



دانشکده فیزیک

گروه فیزیک گرایش ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

# دوربری کوانتومی کامل با استفاده از حالات درهم تنیده کوانتومی با ابعاد بالا

فاطمه آریایی

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

شهریور ۱۳۹۵

بسم الله الرحمن الرحيم

## تقدیم بہ:

تربت پاک انسال آدم کہ آموختند مرا:  
از ہابیل ایثار را تا رسالت محمد (ص) بنیان ساز علم و عشق، ن والقلم؛  
تا پدرم کہ استقامت و استواری را و مادرم کہ بخشندگی و زلال بودن را و خانوادہام کہ مرز صبر  
را و دوستانم کہ لطف و مساعدت را؛  
و معلمم کہ الفبا را و تمامی استادانم از حال تا بہ تمنای غایت وصال و ہمہ معماران گمنام تا  
عاقبت.

# شکر و قدردانی:

آفرین جان آفرین پاک را  
در مسیر پژوهش و نگارش این پایان نامه عزیزانی همراهیم کردند که حرمت همراهی و کسب فیض  
از حضورشان، آدمی را به تشکر وامی دارد.

ابتدا سپاس خود را از استاد گرانقدرم؛ آقای دکتر مصطفی عنابستانی اعلام می دارم که با علم و حلم  
خود مرا مورد عنایت قرار دادند. باشد که این کلام، الطاف ایشان در مسیر تأمین این پایان نامه را  
بارز کند.

از آقایان دکتر حسین موحدیان و دکتر مرتضی رفیعی که قبول زحمت داوری این پایان نامه را  
بر دوش کشیدند، صمیمانه تشکر می نمایم. همچنین از آقای دکتر حسین توکلی عنبران، نماینده  
تحصیلات تکمیلی نیز تشکر و تقدیر می نمایم.

در انتها، سپاسی را با تمام وجود از دو عزیز می دارم که از آغاز همراه و همیارم بودند، مادر صبورم  
و پدر دوست داشتنی ام، که گرمی نفسم از گرمای محبتشان است و بیش از لحظه لحظه زندگیم  
مدیون همراهی و همیاریشان هستم.

و تشکر بی شائبه من از تمام کسانی است که در مسیر زندگیم، چون استادانی ناب، کلامی به من  
آموختند.

فاطمه آریایی  
شهریور ۱۳۹۵

## تهد نامه

اینجانب فاطمه آریایی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک ذرات بنیادی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان دوربری کوانتومی کامل با استفاده از حالات درهم تنیده کوانتومی با ابعاد بالا، تحت راهنمایی دکتر مصطفی عنابستانی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه آریایی

شهریور ۱۳۹۵

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

## چکیده

دوربری کوانتومی، یکی از مهم‌ترین مفاهیم موجود در اطلاعات و محاسبات کوانتومی است. در این پژوهش، جنبه‌های مختلف مفهوم درهم‌تنیدگی و همچنین دوربری کوانتومی مورد بررسی قرار گرفته است.

در ابتدا مفهوم درهم‌تنیدگی و حالت‌های دارای بیشینه درهم‌تنیدگی مورد مطالعه قرار گرفته و برخی از سنجه‌های مختلف اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی معرفی شده‌اند. در گام بعد ساده‌ترین شکل دوربری کوانتومی که با استفاده از یک کانال درهم‌تنیده دو کیوبیته قادر به دوربری یک کیوبیت است به تفصیل مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجایی که استفاده از کانال‌هایی به ابعاد بالاتر نه تنها قابلیت دوربری اطلاعات بیشتری نسبت به ابعاد پایین‌تر دارد، بلکه در مقابل نوفه‌های محیطی مقاومت بیشتری نسبت به ابعاد پایین از خود نشان می‌دهد، از این‌رو دوربری در ابعاد بالا به صورت کامل و دقیق مورد تحلیل قرار گرفته است. در انتهای این پژوهش، شرایط لازم و کافی برای دوربری یک حالت تک کیوبیت ناشناخته با استفاده از حالت درهم‌تنیده  $n$  کیوبیته، بیان گردیده است.

**کلمات کلیدی:** دوربری کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی، دوربری ابعاد بالاتر.

# فهرست مطالب

|    |                                                                              |
|----|------------------------------------------------------------------------------|
| ۱  | ۱ مکانیسم درهم تنیدگی                                                        |
| ۱  | ۱.۱ مقدمه                                                                    |
| ۴  | ۲.۱ درهم تنیدگی چیست؟                                                        |
| ۵  | ۳.۱ مفاهیم و تعاریف پایه                                                     |
| ۱۲ | ۴.۱ تشخیص جدایی پذیری و درهم تنیدگی                                          |
| ۱۳ | ۵.۱ حالت های بل درهم تنیده بیشینه                                            |
| ۱۵ | ۶.۱ چرا درهم تنیدگی عجیب است؟                                                |
| ۱۷ | ۷.۱ سنجه های اندازه گیری درهم تنیدگی                                         |
| ۱۹ | ۱.۷.۱ عملگر چگالی                                                            |
| ۱۹ | ۲.۷.۱ ماتریس چگالی کاهش یافته                                                |
| ۲۰ | ۸.۱ سنجش درهم تنیدگی با معیار منفیت                                          |
| ۲۱ | ۹.۱ چشمه های تولید جفت $EPR$                                                 |
| ۲۱ | ۱.۹.۱ تبدیل کاهشی پارامتری خودبه خودی                                        |
| ۲۳ | ۲.۹.۱ طرز کار چشمه های درهم تنیده قطبشی                                      |
| ۲۷ | ۲ دوربری کوانتومی در دو بعد                                                  |
| ۲۷ | ۱.۲ مقدمه                                                                    |
| ۲۹ | ۲.۲ مفهوم دوربری کوانتومی                                                    |
| ۲۹ | ۳.۲ رکورد پیمایش فاصله در دوربری کوانتومی                                    |
| ۳۵ | ۱.۳.۲ طرحواره دوربری کوانتومی در مسافت دور در سال ۲۰۱۶                       |
| ۳۷ | ۴.۲ دوربری یک حالت ناشناخته با استفاده از یک کانال درهم تنیده تک تایه اسپینی |
| ۴۱ | ۵.۲ نقش پیام های کلاسیکی در کامل شدن دوربری کوانتومی                         |
| ۴۱ | ۶.۲ درهم تنیدگی در سیستم های دو کیوبیته                                      |
| ۴۵ | ۷.۲ ابرفشرده سازی کوانتومی و تفاوت آن با دوربری                              |
| ۴۷ | ۳ دوربری در ابعاد بالا                                                       |
| ۴۷ | ۱.۳ مقدمه                                                                    |

|       |                                               |    |
|-------|-----------------------------------------------|----|
| ۲.۳   | حالت‌های سه کیوبیته مشهور                     | ۴۸ |
| ۱.۲.۳ | دوربری کوانتومی حالت سه کیوبیته $GHZ$         | ۵۰ |
| ۲.۲.۳ | بررسی دوربری حالت سه کیوبیته $W$              | ۵۰ |
| ۳.۳   | دوربری پنج کیوبیت حالت براون                  | ۵۲ |
| ۱.۳.۳ | دوربری کوانتومی حالت تک کیوبیت                | ۵۷ |
| ۴.۳   | اشتراک‌گذاری کوانتومی حالت تک کیوبیت          | ۵۸ |
| ۵.۳   | طرح جدیدی برای به اشتراک‌گذاری حالت تک کیوبیت | ۶۲ |
| ۶.۳   | دوربری حالت ناشناخته کیودیت دو کیوبیته        | ۶۵ |

#### ۴ شرایط لازم و کافی برای دوربری کامل کوانتومی

|     |                                                                 |    |
|-----|-----------------------------------------------------------------|----|
| ۱.۴ | مقدمه                                                           | ۶۹ |
| ۲.۴ | کانال درهم‌تنیده حالت نرمال $ W\rangle_N$ در دوربری کامل        | ۷۰ |
| ۳.۴ | دوربری یک حالت ناشناخته تک کیوبیت توسط یک کانال درهم‌تنیده $N$  | ۷۰ |
| ۷۰  | کیوبیته به طور کامل                                             |    |
| ۴.۴ | شرایط لازم و مناسب برای دوربری کامل از یک حالت تک کیوبیت دلخواه | ۷۱ |

#### ۵ خلاصه و نتیجه‌گیری

#### آ محاسبات و روابط دوربری در کانال درهم‌تنیده سه کیوبیته

|     |                                                                           |    |
|-----|---------------------------------------------------------------------------|----|
| ۱.آ | محاسبات ماتریس چگالی تقلیل یافته سیستم‌های سه کیوبیته                     | ۷۷ |
| ۲.آ | طریقه به‌دست آوردن ماتریس چگالی تقلیل یافته برای حالت $ W_1\rangle_{123}$ | ۷۸ |
| ۳.آ | اثبات دوربری کوانتومی برای حالت سه کیوبیت $ GHZ\rangle_{123}$             | ۷۸ |
| ۴.آ | محاسبات دوربری کوانتومی سه کیوبیته حالت $W$                               | ۸۰ |

#### ب اثبات روابط دوربری کوانتومی حالت براون در تحلیل مقدماتی

|     |                                                                    |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------|----|
| ۱.ب | اثبات ماتریس چگالی برای ذرات ۴ و ۵ از سیستم ۵ کیوبیته              | ۸۱ |
| ۲.ب | استفاده از حالت درهم‌تنیده براون برای ارسال تک کیوبیت بین دو کاربر | ۸۳ |

#### پ تحلیل ریاضی دوربری کوانتومی با استفاده از حالت براون در اشتراک گذاری

|       |                                               |    |
|-------|-----------------------------------------------|----|
| ۱.۵   | $QSTS$                                        |    |
| ۱.پ   | جزئیات محاسبات اشتراک گذاری تک کیوبیته        | ۸۵ |
| ۱.۱.پ | اشتراک گذاری جدید برای ارسال تک کیوبیت        | ۸۸ |
| ۲.پ   | روابط مربوط به ارسال یک کیودیت بین آلیس و باب | ۹۱ |

#### مراجع

# فصل ۱

## مکانیسم درهم تنیدگی

### ۱.۱ مقدمه

در اوایل قرن بیستم، انقلاب‌های علمی در حال شکل‌گیری و تکوین بودند. مهم‌ترین این انقلاب‌ها در ساختارهای اساسی فیزیک نظری اتفاق افتاد. مکانیک کوانتومی یکی از مهم‌ترین این انقلاب علمی در تمام تاریخ بوده است. در سال‌های ۱۹۲۶ و ۱۹۲۷ شرودینگر<sup>۱</sup> و هایزنبرگ<sup>۲</sup> به رهیافت جدیدی برای پدیده‌های کوانتومی دست پیدا کردند. هایزنبرگ از ماتریس‌ها استفاده کرده بود و شرودینگر از پایه‌های فضای هیلبرت و سال بعد از آن دیراک نشان داد که، این دو رهیافت یکی است. از همان زمان بحث‌هایی درباره مبانی فلسفی مکانیک کوانتومی که سردمداران آن‌ها بور<sup>۳</sup> و اینشتین<sup>۴</sup> بودند، درگرفت. بور طرفدار دو آتشه مکانیک کوانتومی بود و بزرگان بسیاری با وی موافق بودند به همین دلیل دیدگاه مکانیک کوانتومی رواج بیشتری پیدا کرده بود که به این دیدگاه، دیدگاه کپنهاگی مکانیک کوانتوم می‌گویند. در جبهه مقابل اینشتین به همراه دوبروی<sup>۵</sup> و شرودینگر قرار داشت که مخالف تعبیرهای فلسفی بور از نتایج مکانیک کوانتومی بود.

از طرفی مهم‌ترین تفاوت‌های مکانیک کوانتومی با مکانیک کلاسیکی، مربوط به مفهوم اندازه‌گیری بود. تا قبل از پیدایش مکانیک کوانتومی، مفهوم اندازه‌گیری به عنوان نسبت دادن مقدار معینی به هر کمیت فیزیکی بود که آن کمیت فیزیکی در آن شرایط به صورت واقعی تنها دارای همان مقدار بود. بنابراین چه قبل و چه بعد از مشاهده، شکی وجود نداشت و با دقیق‌ترین ابزارهای آزمایشگاهی می‌توانستیم به هر اندازه که بخواهیم به مقدار واقعی آن کمیت نزدیک شویم. در مکانیک نسبیتی نیز مشابه با مکانیک کلاسیکی مقدار دقیقی را به زمان و طول نسبت می‌دهند. البته مشروط به این‌که روشی برای ارائه اندازه‌گیری بیان شود که با معرفی سرعت ثابت

---

<sup>۱</sup>Schrödinger

<sup>۲</sup>Werner Heisenberg

<sup>۳</sup>Niels Henrik David Bohr

<sup>۴</sup>Albert Einstein

<sup>۵</sup>Louis de Broglie

برای سیگنال‌های نور بدون وابستگی به دستگاه اندازه‌گیری و بر اساس آن اندازه‌گیری زمان و طول، وجود مقدارهای واقعی برای کمیت‌های فیزیکی مورد نظر پذیرفته شد.

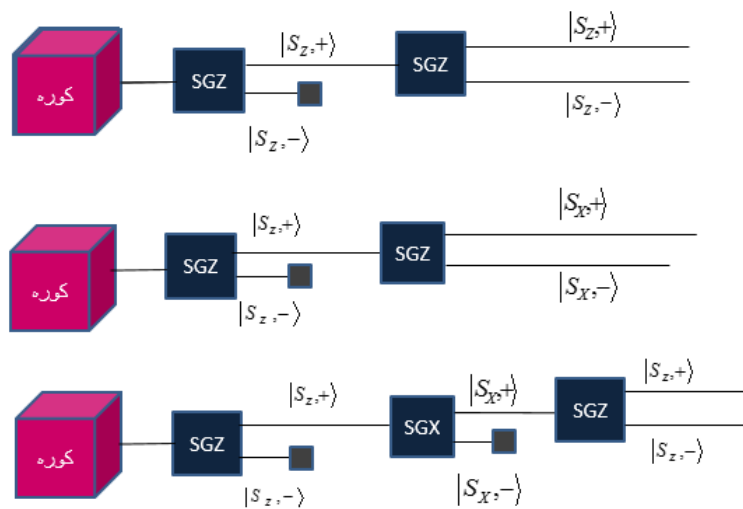
در مکانیک کوانتومی اندازه‌گیری مفهوم دیگری پیدا می‌کند و وابستگی کمیت‌های فیزیکی به مشاهده‌پذیر بیشتر از حالت کلاسیکی وجود دارد. همچنین بنابر اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، اندازه‌گیری همزمان دو کمیت (انرژی-زمان) و (تکانه-مکان) و..... وجود ندارد. براساس این اصل حتی تکامل دستگاه‌های اندازه‌گیری هم نمی‌تواند دقت ما را از آنچه که در این اصل پیش‌بینی شده است فراتر ببرد. برای درک این موضوع آزمایشی را فرض کنید که از دستگاه اشترن گرلاخ برای اندازه‌گیری اسپین اتم‌های نقره استفاده می‌کند. اسپین اتم‌های نقره خارج شده از کوره، جهت‌گیری‌های کاتوره‌ای داشته و پس از عبور از دستگاه اشترن گرلاخ در جهتی خاص (مثلاً  $Z$ )، به دو باریکه  $|Z, +\rangle$  و  $|Z, -\rangle$  تفکیک می‌شوند که نشان می‌دهد جهت‌گیری در جهت  $Z$  اتم‌های نقره، دو مقدار  $+$  و  $-$  دارند که نماینده  $\pm \frac{\hbar}{2}$  و ویژه مقادیر اسپین ماتریس  $\sigma_Z$  هستند. اگر یکی از خروجی‌های دستگاه مسدود گردد و خروجی دیگر به دستگاه اشترن گرلاخ مشابهی وارد شود، خروجی دستگاه دوم عیناً شبیه اول است (مطابق شکل ۱.۱ بالا)؛ که بدیهی به نظر می‌رسد. اگر جهت دستگاه دوم تغییر دهیم (مثلاً  $X$ )، در این صورت خروجی دستگاه دوم به دو مقدار  $|X, +\rangle$  و  $|X, -\rangle$  تغییر می‌کند که باز هم عجیب نیست زیرا  $|Z, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|X, +\rangle + |X, -\rangle)$ . در نتیجه می‌توان این‌گونه فرض کرد که دستگاه اول اسپین در جهت  $+$  محور  $Z$  را برمی‌گزیند و دستگاه دوم اسپین در جهت  $X$  را تفکیک می‌کند (مطابق شکل ۱.۱ وسط). اما اگر مطابق شکل ۱.۱ پایینی، بعد از دستگاه دوم، دستگاه سومی در جهت  $Z$  قرار دهیم، به صورت شگفت‌انگیزی در خروجی  $|Z, +\rangle$  و  $|Z, -\rangle$  خواهیم داشت که عجیب است زیرا در دستگاه اول فقط  $|Z, +\rangle$  را برگزیده بودیم و نباید  $|Z, -\rangle$  را در دستگاه آخر می‌یافتیم. به عبارتی این موضوع را می‌توان این‌گونه توضیح داد که هر اندازه‌گیری، باعث پاک شدن اطلاعات قبلی شده است. بنابراین امکان ندارد که بتوانیم از هر دو مقدار  $S_x$  و  $S_y$  همزمان آگاهی یابیم [۱].

بنابراین در مکانیک کوانتومی اندازه‌گیری همانند یک صافی عمل می‌کند که ورودی‌های زیادی را می‌پذیرد اما تنها یک خروجی دارد و با اندازه‌گیری یک کمیت فیزیکی تنها یکی از حالت‌هایی که آن کمیت می‌تواند داشته باشد مشاهده می‌شود. در حقیقت تنها چیزی که مکانیک کوانتومی پیش‌بینی می‌کند، احتمال مشاهده هر کدام از آن حالت‌های پیش‌بینی شده است و نمی‌توان با یقین مقدار یک کمیت فیزیکی را پیش‌بینی کرد.

بر این اساس چالش‌ها و پرسش‌های فراوانی بر نظریه کوانتومی می‌رفت که یکی از این چالش‌ها، موضوع مقاله ۱۹۳۵ توسط آلبرت اینشتین، بوریس پودولسکی و ناتان روزن<sup>۶</sup> مورد بحث قرار گرفت که به پارادوکس EPR معروف گشت.

در این مقاله بیان شده بود، که مکانیک کوانتومی نظریه کاملی نیست؛ چرا که اگر کامل باشد باید امکان اندازه‌گیری دو کمیت ناسازگار مثل تکانه و مکان وجود داشته باشد. از جمله نتیجه دیگری که این مقاله به دنبال داشت، این بود که نتیجه اندازه‌گیری روی یک جفت الکترون که

<sup>۶</sup> Albert Einstein, Boris Podolsky and Nathan Rosen



شکل ۱.۱: شماتیکی از دستگاه اشترن-گرایخ که در آن حین اندازه‌گیری در راستای جدید سیستم دستکاری شده و اطلاعات قبلی از بین می‌رود [۱].

همزمان از یک چشمه گسیل می‌شوند و یکی از الکترون‌ها به مقصد  $A$  می‌رود که مشاهده‌گری به نام «آلیس» در آن جاست و الکترون دوم به مقصد  $B$  می‌رود که مشاهده‌گری به نام «باب» در آن‌جا قرار دارد. اندازه‌گیری روی الکترون اول، آلیس تأثیر غیر موضعی روی الکترون دوم می‌گذارد. به این معنی که مکانیک کوانتومی می‌تواند نتیجه اندازه‌گیری را در محل باب پیش‌بینی کند. استدلال  $EPR$  که اصطلاحاً آن را موضعیت می‌نامند، بر این فرض است که هر آن‌چه که در مکان مفروضی رخ دهد، فقط اثرهای موضعی دارد [۲]. هر چیزی که در  $A$  رخ می‌دهد هیچ اثری در وضعیت  $B$  ندارد. به عنوان تمثیلی از روش  $EPR$  فرض کنید؛ به دوستی شش دانه می‌دهید، چند تا از آن‌ها را در جعبه ای می‌گذارید و بقیه را در جعبه دیگر و اگر فراموش کنند که کدام جعبه کدام است و به طور تصادفی یکی از جعبه‌ها را به مسکو ببرید و دوست‌تان، جعبه‌ی دیگر را به نیویورک ببرد. در مسکو جعبه خود را باز کنید و می‌بینید دو دانه است. چون دانه‌ها نمی‌توانند همزمان غیب یا ظاهر شوند (تعدادشان پایاست درست مانند اسپین هر ذره در آزمایش  $EPR$ ) بی‌درنگ متوجه می‌شوید که چهار دانه در جعبه دیگر در نیویورک است. و از این رو هیچ اختلالی در مکانیک کوانتومی یا اختلال دیگر، نمی‌تواند برای تغییر شمارش دانه روی داده باشد [۳]. از طرفی تغییر در یک قسمت از سیستم نمی‌تواند با سرعت بیشتر از نور قسمت‌های دیگر را متأثر کند. از آنجایی که این دو شرط در مورد حالات درهم‌تنیده صادق نیست،  $EPR$  این‌گونه استدلال کردند که مکانیک کوانتومی کامل نیست و برای تکمیل آن نظریه متغیرهای پنهان را پیشنهاد کردند [۲].

پس از مقاله  $EPR$ ، اروین شرودینگر<sup>۷</sup> نامه‌ای در آلمان به اینشتین نوشت که در آن کلمه گره‌خوردگی<sup>۸</sup> را برای توصیف ارتباط بین دو ذره که برهم‌کنش داشتند و سپس از هم جدا شده

<sup>۷</sup>Erwin Schrodinger

<sup>۸</sup>Verschränkung

بودند، به کار گرفته بود. او در مدت کوتاهی پس از آن به چاپ مقاله‌ای اصلی پرداخت و اصطلاح درهم تنیدگی را در آن به کار برد. بعداً اینشتین به طور مشهود درهم تنیدگی را به عنوان «عمل شیخ‌وارد در فاصله»<sup>۹</sup> به تمسخر گرفت.

البته مانند اینشتین، شرودینگر نیز از مفهوم درهم تنیدگی ناراضی بود. چرا که به نظر می‌رسید، حد مجاز سرعت نور در نظریه نسبیت را نقض می‌کند. مقاله *EPR* در میان دانشمندان، علاقمندان قابل توجهی را حاصل نمود. اما با وجود علاقه، نقاط ضعفی نیز در آن وجود داشت تا اینکه در سال ۱۹۶۴ جان استوارت بل<sup>۱۰</sup> یکی از مفروضات کلیدی اصل موضوعیت را ثابت کرد که زمینه‌ساز تفسیر نوعی از متغیرهای پنهان توسط *EPR* بود و در آن با استفاده از روابط ریاضی ثابت کرد که یکی از فرضیات کلیدی موجود در *EPR* یعنی اصل موضوعیت، با نظریه کوانتومی در تناقض است [۴].

## ۲.۱ درهم تنیدگی چیست؟

درهم تنیدگی کوانتومی در واقع یک پدیده فیزیکی است که زمانی رخ می‌دهد که جفت‌ها یا گروهی از ذرات تولید شده یا اندرکنش داده شده دارای ارتباط خاصی باشند که حالت‌های کوانتومی هر یک از ذرات نتوانند به طور مستقل از حالت‌های کوانتومی ذرات دیگر باشد و یا حالت کل را نتوان به صورت حاصل ضرب تانسوری حالت‌های تک تک ذرات نوشت.

در ذرات درهم تنیده، حتی زمانی که ذرات از یکدیگر فاصله زیادی می‌گیرند، این ارتباط کوانتومی حفظ می‌گردد. ذرات دارای یکسری خواص می‌گردند که در حالت کلاسیکی وجود ندارد.

ارتباط کوانتومی، یکی از پدیده‌های عجیب کوانتومی است که می‌تواند میان دو ذره که نسبت به هم فاصله دارند ارتباط ایجاد کند. به شکلی که هر نوع تغییر در یکی از این ذره‌ها بلافاصله در ذره دیگر نیز تغییر به وجود می‌آورد. حتی اگر هر یک از این ذره‌ها در یک سوی جهان قرار داشته باشند، چنین جفت ذراتی را در واقع می‌توان به طرق مختلف در آزمایشگاه تولید کرد. یکی از فنون، تولید اتم پوزیترونیم است. یعنی تولید یک الکترون و یک پوزیترون متصل به هم که در آن حالت، تکانه‌ی زاویه‌ای اوربیتالی صفر و تکانه‌ی زاویه‌ای اسپینی آن نیز صفر است. با «یونیده» کردن اتم پوزیترونیم می‌توان جفت مورد نیاز را به دست آورد.

یکی دیگر از روش‌های متداول، استفاده از کریستال‌های غیر خطی برای تولید زوج فوتون درهم تنیده است که با پروسه تبدیل کاهشی پارامتری خودبه‌خودی<sup>۱۱</sup> است که *SPDC* نامیده می‌شود، صورت می‌گیرد که در ادامه در بخش ۹.۱ توضیح داده خواهد شد.

<sup>۹</sup>Spooky action at a distance or Spukhafte Fernwirkung

<sup>۱۰</sup>John Stewart Bell

<sup>۱۱</sup>Spontaneous Parametric Down Conversion

## ۳.۱ مفاهیم و تعاریف پایه

### تعریف ۱.۳.۱. بیت<sup>۱۲</sup>

در دنیای کلاسیک، جزئی‌ترین واحد اطلاعات که فقط می‌تواند دو مقدار ۰ و ۱ را داشته باشد را اصطلاحاً بیت می‌نامند. هر بیت فقط و فقط می‌تواند به‌طور مشخص مقدار ۰ و ۱ را داشته باشد [۵].

**تعریف ۲.۳.۱. کیوبیت<sup>۱۳</sup>** در دنیای کوانتومی مفهوم بیت، جای خود را به کیوبیت می‌دهد که، حالات ممکن آن نه تنها صفر و یک، بلکه شامل برهم‌نهی آن‌ها نیز می‌باشد. کیوبیت‌ها می‌توانند چنانچه در مورد اسپین صحبت شود با نمادهای  $|\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\rangle$  و در مورد قطبش نور به صورت؛  $|V\rangle$  و  $|H\rangle$  و برای اتم دوترانه به صورت؛  $|g\rangle$  و  $|e\rangle$  نمایش داده می‌شوند که خلاصه‌ی تمام آن‌ها می‌تواند به صورت؛  $|\circ\rangle$  و  $|\uparrow\rangle$  قرار گیرند و هر کدام از این کیوبیت‌ها، توصیف کاملی از یک سیستم فیزیکی را در بردارند که به آن‌ها یک حالت کوانتومی می‌توان نسبت داد [۵].

**تفاوت بیت و کیوبیت** در این است که یک کیوبیت می‌تواند حالتی ما بین  $|\circ\rangle$  و  $|\uparrow\rangle$  را داشته باشد. به عبارتی، ترکیب خطی از حالت‌ها (برهم‌نهی) تشکیل دهند:

$$|\psi\rangle = \alpha|\circ\rangle + \beta|\uparrow\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.1)$$

ضرایب  $\alpha$  و  $\beta$  اعداد مختلط می‌باشند [۵].

### تعریف ۳.۳.۱. ضرب داخلی

در یک فضای برداری  $V$  ضرب داخلی را با  $\langle, \rangle$  نمایش می‌دهیم [۶]، هر گاه در شرایط زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} \langle x, y + \alpha z \rangle &= \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, z \rangle \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle^* \\ \langle x, y \rangle &\geq 0 \\ \langle x, x \rangle &= 0 \rightarrow x = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

### تعریف ۴.۳.۱. ضرب خارجی

در مقابل ضرب داخلی، ضرب خارجی روی دو بردار داریم که با ضرب‌های مجاز روی کت‌ها، براها و عملگرها تعریف می‌شود. خروجی آن یک عملگر (ماتریس) است و به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$|\beta\rangle\langle\alpha| = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1^* & \cdots & b_n^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1^* & \cdots & a_1 b_n^* \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1^* & \cdots & a_m b_n^* \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

<sup>۱۲</sup>bit

<sup>۱۳</sup>qubit

دیراک اصل موضوعه مهم شرکت پذیری حاصل ضرب [۱] را مطرح ساخت که طی آن با فرض اینکه  $|\beta_i\rangle$  یک بردار در فضای ضرب داخلی  $V$  و  $|\alpha_i\rangle$  یک بردار در فضای ضرب داخلی  $W$  باشد، آن گاه  $|\alpha\rangle\langle\beta|$  را می توان یک عملگر خطی تبدیل فضای  $V$  به فضای  $W$  نامید. به طوری که:

$$(|\beta\rangle\langle\alpha|) \cdot |\gamma\rangle = |\beta\rangle \cdot (\langle\alpha|\gamma\rangle) = (\langle\alpha|\gamma\rangle) \cdot |\beta\rangle \quad (4.1)$$

که در آن  $(\langle\alpha|\gamma\rangle)$  یک عدد است. پس عمل ضرب خارجی روی یک کت، کت دیگری است که به بیان دیگر،  $|\beta\rangle\langle\alpha|$  را می توان یک عملگر تصور کرد. اگر حاصل ضرب به صورت  $|\beta\rangle\langle\alpha|\gamma\rangle$  گرفته شود، آن را به عنوان تأثیر عملگر  $|\beta\rangle\langle\alpha|$  روی  $|\gamma\rangle$  و اگر به صورت  $(\langle\alpha|\gamma\rangle) \cdot |\beta\rangle$  در نظر بگیریم با حفظ پراگندگی و نقطه، عملگر  $|\beta\rangle\langle\alpha|$ ، کت  $|\gamma\rangle$  را در جهت  $|\beta\rangle$  می چرخاند. از کاربردهای مهم ضرب خارجی، استفاده از نتیجه مهم آن تحت عنوان کاملیت<sup>۱۴</sup> برای بردارهای متعامد بهنجار<sup>۱۵</sup> است. فرض کنید  $|\alpha_i\rangle$  پایه های متعامد در فضای  $W$  است [۶]. آن گاه:

$$\sum_i |\alpha_i\rangle\langle\alpha_i| = I \quad (5.1)$$

همچنین:

$$X = |\beta\rangle\langle\alpha| \Rightarrow X^\dagger = |\alpha\rangle\langle\beta| \quad (6.1)$$

### تعریف ۵.۳.۱. ضرب تانسوری

طی عملیات ضرب تانسوری، یک فضای برداری بزرگتر از دو فضای برداری کوچکتر ایجاد می شود. اگر دو فضای  $V$  و  $W$  با ابعاد  $m$  و  $n$  داشته باشیم، آن گاه  $V \otimes W$  یک فضای برداری با ابعاد  $m \times n$  است که مؤلفه های آن  $|\beta\rangle \in V$  و  $|\alpha\rangle \in W$  هستند. اگر در آن که  $A: V \rightarrow V'$  و  $B: W \rightarrow W'$  که  $A$  یک ماتریس  $m \times n$  و  $B$  را یک ماتریس  $p \times q$  در نظر گرفته ایم، در این صورت ضرب تانسوری  $A \otimes B$  به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}B & \cdots & A_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B & \cdots & A_{mn}B \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

که در آن،  $A_{11}B$  بیانگر یک ماتریس  $p \times q$  بعدی است [۶].

### تعریف ۶.۳.۱. تعریف حالت پایه

فرض می کنیم که دو کیوبیت داریم اگر دو کیوبیت کلاسیکی داشته باشیم، چهار حالت پایه ممکن،  $00$ ،  $01$ ،  $10$  و  $11$  هستند. مطابق با آن یک سیستم دو کیوبیت در مکانیک کوانتومی، چهار حالت پایه محاسباتی  $|00\rangle$ ،  $|01\rangle$ ،  $|10\rangle$  و  $|11\rangle$  دارد که می تواند دارای برهم نهی چهار

<sup>۱۴</sup>completeness relation

<sup>۱۵</sup>orthonormal

حالت نیز باشد که هر کدام دارای ضرابی بوده که آن را دامنه گویند که به صورت زیر نمایش می دهند [۶].

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \quad (۸.۱)$$

نتیجه اندازه گیری هر  $|x\rangle$  با احتمال  $|\alpha_x|^2$  اتفاق می افتد که طبق قانون احتمالات بایستی به یک بهنجار باشند:

$$\sum_x |\alpha_x|^2 = 1 \quad (۹.۱)$$

به طور کلی پایه بهنجار برای فضای برداری را به صورت  $\{e_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  با شرط بهنجارش  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$  می باشد که  $e_i$  مجموعه متعامدی از بردارهای یکه را تشکیل می دهند که بر حسب بردارهای پایه به فرم زیر بسط داده می شود:

$$x = \sum_{i=1}^N x_i e_i \quad (۱۰.۱)$$

بدیهی است که:

$$x = \langle e_i, x \rangle \quad (۱۱.۱)$$

### تعریف ۷.۳.۱. سیستم چند حالت

اگر چه ساده ترین حالت برای ذخیره و پردازش یک واحد اطلاعات کوانتومی کیوبیت یعنی یک سیستم کوانتومی دو حالت است اما از لحاظ تئوری و تجربی، امکان استفاده از سیستم های کوانتومی با ابعاد و حالت ها بالاتر و بیشتر نیز وجود دارد که ممکن است در نهایت یک سیستم کوانتومی  $N$  حالت تمام اطلاعات لازم برای اعمال یک کامپیوتر کوانتومی با قابلیت کنترل دقیق، زمان همدوسی<sup>۱۶</sup> بالا و ... را برآورده کند. استفاده از حالت هایی با ابعاد بالاتر، امنیت پروتکل را نسبت به سیستم های دو حالتی کیوبیت ها، بالاتر می برد [۶]. دو نمونه از سیستم های چند حالت مشهور به صورت زیر هستند.

۱. **کیوتريت<sup>۱۷</sup>** اگر فضای برداری سه بعدی داشته باشیم به حالت های ایجاد شده کیوتريت گویند. کیوتريت دارای سه بردار پایه متعامد است که در نمایش دیراک معمولاً به شکل  $|0\rangle$ ،  $|1\rangle$  و  $|2\rangle$  نشان داده می شود [۷]. در حالت کلی یک کیوتريت به شکل زیر بیان می شود:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|2\rangle \quad (۱۲.۱)$$

ضرایب  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  دامنه های احتمال می باشند به طوری که؛  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$  می باشد. حالت های پایه کیوتريت ها متعامد هستند. کیوتريت ها با یک فضای هیلبرت با ابعاد بالاتر

<sup>۱۶</sup> decoherence

<sup>۱۷</sup> qutrit

تعریف شوند که  $H^{(3)}$  نامیده می‌شود. یک رشته  $n$  تایی از کیوتریت‌ها، با  $3^n$  حالت مختلف به‌طور همزمان نمایش داده می‌شوند. البته آنچه کیوتریت‌ها را برای کاربرد در اطلاعات کوانتومی مفید می‌سازد؛ مقاوم بودن آن‌ها در برابر واهمدوسی است.

۲. **کیودیت**<sup>۱۸</sup> اگر فضای برداری به بیش از سه بردار تعمیم یابد به حالت‌های سیستم  $d$  حالت کیودیت گویند که به‌طور عمومی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$|\psi\rangle = C_0 |0\rangle + C_1 |1\rangle + \dots + C_{d-1} |d-1\rangle \quad (13.1)$$

نیز به صورت کلی زیر می‌توان آن را در نظر گرفت:

$$|\psi\rangle = \sum_j C_j |j\rangle_i, j \in \{0, 1, 2, \dots, d-1\} \quad (14.1)$$

که  $C_j$  ها، پارامترهای مختلط با شرط بهنجارش  $\sum_j C_j^2 = 1$  هستند. در این حالت فضای هیلبرت یک سیستم  $n$  حالت  $H^{(n)}$  است [۸].

### تعریف ۸.۳.۱. عملگرهای خطی

برای تغییر یک حالت کیوبیت، از عملگرهای خطی استفاده می‌شود که در ریاضی جزء عملگرهای توابعی هستند که با تأثیر مستقیم روی یک بردار آن را به بردار دیگری تبدیل می‌کنند. مرسوم‌ترین این عملگرها در نمایش ماتریسی ظاهر می‌شوند که متداول‌ترین آن‌ها که در اطلاعات کوانتومی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرند، ماتریس‌های پاولی و همچنین ماتریس یکانی هستند که در زیر نمایش این ماتریس‌ها به ترتیب آمده است:

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & Y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ Z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.1)$$

که ماتریس چهارم  $I$ ، ماتریس یکانی است که اعمال آن روی هر کیوبیتی تغییری را در آن ایجاد نمی‌کند. عملگر پاولی  $X$  و  $Z$  معمولاً تحت عنوان بیت‌برگردان<sup>۱۹</sup> و فاز برگردان<sup>۲۰</sup> مورد استفاده قرار می‌گیرند. اگر  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  و  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  در نظر بگیریم، آنگاه  $X$  روی یکی از دو کیوبیت  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  اثر کند خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} X|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle \\ X|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \end{aligned} \quad (16.1)$$

<sup>۱۸</sup>qudit

<sup>۱۹</sup>bit flip

<sup>۲۰</sup>phase flip

که در این جا به شکل کلی زیر نمایش داده می‌شود:

$$X|j\rangle = |1 \oplus j\rangle \quad (17.1)$$

که علامت  $\oplus$  جمع با مد ۲ را نشان می‌دهد. عملگر  $Z$  یا فاز برگردان نیز، حالت  $|1\rangle$  را از طریق علامت آن تغییر می‌دهد:

$$\begin{aligned} Z|0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \\ Z|1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle \end{aligned} \quad (18.1)$$

که در حالت کلی می‌توان آنرا به شکل زیر نمایش داد:

$$Z|j\rangle = (-1)^j |j\rangle \quad (19.1)$$

در نمایش تأثیر عملگر  $Y$  روی کیوبیت‌ها نیز به طریق مشابه زیر اقدام می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = i|1\rangle \\ Y|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -i|0\rangle \end{aligned} \quad (20.1)$$

البته در بعضی مواقع، عملگرهایی مثل  $Y$  که شامل اعداد مختلط هستند را با ضربی مثل  $i$  همراه می‌کنند تا عناصر ماتریسی اعداد حقیقی شوند که البته در کل فرآیند استفاده از  $Y$  یا  $iY$  هیچ تفاوتی نخواهد کرد.

$$iY = ZX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (21.1)$$

که در نهایت حاصل این عملگر روی کیوبیت‌ها، نتیجه‌ای ترکیب از هر دو عملگر بیت برگردان و فاز برگردان را می‌دهد:

$$\begin{aligned} iY|0\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -|1\rangle \\ iY|1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle \end{aligned} \quad (22.1)$$

قضیه ۹.۳.۱ (عدم کپی شوندگی در کوانتوم).<sup>۲۱</sup>

<sup>۲۱</sup>No-cloning theorem

نظریه‌ای که عدم امکان کپی برداری یک کیوبیت ناشناخته را اثبات می‌کند، اصل عدم کپی برداری است که اولین بار توسط ووترز<sup>۲۲</sup>، دیک<sup>۲۳</sup> و زورک<sup>۲۴</sup> عنوان شد [۹]. فرض کنید می‌خواهیم، حالت  $|\psi\rangle_A$  را روی حالت تهی اولیه  $|e\rangle_B$  کپی نماییم. از آنجایی اعمال در مکانیک کوانتومی به صورت یکانی است، عملگری مثل  $U$  باید وجود داشته باشد که:

$$U|\psi\rangle_A|e\rangle_B = |\psi\rangle_A|\psi\rangle_B \quad (23.1)$$

این عملگر یکانی باید توانایی کپی هر حالتی را دارا باشد. پس اگر از همین عملگر دوباره برای کپی حالت دیگری مثلاً  $|\varphi\rangle_A$  استفاده کنیم و روی آن اثر دهیم؛ به صورت زیر انجام می‌شود:

$$U|\varphi\rangle_A|e\rangle_B = |\varphi\rangle_A|\varphi\rangle_B \quad (24.1)$$

طبق ویژگی مکانیک کوانتومی اگر همیوگ مختلط معادله (۲۴.۱) را در معادله (۲۳.۱) ضرب کنیم، به شکل زیر در می‌آید:

$${}_B\langle e|{}_A\langle\varphi|U^\dagger U|\psi\rangle_A|e\rangle_B = ({}_B\langle\varphi|{}_A\langle\varphi|) \cdot (|\psi\rangle_A|\psi\rangle_B) \quad (25.1)$$

که نتیجه نهایی به شکل زیر در می‌آید:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = \langle\varphi|\psi\rangle^2 \quad (26.1)$$

و این امر در صورتی امکان‌پذیر است که یکی از دو حالت معادلات، (۲۷.۱) و (۲۸.۱) پیش آید:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = 1 \quad (27.1)$$

که حالت (۲۷.۱) وقتی معنا پیدا می‌کند که حالت  $|\varphi\rangle$  و  $|\psi\rangle$  یکی باشند که در این صورت کپی سازی معنایی نخواهد داشت و یا:

$$\langle\varphi|\psi\rangle = 0 \quad (28.1)$$

که در این صورت باید،  $|\varphi\rangle$  و  $|\psi\rangle$  متعامد باشند. به عبارتی ما تنها قادر به کپی سازی حالت‌هایی هستیم که متعامد باشند و این فقط برای حالت‌هایی امکان‌پذیر است که در حالت پایه باشند. در صورتی که در مکانیک کوانتومی ما با برهم‌نهی حالت‌های پایه‌ای مثل  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  مواجه هستیم. بنابراین در حالت کلی ساخت دستگاه کوانتومی که توانایی کپی برداری از تمام حالات را داشته باشد، امکان‌پذیر نیست.

