

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک

گروه فیزیک ذرات بنیادی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی دینامیک درهم تنیدگی در سیستم های اتم-کاواک با در نظر گرفتن اثرات
تزوید قوی و کازیمیر

شکوفه بهبودی فر

اساتید راهنما

دکتر حسین موحدیان

دکتر کورش جاویدان

شهریور ۱۳۹۴

تشکر و قدردانی

در اینجا بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس و قدردانی را از اساتید بزرگوار و فرهیخته ام جناب آقای دکتر حسین موحدیان و جناب آقای دکتر کورش جاویدان بجا آورم که همواره حمایت خویش را نثار اینجانب نمودند.

تعهد نامه

اینجانب شکوفه بهبودی فر دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک ذرات بنیادی دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی دینامیک درهم تنیدگی در سیستم های اتم-کاوک با در نظر گرفتن اثرات تزویج قوی و کازیمیر

تحت راهنمایی دکتر حسین موحدیان و دکتر کورش جاویدان متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

با حل معادله شرودینگر برای هامیلتونی تصحیح شده رابی با افزودن جملات جفت شدگی فوق قوی و اثر کازیمیر می توان به روابطی جهت یافتن احتمال حضور ضرایب وابسته به زمان رسید. این احتمالات به ما در مطالعه سازوکار درهم تنیدگی اتم و میدان الکترومغناطیسی از طریق محاسبه ماتریس چگالی، رد فاصله و معیار سازگاری کمک می کند. همچنین بررسی تحول زمانی تابع موج را امکان پذیر می نماید. اثر سازوکار فوق قوی و کازیمیر بر سرعت تحول سیستم در خلاف جهت یکدیگر است. در برهمکنش فوق قوی سیستم پایدارتر است و اطلاعات بهتر حفظ می شود و نیز اثر فوق قوی درهم تنیدگی موجود در سیستم را چندان بهم نمی زند. از آن جایی که سیستم مورد بررسی یک سیستم خالص $2 \times n$ است می توان محاسبات مربوط به ردفاصله و سازگاری را از ماتریس چگالی کاهش یافته بدست آورد.

در این گونه سیستم ها اصولا ردفاصله و سازگاری مفاهیم نزدیک به یکدیگر خواهند بود.

کلمات کلیدی: تابع چگالی، تابع موج، کازیمیر

عنوان	صفحه
فصل ۱ مقدمه ای بر رفتار موج الکترومغناطیسی در کاواک	
۱-۱ مقدمه	۲
۱-۲ برهمکنش اتم با میدان کلاسیکی	۲
۱-۳ نوسانگر هماهنگ	۵
۱-۴ بررسی رفتار موج بین دو صفحه رسانای موازی	۷
۱-۵ بررسی رفتار موج در کاواک	۹
۱-۶ برهمکنش اتم با میدان کوانتومی تک مد	۱۱
۱-۶-۱ مدل جفت شدگی ضعیف	۱۲
۱-۶-۲ مدل جفت شدگی قوی	۱۵
۱-۶-۳ مدل جفت شدگی فوق قوی	۱۵

فصل ۲ شناخت اثر کازیمیر و درهم تنیدگی

۲-۱ مقدمه	۱۸
۲-۲ نیروی کازیمیر استاتیک	۱۹
۲-۲-۱ محاسبه نیروی کازیمیر	۲۰
۲-۳ ضریب شکست متغیر با زمان	۲۱
۲-۴ اثر دینامیکی کازیمیر	۲۴
۲-۵ درهم تنیدگی ...	۲۷
۲-۵-۱ مقدمه	۲۷

۲۸	 ۵-۲-۲ تاریخچه درهم تنیدگی
۲۹	 ۵-۲-۳ پایه های بل
۳۰	 ۶-۲ ماتریس چگالی سیستم
۳۱	 ۶-۲-۱ ماتریس چگالی کاهش یافته
۳۲	 ۷-۲ درهم تنیدگی و اندازه گیری کوانتومی رد فاصله
۳۳	 ۸-۲ رد فاصله
۳۴	 ۹-۲ معیار سازگاری

فصل ۳ مطالعه اثر جفت شدگی فوق قوی و اثر کازیمیر دینامیک بر سیستم اتم کاواک

۳۶	 ۱-۳ مقدمه
۳۶	 ۲-۳ حل معادله
۴۳	 ۳-۳ بررسی احتمال حضور ضرایب
۴۷	 ۴-۳ محاسبه ماتریس چگالی کاهش یافته سیستم
۴۸	 ۵-۳ محاسبه رد فاصله و درهم تنیدگی
۵۷	 نتیجه گیری
۵۸	 مراجع

صفحه	عنوان
	فصل ۳ مطالعه اثر جفت شدگی فوق قوی و اثر کازیمیر دینامیک بر سیستم اتم کاواک
۴۳	شکل (۱-۳): احتمال حضور ضرایب $ C_i ^2$ در گذر زمان در مدل رابی با $g_z = 0$
۴۴	شکل (۲-۳): احتمال حضور ضرایب $ C_i ^2$ در گذر زمان در حضور جمله فوق قوی $g_z=0.6$
۴۴	شکل (۳-۳): اثر جمله جفت شدگی فوق قوی در تحول زمانی $ C(t) ^2$
۴۵	شکل (۴-۳): اثر کازیمیر در تحول زمانی $ C(t) ^2$
۴۵	شکل (۵-۳): اثر جفت شدگی فوق قوی و کازیمیر را در تحول زمانی $ C(t) ^2$
۴۶	شکل (۶-۳): احتمال حضور ضریب $ C_2 ^2$ در حالت‌های مختلف سیستم برای مدل رابی
۴۶	شکل (۷-۳): احتمال حضور ضریب $ C_2 ^2$ در حالت‌های متفاوت χ
۴۸	شکل (۸-۳): نمودار رد فاصله برای سیستم جینز-کامینگز
	شکل (۹-۳): نمودار درهم تنیدگی با معیار سازگاری برای سیستم جینز-کامینگز
۴۹	در حالت‌های مختلف سیستم
	شکل (۱۰-۳): نمودار مقایسه رد فاصله برای حالت‌های متفاوت سیستم برای مدل جینز-کامینگز
۵۰	در حضور جمله فوق قوی
۵۰	شکل (۱۱-۳): نمودار مقایسه معیار سازگاری برای حالت‌های متفاوت سیستم در حضور جمله فوق قوی
	شکل (۱۲-۳): نمودار درهم تنیدگی با معیار سازگاری برای سیستم جینز-کامینگز
۵۱	در حضور جمله فوق قوی
۵۲	شکل (۱۳-۳): نمودار رد فاصله برای مدل رابی در حضور جمله فوق قوی

- ۵۲ شکل (۳-۱۴): نمودار معیار سازگاری برای مدل رابی در حضور جمله فوق قوی
- ۵۳ شکل (۳-۱۵): نمودار مقایسه اثر کازیمیر بر روی رد فاصله با $g_z = 0$
- ۵۳ شکل (۳-۱۶): نمودار مقایسه اثر کازیمیر بر روی معیار سازگاری با $g_z = 0$
- ۵۴ شکل (۳-۱۷): مقایسه رد فاصله حالت های متفاوت سیستم با اثر کازیمیر و χ متفاوت
- ۵۴ شکل (۳-۱۸): نمودار مقایسه معیار سازگاری سیستم با اثر کازیمیر و χ متفاوت
- ۵۵ شکل (۳-۱۹): تاثیر تغییر تعداد فوتون ها بر رد فاصله با $g_z = 0.5$
- ۵۶ شکل (۳-۲۰): مقایسه حالت تشدید و غیر تشدید

فصل ۱

مقدمه ای بر رفتار موج الکترومغناطیسی

در کاواک

۱ + مقدمه

برای بررسی برهمکنش میدان الکترومغناطیسی با یک اتم در کاواک^۱ ابتدا پیش زمینه های مورد نیاز را مرور می کنیم. این پیش زمینه ها شامل برهمکنش اتم با میدان کلاسیکی، نوسانگر هماهنگ ساده، رفتار موج الکترومغناطیسی بین دو صفحه رسانای موازی و به تبع آن در یک کاواک و همچنین کوانتش میدان الکترومغناطیسی و برهمکنش اتم با میدان کوانتیده، است. نتایج به دست آمده در این قسمت برای نشان دادن تفاوت های مدل نیمه کلاسیکی با مدل کوانتومی و نیز استفاده مستقیم از آن برای ساخت مدل کوانتومی مورد استفاده قرار می گیرد. در نهایت دو سیستم برهمکنش جینز-کامینگز^۲ و رابی^۳ معرفی می گردد.

۲-۱ برهمکنش اتم با میدان کلاسیکی

هامیلتونی اتم آزاد به شکل زیر است :

$$H_0 = \frac{P^2}{2m} + V(r) \quad (1-1)$$

که در آن $V(r)$ پتانسیل بستگی الکترون به هسته می باشد. شکل عملگری P در فضای پیکر بندی با رابطه زیر تعریف می شود.

$$P = -i \nabla \quad (2-1)$$

اگر ویژه حالت های انرژی اتم آزاد را به صورت $|k\rangle$ در نظر بگیریم، آنگاه رابطه ویژه مقداری زیر را برای این ویژه حالت ها داریم.

$$H_0 |k\rangle = E |k\rangle \quad (3-1)$$

در حضور یک میدان الکترومغناطیسی هامیلتونی به صورت زیر تغییر شکل پیدا می کند.

$$H(r,t) = \frac{1}{2} [P + eA(r,t)]^2 - e\phi(r,t) + V(r) \quad (4-1)$$

1 cavity

2 jaynes-cummings

3 Rabi

که در آن $\phi(r,t)$ و $A(r,t)$ به ترتیب پتانسیل های اسکالر و برداری می باشند که توسط روابط زیر به میدان های الکتریکی و مغناطیسی مربوط می شوند .

$$E(r,t) = -\nabla\phi(r,t) - \frac{\partial A(r,t)}{\partial t} \quad (5-1)$$

$$B(r,t) = \nabla \times A(r,t) \quad (6-1)$$

پتانسیل های $\phi(r,t)$ و $A(r,t)$ یکتا نیستند و همانطور که به سادگی قابل مشاهده است، تحت تبدیل های پیمانه ای زیر میدان های الکتریکی و مغناطیسی ناوردا باقی می مانند :

$$\phi'(r,t) = \phi(r,t) - \frac{\partial \chi(r,t)}{\partial t} \quad (7-1)$$

$$A'(r,t) = A(r,t) + \nabla \chi(r,t) \quad (8-1)$$

برای راحت تر شدن محاسبات بهتر است از هامیلتونی استفاده کنیم که جمله های برهمکنشی کمتری داشته باشد. برای رسیدن به چنین هامیلتونی با استفاده از یک عملگر یکانی R تابع موج $\psi'(r,t)$ را به شکل زیر می سازیم :

$$\psi'(r,t) = R \psi(r,t) \quad (9-1)$$

با فرض این که $\psi'(r,t)$ در یک معادله شرودینگر با رابطه زیر صدق می کند:

$$H'(r,t)\psi'(r,t) = i\hbar \frac{\partial \psi'(r,t)}{\partial t} \quad (10-1)$$

با استفاده از معادله شرودینگر برای $\psi(r,t)$ ، $H'(r,t)$ به صورت رابطه (۱۳-۱) به دست می آید .

$$R = \exp[-ie\chi(r,t)] \quad (11-1)$$

$$H' = RHR^\dagger + i\hbar \frac{\partial R}{\partial t} R^\dagger \quad (12-1)$$

$$H' = \frac{1}{2m} [P + eA']^2 - e\phi' + V(r) \quad (13-1)$$

برای ساده تر شدن محاسبات را در یک پیمانه مشخص (کولنی) پیگیری می نماییم . در این پیمانه :

$$\nabla \cdot A = 0 \quad \text{و} \quad \phi = 0 \quad (۱۴-۱)$$

به کمک این پیمانه و با استفاده از معادلات ماکسول^۴ برای تابع $A(r,t)$ معادله آشنای موج به دست می آید .

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۵-۱)$$

مزیت استفاده از پیمانه کولن در این است که در این پیمانه هامیلتونی برهمکنشی H تنها به کمک پتانسیل برداری A توصیف می شود . با استفاده از معادله (۱-۴) در این پیمانه داریم :

$$H(r,t) = \frac{1}{2m} [P + eA(r,t)]^2 + V(r) = \frac{P^2}{2m} + \frac{e}{m} A \cdot P + \frac{e^2}{2m} A^2 + V(r) \quad (۱۶-۱)$$

$$H'(r,t) = \frac{1}{2m} [P + e(A + \nabla \chi)]^2 + e \frac{\partial \chi}{\partial t} + V(r) \quad (۱۷-۱)$$

حال به معادله موج برای A برمی گردیم . یک جواب کلی به شکل زیر برای این معادله وجود دارد :

$$A(r,t) = A_0 e^{i(k \cdot r - \omega t)} - c \mathcal{L} \quad (۱۸-۱)$$

$$|k| = \frac{2\pi}{\lambda}$$

که در آن عدد موج اینگونه تعریف می شود :

برای فواصل اتمی $|r|$ در حدود چند انگستروم و طول موج λ در حدود طول موج های اپتیکی (۴۰۰ تا ۷۰۰ نانومتر) $k \cdot r$ بسیار کوچک می باشد. بنابراین در محدوده ابعاد اتمی می توانیم تابع A را تنها وابسته به زمان t در نظر بگیریم و از وابستگی مکانی چشم پوشی کنیم .

$$A(r,t) \approx A(t) \quad (۱۹-۱)$$

این تقریب را معمولاً تقریب دو قطبی می نامند. حال اگر تابع پیمانه ای χ را، به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\chi(r,t) = -\vec{A}(t) \cdot \vec{r} \quad (20-1)$$

$$\nabla \chi(r,t) = -A(t) \quad (21-1)$$

$$\frac{\partial \chi(r,t)}{\partial t} = -r \cdot \frac{\partial A}{\partial t} = -r \cdot E(t) \quad (22-1)$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$H' = \frac{P^2}{2m} + V(r) + er \cdot E(t) \quad (23-1)$$

همانطور که مشاهده می شود، این هامیلتونی تنها یک جمله برهمکنشی دارد، بنابراین کار با این هامیلتونی بسیار ساده تر است.

کمیت $d = -er$ همان گشتاور دو قطبی الکتریکی می باشد. بنابراین هامیلتونی H' به شکل ساده زیر است:

$$H' = H_0 - d \cdot E(t) \quad (24-1)$$

هامیلتونی به دست آمده هم برای مدل نیمه کلاسیکی و هم کوانتومی معتبر است .

۳-۱ نوسانگر هماهنگ

در این بخش بطور خیلی مختصر نتایج بدست آمده برای نوسانگر هماهنگ ساده را مرور می کنیم.

نتایج بدست آمده در این قسمت در بخش بعدی برای کوانتایی کردن میدان بکار می رود. هامیلتونی کلاسیکی یک نوسانگر هماهنگ ساده با فرکانس Ω و جرم واحد بصورت زیر است:

$$H_c = \frac{p^2}{2} + \frac{\Omega^2 q^2}{2} \quad (25-1)$$

برای بدست آوردن هامیلتونی کوانتومی، کمیت‌های P (اندازه حرکت) و q (مکان) شکل عملگری به خود می‌گیرند و نیز باید در رابطه جابجایی $[q, p] = i\hbar$ صدق کنند. در فضای پیکربندی،
 $p = -i\hbar \frac{d}{dq}$ می‌باشد، بنابراین با جایگذاری در هامیلتونی کلاسیک داریم:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{\Omega^2 q^2}{2} \quad (26-1)$$

ویژه تابع‌های شناخته شده این سیستم توسط چند جمله‌ای هرمیتی $H_n(aq)$ نوشته می‌شوند. اگر ویژه تابع‌ها را با $U_n(q)$ نمایش دهیم، آنگاه:

$$U_n(q) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi^2 n}}} H_n(\alpha q) \exp\left(-\alpha^2 \frac{q^2}{2}\right) \quad (27-1)$$

در این رابطه $\alpha = \sqrt{\frac{\Omega}{k}}$ و ویژه مقدارهای انرژی سیستم برابرند با:

$$E_n = \hbar\omega_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (28-1)$$

عملگرهای a و $a^\dagger$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega a + ip) \quad (29-1)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Omega a - ip) \quad (30-1)$$

با قرار دادن این تعاریف در رابطه (26-1) هامیلتونی به شکل ساده زیر نوشته می‌شود.

$$H = \hbar\Omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) \quad (31-1)$$

عملگرهای a و $a^\dagger$ در رابطه جابجایی $[a, a^\dagger] = 1$ صدق می‌کنند.

