دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک

گروه فیزیک هسته ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی تحول زمانی برای ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی با استفاده از روش ناوردای لوییس-رزنفلد

هادی سبحانی

استاد راهنما

دکتر حسن حسن آبادی

۱۳۹۵

تقدیم به پدر و مادرم که بعد از خدا، تمامی دست آوردهایم

در زندگانی، به تمامی، مدیون و مرهون زحمات این بزرگواران می باشد.

سپاس خداوندی راکه سخنوران از ستودن او عاجزند و حسابگران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاش گران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفات او حد و مرزی وجود ندارد و تعریف کاملی نمی توان یافت و برای خدا وقت معین و سرآمدی مشخص نمی توان تعیین کرد. مخلوقات را با قدرت خویش آفرید و با رحمت خود بادها را به حرکت درآورد و به وسیله کوه ها اضطراب ولرزش زمین را به آرامش تبدیل کرد.

پس از حمد و ثنای پروردگار دو عالم بر خود واجب می دانم که ابتدا از پدر و مادر خود تشکر و قدردانی کنم که در مسیر زندگانی و کسب علم مرا همواره پشتیبانی کرده اند که اگر وجود پر برکت این عزیزان و ایثار و فداکاریشان در زندگانی من نبود قطعا موفق به کسب توفیقات نمی شدم.

پس از آن با تمام وجود از استاد راهنمای خود، جناب دکتر حسن حسن آبادی تشکر و قدرانی می کنم که مرا مانند فرزند خود در راه کسب علم و دانش پرورش داد، آداب علم آموزی و دانشجویی تعلیم کرد و مسیر درست و همواری در پیش پای من گذاشت. لذا تمامی دست آوردهای این پایان نامه بدون این استاد گرانقدر دست یافتنی نبود.

هادی سبحانی

۱۳۹۵

تعهدنامه

اینجانب **هادی سبحانی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک هسته ای**فیزیک** **دانشکده فیزیک** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی تحول زمانی برای ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی با استفاده از روش ناوردای لوییس- رزنفلد **بررسی تحول زمانی برای ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی با استفاده از روش ناوردای لوییس- رزنفلد** ، تحت راهنمایی **دکتر حسن حسن آبادی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

هادی سبحانی

۱۳۹۵

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

بررسی سیستم های کوانتومی غیر نسبیتی و نسبیتی وابسته به زمان در دهه ها اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است زیرا مطالعه این سیستم های کوانتومی منجر به تامین ساختار بنیادی فیزیک کوانتوم و تفسیر در باب زمینه های فیزیک کوانتوم مثل گرانش، اپتیک، تله های پاولی و اسپینترونیک می شود. بررسی تحول زمانی سیستم های کوانتومی وابسته به زمان بدلیل وجود مشتق های پاره ای نسبت به مکان و زمان دارای مشکلات خاص خود می باشد که برای برطرف کردن چنین مشکلاتی و همچنین بدست آوردن جواب های دقیق و یا با دقت بالا روش های متفاوتی ابداع و استفاده شده است که از جمله این روش ها می توان به انتگرال مسیر های فاینمن، کوانتش دوم و ناوردای پویا لوییس-رزنفلد اشاره نمود.

در این پایان نامه ما قصد داریم که ضمن معرفی کامل روش ناوردای پویا لوییس-رزنفلد، از این روش برای بررسی سیستم های غیر نسبیتی (مانند نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان، سیستم بس ذره ای، هسته های تغییر شکل یافته و ...) و نسبیتی (مانند سیستم های فرمیونی و بوزنی آزاد و یا مقید و ...) در حضور برهمکنش وابسته به زمان استفاده کنیم.

کلمات کلیدی: ناوردای پویا لوییس-رزنفلد، بر همکنش های وابسته زمان، نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان، سیستم بس ذره ای، هسته های تغییر شکل یافته، سیستم های فرمیونی و بوزونی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. H. Sobhani and H. Hassanabadi, *Communications in Theoretical Physics*, 64, 263-268 (2015).

2. L. Naderi, H. Hassanabadi, H. Sobhani, *International Journal of Modern Physics E*, 25, 4, 1650029 (2016).

3. H. Sobhani and H. Hassanabadi, *Advances in High Energy Physics*, 3647392 (2016).

4. H. Sobhani and H. Hassanabadi, *Communications in Theoretical Physics*, 65, 5, 543-545 (2016).

5. H. Sobhani and H. Hassanabadi, *Physics Letters B*, 760, 1 (2016).

6. H. Sobhani and H. Hassanabad, *International Journal of Modern Physics E*, 25, 9, 1650073 (2016).

فهرست مطالب

فهرست تصاویر

فهرست جداول

فصل ۱

مقدمه

یکی از مهم ترین پارامتری که در فیزیک، فیزیکدانان با آن بر خورد می کنند، مسئله "زمان در فیزیک" می باشد. از فیزیک کلاسیک بخاطر داریم هنگامی که رفتار یک سیستم را مورد بررسی قرار می دادیم، به معادله ای روبرو می شدیم که شرح حال این سیستم را به واسطه و بر حسب زمان بیان می کرد یعنی با داشتن شرایط اولیه حاکم بر سیستم مورد مطالعه، می توانستیم وضعیت سیستم را در آینده به تمامی مشخص کنیم. این یک مثال بارز و مشخص از حضور زمان در فیزیک کلاسیک می باشد اما در مکانیک کوانتومی حضور این پارامتر حیاتی نقش و نگاری متفاوت نسبت به بقیه اعضای این قسمت به خود می گیرد. **در مکانیک کوانتومی هر مشاهده پذیر را با یک عملگر ریاضی مشخص می کنند که این عملگر بایستی هرمیتی باشد اما برای زمان این چنین تدبیری اتخاذ نشده است. زمان در مکانیک کوانتومی به عنوان یک پارامتر در نظر گرفته شده است لذا زمان در مکانیک کوانتومی از ماهیت عملگری برخوردار نیست** [۱]. با اندک بررسی در زمینه برهمکنش ها در فیزیک کوانتومی به راحتی متوجه این موضوع می شویم که برای بر همکنش ها یک دسته بندی کلی بر حسب زمان قرار داده اند

- بر همکنش های مستقل از زمان
- برهمکنش های وابسته به زمان

منظور از برهمکنش های مستقل از زمان بر همکنش هایی است که یا به طور ایده آل هیچگونه وابستگی نسبت به زمان نداشته باشند و یا آنکه تغییرات این نوع بر همکنش ها در مدت طولانی بسیار ناچیز باشد به گونه ای که به توان از آن صرف نظر کرد. بزرگترین حسن این نوع از برهمکنش ها این است اگر در سیستم کوانتومی ای یک بر همکنش وابسته به زمان حاکم باشد، می توان با استفاده از روش جداسازی متغیر ها، یک فرم تفکیک شدنی برای تابع موج پیشنهاد کرد که به واسطه این پیشنهاد، معادله موج شرودینگر وابسته به زمان که یک معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی می باشد را به یک معادله ویژه مقداری یا یک متغیر مستقل تبدیل کرد و عملا قسمت مربوط به زمان تابع موج یک عامل فازی می شود. اگر بخواهیم این مطلب را به زبان ریاضی بیان کنیم داریم

$$
\begin{aligned}
& i\hbar\frac{\partial\Psi(r,t)}{\partial t} = H\Psi(r,t) \rightarrow \Psi(r,t) = R(r)T(t) \\
& \rightarrow \begin{cases} HR(r) = ER(r) \\ T = e^{\frac{-i}{\hbar}Et} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{۱.۱}
$$

که ثابت جداسازی با E نشان داده شده است که انرژی سیستم می باشد. علی رغم این که این گونه مسائل به خاطر اینکه به لحاظ ریاضی خوش رفتار هستند و در نهایت به معادله دیفرانسیل هایی منجر می شود که اگر آشنا نباشند، حداقل فقط بر حسب یک متغییر قابل تفکیک می باشند، اما نمی توان آنقدر خوش بین بود که بتوان تنها بر این نوع مسائل تکیه کرد.

اما برهمکنش های وابسته به زمان. در این گونه مسائل نقش زمان بسیار حائز اهمیت می باشد به گونه ای که دیگر نمی توان اهمیتش را نادید گرفت. پس زمانی که برهمکنش سیستم با گذر زمان تغییر می کند برای بدست آوردن تابع موج مربوط به آن سیستم بایستی دست به دامن معادله وابسته به زمان شرودینگر شد. ولی نکته مهم و تلخ ماجرا این جاست که در این حالت معادله دیفرانسیلی که برای تابع موج بدست می آید، یک معادله دیفرانسیل مشتقات جزئی ای است که دارای یک مرتبه مشتق نسبت به زمان و حداقل یک جمله مرتبه دوم مشتق نسبت به مکان می باشد. برای این که تابع موج این چنین سیستمی را بدست آوردیم بایستی از سد این معادله دیفرانسیل عبور کنیم. برای عبور از چنین سدی، برهمکنش های وابسته به زمان را به دو گونه غالب دسته بندی می کنند:

- برهمکنش های وابسته به زمان اختلالی
- برهمکنش های وابسته به زمان غیر اختلالی

منظور از برهمکنش های وابسته به زمان اختلالی، برهمکنش هایی است که در آن ها رفتار کلی سیستم قابل تشخیص است اما یک عامل بسیار کوچکی نسبت به رفتار کلی سیستم، مشغول فعالیت در سیستم می باشد. این گونه مسائل باز هم به دلیل عمده ی این که به لحاظ ریاضی رفتار ساده تری نسبت به برهمکنش های وابسته به زمان غیر اختلالی دارند، در کتاب های درسی مکانیک کوانتومی جایگاه ویژه ای دارند و البته در مقالات پژوهشی نیز از این روش بنا به اقتضا مسئله از آن استفاده می شود. از جمله مشهور ترین دستاورد های استفاده کردن از این روش می توان به "قانون طلایی فرمی" اشاره کرد که با استفاده از روش اختلالی به احتمال گذار یک سیستم از حالتی به حالت دیگر می پردازد.

بدیهی است که در مورد برهمکنش های وابسته به زمان نیز نتوانیم اغلب این چنین مسائلی را به صورت اختلالی در نظر بگیریم. یکی از مشهور ترین موارد در فیزیک هسته ای هسته های رادیواکتیو با نیمه عمر کوتاه می باشند. به وضوح میتوان به این موضوع پی برد که اگر هسته رادیو اکتیوی با نیمه عمر پایین در دسترس باشد، بعد از گذر زمان، حالت این سیستم به کلی عوض می شود به گونه ای که دیگر حالت نهایی نسبت به حالت اولیه هیچ شباهتی ندارد. در این مورد اثر زمان در برهمکنش قابل توجه می باشد و اصلا نمیتوان یا آن را نادیده گرفت و یا حتی آن را اختلال فرض کرد.

در این پایان نامه بر آن هستیم که با استفاده از واقعیات مکانیک کوانتومی، به یک تئوری بپردازیم که آن ما را قادر می سازد تا سیستم هایی که به طور صریح و نامعلوم وابسته به زمان هستند را بدون اختلال در نظر گرفتن آن ها، تحول زمانی این سیستم ها را بررسی کنیم.

فصل ۲

روش ناوردای پویای لوییس-رزنفلد

۱.۲ تئوری

در سال ۱۹۶۹ دو فیزیکدان به نام های لوییس [۱] و رزنفلد [۲] با استفاده از واقیعت های مکانیک کوانتومی اقدام به حل مسائلی در فیزیک پرداختند که به طور صریح وابستگی به زمان داشتند [۲]. این وابستگی به گونه ای است که نه می توان از اثرات آن چشم پوشی کرد و نه این که آن را به صورت اختلالی برای سیستم فرض نمود. اساس این تئوری بدین گونه است که اگر فرض کنیم یک عملگر هرمیتی I وجود داشته باشد، بر اساس تصویر هایزنبرگ از مکانیک کوانتومی تحول زمانی این عملگر بصورت

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{۱}{i\hbar}[I,H], \tag{۱.۲}$$

می باشد. اگر معادله فوق را برابر صفر قرار دهیم، یعنی اینکه این اپراتور می تواند تحول زمانی نداشته باشد در حالیکه نسبت به زمان تغییر کند (مشتق پاره ای آن نسبت به زمان غیر صفر باشد) داریم

$$\frac{dI}{dt}=\frac{\partial I}{\partial t}+\frac{۱}{i\hbar}[I,H]=۰, \tag{۲.۲}$$

حال معادله (۲.۲) را از سمت چپ بر روی یک کت دلخواه $|\Psi\rangle$ اثر می دهیم. با این کار می توان نوشت

$$\begin{aligned} &\{\tfrac{۱}{i\hbar}(IH-HI)+\tfrac{\partial I}{\partial t}\}\,|\Psi\rangle=۰,\\ &\tfrac{\partial I}{\partial t}\,|\Psi\rangle+I\tfrac{\partial|\Psi\rangle}{\partial t}=\tfrac{۱}{i\hbar}HI\,|\Psi\rangle\,, \qquad (۳.۲)\\ &i\hbar\tfrac{\partial(I|\Psi\rangle)}{\partial t}=H(I\,|\Psi\rangle), \end{aligned}$$

---

[۱] H. R. Lewis

[۲] W. B. Riesenfeld

این بدین معناست که اثر عملگر ناوردای بر روی کت $|\Psi\rangle$ یک کت جدیدی را تولید می کند که آن نیز جواب معادله موج وابسته به زمان شرودینگر می باشد. اما برای اینکه نحوه عملکرد ناوردای پویا بر کت $|\Psi\rangle$ را در یابیم، آن را بر اساس ویژه کت های عملگر I بنویسیم. این کار به این دلیل شدنی و منطقی است که این عملگر همانطور که در ابتدا شرط شده بود، عملگری هرمیتی است. از جمله ویژگی های هر عملگر هرمیتی این است که هر کتی را می توان بر اساس ویژه کت های این عملگر بسط داد.
معادله ویژه مقداری عملگر ناوردای پویا به صورت

$$I\,|\lambda,\kappa\rangle = \lambda\,|\lambda,\kappa\rangle\,, \tag{۴.۲}$$

می باشد که در آن ویژه تابع عملگر ناوردای پویا با $|\lambda,\kappa\rangle$ نشان داده شده، ویژه مقدار این عملگر با نماد λ و همچنین سایر اعداد کوانتومی با κ آورده شده اند. ویژگی مهم معادله (۴.۲) این است که اگرچه عملگر ناوردای پویا بصورت صریح تابع زمان می باشد اما ویژه مقدار آن مستقل از زمان است. برای نشان دادن این ویژگی از معادله (۴.۲) نسبت به زمان مشتق می گیریم

$$\frac{\partial I}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle + I\frac{\partial\,|\lambda,\kappa\rangle}{\partial t} = \frac{\partial\lambda}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle + \lambda\frac{\partial\,|\lambda,\kappa\rangle}{\partial t}, \tag{۵.۲}$$

از طرفی معادله (۲.۲) را بر $|\lambda,\kappa\rangle$ اثر می دهیم

$$i\hbar\frac{\partial I}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle + IH\,|\lambda,\kappa\rangle - \lambda H\,|\lambda,\kappa\rangle = \circ, \tag{۶.۲}$$

معادله فوق را در $\langle\lambda',\kappa'|$ از سمت راست ضرب می کنیم، به معادله زیر می رسیم

$$i\hbar\,\langle\lambda',\kappa'|\,\frac{\partial I}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle + (\lambda'-\lambda)\,\langle\lambda',\kappa'|\,H\,|\lambda,\kappa\rangle = \circ. \tag{۷.۲}$$

معادله (۷.۲) دلالت بر این دارد که

$$\langle\lambda,\kappa'|\,\frac{\partial I}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle = \circ, \tag{۸.۲}$$

و این یعنی اگر معادله (۵.۲) را در $\langle\lambda,\kappa|$ داریم

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t} = \langle\lambda,\kappa|\,\frac{\partial I}{\partial t}\,|\lambda,\kappa\rangle = \circ. \tag{۹.۲}$$

در نهایت تابع موج وابسته به زمان $|\Psi\rangle$ را مرسوم است که به صورت زیر نوشته شود

$$|\Psi\rangle = \sum_{\lambda,\kappa} c_{\lambda,\kappa}e^{i\alpha_{\lambda,\kappa}(t)}\,|\lambda,\kappa;t\rangle\,, \tag{۱۰.۲}$$

که در آن

$$\hbar\frac{d\alpha_{\lambda,\kappa}(t)}{dt} = \langle\lambda,\kappa|\,i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\,|\lambda,\kappa\rangle\,, \tag{۱۱.۲}$$

می باشد. نکته قابل تذکر این است که انتخاب این عامل فازی اختیاری است زیرا تنها یک عامل فازی کلی است که در احتمال های مکانیک کوانتومی تاثیری ندارد.
در این جا بایستی یک مثال ساده از این روش را بررسی کنیم تا این مطلب روشن شود که چگونه می توان از این روش استفاده کرد لذا در فصل های آینده که ناوردا محاسبه می شود، عملیات ریاضی آن بر اساس این مثال می باشد که ما جزئیات آن را قرار است توضیح دهیم.

۲.۲ مثال: نوسانگر هماهنگ یک بعدی وابسته به زمان

نوسانگر یک بعدی را فرض کنید که فرکانس زاویه ای آن تابع نامعلومی از زمان باشد. هامیلتونی چنین نوسانگری بصورت زیر خواهد بود

$$H = \frac{1}{2M}\left(P^2 + \Omega^2(t)q^2\right), \tag{۱۲.۲}$$

در این جا نکته ای را یاد آور می شویم که می توان فرم پیشنهادی خام ناوردای پویا را با توجه به عوامل تاثیر گذار بر روی سیستم پیشنهاد داد. لذا برای هامیلتونی (۱۲.۲) ناوردای پویا پیشنهادی بصورت زیر پیشنهاد می شود

$$I(t) = \frac{1}{2}\left(\alpha(t)q^2 + \beta(t)P^2 + \gamma(t)\{q,p\}\right). \tag{۱۳.۲}$$

در رابطه فوق $\{q,p\}$ پاد جابجایی می باشد. با قرار دادن معادلات (۱۳.۲) و (۱۲.۲) در معادله (۲.۲) به عبارت

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \left(\dot{\alpha}(t) - 2\frac{\Omega^2(t)}{M}\gamma(t)\right)q^2 + \left(\dot{\beta}(t) + 2\frac{\gamma(t)}{M}\right)P^2 \\ + \left(\dot{\gamma}(t) + \frac{\alpha(t)}{M} - \frac{\Omega^2(t)\beta(t)}{M}\right)\{q,p\} \end{array}\right) = 0, \tag{۱۴.۲}$$

می رسیم. علامت نقطه در بالای حروف به معنی مشتق جزئی نسبت به زمان می باشد. حاصل عبارت فوق دستگاه معادلات کوپل شده زیر می باشد

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= 2\frac{\Omega^2(t)}{M}\gamma(t), \\ \dot{\beta}(t) &= -2\frac{\gamma(t)}{M}, \\ \dot{\gamma}(t) &= -\frac{\alpha(t)}{M} + \frac{\Omega^2(t)\beta(t)}{M}. \end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

دستگاه معادلات (۱۵.۲) را با معرفی یک تابع واسطه می توان حل کرد بدین صورت که پس از معرفی تابع واسط ضرایب مورد نظر را بر حسب آن تابع معرفی شده بدست می آوریم و در نهایت برای آن تابع واسط یک قید محاسبه می کنیم. لذا فرض می کنیم که

$$\beta(t) = \sigma^2(t), \tag{۱۶.۲}$$

که $\sigma^2(t)$ همان تابع واسط مورد نظر ماست. با قرار دادن معادله (۱۶.۲) در دومین رابطه از معادله (۱۵.۲) برای $\gamma(t)$ داریم

$$\gamma(t) = -M\dot{\sigma}(t)\sigma(t), \tag{۱۷.۲}$$

حال با استفاده از سومین رابطه معادله (۱۵.۲) و معادلات (۱۶.۲) و (۱۷.۲) داریم

$$\alpha(t) = M^{2}\left(\dot{\sigma}^{2}(t) + \ddot{\sigma}(t)\sigma(t)\right) + \Omega^{2}(t)\sigma^{2}(t). \tag{۱۸.۲}$$

همانطور که اشاره شد ضرایب نامعلوم مورد نظر بر اساس تابع واسط بدست آمده اند. حالا می توانیم با استفاده از اولین رابطه معادله (۱۵.۲) قید حاکم بر تابع واسط را بدست آوریم. با قرار دادن اطلاعات بدست آمده در رابطه مورد نظر داریم

$$\sigma(t)\frac{d}{dt}\left(M^{2}\ddot{\sigma}(t) + \Omega^{2}(t)\sigma(t)\right) + 3\dot{\sigma}(t)\left(M^{2}\ddot{\sigma}(t) + \Omega^{2}(t)\sigma(t)\right) = 0. \tag{۱۹.۲}$$

با انتگرال گرفتن از معادله (۱۹.۲) قید حاکم بر تابع واسط بدست خواهد آمد

$$M^{2}\ddot{\sigma}(t) + \Omega^{2}(t)\sigma(t) = \frac{c}{\sigma^{3}(t)}. \tag{۲۰.۲}$$

در رابطه فوق ثابت انتگرال گیری را با c نشان داده ایم. با استفاده از قید بدست آمده می توانیم ضریب $\alpha(t)$ را ساده تر بنویسم

$$\alpha(t) = M^{2}\dot{\sigma}^{2}(t) + \frac{c}{\sigma^{2}(t)}. \tag{۲۱.۲}$$

پس در نهایت فرم نهایی ناوردای پویا را می توان با قرار دادن ضرایب در فرم پیشنهادی این گونه نوشت

$$I(t) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{c}{\sigma^{2}(t)}\right)q^{2} + \left(\sigma(t)p - M\dot{\sigma}(t)q\right)^{2}\right). \tag{۲۲.۲}$$

چون ثابت انتگرال گیری در ماهیت و اثر گذاری ناوردای پویا، اثر گذار نیست لذا با تعریف $\sigma(t) = c^{\frac{1}{4}}\rho(t)$ و صرف نظر کردن از ضریب ثابت c عبارت بهتری هم برای ناوردای پویا و هم برای معادله حاکم بر تابع واسط می توان نوشت

$$\begin{aligned} I(t) &= \tfrac{1}{2}\left(\left(\tfrac{1}{\rho^{2}(t)}\right)q^{2} + \left(\rho(t)p - M\dot{\rho}(t)q\right)^{2}\right). \\ M^{2}\ddot{\rho}(t) + \Omega^{2}(t)\rho &= \tfrac{1}{\rho^{3}(t)}. \end{aligned} \tag{۲۳.۲}$$

