2)$$

$$= \pm \frac{\sqrt{\frac{1-\alpha^2-\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{(\frac{1-\alpha^2+\alpha^2}{1-\alpha^2})^{3/2}} = \pm \frac{\sqrt{\frac{1-2\alpha^2}{1-\alpha^2}}}{\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\alpha^2)}}} \quad (45.2)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dk^2}(\pm k_\alpha, \alpha) = \pm(1-\alpha^2)\sqrt{1-2\alpha^2}$$

$$P = 2$$

$$I_1(\alpha, t) = g(k_\alpha) e^{i\phi(\alpha)t + i\pi/4} \left[\frac{2!}{t|w_{k_\alpha}''|} \right]^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2} \quad (46.2)$$

$$I_2(\alpha, t) = g(-k_\alpha) e^{-i\phi(\alpha)t - i\pi/4} \left[\frac{2!}{t|w_{k_\alpha}''|} \right]^{1/2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{2} \quad (47.2)$$

$$g(-k_\alpha) = g(k_\alpha)$$

خواهیم داشت:

$$I_1 + I_2 = \frac{g_1(k_\alpha) \Gamma(\frac{1}{2}) \sqrt{2}}{2\pi \sqrt{t|w''_{k_\alpha}|}} (e^{i\phi(\alpha)t + i\pi/4} + e^{-i\phi(\alpha)t - i\pi/4}) \quad (48.2)$$

$$I(\alpha, t) = \frac{g_1(k_\alpha)}{\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} \cos(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \quad (49.2)$$

$$g(-k_\alpha) = -g(k_\alpha)$$

خواهیم داشت:

$$I_1 + I_2 = \frac{g_2(k_\alpha) \Gamma(\frac{1}{2}) \sqrt{2}}{2\pi \sqrt{t|w''_{k_\alpha}|}} (e^{i\phi(\alpha)t + i\pi/4} - e^{-i\phi(\alpha)t - i\pi/4}) \quad (50.2)$$

$$I(\alpha, t) = \frac{g_2(k_\alpha)}{\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} i \sin k(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \quad (51.2)$$

$$I(\alpha, t) \sim \frac{g(k_\alpha)}{\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} \times \begin{cases} \cos(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \\ i \sin(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad (52.2)$$

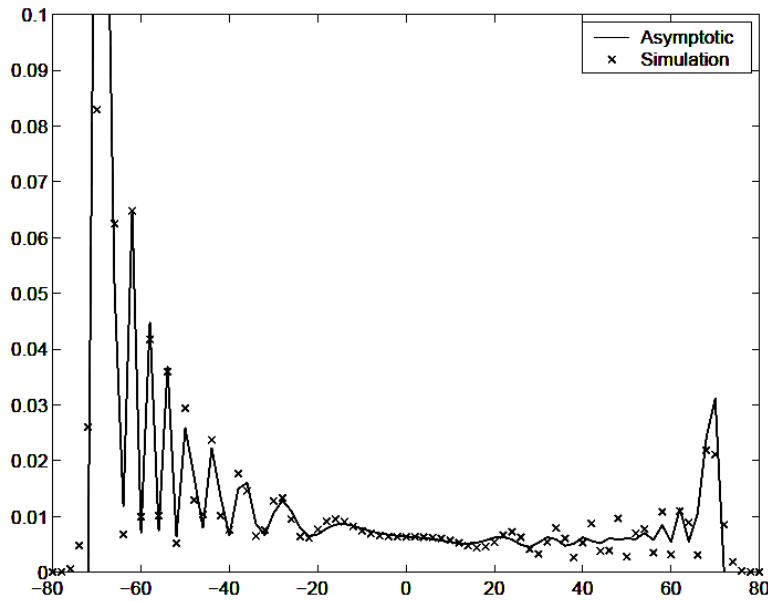
$$\psi_R(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} g_1(k_\alpha) \cos(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \quad (53.2)$$

$$\cos k_\alpha = \frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (54.2)$$

$$g_1(k_\alpha) = 1 + \frac{\cos k_\alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 k_\alpha}} = 1 + \frac{\frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}}} \quad (55.2)$$

$$g_1(k_\alpha) = 1 + \frac{\frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1 - \alpha^2}}} = 1 - \frac{\alpha \sqrt{1 - \alpha^2}}{\sqrt{1 - \alpha^2}} = (1 - \alpha) \quad (56.2)$$

شکل ۱.۲: مقایسه دو توزیع احتمال ولگشت کوانتومی



$$\psi_R(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} (1 - \alpha) \cos(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \quad (57.2)$$

$$\psi_L(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} g_2(k_\alpha) i \sin(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \quad (58.2)$$

$$g_2(k_\alpha) = \frac{e^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} = \frac{\cos k + i \sin k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (59.2)$$

$$g_2(k_\alpha) = \frac{\frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1 - \alpha^2}}} + i \frac{\sqrt{1 - \cos^2 k}}{\sqrt{1 + \frac{1}{1 - \alpha^2}}} \quad (60.2)$$

$$g_2(k_\alpha) = \frac{\frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1 - \alpha^2}}} + i \frac{\sqrt{\frac{1 - 2\alpha^2}{1 - \alpha^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1 - \alpha^2}}} \quad (61.2)$$

پس بنابراین داریم:

$$g_2(k_\alpha) = (-\alpha + i\sqrt{1 - 2\alpha^2}) \quad (62.2)$$

$$g_2(k_\alpha) = -g_2(k_\alpha)$$

$$\psi_L(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} (\alpha - i\sqrt{1-2\alpha^2}) i \sin(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \quad (۶۳.۲)$$

$$\begin{cases} \psi_R(n, t) \\ \psi_L(n, t) \end{cases} \sim \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2\sqrt{2\pi t|w''_{k_\alpha}|}} \times \begin{cases} (1 - \alpha) \cos(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \\ \alpha i \sin(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \\ + \sqrt{1-2\alpha^2} \sin(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad (۶۴.۲)$$

با توجه به $\psi_L(n, t)$ و $\psi_R(n, t)$ می‌توانیم توزیع احتمال مجانبی $P(\alpha, t)$ را محاسبه کنیم. برآورد ما از توزیع احتمال در شکل (۱.۲) مقایسه آن با نتایج بدست آمده از شبیه‌سازی می‌باشد. و شکل (۲.۲) نمودار تابع توزیع احتمال با حالت اولیه متقارن $(|L\rangle + i|R\rangle)$ است. که ولگشت هادامارد را به صورت متقارن نشان می‌دهد.

۵.۲ توزیع احتمال مجانبی

با توجه به محاسبه‌ی ψ_L و ψ_R در فصل اول می‌توان آن‌ها را به یک شکل تحلیل کرد. و هر دو آن‌ها را می‌توان به صورت انتگرال‌هایی از نوع $I(\alpha, t)$ نوشت.

$$I(\alpha, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} g(k) e^{i\phi(k, \alpha)t} \quad (۶۵.۲)$$

وقتی t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند می‌توانیم انتگرال را با استفاده از روش فاز پایا تخمین بزنیم. انتگرال $I(\alpha, t)$ به ازای t بزرگ و با توجه به اندازه $|\alpha|$ متفاوت خواهد بود. پس بنابراین ما رفتار مجانبی تابع موج را برای مقدار متفاوت $|\alpha|$ بیان خواهیم کرد که در آن α برابر $\frac{n}{t}$ می‌باشد. رفتار مجانبی برای تابع موج به راحتی قابل توصیف می‌باشد، به این صورت وقتی $\alpha \in [-\frac{1}{\sqrt{4}}, \frac{1}{\sqrt{4}}]$ تابع موج در فاصله بین $\pm 1/\sqrt{2}$ به طور یکنواخت انتشار می‌یابد، که تابع موج متناسب با $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ، و در خارج از محدوده خیلی سریع میرا می‌شود. در مرز $\pm \frac{1}{\sqrt{4}}$ ، دوتا قله از مرتبه $O(t^{1/3})$ وجود دارد جایی که تابع موج متناسب با $t^{-1/3}$ است. توزیع احتمال از مشاهده ولگشت کوانتومی ذره در هر نقطه $n = \alpha t$ ، از تابع موج ψ قابل محاسبه می‌باشد. بنابراین ما رفتار مجانبی حدی تابع موج $\psi = (\psi_L, \psi_R)$ را وقتی که t به سمت بی‌نهایت میل می‌کند را مورد بررسی قرار دادیم.

توزیع احتمال مجانبی برای نقاط $\alpha = n/t$ که وقتی که α بین $-\frac{1}{\sqrt{4}} + \epsilon$ و $\frac{1}{\sqrt{4}} - \epsilon$ ، به ازای مقدار ثابت $\epsilon > 0$ به صورت زیر می‌باشد.

$$p(\alpha, t) = |\psi_L(\alpha, t)|^2 + |\psi_R(\alpha, t)|^2$$

$$\begin{cases} \psi_R(n, t) \\ \psi_L(n, t) \end{cases} \sim \frac{1 + (-1)^{n+t}}{\sqrt{2\pi t |w''_{k_\alpha}|}} \times \begin{cases} (1 - \alpha) \cos(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \\ \alpha \cos k(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \\ + \sqrt{1 - 2\alpha^2} \sin k(\phi(\alpha)t + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad (66.2)$$

پس بنابراین:

$$\begin{aligned} p(\alpha, t) &= \frac{(1 + (-1)^{(\alpha+1)t})^2}{2\pi t |w''_{k_\alpha}|} \left[(1 - \alpha)^2 \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) \right. \\ &+ \pi/4 + \alpha^2 \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) + (1 - 2\alpha^2) \sin^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) \\ &\left. + 2\alpha \sqrt{1 - 2\alpha^2} \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4) \right] \quad (67.2) \end{aligned}$$

داریم:

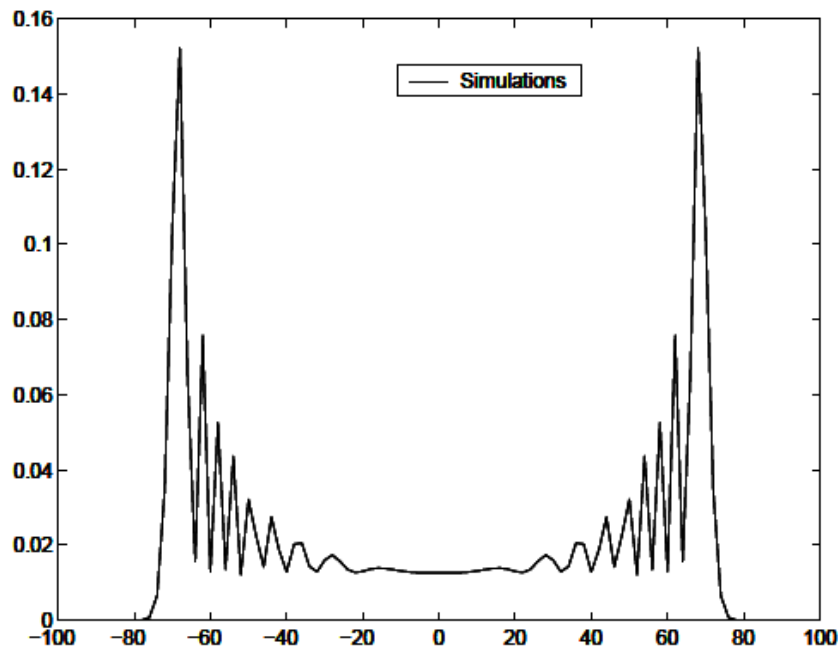
$$\begin{aligned} &\alpha^2 \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) + (1 - 2\alpha^2) \sin^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) \\ &+ 2\alpha \sqrt{1 - 2\alpha^2} \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4) \\ &= (1 - \alpha^2) \left[\cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} - \sin^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2} \right. \\ &\left. + \sin^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) - 2 \cos(\phi(\alpha)t + \pi/4) \sin(\phi(\alpha)t + \pi/4) \right] \\ &\quad \left(\frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \right) (1 - \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2})^{1/2} \quad (68.2) \end{aligned}$$

$$(\phi(\alpha)t + \pi/4) = x \text{ و } \cos k_\alpha = \frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \text{ داریم}$$

$$= (1 - \alpha^2) (\cos^2 x \cos^2 k_\alpha + \sin^2 x \sin^2 k_\alpha - 2 \cos x \cos k_\alpha \sin x \sin k_\alpha) \quad (69.2)$$

$$= (1 - \alpha^2) (\cos x \cos k_\alpha - \sin x \sin k_\alpha)^2 \quad (70.2)$$

شکل ۲.۲: تابع توزیع احتمال ولگشت هادامارد پس از ۱۰۰ گام



$$(1 - \alpha^2) \cos^2(x + k_\alpha) = (1 - \alpha^2) \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4 + k_\alpha) \quad (71.2)$$

با جایگذاری در معادله ۶۷.۲ توزیع احتمال مجانبی به صورت:

$$p(\alpha, t) \sim \frac{1 + (-1)^{(\alpha+1)t}}{\pi t |w''_{k_\alpha}|} \times$$

$$\left[(1 - \alpha^2) \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) + (1 - \alpha^2) \cos^2(\phi(\alpha)t + k_\alpha + \pi/4) \right] \quad (72.2)$$

مشخص است، توزیع احتمال به سمت چپ رسم شده که ناشی از انتخاب حالت سکه می‌باشد که چپ انتخاب شده است. اگر حالت اولیه ذره به صورت $\frac{1}{\sqrt{2}}(|L\rangle + i|R\rangle)$ باشد تابع توزیع احتمال در هر زمانی به صورت متقارن است، در واقع ولگشت هادامارد یک ولگشت متقارن خواهد بود. رابطه‌ی ۷۲.۲ نشان می‌دهد که احتمال را می‌توان به دو قسمت نوسانی و کند در نظر گرفت بنابراین احتمال $p(\alpha, t)$ تابع توزیع احتمال از مجموع دو احتمال کند و تند تغییر که با P_{fast} و P_{slow} نمایش می‌دهیم [۱۳].

$$P(\alpha, t) = P_{slow}(\alpha, t) + P_{fast}(\alpha, t) \quad (73.2)$$

P_{slow} یک تابع کند تغییر (غیر نوسانی) در محدوده‌ی α می‌باشد و P_{fast} تابع تند تغییر (نوسانی) است. که سهم قسمت P_{fast} در تابع توزیع و ممان‌ها سهم ناچیزی خواهد داشت و می‌توان صرف‌نظر کرد [۱۳]. همچنین می‌توان نشان داد که P_{slow} در حد t بی‌نهایت احتمال کل را تشکیل می‌دهد برای این کار نشان می‌دهیم که احتمال کل P_{slow} در بازه‌ی α برابر یک است. بنابراین

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1}{\pi t |w''_{k_\alpha}|} \left[(1 - \alpha)^2 \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4) + (1 - \alpha^2) \cos^2(\phi(\alpha)t + k_\alpha + \pi/4) \right] \quad (74.2)$$

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1}{\pi t |w''_{k_\alpha}|} \left[(1 - \alpha)^2 \frac{1 + \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4)}{2} + (1 - \alpha^2) \frac{1 + \cos^2(\phi(\alpha)t + \pi/4 + k_\alpha)}{2} \right] \quad (75.2)$$

باید توجه داشت که $\cos(\phi(\alpha)t + \pi/4)$ مربوط به نوسانی است، پس حذف می‌شود.

