

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

رشته: فیزیک گرایش: هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی نوسانگر دیراک در حضور پتانسیل آهارونوف- بوهیم با استفاده از رهیافت انتگرال
مسیر فاینمن

نگارنده:

فاطمه قباخلو

استاد راهنما:

دکتر حسن حسن آبادی

شهریور ۱۳۹۵



پیوست شماره ۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانوم فاطمه قباخلو به شماره دانشجویی ۹۲۳۸۶۴۴

تحت عنوان: بررسی نوسانگر دیراک در حضور پتانسیل آهارونوف- بوهیم با استفاده از رهیافت انتگرال مسیر فاینمن

در تاریخ ۹۵/۰۶/۰۶ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر مرتضی رفیعی		نام و نام خانوادگی : دکتر علی اکبر رجبی
			نام و نام خانوادگی : دکتر نسرین صالحی

تشکر و قدردانی

به مصداق « من لم يشكر المخلوق لم يشكر الخالق »

بر خود لازم می‌دانم، صمیمانه ترین مراتب امتنانم را تقدیم به محضر استاد فرزانه ام، جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی که نه تنها از رهنمودهای مفید و پشتیبانی ایشان در طول مراحل مختلف پایان نامه بهره بردم، بلکه همواره به عنوان نمونه کامل اخلاق، اعتماد و ایمان، چراغ راه زندگی ام بودند. برای ایشان و خانواده گرامیشان سلامتی، سعادت و سرافرازی را از خداوند بزرگ آرزومندم.

از خانواده‌ام که با شکیبایی در مراحل مختلف تحصیل مرا پشتیبانی و یاری کردند نهایت تشکر را داشته و از خداوند بزرگ برای آنها آرزوی سلامتی و سربلندی را خواهانم.

سپاسگزارم از اساتید محترمی که عهده‌دار داوری این کار بودند.

در انتها تشکر خالصانه خدمت همه کسانی که به نوعی مرا در انجام رساندن این تحقیق یاری نموده‌اند.

سپاس خدای را که هر چه دلایم از دوست

به امیر آنکه توفیق یابیم جز خدمت به خلق او نکوشیم

تقدیم به

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم

فرشته گانی که از خواسته هایشان گذشتند، سختی ها را به جان خریدند و خود را سپر بلای مشکلات و ناملایمات کردند تا من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده ام برسم. بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم.

و

همسرم عزیزم

که راهنمایی ها و دلگرمی های ایشان حامی و راهگشای من در لحظه لحظه زندگی می باشد.

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه قباخلو** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک - هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **بررسی نوسانگر دیراک در حضور پتانسیل آهارونوف-بوهم** با استفاده از رهیافت انتگرال مسیر فاینمن تحت راهنمایی دکتر **حسن حسن آبادی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ :

امضای دانشجو:

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

مکانیک کوانتومی یک نظریه احتمالی در حالی که مکانیک کلاسیک یک نظریه قطعی می‌باشد. مدت زمان طولانی از گفتن ارتباط این دو اجتناب شد تا زمانی که فاینمن از طریق نمایش معروف انتگرال مسیر خود با هسته ای از معادله شرودینگر این دو مکانیک را به هم رسانید. ساز و کار انتگرال مسیر شرح حالی از نظریه کوانتوم در مکانیک کوانتومی می‌باشد که اصل کنش کلاسیک را عمومیت می‌باشد. این ساز و کار تصور کلاسیکی مسیر منحصر بفرد یک سیستم را به مجموع یا تابع انتگرالی از مسیرهای ممکن را برای محاسبه دامنه کوانتومی جایگزین نمود. در این پایان‌نامه پس از بحثی همراه با جزئیات درباره سازوکار انتگرال مسیر فاینمن، مسائل متفاوتی همچون معادله وابسته به زمان شرودینگر، نوسانگر دیراک در حضور برهمکنش آهارونوف - بوهم، نوسانگر دی کی پی و ذره آزاد با در نظر گرفتن طول کمینه را با استفاده از این ساز و کار مورد بررسی قرار خواهیم داد.

کلمات کلیدی: انتگرال مسیر فاینمن، نوسانگر دیراک، پتانسیل آهارونوف-بوهم، نوسانگر دی کی پی، طول کمینه.

لیست مقالات مستخرج شده از پایان نامه:

- ❖ F. Ghobakhloo and H. Hassanabadi *Investigation of Free Particle Propagator with Generalized Uncertainty Problem.* Advances in High Energy Physics, vol. 2016, ID 2045313, 2016. doi:10.1155/2016/2045313.

فهرست مطالب:

شرح.....	صفحه
فصل اول: انتگرال مسیر.....	۱
۱-۱ تاریخچه انتگرال مسیر.....	۲
۲-۱ اهمیت انتگرال مسیر فاینمن.....	۳
۳-۱ فرضیات اولیه انتگرال مسیر فاینمن.....	۴
۴-۱ صورت بندی انتگرال مسیر فاینمن برای مکانیک کوانتومی.....	۵
۵-۱ رفتار نیمه کلاسیکی.....	۱۰
فصل دوم: بررسی انتشارگر تحت پتانسیل‌های مختلف.....	۱۱
۱-۲ مقدمه بر سه روش محاسبه انتشارگر.....	۱۲
۲-۲ محاسبه انتشارگر ذره آزاد به روش انتگرال مسیر فاینمن.....	۱۲
۳-۲ محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ به روش شوینگر.....	۱۴
۴-۲ محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ به روش انتگرال مسیر فاینمن.....	۲۰
۵-۲ محاسبه انتشارگر با استفاده از وردش.....	۲۲
۱-۵-۲ محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ با استفاده از وردش.....	۲۲
۲-۵-۲ محاسبه انتشارگر ذره آزاد با استفاده از وردش.....	۲۷
۳-۵-۲ محاسبه انتشارگر تحت پتانسیل دو جمله ای درجه دو به روش وردش.....	۲۹
۴-۵-۲ محاسبه انتشارگر تحت پتانسیل کولنی به روش وردش.....	۳۱

فصل سوم: راه حل تحلیلی معادله شرودینگر وابسته به زمان، یک بعدی به روش انتگرال

مسیر فاینمن ۳۵

۱-۳ مقدمه راه حل تحلیلی معادله شرودینگر ۳۶

۲-۳ نوسانات و ارتعاشات تابع موج هرمیتین - گاوسین ۳۷

۳-۳ نوسانات و ارتعاشات تابع موج هویساید ۴۱

۴-۳ تحول زمانی تابع موج ذره در جعبه تحت اثر پتانسیل نوسانی ۴۴

۵-۳ تحول زمانی تابع موج هرمیتین - گاوسین تحت انتشارگر ذره آزاد ۴۶

۶-۳ تحول زمانی تابع موج هویساید تحت انتشارگر ذره آزاد ۴۹

فصل چهارم: حل نوسانگر دیراک تحت تاثیر اثر آهارونوف - بوهم به روش انتگرال مسیر

فاینمن ۵۳

۱-۴ مقدمه ای بر ساده شده انتگرال مسیر در اثر آهارونوف - بوهم ۵۴

۲-۴ نوسانگر دیراک به همراه نوسانگر هماهنگ ساده و محاسبه انتشارگر آن ۶۹

۳-۴ معادله دیراک ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ تحت تاثیر میدان مغناطیسی ۷۳

۴-۴ بررسی نوسانگر دیراک تحت اثر آهارونوف - بوهم ۷۵

۵-۴ بررسی نوسانگر دی کی پی تحت اثر آهارونوف - بوهم ۸۱

۶-۴ حل نوسانگر دیراک به روش انتگرال مسیر فاینمن و محاسبه انتشارگر مربوط به آن ۸۵

۷-۴ حل نوسانگر دی کی پی به روش انتگرال مسیر فاینمن و محاسبه انتشارگر مربوط به آن ۸۹

فصل پنجم: بررسی انتشارگر ذره آزاد با در نظر گرفتن اصل عدم قطعیت تعمیم ۹۳

۱-۵ مقدمه بر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته ۹۴

۲-۵ اصل عدم قطعیت تعمیم یافته و ارتباط آن با طول کمینه ۹۵

۳-۵ هامپلتونی اصلاح شده.....۹۷

۴-۵ محاسبه انتشارگر ذره آزاد براساس حداقل طول کمینه.....۹۸

نتیجه گیری.....۱۰۱

مراجع.....۱۰۳

فهرست اشکال:

- شکل ۱-۱: فرمالیزم انتگرال مسیر هر ذره، هر کدام با یک دامنه احتمال معین ۸
- شکل ۱-۳: چگالی احتمال بسته موج هویساید بر حسب X در لحظه $t = 0$ ۴۱
- شکل ۲-۳: چگالی احتمال بسته موج هرمیتین - گائوسین تحت اثر انتشارگر نوسانگر هماهنگ بر حسب X در لحظه $t = \frac{\pi}{2}$... ۴۱
- شکل ۳-۳: چگالی احتمال بسته موج هویساید بر حسب X در لحظه $t = 0$ ۴۳
- شکل ۴-۳: چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت اثر انتشارگر نوسانگر هماهنگ بر حسب X در لحظه $t = \frac{\pi}{2}$ ۴۴
- شکل ۵-۳: چگالی احتمال بسته موج هرمیتین - گائوسین بر حسب X در لحظه $\tau = 0$ ۴۸
- شکل ۶-۳: چگالی احتمال بسته موج هرمیتین - گائوسین تحت انتشارگر ذره آزاد بر حسب X در لحظه $\tau = 5$ ۴۸
- شکل ۷-۳: چگالی احتمال بسته موج هرمیتین - گائوسین تحت انتشارگر ذره آزاد بر حسب X در لحظه $\tau = 10$ ۴۹
- شکل ۸-۳: چگالی احتمال بسته موج هویساید بر حسب X در لحظه $\tau = 0$ ۵۰
- شکل ۹-۳: چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت انتشارگر ذره آزاد بر حسب X در لحظه $\tau = 5$ ۵۰
- شکل ۱۰-۳: چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت انتشارگر ذره آزاد بر حسب X در لحظه $\tau = 10$ ۵۱
- شکل ۱-۴a و ۱-۴b: حرکت الکترون در میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی ۵۸
- شکل ۲-۴: طرح شماتیک از اثر آهارونوف - بوهم ۶۱

فصل اول:

انتگرال مسیر

۱-۱ تاریخچه انتگرال مسیر^۱:

ایده اولیه مفهوم انتگرال مسیر (گاهی اوقات نیز به نام های انتگرال کاربردی و انتگرال بر روی مدار و یا انتگرال پیوسته نامیده می شود) به نوربرت وینر^۲ نسبت داد. انتگرال وینر برای حل مشکلات انتشار و حرکت براونی مطرح شده است از این رو آن را انتگرال وینر نامیدند. این ایده توسط پاول دیراک برای استفاده از لاگرانژی در مکانیک کوانتومی در مقاله ۱۹۳۳ او بیان شد و روش کامل در سال ۱۹۴۸ توسط ریچارد فاینمن توسعه داده شد که از آن برای فرمول بندی جدید در مکانیک کوانتومی استفاده شد و علاوه بر آن چیزهایی که شرودینگر و هایزنبرگ گفتند به عنوان فرمول سوم در مکانیک کوانتومی معرفی شد. انگیزه اصلی در این روش تمایل برای بدست آوردن فرمول بندی مکانیک کوانتومی برای تحلیل نظریه ویلر- فاینمن^۳ با استفاده از نقطه آغاز لاگرانژی و نه هامیلتونی است. ایده اولیه فاینمن برای اولین بار در سال ۱۹۳۳ از مقاله ای که دیراک در این باره ارائه داده بود الهام گرفت. ریچارد فاینمن در سال ۱۹۱۸ در بروکلین نیویورک متولد شد. در دهه ۱۹۴۰ فاینمن به درک حیرت انگیزی از تفاوت بین جهان کوانتومی و نیوتنی دست یافت. بعد از جنگ جهانی دوم، ریچارد فاینمن یکی از شاگردان ویلر به ساده ترین اما در عین حال عمیق ترین روش برای خلاصه سازی پیچیدگی های نظریه کوانتوم دست یافت که در سال ۱۹۶۵ یکی از نتایج این ایده، برای او جایزه نوبل را به ارمغان آورد. فرمول های کاربردی در نظریه میدان کوانتومی در آثار بگولیوف^۴، گلفند و میلونس^۵ ۱۹۵۴، خلاتنیکف^۶ ۱۹۵۲، سلام و متیو ۱۹۵۵، سایمانزیک^۷ ۱۹۵۴، فراد کین^۸ ۱۹۵۴ و دیگران ارائه شد. همچنین در فیزیک نظری در بررسی حرکت براونی در یک محیط جذب توسط کیس^۹ ۱۹۵۹، ویگل^{۱۰} ۱۹۷۵، ۱۹۸۶ و توسعه نظریه ابرشارگی توسط فاینمن^{۱۱} ۱۹۵۳ و کیکوچی^{۱۱} ۱۹۵۵ ارائه شد. و در انتها در فرمول های مختلف توسط ریچارد فاینمن در سال ۱۹۴۸، ۱۹۴۲ ابداع شد و بعنوان فرمولی از مکانیک کوانتومی (به اصطلاح "فرمول سوم مکانیک کوانتومی") ارائه گردید [۵].

¹ Path integral

² Norbert Wiener

³ Wheeler_Feynman

⁴ Bogoliubov

⁵ Gelfand and Minlos

⁶ Khalatnikov

⁷ Symanzik

⁸ Fradkin

⁹ Kac

¹⁰ Wiegel

¹¹ Kikuchi

۱-۲ اهمیت انتگرال مسیر:

اهمیت روش انتگرال مسیر در فیزیک نظری به سختی می‌تواند بحث برانگیز باشد. برنامه‌های کاربردی آن در بسیاری از شاخه‌های فیزیک مدرن ثابت شده است این روش بسیار مفید نه تنها برای حل مسائل موجود بلکه بعنوان یک راهنما برای تدوین و توسعه ایده‌های جدید و در اصل روشی برای شرح پدیده‌های فیزیکی می‌باشد. لازم است توجه داشته باشید که روش انتگرال مسیر با وجود داشتن تقریباً یک تاریخ ۸۰ ساله، نظریه و کاربرد آن همچنان در جهان به شدت در حال توسعه است. این ایده در سال‌های ۱۹۵۰ و ۱۹۵۱ توسط خود فاینمن بکار گرفته شد و توانست براساس ایده انتگرال مسیر یک فرمول جدید از الکترودینامیک کوانتومی و نظریه‌ی اختلال ایجاد کند. در ۱۹۵۰، انتگرال مسیر به شدت برای حل معادلات کاربردی در کوانتومی مورد مطالعه قرار گرفت از آن جمله نظریه میدان معادلات شوینگر بسیار مطرح بود. آثار بدست آمده در نظریه انتگرال مسیر پیشگامی در ارائه بسیاری از برنامه‌های کاربردی شد در این نظریه، بعنوان مثال در فیزیک آماری در نظریه انتقال فاز، ابرشارگی، ابررسانایی، اپتیک کوانتومی، فیزیک پلاسما و... روش کاربردی به حساب می‌آید. پیک و اینومتا^{۱۲} روش انتگرال مسیر را برای محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ بکار بردند. کار این دو باعث گسترش راه‌ای برای استفاده از مدل‌های انتگرال مسیر در پی داشت. در سال ۱۹۷۰، (ویلسون^{۱۳} ۱۹۷۴ فرموله نظریه میدان کوارکها و گلوئونها (به عنوان مثال کرومودینامیک کوانتومی^{۱۴}) در یک شبکه فضا-زمان ارائه داد.) نظریه انتگرال مسیر در مبحث میدان‌های کوانتومی به عنوان شکل گسسته از این نظریه در نظر گرفته شد. در مطالعه مدل‌های نظریه از جمله نظریه‌های واقع بینانه فعل و انفعالات الکترومغناطیسی ضعیف که توسط گلشو^{۱۵} ۱۹۶۱، واینبرگ^{۱۶} ۱۹۶۷، سلام^{۱۷} ۱۹۶۸ ارائه شد و در زمینه کرومودینامیک کوانتومی (نظریه کنش قوی)، توسط گروس ویلکزک^{۱۸} ۱۹۷۳، پللیتز^{۱۹} ۱۹۷۳ بکار گرفته شد. در میان برنامه‌های کاربردی دیگر، انتگرال مسیر در نظریه میدان کوانتومی و فیزیک ذرات بنیادی مورد استفاده قرار گرفت. لازم به ذکر است که بگوییم می‌توان فرمول مجانبی برای رفتار پرتو مادون قرمز و فرابنفش را از توابع گرین^{۲۰} آن استخراج کرد و همچنین مطالعه مدل کیهان شناختی و سیاه چاله‌ها^{۲۱} نیز بکار گرفته می‌شود. روش‌های جدیدتر را می‌توان در فیزیک آماری و کوانتومی غیر نسبیتی^{۲۲} و بطور خاص در فیزیک حالت جامد و توصیف پدیده بحرانی (فاز انتقال)، فیزیک پلیمر و اپتیک کوانتومی^{۲۳}، و در بسیاری از شاخه‌های دیگر از فیزیک مشاهده کرد. در طول دو دهه گذشته، بیشتر آثار در فیزیک نظری و

¹² Peak and Inomata

¹³ Quantum chromodynamics

¹⁴ Glashow

¹⁵ Weinberg

¹⁶ Gross Wilkes

¹⁷ Politzer

¹⁸ Green's function

¹⁹ Cosmology and black holes

²⁰ Non-relativistic quantum

²¹ Polymer physics and quantum optics.

ریاضی فیزیکی شامل برخی از روش انتگرال مسیر است. همه این دستاوردها که ذکر شد منجر به این واقعیت شد که روش انتگرال مسیر به یک ضرورت تبدیل شود [۳].

۱-۳ فرضیات اولیه انتگرال مسیر فاینمن:

او فرض بنیادی کلاسیک را که هر ذره یک زمان و جایگاه خاص خود را دارد، به چالش کشید. در مکانیک کوانتومی فرمول انتگرال مسیر توصیفی از نظریه کوانتوم است که اصل کنش مکانیک کلاسیک را عمومیت می‌بخشد. در این توصیف، مفهوم کلاسیک از وجود یک مسیر منحصر به فرد برای یک سیستم دارای مجموع یا انتگرال تابعی، با توصیفی شامل وجود بی‌نهایت مسیر ممکن برای محاسبه دامنه کوانتومی جایگزین می‌گردد. براساس فیزیک نیوتن، هر ذره مسیر مشخصی را از نقطه A به نقطه B طی می‌کند. نظریه کوانتوم می‌گوید که ذره زمانی که بین نقاط آغاز و پایان حرکت می‌کند، مکان قطعی ندارد. فاینمن دریافت معنی این عبارت لزوماً این نیست که ذرات هنگام طی مسافت بین دو نقطه، هیچ مسیری را دنبال نمی‌کنند، در عوض می‌توان اینگونه توضیح داد که ذرات تمام مسیرهای ممکن بین دو نقطه را می‌پیمایند. فرض کنید که می‌خواهید عرض اتاق را بپیمایید. از نظر نیوتون بسیار ساده است. کوتاه‌ترین مسیر از نقطه A به B ، خط راستی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند که مسیر کلاسیک نامیده می‌شود. اما از نظر فاینمن، در ابتدا باید تمام مسیرهای ممکن از A به B را در نظر بگیرید. یعنی در نظر گرفتن مسیرهایی که شما را سیارات گوناگون و حتی ستاره‌ها می‌رساند و حتی مسیرهایی که در زمان به عقب می‌روند و به انفجار بزرگ برمی‌گردند. این مسیرها هرچقدر هم که عجیب و غریب باشند، باید در نظر گرفته شوند. در مرحله بعد فاینمن به هر مسیر عددی اختصاص می‌دهد که این اعداد با کمک مجموعه دقیقی از قوانین اندازه‌گیری می‌شد. بطور معجزه‌آسایی با جمع کردن تمام اعداد مربوط به مسیرهای ممکن، احتمال رفتن از نقطه A به نقطه B حاصل مکانیک کوانتومی استاندارد خواهید بود. این مسئله به نوبه خود واقعا قابل توجه است. فاینمن دریافت که اعداد مربوط به مسیرهای عجیب یا مسیرهایی که با قوانین حرکت نیوتون در تناقض هستند، اغلب یکدیگر را خنثی کرده و حاصل جمع کوچکی دارند. همین مسیرهایی که حاصل جمع آنها بسیار کوچک بود، منشأ افت و خیزهای کوانتومی بودند. اما او همچنین دریافت که مسیر معقول نیوتونی، تنها مسیری بود که حذف نشده و بنابراین بیشترین مجموع را داشته اند یعنی مسیری با بالاترین احتمال بحساب آمده اند. بنابراین درک معقول ما از جهان فیزیکی، تنها عبارت است از محتمل‌ترین حالت در بین تعداد نامحدودی حالت‌های مختلف می‌باشد. ولی از طرفی ما با تمام حالت‌های ممکن، همزیستی داریم. به بیان دیگر، هر بار که در عرض اتاق حرکت می‌کنید، بدن شما به نوعی تمام مسیرهای ممکن را از شناسایی می‌کند و همه را با هم جمع می‌کند. فاینمن با استفاده از ریاضیات قدرتمند انتگرال تابعی، نشان داد که مسیر نیوتون، محتمل‌ترین مسیر می‌باشد و نه فقط تنها مسیر ممکن. در یک شاهکار ریاضی فاینمن توانست نشان دهد که این تصویر همانقدر که به نظر می‌رسد حیرت‌آور بوده، دقیقاً با

مکانیک کوانتومی معمولی برابر است. نکته قابل توجه این است که امروزه وقتی نظریه‌ی تورم گات^{۲۲} و حتی نظریه ریسمان‌ها را فرمول‌بندی می‌کنیم، از نظریه “انتگرال مسیر فاینمن” استفاده می‌کنیم. در حال حاضر این روش در تمام جهان تدریس می‌شود و تاکنون بعنوان یکی از مناسب‌ترین و قدرتمندترین روش برای فرمول‌بندی نظریه کوانتوم بوده است میچيو کاکو^{۲۳} فیزیکدان نظری ژاپنی می‌نویسد: من از نظر عقلی، ریاضیات نظریه کوانتوم و نسبیت عام را به طور خلاصه فهمیدم. اما این ایده که من با عبور از عرض اتاق به نوعی تمام مسیرهایی را که مرا به مریخ یا ستارگان دور دست می‌رساند شناسایی می‌کنم، جهان‌بینی مرا تغییر می‌دهد. ناگهان تصویر جدید و عجیبی در ذهن من شکل گرفت که خود را در حال زندگی در جهان کوانتومی می‌دیدم. به این ترتیب دریافتم که نظریه کوانتوم، بسیار عجیب و غریب‌تر از پیامدهای سرگیجه‌آور نسبیت است [۵].

۱-۴ صورت بندی انتگرال مسیر برای مکانیک کوانتومی:

به عبارت دیگر بین نقاط اولیه و نهایی نقاط دیگری را در نظر می‌گیریم می‌توان با ضرب دامنه گذار هر نقطه در هم و انتگرال‌گیری از آن مسیرهای ممکن در فضا - زمان (نقاط اولیه و نهایی ثابت) جمع ببندیم در کلاسیک فرض می‌کردیم ذره‌ای داریم که تحت تاثیر نیرویی که پتانسیل $V(x)$ اگر لاگرانژی و نقاط اولیه و نهایی را داشته باشیم تنها مسیر ممکن که نقطه اولیه و نهایی را به هم متصل می‌کند را بدست می‌آوریم. بعبارتی در کوانتوم متناظر با حرکت واقعی ذره، مسیر یکتاست. انتگرال گرفتن روی تمام مسیرها با انتگرال مسیر فاینمن صورت می‌گیرد با این تفاوت بارز که انتگرال مسیر فاینمن جمع روی تمامی مسیرهای ممکن با احتمالات مختلف برای هر مسیری می‌باشد اما آنچه در کلاسیک می‌گوید مسیر یکتاست. آنچه فاینمن طی کرد، استخراج و یا در واقع رسیدن به چیزی جدید نبود بلکه او تنها توانست فرمول بندی جدیدی را ارائه دهد.

فاینمن ۳ اصل را در مکانیک کوانتومی رعایت کرد:

۱. اصل برهمه‌نی (جمع روی تمامی مسیرهای ممکن)

۲. تناظر کلاسیکی $\hbar \rightarrow 0$

۳. خاصیت ترکیب دامنه‌ها

نکته قابل توجه در مورد انتگرال مسیر فاینمن این است که این اصل در کوانتوم، در حل نوسانگر هماهنگ ساده و در نظریه میدان‌ها بسیار حائز اهمیت می‌باشد. فرض کنید که ذره تحت هامیلتونین

²² Inflationary theory Gatt

²³ Michio Kaku

$\hat{H}$ قرار دارد. در لحظه t این ذره درست در مکان q قرار دارد و حالت آن $|q\rangle$ است. می‌خواهیم بدانیم که در زمان t' دامنه احتمال این که ذره در نقطه q' باشد چقدر است. در صورت بندی مکانیک کوانتومی می‌دانیم که این دامنه برابر است با [۶]:

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t'-t)} | q \rangle \quad (1-1)$$

دانستن این کمیت معادل با این است که دینامیک کوانتومی را به طور کامل مشخص کنیم. در واقع احتمال گذار از یک حالت دلخواه $|\psi\rangle$ به یک حالت دلخواه دیگر $|\psi'\rangle$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q \rangle &= \int dq' dq \langle \psi' | q \rangle \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q \rangle \langle q | \psi \rangle = \\ &= \int dq' dq \psi'^*(q') \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q \rangle \psi(q) \end{aligned} \quad (2-1)$$

قبل از ادامه، نخست قراردادهای خود را مشخص می‌کنیم:

$$q_N = q' \quad q_0 := q \quad t_N = t' \quad t_0 = t \quad t' - t = N\varepsilon \quad t_k = t_0 + k \quad (3-1)$$

حال می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q \rangle &= \langle q_N | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q_0 \rangle = \\ &= \int dq_1 dq_2 \dots dq_{N-1} \langle q_N | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q_{N-1} \rangle \langle q_{N-1} | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q_{N-2} \rangle \dots \langle q_1 | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t)} | q_0 \rangle \end{aligned} \quad (4-1)$$

یکی از عناصر ماتریسی را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \langle q_k | e^{\frac{i}{\hbar} \varepsilon H} | q_{k-1} \rangle &= \langle q_k | 1 - \frac{i}{\hbar} \varepsilon H | q_{k-1} \rangle \\ &= \delta(q_k - q_{k-1}) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \langle q_k | H | q_{k-1} \rangle = \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(q_k) \right) - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \langle q_k | \frac{p^2}{2m} | q_{k-1} \rangle \\ &= \delta(q_k - q_{k-1}) \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} V(q_k) \right) \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} p(q_k - q_{k-1})} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dp}{2\pi\hbar} \left(1 - \frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(V(q_k) + \frac{p^2}{2m} \right) \right) e^{\frac{i}{\hbar} p(q_k - q_{k-1})} \approx \int \frac{dp}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(V(q_k) + \frac{p^2}{2m} \right) + \frac{i}{\hbar} p(q_k - q_{k-1})} \quad (5-1)$$

در عبارت آخری روی P انتگرال می‌گیریم و از رابطه:

$$\int dp e^{i\frac{1}{2}\alpha p^2 + i\beta p} = \sqrt{\frac{2\pi}{i\alpha}} e^{\frac{i\beta^2}{\alpha}} \quad (6-1)$$

استفاده می‌کنیم و بدست می‌آوریم:

$$\langle q_k | e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} | q_{k-1} \rangle = C e^{\frac{i\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{m}{2} \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{\varepsilon} \right)^2 - V(q_k) \right)} \quad (7-1)$$

که در آن $C = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \varepsilon \hbar}}$ دقت کنید که C یک عدد ثابت است که بستگی به ثابت‌های $m, \hbar \varepsilon$ و نظایر آن دارد ولی به متغیرهای دینامیکی و زمان و نوع پتانسیل بستگی ندارد.

با قراردادن معادله (5-1) در معادله (1-1) و گرفتن حد $N \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0, N\varepsilon = t' - t$ می‌یابیم که:

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H \varepsilon} | q \rangle = \int Dq e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} dt L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau)} \quad (8-1)$$

که در آن شرط روی تمام مسیرهای با شرایط مرزی $q(t) = q, q(t') = q'$ انتگرال گرفته می‌شود. در این عبارت منظور از Dq :

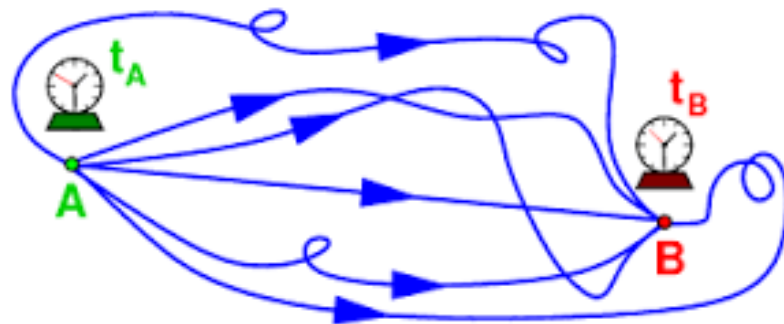
$$Dq = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C^N \prod_{i=1}^N dq \quad (9-1)$$

باید دقت کنیم که این انتگرال روی تمام مسیرهایی گرفته می‌شود که ابتدا و انتهای آنها در دو نقطه مشخص از مختصات این ثابت هستند. اگر $t' = t$ قرار دهیم، با توجه به اینکه تحت این شرایط کنش برابر با صفر می‌شود، از معادله (8-1) بدست می‌آوریم:

$$\delta(q - q') = \int Dq \quad (10-1)$$

حاصل نهایی این محاسبه یک نگاه جدید به پدیده های مکانیک کوانتومی است و آن اینکه یک ذره کوانتومی که برای راحتی آن را الکترون می نامیم، برای رفتن از یک نقطه مثل q به یک نقطه دیگر مثل q' همه مسیرهای ممکن را ممکن است طی کند و هر مسیری مثل $q(t)$ را با دامنه احتمال $\exp i \frac{1}{\hbar} S[q]$ مشخص می کند و دامنه احتمال نهایی مجموع تمامی این احتمالات است. تمام این مسیرها نیز نقطه ابتدا و انتها آنها ثابت و بترتیب برابر با q و q' است. شکل (۱-۱) نشان می دهد که در فرمالیزم انتگرال مسیر می توانیم احتمال گذار از هر حالت دلخواه به هر حالت دلخواه دیگری را محاسبه کنیم. نتیجه این است که [۳]:

$$\langle \psi' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t' - t)} | \psi \rangle = \int Dq \psi'(q')^* \psi(q) e^{i \int_t^{t'} dt L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) d\tau} \quad (11-1)$$



شکل (۱-۱): فرمالیزم انتگرال مسیر هر ذره، هر کدام با یک دامنه احتمال معین.

