بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

# ذرات در فضای ناجابجایی وابسته به زمان


دانشجو: **فاطمه حسینی**

استاد راهنما:

**دکتر حسن حسن آبادی**


پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور۱۳۹۴

پیوست شماره ۲

## دانشگاه صنعتی شاهرود

### دانشکده : فیزیک

### گروه : گروه هسته‌ای

**پایان نامه کارشناسی ارشد خانم فاطمه حسینی به شماره دانشجویی: ۹۲۱۶۶۷۴**

**تحت عنوان: ذرات در فضای ناجابجایی وابسته به زمان**

در تاریخ ۱۳۹۴/۶/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی......... مورد پذیرش قرار گرفت.

| اساتید راهنما | امضاء | اساتید مشاور | امضاء |
|---|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی | | نام و نام خانوادگی : | |
| نام و نام خانوادگی : | | نام و نام خانوادگی : | |

| اساتید داور | امضاء | نماینده تحصیلات تکمیلی | امضاء |
|---|---|---|---|
| نام و نام خانوادگی : دکتر حسین توکلی عنبران | | نام و نام خانوادگی : دکتر حسین موحدیان | |
| نام و نام خانوادگی : دکتر مسلم سوهانی | | | |
| | | | |
| | | | |

# تشکر و قدردانی

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند. لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی رسید. ابتدا از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی که در کمال سعه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند صمیمانه تشکر می کنم. سپاس بیکران بر همدلی و همراهی و هم گامی مادر دلسوز و مهربانم که سجده ی ایثارش گل محبت را در وجودم پروراند و دامان گهربارش لحظه های مهربانی را به من آموخت، مادری که تار مویی از او بپای من سیاه نماند و از هیچ محبت و حمایتی در سالیان تحصیلم دریغ ننمود. سپاس فراوان از سنگ صبور سالهای دوری و تنهایی من که جلوه ای از محبت خدا ست، خواهر واژه ای آشنا برای یک عمر همراهی و همدلی. تشکر از برادران عزیز و همراهان همیشگی و پشتوانه های زندگیم. و در آخر از دوست مهربان و صبورم خانم افشاردوست که تکیه گاه خوبی برای من در سال های تحصیلم بود سپاسگزارم.

# تعهد نامه

اینجانب فاطمه حسینی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک- هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه ذرات در فضای ناجابجایی وابسته به زمان تحت راهنمائی دکتر حسن حسن آبادی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « University of Shahrood» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ ۱۳۹۴/۶/۳۰

امضای دانشجو

**مالکیت نتایج و حق نشر**

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است ) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## چکیده

فضای ناجابجایی را می‌توان به صورت تعمیمی از فضای جابجایی معمول در نظر گرفت که روابط جابجایی بین عملگرها در این فضا براساس جبر دگرگون شده هایزنبرگ بیان می‌شود. از طرفی توجیح و تطبیق بهتر بین داده‌های تئوری و تجربی در برخی پدیده‌ها مانند اثر هال و حذف کمیت‌های واگرا ایجاد شده در نظریه‌ی میدان، دلایلی بر معرفی فضای ناجابجایی بود. در این چارچوب به بررسی اثر پارامترهای ناجابجایی بر سیستم‌های فیزیکی از جمله ذره آزاد، نوسانگر هماهنگ، اثر کوانتومی هال و سیستم‌های سه ذره‌ای می پردازیم. تابع توزیع ویگنر را به عنوان تابع توزیعی در فضای فاز کوانتومی که بیان کننده توزیع احتمال همزمان در مکان و تکانه (به گونه‌ای که هیچ تناقضی با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ ندارد) است، بررسی می‌کنیم. بنابراین با استفاده از تابع توزیع ویگنر می‌توان مکانیک کوانتومی و کلاسیک را که هر دو در یک فضا بیان می‌شوند مقایسه کرد. در آخر با معرفی روش ناوردایی پویا به بررسی مسایل در فضای ناجابجایی وابسته به زمان می‌پردازیم.



کلمات کلیدی: فضای ناجابجایی، ذره آزاد، اثر کوانتومی هال، سیستم سه ذره‌ای، معادله‌ی دیراک، معادله‌ی شرودینگر، تابع توزیع ویگنر، فضای ناجابجایی وابسته به زمان.

**لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:**

۱. Fateme Hoseini, Kai Ma and Hassan Hassanabadi, Motion of Nonrelativistic Quantum Particle in Non-commutative Phase Space, Chin. Phys. Lett. Vol.۳۲, No.۱۰ (۲۰۱۵).

۲. H. Hassanabadi, F. Hoseini and S. Zarrinkamar, A Generalized Interaction Noncommutative Space; Both Relativistic and Nonrelativistic Fields, accepted for publication in Epj Plus Journal.

## فهرست مطالب

**عنوان** **صفحه**

**فهرست اشکال:**

# فصل اول

# مقدمه‌ای بر فضای ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی

از جمله مسائل اساسی که فیزیکدانان نظری با آن مواجه هستند ماهیت فضا- زمان است که با مسئله وحدت برهم‌کنش‌های بنیادی ارتباط دارد و برخی فیزیکدانان فضای ناجابجایی را چارچوب مناسبی برای وحدت برهمکنش‌های شامل نیروی گرانشی می‌دانند. وجود چنین فضا- زمانی اولین بار توسط بنیانگذار مکانیک کوانتومی، هایزنبرگ[۱] در سال ۱۹۳۰ پیشنهاد شد و ریاضیات آن توسط آلن کن[۲] پایه‌گذاری شد. بررسی فضا با جبر ناجابجایی، که این نوع جبر یکی از شاخه‌های جبر مجرد را شامل می‌شود، در این پایان‌نامه مد نظر است. ابتدا تاریخچه‌ای از این فضا را ارائه خواهیم کرد و در ادامه به توصیف فضای ناجابجایی به عنوان حالت خاصی از فضای مکانیک کوانتومی معمول می‌پردازیم.

## ۱-۱ تاریخچه‌ی فضای ناجابجایی[۳]

هندسه‌ی فضا-زمان ناجابجایی یک ایده قدیمی در فیزیک و ریاضیات است و مربوط به سال‌های ۱۹۴۰-۱۹۳۰، هنگامی که شرودینگر[۴] و هایزنبرگ احتمال وجود چنین فضایی را درگزارشی به رادولف پیرلز[۵] اعلام کردند. در این گزارش هایزنبرگ معترف بود که ریاضیات کافی برای بررسی و تحقیق نتایج فیزیکی این احتمال را نمی‌داند. پیرلز ایده معرفی شده توسط هایزنبرگ را به والفگنگ پائولی[۶] و پائولی این مطلب را با هارتلند اسنایدر[۷] مطرح کرد. در واقع ناجابجایی فضا-زمان اولین بارتوسط بنیانگذار مکانیک کوانتومی، هایزنبرگ پیشنهاد شد و او اولین کسی بود که تعمیم ناجابجایی بین مولفه‌های مکان را به عنوان یک روش مناسب جهت حذف کمیت‌های نامتناهی که درتئوری‌های میدان ظاهر می‌شد، مطرح کرد. اولین مقاله دراین زمینه توسط هارتلند اسنایدر در سال ۱۹۴۷ منتشر شد. در همین سال اسنایدر یک ساختار ناجابجایی فضا-زمان در یک مقیاس بسیار کوچک در نظریه میدان، بدون نقض ناوردایی لورنتز را معرفی کرد که معتقد بود با این روش واگرایی‌های نظریه میدان کوانتومی حذف

---

[۱] Heisenberg
[۲] Alain Connes
[۳] Noncommutative space
[۴] Schrodinger
[۵] Rudolph Peierls
[۶] Wolfgang Pauli
[۷] Hartland Snyder

می‌گردد. اسنایدر اولین کسی بود که این ایده را فرمولبندی کرد و این موضوع را در یک مقاله مورد بررسی قرار داد[۱] و در سال ۱۹۴۷ یانگ[۸][۲] مقاله‌ای درباره‌ی کوانتش فضا-زمان در راستای توسعه کار هایزنبرگ منتشر کرد. واژه‌ی هندسه‌ی ناجابجایی توسط ون نیومن[۹] معرفی شد[۳] و او برای توصیف این هندسه، از یک هندسه‌ی عمومی که در آن جبر عملگرهای خطی ناجابجایی جایگزین جبر توابع می‌شد، استفاده کرد. ون نیومن اولین کسی بود که به طور دقیق به توصیف چنین فضای کوانتومی و مطالعه‌ی هندسه‌ی بی‌نقطه پرداخت و در توصیف این هندسه بر این حقیقت اشاره کرد که تصور تک نقطه در فضای فاز کوانتومی به دلیل اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در مکانیک کوانتومی بی‌معناست و این موضوع سبب شد که نظریه جبر ون نیومن به وجود آید که در اصل عاملی شد برای تولد هندسه‌ی ناجابجایی با اشاره به مطالعه فضای توپولوژیکی که در آن جبر جابجایی توابع توسط جبر ناجابجایی جایگزین شده بود[۳]. ایده اسنایدر علی‌رغم توسعه موفقی که در بازبهنجارش داشت کنار گذاشته شد. اما از طرفی ریاضیدانان تلاش کردند تا جبر ناجابجایی مرتبط با مفاهیم هندسی را فرمولبندی نمایند. فرآیندی که مفاهیم توسعه یافته هندسه را در یک روش جبری بیان می‌کند جبر ناجابجایی نامیده می‌شود. در پی این تلاش‌ها در سال ۱۹۸۰، ریاضیدانان فرانسوی آلن کن [۴] و ورونوواکز[۱۰] [۵] با معرفی یک ساختاردیفرانسیلی در چارچوب ناجابجایی، هندسه‌ی ناجابجایی را احیا کردند و این کار مطلب ساختار دیفرانسیلی را نیز به مجموعه ناجابجایی اضافه نمود که منجر به فضا - زمان ناجابجایی گردید. از جمله دلایل پیدایش مکانیک کوانتومی ناجابجایی طبق بیان دیراک این بود که برای توجیه کامل برخی پدیده‌های فیزیکی نیاز به ناجابجا بودن فضا می‌باشد، از جمله اثر کوانتومی هال، برهم‌کنش میدان‌ها درنظریه میدان‌های کوانتومی. از طرفی نظریه ریسمان به عنوان یک نظریه گرانشی مربوط به حوزه فیزیک در انرژی‌های بالاست. این نظریه برای اتحاد نیروی گرانشی و برطرف کردن ناهنجاری‌های تئوری ابر گرانش وارد صحنه شد. در واقع این نظریه سعی در کوانتومی کردن گرانش در انرژی‌های بالا

[۸] Yang
[۹] Von Neumann

[۱۰] Woronowicz

دارد [۱] و بدین منظور  باید مختصات معرف فضا را به صورت ناجابجا در نظر گرفت. وحدت نیروهای بنیادی الکترومغناطیس، هسته‌ای قوی و هسته‌ای ضعیف با نیروی گرانش از جمله مسائل حل نشده فیزیک نظری در طی دهه‌های اخیر می‌باشد، که سه نیروی اول در انژری‌های بالا با هم متحد شده و مشمول یک نظریه واحد می‌گردند،که در این صورت می‌گویند سه نیرو در انرژی‌های بالا تقارن دارند و در انرژی‌های معمولی دچار شکست تقارن خودبخودی می‌شوند. اما نیروی گرانش دارای مشکل اساسی وحدت نیافتن با سه نیروی بنیادی دیگر است و این عدم وحدت بین نیروی گرانش با سایر نیروها دلیل بوجود آمدن نظریه ریسمان بود، بنابراین هندسه‌ی ناجابجایی را می‌توان به عنوان رهیافتی جدید برای وحدت گرانش با سایر نیروها در نظرگرفت.

## ۱-۲ فضای معمول در مکانیک کوانتومی

برای توصیف مکانیک کوانتومی در فضای معمول دو دیدگاه وجود دارد، دیدگاه هایزنبرگ (مکانیک ماتریسی) و  دیدگاه شرودینگر(مکانیک موجی) که بر اساس فرمولبندی دیراک صورت گرفته است و در این دیدگاه پل آدرین موریس دیراک[۱۱] روابط جابجایی بین عملگرها را شرایط بنیادین کوانتوم نامیده است که این روابط را روابط جابجایی کانونیک یا روابط جابجایی بنیادی می‌نامند که سنگ بنای مکانیک کوانتومی را تشکیل می‌دهند. روابط جابجایی در مکانیک کوانتومی معمول توسط جبر هایزنبرگ و مختصات تعمیم یافته‌ی $x, p$ به صورت زیراست[۷].

$$[x_i, x_j] = 0 \quad , \quad [p_i, p_j] = 0 \quad , \quad [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij} \qquad (۱-۱)$$

در سال ۱۹۲۵ دیراک مشاهده کرد که روابط مختلف مکانیک کوانتومی را می‌توان از روابط کلاسیکی متناظر آن‌ها با جایگزین کردن کروشه‌های پواسون با جابجایی‌ها به صورت زیر بدست آورد:

[۱۱] Paul Adrien Maurice Dirac

$$[,]_{cllassical} \rightarrow \frac{[,]}{\hbar} \qquad (۲-۱)$$

که کروشه پواسون کلاسیکی برای توابعی از q ها و p ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[A(q,p),B(q,p)]_{classical} \equiv \sum_s \left( \frac{\partial A}{\partial q_s}\frac{\partial B}{\partial p_s} - \frac{\partial A}{\partial p_s}\frac{\partial B}{\partial q_s} \right) \qquad (۳-۱)$$

در حد کلاسیکی $\hbar \rightarrow ۰$ نظریه کوانتومی به نظریه کلاسیکی کروشه پواسون تبدیل می‌گردد.

### ۱-۳ فضای ناجابجایی در مکانیک کوانتومی

فضای ناجابجایی از مکانیک کوانتومی الهام می‌گیرد به طوری که می‌توان این فضا را به عنوان تعمیمی از فضای معمول در مکانیک کوانتومی استاندارد دانست. فرمولبندی مکانیک کوانتومی در فضای ناجابجایی براساس جبر هایزنبرگ دگرگون شده کانونیکی بیان می‌شود که بررسی این جبر یک مسئله اساسی در فهم ساختار فضا-زمان است. پیامد مستقیم ناجابجایی فضا - زمان وجود کمینه طول قابل اندازه‌گیری از مرتبه طول پلانک است و بر این اساس اندازه‌گیری موقعیت یک ذره حداقل به اندازه طول پلانک عدم قطعیت وجود خواهد داشت. اما این مقیاس طولی و انرژی متناظر با آن بسیار دور از دسترس است و شواهد ما از فضا - زمان ناجابجایی اساساً به صورت نظری است. برای بررسی مکانیک کوانتومی ناجابجا شونده می‌توان کل فضای فاز در مکانیک کوانتومی را ناجابجا شونده فرض کرد به طوری که عملگرهای هرمیتی ناجابجا شونده $x^{i(NC)}$ و $p^{i(NC)}$ به ترتیب بجای مختصات $x^i$ و $p^i$ تعریف می‌شوند که $x^{i(NC)}$ و $p^{i(NC)}$ از جبر ناجابجایی هایزنبرگ تبعیت می‌کنند. در فضای ناجابجایی هندسه ناجابجایی به عنوان ابزار مورد استفاده برای توصیف فضا- زمان در مقیاس پلانک تعریف می‌شود که به توصیف خمینه‌هایی می‌پردازد که مختصات توصیف‌کننده نقاطشان عملگرهای ناجابجایی‌اند. روابط جابجایی عملگرها در فضای ناجابجایی به صورت زیر است:[۶]

$$[x^{i(NC)},x^{j(NC)}]=i\theta^{ij} \quad , \quad [x^{i(NC)},p^{j(NC)}]=i\hbar\delta^{ij} \quad , \quad [p^{i(NC)},p^{j(NC)}]=۰ \qquad (۴-۱)$$

در این رابطه $\theta^{ij}$ یک تانسور پادمتقارن و حقیقی است و این پارامتر معرف فضای ناجابجایی است و یکایی از جنس سطح دارد. نظریه‌ی ناجابجایی در حد $\theta^{ij} \to ۰$ تبدیل به حالت‌های جابجایی می‌شود که بسهولت در مسایل ناجابجایی می‌توان این نکته را درک کرد. رابطه خطی بین عملگرها در فضای جابجایی و ناجابجایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x_i^{(NC)} = x_i^{(C)} - \frac{۱}{۲}\theta_{ij} p_j^{(C)} \qquad p_i^{(NC)} = p_i^{(C)} \tag{۵-۱}$$

در فضای ناجابجایی تعریف ضرب توابع با ضرب معمول متفاوت است و این ضرب را با نام ضرب * معرفی می‌کنند. ساده‌ترین روش برای مطالعه نظریه میدان در هندسه‌ی ناجابجایی، تعریف ضرب ناجابجایی و جایگزینی آن با ضرب معمول است که این نوع نظریه میدان را، نظریه میدان ناجابجایی می‌نامند توجه کنید که این تعریف با نظریه میدان غیر آبلی[۱۲] اشتباه گرفته نشود(غیر آبلی به گروه پیمانه ای اشاره دارد). ضرب جابجا ناپذیر دارای خصوصیات اساسی زیر است[۸]:

۱) شرکت پذیری

$$(f * g) * \mathrm{h} = f * (g * \mathrm{h}) \tag{۶-۱}$$

۲) توزیع پذیری ( $f, g$ توابعی از $x^{\mu}$اند.)

$$\begin{gathered} af * bg = abf * g \\ a, b \in c \end{gathered} \tag{۷-۱}$$

۳) قانون ضرب لایب نیتز[۱۳]

$$\partial_\mu (f * g) = \partial_\mu f * g + f * \partial_\mu g \tag{۸-۱}$$

[۱۲] nonabelian
[۱۳] Leibnitz product rule

که * معرف ضرب در فضای ناجابجایی است و این ضرب توسط برزین مارینو[۱۴] معرفی شد. ضرب * جابجاناپذیر را می‌توان به پارامتری همچون $\theta$وابسته کرد به گونه‌ای که هرگاه $\theta = ۰$ شود، ضرب *به ضرب جابجاپذیر معمول ساده می‌شود. ضرب‌های *توسط سه جبر از فیزیک بیان می‌شود. ضرب‌های * به طور کلی در سه دسته قرار دارند که اغلب مورد استفاده می‌باشند(واکارو[۱۵]-۲۰۰۲)

$$
f * g = \begin{cases}
exp[\frac{i}{۲}\frac{\partial}{\partial u^i}\theta^{ij}\frac{\partial}{\partial u'^j}]f(u)\,g(u')|_{u' \to u} & canonical\ \ structure \\
exp[\frac{i}{۲}u^k g_k(i\frac{\partial}{\partial u'},i\frac{\partial}{\partial u''})]f(u')\,g(u'')|_{u' \to u''} & Lie\ structure \\
q^{\frac{۱}{۲}(-u'\frac{\partial}{\partial u'}v\frac{\partial}{\partial v}+u\frac{\partial}{\partial u}v'\frac{\partial}{\partial v'})} f(u,v)g(u',v') & quantum\,structure
\end{cases}
$$

توجه داشته باشید که ساختار کلی این سه ضرب یکسان است. ضرب اول را ضرب مویال[۱۶] گویند که ضرب ساده‌ای است و بیشتر در مقالات استفاده می‌شود، طی چندین سال کارهایی زیادی در جهت توسعه ضرب $*$ [۹] توسط ویل (۱۹۲۷)، ون نیومن (۱۹۳۱)، ویگنر(۱۹۳۲)، گرونولد[۱۷] (۱۹۴۶)، مویال (۱۹۴۹) و باکر[۱۸](۱۹۵۸) صورت گرفته است. در روابط بالا $u^i$ مختصات و $\theta^{ij}$ پارامتر ناجابجایی می‌باشند. برای ضرب مویال با جبر هایزنبرگ روابط جابجایی، $[x^i, x^j]_* = i\theta^{ij}$ که $[A,B]_* = A*B - B*A$ برقرار می‌باشد. در سال ۲۰۰۲ گراسیا بوندیا[۱۹] و چند تن دیگر تعمیمی از ضرب مویال را ارائه کردند آنها ضرب * را به شکل زیر در نظر گرفتند:

$$[x^i, x^j]_* = ic_k^{ij}x^k \tag{۹-۱}$$

با ثابت c برای سه بعد یا ابعاد فضایی بیشتر. در سال ۱۹۹۹طرحی از ضرب مویال توسط سیبرگ و

---

[۱۴] Berezin–Marinov
[۱۵] Vacaru
[۱۶] Moyal product
[۱۷] H .Groenewold
[۱۸] G. Baker
[۱۹] Gracia-Bondia

ویتن[20] و در سال ۲۰۰۴ ضرب *تعمیم یافته‌ای که در آن پارامتر ناجابجایی وابسته به مکان بود، $\theta(x)$ ،توسط فسکو وتوروبا[21] ارائه شدند.

## ۱-۴ فضای فاز ناجابجایی[22] در مکانیک کوانتومی

در فیزیک فضای فاز مفهومی است که مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی را متحد می‌کند و در ریاضی فضای فاز مفهومی است که هندسه‌ی شکیل[23] را با تجزیه و تحلیل هارمونیک و معادله دیفرانسیل جزئی[24] متحد می‌کند. در مکانیک کلاسیک فضای فاز، شامل تمام حالت‌های ممکن یک سیستم فیزیکی است و به راحتی نمی‌توان حالت را به عنوان مکان‌های $q$ همه‌ی اجسام در سیستم (که تمایل دارد فضای فیزیکی یا فضای پیکربندی را دربرگیرد) و همین طور سرعت یا تکانه $P$(که می تواند فضای تکانه را شامل شود) معنا کرد. از طرفی برای تعیین رفتار سیستم در لحظه بعد ما باید هم مکان و هم تکانه سیستم را بدانیم. فرمولبندی فضای فاز در مکانیک کوانتومی توسط ویل[25] [۱۰] ، ویگنر[26] [۱۱] و مویال[27] [۱۲] در سال ۱۹۳۰بنیانگذاری شد و این افراد کسانی بودند که با بیان دلایل بدیهی محرکی بودند برای فهم مکانیک کوانتومی به عنوان تفسیری توسعه یافته از مکانیک هامیلتونی نسبت به تئوری عملگرهایی که در فضای هیلبرت عمل می‌کنند. حداقل دو دلیل مهم و اصلی وجود دارد که سبب ایجاد علاقه در این قسمت بخصوص شده است. دلیل اول آن است که مکانیک کوانتومی در فضای فاز یک مثال از نظریه با هندسه‌ی ناجابجایی را بیان می‌کند. مویال[۱۲] وباین[28] [۱۳] به همراه چن تن از همکارانشان جبر ناجابجایی توابع را در فضای فاز گسترش دادندکه در آن خواص ناجابجایی عملگرها مورد ارزیابی قرار گرفت. باپ[29][۱۴] وکوبو[30][۱۵] فضای فاز را گسترش دادند و متغیرهای ناجابجا

[20] Seiberg and Witten
[21] Fosco and Torroba
[22] Noncommutative phase space
[23] symplectic
[24] PDE: partial differential equation

[25] Weyl
[26] Wigner
[27] Moyal
[28] Bayen
[29] Bopp
[30] Kubo

شونده را برحسب عملگر ویگنر و عملگر چگالی ویگنر بیان کردند[۱۱،۱۶]. فرمول بندی باپ-کوبو با توابع در فضای فاز توسعه‌یافته که ناجابجا شونده هستند و منجر به نماد ناجابجایی متغیرها می‌شوند، سروکار دارد. دلیل دوم اهمیت مکانیک کوانتومی در فضای فاز این است که نتایج فرمولبندی بسیار شبیه به فرمولبندی هامیلتونی مکانیک کلاسیک است. فضای فاز مکانیک کوانتومی با هندسه‌ی شکیل ناجابجایی سروکار دارد تا هندسه‌ی شکیل معمول [۱۷]. یک فضای فاز کوانتومی با جایگزینی متغیرهای مکان و تکانه کانونیکی به صورتی تعریف می‌شود که در آن همان روابط جابجایی بین عملگرها در فضای ناجابجایی را داریم با این تفاوت که جابجایی عملگر تکانه-تکانه مخالف صفر است به طوری که داریم[۱۸]:

$$[x^{i(NC)}, x^{j(NC)}] = i\theta^{ij} \quad , \quad [x^{i(NC)}, p^{j(NC)}] = i\hbar_{eff}\delta^{ij} \quad , \quad [p^{i(NC)}, p^{j(NC)}] = i\eta^{ij}$$
(۱۰-۱)

که $\eta^{ij}$ پارامتر ناجابجایی مربوط به تکانه و تانسوری پادمتقارن است با ثابت پلانک موثر به صورت زیر: $(\hbar = c = ۱)$

$$\hbar_{eff} = ۱ + \frac{\eta\theta}{۴} \qquad (۱۱\text{-}۱)$$

درفضای فاز ناجابجایی تبدیلات خطی بین عملگرهای جابجایی و ناجابجایی در واحد $(\hbar = c = ۱)$ با استفاده از روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$x^{i(NC)} = x_i - \frac{\theta^{ij} p_j}{۲} \quad , \quad p^{i(NC)} = p_i + \frac{\eta^{ij} x_j}{۲} \qquad (۱۲\text{-}۱)$$

پارامترهای فضای فاز ناجابجایی را به صورت $\theta^{ij} = \varepsilon^{ijk}\theta_k , \theta_k = (۰,۰,\theta)$ و $\eta^{ij} = \varepsilon^{ijk}\eta_k , \eta_k = (۰,۰,\eta)$ در نظر می‌گیریم در این صورت در فضای فاز ناجابجایی تبدیلات خطی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$p_x^{(NC)} = p_x^{(C)} + \frac{\eta y^{(C)}}{۲} \quad , \quad x^{(NC)} = x^{(C)} - \frac{\theta p_y^{(C)}}{۲}$$
$$p_y^{(NC)} = p_y^{(C)} - \frac{\eta x^{(C)}}{۲} \quad , \quad y^{(NC)} = y^{(C)} + \frac{\theta p_x^{(C)}}{۲} \qquad (۱۳-۱)$$

### ۱-۵ هم ارزی ضرب *(مویال- ویل[۳۱]) و باب شیفت[۳۲] در فضای ناجابجایی

در فضای ناجابجایی ضرب * به صورت زیرتعریف می‌شود:

$$(f * g) = e^{\frac{i}{۲}\theta_{ij}\partial x_i \partial x_j} f(x_i)\mathrm{g}(x_j) = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(\frac{i}{۲}\theta_{ij}\partial x_i \partial x_j)^n}{n!} f(x_i)\mathrm{g}(x_j)$$
$$= f(x)\mathrm{g}(x) + \frac{i}{۲}\theta_{ij}\partial_i f \partial_j g + \mathrm{O}(\theta^۲) \qquad (۱۴-۱)$$

که $f(x), \mathrm{g}(x)$ دو تابع دلخواه هستند. اثبات می‌شود که در فضای ناجابجایی ضرب استار را می‌توان با باب شیفت جایگزین کرد. برای اثبات این موضوع توابعی را به شکل زیر انتخاب می‌کنیم:

$$f(x) = x \quad , \quad g(x) = \psi \qquad (۱-۱۵ \text{ - الف})$$

با جایگذاری معادله‌ی (۱-۱۵- الف) در معادله‌ی (۱-۱۴) رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(x * \psi) = x\psi + \frac{i}{۲}\theta_{xy}\partial_x x \partial_y \psi = \left(x - \frac{۱}{۲}\theta_{xy} p_y\right)\psi \qquad (۱-۱۵ \text{ - ب})$$

بار دیگر توابع را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$f(x) = y \quad , \quad g(y) = \psi \qquad (۱-۱۶ \text{ - الف})$$

در نتیجه داریم

$$(y * \psi) = y\psi + \frac{i}{۲}\theta_{yx}\partial_y y \partial_x \psi = \left(y + \frac{۱}{۲}\theta_{xy} p_x\right)\psi \qquad (۱-۱۶ \text{ - ب})$$

مقایسه روابط (۱-۱۵ - ب) و (۱-۱۶ - ب) با باب شیفت معرفی شده برای $x^{(NC)}, y^{(NC)}$ در رابطه (۱-۱۳) نشان می‌دهند که باب شیفت معادل با ضرب استار است بنابراین با در نظر گرفتن این

---
[۳۱] Weyl-Moyal
[۳۲] Bopp's shift

معادل‌سازی می‌توان بجای استفاده از ضرب استار برای حل مسائل در فضای ناجابجایی از باب شیفت استفاده کرد و ضرب استار را با ضرب معمول با استفاده از باب شیفت جایگزین کرد.

### ۱-۶ کاربردهایی از فضای ناجابجایی در فیزیک

دلایل مختلفی وجود داشت که سبب ایجاد علاقه‌مندی فیزیکدانان به بررسی و مطالعه‌ی فضای ناجابجایی شد. برای مثال، اثرهال کوانتومی که یکی از مهم‌ترین سیستم‌های مطالعه شده در ماده چگال است که ناجابجایی را در مختصات و تکانه کانونیک مطرح می‌نماید از طرف دیگر، در تئوری ریسمان نیز در اطراف ریسمان‌های باز و در مختصات دی‌برین‌ها[۳۳] ناجابجایی ظاهر می‌شود، همچنین می‌توان با جایگزینی ضرب استاندارد بین میدان با ضرب استار مویال-ویل یک تئوری میدان جدید ساخت. در این تئوری برخی نتایج جالب مانند رابطه‌ی بین واگرایی فروسرخ و فرابنفش در فیزیک ذرات نشان داده شده است. زمینه‌های کاربردی در بررسی و مطالعه درفضای ناجابجایی از فیزیک ذرات بنیادی، فیزیک هسته‌ای، فیزیک حالت جامد، گرانش تا کیهان شناسی و سیاه چاله‌ها را شامل می‌شود. مسائل بسیاری در مطالعه جنبه‌های مختلفی از مکانیک کوانتومی در فضای ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی با مکان-زمان معمول توسعه یافته است. به عنوان مثال تراز های انرژی اتم هیدروژن وجابجایی لمب[۳۴] در چارچوب الکترودینامیک کوانتومی مورد مطالعه قرار گرفته است [۱۹]. اثر کوانتومی هال ( که اختلاف پتانسیل ایجاد شده در دو طرف یک رسانایی که از آن جریان الکتریکی عبور می کند و در یک میدان مغناطیسی که عمود بر جهت جریان است قرار دارد را بیان می‌کند) به عنوان یکی از مهم‌ترین پدیده‌های فیزیکی حالت جامد در فضای ناجابجایی در[۲۰] مطالعه شده است. سیستم لاندو[۳۵] در فضای فاز ناجابجایی، که به بررسی حرکت ذره باردار تحت تاثیر میدان مغناطیسی عمود بر صفحه می‌پردازد، در مرجع[۲۱] بررسی شده است. بررسی مکانیک کوانتومی گرانشی با استفاده از فضا و هندسه

---

۳۳ D-brane
۳۴ Lamb Shift
۳۵ Landau system

ناجابجایی[۱۸] و بررسی این موضوع که در فضا-زمان ناجابجایی و در مقیاس پلانک[۳۶] نمی توان سیاه‌چاله‌های بنیادی را از ذرات بنیادی متمایز دانست در [۲۲] و توسعه‌ای از فضا-زمان ناجابجایی کیهان شناسی کوانتومی و بررسی مدل کیهان شناسیKS نیز مورد مطالعه واقع شده‌اند[۲۳].

