

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده فیزیک

گروه فیزیک هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی معادله‌ی دی - کی - پی با در نظر گرفتن تاثیرات فضا-زمان خمیده

مقصود درودی

اساتید راهنما:

دکتر حسن حسن آبادی

دکتر نسرین صالحی

شهریور ۱۳۹۴

پیوست شماره ۲

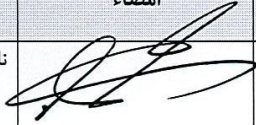
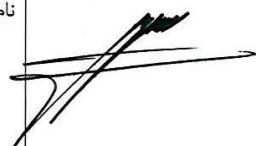
دانشگاه شاهرود

دانشکده فیزیک و مهندسی هسته ای

گروه هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مقصود درودی به شماره دانشجویی: ۹۲۰۶۲۴۴
بررسی معادله ی دی-کی-پی با در نظر گرفتن تاثیرات فضا-زمان خمیده

در تاریخ ۱۳۹۴/۶/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر نسرین صالحی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر حسین موحیدیان		نام و نام خانوادگی : دکتر حسین توکلی عنبران
			نام و نام خانوادگی : دکتر مسلم سوهانی
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به:

پدرم

حامی من در تمام زندگی

و تقدیم به مادرم

سنگ صبورى که الفباى زندگى به من آموخت

تقدیر و تشکر

ضمن سپاس و ستایش به درگاه ایزد منان که به من توانایی داد تا با استعانت از او بتوانم

این پژوهش را انجام دهم، بر خود لازم می‌بینم از د لکرمی و تشویق اساتید راهنما مخصوصا

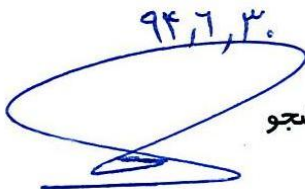
دکتر حسن آبادی که در نگارش این مجموعه مرایاری نمودند، قدردانی نمایم

تعهد نامه

اینجانب مقصود درودی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک- هسته‌ای دانشکده فیزیک و مهندسی هسته‌ای دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی معادله ی دی-کی-پی با در نظر گرفتن تاثیرات فضا-زمان خمیده تحت راهنمایی دکتر حسن حسن آبادی و دکتر نسرين صالحی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « Shahrood University » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۹۴/۶/۳۰
امضای دانشجو



مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

معادله‌ی DKP (Duffin-Kemmer-Petiau) یک معادله‌ی نسبیتی مرتبه‌ی اول می‌باشد که بوزون‌های اسپین صفر و یک را توصیف می‌کند. از لحاظ تاریخی این معادله در دهه‌ی ۱۹۳۰ توسط سه فرد به نام‌های دافین-کمر-پتی ارائه شد. این ماتریس‌ها می‌توانند به سه نمایش یک، پنج و ده مولفه‌ای نشان داده شوند. این معادله در بسیاری از شاخه‌های فیزیک از جمله کیهان‌شناسی، برهم کنش‌های هادرون-هسته و طیف سنجی مزون‌ها کاربرد دارد. هم‌چنین ذراتی از قبیل فوتون‌ها، گلوئون‌ها، مزون‌ها، اکسیتون‌ها، ذرات واسطه‌ی Z و W را می‌توان با این معادله بررسی کرد. فضا-زمان نیز به هرگونه‌ای از هندسه گفته می‌شود که زمان و مکان را به صورت ساختاری واحد و درهم‌پیوسته با یکدیگر ترکیب کند. لذا در فصل اول مقدمه‌ای در رابطه با معادله‌ی DKP و ذرات بنیادی و هم‌چنین فضا-زمان بیان خواهد شد به طوری که خصوصیات جبری این معادله و هم‌چنین مفاهیم پایه و اصلی فضا-زمان ارائه خواهد شد. در فصل دوم مروری خواهیم داشت بر خصوصیات فیزیکی معادله‌ی DKP و این معادله را به طور دقیق‌تر بررسی خواهیم کرد و با بسط آن آشنا می‌شویم. در فصل سوم معادله‌ی DKP در حضور پتانسیل‌های مختلف از جمله پتانسیل‌های کاسپ، وودز-ساکسون و هولسن تعمیم یافته مورد بررسی قرار خواهد گرفت و پراکندگی بوزون‌ها را در حضور این سه پتانسیل محاسبه خواهیم کرد. در فصل چهارم با فضا-زمان‌های مختلفی آشنا خواهیم شد. در فصل پنجم نیز معادله‌ی DKP را برای برخی فضا-زمان‌های مهم مورد بررسی و حل قرار می‌دهیم از جمله فضا-زمان‌های ریمانی، cosmic string، Friedmann-Robertson-Walker و در نهایت در فصل ششم بخش اسپین یک معادله‌ی DKP و فرم ده مولفه‌ای آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت و پراکندگی را برای پتانسیل دوپله‌ای محاسبه می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: معادله‌ی دی-کی-پی، پتانسیل‌های کاسپ، وود-ساکسون، هولسن تعمیم یافته، فضا-زمان خمیده، پتانسیل دوپله‌ای.

فهرست مطالب

ب	چکیده
۱	فصل اول: مقدمه
۲	۱-۱: مروری بر معادله ی دی-کی-پی
۴	۲-۱: انواع ذرات بنیادی
۸	۳-۱: فضا-زمان
۹	۱-۳-۱: فضا-زمان خمیده
۱۰	۲-۳-۱: گرانش و تاثیر آن بر فضا-زمان
۱۳	فصل دوم: معادله ی دی-کی-پی و خصوصیات آن
۱۴	۱-۲: خصوصیات کلی معادله ی دی-کی-پی
۱۸	۲-۱-۱: توابع موج در معادله ی دی-کی-پی
۱۹	۲-۲: ماتریس های بتا
۲۱	۲-۲-۱: فرم دیگر ماتریس های بتا
۲۲	۳-۲: بسط معادله ی دی-کی-پی
۲۵	فصل سوم: حل معادله ی دی-کی-پی به ازای بعضی از پتانسیل ها
۲۶	۱-۳: حل معادله ی دی-کی-پی به ازای پتانسیل کاسپ
۴۲	۲-۳: حل معادله ی دی-کی-پی به ازای پتانسیل وودز-ساکسون

۳-۳: حل معادله ی دی- کی- پی به ازای پتانسیل هولسن تعمیم یافته	۵۰
فصل چهارم: فضا- زمان ها و متریک ها	۵۹
۱-۴: فضا- زمان مینکوفسکی	۶۰
۲-۴: دیگر فضا- زمان ها	۶۰
۳-۴: محاسبه ی اسپین کانکشن برای کلی ترین حالت متریک	۶۲
فصل پنجم: معادله ی دی کی پی در فضا زمان خمیده	۶۷
۱-۵: حل معادله ی دی- کی- پی در فضا- زمان ریمانی در ۱+۱ بعد	۶۹
۲-۵: حل معادله ی دی- کی- پی در فضای cosmic string در ۱+۲ بعد	۷۷
۳-۵: حل معادله ی دی- کی- پی در فضا- زمان Friedmann-Robertson-Walker در ۱+۱ بعد	۸۶
فصل ششم: معادله ی دی- کی- پی برای اسپین یک و فرم ده مولفه ای آن	۹۵
۱-6: بررسی معادله ی دی- کی- پی و بسط فرم ده مولفه ای	۹۶
۲-۶: پراکندگی بوزون های اسپین یک با پتانسیل دو پله ای	۹۹
۱-۲-۶: محاسبه ی ضریب عبور و بازتابش	۱۰۰
نتیجه گیری	۱۰۵
مراجع	۱۰۷

مقالات مستخرج از پایان نامه

- I.** H. Hassanabadi, M. Darroodi, N. Salehi, “The Modified Woods-Saxon potential in the Duffin-Kemmer-Petiau equation”, The European Physical Journal A, Eur. Phys. J. A (2015) 51:6 DOI 10.1140/epja/i2015-15069-0

فصل اول:

مقدمه

۱-۱: مروری بر معادله‌ی دی-کی-پی

همانطور که می‌دانیم یکی از مهم‌ترین مسائل در فیزیک نسبیتی پیدا کردن معادله موج می‌باشد. موفقیت دیراک در توصیف ذرات با اسپین $1/2$ راه را برای پیدا کردن معادلات دیگر برای اسپین‌های مختلف باز کرد. معادله‌ی دی-کی-پی یک معادله‌ی نسبیتی مرتبه اول برای توصیف ذرات با اسپین صفر و یک می‌باشد که در دهه‌ی ۱۹۳۰ توسط سه فرد به نام‌های دافین-کمر-پتی ارائه شد. برای اولین بار پتی^۱ که دانشجوی دوبروی^۲ بود در سال ۱۹۳۰ جبر 16×16 دی-کی-پی را با ضرب مستقیم ماتریس‌های دیراک بسط داد و نشان داد که این ماتریس‌ها را می‌توان به سه نمایش یک، پنج و ده مولفه‌ای تجزیه کرد. سال‌ها بعد کمر^۳، دستگاهی از معادلات جفت شده‌ی مرتبه اول را از معادله‌ی پروکا^۴ به دست آورد. اگر چه این دستگاه معادلات می‌توانستند به طور جداگانه به فرم ماتریس 5×5 و 10×10 نوشته شوند لکن روابط جبری واضحی میان این ماتریس‌ها وجود نداشت، تا این که دافین^۵ توانست روابط جبری حاکم بر این ماتریس‌ها را ارائه دهد. مجدداً کمر مشغول تحقیق بر روی این یافته‌ها شد تا این که توانست معادله‌ای کامل برای توصیف بوزون‌های اسپین صفر و یک را به دست آورد و نام آن را دی-کی-پی که ابتدای نام‌های دافین، کمر و پتی است گذاشت. بعد از آن، این نظریه در سه دوره‌ی متفاوت مورد بررسی قرار گرفت، در سال‌های ۱۹۳۹ تا ۱۹۷۰ در اکثر مقالات توسعه‌ی فرمالیزم این معادله و محاسباتی بر پایه‌ی هم‌ارزی معادلات کلاین-گوردن مورد بررسی قرار گرفت که یکی از مهم‌ترین کارها توسط وایتمن^۶ انجام شد. وی با نوشتن مقاله‌ای در سال ۱۹۷۰ سهم عظیمی در درک این نظریه دارد. وایتمن نشان داده که معادله‌ی دی-کی-پی همانند معادله‌ی دیراک در حضور حداقل جفت شدگی و میدان الکترومغناطیسی بدون حضور هیچ ترم غیر عادی پایسته می‌ماند. دومین مرحله از تکامل نظریه‌ی دی-کی-پی از سال ۱۹۷۰ تا سال ۱۹۸۰

¹ Petiau

² L. De Brogli

³ Kemmer

⁴ Proca

⁵ Duffin

⁶ Wightman

اتفاق می افتد. این دوره مربوط به زمانی است که دو کشف بسیار بزرگ انجام شد: نقض پارите و ایجاد نظریه‌ی وحدت برهم کنش الکتروضعیف (مدل استاندارد یا نظریه‌ی واینبرگ - سلام). در این زمان مقالات زیادی در زمینه‌ی هم ارزی معادله‌ی دی-کی-پی و کلاین-گوردن در فرآیندهای جدید به وجود آمد واپاشی K و دیگر مزون‌های ناپایدار به گونه‌ای انجام شدند که نشان دادند فرمالیزم دی-کی-پی نتایج متفاوتی از فرمالیزم معادله‌ی مرتبه‌ی دوم دارد. آخرین دوره از سال ۱۹۸۰ تاکنون می‌باشد. در این دوره این سوال هم‌چنان مطرح است که آیا این دو نظریه معادل یکدیگر هستند یا خیر؟ در این سال‌ها مقالات زیادی در این زمینه به چاپ نرسیده است. یکی از دلایل کاهش علاقه مندی به این سوال، این است که در دوره‌ی آخر این طور نتیجه‌گیری شده که معادلات کلاین-گوردن و دی-کی-پی هم ارز نیستند. یکی دیگر از دلایل کمبود علاقه به این معادله، پیچیدگی ریاضی فرمول دی-کی-پی نسبت به معادلات پروکا و کلاین-گوردن است. می‌دانیم که معادلات پروکا و کلاین-گوردن به ترتیب ذرات اسپین یک و صفر را توصیف می‌کنند ولی این معادلات تنها در میدان‌های آزاد با معادله‌ی دی-کی-پی معادل هستند و نتایج آن‌ها در حضور برهم کنش‌های هادرونی و شکست تقارنی با یکدیگر متفاوت است. البته باید توجه داشت که فرمالیزم معادله‌ی دی-کی-پی بسیار غنی‌تر از معادلات پروکا و کلاین-گوردن است، به گونه‌ای که وجود جفت شدگی‌هایی که در معادله‌ی دی-کی-پی رخ می‌دهد در معادلات پروکا و کلاین-گوردن اتفاق نمی‌افتد. ذکر این نکته نیز ضروری به نظر می‌رسد که معادله‌ی دی-کی-پی یک معادله‌ی دیراک گونه است و از لحاظ ظاهر بسیار شبیه به معادله‌ی دیراک است با این تفاوت که در معادله‌ی دیراک از ماتریس‌های گاما و در معادله‌ی دی-کی-پی از ماتریس‌های بتا استفاده می‌شود که البته ماتریس‌های بتا طبق رابطه‌ی $\gamma_5 = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ به ماتریس‌های گاما مربوط می‌شود. از آن جایی که معادله‌ی دیراک برای ذرات اسپین $1/2$ به کار می‌رود در نتیجه معادله‌ی دی-کی-پی از حاصل ضرب مستقیم دو معادله‌ی دیراک به دست می‌آید. علاوه بر این جبر معادله‌ی دی-کی-پی دستگاهی از ۱۲۶ عنصر مستقل از ماتریس‌ها را تولید می‌کند که به سه نمایش کاهش ناپذیر منجر می‌شود: نمایش یک، پنج و ده مولفه‌ای. نمایش یک

مولفه‌ای که یک نمایش بدیهی است، نمایش پنج مولفه‌ای که برای بوزون‌های اسپین صفر (بوزون‌های اسکالر) است و نمایش ده مولفه‌ای که برای بوزون‌های اسپین یک (بوزون‌های برداری) می‌باشد. نمایش کاهش پذیری آن دسته از معادلاتی هستند که آن‌ها را نمی‌توان به فرم فشرده‌تر نشان داد. این معادله در بسیاری از شاخه‌های فیزیک از جمله کیهان‌شناسی، برهم کنش‌های هادرون-هسته و طیف سنجی مزون‌ها کاربرد دارد. از این رو می‌توان ذراتی مانند مزون‌ها، گلوئون‌ها، فوتون‌ها، اکسیتون‌ها، ذرات واسطه‌ای W و Z را توسط معادله‌ی دی-کی-پی مورد مطالعه قرار داد. بهترین مثال برای کارایی این معادله برخورد هادرون-نوکلوئون است.

۱-۲: انواع ذرات بنیادی

هادرون‌ها به ذرات بنیادی ترکیبی گفته می‌شود. همانطور که از اسمشان پیداست این ذرات ترکیبی از ذرات دیگر هستند. هادرون‌ها از ترکیب ذرات بنیادی اولیه ایجاد می‌شود.

ذرات بنیادی اولیه شامل فرمیون‌ها (کوارک‌ها و لپتون‌ها) و بوزون‌ها می‌باشند.

کوارک‌ها شامل $up/down/charm/strange/top/bottom$ می‌باشند.

لپتون‌ها شامل الکترون/نوترینوی الکترون/تائو/نوترینوی تائو/میون/نوترینوی میون می‌باشند.

بوزون‌ها شامل فوتون/گلوئون/بوزون W, Z /بوزون هیگز/گراویتون می‌باشند.

هادرون‌ها دو دسته‌اند: باریون‌ها و مزون‌ها.

باریون‌ها از ترکیب فرمیون‌ها (۳ کوارک) تشکیل می‌شوند. (مثل پروتون که از ترکیب دو

کوارک up و یک کوارک $down$ ایجاد می‌شود.) در واقع کلیه‌ی انواع شناخته شده‌ی باریون‌ها از سه

کوارک ظرفیت تشکیل می‌گردند، و بنابراین از گروه فرمیون‌ها هستند. آن‌ها دارای عدد باریونی $B=1$

هستند، در حالی که در ضد باریون‌ها (که از سه ضد ذره کوارک تشکیل شده‌اند) عدد باریونی $B=-1$

است. باریون‌ها حاوی یک جفت ضد کوارک اضافی هستند که پنتاکوارک نامیده می‌شود. شواهد تجربی طی تکرار آزمایش‌های ذرات بنیادی در اوایل سال ۲۰۰۰ نشان داد که ساختار دیگری برای باریون‌ها پیدا نشده است.

مزون‌ها: مزون‌ها از ترکیب بوزون‌ها تشکیل می‌شوند. البته می‌شود این‌طور هم گفت که مزون‌ها از ترکیب یک کوارک و یک ضد کوارک تشکیل می‌شوند. (مثل پیون که از ترکیب یک کوارک up و یک ضد کوارک down ایجاد می‌شود.) در واقع مزون‌ها باریون‌هایی هستند که از یک جفت کوارک-پادکوارک تشکیل می‌شوند. عدد باریونی آن‌ها $B=0$ است. نمونه‌هایی از مزون‌ها معمولاً در آزمایش‌های فیزیک ذرات تولید می‌شود از جمله پیون‌ها و کائون‌ها. مزون‌های فرضی بیش از یک جفت کوارک-ضد کوارک دارند؛ مزون از دو جفت کوارک-ضد کوارک به نام تتراکوارک تشکیل شده است. در حال حاضر هیچ گونه مدرکی دال بر وجود آن‌ها وجود ندارد. مزون‌هایی که خارج از طبقه بندی الگوی کوارک قرار می‌گیرند، مزون‌های بیگانه خوانده می‌شوند. این مزون‌ها شامل گلوبال‌ها (گلوئون‌های به هم چسبیده) و مزون‌های دورگه می‌باشند (مزون‌ها توسط گلوئون‌های تحریک شده محدود می‌گردند).

از لحاظ تاریخی این سوال که "چه چیزی اجزای هسته را در کنار هم نگه می‌دارد؟" در نهایت منجر به کشف مزون‌ها شد. از این رو دانشمندان نیرویی که قوی‌تر از نیروی دافعه‌ی الکتریکی پروتون‌ها و نوترون‌ها در درون هسته است را نیروی قوی نامیدند به گونه‌ای که این نیرو کوتاه برد است. در سال ۱۹۳۴ نخستین نظریه‌ی نیروی قوی توسط یوکاوا ارائه شد. یوکاوا فرض کرده بود که پروتون و نوترون به وسیله‌ی نوعی میدان به یکدیگر جذب می‌شوند. درست به همان صورت که الکترون به وسیله‌ی میدان الکتریکی پروتون و ماه به وسیله‌ی میدان جاذبه‌ی زمین جذب می‌شود. این میدان باید کوانتیده باشد و برای یوکاوا این سوال پیش آمده بود که خواص کوانتومی آن چیست؟ آیا ذره‌ای است که تبادل آن ویژگی‌های شناخته شده‌ی نیروی قوی را پدید می‌آورد؟ برای نمونه برد

کوتاه نیرو نشان می‌داد که ذره‌ی واسطه خیلی سنگین است، یوکاوا محاسبه کرده بود که جرم آن نزدیک به 300 برابر جرم الکترون یا در حدود یک ششم جرم پروتون است و چون این ذره بین الکترون و پروتون واقع می‌شد آن را مزون (ذره‌ی میانه) نامیدند. یوکاوا می‌دانست که چنین ذره‌ای در آزمایشگاه مشاهده نشده به همین خاطر تصور می‌کرد که نظریه‌اش نادرست است، اما در آن زمان شماری از تحقیقات درباره‌ی پرتوهای کیهانی در دست انجام بود و در سال 1937 دو گروه به طور جداگانه ذراتی را یافتند که مشابه توصیف یوکاوا بودند. در واقع پرتوهای کیهانی که در هر ثانیه با زمین برخورد می‌کنند از ذره‌هایی با وزن میانه تشکیل شده اند. برای مدتی به نظر می‌رسید که همه چیز بر وفق مراد است اما با انجام پژوهش‌های مفصل‌تر درباره‌ی ذرات پرتوهای کیهانی، تفاوت‌های شگفت‌انگیزی بروز کرد. عمر آن‌ها آن‌گونه که گفته شده بود نبود و در ظاهر خیلی سبک‌تر از آن بودند که یوکاوا پیش بینی کرده بود و اندازه گیری‌های گوناگون جرم با یکدیگر سازگاری نداشتند. در سال 1946 آزمایش‌های تعیین کننده‌ای در رم انجام شد که نشان می‌داد ذرات پرتوهای کیهانی برهم کنش ضعیفی با هسته‌ی اتم دارند، اگر این ذرات در واقع همان مزون یوکاوا بودند یعنی فرستنده‌ی نیروی قوی برهم کنش باید چشمگیر می‌بود. سرانجام این معما در سال 1947 توسط گروهی از دانشمندان حل شد که در واقع دو نوع ذره‌ی میان وزن در پرتوهای کیهانی وجود دارد که به آن‌ها پایون و میون می‌گویند. مزون یوکاوا همان پایون است که در جو زمین به مقدار زیاد تولید می‌شود ولی به طور معمول مدت‌ها پیش از رسیدن به زمین تجزیه می‌شود. همان‌گونه که سیستم مقید سه کوارکی یا سیستم مقید سه پاد کوارکی، نوکلئون‌ها یا پادنوکلئون‌ها را می‌سازند میدان گلوئونی قوی می‌تواند یک کوارک و یک پادکوارک را به هم مقید سازد و ذره‌ی کوتاه عمری موسوم به مزون تولید کند. مزون‌ها دارای تکانه‌ی زاویه‌ای مداری صفرند و اسپین‌های ذاتی به گونه‌ای جفت می‌شوند که در نتیجه تکانه زاویه‌ای کل صفر می‌شود. اما جفت شدگی اسپین‌های ذاتی به گونه‌ای است که اسپین کل با عدد کوانتومی $s=1$ را نتیجه می‌دهد. این حالت‌ها موسوم به مزون‌های ρ^+ , ρ^- , ρ^0 می‌باشند. واسطه‌ی نیروی بین نوکلئون‌ها بر اثر تبادل مزون‌ها ایجاد می‌شود. در سال‌های اخیر رویکردهای

نسبیتی کاملاً موفق نیز در توصیف داده‌های پراکندگی پروتون - هسته ارائه شده است. این معادلات برتری قابل توجهی نسبت به معادلات غیرنسبیتی دارند برای مثال یکی از برتری‌های بررسی این معادلات نسبیتی با روش‌های غیر نسبیتی استاندارد در تحقیقات هسته‌ای می‌باشد.

به علت انرژی بستگی خیلی کمی که برای ساختار دوترون وجود دارد دوترون می‌تواند کاندید مناسبی برای این منظور باشد. پراکندگی دوترون - هسته ضرورتاً می‌تواند در ترم‌های پراکندگی هسته - هسته آزاد توصیف شود. از این رو برای مطالعه‌ی رفتار نسبیتی دوترون - هسته می‌توان از فرمالیزم دی - کی - پی استفاده کرد به طوری که بخش اسپین یک آن از ضرب مستقیم میدان‌های دیراک اسپین $\frac{1}{2}$ پیشنهاد می‌شود هم‌چنین بخش اسپین - صفر معادله‌ی دی - کی - پی در توصیف پراکندگی‌های کائون - هسته و پایون - هسته موفق خواهد بود. هم‌چنین در سال‌های اخیر با قرار دادن پتانسیل‌های مختلف درون معادله‌ی دی - کی - پی و به دست آوردن توابع موج و سپس از طریق آن با حل کردن معادله‌ی ویژه مقدری، ویژه مقادیر انرژی به دست آمده است که توافق قابل قبولی با تجربه داشته است و سپس پراکندگی ذرات نیز محاسبه شده است. از جمله پتانسیل‌هایی که در معادله‌ی دی - کی - پی قرار داده شده است می‌توان به پتانسیل‌های کولنی، کرنل، وودز - ساکسون، هولسن، کاسپ، یوکاوا و... اشاره کرد. هم‌چنین می‌توان معادلات ماکسول را از معادله‌ی دی - کی - پی به دست آورد. معادله‌ی دی - کی - پی را می‌توان هم در حضور جرم و هم در حضور ذرات بدون جرم بررسی کرد. نکته‌ی قابل توجه این است که همانطور که در مورد نظریه‌ی دیراک وجود دارد V می‌تواند در ترم‌هایی مطابق با تبدیلات لورنتس نوشته شود. به علت تعداد مولفه‌های بیشتر ماتریس‌های بتا در مقایسه با ماتریس‌های گاما، تعداد بیشتری از ساختارهای لورنتس را انتظار داریم به گونه‌ای که برای بخش اسکالر برهم‌کنش‌ها شامل دو بخش اسکالر، دو بخش برداری و دو بخش تانسوری است و برای بخش برداری، V شامل دو اسکالر، دو بردار و یک شبه اسکالر و دو شبه بردار و هشت ترم تانسوری می‌باشد. ولی ترم‌های تانسوری به علت وجود اثرات غیرعادی نادیده گرفته می‌شوند. می‌توان

این گونه نتیجه گرفت که بخش اسکالر معادله‌ی دی-کی-پی معادل با معادله‌ی کلاین-گوردن می‌باشد و بخش برداری آن معادل با معادله‌ی پروکا است. یکی از نقص‌ها در مطالعات این معادله این است که اکثر مطالعات معادله‌ی دی-کی-پی در فضا-زمان‌های تخت اتفاق افتاده است.