<sup>۲۲</sup> Wootters

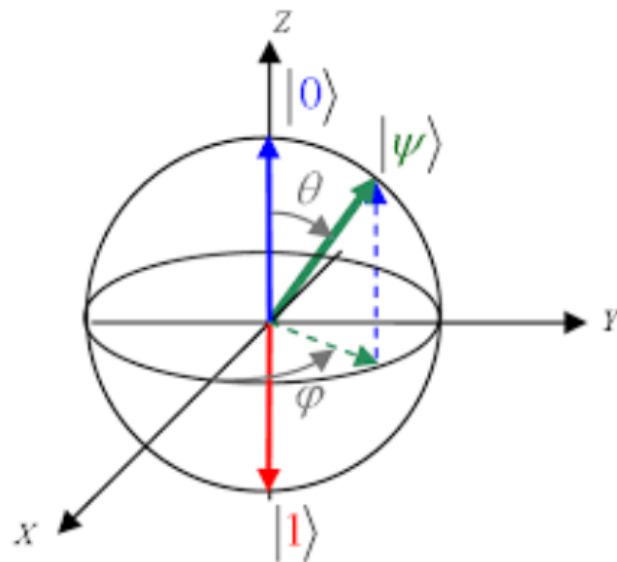
<sup>۲۳</sup> Dick

<sup>۲۴</sup> Zurek

**تعریف ۱۰.۳.۱. کره بلوخ<sup>۲۵</sup>** در مکانیک کوانتومی، کره بلوخ نمایش هندسی از حالت یک سیستم کوانتومی دو حالته (دو کیوبیته) است. بنابراین از آنجا که بی‌نهایت اطلاعات کوانتومی در یک حالت ناشناخته وجود دارد. اطلاعات یک سیستم کوانتومی بسیار زیاد است که پس از اندازه‌گیری یک حالت ناشناخته سیستم به یکی از حالت‌ها رمبش می‌کند. در صورتی که حالت ناشناخته یک کیوبیت را براساس مختصات کروی بنویسیم:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (29.1)$$

که در آن  $0 \leq \theta \leq \pi$  و  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  است و چنین حالتی در واقع ویژه بردار عملگر پاولی  $\hat{n} \cdot \vec{\sigma}$  است که در آن  $\hat{n}$  بردار یکه‌ای است که روی کره دو بعدی در جهت مشخص شده توسط زاویه  $\theta$  و  $\varphi$  قرار گرفته است. به عبارتی  $\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . بنابراین هر حالت را می‌توان در یک کره به شکل ۲.۱ نمایش داد. برای مثال:



شکل ۲.۱: طرح کره بلوخ و نحوه قرارگیری حالت‌های خالص و آمیخته که در این نمایش حالات خالص روی کره و حالات آمیخته درون کره قرار می‌گیرند [۶].

$$\begin{cases} \theta = 0, \varphi = 0 \Rightarrow |\psi\rangle = |0\rangle \\ \theta = \pi, \varphi = 0 \Rightarrow |\psi\rangle = |1\rangle \end{cases}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \begin{cases} \varphi = 0 \Rightarrow |\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |S_x, +\rangle \\ \varphi = \pi \Rightarrow |\psi\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |S_x, -\rangle \end{cases} \quad (30.1)$$

کلی‌ترین حالت یک کیوبیت را می‌توان با یک ماتریس چگالی دو در دو نمایش داد که ماتریس‌های پاولی یک پایه برای فضای ماتریس‌های دو در دو تشکیل می‌دهند و می‌توان آن را به صورت زیر

<sup>۲۵</sup>Bloch Sphere

نمایش داد:

$$\rho = \frac{1}{4}(r_0 I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r_0 + z & x - iy \\ x + iy & r_0 - z \end{pmatrix} \quad (31.1)$$

که در آن  $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  و ضریب  $\frac{1}{4}$  برای راحتی بیرون کشیده شده است. حال دقت کنیم که:

•  $\rho$  هرمیتی است. بنابراین  $\vec{r}, r_0$  حقیقی هستند.

•  $Tr(\rho) = 1$ . بنابراین  $r_0 = 1$ .

•  $\rho \geq 0$ . برای تأمین این شرط می‌بایست ویژه مقادیرهای  $\rho$  را حساب کنیم. یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که ویژه مقادیرهای  $\rho$  عبارتند از:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{4}(1 \pm r) \quad (32.1)$$

که در آن  $r$  اندازه بردار  $\vec{r}$  است.

بنابراین برای مثبت بودن کافی است که طول بردار  $\vec{r}$  از یک کمتر باشد؛ یعنی  $r \leq 1$ . به این ترتیب بین هر ماتریس چگالی و یک نقطه از یک کره به شعاع واحد یک تناظر یک به یک برقرار می‌شود. این کره، کره بلوخ نام دارد که در شکل ۲.۱ نشان داده شده است. نقاط روی سطح کره بلوخ نقاطی هستند که در آن‌ها  $r = 1$  و بنابراین ویژه مقدار  $\rho$  برابر با یک و صفر هستند در نتیجه این نقاط متناظر با حالت‌های خالص هستند. در واقع زمانی که  $r = 1$  باشد یعنی  $r$  برابر یک بردار یک‌گانه  $n$  باشد آن‌گاه:

$$\rho \equiv \frac{1}{4}(I + \hat{n} \cdot \vec{\sigma}) = |n\rangle \langle n| \quad (33.1)$$

که در آن  $|n\rangle$  حالت یک ذره با اسپین در جهت بردار یک‌گانه  $n$  است. از طرف دیگر مرکز کره یعنی  $r = 0$  متناظر با حالت کاملاً مخلوط  $\rho = \frac{1}{4}I$  است. هرچه از طرف مرکز کره به طرف مرز پیش برویم به درجه خلوص حالت‌ها اضافه می‌شود [۶، ۱۰].

## ۴.۱ تشخیص جدایی‌پذیری و درهم‌تنیدگی

اگر دو سیستم  $A$  و  $B$  داشته باشیم، فضای هیلبرت متناظر با آن‌ها به ترتیب  $H_A$  و  $H_B$  خواهند بود و فضای هیلبرت سیستم ترکیبی  $AB$  برابر است با:

$$H_{AB} = H_A \otimes H_B \quad (34.1)$$

حال فرض کنیم دو سیستم داریم که سیستم  $A$  در حالت  $|\psi_1\rangle$  و سیستم  $B$  در حالت  $|\psi_2\rangle$  باشند، سیستم ترکیبی  $AB$  در حالت  $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$  خواهد بود که با توجه به رابطه ۳۵.۱ در زیر چنین حالتی را جدایی پذیری<sup>۲۶</sup> می‌نامند [۱۱، ۱۲]:

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \quad (۳۵.۱)$$

که در آن  $|\psi_i\rangle$  ها حالت‌هایی از زیر سیستم‌ها هستند. البته هر بردار دلخواه در فضای هیلبرت سیستم ترکیبی  $AB$  را همیشه نمی‌توان به صورت ضرب تانسوری دو بردار در فضای هیلبرت سیستم‌های  $A$  و  $B$  نوشت. چنین حالتی را درهم‌تنیده می‌نامیم. یک حالت آمیخته به صورت ماتریس چگالی  $\rho^{ABC\dots}$  جداپذیر است اگر و تنها اگر بتواند به صورت مخلوطی از حالت‌های خالص جداپذیر بیان شود [۱۳]:

$$\rho^{ABC\dots} = \sum_i P_i |\alpha_i^A\rangle \langle \alpha_i^A| \otimes |\beta_i^B\rangle \langle \beta_i^B| \otimes |\gamma_i^C\rangle \langle \gamma_i^C| \otimes \dots \quad (۳۶.۱)$$

که احتمالات  $P_i \geq 0$  و  $\sum_i P_i = 1$  است. که اگر حالتی را نتوان به شکل ۳۶.۱ بتوان نوشت به آن درهم‌تنیده می‌گویند.

## ۵.۱ حالت‌های بل درهم‌تنیده بیشینه

فرض کنیم، دو ذره بنیادی آلکس و باب با هم برهم‌کنش کنند که هریک از آن‌ها دارای اسپین  $\frac{1}{2}$  می‌باشند. در چنین صورتی حالت‌های اسپین نهایی آن‌ها بعد از برهم‌کنش به صورت زیر هستند:

$$S = \{|S_1 - S_2\rangle, \dots, |S_1 + S_2\rangle\} \quad (۳۷.۱)$$

که با  $S_1 = S_2 = \frac{1}{2}$  دو حالت بیشتر نخواهیم داشت. در حالت اول  $S = S_S = 0$  خواهد بود که در این حالت عدد کوانتومی اسپینی آن  $m_s = 0$  می‌گردد. در این حالت دو الکترون درهم‌تنیده حالت تک تایه اسپینی<sup>۲۷</sup> را به وجود می‌آورند که به صورت زیر این حالت نمایش داده می‌شود:

$$|\varphi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |1\rangle_B - |1\rangle_A |0\rangle_B) \quad (۳۸.۱)$$

اما در حالت دوم که  $S_T = 1$  است. عدد کوانتومی  $m_s$  مقادیر ۱ و ۰ و -۱ را به خود می‌گیرد که در این حالت دیگر، سه حالت اسپینی<sup>۲۸</sup> ایجاد می‌شود، که به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$|\gamma\rangle_{AB} = |0\rangle_A |0\rangle_B \quad (۳۹.۱)$$

$$|\psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B) \quad (۴۰.۱)$$

$$|\lambda\rangle_{AB} = |1\rangle_A |1\rangle_B \quad (۴۱.۱)$$

<sup>۲۶</sup>Seperable Product State

<sup>۲۷</sup>Spin Singlet

<sup>۲۸</sup>Spin Triplet

حالت‌های نهایی درهم‌تنیده از معادلات  $(۳۸.۱)$ ،  $(۴۰.۱)$ ، به اضافه حالت‌های زیر، حالت‌های بل درهم‌تنیده را تشکیل می‌دهند که چهار حالت متعامد با بیشینه درهم‌تنیدگی<sup>۲۹</sup> را تشکیل می‌دهند.

$$|\varphi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|^0\rangle_A|^1\rangle_B + |^1\rangle_A|^0\rangle_B) \quad (۴۲.۱)$$

$$|\psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|^0\rangle_A|^0\rangle_B - |^1\rangle_A|^1\rangle_B) \quad (۴۳.۱)$$

کیوبیتی که به وسیله آلیس نگه داشته شده است (که با زیرنویس  $A$  مشخص شده است) می‌تواند  $|^0\rangle_A$  یا  $|^1\rangle_A$  باشد. اگر آلیس کیوبیت خود را به‌طور استاندارد و کاملاً تصادفی اندازه‌گیری کند، امکان هریک با احتمال  $\frac{1}{2}$  است. یکی از ویژگی‌های مهم حالت بل بیشینه، همبستگی خاصی است که بین کیوبیت‌های آن وجود دارد که این همبستگی را می‌توان با اندازه‌گیری هر دو کیوبیت و استفاده از عملگر یکانی مناسبی بر آن‌ها؛ به‌دست آورد. به‌عبارتی عملگرهای یکانی مناسب می‌توانند هریک از حالات اصلی و اولیه دو ذره را در پایه بل درهم‌تنیده ارائه دهند، به‌عنوان مثال:

۱. عملگر یکانی که حالت اصلی دو ذره که  $|\psi^+\rangle_{12}$  می‌باشد را به‌صورت حالت اصلی  $|\psi^+\rangle_{12}$  باقی می‌گذارد که عملگر یکانی با ماتریس  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  نمایش داده می‌شود.

۲. عملگر جابجایی حالت که همانا  $|^0\rangle_2 \rightarrow |^1\rangle_2$  و  $|^1\rangle_2 \rightarrow |^0\rangle_2$  تبدیل و حالت دو ذره را از  $|\psi^+\rangle_{12}$  به حالت  $|\varphi^+\rangle_{12}$  مبدل می‌سازد که همان ماتریس پاولی  $\sigma_1$ ،  $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  است.

۳. عملگر تبدیل حالت وابسته به فاز که اختلاف فازی به اندازه  $\pi$  برای  $|^0\rangle_2$  و  $|^1\rangle_2$  به‌وجود می‌آورد و وضعیت را از  $|\psi^+\rangle_{12}$  به  $|\psi^-\rangle_{12}$  انتقال می‌دهد. که همانا این عملگر ماتریس پاولی  $\sigma_3$  که به شکل  $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  می‌باشد.

۴. عملگر ترکیبی شامل مجموع جابجایی حالت و انتقال فازی، که در اثر تأثیر آن، حالت  $|\psi^+\rangle_{12}$  به حالت  $|\varphi^-\rangle_{12}$  تبدیل می‌کند و شامل ماتریس‌های پاولی  $\sigma_2 = X$  و  $\sigma_3 = Z$  می‌باشد که با هم ترکیب گشته‌اند.

اندازه‌گیری حالت بل، نیز در علم اطلاعات کوانتومی، جایگاه ویژه‌ای دارد و گام مهمی در انتقال اطلاعات کوانتومی برداشته است. که در آن از اندازه‌گیری دو کیوبیت در مکانیک کوانتومی که حالت درهم‌تنیده‌ای را به اشتراک گذاشته‌اند، استفاده می‌گردد و سپس تعیین می‌شود که کدام یک از حالت‌های بل در آن وجود دارد. به عبارتی نتیجه یک اندازه‌گیری حالت بل، در بازسازی حالت اصلی یک ذره در دوربری کوانتومی و ابرفشرده‌سازی و .... که از قبل درهم‌تنیده شده‌اند و یکی از حالت‌های بل را به اشتراک گذاشته‌اند، نقش اساسی دارد [۱۴].

<sup>۲۹</sup> Maximally entangled

جدول ۱.۱: عملگرهای مورد استفاده برای رسیدن به حالت‌های دیگر پایه بل  $|\psi^+\rangle_{12}$

| عملگرهای تبدیل وضعیت    | پایه‌های بل به دست آمده در اثر اعمال عملگر |
|-------------------------|--------------------------------------------|
| $I \psi^+\rangle_{12}$  | $ \psi^+\rangle_{12}$                      |
| $ZI \psi^+\rangle_{12}$ | $ \psi^-\rangle_{12}$                      |
| $X \psi^+\rangle_{12}$  | $ \varphi^+\rangle_{12}$                   |
| $XZ \psi^+\rangle_{12}$ | $ \varphi^-\rangle_{12}$                   |

## ۶.۱ چرا درهم‌تنیدگی عجیب است؟

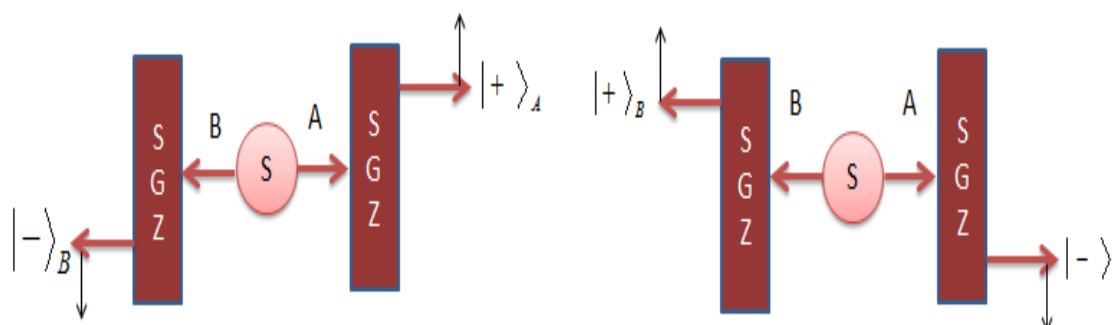
فرض کنید؛ دو الکترون که آن‌ها را  $A$  و  $B$  می‌نامیم، در حالت تک‌تایه اسپینی می‌باشند.

$$|\varphi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) \quad (۴۴.۱)$$

اگر با دستگاه اشتراک-گرلاخ ( $SG$ )، اسپین آن‌ها بررسی شود و دو دستگاه در راستای محور  $Z$ ، ( $SG_z$ ) برای یافتن جهت‌گیری اسپین تنظیم شده باشند آنگاه اگر الکترون  $A$  حالت  $|Z; +\rangle$  را نمایش دهد؛ الکترون  $B$  حالت  $|Z; -\rangle$  را نمایش می‌دهد که احتمال وقوع هر یک از حالات  $\frac{1}{2}$  می‌باشد. در این صورت حالت‌های  $A$  و  $B$  را بدین صورت نمایش می‌هیم.

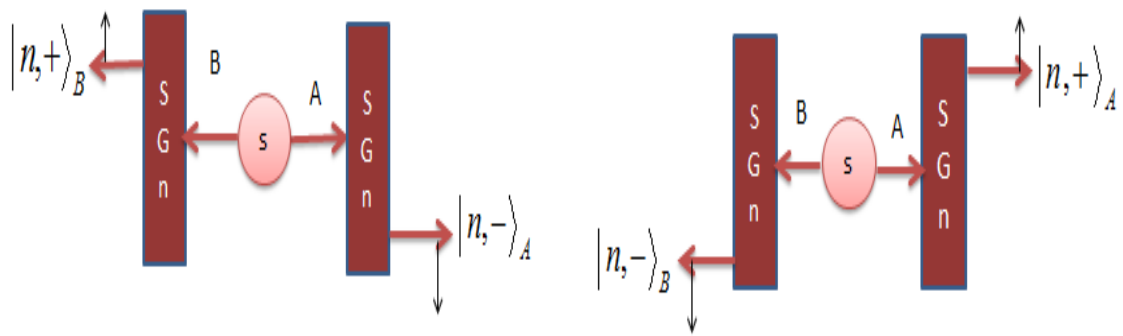
$$|A, Z+\rangle \quad ; \quad |B, Z-\rangle \quad (۴۵.۱)$$

در صورتی که  $A$  جهت پایین دستگاه را برگزیند، آنگاه  $B$  جهت بالا را نشان می‌دهد که در شکل ۳.۱ نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که جهت  $Z$  یک جهت اختیاری است. مثلاً اگر



شکل ۳.۱: هر گاه درهم‌تنیدگی رخ دهد، آلیس اسپین خود را اندازه‌گیری کند و در جهت بالا بیابد قطعاً باب اسپین خود را در جهت پایین اندازه‌گیری خواهد کرد و بالعکس اگر آلیس در جهت پایین اندازه‌گیری انجام دهد باب آن را با قطعیت در راستای بالا اندازه خواهد گرفت. هر چند این دو پس از گسیل از منبع از هم، بسیار دور شده باشند.

در جهت دیگری مانند؛  $n$  که با راستای  $Z$  زاویه  $\phi$  درجه را می‌سازد، دستگاه اشتراک-گرلاخ تنظیم



شکل ۴.۱: جهت  $Z$  یک جهت اختیاری است. اگر در جهت دیگری مانند  $n$  که با راستای  $Z$  زاویه  $\phi$  می‌سازد دستگاه اشترن-گرلاخ تنظیم شده باشد باز این نتیجه اندازه‌گیری اسپین قطعیت خواهد داشت و حالت اندازه‌گیری آلیس به صورت  $|A, n+\rangle$  باشد، آن‌گاه باب با قطعیت حالت خود را به صورت  $|B, n-\rangle$  به دست خواهد آورد.

شود، اگر حالت آلیس پس از اندازه‌گیری  $|A, n+\rangle$  را نمایش دهد، آن‌گاه باب  $|B, n-\rangle$  را به دست می‌آورد که مطابق شکل ۴.۱ این اتفاق رخ می‌دهد:

به عبارتی بی‌درنگ می‌دانیم، اگر الکترون  $A$  در حالت  $|A, n+\rangle$  باشد؛ آن‌گاه بدون آن‌که اندازه‌گیری روی الکترون  $B$  انجام دهیم، قادر خواهیم بود تشخیص دهیم، الکترون  $B$  در حالت  $|B, n-\rangle$  قرار دارد. حتی اگر بپذیریم که اندازه‌گیری روی الکترون  $A$  باعث می‌شود که الکترون  $B$  نیز تحت تأثیر قرار بگیرد باید توجه داشت که چنان‌چه در این آزمایش فاصله الکترون  $A$  و  $B$  به اندازه فاصله دو کهکشان باشد، باز این همبستگی وجود دارد.

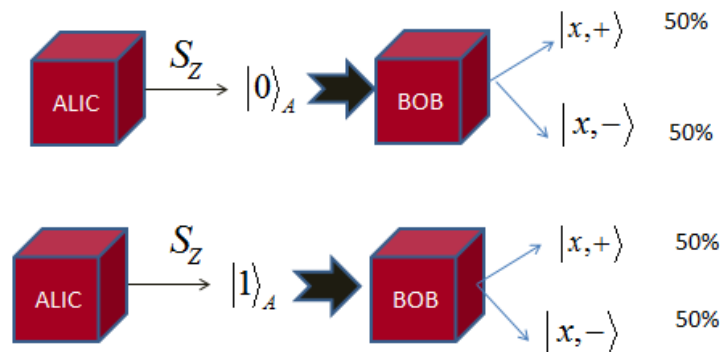
یعنی نتیجه‌ای که آلیس به دست می‌آورد، نمی‌تواند هیچ اثری بر روی اسپین ذره باب داشته باشد و تنها کار مشاهده آلیس این بوده است که واقعیت موجود را پیش‌بینی کند. حال این استدلال را با اندکی تغییر، نیز می‌توان مطرح کرد؛ به این ترتیب که، فرض کنیم حالت درهم‌تنیده زیر بین آلیس و باب به اشتراک گذاشته شده باشد:

$$|\varphi\rangle^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A |\downarrow\rangle_B - |\downarrow\rangle_A |\uparrow\rangle_B) \quad (46.1)$$

که این حالت معادل حالت زیر است:

$$|\varphi\rangle^- = -\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_A |-\rangle_B - |-\rangle_A |+\rangle_B) \quad (47.1)$$

همچنین فرض می‌کنیم باب بنا دارد که همیشه در پایه  $X$  اندازه‌گیری کند. حال اگر آلیس در راستای  $X$  اندازه‌گیری کند، با استناد به مطالب فوق و شکل ۳.۱، دو حالت ممکن است پیش بیاید یا  $|+\rangle_A$  و یا  $|-\rangle_A$  را به دست خواهد آورد. در صورتی که آلیس  $|+\rangle_A$  را به دست آورد، باب بعد از اندازه‌گیری حتماً مقدار  $|-\rangle_B$  را مشاهده خواهد کرد و بالعکس. اما اگر آلیس در پایه  $Z$  اندازه‌گیری کند و کماکان باب در پایه  $X$  اندازه‌گیری انجام دهد، این بار آلیس  $|\uparrow\rangle_A$  و یا  $|\downarrow\rangle_A$  را به دست خواهد آورد. بنابراین مطابق شکل ۵.۱، نتیجه اندازه‌گیری باب به صورت تصادفی خواهد



شکل ۵.۱: در حالتی که آلیس راستای اسپین خود را در جهت  $Z$  اندازه‌گیری می‌کند. و باب اسپین ذره خود را در جهت  $X$  اندازه‌گیری می‌کند، همبستگی در حالت کاتوره‌ای می‌باشد و با قطعیت نمی‌توان گفت باب روی جهت  $Z$  اسپین خود را در جهت  $|B, X+\rangle$  یا  $|B, X-\rangle$  بدست خواهد آورد.

بود و باب ممکن است هر یک از حالت‌های  $|+\rangle_B$  یا  $|-\rangle_B$  را با احتمال ۵۰٪ به‌دست آورد یا حتی می‌توان فرض کرد که آلیس اصلاً اندازه‌گیری نکند، در این صورت که آلیس هیچ اندازه‌گیری انجام ندهد، باز هم باب ممکن بود یکی از حالات  $|+\rangle_B$  یا  $|-\rangle_B$  را به‌صورت تصادفی به‌دست آورد که در این‌جا:

$$|+\rangle_X = \frac{|0\rangle_Z + |1\rangle_Z}{\sqrt{2}} \quad (48.1)$$

$$|-\rangle_X = \frac{|0\rangle_Z - |1\rangle_Z}{\sqrt{2}} \quad (49.1)$$

بنابراین مشاهده می‌شود که نتایج اندازه‌گیری باب به این وابسته است که، آلیس ممکن است در چه پایه‌ای اندازه‌گیری کند به عبارتی می‌توان این‌گونه عنوان کرد که، اگر حالت درهم‌تنیده‌ای بین دو مشاهده‌گر به اشتراک گذاشته شود نتایج اندازه‌گیری آن‌ها به هم وابسته می‌شوند حتی اگر بی‌نهایت از هم دور شده باشند [۳].

## ۷.۱ سنجه‌های اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی

مسئله مهم دیگری که در نظریه اطلاعات کوانتومی مطرح است، تعیین مقدار کمی درهم‌تنیدگی یک حالت درهم‌تنیده است که در مرجع [۶] در رابطه با این موضوع مطالبی بیان شده است. هر تابعی که مقدار کمی درهم‌تنیدگی کوانتومی را مشخص کند، یک سنجه درهم‌تنیدگی است. از جمله می‌توان به مهم‌ترین این سنجه‌ها، آنتروپی فون‌نویمان<sup>۳۰</sup> و منفیت<sup>۳۱</sup> اشاره کرد. یک مفهوم کلیدی در نظریه اطلاعات کلاسیکی، آنتروپی شانون<sup>۳۲</sup> است که این آنتروپی

<sup>۳۰</sup>Von Neumann

<sup>۳۱</sup>Multipartite Negativities

<sup>۳۲</sup>Shannon entropy

متأثر از نام شانون ریاضی‌دان آمریکایی است که در آن، به طور مستقیم فرض کنید ما مقدار یک متغیر تصادفی  $X$  را داریم. آنتروپی شانون  $X$  مشخص می‌کند اگر مقدار متغیر تصادفی  $X$  را داشته باشیم، چقدر اطلاعات راجع به آن به دست خواهیم آورد. یک دیدگاه مترادف آن هم این است که آنتروپی  $X$  مقدار عدم قطعیت راجع به  $X$  را مشخص کند، قبل از این که مقدارش را بدانیم. این دو دیدگاه مکمل هم هستند. ما می‌توانیم آنتروپی را معیاری از عدم آگاهی خود در نظر بگیریم، وقتی یک کمیت تصادفی  $X$  را نمی‌دانیم یا به عنوان معیار، میزانی از اطلاعات در نظر بگیریم که بعد از دانستن مقدار  $X$  به دست می‌آوریم. برای این منظور، آنتروپی یک متغیر تصادفی  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ، که تابعی از مقادیر ممکن مختلف است و به صورت متغیر تصادفی به دست می‌آید را اغلب به عنوان یک تابع از توزیع احتمالات  $P_1, \dots, P_n$  در نظر می‌گیریم. آنتروپی شانون مرتبط با این توزیع احتمال توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$H(X) = H(P_1, \dots, P_n) = - \sum_{i=1}^n P(x_i) \log_2 P(x_i) \quad (50.1)$$

شانون نشان داد، آنتروپی به عنوان یک اندازه از سطح عدم قطعیت اطلاعات و تابعی از توزیع احتمال است. به عبارتی فرض کنید در سیستمی  $n$  وضعیت متفاوت  $S_1, S_2, \dots, S_n$  وجود دارد. به طوری که سیستم می‌تواند در یکی از وضعیت‌ها قرار داشته باشد احتمال این که سیستم  $S$  در وضعیت  $S_i$  باشد را با  $P_i$  مشخص می‌کنیم که:

$$P(S \sim S_i) = P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (51.1)$$

اگر تمام مقادیر  $P_i$  ها در رابطه فوق مشخص باشد، آنتروپی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$H = \sum_{i=1}^n P_i \log P_i \quad (52.1)$$

در صورت استقلال سیستم‌ها، محاسبه آنتروپی کلی توسط جمع تک تک آنتروپی‌های سیستم صورت می‌گیرد که خاصیت جمع‌پذیری در آن حفظ می‌شود.

از آنتروپی شانون یا اطلاعات شانون نمی‌توان برای اندازه‌گیری اطلاعات کوانتومی استفاده کرد که این به ریشه کاملاً متفاوت اندازه‌گیری کوانتومی در مقایسه با اندازه‌گیری کلاسیکی بر می‌گردد. در مکانیک کوانتومی برای اندازه‌گیری میزان اطلاعات کوانتومی، از آنتروپی فون‌نویمان استفاده می‌شود.

برای یک حالت کوانتومی که در حالت کلی با ماتریس چگالی  $\rho$  مشخص می‌شود، آنتروپی فون‌نویمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(\rho) = -\text{tr}(\rho \log_2 \rho) \quad (53.1)$$

که برای محاسبه آن می‌توان از شکل قطری  $\rho$  استفاده کرد.

$$S(\rho) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (54.1)$$

که در آن  $\lambda_i$  ها ویژه مقادیر  $\rho$  هستند [۶].

## ۱.۷.۱ عملگر چگالی

بنابر تعریف آنتروپی، عملگر چگالی  $\rho$  نقش مهمی در به‌دست آوردن آن ایفا می‌کند که حاوی تمام اطلاعات مهم فیزیکی است که می‌توان درباره آنسامبل<sup>۳۳</sup> مورد نظر به‌دست آورد. یک آنسامبل خالص اجتماعی است از سیستم‌های فیزیکی، به‌گونه‌ای که همه اعضا با حالت یکسان  $|\alpha\rangle$  مشخص می‌شوند. به عکس در یک آنسامبل آمیخته، کسری از اعضا با جمعیت نسبی  $w_1$  با  $|\alpha^{(1)}\rangle$  مشخص می‌شوند و کسر دیگری با جمعیت نسبی  $w_2$  با  $|\alpha^{(2)}\rangle$  و غیره؛ که نیازی به متعادل بودن  $|\alpha^{(1)}\rangle$  و  $|\alpha^{(2)}\rangle$  نیست. عملگر چگالی  $\rho$  در حالت آمیخته به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\rho \equiv \sum_i w_i |\alpha^{(i)}\rangle \langle \alpha^{(i)}| \quad (55.1)$$

که عناصر ماتریس چگالی آن به صورت:

$$\langle b'' | \rho | b' \rangle = \sum_i w_i \langle b'' | \alpha^{(i)} \rangle \langle \alpha^{(i)} | b' \rangle \quad (56.1)$$

یک آنسامبل خالص برای یک  $|\alpha^{(i)}\rangle$  معین، به این صورت مشخص می‌شود. مثلاً برای  $i = n$  مقدار  $w_i = 1$  و برای تمام کت‌های ممکن حالت دیگر،  $w_i = 0$  است. بنابراین متناظر با رابطه زیر است:

$$\rho = |\alpha^{(n)}\rangle \langle \alpha^{(n)}| \quad (57.1)$$

بدون جمع روی  $n$ ، به‌وضوح عملگر چگالی برای آنسامبل خالص، خود عملگر چگالی برابر مجذور آن عملگر چگالی است یعنی:

$$\rho^2 = \rho \quad (58.1)$$

و یا به صورت معادل با  $\rho(\rho - 1) = 0$  نشان داده می‌شود که ویژه مقادیر عملگر چگالی برای یک آنسامبل خالص صفر و یک هستند. بنابراین تنها برای آنسامبل خالص خواهیم داشت:

$$\text{tr}(\rho^2) = 1 \quad (59.1)$$

در مورد یک آنسامبل آمیخته  $\text{tr}(\rho^2)$  عددی مثبت و کوچکتر از یک است [۶، ۱].

## ۲.۷.۱ ماتریس چگالی کاهش یافته

برای حالت خالص دو قسمتی، می‌توان از آنتروپی فون نیومان استفاده کرد و درهم‌تنیدگی بین دو قسمت آن را به‌دست آورد. برای رسیدن به این هدف، باید از چگالی ماتریس کاهش یافته<sup>۳۴</sup> را به شکل زیر به‌دست آورد:

<sup>۳۳</sup>ensemble

<sup>۳۴</sup>reduced density operator

$$\rho_A = \text{tr}_B(\rho_{AB}) \quad (60.1)$$

$$\rho_B = \text{tr}_A(\rho_{AB}) \quad (61.1)$$

که  $\rho_A$  ماتریس کاهش یافته سیستم  $A$  و  $\rho_B$  ماتریس کاهش یافته سیستم  $B$  است. در این صورت درهم تنیدگی بین  $A$  و  $B$  به صورت زیر تعریف می شود:

$$E_E(\rho) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad (62.1)$$

برای یک حالت جدایی پذیر  $E_E = 0$  و برای حالت کاملاً درهم تنیده،  $E_E = 1$  می باشند. این مقیاس برای حالت های خالص یک مقیاس بسیار کارآمد و آسان است اما برای حالت های مخلوط با مشکل مواجه می شود [۶، ۱].

## ۸.۱ سنجش درهم تنیدگی با معیار منفیت

در واقع می توان با آنتروپی فون نیومان، میزان درهم تنیدگی بین دو بخش یک حالت خالص را به دست آورد ولی به محض این که با حالت آمیخته <sup>۳۵</sup> سر و کار داشته باشیم، استفاده از آنتروپی فون نیومان نا کارآمد خواهد شد. در این حالت معیار منفیت می تواند گزینه مناسبی برای محاسبه میزان درهم تنیدگی بین دو قسمت از حالت کوانتومی آمیخته باشد. که بر پایه معیار جدا پذیری پرس <sup>۳۶</sup> بنا نهاده شده است. این مقیاس قابل محاسبه درهم تنیدگی توسط ویدال <sup>۳۷</sup> و ورنر <sup>۳۸</sup> ارائه گردید [۱۵]. در این معیار درهم تنیدگی به صورت قدر مطلق جمع تمام مقادیر ویژه منفی ماتریس چگالی  $\|\rho^{TA}\|_1$  تعریف می شود که  $\|\rho^{TA}\|_1$  ماتریس چگالی جزئی ترانهاده شده <sup>۳۹</sup> روی فضای  $A$  است.  $\|\rho^{TA}\|_1$  را می توان به شکل زیر تعریف کرد [۱۵]:

$$\langle i_A, j_B | \rho^{TA} | k_A, l_B \rangle \equiv \langle k_A, j_B | \rho | i_A, l_B \rangle \quad (63.1)$$

که می توان آن را، به صورت رابطه زیر نمایش داد [۱۶]:

$$\rho_{m\mu, n\nu}^{TA} = \rho_{m\nu, n\mu} \quad (64.1)$$

برای محاسبه قدر مطلق جمع تمام ویژه مقادیر منفی می توان از تعریف رد بهنجار ماتریس <sup>۴۰</sup> استفاده کرد که:

$$\|A\|_1 = \text{Tr} \sqrt{A^\dagger A} \quad (65.1)$$

<sup>۳۵</sup>Mixed State

<sup>۳۶</sup>Perss

<sup>۳۷</sup>G. Vidal

<sup>۳۸</sup>R. F. Werner

<sup>۳۹</sup>partial transpose

<sup>۴۰</sup>Trace norm

از آن جایی که:

$$\|\rho^{TA}\|_1 = 1 + 2 \left| \sum_i \mu_i \right| \equiv 1 + 2 |N(\rho)| \quad (۶۶.۱)$$

که  $\mu_i$  مقادیر ویژه منفی اندازه‌گیری شده از  $\rho^{TA}$  است. بنابراین [۱۵]:

$$N(\rho) = \frac{\|\rho^{TB}\|_1 - 1}{2} \quad (۶۷.۱)$$

کمیت  $N(\rho)$  عددی است بین ۰ و ۱ و میزان درهم‌تنیدگی را مشخص می‌کند. اگر ترانهاده جزئی  $\rho^{TA}$  که از اعمال عملگر ترانهاده تنها روی یکی از زیر سیستم‌ها به دست می‌آید، در نظر گرفته شود، به‌طوری‌که هیچ ویژه مقدار منفی نداشته باشد، حالت دو جزئی  $\rho$  جداپذیر است و هیچ درهم‌تنیدگی وجود ندارد. هرودوکی<sup>۴۱</sup> نشان داد که این شرط نه تنها شرط لازم، بلکه شرط کافی است [۱۶].

## ۹.۱ چشمه‌های تولید جفت EPR

برای تولید جفت‌های درهم‌تنیده، الکترون، فوتون و... نیاز به چشمه‌های تولید آن زوج‌ها را داریم. بعد از مقاله مشهور اینشتین و پودولسکی و روزن (EPR)، در مورد زوج‌های درهم‌تنیده، این زوج‌ها به جفت‌های EPR شهرت یافتند. تولید چنین زوج‌های درهم‌تنیده‌ای، یکی از ضروری‌ترین قسمت‌ها جهت استفاده در دوربری کوانتومی<sup>۴۲</sup> و ابرفشرده سازی<sup>۴۳</sup> و رمزنگاری کوانتومی<sup>۴۴</sup> و... می‌باشند. فوتون به علت حداقل برهم‌کنش با محیط نسبت به ذرات دیگر با جرم سکون ( $m_0 = 0$ )، بهترین گزینه جهت تولید و کاربرد آن در فرایندهای اطلاعات کوانتومی است.

البته منابع و چشمه‌های متعددی از سیستم‌های کوانتومی درهم‌تنیده وجود دارد. یکی از این فرایندهای نوری غیرخطی برای تولید زوج فوتون از یک تک فوتون است که به عنوان SPDC یا به عبارتی تبدیل کاهشی خودبه‌خودی، شناخته می‌شود. این فرآیند یکی از مهمترین فرایندها در اپتیک کوانتومی به حساب می‌آید که اساس کار آن پراکندگی ناکشسان در حوزه اپتیک است. خلق خودبه‌خودی فوتون‌ها در برهم‌کنش‌های غیرخطی برای اولین بار توسط تئوری کلایشکو<sup>۴۵</sup> و به‌طور تجربی توسط برنهام و واینبرگ<sup>۴۶</sup> مورد بررسی قرار گرفت [۱۷].

### ۱.۹.۱ تبدیل کاهشی پارامتری خودبه‌خودی

فرایند تبدیل کاهشی پارامتری خودبه‌خودی، مکانیسمی است که طی آن جفت‌های درهم‌تنیده فوتون را با درجه خلوص درهم‌تنیدگی بالا، ایجاد می‌کنند. در این فرآیند پرتوهای یک پمپ نور

<sup>۴۱</sup>Horodecki

<sup>۴۲</sup>Quantum Teleportation

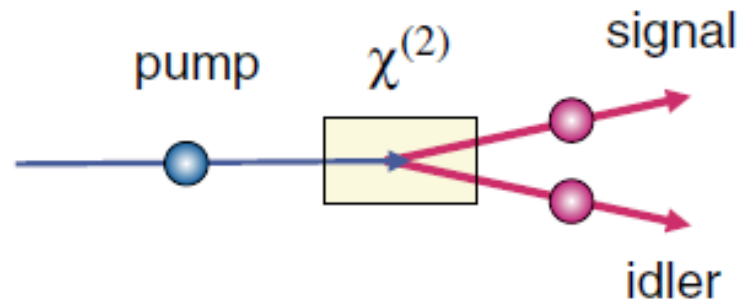
<sup>۴۳</sup>Quantum dense coding

<sup>۴۴</sup>Cryptography

<sup>۴۵</sup>Klyshko

<sup>۴۶</sup>Burnham and Weinberg

بعد از عبور از یک کریستال غیرخطی به دو پرتو نور تبدیل می‌شود که این فرایند را می‌توان در شکل ۶.۱ مشاهده نمود.



