

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک

رشته فیزیک گرایش هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی ذرات نسبیتی و فرا نسبیتی با استفاده از میدان های وابسته به زمان

نگارنده : خدیجه سعیدی جوزچال

استاتید راهنما:

دکتر حسن حسن آبادی

دکتر صابر زرین کمر

شهریور ۱۳۹۵



باسمه تعالی

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

مدیریت تحصیلات تکمیلی

پیوست شماره ۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه: هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم خدیجه سعیدی جوزچال

تحت عنوان: بررسی ذرات نسبیتی و فرا نسبیتی با استفاده از میدان‌های وابسته به زمان

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
مورد پذیرش قرار گرفت.
با درجه

مورد ارزیابی و

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

نام بعضی نفرات رزق روحم شده است، جرأت می‌بخشد، روشنم می‌دارد...

تقدیم به آنان،

به پدرم که به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم،

و به مادرم، دریای بی‌کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش

برایم همه مهر،

و به:

همسر مهربانم، امید بودم، پناه خستگیم، به او که تا هستم و هست دارمش دوست...

تشکر و قدردانی

سپاس پروردگار یکتا که سخنوران، در ستودن او بمانند، شمارندگان، شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند.

نهال را "باران" باید، تا سیرابش کند از آب حیات و "آفتاب" باید تا بتاباند نیرو را و محکم کند شاخه‌های تازه روئیده را؛ بدون شک جایگاه استاد بسیار بالاست و در مقام قدردانی از زحمات او، زبان قاصر است، اما با این وجود بر خود لازم می‌دانم از استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر "حسن حسن آبادی"، آموزگاری که برایم زندگی و انسان بودن را معنا کرد، تقدیر و تشکر نمایم. استادی که در کمال سعه‌ی صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند. همچنین از استاد ارجمندم، جناب آقای "دکتر صابر زرین کمر"، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم. از جناب آقای دکتر علی اکبر رجبی و سرکار خانم نسرين صالحی که زحمت داوری این پایان نامه را به عهده گرفتند، نهایت تقدیر و تشکر را دارم. در انتها از همسر عزیزم و خانواده‌هایمان که همواره در این راه مشوق من بوده‌اند و همیشه خویش را مرهون لطف ایشان می‌دانم و از دوستان و اساتید بزرگوارم که همواره مایه‌ی دلگرمی من در این مدت بوده‌اند سپاسگزارم و موفقیتشان را در تمامی مراحل زندگی از خداوند متعال خواستارم.

تعهد نامه

اینجانب خدیجه سعیدی جوزچال دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک - هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی ذرات نسبیتی و فرانسبیتی با استفاده از میدان‌های وابسته به زمان تحت راهنمایی دکتر حسن حسن آبادی و دکتر صابر زرین کمر متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ :

امضای دانشجو:

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده :

مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی با وابستگی صریح پتانسیل به زمان به دلیل کاربرد در بخش‌های مختلف فیزیک، بسیار مورد توجه است. بسیاری از اثرات مکانیک کوانتومی جالب مانند فاز هندسی بری، اثر مولکولی بوهم، موضعیت دینامیکی ذرات و اثر کوانتومی هال به این مفهوم مرتبط هستند. به بیان کلی‌تر، میدان‌های وابسته به زمان در شیمی کوانتومی، اپتیک کوانتومی و نظریه میدان کوانتومی نیز حاضر هستند. به بیان دیگر، مدل‌های وابسته به زمان، شبیه سازی مفاهیم مدرن و کاربردی در این شاخه‌ها را ممکن می‌سازد. این مدل‌ها بویژه با در نظر گرفتن محدودیت‌های تجربی اهمیت بیشتری می‌یابند. در این پایان نامه، ابتدا ذرات غیر نسبیتی را با استفاده از معادله‌ی شرودینگر به روش‌های انتقال فضا-زمان و لوئیس و رزنفیلد به صورت اجمالی بررسی می‌کنیم. سپس به مطالعه‌ی ذرات نسبیتی با استفاده از معادلات دیراک و کلاین-گوردون پرداخته و آن‌ها را در حالات مختلف از جمله میدان الکتریکی یکنواخت و پتانسیل متحرک مورد تحلیل قرار می‌دهیم. همچنین ذرات فرا نسبیتی را در میدان‌های الکترومغناطیس بررسی کرده و برای این منظور معادلات متیو و هیون را حل می‌نمائیم.

کلمات کلیدی: پتانسیل وابسته به زمان، معادله شرودینگر، معادله دیراک، معادله کلاین-گوردن، روش لوئیس-رزنفیلد، انتقال فضا-زمان، معادله متیو، معادله هیون.

مقاله مستخرج شده از پایان نامه:

1. K. Saeedi, S. Zarrinkamar and H. Hassanabadi. "Dirac equation with some time-dependent electromagnetic terms." Modern Physics Letters A. Vol. 31, No. 23 (2016).

فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	فصل اول: تعاریف و مفاهیم اساسی
۲	مقدمه
۲	۱-۱. توصیف ذرات نسبیتی، غیر نسبیتی و فرا نسبیتی
۳	۲-۱. تقسیم بندی ذرات بر اساس اسپین
۴	۴-۱. معادله کلاین - گوردون
۵	۵-۱. اختلال وابسته به زمان
۷	فصل دوم: ذرات غیر نسبیتی
۸	مقدمه
۹	۱-۲. حل معادله شرودینگر برای پتانسیل های وابسته به زمان از روش انتقال فضا- زمان
۱۴	۲-۲. معادله شرودینگر وابسته به زمان با پتانسیل غیر مرکزی به روش لوئیس و رزنفیلد
۲۹	فصل سوم: ذرات نسبیتی
۳۰	مقدمه
۳۱	۱-۳. حل دقیق معادلات وابسته به زمان دیراک و انطباق آن با کوانتوم کلاسیک
۳۸	۲-۳. محاسبه معادله موج برای ذره دیراک در پتانسیل وابسته به زمان با روش لوئیس و رزنفیلد
۴۵	۳-۳. حل معادلات نسبیتی وابسته به زمان برای یک میدان الکتریکی یکنواخت
۴۶	۱-۳-۱. حل معادله کلاین - گوردون برای ذره در یک میدان الکتریکی یکنواخت
۵۰	۲-۳-۲. حل معادله دیراک برای ذره در میدان الکتریکی یکنواخت
۵۵	۴-۳. حل معادله کلاین - گوردون با پتانسیل متحرک
۵۸	۱-۴-۳. حل مثال برای ذره کلاین - گوردون در پتانسیل متحرک

۳-۵. فرمیون‌ها در میدان ثابت در راستای محور Z : ۶۵

فصل چهارم : ذرات فرا نسبیتی..... ۷۱

مقدمه ۷۲

۴-۱. شرح معادله متیو برای فرمیون‌های فرا نسبیتی در یک میدان الکتریکی هارمونیک زمانی موازی با القای

مغناطیسی ۷۴

۴-۲. مطالعه فرمیون‌های فرا نسبیتی در میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته به زمان عمود بر هم ۸۱

۴-۲-۱. حل تابع هیون برای فرمیون‌های نسبیتی در میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته به زمان عمود بر هم ۹۰

نتیجه گیری..... ۹۹

منابع ۱۰۱

فهرست شکل‌ها

عنوان	صفحه
شکل ۴-۱، نمودار u_{12} بر حسب S	۹۷
شکل ۴-۲، نمودار u_{11} بر حسب S	۹۷
شکل ۴-۳، نمودار u_{22} بر حسب S	۹۸
شکل ۴-۴، نمودار u_{21} بر حسب S	۹۸
شکل ۴-۵، نمودار u_{42} بر حسب S	۹۸
شکل ۴-۶، نمودار u_{32} بر حسب S	۹۸

فصل اول:

تعاریف و مفاهیم اساسی

مقدمه

در حوزه‌های مختلفی از علم، از گرانش گرفته تا مکانیک کوانتومی و فناوری‌های نوین مانند لیزرهای پیشرفته، نیازمند بررسی حرکت ذرات در میدان‌های استاتیکی و وابسته به زمان هستیم. بطور مشخص، میدان‌های با وابستگی زمانی رویکرد توانمندی در ارتباط با بسیاری از مفاهیم مهم فیزیک ذرات و هسته‌ای مانند تولید و نابودی زوج [۲]، برخورد‌های هسته‌های سنگین، تولید هادرونی از طریق تیوب شار، گلاσμα، نوسانات پلاسمایی و برهم کنش‌های الکترون‌های اتمی [۳] در اختیار می‌گذارد. ارتباط دیگر چنین مفهومی به فیزیک هسته‌ای و فیزیک ذرات در مدل شتابدهنده‌ی فرمی و تعمیم آن است. قدمت این ایده به اواخر سال ۱۹۴۰ برمی‌گردد که فرمی اشعه‌های کیهانی شتابدار یک ذره‌ی باردار در برخورد با میدان مغناطیسی وابسته به زمان را مطالعه کرد [۴].

در فصل اول این پایان‌نامه ابتدا به تعدادی از تعاریف مورد نیاز می‌پردازیم. در فصل دوم ذرات غیر نسبیتی را با استفاده از معادله شرودینگر به اجمال بررسی می‌کنیم. فصل سوم به بررسی ذرات نسبیتی با استفاده از معادلات دیراک و کلاین-گوردن اختصاص دارد و در فصل چهارم ذرات فرانسبیتی را در میدان‌های الکترومغناطیس بررسی می‌کنیم.

۱-۱. توصیف ذرات نسبیتی، غیر نسبیتی و فرا نسبیتی

از نظر فیزیکی برای بررسی ذرات غیر نسبیتی می‌توان گفت، انرژی کل این ذرات از مرتبه‌ی انرژی سکون است و انرژی کل ذره‌ی نسبیتی به مراتب بزرگتر از انرژی سکون می‌باشد. ذرات نسبیتی بسته به اسپینشان با معادله‌های دیراک، کلاین-گوردون و دافین-کمر-پتیا^۱ و ذرات غیر نسبیتی با معادله شرودینگر توصیف می‌شوند. در فیزیک به ذراتی فرا نسبیتی می‌گوییم که سرعت آن‌ها بسیار

¹ Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

نزدیک به سرعت نور است. ماکس پلانک نشان داد که انرژی نسبیتی ذرات با جرم سکون m_0 و تکانه p به شکل:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 \quad (۱-۱)$$

می باشد.

در ذرات فرا نسبیتی $pc \gg m_0 c^2$ می باشد و بنابراین می توان تقریب زد که $E = pc$ ، که می تواند از ثابت نگه داشتن جرم و افزایش p به مقدارهای بسیار بزرگ یا با ثابت نگهداشتن E و کاهش جرم به مقدار ناچیز به دست آید. به بیان ساده، حد فرا نسبیتی نتیجه حالت حدی $pc \gg m_0 c^2$ است.

۲-۱. تقسیم بندی ذرات بر اساس اسپین

همه ذرات بنیادی در دو دسته فرمیون ها و بوزون ها تقسیم بندی می شوند. فرمیون ها از اصل طرد پائولی پیروی می کنند که می گوید هیچ دو فرمیونی نمی توانند تابع موج یکسانی داشته باشند. فرمیون ها از آمار فرمی دیراک و بوزون ها از آمار بوز- انیشتین تبعیت می کنند.

رابطه ی مشهودی بین اندازه حرکت مداری ذاتی یا اسپین ذره و آمار حاکم بر آن وجود دارد. اسپین با عدد کوانتومی s مشخص می شود و این کمیت برای فرمیون ها مقداری نیمه صحیح

$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots)$ و برای بوزون ها مقداری صحیح $(0, 1, 2, \dots)$ می باشد.

۳-۱. معادله دیراک^۱

¹ Dirac Equation

معادله دیراک یک معادله‌ی موج نسبیتی است که در سال ۱۹۲۸ توسط یک فیزیکدان

بریتانیایی پائول دیراک^۱ به دست آمد، که برهم‌کنش‌های الکترومغناطیسی تمام ذرات دارای اسپین $\frac{1}{2}$

مانند الکترون و کوارک‌ها را توصیف می‌کند، تقارن پارته در آن حفظ می‌شود و سازگار با دو اصل مکانیک کوانتومی و نظریه‌ی نسبیت خاص است.

این معادله همچنین شکل جدید ماده – پاد ماده را نشان داد که قبلاً پیدا و مشاهده نشده بود و چندین سال بعد به صورت تجربی تأیید شد.

هرچند دیراک در ابتدا درک کاملی از اهمیت نتایجش نداشت، توصیف او از اسپین به عنوان یک نتیجه از اتحاد مکانیک کوانتومی و نسبیت، و کشف احتمالی پوزیترون، نشان دهنده‌ی یکی از بزرگترین پیروزی‌های فیزیک نظری بود. این دستاورد به طور کامل با کارهای قبل از او مثل نیوتن، ماکسول و انیشتین سازگار بود. معادله دیراک در نظریه‌ی کوانتومی برای تفسیر میدان‌های کوانتومی مربوط به ذره‌ی اسپین $\frac{1}{2}$ به کار می‌رود.

۱-۴. معادله کلاین – گوردون

معادله کلاین – گوردون نیز یک معادله‌ی موج نسبیتی است که توسط فیزیکدانان اسکار کلاین^۲ و والتر گوردون^۳ به دست آمد که برهم‌کنش‌های تمام ذرات اسپین صفر مانند پایون را توصیف می‌کند.

با وجود آنکه معادله دیراک برای شرح اسپین الکترون مشخص شد، معادله کلاین – گوردون (KG) دقیقاً پایون فاقد اسپین را یک ذره‌ی مرکب توصیف می‌کند. همچنین بوزون هیگز یک ذره‌ی اسپین صفر است که توسط معادله کلاین – گوردون شرح داده می‌شود.

¹ Paul Adrien Maurice Dirac

² Oskar Klein

³ Walter Gordon

۱-۵. اختلال^۱ وابسته به زمان

تعداد مسائلی که در مکانیک کوانتومی، می‌توانند به طور دقیق حل شوند، همانند مکانیک کلاسیک خیلی محدود می‌باشد. در بسیاری از موارد کاربردی مورد نظر، استفاده از روشهای تقریبی و عددی، اجتناب ناپذیر است. وجود کامپیوترهای سریع، محاسبات کوانتومی را به یک صنعت بزرگ تبدیل کرده است. علاوه بر مکانیک کوانتومی در مسائل دیگر نیز از روشهای تقریبی استفاده می‌شود. به عنوان مثال در علوم ریاضی قوانین بسط متعددی وجود دارد که در صورت نیاز یک تابع را بسط داده و چند جمله اول را انتخاب می‌کنند.

نظریه اختلال در بیشتر شاخه‌های فیزیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. این نظریه در مواردی به کار می‌رود که بخواهیم تأثیر عاملی را به روی یک سیستم مورد بررسی قرار دهیم. بنابراین، ابتدا خود سیستم را در نظر گرفته و عامل موثر را به صورت یک جمله اختلالی در نظر می‌گیرند.

همانگونه که از واژه اختلال بر می‌آید، اختلال نوعی انحراف سیستم از حالت اولیه است. به عبارت دیگر می‌توان گفت که عاملی بر یک سیستم اثر کرده و آن را مختل می‌کند. اما میزان این اختلال یا انحراف باید به اندازه‌ای کوچک باشد که بتوانیم نام اختلال را بر آن بگذاریم. در غیر این صورت دیگر اعمال لفظ اختلال صحیح نبوده و باید از واژه‌ی تغییر حالت نام ببریم. در نظریه اختلال نیز کوچک بودن میزان اختلال شرط اعمال این نظریه در مورد یک سیستم می‌باشد.

اگر عامل اختلال وابستگی زمانی نداشته باشد، در این صورت از نظریه اختلال مستقل از زمان استفاده می‌گردد. به عنوان مثال اگر یک سیستم فیزیکی تحت تأثیر یک پتانسیل خارجی قرار گیرد، حال می‌خواهیم تأثیر این عامل اختلال را بر حالت‌های انرژی سیستم بررسی کنیم. بنابراین عملگر کل سیستم را به صورت مجموع عملگر انرژی و عامل اختلال در نظر می‌گیریم. سپس حالت سیستم و نیز ویژه مقدار سیستم را به صورت سری بسط می‌دهیم.

¹ perturbation

اگر عامل اختلال وابستگی زمان داشته باشد در این صورت نظریه اختلال وابسته به زمان به کار می‌رود. برای بررسی تغییر حالت سیستم در اثر یک اختلال وابسته به زمان ، یک عملگر تحول زمانی تعریف می‌کنیم. با تأثیر این عملگر حالت سیستم در هر لحظه دلخواه را می‌توان محاسبه نمود. عملگر تحول زمانی با استناد از سری معروف دایسون بسط داده می‌شود و می‌توانیم با انتخاب هر جمله از بسط فوق اختلال را تا هر مرتبه معینی که مورد نظر ما باشد مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فصل دوم:

ذرات غیر نسبیتی

مقدمه:

مسائل کوانتوم مکانیک وابسته به زمان [۵،۶] توجه بسیاری از فیزیکدانان را به خود جلب کرده است. مطالعه‌ی این موارد به طور گسترده در تجزیه و تحلیل میدان‌های کوانتومی در فضا-زمان خمیده [۷]، اپتیک کوانتومی [۸،۹]، تله‌های پائولی^۱ [۱۰-۱۲] و اسپین ترونیک^۲ [۱۳] استفاده شده است.

در طول چند دهه‌ی گذشته، تلاش‌های زیادی انجام شده تا توابع موج تحلیلی نوسانگر هارمونیک با جرم یا فرکانس وابسته به زمان به روش‌هایی از جمله: انتگرال مسیر^۳ [۱۴]، ثابت دینامیکی^۴ [۱۴-۱۷] و کوانتیزیشن دوم^۵ [۱۴] پیدا شود. علاوه بر نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان، حل معادله شرودینگر یک بعدی [۱۸-۲۰] و معادله دیراک [۲۱،۲۲] با پتانسیل خطی وابسته به زمان، به ترتیب با استفاده از تکنیک لوئیس، رزنفیلد و روش انتقال فضا-زمان مورد توجه بوده است.

در این فصل در بخش اول هدف اصلی این است که از طریق انتقال فضا-زمان^۶ جواب‌های دقیق معادله شرودینگر با پتانسیل وابسته به زمان $V(z, \hat{p}, t) = g_1(t)z + g_2(t)\hat{p} + g_3(t)$ تابع حقیقی از زمان است ($j = 1, 2, 3$) را در $(1+1)$ بعد به دست آوریم. علاوه بر این، حالات خاص بحث می‌شود. در بخش دوم معادله شرودینگر وابسته به زمان با پتانسیل غیر مرکزی را در $(3+1)$ بعد به روش لوئیس و رزنفیلد^۷ بررسی کرده و توابع موج و ویژه مقادیر را به دست می‌آوریم.

¹ Pauli trap

² Spintronic

³ path integral

⁴ dynamical invariant

⁵ second quantization

⁶ time-space transformation method

⁷ technique of Lewis and Riesenfeld

۲-۱. حل معادله شرودینگر برای پتانسیل‌های وابسته به زمان از روش انتقال

فضا- زمان

در (1+1) بعد معادله شرودینگر با جرم وابسته به زمان $m(t)$ و پتانسیل وابسته به زمان [۲۳]

$$V(z, \hat{p}, t) = g_1(t)z + g_2(t)\hat{p} + g_3(t)$$

به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{i}\hat{H}\right)\psi(z, t) = 0, \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m(t)} + g_1(t)z + g_2(t)\hat{p} + g_3(t) \quad (۱-۲)$$

که $\hbar = 1$ قرار دادیم، با انجام انتقال یکانی

$$\psi(z, t) = \varphi(z, t)e^{i\beta(t)z} \quad (۲-۲)$$

که $\beta(t)$ تابع حقیقی از زمان است، رابطه (۱-۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\left\{i\left(\frac{\partial}{\partial t}\varphi(z, t)\right) - z\dot{\beta}(t)\varphi(z, t)\right\}e^{i\beta(t)z} = \left\{-\frac{1}{2m(t)}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} + g_1(t)z + g_2(t)\left(-i\frac{\partial}{\partial z}\right) + g_3(t)\right\}\varphi(z, t)e^{i\beta(t)z} \quad (۳-۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\psi(z, t) = \left(\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, t) + i\beta\varphi(z, t)\right)e^{i\beta(t)z} \quad (۴-۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\psi(z, t)\right) = \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi(z, t) + 2i\beta(t)\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, t) - \beta^2(t)\varphi(z, t)\right]e^{i\beta(t)z} \quad (۵-۲)$$

با جایگذاری روابط (۴-۲) و (۵-۲) در رابطه (۳-۲) داریم:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\varphi(z, t) = z\dot{\beta}(t)\varphi(z, t) - \frac{1}{2m(t)}\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi(z, t) + 2i\beta(t)\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, t) - \beta^2(t)\varphi(z, t)\right\} + g_1(t)z - ig_2(t)\left(\frac{\partial}{\partial z}\varphi(z, t) + i\beta\varphi(z, t)\right) + g_3(t)\varphi(z, t)$$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \varphi(z, t) = -\frac{1}{2m(t)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \varphi(z, t) - i(g_2(t) + \frac{\beta}{m(t)}) \frac{\partial}{\partial z} \varphi(z, t) + (\frac{\beta^2(t)}{2m(t)} + \beta g_2(t) + g_3(t)) \varphi(z, t) + (g_1(t) + \dot{\beta}(t)) z \varphi(z, t) \quad (۶-۲)$$

حال باید این رابطه را حل کرده و تابع $\beta(t)$ را تعیین کنیم، برای تغییر رابطه اخیر به معادله‌ی دیفرانسیل قابل حل، از روش انتقال فضا-زمان [۲۴] پیروی می‌کنیم. داریم

$$y = z + \alpha(t) \quad , \quad s = \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} d\tau \quad (۷-۲)$$

که $\alpha(t)$ تابع تعریف نشده‌ای از زمان است، با استفاده از رابطه (۷-۲) روابط زیر را خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} + \dot{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

از روابط اخیر و این که $\varphi(z, t) = f(y, s)$ استفاده کرده، برای رابطه (۶-۲) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} i(\frac{1}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} + \dot{\alpha}(t) \frac{\partial}{\partial y}) f(y, s) &= -\frac{1}{2m(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y, s) - i(g_2(t) + \frac{\beta}{m(t)}) \frac{\partial}{\partial y} f(y, s) \\ &+ (\frac{\beta^2(t)}{2m(t)} + \beta g_2(t) + g_3(t)) f(y, s) + (g_1(t) + \dot{\beta}(t))(y - \alpha(t)) f(y, s) \\ \frac{i}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} f(y, s) &= -\frac{1}{2m(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y, s) + (g_1(t) + \dot{\beta}(t)) y f(y, s) - i(g_2(t) + \frac{\beta}{m(t)} \\ &+ \dot{\alpha}(t)) \frac{\partial}{\partial y} f(y, s) + (\frac{\beta^2(t)}{2m(t)} + \beta g_2(t) + g_3(t)) f(y, s) - (g_1(t) \\ &+ \dot{\beta}(t)) \alpha(t) f(y, s) \end{aligned} \quad (۹-۲)$$

در این مدل پتانسیل وابسته‌ی زمانی، با توجه به اینکه $g_j(t)$ تابع نامشخصی از زمان است، می‌توانیم $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ ای بسازیم که روابط زیر را برآورده کنند

$$\dot{\alpha} + \frac{\beta(t)}{m(t)} + g_2(t) = 0 \quad , \quad g_1(t) + \dot{\beta}(t) = 0 \quad (۱۰-۲)$$

رابطه (۱۰-۲) را در رابطه (۹-۲) جایگذاری می‌کنیم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{i}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} f(y, s) = -\frac{1}{2m(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y, s) + \left(\frac{\beta^2(t)}{2m(t)} + \beta g_2(t) + g_3(t) \right) f(y, s) \quad (۱۱-۲)$$

برای اینکه جمله $\left(\frac{\beta^2(t)}{2m(t)} + \beta g_2(t) + g_3(t) \right) f(y, s)$ را در رابطه (۱۱-۲) حذف کنیم، فرض می‌کنیم

$$f(y, s) = F(y, s) \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) \quad (۱۲-۲)$$

که

$$G = \frac{\beta^2(t)}{2m(t)} + \beta g_2(t) + g_3(t) \text{ می‌باشد. برای اینکه بتوانیم به روشی تحلیلی } f(y, s) \text{ را بسازیم، باید}$$

مطمئن باشیم که $s = \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} d\tau$ و $-i \int_0^t G(\tau) d\tau$ قابل انتگرال‌گیری هستند. به عبارت دیگر، $m(t)$

و $g_j(t)$ ($j=1, 2, 3$) نمی‌توانند هر تابع دلخواهی از زمان باشند. با استفاده از رابطه‌های (۸-۲) و

(۱۲-۲) برای سمت چپ رابطه (۱۱-۲) داریم

$$\begin{aligned} \frac{i}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} f(y, s) &= \frac{i}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} \{F(y, s) \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau)\} \\ &= \frac{i}{m(t)} \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) + \frac{iF(y, s)}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} (\exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau)) \end{aligned} \quad (۱۳-۲)$$

با جایگذاری رابطه (۸-۲) در رابطه (۱۳-۲) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{i}{m(t)} \frac{\partial}{\partial s} f(y, s) &= \frac{i}{m(t)} \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) + iF(y, s) \left[\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \right] \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) \\ &= \left\{ \frac{i}{m(t)} \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} + F(y, s) G(t) \right\} \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) \end{aligned} \quad (۱۴-۲)$$

با جایگذاری روابط (۱۲-۲) در رابطه (۱۱-۲) داریم:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{i}{m(t)} \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} + F(y, s) G(t) \right\} \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) &= -\frac{1}{2m(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y, s) + \left(\frac{\beta^2(t)}{2m(t)} + \beta g_2(t) \right. \\ &\quad \left. + g_3(t) \right) f(y, s) \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۲-۱۲) و رابطه $G(t)$ داریم:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{i}{m(t)} \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} + F(y, s) G(t) \right\} \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) &= -\frac{1}{2m(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(y, s) \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) \\ &+ G(t) F(y, s) \exp(-i \int_0^t G(\tau) d\tau) \end{aligned}$$

$$i \frac{\partial F(y, s)}{\partial s} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(y, s) \quad (۲-۱۵)$$

که می‌بینیم نهایتاً جمله‌ی مورد نظر حذف شد و معادله حاصل شبیه معادله شرودینگر یک بعدی ذره‌ی آزاد با جرم $m=1$ و $\hbar=1$ است که حل آن در کتب مکانیک کوانتومی به شکل زیر داده شده است

$$F(y, s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i(Ay - A^2 \frac{s}{2})) \quad (۲-۱۶)$$

که A یک عدد حقیقی دلخواه است. حال برای داشتن تابع موج تمام مسیر را بر می‌گردیم، با جایگذاری روابط (۲-۷) در روابط (۲-۲) و (۲-۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \psi(z, t) &= f(y, s) e^{iz\beta(t)} = F(y, s) e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} e^{iz\beta(t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(Ay - A^2 \frac{s}{2})} e^{iz\beta(t)} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} \end{aligned}$$

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iA(z + \alpha(t))} e^{-i \frac{A^2}{2} \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} d\tau} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} e^{i\beta(t)z} \quad (۲-۱۷)$$

با توجه به روابط (۲-۱۰) و رابطه G خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\left(\frac{\beta(\tau)}{m(\tau)} + g_2(\tau)\right) \Rightarrow \alpha(t) = -\int_0^t \left(\frac{\beta(\tau)}{m(\tau)} + g_2(\tau)\right) d\tau \\ \dot{\beta} &= -g_1(\tau) \Rightarrow \beta(t) = -\int_0^t g_1(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (۲-۱۸)$$

$$G = \frac{\beta^2(\tau)}{2m(\tau)} + \beta(\tau)g_2(\tau) + g_3(\tau)$$

بنابراین به ازای $m(t)$ و $g_j(t)$ ، معادله شرودینگر به همین سادگی قابل حل است.