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi t |w''_{k_\alpha}|} \left[(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha^2) \right] \quad (76.2)$$

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1}{2\pi t |w''_{k_\alpha}|} \left[1 - 2\alpha + \alpha^2 + 1 - \alpha^2 \right] = \frac{1 - \alpha}{\pi t |w''_{k_\alpha}|} \quad (77.2)$$

بنابراین احتمال کند برابر

$$P_{slow}(\alpha, t) = \frac{1 - \alpha}{\pi t |w''_{k_\alpha}|} \quad (78.2)$$

محاسبه ممانها با در نظر گرفتن نکات زیر خیلی ساده می‌شود. برای این منظور فرض می‌کنیم $p, p(\alpha) = tP(\alpha, t)$ یک تابع توزیع احتمال در محدوده‌ی بین $1/\sqrt{2} \mp 1$ است. و همان طور که واضح است کمیت غیر منفی است، و نشان خواهیم داد که انتگرال برابر با یک خواهد بود. بنابراین $\phi(k_\alpha, \alpha) = -w_{k_\alpha} - \alpha k_\alpha$ پس

$$\frac{d\phi}{dk}(k_\alpha, \alpha) = 0 = -w'_{k_\alpha} - \alpha, \quad (79.2)$$

$$|w''_{k_\alpha}| \equiv -w''_{k_\alpha} = \frac{d\alpha}{dk_\alpha} \quad (80.2)$$

با توجه به تابع توزیع احتمال که $p(\alpha) = tP(\alpha, t)$

$$p(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{\pi |w''_{k_\alpha}|} \quad (۸۱.۲)$$

پس

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} p(\alpha) d\alpha = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1 - \alpha}{\pi |w''_{k_\alpha}|} d\alpha = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{1 - \alpha}{\pi} \frac{d\alpha}{dk_\alpha} d\alpha \quad (۸۲.۲)$$

$$\cos k_\alpha = \frac{-\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \quad (۸۳.۲)$$

از دو طرف نسبت به k_α مشتق می‌گیریم.

$$-\sin k_\alpha = \frac{-\sqrt{1 - \alpha^2} + \alpha^2(1 - \alpha^2)^{-1/2}}{(1 - \alpha^2)} \frac{d\alpha}{dk_\alpha} \quad (۸۴.۲)$$

$$-\sin k_\alpha = \frac{(1 - \alpha^2) + \alpha^2}{(1 - \alpha^2)\sqrt{1 - \alpha^2}} \frac{d\alpha}{dk_\alpha} \quad (۸۵.۲)$$

$$-\sin k_\alpha = -\frac{1}{(1 - \alpha^2)^{3/2}} \frac{d\alpha}{dk_\alpha} \quad (۸۶.۲)$$

$$\frac{d\alpha}{dk_\alpha} = \sin k_\alpha (1 - \alpha^2)^{3/2} \quad (۸۷.۲)$$

$$\frac{d\alpha}{dk_\alpha} = \sqrt{1 - \cos^2 k_\alpha} (1 - \alpha^2)^{3/2} \quad (۸۸.۲)$$

$$\sin k_\alpha = \sqrt{1 - \frac{\alpha}{1 - \alpha^2}} = \sqrt{\frac{1 - 2\alpha^2}{1 - \alpha^2}} \quad (۸۹.۲)$$

$$\frac{d\alpha}{dk_\alpha} = \sqrt{\frac{1 - 2\alpha^2}{1 - \alpha^2}} \times \sqrt{(1 - \alpha^2)^2 (1 - \alpha^2)} \quad (۹۰.۲)$$

$$p(\alpha) = \frac{(1 - \alpha)}{\pi(1 - \alpha^2)\sqrt{1 - 2\alpha^2}} \quad (91.2)$$

$$p(\alpha) = \frac{1 - \alpha}{\pi(1 - \alpha)(1 + \alpha)\sqrt{1 - 2\alpha^2}} \quad (92.2)$$

$$p(\alpha) = \frac{1}{\pi(1 + \alpha)\sqrt{1 - 2\alpha^2}} \quad (93.2)$$

بنابراین داریم:

$$\int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} p(\alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} (1 - \alpha) \frac{dk_\alpha}{d\alpha} d\alpha = \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} \frac{(1 - 2\alpha^2)^{-1/2}}{\pi(1 + \alpha)} d\alpha = 1 \quad (94.2)$$

بنابراین در حد t های بی نهایت احتمال ما فقط به صورت P_{slow} بوده و P_{fast} سهمی در تابع توزیع احتمال و همچنین ممان های ولگشت کوانتومی ندارد.

۶.۲ ولگشت عمومی روی یک خط

در فصل اول جزئیات مربوط به ولگشت هادامارد را روی یک خط توصیف کردیم [۱۳]. در این قسمت خاصیت ولگشت عمومی روی خط را بررسی می کنیم. ذره ای را در نظر بگیرید که به سمت چپ یا به سمت راست حرکت می کند، و در هر گام زمانی تحت یک انتقال یکانی، مطابق با حالت سکه حرکت می کند، به این صورت که ذره یک گام به راست حرکت می کند اگر حالت سکه راست باشد، و یک گام به چپ حرکت می کند اگر حالت سکه چپ باشد.

لذا ما یک عملگر تحول را برای هر خانواده از ولگشت ها در نظر می گیریم، که به صورت زیر تعیین می شود.

$$M(\theta) = T.(I \otimes U_\theta) \quad (95.2)$$

است.

$$T = T_- \otimes |L\rangle \langle L| + T_+ \otimes |R\rangle \langle R| \quad (96.2)$$

و

$$U_\theta = e^{i\frac{\theta}{2}\sigma_y} \quad (97.2)$$

عملگر $M(\theta)$ عملگر تحول است که برای یک گام می‌توان آن را به شکل زیر نوشت.

$$|\psi(t+1)\rangle = M(\theta) |\psi(t)\rangle \quad (98.2)$$

عملگر T عملگر انتقال نامیده می‌شود که T_+ در آن ولگرد را یک گام به راست و T_- ولگرد را یک گام به چپ انتقال می‌دهد.

$$T_+ |n\rangle = |n+1\rangle \quad (99.2)$$

$$T_- |n\rangle = |n-1\rangle \quad (100.2)$$

U_θ تبدیل یکانی است که روی حالت سکه اعمال می‌شود. که ولگشت هادامارد یک عضو از همین خانواده است زیرا

$$e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} = I \cos \frac{\pi}{4} + i\sigma_y \sin \frac{\pi}{4} \quad (101.2)$$

$$e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (102.2)$$

$$H = -ie^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (103.2)$$

$$H = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & i \\ i & -i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (104.2)$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -ie^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z} e^{i\frac{\pi}{4}\sigma_y} = -ie^{i\frac{\pi}{4}\sigma_z} U_{\frac{\pi}{4}} \quad (105.2)$$

به نظر می‌رسد که $U_{\frac{\pi}{4}}$ به تنها عملگر هادامارد را نمی‌سازد اما مشخص است که عملگر دورانی که در $U_{\frac{\pi}{4}}$ ضرب شده است با باز تعریف حالات سکه تاثیری به جز یک فاز پایا در حالات ندارد بنابراین با باز تعریف حالات کوانتومی به عنوان سکه می‌توان این فاز اضافی را در حالات کوانتومی در نظر نگرفت بنابراین تابع توزیعی که $U_{\frac{\pi}{4}}$ می‌سازد دقیقاً با تابع توزیعی که ولگشت هادامارد می‌سازد یکسان خواهد

بود پس ولگشت هادامارد جزء زیر مجموعه این حالات می باشد. اکنون رفتار ولگشت را وقتی که $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ مورد تجزیه و تحلیل قرار می دهیم.

وقتی که $\theta = 0$ دوران توسط U انجام می شود که برابر ماتریس واحد می باشد بنابراین چرخشی صورت نمی گیرد، و ذره با توجه به حالت اولیه خود فقط به سمت راست یا چپ انتقال می یابد. به این صورت وقتی حالت اولیه ذره چپ باشد، ذره به سمت چپ حرکت می کند. وقتی حالت اولیه راست باشد، ذره به سمت راست حرکت می کند. یعنی بعد از t گام زمانی، t واحد به سمت چپ یا راست حرکت می کند. در این نوع ولگشت حرکت یک طرفه است، بنابراین آمیخته نیست. و شبیه ولگشت کلاسیکی می باشد. وقتی $\theta = \pi$ است با اعمال U_π در هر گام زمانی حالت ذره تغییر می کند که ذره مطابق با حالت ایجاد شده به سمت راست یا چپ حرکت می کند پس بنابراین حرکت ولگشت به صورت زیگزاک خواهد بود و ولگشت آمیخته نیست.

بنابراین فقط به ازای $\theta = 0$ و $\theta = \pi$ ولگشت کوانتومی یا در جای خود باقی خواهد ماند یا حرکت زیگزاک اطراف مبدا خواهد داشت بنابراین توزیع ولگشت را نخواهیم داشت. در بقیه θ ها ولگشت کوانتومی از مبدا دور شده و آمیختگی مسیرهای مختلف را خواهیم داشت برای ولگشت عمومی ماتریس یونیتاری به صورت زیر خواهد بود [۱۳].

$$M_k(\theta) = \begin{pmatrix} e^{ik} \cos \frac{\theta}{2} & e^{ik} \sin \frac{\theta}{2} \\ -e^{-ik} \sin \frac{\theta}{2} & e^{-ik} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (106.2)$$

که معادله مشخصه آن به صورت :

$$\lambda^2 - 2 \cos \frac{\theta}{2} \cos k\lambda + 1 = 0 \quad (107.2)$$

و با جایگذاری $\cos(w_{k(\theta)}) = \cos \frac{\theta}{2} \cos k$ ویژه مقادیر متناسب با آن به صورت زیر خواهند بود.

$$\lambda_k^1(\theta), \lambda_k^2(\theta) = \cos w_{k(\theta)} \pm \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 k - 1} = \cos w_{k(\theta)} \pm i \sin w_{k(\theta)} \quad (108.2)$$

$$\lambda_k^1(\theta), \lambda_k^2(\theta) = e^{\pm i w_{k(\theta)}} \quad (109.2)$$

جایی که $w_{k(\theta)} \in [0, \pi]$ می باشد.

P_{slow} را که در قسمت مربوط به محاسبه ممان ها بدست آوردیم به صورت:

$$P_{slow} = \frac{1}{\pi t w_{k_\alpha}''(\theta)} \quad (110.2)$$

مشابه محاسبات انجام شده در ولگشت هادامارد، $\alpha \in (-\cos \frac{\theta}{\sqrt{2}}, \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}})$ خواهد بود. مشتق مرتبه اول

$$\left. \frac{dw_k(\theta)}{dk} \right|_{k=k_\alpha} = \alpha \quad (111.2)$$

$$w'_k(\theta) = \frac{\sin k \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}}}{\sin(w_k(\theta))} \quad (112.2)$$

k_α نقطه فاز پایا، و مشتق مرتبه دوم به صورت:

$$w''_k(\theta) = \frac{d(w'_k(\theta))}{dk} = \frac{\cos k \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} \sin w_k - \sin k \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}} \cos w_k w'_k}{\sin^2 w_k} \quad (113.2)$$

$$w''_k(\theta) = \cot(w_k)[1 - (w'_k(\theta))^2] \quad (114.2)$$

$$k_\alpha \in [-\pi/\sqrt{2}, \pi/\sqrt{2}]$$

$\pi - k_\alpha$ ، k_α دو نقطه فاز پایا هستند.

$$\frac{d\phi}{dk}(k_\alpha, \alpha) = 0 = -w'_{k_\alpha} - \alpha, \quad (115.2)$$

$$\frac{d\phi}{dk}(k_\alpha, \alpha) = \frac{\sin k \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}}}{\sin(w_k(\theta))} - \alpha = 0 \quad (116.2)$$

$$\frac{\sin k \cos \frac{\theta}{\sqrt{2}}}{\sin(w_k(\theta))} = \alpha \Rightarrow \frac{\sin^2 k_\alpha \cos^2 \frac{\theta}{\sqrt{2}}}{\sin^2(w_k(\theta))} = \alpha^2 \quad (117.2)$$

$$\frac{\sin^2 k \cos^2 \frac{\theta}{\sqrt{2}}}{1 - \cos^2(w_k(\theta))} = \alpha^2 \Rightarrow \frac{\sin^2 k_\alpha \cos^2 \frac{\theta}{\sqrt{2}}}{1 - \cos^2 k_\theta \cos^2 \frac{\theta}{\sqrt{2}}} = \alpha^2 \quad (118.2)$$

$$\sin^2 k_\alpha \cos^2 \frac{\theta}{\sqrt{2}} = \alpha^2 (1 - \cos^2 \frac{\theta}{\sqrt{2}} + \cos^2 \frac{\theta}{\sqrt{2}} \sin^2 k_\alpha) \quad (119.2)$$

$$(\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}) \sin^{\mathfrak{r}} k_{\alpha} \cos^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}} = \alpha^{\mathfrak{r}} (\mathfrak{I} - \cos^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}}) \quad (120.2)$$

$$\sin^{\mathfrak{r}} k_{\alpha} = \frac{\alpha^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}} \tan^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}} \Rightarrow \sin k_{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}}} \tan \frac{\theta}{\mathfrak{r}} \quad (121.2)$$

با توجه به معادله ??

$$w_k''(\theta) = \frac{\cos(w_k(\theta))}{\sin(w_k(\theta))} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}] = \sqrt{\frac{\mathfrak{I} - \sin^{\mathfrak{r}}(w_k(\theta))}{\sin^{\mathfrak{r}}(w_k(\theta))}} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}] \quad (122.2)$$

$$w_k''(\theta) = \sqrt{\frac{\mathfrak{I}}{\sin^{\mathfrak{r}}(w_k(\theta))} - \mathfrak{I} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}]} = \sqrt{\frac{\alpha^{\mathfrak{r}}}{\sin^{\mathfrak{r}} k \cos^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} - \mathfrak{I} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}]} \quad (123.2)$$

$$w_k''(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha^{\mathfrak{r}}}{\frac{\alpha^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}} \tan^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}} \cos^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} - \mathfrak{I} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}]} \quad (124.2)$$

$$w_k''(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha^{\mathfrak{r}}}{\frac{\alpha^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}} \sin^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} - \mathfrak{I} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}]} \quad (125.2)$$

$$w_k''(\theta) = \sqrt{\frac{\alpha^{\mathfrak{r}} (\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}})}{\alpha^{\mathfrak{r}} \sin^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} - \mathfrak{I} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}]} \quad (126.2)$$

$$w_k''(\theta) = \frac{\mathfrak{I}}{\sin \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} \sqrt{(\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}) - \sin^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}] \quad (127.2)$$

$$w_k''(\theta) = \frac{\mathfrak{I}}{\sin \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} \sqrt{(\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}) - \mathfrak{I} + \cos^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} [\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}]$$

$$w_k''(\theta) = \frac{\mathfrak{I} - \alpha^{\mathfrak{r}}}{\sin \frac{\theta}{\mathfrak{r}}} \sqrt{\cos^{\mathfrak{r}} \frac{\theta}{\mathfrak{r}} - \alpha^{\mathfrak{r}}} \quad (128.2)$$

با توجه به $w''_{k_\alpha} = \frac{d\alpha}{dk_\alpha}$ در کل احتمال برابر یک خواهد بود. به این صورت:

$$t \int d\alpha P_{slow}(\alpha, t) = \int d\alpha \frac{1}{\pi w''_{k_\alpha}(\theta)} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dk_\alpha}{\pi} = 1 \quad (129.2)$$

توزیع احتمال در محدوده $\mp \cos \frac{\theta}{2}$ است. پس بنابراین در طول $2 \cos \frac{\theta}{2}$ توزیع می‌شود. وقتی که $\theta \rightarrow \pi$ ولگشت به صورت زیگزاگ حرکت می‌کند یعنی این که ذره در مکان خودش و یا با احتمال $\frac{1}{2}$ در همسایه‌های نزدیک خود حضور پیدا می‌کند. بنابراین با توجه به اینکه طول متناسب با $2 \cos \frac{\theta}{2}$ است، صفر می‌شود و ارتفاع افزایش می‌یابد، بنابراین فاصله با توزیع یکنواخت افزایش می‌یابد. حالا وقتی $\theta \rightarrow 0$ است، همه‌ی حالات که پیش می‌آید این است که ولگشت به سمت راست و یا به سمت چپ حرکت می‌کند. پس بنابراین به تعداد گام‌ها توزیع خواهیم داشت، با توجه به این که ارتفاع در توزیع متناسب با $\sin \frac{\theta}{2}$ است، پس $\sin \frac{\theta}{2}$ به صفر میل می‌کند بنابراین از ارتفاع کاسته می‌شود و طول افزایش می‌یابد پس فاصله آن از توزیع یکنواخت کم خواهد شد [۱۳].

با توجه به تابع توزیع احتمال P_{slow} در قسمت مربوط به محاسبه ممانها، میانگین موقعیت ذره $\langle |\alpha| \rangle$ به صورت زیر محاسبه خواهد شد.