شکل ۶.۱: تبدیل یک فوتون به دو فوتون در کریستال  $\chi^2$  [۱۸]

که در آن با تقسیم یک فوتون به دو فوتون به نام سیگنال<sup>۴۷</sup> و دیگری آیدلر<sup>۴۸</sup>، بایستی قانون بقای انرژی و قانون بقای اندازه حرکت برقرار بماند. به عبارتی در یک موج پیوسته به‌طور تقریبی مجموع فرکانس فوتون سیگنال و آیدلر باید با فرکانس پمپ یکی باشد [۱۸]. همچنین شرایط پایستگی انرژی در هر نقطه بلور غیرخطی، برای هر فاز موج نوری تولید شده حفظ شود [۱۹] به عبارتی روابط زیر برقرار بماند:

$$\begin{aligned}\omega_o &= \omega_1 + \omega_2 \\ \vec{k}_o &= \vec{k}_1 + \vec{k}_2\end{aligned}\quad (۶۸.۱)$$

که در رابطه (۶۸.۱)  $\vec{k}_i$  و  $\omega_i$  به ترتیب فرکانس زاویه‌ای نور و بردار موج هستند. در شرایط عملی فوتون‌های سیگنال و آیدلر باید به‌طور همزمان منتشر شوند. در تبدیل کاهشی پارامتری، در محدوده مشاهده شده از طیف، دو طرح برای همبستگی در قطبش فوتون‌ها [۱۷] با فازهای یکسان وجود دارد:

- (نوع - I): حالتی است که در آن دو فوتون که توسط تبدیل کاهشی پارامتری تولید شده‌اند، قطبش موازی دارند.

- (نوع - II): حالتی است که در آن فاز فوتون‌ها در پایه قابل مشاهده، قطبش متعامد دارد.

در پدیده SPDS جفت فوتون‌ها به علت تحریک لیزری خلاء به صورت تصادفی ساخته می‌شوند. بیشتر فرایندهای غیرخطی تنها به‌وسیله موادی غیرمقارن از نوع کریستال‌های خاص ایجاد می‌شوند که راندمان این تبدیل بسیار پایین است. در نوع خاصی از آن یعنی پتاسیم دی‌دوتریوم فسفات<sup>۴۹</sup>،

<sup>۴۷</sup>signal

<sup>۴۸</sup>idler

<sup>۴۹</sup>Potassium di-deuterium phosphate ( $KD^*H$ )

بتا باریم بورات <sup>۵۰</sup> روی مرتبه یک جفت در  $10^{10}$  فوتون در هر ثانیه با احتمال  $10^{-10}$  فوتون‌های درهم تنیده تولید می‌شوند. بسته به مواد مورد استفاده مثلاً یک ماده با خاصیت بلوری غیر خطی بالا و پمپاژ آن می‌توان این مقدار از فوتون‌های درهم‌تنیده را افزایش داد. قطبش حالت درهم‌تنیده به‌طور مستقیم خارج از یک کریستال غیرخطی BBO صورت می‌گیرد. البته گاهی اوقات برخی از فوتون‌ها تحت تبدیل کاهشی خودبه‌خود با همبستگی قطبش نوع II از میان کریستال خارج می‌شود. در حالی که بسیاری از آن فوتون‌ها به‌طور مستقیم به راه خود ادامه می‌دهند [۱۷، ۲۰، ۲۱].

### ۲.۹.۱ طرز کار چشمه‌های درهم‌تنیده قطبشی

اخیراً، نوع جدیدی از منبع تبدیل کاهشی مشخص شده، که متکی بر تطابق فاز ناشی از نوع قطبش II می‌باشند، که در آن هر فوتون فرابنفش منفرد با توان  $100\text{ mW (UV)}$ ، اگر از درون بلورهای خاصی عبور کند، ممکن است دو فوتون شکافته شود. علاوه بر آن دو فوتون تبدیل یافته‌ی کاهشی، در حالت درهم‌تنیده‌ای هستند که برای دامنه وسیعی از آزمایش‌های جدید، منجمله دوربری کوانتومی کاملاً مناسب‌اند. وقتی نور لیزر پر شدتی از درون بلورهای غیرخطی نظیر  $KD^*H$  و لیتیم یدات عبور کند، قسمت اعظم نور فرودی از بلور عبور می‌کند؛ اما کسر اندکی از آن به رنگین‌مانی از رنگ‌ها تبدیل می‌شود [۳، ۱۷].

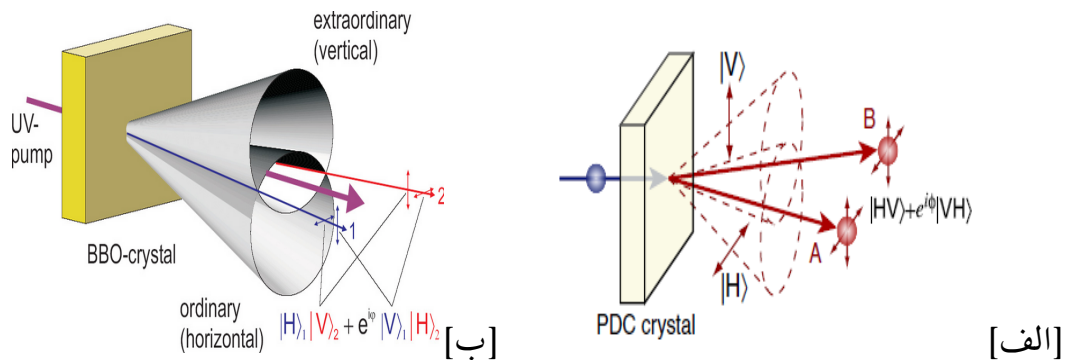
نکته کلیدی این است که هر تک فوتون در کریستال غیرخطی به دو فوتون به‌طور همزمان با قطبش مختلف تبدیل می‌شوند. از آنجایی که تکانه ثابت می‌ماند جهت خروج فوتون‌های تولیدی به‌گونه‌ای است که پایستگی تکانه حفظ شود که بسته به زاویه کریستال و لیزر ورودی دارد. بنابراین هر تک فوتون می‌تواند روی یال‌های یک مخروط با زاویه مشخص باشند. اگر زاویه فرودی لیزر و کریستال به‌صورت دقیق تنظیم شود، مخروط خروجی پرتو سیگنال (برای مثال قطبش  $H$ ) با مخروط خروجی پرتو آیدلر (برای مثال قطبش  $V$ )، نقطه مشترک خواهد داشت. بنابراین پرتوهای خروجی از نقاط مشترک مشخص نیست که قطبش  $H$  یا  $V$  دارند بلکه تنها چیزی که می‌دانیم این است که اگر فوتونی از یک نقطه مشترک قطبش  $H$  داشته باشد، فوتون خروجی از نقطه مشترک مقابل قطبش  $V$  دارد و بالعکس. که با توجه به قطبش دو فوتون، چنانچه پایه‌ها را به صورت  $|H\rangle$  و  $|V\rangle$  در نظر بگیریم که بتوان هریک از پایه‌ها را به صورت ماتریس‌های زیر در نظر گرفت:

$$|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |0\rangle, \quad |V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle \quad (۶۹.۱)$$

با توجه به نوع قطبش متعامد دو فوتون از نوع فاز II، درهم‌تنیدگی قطبشی آن‌ها برای فوتون‌های همزمان که در دو راستا منتشر می‌شوند؛ وجود خواهد داشت. به زبان مکانیک کوانتومی این حالت را می‌توان به‌صورت زیر نوشت که یک حالت درهم‌تنیده است:

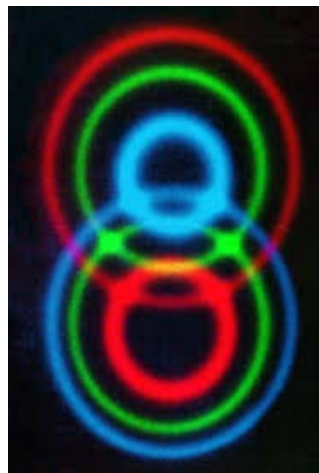
$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_1|H\rangle_2 + e^{i\varphi}|H\rangle_1|V\rangle_2) \quad (۷۰.۱)$$

$\varphi$  فاز بین دو قسمت است و  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ضریب بهنجارش می‌باشد.



شکل ۷.۱: (الف) در این شکل مخروط‌هایی که در امتداد دو سطح مخروطی شکل آن‌ها فوتون‌های سیگنال و آیدلر منتشر می‌شوند و به‌طور متداول در دو جهت تلاقی می‌کنند که در دو نقطه تلاقی دو سطح مخروطی نسبت به دو راستای  $A$  و  $B$  با توجه به معادله (۷.۱) نور قطبشی درهم‌تنیده به‌وجود می‌آورند. (ب) نمایش نور تبدیل کاهشی شده شامل یک فیلتر بسیار نازک دو حلقه از پرتوهای نوری مخروط‌ها هستند که نور غیرقطبیده در محدوده تقاطع دو مخروط قرار دارند.

باتوجه به شکل ۷.۱ مخروط‌هایی که در امتداد دو سطح مخروطی در دو راستای ۱ و ۲ تلاقی می‌کنند [۱۷، ۲۰، ۲۱]، یک سطح برای فوتون سیگنال با قطبش افقی و دیگری با قطبش عمودی برای فوتون آیدلر ایجاد می‌کنند که در نهایت باعث تولید درهم‌تنیدگی قطبشی دو فوتون می‌گردند که در شکل ۸.۱ نقاط تلاقی مشاهده می‌شود.



شکل ۸.۱: نور تبدیل کاهشی شده از میان یک فیلتر باند نازک دیده می‌شود. دو حلقه حالت‌های پرتوهای نور مخروط‌ها هستند که نور غیرقطبیده در محدوده تقاطع دو مخروط قرار دارد [۲۲].

با ابزارهای اپتیکی می‌توان فاز را به‌گونه‌ای تنظیم کرد که بقیه حالت‌ها را ایجاد کند که چنان‌چه برای تغییر فاز  $\varphi$  یک صفحه نیم‌موج اضافی<sup>۵۱</sup> را در مسیر یکی از پرتوها استفاده کنیم،

<sup>۵۱</sup> half-wave-plate

می‌توانیم دو حالت بل دیگر را به صورت زیر تولید نماییم [۱۷].

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|V\rangle_1|V\rangle_2 \pm |H\rangle_1|H\rangle_2) \quad (۷۱.۱)$$

البته هر گاه دو بلور با پمپ پرتوهای قطبیده زاویه  $45^\circ$  بسازد؛ فوتون‌های سیگنال و آیدلر با هم به طرف دو بلور (۱) و (۲) منتشر می‌شوند که قطبش به کار رفته در این جا از نوع  $I$  می‌باشد و دو مخروطی که فوتون‌های ساطع کننده را تشکیل می‌دهند؛ هم محور و تقریباً یکسان هستند که بلورهای (۱) و (۲) از جنس بتا باریم بورات  $^{۵۲}$  و یا پتاسیم دی دوتریم فسفات  $^{۵۳}$  هستند که بسته به شرایط مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای انجام این کار از اثر تداخل دو فوتونی در شکافنده باریکه‌ای استاندارد  $50/50$  استفاده می‌کنیم. البته لازم به ذکر است که هر فوتون فرودی احتمال اندک اما معینی برایش وجود دارد تا محو شود و به جای آن دو فوتون دیگر همزمان ایجاد شوند. همچنین در این فرآیند انرژی و تکانه  $P = \hbar k$  طبق رابطه (۶۸.۱) باید پایسته باشند [۱۷، ۲۰، ۲۱].

$^{۵۲}BaB_2O_4$

$^{۵۳}KH_2PO_4(KD^*HPO_4)$



## فصل ۲

# دوربری کوانتومی در دو بعد

### ۱.۲ مقدمه

دوربری کوانتومی، یکی از مهمترین پدیده‌های کوانتومی است که به صورت عملی در شبکه‌های کوانتومی مورد استفاده قرار می‌گیرد که منجر به استفاده عملی از مفاهیمی مانند درهم‌تنیدگی در انتقال حالت کوانتومی بین دو یا چند واحد اطلاعاتی شده است. دوربری کوانتومی در حقیقت، فن‌آوری منحصربه‌فردی محسوب می‌شود که قادر به ارسال اطلاعات بین فرستنده و گیرنده است به صورتی که اطلاعات اصلاً از مسیر بین فرستنده و گیرنده عبور نکند. این فرآیند با انتقال حالات درهم‌تنیده قادر به ارسال اطلاعات کوانتومی به صورت کامل و بدون خدشه در صورت انجام دوربری کامل با همسانی بالا است که با هیچ فرآیند کلاسیکی قابل دسترسی نیست. امکان ایجاد درهم‌تنیدگی کوانتومی بین دو شخص که یکدیگر را ملاقات نکرده‌اند و ارسال کامل اطلاعات کوانتومی در کنار عدم امکان دسترسی به اطلاعات در فرآیند انتقال توسط اشخاصی غیر از فرستنده و گیرنده، از جمله مزیت‌هایی است که دوربری کوانتومی نسبت به انتقال اطلاعات به صورت کلاسیک دارد [۲۳]. بعد از مفهوم درهم‌تنیدگی که در فصل قبل بیان شد، اکنون می‌خواهیم در این فصل به مبحث دوربری کوانتومی و درهم‌تنیدگی حالت‌های دوکیوبیته پرداخته و مقدمات، اصول و کاربردهای دوربری سیستم‌های درهم‌تنیده را بررسی کنیم و سپس در انتهای فصل به اثبات روابط ریاضی حاکم بر دوربری کوانتومی یک تک کیوبیت توسط کانال درهم‌تنیده دوکیوبیته پرداخته و تفاوت آن را با ابرفشرده‌سازی مطرح سازیم. تا پیش از کشف مکانیک کوانتومی، دوربری از دیدگاه فیزیک غیرمنطقی و خرافی انگاشته می‌شد اما با پیشرفت تکنولوژی آزمایش‌های عملی برای اثبات پیش‌بینی‌های مکانیک کوانتومی عملی گردید و با تولید اولین زوج فوتون درهم‌تنیده، اولین آزمایش دوربری به حقیقت پیوست. این اکتشافات باعث آغاز پژوهش‌ها در این زمینه شد. به عنوان یک پیش زمینه تاریخی باید گفت؛ برای اولین بار کلمه دوربری در کتاب آقای فُورت<sup>۱</sup> در سال ۱۹۳۱ مورد استفاده قرار گرفت که به این مفهوم که انتقال یک جسم از

<sup>۱</sup> H.Fort

جایی به جای دیگر بدون آن که جسم فاصله بین آن دو نقطه را طی کند، اشاره شده بود [۲۴]. عبارت دوربری مدتی طول کشید که جایگاه خاصی بیابد و در نهایت در سال ۱۹۹۳ در یک مقاله پروتکل دوربری کوانتومی، توسط آقای بنت<sup>۲</sup> بیان گردید که این مقاله پایه و اساس کارهایی گردید که بعداً در زمینه دوربری کوانتومی انجام شدند. در پروتکل ۱۹۹۳ یک حالت کوانتومی ناشناخته بدون آن که هیچ گونه انتقال فیزیکی صورت بگیرد، در یک مکان دورتر دوباره بازسازی گردید. این کار که قبلاً نیاز به یک کانال کلاسیکی داشت، اتفاق بسیار نادری بود و علاوه بر آن این کار نیاز به یک منبع درهم تنیده کوانتومی داشت که بسیار جالب بود و در آن مشخص شد که دوربری کوانتومی می تواند به عنوان پروتکلی در اطلاعات کوانتومی استفاده شود که بسیار عالی می توانست اطلاعات را انتقال دهد.

در انتقال اطلاعات به صورت فیزیکی و با مفاهیم سنتی الزاماً به یک کانال کلاسیکی نیاز است اما در دوربری کوانتومی نیازی به هیچ کانال کلاسیکی مرسوم برای انتقال اطلاعات وجود ندارد. (در فصل های بعد نشان خواهیم داد که هر چند وجود کانال کلاسیکی برای تکمیل فرآیند دوربری الزامی است اما از این کانال هیچ اطلاعاتی راجع به اطلاعات ارسالی عبور نمی کند.)، بنت به عنوان یکی از پیشگامان استفاده از مفهوم دوربری کوانتومی نشان داد که این موضوع می تواند در پیشرفت و گسترش مفاهیم پایه مربوط به اطلاعات کوانتومی نقش حیاتی بازی می کند [۲۵]. به عنوان یکی از کارهای اولیه انجام شده در زمینه دوربری یک حالت دو کیوبیته در مرجع دیگری از بنت در سال ۱۹۹۵، یک سیستم دو حالت در یک کانال درهم تنیده به قسمی در نظر گرفته شد که کانال در نظر گرفته شده در این مقاله، کانال کوانتومی خالص نبوده و در آن نوفه<sup>۳</sup> نیز بررسی شده بود [۲۶]. پس از این مقاله، در کار بعدی [۲۷]، امکان سنجی کاربرد دوربری کوانتومی در محاسبات کوانتومی مورد مطالعه قرار گرفت. با این کار افق بسیار باز، کاربرد دوربری در مباحث آینده و در کامپیوترهای کوانتومی باز شد و به یک علم کاربردی روز تبدیل گردید. این مقاله جدید با ارائه پیشنهاداتی عملی راجع به گیت ها و عملگرهای کوانتومی نشان داد که این اجزا می تواند مانند عملگرها و گیت های دیجیتال منطقی محاسبات کوانتومی را صورت دهد.

در سال ۲۰۰۰، حالت های همدوس و ناهمدوس درهم تنیده و کاربرد آن ها به تفکیک در دوربری، مورد بررسی قرار گرفت [۲۸]. بررسی اتلاف در کانال کوانتومی و شرایط از بین رفتن ساختار دوربری نیز از جمله مواردی بود که در این مقاله به آن توجه شده بود و معیارهایی برای سنجش کیفیت دوربری در یک کانال نویزی ایجاد گردید.

در سال ۲۰۰۵، نشان داده شد که می توان از هماندهی بهینه<sup>۴</sup> در دوربری کوانتومی با  $N$  کاربر به عنوان شرط لازم و کافی برای درهم تنیدگی  $N$  قسمتی حالات گاوسی<sup>۵</sup> استفاده کرد [۲۹]. پس از سال ۲۰۰۵، به تدریج پروتکل های دوربری به حالات  $n$  کیوبیته تعمیم داده شد. در ابتدا به دلیل پیچیدگی حالات درهم تنیده  $n$ ، از ورود به جزئیات اولیه و پایه خودداری می شد و پروتکل ها

<sup>۲</sup>Bennett<sup>۳</sup>noisy<sup>۴</sup>Optimal Fidelity<sup>۵</sup>Gaussian resources

مانند مقاله [۳۰]، حالت درهم‌تنیدگی را به صورت یک وضعیت غیر بیشینه درهم‌تنیدگی و با برخی پارامترهای دلخواه مورد بررسی قرار می‌دادند. تغییرات هماندهی<sup>۶</sup>، کیفیت دوربری و احتمال موفقیت در دوربری در چنین شرایط دلخواهی مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گرفت. سیر مطالعات در زمینه دوربری کوانتومی، به دلیل امکان‌سنجی کاربرد آن در اطلاعات کوانتومی بسیار به سرعت پیش می‌رود و می‌توان از این حوزه به عنوان یکی از پرچالش‌ترین و به روزترین حوزه‌های فیزیک کاربردی اشاره نمود. در ادامه این فصل صرفاً به سیستم‌های دو کیوبیت به عنوان ساده‌ترین سیستم‌های دوربری و مفاهیم و اصول بنیادی دوربری پرداخته و بحث درباره سیستم‌های با کیوبیت بالاتر و پیچیده‌تر را به فصل‌های آینده موکول می‌کنیم.

## ۲.۲ مفهوم دوربری کوانتومی

دوربری کوانتومی جابه‌جایی یک کیوبیت (واحد اطلاعات کوانتومی)، از یک محل به محل دیگر بدون پیمایش فاصله‌ی بین آن دو محل است. این فرآیند در انتقال اطلاعات کوانتومی قابل استفاده است. ظاهراً از آنجایی که در همان لحظه که آلیس در پایه معین خود اندازه‌گیری می‌کند؛ حالت باب آن‌ا دچار رمبش می‌گردد، به نظر می‌رسد ارسال اطلاعات آنی صورت می‌گیرد اما نشان داده شده است که برای تکمیل فرآیند دوربری نیاز به استفاده از یک کانال کلاسیکی برای ارسال اطلاعات کلاسیک است که سرعتی بیشتر از سرعت نور نخواهند داشت اما علی‌الظاهر انتقال اطلاعات فراتر از سرعت نور مقدور نخواهد بود. از جمله ویژگی‌های مهم در انجام دوربری کوانتومی این است که، به ما اجازه می‌دهد که بدون اطلاع از حالت سیستم ناشناخته آن را برای گیرنده‌ی باب ارسال کنیم. البته در نهایت باید در دوربری کوانتومی به این امر توجه داشت که اساساً دوربری با مفهوم تبدیل ماده به داده و نور و انتقال از مبدأ به مقصد آن‌ها و تبدیل مجدد نور به ماده‌ی اولیه کاملاً متفاوت است و از آن در کپی جسم از نقطه‌ای به نقطه دیگر نمی‌توان استفاده کرد [۳۱].

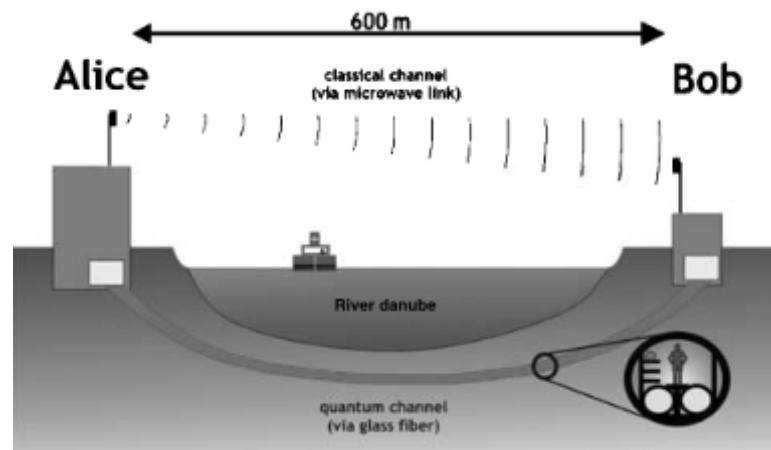
## ۳.۲ رکورد پیمایش فاصله در دوربری کوانتومی

به عنوان یک پیش زمینه تاریخی از مسافت دوربری شده بررسی رکورد و سیر تاریخی آن بسیار جالب به نظر می‌رسد که در این آزمایش قطبش یک فوتون به فوتون دیگر دوربری شد. مسافت این دوربری قطبش در حد ابعاد آزمایشگاه بود که در سال ۱۹۹۷ برای اولین بار دوربری به صورت عملی آزمایش شد [۳۲]. این دو فوتون درهم‌تنیده به روش تبدیل کاهشی پارامتری تولید شده بودند. در این آزمایش تمایز بین دو فوتون از اهمیت خاصی برخوردار بود که با روش‌های اپتیکی این مسئله حل شده بود. مسافت دوربری به تدریج و در خلال سال‌ها افزایش یافت تا در یک عدد نسبتاً قابل توجه در آگوست سال ۲۰۰۴ میلادی در کار انجام شده توسط اورسین<sup>۷</sup> این

<sup>۶</sup>Fidelity

<sup>۷</sup>Ursin

عدد به  $600\text{ m}$  رسید که در نهایت به صورت یک مقاله منتشر شد [۳۳]. در این آزمایش حالت کوانتومی یک فوتون دوربری شد که از امواج ماکروویو به عنوان کانال کلاسیکی و از فیبر نوری به عنوان کانال کوانتومی کمک گرفته شد. در شکل ۱.۲ نمایشی از این آزمایش مشاهده می شود که به رهبری آقای زایلینگر<sup>۸</sup> این آزمایش صورت پذیرفت. اوج پیشرفت در آزمایشات دوربری



شکل ۱.۲: در سال ۲۰۰۴ میلادی گروهی به رهبری زایلینگر حالت کوانتومی را از یک طرف رودخانه دانوبی به طرف دیگر آن با استفاده از یک کانال کوانتومی دوربری کردند [۳۳].

کوانتومی، از زمانی آغاز شد که رقابت های دوستانه دو تیم چینی به رهبری جین وی پَن<sup>۹</sup> در «هی فی»<sup>۱۰</sup> و تیم اروپایی به رهبری آنتوان زایلینگر آغاز شد. زایلینگر که از اساتید به نام در زمینه مکانیک کوانتومی است، استاد و مشاور دوره دکترای پَن محسوب می شد که وی سرپرستی مجموعه آزمایشگاهی زایلینگر را در اواسط سال ۱۹۹۰ در دانشگاه اینسبروک در اتریش<sup>۱۱</sup> برعهده گرفت. پَن پس از بازگشت، پتانسیل مالی لازم برای جذب حمایت مالی از سوی آکادمی علوم چین<sup>۱۲</sup> و بنیاد ملی علوم طبیعی چین<sup>۱۳</sup> را جذب کرد و عملاً تحقیقات رقابتی این دو تیم به مدت ۷ سال آغاز گشت. نمودار زیر سیر تحولاتی این رقابت را طی ۷ سال متمادی بین این دو تیم نشان می دهد [۳۴].

با توجه به نمودار ۲.۲ تحولات و رشد آزمایشات کوانتومی اولین آزمایش تیم چینی در «هی فی» در سال ۲۰۰۵ صورت گرفته است که این تیم نشان دادند که با توزیع جفت فوتون درهم تنیده در فضای آزاد در فاصله  $13\text{ km}$  هنوز درهم تنیدگی ایجاد شده بین دو فوتون، می تواند حفظ شود. پس به این نتیجه رسیدند که می توانند فوتون های درهم تنیده را از طریق فضای مغشوش جو با فاصله فراتر از ضخامت مؤثر از اتمسفر منتقل نمایند. در این آزمایش، بُرد به دست آمده، گام مهمی در

<sup>۸</sup>Anton Zeilinger

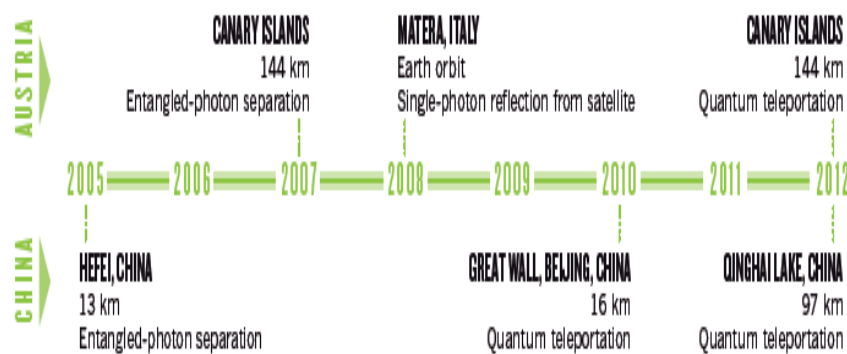
<sup>۹</sup>Jian-Wei Pan

<sup>۱۰</sup>Hefi

<sup>۱۱</sup>University of Innsbruck in Austria

<sup>۱۲</sup>the Chinese Academy of Sciences

<sup>۱۳</sup>the National Natural Science Foundation of China



شکل ۲.۲: سیر رقابت‌های دوستانه دو تیم آسیایی و اروپایی [۳۴].

جهت ارتباطات کوانتومی جهانی مبتنی بر ماهواره به شمار می‌رفت [۳۵]. گسترش ارتباطات کوانتومی در فاصله‌های فضایی، به رویکرد آزمایش‌های اساسی در فیزیک کوانتوم منجر شد. همچنین برنامه‌های کاربردی از اطلاعات کوانتومی، در مقیاس سیاره‌ای و بین سیاره‌ای را فراهم ساخت. اولین پیاده‌سازی تجربی از این طرح توسط زایلینگر برای تبادل فوتون درهم‌تنیده بین یک ماهواره و یک ایستگاه زمینی آژانس فضایی ایتالیا<sup>۱۴</sup> در سال ۲۰۰۸ صورت گرفت. در این آزمایش از یک منبع تک فوتون بر روی یک ماهواره استفاده شده بود که با بهره‌برداری از تلسکوپ لیزری در رصدخانه ماترا<sup>۱۵</sup> برای تشخیص فوتون‌های درهم‌تنیده انجام شده بود که طی این آزمایش، تیم زایلینگر قادر به تشخیص بازده از ماهواره *Ajisei*، که ماهواره نقشه‌برداری از زمین بود و مدار چرخش آن دارای ارتفاع حوضیض از زمین به فاصله  $1485\text{ km}$  بود، گردید. نتایج حاصل از این آزمایش منجر به تحقق بخشیدن به ایده شبکه‌های کوانتومی توزیع شده از اتم‌های منفرد و انتقال فوتون به عنوان حامل‌های کوانتومی گردید [۳۷]. سرانجام این رکورد دوربری کوانتومی، پس از آزمایش‌هایی پیرامون حفظ درهم‌تنیدگی در مسافت‌های ذکر شده، توسط جین وی پِن دانشجوی سابق آنتوان زایلینگر در چین در سال ۲۰۱۰ به ثبت رسید که این رکورد به  $16\text{ km}$  رسید و به عنوان یک رکورد خیلی جدید با همکاری محققان چند دانشگاه چین از جمله دانشگاه علم و صنعت چین، توانستند، در یک فاصله  $10\text{ mil}$  معادل  $16\text{ km}$  از یک سایت تحت عنوان پیش‌تازان فضا<sup>۱۶</sup> که پایگاهی در نزدیکی دیوار چین در شمال تپه پکن در «هی فی» بود، یک بیت اطلاعات را به دیوار بزرگ چین دوربری کنند. نسبت به دوربری‌های انجام شده این رکورد بسیار بهتر بوده و برای کاربرد در ماهواره‌ها و درون جو نیز مناسب محسوب می‌گردد. در این آزمایش یک جفت فوتون با هم درهم‌تنیده شدند و سپس اطلاعات انرژی بالاتر که همان اطلاعات انرژی فوتون انرژی بالاتر محسوب می‌شد، دوربری شد. محققان دانشگاه علوم تکنولوژی چین *USTC*<sup>۱۷</sup> و دانشگاه تی‌شینگوا<sup>۱۸</sup> در پکن توانستند علاوه بر دستیابی به

<sup>۱۴</sup>Italian Space Agency

<sup>۱۵</sup>telescope at the Matera Laser Ranging

<sup>۱۶</sup>Star Trek

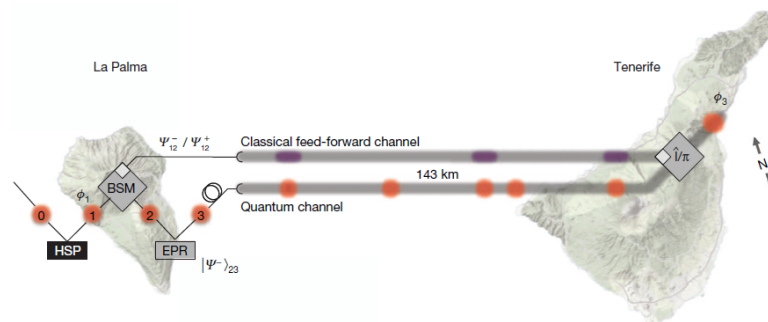
<sup>۱۷</sup>University of Science and Technology of China

<sup>۱۸</sup>Tsinghua University in Beijing

برد و مسافت بالاتر، این آزمایش را به جای استفاده از یک فیبرنوری، در یک فضای آزاد انجام دهند. ضمناً در این دوربری خواص فوتونی حالت دوربری شده ثابت باقی مانده بود. هماندهی این دوربری، در حدود ۸۰٪ بوده است که با توجه به این که ضخامت مؤثر جو بین ۵km تا ۱۰km می باشد، می توان این گونه استنباط کرد که اولین باری است که این رکورد در دوربری کوانتومی به عنوان یک وسیله ارتباطی بین ماهواره و ایستگاه زمین مطرح می شود [۳۸]. در واقع این فاصله یک رکورد دوربری کوانتومی محسوب می شد که این تیم از طریق آن گام بزرگی برای هدف نهایی دوربری یک فوتون با استفاده از ماهواره برداشت و همچنین راهبرد اولیه ای نیز به سوی فراهم آوردن اینترنت کوانتومی ایجاد کردند که مهار قدرت فیزیک زیر اتمی را برای ارتباط جهانی فوق العاده امن یک شبکه کوانتومی در پی داشت [۳۴]. پس از آن بیشترین رکورد گزارش شده دوباره توسط تیم پن در «هی فی»، توسط دیوار بزرگ چین در پکن انجام شد که بین دو نقطه دیوار بزرگ چین و در نهایت کینگ های ۱۹ تیم چین موفق به دوربری با بالاترین مسافت از میان آزمایش های انجام شده، گردید که فاصله ی دو شهر ۱۰۱/۸km بود و مسافت مفید در این دوربری ۹۷km گزارش شد. این آزمایش در سال ۲۰۱۲ صورت گرفت [۳۴، ۳۹]. این تیم نتایج خود را در ماه مه با ارسال یک مقاله در مطبوعات فیزیک ۲۰ منتشر نمود که انتشار آن توافاً با نگرانی تیم اتریشی بود. نمودار ۲.۲ آزمایش دیگری را در جزایر قناری ۲۱ نشان می دهد که طی آن، تیم زایلینگر نشان دادند که توزیع جفت فوتون های درهم تنیده در فضای ۱۴۴km (۸۹mil) باعث حفظ درهم تنیدگی بین آنها می شود. طراحی این آزمایش، چالش عمده در محاسبات کوانتومی برای انتقال صحیح اطلاعات در یک مقیاس وسیع را از یک مکان به مکان دیگر را رفع نمود [۳۶]. در نهایت آخرین رکورد گزارش شده ی مدون از مسافت بالا در دوربری کوانتومی، ۱۴۳km بوده است که بالاترین عدد انجام شده ی دوربری به صورت عملی تا امروز محسوب می شود که توسط تیم اتریشی با استفاده از یک شبکه صورت گرفت. لازم به ذکر است که مقاله ای در زمینه این رکورد جدید دوربری، ۸ روز بعد از انتشار رکورد ۹۷km از اعلام تیم چینی، به ثبت رسید. این موضوع از این نظر مورد اهمیت بالاست که هم از نظر سرعت و هم از نظر امنیت فوق العاده در پیشرفت و کاربرد آنها مؤثر بوده است. در این آزمایش، با استفاده از یک شبکه آنالین یا برخط زمان حقیقی تغذیه رو به جلو و با استفاده از دو لینک که در فضای آزاد اپتیکی که پوشش دهنده ی حالت کوانتومی و کلاسیکی بودند، توانستند اطلاعات را بین دو جزیره از مجمع الجزایر قناری که جزیره ی لاپالما ۲۲ و تریف ۲۳ نام داشتند، در فاصله ی ۱۴۳km منتقل کنند. برای رسیدن به این مسافت، در این آزمایش تکنیک های غیر همبسته در حوزه ی فرکانس با هدف درهم تنیده کردن منبع جفت فوتون مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر آن آشکارسازهای تک فوتون با نوفه بسیار کم و همزمانی دقیق درهم تنیدگی مورد استفاده قرار گرفت. میانگین هماندهی که با این کار به آن دست یافتند کمی از عدد ۲ که محدودیت کلاسیکی موجود در این فضا است، کمتر است که

<sup>۱۹</sup>Qinghai<sup>۲۰</sup>Physics Preprint Server<sup>۲۱</sup>CANARY ISLANDS<sup>۲۲</sup>la Palma<sup>۲۳</sup>Tenerife

برای شروع عدد مناسبی محسوب می‌گشت. علاوه بر این با انجام این آزمایش، بلوغ و رسیدن به کمال دوربری و قابلیت استفاده از این تکنولوژی را در سناریوهای واقعی در جهان مخصوصاً در کاربردهای مبتنی بر ماهواره‌ها را تأیید کرد. شکل ۳.۲ کانال کوانتومی و مسافت بین دو جزیره نمایش می‌دهد. در این آزمایش از یک مولد پالس با طول موج  $404\text{nm}$  و بسامد  $80\text{MHz}$ ،



شکل ۳.۲: نمایی از آزمایش دوربری کوانتومی و نمایش فاصله بین دو جزیره‌ی لاپالما و تنریف که در آن فاصله‌ی پیمایش [۴۰] دوربری نشان داده شده است.

آینه‌ها و تجزیه‌کننده‌های طیف مختلف و در نهایت یک کانال کلاسیکی رو به جلو کلاسیکی استفاده شده است [۴۰]. بعد از اعلام رسمی انتقال اطلاعات در دوربری کوانتومی در مسافت  $143\text{km}$  آن هم در جو پرتلاطم جزایر قناری، هر دو تیم به این توافق رسیدند که می‌توان هرگونه نگرانی علمی در مورد دوربری کوانتومی را، با استفاده از ماهواره خنثی کرد. بنابراین هر دو تیم به‌طور هماهنگ با هیئت مدیرگی زایلینگر به این نتیجه دست یافتند که برای حصول به این امر نیاز به یک ماهواره برای میزبانی آزمایش را دارند که امکان مأموریت‌های کوانتومی در پی آن با آژانس فضایی اروپا ESA<sup>۲۴</sup> فراهم آید.

در این طرح پیشنهادی تعدادی فوتون واقعاً از نظر فیزیکی بین دو نقطه جابه‌جا می‌شوند اما این کار فقط با انجام درهم‌تنیدگی منابع و شلیک هر جفت به چین و اتریش صورت می‌گیرد و سپس خواص فوتون‌ها به‌منظور همبستگی بین جفت‌های درهم‌تنیده اندازه‌گیری می‌شود. نیکولاس برونو<sup>۲۵</sup> از افراد تیم می‌گوید: «در پی انجام این آزمایش اگر درهم‌تنیدگی باقی نماند، این تیم یک نظریه جایگزینی را برای مکانیک کوانتومی ارائه خواهد داد.» این تیم در این طرح مطالعاتی به‌طور یکپارچه با تیم چینی، طرح مطالعاتی خود را در ژوئن سال ۲۰۱۶ با شلیک ماهواره به حیطه آزمایش می‌گذارند. با انجام این آزمایش تیم در جستجوی یافتن سؤالات متعددی از جمله پرسش‌های زیر می‌باشد:

۱. چگونه و از چه طریقی، با آن‌که تا هنوز برخی از اطلاعات کانال درهم‌تنیده ناشناخته‌اند، جفت‌های درهم‌تنیده ارتباط با یکدیگر برقرار می‌سازند؟

۲. چه عاملی منجر به رمبش تابع موج کوانتومی، هنگام اندازه‌گیری تابع موج جفت‌های

<sup>۲۴</sup>European Space Agency

<sup>۲۵</sup>Nicolas Brunner

درهم تنیده می‌گردد؟

۳. گرانش در حین این آزمایش به چه نوعی به کار می‌آید؟

۴. آیا می‌توان از طریق این آزمایش، به برخی از پیش‌بینی‌ها در مورد ساختار فضا - زمان و تئوری وحدت گرانش - مکانیک کوانتومی دست یافت با آن‌که اصل عدم قطعیت کوانتومی نشان می‌دهد که بررسی فضا در مقیاس‌های خیلی کوچک غیر ممکن است؟ و آیا می‌توان با وحدت جاذبه کوانتومی با نسبیت به نتیجه قابل قبولی در این آزمایش دست یافت؟

از جمله اهداف مشترک دیگری که در این آزمایش، تیم دنبال می‌کند، تولید و به اشتراک گذاری یک کلید کوانتومی است که دوربری آن بین پکن و چین صورت می‌گیرد. همچنین تیم تمایل به این امر دارد که به کاربردهایی نظیر مخابرات و دوربری کوانتومی با امنیت نفوذناپذیر، رایانه‌های کوانتومی فوق سریع و شبکه‌های فوق‌العاده امن دست یابد. البته چالش‌های ناشی از انجام این آزمایش، از زمانی که ذرات درهم‌تنیده باید به‌طور همزمان تولید شوند، آغاز و با انتقال و ارتباط تلفنی مربوطه‌شان به پایان می‌رسد، وجود دارد. چنین سفری مملو از نوفه، در نتیجه اثر متقابل پراکندگی فوتون در فضا و جو زمین و همه شیوه‌های اختلالات دیگر است که هریک می‌تواند، ارتباطات حساس مورد نیاز برای دوربری کوانتومی را نابود سازد. البته، در حال حاضر، به‌عنوان مثال برای رفع این مشکل، فوتون‌های درهم‌تنیده را از طریق فیبرهای نوری حمل می‌کنند، اما باید توجه داشت که فیبرهای نوری، به‌علت جذب نور تنها می‌توانند فوتون‌ها را بیش از چند صد کیلومتر در یک انتقال، حفظ کنند.