- حالت‌های خاص

به منظور بررسی درستی نتایج به دست آمده، چند مورد خاص را بررسی می کنیم

حالت اول، اگر پتانسیل وابسته به زمان به شکل $V(z, t) = g_1(t)z$ ($g_2(t) = g_3(t) = 0, g_1(t) \neq 0$)

باشد، از رابطه (۱۷-۲) داریم

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iA(z+\alpha(t))} e^{-i\frac{A^2}{2} \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} d\tau} e^{-i \int_0^t G(\tau) d\tau} e^{i\beta(t)z} \quad (۱۹-۲)$$

که در آن

$$\beta(t) = -\int_0^t g_1(\tau) d\tau$$

$$G(\tau) = \frac{\beta^2(\tau)}{2m(\tau)}$$

$$\alpha(t) = -\int_0^t \frac{\beta(\tau)}{m(\tau)} d\tau$$

واضح است که نتیجه‌ی (۱۹-۲) در توافق با نتایج [۲۴] می باشد.

حالت دوم، اگر میدان خارجی میرا باشد ($g_1(t) = g_2(t) = g_3(t) = 0$) و جرم ذرات مستقل از زمان

باشد ($m(t) = m_0$ با m_0 ثابت) ، رابطه (۱۷-۲) به شکل زیر می شود

$$\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow G = 0$$

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iAz} e^{-\frac{iA^2}{2} \frac{1}{m(0)} t}$$

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[i(Pz - Et)] \quad (۲۰-۲)$$

$$.E = \frac{A^2}{2m_0} = \frac{P^2}{2m_0} \text{ و } A = P \text{ که:}$$

در رابطه (۲-۲۰) کاملاً مشهود است معادله ای مانند معادله موج تخت ذره آزاد با انرژی E و تکانه ی P در راستای z می باشد. بنابراین سیستم های کوانتومی وابسته به زمانی که اینجا در نظر گرفتیم، هنگامی که میدان خارجی میرا است، به شکل ذره آزاد تبدیل می شوند.

حالت سوم، اگر پتانسیل وابسته به زمانی را به فرم $V(\hat{P}, t) = g_2(t)\hat{P}$ $(g_1(t) = g_3(t) = 0)$ در نظر بگیریم، $\beta = G = 0$ می شود. در این مورد با توجه به رابطه (۲-۱۷) داریم

$$\psi(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[iA(z - \int_0^t g_2(\tau) d\tau)] \exp[-i \frac{A^2}{2} \int_0^t \frac{1}{m(\tau)} d\tau] \quad (2-21)$$

$$\text{که } \alpha(t) = -\int_0^t g_2(\tau) d\tau$$

نتایج نشان می دهند هنگامی که $g_2(t) = g_3(t) = 0$ باشد، نتیجه ی کلی به نتیجه ی [۲۴] تبدیل می شود. هنگامی که $g_1(t) = g_2(t) = g_3(t) = 0$ باشد، جواب ها معادله شرودینگر ذره آزاد [۲۵] هستند. همچنین هنگامی که $g_1(t) = g_3(t) = 0$ باشد، تابع موج می تواند حرکت ذره باردار در یک میدان مغناطیسی را شرح دهد.

۲-۲. معادله شرودینگر وابسته به زمان با پتانسیل غیر مرکزی به روش لوئیس و رزنفیلد:

از آنجایی که مسائل وابسته به زمان که قابل حل دقیق می باشند محدود هستند، کاملاً طبیعی است که بپرسیم چگونه یک فرم کلی از پتانسیل غیر مرکزی که به وسیله هامیلتونی

$$H(t) = \frac{p^2}{2M(t)} + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) r^2 + \frac{U(\theta)}{M(t) r^2} \quad (2-22)$$

شرح داده می شود را مطالعه کنیم ($U(\theta)$ یک معادله دلخواه است).

برای کامل کردن مطالعه سیستم های دینامیکی با پارامترهای متغیر با زمان، روش عملگر ناوردایی لوئیس و رزنفیلد را به کار می‌بریم که برای حل دقیق معادله شرودینگر با هامیلتونی‌ای که بستگی صریح زمانی دارد، مفید است. قبل از آنکه به کمک این روش سیستم با هامیلتونی داده شده را بررسی کنیم، مختصری از روش لوئیس و رزنفیلد را بیان می‌کنیم.

$I(t)$ عملگر هرمیتی ($I = I^\dagger$) ناورداء، وابسته به زمان در رابطه هایزنبرگ صدق می‌کند [1]

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I(t), H(t)] = 0 \quad (23-2)$$

عملگر I تحول زمانی نداشته و ویژه مقادیرش مستقل از زمان خواهند بود ولی خود عملگر نسبت به زمان تغییر می‌کند، معادله ویژه مقداری زیر را معرفی می‌کنیم

$$I(t)|\phi_n\rangle = \lambda|\phi_n\rangle \quad (24-2)$$

می‌خواهیم نشان دهیم λ مستقل از زمان است، رابطه (23-2) را بر $|\phi_n\rangle$ اثر می‌دهیم

$$i\hbar \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\phi_n\rangle + I(t)H(t)|\phi_n\rangle - \lambda H(t)|\phi_n\rangle = 0$$

رابطه به دست آمده را در $\langle\phi'_n|$ ضرب می‌کنیم

$$i\hbar \langle\phi'_n| \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\phi_n\rangle + (\lambda' - \lambda) \langle\phi'_n| H(t) |\phi_n\rangle = 0 \quad (25-2)$$

به ازای $\lambda = \lambda'$ ، $\langle\phi'_n| \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\phi_n\rangle = 0$ خواهد شد.

اگر از رابطه (24-2) نسبت به زمان مشتق جزئی بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t} |\phi_n\rangle + I(t) \frac{\partial}{\partial t} |\phi_n\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} |\phi_n\rangle + \lambda \frac{\partial}{\partial t} |\phi_n\rangle$$

بنابراین

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \langle\phi'_n| \frac{\partial I(t)}{\partial t} |\phi_n\rangle = 0 \quad (26-2)$$

بنابراین ویژه مقادیر $\mathcal{H}$ مستقل از زمان است.

لوئیس و رزنفیلد نشان دادند که جواب معادله شرودینگر وابسته به زمان

$$H(t)|\psi(x,t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(x,t)\rangle \quad (27-2)$$

می تواند به شکل زیر نوشته شود

$$|\psi(x,t)\rangle = e^{i\varepsilon(t)} |\phi(x,t)\rangle \quad (28-2)$$

با جایگذاری رابطه (28-2) در (27-2) داریم

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{i\varepsilon(t)} |\phi(x,t)\rangle &= H(t) e^{i\varepsilon(t)} |\phi(x,t)\rangle \\ -\hbar \dot{\varepsilon}(t) |\phi(x,t)\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\phi(x,t)\rangle &= H(t) |\phi(x,t)\rangle \end{aligned}$$

$$\hbar \frac{d}{dt} \varepsilon(t) = \langle \phi(x,t) | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H(t) | \phi(x,t) \rangle \quad (29-2)$$

رابطه (29-2) نشان می دهد که فاز $\varepsilon(t)$ می تواند از این رابطه به دست آید.

اکنون معادله شرودینگر وابسته به زمان (27-2) را در نظر می گیریم که هامیلتونی آن در رابطه (22-2)

تعریف شده است. نکته کلیدی روش لوئیس و رزنفیلد ساختن اپراتور ناوردایی $I(t)$ است که ما آن را به شکل زیر در نظر می گیریم [26].

$$I = \frac{1}{2} [\alpha T_1 + \beta T_2 + \gamma T_3] \quad (30-2)$$

که α و β و γ توابع حقیقی وابسته به زمان هستند. همچنین

$$T_1 = p^2 + \frac{2U(\theta)}{r^2}, T_2 = r^2, T_3 = rp_r + p_r r \quad (31-2)$$

که عملگر $p_r = -i\hbar(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r})$ است و مجموعه (31-2) روابط جبری زیر را دارد

$$[T_1, T_2] = -2i\hbar T_3, [T_2, T_3] = 4i\hbar T_2, [T_1, T_3] = -4i\hbar T_1 \quad (32-2)$$

حال می‌خواهیم اپراتور ناوردایی I را بیابیم، به این منظور ابتدا هامیلتونی (۲-۲۲) را به فرم اپراتور ناوردایی (۲-۳۰) نوشته، سپس با جایگذاری باید رابطه (۲-۲۳) را برآورده کنند:

$$H(t) = \frac{1}{2M(t)} T_1 + \frac{1}{2} M(t) \omega^2(t) T_2$$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} I}_1 - \underbrace{\frac{i}{\hbar} [I, H]}_2 = 0$$

$$1 = \frac{\partial}{\partial t} I = \frac{1}{2} [\dot{\alpha} T_1 + \dot{\beta} T_2 + \dot{\gamma} T_3]$$

$$\begin{aligned} 2 &= -\frac{i}{\hbar} [I, H] \\ &= \left(\frac{\beta}{2M(t)} - \frac{\alpha M(t) \omega^2(t)}{2} \right) T_3 + \frac{\gamma}{M(t)} T_1 - \gamma M(t) \omega^2(t) T_2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\left(\frac{1}{2} \dot{\alpha} + \frac{\gamma}{M(t)} \right) T_1 + \left(\frac{\dot{\beta}}{2} - \gamma M(t) \omega^2(t) \right) T_2 + \left(\frac{\dot{\gamma}}{2} + \frac{\beta}{2M(t)} - \frac{\alpha M(t) \omega^2(t)}{2} \right) T_3 = 0$$

که منجر به نتایج زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{2}{M(t)} \gamma \\ \dot{\beta} &= 2M(t) \omega^2(t) \gamma \\ \dot{\gamma} &= -\frac{\beta}{M(t)} + M(t) \omega^2(t) \alpha \end{aligned} \quad (۲-۳۳)$$

برای حل این معادلات، مناسب است که تابع $\rho(t)$ را بسازیم که

$$\alpha(t) = \rho^2(t) \quad (۲-۳۴)$$

شود. $\rho^2(t)$ یک تابع حقیقی از زمان است. از (۲-۳۴) و رابطه اول (۲-۳۳) خواهیم داشت

$$\dot{\alpha} = 2\rho\dot{\rho}$$

$$\gamma = -M\rho\dot{\rho} \quad (۲-۳۵)$$

$$\dot{\gamma} = -\dot{M}\rho\dot{\rho} - M\dot{\rho}^2 - M\rho\ddot{\rho} \quad (۳۶-۲)$$

از رابطه سوم (۳۳-۲) داریم

$$\begin{aligned} \beta &= M(M\omega^2\alpha - \dot{\gamma}) \\ &= \rho(M^2\omega^2\rho + M\dot{M}\dot{\rho} + M^2\ddot{\rho}) + M^2\dot{\rho}^2 \end{aligned} \quad (۳۷-۲)$$

از رابطه دوم (۳۳-۲) و رابطه (۳۷-۲):

$$\dot{\beta} + 2M(t)\omega^2(t)\gamma = 0$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (M^2\omega^2\rho + M\dot{M}\dot{\rho} + M^2\ddot{\rho}) + (M^2\omega^2\rho + M\dot{M}\dot{\rho} + M^2\ddot{\rho})\dot{\rho} \\ + 2M\dot{M}\dot{\rho}^2 + 2M^2\ddot{\rho}\dot{\rho} + 2M^2\omega^2\rho\dot{\rho} = 0 \end{aligned}$$

$$\rho \frac{d}{dt} (M^2\omega^2\rho + M\dot{M}\dot{\rho} + M^2\ddot{\rho}) + 3\dot{\rho}(M^2\omega^2\rho + M\dot{M}\dot{\rho} + M^2\ddot{\rho}) = 0 \quad (۳۸-۲)$$

اگر

$$(M^2\omega^2\rho + M\dot{M}\dot{\rho} + M^2\ddot{\rho}) = \frac{1}{\rho^3} \quad (۳۹-۲)$$

باشد، رابطه (۳۸-۲) برقرار می‌شود. بنابراین با جایگذاری در (۳۷-۲) خواهیم داشت

$$\beta(t) = \frac{1}{\rho^2(t)} + M^2(t)\dot{\rho}^2 \quad (۴۰-۲)$$

با جایگذاری روابط (۳۴-۲)، (۳۵-۲) و (۴۰-۲) در رابطه (۳۰-۲) و همچنین استفاده از روابط (۳۱-۲)

اپراتور ناوردایی به شکل زیر به دست می‌آید

$$I = \frac{1}{2} \left[\rho^2 \left(p^2 + \frac{2U(\theta)}{r^2} \right) + \left(\frac{1}{\rho^2} + M^2\dot{\rho}^2 \right) r^2 - \rho\dot{\rho}M(rp_r + p_r r) \right] \quad (۴۱-۲)$$

از قرار دادن رابطه (۴۰-۲) در رابطه دوم (۳۳-۲) داریم

$$\ddot{\rho} + \frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho} + \omega^2\rho = \frac{1}{M^2\rho^3} \quad (۴۲-۲)$$

که یک رابطه قیدی برای $\rho(t)$ می باشد، یعنی تابع $\rho(t)$ باید رابطه (۲-۴۲) را برآورده کند.

برای حل کردن معادله ویژه مقداری (۲-۲۴) با اپراتور نوردایی (۲-۴۱) مناسب است که از انتقال یکانی

استفاده کنیم، برای این منظور

$$\phi = S\phi' = \exp(i \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2) \phi' \quad (2-43)$$

بنابراین اپراتور I نیز طبق رابطه $I' = S^\dagger I S$ تغییر می کند :

$$\begin{aligned} I' &= \exp(-i \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2) \frac{1}{2} [\rho^2 (p^2 + \frac{2U(\theta)}{r^2}) + (\frac{1}{\rho^2} + M^2 \dot{\rho}^2) r^2 - \rho \dot{\rho} M (r p_r + p_r r)] \exp(i \frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho} r^2) \\ &= \exp(i(-\frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho}) T_2) \frac{1}{2} [\underbrace{\rho^2 T_1}_1 + \underbrace{(\frac{1}{\rho^2} + M^2 \dot{\rho}^2) T_2}_2 - \underbrace{\rho \dot{\rho} M T_3}_3] \exp(-i(-\frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho}) T_2) \end{aligned}$$

اگر $A = (-\frac{M\dot{\rho}}{2\hbar\rho})$ در نظر بگیریم، با استفاده از قضیه بکر - هاسدروف داریم

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2} \rho^2 \{T_1 + iA[T_2, T_1] + (\frac{i^2 A^2}{2}) [T_2, [T_2, T_1]]\} \\ &= \frac{1}{2} \rho^2 T_1 - \frac{M \rho \dot{\rho}}{2} T_3 + \frac{M^2 \dot{\rho}^2}{2} T_2 \\ 2 &= \frac{1}{2} (\frac{1}{\rho^2} + M^2 \dot{\rho}^2) T_2 \\ 3 &= -\frac{1}{2} M \rho \dot{\rho} \{T_3 + iA[T_2, T_3]\} \\ &= -\frac{1}{2} M \rho \dot{\rho} T_3 - M^2 \dot{\rho}^2 T_2 \end{aligned}$$

بنابراین از مجموع این سه جمله

$$I' = \frac{1}{2} [\rho^2 (p^2 + \frac{2U(\theta)}{r^2}) + \frac{1}{\rho^2} r^2] \quad (2-44)$$

به دست می آید. با باز کردن p^2 به دو بخش شعاعی و زاویه ای و تغییر متغیر $R = \frac{r}{\rho}$ خواهیم داشت

$$p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

$$p_r^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) = -\frac{\hbar^2}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{\rho^2} \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 \frac{\partial}{\partial R}) \right)$$

که اپراتور L^2 در مختصات کروی به شکل

$$L^2 = -\hbar^2 (\partial_\theta^2 + \cot(\theta) \partial_\theta + \sin^{-2}(\theta) \partial_\phi^2)$$

است. بنابراین با جایگذاری رابطه (۴۴-۲) و روابط بالا در رابطه $I'\phi' = \lambda\phi'$ خواهیم داشت

$$\{R^{-2} \partial_R (R^2 \partial_R) + \frac{1}{\hbar^2} (2\lambda - \frac{L^2 + 2U(\theta)}{R^2} - R^2)\} \phi' = 0 \quad (۴۵-۲)$$

با در نظر گرفتن تابع ϕ' به فرم

$$\phi'(R, \theta, \varphi) = \frac{1}{R} f(R) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (۴۶-۲)$$

و جایگذاری در رابطه (۴۵-۲) خواهیم داشت

$$\frac{1}{R^2} \Theta \Phi \left(\frac{\partial}{\partial R} R^2 \right) \left(-\frac{1}{R^2} f + \frac{1}{R} \frac{\partial f}{\partial R} \right) + \frac{1}{\hbar^2} \{ 2\lambda \phi' - \frac{1}{R^2} [-\hbar^2 \left(\frac{1}{R} f \Phi \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \cot\left(\frac{1}{R} f \Phi \right) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{\sin^2(\theta)} \frac{1}{R} f \Theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) + 2U(\theta) \phi' \right] - R^2 \phi' \} = 0$$

با اثر دادن تمام جملات و تقسیم رابطه بر ϕ' و در نظر گرفتن

$$\Phi(\varphi) = e^{im\varphi} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (۴۷-۲)$$

خواهیم داشت

$$\underbrace{\frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial R^2} + \frac{1}{\hbar^2} (2\lambda - R^2)}_1 + \underbrace{\frac{1}{R^2} \left[\frac{1}{\Theta} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\Theta} \cot(\theta) \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} - 2 \frac{U(\theta)}{\hbar^2} - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} \right]}_2 = 0$$

می‌بینیم که قسمت شعاعی و زاویه ای از هم جدا هستند. با مساوی قرار دادن عبارات $\frac{v}{R^2} = 1$ و

$-v = 2$ رابطه بالا به شکل زیر جداسازی می‌شود

$$\frac{\partial^2 f(R)}{\partial R^2} + \frac{1}{\hbar^2} (2\lambda - R^2 - \frac{v\hbar^2}{R^2}) f(R) = 0 \quad (48-2)$$

$$[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{U(\theta)}{\hbar^2} - \frac{m^2}{\sin^2(\theta)} + v] \Theta(\theta) = 0 \quad (49-2)$$

که v ثابت جداسازی می‌باشد.

می‌بینیم که معادله شعاعی (48-2) که مستقل از $U(\theta)$ است، یک نوسانگر هماهنگ کروی می‌باشد

که جواب‌های آن با استفاده از تغییر متغیر $R^2 = S$ و سپس حل به روش NU [27]، برحسب چند

جمله‌ای‌های لاگر به شکل

$$f(R) = R^{\frac{1}{2}+\mu} L_n^\mu(\frac{R^2}{\hbar}) \exp[-\frac{R^2}{2\hbar}] \quad (50-2)$$

می‌باشد که $\mu = \sqrt{\frac{1}{4} + v}$ بوده و ویژه مقادیر λ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\lambda = \hbar(2n+1+\sqrt{\mu}) \quad n=0,1,2,\dots \quad (51-2)$$

با حل کردن قسمت زاویه‌ای یعنی معادله (49-2)، می‌توانیم v را نیز محاسبه کنیم.

برای حل کردن قسمت زاویه‌ای تغییر متغیر $S = \cos(\theta)$ را داده و با در نظر گرفتن $U(\theta) = 0$ داریم

$$\Theta(S) = (1-S^2)^{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{1}{16}+m^2}} S^{\frac{1}{2}+2\sqrt{2m^2+\frac{1}{16}}} p_n^{(2\sqrt{\frac{1}{16}+m^2}, 2(\sqrt{2m^2+\frac{1}{16}}+\sqrt{\frac{1}{16}+m^2})-2\sqrt{\frac{1}{16}+m^2}-2)} (2S^2-1) \quad (52-2)$$

که $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ چند جمله‌ای‌های ژاکوبی می‌باشند:

$$p_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}]$$

همچنین برای ثابت جداسازی

$$v = n^2 + n + \frac{3}{8} + m^2 + (2n+1)\left(\sqrt{2m^2 + \frac{1}{16}} + \sqrt{m^2 + \frac{1}{16}}\right) \quad (53-2)$$

به دست می‌آید. حال به حل چند مثال در حالات مختلف می‌پردازیم.

حالت اول:

ابتدا حالتی را انتخابی می‌کنیم که

$$M(t) = t^2, \quad \omega(t) = \omega_0 \quad (54-2)$$

باشد. برای محاسبه ρ باید معادله (42-2) را حل نماییم. برای این کار ابتدا ρ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم [28]

$$\rho = \frac{1}{t} y \quad (55-2)$$

که y نیز تابعی برحسب زمان می‌باشد. حال مشتق اول و دوم ρ را نسبت به t محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{1}{t^2} y + \frac{1}{t} \dot{y} \\ \ddot{\rho} &= \frac{1}{t} \ddot{y} - \frac{2}{t^2} \dot{y} + \frac{2}{t^3} y \end{aligned}$$

از جایگذاری این روابط در رابطه (42-2) داریم

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{1}{y^3} \quad (56-2)$$

با ضرب کردن رابطه (56-2) در y خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \ddot{y}y + \omega_0^2 y\dot{y} - \frac{\dot{y}}{y^3} &= 0 \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{y}^2) + \frac{\omega_0^2}{2} \frac{d}{dt} (y^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (y^{-2}) &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\dot{y}^2 + \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{y^2} \right) &= 0 \end{aligned}$$

بنابراین عبارت داخل پرانتز برابر مقدار ثابتی است که ما آن را a^2 در نظر می‌گیریم:

$$\dot{y}^2 + \omega_0^2 y^2 + \frac{1}{y^2} = a^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(y^2 a^2 - \omega_0^2 y^4 - 1)^{\frac{1}{2}}}{y}$$

$$\int \frac{y}{(y^2 a^2 - \omega_0^2 y^4 - 1)^{\frac{1}{2}}} dy = \int dt$$

با در نظر گرفتن $u = y^2$ ، داریم

$$\int \frac{1}{2(ua^2 - \omega_0^2 u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} du = t + \delta$$

$$\int \frac{1}{2i(1 + \omega_0^2 u^2 - ua^2)^{\frac{1}{2}}} du = t + \delta$$

از طرفی $(1 + \omega_0^2 u^2 - ua^2) = (\omega_0 u - \frac{a^2}{2\omega_0})^2 - \frac{a^4}{4\omega_0^2} + 1$ می‌باشد، همچنین با در نظر گرفتن

$$b^2 = 1 - \frac{a^4}{4\omega_0^2}$$

$$\int \frac{1}{2i((\omega_0 u - \frac{a^2}{2\omega_0})^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}} du = t + \delta$$

$$\int \frac{1}{2ib(\frac{(\omega_0 u - \frac{a^2}{2\omega_0})^2}{b^2} + 1)^{\frac{1}{2}}} du = t + \delta$$

با استفاده از تغییر متغیر

$$\zeta = \frac{1}{b}(\omega_0 u - \frac{a^2}{2\omega_0}) \quad (57-2)$$

خواهیم داشت

$$\int \frac{d\zeta}{(\zeta^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = 2\omega_0 i(t + \delta)$$

$$\text{Arcsinh}(\zeta) = 2\omega_0 i(t + \delta)$$

$$\zeta = \sinh(2\omega_0 i(t + \delta)) \quad (58-2)$$

با جایگذاری رابطه (58-2) در (57-2)

$$u = \frac{b}{\omega_0} \sinh(2i\omega_0(t + \delta)) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0}\right)^2$$

به دست می‌آید. بنابراین با استفاده از تعریف $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$$u = \frac{ib}{\omega_0} \sin(2i\omega_0(t + \delta)) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0}\right)^2 \quad (59-2)$$

با بازگشت به روابط قبلی داریم:

$$y = \sqrt{\frac{ib}{\omega_0} \sin(2i\omega_0(t + \delta)) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0}\right)^2}$$

9

$$\rho = \frac{1}{t} \sqrt{\frac{ib}{\omega_0} \sin(2i\omega_0(t + \delta)) + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\omega_0}\right)^2} \quad (60-2)$$

اگر $b = 0$ باشد، بنابراین

$$\rho = \frac{t^{-1}}{\sqrt{\omega_0}} \quad (61-2)$$

تابع ρ به دست آمد. حال با استفاده از روابط (47-2)، (50-2)، (51-2)، (52-2)، (53-2) و (54-2)

به ازای $n=0, l=0, m=0$ داریم

$$\nu = \frac{7}{8} , \quad \mu = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$f(r) = \left(\frac{r}{t\sqrt{\omega_0}}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{8}}\right)} \exp\left[-\frac{r^2 t^2 \omega_0}{2\hbar}\right]$$

$$\Phi(\varphi) = 1$$

$$\Theta(\theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

با استفاده از رابطه (۴۶-۲)

$$\phi' = \left(\frac{1}{rt\sqrt{\omega_0}}\right) \left(\frac{r}{t\sqrt{\omega_0}}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{8}}\right)} \exp\left[-\frac{r^2 t^2 \omega_0}{2\hbar}\right] (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

و با استفاده از رابطه (۴۸-۲) نتیجه به شکل

$$\phi = \left(\frac{1}{rt\sqrt{\omega_0}}\right) \left(\frac{r}{t\sqrt{\omega_0}}\right)^{\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{8}}\right)} (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\left(\frac{it + t^2 \omega_0}{2\hbar}\right)r^2\right] \quad (۶۲-۲)$$

خواهد شد که ویژه تابع اپراتور ناوردایی $I(t)$ می باشد.

حالت دوم:

در این حالت، با انتخاب

$$M(t) = t^4 , \quad \omega(t) = \omega_0 \quad (۶۳-۲)$$

ρ برابر است با [۲۸]

$$\rho = \frac{t^{-2}}{\sqrt{\omega_0}} \left(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (۶۴-۲)$$

با استفاده از روابط (۴۷-۲)، (۵۰-۲)، (۵۱-۲)، (۵۲-۲)، (۵۳-۲) و (۵۴-۲) به ازای

$n=0, l=0, m=0$ داریم

$$\nu = \frac{7}{8}, \quad \mu = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$f(r) = (rt^2 \sqrt{\omega_0} (1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{8}}} \exp[-\frac{r^2}{2\hbar} t^2 \omega_0 (1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{-1}]$$

$$\Phi(\varphi) = 1$$

$$\Theta(\theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

با استفاده از رابطه (۴۶-۲)

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{\frac{1}{2}}}{rt^2 \sqrt{\omega_0}} (rt^2 \sqrt{\omega_0} (1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{8}}} \exp[-\frac{r^2}{2\hbar} t^2 \omega_0 (1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{-1}] \\ &\times (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (۶۳-۲)$$

و از رابطه (۴۳-۲) ویژه تابع اپراتور نوردایی $I(t)$

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{\frac{1}{2}}}{rt^2 \sqrt{\omega_0}} (rt^2 \sqrt{\omega_0} (1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{8}}} \exp[(\frac{-2it^2 - (\frac{it}{\omega_0^2} + \omega_0 t^2)(1 + \frac{1}{\omega_0^2 t^2})^{-1}}{2\hbar}) r^2] \\ &\times (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (۶۶-۲)$$

به دست می‌آید که ویژه تابع به دست آمده که بر حسب مکان و زمان می‌باشد، ویژه تابع اپراتور نوردایی است.