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha |\alpha| t P_{slow}(\alpha, t) = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dk_\alpha}{\pi} w'_{k_\alpha}(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dk_\alpha w'_{k_\alpha}(\theta) \quad (130.2)$$

از قبل داشتیم که

$$w'_k(\theta) = \frac{\sin k \cos \frac{\theta}{2}}{\sin(w_k(\theta))} \quad (131.2)$$

می‌دانیم که $\arccos(\cos(\frac{\theta}{2})) = \frac{\theta}{2}$ پس بنابراین داریم:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha |\alpha| t P_{slow}(\alpha, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin k \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \cos^2 w_{k_\alpha}(\theta)}} dk_\alpha \quad (132.2)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin k \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{1 - \cos^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 k}} dk_\alpha \quad (133.2)$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\alpha |\alpha| t P_{slow}(\alpha, t) = \frac{2(\frac{\pi}{2} - \arccos(\cos(\frac{\theta}{2})))}{\pi} \quad (134.2)$$

$$= \frac{(\pi - 2 \arccos(\cos(\frac{\theta}{2})))}{\pi} = 1 - \frac{\theta}{\pi} \quad (135.2)$$

بنابراین متوسط فاصله ذره از مبدأ $1 - \frac{\theta}{\pi}$ است، وقتی $\theta = 0$ باشد متوسط فاصله ذره از مبدأ برابر یک خواهد بود بنابراین ولگرد دور از مبدأ می‌باشد و آمیخته نیست. وقتی $\theta = \pi$ متوسط فاصله برابر صفر است بنابراین ولگرد در مکان خودش باقی می‌ماند. اما وقتی $\theta = \frac{\pi}{2}$ متوسط فاصله ذره از مبدأ برابر $\frac{1}{2}$ است.

فصل ۳

ولگشت کوانتومی بدون سکه در یک بعد

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از یک عملگر یکانی ابر موضعی^۱ استفاده کنیم و ولگشت کوانتومی بدون سکه بسازیم. عملگرهای ابر موضعی به عنوان عملگرهایی هستند که خارج از یک محدوده‌ی مشخص صفر باشند. برای سادگی فرض می‌کنیم ولگرد یک بعدی بوده و روی خط تعریف می‌شود بنابراین مکان‌های مجاز برای ولگرد را با عدد صحیح مشخص می‌کنیم. یکی از ساده‌ترین نوع عملگر انتقال ابر موضعی گسسته را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد که همان طور که مشخص است این عملگر تنها در محدوده یک مکان جلو و یک مکان عقب‌تر از موضع مورد نظر غیر صفر است و در نواحی خارج از محدوده‌ی مشخص صفر است.

$$H|n\rangle \propto \left[-|n-1\rangle + 2|n\rangle - |n+1\rangle \right] \quad (1.3)$$

بنابراین عملگر تحول متناسب با H :

$$U(\Delta t) = \exp(iH\Delta t) = 1 + iH(\Delta t) + O((\Delta t)^2) + \dots \quad (2.3)$$

همان طور که مشخص است با توجه به محدوده مشخص Δt ، و بسط (۲.۳) عملگر تحول به صورت نمایی است و بی‌نهایت جمله دارد پس بنابراین ابر موضعی نیست. اما می‌توانیم این عملگر تحول را ابر

^۱Ultralocal

موضعی در نظر بگیریم البته با حذف جملاتی از $O((\Delta t)^2)$ به بعد، که در این صورت دیگر یکانی نخواهد بود.

در این صورت داریم:

$$U|n\rangle = a|n-1\rangle + b|n\rangle + c|n+1\rangle \quad (3.3)$$

عملگر تحول به صورت ماتریسی برابر:

$$U \equiv \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$a^2 + b^2 + c^2 = 1$ شرط یکانی بودن $UU^\dagger = 1$ است.

$$UU^\dagger = \begin{pmatrix} |a|^2 & 0 & 0 \\ 0 & |b|^2 & 0 \\ 0 & 0 & |c|^2 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

با توجه به شرایط متعامد بین سطرهاى مختلف ماتریس و شرط یکانی بودن ماتریس U اگر a^2 یک باشد b^2 و c^2 حتماً صفر خواهند بود. همین مساله برای b^2 و c^2 می‌تواند برقرار باشد. به همین ترتیب اگر b^2 یک باشد، a^2 و c^2 صفراند و ولگرد در مکان خودش حضور دارد. اگر c^2 یک باشد، a^2 و b^2 حتماً صفر هستند و ولگرد یک گام به راست حرکت می‌کند. پس بنابراین ولگرد یا به سمت چپ یا در مکان خودش و یا به سمت راست حرکت می‌کند. بنابراین ولگشت کوانتومی توزیع نخواهد شد یک راه برای غلبه بر این مشکل و ساختن ماتریس یکانی این است که فضای هیلبرت را بزرگتر کنیم و یک فضایی به نام فضای سکه را به آن اضافه کنیم داشتن فضای سکه باعث می‌شود ماتریس به صورت یکانی و ابر موضعی باشد و ولگشت کوانتومی داشته باشیم اما اگر در هر گام اندازه‌گیری انجام دهیم ولگشت ما به ولگشت کلاسیکی تبدیل می‌شود عدم اندازه‌گیری و وجود فضای سکه باعث می‌شود که ولگشت کوانتومی داشته باشیم که از ولگشت کلاسیکی سریع‌تر توزیع می‌شود و خواص کوانتومی دارد در حقیقت

$$U = \sum_n \left[|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \otimes |n+1\rangle\langle n| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \otimes |n-1\rangle\langle n| \right] \quad (6.3)$$

که بین فضای مکان و سکه درهم‌تنیدگی ایجاد می‌کند تداخل آن‌ها باعث بروز ویژگی کوانتومی می‌شود اما با این وجود آوردن فضای سکه باعث می‌شود که توزیع حالت نهایی ولگشت کوانتومی به

حالات اولیه بستگی داشته باشد. اگر حالت سکه $|\uparrow\rangle$ باشد ولگرد یک گام جلو حرکت می‌کند، اگر حالت سکه $|\downarrow\rangle$ باشد ولگرد یک گام به عقب حرکت می‌کند. یعنی با توجه به حالت سکه در هر گام زمانی، مکان بعدی ولگرد تعیین می‌شود. بنابراین با توجه به وابستگی حالت سکه و حالت مکان، ولگشت کوانتومی توسط یک عملگر تحول یکانی انجام می‌شود. اما در این مورد نتایج نهایی وابسته هستند به حالت اولیه سکه، زیرا عملگر کوانتومی برگشت پذیر است. بنابراین شبیه قاعده‌ی زنجیره مارکوف^۲ نیست [۱۱]. خاصیت مارکوف بیان می‌کند که توزیع احتمال برای سیستم در مرحله بعد فقط به حالت فعلی سیستم بستگی دارد و به حالت‌های قبل بستگی ندارد چون سیستم به صورت تصادفی تغییر می‌کند. اما ولگشت کوانتومی به حالت‌های قبل بستگی دارد و سیستم به صورت تصادفی تغییر نمی‌کند. برای مثال، توزیع حالت نهایی ولگشت کوانتومی وابسته است به اینکه حالت اولیه سکه به صورت $|\uparrow\rangle$ یا $|\downarrow\rangle$ و یا ترکیب خطی از آنها باشد. چون حالت اولیه سکه روی مکان بعدی ولگرد موثر است.

۱.۳ حرکت ذره در غیاب سکه

برای اینکه ولگشت کوانتومی بدون سکه بسازیم به عملگرهای ابر موضعی نیاز داریم که عملگرهای موضعی خارج از یک محدوده‌ی مشخص صفر هستند بنابراین ساده‌ترین نوع ولگشت به این صورت می‌باشد که با اعمال عملگرهای ابر موضعی روی حالت ولگرد، ولگرد می‌تواند در مکان خود و یک گام به سمت چپ و در مکان خود و یک گام به راست حرکت کند بنابراین فضای مکان مربوط به ولگرد به شکل ماتریس زیر می‌باشد. برای ساخت این نوع ولگشت عملگر انتقال از مجموع دو عملگر زوج و عملگر فرد تشکیل می‌شود. به این صورت که عملگر زوج را با H_e و عملگر فرد با H_o نمایش می‌دهیم که این عملگرها با هم تداخل نمی‌کنند [۲۴]. پس بنابراین

$$H = H_e + H_o \quad (۷.۳)$$

$$H = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (۸.۳)$$

^۲ Marcove

$$H_e = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

$$H_o = \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

دو قسمت H_e و H_o به طور جداگانه هرمیتی هستند. آنها به صورت ماتریس‌های بلوک قطری هستند که این ماتریس‌های ثابت 2×2 اند و به صورت قطری در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین با نوشتن آنها به صورت نمایی شرط اول ابر موضعی همچنان برقرار خواهد بود. بنابراین می‌توان از مرتبه ۲ به بعد عملگر تحول صرف نظر شود بدون اینکه شرط یکانی و ابر موضعی بودن از بین برود.

$$U(\Delta t) = \exp i(H_e + H_o)\Delta t = U_e(\Delta t)U_o(\Delta t) + O((\Delta t)^2) \quad (11.3)$$

بنابراین ولگشت تصادفی کوانتومی را می‌توان با U_e و U_o ساخت. با در نظر گرفتن $\psi(n, t)$

$$\psi(n, t) = [U_e U_o]^t \psi(n, 0) \quad (12.3)$$

ضرب U_e و U_o یک انتقال یکانی روی فضای مکان می‌سازد و چون با یکدیگر جابه‌جا نمی‌شوند. همین موضوع باعث می‌شود که تمام حالت‌های ممکن در ولگشت‌های کوانتومی ظاهر شود. چون عملگرهای U_e و U_o هر کدام ولگرد را به سمت چپ و سمت راست حرکت می‌دهند. بنابراین مزیتی که وجود دارد این است که، ولگرد می‌تواند در دو گام بعد حضور داشته باشد.

عملگرهای تحول U_e و U_o از روی ماتریس 2×2 ایی که در H_e و H_o وجود دارد و متناسب با $1 - \sigma_1$ ، تعیین می‌کنیم، که برای آنها شرط یکانی و ابر موضعی بودن برقرار می‌باشد. بنابراین شکل نمایی $U_e = e^{iH_e}$ یا $U_o = e^{iH_o}$ به صورت $(c_1 + is\sigma_1)$ خواهد بود. که $|c|^2 + |s|^2 = 1$ ، بنابراین ولگشت کوانتومی حداقل دو مولفه غیر صفر در هر سطر از عملگر تحول خود خواهد بود. با وجود اینکه ولگشت کوانتومی بدون سکه به صورت متقارن روی مکان‌های زوج و فرد طبق تعریف عمل می‌کند اما

ما می‌توانیم یک ولگشت کوانتومی متقارن بدست آوریم البته با انتخاب بلوک‌های 2×2 در U_o و U_e که به صورت
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$
 است. بنابراین تحول دامنه‌ی توزیع احتمال ولگشت کوانتومی به صورت زیر متحول می‌شوند:

$$U_e |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|n\rangle + i |n + (-1)^n\rangle] \quad (13.3)$$

$$U_o |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|n\rangle + i |n - (-1)^n\rangle] \quad (14.3)$$

که با توجه به اعمال دو اپراتور U_o و U_e به ترتیب روی حالت $|n\rangle$ داریم:

$$U_e(U_o |n\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_e(|n\rangle + i |n - (-1)^n\rangle)] \quad (15.3)$$

اگر $n - (-1)^n = N$ باشد بنابراین

$$U_e(U_o |n\rangle) = \frac{1}{2} [|n\rangle + i |n + (-1)^n\rangle + i |N\rangle - |N + (-1)^N\rangle] \quad (16.3)$$

$$U_e(U_o |n\rangle) = \frac{1}{2} [|n\rangle + i |n + (-1)^n\rangle + i |n - (-1)^n\rangle - |n - (-1)^n + (-1)^{n-(-1)^n}\rangle] \quad (17.3)$$

اگر n زوج باشد ولگرد در مکان خودش، یک گام به سمت راست، یک گام به سمت چپ و دو گام در سمت چپ حضور خواهد داشت.

$$U_e U_o |n\rangle = \frac{1}{2} [i |n - 1\rangle + |n\rangle + i |n + 1\rangle - |n - 2\rangle] \quad (18.3)$$

اگر n فرد باشد ولگرد در مکان خودش، یک گام به سمت راست، یک گام به سمت چپ و دو گام در سمت راست حضور خواهد داشت.

$$U_e U_o |n\rangle = \frac{1}{2} [i |n - 1\rangle + |n\rangle + i |n + 1\rangle - |n + 2\rangle] \quad (19.3)$$

بنابراین در حالت کلی داریم:

$$U_e U_o |n\rangle = \frac{1}{2} [i |n - 1\rangle + |n\rangle + i |n + 1\rangle - |n - 2(-1)^n\rangle] \quad (20.3)$$

در ولگشت کوانتومی بدون سکه، فضای سکه وجود ندارد بنابراین به جای دو حالت سکه در ولگشت کوانتومی سکه‌دار، مکان زوج و مکان فرد را جایگزین می‌کنیم. بنابراین رفتار توزیع دامنه ولگرد با توجه به این که در مکان زوج قرار دارد یا در مکان فرد متفاوت خواهد بود.

۲.۳ ارتباط با ولگشت کوانتومی سکه‌دار

در ساختار ولگشت‌های کوانتومی بدون سکه مکان‌های زوج و فرد نقش حالت‌های $|\uparrow\rangle$ و $|\downarrow\rangle$ در ولگشت کوانتومی با سکه‌اند به همین علت دامنه‌ی توزیع به صورت نماد دو مولفه‌ای می‌باشد.

$$\Psi(n, t) \equiv \begin{pmatrix} \psi(2n, t) \\ \psi(2n+1, t) \end{pmatrix} \quad (21.3)$$

معادلات ۲۰.۳ معادل تحول زیر خواهند بود.

$$\Psi(N, t) = [UC]^t \Psi(N, 0) \quad (22.3)$$

که C عملگر متقارن

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad (23.3)$$

و

$$U|N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|N\rangle + \frac{i\sigma_1}{\sqrt{2}} \sum_{\pm} \frac{1 \pm \sigma_3}{2} |N \mp 1\rangle \quad (24.3)$$

برای دیدن رابطه ۲۰.۳ می‌توان به صورت زیر عمل کرد.

$$\Psi(N, t) = UC \begin{pmatrix} \psi(2N, t) \\ \psi(2N+1, t) \end{pmatrix} \quad (25.3)$$

$$\Psi(N, t) = \frac{U}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(2N, t) \\ \psi(2N+1, t) \end{pmatrix} |N\rangle \quad (26.3)$$

$$\Psi(N, t) = \frac{U}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N+1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N+1) \end{pmatrix} |N\rangle \quad (27.3)$$

با توجه به رابطه‌ی ۲۴.۳ داریم:

$$U|N\rangle = \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N+1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N+1) \end{pmatrix} \right] |N\rangle$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(i\sigma_1)(1 + \sigma_3)}{2} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N + 1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N + 1) \end{pmatrix} |N - 1\rangle \\
 & + \frac{(i\sigma_1)(1 - \sigma_3)}{2} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N + 1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N + 1) \end{pmatrix} |N + 1\rangle \Big] \quad (28.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U |N\rangle &= \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N + 1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N + 1) \end{pmatrix} |N\rangle \right. \\
 & + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ i & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N + 1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N + 1) \end{pmatrix} |N - 1\rangle \\
 & \left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \circ & i \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N + 1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N + 1) \end{pmatrix} |N + 1\rangle \right] \quad (29.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U |N\rangle &= \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N + 1) \\ i\psi(2N) + \psi(2N + 1) \end{pmatrix} |N\rangle \right. \\
 & + \begin{pmatrix} \circ \\ i\psi(2N) - \psi(2N + 1) \end{pmatrix} |N - 1\rangle \\
 & \left. + \begin{pmatrix} -\psi(2N) + i\psi(2N + 1) \\ \circ \end{pmatrix} |N + 1\rangle \right] \quad (30.3)
 \end{aligned}$$

$$U |N\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi(2N) + i\psi(2N + 1) + i\psi(2N - 1) - \psi(2N - 2) \\ i\psi(2N) + \psi(2N + 1) + i\psi(2N + 2) - \psi(2N + 3) \end{pmatrix} \quad (31.3)$$

$|N\rangle$ در اینجا پایه‌های فضا برای ψ در نظر گرفته شده است. عملگر متقارن سکه C حالت مولفه‌های $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ از ψ ترکیب می‌کند. عملگر U دامنه احتمال را به صورت مساوی بین خود مکان و همسایه‌های نزدیک آن توزیع می‌کند، به این صورت که ولگرد در مکان خودش باقی می‌ماند و به سمت اطراف حرکت می‌کند. عملگرهای $(1 \pm \sigma_3)/2$ مولفه‌هایی که باعث انتقال به جلو و عقب می‌شود، را جدا می‌کند. در نهایت عملگر σ_1 مولفه‌های $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ از ψ را جابه‌جا می‌کند. که این عمل در مقاله [۲۵] به عنوان ولگشت فیلیپ-فلاپ نامیده می‌شود.