حال که فرم صریح ناوردای پویا بدست آمد بایستی ویژه مقادیر و ویژه توابع آن را محاسبه کنیم. همچنان که مرسوم می باشد برای بررسی یک نوسانگر هارمونیک ساده از روش عملگری استفاده می کنیم، در این جا نیز چون شکل عملگر ناوردای پویا نیز به صورت دو جمله مربعی است، در این مورد نیز می توان این روش را به کار برد. عملگر های پایین برنده و بالا برنده مناسب این مسئله به صورت زیر پیشنهاد می شود

$$\begin{aligned} a &= \frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}\left(\frac{q}{\rho}+i(\rho p-M\dot{\rho}q)\right), \\ a^\dagger &= \frac{۱}{\sqrt{۲\hbar}}\left(\frac{q}{\rho}-i(\rho p-M\dot{\rho}q)\right), \end{aligned} \tag{۲۴.۲}$$

این عملگر ها دارای رابطه جابجایی $[a,a^\dagger]=۱$, می باشند که در اینجا نیز می توان یک عملگر عدد به صورت $a^\dagger a$ که ویژه مقادیر نامنفی و صحیح دارد. با استفاده از عملگرهای پایین برنده و بالابرنده می توان ناوردای پویا را بازنویسی کرد که به فرم

$$I(t)=\hbar\left(a^\dagger a+\frac{۱}{۲}\right), \tag{۲۵.۲}$$

تبدیل می شود. پس چون $a^\dagger a$ با $I(t)$ جابجا می شد لذا ویژه کت های همزمان بصورت زیر دارد که این ویژه کت ها نیز از خاصیت تعامد برخوردار می باشند.

$$a^\dagger a\left|s\right\rangle = s\left|s\right\rangle, \mathrm{s}=۰،۱،۲،\ldots \tag{۲۶.۲}$$

نحوه اثر گذاری عملگر های بالابرنده و پایین برنده بر روی این ویژه کت ها بصورت

$$\begin{aligned} a\left|s\right\rangle &= \sqrt{s}\left|s-۱\right\rangle, \\ a^\dagger\left|s\right\rangle &= \sqrt{s+۱}\left|s+۱\right\rangle, \end{aligned} \tag{۲۷.۲}$$

می باشد و طیف ویژه مقادیر بصورت زیر در می آید

$$\lambda_s=\left(s+\frac{۱}{۲}\right)\hbar. \tag{۲۸.۲}$$

برای اینکه بتوانیم از رابطه های (۱۰.۲) و (۱۱.۲) استفاده کنیم بایستی عناصر ماتریسی هامیلتونی و عملگر مشتق زمانی را محاسبه کنیم. در مرحله اول به محاسبه عناصر ماتریسی هامیلتونی می پردازیم. برای این کار ابتدا بایستی هامیلتونی را بر حسب عملگر های بالا برنده و پایین برنده بازنویسی کنیم. با استفاده از رابطه (۲۴.۲) داریم

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{\hbar}{۲}}\left(a+a^\dagger\right)\rho, \\ p &= \frac{۱}{\rho}\sqrt{\frac{\hbar}{۲}}\left(M\dot{\rho}\rho(a+a^\dagger)+i(a-a^\dagger)\right), \end{aligned} \tag{۲۹.۲}$$

که توان دوم آن ها بصورت زیر تبدیل می شود

$$\begin{aligned} &q^{2} = \frac{\hbar}{2}(a^{2} + (a^{\dagger})^{2} + aa^{\dagger} + a^{\dagger}a)\rho^{2}, \\ &p^{2} = \frac{\hbar}{2\rho^{2}}((M\dot{\rho}\rho)^{2}(a^{2} + (a^{\dagger})^{2} + aa^{\dagger} + a^{\dagger}a) + \\ &2iM\dot{\rho}\rho(a^{2} - (a^{\dagger})^{2}) + (aa^{\dagger} + a^{\dagger}a - a^{\dagger} - (a^{\dagger})^{2})), \end{aligned} \tag{۳۰.۲}$$

با استفاده از رابطه فوق می توان هامیلتونی را بازنویسی کرد. با انجام این کار تشکیل دادن عناصر ماتریسی آسان تر می گردد. با استفاده از خاصیت تعامد ویژه کت ها داریم

$$\langle s|\, H(t)\, |s\rangle = \frac{\hbar}{4M}\left((M\dot{\rho})^{2} + (\Omega(t)\rho)^{2} + \frac{1}{\rho^{2}}\right)\langle s|\, \{a, a^{\dagger}\}\, |s\rangle\,, \tag{۳۱.۲}$$

برای محاسبه قسمت آخر معادله (۳۱.۲) از رابطه جابجایی عملگر های بالابرنده و پایین برنده استفاده می کنیم. یعنی

$$\langle s|\, aa^{\dagger} + a^{\dagger}a\, |s\rangle = \langle s|\, 1 + a^{\dagger}a + a^{\dagger}a\, |s\rangle = (2s + 1), \tag{۳۲.۲}$$

پس با در نظر گرفتن (۳۲.۲)، رابطه (۳۱.۲)، به رابطه زیر تبدیل می شود

$$\langle s|\, H(t)\, |s\rangle = \frac{\hbar}{2M}\left((M\dot{\rho})^{2} + (\Omega(t)\rho)^{2} + \frac{1}{\rho^{2}}\right)(s + \frac{1}{2}), \tag{۳۳.۲}$$

چون عناصر ماتریسی در پایه های خودش نوشته نشده است، شامل عناصر غیر قطری هم می باشد. حال بایستی عناصر ماتریسی قطری $\frac{\partial}{\partial t}$ را محاسبه کنیم. در ابتدا اثر عملگر بالا برنده را بازنویسی می کنیم که بصورت

$$a^{\dagger}\, |s - 1\rangle = \sqrt{s}\, |s\rangle\,, \tag{۳۴.۲}$$

از (۳۴.۲) نسبت به زمان مشتق جزیی می گیریم البته این نکته را هم رعایت می کنیم که s با گذر زمان ثابت است

$$\frac{\partial a^{\dagger}}{\partial t}\, |s - 1\rangle + a^{\dagger}\frac{\partial}{\partial t}\, |s - 1\rangle = \sqrt{s}\frac{\partial}{\partial t}\, |s\rangle\,, \tag{۳۵.۲}$$

(۳۵.۲) را در $\frac{\langle s|}{\sqrt{s}}$ ضرب می کنیم. با این کار می توان نوشت

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\, \langle s|\, \frac{\partial a^{\dagger}}{\partial t}\, |s - 1\rangle + \langle s|\, \frac{a^{\dagger}}{\sqrt{s}}\frac{\partial}{\partial t}\, |s - 1\rangle = \langle s|\, \frac{\partial}{\partial t}\, |s\rangle\,, \tag{۳۶.۲}$$

حال میخواهیم اثر عملگر پایین برنده را بررسی کنیم. می دانیم که

$$a\,|s\rangle = \sqrt{s}\,|s-1\rangle\,, \tag{۳۷.۲}$$

که رابطه فوق معادل است با

$$\langle s|\,a^\dagger = \langle s-1|\,\sqrt{s}, \tag{۳۸.۲}$$

با لحاظ کردن (۳۸.۲) در (۳۶.۲) داریم

$$\frac{1}{\sqrt{s}}\,\langle s|\,\frac{\partial a^\dagger}{\partial t}\,|s-1\rangle + \langle s-1|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|s-1\rangle = \langle s|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|s\rangle\,, \tag{۳۹.۲}$$

اگر از دومین رابطه (۲۷.۲) مشتق جزیی نسبت به زمان بگیریم و همچنین از رابطه (۲۹.۲) استفاده کنیم می توانیم بنویسیم

$$\frac{\partial a^\dagger}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\left(-\frac{2\dot\rho}{\rho} + iM(\rho\ddot\rho - \dot\rho^2)\right)a + iM\left(\rho\ddot\rho - \dot\rho^2\right)a^\dagger\right), \tag{۴۰.۲}$$

در نهایت با استفاده از (۴۰.۲)، رابطه (۳۹.۲) می رسد به

$$\begin{aligned}\langle s|\,\tfrac{\partial}{\partial t}\,|s\rangle &= \langle s-1|\,\tfrac{\partial}{\partial t}\,|s-1\rangle + \tfrac{iM}{2}(\rho\ddot\rho - \dot\rho^2)\\ &= \langle 0|\,\tfrac{\partial}{\partial t}\,|0\rangle + \tfrac{isM}{2}(\rho\ddot\rho - \dot\rho^2),\end{aligned} \tag{۴۱.۲}$$

مشخص است که ماهیت پاد هرمیتی بودن عملگر $\frac{\partial}{\partial t}$ ایجاب می کنید که تمامی عناصر ماتریسی قطری آن موهومی محض باشد. در هر حال اطلاعات بیشتری درباره $\langle 0|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|0\rangle$ از (۴۱.۲) دریافت نمی شود. لذا این عبارت می تواند یک نقطه شروع برای (۴۱.۲) باشد چون اعداد موهومی محض را می توان را به عنوان فاز تلقی کرد و باقی اعداد موهومی محض را با فاز نسبی مشخص نمود. پس بنابر قرارداد داریم

$$\langle 0|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|0\rangle = \frac{iM}{4}(\rho\ddot\rho - \dot\rho^2), \tag{۴۲.۲}$$

با این قرارداد شکل نهایی (۴۱.۲) بصورت زیر خواهد بود

$$\langle s|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|s\rangle = \frac{iM}{2}(\rho\ddot\rho - \dot\rho^2)(s+\frac{1}{2}), \tag{۴۳.۲}$$

حال بااستفاده از اطلاعات بدست آمده داریم

$$\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_s(t)}{dt} = \frac{-1}{2M}\left(M^2(\rho\ddot{\rho}-\dot{\rho}^2)+(M\dot{\rho})^2+(\Omega(t)\rho)^2+\frac{1}{\rho^2}\right)(s+\frac{1}{2})\\
&=\frac{-1}{M}(s+\frac{1}{2})\frac{1}{\rho^2},\\
&\alpha_s(t) = \frac{-1}{M}(s+\frac{1}{2})\int\limits_0^t \frac{1}{\rho^2(t')}dt',
\end{aligned} \tag{۴۴.۲}$$

در نهایت با مشخص شدن ویژه توابع، ویژه مقادیر و عامل فازی وابسته به زمان حالت سیستم قابل نوشتن برحسب این پارامترها می باشد.

البته ذکر این نکته در اینجا حائز اهمیت است که همیشه در همه مسائل ما برای بدست آوردن ضرایب فرم پیشنهادی ناوردای پویا دست به دامن تابع واسط نخواهیم شد ولی اگر شرایط مسئله ایجاب نمود که نیاز به تابع واسط داشته باشیم، آن را به گونه ای که توضیح داده شد می توان محاسبه نمود.

حال با دانستن این تئوری و جزئیات آن آماده هستیم تا مسائلی را که در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی و نسبیتی برای برهمکنش های وابسته به زمان مطرح می شوند را بررسی کنیم.

فصل ۳

سیستم های کوانتومی غیر نسبیتی در حضور برهمکنش وابسته به زمان

در این فصل از پایان نامه مسائلی در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی بررسی خواهد که در آن ها برهمکنش ها صراحتا وابسته به زمان هستند.

۱.۳ نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان دو جسمی

این سیستم هم در مکانیک کلاسیک و هم در مکانیک کوانتومی از اهمیت قابل توجهی برخوردار می باشد. از جمله کاربرد های این سیستم می توان به مدل لی [۱] در نظریه میدان های کوانتومی نسبیتی ، [۳] نور فشرده دو حالتی [۲] [۴، ۵، ۶]، تبدیل بوگولی بوو [۳] [۷] در ابررسانایی، مدل نوسانگر هارمونیک هم وردا [۴] در تصویر پارتون [۵] [۸]، و همچنین مدل هایی در فیزیک مولکولی [۹] اشاره کرد. این مبحث نه تنها در گذشته بلکه در دهه اخیر نیز مورد استفاده پژوهشگران و فیزیکدانان قرار گرفته است. از جمله چنین مواردی می توان کارهای استفانکی [۶] [۱۰] اشاره کرد. ایشان مباحثی در مورد آستانه های هماهنگ سازی [۷] در آرایه ای از نوسانگر های غیر قطری کوپل شده داشته اند. سودهیر [۸] [۱۱] ناحیه به شدت کوپل شدگی مجموعه ای از نوسانگر های کوپل شده خطی با اعمال قطری سازی هامیلتونی را مورد بحث قرار داد.
در ابتدا یک نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان دو جسمی کوپل شده را درنظر می گیریم. چنین نوسانگری

[۱] Lee model
[۲] Two mode squeezed of light
[۳] Bogoliubov transformation
[۴] Covariant harmonic oscillator model
[۵] Parton picutre
[۶] Stefański
[۷] Synchronization thresholds
[۸] Sudhir

را می توان به زبان مکانیک کوانتومی اینگونه بیان کرد :

$$H(x_1,x_2,t)=\frac{p_1^2}{2m(t)}+\frac{p_2^2}{2m(t)}+\frac{m(t)\omega^2(t)}{2}(x_1^2+x_2^2)+\frac{c}{m(t)(x_1-x_2)^2}. \tag{۱.۳}$$

هامیتونی (۱.۳) نمایانگر این است که این سیستم به طور صریح وابسته به زمان می باشد. زیروند های ۱ و ۲ به اجسام حاضر در مسئله اطلاق شده است و c یک ضریب ثابت می باشد. برای اینکه بتوان بهتر با این مسئله برخورد کرد با انتخاب مختصات ژاکوبی به صورت

$$R=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad r=x_1-x_2 \tag{۲.۳}$$

هامیتونی (۱.۳) تبدیل می شود به

$$H(R,r,t)=\frac{P_R^2}{2M(t)}+\frac{M(t)\omega^2(t)R^2}{2}+\frac{P_r^2}{2\mu(t)}+\frac{\mu(t)\omega^2(t)r^2}{2}+\frac{c'}{\mu(t)r^2}. \tag{۳.۳}$$

در معادله (۳.۳) پارامتر های $M(t)=2m(t)$ و $\mu(t)=\frac{m(t)}{2}$ وارد مسئله شده اند و c' ثابتی جدید می باشد. همانطور که دیده می شود این هامیلتونی به و قسمت مستقل تفکیک شده است لذا ناوردای پویا مناسب برای این مسئله را به صورت $I(t)=I_R(t)+I_r(t)$ می توان نوشت که ویژه مقدار آن بصورت $\lambda=\lambda_R+\lambda_r$ و ویژه توابع آن نیز $\langle x\,|\lambda,\kappa\rangle=\Phi(R,t)\Phi(r,t)$ می باشد.

ابتدا قسمت مربوط به R را بررسی می کنیم. برای این قسمت ناوردای پویا را به صورت زیر پیشنهاد می دهیم

$$I_R(t)=\frac{1}{2}\left(\alpha(t)P_R^2+\beta(t)R^2+\chi(t)\{P_R,R\}\right), \tag{۴.۳}$$

با استفاده از روشی که جزئیات آن در فصل اول توضیح داده شد، پس از بدست آوردن فرم صریح توابع وابسته به زمان در فرم پیشنهادی ناوردای پویا، می توان آن را این چنین بازنویسی کرد که

$$I_R(t)=\frac{1}{2}\left(\rho_R(t)P_R^2+\left(\frac{1}{\rho_R(t)}+\rho_R^2(t)M^2(t)\right)R^2-M(t)\rho_R(t)\dot\rho_R(t)\{P_R,R\}\right), \tag{۵.۳}$$

که در معادله (۵.۳) پارامتر $\rho_R(t)$ بایستی معادله

$$\ddot\rho_R(t)+\frac{\dot M(t)}{M(t)}\dot\rho_R(t)+\omega^2(t)\rho_R(t)=\frac{1}{M^2(t)\rho_R(t)}, \tag{۶.۳}$$

را ارضا نماید. استفاده از معادله (۵.۳) برای بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویا کار را برای ما سخت خواهد کرد لذا ما میتوانیم با استفاده از یک تبدیل یکانی بصورت

$$U_R=\exp\left(\frac{iM(t)\dot\rho_R}{2\hbar\rho_R}R^2\right)$$

ناوردای پویا را بازنویسی کنیم. نحوه اثرگذاری این تبدیل بر روی ناوردای پویا بصورت $I'_R = U_R I_R U_R^{\dagger}$ می باشد. نتیجه این تبدیل یکانی می شود

$$I'_R(t) = \frac{1}{2}\left(\rho_R^2(t) P_R^2 + \frac{R^2}{\rho_R^2(t)}\right). \quad (۷.۳)$$

معادله ویژه مقداری برای ناوردای پویا بصورت $I'_R \Phi'_R = \lambda_R \Phi'_R$ می باشد که $\Phi_R = U_R \Phi'_R$. با اتخاذ صورت عملگری تکانه و همچنین تغییر متغیر $\xi = \frac{R}{\rho_R}$ به معادله

$$\frac{d^2 \Phi'_R}{d\xi^2} + \frac{1}{\hbar^2}\left(2\lambda_R - \xi^2\right) \Phi'_R = 0, \quad (۸.۳)$$

می رسیم. این معادله دارای جواب هایی بر اساس چند جمله ای های لاگر وابسته بصورت

$$\begin{aligned} \Phi'_{n,R}(R) &= \left(\tfrac{R}{\rho_R}\right) \exp\left(\tfrac{-1}{2\hbar}\left(\tfrac{R}{\rho_R}\right)^2\right) L_n^{\frac{1}{2}}\left(\tfrac{1}{\hbar}\left(\tfrac{R}{\rho_R}\right)^2\right), \\ \lambda_{n,R} &= \hbar\left(2n + \tfrac{3}{2}\right). \end{aligned} \quad (۹.۳)$$

می باشد. همچنین عامل فازی برای این قسمت به صورت

$$\alpha_{n,R}(t) = -\left(2n + \tfrac{3}{2}\right) \int_0^t \frac{dt'}{M(t)\rho_R^2(t)}. \quad (۱۰.۳)$$

می باشد. اما برای قسمت مربوط به مختصات نسبی r نیز عملیاتی مشابه را می توان دنبال کرد بدین صورت که ناورداری پویا بایستی این گونه پیشنهاد شود که

$$I_r(t) = \frac{1}{2}\left(\delta(t)\left(P_r^2 + \frac{2c'}{r^2}\right) + \varepsilon(t) r^2 + \phi(t)\{P_r, r\}\right) \quad (۱۱.۳)$$

ضرایب وابسته به زمان با استفاده رابطه تحول زمانی حاکم بر ناوردای پویا قابل دستیابی هستند که در فصل قبل تشریح شد. پس فرم ناوردای پویا بصورت

$$I(t) = \frac{1}{2}\left(\rho_r^2\left(P_r^2 + \frac{c}{r^2}\right) + \left(\frac{1}{\rho_r^2} + (\mu(t)\dot{\rho}_r(t))^2\right) r^2 - \rho_r \dot{\rho}_r \mu(t)\{P_r, r\}\right). \quad (۱۲.۳)$$

می باشد که پارامتر $\rho_r(t)$ نیز بایستی معادله

$$\ddot{\rho}_r(t) + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\dot{\rho}_r(t) + \omega^2(t)\rho_r(t) = \frac{1}{\mu^2(t)\rho_r(t)}, \quad (۱۳.۳)$$

را ارضا کند. برای بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویای این قسمت نیز برای سهولت ابتدا از تبدیل یکانی

$$U_r = \exp\left(\frac{i\mu(t)\dot{\rho}_r}{2\hbar\rho_r} r^2\right)$$

استفاده می کنیم. این تبدیل با توجه به $I'_r = U_r I_r U_r^\dagger$ ناوردای پویا جدید را به صورت ساده تری تبدیل میکند

$$I'_R(t) = \frac{1}{2}\left(\rho_r^2(t)\left(P_r^2 + \frac{c}{r^2}\right) + \frac{r^2}{\rho_r^2(t)}\right). \tag{۱۴.۳}$$

با تعریف متغیر جدید $\eta = \frac{r}{\rho_r}$ و استفاده از رابطه ویژه مقداری برای ناوردای پویا تبدیل یافته به صورت $I'_r\Phi'_r = \lambda_r\Phi'_r$ که $\Phi_r = U_r\Phi'_r$ می باشد. معادله حاکم بر این ویژه توابع بدین صورت بدست می آید

$$\frac{d^2\Phi'_r}{dr^2} + \frac{1}{\hbar^2}\left(2\lambda_r - \eta^2 - \frac{c}{\eta^2}\right)\Phi'_r = 0. \tag{۱۵.۳}$$

معادله (۱۵.۳) نیز توسط چند جمله ای های لاگر با ویژه مقادیر زیر ارضا می شود

$$\begin{aligned}\Phi'_{m,r} &= \left(\frac{r}{\rho_r}\right)^{\frac{1}{2}\left(1+2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{c}{\hbar^2}}\right)} \exp\left(\frac{-1}{\hbar^2}\left(\frac{r}{\rho_r}\right)^2\right) L_m^{\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{c}{\hbar^2}}}\left(\frac{2}{\hbar}\left(\frac{r}{\rho_r}\right)^2\right),\\ \lambda_{m,r} &= 2\hbar\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{c}{\hbar^2}} + (2m+1)\right).\end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

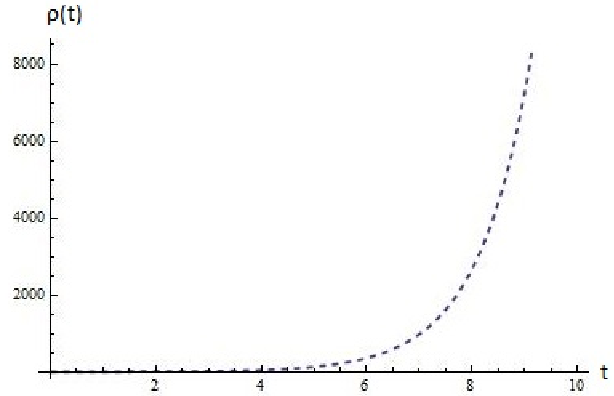
همچنین عامل فازی برای این قسمت داریم

$$\alpha_{m,r}(t) = -2\hbar\left(\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{c}{\hbar^2}} + (2m+1)\right)\int_0^t \frac{dt'}{\mu(t)\rho_r^2(t)}. \tag{۱۷.۳}$$

پس از این محاسبات می توان تابع موج را در نهایت این گونه نوشت

$$\Psi(R,r,t) = \sum_{n,m} C_{n,m}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha_{n,R}\right)\Phi_{n,R}\exp\left(\frac{i}{\hbar}\alpha_{m,r}\right)\Phi_{m,r}. \tag{۱۸.۳}$$

اما برای داشتن یک درک فیزیکی از آنچه که در حال رخداد می باشد در این سیستم بایستی رفتار پارامتر ρ که در تابع موج ظاهر شده است، مورد بررسی قرار بگیرد. ما بر اساس معادله (۶.۳) و (۱۳.۳) با در نظر گرفتن حالتی خاص به صورت $\omega(t) = M(t) = \mu(t) = e^{-\lambda t}$ و همچنین با قرار دادن مقادیر $\lambda = 1,\ \rho(0) = 1,\ \dot{\rho}(0) = 0$ رفتار این پارامتر را به صورت عددی رسم کرده ایم.



