

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده فیزیک
گروه ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مطالعه روش معکوس سازی اندازه گیری جزئی و کاربرد آن در سرکوب واهمدوسی و حفظ درهم تنیدگی

شما ابراهیمی استرآبادی

استاد راهنما

دکتر مصطفی عنابستانی

استاد مشاور

دکتر مرتضی رفیعی

۱۳۹۴

بسم الله الرحمن الرحيم

به مهرباترین همراهان زندگی ام،
به پدر،

پدر
مادر
و همسر عزیزم

تقدیم می کنم که حضورشان در فضای زندگی ام
مصدق بی ریای سخاوت بوده است.

ضمن سپاس و ستایش به درگاه ایزدمنان که به من توانایی داد که باستعانت از او
بتوانم این پژوهش را انجام دهم، بر خود لازم می بینم از د لکرمی و تشویق اساتید و
دوستان که در نگارش این مجموعه مرایاری نمودند، قدردانی نمایم
ابتدا از استاد کرامت‌مردم جناب آقای دکتر عنایتانی که زحمات راهنمایی این پایان
نامه را بر عهده داشتند، کمال سپاس را دارم.
از استاد عالی قدرم جناب آقای دکتر رفیعی که زحمات مشاوره این پایان نامه
را متحمل شدند، صمیمانه تشکر می کنم.
و در خاتمه از تمام دوستانی که مراد انجام این تحقیق یاری نمودند، قدردانی و تشکر
می نمایم.

تعمدنامه

اینجانب شیما ابراهیمی استرآبادی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته فیزیک دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان مطالعه روش معکوس‌سازی اندازه‌گیری جزئی و کاربرد آن در سرکوب واهمدوسی و حفظ درهم تنیدگی، تحت راهنمایی دکتر مصطفی عنابستانی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه شاهرود متعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه شاهرود “ یا “ Shahrood University “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده) شده است، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

شیما ابراهیمی استرآبادی
۱۳۹۴

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

واهمدوسی یک پدیده فیزیکی است که از برهم‌کنش سیستم‌های کوانتومی و محیط ناشی می‌شود. در واقع تخریب دینامیکی همدوسی کوانتومی که از جانب محیط اتفاق می‌افتد، واهمدوسی نام دارد. در اکثر سامانه‌های کوانتومی وجود واهمدوسی اجتناب ناپذیر است. برای نمونه میرایی دامنه و میرایی فاز، هم برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی را به هم می‌ریزد و هم در درهم‌تنیدگی حالت‌های چند جزئی تاثیرگذار است. جلوگیری از واهمدوسی به روش‌های بسیاری صورت گرفته است. تصحیح خطای کوانتومی و استفاده از زیرفضاهای بدون واهمدوسی از جمله روش‌های جلوگیری از واهمدوسی هستند که هردوی آن‌ها نیاز به فضای هیلبرت بزرگ‌تر دارند. در این پایان نامه به مطالعه جلوگیری از واهمدوسی با استفاده از روش بازبرپایی پرداخته‌ایم. نشان خواهیم داد که واهمدوسی ناشی از واهلش انرژی دمای صفر با استفاده از بازبرپایی تقریباً به طور کامل قابل سرکوب است. برای حفظ حالت یک کیوبیت ابتدا اندازه‌گیری ضعیفی آن را به سمت حالت پایه می‌برد و بعد از گذشت زمان انبارش اندازه‌گیری جزئی دوم حالت را احیا می‌کند. در این صورت واهمدوسی که از میرایی دامنه به وجود می‌آید به طور موثری به وسیله‌ی دو اندازه‌گیری ضعیف دیگر که قبل و بعد از کانال استفاده می‌شود، سرکوب می‌گردد.

درهم‌تنیدگی کوانتومی یک منبع حیاتی در بسیاری از کاربردهای اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی است که در اثر برهم‌کنش سیستم با محیط (واهمدوسی) کاهش می‌یابد. در این پایان‌نامه نشان خواهیم داد که استفاده از روش بازبرپایی در حفظ درهم‌تنیدگی نیز موثر است و به صورت جزئی‌تر این روش در حفظ درهم‌تنیدگی ناشی از کانال میرایی دامنه در دمای صفر و غیرصفر مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: واهمدوسی، درهم‌تنیدگی کوانتومی، بازبرپایی، اندازه‌گیری ضعیف، کانال میرایی دامنه

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. ابراهیمی ش. عناستانی م. "استفاده از اندازه‌گیری ضعیف در حفظ دره‌متنیدگی ناشی از کانال میرایی فاز" سومین کنفرانس بین المللی پژوهش های کاربردی در مهندسی کامپیوتر و فناوری اطلاعات. دانشگاه تربیت مدرس. ۱۵ بهمن ماه ۹۴

فهرست مطالب

د	فهرست تصاویر
۱	۱ مقدمه و پیش نیاز
۲	۱.۱ کیوبیت
۲	۱.۱.۱ چند کیوبیتی
۴	۲.۱ فضای حالت
۴	۳.۱ تحول
۵	۴.۱ عملگر چگالی
۶	۱.۴.۱ کره بلاخ
۷	۵.۱ عملگرهای کوانتومی
۷	۶.۱ عملگر کراوس
۸	۷.۱ مثال هایی از اثر نوفه کوانتومی
۸	۱.۷.۱ کانال بیت برگردان
۹	۲.۷.۱ کانال فاز برگردان
۱۱	۳.۷.۱ کانال بیت - فاز برگردان
۱۲	۴.۷.۱ کانال واقطبش
۱۲	۵.۷.۱ میرایی فاز
۱۴	۶.۷.۱ میرایی دامنه
۱۷	۲ اندازه گیری کوانتومی
۱۹	۱.۲ اندازه گیری های تصویری
۲۰	۲.۲ اندازه گیری ضعیف کوانتومی
۲۰	۱.۲.۲ اندازه گیری ضعیف: تعریف
۲۳	۲.۲.۲ تغییر کوچک بردار اولیه
۲۳	۳.۲.۲ محاسبه متوسط همه ویژه مقادیر

۳	جلوگیری از واهمدوسی کوانتومی با استفاده از اندازه‌گیری جزئی و معکوس سازی
۲۵	اندازه‌گیری
۲۶	۱.۳ تابع واهمدوسی
۲۸	۲.۳ جلوگیری از واهمدوسی به وسیله اندازه‌گیری ضعیف
۲۸	۱.۲.۳ مقدمه
۲۹	۲.۲.۳ بازبرپایی
۳۱	۳.۲.۳ جلوگیری از واهمدوسی واهلش انرژی در دمای صفر با اندازه‌گیری های ایده‌آل
۳۸	۴.۲.۳ جلوگیری از واهمدوسی ناشی از دمای صفر با چند زمان واهلش
۴۵	۴ حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری جزئی و معکوس سازی اندازه‌گیری
۴۶	۱.۴ حفظ درهم‌تنیدگی در کانال میرایی دامنه در دمای صفر به وسیله بازبرپایی
	۲.۴ حفظ درهم‌تنیدگی در کانال میرایی دامنه در دمای غیر صفر به واسطه از اندازه‌گیری
۵۵	ضعیف و اندازه‌گیری معکوس
۵۶	۱.۲.۴ حفظ کیوبیت کوانتومی به واسطه اندازه‌گیری های ضعیف
۵۹	۲.۲.۴ حفظ درهم‌تنیدگی به واسطه اندازه‌گیری ضعیف
۶۸	مراجع
۷۲	نمایه

فهرست تصاویر

۳	نمایش یک تک کیوبیت در کره بلاخ	۱.۱
۹	تاثیر کانال بیت برگردان در کره بلاخ برای احتمال $p=0,3$	۲.۱
۱۰	تاثیر کانال فاز برگردان در کره بلاخ برای احتمال $p=0,3$	۳.۱
۱۱	تاثیر کانال بیت-فاز برگردان در کره بلاخ برای احتمال $p=0,3$	۴.۱
۱۳	تاثیر کانال واقطبش در کره بلاخ برای احتمال $p=0,5$	۵.۱
۳۰	پتانسیل نوسان می‌کند.	۱.۳
۳۱	تهی را در نظر می‌گیریم.	۲.۳
۳۳	مجموعه آزمایشی فرایند جلوگیری از واهمدوسی با استفاده از اندازه گیری ضعیف	۳.۳
۳۹	تغییرات هماندهی در بازبرپایی برای $e^{-\Gamma\tau} = 0,3$. نمودار بالایی مربوط به $p_u =$	۴.۳
۴۰	هر دو اندازه گیری حالت باقی مانده از نتیجه تهی را در نظر می‌گیریم.	۵.۳
۴۴	خطوط پر: هماندهی‌های F_X و F_{av}^s در دوره انبارش با پارامترهای مشخص شده در متن. نقطه چین‌ها: هماندهی‌های مشابه بدون بازبرپایی ($p = p_u = 0$). خط چین ها: احتمال موفقیت، چیزی که قابل مشاهده است اینکه تابعی یکنوا نسبت به p (شدت اندازه‌گیری ضعیف) است.	۶.۳

۱۰۴	(a) عبور از کانال‌های r_1 و r_2 باب و چارلی حالت ρ_d را با هم در اشتراک می‌گذارند که از حالت اولیه دارای درهم‌تنیدگی کمتری است. (b) حفظ درهم‌تنیدگی ناشی از
۴۷	کانال‌های r_1 و r_2 با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس.
۲۰۴	نمایش آزمایش حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری
۵۳	معکوس
۳۰۴	(a) حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس با
	افزایش r میزان درهم‌تنیدگی ρ_d کاهش می‌یابد. (b) توزیع درهم‌تنیدگی با انجام و
۵۴	$M_{wk}(\rho)$ و $M_{rev}(\rho_r)$ برای یک حالت خاص $r = 0.6$
۴۰۴	احتمال موفقیت به عنوان تابعی از شدت اندازه‌گیری ضعیف که از معادله ۱۹.۴
۵۵	به‌دست آمده است.
۵۸	نمودار F^w با مقدار ثابت $r=0.3$ و $p=0.8$ بر حسب شدت‌های اندازه‌گیری m و n .
۶۰۴	فرضیه حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف
۶۶	میزان تغییرات احتمال موفقیت بر حسب m در $r = 0.5$
۸۰۴	میزان تغییرات همزانی بر حسب m برای حالتی با بیشینه درهم‌تنیدگی.

فصل ۱

مقدمه و پیش نیاز

۱.۱ کیوبیت

کوچکترین واحد اطلاعات کلاسیکی بیت نام دارد که شامل $\{0, 1\}$ می‌باشد. در اطلاعات کوانتومی این واحد به صورت کیوبیت^۱ یا بیت^۲ کوانتومی است که یک حالت کوانتومی، در ساده‌ترین شکل خود است. این سیستم دوحالته برای مثال می‌تواند حالت‌های الکترونی از اتم و یون، یک اسپین در یک میدان مغناطیسی یا اسپین هسته‌ای یک اتم یا مولکول باشند. پایه‌های این فضا را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$\begin{aligned} |0\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |1\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.1)$$

در این صورت حالت بهنجار کلی به صورت زیر است.

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.1)$$

که a و b اعداد مختلط هستند که عبارت $|a|^2 + |b|^2 = 1$ را ارضا می‌کنند. می‌توان رابطه ۲.۱ را به شکل زیر نیز نوشت.

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle \quad (3.1)$$

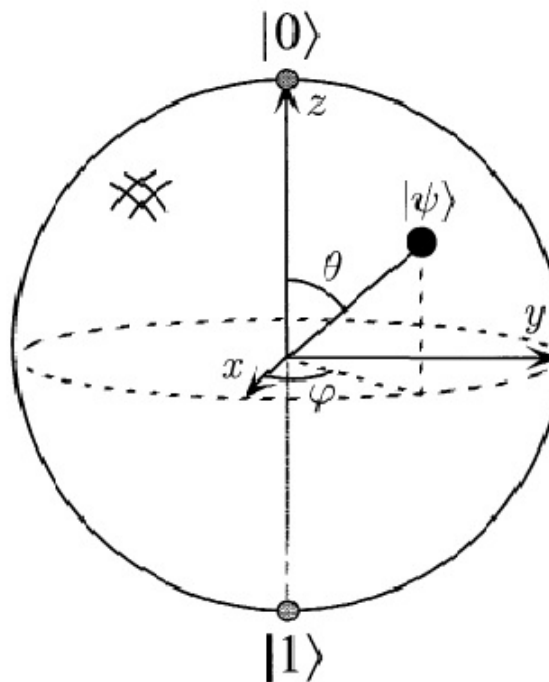
همان‌طور که در شکل ۱.۱ نشان داده شده است θ و φ یک نقطه روی فضای سه بعدی را نشان می‌دهند که به کره بلاخ معروف است و در بخش ۱.۴.۱ مورد مطالعه قرار گرفته است.

۱.۱.۱ چند کیوبیتی

برای سادگی فرض کنید سیستمی شامل دو کیوبیت داریم. از آنجایی که هر کیوبیت می‌تواند حالات $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را داشته باشد و فضای هیلبرتی با دو بعد دارد. بنابراین یک سیستم دو کیوبیتی فضای هیلبرت ۴ بعدی خواهد داشت که پایه‌هایی به شکل $|00\rangle$ و $|01\rangle$ و $|10\rangle$ و $|11\rangle$ دارند. بنابراین حالت یک

^۱Qubit

^۲Bit



شکل ۱.۱: نمایش یک تک کیوبیت در کره بلاخ

جفت کیوبیت می‌تواند برهم‌نهی این چهار حالت نیز باشند که در این صورت بردار حالتی که این سیستم را توصیف می‌کند، به صورت زیر است.

$$|\psi\rangle = \alpha_{00} |00\rangle + \alpha_{01} |01\rangle + \alpha_{10} |10\rangle + \alpha_{11} |11\rangle \quad (4.1)$$

نتیجه بهنجارش این حالت به صورت $\sum_{x \in \{0,1\}^2} |\alpha_x|^2 = 1$ است. از حالات دو کیوبیته مهم می‌توان به حالات بل^۳ اشاره کرد.

$$|\varphi^\pm\rangle = \frac{|00\rangle \pm |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (5.1)$$

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{|01\rangle \pm |10\rangle}{\sqrt{2}} \quad (6.1)$$

به طور عمومی‌تر می‌توان سیستمی از n کیوبیت را به شکل زیر نوشت.

$$|n_1, n_2, \dots\rangle \quad (7.1)$$

که $n_1, n_2, \dots = 0, 1$

^۳Bell states

۲.۱ فضای حالت

ساده‌ترین سیستم مکانیک کوانتومی که با آن سرو کار داریم کیوبیت است. یک کیوبیت یک فضای حالت با دو بعد است. $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را پایه‌های متعامد فضا در نظر می‌گیریم. می‌توانیم یک بردار حالت اختیاری را به شکل زیر بنویسیم.

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (۸.۱)$$

که a و b اعدادی مختلط هستند. اگر $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ باشد و در این صورت $a^2 + b^2 = 1$ است. شرط $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ را اغلب به عنوان شرط بهنجارش برای بردار حالت می‌نامیم. حالت‌های $|0\rangle$ و $|1\rangle$ به طور ذاتی شبیه به مقادیر 0 و 1 در حالت بیتی هستند اما تفاوت اساسی آن‌ها با بیت کلاسیک در این واقعیت است که برهم‌نهی حالات کوانتومی $(a|0\rangle + b|1\rangle)$ نیز امکان‌پذیر است. بطور کلی برای حالت کوانتومی $|\psi_i\rangle$ هر ترکیب خطی از آن‌ها به شکل $\sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle$ برهم‌نهی از حالت‌های $|\psi_i\rangle$ با دامنه α_i می‌باشد. بنابراین برای مثال حالت $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ یک برهم‌نهی از حالت $|0\rangle$ با دامنه $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و حالت $|1\rangle$ با دامنه $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ می‌باشد.

۳.۱ تحول

یک سیستم کوانتومی حالت $|\psi\rangle$ چگونه با زمان تغییر می‌کند؟ در مکانیک کوانتومی تحول^۴ یک سیستم بسته (بدون برهم کنش با محیط اطراف) با یک تبدیل یکانی توصیف می‌شود. اگر حالت $|\psi\rangle$ سیستم در زمان t_1 به حالت $|\psi'\rangle$ در زمان t_2 تحول پیدا کند، می‌توانیم آن را به شکل زیر بنویسیم

$$|\psi'\rangle = U(t_1, t_2) |\psi\rangle \quad (۹.۱)$$

در بخش‌های بعد خواهیم دید که ماتریس‌های پائولی نقش مهمی در تحول سیستم‌های تک کیوبیتی خواهند داشت. برای مثال ماتریس $(\sigma_x = X)$ که به عنوان گیت کوانتومی NOT شناخته می‌شود) حالت $|0\rangle$ را به $|1\rangle$ و $|1\rangle$ را به $|0\rangle$ تبدیل می‌کند به همین دلیل با نام بیت برگردان نیز مشهور است). همچنین ماتریس $(\sigma_z = Z)$ حالت $|0\rangle$ را بدون تغییر می‌گذارد و حالت $|1\rangle$ را با یک ضریب اضافی -1 به عنوان یک ضریب فاز به $|1\rangle$ بر می‌گرداند، بنابراین به فاز برگردان مشهور است.

اگرچه سیستم بسته کوانتومی عملاً وجود ندارد و تمام سیستم‌های کوانتومی با محیط پیرامون خود برهم کنش دارند، اما سیستم‌هایی وجود دارند که با تخمین خوبی به عنوان سیستم بسته به حساب می‌آیند و با تحولات یکانی توصیف می‌شوند. می‌توان گفت هر سیستم باز به عنوان بخشی از یک سیستم بسته و بزرگتر به حساب می‌آید. با فرض اینکه بتوان سیستم را بسته در نظر گرفت، تحول زمانی یک سیستم با معادله شرودینگر نشان داده می‌شود.

^۴Evolution

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle \quad (۱۰.۱)$$

که $\hbar$ ثابت پلانک است و H یک عملگر هرمیتی است که به عنوان هامیلتونی سیستم بسته شناخته می‌شود.

۴.۱ عملگر چگالی

ماتریس چگالی زبان مناسبی برای توصیف سیستم‌های کوانتومی که کاملاً شناخته شده نیستند به حساب می‌آید. به طور دقیقتر سیستمی را در نظر بگیرید که دارای تعداد زیادی از حالت‌های مختلط $|\psi_i\rangle$ با احتمال‌های p_i باشد. $\{p_i |\psi_i\rangle\}$ را آنسامبلی^۵ از حالت‌های خالص می‌نامیم. عملگر چگالی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\rho \equiv \sum p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (۱۱.۱)$$

عملگر چگالی اغلب با نام ماتریس چگالی شناخته شده است. تحول یک سیستم بسته با عملگر یکانی U مشخص می‌شود، اگر سیستم در ابتدا با احتمال p_i در حالت $|\psi_i\rangle$ باشد بعد از تحول با احتمال p_i در حالت $U|\psi_i\rangle$ قرار دارد. بنابراین تحول ماتریس چگالی با معادله زیر توصیف می‌شود.

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \sum_i p_i U |\psi_i\rangle \langle \psi_i| U^\dagger = U \rho U^\dagger \quad (۱۲.۱)$$

ماتریس چگالی یا عملگر چگالی ابزاری قدرتمند برای بررسی سیستم‌های آمیخته (سیستم‌هایی که خالص نباشند) در اختیار ما قرار می‌دهد که دارای خواص مهمی است.

۱- ρ یک ماتریس هرمیتی است.

۲- رد ماتریس ρ برابر واحد است.

۳- ρ یک ماتریس مثبت است.

خاصیت اول از رابطه ۱۱.۱ واضح است اما خاصیت دوم را می‌توان به شکل زیر اثبات کرد. اگر فرض کنیم $\rho = \sum p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ در این صورت

$$\text{tr}(\rho) = \sum_i p_i \text{tr}(|\psi_i\rangle \langle \psi_i|) = \sum_i p_i = 1 \quad (۱۳.۱)$$

^۵Ensemble

بنابراین $tr(\rho) = 1$ است. از طرف دیگر اثبات خاصیت سوم نیز کار مشکلی نیست زیرا

$$\langle \phi | \rho | \phi \rangle = \sum_i \rho_i \langle \phi | \psi_{in} \rangle \langle \psi_{in} | \phi \rangle = \sum_i p_i |\langle \phi | \psi_{in} \rangle|^2 \gg 0 \quad (14.1)$$

بنابراین ρ یک ماتریس مثبت است. این عبارت برای هر حالت دلخواهی برقرار است.

۱.۴.۱ کره بلاخ

کلی ترین حالت ذره در فضای هیلبرت دو بعدی با یک ماتریس چگالی دو در دو نشان داده می شود. ماتریس واحدو ماتریس های پائولی را می توان پایه هایی برای فضا در نظر گرفت و ρ را به شکل زیر نوشت.

$$\rho = \frac{1}{4} (r_0 I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} r_0 + z & x - iy \\ x + iy & r_0 - z \end{pmatrix} \quad (15.1)$$

که در آن $\vec{\sigma}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ماتریس های پائولی هستند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (16.1)$$

می توان از خواص ρ استفاده کرد و اطلاعاتی راجع به ضرایب $\vec{r}$ بدست آورد.

ρ هرمیتی است بنابراین $\vec{r}$ و r_0 حقیقی هستند.

$tr(\rho) = 1$ است بنابراین $r_0 = 1$ است.

° $\rho \geq 0$ است، بنابراین باید ویژه مقادیر ρ که به صورت زیر هستند مثبت باشند

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{4}(1 \pm |r|)$$

که $|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}$ اندازه بردار $\vec{r}$ است. بنابراین باید طول $\vec{r}$ از یک کمتر باشد یا به عبارتی $|\vec{r}| \ll 1$ است. بنابراین بین ماتریس چگالی و نقاط داخل کره‌ای به شعاع یک تناظر یک‌به‌یک وجود دارد، این کره همان کره بلاخ است. در صورتی که $|\vec{r}| = 1$ باشد حالت کاملاً خالص است. $r = 0$ متناظر با حالت کاملاً مخلوط $\rho = \frac{1}{4}I$ است. هر چه از مرکز کره به طرف مرز حرکت کنیم به درجه خلوص حالت‌ها اضافه می‌شود.

۵.۱ عملگرهای کوانتومی

فرمالیزم عملگرهای کوانتومی یک ابزار عمومی برای توصیف تحول سیستم‌های کوانتومی در گستره‌ای از شرایط می‌باشد که شامل تغییرات تصادفی حالت‌های کوانتومی است.

$$\rho' = \varepsilon(\rho) \quad (19.1)$$

ε در این رابطه در حقیقت یک نگاشت است که ρ را به ρ' می‌برد. دو مثال ساده برای عملگرهای کوانتومی، که در حقیقت می‌تواند به عنوان یک نگاشت در نظر گرفته شوند تبدیل یکانی و اندازه‌گیری هستند. تبدیل یکانی به صورت $\varepsilon(\rho) = U\rho U^\dagger$ و اندازه‌گیری $\varepsilon_m(\rho) = M_m\rho M_m^\dagger$ هستند.

۶.۱ عملگر کراوس

حالت سیستمی که در برهم‌کنش با محیط اطرافش باشد، را می‌توان به شکل $(\rho \otimes \rho_{env})$ نوشت که پس از تحول زمانی کل سیستم- محیط می‌توان حالت کلی را به شکل زیر نوشت

$$[U(\circ)(\rho(\circ) \otimes \rho_{env}(\circ))U^\dagger(\circ)] \quad (20.1)$$

حال برای بدست آوردن حالت سیستم باید روی محیط رد گرفت که به شکل زیر می‌شود.

$$\varepsilon(\rho) = tr_{env} = [U(\circ)(\rho(\circ) \otimes \rho_{env}(\circ))U^\dagger(\circ)] \quad (21.1)$$

بدون کم شدن کلیت مسئله فرض می‌کنیم حالت اولیه محیط به شکل $|e_0\rangle\langle e_0|$ باشد بنابراین $\rho_{env} = |e_0\rangle\langle e_0|$.

$$\varepsilon(\rho) = \sum_k \langle e_k | U [\rho \otimes |e_0\rangle\langle e_0|] U^\dagger | e_k \rangle = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger \quad (22.1)$$

که $|e_k\rangle$ پایه‌های فضا هستند و $E_k = \langle e_k | U | e_0 \rangle$ عملگری‌هایی از فضای سیستم هستند. عملگرهای $\{E_k\}$ ، عناصر عملگری برای عملگر کوانتومی ε هستند. عملگرهای $\{E_k\}$ رابطه مهمی را ارضا می‌کنند که رابطه تمامیت نام دارد. از آنجایی که این رابطه برای هر ρ دلخواه برقرار است بنابراین.

$$\sum_k E_k^\dagger E_k = I \quad (23.1)$$

رابطه تمامیت از اینجا ناشی می‌شود که رد هر ماتریس چگالی برابر یک است، بنابراین رد ماتریس چگالی حاصل از $\varepsilon(\rho)$ نیز باید یک باشد.

$$I = \text{tr}(\varepsilon(\rho)) = \text{tr}\left(\sum_k E_k \rho E_k^\dagger\right) = \text{tr}\left(\sum_k E_k^\dagger \rho E_k\right) \quad (24.1)$$

به عبارت دیگر عملگرهای کوانتومی رد نگهدار هستند. با توجه به رابطه کاملیت $\sum_k E_k E_k^\dagger = I$ نگاشت‌هایی به شکل ۲۲.۱ دارای خواص مهمی هستند.