[۳۶] Plank scale

# فصل دوم

# بررسی سیستم‌های فیزیکی در فضای ناجابجایی

## ۲-۱ مکانیک کلاسیک در فضای فاز ناجابجایی

در محدوده‌ی کلاسیکی جابجاگر مکانیک کوانتومی توسط کروشه پواسون[۳۷] طبق رابطه زیر جایگزین می‌شود:

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{A},\hat{B}] \to \{A,B\}_{poisson} \qquad (۲-۱)$$

در ریاضیات و مکانیک کلاسیک براکت پواسون به عنوان یک عملیات مهم در مکانیک هامیلتونی محسوب می‌شود و نقشی محوری در معادلات هامیلتونی حرکت که دلالت بر تحول زمانی هامیلتونی سیستم دینامیکی دارد، ایفا می‌کند. طبق معادله(۲-۱) می‌توان گفت که کروشه پواسون پل ارتباطی بین مکانیک کوانتومی و مکانیک کلاسیک است. در مکانیک کوانتومی معمول براکت پواسون برای دو تابع $A,B$ با توجه به متغیرهای کانونیکی $p,q$ به صورت زیر تعریف می‌شود:[۲۴]

$$\{A,B\}_{q_i,p_i} = \left(\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right) \qquad (۲-۲)$$

کروشه پواسون خواصی مشابه خواص جابجایی در مکانیک کوانتومی دارد از جمله این خواص می‌توان خطی بودن، پادمتقارن بودن و ارضاء کردن قوانین لایب نیتز را نام برد. صورت عمومی براکت پواسون در فرمول بندی فضای فاز ناجابجایی به صورت زیر تعریف می‌شود[۲۵]

$$\{A,B\} = \left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial x_i}\right) + \theta_{ij}\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial B}{\partial x_j} + \eta_{ij}\frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial p_j} \qquad (۲-۳)$$

صورت عمومی هامیلتونی دو بعدی را در نظر می‌گیریم:

$$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2) + V(x_1, x_2) \qquad (۲-۴)$$

---

[۳۷] Poisson brackets

در رابطه بالا $p_۱, p_۲$ و $x_۱, x_۲$ بترتیب مولفه‌های تکانه و مکان را در راستاهای $x, y$ نشان می‌دهند. معادلات حرکت متناظر با هامیلتونی مورد نظر توسط روابط زیر داده می‌شود:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{p_i}{m} + \theta_{ij}\frac{\partial V}{\partial x_j} \tag{۲-۵}$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\} = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{۱}{m}\eta_{ij} p_j \tag{۲-۶}$$

با ترکیب معادلات (۲-۵) و (۲-۶) معادلات حرکت بدست خواهند آمد :

$$m\ddot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} + \eta_{ij}\dot{x}_j + m\theta_{ij}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial x_j}\right) \qquad i = ۱,۲ \tag{۲-۷}$$

معادله (۲-۷) را به عنوان قانون جدید دوم نیوتن تفسیرمی‌کنند. جمله‌ی دوم ظاهر شده در این معادله تصحیح مربوط به جابجاناپذیری تکانه و جمله‌ی سوم، تصحیح مربوط به جابجاناپذیری مکان است. جملات ظاهر شده در قانون جدید دوم نیوتن به پارامترهای ناجابجایی مربوط به مکان و تکانه در فضای فاز ناجابجایی، $\eta_{ij}, \theta_{ij}$ و تغییرات پتانسیل وابسته شده است.

## ۲-۲ ذره آزاد در فضای فاز ناجابجایی

ذره‌ی آزاد ساده‌ترین سیستم در مکانیک کوانتوم و کلاسیک است که انرژی پتانسیل آن در همه جا صفر است و نیرویی بر آن اثر نمی‌کند. ذره‌ای آزاد به جرم $M$ در دو بعد که در راستای $x, y$ حرکت می‌کند را در نظر می‌گیریم، برای چنین ذره‌ای در فضای فاز ناجابجایی هامیلتونی به صورت بیان می‌شود:

$$H^{(NC)} = \frac{p_۱^{۲(NC)}}{۲M} + \frac{p_۲^{۲(NC)}}{۲M} \tag{۲-۸}$$

تبدیل معرفی شده در رابطه (۱-۱۳) را در رابطه (۲-۸) قرار می‌دهیم

$$H_f^{(NC)}=\frac{p_{1f}^2+p_{2f}^2+\frac{1}{4}\eta^2(x_{1f}^2+x_{2f}^2)+\eta(x_{2f}p_{1f}-x_{1f}p_{2f})}{2M} \tag{۲-۹}$$

در رابطه‌ی بالا اندیس $f$ معرف ذره آزاد است. با توجه به معادله‌ی بالا، تبدیل $\tilde{\omega}^2=\frac{1}{4M}\eta^2$ را در نظر می‌گیریم در نتیجه رابطه‌ی هامیلتونی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H_f^{(NC)}=\frac{p_{1f}^2+p_{2f}^2}{2M}+\frac{1}{2}M\tilde{\omega}^2(x_{1f}^2+x_{2f}^2)+\frac{-\eta(-x_{2f}p_{1f}+x_{1f}p_{2f})}{2M} \tag{۲-۱۰}$$

معادله (۲-۱۰) نشان می‌دهد که شتاب ذره آزاد در فضای فاز ناجابجایی دیگر صفر نیست واین ذره در فضای ناجابجایی به صورت نوسانگر گونه رفتار می‌کند. ویژه حالت $|n,m\rangle$ را در نظر می‌گیریم در نتیجه برای مولفه‌ی $z$ تکانه‌ی زاویه‌ای می‌توان نوشت:

$$L_z|n,m\rangle=m\hbar|n,m\rangle \tag{۲-۱۱}$$

معادله ویژه مقداری را برای هامیلتونی به دست آمده در رابطه (۲-۱۰) در نظر می‌گیریم:

$$H_f^{(NC)}\left|N_1^{(NC)},N_2^{(NC)}\right\rangle=E_f^{(NC)}\left|N_1^{(NC)},N_2^{(NC)}\right\rangle \tag{۲-۱۲}$$

با در نظرگرفتن روابط (۲-۱۱) و (۲-۱۲) انرژی کلی هامیلتونی (۲-۱۰) به دست خواهد آمد:

$$E_{f(total)}^{(NC)}=(n_1+n_2+1)\hbar\tilde{\omega}-\frac{\eta}{2M}m\hbar \tag{۲-۱۳}$$

فرض بر آنست که $E_{f(total)}^{(NC)}\geq 0$ ، در این صورت باید $(n_1+n_2+1)\hbar\tilde{\omega}>\frac{\eta}{2M}m\hbar$ برقرار باشد.

اکنون به بررسی معادلات حرکت مربوط به هامیلتونی(۲-۱۰) می‌پردازیم. با در نظرگرفتن کروشه پواسون معرفی شده در رابطه (۲-۳) می‌توان نوشت[۲۵]

$$\dot{x}_{1f}=\{x_{1f},H_f^{(NC)}\}=\frac{\partial x_{1f}}{\partial x_{1f}}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial p_{1f}}-\frac{\partial x_{1f}}{\partial p_1 f}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial x_{1f}} \tag{۲-۱۴}$$

$$\dot{p}_{1f}=\{p_{1f},H_f^{(NC)}\}=\frac{\partial p_{1f}}{\partial x_{1f}}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial p_{1f}}-\frac{\partial p_{1f}}{\partial p_{1f}}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial x_{1f}} \tag{۲-۱۵}$$

$$\dot{x}_{2f}=\{x_{2f},H_f^{(NC)}\}=\frac{\partial x_{2f}}{\partial x_{2f}}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial p_{2f}}-\frac{\partial x_{2f}}{\partial p_{2f}}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial x_{2f}} \tag{۲-۱۶}$$

$$\dot{p}_{2f}=\{p_{2f},H_f^{(NC)}\}=\frac{\partial p_{2f}}{\partial x_{2f}}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial p_{2f}}-\frac{\partial p_{2f}}{\partial p_{2f}}\frac{\partial H_f^{(NC)}}{\partial x_{2f}} \tag{۲-۱۷}$$

با ساده‌سازی روابط بالا نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{x}_{1f}=\frac{p_{1f}}{M}+\frac{\eta x_{2f}}{2M} \quad , \quad \dot{p}_{1f}=-M\tilde{\omega}^2 x_{1f}+\frac{\eta p_{2f}}{2M} \tag{۲-۱۸}$$

$$\dot{x}_{2f}=\frac{p_{2f}}{M}-\frac{\eta x_{1f}}{2M} \quad , \quad \dot{p}_{2f}=-M\tilde{\omega}^2 x_{2f}-\frac{\eta p_{1f}}{2M} \tag{۲-۱۹}$$

با ترکیب روابط(۲-۱۸) و (۲-۱۹) معادلات حرکت ذره‌ی آزاد دو بعدی در فضای فاز ناجابجایی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\ddot{x}_{1f}=\beta x_{1f}-\alpha\dot{x}_{2f} \tag{۲-۲۰}$$

$$\ddot{x}_{2f}=\beta x_{2f}+\alpha\dot{x}_{1f} \tag{۲-۲۱}$$

که در محاسبه روابط بالا از روابط $\beta=-\tilde{\omega}^2-\frac{\eta^2}{4M^2}$ , $\alpha=-\frac{\eta}{M}$ استفاده کرده‌ایم.

### ۲-۲-۱ حل معادلات حرکت ذره آزاد در فضای فاز ناجابجایی

برای حل معادلات (۲-۲۰) و (۲-۲۱) ابتدا روابط زیر را با معرفی تابع وابسته به زمان $\phi(t)$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x_{1f}(t)&=\phi_{1f}(t)\\ x_{2f}(t)&=\phi_{2f}(t) \end{aligned} \tag{۲-۲۲- الف}$$

در نتیجه با ترکیب معادلات (۲-۲۰)، (۲-۲۱) و (۲-۲۲-الف) روابط جدید به شکل زیر ظاهر خواهند شد:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_{1f}(t) &= \phi_{3f}(t)\\
\dot{\phi}_{2f}(t) &= \phi_{4f}(t)\\
\dot{\phi}_{3f}(t) &= \beta\phi_{1f}(t) - \alpha\phi_{4f}(t)\\
\dot{\phi}_{4f}(t) &= \beta\phi_{2f}(t) + \alpha\phi_{3f}(t)
\end{aligned} \qquad (۲-۲۲- ب)$$

با توجه به معادلات ظاهر شده در رابطه (۲-۲۲- ب) می‌توان معادله‌ی ماتریسی زیر

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_{1f} \\ \dot{\phi}_{2f} \\ \dot{\phi}_{3f} \\ \dot{\phi}_{4f} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1f} \\ \phi_{2f} \\ \phi_{3f} \\ \phi_{4f} \end{pmatrix} \qquad (۲-۲۳)$$

با ویژه مقادیری به صورت زیر را نوشت:

$$\lambda_{1f} = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - 2\alpha^2 + 2\sqrt{-4\alpha^2\beta + \alpha^4}} \ , \ \lambda_{2f} = -\frac{1}{2}\sqrt{4\beta - 2\alpha^2 + 2\sqrt{-4\alpha^2\beta + \alpha^4}}$$

$$\lambda_{3f} = \frac{1}{2}\sqrt{4\beta - 2\alpha^2 + 2\sqrt{-4\alpha^2\beta + \alpha^4}} \ , \ \lambda_{4f} = -\frac{1}{2}\sqrt{4\beta - 2\alpha^2 + 2\sqrt{-4\alpha^2\beta + \alpha^4}}$$

(۲-۲۴)

با انتخاب $\lambda_{1f}$ معادلات (۲-۲۲- ب) به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
A_f\lambda_{1f} - C_f &= 0\\
B_f\lambda_{1f} - D_f &= 0\\
C_f\lambda_{1f} - \beta A_f + \alpha D_f &= 0\\
D_f\lambda_{1f} - \beta B_f - \alpha C_f &= 0
\end{aligned} \qquad (۲-۲۵)$$

با انتخاب مقدار اختیاری $C_f = 1$، ضرائب مجهول به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$A_f = \frac{1}{\lambda_{1f}} \quad , \quad B_f = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta - \lambda_{1f}^2}{\lambda_{1f}^2}\right) \quad , \quad D_f = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta - \lambda_{1f}^2}{\lambda_{1f}}\right) \qquad (۲-۲۶)$$

بنابراین جواب معادله‌ی حرکت ذره آزاد در فضای فاز ناجابجایی با وابستگی زمانی بدست می‌آید:

$$\phi_{1f} = A_f e^{\lambda_{1f} t}\ ,\ \phi_{2f} = B_f e^{\lambda_{1f} t},\ \phi_{3f} = C_f e^{\lambda_{1f} t},\ \phi_{4f} = D_f e^{\lambda_{1f} t} \qquad (۲۷-۲)$$

نتایج به دست آمده در رابطه (۲-۲۷) برای $\lambda_{2f}, \lambda_{3f}$ و $\lambda_{4f}$ قابل تکرار است.

### ۲-۲-۲ خواص آماری سیستم متشکل از $N$ ذره در فضای فاز ناجابجایی

مکانیک آماری، مبحثی در فیزیک است که به مطالعه سیستم‌هایی با تعداد ذرات بسیار زیاد می‌پردازد که تعداد آن‌ها می‌تواند هم‌مرتبه با عدد آووگادرو باشد. در این مبحث، بر اساس رفتار ترمودینامیکی اجزاء تشکیل دهنده (خواص میکروسکوپی ذرات) مانند ساختار اتمی و برهم‌کنش بین آن‌ها، اطلاعاتی در مورد خواص ماکروسکوپی سیستم مانند آنتروپی و انرژی آزاد گیبس، از طریق محاسبات و روش‌های آماری به دست می‌آید. در این‌جا تابع پارش را برای یک سیستم $N$ ذره‌ای، که رابطه انرژی آن با تعمیم رابطه انرژی یک ذره آزاد در فضای فاز ناجابجایی بدست می‌آید را بررسی می‌کنیم. بدین منظور انرژی ذره آزاد در فضای فاز ناجابجایی را در نظر می‌گیریم:

$$E_{n,m}^{(NC)} = \hbar\tilde{\omega}(n_1 + n_2 + 1) - \frac{\eta}{2M} m\hbar \qquad (۲۸-۲)$$

انرژی بدست آمده را می‌توان برای یک سیستم $N$ ذره‌ای به صورت زیر تعمیم داد:

$$E_{n,m}^{(NC)} = \sum_{i=1}^{N} \hbar\{(n_1{}^i + n_2{}^i + 1)\tilde{\omega}^i - \frac{1}{2M}(m^i \eta^i)\} \qquad (۲۹-۲)$$

با در نظر گرفتن $m^i = n_2^i = 0$ و $n_1^i = n$ داریم:

$$E_{n,0} = \hbar\tilde{\omega}(n+1) \qquad (۳۰-۲)$$

تابع پارش توصیف کننده خواص آماری یک سیستم در حالت تعادل می‌باشد که تابعی از دما و انرژی سیستم مورد نظر است. تابع پارش از جمع زدن احتمال وقوع تمام میکروحالت‌های مجاز یک سیستم بدست می‌آید. میکروحالت هر سیستم به صورت یک حالت کوانتومی خاص از سیستم فیزیکی تعریف می‌شود که این حالت مربوط به جزئی‌ترین خصوصیات یک سیستم است که به وسیله‌ی مکانیک

کوانتومی توصیف می‌شود. با داشتن تابع پارش یک سیستم می‌توان تمام کمیت‌های ترمودینامیکی آن سیستم، مانند انرژی آزاد هلمهولتز، آنتروپی و انرژی درونی را محاسبه کرد. وضعیت کوانتومی سیستمی را بررسی می‌کنیم که بر اساس ویژه‌مقدارهای انرژی یک نوسانگر هماهنگ به صورت رابطه (۲-۳۰) است. تابع پارش یک نوسانگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_{۱}(\beta) = \sum_{n=۰}^{\infty} e^{-\beta E_{۰,n}^{(NC)}} \qquad (۲-۳۱)$$

با بکارگیری بسط $\sum_{a=۰}^{\infty} e^{-ax} = \frac{۱}{۱-e^{-x}}$ برای رابطه بالا می‌توان رابطه زیر را داشت:

$$Q_{۱}(\beta) = e^{-\beta\hbar\tilde{\omega}} \sum_{n=۰}^{\infty} e^{-\beta n\hbar\tilde{\omega}} = \frac{exp(-\beta\hbar\tilde{\omega})}{۱-exp(-\beta\hbar\tilde{\omega})} = \{۲sinh(\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega})\}^{-۱} exp(-\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega}) \qquad (۲-۳۲)$$

که $\beta = \frac{۱}{KT}$ و $K$ ثابت بولتزمن است. بنابراین تابع پارش سیستم $N$ ذره‌ای به صورت زیر محاسبه خواهد شد

$$Q_N(\beta) = [Q_۱(\beta)]^N = \{۲\,sinh(\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega})\}^{-N} exp(-\frac{۱}{۲}N\beta\hbar\tilde{\omega}) \qquad (۲-۳۳)$$

انرژی آزاد هلمولتز میزان کار مفید قابل دستیابی در فرایندی دما ثابت و حجم ثابت است. حال انرژی آزاد هلمهولتز برای $N$ ذره را در نظر گرفته که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$A = -KT\ln Q_N = N\{\mathrm{KT}\,ln(۲\,sinh(\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega})) + \frac{۱}{۲}\hbar\tilde{\omega}\} \qquad (۲-۳۴)$$

در علم ترمودینامیک، پتانسیل شیمیایی مقدار پتانسیلی است که یک ماده باید تولید کند تا یک سیستم را تغییر دهد. تانسیل شیمیایی سیستم $N$ ذره ای ،از رابطه‌ی زیر محاسبه می شود:

$$\mu = \frac{A}{N} = \{\mathrm{KT}\,ln(2\,sinh(\frac{1}{2}\beta\hbar\tilde{\omega})) + \frac{1}{2}\hbar\tilde{\omega}\} \qquad (۲-۳۵)$$

آنتروپی بیانگر درجه‌ی بی نظمی یک سیستم است و هر سیستمی به صورت خودبخودی ( بدون صرف انرژی) به سمت بی نظمی بیشتر یا آنتروپی بیشتر میل می‌نماید.

$$S=-\frac{\partial A}{\partial T}=NK[\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega}coth(\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega})-ln\{۲\,sinh(\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega})\}]=NK[\frac{\beta\hbar\tilde{\omega}}{e^{\beta\hbar\tilde{\omega}}-۱}-\ln\{۱-e^{-\beta\hbar\tilde{\omega}}\}]$$
(۳۶-۲)

و انرژی درونی سیستم به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$U=NKT^{۲}\frac{\partial \ln Q_{۱}}{\partial T}=N[\frac{\hbar\tilde{\omega}}{۲}+\frac{\hbar\tilde{\omega}}{۲}coth(\frac{۱}{۲}\beta\hbar\tilde{\omega})] \quad (۳۷-۲)$$

## ۲-۳ نوسانگر هماهنگ[۳۸] در فضای فاز ناجابجایی

نوسانگر هماهنگ نقش مهمی در مکانیک کوانتومی معمولی و مکانیک کوانتومی ناجابجایی دارد و موضوع مورد علاقه فیزیکدانان که بسیار مورد مطالعه قرار گرفته است[۲۶, ۲۷]. برای اثبات درستی روابط کروشه پواسون و قانون جدید دوم نیوتن در فضای ناجابجایی که در قسمت(۲-۱) بیان کردیم نوسانگر هماهنگ دو بعدی را بعنوان مثالی کاربردی برای این روابط در نظر می‌گیریم. هامیلتونی نوسانگر هماهنگ دو بعدی را به صورت زیر داریم:

$$H_{osc}^{(NC)}=\frac{۱}{۲m}(p_{۱osc}^{(NC)۲}+p_{۲osc}^{(NC)۲})+V(x_{۱osc}^{(NC)},x_{۲osc}^{(NC)}) \quad (۳۸-۲)$$

با پتانسیل زیر:

$$V(x_{۱osc}^{(NC)},x_{۲osc}^{(NC)})=\frac{۱}{۲}k\sum_{i=۱}^{۲}x_{i\,osc}^{(NC)۲} \quad (۳۹-۲)$$

در روابط بالا اندیس $osc$ معرف نوسانگر هماهنگ است. تبدیل خطی بیان شده در فضای فاز ناجابجایی مربوط به تکانه را در هامیلتونی رابطه (۲-۳۸) جایگذاری می‌کنیم در نتیجه:

[۳۸] Harmonic oscillator

$$H_{osc}^{(NC)}=\frac{1}{2m}(p_{1osc}^{2}+\frac{1}{2}\eta p_{1osc}x_{2osc}+\frac{1}{2}\eta x_{2osc}p_{1osc}+\frac{1}{4}\eta^{2}x_{2osc}^{2}+p_{2osc}^{2}$$
$$-\frac{1}{2}p_{2osc}\eta x_{1osc}-\frac{1}{2}\eta x_{1osc}p_{2osc}+\frac{1}{4}\eta^{2}x_{1osc}^{2})+\frac{1}{2}k(x_{1osc}^{2}-x_{1osc}\theta\frac{p_{2osc}}{2}$$
$$-\frac{1}{2}\theta p_{2osc}x_{1osc}+\frac{1}{4}\theta^{2}p_{2osc}^{2}+x_{2osc}^{2}+\frac{1}{2}x_{2osc}\theta p_{1osc}+\frac{1}{2}\theta p_{1osc}x_{2osc}+\frac{1}{4}\theta^{2}p_{1osc}^{2}) \qquad (۴۰-۲)$$

یا به شکل ساده شده‌ی زیر داشت:

$$H_{osc}^{(NC)}=\frac{1}{2m}(p_{1osc}^{2}+p_{2osc}^{2}+\eta x_{2osc}p_{1osc}-\eta x_{1osc}p_{2osc})$$
$$+\frac{1}{2}k(x_{1osc}^{2}+x_{2osc}^{2}+\theta x_{2osc}p_{1osc}-\theta x_{1osc}p_{2osc}) \qquad (۴۱-۲)$$

با توجه به روابط (۲-۵) و (۲-۶)، معادلات حرکت متناظر با هامیلتونی بالا به صورت زیر به دست می‌آیند[۲۵]

$$\dot{x}_{1osc}=\{x_{1osc},H_{osc}^{(NC)}\}=\frac{p_{1osc}}{m}+\frac{\eta x_{2osc}}{2m}+\frac{k\theta x_{2osc}}{2} \qquad (۴۲-۲)$$

$$\dot{p}_{1osc}=\{p_{1osc},H_{osc}^{(NC)}\}=-kx_{1osc}+\frac{\eta\dot{x}_{2osc}}{2}+\frac{k\theta m\dot{x}_{2osc}}{2} \qquad (۴۳-۲)$$

با ترکیب دو معادله‌ی بالا به راحتی می‌توان معادله‌ی حرکت را بدست آورد

$$m\ddot{x}_{1osc}=-kx_{1osc}+\eta\dot{x}_{2osc}+k\theta m\dot{x}_{2osc} \qquad (۴۴-۲)$$

به طور مشابه خواهیم داشت

$$\dot{x}_{2osc}=\{x_{2osc},H_{osc}^{(NC)}\}=\frac{p_{2osc}}{m}-\frac{\eta x_{1osc}}{2m}-\frac{k\theta x_{1osc}}{2} \qquad (۴۵-۲)$$

$$\dot{p}_{2osc}=\{p_{2osc},H_{osc}^{(NC)}\}=-kx_{2osc}-\frac{\eta\dot{x}_{1osc}}{2}-\frac{k\theta m\dot{x}_{1osc}}{2} \qquad (۴۶-۲)$$

با ترکیب کردن دو معادله‌ی بالا معادله‌ی حرکت به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$m\ddot{x}_{2osc}=-kx_{2osc}-\eta\dot{x}_{1osc}-k\theta m\dot{x}_{1osc} \qquad (۴۷-۲)$$

### ۲-۳-۱ حل معادلات حرکت نوسانگر هماهنگ در فضای فاز ناجابجایی

برای حل معادلات (۲-۴۴) و (۲-۴۷)، شکل ساده شده‌ی آنها را در نظر می‌گیریم:

$$\ddot{x}_{1osc} = -\frac{k}{m}x_{1osc} + (\frac{\eta + k\theta m}{m})\dot{x}_{2osc} \tag{۲-۴۸}$$

$$\ddot{x}_{2osc} = -\frac{k}{m}x_{2osc} - (\frac{\eta + k\theta m}{m})\dot{x}_{1osc} \tag{۲-۴۹}$$

برای معادلات ظاهر شده در بالا متغیرهای جدید زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\alpha = -\frac{k}{m} \qquad , \qquad \beta = \frac{\eta + \theta km}{m} \tag{۲-۵۰}$$

برای حل معادلات (۲-۴۸) و (۲-۴۹) ابتدا بر اساس تابع وابسته به زمان $\phi(t)$روابط زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} x_{1osc}(t) &= \phi_{1osc}(t) \\ x_{2osc}(t) &= \phi_{2osc}(t) \end{aligned} \tag{۲-۵۱- الف}$$

با ترکیب معادلات(۲-۴۸) تا (۲-۵۱- الف) معادلات جدید زیر ظاهر می‌گردد:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{1osc}(t) &= \phi_{3osc}(t) \\ \dot{\phi}_{2osc}(t) &= \phi_{4osc}(t) \\ \dot{\phi}_{3osc}(t) &= \beta\phi_{1osc}(t) - \alpha\phi_{4osc}(t) \\ \dot{\phi}_{4osc}(t) &= \beta\phi_{2osc}(t) + \alpha\phi_{3osc}(t) \end{aligned} \tag{۲-۵۱- ب}$$

برای معادلات بالا صورت ماتریسی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi}_{1osc} \\ \dot{\phi}_{2osc} \\ \dot{\phi}_{3osc} \\ \dot{\phi}_{4osc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \beta & \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{1osc} \\ \phi_{2osc} \\ \phi_{3osc} \\ \phi_{4osc} \end{pmatrix} \tag{۲-۵۲}$$

با ویژه مقادیر

$$\lambda_{1osc}=\frac{1}{2}\sqrt{4a-2b^2+2\sqrt{-4b^2a+b^4}}\ ,\ \lambda_{2osc}=-\frac{1}{2}\sqrt{4a-2b^2+2\sqrt{-4b^2a+b^4}}$$
$$\lambda_{3osc}=\frac{1}{2}\sqrt{4a-2b^2+2\sqrt{-4b^2a+b^4}}\ ,\ \lambda_{4osc}=-\frac{1}{2}\sqrt{4a-2b^2+2\sqrt{-4b^2a+b^4}}$$
(۵۳-۲)

با انتخاب $\lambda_{1osc}$ معادلات (۲-۵۱- ب) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned}
&A_{osc}\lambda_{1osc}-C_{osc}=0\\
&B_{osc}\lambda_{1osc}-D_{osc}=0\\
&C_{osc}\lambda_{1osc}-\beta A_{osc}+\alpha D_{osc}=0\\
&D_{osc}\lambda_{1osc}-\beta B_{osc}-\alpha C_{osc}=0
\end{aligned} \tag{۵۴-۲}$$

با انتخاب $C_{osc}=1$ مابقی ضرایب مجهول به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$A_{osc}=\frac{1}{\lambda_{1osc}}\quad ,\quad B_{osc}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta-\lambda_{1osc}^2}{\lambda_{1osc}^2}\right)\quad ,\quad D_{osc}=\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta-\lambda_{1osc}^2}{\lambda_{1osc}}\right) \tag{۵۵-۲}$$

بنابراین جواب معادله‌ی حرکت نوسانگر هماهنگ دو بعدی در فضای فاز ناجابجایی بدست خواهد آمد:

$$\phi_{1osc}=A_{osc}e^{\lambda_{1osc}t}\ ,\ \phi_{2osc}=B_{osc}e^{\lambda_{1osc}t}\ ,\ \phi_{3osc}=C_{osc}e^{\lambda_{1osc}t}\ ,\ \phi_{4osc}=D_{osc}e^{\lambda_{1osc}t}$$
(۵۶-۲)

نتایج به دست آمده در رابطه (۲-۵۶) برای $\lambda_{2osc},\lambda_{3osc}$ و $\lambda_{4osc}$ قابل تکرار است.