بدیهی است که آنچه که در تا کنون گفته ایم به راحتی به حرکت یک ذره در سه بعد یا حرکت هر سیستم هر چقدر هم پیچیده که آنالوگ کلاسیکی داشته باشد تعمیم پیدا می کند. می توانیم با تعریف حالت های زیر:

$$|q, t\rangle = e^{-i \frac{1}{\hbar} Ht} |q\rangle \quad (12-1)$$

که در واقع حالت هایی هستند که معمولاً در تصویر هایزنبرگ تعریف می شوند رابطه اصلی انتگرال مسیر را بصورت زیر بنویسیم:

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t' - t)} | q \rangle = \int Dq q(t_1) e^{i \int_t^{t'} L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) d\tau} \quad (13-1)$$

در این صورت واضح است شرط زیر برقرار باشد:

$$\langle q'', t'' | q, t \rangle = \int dq' \langle q'', t'' | q', t' \rangle \langle q', t' | q, t \rangle. \quad (14-1)$$

حال فرض کنید می خواهیم عنصر ماتریسی زیر را حساب کنیم:

$$\langle q' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t_1)} \mathbb{Q} e^{-\frac{i}{\hbar} H(t_1-t)} | q \rangle \quad (15-1)$$

این عبارت به نوعی متوسط عملگر مکان در زمان t_1 است وقتی که ذره از حالت $|q\rangle$ در زمان t به حالت $|q'\rangle$ در زمان t' می‌رود. در فرمالیزم انتگرال مسیر این عبارت فرم ساده تری را بخود می‌گیرد:

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t_1)} \mathbb{Q} e^{-iH(t_1-t)} | q \rangle = \langle q', t' | \hat{\mathbb{Q}}(t_1) | q, t \rangle \quad (16-1)$$

که در آن $\hat{\mathbb{Q}}(t)$ عملگر $\hat{\mathbb{Q}}$ در تصویر هایزنبرگ می‌باشد یعنی:

$$\mathbb{Q}(t_1) = e^{iH(t_1-t)} \mathbb{Q} e^{-iH(t_1-t)} \quad (17-1)$$

با محاسبه مشابه آنچه در بالا بیان شد می‌توان نشان داد که :

$$\langle q', t' | e^{-\frac{i}{\hbar} H(t'-t_1)} \mathbb{Q}(t_1) | q, t \rangle = \int Dq q(t_1) e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) d\tau} \quad (18-1)$$

که در آن روی تمام مسیرها انتگرال گرفته شده است که شرط مرزی $q(t') = q'$ و $q(t) = q$ را برآورده می‌کند. این رابطه در واقع بیان می‌کند که ذره وقتی که تمام مسیرهای ممکن را از q به q' ، هر کدام با احتمال مخصوص به خود پیموده می‌شود، در زمان t_1 به طور متوسط در چه مکان هایی بوده است. به این ترتیب یک متوسط روی تمام مسیرهای کلاسیکی مرتبط شده است. علاوه بر متوسط‌ها می‌توان این رابطه را بین توابع همبستگی نیز برقرار کرد. به عنوان مثال توابع همبستگی زیر را در نظر بگیرید ($\hbar = 1$) در نظر بگیرید:

$$\langle q' | e^{-iH(t'-t_2)} \mathbb{Q} e^{-iH(t_2-t_1)} \mathbb{Q} e^{-iH(t_1-t)} | q \rangle = \langle q', t' | \hat{\mathbb{Q}}(t_1) \hat{\mathbb{Q}}(t_2) | q, t \rangle \quad (19-1)$$

این رابطه در واقع این را بیان می‌کند که مقدار همبستگی بین مکان‌هایی که ذره در لحظه t_1 اختیار می‌کند با مکان‌هایی که در لحظه t_2 اختیار می‌کند وجود دارد. این تابع همبستگی را می‌توان به روش انتگرال مسیر حساب کرد. نتیجه عبارت است از :

$$\langle q', t' | \hat{\mathbb{Q}}(t_1) \hat{\mathbb{Q}}(t_2) | q, t \rangle = \int Dq q(t_1) q(t_2) e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) d\tau} \quad (20-1)$$

که در آن روی تمام مسیرها انتگرال گرفته می‌شود که شرط مرزی $q(t') = q'$ و $q(t) = q$ را برآورده می‌کند. در عبارت فوق باید به یک نکته دقت کنیم که معادله (۱۹-۱) با این فرض اولیه حساب شده است $t_2 \geq t_1$ است. بنابراین عبارت (۲۰-۱) را بایست به صورت زیر نوشت:

$$\langle q', t' | T(\hat{\mathbb{Q}}(t_1) \hat{\mathbb{Q}}(t_2)) | q, t \rangle = \int Dq q(t_1) q(t_2) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) d\tau \right] \quad t_2 \geq t_1 \quad (21-1)$$

رابطه (۲۱-۱) را می‌توان به توابع همبستگی تعمیم داد:

$$\langle q', t' | T(\hat{\mathbb{Q}}(t_n) \dots \hat{\mathbb{Q}}(t_2) \hat{\mathbb{Q}}(t_1)) | q, t \rangle = \int Dq (q(t_n) \dots q(t_2) q(t_1)) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_t^{t'} L(q(\tau), \dot{q}(\tau), \tau) d\tau \right] \quad (22-1)$$

رابطه اصلی انتگرال مسیر با وجودی که از نظر مفهومی و فیزیکی معنای روشنی دارد، از نظر ریاضی چندان خوش تعریف نیست زیرا علاوه بر خوش تعریف نبودن انتگرال روی تمام مسیرهای ممکن، تابع زیر انتگرال نیز یک فاز خالص است که همگرایی انتگرال را بیش از پیش با دشواری روبرو می‌کند.

۱-۵ رفتار نیمه کلاسیکی:

یکی از مزایای مهم فرمالیزم انتگرال مسیر این است که می‌توان رفتار نیمه کلاسیک سیستم‌ها را بخوبی در آن دید. در واقع، در این فرمالیزم می‌توانیم بفهمیم که چگونه اجسامی که کنش آنها بسیار بزرگ‌تر از $\hbar$ است، از میان همه مسیرها تنها مسیر کلاسیکی را طی می‌کند. همچنین می‌توان فهمید که چگونه برای اجرامی که کنش آنها از مرتبه $\hbar$ و بزرگ‌تر است، مسیرهای نزدیک مسیر کلاسیک نیز سهمی ایفا می‌کنند. فرمالیزم انتگرال مسیر به ما می‌گوید که یک ذره برای رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر تمام مسیرهای ممکن را که هر کدام با یک دامنه احتمال مشخص می‌شود را طی می‌کند. اما می‌دانیم که ذرات ماکروسکوپی (مثل یک ذره گرد و غبار و یا خیلی کوچکتر از آن ولی خیلی بزرگ‌تر از الکترون‌ها) چنین رفتار نمی‌کنند و تنها یک مسیر یعنی همان مسیر کلاسیک را که با معادله نیوتن یا لاگرانژ داده می‌شود طی می‌کنند [۴].

فصل دوم

بررسی انتشارگر تحت پتانسیل‌های مختلف

۲-۱ مقدمه بر سه روش محاسبه انتشارگر^{۲۴}:

در این قسمت ما از سه روش برای محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ استفاده می‌کنیم. همچنین انتشارگر ذره را که تحت پتانسل کولنی و پتانسیل دو جمله ای درجه دو است را به روش وردش بدست می‌آوریم. از طرفی انتشارگر ذره آزاد را به دو روش محاسبه می‌کنیم که به شرح زیر می‌باشد که می‌تواند توسط خواننده مورد مقایسه قرار گیرد.

روش اول توسط شوینگر توسعه داده شد و به منظور اثر بخشی در مبحث الکتروپدینامیک کوانتومی بود که براساس معادلات حرکت هایزنبرگ و از روابط جابجایی بین اپراتورهای مکان و اندازه حرکت برای بدست آوردن انتشارگر استفاده شد.

روش دوم محاسبه انتشارگر براساس روابط بازگشتی می‌باشد که به تولید انتشارگر منجر می‌شود که در یک بعد مورد بررسی قرار گرفته است و برای سه بعد آن از همین نظریه الهام گرفته است که ما به آن نپرداختیم [۷].

در روش سوم از روش وردش استفاده می‌کنیم که منجر به بدست آمدن انتشارگر تحت پتانسیل های مختلف می‌شود.

۲-۲ محاسبه انتشارگر ذره آزاد به روش انتگرال مسیر:

ابتدا رابطه انتشارگر را تعریف می‌کنیم:

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{W(\Delta t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S(t_n, t_{n-1}) \right] \quad (۱-۲)$$

از طرفی تابع کنش با داشتن لاگرانژی بدست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt L(t_2, t_1) = S(t_2, t_1) \quad (۲-۲)$$

لاگرانژی برای هر سیستم بطور کلی بصورت زیر تعریف می‌شود [۸]:

$$L(t_2, t_1) = \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] \quad (۳-۲)$$

²⁴ propagator

که در آن:

$$S(t_n, t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right] \cong \Delta t \left[\frac{m}{2} \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{\Delta t} \right)^2 - V \left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2} \right) \right]$$

برای ذره آزاد:

$$V(x) = 0 \rightarrow S(t_n, t_{n-1}) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left[\frac{1}{2} m \frac{(x_n + x_{n-1})^2}{\Delta t} \right] \quad (۴-۲)$$

با استفاده از معادلات (۱-۲) و (۴-۲)، انتشارگر برای ذره آزاد به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \frac{1}{W(\Delta t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \cdot m \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{2\Delta t} \right] \quad (۲-۵)$$

برای بدست آوردن ضریب وزنی رابطه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x_n = x_{n-1} + \zeta, \quad t_n = t_{n-1} + \Delta t \quad (۶-۲)$$

از رابطه زیر ضریب وزنی را بدست می‌آوریم:

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta) d\zeta \quad (۷-۲)$$

از این رو داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_{n-1} + \zeta, t_{n-1} + \Delta t | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle d\zeta &= \frac{1}{W(\Delta t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im(\zeta)^2}{2\hbar\Delta t} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{W(\Delta t)} \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}} \\ \frac{1}{W(\Delta t)} &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \\ \Delta t &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (۸-۲)$$

و در انتها انتشارگر ذره آزاد از جایگذاری معادله (۸-۲) در معادله (۵-۲) حاصل می‌شود:

$$K(x_n, t_n; x_{n-1}, t_{n-1}) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \exp \left[\frac{im(x_n - x_{n-1})^2}{2\hbar\Delta t} \right], \quad \Delta t = t_n - t_{n-1} \quad (۹-۲)$$

نوسانگر هماهنگ ساده یکی از مهمترین مسائل در مکانیک کوانتومی است و از نظر آموزشی برای روشن کردن مفاهیم و روش های اصلی مکانیک کوانتومی مورد استفاده قرار می گیرد. از نظر علمی هم در شاخه های مختلف فیزیک مدرن، نظیر طیف سنجی ملکولی، فیزیک حالت جامد، ساختارهای هسته ای، نظریه میدان های کوانتومی، اپتیک کوانتومی، مکانیک آماری کوانتومی و غیره کاربرد دارد. از نظر تاریخی هم پلانک پیشنهاد کرد که واحدهای گسسته انرژی به نوسانگرهای تابشی مربوط می باشد. و این پیشنهاد به تولد مفاهیم کوانتومی انجامید. از این رو فهم دقیق خواص نوسانگرهای کوانتومی برای هر دانشجو فیزیک کوانتومی ضروری می باشد.

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \quad (۱۰-۲)$$

برای برقراری یک رابطه کلی برای انتشارگرها براساس عملگر تحول زمانی و اپراتور هامیلتونی در یک سیستم غیر نسبیتی نمایش زیر را انتخاب می کنیم :

$$K(x', x'; \tau) = \theta(\tau) \langle x' | U(\tau) | x' \rangle, \quad t' = 0, \quad t'' = \tau \quad (۱۱-۲)$$

اپراتور تحول زمانی به فرم زیر می باشد:

$$\hat{U}(\tau) = \exp(-i \frac{\hat{H} \tau}{\hbar}) \quad (۱۲-۲)$$

$\theta(\tau)$ بعنوان تابع گام تعریف می کنیم که به فرم زیر نمایش می دهیم:

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{if } \tau \geq 0 \\ 0 & \text{if } \tau < 0 \end{cases}$$

۲-۳ محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ به روش شوینگر:

این روش در سال ۱۹۵۱ توسط شوینگر در معرفی نظریه میدان های نسبیتی معرفی شد و از آن در حل مسائل نسبیتی استفاده کردند. مانند محاسبه توابع گرین فرمیون- بوزون در میدان های خارجی. این روش قدرتمند و در عین حال بسیار خوب و مناسب در حل مسائل غیر نسبیتی می باشد اما به ندرت از آن در محاسبه انتشارگر از روش انتگرال مسیر غیر نسبیتی استفاده کردند بعبارتی از روش شوینگر به غیر از بحث اخیر به تعداد نامحدود استفاده شده است، اما ما در اینجا این روش ساده و زیبا را در محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ در پیش می گیریم چرا که این روش قابل فهم تر و بهتر برای دانشجویان و اساتید می باشد [۷].

شرط اول: برای $\tau > 0$ معادله (۱۱-۲) ظاهر می شود که به آن معادله دیفرانسیل برای انتشارگر فاینمن نیز می گویند.

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} K(x'', x'; \tau) = \theta(\tau) \langle x'' | \hat{H} \exp(-i \frac{\hat{H} \tau}{\hbar}) | x' \rangle \quad (۱۳-۲)$$

با استفاده از رابطه عمومی بین اپراتور هایزنبرگ و تصویر شونینگر داریم:

$$\hat{O}_H(t) = e^{i \frac{\hat{H}}{\hbar} t} \hat{O}_S e^{-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t} \quad (۱۴-۲)$$

$$\hat{X}(t) |x, t\rangle = x |x, t\rangle \quad (۱۵-۲)$$

از طرفی رابطه ویژه مقداری زیر برای اپراتور $\hat{X}(t)$ برقرار می باشد.

که در این رابطه $|x, t\rangle$ ویژه تابع و x ویژه مقدار متناظر با آن می باشد بطوری که:

$$\hat{X}(t) = e^{i \frac{\hat{H}}{\hbar} t} \hat{X} e^{-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t} \quad (۱۶-۲)$$

و از طرفی $|x, t\rangle$ به فرم زیر تعریف می شود:

$$|x, t\rangle = e^{i \frac{\hat{H}}{\hbar} t} |x\rangle \quad (۱۷-۲)$$

از این رو انتشارگر را باز نویسی می کنیم:

$$K(x'', x'; \tau) = \langle x'', \tau | x', 0 \rangle \quad (۱۸-۲)$$

که:

$$\begin{cases} \hat{X}(\tau) |x'', \tau\rangle = x'' |x'', \tau\rangle \\ \hat{X}(0) |x', 0\rangle = x' |x', 0\rangle \end{cases} \quad (۱۹-۲)$$

معادله دیفرانسیل برای انتشارگر فاینمن برگرفته از معادله (۴-۲) به شکل زیر می باشد.

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x'', \tau | x', 0 \rangle = \langle x'', \tau | \hat{H} | x', 0 \rangle \quad (\tau > 0). \quad (۲۰-۲)$$

معادله (۲-۲۰) یک معادله مطرح در این بخش می‌باشد که نقطه شروع برای استفاده از روش شوینگر می‌باشد. ایده اصلی در این روش این است که برای بدست آوردن عناصر ماتریسی $\hat{H}$ در سمت راست از اپراتورهای $\hat{X}(\tau)$ و $\hat{X}(0)$ استفاده کنیم.

$$\begin{aligned}\langle x'', \tau | \hat{H} | x', 0 \rangle &= \langle x'', \tau | \hat{H}_{ord}(\hat{X}(\tau), \hat{X}(0)) | x', 0 \rangle \\ &= H(x'', x'; \tau) \langle x'', \tau | x', 0 \rangle\end{aligned}\quad (21-2)$$

گام اول: معادله هایزنبرگ برای اپراتورهای $\hat{p}(\tau)$ و $\hat{X}(\tau)$ به فرم زیر تعریف می‌شود.

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{X}(t) = [\hat{X}(t), \hat{H}] \quad , \quad i\hbar \frac{d}{dt} \hat{p}(t) = [\hat{p}(t), \hat{H}] \quad (22-2)$$

گام دوم: به دنبال بازنویسی هامیلتونین برحسب اپراتورهای $\hat{X}(\tau), \hat{X}(0)$ هستیم. اپراتور $\hat{X}(\tau)$ از سمت چپ عمل می‌کند و اپراتور $\hat{X}(0)$ از سمت راست، که از این رو هامیلتونین جدید $\hat{H}_{ord}(\hat{X}(\tau), \hat{X}(0))$ برحسب $\hat{X}(\tau), \hat{X}(0)$ بازنویسی می‌شود.

$$\begin{aligned}i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \langle x'', \tau | x', 0 \rangle &= \langle x'', \tau | \hat{H} | x', 0 \rangle \Rightarrow \int d\langle x'', \tau | x', 0 \rangle = \int -\frac{i}{\hbar} H(x'', x'; \tau') \langle x'', \tau | x', 0 \rangle d\tau' = \\ \langle x'', \tau | x', 0 \rangle &= \exp \left[\int -\frac{i}{\hbar} H(x'', x'; \tau') d\tau' \right]\end{aligned}\quad (23-2)$$

که در این رابطه $C(x'', x')$ یک عدد می‌باشد نه یک اپراتور، که به آن ثابت انتگرال‌گیری دلخواه نیز می‌گویند.

گام سوم: اختصاص داده می‌شود به محاسبه $C(x'', x')$. از طرفی وابستگی x'' و x' می‌تواند شرایط زیر را به وجود آورد که:

$$\langle x'', \tau | \hat{P}(\tau) | x', 0 \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''} \langle x'', \tau | x', 0 \rangle \quad (24-2a)$$

$$\langle x'', \tau | \hat{P}(0) | x', 0 \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x'} \langle x'', \tau | x', 0 \rangle \quad (24-2b)$$

توجه به معادله (۲-۱۹) و رابطه جابجایی معمولی بین $\hat{P}(\tau)$ و $\hat{X}(\tau)$ در هر زمان روابط زیر برقرار می‌باشد:

$$[\hat{X}(\tau), \hat{P}(\tau)] = [\hat{X}(0), \hat{P}(0)] = i\hbar \quad (25-2)$$

از طرفی برای تعیین $C(x'', x')$ شرط زیر باید برقرار باشد.

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \langle x'', \tau | x', 0 \rangle = \delta(x'' - x') \quad (26-2)$$

حال ما آمادگی حل مسائل جالب‌تر را داریم و آن محاسبه انتشارگر فاینمن برای نوسانگر هماهنگ است. هامیلتونی برای یک نوسانگر هماهنگ به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2(0)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2(0) \quad (27-2)$$

یا

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2(\tau)}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{X}^2(\tau) \quad (28-2)$$

که این اپراتور هامیلتونی تحت تحول زمانی می‌باشد چرا که این واقعیت وجود دارد، $\hat{P}(\tau)$ و $\hat{X}(\tau)$ اپراتورهای تحول‌یافته هستند. اکنون این موضوع مطرح می‌شود که از کدام هامیلتونی استفاده کنیم، برای سادگی کار از اولی استفاده می‌کنیم.

در گام اول شروع به نوشتن معادلات حرکت هایزنبرگ می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = \frac{\hat{P}(t)}{m} \quad (29-2a)$$

$$\frac{d}{dt}\hat{P}(t) = -m\omega^2\hat{X}(t) \quad (29-2b)$$

برای لحظه $t = \tau$ معادله دیفرانسیلی که در بالا معرفی کردیم را حل می‌کنیم:

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t) = \frac{\hat{P}(t)}{m} \Rightarrow \hat{P}(t) = m \frac{d}{dt}\hat{X}(t)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\hat{P}(t) = -m\omega^2\hat{X}(t) \\ \hat{P}(t) = m \frac{d}{dt}\hat{X}(t) \end{cases} \Rightarrow m \frac{d^2}{dt^2}\hat{X}(t) = -m\omega^2\hat{X}(t)$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\hat{X}(t) + \omega^2\hat{X}(t) = 0$$

معادله بالا همان معادله نوسانی می‌باشد که جواب آن به فرم زیر است:

$$\hat{X}(\tau) = \hat{X}(0)\cos(\omega\tau) + \frac{\hat{P}(0)}{m\omega}\sin(\omega\tau) \quad (30-2)$$

همچنین می‌توان $\hat{P}(\tau)$ را از دو معادله (۳۰-۲) و (۲۹-۲) بدست آورد.

$$\begin{cases} \hat{P}(t) = m \frac{d}{dt} \hat{X}(t) \\ \hat{X}(\tau) = \hat{X}(0) \cos(\omega\tau) + \frac{\hat{P}(\tau)}{m\omega} \sin(\omega\tau) \end{cases} \Rightarrow \hat{P}(t) = m \frac{d}{dt} \left(\hat{X}(0) \cos(\omega\tau) + \frac{\hat{P}(\tau)}{m\omega} \sin(\omega\tau) \right)$$

$$\hat{P}(\tau) = -m\omega \hat{X}(0) \sin(\omega\tau) + \hat{P}(0) \cos(\omega\tau) \quad (۳۱-۲)$$

در گام دوم به بازنویسی $\hat{P}(0)$ برحسب $\hat{X}(0)$ و $\hat{X}(\tau)$ نیاز داریم:

$$\hat{X}(\tau) = \hat{X}(0) \cos(\omega\tau) + \frac{\hat{P}(0)}{m\omega} \sin(\omega\tau) \Rightarrow \frac{\hat{P}(0)}{m\omega} \sin(\omega\tau) = \hat{X}(\tau) - \hat{X}(0) \cos(\omega\tau) \quad (۳۲-۲)$$

$$\hat{P}(0) = \frac{m\omega}{\sin(\omega\tau)} [\hat{X}(\tau) - \hat{X}(0) \cos(\omega\tau)]$$

با حل معادله (۳۲-۲)، $\hat{H}$ را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{m\omega^2}{2\sin^2(m\omega)} [\hat{X}^2(\tau) - \hat{X}^2(0) \cos^2(m\omega) - \hat{X}(0) \hat{X}(\tau) \cos(m\omega) - \hat{X}(\tau) \hat{X}(0) \cos(m\omega)] \\ &+ \frac{1}{2} m\omega^2 \hat{X}^2(0) \end{aligned} \quad (۳۳-۲)$$

که می‌توان ترم سوم در معادله (۳۳-۲) را به فرم زیر بازنویسی کرد و در معادله قرار دارد:

$$[\hat{X}(0), \hat{X}(\tau)] = \left[\hat{X}(0), \hat{X}(0) \cos(\omega\tau) + \frac{\hat{P}(\tau)}{m\omega} \sin(\omega\tau) \right] = \frac{i\hbar}{m\omega} \sin(\omega\tau) \quad (۳۴-۲)$$

که نتیجه می‌گیریم:

$$\hat{X}(0) \hat{X}(\tau) = \hat{X}(\tau) \hat{X}(0) + \frac{i\hbar}{m\omega} \sin(\omega\tau) \quad (۳۵-۲)$$

حال اگر معادله (۳۵-۲) را در معادله (۳۳-۲) جایگذاری کنیم:

$$\hat{H}_{ord} = \frac{m\omega^2}{2\sin^2(\omega\tau)} [\hat{X}^2(\tau) + \hat{X}^2(0) - 2\hat{X}(0) \hat{X}(\tau) \cos(m\omega)] = -\frac{i\hbar\omega}{2} \cot(\omega\tau) \quad (۳۶-۲)$$

از طرفی با داشتن هامیلتونی بدست آمده می‌توان تابع $\hat{H}(x'', x'; \tau)$ را محاسبه کرد:

$$\hat{H}(x'', x'; \tau) = \frac{\langle x'', \tau | \hat{H} | x', 0 \rangle}{\langle x'', \tau | x', 0 \rangle} = \frac{m\omega^2}{2} [(x''^2 + x'^2) \csc^2(\omega\tau) - 2x''x' \cot(\omega\tau) \csc(\omega\tau)] - \frac{i\hbar\omega}{2} \cot(\omega\tau) \quad (۳۷-۲)$$

با بکارگیری معادله (۲-۲۳) می‌توان انتشارگر را اینگونه محاسبه کرد:

$$\langle x'', \tau' | x', 0 \rangle = C(x'', x') \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_0^{\tau'} d\tau' \left[\frac{m\omega^2}{2} (x''^2 + x'^2) \text{Csc}^2(\omega\tau') - 2x''x' \text{Cot}(\omega\tau') \text{Csc}(\omega\tau') \right] - \frac{i\hbar\omega}{2} \text{Cot}(\omega\tau') \right\} \quad (2-38)$$

با انتگرال‌گیری از معادله (۲-۳۸) برحسب τ' به معادله (۲-۳۹) می‌رسیم:

$$\langle x'', \tau | x', 0 \rangle = \frac{C(x'', x')}{\sqrt{\text{Sin}(\omega\tau)}} \exp \frac{im\omega}{2\hbar \text{Sin}(\omega\tau)} \left[(x''^2 + x'^2) \text{Csc}^2(\omega\tau) - 2x''x' \text{Cot}(\omega\tau) \text{Csc}(\omega\tau) \right] \times \exp \left(-\frac{i\hbar\omega}{2} \text{Cot}(\omega\tau) \right) \quad (2-39)$$

$$\hat{P}(\tau) = m\omega \text{Cot}(\omega\tau) [\hat{X}(\tau) - \hat{X}(0) \text{Cos}(\omega\tau)] - m\omega \hat{X}(0) \text{Sin}(\omega\tau) \quad (2-40)$$

از طرفی درمی‌یابیم که $C(x'', x')$ در معادلات مربوطه یک عدد ثابت می‌باشد. با بکارگیری معادلات (۲-۲۴a)، (۲-۳۹) و (۲-۴۰) معادله زیر را اثبات می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \langle x'', \tau | m\omega \text{Cot}(\omega\tau) [\hat{X}(\tau) - \hat{X}(0) \text{Cos}(\omega\tau)] - m\omega \hat{X}(0) \text{Sin}(\omega\tau) | x', 0 \rangle = \\ & -i\hbar \frac{\partial}{\partial x''} \left\{ \frac{C(x'', x')}{\sqrt{\text{Sin}(\omega\tau)}} \exp \frac{im\omega}{2\hbar \text{Sin}(\omega\tau)} \left[(x''^2 + x'^2) \text{Csc}^2(\omega\tau) - 2x''x' \right] \right\} = \\ & (m\omega \text{Cot}(\omega\tau) [x'' - x' \text{Cos}(\omega\tau)] - m\omega x' \text{Sin}(\omega\tau)) \times \\ & \left\{ \frac{C(x'', x')}{\sqrt{\text{Sin}(\omega\tau)}} \exp \frac{im\omega}{2\hbar \text{Sin}(\omega\tau)} \left[(x''^2 + x'^2) \text{Csc}^2(\omega\tau) - 2x''x' \right] \right\} \Rightarrow \\ & C(x'', x') (m\omega \text{Cot}(\omega\tau) [x'' - x' \text{Cos}(\omega\tau)] - m\omega x' \text{Sin}(\omega\tau)) \times \\ & \left\{ \frac{1}{\sqrt{\text{Sin}(\omega\tau)}} \exp \frac{im\omega}{2\hbar \text{Sin}(\omega\tau)} \left[(x''^2 + x'^2) \text{Csc}^2(\omega\tau) - 2x''x' \right] \right\} = \\ & \frac{\partial C(x'', x')}{\partial x''} = 0 \Rightarrow C(x'', x') = C \quad (2-41) \end{aligned}$$

از این رو $C(x'', x')$ برابر یک عدد ثابت می‌باشد و مستقل از x'', x' می‌باشد.

با محاسبات زیر مقدار ثابت $C(x'', x')$ را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} \langle x'', \tau | x', 0 \rangle = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{C}{\sqrt{\omega \tau}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar \tau} (x'' - x')^2 \right] = C \sqrt{\frac{2\pi i \hbar}{m \omega}} \delta(x'' - x')$$

$$x'' - x' = u$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C}{\sqrt{\omega \tau}} \exp \left[\frac{im}{2\hbar \tau} (u)^2 \right] du = \delta(x'' - x')$$

$$\Rightarrow \frac{C \sqrt{2i \pi \hbar}}{\sqrt{m \omega}} \delta(x'' - x') = \delta(x'' - x') \quad (42-2)$$

$$C = \sqrt{\frac{m \omega}{2\pi i \hbar}}$$

با بدست آوردن ثابت $C(x'', x')$ مقدار انتشارگر فاینمن برای نوسانگر هماهنگ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$K(x'', x'; \tau) = \langle x'', \tau | x', 0 \rangle = \sqrt{\frac{m \omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega \tau)}} \exp \left\{ \frac{im \omega}{2\hbar \sin(\omega \tau)} \left[(x''^2 + x'^2) \cos(\omega \tau) - 2x''x' \right] \right\} \quad (43-2)$$

۲-۴ محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ به روش انتگرال مسیر فاینمن:

انتگرال مسیر فاینمن توسط فاینمن در سال ۱۹۴۸ معرفی شد و دیراک با پیروی از ایده های قبلی خود آن را توسعه داد. در چند دهه اخیر روش انتگرال مسیر بعنوان یک شیوه بسیار محبوب در شاخه های مختلف فیزیک از آن جمله در زمینه مکانیک کوانتومی، فیزیک آماری، نظریه میدان کوانتومی، فیزیک ماده چگال و غیره.. شناخته شد است [۷]. هدف ما در این قسمت ارزیابی صریح انتگرال مسیر می باشد و همچنین می خواهیم یک روش ساده را جایگزین کنیم. انتگرال مسیری که برای انتشارگرهای کوانتومی داده می شود به فرم زیر می باشد:

$$\langle x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon}} \int dx \exp \left[\frac{i S(x, t)}{\hbar} \right] \quad (44-2)$$

که در این رابطه $S(x)$ که تابع کنش^{۲۵} نام دارد به فرم زیر می باشد:

$$S(x, t) = \int_{t_0}^{t_n} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - V(x(t)) \right] dt \quad (45-2)$$

²⁵ Function action

توجه داشته باشید که برای محاسبه انتگرال باید مسیر مشخصی را در نظر بگیریم. حال فرض کنید که مسیر معینی را تعقیب می‌کنیم. توجه خود را به قطعه کوچکی از این مسیر مثلاً بین (x_{n-1}, t_{n-1}) و (x_n, t_n) معطوف می‌کنیم. با توجه به عبارت دیراک، $\left(\exp \frac{i}{\hbar} S(t_n, t_{n-1})\right)$ را به آن قطعه نسبت می‌دهیم و با حرکت در امتداد این مسیر معین عبارتی از این نوع را در هم ضرب می‌کنیم و عبارت زیر را بدست می‌آوریم:

$$\prod_{i=2}^N \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(t_n, t_{n-1}) \right) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^N S(t_n, t_{n-1}) \right) = \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(t_N, t_1) \right) \quad (46-2)$$

$$S \cong \sum_{j=2}^N \frac{m(x_j - x_{j-1})^2}{2\tau_j} - \tau_j \frac{1}{2} (V(x_j) + V(x_{j-1})) \quad (47-2)$$

از این رو انتشارگر برای تحول زمانی بی نهایت کوچک به فرم زیر می‌باشد:

$$K(x_j, x_{j-1}; \tau_j) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau_j}} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m(x_k - x_{k-1})^2}{2\tau_j} - \tau_j \left(\frac{V(x_j) + V(x_{j-1}))}{2} \right) \right] \right\} \quad (48-2)$$

اگر لاگرانژی را برای نوسانگر هماهنگ بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$L(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2(t) \quad (49-2)$$

به همین ترتیب انتشارگر در تحول زمانی بی نهایت کوچک به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} K(x_j, x_{j-1}; \tau_j) &= \sqrt{\frac{\omega m}{2\pi \hbar}} \sqrt{\frac{1}{\omega \tau_j}} \exp \left\{ \left[\frac{im\omega}{2\hbar} \frac{(x_k - x_{k-1})^2}{\omega \tau_j} - \frac{i}{\hbar} \tau_j \left(\frac{V(x_j) + V(x_{j-1}))}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega m}{2\pi \hbar}} \sqrt{\frac{1}{\omega \tau_j}} \exp \left\{ \left[\frac{im\omega}{2\hbar \omega \tau_j} (x_k - x_{k-1})^2 - \frac{i}{\hbar} \frac{1}{4} m \omega^2 \tau_j \left((x_k^2 + x_{k-1}^2) \right) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega m}{2\pi \hbar}} \sqrt{\frac{1}{\omega \tau_j}} \exp \left\{ \left[\frac{im\omega}{2\hbar \omega \tau_j} (x_k - x_{k-1})^2 - \frac{im\omega}{2\hbar \omega \tau_j} (\omega \tau_j)^2 \left(\frac{1}{2} x_k^2 + \frac{1}{2} x_{k-1}^2 \right) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega m}{2\pi \hbar}} \sqrt{\frac{1}{\omega \tau_j}} \exp \left\{ \left[\frac{im\omega}{2\hbar \omega \tau_j} (x_j^2 + x_{j-1}^2 - 2x_j x_{j-1}) - \frac{im\omega}{2\hbar \omega \tau_j} \frac{(\omega \tau_j)^2}{2} (x_j^2 + x_{j-1}^2) \right] \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{\omega m}{2\pi \hbar}} \sqrt{\frac{1}{\omega \tau_j}} \exp \frac{im\omega}{2\hbar \omega \tau_j} \left\{ \left(x_j^2 + x_{j-1}^2 \right) \left(1 - \frac{(\omega \tau_j)^2}{2} \right) - 2x_j x_{j-1} \right\} \end{aligned} \quad (50-2)$$

برای انتشارگر بدست آمده تغییر متغیر جدید را اعمال می‌کنیم:

$$\phi_j \cong \omega \tau_j$$

$$\sin \phi_j = \omega \tau_j$$

$$\cos \phi_j = 1 - \frac{(\omega \tau_j)^2}{2!} + \frac{(\omega \tau_j)^4}{4!} + \dots$$

با توجه به تعاریف جدید به فرم جدیدی از انتشارگر می‌رسیم:

$$K(x_j, x_{j-1}; \tau_j) = \sqrt{\frac{\omega m}{2\pi\hbar}} \sqrt{\frac{1}{\sin(\omega \tau_j)}} \exp \left[\frac{im\omega}{2\hbar \sin(\omega \tau_j)} \right] \times \left\{ \left[(x_j^2 + x_{j-1}^2) \cos(\omega \tau_j) - 2x_j x_{j-1} \right] \right\} \quad (51-2)$$

۲-۵ محاسبه انتشارگر با استفاده از وردش:

در این بخش از روش وردش به محاسبه انتشارگر ذره آزاد و انتشارگر تحت سه پتانسیل کولنی، پتانسیل دو جمله ای درجه دو و پتانسیل نوسانگر هماهنگ می‌پردازیم.