حالت سوم:

برای این حالت،

$$M(t) = m_0 e^{\gamma t}, \quad \omega(t) = \omega_0 \quad (۶۷-۲)$$

را در نظر می‌گیریم. تابع ρ برابر است با [۲۸]

$$\rho(t) = \frac{e^{-\frac{\gamma}{2}t}}{\sqrt{m_0 \Omega}}, \quad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} \quad (۶۸-۲)$$

مانند حالات قبل با استفاده از همان روابط

$$\nu = \frac{7}{8}, \quad \mu = \frac{3}{\sqrt{8}}$$

$$f(r) = (r\sqrt{m_0\Omega}e^{\frac{\gamma}{2}t})^{(\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{8}})} \exp[-\frac{r^2 m_0 \Omega}{2\hbar} e^{\gamma t}]$$

$$\Phi(\varphi) = 1$$

$$\Theta(\theta) = (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

و با استفاده از رابطه‌های (۴۶-۲) و (۴۳-۲) داریم

$$\phi' = (\frac{\sqrt{m_0\Omega}}{r} e^{\frac{\gamma}{2}t}) (r\sqrt{m_0\Omega} e^{\frac{\gamma}{2}t})^{(\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{8}})} \exp[-\frac{r^2 m_0 \Omega}{2\hbar} e^{\gamma t}] (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \quad (۶۹-۲)$$

و بنابراین

$$\phi = (\frac{\sqrt{m_0\Omega}}{r} e^{\frac{\gamma}{2}t}) (r\sqrt{m_0\Omega} e^{\frac{\gamma}{2}t})^{(\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{8}})} (\cos^2 \theta - \cos^4 \theta)^{\frac{1}{2}} \exp[-\frac{(\Omega + i\frac{\gamma}{2})}{2\hbar} m_0 e^{\gamma t} r^2] \quad (۷۰-۲)$$

که در تمام حالات ویژه مقدار به ازای $n = l = m = 0$ برابر

$$\lambda = \hbar(1 + 4\sqrt{\frac{3}{8}}) \quad (۷۱-۲)$$

می‌باشد.

چون هدف ما بررسی ذرات نسبیتی می‌باشد، در فصل بعد معادله دیراک با پتانسیل وابسته به زمان را

به همین روش بررسی می‌کنیم.

فصل سوم:

ذرات نسبیتی

مقدمه

در مکانیک کوانتومی برای یک شکل خاص از پتانسیل، برای حل تحلیلی، روش‌های مختلفی وجود دارد. هنگامی پتانسیل‌ها وابسته به زمان هستند برای به دست آوردن جواب‌ها، استفاده از راه حل تقریبی اجتناب ناپذیر است. تلاش‌های زیادی برای یافتن جواب دقیق سیستم‌های وابسته به زمان با استفاده از روش‌های مختلف صورت گرفته است، برای مثال انتگرال مسیر^۱ [۲۹،۳۰]، روش ابر تقارن^۲ [۳۱]، روش استاندارد جداسازی متغیرها^۳ [۳۲] و با این حال موضوع سیستم‌های وابسته به زمان، موضوع خیلی جالبی است، به ویژه برای کسانی که جواب‌های دقیق با استفاده از معادلات کمکی به دست می‌آورند.

برای سیستم‌های کوانتومی غیر نسبیتی با شرایط مرزی متفاوت جواب‌های دقیق برای موارد خاص پیدا شده است [۳۳-۳۵].

برای سیستم‌های نسبیتی با تغییر شرایط مرزی، جدایی قسمت فضا-زمان مشهود است. اولین مدل با تغییر شرایط مرزی در زمینه‌ی تابش کیهانی توسط فرمی مطالعه شد [۳۶].

در این فصل، در بخش اول معادله وابسته به زمان دیراک را حل نموده و انطباق آن با کوانتوم کلاسیک را تحقیق می‌کنیم. در بخش دوم معادله دیراک در پتانسیل وابسته به زمان را به روش لوییس-رزنفیلد بررسی می‌کنیم که از این روش در فصل دوم برای بررسی ذرات غیر نسبیتی نیز استفاده کردیم. در بخش سوم معادلات کلاین - گوردون و دیراک وابسته به زمان برای یک میدان الکتریکی یکنواخت را بررسی خواهیم کرد. در بخش چهارم هدفمان مطالعه سیستم وابسته به زمان نسبیتی دیگری است، در این مورد ذره کلاین-گوردون را با یک پتانسیل متحرک $V(x-vt)$ که با یک سرعت ثابت v حرکت می‌کند، بررسی می‌کنیم. برای این کار از تبدیلات لورنتس $(x, t) \rightarrow (y, \tau)$ استفاده می‌کنیم

¹ path integral

² supersymmetry method

³ separation of variables

[۳۷] که مسئله اصلی را به یک سیستم مستقل از زمان تبدیل می‌کند و به عنوان یک مثال، تعیین ضرایب بازتاب و انتقال با چگالی (بار) $\bar{\rho}$ و چگالی جریان $\bar{J}$ در سیستم (y, τ) نشان داده شده است و به عنوان آخرین بخش فرمیون ها را در میدان ثابت در راستای محور Z بررسی خواهیم کرد.

۳-۱. حل دقیق معادلات وابسته به زمان دیراک و انطباق آن با کوانتوم کلاسیک

حل دقیق معادله دیراک با یک جرم وابسته زمانی و یک میدان مغناطیسی استاتیکی یا یک پتانسیل خطی وابسته به زمان داده شده است. مؤلفه‌های ماتریس چارچوب مورد بحث، تکانه و اپراتور سرعت محاسبه خواهند شد. نشان می‌دهیم در محدوده اعداد کوانتومی بزرگ، این عناصر ماتریسی جواب‌های کلاسیکی می‌دهند.

هامیلتونی برای ذره باردار در حال حرکت در یک میدان مغناطیسی (که سرعت نور (c) و ثابت پلانک $(\hbar)$ را یک در نظر می‌گیریم) به شکل زیر است [۳۸]

$$H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m(t) \quad (۱-۳)$$

که e بار ذره است و $\vec{A}$ پتانسیل برداری میدان مغناطیسی است. برای پیدا کردن توابع موج، معادله دیراک می‌تواند به یک فرم جدید تغییر کند. ماتریس $\vec{\alpha}$ و β به شکل زیر هستند

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \tau_1 \otimes \vec{\sigma} & \tau_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} = \tau_3 \otimes I & \tau_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۲-۳)$$

که I ماتریس واحد است. ماتریس‌های $\tau_j (j=1,2,3)$ با $\sigma_j (j=1,2,3)$ جابجا پذیرند. با جایگذاری رابطه (۲-۳) در (۱-۳) داریم

$$H = \tau_1 \otimes \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \tau_3 \otimes Im(t) \quad (۳-۳)$$

بخش زمانی و مکانی $\psi(x, y, t)$ را به شکل زیر جدا می‌کنیم

$$\psi(x, y, t) = g(x, y) f(t) \quad (۴-۳)$$

بنابراین معادله دیراک به شکل زیر خواهد شد

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

$$[\tau_1 \otimes \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})]g(x, y) f(t) + \tau_3 m(t)g(x, y) f(t) = i\hbar g(x, y) \frac{\partial}{\partial t} f(t)$$

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A})g(x, y) = \varepsilon g(x, y) \quad (۵-۳)$$

$$(\varepsilon \tau_1 + m(t) \tau_3) f(t) = i \frac{\partial}{\partial t} f(t) \quad (۶-۳)$$

همانطور که می‌بینید معادله دیراک با ماتریس هامیلتونی 4×4 به دو معادله $(۵-۳)$ و $(۶-۳)$ با ماتریس‌های 2×2 کاهش یافت. میدان مغناطیسی را در راستای محور Z در نظر می‌گیریم، پتانسیل برداری

$$A_x = -B_0 y, \quad A_y = A_z = 0 \quad (۷-۳)$$

است که B_0 قدرت میدان مغناطیسی است. اکنون با تعریف

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} \quad (۸-۳)$$

و جایگذاری آن در معادله $(۵-۳)$ داریم

$$\sigma_x \cdot (p_x - eA_x)g(x, y) + \sigma_y \cdot (p_y - eA_y)g(x, y) + \sigma_z \cdot (p_z - eA_z)g(x, y) = \varepsilon g(x, y)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} (p_x + eB_0 y) + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} (p_y - (0)) \\ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} (0 - 0) = \varepsilon \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$((p_x + eB_0 y) - ip_y)g_2(x, y) = \varepsilon g_1(x, y) \quad (۹-۳)$$

$$((p_x + eB_0 y) + ip_y)g_1(x, y) = \varepsilon g_2(x, y) \quad (۱۰-۳)$$

رابطه (۳-۱۰) را در رابطه (۳-۹) جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{aligned} ((p_x + eB_0 y) - ip_y)((p_x + eB_0 y) + ip_y)g_1(x, y) &= \varepsilon^2 g_1(x, y) \\ [(p_x + eB_0 y)^2 + i(p_x + eB_0 y)p_y - ip_y(p_x + eB_0 y) + p_y^2]g_1(x, y) &= \varepsilon^2 g_1(x, y) \\ [(p_x + eB_0 y)^2 + p_y^2 + \underbrace{i[p_x, p_y]}_{=0} + \underbrace{ieB_0[y, p_y]}_{=i\hbar}]g_1(x, y) &= \varepsilon^2 g_1(x, y) \end{aligned}$$

$$[(p_x + eB_0 y)^2 + p_y^2 - eB_0]g_1(x, y) = \varepsilon^2 g_1(x, y) \quad (۳-۱۱)$$

حال می‌خواهیم معادله (۳-۱۱) را حل کنیم. می‌دانیم

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

با باز کردن رابطه (۳-۱۱) داریم

$$\begin{aligned} [(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - i\hbar \frac{\partial}{\partial x}(eB_0 y) - i\hbar eB_0 y \frac{\partial}{\partial x} + e^2 B_0^2 y^2) - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - eB_0]g_1(x, y) &= \varepsilon^2 g_1(x, y) \\ (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})g_1(x, y) + \frac{2i}{\hbar} eB_0 y \frac{\partial}{\partial x} g_1(x, y) - \frac{1}{\hbar^2} (e^2 B_0^2 y^2 - eB_0 - \varepsilon^2)g_1(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم که جواب معادله ما به صورت

$$g_1(x, y) = \psi_n(y + \frac{p_{0x}}{eB_0}) \frac{e^{ip_{0x}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (۳-۱۲)$$

باشد. در این صورت جواب باید رابطه را برآورده کند. برای بررسی این موضوع محاسبات زیر را نیاز

داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial x} &= \frac{ip_{0x}}{\sqrt{2\pi}} \psi_n e^{ip_{0x}} \\ \frac{\partial^2 g_1(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{-p_{0x}^2}{\sqrt{2\pi}} \psi_n e^{ip_{0x}} \\ \frac{\partial g_1(x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_n}{\partial y} \frac{e^{ip_{0x}}}{\sqrt{2\pi}} \\ \frac{\partial^2 g_1(x, y)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} \frac{e^{ip_{0x}}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

بنابراین

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + \left\{ -p_{0x}^2 - \frac{2}{\hbar} eB_0 y p_{0x} - \frac{e^2 B_0^2 y^2}{\hbar^2} + \frac{eB_0}{\hbar^2} + \frac{\varepsilon^2}{\hbar^2} \right\} \psi_n = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + (eB_0)^2 \left\{ \frac{eB_0 + \varepsilon^2}{(eB_0)^2} - \left(y + \frac{p_{0x}}{eB_0} \right)^2 \right\} \psi_n = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^2} + (eB_0)^2 \left\{ \lambda - \left(y + \frac{p_{0x}}{eB_0} \right)^2 \right\} \psi_n = 0 \quad (۱۳-۳)$$

که

$$\lambda = \frac{eB_0 + \varepsilon^2}{(eB_0)^2} \quad (۱۴-۳)$$

با تغییر متغیر $s = y + \frac{p_{0x}}{eB_0}$

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial s^2} + (eB_0)^2 \{ \lambda - s^2 \} \psi_n = 0$$

می‌شود. تغییر متغیر دیگری به صورت $s^2 = t$ می‌دهیم و به معادله زیر می‌رسیم

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{(eB_0)^2 \lambda t - (eB_0)^2 t^2}{4t^2} \right) \psi_n = 0 \quad (۱۵-۳)$$

جواب معادله ما بر حسب توابع وابسته لاگر به دست می‌آید

$$\psi_n = t^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{eB_0}{2} t} L_n^{\frac{1}{2}}(eB_0 t) \quad (۱۶-۳)$$

که

$$t = s^2 = \left(y + \frac{p_{0x}}{eB_0} \right)^2$$

همچنین ویژه مقادیر انرژی به صورت

$$\varepsilon_n = \pm \sqrt{2(2n+1)eB_0} \quad (۱۷-۳)$$

تعیین می‌شوند. حال برای قسمت زمانی معادله (۳-۶) داریم

$$f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} \quad (۱۸-۳)$$

با جایگذاری در رابطه (۳-۶) خواهیم داشت

$$\left\{ \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + m(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_n f_2(t) = (i \frac{\partial}{\partial t} - m(t)) f_1(t) \quad (۱۹-۳)$$

$$\varepsilon_n f_1(t) = (i \frac{\partial}{\partial t} + m(t)) f_2(t) \quad (۲۰-۳)$$

با جایگذاری معادله (۳-۲۰) در (۳-۱۹) داریم

$$(i \frac{\partial}{\partial t} - m(t))(i \frac{\partial}{\partial t} + m(t)) f_2(t) = \varepsilon_n^2 f_2(t)$$

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + i \frac{\partial m(t)}{\partial t} - m^2(t)) f_2(t) = \varepsilon_n^2 f_2(t) \quad (۲۱-۳)$$

برای هامیلتونی داده شده در رابطه (۳-۱) داریم

$$H = \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m(t)$$

$$= \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \alpha_z p_z - e\alpha_x A_x - e\alpha_y A_y + \beta m(t)$$

با جایگذاری روابط (۳-۷)

$$H = \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + eB_0 \alpha_x y + \beta m(t)$$

می شود. حال با استفاده از روابط هایزنبرگ داریم

$$\frac{d(p_x)_n(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_x, H] = \frac{1}{i\hbar} \{ [p_x, \alpha_x p_x] + [p_x, \alpha_y p_y] + [p_x, \alpha_z p_z] + [p_x, eB_0 \alpha_x y] \}$$

$$\frac{d(p_x)_n(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{d(p_y)_n(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [p_y, H] = \frac{1}{i\hbar} [p_y, eB_0 \alpha_x y]$$

$$\frac{d(p_y)_n(t)}{dt} = -eB_0 \alpha_x$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{1}{i\hbar} [x, \alpha_x p_x]$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = (\alpha_x)_n(t)$$

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [y, H] = \frac{1}{i\hbar} [y, \alpha_y p_y]$$

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = (\alpha_y)_n(t)$$

بنابراین

$$\frac{d(p_x)_n(t)}{dt} = 0 \quad (22-3)$$

$$\frac{d(p_y)_n(t)}{dt} = -eB_0(\alpha_x)_n(t) \quad (23-3)$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = (\alpha_x)_n(t) \quad (24-3)$$

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = (\alpha_y)_n(t) \quad (25-3)$$

که شبیه معادلات کلاسیک حرکتند.

از روابط (22-3) تا (25-3) نتایج زیر را به دست می‌آوریم

$$(p_x)_n(t) = p_{0x} \quad , \quad (p_y)_n(t) = -eB_0 x_n(t) \quad (26-3)$$

$$x_n(t) = \frac{i}{2\sqrt{eB_0}} \left\{ \sqrt{\frac{2n-1}{2}} (f_{1,n-1}^* f_{1,n} + f_{2,n-1}^* f_{2,n}) - \sqrt{\frac{2n+1}{2}} (f_{1,n+1}^* f_{1,n} + f_{2,n+1}^* f_{2,n}) \right\} \quad (27-3)$$

$$y_n(t) = y_0 + \frac{1}{2\sqrt{eB_0}} \left\{ \left(\sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n-1}{2}} \right) (f_{1,n-1}^* f_{1,n} + f_{2,n-1}^* f_{2,n}) \right. \\ \left. + \left(\sqrt{\frac{n}{2}} + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \right) (f_{1,n+1}^* f_{1,n} + f_{2,n+1}^* f_{2,n}) \right\} \quad (28-3)$$

اگر در رابطه (21-3) ، m را مستقل از زمان در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m^2 \right) f_{2,n}(t) = \varepsilon_n^2 f_{2,n}(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f_{2,n}(t) + [m^2 + \varepsilon_n^2] f_{2,n}(t) = 0$$

که شبیه معادله ذره آزاد شد. با تعریف $E_n = \pm \sqrt{\varepsilon_n^2 + m^2}$ خواهیم داشت

$$f_{2,n}(t) = Ae^{-iE_n t} \quad (۲۹-۳)$$

با جایگذاری $f_{2,n}(t)$ به دست آمده در رابطه (۳۰-۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f_{1,n}(t) &= \frac{1}{\varepsilon_n} \left[i \frac{\partial}{\partial t} + m \right] (Ae^{-iE_n t}) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n} [i(-iE_n A) + mA] e^{-iE_n t} \\ &= \frac{1}{\varepsilon_n} (E_n + m) A e^{-iE_n t} \end{aligned}$$

بنابراین

$$f_{1,n}(t) = Be^{-iE_n t} \quad (۳۰-۳)$$

که

$$B = \left(\frac{E_n + m}{\varepsilon_n} \right) A \quad (۳۱-۳)$$

از طرفی طبق شرط بهنجارش داریم که $A^2 + B^2 = 1$ داریم

$$A^2 + \left(\frac{E_n + m}{\varepsilon_n} \right)^2 A^2 = 1$$

بنابراین

$$A = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\varepsilon_n^2 + (E_n + m)^2}} \quad (۳۲-۳)$$

$$B = \frac{E_n + m}{\sqrt{\varepsilon_n^2 + (E_n + m)^2}} \quad (۳۳-۳)$$

در نتیجه

$$f_{1,n}(t) = \frac{E_n + m}{\sqrt{\varepsilon_n^2 + (E_n + m)^2}} \exp[-iE_n t] \quad (34-3)$$

$$f_{2,n}(t) = \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{\varepsilon_n^2 + (E_n + m)^2}} \exp[-iE_n t] \quad (35-3)$$

در حد کلاسیکی یعنی، $n \rightarrow \infty$ ،

$$x_n(t) \rightarrow \sqrt{\frac{n}{eB_0}} \sin \frac{eB_0}{E_n} t \quad (36-3)$$

$$y_n(t) \rightarrow y_0 + \sqrt{\frac{n}{eB_0}} \cos \frac{eB_0}{E_n} t \quad (37-3)$$

به جواب‌های کلاسیکی می‌رسیم که عناصر ماتریسی مانند نوسانگر هماهنگ هستند که برای مختصه y کسینوسی و برای x سینوسی می‌باشند.

۳-۲. محاسبه معادله موج برای ذره دیراک در پتانسیل وابسته به زمان با روش

لوئیس و رزنفیلد

معادله‌ای که تابع موج دیراک وابسته به زمان را شرح می‌دهد به شکل

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H(t)\Psi \quad (38-3)$$

می‌باشد. با استفاده از روش لوئیس و رزنفیلد [۳۹] عملگر ناوردای خطی $I(t)$ را می‌سازیم تا توابع موج یک ذره دیراک در پتانسیل وابسته به زمان را بیابیم. راجع به این عملگر در فصل دوم صحبت کردیم.

در هامیلتونی یک بعدی ($\hbar = c = 1$) [۴۰]

$$H(t) = \alpha p + \beta m + f(t)q \quad (41-3)$$

است که

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha\beta = -\beta\alpha, \quad \alpha^2 = \beta^2 = 1 \quad (42-3)$$

و $f(t)$ یک تابع دلخواه بر حسب زمان است. عملگر ناوردای خطی زیر را تعریف می‌کنیم

$$I(t) = A(t)p + B(t)q + C(t) \quad (43-3)$$

که باید رابطه تحول زمانی هایزنبرگ را برآورده کند و در آن $A(t)$, $B(t)$ و $C(t)$ ماتریس هستند.

$$\begin{aligned} \frac{1}{i}[Ap + Bq + C, \alpha p + \beta m + fq] + \frac{\partial}{\partial t}(Ap + Bq + C) &= 0 \\ p^2[A, \alpha] + pm[A, \beta] + Af \underset{=-i\hbar=-i}{[p, q]} + qp[B, \alpha] + B\alpha \underset{=i\hbar=i}{[q, p]} + qm[B, \beta] \\ + p[C, \alpha] + m[C, \beta] + [C, fq] + i(\dot{A}p + \dot{B}q + \dot{C}) &= 0 \\ p^2[A, \alpha] + p\{m[A, \beta] + [C, \alpha] + i\dot{A}\} + q\{i\dot{B} + m[B, \beta]\} + [B, \alpha]qp + iB\alpha + m[C, \beta] \\ + i\dot{C} - iAf &= 0 \end{aligned} \quad (44-3)$$

بنابراین برای اینکه رابطه (44-3) برقرار باشد باید

$$[A, \alpha] = 0 \quad (45-3)$$

$$m[A, \beta] + [C, \alpha] + i\dot{A} = 0 \quad (46-3)$$

$$i\dot{B} + m[B, \beta] = 0 \quad (47-3)$$

$$[B, \alpha] = 0 \quad (48-3)$$

$$iB\alpha + m[C, \beta] + i\dot{C} - iAf = 0 \quad (49-3)$$

از روابط (45-3) و (48-3) نتیجه می‌گیریم

$$A(t) = a_1 + a_2\alpha \quad (50-3)$$

$$B(t) = b_1 + b_2\alpha \quad (51-3)$$

که a_1, a_2, b_1 و b_2 توابع وابسته به زمان هستند. رابطه (51-3) را در رابطه (47-3) جایگذاری می‌کنیم

$$i(\dot{b}_1 + \dot{b}_2\alpha) + m[b_1 + b_2\alpha, \beta] = 0$$

بنابراین

$$\dot{b}_1 = 0 \quad (52-3)$$

$$b_2 = 0 \quad (53-3)$$

با جایگذاری رابطه (50-3) در رابطه (46-3) خواهیم داشت

$$m[a_1 + a_2\alpha, \beta] + [C, \alpha] + i(\dot{a}_1 + \dot{a}_2\alpha) = 0$$

$$ma_2[\alpha, \beta] + [C, \alpha] + i(\dot{a}_1 + \dot{a}_2\alpha) = 0 \quad (54-3)$$

برای یافتن جواب معادله فوق، فرض می‌کنیم فرم کلی C برحسب α و β به شکل زیر باشد

$$C = c_1 + c_2\alpha + c_3\beta + c_4\alpha\beta \quad (55-3)$$

با جایگذاری رابطه بالا در (54-3) داریم

$$ma_2[\alpha, \beta] + [c_1 + c_2\alpha + c_3\beta + c_4\alpha\beta, \alpha] + i(\dot{a}_1 + \dot{a}_2\alpha) = 0$$

$$ma_2[\alpha, \beta] - c_3[\alpha, \beta] + c_4\alpha[\beta, \alpha] + i(\dot{a}_1 + \dot{a}_2\alpha) = 0$$

بنابراین

$$\dot{a}_1 = 0 \quad (56-3)$$

$$\dot{a}_2 = 0 \quad (57-3)$$

$$ma_2 = c_3 \quad (58-3)$$

$$c_4 = 0 \quad (59-3)$$

برای یافتن c_1 و c_2 معادله (55-3) را در معادله (49-3) جایگذاری می‌کنیم

$$i(b_1)\alpha + m[c_1 + c_2\alpha + c_3\beta + c_4\alpha\beta, \beta] + i(\dot{c}_1 + \dot{c}_2\alpha + \dot{c}_3\beta + \dot{c}_4\alpha\beta) - i(a_1 + a_2\alpha)f = 0$$

بنابراین

$$a_2 = 0 \quad (60-3)$$

$$b_1 = 0 \quad (۶۱-۳)$$

$$i\dot{c}_1 = ia_1 f(t) \Rightarrow c_1 = a_1 \int f(t)dt \quad (۶۲-۳)$$

$$c_2 = 0 \quad (۶۳-۳)$$

$$c_3 = 0 \quad (۶۴-۳)$$

9

$$A(t) = a_1$$

$$B(t) = 0$$

$$C(t) = c_1 = a_1 \int f(t)dt$$

که با توجه به مقادیر به دست آمده عملگر ناوردایی به شکل زیر به دست می آید:

$$I = a_1(p + \int f(t)dt) \quad (۶۵-۳)$$

اگر Ψ جواب معادله دیراک وابسته به زمان باشد، به طور مشابه برای تابع $\Phi = I\Psi$ نیز معتبر است.

اگر $\Phi = \lambda\Psi$ در نظر بگیریم، Ψ یک ویژه تابع $I(t)$ می باشد. از آنجایی که ویژه تابع عملگر ناوردایی

در معادله (۶۵-۳) به شکل $\Psi \approx e^{\eta(t)q}$ است، پیشنهاد می شود که جواب معادله دیراک وابسته به زمان

برای سیستم به شکل

$$\Psi(q, t) = M(t)e^{\eta(t)q} \quad (۶۶-۳)$$

باشد که $M(t)$ ماتریس ۴×۱ وابسته به زمان و $\eta(t)$ تابع وابسته به زمان دلخواه است. با جایگذاری

(۶۶-۳) در معادله دیراک داریم

$$i(\dot{M} + M\dot{\eta}q)e^{\eta q} = (\alpha(-i\frac{\partial}{\partial q}) + \beta m + qf(t))M(t)e^{\eta q}$$

$$i\dot{M} + iM\dot{\eta}q = -i\alpha M(t)\eta(t) + \beta M(t)m + qf(t)M(t) \quad (۶۷-۳)$$

که نتایج زیر را می دهد

$$i\dot{\eta} = f(t) \quad (۶۸-۳)$$

$$\dot{M}(t) = [-\alpha\eta(t) - i\beta m]M(t) \quad (۶۹-۳)$$

با استفاده از (۶۸-۳) داریم

$$\eta(t) = -i \int f(t') dt' \quad (۷۰-۳)$$

که به ازای یک $f(t)$ مشخص، معادله (۶۹-۳) حل می‌شود.

حال به بررسی چند حالت خاص می‌پردازیم.