### ۲-۴ اتم هیدروژن در فضای فاز ناجابجایی

اتم هیدروژن را می‌توان به دو روش مختلف مورد بررسی قرار داد. در روش اول اتم هیدروژن را می‌توان به صورت یک سیستم تک ذره‌ای (الکترون) در پتانسیل کولنی هسته در نظر گرفت در نتیجه در این روش می‌توان پتانسیل در فضای ناجابجایی را به صورت زیر در نظر گرفت[۲۸]

$$V^{(NC)}(r)=-\frac{Ze^2}{r^{(NC)}} \tag{۵۷-۲}$$

روش دوم اتم هیدروژن را به صورت سیستم دو ذره‌ای در نظر می‌گیرند که در مورد این روش در قسمت بعد بحث خواهیم کرد و در اینجا روش اول که مربوط به سیستم تک ذره است را بررسی می‌کنیم. در فضای ناجابجایی برای پتانسیل رابطه زیر را داریم[۳۸]

$$V^{(NC)}(r)=V(r)+\frac{۱}{۲}(\vec{\theta}\times\vec{p}).\vec{\nabla}V(r)+O(\theta^{۲})=V(r)-\frac{\vec{L}.\vec{\theta}}{۲r}\frac{\partial V}{\partial r}+O(\theta^{۲}) \quad (۵۸-۲)$$

با استفاده از روابط (۲-۵۷) و (۲-۵۸) تغییرات پتانسیل را به صورت زیر داریم:

$$\Delta V=V^{(NC)}(r)-V^{(C)}(r)=\frac{-Ze^{۲}}{۲r^{۳}}\vec{L}.\vec{\theta}=\frac{-e}{۲}(\vec{\theta}\times\vec{p}).(\frac{-Ze\vec{r}}{r^{۳}}) \quad (۵۹-۲)$$

تصحیح مربوط به ناجابجایی در هامیلتونی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta H=\frac{۱}{۲m}(\vec{\eta}\times\vec{p}).r-\frac{e}{۲}(\vec{\theta}\times\vec{p}).(\frac{-Ze\vec{r}}{r^{۳}})=-\frac{۱}{۲m}\vec{L}.\vec{\beta} \quad (۶۰-۲)$$

که $\vec{\beta}$ به صورت $\vec{\beta}=\vec{\eta}+\frac{mZe^{۲}}{r^{۳}}\vec{\theta}$ در نظر گرفته شده است. جمله‌ی اول در رابطه (۲-۶۰) متناظر است با حضور یک میدان مغناطیسی که به عنوان جمله‌ی تصحیح جنبشی در نظر گرفته می‌شود و جمله‌ی دوم ظاهر شده در این رابطه که به عنوان جمله‌ی تصحیح پتانسیل بیان می‌شود مشابه جفت شدگی اسپین مدار است که در آن تکانه اسپینی القایی ناجابجایی $\vec{S}$ به صورت $\vec{S}=\frac{\hbar}{\lambda_e^{۲}}\vec{\theta}$ بیان می‌شود که در این رابطه $\lambda_e$ طول موج کامپتون[۳۹] الکترون است. حال روش دوم که در آن اتم هیدروژن را به صورت سیستم دو ذره‌ای در نظر می‌گیرند بررسی می‌کنیم. در این روش رابطه مربوط به تصحیح پتانسیل در فضای فاز ناجابجایی را به صورت زیر داریم:

---
[۳۹] Compton wave length

$$\Delta V = \frac{-e}{۲}(\vec{\theta} \times \vec{p}).(\frac{-Ze^{۲}\vec{r}}{r}) = \frac{-Ze^{۲}}{۲r^{۳}}\vec{L}.\vec{\theta} \qquad (۶۱-۲)$$

به طوری که $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{P}$. تصحیح هامیلتونی در فضای فاز ناجابجایی در این مورد به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Delta H = [\frac{۱}{۲m_b}\vec{L}^b - \frac{۱}{۲m_a}\vec{L}^a].\vec{\theta} - \frac{Ze^{۲}}{۲r^{۳}}\vec{L}.\vec{\theta} \qquad (۶۲-۲)$$

علاوه بر شیف انرژی ترازهای انرژی اتم هیدروژن، مورد دیگری که شامل جمله‌های وابسته به پارامتر ناجابجایی مربوط به بخش تکانه نیز در تغییرات انرژی ظاهر می‌شود به طوری که

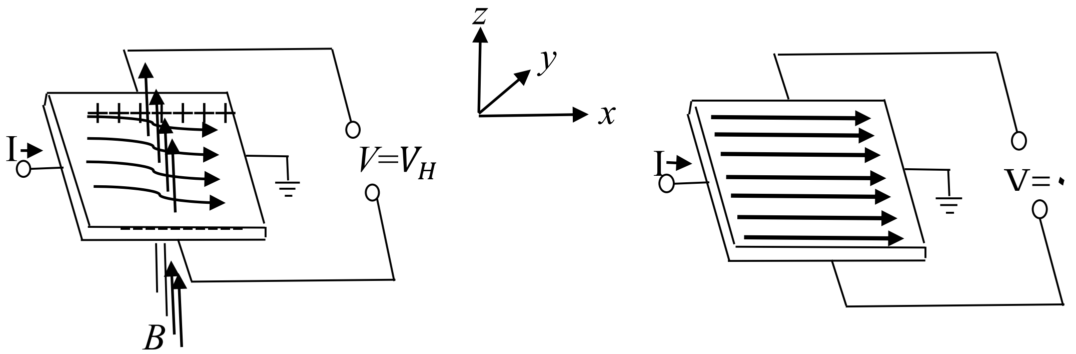
$$\Delta E_{NC}^{H-atom} = -\frac{۱}{۲m}\left\langle \vec{L}.\vec{\beta} \right\rangle = -\frac{۱}{۲m}\left[ \left\langle \vec{L}.\vec{\eta} \right\rangle + \left\langle \frac{Ze^{۲}}{۲r^{۳}} - \vec{L}.\vec{\theta} \right\rangle \right] \qquad (۶۳-۲)$$

## ۵-۲ اثر کلاسیکی هال

اثر هال[۲۹] در سال ۱۸۷۹ توسط ادوین هربرت هال[۴۰] دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه جانز هاپکینز کشف شد. او نشان داد که الکترون‌های رسانش در حال حرکت در یک رسانا (نوار مسی) همانند باریکه الکترون‌ها در خلا توسط میدان مغناطیسی منحرف می‌شوند. یک رسانا که جریان $I$ در جهت $x$، با جهت قراردادی از بالا به پایین آن به طور مستقیم در غیاب میدان مغناطیسی می‌گذرد همانطور که در شکل۲-۱ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. حامل‌های بار که الکترون‌ها هستند در جهت مخالف با سرعت سوق $v_d$ (سرعت سوق به عنوان سرعت متوسط حامل‌های بار بر روی حجم رسانا تعریف می‌شود) از پایین به بالا در حرکت‌اند. در این حالت همانطور که شکل۲-۱ نشان می‌دهد اختلاف پتانسیل میان رخ‌های عمود بر جهت جریان صفر است. حال اگر این مجموعه همانند شکل ۲-۲ تحت تاثیر میدان مغناطیسی خارجی $\vec{B}$ که عمود بر مسیر حرکت الکترون‌ها و در جهت z قرار بگیرد، نیروی لورنتسی $F_B = qv \times B$ به حامل‌های بار وارد می‌شود و آن‌ها را مسیر حرکتشان منحرف می‌کند و به

[۴۰] Edvin H.Hall

کناره‌های رسانا می‌راند و این امر با گذر زمان سبب تجمع باررروی یکی از سطوح می‌شود به طوری که بیشتر الکترون‌ها به سمت راست و بارهای مثبت خنثی نشده در طرف دیگر قرار می‌گیرند(در این حالت پتانسیل در سمت چپ بیشتر از سمت راست خواهد بود) یعنی توزیع نامتقارنی از چگالی بار روی سطح رسانا ایجاد می‌شود. جدا شدن بارهای مثبت و منفی درون رسانا یک میدان الکتریکی $\vec{E}$ در جهت $y$ تولید می‌کند و این میدان مانع از جابجایی بارها با یکدیگر می‌شود در نتیجه یک اختلاف پتانسیل میان رخ‌های عمود بر جهت جریان و میدان مغناطیسی تا زمانی که جریان ادامه یابد به وجود می‌آید که به آن اختلاف پتانسیل هال گویند. از طرفی در زمانی کوتاه نیروی الکتریکی وارد بر هر الکترون به حدی می‌رسد که نیروی مغناطیسی را خنثی می‌کند در این صورت دو نیروی الکتریکی و مغناطیسی به توازن در می‌آیند سپس الکترون‌های در حال حرکت در راستای نوار حرکت کرده و دیگر در کناره راست تجمع نکرده و میدان الکتریکی افزایش نمی‌یابد.  اثر هال این امکان را فراهم می‌کند تا علامت حامل‌های بار را در یک رسانا(اگر حامل بار مثبت باشد اختلاف پتانسیل مثبت و اگر منفی باشد اختلاف پتانسیل منفی نشان داده می‌شود) و تعداد حامل‌های در یکای حجم را مشخص کنیم.




شکل۲-۱ جریان عبوری از رسانا در غیاب میدان مغناطیسی

شکل ۲-۲ اثر هال در میدان مغناطیسی یکنواخت

## ۲-۶ اثر کوانتومی هال

حدود صد سال پس از کشف اثر کلاسیک هال، اثر کوانتومی هال در دماهای پایین(در حدود ۱۰mK) و میدان مغناطیسی قوی (در حدود ۲۰T) در سیستم گاز الکترونی دو بعدی کشف شد. در سال۱۹۸۰

کلیتزین[۴۱] و همکارانش رفتار عجیبی را در مقاومت هال[۴۲] مشاهده کردند در این آزمایش کوانتیده بودن مقاومت هال کشف شد یعنی متوجه شدند تغییرات مقاومت هال به صورت پله‌ای است و مقدار مقاومت مربوط به هر یک از این پله ها به طوراعجاب انگیزی ثابت است. این مقدار به جنس ماده مورد آزمایش، شکل هندسی نمونه و سایر عوامل بستگی نداشت و با دقت بسیار زیاد فقط تابع دوثابت بنیادی فیزیک، عدد پلانک $h$ و بار الکتریکی الکترون $e$ بود. کلیتزین و همکارانش با انجام آزمایش برروی یک سیستم الکترونی دو بعدی در دماهای پایین و میدان مغناطیسی قوی نتیجه گرفتند که مقاومت هال دارای مقادیر کوانتیده $\frac{h}{ie^{2}}$است که $h$ ثابت پلانک و $i$ مقدار صحیح و $e$ بار الکترون است و به همین دلیل این اثر به اثر کوانتومی هال صحیح معروف است(IQHE) [۳۰]. در سال ۱۹۸۲ اثر کوانتومی هال کسری (FQHE) [۳۱] توسط استورمر و همکارانش کشف شد، هنگامی که دما را برای بررسی اثر هال نسبت به آزمایش کلیتزین پایین‌تر آوردند ومقاومت هال را برای الکترون‌های دو بعدی، مقدار $\frac{h}{\nu e^{2}}$ را بدست آوردند که $\nu$ یک کسر مانند $\frac{۲}{۳},\frac{۱}{۷},\frac{۱}{۳}$و $\frac{۴}{۵}$ است. حال با در نظر گرفتن طرحی از این اثر مختصر روابطی را بیان می‌کنیم. یک قطعه از رسانا به طول $l$ در راستای محور $x$ و عرض $\omega$ در راستای $y$ با ضخامت $t$ در راستای $z$ مطابق شکل ۲-۳ داریم. رسانا شامل حامل‌های بار $q$ با چگالی عددی حامل‌های بار $n$ (تعداد الکترون‌ها در واحد حجم) است و $v_x$ سرعت سوق حامل‌های بار هنگامی که جریان $I_x$ در راستای مثبت محور $x$ شارش پیدا می‌کند. جریان $I_x$ چگالی جریان $j_x$ را در سطح مقطع $\omega t$ رسانا به وجود می‌آورد بطوری که:

$$I_x = j_x\omega t = nqv_x\omega t \tag{۲-۶۴}$$

جریان $I_x$ سبب ایجاد میدان $E_x$ در امتداد طول رسانا می‌شود. در این حالت که جریان با میدان متناسب است می‌توان گفت قانون اهم برقرار است پس می‌توان نوشت:

---

[۴۱] Klitzing
[۴۲] Hall resistance

$$j_x = \sigma E_x \qquad (۲-۶۵)$$

که $\sigma$ رسانندگی[۴۳] رساناست. پس از اعمال میدان مغناطیسی و تجمع بار در کناره‌های رسانا میدان الکتریکی $E_y$ ایجاد می‌شود که این میدان در حال رقابت با میدان مغناطیسی اعمال شده است. اما هنگامی که به حالت پایدار (بدلیل برابری میدان الکتریکی و مغناطیسی) می‌رسیم دیگر جریانی از بارها در راستای $y$ شارش نمی‌کند پس:

$$E_y = v_x B_z \qquad (۲-۶۶)$$

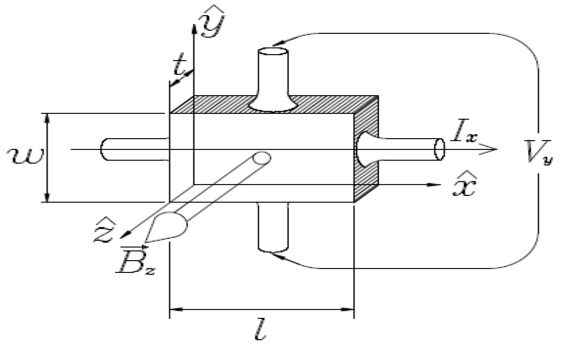
که میدان الکتریکی $E_y$ میدان هال در راستای $y$ نامیده می‌شود. اختلاف پتانسیل هال ایجاد شده برای نمونه قرار داده شده در میدان مغناطیسی با پهنای $\omega$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$V_H = -\int_{0}^{\omega} E_y dy = -E_y \omega \qquad (۲-۶۷)$$

با استفاده از روابط (۲-۶۴)، (۲-۶۶) و (۲-۶۷) می‌توان نوشت

$$V_H = -\left(\frac{1}{nq}\right)\frac{I_x B_z}{t} \qquad (۲-۶۸)$$

$R_H = \frac{1}{nq}$ ضریب هال نامیده می‌شود با واحد $\frac{m^3}{c}$. اگر حامل بار مثبت باشد این ضریب مثبت است و بلعکس.




شکل۲-۳ آزمایش اثر هال بر روی رسانا

---

[۴۳] conductivity

## ۲-۷ اثر کوانتومی هال در فضای جابجایی

در این بخش به بررسی اثر کوانتومی هال با استفاده از حل معادله دیراک می‌پردازیم. معادله دیراک یک معادله موج نسبیتی است که در سال ۱۹۸۲ توسط دیراک استخراج شد. این معادله تمامی ذرات اسپین ۱/۲ مانند الکترون‌ها و کوارک‌ها را توصیف می‌کند و با اصول مکانیک کوانتومی و نسبیت خاص سازگار است. اکنون برای این بررسی الکترونی به جرم $M$ و بار $e$ که در صفحه‌ی $(x, y)$ و تحت تاثیر میدان الکتریکی خارجی $\varepsilon = -\nabla\phi$ و میدان مغناطیسی یکنواخت خارجی $B$ که عمود بر صفحه است در نظر می‌گیریم. با استفاده از پیمانه‌ی متقارن، پتانسیل برداری را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$A = (-\frac{B}{۲}y, \frac{B}{۲}x) \qquad (۲\text{-}۶۹)$$

معادله دیراک با پتانسیل اسکالر $S(r)$ و پتانسیل برداری $V(r)$ به صورت زیر داده می‌شود: [۳۲]

$$[\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta(M + S(r))]\psi^{(C)}(\vec{r}) = [E^{(C)} - V^{(C)}(\vec{r})]\psi^{(C)}(\vec{r}) \qquad (۲\text{-}۷۰)$$

$E$ و $\vec{p} = -i\vec{\nabla}$ بترتیب انرژی نسبیتی سیستم و عملگر تکانه دو بعدی را نشان می‌دهد و ماترس‌های $\alpha$ و $\beta$

$$\vec{\alpha}_i = \begin{pmatrix} ۰ & \vec{\sigma}_i \\ \vec{\sigma}_i & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & -I \end{pmatrix} \qquad i = ۱,۲,۳ \qquad (۲\text{-}۷۱)$$

که $I$ ماتریس واحد ۲×۲ است و $\vec{\sigma}_i$ها ماتریس‌های پائولی‌اند.

$$\sigma_۱ = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_۲ = \begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_۳ = \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix} \qquad (۲\text{-}۷۲)$$

در نمایش پائولی- دیراک تابع موج دو مولفه‌ای را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\psi^{(C)}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \varphi^{(C)}(\vec{r}) \\ \chi^{(C)}(\vec{r}) \end{pmatrix} \qquad (۲\text{-}۷۳)$$

با جایگذاری معادلات (۲-۷۱) تا (۲-۷۳) در معادله (۲-۷۰) معادلات زیر ظاهر می‌گردد:

$$\vec{\sigma}.\vec{p}\chi^{(C)}(\vec{r}) = (E^{(C)} - V^{(C)}(\vec{r}) - M - S(\vec{r}))\varphi^{(C)}(\vec{r}) \qquad (۲\text{-}۷۴ \text{ - الف})$$

$$\vec{\sigma}.\vec{p}\varphi^{(C)}(\vec{r})=(E^{(C)}-V^{(C)}(\vec{r})+M+S^{(C)}(\vec{r}))\chi^{(C)}(\vec{r}) \qquad (۲-۷۴ \text{ - ب})$$

با در نظر گرفتن فرضی به صورت $S^{(C)}(\vec{r})=V^{(C)}(\vec{r})=eA_{\cdot}=\varepsilon x^{(C)}$ و ترکیب معادلات (۲-۷۴ - الف) و (۲-۷۴ - ب) رابطه‌ی زیر بدست می‌آید :

$$[(\vec{\sigma}.\vec{p})(\vec{\sigma}.\vec{p})+۲\varepsilon x^{(C)}(E^{(C)}+M)]\varphi^{(C)}(\vec{r})=(E^{(C)۲}-M^{۲})\varphi^{(C)}(\vec{r}) \qquad (۲-۷۵)$$

با استفاده از جفت شدگی کمینه، $\vec{p}\rightarrow\vec{p}+\frac{e}{c}\vec{A}$ معادله‌ی بالا به صورت معادله‌ی شرودینگر گونه ظاهر می‌گردد:

$$[\frac{۱}{۲M}(p_x^{(C)}-\frac{eB}{۲c}y^{(C)})^{۲}+\frac{۱}{۲M}(p_y^{(C)}+\frac{eB}{۲c}x^{(C)})^{۲}+ex^{(C)}\tilde{E}^{(C)}]\varphi^{(C)}(\vec{r})=\tilde{H}^{(C)}\varphi^{(C)}(\vec{r}) \qquad (۲-۷۶)$$

که

$$\tilde{E}^{(C)}=\varepsilon\frac{(E^{(C)}+M)}{M} \quad , \quad \tilde{H}^{(C)}=\frac{E^{(C)۲}-M^{۲}-\sigma_z\frac{\hbar eB}{c}}{۲M} \qquad (۲-۷۷)$$

برای حل معادله شرودینگرگونه (۲-۷۶)، مجموعه عملگرهای خلق و نابودی زیر را معرفی می‌کنیم[۳۳]

$$b^{\dagger(C)}=\frac{eB}{۲c}(x^{(C)}+iy^{(C)})-i(p_x^{(C)}+ip_y^{(C)})+\lambda^{(C)} \qquad (۲-۷۸ \text{ - الف})$$

$$b^{(C)}=\frac{eB}{۲c}(x^{(C)}-iy^{(C)})+i(p_x^{(C)}-ip_y^{(C)})+\lambda^{(C)} \qquad (۲-۷۸ \text{ - ب})$$

$$d^{(C)}=-\frac{eB}{۲c}(x^{(C)}-iy^{(C)})+i(p_x^{(C)}-ip_y^{(C)}) \qquad (۲-۷۸ \text{ - ج})$$

$$d^{\dagger(C)}=-\frac{eB}{۲c}(x^{(C)}+iy^{(C)})-i(p_x^{(C)}+ip_y^{(C)}) \qquad (۲-۷۸ \text{ - د})$$

$\lambda^{(C)}=\frac{Mc\tilde{E}^{(C)}}{B}$ و نماد † معرف همیوغ هرمیتی مختلط عملگر است. عملگرهای معرفی شده در روابط جابجایی $[b^{(C)},b^{\dagger(C)}]=[d^{(C)},d^{\dagger(C)}]=۲M\hbar\omega^{(C)}$ و $[b^{(C)},d^{\dagger(C)}]=[b^{\dagger(C)},d^{(C)}]=۰$ صدق می‌کنند. $\omega^{(C)}=\frac{eB}{Mc}$، فرکانس سیکلوترونی است. مختصات مکان و تکانه را براساس دو مجموعه عملگر خلق و نابودی به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$x^{(C)}=\frac{c}{۲eB}(b^{(C)}+b^{\dagger(C)}-d^{(C)}-d^{\dagger(C)}-۲\lambda^{(C)})$$ (۲-۷۹ - الف)

$$y^{(C)}=\frac{ic}{۲eB}(b^{(C)}-b^{\dagger(C)}-d^{(C)}+d^{\dagger(C)})$$ (۲-۷۹ - ب)

$$p_x^{(C)}=\frac{i}{۴}(b^{\dagger(C)}-b^{(C)}-d^{(C)}+d^{\dagger(C)})$$ (۲-۷۹- ج)

$$p_y^{(C)}=\frac{۱}{۴}(b^{(C)}+b^{\dagger(C)}+d^{(C)}+d^{\dagger(C)}-۲\lambda^{(C)})$$ (۲-۷۹- د)

با استفاده از معادلات (۲-۷۹) هامیلتونی به صورت $\tilde{H}^{(C)}=H_{osc}^{(C)}-T^{(C)}$ با جملات زیر بدست می‌آید:

$$H_{osc}^{(C)}=\frac{۱}{۴M}(b^{\dagger(C)}b^{(C)}+b^{(C)}b^{\dagger(C)})$$ (۲-۸۰ - الف)

$$T^{(C)}=\frac{\lambda^{(C)}}{۲M}(d^{\dagger(C)}+d^{(C)})+\frac{(\lambda^{(C)})^{۲}}{۲M}$$ (۲-۸۰ - ب)

$H_{OSC}$ هامیلتونی نوسانی را نشان می‌دهد و معادله (۲-۸۰ - ب) قسمت خطی نسبت به عملگرهای $d$ و $d^{\dagger}$ است. با حل معادله ویژه مقداری نوسانگر هماهنگ $H_{osc}^{(C)}\phi_{n,m}^{(C)}=E_{n,m}^{(C)}\phi_{n,m}^{(C)}$ در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\left[\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{d}{dr}-\frac{m^{۲}}{r^{۲}}-\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴\hbar^{۲}c^{۲}}r^{(C)۲}+\frac{۲ME^{(C)}}{\hbar^{۲}}\right]\phi_{n,m}^{(C)}=۰$$ (۲-۸۱)

برای معادله بالا جوابی به شکل $\phi_{n,m}^{(C)}(r,\varphi)=u_{n,m}^{(C)}(r)e^{im\varphi^{(C)}}$ انتخاب می کنیم که $n$ و $m$ اعداد کوانتومی می‌باشند. در نتیجه ویژه تابع و ویژه مقدار وابسته به $n$ و $m$را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\phi_{n,m}^{(C)}(r,\varphi)=N_{n,m}(r^{(C)})^{m}e^{\frac{-Ber^{(C)۲}}{۴\hbar c}}L_n^m(\frac{eB}{۲\hbar c}r^{(C)۲})e^{im\varphi^{(C)}}$$ (۲-۸۲ - الف)

با انرژی

$$E_{n,m}^{(C)}=\hbar\tilde{\omega}(n+\tilde{m}+\frac{۱}{۲})\quad,\quad\tilde{m}=\frac{m}{۲}$$ (۲-۸۲ - ب)

$N_{n,m}$ ضریب بهنجارش است. $\tilde{\omega}=\dfrac{eB}{Mc}$، $\tilde{m}=\dfrac{m}{۲}$ و $L_n^m(\dfrac{eB}{۲\hbar c}r^{(C)۲})$ تابع لاگر است که به صورت :

$$L_n^m(\frac{eB}{۲\hbar c}r^{(C)۲})=\frac{e^{\alpha r^{(C)۲}-n}}{m!}\frac{d^m}{(dr^۲)^m}(e^{-\alpha r^{(C)۲}}(\alpha r^{(C)۲})^{m+n}) \qquad (۸۳\text{-}۲)$$

$\alpha=\dfrac{eB}{۲\hbar c}$. با حل معادله ویژه‌مقداری $T^{(C)}\varphi_\eta^{(C)}=E_\eta^{(C)}\varphi_\eta^{(C)}$، ویژه تابع و ویژه مقدار انرژی را داریم:

$$\varphi_\eta^{(C)}=e^{i(\eta y^{(C)}+\frac{M\omega^{(C)}}{۲\hbar}x^{(C)}y^{(C)})} \qquad (۸۴\text{-}۲ - \text{الف})$$

$$E_\eta^{(C)}=-\frac{\hbar\lambda^{(C)}}{M}\eta-\frac{\lambda^{(C)۲}}{۲M} \qquad (۸۴\text{-}۲ - \text{ب})$$

بنابراین رابطه انرژی هامیلتونی کل به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\hbar\tilde{\omega}^{(C)}(n+\tilde{m}+\frac{۱}{۲})-(\frac{\lambda^{(C)۲}}{۲M}+\frac{\hbar\lambda^{(C)}}{M}\eta)=\frac{E^{(C)۲}-M^۲-\sigma_z\frac{\hbar eB}{c}}{۲M} \qquad (۸۵\text{-}۲)$$

به ازای $m=۰$ تابع موج کل به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\psi^{(C)}(n,\eta)=N_{n,\eta}e^{-\frac{\alpha r^{۲(C)}}{۲}-n}(\alpha r^{۲(C)})^n\times e^{i(\eta y^{(C)}+\frac{M\omega}{۲\hbar}x^{(C)}y^{(C)})} \qquad (۸۶\text{-}۲)$$

### ۲-۷-۱ عملگر چگالی جریان در فضای جابجایی

عملگر چگالی جریان J در صفحه به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]

$$J_\mu^{(C)}=\bar{\psi}^{(C)}\gamma_\mu\psi^{(C)} \qquad (۸۷\text{-}۲ - \text{الف})$$

در دو راستای $x$ و $y$ چگالی جریان را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$J_x^{(C)}=\bar{\varphi}^{(C)}\gamma_\cdot\gamma_x\varphi^{(C)}=\begin{pmatrix}\varphi^{*(C)} & \chi^{*(C)}\end{pmatrix}\gamma_\cdot\gamma_x\begin{pmatrix}\varphi^{(C)}\\ \chi^{(C)}\end{pmatrix} \qquad (۸۷\text{-}۲ - \text{ب})$$

$$J_y^{(C)} = \bar{\varphi}^{(C)}\gamma_{\cdot}\gamma_y\varphi^{(C)} = \begin{pmatrix}\varphi^{*(C)} & \chi^{*(C)}\end{pmatrix}\gamma_{\cdot}\gamma_y\begin{pmatrix}\varphi^{(C)}\\ \chi^{(C)}\end{pmatrix}$$ (۲-۸۷ ج)

در عبارت بالا ماتریس دیراک گاما به صورت $i=۱,۲,۳$ $\gamma_{\cdot} = \begin{pmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & -۱\end{pmatrix}$ , $\gamma_i = \begin{pmatrix}۰ & \sigma_i\\ -\sigma_i & ۰\end{pmatrix}$

است. با انجام محاسبات و ساده سازی‌های لازم، توابع مورد نیاز برای محاسبه چگالی جریان را به صورت زیر داریم:

$$\chi = \frac{\sigma.p}{E^{(C)}+M}\phi = \frac{۱}{E^{(C)}+M}(\sigma_x p_x\phi + \sigma_y p_y\phi)$$

$$\chi = \frac{۱}{E^{(C)}+M}\Bigg\{\sigma_x[Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times \frac{m\omega y}{۲}e^{i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)} + i\hbar\alpha x Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times e^{i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}$$

$$-۲i\hbar n\alpha x Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^{n-۱}\times e^{i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}] + \sigma_y[Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times (\hbar\eta + \frac{m\omega x}{۲})e^{i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}$$

$$+i\hbar\alpha y Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times e^{i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)} - ۲i\hbar n\alpha y Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^{n-۱}\times e^{i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}]\Bigg\}$$

(۲-۸۸ - الف)

$$\chi^* = \frac{۱}{E^{(C)}+M}\Bigg\{\sigma_x^*[Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times \frac{-m\omega y}{۲}e^{-i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)} + i\hbar\alpha x Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times e^{-i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}$$

$$-۲i\hbar n\alpha x Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^{n-۱}\times e^{-i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}] + \sigma_y^*[Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times (-\hbar\eta - \frac{m\omega x}{۲})e^{-i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}$$

$$+i\hbar\alpha y Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^n \times e^{-i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)} - ۲i\hbar n\alpha y Ne^{\frac{-\alpha r^۲}{۲}-n}(\alpha r^۲)^{n-۱}\times e^{-i(\eta y+\frac{M\omega}{۲\hbar}xy)}]\Bigg\}$$

(۲-۸۸ - ب)

با جایگذاری توابع معرفی شده و صرف نظر کردن از ضرئب بهنجارش، روابط(۲-۸۷ - ب) و (۲-۸۷ - ج) به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$J_x^{(C)} = \frac{۱}{(E^{(C)}+M)^۲}(-۴\hbar^۲\alpha^۲ - ۱۶n^۲\hbar^۲(x^{(C)۲}+y^{(C)۲})^{-۱})$$ (۲-۸۹ - الف)

$$\times e^{-۲\alpha(x^{(C)۲}+y^{(C)۲})-۲n}(\alpha(x^{۲(C)}+y^{۲(C)}))^{۴n}$$

$$J_y^{(C)} = ۰$$ (۲-۸۹ - ب)

وابستگی به عدد کوانتومی در رابطه عملگر چگالی به دست آمده به وضوح دیده می‌شود که به ازای $n=۰$ داریم:

$$J_x^{(C)} = \frac{-۴\hbar^۲\alpha^۲}{(E^{(C)}+M)^۲} e^{-۲\alpha(x^۲+y^۲)} \tag{۹۰-۲}$$

برای بدست آوردن مقدار چشمداشتی عملگر چگالی جریان از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left\langle J_x^{(C)} \right\rangle = \frac{-۴\hbar^۲\alpha^۲}{(E^{(C)}+M)^۲} \int_۰^{\infty}\int_۰^{W} e^{-۲\alpha(x^۲+y^۲)} dxdy \tag{۹۱-۲}$$