۳.۳ بررسی یکتایی عملگر تحول ولگشت کوانتومی بدون سکه

در حالت کلی فرض می‌کنیم که احتمال حضور در تمام همسایه‌ها یکسان است. اما فاز نسبی آنها را دلخواه در نظر می‌گیریم بنابراین روابطه زیر برقرار است.

$$U|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \left[|n\rangle + e^{i\theta_1} |n-1\rangle + e^{i\theta_2} |n+1\rangle + e^{i\theta_3} |n-2(-1)^n\rangle \right] \quad (32.3)$$

$$\langle n' | U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{4}} \left[\langle n | + e^{-i\theta_1} \langle n-1 | + e^{-i\theta_2} \langle n+1 | + e^{-i\theta_3} \langle n-2(-1)^n | \right] \quad (33.3)$$

با توجه به شرط یکانی که $U^\dagger U = 1$ است. وقتی $n = n'$ وقتی

$$\begin{aligned} \langle n' | U^\dagger U | n \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}} \left[\langle n' | n \rangle + \langle n' + 1 | n + 1 \rangle + \langle n' - 1 | n - 1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle n' - 2(-1)^{n'} | n - 2(-1)^n \rangle \right] = 1 \end{aligned} \quad (34.3)$$

وقتی $n \neq n'$ است. اکنون وقتی $n = n' + 1$

$$\begin{aligned} \langle n' | U^\dagger U | n' + 1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}} \left[e^{i\theta_2} \langle n' | n' \rangle + e^{-i\theta_1} \langle n' + 1 | n' + 1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\theta_2 - \theta_3)} \langle n' - 1 | n' + 1 - 2(-1)^{n'+1} \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\theta_3 - \theta_1)} \langle n' - 2(-1)^{n'} | n' + 2 \rangle \right] \end{aligned} \quad (35.3)$$

به ازای n' زوج

$$\langle n' | U^\dagger U | n' + 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \left[e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} \left[e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1} \right] = 0 \quad (36.3)$$

$$\frac{e^{i\theta_2}}{\sqrt{4}} \left[1 + e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} \right] = 0$$

$$\theta_1 + \theta_2 = (2n + 1)\pi \Rightarrow \theta_2 = (2n + 1)\pi - \theta_1 \quad (37.3)$$

به ازای n' فرد

$$\langle n' | U^\dagger U | n' + 1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \left[e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1} + e^{-i(\theta_2 - \theta_3)} + e^{-i(\theta_3 - \theta_1)} \right]$$

$$\frac{1}{4} \left[e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1} + e^{-i(\theta_2-\theta_3)} + e^{-i(\theta_3-\theta_1)} \right] = 0 \quad (38.3)$$

$$\begin{aligned} & \frac{e^{i\theta_2}}{4} \left[1 + e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + e^{-i(2\theta_2-\theta_3)} + e^{-i(\theta_3-\theta_1+\theta_2)} \right] \\ &= \frac{e^{i\theta_2}}{4} \left[1 - 1 + e^{-i(2\theta_2-\theta_3)} + e^{-i(\theta_3-\theta_1+\theta_2)} \right] \\ &= \frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{4} \left[e^{-i2\theta_2} + e^{-i(2\theta_3-\theta_1+\theta_2)} \right] \\ &= \frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{4} \left[e^{-i2\theta_1} + e^{-i(2\theta_3-2\theta_1)} \right] \\ &= \frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)} e^{-i2\theta_1}}{4} \left[1 + e^{-i(2\theta_3-4\theta_1)} \right] \end{aligned}$$

$$2\theta_3 - 4\theta_1 = 4k\pi \Rightarrow \theta_3 - 2\theta_1 = 2k\pi \quad (39.3)$$

$$\frac{e^{i(\theta_1+\theta_2)} e^{-i2\theta_1}}{4} [1 - 1] = 0$$

وقتی $n = n' - 1$

$$\begin{aligned} \langle n' | U^\dagger U | n' - 1 \rangle &= \frac{1}{4} \left[e^{i\theta_1} \langle n' | n' \rangle + e^{-i\theta_2} \langle n' - 1 | n' - 1 \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\theta_3-\theta_2)} \langle n' + 1 | n' - 1 - 2(-1)^{n'+1} \rangle \right. \\ &\quad \left. + e^{-i(\theta_3-\theta_1)} \langle n' - 2(-1)^{n'} | n' - 2 \rangle \right] \quad (40.3) \end{aligned}$$

به ازای n' فرد

$$\langle n' | U^\dagger U | n' - 1 \rangle = \frac{1}{4} [e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_2}]$$

به ازای n' زوج

$$\langle n' | U^\dagger U | n' - 1 \rangle = \frac{1}{4} [e^{-i\theta_2} + e^{i\theta_1} + e^{-i(\theta_1-\theta_3)} + e^{-i(\theta_3-\theta_2)}]$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{4} \left[e^{-i\theta_2} + e^{i\theta_1} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_2-\theta_1)} \right] &= 0 \quad (41.3) \\
 &= \frac{e^{i\theta_1}}{4} \left[1 + e^{-i(\theta_2+\theta_1)} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)} + e^{-i(\theta_2-\theta_1+\theta_1)} \right] \\
 &= \frac{e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}}{4} \left[1 - 1 + e^{-i2\theta_1} + e^{-i(2\theta_2-\theta_2+\theta_1)} \right] \\
 &= \frac{e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}}{4} \left[e^{-i2\theta_1} + e^{-i(2\theta_2-\theta_2+\theta_1)} \right] \\
 &= \frac{e^{i3\theta_1} e^{i\theta_2}}{4} \left[1 - e^{-i(2\theta_2-4\theta_1)} \right]
 \end{aligned}$$

$$2\theta_2 - 4\theta_1 = 2m\pi \Rightarrow \theta_2 - 2\theta_1 = m\pi \quad (42.3)$$

$$\frac{e^{i3\theta_1} e^{i\theta_2}}{4} [1 - 1] = 0 \quad (43.3)$$

وقتی $n = n' + 2$

$$\begin{aligned}
 \langle n' | U^\dagger U | n' + 2 \rangle &= \frac{1}{4} \left[e^{i\theta_2} \langle n' | n' + 2 - 2(-1)^{n'+2} \rangle \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i(\theta_1-\theta_2)} \langle n' + 1 | n' + 1 \rangle \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i\theta_2} \langle n' - 2(-1)^{n'} | n' + 2 \rangle \right] \quad (44.3)
 \end{aligned}$$

به ازای n' زوج

$$\langle n' | U^\dagger U | n' + 2 \rangle = \frac{1}{4} [e^{i\theta_2} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}]$$

به ازای n' فرد

$$\langle n' | U^\dagger U | n' + 2 \rangle = \frac{1}{4} [e^{-i\theta_2} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}]$$

$$\frac{1}{4} [e^{i\theta_2} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}] = \frac{1}{4} [e^{i\theta_2} + e^{-i2\theta_1}] \quad (45.3)$$

$$= \frac{e^{-i2\theta_1}}{4} [e^{i(\theta_2-2\theta_1)} - 1] \quad (46.3)$$

$$\theta_2 - 2\theta_1 = 2k\pi \Rightarrow \theta_2 = 2k\pi + 2\theta_1 \quad (47.3)$$

$$\frac{e^{-i2\theta_1}}{4} [1 - 1] = 0 \quad (48.3)$$

$$\frac{1}{4} [e^{-i\theta_2} + e^{-i(\theta_1-\theta_2)}] = \frac{1}{4} (e^{-2i\theta_1} - e^{-i2\theta_1}) = 0 \quad (49.3)$$

وقتی $n = n' - 2$

$$\begin{aligned} \langle n' | U^\dagger U | n' - 2 \rangle &= \frac{1}{4} [e^{i\theta_2} \langle n' | n' - 2 - 2(-1)^{n'+2} \rangle \\ &\quad + e^{-i(\theta_2-\theta_1)} \langle n' - 1 | n' - 1 \rangle \\ &\quad + e^{-i\theta_2} \langle n' - 2(-1)^{n'} | n' - 2 \rangle] \end{aligned} \quad (50.3)$$

به ازای n' زوج

$$\langle n' | U^\dagger U | n' - 2 \rangle = \frac{1}{4} [e^{-i\theta_2} + e^{-i(\theta_2-\theta_1)}]$$

به ازای n' فرد

$$\langle n' | U^\dagger U | n' - 2 \rangle = \frac{1}{4} [e^{i\theta_2} + e^{-i(\theta_2-\theta_1)}]$$

$$\frac{1}{4} [e^{-i\theta_2} + e^{-i(\theta_2-\theta_1)}] = 0 \quad (51.3)$$

$$\frac{1}{4} [-e^{-i2\theta_1} + e^{-i(2\theta_1)}] = \frac{e^{2i\theta_1}}{4} (-1 + e^{-2i\theta_1})$$

$$2\theta_1 = 2j\pi \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad (52.3)$$

$$\frac{1}{4} [e^{i\theta_2} + e^{-i(\theta_2-\theta_1)}] = \frac{1}{4} (-e^{2i\theta_1} + e^{2i\theta_1}) = 0 \quad (53.3)$$

در حقیقت $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ، $\theta_2 = (2n+1)\pi - \theta_1$ ، $\theta_2 = 2k\pi + 2\theta_1$ است که طبق محاسبات انجام شده شرایط یکانی برقرار می باشد. اگر روابط بین فازها مشابه رابطه ۲۰.۳ باشد، ولگشت کوانتومی که توسط پاتل^۳ معرفی شده زیر مجموعه همین مجموعه است. که برای حالات متفاوت هم همین شرایط یکانی برقرار خواهد بود و ولگشت کوانتومی می سازند که توزیع احتمال همه ی آنها یکسان است.

۴.۳ حل تحلیلی ولگشت کوانتومی بدون سکه

برای حل تحلیلی ولگشت کوانتومی بدون سکه در معادله ۲۰.۳ از روش تبدیل فوریه استفاده می‌کنیم.

$$\tilde{\psi}(k, t) = \sum_n e^{ikn} \psi(n, t) \quad (۵۴.۳)$$

$$\psi(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} e^{-ikn} \tilde{\psi}(k, t) \quad (۵۵.۳)$$

تحول توزیع دامنه در فضای فوریه با جدا کردن قسمت های زوج و فرد آن به راحتی بدست می‌آید.

$$\psi(k, \circ) = \begin{pmatrix} \psi_e \\ \psi_o \end{pmatrix} \quad (۵۶.۳)$$

$$\psi(k, t) = [M(k)]^t \psi(k, \circ) \quad (۵۷.۳)$$

با اعمال عملگر تحول روی حالت اولیه ولگرد و با استفاده از تبدیل فوریه فضای مکان ولگرد به صورت ماتریس یونیتاری M_k بدست می‌آید [۲۴].

$$M(k) = \begin{pmatrix} -ie^{ik} \sin k & i \cos k \\ i \cos k & ie^{-ik} \sin k \end{pmatrix} \quad (۵۸.۳)$$

معادله مشخصه ماتریس یونیتاری M_k به صورت زیر است. (قطری کردن ماتریس و اثبات ویژه مقادارها و ویژه بردارها در پیوست ۴.آ می‌باشد.)

$$\lambda^2 + 2(i \sin k) \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_k^+ = \sin^2 k + i \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ \lambda_k^- = \sin^2 k - i \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{cases} \quad (۵۹.۳)$$

$$w_k = \cos^{-1}(\sin^2 k) \quad (۶۰.۳)$$

بنابراین ویژه مقادارها به صورت $\lambda_{\pm} \equiv e^{\pm i w_k}$ می‌باشد.
ویژه بردارها (هنجارنشده) به صورت:

$$\mathbf{e}_+ \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۶۱.۳)$$

$$\mathbf{e}_- \propto \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (62.3)$$

با توجه به ضریب بهنجارش،

$$\frac{1}{N_{\pm}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (-\sin k \pm \sqrt{1 + \sin^2 k})^2}} \quad (63.3)$$

دو ویژه حالت بهنجار $|\psi_+\rangle$ و $|\psi_-\rangle$ متناسب با:

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + (-\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (64.3)$$

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + (-\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k})^2}} \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (65.3)$$

با توجه به حالت اولیه ولگرد $\psi_o(n, \circ) = \delta_{n, \circ}$

$$\tilde{\psi}_{o,+}(k, \circ) = |\psi_+\rangle \langle \psi_+ | \psi_{\circ} \rangle \quad (66.3)$$

$$\tilde{\psi}_{o,+}(k, \circ) = \frac{1}{1 + (\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k})^2} \left[\begin{pmatrix} 1 & \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \right] \quad (67.3)$$

$$\tilde{\psi}_{o,+}(k, \circ) = \frac{1}{1 + (\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k})^2} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \times \frac{\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}}{\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}} \right] \quad (68.3)$$

$$\tilde{\psi}_{o,+}(k, \circ) = \frac{\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}}{(1 + \sin^2 k - \sin k \sqrt{1 + \sin^2 k})(\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k})} \times$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۶۹.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{o,+}(k, \circ) = \frac{\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}}{-2\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۷۰.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{o,+}(k, \circ) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} -\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۷۱.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{o,-}(k, \circ) = |\psi_{-}\rangle \langle \psi_{-} | \psi_{\circ}\rangle \quad (۷۲.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{o,-}(k, \circ) = \frac{1}{1 + (-\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k})^2} \left[\begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (۷۳.۳)$$

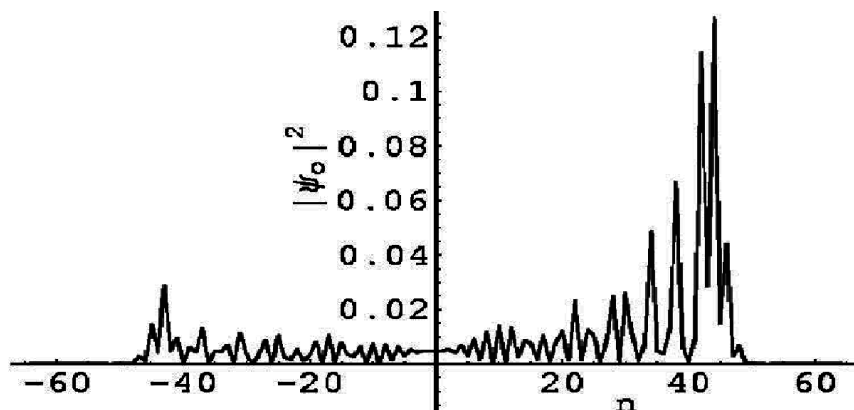
$$\tilde{\psi}_{o,-}(k, \circ) = \frac{-\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}}{2 + 2\sin^2 k + 2\sin k \sqrt{1 + \sin^2 k}} \times \left[\begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{2 + 2\sin^2 k - 2\sin k \sqrt{1 + \sin^2 k}}{2 + 2\sin^2 k - 2\sin k \sqrt{1 + \sin^2 k}} \right] \quad (۷۴.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{o,-}(k, \circ) = \frac{-2\sqrt{1 + \sin^2 k}}{2(1 + \sin^2 k)} \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۷۵.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{o,-}(k, \circ) = -\frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۷۶.۳)$$

توزیع دامنه در موقعیت مکان از عکس تبدیل فوریه $\tilde{\psi}(k, t)$ به دست می‌آید. بنابراین خاصیت‌های ولگشت تصادفی کوانتومی می‌توان به صورت عددی صحیح با تقریب مناسب بدست آورد. بنابراین توزیع دامنه در گام بعدی به صورت زیر تعیین می‌شود.