۲-۵-۱ محاسبه انتشارگر نوسانگر هماهنگ با استفاده از روش وردش:

حال ما می‌توانیم با داشتن پتانسیل نوسانی در اصل، به صراحت با در نظر گرفتن انتشارگر، البته حالت اولیه عمومی تحول زمانی را برای هر یک از ویژه حالت‌ها بدست آوریم. از این رو ما می‌توانیم انتشارگر را با روش وردش برای ذره آزاد، پتانسیل نوسانی، پتانسیل درجه دو و پتانسیل کولنی محاسبه کنیم.

پتانسیل نوسانگر را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega x^2 \quad (52-2)$$

با در نظر گرفتن رابطه بین نیرو و پتانسیل

$$F = -\nabla V(x) \quad (53-2)$$

$\dot{x}$ ، x را بدست می‌آوریم:

در اینجا با حل معادله دیفرانسیل درجه دوم به جواب رسیدیم:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m \omega^2 x$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

$$\dot{x}(t) = A \cos(\omega t) - B \sin(\omega t)$$
(۵۴-۲)

برای بدست آوردن A و B، با استفاده از جواب معادله (۵۴-۲)، $x(t)$ را در لحظه $t = 0$ و $t = \tau$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t=0 & x(0) = x_a \\ x = A \sin(\omega \tau) + B \cos(\omega \tau) \\ t=\tau & x(\tau) = x_b \end{cases} \Rightarrow \left\{ A = \left(\frac{x_b - x_a \cos(\omega \tau)}{\sin(\omega \tau)} \right) \text{ and } B = x_a \right\}$$

$$x = \left(\frac{x_b - x_a \cos(\omega \tau)}{\sin(\omega \tau)} \right) \sin(\omega \tau) + x_a \cos(\omega \tau)$$
(۵۵-۲)

چرا که در رابطه انتشار گر نیاز به $\dot{x}$ ، داریم:

$$K(x'', t''; x', t') = \frac{1}{W(\Delta t)} \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(t'', t') \right)$$

$$S(t'', t') = \int_{t'}^{t''} L(t'', t') dt$$
(۵۶-۲)

با تعریف لاگرانژی بصورت زیر انتشار گر ذره آزاد را بدست می‌آوریم.

$$L(t'', t') = p \cdot \frac{(x'' - x')}{(t'' - t')} - H(x)$$

$$L(t'', t') = p \cdot \frac{(x'' - x')}{(t'' - t')} - \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

$$L(t'', t') = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$
(۵۷-۲)

$$S(\tau) = \frac{m}{2} \omega^2 \left(\int_0^\tau (A \cos[\omega t] - B \sin[\omega t])^2 dt - \int_0^\tau (A \sin[\omega t] + B \cos[\omega t])^2 dt \right) \quad (58-2)$$

با محاسبه انتگرال داریم:

$$S(\tau) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{-2AB + 2(A^2 + B^2)\tau\omega + 2AB \cos[2\tau\omega] + (A-B)(A+B) \sin[2\tau\omega]}{4\omega} \right) - \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{2AB + 2(A^2 + B^2)\tau\omega - 2AB \cos[2\tau\omega] + (-A^2 + B^2) \sin[2\tau\omega]}{4\omega} \right) \quad (59-2)$$

با در نظر گرفتن معادله (59-2) و ثابت های بدست آمده به معادله (60-2) می‌رسیم:

$$\left\{ A = \left(\frac{x_b - x_a \cos(\omega\tau)}{\sin(\omega\tau)} \right) \text{ and } B = x_a \right\}$$

$$S(\tau) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{1}{4\omega \sin^2(\omega\tau)} \right) \left(\frac{4\omega x_a x_b \cos(\omega\tau) - 4\omega x_a x_b \sin(\omega\tau) + (x_a^2 + x_b^2)(\sin(2\tau\omega) - 2\omega)}{4\omega} \right) + \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{1}{4\omega \sin^2(\omega\tau)} \right) \left(\frac{-4\omega x_a x_b \cos(\omega\tau) - 4\omega x_a x_b \sin(\omega\tau) + (x_a^2 + x_b^2)(\sin(2\tau\omega) + 2\omega)}{4\omega} \right) \quad (60-2)$$

حال به ساده سازی تابع کنش در معادله انتشار گر می‌پردازیم:

$$S(\tau) = \frac{1}{8} m \omega \left(\frac{1}{\sin^2(\omega\tau)} \right) \left(\frac{-8x_a x_b \sin(\omega\tau) + 2(x_a^2 + x_b^2)(\sin(2\tau\omega))}{4} \right) = m \omega \left(\frac{-8x_a x_b \sin(\omega\tau) + 2(x_a^2 + x_b^2)(\sin(2\tau\omega))}{4\sin^2(\omega\tau)} \right) = S(\tau) = m \omega \left(\frac{(x_a^2 + x_b^2) \cos(\tau\omega) - 2x_a x_b}{2\sin(\omega\tau)} \right) \quad (61-2)$$

با استفاده از معادلات (۵۶-۲) و (۶۱-۲) به رابطه اصلی انتشارگر نوسانگر هماهنگ می‌رسیم:

$$K(x_b, \tau; x_a, 0) = \frac{1}{W(\tau)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega \tau) - 2x_a x_b}{2 \sin(\omega \tau)} \right) \right) \quad (۶۲-۲)$$

از معادله (۹-۲) برای بدست آوردن ضریب وزنی استفاده می‌کنیم. با استفاده از رابطه $x_n = x_{n-1} + \zeta$, $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ و $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta) d\zeta = 1$ داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle x_{n-1} + \zeta, t_{n-1} + \tau | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle d\zeta = \frac{1}{W(\tau)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(\zeta)^2}{2 \sin(\omega \tau)} \right) \right) d\zeta$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\zeta) d\zeta = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{W(\tau)} \sqrt{\frac{\pi}{\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(\zeta)^2}{2 \sin(\omega \tau)} \right)}}$$

$$\frac{1}{W(\Delta t)} = \sqrt{\frac{m \omega}{2 \pi i \hbar \sin(\omega \tau)}}$$

با در نظر گرفتن ضریب وزنی برای انتشارگر نوسانگر هماهنگ داریم:

$$K(x_b, \tau; x_a, 0) = \sqrt{\frac{m \omega}{2 \pi i \hbar \sin(\omega \tau)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(x_a^2 + x_b^2) \cos(\omega \tau) - 2x_a x_b}{2 \sin(\omega \tau)} \right) \right) \quad (۶۳-۲)$$

در این مرحله حل نوسانگر هماهنگ با استفاده از تغییر متغیر صورت می‌پذیرد:

با بازنویسی معادله (۵۴-۲) و اعمال تغییر متغیر $\frac{dx}{dt} = u$ داریم:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = u \frac{du}{dx} = - \left(m \omega^2 x \right)$$

$$Ln x = \pm i \omega t$$

$$x = A e^{i \omega t} + B e^{-i \omega t}$$

$$x = (A + B) \cos[\omega t] + i (A - B) \sin[\omega t] \quad (۶۴-۲)$$

$$\dot{x} = -(A + B) \sin[\omega t] + i (A - B) \cos[\omega t]$$

با در نظر گرفتن معادله (۵۷-۲)، لاگرانژی سیستم داریم:

$$L(t'', t') = p \cdot \frac{(x'' - \dot{x}')}{(t'' - t')} - H(x)$$

$$L(t'', t') = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

انتشارگر را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$S(\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 (x)^2 \right) dt$$

$$\begin{cases} t=0 & x(0) = x_a \\ x = (A+B)\cos[\omega\tau] + (A-B)\sin[\omega\tau] \\ t=\tau & x(\tau) = x_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{x_a}{2} + i \frac{x_a}{2\sin[\omega\tau]} \cos[\omega\tau] - i \frac{x_b}{2\sin[\omega\tau]} \\ B = \frac{x_a}{2} - i \frac{x_a}{2\sin[\omega\tau]} \cos[\omega\tau] + i \frac{x_b}{2\sin[\omega\tau]} \end{cases}$$

با توجه به تعریف $\dot{x}$ و x داریم:

$$S(\tau) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left\{ \int_0^\tau \left(- \left(\frac{x_1 \sin[\omega\tau] - ix_2 + ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} + \frac{x_1 \sin[\omega\tau] + ix_2 - ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} \right) \sin[\omega t] + i \cos[\omega t] \left(\left(\frac{x_1 \sin[\omega\tau] - ix_2 + ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} \right) - \left(\frac{x_1 \sin[\omega\tau] + ix_2 - ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} \right) \right) \right)^2 dt - \int_0^\tau \left(\left(\frac{x_1 \sin[\omega\tau] - ix_2 + ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} + \frac{x_1 \sin[\omega\tau] + ix_2 - ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} \right) \cos[\omega t] + i \sin[\omega t] \left(\left(\frac{x_1 \sin[\omega\tau] - ix_2 + ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} \right) - \left(\frac{x_1 \sin[\omega\tau] + ix_2 - ix_1 \cos[\omega\tau]}{2\sin[\omega\tau]} \right) \right) \right)^2 dt \right\}$$

(۶۵-۲)

با انتگرال گیری از مجموعه بالا به جواب (۶۶-۲) می‌رسیم:

$$S(\tau) = \frac{1}{2} m \omega^2 \left[\frac{Csc^2[\omega\tau] \left(4\omega\tau x_a x_b \cos[\omega\tau] - 4x_a x_b \sin[\omega\tau] + (x_a^2 + x_b^2)(-2\omega\tau + \sin[2\omega\tau]) \right)}{4\omega} + \frac{Csc^2[\omega\tau] \left(-4\omega\tau x_a x_b \cos[\omega\tau] - 4x_a x_b \sin[\omega\tau] + (x_a^2 + x_b^2)(2\omega\tau + \sin[2\omega\tau]) \right)}{4\omega} \right] =$$

$$S(\tau) = m\omega \left(\frac{(x_a^2 + x_b^2)\cos[\omega\tau] - 2x_a x_b}{2\sin[\omega\tau]} \right) \quad (66-2)$$

و در انتها با استفاده از معادله (۵۶-۲) و (۶۶-۲) برای انتشارگر نوسانگر هماهنگ داریم:

$$\begin{cases} t = 0 & x' = x_a \\ t = \tau & x'' = x_b \end{cases}$$

$$K(x_b, \tau; x_a, 0) = \frac{1}{W(\tau)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(x_a^2 + x_b^2)\cos(\omega\tau) - 2x_a x_b}{2\sin(\omega\tau)} \right) \right)$$

برای بدست آوردن ضریب وزنی از بخش (۴-۲) استفاده می کنیم.

$$K(x_b, \tau; x_a, 0) = \sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i \hbar \sin(\omega\tau)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(x_a^2 + x_b^2)\cos(\omega\tau) - 2x_a x_b}{2\sin(\omega\tau)} \right) \right) \quad (67-2)$$

۲-۵-۲ محاسبه انتشارگر ذره آزاد با استفاده از وردش:

ابتدا به باز نویسی معادله (۵۴-۲) می پردازیم و پتانسیل ذره آزاد را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$V(x) = 0$$

$$f = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$\dot{x}$ و $\ddot{x}$ آن را محاسبه می کنیم:

$$\int C dt = \int dx$$

$$x = Ct - A$$

$$\dot{x} = C$$

(۶۸-۲)

رابطه معادله انتشار گر (۵۶-۲) را در نظر می گیریم:

$$K(x_b, \tau; x_a, 0) = \frac{1}{w(\tau)} \int \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(\tau) \right) dx$$

$$S(\tau) = \int_{t'}^{t''} L(t'', t') dt$$

برای لاگرانژی از معادله (۵۷-۲) بر حسب هامیلتونی داریم:

$$L(t'', t') = p \cdot \frac{(x'' - x')}{(t'' - t')} - H(x)$$

$$L(t'', t') = \frac{p^2}{2m}$$

$$\int_0^\tau \left(\frac{1}{2} m C^2 \right) dt \Rightarrow S(\tau) = \frac{m C^2 \tau}{2}$$

(۶۹-۲)

$$\left\{ \begin{array}{l} t=0 \\ t=\tau \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x(0) = x_a \\ x(\tau) = x_b \end{array}$$

برای بدست آوردن A و C ، $x(t)$ را در لحظه محاسبه می کنیم:

$$S(\tau) = \frac{m(x_b - x_a)^2}{2\tau}$$

(۷۰-۲)

برای بدست آوردن ضریب وزنی از بخش (۲-۲) استفاده می کنیم:

از این رو داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \langle x_{n-1} + \zeta, t_{n-1} + \Delta t | x_{n-1}, t_{n-1} \rangle d\zeta &= \frac{1}{W(\Delta t)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{im(\zeta)^2}{2\hbar\Delta t} \right] d\zeta \\ &= \frac{1}{W(\Delta t)} \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}} \\ \frac{1}{W(\Delta t)} &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}} \\ \Delta t &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (71-2)$$

و در انتها انتشارگر ذره آزاد با معادله (70-2) و (71-2) بازنویسی می‌شود:

$$K(x_n, \tau; x_{n-1}, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp \left[\frac{im(x_n - x_{n-1})^2}{2\hbar \tau} \right], \quad \Delta t = \tau$$

۳-۵-۲ محاسبه انتشارگر تحت پتانسیل دو جمله ای درجه دو به روش وردش:

ابتدا با بازنویسی فرمول (۵۶-۲) شروع می‌کنیم:

پتانسیل درجه دو را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$V(x) = ax^2 + bx$$

با در نظر گرفتن رابطه بین نیرو و پتانسیل، $X, \dot{X}$ بدست آورده:

در اینجا با حل معادله دیفرانسیل درجه دو به جواب رسیدیم.

$$\begin{aligned} F &= \frac{dp}{dt} \\ \left\{ \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -2ax - b \rightarrow x = \frac{-1}{2a} \left(\frac{dp}{dt} + b \right) \\ \frac{dx}{dt} &= \frac{p}{m} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d^2 p}{dt^2} = -\frac{2a}{m} p \end{aligned}$$

$$p(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right) \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{A}{m} \sin\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] + \frac{B}{m} \cos\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] \quad (72-2a)$$

جواب معادله به فرم زیر می باشد:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = -(2ax + b) \\ p(t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right) \end{cases} \Rightarrow x(t) = \left[\sqrt{\frac{1}{2am}} \left(B \sin\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] - A \cos\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] \right) - \frac{b}{2a} \right] \quad (72-2b)$$

برای بدست آوردن A و B ، $x(t)$ را در لحظه $t = 0$ و $t = \tau$ محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} t = 0 & x(0) = x_a \\ x = A \sin\left(\sqrt{\frac{2a}{m}}\tau\right) + B \cos\left(\sqrt{\frac{2a}{m}}\tau\right) \\ t = \tau & x(\tau) = x_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -\frac{b + 2ax_a}{a\sqrt{\frac{2}{am}}} \text{ and } B = \frac{\left(b + 2ax_b - (b + 2ax_a) \cos\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}\tau\right]\right) \csc\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}\tau\right]}{a\sqrt{\frac{2}{am}}} \end{cases} \quad (73-2)$$

چرا که در رابطه انتشارگر نیاز به $\dot{x}$ ، x داریم:

با بازنویسی معادله (2-57) برای لاگرانژی داریم:

$$L(t'', t') = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

$$\begin{aligned} S(\tau) &= \frac{1}{2} m \int_0^\tau \left(\frac{1}{m} A \sin\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] + \frac{1}{m} B \cos\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] \right)^2 dt - \\ & a \int_0^\tau \left(\sqrt{\frac{1}{2am}} B \sin\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] - \sqrt{\frac{1}{2am}} A \cos\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] - \frac{b}{2a} \right)^2 dt - \\ & b \int_0^\tau \left(\sqrt{\frac{1}{2am}} B \sin\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] - \sqrt{\frac{1}{2am}} A \cos\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}t\right] - \frac{b}{2a} \right) dt = \end{aligned}$$

با محاسبه انتگرال و با در نظر گرفتن معادله (۷۳-۲) داریم:

$$S(\tau) = \frac{1}{8\left(\frac{a}{m}\right)^{3/2} m^2} \left(\begin{aligned} & \sqrt{2}m(b+2ax_a) \left(b+2ax_b - (b+2ax_a) \cos\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right] \right) \cos\left[2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right] \csc\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right] + \\ & 2 \left(b^2 \sqrt{\frac{a}{m}} m \tau - \frac{m(b+2ax_a)(b+2ax_b - (b+2ax_a) \cos\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right]) \csc\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right]}{\sqrt{2}} \right) - \\ & \sqrt{2}a \left(\frac{m(b+2ax_a)^2}{2a} - \frac{m(b+2ax_b - (b+2ax_a) \cos\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right])^2 \csc\left[\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right]^2}{2a} \right) \sin\left[2\sqrt{2}\sqrt{\frac{a}{m}}\tau\right] \end{aligned} \right) \quad (74-2)$$

اگر $b \rightarrow 0$ آنگاه جواب معادله به فرم زیر است.

$$S(\tau) = \frac{\left(-4\sqrt{2}a^2 x_a x_b + 2\sqrt{2}a^2 (x_a^2 + x_b^2) \cos\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}\tau\right] \right) \csc\left[\sqrt{\frac{2a}{m}}\tau\right]}{4a\sqrt{\frac{a}{m}}} \quad (75-2)$$

با اعمال تغییرات $a = \frac{1}{2}m\omega^2$ و $b \rightarrow 0$ بر روی معادله (۷۵-۲) به معادله انتشارگر نوسانگر هماهنگ می‌رسیم:

$$S(\tau) = m\omega \frac{\left(-2x_a x_b + (x_a^2 + x_b^2) \cos[\tau\omega] \right) \csc[\tau\omega]}{2}$$

$$K(x_b, \tau; x_a, 0) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} m\omega \left(\frac{(x_a^2 + x_b^2) \cos(\tau\omega) - 2\omega x_a x_b}{2\sin(\omega\tau)} \right) \right) \quad (76-2)$$

۲-۵-۴ محاسبه انتشارگر تحت پتانسیل کولنی به روش وردش:

ابتدا پتانسیل کولنی را در نظر می‌گیریم:

$$V(x) = -\frac{c}{x} \quad (78-2)$$

با در نظر گرفتن معادله (۵۴-۲) رابطه بین نیرو و پتانسیل، $X, \dot{X}$ بدست آورده:

$$F = ma = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \left(\frac{c}{x^2} \right)$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر $\frac{dx}{dt} = u$:

به حل مسئله می پردازیم:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = u \frac{du}{dx} = - \left(\frac{c}{m} \frac{1}{x^2} \right) \quad (79-2)$$

از دو طرف معادله (79-2) انتگرال می گیریم و x را بدست می آوریم:

$$\int duu = - \int \left(\frac{c}{m} \frac{1}{x^2} \right) dx$$

با معرفی $A = \left(\frac{9c}{2m} \right)^{\frac{1}{3}}$ ، $\dot{x}$ را بدست می آوریم:

$$x = At^{\frac{2}{3}} + B \quad (80-2a)$$

$$\dot{x} = \frac{2A}{3t^{1/3}} \quad (80-2b)$$

با تعریف مجدد لاگرانژی، معادلات (79-2) و (80-2) انتشارگر کولنی را بدست آوردیم:

$$L(t'', t') = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

$$S(\tau) = \int_0^\tau \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{2A}{3t^{1/3}} \right)^2 - \frac{c}{\left(At^{\frac{2}{3}} + B \right)} \right) dt$$

$$S(\tau) = \frac{(-9c + 2A^3 m) T^{1/3}}{3A} + \frac{3\sqrt{B} c \text{ArcTan} \left[\frac{\sqrt{AT}^{1/3}}{\sqrt{B}} \right]}{A^{3/2}} \quad (۸۱-۲)$$

برای بدست آوردن A و B ، معادله (۸۰-۲) را در لحظه $t = 0$ و $t = T$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t = 0 & x(0) = x_a \\ x = At^{\frac{2}{3}} + B \\ t = \tau & x(\tau) = x_b \end{cases} \Rightarrow \left\{ A = \left(\frac{x_b - x_a}{\frac{2}{\tau^{\frac{2}{3}}}} \right), \quad B = x_a \right\}$$

$$x = \left(\frac{x_b - x_a}{\frac{2}{\tau^{\frac{2}{3}}}} \right) \tau^{\frac{2}{3}} + x_a$$

$$S(\tau) = \frac{\tau \left(-9c + \frac{2m(-x_a + x_b)^3}{\tau^2} \right)}{3(-x_a + x_a)} + \frac{3c\sqrt{x_a} \text{ArcTan} \left[\frac{\tau^{1/3} \sqrt{\frac{-x_a + x_b}{\tau^{2/3}}}}{\sqrt{x_a}} \right]}{\left(\frac{-x_a + x_b}{\tau^{2/3}} \right)^{3/2}} \quad (۸۲-۲)$$

با در نظر گرفتن $c \rightarrow 0$ و $\begin{cases} t = 0 \\ t = \tau \end{cases}$ و معادله (۸۲-۲) بصورت تقریبی انتشارگر ذره آزاد را بدست می‌آوریم.

$$S(\tau) \approx \frac{2m(-x_a + x_b)^2}{3\tau}$$

از بخش (۲-۲) همین فصل ضریب وزنی را بکار می‌گیریم:

$$= \frac{1}{W(\Delta t)} \sqrt{\frac{2\pi i \hbar \Delta t}{m}} \Rightarrow \frac{1}{W(\Delta t)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}}$$

$\Delta t \rightarrow 0$

و معادله (۵۶-۲) را بشکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$K(x_n, \tau; x_{n-1}, 0) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \tau}} \exp \left[\frac{im(x_n - x_{n-1})^2}{2\hbar \tau} \right], \quad \Delta t = \tau \quad (۸۳-۲)$$

در این فصل محاسبه انتشارگر تحت سه پتانسیل مورد بررسی قرار گرفت، کار اصلی ما در این فصل محاسبه چهار انتشارگر ذره آزاد، کولنی، نوسانگر هماهنگ و پتانسیل دو جمله ای درجه دو بود که به روش وردش محاسبه گردید و با قرار دادن حالت‌های حدی بر روی انتشارگرهای محاسبه شده، به انتشارگر ذره آزاد و انتشارگر نوسانگر هماهنگ که برای ما آشناتر می‌باشد دست پیدا کردیم.

فصل سوم

راه حل تحلیلی معادله شرودینگر وابسته به زمان،
یک بعدی

۳-۱ مقدمه راه حل تحلیلی معادله شرودینگر:

می‌توان راه حل تحلیلی را برای حل معادله شرودینگر یک بعدی که به خوبی شناخته شده و پیچیده‌تر از نوسانات بسته های موج منسجم است در پیش گرفت. برای یک ذره آزاد و پتانسیل نوسانگر هماهنگ بسته موج هرمیتین - گائوسین^{۲۶} حتی در مدت زمان طولانی این ساختار را حفظ می‌کند، عبارتی راه حل دقیق این است که برای یک سیستم با ثابت نوسانی $K=0$ یا $K<0$ و $K>0$ منجر به یک تابع موج برای ذره آزاد و نوسانگر هماهنگ می‌شود [۹]. مثال خوب و آشنا همان موضوع مورد بحث ما، نوسانگر هماهنگ ساده می‌باشد که اولین بار توسط شرودینگر مورد بررسی قرار گرفت و در کتاب‌های مکانیک کوانتومی ذکر شد. دانشجویان اغلب بر این باورند که قضیه حفظ شکل بسته های موج گائوسین نوسانگر نادر است، به عنوان مثال تحلیل تابع موج وابسته به زمان، عبارتی شکل بسته موج گائوسین نوسانگر یک حالت خاص از تحلیل تابع موج وابسته به زمان می‌باشد. به ندرت راه حل تحلیلی معادله شرودینگر وابسته به زمان باعث درک و بروز چنین راه حل تحلیلی می‌شود زیرا که می‌تواند در واقع بینشی را راجع به رفتار زمان در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی تولید کند. بنابراین چون اغلب روش‌های تحلیلی جوابگوی سیستم‌های واقعی نیستند توابع موج این سیستم‌های اغلب از روش عددی بدست می‌آید. برای اینکه بدانیم روش تحلیلی درست است یا خیر آن را با روش عددی مورد مقایسه قرار می‌دهیم [۱۰، ۱۱]. روش مورد بررسی، براساس شیوه انتگرال مسیر ارائه می‌شود. که یک روش کاربردی و گسترده در محاسبه بسته نوسانگر میرا در مکانیک کوانتومی می‌باشد. در این مبحث ما درباره بدست آوردن تابع موج حالت نهایی با استفاده از راه حل‌های وابسته به زمان که با استفاده از روش انتشارگر بدست می‌آید، برخی از خواص مورد نظرمان را استخراج می‌کنیم.

معادله شرودینگر وابسته به زمان [۶]:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right] \psi(x, t) = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) \quad (۱-۳)$$

مقدار اولیه:

$$\psi(x, 0) = \phi(x) \quad (۲-۳)$$

²⁶ Hermite-Gaussian

بدست آوردن تابع موج نهایی از روی انتشارگر سیستم طبق رابطه زیر صورت می‌پذیرد:

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x, t; x', t_0) \psi(x', t_0) \quad (3-3)$$

نکته قابل توجه این است که در هر سیستم انتشارگر به پتانسیل بستگی دارد و مستقل از تابع موج اولیه می‌باشد.

پتانسیل نوسانگر هماهنگ ساده به فرم زیر می‌باشد:

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (4-3)$$

با انتخاب:

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad (5-3)$$

اگر فرض کنیم که $t_0 = 0$ است از بخش (۲-۳) برای انتشارگر نوسانگر هماهنگ داریم:

$$k(x, t; x', t_0) = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi i \sin(\omega t)}} e^{\left(\frac{i\alpha^2(x^2 + x'^2) \cos(\omega t) - 2xx'}{2\sin(\omega t)} \right)} \quad (6-3)$$

در این مبحث تابع موج اولیه را تحت اثر پتانسیل نوسانی قرار می‌دهیم. ما این اثر را توسط انتشارگر نوسانگر هماهنگ نشان می‌دهیم چرا که انتشارگر هر سیستم وابسته به پتانسیل آن سیستم می‌باشد.

۲-۳ نوسانات و ارتعاشات تابع موج هرمیتین - گائوسین:

یکی از اولین مقالاتی که به بحث در مورد ارتعاشات (نوسان) بسته موج، به عنوان یک کلیت از بسته موج منسجم نوسانی پرداخته است، مقاله فوجیوارا^{۲۷} و می‌یوشی^{۲۸} می‌باشد [۱۲]. از طرفی مارهیس^{۲۹} نشان داد، زمانی که تابع موج اولیه پیچیده است می‌توان راه‌حل تحلیلی را در بدست آوردن تابع موج نهایی در پیش گرفت [۱۳].

²⁷ Fujiwara

²⁸ Miyoshi

²⁹ Marhic

حالت ایستا را به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$\psi(\alpha, x) = N_n(\alpha) H_n(\alpha x) e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{2}} \quad (۷-۳)$$

$$N_n(\alpha) = \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\pi} 2^n 2!} \right) \quad (۸-۳)$$

$H_n(x)$ چند جمله ای هرمیت^{۳۰} می باشد.

ویژه مقدار مربوط به این حالت به فرم زیر می باشد:

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega \quad (۹-۳)$$

ما از ثابت نوسانگر به عنوان یک پارامتر در تابع موج استفاده می کنیم. بنابراین می توان ویژه حالت های نوسانگرهای مختلف را با ویژه مقدارهای مختلف α در نظر گرفت. حالت اولیه تابع موج هرمیتین-

گائوسین که با سرعت متوسط $v = \frac{\hbar k}{m}$ حرکت می کند را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\phi_n(x) = \psi_n(\beta x - A) e^{ikx} \quad (۱۰-۳)$$

در اینجا تاکید می کنیم که پتانسیل نوسانگر هماهنگ اصلی با α مشخص می شود. اگر تابع موج اولیه متفاوت باشد، تابع موج ما مانند نوسانگری می شود که ثابت های نوسانی متفاوتی دارند و از این رو جابجایی مکانی متفاوتی داریم. حال تحول زمانی تابع موج هرمیتین- گائوسین تحت اثر پتانسیل نوسانی محاسبه می کنیم.