$W$ پهنای رسانا مورد نظر است. با حل انتگرال بالا جوابی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left\langle J_x^{(C)} \right\rangle = -k^{(C)}\sqrt{\frac{\pi}{۶}}\gamma(\frac{۱}{۲},۲\alpha W^۲) \tag{۹۲-۲}$$

$k^{(C)} = \frac{\alpha}{(E^{(C)}+M)^۲}$ . $\gamma(\frac{۱}{۲},۲\alpha W^۲)$ معرف تابع ناکامل گاما می‌باشد که بر اساس آن می‌توان نوشت:

$$\gamma(\frac{۱}{۲},۲\alpha W^۲) = \sqrt{۲\alpha W^۲}\sum_{n=۰}^{\infty}(-۱)^n \frac{(۲\alpha W)^n}{n!(\frac{۱}{۲}+n)} \tag{۹۳-۲}$$

بر اساس معادلات بدست آمده محاسبه رسانندگی هال و ولتاژ هال را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\sigma^{(C)} = \frac{\left\langle J_x^{(C)} \right\rangle}{\varepsilon} \tag{۲-۹۴ - الف}$$

$$V_H = -\int_۰^{W} \varepsilon dx = \varepsilon W \tag{۲-۹۴ - ب}$$

### ۸-۲ اثر کوانتومی هال در فضای ناجابجایی

برای بررسی اثر هال در فضای ناجابجایی باید معادله شرودینگر گونه بدست آمده در بخش قبل را بررسی کنیم:

$$[\frac{۱}{۲M}(p_x^{(NC)} - \frac{eB}{۲c}y^{(NC)})^۲ + \frac{۱}{۲M}(p_y^{(NC)} + \frac{eB}{۲c}x^{(NC)})^۲ + ex^{(NC)}\tilde{E}^{(C)}]\varphi^{(NC)}(\vec{r}) = \tilde{H}^{(NC)}\varphi^{(NC)}(\vec{r})$$
(۲-۹۵ - الف)

که

$$\tilde{E}^{(NC)} = \varepsilon\frac{(E^{(NC)}+M)}{M} \quad , \quad \tilde{H}^{(NC)} = \frac{E^{(NC)۲} - M^۲ - \sigma_z\frac{\hbar eB}{c}}{۲M} \tag{۲-۹۵ - ب}$$

برای حل معادله بالا مجموعه عملگرهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$b^{\dagger(NC)}=\frac{eB}{2c}(x+iy)-i(p_x^{(NC)}+ip_y^{(NC)})+\lambda_-^{(NC)} \qquad \text{(۲-۹۶ - الف)}$$

$$b^{(NC)}=\frac{eB}{۲c}(x-iy)+i(p_x^{(NC)}-ip_y^{(NC)})+\lambda_-^{(\mathrm{NC})} \qquad \text{(۲-۹۶ - ب)}$$

$$d^{\dagger(NC)}=-\frac{eB}{۲c}(x+iy)-i(p_x^{(NC)}+ip_y^{(NC)}) \qquad \text{(۲-۹۶ - ج)}$$

$$d^{(NC)}=-\frac{eB}{۲c}(x-iy)+i(p_x^{(NC)}-ip_y^{(NC)}) \qquad \text{(۲-۹۶ - د)}$$

$\gamma=۱-\frac{e\theta B}{۴\hbar c}$ , $i=۱,۲$ , $p_i^{(NC)}=\gamma p_i^{(C)}$ و $\lambda_-^{(NC)}$ یک پارامتر حقیقی می‌باشد. مجموعه عملگرهای معرفی شده در رابطه جابجایی $[b^{(NC)},b^{\dagger(NC)}]=[d^{(NC)},d^{\dagger(NC)}]=۲M\hbar\omega^{(NC)}$ صدق می‌کنند که در این رابطه $\omega^{(NC)}=\gamma\omega^{(C)}$ است. مختصه مکان و تکانه را برحسب عملگرهای خلق و نابودی معرفی شده بیان می‌کنیم:

$$x=\frac{c}{۲eB}(b^{(NC)}+b^{\dagger(NC)}-d^{(NC)}-d^{\dagger(NC)}-۲\lambda_-^{(NC)}) \qquad \text{(۲-۹۷ - الف)}$$

$$y=\frac{ic}{2eB}(b^{(NC)}-b^{\dagger(NC)}-d^{(NC)}+d^{\dagger(NC)}) \qquad \text{(۲-۹۷ - ب)}$$

$$p_x^{(NC)}=\frac{i}{۴}(b^{\dagger(NC)}-b^{(NC)}-d^{(NC)}+d^{\dagger(NC)}) \qquad \text{(۲-۹۷ - ج)}$$

$$p_y^{(NC)}=\frac{۱}{۴}(b^{(NC)}+b^{\dagger(NC)}+d^{(NC)}+d^{\dagger(NC)}-۲\lambda_-^{(NC)}) \qquad \text{(۲-۹۷ - د)}$$

با استفاده از معادلات (۲-۹۷- الف) تا (۲-۹۷- د) هامیلتونی در فضای ناجابجایی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$H^{(NC)}=\frac{۱}{۴M}(b^{\dagger(NC)}b^{(NC)}+b^{(NC)}b^{\dagger(NC)})-\frac{\lambda_+^{(NC)}}{۲M}(d^{\dagger(NC)}+d^{(NC)})-\frac{\lambda_-^{(NC)۲}}{۲M}$$

(۲-۹۸)

با روش مشابه در بخش جابجایی برای به دست آوردن ویژه تابع و رابطه انرژی، در مورد ناجابجایی می‌توان داشت:

$$\psi^{(NC)}(n,\eta,\theta)=N_{n,\eta}e^{-\frac{\alpha r^{۲}}{۲}-n}(\alpha r^{۲})^{n}\times e^{i(\eta y+\frac{M\omega^{(NC)}}{۲\hbar}xy)} \qquad m=۰ \qquad \text{(۲-۹۹- الف)}$$

و

$$\hbar\omega^{(NC)}(n+\tilde{m}+\frac{۱}{۲})-(\frac{\lambda_{-}^{(NC)۲}}{۲M}+\frac{\hbar\gamma\lambda_{+}}{M}\eta)-\frac{E^{(NC)۲}-M^{۲}-\sigma_{z}\frac{\hbar eB}{c}}{۲M}=۰ \qquad \text{(۲-۹۹- ب)}$$

که $n=۰,...,\eta$

### ۲-۸-۱ عملگر چگالی جریان در فضای ناجابجایی

عملگر چگالی جریان در صفحه ناجابجایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_{\mu}^{NC}=\bar{\psi}^{(NC)}\gamma_{\mu}\psi^{(NC)} \qquad \text{(۲-۱۰۰)}$$

مانند روند ارائه شده در بخش قبل و با در نظر گرفتن $n=۰$ می‌توان چگالی جریان را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$J_{x}^{(NC)}=\frac{۱}{(E^{(NC)}+M)^{۲}}(-۴\hbar^{۲}\alpha^{۲})e^{-۲\alpha(x^{۲}+y^{۲})} \qquad \text{(۲-۱۰۱- الف)}$$

$$J_{y}^{(NC)}=۰ \qquad \text{(۲-۱۰۱- ب)}$$

مقدار چشمداشتی عملگر چگالی جریان در صفحه ناجابجایی به صورت داده می‌شود:

$$\left\langle J_{x}^{(NC)}\right\rangle=\int_{۰}^{\infty}\int_{۰}^{W}\psi^{(NC)*}J_{x}^{(NC)}\psi^{(NC)}\,dxdy \qquad \text{(۲-۱۰۲- الف)}$$

با حل انتگرال بالا جوابی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left\langle J_{x}^{(NC)}\right\rangle=-k^{(NC)}\sqrt{\frac{\pi}{۶}}\gamma(\frac{۱}{۲},۲\alpha W^{۲}) \qquad \text{(۲-۱۰۳)}$$

$k^{(NC)}=\frac{\alpha}{(E^{(NC)}+M)^{۲}}$ و $\gamma(\frac{۱}{۲},۲\alpha W^{۲})$ را به عنوان تابع ناکامل گاما در بخش قبل معرفی کردیم.

بر اساس معادلات بدست آمده محاسبه رسانندگی هال و ولتاژ هال را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\sigma^{(NC)}=\frac{\left\langle J_{x}^{(NC)}\right\rangle}{\varepsilon} \qquad \text{(۲-۱۰۴ - الف)}$$

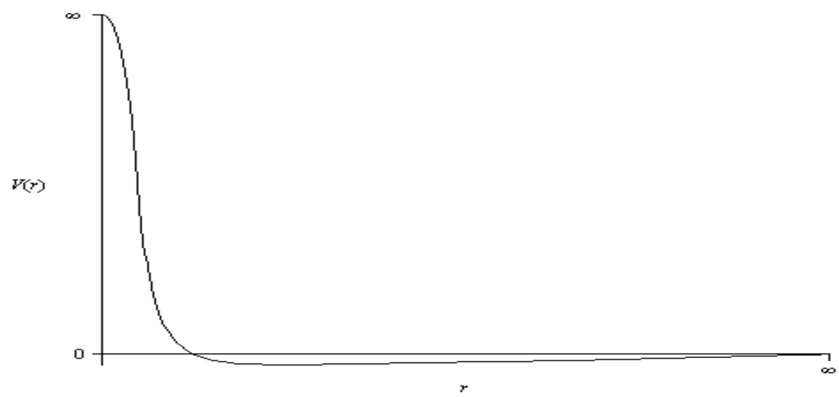
$$V_{H}=-\int_{۰}^{W}\varepsilon dx=\varepsilon W \qquad \text{(۲-۱۰۴ - ب)}$$

### ۲-۹ بررسی فرمیون‌ها در فضای ناجابجایی با پتانسیل کراتزر[۴۴]

پتانسیل کراتزر معادل با پتانسیل کولنی همراه با پتانسیل معکوس مربعی می‌باشد که نقش مهمی در مکانیک کوانتومی و شیمی کوانتومی بازی می‌کند که بطور گسترده در مطالعه‌ی ساختارهای مولکولی و اتمی و برهمکنش‌ها استفاده می‌شود [۳۵, ۳۶]. پتانسیل کراتزر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V(r) = -D[\frac{a}{r} - \frac{۱}{۲}\frac{a^{۲}}{r^{۲}}] \qquad (۱۰۵\text{-}۲)$$

با پارامترهای ثابت $D > ۰$ و $a > ۰$. رفتار پتانسیل کراتزر در شکل ۲-۴ نشان داده شده است. جملات ظاهر شده در پتانسیل کراتزر را اینگونه می‌توان تعبیر کرد که جمله $\frac{۱}{r}$ معرف پتانسیل کولنی هسته‌ای است که ذره‌ای مانند الکترون بر روی مسیر دایره‌ای حول هسته در حرکت است اما هنگامی که جمله $\frac{۱}{r^{۲}}$ به آن اضافه شود سبب می‌شود الکترون بر روی مسیر دایره‌ای شکل مسیری با نوسانات کم دامنه را طی کند.




شکل۲-۴ پتانسیل کراتزر به ازای $D = a = ۱$

#### ۲-۹-۱ معادله‌ی دیراک در حضور پتانسیل کراتزر

با در نظر گرفتن $\hbar = c = ۱$، معادله‌ی دیراک با پتانسیل اسکالر $S(r)$ و پتانسیل برداری $V(r)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$[\vec{\alpha}.\vec{p} + \beta(M + S^{(NC)}(r))]\psi^{(NC)}(\vec{r}) = [E^{(NC)} - V^{(NC)}(r)]\psi^{(NC)}(\vec{r}) \qquad (۱۰۶\text{-}۲)$$

---
[44] Kratzer

$E^{(NC)}$، $\vec{p}=-i\,\vec{\nabla}$ و $M$ در معادله‌ی بالا به ترتیب نمایش دهنده‌ی انرژی نسبیتی سیستم، عملگر تکانه سه بعدی و جرم ذره‌ی فرمیونی می‌باشند. ماتریس‌های دیراک $\alpha$ و $\beta$ و $\vec{\sigma}_i$ ماتریس‌های پائولی ۲×۲ و $\psi^{(NC)}(\vec{r})$ درنمایش پائولی-دیراک به صورت اسپینور دو مؤلفه‌ای‌اند که در بخش قبل معرفی شدند، با جایگذاری این مقادیر در رابطه (۲-۱۰۶) مجموعه معادلات جفت شده‌ی زیر ظاهر می‌گردد:

$$\vec{\sigma}.\vec{p}\chi^{(NC)}(\vec{r})=(E^{(NC)}-V^{(NC)}(\vec{r})-M-S^{(NC)}(\vec{r}))\varphi^{(NC)}(\vec{r}) \qquad \text{(۲-۱۰۷ - الف)}$$

$$\vec{\sigma}.\vec{p}\varphi^{(NC)}(\vec{r})=(E^{(NC)}-V^{(NC)}(\vec{r})+M+S^{(NC)}(\vec{r}))\chi^{(NC)}(\vec{r}) \qquad \text{(۲-۱۰۷ - ب)}$$

اکنون توابعی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Lambda^{(NC)}(r)=V^{(NC)}(r)-S^{(NC)}(r) \qquad \text{(۲-۱۰۸ - الف)}$$

$$\Xi^{(NC)}(r)=V^{(NC)}(r)+S^{(NC)}(r) \qquad \text{(۲-۱۰۸ - ب)}$$

پتانسیل برداری کراتزر را در فضای ناجابجایی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$V^{(NC)}(r)=-D[\frac{a}{r^{(NC)}}-\frac{۱}{۲}\frac{a^{۲}}{r^{(NC)۲}}] \qquad \text{(۲-۱۰۹)}$$

ابتدا معادله دیراک در حضور پتانسیل کراتزر را با شرط زیر بررسی می‌کنیم.

۱. **انتخاب** $\Lambda^{(NC)}(r)=۰$

در این مورد $S^{(NC)}(r)=V^{(NC)}(r)=-D[\frac{a}{r^{(NC)}}-\frac{۱}{۲}\frac{a^{۲}}{r^{(NC)۲}}]$ پتانسیل برداری و اسکالر برابر می‌شوند. این انتخاب از لحاظ ریاضی محاسبات را ساده‌تر می‌کند و از لحاظ فیزیکی برابری پتانسیل اسکالر و برداری متناظر با تقارن اسپینی معادله دیراک است. بنابراین معادله‌ی (۲-۱۰۷-الف) و (۲-۱۰۷-ب) به شکل زیر در می‌آیند:

$$\vec{\sigma}.\vec{p}\chi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=(E_{n,m}^{(NC)}-۲V^{(NC)}(\vec{r})-M)\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r}) \qquad \text{(۲-۱۱۰ - الف)}$$

$$\chi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{E_{n,m}^{(NC)}+M}\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r}) \qquad \text{(۲-۱۱۰ - ب)}$$

با جایگذاری معادله‌ی (۲-۱۱۰- ب) در (۲-۱۱۰- الف) خواهیم داشت:

$$[p^{2}+2(E_{n,m}^{(NC)}+M)V^{(NC)}(r)]\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=[E_{n,m}^{(NC)2}-M^{2}]\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r}) \qquad (۲\text{-}۱۱۱)$$

معادله‌ی دیراک را برای یک الکترون در حال حرکت در دو بعد که تحت تاثیر میدان مغناطیسی یکنواخت که در راستای محور $z$ قرار دارد به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$[(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}^{(NC)})^{2}+2(E_{n,m}^{(NC)}+M)V(r)]\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=[E_{n,m}^{(NC)2}-M^{2}]\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r}) \qquad (۲\text{-}۱۱۲)$$

که در آن از روابط $p=-i\hbar\vec{\nabla}$ و $\vec{B}=B\hat{z}$ و همچنین تبدیل $\vec{p}\rightarrow\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}(r)$ که $A$ پتانسیل برداری است و می‌تواند دارای مقادیر دلخواه باشد به گونه‌ای که می‌توان $\vec{A}=\vec{A}_{1}+\vec{A}_{2}$ و $B=\vec{\nabla}\times\vec{A}_{1},\vec{\nabla}\times\vec{A}_{2}=0$ را اختیار کرد، استفاده کرده‌ایم. پتانسیل برداری $\vec{A}_{2}$شار مغناطیسی اضافی $\Phi_{AB}$ [۳۷] را توصیف می‌کند. بعلاوه برای پتانسیل در فضای ناجابجایی رابطه‌ی زیر برقرار است[۳۸]

$$V^{(NC)}(r)=V(r)+\frac{1}{2}(\vec{\theta}\times\vec{p}).\vec{\nabla}V(r)+O(\theta^{2})=V(r)-\frac{\vec{L}.\vec{\theta}}{2r}\frac{\partial V}{\partial r}+O(\theta^{2}) \qquad (۲\text{-}۱۱۳)$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\vec{A}_{1}^{(NC)}=\frac{B\times r}{2}=\frac{Br^{(NC)}}{2}\hat{\phi}=\frac{B}{2}(r-\frac{L_{z}\theta}{2r})\hat{\phi}\ ,\ \ \vec{A}_{2}^{(NC)}=\frac{\Phi_{AB}}{2\pi r^{(NC)}}\hat{\phi}=\frac{\Phi_{AB}}{2\pi}(\frac{1}{r}+\frac{L_{z}\theta}{2r^{3}})\hat{\phi}$$

$$\vec{A}^{(NC)}=(\frac{Br}{2}+\frac{\Phi_{AB}}{2\pi r}-\frac{BL_{z}\theta}{4r}+\frac{L_{z}\theta\Phi_{AB}}{4\pi r^{3}})\hat{\phi} \qquad (۲\text{-}۱۱۴)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲-۱۱۴) در رابطه‌ی (۲-۱۱۲) رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}&[-\nabla^{2}+\frac{e^{2}}{c^{2}}A^{(NC)2}-\frac{e}{c}p.A^{(NC)}-\frac{e}{c}A^{(NC)}.p\\&+2(E_{n,m}^{(NC)}+M)V^{(NC)}(r)+M^{2}-E_{n,m}^{(NC)2}]\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=0\end{aligned} \qquad (۲\text{-}۱۱۵\text{- الف})$$

با وارد کردن پتانسیل برداری و در نظر گرفتن رابطه‌ی (۲-۱۱۵-الف) در مختصات استوانه‌ای داریم:

$$\left\{-\left[\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{d}{dr}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{d^{۲}}{d\phi^{۲}}\right]+\frac{e^{۲}}{c^{۲}}\left(\frac{Br}{۲}+\frac{\Phi_{AB}}{۲\pi r}-\frac{BL_z\theta}{۴r}+\frac{L_z\theta\Phi_{AB}}{۴\pi r^{۳}}\right)^{۲}+\frac{ieB}{۲c}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{ie\Phi_{AB}}{۲\pi cr^{۲}}\frac{\partial}{\partial\phi}\right.$$

$$\left.-\frac{ieBL_z\theta}{۴cr^{۲}}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{ieL_z\theta\Phi_{AB}}{۴\pi cr^{۴}}\frac{\partial}{\partial\phi}+۲(E_{n,m}^{(NC)}+M)V^{(NC)}(r)+M^{۲}-E_{n,m}^{(NC)۲}\right\}\varphi_{n.m}^{(NC)}(\vec{r})=۰$$

(۲-۱۱۵- ب)

برای معادله‌ی بالا جوابی به صورت

$\varphi_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=r^{-\frac{۱}{۲}}U_{n,m}^{(NC)}(r)exp(im\phi) \qquad m=۰,\pm۱,\pm۲,...$ در نظر می‌گیریم. بنابراین با

انتخاب $\vec{\theta}=\theta,\vec{L}=L_z$ برای پتانسیل کراتزر در فضای ناجابجایی رابطه زیر را داریم:

$$V^{(NC)}(r)=-۲D\left[\frac{a}{r}-\frac{a^{۲}}{۲r^{۲}}\right]+\frac{L_z\theta D}{r}\left[-\frac{a^{۲}}{r^{۲}}+\frac{a^{۲}}{r^{۳}}\right]+O(\theta^{۲}) \qquad (۲-۱۱۶)$$

با جایگذاری جواب در نظر گرفته شده و معادله‌ی (۲-۱۱۶) در معادله‌ی (۲-۱۱۵- ب) و صرف نظر

کردن از جملات $\theta^{۲}$، رابطه ی زیر را در فضای ناجابجایی بدست می‌آوریم:

$$\frac{d^{۲}U_{n,m}^{(NC)}(r)}{dr^{۲}}+\left\{\left(\frac{۱}{۴}-m^{۲}-\frac{e^{۲}\Phi_{AB}^{۲}}{۴\pi^{۲}c^{۲}}+\frac{em\Phi_{AB}}{۲\pi c}-۲D(E_{n,m}^{(NC)}+M)a^{۲}-\frac{e^{۲}BL_z\theta\Phi_{AB}}{۲\pi c^{۲}}-\frac{emBL_z\theta}{۴c}\right)\frac{۱}{r^{۲}}\right.$$

$$+۲(E_{n,m}^{(NC)}+M)L_z\theta D\frac{a}{r^{۳}}+\left(-۲(E_{n,m}^{(NC)}+M)L_z\theta Da^{۲}-\frac{e^{۲}L_z\theta\Phi_{AB}^{۲}}{۴\pi^{۲}c^{۲}}+\frac{eL_z\theta\Phi_{AB}}{۴\pi c}\right)\frac{۱}{r^{۴}}$$

$$\left.+۴D(E_{n,m}^{(NC)}+M)\frac{a}{r}+\frac{e^{۲}B^{۲}L_z\theta}{۴c^{۲}}-\frac{e^{۲}B\Phi_{AB}}{۲\pi c^{۲}}+\frac{emB}{۲c}+E_{n,m}^{(NC)۲}-M^{۲}-\frac{e^{۲}B^{۲}r^{۲}}{۴c^{۲}}\right\}U_{n,m}^{(NC)}(r)=۰$$

(۲-۱۱۷)

اکنون پارامترهای جدید زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\xi_{۱}^{(NC)}=\frac{۱}{۴}-m^{۲}-\frac{e^{۲}\Phi_{AB}^{۲}}{۴\pi^{۲}c^{۲}}+\frac{em\Phi_{AB}}{۲\pi c}-۲D(E_{n,m}^{(NC)}+M)a^{۲}-\frac{e^{۲}Bl^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{۲\pi c^{۲}}-\frac{emBl^{(NC)}\theta}{۴c}$$

(۲-۱۱۸- الف)

$$\xi_{۲}^{(NC)}=۴D(E_{n,m}^{(NC)}+M)a \qquad (۲-۱۱۸- ب)$$

$$\xi_{۳}^{(NC)}=\frac{e^{۲}B\Phi_{AB}}{۲\pi c^{۲}}-\frac{emB}{۲c}-E_{n,m}^{(NC)۲}+M^{۲}-\frac{e^{۲}B^{۲}l^{(NC)}\theta}{۴c^{۲}}$$ (۲-۱۱۸ - ج)

$$\xi_{۴}^{(NC)}=-۲(E_{n,m}^{(NC)}+M)l^{(NC)}\theta Da$$ (۲-۱۱۸ - د)

$$\xi_{۵}^{(NC)}=۲(E_{n,m}^{(NC)}+M)l^{(NC)}\theta Da^{۲}+\frac{e^{۲}l^{(NC)}\theta\Phi_{AB}^{۲}}{۴\pi^{۲}c^{۲}}-\frac{el^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{۴\pi c}$$ (۲-۱۱۸ - ه)

$$\xi_{۶}^{(NC)}=\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}}$$ (۲-۱۱۸ - و)

بنابراین معادله‌ی (۲-۱۱۷) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^{۲}U_{n,m}^{(NC)}(r)}{dr^{۲}}+\left(\frac{\xi_{۱}^{(NC)}}{r^{۲}}+\frac{\xi_{۲}^{(NC)}}{r}-\xi_{۳}^{(NC)}-\frac{\xi_{۴}^{(NC)}}{r^{۳}}-\frac{\xi_{۵}^{(NC)}}{r^{۴}}-\xi_{۶}^{(NC)}r^{۲}\right)$$ (۲-۱۱۹)

برای معادله‌ی (۲-۱۱۹) با استفاده از روش حدسی جوابی به شکل زیر پیشنهاد می‌کنیم[۳۹, ۴۰]

$$U_{n,m}^{(NC)}(r)=f_n(r)exp(\mathrm{g}_m(r))$$ (۲-۱۲۰)

که $f_n(r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f_n(r)=\begin{cases}۱ & if\ n=۰\\ \prod_{i=۱}^{n}(r-\alpha_i^n) & if\ n\geq ۱\end{cases}$$ (۲-۱۲۱)

تابع موج حالت پایه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_{۰,m}^{(NC)}(r)=exp(\mathrm{g}_m(r))$$ (۲-۱۲۲)

با توجه به جملات ظاهر شده در رابطه (۲-۱۱۹)، $g(r)$ مناسب را به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$g(r)=\frac{\alpha}{r}+\beta Lnr+\gamma r^{۲}$$ (۲-۱۲۳)

با دو بار مشتق‌گیری از رابطه (۲-۱۲۲) رابطه‌ی زیر ظاهر می‌گردد:

$$\frac{d^{۲}U_{۰,m}^{(NC)}(r)}{dr^{۲}}-\left(g'^{۲}(r)+g''(r)\right)U_{۰,m}^{(NC)}(r)=۰$$ (۲-۱۲۴)

با جایگذاری رابطه (۲-۱۲۳) در (۲-۱۲۴) و مقایسه با رابطه (۲-۱۱۹) نتایج زیر بدست می‌آید:

$$\alpha=\sqrt{\xi_{5}^{(NC)}}\,,\qquad \beta=\frac{1+\sqrt{1-4\xi_{1}^{(NC)}}}{2}\,,\qquad \gamma=-\frac{\sqrt{\xi_{6}^{(NC)}}}{2} \tag{۲-۱۲۵}$$

با استفاده از معادله‌ی (۲-۱۱۸ - ج) و معادله‌ی (۲-۱۲۵) رابطه‌ی انرژی بدست می‌آید:

$$\left(2+\sqrt{4m^{2}+\frac{e^{2}\Phi_{AB}^{2}}{\pi^{2}c^{2}}-\frac{2em\Phi_{AB}}{\pi c}+8D(E_{0,m}^{(NC)}+M)a^{2}+\frac{2e^{2}Bl^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{\pi c^{2}}+\frac{emBl^{(NC)}\theta}{c}}\right)$$

$$+\frac{e}{c}\left(\frac{\Phi_{AB}}{\pi}-\frac{Bl\theta}{2}\right)+\frac{2c}{eB}\left(M^{2}-E_{0,m}^{(NC)2}\right)-m=0 \tag{۲-۱۲۶}$$

با در نظر گرفتن معادله‌ی (۲-۱۱۸ - ب) و (۲-۱۱۸ - د) شرط قیدی نیز به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$a^{2}=\frac{1}{8D(E_{0,m}^{(NC)}+M)}\left\{4m^{2}+\frac{e^{2}}{c^{2}}\left[\frac{\Phi_{AB}^{2}}{\pi^{2}}+\frac{2Bl^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{\pi}\right]-\frac{e}{c}\left[\frac{2m\Phi_{AB}}{\pi}+Bl^{(NC)}\theta(1-m)\right]-1\right\}$$

(۲-۱۲۷)

**۲. انتخاب** $\Xi^{(NC)}(r)=0$

در این مورد $V^{(NC)}(r)=-S^{(NC)}(r)$ می‌باشد و این انتخاب به ساده‌سازی محاسبات ریاضی کمک می‌کند و تحت شرایط فیزیکی رخ می‌دهد که در آن معادله دیراک دارای تقارن شبه اسپینی باشد. بنابراین معادلات معرفی شده در(۲-۱۰۷ - الف) و (۲-۱۰۷ - ب) به معادلات زیر تبدیل می‌شوند:

$$\vec{\sigma}.\vec{p}\,\tilde{\chi}_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)\tilde{\varphi}_{n,m}^{(NC)}(\vec{r}) \tag{۲-۱۲۸ - الف}$$

$$\tilde{\varphi}_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=\frac{\vec{\sigma}.\vec{p}}{\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M}\,\tilde{\chi}_{n,m}^{(NC)}(r) \tag{۲-۱۲۸ - ب}$$

با واردکردن معادله‌ی (۲-۱۲۸- ب) در (۲-۱۲۸- الف) معادله‌ای به صورت زیر بدست می‌آید:

$$[p^{2}+2(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)V(r)]\tilde{\chi}_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=[\tilde{E}_{n,m}^{(NC)2}-M^{2}]\tilde{\chi}_{n,m}^{(NC)}(\vec{r}) \tag{۲-۱۲۹}$$

مشابه با روش ارائه‌شده در بخش قبل برای معادله‌ی بالا در مختصات استوانه‌ای رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\left\{-\left[\frac{d^{2}}{dr^{2}}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{1}{r^{2}}\frac{d^{2}}{d\phi^{2}}\right]+\frac{e^{2}}{c^{2}}\left(\frac{Br}{2}+\frac{\Phi_{AB}}{2\pi r}-\frac{BL_{z}\theta}{4r}+\frac{L_{z}\theta\Phi_{AB}}{4\pi r^{3}}\right)^{2}\right.$$

$$+\frac{ieB}{2c}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{ie\Phi_{AB}}{2\pi cr^{2}}\frac{\partial}{\partial\phi}-\frac{ieBL_{z}\theta}{4cr^{2}}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{ieL_{z}\theta\Phi_{AB}}{4\pi cr^{4}}\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (۱۳۰-۲)$$

$$\left.+2(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)V^{(NC)}(r)+M^{2}-\tilde{E}_{n,m}^{(NC)2}\right\}\tilde{\chi}_{n.m}^{(NC)}(\vec{r})=0$$

با انتخاب جوابی به صورت $m=0,\pm1,\pm2,...$ $\quad \tilde{\chi}_{n,m}^{(NC)}(\vec{r})=r^{-\frac{1}{2}}\tilde{U}_{n,m}^{(NC)}(r)\,exp(im\phi)$ و