۱-۳: فضا-زمان

در علم فیزیک و در ریاضی، فضا-زمان (Spacetime) (و نه فضا و زمان) به هرگونه مدل ریاضی گفته می‌شود که زمان و مکان را به صورت ساختاری واحد و درهم‌پیوسته با یکدیگر ترکیب کند. بر اساس فرضیات مفهوم فضای اقلیدسی، جهان، سه بعد مکانی و یک بعد زمانی مستقل از هم دارد. در فضا-زمان سه بعد فضا و یک بعد زمان در هم ادغام می‌شوند و یک محیط پیوسته‌ی چهار بعدی را ایجاد می‌کنند. با ترکیب فضا و زمان و ایجاد یک محیط خمیده‌ی واحد، فیزیکدان‌ها توانسته‌اند تئوری‌های فیزیک را هم در سطح کیهانی و هم در بعد اتمی ساده‌سازی کنند. عبارت فضا-زمان به عنوان یک مفهوم عمومی فراتر از رویدادهای فضا-زمان در $1+3$ بُعد معمولی در نظر گرفته می‌شود، فضا-زمان واقعاً ترکیبی از مکان و زمان است اما برخی دیگر پیشنهاد کرده‌اند که بُعدهای جدیدی که بعدها اضافه می‌شود هم در مجموعه‌ی تئوری فضا-زمان قرار گیرد (نظریه‌های دیگری وجود دارند که توانسته‌اند بُعدهای جدیدی را اضافه کنند که این بُعدها دیگر شامل مکان و زمان نمی‌شوند)؛ اینکه واقعاً چند بُعد برای توصیف جهان لازم است سوالی است که هنوز پاسخ قطعی برای آن پیدا نشده است. تئوری‌هایی مانند تئوری ریسمان پیش‌بینی می‌کند که 10 تا 26 بُعد جدید را بتوان اضافه کرد یا تئوری‌هایی وجود دارند که داشتن 11 بُعد شامل 10 بُعد مکانی و 1 بُعد زمانی را ممکن می‌دانند؛ باید به این نکته توجه داشت که داشتن بیش از چهار بعد فقط در اندازه‌های زیر اتمی تفاوت ایجاد می‌کند. از تلاش‌هایی که در زمینه‌ی فضا-زمان انجام شد می‌توان از کارهای جیمز کلارک ماکسول نام برد که از معادلات دیفرانسیل جزئی برای گسترش الکترودینامیک در چهار بُعد استفاده کرد. بعدها لورنتس در قرن 19 چند نامتغیر از معادلات ماکسول را معرفی کرد؛ این دستاورد

لورنتس بعدها، پایه‌ی تئوری نسبیت خاص آلبرت انیشتین قرار گرفت. پیشتر تصور می‌شد که سنجش زمان و مکان فقط به دامنهی اعداد حقیقی محدود می‌شود؛ هم‌چنین پیشنهاد این که سنجش زمان و مکان قابل مقایسه باشد توسط دانشمندان فیزیک بنیان نهاده شد. تا آغاز قرن بیستم گذر زمان مستقل از حرکت در نظر گرفته می‌شد و فرض این بود که در تمام دستگاه‌های مختصات، زمان تنها در یک محور مشخص با سرعت ثابت پیش می‌رود؛ اما تجربیات بعدی نشان داد که زمان در سرعت‌های بالا کندتر حرکت می‌کند (کاهش سرعت زمان با عنوان تاخیر زمان در نسبیت خاص توضیح داده شده‌است)؛ برای مثال یک ساعت اتمی را بر روی یک شاتل فضایی نصب کردند و دیدند که زمان برای ساعت روی شاتل کندتر از زمان در سطح زمین می‌گذرد. در حالی فضا-زمان را به عنوان نتیجه‌ای از تئوری نسبیت خاص انیشتین در سال ۱۹۰۵ در نظر می‌گیرند که ریاضیات آن توسط استاد ریاضی او هرمان مینکوفسکی انجام شد؛ وی در سال ۱۹۰۸ تلاش‌های زیادی برای گسترش کارهای انیشتین انجام داد. مفهوم فضای مینکوفسکی اولین نمایش رفتار فضا و زمان به عنوان دو نمود مختلف از یک مفهوم یکپارچه بیان شد؛ چکیده‌ی نسبیت خاص. اندیشه فضای مینکوفسکی باعث شد که به هر دو نسبیت خاص و عام، بیشتر از دید هندسی نگاه شود.

۱-۳-۱: فضا-زمان خمیده

انیشتین بیان کرد که گرانش هر چیزی را تحت سلطه‌ی خود دارد، حتی خطوط زمان هم تحت تاثیر گرانش خمیده می‌شوند، یا به عبارتی گرانش عاملی بر تغییر سرعت زمان است. بر اساس نظریه‌ی انیشتین، خمیدگی به علت وجود جرم و انرژی ایجاد می‌شود. هر جسم پرجرم بسیار بزرگ، در خمیدگی فضا - زمان، نقش دارد. اجسامی که در « امتداد خطی مستقیم در جهان حرکت می‌کنند»، مجبور به دنبال کردن مسیرهای خمیده‌ای هستند. فضا و زمان بر طبق نظریه‌ی نسبیت انیشتین به یکدیگر بافته شده اند و ساختار تار و پودی چهاربعدی به نام فضا-زمان را به وجود آورده اند. جرم قابل توجه زمین ، این ساختار را به شکل یک گودی در می‌آورد.(هر چند که چنین خمیدگی

های فضا-زمان را اغلب در محیط اطراف اجرام بسیار پر جرم‌تر و فشرده‌تری مانند سیاهچاله‌ها، ستاره‌های نوترونی، و کوتوله‌های سفید سراغ داریم اما اگر با دقت کافی محیط اطراف اجرام بسیار کم جرم‌تری مانند زمین را نیز بررسی کنیم خمیدگی فضا-زمان ناشی از جرم زمین را می‌توانیم ببابیم. بر طبق نظریه‌ی نسبیت عام انیشتین، حرکت اجسام در ساختار تار و پودی فضا-زمان صورت می‌گیرد. یعنی جسم در حال حرکت تابع شکل فضا-زمانی است که در آن واقع شده است. بر اساس این نظریه، گرانش باعث تغییر شکل ساختار فضا-زمان می‌شود و در نتیجه حرکت جسم نیز بر اثر میدان گرانشی تغییر می‌کند. می‌توان گفت که به زبان انیشتین گرانش در اصل حرکت اجسام در مسیر خمیدگی ساختار فضا-زمان در اطراف جسم پر جرم است. یعنی وقتی زمین در مداری به دور خورشید در گردش است از دید نسبیتی به دلیل انحنای فضا-زمان اطراف خورشید در این مسیر هدایت می‌شود. نظریه‌ی انیشتین، پیش‌گویی می‌کند که چیزهای دیگری به جز ماه و سیارات نیز، تحت تأثیر خمیدگی فضا - زمان قرار می‌گیرند. مثلاً فوتون‌ها (ذرات نور)، باید در فضای خمیده حرکت کنند. اگر باریکه نوری که از ستاره‌ای دور سیر می‌کند، مسیر آن از نزدیکی خورشید بگذرد، خمیدگی فضا- زمان در نزدیکی خورشید موجب می‌شود که این مسیر اندکی به طرف خورشید خمیده شود.

۱-۳-۲: گرانش و تاثیر آن بر فضا-زمان

انیشتین توضیح جالبی برای گرانش آورده است. او فضا و زمان را به صورت خطوط عمود بر هم در نظر گرفت و اسم شان را “خطوط فضا- زمان” قرار داد بیان داشت که اجسام هر یک به اعتبار جرم‌شان انحنایی در فضا- زمان ایجاد می‌کنند. برای تصور این توضیحات می‌توانید چهار گوشه‌ی یک تکه پارچه را به عنوان فضا- زمان بگیرید. بعد یک جسم با جرم قابل ملاحظه‌ای روی پارچه قرار دهید، خمیدگی قسمتی از پارچه که جسم روی آن قرار گرفته، همان خمیدگی فضا- زمان است. و این کاملاً واضح است که وقتی یک جسم کوچک‌تری روی پارچه قرار دهیم، به سمت جسم قبلی که

سنگین تر است می‌رود. این در واقع دلیل کشش یک جسم به سمت جسم سنگین تر است، مثلاً کشش زمین به سمت خورشید. تا اینجا از خمیده شدن مکان اطلاع یافتیم و اما زمان. اما چگونه می‌توان سرعت گذر زمان را صفر کرد؟ فقط کافیست به یک تکینگی راه پیدا کنید. تکینگی جایی است که گرانش در آن چنان قوی است که خطوط زمان را آن قدر خمیده کرده تا به صورت راس یک زاویه درآید. مثلاً در سیاهچاله‌ها سرعت زمان در تکینگی‌ها صفر است. گفتیم که خطوط فضا-زمان بر هم عمود هستند، بنابراین خطوط مکان هم باید خمیده شوند. این خمیدگی باعث کاهش ابعاد مکان می‌شود.

فصل دوم:

معادله ی دی-کی-پی و خصوصیات

آن

۲-۱: خصوصیات کلی معادله‌ی دی-کی-پی

حالت کلی و هموردای معادله‌ی دیراک برای ذرات اسپین $\frac{1}{2}$ به صورت زیر است:

$$(\gamma^\mu \pi_\mu - m) \Psi_D(x) = 0 \quad (1-2)$$

که γ^μ ماتریس‌های دیراک 4×4 هستند و نیز

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, -\vec{\gamma}) \quad (2-2)$$

π_μ نیز چاربردار الکترودینامیکی تکانه می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\pi_\mu = (P_0 - eA_0, \vec{P} - e\vec{A}) \quad (3-2)$$

که در آن

$$A_\mu = (\phi, \vec{A})$$

حال به تبیین و بررسی ماتریس‌های گامای دیراک می‌پردازیم.

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \beta \vec{\alpha} \quad (4-2)$$

که در آن:

$$\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (5-2)$$

بنابراین با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی اصلی دیراک داریم:

$$(\gamma^0 \pi_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{\pi} - m) \Psi_D(x) = 0 \rightarrow (\beta \pi_0 - \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} - m) \Psi_D(x) = 0 \rightarrow (\pi_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} - \beta m) \Psi_D(x) = 0 \rightarrow$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta m) \Psi_D(x) = \pi_0 \Psi_D(x)$$

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta m + e\phi) \Psi_D(x) = \pi_0 \Psi_D(x) \quad (۶-۲)$$

حال با در نظر گرفتن تابع موج به صورت $\Psi(x_0=t, \vec{x}) = e^{-iEt} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix}$ و همچنین جایگذاری معادلات ماتریس گامای دیراک در معادله‌ی بالا به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta m + e\phi) \Psi_D(x) = \pi_0 \Psi_D(x) \rightarrow \\ & \left(\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{\pi} + \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} m + e\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \Psi_D(x) = \pi_0 \Psi_D(x) \rightarrow \\ & \begin{pmatrix} m + e\phi & \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{\pi} & -m + e\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \varphi(\vec{x}) \\ \chi(\vec{x}) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (۷-۲)$$

از آن جایی که ذره در میدان مغناطیسی در حال حرکت می‌باشد $A_0 = \phi = 0$ و با تعریف توابع φ و χ به صورت زیر:

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}, \quad \chi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} \quad (۸-۲)$$

در نهایت با قرار دادن آن‌ها در معادله‌ی (۸-۲) یک معادله‌ی ماتریسی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{pmatrix} E - m & 0 & -P_z & -\pi_- \\ 0 & E - m & -\pi_+ & P_z \\ -P_z & -\pi_- & E + m & 0 \\ -\pi_+ & P_z & 0 & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \\ \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} = 0 \quad (۹-۲)$$

که در آن + و - مربوط به عملگرهای بالا برنده و پایین برنده است و π_+ و π_- عملگرهایی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\pi_+ &= \pi_1 + i\pi_2 \\ \pi_- &= \pi_1 - \pi_2\end{aligned}\quad (۱۰-۲)$$

رابطه‌ی جابه‌جایی بین این عملگرها از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\left[\frac{\pi_+}{\sqrt{2eB}}, \frac{\pi_-}{\sqrt{2eB}} \right] = 1 \quad (۱۱-۲)$$

شباهت این رابطه با رابطه‌ی جابه‌جایی بین عملگرهای بالابرنده و پایین آورنده در مسئله‌ی نوسانگر هماهنگ جالب توجه است.

$$[a^\dagger, a] = 1 \quad (۱۲-۲)$$

به دلیل این شباهت ما می‌توانیم همان راه حل نوسانگر هماهنگ را در پیش بگیریم که با استفاده از چند جمله‌ای‌های هرمیت می‌توان انرژی را محاسبه کرد.

در اینجا عملگرهای خلق و نابودی که منجر به چندجمله‌ای‌های هرمیت و سپس طیف انرژی می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{\pi_+}{\sqrt{2eB}}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad (۱۳-۲)$$

$$\frac{\pi_-}{\sqrt{2eB}}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle \quad (۱۴-۲)$$

اگر تابع موج را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \\ \chi_+ \\ \chi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 |n-1\rangle \\ a_0 |n\rangle \\ a_0 |n-1\rangle \\ a_2 |n\rangle \end{pmatrix} \quad (۱۵-۲)$$

با استفاده از جایگذاری آن در معادلات (۹-۲) تا (۱۴-۲) به ۴ معادله‌ی خطی زیر می‌رسیم:

$$(E - m)a_1|n-1\rangle - P_3a_0|n-1\rangle - a_2\sqrt{2eBn}|n-1\rangle = 0 \quad (۱۶-۲)$$

$$(E - m)a_0|n\rangle - P_3a_2|n\rangle - a_0\sqrt{2eBn}|n\rangle = 0 \quad (۱۷-۲)$$

$$(E + m)a_0|n-1\rangle - P_3a_1|n-1\rangle - a_0\sqrt{2eBn}|n-1\rangle = 0 \quad (۱۸-۲)$$

$$(E + m)a_2|n\rangle - P_3a_0|n\rangle - a_1\sqrt{2eBn}|n\rangle = 0 \quad (۱۹-۲)$$

همچنین برای راحتی در محاسبه‌ی انرژی می‌توان ۴ معادله‌ی بالا را به صورت فرم ماتریسی

زیر درآورد:

$$\begin{pmatrix} E - m & 0 & -P_3 & -\sqrt{2eBn} \\ 0 & E - m & -\sqrt{2eBn} & P_3 \\ -P_3 & -\sqrt{2eBn} & E + m & 0 \\ -\sqrt{2eBn} & P_3 & 0 & E + m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \\ a_0 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (۲۰-۲)$$

که این فرم امکان به دست آوردن انرژی را به ما می‌دهد. پس از انجام محاسبات، رابطه‌ی انرژی

به صورت زیر در می‌آید:

$$E = \pm\sqrt{m^2 + P_3^2 + 2eBn} \quad (۲۱-۲)$$

برای ذرات اسپین یک معادله‌ی kemmer به صورت زیر است:

$$(\beta^\mu \pi_\mu - M)\Psi_K(x) = 0 \quad (۲۲-۲)$$

که در آن β^μ ماتریس‌های kemmer می‌باشند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند [۲۱]:

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu \quad (۲۳-۲)$$

که γ^μ ها ماتریس‌های معمولی دیراک می‌باشند که در آینده بیشتر مورد بررسی قرار خواهد

گرفت. M مجموع جرم ذرات با اسپین نیم است و $\Psi_K(x)$ تابع موج است که ۱۶ مولفه دارد.

۲-۱-۱: توابع موج در معادله‌ی دی-کی-پی

با مقایسه‌ی این تابع موج با تابع موج دیراک می‌توان فهمید که تابع موج kemmer از حاصل

ضرب خارجی دو تابع موج دیراک به دست می‌آید.

$$\Psi_k(x) = \Psi_D \otimes \Psi_D = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \quad (2-24)$$

که عناصر Ψ_D هر کدام خود دارای ۴ مولفه است که به صورت زیر در می‌آید.

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_0 \\ A_{\bar{0}} \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_+ \varphi_+ \\ \varphi_+ \varphi_- \\ \varphi_- \varphi_+ \\ \varphi_- \varphi_- \end{pmatrix} \quad (2-25)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_0 \\ B_{\bar{0}} \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_+ \chi_+ \\ \varphi_+ \chi_- \\ \varphi_- \chi_+ \\ \varphi_- \chi_- \end{pmatrix} \quad (2-26)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_0 \\ C_{\bar{0}} \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_+ \varphi_+ \\ \chi_+ \varphi_- \\ \chi_- \varphi_+ \\ \chi_- \varphi_- \end{pmatrix} \quad (2-27)$$

$$D = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_0 \\ D_{\bar{0}} \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_+ \chi_+ \\ \chi_+ \chi_- \\ \chi_- \chi_+ \\ \chi_- \chi_- \end{pmatrix} \quad (2-28)$$

فرم کلی معادله‌ی دی-کی-پی برای بوزون‌هایی با جرم m در فضا-زمان مینکوفسکی و در

غیاب پتانسیل به صورت زیر است [۳-۵]

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad (2-29)$$

که ∂_μ مشتق و β^μ ماتریس‌های kemmer می‌باشند. این ماتریس‌ها در روابط زیر صدق می‌کنند.

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu \quad (30-2)$$

که در آن $g^{\mu\nu}$ تانسور متریک فضا می‌باشد و به صورت زیر است [۶]:

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (g^{\mu\nu})^2 = 1 \quad (31-2)$$

۲-۲: ماتریس‌های بتا

این ماتریس‌ها را می‌توان به سه صورت نشان داد. برای ذرات اسپین صفر 5×5 و برای ذرات اسپین یک 10×10 می‌باشند. در یک حالت کلی نیز می‌توان آن‌ها را به صورت ماتریس‌های 4×4 نشان داد. هر سه نمایش در زیر نشان داده شده است:

برای اسپین صفر [۷]:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 \end{pmatrix} \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho^i \\ -\rho^{iT} & 0 \end{pmatrix} \quad (32-2)$$

$$\tilde{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (33-2)$$

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \rho_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (34-2)$$

برای اسپین یک [۸]:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & \bar{0}^T \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \bar{0}^T \\ -I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & \bar{0}^T \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۵-۲)$$

$$\beta^l = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & k^{lT} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -is_{3 \times 3}^l & \bar{0}^T \\ 0_{3 \times 3} & is_{3 \times 3}^l & 0_{3 \times 3} & \bar{0}^T \\ k^l & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۶-۲)$$

که در آن

$$s_{3 \times 3}^1 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{3 \times 3}^2 = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad s_{3 \times 3}^3 = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۷-۲)$$

$$0_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (۳۸-۲)$$

$$k^1 = (100) \quad k^2 = (010) \quad k^3 = (001), \quad \bar{0} = (000)$$

در حالت کلی نیز می‌دانیم که:

$$\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x) \quad (۳۹-۲)$$

که در آن [۹]:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (40-2)$$

$$\beta^0(x) = \gamma^0(x) \otimes I + I \otimes \gamma^0(x) = \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (41-2)$$

$$\beta^i(x) = \gamma^i(x) \otimes I + I \otimes \gamma^i(x) = \begin{pmatrix} 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \sigma_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\sigma_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} & 0 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \\ 0 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} & 1 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \sigma_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_i & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i & 0 & 0 \\ -\sigma_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_i \\ 0 & 0 & -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i & \sigma_i & 0 \\ -\sigma_i & 0 & 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 & 0 & \sigma_i \\ 0 & -\sigma_i & -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

(42-2)

۲-۲-۱: فرم دیگر ماتریس‌های بتا

هم‌چنین می‌توان به جای γ^μ ، σ^μ (ماتریس‌های پاولی) را قرار داد که در آن صورت فرم

ماتریس‌های kemmer به صورت زیر در می‌آیند [۱۰]:

$$\beta^\mu(x) = \sigma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \sigma^\mu(x) \quad (۴۳-۲)$$

$$\beta^0(x) = \sigma^0(x) \otimes I + I \otimes \sigma^0(x) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۴۴-۲)$$

$$\beta^1(x) = \sigma^1(x) \otimes I + I \otimes \sigma^1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۴۵-۲)$$

$$\beta^2(x) = \sigma^2(x) \otimes I + I \otimes \sigma^2(x) = i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۴۶-۲)$$

۳-۲: بسط معادله‌ی دی-کی-پی

حالت کلی و هموردای معادله‌ی دی-کی-پی در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی خارجی

در ۱+۳ بعد در فضا-زمان‌های خمیده به صورت

$$\left[i \beta^\mu \left(\partial_\mu - \Sigma_\mu + ie A_\mu \right) - M \right] \Psi_k(t, \vec{x}) = 0 \quad \text{زیر است:} \quad (۴۷-۲)$$

که M جرم بوزون‌ها، A_μ چاربردار پتانسیل، e بار الکتریکی می‌باشد.

هم‌چنین β^μ با فرمول زیر به ماتریس‌های kemmer در فضا-زمان مینکوفسکی مربوط می‌شوند

$$\beta^\mu = e_{(i)}^\mu \beta^{(i)} \quad (48-2)$$

Σ_μ که برای هموردایی معادله‌ی دی-کی-پی به آن اضافه می‌شود اسپینور کانکشن نام دارد که برای هر متریکی مقدار متفاوتی دارد و از روبرو زیر به دست می‌آید

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \quad (49-2)$$

که:

$$\Gamma_\rho = \frac{1}{8} \left[\gamma^{(i)}, \gamma^{(k)} \right] e_{(i)}^\nu e_{(k)\nu;\rho}. \quad (50-2)$$

فصل سوم:

حل معادله ی دی-کی-پی به ازای

بعضی از پتانسیل ها

در این فصل به بررسی پتانسیل‌های مختلف درون معادله‌ی دی-کی-پی می‌پردازیم. اولین پتانسیلی که آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم پتانسیل کاسپ می‌باشد.

۳-۱: حل معادله‌ی دی-کی-پی به ازای پتانسیل کاسپ

همانطور که می‌دانیم فرم کلی معادله‌ی دی-کی-پی به صورت زیر می‌باشد:

$$\left[i \beta^\mu (\partial_\mu + ie A_\mu) - (m + V_s) \right] \Psi_k(t, \vec{x}) = 0 \quad (1-3)$$

که در آن A_μ چار بردار پتانسیل است.

β^μ نیز ماتریس کمر (kemmer matrices) می‌باشد که براساس ماتریس گامای دیراک به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x) \quad (2-3)$$

می‌توان به جای ماتریس‌های گامای دیراک از ماتریس‌های پاولی استفاده کرد که در آن صورت رابطه‌ی زیر جایگزین رابطه‌ی (۲-۳) می‌گردد.

$$\beta^\mu(x) = \sigma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \sigma^\mu(x) \quad (3-3)$$

و با توجه به اینکه تابع موج دارای ۴ مولفه است آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (4-3)$$

و با در نظر گرفتن $\sigma^\mu = (\sigma^z, i\sigma^x)$ و جایگذاری در معادله‌ی اصلی دی-کی-پی داریم:

$$\left[2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} (\partial_0 + ieA_0) + i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} (\partial_1 + ieA_1) + i(m + V_s) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\tilde{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (5-3)$$

این شکل ماتریسی را می‌توانیم به صورت ۴ معادله و ۴ مجهول به صورت زیر بنویسیم:

$$[2(\partial_0 + ieA_0) + i(m + V_s)]\Psi_1 + i(\partial_1 + ieA_1)(\Psi_0 + \Psi_{\tilde{0}}) = 0 \quad (6-3)$$

$$i(\partial_1 + ieA_1)(\Psi_1 + \Psi_2) + i(m + V_s)\Psi_0 = 0 \quad (7-3)$$

$$i(\partial_1 + ieA_1)(\Psi_1 + \Psi_2) + i(m + V_s)\Psi_{\tilde{0}} = 0 \quad (8-3)$$

$$[-2(\partial_0 + ieA_0) + i(m + V_s)]\Psi_2 + i(\partial_1 + ieA_1)(\Psi_0 + \Psi_{\tilde{0}}) = 0 \quad (9-3)$$

از معادلات (۶-۳) و (۷-۳) داریم:

$$\Psi_0 = \Psi_{\tilde{0}} = \left(\frac{-1}{m + V_s} \right) (\partial_1 + ieA_1)(\Psi_1 + \Psi_2) \quad (10-3)$$

با توجه به $eA_0 = V_v$ و $A_1 = 0$ داریم:

$$[2(-iE + iV_v) + i(m + V_s)]\Psi_1 + [i \frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2i}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2}] (\Psi_1 + \Psi_2) = 0 \quad (11-3)$$

$$[-2(-iE + iV_v) + i(m + V_s)]\Psi_2 + [i \frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2i}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2}] (\Psi_1 + \Psi_2) = 0 \quad (12-3)$$

$$\Psi_1 - \Psi_2 = \frac{2(E - V_v)}{(m + V_s)} (\Psi_1 + \Psi_2) \quad (13-3)$$

از ترکیب کردن معادلات (۱۱-۳) و (۱۲-۳) خواهیم داشت:

$$-2(E - V_v)(\Psi_1 - \Psi_2) + (m + V_s)(\Psi_1 + \Psi_2) + 2 \left[\frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2} \right] (\Psi_1 + \Psi_2) = 0 \quad (۱۴-۳)$$

و در نهایت از معادلات (۱۳-۳) و (۱۴-۳) به معادله‌ی دیفرانسیل زیر می‌رسیم

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{m + V_s} \frac{d}{dx} V_s(x) + (E - V_v)^2 - \left(\frac{m + V_s}{2} \right)^2 \right\} (\Psi_1 + \Psi_2) = 0 \quad (۱۵-۳)$$

برای پتانسیل اسکالر می‌توانیم آن را به فرم زیر در نظر بگیریم:

$$V_s(x) = c f(x)$$

که در آن c نیروی ضعیف اثر متقابل است و در مقایسه با جرم ذره مقدار عددی بسیار کوچکی

دارد.

در نتیجه می‌توان از تقریب زیر استفاده کرد [۱۱]:

$$\lim_{c \rightarrow 0} \frac{c}{m(1 + c f(x)/m)} \frac{d f(x)}{dx} \frac{d(\Psi_1 + \Psi_2)}{dx} \rightarrow 0 \quad (۱۶-۳)$$

پس معادله‌ی (۱۵-۳) به فرم زیر درمی‌آید:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + E^2 - \frac{m^2}{4} - 2EV_v - \frac{mV_s}{2} + \left(V_v^2 - \frac{V_s^2}{4} \right) \right] (\Psi_1 + \Psi_2) = 0 \quad (۱۷-۳)$$

از این پس برای راحتی محاسبات تعریف می‌کنیم:

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \text{ و } \varepsilon_n = E^2 - \frac{m^2}{4}$$

حال باید پتانسیل کاسپ را وارد کنیم.