در تصویر هایزنبرگ تحول زمانی a و $a^\dagger$ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{da}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, a] = -i \Omega a \quad (32-1)$$

$$\Rightarrow a(t) = a(0)e^{-i\Omega t}$$

با استفاده از روابط (29-1) و (30-1) می‌توان عملگرهای p و q را بر حسب $a, a^\dagger$ نوشت. [۱]

$$p = i \sqrt{\frac{\hbar \Omega}{2}} (a - a^\dagger) \quad (33-1)$$

$$q = \sqrt{\frac{\hbar}{2\Omega}} (a + a^\dagger) \quad (34-1)$$

۴-۱ بررسی رفتار موج بین دو صفحه رسانای موازی

موجی را در نظر می‌گیریم که وارد ناحیه بین دو صفحه رسانای موازی می‌شود، چون جهت‌های X و Z از نظر فیزیکی تمیزناپذیرند، موجی را در نظر می‌گیریم که با محور Y زاویه θ می‌سازد. می‌توان انتشار بین دو صفحه رسانای موازی را بر حسب عامل‌های نمایی زیر توصیف کرد.

$$e^{i[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]}$$

$$e^{i[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} \quad (35-1)$$

برای چنین امواجی دو نوع قطبش وجود دارد، میدان الکتریکی موازی محور X که آن را قطبش S و میدان مغناطیسی موازی محور X که آن را قطبش P می‌نامیم. این دو قطبش را اصطلاحاً امواج الکتریکی عرضی و امواج مغناطیسی عرضی می‌نامیم.

میدان الکتریکی با معادله زیر داده می‌شود:

$$E = i \left\{ E_1 e^{i[\kappa(y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} + E_1' e^{i[\kappa(-y \cos \theta + z \sin \theta) - \omega t]} \right\} \quad (36-1)$$

می دانیم بازتاب از یک سطح رسانای کامل در هر زاویه فرودی اختلاف فاز 180° درجه به موج تحمیل می کند. در نتیجه :

$$E_1 = -E_1' = E \quad (37-1)$$

بنابراین میدان الکتریکی باید در $y = b$ و $y = 0$ صفر شود که در آن b فاصله دو صفحه است ، در این صورت E با معادله زیر بیان می شود.

$$E = iE (e^{i\kappa \cos y} - e^{-i\kappa y \cos y}) e^{i(\kappa z \sin \theta - \omega t)} \quad (38-1)$$

علاوه بر این E باید به ازای تمام مقادیر z و t صفر شود ، در نتیجه شرط زیر لازم است :

$$\kappa a \cos \theta = n\pi \quad (39-1)$$

تغییرات میدان الکتریکی را در جهت های y, z بر حسب طول موج ها به صورت زیر می نویسیم .

$$\lambda_g = \frac{2\pi}{\kappa \sin \theta} = \frac{\lambda_0}{\sin \theta} \quad (40-1)$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\kappa \cos \theta} = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \quad (41-1)$$

از دو معادله (40-1) و (41-1) و با توجه به رابطه (39-1) مستقیماً به نتیجه زیر می رسیم .

$$\frac{1}{\lambda_g^2} + \frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} \quad (42-1)$$

اگر مقدار $\lambda_c = 2a$ مربوط به $n = 1$ را در نظر بگیریم، هنگامی که λ_0 افزایش یابد به نقطه ای

می رسیم که در آن $\frac{1}{\lambda_g^2}$ باید منفی باشد تا در معادله (42-1) صدق کند ، در این حالت ضریب

Z به صورت یک تابع نمایی کاهش یابنده در می آید. به عبارت دیگر، اگر $\lambda_0 > 2a$ باشد، موج

الکترومغناطیسی به جای انتشار، میرا می شود. بنابراین نتیجه می گیریم بزرگترین طول موجی که

بین دو صفحه رسانا منتشر می شود برابر a (فاصله بین دو صفحه) است. [۲]

۵-۱ بررسی رفتار موج در کاواک

کاواک یا مشدد حفره ای از سه جفت صفحه رسانای موازی تشکیل شده است. فرض می کنیم فاصله صفحات رو به رو از هم a, b, c باشد. برای چنین کاواکی شرایط مرزی مناسب عبارت است از صفر شدن مولفه مماسی میدان الکتریکی و مولفه عمودی میدان مغناطیسی روی مرزها. میدانهای الکتریکی و مغناطیسی باید در معادله موج در خلا (۴۳-۱) و معادلات ماکسول (۴۴-۱) صدق کند.

$$\nabla^2 H - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 H}{\partial^2 t} = 0$$

$$\nabla^2 E - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E}{\partial^2 t} = 0 \quad (43-1)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot D &= \rho \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t} \\ \nabla \times H &= J + \frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned} \quad (44-1)$$

$$\nabla \cdot B = 0$$

بنابراین E_x باید در معادله زیر صدق کند.

$$\frac{\partial^2 E}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E}{\partial^2 z} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_g^2} \right) E = 0 \quad (45-1)$$

برای آن که E_x در $z=0, y=a, y=0$ و $z=b$ صفر شود، باید E_x را به این صورت بنویسیم.

$$E_x = E_1 f_1(x) \sin \kappa_y y \sin \kappa_z z e^{-i\omega t} \quad (46-1)$$

که در آن:

$$\kappa_y = \frac{m\pi}{b} \quad \text{و} \quad \kappa_z = \frac{n\pi}{d} \quad (47-1)$$

برای E_y و E_z نیز وضعیت مشابه است .

$$\begin{aligned} E_y &= E_2 \sin \kappa_x x \sin \kappa_z z f_2(y) e^{-i\omega t} \\ E_z &= E_3 \sin \kappa_x x \sin \kappa_y y f_3(z) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (48-1)$$

که در آن ها K_y و K_z همان هایی است که در رابطه (47-1) آمده است و $K_x = \frac{l\pi}{a}$ می باشد .

از معادله موج واضح است که فرکانس های تشدید کاواک توسط معادلات زیر داده می شوند :

$$\begin{aligned} \kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} &= 0 \\ \frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{d^2} - \frac{4f^2}{c^2} &= 0 \end{aligned} \quad (49-1)$$

l, n, m مد های کاواک نامیده می شوند .

نتیجه می گیریم کاواک ها فرکانس های گسسته ای از نوسان دارند و آرایش خاص و مشخصی از میدان با هر یک از این فرکانس ها همراه است. در نتیجه اگر بخواهیم مد خاصی از نوسان رادر کاواک برانگیخته کنیم، باید فرکانس برانگیختگی دقیقاً با فرکانس تشدید انتخابی برابر باشد . [۳]

۶-۱ برهمکنش اتم با میدان کوانتومی تک مد

برهمکنش بین نور و ماده یکی از اصلی ترین فرایندها در طبیعت است و بخش عمده ای از درک ما از طیف گسترده ای از پدیده های فیزیکی را تشکیل می دهد . اساس کار چنین فرایندهایی بر پایه کاواک های کوانتومی الکترودینامیکی ^۵ (CQED) بنا شده است . این سیستم ها ممکن است متشکل از یک مجموعه دو تراز و یک تشدید کننده مغناطیسی تک مد باشد.

⁵ Cavity Quantum Electrodynamics

هر سیستم (CQED) با یک ثابت جفت شدگی ارتباط دارد، که این ثابت قدرت برهمکنش بین زیر فضا های کاواک را معین می کند. با توجه به اندازه ثابت جفت شدگی، یک (CQED) در سه مدل جفت شدگی ضعیف، قوی و فوق قوی قرار گیرد.

در اینجا ما برهمکنش با میدان تک مد را در نظر می گیریم در حالی که در واقعیت، یک اتم می تواند با مد های نامحدودی برهمکنش کند. بنابراین شاید برهمکنش با میدان تک مد مدل مناسبی به نظر نرسد اما می توان سیستم را به صورت ذهنی به صورت مجموع میکروکاواک هایی در نظر گرفت که در هر میکروکاواک تنها یک میدان تک مد یا با مد های بسیار نزدیک به هم وجود داشته باشد. بنابراین در چنین سیستم هایی مدل ایده آل برهمکنش با میدان تک مد را می توان در آزمایشگاه نیز به کار برد. [۴]

در مطالعه مدل کوانتومی اتم هایی با دو تراز را در نظر می گیریم. البته در واقعیت با اتم های چند ترازه سروکار داریم، اما تقریب اتم دو ترازه تقریب بسیار مناسبی است. به این دلیل که وقتی یک اتم را درون میدان قرار می دهیم، احتمال گذار به ترازوی که فرکانس گذارش نزدیک به فرکانس میدان باشد، بسیار بیشتر است. در چنین حالتی می توانیم از تراز های دیگر به علت این که احتمال گذار به آنها بسیار پایین است صرف نظر کنیم.

۶-۱-۱ مدل جفت شدگی ضعیف^۶

هامیلتونی برهمکنشی یک اتم دو ترازه در حضور میدان کوانتومی را به صورت سه بخش، هامیلتونی اتم، هامیلتونی میدان الکترومغناطیسی و هامیلتونی برهمکنش اتم - میدان می نویسیم.

$$H_T = H_{atom} + H_{field} + H_{interaction} \quad (۵۰-۱)$$

در این جا حالت پایه اتم را با $|g\rangle$ و حالت برانگیخته را با $|e\rangle$ نمایش می دهیم و برای سهولت در ادامه کار عملگرهای $\sigma_z, \sigma_-, \sigma_+$ را تعریف می کنیم.

$$\sigma_+ = |e\rangle\langle g| \quad (۵۱-۱)$$

$$\sigma_- = |g\rangle\langle e| = \sigma_+^\dagger \quad (۵۲-۱)$$

^۶ Weak Coupling Regime

$$\sigma_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \quad (53-1)$$

این عملگرها در روابط جابجایی زیر صدق می کنند.

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z \quad \text{و} \quad [\sigma_z, \sigma_{\pm}] = \pm 2\sigma_{\pm} \quad (54-1)$$

می دانیم که انرژی حالت برانگیخته اتم $E_e = \frac{1}{2}\hbar\omega$ و انرژی حالت پایه اتم $E_g = -\frac{1}{2}\hbar\omega$ است.

اگر صفر انرژی را درست بین حالت برانگیخته و حالت پایه در نظر بگیریم، برای هامیلتونی اتم آزاد داریم :

$$H_A = \frac{1}{2}\hbar\omega_0(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|) = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z \quad (55-1)$$

ضمناً هامیلتونی میدان برابر است با :

$$H_f = \hbar\omega a^\dagger a \quad (56-1)$$

قسمت برهمکنشی هامیلتونی به صورت زیر تعریف می شود:

$$H_i = -d.E(t) \quad (57-1)$$

با استفاده از رابطه میدان کوانتومی تک مد داریم :

$$E(z,t) = E_\omega(a + a^\dagger)\sin(\kappa z) \quad (58-1)$$

$$g = -E_\omega\sin(\kappa z) \quad \text{و} \quad \hat{d} = d.\hat{x} \quad (59-1)$$

با استفاده از رابطه کامل بودن، هر عملگر را می توان در فضای دلخواه به صورت زیر نوشت:

$$A = \sum \sum |a'\rangle\langle a'| A |a''\rangle\langle a''| \quad (60-1)$$

بنابراین عملگر d را برحسب ویژه حالت های اتمی این گونه می نویسیم :

$$d = |e\rangle\langle e|d|e\rangle\langle e| + |e\rangle\langle e|d|g\rangle\langle g| + |g\rangle\langle g|d|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|d|g\rangle\langle g| \quad (۶۱-۱)$$

بنابر ناوردایی تحت پارته $\langle e|\hat{d}|e\rangle = \langle g|\hat{d}|g\rangle = 0$ پس :

$$d = |e\rangle\langle e|d|g\rangle\langle g| + |g\rangle\langle g|d|e\rangle\langle e| = d\sigma_+ + d^*\sigma_- \quad (۶۲-۱)$$

d را حقیقی در نظر می گیریم بنابراین :

$$d = d(\sigma_+ + \sigma_-) \quad (۶۳-۱)$$

در نتیجه هامیلتونی برهمکنشی به صورت زیر تبدیل می شود:

$$H_i = \hbar g(\sigma_+ + \sigma_-)(a + a^\dagger) \quad (۶۴-۱)$$

بستگی زمانی عملگرهای بالا برنده و پایین برنده، در حالت اتم آزاد به شکل زیر است:

$$\frac{d\sigma_+}{dt} = \frac{i}{\hbar}[H_a, \sigma_+] \Rightarrow \sigma_+(t) = \sigma_+(0)e^{i\omega_0 t} \quad (۶۵-۱)$$

$$\sigma_-(t) = \sigma_-(0)e^{i\omega_0 t} \quad (۶۶-۱)$$

بنابراین وابستگی زمانی تقریبی برای جمله های برهمکنشی به شکل زیر است:

$$\sigma_+ a \propto e^{i(\omega_0 - \omega)t} \quad (۶۷-۱)$$

$$\sigma_- a^\dagger \propto e^{-i(\omega_0 - \omega)t}$$

$$\sigma_+ a^\dagger \propto e^{i(\omega_0 + \omega)t}$$

$$\sigma_- a \propto e^{-i(\omega_0 + \omega)t}$$

تفسیر جمله های هامیلتونی برهمکنشی در این رابطه به صورت زیر است :

- $a\sigma_+$ معرف نابودی یکی از فوتون های میدان و رفتن اتم به حالت برانگیخته

- $a^\dagger \sigma_-$ رفتن اتم به حالت پایه و خلق یک فوتون جدید
- $a^\dagger \sigma_+$ خلق یک فوتون جدید و رفتن اتم به حالت برانگیخته
- $a \sigma_-$ نابودی یکی از فوتون های میدان و رفتن اتم به حالت پایه

دو جمله آخر با قانون پایستگی انرژی در تضاد است . بنابراین یک مدل فیزیکی نمی تواند چنین جمله هایی داشته باشد. با اعمال تقریب موج چرخشی (RWA)^۷ دو جمله اول نسبت به دو جمله آخر بسیار بزرگتر می شوند. بنابراین در حضور این تقریب می توان از دو جمله آخر صرف نظر کرد. در نهایت هامیلتونی جینز-کامینگز به شکل زیر نوشته می شود.

$$H = \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \omega a^\dagger a + \hbar g' (a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-) \quad (۶۸-۱)$$

که در این رابطه g' را ثابت جفت شدگی ضعیف نامیده میشود [۵]

۶-۲-۱ مدل جفت شدگی قوی^۸

مدل جفت شدگی قوی هنگامی بدست می آید که ثابت جفت شدگی کاواک و مد های خروجی از نرخ واپاشی ها بیشتر باشد. تحت این حالت کاواک و حالت های انرژی تابشی تحلیل نمی روند بلکه با هم ترکیب شده و حالت جدیدی را می سازند. این حالت های جدید به وسیله خلا رابی از دیگر حالت ها جدا می شوند که این شکاف و جدادگی با ثابت جفت شدگی رابی متناسب است . همچنین مدل قوی زمینه مناسبی برای پردازش اطلاعات فراهم می کند. [۶]

اگر دو جمله آخر رابطه (۶۷-۱) در حالتی که از تقریب (RWA) چمشپوشی شده است در هامیلتونی برهمکنشی حفظ شود، شکل نهایی هامیلتونی به صورت زیر نوشته می شود:

$$H = \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \omega (a + a^\dagger) \quad (۶۹-۱)$$

که در آن g ثابت جفت شدگی اتم - کاواک یا فرکانس رابی نامیده می شود .

⁷ Rotating Wave Approximation

⁸ Strong Coupling Regime

این هامیلتونی به مدل رابی شناخته می شود . در حقیقت این هامیلتونی مدل جینز- کامینگز بدون تقریب RWA می باشد.

با انتخاب نوع ساختار سیستم کوانتومی و اندازه میدان الکتریکی حاصل از موج الکترومغناطیس اندازه فرکانس رابی را در حدی قرار می دهند، که کمتر از نرخ فروپاشی حالت های برانگیخته و فوتون ها در کاواک باشد در این صورت مدل جفت شدگی ضعیف یا همان جینز- کامینگز حاصل میشود.

۱-۳-۶ مدل جفت شدگی فوق قوی^۹

در این جا جفت شدگی اتمی با مدلی نزدیک به یک اتم واقعی را با یک کاواک اپتیکی بررسی می کنیم. دو حالت پایه و برانگیخته اتم، سیستم دو ترازه را تشکیل می دهند. به عبارت دیگر ما مدلی از سیستم دو ترازه جفت شده با یک میدان مغناطیسی تک مد داریم.

این مدل این امکان را به ما می دهد که هر کدام از نیرو های جفت شدگی قوی، فوق قوی و عمیق قوی را با تعیین فرکانس اتم نسبت به فرکانس میدان مغناطیسی $(\frac{\omega_0}{\omega})$ و فرکانس جفت شدگی نسبت به فرکانس میدان $(\frac{g}{\omega})$ داشته باشیم .