شکل ۱.۳: رفتار $\rho(t)$ ناوردای پویا در سیستم نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان دو جسمی بر حسب زمان.

با توجه به ماهیت صعودی این پارامتر در این حالت خاص و جایگاه آن در معادله موج بدست آمده می توان دید که با گذر زمان تابع موج به سمت صفر میل می کند و این بدین معنی است که سیستم در حال زوال است و از بین می رود. این زوال ناشی از برهمکنش وابسته به زمان است که انرژی را از سیستم خارج می کند.

۲.۳ سیستم بس ذره ای کوانتومی با جرم موثر متغیر در حضور برهمکنش نوسانگر هارمونیک و میدان الکتریکی وابسته به زمان

سیستم های بس ذره ای [۹] با جرم متغیر از جمله سیستم های مهم در مکانیک کوانتومی می باشند بخصوص نوسانگرهای هماهنگ که جرم آن ها وابسته به زمان باشد. [۱۲، ۱۳] این چنین سیستمی مورد مطالعه و بررسی جمع قابل توجهی از فیزیکدانان قرار گرفته است. [۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲] وابستگی جرم به زمان این تعبیر را به دنبال خود دارد که انرژی میان سیستم و محیط در حال تبادل است. [۱۹] به عنوان مثال می توان بر اساس این چنین مدلی می توان برهمکنش یک الکترون را با یک محیط پویا توصیف نمود. [۲۱] از طرفی چون این سیستم ها را می توان به صورت دقیق حل کرد لذا بیش تر مورد توجه قرار می گیرند.

سیستم بس ذره ای را در نظر بگیرید که بر آن یک برهمکنش محبوس کننده و همچنین میدان الکتریکی ای که با زمان می تواند تغییر کند اعمال می شود. همچنین ذرات سیستم نیز بدون برهمکنش نیستند و باهم در حال برهکنش می باشند. هامیلتونی این سیستم در حالت کلی بصورت زیر می باشد

$$H(t)=\frac{۱}{۲}\sum_i\left(\frac{p_i^۲}{m(t)}+\tilde{\mathbf{r}}_i.\mathbf{K}(t).\mathbf{r}_i\right)+\sum_{i\neq j}u(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)+\mathbf{f}(t).\mathbf{r} \qquad (۱۹.۳)$$

که در آن $\mathbf{E}(t)=\mathbf{f}(t)/q$ می باشد. برای سهولت فرض می کنیم که عامل تانسوری برهمکنش محبوس کننده قطری باشد. یعنی

$$\tilde{\mathbf{r}}_i.\mathbf{K}(t).\mathbf{r}_i=m(t)\left(\omega_x^۲(t)x_i^۲+\omega_y^۲(t)y_i^۲+\omega_z^۲(t)z_i^۲\right), \qquad (۲۰.۳)$$

همچنین برهمکنش نسبی ذرات بصورت

$$u(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j)=\frac{۱}{۲}k(t)|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^۲, \qquad (۲۱.۳)$$

باشد. با جایگذاری معادلات (۲۰.۳)و (۲۱.۳) در معادله (۱۹.۳) داریم

$$H(t)=\frac{۱}{۲}\sum_i\left(\frac{p_i^۲}{m(t)}+m(t)(\omega.\mathbf{r}_i)^۲\right)+\sum_{i\neq j}\frac{۱}{۲}k(t)|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_j|^۲+\mathbf{f}(t).\mathbf{r}_i. \qquad (۲۲.۳)$$

که در این جا فرض ما بر این است که ذرات هم جرم هستند همچنین از اثرات القایی مغناطیسی نیز صرف نظر شده است. برای بررسی این چنین سیستم بس ذره ای بایستی مختصات تعمیم یافته ژاکوبی را بصورت زیر اتخاذ کنیم

[۹] Quantum many-body system

$$\mathbf{R}^{(۱)} \equiv \mathbf{R} = \frac{۱}{N}\sum_i \mathbf{r}_i, \quad \hat{\mathbf{P}}^{(۱)} \equiv \hat{\mathbf{P}} = \sum_i \hat{\mathbf{p}}_i, \tag{۲۳.۳}$$

$$\begin{aligned} &X^{(۲)} = x_۱ - x_۲,\\ &X^{(۳)} = x_۱ + x_۲ - ۲x_۳,\\ &.\\ &.\\ &.\\ &X^{(N)} = x_۱ + x_۲ + ... + x_{N-۱} - (N-۱)x_N. \end{aligned} \tag{۲۴.۳}$$

بدیهی است که برای دیگر مختصات نیز به طور مشابه ای کار را انجام می دهیم یعنی $Z^{(۲)}, ..., Z^{(N)}$ ، $Y^{(۲)}, ..., Y^{(N)}$ و $P^{(۲)}, ..., P^{(N)}$ مشابه (۲۴.۳) تعریف می شوند. با اعمال این تغییرات فرم نهایی هامیلتونی بصورت

$$H = H_{cm} + H_{rel} \tag{۲۵.۳}$$

قابل تفکیک خواهد بود. نکته جالب توجه این است که اثر میدان الکتریکی فقط بر قسمت مرکز جرم وارد می شود

$$H_{cm} = \frac{\mathbf{P}^۲}{۲M(t)} + \frac{M(t)}{۲}\left(\omega_X^۲(t)X^۲ + \omega_Y^۲(t)Y^۲ + \omega_Z^۲(t)Z^۲\right) - \mathbf{F}(t).\mathbf{R}. \tag{۲۶.۳}$$

در معادله فوق مجموع جرم ها و مولفه های میدان الکتریکی متغیر با حروف بزرگ نمایش داده شده است. قسمت نسبی هامیلتونی نیز تبدیل به N نوسانگر جدا از هم تبدیل می شود

$$H_{rel} = \sum_{i=۲} \frac{\left(\mathbf{P}^{(i)}\right)^۲}{۲\mu_i(t)} + \eta_i(t)\left(\mathbf{R}^{(i)}\right)^۲, \tag{۲۷.۳}$$

هامیتونی مرکز جرم و نسبی هرکدام به طور مستقل عمل می کنند و بایستی بصورت جدا از هم بررسی شوند. تابع موج نهایی این سیستم از حاصلضرب تابع موج مربوط به قسمت مرکز جرم و نسبی بدست می آید

$$\Psi_{total=}\Psi_{cm}\Psi_{rel}. \tag{۲۸.۳}$$

در ابتدا قسمت نسبی را مورد بحث قرار می دهیم. چون نوسانگر ها مستقل از هم هستند لذا ناوردای پویا برای قسمت نسبی از مجموع ناورداهای پویای هر قسمت، همچنین تابع موج نهایی قسمت نسبی، از حاصلضرب تابع موج هرنوسانگر بدست می آید

$$I_{rel-tot} = \sum_{i=۲}^{N} I_i, \quad \Psi_{rel} = \prod_{i=۲}^{N} \Psi_i, \tag{۲۹.۳}$$

پس ما در این جا یک نوسانگر وابسته به زمان را در حالت کلی بحث می کنیم. یک نوسانگر وابسته به زمان را در نظر بگیرید. هامیلتونی این نوسانگر بصورت

$$H(q,t) = \frac{P_q^۲}{۲\mu(t)} + \frac{\mu(t)\omega^۲(t)q^۲}{۲}, \tag{۳۰.۳}$$

می باشد. ناوردای پویا را بدین گونه پیشنهاد می دهیم

$$I(t) = \frac{۱}{۲}\left(\alpha(t)P_q^۲ + \beta(t)q^۲ + \chi(t)\{P_q, R\}\right) \tag{۳۱.۳}$$

که ضرایب توابعی حقیقی از زمان هستند. با توجه به تحول زمانی ناوردای پویا که در فصل ۱ توضیح داده شده است، پس از عملیات ریاضی مناسب می توانیم ناوردای پویا را این گونه بدست آوریم

$$I(t) = \frac{۱}{۲}\left(\rho(t)P_q^۲ + \left(\frac{۱}{\rho_R(t)} + \rho^۲(t)\mu^۲(t)\right)q^۲ - \mu(t)\rho(t)\dot{\rho}(t)\{P_q, q\}\right) \tag{۳۲.۳}$$

که در معادله فوق پارامتر $\rho(t)$ بایستی در معادله زیر صدق کند

$$\ddot{\rho}(t) + \frac{\dot{\mu}(t)}{\mu(t)}\dot{\rho}(t) + \omega^۲(t)\rho(t) = \frac{۱}{\mu^۲(t)\rho(t)}. \tag{۳۳.۳}$$

قبل از محاسبه ویژه توابع عملگر ناوردای پویا از تبدیل یکانی

$$U_q = \exp\left(\frac{i\mu(t)\dot{\rho}(t)}{۲\hbar\rho(t)}q^۲\right)$$

بهره می بریم. این تبدیل عملگر ناوردای پویا را به فرم ساده تری تبدیل می کند. با استفاده از $I'_q = U_q I_q U_q^\dagger$ داریم

$$I'_q(t) = \frac{۱}{۲}\left(\rho^۲(t)P_q^۲ + \frac{q^۲}{\rho^۲(t)}\right) \tag{۳۴.۳}$$

همچنین برای ویژه توابع که با استفاده از تبدیل یکانی داریم $\Phi_q = U_q\Phi'_q$. پس معادله ویژه مقداری ناوردای پویا در نهایت می شود

$$I'_q\Phi'_q = \lambda_q\Phi'_q \tag{۳۵.۳}$$

که صورت دیفرانسیلی آن بصورت

$$\frac{d^2\Phi'_q}{d\xi^2} + \frac{1}{\hbar^2}(2\lambda_q - \xi^2)\Phi'_q = 0, \qquad (۳۶.۳)$$

که $\xi = \frac{q}{\rho}$. این معادله دارای جواب هایی بر حسب توابع لاگر وابسته به صورت

$$\begin{aligned} \Phi'_{q,n}(q) &= \left(\frac{q}{\rho_R}\right)\exp\left(\frac{-1}{2\hbar}\left(\frac{q}{\rho}\right)^2\right) L_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{q}{\rho}\right)^2\right) \\ \lambda_{n,q} &= \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right) \end{aligned} \qquad (۳۷.۳)$$

و عامل فازی آن

$$\alpha_{n,q}(t) = -\left(n+\frac{1}{2}\right)\int_0^t \frac{dt'}{\mu(t)\rho^2(t)}, \qquad (۳۸.۳)$$

می باشد. با داشتن این اطلاعات تابع موج نهایی این قسمت را می توان

$$\Psi_{rel} = \sum_n e^{i\alpha_{n,q}(t)}\Phi_{q,n}(q,t). \qquad (۳۹.۳)$$

. می توان دید که این محاسبات با در نظر گرفتن

$$\frac{\mu(t)\omega_i^2(t)}{2} \to \eta_i(t) \qquad (۴۰.۳)$$

این محاسبات کلی، قسمت نسبی هامیلتونی را پوشش می دهد.

با استفاده از عملگر های خلق و فنا

$$\begin{aligned} a_X^\dagger &= \sqrt{\frac{M(t)\omega_X(t)}{2\hbar}}\left(X - i\frac{P_X}{M(t)\omega_X(t)}\right), \\ a_X &= \sqrt{\frac{M(t)\omega_X(t)}{2\hbar}}\left(X + i\frac{P_X}{M(t)\omega_X(t)}\right), \\ \aleph_X &= a_X^\dagger a_X, \end{aligned} \qquad (۴۱.۳)$$

می خواهیم هامیلتونی مرکز جرم را در یک بعد ساده تر بنویسیم

$$H_X = \hbar\omega_X(t)\left(\aleph_X + \frac{1}{2}\right) - \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}}\left(a_X + a_X^\dagger\right) f_x(t). \quad (۴۲.۳)$$

برای بررسی تحول زمانی معادله (۲۹)، ناوردای پویا را بدین صورت پیشنهاد می دهیم

$$I_{cm}(t) = \theta(t)\aleph_X + \vartheta(t)\left(a_X + a_X^\dagger\right) + \nu(t)\left(a_X^\dagger - a_X\right) + \delta(t) \quad (۴۳.۳)$$

با استفاده از تحول زمانی عملگر ناوردای پویا داریم

$$\begin{aligned}
&\theta = \text{ثابت},\\
&\vartheta = \text{ثابت}\ ,\\
&\nu(t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{e^{i\int \omega_X(t)dt}}\left(-i\int e^{i\int \omega_X(t)dt}\left(\vartheta\omega_X(t) + \frac{\theta g(t)}{\hbar}\right)\right)\right] + \text{ثابت},\\
&\delta(t) = -2\int g(t)\nu(t) + \text{ثابت},\\
&g(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M(t)\omega_X(t)}}f(t).
\end{aligned} \quad (۴۴.۳)$$

ویژه تابع های ناوردای پویا را بر اساس ویژه حالات نوسانگر می نویسیم

$$|\lambda,\kappa;t\rangle = \sum_n C_n |n\rangle\,. \quad (۴۵.۳)$$

که C_n مقداری ثابت است. با اثر دادن (۴۳.۳) بر روی آن داریم

$$\begin{aligned}
&|\lambda,\kappa;t\rangle = \sum_n C_n(\theta n|n\rangle + \vartheta(\sqrt{n}|n-1\rangle + \sqrt{n+1}|n+1\rangle) +\\
&\nu(t)(\sqrt{n+1}|n+1\rangle - \sqrt{n}|n-1\rangle) + \delta(t)|n\rangle)
\end{aligned}\ . \quad (۴۶.۳)$$

برای تابع موج این قسمت نیز آن را بر اساس ویژه توابع ناوردای پویا بسط می دهیم.

در این قسمت نیز براحتی این موضوع قابل مشاهده است که با رسم کردن پارامتر ρ دارای یک ماهیت صعودی است و با لحاظ کردن جایگاه این پارامتر در تابع موج به این نتیجه می رسیم که با گذر زمان این سیستم ار بین خواهد رفت.

۳.۳ معادله پاولی در حضور برهمکنش وابسته به زمان

در مکانیک کوانتومی برای توصیف یک ذره باردار متحرک در یک میدان مغناطیسی از معادله پاولی [۱۰] استفاده می کنند. یکی از مهم ترین نتایج استفاده از این معادله در حضور یک میدان مغناطیسی ثابت که بر صفحه xy عمود است، تراز های لانداو [۱۱] می باشد. [۲۳] همچنین آهارنو [۱۲] و کاشر [۱۳] توانستند با در نظر گرفتن یک میدان مغناطیسی $B\hat{z} = B(x,y)$ که عمود بر صفحه xy بود این مسئله را به صورت دقیق حل کردند. [۲۴] در این قسمت معادله پاولی را در حضور برهمکنش وابسته به زمان بررسی خواهیم کرد. این معادله در حالت کلی به شکل

$$H = \frac{۱}{۲M}(\mathbf{P} - q\mathbf{A})^۲ + \frac{q\hbar}{۲M}\sigma.\mathbf{B} + q\phi, \tag{۴۷.۳}$$

دارد. به منظور سهولت در محاسبات در این قسمت فرض می کنیم که $q = c = \hbar = ۱$. با این انتخاب معادله (۴۷.۳) شکل ساده تر

$$H = \frac{۱}{۲M}\left(\mathbf{P}^۲ + \frac{B_\circ^۲}{۴}\left(x^۲ + y^۲\right) + \sigma_z B_\circ - B_\circ L_z\right) + \phi, \tag{۴۸.۳}$$

را به خود می گیرد. چون مولفه سوم تکانه زاویه ای در معادله (۴۸.۳) ظاهر شده است لذا تابع موج را به صورت $\Psi(x,y,t) = e^{im\varphi}\psi(x,y,t)$ قرار می دهیم. این انتخاب معادله (۴۸.۳) را تبدیل می کند به

$$H = \frac{۱}{۲M}\left(P_\rho^۲ + B_\circ^۲\left(\frac{\rho^۲}{۴} + ۲S - m\right)\right) + \phi, \tag{۴۹.۳}$$

که قرار است این مسئله در مختصات استوانه ای بررسی شود، پس فرم عملگری تکانه به صورت $P_\rho^۲ = \frac{-۱}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial}{\partial\rho})$ می شود. برای این قسمت بر همکنشش وابسته به زمان را به صورت

$$\phi(\rho,t) = a(t)\rho^۲ + \frac{b}{۲M(t)\rho^۲}،$$

در نظر بگیریم. با حضور این برهمکنش، هامیتونی ای که قرار است در نظر گرفته شود

$$H = \frac{P_\rho^۲}{۲M(t)} + \left(a(t) + \frac{B_\circ}{۸M(t)}\right)\rho^۲ + \frac{b}{۲M(t)\rho^۲} + ۲S - m, \tag{۵۰.۳}$$

[۱۰] Pauli equation
[۱۱] Landaus levels
[۱۲] Aharonov
[۱۳] Casher

می باشد.
ناوردای پویای مناسب برای هامیلتونی (۵۰.۳) با توجه به توضیحات داده شده در فصل ۱ به صورت زیر می باشد

$$I(t)=\frac{۱}{۲}\left(\rho^{۲}\left(\frac{۱}{\xi^{۲}(t)}+(M(t)\xi(t))^{۲}\right)+\xi^{۲}(t)\left(P_{\rho}^{۲}+\frac{b}{\xi^{۲}(t)}\right)-۲\dot{\xi}(t)\xi(t)M(t)\{\rho,P_{\rho}\}\right), \tag{۵۱.۳}$$

که در معادله فوق تابع واسطه $\xi(t)$ معادله

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}(t)+\tfrac{\dot{M}(t)}{M(t)}\dot{\xi}(t)+\tfrac{\Omega(t)}{M(t)}=\tfrac{۱}{M^{۲}(t)\xi^{۳}(t)},\\&\Omega(t)=a(t)+\tfrac{B_{۰}}{۸M(t)}.\end{aligned} \tag{۵۲.۳}$$

را ارضا نماید. قبل از محاسبه ویژه توابع ناوردای پیشنهادی، بایستی از تبدیل یکانی

$$U=\exp\left(\tfrac{iM(t)\dot{\xi}(t)}{۲\xi(t)}\rho^{۲}\right)$$

استفاده نمود. به کمک این تبدیل یکانی و $I'(t)=UI(t)U^{\dagger}$ جدید ناوردای پویا را این گونه بدست می آوریم

$$I'(t)=\frac{۱}{۲}\left(\frac{\rho^{۲}}{\xi^{۲}(t)}+\xi^{۲}(t)\left(P_{\rho}^{۲}+\frac{b}{\xi^{۲}(t)}\right)\right). \tag{۵۳.۳}$$

با در نظر گرفتن ویژه توابع به صورت $\Phi(\rho,t)=U\Lambda(\rho,t)$ معادله دیفرانسیل حاکم برای ویژه توابع

$$\frac{d^{۲}\Lambda(\zeta)}{d\zeta^{۲}}+\frac{۱}{\zeta}\frac{d\Lambda(\zeta)}{d\zeta}+\left(\frac{۲\lambda\zeta^{۲}-\zeta^{۴}-b}{\zeta^{۲}}\right)\Lambda(\zeta)=۰, \tag{۵۴.۳}$$

می باشد که $\zeta=\frac{\rho}{\xi(t)}$ تعریف شده است. معادله(۵۴.۳) دارای جواب هایی بر حست توابع لاگر وابسته به صورت

$$\begin{aligned}&\Lambda(\rho,t)=\left(\tfrac{\rho}{\xi(t)}\right)^{\sqrt{b}}\exp\left(\tfrac{-\rho}{۲\xi(t)}\right)L_{n}^{\sqrt{b}}\left(\left(\tfrac{\rho}{\xi(t)}\right)^{۲}\right),\\&\lambda_{n}=-\left(۲n+۱+\sqrt{b}\right),\end{aligned} \tag{۵۵.۳}$$

می باشد. همچنین عامل فازی برای این مسئله

$$\alpha_{\lambda,\kappa}(t)=\exp\left(\frac{۲n+۱+\sqrt{b}}{\hbar}\int\frac{dt}{M(t)\xi^{۲}(t)}\right), \tag{۵۶.۳}$$

است. لذا فرم نهایی تابع موج به صورت زیر می باشد

$$\Psi(\rho,t) = e^{im\varphi}\sum_n C_n\left(\exp\left(\frac{2n+1+\sqrt{b}}{-i\hbar}\int\frac{dt}{M(t)\xi^2(t)}\right)\right)\left(\exp\left(\frac{iM(t)\dot{\xi}(t)}{2\xi(t)}\rho^2\right)\right)$$
$$\times\left(\left(\frac{\rho}{\xi(t)}\right)^{\sqrt{b}}\exp\left(\frac{-\rho}{2\xi(t)}\right)L_n^{\sqrt{b}}\left(\left(\frac{\rho}{\xi(t)}\right)^2\right)\right). \qquad (۵۷.۳)$$

با در نظر گرفتن معادله (۵۲.۳) که گویای رفتار پارامتر ξ می باشد می توان دید که شکل مشابه این معادله دیفرانسیل درقسمت های قبل به تصویر کشیده شد و چون این پارامتر با گذر زمان روندی افزایشی به خود می گرفت و از طرفی با یادآوری جایگاه این پارامتر در معادله موج، می توان دید که با گذر زمان معادله موج به سمت صفر گرایش پیدا می کند و این یعنی که سیستم پس از گذر زمان از بین می رود.