از طرفی نیز، تیم نمی‌تواند تقویت‌کننده‌های استاندارد، کمک بگیرند زیرا روند تکثیرکننده‌ها به‌گونه‌ای است که باعث از بین رفتن اطلاعات کوانتومی خواهد شد. بنابراین برای دوربری چنین مسافت طولانی نیاز به یک ماهواره دارند اما این سؤال باقی است که در طول سفر چگونه می‌توان اثرات آشفته جو را برای انجام فرآیند دوربری کامل، تعدیل بخشید؟

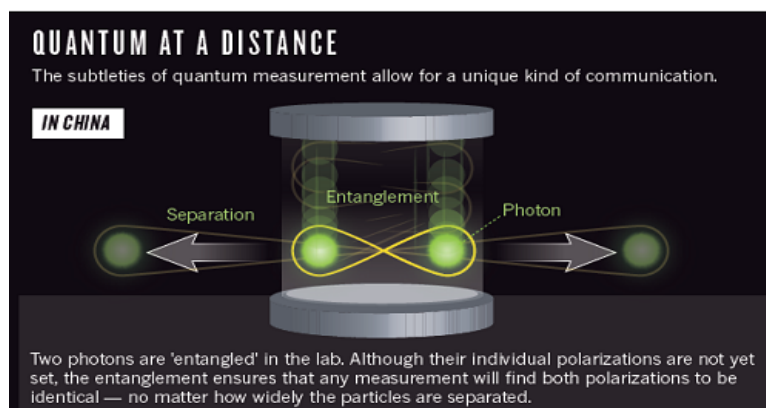
تیم پن برای پاسخ به چنین سؤالی از سال ۲۰۰۵، شروع به انجام آزمایش‌هایی کردند تا بتوانند نشان دهند، که آیا می‌توان با عبور فوتون‌ها از فضای آزاد درهم‌تنیدگی را حفظ نمود یا خیر؟ از طرفی نیاز به ساخت آشکارسازهایی جهت آشکارسازی فوتون‌ها وجود داشت که علاوه بر اندازه کوچک جهت قرار گرفتن در ماهواره، به اندازه کافی حساس به فوتون‌های دوربری شده نیز باشد. مهم‌تر از همه این‌که برای اطمینان از حصول انجام این آزمایش به‌طور کامل، نیاز به تکرار چندین مرتبه از آزمایش دوربری است که طی آزمایشات مکرر، درصد احتمالاتی توزیع آماری آن را محاسبه و با معیار انجام گرفتن آن مطابقت دهند تا این‌گونه به انجام دوربری کامل اطمینان یابند به عنوان مثال اگر این درصد کمتر از ۷۰٪ باشد، دوربری کامل انجام نشده است. اعتماد بر حسن انجام کامل چنین آزمایش‌هایی، تنها به لطف ویژگی منحصر به فرد درهم‌تنیدگی بین ذرات چندگانه و باقی ماندن آن تا ارسال کامل میسر است که در نتیجه این مشخصه خاص، اندازه‌گیری روی یکی با اندازه‌گیری روی دیگران به‌طور ذاتی ارتباط دارد. بنابراین حفظ و باقی ماندن درهم‌تنیدگی از ارکان پراهمیت این آزمایش برای انجام پروتکل دوربری کوانتومی به‌طور کامل است که در صورت مرتفع

ساختن چنین چالش‌هایی، پیشنهاد تیم برای ایجاد اولین شبکه کوانتومی فوق امن و اتصال قاره آسیا به اروپا از طریق ماهواره شکل حقیقی به خود می‌گیرد [۳۴].

### ۱.۳.۲ طرح‌واره دوربری کوانتومی در مسافت دور در سال ۲۰۱۶

انجام فرآیند پروتکل دوربری کوانتومی که در مرجع [۳۴] مطرح شده است، طرح پیشنهادی است که در سال ۲۰۱۶ به اجرا در می‌آید. در این طرح‌واره، دو فوتون درهم‌تنیده که در اثر ارتباط کوانتومی با هم مرتبط می‌گردند، در آزمایشگاهی در چین تولید می‌شوند. قبل از اندازه‌گیری روی هر یک از مشخصه‌های فوتون‌ها، قطبش آن‌ها نامشخص است و می‌توانند با درهم‌نهی از حالات قطبش مواجه باشند اما از طرفی در اثر درهم‌تنیدگی با یکدیگر در ارتباط هستند. درهم‌تنیدگی بین آن‌ها به ما این اطمینان را می‌دهد که با سنجش و اندازه‌گیری کوانتومی می‌توان قطبش آن‌ها را به صورت مشخص یافت ولو آن‌که، فوتون‌ها در مسافت‌های دور از یکدیگر قرار داشته باشند. شکل ۴.۲ نمایی از فوتون‌های درهم‌تنیده را نشان می‌دهد.

در مرحله دوم، از جفت فوتون‌های درهم‌تنیده در چین، یکی به وین ارسال می‌شود و دیگری در



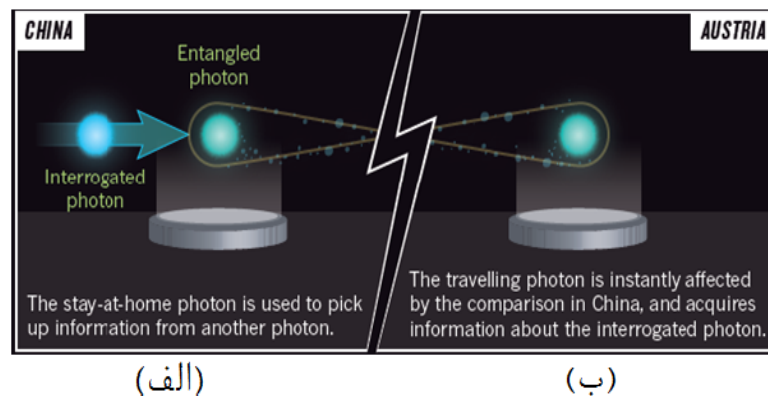
شکل ۴.۲: دو فوتون در آزمایشگاهی در چین درهم‌تنیده می‌گردند. درهم‌تنیدگی منجر به تضمین قطبش مشخصی در هنگام اندازه‌گیری روی فوتون‌ها به منظور دست یافتن به مشخصات آن‌ها می‌شود [۳۴].

چین باقی می‌ماند. عمل انتقال فوتون با کمک ماهواره صورت می‌گیرد. در شکل ۵.۲ ارسال یکی از جفت فوتون‌های درهم‌تنیده از پکن به وین را مشاهده می‌کنید. در چین در ابتدا، روی جفت ذرات شامل فوتون درهم‌تنیده و فوتون ناشناخته در پایه بل درهم‌تنیده، اندازه‌گیری انجام می‌گیرد. این اندازه‌گیری منجر به رخداد یکی از نتایج اندازه‌گیری بل به طور تصادفی خواهد شد و همچنین منجر می‌شود با توجه به ارتباطی که در مکانیک کوانتومی بین زوج فوتون‌های درهم‌تنیده وجود دارد، تغییراتی را روی حالت فوتون ارسال شده به اتریش به وجود آورد. در شکل ۶.۲ قسمت (الف)، فوتون قرار گرفته در مبداء که در این جا پکن محسوب می‌شود را مشاهده می‌کنیم که با استفاده از یک فوتون نامشخص مورد اصابت قرار می‌گیرد و اطلاعات آن از طریق سنجش استخراج می‌گردد و در قسمت (ب) همان شکل، فوتون قرار گرفته در وین را می‌بینیم که با معلوم شدن



شکل ۵.۲: یک فوتون درهم‌تنیده از پکن به وین تابانده شده است [۳۴].

نتیجه اندازه‌گیری روی فوتون‌های واقع در چین و ارسال آن به وین می‌توان، راجع به مشخصه‌یابی محتوای نامشخص ذره تابانده شده به آن، اظهار نظر کنیم. در مرحله بعد از این طرح پیشنهادی



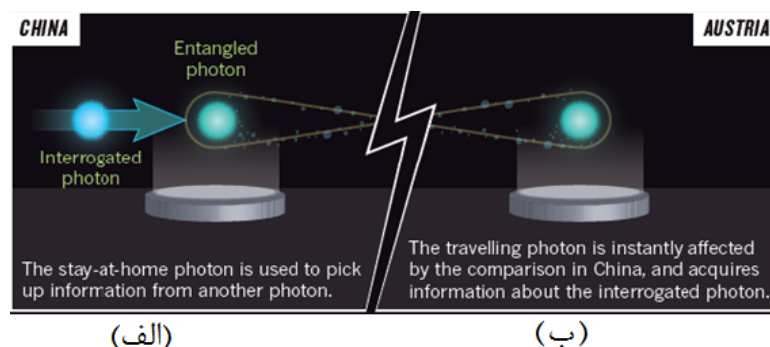
(الف)

(ب)

شکل ۶.۲: با توجه به ارتباطی که بین دو فوتون واقع در شکل (الف) و (ب) در حالت درهم‌تنیده وجود دارد، تغییرات فوتون درهم‌تنیده در پکن، باعث تغییر در حالت ذره واقع در وین می‌گردد و با استخراج اطلاعات از آن می‌توان راجع به محتوای اطلاعات ذره نامشخص آگاهی یافت. پس از سنجش فوتون‌های درهم‌تنیده و ناشناخته در چین، ارتباط کوانتومی بین دو فوتون چین و اتریش از بین می‌رود [۳۴].

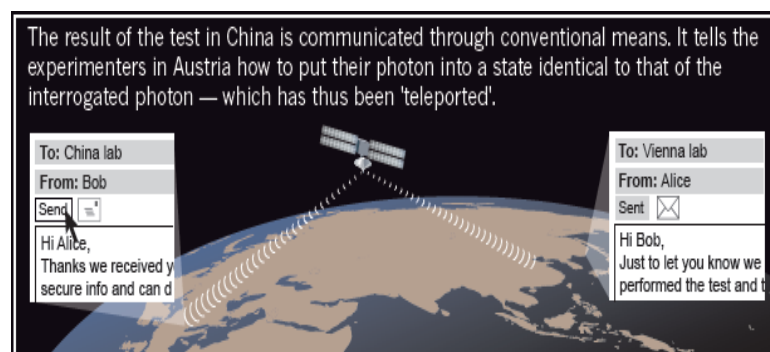
در مرجع [۳۴]، در چین با توجه به شکل ۷.۲ نشان داده شده است که در نتیجه اندازه‌گیری دو فوتون مورد آزمایش در چین، سیستم از حالت درهم‌تنیده خارج خواهد شد و دیگر حاوی اطلاعات مربوط به فوتون ناشناخته تابانده شده نخواهد بود و لینک ارتباطی شکسته می‌شود. بنابراین فوتون موجود در چین را که در این جا «باب» و فوتون موجود در اتریش را که «آلیس» نامیده شده‌اند که در شکل ۷.۲ نمایش داده شده است، هیچ ارتباطی با هم ندارند.

در نهایت باب توسط یک ارتباط تلفنی و کلاسیکی، نتیجه اندازه‌گیری خود را به سوی آلیس که در اتریش به عنوان «گیرنده پیام» است، ارسال می‌کند. آلیس نیز عملگر یکانی مناسب روی ذره خود اعمال می‌کند تا بتواند حالت اصلی ذره ناشناخته را به دست آورد. بنابراین طبق شکل ۸.۲ پس از انتقال پیام کلاسیکی به وین، کاربر واقع در آن جا با اندازه‌گیری حالت فوتون درهم‌تنیده‌ی خود و چرخش مناسب در قطبش آن که معادل به کار بردن عملگر مناسب یکانی است، خواهد



شکل ۷.۲: باید توجه کرد که پس از اندازه‌گیری در شکل (الف)، مجموعه موجود در چین به حالت کلاسیکی درمی‌آید در نتیجه ارتباط بین این فوتون و فوتون واقع در اتریش در شکل (ب) شکسته خواهد شد [۳۴].

توانست راجع به اطلاعات ذره ناشناخته و به‌دست آوردن حالت اصلی آن، اظهار نظر کند. این پروسه را با نام «دوربری کوانتومی» می‌شناسیم.



شکل ۸.۲: نتیجه اندازه‌گیری در چین توسط یک کانال متعارف و مرسوم کلاسیکی به وین منتقل می‌شود [۳۴].

## ۴.۲ دوربری یک حالت ناشناخته با استفاده از یک کانال درهم‌تنیده تک تایی اسپینی

با توجه به این‌که بنت و همکارانش به عنوان یکی از پیشگامان در ارائه مقدمات دوربری کوانتومی در مقاله خود در سال ۱۹۹۳ که به عنوان مهمترین پایه‌ی تحقیقاتی فناوری دوربری کوانتومی تاکنون محسوب گشته است، فرا راهی به سوی انتقال اطلاعات کوانتومی باز نمود. در این مبحث جا دارد که به‌طور خلاصه قسمتی از این مقاله را در این بخش مطرح سازیم. بنت در آغاز مقاله خود اشاره می‌سازد که اینشتین همبستگی از راه دور را تحت عنوان تله‌پاتی<sup>۲۶</sup> به‌کار برده است و

<sup>۲۶</sup>telepathically

این امر را قابل درک می‌داند که انتقال اطلاعات به صورت آبی غیرممکن است اما با توجه به وجود چنین واقعیتی این ذهنیت را با طراحی یک سؤال القا می‌سازد که وجود همبستگی در فواصل دور، بین جفت‌های درهم‌تنیده  $EPR$  از ذرات، این سؤال را برمی‌انگیزد که از آن‌ها چگونه می‌توان برای انتقال اطلاعات بهره بگیریم؟

بنت در مقاله خود، یک حالت کوانتومی ناشناخته  $|\varphi\rangle$  را در نظر گرفته و سپس این حالت ناشناخته را توسط فرستنده «آلیس» و گیرنده «باب» که قبلاً یک جفت همبسته  $EPR$  را به اشتراک گذاشته‌اند، ارسال می‌کند و نتیجه کلاسیکی این اندازه‌گیری را به باب منتقل می‌کند. باب نیز با دانستن این نتیجه اندازه‌گیری، می‌تواند با تبدیل حالت ذره  $EPR$  خودش، آن را به یک نسخه دقیق حالت ناشناخته عین خودش  $|\varphi\rangle$  در آورد که قبلاً در دست آلیس نابود شده است.

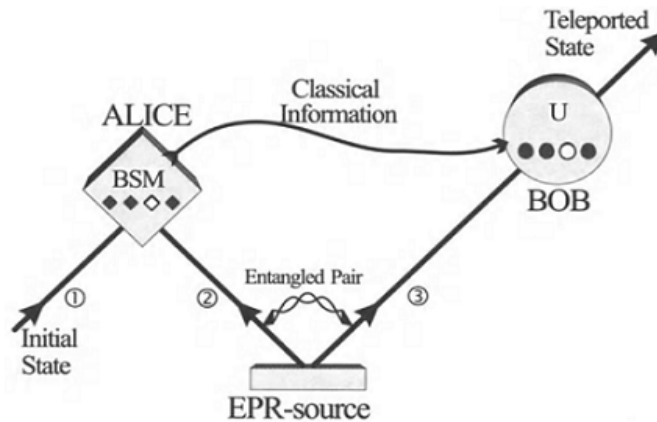
فرض کنید یک مشاهده‌گر «ناظر»، که ما آن را آلیس می‌نامیم و یک سیستم کوانتومی مانند فوتون یا اسپین ذراتی با  $\frac{1}{2}$  به او داده شده است و او می‌خواهد با برقراری ارتباط، از طریق یک سیستم کوانتومی با یک کپی دقیق از حالت ناشناخته در دست خود، آن را برای ناظر دیگر باب ارسال نماید. آلیس باید اطلاعات کافی را برای این ارسال از بردار حالت  $|\varphi\rangle$  که در دست خودش است، داشته باشد، اما هیچ راهی برای این آموختن وجود ندارد و تنها اگر آلیس بداند که  $|\varphi\rangle$  به مجموعه متعامد داده شده متعلق است، می‌تواند اندازه‌گیری انجام دهد که در نتیجه آن اندازه‌گیری به او اجازه می‌دهد که یک کپی دقیق از  $|\varphi\rangle$  را بسازد. در مقابل، اگر امکان وجود حالت‌های غیرمتعامد دو و یا بیشتر برای حالت ناشناخته وجود داشته باشد تا هنوز هیچ نوع اندازه‌گیری اطلاعات کوانتومی مبنی بر شناخت  $|\varphi\rangle$  و آماده سازی یک کپی دقیق به‌طور کامل از آن‌ها در اختیار نداشته‌ایم. یک روش بدیهی برای آلیس آماده ساختن و ارسال حالت  $|\varphi\rangle$  به باب، ارسال ذره خودش با همه اطلاعات است. اما اگر او بخواهد از ارسال ذره اصلی خود امتناع ورزد، می‌تواند آن‌را با تأثیر متقابل یکانی و کمکی در حالت ناشناخته ابتدایی بعد از اندرکنش ذرات اصلی در طرف چپ در حالت استاندارد که شامل اطلاعات کافی در مورد  $|\varphi\rangle$  می‌باشد، تحت عنوان  $|a\rangle$  بسازد. اگر آلیس این حالت کمکی را به باب بفرستد شاید از لحاظ فنی آسان‌تر از این باشد که ذره اصلی خود را به باب ارسال کند. باب می‌تواند معکوس اقدامات را برای آماده‌سازی یک کپی عینی از حالت اصلی  $|\varphi\rangle$  به کار بندد. این اندازه‌گیری ضروری تحت عنوان اندازه‌گیری تبادلی و تعویضی اسپین<sup>۲۷</sup> یک خصوصیت ضروری از اطلاعات کوانتومی را نشان می‌دهد. چنانچه دو اسپین ذره درهم‌تنیده  $EPR$  که در حالت تک تاییه اسپینی قرار دارد را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$|\phi^{(-)}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3) \quad (۱.۲)$$

زیرنویس ۲ و ۳ به ترتیب برچسب ذرات آلیس و باب در جفت‌های  $EPR$  هستند. ذره اصلی آلیس، در جستجوی دوربری حالت ناشناخته خود  $|\varphi\rangle$  به باب است که با استفاده از زیر نویس ۱ علامت زده شده است (مطابق شکل ۴.۲). این سه ذره می‌تواند حالت مختلفی داشته باشند. یعنی درجه

<sup>۲۷</sup>spin-exchange measurement

آزادی قطبش یک یا تعداد بیشتری از حالات فوتون‌ها را داشته باشند که جبر مشابهی همچون اسپین را دارند. اگر چه امکان ارتباط غیرکلاسیکی بین جفت  $EPR$  آلیس و باب در این مرحله،



شکل ۹.۲: آلیس و باب در ابتدا یک جفت درهم‌تنیده  $EPR$ ، ۲ و ۳ را به اشتراک گذاشته‌اند. آلیس ذره ۱ را نیز در اختیار دارد که حالت اصلی و ناشناخته را تشکیل می‌دهد که می‌خواهد آنرا برای باب بفرستد. آلیس یک اندازه‌گیری در پایه بل (BSM) <sup>۲۹</sup> انجام می‌دهد و نتیجه اندازه‌گیری خود را از طریق کانال کلاسیکی به باب ارسال می‌کند. باب نیز می‌تواند با اعمال عملگر یکانی  $U$  حالت اصلی و اولیه خود را بازسازی کند [۱۷].

شامل هیچ اطلاعاتی از ذره ناشناخته  $|\varphi\rangle$  نمی‌باشد. در نهایت حاصل بازترکیب ذره ناشناخته آلیس ۱ و جفت  $EPR$  سیستم دست نخورده‌ای که محصول حالت خاصی به شکل  $|\phi^{(-)}\rangle_{23}$  یا  $|\varphi\rangle_1$  را تولید می‌کند. بنابراین هر گونه اندازه‌گیری روی هر جفت  $EPR$  یا هر دو با هم، هنوز نمی‌تواند هیچ اطلاعی در مورد  $|\varphi\rangle$  را بدهد. با جفت شدن اولین ذره با جفت  $EPR$ ، آلیس یک اندازه‌گیری از نوع فون‌نیومان روی سیستم مشترک خود که مرکب از ذره ۱ و ۲ (ذره  $EPR$  اش) انجام می‌دهد. این اندازه‌گیری در پایه عملگر بل شامل  $|\phi^{(-)}\rangle_{23}$  و

$$|\phi^{(+)}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2) \quad (2.2)$$

$$|\psi^{(\pm)}\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 \pm |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2)$$

است. توجه کنید که این چهار حالت پایه‌های متعامد کامل بل برای ذرات ۱ و ۲ هستند که حالت ذره ناشناخته را به صورت مناسب زیر در نظر می‌گیریم:

$$|\varphi\rangle_1 = a|\uparrow\rangle_1 + b|\downarrow\rangle_1 \quad (3.2)$$

که با شرط بهنجارش  $|a|^2 + |b|^2 = 1$  در نظر گرفته شده است. بنابراین حالت ترکیبی کامل از سه ذره قبل از اندازه‌گیری به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{123} &= \frac{a}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 - |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3) \\ &+ \frac{b}{\sqrt{2}}(|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3 - |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3) \end{aligned} \quad (4.2)$$

در این معادله، محصول مستقیم  $|1\rangle|2\rangle$  می‌تواند در عباراتی از بردارهای پایه‌های عملگر  $|\phi^{(\pm)}\rangle_{12}$  و  $|\psi^{(\pm)}\rangle_{12}$  باشد که ما به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$|\psi\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\phi^{(-)}\rangle_{12} (-a|\uparrow\rangle_3 - b|\downarrow\rangle_3) + |\phi^{(+)}\rangle_{12} (-a|\uparrow\rangle_3 + b|\downarrow\rangle_3) \right) \quad (5.2)$$

$$+ |\psi^{(-)}\rangle_{12} (a|\downarrow\rangle_3 + b|\uparrow\rangle_3) + |\psi^{(+)}\rangle_{12} (a|\downarrow\rangle_3 - b|\uparrow\rangle_3) \quad (6.2)$$

که در زیر، صرف نظر از حالت ناشناخته  $|\varphi\rangle_1$ ، نتایج چهار اندازه‌گیری به همان اندازه یکسان است که هر اتفاقی با احتمال  $\frac{1}{4}$  روی دهد. به علاوه پس از اندازه‌گیری، ذره ۳ به یکی از چهار حالت خالص که در معادله (۷.۲) پیش‌بینی شده است؛ در می‌آید که با توجه به نتایج اندازه‌گیری، به ترتیب زیر تصویر می‌شوند:

$$\begin{aligned} -|\varphi_3\rangle &= -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\varphi_3\rangle \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\varphi_3\rangle &, & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\varphi_3\rangle \end{aligned} \quad (7.2)$$

هر یک از حالت‌های نتیجه شده برای ذره  $EPR$  باب، در شکل ساده خود به حالت اصلی  $|\phi\rangle$  وابسته است. در مورد حالت اول نتیجه اندازه‌گیری حالت تک تایه اسپینی است که حالت باب خیلی به حالت اصلی اولیه شبیه است به جز برای عامل فاز که با علامت منفی ظاهر شده است. بنابراین باب در این حالت نیاز به انجام هیچ کار اضافی‌تر برای تولید نسخه اصلی اسپین آلایس را ندارد. در سه مورد دیگر باب باید یکی از عملگرهای یکانی را در معادله (۷.۲) به کار بندد که به ترتیب متناظر با چرخش  $180^\circ$  حول محور  $Z$ ،  $X$  و  $Y$ ، به منظور تبدیل ذره  $EPR$  خود به حالت عین اصلی آلایس  $|\phi\rangle$  اثر دهد که اگر  $|\phi\rangle$  یک حالت قطبش فوتون را نمایش دهد، یک ترکیب مناسب از نیم‌صفحات موج کار عملگرهای یکانی را انجام می‌دهند. مشاهده می‌شود که در سمت چپ یکی از چهار حالت بل  $|\phi^{(\pm)}\rangle_{12}$  و  $|\psi^{(\pm)}\rangle_{12}$  بدون هیچ‌گونه اثری از حالت اصلی  $|\varphi\rangle$  ایجاد می‌شود.

لازم به ذکر است که دوربری حالت ناشناخته  $|\varphi\rangle$  از آلایس به باب اثر جانبی از تولید دو بیت کلاسیکی تصادفی دارد که به  $|\varphi\rangle$  مربوط نمی‌شود و در پایان این فرآیند دوربری در سمت چپ هستند.

همه آن‌چه در بالا گفته شد را می‌توان به سیستم‌هایی که حالت‌های متعامد آن‌ها  $N > 2$  دارند را نیز تعمیم داد و آلایس به جای استفاده از یک حالت تک تایه اسپینی درهم‌تنیده  $EPR$  به طور کامل از حالت درهم‌تنیده  $N$  تایی استفاده کند که  $N$  بیت حالت درهم‌تنیده  $N$  تایی را به صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\sum_j \frac{|j\rangle \otimes |j\rangle}{\sqrt{N}}, \quad j = \{0, 1, 2, \dots, N-1\} \quad (8.2)$$

که  $z$  برچسب‌های عناصر یک پایه متعامد برای هر سیستم  $N$  حالت هستند. مانند قبل، آلیس یک اندازه‌گیری انجام می‌دهد که تأثیر مطلوب آن یکی از ویژه حالت‌هایی است که با استفاده از رابطه‌ی زیر تعریف شده است.

$$|\psi\rangle_{nm} = \sum_j e^{\frac{\gamma_{ijn}}{N}} \frac{|j\rangle \otimes |(j+m) \bmod N\rangle}{\sqrt{N}} \quad (9.2)$$

پس از آن‌که باب از نتیجه‌ی اندازه‌گیری آلیس یعنی پایه اندازه‌گیری  $|\psi\rangle_{nm}$  اطلاع می‌یابد؛ او روی ذره‌ی درهم‌تنیده‌ی قبلیش (ذره ۳) تبدیل یکانی مناسب را انجام می‌دهد که بنت در حالت کلی برای سیستم  $N$  حالت آنرا به شکل زیر نمایش داد:

$$U_{nm} = \sum_j e^{\frac{\gamma_{ijn}}{N}} |k\rangle \langle (k+m) \bmod N| \quad (10.2)$$

این تبدیل موجب می‌شود، ذره‌ی باب به حالت اصلی از ذره (۱) آلیس برسد و دوربری کوانتومی کامل شود [۲۵].

## ۵.۲ نقش پیام‌های کلاسیکی در کامل شدن دوربری کوانتومی

فرض کنید که باب کم‌حوصله و بی‌طاقت است و در جهت تکمیل فرآیند دوربری کوانتومی قبل از رسیدن پیام کلاسیکی از سوی آلیس تلاش می‌کند تا پایه‌های اندازه‌گیری آلیس را حدس بزند. بنابراین انتظار می‌رود که با حدس خود،  $|\varphi\rangle$  مربوط به آلیس را بازسازی نماید. بنابراین باید به‌طور تصادفی یکی از چهار حالت آمیخته شده در معادله‌ی (۷.۲) را حدس بزند و این در حالی صورت می‌گیرد که باب، هیچ‌گونه اطلاعی در مورد حالت ورودی  $|\varphi\rangle$  ندارد و غیرممکن است که بتواند به شکل دیگری این حالت ورودی ظاهر شود زیرا در این صورت هیچ همبستگی بین حالت ورودی و حالت خروجی حدس زده شده وجود نخواهد داشت. بنابراین ارسال پیام کلاسیکی در تکمیل فرآیند دوربری کوانتومی نقش اساسی دارد. البته هنوز هم ممکن است این پرسش در ذهن به‌وجود آید که آیا در دوربری یک حالت کوانتومی نیاز به دو بیت کلاسیکی کامل است؟ حال برای پاسخ به این سوال فرض می‌کنیم ظرفیت کانال کلاسیکی کمتر از ۲ بیت کلاسیکی باشد و از آن‌جا که احتمال صحیح برای انتقال پیام کلاسیکی  $\frac{1}{4}$  است. بنابراین با توجه به  $c < 2$  چون انتظار برای رسیدن به احتمال صحیح برابر  $2^{-c}$  است؛ در نتیجه احتمال بزرگتر از  $\frac{1}{4}$  خواهد بود. که بنت با توجه به این استدلال، برای دوربری قابل اعتماد یک ذره  $N$  حالت، ظرفیت کانال کلاسیکی را  $2 \log_2(N)$  بیت در مقاله خود بیان می‌کند [۲۵].

## ۶.۲ درهم‌تنیدگی در سیستم‌های دوکیوبیته

پس از آن‌که چارلز بنت و همکارانش در سال ۱۹۹۳ میلادی از مؤسسه IBM در نیویورک، یک پروتکل پایه‌ای دوربری کوانتومی را که در بخش ۴.۲ بیان شد، ایجاد کردند. برای محاسبه و

کمک به تحلیل بیشتر در ابعاد بالاتر و به دست آوردن میزان آنتروپی و سنجش درهم‌تنیدگی آن، شکل استاندارد به این پروتکل داده شد و به جای استفاده از نمادهای  $|\uparrow\rangle$  و  $|\downarrow\rangle$  که حالت قطبشی و اسپینی ذرات درهم‌تنیده و حالت ذره ناشناخته ارسالی را نشان می‌دادند؛ استفاده از نمادهای  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  پایه‌گذاری شد. در این الگو اگر یک حالت ناشناخته‌ی کوانتومی را به شکل  $|\psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1$  در نظر بگیریم که در آن  $|0\rangle$  و  $|1\rangle$  دو حالت متعامد با دامنه‌های  $\alpha$  و  $\beta$  است که در شرط بهنجارش  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  صدق می‌کند. آلیس می‌خواهد این حالت ناشناخته را به باب بفراستد اما به علت محدودیتی که در قضیه عدم کپی‌سازی وجود دارد و شرایط سختی که در ارسال مستقیم ذره خود دارد، مطابق با تصویر بدیهی که از مکانیک کوانتومی دارد و در حالی که با استفاده از دوربری باب، نیاز به هیچ‌گونه اطلاعات اضافی از سوی آلیس ندارد، آلیس اقدام به دوربری این ذره‌ی ناشناخته می‌نماید. اما سؤال در این است که آلیس چگونه می‌تواند این حالت کوانتومی ناشناخته را به سوی باب ارسال کند؟ پاسخ این است که آلیس می‌تواند با استفاده از یک جفت یدکی از ذرات درهم‌تنیده، این دوربری کوانتومی را به انجام رساند. در این کانال درهم‌تنیده دو کیوبیته که یک حالت به اشتراک گذاری بین ذرات درهم‌تنیده ۲ و ۳ آلیس و باب است و ذره‌ی ۲ متعلق به آلیس و ذره برچسب زده‌ی ۳ به باب متعلق است. کانال‌های درهم‌تنیده از ذرات آلیس و باب را می‌توان به چهار شکل زیر به‌گونه‌ای که میزان درهم‌تنیدگی آن‌ها ماکزیم مقدار خود را طبق نحوه محاسبات درهم‌تنیدگی در فصل پیش ۷.۱ یعنی  $S(\rho) = 1$  را داشته باشند، نوشت.

$$\begin{aligned} |\psi^+\rangle_{23} &= \left( \frac{|00\rangle_{23} + |11\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \\ |\varphi^+\rangle_{23} &= \left( \frac{|01\rangle_{23} + |10\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \\ |\psi^-\rangle_{23} &= \left( \frac{|00\rangle_{23} - |11\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \\ |\varphi^-\rangle_{23} &= \left( \frac{|01\rangle_{23} - |10\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned} \quad (11.2)$$

با فرض این‌که سیستم در حالت درهم‌تنیده اسپینی یعنی به شکل زیر درهم‌تنیده باشد:

$$|\varphi^-\rangle_{23} = \left( \frac{|01\rangle_{23} - |10\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \quad (12.2)$$

و بنابراین طبق معادله (۵۷.۱) با هدف سنجش میزان درهم‌تنیدگی این کانال غیرکلاسیکی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \rho_{23} &= |\varphi^-\rangle_{23} \langle \varphi^-| \\ &= \frac{1}{4} \left( |01\rangle_{23} \langle 01| - |01\rangle_{23} \langle 10| - |10\rangle_{23} \langle 01| + |10\rangle_{23} \langle 10| \right) \end{aligned} \quad (13.2)$$

در نهایت چگالی ماتریس تقلیل یافته را با از دست دادن ذره‌ی ۳ به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\rho_2 &= \text{Tr}_3(\rho_{23}) \\ &= \frac{1}{4} \left( {}_3\langle 1 | 1 \rangle {}_3\langle 0 | {}_2\langle 0 | - {}_3\langle 1 | 0 \rangle {}_3\langle 0 | {}_2\langle 1 | \right. \\ &\quad \left. - {}_3\langle 0 | 1 \rangle {}_3\langle 1 | {}_2\langle 0 | + {}_3\langle 0 | 0 \rangle {}_3\langle 1 | {}_2\langle 1 | \right) \\ &= \frac{1}{4} (|0\rangle_2 \langle 0| + |1\rangle_2 \langle 1|) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (14.2)$$

چنانچه ذره ۳ را نگه داشته و ذره‌ی ۲ را از دست بدهیم، باز هم نتیجه یکسان خواهد بود. مقادیر ویژه ماتریس به دست آمده در معادله (۱۴.۲) برابر  $\lambda_1 = \frac{1}{2}$  و  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$  به دست می‌آیند. در نهایت برای سنجش آنتروپی فون‌نیومان و در نتیجه میزان درهم‌تنیدگی این کانال غیرکلاسیکی درهم‌تنیده از معادله (۵۴.۱) استفاده می‌کنیم که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}S(\rho_2) &= S(\rho_3) \\ &= - \sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \\ &= - \left( \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} \right) \\ &= - \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \\ &= 1\end{aligned}\quad (15.2)$$

که بر اساس معادله (۱۵.۲) مقدار آنتروپی فون‌نیومان برای هر دو ذره برابر ۱  $S(\rho_2) = S(\rho_3) = 1$  می‌باشد که شرایط درهم‌تنیدگی ماکزیمم را برآورده می‌سازد و در نتیجه هماندهی و کیفیت انتقال را برای کامل شدن پروتکل دوربری کوانتومی فراهم می‌سازد. البته باید بیان داشت که چنانچه این مقدار  $S(\rho) < 1$  باشد، کانال درهم‌تنیده را غیر ماکزیمم می‌دانستیم که با توجه به حالت‌های بل درهم‌تنیده در معادله‌ی (۱۱.۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}|00\rangle_{23} &= \left( \frac{|\psi^+\rangle_{23} + |\psi^-\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \\ |11\rangle_{23} &= \left( \frac{|\psi^+\rangle_{23} - |\psi^-\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \\ |01\rangle_{23} &= \left( \frac{|\varphi^+\rangle_{23} + |\varphi^-\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right) \\ |10\rangle_{23} &= \left( \frac{|\varphi^+\rangle_{23} - |\varphi^-\rangle_{23}}{\sqrt{2}} \right)\end{aligned}\quad (16.2)$$

چنانچه آلیس ذره‌ی ناشناخته خود را با ذرات EPR درهم‌تنیده ترکیب کند تا بتواند توسط آن کانال کوانتومی ذره‌ی ناشناخته خود را ارسال کند سیستم ترکیبی با کمک معادله (۱۶.۲) به صورت

زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_{123} &= |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi^-\rangle_{23} \\
 &= (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) \otimes \left( \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha|00\rangle_{12}|1\rangle_3 - \alpha|01\rangle_{12}|0\rangle_3 + \beta|10\rangle_{12}|1\rangle_3 - \beta|11\rangle_{12}|0\rangle_3) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha \left( \frac{|\psi^+\rangle_{12} + |\psi^-\rangle_{12}}{\sqrt{2}} \right) |1\rangle_3 - \alpha \left( \frac{|\varphi^+\rangle_{12} + |\varphi^-\rangle_{12}}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle_3 \right. \\
 &\quad \left. + \beta \left( \frac{|\varphi^+\rangle_{12} - |\varphi^-\rangle_{12}}{\sqrt{2}} \right) |1\rangle_3 - \beta \left( \frac{|\psi^+\rangle_{12} - |\psi^-\rangle_{12}}{\sqrt{2}} \right) |0\rangle_3 \right) \quad (17.2) \\
 &= \frac{1}{4} \left( |\varphi^-\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) + |\varphi^+\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \right. \\
 &\quad \left. + |\psi^+\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) + |\psi^-\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \right)
 \end{aligned}$$

که پاسخ به دست آمده در نهایت به صورت خلاصه از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_1 \otimes |\varphi^-\rangle_{23} &= \frac{1}{4} \left( |\varphi^-\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) + |\varphi^+\rangle_{12} (-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \right. \\
 &\quad \left. + |\psi^+\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 - \beta|0\rangle_3) + |\psi^-\rangle_{12} (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \right) \quad (18.2)
 \end{aligned}$$

اکنون آلیس یک اندازه‌گیری در پایه بل روی ذره‌های خود ۱ و ۲ انجام می‌دهد. بدین‌گونه که دو ذره‌اش را به یکی از حالت‌های بل تصویر می‌کند. پس از اندازه‌گیری آلیس سیستم رمبش می‌کند و بسته به پایه‌ی اندازه‌گیری آلیس سیستم یکی از چهار حالت موجود در جدول را حاصل می‌کند. همچنین این پروتکل دوربری تنها در صورتی کامل می‌شود که آلیس با ارسال دو بیت کلاسیکی از طریق کانال کلاسیکی، باب را از نتایج اندازه‌گیری خود آگاه سازد. این امر باب را قادر می‌سازد تا با به‌کار بردن عملگر یکانی که همان ماتریس‌های پاؤلی هستند؛ همان کیوبیت اصلی و اولیه را بسازد. توجه داشته باشید که در طول عملیات دوربری مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  ناشناخته باقی می‌ماند [۱۷].

**جدول ۱۰.۲:** جدول عملگری که باب بر اساس پایه‌های اندازه‌گیری آلیس برای رسیدن به حالت اصلی به‌کار می‌بندد. پس از اندازه‌گیری آلیس تنها یکی از حالت‌ها بسته به پایه اندازه‌گیری آلیس رخ می‌دهد.

| اعمال عملگر مناسب توسط باب | حالت باب                                | پایه اندازه‌گیری آلیس |
|----------------------------|-----------------------------------------|-----------------------|
| $I  \varphi^-\rangle$      | $-\alpha 0\rangle_3 - \beta 1\rangle_3$ | $ \varphi^-\rangle$   |
| $X  \psi^-\rangle$         | $\alpha 1\rangle_3 + \beta 0\rangle_3$  | $ \psi^-\rangle$      |
| $Z  \varphi^+\rangle$      | $-\alpha 0\rangle_3 + \beta 1\rangle_3$ | $ \varphi^+\rangle$   |
| $ZX  \psi^+\rangle$        | $\alpha 1\rangle_3 - \beta 0\rangle_3$  | $ \psi^+\rangle$      |

## ۷.۲ ابرفشرده‌سازی کوانتومی و تفاوت آن با دوربری

یکی از مهمترین کاربردهای دیگری که بین جفت ذرات درهم‌تنیده  $EPR$  که به‌طور بیشینه درهم‌تنیده شده‌اند، ابرفشرده‌سازی<sup>۳۰</sup> است که ایده اساسی ابرفشرده‌سازی در سال ۱۹۹۲ توسط بنت و ویزنر<sup>۳۱</sup> پیشنهاد شده بود. این رویداد، دقیقاً عکس عمل دوربری کوانتومی است که نشان می‌دهد که با استفاده از درهم‌تنیدگی بیشینه‌ای که بین ذرات آلیس و باب وجود دارد، انتقال اطلاعات از طریق ابرفشرده‌سازی صورت می‌گیرد. برای انجام فرآیند ابرفشرده‌سازی مراحل زیر به ترتیب صورت می‌پذیرد:

۱. یک حالت بل بین آلیس و باب به عنوان مثال  $|\psi^+\rangle = \frac{(|00\rangle + |11\rangle)}{\sqrt{2}}$  به اشتراک گذاشته می‌شود.