شکل ۱.۳: تابع توزیع احتمال بعد از ۳۲ گام برای ولگشت تصادفی کوانتومی نامتقارن ψ_o



$$\tilde{\psi}_{o,\pm}(k, \circ) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} -\sin k \pm \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (77.3)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = e^{iw_k t} \tilde{\psi}_+(k, \circ) + e^{-iw_k t} \tilde{\psi}_-(k, \circ) \quad (78.3)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} -e^{iw_k t} \sin k + e^{iw_k t} \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ +e^{-iw_k t} \sin k + e^{-iw_k t} \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ e^{iw_k t} - e^{-iw_k t} \end{pmatrix} \quad (79.3)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} -i \sin k \sin w_k t + \cos w_k t \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ i \sin w_k t \end{pmatrix} \quad (80.3)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} -i \sin w_k \sin k + \cos w_k \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ i \sin w_k t \end{pmatrix} \quad (81.3)$$

توزیع دامنه با توجه به عکس تبدیل فوریه به صورت زیر می باشد.

$$\psi_o(n, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} dk e^{-ikn} \tilde{\psi}(k, t)$$

$$\psi_{\circ}(n, t) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk e^{-ikn}}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} -i \sin w_k t \sin k + \cos w_k t \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ i \sin w_k t \end{pmatrix} \quad (۸۲.۳)$$

با توجه به حالت اولیه ولگرد ولگشت کوانتومی نامتقارن است. ما می‌توانیم عدم تقارن را با استفاده از حالت اولیه ولگرد که $\psi_s(n, \circ) = (\delta_{n,\circ} + \delta_{n,1})/\sqrt{2}$ از بین ببریم. ولگشت تحت تبدیل $n \leftrightarrow (1-n)$ متقارن می‌شود. توزیع دامنه به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\tilde{\psi}_s(k, \circ) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n e^{ikn} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta_{n,\circ} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \delta_{n,1} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{ik} \end{pmatrix} \quad (۸۳.۳)$$

بنابراین

$$\tilde{\psi}_{s,+}(k, \circ) = |\psi_+\rangle \langle \psi_+ | \psi_{\circ} \rangle \quad (۸۴.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,+}(k, \circ) = \frac{1}{\sqrt{2} [1 + (\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k})^2]} \times$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \right] \quad (۸۵.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,+}(k, \circ) = \frac{1 + e^{ik} \sin k + e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k}}{\sqrt{2} [1 + (\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k})^2]} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \right. \\ \left. \times \frac{\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}}{\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k}} \right] \quad (۸۶.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,+}(k, \circ) = \frac{-e^{ik} + \sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}}{-\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۸۷.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,+}(k, \circ) = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} e^{ik} - \sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 + e^{ik} \sin k + e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۸۸.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,-}(k, \circ) = |\psi_{-}\rangle \langle \psi_{-} | \psi_{\circ}\rangle \quad (۸۹.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,-}(k, \circ) = \frac{1}{\sqrt{2} \left[1 + (-\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k})^2 \right]} \times \left[\begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{ik} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (۹۰.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,-}(k, \circ) = \frac{e^{ik} - \sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k}}{2\sqrt{2}(1 + \sin^2 k)} \left[\begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \times \frac{-\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k}}{-\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k}} \right] \quad (۹۱.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,-}(k, \circ) = \frac{-1 - e^{ik} \sin k + e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k}}{2\sqrt{2}(1 + \sin^2 k)} \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (۹۲.۳)$$

$$\tilde{\psi}_{s,-}(k, \circ) = -\frac{1}{2\sqrt{2}(1 + \sin^2 k)} \begin{pmatrix} e^{ik} - \sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 + e^{ik} \sin k - e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۹۳.۳)$$

تحول توزیع دامنه طبق رابطه زیر است.

$$\tilde{\psi}_{s,\pm}(k, \circ) = \frac{\pm 1}{2\sqrt{2}(1 + \sin^2 k)} \begin{pmatrix} e^{ik} - \sin k \pm \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 + e^{ik} \sin k \pm e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۹۴.۳)$$

$$\tilde{\psi}(k, t) = e^{iw_k t} \tilde{\psi}_{+}(k, \circ) + e^{-iw_k t} \tilde{\psi}_{-}(k,) \quad (۹۵.۳)$$

$$\tilde{\psi}_s(k, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}(1 + \sin^2 k)} \begin{pmatrix} e^{iw_k t} e^{ik} - e^{iw_k t} \sin k \\ + e^{iw_k t} \sqrt{1 + \sin^2 k} - e^{-iw_k t} e^{ik} + e^{-iw_k t} \\ + e^{-iw_k t} \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ e^{iw_k t} + e^{iw_k t} e^{ik} \sin k \\ + e^{ik} e^{iw_k t} \sqrt{1 + \sin^2 k} - e^{-iw_k t} e^{ik} \\ - e^{-ik} e^{-iw_k t} \sin k + e^{-iw_k t} e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (۹۶.۳)$$

$$\tilde{\psi}_s(k, t) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} e^{ik}(e^{iw_k t} - e^{-iw_k t}) - \sin k(e^{iw_k t} - e^{-iw_k t}) \\ + \sqrt{1 + \sin^2 k}(e^{iw_k t} + e^{-iw_k t}) \\ (e^{iw_k t} - e^{-iw_k t}) + e^{ik} \sin k(e^{iw_k t} - e^{-iw_k t}) \\ + e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k}(e^{iw_k t} + e^{-iw_k t}) \end{pmatrix} \quad (97.3)$$

$$\tilde{\psi}_s(k, t) = \frac{1}{2\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} i \sin w_k t (e^{ik} - \sin k) \\ + \cos w_k t \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ i \sin w_k t (1 + e^{ik} \sin k) \\ + \cos w_k t e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (98.3)$$

توزیع دامنه با توجه به عکس تبدیل فوریه به صورت زیر می‌باشد.

$$\psi_s(n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dk \tilde{\psi}(k, t) e^{-ink} \quad (99.3)$$

$$\psi_s(n, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk e^{-ikn}}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \begin{pmatrix} i \sin w_k t (e^{ik} - \sin k) \\ + \cos w_k t \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ i \sin w_k t (1 + e^{ik} \sin k) \\ + \cos w_k t e^{ik} \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} \quad (100.3)$$

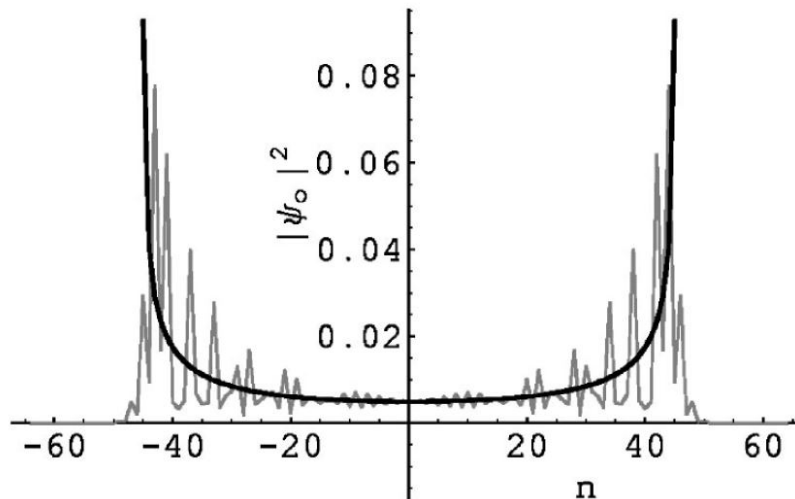
شکل (۱.۳) و (۲.۳) ارزیابی عددی توزیع احتمال بعد از ۳۲ گام زمانی، را برای ولگشت تصادفی کوانتومی نامتقارن و متقارن نشان می‌دهد. ساختار توزیع احتمال بعد از t گام زمانی در محدوده $[-2t + 1, 2t]$ است.

همان طور که ملاحظه می‌شود با توجه به حالت اولیه ولگرد تابع توزیع احتمال رفتار متفاوت خواهد داشت. طوری که اگر حالت اولیه متقارن باشد تابع توزیع احتمال متقارن است و اگر حالت اولیه نامتقارن باشد تابع توزیع احتمال نامتقارن خواهد بود. رفتار توزیع دامنه ولگشت کوانتومی در مکان‌های زوج و فرد متفاوت می‌باشد. به این صورت که ولگرد به ازای تعداد گام‌های زوج در مکان‌های زوج و به ازای تعداد گام‌های فرد در مکان فرد حضور خواهد داشت.

۵.۳ رفتار مجانبی ولگرد

به ازای t های بزرگ، با توجه به معادله ۱۰۰.۳ می‌توانیم چنین انتگرال‌هایی را با روش فاز پایا تخمین بزنیم [۱۳]. انتگرال متناوب است، و در مجموع به صورت

شکل ۲.۳: تابع توزیع احتمال بعد از ۳۲ گام برای ولگشت تصادفی کوانتومی متقارن ψ_s است. منحنی تیره، توزیع یکنواخت معادله ۱۴۸.۳ مشخص می‌کند.



$$I(n, t) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{\pi} g(k) e^{i\phi(k, n, t)} \quad (101.3)$$

قسمت بسیار نوسانی انتگرال تابع $\phi(k, n, t) = -kn \pm w_k t$ است. در حالی که تابع $g(k)$ یک تابع یکنواخت و کران‌دار از مرتبه k می‌باشد. وقتی تعداد گام‌ها زیاد است تکرار نوسانات شدیدتر می‌شود ما نقاط ثابت را از تابع ϕ محاسبه می‌کنیم و با مشخص کردن این نقاط انتگرال به یک سری نقطه تبدیل می‌شود که ϕ و مشتقات آن در این نقاط صفراند. با جایگذاری نقاط ثابت در مشتقات اولین جایی که مشتق غیر صفر شود مرتبه مشتق p مشخص می‌شود بنابراین با استفاده از فرمول فاز پایا انتگرال تخمین زده می‌شود.

داریم:

$$w_k = \cos^{-1}(\sin^2 k) \quad (102.3)$$

$$\cos w_k = \sin^2 k \implies \sqrt{1 - \sin^2 w_k} = \sin^2 k \quad (103.3)$$

$$\sin w_k = \sqrt{1 - \sin^4 k} \quad (104.3)$$

$$\frac{d(\cos w_k)}{dk} = -\frac{dw_k}{dk} \sin w_k \quad (105.3)$$

$$\frac{dw_k}{dk} = -\frac{\sqrt{2} \cos k \sin k}{\sqrt{1 - \sin^4 k}} \quad (106.3)$$

$$\frac{dw_k}{dk} = -\frac{\sqrt{2} \cos k \sin k}{\sqrt{1 - \sin^2 k} \sqrt{1 + \sin^2 k}} \quad (107.3)$$

طبق این عملیات جبری ساده داریم: (اثبات مشتقات در پیوست آ.۵ می باشد.)

$$\frac{dw_k}{dk} = \frac{-\sqrt{2} \sin k}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \quad (108.3)$$

$$\frac{d^2 w_k}{dk^2} = \frac{-\sqrt{2} \cos k}{(1 + \sin^2 k)^{3/2}} \quad (109.3)$$

$$\frac{d^3 w_k}{dk^3} = \frac{\sqrt{2} \sin k (1 + \cos^2 k)}{(1 + \sin^2 k)^{5/2}} \quad (110.3)$$

نقطه فاز پایا انتگرال $k = k_0$ است. از ϕ نسبت به k مشتق می گیریم و برابر صفر قرار می دهیم.

$$\frac{d\phi}{dk} = 0 \quad (111.3)$$

$$\frac{d\phi}{dk} = -n \pm \frac{dw_k}{dk} t \quad (112.3)$$

$$\frac{d\phi}{dk} = -n \pm \frac{-\sqrt{2} \sin k}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} t = 0$$

$$\alpha \equiv \frac{n}{t} = \frac{\mp \sqrt{2} \sin k_0}{\sqrt{1 + \sin^2 k_0}} \quad (113.3)$$

$$\frac{n^2}{t^2} = \frac{2 \sin^2 k}{1 + \sin^2 k} \quad (114.3)$$

$$\sin^2 k = \frac{\frac{n^2}{t^2}}{2 - \frac{n^2}{t^2}} \quad (115.3)$$

$$(\circ \leq \sin^2 k \leq 1)$$

$$\circ \leq \frac{n^2}{t^2} \leq 4 - \frac{n^2}{t^2} \quad (116.3)$$

$$\circ \leq x \leq 4 - x \implies \circ \leq n^2 \leq 2t^2 \quad (117.3)$$

$$n \leq \pm \sqrt{2}t \quad (118.3)$$

اکنون انتگرال را در محدوده‌ی متفاوت n با تعیین نقاط ثابت با استفاده از روش فاز پایا بررسی می‌کنیم.

(۱) $|n| > \sqrt{2}$. در این مورد نقطه فاز پایا وجود ندارد. به ازای $(\sqrt{2} + \epsilon)t$ $|n| = (\sqrt{2} + \epsilon)t$ ، $|\frac{d\phi(k)}{dk}| > \epsilon$ ، چون خارج از محدوده‌ی تعیین شده نتیجه انتگرال $I(n, t)$ برابر صفر است بنابراین تابع توزیع خیلی سریع میرا می‌شود.

(۲) $|n| = \sqrt{2}t$. در این مورد یک نقطه فاز پایا از مرتبه ۲ وجود دارد که با توجه به علامت n $k_0 = \mp \pi/2$ مرتبه مشتق $P = 3$ است از این رو انتگرال متناسب با $t^{-1/3}$ است.

$$\frac{d\phi}{dk} = \circ \quad (119.3)$$

$$\frac{d\phi}{dk} = -n \pm \frac{dw_k}{dk}t \quad (120.3)$$

$$-n \pm \frac{-2 \sin k}{\sqrt{1 + \sin^2 k}}t = \circ \quad (121.3)$$

$$\frac{n}{t} = \frac{\mp 2 \sin k_0}{\sqrt{1 + \sin^2 k_0}} \quad (122.3)$$

با توجه به اینکه $|n| = \sqrt{2}t$ می‌باشد با جایگذاری در رابطه فوق نقاط فاز پایا را بدست می‌آوریم.
وقتی $n = \sqrt{2}t$

$$\frac{\sqrt{2}t}{t} = \mp \frac{2 \sin k}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \quad (123.3)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin^2 k = \sqrt{2} \sin^2 k \longrightarrow \sin^2 k = \pm 1 \quad (124.3)$$

$$k_0 = \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (125.3)$$

$$n = -\sqrt{2}t \text{ وقتی}$$

$$\frac{\sqrt{-2}t}{t} = \mp \frac{\sqrt{2} \sin k}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \quad (126.3)$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} \sin^2 k = \sqrt{2} \sin^2 k \longrightarrow \sin^2 k = \pm 1 \quad (127.3)$$

$$k_0 = \pm \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (128.3)$$

بنابراین معادله ۳.۱۰۰ را می‌توان با استفاده از فرمول فاز پایا ۴.۲ تخمین زد [۲۴].

$$\psi_s(\sqrt{2}t, t) = ct^{-1/3} \begin{pmatrix} (1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{\pi t}{\sqrt{2}}) \\ (1 - \frac{1-i}{\sqrt{2}}) \sin(\frac{\pi t}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} \quad (129.3)$$

$$\psi_s(-\sqrt{2}t, t) = ct^{-1/3} \begin{pmatrix} (1 - \frac{1-i}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{\pi t}{\sqrt{2}}) \\ (-1 - \frac{1-i}{\sqrt{2}}) \sin(\frac{\pi t}{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} \quad (130.3)$$

$$c = \frac{1}{2\pi^{3/6}} \Gamma(1/3) \approx 0.355$$

(۳) $|n| < \sqrt{2}t$. در این مورد دو نقطه فاز پایا وجود دارد، $k_{01} \in (-\pi/2, \pi/2)$ و $k_{02} = \pi - k_{01}$

$$\frac{d\phi}{dk} = 0 \implies \frac{d\phi}{dk} = -n \pm \frac{dw_k}{dk} t \quad (131.3)$$

$$\frac{n}{t} = \pm \frac{dw_k}{dk} \quad (132.3)$$

$$\alpha \equiv \frac{n}{t} = \frac{\mp \gamma \sin k_0}{\sqrt{1 + \sin^2 k_0}} \quad (133.3)$$

$$\frac{n^2}{t^2} = \frac{\mp \gamma \sin^2 k_0}{1 + \sin^2 k_0} \quad (134.3)$$

$$\frac{n^2}{t^2} + \frac{n^2}{t^2} \sin^2 k = \gamma \sin^2 k \quad (135.3)$$

$$\sin^2 k = \frac{\frac{n^2}{t^2}}{\gamma - \frac{n^2}{t^2}} \quad (136.3)$$

$$|\sin k| = \left| \frac{n}{\sqrt{\gamma t^2 - n^2}} \right| \quad (137.3)$$

$$0 < k < \pi \begin{cases} -\pi/\gamma < k_0 < \pi/\gamma \\ -\sqrt{\gamma}t < n < 0 \end{cases} \quad (138.3)$$

$$\sin k_0 = -\frac{n}{\sqrt{\gamma t^2 - n^2}} \quad (139.3)$$

9

$$-\pi < k < 0 \begin{cases} \pi/\gamma < k_0 < -\pi/\gamma \\ 0 < n < \sqrt{\gamma}t \end{cases} \quad (140.3)$$

$$\sin k_0 = \frac{n}{\sqrt{\gamma t^2 - n^2}} \quad (141.3)$$

بنابراین داریم:

$$\sin k_0 = \mp \frac{n}{\sqrt{\gamma t^2 - n^2}} \quad (142.3)$$

$$\left| \frac{d^2 w_k}{dk^2} \right|_{k=k_0} = \frac{-\gamma \cos k}{(1 + \sin^2 k)^{3/2}} \quad (143.3)$$

$$\left| \frac{d^2 w_k}{dk^2} \right|_{k=k_0} = \frac{2\sqrt{1+\sin^2 k}}{(1+\sin^2 k)^{3/2}} = \frac{2\sqrt{1-\frac{n^2}{4t^2-n^2}}}{(1+\frac{n^2}{4t^2-n^2})^{3/2}} \quad (144.3)$$

$$\left| \frac{d^2 w_k}{dk^2} \right|_{k=k_0} = \frac{\sqrt{4t^2-2n^2}(4t^2-n^2)}{4t^3} \quad (145.3)$$