طبق تعریف این پتانسیل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$V_v(x) = V_{0_v} \left[\theta(-x) \{e^{x/a}\} + \theta(x) \{e^{-x/a}\} \right] \quad (۱۸-۳)$$

$$V_s(x) = V_{0_s} \left[\theta(-x) \{e^{x/a}\} + \theta(x) \{e^{-x/a}\} \right] \quad (۱۹-۳)$$

برای بررسی این نوع پتانسیل آن را در دوناحیه در نظر می گیریم:

ابتدا برای حالت منفی ($x < 0$):

با قراردادن معادلات (۱۸-۳) و (۱۹-۳) در معادله ی (۱۷-۳) داریم:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon_n - 2EV_{0_v}(e^{x/a}) - \frac{mV_{0_s}e^{x/a}}{2} + \frac{V_{0_v}^2e^{2x/a}}{1} - \frac{V_{0_s}^2e^{2x/a}}{4} \right] \Psi = 0 \quad (۲۰-۳)$$

برای حل این معادله تغییر متغیر $y = Ae^{\frac{x}{a}}$ را تعریف می کنیم:

$$y = Ae^{\frac{x}{a}} \quad (۲۱-۳)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A}{a} e^{x/a} = \frac{A}{a} \cdot \frac{y}{A} = \frac{y}{a} \quad (۲۲-۳)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{a} \frac{d}{dy}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} = \frac{y}{a} \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{a} \frac{d}{dy} \right) = \frac{y^2}{a^2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{y}{a^2} \frac{d}{dy} \quad (۲۳-۳)$$

$$\left\{ \frac{y^2}{a^2} \frac{d^2}{dy^2} + \frac{y}{a^2} \frac{d}{dy} + \varepsilon_n - 2E \left(\frac{V_{0_v} y}{A} \right) - \frac{mV_{0_s} y}{2A} + \frac{V_{0_v}^2 y^2}{A^2} - \frac{V_{0_s}^2 y^2}{4A^2} \right\} \Psi = 0 \quad (۲۴-۳)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{\varepsilon_n a^2}{y^2} - 2E \left(\frac{V_{0_v} a^2}{Ay} \right) - \frac{mV_{0_s} a^2}{2Ay} + \frac{V_{0_v}^2 a^2}{A^2} - \frac{V_{0_s}^2 a^2}{4A^2} \right\} \Psi = 0 \quad (25-3)$$

در نتیجه داریم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d}{dy} + \frac{1}{y^2} \left(\varepsilon_n a^2 - \frac{4EV_{0_v} a^2 + mV_{0_s} a^2}{2A} y + \frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2) a^2}{4A^2} y^2 \right) \right\} \Psi = 0 \quad (26-3)$$

۲۶)

حال تابع موج را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi^L(y) = y^{-\frac{1}{2}} U^L(y) \quad (27-3)$$

$$\frac{d}{dy} \Psi^L(y) = -\frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} U^L(y) + y^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dU^L(y)}{dy} \quad (28-3)$$

$$\frac{d^2}{dy^2} \Psi^L(y) = \frac{3}{4} y^{-\frac{5}{2}} U^L(y) - \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^L(y)}{dy} - \frac{1}{2} y^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^L(y)}{dy} + y^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^2 U^L(y)}{dy^2}$$

$$= \frac{3}{4} y^{-\frac{5}{2}} U^L(y) - y^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^L(y)}{dy} + y^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^2 U^L(y)}{dy^2} \quad (29-3)$$

پس با استفاده از این معادلات و قرار دادن آن‌ها در معادله‌ی (۲۱-۳) به دست می‌آوریم:

$$y^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^2 U^L(y)}{dy^2} - y^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^L(y)}{dy} + \frac{3}{4} y^{-\frac{5}{2}} U^L(y) - \frac{1}{2} y^{-\frac{5}{2}} U^L(y) + y^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^L(y)}{dy}$$

$$+ \frac{1}{y^2} \left(\varepsilon_n a^2 - \frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s}) a^2}{2A} y + \frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2) a^2}{4A^2} y^2 \right) y^{-\frac{1}{2}} U^L(y) = 0 \quad (30-3)$$

بنابراین داریم:

$$\frac{d^2 U^L(y)}{dy^2} + \frac{1}{4y^2} U^L(y) + \left(\frac{\varepsilon_n a^2}{y^2} - \frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s}) a^2}{2A} \frac{1}{y} + \frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2) a^2}{4A^2} \right) U^L(y) = 0$$

$$\frac{d^2 U^L(y)}{dy^2} + \left(\frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2)a^2}{4A^2} - \frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s})a^2}{2A} \frac{1}{y} + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon_n a^2 \right) \frac{1}{y^2} \right) U^L(y) = 0 \quad (-3)$$

۳۱)

این معادله، یک معادله دیفرانسیل ویتکر (Whittaker differential equation) می باشد.

که جواب آن به صورت زیر است:

$$\Psi^L(x) = A_{in} y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) + A_{ref} y^{\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \quad (32-3)$$

در این رابطه A_{in} و A_{ref} ضریب تابع موج فرودی و بازتابش است.

با مقایسه با حالت کلی معادله دیفرانسیل ویتکر، ثابت های بالا به صورت زیر تعریف می شود:

$$\frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2)a^2}{4A^2} = -\frac{1}{4} \rightarrow A^2 = -a^2(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2) \quad (33-3)$$

$$\frac{1}{4} + \varepsilon_n a^2 = \frac{1}{4} - \mu^2 \rightarrow \mu = ia\sqrt{\varepsilon_n} \quad (34-3)$$

$$\mu = ia\sqrt{\varepsilon_n} \quad (35-3)$$

$$\kappa = -\frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s})a^2}{2A} \quad (36-3)$$

$$A = \sqrt{-a^2(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2)} \quad (37-3)$$

$M_{\kappa, \mu}(y)$ تابع ویتکر می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$M_{\kappa, \mu}(y) = e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{1}{2} + \mu} F\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; y\right) \quad (38-3)$$

و $F\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; y\right)$ نیز تابع فوق هندسی است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$F(-n; \mu; y) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)! m!} \frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+m)} y^m \quad (39-3)$$

برای مطالعه‌ی ضرایب عبور و بازتابش ابتدا باید رفتار تابع موج را در فواصل دور از مبدا بررسی کنیم.

در حالت $r \rightarrow -\infty$ داریم:

$$\Psi^L(x \rightarrow -\infty) = A_{in} (a\sqrt{V_{0s}^2 - 4V_{0v}^2})^\mu e^{x\mu/a} + A_{ref} (a\sqrt{V_{0s}^2 - 4V_{0v}^2})^{-\mu} e^{-x\mu/a} \quad (40-3)$$

حال برای ناحیه‌ی $x > 0$ ، معادله‌ی دی-کی-پی را با استفاده از پتانسیل کاسپ حل می‌کنیم:

باز هم با استفاده از معادلات (3-17)، (3-18) و (3-19) داریم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon_n - \left(2EV_{0v} + \frac{mV_{0s}}{2} \right) e^{-x/a} + \left(V_{0v}^2 - \frac{V_{0s}^2}{4} \right) e^{-2x/a} \right\} \Psi = 0 \quad (41-3)$$

و این بار تغییر متغیر $z = Ae^{-x/a}$ به ما می‌دهد:

$$z = Ae^{-x/a} \quad (42-3)$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{A}{a} e^{-x/a} = -\frac{A}{a} \cdot \frac{z}{A} = -\frac{z}{a} \quad (43-3)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dz} \frac{dz}{dx} = \frac{z}{a} \frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} = \frac{z}{a} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{a} \frac{d}{dz} \right) = \frac{z^2}{a^2} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{z}{a^2} \frac{d}{dz} \quad (44-3)$$

$$\left\{ \frac{z^2}{a^2} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{z}{a^2} \frac{d}{dz} + \varepsilon_n - 2E \left(\frac{V_{0v} z}{A} \right) - \frac{mV_{0s} z}{2A} + \frac{V_{0v}^2 z^2}{A^2} - \frac{V_{0s}^2 z^2}{4A^2} \right\} \Psi = 0 \quad (45-3)$$

۴۵)

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \frac{\varepsilon_n a^2}{z^2} - 2E \left(\frac{V_{0_v} a^2}{Az} \right) - \frac{mV_{0_s} a^2}{2Az} + \frac{V_{0_v}^2 a^2}{A^2} - \frac{V_{0_s}^2 a^2}{4A^2} \right\} \Psi = 0 \quad (-3)$$

۴۶)

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} + \frac{1}{z^2} (\varepsilon_n a^2 - \frac{4EV_{0_v} a^2 + mV_{0_s} a^2}{2A} z + \frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2) a^2}{4A^2} z^2) \right\} \Psi = 0 \quad (47-3)$$

با تعریف تابع موج به صورت $\Psi^R(z) = z^{-\frac{1}{2}} U^R(z)$ داریم:

$$\frac{d}{dz} \Psi^R(z) = -\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} U^R(z) + z^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{dU^R(z)}{dz} \quad (48-3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} \Psi^R(z) &= \frac{3}{4} z^{-\frac{5}{2}} U^R(z) - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^R(z)}{dz} - \frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^R(z)}{dz} + z^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^2 U^R(z)}{dz^2} \\ &= \frac{3}{4} z^{-\frac{5}{2}} U^R(z) - z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^R(z)}{dz} + z^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^2 U^R(z)}{dz^2} \end{aligned} \quad (49-3)$$

با جایگذاری در معادله (۴۷-۳) داریم:

$$\begin{aligned} & z^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d^2 U^R(z)}{dz^2} - z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^R(z)}{dz} + \frac{3}{4} z^{-\frac{5}{2}} U^R(z) - \frac{1}{2} z^{-\frac{5}{2}} U^R(z) + z^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{dU^R(z)}{dz} \\ & + \frac{1}{z^2} \left(\varepsilon_n a^2 - \frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s}) a^2}{2A} z + \frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2) a^2}{4A^2} z^2 \right) z^{-\frac{1}{2}} U^R(z) = 0 \end{aligned} \quad (50-3)$$

پس:

$$\frac{d^2 U^R(z)}{dz^2} + \frac{1}{4z^2} U^R(z) + \left(\frac{\varepsilon_n a^2}{z^2} - \frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s}) a^2}{2A} \frac{1}{z} + \frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2) a^2}{4A^2} \right) U^R(z) = 0 \quad (51-3)$$

$$\frac{d^2 U^R(z)}{dz^2} + \frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2)a^2}{4A^2} - \frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s})a^2}{2A} \frac{1}{z} U^R(z) + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon_n a^2\right) \frac{1}{z^2} U^R(z) = 0 \quad (52-3)$$

$$\frac{d^2 U^R(z)}{dz^2} + \left(\frac{(4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2)a^2}{4A^2} - \frac{(4EV_{0_v} + mV_{0_s})a^2}{2A} \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{4} + \varepsilon_n a^2\right) \frac{1}{z^2} \right) U^R(z) = 0 \quad (53-3)$$

که این معادله نیز معادله‌ی دیفرانسیل ویتکر می‌باشد و جواب آن را به صورت زیر داریم:

$$\Psi^R(z) = A_3 z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(z) + A_{trans} z^{\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \quad (54-3)$$

از آن جایی که همیشه فرض می‌کنیم موج از سمت چپ به راست حرکت می‌کند در معادله‌ی بالا $A_3 = 0$ را قرار می‌دهیم.

در نتیجه جواب تابع موج به صورت زیر می‌شود:

$$\Psi^R(z) = A_{trans} z^{\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \quad (55-3)$$

در این رابطه A_{trans} ضریب تابع موج عبوری است.

در این ناحیه نیز برای مطالعه‌ی ضرایب عبور و بازتابش ابتدا باید رفتار تابع موج را در فواصل

دور از مبدا بررسی کنیم که حد آن در این فواصل به صورت زیر است:

$$\Psi^R(x \rightarrow +\infty) = A_{trans} (a\sqrt{V_{0_s}^2 - 4V_{0_v}^2})^{-\mu} e^{x\mu/a} \quad (56-3)$$

بنابراین برای تابع موج می‌توان نوشت:

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_{trans} (a\sqrt{V_{0_s}^2 - 4V_{0_v}^2})^{-\mu} e^{x\mu/a}, & x \rightarrow +\infty \\ A_{in} (a\sqrt{V_{0_s}^2 - 4V_{0_v}^2})^{\mu} e^{x\mu/a} + A_{ref} (a\sqrt{V_{0_s}^2 - 4V_{0_v}^2})^{-\mu} e^{-x\mu/a}, & x \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (57-3)$$

حال به محاسبه‌ی ضرایب عبور و بازتابش می‌پردازیم.

برای حالت منفی می‌توانیم تابع موج را به صورت

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{in}^L + (\Psi_1 + \Psi_2)_{ref}^L = A_{in} S_1 + A_{ref} S_2$$

و برای حالت مثبت به صورت

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{trans}^R = A_{trans} S_3$$

بنویسیم که ثابت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S_1 = y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y), \quad S_2 = y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y), \quad S_3 = z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \quad (58-3)$$

حال به محاسبه‌ی چگالی جریان می‌پردازیم. می‌دانیم که در حالت کلی برای معادله‌ی دی-

کی - پی چگالی جریان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید [۱۲]:

$$J^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi \quad (59-3)$$

بنابراین چگالی جریان را برای موج فرودی، بازتابش و عبور محاسبه می‌کنیم:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (60-3)$$

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger (\gamma^0 \otimes \gamma^0) = \Psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (61-3)$$

$$J_{in}^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi = \Psi^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (62-3)$$

$$J_{in} = i \left[(\Psi_{1_{in}} + \Psi_{2_{in}})^* (\Psi_{0_{in}} + \Psi_{\tilde{0}_{in}}) - (\Psi_{0_{in}} + \Psi_{\tilde{0}_{in}})^* (\Psi_{1_{in}} + \Psi_{2_{in}}) \right] \quad (۶۳-۳)$$

$$J_{ref} = i \left[(\Psi_{1_{ref}} + \Psi_{2_{ref}})^* (\Psi_{0_{ref}} + \Psi_{\tilde{0}_{ref}}) - (\Psi_{0_{ref}} + \Psi_{\tilde{0}_{ref}})^* (\Psi_{1_{ref}} + \Psi_{2_{ref}}) \right] \quad (۶۴-۳)$$

$$J_{trans} = i \left[(\Psi_{1_{trans}} + \Psi_{2_{trans}})^* (\Psi_{0_{trans}} + \Psi_{\tilde{0}_{trans}}) - (\Psi_{0_{trans}} + \Psi_{\tilde{0}_{trans}})^* (\Psi_{1_{trans}} + \Psi_{2_{trans}}) \right] \quad (۶۵-۳)$$

9

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{in}^L = \Psi_+^L = A_{in} S_1 \quad (۶۶-۳)$$

که در این معادله ثابت S_1 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_1 = y^{\frac{1}{-2}} M_{\kappa, \mu}(y) \quad (۶۷-۳)$$

حال باید مولفه های تابع موج را بیابیم.

$$\Psi_{0_{in}} = \Psi_{\tilde{0}_{in}} = \left(\frac{-1}{m + V_s} \right) (\partial_1) (\Psi_{1_{in}} + \Psi_{2_{in}}) \rightarrow \Psi_{0_{in}} = \Psi_{\tilde{0}_{in}} = \frac{-1}{m + V_s} A_{in} \partial_1 S_1 \quad (۶۸-۳)$$

و در نتیجه:

$$\left[2(-iE + iV_v) + i(m + V_s) \right] \Psi_{1_{in}} + \left[i \frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2i}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2} \right] (\Psi_{1_{in}} + \Psi_{2_{in}}) = 0$$

$$\rightarrow \Psi_{1_{in}} = \frac{A_{in} \Lambda_1}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} \quad (۶۹-۳)$$

مولفه ی آخر تابع موج نیز به صورت مشابهی به دست می‌آید

$$\left[-2(-iE + iV_v) + i(m + V_s) \right] \Psi_{2_{in}} + \left[i \frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2i}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2} \right] (\Psi_{1_{in}} + \Psi_{2_{in}}) = 0$$

$$\rightarrow \Psi_{2_{in}} = \frac{A_{in} \Lambda_1}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \quad (70-3)$$

که در همه‌ی این معادلات داریم:

$$\Lambda_1 = - \left[\frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2} \right] S_1 \quad (71-3)$$

برای موج بازتابش نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم:

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{ref}^L = A_{ref} S_2 \quad (72-3)$$

که در این معادله ثابت S_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_2 = y^{\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \quad (73-3)$$

$$\Psi_{0_{ref}} = \Psi_{\tilde{0}_{ref}} = \left(\frac{-1}{m + V_s} \right) (\partial_1) (\Psi_{1_{ref}} + \Psi_{2_{ref}})$$

$$\rightarrow \Psi_{0_{ref}} = \Psi_{\tilde{0}_{ref}} = \frac{-1}{m + V_s} A_{ref} \partial_1 S_2 \quad (74-3)$$

و در نتیجه:

$$\rightarrow \Psi_{1_{ref}} = \frac{A_{ref} \Lambda_2}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} \quad (75-3)$$

$$\rightarrow \Psi_{2_{ref}} = \frac{A_{ref} \Lambda_2}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \quad (76-3)$$

که در همه‌ی این معادلات داریم:

$$\Lambda_2 = - \left[\frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2} \right] S_2 \quad (77-3)$$

برای موج عبور می توان نوشت:

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{trans}^R = \Psi_+^R = A_{trans} S_3 \quad (78-3)$$

که در این معادله ثابت S_3 به صورت زیر تعریف می شود:

$$S_3 = z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \quad (79-3)$$

$$\Psi_{0trans} = \Psi_{\dot{0}trans} = \left(\frac{-1}{m + V_s} \right) (\partial_1) (\Psi_{1trans} + \Psi_{2trans})$$

$$\rightarrow \Psi_{0trans} = \Psi_{\dot{0}trans} = \frac{-1}{m + V_s} A_{trans} \partial_1 S_3 \quad (80-3)$$

$$\rightarrow \Psi_{1trans} = \frac{A_{trans} \Lambda_3}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} \quad (81-3)$$

$$\rightarrow \Psi_{2trans} = \frac{A_{trans} \Lambda_3}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \quad (82-3)$$

که در همه ی این معادلات داریم:

$$\Lambda_3 = - \left[\frac{2 \frac{d}{dx} V_s}{(m + V_s)^2} \frac{d}{dx} + \frac{-2}{m + V_s} \frac{d^2}{dx^2} \right] S_3 \quad (83-3)$$

و نیز می دانیم که:

$$J_L = J_{in} + J_{ref} \quad (84-3)$$

$$J_R = J_{trans} \quad (۸۵-۳)$$

با توجه به تعریف ضرایب فرودی، بازتابش و عبور و همچنین معادلات بالا داریم:

$$R = \left| \frac{J_{ref}}{J_{in}} \right| \quad (۸۶-۳)$$

$$R = \left[\left(\frac{\Lambda_2}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} + \frac{\Lambda_2}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \right)^* \left(2 \frac{-1}{m + V_s} A_{ref} \partial_1 S_2 \right) - \left(2 \frac{-1}{m + V_s} A_{ref} \partial_1 S_2 \right)^* \left(\frac{\Lambda_2}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} + \frac{\Lambda_2}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \right) \right] / \left[\left(\frac{\Lambda_1}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} + \frac{\Lambda_1}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \right)^* \left(2 \frac{-1}{m + V_s} A_{in} \partial_1 S_1 \right) - \left(2 \frac{-1}{m + V_s} A_{in} \partial_1 S_1 \right)^* \left(\frac{\Lambda_1}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} + \frac{\Lambda_1}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \right) \right] \quad (۸۷-۳)$$

$$R = \left| \frac{J_{ref}}{J_{in}} \right| = \left\{ \frac{(A_{ref} S_2)^* \left(\frac{-2}{m + V_s} A_{ref} \frac{d}{dx} S_2 \right) - \left(\frac{-2}{m + V_s} A_{ref} \frac{d}{dx} S_2 \right)^* (A_{ref} S_2)}{[(A_{in} S_1)^* \left(\frac{-2}{m + V_s} A_{in} \frac{d}{dx} S_1 \right) - \left(\frac{-2}{m + V_s} A_{in} \frac{d}{dx} S_1 \right)^* (A_{ref} S_1)]} \right\} \quad (۸۸-۳)$$

$$R = \left| \frac{J_{ref}}{J_{in}} \right| = \left| \frac{A_{ref}}{A_{in}} \right|^2 \cdot \left\{ \frac{S_2^* \left(\frac{-2}{m + V_s} \right) \partial_1 S_2 + \left(\frac{2}{m + V_s} \right) \partial_1 S_2^*}{S_1^* \left(\frac{-2}{m + V_s} \right) \partial_1 S_1 + \left(\frac{2}{m + V_s} \right) \partial_1 S_1^*} \right\} \quad (۸۹-۳)$$

$$T = \left| \frac{J_{trans}}{J_{in}} \right| \quad (۹۰-۳)$$

$$T = \left[\left(\frac{\Lambda_3}{-2(E - V_v) + (m + V_s)} + \frac{\Lambda_3}{2(E - V_v) + (m + V_s)} \right)^* \left(2 \frac{-1}{m + V_s} A_{trans} \partial_1 S_3 \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
& -\left(2\frac{-1}{m+V_s}A_{trans}\partial_1 S_3\right)^*\left(\frac{\Lambda_3}{-2(E-V_v)+(m+V_s)}+\frac{\Lambda_3}{2(E-V_v)+(m+V_s)}\right)\Bigg] \\
& / \left[\left(\frac{\Lambda_1}{-2(E-V_v)+(m+V_s)}+\frac{\Lambda_1}{2(E-V_v)+(m+V_s)}\right)^*\left(2\frac{-1}{m+V_s}A_{in}\partial_1 S_1\right)\right. \\
& \left.-\left(2\frac{-1}{m+V_s}A_{in}\partial_1 S_1\right)^*\left(\frac{\Lambda_1}{-2(E-V_v)+(m+V_s)}+\frac{\Lambda_1}{2(E-V_v)+(m+V_s)}\right)\right] \quad (91-3)
\end{aligned}$$

$$T = \left|\frac{J_{trans}}{J_{in}}\right| = \left|\frac{A_{trans}}{A_{in}}\right|^2 \cdot \left\{ \frac{S_3^*\left(\frac{-2}{m+V_s}\right)\frac{d}{dx}S_3 + \left(\frac{2}{m+V_s}\right)\frac{d}{dx}S_3^*}{S_1^*\left(\frac{-2}{m+V_s}\right)\frac{d}{dx}S_1 + \left(\frac{2}{m+V_s}\right)\frac{d}{dx}S_1^*} \right\} \quad (92-3)$$

حال باید شرایط مرزی را اعمال کنیم که عبارتند از:

$$\begin{cases} \Psi_{in}(x=0) + \Psi_{ref}(x=0) = \Psi_{trans}(x=0) \\ \Psi'_{in}(x=0) + \Psi'_{ref}(x=0) = \Psi'_{trans}(x=0) \end{cases} \quad (93-3)$$

شرط اول:

$$\Psi_{in}(x=0) + \Psi_{ref}(x=0) = \Psi_{trans}(x=0) \quad (94-3)$$

$$A_{in}y^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(y) + A_{ref}y^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,-\mu}(y) = A_{trans}z^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,-\mu}(z)$$

$$A_{in}(Ae^{\alpha x})^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(Ae^{\alpha x}) + A_{ref}(Ae^{\alpha x})^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,-\mu}(Ae^{\alpha x}) = A_{trans}(Ae^{-\alpha x})^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,-\mu}(Ae^{-\alpha x})$$

$$x=0 \rightarrow A_{in}A^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(A) + A_{ref}A^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,-\mu}(A) = A_{trans}A^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,-\mu}(A)$$

$$\rightarrow A_{in}M_{\kappa,\mu}(A) + A_{ref}M_{\kappa,-\mu}(A) = A_{trans}M_{\kappa,-\mu}(A) \quad (95-3)$$

شرط دوم:

$$\Psi'_{in}(x=0) + \Psi'_{ref}(x=0) = \Psi'_{trans}(x=0) \quad (96-3)$$

$$A_{in} A^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-\alpha x}{2}} M_{\kappa, \mu}(A e^{\alpha x}) + A_{ref} A^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{-\alpha x}{2}} M_{\kappa, -\mu}(A e^{\alpha x}) = A_{trans} A^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{\alpha x}{2}} M_{\kappa, -\mu}(A e^{-\alpha x}) \quad (97-3)$$

پس از مشتق گیری داریم:

$$\begin{aligned} & -\frac{a}{2} A_{in} e^{\frac{-\alpha x}{2}} M_{\kappa, \mu}(A e^{\alpha x}) + A_{in} e^{\frac{-\alpha x}{2}} M'_{\kappa, \mu}(A e^{\alpha x}) - \frac{a}{2} A_{ref} e^{\frac{-\alpha x}{2}} M_{\kappa, -\mu}(A e^{\alpha x}) + A_{ref} e^{\frac{-\alpha x}{2}} M_{\kappa, -\mu}(A e^{\alpha x}) \\ & = \frac{a}{2} A_{trans} e^{\frac{\alpha x}{2}} M_{\kappa, -\mu}(A e^{-\alpha x}) + A_{trans} e^{\frac{\alpha x}{2}} M'_{\kappa, -\mu}(A e^{-\alpha x}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x = 0 \rightarrow & -\frac{a}{2} A_{in} M_{\kappa, \mu}(A) + A_{in} M'_{\kappa, \mu}(A) - \frac{a}{2} A_{ref} M_{\kappa, -\mu}(A) + A_{ref} M_{\kappa, -\mu}(A) \\ & = \frac{a}{2} A_{trans} M_{\kappa, -\mu}(A) + A_{trans} M'_{\kappa, -\mu}(A) \end{aligned} \quad (-3)$$

۹۸)

در نهایت می توانیم به صورت خلاصه بنویسیم:

$$\begin{cases} A_{in} M_{\kappa, \mu}(A) + A_{ref} M_{\kappa, -\mu}(A) = A_{trans} M_{\kappa, -\mu}(A) \\ -\frac{a}{2} A_{in} M_{\kappa, \mu}(A) + A_{in} M'_{\kappa, \mu}(A) - \frac{a}{2} A_{ref} M_{\kappa, -\mu}(A) + A_{ref} M_{\kappa, -\mu}(A) \\ = \frac{a}{2} A_{trans} M_{\kappa, -\mu}(A) + A_{trans} M'_{\kappa, -\mu}(A) \end{cases} \quad (99-3)$$

با استفاده از معادلات (۹۹-۳) نسبت ضرایب به دست می آید که عبارتند از:

$$\frac{A_{ref}}{A_{in}} = \frac{1}{a M_{\kappa, -\mu}(A)} \left\{ -a M_{\kappa, \mu}(A) + M'_{\kappa, \mu}(A) - \frac{M_{\kappa, \mu}(A) M'_{\kappa, -\mu}(A)}{M_{\kappa, -\mu}(A)} \right\} \quad (100-3)$$

$$\frac{A_{trans}}{A_{in}} = \frac{1}{a M_{\kappa, -\mu}(A)} \left\{ M'_{\kappa, \mu}(A) - \frac{M_{\kappa, \mu}(A) M'_{\kappa, -\mu}(A)}{M_{\kappa, -\mu}(A)} \right\} \quad (101-3)$$

با قرار دادن این نسبت ها در معادله ی (۸۹-۳) و (۹۲-۳) ، ضرایب بازتابش و عبور به دست

خواهند آمد.