تابع موج نهایی به فرم زیر نوشته می شود:

$$\psi(x, t; x', t') = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, t) K(x'', t''; x', t') dx; \quad (۱۱-۳)$$

اگر $t_0 = 0$ باشد.

³⁰ Hermite polynomials.

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x', 0) K(x, t; x', 0) dx; \quad (12-3)$$

اگر تابع موج اولیه را $\psi(x', t) = \left(\frac{\alpha}{2^n \sqrt{\pi n!}}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}(x' - A)^2 + ikx'\right)$ در نظر بگیریم و انتشارگر نوسانگر هماهنگ را که در بخش (۳-۲) محاسبه کردیم، در نظر بگیریم:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\frac{\alpha^2}{2i\pi \sin(\omega t)}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[i \frac{\alpha^2}{2 \sin(\omega t)} (x'^2 + (x'')^2) \cos(\omega t) - 2xx'\right]; \quad (13-3)$$

آنگاه:

$$\begin{aligned} \psi(x, t; x', t') &= \left(\frac{\beta}{2^n \sqrt{\pi n!}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\alpha^2}{2i\pi \sin(\omega t)}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\beta^2}{2}(x' - A)^2 + ikx'\right] \times \\ &\exp\left[i \frac{\alpha^2}{2 \sin(\omega t)} (x'^2 + (x'')^2) \cos(\omega t) - 2xx'\right]. \end{aligned} \quad (14-3)$$

با استفاده از انتگرال زیر مسئله را حل می‌کنیم [۹]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + 2xy} H_n(\alpha x) dx = \sqrt{\pi} (1 - \alpha^2)^{\frac{n}{2}} H_n\left[\frac{\alpha y}{(1 - \alpha^2)^{\frac{1}{2}}}\right] e^{y^2} \quad (15-3)$$

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \left(\frac{\alpha^2 \beta}{2^n \sqrt{\pi n!}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta}}{\left(\alpha^4 \cos^2 \omega t + \beta^4 \sin^2 \omega t\right)^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &H_n\left(\frac{\beta\left[\alpha^2(x - A \cos[\omega t]) - k \sin[\omega t]\right]}{\left(\alpha^4 \cos^2 \omega t + \beta^4 \sin^2 \omega t\right)^{\frac{1}{2}}}\right) e^{S(x, t) + iT(x, t)}. \end{aligned} \quad (16-3)$$

که به ترتیب $T(x, t)$ و $S(x, t)$ و $\theta(t)$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$T(x, t) = \frac{\alpha^2 \left[(\beta^4 - \alpha^4) x^2 - k^2 + \beta^4 A^2 \right] \sin[\omega t] \cos[\omega t] + 2 \left[\alpha^4 k x \cos[\omega t] + \right] \beta^4 A (k \sin[\omega t] - \alpha^2 x) \sin[\omega t]}{2(\alpha^4 \cos^2 \omega t + \beta^4 \sin^2 \omega t)}$$

$$S(x, t) = -\frac{\beta^2 \left[\alpha^2 (x - A \cos[\omega t]) - k \sin[\omega t] \right]^2}{2(\alpha^4 \cos^2[\omega t] + \beta^4 \sin^2[\omega t])}$$

$$\theta(t) = \arctan \left[\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \tan[\omega t] \right]$$

(۱۷-۳)

تابع موج نهایی را به فرم ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\psi_n(x, t) = \left(\frac{\beta \alpha^2}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-i \left(n + \frac{1}{2} \right) \theta(t)}}{[f(t)]^{\frac{1}{4}}} \times H_n(\xi) e^{-\frac{\xi^2}{2} + i T(x, t)}$$

(۱۸-۳)

بنا به تعریف داریم:

$$f(t) = (\alpha^4 \cos^2 \omega t + \beta^4 \sin^2 \omega t)$$

$$\xi = \frac{\beta \left[\alpha^2 (x - A \cos[\omega t]) - k \sin[\omega t] \right]}{\sqrt{f(t)}}$$

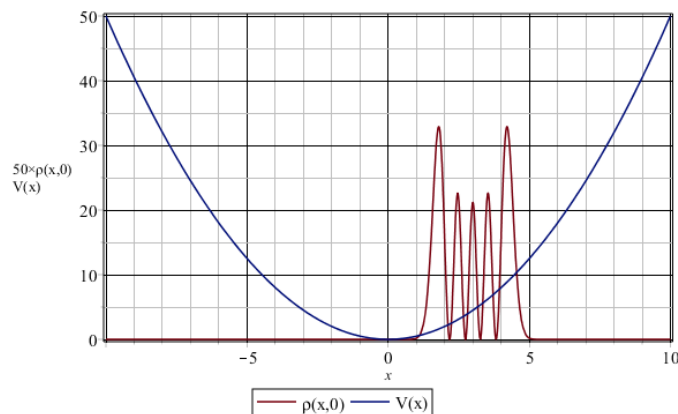
(۱۹-۳)

چگالی احتمال را بدست می‌آوریم:

$$\rho(x, t) = |\psi_n(x, t)|^2 = \left(\frac{\beta \alpha^2}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \right) \frac{H_n(\xi) e^{-\xi^2}}{[f(t)]^{\frac{1}{2}}}$$

(۲۰-۳)

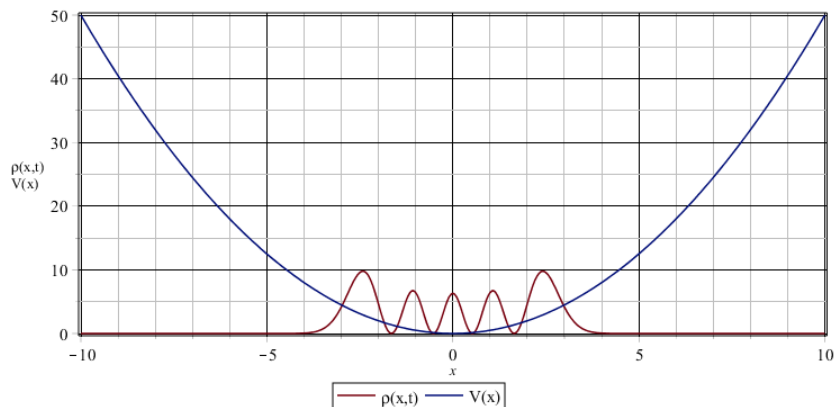
چگالی احتمال بدست آمده از روی حالت نهایی $\psi_n(x, t)$ بسته موج می‌باشد. با مقداردهی به پارامترهای درون رابطه $\rho(x, t)$ ، نمودار $\rho(x, t)$ بر حسب x را می‌توان در دو زمان $t=0$ و $t=\frac{\pi}{2}$ رسم می‌کنیم.



شکل (۱-۳) چگالی احتمال بسته موج هرمیتین - گائوسین تحت اثر انتشارگر نوسانگر هماهنگ

برحسب X در لحظه $t=0$.

$$n = 3, \alpha = 1, \beta = 2, f = 1, \omega = 1, A = 3, k = 0, m = 1$$



شکل (۲-۳) چگالی احتمال بسته موج هرمیتین - گائوسین تحت اثر انتشارگر نوسانگر هماهنگ برحسب X در لحظه

$$t = \frac{\pi}{2}$$

$$n = 4, \alpha = 1, \beta = 2, f = 1, \omega = 1, A = 3, k = 0, m = 1$$

۳-۳ نوسانات و ارتعاشات تابع هویساید^{۳۱}:

تابع پله‌ای هویساید یا تابع پله‌ای یکه تابعی ناپیوسته و چند ضابطه‌ای است که مقدارش برای اعداد منفی صفر و برای اعداد نامنفی یک است. این تابع به نام دانشمند انگلیسی الیور هویساید نام‌گذاری شده است. در ریاضیات اگر بتوان یک تابع بر روی اعداد حقیقی به صورت ترکیب خطی متناهی از توابع

³¹ Heaviside

مشخصه فاصله ها نوشته شود تابع پله خوانده می شود. به زبان ساده تر، یک تابع پله یک تابع ثابت تکه ای است که تعداد تکه های متناهی می باشد. از لحاظ تاریخی، استفاده از تابع پله، که با عنوان تابع واحد شناخته شده است، در برخورد با رفتار ناپیوستگی در انحراف پرتو استفاده می شد. اصطلاح دیگر برای "تابع تعیین گام" می باشد که نماد آن می تواند یک تابع ثابت تکه ای یا یک تابع تعمیم باشد. در جاهایی که یک تابع ثابت تکه ای تعریف شده است، تابع پله ای هویساید داده می شود. این تابع توزیع تجمعی یک متغیر تصادفی است که تقریباً مطمئن می باشد. تابع هویساید انتگرال نامعین از تابع دلتای دیراک است.

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(t) dt \quad (3-12)$$

فرم گسسته:

$$H[x] = \begin{cases} 0 & , \quad n < 0 \\ 1 & , \quad n \geq 0 \end{cases}$$

که n یک عدد صحیح می باشد.

رابطه ای که بین هویساید و دیراک برقرار است بشکل زیر می باشد:

$$\frac{d}{dx} \text{Heaviside}(x) = \text{Dirac}(x)$$

توابع هویساید و تابع دیراک غالباً در زمینه تبدیل انتگرال استفاده می شوند. این تابع و تابع دلتای دیراک در بدست آوردن برخی از موارد شرایط مرزی در مکانیک کوانتومی استفاده مفیدی دارند. در ساده سازی، تجزیه و تحلیل و کاهش در محاسبات طولانی می تواند از طریق استفاده از تابع دلتای دیراک و تابع واحد هویساید اقدام کرد [۹].

تابع موج اولیه :

$$\psi(x, 0) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2A}} \left(H[x - (a + A)] - H[x - (a - A)] \right) \quad (3-22)$$

$H(x)$ را تابع موج پله ای یا همان تابع موج هویساید می نامند.

طبق معادله (۳-۱۱) تابع موج حالت نهایی را بدست می آوریم:

$$\psi(x,t) = -\frac{1}{4} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{A \cos[\omega t]}} e^{\left(\frac{-i \alpha^2 x^2 \sin[\omega t]}{2 \cos[\omega t]}\right)} \times \{ \operatorname{erf}(f_+(x,t)) - \operatorname{erf}(f_-(x,t)) \} \quad (23-3)$$

$$f_{\pm}(x,t) = \frac{i \alpha [x - (a \pm A) \cos[\omega t]]}{\sqrt{-i \sin[2\omega t]}} \quad (24-3)$$

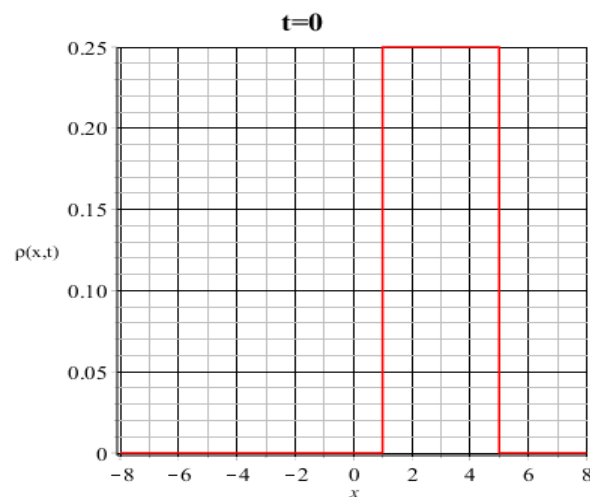
تابع $\operatorname{erf}(z)$ به فرم زیر تعریف می شود:

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du \quad (25-3)$$

چگالی احتمال را بدست می آوریم:

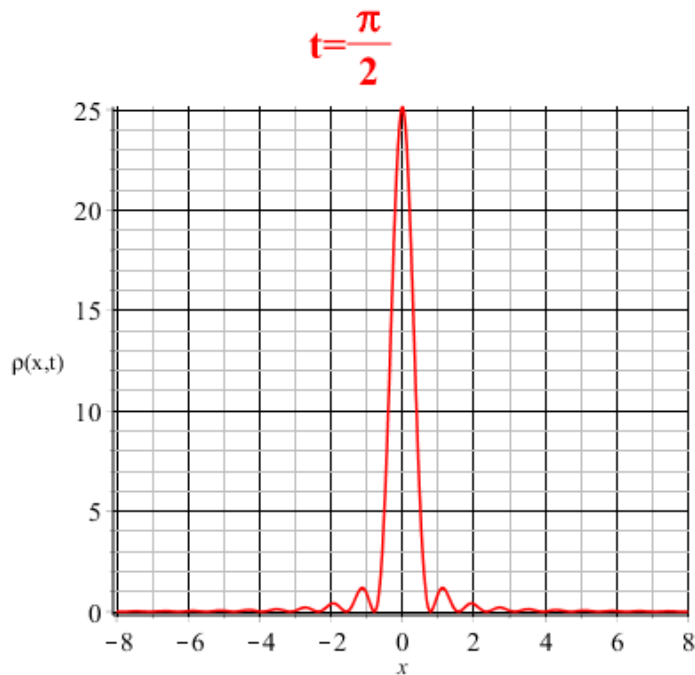
$$\rho(x,t) = |\psi_n(x,t)|^2 = -\frac{1}{8} \frac{1}{A \cos[\omega t]} \times \left| \operatorname{erf}(f_+(x,t)) - \operatorname{erf}(f_-(x,t)) \right|^2 \quad (26-3)$$

چگالی احتمال بدست آمده از روی معادله (23-3) بدست می آید. با مقارنه‌ی به پارامترهای رابطه (26-3) نمودار $\rho(x,t)$ بر حسب x را می توان در دو زمان $t=0$ و $t=\frac{\pi}{2}$ رسم می کنیم.



شکل (3-3) چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت اثر انتشارگر نوسانگر هماهنگ بر حسب X در لحظه $t=0$.

$$\hbar = 1, \alpha = 1, \beta = 2, f = 1, \omega = 1, A = 3, a = 2, m = 1$$



شکل (۳-۴) چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت اثر انتشارگر نوسانگر هماهنگ بر حسب X در لحظه $t = \frac{\pi}{2}$.

$$\hbar = 1, \alpha = 1, a = 2, \omega = 1, A = 3, k = 0, m = 1$$

شکل (۳-۴) تابع موج نهایی یک موج مربعی اولیه می‌باشد که بعد از بازه زمانی معین به یک موج نوسانی تبدیل شده که احتمال حضور ذره را در هر بازه زمانی نشان می‌دهد.

۳-۴ تحول زمانی ذره در جعبه تحت اثر پتانسیل نوسانی:

در این مبحث تحول زمانی تابع موج ذره در جعبه تحت اثر پتانسیل نوسانی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تابع موج اولیه ذره در جعبه به فرم زیر می‌باشد:

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \left[\frac{2n\pi}{a} x \right] \quad (۳-۲۷)$$

در این مبحث پتانسیل ما از نوع نوسانی می‌باشد.

طبق معادله (۳-۶)، (۳-۱۱) و (۳-۲۷) داریم:

$$\psi(x,t;x',t') = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi i \sin[wt]}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left[\frac{2n\pi i}{a}x\right] e^{-\frac{i\alpha^2((x^2+y^2)\cos[wt]-2xy)}{2\sin[wt]}} dx \quad (28-3)$$

$$= AC \left[\frac{\left(\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{i\alpha^2 \cot[tw]}} + \left(ia(-1+e^{2itw}) \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\left((-1+e^{2itw})n\pi - ia e^{itw} y \alpha^2 \right)^2}{a^2(-1+e^{4itw})\alpha^2}} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{\left((-1+e^{2itw})n\pi - ia e^{itw} y \alpha^2 \right)^2}{a^2(-1+e^{4itw})\alpha^2}} \right] \right)}{\left((-1+e^{2itw})n\pi - ia e^{itw} y \alpha^2 \right)} \right]$$

$$AC \left[\frac{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{i\alpha^2 \cot[tw]}} - \left(ia(-1+e^{2itw}) \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{\left((-1+e^{2itw})n\pi + ia e^{itw} y \alpha^2 \right)^2}{a^2(-1+e^{4itw})\alpha^2}} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{2} \sqrt{\frac{\left((-1+e^{2itw})n\pi + ia e^{itw} y \alpha^2 \right)^2}{a^2(-1+e^{4itw})\alpha^2}} \right]}{\left((-1+e^{2itw})n\pi + ia e^{itw} y \alpha^2 \right)} \right]$$

$$DA \left[\frac{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{i\alpha^2 \cot[tw]}} + \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{\frac{i(-2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}} \right] \sec[tw](-ay\alpha^2 + 2n\pi \sin[tw])}{a\alpha^2 \sqrt{\frac{i(-2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}}}}{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{i\alpha^2 \cot[tw]}} + \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{\frac{i(-2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}} \right] \sec[tw](-ay\alpha^2 + 2n\pi \sin[tw])}{a\alpha^2 \sqrt{\frac{i(-2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}}}} \right]$$

$$DA \left[\frac{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{i\alpha^2 \cot[tw]}} + \frac{ia\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{\frac{i(2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}} \right] \sqrt{\frac{i(2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}}}{2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw]}}{\frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{i\alpha^2 \cot[tw]}} + \frac{ia\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{Erf} \left[\sqrt{\frac{i(2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}} \right] \sqrt{\frac{i(2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw])^2 \tan[tw]}{a^2\alpha^2}}}{2n\pi + ay\alpha^2 \csc[tw]}} =$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{1}{a} e^{-\frac{1}{2} i y^2 \alpha^2 \cot[tw]} \sqrt{-i \alpha^2 \csc[tw]}}$$

$$C = \frac{1}{2} i e^{-\frac{i \left(\frac{2 \ln \pi}{a} + \frac{4 y \alpha^2}{e^{-i t w} - e^{i t w}} - i y \alpha^2 \csc[tw] \right)^2 \tan[tw]}{2 \alpha^2}}$$

$$D = \frac{1}{2} i e^{-\frac{i \left(\frac{2 \ln \pi}{a} - i y \alpha^2 \csc[tw] \right)^2 \tan[tw]}{2 \alpha^2}}$$

$$\rho(x, t; x', t') = |\psi(x, t; x', t')|^2 \quad (29-3)$$

۳-۵ تحول زمانی تابع موج هرمیتین - گائوسین تحت اثر انتشارگر ذره آزاد:

همان طور که می دانیم ذره آزاد فاقد پتانسیل می باشد:

$$V(x) = 0$$

از این رو انتشارگر ذره آزاد را به فرم زیر در نظر می گیریم که در بخش (۲-۲) آن را محاسبه کردیم:

$$K(x, \tau; x', 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i(x-y)^2}{2\tau}}}{\sqrt{2i\tau}} \quad (30-3)$$

که τ همان:

$$\tau = \frac{\hbar(t-t_0)}{m}$$

در این مبحث تابع موج اولیه را تحت اثر ذره آزاد قرار می دهیم. ما این اثر را توسط انتشارگر ذره آزاد نشان می دهیم چرا که انتشارگر هر سیستم وابسته به پتانسیل آن سیستم می باشد.

تابع موج مربعی اولیه را به فرم معادله زیر که همان معادله (۳-۱۰) می باشد بازنویسی می کنیم:

$$\Psi_n(x) = \psi_n(\alpha, x - A) e^{ik(x-A)}$$

که $\psi_n(\alpha, x)$ ویژه مقدار نوسانگر هماهنگ می باشد و α ثابت نوسانگر مربوطه می باشد.

تحول زمانی تابع موج به فرم زیر می‌باشد:

$$\Psi_n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x', t_0) K(x, t; x', t_0) dx';$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{\frac{i(x-y)^2}{2\tau}}}{\sqrt{2i\tau}} N_n(\alpha) \times H_n[\alpha(x' - A)] e^{-\frac{\alpha^2(x' - A)^2}{2}} e^{ik(x' - A)} dx'.$$

که این انتگرال در مورد ضربان و نوسانات بسته موج هرمیتین - گاوسین در یک نوسانگر هماهنگ خوب عنوان شده است.

بعد از محاسبه انتگرال داریم:

$$\Psi_n(x, t) = \frac{N_n(\alpha)}{\sqrt{1 + i\alpha^2\tau}} e^{\frac{i(x' - A)}{2\tau}} \times e^{in\theta} H_n(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2} - i\frac{\xi^2}{2\alpha^2\tau}\right) \quad (31-3)$$

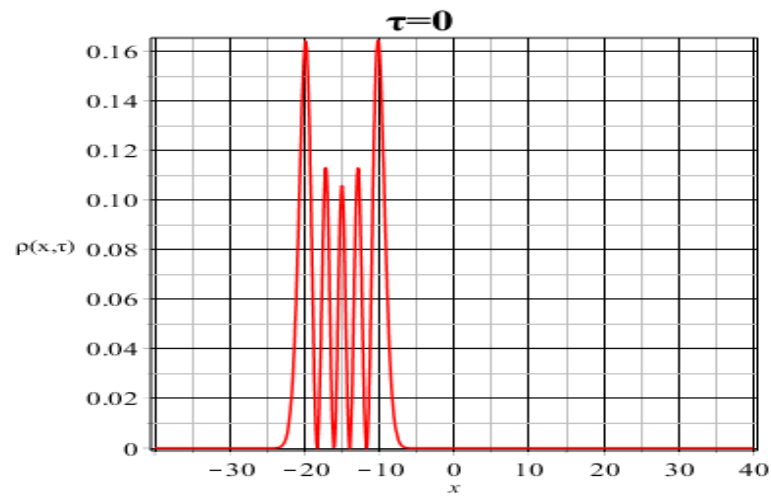
که:

$$\xi = \frac{\alpha[(x' - A) - k\tau]}{\sqrt{1 + \alpha^4\tau^2}}, \quad \theta = -\arctan(\alpha^2\tau)$$

همچنین تابع موج بدست آمده از روی معادله شرودینگر را می‌توان مورد بررسی قرارداد و چگالی احتمال را از روی آن محاسبه کرد:

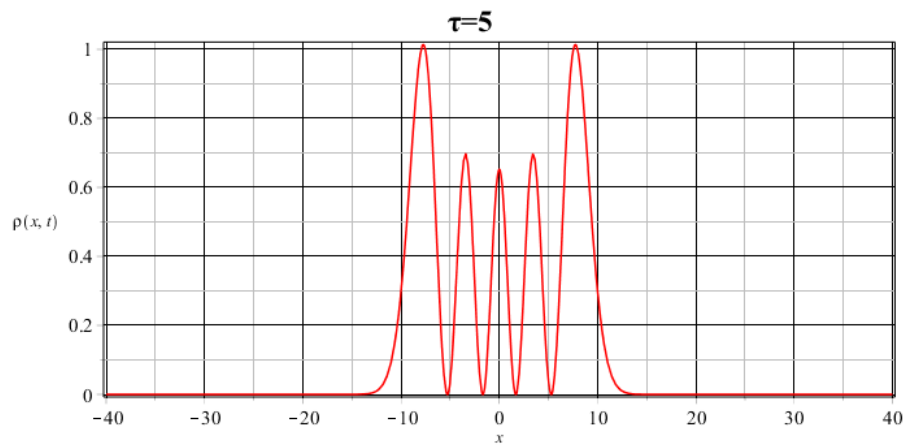
$$\rho_n(x, t) = |\psi(x, t)|^2 = \frac{N_n^2(\alpha)}{\sqrt{1 + \alpha^4\tau^2}} H_n(\xi) e^{-\xi^2} \quad (32-3)$$

چگالی احتمال بدست آمده از روی حالت نهایی $\psi_n(x, t)$ بسته موج می‌باشد. با مقداردهی به پارامترهای درون رابطه $\rho(x, t)$ ، نمودار $\rho(x, t)$ برحسب x را می‌توان در سه زمان $\tau = 0, \tau = 5$ و $\tau = 10$ رسم می‌کنیم.



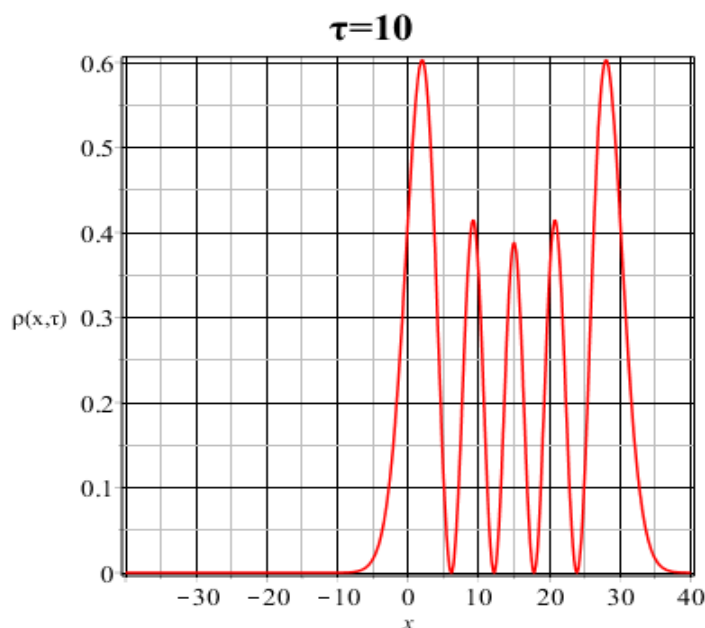
شکل (۵-۳) چگالی احتمال بسته موج هرمیتین-گائوسین تحت انتشار گر ذره آزاد بر حسب X در لحظه $\tau=0$.

$$n = 4, \alpha = 0.5, a = -15, A = -15, k = 3, h = 1$$



شکل (۶-۳) چگالی احتمال بسته موج هرمیتین-گائوسین تحت اثر انتشار گر ذره آزاد بر حسب X در لحظه $\tau=5$.

$$n = 4, \alpha = 0.5, a = -15, A = -15, k = 3, h = 1$$



شکل (۷-۳) چگالی احتمال بسته موج هرمیتین-گائوسین تحت اثر انتشارگر ذره آزاد بر حسب X در لحظه $\tau = 10$.

$$n = 4, \alpha = 0.5, a = -15, A = -15, k = 3, \hbar = 1$$

شکل (۵-۳) تابع موج اولیه یک موج هرمیتین - گائوسین که را نشان می‌دهد که بعد از بازه زمانی معین تحت تاثیر انتشارگر ذره آزاد قرار گرفته است و به یک موج نوسانی تبدیل شده که در شکل (۳-۶) و (۳-۷) این تغییر را مشاهده می‌کنیم بعبارتی جایگاه احتمالی ذره با گذشت زمان تغییر یافته و در بازه جدیدی از مکان مشاهده شده است که شکل (۳-۶) و (۳-۷) احتمال حضور ذره را در بازه زمانی و مکانی جدید نشان می‌دهد.

۳-۶ تحول زمانی تابع موج هویساید تحت اثر انتشارگر ذره آزاد:

طبق معادله (۳-۱۱) تابع موج حالت نهایی را بدست می‌آوریم [۹].

ابتدا تابع موج اولیه هویساید را در نظر می‌گیریم :

$$\Psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2A}} \left\{ H[x - (a + A)] - H[x - (a - A)] \right\} \times e^{ik(x-a)}$$

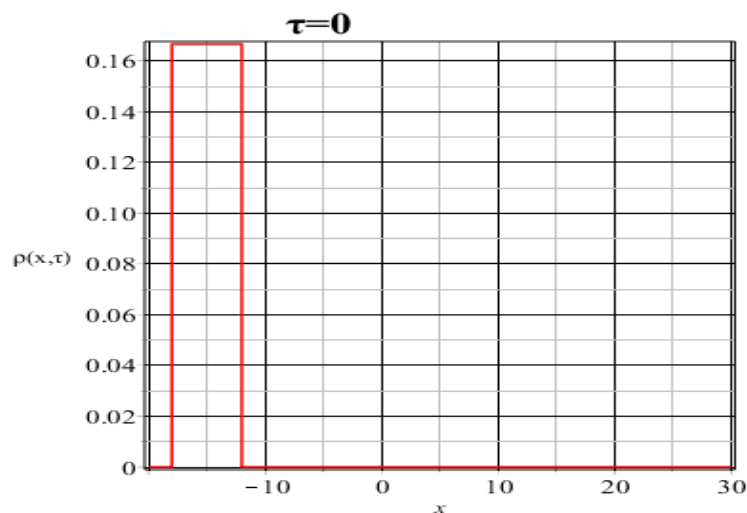
با استفاده از انتشارگر ذره آزاد معادله (۳-۳۰) تابع موج تحول یافته را بدست می‌آوریم:

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{2A}} e^{ik(x-a) - \frac{\hbar k^2 t}{2}} \times \left\{ \text{erf} [g_+(x, t)] - \text{erf} [g_-(x, t)] \right\} \quad (۳-۳۳)$$

که:

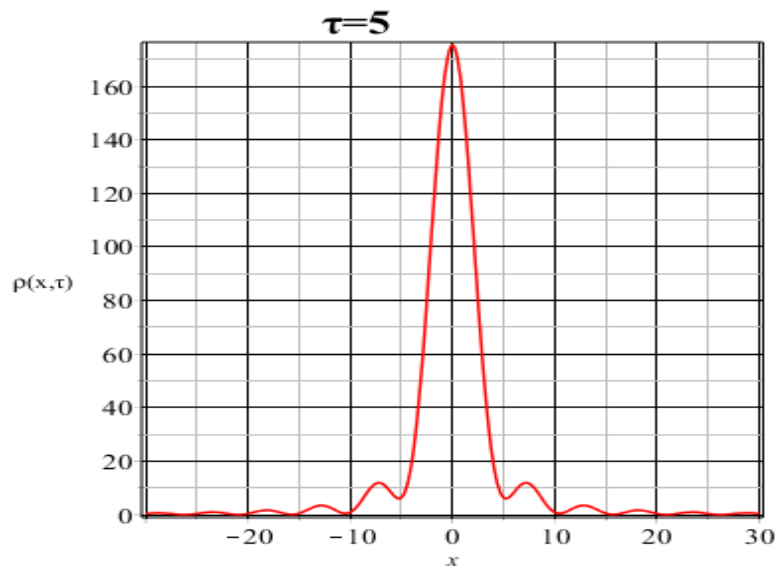
$$g_{\pm}(x, \tau) = \frac{(1-i)(k\tau - x + a \pm A)}{2\sqrt{\tau}}$$

موج مربعی تحول یافته را در شکل (۸-۳) مورد بررسی قرار می‌دهیم:



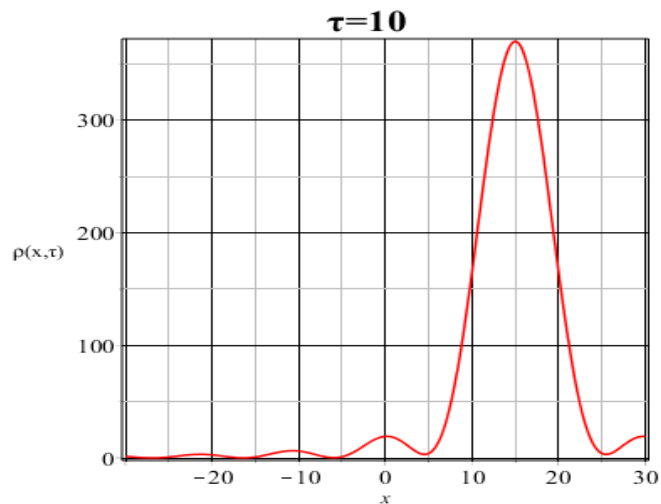
شکل (۸-۳) چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت تاثیر انتشارگر ذره آزاد برحسب X در لحظه $\tau=0$.

$$n=4, A=3, a=-15, k=3, \hbar=1, m=1$$



شکل (۹-۳) چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت اثر انتشارگر ذره آزاد برحسب X در لحظه $\tau=5$.

$$n=4, A=3, a=-15, k=3, \hbar=1$$



شکل (۳-۱۰) چگالی احتمال بسته موج هویساید تحت اثر انتشارگر ذره آزاد برحسب X در لحظه $\tau = 10$.

$$n = 4, A = 3, a = -15, k = 3, \hbar = 1, m = 1$$

هنگامی که ثابت نوسانگر بزرگتر از صفر باشد بسته موج در مبدا شروع به نوسان (رو به جلو یا رو به عقب) می‌کند. وقتی که بسته موج به حالت اولیه برگردد تمام خواص اولیه آن بازیابی می‌شود. بعد از یک بازه زمانی نشان دادیم که می‌توان تابع موج تحول یافته را مشاهده کرد. توابع موج در این فصل برای سیستم‌های یک بعدی می‌باشد. برای بررسی راه‌حل‌های دقیق، یکی دیگر از موارد یک بعدی که می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد، بسته موج یک چاه مربعی به عمق بی نهایت است. همان طور که یک نوسانگر با ثابت نوسانی متفاوت می‌تواند نوسانات متفاوتی داشته باشد در اینجا نیز می‌توان با داشتن تابع موج اولیه متفاوت به توابع موج نهایی برسیم که نوسانات آن‌ها در لحظه‌های مختلف، متفاوت باشد. بعبارتی می‌توان نتیجه گرفت توابع موج سیستم با ثابت نوسان ساز موج صفر، منفی یا مثبت، می‌تواند منجر به توابع موج برای نوسانگر هماهنگ و ذره آزاد شود.