۱. خطی است.

۲. ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می‌نگارد.

۳. ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می‌نگارد.

۴. رد ماتریس را حفظ می‌کند.

در واقع یک نگاشت مثبت و رد نگه دار است و یکی از بهترین ابزارها برای مطالعه نوفه کوانتومی در اختیار ما قرار می‌دهند. باید توجه داشت که این عملگرها یکتا نیستند زیرا با توجه به $\langle e_k | E | e_0 \rangle$ می‌دانیم که $\{|e_k\rangle\}$ ها تشکیل یک پایه برای فضای هیلبرت محیط را می‌دهند. از آن جایی که پایه‌های متفاوتی برای محاسبه رد می‌توان انتخاب کرد، پس این عملگرها یکتا نیستند.

۷.۱ مثال‌هایی از اثر نوفه کوانتومی

۱.۷.۱ کانال بیت برگردان

کانال بیت برگردان^۶ با احتمال $1-p$ عملگر $X = \sigma_x$ بر روی کیوبیت اثر می‌کند و حالت $|0\rangle$ را به $|1\rangle$ تبدیل می‌کند (و بر عکس). با احتمال p نیز حالت آن تغییر نمی‌کند.

^۶Bit flip

عملگرهای کراوس آن عبارتند از

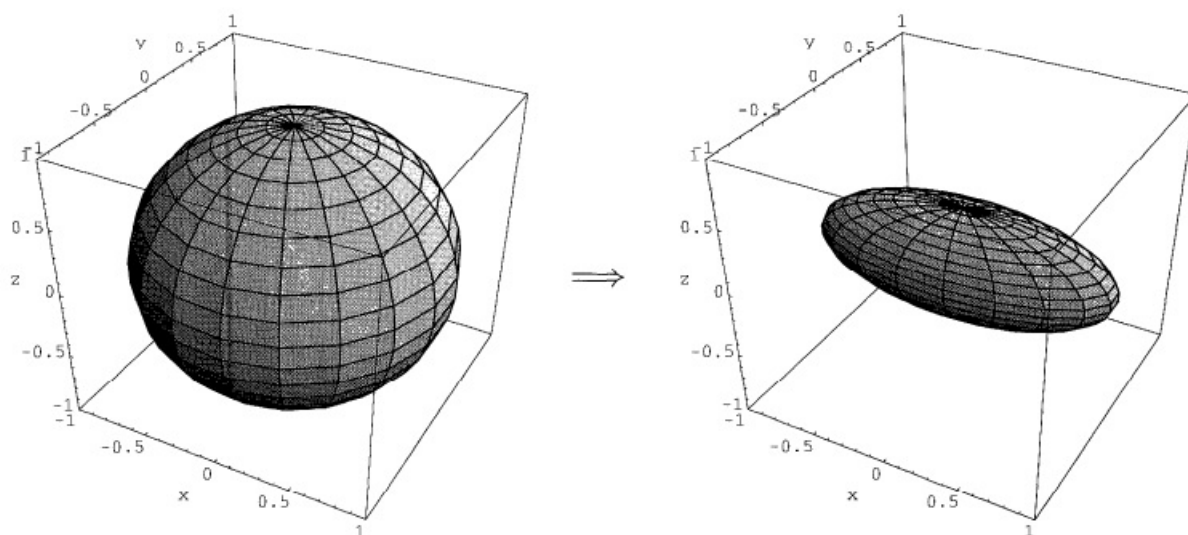
$$E_0 = \sqrt{1-p}X \quad (25.1)$$

$$E_1 = \sqrt{p}I$$

عملگرهای کراوس باید در رابطه کاملیت صدق کنند

$$E_0^\dagger E_0 + E_1^\dagger E_1 = 1 \quad (26.1)$$

تاثیر این کانال در کره بلاخ در شکل ۲.۱ است.



شکل ۲.۱: تاثیر کانال بیت برگردان در کره بلاخ برای احتمال $p=0, 3$

۲.۷.۱ کانال فاز برگردان

عملگرهای کراوس کانال فاز برگردان^۷ به شکل زیر هستند.

$$E_0 = \sqrt{1-p}I$$

$$E_1 = \sqrt{p}Z$$

^۷Phase flip

در رابطه بالا برای $p = \frac{1}{4}$ واهمدوسی کامل اتفاق می افتد، به عبارتی تمام عناصر غیر قطری صفر می شوند داریم.

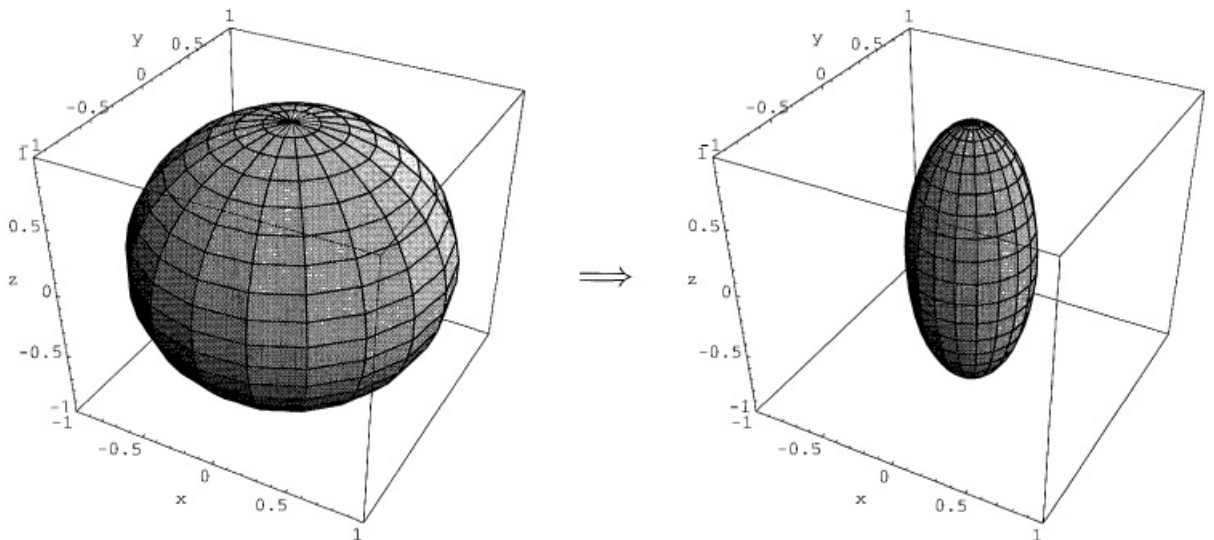
$$\rho \rightarrow \varepsilon(\rho) = P_0 \rho P_0 + P_1 \rho P_1 \quad (28.1)$$

که $P_1 = |1\rangle\langle 1|$ و $P_0 = |0\rangle\langle 0|$ هستند.

نمایش آن در کره بلاخ به صورت زیر است.

$$(r_x, r_y, r_z) \rightarrow (0, 0, r_z) \quad (29.1)$$

تاثیر این کانال در کره بلاخ در شکل ۳.۱ آمده است.



شکل ۳.۱: تاثیر کانال فاز برگردان در کره بلاخ برای احتمال $p=0,3$

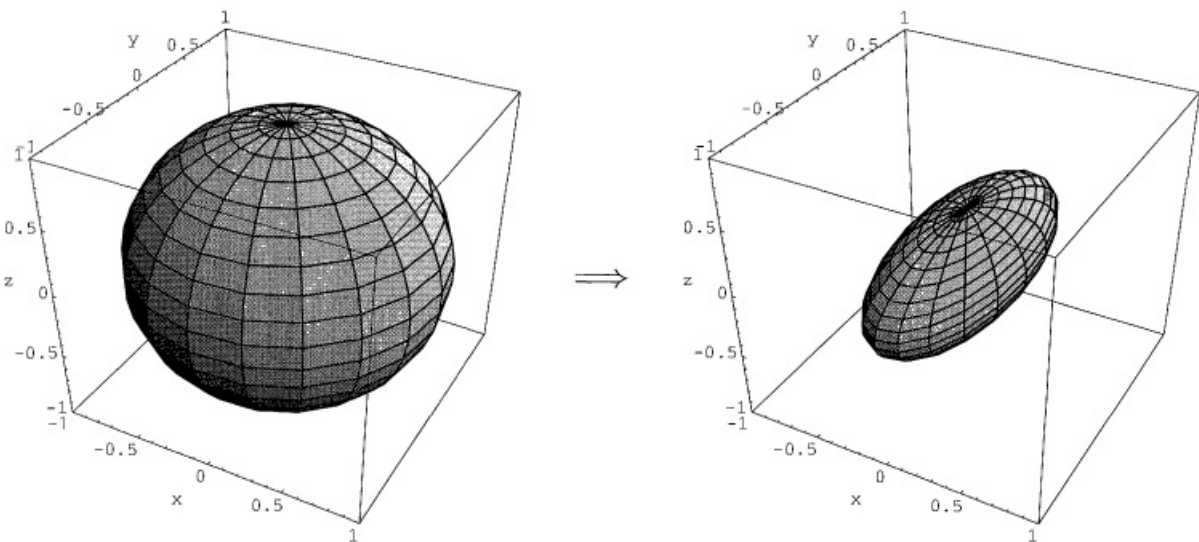
۳.۷.۱ کانال بیت-فاز برگردان

در کانال بیت-فاز برگردان^۸ کیوبیت با احتمال p در حالت اولیه باقی می ماند. با احتمال $1-p$ ، روی کیوبیت اثر می کند. عملگرهای کراوس آن به صورت زیر است.

$$E_0 = \sqrt{p}I = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7.1)$$

$$E_1 = \sqrt{1-p}Y = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

و در واقع ترکیبی از بیت برگردان و فاز برگردان است، به طوری که $Y = iXZ$ است. نمایش آن در کره بلاخ در شکل ۴.۱ آمده است.



شکل ۴.۱: تاثیر کانال بیت-فاز برگردان در کره بلاخ برای احتمال $p=0, 3$

^۸Bit-phase flip

۴.۷.۱ کانال واقطبش

در کانال واقطبش^۹ حالت اولیه با احتمال $1-p$ تغییر نمی کند و با احتمال p تمام اطلاعات آن از بین می رود و به یک حالت کاملاً مخلوط تبدیل می شود.

$$\varepsilon(\rho) = (1-p)\rho + p\frac{I}{4} \quad (31.1)$$

این کانال به شکل زیر در کره بلاخ اثر می کند.

$$\varepsilon : r \rightarrow (1-p)r \quad (32.1)$$

کانال واقطبش کره بلاخ را به صورت همسانگرد منقبض می کند. برای پیدا کردن عملگرهای کراوس از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$$\rho + X\rho X + Y\rho Y + Z\rho Z = 2I \quad (33.1)$$

با جایگذاری رابطه بالا در رابطه ۳۱.۱ به رابطه زیر می رسم.

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1-3p}{4}\rho + \frac{p}{4}X\rho X + \frac{p}{4}Y\rho Y + \frac{p}{4}Z\rho Z \quad (34.1)$$

بنابراین عملگرهای کراوس آن به صورت زیر هستند.

$$E_0 = \frac{\sqrt{1-3p}}{4}I$$

$$E_1 = \frac{\sqrt{p}}{4}\sigma_x$$

$$E_2 = \frac{\sqrt{p}}{4}\sigma_y$$

$$E_3 = \frac{\sqrt{p}}{4}\sigma_z$$

(۳۵.۱)

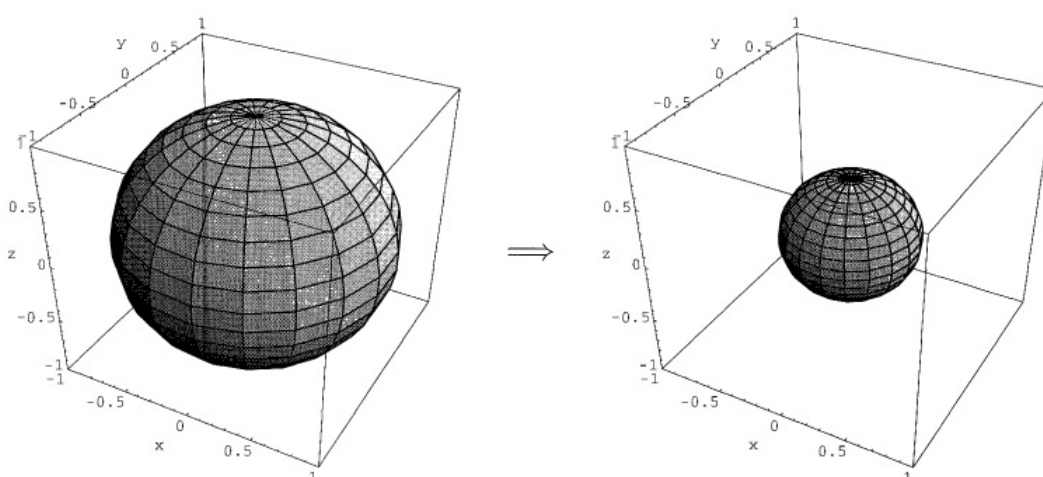
در کانال های واقطبش هر سه عملگر σ_x ، σ_y ، σ_z به صورت یکسان عمل می کنند. تاثیر این کانال در کره بلاخ در شکل ۵.۱ آمده است.

۵.۷.۱ میرایی فاز

در مکانیک کوانتومی فرایند نوفه ای که کاهش اطلاعات کوانتومی را بدون کاهش انرژی توصیف کند، میرایی فاز^{۱۰} است. کیوبیت $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ را در نظر بگیرید، $|\psi\rangle$ ترکیب خطی دو حالت پایه

^۹Depolarizing channel

^{۱۰}Phase Damping



شکل ۵.۱: تاثیر کانال واقطبش در کره بلاخ برای احتمال $p=0.5$

$|0\rangle$ و $|1\rangle$ با ورود به این کانال به تدریج فاز نسبی بین این دو حالت از بین می رود و حالت خروجی یک حالت مخلوط است. برای مدل سازی این کانال، عملگر چرخشی $R_z(\theta)$ که در آن θ به صورت تصادفی تغییر می کند را به صورت نامنظم و با یک توزیع گاوسی روی آن اثر می دهیم، در نتیجه عمل کانال میرایی فاز به صورت زیر است.

$$\varepsilon(R) = \frac{1}{4\pi} \int R_z(\theta) |\psi\rangle \langle\psi| R_z^\dagger(\theta) e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}} d\theta \quad (36.1)$$

ماتریس چگالی حالت ورودی که یک حالت خالص است به صورت زیر است.

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad (37.1)$$

$$|\psi\rangle \langle\psi| = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b} \\ b\bar{a} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (38.1)$$

داریم

$$R_z(\theta) |\psi\rangle \langle\psi| R_z(\theta) = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (39.1)$$

$$\varepsilon(\rho) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{i\theta} \\ b\bar{a}e^{-i\theta} & b\bar{b} \end{pmatrix} e^{-\frac{\theta^2}{4\lambda}} d\theta = \begin{pmatrix} a\bar{a} & a\bar{b}e^{\lambda} \\ b\bar{a}e^{-\lambda} & b\bar{b} \end{pmatrix} \quad (40.1)$$

که نشان می دهد جملات غیر قطری ماتریس چگالی با پارامتر $e^{-\lambda}$ دچار میرایی می شود و عملگرهای کراوس آن به صورت زیر هستند.

$$E_{\circ} = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \quad (41.1)$$

$$E_{\lambda} = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}$$

۶.۷.۱ میرایی دامنه

توصیف تاثیرات انتشار انرژی که به خاطر کاهش انرژی از سیستم کوانتومی به وجود می آید کاربرد مهمی از عملگرهای کوانتومی است.

دینامیک مربوط به اتمی که یک فوتون را منتشر می کند چگونه است؟ سیستم اسپینی در انرژی های بالا چگونه با محیط به تعادل می رسد؟ حالت یک فوتون، زمان پراکندگی در تداخل سنج چگونه است؟ هر کدام از این فرایندها خواص خاص خود را دارند اما یک رفتار عمومی برای همه آن ها به عنوان میرایی دامنه^{۱۱} شناخته می شود.

یک اتم دو ترازه S^A را در نظر می گیریم، آن ها را در کاواک S^B قرار می دهیم، کاواک S^B در ابتدا خالی است. اتم در حالت برانگیخته $|1^A\rangle$ می باشد و با احتمال γ به داخل کاواک گسیل می شود سپس به حالت پایه $|0^A\rangle$ خود انتقال می یابد و کاواک از حالت اولیه $|0^B\rangle$ به حالت برانگیخته $|1^B\rangle$ گذار می کند. احتمال گذار $|\mu^A, \kappa^B\rangle \rightarrow |\nu^A, \lambda^B\rangle$ به صورت $|\langle \nu^A, \lambda^B | U^{AB} | \mu^A, \kappa^B \rangle|^2$ است.

$$|\langle 0^A, 1^B | U^{AB} | 1^A, 0^B \rangle|^2 = \gamma$$

$$|\langle 1^A, 0^B | U^{AB} | 1^A, 0^B \rangle|^2 = 1 - \gamma \quad (42.1)$$

$$|\langle 0^A, 0^B | U^{AB} | 0^A, 0^B \rangle|^2 = 1$$

^{۱۱}Amplitude Damping

بقیه عناصر ماتریس عملگر صفر هستند، بنابراین دو عملگر کراوس به شکل زیر هستند.

$$\begin{aligned} E_{\circ}^A &= \langle \circ^B | U^{AB} | \circ^B \rangle = \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix} \\ E_{\backslash}^A &= \langle \backslash^B | U^{AB} | \circ^B \rangle = \begin{pmatrix} \circ & \sqrt{\gamma} \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (43.1)$$

با توجه به رابطه اثر این ابرعملگر روی حالت اتمی دلخواه ورودی ρ^A به شکل زیر است.

$$\varepsilon(\rho^A) = E_{\circ}^A \rho^A E_{\circ}^{A\dagger} + E_{\backslash}^A \rho^A E_{\backslash}^{A\dagger} = \begin{pmatrix} \rho_{\circ\circ} + \gamma \rho_{\backslash\backslash}^A & \sqrt{1-\gamma} \rho_{\circ\backslash}^A \\ \sqrt{1-\gamma} \rho_{\backslash\circ}^A & (1-\gamma) \rho_{\backslash\backslash}^A \end{pmatrix} \quad (44.1)$$

در این صورت احتمال پیدا کردن اتم در حالت پایه افزایش می یابد و دیگر عناصر ماتریس ρ^A همگی کاهش می یابند.

کانال میراکننده دمای غیر صفر

هرگاه سیستم در دمای غیر صفر باشد، حالت ها، مخلوطی از حالت های $|\circ\rangle\langle\circ|$ و $|\backslash\rangle\langle\backslash|$ است که نسبت بین این دو حالت با دما مشخص می شود. بنابراین فرض می کنیم حالت اولیه سیستم به صورت زیر است.

$$\rho = (1-p) |\circ\rangle\langle\circ| + p |\backslash\rangle\langle\backslash| \quad (45.1)$$

بنابراین ماتریس چگالی سیستم دچار تحول زیر می شود.

$$\rho = E_{\circ} \rho E_{\circ}^{\dagger} + E_{\backslash} \rho E_{\backslash}^{\dagger} + E_{\vee} \rho E_{\vee}^{\dagger} + E_{\nabla} \rho E_{\nabla}^{\dagger} \quad (46.1)$$

که در آن عملگرهای کراوس عبارتند از

$$\begin{aligned}
 E_{\circ} &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & \circ \\ \circ & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix} \\
 E_{\setminus} &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} \circ & \sqrt{\gamma} \\ \circ & \circ \end{pmatrix} \\
 E_{\gamma} &= \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} & \circ \\ \circ & 1 \end{pmatrix} \\
 E_{\gamma} &= \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \sqrt{\gamma} & \circ \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{۴۷.۱}$$

که به حالت عمومی میرایی دامنه معروف است.

فصل ۲

اندازه‌گیری کوانتومی

اندازه‌گیری کوانتومی به وسیله مجموعه‌ای از عملگرهای کوانتومی یعنی $\{M_m\}$ توصیف می‌شوند. این عملگرها روی فضای حالت سیستم مورد اندازه‌گیری عمل می‌کنند. شاخص m مربوط به خروجی اندازه‌گیری است. اگر حالت سیستم کوانتومی درست قبل از اندازه‌گیری $|\psi\rangle$ باشد، پس از اندازه‌گیری احتمال اینکه نتیجه‌ی m اتفاق بیفتد از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$P(m) = \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle \quad (1.2)$$

و حالت سیستم بلافاصله بعد از اندازه‌گیری به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{M_m |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle}} \quad (2.2)$$

عملگرهای اندازه‌گیری رابطه کاملیت را ارضا می‌کند.

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I$$

به عبارت دیگر مجموع احتمالات برابر یک است.

$$\sum_m P(m) = \sum_m \langle \psi | M_m^\dagger M_m | \psi \rangle = 1$$

یک مثال ساده اما مهم از یک اندازه‌گیری، اندازه‌گیری یک کیوبیت است. اندازه‌گیری که دارای دو خروجی است، با عملگرهای اندازه‌گیری $M_0 = |0\rangle\langle 0|$ و $M_1 = |1\rangle\langle 1|$ تعریف می‌شود. از این تعریف مشاهده می‌شود که هر کدام از عملگرها هرمیتی هستند و $M_1^\dagger = M_1$ و $M_0^\dagger = M_0$ هستند. بنابراین با توجه به رابطه کاملیت $I = M_0^\dagger M_0 + M_1^\dagger M_1 = M_0 + M_1$ است. فرض می‌کنیم حالت مورد اندازه‌گیری به شکل $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ است. در این صورت احتمال بدست آوردن خروجی به شکل زیر است.

$$P(0) = \langle \psi | M_0^\dagger M_0 | \psi \rangle = \langle \psi | M_0 | \psi \rangle = |\alpha|^2 \quad (3.2)$$

به طور مشابه احتمال بدست آوردن خروجی ۱ برابر با $P(1) = |\beta|^2$ است. بنابراین حالت بعد از اندازه‌گیری در این دو مورد به شکل زیر است.

$$\begin{aligned} \frac{M_0 |\psi\rangle}{|\alpha|} &= \frac{\alpha}{|\alpha|} |0\rangle \\ \frac{M_1 |\psi\rangle}{|\beta|} &= \frac{\beta}{|\beta|} |1\rangle \end{aligned} \quad (4.2)$$

دستگاه‌های اندازه‌گیری سیستم‌های مکانیک کوانتومی به حساب می‌آیند. بنابراین سیستم کوانتومی اندازه‌گیری شونده و دستگاه اندازه‌گیری با هم بخشی از یک سیستم کوانتومی بزرگتر را تشکیل می‌دهند.