هامیلتونی موثر مربوط به این قسمت را به صورت زیر می نویسیم:

$$H_{eff} = \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z + \omega a^\dagger a + (g_1 \sigma_+ a + g_2 \sigma_- a + H.C.) \quad (۶۹-۱)$$

اگر $g_1 = g_2 \equiv g$ (حقیقی) انتخاب شوند، در نتیجه H_{eff} به شکل کلی مدل رابی ساده می شود.

$$H_{eff} = \frac{1}{2} \omega_0 \sigma_z + \omega a^\dagger a + g(\sigma_+ + \sigma_-)(a^\dagger + a) + \frac{g_z}{2} \sigma_z a^\dagger a \quad (۷۰-۱)$$

جمله متناسب با g_z جمله جدیدی است که در اثر جفت شدگی فوق قوی در کاواک به وجود می آید و در مقایسه با دیگر جملات بسیار کوچک (و یا حتی

⁹ Ultra Strong Coupling Regime

صفر) است. g_z یک پارامتر خوش رفتار است و به عنوان جابجایی دینامیکی
فرکانس نوسانگر قابل مشاهده است. [۷]

فصل دوم

شناخت اثر کازیمیر

و

درهم تنیدگی

۲-۱ مقدمه

یکی از شگفت‌آورترین پیش‌بینی‌های نظریه کوانتومی مدرن این است که خلأ واقعاً خالی نیست و پر از ذرات مجازی است که برای لحظاتی کوتاه پا به عالم وجود می‌گذارند و سپس ناپدید می‌شوند. اما این طوفان کنش‌های کوانتومی خلأ بدون اثر نیست.

اثر کازیمیر^{۱۰} از افت و خیزهای خلا کوانتومی به وجود می‌آید. این اثرات به علت حذف بعضی از مدهای ارتعاشی در ناحیه ای از فضا شکل می‌گیرند که نیروی جاذبه ای را در آن نواحی ایجاد می‌کنند. نیروی به وجود آمده با عکس توان چهارم ابعاد محیط متناسب است.

از سال ۱۹۴۸ تاکنون فیزیکدان‌ها می‌دانند این ذرات مجازی، دو آینه تخت موازی را هنگامی که بهم نزدیک می‌شوند به سوی هم می‌کشند و دلیل این پدیده این است:

هنگامی که فاصله بین دو آینه از طول موج ذرات مجازی کوتاه‌تر است، این ذرات دیگر نمی‌توانند در ناحیه بین دو آینه ظاهر و ناپدید شوند. بنابراین تعداد فوتون‌ها در خلا، بیشتر از تعداد فوتون‌ها در ناحیه بین دو آینه خواهد شد، در نتیجه فشار خلاء بیرون آینه‌ها، بیش از فشار خلاء بین آینه‌ها می‌شود و آینه‌ها به سوی هم رانده خواهند شد.

این پدیده، اثر ایستایی کازیمیر است، که نخستین بار اندازه‌گیری‌های مربوط به آن را دو تیم پژوهشی در ایالات متحده در سال ۱۹۹۸ انجام دادند.

اما اثر دیگری موسوم به اثر دینامیکی کازیمیر وجود دارد که در سال ۲۰۱۱ بصورت آزمایشگاهی مشاهده شده است. هر چند پیش‌بینی نظری آن قدیمی است.

این اثر به علت حرکت سریع یکی از دیواره‌های ناحیه مرزی رخ می‌دهد. اثر کازیمیر باعث خلق ذراتی می‌گردد که می‌توانند با ذرات محیط برهمکنش نمایند.

این اثر هنگامی رخ می‌دهد که آینه با سرعت بزرگی نوسان کند. اگر سرعت حرکت آینه‌ها کم باشد، دریای ذرات مجازی به سادگی خود را با حرکت آینه وفق می‌دهند و همچنان بصورت زوج‌های ذره و پادذره بوجود می‌آیند، یکدیگر را نابود می‌کنند و سرانجام ناپدید می‌شوند.

هنگامی که سرعت آینه به سرعت فوتون نزدیک شود، یعنی در سرعت‌های نسبیتی، برخی از فوتون‌ها از همتای خود عقب می‌مانند و نابود نمی‌شوند. این فوتون‌های مجازی واقعی شده و آینه شروع به زایش نور می‌کند.

اگرچه در حال حاضر مطالعه اثر کازیمیر به یکی از برنامه‌های کاربردی در فناوری نانو تکنولوژی تبدیل شده، اما هنوز هم زمینه‌های پژوهشی در محاسبه نظری اثر کازیمیر برای اشکال هندسی مختلف وجود دارد.

تا کنون اثر کازیمیر برای تعدادی شکل هندسی (مانند صفحات موازی، استوانه بلند، توپ لانه زنبوری و...) مورد مطالعه قرار گرفته است [۸]. اما در محاسبه نیروی کازیمیر همه آن‌ها به صورت تک کاواک در نظر گرفته شده‌اند. در ضمن اثر کازیمیر و انرژی مرتبط با آن به عنوان کاندیدی برای توضیح انرژی تاریک و سرعت کنونی انبساط جهان معرفی می‌شود [۹].

در ادامه به چگونگی شکل‌گیری نیروی کازیمیر و برهمکنش آن با اتم‌های موجود در یک کاواک می‌پردازیم. اثرات ناشی از نیروی کازیمیر می‌توانند در حالت کوانتومی اتم موجود در کاواک اثر بگذارند. در صورتی که تحول زمانی یک اتم چند ترازه و یا هر سیستم کوانتومی دیگر مورد مطالعه باشد، باید تمام عوامل موثر بر تحول آن سیستم را در نظر گرفت.

اثر کازیمیر با این که کوچک است (با عدم قطعیت در حدود یک درصد) می‌تواند در کاواک‌های الکترودینامیکی کوانتومی اثرات قابل اندازه‌گیری ایجاد نماید. به همین دلیل بدون شناخت این اثر و برآورد مشارکت آن در تحول سیستم نمی‌توان درک کاملی از تحول آن سیستم کوانتومی داشت.

بنابراین در ابتدا نیروی استاتیکی کازیمیر را بدست می‌آوریم، زیرا اثر دینامیکی کازیمیر تعمیمی مستقیم از اثر استاتیکی آن است.

۲-۲ نیروی کازیمیر استاتیک

نیروی کازیمیر را می‌توان به ساده‌ترین بیان، به صورت نیروی بوجود آمده بین دو صفحه رسانای کامل به خاطر تغییر در ZPE^{11} حاصل از شرایط مرزی روی صفحات تعریف کرد. اگر دو صفحه رسانا را در خلأ قرار دهیم، هر موجی که در خلأ وجود دارد، نمی‌تواند در ناحیه بین دو رسانا وجود داشته

¹¹ Zero point Energy

باشد. در این ناحیه موجی وجود دارد که طول موج آن از فاصله بین دو رسانا کمتر باشد. در نتیجه تعداد فوتون‌ها در خلأ، بیشتر از تعداد فوتون‌ها در بین دو صفحه رسانا است. بنابراین جداره‌ها تحت فشار قرار می‌گیرند، بهم نزدیک می‌شوند و یک نیروی جاذبه بین دو جداره ایجاد می‌شود.

۲-۲-۱ محاسبه نیروی کازیمیر:

یک متوازی‌السطوح، با دیواره‌های کاملاً رسانا با طول‌های $L_x = L_y = L$ و $L_z = d$ را در نظر می‌گیریم.

شرط مرزی روی دیواره‌ها، فرکانس‌ها را به مقادیر زیر محدود می‌کند.

$$W_{l,m,n} = \pi c \left(\frac{l^2}{L^2} + \frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{d^2} \right) \quad (۱-۲)$$

که در آن L و m و n اعداد صحیح نامنفی هستند. اگر جعبه وجود نداشت تمام فرکانس‌ها مجاز بودند. مقدار انرژی روی سطح عبارتست از:

$$E_0(d) = \sum_{l,m,n} 2 \frac{1}{2} \quad (۲-۲)$$

ضریب ۲ در این رابطه از دو راستای مستقل قطبش حاصل شده است. در صورتی که یکی از اعداد m و n و l صفر شود، تنها یک قطبش مستقل وجود دارد و ضریب ۲ را نباید در نظر گرفت.

اگر $d \gg L$ باشد، داریم:

$$E_0(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \left(x^2 + y^2 + \frac{\pi^2 n^2}{d^2} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۲)$$

از طرفی اگر d عدد دلخواه بزرگی باشد، جمع‌بندی روی n تبدیل به انتگرال می‌شود.

$$E_0(d) = \frac{\hbar c L^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dx \int_0^{\infty} dy \int_0^{\infty} dz \left(x^2 + y^2 + z^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۲)$$

وقتی فاصله صفحات d باشد، انرژی پتانسیل سیستم برابر است با:

$$U(d) = E_0(d) - E_0(\infty) \quad (5-2)$$

که عبارت است از انرژی لازم برای آوردن صفحات از ∞ به فاصله d . با تبدیل به مختصات قطبی در صفحه $x-y$ و تغییر متغیر $w = r^2$ داریم:

$$U(d) = \frac{\hbar c L^2}{4\pi^2 d^3} \left[\sum_0^\infty \int_0^\infty dw (w + n^2)^{\frac{1}{2}} - \int_0^\infty dz \int_0^\infty dw (w + z^2)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (6-2)$$

بنابراین:

$$U(d) = \frac{\hbar c \pi^2}{4d^3} L^3 \left(-\frac{4}{720} \right) = -\frac{\hbar c \pi^2}{720d^3} L^2 \quad (7-2)$$

که از آن نتیجه می‌شود نیرو بر واحد سطح بین دو صفحه برابر است با:

$$F(d) = U'(d) = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4} \quad (8-2)$$

که همان نیروی کازیمیر است.

۳-۲ ضریب شکست متغیر با زمان

در ابتدا یک کاواک خالی با آینه در حال حرکت را بررسی می‌کنیم. که این فرض با کاواک اپتیکی به طول ثابت که با دی‌الکتریک با ضریب شکست متغیر با زمان پر شده است، در تعادل می‌باشد.

با تغییر ضریب شکست، راه نوری در کاواک را تغییر می‌دهیم. بنابراین دو روش برای تغییر راه نوری در کاواک داریم.

روش طول متغیر و روش دی‌الکتریک با ضریب شکست متغیر که این دو از نظر راه نوری برابر هستند.

در ابتدا ارتباط تغییرات زمانی ضریب شکست $n(t)$ ، با تغییر طول کاواک $L(t)$ را بدست می‌آوریم.

اگر مد کاواک را با یک عدد صحیح m از طول موج در امتداد محور حفره بگیریم، عدد موج بصورت $k_m = \frac{2\Omega_m}{L_0}$ می‌شود که در آن L_0 طول کاواک است. بنابراین:

$$\omega_m(t) = \frac{k_m c}{n(t)} = \frac{2\pi m c}{L_0 n(t)} = \frac{2\pi m c}{L(t)} \quad (9-2)$$

با نوشتن $n(t) = n_0 + \delta n(t)$ که در آن n_0 مقدار اولیه ضریب شکست است، طول متغیر کاواک را به اینصورت بدست می‌آوریم:

$$L(t) = L_0 + \delta L(t) \quad (10-2)$$

این روابط را نگاه داشته و به کاواک می‌پردازیم. سپس نتایج قبلی بدست آمده برای ضریب شکست متغیر را مورد بحث قرار می‌دهیم.

برای یک کاواک تک مد، میدان الکتریکی را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\vec{E}_k(x, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega(t)}{2\epsilon_0}} \left[a_k(t) e^{ikx} - a_k^\dagger(t) e^{-ikx} \right] \vec{e}_k \quad (11-2)$$

که در آن $\vec{e}_k$ بردار قطبش یکانی و a و $a^\dagger$ اپراتورهای نابودی و خلق فوتون هستند که می‌توان آنها را بصورت زیر بدست آورد:

$$a_k(t) = A_k(t) e^{-i \int \omega(t) dt} \quad (12-2)$$

$$a_k^\dagger(t) = A_k^\dagger(t) e^{-i \int \omega(t) dt} \quad (13-2)$$

ولی برای کاواک با مد m به تمام محتویات موج الکترومغناطیسی احتیاج داریم.

بنابراین معادله (2-15) را به اینصورت بازنویسی می‌کنیم:

$$\vec{E}_m(x, t) = i \sqrt{\frac{\hbar \omega_m(t)}{2\epsilon_0}} \{ a_m(t) \sin[k_m(t)x] + h.c. \} \vec{e}_m \quad (14-2)$$

که در آن:

$$k_m = \frac{2\pi m}{L(t)}$$

معادله تحول زمانی را می‌نویسیم و محیطی را که n تابع زمان است، کوانتایز می‌کنیم.

$$\frac{da_m}{dt} = -i \omega_m a_m + \left(\frac{L'}{2L} \right) a_m^\dagger \quad (15-2)$$

$$\frac{da_m^\dagger}{dt} = -i \omega_m a_m^\dagger + \left(\frac{L'}{2L} \right) a_m \quad (۱۶-۲)$$

$$L' = \frac{dL}{dt} \quad \text{که در آن:}$$

با در نظر گرفتن $\phi(t) = \int_0^t \omega_m(t') dt'$ می توان عملگرهای خلق و نابودی را بصورت زیر نوشت:

$$a_m(t) = A_m(t) e^{-i\phi(t)} \quad (۱۷-۲)$$

$$a_m^\dagger(t) = A_m^\dagger(t) e^{-i\phi(t)} \quad (۱۸-۲)$$

با کامل کردن و مرتب کردن روابط (۱۷-۲) و (۱۸-۲) می توان روابط مشابهی را بصورت زیر نوشت:

$$\frac{dA_m}{dt} = v(t) A_m^\dagger \quad (۱۹-۲)$$

$$\frac{dA_m^\dagger}{dt} = v(t)^* A_m \quad (۲۰-۲)$$

با جفت کردن تابعها داریم:

$$v(t) = \left(\frac{L'}{2L} \right) \exp[2i\phi(t)] \quad (۲۱-۲)$$

این دستگاه معادلات به راحتی می تواند یکپارچه شود که منجر به راه حل معروف زیر می شود [۱۰]

$$A_m(t) = \alpha(t) A_m(0) - \beta(t) A_m^\dagger(0) \quad (۲۲-۲)$$

$$A_m^\dagger(t) = \alpha(t) A_m^\dagger(0) - \beta(t) A_m(0) \quad (۲۳-۲)$$

$$\alpha(t) = \cosh r(t)$$

$$\beta(t) = \sinh r(t)$$

جایی که تابع فشرده $r(t)$ مشخصاً بصورت زیر بدست می آید:

$$r(t) = \int_0^t v(t') dt' = \frac{1}{2} \int_0^t \left(\frac{d}{dt'} L n L(t') \right) \exp[2i\phi(t')] dt' \quad (۲۴-۲)$$

۴-۲ اثر دینامیکی کازیمیر

حال کاواکی با طول متغیر با زمان را در نظر می‌گیریم. بصورتی که یکی از آینه‌ها بطور نوسانی حرکت می‌کند.

$$L(t) = L_0 + \varepsilon \sin(\Omega t) \quad (25-2)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که طول کاواک بسیار بزرگتر از دامنه نوسان است ($\varepsilon \ll L_0$). با توجه به معادله (۱۳-۲) داریم:

$$\omega_m(t) = \frac{2\pi mc}{L(t)} \approx \omega_{m_0} \left[1 - \frac{\varepsilon}{L_0} \sin(\Omega t) \right] \quad (26-2)$$

$$\omega_{m_0} = k_{m_0} c = \frac{2\pi mc}{L_0} \quad \text{که در آن:}$$

با استفاده از رابطه فوق مقدار $v(t)$ و $r(t)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$v(t) = \frac{c\Omega}{2L(t)} \cos(\Omega t) \exp \left[2i\omega_{m_0} t + ip \cos(\Omega t) \right] \quad (27-2)$$

با در نظر گرفتن $\rho = \frac{2\varepsilon\omega_{m_0}}{\Omega L_0}$ و نادیده گرفتن پارامترهای بسیار کوچک داریم:

$$v(t) = \frac{\rho\Omega^2}{4\omega_{m_0}} \cos(\Omega t) e^{2i\omega_{m_0} t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(\rho) e^{in\Omega t} \quad (28-2)$$

$J_n(\rho)$ توابع بسل نوع اول هستند.