جایگذاری در معادله (۲-۱۳۰) و صرف نظر کردن از جملات شامل $\theta^{2}$ معادله‌ی زیر بدست می‌آید

$$\frac{d^{2}\tilde{U}_{n,m}^{(NC)}(r)}{dr^{2}}+\left\{\left(\left(\frac{1}{4}-m^{2}-\frac{e^{2}\Phi_{AB}^{2}}{4\pi^{2}c^{2}}+\frac{em\Phi_{AB}}{2\pi c}-2D(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}+M)a^{2}\right.\right.\right.$$

$$\left.-\frac{e^{2}BL_{z}\theta\Phi_{AB}}{2\pi c^{2}}-\frac{emBL_{z}\theta}{4c}\right)\frac{1}{r^{2}}+2(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}+M)L_{z}\theta D\frac{a}{r^{3}}$$

$$+\left(-2(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)L_{z}\theta Da^{2}-\frac{e^{2}L_{z}\theta\Phi_{AB}^{2}}{4\pi^{2}c^{2}}+\frac{eL_{z}\theta\Phi_{AB}}{4\pi c}\right)\frac{1}{r^{4}}+4D(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)\frac{a}{r}$$

$$\left.+\frac{e^{2}B^{2}L_{z}\theta}{4c^{2}}-\frac{e^{2}B\Phi_{AB}}{2\pi c^{2}}+\frac{emB}{2c}+\tilde{E}_{n,m}^{(NC)2}-M^{2}-\frac{e^{2}B^{2}r^{2}}{4c^{2}}\right\}\tilde{U}_{n,m}^{(NC)}(r)=0$$

(۲-۱۳۱)

پارامترهای جدید زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\tilde{\xi}_{1}^{(NC)}=\frac{1}{4}-m^{2}-\frac{e^{2}\Phi_{AB}^{2}}{4\pi^{2}c^{2}}+\frac{em\Phi_{AB}}{2\pi c}-2D(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)a^{2}-\frac{e^{2}Bl^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{2\pi c^{2}}-\frac{emBl^{(NC)}\theta}{4c}$$

(۲-۱۳۲- الف)

$$\tilde{\xi}_{2}^{(NC)}=4D(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)a \qquad (۱۳۲-۲ \text{ -ب})$$

$$\tilde{\xi}_{3}^{(NC)}=\frac{e^{2}B\Phi_{AB}}{2\pi c^{2}}-\frac{emB}{2c}-\tilde{E}_{n,m}^{(NC)2}+M^{2}-\frac{e^{2}B^{2}l^{(NC)}\theta}{4c^{2}} \qquad (۱۳۲-۲ \text{ -ج})$$

$$\tilde{\xi}_{4}^{(NC)}=-2(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)l^{(NC)}\theta Da \qquad (۱۳۲-۲ \text{ -د})$$

$$\tilde{\xi}_{5}^{(NC)}=2(\tilde{E}_{n,m}^{(NC)}-M)l^{(NC)}\theta Da^{2}+\frac{e^{2}l^{(NC)}\theta\Phi_{AB}^{2}}{4\pi^{2}c^{2}}-\frac{el^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{4\pi c} \qquad (۱۳۲-۲ \text{ -ه})$$

$$\tilde{\xi}_{6}^{(NC)}=\frac{e^{2}B^{2}}{4c^{2}}$$ (۲-۱۳۲- و)

بنابراین معادله‌ی (۲-۱۳۱) به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{d^{2}\tilde{U}_{n,m}^{(NC)}(r)}{dr^{2}}+\left(\frac{\tilde{\xi}_{1}^{(NC)}}{r^{2}}+\frac{\tilde{\xi}_{2}^{(NC)}}{r}-\tilde{\xi}_{3}^{(NC)}-\frac{\tilde{\xi}_{4}^{(NC)}}{r^{3}}-\frac{\tilde{\xi}_{5}^{(NC)}}{r^{4}}-\tilde{\xi}_{6}^{(NC)}r^{2}\right)\tilde{U}_{n,m}^{(NC)}(r)=0$$

(۲-۱۳۳)

برای حل معادله‌ی (۲-۱۳۳) از روش حدسی استفاده کرده و جواب زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$\tilde{U}_{n,m}^{(NC)}(r)=\tilde{f}_{n}(r)exp(\tilde{g}_{m}(r))$$ (۲-۱۳۴)

که

$$\tilde{f}_{n}(r)=\begin{cases}1 & if\ n=0\\ \prod_{i=1}^{n}(r-\tilde{\alpha}_{i}^{n}) & if\ n\geq 1\end{cases}$$ (۲-۱۳۵)

با استفاده از رابطه (۲-۱۳۳)، $\tilde{g}(r)$ مناسب زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$\tilde{g}(r)=\frac{\tilde{\alpha}}{r}+\tilde{\beta}Lnr+\tilde{\gamma}r^{2}$$ (۲-۱۳۶)

با

$$\tilde{\alpha}=\sqrt{\tilde{\xi}_{5}^{(NC)}},\qquad \tilde{\beta}=\frac{1+\sqrt{1-4\tilde{\xi}_{1}^{(NC)}}}{2},\qquad \tilde{\gamma}=-\frac{\sqrt{\tilde{\xi}_{6}^{(NC)}}}{2}$$ (۲-۱۳۷)

در نتیجه با استفاده از معادله‌ی (۲-۱۳۲ - ج) و معادله‌ی (۲-۱۳۷) رابطه انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$\left(2+\sqrt{4m^{2}+\frac{e^{2}\Phi_{AB}^{2}}{\pi^{2}c^{2}}-\frac{2em\Phi_{AB}}{\pi c}+8D(\tilde{E}_{0,m}^{(NC)}-M)a^{2}+\frac{2e^{2}Bl^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{\pi c^{2}}+\frac{emBl^{(NC)}\theta}{c}}\right)$$

$$+\frac{e}{c}\left(\frac{\Phi_{AB}}{\pi}-\frac{Bl^{(NC)}\theta}{2}\right)+\frac{2c}{eB}\left(M^{2}-\tilde{E}_{0,m}^{(NC)2}\right)-m=0$$ (۲-۱۳۸)

با در نظر گرفتن معادلات (۲-۱۳۲ - ب) و (۲-۱۳۲ - د) شرط قیدی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$a^{2}=\frac{1}{8D(\tilde{E}_{0,m}^{(NC)}-M)}\left\{4m^{2}+\frac{e^{2}}{c^{2}}\left[\frac{\Phi_{AB}^{2}}{\pi^{2}}+\frac{2Bl^{(NC)}\theta\Phi_{AB}}{\pi}\right]-\frac{e}{c}\left[\frac{2m\Phi_{AB}}{\pi}+Bl^{(NC)}\theta(1-m)\right]-1\right\}$$

(۲-۱۳۹)

## ۲-۱۰ برهم‌کنش تعمیم یافته در فضای ناجابجایی در زمینه‌های نسبیتی و غیرنسبیتی

در این بخش به توصیف دینامیک ذرات کوانتومی درون چارچوب غیرنسبیتی شرودینگر و نسبیتی معادله دیراک در فضای ناجابجایی می‌پردازیم. میدان‌های الکترومغناطیسی روی رفتار ذرات کوانتومی اثرگذارند. به خصوص  بررسی این اثر بر روی حرکت الکترون‌ها در سال ۱۹۵۰توسط آهارنف - بوهم[۴۵] پیش‌بینی شد[۴۱]. مطالعات آن‌ها مشخص کرد که معادلات بنیادی حرکت در مکانیک کلاسیک می‌تواند همواره براساس میادینشان بیان شوند و فرمول‌بندی کانونیکی باید در معادلات موج کوانتومی در نظر گرفته شود به طوری که پتانسیل‌ها عباراتی غیر قابل حذف از معادلات اساسی شوند. آزمایشات آن‌ها روی الکترون‌های منتشر شده در خلا معلوم کرد که اثر آهارنف-بوهم الکترواستاتیکی [۴۲] و مغناطیسی [۴۳]، یک الکترون می‌تواند تحت تأثیر پتانسیل قرار گیرد حتی اگر هیچ اثر میدانی روی الکترون وجود نداشته باشد.

### ۲-۱۰-۱ معادله‌ی شرودینگر متناظر در فضای جابجایی

معادله‌ی شرودینگر در فضای جابجایی برای الکترونی به جرم $m$ و بار $e$ که در دو بعد تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی $B$ در راستای $z$ حرکت می‌کند با روابط، $\vec{B}=B\hat{z}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\,,\vec{A}=\dfrac{\vec{B}\times\vec{r}}{2}$ و $p=-i\hbar\vec{\nabla}$ به اضافه تبدیل $\vec{p}\rightarrow\vec{p}-\dfrac{e}{c}\vec{A}(r)$ ،که $A$ پتانسیل برداری است به صورت زیر است:

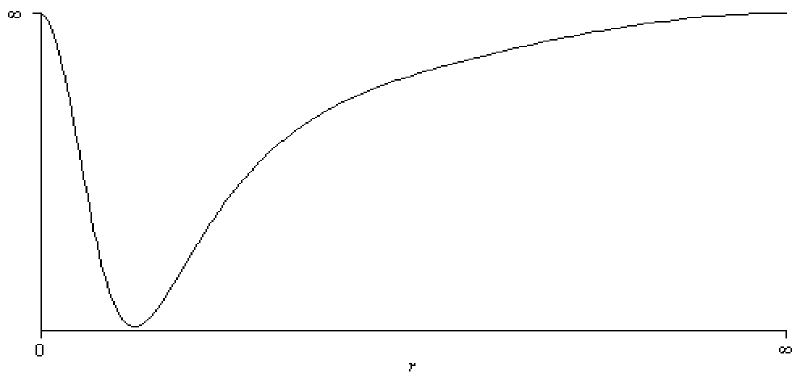
$$\left\{\left(\vec{P}-e\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2c}\right).\left(\vec{P}-e\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{2c}\right)-2m\left[E_{n,l}^{(NR-C)}-V^{(C)}(r)\right]\right\}=0 \qquad (۲-۱۴۰)$$

معادله شرودینگر را برای برهم‌کنش تعمیم یافته زیر:

[۴۵] Aharonov-Bohm

$$V^{(C)}(r)=a'r+b'r^{۲}+\frac{c'}{r}+\frac{d'}{r^{۲}} \quad (۱۴۱\text{-}۲)$$

بررسی می‌کنیم. رابطه بالا برهم‌کنشی با شکل عمومی متشکل از جملات کولنی، معکوس مربعی، خطی و درجه دو است یعنی یک تعمیمی از برهمکنش‌های کرنل[۴۶]، کلین‌بک[۴۷] و کراتزر گونه[۴۸] را شامل می‌شود. این برهمکنش‌ها در زمینه‌های مختلف فیزیک همچون فیزیک ذرات کاربردی و رایج هستند. در صورت عمومی پتانسیل معرفی شده در رابطه(۲-۱۴۱) در حالت خاصی که ضرایب $a'=b'=۰$ باشد، پتانسیل کراتزر گونه و در حالت خاص $d'=۰$ پتانسیل کلین‌بک را خواهیم داشت و به‌ازای $b'=d'=۰$ پتانسیل کرنل را داریم. در شکل ۲-۵ رفتار پتانسیل تعمیم یافته معرفی شده در رابطه (۲-۱۴۱) بر حسب فاصله رسم شده است.




شکل۲-۵ پتانسیل تعمیمی از برهم‌کنش کرنل، کراتزر و کلین‌بک به ازای $a'=b'=c'=d'=۱$

برای برهم‌کنش مورد نظر معادله شرودینگر به صورت زیر خواهد بود:

$$\left\{\left(\vec{p}-e\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{۲c}\right).\left(\vec{p}-e\frac{\vec{B}\times\vec{r}}{۲c}\right)-۲m\left[E_{n,l}^{(NR-C)}-a'r-b'r^{۲}-\frac{c'}{r}-\frac{d'}{r^{۲}}\right]\right\}\psi_{n,l}^{(NR-C)}(\vec{r})=۰$$

(۲-۱۴۲-الف)

معادله(۲-۱۴۲- الف) در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود:

---

[۴۶] Cornell
[۴۷] Killingbeck
[۴۸] Kratzer-type

$$\left\{\left[\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{d}{dr}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{d^{۲}}{d\varphi^{۲}}\right]-\left(\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}}+۲mb'\right)r^{۲}-۲m\left(a'r-\frac{c'}{r}-\frac{d'}{r^{۲}}-E_{n,l}^{(NR-C)}\right)+\frac{eBL_z}{c}\right\}\psi_{n,l}^{(NR-C)}(\vec{r})=۰$$

(۲-۱۴۲- ب)

برای معادله بالا جواب $l=۰,\pm۱,\pm۲,...$ $\quad \psi_{n,l}^{(NR-C)}(\vec{r})=U_{n,l}^{(NR-C)}(\vec{r})\,r^{-\frac{۱}{۲}}e^{il^{(C)}\varphi}$ را پیشنهاد می‌کنیم و با جداسازی متغیرها در معادله (۲-۱۴۲- ب) و معرفی پارامترهای جدید زیر

$$A_{۱}^{(NR-C)}=\frac{۱}{۴}-l^{(C)۲}-۲md' \qquad \text{(۲-۱۴۳- الف)}$$

$$A_{۲}^{(NR-C)}=۲mc' \qquad \text{(۲-۱۴۳- ب)}$$

$$A_{۳}^{(NR-C)}=-\left(\frac{eBl^{(C)}}{c}+۲mE_{n,l}^{(NR-C)}\right) \qquad \text{(۲-۱۴۳- ج)}$$

$$A_{۴}^{(NR-C)}=۲ma' \qquad \text{(۲-۱۴۳- د)}$$

$$A_{۵}^{(NR-C)}=۲mb'-\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴c^{۲}} \qquad \text{(۲-۱۴۳- ه)}$$

بنابراین معادله (۲-۱۴۲- ب) به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{d^{۲}U_{n,l}^{(NR-C)}(r)}{dr^{۲}}-\left\{-\frac{A_{۱}^{(NR-C)}}{r^{۲}}+\frac{A_{۲}^{(NR-C)}}{r}+A_{۳}^{(NR-C)}+A_{۴}^{(NR-C)}r+A_{۵}^{(NR-C)}r^{۲}\right\}U_{n,l}^{(NR-C)}(r)=۰$$

(۲-۱۴۴)

برای حل معادله (۲-۱۴۴)، با توجه به روش حدسی معرفی شده در بخش قبل، برای حالت پایه جواب زیر را پیشنهاد می‌دهیم:

$$U_{۰,l}^{(NR-C)}(r)=exp(\alpha^{(NR-C)}r^{۲}+\beta^{(NR-C)}r+\gamma^{(NR-C)}Lnr) \qquad \text{(۲-۱۴۵)}$$

با

$$\alpha^{(NR-C)}=-\frac{\sqrt{A_{۵}^{(NR-C)}}}{۲}\,,\ \beta^{(NR-C)}=\frac{۱}{۲}\frac{A_{۴}^{(NR-C)}}{\sqrt{A_{۵}^{(NR-C)}}}\,,\ \gamma^{(NR-C)}=\frac{A_{۱}^{(NR-C)}\sqrt{A_{۵}^{(NR-C)}}}{A_{۴}^{(NR-C)}} \qquad \text{(۲-۱۴۶)}$$

با توجه به معادله (۲-۱۴۳ - ج) و معادله (۲-۱۴۶)، انرژی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E_{\cdot l}^{(NR-C)}=\frac{۱}{۲m}\left(\frac{-eBl^{(C)}}{c}+\frac{۲c'}{a'}(\frac{e^۲B^۲}{۴c^۲}+۲mb')\right.$$

$$\left.-m^۲a'^۲(\frac{e^۲B^۲}{۴c^۲}+۲mb')^{-۱}+(\frac{e^۲B^۲}{۴c^۲}+۲mb')^{\frac{۱}{۲}}\right) \quad (۱۴۷-۲)$$

با در نظر گرفتن معادله $A^{(NR-C)}=\gamma^{(NR-C)}-\gamma^{(NR-C)۲}$ شرط قیدی برای ضرائب پتانسیل به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{c'}{a'}\sqrt{(\frac{e^۲B^۲}{۴c^۲}+۲mb')}\left[۱-\frac{c'}{a'}\left(\frac{e^۲B^۲}{۴c^۲}+۲mb'\right)^{\frac{۱}{۲}}\right]-\frac{۱}{۴}+۲md'+l^{(C)۲}=\cdot \quad (۱۴۸-۲)$$

### ۲-۱۰-۲ معادله‌ی شرودینگر متناظر در فضای ناجابجایی

در این بخش به بررسی معادله شرودینگر برای پتانسیل معرفی شده در رابطه (۲-۱۴۱) با در نظر گرفتن تبدیلات مختصه $\vec{r}\rightarrow\vec{r}+\frac{۱}{۲\hbar}\vec{\theta}\times\vec{p}$ و $\vec{p}\rightarrow\vec{p}$ می‌پردازیم. تحت این تبدیلات معادله‌ی شرودینگر در فضای ناجابجایی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\left\{\left(\vec{p}-\frac{e\vec{B}\times\vec{r}}{۲c}-\frac{e(\vec{B}\times(\vec{\theta}\times\vec{p})}{۴\hbar c}\right).\left(\vec{p}-\frac{e\vec{B}\times\vec{r}}{۲c}-\frac{e(\vec{B}\times(\vec{\theta}\times\vec{p})}{۴\hbar c}\right)-۲m[E_{n,l}^{(NR-NC)}-V^{(NC)}(\vec{r})]\right\}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=\cdot$$

(۱۴۹-۲)

با استفاده از رابطه (۲-۱۱۳) که در بخش قبل معرفی کردیم برای پتانسیل رابطه (۲-۱۴۱) داریم:

$$V^{(NC)}(\vec{r})=a'r+b'r^۲+\frac{c'}{r}+\frac{d'}{r^۲}-L_z\theta\left(\frac{a'}{۲r}+b'-\frac{c'}{۲r^۳}-\frac{d'}{r^۴}\right) \quad (۱۵۰-۲)$$

با جایگذاری معادله (۲-۱۵۰) در معادله (۲-۱۴۹) و استفاده از خواص ضرب برداری معادله زیر در فضای ناجابجایی ظاهر می‌گردد:

$$\left\{(۱+\frac{eB\theta}{۲\hbar c}+\frac{e^۲B^۲\theta^۲}{۱۶\hbar^۲c^۲})p^۲+\frac{e^۲B^۲r^۲}{۴c^۲}-(\frac{e^۲B^۲\theta}{۴\hbar c^۲}+\frac{eB}{c})L_z-۲mE_{n,l}^{(NR-NC)}+۲ma'r\right.$$

$$\left.+۲mb'r^۲+\frac{۲mc'}{r}+\frac{۲md'}{r^۲}-\frac{m\theta a'L_z}{r}-۲m\theta b'L_z+\frac{mc'\theta L_z}{r^۳}+\frac{۲md'\theta L_z}{r^۴}\right\}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=\cdot$$

(۲-۱۵۱- الف)

رابطه بالا در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر در می‌آید:

$$\left\{\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{d}{dr}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{d^{۲}}{d\varphi^{۲}}-(\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴\eta c^{۲}}+\frac{۲mb'}{\eta})r^{۲}-\frac{۲ma'r}{\eta}+(-\frac{۲mc'}{\eta}+\frac{ma'\theta L_z}{\eta})\frac{۱}{r}-\frac{۲md'}{\eta r^{۲}}\right.$$

$$\left.-\frac{mc'\theta L_z}{\eta r^{۳}}-\frac{۲md'\theta L_z}{\eta r^{۴}}+(\frac{e^{۲}B^{۲}\theta}{۴\hbar c^{۲}}+\frac{eB}{c}+۲mb'\theta)\frac{L_z}{\eta}+\frac{۲mE_{n,l}^{(NR-NC)}}{\eta}\right\}\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=۰$$

(۲-۱۵۱- ب)

با انتخاب جوابی به صورت $\psi_{n,l}^{(NR-NC)}(\vec{r})=e^{il^{(NC)}\varphi}r^{-\frac{۱}{۲}}U_{n,l}^{(NR-NC)}(r)$ و معرفی پارامترهای جدید زیر:

$$\eta=۱+\frac{eB\theta}{۲\hbar c}+\frac{e^{۲}B^{۲}\theta^{۲}}{۱۶\hbar^{۲}c^{۲}}$$ (۲-۱۵۲ - الف)

$$A_{۱}^{(NR-NC)}=\frac{۱}{۴}-l^{(NC)۲}-\frac{۲md'}{\eta}$$ (۲-۱۵۲ - ب)

$$A_{۲}^{(NR-NC)}=\frac{۲mc'}{\eta}-\frac{m\theta a'l^{(NC)}}{\eta}$$ (۲-۱۵۲ - ج)

$$A_{۳}^{(NR-NC)}=-\frac{۱}{\eta}\left[\left(\frac{e^{۲}B^{۲}\theta}{۴\hbar c^{۲}}+\frac{eB}{c}+۲mb'\theta\right)l^{(NC)}+۲mE_{n,l}^{(NR-NC)}\right]$$ (۲-۱۵۲ - د)

$$A_{۴}^{(NR-NC)}=\frac{۲ma'}{\eta}$$ (۲-۱۵۲ - ه)

$$A_{۵}^{(NR-NC)}=\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴\eta c^{۲}}+\frac{۲mb'}{\eta}$$ (۲-۱۵۲ - و)

$$A_{۶}^{(NR-NC)}=\frac{mc'l^{(NC)}\theta}{\eta}$$ (۲-۱۵۲ - ز)

$$A_{۷}^{(NR-NC)}=\frac{md'l^{(NC)}\theta}{\eta}$$ (۲-۱۵۲ - ر)

بدین ترتیب با توجه به پارامترهای بالا معادله دیفرانسیل زیر ظاهر می‌گردد :

$$\frac{d^{2}U_{n,l}^{(NR-NC)}(r)}{dr^{2}}+(\frac{A_{1}^{(NR-NC)}}{r^{2}}+\frac{A_{2}^{(NR-NC)}}{r}-A_{3}^{(NR-NC)}-A_{4}^{(NR-NC)}r$$
$$-A_{5}^{(NR-NC)}r^{2}-\frac{A_{6}^{(NR-NC)}}{r^{3}}-\frac{A_{7}^{(NR-NC)}}{r^{4}})U_{n,l}^{(NR-NC)}(r)=0 \qquad (۱۵۳-۲)$$

با استفاده از روش حدسی و انتخاب $g^{(NR-NC)}(r)$ مناسب برای معادله بالا ، جواب حالت پایه زیر را خواهیم داشت

$$U_{0,l}^{(NR-NC)}(r)=exp(\alpha^{(NR-NC)}r^{2}+\beta^{(NR-NC)}r+\gamma^{(NR-NC)}Lnr+\frac{\lambda^{(NR-NC)}}{r}) \qquad (۱۵۴-۲)$$

با

$$\alpha^{(NR-NC)}=-\frac{\sqrt{A_{5}^{(NR-NC)}}}{2} \quad , \quad \beta^{(NR-NC)}=\frac{1}{2}\frac{A_{4}^{(NR-NC)}}{\sqrt{A_{5}^{(NR-NC)}}} \quad , \quad \lambda^{(NR-NC)}=\sqrt{A_{7}^{(NR-NC)}}$$
$$\gamma^{(NR-NC)}=\frac{(2A_{5}^{(NR-NC)}\sqrt{A_{7}^{(NR-NC)}}+A_{2}^{(NR-NC)}A_{5}^{(NR-NC)})}{A_{4}^{(NR-NC)}} \qquad (۱۵۵-۲)$$

با ترکیب معادلات بالا رابطه‌ی انرژی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E_{0l}^{(NR-NC)}=\frac{-\eta}{2m}\left\{\frac{\rho}{a'}\left(-2\sqrt{\rho}[(\frac{2d'l^{(NC)}\theta}{\eta})^{-\frac{1}{2}}+2c'-a'l^{(NC)}\theta]\right)+\frac{1}{\rho}(\frac{ma'}{\eta})^{2}\right\}-\sqrt{\rho}-\nu$$
(۱۵۶-۲)

$\rho=\frac{e^{2}B^{2}}{4\eta c^{2}}+\frac{2mb'}{\eta}$ و $\nu=-\frac{1}{\eta}[\frac{e^{2}B^{2}\theta}{4\hbar c}+\frac{eB}{c}+2mb'\theta]l^{(NC)}$ می‌باشد. با استفاده از ترکیب معادلات (۲-۱۵۲) شرط قیدی را به صورت زیر داریم:

$$\frac{\sqrt{32m^{3}d'a'^{2}l^{(NC)}\theta c^{2}}}{\eta\sqrt{e^{2}B^{2}+8mc^{2}b'}}-\frac{mc'^{2}l^{(NC)}\theta}{2\eta d'}+\frac{mc'l^{(NC)}\theta}{\sqrt{8\eta md'l^{(NC)}\theta}}-\frac{1}{4}+l^{(NC)2}+\frac{2md'}{\eta}=0$$

(۱۵۷-۲)

### ۲-۱۰-۳ معادله‌ی دیراک متناظر در فضای جابجایی

معادله‌ی دیراک برای مورد خاص، تساوی برهمکنش برداری و اسکالر و در واحد $\hbar=c=1$ را در نظر می‌گیریم:

$$\left(\vec{\alpha}.(\vec{\Pi}-im\omega\vec{\beta}\vec{r})+(m+V)\vec{\beta}\right)\psi_{n,l}^{(R-C)}(\vec{r})=(E_{n,l}^{(R-C)}-V^{(C)})\psi_{n,l}^{(R-NC)}(\vec{r})$$
(۲-۱۵۸)

در نظریه دیراک تبدیل $\vec{\Pi}\to(\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A})$ یک جفت شدگی کمینه مربوط به تکانه است که در آن $A$ پتانسیل برداری است. که $\alpha$ و $\beta$ ماتریس‌های دیراک هستند و تابع موج به صورت اسپینور دو مؤلفه‌ای است. با استفاده از این روابط معادلات دیفرانسیل جفت شده زیر نتیجه می‌شوند:

$$[\vec{\sigma}.\vec{\Pi}+im\omega(\vec{\sigma}.\vec{r})]\chi_{n,l}(\vec{r})=(E_{n,l}^{(R-C)}-۲V^{(C)}-m)\phi_{n,l}(\vec{r})$$ (۲-۱۵۹- الف)

$$[-\vec{\sigma}.\vec{\Pi}+im\omega(\vec{\sigma}.\vec{r})]\phi_{n,l}(\vec{r})=-(E_{n,l}^{(R-C)}+m)\chi_{n,l}(\vec{r})$$ (۲-۱۵۹- ب)

با ترکیب معادلات (۲-۱۵۹- الف) و (۲-۱۵۹- ب)، در مختصات استوانه‌ای برای برهم‌کنش بیان شده در معادله (۲-۱۵۰) معادله‌ای به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\left\{\frac{d^۲}{dr^۲}+\frac{۱}{r}\frac{d}{dr}+\frac{۱}{r^۲}\frac{d^۲}{d\varphi^۲}-\left(\frac{e^۲B^۲}{۴}+em\omega sB+m^۲\omega^۲+۲b'(E_{n,l}^{(R-C)}+m)\right)r^۲\right.$$
$$-۲a'(E_{n,l}^{(R-C)}+m)r-۲c'(E_{n,l}^{(R-C)}+m)\frac{۱}{r}-۲d'(E_{n,l}^{(R-C)}+m)\frac{۱}{r^۲}+۲eBs$$ (۲-۱۶۰)
$$\left.+۲m\omega-m^۲+E_{n,l}^{(R-C)۲}+(eB+۴m\omega s)L_z\right\}\phi_{n,l}^{(R-C)}(\vec{r})=۰$$

با در نظر گرفتن جواب، $\phi_{n,l}^{(R-C)}(\vec{r})=e^{il^{(C)}\varphi}r^{-\frac{۱}{۲}}U_{n,l}^{(R-C)}(r)$ برای معادله بالا داریم:

$$\frac{d^۲U_{n,l}^{(R-C)}(r)}{dr^۲}+(\frac{A_۱^{(R-C)}}{r^۲}-\frac{A_۲^{(R-C)}}{r}-A_۳^{(R-C)}-A_۴^{(R-C)}r-A_۵^{(R-C)}r^۲)U_{n,l}^{(R-C)}(r)=۰$$
(۲-۱۶۱)

که

$$A_۱^{(R-C)}=\frac{۱}{۴}-l^{(C)۲}-۲(E_{n,l}^{(R-C)}+m)d'$$ (۲-۱۶۲- الف)

$$A_۲^{(R-C)}=۲c'(E_{n,l}^{(R-C)}+m)$$ (۲-۱۶۲- ب)

$$A_۳^{(R-C)}=-[(eB+۴m\omega s)l^{(C)}+۲eBs+۲m\omega-m^۲+E_{n,l}^{(R-C)۲}]$$ (۲-۱۶۲- ج)

$$A_{۴}^{(R-C)}=۲a'(E_{n,l}^{(R-C)}+m)$$ (۲-۱۶۲- د)

$$A_{۵}^{(R-C)}=\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴}+m^{۲}\omega^{۲}+em\omega sB+۲(E_{n,l}^{(R-C)}+m)b'$$ (۲-۱۶۲- ه)

با استفاده از روش حدسی برای حالت پایه($n=۰$) جوابی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$U_{۰,l}^{(R-C)}(r)=exp(\alpha^{(R-C)}r^{۲}+\beta^{(R-C)}r+\gamma^{(R-C)}Lnr)$$ (۲-۱۶۳)

با

$$\alpha^{(R-C)}=-\frac{\sqrt{A_{۵}^{(R-C)}}}{۲}\ ,\ \beta^{(R-C)}=\frac{۱}{۲}\frac{A_{۴}^{(R-C)}}{\sqrt{A_{۵}^{(R-C)}}}\ ,\ \gamma^{(R-C)}=\frac{A_{۲}^{(R-C)}\sqrt{A_{۵}^{(R-C)}}}{A_{۴}^{(R-C)}}$$ (۲-۱۶۴)

رابطه انرژی براساس معادلات (۲-۱۶۲ - ه) و (۲-۱۶۴) به صورت زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}&۲E_{۰,l}^{(R-C)۳}b'+E_{۰,l}^{(R-C)۲}(\mu+a'^{۲}-۸\frac{c'b'^{۲}}{a'})-E_{۰,l}^{(R-C)}(۲b'\xi+۸\frac{c'b'\mu}{a'}-۲ma'^{۲})\\&-(\mu+۲E_{۰,l}^{(R-C)}b')^{\frac{۳}{۲}}-\mu\xi-\frac{۲c'\mu^{۲}}{a'}+m^{۲}a'^{۲}=۰\end{aligned}$$ (۲-۱۶۵)

$$\mu=\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴}+em\omega sB+m^{۲}\omega^{۲}+۲mb' \text{ و } \xi=-(۴m\omega s+eB)l^{(C)}-۲m\omega-۲eBs+m^{۲}$$