۱.۲ اندازه‌گیری‌های تصویری

نوع خاصی از اندازه‌گیری‌ها با عنوان اندازه‌گیری تصویری^۱ شناخته شده است و کاربردهای فراوانی در اطلاعات کوانتومی دارد. یک اندازه‌گیری تصویری با مشاهده‌پذیری هرمیتی مثل M ، مشخص می‌شود که می‌توان آن را به شکل زیر بسط داد.

$$M = \sum_m m P_m$$

که P_m تصویرگری بر ویژه حالت M با ویژه‌مقدار m است. خروجی‌های ممکن از اندازه‌گیری مشابه ویژه مقادیر m مشاهده‌پذیر هستند. با اندازه‌گیری بر روی حالت $|\psi\rangle$ احتمال بدست آوردن نتیجه m به شکل زیر است.

$$P(m) = \langle \psi | P_m | \psi \rangle$$

زمانی که خروجی m اتفاق می‌افتد حالت سیستم کوانتومی بعد از اندازه‌گیری سریعاً در حالت زیر است:

$$\frac{P_m |\psi\rangle}{\sqrt{P(m)}}$$

اگر علاوه بر رابطه کاملیت $\sum_m M_m^\dagger M_m = 1$ ، M_m ها تصویرگرهای متعامدی باشند رابطه $M_m M_{m'} = \delta_{mm'} M_m$ نیز برقرار خواهد بود. عملگری تصویری به شکل بالا تعریف شده است. از جمله خواص مفید عملگرهای تصویری این است که به راحتی متوسط مقادیر اندازه‌گیری شده را می‌توان بدست آورد.

$$\begin{aligned} E(M) &= \sum_m m P(m) \\ &= \sum_m m \langle \psi | P_m | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | \left(\sum_m m P_m \right) | \psi \rangle \\ &= \langle \psi | M | \psi \rangle \end{aligned} \quad (5.2)$$

که فرمولی مفید در ساده‌سازی بسیاری از محاسبات کوانتومی به حساب می‌آید. مقدار متوسط مشاهده‌پذیر M اغلب به شکل $\langle M \rangle = \langle \psi | M | \psi \rangle$ نوشته می‌شود. از این فرمول می‌توان رابطه‌ای مناسب در بدست آوردن انحراف معیار مربوط به M بدست آورد.

$$\Delta(M) = \left\langle (M - \langle M \rangle)^2 \right\rangle = \langle M^2 \rangle - \langle M \rangle^2 \quad (6.2)$$

مقدار بدست آمده از انحراف معیار، سنجشی مناسب از پخش شدگی مقادیر اندازه‌گیری شده M است [۱].

^۱Projective measurement

۲.۲ اندازه‌گیری ضعیف کوانتومی

اندازه‌گیری ضعیف^۲ تا حد زیادی به عنوان یک ابزار جستجویی امید بخشی به حساب می‌آید. برای مثال تعیین حالت ذره بین دو اندازه‌گیری که با طبیعت در تناقض است با کمک این تکنیک امکان پذیر شده است. اندازه‌گیری ضعیف می‌تواند بدون رمبش^۳ حالت به ویژه بردارها اطلاعاتی درباره دامنه یک حالت کوانتومی آشکار کند که این حالت با یک جفت شدگی ضعیف بین دستگاه اندازه‌گیری و سیستم انجام می‌شود. می‌توان گفت اندازه‌گیری‌های ضعیف، تعمیمی از اندازه‌گیری عادی کوانتومی (تصویری) هستند. در جفت شدگی ضعیف بردار حالت سامانه رمبش نمی‌کند، بلکه با یک زاویه خیلی کوچکی به یک طرف متمایل^۴ می‌شود. دستگاه اندازه‌گیری یک ویژه مقدار مشخص را نشان نمی‌دهد بلکه یک (بر هم نهی)^۵ از چندین مقدار را مشخص می‌کند. سوالی که ممکن است مطرح شود این است که اندازه‌گیری ضعیف چه نوع اطلاعاتی را آشکار می‌کند؟

۱.۲.۲ اندازه‌گیری ضعیف: تعریف

پدیده‌های زیادی ما را بر آن می‌دارد تا به دنبال اندازه‌گیری ضعیف به عنوان تعمیمی برای اندازه‌گیری تصویری باشیم. بدست آوردن تدریجی اطلاعات یک سیستم در حالی که حالت اولیه آن حفظ شود [۲]، تعیین حالت سیستم بین دو اندازه‌گیری قوی^[۳] و تعیین مقادیر غیرمعمول ضعیف^[۴]. تنها سه مثال از این پدیده‌ها هستند. اندازه‌گیری ضعیف باید به عنوان تعمیمی از اندازه‌گیری قوی رفتار کند. در تئوری اندازه‌گیری ضعیف هم سیستم و هم دستگاه اندازه‌گیری، سیستم‌های کوانتومی هستند. اندازه‌گیری ضعیف شامل دو مرحله است در اولین مرحله دستگاه اندازه‌گیری کوانتومی را با سیستم کوانتومی به طور ضعیف جفت می‌کنیم. در دومین مرحله دستگاه اندازه‌گیری را قویاً اندازه می‌گیریم. حالت رمبش کرده از دستگاه اندازه‌گیری به عنوان خروجی فرایند اندازه‌گیری ضعیف است برای اینکه اندازه‌گیری ضعیف باشد، انحراف معیار تابع توزیع خروجی اندازه‌گیری باید بزرگتر از تفاوت بین ویژه مقادیر سیستم باشد. فرض کنید $|\phi_d\rangle$ معادله موج دستگاه اندازه‌گیری را مشخص کند. اگر آن را بر پایه مکان نمایش دهیم به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$|\phi\rangle = |\phi_d\rangle = \int_x \phi(x) |x\rangle dx \quad (7.2)$$

که x متغیر مکان عقربه اندازه‌گیری است و $\hat{X}_d$ را عملگر مکان فرض کرده‌ایم به طوری که $\hat{X}_d |x\rangle = x |x\rangle$

^۲Weak measurement

^۳collapse

^۴Biase

^۵Superposition

^۶Weak values

$|x\rangle$ (در اینجا $\hat{X}$ عملگر مکان، $|x\rangle$ ویژه بردارش، و x ویژه مقدار هستند). همین وضعیت را برای عملگر $\hat{P}$ نیز داریم. زیرنویس d جهت مشخص کردن دستگاه اندازه‌گیری استفاده می‌شود. هم چنین فرض می‌کنیم که $\phi(x)$ با واریانس $\Delta = \sigma^2$ حول $\circ$ بهنجار شده‌است.

$$\phi(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \quad (۸.۲)$$

$|\phi_d\rangle$ را به طور قوی اندازه‌گیری خواهیم کرد. به عبارتی عقربه دستگاه اندازه‌گیری رمبش خواهد کرد که همان خروجی اندازه‌گیری ضعیف ما خواهد بود. فرض کنید S سیستمی است که می‌خواهیم اندازه‌گیری روی آن انجام شود. $\hat{A}$ را یک عملگر هرمیتی در فضای S در نظر می‌گیریم. به علاوه $\hat{A}$ دارای N ویژه بردار $|a_j\rangle$ است که $\hat{A}|a_j\rangle = a_j|a_j\rangle$ است. یک حالت کلی $|\psi\rangle$ را در نظر بگیرید که درویژه پایه‌های A به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$|\psi\rangle = \sum_j \alpha_j |a_j\rangle \quad (۹.۲)$$

هامیلتونی بر هم کنش $\hat{H}_{in}$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم [۵].

$$\hat{H}_{in} = g(t)A \otimes P_d \quad (۱۰.۲)$$

در اینجا $g(t)$ تابع جفت شدگی ضربه^۷ است که رابطه زیر را ارضا می‌کند.

$$\int_0^T g(t)dt = 1 \quad (۱۱.۲)$$

T زمان جفت شدگی است. $\hat{P}_d$ عملگری است که با $\hat{X}_d$ جابه جا نمی‌شود و $[\hat{X}_d, \hat{P}_d] = i\hbar$ است. فرایند اندازه‌گیری را با حالت کلی سیستم و دستگاه اندازه‌گیری به شکل زیر شروع می‌کنیم.

$$|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (۱۲.۲)$$

بنابراین به دنبال عبارت زیرهستیم.

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T H dt} |\psi\rangle \otimes |\phi\rangle \quad (۱۳.۲)$$

بنابراین بعد از اندازه‌گیری دستگاه اگر عقربه روی $|x\rangle$ رمبش کند (یا خروجی x داشته باشد) خواهیم

^۷Coupling impulse function

داشت.

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T \hat{H} dt} | \psi \rangle \otimes | \phi \rangle =$$

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T g(t) A \otimes \hat{P}_d dt} \sum_j \alpha_j | a_j \rangle \otimes | \phi \rangle =$$

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T g(t) a_j \hat{P}_d dt} \sum_j \alpha_j | a_j \rangle \otimes | \phi \rangle = \quad (14.2)$$

$$\langle x | e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^T g(t) a_j \hat{P}_d dt} \sum_j \alpha_j | a_j \rangle \otimes | \phi \rangle =$$

$$\langle x - a_j | \sum_j \alpha_j | a_j \rangle \otimes | \phi \rangle$$

بنابراین

$$e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} | \psi \rangle \otimes | \phi \rangle = \sum_j \alpha_j | a_j \rangle \otimes | \phi(x - a_j) \rangle \quad (15.2)$$

توابع موج ϕ در رابطه بالا انحراف معیار زیادی داشته و با یکدیگر همپوشانی دارند. هر چه انحراف معیار تابع توزیع بیشتر باشد اندازه‌گیری ضعیف تر است. در صورتی که این توابع موج همپوشانی نداشته باشند، اندازه‌گیری قوی است. بنابراین فرایند با انتخاب انحراف معیار قابل کنترل است.

مثال ۱

فرض کنید $\hat{S}_z$ و $\hat{A} = \frac{\hbar}{4}$ و $\hat{H}_{int} = \hat{A} \otimes \hat{P}_d$ هستند. $|\psi\rangle$ را می‌توان بر حسب ویژه بردارهای $\hat{S}_z$ نوشت برای مثال $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. سیستم با دستگاه اندازه‌گیری دارای جفت‌شدگی ضعیف هستند.

$$\int_x [\alpha|0\rangle \otimes \phi(x - \frac{\hbar}{4}) + \beta|1\rangle \otimes \phi(x + \frac{\hbar}{4})] |x\rangle dx \quad (16.2)$$

در رابطه بالا توابع ϕ دو تابع نرمال هستند که به خاطر انحراف معیار بالا دارای همپوشانی هستند.

۲.۲.۲ تغییر کوچک بردار اولیه

در مثال ۱ می‌توانیم سیستم و دستگاه اندازه‌گیری درهم تنیده را به صورت دیگری بنویسیم.

$$\int_x [e^{\frac{-(x-\frac{h}{4\sigma})^2}{4\sigma^2}} \alpha |0\rangle \otimes |x\rangle + e^{\frac{-(x+\frac{h}{4\sigma})^2}{4\sigma^2}} \beta |1\rangle \otimes |x\rangle] dx \quad (17.2)$$

حالا عقربه دستگاه اندازه‌گیری را قویاً اندازه‌گیری می‌کنیم. فرض کنید عقربه به بردار $|x_0\rangle$ رمبش کرده‌است، در نتیجه سیستم در حالت زیر خواهد بود.

$$[e^{\frac{-(x_0-\frac{h}{4\sigma})^2}{4\sigma^2}} \alpha |0\rangle + e^{\frac{-(x_0+\frac{h}{4\sigma})^2}{4\sigma^2}} \beta |1\rangle] \otimes |x_0\rangle \quad (18.2)$$

ویژه مقدار x_0 می‌تواند هر جایی اطراف یا حتی فواصل دورتر باشد. علی‌الخصوص زمانی که σ به اندازه کافی بزرگ باشد. به این معناست که اندازه‌گیری خیلی ضعیف است. اگر عقربه به مقدار x_0 حول ۱ رمبش کند، به این معناست که دامنه بعد از اندازه‌گیری $|0\rangle$ مقدار کمی بیشتر از دامنه $|1\rangle$ خواهد بود و بر عکس. بنابراین رمبش عقربه بردار سیستم را کمی تغییر می‌دهد. به هر حال اگر σ نسبت به اختلاف بین ویژه مقادیر $\hat{S}_z$ بسیار بزرگتر باشد. تغییرات حالت سیستم بعد از اندازه‌گیری بسیار کم بوده و حالت نمایی بسیار شبیه حالت اولیه است. در مجموع بردار سیستم در جهتی که مشابه مقدار خروجی عقربه است کمی متمایل^۹ می‌شود تعمیمی از اندازه‌گیری قوی است). از یک طرف اطلاعاتی که از اندازه عقربه بدست می‌آوریم بسیار است، در انحراف معیار بزرگ (اندازه‌گیری ضعیف) x_0 می‌تواند هر مقداری داشته باشد. از طرف دیگر حالت سیستم رمبش نمی‌کند بلکه مقدار کمی متمایل می‌شود. هرچه اندازه‌گیری قوی‌تر شود مقدار خروجی عقربه مشخص‌تر و حالت سیستم به یکی از ویژه مقادیر بیشتر رمبش می‌کند. به عبارتی بدست آوردن مقدار مشخص x_0 معادل رمبش کامل سیستم است. ذکر این نکته حائز اهمیت است که همیشه بین مقدار اندازه‌گیری شده عقربه و جهت تمایل بردار سیستم یک تناظر برقرار است.

۳.۲.۲ محاسبه متوسط همه ویژه مقادیر

فرض می‌کنیم $\hat{A}$ یک عملگر هرمیتی بر روی سیستم S است که دارای ویژه مقادیر a_j و ویژه کت‌های $|a_j\rangle$ باشد.

نشان می‌دهیم که با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف، می‌توان متوسط ویژه مقادیر این عملگر را به سادگی بدست آورد. اگر حالت سیستم $|\psi\rangle = \sum_j a_j |a_j\rangle$ را به صورت ضعیف با دستگاه اندازه‌گیری ای که توزیعی نرمال حول 0 دارد به طور ضعیف جفت کنیم، حالت سیستم ما بعد از اندازه‌گیری عقربه با

^۸Post select

^۹Biasing

استفاده از ۹.۲ و ۱۶.۲ به شکل زیر خواهد شد.

$$|\psi\rangle = (\sqrt{2}\sigma\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_j a_j |a_j\rangle e^{-\frac{(x-a_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (۱۹.۲)$$

بنابراین احتمال اینکه عقربه x را نشان دهد به شکل زیر خواهد بود.

$$p(x) = (\sqrt{2}\sigma\pi)^{-\frac{1}{2}} \sum_j |a_j|^2 e^{-\frac{(x-a_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (۲۰.۲)$$

که این تابع یک تابع نرمال چندگانه با مدهای مختلف است. حال اگر σ نسبت به انحراف معیار ویژه مقادیر به اندازه کافی بزرگ باشد، رابطه بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$p(x) \approx (\sqrt{2}\sigma\pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(x-\sum_j |a_j|^2 a_j)^2}{2\sigma^2}} \quad (۲۱.۲)$$

که این تابع یک تابع نرمال حول نقطه مرکزی $\sum_j |a_j|^2 a_j$ است و متوسط تمام ویژه مقادیر می‌باشد. بنابراین به وسیله تابع توزیع عقربه به صورت تقریبی می‌توان متوسط تمام ویژه مقادیر را بدست آورد [۶].

فصل ۳

جلوگیری از واهمدوسی کوانتومی با استفاده

از اندازه‌گیری جزئی و معکوس سازی

اندازه‌گیری

۱.۳ تابع واهمدوسی

تحول سیستم‌های کوانتومی باز را نمی‌توان به وسیله یک تحول یکانی توصیف کرد. معمولاً مجموعه سیستم و محیط آن یک مجموعه بسته در نظر گرفته می‌شود و بنابراین سیستم مورد بررسی در واقع زیر مجموعه‌ای از یک مجموعه بزرگتر است. هامیلتونی‌های سیستم و محیط را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$H = H_s + H_B + H_I = H_\circ + H_I \quad (۱.۳)$$

که H_s هامیلتونی سیستم و H_B هامیلتونی محیط است. هامیلتونی برهم‌کنشی H_I بین سیستم و محیط به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$H_I = \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes B_n \equiv \sum_n A_n \otimes B_n \quad (۲.۳)$$

این هامیلتونی برهم‌کنش شامل مجموعه مشخصی از بردارهای پایه متعامد $|n\rangle$ مربوط به سیستم‌های کوانتومی است، در حالی که $B_n = B_n^\dagger$ عملگرهای اختیاری از محیط هستند. در ادامه فرض می‌کنیم که هامیلتونی H_s با عملگر $A_n = |n\rangle \langle n|$ جابجا می‌شود.

$$[H_\circ + H_I, A_n] = [H_\circ, A_n] = 0 \quad (۳.۳)$$

بنابراین عملگرهای سیستم A_n کمیت‌های پایسته هستند و انرژی میانگین سیستم نسبت به زمان ثابت است

$$\frac{d}{dt} \langle H_s(t) \rangle = 0 \quad (۴.۳)$$

در تصویر برهم‌کنش، هامیلتونی برهم‌کنش به شکل زیر است.

$$H_I(t) = e^{iH_\circ t} H_I e^{-iH_\circ t} = \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes B_n(t) \quad , \quad B_n(t) = e^{iH_\circ t} B_n e^{-iH_\circ t} \quad (۵.۳)$$

عملگر تحول زمانی برای سیستم مرکب (سیستم کوانتومی و محیط آن) در تصویر برهم‌کنش را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$U(t) = T \leftarrow \exp \left[-i \int_0^t ds \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes B_n(s) \right] \quad (۶.۳)$$

با توجه به جابجایی عملگر A_n با هامیلتونی برهم‌کنشی، حالت‌های پایه $|n\rangle$ متأثر از دینامیک جفت‌شده نیست. اگر حالت اولیه را به شکل زیر در نظر بگیریم.

$$|\Psi(\circ)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \otimes |\phi_n(\circ)\rangle \quad (۷.۳)$$

که $|\phi\rangle$ یک حالت دلخواه از منبع است

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle \quad (۸.۳)$$

که در آن

$$|\phi_n(t)\rangle = T \leftarrow \exp[-i \int_0^t ds B_n(s)] |\phi\rangle = V_n(t) |\phi\rangle \quad (۹.۳)$$

حالت‌های ۸.۳ برهم‌نهی از حالت‌های $|n\rangle \otimes |\phi_n(t)\rangle$ است که یک حالت درهم‌تنیده سیستم محیطی است. علاوه بر آن همبستگی بین حالت‌های مختلف سیستم $|n\rangle$ و حالت محیط $|\phi_n(t)\rangle$ را نشان می‌دهد. به دلیل برهم‌کنش از نوع اندازه‌گیری، اطلاعات حالت سیستم $|\Psi(t)\rangle$ برهم‌نهی تمام حالت‌های $|n\rangle$ است. همان‌گونه که این حالات در $|\Psi(0)\rangle$ حضور داشت. به عنوان یک نتیجه همدوسی‌ها هنوز در ماتریس چگالی کاهش‌یافته سیستم حضور دارند که به صورت زیر بیان می‌شود

$$\rho_s(t) = \text{tr}\{|\Psi(t)\rangle \langle \Psi(t)|\} = \sum_{n,m} C_n C_m^* |n\rangle \langle m| \langle \phi_m(t) | \phi_n(t) \rangle \quad (۱۰.۳)$$

با توجه به اینکه $\langle \phi_n(t) | \phi_n(t) \rangle = 1$ ، عناصر قطری $\rho_s(t)$ نسبت به زمان ثابت می‌مانند، اگرچه عناصر غیرقطری $\rho_s(t)$ نسبت به زمان تغییر می‌کند. وابستگی زمانی عنصر ماتریسی $\langle n | \rho_s(t) | m \rangle$ با هم‌پوشانی حالت‌های متناظر منبع $|\phi_m(t)\rangle$ و $|\phi_n(t)\rangle$ نشان داده می‌شود.

$$\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle = \exp[\Gamma_{mn}(t)] \quad , \quad \Gamma_{mn}(t) \leq 0 \quad (۱۱.۳)$$

برای $m \neq n$ رفتار عناصر غیرقطری ماتریس چگالی کاهش‌یافته را توصیف می‌کند که تابع $\Gamma_{mn}(t)$ تابع واهمدوسی نامیده می‌شود. $\Gamma_{mn}(t)$ تابعی به‌شدت وابسته به زمان است، این تابع عموماً به نوع خاص جفت‌شدگی سیستم-محیط و به پارامترهای مختلف مدل میکروسکوپی و همچنین به نوع خواص حالت اولیه وابسته است. در خیلی از سیستم‌های فیزیکی دینامیک‌های برگشت‌ناپذیر توسط برهم‌کنش سیستم-محیط القا می‌شود که منجر به کاهش سریع هم‌پوشانی $\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle$ برای $m \neq n$ می‌شود. به عنوان نمونه شرایطی را در نظر می‌گیریم که برای $m \neq n$ هم‌پوشانی حالت‌های $|\phi_m(t)\rangle$ و $|\phi_n(t)\rangle$ پس از زمان‌هایی که در مقایسه با زمان مشخصه واهمدوسی τ_D زیاد باشد، به صفر کاهش یابد.

$$\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle \rightarrow \delta_{mn} \quad , \quad t \geq \tau_D \quad (۱۲.۳)$$

در نتیجه منجر به تغییر ماتریس چگالی سیستم کاهش یافته به صورت زیر می‌شود.

$$\rho_s(t) \rightarrow \sum_n |C_n|^2 |n\rangle \langle n| \quad (۱۳.۳)$$

همدوسی ماتریس چگالی در پایه $|n\rangle$ به عنوان نتیجه‌ای از برهم‌کنش با محیط از بین می‌رود. بعد از زمان‌های $t \geq \tau_D$ رفتار حالت $\rho_s(t)$ از سیستم کاهش یافته به صورت آمیخته‌ای ناهدوس از حالت‌های

$|n\rangle$ است. انتقال دینامیکی نشان داده شده توسط ۱۳.۳ واهمدوسی نامیده می‌شود. با توجه به این رابطه ماتریس چگالی کاهش یافته در یک مجموعه پایه‌های خاص حالت‌های $|n\rangle$ قطری می‌شود که در برخی مواقع پایه ترجیحی نامیده می‌شود.

به‌طور عمومی‌تر می‌توان یک حالت اولیه در سیستم کلی مرکب را به شکل زیر بیان کرد

$$\rho(\circ) = |\psi(\circ)\rangle \langle \psi(\circ)| \otimes \rho_B(\circ) \quad (14.3)$$

که $|\psi(\circ)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$ حالت اولیه سیستم و $\rho_B(\circ)$ ممکن است هر ماتریس چگالی از منبع، برای مثال یک حالت با تعادل گرمایی باشد، ماتریس چگالی سیستم کاهش یافته در زمان t می‌تواند به شکل زیر نوشته شود.

$$\rho_s(t) = \sum_{n,m} C_n C_m^* |n\rangle \langle m| \text{tr}_B \{ V_m^{-1}(t) V_n(t) \rho_B(\circ) \} \quad (15.3)$$

بنابراین تابع واهمدوسی، به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\Gamma_{nm}(t) = \ln |\langle V_m^{-1}(t) V_n(t) \rangle| \quad (16.3)$$

که در براکت فوق مقدار انتظاری محاسبه شده بر ماتریس چگالی اولیه محیط، $\rho_B(\circ)$ محاسبه می‌شود. تئوری واهمدوسی کوانتومی کاربردهای فراوانی دارد که از مسائل بنیادی مکانیک کوانتومی گرفته تا کاربردهای تکنولوژی در اطلاعات کوانتومی گسترده شده است. به علاوه تکنیک‌های تجربی قادر به مشاهده و کنترل پدیده واهمدوسی هستند و امکان مقایسه کمی با تحلیل‌های تئوری وجود دارد [۹].

۲.۳ جلوگیری از واهمدوسی به وسیله اندازه‌گیری ضعیف

۱.۲.۳ مقدمه

برتری محاسبات کوانتومی نسبت به تکنولوژی اطلاعات کلاسیکی در تحول همدوس حالت‌های کوانتومی است. در واقع واهمدوسی فرایند کاهش همدوسی کوانتومی است. برای نمونه میرایی دامنه و میرایی فاز هم برهم‌نهی حالت‌های کوانتومی و هم درهم‌تنیدگی حالت‌های چندگانه را تحت تاثیر قرار می‌دهد [۱]، [۷]، [۸]. در اکثر سیستم‌های کوانتومی وجود واهمدوسی اجتناب‌ناپذیر است. از این روی می‌توان گفت جلوگیری از واهمدوسی ناشی از کانال‌های کوانتومی از جمله چالش‌های بزرگ اطلاعات کوانتومی به حساب می‌آید.