به راحتی می‌توان دید که $v(t)$ سهم عمده‌ای از $r(t)$ را به عهده دارد. برای t دوره ثابت $v(t)$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(n \pm 1)\Omega = 2\omega_{m_0} \quad (29-2)$$

هنگامیکه چنین شرطی تائید شود، پارامتر ثابت $v(t)$ بوسیله رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$v(t) = \frac{\rho\Omega^2}{2^3\omega_{m_0}} J_n(\rho) \quad (30-2)$$

برای $\rho \approx \frac{\epsilon}{L_0}$ ، بزرگترین پارامتر رابطه بالا با $n = 0$ نتیجه می شود. که ما را به شرط معروف برای اثر دینامیکی کازیمیر سوق می دهد.

$$\Omega = 2\omega_{m_0} \quad (31-2)$$

بصورت فشرده می توان رابطه را به این صورت بازنویسی کرد:

$$r(t) = v_0 t = \frac{\epsilon}{L_0} \frac{\omega_{m_0}}{2} J_0 \left(\frac{\epsilon}{L_0} \right) t \quad (32-2)$$

حال به محاسبه تعداد جفت فوتونهای خلق شده به علت نوسان آینه کاواک می پردازیم. برای این کار باید از تعریف معمول شمارشگر فوتون برای مد m کاواک که بصورت زیر است شروع کنیم.

$$N_m(t) = A_m^\dagger(t) A_m(t)$$

با در نظر گرفتن روابط (22-2) و (23-2) و جاگذاری آن در رابطه فوق داریم:

$$\langle N_m(t) \rangle = \text{Sinh}^2(v_0 t) \quad (33-2)$$

برای زمانهای بسیار کوتاه: مانند حالتی که $v_0 t \ll 1$ است این معادله بصورت خطی افزایش می یابد.

$$\langle N_m(t) \rangle \approx \frac{1}{2} v_0^2 t^2 \quad \text{که با رابطه مقابل مشخص میشود.}$$

از طرفی برای زمانهای بسیار زیاد مانند حالتی که $t \gg \frac{1}{v_0}$ ، این رابطه بصورت نمایی رشد میکند.

$$\langle N_m(t) \rangle \approx \frac{1}{2} e^{2v_0 t} \quad (34-2)$$

این ناپایداری شناخته شده برای خلا دینامیکی کاواک در فرکانس تشدید، مانند رشد نمایی، فقط در حالتی امکان پذیر است که ما افت های کاواک را که ناشی از جذب و پراش در آینه های کاواک است نادیده بگیریم. این افت ها می توانند با یک رشد تعدیل خطی γ توضیح داده شود، همانند

$$Q_{m_0} = \frac{\omega_{m_0}}{\gamma} \quad \text{که فاکتور کیفیت کاواک است.}$$

بنابراین می توانیم معادله تعادلی برای میانگین تعداد جفت فوتونها را، بصورت زیر بدست آوریم:

$$\frac{d}{dt}\langle N_m(t) \rangle = 2\nu_0 \sinh(\nu_0 t) \cosh(\nu_0 t) - \gamma \langle N_m(t) \rangle \quad (35-2)$$

برای رشد تعادلی کوچک رابطه فوق تقریباً برابر است با:

$$\frac{d}{dt}\langle N_m(t) \rangle = [2\nu_0 \coth(\nu_0 t) - \gamma] \langle N_m(t) \rangle \quad (36-2)$$

که می توان به سادگی آن را بصورت زیر یکپارچه کرد:

$$\langle N_m(t) \rangle = \sinh^2(\nu_0 t) \exp(-\gamma t) \quad (37-2)$$

حال اثرات غیر خطی اشباع را در نظر می گیریم. با فرض اینکه نوسانات کاواک با المنت های غیرخطی که در کاواک وارد می شود، تولید می شوند. وجود فوتونها که به علت ناپایداری اثر دینامیکی کازیمیر می باشد، با یک تغییر کوچک در ضریب شکست دی الکتریک نشان داده می شوند که با قانون عمومی $n(t) = n_0(t) + n_1 I_m(t)$ توضیح داده می شود، در جایی که $I_m(t) = \langle n(t) \rangle$ است.

در این بحث، فرآیند های خلا کوانتومی را در یک کاواک نوسانی در نظر گرفتیم. نتیجه می شود که ضریب شکست در یک کاواک از لحاظ کلی با اثر دینامیکی کازیمیر یکسان است و نیز احتمال این وجود دارد که تعداد فوتون های تولید شده از خلا با رشد نمایی توسط هر دو مدل ایجاد شود. [۱۱]

با تعیین فرکانس ω_{m_0} متناسب با طول کاواک نوسانی و ایجاد حالت های درهم تنیده مختلف در طول فرآیند می توان بر تولید فوتون های تولید شده نظارت کرد. در آزمایش مربوط به مشاهدات اثر دینامیکی کازیمیر مشکل تشخیص فوتون های تولید شده از حالت خلا اولیه وجود دارد که حضور یک آشکار ساز می تواند به طور قابل ملاحظه ای کوانتاهای خلق شده را در مقایسه با آنچه برای یک مدل کاواک خالی ایده آل پیش بینی می شود تشخیص دهد. [۱۲]

۵-۲ درهم تنیدگی^{۱۲}

۵-۲-۱ مقدمه

همبستگی کوانتومی یکی از پدیده های عجیب کوانتومی است که می تواند میان دو ذره که نسبت به هم فاصله دارند ارتباط ایجاد کند. هنگامی که دو سیستم کوانتومی با یکدیگر برهمکنش انجام می دهند، برخی همبستگی ها بین هردوی آنها برقرار می شود. این ارتباط حتی زمانی که تعامل بین دو سیستم از بین می رود، و دو سیستم از یکدیگر جدا هستند نیز، ادامه پیدا می کند. به بیان دیگر هر نوع تغییر در یکی از سیستم ها بلافاصله در سیستم دیگر تغییر بوجود می آورد. همچنین درهم تنیدگی می تواند بدون اندرکنش مستقیم بین زیر سیستم ها، و از طریق تعامل مشترک با ذرات کمکی دیگر ایجاد شود. این مطلب و مکانیزم وابسته به آن، چیزی است که اصطلاحاً "مبادله درهم تنیدگی" نامیده می شود.

هنگامی که یک مشاهده پذیر را روی سیستم اول اندازه بگیریم، حالت این سیستم، به یک ویژه حالت آن مشاهده پذیر فروپاشی می کند. در وضعیت ایده آل و اهدوسی محیطی^{۱۳}، حالت سیستم دوم، بی درنگ تعدیل می شود. درهم تنیدگی نوعی برهم نهی است. درهم تنیدگی برای ذراتی همچون فوتون ها، الکترون ها و حتی مولکول ها رخ می دهد و به خواصی نظیر مکان، تکانه، اسپین ومربوط می شود.

درهم تنیدگی خاصیتی است که فقط در مکانیک کوانتومی وجود دارد و در فیزیک کلاسیک متناظری برای آن نیست، یعنی در آن قوانین فیزیک کلاسیک شکسته می شوند و رویدادهای ناممکن به وقوع می پیوندند. درهم تنیدگی که اینشتین از آن با عنوان "عمل شبح وار" یاد می کند، پدیده ای است که در آن دو ذره به عنوان یک سیستم عمل می کنند، حتی هنگامی که توسط فواصل عظیم از هم جدا شده باشند. مفهوم درهم تنیدگی یک عنوان ساده نیست و مطالعه آن ابعاد بزرگ و وسیعی دارد. در این بخش ابتدا تعریفی از درهم تنیدگی و تاریخچه آن و بیان آزمایش EPR را ارائه می دهیم. سپس به چند موضوع مهم در مبانی کوانتوم و نظریه اطلاعات و محاسبات کوانتومی از قبیل معیار سازگاری، رد فاصله و پایه های بل می پردازیم.

این مفاهیم برای شناخت بهتر درک کامپیوتر های کوانتومی بسیار مفید است.

¹² Entanglement

¹³ Environmental decoherence

۲-۲-۵ تاریخچه درهم تنیدگی

ایده درهم تنیدگی در سال ۱۹۳۵ میلادی شروع شد، زمانی که نکته فوق العاده عجیبی در مورد نظریه کوانتومی توجه آلبرت اینشتین^{۱۴} را جلب کرد، نکته ای که باوجود گذشت چند سال از فرمول بندی نوین نظریه کوانتومی همچنان از نگاه تیزبین فیزیکدان ها پوشیده مانده بود. اینشتین دریافت که بر اساس نظریه کوانتومی باید مابین ذراتی که حداقل یکبار با یکدیگر برهم کنش داشته اند، نوعی ارتباط اسرارآمیز درونی برقرار شود، به گونه ای که اگر ویژگی های کوانتومی یکی از این ذرات را تغییر دهیم، مابقی آنها صرف نظر از اینکه در چه فاصله ای از ذره اول قرار گرفته اند- مثلاً یک متر با ذره مزبور فاصله دارند یا یک میلیارد سال نوری- بلافاصله و بطور آنی از این تغییر، تاثیر می پذیرد!

این پیش بینی نظریه کوانتومی به حدی عجیب بود که اینشتین به هیچ وجه نتوانست آن را بپذیرد و آن را ناشی از ناکامل بودن نظریه کوانتومی دانست. چرا که او معتقد بود اساساً هیچ کنش و ارتباطی مابین ذرات جهان نمی تواند با سرعتی بیش از سرعت نور برقرار شود. به همین دلیل اینشتین در همان سال مقاله مشترکی با دو فیزیکدان دیگر به نام های پودولسکی^{۱۵} و روزن^{۱۶} منتشر نمود.

در مقاله مشترکی که EPR نامیده می شود، آزمایشی مطرح گردید که در تلاش بود ناکامل بودن تئوری مکانیک کوانتومی را نشان دهد. در این مقاله آمده بود: "بنابراین ما مجبوریم چنین نتیجه گیری کنیم که توصیف مکانیک کوانتومی از واقعیت فیزیکی توابع موج کامل نمی باشد". [۱۳]

پس از انتشار مقاله EPR، اروین شرودینگر برای نخستین بار در نامه ای که برای اینشتین می نویسد از واژه درهم تنیدگی برای توصیف بستگی دو ذره که موقتاً با یکدیگر در اندرکنش بوده و سپس جدا شده اند، استفاده کرد. شرودینگر اهمیت EPR را در آن می دید که انحراف مکانیک کوانتومی از موازین ذهن کلاسیک را نشان می داد. وی همچون اینشتین با مفهوم درهم تنیدگی مخالف بود. چرا که آشکارا نظریه نسبیت که در آن سرعت نور، بیشینه سرعت انتقال اطلاعات بود را به چالش می کشید. این خاصیت در سال های اولیه پیدایش به صورت معما بود زیرا وجود حالت های درهم تنیده، پدیده های غیر کلاسیکی را تولید می کند. در آن زمان وضعیت و غیر موضعی بودن سیستم های کوانتومی درهم تنیده، موضوع اختلاف فیزیکدانان بود.

کلید پاسخ این سوال مهم را یک فیزیکدان ایرلندی به نام بل پیدا کرد. بل توانست رابطه ای ریاضی را که بعدها به نام « نامساوی بل » شهرت یافت، پیدا کند، که می توانست رابطه مابین پیش بینی های

¹⁴ Einstein

¹⁵ B. Podolsky

¹⁶ N. Rozen

این دو نظریه رقیب یعنی نظریه کوانتومی و نظریه اینشتین (متغیرهای نهانی موضعی) را در آزمایشات خاصی نشان دهد.

این نامساوی تاییدی بر غیر موضعی بودن سیستم های کوانتومی درهم تنیده است. براین اساس اگر فیزیکدان ها موفق می شدند در آزمایشات خود، نقض نامساوی بل را مشاهده کنند، این به معنای صحت نظریه کوانتومی و وجود پدیده اسرار آمیز درهم تنیدگی کوانتومی بود و در غیر این صورت، حق با اینشتین بود و هیچ ارتباطی با سرعتی فراتر از سرعت نور مابین ذرات وجود نداشت.

درهم تنیدگی نقش اساسی در کاربرد فیزیک کوانتومی در اطلاعات کوانتومی دارد و به علت لزوم کاربرد آن در شاخه های مختلف اطلاعات کوانتومی مثل کامپیوتر های کوانتومی، رمز نگاری کوانتومی، انتقالات کوانتومی از راه دور و ... بسیار مورد توجه قرار گرفته است.

۳-۲-۵ پایه های بل^{۱۷}

در سال ۱۹۶۴ دانشمندی از ایرلند شمالی و یکی از اعضای سرن^{۱۸} به نام جان استوارت بل^{۱۹} رابطه ریاضی ارائه کرد که از نظر آزمایشگاهی قابل امتحان بود و نشان داد که تمام نتایج آزمایشگاهی به نفع مکانیک کوانتومی است. از این نامساوی به عنوان نامساوی بل یاد می شود. نظریه های موافق با EPR از نامساوی بل پیروی می کنند.

$$p(a^+b^+) \leq p(a^+c^+) + p(c^+b^+)$$

برای حل مسایلی که از سیستم های دو ترازه تشکیل شده اند، از پایه های بل یا پایه های EPR استفاده می کنیم. این پایه ها بصورت زیر تعریف می شوند.

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi_{01}\rangle = \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

(۳۸-۲)

$$|\psi_{10}\rangle = \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}}$$

¹⁷ Bell basis

¹⁸ CERN

¹⁹ J.S.Bell

$$|\psi_{11}\rangle = \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$$

پایه های بل را می توان بصورت فشرده زیر هم نوشت :

$$|\psi_{xy}\rangle = \frac{|0y\rangle + (-1)^x |1\bar{y}\rangle}{\sqrt{2}} \quad (39-2)$$

$\bar{y}$ به این معناست که مقدار $\bar{y}$ مخالف y است یعنی اگر y صفر باشد $\bar{y}$ یک است و بالعکس .

سوالی که مطرح می شود این است، چه زمانی یک سیستم کوانتومی درهم تنیده است ؟ در ادامه به پاسخ این سوال خواهیم رسید.

۲-۶ ماتریس چگالی سیستم

زبان عملگر چگالی یک مفهوم مناسب برای توصیف سیستم های کوانتومی که حالت آنها کاملاً شناخته شده نیست فراهم می کند. فرض می کنیم یک سیستم کوانتومی با احتمال p_i در یک حالت از تعدادی از حالت های $|\Psi_i\rangle$ که یک شاخص است می باشد. $\{p_i |\Psi_i\rangle\}$ را یک آنسامبل^{۲۰} از حالت های خالص می نامیم. عملگر چگالی برای سیستم با معادله زیر توصیف می شود:

$$\rho \equiv \sum_i p_i |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i| \quad (40-2)$$

که در آن p_i احتمال پیدا کردن سیستم در حالت i ام می باشد. یک سیستم کوانتومی که حالت $|\psi\rangle$ آن دقیقاً شناخته شده است یک حالت خالص^{۲۱} نامیده می شود. در این مورد عملگر چگالی آن به صورت زیر خواهد بود :

$$\rho = |\psi\rangle \langle \psi| \quad (41-2)$$

در غیر اینصورت ρ مربوط به یک حالت آمیخته^{۲۲} است که مخلوطی از حالت های خالص مختلف در آنسامبل است. ماتریس چگالی، حاوی تمام اطلاعات مهم فیزیکی که می توان درباره مجموعه ذرات مورد نظر به دست آورد، می باشد.

²⁰ Ansamble

²¹ Pure

²² Mixed

در عمل برای نشان دادن این که یک حالت خالص است یا آمیخته از یک معیار ساده استفاده می کنیم. اگر $Tr(\rho^2)=1$ باشد یک حالت خالص داریم و اگر $Tr(\rho^2)<1$ باشد یک حالت آمیخته داریم.

عملگر چگالی به عنوان وسیله ای برای توصیف آنسامبلی از حالات کوانتومی به کار می رود و دارای ویژگی های زیر است که هر کدام از آن ها قابل اثبات می باشد. یک عملگر ρ یک عملگر چگالی مرتبط با برخی آنسامبل های $\{p_i|\psi_i\rangle\}$ است اگر و فقط اگر شرایط زیر در آن برقرار باشد:

۱- ρ یک باشد.

۲- ρ یک عملگر مثبت باشد.

۲-۱-۶ ماتریس چگالی کاهش یافته

شاید عمیق ترین کاربرد عملگر چگالی استفاده از آن به عنوان یک ابزار توصیف کننده برای زیرسیستم هایی از یک سیستم مرکب باشد. این چنین توصیفی توسط ماتریس چگالی کاهش یافته، فراهم می شود.