۳-۲-۱. حالات خاص

حالت اول

وقتی هامیلتونی وابسته به زمان نباشد، در این صورت $\eta(t) = \eta = C$ که C مقدار ثابتی می‌باشد. در

این صورت با جایگذاری در رابطه (۶۹-۳) داریم

$$\begin{pmatrix} \dot{M}_1(t) \\ \dot{M}_2(t) \\ \dot{M}_3(t) \\ \dot{M}_4(t) \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} (-C) - im \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \\ M_3(t) \\ M_4(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{M}_1(t) = -imM_1 - CM_3 \quad (۷۱-۳ الف)$$

$$\dot{M}_2(t) = -imM_2 + CM_4 \quad (۷۱-۳ ب)$$

$$\dot{M}_3(t) = imM_3 - CM_1 \quad (۷۱-۳ پ)$$

$$\dot{M}_4(t) = imM_4 + CM_2 \quad (۷۱-۳ ت)$$

از رابطه (۷۱-۳ پ) داریم

$$M_1 = \frac{imM_3 - \dot{M}_3}{C} \quad (۷۲-۳)$$

بنابراین

$$\dot{M}_1 = \frac{im\dot{M}_3 - \ddot{M}_3}{C}$$

با جایگذاری روابط بالا در رابطه (۷۱-۳) الف داریم

$$\ddot{M}_3 + (m^2 - C^2)M_3 = 0 \quad (۷۳-۳)$$

بنابراین

$$M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{m^2 - C^2}t} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\sqrt{m^2 - C^2}t} \quad (۷۴-۳)$$

و با جایگذاری در رابطه (۷۲-۳)

$$M_1 = \frac{im}{\sqrt{2}C} (e^{i\sqrt{m^2 - C^2}t} + e^{-i\sqrt{m^2 - C^2}t}) - \frac{i\sqrt{m^2 - C^2}}{\sqrt{2}C} (e^{i\sqrt{m^2 - C^2}t} - e^{-i\sqrt{m^2 - C^2}t}) \quad (۷۵-۳)$$

به دست می‌آید. به همین ترتیب با استفاده از رابطه‌های (۷۱-۳) ب و (۷۱-۳) ت داریم:

$$M_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{m^2 + C^2}t} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\sqrt{m^2 + C^2}t} \quad (۷۶-۳)$$

و

$$M_2 = -\frac{im}{\sqrt{2}C} (e^{i\sqrt{m^2 + C^2}t} + e^{-i\sqrt{m^2 + C^2}t}) + \frac{i\sqrt{m^2 + C^2}}{\sqrt{2}C} (e^{i\sqrt{m^2 + C^2}t} - e^{-i\sqrt{m^2 + C^2}t}) \quad (۷۷-۳)$$

که با توجه به رابطه (۶۶-۳) می‌توانیم $\psi(q, t)$ را محاسبه کنیم. با توجه به اینکه هامیلتونی مستقل از

زمان است جواب نهایی باید به فرم $\sum \phi(q) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$ باشد. مثلاً برای ψ_3 داریم:

$$\psi_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{m^2 - C^2}t} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\sqrt{m^2 - C^2}t} \right] e^{Cq}$$

که می‌بینیم به همان شکل تبدیل شد.

حالت دوم

در این حالت بخش زمانی هامیلتونی را به صورت $f(t) = -\frac{iA}{t^2}$ در نظر می‌گیریم که A مقدار ثابتی

می‌باشد. با استفاده از رابطه (۷۰-۳)

$$\eta(t) = \frac{A}{t} \quad (۷۸-۳)$$

با جایگذاری در رابطه (۶۹-۳)

$$\dot{M}_1 = -imM_1 - \frac{A}{t}M_3 \quad (۷۹-۳ \text{ الف})$$

$$\dot{M}_2 = -imM_2 + \frac{A}{t}M_4 \quad (۷۹-۳ \text{ ب})$$

$$\dot{M}_3 = imM_3 - \frac{A}{t}M_1 \quad (۷۹-۳ \text{ پ})$$

$$\dot{M}_4 = imM_4 + \frac{A}{t}M_2 \quad (۷۹-۳ \text{ ت})$$

از ترکیب معادلات (۷۹-۳ الف) و (۷۹-۳ پ) به رابطه زیر می‌رسیم

$$\ddot{M}_3 + \frac{1}{t}\dot{M}_3 + \left(\frac{m^2t^2 - imt - A^2}{t^2}\right)M_3 = 0 \quad (۸۰-۳)$$

با حل این معادله

$$M_3 = t^A e^{-imt} L_n^{(2A)}(2imt) \quad (۸۱-۳)$$

و

$$A = -(n+1) \quad (۸۲-۳)$$

به دست می‌آید، انگار که A باید کوانتیده باشد.

به ازای $n=0$ مسئله را بررسی می‌کنیم، $A=-1$ می‌شود، بنابراین

$$M_3 = \frac{1}{t} e^{-imt} \quad (۸۳-۳)$$

شده و با استفاده از رابطه (۳-۷۹-پ)

$$M_1 = -\left(\frac{1}{t} + 2im\right)e^{-imt} \quad (۳-۸۴)$$

می شود.

با استفاده از رابطه (۳-۷۹-ب) و (۳-۷۹-ت) $M_4 = M_3$ و $M_2 = M_1$ به دست می آید، که با جایگذاری در رابطه (۳-۶۶) توابع ψ به دست می آیند.

۳-۳. حل معادلات نسبیتی وابسته به زمان برای یک میدان الکتریکی یکنواخت

نیروهای الکترومغناطیسی تحت تبدیلات لورنتس رفتار می کنند. در اینجا، رفتار نسبیتی حرکت یک ذره باردار در یک میدان الکترواستاتیک یکنواخت را بررسی می کنیم [۴۱]. برهمکنش یک ذره باردار با یک میدان کوانتیده جالب است.

میدان الکتریکی یکنواخت $\vec{E}$ را در جهت $+x$ در نظر می گیریم. پیمانه را می توان به دلخواه انتخاب کرد و این روی مشاهده شونده ها تأثیری ندارد. رابطه معادلات ماکسول با پتانسیل اسکالر و برداری به شکل زیر است

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (۳-۸۵)$$

در پیمانه بالا $A=0, v=-Ex$ برای یک میدان الکترواستاتیک $\vec{E} = \hat{i}E$ (E ثابت است) است. اگر از این پیمانه استفاده کنیم، هامیلتونی نسبیتی برای یک ذره با جرم سکون و بار ε به صورت زیر است

$$H = [m^2c^4 + c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)]^{\frac{1}{2}} - \varepsilon E_x \quad (۳-۸۶)$$

معادلات هامیلتون

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}$$

هستند و مؤلفه‌های تکانه به شکل زیر می‌باشند

$$p_x = p_{0x} + \varepsilon Et, \quad p_y = p_{0y}, \quad p_z = p_{0z} \quad (۸۷-۳)$$

که p_{0z} , p_{0y} , p_{0x} ثابت هستند. وابستگی زمانی خطی برای p_x ، شبیه نتیجه غیر نسبیتی است و این واقعیت را نشان می‌دهد که میدان‌های الکتریکی یکنواخت هستند.

پیمانه دیگر که می‌توان استفاده کرد $v=0$ ، $\vec{A} = -\hat{c}Et$ است. مؤلفه x تکانه مکانیکی به شکل

$$\frac{mv_x}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{\frac{1}{2}}} = p_x - \frac{\varepsilon}{c} \vec{A}_x = p_x + \varepsilon Et \quad (۸۸-۳)$$

خواهد بود و هامیلتونی به شکل زیر خواهد شد

$$H = [m^2 c^4 + c^2 [(p_x + \varepsilon Et)^2 + p_y^2 + p_z^2]]^{\frac{1}{2}} \quad (۸۹-۳)$$

که p_x, p_y, p_z ثابت‌های حرکت هستند. پیمانه اصلی، $v = -Ex$ ، $\vec{A} = 0$ پیشنهاد می‌شود، زیرا با تکانه‌ی مکانیکی است.

۳-۳-۱. حل معادله کلاین - گوردون برای ذره در یک میدان الکتریکی یکنواخت

تابع موج اسکالر برای یک ذره با اسپین صفر، برای نمونه یک مزون π باردار، مناسب است. تابع موج با در نظر گرفتن روابط کلاسیکی پیدا می‌شود. از رابطه (۸۶-۳)

$$(H + \varepsilon Ex)^2 = m^2 c^4 + c^2 p^2 \quad (۹۰-۳)$$

شکل اپراتوری معادله کلاین - گوردون را به کار می‌بریم

$$(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon Ex)^2 \psi = (m^2 c^4 - \hbar^2 c^2 \nabla^2) \psi \quad (۹۱-۳)$$

$$\psi = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} T \quad (۹۲-۳)$$

که T, k_x تابعی بر حسب زمان هستند.

$$k_x = k_{0x} + \frac{\varepsilon E t}{\hbar}, \quad k_y = k_{0y}, \quad k_z = k_{0z} \quad (93-3)$$

k_{0z}, k_{0y}, k_{0x} ثابت هستند. وابستگی به زمان خطی برای k_x لازم است اگر T تنها تابعی بر حسب زمان باشد. تابع $e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ حالتی که در آن تکانه و انرژی جنبشی کاملاً شناخته شده‌اند را معرفی می‌کند که یک ویژه تابع برای هر دو عملگر انرژی جنبشی و تکانه است.

برای پیدا کردن معادله T ، رابطه‌ی (۹۲-۳) را در رابطه (۹۱-۳) جایگذاری می‌کنیم

$$T = T(t), \quad \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial k_x}{\partial t} = \frac{\varepsilon E}{\hbar}$$

بنابراین

$$(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \varepsilon^2 E^2 x^2 + 2i\hbar \varepsilon E x \frac{\partial}{\partial t}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} T = (m^2 c^4 - c^2 \hbar^2 \nabla^2) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} T \quad (94-3)$$

برای باز کردن رابطه به محاسبات زیر نیاز داریم

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = (ix \frac{\partial k}{\partial t} T + \frac{\partial T}{\partial t}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = (\frac{ix \varepsilon E T}{\hbar} + \frac{\partial T}{\partial t}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \{ (\frac{ix \varepsilon E}{\hbar} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}) + ix \frac{\partial k}{\partial t} (\frac{ix \varepsilon E T}{\hbar} + \frac{\partial T}{\partial t}) \} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$= (\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2ix \varepsilon E}{\hbar} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{x^2 \varepsilon^2 E^2}{\hbar^2} T) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

نتایج را در سمت چپ رابطه (۹۴-۳) جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{aligned}
& \{-\hbar^2(\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \frac{2i\varepsilon E x}{\hbar} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{x^2 \varepsilon^2 E^2}{\hbar^2} T) + x^2 \varepsilon^2 E^2 T + 2i\hbar \varepsilon E x (\frac{ix\varepsilon E T}{\hbar} + \frac{\partial T}{\partial t})\} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\
& = (m^2 c^4 - c^2 \hbar^2 \nabla^2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} T \\
& -\hbar^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = (m^2 c^4 - c^2 \hbar^2 (-k^2)) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} T \\
& -\hbar^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = (m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)) T
\end{aligned} \tag{۹۵-۳}$$

یک جواب به صورت سری برای T می‌یابیم. اگر از کمیت‌های بدون بعد

$$u = (\frac{c\varepsilon E}{\hbar})^{\frac{1}{2}} (t + \frac{k_{0x} \hbar}{\varepsilon E}) = (\frac{c\hbar}{\varepsilon E})^{\frac{1}{2}} k_x = (\frac{c\hbar}{\varepsilon E})^{\frac{1}{2}} (k_{0x} + \frac{\varepsilon E}{\hbar} t) \tag{۹۶-۳}$$

$$a_n^2 = \frac{m^2 c^3 + c \hbar^2 (k_y^2 + k_z^2)}{\varepsilon E_n \hbar} \tag{۹۷-۳}$$

استفاده کنیم، برای معادله (۹۴-۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dt} &= \frac{dT}{du} (\frac{c\hbar}{\varepsilon E})^{\frac{1}{2}} \frac{\varepsilon E}{\hbar} \\
\frac{d^2 T}{dt^2} &= \frac{c\varepsilon E}{\hbar} \frac{d^2 T}{du^2}
\end{aligned}$$

این روابط را در رابطه (۹۴-۳) جایگذاری کرده و ساده می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} &= -\frac{1}{\hbar c \varepsilon E} (m^2 c^4 + c^2 \hbar^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)) T \\
\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + (\frac{m^2 c^3 + c \hbar^2 (k_y^2 + k_z^2)}{\varepsilon E \hbar} + \frac{c\hbar}{\varepsilon E} k_x^2) T &= 0 \\
\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} + (u^2 + a^2) T &= 0
\end{aligned} \tag{۹۸-۳}$$

جالب است که معادله (۹۸-۳) شبیه معادله شرودینگر غیر نسبیتی برای پتانسیل $-u^2$ شد.

حل معادله (۹۸-۳) می‌تواند به شکل زیر شرح داده شود

$$T = \exp(\pm i \frac{u^2}{2}) \sum_0^{\infty} b_n u^n \tag{۹۹-۳}$$

بنابراین

$$\frac{\partial T}{\partial u} = (\pm i u \sum_0^\infty b_n u^n + \sum_0^\infty n b_n u^{n-1}) \exp(\pm i \frac{u^2}{2})$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} = [(-u^2 \pm i) \sum_0^\infty b_n u^n \pm 2i \sum_0^\infty n b_n u^n + \sum_0^\infty n(n-1) b_n u^{n-2}] \exp(\pm i \frac{u^2}{2})$$

در رابطه (۳-۹۸) جایگذاری می‌کنیم

$$[(-u^2 \pm i) \sum_0^\infty b_n u^n \pm 2i \sum_0^\infty n b_n u^n + \sum_0^\infty n(n-1) b_n u^{n-2}] \exp(\pm i \frac{u^2}{2}) + (u^2 + a^2) \exp(\pm i \frac{u^2}{2}) \sum_0^\infty b_n u^n = 0$$

$$[(a^2 \pm i) \sum_0^\infty b_n u^n \pm 2i \sum_0^\infty n b_n u^n + \sum_{-2}^\infty (n+2)(n+1) b_{n+2} u^n] = 0$$

$$\sum_0^\infty (a^2 \pm i(2n+1)) b_n u^n + 0 + 0 + \sum_0^\infty (n+2)(n+1) b_{n+2} u^n = 0$$

$$\sum_0^\infty \{(a^2 \pm i(2n+1)) b_n + (n+2)(n+1) b_{n+2}\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b_{n+2}}{b_n} = \frac{\mp i(2n+1) - a^2}{(n+2)(n+1)} \quad (۳-۱۰۰)$$

ضرایب b_1, b_0 مقادیر دلخواه هستند. این رابطه به ازای همه مقادیر زوج و فرد n برقرار

می‌باشد. علائم در معادلات فوق همراه با بار مثبت و منفی هستند. به این معنی که اگر $\exp(i \frac{u^2}{2})$

منطبق با بار مثبت مزون با انرژی جنبشی مثبت باشد، بنابراین $\exp(-i \frac{u^2}{2})$ منطبق با بار منفی مزون

با انرژی جنبشی مثبت است.

برای محدود کردن سری، نسبت به دست آمده در رابطه (۳-۱۰۰) را برابر صفر قرار می‌دهیم، بنابراین

$$a_n = \sqrt{\mp i(2n+1)} \quad (۳-۱۰۱)$$

به دست می‌آید. بنابراین با استفاده از رابطه (۳-۹۷) انرژی به صورت

$$E_n = \mp \frac{m^2 c^3 + \hbar^2 (k_y^2 + k_z^2)}{i \hbar \varepsilon (2n+1)} \quad (۳-۱۰۲)$$

به دست می‌آید.

۳-۲-۳. حل معادله دیراک برای ذره در میدان الکتریکی یکنواخت

معادله دیراک برای یک ذره اسپین $\frac{1}{2}$ ، برای نمونه یک الکترون، است. برای بخش زمانی معادله

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (۱۰۳-۳)$$

می‌باشد. هامیلتونی دیراک به شکل

$$H = -i\hbar c(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}) + \beta mc^2 - eEx \quad (۱۰۴-۳)$$

است که نمایش مورد استفاده به صورت

$$\alpha_x = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_x \\ \sigma_x & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_y \\ \sigma_y & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_z \\ \sigma_z & 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad (۱۰۵-۳)$$

است که σ_i ماتریس‌های پائولی معروف هستند.

جواب‌ها را به شکل

$$\psi = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (۱۰۶-۳)$$

نمایش می‌دهیم، که A_i ها تابعی از زمان هستند و از قبل داریم که $k_x = k_{0x} + \frac{eEt}{\hbar}$. برای ساده

کردن معادلات اسپینوری $k_z = 0$ را در نظر می‌گیریم. معادله (۱۰۶-۳) را در معادله (۱۰۳-۳) جایگذاری

می‌کنیم، داریم

$$[-i\hbar c(\alpha_x \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_y \frac{\partial}{\partial y} + \alpha_z \frac{\partial}{\partial z}) + \beta mc^2] \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\{-i\hbar c[ik_x \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + ik_y \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0] + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} mc^2\} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \quad (۱۰۷-۳)$$

بنابراین

$$\begin{cases} -i \frac{d}{dt} A_1 + \frac{mc^2}{\hbar} A_1 + c(k_x - ik_y) A_4 = 0 \\ -i \frac{d}{dt} A_2 + \frac{mc^2}{\hbar} A_2 + c(k_x + ik_y) A_3 = 0 \\ -i \frac{d}{dt} A_3 - \frac{mc^2}{\hbar} A_3 + c(k_x - ik_y) A_2 = 0 \\ -i \frac{d}{dt} A_4 - \frac{mc^2}{\hbar} A_4 + c(k_x + ik_y) A_1 = 0 \end{cases} \quad (۱۰۸-۳)$$

همانطور که می‌بینیم A_1, A_4 و همچنین A_2, A_3 جفت شده هستند، می‌توانیم ترکیب خطی این توابع را در نظر بگیریم

$$\phi_1 = A_1 + A_4, \quad \phi_2 = A_2 + A_3, \quad \phi_3 = A_2 - A_3, \quad \phi_4 = A_1 - A_4 \quad (۱۰۹-۳)$$

حال از ترکیب $(\pm)$ معادلات $(۱۰۸-۳)$ ، مثلاً جمع اولی و آخری، و سپس با استفاده از روابط $(۱۰۹-۳)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} -i \frac{d}{dt} A_1 + \frac{mc^2}{\hbar} A_1 + ck_x A_4 - cik_y A_4 - i \frac{d}{dt} A_4 + \frac{mc^2}{\hbar} A_4 + ck_x A_1 - cik_y A_1 &= 0 \\ -i \frac{d}{dt} (A_1 + A_4) + ck_x (A_1 + A_4) + \frac{mc^2}{\hbar} (A_1 - A_4) + ick_y (A_1 - A_4) &= 0 \\ -i \frac{d}{dt} \phi_1 + ck_x \phi_1 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) \phi_4 &= 0 \end{aligned}$$

و به همین ترتیب برای بقیه روابط انجام می‌دهیم، بنابراین

$$-i \frac{d}{dt} \phi_1 + ck_x \phi_1 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) \phi_4 = 0 \quad (3-110-الف)$$

$$-i \frac{d}{dt} \phi_4 - ck_x \phi_4 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y \right) \phi_1 = 0 \quad (3-110-ب)$$

$$-i \frac{d}{dt} \phi_2 + ck_x \phi_2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y \right) \phi_3 = 0 \quad (3-110-پ)$$

$$-i \frac{d}{dt} \phi_3 - ck_x \phi_3 + \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) \phi_2 = 0 \quad (3-110-ت)$$

مؤلفه‌های اسپینور به قسمت زمانی معادله کلاین - گوردون شباهت دارند. با بررسی ϕ_1, ϕ_4 این موضوع را نشان خواهیم داد. اگر از روابط (3-96) و (3-97) استفاده و ϕ_1, ϕ_4 را به صورت

$$\phi_1 = e^{\frac{i u^2}{2}} f, \quad \phi_4 = e^{\frac{i u^2}{2}} g \quad (3-111)$$

تعریف کنیم، داریم

$$\frac{d}{dt} \phi_1 = (iue^{\frac{i u^2}{2}} f + \frac{df}{du} e^{\frac{i u^2}{2}}) \left(\frac{c\epsilon E}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}$$

با جایگذاری در معادله (3-110-الف) داریم

$$-i \left[\frac{df}{du} e^{\frac{i u^2}{2}} + iuf e^{\frac{i u^2}{2}} \right] \left(\frac{c\epsilon E}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} + ck_x e^{\frac{i u^2}{2}} f + \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) e^{\frac{i u^2}{2}} g = 0$$

با تقسیم بر $e^{\frac{i u^2}{2}} \left(\frac{c\epsilon E}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}$ می‌رسیم به

$$-i \frac{df}{du} + uf + ck_x f \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) g \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$-i \frac{df}{du} + uf + fk_x \left(\frac{c\hbar}{\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) g \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

$$-i \frac{df}{du} + 2uf + \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) g = 0 \quad (3-112-الف)$$

حال به همین روش ϕ_1, ϕ_4 را در (3-110-ب) جایگذاری می‌کنیم

$$\frac{d}{dt} \phi_4 = (iue^{\frac{i u^2}{2}} g + \frac{dg}{du} e^{\frac{i u^2}{2}}) \left(\frac{c\epsilon E}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}$$

در نتیجه

$$-i \left(\frac{dg}{du} e^{\frac{i u^2}{2}} + iue^{\frac{i u^2}{2}} g \right) \left(\frac{c\epsilon E}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} - ck_x e^{\frac{i u^2}{2}} g + \left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y \right) e^{\frac{i u^2}{2}} f = 0$$

به دست می‌آید. اکنون با تقسیم بر $e^{\frac{i u^2}{2}} \left(\frac{c\epsilon E}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}}$ داریم

$$-i \frac{dg}{du} + ug - gk_x \left(\frac{c\hbar}{\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y \right) f = 0$$

$$-i \frac{dg}{du} + \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y \right) f = 0 \quad (3-112 \text{ ب})$$

با یک بار دیگر مشتق گیری از (3-112 الف)

$$\frac{d^2 f}{du^2} + 2i \frac{d(uf)}{du} + i \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mc^2}{\hbar} + ick_y \right) \frac{dg}{du} = 0 \quad (3-113)$$

را خواهیم داشت. از رابطه (3-112 ب) داریم

$$\frac{dg}{du} = -i \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y \right) f$$

را در رابطه (3-113) جایگذاری می‌کنیم

$$\frac{d^2 f}{du^2} + 2i \frac{d(uf)}{du} + \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right) \left(\frac{mc^4}{\hbar^2} + c^2 k_y^2 \right) f = 0$$

$$\frac{d^2 f}{du^2} + 2i \frac{d(uf)}{du} + a_n^2 f = 0 \quad (3-114 \text{ الف})$$

که a_n در رابطه (3-97) معرفی شده است. با توجه به (3-112 ب) داریم

$$\frac{dg}{du} = -i \left(\frac{\hbar}{c\epsilon E} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y \right) f$$

$$g = -i\left(\frac{\hbar}{c\varepsilon E}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{mc^2}{\hbar} - ick_y\right)\int f du + g_0 \quad (3-114 \text{ ب})$$

برای رابطه (3-114 الف) تابع f می تواند به شکل سری زیر نمایش داده شود

$$f = \sum_0^{\infty} b_n u^n \quad (3-115)$$

با جایگذاری رابطه (3-115) در (3-114 الف) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{du^2} \left(\sum_0^{\infty} b_n u^n \right) + 2i \frac{d}{du} \left(\sum_0^{\infty} b_n u^{n+1} \right) + a^2 \left(\sum_0^{\infty} b_n u^n \right) &= 0 \\ \sum_0^{\infty} n(n-1)b_n u^{n-2} + 2i \sum_0^{\infty} (n+1)b_n u^n + a^2 \sum_0^{\infty} b_n u^n &= 0 \\ \sum_{-2}^{\infty} (n+2)(n+2-1)b_{n+2} u^{n+2-2} + \sum_0^{\infty} (2i(n+1) + a^2)b_n u^n &= 0 \\ 0 + 0 + \sum_0^{\infty} (n+2)(n+1)b_{n+2} u^n + \sum_0^{\infty} (2i(n+1) + a^2)b_n u^n &= 0 \\ \frac{b_{n+2}}{b_n} = -\frac{2i(n+1) + a^2}{(n+2)(n+1)} \end{aligned} \quad (3-116)$$

که برای n های زوج و فرد برقرار است. b_0, b_1 با توجه به مقادیر اولیه f, g در لحظه ی صفر تعیین می شوند.

برای محدود کردن سری، نسبت به دست آمده در رابطه (3-116) را برابر صفر قرار می دهیم، بنابراین

$$a_n = \sqrt{2i(n+1)}$$

به دست می آید. بنابراین با استفاده از رابطه (3-97) انرژی به صورت

$$E_n = \frac{m^2 c^3 + c \hbar^2 (k_y^2 + k_z^2)}{2i \hbar \varepsilon (n+1)}$$

تعیین می شود.

با توجه به روابط (3-109) داریم

$$A_1 = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_4) \quad , \quad A_4 = \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_4)$$

در نتیجه

$$A_1 = \frac{1}{2} e^{\pm i \frac{u^2}{2}} (f + g) \quad , \quad A_4 = \frac{1}{2} e^{\pm i \frac{u^2}{2}} (f - g) \quad (۱۱۷-۳)$$

می‌شوند. مؤلفه‌های A_3, A_2 نیز به همین روش به دست می‌آیند.

این بررسی معادلات وابسته زمانی را می‌توان به نمونه‌ای ترکیب شده از میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی گسترش داد. در رابطه ناوردایی لورنتس داریم

$$E^2 - B^2 = I_1 \quad , \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = I_2 \quad (۱۱۸-۳)$$

اگر $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ شود ولی $I_1 \neq 0$ باشد، ممکن است یک چارچوب لورنتس بیابیم که در آن تنها یک میدان الکتریکی یا مغناطیسی وجود دارد. اگر $E > B$ (واحد‌های گوسی)، یک چارچوب وجود دارد که تنها یک میدان الکتریکی وجود دارد. اگر $E < B$ باشد، یک چارچوب وجود دارد که در آن تنها یک میدان مغناطیسی وجود دارد.