روش‌های متعددی برای جلوگیری از واهمدوسی معرفی شده‌است، از جمله: تصحیح خطای کوانتومی، که این روش با کدگذاری کیوبیت منطقی در چند کیوبیت فیزیکی، انجام اندازه‌گیری‌های مکرر و عمل تصحیح در جلوگیری از واهمدوسی موثر بوده‌است [۱۰]. استفاده از زیر فضای بدون واهمدوسی روش

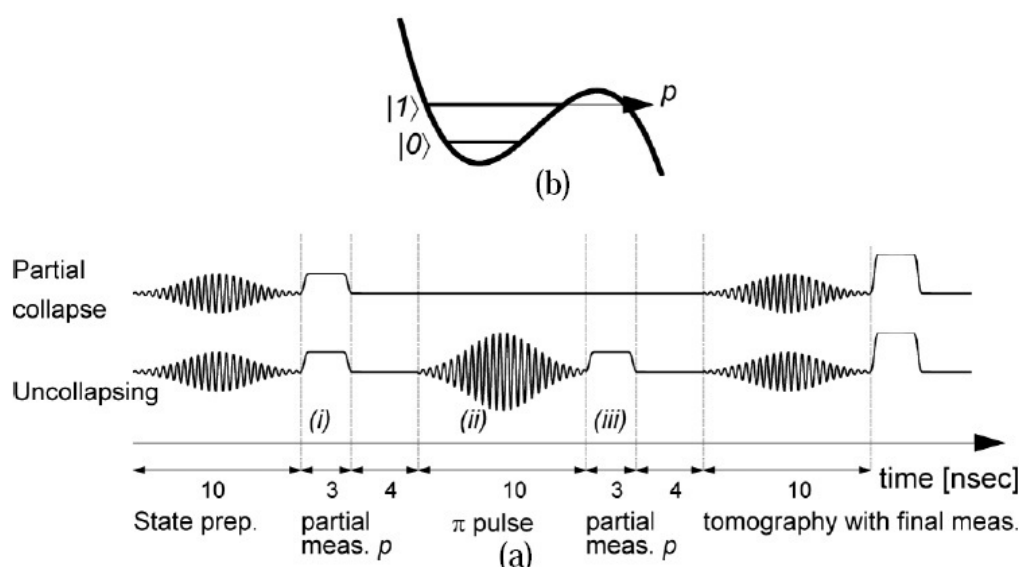
دیگری برای جلوگیری از واهمدوسی است. البته هر دو این روش ها به فضای هیلبرت بزرگتری نیازمند هستند. جداسازی دینامیکی نیز از جمله روش های جلوگیری از واهمدوسی است [۱۴]، [۱۶] ولی مانند دو روش قبل نیاز به فضای هیلبرت بزرگ ندارد. اما در مواقعی که واهلش انرژی ناشی از میرایی دامنه است و در آن زمان واهمدوسی کوتاهتر از زمان کنترل و اعمال گیت کوانتومی است، کاربردی نیست [۱۴]، [۱۶]. حال هدف از این بخش مطالعه بر روی روشی با استفاده از "بازبرپایی"^۱ برای جلوگیری از واهلش انرژی به وجود آمده در یک تک کیوبیت است.

۲.۲.۳ بازبرپایی

یک اندازه گیری ضعیف اطلاعات یک سیستم کوانتومی (کیوبیت) و نتایج را به وسیله تبدیل غیریکانی از آن خارج می کند، با این وجود در واقع می توان با یک چرخش به معنای دیگر با اعمال یک اندازه گیری جزئی دوم با همان شدت اطلاعات به دست آمده را پاک کرد و در نهایت با از بین بردن تأثیرات دو اندازه گیری حالت اولیه سیستم را بازیافت کرد.

بازبرپایی را می توان این گونه معنی کرد: یک فرایند معکوس سازی است که در آن یک اندازه گیری جزئی کوانتومی با اندازه گیری دیگری با نتیجه ای کاملاً متناقض، انجام می شود. بنابراین کل اطلاعات کلاسیکی بدست آمده از فرایند صفر است و امکان بازیافت حالت اولیه وجود دارد. از آنجایی که اندازه گیری ضعیف باعث رمبش جزئی است، بنابراین به طور جزئی اطلاعات از سیستم بیرون کشیده می شود. می توان نشان داد اندازه گیری باعث یک تبدیل غیریکانی و غیرتصویری در حالت کوانتوم است. بعد از چنین اندازه گیری ضعیفی با از بین بردن تأثیرات اندازه گیری و به وجود آوردن بازبرپایی، حالت کوانتومی اولیه سیستم بازگردد. اگر دومین اندازه گیری این نتیجه مطلوب را بدهد، حالت اولیه بازیافت می شود. در حالی که اگر نتیجه اندازه گیری دوم نتیجه دلخواه نباشد، تلاش برای بازبرپایی بیهوده است [۱۶]. با افزایش شدت اندازه گیری اول، احتمال موفقیت کاهش می یابد بنابراین بازبرپایی برای یک اندازه گیری معمول تصویری دارای احتمال صفر است. مشاهده یک سیستم کوانتومی الزاماً حالت سیستم را بهم میریزد، در مورد یک اندازه گیری قوی قطعاً حالت سیستم به یکی از ویژه حالت های عملگر اندازه گیری، رمبش می کند. در مرجع [۲۱] باز برپایی به صورت عملی انجام شده است که در آن کیوبیت های فاز ابررسانا به عنوان سیستم های مناسب برای آزمایش مفهوم بازبرپایی در نظر گرفته شده است. در این آزمایش از یک فرایند اندازه گیری کنترلی استفاده شده که می توان به طور پیوسته شدت اندازه گیری را از یک مقدار ضعیف جزئی به یک مقدار کاملاً تصویری رساند. با استفاده از چنین آزمایشی می توان به طور تجربی بخشی از رمبش ناشی از اندازه گیری یک حالت کوانتومی را معکوس سازی کرد. در این آزمایش یک حالت اولیه ترکیبی از حالت پایه $|0\rangle$ و اولین حالت برانگیخته $|1\rangle$ آماده شده است. اندازه گیری جزئی با احتمال p فقط در مورد حالت $|1\rangle$ اتفاق می افتد در حالی که حالت $|0\rangle$ دست نخورده خواهد ماند. در این حالت $|1\rangle$ با احتمال p به محیط تونل زنی می کند (شکل ۱۰.۳b) حال اگر نتیجه تهی یعنی احتمال اینکه تونل نزنند را در نظر بگیریم، این روش منجر به یک رمبش جزئی حالت کیوبیت به سمت حالت $|0\rangle$

^۱Uncollapsing

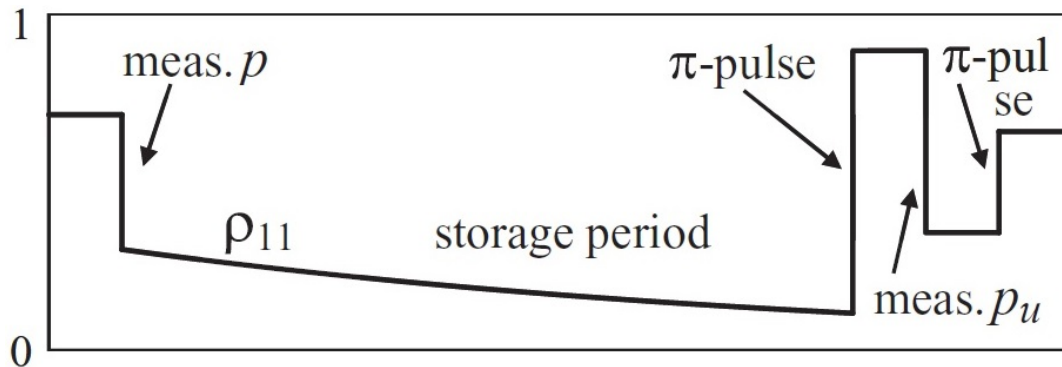


شکل ۱.۳: (a) تاثیر اندازه‌گیری جزئی با شدت p . (ii) اعمال پالس π . (iii) انجام اندازه‌گیری جزئی دوم با همان شدت p . (b) حالت $|1\rangle$ با شدت p به بیرون از چاه پتانسیل نوسان می‌کند.

می‌شود (به عبارتی دامنه صفر افزایش می‌ابد). برطبق این آزمایش همان‌طور که در شکل ۱.۳ a می‌بینیم به‌ترتیب بعد از اندازه‌گیری اول اقدام به اعمال پالس π کرده (پالس π در واقع مانند عملگر X عمل می‌کند یعنی دامنه‌های حالت $|0\rangle$ و $|1\rangle$ را در کیوبیت با هم عوض می‌کند) و سپس تکرار اندازه‌گیری ضعیف دیگری با همان شدت p . با این اقدام در حالت جدید، $|1\rangle$ مجدداً تونل‌زنی کرده و در نتیجه تهی رمبش جزئی به حالت $|0\rangle$ خواهیم داشت و در نهایت حالت جدید همان احتمال اولیه خواهد بود. در این آزمایش نهایتاً از توموگرافی کوانتومی استفاده شده است.

هدف از توموگرافی تخمینی از یک حالت کوانتومی است. به نوعی می‌توان گفت آزمایشگر تعداد مشخصی از یک حالت ناشناخته در اختیار دارد (به طور مشابه زمان محدودی برای انجام اندازه‌گیری در اختیار دارد) سپس آزمایشگر اندازه‌گیری‌هایی را بر روی این مجموعه از حالات ناشناخته انجام داده و یک آنسامبلی را ارائه می‌دهد. فرایند کوانتومی توموگرافی^۲ مربوط به تشخیص یک فرایند دینامیکی ناشناخته کوانتومی است و می‌توان گفت شامل آماده‌سازی آنسامبلی از حالت کوانتومی و فرستادن آن‌ها به فرایند و سپس استفاده از توموگرافی کوانتومی حالت برای تشخیص حالت‌های نتیجه می‌باشد.

^۲Tomography



شکل ۲۰۳: نمایش فرایند بازبرپایی: اندازه‌گیری جزئی با شدت p ، گذشت زمان واهلش τ ، اعمال پالس π ، دومین اندازه‌گیری ضعیف با شدت p_u ، اعمال پالس دوم در دوره τ تحول ماتریس ρ_{11} برای ما اهمیت دارد. در هر دو اندازه‌گیری حالات باقی مانده از نتایج تهی را در نظر میگیریم.

۳.۲.۳ جلوگیری از واهمدوسی واهلش انرژی در دمای صفر با اندازه‌گیری‌های

ایده‌آل

در این روش برای حفظ کیوبیت از واهلش انرژی^۳ ناشی از دمای صفر ابتدا از یک اندازه‌گیری کوانتومی جزئی که حالت کیوبیت را در یک روش همدوس اما غیریکانی به سمت حالت پایه می‌برد، شروع می‌کنیم. سپس بعد از گذشت زمان انبارش^۴، فرایند بازبرپایی (یعنی اعمال پالس π و سپس انجام اندازه‌گیری جزئی دوم) انجام می‌شود. در نهایت اعمال پالس π دوم، حالت اولیه ما را احیاء [۲۱] می‌کند شکل (۲۰۳). این فرایند بسیار نزدیک به آزمایشی است که در بخش قبل به صورت مختصر به آن پرداختیم. این فرایند احتمالی تنها با انتخاب درست شدت اندازه‌گیری جزئی موفقیت‌آمیز خواهد بود. نتیجه مهمی که در طول این فرایند خواهیم گرفت این است که با افزایش شدت اندازه‌گیری‌ها، جلوگیری از واهمدوسی‌ها قوی‌تر اما احتمال موفقیت کاهش پیدا خواهد کرد. واهمدوسی ناشی از میرایی دامنه به گونه‌ای است که در آن حالت برانگیخته کیوبیت سیستم به محیط انتقال پیدا می‌کند که این حقیقت را به شکل زیر می‌توان نوشت [۱].

$$|1\rangle_S \otimes |0\rangle_E \rightarrow \sqrt{1-r}|1\rangle_S \otimes |0\rangle_E + \sqrt{r}|0\rangle_S \otimes |1\rangle_E \quad (17.3)$$

^۳Energy relaxation

^۴Storage period

که S و E به ترتیب حالت‌های سیستم و محیط را مشخص می‌کنند و $r = 1 - e^{-\Gamma\tau}$ بزرگی واهمدوسی را نشان می‌دهد. در این نوع از واهمدوسی $|^{\circ}\rangle_S$ (حالت پایه سیستم است) امکان انتقال به محیط را نداشته، بنابراین این نوع واهمدوسی تاثیری روی حالت $|^{\circ}\rangle_S$ ندارد. در این فرضیه از طبیعت نامتقارن واهمدوسی میرایی دامنه [۱] و این واقعیت که اندازه‌گیری ضعیف قابل معکوس‌پذیری است استفاده شده است [۱۸]، [۱۹]، [۲۰]، [۲۱]. قبل از عبور حالت کوانتومی اولیه از کانال، بر روی آن یک اندازه‌گیری ضعیف انجام می‌شود. در این صورت یک رمبش جزئی حالت اولیه به حالت $|^{\circ}\rangle_S$ داریم (البته بدون هیچ گونه واهمدوسی). حال پس از عبور از کانال واهمدوسی یک اندازه‌گیری جزئی معکوس بر روی $|^{\circ}\rangle_S$ انجام شده تا تأثیرات ناشی از کانال واهمدوسی بر آن از بین برود. با انجام این دو عملگر غیر یکانی قبل و بعد از کانال میرایی دامنه، از واهمدوسی ناشی از این کانال به طور مؤثری جلوگیری می‌شود. مجموعه آزمایشگاهی این فرایند در شکل ۳.۳ نمایش داده شده است. حالت اولیه را به شکل $|\psi_0\rangle = \alpha|^{\circ}\rangle + \beta|1\rangle$ در نظر بگیریم که در آن $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ است. در اندازه‌گیری ضعیف حالت $|1\rangle$ با احتمال p از چاه پتانسیل تونل زنی می‌کند در حالی که می‌دانیم حالت $|^{\circ}\rangle$ تونل زنی انجام نمی‌دهد. از طرفی احتمال حالت تونل زده $p_t = |\beta|^2 p$ می‌باشد. حال در صورتی که نتیجه اندازه‌گیری بر محیط تهی باشد با احتمال $1 - p_t$ حالت $|\psi_1\rangle$ در سیستم باقی می‌ماند.

$$|\psi_1\rangle = (\alpha|^{\circ}\rangle + \beta\sqrt{1-p}|1\rangle)/N \quad (18.3)$$

به‌طوری که $N = |\alpha|^2 + (1-p)|\beta|^2$ است. بنابراین در مورد نتیجه تهی^۵ یعنی زمانی که تونل زنی نداریم با احتمال $p_1 = |\alpha|^2 + |\beta|^2(1-p)$ کیوبیت به شکل زیر می‌شود.

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1|^{\circ}\rangle + \beta_1|1\rangle = \frac{\alpha|^{\circ}\rangle + \beta\sqrt{1-p}|1\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + (1-p)|\beta|^2}} \quad (19.3)$$

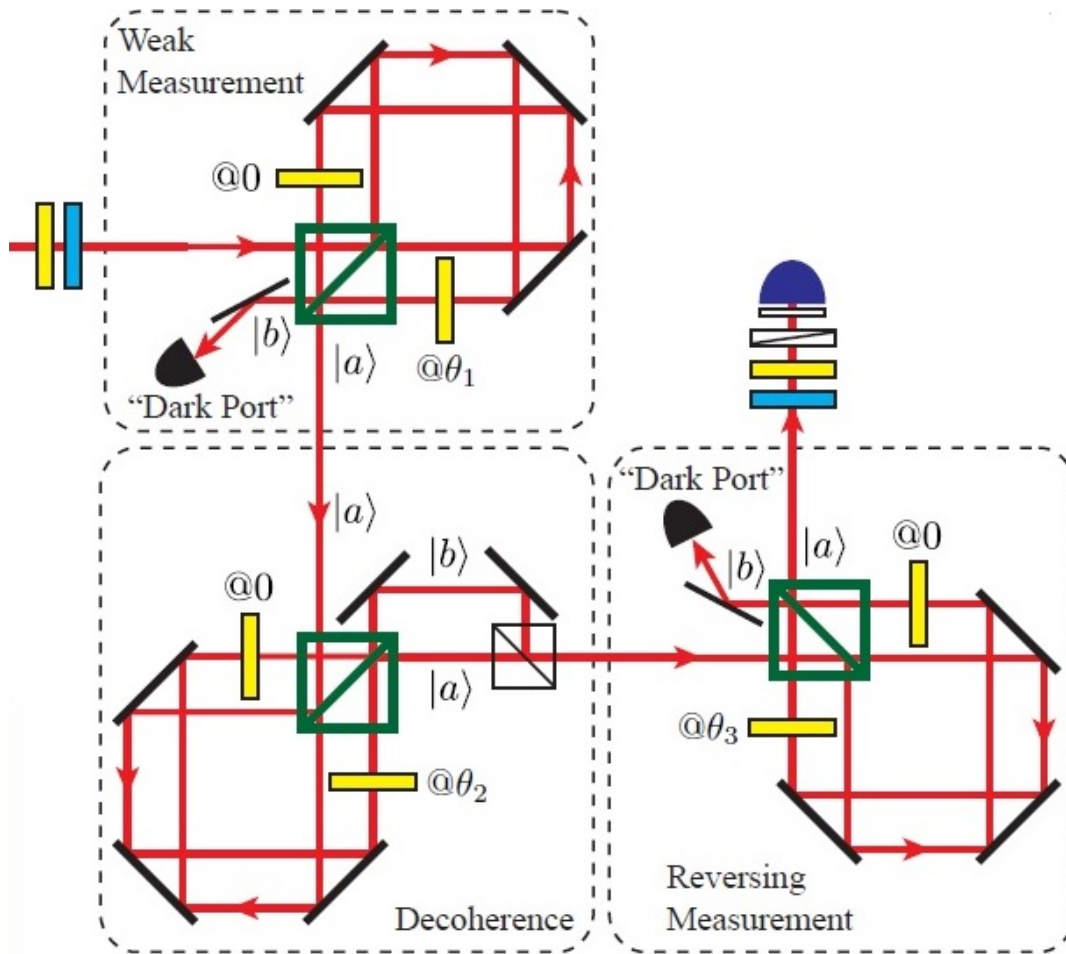
حال با عبور از کانال میرایی دامنه بعد از زمان τ ، به دلیل وجود واهلش انرژی (دمای صفر) با نرخ Γ ، حالت کیوبیت دیگر خالص نمی‌ماند و حالتی آمیخته خواهد بود. ρ_1 از ۱۹.۳ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta\sqrt{1-p} \\ \alpha\beta\sqrt{1-p} & \beta^2(1-p) \end{pmatrix} \quad (20.3)$$

این حالت پس از عبور از کانال میرایی به شکل زیر و حالتی آمیخته است.

$$\rho_2 = E_0\rho_1 E_0^\dagger + E_1\rho_1 E_1^\dagger \quad (21.3)$$

^۵Null result



شکل ۳.۳: مجموعه آزمایشی فرایند جلوگیری از واهمدوسی با استفاده از اندازه گیری ضعیف

که در آن

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-r} \end{pmatrix}$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (22.3)$$

در این صورت خواهیم داشت.

(۲۳.۳)

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{e^{-\Gamma\tau}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta\sqrt{1-p} \\ \alpha\beta\sqrt{1-p} & \beta^2(1-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{e^{-\Gamma\tau}} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-e^{-\Gamma\tau}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta\sqrt{1-p} \\ \alpha\beta\sqrt{1-p} & \beta^2(1-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{1-e^{-\Gamma\tau}} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2(1-p)(1-e^{-\Gamma\tau}) & \alpha\beta\sqrt{1-p}\sqrt{e^{-\Gamma\tau}} \\ \alpha\beta\sqrt{1-p}\sqrt{e^{-\Gamma\tau}} & \beta^2(1-p)e^{-\Gamma\tau} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

اما می‌توان حالت آمیخته را با یک ترفند ریاضی آمیخته ای از دو حالت خالص جهش یافته ^۶ و جهش نیافته ^۷ در نظر گرفت. اگر فرض کنیم که حالت سیستم با احتمال $p_1^{|\circ\rangle}$ به حالت $|\circ\rangle$ جهش یابد (وجود داشته باشد) و با احتمال $p_1^{n_j}$ در حالت $|\psi_2\rangle$ باقی ماند، حالت سیستم به شکل زیر بازنویسی می‌شود.

$$\rho_2 = p_1^{|\circ\rangle} |\circ\rangle \langle\circ| + p_1^{n_j} |\psi_2\rangle \langle\psi_2| \quad (24.3)$$

حال اگر فرض کنیم $|\psi_2\rangle = A|\circ\rangle + B|1\rangle$ باشد داریم.

(۲۵.۳)

$$p_1^{|\circ\rangle} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + p_1^{n_j} \begin{pmatrix} A^2 & AB \\ AB & B^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta^2(1-p)(1-e^{-\Gamma\tau}) & \alpha\beta\sqrt{1-p}\sqrt{e^{-\Gamma\tau}} \\ \alpha\beta\sqrt{1-p}\sqrt{e^{-\Gamma\tau}} & \beta^2(1-p)e^{-\Gamma\tau} \end{pmatrix}$$

^۶Jump

^۷No Jump

بنابراین می توان مقادیر زیر را در نظر گرفت.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha |\circ\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + (1-p)e^{-\Gamma\tau}|\beta|^2}} \\ B &= \frac{\beta \sqrt{1-p} e^{-\Gamma\frac{\tau}{2}} |\mathbf{1}\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + (1-p)e^{-\Gamma\tau}|\beta|^2}} \\ p_{\Psi}^{nj} &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 (1-p)e^{-\Gamma\tau} \\ p_{\Psi}^{|\circ\rangle} &= p_1 |\beta|^2 (1 - e^{-\Gamma\tau}) \end{aligned} \quad (26.3)$$

این به این معناست که $|\psi_{\Psi}\rangle$ با احتمال $p_{\Psi}^{nj} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 (1-p)e^{-\Gamma\tau}$ (یعنی احتمال جهش نیافته) به صورت زیر است.

$$|\psi_{\Psi}\rangle = \alpha_{\Psi} |\circ\rangle + \beta_{\Psi} |\mathbf{1}\rangle = \frac{\alpha |\circ\rangle + \beta \sqrt{1-p} e^{-\Gamma\tau/2} |\mathbf{1}\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + (1-p)e^{-\Gamma\tau}|\beta|^2}} \quad (27.3)$$

و با احتمال $p_{\Psi}^{|\circ\rangle} = p_1 |\beta|^2 (1 - e^{-\Gamma\tau})$ به حالت $|\circ\rangle$ جهش میابد.
پس از اعمال پالس π (یعنی اعمال عملگر X) حالت کیوبیت با همان احتمالات قبل p_{Ψ}^{nj} و $p_{\Psi}^{|\circ\rangle}$ به حالت های $|\mathbf{1}\rangle$ و $\alpha_{\Psi} |\mathbf{1}\rangle + \beta_{\Psi} |\circ\rangle$ تبدیل می شوند.

$$\begin{cases} |\mathbf{1}\rangle \langle \mathbf{1}| & p_{\Psi}^{|\circ\rangle} \\ (\alpha_{\Psi} |\mathbf{1}\rangle + \beta_{\Psi} |\circ\rangle)(\alpha_{\Psi} \langle \mathbf{1}| + \beta_{\Psi} \langle \circ|) & p_{\Psi}^{nj} \end{cases} \quad (28.3)$$

بعد از اعمال پالس π زمان انجام دومین اندازه گیری جزئی فرا رسیده است. بر روی حالت های بالا اندازه گیری ضعیفی با شدت p_u انجام می دهیم، خواهیم دید اگر نتیجه تهی باشد، نتیجه ای که از حالت تونل نزده باقی می ماند با احتمال $p_{\Psi}^{nj} = |\alpha|^2 (1-p_u) + |\beta|^2 (1-p)e^{-\Gamma\tau}$ به صورت زیر است.

$$|\psi_{\Psi}\rangle = \alpha_{\Psi} |\circ\rangle + \beta_{\Psi} |\mathbf{1}\rangle = \frac{\beta \sqrt{1-p} e^{-\Gamma\tau} |\circ\rangle + \alpha \sqrt{1-p_u} |\mathbf{1}\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 (1-p_u) + |\beta|^2 (1-p)e^{-\Gamma\tau}}} \quad (29.3)$$

از طرفی حالت خالص $|\mathbf{1}\rangle$ با احتمال $p_{\Psi}^{|\circ\rangle} = p_1^{|\circ\rangle} (1 - p_u)$ در صورت نتیجه تهی باقی می ماند.
در نهایت با اعمال پالس π دوم حالت های کوانتومی خالص ما $|\psi_f\rangle$ و $|\circ\rangle$ هستند.

$$\begin{cases} |\circ\rangle \\ \alpha_{\Psi} |\mathbf{1}\rangle + \beta_{\Psi} |\circ\rangle = \frac{\alpha \sqrt{1-p_u} |\circ\rangle + \beta \sqrt{1-p} e^{-\Gamma\frac{\tau}{2}} |\mathbf{1}\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 (1-p_u) + |\beta|^2 (1-p)e^{-\Gamma\tau}}} \end{cases} \quad (30.3)$$

به این صورت که $p_f^{|\circ\rangle} = p_f^{|\circ\rangle}$ و $p_f^{nj} = |\alpha|^2(1 - p_u) + |\beta|^2(1 - p)e^{-\Gamma\tau}$ هستند. حال می‌توان p_u یافت که حالت نهایی با حالت اولیه برابر باشد؟ برای این کار کافی است حالت نهایی و اولیه را برابر قرار دهیم.

$$\frac{\alpha\sqrt{1-p_u}|\circ\rangle + \beta\sqrt{1-pe^{-\Gamma\tau}}|\circ\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2(1-p_u) + |\beta|^2(1-p)e^{-\Gamma\tau}}} = \alpha|\circ\rangle + \beta|\circ\rangle \quad (31.3)$$

با این عمل شدت احتمال معکوس به صورت زیر بدست می‌آید.

$$p_u = 1 - e^{-\Gamma\tau}(1 - p) \quad (32.3)$$

بنابراین حالت‌های نهایی به شکل زیر است.

$$|\psi_f\rangle = |\psi_{in}\rangle \quad p_f^{nj} = (1 - p)e^{-\Gamma\tau} \quad (33.3)$$

$$|\psi_f\rangle = |\circ\rangle \quad p_f^{|\circ\rangle} = |\beta|^2(1 - p)^2e^{-\Gamma\tau}(1 - e^{-\Gamma\tau})$$

مجموع احتمالاتی که در نتایج تهی بدست می‌آید برابر $p_f = p_f^{|\circ\rangle} + p_f^{nj}$ است. به زبان ماتریسی داریم

$$\rho_f = \frac{(p_f^{nj}|\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}| + p_f^{|\circ\rangle}|\circ\rangle\langle\circ|)}{(p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle})} \quad (34.3)$$

چیزی که ما به دنبال آن بوده‌ایم حالت کوانتومی $|\psi_{in}\rangle$ بوده است. که وزن (احتمال) p_f^{nj} در این رابطه به صورت $1 - p$ تغییر می‌کند و آن را احتمال خوب می‌نامیم. از طرفی مشاهده می‌شود که احتمال بد یعنی $p_f^{|\circ\rangle}$ با مقیاس $(1 - p)^2$ تغییر می‌کند. بنابراین می‌توانیم با انتخاب $1 \rightarrow p$ حالت نهایی را به حالت اولیه نزدیک‌تر کنیم. این امر حتی در حالت $\Gamma \geq 1$ (در واهمدوسی به میزان قابل توجه) هرچند در این حالت $p_f \rightarrow 0$ است.