فرض کنید سیستم های فیزیکی A و B را که حالتشان با عملگر چگالی ρ^{AB} توصیف می شود در نظر می گیریم. عملگر چگالی کاهش یافته برای سیستم A توسط رابطه زیر توصیف می شود.

$$\rho^A = Tr_B(\rho^{AB}) \quad (42-2)$$

که Tr_B یک نگاشت از عملگرهای شناخته شده به عنوان رد جزئی^{۲۳} روی سیستم B است. رد جزئی به صورت زیر تعریف می شود:

$$Tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| Tr(|b_1\rangle\langle b_2|) \quad (43-2)$$

که $|a_1\rangle, |a_2\rangle$ هر دو برداری در فضای حالت A و $|b_1\rangle, |b_2\rangle$ هر دو برداری در فضای حالت B هستند. عملگر ردگیری ظاهر شده در سمت راست، عملگر ردگیری معمول برای سیستم B است بنابراین:

$$Tr(|b_1\rangle\langle b_2|) = \langle b_2 | b_1 \rangle \quad (44-2)$$

²³ Partial trace

عملگر رد جزئی تنها عملگری است که توصیف صحیحی از کمیت های مشاهده پذیر برای زیر سیستم هایی از یک سیستم مرکب را افزایش می دهد. برای درک بهتر، روابط مربوط به ماتریس چگالی و ردجزیی را برای مثال ساده حالت بل بررسی می کنیم. حالت بل با رابطه زیر نمایش داده می شود:

$$|\psi\rangle = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (45-2)$$

و ماتریس چگالی آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$\rho = \left(\frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\langle 00| + \langle 11|}{\sqrt{2}} \right) = \frac{|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00|}{2} \quad (46-2)$$

با ردگیری روی کیوبیت دوم عملگر چگالی کاهش یافته روی کیوبیت اول را پیدا می کنیم:

$$\begin{aligned} \rho^1 &= Tr_2(\rho) \\ &= \frac{Tr_2|00\rangle\langle 00| + Tr_2|11\rangle\langle 11| + Tr_2|00\rangle\langle 11| + Tr_2|11\rangle\langle 00|}{2} \\ &= \frac{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|}{2} = \frac{I}{2} \end{aligned} \quad (47-2)$$

۷-۲ درهم تنیدگی و اندازه گیری کوانتومی

درهم تنیدگی کوانتومی خصوصیت برخی سیستم های کوانتومی چند جزئی است که با غیر موضعی ارتباط بسیاری دارد.

وقتی ۲ سیستم درهم تنیده باشند، حالت هر سیستم به همراه سیستم دیگر توصیف می شود. اگر دو سیستم درهم تنیده نباشند می توانیم حالت کلی را جدا پذیر در نظر بگیریم.

در آنسامبل خالص، اگر دو سیستم کوانتومی A و B داشته باشیم و فضای هیلبرت برای حالت های این سیستم ها H_A, H_B باشند، فضای هیلبرت سیستم مرکب از ضرب تانسوری $H_A \otimes H_B$ بدست می

آید. هر گاه حالت کوانتومی خالص دو جزئی $|\psi\rangle \in H_A \otimes H_B$ را نتوان برای $|\psi_B\rangle \in H_B, |\psi_A\rangle \in H_A$ به شکل $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$ نوشت، حالت را درهم تنیده می نامیم.

حالت مخلوط یا ماتریس چگالی ρ ، یک عملگر مثبت روی فضای $H_A \otimes H_B$ می باشد و درهم تنیده است اگر نتوان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle\langle\psi_i^B| \quad (48-2)$$

که در آن $|\psi_B\rangle \in H_B, |\psi_A\rangle \in H_A$ و $\sum_i p_i = 1$. اگر ماتریس چگالی ρ به شکل فوق نوشته شود، آن را جدا پذیر می نامیم. [۱۴]

۸-۲ رد فاصله^{۲۴}

دو ماتریس چگالی ρ, σ را در نظر می گیریم. رد فاصله $\delta(\rho, \sigma)$ با رابطه زیر تعریف می شود:

$$\delta(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho - \sigma| \quad (49-2)$$

$$|\rho| = \sqrt{\rho^\dagger \rho} \quad \text{توجه می کنیم که:}$$

رد فاصله مثبت و متقارن است.

$$\delta(\rho, \sigma) \geq 0 \quad (50-2)$$

$$\delta(\rho, \sigma) = \delta(\sigma, \rho) \quad (51-2)$$

و در نامساوی مثلثی زیر صدق می کند .

$$\delta(\rho, \sigma) \leq \delta(\rho, \nu) + \delta(\nu, \sigma) \quad (52-2)$$

اگر ρ, σ جابجا پذیر باشند یعنی $[\rho, \sigma] = 0$ و هر دوی آنها توسط پایه های $\{|U\rangle\}$ قطری شده باشند، بطوری که r_i ویژه مقدار ρ و s_i ویژه مقدار σ باشد خواهیم داشت:

$$\delta(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \text{Tr} \left| \sum (s_i r_i) |U_i\rangle\langle U_i| \right| \quad (53-2)$$

²⁴ Trace distance

۲-۹ معیار سازگاری^{۲۵}

در اینجا ما به بررسی حالت های درهم تنیده دو کیوبیت می پردازیم. در این بخش دو سوال مطرح میشود. اول اینکه یک حالت چقدر می تواند درهم تنیده باشد. دوم اینکه چه چیزی یک حالت درهم تنیده را ایجاد می کند؟

سازگاری (توافق) معیاری است که میزان درهم تنیدگی دو کیوبیت را بیان می کند. یک راه برای توصیف و اندازه گیری درهم تنیدگی، محاسبه معیار سازگاری است. اساسا این مقدار بین حالت $|\psi\rangle$ و حالت $|\psi\rangle$ دیگری همپوشانی دارد.

$$C(\psi^{AB}) = \left| \langle \psi^{AB} | \tilde{\psi}^{AB} \rangle \right| \quad (۵۴-۲)$$

$$C^2(\psi^{AB}) = \text{Tr}(\rho_{2 \times 2}^{AB} \tilde{\rho}_{2 \times 2}^{AB}) = \text{Tr} R_{4 \times 4}^{AB} \quad (۵۵-۲)$$

که در آن $|\tilde{\psi}^{AB}\rangle = \sigma_y \otimes \sigma_y |\psi^{*AB}\rangle$ و ψ^* حالت مزدوج مختلط است. سازگاری همچنین می تواند از طریق عملگر چگالی با در نظر گرفتن ویژه مقادیر آن نیز محاسبه شود.

$$R^{AB} = \rho^{AB} \quad (۵۶-۲)$$

$$\tilde{\rho}^{AB} = \rho^{AB} (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^{*AB} (\sigma_y \otimes \sigma_y) \quad (۵۷-۲)$$

که در آن σ_y ماتریس پاولی است. اگر ویژه مقادیرهای R^{AB} را $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ بنامیم، معیار سازگاری از رابطه زیر بدست می آید: [۱۵]

$$C(\rho^{AB}) = \max(0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) \quad (۵۸-۲)$$

به طوری که: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$

²⁵. Concurrence

فصل سوم

مطالعه اثر جفت شدگی فوق قوی و کازیمیر
دینامیک بر سیستم اتم-کاواک

۳-۱ مقدمه

در این بخش رفتار اتم و میدان مغناطیسی تک مد با را در نظر گرفتن اثرات تزویج قوی و کازیمیر بررسی می کنیم . در صورتی که تحول زمانی یک اتم چند ترازه و یا هر سیستم کوانتومی دیگر مورد مطالعه باشد باید تمام عوامل موثر بر تحول آن سیستم را در نظر گرفت. اثر کازیمیر با این که کوچک است می تواند در کاواک های الکترودینامیکی کوانتومی اثرات قابل اندازه گیری ایجاد نماید. به همین دلیل بدون شناختن این اثر و برآورد مشارکت آن در تحول سیستم نمی توان درک کاملی از تحول آن سیستم کوانتومی داشت .

برای بالا بردن دقت محاسبات اثر تراز های دیگر را به صورت جملات اضافی به هامیلتونی رابی اضافه می کنیم. برای به دست آوردن رد فاصله و کمیت سازگاری ابتدا ماتریس چگالی کل را به دست می آوریم ، سپس با گرفتن رد این ماتریس روی حالت های فوتونی ماتریس چگالی کاهش یافته را به دست آورده و از روی آن رد فاصله و سپس از طریق معیار سازگاری میزان درهم تنیدگی اتم و میدان الکترومغناطیسی را محاسبه می کنیم . هدف از این قسمت مشاهده تاثیر جمله جفت شدگی غیرخطی فوق قوی و اثر کازیمیر بر سیستم می باشد. در نهایت به مقایسه نتایج حاصل برای حالت های مختلف می پردازیم .

۳-۲ حل معادله

در مطالعه این مدل کوانتومی، از تعریف اتم دو ترازه استفاده کرده و از ترازهایی که احتمال گذار به آنها کم است صرف نظر می نماییم.

با این فرض، اتم یک سیستم دو ترازه است که حالت پایه را با $|g\rangle$ و حالت برانگیخته را با $|e\rangle$ نمایش می دهیم.

هامیلتونی برهم کنش با در نظر گرفتن اثر کازیمیر برای مدل جنیز- کامینگز، به صورت زیر است:

$$H = \omega_l n + \left[\frac{\Omega}{2} \sigma_z^2 + g (a \sigma_+ + a^\dagger \sigma_-) \right] - i \chi (a^2 - a^{\dagger 2}) \quad (1-3)$$

که در آن $a (a^\dagger)$ عملگرهای نابودی (خلق) و $n \equiv a^\dagger a$ عملگر شمارش فوتون هستند.

اپراتورهای پائولی σ_+ و σ_- (بالا برنده و پایین برنده اتم) و σ_z نیز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| \\ \sigma_+ &= |e\rangle\langle g| \\ \sigma_- &= |g\rangle\langle e|\end{aligned}\tag{۲-۳}$$

Ω و g نیز به ترتیب فرکانس انتقال اتم و ثابت جفت شدگی اتم و میدان هستند. اگر $\chi = 0$ باشد،

در این صورت هامیلتونی به هامیلتونی جنیز- کامینگز تبدیل می شود. جمله آخر هامیلتونی (H) اثر خلق (نابودی) فوتون را که ناشی از تغییر و حرکت شرایط مرزی است تعریف می کند.

η (مدول فرکانس) شرایط مرزی نوسانگر هماهنگ را ایجاد می کند، بنابراین فرکانس ویژه لحظه ای کاواک به زمان وابسته است.

$$\omega_t = \omega_0 + \varepsilon \sin(\eta)\tag{۳-۳}$$

که در آن ε دامنه نوسان بسیار کوچکی دارد.

با انتخاب $\omega_0 = 1$ فرکانس کاواک را نرمالیزه کردیم و همچنین مدول فرکانس را به صورت زیر نوشتیم:

$$\eta = 2(1+x)\tag{۴-۳}$$

که χ یک تغییر فرکانس کوچک ($|\varepsilon| \ll 1$) می توانیم اولین گام را به صورت زیر بنویسیم:

$$\varepsilon = \chi_t \equiv (4\omega_t)^{-1} \frac{d\omega_t}{dt} \eta + 1\tag{۵-۳}$$

$$q \equiv \frac{\varepsilon(1+x)}{4}$$

که در آن:

در یک کاواک خالی، تولید فرکانس تشدید تعدادی از فوتون ها برای $x = 0$ قابل انجام است (در صورتیکه $|x| \gtrsim |\varepsilon|$ باشد).

از طرفی نشان داده شده است که در صورتی که $|g| \ll |\epsilon|$ باشد در حضور اتم منفرد بیش از دو فوتون نمی تواند تولید شود و این اتفاق در صورتی امکان وقوع دارد که $|x| \sim |g|$ باشد [۱۱].

همانطور که گفته شد، حالت های اتمی را با $|e\rangle$ و $|g\rangle$ انتخاب می کنیم. حالت های فوتونی را نیز با کت های زیر نمایش می دهیم.

$$|n\rangle, |n+1\rangle, |n-1\rangle, \dots$$

با توجه به معادله (۱-۶۹) هامیلتونی رابی به صورت زیر است :

$$H_{Rabi} = \hbar\omega_a\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + g\hbar(\sigma_+ + \sigma_-)(a^\dagger + a) \quad (۳-۶)$$

اگر $\hbar=1$ در نظر بگیریم ، هامیلتونی تصحیح شده سیستم با جملات فوق قوی و کازیمیر به صورت رابطه زیر در می آید :

$$H_{eff} = \omega_a\sigma_z + \omega_c a^\dagger a + g(\sigma_+ + \sigma_-)(a^\dagger + a) + \frac{g_z}{2}\sigma_z a^\dagger a + iq(a^{\dagger 2} - a^2) - \chi n \quad (۳-۷)$$

که در آن σ_+, σ_- عملگر های پایین برنده و بالا برنده اتم، $a, a^\dagger$ عملگر های خلق و نابودی فوتون، ω_c فرکانس اتم ، ω_c فرکانس کاواک ، g ثابت جفت شدگی کاواک واتم(فرکانس رابی)، g_z ثابت جفت شدگی فوق قوی و q ثابت اثر کازیمیر می باشد .

جفت شدگی غیرخطی اتم کاواک یا همان جمله فوق قوی را با جمله $\frac{g_z}{2}\sigma_z a^\dagger a$ و اثر دینامیک کازیمیر بر اتم ها در کاواک را با جمله $iq(a^{\dagger 2} - a^2)$ مدل سازی می نماییم .

جمله χn ، به منظور کنترل انرژی در هامیلتونی قرار گرفته تا پایداری انرژی در برهمکنش های اتم و فوتون حفظ شود.

با این انتخاب ها مجموعه کاملی را برای توصیف حالت های مختلف سیستم در اختیار داریم. بنابراین تابع موج را به شکل رابطه زیر در نظر می گیریم. توجه داریم که حداکثر عملگرهای خلق و

(نابودی) $a^{\dagger 2} (a^2)$ است. لذا جملات با تفاضل بیشتر از دو در تقریب مرتبه اول با هم ترکیب نمی شوند.

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & c_1(t)|e, n\rangle + c_2(t)|e, n+1\rangle + c_3(t)|e, n+2\rangle \\ & + c_4(t)|e, n-1\rangle + c_5(t)|e, n-2\rangle + c_6(t)|g, n\rangle \\ & + c_7(t)|g, n+1\rangle + c_8(t)|g, n+2\rangle + c_9(t)|g, n-1\rangle \\ & + c_{10}(t)|g, n-2\rangle \end{aligned}$$

(۸-۳)

اکنون به حل معادله شرودینگر می پردازیم:

$$\begin{aligned} \frac{d|\psi\rangle}{dt} = & \frac{dc_1}{dt}|e, n\rangle + \frac{dc_2}{dt}|e, n+1\rangle + \frac{dc_3}{dt}|e, n+2\rangle + \frac{dc_4}{dt}|e, n-1\rangle \\ & + \frac{dc_5}{dt}|e, n-2\rangle + \frac{dc_6}{dt}|g, n\rangle + \frac{dc_7}{dt}|g, n+1\rangle + \frac{dc_8}{dt}|g, n+2\rangle \\ & + \frac{dc_9}{dt}|g, n-1\rangle + \frac{dc_{10}}{dt}|g, n-2\rangle \end{aligned}$$

(۹-۳)