۳-۲: حل معادله‌ی دی - کی - پی به ازای پتانسیل وودز - ساکسون

پتانسیل وودز - ساکسون^۷ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_v(x) = V_{0_v} \left[\frac{\theta(-x)}{q + pe^{-a(x+L)}} + \frac{\theta(x)}{\tilde{q} + \tilde{p}e^{-b(x+\tilde{L})}} \right] \quad (۱۰۲-۳)$$

$$V_s(x) = V_{0_s} \left[\frac{\theta(-x)}{q + pe^{-a(x+L)}} + \frac{\theta(x)}{\tilde{q} + \tilde{p}e^{-b(x+\tilde{L})}} \right] \quad (۱۰۳-۳)$$

حل این معادله را نیز باید برای دو ناحیه‌ی مثبت و منفی بررسی می‌کنیم

برای حالت منفی: $x < 0$

با قرار دادن معادلات (۱۰۲-۳) و (۱۰۳-۳) در معادله‌ی (۱۷-۳) داریم:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon_n - 2E \frac{V_{0_v}}{q + pe^{-a(x+L)}} - \frac{mV_{0_s}}{2(q + pe^{-a(x+L)})} + \frac{V_{0_v}^2}{[q + pe^{-a(x+L)}]^2} - \frac{V_{0_s}^2}{4[q + pe^{-a(x+L)}]^2} \right] \Psi_+^L = 0 \quad (۱۰۴-۳)$$

این بار تغییر متغیر را به صورت $y = -\frac{q}{p}e^{a(x+L)}$ در نظر می‌گیریم:

$$y = -\frac{q}{p}e^{a(x+L)} \quad (۱۰۵-۳)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{aq}{p}e^{a(x+L)} \quad (۱۰۶-۳)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{d}{dy} = -\frac{aq}{p}e^{a(x+L)} \cdot \frac{d}{dy} = ay \frac{d}{dy} \quad (۱۰۷-۳)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} = ay \frac{d}{dy} \left(ay \frac{d}{dy} \right) = a^2 y^2 \frac{d^2}{dy^2} + a^2 y \frac{d}{dy} \quad (۱۰۸-۳)$$

⁷ Woods-Saxon

معادله‌ی (۳-۱۰۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\left[a^2 y^2 \frac{d^2}{dy^2} + a^2 y \frac{d}{dy} + \varepsilon_n - 2E \frac{V_{0_v}}{q \left(1 - \frac{1}{y}\right)} - \frac{mV_{0_s}}{2q \left(1 - \frac{1}{y}\right)} + \frac{V_{0_v}^2}{q^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2} - \frac{V_{0_s}^2}{4q^2 \left(1 - \frac{1}{y}\right)^2} \right] \Psi = 0 \quad (۳-۱۰۹)$$

$$\left[a^2 y^2 \frac{d^2}{dy^2} + a^2 y \frac{d}{dy} + \varepsilon_n + 2E \frac{V_{0_v} y}{q(1-y)} + \frac{mV_{0_s} y}{2q(1-y)} + \frac{V_{0_v}^2 y^2}{q^2 (1-y)^2} - \frac{V_{0_s}^2 y^2}{4q^2 (1-y)^2} \right] \Psi = 0$$

$$\left[y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + (1-y) \frac{d}{dy} + \frac{1}{y(1-y)} \{k_L y^2 + g_L y + f_L\} \right] \Psi_+^L = 0 \quad (۳-۱۱۰)$$

که در آن:

$$k_L = \frac{4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2}{4a^2 q^2} + \frac{\varepsilon_n}{a^2} - \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2a^2 q} \quad (۳-۱۱۱)$$

$$g_L = \frac{-2\varepsilon_n}{a^2} + \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2a^2 q} \quad (۳-۱۱۲)$$

$$f_L = \frac{\varepsilon_n}{a^2} \quad (۳-۱۱۳)$$

برای حل این معادله تابع موج را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Psi_+^L = y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) \quad (۳-۱۱۴)$$

پس

$$\frac{d\Psi_+^L}{dy} = \mu_L y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L-1} \Psi_L(y) + y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \frac{d\Psi_L(y)}{dy}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Psi_L}{dy^2} = & \mu_L (\mu_L - 1) y^{\mu_L - 2} (1 - y)^{\nu_L} \Psi_L(y) - \mu_L \nu_L y^{\mu_L - 1} (1 - y)^{\nu_L - 1} \Psi_L(y) + \mu_L y^{\mu_L - 1} (1 - y)^{\nu_L} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} \\ & - \mu_L \nu_L y^{\mu_L - 1} (1 - y)^{\nu_L - 1} \Psi_L(y) + \nu_L (\nu_L - 1) y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L - 2} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L - 1} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} \\ & + \mu_L y^{\mu_L - 1} (1 - y)^{\nu_L} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} - \nu_L y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L - 1} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} + y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L} \frac{d^2 \Psi_L(y)}{dy^2} \quad (115-3) \end{aligned}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱۱۵-۳) در معادله‌ی (۱۱۰-۳) داریم:

$$\begin{aligned} & \left[\mu_L (\mu_L - 1) y^{\mu_L - 1} (1 - y)^{\nu_L + 1} \Psi_L(y) - \mu_L \nu_L y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L} \Psi_L(y) + \mu_L y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L + 1} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} \right. \\ & \left. - \mu_L \nu_L y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L} \Psi_L(y) + \nu_L (\nu_L - 1) y^{\mu_L + 1} (1 - y)^{\nu_L - 1} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L + 1} (1 - y)^{\nu_L} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} \right. \\ & \left. + \mu_L y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L + 1} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} - \nu_L y^{\mu_L + 1} (1 - y)^{\nu_L} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} + y^{\mu_L + 1} (1 - y)^{\nu_L + 1} \frac{d^2 \Psi_L(y)}{dy^2} \right] \\ & + \left[\mu_L y^{\mu_L - 1} (1 - y)^{\nu_L + 1} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L} \Psi_L(y) + y^{\mu_L} (1 - y)^{\nu_L + 1} \frac{d \Psi_L(y)}{dy} \right] \\ & + (k_L y^2 + g_L y + f_L) (y^{\mu_L - 1} (1 - y)^{\nu_L - 1} \Psi_L(y)) = 0 \quad (116-3) \end{aligned}$$

پس از ساده سازی داریم:

$$\begin{aligned} & y(1 - y) \frac{d^2 \Psi_L(y)}{dy^2} + (1 + 2\mu_L - (2\mu_L + 2\nu_L + 1)y) \frac{d \Psi_L(y)}{dy} \\ & + [\mu_L (\mu_L - 1) y^{-1} (1 - y) - 2\mu_L \nu_L + \nu_L (\nu_L - 1) y (1 - y)^{-1} \\ & + \mu_L y^{-1} (1 - y) - \nu_L + k_L y (1 - y)^{-1} + g_L (1 - y)^{-1} + f_L y (1 - y)^{-1}] \Psi_L(y) = 0 \quad (117-3) \\ & y(1 - y) \frac{d^2 \Psi_L(y)}{dy^2} + (1 + 2\mu_L - (2\mu_L - 2\nu_L + 1)y) \frac{d \Psi_L(y)}{dy} \\ & + \frac{1}{y(1 - y)} \{ (\mu_L^2 + 2\mu_L \nu_L + \nu_L^2 + k_L) y^2 + (-2\mu_L^2 - 2\mu_L \nu_L - \nu_L + g_L) y + (\mu_L^2 + f_L) \} \Psi_L(y) = 0 \quad (118-3) \end{aligned}$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی بالا با معادله‌ی فوق هندسی در می‌یابیم که باید شروط زیر را داشته باشیم تا معادله جواب داشته باشد:

$$\mu_L^2 + f_L = 0 \rightarrow \mu_L = i\sqrt{f_L} \quad (۱۱۹-۳)$$

و

$$\mu_L^2 + 2\mu_L \nu_L + \nu_L^2 + k_L = -(-2\mu_L^2 - 2\mu_L \nu_L - \nu_L + g_L)$$

در نتیجه:

$$\nu_L (\nu_L - 1) = -(f_L + k_L + g_L) \rightarrow \nu_L = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(f_L + k_L + g_L)}}{2} \quad (۱۲۰-۳)$$

معادله‌ی (۱۱۸-۳) معادله‌ی شناخته شده‌ی فوق هندسی است که جواب آن را می‌دانیم که به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \Psi_+^L = & A_{in} y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) \\ & + A_{ref} y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \end{aligned} \quad (۱۲۱-۳)$$

حال مسئله را برای ناحیه $x > 0$ بررسی می‌کنیم.

با جایگذاری معادله‌ی (۱۰۲-۳) و (۱۰۳-۳) در معادله‌ی (۱۷-۳) داریم:

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon_n - 2E \frac{V_{0_v}}{\tilde{q} + \tilde{p}e^{-b(x+\tilde{L})}} - \frac{mV_{0_s}}{2(\tilde{q} + \tilde{p}e^{-b(x+\tilde{L})})} + \frac{V_{0_v}^2}{[\tilde{q} + \tilde{p}e^{-b(x+\tilde{L})}]^2} - \frac{V_{0_s}^2}{4[\tilde{q} + \tilde{p}e^{-b(x+\tilde{L})}]^2} \right] \Psi = 0 \quad (۱۲۲-۳)$$

این بار تغییر متغیر $z = -\frac{\tilde{q}}{\tilde{p}}e^{a(x+\tilde{L})}$ را استفاده می‌کنیم که معادله‌ی بالا تبدیل می‌شود به:

$$\frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{d}{dz} = -\frac{a\tilde{q}}{\tilde{p}} e^{a(x+\tilde{L})} \cdot \frac{d}{dz} = az \frac{d}{dz} \quad (۱۲۳-۳)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} = az \frac{d}{dz} \left(az \frac{d}{dz} \right) = a^2 z^2 \frac{d^2}{dz^2} + a^2 z \frac{d}{dz} \quad (۱۲۴-۳)$$

$$\left[a^2 z^2 \frac{d^2}{dz^2} + a^2 z \frac{d}{dz} + \varepsilon_n - 2E \frac{V_{0_v}}{\tilde{q} \left(1 - \frac{1}{z}\right)} - \frac{mV_{0_s}}{2\tilde{q} \left(1 - \frac{1}{z}\right)} + \frac{V_{0_v}^2}{\tilde{q}^2 \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} - \frac{V_{0_s}^2}{4\tilde{q}^2 \left(1 - \frac{1}{z}\right)^2} \right] \Psi = 0 \quad (۱۲۵-۳)$$

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-z) \frac{d}{dz} + \frac{\varepsilon_n(1-z)}{a^2 z} + 2E \frac{V_{0_v}}{a^2 \tilde{q}} + \frac{mV_{0_s}}{2\tilde{q}a^2} + \frac{V_{0_v}^2}{a^2 \tilde{q}^2} \frac{z}{(1-z)} - \frac{V_{0_s}^2}{4a^2 \tilde{q}^2} \frac{z}{(1-z)} \right] \Psi = 0 \quad (۱۲۶-۳)$$

$$\left[z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-z) \frac{d}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} \{k_R z^2 + g_R z + f_R\} \right] \Psi = 0 \quad (۱۲۷-۳)$$

که در آن ثابت ها همان ثابت های قبلی هستند و عبارتند از:

$$k_R = \frac{4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2}{4a^2 \tilde{q}^2} + \frac{\varepsilon_n}{a^2} - \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2a^2 \tilde{q}} \quad (۱۲۸-۳)$$

$$g_R = \frac{-2\varepsilon_n}{a^2} + \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2a^2 \tilde{q}} \quad (۱۲۹-۳)$$

$$f_R = \frac{\varepsilon_n}{a^2} \quad (۱۳۰-۳)$$

برای حل این معادله باید تابع موج را به صورت $\Psi_+^R = z^{\mu_R} (1-z)^{\nu_R} \Psi_R(z)$ در نظر گرفت.

$$z(1-z) \frac{d^2 \Psi_R(z)}{dz^2} + \left(1 + 2\mu_R - (2\mu_R - 2\nu_R + 1)z\right) \frac{d \Psi_R(z)}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} \left\{ (\mu_R^2 + 2\mu_R \nu_R + \nu_R^2 + k_R) z^2 + (-2\mu_R^2 - 2\mu_R \nu_R - \nu_R + g_R) z + (\mu_R^2 + f_R) \right\} \Psi_R(z) = 0 \quad (۱۳۱-۳)$$

حال با مقایسه با معادله‌ی دیفرانسیل فوق هندسی مانند قبل داریم:

$$\mu_R = i\sqrt{f_R} \quad (۱۳۲-۳)$$

۹

$$\nu_R(\nu_R - 1) = -(f_R + k_R + g_R) \quad (۱۳۳-۳)$$

در نتیجه جواب معادله‌ی (۳-۳۵) به صورت زیر است:

$$\Psi_+^R = A_{trans} z^{-\mu_R} (1-Z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1 - 2\mu_R; z) \quad (۱۳۴-۳)$$

حال برای بررسی شرایط مرزی رفتار تابع موج را در محدوده‌ی بی نهایت در نظر می‌گیریم. و نیز به پراکندگی بوزون‌هایی توجه می‌کنیم که از سمت چپ می‌آیند. می‌دانیم که Ψ_+^L توصیف کننده‌ی موجی است که از سمت چپ به سمت راست می‌آید و بازتابش آن به سمت چپ بر می‌گردد برای این تابع موج داریم:

$$x \rightarrow -\infty (y \rightarrow 0), (1-y)^{\nu_L} \rightarrow 1, {}_2F_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, 0) = 1$$

و همچنین Ψ_+^R بیانگر موج عبور است که برای آن داریم:

$$x \rightarrow +\infty (z \rightarrow 0), (1-z)^{\nu_R} \rightarrow 1$$

با این اوصاف می‌توانیم رفتار تابع موج در بی نهایت را به صورت زیر بنویسیم:

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_{in} q^{\mu_L} e^{\alpha\mu_L x} + A_{ref} q^{-\mu_L} e^{-\alpha\mu_L x}, & x \rightarrow -\infty \\ A_{trans} \tilde{q}^{-\mu_R} e^{\alpha\mu_R x}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

محاسبه‌ی ضریب بازتابش و عبور

برای حالت $x < 0$ می‌توان نوشت:

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{in}^L + (\Psi_1 + \Psi_2)_{ref}^L = A_{in} S_1 + A_{ref} S_2$$

و برای حالت مثبت نیز داریم:

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{trans}^R = A_{trans} S_3$$

که در آن ثابت ها به صورت زیر تعریف می گردند:

$$S_1 = y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) \quad (۱۳۵-۳)$$

$$S_2 = y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \quad (۱۳۶-۳)$$

$$S_3 = z^{-\mu_R} (1-z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1-2\mu_R; z) \quad (۱۳۷-۳)$$

همانطور که دیدیم چگالی جریان از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$J^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi$$

همانند گذشته طرف راست و طرف چپ را مشخص می‌کنیم:

$$J_L = J_{in} + J_{ref}$$

$$J_R = J_{trans}$$

و ضرایب عبور و بازتابش از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$R = \left| \frac{J_{ref}}{J_{in}} \right| = \left| \frac{A_{ref}}{A_{in}} \right|^2 \cdot \left\{ \frac{S_2^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_2 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_2^*}{S_1^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1^*} \right\} \quad (۱۳۸-۳)$$

$$T = \left| \frac{J_{trans}}{J_{in}} \right| = \left| \frac{A_{trans}}{A_{in}} \right|^2 \cdot \left\{ \frac{S_3^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_3 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_3^*}{S_1^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1^*} \right\} \quad (۱۳۹-۳)$$

حال شرایط مرزی زیر را اعمال کنیم:

$$\begin{cases} \Psi_{in}(x=0) + \Psi_{ref}(x=0) = \Psi_{trans}(x=0) \\ \Psi'_{in}(x=0) + \Psi'_{ref}(x=0) = \Psi'_{trans}(x=0) \end{cases}$$

و لذا داریم:

$$\begin{aligned} & A_{in} y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) \\ & + A_{ref} y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \\ & = A_{trans} z^{-\mu_R} (1-Z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1-2\mu_R; z) \end{aligned} \quad (۱۴۰-۳)$$

9

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ A_{in} y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) \right. \\ & \left. + A_{ref} y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \right\} \\ & = \frac{d}{dx} \left\{ A_{trans} z^{-\mu_R} (1-Z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1-2\mu_R; z) \right\} \end{aligned} \quad (۱۴۱-۳)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{A_{ref.}}{A_{in.}} = \frac{\left(S_3 \frac{d}{dx} S_1 - S_1 \right)}{\left(S_3 \frac{d}{dx} S_2 + S_2 \frac{d}{dx} S_3 \right)} \quad (۱۴۲-۳)$$

$$\frac{A_{trans.}}{A_{in.}} = \frac{\left(S_2 \frac{d}{dx} S_1 - S_1 \frac{d}{dx} S_2 \right)}{\left(S_2 \frac{d}{dx} S_3 - S_3 \right)} \quad (۱۴۳-۳)$$

با قرار دادن این عبارات در معادله‌ی مربوط به ضرایب بازتابش و عبور، این ضرایب به دست

می‌آیند.

۳-۳: حل معادله‌ی دی-کی-پی به ازای پتانسیل هولسن تعمیم یافته

پتانسیل هولسن تعمیم یافته به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_v = V_{0_v} \left[\theta(-x) \left\{ \frac{e^{\alpha x}}{1 - qe^{\alpha x}} \right\} + \theta(x) \left\{ \frac{e^{-\alpha x}}{1 - \tilde{q}e^{-\alpha x}} \right\} \right] \quad (۱۴۵-۳)$$

$$V_s = V_{0_s} \left[\theta(-x) \left\{ \frac{e^{\alpha x}}{1 - qe^{\alpha x}} \right\} + \theta(x) \left\{ \frac{e^{-\alpha x}}{1 - \tilde{q}e^{-\alpha x}} \right\} \right] \quad (۱۴۶-۳)$$

که در آن q و $\tilde{q}$ پارامترهای تغییر یافته هستند ($q < 1, \tilde{q} < 1$)

هدف ما حل کردن معادله‌ی دی-کی-پی برای پتانسیل هولسن تعمیم یافته است.

ابتدا برای قسمت $x < 0$:

با جایگذاری روابط معادلات (۱۴۵-۳) و (۱۴۶-۳) در معادله‌ی (۱۷-۳) به دست می‌آید:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon_n - 2E \left(\frac{V_{0_v} e^{\alpha x}}{1 - qe^{\alpha x}} \right) - \frac{mV_{0_s} e^{\alpha x}}{2(1 - qe^{\alpha x})} + \frac{V_{0_v}^2 e^{2\alpha x}}{(1 - qe^{\alpha x})^2} - \frac{V_{0_s}^2 e^{2\alpha x}}{4(1 - qe^{\alpha x})^2} \right\} \Psi = 0 \quad (۱۴۷-۳)$$

تغییر متغیر $y = qe^{\alpha x}$ را اعمال می‌کنیم.

$$y = qe^{\alpha x} \quad (۱۴۸-۳)$$

$$\frac{dy}{dx} = \alpha qe^{\alpha x} = \alpha y \quad (۱۴۹-۳)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} = \alpha y \frac{d}{dy}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} = \alpha y \frac{d}{dy} (\alpha y \frac{d}{dy}) = \alpha^2 y^2 \frac{d^2}{dy^2} + \alpha^2 y \frac{d}{dy} \quad (۱۵۰-۳)$$

با جایگذاری در معادله ی (۱۴۷-۳) داریم:

$$\left\{ \alpha^2 y^2 \frac{d^2}{dy^2} + \alpha^2 y \frac{d}{dy} + \varepsilon_n - 2E \left(\frac{V_{0_v} y}{q(1-y)} \right) - \frac{mV_{0_s} y}{2q(1-y)} + \frac{V_{0_v}^2 y^2}{q^2(1-y)^2} - \frac{V_{0_s}^2 y^2}{4q^2(1-y)^2} \right\} \Psi = 0 \quad (151-3)$$

$$\left\{ y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + (1-y) \frac{d}{dy} + \frac{\varepsilon_n}{\alpha^2} \frac{1-y}{y} - \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2\alpha^2 q} + \frac{4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2}{4\alpha^2 q^2} \frac{y}{1-y} \right\} \Psi = 0 \quad (152-3)$$

$$\left\{ y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + (1-y) \frac{d}{dy} + \frac{1}{y(1-y)} \left[\frac{\varepsilon_n}{\alpha^2} (1-y)^2 - \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2\alpha^2 q} y(1-y) + \frac{4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2}{4\alpha^2 q^2} y^2 \right] \right\} \Psi = 0 \quad (153-3)$$

نتیجه می شود:

$$\left\{ y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + (1-y) \frac{d}{dy} + \frac{1}{y(1-y)} [k_L y^2 + g_L y + f_L] \right\} \Psi = 0 \quad (154-3)$$

که در آن

$$k_L = \frac{4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2}{4\alpha^2 q^2} + \frac{\varepsilon_n}{\alpha^2} + \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2\alpha^2 q} \quad (155-3)$$

$$g_L = \frac{-2\varepsilon_n}{\alpha^2} - \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2\alpha^2 q} \quad (156-3)$$

$$f_L = \frac{\varepsilon_n}{\alpha^2} \quad (157-3)$$

برای حل این معادله تابع موج را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\Psi_+^L = y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) \quad (158-3)$$

با قرار دادن تابع موجی که بصورت بالا تعریف شده است در معادله ی اصلی به دست می آوریم:

$$\frac{d\Psi_+^L}{dy} = \mu_L y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L-1} \Psi_L(y) + y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} \quad (۱۵۹-۳)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Psi_+^L}{dy^2} &= \mu_L (\mu_L - 1) y^{\mu_L-2} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) - \mu_L \nu_L y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L-1} \Psi_L(y) + \mu_L y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} \\ &- \mu_L \nu_L y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L-1} \Psi_L(y) + \nu_L (\nu_L - 1) y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L-2} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L-1} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} \\ &+ \mu_L y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} - \nu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L-1} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} + y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \frac{d^2\Psi_L(y)}{dy^2} \end{aligned} \quad (۱۶۰-۳)$$

مقادیر مشتق ها را در معادله قرار می دهیم:

$$\begin{aligned} &\left\{ \mu_L (\mu_L - 1) y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L+1} \Psi_L(y) - \mu_L \nu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) + \mu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L+1} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} \right. \\ &- \mu_L \nu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) + \nu_L (\nu_L - 1) y^{\mu_L+1} (1-y)^{\nu_L-1} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L+1} (1-y)^{\nu_L} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} \\ &+ \mu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L+1} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} - \nu_L y^{\mu_L+1} (1-y)^{\nu_L} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} + y^{\mu_L+1} (1-y)^{\nu_L+1} \frac{d^2\Psi_L(y)}{dy^2} \\ &\left. + \left[\mu_L y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L+1} \Psi_L(y) - \nu_L y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} \Psi_L(y) + y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L+1} \frac{d\Psi_L(y)}{dy} \right] \right\} \\ &+ (k_L y^2 + g_L y + f_L) (y^{\mu_L-1} (1-y)^{\nu_L-1} \Psi_L(y)) = 0 \end{aligned} \quad (۱۶۱-۳)$$

پس از ساده سازی عبارت بالا، معادله ی (۱۶۱-۳) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} &y(1-y) \frac{d^2\Psi_L(y)}{dy^2} + (1+2\mu_L - (2\mu_L + 2\nu_L + 1)y) \frac{d\Psi_L(y)}{dy} \\ &+ [\mu_L (\mu_L - 1) y^{-1} (1-y) - 2\mu_L \nu_L + \nu_L (\nu_L - 1) y (1-y)^{-1} \\ &+ \mu_L y^{-1} (1-y) - \nu_L + k_L y (1-y)^{-1} + g_L (1-y)^{-1} + f_L y (1-y)^{-1}] \Psi_L(y) = 0 \end{aligned} \quad (۱۶۲-۳)$$

بنابراین معادله‌ی ما تبدیل می‌شود به یک معادله‌ی شبه فوق هندسی به صورت زیر:

$$y(1-y) \frac{d^2 \Psi_L(y)}{dy^2} + (1+2\mu_L - (2\mu_L - 2\nu_L + 1)y) \frac{d \Psi_L(y)}{dy} + \frac{1}{y(1-y)} \{ (\mu_L^2 + 2\mu_L \nu_L + \nu_L^2 + k_L) y^2 + (-2\mu_L^2 - 2\mu_L \nu_L - \nu_L + g_L) y + (\mu_L^2 + f_L) \} \Psi_L(y) = 0 \quad (3-163)$$

حال با مقایسه‌ی این معادله با معادله دیفرانسیل فوق هندسی ضرایب این معادله به صورت زیر

به دست می‌آید:

$$\mu_L^2 + f_L = 0 \rightarrow \mu_L = i \sqrt{f_L} \quad (3-164)$$

و همچنین:

$$\mu_L^2 + 2\mu_L \nu_L + \nu_L^2 + k_L = -(-2\mu_L^2 - 2\mu_L \nu_L - \nu_L + g_L)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\nu_L = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(f_L + k_L + g_L)}}{2} \quad (3-165)$$

معادله‌ی (3-163) یک معادله دیفرانسیل فوق هندسی است که جواب‌های آن را می‌دانیم.