اکنون برای مشخص کردن بازده فرایند باید مشخص کنیم $|\psi_{in}\rangle$ چه مقدار به $|\psi_f\rangle$ شبیه است. کمیتی که تشابه دو حالت را مشخص می‌کند هماندهی^۸ نام دارد. هماندهی در واقع مقدار فاصله بین دو حالت کوانتومی را مشخص می‌کند. هماندهی برای عملگری با نمایش ماتریسی χ ، به شکل زیر تعریف می‌شود [۱].

$$F_\chi = \text{tr} [\chi, \chi^\circ] \quad (35.3)$$

که χ عملگر واقعی و χ° همان ماتریس مطلوبست. در حقیقت این هماندهی برای آزمایش‌های فرایند کوانتومی توموگرافی^۹ (QPT) استفاده می‌شود که شامل مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها هستند

^۸Fidellity

^۹Quantum process tomography

[۲۱]، [۱۹]، [۲۳]. این شکل از هماندهی در مورد فرایند بازبرپایی قابل استفاده نیست. علت این امر این است که در فرایند توموگرافی فرض می شود که عملگرها خطی هستند. اما در فرایند باز برپایی به علت وجود باز بهنجارش ماتریس چگالی پس از اندازه گیری ضعیف، عملگرها را نمی توان خطی در نظر گرفت. همچنین نشان داده شده است که در مورد بازبرپایی با استفاده از چهار حالت استاندارد می توان F_χ را محاسبه کرد و از روی آن هماندهی را به شکل "خام" تعریف کرد که در مورد باز برپایی قابل کاربرد است [۲۱].

می توانیم از مفهوم هماندهی متوسط ^{۱۰} در مورد بازبرپایی استفاده کنیم که همواره نیز برقرار است و به شکل زیر بیان می شود.

$$F_{av} = \int Tr(\rho_f |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}| d|\psi_{in}\rangle) \quad (۳۶.۳)$$

با در نظر گرفتن حالت اولیه به شکل $|\psi_{in}\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |\circ\rangle + e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} |\uparrow\rangle$ برای F_{av} داریم

$$F_{av} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F_{st} \sin \theta d\theta d\varphi \quad (۳۷.۳)$$

که $F_{st} = Tr(\rho_f |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}|)$ هماندهی حالت ^{۱۱} نامیده می شود بنابراین

$$\begin{aligned} F_{st} &= \frac{Tr(p_f^{nj} |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}| + p_f^{|\circ\rangle} |\circ\rangle \langle \circ| |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}|)}{p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle}} \quad (۳۸.۳) \\ &= \frac{Tr(p_f^{nj} |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}| + \alpha p_f^{|\circ\rangle} |\circ\rangle \langle \psi_{in}|)}{p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle}} \\ &= \frac{(p_f^{nj} + |\alpha|^2 p_f^{|\circ\rangle})}{p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle}} \end{aligned}$$

اکنون می توان با انتگرال گیری ^{۳۷.۳} تغییرات هماندهی با شدت اندازه گیری را بررسی کرد. همچنین فرمول مناسبی برای ارتباط دادن F_χ و F_{av} نشان داده شده است [۲۴]. برای عملگرهایی که رد نگهدار هستند داریم

$$F_{av} = \frac{(F_\chi d - 1)}{d + 1} \quad (۳۹.۳)$$

که d بعد فضای هیلبرت می باشد، بنابراین طبیعی است که هماندهی متوسط مقیاس شده ^{۱۲} F_{av}^s که در این مورد مشابه با F_χ است شکل زیر را دارد.

$$F_{av}^s = \frac{(3F_{av}) - 1}{2} \quad (۴۰.۳)$$

^{۱۰} Averaged Fidelity

^{۱۱} State Fidelity

^{۱۲} Scaled averaged Fidelity

متوسط احتمال کل در نتایج تهی (احتمالات رابطه ۳۳.۳) که در مجموع p_f نظر گرفته شد، با انتگرال گیری بر روی تمام حالات کره بلاخ به صورت زیر بدست می‌آید.

(۴۱.۳)

$$\begin{aligned}\langle p_f \rangle_{BI} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} ((1-p)e^{-\Gamma\tau} + (\sin \frac{\theta}{2})^2 (1-p)^2 e^{-\Gamma\tau} (1 - e^{-\Gamma\tau})) \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= (1-p)e^{-\Gamma\tau} \left(\frac{2+(1-p)(1-e^{-\Gamma\tau})}{4} \right)\end{aligned}$$

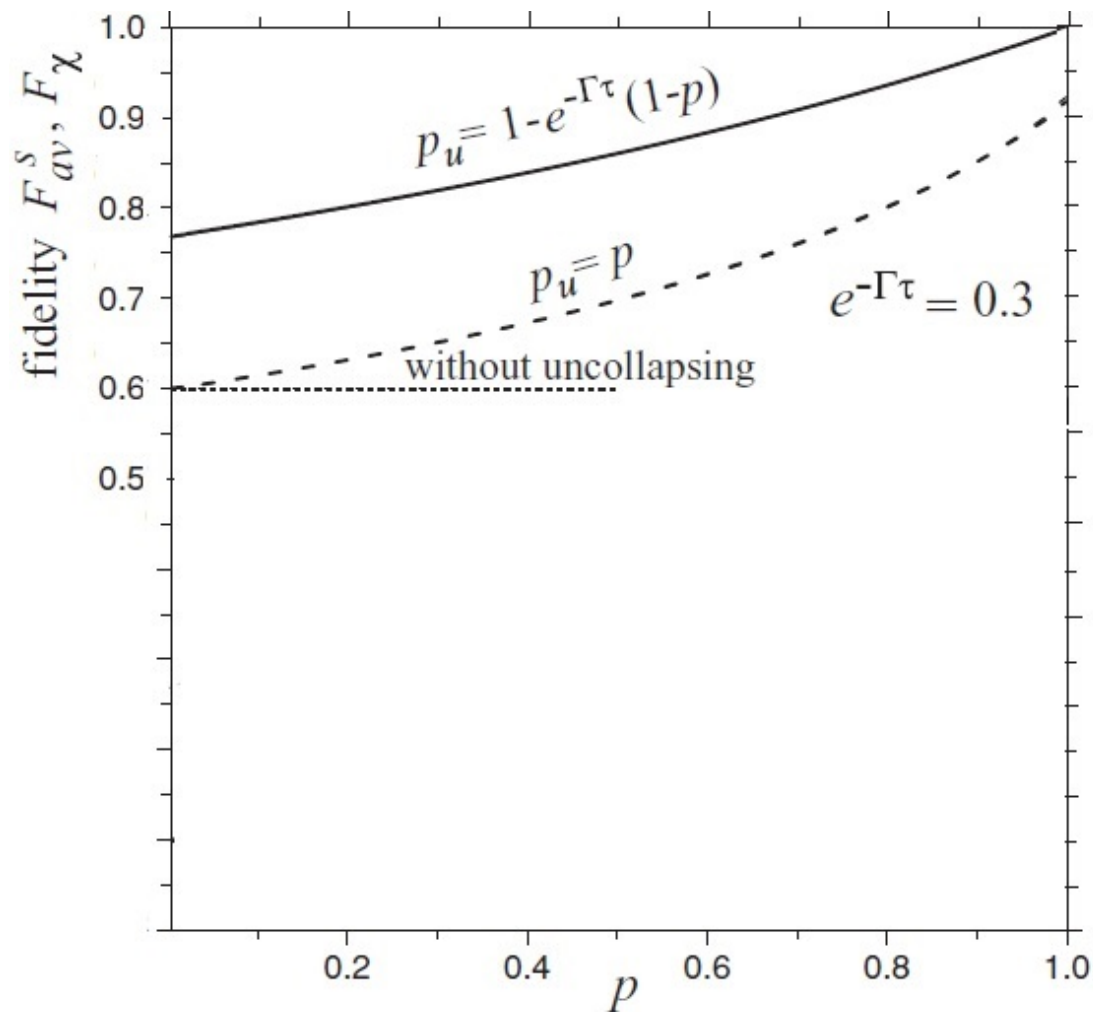
در شکل ۴.۳ رفتار F_{av}^s نسبت به p قابل مشاهده است. با افزایش مقدار شدت اندازه‌گیری مقدار هماندهی افزایش می‌یابد. این در حالی است که با توجه به مقدار به‌دست آمده برای $\langle p_f \rangle_{BI}$ این نتیجه به‌صورت عکس است به این معنا که برای $p \rightarrow 1$ داریم $F_a^s \rightarrow 1$ و $\langle p_f \rangle_{BI} \rightarrow 0$. از نمودار شکل ۴.۳ محقق است که برای مقدار $p_u = 1 - e^{-\Gamma\tau}(1-p)$ و در $p = 0$ هماندهی با وجود بازبرپایی مقدار بیشتری را نسبت به حالت بدون بازبرپایی نشان می‌دهد. اما برای $p_u = p = 0$ این دو حالت هماندهی یکسانی را نشان می‌دهند.

۴.۲.۳ جلوگیری از واهمدوسی ناشی از دمای صفر با چند زمان واهلش

در قسمت قبل فرض بر این بود که که اندازه‌گیری به صورت ایده‌آل صورت گرفته در این صورت تنها در طول زمان τ انرژی واهلش اتفاق می‌افتاد و در طول فرایند باز برپایی هیچ گونه واهمدوسی نداشته ایم (اندازه‌گیری‌ها و پالس‌های π). حال یک قدم به واقعیت نزدیک تر می‌شویم و انرژی واهلش را در تمام مراحل از فرایند در نظر می‌گیریم، اکنون برای تمامی زمان‌های موجود در شکل ۲.۳ انرژی واهلش را در نظر می‌گیریم. البته به‌جز آخرین مرحله که بعد از آن فرایند به پایان می‌رسد. در اینجا نیز انرژی واهلش ناشی از از دمای صفر را در نظر گرفته شده است. حال برای تشخیص واهمدوسی‌های هر مرحله به یک سری پارامتر مانند $i = 1 - 4$ و $K_i = \exp(-\Gamma\tau_i)$ نیازمندیم. مدت زمان قبل از اولین اندازه‌گیری، $\tau_1 = \tau$ همان زمان انبارش مرحله قبل (زمان بین اولین اندازه‌گیری ضعیف و اعمال اولین پالس π)، τ_2 زمان بین اولین پالس π و دومین اندازه‌گیری و τ_4 زمان دومین اندازه‌گیری و دومین پالس π می‌باشد (شکل ۵.۳).

در اینجا نیز حالت‌های نتیجه تهی، حالت‌های تونل نزده را در نظر می‌گیریم. مانند قبل از حالت اولیه $K_1 = \exp(-\Gamma\tau_1)$ در زمان τ_1 و قرارگیری در معرض واهمدوسی $|\psi_i\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ شروع می‌کنیم. در زمان τ_1 و قرارگیری در معرض واهمدوسی $K_1 = \exp(-\Gamma\tau_1)$ حالت اولیه دیگر خالص نمی‌ماند. مانند قبل رابطه ۲۴.۳ با استفاده از ترفند جهش یافته و جهش نیافته می‌توانیم خالص سازی انجام دهیم. بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{cases} |0\rangle & p_1^{|0\rangle} = (1 - K_1)\beta^2 \\ |\psi_1\rangle = \frac{\alpha|0\rangle + \sqrt{K_1}\beta|1\rangle}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 K_1}} & p_1^{n_j} = \alpha^2 + K_1\beta^2 \end{cases} \quad (42.3)$$

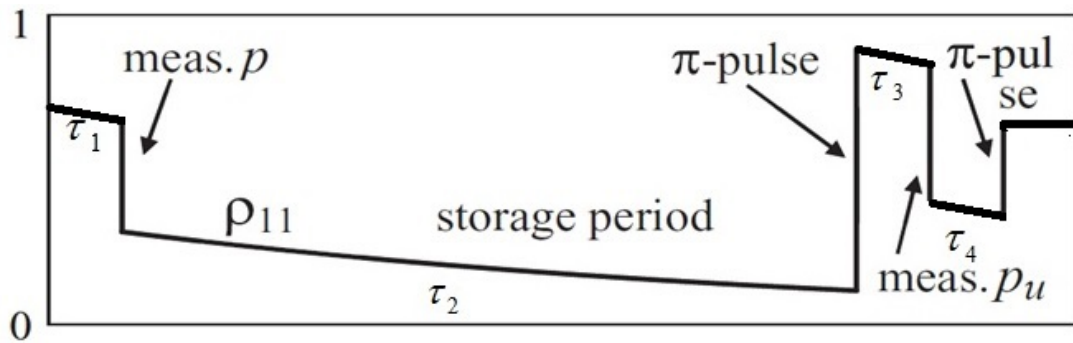


شکل ۴.۳: تغییرات هماندهی در بازبرپایی برای $e^{-\Gamma\tau} = 0.3$. نمودار بالایی مربوط به $p_u =$

$1 - e^{-\Gamma\tau}(1 - p)$ و نمودار پایینی (خط‌چین) برای $p_u = p$ می‌باشد.

مرحله بعد نوبت به انجام اولین اندازه‌گیری ضعیف با شدت p است. در صورتی که نتیجه تهی بدست آید حالت $|\psi_1\rangle$ با احتمال $p^2_1 = \alpha^2 + \beta^2 K_1(1 - p)$ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$|\psi_2\rangle = \frac{\alpha|\circ\rangle + \beta\sqrt{K_1(1-p)}|1\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2 K_1(1-p)}} \quad (۴۳.۳)$$



شکل ۵.۳: نمایش فرایند باز برپایی در چند زمان واهلش: گذشت زمان واهلش اول τ_1 ، انجام اولین اندازه‌گیری با شدت p ، گذشت زمان واهلش دوم τ_2 ، انجام اولین پالس π ، گذشت زمان واهلش τ_3 ، انجام دومین اندازه‌گیری با شدت p_u ، گذشت زمان واهلش τ_4 ، انجام پالس دوم π . تنها تحول ρ_{11} در زمان واهلش برای ما اهمیت دارد. در هر دو اندازه‌گیری حالت باقی مانده از نتیجه تهی را در نظر می‌گیریم.

پس از انجام اولین اندازه‌گیری ضعیف، در زمان τ_2 واهلش انرژی K_2 وجود دارد و حالت $|\psi_2\rangle$ دیگر خالص نمی‌ماند. مانند قبل عمل خالص سازی را انجام می‌دهیم.

$$\begin{cases} |\circ\rangle & p_2^{|\circ\rangle} = \beta^2(1-p)K_1(1-K_2) \\ |\psi_3\rangle = \frac{\alpha|\circ\rangle + \sqrt{K_1K_2(1-p)}\beta|1\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2K_1K_2(1-p)}} & p_2^{nj} = |\alpha|^2 + K_1K_2|\beta|^2(1-p) \end{cases} \quad (44.3)$$

اکنون زمان اعمال پالس π بر روی حالت‌های قبلی است. حالت $|\psi_4\rangle$ با همان احتمال $p_2^{nj} = |\alpha|^2 + K_1K_2|\beta|^2(1-p)$ به وجود می‌آید.

$$|\psi_4\rangle = \frac{\beta\sqrt{K_1K_2(1-p)}|\circ\rangle + \alpha|1\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2K_1K_2(1-p)}} \quad (45.3)$$

از طرفی در زمان‌های τ_1 و τ_2 دیدیم که با احتمال $p_1^{|\circ\rangle}$ و $p_2^{|\circ\rangle}$ به حالت $|\circ\rangle$ جهیده است (عنصر $|\circ\rangle\langle\circ|$ در ماتریس چگالی ظاهر شده است). با تأثیر پالس π عناصر ماتریسی $|\circ\rangle\langle\circ|$ به $|1\rangle\langle 1|$ تبدیل خواهند. بنابراین عناصری به شکل زیر در ماتریس چگالی ظاهر می‌شوند.

$$p_1^{|\circ\rangle} |\circ\rangle \langle\circ| + p_2^{|\circ\rangle} |\circ\rangle \langle\circ| \quad (۴۶.۳)$$

$$\longrightarrow (\mathbb{1} - K_1)\beta^2 |\mathbb{1}\rangle \langle\mathbb{1}| + (\mathbb{1} - p)K_1(\mathbb{1} - K_2)\beta^2 |\mathbb{1}\rangle \langle\mathbb{1}|$$

از طرفی در زمان τ_3 نه تنها حالت $|\psi_4\rangle$ متأثر از کانال K_3 شده است بلکه عنصر $|\mathbb{1}\rangle \langle\mathbb{1}|$ نیز از این کانال متأثر می شود. بنابراین تحت این کانال عنصر $|\mathbb{1}\rangle \langle\mathbb{1}|$ از ماتریس چگالی به شکل زیر تغییر می کند.

$$[\beta^2(\mathbb{1} - K_1) + (\mathbb{1} - p)K_1(\mathbb{1} - K_2)]|\mathbb{1}\rangle \langle\mathbb{1}|$$

$$\longrightarrow [\beta^2(\mathbb{1} - K_1) + (\mathbb{1} - p)K_1(\mathbb{1} - K_2)](\mathbb{1} - K_3)|\circ\rangle \langle\circ| + \quad (۴۷.۳)$$

$$[\beta^2(\mathbb{1} - K_1) + (\mathbb{1} - p)K_1(\mathbb{1} - K_2)]K_3|\mathbb{1}\rangle \langle\mathbb{1}|$$

و خود $|\psi_4\rangle$ نیز با احتمال $p^{nj} = \alpha^2 K_3 + \beta^2 K_1 K_2 (\mathbb{1} - p)$ به حالت $|\psi_5\rangle$ در سیستم باقی خواهد ماند.

$$|\psi_5\rangle = \frac{\beta\sqrt{K_1 K_2 (\mathbb{1} - p)} |\circ\rangle + \alpha\sqrt{K_3} |\mathbb{1}\rangle}{\sqrt{|\alpha^2| K_3 + |\beta^2| K_1 K_2 (\mathbb{1} - p)}} \quad (۴۸.۳)$$

بنابراین به طور خلاصه سیستم با احتمال های زیر در حالت های مشخص خواهد بود. (۴۹.۳)

$$|\circ\rangle \langle\circ| \rightarrow p^{|\circ\rangle} = \alpha^2(\mathbb{1} - K_2) + \beta^2((\mathbb{1} - K_1) + (\mathbb{1} - p)K_1(\mathbb{1} - K_2))(\mathbb{1} - K_3)$$

$$|\psi_5\rangle \langle\psi_5| \rightarrow p^{nj} = \alpha^2 K_3 + \beta^2 K_1 K_2 (\mathbb{1} - p)$$

$$|\mathbb{1}\rangle \langle\mathbb{1}| \rightarrow p^{|\mathbb{1}\rangle} = (\beta^2(\mathbb{1} - K_1) + \beta^2(\mathbb{1} - p)K_1(\mathbb{1} - K_2))(K_3)$$

در مرحله بعد دومین اندازه گیری ضعیف با شدت p_u انجام می گیرد. بنابراین در حالت $|\psi_5\rangle$ حالت $|\mathbb{1}\rangle$ با شدت p_u تونل زنی می کند. در صورتی که نتیجه تهی باشد حالت $|\psi_6\rangle$ با احتمال $p^{pu} = |\alpha^2| K_3(\mathbb{1} -$ به وجود می آید.

$$|\psi_e\rangle = \frac{\beta\sqrt{K_1 K_2(1-p)}|\circ\rangle + \alpha\sqrt{K_2(1-p_u)}|\uparrow\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 K_2(1-p_u) + |\beta|^2 K_1 K_2(1-p)}} \quad (50.3)$$

و همچنین برای حالت $|\uparrow\rangle$ در مرحله قبل تونل زنی اتفاق خواهد افتاد و حالت نهایی آن به شکل زیر خواهد بود.

$$[(1-K_1)\beta^2 K_3 + \beta^2(1-p)K_1(1-K_2)][K_3(1-p_u)]|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \quad (51.3)$$

پس از انجام دومین اندازه‌گیری در زمان τ_4 واهلش آخر K_4 اتفاق می‌افتد پس حالت $|\psi_e\rangle$ به حالت $|\psi_v\rangle$ تبدیل می‌شود.

$$|\psi_v\rangle = \frac{\beta\sqrt{K_1 K_2(1-p)}|\circ\rangle + \alpha\sqrt{K_3 K_4(1-p_u)}|\uparrow\rangle}{\sqrt{|\alpha|^2 K_3 K_4(1-p_u) + |\beta|^2 K_1 K_2(1-p)}} \quad (52.3)$$

که احتمال جهش نزده به اندازه $p^{nj} = |\alpha|^2 K_3 K_4(1-p_u) + |\beta|^2 K_1 K_2(1-p)$ است. با توجه به اینکه به دلیل وجود واهلش K_4 حالت جدید $|\circ\rangle$ نیز به وجود می‌آید و با وجود حالت‌های $|\circ\rangle$ و $|\uparrow\rangle$ در مراحل قبل خواهیم داشت

$$|\circ\rangle\langle\circ| \rightarrow p^{|\circ\rangle} = (\alpha^2 K_3(1-p_u)(1-K_4) + \alpha^2(1-K_3) +$$

$$\beta^2((1-K_1) + (1-p)K_1(1-K_2))(1-K_3)$$

$$(53.3)$$

$$+ (1-K_1)\beta^2 K_3 + \beta^2(1-p)K_1(1-K_2)K_3(1-p_u)(1-K_4)$$

$$|\uparrow\rangle\langle\uparrow| \rightarrow p^{|\uparrow\rangle} = (\beta^2(1-K_1) + \beta^2(1-p)K_1(1-K_2))(K_3(1-p_u)K_4$$

و در نهایت با انجام دومین پالس π حالت $|\psi_v\rangle$ به حالت $|\psi_f^{nj}\rangle$ تبدیل می‌شود و $|\circ\rangle$ و $|\uparrow\rangle$ نیز در اثر π عکس می‌شوند بنابراین.