همانطور که گفتیم از ترازهایی که احتمال گذار به آنها کم است صرف نظر کردیم. با تاثیر هامیلتونی بر روی $|\psi\rangle$ و برقراری تساوی بالا به نتایج زیر می رسیم:

$$\begin{aligned}
i\dot{C}_1(t)|e, n\rangle &= \left[\left(-\hbar\omega_a + \hbar\omega_c n - \frac{n}{2}g_z \right) C_1 - iq\sqrt{(n+1)(n+2)}C_3 \right. \\
&\quad \left. + iq\sqrt{n(n-1)}C_5 + \hbar g\sqrt{n+1}C_7 + \hbar g_1\sqrt{n}C_9 - \chi n \right] |e, n\rangle \\
i\dot{C}_2(t)|e, n+1\rangle &= \left[\left(-\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n+1) - \frac{(n+1)}{2}g_z \right) C_2 + iq\sqrt{n(n+1)}C_4 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_1\sqrt{n+1}C_6 + \hbar g\sqrt{n+2}C_8 - \chi(n+1) \right] |e, n+1\rangle \\
i\dot{C}_3(t)|e, n+2\rangle &= \left[\left(-\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n+2) - \frac{(n+2)}{2}g_z \right) C_3 + iq\sqrt{(n+1)(n+2)}C_1 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_1\sqrt{n+2}C_7 - \chi(n+2) \right] |e, n+2\rangle \\
i\dot{C}_4(t)|e, n-1\rangle &= \left[\left(-\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n-1) - \frac{(n-1)}{2}g_z \right) C_4 - iq\sqrt{n(n+1)}C_2 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_1\sqrt{n-1}C_{10} + \hbar g\sqrt{n}C_6 - \chi(n-1) \right] |e, n-1\rangle \\
i\dot{C}_5(t)|e, n-2\rangle &= \left[\left(-\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n-2) - \frac{(n-2)}{2}g_z \right) C_5 - iq\sqrt{n(n+1)}C_1 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g\sqrt{n-1}C_9 - \chi(n-2) \right] |e, n-2\rangle \\
i\dot{C}_6(t)|g, n\rangle &= \left[\left(\hbar\omega_a + \hbar\omega_c n + \frac{n}{2}g_z \right) C_6 - iq\sqrt{(n+1)(n+2)}C_8 + \right. \\
&\quad \left. iq\sqrt{n(n-1)}C_{10} + \hbar g\sqrt{n}C_4 + \hbar g_1\sqrt{n+1}C_2 - \chi n \right] |g, n\rangle \\
i\dot{C}_7(t)|g, n+1\rangle &= \left[\left(\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n+1) + \frac{(n+1)}{2}g_z \right) C_7 + iq\sqrt{n(n+1)}C_9 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_1\sqrt{n+2}C_3 + \hbar g\sqrt{n+1}C_1 - \chi(n+1) \right] |g, n+1\rangle \\
i\dot{C}_8(t)|g, n+2\rangle &= \left[\left(\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n+2) + \frac{(n+2)}{2}g_z \right) C_8 + iq\sqrt{(n+1)(n+2)}C_6 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g\sqrt{n+2}C_2 - \chi(n+2) \right] |g, n+2\rangle \\
i\dot{C}_9(t)|g, n-1\rangle &= \left[\left(\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n-1) + \frac{(n-1)}{2}g_z \right) C_9 - iq\sqrt{n(n+1)}C_7 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_1\sqrt{n-1}C_{10} - \chi(n-1) \right] |g, n-1\rangle \\
i\dot{C}_{10}(t)|g, n-2\rangle &= \left[\left(\hbar\omega_a + \hbar\omega_c(n-2) + \frac{(n-2)}{2}g_z \right) C_{10} - iq\sqrt{n(n-1)}C_6 \right. \\
&\quad \left. + \hbar g_1\sqrt{n-1}C_4 - \chi(n-2) \right] |g, n-2\rangle
\end{aligned}$$

(10-3)

پس از ساده کردن معادلات به شکل زیر در می آیند :

$$\dot{C}_1 = -i \left[\Omega_1 c_1 - i \gamma c_3 + i \beta c_5 + \hbar g \sqrt{n+1} c_7 + \hbar g_1 \sqrt{n} c_9 - \chi n \right]$$

$$\dot{C}_2 = -i \left[\Omega_2 c_2 + i \alpha c_4 + \hbar g_1 \sqrt{n+1} c_6 + \hbar g \sqrt{n+2} c_8 - \chi (n+1) \right]$$

$$\dot{C}_3 = -i \left[\Omega_3 c_3 + i \gamma c_1 + \hbar g_1 \sqrt{n+2} c_7 - \chi (n+2) \right]$$

$$\dot{C}_4 = -i \left[\Omega_4 c_4 - i \alpha c_2 + \hbar g \sqrt{n} c_6 + \hbar g_1 \sqrt{n-1} c_{10} - \chi (n-1) \right]$$

$$\dot{C}_5 = -i \left[\Omega_5 c_5 - i \alpha c_1 + \text{[redacted]} c_9 - \chi (n-2) \right]$$

$$\dot{C}_6 = -i \left[\Omega_6 c_6 - i \gamma c_8 + i \beta c_{10} + \hbar g \sqrt{n} c_4 + \hbar g_1 \sqrt{n+1} c_2 - \chi n \right]$$

$$\dot{C}_7 = -i \left[\Omega_7 c_7 + i \alpha c_9 + \text{[redacted]} - \chi (n+1) \right]$$

$$\dot{C}_8 = -i \left[\Omega_8 c_8 + i \gamma c_6 + \text{[redacted]} c_2 - \chi (n+2) \right]$$

$$\dot{C}_9 = -i \left[\Omega_9 c_9 - i \alpha c_7 + \hbar g \sqrt{n-1} c_5 + \hbar g_1 \sqrt{n} c_1 - \chi (n-1) \right]$$

$$\dot{C}_{10} = -i \left[\Omega_{10} c_{10} - i \beta c_6 + \hbar g_1 \sqrt{n-1} c_4 - \chi (n-2) \right]$$

(۱۱-۳)

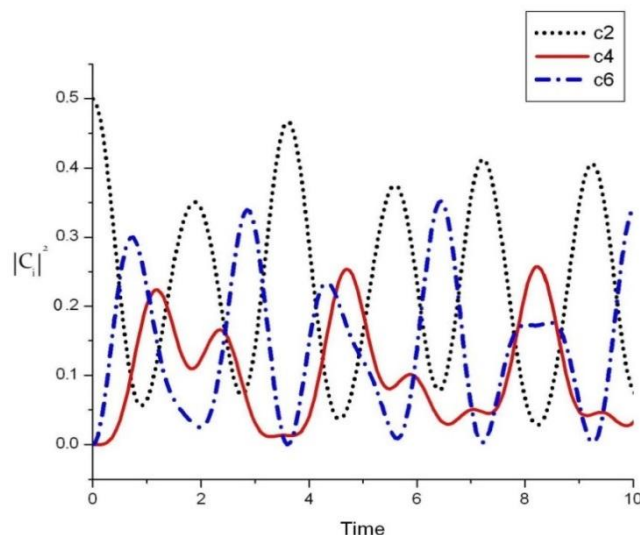
برای راحتی محاسبات انتخاب های زیر به ماکم می کنند:

$$\begin{aligned}
\left(-\omega_a + n\omega_c - \frac{n}{2}g_z\right) &= \Omega_1 \\
\left(-\omega_a + (n+1)\omega_c - \frac{(n+1)}{2}g_z\right) &= \Omega_2 \\
\left(-\omega_a + (n+2)\omega_c - \frac{(n+2)}{2}g_z\right) &= \Omega_3 \\
\left(-\omega_a + (n-1)\omega_c - \frac{(n-1)}{2}g_z\right) &= \Omega_4 \\
\left(-\omega_a + (n-2)\omega_c - \frac{(n-2)}{2}g_z\right) &= \Omega_5 \\
\\
\left(\omega_a + n\omega_c + \frac{n}{2}g_z\right) &= \Omega_6 \\
\left(\omega_a + (n+1)\omega_c + \frac{(n+1)}{2}g_z\right) &= \Omega_7 \\
\left(\omega_a + (n+2)\omega_c + \frac{(n+2)}{2}g_z\right) &= \Omega_8 \\
\\
\left(\omega_a + (n-1)\omega_c + \frac{(n-1)}{2}g_z\right) &= \Omega_9 \\
\\
\left(\omega_a + (n-2)\omega_c + \frac{(n-2)}{2}g_z\right) &= \Omega_{10} \tag{۱۲-۳} \\
\alpha &= q\sqrt{n(n+1)} \\
\beta &= q\sqrt{n(n-1)} \\
\gamma &= q\sqrt{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

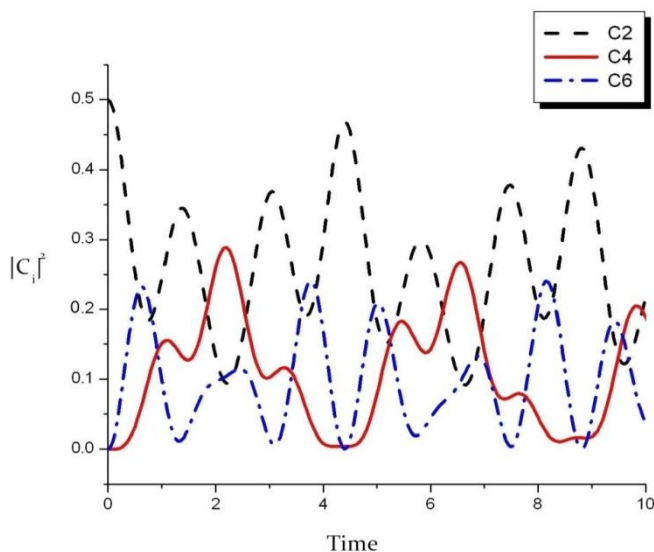
روشن است که حل معادلات تزویج شده بالا به روش تحلیلی ممکن نیست. لذا باید به روش عددی با اختیار کردن مقادیری برای پارامترها مساله را حل کنیم. در این صورت با تکرار محاسبه می توان هر یک از پارامترها را، در تحول زمانی تابع موج بررسی نمود. اکنون با داشتن $|\psi\rangle$ می توان تحول زمانی و درهم تنیدگی سیستم را از طریق اعمال معیارهای مناسب بررسی نمود.

۳-۳ بررسی احتمال حضور ضرایب

در این بخش به بررسی احتمال حضور ضرایب $|C_i|^2$ در حالت ها و شرایط مختلف می پردازیم . ابتدا سیستم را در حالت اولیه $|\psi\rangle = \frac{|1,n+1\rangle + |1,n-2\rangle}{\sqrt{2}}$ فرض می کنیم. شرایط سیستم را به صورت $g_z = 0$ و $n=3$ و $g=0.1$ و $\omega_a = \omega = 1$ در نظر گرفتیم . شکل (۱-۳) برای حالت بل ذکر شده در لحظه $t = 0$ و احتمال حضور ضرایب در مدل رابی رسم شده است . همان گونه که از شکل برمی آید، به دلیل برهم کنش بین اتم ها و میدان های الکترومغناطیسی باگذشت زمان ضرایب C_4 و C_6 نیز بوجود می آیند. ضرایب C_2 و C_6 در فاز مخالف هم حرکت می کنند، زیرا رفتن اتم از حالت برانگیخته به حالت پایه باعث خلق یک فوتون جدید می شود. این نمودار را با نمودار احتمال حضور ضرایب $|C_i|^2$ در حضور جمله فوق قوی مقایسه می کنیم ، برای مشاهده تاثیر جمله جفت شدگی ، نمودارها را با مقادیر بزرگتر از حد واقعی برای g_z رسم می کنیم تا تاثیر این جمله بر روی فرکانس و مشهود باشد. در نمودار (۲-۳) نیز شرایط فوق برقرار است ، با این تفاوت که ثابت جفت شدگی فوق قوی غیر صفر می باشد. این بار هم مشاهده می شود که همان نتایج قبل برقرار است. بنابراین افزایش g_z ، کاهش فرکانس را به همراه دارد، پس g_z سرعت تحول سیستم نسبت به زمان را کاهش می دهد .



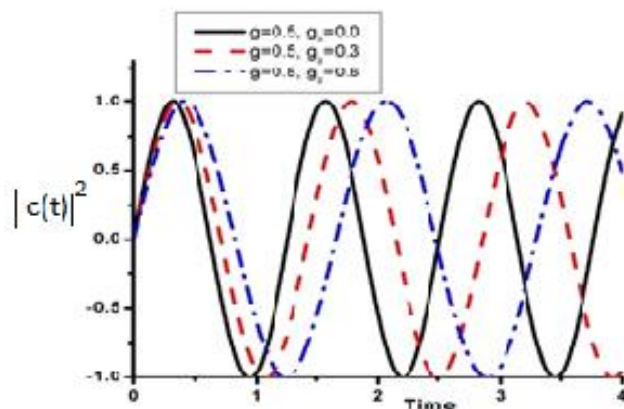
شکل (۱-۳): احتمال حضور ضرایب $|C_i|^2$ در گذر زمان در مدل رابی با $g_z = 0$



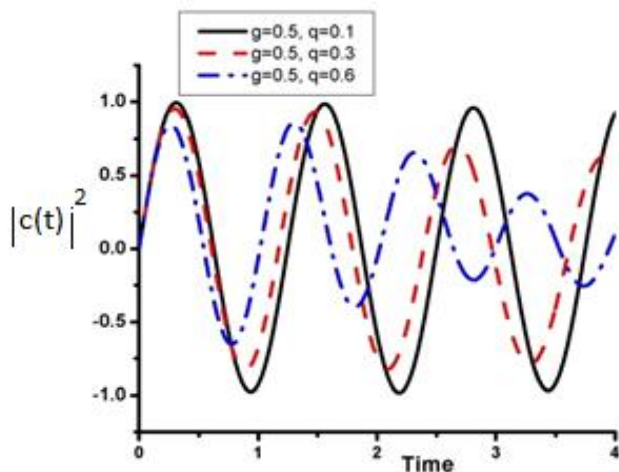
شکل (۳-۲) احتمال حضور ضرایب $|C_i|^2$ در گذر زمان در حضور جمله فوق قوی $g_z=0.6$

نمودار (۳-۳) اثر جمله جفت شدگی فوق قوی را در تحول زمانی $|C(t)|^2$ نشان می دهد. محاسبات نشان می دهد که تغییرات فرکانس نسبت به ضریب جفت شدگی قوی تقریباً خطی است. شکل نشان می دهد که سرعت برهمکنش با در نظر گرفتن اثر فوق قوی کاهش می یابد.

برای مقایسه بهتر اثرات تزویج قوی و کازیمیر نمودار تحول زمانی تابع را با مقادیر مختلف ثابت کازیمیر رسم کرده ایم. شکل (۳-۴) با در نظر گرفتن اثر کازیمیر به تنهایی رسم شده است. عموماً این ضریب بسیار کوچک است که در اینجا برای نشان دادن اثر، آن را بزرگ در نظر گرفته ایم. این شکل نشان می دهد که انتقال برهمکنش به جملات دیگر تابع موج توسط اثر کازیمیر اتفاق می افتد. همچنین سرعت تحول تابع نیز افزایش می یابد.

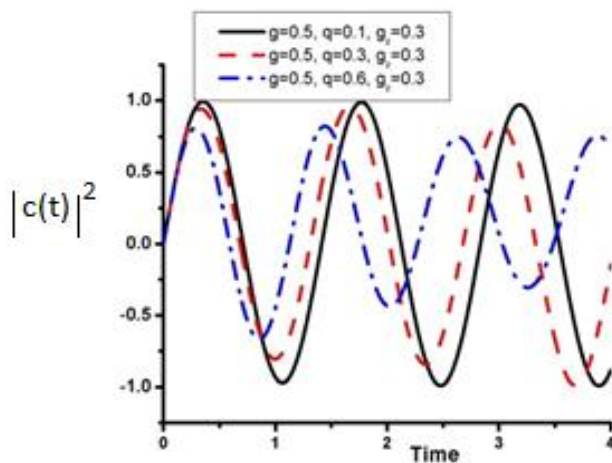


شکل (۳-۳) اثر جمله جفت شدگی فوق قوی در تحول زمانی $|C(t)|^2$



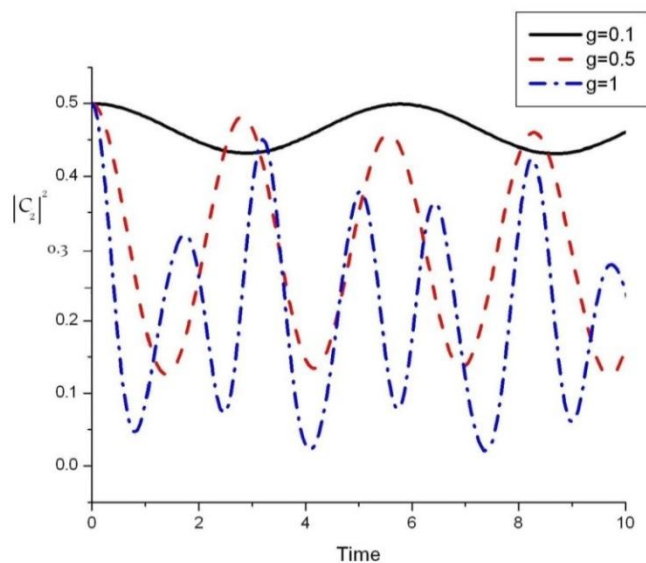
شکل (۳-۴) اثر کازیمیر در تحول زمانی $|C(t)|^2$

نمودار (۳-۵) با در نظر گرفتن هر دو ضریب فوق قوی و کازیمیر محاسبه شده است. چون اثر این دو سازوکار بر سرعت تحول سیستم در خلاف جهت یکدیگر است، اثر فوق قوی می تواند اثر کازیمیر را کاهش دهد، اما از انتقال اندازه احتمال هر مولفه نوسانی به مولفه های دیگر جلوگیری نمی کند.