۲. آلیس بر اساس این‌که چه اطلاعات کلاسیکی شامل بیت‌های ۰۰، ۰۱، ۱۰ ویا ۱۱ را می‌خواهد به باب بفرستد، عملگرهای زیر را که در جدول ۲.۲ آمده است؛ بر روی ذرات خود اثر می‌دهد. که  $I$  و  $X$  و  $Y$  و  $Z$  عملگرهای پائولی هستند.

جدول ۲.۲: جدول اعمال عملگر مناسب توسط آلیس روی ذره خودش در فرآیند ابرفشرده‌سازی

| حالت بل درهم‌تنیده باب | اعمال عملگر مناسب توسط آلیس | بیتی که آلیس می‌خواهد ارسال کند |
|------------------------|-----------------------------|---------------------------------|
| $ \psi^+\rangle$       | $I$                         | ۰ ۰                             |
| $ \varphi^+\rangle$    | $X$                         | ۰ ۱                             |
| $ \psi^-\rangle$       | $Z$                         | ۱ ۰                             |
| $ \varphi^-\rangle$    | $ZX(-iY)$                   | ۱ ۱                             |

۳. در این مرحله آلیس پس از اعمال عملگر مربوطه، کیوبیت خود را به باب ارسال می‌کند.

۴. در این مرحله باب در پایه بل اندازه‌گیری می‌کند و با احتمال مساوی، حالت‌های بل را به‌دست می‌آورد. هر حالتی که به‌دست بیاورد، معادل رشته بیتی است که آلیس برای باب فرستاده است.

از آن‌جا که ابرفشرده‌سازی دقیقاً عکس عمل دوربری کوانتومی است؛ بدین ترتیب در دوربری کوانتومی با ارسال دو بیت کلاسیکی یک کیوبیت منتقل می‌شد اما در ابرفشرده سازی با ارسال یک کیوبیت، دو بیت اطلاعات کوانتومی ارسال می‌شود. البته یکی دیگر از تفاوت‌هایی که بین دوربری کوانتومی و ابرفشرده‌سازی وجود دارد این است که در ابرفشرده سازی برای کشف اطلاعات ارسالی به هر دو ذره‌ی ارسالی نیاز است. بنابراین اگر جاسوسی بین راه به ذره‌ی ارسالی آلیس دسترسی داشته باشد؛ از اطلاعات ارسالی چیزی حاصل نمی‌کند مگر این‌که به ذره‌ی باب

<sup>۳۰</sup>quantum dense coding

<sup>۳۱</sup>Wiesner

هم دسترسی داشته باشد که بسیار بعید به نظر می‌رسد زیرا به اشتراک گذاری ذرات آلیس و باب ممکن است سال‌ها پیش صورت گرفته باشد [۴۱، ۱۷].

## فصل ۳

# دوربری در ابعاد بالا

### ۱.۳ مقدمه

در فصل‌های قبل دیدیم که چگونه با استفاده از حالت‌های درهم‌تنیده دو ذره‌ای دوربری امکان‌پذیر گردیده است. حال این سؤال مطرح می‌شود که علاوه بر حالت درهم‌تنیده دو ذره‌ای، آیا حالت‌های درهم‌تنیده چند ذره‌ای و بیش از دو ذره‌ای دیگری نیز وجود دارد که بتوان از طریق آن‌ها دوربری کوانتومی انجام داد؟ آیا می‌توان سیستم‌های چند ذره‌ای را به عنوان یک کانال درهم‌تنیده برای انتقال یک حالت ناشناخته در نظر گرفت؟ اگر چنین امری امکان‌پذیر است، چه مزیت و برتری نسبت به کانال درهم‌تنیده با ابعاد پایین دارد؟ پیرامون پاسخ به این سؤالات تاکنون مطالعات زیادی صورت گرفته است که در سال ۲۰۰۰ توسط دیور<sup>۱</sup> و همکارانش نشان داده شد که مطالعه در ابعاد بالا در دوربری کوانتومی می‌تواند به کار رود [۴۲]. در چند سال گذشته، آزمایش‌های متنوعی توسط گروه‌های مختلفی انجام شده است و طرح احتمالی به عنوان دوربری  $n$  کیوبیت عمومیته یافته است [۴۳]. دوربری برای حالات درهم‌تنیده چند ذره‌ای به خصوص به صورت  $GHZ$ <sup>۲</sup> و به طور خصوصی شامل حالت‌های  $W$  و خوشه‌ای مورد توجه قرار گرفته است [۴۵، ۴۶] که در این تحقیقات مشخص می‌شود که حالات  $W$  نرمال برای دوربری کامل مفید نیستند اما با اختصاص وزن‌ها و فازهای نسبی مناسب به جملات جدا از هم حالات  $W$  اصلاح شده<sup>۳</sup> مشخص می‌گردد که می‌توان آن را برای دوربری کوانتومی مناسب ساخت که ما در بخش ۲.۳ این مورد را بررسی می‌کنیم و در بخش ۲.۲.۳، پروتکل دوربری را برای آن حالت  $W$  اصلاح شده مورد توجه قرار می‌دهیم [۴۶]. حالات  $GHZ$  و حالات  $W$  اصلاح شده سه کیوبیت می‌توانند برای دوربری یک حالت تک کیوبیت مورد استفاده قرار گیرند اما نمی‌توانند برای هدف ارسال بیش از تک کیوبیت به کار برده شوند. بنابراین براون<sup>۴</sup> توانست حالت ۵ کیوبیت‌ای را مورد بررسی قرار دهد [۵۱] که

<sup>۱</sup>Duer

<sup>۲</sup>Greenberger – Horne – Zeilinger

<sup>۳</sup>modified W

<sup>۴</sup>Brown et al

این حالت  $|\psi_5\rangle$  اصلاح شده برای دوربری کوانتومی یک حالت دو کیوبیته به همان خوبی یک حالت دلخواه ناشناخته تک کیوبیته به کار برده شود که در بخش‌های ۲.۳ و ۳.۳ به ترتیب در سیستم‌های سه کیوبیته و پنج کیوبیته به تفصیل بدان خواهیم پرداخت [۴۷]. مزیت‌های استفاده از سیستم درهم‌تنیده ۵ کیوبیته نسبت به سیستم ۳ کیوبیته، ثبات درهم‌تنیدگی بر اثر از دست دادن ذرات است که در نتیجه، سیستم‌های درهم‌تنیده ۵ کیوبیتی نقش حیاتی در فرآیندهای اطلاعات و محاسبات کوانتومی بازی می‌کنند و حداقل تعداد کیوبیت‌های مورد نیاز برای تصحیح خطای کوانتومی<sup>۵</sup> هستند [۴۸، ۴۹]، که به وسیله روش تبدیل کاهش پارامتری نیز قابل تولید است [۵۰]. در این فصل حالت‌های GHZ و W اصلاح شده را در سیستم‌های سه کیوبیته [۴۶] و ۵ کیوبیته [۴۷] مورد مطالعه قرار خواهیم داد و نشان می‌دهیم که حالت‌های GHZ سه کیوبیته در برابر از دست دادن ذرات قوی نیستند. به عبارتی با به دست آوردن چگالی تقلیل یافته از حالت‌های باقی‌مانده دو ذره، دیگر حالت درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های باقی‌مانده از حالت GHZ وجود ندارد. در صورتی که اگر از حالت خاصی از حالات W استفاده کنیم که در بخش ۲.۲.۳ به آن پرداخته شده است و نشان داده می‌شود که درهم‌تنیدگی واقعی و خالصی بین دو ذره باقی می‌ماند و بنابراین حالت W سه کیوبیته در برابر از دست دادن ذره مقاوم خواهد ماند. در سیستم‌های ۵ کیوبیته، حالات W حتی با فقدان هر دو ذره دلخواه، درهم‌تنیدگی بین ذرات باقی می‌ماند و این مقاوم بودن در برابر درهم‌تنیدگی در کانال‌های درهم‌تنیده با ابعاد بالا؛ آن‌ها را برای استفاده در شبکه‌های کوانتومی توزیع شده مفید می‌سازد و علاوه بر آن می‌توان از آن برای ارسال کیودیت‌های دو کیوبیته نیز بهره جست. امروزه دوربری کوانتومی نقش مهمی در شبکه‌های توزیع کوانتومی ایفا می‌کند و به عنوان یک عملکرد مقدماتی در کامپیوترهای کوانتومی و در پروتکل‌های ارتباط کوانتومی به خدمت گرفته شده است.

## ۲.۳ حالت‌های سه کیوبیته مشهور

حالت‌های GHZ و W به شکل اصلی خود به صورت زیر تعریف می‌شوند [۴۶]:

$$|GHZ\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{123} + |111\rangle_{123}) \quad (1.3)$$

$$|W\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle_{123} + |010\rangle_{123} + |001\rangle_{123}) \quad (2.3)$$

که نشان داده شده است که اگر چه نمونه اصلی  $|GHZ\rangle$ ، مناسب استفاده در دوربری است اما نمونه اصلی  $|W\rangle$  مناسب نیست. البته دسته‌ای از حالت W وجود دارد که به این طبقه اختصاص دارد و در چشمه‌های درهم‌تنیده مورد استفاده قرار می‌گیرد که با استفاده از فرمول کلی زیر مشخص می‌شود:

$$|W_n\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2+2n}}(|100\rangle_{123} + \sqrt{n}e^{i\gamma}|010\rangle_{123} + \sqrt{n+1}e^{i\delta}|001\rangle_{123}) \quad (3.3)$$

<sup>۵</sup>Quantum error correction

و نشان داده شده است که این خانواده از حالت‌های  $W$ ، مناسب دوربری هستند. برای مثال با  $n = 1$  و  $\gamma = \delta = 0$  حالتی به شکل زیر خواهید داشت:

$$|W_1\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{3}}(|100\rangle_{123} + |010\rangle_{123} + \sqrt{2}|001\rangle_{123}) \quad (4.3)$$

که مناسب برای استفاده در دوربری است. حال برای بررسی ثبات درهم‌تنیدگی در حالت‌های  $GHZ$  و  $W$  نسبت به از دست دادن ذرات ماتریس چگالی آن‌ها را تشکیل می‌دهیم. برای مثال برای حالت  $|GHZ\rangle_{123}$  خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \rho_{123} = & \frac{1}{8}(|000\rangle_{123}\langle 000| + |000\rangle_{123}\langle 111| \\ & + |111\rangle_{123}\langle 000| + |111\rangle_{123}\langle 111|) \end{aligned} \quad (5.3)$$

با به دست آوردن ماتریس چگالی تقلیل یافته روی ذره‌ی ۳ (رد گیری روی ذره ۳):

$$\rho_{12} = \frac{1}{4}(|00\rangle_{12}\langle 00| + |11\rangle_{12}\langle 11|) \quad (6.3)$$

که به وضوح، یک حالت جدایی‌پذیر است و نشان می‌دهد، درهم‌تنیدگی بین ذرات ۱ و ۲ از بین رفته است (ریز محاسبات (۵.۳) و (۶.۳) در پیوست ۱.۴). در حالی که برای حالت  $|W_1\rangle_{123}$  در رابطه (۴.۳) ماتریس چگالی تقلیل یافته به صورت زیر است (پیوست ۲.۴).

$$\rho_{12} = \frac{1}{4}(|00\rangle_{12}\langle 00| + 2|\varphi^+\rangle_{12}\langle \varphi^+|) \quad (7.3)$$

که در آن پایه حالت بل به صورت زیر تعریف شده است:

$$|\varphi^+\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{12} + |10\rangle_{12}) \quad (8.3)$$

در رابطه (۷.۳) یک ماتریس غیر قطری به دست می‌آید که مشاهده می‌شود، هنوز درهم‌تنیدگی را حفظ کرده است و همچنین قابل ذکر است که این رابطه را نمی‌توان به صورت ترکیبی خطی از حالت‌های ضربی نوشت. در نهایت چنانچه درهم‌تنیدگی با معیار منفیت که در فصل اول بخش ۸.۱ به آن اشاره شد، محاسبه شود میزان درهم‌تنیدگی حالت سه کیوبیته  $|GHZ\rangle_{123}$  که روی یکی از کیوبیت‌های آن اندازه‌گیری شده است، برابر صفر خواهد شد. در حالی که این میزان درهم‌تنیدگی برای یک حالت  $W$  در رابطه (۴.۳) که روی یکی از کیوبیت‌های آن اندازه‌گیری شده است (رابطه (۷.۳))، ۰/۱۰۳۵ خواهد بود که غیر صفر است. بنابراین حالت  $W$  با توجه به حفظ درهم‌تنیدگی، برای کاربرد در توزیع کلیدهای کوانتومی<sup>۶</sup> و برای نمایش واقع گرایی موضعی<sup>۷</sup> جالب به نظر می‌رسند [۴۶]. لازم به ذکر است که همچنین دیور ثابت کرد که، حالت سه کیوبیته حالات  $W$  نمی‌تواند تحت عملگر موضعی و ارتباط کلاسیکی آماری  $SLOCC$ <sup>۸</sup> به حالت  $GHZ$  تبدیل شود.

<sup>۶</sup>Key distribution

<sup>۷</sup>local realism

<sup>۸</sup>Stochastic Local Operation and Classical Communication

### ۱.۲.۳ دوربری کوانتومی حالت سه کیوبیته GHZ

برای این که بخواهیم پروتکل دوربری کوانتومی را برای حالت سه ذره‌ای GHZ بررسی کنیم؛ موقعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن آلیس ذرات ۱ و ۲ و باب ذره‌ی ۳ را در اختیار دارد. آلیس می‌خواهد ذره نا شناخته  $a$  را که علاوه بر ذرات ۱ و ۲ در دست دارد به باب ارسال کند. برای انتقال این ذره نا شناخته، آلیس یک اندازه‌گیری روی سه ذره‌ی  $(a, 1, 2)$  انجام می‌دهد و نتایج خود را به باب از طریق جابه‌جایی کلاسیکی منتقل می‌کند. بنابراین فرض می‌کنیم آلیس و باب یک حالت درهم‌تنیده‌ی سه کیوبیته GHZ را به اشتراک گذاشته‌اند که از طریق معادله‌ی (۱.۳) به دست می‌آید و آلیس می‌خواهد حالت نا شناخته‌ای را که به شکل زیر است به باب ارسال کند:

$$|\psi\rangle_a = \alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a \quad (9.3)$$

که از شرط بهنجارش  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  در رابطه (۹.۳) صدق می‌کند. آلیس حالت نا شناخته خود را با حالت درهم‌تنیده آلیس - باب در پایه مناسب اندازه‌گیری کرده و به وسیله آن حالت نا شناخته خود را به باب ارسال می‌کند که در زیر طرح ترکیبی را بر پایه اندازه‌گیری آلیس بازنویسی نموده‌ایم.

$$|\psi\rangle_a \otimes |GHZ\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\psi_1^+\rangle (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |\psi_1^-\rangle (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) \right. \\ \left. + |\psi_2^+\rangle (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) + |\psi_2^-\rangle (-\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \right) \quad (10.3)$$

که آلیس پایه‌های اندازه‌گیری خود را که در این جا، حالات  $\{|\psi_1^\pm\rangle, |\psi_2^\pm\rangle\}$  می‌باشد؛ بر مبنای یک اندازه‌گیری فون‌نیومان مورد استفاده قرار می‌دهد که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$|\psi_1^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|000\rangle_{a12} \pm |111\rangle_{a12}) \\ |\psi_2^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|100\rangle_{a12} \pm |011\rangle_{a12}) \quad (11.3)$$

که در نهایت پس از اندازه‌گیری آلیس روی سه ذره‌ای که در اختیار دارد؛ آلیس نتایج اندازه‌گیری خود را، با استفاده از ۲ بیت اطلاعات کلاسیکی به باب ارسال می‌کند. باب نیز می‌تواند با به کار بردن تبدیلات یکانی اختصاصی مناسب، ذره‌ی مورد نظر نا شناخته و اصلی را در هریک از پایه‌هایی که اندازه‌گیری آلیس صورت گرفته است، به دست آورد که نتیجه اندازه‌گیری آلیس هر چه باشد با توجه به آن عملگر یکانی مورد استفاده باب در جدول ۱.۳ نشان داده شده است.

### ۲.۲.۳ بررسی دوربری حالت سه کیوبیته W

در این بخش، پروتکل دوربری کوانتومی را برای دسته‌ای دیگر از حالات سه کیوبیته بررسی می‌کنیم که حالات W نامیده می‌شود. همانگونه که در بخش ۲.۳ گفته شد؛ باید دانست که تنها حالت خاصی از این دست می‌تواند در روند دوربری کوانتومی کامل شرکت نماید که برای ساده‌سازی

جدول ۱.۳: جدول تبدیل یکانی مناسب برای باب در صورت اندازه‌گیری هر یک از پایه‌های آلیس

| تبدیل یکانی مناسب | کیوبیت باب                          | نتایج اندازه‌گیری آلیس |
|-------------------|-------------------------------------|------------------------|
| $I$               | $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$  | $ \psi_1^+\rangle$     |
| $Z$               | $\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$  | $ \psi_1^-\rangle$     |
| $X$               | $\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$  | $ \psi_2^+\rangle$     |
| $XZ$              | $-\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$ | $ \psi_2^-\rangle$     |

معادل با رابطه‌ی (۴.۳) در نظر می‌گیریم. بنابراین چنانچه تصور کنیم که آلیس و باب یک کیوبیت سه‌تایی حالت  $|W_1\rangle_{123}$  را به اشتراک گذاشته‌اند و آلیس ذرات ۱ و ۲ و همچنین ذره‌ی ناشناخته را در رابطه (۹.۳) در اختیار دارد، در حالی که باب تنها ذره ۳ را در اختیار دارد و آلیس می‌خواهد ذره‌ی ناشناخته‌ی  $a$  را به باب ارسال کند که مطابق زیر:

$$|\psi\rangle_a \otimes |W_1\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{4}} \left( |\eta_1^+\rangle_{a12} (\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |\eta_1^-\rangle_{a12} (\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) + |\xi_1^+\rangle_{a12} (\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) + |\xi_1^-\rangle_{a12} (-\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \right) \quad (12.3)$$

که در اینجا  $|\eta_1^\pm\rangle_{a12}$  و  $|\xi_1^\pm\rangle_{a12}$  یک مجموعه از پایه‌های متعامد هستند که به عنوان پایه‌های اندازه‌گیری آلیس به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\begin{aligned} |\eta_1^\pm\rangle_{a12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|010\rangle_{a12} + |001\rangle_{a12} \pm \sqrt{2}|100\rangle_{a12}) \\ |\xi_1^\pm\rangle_{a12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|110\rangle_{a12} + |101\rangle_{a12} \pm \sqrt{2}|000\rangle_{a12}) \end{aligned} \quad (13.3)$$

آلیس می‌تواند یک اندازه‌گیری بر اساس اندازه‌گیری فون‌نیومان روی یکی از پایه‌هایی که شامل  $\{|\eta_1^\pm\rangle, |\xi_1^\pm\rangle\}$  روی سیستم ترکیبی از سه ذره‌ی  $a$  و ۱ و ۲ انجام دهد که در این صورت سیستم به یکی از حالت‌های چهار جمله‌ی معادله (۱۳.۳) رمبش می‌کند و آلیس پس از اندازه‌گیری، نتیجه آن را با استفاده از دو بیت کلاسیکی به باب ارسال می‌کند. باب نیز یکی از تبدیلات یکانی شامل  $\{I, \sigma_1, -i\sigma_2, \sigma_3\}$  را بکار می‌برد تا بتواند حالت ناشناخته‌ای که در دست آلیس بوده و اکنون نابود شده است را با توجه به پایه اندازه‌گیری آلیس روی ذره ۳ احیا و بازسازی کند که در اینجا  $\sigma_1$  و  $\sigma_2$  و  $\sigma_3$  همان ماتریس‌های پائولی هستند. به عنوان مثال اگر نتیجه اندازه‌گیری آلیس  $|\xi_1^+\rangle_{a12}$  باشد؛ باب با به کارگیری  $\sigma_1$  می‌خواهد حالت  $|\psi\rangle_3$  را به دست آورد. در این مرحله کاملیت پروتکل دوربری کوانتومی حاصل می‌گردد که در رابطه (۱۴.۳) به مراحل کلی و تبدیلات یکانی مورد استفاده از سوی باب اشاره شده است و جزئیات کلی پروتکل دوربری کوانتومی در پیوست ۳.آ آمده است.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \otimes |W_1\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{4}} \left( |\eta_1^+\rangle_{a12} \otimes I(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |\eta_1^-\rangle_{a12} \otimes \sigma_3(\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) \right. \\ &\quad \left. + |\xi_1^+\rangle_{a12} \otimes \sigma_1(\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) + |\xi_1^-\rangle_{a12} \otimes (-i\sigma_2)(-\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) \right) \end{aligned} \quad (14.3)$$

### ۳.۳ دوربری پنج کیوبیت حالت براون

اخیراً براون [۵۱] توانسته با استفاده از یک پروسه عددی بسیار سنگین به حالت ۵ کیوبیت درهم‌تنیده دست یابد. که حالت ۵ کیوبیت براون به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}}(|001\rangle|\varphi_-\rangle + |010\rangle|\psi_-\rangle + |100\rangle|\varphi_+\rangle + |111\rangle|\psi_+\rangle) \quad (15.3)$$

که در آن حالت‌های بل  $|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$  و  $|\varphi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$  هستند. البته در حال حاضر نتیجه براون توسط یک پروسه عددی دیگری مورد تایید واقع شده است [۵۲]. در اندازه‌گیری و سنجش درهم‌تنیدگی به استفاده از، آنتروپی فون نویمان بین  $(5|1234)$  برابر با ۱ و بین  $(45|123)$  برابر با ۲ است. که به ترتیب این مقادارها، بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی ممکن بین زیر مجموعه‌های این سیستم است و بنابراین این حالت‌ها شرایط عمومی دوربری را برآورده می‌سازد. علاوه بر این باید به این نکته توجه داشته باشیم که به ترتیب  $\frac{1}{4} = \text{Tr}(\rho_i^2)$  و  $\frac{1}{4} = \text{Tr}(\rho_{i_1, i_2}^2)$  که  $i_1$  و  $i_2$  به زیر سیستم‌های سیستم ۵ ذره‌ای مربوط می‌شوند. بنابراین این دو شرط معیار مناسبی برای درهم‌تنیدگی چند جزیی است. ویژگی منحصر به فردی که در حالت براون وجود دارد این است که حتی بعد از این که رد<sup>۹</sup> را روی یک یا ۲ کیوبیت انجام می‌دهیم درهم‌تنیدگی در زیر سیستم حفظ می‌شود و بنابراین حالت براون بسیار مقاوم در برابر از دست دادن ذرات است. علاوه بر این، پس از به‌دست آوردن رد برای هر تعداد از کیوبیت‌های ممکن، میزان درهم‌تنیدگی، به صورت درهم‌تنیدگی بیشینه آمیخته به دست آید (که مشاهده می‌شود میزان درهم‌تنیدگی به شماره کیوبیت مربوط نمی‌شود). بنابراین برای اندازه‌گیری رد روی حالت ۵ کیوبیت  $|\psi_5\rangle$  چه رد را روی ذره ۲ - ۱ حساب کنیم، چه روی ذره ۵ - ۴ و .... فرقی نمی‌کند و به‌صورت حالت بیشینه درهم‌تنیدگی باقی می‌ماند، در حالی که سیستم‌های ۴ کیوبیت چنان ویژگی رفتاری را از خود نشان نمی‌دهند و آنتروپی را به صورت حالت ماکزیمم به دست نمی‌آورد [۵۳]. علاوه بر آن اگر حالت بالا را برای جدا سازی  $(2+3)$ ، ۲ کیوبیت از ۵ کیوبیت به‌دست آوریم نتیجه خواهد شد که:  $(5) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$  که برابر ۱۰ حالت می‌شود که چنانچه درهم‌تنیدگی و میزان آنتروپی فون نویمان را برای تمام حالات حساب کنیم، باز درهم‌تنیدگی ماکزیمم مشابه به دست می‌آید. بنابراین آلیس مجاز به انتخاب هر جفت از سه کیوبیت در حالت بالا برای دوربری به باب است. که این برای حالت ۴ کیوبیت غیر ممکن است. بنابراین حالت‌های ۵ کیوبیت می‌تواند روی حالت ۴ کیوبیت برای انتقال و کدگذاری به عنوان مرز محسوب شود. (با کمترین کیوبیتی که به جواب می‌رسیم ۵ تایی است) حال ما می‌خواهیم یک روش مناسب برای مطالعه واقعیت فیزیکی از این حالت پیشنهاد دهیم که در آن امتیازات این حالت را برای انجام انتقال اطلاعات کوانتومی مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ که این انتقال از طریق اشتراک گذاری و درهم‌تنیدگی حالت براون در دوربری کوانتومی کاربرد دارد.

البته لازم به‌ذکر است که با وجود این که، می‌توانیم حالت براون را توسط پروسه جستجو و حل عددی بسیار سنگین و صرف زمان طولانی پروسه سنگین عددی که در ابتدا به دست آمده است

<sup>۹</sup>Trace

درک کنیم، روشی وجود دارد که می‌توان به کمک آن، به درک فیزیکی آن دست یافت. برای تفهیم روش فیزیکی در ابتدا دو فوتون را در حالت بل در نظر می‌گیریم:

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (16.3)$$

همچنین نیاز داریم یک فوتون دیگر را به صورت حالت  $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$  در نظر بگیریم که می‌تواند در کنار جفت فوتون دیگر قرار گیرد. اگر عملگر  $UCNOT$  را روی دو کیوبیت آخر اثر دهیم؛ یک گروه از حالت‌های  $W$  در ادامه به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)(|0\rangle + |1\rangle) \xrightarrow{UCNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle_{123} + |010\rangle_{123} + |001\rangle_{123} + |110\rangle_{123}) \quad (17.3)$$

حال ما دو فوتون دیگر را در وضعیت حالت بل دیگری در نظر می‌گیریم:

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (18.3)$$

که حالت براون را می‌توان با اعمال کردن یک تبدیل یکانی  $U_b$  به دست آورد که در نهایت این حالت ترکیب شده را به صورت زیر به دست آوریم:

$$U_b|w\rangle|\psi_+\rangle \equiv |\psi_5\rangle \quad (19.3)$$

که تبدیل یکانی را به صورت یک ماتریس  $32 \times 32$  در نظر می‌گیریم که برابر یک در مکان‌های زیر است.

$$k_{1,1}, k_{2,2}, k_{5,6}, k_{6,5}, k_{9,9}, k_{10,10}, k_{13,14}, k_{14,13}, k_{17,18}, k_{18,17}, k_{19,20}, k_{20,19}, k_{21,21}$$

$$k_{23,23}, k_{24,24}, k_{25,26}, k_{26,25}, k_{27,28}, k_{28,27}, k_{29,29}, k_{30,30}, k_{31,31}, k_{32,32}$$

و برابر ۱- در مکان‌ها  $k_{3,3}, k_{4,4}, k_{7,8}, k_{8,7}, k_{11,11}, k_{12,12}, k_{15,16}, k_{16,15}$  و در دیگر جملات صفر است. در اینجا  $k_{i,j}$  عناصر ماتریس را در سطر  $i^{th}$  و ستون  $j^{th}$  نشان می‌دهد. این عملگر واحد می‌تواند به گیت‌های شناخته شده در تئوری اطلاعات کوانتومی شکسته شود. اگر

$$|\varphi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle) \quad (20.3)$$

$$|\psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle) \quad (21.3)$$

را به عنوان پایه‌های بل در نظر بگیریم؛ آن‌گاه  $|\psi_5\rangle$  را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} |\psi_5\rangle &= \frac{1}{4} \left( |001\rangle |\varphi_-\rangle + |010\rangle |\psi_-\rangle + |100\rangle |\varphi_+\rangle + |111\rangle |\psi_+\rangle \right) \\ \Rightarrow |\psi_5\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( |001\rangle (|01\rangle - |10\rangle) + |010\rangle (|00\rangle - |11\rangle) \right. \\ &\quad \left. + |100\rangle (|01\rangle + |10\rangle) + |111\rangle (|00\rangle + |11\rangle) \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( |00101\rangle - |00110\rangle + |01000\rangle - |01011\rangle \right. \\ &\quad \left. + |10001\rangle + |10010\rangle + |11100\rangle + |11111\rangle \right) \end{aligned} \quad (22.3)$$

برای حالت ۵ کیوبیت  $32 = 2^5$  حالت پایه داریم که در آن ماتریس چگالی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho_{12345} &= |\psi_5\rangle \langle \psi_5| \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( |00101\rangle - |00110\rangle + |01000\rangle - |01011\rangle \right. \\ &\quad \left. + |10001\rangle + |10010\rangle + |11100\rangle + |11111\rangle \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \langle 00101| - \langle 00110| + \langle 01000| - \langle 01011| \right. \\ &\quad \left. + \langle 10001| + \langle 10010| + \langle 11100| + \langle 11111| \right) \\ &= \frac{1}{8} \left( |00101\rangle \langle 00101| - |00101\rangle \langle 00110| + |00101\rangle \langle 01000| - |00101\rangle \langle 01011| \right. \\ &\quad + |00101\rangle \langle 10001| + |00101\rangle \langle 10010| + |00101\rangle \langle 11100| + |00101\rangle \langle 11111| \\ &\quad - |00110\rangle \langle 00101| + |00110\rangle \langle 00110| - |00110\rangle \langle 01000| + |00110\rangle \langle 01011| \\ &\quad - |00110\rangle \langle 10001| - |00110\rangle \langle 10010| - |00110\rangle \langle 11100| - |00110\rangle \langle 11111| \\ &\quad + |01000\rangle \langle 00101| - |01000\rangle \langle 00110| + |01000\rangle \langle 01000| - |01000\rangle \langle 01011| \\ &\quad + |01000\rangle \langle 10001| + |01000\rangle \langle 10010| + |01000\rangle \langle 11100| + |01000\rangle \langle 11111| \\ &\quad - |01011\rangle \langle 00101| + |01011\rangle \langle 00110| - |01011\rangle \langle 01000| + |01011\rangle \langle 01011| \\ &\quad - |01011\rangle \langle 10001| - |01011\rangle \langle 10010| - |01011\rangle \langle 11100| - |01011\rangle \langle 11111| \\ &\quad + |10001\rangle \langle 00101| - |10001\rangle \langle 00110| + |10001\rangle \langle 01000| - |10001\rangle \langle 01011| \\ &\quad + |10001\rangle \langle 10001| + |10001\rangle \langle 10010| + |10001\rangle \langle 11100| + |10001\rangle \langle 11111| \\ &\quad + |10010\rangle \langle 00101| - |10010\rangle \langle 00110| + |10010\rangle \langle 01000| - |10010\rangle \langle 01011| \\ &\quad + |10010\rangle \langle 10001| + |10010\rangle \langle 10010| + |10010\rangle \langle 11100| + |10010\rangle \langle 11111| \\ &\quad + |11100\rangle \langle 00101| - |11100\rangle \langle 00110| + |11100\rangle \langle 01000| - |11100\rangle \langle 01011| \\ &\quad + |11100\rangle \langle 10001| + |11100\rangle \langle 10010| + |11100\rangle \langle 11100| + |11100\rangle \langle 11111| \\ &\quad + |11111\rangle \langle 00101| - |11111\rangle \langle 00110| + |11111\rangle \langle 01000| - |11111\rangle \langle 01011| \\ &\quad \left. + |11111\rangle \langle 10001| + |11111\rangle \langle 10010| + |11111\rangle \langle 11100| + |11111\rangle \langle 11111| \right) \end{aligned} \quad (23.3)$$

حال اگر بخواهیم ماتریس چگالی تقلیل یافته برای ذره‌ای پنجم  $\rho_5$  به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\rho_5 &= Tr_{1234}(\rho_{12345}) \\ &= \frac{1}{8} (|1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \\ &\quad + |1\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= \frac{1}{4} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (24.3)\end{aligned}$$

که مقادیر ویژه آن به صورت:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (25.3)$$

که در این حالت مقدار  $\rho_5^2$  و رد  $\rho_5^2$  به ترتیب از طریق روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\rho_5^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} I \quad (26.3)$$

$$Tr(\rho_5^2) = \frac{1}{2} \quad (27.3)$$

و آنتروپی حاصل از آن، نیز از طریق رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned}S(\rho_5) &= - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \\ &= - \left( \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{4} \log_{\frac{1}{4}} \left( \frac{1}{4} \right) \right) \\ &= +1 \quad (28.3)\end{aligned}$$

اگر بخواهیم چگالی ماتریس تقلیل یافته برای ذرات ۴ و ۵ را به دست آوریم آنگاه داریم:

$$\begin{aligned}\rho_{45} &= Tr_{123}(\rho_{12345}) \\ &= \frac{1}{4} (|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (29.3)\end{aligned}$$

که در این حالت مقادیر ویژه برابر مقدارهای زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{4} \\ \lambda_2 = \frac{1}{4} \\ \lambda_3 = \frac{1}{4} \\ \lambda_4 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (30.3)$$

و به همین نحو  $\rho_{۴۵}^۲$  و رد  $\rho_{۴۵}^۲$  و آنتروپی آن به ترتیب به صورت روابط زیر در می‌آیند:

$$\rho_{۴۵}^۲ = \frac{1}{۱۶} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \quad (۳۱.۳)$$

$$Tr(\rho_{۴۵}^۲) = \frac{1}{۴} \quad (۳۲.۳)$$

$$S(\rho_{۴۵}) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (۳۳.۳)$$

$$\begin{aligned} &= - \left( \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) + \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) + \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) + \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) \right) \\ &= - \left( -\frac{1}{۴} + \left( -\frac{1}{۴} \right) + \left( -\frac{1}{۴} \right) + \left( -\frac{1}{۴} \right) \right) = +۲ \end{aligned}$$

اگر بخواهیم ماتریس چگالی تقلیل یافته و مقادیر ویژه و آنتروپی را برای ذره ۱ و ۲ به دست آوریم، بنابراین به ترتیب نیز به شکل مشابه برای ذرات ۴ و ۵ این مقادیر را به دست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} \rho_{۱۲} &= Tr_{۳۴۵}(\rho_{۱۲۳۴۵}) \\ &= \frac{1}{۴} (|۰۰\rangle\langle ۰۰| + |۰۱\rangle\langle ۰۱| + |۱۰\rangle\langle ۱۰| + |۱۱\rangle\langle ۱۱|) \\ &= \frac{1}{۴} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۳۴.۳)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{۴} \\ \lambda_2 = \frac{1}{۴} \\ \lambda_3 = \frac{1}{۴} \\ \lambda_4 = \frac{1}{۴} \end{cases} \quad (۳۵.۳)$$

$$S(\rho_{۱۲}) = - \sum_i \lambda_i \log \lambda_i \quad (۳۶.۳)$$

$$\begin{aligned} &= - \left( \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) + \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) + \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) + \frac{1}{۴} \log \left( \frac{1}{۴} \right) \right) \\ &= - \left( \left( -\frac{1}{۴} \right) + \left( -\frac{1}{۴} \right) + \left( -\frac{1}{۴} \right) + \left( -\frac{1}{۴} \right) \right) \\ &= +۲ \end{aligned}$$

همان‌گونه که در بخش ۳.۳ توضیح داده شد، مشاهده می‌کنیم که مقادیر ماتریس چگالی تقلیل یافته در روابط (۲۹.۳) و (۳۴.۳) و همچنین آنتروپی در روابط (۳۳.۳) و (۳۶.۳) برای

مجموعه ذرات ۴ و ۵ و همچنین مجموعه ذرات ۱ و ۲ مقدار یکسانی را به دست می‌آورد و این امر صحت باقی ماندن در حالت بیشینه درهم‌تنیدگی را برای حالت ۵ کیوبیت نشان می‌دهد که آنتروپی به دست آمده یکسان و برابر ۲+ می‌باشد. برای درک بهتر چگونگی به دست آوردن ماتریس چگالی تقیل یافته روی دو ذره حل ریاضی وار آن در پیوست. ب.۱ آمده است.

### ۱.۳.۳ دوربری کوانتومی حالت تک کیوبیت

در این جا وضعیتی را در نظر می‌گیریم که در آن آلیس کیوبیت‌های ۱، ۲، ۳، ۴ را در دست دارد و ذره ۵ متعلق به باب است. آلیس می‌خواهد حالت ناشناخته  $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$  را که در اختیار دارد، به باب دوربری کند که طبعاً از وضعیت این حالت ناشناخته اطلاعی ندارد. بنابراین آلیس حالت ترکیب شده خود را با حالت ناشناخته با توجه به مقدار  $|\psi_5\rangle$  در رابطه (۲۲.۳) به صورت زیر آماده می‌سازد، که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \otimes |\psi_5\rangle_{12345} \Rightarrow & |\varphi_1\rangle_{a1+} (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) + |\varphi_2\rangle_{a1-} (\alpha|0\rangle_a - \beta|1\rangle_a) \\ & + |\varphi_3\rangle_{a2+} (\alpha|1\rangle_a + \beta|0\rangle_a) + |\varphi_4\rangle_{a2-} (-\alpha|1\rangle_a + \beta|0\rangle_a) \end{aligned} \quad (37.3)$$

طرف راست شامل پایه‌های متعامدی است که به صورت زیر تعریف می‌شوند (اثبات (۳۷.۳) را در پیوست ب.۲ ببینید).

$$\begin{aligned} |\varphi_x\rangle_{a1\pm} = & (-|00011\rangle_{a1234} + |00100\rangle_{a1234} + |01001\rangle_{a1234} + |01110\rangle_{a1234}) \\ & \pm (|10010\rangle_{a1234} - |10101\rangle_{a1234} + |11000\rangle_{a1234} + |11111\rangle_{a1234}) \end{aligned} \quad (38.3)$$

$$\begin{aligned} |\varphi_x\rangle_{a2\pm} = & (-|10011\rangle_{a1234} + |10100\rangle_{a1234} - |11001\rangle_{a1234} + |11110\rangle_{a1234}) \\ & \pm (|00010\rangle_{a1234} - |00101\rangle_{a1234} + |01000\rangle_{a1234} + |01111\rangle_{a1234}) \end{aligned} \quad (39.3)$$

آلیس اکنون می‌تواند با استفاده از پایه  $|\varphi_x\rangle_{a_i}$  روی ۵ ذره خود اندازه‌گیری کند و نتیجه اندازه‌گیری‌اش را به باب با استفاده از دو بیت کلاسیکی ارسال کند. باب نیز می‌تواند عملگر یکانی را با استفاده از  $(I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  در نظر بگیرد و دوباره حالت اصلی  $(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$  را به دست آورد. که در این زمان پروتکل دوربری برای یک حالت تک کیوبیت با استفاده از  $|\psi_5\rangle$  کامل می‌شود. که این عملگرهای مناسب در جدول ۲.۳ ثبت گردیده است.