۳-۴. حل معادله کلاین - گوردون با پتانسیل متحرک

برای ذره با اسپین صفر، معادله کلاین - گوردون با پتانسیل متحرک به شکل [۳۷]

$$[(i \frac{\partial}{\partial t} - V(x-vt))^2 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} - m^2] \psi = 0 \quad (۱۱۹-۳)$$

می‌باشد. یک روش استاندارد، انتقال معادله کلاین - گوردون با پتانسیل متحرک به یک معادله مشابه آن اما با پتانسیل غیر متحرک است و بنابراین حل مسئله وابسته به زمان، می‌تواند با توجه به تغییر ناپذیری لورنتس، بهبود یابد. تبدیلات لورنتس را به شرح زیر در نظر می‌گیریم [۳۷]

$$\tau = \lambda(t - vx) \quad , \quad y = \lambda(x - vt) \quad (۱۲۰-۳)$$

که $\lambda = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ می‌باشد. همچنین داریم

$$\psi = e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})} \bar{\psi} \quad (۱۲۱-۳)$$

با استفاده از تبدیلات لورنتس، شکل جدید برای معادله کلاین - گوردون می‌نویسیم. طبق روابط (۱۱۹-۳) تا (۱۲۱-۳)، داریم

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial x} & \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} & \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{cases} \quad (۱۲۲-۳)$$

روابط (۱۲۲-۳) را در رابطه (۱۱۹-۳) جایگذاری می‌کنیم. با این کار

$$\underbrace{\left[i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial y} \right) - V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right]^2}_I + \underbrace{\lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial \tau} \right) - m^2}_{II} \psi = 0 \quad (۱۲۳-۳)$$

حال رابطه (۱۲۳-۳) را جزء به جزء محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned} I &= \left(i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial y} \right) - V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right)^2 \psi \\ &= \left(i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial y} \right) - V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right) \left(i\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial y} \right) - V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right) \psi \\ &= \left[-\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \lambda^2 v \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial y} - i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda^2 v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i\lambda v V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. i\lambda v \frac{\partial V\left(\frac{y}{\lambda}\right)}{\partial y} - i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} + i\lambda v V\left(\frac{y}{\lambda}\right) \frac{\partial}{\partial y} + V^2\left(\frac{y}{\lambda}\right) \right] \psi \end{aligned} \quad (۱۲۴-۳)$$

همچنین

$$\begin{aligned} II &= \lambda^2 \left(\frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \psi \\ &= \left[\lambda^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda^2 v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda^2 v \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial y} + \lambda^2 v^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right] \psi \end{aligned} \quad (۱۲۵-۳)$$

بنابراین از جمع دو رابطه (۱۲۴-۳) و (۱۲۵-۳) داریم

$$\begin{aligned} & \{(i\lambda(\frac{\partial}{\partial \tau} - v\frac{\partial}{\partial y}) - V(\frac{y}{\lambda}))^2 + \lambda^2(\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial \tau})(\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial \tau})\}\psi \\ & = [-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2i\lambda V(\frac{y}{\lambda})\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2i\lambda v V(\frac{y}{\lambda})\frac{\partial}{\partial y} + i\lambda v \frac{\partial V(\frac{y}{\lambda})}{\partial y} + V^2(\frac{y}{\lambda})]\psi \end{aligned} \quad (۱۲۶-۳)$$

حال $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\psi &= \frac{\partial}{\partial y}[e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})}\bar{\psi}] \\ &= -iv\lambda V(\frac{y}{\lambda})e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})}\bar{\psi} + (\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y})e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})} \end{aligned} \quad (۱۲۷-۳)$$

همچنین $\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$ را محاسبه می کنیم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial y^2}\psi &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}[e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})}\bar{\psi}] = \frac{\partial}{\partial y}[-iv\lambda V(\frac{y}{\lambda})e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})}\bar{\psi} + (\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y})e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})}] \\ &= e^{-iv\lambda \int^y du V(\frac{u}{\lambda})}\{\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y^2} - 2iv\lambda V(\frac{y}{\lambda})\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} - (iv\lambda \frac{\partial V(\frac{y}{\lambda})}{\partial y} + v^2 \lambda^2 V^2(\frac{y}{\lambda}))\bar{\psi}\} \end{aligned} \quad (۱۲۸-۳)$$

با جایگذاری روابط (۱۲۶-۳) و (۱۲۷-۳) و (۱۲۸-۳) در رابطه (۱۲۳-۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & [-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2i\lambda V(\frac{y}{\lambda})\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + v^2 \lambda^2 V^2(\frac{y}{\lambda}) + V^2(\frac{y}{\lambda}) - m^2]\bar{\psi} = 0 \\ & [-\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2i\lambda V(\frac{y}{\lambda})\frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda^2 V^2(\frac{y}{\lambda}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2]\bar{\psi} = 0 \\ & [(i\frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda V(\frac{y}{\lambda}))^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2]\bar{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (۱۲۹-۳)$$

این معادله شکل جدید معادله کلاین - گوردون، با پتانسیل مستقل از زمان می باشد.

اکنون معادله پیوستگی را بررسی می‌کنیم. اگر $\rho = \bar{\rho} + v\bar{J}$ و $J = \bar{J} + v\bar{\rho}$ در نظر بگیریم،

معادله پیوستگی در سیستم (x, t) را به صورت $\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x} J = 0$ داریم. با جایگذاری تبدیلات پیمانه‌ای

$\rho \rightarrow \bar{\rho}$ و $J \rightarrow \bar{J}$ معادله پیوستگی در سیستم (y, τ) باید برقرار و به شکل

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{J} = 0$$

باشد. تبدیلات را در معادله پیوستگی در سیستم (x, t) جایگذاری می‌کنیم

$$\lambda \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - v \frac{\partial}{\partial y} \right) (\bar{\rho} + v\bar{J}) + \lambda \left(\frac{\partial}{\partial y} - v \frac{\partial}{\partial \tau} \right) (\bar{J} + v\bar{\rho}) = 0$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\rho} + \lambda v \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{J} - \lambda v \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} - \lambda v^2 \frac{\partial}{\partial y} \bar{J} + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \bar{J} + \lambda v \frac{\partial}{\partial y} \bar{\rho} - \lambda v \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{J} - \lambda v^2 \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\rho} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\rho} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{J} = 0 \quad (3-130)$$

می‌بینیم که با در نظر گرفتن تبدیلات فوق، معادله پیوستگی در سیستم (y, τ) نیز برقرار است.

در معادله کلاین - گوردون برای شار جریان و چگالی بار در سیستم (y, τ) روابط زیر برقرار است [37]

$$\bar{J} = \bar{\psi}^* \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi} - \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}^* \quad , \quad \bar{\rho} = \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi}^* - \bar{\psi}^* \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi} - 2i\lambda V \left(\frac{y}{\lambda} \right) |\bar{\psi}|^2 \quad (3-131)$$

۳-۴-۱. حل مثال برای ذره کلاین - گوردون در پتانسیل متحرک

در سیستم (y, τ) ، ابتدا جواب‌های معادله کلاین - گوردون را می‌یابیم. برای حل معادله (۳-۱۲۹) به

روش جداسازی متغیرها عمل کرده و تابع موجی به شکل [۳۷]

$$\bar{\psi} = e^{-i\varepsilon\tau} \eta(y) \quad (3-132)$$

پیشنهاد می‌دهیم. بنابراین

$$[(i \frac{\partial}{\partial \tau} - \lambda V(\frac{y}{\lambda}))^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2] \bar{\psi} = 0$$

$$[\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2i\lambda V(\frac{y}{\lambda}) \frac{\partial}{\partial \tau} + \lambda^2 V^2(\frac{y}{\lambda}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - m^2] \bar{\psi} = 0$$

$$[\varepsilon^2 \eta - 2\varepsilon \lambda V(\frac{y}{\lambda}) \eta + \lambda^2 V^2(\frac{y}{\lambda}) \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} - m^2 \eta] e^{-i\varepsilon \tau} = 0$$

$$[(\varepsilon^2 - 2\varepsilon \lambda V(\frac{y}{\lambda}) + \lambda^2 V^2(\frac{y}{\lambda})) - m^2] \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0 \quad (133-3)$$

برای یافتن جواب‌ها این معادله را به ازای $y > 0$, $y < 0$ بررسی می‌کنیم، زیرا پتانسیل همان حالت پله داشته و در این دو ناحیه متفاوت می‌باشد.

اگر $y > 0$ باشد، $V(\frac{y}{\lambda}) = V_0$ می‌شود.

بنابراین

$$[(\varepsilon^2 - 2\varepsilon \lambda V_0 + \lambda^2 V_0^2) - m^2] \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

$$[(\varepsilon - \lambda_0)^2 - m^2] \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + q^2 \eta = 0$$

که

$$\lambda_0 = \lambda V_0 \quad , \quad q^2 = (\varepsilon - \lambda_0)^2 - m^2$$

این معادله نوسانگر هماهنگ بوده و جواب آن به صورت

$$\eta(y) = A e^{iqy} + B e^{-iqy}$$

می‌باشد. چون در ناحیه $y > 0$ است $B = 0$ می‌شود، بنابراین

$$\eta(y) = A e^{iqy} \quad (134-3)$$

حال معادله (133-3) را به ازای $y < 0$ بررسی می‌کنیم، در این صورت $V(\frac{y}{\lambda}) = 0$ می‌شود. بنابراین

$$(\varepsilon^2 - m^2)\eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} + p^2 \eta = 0$$

که

$$p^2 = \varepsilon^2 - m^2$$

می‌باشد. این معادله نوسانگر هارمونیک بوده و جواب آن به صورت

$$\eta(y) = A'e^{ipy} + B'e^{-ipy} \quad (۱۳۵-۳)$$

می‌باشد. با استفاده از روابط (۱۳۲-۳)، (۱۳۴-۳) و (۱۳۵-۳) خواهیم داشت

$$\begin{cases} \bar{\psi}_I = e^{-i\varepsilon\tau} [A'e^{ipy} + B'e^{-ipy}] & \text{for } y < 0 \\ \bar{\psi}_{II} = e^{-i\varepsilon\tau} A e^{iqy} = A e^{-i(\varepsilon\tau - qy)} & \text{for } y > 0 \end{cases}$$

حال شرایط مرزی زیر را در مرز $y=0$ اعمال می‌کنیم

$$\begin{cases} \bar{\psi}_I = \bar{\psi}_{II} \Big|_{y=0} \\ \bar{\psi}'_I = \bar{\psi}'_{II} \Big|_{y=0} \end{cases}$$

بنابراین

$$\begin{cases} A' + B' = A \\ ip(A' - B') = iqA \end{cases}$$

با فرض $A' = 1$ خواهیم داشت

$$A = \frac{2p}{p+q}, \quad B' = \frac{p-q}{p+q}$$

بنابراین توابع موج در دو ناحیه به شکل زیر می‌شود

$$\begin{cases} \bar{\psi}_I = e^{-i\varepsilon\tau} \left[e^{ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-ipy} \right] & \text{for } y < 0 \\ \bar{\psi}_{II} = \left[\frac{2p}{p+q} \right] e^{-i(\varepsilon\tau - qy)} & \text{for } y > 0 \end{cases} \quad (۱۳۶-۳)$$

حال شار جریان و چگالی بار را در دو ناحیه محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\bar{J}_I &= \underbrace{\bar{\psi}_I^* \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}_I}_I - \underbrace{\bar{\psi}_I \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}_I^*}_{II} \\ I &= e^{i\epsilon\tau} \left[e^{-ipy} + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{ipy} \right] \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{-i\epsilon\tau} \left[e^{ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-ipy} \right] \right] \\ &= ip - ip \frac{p-q}{p+q} e^{-2ipy} + ip \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2ipy} - ip \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \\ -II &= -e^{-i\epsilon\tau} \left[e^{ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-ipy} \right] \frac{\partial}{\partial y} \left[e^{i\epsilon\tau} \left[e^{-ipy} + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{ipy} \right] \right] \\ &= ip - ip \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2ipy} + p \frac{p-q}{p+q} e^{-2ipy} - ip \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2\end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{J}_I = I - II$$

$$\bar{J}_I = 2ip \left(1 - \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \right) \quad (۱۳۷-۳)$$

حال برای $y > 0$ شار جریان را محاسبه می‌کنیم

$$\begin{aligned}\bar{J}_{II} &= \underbrace{\bar{\psi}_{II}^* \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}_{II}}_I - \underbrace{\bar{\psi}_{II} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}_{II}^*}_{II} \\ I &= \left[\frac{2p}{p+q^*} \right] e^{i(\epsilon\tau - q^* y)} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left[\frac{2p}{p+q} \right] e^{-i(\epsilon\tau - qy)} \right] \\ &= iq \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 e^{i(q-q^*)y} \\ -II &= - \left[\frac{2p}{p+q} \right] e^{-i(\epsilon\tau - qy)} \frac{\partial}{\partial y} \left[\left[\frac{2p}{p+q^*} \right] e^{i(\epsilon\tau - q^* y)} \right] \\ &= iq^* \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 e^{i(q-q^*)y}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\bar{J}_{II} = i(q + q^*) \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 e^{i(q-q^*)y} \quad (۱۳۸-۳)$$

که $\bar{J}_{II}$ شار جریان عبوری می باشد.

$$\bar{J}_I, \text{ مجموع شار جریان فرودی } \bar{J}_{inc} = 2ip \text{ و شار جریان بازتابی } \bar{J}_{ref} = -2ip \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \text{ می باشد.}$$

(برای محاسبه $\bar{J}_{inc}$ قسمت دارای توان مثبت نمایی و برای محاسبه مستقیم $\bar{J}_{ref}$ قسمت دارای توان

منفی نمایی تابع موج ناحیه I را جایگذاری می کنیم).

حال به محاسبه چگالی بار در دو ناحیه می پردازیم. برای ناحیه $y < 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_I &= \bar{\psi}_I \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi}_I^* - \bar{\psi}_I^* \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi}_I - 2i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right) |\bar{\psi}_I|^2 \\ &= e^{-i\varepsilon\tau} \left[e^{ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-ipy} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[e^{i\varepsilon\tau} \left[e^{-ipy} + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{ipy} \right] \right] \\ &\quad - e^{i\varepsilon\tau} \left[e^{-ipy} + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{ipy} \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[e^{-i\varepsilon\tau} \left[e^{ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-ipy} \right] \right] \\ &\quad - 2i\lambda V_0 \left[e^{-i\varepsilon\tau} \left(e^{ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-ipy} \right) \right] \left[e^{i\varepsilon\tau} \left(e^{-ipy} + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{ipy} \right) \right] \\ \bar{\rho}_I &= 2i\varepsilon \left[1 + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-2ipy} + \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \right] \\ &\quad - 2i\lambda_0 \left[1 + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-2ipy} + \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \right] \\ \bar{\rho}_I &= 2i(\varepsilon - \lambda_0) \left[1 + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-2ipy} + \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \right] \end{aligned} \quad (۱۳۹-۳)$$

برای ناحیه $y > 0$ داریم

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{II} &= \bar{\psi}_{II} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi}_{II}^* - \bar{\psi}_{II}^* \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi}_{II} - 2i\lambda V\left(\frac{y}{\lambda}\right) |\bar{\psi}_{II}|^2 \\ &= \frac{2p}{p+q} e^{-i(\varepsilon\tau - qy)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{2p}{p+q^*} e^{i(\varepsilon\tau - q^*y)} \right] - \frac{2p}{p+q^*} e^{i(\varepsilon\tau - q^*y)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{2p}{p+q} e^{-i(\varepsilon\tau - qy)} \right] \\ &\quad - 2i\lambda V_0 \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 e^{i(q-q^*)y} \end{aligned}$$

$$\bar{\rho}_{II} = 2i \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 (\varepsilon - \lambda_0) e^{i(q-q^*)y} \quad (140-3)$$

حال در مرز $y=0$ ، $\bar{\rho}_{II}$ ، $\bar{\rho}_I$ را بررسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_I &= 2i(\varepsilon - \lambda_0) \left[1 + \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 + \frac{p-q^*}{p+q^*} + \frac{p-q}{p+q} \right] \\ &= 2i(\varepsilon - \lambda_0) \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 \Rightarrow \forall y=0 \quad \bar{\rho}_I = \bar{\rho}_{II} \end{aligned}$$

که شرط مرزی مسئله را برآورده می‌کند.

اکنون به محاسبه شار جریان هر دو ناحیه در سیستم (x, t) می‌پردازیم

$$\begin{aligned} J_I &= \bar{J}_I + v\bar{\rho}_I \\ &= 2ip \left(1 - \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \right) + v2i(\varepsilon - \lambda_0) \left[1 + \frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2ipy} + \frac{p-q}{p+q} e^{-2ipy} + \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 \right] \\ J_I &= 2i \left[p + v(\varepsilon - \lambda_0) - \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 (p - v(\varepsilon - \lambda_0)) + v(\varepsilon - \lambda_0) \left(\frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2i\lambda p(x-vt)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p-q}{p+q} e^{-2i\lambda p(x-vt)} \right) \right] \end{aligned} \quad (141-3)$$

J_I از دو بخش J_{ref} ، J_{inc} تشکیل شده است. یعنی

$$J_I = J_{inc} - J_{ref} \quad (142-3)$$

ابتدا J_{inc} را می‌یابیم. برای این کار تابع موج فرودی همان بخشی است که در آن e^{+ipy} می‌باشد یعنی

$$J_I = \bar{J}_I + v\bar{\rho}_I \quad \text{با توجه به اینکه رابطه شار جریان بار در دو سیستم به صورت} \quad \bar{\psi}_{I(inc)} = e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy}$$

می‌باشد، بنابراین برای یافتن J_{inc} ابتدا $\bar{\rho}_{inc}$ ، سپس $\bar{J}_{inc}$ و بعد با استفاده از رابطه فوق J_{inc} را می‌یابیم

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{inc} &= \bar{\psi}_{inc} \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi}_{inc}^* - \bar{\psi}_{inc}^* \frac{\partial}{\partial \tau} \bar{\psi}_{inc} - 2i\lambda V \left(\frac{y}{\lambda} \right) |\bar{\psi}_{inc}|^2 \\ &= [e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy} \frac{\partial}{\partial \tau} (e^{i\varepsilon\tau} e^{-ipy}) - e^{i\varepsilon\tau} e^{-ipy} \frac{\partial}{\partial \tau} (e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy}) - 2i\lambda_0 (e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy}) (e^{i\varepsilon\tau} e^{-ipy})] \\ \bar{\rho}_{inc} &= 2i(\varepsilon - \lambda_0) \end{aligned} \quad (143-3)$$

$$\begin{aligned}\bar{J}_{inc} &= \bar{\psi}_{inc}^* \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}_{inc} - \bar{\psi}_{inc} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\psi}_{inc}^* \\ &= e^{i\varepsilon\tau} e^{-ipy} \frac{\partial}{\partial y} (e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy}) - e^{-i\varepsilon\tau} e^{ipy} \frac{\partial}{\partial y} (e^{i\varepsilon\tau} e^{-ipy})\end{aligned}$$

$$\bar{J}_{inc} = 2ip \quad (۱۴۴-۳)$$

با استفاده از روابط (۱۴۳-۳) و (۱۴۴-۳)

$$J_{inc} = \bar{J}_{inc} + v\bar{\rho}_{inc} = 2i(p + v(\varepsilon - \lambda_0)) \quad (۱۴۵-۳)$$

می‌شود. از روابط (۱۴۱-۳) و (۱۴۲-۳) و (۱۴۵-۳)

$$\begin{aligned}J_{ref} &= 2i \left[\left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 (p - v(\varepsilon - \lambda_0)) - v(\varepsilon - \lambda_0) \left(\frac{p-q^*}{p+q^*} e^{2i\lambda p(x-vt)} + \frac{p-q}{p+q} e^{-2i\lambda p(x-vt)} \right) \right] \\ &\quad (۱۴۶-۳)\end{aligned}$$

به دست می‌آید. حال برای ناحیه دوم داریم:

$$\begin{aligned}J_{II} &= \bar{J}_{II} + v\bar{\rho}_{II} \\ &= i(q + q^*) \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 e^{i(q-q^*)y} + v2i \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 (\varepsilon - \lambda_0) e^{i(q-q^*)y} \\ J_{II} &= i \left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 [(q + q^*) + 2v(\varepsilon - \lambda_0)] e^{i\lambda(q-q^*)(x-vt)}\end{aligned} \quad (۱۴۷-۳)$$

با داشتن $J_{tra} = J_{II}, J_{ref}, J_{inc}$ می‌توانیم در سیستم (x, t) ضرایب بازتاب (R) و عبور (T) را بیابیم.

می‌خواهیم به ازای $v=0$ ، $R+T$ را محاسبه می‌کنیم

$$R+T = \left| \frac{p-q}{p+q} \right|^2 + \frac{\left| \frac{2p}{p+q} \right|^2 (q + q^*) e^{i\lambda(q-q^*)x}}{2p} \quad (۱۴۸-۳)$$

حال دو حالت پیش رو داریم:

الف- اگر q حقیقی باشد، یعنی $q = q^*$ ، با استفاده از رابطه (۱۴۸-۳):

$$R+T = \frac{(p-q)^2 + 4pq}{(p+q)^2} = 1$$

$b-q$ موهومی باشد:

$$q = i\alpha$$

$$R+T = \left(\frac{p-i\alpha}{p+i\alpha}\right)\left(\frac{p+i\alpha}{p-i\alpha}\right) = 1$$

بنابراین

$$R+T \Big|_{v=0} = 1 \quad (۱۴۹-۳)$$

همانطور که می بینیم مجموع ضرایب بازتاب و عبور برابر یک شد.

۳-۵. فرمیون ها در میدان ثابت در راستای محور Z :

در اینجا می خواهیم رفتار فرمیون های نسبیتی را در میدان های الکترومغناطیسی بررسی کنیم. چون فرمیون می باشد از معادله دیراک استفاده می کنیم.

در ابتدا دو میدان الکتریکی و مغناطیسی که هر دو در راستای محور Z هستند، در نظر می گیریم. ذرات دیراک با جرم سکون m_0 توسط معادله زیر شرح داده می شوند [۴۲]

$$[\gamma^i D_i + m_0]\psi = 0 \quad (۱۵۰-۳)$$

که

$$D_i = \partial_i - iqA_i \quad i = \overline{1,4} \quad (۱۵۱-۳)$$

می باشد و مؤلفه ها را به شکل زیر تعریف می کنیم

$$A_2 = B_0 x \quad ; \quad A_3 = -E_0 t \quad (۱۵۲-۳)$$

با نوشتن اسپینور به شکل

$$\psi = [\gamma^j D_j - m_0]\chi \quad (۱۵۳-۳)$$

و با استفاده از روابط (۳-۱۵۰) و (۳-۱۵۱) به معادله درجه دو زیر می‌رسیم

$$[\gamma^i D_i + m_0][\gamma^j D_j - m_0]\chi = 0 \quad (۳-۱۵۴)$$

به ازای $i=j$ خواهیم داشت:

$$[\gamma^1 D_1 + \gamma^2 D_2 + \gamma^3 D_3 + \gamma^4 D_4 + m_0][\gamma^1 D_1 + \gamma^2 D_2 + \gamma^3 D_3 + \gamma^4 D_4 - m_0]\chi = 0 \quad (۳-۱۵۵)$$

همچنین با در نظر گرفتن نمایش دیراک برای ماتریس‌های γ^i

$$\gamma^\mu = -i\beta\alpha^\mu \quad \mu = \overline{1,3}, \quad \gamma^4 = -i\beta$$

که

$$\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} \quad ; \quad \alpha^\mu = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{bmatrix}$$

و σ^μ ماتریس‌های پائولی هستند. از رابطه (۳-۱۵۱) داریم

$$D_1 = \partial_x \quad ; \quad D_2 = \partial_y - iqB_0 x \quad ; \quad D_3 = \partial_z - iq(-E_0 t) \quad ; \quad D_4 = \partial_t$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & [(\gamma^1)^2 D_1^2 + \gamma^1 \gamma^2 D_1 D_2 + \gamma^1 \gamma^3 D_1 D_3 + \gamma^1 \gamma^4 D_1 D_4 - m_0 \gamma^1 D_1 + \gamma^2 \gamma^1 D_2 D_1 + (\gamma^2)^2 D_2^2 \\ & + \gamma^2 \gamma^3 D_2 D_3 + \gamma^2 \gamma^4 D_2 D_4 - m_0 \gamma^2 D_2 + \gamma^3 \gamma^1 D_3 D_1 + \gamma^3 \gamma^2 D_3 D_2 + (\gamma^3)^2 D_3^2 \\ & + \gamma^3 \gamma^4 D_3 D_4 - m_0 \gamma^3 D_3 + \gamma^4 \gamma^1 D_4 D_1 + \gamma^4 \gamma^2 D_4 D_2 + \gamma^4 \gamma^3 D_4 D_3 + (\gamma^4)^2 D_4^2 - m_0 \gamma^4 D_4 \\ & + m_0 \gamma^1 D_1 + m_0 \gamma^2 D_2 + m_0 \gamma^3 D_3 + m_0 \gamma^4 D_4 - m_0^2]\chi = 0 \end{aligned} \quad (۳-۱۵۶)$$

با توجه به اینکه

$$(\gamma^\mu)^2 = I \quad \mu = \overline{1,3}$$

$$(\gamma^4)^2 = -I$$

و

$$\begin{aligned} D_1 D_2 &= \partial_x (\partial_y - iqB_0 x) = -iqB_0 \\ D_4 D_3 &= \partial_t (\partial_z - iq(-E_0 t)) = iqE_0 \\ \gamma^4 \gamma^3 &= -\gamma^3 \gamma^4 \end{aligned}$$

بنابراین رابطه (۳-۱۵۶) به صورت زیر می شود

$$[\partial_x^2 + (\partial_y - iqB_0x)^2 + (\partial_z + iqE_0t)^2 - \partial_t^2 - iqB_0\gamma^1\gamma^2 - iqE_0\gamma^3\gamma^4 - m_0^2]\chi = 0 \quad (۳-۱۵۷)$$

برای ساده سازی شکل معادله از تعاریف زیر استفاده می کنیم

$$\Gamma_3 \equiv -i\gamma^1\gamma^2 = \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} \quad (۳-۱۵۸-الف)$$

$$\Gamma_4 \equiv \gamma^3\gamma^4 = (-i\beta\alpha^3)(-i\beta) = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{bmatrix} \quad (۳-۱۵۸-ب)$$

متناظر با ویژه مقادیر $\mu_{1,2} = \pm 1$ برای ویژه بردارها

$$\omega_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \omega_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

را داریم. با یک جداسازی به شکل

$$\chi_{1,2} = \eta_{1,2}(x)\varphi_{1,2}(t)\exp[i(p_y y + p_z z)]\omega_{1,2} \quad (۳-۱۵۹)$$

و جایگذاری آن در رابطه (۳-۱۵۴) خواهیم داشت

$$[\partial_x^2 + (\partial_y^2 - 2iqB_0x\partial_y - q^2B_0^2x^2) + (\partial_z^2 + 2iqE_0t\partial_z - q^2E_0^2t^2) - \partial_t^2 + qB_0 \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix}$$

$$-iqE_0 \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{bmatrix} - m_0^2]\chi_{1,2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \varphi_{1,2} \exp[i(p_y y + p_z z)]\omega_{1,2} + (-(qB_0x - p_y)^2 \chi_{1,2}) + (-(qE_0t + p_z)^2 \chi_{1,2} -$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \eta_{1,2} \exp[i(p_y y + p_z z)]\omega_{1,2} \pm qB_0\chi_{1,2} \mp iqE_0\chi_{1,2} - m_0^2\chi_{1,2} = 0$$

رابطه را بر $\chi_{1,2}$ تقسیم می کنیم

$$\frac{1}{\eta_{1,2}} \frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial x^2} - (qB_0x - p_y)^2 - (qE_0t + p_z)^2 - \frac{1}{\varphi_{1,2}} \frac{\partial^2 \varphi_{1,2}}{\partial t^2} \pm qB_0 \mp iqE_0 - m_0^2 = 0$$

این رابطه را به دو قسمت بر حسب زمان و مکان تقسیم کرده و قسمت زمانی را برابر $2mqB_0$ و قسمت مکانی را قرینه این در نظر می‌گیریم تا مجموع آن‌ها صفر شود، بنابراین:

$$\frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial x^2} + [(2m \pm 1)qB_0 - (qB_0 x - p_y)^2] \eta_{1,2} = 0 \quad (3-160 \text{ الف})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial t^2} + [2mqB_0 \pm iqE_0 + m_0^2 + (qE_0 t + p_z)^2] \phi_{1,2} = 0 \quad (3-160 \text{ ب})$$

با یک تغییر متغیر به شکل زیر

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{qB_0}}(qB_0 x - p_y) \quad ; \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{qE_0}}(qE_0 t + p_z) \quad (3-161)$$

خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial x^2} = qB_0 \frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial \sigma^2}$$

با جایگذاری در رابطه (3-160 الف) خواهیم داشت

$$\frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial \sigma^2} + \left[\frac{(2m \pm 1)qB_0}{qB_0} - \frac{(qB_0 x - p_y)^2}{qB_0} \right] \eta_{1,2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial \sigma^2} + [2m \pm 1 - \sigma^2] \eta_{1,2} = 0 \quad (3-162 \text{ الف})$$

همچنین

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial t^2} = qE_0 \frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial \tau^2}$$

با جایگذاری در رابطه (3-160 ب) داریم

$$\frac{\partial^2 \phi_{1,2}}{\partial \tau^2} + \left[2m \frac{B_0}{E_0} \pm i + \frac{m_0^2}{qE_0} + \tau^2 \right] \phi_{1,2} = 0 \quad (3-162 \text{ ب})$$

جواب معادله (3-162 الف) به صورت

$$\eta_{1,2} = \sigma e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} L_n^{\frac{1}{2}}(\sigma^2)$$

بوده و برای ضریب جداسازی دو رابطه زیر به دست می‌آید:

$$m = 2(n + \frac{1}{2})$$

$$m = 2(n + 1)$$

معادله (۳-۱۶۲-ب) دارای شکل نوسانی

$$\ddot{\varphi} + \omega^2(\tau)\varphi = 0 \quad (۳-۱۶۳)$$

با فرکانس متغیر موهومی

$$\omega^2 = \nu \pm i + \tau^2$$

است که

$$\nu = 2m \frac{B_0}{E_0} + \frac{m_0^2}{qE_0} \quad (۳-۱۶۴)$$

می‌باشد. جواب به صورت

$$\varphi_{1,2} = \tau e^{\frac{1}{2}i\tau^2} L_n^{(\frac{1}{2})}(i\tau^2)$$

به دست می‌آید و برای ν به دو مقدار زیر می‌رسیم:

$$\nu_1 = (4n + 2)i \quad (۳-۱۶۵)$$

$$\nu_2 = (4n + 4)i$$

با جایگذاری در رابطه (۳-۱۶۴) برای B_0 دو مقدار به صورت

$$B_0 = \frac{E_0}{2m} \left\{ (4n + 2)i - \frac{m_0^2}{qE_0} \right\} \quad (۳-۱۶۶)$$

$$B_0 = \frac{E_0}{2m} \left\{ (4n + 4)i - \frac{m_0^2}{qE_0} \right\}$$

به دست می‌آید.