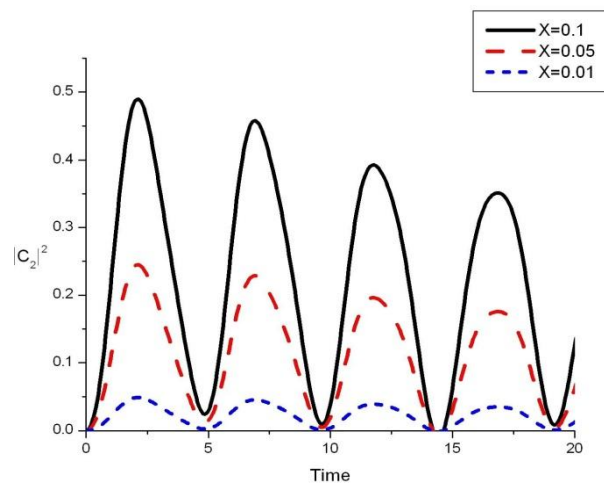
شکل (۳-۵) اثر جفت شدگی فوق قوی و کازیمیر را در تحول زمانی $|C(t)|^2$

نمودار (۳-۶) اثر ضریب g (فرکانس رابی) را بر روی احتمال حضور ضریب $|C_2|^2$ نشان می دهد. هر چه این ضریب کوچکتر گردد برهم کنش اتم با فوتون کمتر شده و همچنین احتمال تغییر دامنه برای هر ضریب کاهش می یابد، و در نتیجه دامنه تغییرات تابع احتمال نیز کوچکتر می شود. هر چه فرکانس رابی بزرگتر شود، احتمال تحریک شدن مدهای دیگر بیشتر می شود، در نتیجه دامنه تغییرات تابع احتمال برای هر حالت افزایش می یابد. با افزایش g سرعت نوسانات تابع احتمال بیشتر می شود.



شکل (۳-۶) احتمال حضور ضریب $|C_2|^2$ در حالت‌های مختلف سیستم برای مدل رابی

شکل (۳-۷) احتمال حضور ضریب $|C_2|^2$ را در حضور جمله جفت شدگی فوق قوی و اثر کازیمیر نشان می‌دهد. در رسم این نمودار شرایط سیستم $\omega_a = \omega_c = 1$ ، $n=3$ و $g_z = 0.5$ و $q = 0.05$ فرض شده‌اند. این نمودار برای مقادیر متفاوت χ رسم شده است. با افزایش دامنه افزایش می‌یابد، اما فرکانس نوسان تغییر نمی‌کند. بنابراین شکل کلی تابع موج بدون تغییر می‌ماند.



شکل (۳-۷): احتمال حضور ضریب $|C_2|^2$ در حالت‌های متفاوت χ

۳-۴ ماتریس چگالی کاهش یافته سیستم

در این مرحله می توانیم ماتریس چگالی کل این سیستم را تشکیل دهیم. برای یک حالت خالص می توانیم ماتریس چگالی را به صورت زیر بنویسیم :

$$\rho = |\psi\rangle^{AB} \langle\psi|^{AB} \quad (۳-۱۳)$$

با توجه به حالت های اتمی و فوتونی ماتریس چگالی کل یک ماتریس 10×10 می باشد.

$$\rho = \rho_{5 \times 5} \otimes \rho_{2 \times 2}$$

حال می توانیم ماتریس چگالی کل این سیستم را در هر لحظه از زمان بررسی می کنیم. چون اطلاعاتی از نحوه تغییرات فوتون ها داخل کاواک نداریم با گرفتن رد این ماتریس روی حالت های فوتونی، ماتریس چگالی کاهش یافته به صورت زیر محاسبه می شود و از روی آن می توان درهم تنیدگی بین اتم و میدان الکترومغناطیسی را محاسبه نمود.

$$\rho^A = Tr_B (\rho)^{AB} \quad (۳-۱۴)$$

$$\begin{aligned} \rho^A = & \langle n | \psi^{AB} \rangle \langle \psi^{AB} | n \rangle + \langle n+1 | \psi^{AB} \rangle \langle \psi^{AB} | n+1 \rangle + \langle n+2 | \psi^{AB} \rangle \langle \psi^{AB} | n+2 \rangle \\ & + \langle n-1 | \psi^{AB} \rangle \langle \psi^{AB} | n-1 \rangle + \langle n-2 | \psi^{AB} \rangle \langle \psi^{AB} | n-2 \rangle \end{aligned} \quad (۳-۱۵)$$

با اندکی محاسبه می توان نشان داد که ماتریس چگالی کاهش یافته حاصل یک ماتریس 2×2 به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} c_1 c_1^* + c_2 c_2^* + c_3 c_3^* + c_4 c_4^* + c_5 c_5^* & c_1 c_6^* + c_2 c_7^* + c_3 c_8^* + c_4 c_9^* + c_5 c_{10}^* \\ c_6 c_1^* + c_7 c_2^* + c_8 c_3^* + c_9 c_4^* + c_{10} c_5^* & c_6 c_6^* + c_7 c_7^* + c_8 c_8^* + c_9 c_9^* + c_{10} c_{10}^* \end{pmatrix} \quad (۳-۱۶)$$

با داشتن ماتریس چگالی کاهش یافته و با گرفتن رد فاصله روی آن می توانیم میزان شباهت اتم و میدان الکترومغناطیسی را بررسی نماییم.

۳-۵ محاسبه رد فاصله و درهم تنیدگی

ابتدا از ماتریس چگالی کاهش یافته حاصل، رد فاصله را محاسبه می کنیم.

$$\delta = \frac{1}{2} \text{Tr} |\rho(t) - \rho(0)| \quad (۱۷-۳)$$

حالت اولیه سیستم و تابع زمان را خالص در نظر گرفته ایم. [۱۶، ۱۷] با فرض $\rho(0) = \sigma$:

$$\delta = \frac{1}{2} \text{Tr} \sqrt{(\rho - \sigma)^\dagger (\rho - \sigma)} \quad (۱۸-۳)$$

اگر ماتریس چگالی هرمیتی باشد، رد فاصله از رابطه زیر بدست می آید: [۱۸، ۱۹]

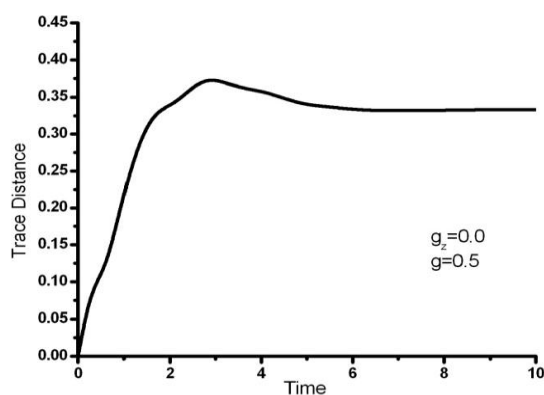
$$\text{Tr}(\rho, \sigma) = \frac{1}{2} \sum |\lambda_i| = \sqrt{1 - |\langle \psi | \phi \rangle|^2} \quad (۱۹-۳)$$

درهم تنیدگی سیستم را به کمک محاسبه معیار سازگاری می توان بررسی نمود. با توجه به رد فاصله ذکر شده برای معیار سازگاری داریم: [۲۰]

$$C(\psi_{AB}) = \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\rho^A)^2]} \quad (۲۰-۳)$$

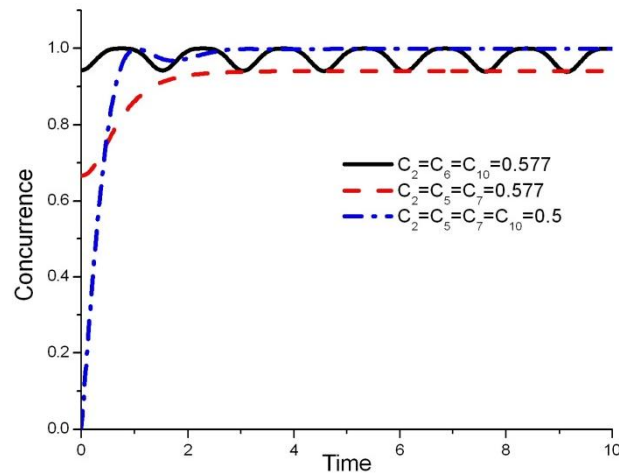
اکنون با رسم رد فاصله و معیار سازگاری به تحلیل نمودارها می پردازیم.

برای نمونه در شکل (۳-۸) نمودار رد فاصله برای یک سیستم جینز- کامینگز رسم شده است.



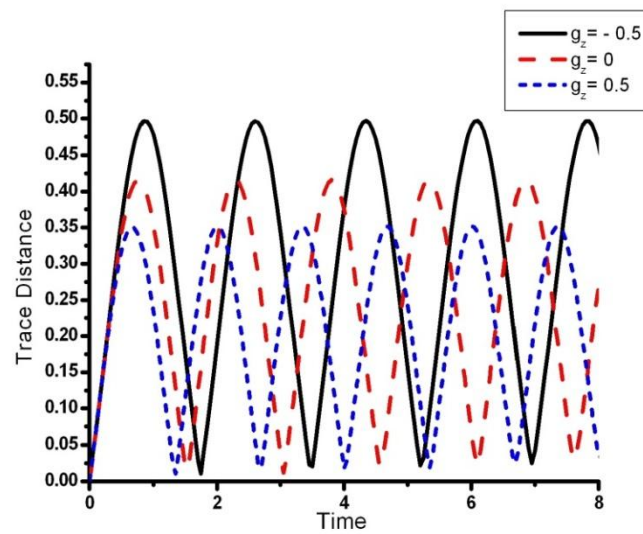
شکل (۳-۸): نمودار رد فاصله برای سیستم جینز- کامینگز در $(c_2 = c_5 = c_7 = c_{10} = \frac{1}{2})$

در شکل (۳-۹) نمودار درهم تنیدگی با معیار سازگاری برای سیستم جینز-کامینگز رسم شده است. با توجه به شکل در می یابیم که سیستم به شدت به تغییر شرایط اولیه حساس است.



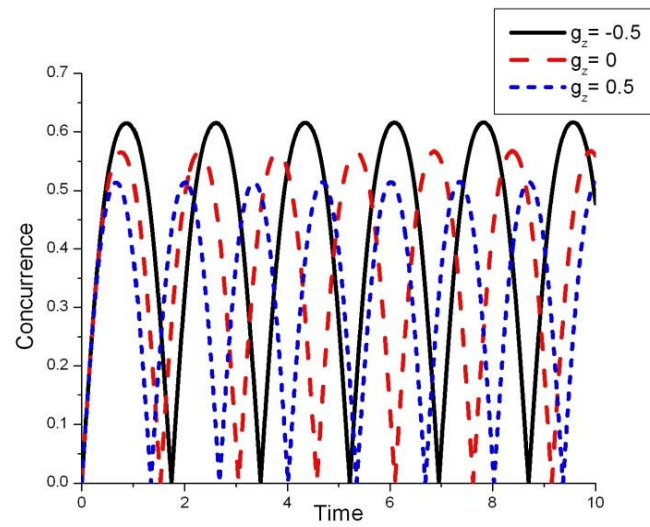
شکل (۳-۹) نمودار درهم تنیدگی با معیار سازگاری برای سیستم جینز-کامینگز در حالت های مختلف سیستم

شکل (۳-۱۰) و (۳-۱۱) نمودار مقایسه رد فاصله و درهم تنیدگی چند حالت متفاوت سیستم در دست بررسی برای مدل جینز-کامینگز به ازای شرایط اولیه $\omega_a = \omega_c = 1$, $g=1$, $n=2$ را با g_z مختلف نشان می دهند. افزایش برهمکنش فوق قوی باعث کاهش قدرمطلق ردفاصله می شود، یعنی فاصله سیستم از حالت اولیه می تواند کمتر شود. بنابراین برهمکنش فوق قوی حالت اولیه سیستم را بیشتر حفظ می کند. اما با افزایش برهمکنش ها فرکانس نوسان رد فاصله افزایش یافته ونوسانات پیچیده تر می شوند. در هر صورت انتظار می رود که اثر فوق قوی باعث گردد، سیستم بهتر اطلاعات را حفظ نماید. تغییر زمانی سازگاری نشان می دهد که اثر فوق قوی درهم تنیدگی اطلاعات موجود در سیستم را چندان به هم نمی زند.



شکل (۳-۱۰): نمودار مقایسه رد فاصله برای حالت های متفاوت سیستم برای مدل جینز- کامینگز

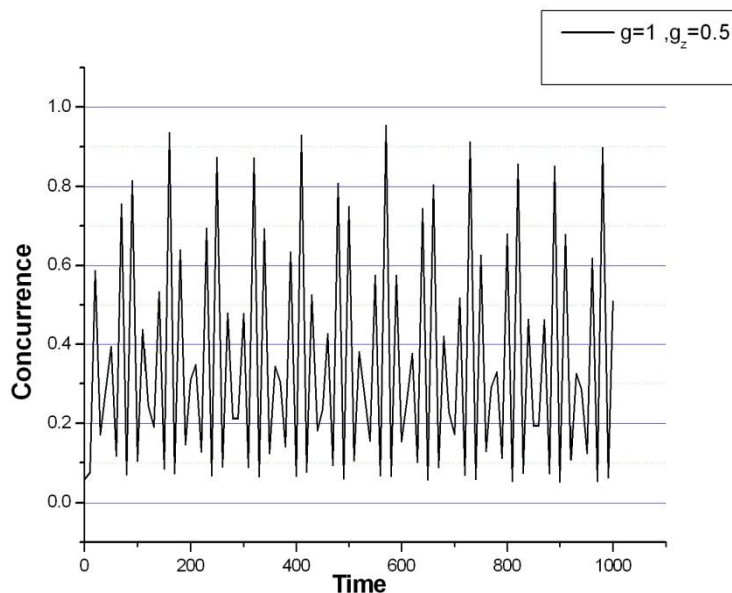
در حضور جمله فوق قوی و $(c_2 = c_5 = c_7 = c_{10} = \frac{1}{2})$



شکل (۳-۱۱): نمودار مقایسه معیار سازگاری برای حالت های متفاوت سیستم در

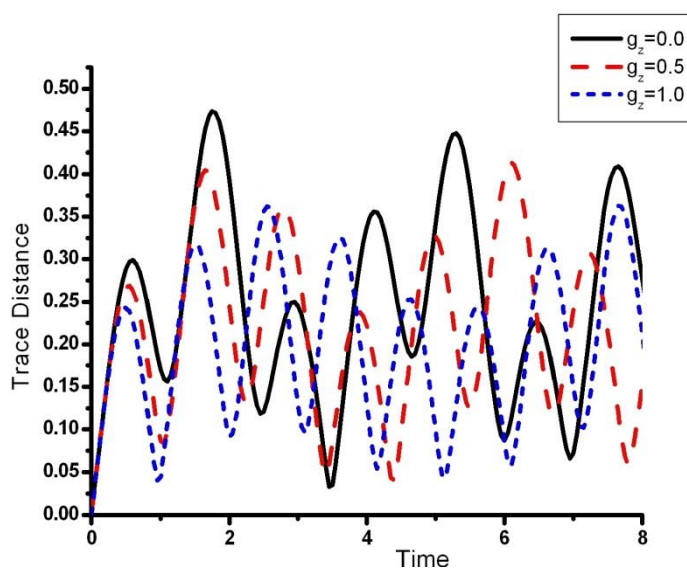
حضور جمله فوق قوی و $(c_2 = c_5 = c_7 = c_{10} = \frac{1}{2})$

شکل (۱۲-۳) نمودار معیار سازگاری برای زمان های نسبتا طولانی را در سیستم جینز-کامینگز در حضور جمله جفت شدگی فوق قوی نشان می دهد. واضح است که مقدار سازگاری از حد معینی فراتر نمی رود.



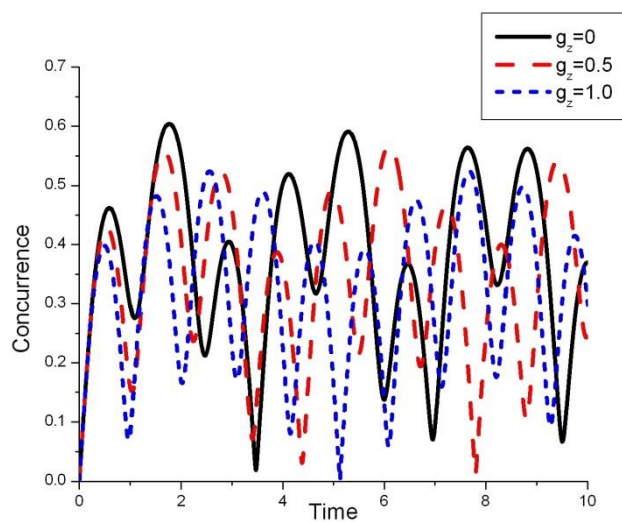
شکل (۱۲-۳): نمودار درهم تنیدگی با معیار سازگاری برای سیستم جینز-کامینگز در حضور جمله فوق قوی

نمودار (۱۳-۳) و (۱۴-۳) رد فاصله و درهم تنیدگی را برای مدل رابی در حضور جمله جفت شدگی فوق قوی نشان می دهند. شرایط اولیه سیستم را $n=2, \omega_a=\omega_c=1, g=1, g_1=1$ در نظر گرفتیم. با توجه به شکل (۱۳-۳) در می یابیم که هر چه جمله فوق قوی بیشتر شود سیستم پایداری خود را بیشتر حفظ می کند.