۴.۳ برهمکنش هارمونیک وابسته به زمان دوگانه حلقه ای شکل پوش-تلر

برهمکنش هارمونیک وابسته به زمان دوگانه حلقه ای شکل پوش-تلر [۱۴] [۲۶] ، در مختصات کروی به صورت

$$
\begin{aligned}
&V(\vec{r},t)=\tfrac{1}{2}M(t)\omega^{2}(t)r^{2}+\tfrac{U(\theta,\varphi)}{M(t)r^{2}},\\
&U(\theta,\varphi)=V(\theta)+\tfrac{\alpha^{2}V(\varphi)}{\sin^{2}(\theta)},\\
&V(\theta)=\tfrac{b}{\sin^{2}(\theta)}+\tfrac{A(A-1)}{\cos^{2}(\theta)},\\
&V(\varphi)=\tfrac{D(D-1)}{\sin^{2}(\alpha\varphi)}+\tfrac{C(C-1)}{\cos^{2}(\alpha\varphi)},\\
&A,C,D,b,\alpha=\text{ثابت}.
\end{aligned}
\tag{۵۸.۳}
$$

می باشد. معادله شرودینگر را در حضور این بر همکنش در نظر می گیریم

$$
\begin{aligned}
&H(\vec{r},t)=\tfrac{P^{2}}{2M(t)}+\tfrac{1}{2}M(t)\omega^{2}(t)r^{2}\\
&+\tfrac{1}{M(t)r^{2}}\left(\left(\tfrac{b}{\sin^{2}(\theta)}+\tfrac{A(A-1)}{\cos^{2}(\theta)}\right)+\tfrac{\alpha^{2}}{\sin^{2}(\theta)}\left(\tfrac{D(D-1)}{\sin^{2}(\alpha\varphi)}+\tfrac{C(C-1)}{\cos^{2}(\alpha\varphi)}\right)\right),
\end{aligned}
\tag{۵۹.۳}
$$

برای بدست آوردن ناوردای پویای مناسب این مسئله ابتدا عملگر های جدید زیر را تعریف می کنیم

$$
\begin{aligned}
&T_{1}=P^{2}+\tfrac{2U(\theta,\varphi)}{r^{2}},\\
&T_{2}=r^{2},\\
&T_{3}=rP_{r}+P_{r}r,
\end{aligned}
\tag{۶۰.۳}
$$

جبر حاکم بر این عملگر های جدید عبارتست از

$$
[T_{1},T_{2}]=-2i\hbar T_{3},\qquad [T_{2},T_{3}]=4i\hbar T_{2},\qquad [T_{1},T_{3}]=-4i\hbar T_{1}. \tag{۶۱.۳}
$$

این عملگر های جدید ما را برای بدست آوردن ناوردای پویای مناسب برای این مسئله کمک می کند. با استفاده از عملگرها ناوردای پویای مناسب برای این مسئله به شکل زیر می باشد

$$
I(t)=\frac{1}{2}\left((\frac{1}{\rho^{2}}+M^{2}\dot{\rho}^{2})r^{2}+(P^{2}+\frac{2U(\theta,\varphi)}{r^{2}})\rho^{2}-\rho\dot{\rho}M(rP_{r}+P_{r}r)\right), \tag{۶۲.۳}
$$

[۱۴] Pöschl-Teller double-ring shaped

که در معادله (۶۲.۳) پارامتر ρ بایستی معادله زیر

$$\ddot{\rho}+\frac{\dot{M}}{M}\dot{\rho}+\omega^{2}\rho=\frac{1}{M^{2}\rho^{3}}. \tag{۶۳.۳}$$

را ارضا کند. برای بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویا از از تبدیل یکانی استفاده می کنیم که فرآیند بدست آوردن این ویژه توابع را آسانتر نماید

$$\Phi(\vec{r},t)=S\Phi'(\vec{r},t)=\exp\left(\tfrac{iM\dot{\rho}}{2\hbar\rho}r^{2}\right)\Phi'(\vec{r},t). \tag{۶۴.۳}$$

با توجه به این تبدیل یکانی، فرم ناوردای پویا نیز بصورت $I'(t)=S^{\dagger}I(t)S$ تغییر می کند، داریم

$$I'(t)=\frac{1}{2}\left(\rho^{2}(P^{2}+\frac{2U(\theta,\varphi)}{r^{2}})+\frac{r^{2}}{\rho^{2}}\right). \tag{۶۵.۳}$$

حال رابطه ویژه مقداری $I'(t)\Phi'(\vec{r},t)=\lambda\Phi'(\vec{r},t)$ را با تغییر متغیر $X_i=\frac{x_i}{\rho},(i=1,2,3)$ و همچنین استفاده از روش جداسازی متغیر ها برای ویژه توابع به صورت $\Phi'(R,\theta,\varphi)=\frac{F(R)}{R}H(\theta)K(\varphi)$ ، تبدیل به سه معادله دیفرانسیلی زیر می کنیم

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d^{2}F(R)}{dR^{2}}+\tfrac{1}{\hbar^{2}}\left(2\lambda-R^{2}-\tfrac{\hbar^{2}\nu}{R^{2}}\right)F(R)=0,\\
&\tfrac{d^{2}H(\theta)}{d\theta^{2}}+\cot(\theta)\tfrac{dH(\theta)}{d\theta}+\left(\nu-\left(\tfrac{\frac{2b}{\hbar^{2}}+\gamma}{\sin^{2}(\theta)}+\tfrac{\frac{2}{\hbar^{2}}A(A-1)}{\cos^{2}(\theta)}\right)\right)H(\theta)=0,\\
&\tfrac{d^{2}K(\varphi)}{d\varphi^{2}}+\left(\gamma-\tfrac{2\alpha^{2}}{\hbar^{2}}\left(\tfrac{D(D-1)}{\sin^{2}(\alpha\varphi)}+\tfrac{C(C-1)}{\cos^{2}(\alpha\varphi)}\right)\right)K(\varphi)=0.
\end{aligned} \tag{۶۶.۳}$$

که جواب های معادلات فوق بصورت

$$\begin{aligned}
&F_{n_1}(R)=R^{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\nu}\right)}L_{n_1}^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu}}\left(\tfrac{R^{2}}{\hbar}\right)exp\left(\tfrac{-R^{2}}{2\hbar}\right),\\
&H_{n_2}(\theta)=(\cos\theta)^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-e}}(\sin\theta)^{\sqrt{-d}}P_{n_2}^{\left(\sqrt{\frac{1}{4}-e},\sqrt{-d}\right)}(1-2\cos^{2}\theta),\\
&K_{n_3}(\varphi)=(\cos(\alpha\varphi))^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+g}}(\sin(\alpha\varphi))^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f}}P_{n_3}^{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+g},\sqrt{\frac{1}{4}+f}\right)}(1-2\cos^{2}(\alpha\varphi)).
\end{aligned} \tag{۶۷.۳}$$

می باشند. همچنین روابط ویژه مقداری حاکم بر آن ها عبارتست از

$$\begin{aligned}&\lambda = \hbar\left((2n_1+1)+\tfrac{1}{2}\sqrt{1+4\nu}\right),\\&(2n_2+1)\left(n_2+\tfrac{1}{2}+\sqrt{-d}+\sqrt{\tfrac{1}{4}-e}\right)+2\sqrt{\tfrac{1}{4}-e}\left(1+\tfrac{\sqrt{-d}}{2}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}+\nu+d-e\right),\\&n_3^2+\tfrac{(2n_3+1)}{2}\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}+g}+\sqrt{\tfrac{1}{4}+f}+1\right)+\sqrt{\tfrac{1}{4}+g}\left(1+\frac{\sqrt{\frac{1}{4}+f}}{2}\right)=\tfrac{1}{4}(g+1-f-h),\end{aligned} \tag{۶۸.۳}$$

در معالات فوق ثابت های جدید نیز بدین صورت تعریف شده اند

$$\begin{aligned}&d=\tfrac{-2b}{\hbar^2}-\gamma,\quad e=\tfrac{-2A(A-1)}{\hbar^2},\quad f=\tfrac{-2D(D-1)}{\hbar^2},\\&g=\tfrac{-2C(C-1)}{\hbar^2},\quad h=\tfrac{\gamma}{\alpha^2}.\end{aligned} \tag{۶۹.۳}$$

فرم نهایی ویژه توابع پس از قرار دادن معادلات (۶۷.۳) در فرم جداسازی متغیر بدست می آید

$$\begin{aligned}&\Phi'(\vec{r},t)=\frac{R^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+4\nu})}}{R}L_n^{\frac{1}{2}\sqrt{1+4\nu}}\left(\tfrac{R^2}{\hbar}\right)exp\left(\tfrac{-R^2}{2\hbar}\right)\\&\times(\cos\theta)^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-e}}(\sin\theta)^{\sqrt{-d}}P_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4}-e},\sqrt{-d}\right)}(1-2\cos^2\theta)\\&\times(\cos(\alpha\varphi))^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+g}}(\sin(\alpha\varphi))^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+f}}P_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+g},\sqrt{\frac{1}{4}+f}\right)}(1-2\cos^2(\alpha\varphi)).\end{aligned} \tag{۷۰.۳}$$

و در نهایت برای تابع موج نهایی سیستم داریم

$$\begin{aligned}&\Psi(r,\theta,\varphi)=\sum_n C_n e^{\frac{i}{\hbar}\lambda_n\int\frac{dt}{M(t)\rho^2(t)}}\Phi_n(\vec{r},t),\quad (۳۹)\\&C_n=\text{ثابت}.\end{aligned} \tag{۷۱.۳}$$

که در رابطه فوق λ_n از حذف ثابت های جداسازی γ و ν در رابطه های ویژه مقداری محاسبه می شود.

در این مسئله نیز باز شاهد بوجود آمدن معادله دیفرانسیل آشنا (۶۳.۳) هستیم. همانطور که در قسمت های قبل توضیح داده شد وجود چنین معادله دیفرانسیلی حاکم بر پارامتر ρ باعث می شود که این پارامتر از ماهیت صعودی برخوردار گردد و با توجه به جایگاه این پارامتر در تابع موج به سهولت استنتاج شد که با گذر زمان این سیستم از بین برود.

۵.۳ نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان در فضای جابجایی و فضای فاز ناجابجایی

در این قسمت نوسانگر هارمونیک وابسته به زمانی را در نظر می گیریم که علاوه بر دارا بودن فرکانس زاویه ای وابسته به زمان، از جرم وابسته به زمان نیز برخوردار می باشد. هامیلتونی این نوسانگر بصورت

$$H = \frac{p_x^۲}{۲M(t)} + \frac{M(t)\omega_x^۲(t)}{۲}x^۲, \quad (۷۲.۳)$$

می باشد. با در نظر گرفتن فرم پیشنهادی ناوردای پویا بصورت

$$I(t) = \chi_۱(t)x^۲ + \chi_۲(t)p_x^۲ + \chi_۳(t)\{x, p_x\}, \quad (۷۳.۳)$$

و دنبال کردن روشی که در فصل اول به آن اشاره گردید، می توان این ناوردا را این چنین بدست آورد

$$I(t) = \frac{۱}{۲}\left(\rho^۲(t)p_x^۲ + x^۲\left(\frac{۱}{\rho^۲(t)} + \dot{\rho}^۲(t)M(t)\right) - M(t)\rho(t)\dot{\rho}(t)\{p_x, x\}\right), \quad (۷۴.۳)$$

که در پارامتر $\rho(t)$ بایستی معادله زیر را ارضا نماید

$$\ddot{\rho}(t) + \frac{\dot{M}(t)}{M(t)}\dot{\rho}(t) + \rho(t)\omega^۲(t) = \frac{۱}{M^۲(t)\rho^۳(t)}. \quad (۷۵.۳)$$

با استفاده کردن تبدیل $U = \exp\left(\frac{-iM(t)\dot{\rho}(t)x^۲}{۲\hbar\rho(t)}\right)$ فرآیند بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویا ساده تر می شود اگر $\Phi'(x,t) = U\Phi(x,t)$ و $I' = UIU^\dagger$ باشند. لذا معادله ویژه مقداری برای بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویا شکل $I'\Phi'(x,t) = \lambda\Phi'(x,t)$ به خود می گیرد که با استفاده از صورت های دیفرانسیلی عملگر تکانه داریم

$$\frac{۱}{۲}\left(-\hbar^۲\rho^۲(t)\frac{d^۲}{dx^۲} + \frac{x^۲}{\rho^۲(t)}\right)\Phi'(x,t) = \lambda\Phi'(x,t). \quad (۷۶.۳)$$

این چنین معادله ای را می توان ابتدا با تغییر متغیر $\sigma(t) = \frac{x}{\rho(t)}$ به فرم ساده تر

$$\frac{d^۲\Phi'}{d\sigma^۲(t)} + \left(\frac{-\sigma^۲(t)}{\hbar^۲} + \frac{۲\lambda}{\hbar^۲}\right)\Phi' = ۰, \quad (۷۷.۳)$$

تبدیل نمود. اگر از متغیر $y = \sigma^۲$ استفاده کنیم، معادله فوق را می توان تبدیل کرد به

$$\frac{d^2\Phi'}{dy^2(t)}+\frac{\frac{1}{2}}{y(t)}\frac{d\Phi'}{dy(t)}+\frac{1}{y^2(t)}\left(\frac{-y^2}{4\hbar^2}+\frac{\lambda y}{2\hbar^2}\right)\Phi'=0. \tag{۷۸.۳}$$

جواب های این معادله را می توان بر حسب چندجمله ای های لاگر بدست آورد. در نهایت ویژه توابع ناوردای پویا را می توان این چنین نوشت

$$\begin{aligned}&\Phi'(x,t)=\left(\frac{x}{\rho(t)}\right)\exp\left(\frac{-1}{2\hbar}\left(\frac{x}{\rho(t)}\right)^2\right)L_n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\hbar}\left(\frac{x}{\rho(t)}\right)^2\right),\\&\lambda=\hbar\left(2n+\frac{3}{2}\right).\end{aligned} \tag{۷۹.۳}$$

همچنین عامل فازی آن بصورت

$$\alpha(t)=-\left(2n+\frac{3}{2}\right)\int_0^t\frac{dt}{M(t)\rho^2(t)}, \tag{۸۰.۳}$$

می باشد.
حال یک نوسانگر را در فضای فاز ناجابجایی وابسته به زمان در نظر می گیریم. هامیلتونی این نوسانگر در این فضا بصورت

$$H=\frac{1}{2M(t)}\left(P_X^2+P_Y^2\right)+\frac{M(t)\omega^2(t)}{2}\left(X^2+Y^2\right), \tag{۸۱.۳}$$

می باشد. حروف بزرگ نمایانگر متغیر در فضای فاز ناجابجایی می باشند. اگر از تبدیلات زیر استفاده کنیم

$$\begin{aligned}X&=x-\frac{\Theta(t)}{2\hbar}p_y,\\Y&=y+\frac{\Theta(t)}{2\hbar}p_x,\\P_x&=p_x+\frac{\Omega(t)}{2\hbar}y,\\P_y&=p_y-\frac{\Omega(t)}{2\hbar}x.\end{aligned} \tag{۸۲.۳}$$

که $\Omega(t)$ و $\Theta(t)$ پارامترهای فضای فاز ناجابجایی می باشند. [۲۷] با استفاده این تبدیلات می توان هامیلتونی (۸۱.۳) را بر اساس متغیر های فضای جابجایی نوشت

$$H = \frac{a(t)}{۲}\left(p_x^۲ + p_y^۲\right) + \frac{b(t)}{۲}\left(x^۲ + y^۲\right) + \frac{c(t)}{۲}\left(p_x y - x p_y\right),$$
$$a(t) = \frac{۱}{M(t)} + \frac{M(t)\omega^۲(t)\Theta^۲(t)}{۴\hbar^۲},$$
$$b(t) = M(t)\omega^۲(t) + \frac{\Omega^۲(t)}{۴\hbar^۲ M(t)},$$
$$c(t) = \frac{M(t)\omega^۲(t)\Theta(t)}{\hbar} + \frac{\Omega(t)}{\hbar M(t)}. \quad (۸۳.۳)$$

آخرین جمله ظاهر شده در هامیلتونی، مولفه z تکانه زاویه ای می باشد. با لحاظ کردن این نکته در هامیتونی داریم

$$H = \frac{a(t)}{۲}\left(p_x^۲ + p_y^۲\right) + \frac{b(t)}{۲}\left(x^۲ + y^۲\right) - \frac{c(t)}{۲}L_z. \quad (۸۴.۳)$$

برای این صورت از هامیلتونی راحت تر این است که تابع موج متناظر با این سیستم را بصورت $\Psi(x,y,t) = e^{im\varphi}\psi(x,y,t)$ در نظر بگیریم. با این کار داریم

$$H = \frac{a(t)}{۲}\left(p_x^۲ + p_y^۲\right) + \frac{b(t)}{۲}\left(x^۲ + y^۲\right) - \frac{c(t)}{۲}m. \quad (۸۵.۳)$$

برای بدست آوردن $\psi(x,y,t)$ از ناوردای پویا کمک می گیریم. ناوردای پویای مناسب حال هامیلتونی (۸۵.۳) به صورت

$$I_{NC}(t) = \frac{۱}{۲}\left(\rho_{NC}^۲(t)P_r^۲ - ۲\frac{\rho_{NC}(t)\dot{\rho}_{NC}(t)}{a(t)}\{P_r, r\} + \frac{r^۲}{\rho_{NC}^۲(t)}\left(۱ + \left(\frac{\rho_{NC}(t)\dot{\rho}_{NC}(t)}{a(t)}\right)^۲\right)\right), \quad (۸۶.۳)$$

می باشد که شرط لازم برای پارامتر $\rho_{NC}(t)$ ، ارضا نمودن معادله

$$\ddot{\rho}_{NC}(t) - \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\dot{\rho}_{NC}(t) + (a(t)b(t))\rho_{NC}(t) = \frac{a^۲(t)}{\rho_{NC}^۳(t)} \quad (۸۷.۳)$$

می باشد. اگر از تبدیل یکانی $U_{NC} = \exp\left(\frac{-i\dot{\rho}_{NC}(t)r^۲}{۲\hbar a(t)\rho_{NC}(t)}\right)$ ، متغیر جدید $\xi(t) = \frac{r}{\rho_{NC}(t)}$ و فرم عملگری تکانه استفاده کنیم، با معادله دیفرانسیل زیر روبرو می شویم

$$\begin{aligned}
&\Phi'_{NC}(r,t) = U_{NC}\Phi_{NC}(r,t),\\
&I'_{NC} = U_{NC} I_{NC} U^{\dagger}_{NC},\\
&I'_{NC}\Phi'_{NC}(r,t) = \lambda_{NC}\Phi'_{NC}(r,t).
\end{aligned} \tag{۸۸.۳}$$

$$\frac{d^{۲}\Phi'(r,t)}{d\xi^{۲}(t)} + \frac{۱}{\xi(t)}\frac{d\Phi'(r,t)}{d\xi(t)} + \frac{\frac{۱}{\hbar^{۲}}}{\xi^{۲}(t)}\left(-\xi^{۴}(t) + ۲\lambda\xi^{۲}(t)\right)\Phi'(r,t) = ۰.$$

برای حل این معادله دیفرانسیل با استفاده از متغیر جدید $\xi^{۲}(t) = w(t)$ به عبارت

$$\frac{d^{۲}\Phi'_{NC}(r,t)}{dw^{۲}(t)} + \frac{۱}{w(t)}\frac{d\Phi'_{NC}(r,t)}{dw(t)} + \frac{\frac{۱}{۴\hbar^{۲}}}{w^{۲}(t)}\left(-w^{۲}(t) + ۲\lambda w(t)\right)\Phi'_{NC}(r,t) = ۰, \tag{۸۹.۳}$$

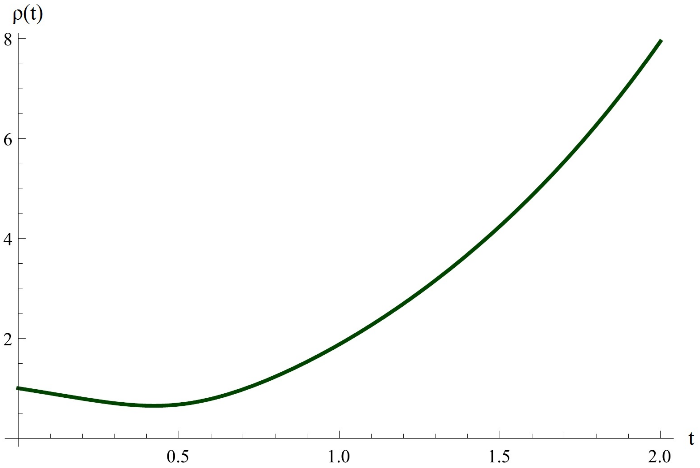
دست پیدا می کنیم که می توان جواب های آن را بر اساس چندجمله ای های لاگر بیان نمود

$$\begin{aligned}
&\Phi'_{NC}(r,t) = \exp\left(\frac{-۱}{۲\hbar}\left(\frac{r}{\rho_{NC}(t)}\right)^{۲}\right) L^{\circ}_{n_{NC}}\left(\frac{۱}{\hbar}\left(\frac{r}{\rho_{NC}(t)}\right)^{۲}\right),\\
&\lambda_{NC} = \hbar\left(۲n_{NC} + ۱\right).
\end{aligned} \tag{۹۰.۳}$$

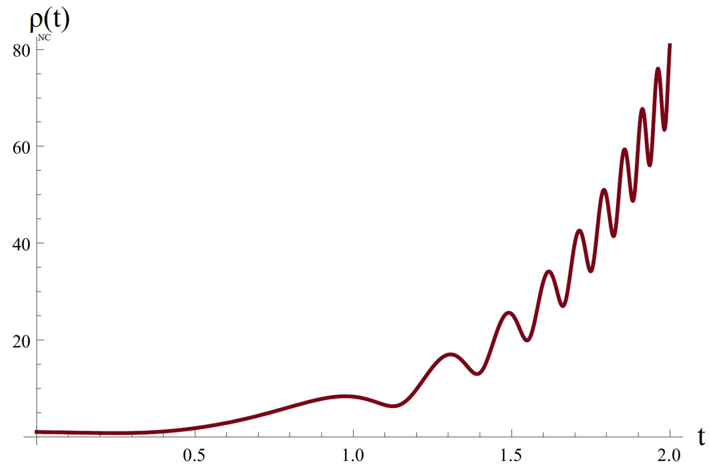
و پایان این قسمت عامل فازی را می توان به شکل زیر بدست آورد

$$\alpha_{NC}(t) = -(۲n_{NC} + ۱)\int_{\circ}^{t} \frac{a(t')}{\rho^{۲}_{NC}(t')}dt'. \tag{۹۱.۳}$$

نتیجه جالبی که در این بخش می توان بدست آورد این است که اگر رفتار های پارامترهای ρ و ρ_{NC} را با همان رفتار نمایی که در قسمت های قبل فرض کرده ایم رسم کنیم به نتیجه جالب توجهی می رسیم. همان طور که از شکل ها پیداست هر دو پارامتر دارای ماهیت صعودی هستند و باعث می شوند که تابع موج با گذر زمان از دست برود ولی در فضای جابجایی یک رفتار هموار در $\rho(t)$ وجود دارد ولی در فضای ناجابجایی رفتاری پر نوسان در پارامتر $\rho_{NC}(t)$ وجود دارد که علت آن هم وجود پارامتر های وابسته به زمان فضای ناجابجایی می باشد.



شکل ۲.۳: رفتار $\rho(t)$ ناوردای پویا نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان در فضای جابجایی بر حسب گذر زمان.



شکل ۳.۳: رفتار $\rho_{NC}(t)$ ناوردای پویا نوسانگر هارمونیک وابسته به زمان در فضای فاز ناجابجایی با پس زمینه وابسته به زمان بر حسب گذر زمان.