فصل چهارم

نوسانگر دیراک تحت تاثیر اثر آهارونوف-بوهیم به روش
انتگرال مسیر فاینمن

۴-۱ مقدمه‌ای بر ساده شده انتگرال مسیر در اثر آهارونوف-بوهم^{۳۲}

در الکترومغناطیس کلاسیک خلاء در واقع به محیطی گفته می‌شود که میدان الکتریکی و مغناطیسی در آن وجود ندارد. در چنین محیطی یک ذره باردار مثل الکترون هیچ اثری را حس نمی‌کند که در واقع نیروی لورنس آن صفر در نظر گرفته می‌شود. در فضای خارجی (مثل بینهایت) سیم‌پیچ استوانه‌ای^{۳۳} شکل را بصورت خلاء الکترومغناطیسی در نظر می‌گیریم در این حالت میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی نداریم درحالی که ما یک پتانسیل برداری غیر صفر را در خارج سیم‌پیچ استوانه‌ای داریم که بصورت مستقیم بر ذرات اثر نمی‌گذارد از این رو نمی‌شود آن را بصورت مستقیم شناسایی و بصورت کلاسیکی اندازه‌گیری کرد. در حالی که آهارونوف و بوهم در سال ۱۹۵۹ پیش بینی کردند که یک میدان برداری می‌تواند یک اثر کاملاً مکانیک کوانتومی در فاز تابع موج اعمال کنند که پدیده در اصل قابل رویت نیز هست این تغییر فاز پیش بینی شده تا سال ۱۹۸۶ بصورت تجربی و آزمایشگاهی مشاهده نشده بود. تا زمانی که تونومورا^{۳۴} با استفاده از یک میکرو سیم‌پیچ استوانه‌ای با توصیف ساده پیش بینی اثر آهارونوف و بوهم را به وسیله انتگرال مسیر نشان داد. حضور یک میدان الکتریکی و مغناطیسی برای اینکه بتوان یک ذره باردار را با سرعت اولیه ثابت و یا ذره ساکن حرکت می‌کند چه رفتار دارد بسیار ساده است با استفاده از میدان الکتریکی و مغناطیسی می‌توان ذره را شتابدار و یا منحرف کرد. هر چه میدان قوی‌تر باشد انحراف آن بیشتر است. میدان‌های الکترومغناطیسی، ترکیبی از آن‌ها و یا بصورت تکی اثر می‌گذارند [۱۴]. معادلات ماکسول در واقع نشان می‌دهند که پدیده‌های عمیق‌تر و مهم‌تری با این میدان‌ها حاصل می‌شود که تجربی نیستند. در اینجا ما سه پتانسیل برداری و یک پتانسیل اسکالر داریم که بصورت کلی هر دو وابسته به زمان می‌باشند. در واقع این را باید گفت که معادلات ماکسول به کمک دو پتانسیل حاصل می‌شود [۱۵].

معادلات ماکسول برای خلاء در دستگاه گوسی عبارتند از:

در معادله (۴-۱) تمام عناصر به صورت دو قطبی هستند و تک قطبی وجود ندارد.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (4-1)$$

³² the Aharonov-Bohm Effect

³³ solenoid

³⁴ Tonomura

معادله (۲-۴) قانون القای فاراده:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2-4)$$

معادله (۳-۴) قانون گائوس:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}, t) \quad (3-4)$$

معادله (۴-۴) قانون تعمیم یافته آمپر:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (4-4)$$

که در آنها $\rho(\vec{r}, t)$ چگالی بار و $\vec{j}(\vec{r}, t)$ چگالی جریان و چشمه های میدان های الکترومغناطیسی هستند.

چهار پتانسیل را باهم ترکیب می کنیم و به فرم زیر نمایش می دهیم:

$$A_\mu = (\Phi, \vec{A})$$

که معروف به چهار بردار لورنس می باشد. این چهار پتانسیل در محاسبه میدان الکتریکی و مغناطیسی نقش اساسی دارد. Φ همان پتانسیل اسکالر می باشد که از دوران دبیرستان با آن آشنا هستیم در واقع این پتانسیل ناشی از اختلاف پتانسیل یا اختلاف ولتاژ در سرتاسر باتری می باشد. $\vec{A}$ یک پتانسیل برداری می باشد که تا مقطع کارشناسی پتانسیل معمولاً شناخته شده ای نیست. دلیل استفاده از این پتانسیل برداری ناشی از تمایل به کار با میدان های الکتریکی و مغناطیسی است که تنها راه کار کردن با این میدان ها پذیرفتن پتانسیل برداری $\vec{A}$ می باشد چرا که برای حل بسیاری از مسائل از جمله بدست آوردن میدان مغناطیسی ما نیاز به داشتن پتانسیل برداری داریم تا بتوانیم میدان مغناطیسی $\vec{B}$ را از طریق رابطه $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$ محاسبه کنیم، همان گونه که از پتانسیل برداری برای محاسبه میدان الکتریکی $\vec{E}$ استفاده می کنیم. برای یک پتانسیل برداری مشاهده کلاسیکی غیر ممکن است. از طرفی پتانسیل برداری مانند پتانسیل اسکالر با توجه به کاربرد آن نمایش منحصر به فردی ندارد. به عنوان مثال اگر $\Delta V = V - V_0$ پتانسیل شارژ شده بر روی کره باشد این بستگی به آن دارد که پتانسیل V_0 (پتانسیل زمین) چگونه تعریف شده باشد. مانند انرژی پتانسیل تنها چیزی که اندازگیری می شود دو سطح انرژی می باشد.

باتوجه به دو معادله اول ماکسول ((۴-۱) و ((۴-۲) می توان پتانسیل های برداری و نرده ای را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r}, t) \quad (۴-۶)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \vec{\nabla} \Phi(\vec{r}, t) \quad (۴-۷)$$

در اینجا قانون سوم و چهارم را برحسب پتانسیل ها به دست می آوریم که در نهایت به معادلات موج یا بارهای ساکن می رسیم.

$$\vec{A}'(\vec{r}, t) = \vec{A}(\vec{r}, t) - \vec{\nabla} f(\vec{r}, t) \quad (۴-۸)$$

$$\Phi'(\vec{r}, t) = \Phi(\vec{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t} \quad (۴-۹)$$

در دو معادله بالا $\vec{A}, \Phi$ منحصر به فرد نیستند، و به آنها تبدیلات پیمانه ای^{۳۵} می گویند. تحت تبدیلات پیمانه ای $\vec{E}, \vec{B}$ یکسان به دست می آیند.

در اینجا ما یک تقریب بصورت همزمان در نظر می گیریم:

$$\Phi' = \Phi + \frac{\partial \lambda}{\partial x^0}, \quad \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} \lambda \quad (۴-۱۰)$$

$\lambda(x, t)$ یک تابع دلخواه در مختصات فضا-زمان می باشد با توجه به تعاریف جدیدی که از $\vec{A}'$ و Φ' ، $\vec{E}'$ و $\vec{B}'$ تعریف می شود، داریم:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' \quad (۴-۱۱)$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \Phi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} \quad (۴-۱۲)$$

نشان می دهیم که $\vec{E} = \vec{E}'$ و $\vec{B} = \vec{B}'$ است.

³⁵ Gauge transformation

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} - \vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} - \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \lambda = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\Rightarrow \vec{B}' = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla} \left(\Phi + \frac{\partial \lambda}{\partial x^0} \right) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} - \vec{\nabla} \lambda) = -\vec{\nabla} \Phi - \vec{\nabla} \frac{\partial \lambda}{\partial x^0} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \lambda =$$

$$-\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \Rightarrow \vec{E}' = \vec{E}$$

از این رو می‌توان گفت که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی تحت تحول زمانی ناوردا باقی می‌مانند بنابراین نتیجه می‌گیریم که معادلات ماکسول اندازه ثابتی دارند از این رو می‌توان $\lambda(x)$ را به فرم دلخواه انتخاب کرد خیلی وقت‌ها می‌توان با انتخاب هوشمندانه پارامتر $\lambda(x)$ ، $\vec{E}$ و $\vec{B}$ را به سادگی محاسبه کرد.

با قرار دادن معادله (۷-۴)، در معادله (۳-۴) داریم:

$$-\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = 4\pi \rho(\vec{r}, t) \quad (۱۳-۴)$$

با قرار دادن معادله (۷-۴)، در معادله (۴-۴) داریم:

$$\underbrace{\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})}_{-\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A})} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \Phi = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (۱۴-۴)$$

$$-\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}, t) \quad (۱۵-۴)$$

در معادلات (۱۳-۴) و (۱۵-۴) در واقع سومین و چهارمین معادله ماکسول برحسب پتانسیل‌ها می‌باشد.

روابط (۱۳-۴) و (۱۵-۴) را ساده‌تر می‌کنیم:

(۱) اگر توزیع بار ایستا^{۳۶} باشد یعنی چگالی ρ مستقل از زمان باشد بهتر است پیمانه را طوری انتخاب کنیم که:

³⁶ Stationary State

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

این انتخاب $f(\vec{r}, t)$ را پیمانه کولن می‌نامند.

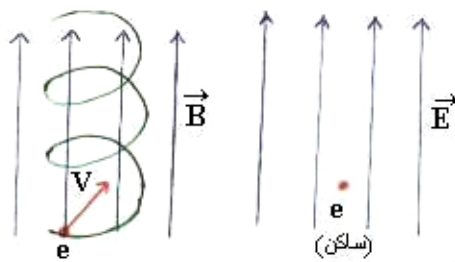
در این مورد داریم:

$$\begin{cases} (13): -\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) = 4\pi\rho(\vec{r}) \\ (15): -\nabla^2 A(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} j(\vec{r}, t) \end{cases}$$

(۲) اگر توزیع بار غیر ایستا^{۳۷} باشد در این صورت بهتر است پیمانه را طوری انتخاب کنیم که

این انتخاب را پیمانه لورنس می‌گویند.

$$\begin{cases} (13-4): -\nabla^2 \Phi(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\vec{r}) \\ (15-4): -\nabla^2 A(\vec{r}, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j(\vec{r}, t) \end{cases}$$



شکل (۱-۴b)

شکل (۱-۴a)

شکل (۱-۴a) و (۱-۴b) حرکت الکترون در میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی را نشان می‌دهد بطوری که در شکل (۱-۴a) نیرویی که بر e (الکترون) وارد می‌شود $\vec{F} = e\vec{E}$ و جهت حرکت خلاف جهت میدان می‌باشد. اما در شکل (۱-۴b) حرکت الکترون دارای دو مولفه عمودی و موازی می‌باشد

³⁷ nonstationary State

که مولفه عمود بر میدان باعث حرکت دایره ای با شعاع ثابت، و مولفه موازی با میدان باعث حرکت بالا رفتن می شود و مجموع این دو حرکت یک حرکت مارپیچ است.

$$\vec{F} = \mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \left[\vec{E}(r, t) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(r, t) \right] \quad (۱۶-۴)$$

ماکسول با معرفی چهار بردار خود توانست نشان دهد که اندازه گیری پتانسیل به عنوان ابزار بسیار مفید محاسباتی به حساب می آید چرا که حتی می شود یک ریاضیات عجیب و غریب با کمترین معنا را می توان به پتانسیل نسبت داد. پتانسیل برداری چیزی بود که نمی شد آن را در واقعیت دید و شناسایی کرد و در همان زمان ها بود که میدان های مغناطیسی به عنوان میدان های حقیقی شناخته شده بودند. یک مثال عینی از این بحث می شود به سیم پیچ استوانه ای اشاره کرد که طول آن بینهایت می باشد زمانی که سیم پیچ روشن شود به عبارتی وقتی یک جریان توسط سیم حلقه ای فرستاده می شود یک میدان مغناطیسی حاصل می شود درحالی که میدان مغناطیسی خارج سیم پیچ صفر است. حال اگر یک ناظر حرکت ذره باردار را در خارج سیم پیچ دنبال کند می بیند که ذره هیچ انحرافی را تجربه نمی کند. در حضور میدان مغناطیسی:

$$\vec{P} \rightarrow \left[\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(r, t) \right] \quad (۱۷-۴)$$

در این قسمت ثابت می شود در حضور میدان مغناطیسی هامیلتونی به صورت زیر است.

$$\vec{H} = \frac{P^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu} \left[\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(r, t) \right]^2 - e\phi(r) \quad (۱۸-۴)$$

می دانیم که در حضور میدان مغناطیسی داریم :

$$P \rightarrow \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(r, t) \Rightarrow H = \frac{P^2}{2m} + V \Rightarrow \begin{cases} m \rightarrow \mu \\ P \rightarrow \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(r, t) \\ V \rightarrow e\Phi(r) \end{cases} \quad (۱۹-۴)$$

$$H = \frac{1}{2\mu} \left[\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(r, t) \right]^2 - e\Phi(r), \quad \vec{P} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}, \quad H\psi = E\psi \quad (۲۰-۴)$$

$$\frac{1}{2\mu} \left[\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}(r,t) \right] \psi(\vec{r},t) = [E + e\Phi(r)] \psi(\vec{r},t) \quad (۲۱-۴)$$

مقدار تغییر انرژی جنبشی ذره در حضور میدان مغناطیسی صفر است، چون نیروی مغناطیسی عمود بر حرکت ذره است، هیچ کاری روی ذره (بار) انجام نمی‌دهد لذا $\Delta T = 0$ است. میدان مغناطیسی فقط باعث تغییر جهت حرکت ذره می‌شود و اثر میدان الکتریکی در شتاب‌دهنده‌ها است که باعث شتاب دادن به ذرات می‌شود، B فقط باعث تغییر جهت می‌شود.

با فرض اینکه $\vec{P} = \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}$ معادله شرودینگر را می‌نویسیم:

اپراتور اندازه حرکت:

$$p_{op} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad (۲۲-۴)$$

بار الکترون را منفی و زمانی که در سمت پتانسیل قرار می‌گیرد مثبت می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 \psi(r,t) &= [E + e\phi(r)] \psi(r,t) \\ \Rightarrow \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) \psi &= \frac{-\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - \frac{i\hbar e}{2\mu c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) \psi - \frac{i\hbar e}{\mu c} \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \psi) + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \psi \end{aligned}$$

با استفاده از شرط پیمانه کولن $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ داریم:

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - \underbrace{\frac{ie\hbar}{\mu c} \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \psi)}_{(1)} + \underbrace{\frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 \psi}_{(2)} = [E + e\phi(r)] \psi(r,t)$$

آزمایش ایده‌آل زیر را در نظر می‌گیریم. الکترون را در میان تداخل دو شکاف قرار می‌دهیم و یک سیم‌پیچ را به شکل استوانه برای ایجاد میدان مغناطیسی بین دو شکاف قرار می‌دهیم. که میدان مغناطیسی در خارج از سیم‌پیچ قابل اغماض است در داخل سیم‌پیچ یک میدان مغناطیسی قوی وجود دارد. اما الکترون وجود ندارد در عوض آن‌ها در خارج سیم‌پیچ به شکل استوانه برای ایجاد میدان مغناطیسی در امتداد مسیر ۲ و ۱ قرار دارد.

$$B = \begin{cases} B_0 \hat{k} \rightarrow \rho < a \\ 0 \rightarrow \rho \geq a \end{cases}$$

$$B = \nabla \times A, \phi = \int B \cdot ds = \oint \nabla \times A \cdot ds = \oint A \cdot dl$$

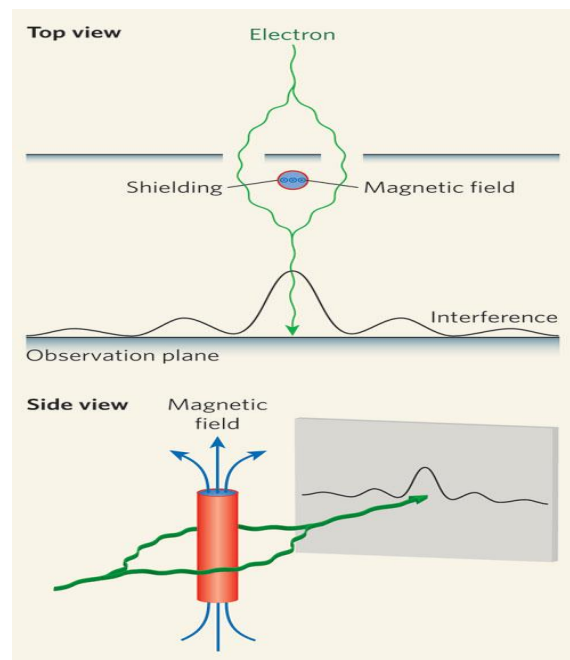
$$\phi = \oint A \cdot dl$$

$$A_\phi 2\pi \rho = B \pi \rho^2 \rightarrow A_\phi = \frac{B \rho}{2} = \frac{\phi \rho}{2\pi a^2} \rightarrow \rho < a$$

$$A_\phi 2\pi \rho = B \pi a^2 \rightarrow A_\phi = \frac{B \pi a^2}{2\pi \rho} = \frac{\phi}{2\pi \rho} \rightarrow \rho \geq a$$

$$A_\phi = \begin{cases} \frac{\phi \rho}{2\pi a^2} \rightarrow \rho < a \\ \frac{\phi}{2\pi \rho} \rightarrow \rho \geq a \end{cases}$$

(۲۴-۴)



شکل (۲-۴) طرح شماتیک از اثر آهارونوف-بوهم

استدلال ریاضی که ما استفاده کردیم برای تعبیر احتمال معادل ولی متفاوت با کاری که آهارونوف و بوهم انجام دادند بود. کاری که آن دو انجام دادند توانستند بینش عمیقی را در جهان چهار بردار اضافه کنند ما در اینجا یک شانس بزرگ داریم این شانس بزرگ همان استفاده از ابزار کوانتومی قوی به نام

رویکرد انتگرال مسیر است. انتگرال مسیر راه روشن و ظریفی برای آزمایش ذهنی آهارونوف- بوهم بود. انتگرال مسیر راه ریاضی واری بود که در واقع دامنه احتمال حرکت ذره از نقطه A به نقطه B را در یک دوره زمانی محدود توصیف می کند. در واقع می توان گفت که ذره برای رسیدن به نقطه B هر مسیر میانبر و یا احتمالی را می تواند طی کند و این بدان معناست که ذره پس از خروج از نقطه A می تواند به تعداد نامحدود مسیر را انتخاب کند تا به نقطه B برسد. بینش شگفت آور این است که ذره بصورت منطقی مسیری را انتخاب می کند که از دیدگاه کلاسیکی از همان مسیر عبور کند. این مسیر کلاسیکی مسیر مستقیم از نقطه A به نقطه B می باشد. سوالی که ذهن را درگیر خودش می کند این است که آیا ذرات همه این مسیرها را طی می کنند. از نظر ریاضی این دیدگاه نامعقول نیست چرا که می توان برای هر مسیر یک دامنه احتمال برگزید که این تداخل ها می تواند سازنده یا مخرب باشند. مسیرهای غیر عقلانی آن مسیرهایی می باشند که با هم تداخل ویرانگر داشته باشند و در مقابل مسیرهای کلاسیکی آن دسته از مسیرهایی هستند که با هم تداخل سازنده داشته باشند. انتگرال مسیر بینهایت بعد دارد که می توان در اصل روابط ساده در مکانیک کوانتومی را حل کند از جمله ذره آزاد و نوسانگر هماهنگ ساده و.. می باشد. از این رو انتگرال مسیر را می توان به عنوان یک روش کاربری به حساب آورد. آهارونوف و بوهم آزمایش ذهنی را شرح دادند که مربوط به ذره بارداری است که از یک تک شکاف عبور می کند و از نقطه A (منبع) به نقطه B (آشکارساز) می رسد انتگرال مسیر این ذره را می توان به شکل زیر نوشت [۱۴]:

$$I = \int Dx(t) \exp\left(i \frac{S(x,t)}{\hbar}\right) \quad (۲۵-۴)$$

روند کلی دامنه احتمال این است که آن یک عدد مختلط می باشد که مربع مزدوج آن یک عدد حقیقی می باشد که این احتمال همان احتمال ترک ذره از نقطه A و رسیدن به نقطه B است. عبارت $\int dx_1 dx_2 dx_3, \dots, dx_n$ حاکی از بینهایت مسیر متوالی است که بصورت خلاصه شده نوشته می شود:

$$Dx(t) = \int dx_1 dx_2 dx_3, \dots, dx_n \quad (۲۶-۴)$$

که تعداد انتگرال ها نشان دهنده تعداد نامحدود مسیر می باشد در واقع یک انتگرال برای تمام مسیرها. مقدار S که در نما ظاهر می شود کنش نامیده می شود که بصورت انتگرال از چگالی لاگرانژی نسبت به زمان تعریف می شود. ابتدا شکل غیر نسبیتی لاگرانژی را در نظر می گیریم. با در نظر گرفتن ذره باردار که با سرعت کم حرکت می کند ما شکل غیر نسبیتی لاگرانژی را در نظر می گیریم:

$$\ell_0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (26-4)$$

بیاد داریم که لاگرانژی ذره آزاد با بار q که در حضور پتانسیل برداری قرار دارد به فرم زیر می باشد:

$$\ell = \ell_0 + \frac{q}{c} A_i \frac{dx^i}{dt} \quad (27-4)$$

توجه داشته باشید که $A_0 = \Phi$ صفر است زیرا این میدان غایب است بر پایه اصل آهارونوف-بوهم

حال انتگرال مسیر را با فرم جدیدی نشان می دهیم:

$$S = \int \ell(t) dt = \int \ell_0(t) dt + \int \frac{q}{c} A_i \frac{dx^i}{dt} dt$$

$$S_0 = \int_0^t \ell_0 dt$$

$$I = \int Dx(t) \exp\left(i \frac{S}{\hbar}\right) = \int Dx(t) \exp\left(i \frac{S_0}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{iq}{c\hbar} \int_0^t A_i \frac{dx^i}{dt} dt\right) \quad (28-4)$$

در نهایت انتگرال گیری در همه زمان ها بر روی پتانسیل برداری تبدیل به یک انتگرال خطی بر روی مکان می شود.

$$\int_0^t A_i \frac{dx^i}{dt} dt = \int_0^t A_i dx^i$$

$$I = \int Dx(t) \exp\left(i \frac{S}{\hbar}\right) = \int Dx(t) \exp\left(i \frac{S_0}{\hbar}\right) \exp\left(\frac{iq}{c\hbar} \int_0^t A_i dx^i\right) \quad (29-4)$$

حال دوباره آزمایش آهارونوف - بوهم را ادامه می دهیم. طرح بالا نمایی از آزمایش دو شکاف در نظر گرفته شده است که شامل منبع P و ذرات یکسان که هر یک دارای بار q هستند. یک صفحه نمایش غیر قابل نفوذ با دو شکاف باریک با یک صفحه نزدیک به هم و یک آشکارساز Q در نظر می گیریم. در عمل عرض شکاف باید بیش از چند میکرو نباشد از دیدگاه کوانتومی چنین فاصله کوچک بین دو شکاف امری ضروری است. ما یک سیم پیچ استوانه ای داریم که با خاموشی جریان خاموش می شود. ذرات باردار را با یک سرعت ثابت که به اندازه کافی آهسته است شروع به شلیک می کنیم تا ذرات با یکدیگر برهمکنش نداشته باشند برخی از ذرات از شکاف اول (γ_1) عبور می کنند و برخی از شکاف دوم (γ_2)

عبور می‌کنند. اما هر ذره بنظر می‌رسد از هر دو شکاف عبور می‌کند این همان ماهیت عجیب و غریب مکانیک کوانتومی است .

ما برای هر شکاف یک انتگرال مسیر در نظر می‌گیریم :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1 Dx \exp\left(i \frac{S_0}{\hbar}\right) \\ I_2 &= \int_2 Dx \exp\left(i \frac{S_0}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (30-4)$$

که زیرنویس اشاره به مسیر های عبوری از هریک از شکاف ها دارد.

مسیرها بسته به این دارد که ذره از کدام شکاف عبور می‌کند. این انتگرال مسیر در واقع انتگرال مسیر ذرات آزاد هستند و ما از قبل می‌دانیم که این انتگرال چگونه محاسبه می‌شود.

$$I = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{im(x_B - x_A)^2}{2t}\right) \quad (31-4)$$

برای ذره‌ای که مقید نمی‌باشد و از نقطه x_A به نقطه x_B می‌رود. وقتی ما مربع مزدوج I را بدست می‌آوریم. ترم نمایی که یک عامل فازی است حذف می‌شود. از طرفی I_1 و I_2 تنها در فاز مختلف هستند.

$$\begin{aligned} I_1 &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_1 Dx \exp\left(i \frac{\theta_1}{\hbar}\right) \\ I_2 &= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \int_2 Dx \exp\left(i \frac{\theta_2}{\hbar}\right) \end{aligned} \quad (32-4)$$

$$I = I_1 + I_2 \text{ از این رو}$$

$$I = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(i \frac{\theta_1}{\hbar}\right) \exp\left(i \frac{\theta_2}{\hbar}\right) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(i \frac{\theta_1}{\hbar}\right) \left[1 + \exp\left(i \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{\hbar}\right)\right] \quad (33-4)$$

عبارت نشان‌دهنده اختلاف فاز بین مسیرها ترکیب شده است. آشکارساز در نقطه معین زمانی تداخل سازنده می‌بیند $\Delta = (2n)\pi$ باشد و زمانی که $\Delta = (2n+1)\pi$ باشد تداخل مخرب خواهد بود. I در واقع همان دامنه احتمال است که خود یک انتگرال مسیر است. .

دامنه احتمال باید مربع مزدوج این مقدار را بدست آوریم:

$$I * I = |I|^2 = \frac{2m}{\pi \hbar t} \cos^2 \left(\frac{1}{2} \Delta \right) \quad (34-4)$$

بنابراین روش انتگرال مسیر برای آزمایش دو شکاف نشان می‌دهد که آشکارساز الگوی تداخلی سیسونی را مشاهده می‌کند، یک جریانی درون استوانه در حال اجراست. یک میدان مغناطیسی طولی درون سیم‌پیچ ایجاد می‌شود، میدان مغناطیسی تنها درون محدوده می‌باشد. بنابراین هیچ میدان مغناطیسی خارجی وجود ندارد که ذرات بارداری را که از دو شکاف عبور می‌کند را تحت خود قرار دهد. زمانی که سیم‌پیچ خاموش است خلاء را مشاهده می‌کنند. اما از طرفی همان‌طور که می‌بینیم یک ترم اضافه در معادله (33-4) می‌بینیم. حال دیگر نمی‌توانیم از حل ذرات آزاد استفاده کنیم. از تناسب تنظیم شده در بالا ما می‌توانیم فرض کنیم خطای ناچیزی در انتگرال $\int A_i dx_i$ است. مستقل از مسیر گرفته شده. بنابراین ما می‌توانیم این ترم را به خارج انتگرال بیاریم و آن را به عنوان یک ضریب فازی در نظر بگیریم.