با استفاده از رابطه $A_{1}^{(R-C)}=\gamma^{(R-C)}-\gamma^{(R-C)2}$ شرط قیدی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\begin{aligned}&\frac{c'}{a'}(\mu+۲E_{۰,l}^{(R-C)}b')^{\frac{۱}{۲}}\left[۱+\frac{c'}{a'}(\mu+۲(E_{۰,l}^{(R-C)}b')^{\frac{۱}{۲}}\right]\\&+۲(E_{۰,l}^{(R-C)}+۲(E_{۰,l}^{(R-C)}+m)d'-\frac{۱}{۴}+l^{(C)۲}=۰\end{aligned}$$ (۲-۱۶۶)

### ۴-۱۰-۲ معادله‌ی دیراک متناظر در فضای ناجابجایی

معادله‌ی دیراک در فضای ناجابجایی را با استفاده از باب شیفت $\vec{r}\rightarrow\vec{r}+\frac{\vec{\theta}\times\vec{p}}{2}$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}&\Big\{-(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{\pi})-m^{۲}\omega^{۲}r^{۲}+im\omega(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.\vec{r})-im\omega(\vec{\sigma}.\vec{r})(\vec{\sigma}.\vec{\pi})\\&+\frac{im\omega}{۲}(\vec{\sigma}.\vec{\pi})(\vec{\sigma}.(\vec{\theta}\times\vec{p}))-\frac{m^{۲}\omega^{۲}}{۲}(\vec{\sigma}.\vec{r})(\vec{\sigma}.(\vec{\theta}\times\vec{p}))-\frac{im\omega}{۲}(\vec{\sigma}.(\vec{\theta}\times\vec{p}))(\vec{\sigma}.\vec{\pi})\\&-\frac{m^{۲}\omega^{۲}}{۲}(\vec{\sigma}.(\vec{\theta}\times\vec{p}))(\vec{\sigma}.\vec{r})-\frac{m^{۲}\omega^{۲}\theta^{۲}p^{۲}}{۴}+E_{n,l}^{(R-NC)۲}-m^{۲}\\&+E_{n,l}^{(R-NC)}-۲(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)V^{(NC)}(\vec{r})\Big\}\phi_{n,l}^{(R-NC)}(\vec{r})=۰\end{aligned}$$

(۱۶۷-۲)

برای برهم‌کنش مورد نظر(۲-۱۵۰) و در مختصات استوانه‌ای معادله بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned}&\Bigg\{\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}+\frac{۱}{r}\frac{d}{dr}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{d^{۲}}{d\varphi^{۲}}-\frac{۱}{k}\Bigg([\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴}+m^{۲}\omega^{۲}+em\omega sB+۲b'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)]r^{۲}\\&+۲a'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)r+[۲c'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)-L_{z}\theta a'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)]\frac{۱}{r}\\&+۲d'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)\frac{۱}{r^{۲}}+c'L_{z}\theta(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)\frac{۱}{r^{۳}}+d'L_{z}\theta(m+E_{n,l}^{(R-NC)})\frac{۱}{r^{۴}}\\&-۲eBs-m^{۲}\omega^{۲}s\theta-(eB+۴m\omega s+em\omega Bs\theta+m^{۲}\omega^{۲}\theta+۲(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)\theta b')L_{z}\\&-۲m\omega+m^{۲}-E_{n,l}^{(R-NC)۲}-\frac{em\omega B\theta}{۲}\Bigg)\Bigg\}\phi_{n,l}^{(R-NC)}(\vec{r})\end{aligned}$$

(۱۶۸-۲)

که $k=۱+m\omega s\theta+\frac{m^{۲}\omega^{۲}\theta^{۲}}{۴}$. برای معادله (۱۶۸-۲) $\phi_{n,l}^{(R-NC)}(\vec{r})=e^{il^{(NC)}\varphi}r^{-\frac{۱}{۲}}U_{n,l}^{(R-NC)}(r)$

را در نظر می‌گیریم و با معرفی پارامترهای جدید به صورت زیر:

$$A_{۱}^{(R-NC)}=\frac{۱}{۴}-l^{(NC)۲}-\frac{۱}{k}۲d'(m+E_{n,l}^{(R-NC)}) \qquad \text{(۲-۱۶۹ - الف)}$$

$$A_{۲}^{(R-NC)}=\frac{۱}{k}[l^{(NC)}\theta a'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)-۲c'(m+E_{n,l}^{(R-NC)})] \qquad \text{(۲-۱۶۹ - ب)}$$

$$A_{۳}^{(R-NC)}=-\frac{۱}{k}\Bigg[(eB+۴m\omega s+em\omega B\theta s+m^{۲}\omega^{۲}\theta)l^{(NC)}+\frac{em\omega B\theta}{۲} +m^{۲}\omega^{۲}\theta s+۲eBs+۲m\omega-m^{۲}+E_{n,l}^{(R-NC)۲}\Bigg] \qquad \text{(۲-۱۶۹ - ج)}$$

$$A_{۴}^{(R-NC)}=\frac{۱}{k}۲a'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m) \qquad \text{(۲-۱۶۹ - د)}$$

$$A_{۵}^{(R-NC)}=\frac{۱}{k}\left[\frac{e^{۲}B^{۲}}{۴}+m^{۲}\omega^{۲}+m\omega esB+۲b'(E_{n,l}^{(R-NC)}+m)\right] \qquad \text{(۲-۱۶۹ - ه)}$$

$$A_{۶}^{(R-NC)}=\frac{۱}{k}cl^{(NC)}\theta(E_{n,l}^{(R-NC)}+m) \qquad \text{(۲-۱۶۹ - و)}$$

$$A_{۷}^{(R-NC)}=\frac{۱}{k}۲dl^{(NC)}\theta(E_{n,l}^{(R-NC)}+m) \qquad \text{(۲-۱۶۹ - ز)}$$

بنابراین معادله (۲-۱۶۸) به صورت زیر ظاهر می‌شود :

$$\frac{d^{۲}U_{n,l}^{(R-NC)}(r)}{dr^{۲}}+(\frac{A_{۱}^{(R-NC)}}{r^{۲}}+\frac{A_{۲}^{(R-NC)}}{r}-A_{۳}^{(R-NC)}-A_{۴}^{(R-NC)}r -A_{۵}^{(R-NC)}r^{۲}-\frac{A_{۶}^{(R-NC)}}{r^{۳}}-\frac{A_{۷}^{(R-NC)}}{r^{۴}})U_{n,l}^{(R-NC)}(r)=۰ \qquad \text{(۲-۱۷۰)}$$

با استفاده از روش حدسی در حالت پایه جوابی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$U_{۰,l}^{(R-NC)}(r)=exp(\alpha^{(R-NC)}r^{۲}+\beta^{(R-NC)}r+\gamma^{(R-NC)}Lnr+\frac{\lambda^{(R-NC)}}{r}) \qquad \text{(۲-۱۷۱)}$$

با

$$\alpha^{(R-NC)}=-\frac{\sqrt{A_{۵}^{(R-NC)}}}{۲},\ \beta^{(R-NC)}=\frac{۱}{۲}\frac{A_{۴}^{(R-NC)}}{\sqrt{A_{۵}^{(R-NC)}}},\ \lambda^{(R-NC)}=\sqrt{A_{۷}^{(R-NC)}} \qquad \gamma^{(R-NC)}=\frac{۲A_{۵}^{(R-NC)}\sqrt{A_{۷}^{(R-NC)}}-A_{۶}^{(R-NC)}\sqrt{A_{۵}^{(R-NC)}}}{A_{۴}^{(R-NC)}} \qquad \text{(۲-۱۷۲)}$$

و  در نهایت با ترکیب روابط بالا رابطه انرژی به صورت زیر برقرار خواهد بود:

$$-2(\chi+\frac{2E_{\cdot l}^{(R-NC)}b'}{k})(k\frac{2\sqrt{\chi+\frac{2E_{\cdot l}^{(R-NC)}b'}{k}}\sqrt{\frac{2(E_{\cdot l}^{(R-NC)}+m)l^{(NC)}\theta d'}{k}}-(E_{\cdot l}^{(R-NC)}+m)(l^{(NC)}\theta a'-2c')}{2(E_{\cdot l}^{(R-NC)}+m)a'})$$

$$+\frac{1}{k^{2}}(E_{\cdot l}^{(R-NC)}+m)a')^{2}\frac{1}{\chi+\frac{2E_{\cdot l}^{(R-NC)}b'}{k}}-\sqrt{\chi+\frac{2E_{\cdot l}^{(R-NC)}b'}{k}}\frac{1}{k}(E_{\cdot l}^{(R-NC)2}-2E_{\cdot l}^{(R-NC)}l^{(NC)}\theta c'^{2}\theta b')-\zeta=0$$

(۱۷۳-۲)

که پارامترهای در نظر گرفته شده در رابطه بالا به صورت زیر می‌باشد:

$$\chi=\frac{1}{k}(\frac{e^{2}B^{2}}{4}+m^{2}\omega^{2}+em\omega sB+2mb')$$

$$\zeta=-\frac{1}{k}[2m\omega+m^{2}\omega^{2}s\theta+2eBs+\frac{em\omega B\theta}{2}-m^{2}+(4m\omega s+eB+em\omega sB\theta+m^{2}\omega^{2}\theta-2m\theta b)l]$$

(۱۷۴-۲)

با استفاده از معادلات (۲-۱۶۹ - الف) و (۲-۱۶۹ - ج) شرطی قیدی به صورت زیر به دست خواهد آمد:

$$(E_{\cdot l}^{(R-NC)}+m)\left\{\frac{\sqrt{\frac{8}{k^{3}}d'a'^{2}\theta l^{(NC)}}}{\sqrt{\mu+2E_{\cdot l}^{(R-NC)}b'}}-\frac{l^{(NC)}\theta c'^{2}}{8kd'}+\frac{l^{(NC)}\theta c'}{\sqrt{\frac{8}{k}(E_{\cdot l}^{(R-NC)}+m)l^{(NC)}\theta d'}}+\frac{2d'}{k}\right\}$$

$$-\frac{1}{4}+l^{(NC)2}=0$$

(۱۷۵-۲)

# فصل سوم

# بررسی سیستم ذرات در فضای ناجابجایی

## ۳-۱ سیستم دو ذره‌ای در فضای فاز ناجابجایی

یک سیستم کوانتومی متشکل از دو ذره a,b با بار و جرم‌های $(m_a, q_a)$ , $(m_b, q_b)$ در فضای فاز ناجابجایی در نظر می‌گیریم. دینامیک حالت‌های مربوط به دو ذره متفاوت متعلق به دو فضای هیلبرت[۴۹] متفاوت است به طوری که مجموع روابط جابجایی زیر برای عملگرهای مکان و تکانه این دو ذره به صورت زیر خواهد بود[۲۸]

$$\left[\hat{x}_i^{(a)}, \hat{x}_j^{(a)}\right] = i\hbar\theta_{ij}^{(a)}, \left[\hat{x}_i^{(a)}, \hat{p}_j^{(a)}\right] = i\hbar\left(\delta_{ij} + \sigma_{ij}\right), \left[\hat{p}_i^{(a)}, \hat{p}_j^{(a)}\right] = i\hbar\eta_{ij}^{(a)} \qquad (۳-۱)$$

$$\left[\hat{x}_i^{(b)}, \hat{x}_j^{(b)}\right] = i\hbar\theta_{ij}^{(b)}, \left[\hat{x}_i^{(b)}, \hat{p}_j^{(b)}\right] = i\hbar\left(\delta_{ij} + \sigma_{ij}\right), \left[\hat{p}_i^{(b)}, \hat{p}_j^{(b)}\right] = i\hbar\eta_{ij}^{(b)} \qquad (۳-۲)$$

$$\left[\hat{x}_i^{(a)}, \hat{x}_j^{(b)}\right] = \left[\hat{x}_i^{(a)}, \hat{p}_j^{(b)}\right] = \left[\hat{p}_i^{(a)}, \hat{x}_j^{(b)}\right] = \left[\hat{p}_i^{(a)}, \hat{p}_j^{(b)}\right] = ۰ \qquad (۳-۳)$$

تبدیل خطی بین عملگرهای مکان و تکانه فضای جابجایی و فضای ناجابجایی بترتیب برای ذره a و b به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x_i^{NC(a)} = x_i^{(a)} - \frac{۱}{۲}\theta_{ij}^{(a)} p_j^{(a)} \quad , \quad p_i^{NC(a)} = p_i^{(a)} + \frac{۱}{۲}\eta_{ij}^{(a)} x_j^{(a)} \qquad (۳-۴)$$

$$x_i^{NC(b)} = x_i^{(b)} - \frac{۱}{۲}\theta_{ij}^{(b)} p_j^{(b)} \quad , \quad p_i^{NC(b)} = p_i^{(b)} + \frac{۱}{۲}\eta_{ij}^{(b)} x_j^{(b)} \qquad (۳-۵)$$

برای بررسی سیستم‌های دو ذره‌ای عملگرهای مناسب تر زیر را معرفی می‌کنیم:

عملگر مختصات نسبی
$$X_i = x_i^{(a)} - x_i^{(b)}$$

عملگر مختصات مرکزجرم
$$Y_i = \frac{m_a x_i^{(a)} + m_b x_i^{(b)}}{m_a + m_b}$$

---

[۴۹] Hilbert Space

$P_i = p_i^{(a)} + p_i^{(b)}$ عملگر تکانه کل

$Q_i = \dfrac{m_b p_i^{(a)} - m_a p_i^{(b)}}{m_a + m_b}$ عملگر تکانه نسبی

$M = m_a + m_b$ جرم کل

$\mu = \dfrac{m_a m_b}{m_a + m_b}$ جرم کاهیده

عملگرهای سیستم دو ذره‌ای جدید در روابط جابجایی زیر صدق می‌کنند:

$$\left[X_i, Q_j\right] = \left[Y_i, P_i\right] = i\hbar\delta_{ij} \tag{۳-۶}$$

و بقیه‌ی پارامترها حذف می‌شود. عملگرهای متناظر پرایم دار که در روابط جابجایی زیر صدق می‌کنند در نظر می‌گیریم:

$$\left[X'_i, X'_i\right] = i\hbar\left(\theta_{ij}^{(a)} + \theta_{ij}^{(b)}\right)۱ \quad , \quad \left[X'_i, Y'_j\right] = i\hbar\left(\frac{m_a}{M}\theta_{ij}^{(a)} - \frac{m_b}{M}\theta_{ij}^{(b)}\right)۱ \tag{۳-۷- الف}$$

$$\left[X'_i, P'_j\right] = ۰ \ , \ \left[Y'_i, Y'_j\right] = i\hbar\left(\frac{m_a^۲}{M^۲}\theta_{ij}^{(a)} + \frac{m_b^۲}{M^۲}\theta_{ij}^{(b)}\right)۱ \ , \left[Y'_i, P'_j\right] = i\hbar\delta_{ij}۱ \tag{۳-۷- ب}$$

$$\left[X'_i, Q'_j\right] = i\hbar\delta_{ij}۱ \quad , \quad \left[Y'_i, Q'_j\right] = ۰ \quad , \quad \left[P'_i, P'_j\right] = i\hbar\left(\eta_{ij}^{(a)} + \eta_{ij}^{(b)}\right)۱ \tag{۳-۷- ج}$$

$$\left[P'_i, Q'_j\right] = i\hbar\left(\frac{m_b}{M}\eta_{ij}^{(a)} - \frac{m_a}{M}\eta_{ij}^{(b)}\right)۱ \ , \left[Q'_i, Q'_j\right] = i\hbar\left(\frac{m_b^۲}{M^۲}\eta_{ij}^{(a)} + \frac{m_a^۲}{M^۲}\eta_{ij}^{(b)}\right)۱ \tag{۳-۷- د}$$

تحت تبدیلات بالا هامیلتونی سیستم دو جسمی به صورت زیر در خواهد آمد:

$$H\left(\vec{x}^{(a)}, \vec{x}^{(b)}, \vec{p}^{(a)}, \vec{p}^{(b)}\right) = \frac{p_i^{(a)} p^{(a)i}}{۲m_a} + \frac{p_i^{(b)} p^{(b)i}}{۲m_b} + V\left(\vec{x}^{(a)}, \vec{x}^{(b)}\right) \tag{۳-۸}$$

یا بر حسب عملگرهای بدون پرایم می‌توان نوشت:

$$H\left(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{P}, \vec{Q}\right) = \frac{P_i P^i}{۲M} + \frac{Q_i Q^i}{۲\mu} + V\left(\vec{X}, \vec{Y}\right) \tag{۳-۹}$$

به طور مشابه هامیلتونی بر اساس عملگرهای پرایم‌دار به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$H\left(\vec{x}'^{(\mathrm{a})},\vec{x}'^{(\mathrm{b})},\vec{p}'^{(\mathrm{a})},\vec{p}'^{(\mathrm{b})}\right)=\frac{p_i'^{(\mathrm{a})}p'^{(\mathrm{a})i}}{۲m_{\mathrm{a}}}+\frac{p_i'^{(\mathrm{b})}p'^{(\mathrm{b})i}}{۲m_b}+V\left(\vec{x}'^{(\mathrm{a})},\vec{x}'^{(\mathrm{b})}\right)$$ (۳-۱۰)

یا به صورت معادل می‌توان رابطه‌ی زیر را داشت:

$$H\left(\vec{X}',\vec{Y}',\vec{P}',\vec{Q}'\right)=\frac{P_i'P'^i}{۲M}+\frac{Q_i'Q'^i}{۲\mu}+V\left(\vec{X}',\vec{Y}'\right)$$ (۳-۱۱)

بین متغیرهای بیان شده در رابطه‌ی بالا ارتباطی به صورت زیر برقرار است:

$$X_i'=X_i-\frac{۱}{۲}\theta_{ij}^{(\mathrm{a})}p_j^{(\mathrm{a})}+\frac{۱}{۲}\theta_{ij}^{(\mathrm{b})}p_j^{(\mathrm{b})}$$ (۳-۱۲- الف)

$$Y_i'=Y_i-\frac{m_{\mathrm{a}}}{۲M}\theta_{ij}^{(\mathrm{a})}p_j^{(\mathrm{a})}-\frac{m_b}{۲M}\theta_{ij}^{(\mathrm{b})}p_j^{(\mathrm{b})}$$ (۳-۱۲- ب)

$$P_i'=P_i+\frac{۱}{۲}\eta_{ij}^{(\mathrm{a})}x_j^{(\mathrm{a})}+\frac{۱}{۲}\eta_{ij}^{(\mathrm{b})}x_j^{(\mathrm{b})}$$ (۳-۱۲- ج)

$$Q_i'=Q_i+\frac{m_b}{۲M}\eta_{ij}^{(\mathrm{a})}x_j^{(\mathrm{a})}-\frac{m_{\mathrm{a}}}{۲M}\eta_{ij}^{(\mathrm{b})}x_j^{(\mathrm{b})}$$ (۳-۱۲- د)

اکنون یک عامل بعد وابسته به سیستم فیزیکی مورد نظر در نظر می‌گیریم به طوری که برای ذرات یکسان داریم:

$$\eta_{ij}^{(\mathrm{a})}=-\theta_{ij}^{(\mathrm{a})}\quad,\quad\eta_{ij}^{(\mathrm{b})}=-\theta_{ij}^{(\mathrm{b})}$$ (۳-۱۳)

با توجه به مورد خاص سیستم دو ذره‌ای با بارهای مخالف $q_{\mathrm{a}},q_b$ و دانستن این که ناجابجایی به معنی حضور یک میدان مغناطیسی در فضای فاز کوانتومی به دلیل حضور بارهایی با علامت مخالف که در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند، محسوب می‌شود می‌توان اینگونه استدلال کرد که هر کدام از این بارها ناجابجایی یکسانی را درک می‌کنند اما با علامت مخالف [۴۴]

$$\theta_{ij}^{(\mathrm{a})}=-\theta_{ij}^{(\mathrm{b})}=\theta_{ij}\quad,\quad\eta_{ij}^{(\mathrm{a})}=-\eta_{ij}^{(\mathrm{b})}=\eta_{ij}$$ (۳-۱۴)

پس در نهایت ما تنها یک پارامتر ناجابجایی که مشخص‌کننده فضای فاز کوانتومی ناجابجایی است، داریم:

$$\theta_{ij} = \theta_{ij}^{(\mathrm{a})} = -\theta_{ij}^{(\mathrm{b})} = \eta_{ij}^{(\mathrm{b})} = -\eta_{ij}^{(\mathrm{a})} \tag{۳-۱۵}$$

در این صورت روابط (۳-۱۲) به معادلات زیر تبدیل می‌شوند:

$$X_i' = X_i - \frac{۱}{۲}\theta_{ij} P_j \tag{۳-۱۶- الف}$$

$$Y_i' = Y_i - \frac{۱}{۲}\theta_{ij}\left[Q_j + \frac{m_\mathrm{a} - m_b}{M} P_j\right] \tag{۳-۱۶- ب}$$

$$P_i' = P_i - \frac{۱}{۲}\theta_{ij} X_j \tag{۳-۱۶- ج}$$

$$Q_i' = Q_i - \frac{۱}{۲}\theta_{ij}\left[Y_j - \frac{m_\mathrm{a} - m_b}{M} X_j\right] \tag{۳-۱۶- د}$$

روابط (۳-۷) را نیز به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\left[X_i', Y_j'\right] = -\left[P_i', Q_j'\right] = i\hbar\theta_{ij}۱ \tag{۳-۱۷- الف}$$

$$\left[X_i', Q_j'\right] = \left[Y_i', P_j'\right] = i\hbar\delta_{ij}۱ \tag{۳-۱۷- ب}$$

$$\left[Y_i', Y_j'\right] = -\left[Q_i', Q_j'\right] = i\hbar\frac{m_\mathrm{a} - m_b}{M}\theta_{ij}۱ \tag{۳-۱۷- ج}$$

$$\left[X_i', X_j'\right] = \left[X_i', P_j'\right] = \left[Y_i', Q_j'\right] = \left[P_i', P_j'\right] = ۰ \tag{۳-۱۷- د}$$

با این ساده‌سازی هامیلتونی تبدیل شده در رابطه (۳-۱۱) از نوع بدون تبدیل آن متفاوت خواهد شد، بطوری که:

$$\begin{aligned}\Delta H &= -\frac{۱}{۲M}\theta_{ij} X_j P_i - \frac{۱}{۲\mu}\theta_{ij} Q_i Y_j - \frac{m_b - m_\mathrm{a}}{۲m_b m_\mathrm{a}}\theta_{ij} Q_i X_j + V(X', Y') - V(X, Y) \\ &= \left[\frac{۱}{۲M}(\vec{X} \wedge \vec{P}) + \frac{۱}{۲\mu}(\vec{Y} \wedge \vec{Q}) + \frac{m_b - m_\mathrm{a}}{۲m_b m_\mathrm{a}}(\vec{X} \wedge \vec{Q})\right].\vec{\theta} + \Delta V\end{aligned} \tag{۳-۱۸}$$

رابطه بالا را می‌توان به صورت ساده شده زیر در نظر گرفت:

$$\Delta H=\left[\frac{۱}{۲m_a}\vec{L}^{(\mathrm{a})}-\frac{۱}{۲m_b}\vec{L}^{(\mathrm{b})}\right].\vec{\theta}+\Delta V \qquad (۳-۱۹)$$

عملگر تکانه معمولی ذرات $\mathrm{a,b}$، $\vec{L}^{(\mathrm{a})}=\vec{X}^{(\mathrm{a})}\wedge\vec{P}^{(\mathrm{a})},\ \vec{L}^{(b)}=\vec{X}^{(b)}\wedge\vec{P}^{(b)}$است. حال به بررسی حالت‌های دینامیکی سیستم دو ذره‌ای بیان شده توسط جواب‌های تابع موج جمعی معادله شرودینگر می‌پردازیم [۱۹, ۴۵]

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}^{(\mathrm{a})},\vec{x}^{(b)},t)=\left[-\frac{\hbar^{۲}}{۲m_{\mathrm{a}}}\Delta^{(\mathrm{a})}-\frac{\hbar^{۲}}{۲m_b}\Delta^{(b)}+V(\vec{x}^{(\mathrm{a})},\vec{x}^{(b)})\right]*\psi(\vec{x}^{(\mathrm{a})},\vec{x}^{(b)},t)$$

(۳-۲۰)

ضرب ‎*‎ معرف ضرب تعریف شده در فضای ناجابجایی است. به جای استفاده از این متغیرها و رویکرد ارائه شده راه مناسب‌تر استفاده از متغیرهای پرایم دار است که در روابط جابجایی مشابه‌ای مانند آنچه که در ابتدا بیان شد صدق می‌کنند اما بدون در نظر گرفتن ضرب*، این مطلب به شرح زیر برای معادله شرودینگر بیان می‌شود:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{x}'^{(\mathrm{a})},\vec{x}'^{(b)},t)=\left[-\frac{\hbar^{۲}}{۲m_{\mathrm{a}}}\Delta'^{(\mathrm{a})}-\frac{\hbar^{۲}}{۲m_b}\Delta'^{(b)}+V(\vec{x}'^{(\mathrm{a})},\vec{x}'^{(b)})\right]*\psi(\vec{x}'^{(\mathrm{a})},\vec{x}'^{(b)},t)$$

(۳-۲۱- الف)

و یا به طور معادل می‌توان نوشت:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{X}',\vec{Y}',t)=\left[-\frac{\hbar^{۲}}{۲\mu}\Delta_{X'}-\frac{\hbar^{۲}}{۲M}\Delta_{Y'}+V(\vec{X}',\vec{Y}')\right]*\psi(\vec{X}',\vec{Y}',t) \qquad (۳-۲۱\text{- ب})$$

برای حل این معادله از روش جداسازی متغیرها به شکل داده شده زیر استفاده می‌کنیم:

$$\psi(\vec{X}',\vec{Y}',t)=\varphi(\mathrm{X}')\phi(\mathrm{Y}')exp\left[-\frac{iE'}{\hbar}t\right] \qquad (۳-۲۲)$$

بنابراین دو معادله دیفرانسیل شامل توابع $\varphi(\mathrm{X}'),\phi(\mathrm{Y}')$ خواهیم داشت. با حل معادله دیفرانسیل برای $\phi(\mathrm{Y}')$، جواب زیر بدست خواهد آمد:

$$\phi(\mathrm{Y}')=exp\left[i\vec{K}'.\vec{Y}'\right] \tag{۳-۲۳}$$

که $\vec{K}$ بردار موج وابسته به تابع موج جمعی نسبت به مرکز جرم و $\vec{K}'$ بردار موج تبدیل یافته آن است.

$$\Delta_{X'}\varphi(\vec{\mathrm{X}}')+\frac{۲\mu}{\hbar^{۲}}\left[E'-V(\vec{\mathrm{X}}',\vec{\mathrm{Y}}')-\frac{\hbar^{۲}}{۲M}\left|\vec{K}'\right|^{۲}\right]\varphi(\vec{\mathrm{X}}')=۰ \tag{۳-۲۴}$$

که

$$\begin{aligned}&\vec{X}'=\vec{X}+\frac{۱}{۲}\vec{\theta}\wedge\vec{P} \quad , \qquad \vec{Y}'=\vec{Y}+\frac{۱}{۲}\left[\vec{\theta}\wedge\vec{Q}+\frac{(m_a-m_b)}{M}\vec{\theta}\wedge\vec{P}\right]\\ &E'=E+\Delta E_{NC} \quad , \qquad \Delta V=V(\vec{\mathrm{X}}',\vec{\mathrm{Y}}')-V(\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}})\end{aligned} \tag{۳-۲۵}$$

با توجه به معادله شرودینگر دو ذره‌ای معمول رابطه زیر را داریم:

$$\Delta_{X}\varphi(\vec{\mathrm{X}})+\frac{۲\mu}{\hbar^{۲}}\left[E-V(\vec{\mathrm{X}},\vec{\mathrm{Y}})-\frac{\hbar^{۲}}{۲M}\left|\vec{K}\right|^{۲}\right]\varphi(\vec{\mathrm{X}})=۰ \tag{۳-۲۶}$$

با استفاده از رابطه زیر

$$\Delta_{X'}\varphi(\vec{\mathrm{X}}')=(\Delta_{X'}+\Delta_{P'})\varphi(\vec{\mathrm{X}}')=(\Delta_{X}+\Delta_{P})\varphi(\vec{\mathrm{X}}+\frac{۱}{۲}\vec{\theta}\wedge\vec{\mathrm{P}})\approx\Delta_{X}\varphi(\vec{\mathrm{X}}+\frac{۱}{۲}\vec{\theta}\wedge\vec{\mathrm{P}}) \tag{۳-۲۷}$$

و با در نظرگرفتن جداسازی متغیرها به صورت $\varphi(\vec{\mathrm{X}}')=\varphi(\vec{\mathrm{X}})\,\mathrm{F}(\vec{\theta}\wedge\vec{\mathrm{P}})$ می‌توان تصحیحات ناجابجایی برای طیف انرژی سیستم دو ذره‌ای را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\Delta E_{NC}=\Delta V-\frac{\hbar^{۲}}{۲M}\left[\left|\vec{K}'\right|^{۲}-\left|\vec{K}\right|^{۲}\right] \tag{۳-۲۸}$$

## ۳-۲ سیستم سه ذره‌ای در فضای فاز ناجابجایی

بررسی مسائل مکانیک‌کوانتومی تعمیم داده شده به سیستم‌های چند ذره‌ای بسیار پیچیده است. از طرفی بررسی سیستم‌های سه ذره‌ای در فیزیک هسته‌ای، فیزیک ذرات بنیادی و فیزیک حالت جامد بسیار مورد توجه می‌باشد همانند باریون‌ها متشکل از سه کوارک، هلیوم ۳ متشکل از دو پروتون و یک نوترون که به عنوان سوخت در راکتور هسته‌ای مورد استفاده است و تریون متشکل از دو الکترون و یک حفره (یا به صورت یک الکترون و دو حفره)که به عنوان ماده بسیار مورد توجه و کاربردی در فیزیک حالت جامد محسوب می‌شود . از جمله موارد بررسی‌های انجام شده درباره‌ی اینگونه سیستم‌ها می‌توان به بررسی سیستم‌های سه ذره‌ای توسط پراکندگی با پتانسیل در بازه متناهی [۴۶] و بررسی نسبیتی [۴۷] و غیر نسبیتی [۴۸] آن اشاره کرد. رفتار سیستم‌های بس ذره‌ای از جمله سه‌ذره‌ای به دلیل نزدیک بودن به رفتار سیستم‌های موجود در طبیعت حائز اهمیت می‌باشند و نتایج حاصل از آن را می‌توان به سیستم‌های بس ذره‌ای(بیش از سه ذره) تعمیم داد و رفتاری واقعی‌تر از سیستم‌های فیزیکی ترسیم نمود. در بررسی سیستم سه ذره‌ای ابتدا تبدیلات کانونیکی زیر که ارتباط بین متغیرها در فضای فاز جابجایی و ناجابجایی را بیان می‌کند در نظر می‌گیریم:

$$p_i^{k(NC)} = p_i^{k(C)} + \frac{۱}{۲}\eta_{ij}^{(k)} x_j^{k(C)}, \qquad x_i^{k(NC)} = x_i^{k(C)} - \frac{۱}{۲}\theta_{ij}^{(k)} p_j^{k(C)} \qquad k = ۱,۲,۳$$

(۳-۲۹)

اندیس $k$ نمایش‌دهنده $k$ امین ذره است.