که  $I$  و  $Z$  و  $X$  عبارتند از:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

جدول ۲.۳: جدول لیست تبدیلات یکانی باب بر اساس پایه‌های اندازه‌گیری آلیس

| تبدیل یکانی مناسب | کیوبیت باب                          | پایه مناسب اندازه‌گیری آلیس  |
|-------------------|-------------------------------------|------------------------------|
| $I$               | $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$  | $ \varphi_x\rangle_{a_{1+}}$ |
| $Z$               | $\alpha 0\rangle - \beta 1\rangle$  | $ \varphi_x\rangle_{a_{1-}}$ |
| $X$               | $\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$  | $ \varphi_x\rangle_{a_{2+}}$ |
| $XZ$              | $-\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$ | $ \varphi_x\rangle_{a_{2-}}$ |

### ۴.۳ اشتراک‌گذاری کوانتومی حالت تک کیوبیت

حالتی را در نظر بگیریم که در آن آلیس کیوبیت، ۱، باب کیوبیت ۲ و ۳ و چارلی کیوبیت ۵ را در اختیار داشته باشد. آلیس در اینجا نیز کیوبیت ناشناخته  $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  را در اختیار دارد که می‌خواهد باب و چارلی آن را به اشتراک بگذارند که این فرآیند، به اشتراک‌گذاری کوانتومی  $QSTS$ <sup>۱۰</sup> مشهور است. اکنون آلیس کیوبیت ناشناخته خود را با حالت براون ترکیب می‌سازد و اندازه‌گیری خود را در پایه بل انجام می‌دهد و نتیجه اندازه‌گیری خود را توسط دو بیت کلاسیکی<sup>۱۱</sup> چارلی ارسال می‌کند.

پس از آن سیستم درهم‌تنیده باب و چارلی با توجه به روابط  $((22.3), (21.3), (20.3))$  پس از اندازه‌گیری آلیس در پایه‌های  $\{|\varphi_-\rangle, |\varphi_+\rangle, |\psi_-\rangle, |\psi_+\rangle\}$  به صورت جدول ۳.۳ در می‌آیند.

جدول ۳.۳: جدول نتایج اندازه‌گیری آلیس و حالت درهم‌تنیده باب - چارلی

| نتایج اندازه‌گیری آلیس | حالت درهم‌تنیده باب و چارلی                                                                                                                                          |
|------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ \psi_+\rangle$       | $\frac{1}{\sqrt{4}} \left( \alpha ( 01\rangle \varphi_-\rangle +  10\rangle \psi_-\rangle) + \beta ( 00\rangle \varphi_+\rangle +  11\rangle \psi_+\rangle) \right)$ |
| $ \psi_-\rangle$       | $\frac{1}{\sqrt{4}} \left( \alpha ( 01\rangle \varphi_-\rangle +  10\rangle \psi_-\rangle) - \beta ( 00\rangle \varphi_+\rangle +  11\rangle \psi_+\rangle) \right)$ |
| $ \varphi_+\rangle$    | $\frac{1}{\sqrt{4}} \left( \alpha ( 00\rangle \varphi_+\rangle +  11\rangle \psi_+\rangle) + \beta ( 01\rangle \varphi_-\rangle +  10\rangle \psi_-\rangle) \right)$ |
| $ \varphi_-\rangle$    | $\frac{1}{\sqrt{4}} \left( \alpha ( 00\rangle \varphi_+\rangle +  11\rangle \psi_+\rangle) - \beta ( 01\rangle \varphi_-\rangle +  10\rangle \psi_-\rangle) \right)$ |

<sup>۱۰</sup> quantum state sharing

<sup>۱۱</sup> cbits

که بر اساس روابط (۲۰.۳) ، (۲۱.۳) داریم:

$$|00\rangle = \frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \quad (40.3)$$

$$|11\rangle = \frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \quad (41.3)$$

$$|01\rangle = \frac{|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \quad (42.3)$$

$$|10\rangle = \frac{|\varphi_+\rangle - |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \quad (43.3)$$

چنان چه نتیجه اندازه‌گیری آلایس در پایه بل، حالت  $|\psi_+\rangle$  باشد، حالت مشترک باب - چارلی به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \cdot |\psi_5\rangle_{12345} &= (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} (|00101\rangle_{12345} - |00110\rangle_{12345} \\ &\quad + |01000\rangle_{12345} - |01011\rangle_{12345} + |10001\rangle_{12345} + |10010\rangle_{12345} \\ &\quad + |11100\rangle_{12345} + |11111\rangle_{12345}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot (\alpha|000101\rangle_{a12345} - \alpha|000110\rangle_{a12345} \\ &\quad + \alpha|001000\rangle_{a12345} - \alpha|001011\rangle_{a12345} + \alpha|010001\rangle_{a12345} \\ &\quad + \alpha|010010\rangle_{a12345} + \alpha|011100\rangle_{a12345} + \alpha|011111\rangle_{a12345} \\ &\quad + \beta|100101\rangle_{a12345} - \beta|100110\rangle_{a12345} + \beta|101000\rangle_{a12345} \\ &\quad - \beta|101011\rangle_{a12345} + \beta|110001\rangle_{a12345} + \beta|110010\rangle_{a12345} \\ &\quad + \beta|111100\rangle_{a12345} + \beta|111111\rangle_{a12345}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (\alpha|00\rangle_{a_1}|01\rangle_{23}|01\rangle_{45} - \alpha|00\rangle_{a_1}|01\rangle_{23}|10\rangle_{45} \\ &\quad + \alpha|00\rangle_{a_1}|10\rangle_{23}|00\rangle_{45} - \alpha|00\rangle_{a_1}|10\rangle_{23}|11\rangle_{45} + \alpha|01\rangle_{a_1}|00\rangle_{23}|01\rangle_{45} \\ &\quad + \alpha|01\rangle_{a_1}|00\rangle_{23}|10\rangle_{45} + \alpha|01\rangle_{a_1}|11\rangle_{23}|00\rangle_{45} + \alpha|01\rangle_{a_1}|11\rangle_{23}|11\rangle_{45} \\ &\quad + \beta|10\rangle_{a_1}|01\rangle_{23}|01\rangle_{45} - \beta|10\rangle_{a_1}|01\rangle_{23}|10\rangle_{45} + \beta|10\rangle_{a_1}|10\rangle_{23}|00\rangle_{45} \\ &\quad - \beta|10\rangle_{a_1}|10\rangle_{23}|11\rangle_{45} + \beta|11\rangle_{a_1}|00\rangle_{23}|01\rangle_{45} + \beta|11\rangle_{a_1}|00\rangle_{23}|10\rangle_{45} \\ &\quad + \beta|11\rangle_{a_1}|11\rangle_{23}|00\rangle_{45} + \beta|11\rangle_{a_1}|11\rangle_{23}|11\rangle_{45}) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تنها حالتی که نتیجه اندازه‌گیری  $|\psi_+\rangle$  باشد، حالت مشترک باب و چارلی به

شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha |01\rangle \left( \frac{|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) - \alpha |01\rangle \left( \frac{|\varphi_+\rangle - |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
 & + \alpha |10\rangle \left( \frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) - \alpha |10\rangle \left( \frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
 & + \beta |00\rangle \left( \frac{|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \beta |00\rangle \left( \frac{|\varphi_+\rangle - |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\
 & \left. + \beta |11\rangle \left( \frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \beta |11\rangle \left( \frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
 & \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha (|01\rangle |\varphi_+\rangle + |10\rangle |\psi_-\rangle) \right. \\
 & \left. + \beta (|00\rangle |\varphi_+\rangle + |11\rangle |\psi_+\rangle) \right\}
 \end{aligned} \quad (44.3)$$

حال اگر باب ذرات خود را در پایه‌های سه ذره‌ای زیر اندازه‌گیری کند و ۲ بیت اطلاعات کلاسیک نتیجه اندازه‌گیری خود را برای چارلی ارسال کند، چارلی قادر خواهد بود با اعمال عملگر مناسب حالت را مجدداً بازسازی کند که در جدول ۴.۳ خلاصه شده است:

برای مشخص شدن بهتر این‌که چرا باب این چهار پایه را برای اندازه‌گیری انتخاب می‌کند، مانند

جدول ۴.۳: نتایج اندازه‌گیری انجام شده توسط باب و حالت به دست آمده توسط چارلی و تبدیل یکانی مورد استفاده چارلی

| نتایج اندازه‌گیری باب                                                            | حالت چارلی                           | تبدیل یکانی مناسب |
|----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------|
| $\frac{1}{\sqrt{2}} \{  100\rangle +  000\rangle +  111\rangle -  011\rangle \}$ | $\alpha  0\rangle + \beta  1\rangle$ | $I$               |
| $\frac{1}{\sqrt{2}} \{  010\rangle -  101\rangle +  001\rangle +  110\rangle \}$ | $\alpha  1\rangle + \beta  0\rangle$ | $X$               |
| $\frac{1}{\sqrt{2}} \{  100\rangle -  000\rangle -  111\rangle -  011\rangle \}$ | $\alpha  0\rangle - \beta  1\rangle$ | $Z$               |
| $\frac{1}{\sqrt{2}} \{  010\rangle -  101\rangle -  001\rangle -  110\rangle \}$ | $\alpha  1\rangle - \beta  0\rangle$ | $XZ$              |

قبل فرض کنید نتیجه اندازه‌گیری آلیس  $|\psi_+\rangle$  باشد، در نتیجه حالت مشترک باب و چارلی به شکل زیر خواهد بود: بنابراین مطابق جدول ۴.۳ پس از اندازه‌گیری آلیس در پایه  $|\psi_+\rangle$

$$\begin{aligned}
 |\psi_+\rangle & \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha (|010\rangle |1\rangle - |011\rangle |0\rangle + |100\rangle |0\rangle - |101\rangle |1\rangle) \right. \\
 & \left. + \beta (|000\rangle |1\rangle - |001\rangle |0\rangle + |111\rangle |0\rangle) \right\} \\
 & = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha |1\rangle (|010\rangle - |101\rangle) + \alpha |0\rangle (-|011\rangle + |100\rangle) \right. \\
 & \left. + \beta |1\rangle (|000\rangle + |111\rangle) + \beta |0\rangle (|001\rangle + |110\rangle) \right\}
 \end{aligned} \quad (45.3)$$

$$\begin{cases} 2A = |010\rangle - |101\rangle & , & 2B = -|011\rangle + |100\rangle \\ 2C = |000\rangle + |111\rangle & , & 2D = |001\rangle + |110\rangle \end{cases} \quad (46.3)$$

آنگاه با توجه به رابطه (۴۴.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
 |\psi_+\rangle &\Rightarrow \frac{1}{4} \left\{ \alpha|1\rangle(2A + D - D) + \alpha|0\rangle(2B + C - C) \right. \\
 &\quad \left. + \beta|1\rangle(2C + B - B) + \beta|0\rangle(2D - A + A) \right\} \\
 &= \frac{1}{4} \left\{ (A + D)(\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle) + (A - D)(\alpha|1\rangle - \beta|0\rangle) \right. \\
 &\quad \left. + (C + B)(\beta|1\rangle + \alpha|0\rangle) + (C - B)(\beta|1\rangle - \alpha|0\rangle) \right\}
 \end{aligned} \quad (47.3)$$

$$\begin{cases}
 A + D = \frac{1}{4} \{ |010\rangle - |101\rangle + |001\rangle + |110\rangle \} \\
 A - D = \frac{1}{4} \{ |010\rangle + |101\rangle - |001\rangle - |110\rangle \} \\
 B + C = \frac{1}{4} \{ -|011\rangle - |100\rangle + |000\rangle + |111\rangle \} \\
 B - C = \frac{1}{4} \{ |100\rangle - |000\rangle - |111\rangle - |011\rangle \}
 \end{cases} \quad (48.3)$$

به همین ترتیب، اگر نتایج اندازه‌گیری آلیس  $\{|\psi_-\rangle, |\varphi_+\rangle, |\varphi_-\rangle\}$  باشد، به ترتیب حالت‌های زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 |\psi_-\rangle &\Rightarrow \frac{1}{4} \left\{ \alpha|010\rangle|1\rangle - |011\rangle|0\rangle + |100\rangle|0\rangle - |101\rangle|1\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \beta(-|000\rangle|1\rangle - |001\rangle|0\rangle - |110\rangle|0\rangle - |111\rangle|1\rangle) \right\} \\
 |\varphi_+\rangle &\Rightarrow \frac{1}{4} \left\{ \alpha|000\rangle|1\rangle + |001\rangle|0\rangle + |110\rangle|0\rangle + |111\rangle|1\rangle \right. \\
 &\quad \left. + \beta(|010\rangle|1\rangle - |011\rangle|0\rangle - |100\rangle|0\rangle - |101\rangle|1\rangle) \right\} \\
 |\varphi_-\rangle &\Rightarrow \frac{1}{4} \left\{ (\alpha|000\rangle|1\rangle + |001\rangle|0\rangle + |110\rangle|0\rangle + |111\rangle|1\rangle) \right. \\
 &\quad \left. + \beta(-|010\rangle|1\rangle + |011\rangle|0\rangle - |100\rangle|0\rangle + |101\rangle|1\rangle) \right\}
 \end{aligned} \quad (49.3)$$

که عملگرهای مورد نیاز برای هر حالت در جدول‌های ۵.۳ تا ۷.۳ آمده است.

جدول ۵.۳: نتیجه حاصل از اندازه‌گیری  $|\psi_-\rangle$  توسط آلیس و اندازه‌گیری و دسته‌بندی حالت به دست آمده توسط باب و همچنین حالت به دست آمده و عملگر مورد استفاده توسط چارلی برای رسیدن به حالت اصلی

| نتایج اندازه‌گیری باب                                                      | حالت چارلی                          | تبدیل یکانی مناسب |
|----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|-------------------|
| $\frac{1}{4} \{  100\rangle -  000\rangle -  111\rangle -  011\rangle \}$  | $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$  | $I$               |
| $\frac{1}{4} \{  010\rangle -  101\rangle -  001\rangle -  110\rangle \}$  | $\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$  | $X$               |
| $\frac{1}{4} \{ - 100\rangle -  000\rangle -  111\rangle +  011\rangle \}$ | $-\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ | $Z$               |
| $\frac{1}{4} \{  010\rangle -  101\rangle +  001\rangle +  110\rangle \}$  | $\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$  | $XZ$              |

جدول ۶.۳: نتیجه حاصل از اندازه‌گیری  $|\varphi_+\rangle$  توسط آلیس و اندازه‌گیری و دسته‌بندی حالت به دست آمده توسط باب و همچنین حالت به دست آمده و تبدیل یکانی مناسب مورد استفاده توسط چارلی برای رسیدن به حالت اصلی

| تبدیل یکانی مناسب | حالت چارلی                          | نتایج اندازه‌گیری باب                                                      |
|-------------------|-------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $I$               | $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{ 00\rangle +  11\rangle +  01\rangle -  10\rangle\}$  |
| $X$               | $\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{ 00\rangle +  11\rangle -  01\rangle +  10\rangle\}$  |
| $Z$               | $-\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{- 00\rangle -  11\rangle +  01\rangle -  10\rangle\}$ |
| $XZ$              | $\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{ 00\rangle +  11\rangle +  01\rangle -  10\rangle\}$  |

جدول ۷.۳: نتیجه حاصل از اندازه‌گیری  $|\phi_-\rangle$  توسط آلیس و اندازه‌گیری و دسته‌بندی حالت به دست آمده توسط باب و همچنین حالت به دست آمده و تبدیل یکانی مناسب مورد استفاده توسط چارلی برای رسیدن به حالت اصلی

| تبدیل یکانی مناسب | حالت چارلی                          | نتایج اندازه‌گیری باب                                                     |
|-------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $I$               | $\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{ 00\rangle +  11\rangle +  01\rangle -  10\rangle\}$ |
| $X$               | $\alpha 1\rangle + \beta 0\rangle$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{ 00\rangle +  11\rangle -  01\rangle +  10\rangle\}$ |
| $Z$               | $-\alpha 0\rangle + \beta 1\rangle$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{ 01\rangle -  10\rangle -  00\rangle -  11\rangle\}$ |
| $XZ$              | $\alpha 1\rangle - \beta 0\rangle$  | $\frac{1}{\sqrt{2}}\{ 00\rangle +  11\rangle +  01\rangle -  10\rangle\}$ |

باب پس از عملیات اندازه‌گیری سه ذره‌ای، دو بیت اطلاعات کلاسیکی را نیز به چارلی جهت اطلاع ارسال می‌کند. در نتیجه مشاهده می‌شود که تعداد بیت‌های ارسالی در به اشتراک گذاری کوانتومی متفاوت از تعداد بیت کلاسیکی ارسالی در تئوری اطلاعات کوانتومی بنت است و برخلاف ارسال ۲ بیت اطلاعاتی کلاسیکی ارسالی در تئوری بنت، در اشتراک گذاری کوانتومی که حالت براون به عنوان حالت درهم‌تنیده در نظر گرفته می‌شود مجموعاً ۴ بیت اطلاعات کلاسیکی جابه‌جا می‌گردد. در این جا آلیس ۲ بیت اطلاعات کلاسیکی را به چارلی و باب نیز ۲ بیت اطلاعات کلاسیکی خود را در اختیار چارلی قرار می‌دهد.

## ۵.۳ طرح جدیدی برای به اشتراک گذاری حالت تک کیوبیت

در این طرح جدید، ما می‌خواهیم حالتی را بررسی کنیم که در آن، آلیس کیوبیت ۱ و ۲ و باب کیوبیت ۳ و ۴، و چارلی کیوبیت ۵ را در اختیار دارد. آلیس کیوبیت ناشناخته‌ای را که در اختیار دارد با ذراتش ترکیب می‌کند و سپس یک اندازه‌گیری سه ذره‌ای در پایه‌های  $|\gamma_i\rangle$  انجام می‌دهد که ها:  $|\gamma_i\rangle$

$$\begin{aligned}
 |\gamma_1\rangle &= \frac{1}{4}(|000\rangle + |001\rangle + |110\rangle + |111\rangle) , & |\gamma_5\rangle &= \frac{1}{4}(|100\rangle + |101\rangle + |010\rangle + |011\rangle) \\
 |\gamma_2\rangle &= \frac{1}{4}(|000\rangle - |001\rangle - |110\rangle + |111\rangle) , & |\gamma_6\rangle &= \frac{1}{4}(|100\rangle - |101\rangle - |010\rangle + |011\rangle) \\
 |\gamma_3\rangle &= \frac{1}{4}(|000\rangle - |001\rangle + |110\rangle - |111\rangle) , & |\gamma_7\rangle &= \frac{1}{4}(|100\rangle - |101\rangle + |010\rangle - |011\rangle) \\
 |\gamma_4\rangle &= \frac{1}{4}(|000\rangle + |001\rangle - |110\rangle - |111\rangle) , & |\gamma_8\rangle &= \frac{1}{4}(|100\rangle + |101\rangle - |010\rangle - |011\rangle)
 \end{aligned}
 \tag{۵.۳}$$

پس از اندازه گیری در پایه های  $|\gamma_i\rangle$ ، حالت مشترک چارلی و باب به صورت جدول ۸.۳ خواهد بود.

جدول ۸.۳: نتیجه اندازه گیری انجام شده توسط آلیس و حالت درهم تنیده باب و چارلی

| نتایج اندازه گیری آلیس | حالت درهم تنیده باب و چارلی                                                                                                                                     |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ \gamma_1\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\alpha( 1\rangle \phi_{-}\rangle +  0\rangle \psi_{-}\rangle) + \beta( 0\rangle \phi_{+}\rangle +  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |
| $ \gamma_2\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\alpha( 1\rangle \phi_{-}\rangle -  0\rangle \psi_{-}\rangle) - \beta( 0\rangle \phi_{+}\rangle -  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |
| $ \gamma_3\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\alpha( 1\rangle \phi_{-}\rangle -  0\rangle \psi_{-}\rangle) + \beta( 0\rangle \phi_{+}\rangle -  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |
| $ \gamma_4\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\alpha( 1\rangle \phi_{-}\rangle +  0\rangle \psi_{-}\rangle) - \beta( 0\rangle \phi_{+}\rangle -  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |
| $ \gamma_5\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\beta( 1\rangle \phi_{-}\rangle +  0\rangle \psi_{-}\rangle) + \alpha( 0\rangle \phi_{+}\rangle +  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |
| $ \gamma_6\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\beta( 1\rangle \phi_{-}\rangle -  0\rangle \psi_{-}\rangle) - \alpha( 0\rangle \phi_{+}\rangle -  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |
| $ \gamma_7\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\beta( 1\rangle \phi_{-}\rangle -  0\rangle \psi_{-}\rangle) + \alpha( 0\rangle \phi_{+}\rangle -  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |
| $ \gamma_8\rangle$     | $\frac{1}{\sqrt{4}}\left\{\beta( 1\rangle \phi_{-}\rangle +  0\rangle \psi_{-}\rangle) - \alpha( 0\rangle \phi_{+}\rangle +  1\rangle \psi_{+}\rangle)\right\}$ |

نمونه محاسبه حالتی که آلیس  $|\gamma_1\rangle$  را به دست می آورد می توان به شکل زیر نوشت که قبل از اندازه گیری آلیس داریم:

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle_a |\psi_\delta\rangle_{12345} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ (\alpha|\circ\rangle_a + \beta|1\rangle_a) (|\circ\circ1\circ1\rangle_{12345} - |\circ\circ11\circ\rangle_{12345} \\
&\quad + |\circ1\circ\circ\circ\rangle_{12345} + |\circ1\circ11\rangle_{12345} |\circ\circ\circ1\rangle_{12345} + |\circ\circ\circ1\circ\rangle_{12345} \\
&\quad + |111\circ\circ\rangle_{12345} + |11111\rangle_{12345}) \} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \alpha|\circ\circ\circ1\circ1\rangle - \alpha|\circ\circ\circ11\circ\rangle + \alpha|\circ\circ1\circ\circ\circ\rangle - \alpha|\circ\circ1\circ11\rangle \\
&\quad + \alpha|\circ1\circ\circ\circ1\rangle + \alpha|\circ1\circ\circ1\circ\rangle + \alpha|\circ111\circ\circ\rangle + \alpha|\circ11111\rangle \\
&\quad + \beta|1\circ\circ1\circ1\rangle - \beta|1\circ\circ11\circ\rangle + \beta|1\circ1\circ\circ\circ\rangle - \beta|1\circ1\circ11\rangle \\
&\quad + \beta|11\circ\circ\circ1\rangle + \beta|11\circ\circ1\circ\rangle + \beta|1111\circ\circ\rangle + \beta|111111\rangle \} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \{ \alpha|\circ\circ\circ\rangle(|1\circ1\rangle - |11\circ\rangle) + \alpha|\circ\circ1\rangle(|\circ\circ\circ\rangle - |\circ11\rangle) \\
&\quad + \alpha|\circ1\circ\rangle(|\circ\circ1\rangle + |\circ1\circ\rangle) + \alpha|\circ11\rangle(|1\circ\circ\rangle + |111\rangle) \\
&\quad + \beta|1\circ\circ\rangle(|1\circ1\rangle - |11\circ\rangle) + \beta|1\circ1\rangle(|\circ\circ\circ\rangle - |\circ11\rangle) \\
&\quad + \beta|11\circ\rangle(|\circ\circ1\rangle + |\circ1\circ\rangle) + \beta|111\rangle(|1\circ\circ\rangle + |111\rangle) \}
\end{aligned} \tag{۵۱.۳}$$

که می‌توان سه ذره متعلق به آلایس را با توجه به (۵۰.۳) به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
|\circ\circ\circ\rangle &= |\gamma_1\rangle + |\gamma_2\rangle + |\gamma_3\rangle + |\gamma_4\rangle, & |1\circ\circ\rangle &= |\gamma_5\rangle + |\gamma_6\rangle + |\gamma_7\rangle + |\gamma_8\rangle \\
|\circ\circ1\rangle &= |\gamma_1\rangle - |\gamma_2\rangle + |\gamma_3\rangle - |\gamma_4\rangle, & |1\circ1\rangle &= |\gamma_5\rangle - |\gamma_6\rangle - |\gamma_7\rangle + |\gamma_8\rangle \\
|11\circ\rangle &= |\gamma_1\rangle - |\gamma_2\rangle + |\gamma_3\rangle - |\gamma_4\rangle, & |\circ1\circ\rangle &= |\gamma_5\rangle - |\gamma_6\rangle + |\gamma_7\rangle - |\gamma_8\rangle \\
|111\rangle &= |\gamma_1\rangle + |\gamma_2\rangle - |\gamma_3\rangle - |\gamma_4\rangle, & |\circ11\rangle &= |\gamma_5\rangle + |\gamma_6\rangle - |\gamma_7\rangle - |\gamma_8\rangle
\end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

بنابراین با کمی ساده‌سازی، اگر آلایس  $|\gamma_1\rangle$  را به دست آورد، ۳ ذره باقی‌مانده نزد چارلی و باب به شکل زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \{ \alpha(|1\circ\rangle_B |1\rangle_C - |11\rangle_B |\circ\rangle_C + |\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C - |\circ1\rangle_B |1\rangle_C) \\
&\quad + \beta(|\circ\circ\rangle_B |1\rangle_C + |\circ1\rangle_B |\circ\rangle_C + |1\circ\rangle_B |\circ\rangle_C + |11\rangle_B |1\rangle_C) \} \\
&= \frac{1}{2} \{ |1\circ\rangle_B (\alpha|1\rangle_C + \beta|\circ\rangle_C) + |11\rangle_B (-\alpha|\circ\rangle_C + \beta|1\rangle_C) \\
&\quad + |\circ\circ\rangle_B (\alpha|\circ\rangle_C + \beta|1\rangle_C) + |\circ1\rangle_B (-\alpha|1\rangle_C + \beta|\circ\rangle_C) \}
\end{aligned} \tag{۵۳.۳}$$

چارلی نیز با به کار بردن عملگر مناسب به حالت اصلی خود دست می یابد اما آنچه در این نمونه اشتراک گذاری مشاهده می شود، که علاوه بر ارسال ۳ بیت کلاسیکی توسط آلیس به چارلی، باب نیز باید ۲ بیت کلاسیکی اضافی را به چارلی ارسال کند. جزئیات بیشتر این عملیات دوربری در پیوست پ.۱.۱ آمده است.

## ۶.۳ دوربری حالت ناشناخته کیودیت دو کیوبیته

در این جا شرایط ویژه ای را در نظر می گیریم که آلیس یک سیستم از کیودیت های دو کیوبیته را در اختیار دارد که در عین حال ناشناخته و از آن اطلاعی ندارد و می خواهد این حالت را به باب ارسال کند. اکنون فرض می کنیم که کیوبیت های ۱، ۲، ۳، متعلق به آلیس و کیوبیت های ۴، ۵ به باب اختصاص دارد و آلیس می خواهد یک کیودیت از نوع دو کیوبیته به صورت:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{ab} &= \alpha|00\rangle_{ab} + \mu|01\rangle_{ab} + \gamma|10\rangle_{ab} + \beta|11\rangle_{ab} \\ &= \alpha|00\rangle_{ab} + \mu|01\rangle_{ab} + \gamma|10\rangle_{ab} + \beta|11\rangle_{ab} \end{aligned} \quad (۵۴.۳)$$

را به باب ارسال کند که در این جا  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\mu$  اعداد مختلط هستند که در شرط تعامد و بهنجارش  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\mu|^2 = 1$  صدق می کنند که حالت ترکیب شده ای حالت ناشناخته و حالت براون به صورت زیر آماده می گردد:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_b &= (\alpha|00\rangle_{ab} + \mu|01\rangle_{ab} + \gamma|10\rangle_{ab} + \beta|11\rangle_{ab}) \\ &\otimes \frac{1}{2\sqrt{2}}(|00101\rangle_{12345} - |00110\rangle_{12345} + |01000\rangle_{12345} - |01011\rangle_{12345} \\ &\quad + |10001\rangle_{12345} + |10010\rangle_{12345} + |11100\rangle_{12345} + |11111\rangle_{12345}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(\alpha|0000101\rangle_{ab12345} - \alpha|0000110\rangle_{ab12345} + \alpha|0001000\rangle_{ab12345} \\ &\quad - \alpha|0001011\rangle_{ab12345} + \alpha|0010001\rangle_{ab12345} + \alpha|0010010\rangle_{ab12345} \\ &\quad + \alpha|0011100\rangle_{ab12345} + \alpha|0111111\rangle_{ab12345} + \mu|1000101\rangle_{ab12345} \\ &\quad - \mu|1000110\rangle_{ab12345} + \mu|1001000\rangle_{ab12345} - \mu|1001011\rangle_{ab12345} \\ &\quad + \mu|1010001\rangle_{ab12345} + \mu|1010010\rangle_{ab12345} + \mu|1011100\rangle_{ab12345} \\ &\quad + \mu|1011111\rangle_{ab12345} + \gamma|0100101\rangle_{ab12345} - \gamma|0100110\rangle_{ab12345} \\ &\quad + \gamma|0101000\rangle_{ab12345} - \gamma|0101011\rangle_{ab12345} + \gamma|0110001\rangle_{ab12345} \\ &\quad + \gamma|0110010\rangle_{ab12345} + \gamma|0111100\rangle_{ab12345} + \gamma|0111111\rangle_{ab12345} \\ &\quad + \beta|1100101\rangle_{ab12345} - \beta|1100110\rangle_{ab12345} + \beta|1101000\rangle_{ab12345} \\ &\quad - \beta|1101011\rangle_{ab12345} + \beta|1110001\rangle_{ab12345} + \beta|1110010\rangle_{ab12345} \\ &\quad + \beta|1111100\rangle_{ab12345} + \beta|1111111\rangle_{ab12345}) \end{aligned} \quad (۵۵.۳)$$

که می‌توان آن را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_a \otimes |\psi_5\rangle = & \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \alpha |^{\circ\circ\circ\circ}1\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} - \alpha |^{\circ\circ\circ\circ}1\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} \right. \\
 & + \alpha |^{\circ\circ\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} - \alpha |^{\circ\circ\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \alpha |^{\circ\circ}1^{\circ\circ}\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} \\
 & + \alpha |^{\circ\circ}1^{\circ\circ}\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \alpha |^{\circ\circ}1^11\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} + \alpha |^{\circ\circ}1^11\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} \\
 & + \mu |^1\circ\circ\circ1\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} - \mu |^1\circ\circ\circ1\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \mu |^1\circ\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} \\
 & - \mu |^1\circ\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \mu |^1\circ}1^{\circ\circ}\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} + \mu |^1\circ}1^{\circ\circ}\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} \\
 & + \mu |^1\circ}1^11\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} + \mu |^1\circ}1^11\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \gamma |^{\circ}1^{\circ\circ}1\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} \\
 & - \gamma |^{\circ}1^{\circ\circ}1\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \gamma |^{\circ}1^{\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} - \gamma |^{\circ}1^{\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} \\
 & + \gamma |^{\circ}1^1\circ\circ\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} + \gamma |^{\circ}1^1\circ\circ\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \gamma |^{\circ}1^111\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} \\
 & + \gamma |^{\circ}1^111\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \beta |^11^{\circ\circ}1\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} - \beta |^11^{\circ\circ}1\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} \\
 & + \beta |^11^{\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} - \beta |^11^{\circ}1^{\circ}\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \beta |^111^{\circ\circ}\rangle_{ab123}|^{\circ}1\rangle_{45} \\
 & + \beta |^111^{\circ\circ}\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} + \beta |^111^11\rangle_{ab123}|^{\circ\circ}\rangle_{45} + \beta |^111^11\rangle_{ab123}|^11\rangle_{45} \Big) \\
 & \quad \quad \quad (56.3)
 \end{aligned}$$

اگر پایه‌های اندازه‌گیری آلیس به صورت زیر تعریف شوند:

$$\begin{aligned}
 |\psi_5\rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\varphi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_+\rangle|^111\rangle + |\psi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\psi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_9 = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_+\rangle|^111\rangle + |\psi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\varphi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle \} \\
 |\psi_5\rangle_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\varphi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_-\rangle|^111\rangle + |\psi_+\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\psi_-\rangle|^1\circ\circ\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^111\rangle + |\psi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle - |\varphi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle \} \\
 |\psi_5\rangle_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\psi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle - |\varphi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_-\rangle|^111\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^111\rangle + |\psi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_+\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\varphi_-\rangle|^1\circ\circ\rangle \} \\
 |\psi_5\rangle_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\psi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle - |\varphi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_+\rangle|^111\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_+\rangle|^111\rangle + |\psi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_+\rangle|^{\circ\circ}1\rangle - |\varphi_-\rangle|^1\circ\circ\rangle \} \\
 |\psi_5\rangle_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_+\rangle|^111\rangle - |\psi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\varphi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle - |\psi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle - |\varphi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_+\rangle|^111\rangle \} \\
 |\psi_5\rangle_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^111\rangle - |\psi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_+\rangle|^{\circ\circ}1\rangle - |\varphi_-\rangle|^1\circ\circ\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^1\circ\circ\rangle - |\psi_+\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\varphi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_-\rangle|^111\rangle \} \\
 |\psi_5\rangle_7 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^111\rangle - |\psi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_+\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\varphi_-\rangle|^1\circ\circ\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_{15} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_-\rangle|^1\circ\circ\rangle - |\psi_+\rangle|^{\circ\circ}1\rangle - |\varphi_+\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_-\rangle|^111\rangle \} \\
 |\psi_5\rangle_8 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_+\rangle|^111\rangle - |\psi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle + |\varphi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle - |\varphi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle \}, \quad |\psi_5\rangle_{16} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\psi_+\rangle|^1\circ\circ\rangle - |\psi_-\rangle|^{\circ\circ}1\rangle + |\varphi_-\rangle|^{\circ}1^{\circ}\rangle - |\varphi_+\rangle|^111\rangle \} \\
 & \quad \quad \quad (57.3)
 \end{aligned}$$

در نهایت با جایگزینی پایه‌های اندازه‌گیری آلیس که ۱۶ حالت می‌باشد (جزئیات محاسبات آن در پیوست پ.۲ آمده است). آلیس می‌تواند در پایه  $|\psi_5\rangle_i$  اندازه‌گیری انجام دهد اگر برای مثال  $|\psi_5\rangle_1$  را به دست آورد:

$$\begin{aligned}
|\psi_5\rangle_1 &\Rightarrow \frac{1}{4} \{ \alpha|\circ 1\rangle_B - \alpha|1\circ\rangle_B + \alpha|\circ 1\rangle_B + \alpha|1\circ\rangle_B - \mu|\circ\circ\rangle_B \\
&\quad + \mu|11\rangle_B + \mu|\circ\circ\rangle_B + \mu|11\rangle_B + \gamma|\circ\circ\rangle_B - \gamma|11\rangle_B + \gamma|\circ\circ\rangle_B \\
&\quad + \gamma|11\rangle_B - \beta|\circ 1\rangle_B + \beta|1\circ\rangle_B + \beta|\circ 1\rangle_B + \beta|1\circ\rangle_B \} \\
&= \{ \alpha|\circ 1\rangle_B + \mu|11\rangle_B + \gamma|\circ\circ\rangle_B + \beta|1\circ\rangle_B \}
\end{aligned} \quad (58.3)$$

پس از آن باب برای به دست آوردن حالت دو کیوبیته اصلی و اولیه باید ترکیبی از دو تبدیل یکانی را به کار بندد که تبدیل یکانی اول روی ذره اول و تبدیل یکانی دوم روی ذره دوم خود اثر می کند. به عنوان مثال:

$$I \otimes \sigma_1 |\circ 1\rangle = |\circ\circ\rangle \quad (59.3)$$

تمام نتایج ممکن و عملگرهای مورد نیاز باب در جدول ۹.۳ خلاصه شده است.

جدول ۹.۳: نتیجه اندازه گیری انجام شده توسط آلیس و حالت ارسالی به باب و فهرست تبدیل یکانی باب در هر اندازه گیری

| نتایج اندازه گیری آلیس | حالت باب                                                                                                     | تبدیل یکانی مورد استفاده باب  |
|------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|
| $ \psi_5\rangle_1$     | $\alpha \circ 1\rangle_{45} + \mu 11\rangle_{45} + \gamma \circ\circ\rangle_{45} + \beta 1\circ\rangle_{45}$ | $I \otimes \sigma_1$          |
| $ \psi_5\rangle_2$     | $\alpha \circ 1\rangle_{45} - \mu 11\rangle_{45} + \gamma \circ\circ\rangle_{45} - \beta 1\circ\rangle_{45}$ | $\sigma_3 \otimes \sigma_1$   |
| $ \psi_5\rangle_3$     | $\alpha \circ 1\rangle_{45} + \mu 11\rangle_{45} - \gamma \circ\circ\rangle_{45} - \beta 1\circ\rangle_{45}$ | $I \otimes i\sigma_2$         |
| $ \psi_5\rangle_4$     | $\alpha \circ 1\rangle_{45} - \mu 11\rangle_{45} - \gamma \circ\circ\rangle_{45} + \beta 1\circ\rangle_{45}$ | $\sigma_3 \otimes i\sigma_2$  |
| $ \psi_5\rangle_5$     | $\alpha 11\rangle_{45} + \mu \circ 1\rangle_{45} + \gamma 1\circ\rangle_{45} + \beta \circ\circ\rangle_{45}$ | $\sigma_1 \otimes \sigma_1$   |
| $ \psi_5\rangle_6$     | $\alpha 11\rangle_{45} + \mu \circ 1\rangle_{45} - \gamma 1\circ\rangle_{45} - \beta \circ\circ\rangle_{45}$ | $\sigma_1 \otimes i\sigma_2$  |
| $ \psi_5\rangle_7$     | $\alpha 11\rangle_{45} - \mu \circ 1\rangle_{45} + \gamma 1\circ\rangle_{45} - \beta \circ\circ\rangle_{45}$ | $i\sigma_2 \otimes \sigma_1$  |
| $ \psi_5\rangle_8$     | $\alpha 11\rangle_{45} - \mu \circ 1\rangle_{45} - \gamma 1\circ\rangle_{45} + \beta \circ\circ\rangle_{45}$ | $i\sigma_2 \otimes i\sigma_2$ |
| $ \psi_5\rangle_9$     | $\alpha \circ\circ\rangle_{45} - \mu 1\circ\rangle_{45} + \gamma \circ 1\rangle_{45} - \beta 11\rangle_{45}$ | $I \otimes I$                 |
| $ \psi_5\rangle_{10}$  | $\alpha \circ\circ\rangle_{45} + \mu 1\circ\rangle_{45} - \gamma \circ 1\rangle_{45} - \beta 11\rangle_{45}$ | $I \otimes \sigma_3$          |
| $ \psi_5\rangle_{11}$  | $\alpha \circ\circ\rangle_{45} - \mu 1\circ\rangle_{45} + \gamma \circ 1\rangle_{45} - \beta 11\rangle_{45}$ | $\sigma_3 \otimes I$          |
| $ \psi_5\rangle_{12}$  | $\alpha \circ\circ\rangle_{45} - \mu 1\circ\rangle_{45} - \gamma \circ 1\rangle_{45} + \beta 11\rangle_{45}$ | $\sigma_3 \otimes \sigma_3$   |
| $ \psi_5\rangle_{13}$  | $\alpha 1\circ\rangle_{45} + \mu \circ\circ\rangle_{45} + \gamma 11\rangle_{45} + \beta \circ 1\rangle_{45}$ | $\sigma_1 \otimes I$          |
| $ \psi_5\rangle_{14}$  | $\alpha 1\circ\rangle_{45} + \mu \circ\circ\rangle_{45} - \gamma 11\rangle_{45} - \beta \circ 1\rangle_{45}$ | $\sigma_1 \otimes \sigma_3$   |
| $ \psi_5\rangle_{15}$  | $\alpha 1\circ\rangle_{45} - \mu \circ\circ\rangle_{45} + \gamma 11\rangle_{45} - \beta \circ 1\rangle_{45}$ | $i\sigma_2 \otimes I$         |
| $ \psi_5\rangle_{16}$  | $\alpha 1\circ\rangle_{45} - \mu \circ\circ\rangle_{45} - \gamma 11\rangle_{45} + \beta \circ 1\rangle_{45}$ | $i\sigma_2 \otimes \sigma_3$  |



## فصل ۴

# شرایط لازم و کافی برای دوربری کامل کوانتومی

### ۱.۴ مقدمه

در فصل قبل، در بحث پیرامون دوربری کوانتومی با ابعاد بالا حالت براون [۵۱]، مشاهده شد که درهم‌تنیدگی بین حالت ۵ کیوبیته حتی در صورت فقدان ذرات پس از گرفتن ماتریس چگالی تقلیل یافته حفظ گردید. بنابراین با بالا بردن ابعاد کانال درهم‌تنیده، باز هم با از دست دادن ذرات بیشتر متناسب با ابعاد کانال در صورت وجود کانال درهم‌تنیده مناسب در امر دوربری کوانتومی، درهم‌تنیدگی از بین نخواهد رفت که این ویژگی برتر را می‌توان در انتقال اطلاعات در کامپیوترهای کوانتومی به خدمت گرفت. بنابراین بایستی به طرح احتمالاتی که برای دوربری کوانتومی سیستم  $n$  کیوبیته [۴۳] مطرح شده است؛ توجه بیشتری برای بالا بردن احتمال رخداد دوربری کامل بهره جست. البته در این راستا مشکلات اساسی برای انتخاب چنین کانال کوانتومی و کامل شدن فرآیند پروتکل دوربری کامل وجود دارد که از مهمترین عوامل آن می‌توان به چند مورد اشاره بیشتری نمود:

- انتخاب پایه‌های دو به دو متعامد به عنوان پایه‌های اندازه‌گیری آلیس که شرایط تعامد را دارا باشند، بسیار دشوار است.
- حدس تبدیلات یکانی که باب برای به‌دست آوردن ذره اصلی به کار می‌برد، عملیات بیشتری را در ارسال کیوبیت‌های ناشناخته در ابعاد بالاتر به خود اختصاص می‌دهد.