جواب‌های این معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Psi_+^L = A_{in} y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) + A_{ref} y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \quad (3-166)$$

حال محاسباتمان را برای قسمت مثبت ($x > 0$) انجام می‌دهیم.

مانند قسمت منفی عمل می‌کنیم یعنی معادلات (3-145) و (3-146) را در معادله‌ی (3-17)

قرار می‌دهیم که به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \varepsilon_n - 2E \left(\frac{V_{0_v} e^{-\alpha x}}{1 - \tilde{q} e^{-\alpha x}} \right) - \frac{m V_{0_s} e^{-\alpha x}}{2(1 - \tilde{q} e^{-\alpha x})} + \frac{V_{0_v}^2 e^{-2\alpha x}}{(1 - \tilde{q} e^{-\alpha x})^2} - \frac{V_{0_s}^2 e^{-2\alpha x}}{4(1 - \tilde{q} e^{-\alpha x})^2} \right\} \Psi = 0 \quad (۱۶۷-۳)$$

با تغییر متغیر $z = \tilde{q} e^{-\alpha x}$ و سپس مشتق گرفتن از آن به دست می‌آید:

$$z = \tilde{q} e^{-\alpha x} \quad (۱۶۸-۳)$$

$$\frac{dz}{dx} = -\alpha \tilde{q} e^{-\alpha x} = -\alpha z \quad (۱۶۹-۳)$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{dz}{dx} \frac{d}{dz} = -\alpha z \frac{d}{dz}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx} \cdot \frac{d}{dx} = -\alpha z \frac{d}{dz} \left(-\alpha z \frac{d}{dz} \right) = \alpha^2 z^2 \frac{d^2}{dz^2} + \alpha^2 z \frac{d}{dz} \quad (۱۷۰-۳)$$

با جایگذاری در معادله‌ی (۱۶۷-۳) به دست می‌آوریم:

$$\left[\alpha^2 z^2 \frac{d^2}{dz^2} + \alpha^2 z \frac{d}{dz} + \varepsilon_n - 2E \left(\frac{V_{0_v} z}{\tilde{q}(1-z)} \right) - \frac{m V_{0_s} z}{2\tilde{q}(1-z)} + \frac{V_{0_v}^2 z^2}{\tilde{q}^2(1-z)^2} - \frac{V_{0_s}^2 z^2}{4\tilde{q}^2(1-z)^2} \right] \Psi = 0$$

$$\left\{ z(1-z) \frac{d^2}{dz^2} + (1-z) \frac{d}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} [k_R z^2 + g_R z + f_R] \right\} \Psi = 0 \quad (۱۷۱-۳)$$

که در آن:

$$k_R = \frac{4V_{0_v}^2 - V_{0_s}^2}{4\alpha^2 \tilde{q}^2} + \frac{\varepsilon_n}{\alpha^2} + \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2\alpha^2 \tilde{q}} \quad (۱۷۲-۳)$$

$$g_R = \frac{-2\varepsilon_n}{\alpha^2} - \frac{4EV_{0_v} + mV_{0_s}}{2\alpha^2 \tilde{q}} \quad (۱۷۳-۳)$$

$$f_R = \frac{\varepsilon_n}{\alpha^2} \quad (۱۷۴-۳)$$

حال با تعریف تابع موج به صورت $\Psi_+^R = z^{\mu_R} (1-z)^{\nu_R} \Psi_R(z)$ و سپس دو بار مشتق گرفتن از

آن و ساده‌سازی و در نهایت با قرار دادن آن در معادله‌ی اصلی به دست می‌آوریم:

$$z(1-z) \frac{d^2 \Psi_R(z)}{dz^2} + (1+2\mu_R - (2\mu_R - 2\nu_R + 1)z) \frac{d \Psi_R(z)}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} \left\{ (\mu_R^2 + 2\mu_R \nu_R + \nu_R^2 + k_R) z^2 + (-2\mu_R^2 - 2\mu_R \nu_R - \nu_R + g_R) z + (\mu_R^2 + f_R) \right\} \Psi_R(z) = 0$$

(۱۷۵-۳)

و حال با مقایسه‌ی این معادله با معادله دیفرانسیل فوق هندسی ثابت‌ها به دست می‌آیند که عبارتند از:

$$\mu_R = i \sqrt{f_R} \quad (۱۷۶-۳)$$

و

$$\nu_R(\nu_R - 1) = -(f_R + k_R + g_R) \quad (۱۷۷-۳)$$

در نهایت تابع موج به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Psi_+^R = A_{trans} z^{-\mu_R} (1-Z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1-2\mu_R; Z) \quad (۱۷۸-۳)$$

رفتار حدی تابع موج در بی‌نهایت‌ها بسیار مهم است. در واقع توجه ما با استفاده از رفتار تابع

موج‌ها در بی‌نهایت به سمت شرایط مرزی معطوف می‌شود. همانطور که می‌دانیم Ψ_+^L توصیف کننده‌ی موجی است که از سمت چپ می‌آید و به سمت راست می‌رود و در این حین ممکن است بازتابش نیز داشته باشد. برای این تابع موج داریم:

$$x \rightarrow -\infty (y \rightarrow 0), (1-y)^{\nu_L} \rightarrow 1, {}_2F_1(\eta_1, \eta_2, \eta_3, 0) = 1$$

و همچنین Ψ_+^L موجی است که به عنوان موج عبور شناخته می‌شود و به سمت راست می‌رود

برای این موج نیز داریم:

$$x \rightarrow +\infty (z \rightarrow 0), (1-z)^{\nu_R} \rightarrow 1$$

حال با توجه به این توضیحات می‌توان نوشت:

$$\Psi(x) = \begin{cases} A_{in} q^{\mu_L} e^{\alpha \mu_L x} + A_{ref} q^{-\mu_L} e^{-\alpha \mu_L x}, & x \rightarrow -\infty \\ A_{trans} \tilde{q}^{-\mu_R} e^{\alpha \mu_R x}, & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

محاسبه‌ی ضرایب عبور و بازتابش

در اینجا نیز می‌توانیم تابع موج را برای ناحیه‌ی منفی ($x < 0$) به صورت

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{in}^L + (\Psi_1 + \Psi_2)_{ref}^L = A_{in} S_1 + A_{ref} S_2$$

$$(\Psi_1 + \Psi_2)_{trans}^R = A_{trans} S_3$$

بنویسیم که مقادیر ثابت از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$S_1 = y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) \quad (۱۷۹-۳)$$

$$S_2 = y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \quad (۱۸۰-۳)$$

$$S_3 = z^{-\mu_R} (1-z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1-2\mu_R; z) \quad (۱۸۱-۳)$$

چگالی جریان نیز به صورت زیر است:

$$J^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi$$

مانند قبل چگالی جریان برای سمت چپ و راست را می‌نویسیم:

$$J_L = J_{in} + J_{ref}$$

$$J_R = J_{trans}$$

ضرایب عبور و بازتابش به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$R = \left| \frac{J_{ref}}{J_{in}} \right| = \left| \frac{A_{ref}}{A_{in}} \right|^2 \cdot \left\{ \frac{S_2^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_2 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_2^*}{S_1^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1^*} \right\} \quad (۱۸۲-۳)$$

9

$$T = \left| \frac{J_{trans}}{J_{in}} \right| = \left| \frac{A_{trans}}{A_{in}} \right|^2 \cdot \left\{ \frac{S_3^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_3 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_3^*}{S_1^* \left(\frac{-2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1 + \left(\frac{2}{m+V_s} \right) \frac{d}{dx} S_1^*} \right\} \quad (۱۸۳-۳)$$

و سپس با استفاده از شرایط مرزی زیر:

$$\begin{cases} \Psi_{in}(x=0) + \Psi_{ref}(x=0) = \Psi_{trans}(x=0) \\ \Psi'_{in}(x=0) + \Psi'_{ref}(x=0) = \Psi'_{trans}(x=0) \end{cases}$$

که هم ارز است با:

$$\begin{aligned} & A_{in} y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) \\ & + A_{ref} y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \\ & = A_{trans} z^{-\mu_R} (1-z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1-2\mu_R; z) \end{aligned} \quad (۱۸۴-۳)$$

9

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ A_{in} y^{\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(\mu_L + \nu_L - \delta_L, \mu_L + \nu_L + \delta_L; 1+2\mu_L; y) \right. \\ & \left. + A_{ref} y^{-\mu_L} (1-y)^{\nu_L} {}_2F_1(-\mu_L + \nu_L - \delta_L, -\mu_L + \nu_L + \delta_L; 1-2\mu_L; y) \right\} \quad (۱۸۵-۳) \\ & = \frac{d}{dx} \left\{ A_{trans} z^{-\mu_R} (1-z)^{\nu_R} {}_2F_1(-\mu_R + \nu_R - \delta_R, -\mu_R + \nu_R + \delta_R; 1-2\mu_R; z) \right\} \end{aligned}$$

به دست می آوریم:

$$\frac{A_{ref.}}{A_{in.}} = \frac{\left(S_3 \frac{d}{dx} S_1 - S_1 \right)}{\left(S_3 \frac{d}{dx} S_2 + S_2 \frac{d}{dx} S_3 \right)} \quad (۱۸۶-۳)$$

$$\frac{A_{trans.}}{A_{in.}} = \frac{\left(S_2 \frac{d}{dx} S_1 - S_1 \frac{d}{dx} S_2 \right)}{\left(S_2 \frac{d}{dx} S_3 - S_3 \right)} \quad (۱۸۷-۳)$$

حال با جایگذاری روابط بالا در معادله ی ضرایب عبور و بازتابش این ضرایب به دست می آیند.

فصل چہارم:

فضا- زمان اور متحرک

حال به معرفی برخی از فضا-زمان‌های مهم و متریک‌های آن در زیر خواهیم پرداخت. همچنین اسپینور کانکشن‌ها را برای یک حالت کلی محاسبه می‌کنیم.

۴-۱: فضا-زمان مینکوفسکی

۱- فضای مینکوفسکی

معروفترین فضا-زمان، فضا-زمان مینکوفسکی نام دارد. متریک این فضا به صورت زیر است:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (۱-۴)$$

برای سادگی کار و همچنین بررسی یک فرم کلی، حالت کلی متریک را به صورت زیر در نظر می‌گیریم: [۱۳]

$$ds^2 = -(dx^0 + RHdx^2)^2 + R^2 \left[(dx^1)^2 + D^2 (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \right] \quad (۲-۴)$$

که D و H توابعی از x^1 و R تابعی از x^0 است.

بدیهی است که با تغییر متغیرهای زیر این فرم به همان فضا-زمان مینکوفسکی تبدیل می‌شود:

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \text{ and } R(t)=1, H(r)=0, D(r)=1$$

۴-۲: دیگر فضا-زمان‌ها

۲- فضا-زمان گودل در مختصات استوانه‌ای

اگر در معادله‌ی (۲-۴) تغییرات زیر را اعمال کنیم:

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z \text{ and } R(t)=1, H(r)=e^{\alpha r}, D(r)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\alpha r} \quad (۳-۴)$$

متریک آن به شکل زیر به دست می آید:

$$ds^2 = -(dt + e^{ar} d\theta)^2 + dr^2 + \frac{1}{2}(e^{ar} d\theta)^2 + dz^2 \quad (4-4)$$

۳- فضا-زمان گودل بسط داده شده در مختصات دکارتی

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \text{ and } R(t)=ct, H(x)=e^{mx}, D(x)=\sqrt{\lambda+1}e^{mx} \quad (5-4)$$

که منجر می شود به:

$$ds^2 = -dt^2 - 2cte^{mx} dydt + c^2 t^2 (dx^2 + \lambda e^{2mx} dy^2 + dz^2) \quad (6-4)$$

۴- فضا-زمان Som-Raychadhuri

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z \text{ and } R(t)=1, H(r)=r^2, D(r)=r \quad (7-4)$$

که منجر می شود به:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + -2r^2 d\phi dt + r^2 (1-r^2) + dz^2 \quad (8-4)$$

۵- فضا-زمان Honselaes-Vishveshwara

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z \text{ and } R(t)=1, H(r)=(c-1), D(r)=\frac{1}{\sqrt{2}}(c-1) \quad (9-4)$$

$$c = \cosh r$$

که منجر می شود به:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + -\frac{1}{2}(c-1)(c-3)d\phi^2 - 2(c-1)d\phi dt + dz^2 \quad (10-4)$$

۶- فضا-زمان Roboucas

$$x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \phi, x^3 = z \text{ and } R(t)=1, H(r)=2 \cosh r, D(r)=\sinh r \quad (11-4)$$

که منجر می شود به:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + 4 \cosh 2r d\phi dt - (3 \cosh^2 2r + 1) d\phi^2 + dz^2 \quad (12-4)$$

۷- فضا-زمان Robertson- Walker

$$x^0 = t, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z \text{ and } R(t)=a(t), H(x)=0, D(x)=1 \quad (13-4)$$

که منجر می شود به:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (14-4)$$

۴-۳: محاسبه ی اسپینور کانکشن برای کلی ترین حالت متریک

حالت کلی متریک را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$ds^2 = c_1^2(t,x)dt^2 - c_2^2(t,x)dx^2 \quad (15-4)$$

برای این متریک داریم:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c_1^2(t,x) & 0 \\ 0 & -c_2^2(t,x) \end{pmatrix} \quad (16-4)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} c_1^{-2}(t,x) & 0 \\ 0 & -c_2^{-2}(t,x) \end{pmatrix} \quad (17-4)$$

$$e^a_{\mu} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} \quad (18-4)$$

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{c_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{c_2} \end{pmatrix} \quad (۱۹-۴)$$

از فرمول کلی داریم:

$$\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\} \quad (۲۰-۴)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\Gamma_{tt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left\{ \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^t} \right\} = \frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^t} = \frac{1}{2c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} c_1^2 = \frac{\dot{c}_1}{c_1} \quad (۲۱-۴)$$

$$\Gamma_{xt}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left\{ \frac{\partial g_{xt}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^t} - \frac{\partial g_{xt}}{\partial q^t} \right\} = \frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^t} = \frac{1}{2c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} c_1^2 = \frac{\dot{c}_1}{c_1} \quad (۲۲-۴)$$

$$\Gamma_{tx}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left\{ \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^x} + \frac{\partial g_{xt}}{\partial q^t} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial q^t} \right\} = \frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^x} = \frac{1}{2c_1^2} \frac{\partial}{\partial x} c_1^2 = \frac{c_1'}{c_1} \quad (۲۳-۴)$$

$$\Gamma_{xx}^t = \frac{1}{2} g^{tt} \left\{ \frac{\partial g_{xt}}{\partial q^x} + \frac{\partial g_{xt}}{\partial q^x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^t} \right\} = -\frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^t} = \frac{-1}{2c_1^2} \frac{\partial}{\partial t} c_2^2 = \frac{c_2}{c_1^2} \dot{c}_2 \quad (۲۴-۴)$$

که علامت پریم مشتق نسبت به مکان و علامت دات مشتق نسبت به زمان را نشان می‌دهد.

در نتیجه به صورت خلاصه می‌توانیم بنویسیم

$$\Gamma^t = \begin{pmatrix} \frac{\dot{c}_1}{c_1} & \frac{c_1'}{c_1} \\ \frac{\dot{c}_1}{c_1} & \frac{c_2}{c_1^2} \dot{c}_2 \end{pmatrix} \quad (۲۵-۴)$$

حال چون داریم:

$$\Gamma_{0=t} = -\frac{1}{8} \omega_t^{\bar{a}\bar{b}} [\gamma^{\bar{a}}, \gamma^{\bar{b}}] \quad (۲۶-۴)$$

باید $\omega^{\bar{a}\bar{b}}$ را محاسبه کنیم

$$\begin{aligned} \omega_t^{01} &= e_\mu^0 e_1^\nu \Gamma_{t\nu}^\mu - e_1^\nu \partial_t e_\nu^0 = \\ e_t^0 e_1^t \Gamma_{tt}^t - e_1^t \partial_t e_t^0 + e_t^0 e_1^x \Gamma_{tx}^t - e_1^x \partial_t e_x^0 + e_x^0 e_1^t \Gamma_{tt}^x - e_1^t \partial_t e_t^0 + e_x^0 e_1^x \Gamma_{tx}^x - e_1^x \partial_t e_x^0 &= \quad (۲۷-۴) \\ e_t^0 e_1^x \Gamma_{tx}^t &= c_1 \frac{1}{c_2} \cdot \frac{c_1'}{c_1} = \frac{c_1'}{c_2} \end{aligned}$$

می‌دانیم

$$\Gamma_{0=t} = -\frac{1}{4} \omega_0^{01} [\gamma^0, \gamma^1] = -\frac{1}{2} \omega_0^{01} \gamma^0 \gamma^1 = -\frac{1}{2} \frac{c_1'}{c_2} \gamma^0 \gamma^1 = -\frac{1}{2} \frac{c_1'}{c_2} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{c_1'}{c_2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۲۸-۴)$$

حال سراغ $\Gamma_{1=x}$ می‌رویم:

$$\Gamma_{ij}^s = \frac{1}{2} g^{ks} \left\{ \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \right\}$$

پس داریم:

$$\Gamma_{tt}^x = \frac{1}{2} g^{xx} \left\{ \frac{\partial g_{tx}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{tx}}{\partial q^t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial q^x} \right\} = \frac{1}{2} g^{xx} \cdot \left(-\frac{\partial g_{tt}}{\partial q^t} \right) = \frac{-1}{2c_2^2} \frac{\partial}{\partial x} c_1^2 = \frac{c_1}{c_2^2} c_1' \quad (۲۹-۴)$$

$$\Gamma_{xt}^x = \frac{1}{2} g^{xx} \left\{ \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{tx}}{\partial q^x} - \frac{\partial g_{xt}}{\partial q^x} \right\} = \frac{1}{2} g^{xx} \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^t} = \frac{-1}{2c_2^2} \frac{\partial}{\partial t} c_2^2 = \frac{\dot{c}_2}{c_2} \quad (۳۰-۴)$$

$$\Gamma_{tx}^x = \frac{1}{2} g^{xx} \left\{ \frac{\partial g_{tx}}{\partial q^x} + \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^t} - \frac{\partial g_{tx}}{\partial q^x} \right\} = \frac{1}{2} g^{xx} \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^t} = \frac{-1}{2c_2^2} \frac{\partial}{\partial t} c_2^2 = \frac{\dot{c}_2}{c_2} \quad (۳۱-۴)$$

$$\Gamma_{xx}^x = \frac{1}{2} g^{xx} \left\{ \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^x} + \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^x} - \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^x} \right\} = -\frac{1}{2} g^{xx} \frac{\partial g_{xx}}{\partial q^x} = \frac{-1}{2c_2^2} \frac{\partial}{\partial x} c_2^2 = \frac{c_2'}{c_2} \quad (۳۲-۴)$$

در نتیجه به صورت خلاصه می‌توانیم بنویسیم

$$\Gamma^x = \begin{pmatrix} \frac{c_1}{2} c_1' & \dot{c}_2 \\ c_2 & c_2 \\ \dot{c}_2 & c_2' \\ c_2 & c_2 \end{pmatrix} \quad (۳۳-۴)$$

حال با توجه به:

$$\Gamma_{1=x} = -\frac{1}{8} \omega_x^{\bar{a}\bar{b}} [\gamma^{\bar{a}}, \gamma^{\bar{b}}] \quad (۳۴-۴)$$

باید $\omega^{\bar{a}\bar{b}}$ را محاسبه نماییم:

$$\begin{aligned} \omega_x^{01} &= e_\mu^0 e_1^\nu \Gamma_{x\nu}^\mu - e_1^\nu \partial_x e_\nu^0 = \\ e_x^0 e_1^t \Gamma_{xt}^x - e_1^t \partial_x e_t^0 + e_x^0 e_1^x \Gamma_{xx}^x - e_1^x \partial_x e_x^0 + e_t^0 e_1^t \Gamma_{xt}^t - e_1^t \partial_x e_t^0 + e_t^0 e_1^x \Gamma_{xx}^t - e_1^x \partial_x e_x^0 &= \quad (۳۵-۴) \\ e_t^0 e_1^x \Gamma_{xx}^t &= c_1 \frac{1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_1^2} \dot{c}_2 = \frac{\dot{c}_2}{c_1} \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$\Gamma_{1=x} = -\frac{1}{4} \omega_1^{01} [\gamma^0, \gamma^1] = -\frac{1}{2} \omega_1^{01} \gamma^0 \gamma^1 = -\frac{1}{2} \frac{\dot{c}_2}{c_1} \gamma^0 \gamma^1 = -\frac{1}{2} \frac{\dot{c}_2}{c_1} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \frac{\dot{c}_2}{c_1} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۳۶-۴)$$

فصل پنجم: معادله ی دی-کی-پی

در فضا زمان خمیده

حالت کلی متریک‌ها در فضا-زمان ۳+۱ بعدی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$ds^2 = c_1^2(t, x) dt^2 - c_2^2(t, x) dx^2 - c_3^2(t, x) dx^2 - c_4^2(t, x) dx^2$$

و در حالت خاص ۱+۱ بعدی به صورت زیر تقلیل می‌یابد:

$$ds^2 = c_1^2(t, x) dt^2 - c_2^2(t, x) dx^2 \quad (۱-۵)$$

فرم معادله‌ی نسبیتی دی-کی-پی را می‌دانیم:

$$\left[i \beta^a (\partial_0 + ieA_a) - M \right] \Psi_k(x) = 0 \quad (۲-۵)$$

که در آن β^a ماتریس‌های بتا در فضا-زمان مینکوفسکی هستند که رابطه‌ی زیر را ارضا می‌کنند:

$$\beta^a \beta^b \beta^c + \beta^c \beta^b \beta^a = \beta^a \delta^{bc} + \beta^c \delta^{ba} \quad (۳-۵)$$

در حالت کلی ۳+۱ بعدی در فضا-زمان خمیده معادله‌ی دی-کی-پی در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی به صورت زیر است:

$$\left[i \beta^\mu (\partial_\mu - \Sigma_\mu + ieA_\mu) - M \right] \Psi_k(t, \vec{x}) = 0 \quad (۴-۵)$$

که در این معادله M جرم بوزون، A_μ چاربردار پتانسیل، e بار الکتریکی و β^μ ماتریس‌های کمر (Kemmer) هستند که از روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x) \quad (۵-۵)$$

در رابطه‌ی بالا γ^μ ماتریس‌های دیراک هستند.

ارتباط فضای تخت با فضای خمیده از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\beta^\mu(x) = e_i^\mu(x) \beta^i \quad (۶-۵)$$

که $e_i^\mu(x)$ ها رابطه‌ی زیر را اقلان می‌کنند.

$$g_{\mu\nu} = e_\mu^i e_\nu^j \eta_{ij} \quad (۷-۵)$$

هم‌چنین اسپینور کانکشن‌ها برای ذرات اسپین یک که در معادله‌ی دی-کی-پی دیده می‌شود از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$\Sigma_\mu = \Gamma_\mu \otimes I + I \otimes \Gamma_\mu \quad (۸-۵)$$

که Γ_μ ها اسپینور کانکشن برای ذرات با اسپین نیمه صحیح هستند که از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند

$$\Gamma_\mu = -\frac{1}{8} \omega_{\mu ab} [\gamma^a, \gamma^b] \quad (۹-۵)$$

و $\omega_{\mu ab}$ ها اسپین کانکشن‌هایی هستند که در رابطه‌ی زیر صدق می‌کنند:

$$\omega_{\mu ab} = \eta_{ac} e_\nu^c e_b^\sigma \Gamma_{\sigma\mu}^\nu - \eta_{ac} e_\nu^c \partial_\mu e_b^\nu \quad (۱۰-۵)$$

۵-۱: حل معادله‌ی دی-کی-پی در فضا-زمان ریمانی در ۱+۱ بعد

معادله‌ی دی-کی-پی در فضای ۱+۱ بعدی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\frac{1}{c_1} \beta^0 \partial_0 + \frac{1}{c_2} \beta^1 \partial_1 - \frac{1}{c_1} \beta^0 \Sigma_0 - \frac{1}{c_2} \beta^1 \Sigma_1 + i \frac{e}{c_1} \beta^0 A_0 + i \frac{e}{c_2} \beta^1 A_1 + Mi \right] \Psi_k(t, x) = 0 \quad (۱۱-۵)$$

از آنجایی که $\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x)$ داریم:

$$\left[\frac{1}{c_1} (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) (\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + \frac{1}{c_2} (\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) (\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + Mi \right] \Psi_k(t, x) = 0 \quad (12-5)$$

با ضرب طرفین معادله در $(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0)$ داریم:

$$\left[\frac{1}{c_1} (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) (\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + \frac{1}{c_2} (\gamma^0 \gamma^1 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \gamma^0 \gamma^1) (\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + Mi (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \right] \times \Psi_k(t, x) = 0 \quad (13-5)$$

حال برای ماتریس‌های گامای دیراک باید انتخابی داشته باشیم. از میان تمام انتخاب‌های ممکن گاماها را به صورتی انتخاب می‌کنیم که وابسته به ماتریس‌های پاولی باشند و آن‌ها را به صورت ماتریسی زیر می‌نویسیم:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (14-5)$$

حال پارامتر α^1 را به صورت $\alpha^1 = \gamma^0 \gamma^1$ تعریف می‌کنیم و آن را محاسبه می‌نماییم.

$$\alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15-5)$$

اسپینور کانکشن‌ها را برای فضای تخت حساب می‌کنیم:

$$\Sigma_0 = -\frac{1}{2} \frac{c_1'}{c_2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (16-5)$$

$$\Sigma_1 = -\frac{1}{2} \frac{\dot{c}_2}{c_1} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۷-۵)$$

حال با قرار دادن $c_1 = 1$ و $c_2 = a^2(t)$ در معادله‌ی (۱-۵) فضای ریمانی را می‌دهد.