(۵۴.۳)

$$|\psi_f^{nj}\rangle = \frac{\alpha\sqrt{K_{\uparrow}K_{\uparrow}(\mathbb{1}-p_u)}|\circ\rangle + \beta\sqrt{K_{\downarrow}K_{\downarrow}|\mathbb{1}\rangle}}{\sqrt{|\alpha|^2 K_{\uparrow}K_{\uparrow}(\mathbb{1}-p_u) + |\beta|^2 K_{\downarrow}K_{\downarrow}(\mathbb{1}-p)}} \quad p_f^{nj} = |\alpha|^2 K_{\uparrow}K_{\uparrow}(\mathbb{1}-p_u) + |\beta|^2 K_{\downarrow}K_{\downarrow}(\mathbb{1}-p)$$

$$p_f^{|\circ\rangle} = |\beta|^2 [(\mathbb{1} - K_{\downarrow} + K_{\downarrow}(\mathbb{1} - p)(\mathbb{1} - K_{\uparrow}))K_{\uparrow}K_{\uparrow}(\mathbb{1} - p_u)]$$

$$p_f^{|\mathbb{1}\rangle} = |\alpha|^2 [(\mathbb{1} - K_{\uparrow} + K_{\uparrow}(\mathbb{1} - p_u)(\mathbb{1} - K_{\downarrow}))] + |\beta|^2 [(\mathbb{1} - K_{\downarrow} + K_{\downarrow}(\mathbb{1} - p)(\mathbb{1} - K_{\uparrow}))]$$

$$[\mathbb{1} - K_{\uparrow} + K_{\uparrow}(\mathbb{1} - p_u)(\mathbb{1} - K_{\downarrow})]$$

در این صورت ماتریس چگالی نهایی ما به صورت زیر در می آید.

$$\rho_f = \frac{(p_f^{nj} |\psi_f^{nj}\rangle \langle \psi_f^{nj}| + p_f^{|\circ\rangle} |\circ\rangle \langle \circ| + p_f^{|\mathbb{1}\rangle} |\mathbb{1}\rangle \langle \mathbb{1}|)}{p_f} \quad (55.3)$$

که

$$p_f = p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle} + p_f^{|\mathbb{1}\rangle} \quad (56.3)$$

با انتگرال گیری p_f بر روی تمام حالات کره بلاخ مانند ۴۱.۳ احتمال متوسط کل $\langle p_f \rangle_{BI}$ بدست می آید. حال برای به دست آوردن فیدلیتی حالت F_{st} خواهیم داشت

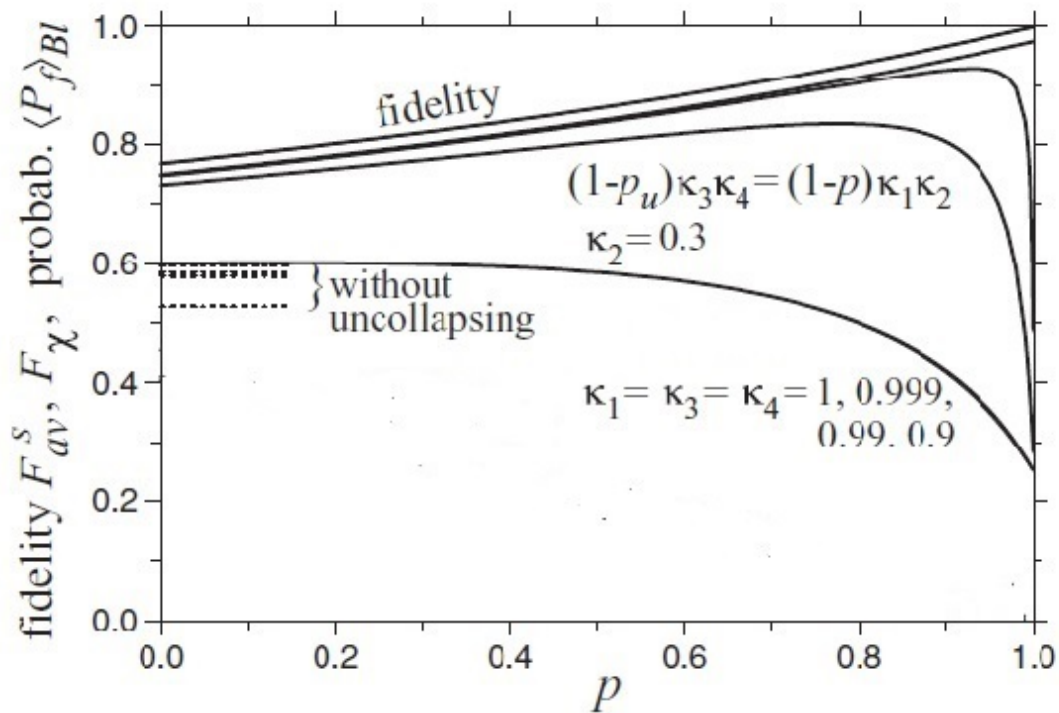
$$F_{st} = \frac{\mathbb{1}}{p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle} + p_f^{|\mathbb{1}\rangle}} Tr[p_f^{nj} |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}| \psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}| + p_f^{|\circ\rangle} |\circ\rangle \langle \circ| \psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}| + p_f^{|\mathbb{1}\rangle} |\mathbb{1}\rangle \langle \mathbb{1}| \psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}|] \quad (57.3)$$

$$= \frac{\mathbb{1}}{p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle} + p_f^{|\mathbb{1}\rangle}} Tr[p_f^{nj} |\psi_{in}\rangle \langle \psi_{in}| + p_f^{|\circ\rangle} \alpha |\circ\rangle \langle \psi_{in}| + p_f^{|\mathbb{1}\rangle} \beta |\mathbb{1}\rangle \langle \psi_{in}|] \\ = \frac{\mathbb{1}}{p_f^{nj} + p_f^{|\circ\rangle} + p_f^{|\mathbb{1}\rangle}} [p_f^{nj} (\alpha^2 + \beta^2) + |\alpha|^2 p_f^{|\circ\rangle} + |\beta|^2 p_f^{|\mathbb{1}\rangle}]$$

اکنون با انتگرال گیری معادله ۳۷.۳ می توان رفتار F_{av} و در نهایت F_{av}^s را نسبت به شدت p بررسی کرد. برای به دست آوردن نسبت p_u به p حالت اولیه $|\psi_{in}\rangle$ و حالت $|\psi_f^{nj}\rangle$ را با هم برابر قرار می دهیم بنابراین داریم.

$$K_{\uparrow}K_{\uparrow}(\mathbb{1} - p_u) = K_{\downarrow}K_{\downarrow}(\mathbb{1} - p) \quad (58.3)$$

در شکل ۶.۳ به بررسی تغییرات F_{av}^s نسبت به p پرداخته‌ایم. اولین نمودار برای حالت ایده‌آل $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1$ است که منجر به رابطه $1 - p_u = e^{-\Gamma\tau}(1 - p)$ می‌شود (مانند شکل ۴.۳) در تمام نمودارها مقدار $K_3 = 0.3$ است. نمودارهای دوم به پایین به ترتیب از بالا به پایین دارای مقادیر $K_1 = K_3 = K_4 = 0.999, 0.99, 0.9$ هستند. نتیجه دیگر اینکه p کوچک منجر به کاهش هماندهی می‌شود. برای $p \rightarrow 1$ همه هماندهی‌ها به مقدار 0.25 افتی ناگهانی دارند. در مورد نمودار پایینی مقدار هماندهی قبل از افت، افزایش زیادی نداشته‌است. از آنجایی که تمام نمودارها مقداری بیشتر از مقدار هماندهی بدون بازبرپایی (خط چین‌ها) دارند، در نتیجه بازبرپایی منجر به جلوگیری از واهمدوسی می‌شود.



شکل ۶.۳: خطوط پر: هماندهی‌های F_X و F_{av}^s در دوره انبارش با پارامترهای مشخص شده در متن. نقطه‌چین‌ها: هماندهی‌های مشابه بدون بازبرپایی ($p = p_u = 0$). خط چین‌ها: احتمال موفقیت، چیزی که قابل مشاهده است اینکه تابعی یکنوا نسبت به p (شدت اندازه‌گیری ضعیف) است.

فصل ۴

حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری
جزئی و معکوس سازی اندازه‌گیری

۱.۴ حفظ درهم‌تنیدگی در کانال میرایی دامنه در دمای صفر به

وسيله‌ی بازبرپایی

واهمدوسی اغلب با جفت‌شدگی اجتناب‌ناپذیر با محیط به‌وجود می‌آید، که موجب کاهش هم‌دوسی کوانتومی می‌شود. در مورد سیستم‌های کوانتومی چند بخشی، واهمدوسی موجب کاهش درهم‌تنیدگی و در مواردی خاص باعث مرگ ناگهانی درهم‌تنیدگی^۱ (ESD) می‌شود [۲۵]. درهم‌تنیدگی کوانتومی یک منبع حیاتی برای بسیاری از کاربردهای اطلاعات کوانتومی از جمله محاسبات کوانتومی^۲، رمزنگاری کوانتومی^۳ و دوربری کوانتومی^۴ است.

در این بخش قصد می‌خواهیم فرایندی را بررسی کنیم که به وسیله آن کاهش درهم‌تنیدگی در اثر وجود کانال میرایی دما^۵ به شکل قابل توجه‌ای کم می‌شود، به عبارتی به وسیله این فرایند می‌توانیم درهم‌تنیدگی کوانتومی را در دمای صفر (AD) تا حد زیادی کم کنیم. کانال میرایی دما در دمای صفر به‌صورت زیر فرمول بندی می‌شود [۱].

$$\varepsilon_{AD} = \sum_{i=0}^1 E_i \rho E_i^\dagger \quad (1.4)$$

که

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-r} \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

حالت $|0\rangle$ حالت پایه و حالت $|1\rangle$ حالت برانگیخته سیستم هستند. در یک کانال AD احتمال محدود r برای جهش از حالت برانگیخته به حالت پایه کیوبیت وجود دارد. به‌طور دقیق‌تر $r = 1 - e^{-\Gamma\tau}$ که در آن Γ آهنگ واهلش انرژی و τ دوره انبارش می‌باشد، به‌بیان دیگر $1 \gg r \gg 0$ ، همان بزرگی واهمدوسی است [۲۶]. حال به بررسی تأثیر کانال بالا بر یک حالت دو بیتی کوانتومی می‌پردازیم، در شکل ۱.۴ قسمت a طرحی از یک ارتباط کوانتومی نشان داده شده که در آن آلیس یک حالت درهم‌تنیده دو کیوبیتی کوانتومی را به شکل $|\phi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ ($\alpha^2 + \beta^2 = 1$) آماده می‌کند و از طریق دو کانال با مقادیر واهمدوسی r_1 و r_2 به باب و چارلی ارسال می‌کند.

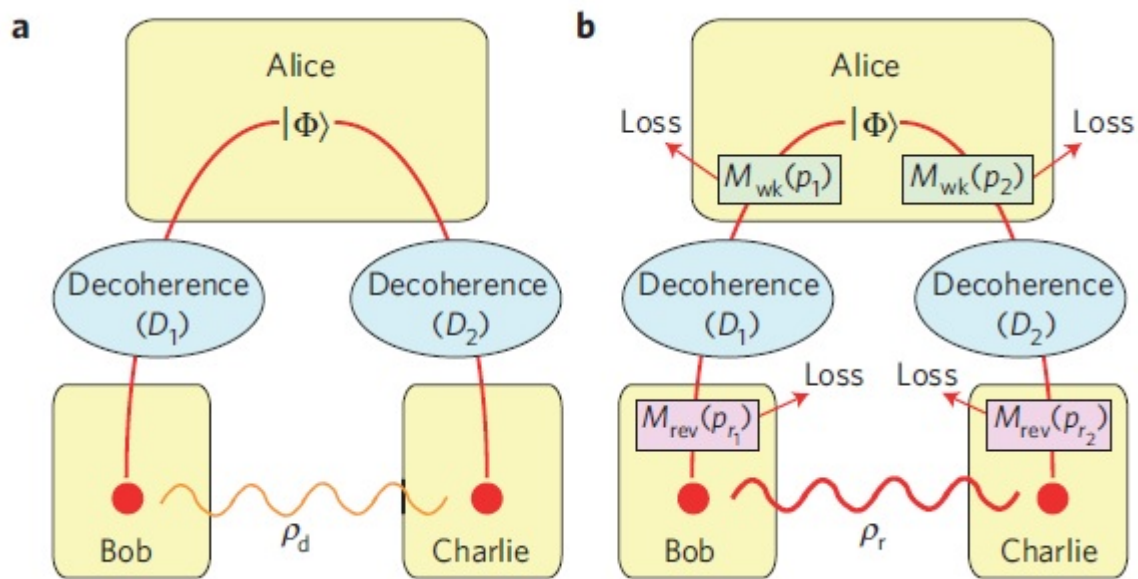
^۱Entanglement Sudden Death

^۲Quantum computing

^۳Quantum cryptography

^۴Quantum teleportation

^۵Amplitude Damping



شکل ۱.۴: (a) عبور از کانال‌های r_1 و r_2 باب و چارلی حالت ρ_d را با هم در اشتراک می‌گذارند که از حالت اولیه دارای درهم‌تنیدگی کمتری است. (b) حفظ در هم‌تنیدگی ناشی از کانال‌های r_1 و r_2 با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس.

ماتریس چگالی اولیه حالت اولیه به شکل زیر است.

$$\rho_o = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta\alpha^* & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

بنابراین با عبور ذره اول را از کانال اول با ضریب r_1 وانتقال آن به باب ماتریس چگالی به شکل زیر خواهد شد.

$$\rho' = [I_2 \otimes E_0(r_1)] \rho_0 [I_2 \otimes E_0^\dagger(r_1)] + [I_2 \otimes E_1(r_1)] \rho_0 [I_2 \otimes E_1^\dagger(r_1)]$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \sqrt{\bar{r}_1} \alpha \beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\bar{r}_1) |\beta|^2 & 0 \\ \sqrt{\bar{r}_1} \beta \alpha^* & 0 & 0 & (\bar{r}_1) |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

در نهایت با عبور ذره دوم از کانال دوم با ضریب r_2 ماتریس نهایی به شکل زیر خواهیم شد (از این پس آن را با ρ_d مشخص می‌کنیم که اندیس d برای تمایز آن با ρ_r حالاتی که شامل اندازه‌گیری ضعیف می‌شوند، در نظر گرفته شده است).

$$\rho_d = [E_0(r_2) \otimes I_1] \rho' [E_0^\dagger(r_2) \otimes I_1] + [E_1(r_2) \otimes I_1] \rho' [E_1^\dagger(r_2) \otimes I_1]$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 r_1 r_2 & 0 & 0 & \sqrt{\bar{r}_1} \sqrt{\bar{r}_2} \alpha \beta^* \\ 0 & r_1 (\bar{r}_2) |\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 (\bar{r}_1) |\beta|^2 & 0 \\ \sqrt{\bar{r}_1} \sqrt{\bar{r}_2} \beta \alpha^* & 0 & 0 & (\bar{r}_1) (\bar{r}_2) |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

که $1 - r_k = \bar{r}_k$ است.

حال برای سنجش میزان درهم‌تنیدگی این حالت می‌توانیم از معیار تلاقی Cd ^۶ استفاده کنیم [۲۷]. تلاقی برای سنجش میزان درهم‌تنیدگی حالت آمیخته دو کیوبیت کوانتومی تعریف می‌شود، به طوری که

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (6.4)$$

λ_i ها ویژه‌مقادیر به ترتیب از بزرگ به کوچک حالت زیر می‌باشند.

$$R = \sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}} \quad (7.4)$$

^۶Concurrence

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (۸.۴)$$

در این عبارت R یک ماتریس هرمیتی است اما محاسبه ویژه مقادیر آن ساده نیست. برای سادگی معمولاً λ_i ها را از روی ریشه دوم ویژه مقادیر ماتریس غیرهرمیتی $\rho \tilde{\rho}$ می‌یابند و مقداری حقیقی و غیرصفر دارند.

برای ساده‌سازی ρ_d را به شکل زیر در نظر می‌گیریم.

$$\rho_d = \begin{pmatrix} a & \circ & \circ & e \\ \circ & b & \circ & \circ \\ \circ & \circ & c & \circ \\ e^* & \circ & \circ & d \end{pmatrix} \quad (۹.۴)$$

$$\rho' = \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ -1 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \circ & \circ & e \\ \circ & b & \circ & \circ \\ \circ & \circ & c & \circ \\ e^* & \circ & \circ & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & -1 \\ \circ & \circ & 1 & \circ \\ \circ & 1 & \circ & \circ \\ -1 & \circ & \circ & \circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & \circ & \circ & e \\ \circ & c & \circ & \circ \\ \circ & \circ & b & \circ \\ e^* & \circ & \circ & a \end{pmatrix} \quad (10.4)$$

$$\rho\rho' = \begin{pmatrix} da + e^*e & \circ & \circ & 2de \\ \circ & cb & \circ & \circ \\ \circ & \circ & cb & \circ \\ 2ae^* & \circ & \circ & da + e^*e \end{pmatrix}$$

$$v_i = \begin{pmatrix} ad + e^*e + 2\sqrt{e^*dae} \\ ad + e^*e - 2\sqrt{e^*dae} \\ cb \\ cb \end{pmatrix}$$

بنابراین ویژه مقادیر $\lambda_i = \sqrt{v_i}$ ، R خواهند بود و از رابطه ۶.۴ داریم.

$$C_d = \max\{\circ \Lambda_d = \sqrt{r_1} \sqrt{r_2} |\beta| (|\alpha| - \sqrt{r_2 r_1} |\beta|)\} \quad (11.4)$$

که اگر $\Lambda_d > \circ$ باشد، در این صورت $C_d = \Lambda_d$ است و در غیر این صورت صفر است. از معادله ۱۱.۴ می‌توان فهمید که با افزایش میزان واهمدوسی $1 \rightarrow r_k$ مقدار C_d به صفر نزدیک می‌شود، به این معنا که درهم‌تنیدگی کوانتومی از بین می‌رود. جالب اینجاست که اگر یک حالت اولیه به شکل $|\phi\rangle = \alpha|\circ\circ\rangle + \beta|11\rangle$ با $|\beta| \geq |\alpha|$ فرض کنیم، حتی در حالتی که $1 \rightarrow r_k$ رود حالتی بدست می‌آید که $C_d = \circ$ ، یعنی (ESD) به وجود می‌آید. (این اتفاق در شرایطی به وجود می‌آید که $\sqrt{r_1 r_2} \geq \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$ است). حال به بررسی فرایندی می‌پردازیم که در آن با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف و معکوس سازی

اندازه‌گیری به حفظ درهم‌تنیدگی کمک می‌کند (شکل ۱.۴ قسمت b). قبل از آنکه بیت‌های کوانتومی از کانال‌ها عبور کنند، از اندازه‌گیری ضعیف M_{wk} استفاده می‌شود. این اندازه‌گیری باعث می‌شود که سیستم به‌طور جزئی به حالت $|^0\rangle_s$ رمبش کند. می‌توان این اندازه‌گیری ضعیف کوانتومی روی دوکیوبیت را به‌صورت یک عملگر غیریکانی کوانتومی به‌صورت زیر نوشت.

$$M_{wk}(p_1, p_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_1} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_2} \end{pmatrix} \quad (12.4)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{1-p_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-p_1)(1-p_2) \end{pmatrix}$$

که p_1 و p_2 شدت‌های اندازه‌گیری ضعیف هستند. در فصل قبل دیدیم که با وجود اندازه‌گیری ضعیف بیت‌های کوانتومی سیستم کمتر از قبل، از واهمدوسی آسیب خواهند دید. حال پس از عبور از کانال‌های کوانتومی واهمدوسی، باب و چارلی عملگرهای معکوس اندازه‌گیری را روی بیت‌های کوانتومی اعمال می‌کند.

اندازه‌گیری معکوس دوبیتی M_{rev} یک عملگر غیریکانی به‌شکل زیر است.

$$M_{rev}(p_{r_1}, p_{r_2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-p_{r_1}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \sqrt{1-p_{r_2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (13.4)$$

به‌طوری‌که p_{r_1} و p_{r_2} شدت‌های اندازه‌گیری معکوس می‌باشند، با توجه به فصل قبل و آنچه در مقایسه حالت اولیه و حالت نهایی به‌دست آوردیم ۳۲.۳ و در نظر گرفتن $r = 1 - e^{-\Gamma\tau}$ شدت اندازه‌گیری معکوس دوم از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$p_{r_k} = p_k + r_k \bar{p}_k \quad , \quad \bar{p}_k = 1 - p_k \quad (14.4)$$

پس از انجام اندازه‌گیری ضعیف اولیه، عبور از کانال‌ها و انجام اندازه‌گیری ضعیف معکوس نهایی داریم.

$$\rho_r^{(\omega)} = M_{rev} \varepsilon(M_{wk} \rho_0 M_{wk}^\dagger) M_{rew}^\dagger \quad (15.4)$$

$$\rho_r = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 + |\beta|^2 r_1 r_2 (\bar{p}_1)(\bar{p}_2) & 0 & 0 & \alpha^* \beta \\ 0 & r_1 (\bar{p}_1) |\beta|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_2 (\bar{p}_2) |\beta|^2 & 0 \\ \alpha \beta^* & 0 & 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \quad (16.4)$$

که $A = 1 + r_1 \bar{p}_1 (1 + r_2 \bar{p}_2) + r_2 \bar{p}_2$ است. مانند قبل برای تلاقی خواهیم داشت.

$$C_r = \max\{0, \Lambda_r = \frac{2|\beta|(|\alpha| - \sqrt{r_1 r_2 (\bar{p}_1)(\bar{p}_2)}|\beta|)}{1 + \{r_1 (\bar{p}_1)(1 + r_2 (\bar{p}_2) + r_2 (\bar{p}_2)\}|\beta|^2}\} \quad (17.4)$$

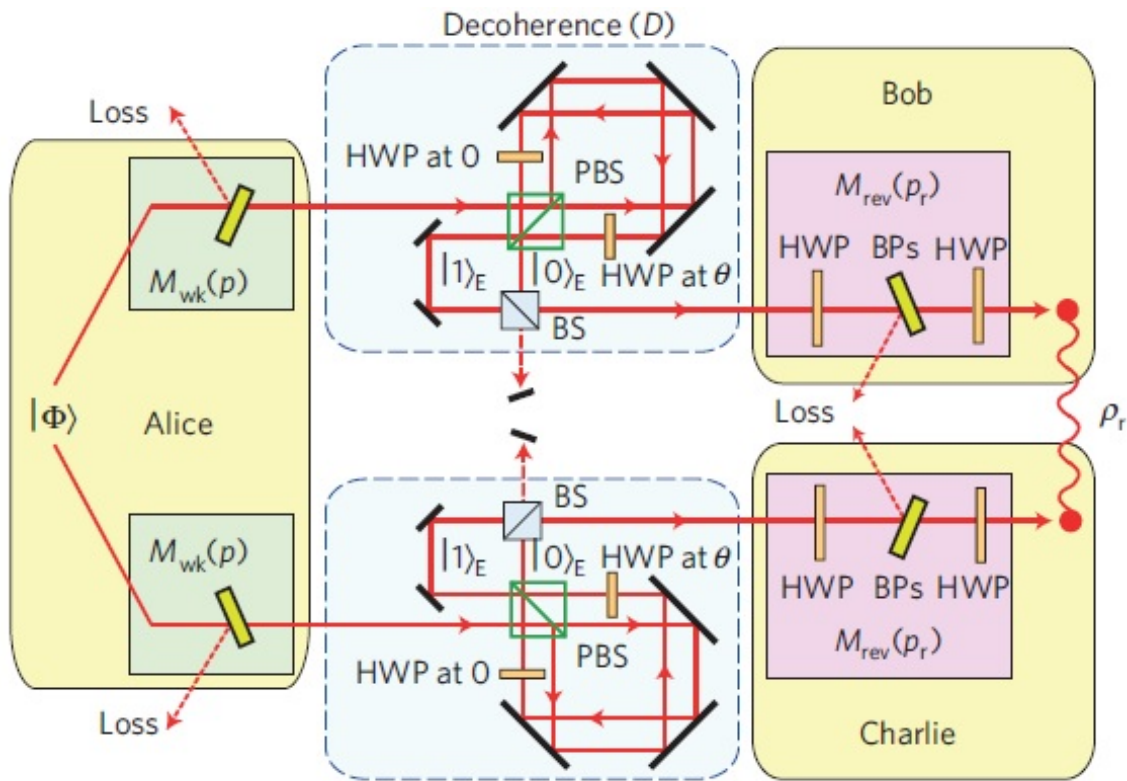
با مقایسه رابطه بالا و رابطه ۱۱.۴ دو نتیجه مهم بدست می‌آید: اینکه C_r همیشه بزرگتر از C_d است، به این معنا که اندازه‌گیری ضعیف و معکوس سازی اندازه‌گیری می‌تواند در حفظ درهم‌تنیدگی مؤثر باشند دوم اینکه حتی برای شرایط ESD کماکان درهم‌تنیدگی وجود دارد. به عبارتی باب و چارلی می‌توانند با استفاده از فرایند اندازه‌گیری ضعیف و معکوس سازی میزان درهم‌تنیدگی حالات خود را بهبود ببخشند حتی در حالتی که بدون این پروسه امکان وجود درهم‌تنیدگی وجود ندارد با اعمال این فرایند با شدت مناسب $(\bar{p}_1 \bar{p}_2 \leq \frac{1}{r_1 r_2}) \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|^2$ مقداری درهم‌تنیدگی بین حالات خود داشته باشند. نمایش تجربی این روش در شکل ۱۰.۴ آمده است.