بنابراین طبیعی است که این سؤال پرسیده شود؛ آیا می‌توانیم شرایط لازم و مناسب و کافی را به قسمی بیابیم که تحت آن شرایط، یک کانال  $n$  کیوبیته را برای دوربری کامل مهیا سازیم؟ لی – ینگ شانگ – گان<sup>۱</sup> در مرجع [۵۴] به شرایط لازم و کافی برای یک کانال درهم‌تنیده

<sup>۱</sup>Li – Ying Shang – Guan

$n$  کیوبیته برای دوربری کوانتومی با احتمال و هماندهی بالا اشاره نموده است. در این فصل، شرایط لازم و کافی را پیرامون یک کانال درهم‌تنیده و پایه‌های اندازه‌گیری آلیس برای انجام کامل دوربری کوانتومی یک حالت تک کیوبیت توسط یک کانال درهم‌تنیده  $n$  کیوبیته مورد بررسی قرار می‌دهیم.

## ۲.۴ کانال درهم‌تنیده حالت نرمال $|W\rangle_N$ در دوربری کامل

در حالت کلی حالت  $|W\rangle$  را به صورت زیر طبق مرجع [۵۴] می‌توان نوشت:

$$|W\rangle^N = \frac{1}{\sqrt{2(N-1)}} \left( |1^0 \dots 0\rangle + \dots + |0 \dots 1^0\rangle + \sqrt{N-1} |0^0 \dots 1\rangle \right) \quad (1.4)$$

که بر اساس آن، در مرجع [۵۵] یک حالت  $N$  کیوبیته از یک کانال درهم‌تنیده برای حالت  $W$  نرمال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|W\rangle_N = \sum_{i=1}^N a_i |i\rangle = \sum_{i=1}^{N-1} a_i |i\rangle |0\rangle + a_N |0^0 \dots 0\rangle |1\rangle, \quad \left( \sum_{i=1}^{N-1} a_i^2 = a_N^2 \right) \quad (2.4)$$

## ۳.۴ دوربری یک حالت ناشناخته تک کیوبیت توسط یک کانال درهم‌تنیده $N$ کیوبیته به طور کامل

فرض کنید یک حالت تک کیوبیت  $X$  دلخواه که قرار است دوربری شود، به شکل نرمال زیر است:

$$|\Lambda\rangle_x = \sum_j C_j |j\rangle_x, \quad j \in \{0, 1, 2, \dots, d-1\} \quad (3.4)$$

که شکل باز شده آن به صورت؛

$$|\Lambda\rangle_x = C_0 |0\rangle_x + C_1 |1\rangle_x + C_2 |2\rangle_x + C_3 |3\rangle_x + \dots + C_{d-1} |d-1\rangle_x$$

است که  $C_j$ ها پارامترهای مختلط و ناشناخته‌ای می‌باشند که در شرط بهنجارش  $\sum_j C_j^2 = 1$  صدق می‌کنند. در ضمن حالت  $n$ -کیوبیت به شکل  $|\phi\rangle_{1,2,\dots,n}$  بین آلیس و باب به عنوان کانال کوانتومی، به اشتراک گذاشته شده است که در آن ذرات  $i$  و  $i+1, \dots, n$  و  $i-1, i, \dots, 1$  به ترتیب متعلق به آلیس و باب هستند. حالت نهایی را می‌توان، به شکل زیر نمایش داد:

$$|\phi\rangle = |\Lambda\rangle_x \otimes |\phi\rangle_{1,2,\dots,n} \quad (4.4)$$

مطابق با اصل برهم نهی حالات و اپراتور تبدیل، تابع موج  $|\phi\rangle$  را می‌توان، با توجه به مرجع [۵۴] با جملات مجددی به صورت زیر دسته بندی نمود:

$$|\phi\rangle = |\Lambda\rangle_x \otimes |\phi\rangle_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^m |\phi_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n}\rangle \sigma_i^k \cdot |\Lambda_i\rangle, \quad (m \leq d^n) \quad (5.4)$$

در این جا  $m$  تعداد پایه‌های اندازه‌گیری آلیس می‌باشند که آلیس پس از اندازه‌گیری در پایه مورد نظر، نتیجه اندازه‌گیری خود را به باب مخبره می‌کند و در نهایت باب نیز با کسب دو بیت کلاسیکی از طرف آلیس عملگر تبدیل یکانی مناسب  $\sigma_i^k$  را به کار می‌بندد تا عین حالت اصلی در دست آلیس را، به صورت  $|\Lambda\rangle_i = \sum_j C_j |j\rangle_i$ ،  $j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$  بازسازی کند و  $|\varphi^k\rangle_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n}$  پایه‌های نرمال شده هستند.  $\sigma_i^k$  اپراتور تبدیل<sup>۲</sup> نامیده می‌شود [۵۶] برای انجام دوربری کوانتومی کامل، آلیس باید پایه‌های متعامد به صورت  $|\varphi^k\rangle_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n}$  که،  $k = 1, \dots, m$  است را روی ذرات  $1, 2, \dots, (i-1), x, (i+1), \dots, n$  اعمال کند. توجه کنید که پایه‌ها متعامد هستند یعنی:

$$\langle \varphi^t_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n} | \varphi^k_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n} \rangle = \begin{cases} 1 & t = k \\ 0 & t \neq k \end{cases} \quad (۶.۴)$$

که برای یک تعداد ثابت  $t$  نتیجه به صورت زیر است:

(۷.۴)

$$\langle \varphi^t_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n} | \phi \rangle = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^m \langle \varphi^t_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n} | \varphi^k_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n} \rangle \cdot \sigma_i^k \cdot |\Lambda\rangle_i = \frac{1}{d} \sigma_i^t |\Lambda\rangle_i$$

پس از آن، آلیس نتیجه اندازه‌گیری خود را به باب می‌فرستد که باب نیز می‌تواند با اعمال، عملگر یکانی مناسب روی ذره  $i$  حالت اصلی و ناشناخته خود که این ذره ناشناخته به صورت زیر تعریف شده است، بازسازی می‌کند:

$$|\Lambda\rangle_x = \sum_j C_j |j\rangle_x, \quad j \in \{0, 1, 2, \dots, d-1\} \quad (۸.۴)$$

برای مثال اگر خروجی اندازه‌گیری شده به وسیله آلیس  $|\varphi^2\rangle_{1, \dots, i-1, x, i+1, \dots, n}$  باشد، باب نیاز دارد که عملگر یکانی  $(\sigma_i^2)^{-1}$  روی ذره‌اش، برای برگرداندن حالت در دست خود به صورت حالت اصلی اولیه، اثر دهد. در این روش، دوربری می‌تواند با احتمال واحد و هماندهی واحد به دست آید.

## ۴.۴ شرایط لازم و مناسب برای دوربری کامل از یک حالت تک کیوبیت دلخواه

در این بخش، در رابطه با، شرایط دوربری کامل از یک حالت تک کیوبیت دلخواه، که به طور فشرده به صورت  $|\Lambda\rangle_x = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  نمایش داده می‌شود، بحث خواهیم کرد که در مرجع [۵۴] قضیه‌ای مرتبط با پایه‌های اندازه‌گیری آلیس و بررسی شرایط تعامد پایه‌ها به صورت زیر عنوان گردیده است:

<sup>۲</sup> transformation operator

**قضیه ۱۰.۴.۴.** اگر برای  $n$  کیویت حالت نرمال شده به عنوان یک کانال کوانتومی درهم تپیده بین آلیس و باب به صورت زیر در نظر گرفته شود:

(۹.۴)

$$|\varphi\rangle_{1,2,\dots,n} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} C_{j_1, j_2, \dots, j_n} |j_1, j_2, \dots, j_n\rangle \quad , (j_i \in \{0, 1\}, i \in \{1, 2, \dots, n\})$$

که در آن ذره  $i$ ام به باب و بقیه ذرات باقی مانده به آلیس متعلق است اگر و تنها اگر (شرایط لازم و کافی):

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n=0} C_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_n}^\varphi = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n=0} C_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, 1, j_{i+1}, \dots, j_n}^\varphi \quad (10.4)$$

$$\sum_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, j_{i+1}, \dots, j_n=0} C_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, 0, j_{i+1}, \dots, j_n} \cdot C_{j_1, j_2, \dots, j_{i-1}, 1, j_{i+1}, \dots, j_n} = 0 \quad (11.4)$$

در این صورت شرایط دوربری یک حالت دلخواه و ناشناخته  $|\Lambda\rangle_x = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)_x$  فراهم می آید.

**فرض:** برای راحتی چهار حالت را که به صورت زیر تعریف شده اند، در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} |\varphi^1\rangle &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n\rangle \\ &+ \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n\rangle \\ |\varphi^2\rangle &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n\rangle \\ &+ \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n\rangle \\ |\varphi^3\rangle &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n\rangle \\ &- \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n\rangle \\ |\varphi^4\rangle &= \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n\rangle \\ &- \sum_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} x j_{i+1} \dots j_n} C_{j_1 j_2 \dots j_{i-1} 1 j_{i+1} \dots j_n} |j_1 j_2 \dots j_{i-1} 0 j_{i+1} \dots j_n\rangle \end{aligned} \quad (12.4)$$

که همگی دوه دو متعامد هستند؛ بنابراین پروتکل دوربری کوانتومی را می توان برای پایه های فرض

شده در رابطه (۱۲.۴) زیر بر اساس رابطه (۵.۴) به طور فشرده نوشت:

$$|\phi\rangle = |\Lambda\rangle_x \otimes |\phi\rangle_{1,2,\dots,n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^m |\phi_{1,2,\dots,i-1,i+1,\dots,n}\rangle \sigma_i^k \cdot |\Lambda_i\rangle \quad (13.4)$$

که در این رابطه  $d = 2$  و  $m = 4$  و  $(\sigma_i^1 = I, \sigma_i^2 = X, \sigma_i^3 = Z, \sigma_i^4 = iY)$  به عنوان تبدیلات یکانی مورد نیاز باب برای رسیدن به حالت اصلی  $|\Lambda\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  می باشد که در دوربری مورد استفاده قرار می گیرند. برای اثبات این قضیه، به عنوان مثال حالت براون را در رابطه (۲۲.۳) در نظر می گیریم:

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \{ |00101\rangle - |00110\rangle + |01000\rangle - |01011\rangle + |10001\rangle + |10010\rangle + |11100\rangle + |11111\rangle \} \quad (14.4)$$

که ضرایب این کانال درهم تنیده به صورت  $C_{00101} = C_{01000} = C_{10001} = C_{10010} = C_{11100} = C_{11111} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}}$  و بقیه ضرایب صفر هستند. بسته به این که کدام ذره را بخواهیم به باب ارسال کنیم و کدام ذرات در اختیار آلیس هستند؛ فرض کنیم ذره ۴ در اختیار باب و ذره ناشناخته و ذرات (۱, ۲, ۳, ۵) در اختیار آلیس می باشند بنابراین برای اثبات شرط اول قضیه، در رابطه (۱۰.۴) برای حالت براون، به روش زیر عمل می کنیم:

$$\sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^1 C_{j_1 j_2 j_3 0 j_5}^2 = \sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^1 C_{j_1 j_2 j_3 1 j_5}^2 \Rightarrow C_{00101}^2 + C_{01000}^2 + C_{10001}^2 + C_{11100}^2 = C_{10010}^2 + C_{11111}^2 + C_{00110}^2 + C_{01011}^2 = \frac{1}{2} \quad (15.4)$$

و شرط دوم آن قضیه، با استفاده از رابطه (۱۱.۴) به دست می آید.

$$\begin{aligned} \sum_{j_1, j_2, j_3, j_5=0}^1 C_{j_1 j_2 j_3 0 j_5}^2 \cdot C_{j_1 j_2 j_3 1 j_5}^2 &= 0 \\ \Rightarrow C_{00101} \cdot C_{10010} + C_{00101} \cdot C_{11111} + C_{00101} \cdot C_{00110} &+ C_{00101} \cdot C_{01011} + C_{01000} \cdot C_{10010} + C_{01000} \cdot C_{11111} \\ + C_{01000} \cdot C_{00110} + C_{01000} \cdot C_{01011} + C_{10001} \cdot C_{10010} &+ C_{10001} \cdot C_{11111} + C_{10001} \cdot C_{00110} + C_{10001} \cdot C_{01011} \\ + C_{11100} \cdot C_{10010} + C_{11100} \cdot C_{11111} + C_{11100} \cdot C_{00110} &+ C_{11100} \cdot C_{01011} = 0 \end{aligned} \quad (16.4)$$

و بنابراین برای ذرات دیگر و همچنین حالت های دیگری که در دوربری کوانتومی کامل به کار می روند این قضیه قابل اثبات است.



# فصل ۵

## خلاصه و نتیجه گیری

### نتیجه گیری

درهم تنیدگی قلب همه‌ی شاخه‌های اطلاعات و محاسبات کوانتومی در مکانیک کوانتومی است از درهم تنیدگی می‌توان در تکنیک انتقال اطلاعات میان دو یا چند ذره به علت وجود همبستگی در فواصل طولانی بهره جست که این انتقال اطلاعات بین فرستنده و گیرنده مربوط به حالت ناشناخته‌ای است که ماهیت آن برای هیچ‌یک از طرفین مشخص نیست. از کاربردهای درهم تنیدگی در مکانیک کوانتومی می‌توان فرایندهای، دوربری کوانتومی، ابرفشرده‌سازی و رمزنگاری کوانتومی و.... را نام برد.

در این پژوهش در فصل اول، پس از بررسی مفهوم درهم تنیدگی و همبستگی کوانتومی بین چند ذره، شرط اولیه برای انجام دوربری کوانتومی، وجود درهم تنیدگی بین ذرات است که اگر این درهم تنیدگی بیشینه باشد، امکان دوربری کامل فراهم می‌گردد. در غیر این صورت دوربری با احتمال غیرصفر امکان پذیر خواهد بود.

در فصل دوم این پژوهش، پس از بیان مشروح فرآیند دوربری کامل یک کیوبیت از طریق یک کانال درهم تنیده دو کیوبیتی، به تفاوت‌های عمده‌ای که بین دوربری کوانتومی و ابرفشرده‌سازی وجود دارد اشاره شد. در همین راستا مشاهده کردیم که دوربری کوانتومی دقیقاً عکس عمل ابرفشرده‌سازی است. در دوربری کوانتومی با ارسال دوبیت پیام کلاسیکی، یک کیوبیت منتقل می‌شود اما در ابرفشرده‌سازی با ارسال یک کیوبیت، دوبیت اطلاعات کوانتومی ارسال می‌گردد. بنابراین در دوربری کوانتومی:

$$\lvert ebit \rangle + \lvert cbit \rangle \Rightarrow (\lvert qubit \rangle) \quad (۱.۵)$$

و در ابرفشرده‌سازی:

$$\lvert ebit \rangle + (\lvert qubit \rangle) \Rightarrow (\lvert cbit \rangle) \quad (۲.۵)$$

بنابراین در دوربری کوانتومی از طریق کانال درهم‌تنیده دو کیوبیته برای انتقال یک کیوبیت تنها دو بیت کلاسیکی کافی است.

در فصل سوم، با بالا رفتن بعد کانال درهم‌تنیده، همبستگی و ارتباط پیچیده به‌وجود آمده بین چند ذره نشان داده شد. مناسب بودن حالت درهم‌تنیدگی در دوربری کوانتومی بسیار اهمیت دارد که نتیجه شده است که، حالت  $W$  نرمال برای فرآیند دوربری کوانتومی در چنین وضعیتی مناسب نیست و تنها یک نمونه از نوع خاصی از حالت  $W$  است که با دادن وزن‌های مناسب از آن در فرآیند دوربری کوانتومی می‌توان استفاده کرد. به‌عنوان نتیجه فرعی روابط مشخص شد، که حالت سه کیوبیته  $GHZ$  در برابر از دست دادن ذره، درهم‌تنیدگی خود را از دست می‌دهد اما حالت  $W$  اصلاح شده، حتی با وجود فقدان ذره، درهم‌تنیدگی خود را حفظ می‌کند.

در ادامه مباحث با تعمیم روابط مرحله قبل نشان دادیم حالت ۵ کیوبیته حتی با وجود فقدان دو ذره، باز هم درهم‌تنیدگی بین ذرات باقی‌مانده را حفظ می‌کند. لذا حتی می‌توان از آن برای ارسال یک کیوبیت و یا حتی ارسال یک کیودیت دو کیوبیته بهره برد.

با توجه به آن‌که، انتخاب پایه‌های مناسب دو به دو متعامد به‌عنوان پایه‌های اندازه‌گیری آلیس بسیار دشوار است و به‌علت الزام در انتخاب چنین پایه‌هایی، در ابعاد بالا، برای ارسال تک کیوبیت، قضایای مطرح شده در فصل ۴ را برای رسیدن به دوربری کامل، مورد بررسی قرار دادیم و شرایط لازم و کافی در کانال درهم‌تنیده  $n$  کیوبیته را بیان نمودیم که این شرایط لازم و کافی برای دوربری یک حالت تک کیوبیت با استفاده از یک کانال درهم‌تنیده  $n$  کیوبیته محسوب می‌شد.

# پیوست آ

## محاسبات و روابط دوربری در کانال درهم تنیده سه کیوبیته

### ۱.آ محاسبات ماتریس چگالی تقلیل یافته سیستم‌های سه کیوبیته

طریقه به دست آوردن ماتریس چگالی حالت  $|GHZ\rangle_{123}$  به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\rho_{123} &= |GHZ\rangle_{123} \langle GHZ| \\ &= \frac{1}{2} (|000\rangle_{123} + |111\rangle_{123}) ({}_{123}\langle 000| + {}_{123}\langle 111|) \\ &= \frac{1}{2} (|000\rangle_{123} \langle 000| + |000\rangle_{123} \langle 111| \\ &\quad + |111\rangle_{123} \langle 000| + |111\rangle_{123} \langle 111|)\end{aligned}\tag{1.آ}$$

که پس از به دست آوردن رد ماتریس چگالی، چگالی ماتریس تقلیل یافته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= Tr_3(\rho_{123}) \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle_{12} \langle 00| {}_3\langle 0|0\rangle + |00\rangle_{12} \langle 11| {}_3\langle 0|1\rangle \\ &\quad + |11\rangle_{12} \langle 00| {}_3\langle 1|0\rangle + |11\rangle_{12} \langle 11| {}_3\langle 1|1\rangle) \\ &= \frac{1}{2} (|00\rangle_{12} \langle 00| + |11\rangle_{12} \langle 11|)\end{aligned}\tag{2.آ}$$

## ۲.آ. **طریقه به‌دست آوردن ماتریس چگالی تقلیل یافته برای**

### **حالت $|W_1\rangle_{123}$**

اگر طبق معادله (۴.۳) را در نظر بگیریم:

$$|W_1\rangle_{123} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|100\rangle_{123} + |010\rangle_{123} + \sqrt{2}|001\rangle_{123}) \quad (۳.آ)$$

آن‌گاه ماتریس چگالی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \rho_{123} &= |W_1\rangle_{123} \langle W_1| \\ &= \frac{1}{4} \left( (|100\rangle_{123} + |010\rangle_{123} + \sqrt{2}|001\rangle_{123}) \cdot ({}_{123}\langle 100| + {}_{123}\langle 010| + \sqrt{2}{}_{123}\langle 001|) \right) \\ &= \frac{1}{4} (|100\rangle_{123} \langle 100| + |100\rangle_{123} \langle 010| + \sqrt{2}|100\rangle_{123} \langle 001| \\ &\quad + |010\rangle_{123} \langle 100| + |010\rangle_{123} \langle 010| + \sqrt{2}|010\rangle_{123} \langle 001| \\ &\quad + \sqrt{2}|001\rangle_{123} \langle 100| + \sqrt{2}|001\rangle_{123} \langle 010| + 2|001\rangle_{123} \langle 001|) \end{aligned} \quad (۴.آ)$$

که با گرفتن رد ماتریس روی معادله به‌دست آمده در (۴.آ) مقدار چگالی ماتریس تقلیل یافته را می‌توان برای حالت  $|W_1\rangle_{123}$  به‌دست آورد.

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= Tr_3(\rho_{123}) \\ &= \frac{1}{4} \left( |10\rangle_{12} \langle 10| {}_3\langle 0|0\rangle_3 + |10\rangle_{12} \langle 01| {}_3\langle 0|0\rangle_3 + \sqrt{2}|10\rangle_{12} \langle 00| {}_3\langle 0|1\rangle_3 \right. \\ &\quad + |01\rangle_{12} \langle 10| {}_3\langle 0|0\rangle_3 + |01\rangle_{12} \langle 01| {}_3\langle 0|0\rangle_3 + \sqrt{2}|01\rangle_{12} \langle 00| {}_3\langle 0|1\rangle_3 \\ &\quad + \sqrt{2}|00\rangle_{12} \langle 10| {}_3\langle 1|0\rangle_3 + \sqrt{2}|00\rangle_{12} \langle 01| {}_3\langle 1|0\rangle_3 + 2|00\rangle_{12} \langle 00| {}_3\langle 1|1\rangle_3 \left. \right) \\ &= \frac{1}{4} (|10\rangle_{12} \langle 10| + |10\rangle_{12} \langle 01| + |01\rangle_{12} \langle 10| + |01\rangle_{12} \langle 01| + 2|00\rangle_{12} \langle 00|) \\ &= \frac{1}{4} (|00\rangle_{12} \langle 00| + 2|\varphi^+\rangle_{12} \langle \varphi^+|) \end{aligned} \quad (۵.آ)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} |\varphi^+\rangle_{12} \langle \varphi^+| &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{12} + |10\rangle_{12}) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}({}_{12}\langle 01| + {}_{12}\langle 10|) \\ &= \frac{1}{4} (|01\rangle_{12} \langle 01| + |01\rangle_{12} \langle 10| + |10\rangle_{12} \langle 01| + |10\rangle_{12} \langle 10|) \end{aligned} \quad (۶.آ)$$

## ۳.آ. **اثبات دوربری کوانتومی برای حالت سه کیوبیت $|GHZ\rangle_{123}$**

برای به‌دست آوردن پروتکل دوربری کوانتومی یک حالت ناشناخته در حالتی که کانال کوانتومی درهم‌تنیده  $GHZ$  انتخاب شود، حالت ترکیبی آن با حالت ناشناخته با توجه به رابطه (۹.۳) به

شکل زیر بازنویسی می‌گردد:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_a \otimes |GHZ\rangle_{123} &= (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle_{123} + |111\rangle_{123}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0000\rangle_{a123} + \alpha|0111\rangle_{a123} + \beta|1000\rangle_{a123} + \beta|1111\rangle_{a123}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|000\rangle_{a12}|0\rangle_3 + \alpha|011\rangle_{a12}|1\rangle_3 + \beta|100\rangle_{a12}|0\rangle_3 + \beta|111\rangle_{a12}|1\rangle_3)
 \end{aligned}
 \quad (۷.آ)$$

که با استفاده از معادلات (۱۰.۳) می‌توان مقادیر  $|000\rangle_{a12}$  و  $|011\rangle_{a12}$  و  $|100\rangle_{a12}$  و  $|111\rangle_{a12}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 |000\rangle_{a12} &= \frac{|\psi_1^+\rangle + |\psi_1^-\rangle}{\sqrt{2}} \\
 |111\rangle_{a12} &= \frac{|\psi_1^+\rangle - |\psi_1^-\rangle}{\sqrt{2}} \\
 |100\rangle_{a12} &= \frac{|\psi_2^+\rangle + |\psi_2^-\rangle}{\sqrt{2}} \\
 |011\rangle_{a12} &= \frac{|\psi_2^+\rangle - |\psi_2^-\rangle}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}
 \quad (۸.آ)$$

حال با جایگزینی پایه‌های اندازه‌گیری آلایس (۸.آ) در رابطه‌ی (۷.آ) پروتکل دوربری کوانتومی به صورت زیر بازسازی می‌شود:

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_a \otimes |GHZ\rangle_{123} &= \frac{1}{2}(\alpha(|\psi_1^+\rangle + |\psi_1^-\rangle)|0\rangle_3 + \alpha(|\psi_2^+\rangle - |\psi_2^-\rangle)|1\rangle_3 \\
 &\quad + \beta(|\psi_2^+\rangle + |\psi_2^-\rangle)|0\rangle_3 + \beta(|\psi_1^+\rangle - |\psi_1^-\rangle)|1\rangle_3) \\
 &= \frac{1}{2}(\alpha|\psi_1^+\rangle|0\rangle_3 + \alpha|\psi_1^-\rangle|0\rangle_3 + \alpha|\psi_2^+\rangle|1\rangle_3 - \alpha|\psi_2^-\rangle|1\rangle_3 \\
 &\quad + \beta|\psi_2^+\rangle|0\rangle_3 + \beta|\psi_2^-\rangle|0\rangle_3 + \beta|\psi_1^+\rangle|1\rangle_3 - \beta|\psi_1^-\rangle|1\rangle_3) \\
 &= \frac{1}{2}(|\psi_1^+\rangle(\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |\psi_1^-\rangle(\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) \\
 &\quad + |\psi_2^+\rangle(\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3) + |\psi_2^-\rangle(-\alpha|1\rangle_3 + \beta|0\rangle_3))
 \end{aligned}
 \quad (۹.آ)$$

که در نهایت باب پس از ارسال دوبیت کلاسیکی از سوی آلایس و اطلاع رسانی از پایه اندازه‌گیری خود، درباره این‌که در چه پایه‌ای وی اندازه‌گیری نموده است؛ می‌تواند عملگر یکانی خود را به کار ببرد و حالت اولیه ذره ناشناخته را به دست آورد که در نهایت پایه‌های اندازه‌گیری و تبدیل یکانی مورد نیاز باب بر اساس نتیجه اندازه‌گیری آلایس در جدول ۱.۳ آمده است.

## ۴.آ محاسبات دوربری کوانتومی سه کیوبیته حالت $W$

در ابتدا با ترکیب دو حالت ناشناخته و درهم‌تنیده روابط (۴.۳) و (۹.۳) به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \otimes |W_1\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\circ\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \otimes (|1\circ\circ\rangle_{123} + |\circ1\circ\rangle_{123} + \sqrt{2}|\circ\circ1\rangle_{123}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\circ1\circ\circ\rangle_{a123} + \alpha|\circ\circ1\circ\rangle_{a123} + \alpha\sqrt{2}|\circ\circ\circ1\rangle_{a123} \\ &\quad + \beta|11\circ\circ\rangle_{a123} + \beta|1\circ1\circ\rangle_{a123} + \beta\sqrt{2}|1\circ\circ1\rangle_{a123}) \quad (10.آ) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|\circ1\circ\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \alpha|\circ\circ1\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \alpha\sqrt{2}|\circ\circ\circ\rangle_{a12}|1\rangle_3 \\ &\quad + \beta|11\circ\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \beta|1\circ1\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \beta\sqrt{2}|1\circ\circ\rangle_{a12}|1\rangle_3) \end{aligned}$$

که با در نظر گرفتن پایه‌های اندازه‌گیری آلکس در روابط (۱۳.۳) برای استفاده در معادله (۱۰.آ) ترکیب پایه‌ها را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} |\eta_1^+\rangle_{a12} + |\eta_1^-\rangle_{a12} &= (|1\circ\rangle_{a12} + |\circ\circ1\rangle_{a12}) \\ |\circ\circ\rangle_{a12} &= \frac{|\eta_1^+\rangle_{a12} - |\eta_1^-\rangle_{a12}}{\sqrt{2}} \\ |\xi_1^+\rangle_{a12} + |\xi_1^-\rangle_{a12} &= (|11\rangle_{a12} + |1\circ1\rangle_{a12}) \\ |\circ\circ\circ\rangle_{a12} &= \frac{|\xi_1^+\rangle_{a12} - |\xi_1^-\rangle_{a12}}{\sqrt{2}} \quad (11.آ) \end{aligned}$$

که با قرار دادن رابطه (۱۱.آ) در رابطه (۱۰.آ) در نهایت ادامه محاسبات به صورت زیر در می‌آید.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \otimes |W_1\rangle_{123} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha(|\eta_1^+\rangle_{a12} + |\eta_1^-\rangle_{a12} - |\circ\circ1\rangle_{a12})|\circ\rangle_3 + \alpha|\circ\circ1\rangle_{a12}|\circ\rangle_3\right. \\ &\quad \left.+ \alpha\sqrt{2}\left(\frac{|\xi_1^+\rangle_{a12} - |\xi_1^-\rangle_{a12}}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle_3 + \beta(|\xi_1^+\rangle_{a12} + |\xi_1^-\rangle_{a12} - |1\circ1\rangle_{a12})|\circ\rangle_3\right. \\ &\quad \left.+ \beta|1\circ1\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \beta\sqrt{2}\left(\frac{|\eta_1^+\rangle_{a12} - |\eta_1^-\rangle_{a12}}{\sqrt{2}}\right)|1\rangle_3\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha|\eta_1^+\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \alpha|\eta_1^-\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \alpha|\xi_1^+\rangle_{a12}|1\rangle_3 - \alpha|\xi_1^-\rangle_{a12}|1\rangle_3\right. \\ &\quad \left.+ \beta|\xi_1^+\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \beta|\xi_1^-\rangle_{a12}|\circ\rangle_3 + \beta|\eta_1^+\rangle_{a12}|1\rangle_3 - \beta|\eta_1^-\rangle_{a12}|1\rangle_3\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta_1^+\rangle_{a12}(\alpha|\circ\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |\eta_1^-\rangle_{a12}(\alpha|\circ\rangle_3 - \beta|1\rangle_3)\right. \\ &\quad \left.+ |\xi_1^+\rangle_{a12}(\alpha|1\rangle_3 + \beta|\circ\rangle_3) + |\xi_1^-\rangle_{a12}(-\alpha|1\rangle_3 + \beta|\circ\rangle_3)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\eta_1^+\rangle_{a12} \otimes I(\alpha|\circ\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) + |\eta_1^-\rangle_{a12} \otimes \sigma_3(\alpha|\circ\rangle_3 - \beta|1\rangle_3)\right. \\ &\quad \left.+ |\xi_1^+\rangle_{a12} \otimes \sigma_1(\alpha|1\rangle_3 + \beta|\circ\rangle_3) + |\xi_1^-\rangle_{a12} \otimes (-i\sigma_2)(-\alpha|1\rangle_3 + \beta|\circ\rangle_3)\right) \quad (12.آ) \end{aligned}$$

# پیوست ب

## اثبات روابط دوربری کوانتومی حالت براون در تحلیل مقدماتی

### ب.۱ اثبات ماتریس چگالی برای ذرات ۴ و ۵ از سیستم ۵ کیوبیته

$$\begin{aligned}\rho_{45} = & Tr_{123}(\rho_{12345}) \\ = & \frac{1}{8} (|123\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 01| - |123\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 10| \\ & + |123\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 123|)_{45} \langle 00| - |123\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 123|)_{45} \langle 11| \\ & + |123\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 123|)_{45} \langle 01| + |123\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 123|)_{45} \langle 10| \\ & + |123\rangle\langle 001| + |111\rangle\langle 123|)_{45} \langle 00| + |123\rangle\langle 001| + |111\rangle\langle 123|)_{45} \langle 11| \\ & - |123\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 01| + |123\rangle\langle 001| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 10| \\ & - |123\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 123|)_{45} \langle 00| + |123\rangle\langle 001| + |010\rangle\langle 123|)_{45} \langle 11| \\ & - |123\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 123|)_{45} \langle 01| - |123\rangle\langle 001| + |100\rangle\langle 123|)_{45} \langle 10| \\ & - |123\rangle\langle 001| + |111\rangle\langle 123|)_{45} \langle 00| - |123\rangle\langle 001| + |111\rangle\langle 123|)_{45} \langle 11| \\ & + |123\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 01| - |123\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 10| \\ & + |123\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 123|)_{45} \langle 00| - |123\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 123|)_{45} \langle 11| \\ & + |123\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 123|)_{45} \langle 01| + |123\rangle\langle 010| + |100\rangle\langle 123|)_{45} \langle 10| \\ & + |123\rangle\langle 010| + |111\rangle\langle 123|)_{45} \langle 00| + |123\rangle\langle 010| + |111\rangle\langle 123|)_{45} \langle 11| \\ & - |123\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 01| + |123\rangle\langle 010| + |001\rangle\langle 123|)_{45} \langle 10|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -_{123} \langle 010 | 010 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 00 | +_{123} \langle 010 | 010 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & -_{123} \langle 010 | 100 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 01 | -_{123} \langle 010 | 100 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & -_{123} \langle 010 | 111 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 00 | -_{123} \langle 010 | 111 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 001 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 01 | -_{123} \langle 100 | 001 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 010 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 00 | -_{123} \langle 100 | 010 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 100 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 01 | +_{123} \langle 100 | 100 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 111 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 00 | +_{123} \langle 100 | 111 \rangle_{123} | 01 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 001 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 01 | -_{123} \langle 100 | 001 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 010 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 00 | -_{123} \langle 100 | 010 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 100 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 01 | +_{123} \langle 100 | 100 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 100 | 111 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 00 | +_{123} \langle 100 | 111 \rangle_{123} | 10 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 001 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 01 | -_{123} \langle 111 | 001 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 010 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 00 | -_{123} \langle 111 | 010 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 100 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 01 | +_{123} \langle 111 | 100 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 111 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 00 | +_{123} \langle 111 | 111 \rangle_{123} | 00 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 001 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 01 | -_{123} \langle 111 | 001 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 010 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 00 | -_{123} \langle 111 | 010 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 100 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 01 | +_{123} \langle 111 | 100 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 10 | \\
 & +_{123} \langle 111 | 111 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 00 | +_{123} \langle 111 | 111 \rangle_{123} | 11 \rangle_{45} \langle 11 | \\
 & = \frac{1}{8} \left( |01\rangle\langle 01| - |01\rangle\langle 10| - |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 00| - |00\rangle\langle 11| \right. \\
 & \quad \left. - |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |01\rangle\langle 01| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| \right. \\
 & \quad \left. + |00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| \right) \\
 & = \frac{1}{8} \left( 2|01\rangle\langle 01| + 2|10\rangle\langle 10| + 2|00\rangle\langle 00| + 2|11\rangle\langle 11| \right) \\
 & = \frac{1}{4} \left( |01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10| + |00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| \right)
 \end{aligned}
 \tag{ب.۱}$$

## ب.۲ استفاده از حالت درهم‌تنیده براون برای ارسال تک کیوبیت بین دو کاربر

$$\begin{aligned}
 (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \otimes |\psi_5\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \alpha|000101\rangle_{a12345} - \alpha|000110\rangle_{a12345} \right. \\
 &\quad + \alpha|001000\rangle_{a12345} - \alpha|001011\rangle_{a12345} + \alpha|010001\rangle_{a12345} \\
 &\quad + \alpha|010010\rangle_{a12345} + \alpha|011100\rangle_{a12345} + \alpha|011111\rangle_{a12345} \\
 &\quad + \beta|100101\rangle_{a12345} - \beta|100110\rangle_{a12345} + \beta|101000\rangle_{a12345} \\
 &\quad - \beta|101011\rangle_{a12345} + \beta|110001\rangle_{a12345} + \beta|110010\rangle_{a12345} \\
 &\quad \left. + \beta|111100\rangle_{a12345} + \beta|111111\rangle_{a12345} \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \alpha|00010\rangle_{a1234}|1\rangle_5 - \alpha|00011\rangle_{a1234}|0\rangle_5 \right. \\
 &\quad + \alpha|00100\rangle_{a1234}|0\rangle_5 - \alpha|00101\rangle_{a1234}|1\rangle_5 + \alpha|01000\rangle_{a1234}|1\rangle_5 \\
 &\quad + \alpha|01001\rangle_{a1234}|0\rangle_5 + \alpha|01110\rangle_{a1234}|0\rangle_5 + \alpha|01111\rangle_{a1234}|1\rangle_5 \\
 &\quad + \beta|10010\rangle_{a1234}|1\rangle_5 - \beta|10011\rangle_{a1234}|0\rangle_5 + \beta|10100\rangle_{a1234}|0\rangle_5 \\
 &\quad - \beta|10101\rangle_{a1234}|1\rangle_5 + \beta|11000\rangle_{a1234}|1\rangle_5 + \beta|11001\rangle_{a1234}|0\rangle_5 \\
 &\quad \left. + \beta|11110\rangle_{a1234}|0\rangle_5 + \beta|11111\rangle_{a1234}|1\rangle_5 \right) \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \alpha|0\rangle_5 \left( -|00011\rangle_{a1234} + |00100\rangle_{a1234} \right. \right. \\
 &\quad + |01001\rangle_{a1234} + |01110\rangle_{a1234} \left. \right) + \alpha|1\rangle_5 \left( |00010\rangle_{a1234} \right. \\
 &\quad - |00101\rangle_{a1234} + |01000\rangle_{a1234} + |01111\rangle_{a1234} \left. \right) \\
 &\quad + \beta|0\rangle_5 \left( -|10011\rangle_{a1234} + |10100\rangle_{a1234} + |11001\rangle_{a1234} \right. \\
 &\quad + |11110\rangle_{a1234} \left. \right) + \beta|1\rangle_5 \left( |10010\rangle_{a1234} - |10101\rangle_{a1234} \right. \\
 &\quad \left. + |11000\rangle_{a1234} + |11111\rangle_{a1234} \right) \left. \right\}
 \end{aligned}$$

(ب.۲)

که با توجه به روابط (۳۸.۳) و (۳۹.۳) چنانچه پایه‌های بل را به صورت زیر ترکیب کنیم:

$$|\varphi_x\rangle_{a_{1+}} + |\varphi_x\rangle_{a_{1-}} = 2(-|\circ\circ\circ 11\rangle_{a_{1234}} + |\circ\circ 1\circ\circ\rangle_{a_{1234}} + |\circ 1\circ\circ 1\rangle_{a_{1234}} + |\circ 111\circ\rangle_{a_{1234}}) \quad (\text{ب.۳})$$

$$|\varphi_x\rangle_{a_{1+}} - |\varphi_x\rangle_{a_{1-}} = 2(|1\circ\circ 1\circ\rangle_{a_{1234}} - |1\circ 1\circ 1\rangle_{a_{1234}} + |11\circ\circ\circ\rangle_{a_{1234}} + |11111\rangle_{a_{1234}}) \quad (\text{ب.۴})$$

$$|\varphi_x\rangle_{a_{2+}} + |\varphi_x\rangle_{a_{2-}} = 2(-|1\circ\circ 11\rangle_{a_{1234}} + |1\circ 1\circ\circ\rangle_{a_{1234}} - |11\circ\circ 1\rangle_{a_{1234}} + |1111\circ\rangle_{a_{1234}}) \quad (\text{ب.۵})$$

$$|\varphi_x\rangle_{a_{2+}} - |\varphi_x\rangle_{a_{2-}} = 2(|\circ\circ\circ 1\circ\rangle_{a_{1234}} - |\circ\circ 1\circ 1\rangle_{a_{1234}} + |\circ 1\circ\circ\circ\rangle_{a_{1234}} + |\circ 1111\rangle_{a_{1234}}) \quad (\text{ب.۶})$$

که چنانچه روابط (ب.۴) و (ب.۵) و (ب.۶) و (ب.۶) را در رابطه (ب.۲) قرار دهیم در ادامه رابطه زیر پس از جداسازی ذره‌ی آلیس و به‌دست آوردن هریک از نتایج اندازه‌گیری آلیس، ادامه محاسبات پروتکل دوربری، به‌صورت زیر می‌گردد.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_{12345} &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \alpha|\circ\rangle_\delta \left( \frac{|\varphi_x\rangle_{a_{1+}} + |\varphi_x\rangle_{a_{1-}}}{2} \right) + \alpha|1\rangle_\delta \left( \frac{|\varphi_x\rangle_{a_{1+}} - |\varphi_x\rangle_{a_{1-}}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta|1\rangle_\delta \left( \frac{|\varphi_x\rangle_{a_{2+}} - |\varphi_x\rangle_{a_{2-}}}{2} \right) + \beta|\circ\rangle_\delta \left( \frac{|\varphi_x\rangle_{a_{2+}} + |\varphi_x\rangle_{a_{2-}}}{2} \right) \right\} \\ &\Rightarrow \left( \alpha|\circ\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{1+}} + \alpha|\circ\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{1-}} + \alpha|1\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{1+}} - \alpha|1\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{1-}} \right. \\ &\quad \left. + \beta|1\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{2+}} - \beta|1\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{2-}} + \beta|\circ\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{2+}} + \beta|\circ\rangle_\delta |\varphi_x\rangle_{a_{2-}} \right) \\ &\Rightarrow |\varphi_1\rangle_{a_{1+}} (\alpha|\circ\rangle_a + \beta|1\rangle_a) + |\varphi_2\rangle_{a_{1-}} (\alpha|\circ\rangle_a - \beta|1\rangle_a) \\ &\quad + |\varphi_3\rangle_{a_{2+}} (\alpha|1\rangle_a + \beta|\circ\rangle_a) + |\varphi_4\rangle_{a_{2-}} (-\alpha|1\rangle_a + \beta|\circ\rangle_a) \quad (\text{ب.۷}) \end{aligned}$$

در نهایت باب نیز عملگر یکانی خود را به کار می‌بندد که به‌این ترتیب حالت اصلی را به‌دست آورد.