### ۳-۲-۱ سیستم سه ذره‌ای در حضور پتانسیل نوسانگر در فضای فاز ناجابجایی

سه ذره با جرم‌های مساوی $M_۱ = M_۲ = M_۳ = M$ در فضای فاز دو بعدی در نظر می‌گیریم. هامیلتونی سیستم سه ذره‌ای با برهمکنش نوسانی به صورت زیر داده می‌شود:

$$H^{(NC)}=\frac{p_{۱}^{(NC)۲}+p_{۲}^{(NC)۲}+p_{۳}^{(NC)۲}}{۲M}+\sum_{i}^{۳}\frac{۱}{۲}\omega'^{۲}Mr_{i}^{(NC)۲}$$
$$+\frac{۱}{۲}M\omega^{۲}\left(\left|r_{۱}^{(NC)}-r_{۲}^{(NC)}\right|^{۲}+\left|r_{۱}^{(NC)}-r_{۳}^{(NC)}\right|^{۲}+\left|r_{۲}^{(NC)}-r_{۳}^{(NC)}\right|^{۲}\right)^{۲} \quad (۳-۳۰)$$

مختصات ژاکوبی در فضای دو بعدی را در نظر می‌گیریم [۴۹]

$$R_x^{(C)}=\frac{x_{۱}^{(C)}+x_{۲}^{(C)}+x_{۳}^{(C)}}{۳} \quad , \quad R_y^{(c)}=\frac{y_{۱}^{(C)}+y_{۲}^{(C)}+y_{۳}^{(C)}}{۳} \quad (۳-۳۱\text{- الف})$$

$$\rho_x^{(C)}=\frac{x_{۱}^{(C)}-x_{۲}^{(C)}}{\sqrt{۲}} \quad , \quad \rho_y^{(C)}=\frac{y_{۱}^{(C)}-y_{۲}^{(C)}}{\sqrt{۲}} \quad (۳-۳۱\text{- ب})$$

$$\lambda_x^{(C)}=\frac{x_{۱}^{(C)}+x_{۲}^{(C)}-۲x_{۳}^{(C)}}{\sqrt{۶}} \quad , \quad \lambda_y^{(C)}=\frac{y_{۱}^{(C)}+y_{۲}^{(C)}-۲y_{۳}^{(C)}}{\sqrt{۶}} \quad (۳-۳۱\text{- ج})$$

$R_x,R_y$ و $\rho_x,\rho_y$ به ترتیب مولفه‌های مرکز جرم و حرکت نسبی دو ذره و $\lambda_x,\lambda_y$ حرکت نسبی ذره سوم نسبت به مرکز جرم ذرات ۱ و ۲ را نشان می‌دهند. با استفاده از معادلات (۳-۳۱) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_{۱}}&=\frac{۱}{۳}\frac{\partial}{\partial R_x}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{\partial}{\partial \rho_x}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}\frac{\partial}{\partial \lambda_x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y_{۱}}=\frac{۱}{۳}\frac{\partial}{\partial R_y}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{\partial}{\partial \rho_y}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}\frac{\partial}{\partial \lambda_y}\\
\frac{\partial}{\partial x_{۲}}&=\frac{۱}{۳}\frac{\partial}{\partial R_x}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{\partial}{\partial \rho_x}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}\frac{\partial}{\partial \lambda_x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y_{۲}}=\frac{۱}{۳}\frac{\partial}{\partial R_y}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}\frac{\partial}{\partial \rho_y}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}\frac{\partial}{\partial \lambda_y} \quad (۳-۳۲)\\
\frac{\partial}{\partial x_{۳}}&=\frac{۱}{۳}\frac{\partial}{\partial R_x}-\frac{۲}{\sqrt{۶}}\frac{\partial}{\partial \lambda_x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y_{۳}}=\frac{۱}{۳}\frac{\partial}{\partial R_y}-\frac{۲}{\sqrt{۶}}\frac{\partial}{\partial \lambda_y},
\end{aligned}$$

در نتیجه با توجه به روابط بالا معادلات زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
p_x^{۱(C)}&=\frac{۱}{۳}p_{R_x}^{(C)}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}p_{\rho_x}^{(C)}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}p_{\lambda_x}^{(C)} \quad , \quad p_y^{۱(C)}=\frac{۱}{۳}p_{R_y}^{(C)}+\frac{۱}{\sqrt{۲}}p_{\rho_y}^{(C)}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}p_{\lambda_y}^{(C)}\\
p_x^{۲(C)}&=\frac{۱}{۳}p_{R_x}^{(C)}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}p_{\rho_x}^{(C)}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}p_{\lambda_x}^{(C)} \quad , \quad p_y^{۲(C)}=\frac{۱}{۳}p_{R_y}^{(C)}-\frac{۱}{\sqrt{۲}}p_{\rho_y}^{(C)}+\frac{۱}{\sqrt{۶}}p_{\lambda_y}^{(C)}\\
p_x^{۳(C)}&=\frac{۱}{۳}p_{R_x}^{(C)}-\frac{۲}{\sqrt{۶}}p_{\lambda_x}^{(C)} \quad , \quad p_y^{۳(C)}=\frac{۱}{۳}p_{R_y}^{(C)}-\frac{۲}{\sqrt{۶}}p_{\lambda_y}^{(C)}
\end{aligned}$$

(۳-۳۳)

اکنون صورت‌های برداری زیر را در نظر می‌گیریم[۴۹]

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{۱}^{(NC)} &= \vec{R}^{(NC)} + \frac{\sqrt{۶}}{۶}\vec{\lambda}^{(NC)} + \frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{\rho}^{(NC)} \\
\vec{r}_{۲}^{(NC)} &= \vec{R}^{(NC)} + \frac{\sqrt{۶}}{۶}\vec{\lambda}^{(NC)} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\vec{\rho}^{(NC)} \\
\vec{r}_{۳}^{(NC)} &= \vec{R}^{(NC)} - \frac{\sqrt{۶}}{۳}\vec{\lambda}^{(NC)}
\end{aligned} \qquad (۳۴-۳)$$

هامیلتونی کل سیستم سه ذره‌ای در فضای فاز را به صورت دو قسمت خواهیم داشت:

$$H = H_{۰} + H' \qquad (۳۵-۳)$$

که $H'$ نشان دهنده‌ی ترم اختلالی است چرا که شامل جمله‌ی $\theta^{۲}$ است که دارای مقدار ناچیزی می‌باشد بنابراین می‌توان $H'$ را در مقابل $H_{۰}$ اختلالی در نظر گرفت. با ترکیب معادلات (۳-۳۱) تا (۳-۳۴) و جایگذاری در معادله (۳-۳۰) و با نامگذاری $M_{\rho} = M_{\lambda} = M$ , $M_R = ۳M$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
H_{۰} = &\frac{p_R^{(C)۲}}{۲M} + \frac{p_\rho^{(C)۲}}{۲M} + \frac{p_\lambda^{(C)۲}}{۲M} + \frac{۳}{۲}M\omega^{۲}\lambda^{(C)۲} + \frac{۱}{۲}M\omega'^{۲}\lambda^{(C)۲} + \frac{۳}{۲}M\omega^{۲}\rho^{(C)۲} + \frac{۱}{۲}M\omega'^{۲}\rho^{(C)۲} \\
&+ \frac{۳}{۲}M_R\omega'^{۲}R^{(C)۲} + L_{z_R}^{(C)}\Bigg[\frac{۱}{۲}M\omega^{۲}\left\{\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۳}\theta^{(۳)} + \frac{-\sqrt{۶}-۳\sqrt{۲}}{۶}\theta^{(۱)} + \frac{-\sqrt{۶}+۳\sqrt{۲}}{۶}\theta^{(۲)}\right\} \\
&+ \frac{۱}{۲}M\omega'^{۲}\left\{\frac{+\sqrt{۶}-\sqrt{۳}+۱}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۱)} - \frac{-\sqrt{۶}-\sqrt{۳}-۱}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۲)} - \frac{-\sqrt{۶}+۲}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۳)}\right\}\Bigg] \\
&+ L_{z\rho}^{(C)}\Bigg[\frac{۱}{۲}M\omega^{۲}\left\{\frac{-۲\sqrt{۶}-۳}{۲}\theta^{(۱)} + \frac{\sqrt{۳}-۳}{۲}\theta^{(۲)}\right\} + \frac{۱}{۲}M\omega'^{۲}\left\{-\frac{۲\sqrt{۶}+۲+\sqrt{۱۲}}{۲\sqrt{۱۲}}\theta^{(۱)} - \frac{۲\sqrt{۶}+\sqrt{۱۲}-۲}{۲\sqrt{۱۲}}\theta^{(۲)}\right\}\Bigg] \\
&+ L_{z_\lambda}^{(C)}\Bigg[\frac{۱}{۲}M\omega^{۲}\left\{-۲\theta^{(۳)} + \frac{-۲\sqrt{۱۲}-\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}}\theta^{(۱)} + \frac{۲\sqrt{۱۲}-\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۶}}\theta^{(۲)}\right\} \\
&+ \frac{۱}{۲}M\omega'^{۲}\left\{-\frac{۶\sqrt{۲}+\sqrt{۱۲}+۶}{۶\sqrt{۱۲}}\theta^{(۱)} - \frac{۶\sqrt{۲}+\sqrt{۱۲}-۶}{۶\sqrt{۱۲}}\theta^{(۲)} + \frac{۶+۲\sqrt{۶}}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۳)}\right\}\Bigg]
\end{aligned}$$

(۳-۳۶)

و ترم اختلالی هامیلتونی را به صورت زیر خواهیم داشت:

$$H' = \frac{۱}{۲M}\Big[ aR^{(C)۲} + b\lambda^{(C)۲} + c\rho^{(C)۲} + \alpha p_R^۲ + \beta p_\rho^۲ + \gamma p_\lambda^۲$$
$$+(R_x^{(C)}\lambda_x^{(C)} + R_y^{(C)}\lambda_y^{(C)})\left\{\frac{\sqrt{۶}}{۱۲}\eta^{(۱)۲} + \frac{\sqrt{۶}}{۱۲}\eta^{(۲)۲} - \frac{۲\sqrt{۶}}{۱۲}\eta^{(۳)۲}\right\}$$
$$+(R_x^{(C)}\rho_x^{(C)} + R_y^{(C)}\rho_y^{(C)})\left\{\frac{\sqrt{۲}}{۴}\eta^{(۱)۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۴}\eta^{(۲)۲}\right\} + (\rho_x^{(C)}\lambda_x^{(C)} + \rho_y^{(C)}\lambda_y^{(C)})$$
$$\left\{\frac{\sqrt{۱۲}}{۲۴}\eta^{(۱)۲} - \frac{\sqrt{۱۲}}{۲۴}\eta^{(۲)۲}\right\}\Big] + (p_{R_y}^{(C)}p_{\rho_y}^{(C)} + p_{R_x}^{(C)}p_{\rho_x}^{(C)})\frac{۱}{۲}M\omega^۲$$
$$\left[\left\{\frac{-۱}{۳\sqrt{۲}}\theta^{(۲)۲} + \frac{۱}{۳\sqrt{۲}}\theta^{(۱)۲} - \frac{۱}{۶\sqrt{۲}}\theta^{(۱)}\theta^{(۳)} + \frac{۱}{۶\sqrt{۲}}\theta^{(۲)}\theta^{(۳)}\right\}\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{۲}M\omega'^۲\left\{\frac{۱}{\sqrt{۷۲}}(\theta^{(۱)۲} + \theta^{(۲)۲})\right\}\right] + (p_{R_y}^{(C)}p_{\lambda_y}^{(C)} + p_{R_x}^{(C)}p_{\lambda_x}^{(C)})$$
$$\left[\frac{۱}{۲}M\omega^۲\left\{\frac{۱}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۲)۲} + \frac{۱}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۱)۲} - \frac{۲}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۳)۲} - \frac{۱}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۱)}\theta^{(۲)}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{۱}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۱)}\theta^{(۳)} - \frac{۱}{۶\sqrt{۶}}\theta^{(۱)}\theta^{(۳)} + \frac{۱}{۳\sqrt{۶}}\theta^{(۲)}\theta^{(۳)} - \frac{۱}{۶\sqrt{۶}}\theta^{(۲)}\theta^{(۳)}\right\}$$
$$\left.+\frac{۱}{۲}M\omega'^۲\left\{\frac{۱}{۳\sqrt{۲۴}}(\theta^{(۱)۲} + \theta^{(۲)۲} - \sqrt{۴}\theta^{(۳)۲})\right\}\right] + (p_{\rho_y}^{(C)}p_{\lambda_y}^{(C)} + p_{\rho_x}^{(C)}p_{\lambda_x}^{(C)})$$
$$\left[\frac{۱}{۲}M\omega^۲\left\{\frac{۱}{\sqrt{۱۲}}(-\theta^{(۲)۲} + \theta^{(۱)۲} + \theta^{(۱)}\theta^{(۳)} - \theta^{(۲)}\theta^{(۳)})\right\} + \frac{۱}{۲}M\omega'^۲\left\{\frac{۱}{۲\sqrt{۱۲}}(\theta^{(۱)۲} - \theta^{(۲)۲})\right\}\right]$$

(۳۷-۳)

که پارامترهای تعریف شده در بالا به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\alpha = \frac{M_R^۲\omega^۲}{۳}\frac{۱}{۱۸}(\theta^{(۱)۲} + \theta^{(۲)۲} + \theta^{(۳)۲}$$
$$-\frac{۱}{۲}\theta^{(۱)}\theta^{(۲)} - \theta^{(۱)}\theta^{(۳)} - \theta^{(۲)}\theta^{(۳)}) + \frac{M_R^۲\omega'^۲}{۳}\;\frac{۱}{۳۶}(\theta^{(۱)۲} + \theta^{(۲)۲} + \theta^{(۳)۲})$$

(۳-۳۸- الف)

$$\beta = M_\rho^۲\omega^۲(\frac{۱}{۴}\theta^{(۱)۲} + \frac{۱}{۴}\theta^{(۲)۲} + \frac{۱}{۴}\theta^{(۱)}\theta^{(۲)}) + M_\rho^۲\omega'^۲\frac{۱}{۸}(\theta^{(۱)۲} + \theta^{(۲)۲})$$

(۳-۳۸- ب)

$$\gamma = M_\lambda^۲\omega^۲(\frac{۱}{۱۲}\theta^{(۱)۲} + \frac{۱}{۱۲}\theta^{(۲)۲} + \frac{۱}{۳}\theta^{(۳)۲} - \frac{۱}{۱۲}\theta^{(۱)}\theta^{(۲)})$$
$$+M_\lambda^۲\omega'^۲\frac{۱}{۲۴}(\theta^{(۱)۲} + \theta^{(۲)۲} + ۴\theta^{(۳)۲})$$

(۳-۳۸- ج)

$$a=\frac{۱}{۴}(\eta^{(۱)۲}+\eta^{(۲)۲}+\eta^{(۳)۲})\ ,\ \mathrm{b}=\frac{۱}{۴}(\frac{\eta^{(۱)۲}}{۶}+\frac{\eta^{(۲)۲}}{۶}+\frac{۲}{۳}\eta^{(۳)۲})\ ,\ \mathrm{c}=\frac{۱}{۸}(\eta^{(۱)۲}+\eta^{(۲)۲})$$
(۳-۳۹)

### ۳-۲-۲ حل معادله ویژه مقداری هامیلتونی سه ذره‌ای در مختصات قطبی

در این قسمت ویژه‌مقدار و ویژه‌حالت هامیلتونی ارائه شده در قسمت قبل را در مختصات قطبی بررسی می‌کنیم

$$H.\psi=E\psi \qquad (۳-۴۰)$$

تابع موج $\psi=\psi(R)\psi(\rho)\psi(\lambda)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به رابطه (۳-۳۶) و رابطه (۳-۴۰) می توان نوشت:

$$\frac{p_R^{(C)۲}}{۲M}+\frac{p_\rho^{(C)۲}}{۲M}+\frac{p_\lambda^{(C)۲}}{۲M}+\frac{۳}{۲}M\omega^۲\lambda^{(C)۲}+\frac{۱}{۲}M\omega'^۲\lambda^{(C)۲}+\frac{۳}{۲}M\omega^۲\rho^{(C)۲}$$
$$+\frac{۱}{۲}M\omega'^۲\rho+\frac{۳}{۲}M_R\omega'^۲R^{(C)۲}\psi(R,\rho,\lambda)=E\psi(R,\rho,\lambda) \qquad (۳-۴۱)$$

با جداسازی متغیرها در رابطه (۳-۴۱) برای مولفه $R$ داریم:

$$(\frac{۳p_R^{(C)۲}}{۴M_R}+\frac{۳}{۲}M_R\omega'^۲R^{(C)۲})\psi(R)=E_R\psi(R) \qquad (۳-۴۲)$$

با انتخاب متغیرهای جدید $\frac{۲}{۳}E_R=\varepsilon_R$ , $۲\omega'^۲=\tilde{\omega}'^۲$ و حل معادله (۳-۴۲) با استفاده از روش NU [۵۰] در مختصات قطبی ویژه مقدار انرژی و تابع موج به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\varepsilon_{n_R,m_R}=\hbar\tilde{\omega}'(۲n_R+m_R+۱) \qquad (۳-۴۳\text{-الف})$$

$$\psi_{n_R,m_R}(R)=r(R)exp(im_R\phi_R) \qquad (۳-۴۳\text{-ب})$$

برای مولفه $\rho$ ظاهر شده در معادله (۳-۴۱) نیز رابطه زیر را داریم:

$$(\frac{p_{\rho}^{(c)۲}}{۲M_{\rho}}+\frac{۱}{۲}M_{\rho}\omega'^{۲}\rho^{۲}+\frac{۳}{۲}M_{\rho}\omega^{۲}\rho^{۲})\psi(\rho)=\varepsilon_{\rho}\psi(\rho) \qquad (۳-۴۴)$$

که $\omega''^{۲}=۳\omega^{۲}+\omega'^{۲}$. با حل معادله (۳-۴۴) با روش NU ویژه مقدار انرژی و تابع موج به دست می‌آیند:

$$\varepsilon_{n_{\rho},m_{\rho}}=\hbar\omega''(۲n_{\rho}+m_{\rho}+۱) \qquad (۳-۴۵ - الف)$$

$$\psi_{n_{\rho},m_{\rho}}(\rho)=r(\rho)exp(im_{\rho}\phi_{\rho}) \qquad (۳-۴۵ - ب)$$

برای مولفه‌ی $\lambda$ در معادله (۳-۴۱) معادله‌ای به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$(\frac{p_{\lambda}^{(c)۲}}{۲M_{\lambda}}+\frac{۱}{۲}M_{\lambda}\omega'^{۲}\lambda^{۲}+\frac{۳}{۲}M_{\lambda}\omega^{۲}\lambda^{۲})\psi(\lambda)=\varepsilon_{\lambda}\psi(\lambda) \qquad (۳-۴۶)$$

که $\tilde{\omega}''^{۲}=۳\omega^{۲}+\omega'^{۲}$. بنابراین تابع موج و ویژه مقدار مولفه $\lambda$ با استفاده از روش NU به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

$$\varepsilon_{n_{\lambda},m_{\lambda}}=\hbar\tilde{\omega}''(۲n_{\lambda}+m_{\lambda}+۱) \qquad (۳-۴۷ - الف)$$

$$\psi_{n_{\lambda},m_{\lambda}}(\lambda)=r(\lambda)exp(im_{\lambda}\phi_{\lambda}) \qquad (۳-۴۷ - ب)$$

از طرفی برای ترم دوم هامیلتونی $H$. که شامل عملگر $L_z$ است، ویژه حالت عملگر $L_z$را به صورت $|n,m\rangle$ معرفی می‌کنیم به طوری که $|\phi\rangle=|n_R,m_R,n_{\rho},m_{\rho},n_{\lambda},m_{\lambda}\rangle$ پس می توان نوشت:

$$L_{z_R}|n_R,m_R\rangle=m_R\hbar \quad , \quad L_{z_{\rho}}|n_{\rho},m_{\rho}\rangle=m_{\rho}\hbar \;,\; L_{z_{\lambda}}|n_{\lambda},m_{\lambda}\rangle=m_{\lambda}\hbar \qquad (۲-۴۸)$$

در نتیجه داریم:

$$
\begin{aligned}
\varsigma = {} & m_R\hbar\left[\frac{1}{2}M\omega^{2}\left\{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{3}\theta^{(3)}+\frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}\theta^{(1)}+\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6}\theta^{(2)}\right\}\right. \\
& \left.+\frac{1}{2}M\omega'^{2}\left\{\frac{+\sqrt{6}-\sqrt{3}+1}{3\sqrt{6}}\theta^{(1)}-\frac{-\sqrt{6}-\sqrt{3}-1}{3\sqrt{6}}\theta^{(2)}-\frac{-\sqrt{6}+2}{3\sqrt{6}}\theta^{(3)}\right\}\right] \\
& +m_\rho\hbar\left[\frac{1}{2}M\omega^{2}\left\{\frac{-2\sqrt{6}-3}{2}\theta^{(1)}+\frac{\sqrt{3}-3}{2}\theta^{(2)}\right\}+\frac{1}{2}M\omega'^{2}\left\{-\frac{2\sqrt{6}+2+\sqrt{12}}{2\sqrt{12}}\theta^{(1)}\right.\right. \\
& \left.\left.-\frac{2\sqrt{6}+\sqrt{12}-2}{2\sqrt{12}}\theta^{(2)}\right\}\right]+m_\lambda\hbar\left[\frac{1}{2}M\omega^{2}\left\{-2\theta^{(3)}+\frac{-2\sqrt{12}-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\theta^{(1)}\right.\right. \\
& \left.+\frac{2\sqrt{12}-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}\theta^{(2)}\right\}+\frac{1}{2}M\omega'^{2}\left\{-\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{12}+6}{6\sqrt{12}}\theta^{(1)}-\frac{6\sqrt{2}+\sqrt{12}-6}{6\sqrt{12}}\theta^{(2)}\right. \\
& \left.\left.+\frac{6+2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}\theta^{(3)}\right\}\right]+\frac{1}{2M}\left[-m_R\hbar\left\{\frac{6+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{18}\eta^{(1)}+\frac{6+\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{18}\eta^{(2)}\right.\right. \\
& \left.+\frac{3-\sqrt{6}}{9}\eta^{(3)}\right\}-m_\rho\hbar\left\{\frac{6+\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\eta^{(1)}+\frac{-6-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6\sqrt{2}}\eta^{(2)}\right\} \\
& \left.-m_\lambda\hbar\left\{\frac{6+\sqrt{6}+3\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}\eta^{(1)}+\frac{6+\sqrt{6}-3\sqrt{3}}{6\sqrt{6}}\eta^{(2)}+\frac{-6+2\sqrt{6}}{3\sqrt{6}}\eta^{(3)}\right\}\right]
\end{aligned}
$$

(۴۹-۳)

### ۳-۲-۳ هامیلتونی سه ذره‌ای تحت اثر ناجابجایی

حال هامیلتونی داده شده $H'$ حاصل تأثیرناجابجایی را با استفاده از روش اختلال مرتبه اول بررسی می‌کنیم.

$$\Delta^{(1)}=\langle\phi|H'|\phi\rangle=0$$ (۵۰-۳)

نتیجه بدست آمده نشان دهنده‌ی آن است که تغییرات انرژی مرتبه اول صفر می‌باشد. با توجه به نتایج به دست آمده انرژی و تابع موج کل سیستم سه جسمی به صورت زیر به دست خواهند آمد:

$$E_{total}=\varepsilon^{(R)}_{n_R,m_R}+\varepsilon^{(\rho)}_{n_\rho,m_\rho}+\varepsilon^{(\lambda)}_{n_\lambda,m_\lambda}+\varsigma+\Delta^{(1)}$$ (۵۱-۳)

$$\psi(n_R,m_R,n_\rho,m_\rho,n_\lambda,m_\lambda)=r(R)\,exp(im_R\phi_R)\,r(\rho)\,exp(im_\rho\phi_\rho)\,r(\lambda)\,exp(im_\lambda\phi_\lambda)$$

(۵۲-۳)

# فصل چهارم

# تابع توزیع ویگنر

## ۱-۴ مقدمه

در سال ۱۹۳۲ ویگنر[۵۰] در حین بررسی سیستم‌های بس‌ذره‌ای در دماهای پایین متوجه شد که توابع توزیع کلاسیکی موجود، قادر به توصیف رفتار ذرات در این دماها نمی‌باشند در نتیجه با در نظرگرفتن تصحیحات کوانتومی لازم در مکانیک آماری کلاسیک، تابع توزیعی کوانتومی را در فضای فاز معرفی کرد[۱۱]. هدف ویگنر از این کار برقراری ارتباط بین تابع موج مکانیک کوانتومی با یک تابع توزیع در فضای فاز بود و در واقع کار وی مبنای پیدایش روشی جدید برای مطالعه مکانیک کوانتومی و مکانیک آماری کوانتومی گردید. در مکانیک کلاسیک براساس فرمولبندی هامیلتونی اندازه حرکت $p_i$ و مختصات مکانی $q_i$ به صورت هم ارز ظاهر می‌شوند و با هردوی این کمیت به صورت پارامتر و یکسان رفتار می‌شود[۲۴]. اما در مکانیک کوانتومی فرمولبندی‌ها در نمایش مختصات مکان یا اندازه‌حرکت صورت می‌گیرد و هر کدام عملگرهایی با عملکردهای متفاوت محسوب می‌شوند. در این صورت هم ارزی بین فضای مختصات و فضای اندازه حرکت از بین می‌رود. تابع توزیع ویگنر در فرمولبندی مکانیک کوانتومی یکی از روش‌هایی است که در آن هم ارزی بین فضای مختصات و فضای اندازه حرکت حفظ می‌شود. از طرفی مکانیک آماری به عنوان یکی از مباحث مطرح در فیزیک و پل ارتباطی بین مکانیک کلاسیک و مکانیک کوانتومی است که به بررسی سیستم‌هایی با تعداد زیادی متغیر که حتی می‌تواند هم مرتبه با عدد آووگادرو باشد، می‌پردازد. این متغیرها می‌توانند ذراتی همچون اتم‌ها، مولکول‌ها یا ذرات بنیادی را شامل شوند. در مکانیک آماری با استفاده از خواص میکروسکوپی ذرات مانند ساختار اتمی و برهمکنش بین آن‌ها، اطلاعاتی در مورد خواص ماکروسکوپی سیستم مانند فشار و آنتروپی از طریق محاسبات بدست می‌آید. تشریح مکانیک آماری کلاسیک براساس فرمولبندی هامیلتونی است که در آن حالت یک سیستم فیزیکی تنها با مشخص شدن مکان و اندازه حرکت هر یک از اجزای تشکیل دهنده آن تعریف می‌شود. بنابراین سیستمی متشکل از $N$ ذره با $3N$ مختصه مکان $q_1,\dots,q_N$ و $3N$ مختصه اندازه

---

[۵۰] Wigner

حرکت $(p_1,...p_{3N})$ یعنی با $6N$ مختصه توصیف می‌شود. این فضای $6N$ مختصه‌ای را فضای فاز گویند. در واقع فضای فاز شامل تمام حالات ممکن(مقادیر ممکن مکان و تکانه) برای یک سیستم است و هر نقطه در این فضای فاز نمایش‌دهنده یک حالت سیستم است، با تحول سیستم این نقطه در فضای فاز تغییر خواهد کرد و مسیری را طی می‌کند که به آن مسیر فاز گویند[۵۱]. اگر ناحیه‌ی کوچکی را در فضای فاز در نظر بگیریم این ناحیه با گذشت زمان تغییر شکل می‌دهد اماحجم آن همواره ثابت است. علت تغییر شکل، تغییر مکان و تکانه هر ذره با گذشت زمان است. این قضیه به قضیه لیوویل شهرت دارد که در آن سیال فضای فاز غیرقابل تراکم است. در مکانیک آماری کلاسیک چگالی احتمال که تابعی از مختصه‌های $q_i, p_i$ است معادله لیوویل را ارضا می‌کند. مکانیک آماری کوانتومی به تشریح سیستم‌های بس‌ذره‌ای بر پایه‌ی مکانیک کوانتومی می‌پردازد. در مکانیک آماری کوانتومی، برای توصیف سیستمی با $n$ درجه آزادی کافی است که تابع موج $\psi$ آن که تابعی از $n$ مختصه می‌باشد را مشخص کرد. در مکانیک آماری کوانتومی حالت سیستم بر حسب احتمالات و با تعریف مفهوم عملگر چگالی فون نیومن $\rho$ توصیف می‌شود. ویگنر اولین کسی بود که از روی عملگر چگالی $\rho$ تابعی در فضای فاز تعریف کرد که از خود رفتار احتمالاتی نشان می‌داد. این تابع توزیع با نام تابع توزیع ویگنر شناخته شد. با معرفی این تابع توزیع نمایش فضای فاز مکانیک کوانتومی پایه گذاری شد به طوری که ساختن مکانیک کوانتومی در فضای فاز را ملزم به ساخت یک تابع توزیع می‌کند و تابع توزیعی که در نظم ویل[۵۱] پایه گذاری شود همان تابع توزیع ویگنر است. از طرفی این تابع یک تابع توزیع احتمال ساده نیست چرا که مقادیر منفی را نیز داراست به همین خاطر آن را با نام شبه توزیع نیز نام می‌برند. یکی از مهم‌ترین نکات در ساخت مکانیک کوانتومی در فضای فاز این است که این امکان را ایجاد می‌کند که بتوان آن را با مکانیک کلاسیک، که هر دو در یک فضا بیان می‌شوند، مقایسه کرد.