با فرض $A_\mu = (0, -A(t)\hat{x})$ اسپینور کانکشن‌ها به دست می‌آیند:

$$\Sigma_0 = 0, \quad \Sigma_1 = -a\dot{a} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۸-۵)$$

تابع موج ۴ مولفه‌ای را نیز به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Psi_k = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T \quad (۱۹-۵)$$

در نتیجه:

$$\left[(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0)(\partial_0) + \frac{1}{a^2} (\alpha^1 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \alpha^1)(\partial_1 - \Sigma_1 + ie\bar{E}t) + Mi (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \right] \Psi_k(t, x) = 0 \quad (۲۰-۵)$$

ابتدا مقادیر $\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0$ و $\alpha^1 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \alpha^1$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1I & 0 \\ 0 & -1I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\gamma^0 & 0 \\ 0 & 1\gamma^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (۲۱-۵)$$

$$\alpha^1 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \alpha^1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma\gamma^0 \\ \sigma\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1\alpha^1 & 0 \\ 0 & -1\alpha^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma & \sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 & 0 & -\sigma \\ 0 & -\sigma & -\sigma & 0 \end{pmatrix} \quad (۲۲-۵)$$

با قراردادن معادلات (۱۸-۵)، (۱۹-۵)، (۲۱-۵) و (۲۳-۵) در معادله‌ی (۱۳-۵) داریم:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_0 + \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & -\sigma_1 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \left(\partial_1 + A(t) + a\dot{a} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \right) + Mi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (23-5)$$

که می‌توان آن را به صورت ۴ معادله و ۴ مجهول به گونه‌ی زیر نوشت:

$$(2\partial_0 + Mi)\Psi_1 + \frac{\sigma_1}{a^2}(\partial_1 + A(t) + a\dot{a}\sigma_1)(\Psi_2 + \Psi_3) = 0 \quad (24-5)$$

$$\frac{\sigma_1}{a^2}(\partial_1 + A(t) + a\dot{a}\sigma_1)(\Psi_1 - \Psi_4) - Mi\Psi_2 = 0 \quad (25-5)$$

$$\frac{\sigma_1}{a^2}(\partial_1 + A(t) + a\dot{a}\sigma_1)(\Psi_1 - \Psi_4) - Mi\Psi_3 = 0 \quad (26-5)$$

$$(-2\partial_0 + Mi)\Psi_4 - \frac{\sigma_1}{a^2}(\partial_1 + A(t) + a\dot{a}\sigma_1)(\Psi_2 + \Psi_3) = 0 \quad (27-5)$$

از معادلات (۲۵-۵) و (۲۶-۵) متوجه می‌شویم که مولفه‌ی دوم و سوم تابع موج با هم برابر

هستند:

$$\Psi_2 = \Psi_3 \quad (28-5)$$

حال پیدا کردن مولفه‌های تابع موج از ۴ معادله‌ی بالا کار راحتی است. با قرار دادن معادله‌ی

(۲۸-۵) در معادلات (۲۴-۵) و (۲۷-۵) داریم:

$$\Psi_1 = \frac{-\frac{2\sigma_1}{a^2}(\partial_1 + A(t) + a\dot{a}\sigma_1)}{(2\partial_0 + Mi)}\Psi_2 \quad (29-5)$$

$$\Psi_4 = \frac{\frac{2\sigma_1}{a^2}(\partial_1 + A(t) + a\dot{a}\sigma_1)}{(-2\partial_0 + Mi)}\Psi_2 \quad (30-5)$$

با قرار دادن این عبارات در یکی از ۴ معادله‌ی بالا به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$\left\{ \frac{\sigma}{a^2} (\partial_1 + ie\bar{E}t + a\dot{a}\sigma) \left(\frac{-2\sigma}{a^2} (\partial_1 + ie\bar{E}t + a\dot{a}\sigma) - \left(\frac{1}{2\partial_0 + Mi} + \frac{1}{-2\partial_0 + Mi} \right) \right) - Mi \right\} \Psi_2 = 0 \quad (31-5)$$

اکنون با قرار دادن معادلات (۲۸-۵)، (۲۹-۵) و (۳۰-۵) در معادله‌ی (۲۵-۵) به یک معادله دیفرانسیل دست پیدا می‌کنیم.

$$\left\{ \partial_0^2 - \frac{1}{a^4} (\partial_1 + A(t) + a\dot{a}\sigma_1)^2 + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \quad (32-5)$$

حال مسئله‌ی اصلی حل کردن این معادله دیفرانسیل است. ابتدا تابع موج را به دو بخش زمانی و مکانی به صورت $\Psi_2 = e^{ikx} \Psi_2(t)$ تفکیک می‌کنیم.

$$\left\{ \frac{d^2}{dt^2} + \frac{k^2}{a^4} - \frac{A^2(t)}{a^4} - \frac{a^2 \dot{a}^2}{a^4} - \frac{2ikA(t)}{a^4} - \frac{2ika\dot{a}\sigma_1}{a^4} - \frac{2A(t)a\dot{a}\sigma_1}{a^4} + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \quad (33-5)$$

حال با قرار دادن $a = e^{-\gamma t}$ و $A(t) = A_0 e^{-\gamma t}$ معادله‌ی (33) تبدیل می‌شود به:

$$\left\{ \frac{d^2 \Psi}{dt^2} + \frac{k^2}{e^{-4\gamma t}} - \frac{A_0^2}{e^{-2\gamma t}} - \gamma^2 - \frac{2ikA_0}{e^{-3\gamma t}} - \frac{2ik\gamma\sigma_1}{e^{-2\gamma t}} - \frac{2A_0\gamma\sigma_1}{e^{-\gamma t}} + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \quad (34-5)$$

با تغییر متغیر $e^{-\gamma t} = T$ داریم:

$$e^{-\gamma t} = T \quad (35-5)$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT}{dt} \frac{d}{dT} = -\gamma e^{-\gamma t} \frac{d}{dT} = -\gamma T \frac{d}{dT} \quad (36-5)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{d}{dt} = -\gamma T \frac{d}{dT} (-\gamma T) = \gamma^2 T^2 \frac{d^2}{dT^2} + \gamma^2 T \frac{d}{dT} \quad (37-5)$$

با جایگذاری در معادله‌ی (۳۴-۵)، معادله‌ی زیر به دست می‌آید

$$\left\{ \gamma^2 T^2 \frac{d^2}{dT^2} + \gamma^2 T \frac{d}{dT} + \frac{1}{T^2} \left[\frac{2A_0 \gamma \sigma}{T \gamma^2} + \frac{2ik \gamma \sigma A_0^2}{T^2 \gamma^2} - \frac{2ik A_0}{T^3 \gamma^2} + \frac{k^2}{T^4 \gamma^2} + \frac{M^2}{4\gamma^2} - 1 \right] \right\} \Psi = 0 \quad (38-5)$$

در نتیجه:

$$\left\{ \frac{d^2}{dT^2} + \frac{1}{T} \frac{d}{dT} + \frac{1}{T^2} \left[\frac{2A_0 \gamma \sigma_1}{T \gamma^2} + \frac{2ik \gamma \sigma_1 A_0^2}{T^2 \gamma^2} - \frac{2ik A_0}{T^3 \gamma^2} + \frac{k^2}{T^4 \gamma^2} + \frac{M^2}{4\gamma^2} - 1 \right] \right\} \Psi = 0 \quad (39-5)$$

حال برای حل کردن این معادله باید تابع موج را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\Psi = T^{-\frac{1}{2}} U \quad (40-5)$$

که منجر می‌شود به:

$$\left\{ \frac{d^2}{dT^2} + \frac{1}{T} \frac{d}{dT} + \frac{1}{T^2} \left[\frac{2A_0 \gamma \sigma_1}{T \gamma^2} + \frac{2ik \gamma \sigma_1 A_0^2}{T^2 \gamma^2} - \frac{2ik A_0}{T^3 \gamma^2} + \frac{k^2}{T^4 \gamma^2} + \frac{M^2}{4\gamma^2} - 1 \right] \right\} T^{-\frac{1}{2}} U = 0 \quad (41-5)$$

با یک و دوبار مشتق گرفتن از رابطه‌ی (۴۱-۵) داریم:

$$\frac{d\Psi}{dT} = -\frac{1}{2} T^{-\frac{3}{2}} U + T^{-\frac{1}{2}} \frac{dU}{dT} \quad (42-5)$$

$$\frac{d^2\Psi}{dT^2} = T^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2U}{dT^2} - T^{-\frac{3}{2}} \frac{dU}{dT} + \frac{3}{4} T^{-\frac{5}{2}} U \quad (43-5)$$

با قرار دادن این معادله در معادله‌ی (۴۱-۵) داریم:

$$\left\{ \frac{d^2 U}{dT^2} + \frac{1}{T^2} \left[\frac{2A_0 \gamma \sigma}{T \gamma^2} + \frac{2ik \gamma \sigma A_0^2}{T^2 \gamma^2} - \frac{2ik A_0}{T^3 \gamma^2} + \frac{k_1^2}{T^4 \gamma^2} + \frac{M^2}{4\gamma^2} - \frac{3}{4} \right] U \right\} = 0 \quad (44-5)$$

یا

$$\frac{d^2 U}{dT^2} = \frac{1}{T^2} \left[\frac{-2A_0 \gamma \sigma}{T \gamma^2} - \frac{2ik \gamma \sigma A_0^2}{T^2 \gamma^2} + \frac{2ik A_0}{T^3 \gamma^2} - \frac{k_1^2}{T^4 \gamma^2} - \frac{M^2}{4\gamma^2} + \frac{3}{4} \right] U \quad (45-5)$$

و یا

$$\frac{d^2 U}{dT^2} = \left[\frac{-2A_0 \gamma \sigma}{T^3 \gamma^2} - \frac{2ik \gamma \sigma A_0^2}{T^4 \gamma^2} + \frac{2ik A_0}{T^5 \gamma^2} - \frac{k_1^2}{T^6 \gamma^2} - \frac{M^2}{T^2 4\gamma^2} + \frac{3}{4T^2} \right] U \quad (46-5)$$

$$\frac{d^2 U}{dT^2} = \left[-\frac{M^2}{T^2 4\gamma^2} + \frac{3}{4T^2} - \frac{2A_0 \gamma \sigma_1}{T^3 \gamma^2} - \frac{2ik \gamma \sigma_1 A_0^2}{T^4 \gamma^2} + \frac{2ik A_0}{T^5 \gamma^2} - \frac{k_1^2}{T^6 \gamma^2} \right] U \quad (47-5)$$

حال به معادله‌ای رسیدیم که با روش ansatz قابل حل است. [۱۴]

فرض می‌کنیم:

$$U = \exp(g(T)) \quad (48-5)$$

که خود تابع $g(T)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$g(T) = \alpha \ln T + \beta \frac{1}{T} + \eta \frac{1}{T^2} \quad (49-5)$$

با جایگذاری $g(T)$ در معادله‌ی (۴۸-۵) و سپس دوبار مشتق گرفتن از آن در می‌یابیم که:

$$U'' = [g''(T) + g'(T)^2] U \quad (50-5)$$

با دوبار مشتق گرفتن از معادله‌ی (۴۸-۵) می‌توانیم بنویسیم:

$$g'(T) = \frac{\alpha}{T} - \beta \frac{1}{T^2} - \frac{2\eta}{T^3} \quad (49-5)$$

$$g'^2(T) = \left(\frac{\alpha}{T}\right)^2 + \left(\beta \frac{1}{T^2}\right)^2 + \left(\frac{2\eta}{T^3}\right)^2 - \frac{2\alpha\beta}{T^3} - \frac{4\alpha\eta}{T^4} + \frac{4\beta\eta}{T^5} \quad (50-5)$$

$$g''(T) = -\frac{\alpha}{T^2} + \frac{2\beta}{T^3} + \frac{6\eta}{T^4} \quad (51-5)$$

پس از محاسبات بالا می‌توانیم بنویسیم:

$$g''(T) + g'^2(T) = -\frac{\alpha + \alpha^2}{T^2} + \frac{2\beta - 2\alpha\beta}{T^3} + \frac{6\eta + \beta^2 - 4\alpha\eta}{T^4} + \frac{4\beta\eta}{T^5} + \frac{4\eta^2}{T^6} \quad (52-5)$$

حال با مقایسه‌ی معادله‌ی (52-5) با معادله‌ی (47-5) ضرایب معادله‌ی (49-5) به دست

می‌آیند:

$$-\alpha + \alpha^2 = -\frac{M^2}{4\gamma^2} + \frac{3}{4} \rightarrow \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{M^2}{4\gamma^2} - \frac{3}{4}\right)}}{2} \quad (53-5)$$

$$2\beta - 2\alpha\beta = -\frac{2A_0\gamma\sigma_1}{\gamma^2} \rightarrow \beta = -\frac{A_0\sigma_1}{\gamma(1-\alpha)} \quad (54-5)$$

$$4\eta^2 = -\frac{k^2}{\gamma^2} \rightarrow \eta = \frac{\pm ik}{2\gamma} \quad (55-5)$$

و معادلات قیدی نیز به صورت زیر هستند:

$$6\eta + \beta^2 - 4\alpha\eta = -\frac{2ik\gamma\sigma_1 A_0^2}{\gamma^2} \quad (56-5)$$

$$4\beta\eta = \frac{2ikA_0}{\gamma^2} \quad (57-5)$$

با جایگذاری ضرایب، تابع موج به دست می‌آید. هم‌چنین مقدار انرژی نیز از روابط بالا به دست

می‌آید.

۵-۲: حل معادله‌ی دی-کی-پی در فضای cosmic string در ۱+۲ بعد

در این بخش به بررسی و حل معادله‌ی دی-کی-پی در فضای cosmic string می‌پردازیم.

متریک این فضا به صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۵]

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \eta^2 \rho^2 d\varphi^2 \quad (۵۸-۵)$$

همانطور که می‌دانیم معادله‌ی دی-کی-پی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\left[i \beta^\mu (\partial_\mu - \Sigma_\mu + ieA_\mu) - M \right] \Psi = 0 \quad (۵۹-۵)$$

معادله‌ی دی-کی-پی را در این فضا می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left[\beta^0 (\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + \beta^1 (\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + \frac{1}{\eta\rho} \beta^2 (\partial_2 - \Sigma_2 + ieA_2) + Mi \right] \Psi = 0$$

با استفاده از $\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x)$ معادله‌ی بالا تبدیل می‌شود به

$$\left[(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) (\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + (\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^1) (\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + \frac{1}{\eta\rho} (\gamma^2 \otimes I + I \otimes \gamma^2) (\partial_2 - \Sigma_2 + ieA_2) + Mi \right] \Psi = 0 \quad (۶۰-۵)$$

و سپس با ضرب طرفین در $(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0)$ به دست می‌آید:

$$\left[(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) (\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + (\gamma^0 \gamma^1 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \gamma^0 \gamma^1) (\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + \frac{1}{\eta\rho} (\gamma^0 \gamma^2 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \gamma^0 \gamma^2) (\partial_2 - \Sigma_2 + ieA_2) + Mi (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \right] \Psi = 0 \quad (۶۱-۵)$$

مانند قبل گامای دیراک را وابسته به ماتریس پاولی به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (۶۲-۵)$$

و نیز $\alpha^1 = \gamma^0 \gamma^1$ تعریف می کنیم که محاسبه ی آن نشان می دهد:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (۶۳-۵)$$

اسپینور کانکشن ها برای این حالت به صورت زیر به دست می آیند:

$$\Sigma_0 = \Sigma_1 = 0 \quad (۶۴-۵)$$

$$\Sigma_2 = -\frac{1}{2}(1-\eta) \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (۶۵-۵)$$

تابع موج ۴ مولفه ای را نیز به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T$$

با جایگذاری معادلات (۱۴-۵) و (۱۷-۵) و (۱۸-۵) در معادله ی (۱۳-۵) داریم:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} (\partial_0 + ieA_0) + \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & -\sigma_1 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} (\partial_1 + ieA_1) + \frac{1}{\eta\rho} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & -\sigma_2 \\ 0 & -\sigma_2 & -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \right\} \times$$

$$\left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 & 0 & \sigma_2 \\ 0 & \sigma_2 & \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} + ieA_2 \right) + Mi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (۶۶-۵)$$

که می توانیم آن را به صورت ۴ معادله و ۴ مجهول نوشت:

$$(2\partial_0 + ieA_0 + Mi)\Psi_1 + \left[\sigma_1(\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right] (\Psi_2 + \Psi_3) = 0 \quad (67-5)$$

$$\left[\sigma_1(\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right] (\Psi_1 - \Psi_4) - Mi \Psi_2 = 0 \quad (68-5)$$

$$\left[\sigma_1(\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right] (\Psi_1 - \Psi_4) - Mi \Psi_3 = 0 \quad (69-5)$$

$$(-2\partial_0 + ieA_0 + Mi)\Psi_4 - \left[\sigma_1(\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right] (\Psi_2 + \Psi_3) = 0 \quad (70-5)$$

از معادله‌ی (68-5) و (69-5) نتیجه می‌گیریم که مولفه‌ی دوم و سوم تابع موج برابر هستند.

$$\Psi_2 = \Psi_3 \quad (71-5)$$

حال می‌توانیم دیگر مولفه‌های تابع موج را به آسانی به دست آوریم. برای این منظور با

جایگذاری معادله‌ی (71-5) در معادلات (67-5) و (70-5) به دست می‌آوریم:

$$\Psi_1 = \frac{-2 \left[\sigma_1(\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right]}{(2\partial_0 + ieA_0 + Mi)} \Psi_2 \quad (72-5)$$

$$\Psi_4 = \frac{2 \left[\sigma_1(\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right]}{(-2\partial_0 + ieA_0 + Mi)} \Psi_2 \quad (73-5)$$

و سپس با جایگذاری معادلات (71-5)، (72-5) و (73-5) در معادله‌ی (68-5) به یک معادله

دیفرانسیل دست پیدا می‌کنیم.

$$\left\{ (-2) \left[\sigma_1 (\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right]^2 - \frac{Mi \left((ieA_0 + Mi)^2 - 4\partial_0^2 \right)}{2(ieA_0 + Mi)} \right\} \Psi_2 = 0$$

(۷۴-۵)

حال حل این معادله را در دو حالت برای بردار پتانسیل‌ها در نظر می‌گیریم.

حالت اول:

در معادله‌ی (74) فرض می‌کنیم که داشته باشیم $ieA_1 = \frac{a}{\rho} + d$ و $A_0 = A_2 = 0$ بنابراین

داریم:

$$\left\{ \partial_0^2 - \left[\sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \right] \left[\sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \right] - \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0$$

(۷۵-۵)

دو گروه را در هم ضرب می‌کنیم

$$\left\{ \partial_0^2 - \sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) \sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) - \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) \right. \\ \left. - \sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) - \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) - \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0$$

(۷۶-۵)

عبارت بالا را ساده سازی می‌کنیم

$$\left\{ -\partial_0^2 + \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) + \frac{\sigma_2 \sigma_1}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + d \right) \right.$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2}{\eta\rho}\left(\partial_1+\frac{a}{\rho}+d\right)\left(\partial_2+\frac{1-\eta}{2}\sigma_2\right)+\frac{1}{\eta^2\rho^2}\left(\partial_2+\frac{1-\eta}{2}\sigma_2\right)\left(\partial_2+\frac{1-\eta}{2}\sigma_2\right)+\left(\frac{M}{2}\right)^2\left\}\Psi_2=0\right. \\ \left.(77-5)\right.$$

پرانته‌ها را در هم ضرب می‌کنیم

$$\left\{-\partial_0^2+\partial_1^2+\frac{a}{\rho}\partial_1+d\partial_1+\partial_1\frac{a}{\rho}+\frac{a^2}{\rho^2}+\frac{da}{\rho}+\partial_1d+\frac{ad}{\rho}+d^2\right. \\ \left.+\frac{\sigma_2\sigma_1}{\eta\rho}\left(\partial_2\partial_1+\frac{1-\eta}{2}\sigma_2\partial_1+\partial_2\frac{a}{\rho}+\frac{1-\eta}{2}\sigma_2\frac{a}{\rho}+\partial_2d+\frac{1-\eta}{2}\sigma_2d\right)+\right. \\ \left.\frac{\sigma_1\sigma_2}{\eta\rho}\left(\partial_1\partial_2+\frac{a}{\rho}\partial_2+d\partial_2+\partial_1\frac{1-\eta}{2}\sigma_2+\frac{a}{\rho}\frac{1-\eta}{2}\sigma_2+d\frac{1-\eta}{2}\sigma_2\right)\right. \\ \left.+\frac{1}{\eta^2\rho^2}\left(\partial_2^2+\frac{1-\eta}{2}\sigma_2\partial_2+\partial_2\frac{1-\eta}{2}\sigma_2+\frac{(1-\eta)^2}{4}\right)+\left(\frac{M}{2}\right)^2\right\}\Psi_2=0 \quad (78-5)$$

حال تابع موج را به صورت تفکیکی $\Psi_2=e^{im\phi+iEt}\phi(\rho)$ در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}+\left(\frac{a}{\rho}+d+\frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta\rho}im+\frac{1-\eta}{2}\frac{\sigma_\rho}{\eta\rho}+\frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta\rho}im+\frac{1-\eta}{2}\frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta\rho}\sigma_\phi\right)\frac{\partial\phi}{\partial\rho} \\ -\left\{-\frac{\sigma_\phi\sigma_\rho d(1-\eta)\sigma_\phi}{2\eta\rho}-dim\frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta\rho}-\frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta\rho}dim-\frac{2ad}{\rho}+\frac{a}{\rho^2}-\frac{a^2}{\rho^2}\right. \\ \left.-aim\frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta\rho^2}-a(1-\eta)\frac{\sigma_\rho}{2\eta\rho^2}-aim\frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta\rho^2}+\frac{1}{\eta^2\rho^2}m^2-\frac{1}{\eta^2\rho^2}im(1-\eta)\sigma_\phi\right. \\ \left.-\frac{1}{\eta^2\rho^2}\frac{(1-\eta)^2}{4}-\frac{\sigma_\phi\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta\rho^2}\frac{1-\eta}{2}-E^2-d^2+\left(\frac{M}{2}\right)^2\right\}\phi(\rho)=0 \quad (79-5)$$

بهترین و آسان ترین روش برای حل این معادله روش نیکووروف-اوارف Nikiforov-Uvarov

(NU) است [16].