۶.۳ هامیلتونی بوهر و برهمکنش وابسته به زمان

مطالعه ساختار هسته از گذشته تا به حال یکی از مهم ترین مباحث در فیزیک هسته ای بوده است. درک و دریافت ما از ساختار هسته ها به کمک شایانی در دریافتن رفتار هسته اتم ها می کند [۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵] برای هسته های تغییر شکل یافته که دارای چهار قطبی می باشند، رهیافت مناسب برای توصیف احوال این نوع هسته ها استفاده از هامیلتونی بوهر [۱۵] می باشد. [۳۶] این هامیلتونی حاوی جملات ارتعاشی و دورانی و همچنین برهمکنش می باشد. در واقع هامیلتونی بوهر چارچوبی را فراهم می کند که به واسطه آن بتوان رفتار این هسته های تغییر شکل یافته را بررسی کرد. [۳۷] این هامیلتونی بر اساس پنج متغیر نوشته می شود. هامیلتونی بوهر در حضور برهمکنش بصورت

$$H_B = \frac{-\hbar^2}{2B}\left(\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)}\right) + V(\beta,\gamma), \tag{۹۲.۳}$$

می باشد که β معرف میزان خروج از حالت کروی، γ زاویه با محور تقارن هسته، Q_k مولفه های تکانه زاویه ای و B پارامتر جرم می باشد. با در نظر گرفتن برهمکنش وابسته به زمان بصورت

$$V(\beta,\gamma) = \frac{1}{2}B\omega^2(t)\beta^2 + \frac{W(\gamma)}{B\beta^2}, \tag{۹۳.۳}$$

برای فرم نهایی هامیلتونی داریم

$$H_B(\beta,\gamma,t) = \frac{-\hbar^2}{2B}\left(\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)}\right). \\ + \frac{1}{2}B\omega^2(t)\beta^2 + \frac{W(\gamma)}{B\beta^2}, \tag{۹۴.۳}$$

می توانی با علامت گذاری این هامیلتونی را مختصر تر نوشت بدین صورت که اگر تعریف کنیم

$$P_{col}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)}\right), \tag{۹۵.۳}$$

هامیلتونی (۹۵.۳) را می توان بصورت

$$H_B(\beta,\gamma,t) = \frac{P_{col}^2}{2B} + \frac{1}{2}B\omega^2(t)\beta^2 + \frac{W(\gamma)}{B\beta^2}, \tag{۹۶.۳}$$

[۱۵] Bohr Hamiltonian

بازنویسی کرد. با در نظر گرفتن ناوردای پویا برای این هامیلتونی به فرم

$$I(t) = \frac{1}{2}\left(\xi(t)(P_{col}^2 + \frac{2W(\gamma)}{\beta^2}) + \delta(t)\beta^2 + \eta(t)\{\beta, P_\beta\}\right), \qquad (۹۷.۳)$$

که با استفاده از هامیلتونی و تحول زمانی ناوردای پویا داریم

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \rho^2, \\ \delta(t) &= \tfrac{1}{\rho^2} + (B\dot{\rho})^2, \\ \eta(t) &= -B\rho\dot{\rho}. \end{aligned} \qquad (۹۸.۳)$$

یادآوری این نکته در این جا حائز اهمیت می باشد که $P_\beta = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{2}{\beta}\right)$ زیرا پارامتر β در یک دنیای پنج بعدی حضور دارد و همچنین معادله حاکم بر ρ

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = \frac{1}{\rho^3 B^2}, \qquad (۹۹.۳)$$

می باشد. با استفاده از تبدیل یکانی $U = \exp\left(\frac{iB(t)\dot{\rho}}{2\hbar\rho}\beta^2\right)$ می توان ناوردای پویا را دوباره بازنویسی کرد

$$I'(t) = \frac{1}{2}\left(\rho^2\left(P_{col}^2 + \frac{2W(\gamma)}{\beta^2}\right) + (\frac{\beta}{\rho})^2\right). \qquad (۱۰۰.۳)$$

اگر از $\zeta = \frac{\beta}{\rho}$ استفاده کنیم خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I'(t) &= \tfrac{1}{2}\left((P'_{col})^2 + \zeta^2 + \tfrac{2W(\gamma)}{\zeta^2}\right), \\ (P'_{col})^2 &= \rho^2\left(P_\beta^2 + \tfrac{L_\gamma^2}{\beta^2}\right), \\ \rho^2 P_\beta^2 &= -\hbar^2\left(\tfrac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + \tfrac{4}{\zeta}\tfrac{\partial}{\partial\zeta} + \tfrac{2}{\zeta^2}\right), \\ L_\gamma^2 &= -\hbar^2\left(\tfrac{1}{\sin 3\gamma}\tfrac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\tfrac{\partial}{\partial\gamma} - \tfrac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)}\right). \end{aligned} \qquad (۱۰۱.۳)$$

با در نظر گرفتن معادله ویژه مقداری ناوردای پویا بصورت $I'\Lambda(\beta,\gamma,\theta_i) = \lambda\Lambda(\beta,\gamma,\theta_i)$ که در ویژه توابع ناوردای پویا بصورت $\Lambda(\beta,\gamma,\theta_i) = R(\zeta)\chi(\gamma,\theta_i)$ فرض شود، می توان به معادلات دیفرانسیلی زیر رسید

$$\frac{d^{۲}R(\zeta)}{d\zeta^{۲}}+\frac{۴}{\zeta}\frac{dR(\zeta)}{d\zeta}+\frac{۱}{\hbar^{۲}}\left(۲\lambda-\zeta^{۲}-\frac{\hbar^{۲}\nu}{\zeta^{۲}}\right)R(\zeta)=۰,$$
$$\left(\frac{۱}{\sin ۳\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin ۳\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{۱}{۴}\sum_{k=۱}^{۳}\frac{Q_k^{۲}}{\sin^{۲}\left(\gamma-\frac{۲}{۳}\pi k\right)}-\frac{۲W(\gamma)+۲}{\hbar^{۲}}+\nu\right)\chi(\gamma,\theta_i)=۰. \quad (۱۰۲.۳)$$

در معادلات فوق پارامتر ν ثابت جداسازی است. جواب های قسمت β بصورت چند جمله ای های لاگر بصورت

$$R(\tfrac{\beta}{\rho})=\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{۲\left(\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+\nu}-\frac{۳}{۴}\right)}\exp\left(\frac{-\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{۲}}{\hbar}\right)L_n^{۲\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+\nu}}\left(\frac{۲}{\hbar}\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{۲}\right),$$
$$\lambda=\frac{\hbar}{۲}\left((۲n+۱)+۲\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+\nu}\right). \quad (۱۰۳.۳)$$

می باشد. برای بدست آوردن جواب های معادله دیفرانسیل مربوط به قسمت زاویه ای ابتدا فرض می کنیم که

$$\frac{۲W(\gamma)}{\hbar^{۲}}=\frac{\tilde{c}}{۲}\left(\gamma-(\tfrac{\pi}{۶})\right)^{۲}=\frac{\tilde{c}}{۲}\tilde{\gamma}^{۲},$$
$$\tilde{\gamma}=\gamma-\frac{\pi}{۶}. \quad (۱۰۴.۳)$$

عبارت فوق به این معناست که در $\gamma=\frac{\pi}{۶}$ ما با یک کمینه مقدار شدید مواجه هستیم و می توان این فرض را کرد که $\gamma\approx\frac{\pi}{۶}$ همچنین $\tilde{c}$ مقداری ثابت است. با این اوصاف برای قسمت مربوط به مولفه های تکانه زاویه ای داریم

$$\sum_{k=۱,۲,۳}\frac{Q_k^{۲}}{\sin^{۲}(\gamma-\frac{۲}{۳}\pi k)}=۴(Q_۱^{۲}+Q_۲^{۲}+Q_۳^{۲})-۳Q_۱^{۲}=۴L(L+۱)-۳\alpha^{۲}, \quad (۱۰۵.۳)$$

که به جای پارامتر α بهتر است از عدد کوانتومی ارتعاشی $n_\omega=L-\alpha$ استفاده کنیم. در این صورت داریم

$$\left(\frac{۱}{\sin ۳\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin ۳\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{۱}{۴}(L(L+۴)-۳n_\omega(۲L-n_\omega))-\frac{۲W(\gamma)+۲}{\hbar^{۲}}+\nu\right)\chi(\gamma,\theta_i)=۰. \quad (۱۰۶.۳)$$

ازآنجاییکه $\frac{۱}{\sin ۳\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin ۳\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}=\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial\gamma^{۲}}+۳\cot ۳\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\right)$ می باشد و در $\gamma\approx\frac{\pi}{۶}$ داریم $۳\cot ۳\gamma\approx$ ۰ لذا می توان به فرم ساده تری برای معادله دیفرانسیل برای این قسمت دسترسی پیدا نمود

$$\left(-\frac{d^{۲}}{d\tilde{\gamma}^{۲}}+\frac{۱}{۲}\tilde{c}\tilde{\gamma}^{۲}+\nu-\frac{۱}{۴}(L(L+۴)-۳n_{\omega}(۲L-n_{\omega}))+\frac{۲}{\hbar^{۲}}\right)\chi(\tilde{\gamma},\theta_i)=۰. \quad (۱۰۷.۳)$$

ما جواب را بصورت زیر بر حسب توابع ویگنر که تابعی از زوایای اویلر می باشند فرض می کنیم

$$\chi(\tilde{\gamma},\theta_i)=\phi_{n_{\tilde{\gamma}},L,\alpha}(\tilde{\gamma})\sqrt{\frac{۲L+۱}{۱۶\pi^{۲}(۱+\delta_{\alpha,۰})}}\times\left(D^{(L)}_{\mu,\alpha}(\theta_i)+(-۱)^{L}D^{(L)}_{\mu,-\alpha}(\theta_i)\right), \quad (۱۰۸.۳)$$

که در رابطه فوق توابع ویگنر با $D(\theta_i)$ نمایش داده شده است و تابع بهنجار $\phi_{n_{\tilde{\gamma}},L,\alpha}(\tilde{\gamma})$ برحسب چند جمله ای های هرمیت نوشته می شود

$$\phi(\tilde{\gamma})=\sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi}۲^{n_{\tilde{\gamma}}}n_{\tilde{\gamma}}!}}\,H_{n_{\tilde{\gamma}}}(b\tilde{\gamma})\exp\left(\frac{-(b\tilde{\gamma})^{۲}}{۲}\right). \quad (۱۰۹.۳)$$

در معادله (۱۰۹.۳) توابع هرمیت با $H_{n_{\tilde{\gamma}}}(b\tilde{\gamma})$ نشان داده شده است ، ثابت جدید

$$b=\left(\frac{\tilde{c}}{۲}\right)^{۱/۴}$$

معرفی شده است و همچنین داریم

$$\nu_{L,n_{\omega},n_{\tilde{\gamma}}}=\sqrt{۲\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}}+\frac{۱}{۲}\right)-\frac{۲}{\hbar^{۲}}+\frac{۱}{۴}\left(L(L+۴)+۳n_{\omega}(۲L-n_{\omega})\right). \quad (۱۱۰.۳)$$

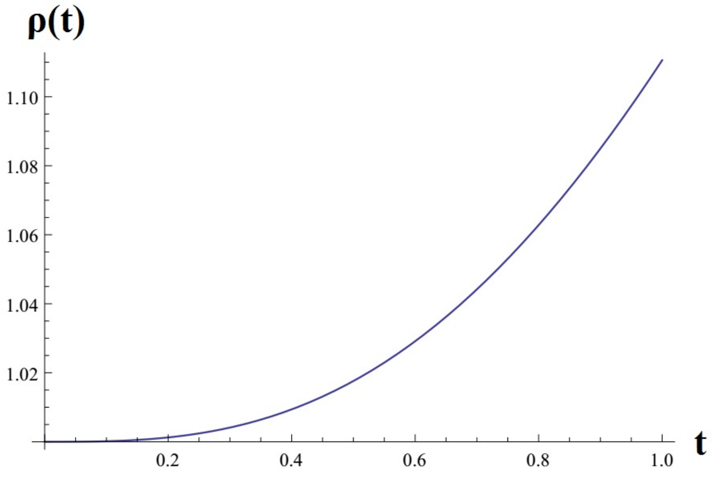
با قرار دادن مقدار فوق در معادله (۱۰۳.۳) برای ویژه مقدار خواهیم داشت

$$\lambda=\frac{\hbar}{۲}\left((۲n+۱)+۲\sqrt{\frac{۹}{۱۶}-\frac{۲}{\hbar^{۲}}+\frac{۱}{۴}\left(L(L+۴)+۳n_{\omega}(۲L-n_{\omega})\right)+\sqrt{۲\tilde{c}}\left(n_{\tilde{\gamma}}+\frac{۱}{۲}\right)}\right). \quad (۱۱۱.۳)$$

و در نهایت برای عامل فازی این مسئله داریم

$$\alpha(t)=-\frac{\lambda}{\hbar}\int_{۰}^{t}\frac{dt'}{B\rho^{۳}}. \quad (۱۱۲.۳)$$

در این مسئله باز شاهد حضور پارامتر واسط ρ بودیم که با فرم نسبتا متفاوتی وارد مسئله شد. با فرض رفتار نمایی برای فرکانس زاویه ای می توان رفتار این پارامتر را به تصویر کشید.



شکل ۴.۳: رفتار $\rho(t)$ ناوردای پویا هامیلتونی بوهر بر حسب زمان.

اگر چه معادله حاکم بر ρ مقداری متفاوت می باشد ولی همچنان ماهیت صعودی در رفتار این پارامتر مشهود می باشد و باعث می شود که تابع موج با گذر زمان از دست برود.

۷.۳ اثر برهمکنش منینگ-روزن و حلقه ای دوگانه در هامیلتونی بوهر با در نظر گرفتن جرم وابسته به زمان

در این قسمت برهمکنش هایی که در قسمت قبلی در نظر گرفته ایم را تغییر اساسی می دهیم. یعنی برای قسمت انحراف از شکل کروی [۳۸]

$$V_{MR}(\beta,t)=\frac{۱}{۲B(t)}\left(\frac{\eta^{۲}}{(e^{\eta\beta}-۱)^{۲}}+\frac{\eta^{۲}}{(e^{\eta\beta}-۱)}\right)$$
$$V_{THO}(\beta,t)=\frac{۱}{۲}\omega^{۲}(t)\beta^{۲} \tag{۱۱۳.۳}$$

که در رابطه های فوق η ناحیه برهمکنش را مشخص می کند. برای قسمت γ مسئله داریم [۳۹]

$$V_{DR}(\beta,\gamma,t)=\frac{۱}{۲B(t)\beta^{۲}}\left(\frac{V_{۱}}{\sin^{۲}(۳\gamma)}+\frac{V_{۲}}{\cos^{۲}(۳\gamma)}\right) \tag{۱۱۴.۳}$$

با در نظر گرفتن این برهمکنش ها هامیلتونی بوهر در این صورت به شکل زیر تبدیل می شود

$$\begin{aligned}H_{B}(\beta,\gamma,t)=&\frac{-\hbar^{۲}}{۲B(t)}\left(\frac{۱}{\beta^{۴}}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^{۴}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{۱}{\beta^{۲}\sin ۳\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin ۳\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{۱}{۴\beta^{۲}}\sum_{k=۱}^{۳}\frac{Q_{k}^{۲}}{\sin^{۲}\left(\gamma-\frac{۲}{۳}\pi k\right)}\right)\\&+\frac{۱}{۲B(t)}\left(\frac{\eta^{۲}}{(e^{\eta\beta}-۱)^{۲}}+\frac{\eta^{۲}}{(e^{\eta\beta}-۱)}\right)+\frac{۱}{۲}B(t)\omega^{۲}(t)\beta^{۲}+\frac{۱}{۲B(t)\beta^{۲}}\left(\frac{V_{۱}}{\sin^{۲}(۳\gamma)}+\frac{V_{۲}}{\cos^{۲}(۳\gamma)}\right)\end{aligned} \tag{۱۱۵.۳}$$

با فرض آن که ناحیه برهمکنش در قسمت محدودی رخ می دهد می توان از این تقریب استفاده نمود

$$\frac{۱}{\beta^{۲}}\approx\frac{\eta^{۲}}{(e^{\eta\beta}-۱)^{۲}}+\frac{\eta^{۲}}{(e^{\eta\beta}-۱)} \tag{۱۱۶.۳}$$

حال می خواهیم ناوردای مناسب را برای این مسئله پیدا کنیم. ابتدا فرم خام این عملگر را به صورت زیر پیشنهاد می دهیم

$$I(t) = \frac{1}{2}\left(\chi_1(t)O_1 + \chi_2(t)O_2 + \chi_3(t)O_3\right), \tag{117.3}$$

$$O_1 = P^2_{\beta,\gamma,\theta_{Euler}} + \frac{1}{\beta^2}\left(1 + \frac{V_1}{\sin^2(3\gamma)} + \frac{V_2}{\cos^2(3\gamma)}\right),$$

$$P^2_{\beta,\gamma,\theta_{Euler}} = -\hbar^2\left(\frac{1}{\beta^4}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^4\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{\beta^2\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2}{3}\pi k\right)}\right),$$

$$O_2 = \beta^2,$$

$$O_3 = \{\beta, P_\beta\},$$

$$P_\beta = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{2}{\beta}\right),$$

که ضرایب نامعین با استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا و هامیلتونی مفروض این مسئله به شکل زیر به یکدیگر مرتب می شوند

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}_1(t) &= -2\frac{\chi_3(t)}{B(t)},\\
\dot{\chi}_2(t) &= 2B(t)\omega^2(t)\chi_3(t),\\
\dot{\chi}_3(t) &= \chi_1(t)B(t)\omega^2(t) + \frac{\chi_2(t)}{B(t)}.
\end{aligned} \tag{118.3}$$

اگر این دستگاه کوپل شده را بر اساس یک پارامتر واسطی مثل ρ بخواهیم حل کنیم داریم

$$\chi_1(t) = \rho^2(t),$$

$$\chi_2(t) = \frac{1}{\rho^2(t)} + B^2(t)\dot{\rho}^2(t), \tag{119.3}$$

$$\chi_3(t) = -\dot{\rho}(t)\rho(t)B(t),$$

که معادله حاکم بر این پارامتر واسط به صورت زیر می باشد

$$\ddot{\rho}(t)+\frac{\dot{B}(t)}{B(t)}\dot{\rho}(t)+\omega^{2}(t)\rho(t)=\frac{1}{\rho^{3}(t)B^{2}(t)}. \qquad (۱۲۰.۳)$$

برای شروع فرآیند بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویا ابتدا از تبدیل

$$U=\exp\left(\frac{iB(t)\dot{\rho}(t)}{2\hbar\rho(t)}\beta^{2}\right) \qquad (۱۲۱.۳)$$

با این کار خواهیم داشت

$$I'=U^{\dagger}IU$$

$$\Phi'=U\Phi$$

$$I'\Phi'=\lambda\Phi', \qquad (۱۲۲.۳)$$

$$I'(t)=\frac{1}{2}\left(\rho^{2}\left(P^{2}_{\beta,\gamma,\theta_{Euler}}+\frac{1}{\beta^{2}}(1+\frac{V_{1}}{\sin^{2}(3\gamma)}+\frac{V_{2}}{\cos^{2}(3\gamma)}),\right)+(\frac{\beta}{\rho})^{2}\right).$$

با معرفی تغییر متغیر جدید $\zeta=\frac{\beta}{\rho}$ ناوردای پویا فرم بهتری به خود می گیرد

$$I'(t)=\frac{1}{2}\left(P'^{2}_{\beta,\gamma,\theta_{Euler}}+\zeta^{2}+\frac{1}{\zeta^{2}}(1+\frac{V_{1}}{\sin^{2}(3\gamma)}+\frac{V_{2}}{\cos^{2}(3\gamma)})\right),$$

$$P'^{2}_{\beta,\gamma,\theta_{Euler}}=\rho^{2}\left(P^{2}_{\beta}+\frac{L^{2}_{\gamma,\theta_{Euler}}}{\beta^{2}}\right),$$

$$\rho^{2}P^{2}_{\beta}=-\hbar^{2}\left(\frac{\partial^{2}}{\partial\zeta^{2}}+\frac{4}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}+\frac{2}{\zeta^{2}}\right), \qquad (۱۲۳.۳)$$

$$L^{2}_{\gamma,\theta_{Euler}}=-\hbar^{2}\left(\frac{1}{\sin 3\gamma}\frac{\partial}{\partial\gamma}\sin 3\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}-\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_{k}^{2}}{\sin^{2}\left(\gamma-\frac{2}{3}\pi k\right)}\right).$$

با معرفی $\Phi(\beta,\gamma,\theta_{Euler})=\Lambda(\zeta)\Gamma(\gamma)D(\theta_{Euler})$ معادلات زیر دسترسی پیدا خواهیم کرد

(۱۲۴.۳)

$$\frac{d^{۲}\Lambda(\zeta)}{d\zeta^{۲}}+\frac{۴}{\zeta}\frac{d\Lambda(\zeta)}{d\zeta}+\frac{۱}{\hbar^{۲}}\left(۲\lambda-\zeta^{۲}-\frac{\hbar^{۲}(\nu-۱)}{\zeta^{۲}}\right)\Lambda(\zeta)=\circ,$$

$$\frac{d^{۲}\Gamma(\gamma)}{d\gamma^{۲}}+\cot(۳\gamma)\frac{d\Gamma(\gamma)}{d\gamma}+\left(\frac{-۱}{\hbar^{۲}}\left(\frac{V_{۱}}{\sin^{۲}(۳\gamma)}+\frac{V_{۲}}{\cos^{۲}(۳\gamma)}\right)+\frac{۲+\nu}{\hbar^{۲}}\right)\Gamma(\gamma)=\circ.$$

که جواب های این معادلات به صورت زیر می باشد

(۱۲۵.۳)

$$\Lambda\left(\frac{\beta}{\rho(t)}\right)=\left(\frac{\beta}{\rho(t)}\right)^{\frac{-۳}{۲}+۲\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+\frac{\nu-۱}{\hbar^{۲}}}}\exp\left(-\hbar^{-۲}\left(\frac{\beta}{\rho(t)}\right)^{۲}\right)L_{n}^{۲\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+\frac{\nu-۱}{\hbar^{۲}}}}\left(-\hbar^{-۲}\left(\frac{\beta}{\rho(t)}\right)^{۲}\right),$$

$$\Gamma(\gamma)=(\cos(۳\gamma))^{\frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{V_{۲}}{۹\hbar^{۲}}}}(\sin(۳\gamma))^{\frac{۵}{۶}+\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{V_{۱}}{۳۶\hbar^{۲}}}}P_{m}^{\left(\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{V_{۲}}{۹\hbar^{۲}}},۲\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{V_{۱}}{۳۶\hbar^{۲}}}\right)}\left(۱-۲\cos^{۲}(۳\gamma)\right),$$

$$\lambda=\hbar\left((۲n+۱)+۲\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+\frac{\nu-۱}{\hbar^{۲}}}\right),$$

$$\nu=۳۶\hbar^{۲}\left(\begin{array}{c}m^{۲}+m\left(\frac{۵}{۶}+۲\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{V_{۱}}{۳۶\hbar^{۲}}}+\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{V_{۲}}{۹\hbar^{۲}}}\right)+\frac{V_{۱}-V_{۲}}{۳۶\hbar^{۲}}\\+\frac{۳}{۲}\sqrt{\frac{۱}{۴}+\frac{V_{۲}}{۹\hbar^{۲}}}+\sqrt{\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{V_{۱}}{۳۶\hbar^{۲}}}+\sqrt{(\frac{۱}{۴}+\frac{V_{۲}}{۹\hbar^{۲}})(\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۱۶}+\frac{V_{۱}}{۳۶\hbar^{۲}})}\end{array}\right)-۲.$$

و هم چنین عامل فازی به صورت

$$\delta(t)=\frac{-\lambda}{\hbar}\int_{\circ}^{t}\frac{dt'}{B(t')\rho^{۳}(t')}\qquad(۱۲۶.۳)$$

بدست می آید.