برای مسیرهای $(n=1,2)$ داریم:

$$I_n = \int_n Dx(t) \exp \left(i \frac{S_0}{\hbar} \right) \exp \left(\frac{iq}{c\hbar} \int_0^t A_i dx^i \right) = \exp \left(\frac{iq}{c\hbar} \int_0^t A_i dx^i \right) \int_n Dx(t) \exp \left(i \frac{S_0}{\hbar} \right) =$$

$$\left(\frac{m}{2\pi i \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \int_1 Dx \exp \left(i \frac{\theta_n}{\hbar} \right) \exp \left(\frac{iq}{c\hbar} \int_0^t A_i dx^i \right) \quad (35-4)$$

حال $I = I_1 + I_2$ را حساب می‌کنیم، حاصل بدست آمده زمانی است که سیم‌پیچ استوانه‌ای روشن می‌شود:

$$I = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(i \frac{\theta_1}{\hbar} \right) \exp \left(\frac{iq}{c\hbar} \int_1 A_i dx^i \right) + \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(i \frac{\theta_2}{\hbar} \right) \exp \left(\frac{iq}{c\hbar} \int_2 A_i dx^i \right)$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(i \frac{\theta_1}{\hbar} \right) \exp \left(\frac{iq}{c\hbar} \int_1 A_i dx^i \right) \left[1 + \exp \left(i \frac{\theta_2 - \theta_1}{\hbar} \right) \exp \left[\frac{iq}{c\hbar} \left(\int_2 A_i dx^i - \int_1 A_i dx^i \right) \right] \right] \quad (36-4)$$

زمانی که سیم پیچ استوانه‌ای را روشن می‌کنیم مقدار I^2 متفاوت بدست می‌آید. آخرین جمله در رابطه بالا مسیر بسته حرکت ذره را نشان می‌دهد که از سمت منبع به سمت آشکارساز می‌باشد [۱۷].

$$\int_2 A_i dx^i - \int_1 A_i dx^i = -\oint A_i dx^i \quad (۳۷-۴)$$

علامت منفی در عبارت بالا نشان‌دهنده این است که مسیر حرکت در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

از طرفی بنابر قضیه استوکس داریم:

$$\oint A_i dx^i = \iint \vec{\nabla} \times \vec{A} dS$$

$$\iint \vec{\nabla} \times \vec{A} dS = \iint \vec{B} \cdot \hat{n} dS = \Phi_B$$

Φ_B بدست آمده همان شار عبوری از محور های سیم پیچ می‌باشد.

$$I = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(i \frac{\theta_1}{\hbar} \right) \exp \left(\frac{iq}{c\hbar} \int_1 A_i dx^i \right) \left[1 + \exp(i\Delta) \exp \left[\frac{iq}{c\hbar} \Phi_B \right] \right] \quad (۳۸-۴)$$

مربع انتگرال مسیر را می‌توان محاسبه کرد:

$$I^2 = \left(\frac{2m}{\pi \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{1}{2} \left(\Delta - \frac{q\Phi_B}{c\hbar} \right) \right] \quad (۳۹-۴)$$

زمانی که دو معادله زیر را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$I^2 = \left(\frac{2m}{\pi \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{1}{2} (\Delta) \right] \quad \text{و} \quad I^2 = \left(\frac{2m}{\pi \hbar t} \right)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{1}{2} \left(\Delta - \frac{q\Phi_B}{c\hbar} \right) \right]$$

به نتیجه زیر می‌رسیم که:

$$\Delta \rightarrow \Delta - \frac{q\Phi_B}{c\hbar} \quad (۴۰-۴)$$

$$\text{معادله شرودینگر در حضور میدان مغناطیسی} \left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right) - e\phi \right] \psi = E\psi \text{ است.}$$

در اینجا در مورد خود تابع موج صحبت می‌کنیم یعنی اینکه اگر:

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f, \quad \psi \rightarrow \psi'$$

$$\left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} f \right)^2 - e\phi \right] \psi' = E \psi' \quad , \quad |\psi|^2 = |\psi'|^2 \quad (41-4)$$

طبق اصل ناوردایی پیمانه‌ای، تحت این تبدیل کمیت فیزیکی نباید تغییر کند، بنابراین باید رابطه‌ای بین ψ, ψ' وجود داشته باشد. $\psi = c \psi'$ قابل قبول نیست، زیرا در این صورت احتمال حضور ψ, ψ' یکی نخواهد بود.

تابع زیر را بطور فرضی در نظر می‌گیریم.

$$\psi' \rightarrow e^{i\Lambda(r,t)} \psi(r,t) \quad (44-4)$$

رابطه بالا این خاصیت را دارا است که اگر خودش را در مزدوجش ضرب کنیم، احتمال حضور ψ, ψ' یکی خواهد بود.

چه ارتباطی بین این فاز و تابع f است.

$$f(r,t) \xrightarrow{?} \Lambda(r,t)$$

$$\left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} f \right) \cdot \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} f \right) \right] e^{i\Lambda} \psi = [E + e\phi] e^{i\Lambda} \psi \quad (45-4)$$

از طرف اول شروع به ساده سازی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} f \right) \left[e^{i\Lambda} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \psi + \frac{e}{c} \vec{A} \psi + \frac{e}{c} \vec{\nabla} f \psi + \hbar \vec{\nabla} \Lambda \psi \right) \right] \\ &= \frac{1}{2\mu} e^{i\Lambda} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} + \frac{e}{c} \vec{\nabla} f + \hbar \vec{\nabla} \Lambda \right)^2 \psi \end{aligned} \quad (46-4)$$

$$\left[\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - e\phi \right] \phi = E \phi \quad (47-4)$$

از مقایسه معادلات (۴-۴۶) و (۴-۴۷) داریم:

$$\Lambda = -\frac{e}{\hbar c} f \quad (4-48)$$

در اثر تبدیل پیمانه‌ای اخیر فقط تابع موج دارای یک فاز اضافی می‌شود.

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} f \Rightarrow \psi \rightarrow e^{-i\frac{e}{\hbar c} f} \psi \quad (4-49)$$

$e^{-i\frac{e}{\hbar c} f}$ را عامل فاز می‌گویند. عامل فاز در اپتیک از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد در آزمایش دو شکاف یانگ نواحی تاریک و روشن روی پرده به علت اختلاف فاز مشاهده می‌شد. میدان نیروهایی که کرل آنها صفر است انتگرال‌هایی مستقل از مسیر دارند، یعنی انتگرال آنها روی یک مسیر بسته صفر است. هنگامی که آهارونوف و بوهم این فرمول را استخراج کردند هیچ راهی برای تست این تغییرات بصورت تجربی نبود. از طرفی سیم‌پیچ مورد استفاده برای آزمایش دو شکاف باید کاملاً محافظت شده می‌بود و قطر آن نیز بسیار کوچک می‌بود (قطر آن از چند میکرون نباید بیشتر می‌شد) که ساخت این سیم‌پیچ در آن زمان امری غیر ممکن بود. ولی از طرفی به عنوان یک کشف بزرگ می‌شد به آن نگاه کرد. نگاه دیر به این پدیده بخاطر آن بود که اکثراً در جامعه فیزیک در تشخیص پتانسیل برداری تردید دارند. در سال‌های پس از انتشار مقاله آهارونوف - بوهم تلاش‌های بسیاری در جهت ساخت سیم‌پیچ استوانه‌ای صورت گرفت. در همین حوالی بود که بنظر رسید که یک میکروسکوپ مغناطیسی با رشته‌های آهنی کاربردی باشد از طرفی هم نتایج تجربی بدست آمده با پیش بینی آهارونوف - بوهم همخوانی داشت. این نتایج تجربی تا سال ۱۹۸۶ مسلماً بدست نیامده بود تا اینکه تونومورا^{۳۸} و همکارانش موفق به ساخت سیم‌پیچ استوانه‌ای ۶ میکرونی شدند. نتایج بدست آمده همسان با تغییر فاز پیش بینی شده بود. از این رو اثر آهارونوف - بوهم بصورت تجربی نیز مشاهده شد. تونومورا، شخصی که این آزمایشات را به سرانجام رساند جوایز متعددی را دریافت کرد از آن جمله: جایزه نیشینا^{۳۹}، جایزه آساهی^{۴۰}، جایزه امپریالیسم^{۴۱}، آکادمی ژاپن^{۴۲} و... می‌باشد [۱۸].

³⁸ Tonomura

³⁹ Nishina

⁴⁰ Asahi

⁴¹ Imperial

⁴² the Japan Academy

۴-۲ نوسانگر دیراک^{۴۳} به همراه نوسانگر هماهنگ ساده و محاسبه انتشارگر آن:

در سال ۱۹۹۵ [۱۹] نوسانگر دیراک به عنوان یک مدل قابل حل و دقیق در زمینه مدل‌های ذرات در مکانیک کوانتومی نسبیتی معرفی شد. این مدل به صورت جمله‌ی برهمکنشی در مدل محصول‌سازی کوارک‌ها در کرومودینامیک کوانتومی (QCD) ظاهر می‌شود که این مطلب مثال خوبی از کاربرد نوسانگر دیراک در مکانیک کوانتومی نسبیتی می‌باشد. همچنین نوسانگر دیراک در زمینه ابر تقارن‌ها در مکانیک کوانتومی نسبیتی و مبحث مربوط به محصورسازی کوارک‌ها در QCD با در نظر گرفتن ناوردایی نسبیتی توسط مورنو و زنتلا در ۱۹۸۹ [۲۰]، بررسی شده است. از طرفی نوسانگر دیراک ارتباط نزدیکی با نوسانگر هماهنگ غیر نسبیتی دارد بطوری که نشان داده‌اند که نوسانگر دیراک ریشه مربعی نوسانگر هماهنگ است [۱۹]. و بررسی مدل نوسانگر دیراک در زمینه چند جسمی‌های نسبیتی نیز در سال ۱۹۸۹ صورت گرفته است [۲۱].

معادله شرودینگر را در غیاب پتانسیل به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$H \psi(x) = E \psi(x)$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$V(x) = 0$$

در حضور نوسانگر دیراک اندازه حرکت به فرم زیر تغییر می‌کند [۲۲]:

$$P \rightarrow P - im\omega x \quad (۴-۵۰)$$

از این رو داریم [۲۳]:

⁴³ Dirac oscillator

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2m} (P_x + im\omega x)(P_x - im\omega x) = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} (m\omega x)^2 + i \frac{m\omega}{2m} (xp_x - p_x x) \\
[x, p] &= i\hbar \\
H &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + i \frac{\omega}{2} (i\hbar) \\
H &= \frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - \frac{\hbar\omega}{2}
\end{aligned}
\tag{۵۱-۴}$$

جمله بدست آمده در بالا در واقع هامیلتونین نوسانگر هماهنگ می باشد به همراه جمله $-\frac{\hbar\omega}{2}$:

از این رو لاگرانژی سیستم به فرم زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}
L(t) &= P \cdot v - H \\
L(t) &= P_x \cdot v_x - \left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 - \frac{\hbar\omega}{2} \right) = \\
L(t) &= \frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{\hbar\omega}{2}
\end{aligned}
\tag{۵۲-۴}$$

$$\begin{aligned}
S(t) &= \int L(t) dt \\
S(t) &= \int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{\hbar\omega}{2} \right) dt = \frac{\hbar\omega}{2} t + \int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) dt
\end{aligned}$$

از طریق محاسبه لاگرانژی می توان انتشارگر را محاسبه کرد [۶]:

$$\begin{aligned}
K(x'', t''; x', t') &= \int \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(x) \right) dx = \int \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[\frac{\hbar\omega}{2} t + \int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) dt \right] \right\} dx = \\
&\exp \frac{i\hbar\omega}{2\hbar} \int \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) dt \right] \right\} dx
\end{aligned}
\tag{۵۳-۴}$$

از طرفی برای انتشارگر نوسانگر هماهنگ از بخش (۲-۳) داریم:

$$K(x'', t''; x', t') = \frac{1}{W(\Delta t)} \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(t'', t') \right)$$

$$S(t'', t') = \int_{t'}^{t''=t'+\Delta t} L(t) dt$$

با تعریف لاگرانژی بصورت زیر انتشارگر ذره آزاد را بدست آورده:

$$L(t) = p \cdot \frac{(x'' - x')}{(t'' - t')} - H(x)$$

$$L(t) = p \cdot \frac{(x'' - x')}{(t'' - t')} - \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

$$L(x) = \frac{p^2}{2m} - V(x)$$

$$K(x'', t''; x', t') = \frac{1}{W(\Delta t)} \int \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt \right] \right\} dx \quad (54-4)$$

از روابط بدست آمده درمی یابیم که جمله $\int \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt \right] \right\} dx$ در

معادله (54-4) نقش انتشارگر نوسانگر هماهنگ میرا را دارد برای محاسبه انتگرال روش زیر را در پیش می گیریم:

$$\int \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt \right] \right\} dx$$

برای همه مسیرها شرایط مرزی زیر حاکم است [7]:

$$x(t_i) = x_i, \quad x(t_j) = x_j \quad (55-4)$$

مسیر کلاسیکی به فرم زیر است:

$$x_c(t) = x_i \frac{\sin \omega(t_f - t)}{\sin \omega(t_f - t_i)} + x_f \frac{\sin \omega(t - t_i)}{\sin \omega(t_f - t_i)} \quad (56-4)$$

مشتق مرتبه اول آن به فرم زیر می باشد:

$$\dot{x}_c(t) = x_i \frac{-\omega \cos \omega(t_f - t)}{\sin \omega(t_f - t_i)} + x_f \frac{\omega \cos \omega(t - t_i)}{\sin \omega(t_f - t_i)} \quad (57-4)$$

از معادله (57-4) و (55-4) برای حل معادله (54-4) استفاده می کنیم:

$$\int \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt \right] \right\} dx$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \left((\omega x_f \cos[\omega(t - t_i)] - \omega x_i \cos[\omega(-t + t_f)]) \csc[\omega(-t_i + t_f)] \right)^2 dt -$$

$$\int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{x_i \sin[\omega(t_f - t)] + x_f \sin[\omega(t - t_i)]}{\sin[\omega(t_f - t_i)]} \right)^2 dt =$$

$$\frac{1}{2} m \omega (-2x_i x_f + (x_i^2 + x_f^2) \cos[\omega(-t_i + t_f)]) \csc[\omega(-t_i + t_f)]$$

انتشارگر نوسانگر هماهنگ ساده :

$$K(x'', \tau; x', 0) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(x'^2 + x''^2) \cos(\tau \omega) - 2x''x'}{2 \sin(\tau \omega)} \right) \right] \quad (58-4)$$

از این رو داریم:

$$K(x'', \tau; x', 0) = \exp \frac{i \hbar \omega}{2 \hbar} \int \left\{ \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int \left(\frac{P_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) dt \right] \right\} dx =$$

$$K(x'', \tau; x', 0) = \sqrt{\frac{m \omega}{2 \pi i \hbar \sin(\tau \omega)}} \exp \left[\frac{i \hbar \omega}{2 \hbar} \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} m \omega \left(\frac{(x'^2 + x''^2) \cos(\tau \omega) - 2x''x'}{2 \sin(\tau \omega)} \right) \right] \quad (59-4)$$

۳-۴ نوسانگر دیراک ذره ای با اسپین $\frac{1}{2}$ تحت تاثیر میدان مغناطیسی :

در این فصل نوسانگر دیراک را که تحت اثر آهارونوف-بوهم قرار دارد را به روش انتگرال مسیر فاینمن حل می‌کنیم. تابع زیر انتگرال با انتشارگر نوسانگر هماهنگ کوانتومی که در آن پارامتر تحول زمانی دیده می‌شود، مشابه است. انتگرال بیان شده با استفاده روش انتگرال مسیر فاینمن حل می‌شود و با استفاده از قطعه قطعه کردن زمان مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج بدست آمده مشابه با نتایجی است که توسط فرکس و بونامیس^{۴۴} (۲۰۰۴) محاسبه شد [۲۴]. برای حل مشکلات مکانیک کوانتومی به دنبال روش‌ها و فرمول‌های جدید و متفاوت در مدل‌های ریاضی هستیم که نمونه آن تعیین تابع موج سیستم کوانتومی با استفاده از تحول زمانی^{۴۵} سیستم است. که همه اطلاعات سیستم از جمله انرژی و یا حتی انتشارگر سیستم را مشخص می‌کند. این ویژگی‌ها یا همان خصوصیات در فرمول هامیلتونین یا همان فرمول لاگرانژی نهفته شده که قابل محاسبه هستند. در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی فرمول هامیلتونین هم در معادله شرودینگر و هم در معادله هایزنبرگ قرار می‌گیرد.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = H \psi(\vec{r}, t) \quad (۶۰-۴)$$

از طرف دیگر فرمول لاگرانژی از روش انتگرال مسیر فاینمن حاصل می‌شود که اولین بار توسط فاینمن و هیبس^{۴۶} در سال (۱۹۶۵) مورد مطالعه قرار گرفت، این روش در سال (۱۹۴۸) توسط خود فاینمن معرفی شده بود. در روش انتگرال مسیر فاینمن دامنه احتمال همان انتشارگر کوانتومی می‌باشد که به فرم زیر نشان می‌دهند.

$$K(r'', r', \Lambda) = \langle r'' | \exp(i\hbar H \Lambda) | r' \rangle = \frac{1}{A} \int \exp[iS(r'', r')] d^\infty r(r) \quad (۶۱-۴)$$

که انتگرال‌گیری روی تمام مسیرهای ممکن بین نقطه اولیه $r' = r(t=0)$ و نقطه نهایی $r'' = r(t=\Lambda)$ صورت می‌گیرد. در معادله (۶۱-۴) نقش ضریب نرمالایز را دارد و $S(r'', r')$ همان عملگر کلاسیکی زیر انتگرال می‌باشد.

$$S(r'', r') = \int L(\dot{r}, r) dt \quad (۶۲-۴)$$

$L(\dot{r}, r)$ همان لاگرانژی سیستم می‌باشد که در معادله کوانتشی ظاهر شده است. در این بخش در واقع ما می‌خواهیم با استفاده از روش انتگرال مسیر فاینمن به حل معادله نوسانگر دیراک بپردازیم که تحت تاثیر پتانسیل آهارونوف-بوهم قرار دارد. که از آن طیف انرژی و معادله گرین درجه دو حاصل می‌شود. در این بخش دو مسئله نپرداخته است. در تمام طول محاسبات باید $\hbar = c = 1$ را در نظر داشت. برای

⁴⁴ Ferkous and Bounames

⁴⁵ time-sliced method

⁴⁶ Feynman and Hibbs

حل نوسانگر دیراک از روش انتگرال مسیر فاینمن استفاده می‌کنیم. در واقع تابع درجه دوم گرین را از معادله نوسانگر دیراک که تحت تاثیر پتانسیل آهارونوف-بوهم قرار گرفته است بدست می‌آید که قبل از آن در سال‌های ۱۹۸۴ کاید^{۴۷} و اینومتا، در سال ۱۹۹۷ برنالز^{۴۸} و همکارانش در سال ۱۹۹۹ برنیدو^{۴۹} و همکارانش در سال ۲۰۰۷ برنالز و همکارانش با در نظر گرفتن سیستم‌های نسبیتی، مورد بررسی قرار گرفته بود.

برای ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ معادله دیراک را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$(M - D)G(\vec{p}'', \vec{p}') = \delta(\vec{p}'' - \vec{p}') \quad (۴-۶۳)$$

$\vec{p} = x \hat{i} + y \hat{j}$ و $G(\vec{p}'', \vec{p}')$ تابع گرین ذره دیراک با جرم M و بار الکتریکی e می‌باشد. $\hat{D}$ نوسانگر دیراک که تحت اثر آهارونوف-بوهم قرار گرفته است به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\hat{D} = -\beta\alpha \cdot (\vec{p} - i M f \beta \vec{p} - e \vec{A}) + \beta E \quad (۴-۶۴)$$

در معادله (۴-۶۴) f فرکانس نوسانگر می‌باشد، $\vec{A}$ پتانسیل برداری، $\vec{p}$ عملگر تکانه، E انرژی ذره، $\vec{p}$ عملگر مکان هستند. به همین ترتیب β و α ماتریس دیراک می‌باشند که به فرم زیر تعرف می‌شود.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

معادله (۴-۶۳) را می‌توان به فرم دیگری نوشت :

$$G(\vec{p}'', \vec{p}') = (M + D)g(\vec{p}'', \vec{p}') \quad (۴-۶۵)$$

که در رابطه بالا $g(\vec{p}'', \vec{p}')$ معادله گرین درجه دوم می‌باشد. که بر طبق آن معادله مرتبه دوم دیراک را تعریف می‌کنیم.

$$(M^2 - \hat{D}^2)g(\vec{p}'', \vec{p}') = \delta(\vec{p}'', \vec{p}') \quad (۴-۶۶)$$

$g(\vec{p}'', \vec{p}')$ عناصر ماتریس عملگر $\hat{g} = (M^2 - \hat{D}^2)^{-1}$ می‌باشد که $\hat{g}$ را می‌توان به فرم انتگرالی زیر تعریف شود:

$$\hat{g} = \frac{i}{2M} \int_0^\infty \exp\{-iH_{eff} \Lambda\} d\Lambda \quad (۴-۶۷)$$

Λ پارامتر وابسته به زمان و H_{eff} هامیلتونی موثر سیستم می‌باشد که :

$$H_{eff} = \frac{(M^2 - \hat{D}^2)}{2M} \quad (۴-۶۸)$$

⁴⁷ Kayed

⁴⁸ Bornales

⁴⁹ Bernido

یکی از عناصر این ماتریس به فرم زیر نوشته می شود:

$$g_{\xi}(\vec{\rho}'', \vec{\rho}') = \frac{i}{2M} \int_0^{\infty} \langle \vec{\rho}'' | \exp\{-iH_{eff} \Lambda\} | \vec{\rho}' \rangle d\Lambda. \quad (۶۹-۴)$$

با $|\chi\rangle = |\rho, \phi\rangle$ که $|\rho\rangle$ اسپینور می باشد. و $\langle \vec{\rho}'' | \exp\{-iH_{eff} \Lambda\} | \vec{\rho}' \rangle$ در معادله انتشارگر ظاهر

می شود که Λ همان پارامتر زمان گونه و H_{eff} هامیلتونی موثر می باشد از این رو معادله (۶۹-۴) برای جمع روی تمام مسیرها به فرم زیر می شود.

$$K(r'', r', \Lambda) = \langle \vec{\rho}'' | \exp\{-iH_{eff} \Lambda\} | \vec{\rho}' \rangle = \int \exp(iS) D[\vec{\rho}] \quad (۷۰-۴)$$

۴-۴ بررسی نوسانگر دیراک تحت اثر آهارونوف - بوهم

برای نوسانگر دیراک از معادله (۶۴-۴) داریم:

$$\hat{D} = -\beta\alpha.(\vec{p} - i M f \beta \vec{\rho} - e \vec{A}) + \beta E \quad (۷۱-۴)$$

که عملگر مکان و عملگر تکانه به فرم زیر تعریف می شوند [۲۴]:

$$\vec{p} = -i \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} - i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad \rho = \rho \hat{\rho}$$

پتانسیل برداری:

$$\vec{A} = \frac{\phi}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (۷۲-۴)$$

که ϕ شار عبوری غیر قابل نفوذ از شعاع R که در راستای Z قرار دارد.

مربع $\hat{D}$ را از معادله (۷۱-۴) بدست می آوریم و با استفاده از روابط پایین به شکل جدیدی از معادله نوسانگر دیراک می رسیم:

$$\begin{cases} \beta^2 &= 1 \\ \alpha_i^2 &= 1 \\ \beta\alpha_i + \alpha_i\beta &= 0 \end{cases} \quad (۷۳-۴)$$

و

$$(\alpha A)(\alpha B) = A.B + i\sigma.(A \times B) \quad (۷۴-۴)$$

A و B را با $\hat{\rho}$ و $\hat{\phi}$ جایگزین می کنیم:

$$\begin{aligned} \hat{D}^2 = & \left\{ -\beta\alpha.(\vec{p} - i Mf \beta\vec{\rho} - e\vec{A}) + \beta E \right\} \left\{ -\beta\alpha.(\vec{p} - i Mf \beta\vec{\rho} - e\vec{A}) + \beta E \right\} \psi(\rho, \phi, z) \\ & \left(\beta^2\alpha.(\vec{p} - i Mf \beta\vec{\rho} - e\vec{A})\alpha.(\vec{p} - i Mf \beta\vec{\rho} - e\vec{A}) + (\beta E)^2 - \beta E \beta\alpha.(\vec{p} - i Mf \beta\vec{\rho} - e\vec{A}) \right) \psi(\rho, \phi, z) + \\ & -\beta\alpha.(\vec{p} - i Mf \beta\vec{\rho} - e\vec{A})\beta E \psi(\rho, \phi, z) = \\ & \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial^2\rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial^2\phi} - i - i \frac{\phi}{2\pi\rho^2} \frac{\partial}{\partial\phi} - i\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + iMf \beta(i\rho \frac{\partial}{\partial\rho} + iMf \beta\rho^2) - e \left(-i \frac{\phi}{2\pi\rho^2} \frac{\partial}{\partial\phi} - e \left(\frac{\phi}{2\pi\rho} \right)^2 \right) \right\} \psi(\rho, \phi, z) + \\ & \left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial\phi} + i \frac{\phi}{2\pi\rho^2} + i \frac{\partial}{\partial\phi} + i \frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\phi}{2\pi} + i \frac{\phi}{2\pi\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\phi}{2\pi} - i \frac{\phi}{2\pi\rho^2} \right\} \psi(\rho, \phi, z) + \\ & \left\{ -(\beta E \vec{p} - e\beta E \vec{A})(\beta\alpha + \beta\alpha) - (\beta E \vec{p} - e\beta E \vec{A})(\alpha\beta + \alpha\beta) + i Mf E \vec{\rho}(\beta\alpha + \beta\alpha) \right\} \psi(\rho, \phi, z) = \end{aligned}$$

که $L_z = -i \left(\frac{\partial}{\partial\phi} \right)$ و $a = \left(\frac{e\phi}{2\pi} \right)$ می باشند و خاصیت $\beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0$ استفاده می کنیم:

حال شکل صریحی از $\hat{D}^2$ بدست می آید:

$$\hat{D}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial\rho} \right)^2 - \frac{[L_z^2 - \sigma_z L_z + \sigma_z a - 2aL_z + a^2]}{\rho^2} - M^2 f^2 \rho^2 - 2\rho Mf \sigma_z (a - L_z) + \beta Mf + E^2 \quad (۷۵-۴)$$

با قرار دادن معادله (۶۸-۴) در معادله (۷۵-۴) هامیلتونین به فرم زیر بدست می آید:

$$H_{eff} = \frac{1}{2M} \left[M^2 - \left(\left(\frac{\partial}{\partial\rho} \right)^2 - \frac{[L_z^2 - \sigma_z L_z + \sigma_z a - 2aL_z + a^2]}{\rho^2} - M^2 f^2 \rho^2 - 2\rho Mf \sigma_z (a - L_z) + \beta Mf + E^2 \right) \right] \quad (۷۶a-۴)$$

با در نظر گرفتن $p_\rho^2 = - \left(\frac{\partial}{\partial\rho} \right)$ و $\mu^2 = E^2 - M^2$

$$H_{eff} = \frac{1}{2M} \left[p_{\rho}^2 + \frac{[L_z^2 - \sigma_z L_z + \sigma_z a - 2aL_z + a^2]}{\rho^2} - M^2 f^2 \rho^2 - 2\beta M f \sigma_z (a - L_z) + \beta M f - \mu^2 \right] \quad (76b-4)$$

یک اپراتور جدید تعریف می‌کنیم به اسم Γ_{DOAB} که به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma_{DOAB} = -\sigma_z L_z + a\sigma_z \quad (77-4)$$

$$\begin{aligned} L_z^2 - \sigma_z L_z + \sigma_z a - 2aL_z + a^2 &= \sigma_z \sigma_z (L_z L_z - \sigma_z L_z + \sigma_z a - aL_z - aL_z + aa) = (\sigma_z L_z)(\sigma_z L_z) - \sigma_z L_z (a\sigma_z) - a\sigma_z (\sigma_z L_z) + \\ &+ a\sigma_z (a\sigma_z) - \sigma_z L_z + a\sigma_z = (\sigma_z L_z)(\sigma_z L_z) - a\sigma_z (\sigma_z L_z) - \sigma_z L_z (a\sigma_z) + a\sigma_z (a\sigma_z) - \sigma_z L_z + a\sigma_z = \\ &(-\sigma_z L_z + a\sigma_z)^2 + (-\sigma_z L_z + a\sigma_z) = (-\sigma_z L_z + a\sigma_z + 1)(-\sigma_z L_z + a\sigma_z) = \Gamma_{DOAB} (1 + \Gamma_{DOAB}) \end{aligned}$$

حال هامیلتونین را براساس اپراتور جدید می‌نویسیم:

$$H_{eff} = \frac{1}{2M} \left[p_{\rho}^2 + \frac{[\Gamma_{DOAB} (1 + \Gamma_{DOAB})]}{\rho^2} - M^2 f^2 \rho^2 - 2\beta M f \sigma_z (a - L_z) + \beta M f - \mu^2 \right] \quad (78-4)$$

می‌توان خواص جابجایی زیر را برای اپراتور جدید مدنظر گرفت:

$$\begin{aligned} [\Gamma_{DOAB}, \beta] &= [-\sigma_z L_z + a\sigma_z, \beta] = \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \left(\frac{e\phi}{2\pi} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} - \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) + \left(\frac{e\phi}{2\pi} \right) \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ &\left\{ i \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{e\phi}{2\pi} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} - \left\{ i \frac{\partial}{\partial \phi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left(\frac{e\phi}{2\pi} \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = 0 \\ [\Gamma_{DOAB}, \beta] &= 0 \end{aligned} \quad (79-4)$$

$$[\Gamma_{DOAB}, \rho^2] = 0 \quad (80-4)$$

$$[\Gamma_{DOAB}, L_z] = 0 \quad (81-4)$$

با خواص جابجایی داده شده می‌توان نتیجه گرفت هامیلتونین موثر با اپراتور جدید به فرم زیر جابجا می‌شود:

$$[\Gamma_{DOAB}, H_{eff}] = 0 \quad (82-4)$$

همچنین باید درنظر داشت اپراتور Γ_{DOAB} با مقادیر زیر جابجایی ندارد.

$$[\Gamma_{DOAB}, \alpha \cdot \vec{p}] = 2i \frac{\partial}{\partial \rho} \alpha_\rho [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] + \frac{2i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \alpha_\phi [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] \neq 0 \quad (۸۳-۴)$$

$$[\Gamma_{DOAB}, \alpha \cdot \beta \vec{p}] = 2\beta \rho \alpha_\rho [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] \neq 0 \quad (۸۴-۴)$$

$$[\Gamma_{DOAB}, \alpha \cdot e\vec{A}] = \frac{2a}{\rho} \alpha_\phi [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] \neq 0 \quad (۸۵-۴)$$

$$(۸۶-۴)$$

$$\begin{aligned} [\Gamma_{DOAB}, \alpha \cdot (\vec{p} - iMf \beta \vec{p}) - e\vec{A}] &= 2i \frac{\partial}{\partial \rho} \alpha_\rho [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] + \frac{2i}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \alpha_\phi [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] + \\ &2iMf \beta \rho \alpha_\rho [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] + \frac{2\alpha}{\rho} \alpha_\phi [\alpha \sigma_z - \sigma_z L_z] \neq 0 \end{aligned}$$

که در آن $\alpha_\phi = \alpha \cdot \phi$ و $\alpha_\rho = \alpha \cdot \rho$ است:

اِپراتور Γ_{DOAB} در معادله (۷۸-۴) شبیه به اِپراتور مارتین-گلابر در سال ۱۹۴۸ است. این معادله اولین بار توسط بیدن هارن^{۵۰} در سال ۱۹۶۲ برای حل مشکل سه بعدی کیپلر استفاده شد.