# پیوست پ

## تحلیل ریاضی دوربری کوانتومی با استفاده از حالت براون در اشتراک گذاری $QSTS$

### پ.۱ جزئیات محاسبات اشتراک گذاری تک کیوبیته

که باب در این زمان به یک دسته‌بندی اقدام و ذره چارلی را ارسال می‌کند. در این قسمت علاوه بر ارسال دو بیت کلاسیکی توسط آلیس به چارلی، باب نیز باید بیت کلاسیکی اضافی را به چارلی ارسال کند. جزئیات محاسبات در زیر آمده است:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2A = |010\rangle_B - |101\rangle_B \\ 2C = |000\rangle_B + |111\rangle_B \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} 2B = -|011\rangle_B + |100\rangle_B \\ 2D = |001\rangle_B + |110\rangle_B \end{array} \right. \quad (\text{پ.۲})$$

که در هر یک از حالات دسته‌بندی و اندازه‌گیری باب به صورت زیر عمل می‌گردد:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{4} \left( \alpha |1\rangle_C (2A + D - D) + \alpha |0\rangle_C (2B + C - C) \right. \\ &\quad \left. + \beta |1\rangle_C (2C + B - B) + \beta |0\rangle_C (2D + A - A) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ (A + D)(\alpha |1\rangle_C + \beta |0\rangle_C) + (A - D)(\alpha |1\rangle_C - \beta |0\rangle_C) \right. \\ &\quad \left. + (C + B)(\alpha |0\rangle_C + \beta |1\rangle_C) + (C - B)(-\alpha |0\rangle_C + \beta |1\rangle_C) \right\} \end{aligned}$$

که در آن؛

$$\begin{aligned}
A + D &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B) \\
A - D &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B) \\
C + B &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B) \\
C - B &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B) \quad (۳.پ)
\end{aligned}$$

به همین نحو در هر یک از حالت‌های اندازه‌گیری شده توسط آلیس شرایطی یکسان به صورت زیر رخ می‌دهد.

$$\begin{aligned}
|\psi_-\rangle &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha (|\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C - |\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C + |\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C - |\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C) \right. \\
&\quad \left. + \beta (-|\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C - |\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C - |\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C - |\circ\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha |\circ\rangle_C (|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B) + \alpha |\circ\rangle_C (-|\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B) \right. \\
&\quad \left. + \beta |\circ\rangle_C (-|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B) + \beta |\circ\rangle_C (-|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2A = |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B \\ 2C = |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B \end{cases}, \quad \begin{cases} 2B = -|\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B \\ 2D = |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha |\circ\rangle_C (2A + D - D) + \alpha |\circ\rangle_C (2B + C - C) \right. \\
&\quad \left. + \beta |\circ\rangle_C (2C + B - B) + \beta |\circ\rangle_C (2D + A - A) \right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (A + D)(\alpha |\circ\rangle_C + \beta |\circ\rangle_C) + (A - D)(\alpha |\circ\rangle_C - \beta |\circ\rangle_C) \right. \\
&\quad \left. + (C + B)(\alpha |\circ\rangle_C + \beta |\circ\rangle_C) + (C - B)(-\alpha |\circ\rangle_C + \beta |\circ\rangle_C) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A + D &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B) \\
A - D &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B) \\
C + B &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B) \\
C - B &= \frac{1}{\sqrt{2}} (-|\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B + |\circ\circ\circ\rangle_B - |\circ\circ\circ\rangle_B) \quad (۴.پ)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\varphi_+\rangle &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha(|\circ\circ\circ\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C + |\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B |\circ\rangle_C + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B |\circ\rangle_C + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C) \right. \\
 &\quad \left. + \beta(|\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C - |\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B |\circ\rangle_C + |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C - |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha|\mathbb{1}\rangle_C (|\circ\circ\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B) + \alpha|\circ\rangle_C (|\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B) \right. \\
 &\quad \left. + \beta|\mathbb{1}\rangle_C (|\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B - |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B) + \beta|\circ\rangle_C (-|\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B) \right\} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{2}A = |\circ\circ\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B \\ \mathbb{2}C = |\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B - |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{2}B = |\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B \\ \mathbb{2}D = -|\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B \end{array} \right\} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha|\mathbb{1}\rangle_C (\mathbb{2}A + D - D) + \alpha|\circ\rangle_C (\mathbb{2}B + C - C) \right. \\
 &\quad \left. + \beta|\mathbb{1}\rangle_C (\mathbb{2}C + B - B) + \beta|\circ\rangle_C (\mathbb{2}D + A - A) \right\} \tag{۵.پ} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (A + D)(\alpha|\mathbb{1}\rangle_C + \beta|\circ\rangle_C) + (A - D)(\alpha|\mathbb{1}\rangle_C - \beta|\circ\rangle_C) \right. \\
 &\quad \left. + (C + B)(\alpha|\circ\rangle_C + \beta|\mathbb{1}\rangle_C) + (C - B)(-\alpha|\circ\rangle_C + \beta|\mathbb{1}\rangle_C) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A + D &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\circ\circ\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B - |\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B \right) \\
 A - D &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\circ\circ\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B + |\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B - |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B \right) \\
 C + B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B + |\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B - |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B \right) \\
 C - B &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B - |\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B \right) \tag{۶.پ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\varphi_-\rangle &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha(|\circ\circ\circ\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C + |\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B |\circ\rangle_C + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B |\circ\rangle_C + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C) \right. \\
 &\quad \left. + \beta(-|\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C + |\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B |\circ\rangle_C - |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B |\circ\rangle_C + |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B |\mathbb{1}\rangle_C) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha|\mathbb{1}\rangle_C (|\circ\circ\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B) + \alpha|\circ\rangle_C (|\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B) \right. \\
 &\quad \left. + \beta|\mathbb{1}\rangle_C (-|\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B) + \beta|\circ\rangle_C (|\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B - |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B) \right\} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{2}A = |\circ\circ\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B \\ \mathbb{2}C = -|\circ\mathbb{1}\circ\rangle_B + |\mathbb{1}\circ\mathbb{1}\rangle_B \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{2}B = |\circ\circ\mathbb{1}\rangle_B + |\mathbb{1}\mathbb{1}\circ\rangle_B \\ \mathbb{2}D = |\circ\mathbb{1}\mathbb{1}\rangle_B - |\mathbb{1}\circ\circ\rangle_B \end{array} \right\} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha|\mathbb{1}\rangle_C (\mathbb{2}A + D - D) + \alpha|\circ\rangle_C (\mathbb{2}B + C - C) \right. \\
 &\quad \left. + \beta|\mathbb{1}\rangle_C (\mathbb{2}C + B - B) + \beta|\circ\rangle_C (\mathbb{2}D + A - A) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (A + D)(\alpha|\mathbb{1}\rangle_C + \beta|\circ\rangle_C) + (A - D)(\alpha|\mathbb{1}\rangle_C - \beta|\circ\rangle_C) \right. \\
 &\quad \left. + (C + B)(\alpha|\circ\rangle_C + \beta|\mathbb{1}\rangle_C) + (C - B)(-\alpha|\circ\rangle_C + \beta|\mathbb{1}\rangle_C) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A + D &= \frac{1}{4} \left( |000\rangle_B + |111\rangle_B - |011\rangle_B + |100\rangle_B \right) \\
A - D &= \frac{1}{4} \left( |000\rangle_B + |111\rangle_B + |011\rangle_B - |100\rangle_B \right) \\
C + B &= \frac{1}{4} \left( |001\rangle_B + |110\rangle_B + |010\rangle_B - |101\rangle_B \right) \\
C - B &= \frac{1}{4} \left( |001\rangle_B + |110\rangle_B - |010\rangle_B + |101\rangle_B \right) \quad (\text{پ.۷})
\end{aligned}$$

البته لازم به ذکر است که در هر مرحله پس از اندازه‌گیری آلایس سیستم رمبش می‌کند و بنابراین باید شرایط بهنجارش را بررسی و ضریب بهنجارش جدیدی را که شرط بهنجارش را پس از رمبش سیستم ارضاء کند، تعیین نمود که به شکل زیر این ضریب بهنجارش به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 + (-\alpha)^2 + \beta^2 + \beta^2 + \beta^2 + \beta^2}} = \frac{1}{4} \quad (\text{پ.۸})$$

که در این جا  $1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2$  می‌باشد.

## پ.۱.۱ اشتراک گذاری جدید برای ارسال تک کیوبیت

در این طرح جدید آلایس کیوبیت (۱, ۲) و باب کیوبیت (۳, ۴) و چارلی کیوبیت (۵) و همچنین آلایس کیوبیت ناشناخته  $|\psi\rangle_a = |\alpha\rangle_a |0\rangle_a + |\beta\rangle_a |1\rangle_a$  را نیز در اختیار دارد. بنابراین حالت بازترکیب آنها را به این صورت خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}
(|\alpha\rangle_a |0\rangle_a + |\beta\rangle_a |1\rangle_a) \otimes |\psi\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( |\alpha\rangle_{a12345} |00010\rangle_{a12345} - |\alpha\rangle_{a12345} |00011\rangle_{a12345} \right. \\
&\quad + |\alpha\rangle_{a12345} |00100\rangle_{a12345} - |\alpha\rangle_{a12345} |00101\rangle_{a12345} + |\alpha\rangle_{a12345} |01000\rangle_{a12345} \\
&\quad + |\alpha\rangle_{a12345} |01001\rangle_{a12345} + |\alpha\rangle_{a12345} |01100\rangle_{a12345} + |\alpha\rangle_{a12345} |01101\rangle_{a12345} \\
&\quad + |\beta\rangle_{a12345} |10010\rangle_{a12345} - |\beta\rangle_{a12345} |10011\rangle_{a12345} + |\beta\rangle_{a12345} |10100\rangle_{a12345} \\
&\quad - |\beta\rangle_{a12345} |10101\rangle_{a12345} + |\beta\rangle_{a12345} |11000\rangle_{a12345} + |\beta\rangle_{a12345} |11001\rangle_{a12345} \\
&\quad \left. + |\beta\rangle_{a12345} |11100\rangle_{a12345} + |\beta\rangle_{a12345} |11101\rangle_{a12345} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ |\alpha\rangle_A \left( |10\rangle_{BC} - |11\rangle_{BC} \right) + |\alpha\rangle_A \left( |00\rangle_{BC} - |01\rangle_{BC} \right) \right. \\
&\quad + |\alpha\rangle_A \left( |00\rangle_{BC} + |01\rangle_{BC} \right) + |\alpha\rangle_A \left( |10\rangle_{BC} + |11\rangle_{BC} \right) \\
&\quad + |\beta\rangle_A \left( |10\rangle_{BC} - |11\rangle_{BC} \right) + |\beta\rangle_A \left( |00\rangle_{BC} - |01\rangle_{BC} \right) \\
&\quad \left. + |\beta\rangle_A \left( |00\rangle_{BC} + |01\rangle_{BC} \right) + |\beta\rangle_A \left( |10\rangle_{BC} + |11\rangle_{BC} \right) \right\}
\end{aligned}$$

که آلیس پس از جداسازی ذرات خود، در پایه‌های اندازه‌گیری خود مطابق با جدول ۸.۳ اندازه‌گیری انجام می‌دهد، که روابط آن:

$$\begin{aligned}
 (\alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a) \otimes |\psi_5\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left\{ \alpha \left( |\gamma_1\rangle + |\gamma_2\rangle + |\gamma_3\rangle + |\gamma_4\rangle \right)_A \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} \right) \right. \\
 &\quad + \alpha \left( |\gamma_1\rangle - |\gamma_2\rangle + |\gamma_3\rangle - |\gamma_4\rangle \right)_A \left( |000\rangle_{BC} - |011\rangle_{BC} \right) \\
 &\quad + \alpha \left( |\gamma_5\rangle - |\gamma_6\rangle + |\gamma_7\rangle - |\gamma_8\rangle \right)_A \left( |001\rangle_{BC} + |010\rangle_{BC} \right) \\
 &\quad + \alpha \left( |\gamma_5\rangle + |\gamma_6\rangle - |\gamma_7\rangle - |\gamma_8\rangle \right)_A \left( |100\rangle_{BC} + |111\rangle_{BC} \right) \\
 &\quad + \beta \left( |\gamma_5\rangle + |\gamma_6\rangle + |\gamma_7\rangle + |\gamma_8\rangle \right)_A \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} \right) \\
 &\quad + \beta \left( |\gamma_5\rangle - |\gamma_6\rangle - |\gamma_7\rangle + |\gamma_8\rangle \right)_A \left( |000\rangle_{BC} - |011\rangle_{BC} \right) \\
 &\quad + \beta \left( |\gamma_1\rangle - |\gamma_2\rangle + |\gamma_3\rangle - |\gamma_4\rangle \right)_A \left( |001\rangle_{BC} + |010\rangle_{BC} \right) \\
 &\quad \left. + \beta \left( |\gamma_1\rangle + |\gamma_2\rangle - |\gamma_3\rangle - |\gamma_4\rangle \right)_A \left( |100\rangle_{BC} + |111\rangle_{BC} \right) \right\} \\
 \Rightarrow &\alpha |\gamma_1\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} + |000\rangle_{BC} - |011\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_1\rangle \left( |001\rangle_{BC} + |010\rangle_{BC} + |100\rangle_{BC} + |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \alpha |\gamma_2\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} - |000\rangle_{BC} + |011\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_2\rangle \left( -|001\rangle_{BC} - |010\rangle_{BC} + |100\rangle_{BC} + |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \alpha |\gamma_3\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} + |000\rangle_{BC} - |011\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_3\rangle \left( |001\rangle_{BC} + |010\rangle_{BC} - |100\rangle_{BC} - |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \alpha |\gamma_4\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} - |000\rangle_{BC} + |011\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_4\rangle \left( -|001\rangle_{BC} - |010\rangle_{BC} - |100\rangle_{BC} - |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \alpha |\gamma_5\rangle \left( |001\rangle_{BC} + |010\rangle_{BC} + |100\rangle_{BC} + |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_5\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} + |000\rangle_{BC} - |011\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \alpha |\gamma_6\rangle \left( -|001\rangle_{BC} - |010\rangle_{BC} + |100\rangle_{BC} + |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_6\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} - |000\rangle_{BC} + |011\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \alpha |\gamma_7\rangle \left( |001\rangle_{BC} + |010\rangle_{BC} - |100\rangle_{BC} - |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_7\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} - |000\rangle_{BC} + |011\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \alpha |\gamma_8\rangle \left( -|001\rangle_{BC} - |010\rangle_{BC} - |100\rangle_{BC} - |111\rangle_{BC} \right) \\
 &+ \beta |\gamma_8\rangle \left( |101\rangle_{BC} - |110\rangle_{BC} + |000\rangle_{BC} - |011\rangle_{BC} \right)
 \end{aligned}
 \tag{۹.پ}$$

که برای حفظ شرط تعامد و بهنجارش:

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + (-\alpha)^2 + \alpha^2 + (-\alpha)^2 + \beta^2 + \beta^2 + \beta^2 + \beta^2}} = \frac{1}{2} \quad (\text{پ. ۱۰})$$

که با در نظر گرفتن یکی از نتایج اندازه گیری آلیس  $|\gamma_1\rangle$  حالت درهم تنیده شده ی باب - چارلی به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} |\gamma_1\rangle &\Rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \alpha \left( |1\rangle_B |0\rangle_{BC} - |1\rangle_B |1\rangle_{BC} + |0\rangle_B |0\rangle_{BC} - |0\rangle_B |1\rangle_{BC} \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left( |0\rangle_B |0\rangle_{BC} + |0\rangle_B |1\rangle_{BC} + |1\rangle_B |0\rangle_{BC} + |1\rangle_B |1\rangle_{BC} \right) \right\} \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ \alpha |1\rangle_B \left( \left( \frac{|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{|\varphi_+\rangle - |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) \right. \\ &\quad + \alpha |0\rangle_B \left( \left( \frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) - \left( \frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &\quad + \beta |0\rangle_B \left( \left( \frac{|\varphi_+\rangle + |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{|\varphi_+\rangle - |\varphi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) \\ &\quad \left. + \beta |1\rangle_B \left( \left( \frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \alpha \left( |1\rangle_B |\varphi_-\rangle + |0\rangle_B |\psi_-\rangle \right) + \beta \left( |0\rangle_B |\varphi_+\rangle + |1\rangle_B |\psi_+\rangle \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{پ. ۱۱})$$

که در ادامه برای نتیجه اندازه گیری آلیس به عنوان مثال  $|\gamma_1\rangle$ ، اندازه گیری توسط باب صورت می گیرد:

$$\begin{aligned} |\gamma_1\rangle &\Rightarrow \frac{1}{2} \left\{ \alpha \left( |1\rangle_B |1\rangle_C - |1\rangle_B |0\rangle_C + |0\rangle_B |0\rangle_C - |0\rangle_B |1\rangle_C \right) \right. \\ &\quad \left. + \beta \left( |0\rangle_B |1\rangle_C + |0\rangle_B |0\rangle_C + |1\rangle_B |0\rangle_C + |1\rangle_B |1\rangle_C \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ |1\rangle_B \left( \alpha |1\rangle_C + \beta |0\rangle_C \right) + |1\rangle_B \left( -\alpha |0\rangle_C + \beta |1\rangle_C \right) \right. \\ &\quad \left. + |0\rangle_B \left( \alpha |0\rangle_C + \beta |1\rangle_C \right) + |0\rangle_B \left( -\alpha |1\rangle_C + \beta |0\rangle_C \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{پ. ۱۲})$$

## پ.۲. روابط مربوط به ارسال یک کیودیت بین آلیس و باب

روابط زیر مربوط به ترکیبی از پایه‌های اندازه‌گیری آلیس می‌باشد:

$$\begin{aligned}
 |01010\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_1 + |\psi_5\rangle_2 - |\psi_5\rangle_3 - |\psi_5\rangle_4 - |\psi_5\rangle_{13} + |\psi_5\rangle_{14} - |\psi_5\rangle_{15} + |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |10010\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-|\psi_5\rangle_1 + |\psi_5\rangle_2 - |\psi_5\rangle_3 + |\psi_5\rangle_4 + |\psi_5\rangle_{13} + |\psi_5\rangle_{14} - |\psi_5\rangle_{15} - |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |01111\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_1 + |\psi_5\rangle_2 - |\psi_5\rangle_3 - |\psi_5\rangle_4 + |\psi_5\rangle_{13} - |\psi_5\rangle_{14} + |\psi_5\rangle_{15} - |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |10111\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_1 - |\psi_5\rangle_2 + |\psi_5\rangle_3 - |\psi_5\rangle_4 + |\psi_5\rangle_{13} + |\psi_5\rangle_{14} - |\psi_5\rangle_{15} - |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |00001\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_1 + |\psi_5\rangle_2 + |\psi_5\rangle_3 + |\psi_5\rangle_4 - |\psi_5\rangle_{13} - |\psi_5\rangle_{14} - |\psi_5\rangle_{15} - |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |11001\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-|\psi_5\rangle_1 + |\psi_5\rangle_2 - |\psi_5\rangle_3 - |\psi_5\rangle_4 + |\psi_5\rangle_{13} - |\psi_5\rangle_{14} - |\psi_5\rangle_{15} + |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |00100\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_1 + |\psi_5\rangle_2 + |\psi_5\rangle_3 + |\psi_5\rangle_4 + |\psi_5\rangle_{13} + |\psi_5\rangle_{14} - |\psi_5\rangle_{15} - |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |11100\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_1 - |\psi_5\rangle_2 - |\psi_5\rangle_3 + |\psi_5\rangle_4 + |\psi_5\rangle_{13} - |\psi_5\rangle_{14} - |\psi_5\rangle_{15} + |\psi_5\rangle_{16}) \\
 |00111\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_5 + |\psi_5\rangle_6 + |\psi_5\rangle_7 + |\psi_5\rangle_8 + |\psi_5\rangle_9 + |\psi_5\rangle_{10} + |\psi_5\rangle_{11} + |\psi_5\rangle_{12}) \\
 |11111\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_5 - |\psi_5\rangle_6 - |\psi_5\rangle_7 + |\psi_5\rangle_8 + |\psi_5\rangle_9 - |\psi_5\rangle_{10} - |\psi_5\rangle_{11} + |\psi_5\rangle_{12}) \\
 |00010\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-|\psi_5\rangle_5 - |\psi_5\rangle_6 - |\psi_5\rangle_7 - |\psi_5\rangle_8 + |\psi_5\rangle_9 + |\psi_5\rangle_{10} + |\psi_5\rangle_{11} + |\psi_5\rangle_{12}) \\
 |11010\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_5 - |\psi_5\rangle_6 - |\psi_5\rangle_7 + |\psi_5\rangle_8 - |\psi_5\rangle_9 + |\psi_5\rangle_{10} + |\psi_5\rangle_{11} - |\psi_5\rangle_{12}) \\
 |01001\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-|\psi_5\rangle_5 + |\psi_5\rangle_6 - |\psi_5\rangle_7 + |\psi_5\rangle_8 + |\psi_5\rangle_9 - |\psi_5\rangle_{10} + |\psi_5\rangle_{11} - |\psi_5\rangle_{12}) \\
 |10001\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_5 + |\psi_5\rangle_6 - |\psi_5\rangle_7 - |\psi_5\rangle_8 - |\psi_5\rangle_9 + |\psi_5\rangle_{10} + |\psi_5\rangle_{11} - |\psi_5\rangle_{12}) \\
 |01100\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_5 - |\psi_5\rangle_6 + |\psi_5\rangle_7 - |\psi_5\rangle_8 + |\psi_5\rangle_9 - |\psi_5\rangle_{10} + |\psi_5\rangle_{11} - |\psi_5\rangle_{12}) \\
 |10100\rangle &= \frac{\sqrt{2}}{4} (|\psi_5\rangle_5 + |\psi_5\rangle_6 - |\psi_5\rangle_7 - |\psi_5\rangle_8 + |\psi_5\rangle_9 - |\psi_5\rangle_{10} - |\psi_5\rangle_{11} + |\psi_5\rangle_{12})
 \end{aligned}$$

(پ.۱۳)

پس از اندازه‌گیری سیستم آلیس حالت رمبش یافته سیستم ترکیبی یکی از حالت‌های زیر خواهد شد؛ که نتیجه تبدیل یکانی باب در هر پایه اندازه‌گیری آلیس در جدول ۹.۳ مرتب شده است.

$$\begin{aligned}
 |\psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle = \frac{1}{4} \{ & |\psi\rangle_1 (\alpha|^\circ 1\rangle_{45} + \mu|11\rangle_{45} + \gamma|^\circ \circ\rangle_{45} + \beta|1^\circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_2 (\alpha|^\circ 1\rangle_{45} - \mu|11\rangle_{45} + \gamma|^\circ \circ\rangle_{45} - \beta|1^\circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_3 (\alpha|^\circ 1\rangle_{45} + \mu|11\rangle_{45} - \gamma|^\circ \circ\rangle_{45} - \beta|1^\circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_4 (\alpha|^\circ 1\rangle_{45} - \mu|11\rangle_{45} - \gamma|^\circ \circ\rangle_{45} + \beta|1^\circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_5 (\alpha|11\rangle_{45} + \mu|^\circ 1\rangle_{45} + \gamma|1^\circ\rangle_{45} + \beta|^\circ \circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_6 (\alpha|11\rangle_{45} + \mu|^\circ 1\rangle_{45} - \gamma|1^\circ\rangle_{45} - \beta|^\circ \circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_7 (\alpha|11\rangle_{45} - \mu|^\circ 1\rangle_{45} + \gamma|1^\circ\rangle_{45} - \beta|^\circ \circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_8 (\alpha|11\rangle_{45} - \mu|^\circ 1\rangle_{45} - \gamma|1^\circ\rangle_{45} + \beta|^\circ \circ\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_9 (\alpha|^\circ \circ\rangle_{45} + \mu|1^\circ\rangle_{45} + \gamma|^\circ 1\rangle_{45} + \beta|11\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_{10} (\alpha|^\circ \circ\rangle_{45} + \mu|1^\circ\rangle_{45} - \gamma|^\circ 1\rangle_{45} - \beta|11\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_{11} (\alpha|^\circ \circ\rangle_{45} - \mu|1^\circ\rangle_{45} + \gamma|^\circ 1\rangle_{45} - \beta|11\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_{12} (\alpha|^\circ \circ\rangle_{45} - \mu|1^\circ\rangle_{45} - \gamma|^\circ 1\rangle_{45} + \beta|11\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_{13} (\alpha|1^\circ\rangle_{45} + \mu|^\circ \circ\rangle_{45} + \gamma|11\rangle_{45} + \beta|^\circ 1\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_{14} (\alpha|1^\circ\rangle_{45} + \mu|^\circ \circ\rangle_{45} - \gamma|11\rangle_{45} - \beta|^\circ 1\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_{15} (\alpha|1^\circ\rangle_{45} - \mu|^\circ \circ\rangle_{45} + \gamma|11\rangle_{45} - \beta|^\circ 1\rangle_{45}) \\
 & + |\psi\rangle_{16} (\alpha|1^\circ\rangle_{45} - \mu|^\circ \circ\rangle_{45} - \gamma|11\rangle_{45} + \beta|^\circ 1\rangle_{45}) \}
 \end{aligned} \tag{پ.۱۴}$$

## مراجع

- [1] J.J.Sakurai *Modern Quaantum Mechanics*, ISBN 978-964-03-4473-6, (1933).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47, 777 – Published 15 May (1935).
- [3] George Greenstein, Arthur G. Zajonc *The Quantum Challenge*, Jones and Bartlett:ISBN 0-7637-0216-1, (1997).
- [4] B. Whittaker, E. "Albert Einstein. 1879–1955". *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society*, 1: 37–67. doi:10.1098/rsbm.1955.0005. JSTOR 769242, 1 November (1955).
- [5] Mladen Pavicic *Quantum Computation And Quantum Communication:Theory and Experiments*, ISBN 0-387-28900-3 (e-book), (2005).
- [6] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang *Quantum Computation and Quantum Information*, ISBN 978-1-107-00217-3 Hardback, (2000), Reprinted (2002, 2003, 2004, 2007, 2009), 10th Anniversary edition published (2010).
- [7] A. Melikidze, V. V. Dobrovitski, H. A. De Raedt, M. I. Katsnelson, B. N. Harmon *Parity effects in spin decoherence*, Phys. Rev. B 70, 014435 (2004).
- [8] G. Lima, A. Vargas, L. Neves, R. Guzm´an, C. Saavedra *Manipulating spatial qudit states with programmable optical devices*, OCIS codes: (270.0270) Quantum optics; (230.0230) Optical devices, (2009).
- [9] Wootters, W. K, Zurek, W. H. *A single quantum cannot be cloned.*, Nature299(5886), 802–803, DOI 10.1038/299802a0, (1982).
- [10] Stephen M. Barnett *Quantum Information*, ISBN: 978–0–19–852762–6, ISBN: 978–0–19–852763–3, Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York, (2009).
- [11] Charles H. Bennett, Sandu Popescu, Daniel Rohrlich, John A. Smolin, Ashish V. Thapliyal *Exact and Asymptotic Measures of Multipartite Pure State Entanglement*, doi/10.1103/PhysRevA.63.012307, (2000).

- [12] C. R. F. Werner *Quantum states with Einstein-Rosen-Podolsky correlations admitting a hidden-variable model*, Phys. Rev. A 40, pp. 4277-4281, (1989).
- [13] A. C. Doherty, Pablo A. Parrilo, Federico M. Spedalieri *Distinguishing separable and entangled states*, DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.187904, (2002).
- [14] D. Lucien Hardy *N-measurement Bell inequalities, N-atom entangled states, and the nonlocality of one photon*, Physics Letters A, Volume 160, Issue 1, Pages 1-8, ISSN 0375-9601, [http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601\(91\)90196-F](http://dx.doi.org/10.1016/0375-9601(91)90196-F), (1991).
- [15] G. Vidal, R. F. Werner *Computable measure of entanglement*, DOI: 10.1103/PhysRevA.65.032314, (2002).
- [16] Michal Horodecki, Pawel Horodecki *Separability of mixed states:necessary and sufficient conditions*, DOI: 10.1016/S0375-9601(96)00706-2, (1996).
- [17] Dr. Dirk Bouwmeester, Prof. Artur Ekert, Prof. Anton Zeilinger *The Physics of Quantum Information Quantum Cryptography Quantum Teleportation Quantum Computation*, ISBN 978-3-642-08607-6, ISBN 978-3-662-04209-0 (eBook), DOI 10.1007/978-3-662-04209-0, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (2000).
- [18] Keiichi Eamatsu *Entangled Photons: Generation, Observation, and Characterization*, Jpn. J. Appl. Phys., Vol. 46, No. 11, DOI: 10.1143/JJAP.46.7175, (2007).
- [19] C. K. Hong, Z. Y. Ou, L. Mandel *Measurement of Subpicosecond Time Intervals between Two Photons by Interference*, doi: Phys Rev Lett. Nov 2;59(18):2044-2046, (1987).
- [20] Jesse L. Catalano *Spontaneous Parametric Down-Conversion and Quantum Entanglement*, University Honors Theses. Paper52, (2014).
- [21] Paul G. Kwiat, Edo Waks, Andrew G. White, Ian Appelbaum, Philippe H. Eberhard *Ultra-bright source of polarization-entangled photons*, doi/10.1103/PhysRevA.60.R773, arXiv:quant-ph/9810003v3, 22 May (1999).
- [22] Harry Paul *Introduction To Quantum Optics*, ISBN:9780521835633, (1999).
- [23] I. Marcikic, H. de Riedmatten, W. Tittel, H. Zbinden, N. Gisin *Long-distance teleportation of qubits at- telecommunication wavelengths*, Nature 421, 509 (2003).
- [24] S. Pirandola, J. Eisert, C. Weedbrook, A. Furusawa, S. L. Braunstein *Advances in Quantum Teleportation*, doi:10.1038/nphoton.2015.154, (28 May 2015).
- [25] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crepeau, Richard Jozsa, Asher Peres, William K. Wootters *Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett.70, 1895 (1993).

- [26] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Sandu Popescu, Benjamin Schumacher, John A. Smolin, William K. Wootters *Purification of Noisy Entanglement and Faithful Teleportation via Noisy Channels*, doi/10.1103/PhysRevLett.76.722, (1995).
- [27] Gilles Brassard *Teleportation as a quantum computation*, DOI: 10.1016/S0167-2789(98)00043-8, Physica D120 43-47,(1998).
- [28] S.J. van Enk, O. Hirota *Entangled coherent states: teleportation and decoherence*, DOI: 10.1103/PhysRevA.64.022313, Phys. Rev. A 64, 022313 (2001).
- [29] Gerardo Adesso, Fabrizio Illuminati *Equivalence between Entanglement and the Optimal Fidelity of Continuous Variable Teleportation*, DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.150503, Quantum Physics (quant-ph), (2005).
- [30] Goren Gordon, Gustavo Rigolin *Generalized Teleportation Protocol*, Doi: 10.1103/PhysRevA.73.042309, Quantum Physics [quant-ph], (2006).
- [31] E. R. Laiho, S.N. Molotkov, S.S. Nazin *On teleportation of a completely unknown state of relativistic photon*, Physics Letters A, Volume 278, Issues 1–2, Pages 9–18, ISSN 0375-9601, [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00756-8](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00756-8), 18 December (2000).
- [32] Dik Bouwmeester, Jian-Wei Pan, Klaus Mattle, Manfred Eibl, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger *Experimental quantum teleportation*, Nature 390, 575-579, 11 December (1997).
- [33] R. Ursin, F. Tiefenbacher, T. Jennewein, A. Zeilinger *Applications of quantum communication protocols in real world scenarios toward space*, Springer-Verlag( 2007).
- [34] Zeeya Merali *The Quantum Space Race*, Nature, Vol 492, 6 December (2012).
- [35] Cheng-Zhi Peng, Tao Yang, Xiao-Hui Bao, Jun Zhang, Xian-Min Jin, Fa-Yong Feng, Bin Yang, Jian Yang, Juan Yin, Qiang Zhang, Nan Li, Bao-Li Tian, and Jian-Wei Pan *Experimental Free-Space Distribution of Entangled Photon Pairs Over 13 km: Towards Satellite-Based Global Quantum Communication*, Phys. Rev. Lett. 94, 150501 – Published, 20 April (2005).
- [36] R. Ursin, F.Tiefenbacher, T. Schmittmanderbac, H.Weier, T. Scheidl, M. Lindenthal, B. Blauensteiner, T. Jennewein, J. Perdigues, P. Trojek, B.Omer, M. Furst, M. Meyenburg, J. Rarity, Z. Sodik, C. Barbieri, H. Weinfurter, A.Zeilinger *Entanglement-based quantum communication over 144km*, doi:10.1038/nphys629, 3 June (2007).
- [37] P Villoresi, T Jennewein, F Tamburini, M Aspelmeyer, C Bonato, R Ursin, C Pernechele, V Luceri, G Bianco, A Zeilinger, C Barbieri *Experimental verification*

- of the feasibility of a quantum channel between space and Earth*, New Journal of Physics:10, 033038, (2008).
- [38] Lin Edwards, Xian-Min Jin *Experimental free-space quantum teleportation*, Nature Photonics(2010).
- [39] Juan Yin, Ji-Gang Ren, He Lu, Yuan Cao, Hai-Lin Yong, Yu-Ping Wu, Chang Liu, Sheng-Kai Liao, Fei Zhou, Yan Jiang, Xin-Dong Cai, Ping Xu, Ge-Sheng Pan, Jian-Jun Jia, Yong-Mei Huang, Hao Yin, Jian-Yu Wang, Yu-Ao Chen, Cheng-Zhi Peng, Jian-Wei Pan *Quantum teleportation and entanglement distribution over 100-kilometre free-space channels*, Nature: 488, 185–188, doi:10.1038/nature11332, 09 August (2012).
- [40] Xiao-Song Ma, Thomas Herbst, Thomas Scheidl, Daqingwang, Sebastian Kropatschek, William Naylor, Bernhard Wittmann, Alexandra Mech, Johannes Kofler, Elena Anisimova, Vadim Makarov, Thomas Jennewein, Rupert Ursin, Anton Zeilinger *Quantum teleportation over 143 kilometres using active feed-forward*, nature (2012).
- [41] F. Jiu-Cang Hao, Chuan-Feng Li, Guang-Can Guo *Probabilistic dense coding and teleportation*, Physics Letters A, Volume 278, Issue 3, Pages 113-117, ISSN 0375-9601, [http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00764-7](http://dx.doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00764-7), 25 December (2000).
- [42] W. Dür, G. Vidal, J. I. Cirac *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A 62, 062314 – Published 14 November (2000).
- [43] G. Gordon, G. Rigolin *Generalized Teleportation Protocol*, Phys. Rev. A, 73, 042309 (2006).
- [44] Pankaj Agrawal, Arun Pati *Perfect teleportation and superdense coding with W states*, Phys. Rev. A 74, 062320 – Published 26 December (2006).
- [45] V.N. Gorbachev, A.I. Trubilko, A.A. Rodichkina *Can the states of the W-class be suitable for teleportation*, Phys. Lett. A 314, 267 (2003).
- [46] Pankaj Agrawal, Arun Pati *Perfect Teleportation and Superdense Coding With W-States*, DOI: 10.1103/PhysRevA.74.062320, 30 Sep (2006).
- [47] Sreraman Muralidharan, Prasanta K. Panigrahi *Perfect Teleportation, Quantum state sharing and Superdense Coding through a Genuinely Entangled Five-qubit State*, DOI:10.1103/PhysRevA.77.032321, 6 Feb ( 2008).
- [48] H. Bennett, DP DiVincenzo, JA Smolin, WK Wootters *Mixed-state entanglement and quantum error correction*, Physical Review A 54 (5), 3824, (1996).

- [49] R. Laflamme, C. Miquel, J.-P. Paz, and W. H. Zurek *Perfect quantum error correction code*, Phys. Rev. Lett. 77, 198 (1996), and Report No. quant-ph/9602019.
- [50] Z. Zhao, YA Chen, AN Zhang, T Yang, HJ Briegel, JW Pan *Experimental demonstration of five-photon entanglement and open-destination teleportation*, Nature 430, 54 (2004).
- [51] S. Stepney, A. Sudbery, S. L. Braunstein *Searching for highly entangled multi-qubit states*, J. Phys. A: Math. Gen. 38, 1119 (2005).
- [52] A. Borras, A. R. Plastino, J. Batle, C. Zander, M. Casas, A. Plastino *Multipartite systems: highly entangled states and entanglement probability density functions*, J. Phys. A: Math. Gen. 40, 13407 (2007).
- [53] A. Higuchi, A. Sudbery *How entangled can two couples get?*, Phys. Lett. A 273, 213-217, (2000).
- [54] Li-Ying Shang-Guan, Hong-Xiang Sun, Qiao-Yan Wen, Fu-Chen Zhu *Necessary and sufficient conditions on  $n$ -qudit state for perfect teleportation of an arbitrary single qudit state*, ScienceDirect Optics Communications: 282 4823–4826 (2009).
- [55] D. D. Bhaktavatsala Rao, Sayantan Ghosh, Prasanta K Panigrahi *Generation of entangled channels for perfect teleportation channels using multi-electron quantum dots*, Rev. A 78, 042328 (2008).
- [56] Xin-Wei Zha, Cun-Bing Huang *The expansion of orthogonal complete set and teleportation of an arbitrary two-qubit state*, Quantum Physics (quant-ph), (2006).

## **Aabstract**

Quantum teleportation is one of the important concepts in quantum information and computation. In this study, different aspects of the quantum entanglement and teleportation are studied. First, entanglement and maximally entangled states are studied and some different measures of entanglement are introduced.

Furthermore, the simple form of teleportation which exploits two entangled qubits as quantum channel, is discussed. Teleportation in higher dimensions has the ability to send more information and also is more robust than lower dimensional teleportation in the case of noisy channels. So, higher dimensional teleportation is studied as well. Finally, necessary and sufficient conditions for the teleportation of an unknown qubit with  $n$ -qubits entangled state are discussed.

**Key Word:** Quantum teleportation, Quantum entanglement, Higher dimensional teleportation.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Physics Sciences**

# **Perfect Quantum Teleportation with higher Dimensional Entangled State**

**Fatemeh Aryaie**

**Supervisor**

**Dr. M. Annabestani**

**September 2016**