مرتبه مشتق $P=2$ است پس انتگرال متناسب با $t^{-1/2}$ است.

$$\phi_0 = -k_0 n + w_{k_0} t - (\pi/4) \quad (146.3)$$

توزیع دامنه را می‌توان با استفاده از قضیه فاز پایا تخمین زد [۲۴].

$$\begin{aligned} \psi_s = \frac{1}{\sqrt{t}(4t^2-2n^2)^{1/4}} & \left[\cos \phi_0 \left(\frac{[(1-i)n+2t]/\sqrt{4t^2-n^2}}{\sqrt{4t^2-2n^2}/(2t+n)} \right) \right. \\ & \left. + i \sin \phi_0 \left(\frac{\sqrt{4t^2-2n^2}/\sqrt{4t^2-n^2}}{[(1-i)n+2t]/(2t+n)} \right) \right] \end{aligned} \quad (147.3)$$

جایگزین قسمت‌های نوسانی شدید در مقدار متوسط، باعث می‌شود که تابع توزیع احتمال به صورت یکنواخت باشد. به این صورت که وقتی t زیاد باشد تکرار نوسانات زیاد می‌شود متوسط نوسانات یکدیگر را خنثی می‌کنند بنابراین تابع توزیع نرم‌تر خواهد شد.

$$|\psi_s|_{\text{smooth}}^2 = \frac{4t^2}{\pi \sqrt{4t^2-2n^2}(4t^2-n^2)} \quad (148.3)$$

شکل ۲.۳ متوسط تابع توزیع را به طور واضح نشان می‌دهد که مقدار متوسط تابع توزیع به صورت یکنواخت خواهد بود. برای ممان‌های مرتبه پایین تابع توزیع به صورت نوسانی است و به راحتی محاسبه می‌شود.

$$\int_{n=-\sqrt{4}t}^{\sqrt{4}t} |\psi_s|_{\text{smooth}}^2 dn = 1 \quad (149.3)$$

$$\int_{n=-\sqrt{4}t}^{\sqrt{4}t} |n| |\psi_s|_{\text{smooth}}^2 dn = t \quad (150.3)$$

$$\int_{n=-\sqrt{4}t}^{\sqrt{4}t} n^2 |\psi_s|_{\text{smooth}}^2 dn = 2(2-\sqrt{2})t^2 \quad (151.3)$$

خاصیت ولگشت تصادفی کوانتومی را می‌توان به راحتی از نتایج فوق استنباط کرد.

(۱) توزیع احتمال دو تا پیک با بیشترین مقدار در $\pm\sqrt{2}t$ دارد. خارج از پیک‌ها توزیع به سمت صفر می‌رود زیرا نقطه فاز پایا وجود ندارد. در حالی که ناحیه وسط (بین پیک‌ها) هموار می‌شود به دلیل اینکه دو نقطه فاز پایا از مرتبه یک وجود دارد. وقتی t افزایش می‌یابد، تابع توزیع در ناحیه‌ی وسط هموارتر می‌شود و پیک‌ها کمی کاهش می‌یابند. پیک‌ها برجسته‌تر هستند زیرا کاهش ارتفاع پیک‌ها نسبت به ناحیه هموار آهسته‌تر صورت می‌گیرد. به دلیل اینکه ناحیه کنار یک نقطه فاز پایا از مرتبه ۲ و $t^{-1/3}$ است، پیک‌ها آهسته‌تر کاهش می‌یابد نسبت ناحیه وسط که دارای دو نقطه فاز پایا از مرتبه یک و $t^{-1/2}$ به همین دلیل پیک‌ها را برجسته‌تر نشان می‌دهد.

(۲) دنباله‌ی تابع توزیع محدود به $t^{-1/3} \sim (et)^{-1}$ است و $\Delta n_{>} = \Delta(et) = O(t^{1/3})$.

قسمت داخلی پیک‌ها از رابطه $|w_k''t|^{-1/2} \sim t^{-1/3}$ تبعیت می‌کند. برای قسمت داخلی پیک‌ها $|n| = (\sqrt{2} - \delta)t$ است و $\Delta n_{<} = \Delta(\delta t) = O(t^{1/3})$ است و پهنای پیک به اندازه δt می‌باشد و از مرتبه $Ot^{-1/3}$ است وقتی t به بی‌نهایت میل کند این پیک‌ها در توزیع احتمال سهم قابل چشم‌پوشی دارند.

(۳) نوسانات سریع در تابع توزیع احتمال وقتی t به بی‌نهایت میل می‌کند را می‌توان نادیده گرفت و فقط قسمت هموار تابع توزیع احتمال حفظ می‌شود.

(۴) ولگشت کوانتومی به صورت خطی در زمان توزیع می‌شود و سرعت آن با یک ضریب $\sqrt{2}$ از حالتی که ولگشت حرکت یک طرفه دارد کمتر است. این سرعت یک معیار برای خواص آمیختگی است هر چه سرعت کمتر باشد توزیع زودتر یکنواخت می‌شود. زمان آمیختگی زمانی است که طول می‌کشد تا توزیع احتمال متوسط ولگشت به توزیع یکنواخت نزدیک شود. زمان آمیختگی به نوعی در بردارنده‌ی مفهوم سرعت است، هر چه زمان آمیختگی کمتر باشد به معنای آن است که توزیع یکنواخت زودتر بدست می‌آید. بنابراین تابع توزیع احتمال به صورت کیفی مشابه یک تابع توزیع یکنواخت در فاصله $[-\sqrt{2}t, \sqrt{2}t]$ می‌باشد و به صورت ویژه ممان مرتبه m توزیع احتمال متناسب با t^m است.

این خواص مطابق با آنچه که در [۱۳] برای ولگشت تصادفی کوانتومی بدون سکه نشان می‌دهد این است که سکه‌ای ارائه نمی‌شود و برای یک گام از ولگشت از دو اپراتور U_o و U_e استفاده می‌شود مهم است که توجه داشته باشید که خواص ولگشت کوانتومی با ولگشت تصادفی کلاسیکی متفاوت است. در ولگشت تصادفی کلاسیکی توزیع احتمال دو جمله‌ای (به صورت توزیع گاوسی) است که متقارن می‌باشد و تنها یک پیک در مبداء وجود دارد و واریانس برابر t می‌باشد.

۶.۳ ولگشت در حضور مرز جاذب

احتمال فرار ولگشت تصادفی کوانتومی را می‌توان با معرفی یک دیوار جذب، بین $n = -1$ و $n = 0$ محاسبه کرد. از نظر ریاضی، دیوار جذب می‌تواند توسط یک اپراتور طرح‌ریزی برای $n \geq 0$ نشان داده شود. قسمت جذب نشده از ولگشت متناسب با

$$\begin{aligned}\psi(n, t+1) &= P_{n \geq 0} U_e U_o \psi(n, t) \\ &= U_e U_o \psi(n, t) - \frac{1}{4} \delta_{n,-1} [i\psi(0, t) - \psi(1, t)]\end{aligned}\quad (152.3)$$

با احتمال جذب

$$P_{abs}(t) = 1 - \sum_{n \geq 0} |\psi(n, t)|^2 \quad (153.3)$$

به عبارت دیگر ما به دنبال حالتی هستیم که ولگرد نتواند به ۱- برسد و جذب دیوار جاذب شود. چون اپراتور $P_{n \geq 0}$ از ۰ تا بی نهایت را نگه می دارد، با توجه به معادله (۱۵۲.۳) در صورتی که $n = 0$ و $n=1$ باشد ولگرد می تواند به ۱- برسد و از دیوار جذب عبور کند. با توجه به دامنه ی توزیع این موضوع مورد بررسی قرار می دهیم.

$$U_e U_o |n\rangle = \frac{1}{4} [i|n-1\rangle + |n\rangle + i|n+1\rangle - |n+2(-1)^n\rangle] \quad (154.3)$$

اگر $n = 0$

$$U_e U_o |0\rangle = \frac{1}{4} [i|-1\rangle + |0\rangle + i|1\rangle - |2\rangle] \quad (155.3)$$

و اگر $n = 1$

$$U_e U_o |1\rangle = \frac{1}{4} [i|0\rangle + |1\rangle + i|2\rangle - |-1\rangle] \quad (156.3)$$

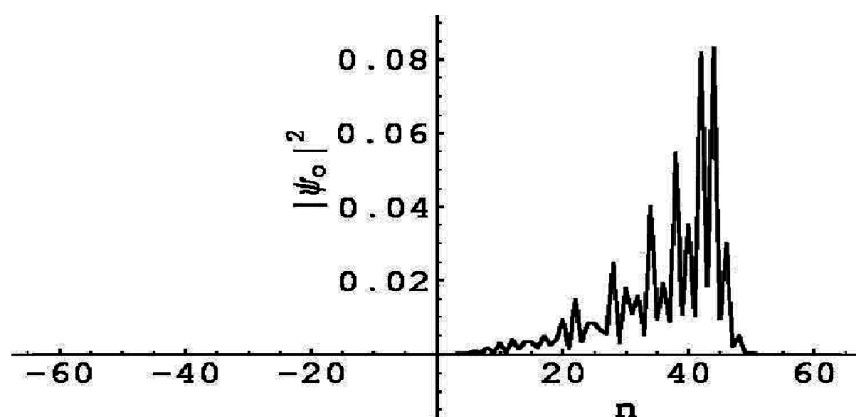
همان طور که ملاحظه می کنید تنها حالاتی که ولگرد می تواند در مکان ۱- حضور پیدا کند $n = 0$ و $n = 1$ است.

شکل ۲.۳ ارزیابی عددی توزیع احتمال، در حضور دیوار جذب، بعد از ۳۲ گام زمانی با حالت اولیه متقارن را نشان می دهد. در مقایسه با شکل ۲.۳ نشان داده می شود که دیوار جذب مانع نفوذ تحول ولگشت در قسمت های مرزی می شود پیش بینی می شود توزیع احتمال در نزدیکی منطقه $n = 0$ صفر، در حالی که ارتفاع پیک در نزدیکی منطقه $n = \sqrt{2}t$ کمی افزایش می یابد، در نتیجه سرعت فرار برای وقتی که دیوار وجود داشته باشد نسبت زمانی که دیوار وجود نداشته باشد، بیشتر است.

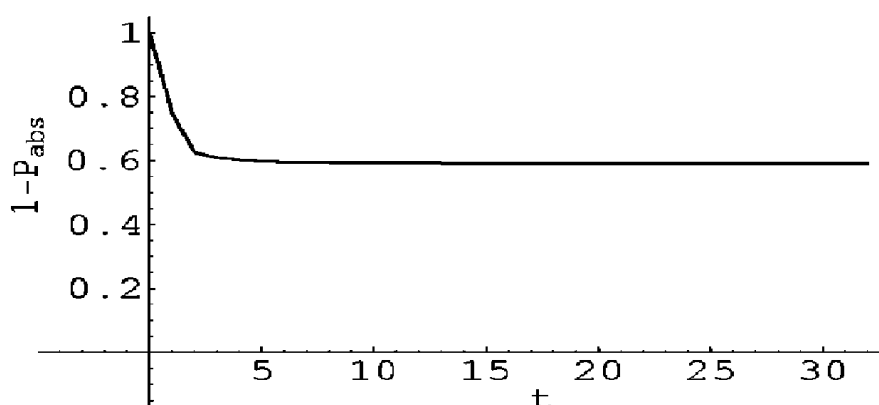
در شکل ۴.۳ احتمال جذب در دو گام زمانی اول $p_{s,abs}(t=1) = 0.25$ و $p_{s,abs}(t=2) = 0.375$ است، که احتمال جذب بسیار کم است. برای ولگشت متقارن احتمال جذب به صورت مجانبی به $p_{s,abs}(\infty) \approx 0.4098$ نزدیک می شود. [احتمال جذب برای ولگشت نامتقارن در مبداء، $p_{o,abs}(\infty) \approx 0.2732$ است]. این مقدار کوچکتر از نتیجه مربوطه به $2/\pi$ برای ولگشت تصادفی کوانتومی متقارن بدون سکه می باشد [۱۲].

در ولگشت تصادفی کوانتومی ولگرد از دیوار جذب دور می شود و با سرعت ثابت متوقف می شود و به ندرت به مبداء بر می گردد. که این رفتار با ولگشت تصادفی کلاسیکی متفاوت است. در ولگشت کلاسیکی ولگرد زودتر یا دیرتر، همیشه به نقطه شروع بر می گردد، و بنابراین احتمال جذب وقتی $t \rightarrow \infty$ برابر یک می باشد.

شکل ۳.۳: تابع توزیع احتمال بعد از ۳۲ گام برای ولگشت تصادفی کوانتومی متقارن، در حضور دیوار جاذب در سمت چپ $n = 0$



شکل ۴.۳: نمودار احتمال جذب نشدن ولگشت کوانتومی متقارن در حضور دیواره‌ی جذبی که در سمت چپ مبداء قرار دارد و با یک درصد قابل توجهی احتمال فرار بعد از دو گام را نشان می‌دهد.



۷.۳ مقایسه ولگشت کوانتومی سکه‌دار و بدون سکه

طبق نتایج بالا، ساختار ولگشت کوانتومی بدون سکه را با ساختار ولگشت کوانتومی سکه‌دار مقایسه می‌کنیم [۱۲، ۱۳].

(۱) ما دو حالت سکه را در اندیس مکان‌های زوج و فرد ادغام کردیم به عبارتی در ولگشت کوانتومی با سکه هر مکان اندیس $|L\rangle$ و $|R\rangle$ نسبت داده می‌شود در این نوع ولگشت به ازای تعداد گام‌های زوج، مکان‌های فرد صفر هستند و به ازای تعداد گام‌های فرد، مکان‌های زوج صفر هستند پس با هم تداخل نمی‌کنند از این حالت استفاده می‌کنیم و $|L\rangle$ و $|R\rangle$ را به اندیس زوج و فرد تبدیل می‌کنیم. به بیان دیگر برای ولگشتی که از مبداء شروع به حرکت می‌کند توزیع دامنه محدود به این است به ازای تعداد گام‌های زوج در مکان‌های زوج و به ازای تعداد گام‌های فرد در مکان‌های فرد حضور دارد پس فقط نصفی از

مکان‌ها استفاده می‌شود. اما برای ولگشت کوانتومی بدون سکه کل فضای مکان استفاده می‌شود بدون اینکه فضای سکه اضافه شود و فضای هیلبرت بزرگتر شود.