با مقایسه‌ی این معادله با معادله‌ی NU پارامترهای ثابت باید به صورت زیر باشند:

$$\alpha_1 = a + \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi + \sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta} im + \frac{(1-\eta)(\sigma_\phi \sigma_\rho \sigma_\phi + \sigma_\rho)}{2\eta}, \alpha_2 = -d, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = \frac{1-\alpha_1}{2}$$

$$\alpha_5 = -\frac{d}{2}, \alpha_6 = \frac{d^2}{4} + \xi_1, \alpha_7 = -\frac{d}{2}(1-\alpha_1) - \xi_2, \alpha_8 = \left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)^2 + \xi_3, \alpha_9 = \alpha_6 = \frac{d^2}{4} + \xi_1,$$

$$\alpha_{10} = 1 + \sqrt{(1-\alpha_1)^2 + 4\xi_3}, \alpha_{11} = \sqrt{d^2 + 4\xi_1}, \alpha_{12} = \frac{1-\alpha_1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}(1-\alpha_1)^2 + \xi_3},$$

$$\alpha_{13} = -\frac{d}{2} - \sqrt{\frac{d^2}{4} + \xi_1} \quad (۸۰-۵)$$

$$\xi_1 = \left(\frac{M}{2}\right)^2 - E^2 - d^2 \quad (۸۱-۵)$$

$$\xi_2 = \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho d (1-\eta) \sigma_\phi}{2\eta} + dim \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho + \sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta} + 2ad \quad (۸۲-۵)$$

$$\xi_3 = a - a^2 - aim \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi + \sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta} - \frac{a(1-\eta) \sigma_\rho}{2\eta} + \frac{m^2 - im(1-\eta) \sigma_\phi}{\eta^2} - \frac{(1-\eta)^2}{4\eta^2} - \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta} \frac{1-\eta}{2} \quad (۸۳-۵)$$

در نتیجه تابع موج به صورت زیر به دست می آید

$$\phi(\rho) = \rho^{\left(\frac{1-\alpha_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1-\alpha_1}{2}\right)^2 + \xi_3}\right)} e^{-\left(\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \xi_1}\right)\rho} L_n^{\sqrt{(1-\alpha_1)^2 + 4\xi_3}}(\rho \sqrt{d^2 + 4\xi_1}) \quad (۸۴-۵)$$

و طیف انرژی به صورت زیر است

$$E = \frac{1}{2} \sqrt{M^2 - 3d^2 - \left(\frac{2\xi_2 - d\alpha_1}{2n+1 + \sqrt{((1-\alpha_1)^2 + 4\xi_3)}}\right)^2} \quad (۸۵-۵)$$

حالت دوم:

$$: A_0 = A_2 = 0, ieA_1 = \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \text{ در این حالت فرض می کنیم}$$

در واقع این فرض حالت کلی تری برای بردار پتانسیل است با جایگذاری این فرضیات در

معادله ی (۷۴-۵) این معادله تبدیل می شود به:

$$\left\{ (-2) \left[\sigma_1 (\partial_1 + ieA_1) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + ieA_2 \right) \right]^2 - \frac{Mi \left((ieA_0 + Mi)^2 - 4\partial_0^2 \right)}{2(ieA_0 + Mi)} \right\} \Psi_2 = 0 \quad (۸۶-۵)$$

$$\left\{ (-2) \left[\sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \right]^2 - \frac{\left((Mi)^2 - 4\partial_0^2 \right)}{2} \right\} \Psi_2 = 0 \quad (۸۷-۵)$$

$$\left\{ -\partial_0^2 + \left[\sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \right]^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \quad (۸۸-۵)$$

$$\left\{ -\partial_0^2 + \left[\sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \right] \left[\sigma_1 \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) + \frac{\sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \right] - \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \quad (۸۹-۵)$$

با ضرب دو گروه در هم داریم:

$$\begin{aligned} & \left\{ -\partial_0^2 + \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) + \frac{\sigma_2 \sigma_1}{\eta\rho} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) + \right. \\ & \left. \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\eta\rho} \left(\partial_1 + \frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d \right) \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) + \frac{1}{\eta^2 \rho^2} \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \left(\partial_2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) - \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \end{aligned} \quad (۹۰-۵)$$

پرانترها را درهم ضرب می کنیم:

$$\begin{aligned}
& -\partial_0^2 + \partial_1^2 + \frac{a}{\rho} \partial_1 + \frac{b}{\rho^2} \partial_1 + d \partial_1 + \partial_1 \frac{a}{\rho} + \frac{a^2}{\rho^2} + \frac{ab}{\rho^3} + \frac{da}{\rho} + \partial_1 \frac{b}{\rho^2} + \frac{ab}{\rho^3} + \frac{b^2}{\rho^4} + \frac{db}{\rho^2} + \partial_1 d + \frac{ad}{\rho} \\
& + \frac{bd}{\rho^2} + d^2 + \frac{\sigma_2 \sigma_1}{\eta \rho} \left(\partial_2 \partial_1 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \partial_1 + \partial_2 \frac{a}{\rho} + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \frac{a}{\rho} + \partial_2 \frac{b}{\rho^2} + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \frac{b}{\rho^2} + \partial_2 d + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 d \right) + \\
& \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\eta \rho} \left(\partial_1 \partial_2 + \frac{a}{\rho} \partial_2 + \frac{b}{\rho^2} \partial_2 + d \partial_2 + \partial_1 \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + \frac{a}{\rho} \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + \frac{b}{\rho^2} \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + d \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \right) \\
& + \frac{1}{\eta^2 \rho^2} \left(\partial_2^2 + \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 \partial_2 + \partial_2 \frac{1-\eta}{2} \sigma_2 + \frac{(1-\eta)^2}{4} \right) - \left(\frac{M}{2} \right)^2 \Big\} \Psi_2 = 0 \quad (91-5)
\end{aligned}$$

حال دوباره تابع موج را به صورت تفکیکی $\Psi_2 = e^{im\phi + iEt} \phi(\rho)$ فرض می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = & - \left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho^2} + d + \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta \rho} im + \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\rho}{\eta \rho} + \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta \rho} im + \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta \rho} \sigma_\phi \right) \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \\
& + \left\{ - \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho d (1-\eta) \sigma_\phi}{2\eta \rho} - \dim \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta \rho} - \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta \rho} \dim - \frac{2ad}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} - \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{2bd}{\rho^2} - aim \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta \rho^2} \right. \\
& - a(1-\eta) \frac{\sigma_\rho}{2\eta \rho^2} - aim \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta \rho^2} + \frac{m^2}{\eta^2 \rho^2} - \frac{im(1-\eta) \sigma_\phi}{\eta^2 \rho^2} - \frac{1}{\eta^2 \rho^2} \frac{(1-\eta)^2}{4} - \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta \rho^2} \frac{1-\eta}{2} \\
& \left. + \frac{2b}{\rho^3} - \frac{2ab}{\rho^3} - bim \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta \rho^3} - \frac{\sigma_\rho b}{\eta \rho^3} \frac{1-\eta}{2} - bim \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta \rho^3} - \sigma_\phi \sigma_\rho \frac{b(1-\eta) \sigma_\phi}{2\eta \rho^3} - \frac{b^2}{\rho^4} - E^2 - d^2 + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \phi(\rho) \quad (92-5)
\end{aligned}$$

برای حل این معادله دیفرانسیل بایستی تابع موج را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\phi(\rho) = e^{g(\rho)} \quad (93-5)$$

و حال با استفاده از روش ansatz که قبلا نیز توضیح داده شد و در نظر گرفتن $g(\rho)$ به

صورت:

$$g(\rho) = \alpha \rho + \beta \ln \rho + \frac{\gamma}{\rho} \quad (94-5)$$

می‌توانیم آن را حل کنیم.

با جایگذاری معادله (۹۴-۵) در معادله (۹۳-۵) و مشتق گرفتن از آن به وضوح داریم:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \rho} = g'(\rho) e^{g(\rho)} = \left(\alpha + \frac{\beta}{\rho} - \frac{\gamma}{\rho^2} \right) e^{g(\rho)} \quad (95-5)$$

9

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} = (g''(\rho) + g'(\rho)g'(\rho)) e^{g(\rho)} = \left(\alpha^2 + \frac{2\alpha\beta}{\rho} + \frac{\beta^2 - \beta - 2\alpha\gamma}{\rho^2} + \frac{2\gamma - 2\beta\gamma}{\rho^3} + \frac{\gamma^2}{\rho^4} \right) e^{g(\rho)} \quad (96-5)$$

حال با جایگذاری معادلات (۹۵-۵) و (۹۶-۵) در معادله (۹۲-۵) داریم:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \frac{2\alpha\beta}{\rho} + \frac{\beta^2 - \beta - 2\alpha\gamma}{\rho^2} + \frac{2\gamma - 2\beta\gamma}{\rho^3} + \frac{\gamma^2}{\rho^4} = -\alpha d - E^2 - d^2 + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \\ - \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho d (1-\eta) \sigma_\phi}{2\eta\rho} - \dim \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta\rho} - \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta\rho} \dim - \frac{2ad}{\rho} - \frac{\alpha a}{\rho} - \alpha \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta\rho} \dim - \alpha \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\rho}{\eta\rho} \\ - \alpha \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta\rho} \dim - \alpha \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta\rho} \sigma_\phi + \frac{\beta d}{\rho} + \frac{a}{\rho^2} - \frac{a^2}{\rho^2} - \frac{2bd}{\rho^2} - \frac{\alpha b}{\rho^2} - a \dim \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta\rho^2} - a(1-\eta) \frac{\sigma_\rho}{2\eta\rho^2} \\ - a \dim \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta\rho^2} + \frac{m^2}{\eta^2 \rho^2} - \frac{\dim(1-\eta) \sigma_\phi}{\eta^2 \rho^2} - \frac{1}{\eta^2 \rho^2} \frac{(1-\eta)^2}{4} - \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta\rho^2} \frac{1-\eta}{2} - \frac{\beta a}{\rho^2} - \frac{\beta \sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta\rho^2} \dim \\ - \frac{1-\eta}{2} \frac{\beta \sigma_\rho}{\eta\rho^2} - \frac{\beta \sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta\rho^2} \dim - \frac{1-\eta}{2} \frac{\beta \sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta\rho^2} \sigma_\phi + \frac{\gamma d}{\rho^2} + \frac{2b}{\rho^3} - \frac{2ab}{\rho^3} - b \dim \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta\rho^3} - \frac{\sigma_\rho b}{\eta\rho^3} \frac{1-\eta}{2} \\ - b \dim \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta\rho^3} - \sigma_\phi \sigma_\rho \frac{b(1-\eta) \sigma_\phi}{2\eta\rho^3} - \frac{\beta b}{\rho^3} + \frac{\gamma a}{\rho^3} + \frac{\gamma}{\rho^3} \frac{\sigma_\rho \sigma_\phi}{\eta} \dim + \frac{\gamma}{\rho^3} \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\rho}{\eta} + \frac{\gamma}{\rho^3} \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta} \dim \\ + \frac{\gamma}{\rho^3} \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\phi \sigma_\rho}{\eta} \sigma_\phi - \frac{b^2}{\rho^4} + \frac{b\gamma}{\rho^4} \end{aligned} \quad (97-5)$$

در نهایت با برابر قرار دادن ضرایب طرفین تساوی معادله (۹۷-۵) توابع موج و همچنین طیف

انرژی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$\alpha^2 = -\alpha d - E^2 - d^2 + \left(\frac{M}{2}\right)^2 \quad (98-5)$$

$$2\alpha\beta = -\frac{\sigma_\phi\sigma_\rho d(1-\eta)\sigma_\phi}{2\eta} - \dim \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} - \frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta} \dim - 2ad - \alpha a - \alpha \frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta} im \\ - \alpha \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\rho}{\eta} - \alpha \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} im - \alpha \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} \sigma_\phi + \beta d \quad (99-5)$$

$$\beta^2 - \beta - 2\alpha\gamma = a - a^2 - 2bd - \alpha b - a im \frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta} - a(1-\eta) \frac{\sigma_\rho}{2\eta} - a im \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} + \frac{m^2}{\eta^2} - \frac{im(1-\eta)\sigma_\phi}{\eta^2} \\ - \frac{1}{\eta^2} \frac{(1-\eta)^2}{4} - \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta} \frac{1-\eta}{2} - \beta a - \frac{\beta\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta} im - \frac{1-\eta}{2} \frac{\beta\sigma_\rho}{\eta} - \frac{\beta\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} im - \frac{1-\eta}{2} \frac{\beta\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} \sigma_\phi + \gamma d \quad (100-5)$$

$$2\gamma - 2\beta\gamma = 2b - 2ab - b im \frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta} - \frac{\sigma_\rho b}{\eta} \frac{1-\eta}{2} - b im \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} - \sigma_\phi\sigma_\rho \frac{b(1-\eta)\sigma_\phi}{2\eta} - \beta b + \gamma a \\ + \gamma \frac{\sigma_\rho\sigma_\phi}{\eta} im + \gamma \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\rho}{\eta} + \gamma \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} im + \gamma \frac{1-\eta}{2} \frac{\sigma_\phi\sigma_\rho}{\eta} \sigma_\phi \quad (101-5)$$

$$\gamma^2 = -b^2 + b\gamma \quad (102-5)$$

۳-۵: حل معادله دی-کی-پی در فضا-زمان Friedmann-Robertson-Walker در ۱+۱

بعد

در این قسمت به بررسی معادله دی-کی-پی در فضای Friedmann-Robertson-Walker

می پردازیم که به صورت خلاصه به آن فضای FRW گفته می شود.

فضای FRW یکی از مهم ترین فضا-زمان ها در فیزیک مخصوصا فیزیک کیهان شناسی و

گرانش می باشد. متریک این فضا در ۱+۱ بعد به صورت زیر می باشد:

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1-kr^2} dr^2 \quad (103-5)$$

در این متریک ابعاد گستره ی جهان با پارامتر $a(t)$ مشخص می شود که به عنوان ضریب اسکالر (scale factor) شناخته می شود. ضریب اسکالر از واحد طول محسوب می شود و اندازه گیری طول جهان را برعهده دارد. ضریب r بدون بعد می باشد و پارامتر k دارای مقادیر $k \in \{-1, 0, 1\}$ است. [۱۷ و ۱۸]

در این متریک ابعاد و اندازه ی منیفلد با ضریب $a(t)$ نشان داده می شود که به عنوان ضریب اسکالر--scale factor نیز معروف است. این ضریب واحد اندازه و فاصله در جهان مد نظر است. [۱۹ و ۲۰].

می دانیم که فرم کلی معادله ی دی-کی-پی برای بوزون های جرم دار به صورت زیر است:

$$\left[i \beta^a (\partial_0 + ieA_a) - M \right] \Psi_k(x) = 0 \quad (۱۰۴-۵)$$

با استفاده از این به فرم به حل آن در فضا-زمان FRW می پردازیم.

حل دقیق معادله ی دی-کی-پی در فضا-زمان FRW در ۱+۱ بعد

در حالت کلی می دانیم که معادله ی دی-کی-پی برای متریک عام در ۱+۱ بعد به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[\frac{1}{c_1} \beta^0 \partial_0 + \frac{1}{c_2} \beta^1 \partial_1 - \frac{1}{c_1} \beta^0 \Sigma_0 - \frac{1}{c_2} \beta^1 \Sigma_1 + i \frac{e}{c_1} \beta^0 A_0 + i \frac{e}{c_2} \beta^1 A_1 + Mi \right] \Psi_k(t, x) = 0 \quad (۱۰۵-۵)$$

حال پارامترهای متریک FRW را وارد می کنیم:

$$\left[\beta^0 (\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)} \beta^1 (\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + Mi \right] \Psi_k(t, x) = 0 \quad (۱۰۶-۵)$$

از آن جا که $\beta^\mu(x) = \gamma^\mu(x) \otimes I + I \otimes \gamma^\mu(x)$ با جایگذاری داریم:

$$\left[(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0)(\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)} (\gamma^1 \otimes I + I \otimes \gamma^0)(\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + Mi \right] \times \Psi_k(t, x) = 0 \quad (107-5)$$

با ضرب کردن طرفین معادله (107-5) در $(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0)$ داریم:

$$\left[(\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0)(\partial_0 - \Sigma_0 + ieA_0) + \frac{\sqrt{1-kr^2}}{a(t)} (\gamma^0 \gamma^1 \otimes \gamma^0 + \gamma^0 \otimes \gamma^0 \gamma^1)(\partial_1 - \Sigma_1 + ieA_1) + Mi (\gamma^0 \otimes I + I \otimes \gamma^0) \right] \times \Psi_k(t, x) = 0 \quad (108-5)$$

مانند قبل گامای دیراک را وابسته به ماتریس پاولی به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (109-5)$$

و نیز $\alpha^1 = \gamma^0 \gamma^1$ را تعریف می کنیم که محاسبه ی آن نشان می دهد:

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad (110-5)$$

اسپینور کانکشن ها برای این حالت به صورت زیر به دست می آیند:

$$\Sigma_0 = 0, \quad \Sigma_1 = -\frac{\dot{a}a}{1-kr^2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & \sigma_1 \\ 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (111-5)$$

که علامت دات به معنای مشتق نسبت به زمان می باشد.

با در نظر گرفتن $a(t) = 0$ اسپینور کانکشن برابر صفر می شود:

$$\Sigma_1 = 0 \quad (112-5)$$

مقادیر پتانسیل اسکالر را به صورت $ieA_\mu = (0, -A(r)\hat{r})$ و تابع موج را به صورت زیر تعریف

می‌کنیم:

$$\Psi_k = (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4)^T$$

با جایگذاری معادلات (109-5)، (111-5) و (112-5) در معادله‌ی (108-5) خواهیم داشت:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \partial_0 + \sqrt{1-kr^2} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 & \sigma_1 & 0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & -\sigma_1 \\ 0 & -\sigma_1 & -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix} (\partial_1 + A(r)) + Mi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix} = 0 \quad (113-5)$$

و یا به عبارتی می‌توانیم فرم ماتریس‌گونه‌ی بالا را به صورت 4 معادله و 4 مجهول به فرم زیر

بنویسیم:

$$(2\partial_0 + Mi)\Psi_1 + \sqrt{1-kr^2}\sigma_1(\partial_1 + A(r))(\Psi_2 + \Psi_3) = 0 \quad (114-5)$$

$$\sqrt{1-kr^2}\sigma_1(\partial_1 + A(r))(\Psi_1 - \Psi_4) - Mi\Psi_2 = 0 \quad (115-5)$$

$$\sqrt{1-kr^2}\sigma_1(\partial_1 + A(r))(\Psi_1 - \Psi_4) - Mi\Psi_3 = 0 \quad (116-5)$$

$$(-2\partial_0 + Mi)\Psi_4 - \sqrt{1-kr^2}\sigma_1(\partial_1 + A(r))(\Psi_2 + \Psi_3) = 0 \quad (117-5)$$

از معادله‌ی (115-5) و (116-5) باز هم به این نتیجه می‌رسیم که مولفه‌ی دوم و سوم تابع

موج با هم برابر هستند:

$$\Psi_2 = \Psi_3 \quad (118-5)$$

حال از ۴ معادله و ۴ مجهول مقادیر توابع موج ها را به دست می آوریم.

با جایگذاری معادله ی (۱۱۸-۵) در معادلات (۱۱۴-۵) و (۱۱۷-۵) خواهیم داشت:

$$\Psi_1 = \frac{-2\sigma_1 \sqrt{1-kr^2} (\partial_1 + A(r))}{(2\partial_0 + Mi)} \Psi_2 \quad (۱۱۹-۵)$$

$$\Psi_4 = \frac{2\sigma_1 \sqrt{1-kr^2} (\partial_1 + A(r))}{(-2\partial_0 + Mi)} \Psi_2 \quad (۱۲۰-۵)$$

سپس با جایگذاری معادلات (۱۱۸-۵)، (۱۱۹-۵) و (۱۲۰-۵) در معادله ی (۱۱۵-۵) به معادله

دیفرانسیل زیر دست پیدا می کنیم:

$$\left\{ \partial_0^2 - (1-kr^2) (\partial_1 + A(r)) (\partial_1 + A(r)) + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \quad (۱۲۱-۵)$$

$$\left\{ \partial_0^2 - (1-kr^2) (\partial_1^2 + A(r)\partial_1 + \partial_1 A(r) + A^2(r)) + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0 \quad (۱۲۲-۵)$$

ابتدا باید قسمت زمانی و مکانی تابع موج را جدا کنیم . پس تابع موج را به صورت

$$\Psi_2 = e^{iEt} \Psi_2(r)$$

در نظر می گیریم و پس از قرار دادن در معادله ی بالا و مشتق گیری نسبت به زمان، معادله ی بالا به معادله ی زیر تقلیل می یابد:

$$\left\{ -E^2 - (1-kr^2) (\partial_1^2 + A(r)\partial_1 + \partial_1 A(r) + A^2(r)) + \left(\frac{M}{2} \right)^2 \right\} \Psi_2 = 0$$

$$\left\{ (\partial_1^2 + \partial_1 A(r) + A(r)\partial_1 + A^2(r)) + \frac{E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2}{1-kr^2} \right\} \Psi_2(r) = 0 \quad (۱۲۳-۵)$$

پتانسیل برداری را به صورت تابعی از مکان و به فرم

$$A(r) = c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r}$$

تعریف می کنیم.

$$\left\{ \partial_1^2 + \partial_1 \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} \right) + \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} \right) \partial_1 \right. \\ \left. + \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} \right)^2 + \frac{E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2}{1 - kr^2} \right\} \Psi_2(r) = 0 \quad (۱۲۴-۵)$$

در ادامه داریم:

$$\left\{ \partial_1^2 + \left(c_1 - \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3 \sqrt{k}}{(1 - \sqrt{k}r)^2} - \frac{c_4 \sqrt{k}}{(1 + \sqrt{k}r)^2} \right) + \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} \right) \partial_1 \right. \\ \left. + \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} \right)^2 + \frac{E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2}{1 - kr^2} \right\} \Psi_2(r) = 0 \quad (۱۲۵-۵)$$

بنابراین:

$$\left\{ \partial_1^2 + c_1 - \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3 \sqrt{k}}{(1 - \sqrt{k}r)^2} - \frac{c_4 \sqrt{k}}{(1 + \sqrt{k}r)^2} + \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} \right) \partial_1 \right. \\ + c_0^2 + c_1^2 r^2 + \frac{c_2^2}{r^2} + \frac{c_3^2}{(1 - \sqrt{k}r)^2} + \frac{c_4^2}{(1 + \sqrt{k}r)^2} + 2c_0 c_1 r + 2c_0 \frac{c_2}{r} + 2c_0 \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} \\ + 2c_0 \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} + 2c_1 c_2 + 2c_1 r \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + 2c_1 r \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} + 2 \frac{c_2}{r} \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} + 2 \frac{c_2}{r} \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} \\ \left. + 2 \frac{c_3}{1 - \sqrt{k}r} \frac{c_4}{1 + \sqrt{k}r} + \frac{E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2}{1 - kr^2} \right\} \Psi_2(r) = 0 \quad (۱۲۶-۵)$$

بعد از تجزیه ی کسر ها معادله ی بالا به صورت زیر به دست می آید:

$$\left\{ \partial_1^2 + c_1 - \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3 \sqrt{k}}{(1 - \sqrt{k} r)^2} - \frac{c_4 \sqrt{k}}{(1 + \sqrt{k} r)^2} + \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k} r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k} r} \right) \partial_1 \right. \\ \left. + \left(c_0 + c_1 r + \frac{c_2}{r} + \frac{c_3}{1 - \sqrt{k} r} + \frac{c_4}{1 + \sqrt{k} r} \right)^2 + \frac{E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2}{2(1 - \sqrt{k} r)} + \frac{E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2}{2(1 + \sqrt{k} r)} \right\} \Psi_2(r) = 0 \quad (127-5)$$

برای حل این معادله بایستی تابع موج را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\Psi_2(r) = \exp \left\{ \frac{-1}{2} \left[c_0 r + \frac{c_1}{2} r^2 + c_2 \ln r + \frac{c_3}{\sqrt{k}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - r \right) + \frac{c_4}{\sqrt{k}} \ln \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + r \right) \right] \right\} U \quad (128-5)$$

که منجر می شود به معادله ی زیر:

$$U'' = - \left\{ \frac{1}{4} (3c_0^2 + 6c_1 c_2 + 2c_1) + \frac{3}{2} c_0 c_1 r + \frac{3}{4} c_1^2 r^2 + \frac{3}{2} (c_0 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3 + c_1 c_4 + c_2 c_4) \frac{1}{r} + \frac{1}{4} (3c_2^2 - 2c_2) \frac{1}{r^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(3c_0 c_3 + E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2 + (3c_1 c_3 + 3c_2 c_3) \sqrt{k} + \frac{3c_3 c_4}{4} \right) \frac{1}{(1 - \sqrt{k} r)} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(3c_0 c_4 + E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2 - (3c_1 c_4 + 3c_2 c_4) \sqrt{k} + \frac{3c_3 c_4}{4} \right) \frac{1}{(1 + \sqrt{k} r)} + \frac{3c_3^2 + 2c_3 \sqrt{k}}{4(1 - \sqrt{k} r)^2} + \frac{3c_4^2 - 2c_4 \sqrt{k}}{4(1 + \sqrt{k} r)^2} \right\} U \quad (129-5)$$

حال برای حل کردن معادله ی بالا باید از روش ansatz استفاده کنیم:

$$U = \exp(g(r)) \quad (130-5)$$

و $g(r)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$g(r) = ar^2 + \beta \ln r + \gamma \ln \frac{1}{1 - \sqrt{k} r} + \eta \ln \frac{1}{1 + \sqrt{k} r} + \lambda r \quad (131-5)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱۳۱-۵) در معادله‌ی (۱۳۰-۵) و سپس دوبار مشتق گرفتن از آن به

نتیجه‌ی زیر می‌رسیم:

$$U'' = [g''(r) + g'^2(r)]U \quad (132-5)$$

با انجام محاسبات خواهیم داشت:

$$g''(r) + g'^2(r) = \lambda^2 + 4\alpha\beta + 2\alpha - 4\alpha\gamma - 4\alpha\eta + 4\alpha\lambda r + 4\alpha^2 r^2 + \frac{2\beta\lambda + 2\beta\gamma\sqrt{k} - 2\beta\eta\sqrt{k}}{r} \\ + \frac{\beta^2 - \beta}{r^2} + \frac{4\alpha\gamma + 2\beta\gamma k + 2\gamma\lambda\sqrt{k} - \gamma\eta k}{1 - \sqrt{k}r} + \frac{4\alpha\eta + 2\beta\eta k - 2\eta\lambda\sqrt{k} - \gamma\eta k}{1 + \sqrt{k}r} + \frac{\gamma^2 k + \gamma k}{(1 - \sqrt{k}r)^2} + \frac{\eta^2 k + \eta k}{(1 + \sqrt{k}r)^2} \quad (133-5)$$

در نتیجه می‌توان با مقایسه‌ی ضرایب دو طرف معادله‌ی (۱۳۳-۵)، به ضرایب معادله‌ی (۳۴-۵) پی برد و پس از آن جواب به صورت واضحی قابل دریافت است:

$$4\alpha^2 = \frac{-3}{4}c_1^2 \rightarrow \alpha = \frac{i\sqrt{3}}{4}c_1 \quad (134-5)$$

$$\beta^2 - \beta = \frac{-1}{4}(3c_2^2 - 2c_2) \rightarrow \beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 3c_2^2 - 2c_2}}{2} \quad (135-5)$$

$$\gamma^2 k + \gamma k = \frac{-1}{4}(3c_3^2 + 2c_3\sqrt{k}) \rightarrow \gamma = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{3c_3^2 + 2c_3\sqrt{k}}{k}}}{2} \quad (136-5)$$

$$\eta^2 k + \eta k = \frac{-1}{4}(3c_4^2 - 2c_4\sqrt{k}) \rightarrow \eta = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{3c_4^2 - 2c_4\sqrt{k}}{k}}}{2} \quad (137-5)$$

$$4\alpha\lambda = \frac{-3}{2}c_0c_1 \rightarrow \lambda = \frac{i\sqrt{3}}{2}c_0 \quad (138-5)$$

قیدهای محدود کننده نیز به صورت زیر است:

$$4\alpha\gamma + 2\beta\gamma k + 2\gamma\lambda\sqrt{k} - \gamma\eta k = \frac{-1}{2} \left(3c_0c_3 + E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2 + 3\sqrt{k} (c_1c_3 + c_2c_3) + \frac{3c_3c_4}{4} \right) \quad (139-5)$$

$$4\alpha\eta + 2\beta\eta k - 2\eta\lambda\sqrt{k} - \gamma\eta k = \frac{-1}{2} \left(3c_0c_4 + E^2 - \left(\frac{M}{2} \right)^2 - 3\sqrt{k} (c_1c_4 + c_2c_4) + \frac{3c_3c_4}{4} \right) \quad (140-5)$$

$$2\beta\lambda + 2\beta\gamma\sqrt{k} - 2\beta\eta\sqrt{k} = \frac{-3}{2} (c_0c_2 + c_1c_3 + c_2c_3 + c_1c_4 + c_2c_4) \quad (141-5)$$

$$\lambda^2 + 4\alpha\beta + 2\alpha - 4\alpha\gamma - 4\alpha\eta = \frac{-1}{4} (3c_0^2 + 6c_1c_2 + 2c_1) \quad (142-5)$$

حال با جایگذاری این ضرایب در معادله جواب به دست می‌آید.