حضور پارامتر واسط ρ با همان معادله دیفرانسیل آشنا این نکته را به ذهن تداعی می کند که این سیستم نیز با گذر زمان از دست می رود.

۸.۳ مدل Z[4] در حضور برهمکنش وابسته به زمان

این مدل، حالت خاصی از هامیلتونی بوهر می باشد که با ثابت فرض کردن متغیر گاما پیرامون $\gamma = ۳۰$ درجه بدست می آید. این کار اولین بار توسط آقایان دیویدو و چبان [۱۶] انجام شد که به موجب این کار رهیافت جدیدی در استفاده از هامیلتونی بوهر بوجود آمد [۴۲]. پس با افزودن قید ثابت بودن متغیر گاما پیرامون $\gamma = ۳۰$ درجه، یک درجه آزادی در هامیلتونی بوهر کاهش می یابد. در این صورت هامیلتونی این مدل در حالت کلی بصورت زیر خواهد بود [۴۲، ۴۱، ۴۳]

$$H = \frac{-\hbar^2}{2B}\left[\frac{1}{\beta^3}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^3\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)}\right] + V\left(\beta,\Omega,t\right) \qquad (۱۲۷.۳)$$

با در نظر گرفتن برهمکنش

$$V\left(\beta,\Omega,t\right) = \frac{1}{2}\left(B\left(t\right)\omega^2\left(t\right)\beta^2\right) + \frac{c}{B\left(t\right)\beta^2}. \qquad (۱۲۸.۳)$$

که در واقع اصلاح شده برهمکنش معروف دیویدسون می باشد، می خواهیم تحول زمانی این سیستم را مورد بررسی قرار دهیم. هامیلتونی این سیستم در حضور برهمکنش مورد نظر بصورت

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{P_{D.Ch}^2}{2B\left(t\right)} + \frac{1}{2}\left(B\left(t\right)\omega^2\left(t\right)\beta^2\right) + \frac{c}{B\left(t\right)\beta^2}, \\ P_{D.Ch}^2 &= -\hbar^2\left[\frac{1}{\beta^3}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^3\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{4\beta^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{Q_k^2}{\sin^2\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}k\right)}\right]. \end{aligned} \qquad (۱۲۹.۳)$$

می باشد. برای بررسی تحول زمانی، فرم خام ناوردای پویا را به صورت زیر پیشنهاد می کنیم

$$I\left(t\right) = \frac{1}{2}\left[\chi_1\left(t\right)\left(P_{D.Ch}^2 + \frac{2c}{\beta^2}\right) + \chi_2\left(t\right)\left(\beta^2\right) + \chi_3\left(t\right)\left\{P_\beta,\beta\right\}\right], \qquad (۱۳۰.۳)$$

با استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا می توانی بدست آورد که

$$I(t) = \frac{1}{2}\left[\rho^2\left(t\right)\left(P_{D.Ch}^2 + \frac{2c}{\beta^2}\right) + \beta^2\left(\frac{1}{\rho^2\left(t\right)} + \dot\rho^2\left(t\right)B^2\left(t\right)\right) - \rho\left(t\right)\dot\rho\left(t\right)B\left(t\right)\left\{P_\beta,\beta\right\}\right]. \qquad (۱۳۱.۳)$$

می باشد که البته پارامتر واسط در معادله

$$\ddot\rho\left(t\right) + \dot\rho\left(t\right)\frac{\dot B\left(t\right)}{B\left(t\right)} + \omega^2\left(t\right)\rho\left(t\right) = \frac{1}{\rho^3\left(t\right)B^2\left(t\right)}, \qquad (۱۳۲.۳)$$

[۱۶] A. S. Davydov and A. A. Chaban

صدق می کند. برای محاسبه ویژه توابع این عملگر ابتدا از تبدیل یکانی

$$U=\exp\left(\frac{iB\left(t\right)\dot{\rho}\left(t\right)}{۲\hbar\rho\left(t\right)}\beta^{۲}\right). \tag{۱۳۳.۳}$$

را معرفی می کنیم. با کمک این تبدیل یکانی معادله ویژه مقداری بصورت

$$I'(t)\Phi'\left(\beta,\Omega,t\right)=\lambda\Phi'\left(\beta,\Omega,t\right). \tag{۱۳۴.۳}$$

تغییر می کند که در آن

$$U\left(t\right)\Phi\left(\beta,\Omega,t\right)=\Phi'\left(\beta,\Omega,t\right), \tag{۱۳۵.۳}$$

$$I'(t)=\frac{۱}{۲}\left[{P'_{D.Ch}}^{۲}+\sigma^{۲}\left(t\right)+\frac{۲c}{\sigma^{۲}\left(t\right)}\right], \tag{۱۳۶.۳}$$

$$\begin{aligned}{P'_{D.Ch}}^{۲}&=-\hbar^{۲}\rho^{۲}\left(\frac{d^{۲}}{d\beta^{۲}}+\frac{۳}{\beta}\frac{d}{d\beta}+\frac{۳}{۴\beta^{۲}}-\frac{۱}{۴\beta^{۲}}\sum_{k=۱}^{۳}\frac{Q_k^{۲}}{\sin^{۲}\left(\gamma-\frac{۲\pi}{۳}k\right)}\right)\\&=-\hbar^{۲}\left(\frac{d^{۲}}{d\sigma^{۲}}+\frac{۳}{\sigma}\frac{d}{d\sigma}+\frac{۳}{۴\sigma^{۲}}-\frac{۱}{۴\sigma^{۲}}\sum_{k=۱}^{۳}\frac{Q_k^{۲}}{\sin^{۲}\left(\gamma-\frac{۲\pi}{۳}k\right)},\right)\end{aligned}$$

می باشد. با در نظر گرفتن $\Phi'\left(\sigma,\Omega\right)=\Lambda\left(\sigma\right)\Xi\left(\Omega\right)$، ابتدا برای قسمت زاویه ای داریم

$$\begin{aligned}\frac{۱}{۴}\sum_{k=۱}^{۳}\frac{Q_k^{۲}}{\sin^{۲}\left(\gamma-\frac{۲\pi}{۳}k\right)}\Xi\left(\Omega\right)&=\left(Q^{۲}-\frac{۳}{۴}Q_۱^{۲}\right)\Xi\left(\Omega\right),\\&=\left(L\left(L+۱\right)-\frac{۳}{۴}\alpha^{۲}\right)\Xi\left(\Omega\right),\\&=\overbrace{\left(L\left(L+۱\right)-\frac{۳}{۴}\left(\underbrace{L-n_\omega}_{\alpha}\right)^{۲}\right)}^{W}\Xi\left(\Omega\right),\\&=W\Xi\left(\Omega\right),\end{aligned} \tag{۱۳۷.۳}$$

$$\Xi\left(\Omega\right)=\sqrt{\frac{۲L+۱}{۱۶\pi^{۲}\left(۱+\delta_{\alpha,۰}\right)}}\left(D_{\mu,\alpha}^{L}\left(\Omega\right)+\left(-۱\right)^{L}D_{\mu,-\alpha}^{L}\left(\Omega\right)\right), \tag{۱۳۸.۳}$$

که $D_{\mu,\alpha}\left(\Omega\right)$ توابع ویگنر متناظر با L و α,μ می باشند. همچنین برای قسمت دیگر وایژه تابع نیز معادله دیفرانسیل زیر را بدست می آوریم

$$\left[\frac{d^{۲}}{d\sigma^{۲}}+\frac{۲}{\sigma}\frac{d}{d\sigma}+\frac{۱}{\sigma^{۲}}\left(-\sigma^{۴}\left(\hbar^{-۲}\right)+\sigma^{۲}\left(۲\lambda\hbar^{-۲}\right)-\left(W+۲c\hbar^{-۲}+\frac{۳}{۴}\right)\right)\right]\Lambda\left(\sigma\right)=۰ \tag{۱۳۹.۳}$$

که جواب های آن را می توان بر حسب توابع لاگر بدست آورد

$$\Lambda\left(\beta,t\right)=N\left(\frac{\beta}{\rho\left(t\right)}\right)^{\left(-۱+\sqrt{W+۲c\hbar^{-۲}+\frac{۱}{۴}}\right)}\exp\left(\frac{-۱}{۲\hbar}\left(\frac{\beta}{\rho\left(t\right)}\right)^{۲}\right)L_{n}^{\sqrt{W+۲c\hbar^{-۲}+\frac{۱}{۴}}}\left(\frac{۱}{\hbar}\left(\frac{\beta}{\rho\left(t\right)}\right)^{۲}\right) \tag{۱۴۰.۳}$$

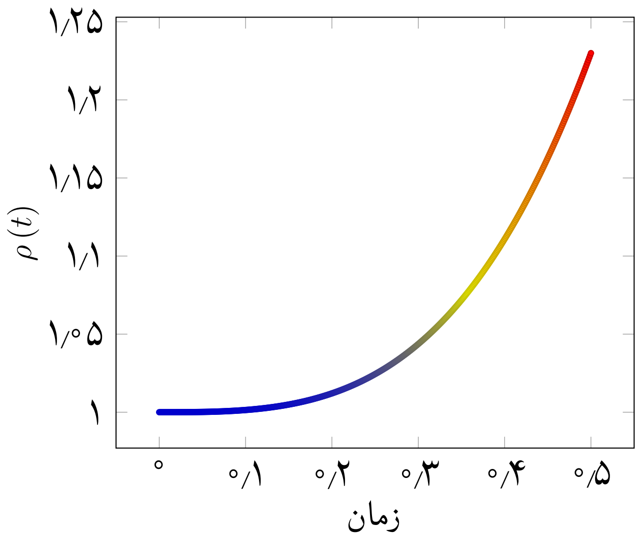
$$\lambda=\hbar\left(۲n+۱+\sqrt{W+۲c\hbar^{-۲}+\frac{۱}{۴}}\right), \tag{۱۴۱.۳}$$

پس از بدست آمدن ویژه توابع می توان تابع موج را برحسب ویژه توابع ناوردای پویا نوشت

$$\Psi\left(\beta,\Omega,t\right)=\sum_{n}e^{i\delta_{n}(t)}\Phi_{n}\left(\beta,\Omega,t\right). \tag{۱۴۲.۳}$$

$$\delta_{n}\left(t\right)=\frac{-\lambda_{n}}{\hbar}\int_{۰}^{t}\frac{dt}{B\left(t\right)\rho^{۳}\left(t\right)}. \tag{۱۴۳.۳}$$

در این مدل نیز معادله حاکم بر تابع واسط به گونه ای است که باعث می شود تابع موج با گذر زمان از دست برود. در شکل زیر رفتار این پارامتر به تصویر کشیده شده است



شکل ۵.۳: رفتار $\rho(t)$ ناوردای پویا مدل Z[4] بر حسب زمان.

۹.۳ رهیافت X(3) در حضور برهمکنش وابسته به زمان

رهیافت X(3) را می توان حالت خاصی از هامیلتونی بوهر فرض کرد که با در نظر گرفتن تقارن ها بیشتر سعی بر آن دارد که رفتار هسته های تغییر شکل یافته را بیان کند. همانطور که بوهر این مبحث را انجام داده بود انرژی جنبشی متناظر پارامتر های β و γ را به صورت کلاسیکی می توان این گونه نوشت [۴۰، ۴۴]

$$T = \frac{۱}{۲}\sum_{k=۱}^{۳} J_k w_k'^{۲} + \frac{B}{۲}\left(\dot{\beta}^{۲} + (\beta\dot{\gamma})^{۲}\right) \tag{۱۴۴.۳}$$

که پارامتر J_k لختی دورانی را این گونه داریم

$$J_k = ۴B\beta^{۲}\sin^{۲}\left(\gamma - \frac{۲\pi}{۳}k\right). \tag{۱۴۵.۳}$$

با فرض ثابت بودن صلب بودن هسته یعنی $\dot{\gamma} = ۰$ می توان مولفه های فرکانس زاویه ای w' آن را به کمک مشتقات زمانی زوایای اویلر این گونه بیان کرد [۴۶، ۴۱]

$$\begin{aligned} w'_{۱} &= \dot{\phi}\sin\theta\cos\psi + \dot{\theta}\sin\psi,\\ w'_{۲} &= \dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi,\\ w'_{۳} &= \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}. \end{aligned} \tag{۱۴۶.۳}$$

با فرض $J_{۱} = J_{۲} = ۳B\beta^{۲}$ و $\gamma = ۰$ مولفه سوم لختی دورانی حذف می شود لذا برای انرژی جنبشی داریم [۴۵، ۴۱]

$$\begin{aligned} T &= \frac{۳}{۲}B\beta^{۲}(w_{۱}'^{۲} + w_{۲}'^{۲}) + \frac{B}{۲}\beta^{۲}\\ &= \frac{B}{۲}\left(۳\beta^{۲}(\dot{\phi}^{۲}\sin^{۲}\theta + \dot{\theta}^{۲}) + \dot{\beta}^{۲}\right) \end{aligned} \tag{۱۴۷.۳}$$

همانطور که دیده می شود ما در این جا با سه درجه آزادی روبرو هستیم. پس اگر حالت عمومی انرژی جنشی را مد نظر بگیریم [۴۴، ۴۵، ۴۷]

$$T = \frac{B}{۲}\sum_{i,j=۱}^{۳} g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,$$

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} ۳\beta^{۲}\sin^{۲}\theta & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳\beta^{۲} & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{pmatrix} \tag{۱۴۸.۳}$$

می توان هامیلتونی این رهیافت را این گونه بدست آورد [۴۴، ۴۵، ۴۷]

$$H_{D-Ch} = \frac{P^{۲}_{D-Ch}}{۲B} + V(\beta,\theta,\phi)$$
$$P^{۲}_{D-Ch} = -\hbar^{۲}\left(\frac{۱}{\beta^{۲}}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^{۲}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{۱}{\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\phi^{۲}}}{۳\beta^{۲}}\right) \tag{۱۴۹.۳}$$

حال میخواهیم برهمکنش وابسته به زمان

$$V(\beta,\theta,t) = \frac{۱}{۲}B\omega^{۲}(t)\beta^{۲} + \frac{a + b\cos^{۲}\theta + c\cos^{۴}\theta}{B(\sin^{۲}\theta\cos^{۲})\beta^{۲}} \tag{۱۵۰.۳}$$

را در نظر بگیریم. با یک ساده نویسی می توان به فرم خلاصه تری از هامیلتونی دست یافت

$$H_{D-Ch} = \frac{P^{۲}_{D-Ch}}{۲B} + \frac{۱}{۲}B\omega^{۲}(t)\beta^{۲} + \frac{a + b\cos^{۲}\theta + c\cos^{۴}\theta}{B(\sin^{۲}\theta\cos^{۲})\beta^{۲}}$$
$$P^{۲}_{D-Ch} = -\hbar^{۲}\left(\frac{۱}{\beta^{۲}}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^{۲}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{۱}{\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\phi^{۲}}}{۳\beta^{۲}}\right) \tag{۱۵۱.۳}$$

حالا زمان آن فرا رسیده ست که ناوردای پویا مناسب را برای این مسئله پیدا کنیم. فرم خام ناوردای پویا را به صورت زیر پیشنهاد می دهیم

$$I(t) = \frac{۱}{۲}\left(\delta_{۱}(t)L_{۱} + \delta_{۲}(t)L_{۲} + \delta_{۳}(t)L_{۳}\right),$$

$$L_{۱} = P^{۲}_{D-Ch} + \frac{a + b\cos^{۲}\theta + c\cos^{۴}\theta}{(\sin^{۲}\theta\cos^{۲})\beta^{۲}}$$

$$L_{۲} = \beta^{۲} \tag{۱۵۲.۳}$$

$$L_{۳} = \{\beta, P_{\beta}\}$$

$$P_{\beta} = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{۲}{\beta}\right).$$

با استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا و هامیلتونی سیستم مورد نظر داریم

$$\dot{\delta}_1(t) = -2\frac{\delta_3(t)}{B},$$

$$\dot{\delta}_2(t) = 2B\omega^2(t)\delta_3(t), \tag{۱۵۳.۳}$$

$$\dot{\delta}_3(t) = \delta_1(t)B\omega^2(t) + \frac{\delta_2(t)}{B}.$$

این معادلات را می توان به صورت زیر از هم تفکیک و حل کرد

$$\delta_1(t) = \rho^2(t),$$

$$\delta_2(t) = \frac{1}{\rho^2(t)} + B^2\dot{\rho}^2(t), \tag{۱۵۴.۳}$$

$$\delta_3(t) = -\dot{\rho}(t)\rho(t)B,$$

که معادله حاکم بر پارامتر واسط به صورت

$$\ddot{\rho}(t) + \omega^2(t)\rho(t) = \frac{1}{\rho^3(t)B^2}, \tag{۱۵۵.۳}$$

می باشد. پس در نهایت فرم ناوردای پویا بدین صورت حاصل شد

$$I = \frac{1}{2}\left(\begin{array}{l} \rho^2(t)\left(P_{D-Ch}^2 + \frac{a+b\cos^2\theta+c\cos^4\theta}{(\sin^2\theta\cos^2)\beta^2}\right) + \left(\frac{1}{\rho^2(t)} + B^2\dot{\rho}^2(t)\right)\beta^2 \\ -(\dot{\rho}(t)\rho(t)B)\{\beta, P_\beta\} \end{array}\right). \tag{۱۵۶.۳}$$

با استفاده از تبدیل

$$U = \exp\left(\frac{iB\dot{\rho}(t)}{2\hbar\rho(t)}\beta^2\right)$$

فرآیند بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویا را آغاز می کنیم

$$I' = U^{\dagger} I U,$$

$$\Phi' = U\Phi,$$

$$I'\Phi' = \lambda\Phi',\tag{۱۵۷.۳}$$

$$I' = \frac{۱}{۲}\left(\rho^{۲}(t)\left(P_{D-Ch}^{۲} + \frac{a + b\cos^{۴}\theta + c\cos^{۴}\theta}{(\sin^{۲}\theta\cos^{۲})\beta^{۲}}\right) + \frac{\beta^{۲}}{\rho^{۲}(t)}\right).$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $x = \frac{\beta}{\rho}$ داریم

$$\left(\frac{۱}{x^{۲}}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{۲}\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{۱}{\hbar^{۲}}\left(۲\lambda - \frac{۲\left(\frac{a+b\cos^{۲}\theta+c\cos^{۴}\theta}{(\sin^{۲}\theta\cos^{۲})}\right) - \frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{۱}{\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\phi^{۲}}}{x^{۲}} - x^{۲}\right)\right)\Phi'(\beta,\theta,\phi) = ۰\tag{۱۵۸.۳}$$

با دنبال کردن روش جداسازی متغیر ها با فرض $\Phi' = \frac{X(x)}{x}H(\theta)K(\phi)$ برای قسمت x داریم

$$\frac{d^{۲}X(x)}{dx^{۲}} + \frac{۱}{\hbar^{۲}}\left(۲\lambda - x^{۲} - \frac{\xi\hbar^{۲}}{x^{۲}}\right)X(x) = ۰.\tag{۱۵۹.۳}$$

که اولین ثابت جداسازی با ξ نشان داده شده است. جواب این قسمت به صورت

$$X\left(\frac{\beta}{\rho}\right) = \left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{\left(\frac{۱}{۲}+\sqrt{\frac{۱}{۴}+\xi}\right)}\exp\left(\frac{-۱}{۲\hbar}\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{۲}\right)L_n^{\sqrt{\frac{۱}{۴}+\xi}}\left(\frac{۱}{\hbar}\left(\frac{\beta}{\rho}\right)^{۲}\right),$$
$$\lambda = \hbar\left(۲n + ۱ + \sqrt{\frac{۱}{۴} + \xi}\right).\tag{۱۶۰.۳}$$

می باشد. معادله حاکم بر قسمت θ به صورت

$$\frac{d^{۲}H(\theta)}{d\theta^{۲}} + \cot\theta\frac{dH(\theta)}{d\theta} + \left(-\frac{۲}{\hbar^{۲}}\left(\frac{a + b\cos^{۲}\theta + c\cos^{۴}\theta}{(\sin^{۲}\theta\cos^{۲}\theta)}\right) + \xi - \frac{\zeta^{۲}}{\sin^{۲}\theta}\right)H(\theta) = ۰.\tag{۱۶۱.۳}$$

می باشد که دومین ثابت جداسازی با ζ نشان داده شده است. جواب های این قسمت نیز بصورت

$$H(\cos^2\theta) = (\cos\theta)^{\frac{1}{2}+2\sqrt{\frac{1}{16}-a}}(\sin\theta)^{2\sqrt{\zeta^2-(a+b+c)}}P_m^{\left(2\sqrt{\frac{1}{16}-a},2\sqrt{\zeta^2-(a+b+c)}\right)}\left(1-2\cos^2\theta\right), \tag{۱۶۲.۳}$$

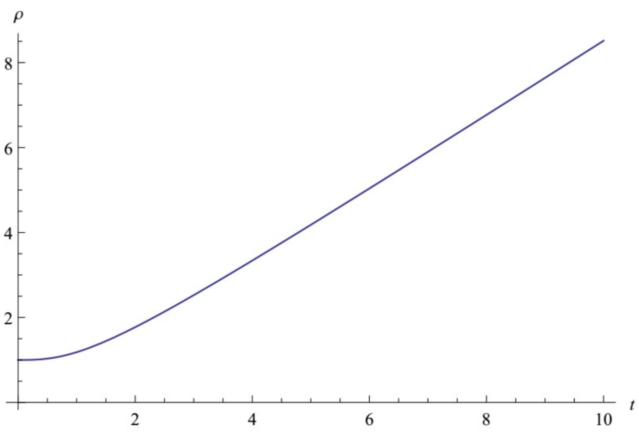
$$m^2 - \frac{m}{2} + (2m+1)\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\zeta^2-(a+b+c)} + \sqrt{\frac{1}{16}-a}\right) - \frac{1}{8} - b + \zeta^2$$
$$+\xi + 2\sqrt{\frac{1}{16}-a}\left(1+\sqrt{\zeta^2-(a+b+c)}\right) = 0.$$

می باشد و آخرین قسمت هم جواب های ساده

$$K(\phi) = (\text{ثابت})\exp\left(\pm i\zeta\phi\right) \tag{۱۶۳.۳}$$

را دارد. و در نهایت با قرار دادن ویژه توابع ناوردای پویا در بسط تابع موج، می توان به این تابع دسترسی پیدا کرد.