در شکل ۳.۴ با رسم نمودارهای $C_r(\Lambda_r)$ و $C_d(\Lambda_d)$ به بررسی رفتار آن‌ها پرداخته‌ایم. چیزی که واضح است اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس در مقادیر واهمدوسی مختلف قادر به سرکوب واهمدوسی در کاهش درهم‌تنیدگی خواهد بود.

در این نمودارها برای واهمدوسی و شدت اندازه‌گیری ضعیف مقادیر یکسان $r_1 = r_2 = r$ و $p_1 = p_2 = p$ را برای دو ذره در نظر گرفته‌ایم. ابتدا تأثیر واهمدوسی را بر حالت اولیه دو کیوبیتی درهم‌تنیده بدون انجام اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس بررسی می‌کنیم (شکل ۳.۴ - a). برای هر سه شرط $(|\alpha| < |\beta|, |\alpha| > |\beta|, |\alpha| = |\beta|)$ تغییرات تلاقی به عنوان تابعی از r نشان داده شده است. در تمام موارد درهم‌تنیدگی با افزایش واهمدوسی کاهش پیدا کرده است. در شرایط $(|\alpha| < |\beta|)$ ، ESD به وجود می‌آید. به این صورت که از یک میزان واهمدوسی به بعد درهم‌تنیدگی دچار مرگ ناگهانی شده است.

در (شکل ۳.۴ - b) برای بررسی تأثیر اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس در حفظ درهم‌تنیدگی یک حالت خاص $r = 0.6$ را در نظر می‌گیریم. نمودار C_r را بر حسب p رسم می‌کنیم (برای دو حالت $|\alpha| < |\beta|$ و $|\alpha| = |\beta|$).

در حالت $|\alpha| = |\beta|$ یعنی برای بیشینه مقدار درهم‌تنیدگی به ازای هر p_r و شدت اندازه‌گیری معکوس بهینه $p_r = p + r\bar{p}$ که مقدار آن در فصل قبل ۳۲.۳ نشان داده شده، خواهیم دید که اندازه‌گیری ضعیف و



شکل ۲.۴: نمایش آزمایش حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس

اندازه‌گیری معکوس حقیقتاً باعث حفظ درهم‌تنیدگی می‌شوند و $C_r > C_d$ است از طرفی برای $p \rightarrow 1$ داریم $C_r \rightarrow 1$. در شرایط $|\alpha| < |\beta|$ یعنی زمانی که درهم‌تنیدگی بیشینه نیست و امکان ESD در آن وجود دارد نیز کارآمد است. البته در این شرایط مقدار C_r از یک میزان p خاصی به بعد، مقداری مثبت خواهد داشت. به معنای دیگر باب و چارلی حتی در واگم‌دوسی شدید نیز قادر به اشتراک‌گذاری درهم‌تنیدگی هستند و این روش کارآمد بوده است [۲۸].

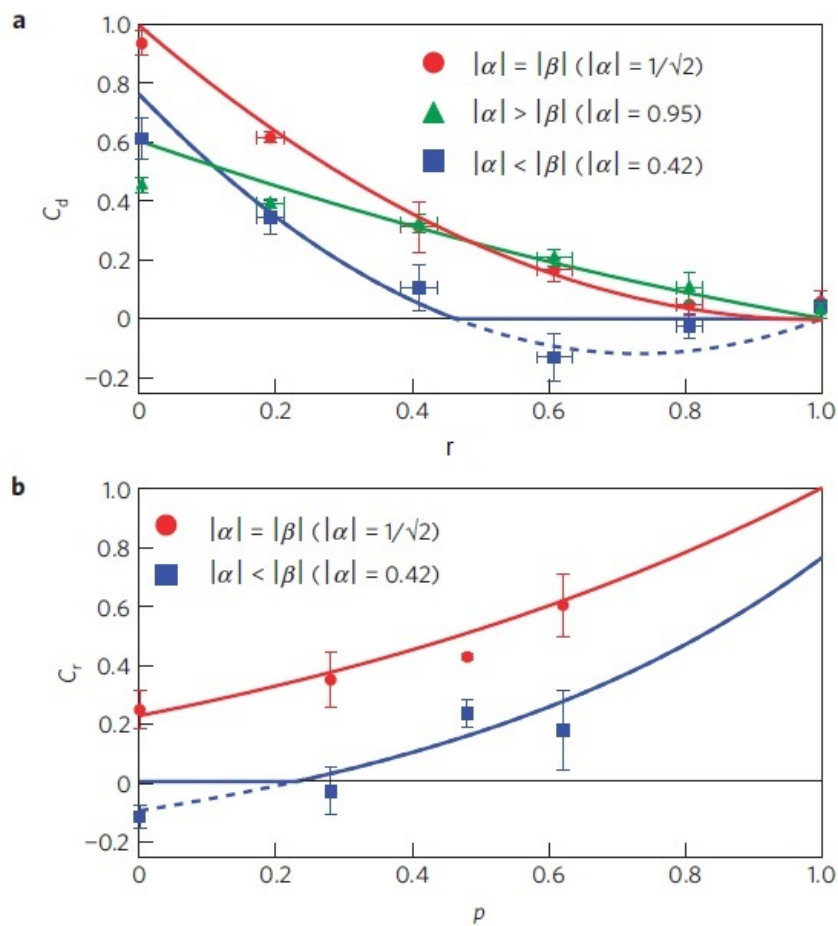
از طرفی همان‌طور که در شکل (شکل ۲.۴ - b) می‌بینیم هرچه شدت اندازه‌گیری ضعیف p بیشتر باشد C_r بزرگتر است. در فصل قبل برای احتمال موفقیت رابطه‌ای را نسبت به شدت اندازه‌گیری به‌دست آوردیم (رابطه ۴۱.۳). برای متوسط احتمال موفقیت کلی یک تک کیوبیت بر روی تمام حالت‌های روی کره بلاخ رابطه زیر بدست آمد.

$$P_1 = \frac{1}{4} \bar{r} \bar{p} (2 + r\bar{p}) \quad (18.4)$$

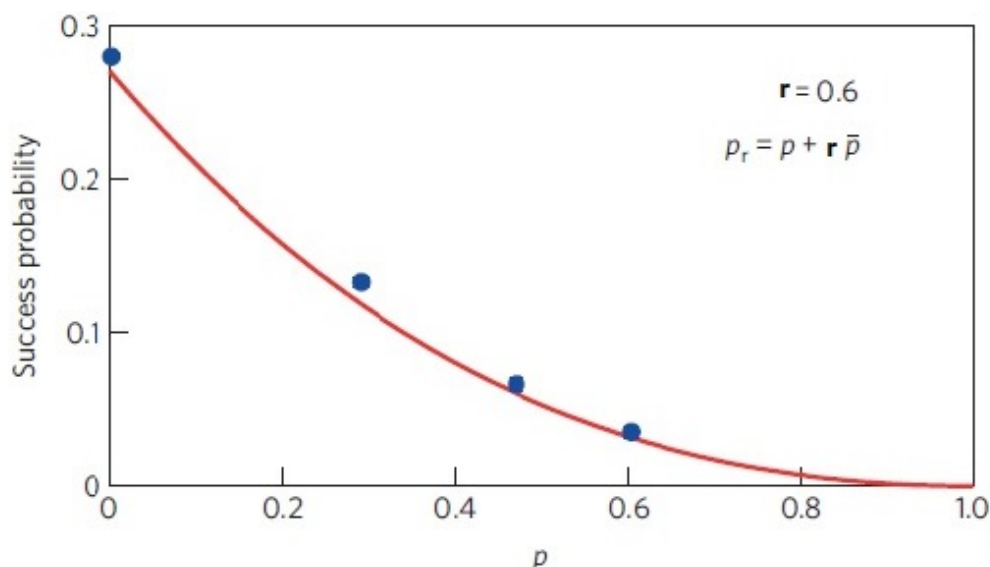
با تعمیم آن برای یک حالت دوکیوبیتی رابطه زیر را خواهیم داشت

$$P_2 = \frac{1}{4} \bar{r}^2 \bar{p}^2 (2 + r\bar{p})^2 \quad (19.4)$$

در شکل ۴.۴ تغییرات احتمال موفقیت کل نسبت به شدت p بررسی شده است.



شکل ۳.۴: (a) حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس با افزایش r میزان درهم‌تنیدگی ρ_d کاهش می‌یابد. (b) توزیع درهم‌تنیدگی با انجام $M_{rev}(\rho_r)$ و $M_{wk}(\rho)$ برای یک حالت خاص $r = 0.6$.



شکل ۴.۴: احتمال موفقیت به عنوان تابعی از شدت اندازه‌گیری ضعیف که از معادله ۱۹.۴ به دست آمده است.

۲.۴ حفظ درهم‌تنیدگی در کانال میرایی دامنه در دمای غیر صفر

به واسطه از اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس

در بخش قبل نشان داده شد که درهم‌تنیدگی کوانتومی در مقابل واهمدوسی ناشی از کانال AD تا حد زیادی قابل حفظ کردن است. در دمای غیر صفر علاوه بر انتقال انرژی از سیستم به محیط امکان انتقال انرژی از محیط به سیستم نیز وجود دارد. این مدل از نوفه کانال میرایی دامنه کلی^۷ (GAD) نامیده می‌شود [۱].

$$\varepsilon_{GAD}(\rho) = \sum_{i=0}^3 E_i \rho E_i^\dagger \quad (20.4)$$

^۷Generalized Amplitude Damping

که در آن

$$E_0 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-r} \end{pmatrix}, \quad E_1 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{r} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (21.4)$$

$$E_2 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} \sqrt{1-r} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{r} & 0 \end{pmatrix}$$

کانال GAD فرایندهای واهلش ناشی از دمای محدود محیط را توصیف می‌کند. در کانال GAD ، یک اتم تنها با انتشار خودبه‌خودی از تراز بالاتر انرژی به تراز پایین‌تر گذار نمی‌کند، بلکه می‌تواند با جذب انرژی از محیطی با دمای محدود از یک حالت کم‌انرژی به حالتی با انرژی بیشتر جهش کند. کانال GAD موقعیتی را توصیف می‌کند که در آن برانگیختگی سیستم با برهم‌کنش محیط کم و زیاد می‌شود. در سیستم‌های معین فیزیکی، r می‌تواند مربوط به نرخ واهلش انرژی و $\{p, r\}$ معمولاً یک تابعی از دما هستند. در صورتی که $p = 1$ باشد کانال‌های GAD به کانال‌های AD تبدیل می‌شود.

در این بخش نقش اندازه‌گیری ضعیف را در سرکوب واهمدوسی ناشی از چنین کانال‌هایی بررسی می‌کنیم، در نهایت خواهیم دید هماندهی نهایی با تنظیم پارامترهای اندازه‌گیری چگونه بهینه‌سازی می‌شود. در ادامه ابتدا نقش به‌کارگیری اندازه‌گیری ضعیف و اندازه‌گیری معکوس را در کانال‌های عمومی بررسی می‌کنیم سپس با متوسط‌گیری هماندهی شدت اندازه‌گیری بهینه داده می‌شود و در قسمت سوم به مطالعه اندازه‌گیری ضعیف در حفظ درهم‌تنیدگی کوانتومی در کانال‌های GAD می‌پردازیم و یک شدت اندازه‌گیری بهینه را برای به‌دست‌آوردن درهم‌تنیدگی ارائه می‌دهیم.

۱.۲.۴ حفظ کیوبیت کوانتومی به واسطه اندازه‌گیری‌های ضعیف

هر حالت خالص را در کره بلاخ می‌توان به صورت بردار $\rho = \frac{1}{4}(I + \sin\theta \cos\varphi X + \sin\theta \sin\varphi Y + \cos\theta Z)$ نوشت، در اینجا برای راحتی و کاهش پارامترها حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که $(\theta = \frac{\pi}{4})$ باشند این حالت‌ها به‌طور گسترده‌ای در فرایندهای توزیع کلید کوانتومی^۸ نقش دارند و از این جهت بسیار مهم است [۳۰].

$$\rho_{in} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & e^{-i\varphi} \\ e^{i\varphi} & 1 \end{pmatrix} \quad (22.4)$$

^۸Quantum key distribution

با عبور این حالات از کانال‌های ۲۱.۴ داریم

$$\rho_f = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 - r + 2pr & \sqrt{1-r}e^{-i\varphi} \\ \sqrt{1-r}e^{i\varphi} & 1 + r - 2pr \end{pmatrix} \quad (23.4)$$

مانند فصل قبل کمیتی که میزان شباهت این حالت و حالت اولیه را مشخص می‌کند هماندهی $F = Tr[XX^\circ]$ نام دارد که در مورد ρ_f و ρ_i به شکل زیر می‌شود.

$$F_\circ = Tr(\rho_f \cdot \rho_{in}) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-r}) \quad (24.4)$$

با توجه به رابطه بالا به دلیل وجود واهمدوسی، هماندهی مقداری کمتر از واحد دارد. اکنون برای افزایش هماندهی باید از دو عملگر اندازه‌گیری M و N استفاده می‌کنیم. این کار را به‌ترتیب قبل و بعد از عبور کیوبیت‌ها از کانال GAD انجام می‌دهیم، در این صورت داریم.

$$\rho_f^{(\omega)} = N \varepsilon_{GAD}(M \rho_{in} M^\dagger) N^\dagger \quad (25.4)$$

در رابطه بالا عملگرهای اندازه‌گیری به صورت $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ و $N = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ می‌باشند.

$$\begin{aligned} \rho_f^\omega &= N[E_\circ M \rho_{in} M^\dagger E_\circ^\dagger + E_\backslash M \rho_{in} M^\dagger E_\backslash^\dagger \\ &\quad + E_\gamma M \rho_{in} M^\dagger E_\gamma^\dagger + E_\gamma M \rho_{in} M^\dagger E_\gamma^\dagger] N^\dagger \end{aligned} \quad (26.4)$$

$$= \frac{1}{T} \begin{pmatrix} n^2(prm^2 + pr - r + 1) & mn\sqrt{1-r}e^{-i\varphi} \\ mn\sqrt{1-r}e^{i\varphi} & -prm^2 + m^2 - pr + r \end{pmatrix}$$

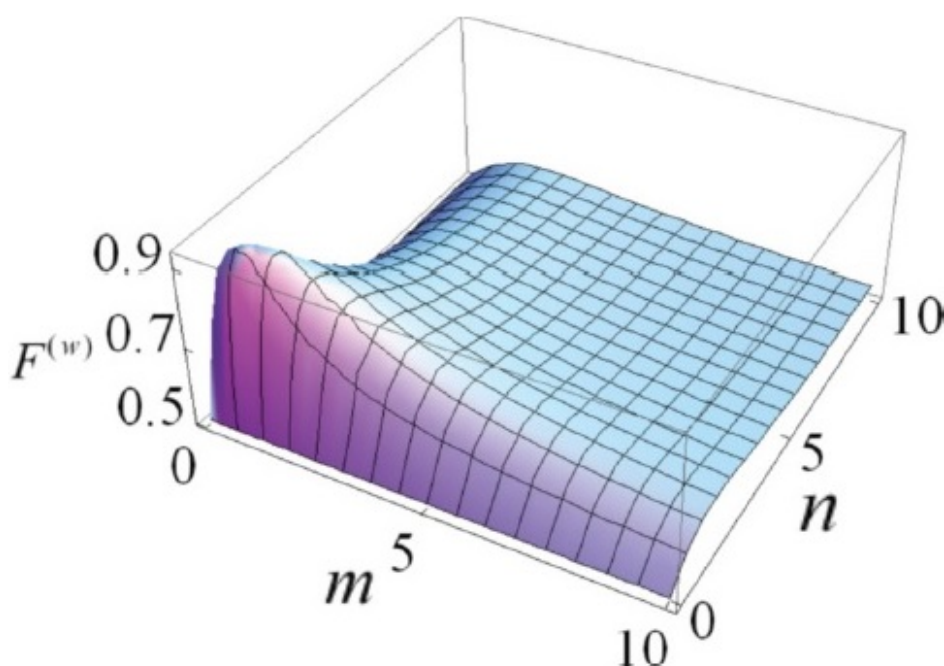
که $T = n^2(prm^2 + pr - r + 1) - prm^2 + m^2 - pr + r$ است. هماندهی حالت نهایی و اولیه به‌صورت زیر است.

$$F^\omega = Tr(\rho_f^\omega \rho_f^{in}) = \frac{1}{2} + \frac{mn\sqrt{1-r}}{n^2(prm^2 + pr - r + 1) + m^2(pr - 1) + (1-p)r} \quad (27.4)$$

حال می‌توان با بهینه‌سازی هماندهی مقادیر m و n را به دست آورد.

$$m = \sqrt[4]{\frac{(1-p)(1-r+pr)}{p(1-pr)}} \quad , \quad n = \sqrt[4]{\frac{(1-p)(1-pr)}{p(1-r+pr)}} \quad (28.4)$$

در شکل ۵.۴ نمودار هماندهی را بر حسب m و n رسم شده است.



شکل ۵.۴: نمودار F^w با مقدار ثابت $r=0.3$ و $p=0.8$ بر حسب شدت‌های اندازه‌گیری m و n با جاگذاری مقادیر رابطه ۲۸.۴ در معادله ۲۷.۴ مقدار بیشینه هماندهی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$F_{\max}^w = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{(1-pr)(1-r+pr)} + r\sqrt{p(1-p)}} \right) \quad (29.4)$$

می‌توان نشان داد که $F_{\max}^w \geq F$ است. برای اثبات آن نیازمند بررسی مخرج رابطه ۲۹.۴ هستیم. با توجه به رابطه‌های زیر برای $G(p, r) = \sqrt{(1-rp)(1-r+rp)} + r\sqrt{p(1-p)}$ داریم.

$$\begin{cases} \partial_p G = \frac{1}{4} r (1-2p) \left(\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}} + \frac{r}{\sqrt{1-r+(1-p)pr^2}} \right) = 0 \\ \partial_r G = \sqrt{p(1-p)} - \frac{1-2pr+2pr^2}{2\sqrt{1-r+(1-p)pr^2}} = 0 \end{cases} \quad (30.4)$$

با استفاده از این روابط خواهیم دید که $G(p, r)$ در $r = 0$ و $p = \frac{1}{4}$ دارای ماکزیمم و در $p = 0$ و $p = 1$ مقدار کمینه $G = \sqrt{1-r}$ است که در این حالت $F_{\max}^{\omega} = 1$ است. در نتیجه می‌توان گفت $F_{\max} \geq F_0$ است.

بنابراین انجام اندازه‌گیری ضعیف در کاهش واهمدوسی برای حالت $\theta = \frac{\pi}{4}$ در حضور کانال‌های میرایی GAD مفید بوده است.

۲.۲.۴ حفظ درهم‌تنیدگی به واسطه اندازه‌گیری ضعیف

در این بخش به بررسی تاثیر کانال GAD روی حالت درهم‌تنیده دوکیوبیته می‌پردازیم. فرض می‌کنیم در ابتدا آلایس حالت دوکیوبیته‌ای را به صورت زیر آماده می‌کند

$$|\varphi\rangle_{in} = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \quad (31.4)$$

سپس دو کیوبیت را بعد از عبور از کانال‌هایی با مقادیر واهمدوسی $\{p_1, r_1\}$ و $\{p_2, r_2\}$ به باب و چارلی ارسال می‌کند. با در نظر گرفتن حالت اولیه ۳۱.۴ داریم.

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 & 0 & \alpha\beta^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta\alpha^* & 0 & 0 & |\alpha|^2 \end{pmatrix} \quad (32.4)$$

با عبور ذره اول از کانال اول

$$(33.4)$$

$$\begin{aligned} \rho' &= [I_2 \otimes E_0(r_1, p_1)]\rho_0[I_2 \otimes E_0^\dagger(r_1, p_1)] + [I_2 \otimes E_1(r_1, p_1)]\rho_0[I_2 \otimes E_1^\dagger(r_1, p_1)] \\ &+ [I_2 \otimes E_2(r_1, p_1)]\rho_0[I_2 \otimes E_2^\dagger(r_1, p_1)] + [I_2 \otimes E_3(r_1, p_1)]\rho_0[I_2 \otimes E_3^\dagger(r_1, p_1)] \end{aligned}$$

بعد از عبور ذره دوم خواهیم داشت.

$$(34.4)$$

$$\begin{aligned} \rho_c &= [E_0(r_2, p_2) \otimes I_1]\rho'[E_0^\dagger(r_2, p_2) \otimes I_1] + [E_1(r_2, p_2) \otimes I_1]\rho'[E_1^\dagger(r_2, p_2) \otimes I_1] \\ &+ [E_2(r_2, p_2) \otimes I_1]\rho'[E_2^\dagger(r_2, p_2) \otimes I_1] + [E_3(r_2, p_2) \otimes I_1]\rho'[E_3^\dagger(r_2, p_2) \otimes I_1] \end{aligned}$$

می‌توان حال نهایی ρ_c را به شکل زیر نوشت.

$$\rho_c = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & e \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ e^* & 0 & 0 & d \end{pmatrix} \quad (35.4)$$

که در آن $t = a + b + c + d$ می‌باشد و

$$a = (\bar{r}_1 + r_1 p_1)(\bar{r}_2 + r_2 p_2) |\alpha|^2 + p_1 p_2 r_1 r_2 |\beta|^2 = a_0 |\alpha|^2 + a_1 |\beta|^2$$

$$b = r_2 (\bar{p}_2)(\bar{r}_1 + r_1 p_1) |\alpha|^2 + p_1 r_1 (\bar{p}_2 r_2) |\beta|^2 = b_0 |\alpha|^2 + b_1 |\beta|^2$$

$$c = r_1 (\bar{p}_1)(\bar{r}_2 + r_2 p_2) |\alpha|^2 + p_2 r_2 (\bar{p}_1 r_1) |\beta|^2 = c_0 |\alpha|^2 + c_1 |\beta|^2 \quad (36.4)$$

$$d = r_1 (\bar{p}_1)(\bar{p}_2) r_1 r_2 |\alpha|^2 + (\bar{p}_1 r_1 - p_2 r_2 + p_1 p_2 r_1 r_2) |\beta|^2 = d_0 |\alpha|^2 + d_1 |\beta|^2$$

$$e = \alpha \beta^* \sqrt{\bar{r}_1} \sqrt{\bar{r}_2} = e_0 \alpha \beta^*$$

حال مانند بخش قبل برای بررسی میزان درهم‌تنیدگی کیوبیت‌ها از تلاقی استفاده می‌کنیم.

با جاگذاری مقدار ρ_c داریم.

$$\tilde{\rho}_c = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_c (\sigma_y \otimes \sigma_y) = \begin{pmatrix} \frac{d}{t} & 0 & 0 & \frac{e}{t} \\ 0 & \frac{c}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{t} & 0 \\ \frac{e^*}{t} & 0 & 0 & \frac{a}{t} \end{pmatrix} \quad (۳۷.۴)$$

$$\tilde{\rho} \rho_c = \begin{pmatrix} \frac{da}{t^2} + \frac{ee^*}{t^2} & 0 & 0 & \frac{2de}{t^2} \\ 0 & \frac{cb}{t^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{cb}{t^2} & 0 \\ \frac{2ee^*a}{t^2} & 0 & 0 & \frac{da}{t^2} + \frac{ee^*}{t^2} \end{pmatrix} \quad (۳۸.۴)$$

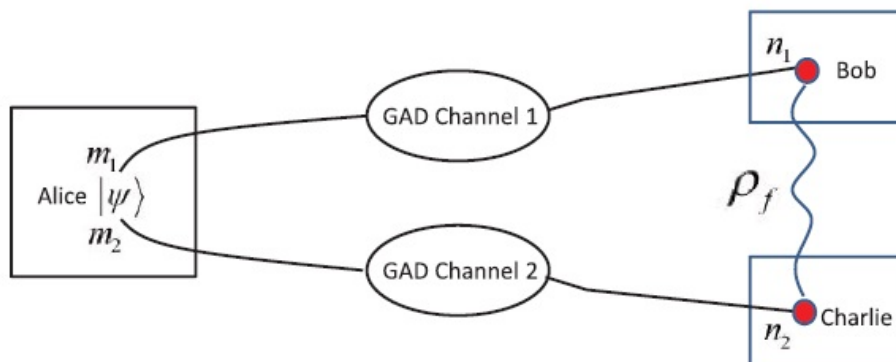
$$\lambda_i = \begin{pmatrix} \frac{ad+e^*e+2\sqrt{e^*dae}}{t^2} \\ \frac{ad+e^*e-2\sqrt{e^*dae}}{t^2} \\ \frac{cb}{t^2} \\ \frac{cb}{t^2} \end{pmatrix} \quad (۳۹.۴)$$

$$\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} = \sqrt{\frac{ad+e^*e+2\sqrt{e^*dae}}{t^2}} - \sqrt{\frac{ad+e^*e-2\sqrt{e^*dae}}{t^2}} - 2\sqrt{\frac{cb}{t^2}} \quad (۴۰.۴)$$

در نهایت خواهیم داشت

$$C(\rho_c) = \max\{0, \Lambda_1 = 2\left(\frac{|e| - \sqrt{bc}}{t}\right)\} \quad (۴۱.۴)$$

زمانی که $0 < \Lambda_1$ باشد $C(\rho_c) = \Lambda_1$ است. در غیر این صورت این مقدار صفر است. اکنون برای بهبود میزان درهم‌تنیدگی آلیس قبل از عبور کیوبیت‌های کوانتومی از کانال‌ها، اندازه‌گیری ضعیفی (شکل ۶.۴) را بر آن‌ها اعمال می‌کند.