اگر Γ_{DOAB} را به عنوان یک اِپراتور در نظر بگیریم، رابطه ویژه مقداری را برای این اِپراتور به فرم زیر در نظر می گیریم:

$$\Gamma_{DOAB} (1 + \Gamma_{DOAB}) |\xi\rangle = \xi (1 + \xi) |\xi\rangle \quad (۸۷-۴)$$

که ویژه مقدار این اِپراتور به فرم زیر می باشد:

$$\xi = \beta |m - a| \quad (۸۸-۴)$$

$$a = \frac{e\phi}{2\pi} \text{ و } \beta = \pm 1, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \text{ با}$$

با استفاده از رابطه تمامیت $\sum |\xi\rangle \langle \xi| = 1$ و معادله (۷۸-۴) و جداسازی قسمت زاویه ای از قسمت شعاعی معادله (۶۹-۴) را می تواند به فرم زیر نوشته شود:

⁵⁰ Beidenharn

$$g(\vec{\rho}'', \vec{\rho}') = \frac{i}{2M} \int_0^\infty \langle \phi'' | \xi \rangle \langle \vec{\rho}'' | \exp\{-iH_\xi \Lambda\} | \vec{\rho}' \rangle \langle \xi | \phi' \rangle d\Lambda =$$

$$\sum_\xi \langle \phi'' | \xi \rangle g_\xi(\vec{\rho}'', \vec{\rho}') \langle \xi | \phi' \rangle \quad (۸۹-۴)$$

که در آن بخش شعاعی به شکل زیر داده شده است.

$$g_\xi(\vec{\rho}'', \vec{\rho}') = \frac{i}{2M} \int_0^\infty \langle \vec{\rho}'' | \exp\{-iH_\xi \Lambda\} | \vec{\rho}' \rangle d\Lambda. \quad (۹۰-۴)$$

که ضریب نرمالیزاسیون آن :

$$\langle \phi | \xi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[im\phi] |\chi\rangle \quad (۹۱-۴)$$

$|\chi\rangle$ اسپینور اپراتور اسپین می باشد. هامیلتونی موثر را روی ویژه اسپینورها اثر دهیم، معادله (۹۱-۴) به فرم زیر بازنویسی می شود:

$$H_\xi = \frac{1}{2M} \left[p_\rho^2 + \frac{\xi(1+\xi)}{\rho^2} - M^2 f^2 \rho^2 - 2\beta M f \sigma_z |a-m| + \beta M f - \mu^2 \right] \quad (۹۲-۴)$$

بررسی قسمت شعاعی و جمع آن روی تمامی زمان ها:

اجازه دهید که ما معادله (۹۲-۴) با روش انتگرال مسیر فاینمن مورد بررسی قرار دهیم.

$$\langle \vec{\rho}'' | \exp\{-iH_\xi \Lambda\} | \vec{\rho}' \rangle = K(r'', r', \Lambda) = \int \exp[iS(\rho'', \rho')] \Theta(\rho - R) D[\vec{\rho}] \quad (۹۳-۴)$$

$\Theta(\rho - R)$ یک تابع گام که مقدار آن زمانی که ذره بیرون از محدوده غیر قابل نفوذ سیم پیچ به شکل استوانه است ($\rho > R$) دارای مقدار یکتاست و در درون این محدوده ($\rho < R$) مقدار آن صفر می باشد.

در حال حاضر Λ پرامتر زمان گونه که ما آن را به N قسمت تقسیم کرده و داریم:

$$\frac{\Lambda}{N} = \varepsilon_j = \lambda_j - \lambda_{j-1}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \dots, N$$

بعد از بازه بازه کردن زمان، معادله (۹۳-۴) به شکل زیر در می آید:

$$K(\rho'', \rho', \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{\rho'' \rho'}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \exp(i S_j) \Theta(\rho_j - R) \left(\frac{M}{2\pi i \varepsilon_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\rho_j \quad (94-4)$$

$$\Lambda = \sum_j \varepsilon_j \text{ و } \rho_j = \rho(\lambda_j), \rho_0 = \rho', \rho_N = \rho'' \text{ که}$$

در بازه زمانی کوتاه $S_j = \varepsilon_j L$ داریم که L لاگرانژی می باشد:

$$L = \dot{\rho} \cdot p_\rho - H_\xi \quad (95-4)$$

$$L = \dot{\rho} \cdot p_\rho - \left\{ \frac{1}{2M} p_\rho^2 + \frac{1}{2M} \left(\frac{\xi(1+\xi)}{\rho^2} - M^2 f^2 \rho^2 - 2\beta M f \sigma_z |a-m| + \beta M f - \mu^2 \right) \right\}$$

که H_ξ همانی است که در معادله (92-4) داده شده است. از لاگرانژی به فرم زیر بدست می آید:

$$L = \left[\frac{M}{2} \dot{\rho} + \frac{\xi(1+\xi)}{2M \rho^2} - \frac{M^2 f^2 \rho^2}{2} - \beta f |a-m| + \beta f - \frac{\mu^2}{2M} \right] \quad (96-4)$$

با استفاده از روابط بالا معادله (96-4) که مربوط به کنش ذره در بازه زمانی کوتاه است به فرم زیر بازنویسی می شود:

$$S(\rho) = \int_{t_0}^{t_i} L(t) dt \quad (97-4)$$

$$S = \left[\frac{M}{2} \left(\frac{\Delta \rho_j}{\varepsilon_j} \right)^2 \varepsilon_j + \frac{\xi(1+\xi)}{2M \bar{\rho}^2} \varepsilon_j - \frac{M^2 f^2 \rho^2}{2} \varepsilon_j - \beta f \varepsilon_j |a-m| + \frac{\beta f}{2} \varepsilon_j - \frac{\mu^2}{2M} \varepsilon_j \right]$$

در این جا $\rho^2 = \frac{\rho_j^2 + \rho_{j-1}^2}{2}$ و $\Delta \rho_j = \rho_j - \rho_{j-1}$ ، $\rho^2 = \rho_j - \rho_{j-1}$ توجه داشته باشید که معادله (97-4) مشابه با کنش برای قسمت شعاعی نوسانگر هماهنگ می باشد. از این رو انتشارگر با استفاده از معادله (97-4) بدست می آید.

$$K(r'', r', \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{\rho'' \rho'}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \exp \left[i \left\{ -\beta f \varepsilon_j |a-m| + \frac{\beta f}{2} \varepsilon_j - \frac{\mu^2}{2M} \varepsilon_j \right\} \right] \times \quad (98-4)$$

$$\int \prod_{j=1}^N \exp \left[i \left\{ \frac{M}{2 \varepsilon_j} (\Delta \rho_j)^2 + \frac{\xi(1+\xi)}{2M \bar{\rho}^2} \varepsilon_j - \frac{M^2 f^2 \rho^2}{2} \varepsilon_j \right\} \right] \Theta(\rho_j - R) \left(\frac{M}{2\pi i \varepsilon_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\rho_j$$

با توجه به حد $R \rightarrow 0$ برای شعاع سیم‌پیچ به شکل استوانه با حفظ شار غیر صفر Φ در مبدا، معادله (۹۸-۴) شبیه به شکل انتشارگر شعاعی نوسانگر هماهنگ و یک پتانسیل معکوس مربع می‌باشد. که این روش با یک پتانسیل معکوس مربع که توسط پیک^{۵۱} و اینومتا حل شد (۱۹۹۲). انتگرال مسیر معادله (۹۸-۴) ارزیابی و سپس نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$K(r'', r', \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{\rho'' \rho'}} \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^N \exp \left[i \left\{ -\beta f \varepsilon_j |a-m| + \frac{\beta f}{2} \varepsilon_j - \frac{\mu^2}{2M} \varepsilon_j \right\} \right] \times$$

$$\int \prod_{j=1}^N \exp \left[i \left\{ \frac{M}{2} (\dot{\rho})^2 \varepsilon_j + \frac{\xi(1+\xi)}{2M \bar{\rho}^2} \varepsilon_j - \frac{M^2 f^2 \rho^2}{2} \varepsilon_j \right\} \right] \left(\frac{M}{2\pi i \varepsilon_j} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^{N-1} d\rho_j =$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho'' \rho'}} \exp \left[i \left\{ -\beta f |a-m| + \frac{\beta f}{2} - \frac{\mu^2}{2M} \right\} i \Lambda \right] \times (-iMf) \csc(f \Lambda) \times$$

$$\exp \left[\frac{i}{2} (\rho'^2 - \rho''^2) Mf \cot(f \Lambda) \right] I_\gamma [-iMf \csc(f \Lambda) \rho' \rho''] =$$

$$K(r'', r', \Lambda) = \frac{1}{\sqrt{\rho'' \rho'}} \exp \left[i \left\{ -\beta f |a-m| + \frac{\beta f}{2} - \frac{\mu^2}{2M} \right\} i \Lambda \right] (-iMf) \csc(f \Lambda) \times$$

$$\exp \left[\frac{i}{2} (\rho'^2 - \rho''^2) Mf \cot(f \Lambda) \right] I_\gamma [-iMf \csc(f \Lambda) \rho' \rho''] \quad (۹۹-۴)$$

در این بخش دیده می‌شود که پتانسیل معکوس مربعی و پتانسیل نوسانگر را هم زمان با هم در نظر نگرفته است و انتشارگر کلی برای آن بدست نیاورده بلکه جداگانه برای هر یک از پتانسیل‌ها انتشارگر را محاسبه کرده است.

۵-۴ بررسی نوسانگر^{۵۲} دی کی پی تحت اثر آهارونوف-بوهم:

برای ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ معادله دی کی پی را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$(m - \hat{M}) G(\vec{\rho}'', \vec{\rho}') = \delta(\vec{\rho}'' - \vec{\rho}') \quad (۹۹-۴)$$

$G(\vec{\rho}'', \vec{\rho}')$ تابع گرین ذره دیراک با جرم m و بار الکتریکی e می‌باشد. $\hat{M}$ نوسانگر دیراک که تحت اثر آهارونوف-بوهم قرار گرفته است که به فرم زیر نوشته می‌شود.

از طرفی $c=1$ قرار می‌دهیم.

برای بخش اسپین صفر در حضور پتانسیل آهارونوف-بوهم معادله دی کی پی بصورت زیر ارائه می‌شود [۲]:

⁵¹ Peak

⁵² Duffin-Kemmer-Petiau

$$\begin{aligned}
H|\psi\rangle &= E|\psi\rangle \\
\left(\beta\left((\vec{p}-im\beta\omega r)-e\vec{A}\right)+m+V\beta\right)\Psi &= \beta E\Psi \\
\Rightarrow (A)_y &= \frac{\phi}{2\pi} \frac{x}{r^2} \quad (A)_x = \frac{\phi}{2\pi} \frac{y}{r^2} \\
\phi &= m_0\phi_0, \quad \frac{q\phi}{2\pi\hbar c} = m_0, \quad \phi_0 = \frac{\hbar c}{q}
\end{aligned}
\tag{۱۰۰-۴}$$

با استفاده از تعاریف ماتریس‌های معادله دی کی پی، معادله‌ی بالا به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
\vec{P} &= \vec{p} - im\beta\omega r \\
\left(\left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2 - \left(E^2 - \hat{M}^2\right)\right)\Phi &= 0 \\
\Rightarrow \hat{M}^2 &= E^2 - \left(\vec{P}-e\vec{A}\right)^2
\end{aligned}
\tag{۱۰۱-۴}$$

$\vec{A}$ پتانسیل برداری، $\vec{p}$ عملگر تکانه و E انرژی ذره می‌باشد.

که در رابطه بالا $g(\vec{r}'', \vec{r}')$ معادله گرین درجه دوم می‌باشد. که بر طبق آن معادله مرتبه دوم دیراک را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
g(\vec{r}'', \vec{r}') &= \langle r'' | g | r' \rangle \\
G(\vec{r}'', \vec{r}') &= \langle r'' | G | r' \rangle \\
(m^2 - \hat{M}^2)g(\vec{r}'', \vec{r}') &= \delta(\vec{r}'', \vec{r}')
\end{aligned}
\tag{۱۰۲-۴}$$

$g(\vec{r}'', \vec{r}')$ عناصر ماتریس عملگر $\hat{g} = (m^2 - \hat{M}^2)^{-1}$ می‌باشد که $\hat{g}$ را می‌توان به فرم انتگرالی زیر تعریف کرد:

$$\hat{g} = \frac{i}{2m} \int_0^\infty \exp\{-iH_{eff}\Lambda\} d\Lambda
\tag{۱۰۳-۴}$$

Λ پارامتر وابسته به زمان و H_{eff} هامیلتونی موثر سیستم می‌باشد که:

$$\begin{aligned}
H_{eff} &= \frac{(m^2 - \hat{M}^2)}{2m} \\
H_{eff} &= \frac{(m^2 - E^2 + (\vec{P}-e\vec{A})^2)}{2m}
\end{aligned}
\tag{۱۰۴-۴}$$

از طرفی داریم:

$$\vec{P} = \vec{p} - im\omega\eta^0\rho, \quad \eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1
\tag{۱۰۵-۴}$$

یکی از عناصر این ماتریس به فرم زیر نوشته می شود [۲۴]:

$$g(\vec{r}'', \vec{r}') = \frac{i}{2M} \int_0^\infty \langle \vec{r}'' | \exp\{-iH_{eff} \Lambda\} | \vec{r}' \rangle d\Lambda. \quad (۱۰۶-۴)$$

با $|\rho\rangle = |\vec{r}'', \vec{r}'\rangle$ که $|\chi\rangle$ اسپینور می باشد. و $\int_0^\infty \langle \vec{r}'' | \exp\{-iH_{eff} \Lambda\} | \vec{r}' \rangle$ در معادله انتشارگر ظاهر

می شود که Λ همان پارامتر زمان گونه می باشد و H_{eff} هامیلتونی موثر می باشد. از این رو معادله

(۱۰۵-۴) برای جمع روی تمام مسیرها به فرم زیر می شود:

$$K(r'', r', \Lambda) = \langle \vec{r}'' | \exp\{-iH_{eff} \Lambda\} | \vec{r}' \rangle = \int \exp(iS) D[r] \quad (۱۰۷-۴)$$

که عملگر مکان و عملگر تکانه به فرم زیر تعریف می شوند:

$$H_{eff} = \frac{\left(m^2 - E^2 + (\vec{P} - e\vec{A})^2\right)}{2m} \quad (۱۰۸-۴)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left\{ m^2 - E^2 + \vec{P} \cdot \vec{P} - e^2 \vec{A} \cdot \vec{A} - e\vec{P} \cdot \vec{A} - e\vec{A} \cdot \vec{P} \right\}$$

محاسبه نوسانگر دی کی پی تحت اثر آهارونوف - بوهم:

$$\vec{p} = -i \frac{\partial}{\partial \rho} \hat{\rho} - i \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi}, \quad \rho = \rho \hat{\rho}$$

پتانسیل برداری:

$$\vec{A} = \frac{\phi}{2\pi\rho} \hat{\phi} \quad (۱۰۹-۴)$$

که ϕ شار عبوری غیر قابل نفوذ از شعاع R که در راستای محور Z قرار دارد.

$$H_{eff} = \frac{1}{2m} \left\{ m^2 - E^2 + (\vec{p} - i m \omega \eta^0 \vec{\rho} - e\vec{A}) \cdot (\vec{p} - i m \omega \eta^0 \vec{\rho} - e\vec{A}) \right\} \psi(\rho, \phi, z) =$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left\{ m^2 - E^2 + \vec{p} \cdot \vec{p} - i m \omega \eta^0 \vec{p} \cdot \vec{\rho} - e \vec{p} \cdot \vec{A} + i m \omega \eta^0 \vec{\rho} \cdot \vec{p} \right\} \psi(\rho, \phi, z) +$$

$$\frac{1}{2m} \left\{ -m^2 \omega^2 (\eta^0)^2 \vec{\rho} \cdot \vec{\rho} - i e m \omega \eta^0 \vec{\rho} \cdot \vec{A} + e \vec{A} \cdot \vec{p} - i m \omega \eta^0 e \vec{A} \cdot \vec{\rho} - e^2 \vec{A} \cdot \vec{A} \right\} \psi(\rho, \phi, z)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \left\{ m^2 - E^2 - \frac{\partial^2}{\partial^2 \rho} - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial^2 \phi} - m \omega \eta^0 + i e \frac{1}{2\pi \rho^2} + m \omega \eta^0 \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - m^2 \omega^2 (\eta^0)^2 \rho^2 - i \frac{e \phi}{2\pi \rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + \left(\frac{e \phi}{2\pi \rho} \right)^2 \right\} =$$

که $a = \left(\frac{e \phi}{2\pi} \right)$ و $L_z = -i \left(\frac{\partial}{\partial \phi} \right)$ می‌باشند و با در نظر گرفتن $\mu^2 = E^2 - m^2$ و $p_\rho^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 \rho} \right)$

$$H_{eff} = \frac{1}{2m} \left\{ -\mu^2 + p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} L_z^2 - m \omega \eta^0 + i e \frac{1}{2\pi \rho^2} + m \omega \eta^0 \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - m^2 \omega^2 (\eta^0)^2 \rho^2 + \frac{a}{\rho^2} L_z + \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \right\} \quad (۱۱۰-۴)$$

با تعریف لاگرانژی بصورت زیر انتشارگر ذره آزاد را بدست آورده:

$$L(\rho, t) = p \cdot \frac{(\dot{x}'' - \dot{x}')}{(t'' - t')} - H$$

$$L(\rho, t) = p \cdot \frac{(\dot{x}'' - \dot{x}')}{(t'' - t')} - \frac{1}{2m} \left\{ -\mu^2 + p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} L_z^2 - m \omega \eta^0 + i e \frac{1}{2\pi \rho^2} + m \omega \eta^0 \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - m^2 \omega^2 (\eta^0)^2 \rho^2 + \frac{a}{\rho^2} L_z + \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \right\}$$

$$L(\rho, t) = \left\{ \frac{m}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{\mu^2}{2m} - \frac{1}{\rho^2} L_z^2 + \frac{1}{2} \omega \eta^0 - i \frac{e}{4\pi \rho^2} - \frac{1}{2} \omega \eta^0 \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\eta^0)^2 \rho^2 - \frac{1}{2m} \frac{a}{\rho^2} L_z - \frac{1}{2m} \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \right\}$$

(۱۱۱-۴)

در بازه زمانی کوچک تابع کنش به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$S(\rho) = \int_{t_0}^{t_i} L(\rho, t) dt$$

$$S(\rho) = \frac{(\Delta \rho)^2}{2\tau_j} - \frac{1}{2} m \left\{ 1 - \omega^2 (\eta^0)^2 \rho^2 \right\} \tau_j + \frac{1}{2m} \left\{ E^2 - i \frac{1}{2} \frac{e \phi}{\pi \rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + i e \frac{1}{2\pi \rho^2} + \left(\frac{e \phi}{2\pi \rho} \right)^2 \right\} \tau_j -$$

$$\frac{1}{2} \omega \eta^0 \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right\} \tau_j =$$

Λ پارامتر وابسته به زمان و H_{eff} هامیلتونی موثر سیستم می‌باشد که:

$$K(\rho'', t''; \rho', t') = \int \rho \left(\exp \frac{i}{\hbar} S \right) D[\rho] \Rightarrow$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_j^N \exp \left[i \left\{ \frac{(\Delta \rho)^2}{2\tau_j} - \frac{1}{2} m \left\{ 1 - \omega^2 (\eta^0)^2 \rho^2 \right\} \tau_j + \frac{1}{2m} \left\{ E^2 - i \frac{1}{2} \frac{e \phi}{\pi \rho^2} \frac{\partial}{\partial \phi} + i e \frac{1}{2\pi \rho^2} + \left(\frac{e \phi}{2\pi \rho} \right)^2 \right\} \tau_j - \frac{1}{2} \omega \eta^0 \left\{ \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - 1 \right\} \tau_j \right\} \right]$$

(۱۱۲-۴)

۶-۴ حل نوسانگر دیراک به روش انتگرال مسیر فاینمن و محاسبه انتشارگر مربوط به آن:

برای نوسانگر دیراک از معادله (۷۱-۴) داریم [۲۶]:

$$\hat{M} = -\alpha\beta \cdot (\vec{P} - e\vec{A}) - V\beta + E\beta$$

که عملگر مکان و عملگر تکانه به فرم زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{p} = p_x + p_y + p_z \quad (۱۱۲-۴)$$

پتانسیل برداری:

$$\vec{A} = \left(-\frac{1}{2}By, \frac{1}{2}Bx, 0 \right) \quad (۱۱۳-۴)$$

مربع $\hat{M}$ را از معادله (۱۰۱-۴) بدست می‌آوریم و با استفاده از روابط پایین به شکل جدیدی از معادله نوسانگر دیراک می‌رسیم:

$$\begin{cases} \beta^2 = 1 \\ \alpha_i^2 = 1 \\ \beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0 \end{cases} \quad (۱۱۴-۴)$$

و

$$(\alpha A)(\alpha B) = A.B + i\sigma.(A \times B) \quad (۱۱۵-۴)$$

A و B را با $(\vec{p} - e\vec{A})$ جایگزین می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & (\alpha \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \alpha \cdot (\vec{p} - e\vec{A})) \psi(\rho, \phi, z) = \\ & ((\vec{p} - e\vec{A}) \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) + i\sigma \cdot ((\vec{p} - e\vec{A}) \times (\vec{p} - e\vec{A}))) \psi(\rho, \phi, z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \vec{p} \cdot \vec{p} - e \vec{p} \cdot \vec{A} - e \vec{A} \cdot \vec{p} + e^2 \vec{A} \cdot \vec{A} \right\} \psi(x, y, z) + \\ & \left\{ i \sigma \cdot (\vec{p} \times \vec{p} - \vec{p} \times e \vec{A} - e \vec{A} \times \vec{p} + e^2 \vec{A} \times \vec{A}) \right\} \psi(x, y, z) + \\ & \left\{ -(\beta E \beta \alpha \vec{p} - e \beta E \beta \alpha \vec{A}) - (\beta \alpha \beta E \vec{p} - e \beta \alpha \beta E \vec{A}) + (\beta V \beta \alpha \vec{p} - e \beta V \beta \alpha \vec{A}) \right\} \psi(x, y, z) \\ & \left\{ (\beta \alpha \beta V \vec{p} - e \beta \alpha \beta V \vec{A}) + ((\beta E)^2 + (\beta V)^2 - 2V E) \right\} \psi(x, y, z) = \end{aligned}$$

برای $V = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \hat{M} &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - e \left(-\frac{1}{2} B y p_x + \frac{1}{2} B x p_y \right) - e \left(-\frac{1}{2} p_x B y + \frac{1}{2} p_y B x \right) + \\ & e^2 \left(\frac{1}{4} (B y)^2 + \frac{1}{4} (B x)^2 \right) + i \sigma \cdot \left(-e (-i \hbar \nabla \times \vec{A}) \right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{M} &= p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - e \left(-\frac{1}{2} B y p_x + \frac{1}{2} B x p_y \right) - e \left(-\frac{1}{2} p_x B y + \frac{1}{2} p_y B x \right) + \\ & e^2 \left(\frac{1}{4} (B y)^2 + \frac{1}{4} (B x)^2 \right) + i \sigma \cdot \left(-e (-i \hbar \nabla \times \vec{A}) \right) \end{aligned} \quad (116-4)$$

$$\begin{aligned} \hat{M}^2 &= \left(p_x + e \frac{1}{2} B y \right)^2 + \left(p_y - e \frac{1}{2} B x \right)^2 + p_z^2 + \sigma \cdot (e \vec{B}) + E^2 \\ H_{eff} &= \frac{-1}{2m} \left\{ \left(p_x + e \frac{1}{2} B y \right)^2 + \left(p_y - e \frac{1}{2} B x \right)^2 + p_z^2 + \sigma \cdot (e \vec{B}) + E^2 - m^2 \right\} = \\ \frac{-1}{2m} & \left\{ p_x^2 + \left(e \frac{1}{2} B y \right)^2 + p_x \frac{1}{2} e B y + \frac{1}{2} e B y p_x - e \frac{1}{2} B x p_y - p_y e \frac{1}{2} B x + \left(e \frac{1}{2} B x \right)^2 + p_y^2 + p_z^2 + \sigma \cdot (e \vec{B}) + E^2 - m^2 \right\} \end{aligned} \quad (117-4)$$

تعریف می‌کنیم $E^2 - m^2 = \mu^2$. قسمت اسپینی با میدان در جهت محور Z بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$-\frac{e \sigma \cdot (\vec{B})}{2m} = -\frac{e \sigma_z (B)}{2m} \quad (118-4)$$

در حل معادله فوق به دانستن روابط زیر نیاز داریم:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sigma_z &= S_z \\ s_i &= \pm \frac{1}{2} \\ |r\rangle &= |xyz\rangle |\chi\rangle \\ \sum |s_i\rangle \langle s_i| &= 1 \end{aligned} \quad (119-4)$$

$$\begin{aligned} \langle r'' | \exp(-iH \Lambda) | r' \rangle &\equiv \sum_{s_i} \langle \chi | s_i \rangle \langle x'', y'', z'' | \exp(-iH_s \Lambda) | x', y', z' \rangle \langle s_i | \chi \rangle \\ &= \sum_{s_i} \eta_{s_i} \eta_{s_i}^+ \langle x'', y'', z'' | \exp(-iH_s \Lambda) | x', y', z' \rangle \end{aligned} \quad (120-4)$$

که $\eta_{s_i} = \langle s_i | \chi \rangle$ تعریف می شود و $\frac{1}{2}eB = \gamma$ ، $L_z = xp_y - yp_x$ می باشد.

$$\begin{aligned} H_{eff} &= \frac{-1}{2m} \left\{ p_x^2 + (\gamma y)^2 + \gamma (yp_x - xp_y) + \gamma (-p_y x + p_x y) + (\gamma x)^2 + p_y^2 + p_z^2 + \sigma \cdot (e\vec{B}) + \mu^2 \right\} \\ \Rightarrow \frac{-1}{2m} &\left\{ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 2\gamma (xp_y - yp_x) + (\gamma y)^2 + (\gamma x)^2 + \sigma \cdot (e\vec{B}) + \mu^2 \right\} \end{aligned} \quad (121-4)$$

حال به بررسی انتگرال مسیر می پردازیم، از این رو به تعریف مجدد انتشارگر نیاز داریم:

$$\langle r'' | \exp(-iH \Lambda) | r' \rangle = \int \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(x) \right) D[xyz]$$

با تعریف لاگرانژی بصورت زیر انتشارگر ذره آزاد را بدست آورده:

$$L(t) = p \cdot \frac{(x'' - x')}{(t'' - t')} - H$$

$$L(t) = \left\{ m(\dot{x})^2 + m(\dot{y})^2 + m\dot{z}^2 \right\} - \left[\left\{ \frac{1}{2}m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}m(\dot{y})^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 \right\} + \left\{ \frac{1}{2}eBx\dot{y} + \frac{1}{2}eB\dot{x}y \right\} - \left[\left(\frac{1}{2}eB \right)^2 (y^2 + x^2) + \left(\frac{k_0}{2m} \right) + \left(\frac{2\gamma s_i}{m} \right) \right] \right]$$

حال معادله (120-4) را بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned}
K(x'', y'', z'', t''; x', y', z', t') &= \int \left(\exp \frac{i}{\hbar} S(x) \right) D[xyz] \\
S(r) &= \int_{t'}^{t'+\Delta t} \left(\left\{ \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right\} + \frac{\gamma}{m} \{ x \dot{y} + y \dot{x} \} - (\gamma)^2 (y^2 + x^2) + \left(\frac{k_0}{2m} \right) + \left(\frac{2\gamma s_i}{m} \right) \right) dt \\
\langle x'', y'', z'' | \exp(-iH_s \Lambda) | x', y', z' \rangle &= e^{i \left[\left(\frac{k_0}{2m} \right) + \left(\frac{2\gamma s_i}{m} \right) \right] \Lambda} K(x'', y''; x', y') K(z'', z') \\
K(z'', z') &= \int e^{i \left[\frac{m}{2} \dot{z}^2 \right] \Lambda} D[z] \\
\langle z' | p' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\left(\frac{ip'x'}{\hbar} \right)}
\end{aligned}
\tag{۱۲۲-۴}$$

انتشارگر بدست آمده از معادله (۱۲۲-۴) را به دو انتشارگر تجزیه می کنیم:

$$\begin{aligned}
\langle z' | \exp \left(-\frac{iH \Delta t}{\hbar} \right) | z \rangle &= \int dp \left(\langle z' | \exp \left(i \frac{m \dot{z}^2}{2} \Delta t \right) | p \rangle \langle p | z \rangle \right) = \\
&\int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp -\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p_z^2}{2m} \Delta t \right)
\end{aligned}
\tag{۱۲۳-۴}$$

$$K(z'', t''; z', t') = \int \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t'+\Delta t} L(t) dt \right) \frac{dp_z}{2\pi\hbar}$$

با تعریف لاگرانژی سیستم معادله (۱۲۳-۴) به فرم زیر در می آید:

$$L(z, t) = p_z \cdot \frac{(z'' - z')}{(t'' - t')} - \frac{p_z^2}{2m}$$

$$K(z'', t''; z', t') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp \left[p_z \cdot \frac{(z'' - z')}{(t'' - t')} - \frac{p_z^2}{2m} \right] \Rightarrow$$

$$p_z = \frac{k_z}{\hbar}$$

$$\hbar = 1$$

$$K(z'', t''; z', t') = \frac{1}{2\pi} \int dk_z \exp \left[k_z \cdot \frac{(z'' - z')}{(t'' - t')} - \frac{k_z^2}{2m} \right] \Lambda \quad (124-4)$$

$$K(y'', x'', t''; y', x', t') = \int \exp \left\{ i \Lambda \int_0^A \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \right\} + \gamma \{ x \dot{y} - \dot{x} y \} - \gamma^2 (y^2 + x^2) \right\} \mathcal{D}[xy] \quad (125-4)$$

در این بخش با حل نوسانگر دیراک به روش انتگرال مسیر فاینمن به محاسبه انتشارگر مربوط به آن پرداختیم و انتشارگر را به دو بخش مجزا تقسیم و آن را به فرم معادله (124-4) انتشارگر ذره آزاد و معادله (125-4) انتشارگر نوسانگر هماهنگ شیفت پیدا کرده، نمایش دادیم.