(۲) با توجه به معادلات (۲۴.۳) و (۶.۳) در هر گام زمانی ψ با احتمال 50° درصد در مکان خودش باقی می‌ماند. برای ولگشت کوانتومی در حضور سکه ولگرد در مکان خودش باقی نمی‌ماند و به سمت چپ و یا راست حرکت می‌کند پس بنابراین متفاوت‌اند با این وجود طبق معادلات (۱۴۹.۳) و (۱۵۱.۳) برای هر دو ولگشت کوانتومی واریانس متناسب با t^2 است پس هر دو با یک سرعت توزیع می‌شوند. در ولگشت کوانتومی بدون سکه احتمال حضور در همه‌ی مکان‌ها وجود دارد بنابراین تابع توزیع احتمال ولگشت هموارتر و کمتر نوسانی است.

(۳) در ولگشت کوانتومی با سکه، سکه را به عنوان یک درجه آزادی در نظر می‌گیریم که بین مکان و سکه که یک درجه آزادی متفاوت‌اند درهم‌تنیدگی ایجاد می‌شود. اما در ولگشت کوانتومی بدون سکه درجه آزادی سکه وجود ندارد بنابراین درهم‌تنیدگی وجود ندارد فقط درهم‌نهی که مشخص کننده‌ی توزیع دامنه‌ها است باقی می‌ماند [۲۶]. از بین رفتن درهم‌تنیدگی یکی از محاسن ولگشت کوانتومی با سکه است که در آزمایش‌های عملی ولگشت کوانتومی می‌تواند مفید باشد به دلیل اینکه درهم‌تنیدگی کوانتومی تحت تاثیر نوفه محیطی از بین می‌رود در حالی که درهم‌نهی در مقابل نوفه‌های محیطی خیلی مقاوم‌تر است که در اینجا درهم‌نهی داریم ولی درهم‌تنیدگی نداریم به دلیل وجود این مزیت ناوردایی انتقال در ولگشت‌های کوانتومی با سکه در یک گام اتفاق می‌افتد در حالی که در ولگشت کوانتومی بدون سکه در دو گام اتفاق می‌افتد.

۸.۳ نتیجه‌گیری

در این نوشتار نوع جدیدی از ولگشت به نام ولگشت کوانتومی بدون سکه معرفی گردید که با معرفی یک عملگر یکانی و ابر موضعی می‌توان ولگشت کوانتومی بدون سکه ساخت. عملگرهای ابر موضعی خارج از یک محدوده‌ی مشخص صفر می‌باشند. بنابراین عملگر تحول متناسب با این نوع ولگشت به صورت یکانی و ابر موضعی می‌باشد. عملگر انتقال ابر موضعی تنها در محدوده‌ی یک مکان جلو و یک مکان عقب‌تر از موضع مورد نظر غیر صفر است. و خارج از محدوده‌ی مشخص صفر است. فضای هیلبرت مربوط ولگشت کوانتومی بدون سکه فقط دارای فضای مکان می‌باشد. و فضای سکه وجود ندارد. بنابراین حالت‌های $|L\rangle$ و $|R\rangle$ در ولگشت کوانتومی با سکه به مکان‌های زوج و فرد در ولگشت کوانتومی بدون سکه تغییر کرد. $|L\rangle$ را مکان‌های زوج و $|R\rangle$ مکان‌های فرد در نظر گرفت. بنابراین ولگشت تصادفی کوانتومی را می‌توان با دو عملگر U_e و U_o ساخت. با ضرب U_e, U_o یک انتقال یکانی روی فضای مکان ایجاد شد. عملگرهای U_e و U_o هر کدام ولگرد را به سمت چپ و سمت راست منتقل می‌کند فرم کلی عمل آن‌ها بسته به زوج و فرد بودن مکان متفاوت است. بنابراین با هم جابه‌جا نمی‌شوند. تحول ولگرد به این صورت که ولگرد در مکان خودش، یک گام در سمت راست و یک گام در سمت چپ، و با توجه به زوج و فرد بودن مکان ولگرد در دو گام قبل و بعد هم حضور خواهد داشت. در این نوع ولگشت تابع موج برای ولگرد از دو مولفه زوج و فرد تشکیل شد. با استفاده از تبدیل فوریه فضای مکان به صورت ماتریس یکانی M_k است که با قطری کردن ماتریس ویژه‌مقادیر و ویژه‌بردارها بدست می‌آید.

و دامنه‌ی توزیع ولگشت کوانتومی در فضای k محاسبه شد. و با استفاده از عکس تبدیل فوریه توزیع دامنه در پایه مکان محاسبه شد. توزیع دامنه ولگشت کوانتومی در پایه مکان به صورت انتگرال‌هایی هستند که انتگرال‌ها را به ازای t بزرگ، با استفاده از یک قضیه ریاضی، با عنوان روش فاز پایا تخمین زدیم. در این تخمین مشخص کرده که توزیع احتمال دو تا پیک با بیشترین مقدار در $\pm\sqrt{2}t$ دارد. خارج از پیک‌ها توزیع به سمت صفر می‌رود زیرا نقطه فاز پایا وجود ندارد، در حالی که ناحیه وسط (بین پیک‌ها) هموار می‌شود به دلیل اینکه دو نقطه فاز پایا از مرتبه یک وجود دارد. ناحیه کنار یک نقطه نقطه فاز پایا از مرتبه ۲ و انتگرال متناسب $t^{-1/3}$ است. و ناحیه وسط دارای دو نقطه نقطه فاز پایا از مرتبه یک و انتگرال متناسب $t^{-1/2}$ است بنابراین وقتی t افزایش می‌یابد پیک‌ها آهسته‌تر کاهش می‌یابد به همین دلیل پیک‌ها را برجسته‌تر نشان می‌دهد. در ولگشت کوانتومی بدون سکه به جای دو حالت سکه اندیس مکان‌های زوج و فرد جایگزین شده است به عبارتی در ولگشت کوانتومی با سکه به ازای هر مکان اندیس $|L\rangle$ و $|R\rangle$ داشتیم و به ازای تعداد گام‌های زوج، مکان‌های فرد صفر هستند و به ازای تعداد گام‌های فرد، مکان‌های زوج صفر هستند پس با هم تداخل نمی‌کنند. بنابراین $|L\rangle$ و $|R\rangle$ را به اندیس زوج و فرد تبدیل می‌کنیم. وقتی به ازای تعداد گام‌های زوج در مکان‌های زوج و به ازای تعداد گام‌های فرد در مکان‌های فرد حضور دارد فقط نصفی از مکان‌ها استفاده می‌شود با در نظر گرفتن همه مکان‌ها و اندیس زوج و فرد می‌توان ولگشت کوانتومی بدون سکه ساخت بدون اینکه فضای سکه به فضای هیلبرت اضافه شود و فضای هیلبرت بزرگتر شود. از آنجایی که احتمال حضور در همه‌ی مکان‌ها وجود دارد تابع توزیع احتمال یکنواخت‌تری باشد. در ولگشت کوانتومی بدون سکه ولگرد در هر گام زمانی با احتمال 50° درصد در مکان خودش حضور دارد در صورتی که در ولگشت کوانتومی با سکه ولگرد با احتمال 50° درصد به سمت چپ و با احتمال 50° درصد به سمت راست حرکت می‌کند با وجود این تفاوت سرعت انتشارشان یکسان است و متناسب با t^2 است. در ولگشت کوانتومی با سکه، سکه را به عنوان یک درجه آزادی در نظر می‌گیریم که بین مکان و سکه درهم‌تنیدگی ایجاد می‌شود. اما در ولگشت کوانتومی بدون سکه درجه آزادی سکه وجود ندارد بنابراین درهم‌تنیدگی وجود ندارد فقط برهم‌نهی که مشخص کننده‌ی توزیع دامنه‌ها است باقی می‌ماند. از بین رفتن درهم‌تنیدگی یکی از محاسن ولگشت کوانتومی با سکه است که در آزمایش‌های عملی ولگشت کوانتومی می‌تواند مفید باشد به دلیل اینکه درهم‌تنیدگی کوانتومی تحت تاثیر نوفه محیطی از بین می‌رود در حالی که برهم‌نهی در مقابل نوفه‌های محیطی خیلی مقاوم‌تر است که در اینجا برهم‌نهی داریم ولی درهم‌تنیدگی نداریم به دلیل وجود این مزیت ناوردایی انتقال در ولگشت‌های کوانتومی با سکه در یک گام اتفاق می‌افتد در حالی که در ولگشت کوانتومی بدون سکه در دو گام اتفاق می‌افتد.

مراجع

- [١] R. P. Feynman, Quantum Algebra and Symmetry , ٦٧٣ .(٢٠١٠)
- [٢] R. Shankar, *Principles of quantum mechanics* (Springer Science & Business Media, .(٢٠١٢
- [٣] Y. Manin, Sovetskoye Radio, Moscow , ١٢٨ .(١٩٨٠)
- [٤] R. P. Feynman, International journal of theoretical physics ٢١, ٤٦٧ .(١٩٨٢)
- [٥] D. Deutsch, Quantum theory, the church-turing principle and the universal quantum computer, in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Vol. ٤٠٠ pp. ١١٧-٩٧ The Royal Society, .١٩٨٥
- [٦] D. Deutsch and R. Jozsa, Rapid solution of problems by quantum computation, in *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* Vol. ٤٣٩ pp. ٥٥٨-٥٥٣ The Royal Society, .١٩٩٢
- [٧] D. R. Simon, SIAM journal on computing ٢٦, ١٤٧٤ .(١٩٩٧)
- [٨] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring, in *Foundations of Computer Science, ١٩٩٤ Proceedings, ٣٥th Annual Symposium on*, pp. ١٣٤-١٢٤ IEEE, .١٩٩٤
- [٩] P. W. Shor, SIAM review ٤١, ٣٠٣ .(١٩٩٩)
- [١٠] L. K. Grover, Physical review letters ٧٩, ٣٢٥ .(١٩٩٧)
- [١١] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability* (Springer Science & Business Media, .(٢٠١٢
- [١٢] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, and J. Watrous, One-dimensional quantum walks, in *Proceedings of the thirty-third annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. ٤٩-٣٧ ACM, .٢٠٠١

- [١٣] A. Nayak and A. Vishwanath, arXiv preprint quant-ph/٠٠١٠١١٧, ٢٠, (٢٠٠٠) .٠٠١٠١١٧
- [١٤] G. Riazanov, Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics ٩, ١١٠٧. (١٩٥٨)
- [١٥] R. P. Feynman, A. R. Hibbs, and D. F. Styer, *Quantum mechanics and path integrals* (Courier Corporation, .(٢٠٠٥
- [١٦] E. Farhi and S. Gutmann, Physical Review A ٥٨, ٩١٥. (١٩٩٨)
- [١٧] J. Watrous, Quantum simulations of classical random walks and undirected graph connectivity, in *Computational Complexity. ١٩٩٩ Proceedings. Fourteenth Annual IEEE Conference on*, pp. ,١٨٧–١٨٠ IEEE, .١٩٩٩
- [١٨] J. Kempe, Contemporary Physics ٤٤, ٣٠٧. (٢٠٠٣)
- [١٩] R. Portugal, *Quantum walks and search algorithms* (Springer Science & Business Media, .(٢٠١٣
- [٢٠] S. E. Venegas-Andraca, Quantum Information Processing ١١, ١٠١٥. (٢٠١٢)
- [٢١] H. Dym and H. P. McKean, problem ١٤, ٦٠. (١٩٧٢)
- [٢٢] C. M. Bender and S. A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I* (Springer Science & Business Media, .(١٩٩٩
- [٢٣] N. Bleistein and R. A. Handelsman, *Asymptotic expansions of integrals* (Courier Corporation, .(١٩٧٥
- [٢٤] A. Patel, K. Raghunathan, and P. Rungta, Physical Review A ٧١, ٠٣٢٣٤٧. (٢٠٠٥)
- [٢٥] A. Ambainis, J. Kempe, and A. Rivosh, Coins make quantum walks faster, in *Proceedings of the sixteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. ,١١٠٨–١٠٩٩ Society for Industrial and Applied Mathematics, .٢٠٠٥
- [٢٦] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. A. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A ٥٤, ٣٨٢٤. (١٩٩٦)

پیوست آ

اثبات روابط

۱.آ محاسبه انحراف معیار در ولگشت کلاسیکی روی خط

در مورد ولگشت کلاسیکی در یک بعد، تابع توزیع احتمال به صورت زیر است:

$$p(t, n) = \frac{1}{\sqrt{t}} \left(\frac{t}{t+n} \right) = \left(\frac{1}{\sqrt{t}} \right) \frac{t!}{((t+n)/2)!((t-n)/2)!} \quad (1.آ)$$

حال ثابت می کنیم این توزیع احتمال به یک توزیع نرمال (گوسی) منجر خواهد شد.

برای اثبات از تقریب استرلینگ استفاده می کنیم.

(۲.۱)

$$\begin{aligned}
Ln\, p(t, n) &= -tLn\, \mathfrak{Y} + tLn\, t - t + \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln(\mathfrak{Y}\pi t) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t+n) Ln\frac{1}{\mathfrak{Y}}(t+n) \\
&+ \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t+n) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln(\pi(t+n)) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t-n) Ln\frac{1}{\mathfrak{Y}}(t-n) \\
&+ \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t-n) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln(\pi(t-n)) = -tLn\mathfrak{Y} + tLnt - t + \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln(\mathfrak{Y}\pi t) \\
&- \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t+n) [-Ln\mathfrak{Y} + Ln(t+n)] + \frac{1}{\mathfrak{Y}} t + \frac{n}{\mathfrak{Y}} - \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln(\pi(t+n)) \\
&- \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t-n) [-Ln\mathfrak{Y} + Ln(t-n)] + \frac{t}{\mathfrak{Y}} - \frac{n}{\mathfrak{Y}} - \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln\pi(t-n) \\
&= -tLn\mathfrak{Y} + tLnt + \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln(\mathfrak{Y}\pi t) + \frac{t}{\mathfrak{Y}} Ln\mathfrak{Y} + \frac{n}{\mathfrak{Y}} Ln\mathfrak{Y} - \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t+n) Ln(t+n) \\
&- \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln\pi(t+n) + \frac{t}{\mathfrak{Y}} Ln\mathfrak{Y} - \frac{n}{\mathfrak{Y}} Ln\mathfrak{Y} - \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t-n) Ln(t-n) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln\pi(t-n) \\
&= tLnt + \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln(\mathfrak{Y}\pi t) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t+n) Ln(t+n) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} (t-n) Ln(t-n) \\
&- \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln\pi(t+n) - \frac{1}{\mathfrak{Y}} Ln\pi(t-n)
\end{aligned}$$

به کمک تقریب تیلور $\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2}$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
 \text{(۳.۱)} \quad \ln p(t, n) &= t \ln t + \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma \pi t) - \frac{1}{\gamma} (t+n) \ln t \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{\gamma} (t-n) \ln \left(1 + \frac{n}{t}\right) \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} \ln \pi (t+n) - \frac{1}{\gamma} \ln \pi (t-n) = t \ln t + \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma \pi t) - \frac{1}{\gamma} (t+n) \ln t \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} (t+n) \frac{n}{t} + \frac{1}{\gamma} (t+n) \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma - \frac{1}{\gamma} (t-n) \ln t + \frac{1}{\gamma} (t-n) \frac{n}{t} \\
 &\quad + \frac{1}{\gamma} (t-n) \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma - \frac{1}{\gamma} \ln \pi t \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{\gamma} \ln \pi t \left(1 + \frac{n}{t}\right) \\
 &= t \ln t + \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma \pi t) - \frac{t}{\gamma} \ln t - \frac{n}{\gamma} \ln t - \frac{t}{\gamma} \frac{n}{t} - \frac{n}{\gamma} \frac{n}{t} + \frac{t}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma \\
 &\quad + \frac{n}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma - \frac{t}{\gamma} \ln t + \frac{n}{\gamma} \ln t + \frac{t}{\gamma} \frac{n}{t} - \frac{n}{\gamma} \frac{n}{t} + \frac{t}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma - \frac{n}{\gamma} \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} \ln \pi t \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma\right) - \frac{1}{\gamma} \pi t \left(-\frac{n}{t} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma\right) = \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma \pi t) - \frac{n^\gamma}{t} \\
 &\quad + \frac{t}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma + \frac{t}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma - \frac{1}{\gamma} \ln \pi t - \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{n}{t}\right) - \frac{1}{\gamma} \ln \pi t - \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{n}{t}\right) \\
 &= \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma \pi t) - \frac{n^\gamma}{t} + \frac{1}{\gamma} \frac{n^\gamma}{t} - \frac{1}{\gamma} \ln \pi t - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma\right) - \frac{1}{\gamma} \ln \pi t \\
 &\quad - \frac{1}{\gamma} \left(-\frac{n}{t} - \frac{1}{\gamma} \left(\frac{n}{t}\right)^\gamma\right) = \frac{1}{\gamma} \ln(\gamma \pi t) - \frac{n^\gamma}{\gamma t} - \ln \pi t + \frac{1}{\gamma} \frac{n^\gamma}{t^\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{n^\gamma}{t^\gamma} \\
 &= \ln \frac{\sqrt{\gamma \pi t}}{\pi t} - \frac{n^\gamma}{\gamma t} = \ln \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma \pi t}} - \frac{n^\gamma}{\gamma t} = \ln(p(n, t)) = \ln \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma \pi t}} - \frac{n^\gamma}{\gamma t}
 \end{aligned}$$