در این مورد نیز همان طور که از تصویر زیر پیداست رفتار صعودی پارامتر واسط باعث می شود که تابع موج با گذر زمان از دست برود.



شکل ۶.۳: رفتار $\rho(t)$ ناوردای پویا مدل X[3] بر حسب گذر زمان.

فصل ۴

سیستم های کوانتومی نسبیتی در حضور برهمکنش وابسته به زمان

این فصل شامل مباحثی است که در آن سیستم های نسبیتی در حضور برهمنکنش های وابسته به زمان توسط روش ناوردای لوییس و ررنفلد مورد بررسی قرار گرفته اند.

۱.۴ سیستم فرمیونی در حضور جرم و میدان مغناطیسی

برای بررسی این سیستم معادله دیراک را با فرض $(e = c = \hbar = ۱)$ در نظر می گیریم [۴۸]

$$H(t) = \vec{\alpha}.\left(\vec{p} - \vec{A}\right) + \beta m(t), \tag{۱.۴}$$

که در آن پتانسیل برداری بصورت $A(-B(t)y, ۰)$ می باشد و همچنین پارامتر های ماتریسی

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} ۰ & \sigma_i \\ \sigma_i & ۰ \end{pmatrix}, \ \beta = \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & -I \end{pmatrix} \tag{۲.۴}$$

با استفاده از ماتریس های پاولی $\sigma_i(i = ۱, ۲)$ و یکه نماد گذاری شده اند. اگر معادله (۲.۴) را به صورت مجموعه مولفه های آن باز کنیم داریم

$$H(t) = \alpha_x(p_x + B(t)y) + \alpha_y p_y + \beta m(t), \tag{۳.۴}$$

نکته ای حائز اهمیت در این جا بایستی تذکر داده شود که بر اساس قوانین ماکسول میدان مغناطیسی وابسته به زمان، میدان الکتریکی وابسته به زمانی را القا می کند. در این محاسبات از اثرات ناشی از این میدان القایی صرف نظر شده است.

از آن جایی که هامیلتونی سیستم مفروض به طور صریح وابسته به زمان است، تحول تابع موج منصوب به آن از رابطه

$$i\frac{\partial\Psi(x,y,t)}{\partial t} = H(t)\Psi(x,y,t), \qquad (۴.۴)$$

بدست خواهد آمد. با پیشنهاد دادن فرم اولیه ناوردای پویا به صورت

$$I(t) = C(t)p_x + D(t)p_y + E(t)y + F(t), \qquad (۵.۴)$$

و استفاده از تحول زمانی ناوردای پویا و (۳.۴) خواهیم داشت

$$p_x(\dot{C}(t)) + p_y(\dot{D}(t)) + y(\dot{E}(t)) + \dot{F}(t) + E(t)\alpha_y - D(t)B(t)\alpha_x = 0. \qquad (۶.۴)$$

با تساوی قرار دادن طرفین معادله فوق نتایج زیر بدست می آید

$$\begin{aligned} C &= \text{ثابت}، \\ D &= \text{ثابت}، \\ E &= \text{ثابت}، \\ F(t) &= \int \left(-E\alpha_y + DB(t)\alpha_x\right) dt + \text{ثابت} . \end{aligned} \qquad (۷.۴)$$

پس از مشخص شدن فرم ریاضی ناوردای پویا، به محاسبه ویژه تابع های ناوردای پویا با معرفی $\Phi(x,y,t)$ به عنوان ویژه تابع ناوردای پویا، معادله ویژه مقداری مربوطه را حل کنید. این معادله بصورت

$$I\Phi(x,y,t) = \lambda\Phi(x,y,t), \qquad (۸.۴)$$

می باشد که λ ویژه مقدار ناوردای پویا می باشد. با در نظر گرفتن فرم عملگری تکانه می توان (۸.۴) را بدین صورت بازنویسی نمود

$$\frac{C}{i}\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x} + \frac{D}{i}\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial y} + (Ey + F(t))\Phi(x,y,t) = \lambda\Phi(x,y,t). \qquad (۹.۴)$$

اگر فرض کنیم که ویژه تابع ناوردای پویا به صورت $\Phi(x,y,t) = X(x)Y(y,t)$ باشد داریم

$$\begin{aligned} &\frac{C}{i}\frac{dX(x)}{dx} + \xi X(x) = 0, \\ &\frac{D}{i}\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial y} + \left(Ey + F(t) - \lambda - \xi\right)\Phi(x,y,t) = 0. \end{aligned} \qquad (۱۰.۴)$$

در معادلات فوق ثابت جداسازی با ξ نشان داده شده است. این دسته از معادلات دارا جواب های زیر می باشند

$$X(x) = \exp\left(-\frac{i}{C}\xi x\right)$$

$$Y(y,t) = \exp\left(-\frac{i}{D}\left(E\frac{y^{۲}}{۲} + (F(t) - \lambda - \xi)\, y\right)\right) \qquad (۱۱.۴)$$

$$\Phi(x,y,t) = \exp\left(-\frac{i}{C}\xi x\right)\exp\left(-\frac{i}{D}\left(E\frac{y^{۲}}{۲} + (F(t) - \lambda - \xi)\, y\right)\right)$$

حال که ویژه تابع ناوردای پویا محاسبه گردیده است، می توان تابع موج را بصورت $\Psi(x,y,t) = K(t)\Phi(x,y,t)$ پیشنهاد کرد. با جایگذاری تابع موج پیشنهادی در (۴.۴) می توان فرم $K(t)$ را بدست آورد. با این جایگذاری داریم

$$i\hbar\frac{\partial\left(\kappa(t)\Phi(x,y,t)\right)}{\partial t} = H\left(\kappa(t)\Phi(x,y,t)\right),$$

$$\rightarrow i\hbar\left(\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t}\Phi(x,y,t) + \kappa(t)\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right) = \kappa(t)H\left(\Phi(x,y,t)\right),$$

$$i\hbar\left(\frac{۱}{\kappa(t)}\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t} + \frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right) = H\Phi(x,y,t), \qquad (۱۲.۴)$$

$$\rightarrow i\hbar\frac{۱}{\kappa(t)}\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t} = H\Phi(x,y,t) - i\hbar\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t},$$

$$\ln\kappa(t) = \int\left(\frac{H\Phi(x,y,t)}{i\hbar} - \frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right)dt,$$

$$\rightarrow \kappa(t) = \exp\left(\int\left(\frac{H\Phi(x,y,t)}{i\hbar} - \frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right)\right)dt,$$

با تعیین شدن این پارامتر می توان به تابع موج سیستم دست یافت.

۲.۴ فرمیون های نسبیتی در فضای فاز ناجابجایی

در این قسمت از پایان نامه بر آن هستیم که فرمیون های نسبیتی را در فضای ناجایجایی بررسی کنیم. در این قسمت فضای فاز جابجایی مورد نظر را مستقل از زمان فرض می کنیم. در این صورت رابطه جابجایی میان تکانه و مختصات دارای فرم [۴۹]

$$\begin{aligned}
&[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta, \\
&[\hat{p}_x, \hat{p}_y] = i\eta, \\
&[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar_{eff}\delta_{ij}, i, j = ۱, ۲, \\
&\hbar_{eff} = \hbar(۱+\xi), (\xi = \frac{\theta\eta}{۴\hbar^۲}),
\end{aligned} \tag{۱۳.۴}$$

می باشد. پارامتر های فضای ناجابجایی با θ و η نمایش داده شده اند. در حالتی $\eta = \theta = ۰$ قرار داده شود، فضای ناجابجایی به فضای جابجایی تبدیل خواهد شد. اگر در این قسمت تکانه و مختصات فضای ناجابجایی را با حروف کلاه دار نمایش دهیم، تبدیلات از فضای ناجابجایی به فضای جابجایی به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned}
&\hat{x} = x - \frac{۱}{۲\hbar}\theta p_y, \\
&\hat{y} = y + \frac{۱}{۲\hbar}\theta p_x, \\
&\hat{p}_x = p_x + \frac{۱}{۲\hbar}\eta y, \\
&\hat{p}_y = p_y - \frac{۱}{۲\hbar}\eta x,
\end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

با فرض برهمکنش وابسته به زمان در فضای ناجابجایی به صورت

$$V(\hat{x}, \hat{y}, t) = \zeta_۱ f_۱(t)\hat{x} + \zeta_۲ f_۲(t)\hat{y}, \tag{۱۵.۴}$$

معادله دیراک را می توان این گونه نوشت

$$H(t) = c\alpha_x\hat{p}_x + c\alpha_y\hat{p}_y + \beta c^۲ m + \zeta_۱ f_۱(t)\hat{x} + \zeta_۲ f_۲(t)\hat{y}, \tag{۱۶.۴}$$

با استفاده از تبدیلات (۱۴.۴) هامیلتونی (۱۵.۴) را بدین صورت باز نویسی می کنیم

$$\begin{aligned}
\hat{H}(t) = &\left(\alpha_x + \frac{f_۲(t)\theta}{۲}\right)p_x + \left(\alpha_y - \frac{f_۱(t)\theta}{۲}\right)p_y + \left(f_۱(t) - \frac{\eta\alpha_y}{۲}\right)x \\
&+ \left(f_۲(t) + \frac{\eta\alpha_x}{۲}\right)y + \beta m, \quad (\hbar = c = \zeta_۱ = \zeta_۲ = ۱)
\end{aligned} \tag{۱۷.۴}$$

با پیشنهاد فرم خام ناوردای پویا مناسب برای این سیستم به صورت

$$I(t) = A_۱(t)p_x + B_۱(t)x + A_۲(t)p_y + B_۲(t)y + C(t), \qquad (۱۸.۴)$$

و استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا می توان به فرم نهایی ناوردای پویا بصورت

$$I(t) = a_۱p_x + a_۲p_y + \frac{\eta}{۲}\left(a_۲x - a_۱y\right) + \int \left(۱ - \frac{\eta\theta}{۴}\right)\left(a_۱f_۱(t) + a_۲f_۲(t)\right)dt \qquad (۱۹.۴)$$

دست یافت. با توجه در فرم ناوردای پویا می توان دریافت که معادله ویژه مقداری برای یافتن ویژه توابع ناوردای پویا به یک معادله دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می شود. لذا می توان جواب عمومی ویژه توابع ناوردای پویا به صورت

$$\phi_\lambda(x,y,t) = \exp\left(\mu_۱(t)x + \mu_۲(t)y + \mu_۳(t)x^۲ + \mu_۴(t)y^۲\right), \qquad (۲۰.۴)$$

و تابع موج را بر اساس ویژه توابع ناوردای پویا به شکل $\Psi(x,y,t) = \chi(t)\phi_\lambda(x,y,t)$ پیشنهاد کرد. با استفاده از تحول زمانی تابع موج می توان پارامتر های نامعلوم را بدین صورت فرمی برای آن ها پیدا کرد

$$\begin{aligned}
\frac{d\mu_۱(t)}{dt} &= -if_۱(t) - ۲\mu_۳(t),\\
\frac{d\mu_۲(t)}{dt} &= -if_۲(t),\\
\frac{d\mu_۳(t)}{dt} &= \frac{d\mu_۴(t)}{dt} = ۰,\\
\frac{d\chi(t)}{dt} &= -(\alpha_x\mu_۱(t) + \alpha_y\mu_۲(t) + i\beta m)\chi(t).
\end{aligned} \qquad (۲۱.۴)$$

با حل کردن راوبط فوق فرم صریح پارامتر ها بدست خواهد آمد.

۳.۴ نوسانگر دیراک در حضر برهمکنش وابسته به زمان و فضای فاز ناجابجایی

در این قسمت با استفاده از اطلاعات قسمت قبلی می خواهیم سیستم دیگری را در فضای فاز ناجابجایی و در حضور برهمکنش وابسته به زمان در نظر بگیریم. هامیلتونی نوسانگر دیراک بر اساس مختصات و تکانه فضای فاز ناجابجایی به صورت زیر نوشته می شود [۵۰]

$$\hat{H} = c\vec{\alpha}.\left(\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right) - im\omega(t)\vec{\beta}.\vec{r}\right) + mc^{۲}\beta, \qquad (۲۲.۴)$$

اگر از تبدیلات میان فضای فاز جابجایی و ناجابجایی استفاده کنیم، می توانیم این هامیلتونی را بر اساس متغیر های فضای فاز جابجایی باز نویسی کنیم

$$\begin{aligned} H(t) &= \alpha_x p_x + \alpha_y p_y + \left(f_۱(t) - im\omega(t)\alpha_x\beta - \alpha_y\frac{B}{۲}\right)x \\ &+ \left(f_۲(t) + \alpha_x\frac{B}{۲} - im\omega(t)\alpha_y\beta\right)y + m\beta, (e = \hbar = c = ۱) \end{aligned} \qquad (۲۳.۴)$$

که در معادله فوق $V(x,y,t) = f_۱(t)x + f_۲(t)y$ و همچنین $A = \left(-\frac{B}{۲}y, \frac{B}{۲}x\right)$ در نظر گرفته شده است. ناوردای پویا برای این مسئله را به صورت

$$I(t) = A_۱(t)p_x + B_۱(t)x + A_۲(t)p_y + B_۲(t)y, \qquad (۲۴.۴)$$

پیشنهاد می دهیم. با استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا داریم

$$\begin{aligned}
&\{[A_1(t),\alpha_x]\}p_x^2+\{[A_1(t),\alpha_y]+[A_2(t),\alpha_x]\}p_xp_y\\
&-iA_1(t)\{f_1(t)+\alpha_x\beta m\omega(t)\}+\{[A_1(t),-im\omega(t)\alpha_x]\}\beta xp_x+\{[A_1(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_x xp_x+\\
&\{[A_1(t),\frac{-B}{2}\alpha_y]+[A_1(t),\frac{B}{2}\alpha_x]+[A_1(t),m\beta]+[C(t),\alpha_x]+i\dot{A}_1(t)\}p_x+\\
&\{[A_1(t),-im\omega(t)\alpha_y]\}\beta yp_x+\{[A_1(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_x yp_x+iB_1(t)\{\alpha_x\}+\\
&\{[B_1(t),\alpha_x]\}xp_x+\{[B_1(t),\alpha_y]\}xp_y+\{[B_1(t),-im\omega(t)\alpha_x]\}\beta x^2+\{[B_1(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_x x^2+\\
&\{[B_1(t),m\beta]+[B_1(t),\frac{B}{2}\alpha_x]+[B_1(t),\frac{-B}{2}\alpha_y]+i\dot{B}_1(t)\}x+\\
&\{[B_1(t),-im\omega(t)\alpha_x]+[A_2(t),-im\omega(t)\alpha_x]+[B_2(t),-im\omega(t)\alpha_x]\}\beta yx+\\
&\{[B_1(t),-im\omega(t)\beta]+[A_2(t),-im\omega(t)\beta]+[B_2(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_x yx+\\
&\{[A_2(t),\alpha_y]\}p_y^2+\{[A_2(t),-im\omega(t)\alpha_x]\}\beta xp_y+\{[A_2(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_x xp_y+\\
&\{[A_2(t),\frac{-B}{2}\alpha_y]+[A_2(t),\frac{B}{2}\alpha_x]+[A_2(t),m\beta]+[C(t),\alpha_y]+i\dot{A}_2(t)\}p_y+\\
&\{[B_2(t),\alpha_x]\}yp_x+\{[B_2(t),\frac{-B}{2}\alpha_y]+[B_2(t),\frac{B}{2}\alpha_x]+[B_2(t),m\beta]+i\dot{B}_2(t)\}y+\\
&\{[B_2(t),-im\omega(t)\alpha_y]\}\beta y^2+\{[B_2(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_y y^2+\{[C(t),-im\omega(t)\alpha_x]\}\beta x+\\
&\{[C(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_x x+\{[C(t),-im\omega(t)\alpha_y]\}\beta y+\{[C(t),-im\omega(t)\beta]\}\alpha_y y+\\
&\{[C(t),m\beta]+[C(t),\frac{B}{2}\alpha_x]+[C(t),\frac{-B}{2}\alpha_y]+i\dot{C}(t)\}=0,
\end{aligned} \tag{25.4}$$

این بدین معنی است که می توان ناوردای پویا را بدین صورت باز نویسی کرد

$$\begin{aligned}
I(t)&=a_0p_x+b_0x+(a_1(t)+a_2(t)\alpha_x+a_3(t)\alpha_y+a_4(t)\beta)\,p_y+(b_1(t)+b_2(t)\alpha_x\\
&+b_3(t)\alpha_y+b_4(t)\beta)y+c_1(t)+c_2(t)\alpha_x+c_3(t)\alpha_y+c_4(t)\beta,
\end{aligned} \tag{26.4}$$

در این جا نیز معادله دیفرانسیل حاکم بر ویژه توابع ناوردای پویا منجر به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می شود که جواب عمومی آن را می توان به صورت

$$\phi_\lambda(x,y,t)=\exp\left(\mu_1(t)x+\mu_2(t)y+\mu_3(t)x^2+\mu_4(t)y^2\right), \tag{27.4}$$

نوشت. با در نظر گرفتن تابع موج به صورت $\Psi(x,y,t)=\chi(t)\phi_\lambda(x,y,t)$ و استفاده از رابطه تحول زمانی تابع موج می توان معادلات حاکم بر ضرایب نامعلوم را دست آورد

$$\begin{aligned}
& i\frac{d\mu_۱(t)}{dt} = f_۱(t) - \left(۲i\alpha_x\mu_۳ + im\omega\alpha_x\beta + \frac{B}{۲}\alpha_y\right), \\
& i\frac{d\mu_۲(t)}{dt} = f_۲(t) - \left(۲i\alpha_y\mu_۴ + im\omega\alpha_y\beta - \frac{B}{۲}\alpha_x\right), \\
& \mu_۳ = \text{ثابت}، \\
& \mu_۴ = \text{ثابت}، \\
& \chi(t) = \exp\left(-\int\left(im\beta + \alpha_x\mu_۱(t) + \alpha_y\mu_۲(t)\right)dt\right),
\end{aligned} \tag{۲۸.۴}$$

پس با داشتن این روابط می توان به فرم نهایی تابع موج دست یافت.

۴.۴ اثر راشبا در حضور برهمکنش وابسته به زمان

اثر راشبا [۱] که توسط بیچکوف [۲] و راشبا در سال ۱۹۸۴ گزارش شد کوپل شدگی اسپین و ممنتوم را بیان می کند [۵۱] این برهمکنش را به صورت

$$H_R = \alpha_R(\vec{\sigma}\times\vec{p}).\hat{z} = \alpha_R(p_y\sigma_x - p_x\sigma_y), \tag{۲۹.۴}$$

بیان می کنند که در آن ثابت α_R وابسته به میدان الکتریکی می باشد. اگر این اثر را بخواهیم در حضور برهمکنش وابسته به زمانی که در قسمت های قبل در نظر گرفتیم، در نظر بگیریم، می توانیم هامیلتونی زیر را به آن نسبت دهیم [۵۲]

$$H(t) = \sigma_x p_x + \sigma_y p_y + \alpha_R(t)(p_y\sigma_x - p_x\sigma_y) + f(t)x + g(t)y + m\beta. \tag{۳۰.۴}$$

علت آنکه ضریب α_R وابسته به زمان در نظر گرفته شده است این است که برهمکنش $V(x,y,t) = f(t)x + g(t)y$ می تواند نماینده یک میدان الکتریکی وابسته به زمان باشد. از طرفی چون ای ضریب وابسته به میدان الکتریکی است لذا وابسته به زمان گرفتن این ضریب امری کاملا معقول است. در این جا دوباره این نکته را یاد آور می شویم که از اثرات میدان مغناطیسی القایی که بر اساس معادلات ماکسول انتظار اثر گذاری آن را داریم صرف نظر کرده ایم.

اگر همانند قسمت های قبل ابتدا فرم خام ناوردای پویا را به صورت

$$I(t) = a(t)p_x + b(t)p_y + c(t)x + d(t)y + e(t), \tag{۳۱.۴}$$

[۱] Rashba Effect
[۲] Bychkov

پیشنهاد می دهیم. سپس با استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} I(t) &= ap_x + bp_y + cx + dy + e(t) \\ e(t) &= \int \left(af(t) + bg(t) + c(\sigma_x - \alpha_R(t)\sigma_y) + d(\sigma_y + \alpha_R(t)\sigma_x)\right) dt + \text{ثابت} \end{aligned} \tag{۳۲.۴}$$

از آنجایی که معادله ویژه مقداری ناوردای پویا برای بدست آوردن ویژه تابع های آن منجر به یک معادله دیفرانسیل خطی مرتبه اول می شود لذا می توان تابع موج سیستم مورد نظر را با استفاده از فرم خام ویژه توابع ناوردای پویا به صورت

$$\langle r\,|\Psi\rangle = \Psi(x,y,t) = K(t)\exp\left(\mu_۱(t)x + \mu_۲(t)x^۲ + \mu_۳(t)y + \mu_۴(t)y^۲\right) \tag{۳۳.۴}$$

با استفاده از رابطه تحول زمانی تابع موج معادلات حاکم بر پارامتر های نامعلوم در تابع موج به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$\begin{aligned} &\frac{d\mu_۱}{dt} = -\left(۲\mu_۲(\sigma_x - \alpha_R(t)\sigma_y) + \frac{i}{\hbar}f(t)\right), \\ &\frac{d\mu_۳}{dt} = -\left(۲\mu_۴(\sigma_y + \alpha_R(t)\sigma_x) + \frac{i}{\hbar}g(t)\right), \\ &K(t) = \exp\left(-\int\left(\frac{i}{\hbar}m\beta + \mu_۱(t)(\sigma_x - \alpha_R(t)\sigma_y) + \mu_۳(\sigma_y + \alpha_R(t)\sigma_x)\right)dt + \text{ثابت}\right) \\ &\mu_۲, \mu_۳ = \text{ثابت}. \end{aligned} \tag{۳۴.۴}$$

۵.۴ بوزن های نسبیتی و بر همکنش وابسته به زمان

برای بررسی بوزون های نسبیتی اسپین ۰ و یا اسپین ۱ می توان از معادله دی کی پی [۳] استفاده نمود [۵۳] . فرم این معادله به صورت

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - m(t))\Psi = 0, (\hbar = c = 1), \qquad (۳۵.۴)$$

می باشد که در این جا ما جرم را نیز وابسته به زمان در نظر گرفته ایم و ماتریس های β^μ که $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ دارای جبر ناجابجایی زیر می باشند

$$\beta^\mu\beta^\nu\beta^\lambda + \beta^\lambda\beta^\nu\beta^\mu = g^{\mu\nu}\beta^\lambda + g^{\lambda\nu}\beta^\mu, \qquad (۳۶.۴)$$

با توجه به اینکه چه بوزون هایی را مورد بررسی قرار می دهیم وضعیت این ماتریس ها متفاوت می باشد.