فصل چهارم :

ذرات فرا نسبیتی

اگرچه مطالعات انجام شده روی ذرات نسبیتی‌ای که در میدان‌های استاتیک حرکت می‌کنند، تاریخچه‌ای طولانی دارند، اما بعد از اینکه نشان داده شد که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی استاتیک موازی تنها بعد از برخورد هسته‌های سنگین تشکیل می‌شوند - حالتی که گلاسما^۱ نامیده می‌شود - این موضوع بسیار مورد توجه محققین واقع شده است [۴۳]. در نظریه دینامیکی فرآیند تولید زوج^۲، که با معادلات کلاین - گوردون و دیراک متناظر آغاز شده است، مکانیسم شوئینگر^۳ مجدداً به دقت بررسی شده است [۴۴]. اگر درک عمیقی از چگونگی تولید و تحول ذرات در میدان‌هایی با شدت بالا داشته باشیم، می‌توانیم این فرمول‌بندی را برای موقعیت‌های پیشرفته‌تر به کار ببریم.

تعمیم مهم بعدی، که کاربردهایی در فیزیک و شیمی دارد، در نظر گرفتن میدان‌های تناوبی است، که معمولاً به معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم خطی خاتمه می‌یابد که جواب‌هایش توابع متیو^۴ هستند [۴۵]. تعداد بسیار زیاد مقالاتی که نتایج مربوط به معادلات متیو را ارائه داده‌اند سبب شده است که ارائه یک فهرست کامل از مقالات تقریباً غیرممکن باشد.

با شروع مطالعات در زمینه ذرات نسبیتی با کار اولیه ارائه شده توسط دانکان^۵ و تامپسون^۶ [۴۶]، رفتار انواع مختلف ذرات نسبیتی^۷ که در مغناخترها^۸ موجود هستند مورد بررسی قرار گرفته است [۴۷-۴۹]. در هنگام کار با میدان مغناطیسی متناوب در راستای محور Z که با گذشت زمان تضعیف می‌شود، ما با معادله دیراک سروکار داریم که فرمیون‌های پوسته مغناختر را مشخصه‌یابی

¹ Glasma

² Pair creation

³ Schwinger mechanism

⁴ Mathieu's functions

⁵ Duncan

⁶ Thompson

⁷ Relativistic particles

⁸ magnetar

می‌کند. این رده از ستاره‌های نوترونی، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی‌ای دارند که نه تنها در زمان بلکه در مختصات Z نیز متناوب هستند [۴۸].

سالها پس از اینکه دونکان و تامپسون [۴۶] اصطلاح مغناختر را برای ستارگان نوترونی تقریباً غیردوار که قدرت میدان مغناطیسی‌شان در حدود 10^2 تا 10^3 برابر بزرگتر از یک ستاره نوترونی^۱ است ارائه کردند، این رده از اشیای نجومی، به یک حوزه فعال تحقیقاتی تبدیل شد. با میدان‌های مغناطیسی بزرگتر از القای بحرانی که در آن، انرژی سیکلوترونی یک الکترون با انرژی جرم سکون برابر است، آنها تنها منبع موجود برای درخشانترین رویدادهای کیهانی معروف به زبانه‌های غول‌پیکر^۲ هستند که منشأ آنها خارج از سامانه خورشیدی است. خصوصیات عجیب مغناخترها منجر به ایجاد سوالات بدون پاسخ بسیاری به ویژه در ارتباط با پیکربندی میدان مغناطیسی داخلی و ساختار داخلی آنها گشته است [۵۰].

در بخش اول می‌خواهیم رفتار فرمیون‌های فرا نسبیتی را در میدان‌های الکترومغناطیسی بررسی کنیم. هنگامی که میدان الکتریکی را به صورت میدان هارمونیک زمانی در نظر بگیریم، ذرات فرا نسبیتی به وسیله معادله متیو با پارامترهای موهومی خالص شرح داده می‌شوند. در اینجا ما از بسط تابع متیو کمک گرفتیم تا معادله را حل نمائیم. در بخش دوم به مطالعه فرمیون‌ها در میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته به زمان عمود بر هم (مانند فرمیون‌های پوسته مغناختر) می‌پردازیم.

¹ Neutron star

² Giant flare

۴-۱. شرح معادله متیو برای فرمیون‌های فرا نسبیتی در یک میدان الکتریکی

هارمونیک زمانی موازی با القای مغناطیسی

می‌خواهیم فرمیون‌ها را در یک میدان الکتریکی هماهنگ زمانی، $E_0 \cos(\omega_0 t)$ ، موازی با القای مغناطیسی استاتیکی B_0 ، هر دو در راستای محور Z ، بررسی کنیم. ذرات دیراک با جرم سکون m_0 توسط معادله زیر شرح داده می‌شوند [۴۲]

$$[\gamma^i D_i + m_0] \psi = 0 \quad (۱-۴)$$

که

$$D_i = \partial_i - iqA_i \quad i = \overline{1, 4} \quad (۲-۴)$$

مؤلفه‌های ۴ بردار پتانسیل را به شکل زیر در نظر می‌گیریم

$$A_2 = A_y(x) = B_0 x \quad ; \quad A_3 = -\frac{E_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \quad (۳-۴)$$

با نوشتن اسپینور به شکل

$$\psi = [\gamma^j D_j - m_0] \chi \quad (۴-۴)$$

و با استفاده از روابط (۱-۴) و (۲-۴) به معادله درجه دو زیر می‌رسیم

$$[\gamma^i D_i + m_0][\gamma^j D_j - m_0] \chi = 0 \quad (۵-۴)$$

و از رابطه (۲-۴)

$$D_1 = \partial_x \quad ; \quad D_2 = \partial_y - iqB_0 x \quad ; \quad D_3 = \partial_z - iq\left(-\frac{E_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)\right) \quad ; \quad D_4 = \partial_t \quad (۶-۴)$$

و بنابراین

$$D_1 D_2 = \partial_x (\partial_y - iqB_0 x) = -iqB_0$$

$$D_4 D_3 = \partial_t (\partial_z + i \frac{qE_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)) = iqE_0 \cos(\omega_0 t) \quad (۷-۴)$$

به دست می‌آید. این روابط را مانند بخش (۵-۳) بررسی می‌کنیم و در نهایت به رابطه زیر می‌رسیم

$$[\partial_x^2 + (\partial_y - iqB_0x)^2 + (\partial_z + i\frac{qE_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t))^2 - \partial_t^2 - iqB_0\gamma^1\gamma^2 + iqE_0\gamma^4\gamma^3\cos(\omega_0t) - m_0^2]\chi = 0 \quad (۸-۴)$$

با یک جداسازی به شکل

$$\chi_{1,2} = \eta_{1,2}(x)\psi_{1,2}(t)\exp[i(p_y y + p_z z)]\omega_{1,2} \quad (۹-۴)$$

و جایگذاری آن در رابطه (۸-۴) خواهیم داشت

$$[\partial_x^2 + (\partial_y - iqB_0x)^2 + (\partial_z + i\frac{qE_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t))^2 - \partial_t^2 + qB_0\Gamma_3 + iqE_0\Gamma_4\cos(\omega_0t) - m_0^2]\eta_{1,2}(x)\psi_{1,2}(t)\exp[i(p_y y + p_z z)]\omega_{1,2} = 0$$

با جایگذاری روابط (۳-۱۵۸-الف) و (۳-۱۵۸-ب) در این رابطه

$$[\partial_x^2 + (\partial_y^2 - 2iqB_0x\partial_y - q^2B_0^2x^2) + (\partial_z^2 + 2i\frac{qE_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t)\partial_z - \frac{q^2E_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0t)) - \partial_t^2 + qB_0\begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} + iqE_0\begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{bmatrix}\cos(\omega_0t) - m_0^2]\eta_{1,2}(x)\psi_{1,2}(t)\exp[i(p_y y + p_z z)]\omega_{1,2} = 0 \quad (۱۰-۴)$$

به دست می‌آید. حال ماتریس یکانی را جایگذاری می‌کنیم و در این روند به محاسبات زیر نیاز داریم

$$I\omega_1 = \omega_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad I\omega_2 = \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_3 \equiv \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma_3 \omega_1 = \omega_1 \quad ; \quad \Gamma_3 \omega_2 = -\omega_2$$

$$\Gamma_4 \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \Gamma_4 \omega_1 = \omega_1 \quad ; \quad \Gamma_4 \omega_2 = -\omega_2$$

با جایگذاری در رابطه (۴-۱۰) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial x^2} \psi_{1,2}(t) \exp[i(p_y y + p_z z)] \omega_{1,2} + (-p_y^2 + 2qB_0 x p_y - q^2 B_0^2 x^2) \chi_{1,2} \\ & + (-p_z^2 - 2 \frac{qE_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) p_z - \frac{q^2 E_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t)) \chi_{1,2} - \frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial t^2} \eta_{1,2}(x) \exp[i(p_y y + p_z z)] \omega_{1,2} \\ & \pm qB_0 \begin{bmatrix} \sigma^3 & 0 \\ 0 & \sigma^3 \end{bmatrix} \chi_{1,2} \mp iqE_0 \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{bmatrix} \cos(\omega_0 t) \chi_{1,2} - m_0^2 \chi_{1,2} = 0 \end{aligned}$$

همه را بر $\chi_{1,2}$ تقسیم می کنیم

$$\frac{1}{\eta_{1,2}} \frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial x^2} - (p_y - qB_0 x)^2 - (p_z + \frac{qE_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t))^2 - \frac{1}{\psi_{1,2}} \frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial t^2} \pm qB_0 \mp iqE_0 \cos(\omega_0 t) - m_0^2 = 0$$

این رابطه را به دو قسمت بر حسب زمان و مکان تقسیم کرده و قسمت زمانی را برابر $2nqB_0$ و قسمت مکانی را قرینه این در نظر می گیریم تا مجموع آن ها صفر شود. بنابراین

$$\frac{\partial^2 \eta_{1,2}}{\partial x^2} + [(2n \pm 1) qB_0 - (qB_0 x - p_y)^2] \eta_{1,2} = 0 \quad (4-11-الف)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial t^2} + [2nqB_0 \pm iqE_0 \cos(\omega_0 t) + m_0^2 + (\frac{qE_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + p_z)^2] \psi_{1,2} = 0 \quad (4-11-ب)$$

معادله (4-11-الف) همان معادله (3-160-الف) می باشد که حل آن در فصل قبل آمده است.

به عنوان یک مثال ساده تر اما با مفهوم کاملاً فیزیکی، برای یک ذره فرا نسبیتی، که با $\frac{qE_0}{\omega_0} \ll p_z$

مشخص می شود، معادله (4-11-ب)، با $z = \frac{\omega_0 t}{2}$ ، می تواند به شکل معادله متیو تقریب زده شود. ابتدا

مشتقات زمانی را بر حسب متغیر جدید z محاسبه می کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial t} &= \frac{\omega_0}{2} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial t^2} &= \frac{\omega_0^2}{4} \frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial z^2} \end{aligned}$$

این روابط را در (4-11-ب) جایگذاری کرده و از جمله $\frac{qE_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$ به دلیل شرط حالت خاص این

مسئله، صرف نظر می کنیم. معادله به شکل زیر می شود.

$$\frac{\partial^2 \psi_{1,2}}{\partial z^2} + \frac{4}{\omega_0^2} [2nqB_0 + m_0^2 + p_z^2 \pm iqE_0 \cos(2z)] \psi_{1,2} = 0 \quad (12-4)$$

شکل کانونیک معادله متیو به فرم زیر است

$$u'' + [\alpha - 2\beta \cos(2z)]u = 0 \quad (13-4)$$

α مقدار مشخصه و β پارامتر معادله متیو می باشد و جواب عمومی آن $u \simeq e^{irz} f(z)$ است که $f(z)$ تابعی تناوبی است که r وابسته به α و β حقیقی یا موهومی است. با مقایسه (12-4) و (13-4) می بینیم که با در نظر گرفتن

$$\alpha = \frac{4}{\omega_0^2} [p_z^2 + m_0^2 + 2nqB_0] \quad ; \quad \beta_{1,2} = \mp 2i\varepsilon \quad , \quad \varepsilon = \frac{qE_0}{\omega_0^2} \quad (14-4)$$

معادله (12-4) معادله متیو می باشد. به وضوح در غیاب میدان الکتریکی، جواب های معادله (13-4) به صورت $\cos(\sqrt{\alpha}z)$ و $\sin(\sqrt{\alpha}z)$ هستند.

توابع متیو شامل یک پارامتر موهومی خالص، $\beta = i\gamma$ ، که در این مورد $\gamma_{1,2} = \mp 2\varepsilon$ ، به ندرت در مقالات بحث شده اند. با بکارگیری رویه ای مشابه برای توابع با پارامتر حقیقی، می توان از سری فوریه توابع متیو تناوبی π زوج استفاده کرد که

$$MathieuC_{2m}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) \quad (15-4)$$

مشتق مرتبه اول این سری

$$\sum_{r=0}^{\infty} 2r A_{2r}^{(2m)} \sin(2rz)$$

و مشتق مرتبه دوم آن

$$-\sum_{r=0}^{\infty} 4r^2 A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz)$$

می باشد. با جایگذاری این روابط در (13-4) داریم

$$-\sum_{r=0}^{\infty} 4r^2 A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) + [\alpha_{2m} - 2i\gamma \cos(2z)] \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) = 0$$

اکنون جملات سری را باز می کنیم

$$\begin{aligned} & [0 - 4A_2^{(2m)} \cos(2z) - \sum_{r=2}^{\infty} 4r^2 A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz)] + [\alpha_{2m} A_0^{(2m)} + \alpha_{2m} A_2^{(2m)} \cos(2z) \\ & + \alpha_{2m} \sum_{r=2}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos(2z)] + [-2i\gamma \cos(2z) A_0^{(2m)} - 2i\gamma A_2^{(2m)} \cos(2z) \cos(2z) \\ & - 2i\gamma A_4^{(2m)} \cos(2z) \cos(4z) - 2i\gamma \cos(2z) \sum_{r=3}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz)] = 0 \end{aligned}$$

می دانیم

$$\cos(\alpha) \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

بنابر این داریم

$$\begin{aligned} & -4A_2^{(2m)} \cos(2z) - \sum_{r=2}^{\infty} 4r^2 A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) + \alpha_{2m} A_0^{(2m)} + \alpha_{2m} A_2^{(2m)} \cos(2z) \\ & + \alpha_{2m} \sum_{r=2}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) - 2i\gamma \cos(2z) A_0^{(2m)} - 2i\gamma A_2^{(2m)} \left(\frac{1 + \cos(4z)}{2} \right) \\ & - 2i\gamma A_4^{(2m)} \left(\frac{\cos(2z) + \cos(6z)}{2} \right) - 2i\gamma \cos(2z) \sum_{r=3}^{\infty} A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) = 0 \end{aligned}$$

ضریب جملات کسینوسی همانند هم باید صفر باشد

$$\alpha_{2m} A_0^{2m} - i\gamma A_2^{2m} = 0 \quad (۴-۱۶-الف)$$

$$(\alpha_{2m} - 4) A_2^{2m} - i\gamma [A_4^{2m} + 2A_0^{2m}] = 0 \quad (۴-۱۶-ب)$$

$$\sum_{r=2}^{\infty} (\alpha_{2m} - 4r^2) A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) - i\gamma A_2^{2m} \cos(4z) - i\gamma A_4^{2m} \cos(6z)$$

$$- 2i\gamma \cos(2z) \sum_{r=2}^{\infty} A_{2(r+1)}^{(2m)} \cos(2(r+1)z) = 0$$

$$\sum_{r=2}^{\infty} (\alpha_{2m} - 4r^2) A_{2r}^{(2m)} \cos(2rz) - i\gamma A_{2(r-1)}^{(2m)} \cos(2rz) \Big|_{r=2} - i\gamma A_{2(r-1)}^{(2m)} \cos(2rz) \Big|_{r=3} - i\gamma$$

$$\sum_{r=2}^{\infty} A_{2(r+1)}^{(2m)} (\cos(2rz) \cos(2rz + 4z)) = 0$$

$$\sum_{r=2}^{\infty} (\alpha_{2m} - 4r^2) A_{2r}^{2m} \cos(2rz) - i\gamma \sum_{r=2}^{\infty} A_{2(r+1)}^{2m} \cos(2rz) - i\gamma \sum_{r=2}^{\infty} A_{2(r-1)}^{2m} \cos(2rz) = 0 \quad (۴-۱۶-پ)$$

که رابطه (۴-۱۶-پ) رامی توان به شکل زیر نوشت

برای

$$(\alpha_{2m} - 4r^2) A_{2r}^{2m} - i\gamma [A_{2r+2}^{2m} + A_{2r-2}^{2m}] = 0 \quad : r \geq 2$$

برای اینکه بتوانیم قیدی برای α به دست آوریم فرض می کنیم $A_4^{2m} = 0$ باشد، از روابط (۴-۱۶-الف)

و (۴-۱۶-ب) مقادیر α را پیدا می کنیم

$$A_0^{2m} = \frac{i\gamma A_2^{2m}}{\alpha_{2m}}$$

$$(\alpha_{2m} - 4) A_2^{2m} - 2i\gamma \frac{(i\gamma) A_2^{2m}}{\alpha_{2m}} = 0$$

$$(\alpha_{2m}^2 - 4\alpha_{2m} + 2\gamma^2) A_2^{2m} = 0$$

$$\alpha_{2m}^2 - 4\alpha_{2m} + 2\gamma^2 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = \frac{4 - \sqrt{16 - 8\gamma^2}}{2} = 2[1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}] \\ \alpha_2 = \frac{4 + \sqrt{16 - 8\gamma^2}}{2} = 2[1 + \sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{2}}] \end{cases} \quad (۴-۱۷)$$

که α_0 و α_2 حقیقی هستند در صورتی که

$$\frac{\gamma^2}{2} \leq 1 \rightarrow \gamma^2 \leq 2 \rightarrow \gamma \leq \sqrt{2}$$

$$\gamma = \mp 2\varepsilon \rightarrow \varepsilon \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اگر γ_0 بزرگتر از $\sqrt{2}$ باشد، بر طبق مدهای نوسانی تابع متیو C، به صورت نمایی رفتار می کند.

$$\varepsilon \ll \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{برای} \quad \varepsilon \equiv \frac{qE_0}{\omega_0^2}$$

$$qE_0 \ll \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}} \rightarrow \gamma \ll \sqrt{2}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\alpha_0 = 2[1 - (1 - \frac{\gamma^2}{2})^{\frac{1}{2}}].$$

به ازای $x \ll 1$ با توجه به بسط $(1+x)^n = 1 + nx + \dots$ داریم

$$\alpha_0 \approx \frac{\gamma^2}{2} \quad (۱۸-۴)$$

با توجه به روابط (۴-۱۶) و مقدار اولیه $A_0^{(2m)} = 1$ و با در نظر گرفتن اینکه $A_4^{(2m)} = 0$ می باشد، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \alpha_{2m} - i\gamma A_2^{(2m)} &= 0 \quad \rightarrow \quad A_2^{(2m)} = \frac{\alpha_{2m}}{i\gamma} \\ (\alpha_{2m} - 4)A_2^{2m} - 2i\gamma &= 0 \quad \rightarrow \quad A_2^{2m} = \frac{2i\gamma}{(\alpha_{2m} - 4)} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha_{2m}}{i\gamma} = \frac{2i\gamma}{(\alpha_{2m} - 4)} \\ \Rightarrow \quad \alpha_{2m}^2 - 4\alpha_{2m} + 2\gamma^2 &= 0 \end{aligned}$$

همان رابطه قبلی و α های قبل به دست می آید که به ازای آن α ها این دو مقدار A_2^{2m} با هم برابر می شوند.

به ازای $m = 0$ خواهیم داشت:

$$A_0^0 = 1$$

$$A_2^0 \frac{\alpha_0}{i\gamma} \rightarrow A_2^0 = -\frac{i\gamma}{2}$$

$$A_4^0 = 0$$

$$r = 2 \rightarrow (\alpha_0 - 16)A_4^0 - i\gamma[A_6^0 + A_2^0] = 0 \rightarrow A_6^0 = -A_2^0 \rightarrow A_6^0 = i\frac{\gamma}{2}$$

$$r = 3 \rightarrow (\alpha_0 - 36)A_6^0 - i\gamma[A_8^0 + A_4^0] = 0 \rightarrow (\frac{\gamma^2}{2} - 36)(i\frac{\gamma}{2}) - i\gamma A_8^0 = 0 \rightarrow A_8^0 = \frac{\gamma^2}{4} - 18$$

$$r = 4 \rightarrow (\alpha_0 - 64)A_8^0 - i\gamma[A_{10}^0 + A_6^0] = 0 \rightarrow (\frac{\gamma^2}{2} - 64)(\frac{\gamma^2}{4} - 18) - i\gamma[A_{10}^0 + i\frac{\gamma}{2}] = 0$$

$$\frac{\gamma^4}{8} - 25\gamma^2 + 1152 - i\gamma A_{10}^0 + \frac{\gamma^2}{2} = 0$$

$$A_{10}^0 = -i(\frac{\gamma^3}{8} - \frac{49}{2}\gamma + \frac{1152}{\gamma})$$

$$A_{10}^0 = -i\frac{\gamma^3}{8} + \frac{49}{2}i\gamma + \frac{1152}{\gamma}i$$

حال سراغ معادله متیو (۴-۱۵) رفته و به ازای $m=0$ شش جمله اول آن را می نویسیم

$$\psi_{1,2} = A_0^0 + A_2^0 \cos(2z) + A_4^0 \cos(4z) + A_6^0 \cos(6z) + A_8^0 \cos(8z) + A_{10}^0 \cos(10z) + \dots$$

و با توجه به اینکه داشتیم $2z = \omega_0 t$ ، داریم

$$\begin{aligned} \psi_{1,2} = & 1 - \frac{i\gamma_{1,2}}{2} \cos(\omega_0 t) + \frac{i\gamma_{1,2}}{2} \cos(3\omega_0 t) + (\frac{\gamma_{1,2}^2}{4} - 18) \cos(4\omega_0 t) \\ & + (-\frac{i\gamma_{1,2}^3}{8} + \frac{49}{2}i\gamma_{1,2} - \frac{1152}{\gamma_{1,2}}i) \cos(5\omega_0 t) \end{aligned} \quad (۴-۱۹)$$

می شود که برای $\gamma_{1,2}$ مقدار

$$\gamma_{1,2} = \mp 2\varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{qE_0}{\omega_0^2} \Rightarrow \gamma_{1,2} = \mp \frac{2qE_0}{\omega_0^2} \quad (۴-۲۰)$$

به دست می آید.

۴-۲. مطالعه فرمیون های فرا نسبیتی در میدان الکتریکی و مغناطیسی وابسته به

زمان عمود بر هم

برای بررسی این فرمیون ها از معادلات دیراک استفاده می کنیم. این معادله به صورت زیر می باشد. (در

واحد $\hbar = c = 1$)

$$[\gamma^i D_i + m_0]\psi = 0 \quad (۴-۲۱)$$

همچنین میدان الکتریکی و مغناطیسی را به صورت [۵۱]

$$E_y = \frac{k}{\sigma} b_0 \sin(kz) \exp(-\frac{k^2}{\sigma} t) \quad , \quad B_x = b_0 \cos(kz) \exp(-\frac{k^2}{\sigma} t) \quad (۲۲-۴)$$

در نظر می گیریم. مؤلفه های چهار پتانسیل را به شکل

$$A_y = -\frac{b_0}{k} \sin(kz) e^{-\alpha t} \quad (۲۳-۴)$$

در نظر می گیریم که $\alpha \equiv \frac{k^2}{\sigma}$ است.

با استفاده از تعریف یک ψ اسپینوری به صورت

$$\psi = [\gamma^j D_j - m_0] \chi \quad (۲۴-۴)$$

مانند محاسبات بخش (۱-۴) ادامه می دهیم و به معادله زیر می رسیم

$$[\partial_x^2 + (\partial_y - iqA_y)^2 + \partial_z^2 - \partial_t^2 - m_0^2 + q\Gamma_1 B_x] \chi = 0 \quad (۲۵-۴)$$

که در آن

$$D_1 = \partial_x \quad ; \quad D_2 = \partial_y - iqA_y \quad ; \quad D_3 = \partial_z \quad ; \quad D_4 = \partial_t$$

و $D_3 D_2 = iqB_x$ می باشد. برای بقیه $j \neq i$ ها، $D_i D_j = 0$ هستند.

ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقادیر $\lambda_{1,2} = \pm 1$ به شکل

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \quad (۲۶-۴)$$

هستند. به وسیله جداسازی متغیرها به صورت

$$\chi_{1,2} = \eta_{1,2}(z, t) \exp(i \vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp) \omega_{1,2} \quad (۲۷-۴)$$

که $\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp = p_x x + p_y y$ و اندیس ۱ یا ۲ برای حالت $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ هستند، از معادله (۲۵-۴)

داریم

$$[\partial_x^2 + (\partial_y^2 - 2iqA_y\partial_y - q^2A_y^2) + \partial_z^2 - \partial_t^2 - m_0^2 + iq\gamma^3\gamma^2B_x]\eta_{(z,t)}e^{ip_\perp \cdot x_\perp}\omega_{1,2} = 0$$

$$\gamma^3\gamma^2 = -i \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{bmatrix}$$

$$\gamma^3\gamma^2\omega_{1,2} = -i \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \\ \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{cases} \omega_1 \\ -\omega_2 \end{cases} = \begin{cases} -i\omega_1 \\ i\omega_2 \end{cases}$$

$$iq\gamma^3\gamma^2\omega_{1,2} = \pm q\omega_{1,2} \quad (۴-۲۸-الف)$$

9

$$B_x = \frac{\partial A_y}{\partial z} = b_0 \cos(kz)e^{-\alpha t} \quad (۴-۲۸-ب)$$

با استفاده از روابط (۴-۲۸-الف) و (۴-۲۸-ب) و (۴-۲۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & -\eta_{(z,t)}p_x^2e^{ip_\perp \cdot x_\perp}\omega_{1,2} - \eta p_y^2e^{ip_\perp \cdot x_\perp}\omega_{1,2} + 2iq\frac{b_0}{k}\sin(kz)e^{-\alpha t}\eta_{(z,t)}ip_ye^{ip_\perp \cdot x_\perp}\omega_{1,2} \\ & -q^2\frac{b_0^2}{k^2}\sin^2(kz)e^{-2\alpha t}\chi + \frac{\partial^2\eta_{(z,t)}}{\partial z^2}e^{ip_\perp \cdot x_\perp}\omega_{1,2} - \frac{\partial^2\eta_{(z,t)}}{\partial t^2}e^{ip_\perp \cdot x_\perp}\omega_{1,2} - m_0^2\chi \\ & \pm qb_0\cos(kz)e^{-\alpha t}\eta_{(z,t)}e^{ip_\perp \cdot x_\perp}\omega_{1,2} = 0 \end{aligned}$$

با تقسیم بر χ داریم

$$\begin{aligned} & -(p_x^2 + p_y^2) - 2q\frac{b_0}{k}\sin(kz)p_ye^{-\alpha t} - \frac{q^2b_0^2}{k^2}\sin^2(kz)e^{-2\alpha t} + \frac{1}{\eta_{(z,t)}}\left[\frac{\partial^2\eta_{(z,t)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\eta_{(z,t)}}{\partial t^2}\right] - m_0^2 \\ & \pm qb_0\cos(kz)e^{-\alpha t}\eta_{(z,t)} = 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2\eta_{(z,t)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\eta_{(z,t)}}{\partial t^2} - [p_\perp^2 + m_0^2 + 2p_y\frac{qb_0}{k}\sin(kz)e^{-\alpha t} + (\frac{qb_0}{k})^2\sin^2(kz)e^{-2\alpha t}]\eta_{(z,t)} \\ & \pm qb_0\cos(kz)e^{-\alpha t}\eta_{(z,t)} = 0 \end{aligned} \quad (۴-۲۹)$$

حل تحلیلی معادله بالا وقتی همه جملات به حساب آیند، مشکل است، بنابراین به ساده سازی نیاز داریم.

برای ذرات فرا نسبیتی با تکانه‌ای در راستای میدان الکتریکی، $p_y \gg \frac{qb_0}{k}$ و بنابراین

$$(p_y - qA_y)^2 \approx p_y^2 \quad (۳۰-۴)$$

می‌شود، که معادله (۲۹-۴) به شکل زیر ساده می‌شود (جملات مربوط به باز کردن اتحاد درجه دوم حذف می‌شوند)

$$\frac{\partial^2 \eta_{(z,t)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \eta_{(z,t)}}{\partial t^2} - [p_{\perp}^2 + m_0^2] \eta_{(z,t)} \pm qb_0 \cos(kz) e^{-\alpha t} \eta_{(z,t)} = 0 \quad (۳۱-۴)$$

اکنون از روش بسط لاپلاس-فوریه استفاده می‌کنیم

$$\eta_{(z,t)} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(z) e^{-(n\alpha + i\omega)t} \quad (۳۲-۴)$$

همچنین از تغییر متغیر $p^2 \equiv \omega^2 - p_{\perp}^2 - m_0^2$ استفاده می‌نمائیم. بنابراین

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_n(z)}{\partial z^2} e^{-(n\alpha + i\omega)t} + (n\alpha + i\omega)^2 \psi_n(z) e^{-(n\alpha + i\omega)t} - [p_{\perp}^2 + m_0^2] \eta_{(z,t)} \pm qb_0 \cos(kz) e^{-\alpha t} \eta_{(z,t)} = 0 \\ \frac{1}{\psi_n(z)} \frac{d^2 \psi_n(z)}{dz^2} - \eta^2 \alpha^2 + \omega^2 - 2n\alpha i\omega - [p_{\perp}^2 + m_0^2] \pm qb_0 \cos(kz) e^{-\alpha t} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \psi_n(z)}{dz^2} + [p^2 - 2ni\alpha\omega - n^2\alpha^2] \psi_n(z) \pm qb_0 \cos(kz) \psi_{(n-1)}(z) = 0 \quad (۳۳-۴)$$

به ازای $n=1$ ، معادله (۳۳-۴)، یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم ناهمگن با ضرایب ثابت می‌شود

$$\frac{d^2 \psi(z)}{dz^2} + [p^2 - 2ni\alpha\omega - n^2\alpha^2] \psi(z) \pm qb_0 \cos(kz) \psi_0(z) = 0 \quad (۳۴-۴)$$

که برای $n=0$

$$\psi_0 = Ne^{ipz} \quad (۳۵-۴)$$

است که از معادله دیفرانسیل اولیه

$$\frac{d^2\psi_0}{dz^2} + p^2\psi_0 = 0 \quad (۳۶-۴)$$

به دست می آید.

در معادله (۳۴-۴) از تجزیه استاندارد زیر استفاده می کنیم

$$\psi = Ae^{i(k+p)z} + Be^{-i(k-p)z} \quad (۳۷-۴)$$

با جایگذاری رابطه (۳۷-۴) در رابطه (۳۴-۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & -A(k+p)^2 e^{i(k+p)z} - B(k-p)^2 e^{-i(k-p)z} + [p^2 - 2i\alpha\omega - \alpha^2][Ae^{i(k+p)z} + Be^{-i(k-p)z}] \\ & \pm \frac{qb_0}{2} N(e^{i(k+p)z} + e^{-i(k-p)z}) = 0 \end{aligned}$$

بنابراین

$$-A(k+p)^2 + [p^2 - 2i\alpha\omega - \alpha^2] A \pm \frac{qb_0}{2} N = 0 \quad (۳۸-۴ \text{ الف})$$

$$-B(k-p)^2 + [p^2 - 2i\alpha\omega - \alpha^2] B \pm \frac{qb_0}{2} N = 0 \quad (۳۸-۴ \text{ ب})$$

با استفاده از رابطه (۳۸-۴ الف)

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pm \frac{qb_0}{2} N}{(k+p)^2 - [p^2 - 2i\alpha\omega - \alpha^2]} = \frac{\pm \frac{qb_0}{2} N}{k^2 + p^2 + 2kp - p^2 + 2i\alpha\omega + \alpha^2} \\ &= \frac{\pm \frac{qb_0}{2} N}{(k^2 + 2kp + \alpha^2) + 2i\alpha\omega} \times \frac{(k^2 + 2kp + \alpha^2) - 2i\alpha\omega}{(k^2 + 2kp + \alpha^2) - 2i\alpha\omega} \end{aligned}$$

$$A = \pm \frac{qb_0}{2} N \frac{(k^2 + 2kp + \alpha^2) - 2i\alpha\omega}{(k^2 + 2kp + \alpha^2) + 4(\alpha\omega)^2} \approx \pm N \frac{qb_0}{4} \frac{kp - i\alpha\omega}{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2} \quad (۳۹-۴ \text{ الف})$$

و با استفاده از رابطه (۳۸-۴ ب)

$$\begin{aligned}
B &= \frac{\pm \frac{qb_0}{2} N}{(k-p)^2 - [p^2 - 2i\alpha\omega - \alpha^2]} = \frac{\pm \frac{qb_0}{2} N}{k^2 + p^2 - 2kp - p^2 + 2i\alpha\omega + \alpha^2} \\
&= \frac{\pm \frac{qb_0}{2} N}{(k^2 - 2kp + \alpha^2) + 2i\alpha\omega} \times \frac{(k^2 - 2kp + \alpha^2) - 2i\alpha\omega}{(k^2 - 2kp + \alpha^2) - 2i\alpha\omega} \\
B &= \pm \frac{qb_0}{2} N \frac{(k^2 - 2kp + \alpha^2) - 2i\alpha\omega}{(k^2 - 2kp + \alpha^2) + 4(\alpha\omega)^2} \approx \pm N \frac{qb_0}{4} \frac{-kp - i\alpha\omega}{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2} \quad (4-39 \text{ ب})
\end{aligned}$$

به دست می‌آید که ساده سازی با در نظر گرفتن $k^2 + \alpha^2 \ll 2kp$ به دست آمده است. B, A به دست

آمده را در معادله (4-37) جایگذاری می‌کنیم

$$\begin{aligned}
\psi_{1,2} &= \pm N \frac{qb_0}{4} \frac{kp - i\alpha\omega}{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2} e^{i(k+p)z} \pm N \frac{qb_0}{4} \frac{-kp - i\alpha\omega}{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2} e^{-i(k-p)z} \\
&= \pm N \frac{qb_0}{4} \frac{e^{ipz}}{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2} [e^{ikz} (kp - i\alpha\omega) + e^{-ikz} (-kp - i\alpha\omega)]
\end{aligned}$$

با نوشتن قسمت نمایی $e^{\pm ikz}$ بر حسب توابع مثلثاتی، داریم

$$\psi_{1,2} = \pm \frac{N}{2} \frac{qb_0}{\sqrt{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2}} \sin(kz - \theta) e^{ipz} \quad (4-40)$$

می‌شود که

$$\tan(\theta) = \frac{\alpha\omega}{kp} \quad (4-41)$$

فاکتور فاز تابع موج فرمیون‌های فرا نسبیتی دارای انرژی ω در میدان مغناطیسی $B_x = b_0 e^{-\alpha t} \cos(kz)$ می‌باشد.

تمام مسیر را برمی‌گردیم تا توابع موج را بیابیم، به ازای $n=1$ داریم

$$\eta_{(z,t)} = \psi_{1,2} e^{-(n\alpha + i\omega)t}$$

$$\eta_{(z,t)} = \sum_0^\infty \left(\pm \frac{N}{2} \frac{qb_0}{\sqrt{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2}} \sin(kz - \theta) e^{-(\alpha + i\omega)t} e^{ipz} \right)$$

$$\chi = \psi_{1,2} e^{-(n\alpha + i\omega)t} e^{(i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp)} \omega_{1,2}$$

$$= \sum_0^\infty \pm \frac{N}{2} \frac{qb_0}{\sqrt{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2}} \sin(kz - \theta) e^{-(\alpha + i\omega)t} e^{ipz} e^{(i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp)} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= (\gamma^j D_j - m_0) \chi = (\gamma^1 D_1 + \gamma^2 D_2 + \gamma^3 D_3 + \gamma^4 D_4 - m_0) \chi \\ &= (-i\beta\alpha^1 \partial_x - i\beta\alpha^2 (\partial_y - iqA_y) - i\beta\alpha^3 \partial_z - i\beta\partial_t - m_0) \chi \end{aligned}$$

که iqA_y طبق شرط رابطه (۴-۳۰) حذف می‌شود. خواهیم داشت

$$\Psi = (-i\beta\alpha^1 \partial_x - i\beta\alpha^2 \partial_y - i\beta\alpha^3 \partial_z - i\beta\partial_t - m_0) \chi$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \Psi &= \left(-i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_x - i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_y - \right. \\ &\quad \left. i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \partial_z - i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \partial_t - m_0 \right) \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \psi_{1,2} e^{i(p_\perp \cdot x_\perp - \omega t)} e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{1}{2} i \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \\ \mp 1 \\ -1 \end{bmatrix} ip_x \psi_{1,2} e^{i(p_\perp \cdot x_\perp - \omega t)} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2} i \begin{bmatrix} \mp i \\ i \\ \pm i \\ -i \end{bmatrix} ip_y \psi_{1,2} e^{i(p_\perp \cdot x_\perp - \omega t)} e^{-\alpha t} \\ &\quad - \frac{1}{2} i \begin{bmatrix} 1 \\ \mp 1 \\ -1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial z} e^{i(p_\perp \cdot x_\perp - \omega t)} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2} i \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ -1 \\ \mp 1 \end{bmatrix} \psi_{1,2} \\ &\quad \times (-i\omega e^{i(p_\perp \cdot x_\perp - \omega t)} e^{-\alpha t} - \alpha e^{i(p_\perp \cdot x_\perp - \omega t)} e^{-\alpha t}) - m_0 \psi_{1,2} e^{i(p_\perp \cdot x_\perp - \omega t)} e^{-\alpha t} \omega_{1,2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi = & \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pm p_x \\ p_x \\ \mp p_x \\ -p_x \end{bmatrix} \psi_{1,2} e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} i \begin{bmatrix} \mp p_y \\ p_y \\ \pm p_y \\ -p_y \end{bmatrix} \psi_{1,2} e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} \\
& - \frac{1}{2} i \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial z} \\ \mp \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial z} \\ -\frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial z} \\ \pm \frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial z} \end{bmatrix} e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2} \omega \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ -1 \\ \mp 1 \end{bmatrix} \psi_{1,2} e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} \\
& + \frac{1}{2} i \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \\ -1 \\ \mp 1 \end{bmatrix} \psi_{1,2} e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} m_0 \\ \pm m_0 \\ m_0 \\ \pm m_0 \end{bmatrix} \psi_{1,2} e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t}
\end{aligned} \tag{۴۲-۴}$$

می‌شود. با استفاده از رابطه (۴۰-۴) داریم

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_{1,2}}{\partial z} = & \pm \frac{N}{2} \frac{qb_0}{\sqrt{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2}} (k \cos(kz - \theta) e^{ipz} + ip \sin(kz - \theta) e^{ipz}) \\
= & \pm \frac{N}{2} \frac{qb_0}{\sqrt{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2}} \sin(kz - \theta) e^{ipz} \pm \frac{N}{2} \frac{qb_0}{\sqrt{(kp)^2 + (\alpha\omega)^2}} \frac{k}{\tan(kz - \theta)} \sin(kz - \theta) e^{ipz} \\
= & ip \psi_{1,2} + \frac{k}{\tan(kz - \theta)} \psi_{1,2}
\end{aligned}$$

با جایگذاری این رابطه در رابطه (۴۲-۴) داریم

$$\Psi = \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \pm p_x \\ p_x \\ \mp p_x \\ -p_x \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mp i p_y \\ i p_y \\ \pm i p_y \\ -i p_y \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p \\ \mp p \\ -p \\ \pm p \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i \frac{k}{\tan(kz - \theta)} \\ \pm i \frac{k}{\tan(kz - \theta)} \\ i \frac{k}{\tan(kz - \theta)} \\ \mp i \frac{k}{\tan(kz - \theta)} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\omega \\ \mp \omega \\ \omega \\ \pm \omega \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} i\alpha \\ \pm i\alpha \\ -i\alpha \\ \mp i\alpha \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -m_0 \\ \mp m_0 \\ -m_0 \\ \mp m_0 \end{bmatrix} \right) \psi_{1,2} e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t}$$

جمله سطر اول و ستون اول Ψ_1 را می‌نویسیم

$$\Psi_1 = p_x - i p_y + p - \omega + i\alpha - m_0 - ik \cot(kz - \theta)$$

$$\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a) \tan(b)} \quad \text{با استفاده از رابطه (۴-۴۱) و اینکه داریم}$$

$$h(z) = k \cot(kz - \theta) = k \frac{kp \cos(kz) + \alpha \omega \sin(kz)}{kp \sin(kz) - \alpha \omega \cos(kz)}$$

بنابراین

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_x - i p_y + p - \omega + i\alpha - m_0 - ih(z) \\ p_x + i p_y - p - \omega + i\alpha - m_0 + ih(z) \\ -p_x + i p_y - p + \omega - i\alpha - m_0 + ih(z) \\ -p_x - i p_y + p + \omega - i\alpha - m_0 - ih(z) \end{bmatrix} \psi_1 e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} \quad (۴۳-۴)$$

و به همین ترتیب

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -p_x + i p_y + p - \omega + i\alpha - m_0 - ih(z) \\ p_x + i p_y + p + \omega - i\alpha + m_0 - ih(z) \\ p_x - i p_y - p + \omega - i\alpha - m_0 + ih(z) \\ -p_x - i p_y - p - \omega + i\alpha + m_0 + ih(z) \end{bmatrix} \psi_2 e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} \quad (۴۴-۴)$$

می‌شود. حال طبق اصل برهم نهی دو موج

$$\Psi = \frac{1}{2}(\Psi_1 + \Psi_2)$$

می شود و با توجه به رابطه (۴۰-۴)

$$\Psi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_x - ip_y \\ -p - \omega + i\alpha - m_0 + ih(z) \\ -p_x + ip_y \\ p + \omega - i\alpha - m_0 - ih(z) \end{bmatrix} \psi_1 e^{i(p_{\perp} \cdot x_{\perp} - \omega t)} e^{-\alpha t} \quad (۴۵-۴)$$

به دست می آید. مؤلفه های چگالی جریان و شار جریان با استفاده از روابط زیر تعریف می شود

$$\vec{j} = q\Psi^\dagger \vec{\alpha} \Psi, \quad j^4 = Q = q\Psi^\dagger \Psi \quad (۴۶-۴)$$

با جایگذاری روابط و ساده سازی خواهیم داشت

$$\begin{cases} j_x = q[(\omega + p)p_x + (\alpha + h)p_y] |\psi_1|^2 e^{-2\alpha t} \\ j_y = q[(\omega + p)p_y - (\alpha + h)p_x] |\psi_1|^2 e^{-2\alpha t} \\ j_z = \frac{q}{2}[\omega^2 + 2\omega p - m_0^2 + (\alpha + h)^2] |\psi_1|^2 e^{-2\alpha t} \\ Q = \frac{q}{2}[2p^2 + 2\omega p + \omega^2 + m_0^2 + (\alpha + h)^2] |\psi_1|^2 e^{-2\alpha t} \end{cases} \quad (۴۷-۴)$$

۴-۲-۱. حل تابع هیون برای فرمیون های نسبیتی در میدان الکتریکی و

مغناطیسی وابسته به زمان عمود بر هم

در موارد معکوس، متناظر با $p_y \ll q \frac{b_0}{k}$ که تغییرات زمانی کم است، بنابراین $e^{-\alpha t} \approx 1$ است که این

موقعیت نزدیک به واقعیت برای یک مگنتار است که به وسیله یک میدان میدان مغناطیسی قوی

$b_0 \sim 10^{15} G$ مشخص شده است، مؤلفه چهار پتانسیل رابطه (۴۳-۴) می تواند به شکل

$$A_y = -\frac{b_0}{k} \sin(kz) \quad (۴۸-۴)$$

نوشته شود. تابع $\eta(z, t)$ در معادله عمومی (۴-۲۹) به شکل $\eta(z, t) = \varphi(z)e^{-i\omega t}$ نوشته می‌شود که

مؤلفه‌های $\varphi_{1,2}(z)$ متناظر با $\lambda = \pm 1$ هستند که حل معادله‌ی

$$\frac{d^2 \varphi_{1,2}}{d\zeta^2} + \left[\frac{p^2}{k^2} - \frac{b^2}{k^4} \sin^2 \zeta \pm \frac{b}{k^2} \cos \zeta \right] \varphi_{1,2} = 0 \quad (۴-۴۹)$$

می‌باشد که $b = qb_0$, $\zeta = kz$.

برحسب متغیر جدید $s = \cos \zeta$ و با استفاده از رابطه

$$\varphi_{1,2}(s) = \exp\left[\pm \frac{b}{k^2} s\right] u_{1,2}(s) \quad (۴-۵۰)$$

تابع موج را در معادله (۴-۴۹) جایگذاری می‌کنیم. برای این کار ابتدا محاسبات زیر را انجام می‌دهیم

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} &= -\sqrt{1-s^2} \frac{d}{ds} \\ \frac{d^2}{d\zeta^2} &= -\sqrt{1-s^2} \left[s(1-s^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{ds} - \sqrt{1-s^2} \frac{d^2}{ds^2} \right] \\ \frac{d^2 \varphi_{1,2}(s)}{d\zeta^2} &= -s \frac{d\varphi_{1,2}(s)}{ds} + (1-s^2) \frac{d^2 \varphi_{1,2}(s)}{ds^2} \end{aligned} \quad (۴-۵۱)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi_{1,2}(s)}{ds} &= \pm \frac{b}{k^2} \exp\left[\pm \frac{b}{k^2} s\right] u_{1,2}(s) + \frac{du_{1,2}(s)}{ds} \exp\left[\pm \frac{b}{k^2} s\right] \\ &= \left[\pm \frac{b}{k^2} u_{1,2}(s) + \frac{du_{1,2}(s)}{ds} \right] \exp\left[\pm \frac{b}{k^2} s\right] \end{aligned} \quad (۴-۵۲)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi_{1,2}(s)}{ds^2} &= \left[\pm \frac{b}{k^2} \frac{du_{1,2}(s)}{ds} + \frac{d^2 u_{1,2}(s)}{ds^2} \right] \exp\left[\pm \frac{b}{k^2} s\right] \pm \frac{b}{k^2} \left[\pm \frac{b}{k^2} u_{1,2}(s) + \frac{du_{1,2}(s)}{ds} \right] \exp\left[\pm \frac{b}{k^2} s\right] \\ &= \left[\frac{d^2 u_{1,2}(s)}{ds^2} \pm \frac{2b}{k^2} \frac{du_{1,2}(s)}{ds} + \left(\frac{b}{k^2}\right)^2 u_{1,2}(s) \right] \exp\left[\pm \frac{b}{k^2} s\right] \end{aligned} \quad (۴-۵۳)$$

با جایگذاری (۴-۵۲) و (۴-۵۳) در رابطه (۴-۵۱) خواهیم داشت

$$\frac{d^2 \varphi_{1,2}(s)}{d\zeta^2} = \left\{ -s \left[\pm \frac{b}{k^2} u_{1,2}(s) + \frac{du_{1,2}(s)}{ds} \right] + (1-s^2) \left[\frac{d^2 u_{1,2}(s)}{ds^2} \pm \frac{2b}{k^2} \frac{du_{1,2}(s)}{ds} + \left(\frac{b}{k^2} \right)^2 u_{1,2}(s) \right] \right\} \exp \left[\pm \frac{b}{k^2} s \right] \quad (54-4)$$

با جایگذاری این رابطه در (49-4) داریم

$$(1-s^2) \frac{d^2 u_{1,2}(s)}{ds^2} + \left[\pm \frac{2b}{k^2} (1-s^2) - s \right] \frac{du_{1,2}(s)}{ds} + \frac{p^2}{k^2} u_{1,2}(s) = 0 \quad (55-4)$$

به دست می‌آید. رابطه را بر $(1-s^2)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{d^2 u_{1,2}(s)}{ds^2} + \left[\pm \frac{2b}{k^2} - \frac{s}{(1-s^2)} \right] \frac{du_{1,2}(s)}{ds} + \frac{1}{(1-s^2)} \frac{p^2}{k^2} u_{1,2}(s) = 0 \quad (56-4)$$

این معادله را، که معادله هیون [52] است، به روش آنزاس حل می‌کنیم، ابتدا فرض می‌کنیم

$$u(s) = F(s)D(s) \quad (57-4)$$

تابع $u(s)$ را در رابطه (56-4) جایگذاری می‌کنیم، خواهیم داشت

$$F'' + \left\{ 2 \frac{D'}{D(s)} + \left[\pm \frac{2b}{k^2} - \frac{s}{(1-s^2)} \right] \right\} F' + \left\{ \frac{D''}{D(s)} + \left[\pm \frac{2b}{k^2} - \frac{s}{(1-s^2)} \right] \frac{D'}{D(s)} + \frac{1}{(1-s^2)} \frac{p^2}{k^2} \right\} F(s) = 0 \quad (58-4)$$

می‌خواهیم مشتق اول یعنی F' حذف شود، بنابراین

$$D(s) = \exp \left(\mp \frac{b}{k^2} s \right) (1-s^2)^{-\frac{1}{4}} \quad (59-4)$$

حال تابع D به دست آمده را در رابطه (58-4) جایگذاری می‌کنیم

$$F'' + \underbrace{\left\{ \pm \frac{b}{k^2} s + \frac{p^2}{k^2} + \frac{1}{2} \right\}}_I + \underbrace{\left\{ \frac{-b^2}{k^4} s^4 + \left(\frac{2b^2}{k^4} + \frac{3}{4} \right) s^2 - \frac{b^2}{k^4} \right\}}_{II} F(s) = 0 \quad (60-4)$$

عبارات داخل کروشه را به صورت جداگانه به مجموع چند کسر تبدیل می‌کنیم، داریم

$$I = \frac{\pm \frac{b}{k^2}s + \frac{p^2}{k^2} + \frac{1}{2}}{(1-s^2)} = \frac{A}{(1-s)} + \frac{B}{(1+s)}$$

$$A = \frac{p^2 \pm b}{2k^2} + \frac{1}{4}, \quad B = \frac{p^2 \mp b}{2k^2} + \frac{1}{4}$$

$$I = \frac{\frac{p^2 \pm b}{2k^2} + \frac{1}{4}}{(1-s)} + \frac{\frac{p^2 \mp b}{2k^2} + \frac{1}{4}}{(1+s)} \quad (۶۱-۴)$$

عبارت دوم را به مجموع ۴ کسر تبدیل می کنیم

$$II = \frac{-\frac{b^2}{k^4}s^4 + (\frac{2b^2}{k^4} + \frac{3}{4})s^2 - \frac{b^2}{k^4}}{(1-s^2)^2} = -\frac{b^2}{k^4} + \frac{C}{(1-s)} + \frac{D}{(1+s)} + \frac{E}{(1-s)^2} + \frac{F}{(1+s)^2}$$

$$C = -\frac{3}{16}, \quad D = -\frac{3}{16}, \quad E = \frac{3}{16}, \quad F = \frac{3}{16}$$

$$II = -\frac{b^2}{k^4} + \frac{-\frac{3}{16}}{(1-s)} + \frac{-\frac{3}{16}}{(1+s)} + \frac{\frac{3}{16}}{(1-s)^2} + \frac{\frac{3}{16}}{(1+s)^2} \quad (۶۲-۴)$$

روابط (۶۱-۴) و (۶۲-۴) را در رابطه (۶۰-۴) جایگذاری می نمائیم

$$F'' + \left[\frac{\frac{p^2 \pm b}{2k^2} + \frac{1}{16}}{(1-s)} + \frac{\frac{p^2 \mp b}{2k^2} + \frac{1}{16}}{(1+s)} + \frac{\frac{3}{16}}{(1-s)^2} + \frac{\frac{3}{16}}{(1+s)^2} - \frac{b^2}{k^4} \right] F(s) = 0 \quad (۶۳-۴)$$

تابع F را به صورت زیر پیشنهاد داده و در رابطه (۶۳-۴) جایگذاری می کنیم

$$F(s) = l e^{g(s)} \xrightarrow{l=1} F(s) = e^{g(s)} \quad (۶۴-۴)$$

$$[g'' + g'^2] e^{g(s)} + \left[\frac{\frac{p^2 \pm b}{2k^2} + \frac{1}{16}}{(1-s)} + \frac{\frac{p^2 \mp b}{2k^2} + \frac{1}{16}}{(1+s)} + \frac{\frac{3}{16}}{(1-s)^2} + \frac{\frac{3}{16}}{(1+s)^2} - \frac{b^2}{k^4} \right] e^{g(s)} = 0 \quad (۶۵-۴)$$