شکل ۴.۶: فرضیه حفظ درهم‌تنیدگی با استفاده از اندازه‌گیری ضعیف

این اندازه‌گیری ضعیف، یک عملگر غیریکانی است که به شکل زیر می‌توان نوشت.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad (42.4)$$

بعد از انجام اندازه‌گیری ضعیف و عبور از کانال‌ها، باب و چارلی کیوبیت‌ها را بدست می‌آورند. در این زمان اندازه‌گیری معکوسی به صورت زیر بر آنها انجام می‌دهند.

$$N = \begin{pmatrix} n_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} n_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (43.4)$$

با توجه به معادله $\rho_N = N \varepsilon_{GAD}(M \rho M^\dagger) N^\dagger$ خواهیم داشت

$$\rho_N = \frac{1}{p} \begin{pmatrix} n_1^\dagger n_1^\dagger A & 0 & 0 & n_1 n_2 E \\ 0 & n_1^\dagger B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_2^\dagger C & 0 \\ n_1 n_2 E^* & 0 & 0 & D \end{pmatrix} \quad (44.4)$$

که $p = n_1^\dagger n_1^\dagger A + n_1^\dagger B + n_2^\dagger C + D$ و

$$\begin{aligned}
 A &= a_{\circ} |\alpha|^2 + a_{\backslash} m_{\backslash}^2 m_{\backslash}^2 |\beta|^2 \\
 B &= b_{\circ} |\alpha|^2 + b_{\backslash} m_{\backslash}^2 m_{\backslash}^2 |\beta|^2 \\
 C &= c_{\circ} |\alpha|^2 + c_{\backslash} m_{\backslash}^2 m_{\backslash}^2 |\beta|^2 \\
 D &= d_{\circ} |\alpha|^2 + d_{\backslash} m_{\backslash}^2 m_{\backslash}^2 |\beta|^2 \\
 E &= e_{\circ} m_{\backslash} m_{\backslash} \alpha \beta^*
 \end{aligned} \tag{۴۵.۴}$$

که مقادیر $(X = a, b, c, d, e, i = 1, 2)$ در معادله ۳۶.۴ آمده است. برای بدست آوردن مقدار تلاقی خواهیم داشت.

$$\tilde{\rho}_N = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho_c (\sigma_y \otimes \sigma_y) = \begin{pmatrix} D & \circ & \circ & n_{\backslash} n_{\backslash} E \\ \circ & n_{\backslash}^2 C & \circ & \circ \\ \circ & \circ & n_{\backslash}^2 C & \circ \\ n_{\backslash} n_{\backslash} E & \circ & \circ & n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 A \end{pmatrix} \tag{۴۶.۴}$$

$$\tilde{\rho}_N \rho_N = \begin{pmatrix} \frac{AD n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 + E^2 n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2}{p^2} & \circ & \circ & 2 n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 EA \\ \circ & \frac{n_{\backslash}^2 B n_{\backslash}^2 C}{p^2} & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \frac{n_{\backslash}^2 B n_{\backslash}^2 C}{p^2} & \circ \\ 2 D n_{\backslash} n_{\backslash} E & \circ & \circ & \frac{AD n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 + E^2 n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2}{p^2} \end{pmatrix} \tag{۴۷.۴}$$

$$\lambda_i = \frac{1}{p^2} \begin{pmatrix} (AD + E^2 + 2E\sqrt{AD}) n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 \\ (AD + E^2 - 2E\sqrt{AD}) n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 \\ n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 BC \\ n_{\backslash}^2 n_{\backslash}^2 BC \end{pmatrix} \tag{۴۸.۴}$$

در نهایت داریم.

$$C(\rho_N) = \max\{0, \Lambda_2 \equiv \frac{2n_1 n_2 (|E| - \sqrt{BC})}{n_1^2 n_2^2 A + n_1^2 B + n_2^2 C + D}\} \quad (49.4)$$

با بیشینه‌سازی $C(\rho_N)$ مقادیر زیر برای n_1 و n_2 به دست می‌آید

$$n_1 = \sqrt[4]{\frac{CD}{AB}} \quad , \quad n_2 = \sqrt[4]{\frac{BD}{AB}} \quad (50.4)$$

با جاگذاری n_1 و n_2 در $C(\rho_N)$ می‌بینیم که تلاقی تنها به $m_1 m_2$ بستگی خواهد داشت، در این صورت می‌توانیم اندازه‌گیری دوم را در نظر نگیریم یعنی $m_2 = 1$. می‌توانیم تلاقی را تنها با مقدار $m \equiv m_1$ بهینه‌سازی کنیم در این صورت داریم

$$(51.4)$$

$$\Lambda_2 = \frac{|E| - \sqrt{BC}}{\sqrt{BC} - \sqrt{AD}}$$

$$= \frac{|\alpha\beta|e - \sqrt{m^2 b_1 c_1 |\beta|^4 + \frac{1}{m^2} b_0 c_0 |\alpha|^4 + (b_1 c_0 + b_0 c_1) |\alpha|^2 |\beta|^2}}{\sqrt{m^2 a_1 d_1 |\beta|^4 + \frac{1}{m^2} a_0 d_0 |\alpha|^4 + (a_1 d_0 + a_0 d_1) |\alpha|^2 |\beta|^2} + \sqrt{m^2 b_1 c_1 |\beta|^4 + \frac{1}{m^2} b_0 c_0 |\alpha|^4 + (b_1 c_0 + b_0 c_1) |\alpha|^2 |\beta|^2}}$$

برای آنکه عبارت بالا را بیشینه کنیم دو نا مساوی زیر باید برقرار باشند.

$$(52.4)$$

$$\sqrt{m^2 b_1 c_1 |\beta|^4 + \frac{1}{m^2} b_0 c_0 |\alpha|^4 + (b_1 c_0 + b_0 c_1) |\alpha|^2 |\beta|^2} \geq \sqrt{2\sqrt{b_1 c_1 b_0 c_0} + b_1 c_0 + b_0 c_1} |\alpha\beta|$$

$$= (\sqrt{b_1 c_0} + \sqrt{b_0 c_1}) |\alpha\beta|$$

که در این رابطه حالت تساوی وقتی اتفاق می‌افتد که

$$m^4 = \frac{b_0 c_0 |\alpha|^4}{b_1 c_1 |\beta|^4} \quad (53.4)$$

و

$$(54.4)$$

$$m^2 a_1 d_1 |\beta|^4 + \frac{1}{m^2} a_0 d_0 |\alpha|^4 + (a_1 d_0 + a_0 d_1) |\alpha|^2 |\beta|^2 \geq \sqrt{2\sqrt{a_1 d_1 a_0 d_0} + a_1 d_0 + a_0 d_1} |\alpha\beta|$$

$$= (\sqrt{a_1 d_0} + \sqrt{a_0 d_1}) |\alpha\beta|$$

که حالت تساوی در این رابطه در مقدار زیر برقرار است.

$$m^4 = \frac{a_0 d_0 |\alpha|^4}{a_1 d_1 |\beta|^4} \quad (55.4)$$

با در نظر گرفتن مقادیر A ، B ، C و D به راحتی می‌توان فهمید.

$$\begin{aligned} m &= \sqrt[4]{\frac{b_0 c_0 |\alpha|}{b_1 c_1 |\beta|}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{a_0 d_0 |\alpha|}{a_1 d_1 |\beta|}} \\ &= \sqrt[4]{\frac{(\bar{p}_1)(\bar{p}_2)(\bar{r}_1 + r_1 p_1)(\bar{r}_2 + r_2 p_2) |\alpha|}{p_1 p_2 (1 - r_1 p_1)(1 - r_2 p_2) |\beta|}} \end{aligned} \quad (56.4)$$

حال با جایگذاری مقدار m به دست آمده در Λ_2 داریم

$$\bar{\Lambda}_2 = \frac{\sqrt{(\bar{r}_1)(\bar{r}_2) - r_1 \sqrt{(p_1)(\bar{p}_1)(\bar{r}_2 p_2)(\bar{r}_2 + r_2 p_2)(\bar{r}_2 + r_2 p_2)} - r_2 \sqrt{(p_2)(\bar{p}_2)(1 - r_1 p_1)(\bar{r}_1 + r_1 p_1)}}}{[r_1 \sqrt{p_1(\bar{p}_1)} + \sqrt{(\bar{r}_1 p_1)(\bar{r}_1 + r_1 p_1)}][r_2 \sqrt{p_2(\bar{p}_2)} + \sqrt{(\bar{r}_2 p_2)(\bar{r}_2 + r_2 p_2)}]}$$

بنابراین تلاقی بهینه از حالت خروجی را به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$C(\rho_N) = \max\{\circ, \bar{\Lambda}_2\} \quad (58.4)$$

نتیجه ۵۷.۴ نتیجه بسیار جالبی است زیرا برای مقادیر n_1 و n_2 در معادله ۵۰.۴، $m_1 = 1$ و $m_2 = m$ به مقدار α و β بستگی ندارد. این به این معناست که درهم‌تنیدگی بهینه به حالت اولیه بستگی ندارد. از طرفی تحت شرایط معادله ۵۶.۴ مقدار n_1 و n_2 را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$n_1 = \sqrt{\frac{(c_0 + c_1 h)(d_0 + d_1 h)}{(a_0 + a_1 h)(b_0 + b_1 h)}} \quad (59.4)$$

و

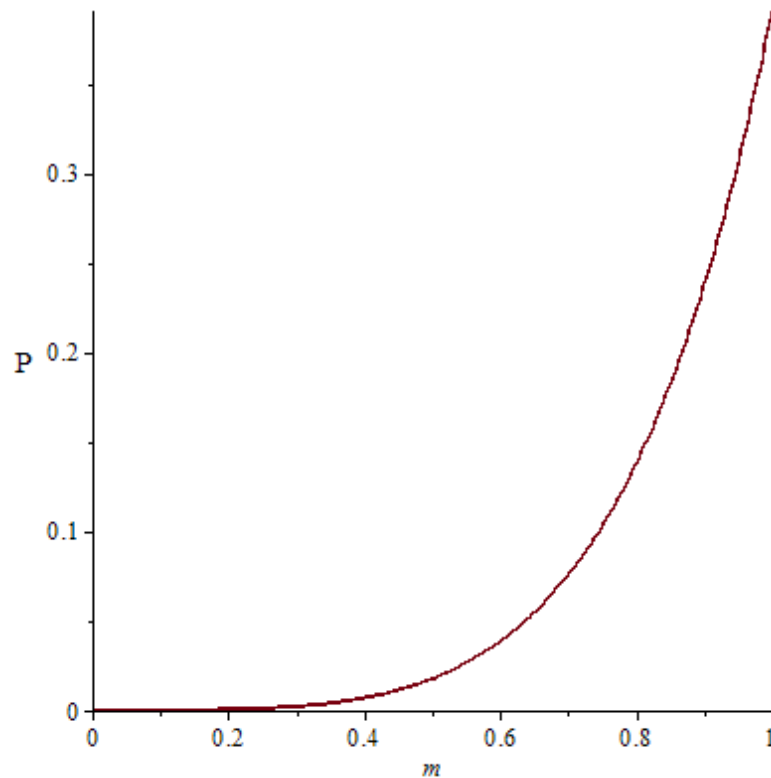
$$n_2 = \sqrt{\frac{(b_0 + b_1 h)(d_0 + d_1 h)}{(a_0 + a_1 h)(c_0 + c_1 h)}} \quad (60.4)$$

که $h = \sqrt{\frac{b_0 c_0}{b_1 c_1}} = \sqrt{\frac{a_0 d_0}{a_1 d_1}}$ است. به این معنا که n_1 و n_2 نیز به α و β بستگی ندارند. در بخش قبل احتمال موفقیت به صورت $P_2 = (P_1)^2 = \frac{1}{4} \bar{r}^2 \bar{p}'^2 (2 + r \bar{p}')^2$ بدست آمد.

در اینجا از نماد گذاری $m = \sqrt{1 - p'}$ استفاده کرده‌ایم که p' همان مقدار شدت اندازه‌گیری ضعیف در بخش قبل است. بنابراین احتمال موفقیت را بر حسب m به شکل زیر می‌توان نوشت.

$$P = \frac{1}{4} \bar{r}^2 m^4 (2 + r m^2)^2 \quad (61.4)$$

با مشتق‌گیری از P نسبت به m و بدست آوردن نقاط اکسترمم فقط $m = 0$ قابل قبول است که معادل اندازه‌گیری تصویری است و نمی‌تواند قابل قبول باشد. بنابراین در اندازه‌گیری ضعیف تابع P یک تابع یک نواخت است که مقدار ماکزیمم آن در $m = 1$ اتفاق می‌افتد (شکل ۷.۴).



شکل ۷.۴: میزان تغییرات احتمال موفقیت بر حسب m در $r = 0.5$

بنابراین با بهینه سازی P ، m^2 در بیشترین مقدار خود به یک نزدیک می‌شود، در این صورت خواهیم داشت.

$$m^2 = \left(\sqrt{\frac{b \cdot c_0}{b_1 c_1}} \right)^2 \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = h \frac{\alpha^2}{1 - |\alpha|^2} \quad (62.4)$$

بنابراین

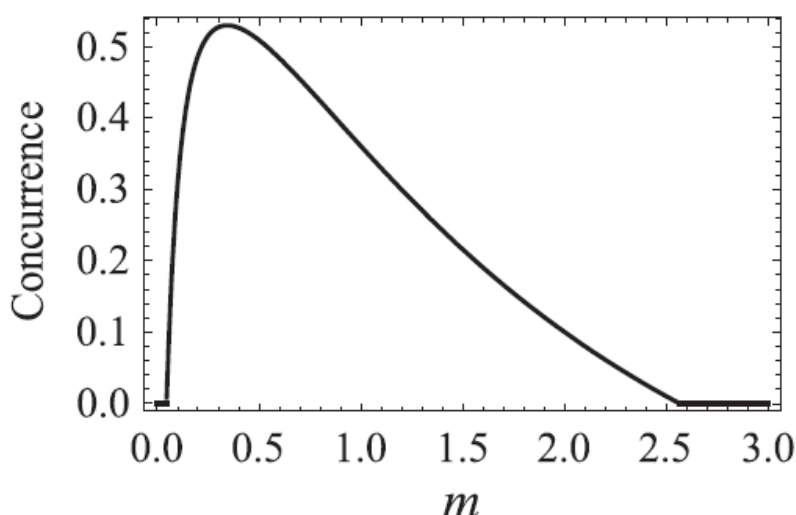
$$|\alpha|^2 = \frac{1}{1 + h} \quad (63.4)$$

حال زمانی که $|\alpha| = 0$ یا $|\beta| = 0$ باشند مقدار احتمال موفقیت دقیقاً صفر است، به این معنا که در صورتی که هیچ درهم‌تنیدگی از ابتدا نداشته باشیم امکان ایجاد هیچ درهم‌تنیدگی با عملگرهای موضعی وجود ندارد.

در واقع باب و چارلی نیاز ندارند تا هیچ اطلاعاتی در مورد حالت اولیه داشته باشند. آنها می‌توانند در انجام اندازه‌گیری‌های خود (n_1 و n_2) از اطلاعات کانال‌ها p_1 و p_2 و r_1 و r_2 استفاده کنند، آلیس

نیز می‌تواند اندازه‌گیری خود یعنی $m_1 = m$ و $m_2 = 1$ را بر اساس ۵۶.۴ انجام دهد. اگر آلیس بتواند حالت اولیه کیویتیت $\alpha|00\rangle + \beta|11\rangle$ را با توجه به رابطه ۶۳.۴ تهیه کند در این صورت بیشترین میزان موفقیت را خواهیم داشت. توجه داشته باشیم اگر حالت اولیه با توجه به رابطه ۶۳.۴ ساخته شود، $m = 1$ است، که این به این معناست که اگر آلیس حالت اولیه را در این حالت بسازد نیاز به انجام هیچ‌گونه اندازه‌گیری ضعیف ندارد.

در شکل ۸.۴ با توجه به پارامترهای $p_1 = 0.9$, $r_1 = 0.5$, $p_2 = 0.95$ و $r_2 = 0.3$ نمودار تلاقی را بر حسب m رسم کرده‌ایم. چیزی که مشاهده می‌کنیم بیشترین مقدار تلاقی، ۰.۵۳ است، که در پارامترهای مشابه آن $m = 0.34$, $n_1 = 0.5$ و $n_2 = 0.44$ می‌باشند. از طرفی احتمال موفقیت نیز برابر با ۰.۰۶ است. مقدار تلاقی برای زمانی که هیچ‌گونه اندازه‌گیری ضعیفی بر آن رخ ندهد به اندازه ۰.۳۳ می‌باشد.



شکل ۸.۴: میزان تغییرات همزانی بر حسب m برای حالتی با بیشینه درهم‌تنیدگی.

مراجع

- [1] M. Nielsen and I. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information (Cambridge Univ. Press, 2000).
- [2] Elitzur, Avshalom C., and Eliahu Cohen. "The retrocausal nature of quantum measurement revealed by partial and weak measurements." Quantum Retrocausation: Theory and Experiment. Vol. 1408. No. 1. AIP Publishing, 2011.
- [3] Aharonov, Yakir, Eliahu Cohen, and Avshalom C. Elitzur. "Can a future choice affect a past measurement's outcome?" Annals of Physics 355 (2015): 258-268.
- [4] Aharonov, Yakir, Eliahu Cohen, and Shay Ben-Moshe. "Unusual Interaction of a Pre-and-Post-Selected Particle." arXiv preprint arXiv:1208.3203 (2012).
- [5] Aharonov Y, Rohrlich D. Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed. Weinheim: Wiley-VCH, 2005.
- [6] Boaz Tamir, Eliahu Cohen, "Introduction to Weak Measurements and Weak Values", Quanta j DOI: 10.12743/quanta.v2i1.14, (2013)
- [7] L. Aolita, R. Chaves, D. Cavalcanti, A. Acín, and L. Davidovich, "Scaling laws for the decay of multiqubit entanglement," Phys. Rev. Lett. 100, 080501 (2008).

-
- [8] M. P. Almeida, F. de Melo, M. Hor-Meyll, A. Salles, S. P. Walborn, P. H. Souto Ribeiro and L. Davidovich, "Environment-Induced Sudden Death of Entanglement," Science 316, 579-582 (2007).
 - [9] Heinz-Peter Breuer and Francesco Petruccione, "THE THEORY OF OPEN QUANTUM SYSTEMS", Oxford university press.
 - [10] P. W. Shor, "Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory," Phys. Rev. A 52, R2493-R2496 (1995).
 - [11] A. M. Steane, "Error correcting codes in quantum theory," Phys. Rev. Lett. 77, 793-797 (1996).
 - [12] D. A. Lidar, I. L. Chuang, and K. B. Whaley, "Decoherence-free subspaces for quantum computation," Phys. Rev. Lett. 81, 2594-2597 (1998).
 - [13] P. G. Kwiat, A. J. Berglund, J. B. Altepeter, and A. G. White, "Experimental verification of decoherence-free subspaces," Science 290, 498-501 (2000).
 - [14] L. Viola, E. Knill, and S. Lloyd, "Dynamical decoupling of open quantum systems," Phys. Rev. Lett. 82, 2417- 2421 (1999).
 - [15] K. Chrysafinos and L. Hou. Error estimates for semidiscrete finite element approximations of linear and semilinear parabolic equations under minimal regularity assumptions. SIAM J. Numer. Anal., pages 282–306, 2003.
 - [16] J. R. West, D. A. Lidar, B. H. Fong, and M. F. Gyure, "High fidelity quantum gates via dynamical decoupling," Phys. Rev. Lett. 105, 230503 (2010).

- [17] S. Haroche and D. Kleppner, Phys. Today 42, 24 (1989).
- [18] M. Koashi and M. Ueda, "Reversing measurement and probabilistic quantum error correction," Phys. Rev. Lett. 82, 2598-2601 (1999).
- [19] S. Kim, Y.-W. Cho, Y.-S. Ra, and Y.-H. Kim, "Reversing the weak quantum measurement for a photonic qubit," Opt. Express 17, 11978-11985 (2009).
- [20] A. N. Korotkov and A. N. Jordan, "Undoing a weak quantum measurement of a solid-state qubit," Phys. Rev. Lett. 97, 166805 (2006).
- [21] N. Katz, M. Neeley, M. Ansmann, R. C. Bialczak, M. Hofheinz, E. Lucero, A. O'Connell, H. Wang, A. N. Cleland, J. M. Martinis, and A. N. Korotkov, "Reversal of the weak measurement of a quantum state in a superconducting phase qubit," Phys. Rev. Lett. 101, 200401 (2008).
- [22] N. Katz, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, "Coherent State Evolution in a Superconducting Qubit from Partial-Collapse Measurement"
- [23] J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. Gilchrist, D. F.V. James, N. K. Langford, T. C. Ralph,¹ and A.G.White¹, "Quantum Process Tomography of a Controlled-NOT Gate", Phys.RevLett.93.080502(2004)
- [24] M. A. Nielsen, Phys. Lett. A 303, 249 (2002).
- [25] Almeida, M. P. et al. Environment-induced sudden death of entanglement. Science 316, 579582 (2007).
- [26] A. N. Korotkov and K. Keane, Phys. Rev. A 81, 040103(R) (2010).

-
- [27] Wootters, W. K. Entanglement of formation of an arbitrary state of two-qubits. Phys. Rev. Lett. 80, 22452248 (1998).
- [28] Lee, J-C., Jeong, Y-C., Kim, Y-S. Kim, Y-H. Experimental demonstration of decoherence suppression via quantum measurement reversal. Opt. Express 19,1630916316 (2011).
- [29] C. H. Bennett and G. Brassard, in Proceeding of the IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore (IEEE, New York, 1984), pp. 175–179.
- [30] Bennett, Charles H. "Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing." International Conference on Computer System and Signal Processing, IEEE, 1984. 1984.
- [31] Yong-Su Kim, Jong-Chan Lee, Osung Kwon and Yoon-Ho Kim, "Protecting entanglement from decoherence using weak measurement and quantum measurement reversal" NATURE PHYSICS, (2012)
- [32] Shu-Chao Wang, Zong-Wen Yu, Wen-Jie Zou. "Protecting quantum states from decoherence of finite temperature using weak measurement" Phys. Rev. A, 89, 022318 (2014)

Aabstract

Decoherence is a physical phenomenon that is due to the interaction of quantum systems with environment. In fact the environment-induced dynamical destruction of quantum coherence is called decoherence. Existence of decoherency is unavoidable in many quantum systems. Amplitude damping and phase damping are just two examples of decoherency which affecting on superposition of states and multipartite entanglement.

Decoherence suppression may be accomplished in a number of ways. Quantum error correction and decoherence-free subspace are two ways of decoherence suppression that both of them need larger hilbert space. In this thesis we study a decoherence suppression method which called uncollapsing. We show that qubit decoherency due to zero-temperature energy relaxation can be almost completely suppressed by using the quantum uncollapsing (measurement reversal) procedure. To protect a qubit state, a partial quantum measurement moves it toward the ground state, where it is kept during the storage period, while the second partial measurement restores the initial state. So decoherence due to amplitude damping shown to be effectively suppressed by using two weak quantum measurement before and after the decoherence channel.

Entanglement is a vital resource in many quantum information and computation applications which decreased by the interaction of system with the environment(decoherency). In this thesis we will show that using uncollapsing is also effective to protecting entanglement. This method have been studied in detail for entanglement protection from zero and nonzero temperature amplitude damping.

keywords: Decoherence, Quantum entanglement, Uncollapsing, Weak measurement, Amplitude damping channel



Shahrood University of Technology

Faculty Of Physics

**Study of the weak measurement reversal
approach and its applications in decoherence
suppression and protecting etangement**

Shima Ebrahimi

Supervisor

Dr.Mostafa Annabestani

Advisor

Dr.Morteza Rafiei

Feb 2016