فصل ششم:

معادله ی دی-کی-پی برای اسپین

یک و فرم ده مولفه ای آن

۶-۱: بررسی معادله‌ی دی-کی-پی و بسط فرم ده مولفه‌ای

همانطور که می‌دانیم فرم کلی معادله‌ی دی-کی-پی بدون پتانسیل به صورت زیر است:

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m - A_\mu) \Psi = 0 \quad (۱-۶)$$

حال اگر چاربردار پتانسیل را به صورت $A_\mu = i [P, \beta^i] A_i$ در نظر بگیریم داریم:

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m - i [P, \beta^i] A_i) \Psi = 0 \quad (۲-۶)$$

$$\left[\beta^0 E + i \beta^i \partial_i - (m + i [P, \beta^i] A_i) \right] \phi = 0 \quad (۳-۶)$$

$$\left[\beta^0 \partial_0 + \beta^i \partial_i - [P, \beta^i] A_i + mi \right] \phi = 0 \quad (۴-۶)$$

تعاریف ماتریس‌های بتا برای اسپین یک به صورت زیر است

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & I & 0 \\ \bar{0}^T & I & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۵-۶)$$

$$\beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & -is_i \\ -e_i^T & 0 & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & -is_i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6-6)$$

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & s_i & 0 & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & s_i & 0 \\ \bar{0}^T & 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} \quad (۷-۶)$$

که در آن داریم [۲۱]

$$(s_i)_{jk} = -i \varepsilon_{ijk} \quad (۸-۶)$$

$$P = \beta^\mu \beta_\mu - 2 = \text{diag} (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (۹-۶)$$

$$\Psi^T = (\Psi_1, \dots, \Psi_{10}) \quad (۱۰-۶)$$

حال با استفاده از فرم ماتریسی معادلات بالا به ده معادله و ده مجهول دست پیدا می‌کنیم که به صورت زیر است:

$$(\partial_1 - A_1) \Psi_5 + mi \Psi_1 = 0 \quad (۱۱-۶)$$

$$\partial_0 \Psi_5 + mi \Psi_2 = 0 \quad (۱۲-۶)$$

$$\partial_0 \Psi_6 - (\partial_1 - A_1) \Psi_{10} + mi \Psi_3 = 0 \quad (۱۳-۶)$$

$$\partial_0 \Psi_7 + (\partial_1 - A_1) \Psi_9 + mi \Psi_4 = 0 \quad (۱۴-۶)$$

$$\partial_0 \Psi_2 - (\partial_1 + A_1) \Psi_1 + mi \Psi_5 = 0 \quad (۱۵-۶)$$

$$\partial_0 \Psi_3 + mi \Psi_6 = 0 \quad (۱۶-۶)$$

$$\partial_0 \Psi_4 + mi \Psi_7 = 0 \quad (۱۷-۶)$$

$$mi \Psi_8 = 0 \quad (۱۸-۶)$$

$$-(\partial_1 + A_1) \Psi_4 + mi \Psi_9 = 0 \quad (۱۹-۶)$$

$$(\partial_1 + A_1) \Psi_3 + mi \Psi_{10} = 0 \quad (۲۰-۶)$$

می‌توان این معادلات را در یک معادله به صورت زیر خلاصه کرد:

$$(\partial_0^2 - D_1^{(-\sigma)} D_1^{(\sigma)} + m^2) \Psi_1^{(\sigma)} = 0 \quad (۲۱-۶)$$

که در آن:

$$D_1^{(\sigma)} = \partial_1 + \sigma A_1 \quad (22-6)$$

مقدار σ برابر با + یا - است.

همچنین:

$$\Psi_I^{(+)} = \begin{pmatrix} \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}, \Psi_I^{(-)} = \Psi_5 \quad (23-6)$$

$$\Psi_{II}^{(+)} = \begin{pmatrix} \Psi_6 \\ \Psi_7 \end{pmatrix}, \Psi_{II}^{(-)} = \Psi_2 \quad (24-6)$$

$$\Psi_{III}^{(+)} = \begin{pmatrix} \Psi_{10} \\ -\Psi_9 \end{pmatrix}, \Psi_{III}^{(-)} = \Psi_1 \quad (25-6)$$

و رابطه‌ی بین تابع موج‌ها به صورت زیر است:

$$\Psi_{II}^{(\sigma)} = \frac{i}{m} \partial_0 \Psi_I^{(\sigma)} \quad (26-6)$$

$$\Psi_{III}^{(\sigma)} = \frac{i}{m} D_1^{(\sigma)} \Psi_I^{(\sigma)} \quad (27-6)$$

فرمول اصلی یعنی معادله‌ی (۲۱-۶) را می‌توان به فرم ساده‌تر زیر نوشت:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + k_\sigma^2 \right) \phi_1^{(\sigma)} = 0 \quad (28-6)$$

که در آن:

$$k_\sigma^2 = E^2 - m^2 - A_1^2 + \sigma \frac{dA_1}{dx} \quad (29-6)$$

و هم‌چنین:

$$\phi_{II}^{(\sigma)} = \frac{E}{m} \phi_1^{(\sigma)} \quad (30-6)$$

$$\phi_{III}^{(\sigma)} = \frac{i}{m} \left(\frac{d}{dx} + \sigma A_1 \right) \phi_1^{(\sigma)} \quad (31-6)$$

$$\phi_8 = 0 \quad (32-6)$$

۶-۲: پراکندگی بوزون‌های اسپین یک با پتانسیل دو پله‌ای

حال به بررسی پتانسیل دو پله‌ای یا همان Double step potential در معادله می‌پردازیم.

همانطور که می‌دانیم فرم ساده از این پتانسیل به صورت زیر است:

$$A_1(x) = V_0 [\theta(x-a) - \theta(-x-a)] \quad (33-6)$$

با قرار دادن آن در معادله‌ی اصلی داریم:

$$\frac{d^2 \phi_1^{(\sigma)}}{dx^2} + \{E^2 - m^2 + \sigma V_0 [\delta(x-a) + \delta(x+a)] - V_0^2 [\theta(x-a) + \theta(-x-a)]\} \phi_1^{(\sigma)} = 0 \quad (34-6)$$

که در آن:

$$\delta(x) = \frac{d\theta(x)}{dx}$$

که رابطه‌ی بالا دلتای دیراک است.

پراکندگی

حال توجه‌مان را به قسمت پراکندگی معطوف می‌کنیم.

هدف اصلی ما شناسایی رفتار بوزون‌هایی است که انرژی دریافت می‌کنند. مشکل اصلی ما این است که بوزون‌ها بعد از واکنش چگونه از حرکت باز می‌ایستند. تابع موج‌هایی که حرکت ذره از سمت راست را توجیه می‌کند به صورت زیر است:

$$\begin{cases} A^{\sigma} e^{i\eta \frac{x}{a}} + B^{\sigma} e^{-i\eta \frac{x}{a}} & x < -a \\ C^{\sigma} e^{i\zeta \frac{x}{a}} + D^{\sigma} e^{-i\zeta \frac{x}{a}} & |x| < a \\ F^{\sigma} e^{i\eta \frac{x}{a}} & x > a \end{cases} \quad (35-6)$$

که:

$$\zeta = a\sqrt{E^2 - m^2} \quad \eta = \sqrt{\zeta^2 - \nu^2} \quad \nu = aV_0 \quad (36-6)$$

۶-۲-۱: محاسبه‌ی ضرایب عبور و بازتابش

برای به دست آوردن ضرایب عبور و بازتابش باید شرایط مرزی را اعمال کنیم. برای شرایط مرزی در مشتق‌ها باید از معادله‌ی اصلی انتگرال بگیریم.

شرایط مرزی را به صورت زیر می‌نویسیم:

در نقطه‌ی $x = -a$:

$$A^{\sigma} e^{i\eta \frac{x}{a}} + B^{\sigma} e^{-i\eta \frac{x}{a}} = C^{\sigma} e^{i\zeta \frac{x}{a}} + D^{\sigma} e^{-i\zeta \frac{x}{a}} \quad (37-6)$$

$$\int \frac{d^2 \phi_1^{(\sigma)}}{dx^2} + \left\{ \int E^2 - m^2 + \int \sigma V_0 [\delta(x-a) + \delta(x+a)] - \int V_0^2 [\theta(x-a) + \theta(-x-a)] \right\} \phi_1^{(\sigma)} = 0 \quad (38-6)$$

در نقطه‌ی $x = a$:

$$C^{\sigma} e^{i\zeta \frac{x}{a}} + D^{\sigma} e^{-i\zeta \frac{x}{a}} = F^{\sigma} e^{i\eta \frac{x}{a}} \quad (39-6)$$

$$\int \frac{d^2 \phi_1^{(\sigma)}}{dx^2} + \left\{ \int E^2 - m^2 + \int \sigma V_0 [\delta(x-a) + \delta(x+a)] - \int V_0^2 [\theta(x-a) + \theta(-x-a)] \right\} \phi_1^{(\sigma)} = 0 \quad (40-6)$$

در نتیجه پس از محاسبه داریم:

$$A^\sigma e^{-i\eta} + B^\sigma e^{i\eta} = C^\sigma e^{-i\zeta} + D^\sigma e^{i\zeta} \quad (41-6)$$

$$C^\sigma i \zeta e^{-i\zeta} - D^\sigma i \zeta e^{i\zeta} - A^\sigma i \eta e^{-i\eta} + B^\sigma i \eta e^{i\eta} + \sigma v A^\sigma e^{-i\eta} + \sigma v B^\sigma e^{i\eta} = 0 \quad (42-6)$$

$$C^\sigma e^{i\zeta} + D^\sigma e^{-i\zeta} = F^\sigma e^{i\eta} \quad (43-6)$$

$$F^\sigma i \eta e^{i\eta} - C^\sigma i \zeta e^{i\zeta} + D^\sigma i \zeta e^{-i\zeta} + \sigma v F^\sigma e^{i\eta} = 0 \quad (44-6)$$

می خواهیم ضرایب عبور و بازتابش را حساب کنیم.

از معادله ی (43-6) داریم:

$$F^\sigma = \frac{C^\sigma e^{i\zeta} + D^\sigma e^{-i\zeta}}{e^{i\eta}} \quad (45-6)$$

با قرار دادن معادله ی (45-6) در معادله ی (44-6) داریم:

$$(C^\sigma e^{i\zeta} + D^\sigma e^{-i\zeta}) i \eta - C^\sigma i \zeta e^{i\zeta} + D^\sigma i \zeta e^{-i\zeta} + \sigma v (C^\sigma e^{i\zeta} + D^\sigma e^{-i\zeta}) = 0 \rightarrow$$

$$C^\sigma i \eta e^{i\zeta} + D^\sigma i \eta e^{-i\zeta} - C^\sigma i \zeta e^{i\zeta} + D^\sigma i \zeta e^{-i\zeta} + C^\sigma \sigma v e^{i\zeta} + D^\sigma \sigma v e^{-i\zeta} = 0 \rightarrow$$

$$C^\sigma i \eta e^{i\zeta} - C^\sigma i \zeta e^{i\zeta} + C^\sigma \sigma v e^{i\zeta} = -D^\sigma \sigma v e^{-i\zeta} - D^\sigma i \zeta e^{-i\zeta} - D^\sigma i \eta e^{-i\zeta} \rightarrow$$

$$C^\sigma e^{i\zeta} (i \eta - i \zeta + \sigma v) = D^\sigma e^{-i\zeta} (-\sigma v - i \zeta - i \eta) \rightarrow$$

$$D^\sigma = C^\sigma e^{2i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i \sigma v}{\zeta + \eta - i \sigma v} \quad (46-6)$$

حال این معادله را در معادله‌ی (۴۱-۶) قرار می‌دهیم:

$$A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta} = C^{\sigma}e^{-i\zeta} + D^{\sigma}e^{i\zeta} \rightarrow$$

$$A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta} = C^{\sigma}e^{-i\zeta} + C^{\sigma}e^{2i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu} e^{i\zeta} \rightarrow$$

$$C^{\sigma} = \frac{A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta}}{e^{-i\zeta} + e^{3i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} \quad (۴۷-۶)$$

با جایگذاری معادلات (۴۶-۶) و (۴۷-۶) در معادله‌ی (۴۲-۶) داریم:

$$C^{\sigma}i\zeta e^{-i\zeta} - D^{\sigma}i\zeta e^{i\zeta} - A^{\sigma}i\eta e^{-i\eta} + B^{\sigma}i\eta e^{i\eta} + \sigma\nu A^{\sigma}e^{-i\eta} + \sigma\nu B^{\sigma}e^{i\eta} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta}}{e^{-i\zeta} + e^{3i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} i\zeta e^{-i\zeta} - \frac{A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta}}{e^{-i\zeta} + e^{3i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} e^{2i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu} i\zeta e^{i\zeta} - A^{\sigma}i\eta e^{-i\eta}$$

$$+ B^{\sigma}i\eta e^{i\eta} + \sigma\nu A^{\sigma}e^{-i\eta} + \sigma\nu B^{\sigma}e^{i\eta} = 0 \rightarrow$$

$$i\zeta \frac{A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta}}{1 + e^{4i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} - i\zeta \frac{A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta}}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta + \eta - i\sigma\nu}{\zeta - \eta + i\sigma\nu} + 1} - A^{\sigma}i\eta e^{-i\eta} + B^{\sigma}i\eta e^{i\eta} + \sigma\nu A^{\sigma}e^{-i\eta} + \sigma\nu B^{\sigma}e^{i\eta} = 0 \rightarrow$$

$$\left(A^{\sigma}e^{-i\eta} + B^{\sigma}e^{i\eta} \right) \left(\frac{i\zeta}{1 + e^{4i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} - \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta + \eta - i\sigma\nu}{\zeta - \eta + i\sigma\nu} + 1} + \sigma\nu \right) - A^{\sigma}i\eta e^{-i\eta} + B^{\sigma}i\eta e^{i\eta} = 0 \rightarrow$$

$$\left(B^{\sigma}e^{i\eta} \right) \left(\frac{i\zeta}{1 + e^{4i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} - \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta + \eta - i\sigma\nu}{\zeta - \eta + i\sigma\nu} + 1} + \sigma\nu + i\eta \right) =$$

$$A^{\sigma}e^{-i\eta} \left(i\eta - \frac{i\zeta}{1 + e^{4i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} + \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta + \eta - i\sigma\nu}{\zeta - \eta + i\sigma\nu} + 1} - \sigma\nu \right) \rightarrow$$

$$\frac{B^\sigma}{A^\sigma} = e^{-2i\eta} \frac{i\eta - \frac{i\zeta}{1+e^{4i\zeta} \frac{\zeta-\eta+i\sigma\nu}{\zeta+\eta-i\sigma\nu}} + \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta+\eta-i\sigma\nu}{\zeta-\eta+i\sigma\nu} + 1} - \sigma\nu}{\frac{i\zeta}{1+e^{4i\zeta} \frac{\zeta-\eta+i\sigma\nu}{\zeta+\eta-i\sigma\nu}} - \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta+\eta-i\sigma\nu}{\zeta-\eta+i\sigma\nu} + 1} + \sigma\nu + i\eta} \quad (48-6)$$

برای محاسبه‌ی ضریب عبور به صورت زیر عمل می‌کنیم:

ابتدا معادله‌ی (46-6) را در معادله‌ی (43-6) قرار می‌دهیم:

$$C^\sigma e^{i\zeta} \left(1 + \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu} \right) = F^\sigma e^{i\eta} \quad (49-6)$$

حال معادله‌ی (47-6) را در معادله‌ی بالا قرار می‌دهیم:

$$\frac{A^\sigma e^{-i\eta} + B^\sigma e^{i\eta}}{e^{-i\zeta} + e^{3i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} e^{i\zeta} \left(1 + \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu} \right) = F^\sigma e^{i\eta} \quad (50-6)$$

$$\frac{A^\sigma e^{-i\eta} + B^\sigma e^{i\eta}}{e^{-2i\zeta} + e^{2i\zeta} \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu}} \left(1 + \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu} \right) = F^\sigma e^{i\eta} \quad (51-6)$$

اکنون رابطه‌ی مربوط به A و B را قرار می‌دهیم:

$$A^\sigma e^{-i\eta} \frac{\left(i\eta - \frac{i\zeta}{1+e^{4i\zeta} \frac{\zeta-\eta+i\sigma\nu}{\zeta+\eta-i\sigma\nu}} + \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta+\eta-i\sigma\nu}{\zeta-\eta+i\sigma\nu} + 1} - \sigma\nu \right)}{1 + \frac{\frac{i\zeta}{1+e^{4i\zeta} \frac{\zeta-\eta+i\sigma\nu}{\zeta+\eta-i\sigma\nu}} - \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta+\eta-i\sigma\nu}{\zeta-\eta+i\sigma\nu} + 1} + \sigma\nu + i\eta}} \left(1 + \frac{\zeta - \eta + i\sigma\nu}{\zeta + \eta - i\sigma\nu} \right) = F^\sigma e^{i\eta} \quad (52-6)$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{F^\sigma}{A^\sigma} = \frac{e^{-2i\eta} \left(1 + \frac{i\eta - \frac{i\zeta}{1+e^{4i\zeta} \frac{\zeta-\eta+i\sigma v}{\zeta+\eta-i\sigma v}} + \frac{i\zeta}{e^{-4i\zeta} \frac{\zeta+\eta-i\sigma v}{\zeta-\eta+i\sigma v} + 1} - \sigma v \right)}{\frac{e^{-2i\zeta} + e^{2i\zeta} \frac{\zeta-\eta+i\sigma v}{\zeta+\eta-i\sigma v}}{\frac{\zeta-\eta+i\sigma v}{\zeta+\eta-i\sigma v}}} \left(1 + \frac{\zeta-\eta+i\sigma v}{\zeta+\eta-i\sigma v} \right)$$

(۵۳-۶)

نتیجه گیری

در فصل اول نظریه ی Duffin-Kemmer-Petiau از لحاظ تاریخی روند توسعه و پیشرفت، مورد مطالعه قرار گرفت و از آن جا که این معادله برای ذرات بنیادی به کار می رود به معرفی انواع ذرات بنیادی از قبیل هادرون ها که خود شامل باریون ها و مزون ها بودند پرداختیم. هم چنین در این فصل با مفهوم فضا-زمان و به تبع آن فضا-زمان خمیده آشنا شدیم و تاثیر گرانش را بر فضا-زمان مشاهده کردیم.

در فصل دوم با خصوصیات ریاضی و جبری معادله ی DKP آشنا شدیم و دیدیم که می توان آن ها را در سه حالت مختلف ماتریسی نشان داد که نمایش یک مولفه ای یک حالت کلی، نمایش پنج مولفه ای برای ذرات اسپین صفر و نمایش ده مولفه ای برای ذرات اسپین یک به کار می رود. این سه نمایش را به طور ضمنی نشان دادیم.

در فصل سوم معادله ی DKP را برای پتانسیل های مختلف به صورت دقیق حل کردیم. ابتدا پتانسیل Cusp را درون معادله ی DKP قرار دادیم و پس از محاسبات پیچیده به فرم معادله ی دیفرانسیل ویتکر رسیدیم که جواب های آن بر حسب توابع فوق هندسی را می دانیم. در نهایت نیز پراکندگی و ضرایب عبور و بازتابش را محاسبه کردیم و مشاهده شد که جمع ضریب عبور و بازتابش یک است. سپس این معادله را برای پتانسیل وود-ساکسون و بعد از آن برای پتانسیل هولسن تعمیم یافته با همان روند ادامه دادیم و به همان نتایج مطلوب رسیدیم.

به دلیل اهمیت فضا-زمان ها و متریک های مختلف مربوط به فضا-زمان در فصل چهارم به بررسی اجمالی چندین فضا-زمان مهم و متریک های مربوط به آنان پرداختیم از جمله فضا-زمان مینکوفسکی که مهم ترین فضا-زمان است. هم چنین اسپینور کانکشن ها را برای یک حالت کلی

محاسبه کردیم که با دانستن فضا-زمانی خاص و متریک آن و جایگذاری در حالت کلی به راحتی اسپینور کانکشن برای هر فضایی به دست می‌آید.

در فصل پنجم به مهم‌ترین هدف پرداخته‌ایم یعنی حل معادله‌ی DKP در فضا-زمان‌های خمیده. این معادله را برای فضا-زمان‌های ریمانی در $1+1$ بعد که در واقع یک حالت کلی است، فضا-زمان Cosmic String در $1+2$ بعد که یکی از مهم‌ترین فضا-زمان‌ها در فیزیک است در دو حالت متفاوت و هم‌چنین فضا-زمان Friedmann-Robertson-Walker در $1+1$ بعد که مهم‌ترین فضا-زمان در کیهان‌شناسی و نجوم است و اکثراً سیاهچاله‌ها با این فضا-زمان توصیف می‌شوند بررسی و حل کردیم.

از آن جایی که فرم ده مولفه‌ای معادله‌ی DKP که برای ذرات اسپین یک به کار می‌رود دارای پیچیدگی ریاضی است در فصل ششم به آشنایی بیشتر با این فرم از معادلات پرداختیم و ریاضیات آن را کمی ساده‌تر و به صورت فشرده و کلی‌تر بیان کردیم. هم‌چنین پراکندگی بخش اسپین یک بوزون‌ها را تحت تاثیر یکی از مهم‌ترین پتانسیل‌ها یعنی پتانسیل دو پله‌ای بررسی کردیم و در نهایت با به دست آوردن ضرایب عبور و بازتابش کار خود را به پایان رساندیم.

- [١] V. M. Villalba and C. Rojas, Phys. Lett. A 362 (2007) 21.
- [٢] V. M. Villalba and C. Rojas, Int. J. Mod. Phys. A 21 (2006) 313.
- [٣] R.J. Duffin, Phys. Rev. Lett. 54, 1114 (1938)
- [٤] N. Kemmer, Proc. R. Soc. A 173, 91 (1939)
- [٥] G. Petiau, Mém. Cl. Sci., Acad. R. Belg., Coll. 8 16(2) (1936)
- [٦] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics: *WaveEquations*, 3rd Ed. Springer, Berlin(2000).
- [٧] Y. Nedjadi and R. C. Barret, J. Phys. G 19, 87 (1993)
- [٨] Y. Nedjadi and R. C. Barret, J. Math. Phys. 35, 4517 (1994).
- [٩] H. Motavalli et.al Int J Theor Phys (2011) 50:3390–3397
- [١٠] K. Sogut and A. Havare, Phys. Scr. 82 (2010) 045013.
- [١١] H. Yanar, A. Havare and K. Sogut, Adv. High Energy Phys., Volume 2014, Article ID 840907, 9 pages.
- [١٢] H. Yanar et.al Advances in High Energy Physics Volume 2014, Article ID 840907, 9 pages
- [١٣] Taylan Yetkin and Ali Havare, CHINESE JOURNAL OF PHYSICS VOL. 41 , NO. 5.
- [١٤] H. Hassanabadi and A. A. Rajabi, Few-Body Syst (2007) 41: 201–210
- [١٥] A. Vilenkin, Phys. Rep. 121, 263 (1985)
- [١٦] C. Tezcan and R Sever Int. J. Theor. Phys. 48 337 (2009)
- [١٧] A. Friedmann, Über die Möglichkeit einer Weit mit konstanter negative Krümmung des Raumes, Zeitschrift fr Physik A 21 (1) (1924) 326-332; G.Lemaitre, L’Univers en expansion, Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles A 53 (1933)

51-56; H. P. Robertson, Kinematics and world structure, *Astrophys. J.* 82 (1935) 284;
A. G. Walker, *Proceedings of the London Mathematical Society* 2 42 (1) (1937) 90-127.

[18] M. U. Dogru and D. Baykal. arxiv:1209.6328v1 (2012)

[19] Bosons and Fermions in curved spacetime, Dag-Morten Sostrom, NTNU-Trondheim, Norwegian University of Science and Technology

[20] A. Pradhan, V. K. Yadav, I. Chakrabarty and D. V. Ahluwalia, Bulk viscous FRW cosmology in Lyra geometry, *Int. J. Mod. Phys. D* 10 (03) (2001) 339349.

[21] B. Vijayalakshmi, M. Seetharaman, and P. M. Mathews, *J. Phys. A* 12, 665 (1979).

Abstract

The Duffin-Kemmer-Petiau equation describe spin zero and spin one particle. Historically this equation in 1930 by three physicist named Duffin- Kemmer and Petiau. This matrix can display three forms,one, five and ten components. Solutions of this equation are great importance in theoretical physics as such bosons are frequently present in many areas of physics including cosmology, meson spectroscopy and nuclear Hadron interaction. So the particles like photons, gluons, mesons, excitons, can be considered by DKP equation. In chapter one we discussed about DKP theory and spacetime. In chapter two we have explained about the properties of DKP formalism. In chapter three we have solved the DKP equation for different potential. For example Cusp, Woods-Saxon and modified Hulthen potential. So in this chapter we have calculated the bosons scattering in the presence of above potential. In chapter four we have studied the space-time and curved space-time. In this chapter we have introduced different space-time. In chapter five we have solved DKP equation in famous space-time as can be note Reimannain space-time, Cosmic String and Friedmann-Robertson-Walker. And finally in chapter six we have studied Duffin-Kemmer-Petiau equation for spin one and we have showed the form of ten components.

KEY WORDS: DKP equation, Cusp potential, Woods-Saxon potential, Modified Hulthen potential, curved space-time, Double step potential



University of Shahrood

Faculty of Physics

The D-K-P equation by considering curved space-time affects

Maghsood Darroodi

Supervisors

Dr. Hassan Hassanabadi

Dr. Nasrin Salehi

september 2015