تابع $g(s)$ را به شکل

$$g(s) = \alpha s + \beta \ln(1-s) + \gamma \ln(1+s) \quad (۶۶-۴)$$

پیشنهاد می‌دهیم. برای میرا شدن اسپینور u مقادیر β و γ باید بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{4}$ شود. با جایگذاری

رابطه (۴-۶۶) در رابطه (۴-۶۵) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & [\alpha^2 + \frac{(2\beta\alpha + 2\gamma\alpha)s^3 + (-2\beta\alpha - 2\gamma\alpha + 2\beta\gamma + \beta^2 - \beta + \gamma^2 - \gamma)s^2}{(1-s)^2(1+s)^2} + \\ & \frac{(-2\beta\alpha - 2\gamma\alpha + 2\beta^2 - 2\beta - 2\gamma^2 + 2\gamma)s - 2\beta\alpha + 2\gamma\alpha - 2\beta\gamma + \beta^2 - \beta + \gamma^2 - \gamma}{(1-s)^2(1+s)^2}]e^{g(s)} + \\ & [\frac{p^2 \pm b}{2k^2} + \frac{1}{16} + \frac{p^2 \mp b}{2k^2} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{b^2}{k^4}]e^{g(s)} = 0 \end{aligned} \quad (۴-۶۷)$$

کروشه‌ی اول رابطه (۴-۶۷) را تجزیه کسر می‌کنیم

$$\begin{aligned} & \alpha^2 + \frac{(2\beta\alpha + 2\gamma\alpha)s^3 + (-2\beta\alpha - 2\gamma\alpha + 2\beta\gamma + \beta^2 - \beta + \gamma^2 - \gamma)s^2}{(1-s)^2(1+s)^2} + \\ & \frac{(-2\beta\alpha - 2\gamma\alpha + 2\beta^2 - 2\beta - 2\gamma^2 + 2\gamma)s - 2\beta\alpha + 2\gamma\alpha - 2\beta\gamma + \beta^2 - \beta + \gamma^2 - \gamma}{(1-s)^2(1+s)^2} = \\ & \alpha^2 + \frac{I}{(1-s)} + \frac{J}{(1+s)} + \frac{K}{(1-s)^2} + \frac{L}{(1+s)^2} \end{aligned}$$

با مقداری محاسبه خواهیم دید که

$$\begin{aligned} I &= -\beta\gamma - 2\beta\alpha \\ J &= 2\gamma\alpha - \beta\gamma \\ K &= \beta^2 - \beta \\ L &= \gamma^2 - \gamma \end{aligned}$$

با جایگذاری در رابطه (۴-۶۷)

$$\begin{aligned} & [\alpha^2 + \frac{(-\beta\gamma - 2\beta\alpha)}{(1-s)} + \frac{2\gamma\alpha - \beta\gamma}{(1+s)} + \frac{\beta^2 - \beta}{(1-s)^2} + \frac{\gamma^2 - \gamma}{(1+s)^2}]e^{g(s)} + \\ & [\frac{p^2 \pm b}{2k^2} + \frac{1}{16} + \frac{p^2 \mp b}{2k^2} + \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} - \frac{b^2}{k^4}]e^{g(s)} = 0 \end{aligned} \quad (۴-۶۸)$$

برای اینکه رابطه (۴-۶۸) برقرار باشد عبارات داخل کروشه باید قرینه هم باشند، بنابراین

$$\alpha^2 = \frac{b^2}{k^4} \quad (4-69-الف)$$

$$-\beta\gamma - 2\beta\alpha = -\left(\frac{p^2 \pm b}{2k^2} + \frac{1}{16}\right) \quad (4-69-ب)$$

$$2\gamma\alpha - \beta\gamma = -\left(\frac{p^2 \mp b}{2k^2} + \frac{1}{16}\right) \quad (4-69-پ)$$

$$\beta^2 - \beta = -\frac{3}{16} \quad (4-69-ت)$$

$$\gamma^2 - \gamma = -\frac{3}{16} \quad (4-69-ث)$$

از رابطه (4-69-الف)

$$\alpha = \pm \frac{b}{k^2}$$

به دست می‌آید. از رابطه (4-69-ت)، داریم

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{3}{4} \\ \beta_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

و از رابطه (4-69-ث)

$$\begin{cases} \gamma_1 = \frac{3}{4} \\ \gamma_2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

به دست می‌آید. از کم کردن دو رابطه (4-69-ب) و (4-69-پ) به این نتیجه خواهیم رسید که به ازای

یک مقدار برای α ، β و γ نمی‌توانند برابر هم باشند. بنابراین با استفاده از رابطه (4-66) خواهیم

داشت

$$\text{if } \alpha = \frac{b}{k^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} g_1(s) = \frac{b}{k^2} s + \frac{1}{4} \ln(1-s) + \frac{3}{4} \ln(1+s) \\ g_2(s) = \frac{b}{k^2} s + \frac{3}{4} \ln(1-s) + \frac{1}{4} \ln(1+s) \end{cases}$$

9

$$\text{if } \alpha = -\frac{b}{k^2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} g_1(s) = -\frac{b}{k^2} s + \frac{1}{4} \ln(1-s) + \frac{3}{4} \ln(1+s) \\ g_2(s) = -\frac{b}{k^2} s + \frac{3}{4} \ln(1-s) + \frac{1}{4} \ln(1+s) \end{cases} \quad (70-4)$$

از رابطه (4-64)

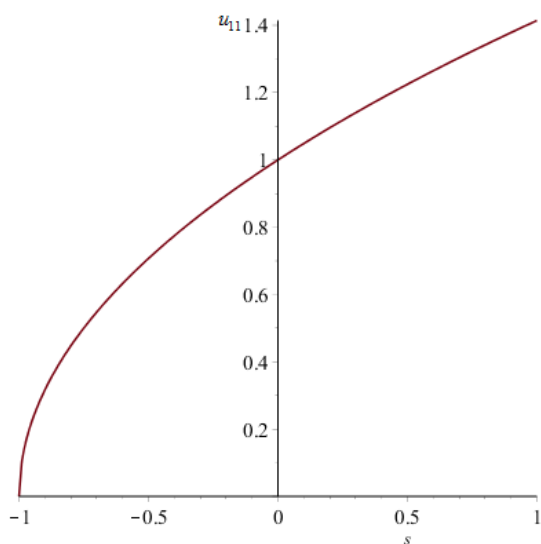
$$\begin{cases} F_1(s) = e^{\frac{b}{k^2}s} (1-s)^{\frac{1}{4}} (1+s)^{\frac{3}{4}} \\ F_2(s) = e^{\frac{b}{k^2}s} (1-s)^{\frac{3}{4}} (1+s)^{\frac{1}{4}} \\ F_3(s) = e^{-\frac{b}{k^2}s} (1-s)^{\frac{1}{4}} (1+s)^{\frac{3}{4}} \\ F_4(s) = e^{-\frac{b}{k^2}s} (1-s)^{\frac{3}{4}} (1+s)^{\frac{1}{4}} \end{cases} \quad (71-4)$$

به دست می‌آید. با استفاده از روابط (4-57) و (4-59) داریم

$$D(s) = \begin{cases} D_1(s) = e^{\frac{b}{k^2}s} (1-s^2)^{-\frac{1}{4}} \\ D_2(s) = e^{-\frac{b}{k^2}s} (1-s^2)^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

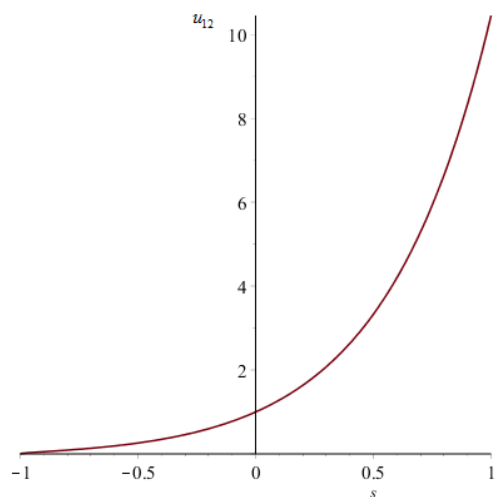
$$\begin{aligned}
 u_1(s) &= \begin{cases} u_{11}(s) = F_1(s)D_1(s) = e^{\frac{2b}{k^2}s} (1+s)^{\frac{1}{2}} \\ u_{12}(s) = F_1(s)D_2(s) = (1+s)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\
 u_2(s) &= \begin{cases} u_{21}(s) = F_2(s)D_1(s) = e^{\frac{2b}{k^2}s} (1-s)^{\frac{1}{2}} \\ u_{22}(s) = F_2(s)D_2(s) = (1-s)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\
 u_3(s) &= \begin{cases} u_{31}(s) = F_3(s)D_1(s) = (1+s)^{\frac{1}{2}} \\ u_{32}(s) = F_3(s)D_2(s) = e^{-\frac{2b}{k^2}s} (1+s)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \\
 u_4(s) &= \begin{cases} u_{41}(s) = F_4(s)D_1(s) = (1-s)^{\frac{1}{2}} \\ u_{42}(s) = F_4(s)D_2(s) = e^{-\frac{2b}{k^2}s} (1-s)^{\frac{1}{2}} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{۷۲-۴}$$

با توجه به مقادیر به دست آمده برای β و γ ، تمام اسپینورهای به دست آمده قابل قبول هستند.



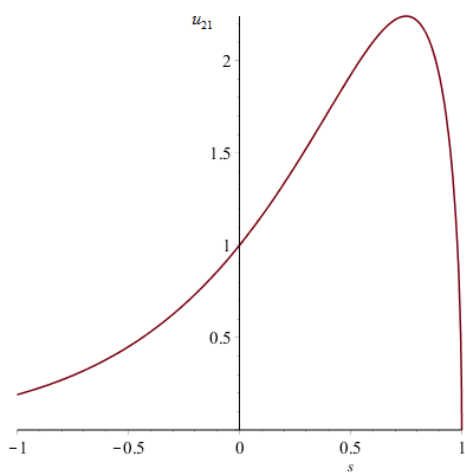
شکل ۴-۲. اسپینور u_{11} بر حسب s به ازای

$$k=1 \text{ و } b=1$$



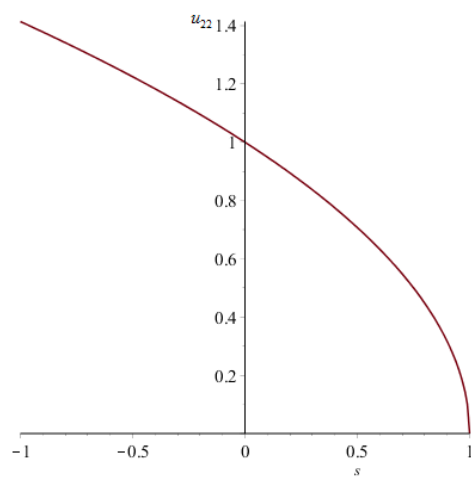
شکل ۴-۱. اسپینور u_{12} بر حسب s به ازای

$$k=1 \text{ و } b=1$$



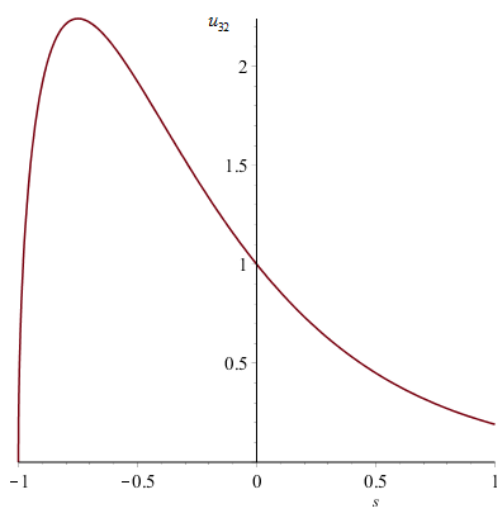
شکل ۴-۴. اسپینور u_{21} بر حسب S به ازای

$$k=1 \text{ و } b=1$$



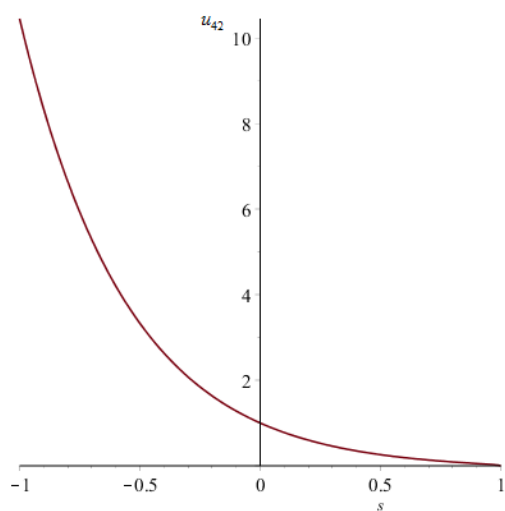
شکل ۴-۳. اسپینور u_{22} بر حسب S به ازای

$$k=1 \text{ و } b=1$$



شکل ۴-۶. اسپینور u_{32} بر حسب u_{22} به ازای

$$k=1 \text{ و } b=1$$



شکل ۴-۵. اسپینور u_{42} بر حسب u_{22} به ازای

$$k=1 \text{ و } b=1$$

با توجه به اینکه $s = \cos(\xi)$ است، نمودارها در بازه $(-1, 1)$ می‌باشند.

نتیجه گیری

در ابتدا برای بررسی ذرات غیر نسبیتی، معادله شرودینگر با پتانسیل وابسته به زمان به شکل $V(z, \hat{p}, t) = g_1(t)z + g_2(t)\hat{p} + g_3(t)$ را به روش انتقال فضا - زمان حل کرده و آن را به معادله شرودینگر یک بعدی یک ذره‌ی آزاد با جرم $m=1$ و $\hbar=1$ تبدیل کردیم که حل آن در کتب مکانیک کوانتوم موجود است. دیدیم که سیستم‌های کوانتومی وابسته به زمانی که اینجا در نظر گرفتیم، هنگامی که میدان خارجی میرا و جرم ذرات مستقل از زمان باشد، به شکل ذره آزاد تبدیل می‌شوند. همچنین هنگامی که $g_1(t) = g_3(t) = 0$ باشد، تابع موج می‌تواند حرکت ذره باردار در یک میدان مغناطیسی را شرح دهد.

برای بررسی رفتار نسبیتی حرکت یک ذره باردار در یک میدان الکترواستاتیک یکنواخت، با در نظر گرفتن تابع موج به شکل حاصلضرب یک تابع زمانی در یک قسمت نمایی، که ویژه تابع اپراتور انرژی جنبشی و تکانه می‌باشد، تبدیل به معادله شرودینگر غیر نسبیتی شد و ویژه مقادیر انرژی به راحتی محاسبه شدند. همچنین فرمیون‌های نسبیتی در میدان الکترومغناطیسی وابسته به زمان را با استفاده از معادله دیراک بررسی کردیم. مشاهده کردیم هنگامی که هامیلتونی مستقل از زمان است جواب نهایی به فرم $\sum \phi(q) e^{-i \frac{E_q}{\hbar} t}$ تبدیل می‌شود که کاملاً با انتظار ما سازگار است.

با در نظر گرفتن پتانسیل متحرک، به بررسی معادله کلاین - گوردون پرداختیم. این معادله با پتانسیل متحرک را به یک معادله مشابه آن اما با پتانسیل غیر متحرک تبدیل کردیم. با یافتن تابع موج، چگالی بار و چگالی جریان را به دست آوردیم و سپس با محاسبه ضرایب بازتاب و عبور دیدیم که مجموع این ضرایب یک شد.

در بررسی فرمیون‌های نسبیتی در میدان الکترومغناطیسی ثابت، که ناشی از مؤلفه‌های ۴ پتانسیل وابسته به مکان و زمان هستند، به روش جداسازی استاندارد عمل نموده و معادله را به دو

بخش مکانی و زمانی تقسیم کردیم. مشاهده کردیم که جواب‌ها برای هر دو قسمت برحسب توابع لاگر شده و ثابت جداسازی نیز به دست آمد.

فرمیون‌های فرانسبیتی را در یک میدان الکتریکی هماهنگ زمانی موازی با القای مغناطیسی استاتیکی، هر دو در یک راستا بررسی کردیم. با در نظر گرفتن این میدان‌های تناوبی، معمولاً به معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم خطی می‌رسیم که جواب‌هایش توابع متیو هستند. از سری فوریه توابع متیو تناوبی π زوج استفاده کردیم، با نوشتن شش جمله‌ی اول سری جواب آن را به صورت تقریبی به دست آوردیم. با در نظر گرفتن همین فرمیون‌ها در میدان الکتریکی و مغناطیسی هماهنگ زمانی، به روش جداسازی استاندارد به حل آن پرداختیم و چگالی جریان مربوطه را محاسبه کردیم. در حالتی که تغییرات زمانی کم باشد، یعنی موقعیت خیلی نزدیک به واقعیت برای یک مگنتار باشد، به معادله هیون رسیدیم. برای حل آن از روش آنزاس استفاده کرده و نمودارهای آن را رسم کردیم.

منابع

[۱]. حسینی ف.، (۱۳۹۴)، پایان نامه ارشد: "ذرات در فضای ناجابجایی وابسته به زمان"، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[2]. Klimchitskaya, G. L. and V. M. Mostepanenko. (2013) "Creation of quasiparticles in graphene by a time-dependent electric field." *Physical Review D*, 87, 12, 125011.

[3]. McConnell, S. R. et al. (2012) "Solution of the two-center time-dependent Dirac equation in spherical coordinates: Application of the multipole expansion of the electron-nuclei interaction." *Physical Review A*, 86, 5, 052705.

[4]. Fermi, Enrico. (1949) "On the origin of the cosmic radiation.", *Physical Review*, 75,8, 1169.

[5]. Yeon, Kyu Hwang, Chung In Um, and Thomas F. George. (2003) "Time-dependent general quantum quadratic Hamiltonian system." *Physical Review A*, 68, 5, 052108.

[6]. Song, Dae-Yup. (1999) "Exact quantum states of a general time-dependent quadratic system from classical action." *Physical Review A*, 59, 4, 2616.

[7]. Birrell, N. D. and P. C. W. Davies. (1982) "Quantum fields in curved space." volume 7 of Cambridge Monographs on Mathematical Physics.

[8]. Agarwal, G. S. and S. Arun Kumar. (1991) "Exact quantum-statistical dynamics of an oscillator with time-dependent frequency and generation of nonclassical states." *Physical review letters*, 67, 26, 3665.

[9]. Yuen, Horace P. (1976) "Two-photon coherent states of the radiation field." *Physical Review A*, 13,6 ,2226.

[10]. Brown, Lowell S. (1991) "Quantum motion in a Paul trap." *Physical review letters*, 66, 5,527.

[11]. Paul, Wolfgang. (1990) "Electromagnetic traps for charged and neutral particles." *Reviews of modern physics*, 62, 3, 531.

[12]. Feng, Mang, et al. (1997) "Approximate study of the quantum statistics of two Paul-trapped ions." *Physics Letters A*, 230, 1, 51-59.

- [13]. Wang, X. F., P. Vasilopoulos, and F. M. Peeters. (2002) "Spin-current modulation and square-wave transmission through periodically stubbed electron waveguides." *Physical Review B*, 65, 16, 165217.
- [14]. Oh, H. G., et al. (1989) "Exact wave functions and coherent states of a damped driven harmonic oscillator." *Physical Review A*, 39, 11, 5515.
- [15]. Maamache, M., and H. Choutri (2000) "Exact evolution of the generalized damped harmonic oscillator." *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33, 35, 6203.
- [16]. Lewis Jr, H. Ralph, and W. B. Riesenfeld (1969) "An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field." *Journal of Mathematical Physics*, 10, 8, 1458-1473.
- [17]. Guedes, I. (2003) "Reply to ‘Comment on ‘Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential’”." *Physical Review A*, 68, 1, 016102.
- [18]. Guedes, I. (2001) "Solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential." *Physical Review A*, 63, 3, 034102.
- [19]. Bekkar, H., F. Benamira, and M. Maamache. (2003) "Comment on ‘solution of the schrödinger equation for the time-dependent linear potential’”." *Physical Review A*, 68, 1, 016101.
- [20]. Feng, Mang. (2001) "Complete solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential." *Physical Review A*, 64, 3, 034101.
- [21]. Landim, R. R., and I. Guedes. (2000) "Wave functions for a Dirac particle in a time-dependent potential." *Physical Review A*, 61, 5, 054101.
- [22]. Maamache, M., and H. Lakehal. (2004) "Solution of the generalized Dirac equation in a time-dependent linear potential: Relativistic geometric amplitude factor." *EPL (Europhysics Letters)*, 67, 5, 695.
- [23]. Long, Chao-Yun, et al. (2009) "Solution to the Schrödinger equation for the time-dependent potential." *International Journal of Theoretical Physics*, 48, 4, 981-985.
- [24]. Feng, Mang. (2001) "Complete solution of the Schrödinger equation for the time-dependent linear potential." *Physical Review A*, 64, 3, 034101.
- [25]. Mavromatis, Harry A. (2012) "Exercises in quantum mechanics: a collection of illustrative problems and their solutions." Vol. 6. Springer Science & Business Media.

- [26]. Ferkous, N., A. Bounames, and M. Maamache. (2013) "Time-dependent Schrödinger equation with non-central potentials." *Physica Scripta*, 88, 3, 035001.
- [27]. Tezcan, Cevdet, and Ramazan Sever. (2009) "A general approach for the exact solution of the Schrödinger equation." *International Journal of Theoretical Physics*, 48, 2, 337-350.
- [28]. Lima Júnior, Vanderley Aguiar de. (2014) "Entropia e informação de sistemas quânticos amortecidos."
- [29]. Feynman, Richard P., Albert R. Hibbs, and Daniel Styer. (2010) "*Quantum mechanics and path integrals*." Dover Publications.
- [30]. Chetouani, L., L. Guechi, and Théophile F. Hammann. (1989) "Generalized canonical transformations and path integrals." *Physical Review A*, 40, 3, 1157.
- [31]. Samsonov, Boris F. (2000) "Coherent states for transparent potentials." *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 33, 3, 591.
- [32]. Efthimiou, Costas John, and Donald Spector. (1994) "Separation of variables and exactly soluble time-dependent potentials in quantum mechanics." *Physical Review A*, 49, 4, 2301.
- [33]. Doescher, S. W., and M. H. Rice. (1969) "Infinite square-well potential with a moving wall." *American Journal of Physics*, 37, 12, 1246-1249.
- [34]. Makowski, A. J., and S. T. Dembiński. (1991) "Exactly solvable models with time-dependent boundary conditions." *Physics Letters A*, 154, 5, 217-220.
- [35]. Samura, Toshiharu, and Masato Ohmukai. (2004) "Analyses of reflection and transmission at moving potential step." *arXiv preprint quant-ph/0411113*.
- [36]. Fermi, Enrico. (1949) "On the origin of the cosmic radiation." *Physical Review*, 75, 8, 1169.
- [37]. Hamil, B., and L. Chetouni. (2015) "Moving potential for Dirac and Klein–Gordon equations." *Pramana*: 1-10.
- [38]. Zhang, Zhi-Guo. (2006) "Exact solutions of time-dependent Dirac equations and the quantum classical correspondence." *Physica Scripta*, 74, 2, 218.

- [39]. Lewis Jr, H. Ralph, and W. B. Riesenfeld. (1969) "An Exact Quantum Theory of the Time-Dependent Harmonic Oscillator and of a Charged Particle in a Time-Dependent Electromagnetic Field." *Journal of Mathematical Physics*, 10, 8, 1458-1473.
- [40]. Landim, R. R., and I. Guedes. (2000) "Wave functions for a Dirac particle in a time-dependent potential." *Physical Review A*, 61, 5, 054101.
- [41]. Myers, Vernon W. (1968) "Solutions Of The Time-Dependent Klein--Gordon and Dirac Equations For a Uniform Electric Field." *Journal Of Research Of The National Bureau Of Standards Section B-Mathematical Sciences*, 1, 37.
- [42]. Dariescu, Marina-Aura, and Ciprian Dariescu. (2013) "On the Mathieu Equation Describing Ultra-Relativistic Fermions Evolving in a Time-Harmonic Electric Field Parallel to a Static Magnetic Induction." *Modern Physics Letters A*, 28, 35, 1350157.
- [43]. Lappi, T., and L. McLerran. (2006) "Some features of the glasma." *Nuclear Physics A*, 772, 3, 200-212.
- [44]. Tanji, Noato. (2009) "Dynamical view of pair creation in uniform electric and magnetic fields." *Annals of Physics*, 324, 8, 1691-1736.
- [45]. Mathieu, Emile. (1868) "Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique." *Journal de mathématiques pures et appliquées* 137-203.
- [46]. Duncan, Robert C., and Christopher Thompson. (1992) "Formation of very strongly magnetized neutron stars-Implications for gamma-ray bursts." *The Astrophysical Journal*, 392, L9-L13.
- [47]. Dariescu, Ciprian, and Marina-Aura Dariescu. (2011) "A Toy Model for Scalars in Transient Magnetic Fields." *Modern Physics Letters A*, 26, 17, 1245-1255.
- [48]. Dariescu, Marina–Aura, and Ciprian Dariescu. (2012) "Approximative analytic study of fermions in magnetar's crust; ultra-relativistic plane waves, Heun and Mathieu solutions and beyond." *Astrophysics and Space Science*, 341, 2, 429-435.
- [49]. Dariescu, Marina-Aura, and Ciprian Dariescu. (2013) "Parametric resonant states of charged fermions in the magnetar's crust." *Astroparticle Physics*, 46, 34-39.
- [50]. Orsaria, M., Ignacio F. Ranea-Sandoval, and H. Vucetich. (2011) "Magnetars as highly magnetized quark stars: An analytical treatment." *The Astrophysical Journal*, 734, 1, 41.

[51]. Dariescu, Marina–Aura, and Ciprian Dariescu. (2012) "Approximative analytic study of fermions in magnetar's crust; ultra-relativistic plane waves, Heun and Mathieu solutions and beyond." *Astrophysics and Space Science*, 341, 2, 429-435.

Abstract

The study of quantum systems with an explicit time-dependence has received great attention due to application in various fields of physics. Many of interesting quantum effects, including geometric Berry phase, molecular Bohm effect, dynamical locality of particles and Hall effect are related to this concept. More generally speaking, the time-dependent fields are also present in quantum chemistry, quantum optics and quantum field theory. In other words, the time-dependent models enable us to simulate the modern and applied concepts in these branches. These models become particularly more important when we consider the experimental limitations. In this thesis, we first thoroughly investigate the nonrelativistic particles using Schrödinger equation via time-space translation and Lewis-Riesenfeld approaches. Next, we study the relativistic particles using Dirac and Klein-Gordon fields and analyze them in various states including constant electric field and moving potential. In addition, we investigate ultra-relativistic particles in electromagnetic fields and solve Heun and Mathieu equations in our calculations.

Key words: Time-Dependent Potential, Schrödinger Equation, Dirac Equation, Klein-Gordon Equation, Lewis-Riesenfeld technique, Time-Space Transformation method, Mathieu equation, Heun equation.



Faculty of Physics

Msc Thesis in Nuclear Physics

Investigation of Relativistic and Ultra-Relativistic Particles Using Time-Dependent Fields

By: Khadije Saeedi jozchal

Supervisor(s):

Dr. Hassan Hassanabadi

Dr. Saber Zarrinkamar

August 2016