که در آخر به رابطه زیر می‌رسیم:

$$p(n, t) \cong \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma \pi t}} e^{\frac{-n^\gamma}{\gamma t}} \quad \text{(۴.۱)}$$

۲.آ حل در مورد تحلیل ولگشت کوانتومی در یک بعد

تابع موج $\tilde{\psi}(k, t)$ در فضای فوریه به زیر است. که توابع موج $\psi_L(n, t)$ و $\psi_R(n, t)$ در پایه مکان به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(k, t) = & \frac{e^{-iw_k t}}{2(\sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos k)} \left(\sqrt{2} e^{-i(w_k - k)} - 1 \right) \\ & + \frac{(-1)^t e^{iw_k t}}{2(\sqrt{1 + \cos^2 k} + \cos k)} \left(-\sqrt{2} e^{i(w_k + k)} - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.آ)$$

برای محاسبه $\tilde{\psi}_R(k, t)$ معادله زیر به شکل ساده‌تری می‌نویسیم.

$$\frac{1}{|N_{\pm}|^2} = \frac{1}{2(\sqrt{1 + \cos^2 k} \mp \cos k)} \quad (6.آ)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|N_{\pm}|^2} &= \frac{1}{2(\sqrt{1 + \cos^2 k} \pm \cos k)} \\ &\times \frac{(\sqrt{1 + \cos^2 k} \mp \cos k)}{(\sqrt{1 + \cos^2 k} \mp \cos k)} \end{aligned} \quad (7.آ)$$

$$= \frac{(\sqrt{1 + \cos^2 k})(\sqrt{1 + \cos^2 k} \mp \cos k)}{2[(\sqrt{1 + \cos^2 k})^2 - \cos^2 k]} \quad (8.آ)$$

$$= \frac{(\sqrt{1 + \cos^2 k})(\sqrt{1 + \cos^2 k} \mp \cos k)}{2[1 + \cos^2 k - \cos^2 k]} \quad (9.آ)$$

$$\frac{1}{|N_{\pm}|^2} = \frac{(\sqrt{1 + \cos^2 k})(\sqrt{1 + \cos^2 k} \mp \cos k)}{2(1 + \cos^2 k)} \quad (10.آ)$$

$$\frac{1}{|N_{\pm}|^2} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \cos^2 k} \mp \cos k \right) \quad (11.آ)$$

$$\tilde{\psi}_R = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \cos^2 k} + \cos k \right) e^{-iw_k t} + \frac{(-1)^t}{2} \left(\sqrt{1 - \cos^2 k} - \cos k \right) e^{iw_k t} \quad (12.آ)$$

برای اینکه شکل تابع موج را در فضای حقیقی داشته باشیم از تبدیل فوریه معکوس استفاده می‌کنیم. اما قبل از آن جمله دوم $\tilde{\psi}_R$ در نظر می‌گیریم و $k \rightarrow k + \pi$ بنابراین داریم:

$$\frac{(-1)^t}{2} \left(1 - \frac{\cos(k + \pi)}{\sqrt{1 - \cos^2(k + \pi)}} \right) e^{-i w_k t} = \frac{(-1)^t}{2} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 - \cos^2 k}} \right) e^{-i w_k t} \quad (13.\bar{A})$$

$$f(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\tilde{f}(k)}{2\pi} e^{-i n k} dk \quad (14.\bar{A})$$

$$\psi_R(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \left(1 + \frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} \right) e^{-i(w_k t + n k)} \quad (15.\bar{A})$$

و همچنین برای محاسبه $\tilde{\psi}_L(k, t)$ معادله زیر را ساده‌تر می‌کنیم.

$$\sqrt{2} e^{-i(w_k - k)} - 1 = \sqrt{2} e^{-i w_k} - e^{-i k} \quad (16.\bar{A})$$

$$= \sqrt{2} (\cos w_k - i \sin w_k) - \cos k + i \sin k \quad (17.\bar{A})$$

$$\sin w = \frac{\sin k}{\sqrt{2}} \quad \text{با توجه به}$$

$$= \sqrt{2 - \sin^2 k} - i \sin k - \cos k + i \sin k \quad (18.\bar{A})$$

$$= \sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos k \times \frac{2\sqrt{1 + \cos^2 k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (19.\bar{A})$$

$$= \frac{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (20.\bar{A})$$

و

$$- \sqrt{2} e^{i(w_k + k)} - 1 = -\sqrt{2} e^{i w_k} - e^{-i k} \quad (21.\bar{A})$$

$$= -\sqrt{2} (\cos w_k + i \sin w_k) - \cos k + i \sin k \quad (22.\bar{A})$$

$$\sin w = \frac{\sin k}{\sqrt{2}} \text{ با توجه به}$$

$$= -\sqrt{1 + \cos^2 k} - i \sin k - \cos k + i \sin k \quad (23.1)$$

$$= -\sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos k \times \frac{-2\sqrt{1 + \cos^2 k}}{-2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (24.1)$$

$$= \frac{2(1 + \cos^2 k) - 2 \cos k \sqrt{1 + \cos^2 k}}{-2\sqrt{1 + \cos^2 k}} \quad (25.1)$$

$$\tilde{\psi}_L = \frac{e^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} (e^{-iw_k t} - (-1)^t e^{iw_k t}) \quad (26.1)$$

برای $\tilde{\psi}_L$ مانند قبل جمله دوم را در نظر می‌گیریم و $k \rightarrow k + \pi$ بنابراین داریم:

$$\frac{-e^{i(k+\pi)}}{2\sqrt{1 + \cos^2(k+\pi)}} (-1)^t e^{-iw_k t} = \frac{e^{ik}}{2\sqrt{1 + \cos^2 k}} (-1)^t e^{-iw_k t} \quad (27.1)$$

با توجه به عکس تبدیل فوریه داریم:

$$\psi_L(n, t) = \frac{1 + (-1)^{n+t}}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dk}{2\pi} \frac{e^{ik}}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} e^{-i(w_k t + nk)} \quad (28.1)$$

۳.آ محاسبه مشتقات در حل ولگشت کوانتومی برای تعداد گام‌های زیاد

$$\frac{d^2 \phi}{dk^2} = \frac{d}{dk} \left(-\frac{\cos k}{\sqrt{1 + \cos^2 k}} - \alpha \right) \quad (29.1)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dk^2} = \frac{\sin k \sqrt{1 + \cos^2 k} - \cos^2 k \sin k (1 + \cos^2 k)^{-1/2}}{1 + \cos^2 k} \quad (30.1)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dk^2} = \frac{\sin k}{(1 + \cos^2 k)^{1/2}} - \frac{\cos^2 k \sin k}{(1 + \cos^2 k)^{3/2}} \quad (31.1)$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{\sin k + \sin k \cos^{\mathfrak{Y}} k - \cos^{\mathfrak{Y}} k \sin k}{(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}}} \quad (32.\bar{A})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{\sin k}{(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}}} \quad (33.\bar{A})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{d}{dk} \left(\frac{\sin k}{(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}}} \right) \quad (34.\bar{A})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{\cos k(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}} + \sin k(\mathfrak{Y} \sin^{\mathfrak{Y}} k \cos k(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}})}{(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}}} \quad (35.\bar{A})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{\cos k(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k) + \mathfrak{Y} \sin^{\mathfrak{Y}} k \cos k}{(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}}} \quad (36.\bar{A})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{\mathfrak{Y} \cos k - \cos k \sin^{\mathfrak{Y}} k + \mathfrak{Y} \sin^{\mathfrak{Y}} k + \mathfrak{Y} \sin^{\mathfrak{Y}} k \cos k}{(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}}} \quad (37.\bar{A})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{Y}}\phi}{dk^{\mathfrak{Y}}} = \frac{\mathfrak{Y} \cos k(\mathfrak{Y} + \sin^{\mathfrak{Y}} k)}{(\mathfrak{Y} + \cos^{\mathfrak{Y}} k)^{\mathfrak{Y}/\mathfrak{Y}}} \quad (38.\bar{A})$$

۴.آ حل در مورد تحلیل ولگشت کوانتومی بدون سکه

$$M(k) = \begin{pmatrix} -ie^{ik} \sin k & i \cos k \\ i \cos k & ie^{-ik} \sin k \end{pmatrix} \quad (39.\bar{A})$$

$$M(k) - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ie^{ik} \sin k - \lambda & i \cos k \\ i \cos k & ie^{-ik} \sin k - \lambda \end{pmatrix} \quad (40.\bar{A})$$

$$\begin{vmatrix} -ie^{ik} \sin k - \lambda & i \cos k \\ i \cos k & ie^{-ik} \sin k - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (41.\bar{A})$$

$$(-ie^{ik} \sin k - \lambda)(ie^{-ik} \sin k - \lambda) + \cos^2 k = 0 \quad (42.\bar{1})$$

$$\lambda^2 + 2(i \sin k)\lambda + 1 = 0 \quad (43.\bar{1})$$

$$\lambda_k^{\pm} = \frac{2 \sin^2 k \pm \sqrt{4 \sin^4 k - 4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_k^+ = \sin^2 k + i \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ \lambda_k^- = \sin^2 k - i \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{cases} \quad (44.\bar{1})$$

$$\begin{pmatrix} -ie^{ik} \sin k & i \cos k \\ i \cos k & ie^{-ik} \sin k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda_k^{\pm} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (45.\bar{1})$$

$$\lambda_k^{\pm} = c^{\pm} \text{ اگر}$$

$$\begin{cases} -ie^{ik} \sin k \alpha + i \beta \cos k = c \alpha \\ i \alpha \cos k + i \beta e^{-ik} \sin k = c \beta \end{cases} \quad (46.\bar{1})$$

$$-ie^{ik} \sin k \alpha + i \beta \cos k = c \alpha \quad (47.\bar{1})$$

$$\alpha = 1 \text{ اگر}$$

$$-ie^{ik} \sin k + i \beta \cos k = \sin^2 k + i \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} \quad (48.\bar{1})$$

$$\beta = \frac{\sin^2 k + i \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} + i(\cos k + i \sin k) \sin k}{i \cos k}$$

$$= -\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \quad (49.\bar{1})$$

بنابراین ویژه بردار به صورت زیر می باشد.

$$\mathbf{e}_+ \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin k + \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (50.\bar{1})$$

$$i\alpha \cos k + i\beta e^{-ik} \sin k = c\beta \quad (51.\bar{A})$$

$$\beta = 1 \text{ اگر}$$

$$i\alpha \cos k + i \cos k \sin k + \sin^2 k = \sin^2 k + i\sqrt{1 + \sin^2 k} \cos k \quad (52.\bar{A})$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sin^2 k - i \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} - \sin^2 k - i \cos k \sin k}{i \cos k} \\ &= -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \end{aligned} \quad (53.\bar{A})$$

ویژه بردار به صورت زیر می باشد.

$$\mathbf{e}_- \propto \begin{pmatrix} -\sin k - \sqrt{1 + \sin^2 k} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (54.\bar{A})$$

۵.آ محاسبه مشتقات مراتب بالاتر در ولگشت کوانتومی بدون سکه

$$w_k = \cos^{-1}(\sin^2 k) \rightarrow \cos w_k = \sin^2 k \quad (55.\bar{A})$$

$$\sin^2 k = \sqrt{1 - \sin^2 w_k} \Rightarrow \sin w_k = \sqrt{1 - \sin^2 k} \quad (56.\bar{A})$$

$$\frac{d(\cos w_k)}{dk} = -\frac{dw_k}{dk} \sin w_k \Rightarrow \frac{dw_k}{dk} = -\frac{2 \cos k \sin k}{\sqrt{1 - \sin^2 k}} \quad (57.\bar{A})$$

$$\frac{dw_k}{dk} = -\frac{2 \cos k \sin k}{\sqrt{1 - \sin^2 k} \sqrt{1 + \sin^2 k}} = \frac{-2 \sin k}{\sqrt{1 + \sin^2 k}} \quad (58.\bar{A})$$

$$\frac{d^2 w_k}{dk^2} = \frac{-2 \cos k \sqrt{1 + \sin^2 k} + \sin^2 k \cos k (1 + \sin^2 k)^{-1/2}}{1 + \sin^2 k} \quad (59.\bar{A})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{-\mathfrak{V} \cos k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{1/\mathfrak{V}}} + \frac{\mathfrak{V} \sin^{\mathfrak{V}} k \cos k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}} \quad (٤٠.\bar{1})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{-\mathfrak{V} \cos k - \mathfrak{V} \cos k \sin^{\mathfrak{V}} k + \mathfrak{V} \cos k - \mathfrak{V} \cos^{\mathfrak{V}} k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}}$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{-\mathfrak{V} \cos k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}} \quad (٤١.\bar{1})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{\mathfrak{V} \sin k (\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}} + \mathfrak{V} \cos^{\mathfrak{V}} k \sin k (\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{1/\mathfrak{V}}}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}}} \quad (٤٢.\bar{1})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{\mathfrak{V} \sin k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}} + \frac{\mathfrak{V} \cos^{\mathfrak{V}} k \sin k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}} \quad (٤٣.\bar{1})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{\mathfrak{V} \sin k + \mathfrak{V} \sin^{\mathfrak{V}} k + \mathfrak{V} \cos^{\mathfrak{V}} k \sin k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}} \quad (٤٤.\bar{1})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{\mathfrak{V} \sin k - \mathfrak{V} \sin k \cos^{\mathfrak{V}} k + \mathfrak{V} \cos^{\mathfrak{V}} k \sin k}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}} \quad (٤٥.\bar{1})$$

$$\frac{d^{\mathfrak{V}} w_k}{dk^{\mathfrak{V}}} = \frac{\mathfrak{V} \sin k (\mathfrak{V} + \cos^{\mathfrak{V}} k)}{(\mathfrak{V} + \sin^{\mathfrak{V}} k)^{\mathfrak{V}/\mathfrak{V}}} \quad (٤٦.\bar{1})$$

Aabstract

In this thesis, first the concept of classical random walk on the line has been introduced and then quantum walk has been studied. Hilbert space of quantum walk which contains coin space and position space defined. Coin operator instead of coin has been used for quantum walk and its effects on quantum walk have been studied. In the following, we showed that by knowing the initial state and using evolution operator, how the next state can be constructed. It can be shown that by using Fourier transform, position space of random walk can be writing into a two by two matrix. By applying inverse Fourier transform, distribution of quantum walk amplitudes in basis of position has been calculated. In the following asymptotic behavior of quantum walk have been investigated. Moreover, by using the stationary phase theorem distribution of quantum walk amplitudes in basis of position have been investigated. Then another type of quantum walks known as coinless quantum walk has been introduced. This kind of quantum walks first proposed by Patel. Its Hilbert space composed of only position space and the coin space is no longer exist. Two states corresponding to the coin is dumped in to the index of odd and even position indexes. By introducing two evolution operators a quantum walk can be described. By using Fourier transform eigenvalues and eigenvectors and then amplitude distribution of this kind of quantum walk in k-space has been estimated. Again by using inverse Fourier transform, amplitude distribution of this kind of quantum walk in position space can be determined. Asymptotic behavior of this kind of quantum walk have been investigated. All, integral estimated by stationary phase approximation and. Finally, coinless quantum walk compared to coin-based quantum walk and its advantage, weakness, similarities and differences have been investigated.

Keywords : classical random walk- coin random walk- coinless quantum random walk- probability distribution- stationary phase.



Shahrood University of Technology

Faculty Physics and Nuclear Engineering

MSc Thesis in: Particle Physics

Study of coinless discrete time Quantum walk

By: Zahra Ahmadi

Supervisor

Dr. Mostafa Annabestani

February 2017