شکل (۳-۱۳): نمودار رد فاصله برای مدل رابی در حضور

جمله فوق قوی و $(c_2 = c_5 = c_7 = c_{10} = \frac{1}{2})$



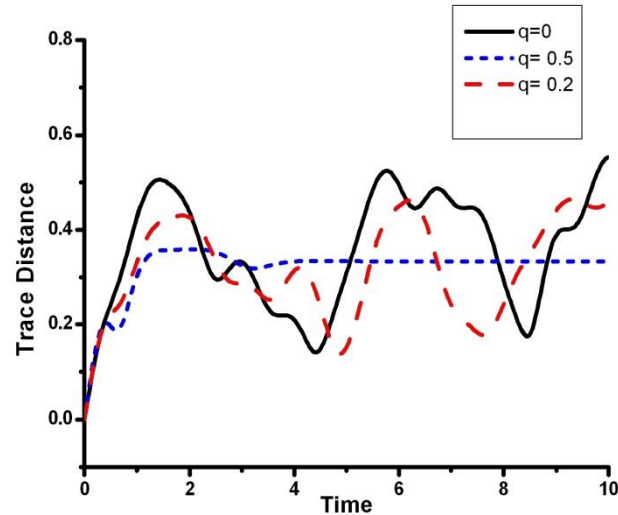
شکل (۳-۱۴): نمودار معیار سازگاری برای مدل رابی در حضور جمله فوق قوی و $(c_2 = c_5 = c_7 = c_{10} = \frac{1}{2})$

شکل های (۳-۱۵) و (۳-۱۶) نمودار مقایسه رد فاصله و معیار سازگاری سیستم به ازای ثابت کازیمیر متفاوت را نشان می دهند. شرایط اولیه سیستم عبارتند از:

$$n = 2, \omega_a = \omega_c = 1, g = g_1 = 0.5, g_z = 0, \chi = 0$$

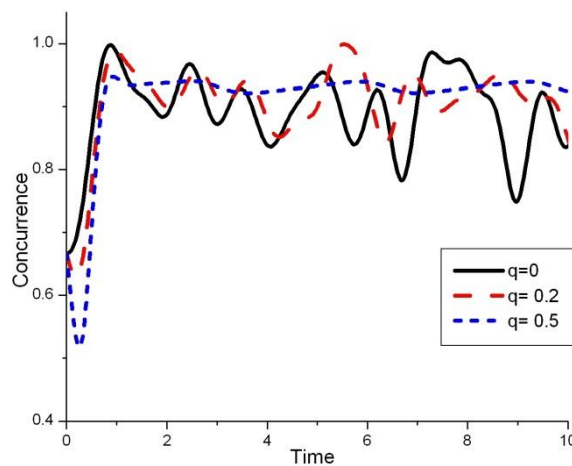
با توجه به شکل ها در می یابیم که در گذر زمان سیستم، با افزایش q و بیشتر شدن برهمکنش ها نوسانات را از بین می برد و دامنه رد فاصله کاهش می یابد. این شکلهای به وضوح نشان می دهند که اثر

کازیمیر باعث تثبیت ردفاصله و همچنین درهم تنیدگی می گردد. توجه داریم که مقادیر داده شده به ضریب کازیمیر حداقل دهها برابر از مقدار واقعی در سیستمهای فیزیکی بزرگتر است.



شکل (۳-۱۵): نمودار مقایسه مقادیر متفاوت ضریب کازیمیر بر روی رد فاصله

$$\text{با } g_z = 0 \text{ و } (c_2 = c_5 = c_7 = \frac{1}{\sqrt{3}})$$



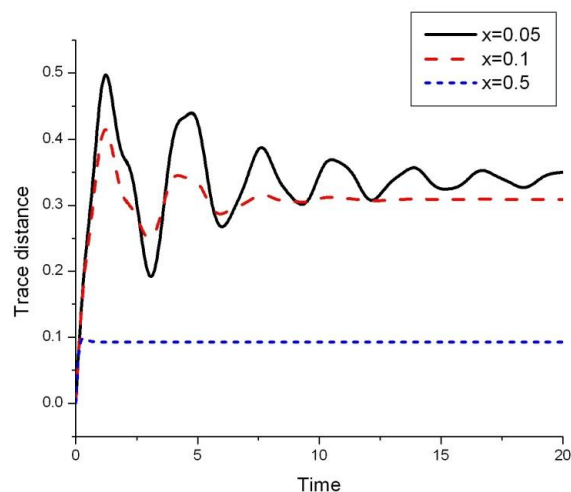
شکل (۳-۱۶): نمودار مقایسه اثر کازیمیر بر روی معیار سازگاری

$$\text{با } g_z = 0 \text{ و } (c_2 = c_5 = c_7 = \frac{1}{\sqrt{3}})$$

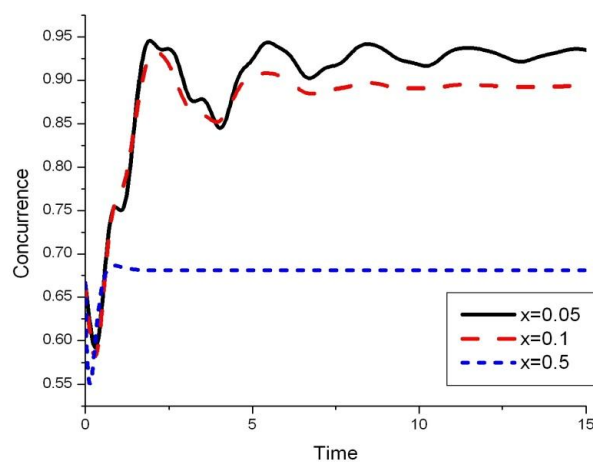
شکل های (۳-۱۷) و (۳-۱۸) نمودار مقایسه رد فاصله و معیار سازگاری چند سیستم به ازای مقادیر χ مختلف نشان می دهند. شرایط در نظر گرفته شده عبارتند از:

$$n = 3, \omega_a = \omega_c = 1, g = 0.5, g_z = 0.5, q = 0.1$$

شکلها نشان می دهند که با افزایش χ دامنه تغییرات رد فاصله (وهمچنین سازگاری) کم می گردد و در زمان به مقدار ثابتی میل می کند. این خصوصیت برای سیستم به عنوان حافظه کوانتومی، خوب است اما درهم تنیدگی را کاهش می دهد.



شکل (۳-۱۷) مقایسه رد فاصله حالت های متفاوت سیستم با اثر کازیمیر و χ متفاوت

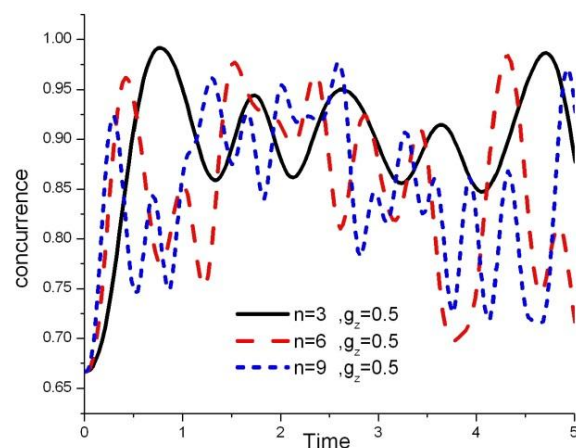


شکل (۳-۱۸) نمودار مقایسه معیار سازگاری سیستم با اثر کازیمیر و χ متفاوت

$$\text{و } (c_2 = c_5 = c_7 = \frac{1}{\sqrt{3}})$$

باتوجه به نمودارهای معیار سازگاری و رد فاصله رسم شده مشخص می شود رفتار آنها به هم شبیه می باشد.

در ادامه برای درک بهتر رفتار معیار سازگاری پارامترهای دیگر سیستم را نیز تغییر می دهیم. از شکل (۳-۱۹) در می یابیم با تغییر تعداد فوتون ها در یک سیستم رابی تصحیح شده با جمله جفت شدگی فوق قوی همانطور که انتظار داریم سرعت تغییرات افزایش می یابد، زیرا با افزایش تعداد فوتون ها در کاواک، احتمال برهم کنش ها افزایش می یابد، فرکانس بیشتر شده و سیستم با سرعت بیشتری در هم تنیدگی خود را از دست می دهد .



شکل (۳-۱۹) تاثیر تغییر تعداد فوتون ها بر رد فاصله با $g_z = 0.5$

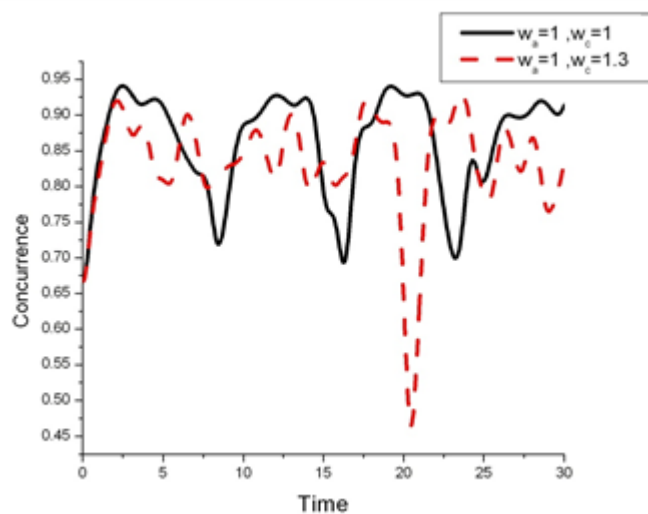
$$\text{و } (c_2 = c_5 = c_7 = \frac{1}{\sqrt{3}})$$

افزایش تعداد فوتون ها در سیستم معادل با کاهش اثر کازیمیر در آن سیستم می باشد. همچنین با افزایش جمله فوق قوی، به همان نتیجه ای می رسیم که با افزایش تعداد فوتون ها حاصل شده است .

در تمام نمودارهای پیش از این سیستم را در حالت تشدید $\omega_a = \omega_c$ بررسی کردیم. در شکل

(۳-۲۰) حالت غیر تشدید را با حالت تشدید مقایسه می کنیم. شرایط سیستم عبارتند از:

$$n = 2, g = g_1 = 0.5, g_z = 0$$



شکل (۳-۲۰) مقایسه حالت تشدید و غیرتشدید و $(c_2 = c_5 = c_7 = \frac{1}{\sqrt{3}})$

واضح است در حالت تشدید مقدار سازگاری بیشتر از حالت $\omega_A \neq \omega_C$ است و درهم تنیدگی با سرعت کمتری صفر می شود. لازم به ذکر است شرایط تشدید به تعداد فوتون های داخل کاواک ارتباط دارد. در نهایت با توجه به نمودار های فوق در می یابیم با اضافه کردن جمله فوق قوی دامنه نوسان کوتاه تر شده و فرکانس افزایش می یابد .

نتیجه گیری :

تاثیر جمله جفت شدگی فوق قوی روی رد فاصله به ازای مقادیر مثبت و منفی یکسان است. افزایش جمله جفت شدگی فوق قوی باعث افزایش سرعت تغییر سیستم نسبت به حالت اولیه می گردد . همچنین مشاهده می کنیم اضافه شدن این جمله باعث تغییر فاز و تغییر دامنه روی نمودار سازگاری شده و دامنه رد فاصله را کاهش می دهد. همچنین می توان نتیجه گرفت که اثر کازیمیر می تواند باعث تغییرات زیادی در مشخصات درهم تنیدگی یک سیستم کوانتومی گردد، هرچند که ضریب اثر این پدیده به خودی خود کوچک است، اما اگر بتوان به روشهای مناسب اثر کازیمیر را در یک سیستم موثرتر نمود، می توان از نتایج آن سود برد. با افزودن جمله کازیمیر و تنظیم آن با تغییراتی که بر روی جمله مهار کننده ایجاد می کنیم، می توان سیستم را به سمت پایداری بیشتر هدایت کرد. با افزایش تعداد فوتون ها و نیز افزایش میدان الکتریکی نتایجی مشابه با حضور جمله جفت شدگی فوق قوی حاصل می شود. بنابراین اگر از سیستم اتم-کاواک به عنوان حافظه استفاده شود می توان گفت اثر فوق قوی باعث می گردد که اطلاعات به مدت بیشتری در سیستم حفظ گردد.

اگر بخواهیم از سیستم اتم-کاواک به عنوان دروازه (gate) محاسباتی استفاده نماییم، اثر فوق قوی به علت افزایش برهمکنش، سرعت محاسبه را کم می نماید. اثر کازیمیر به مقدار بسیار جزئی تحول سیستم را افزایش می دهد. از آن جایی که اثر کازیمیر بسیار کوچک است می توان از اثرات آن در تغییر سرعت برهمکنش سیستم صرفنظر نمود.

- [1] Sakurai,J.J and Tuan S.F(1985),''*modern uantum mechanics*''
- [2] Reitz J. R,Milford.F, W.christy. R (1993),'' *Foundations of Electromagnetic Theory*'', Addison:Wesley,Inc,522
- [3] Jackson.J.D (1962),'' *Classical electrodynamics*'', A John Wiley & Sons,Inc...
- [4] Zofia Bialynica(1996),''*Cavity QED*'' 1220DS 1220 FV3
- [5] Lambropoulos,P.Petrosyan,D,(2006),''*Fundamentals of Quantum optics and Quantum Information*'' ,chapter3,89
- [6] هانیة موحدی نیا(۱۳۹۳). "بررسی درهم تنیدگی و رد فاصله کیوبیت- نوسانگر در مدل جفت شدگی فوق قوی"، پایان نامه کارشناسی ارشد،مشهد:دانشگاه خيام
- [7] Aene L.Grimsmo and Scott Parkin,(2013)"*Cavity QED simulation of qubit-oscillator dynamics in the ultrastrong coupling regime* ",Phys. Rev. A **87**, 033814
- [8] H.Razmi and S.M.Shirazi,(2008) '' *The Casimir Forces in a single Conducting Cylindrical Cavity*
- [9] Matsumoto J,(2013) ' '*The Casimir effect as a candidate of dark energy*
arXiv : 1303.4067-v2 [hep-th]
- [10] Mendonca J.T,Guerreiro.A and Martins.A.M,(2005),''*Schems for preparing atomic qubit cluster states in cavity QED*''Phys.Rev.**62**, 033805
- [11] w.Luis Mochan,(2007)''*Fictitious Cavity Approach to the Casimir Effect*'' ,
arXiv:0709.3508v1[quant-ph]21sep-2007
- [12] A.V.Dodonov and V.V.Dodonov, (2012),'' *Dynamical Casimir Effect in two-atom cavity*'', Phys. Rev. A **85**, 055805
- [13] Einstein A,Podolskt B,and Rozen N,(1935),Phys.Rev. **47**, 777
- [14] Werner R.F,(1989)''*Quantum state with Einstein-Podolsky-Rozen Correlations admitting a hidden-variable model*'' ,Phys.Rev. A **40**, 4277
- [15] McMahon D,(2007),''*quantum computing explained*'', A John Wiley & Sons,Inc...
- [16] Fuchs C.A,(1996),''*Distinguishability and Accessible information in Quantum theory*'' ,University of New Mexico,quant-Ph/9601020
- [17] Cilchrist A,Langford N.K and Nielsen M.A, ''*Distance measures to compare real and ideal quantum processed*'' ,quant-ph/0408063

- [18] Nielsen M ,Chuang I(2000),''*Quantum computation and Quantum information* '' ,Cambridge university,chapter9
- [19] Barnett S.M,(2009),''*Quantum information* '' ,Oxford university,chapter4
- [20] Rungta,P.Buzek,v.et al(2001),''*Universal state inversion and Concurrence In arbitrary dimesions*'' ,Phys Rev.A **64**,042315

Abstract

The Schrodinger equation of a Cavity QED-atom system has been solved by considering the ultra strong coupling and Casimir effects in Rabi model. Derived solutions can be applied to find the entanglement of the system through concurrence and trace distance. Casimir effect and ultra strong coupling have reverse influence on the system. The ultra strong coupling stabilize the cavity-atom system.

As the situation is a pure $2 \times n$ system thus one can find both trace-distance and concurrence through the reduced density matrix of the qubit. In such these systems trace-distance approximately behave like the concurrence.

Key words: *Entanglement, Casimir effect, Ultra strong coupling regime, Trace distance, Concurrence*



University of Shahrood

Faculty of physics

Entanglement dynamics in atom-cavity systems with
considering strong coupling and Casimir effects

Shokofeh Behboudifar

Supervisors:

Movahedian Dr.Hossein

Dr.koorosh Javidan

September 2015