۷-۴ حل نوسانگر دی کی پی به روش انتگرال مسیر فاینمن و محاسبه انتشارگر مربوط به آن:

با در نظر گرفتن هامیلتونی موثر در بخش (۵-۴)

$$H_{eff} = \frac{(m^2 - E^2 + (\vec{P} - e\vec{A})^2)}{2m} \quad (126-4)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m} \{ m^2 - E^2 + \vec{P} \cdot \vec{P} - e^2 \vec{A} \cdot \vec{A} - e \vec{P} \cdot \vec{A} - e \vec{A} \cdot \vec{P} \}$$

$$H_{eff} = \frac{1}{2m} \{ m^2 - E^2 + (\vec{p} - i m \omega \eta^0 \vec{\rho} - e \vec{A}) \cdot (\vec{p} - i m \omega \eta^0 \vec{\rho} - e \vec{A}) \} \psi(\rho, \phi, z)$$

معادلات (112-4) و (113-4) را در نظر می گیریم:

$$\vec{p} = p_x + p_y + p_z$$

$$\vec{A} = \left(-\frac{1}{2} B y, \frac{1}{2} B x, 0 \right)$$

از طرفی داریم:

$$(127-4)$$

$$\vec{P} = \vec{p} - i m \omega \eta^0 \vec{r}, \quad \eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$$

معادلات (112-4)، (113-4) و (127-4) را در معادله (126-4) جایگزاری کرده:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{1}{2m} \left\{ m^2 - E^2 + (\vec{p} - im\omega\eta^0 \vec{r}) \cdot (\vec{p} - im\omega\eta^0 \vec{r}) \right\} \psi(x, y, z) + \\
&\left\{ -e (\vec{p} - im\omega\eta^0 \vec{r}) \cdot \vec{A} - e \vec{A} \cdot (\vec{p} - im\omega\eta^0 \vec{r}) + e^2 \vec{A} \cdot \vec{A} \right\} \psi(x, y, z) = \\
&\frac{1}{2m} \left\{ m^2 - E^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - im\omega\eta^0 (xp_x + yp_y + zp_z) \right\} \psi(x, y, z) + \\
&\frac{1}{2m} \left\{ -im\omega\eta^0 (p_x x + p_y y + p_z z) - (m\omega\eta^0)^2 (x^2 + y^2 + z^2) \right\} \psi(x, y, z) + \\
&\frac{1}{2m} \left\{ -e \left(-\frac{1}{2} p_x B_y + \frac{1}{2} p_y B_x \right) + iem\omega\eta^0 \left(-\frac{1}{2} x B_y + \frac{1}{2} y B_x \right) - e \left(-\frac{1}{2} B_y p_x + \frac{1}{2} B_x p_y \right) \right\} \psi(x, y, z) \\
&\frac{1}{2m} \left\{ -im\omega\eta^0 e \left(-\frac{1}{2} B_y x + \frac{1}{2} B_x y \right) - e^2 \left(\frac{1}{4} (B_y)^2 + \frac{1}{4} (B_x)^2 \right) \right\} \psi(x, y, z) =
\end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تعاریف داده شده فرم هامیلتونی را ساده تر می نویسیم:

$$\mu^2 = E^2 - m^2$$

$$\gamma = \frac{eB}{2}$$

$$\begin{aligned}
H_{eff} &= \frac{1}{2m} \left\{ \mu^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - im\omega\eta^0 \{ 2p_x x + 2p_y y + 2p_z z + 3i\hbar \} \right\} \psi(x, y, z) + \\
&\frac{1}{2m} \left\{ + (m\omega\eta^0)^2 (x^2 + y^2 + z^2) \right\} \psi(x, y, z) + \frac{1}{2m} \left\{ -\gamma^2 (y^2 + x^2) \right\} \psi(x, y, z) =
\end{aligned} \quad (۱۲۸-۴)$$

هامیلتونی موثر را در معادله انتشارگر قرار می دهیم:

$$\begin{aligned}
\langle \vec{r}'' | \exp \{ -iH_{eff} \Lambda \} | \vec{r}' \rangle &= \int \exp(iS) D[xyz] \\
H_{eff} &= \frac{1}{2m} \left\{ \mu^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - im\omega\eta^0 \{ 2p_x x + 2p_y y + 2p_z z + 3i\hbar \} \right\} \psi(x, y, z) + \\
&\frac{1}{2m} \left\{ + (m\omega\eta^0)^2 (x^2 + y^2 + z^2) \right\} \psi(x, y, z) + \frac{1}{2m} \left\{ -\gamma^2 (y^2 + x^2) \right\} \psi(x, y, z) =
\end{aligned} \quad (۱۲۹-۴)$$

با تعریف لاگرانژی بصورت زیر انتشارگر را بصورت زیر بدست آورده:

$$\langle \vec{r}'' | \exp \{ -iH_{eff} \Lambda \} | \vec{r}' \rangle = \int \left(\exp \frac{i}{\hbar} S \right) D[xyz] =$$

$$L(t) = \left\{ m(\dot{x})^2 + m(\dot{y})^2 + m\dot{z}^2 \right\} - \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{x})^2 + \frac{1}{2} m(\dot{y})^2 + \frac{1}{2} m\dot{z}^2 \right\} + \\ \frac{1}{2m} \left\{ \mu^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - i m \omega \eta^0 \{ 2p_x x + 2p_y y + 2p_z z + 3i \hbar \} \right\} + \\ \frac{1}{2m} \left\{ + \left(m \omega \eta^0 \right)^2 (x^2 + y^2 + z^2) - \gamma^2 (y^2 + x^2) \right\} =$$

$$S(r) = \int_{t'}^{t'+\Delta t} \frac{1}{2} m \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + \mu^2 - i m \omega \eta^0 \{ 2p_x x + 2p_y y + 3i \hbar \} + \left(m \omega \eta^0 \right)^2 - \gamma^2 \right) (x^2 + y^2) dt + \\ \int_{t'}^{t'+\Delta t} \frac{1}{2} m \left\{ \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - i \omega \eta^0 p_z z + \frac{1}{2m} \left(m \omega \eta^0 \right)^2 z^2 \right\} dt$$

$$A = \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \mu^2 + 3m \omega \eta^0 \hbar \right)$$

$$K(x'', y'', z'', t''; x', y', z', t') = A \int \left[\exp \Lambda \frac{im}{2\hbar} \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 - i 2m \omega \eta^0 \{ p_x x + p_y y \} + \left(m \omega \eta^0 \right)^2 - \gamma^2 \right) (x^2 + y^2) \right] D[xy] + \\ \int \exp \frac{i}{\hbar} \Lambda \left\{ \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - i \omega \eta^0 p_z z + \frac{m}{2} \left(z \omega \eta^0 \right)^2 \right\} D[z] \quad (131-4)$$

انتشارگر سیستم را به دو بخش مجزا تجزیه می‌کنیم:

$$K(z'', t''; z', t') = \int D[z] \exp \Lambda \left[\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - i \omega \eta^0 p_z z + \frac{m}{2} \left(z \omega \eta^0 \right)^2 \right] \quad (131-4)$$

$$K(y'', x'', t''; y', x', t') \int \exp \left[i \Lambda \int_0^A \left(\exp \frac{im}{2\hbar} \left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 - i 2m \omega \eta^0 \{ p_x x + p_y y \} + \left(m \omega \eta^0 \right)^2 - \gamma^2 \right) (x^2 + y^2) \right) \right] D[xy] \\ (132-4)$$

در این بخش با حل نوسانگر دی کی پی به روش انتگرال مسیر فاینمن به محاسبه انتشارگر مربوط به آن پرداختیم و انتشارگر را به دو بخش مجزا تقسیم و آن را به فرم معادله (۴-۱۳۱) و معادله (۴-۱۳۲) انتشارگر نوسانگر هماهنگ شیفت پیدا کرده، نمایش دادیم.

فصل پنجم

بررسی انتشارگر ذره آزاد با در نظر گرفتن اصل عدم
قطعیت تعمیم یافته

۵-۱ مقدمه ای بر اصل عدم قطعیت تعمیم یافته^{۵۳}:

یکی از مباحثی که در مکانیک کوانتومی دیده می شود اصل عدم قطعیت می باشد که آن را می شناسیم. این اصل در مورد خواص موجی ذرات اطلاعات می دهد. اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، اظهار می دارد که جفت های مشخصی از خواص فیزیکی، مانند مکان و تکانه، نمی تواند با دقتی دلخواه معلوم گردد. به عبارت دیگر، افزایش دقت در کمیت یکی از آن خواص مترادف با کاهش دقت در کمیت خاصیت دیگر است. می دانیم که بسیاری از فرضیات و اصول فیزیکی با گذشت زمان اصلاح و یا نقض شده است. این رو مشاهده شده است که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نیز نیاز به اصلاح شدن دارد و در انرژی های بالا عدم قطعیت هایزنبرگ^{۵۴} حالت حدی از اصل عدم قطعیت تعمیم یافته می شود. هنگامی که انرژی افزایش می یابد اثر گرانشی ظاهر می شود و از یک کمترین مقدار طول ممکن خبر می دهد. عدم قطعیت تعمیم یافته (GUP) باعث بازنگری در مکانیک کوانتومی و ضرورت استفاده از مکانیک کوانتومی تعمیم یافته شده است و یکی از بروزترین موضوعات مورد توجه فیزیکدانان در سه دهه ی اخیر است [۲۶]. اگر بخواهیم طول کمینه^{۵۵} را وارد مکانیک کوانتومی بکنیم می توان آن را بصورت یک عدم قطعیت کمینه در اندازه گیری مکان حساب کرد. کوانتش گرانشی یکی از مهمترین و چالش آفرین ترین مسئله های است که در فیزیک نوین به آن پرداخته اند. این مسئله حدود نیم قرن است که در فیزیک نظری مورد مطالعه قرار گرفته است ولی همچنان نتوانسته یک نظریه ی کاملی را بیان کند. چرا که هنوز که هنوزه یک کار تجربه ای را به آن نسبت نداده اند. اما در سال های اخیر تلاش می کنند که بتوانند با استفاده از نظریه میدان های موثر به توصیف کوانتش گرانشی بپردازند تا بتوانند از این طریق شواهد تجربه ای را مشاهده کنند. در حال حاضر نظریه پردازان گرانش کوانتومی به این باور رسیده اند که هر نظریه کوانتومی که بخواهد توصیف سازگاری از اندرکنش های گرانشی به دست ما دهد باید بتواند دربرگیرنده یک مقیاس طولی بنیادی در اندازه گیری بازه های مکانی باشد که ما این مقیاس طولی را با نام طول کمینه می شناسیم. یکی از راه های رسیدن به طول کمینه این است که تاثیر گرانشی فوتون را مد نظر بگیریم. در انرژی های بالا، انرژی های نزدیک به مقیاس پلانک^{۵۶}، گرانش نقش بسیار موثری در ساختار فضایی، که همان طول کمینه اندازه پذیر^{۵۷} در حدود طول پلانک است را نشان می دهد. چرا که زمانی ما برای بررسی فاصله بسیار کوتاه از انرژی های سطح بالا استفاده می کنیم، این انرژی قوی به علت اثرات گرانشی فوق العاده بالای خود به طرز قابل توجهی ساختار فضا_زمان را مختل می کند.

⁵³ Generalized uncertainty principle.

⁵⁴ Heisenberg's uncertainty

⁵⁵ Minimal length

⁵⁶ Plank scale

⁵⁷ Minimal measurable length

تعمیم اصل کنش کلاسیک به نظریه کوانتومی در فرمولبندی انتگرال مسیر ظاهر می‌شود. به جای یک تک مسیر کلاسیک، تفسیر کوانتومی را با استفاده از انتشارگر در نظر می‌گیرند، یا بهتر است بگوییم که از تمام مسیرهای احتمالی که ممکن است بی‌نهایت مسیر باشد انتگرال می‌گیریم. اگرچه ایده اصلی رویکرد انتگرال مسیر توسط وینر، در تلاش برای حل مسئله انتشار و حرکت براونی منتشر شد، اما این ایده در در مکانیک کوانتومی به واسطه فرمول لاگرانژی توسط دیراک معرفی شد. در حال حاضر فرمول فاینمن یک عنصر ضروری در بسیاری از تئوری‌های اساسی در فیزیک نظری از جمله نظریه کوانتومی میدان، گرانش کوانتومی، فیزیک انرژی بالا، و غیره می‌باشد. از سوی دیگر، در حال حاضر تقریباً در نظریه اساسی مانند نظریه ریسمان و گرانش کوانتومی در مکانیک کوانتومی عادی باید مجدداً در مورد فرمول نویسی آن مطمئن شویم. به عبارت بهتر توانسته‌اند یک کلیت از اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، به نام اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته (GUP) بخصوص در انرژی‌های بالا، انرژی را از مقیاس پلانک در نظر گرفته است [۲۷-۲۹]. در این فصل توجه داشته باشید که ما ابتدا به دو موضوع می‌پردازیم، ابتدا انتشارگر ذرات آزاد در چارچوب معادله شرودینگر در فرمول حداقل طول کمینه بررسی می‌کنیم. سپس با مفاهیم اساسی GUP آشنا شده از این رو هامیلتونی تعمیم‌یافته را برای ذرات آزاد می‌نویسیم و در انتها انتشارگر را برای سیستم مورد نظر با مشخصات داده شده به دست می‌آورد.

۵-۲ اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته و ارتباط آن با طول کمینه:

اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته را به شکل زیر در نظر می‌گیریم [۳۰]:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \left(\frac{1}{\Delta p} + \beta \Delta p \right) \quad (۱-۵)$$

این رابطه این اینگونه بدست می‌آید، هنگامی که هایزنبرگ به کمک میکروسکوپ به بررسی مکان الکترون می‌پرداخت هیچ گونه جنبه‌ای از گرانش بین الکترون و فوتون در نظر گرفته نشده بود از این رو رابطه عدم قطعیت به فرم زیر نوشته شده بود.

$$\Delta x \Delta p \approx \frac{\hbar}{2} \quad (۲-۵)$$

به سبب گرانش جابجایی الکترون به قرار زیر می‌باشد.

$$\Delta x_G \approx \frac{G \Delta p}{c^3}$$

باید این موضوع را در نظر گرفت که تکانه الکترون و فوتون باید از یک مرتبه باشند.

از این رو با استفاده از طول پلانک $L_p \approx \sqrt{\frac{G \hbar}{c^3}}$ داریم:

$$\Delta x_G = L_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (3-5)$$

از این رو با اضافه کردن معادله (3-5) به رابطه هایزنبرگ به رابطه جدیدی با نام عدم قطعیت تعمیم یافته دست می یابیم:

$$\Delta x \Delta p = \hbar (1 + \beta \Delta p^2) \quad (4-5)$$

که در آن β پارامتر تعمیم یافته می باشد.

یکی از نتایج بسیار مهم حداقل طول کمینه در مبحث اصل عدم قطعیت تعمیم یافته به فرم زیر می باشد:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \alpha l_p^2 \frac{\Delta p}{\hbar} \quad (5-5)$$

که در معادله (5-5)، α پارامتر GUP می باشد که از یک نظریه اساسی تعیین می شود. در انرژی های پایین، به عنوان مثال انرژی بسیار کوچکتر از جرم پلانک، جمله دوم در سمت راست معادله (5-5) ناپدید می شود و ما به فرمول اصل عدم قطعیت هایزنبرگ می رسیم که برای ما شناخته شده است

رابطه جابجایی تعمیم یافته به فرم زیر تعریف می شود:

بنابراین جابجایی بین عملگرهای مکان و تکانه به شکل زیر می باشد:

$$[x_{op}, p_{op}] = i \hbar (1 + \beta p^2) \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (6-5)$$

حال برای عملگرهای $\hat{x}$ و $\hat{p}$ نمایشی در فضای تکانه که رابطه بالا را در مرتبه اول β برآورده می کند که بصورت زیر ارائه می شود.

$$x_{op} = x, p_{op} = p [1 + \beta (p)^2] \quad (7-5)$$

که x و p عملگرهای تکانه و مکان می باشد.

$\beta \rightarrow 0$ و $\beta \rightarrow 1$ که بترتیب مربوط به گرانش کوانتومی قوی و مکانیک کوانتومی استاندارد می‌باشد.

محاسبه انتشارگر ذره آزاد براساس حداقل طول کمینه:

$$\left(\frac{p_{op}^2}{2m} + V(x) \right) \psi_n(x) = E_n \psi_n(x) \quad (8-5)$$

۳-۵ هامیلتونین اصلاح شده:

اپراتور اندازه حرکت تغییر شکل یافته در فرمول هامیلتونی:

$$H = \frac{p^2}{2m} + V_{ff}(x)$$

که:

$$V_{ff}(x) = \beta \frac{p^4}{m} + V(x) \quad (9-5)$$

لازم به ذکر است که در معادله شرودینگر تغییر شکل یافته، هامیلتونی هیچ وابستگی صریح زمانی ندارند:

حال اگر ما مسئله را ساده در نظر بگیریم:

$$\begin{aligned} p^2 &= 2m(E_n^{(0)} - V(x)) \\ p^4 &= 4m^2(E_n^{(0)} - V(x))^2 \end{aligned} \quad (10-5)$$

از این رو در مورد ذره آزاد داریم:

$$H = \frac{p^2}{2m} + 4\beta m(E_n^{(0)})^2 \quad (11-5)$$

۴-۵ محاسبه انتشارگر ذره آزاد براساس حداقل طول کمینه:

در این بخش ما به مبحث انتشارگر برمی گردیم:

اگر ما تابع موج $\psi(x, t')$ را در زمان t' داشته باشیم می توانیم تابع موج $\psi(x, t'')$ را در زمان t'' با کمک انتشارگر سیستم بدست آوریم:

$$\psi(x, t'') = \exp\left(-\frac{iH(t'' - t')}{\hbar}\right) \psi(x, t') \quad (12-5)$$

برای بازه زمانی کوچک $t'' - t' = \Delta t$ داریم:

$$\begin{aligned} \langle x | \exp\left(-\frac{iH\Delta t}{\hbar}\right) | x \rangle &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \left(\langle x | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} \Delta t\right) \right) | p \rangle \langle p | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(4\beta m \left(E_n^{(0)}\right)^2 \Delta t\right) \right) | x \rangle \right) = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \left(\frac{p^2}{2m} + 4\beta m \left(E_n^{(0)}\right)^2 \right) \Delta t \right) \end{aligned} \quad (13-5)$$

بنابراین انتشارگر را در مکانیک کوانتومی برای بازه زمانی کوچک $\Delta t = t'' - t'$ برای هامیلتونی جایگزیده نشده^{۵۸} می توان نوشت:

$$K(x'', t''; x', t') = \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t'}^{t'' + \Delta t} L(t) dt\right) \frac{dp}{2\pi\hbar} \quad (14-5)$$

لاگرانژی سیستم را به فرم زیر تعریف می کنیم:

$$L(t) = p \cdot \frac{(x'' - x')}{(t'' - t')} - \frac{p^2}{2m} - 4\beta m \left(E_n^{(0)}\right)^2 \quad (15-5)$$

بنابراین انتشارگر به فرم زیر بازنویسی می شود:

$$K(x'', t''; x', t') = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{(x'' - x')^2 m}{2\Delta t} - 4\beta m (E_n^{(0)})^2 \Delta t \right) \int dp \exp \left(-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} \left(p - \frac{(x'' - x')m}{\Delta t} \right)^2 \right) \quad (۱۶-۵)$$

یا

$$K(x'', t''; x', t') = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{(x'' - x')^2 m}{2\Delta t} - 4\beta m (E_n^{(0)})^2 \Delta t \right) \int dU \exp \left(-\frac{i\Delta t}{2m\hbar} U^2 \right) \quad (۱۷-۵)$$

با تغییر متغیر $U = \left(p - \frac{(x'' - x')m}{\Delta t} \right)$ ، به شکل صریح‌تر انتشارگر ذره آزاد را برای حداقل طول کمینه به فرم زیر می‌نویسیم:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}} \right) \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{(x'' - x')^2 m}{2(t'' - t')} - 4\beta m (E_n^{(0)})^2 (t'' - t') \right) \quad (۱۸-۵)$$

که اگر در رابطه بالا $\beta = 0$ به ما فرمالیزم انتشارگر ذره آزاد را می‌دهد:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}} \right) \exp \frac{i}{\hbar} \left(\frac{(x'' - x')^2 m}{2(t'' - t')} \right) \quad (۱۹-۵)$$

به منظور بدست آوردن انتشارگر ذرات آزاد برای یک بازه زمانی محدود $(t'' - t')$ ما فاصله را به N قسمت با طول برابر تقسیم می‌کنیم:

که $N \Delta t = (t'' - t')$ بنابراین برای انتشارگر در زمان محدود داریم:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\Delta t}} \right)^N \int dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{N-1} \times \exp \frac{im}{2\hbar\Delta t} \left((x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots + (x_N - x_{N-1})^2 \right) \exp \left(\frac{-i4\beta m}{\hbar} (E_n^{(0)})^2 (t'' - t') \right) \quad (۲۰-۵)$$

که انتگرال را در معادله بالا به روش زیر حل می‌کنیم:

$$\int dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_{N-1} \exp i \lambda \left((x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_1)^2 + \dots (x_N - x_{N-1})^2 \right) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{i \pi}{\lambda} \right)^{\frac{N-1}{2}} \exp \left(\frac{i \lambda (x_N - x_0)^2}{N} \right) \quad (21-5)$$

با جایگزاری معادله (21-5) در معادله (20-5) انتشارگر را بدست می آوریم:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\sqrt{\frac{m}{2i \pi \hbar \Delta t}} \right)^N \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{i \pi}{\lambda} \right)^{\frac{N-1}{2}} \exp \left(\frac{i \lambda (x_N - x_0)^2}{N} \right) \exp \left(\frac{-i 4 \beta m}{\hbar} (E_n^{(0)})^2 \Delta t \right) \quad (22-5)$$

که $\lambda = \frac{m}{2 \hbar \Delta t}$ و جایگزین می کنیم x_N و x_0 را بترتیب با x'' و x' استفاده می کنیم از $(t'' - t') = N \Delta t$

که در نهایت عبارت زیر حاصل می شود:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\sqrt{\frac{m}{2i \pi \hbar \Delta t}} \right)^N \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{\lambda}{i \pi} \right)^{\frac{N-1}{2}} \exp \left(\frac{i \lambda (x_N - x_0)^2}{N} \right) \exp \left(\frac{-i 4 \beta m}{\hbar} (E_n^{(0)})^2 \Delta t \right) \quad (23-5)$$

حال اگر ما احتمال تشخیص ذرات در یک منطقه محدود Δx که به نقطه نهایی x'' مربوط می شود را محاسبه کنیم، ما به وسیله معادله (23-5) داریم:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\sqrt{\frac{m}{2i \pi N \hbar \Delta t}} \right) \exp \left(\frac{i m (x_N - x_0)^2}{2 \hbar N \Delta t} \right) \exp \left(\frac{i 4 \beta m}{\hbar} (E_n^{(0)})^2 \Delta t \right) \quad (24-5)$$

در حد $\beta \rightarrow 0$ معادله (24-5) به فرم زیر می رسد:

$$K(x'', t''; x', t') = \left(\sqrt{\frac{m}{2i \pi \hbar (t'' - t')}} \right) \exp \left(\frac{i m (x'' - x')^2}{2 \hbar (t'' - t')} \right) \quad (25-5)$$

که نتیجه بدست آمده در مکانیک کوانتومی نتیجه معمولی می باشد.

نتیجه گیری:

از جمله موضوعات جالبی که در سالهای اخیر مورد توجه قرار گرفته مبحث انتگرال مسیر می باشد که توجه زیادی را در مباحث مکانیک کوانتومی به خود جلب کرده است چرا که انتگرال مسیر به عنوان یک روش کاربردی در مکانیک کوانتومی بحساب می آید. کاری که ما در استفاده از روش انتگرال مسیر فاینمن در پیش گرفتیم در حوزه محاسبه انتشارگر می باشد. اهمیت انتشارگر از آنجایی آشکار می شود که سیستم تحت تحول زمانی جابجا می شود و ما نیاز به شناسایی مکان نهایی سیستم تحت این تحول زمانی داریم. عبارتی در فرمالیزم انتگرال مسیر احتمال گذار از هر حالت دلخواه به هر حالت دلخواه دیگری را می توان محاسبه کرد. در واقع رابطه انتگرال مسیر فاینمن این واقعیت را بیان می کند که ذره تمام مسیرهای ممکن بین دو نقطه معین را هر کدام احتمال مخصوص بخود را دارند، می پیماید. از طرفی به محاسبه انتشارگر سیستم به روش های متفاوت تحت پتانسیل های مختلف پرداختیم و مشاهده کردیم با در نظر گرفتن حالت های حدی برای انتشارگر تحت پتانسیل های مختلف می توان به انتشارگر ذره آزاد رسید و دیدیم که محاسبه انتشارگر به روش وردش نسبت به روش های دیگر ملموس تر می باشد. راه حل تحلیلی را می توان برای حل معادله شرودینگر یک بعدی که به خوبی شناخته شده و از طرفی پیچیده تر از نوسانات بسته های موج منسجم است در پیش گرفت و حالت نهایی سیستم را محاسبه و احتمال حضور ذره که تحت تحول زمانی قرار گرفته در هر نقطه مشاهده کرد. انتشارگر نوسانگر دیراک که به همراه نوسانگر هماهنگ بود را محاسبه کردیم. همچنین انتشارگر نوسانگر دیراک که تحت اثر آهارونوف- بوهم قرار داشت محاسبه شد و از همین روش برای محاسبه انتشارگر نوسانگر دی کی پی در پیش گرفتیم. در نهایت ما به دو موضوع پرداختیم، ابتدا انتشارگر ذرات آزاد در چارچوب معادله شرودینگر در فرمول حداقل طول کمینه بررسی کردیم. سپس با مفاهیم اساسی GUP آشنا شده از این رو هامیلتونی تعمیم یافته را برای ذرات آزاد نوشتیم و در انتها انتشارگر را برای سیستم موردنظر با مشخصات داده شده به دست آوردیم و مشاهده کردیم که با در نظر گرفتن حالت حدی برای سیستم موردنظر و تبدیل آن به ذره آزاد انتشارگر سیستم تحت این حالت حدی به انتشارگر ذره آزاد تبدیل می شود.

(۱) جهانکهن ک. ۱۳۹۴، پایان نامه کارشناسی ارشد، "بررسی سیستم های دو و سه ذره ای با در نظر گرفتن طول کمینه"، دانشگاه صنعتی شاهرود.

(۲) مولایی ز. ۱۳۹۱، پایان نامه کارشناسی ارشد، "پراکندگی بوزون ها با اسپین صفر و یک با استفاده از معادله نسبیتی دی کی پی"، دانشگاه سمنان.

(۳) کریمی پور ک. ۱۳۹۴، "انتگرال مسیر در مکانیک کوانتومی و نظریه میدان کوانتومی"، دانشگاه شیراز .

4) Chaichian.M, & Demichev.A, (2001). *Path Integrals in Physics: Volume II "Quantum Field Theory, Statistical Physics and other Modern Applications,"* (Vol 2.) CRC Press.

5) F.Richard, A.Hibbs (2010), and Daniel Styer. "*Quantum mechanics and path integrals*," Dover Publications"

6) Sakurai.J.J, & Napolitano.J, (2011). "*Modern quantum mechanics*. Addison-Wesley,"

7) F.A.Barone, H.Boschi-Filho, and C.Farina," *Three methods for calculating the Feynman propagator*," Am.j.Phys.71 (2003)483-491

8) V.Ya.Fainberg, A.V.Marshacov,"*Local supersymmetry and Dirac particle propagator as a path integral*," (1988) Nucl.Phys. B306 659-676 LEBEDEV-87-338.

9)Wytse van Dijk¹, F.Masafumi Toyama², Sjirk Jan Prins³ and Kyle Spyksma, "*Analytic time-dependent solutions of the one-dimensional Schrödinger equation*,"(2014).American Journal of Physics 82, 955; doi: 10.1119/1.4885376.

10) W.van Dijk and F.M.Toyama, "*Accurate numerical solutions of the time-dependent Schrödinger equation*," (2007). Phys .Rev. E 75, 036707.

11) W.van Dijk, J.Brown, and K.Spyksma, "*Efficiency and accuracy of numerical solutions to the time-dependent Schrödinger equation*," Phys. Rev E 84, 056703 (2011).

12) Izuru Fujiwara and Kunio Miyoshi, "*Pulsating states for quantal harmonic oscillator*," (1980). Prog. Theor. Phys. 64, 715–718.

13) M.E.Marhic, "*Oscillating Hermite-Gaussian wave functions of the harmonic oscillator*," (1978). Lett. Nuovo Cim. 22, 376–378.

14) Straub William.O, "*Simplified Path Integral Approach to the Aharonov-Bohm Effect*," (2014).

- 15) Kawano.K, and Kitoh.T, (2004). **"Introduction to Optical Waveguide Analysis: Solving Maxwell's Equation and the Schrödinger Equation,"** Copyright © 2001 by John Wiley & Sons.
- 16) Berry.M.V, R.G.Chambers, M.D.Large, C. Upstill, and J.C. Walmsley. **"Wavefront dislocations in the Aharonov-Bohm effect and its water wave analogue,"** (1980).*European Journal of Physics* 1, no. 3 154.
- 17) Aharonov.Y, Bohm.D, (1959). **"Significance of electromagnetic potentials in quantum theory,"***Phys. Rev.* **115**: 485–491.
- 18) Tonomura.A, et al. (1986). **"Evidence for Aharonov-Bohm effect with magnetic field completely shielded from electron wave,"** *Phys. Rev. Lett.* **56**: 792–795.
- 19) Martinez-y-Romero, R. P., H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito. **"Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator,"** (1995). *European Journal of Physics* 16, no. 3 135.
- 20) Moreno, Matias, and Arturo Zentella. **"Covariance, CPT and the Foldy Wouthuysen transformation for the Dirac oscillator,"** (1989). *Journal of Physics A: Mathematical and General* 22, no. 17 L821.
- 21) Moreno, Matias, and Arturo Zentella. **"Covariance, CPT and the Foldy Wouthuysen transformation for the Dirac oscillato,"** (1989).*Journal of Physics A: Mathematical and General* 22, no. 17 L821.
- 22) Martinez-y-Romero, R. P., H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito. **"Relativistic quantum mechanics of a Dirac oscillator,"**(1995). *European Journal of Physics* 16, no. 3 135.
- 23) Boumali, Abdelmalek. (2014) ,**"The one-dimensional thermal properties for the relativistic harmonic oscillators,"** *arXiv preprint arXiv: 1409.6205*.
- 24) Cruz, J. L. D. D., & Bastatas, L. D. (2015). **"Dirac Oscillator with Aharonov-Bohm Potential: A Feynman Path Integral Approach,"** *Annals of Studies in Science and Humanities*, 1(1).
- 25) Bernido, C. C., Bornales, J. B., & Carpio-Bernido, M. V. (2007). **"Application of white noise calculus in evaluating the path integral in relativistic quantum mechanics ,"** *COSA*, 1, 151.
- 26) W. Chemissany, S. Das, A. F. Ali, and E. C. Vagenasc, **"Effect of the generalized uncertainty principle on post-inflation preheating,"** (2011) .*Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, vol. 12, article 017.

- 27) A. F. Ali, M. M. Khalil, and E. C. Vagenas, “**Minimal length in quantum gravity and gravitational measurements**,” (2015). *Europhysics Letters*, vol. 112, no. 2, Article ID 20005.
- 28) A. Kempf and G. Mangano, “**Minimal length uncertainty relation and ultraviolet regularization**,” (1997). *Physical Review D*, vol. 55, no. 12, pp. 7909–7920.
- 29) L. J. Garay, “**Quantum gravity and minimum length**,” (1995). *International Journal of Modern Physics A*, vol. 10, no. 2, pp. 145–166.
- 30) H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, and E. Maghsoodi, “**Scattering states of Woods–Saxon interaction in minimal length quantum mechanics**,” (2012). *Physics Letters B*, vol. 718, no. 2, pp. 678–682.

Abstract

Quantum mechanics is a probabilistic theory while the classical mechanics is a deterministic one. The connection between the two, was eluding for a long time till Feynman blended them through his famous path integral representation of the kernel of the Schrödinger equation. The path integral formulation of quantum mechanics is a description of quantum theory which generalizes the action principle of classical mechanics. It replaces the classical notion of a single, unique trajectory for a system with a sum, or functional integral, over infinity of possible trajectories to compute a quantum amplitude. In this thesis, after detail discussion on Feynman path integral formulation, we will investigate different problems such as time-dependent Schrödinger equation, Dirac oscillator in the presence of Aharonov-Bohm interaction, DKP oscillator and free particle considering minimal length formalism, using Feynman path integral formulation.

Keywords: Path integral Feynman, Dirac oscillator, Aharonov -Bohm potential, DKP oscillator, Minimal length.



Faculty of Physic Department

MSc Thesis in Nuclear Physic

**Dirac Oscillator with Aharonov-Bohm Potential by Integral Approach
Using Of Feynman Path**

By:

Fateme Ghobakhloo

Supervisor(s):

Dr. Hassan Hassanabadi

August 2016