- **اسپین ۱:** در این وضعیت این ماتریس ها، ماتریس های ۱۰ × ۱۰ می باشند که به صورت زیر می باشند

$$\beta^\circ = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & I & I \\ \bar{0}^T & I & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & -is_i \\ e_i^T & 0 & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & -is_i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۳۷.۴)$$

که s_i ماتریس های یک هستند، I ، ۰ نیز به ترتیب ماتریس های یکه و پوچ می باشند و

$$\bar{0} = (0, 0, 0), \ \mathrm{e}_1 = (1, 0, 0), \ \mathrm{e}_2 = (0, 1, 0), \ \mathrm{e}_3 = (0, 0, 1), \qquad (۳۸.۴)$$

تابع موج Ψ نیز یک ماتریس ستونی ده مولفه ای است.

- **اسپین ۰:**

در این وضعیت ماتریس های β ماتریس هایی ۵ × ۵ با ویژگی های زیر می باشند

$$\beta^\circ = \begin{pmatrix} \theta & \tilde{0} \\ \bar{0}_T & 0 \end{pmatrix}, \ \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho^i \\ -\rho^i_T & 0 \end{pmatrix}, \qquad (۳۹.۴)$$

[۳] DKP equation

مولفه های $\bar{\tilde{\circ}}, \bar{\circ}, \circ$ به ترتیب ماتریس های صفر ۳ × ۳، ۳ × ۲، ۲ × ۲ می باشند و

$$\theta = \begin{pmatrix} \circ & ۱ \\ ۱ & \circ \end{pmatrix},\ \rho^{۱} = \begin{pmatrix} -۱ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix},\ \rho^{۲} = \begin{pmatrix} \circ & -۱ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix},\ \rho^{۳} = \begin{pmatrix} \circ & \circ & -۱ \\ \circ & \circ & \circ \end{pmatrix}. \quad (۴۰.۴)$$

می خواهیم این معادله را در حضور برهمکنش وابسته به زمان

$$V(x, y, t) = f(t)x^{۲} + g(t)y^{۲} \quad (۴۱.۴)$$

که $g(t)$، $f(t)$ توابعی نامعلوم نسبت به زمان هستند. با در نظر گرفتن این برهمکنش می توان هامیلتونی معادله را این گونه بازنویسی کرد

$$\mathrm{H}(t) = \beta^{x}\mathrm{p}_{x} + \beta^{y}\mathrm{p}_{y} - m(t) + f(t)x^{۲} + g(t)y^{۲} \quad (۴۲.۴)$$

بر اساس این هامیلتونی ناوردای پویا را به صورت

$$\mathrm{I}(t) = a(t)p_{x} + b(t)p_{y} + c(t)x^{۲} + d(t)x + e(t)y^{۲} + h(t)y + j(t), \quad (۴۳.۴)$$

پیشنهاد می دهیم که با استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا و هامیلتونی (۴۲.۴) می توان ضرایب نامعلوم حاضر در فرم خام ناوردای پویا را به صورت زیر بدست آورد

$$\begin{aligned} a, b, c, e &= \text{ثابت}، \\ h(t) &= ۲\int (bg(t) - \beta^{y}e)\, dt + \text{ثابت}, \\ d(t) &= ۲\int (c\beta^{x} - af(t))\, dt + \text{ثابت}, \\ j(t) &= -\int (d(t)\beta^{x} + h(t)\beta^{y})dt + \text{ثابت}. \end{aligned} \quad (۴۴.۴)$$

مرحله بعدی بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویا می باشد که با قرار دادن فرم عملگری تکانه در معادله ویژه مقداری ناوردای پویا

$$I(x, y, t)\Phi(x, y, t) = \lambda\Phi(x, y, t)$$

به صورت زیر بدست خواهد آمد

(۴۵.۴)
$$\frac{a}{i}\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x}+\frac{b}{i}\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial y}+\left(cx^{۲}+d(t)x+ey^{۲}+h(t)y+j(t)\right)\Phi(x,y,t)=\circ.$$

با فرض $\Phi(x,y,t)=X(x,t)Y(y,t)$ و $\lambda=\lambda_x+\lambda_y$ می توانیم به معادلاتی برسیم که ما را برای بدست آوردن ویژه تابع ناوردای پویا کمک می کند

$$\begin{aligned}&\frac{\partial X(x,t)}{\partial x}+\frac{i}{a}(cx^{۲}+d(t)x+j(t)-\lambda'_x)X(x,t)=\circ,\\&\lambda'_x=\lambda_x+\eta,\\&\frac{\partial Y(y,t)}{\partial y}+\frac{i}{b}(ey^{۲}+h(t)y-\lambda'_y)Y(y,t)=\circ,\\&\lambda'_y=\lambda_y-\eta,\end{aligned} \quad (۴۶.۴)$$

که ثابت جداسازی با η نمایش داده شده است. با حل کردن معادلات فوق می توانیم به نتایج زیر دست یابیم

$$\begin{aligned}&X(x,t)=(\text{ثابت})e^{-\frac{i}{a}(\frac{c}{۳}x^{۳}+\frac{d(t)}{۲}x^{۲}+(j(t)-\lambda'_x)x)},\\&Y(y,t)=(\text{ثابت})e^{-\frac{i}{b}(\frac{e}{۳}y^{۳}+\frac{h(t)}{۲}y^{۲}-\lambda'_y y)},\\&\Phi(x,y,t)=(\text{ثابت})e^{-i\left(\frac{۱}{a}(\frac{c}{۳}x^{۳}+\frac{d(t)}{۲}x^{۲}+(j(t)-\lambda'_x)x)+\frac{۱}{b}(\frac{e}{۳}y^{۳}+\frac{h(t)}{۲}y^{۲}-\lambda'_y y)\right)}.\end{aligned} \quad (۴۷.۴)$$

پس از دستیابی به ویژه توابع ناوردای پویا تابع موج را بر اساس واژه توابع ناوردای پویا به صورت $\Psi(x,y,t)=K(t)\Phi(x,y,t)$ پیشنهاد می دهیم. با قراردادن تابع موج در رابطه تحول زمانی تابع موج می توان فرم $K(t)$ را محاسبه کرد

$$\begin{aligned}&i\frac{\partial\left(\kappa(t)\Phi(x,y,t)\right)}{\partial t}=H\left(\kappa(t)\Phi(x,y,t)\right),\\&\to i\left(\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t}\Phi(x,y,t)+\kappa(t)\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right)=\kappa(t)H\left(\Phi(x,y,t)\right),\\&i\left(\frac{۱}{\kappa(t)}\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right)=H\Phi(x,y,t),\\&\to i\frac{۱}{\kappa(t)}\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t}=H\Phi(x,y,t)-i\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t},\\&\ln\kappa(t)=\int\left(\frac{H\Phi(x,y,t)}{i}-\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right)dt,\\&\to\kappa(t)=\exp\left(\int\left(\frac{H\Phi(x,y,t)}{i\hbar}-\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right)dt\right),\end{aligned} \quad (۴۸.۴)$$

۶.۴ معادله نیمه نسبیتی سالپیتر در حضور برهمکنش وابسته به زمان

معادله سالپیتر حالت مقید سیستم های نسبیتی را مورد بررسی قرار می دهد [۵۴] این معادله دارای فرم ریاضیاتی

$$H(x,t)=\sum_{i=1}^{2}\sqrt{p^2+m_i^2}+V(x,t)-\sum_{i=1}^{2}m_i,(c=1) \qquad (۴۹.۴)$$

می باشد. با استفاده از بسط دو جمله ای می توان عبارت رادیکالی را بسط داد

$$\sum_{i=1}^{2}\left(p^2+m_i^2\right)^{1/2}\approx m_1+m_2+\frac{p^2}{2\mu}+\frac{p^4}{8\eta^3}+\ldots, \qquad (۵۰.۴)$$

که در رابطه فوق $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ و $\eta=\mu\left(\frac{m_1m_2}{m_1m_2-3\mu^2}\right)^{1/3}$ می باشند. می خواهیم این معادله زمانی که برهمکنش $V(x,t)=f(t)x$ در سیستم حضور دارد بررسی کنیم. با چنین فرضی هامیلتونی سیستم مورد نظر را می توان این گونه نوشت

$$H(t)=\frac{p^4}{8\eta^3}+\frac{p^2}{2\mu}+f(t)x. \qquad (۵۱.۴)$$

که $f(t)$ تابع نامعلومی از زمان می باشد. برای این مسئله فرم ناوردای پویا به صورت

$$I(t)=A(t)p^4+B(t)p^3+C(t)p^2+D(t)p+E(t)x+F(t), \qquad (۵۲.۴)$$

پیشنهاد میدهیم. با استفاده از رابطه تحول زمانی ناوردای پویا و هامیلتونی (۵۱.۴) عبارت زیر به سهولت استخراج بدست می آیند

(۵۳.۴)

$$\dot{A}(t)p^4+\left(\dot{B}(t)-A(t)f(t)+\frac{E(t)}{2\eta^3}\right)p^3+\left(\dot{C}(t)-3B(t)f(t)\right)p^2+\left(\dot{D}(t)-2C(t)f(t)\right)p$$
$$+\dot{E}(t)x+\dot{F}(t)-D(t)f(t)=0.$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\dot{A}(t) = \circ,\ \dot{E}(t) = \circ\ ,\\
&\dot{F}(t) - D(t)f(t) = \circ,\\
&\dot{B}(t) - A(t)f(t) + \frac{E(t)}{۲\eta^{۳}} = \circ,\\
&\dot{C}(t) - ۳B(t)f(t) = \circ,\\
&\dot{D}(t) - ۲C(t)f(t) = \circ,
\end{aligned} \quad (۵۴.۴)$$

حاصل عبارت فوق می شود

$$\begin{aligned}
&A = \text{ثابت},\ E = \text{ثابت},\\
&B(t) = \int \left(Af(t) + \frac{E}{۲\eta^{۳}}\right) dt + \text{ثابت},\\
&C(t) = \int ۲B(t)f(t)dt + \text{ثابت},\\
&D(t) = \int \left(۲C(t)f(t) + \frac{E}{m}\right) dt + \text{ثابت},\\
&F(t) = \int D(t)f(t)dt + \text{ثابت}.
\end{aligned} \quad (۵۵.۴)$$

با مشخص شدن فرم ضرایب ناوردای پویا، برای بدست آوردن ویژه توابع ناوردای پویای بدست آمده، با لحاظ کردن فرم عملگری تکانه خواهم داشت

$$\hbar^{۴}A\frac{d^{۴}\Phi}{dx^{۴}} - i\hbar^{۳}B(t)\frac{d^{۳}\Phi}{dx^{۳}} - C(t)\hbar^{۲}\frac{d^{۲}\Phi}{dx^{۲}} - i\hbar D(t)\frac{d\Phi}{dx} + Ex\Phi + F(t)\Phi = \lambda\Phi, \quad (۵۶.۴)$$

برای بدست آوردن جواب این معادله دیفرانسیل بایسیتی از روش بسط دادن جواب استفاده نمود و ضرایب بسط را تعیین کرد. با در نظر گرفتن ویژه تابع به صورت $\Phi = \sum\limits_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ خواهیم داشت

(۵۷.۴)

$$\begin{aligned}
&\hbar^{۴}A\sum_{n=\circ}^{\infty} n(n-۱)(n-۲)(n-۳)a_n x^{n-۴} - i\hbar^{۳}B(t)\sum_{n=\circ}^{\infty} n(n-۱)(n-۲)a_n x^{n-۳}\\
&-C(t)\hbar^{۲}\sum_{n=\circ}^{\infty} n(n-۱)a_n x^{n-۲} - i\hbar D(t)\sum_{n=\circ}^{\infty} n a_n x^{n-۱}\\
&+E\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^{n+۱} + F(t)\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^{n} = \lambda\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^{n},
\end{aligned}$$

که ضرایب بسط را می توان از رابطه زیر تعیین وضعیت نمود

$$\begin{aligned}&\hbar^4 A\frac{(n+5)!}{(n+1)!}a_{n+5}-i\hbar^3 B(t)\frac{(n+4)!}{(n+1)!}a_{n+4}-C(t)\hbar^2\frac{(n+3)!}{(n+1)!}a_{n+3}\\&-i\hbar D(t)(n+2)a_{n+2}+Ea_n+(F(t)-\lambda)a_{n+1}=0.\end{aligned} \tag{۵۸.۴}$$

با در دست داشتن ویژه تابع ناوردا در موقعیتی هستیم که می توانمی تابع موج را بر اساس این ویژه تابع به صورت $\Psi=\kappa(t)\Phi$ پیشنهاد بدهیم. برای محاسبه ضریب نامعلوم در فرم پیشنهادی تابع موج داریم

$$\begin{aligned}&i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=H\Psi,\rightarrow i\hbar\frac{\partial\left(\kappa(t)\Phi(x,t)\right)}{\partial t}=H\left(\kappa(t)\Phi(x,t)\right),\\&\rightarrow i\hbar\left(\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t}\Phi(x,t)+\kappa(t)\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)=\kappa(t)H\left(\Phi(x,t)\right),\\&i\hbar\left(\frac{1}{\kappa(t)}\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t}+\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)=H\Phi(x,t),\\&\rightarrow i\hbar\frac{1}{\kappa(t)}\frac{\partial\kappa(t)}{\partial t}=H\Phi(x,t)-i\hbar\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}.\\&\ln\kappa(t)=\int\left(\frac{H\Phi(x,t)}{i\hbar}-\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)dt,\\&\rightarrow\kappa(t)=\exp\left(\int\left(\frac{H\Phi(x,t)}{i\hbar}-\frac{\partial\Phi(x,t)}{\partial t}\right)dt\right),\end{aligned} \tag{۵۹.۴}$$

فصل ۵

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این پایان نامه، چگونگی استفاده از روش ناوردای لوییس-رزنفلد به منظور دست یافتن به تحول زمانی ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی سیستم مورد نظر در حضور برهمکنش وابسته به زمان به تفضیل و در شرایط مختلف و متفاوت مورد بحث و استفاده قرار گرفت. روش های پیشنهادی متفاوتی در مسائل مطرح شده در این پایان نامه به منظور دست یافتن به ناوردای پویا مورد استفاده قرارگرفت و پس از دست یافتن به ویژه توابع آن، تابع موج منتسب به سیستم به واسطه آن بدست آمد. نتیجه بسیار مهمی که از استفاده کردن از این روش بدست آمد این بود که ما موفق به مدل سازی تحلیلی زوال سیستم ها از جمله از بین رفتن هسته ها (با استفاده از مدل های متفاوت هسته ای) شدیم. این مهم با در نظر گرفتن یک برهمکنش موثر وابسته به زمان در سیستم مورد نظر بدست آمد.

داشتن تابع موج وابسته به زمان کمک شایانی به ما در مورد اطلاعات سیستم می کند. لذا با داشتن این چنین اطلاعاتی ما پیشنهاد می دهیم که در آینده و کارهای پژوهشی دیگر قانون طلایی فرمی در حضور برهمکنش وابسته به زمان و احتمال گذار های مختلف هسته ای در حضور این چنین برهمکنش هایی مورد مطالعه قرار بگیرد.

مراجع

[1] J. J. Sakurai, San Fu Tuan. Modern Quantum Mechanics: Revised Edition. Pearson Education, (1994)

[2] H. R.J. Lewis, W.B. Riesenfeld, J. Math. Phys.10, 1458 (1969)

[3] S.S. Schweber, "An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory" (RowPeterson, Elmsford, New York, 1961).

[4] D. Han, Y.S. Kim, and M.E. Noz, Phys. Rev. A 41, 6233 (1990).

[5] P.A.M. Dirac, J. Math. Phys. 4, 901 (1963).

[6] C.M. Caves and B.L. Schumaker, Phys. Rev. A 31, 3068 (1985),
B.L. Schumaker and C.M. Caves, Phys. Rev. A31, 3093 (1985).

[7] A.L. Fetter and J.D. Walecka, "Quantum Theory of Many Particle Systems" (McGrawHill, New York, 1971).

[8] Y.S. Kim, Phys. Rev. Lett. 63, 348 (1989).

[9] F. Iachello and S. Oss, Phys. Rev. Lett. 66, 2976 (1991).

[10] A. Stefański et al., Phys. Rev. E 75, 016210 (2007).

[11] V. Sudhir et al., Phys. Rev. A 86, 012316 (2012).

[12] H. Dekker, Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator, Physics Reports, 80, 1-110 (1981).

[13] C. I. Um, K. Yeon, T. F. George, The quantum damped harmonic oscillator, Physics Reports, 362 , 63-192 (2002).

[14] B. Remaud and E. S. Hernandez, Damping of wave packet motion in a general time-dependent quadratic field, Journal of Physics A: Mathematical and General, 13 , 2013-2028 (2013).

[15] C. M. A. Dantas, I. A. Pedrosa, and B. Baseia, Harmonic oscillator with time-dependent mass and frequency and a perturbative potential, Physical Review A, 45 , 1320 (1992).

[16] I. A. Pedrosa, Comment on ''Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator'', Physical Review D, 36 , 1279 (1987).

[17] L. H. Yu and C. P. Sun, Evolution of the wave function in a dissipative system, Physical Review A, 49 , 592 (1994).

[18] J. Y. Ji, J. K. Kim, and S. P. Kim, Heisenberg-picture approach to the exact quantum motion of a time-dependent harmonic oscillatorm, Physical Review A, 51 , 4268 (1995).

[19] B. Remaud and E. S. Hernandez, Damping of wave packet motion in a general time-dependent quadratic field Journal of Physics A: Mathematical and General, 13 , 2013 (1980).

[20] I. A. Pedrosa, G. P. Serra and I. Guedes, Wave functions of a time-dependent harmonic oscillator with and without a singular perturbation, Physical Review A, 56 , 4300 (1997).

[21] J. R. Choi, Exact quantum theory of noninteracting electrons with time-dependent effective mass in a time-dependent magnetic field, Journal of Physics: Condensed Matter 15 , 823 (2003).

[22] G. Harari, Y. Ben-Aryeh and A. Mann, Propagator for the general time-dependent harmonic oscillator with application to an ion trap, Physical Review A , 84 , 062104 (2011).

[23] S. Gasiorowicz, Quantum Physics, 3rd Edition, ISBN: 978-0-471-05700-0, (2003).

[24] Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. A, 19, 6, 2461–2462 (1979).

[25] M. A. Ajaib, Found. Phys. 1-13 (2015).

[26] H. Hassanabadi, Z. Molaee and S.Zarrinkamar, Mod. Phys. Lett. A, 27, 39, 1250228 (2012).

[27] S. Dey, A. Fring, Phys.Rev. D, 90 , 8, 084005 , (2014).

[28] D. R. Inglis, Phys. Rev. 60 , 837 (1941).

[29] J. Rainwater, Phys. Rev. 79 , 432 (1950).

[30] E. Feenberg, Phys. Rev. 77 , 771 (1950).

[31] J. H. D. Jensen, Rev. Mod. Phys. 29 , 182 (1957).

[32] P. Fong, Phys. Rev. 122 , 1545 (1961).

[33] M. Bender, P.-H. Heenen and P.-G. Reinhard, Rev. Mod. Phys. 75 , 121 (2003).

[34] E. Caurier, G. Martinez-Pinedo, F. Nowacki, A. Povez and A. P. Zuker, Rev. Mod. Phys. 77 ,427 (2005).

[35] H. A. Weidenmuller and G. E. Mitchell, Rev. Mod. Phys. 81 , 539 (2009).

[36] A. Bohr, Mat.-Fys. Medd. Dan. Vidensk. Selsk. 26 (1952).

[37] D. Bonatsos, P. Georgoudis, D. Lenis, N. Minkov and C. Quesne, Phys. Rev. C 83, 044321 (2011).

[38] A. N. Ikot, H. Hassanabadi, H. P. Obong, Y. E. Chad Umoren, C. N. Isonguyo, and B. H. Yazarloo, Chin. Phys. B, 23, 12, 120303 (2014).

[39] M. Chabab, A. Lahbas, and M. Oulne, Eur. Phys. J. A, 51, 131 (2015)

[40] A. Bohr, B. R. Mottelson, Nuclear Structure Vol. II: Nuclear Deformations (Benjamin, New York) (1975).

[41] A. S. Davydov and A. A. Chaban, Nucl. Phys. 20, 499 (1960)

[42] D. Bonatsos et al, Phys. Lett. B, 621, 102 (2005).

[43] P. Buganu, R. Budaca, Phys. Rev. C, 91, 014306 (2015).

[44] D. Bonatsos, D. Lenis, D. Petrellis, P. A. Terziev, I. Yigitoglu, Phys. Lett. B 632. 238242 (2006).

[45] A.G. Sitenko, V.K. Tartakovskii, Lectures on the Theory of the Nucleus, Atomizdat, Moscow, (1972) (in Russian).

[46] R.N. Zare, Angular Momentum (Wiley, New York) (1988).

[47] A.S. Davydov, Theory of the Atomic Nucleus, Fizmatgiz, Moscow, (1958).

[48] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics Wave Equation, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (2000).

[49] H. Hassanabadi · S. S. Hosseini · S. Zarrinkamar, Int. J. Theor. Phys. 54 ,251–259 (2015).

[50] A. Boumali1 and H. Hassanabadi, Eur. Phys. J. Plus, 128, 124 (2013).

[51] Y.A. Bychkov and E.I. Rashba, J. Phys. C, 17 , 6039 (1984).

[52] K.V. Shanavas and S. Satpathy, Phys. Rev. Lett. 112, 086802 (2014).

[53] M. Darroodi1, H. Hassanabadi1, and N. Salehi, Eur. Phys. J. A , 51, 69 (2015).

[54] S. Zarrinkamar · A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, Few-Body Syst , 52, 165–170 (2012). Solutions

Abstract

Investigation of time-dependent relativistic and non-relativistic quantum systems have been attracted many interests in last decades because investigation of these systems, yields to fundamental structure of quantum physics as well as interpretations in fields, such as gravity, optic, Pauli traps and spintronic. Because of existence of partial differential with respect coordinate and time in investigation of time evolution of time-dependent quantum systems, it has its own difficulties that in order to obviate such obstacles as well as to obtain exact or high precision solutions, different methods have been invented and utilized such as Feynman path integrals, Second quantization and Lewis-Riesenfeld dynamical invariant.

In this thesis, by introducing Lewis-Riesenfeld dynamical invariant method in detail to make use of this method we want to investigate non-relativistic (such as time-dependent harmonic oscillator, many-body system, deformed nuclei and ...) and relativistic (such as Fermion and free or bounded Boson systems) systems in presence of time-dependent interactions.

Key Words: Lewis-Riesenfeld dynamical invariant, time-dependent interactions, time-dependent harmonic oscillator, Fermion and Boson systems.

Shahrood University of Technology

Physics Departmant

Investigation of time evolution for relativistic and non-relativistic particles using Lewis-Riesenfield invariant

Hadi Sobhani

Supervisor

Dr. Hassan Hassanabadi

2016