[۵۱] weyl order

## ۲-۴ تابع توزیع ویگنر و تبدیل ویل

در فرمولبندی استاندارد مکانیک کوانتومی[۷] چگالی احتمال $\rho(x)$ در فضای مکان توسط مربع اندازه تابع موج داده می شود، $\rho(x)=|\psi(x)|^2$. بنابراین با داشتن تابع موج در فضای مکان براحتی می‌توان چگالی احتمال در فضای مکان را محاسبه کرد. و به همین ترتیب می‌توان تابع توزیع در فضای تکانه را بدست آورد. براساس تبدیل فوریه و با داشتن تابع موج در فضای مکان، تابع موج در فضای تکانه طبق رابطه زیر محاسبه می‌گردد:

$$\phi(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{\frac{-ipx}{\hbar}}dx \tag{۱-۴}$$

با داشتن تابع موج در فضای اندازه‌حرکت، بسادگی می‌توان چگالی احتمال در این فضا را به دست آورد، $\rho(p)=|\phi(p)|^2$. با توجه به مطالب بیان شده دیده می‌شود که در مکانیک کوانتومی معمول تابع توزیع احتمال بر اساس متغیر مکان و تابع توزیع احتمال بر اساس متغیر اندازه‌حرکت به صورت جداگانه بیان می‌شوند و با توجه به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ، امکان‌پذیر نیست که بتوان تابعی داشت که توزیع احتمال را به صورت همزمان برحسب متغیرهای مکان و اندازه حرکت نشان دهد. از طرفی در این فصل به دنبال یافتن مفهومی روشن و واضح از تابع توزیع ویگنر می‌باشیم به گونه‌ای که ارتباط آن با تابع موج را مشخص کنیم و مهم‌تر از آن یافتن مقدار چشمداشتی کمیات فیزیکی با استفاده از آن است. در مکانیک کوانتومی معمول با توجه به تابع موج داده شده و با استفاده از روشی استاندارد مقدار چشمداشتی هر کمیت فیزیکی $A$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد[۷]

$$\langle A\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\hat{A}\psi(x)\,dx \tag{۲-۴}$$

$\hat{A}$ عملگر متناظر با $A$است. حال یافتن رابطه‌ای برای محاسبه چشمداشتی کمیت فیزیکی بر اساس تابع توزیع ویگنر حائز اهمیت است. بدین منظور ابتدا تبدیل ویل را معرفی می‌کنیم. تبدیل ویل عملگر $\hat{A}$ که تابعی از مکان و اندازه‌حرکت است و با نماد تیلده نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود: [۵۲]

$$\tilde{A}(x,p)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}}\left\langle x+\frac{y}{۲}\right|\hat{A}\left|x-\frac{y}{۲}\right\rangle dy \qquad (۳-۴)$$

.این عملگر در پایه $x$ به صورت ماتریسی $\langle x'|\hat{A}|x\rangle$است. در واقع این تبدیل یک عملگر را به تابعی از مکان و اندازه‌حرکت تبدیل می‌کند. و این تبدیل بر حسب عناصر ماتریسی عملگر در پایه تکانه به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tilde{A}(x,p)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixu}{\hbar}}\left\langle p+\frac{u}{۲}\right|\hat{A}\left|p-\frac{u}{۲}\right\rangle du \qquad (۴-۴)$$

یک خاصیت مهم و کلیدی تبدیل ویل این است که تریس[۵۲] حاصلضرب دو عملگر $\hat{A},\hat{B}$ توسط انتگرال‌گیری بر روی کل فضای فاز برابر می‌شود با حاصلضرب تبدیل ویل آن‌ها

$$Tr[\hat{A}\hat{B}]=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{A}(x,p)\tilde{B}(x,p)dxdp \qquad (۵-۴)$$

که $h=۲\pi\hbar$، ثابت پلانک است. برای حالت خالص $|\psi\rangle$ ، عملگر چگالی به صورت $\hat{\rho}=|\psi\rangle\langle\psi|$ تعریف می‌شود که در پایه $x$ به صورت زیر داده می‌شود:

$$\langle x|\hat{\rho}|x'\rangle=\psi(x)\psi^{*}(x') \qquad (۶-۴)$$

در این حالت ارتباط بین عملگر چگالی با چشمداشتی کمیت فیزیکی $A$ به قرار زیر است:

---

[۵۲] trace

$$Tr[\hat{\rho}\hat{A}] = Tr[|\psi\rangle\langle\psi|\hat{A}] = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle A\rangle$$ (۴-۷ - الف)

که براساس معادله (۴-۵) به صورت زیر در می‌آید:

$$\langle A\rangle = Tr[\hat{\rho}\hat{A}] = \frac{۱}{h}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\rho}\hat{A}dxdp$$ (۴-۷ - ب)

اکنون به تعریف ریاضی تابع توزیع ویگنر می‌پردازیم:

$$W(x,p) = \frac{\tilde{\rho}}{h} = \frac{۱}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}}\psi(x+\frac{y}{۲})\psi^*(x-\frac{y}{۲})\,dy$$ (۴-۸)

براساس این معادله می‌توان حقیقی بودن تابع توزیع ویگنر را نشان داد. چشمداشتی کمیت $A$ بر حسب تابع توزیع ویگنر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\langle A\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,\tilde{A}(x,p)\,dxdp$$ (۴-۹)

این معادله نشان می‌دهد که مقدار چشمداشتی کمیت $A$، مشابه متوسط کمیت فیزیکی $\tilde{A}(x,p)$ روی کل فضای فاز با چگالی احتمال $W(x,p)$می‌باشد. حال با انتگرال‌گیری از تابع توزیع ویگنر روی کل فضای فاز $p$ و استفاده از $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ipx}{\hbar}}\,dp = h\delta(x)$ رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,dp = \psi^*(x)\psi(x)$$ (۴-۱۰)

این معادله چگالی احتمال در پایه‌ی $x$ را نشان می‌دهد. با انتگرال‌گیری مشابه بر روی $x$ رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)\,dx = \phi^*(p)\phi(p)$$ (۴-۱۱)

این معادله نشان‌دهنده چگالی احتمال در پایه‌ی اندازه‌حرکت می‌باشد. طبق معادلات (۴-۱۰) و (۴-۱۱) می‌توان دیدکه تابع توزیع ویگنر نشان‌دهنده توزیع در فضای فاز است به گونه‌ای که تصویر در راستای $x$ توزیع احتمال مکان و تصویر آن در امتداد $p$ توزیع احتمال اندازه‌حرکت را می‌دهد. طبق تعریف ارائه شده در معادله (۴-۸)، تابع توزیع ویگنر را می‌توان به صورت حاصلضرب دو تابه موج بیان کرد[۵۳]، ابتدا توجه داشته باشید که:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-\frac{y}{۲})\psi^*(x-\frac{y}{۲})\,d(\frac{y}{۲}) = ۲ \qquad (۴\text{-}۱۲)$$

حال دو تابع نرمال شده به $y$ را به صورت $\psi_۱(y) = e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \dfrac{\psi(x+\frac{y}{۲})}{\sqrt{۲}}$ و $\psi_۲(y) = \dfrac{\psi(x-\frac{y}{۲})}{\sqrt{۲}}$ تعریف می‌کنیم و با استفاده از معادله (۴-۸) و دو تابع معرفی شده بالا رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$W(x,p) = \frac{۲}{h}\int_{-\infty}^{\infty} \psi_۱(y)\psi_۲^*(y)\,dy \qquad (۴\text{-}۱۳)$$

بنابراین رابطه $|W(x,p)| \le \frac{۲}{h}$ حاصل‌می‌گردد. طبق این رابطه می‌توان نتیجه گرفت که تابع توزیع ویگنر نمی‌تواند مقادیری بزرگتر از مقدار $\frac{۲}{h}$ را بپذیرد و تنها مقادیری مجاز هستند که در رابطه مذکور صدق کنند. حال به دنبال پیدا کردن ارتباط بین تابع موج و تابع توزیع ویگنر هستیم، برای پیدا کردن این رابطه از معادله (۴-۸) شروع می‌کنیم و آن را در $e^{\frac{ipx'}{\hbar}}$ ضرب کرده و سپس از آن نسبت به $p$ انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p)e^{\frac{ipx'}{\hbar}}\,dp = \frac{۱}{h}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ipx'}{\hbar}} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \psi(x+\frac{y}{۲})\psi^*(x-\frac{y}{۲})\,dy \qquad (۴\text{-}۱۴)$$

حال با استفاده از رابطه $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp = h\delta(x)$ ، معادله بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x,p) e^{\frac{ipx'}{n}} dp = \delta(x'-y)\psi(x+\frac{y}{۲})\psi^*(x-\frac{y}{۲}) = \psi(x+\frac{x'}{۲})\psi^*(x-\frac{x'}{۲}) \quad (۱۵-۴)$$

با در نظر گرفتن $x = \frac{x}{۲}$ و سپس $x' = x$ و جایگذاری در معادله بالا، تابع موج به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\psi(x) = \frac{۱}{\psi^*(۰)} \int_{-\infty}^{\infty} W(\frac{x}{۲}, p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp \quad (۱۶-۴)$$

با استفاده از این رابطه به آسانی می‌توان از روی تابع موج داده شده، تابع توزیع ویگنر را محاسبه کرد و بلعکس. اکنون تبدیل ویل را برای عملگرهای متناظر با مشاهده‌پذیرها را در نظرمی‌گیریم[۵۳]. فرض کنید عملگر $\hat{A}$ فقط تابعی از متغیر $x$ باشد، $\hat{A} = A(\hat{x})$ ، در نتیجه با استفاده از تعریف ارائه شده در رابطه (۴-۳) ثابت می‌شود که:

$$\tilde{A}(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \left\langle x+\frac{y}{۲} \middle| \hat{A} \middle| x-\frac{y}{۲} \right\rangle dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipy}{\hbar}} A(x-\frac{y}{۲})\delta(y) dy = A(x) \quad (۱۷-۴)$$

طبق رابطه به دست آمده مشاهده می‌شود که برای یک عملگری که تنها وابسته به مکان $\hat{x}$ است تبدیل ویل آن به صورت تابع اولیه می‌شود که در آن $x$ جایگزین عملگر $\hat{x}$ شده است. به همین ترتیب اگر عملگری همچون $\hat{B}$ داشته باشیم که فقط تابعی از متغیر $p$ باشد، $\hat{B} = B(\hat{p})$ ، در نتیجه با استفاده از رابطه (۴-۴) داریم:

$$\tilde{B}(x,p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ixu}{\hbar}} \left\langle p+\frac{u}{۲} \middle| \hat{B} \middle| p-\frac{u}{۲} \right\rangle du = B(p) \quad (۱۸-۴)$$

در این مورد نیز مشاهده می‌گردد که تبدیل ویل عملگری که تنها به $p$ وابسته است برابر شده با تابع اولیه که در آن $p$ جایگزین عملگر $\hat{p}$ شده است. نتایج بدست آمده در روابط (۳-۱۷) و (۳-۱۸) را می‌توان به مجموعه‌ای از عملگرها با جملاتی که فقط تابعی از $\hat{x}$ یا $\hat{p}$ است تعمیم داد. بنابراین تبدیل ویل عملگر هامیلتونی به شکل $\hat{H}(\hat{x},\hat{p})=\hat{T}(\hat{p})+\hat{U}(\hat{x})$ به صورت $H(x,p)=T(p)+U(x)$ در می‌آید، که $T$ و $U$ انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل‌اند. و مقادیر چشمداشتی کمیت های $x,p,T,U,H$ از روابط زیر محاسبه می‌گردند:

$$\langle x\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(x,p)\,x\,dxdp \quad , \quad \langle p\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(x,p)\,p\,dxdp$$

$$\langle T\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(x,p)T\,dxdp \quad , \quad \langle U\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(x,p)U\,dxdp \qquad (۱۹\text{-}۴)$$

$$\langle H\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W(x,p)H\,dxdp$$

## ۴-۳ تابع توزیع ویگنر نوسانگر هماهنگ در فضای معمول

به طور کلی تابع توزیع ویگنر برای یک فضای $D$ بعدی به صورت زیر تعریف می‌شود [۵۴]

$$W(\mathrm{x},\mathrm{p})=\frac{۱}{(۲\pi\hbar)^D}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-i\,\mathrm{y.p}}{\hbar}}\psi^*(\mathrm{x}-\frac{\hbar}{۲}\mathrm{y})\psi(\mathrm{x}+\frac{\hbar}{۲}\mathrm{y})\,d\,\mathrm{y} \qquad (۲۰\text{-}۴)$$

معادله شرودینگر در فضای معمولی را به صورت زیر داریم:

$$H(\mathrm{x},\mathrm{p})\psi(\mathrm{x})=E\psi(\mathrm{x}) \qquad (۲۱\text{-}۴)$$

هامیلتونی نوسانگر هماهنگ دو بعدی را در نظر می‌گیریم

$$H(\mathrm{x},\mathrm{p})=\frac{\mathrm{p}^۲}{۲m}+\frac{۱}{۲}m\omega^۲\,\mathrm{x}^۲ \qquad (۲۲\text{-}۴)$$

$\mathrm{p},\mathrm{x}$ نشان‌دهنده مؤلفه‌های مکانی در دو بعد $x,y$ و مؤلفه‌های اندازه‌حرکت در دو بعد، $p_x,p_y$ می‌باشد.

با حل معادله شرودینگر برای این نوسانگر هماهنگ، تابع موج حالت پایه محاسبه می‌شود:

$$\psi_{۰}(\mathrm{x}) = \frac{۱}{\pi^{\frac{۱}{۴}}\sqrt{a}} e^{-\frac{(\mathrm{x}^{۲})}{۲a^{۲}}} \qquad (۲۳\text{-}۴)$$

با استفاده از تبدیل فوریه تابع موج در فضای اندازه‌حرکت بسادگی بدست می‌آید:

$$\phi_{۰}(\mathrm{p}) = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\mathrm{x}) e^{\frac{-i\,\mathrm{px}}{\hbar}} d\,\mathrm{x} \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

با حل انتگرال بالا و محاسبه ضریب بهنجارش، تابع موج حالت پایه در فضای اندازه‌حرکت برای نوسانگر هماهنگ بدست می‌آید:

$$\phi_{۰}(\mathrm{p}) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\hbar}\pi^{\frac{۱}{۴}}} e^{\frac{-a^{۲}\mathrm{p}^{۲}}{۲\hbar^{۲}}} \qquad (۲۵\text{-}۴)$$

$a^{۲} = \frac{\hbar}{m\omega}$ طول مقیاس نوسانگر است. تابع توزیع ویگنر متناظر با توابع موج معادلات (۴-۲۳) و (۴-۲۵) به صورت محاسبه می‌گردد:

$$W_{۰۰}(x,y,p_x,p_y) = |\psi(x)|^{۲}|\phi(p)|^{۲} = \frac{۱}{(\pi\hbar)^{۲}} e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}) - \frac{۱}{a^{۲}}(x^{۲}+y^{۲})}$$

(۴-۲۶)

## ۴-۴ تابع توزیع ویگنر نوسانگر هماهنگ در فضای فاز ناجابجایی

معادله شرودینگر در فضای ناجابجایی را در نظر می‌گیریم:

$$H^{(NC)}(\mathrm{x},\mathrm{p}) * \psi^{(NC)}(\mathrm{x}) = E^{(NC)}\psi^{(NC)}(\mathrm{x}) \qquad (۲۷\text{-}۴)$$

با حل معادله (۴-۲۷) و محاسبه $\psi^{(NC)}(\mathrm{x})$ می‌توان تابع توزیع ویگنر متناظر را طبق رابطه زیر محاسبه کرد:

$$W^{(NC)}(\mathrm{x},\mathrm{p}) = \frac{۱}{(۲\pi\hbar)^{۲}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-i\,\mathrm{y.p}}{\hbar}} \psi^{(NC)*}(\mathrm{x} - \frac{\hbar}{۲}\mathrm{y})\psi^{(NC)}(\mathrm{x} + \frac{\hbar}{۲}\mathrm{y})\,\mathrm{dy} \qquad (۲۸\text{-}۴)$$

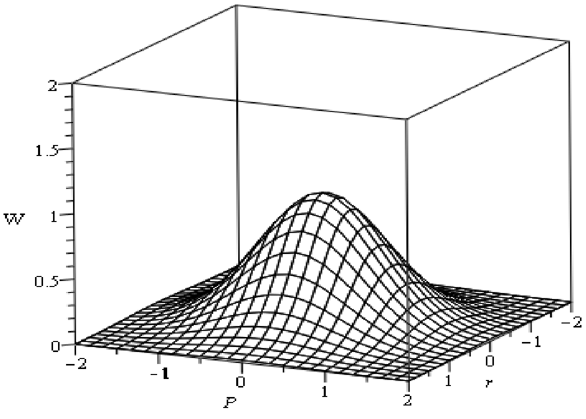
نکته‌ای قابل توجه را متذکر می‌شویم در فصل اول در بخش ۱-۵ هم‌ارزی ضرب* و باب شیفت را در فضای ناجابجایی اثبات کردیم اکنون از این نتیجه استفاده می‌کنیم و بجای حل معادله شرودینگر در فضای فاز ناجابجایی با استفاده از ضرب*، از باب شیفت استفاده می‌کنیم که در این صورت انجام محاسبات بسیار ساده می‌شود بنابراین ضرب* در معادله شرودینگر را با ضرب معمول با ساخت باب شیفت‌هایی در فضای فاز ناجابجایی به صورت رابطه معرفی شده در (۱-۱۳) در فصل اول جایگزین می‌کنیم. با استفاده از تبدیلات (۱-۱۳) و با در نظر گرفتن $\theta^{2}=\eta^{2}=0$ هامیلتونی نوسانگر هماهنگ دو بعدی در فضای فاز ناجابجایی به صورت زیر در می‌آید:

$$H^{(NCPS)}=\frac{1}{2m}\left\{p_x^{2}+p_y^{2}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x)\right\}+\frac{1}{2}m\omega^{2}\left\{x^{2}+y^{2}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)\right\}$$
(۴-۲۹)

با جایگذاری تبدیلات (۱-۱۳) ( با در نظر گرفتن $\theta^{2}=\eta^{2}=0$) در رابطه (۴-۲۶) تابع توزیع ویگنر برای نوسانگر هماهنگ دو بعدی در حالت پایه و در فضای فاز ناجابجایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$W_{..}^{(NCPS)}(x,y,p_x,p_y)=\frac{1}{(\pi\hbar)^{2}}e^{-\frac{a^{2}}{\hbar^{2}}(p_x^{2}+p_y^{2}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{1}{a^{2}}[x^{2}+y^{2}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]} \qquad (۴-۳۰)$$

در شکل۴-۱ نمودار تابع توزیع ویگنر رابطه (۴-۳۰)، به ازای $\theta=\eta=0$ رسم شده است.




شکل۴-۱ تابع توزیع ویگنر نوسانگر هماهنگ به ازای $\theta=\eta=0$ و $a=\hbar=1$

با توجه به تابع توزیع ویگنر(۴-۳۰) چشمداشتی چند کمیت فیزیکی را محاسبه کنیم. چشمداشتی عملگر هامیلتونی نوسانگر هماهنگ دو بعدی را طبق روابط ارائه شده در معادلات (۴-۱۹) به صورت زیر داریم:

$$\left\langle H^{(NCPS)} \right\rangle_{..} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} W_{..}^{(NC)}(x,y,p_x,p_y) H^{(NC)}(x,y,p_x,p_y)\, dxdydp_x dp_y$$

(۴-۳۱)

روابط (۴-۲۹) و (۴-۳۰) را در رابطه بالا قرار می‌دهیم:

$$\left\langle H^{(NCPS)} \right\rangle_{..} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{(\pi\hbar)^{۲}} e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}$$
$$\times \frac{۱}{۲m}\left\{ p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x)\right\} + \frac{۱}{۲}m\omega^{۲}\left\{ x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)\right\} dxdydp_x dp_y$$

(۴-۳۲)

هر جمله را به صورت جداگانه در نظر گرفته و انتگرال آن را محاسبه می‌کنیم. ابتدا جمله $\frac{p_x^{۲}}{۲m}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\varsigma = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۲m} e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}\, p_x^{۲}\, dxdydp_x dp_y \quad (۴\text{-}۳۳)$$

با محاسبه انتگرال‌های بالا با استفاده از روش مربع کامل نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{۱}{a^{۲}}x^{۲}+bxp_y} dx = e^{\frac{a^{۲}b^{۲}p_y^{۲}}{۴}} a\sqrt{\pi} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{۱}{a^{۲}}y^{۲}-byp_x} dy = e^{\frac{a^{۲}b^{۲}p_x^{۲}}{۴}} a\sqrt{\pi}$$

(۴-۳۴- الف)

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_x^{۲} e^{-c^{۲} p_x^{۲}} dp_x = \frac{۱}{۲}\frac{\sqrt{\pi}}{c^{\frac{۳}{۲}}} \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-cp_y^{۲}} dp_y = \frac{\sqrt{\pi}}{c^{\frac{۱}{۲}}}$$

(۴-۳۴- ب)

$b = \frac{a^{۲}\eta}{\hbar^{۳}} + \frac{\theta}{a^{۲}\hbar}$ , $c = \frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}} - \frac{۱}{۴}a^{۲}b^{۲}$. براساس جواب‌های موجود در روابط(۴-۳۴-الف) و (۴-۳۴-ب)، جواب معادله(۴-۳۳) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varsigma = \frac{\pi^{۲}\hbar^{۳}\omega}{۴(۱-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})} \tag{۴-۳۵}$$

مشابه با روند بالا برای  برای جمله‌ی $\frac{p_y^{۲}}{۲m}$، انتگرال زیر را خواهیم داشت:

$$\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{۱}{۲m} e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]} p_y^{۲}\, dxdydp_xdp_y$$

(۴-۳۶)

این انتگرال مشابه با انتگرال قبل است، در نتیجه برای آن جوابی به صورت زیر خواهیم داشت:

$$\xi = \frac{\pi^{۲}\hbar^{۳}\omega}{۴(۱-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})} \tag{۴-۳۷}$$

حال جمله‌ی بعدی ظاهر شده در معادله (۴-۳۲) را در نظر می‌گیریم، یعنی:

$$\chi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\eta}{۲m\hbar} e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]} xp_y dxdydp_xdp_y$$

(۴-۳۸)

با حل انتگرال‌های بالا به طور مشابه با روش مربع کامل، جواب زیر محاسبه می‌گردد:

$$\chi = -\frac{\eta\theta\omega\pi^{۲}\hbar}{۸(۱-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})} \tag{۴-۳۹}$$

به همین ترتیب برای جمله بعد در رابطه (۴-۳۲) جواب زیر را خواهیم داشت :

$$\delta=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{2m\hbar}e^{-\frac{a^2}{\hbar^2}(p_x^2+p_y^2-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{1}{a^2}[x^2+y^2-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}yp_x dxdydp_xdp_y \qquad (۴-۴۰)$$

$$\delta=-\frac{\eta\theta\omega\pi^2\hbar}{8(1-\frac{\eta\theta}{\hbar^2})} \qquad (۴-۴۱)$$

اکنون جمله بعدی در رابطه (۴-۳۲) را در نظر می‌گیریم یعنی:

$$\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}m\omega^2 e^{-\frac{a^2}{\hbar^2}(p_x^2+p_y^2-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{1}{a^2}[x^2+y^2-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}x^2\, dxdydp_xdp_y \qquad (۴-۴۲)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا نسبت به $x$ جواب زیر بدست می‌آید:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2 e^{-\frac{1}{a^2}x^2+bxp_y}dx=\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}a^2b^2p_y^2}b^2\,a^5\sqrt{\pi}+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}a^2b^2p_y^2}\,a^3\sqrt{\pi} \qquad (۴-۴۳)$$

با قراردادن رابطه بالا در رابطه (۴-۴۲) و انتگرال‌گیری بر روی سه متغیر دیگر ،جوابی به صورت زیر نتیجه می‌دهد:

$$\varepsilon=\frac{1}{2}m\omega^2\pi^2\hbar\left[\frac{\eta\theta}{4m\omega(1-\frac{\eta\theta}{\hbar^2})}+\frac{\hbar^2}{m\omega(2-\frac{\eta\theta}{\hbar^2})}\right] \qquad (۴-۴۴)$$

مانند جمله قبل نتایج زیر تکرار خواهند شد:

$$\tau=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}m\omega^2 e^{-\frac{a^2}{\hbar^2}(p_x^2+p_y^2-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{1}{a^2}[x^2+y^2-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}y^2\, dxdydp_xdp_y$$

(۴-۴۵)

$$\tau=\frac{1}{2}m\omega^2\pi^2\hbar\left[\frac{\eta\theta}{4m\omega(1-\frac{\eta\theta}{\hbar^2})}+\frac{\hbar^2}{m\omega(2-\frac{\eta\theta}{\hbar^2})}\right] \qquad (۴-۴۶)$$

و در نهایت برای دو جمله آخر در رابطه (۴-۳۲) بترتیب نتایج زیر محاسبه می‌گردند:

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}-\frac{m\omega^{۲}\theta}{۲\hbar}e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}xp_y dxdydp_xdp_y$$

(۴-۴۷)

$$\mu=-\frac{\eta\theta\omega\pi^{۲}\hbar}{۸(۱-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})} \quad (۴-۴۸)$$

و

$$\upsilon=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{m\omega^{۲}\theta}{۲\hbar}e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}yp_x dxdydp_xdp_y$$

(۴-۴۹)

$$\upsilon=-\frac{\eta\theta\omega\pi^{۲}\hbar}{۸(۱-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})} \quad (۴-۵۰)$$

بنابراین با توجه به جواب‌های بدست آمده برای هر جمله ظاهر شده در رابطه (۴-۳۲)، می‌توان نوشت:

$$\left\langle H^{(NCPS)}\right\rangle_{..}=\left(\frac{\hbar\omega}{۲(۱-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})}+\frac{\hbar\omega}{(۲-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})}-\frac{\eta\omega}{۴\hbar(۱-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})}\right) \quad (۴-۵۱)$$

این رابطه وابستگی مقدار چشمداشتی انرژی نوسانگر هماهنگ در فضای فاز ناجابجایی را به پارامتر ناجابجایی فضا، $\theta,\eta$نشان می‌دهد. با حذف پارامترهای ناجابجایی در معادله (۴-۵۱) انتظار داریم به جواب مورد نظر در فضای معمول برسیم در این صورت معادله بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$\left\langle H\right\rangle_{..}=\hbar\omega \quad (۴-۵۲)$$

این نتیجه انتظار ما را برآورده می‌کند. حال چشمداشتی کمیت‌های فیزیکی مانند $x, p, x^{۲}, p^{۲}$ را برای نوسانگر هماهنگ در فضای فاز ناجابجایی بررسی می‌کنیم. براساس معادلات معرفی شده در رابطه

(۴-۱۹) و با توجه به حل انتگرال‌های بیان شده در محاسبه چشمداشتی انرژی که در بالا بیان کردیم نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\left\langle x^{(NCPS)}\right\rangle_{..}=\frac{۱}{\pi^{۲}\hbar^{۲}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\frac{۱}{۲}\theta p_y)e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}dxdydp_xdp_y$$

(۵۳-۴)

با حل انتگرال‌های ظاهر شده بسادگی می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\left\langle x^{(NCPS)}\right\rangle_{..}=۰ \quad , \quad \left\langle y^{(NCPS)}\right\rangle_{..}=۰ \tag{۵۴-۴}$$

برای مقادیر چشمداشتی تکانه در دو راستای $x, y$ نتایج زیر قابل حصول است:

$$\left\langle p_x^{(NCPS)}\right\rangle_{..}=۰ \quad , \quad \left\langle p_y^{(NCPS)}\right\rangle_{..}=۰$$ (۵۵-۴)

و با روشی مشابه برای جملات $x^{(NCPS)۲}$ و $y^{۲(NCPS)}$ جواب‌هایی به شکل زیر بدست می‌آیند:

$$\left\langle x^{۲(NCPS)}\right\rangle_{..}=\frac{۱}{\pi^{۲}\hbar^{۲}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}xp_y)e^{-\frac{a^{۲}}{\hbar^{۲}}(p_x^{۲}+p_y^{۲}-\frac{\eta}{\hbar}(xp_y-yp_x))-\frac{۱}{a^{۲}}[x^{۲}+y^{۲}-\frac{\theta}{\hbar}(xp_y-yp_x)]}dxdydp_xdp_y$$

$$\left\langle x^{(NCPS)۲}\right\rangle_{..}=\left(\frac{\hbar}{m\omega(۲-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})}\right) \tag{۵۶-۴}$$

و به طور مشابه:

$$\left\langle y^{(NCPS)۲}\right\rangle_{..}=\left(\frac{\hbar}{m\omega(۲-\frac{\eta\theta}{\hbar^{۲}})}\right) \tag{۵۷-۴}$$

$$\left\langle P^{(NCPS)۲}\right\rangle_{..}=m\hbar\omega \tag{۵۸-۴}$$

# فصل پنجم

# فضای ناجابجایی وابسته به زمان

## ۵-۱ مقدمه

در فصل‌های قبل در بررسی سیستم‌های مختلف فیزیکی در فضای ناجابجایی هامیلتونی را به صورتی در نظر گرفتیم که وابستگی صریح به زمان نداشت، این انتخاب سبب می‌شود که برای بررسی رفتار یک سیستم در طبیعت به آن یک تابع مستقل از زمان نسبت دهیم و بتوانیم آن را به روش تحلیلی یا روش تقریبی حل کنیم. گاه در برخی از مسائل نیز اثرات زمانی بسیار ضعیف در نظر گرفته می‌شود که صرف نظر کردن از آن یا استفاده از روش تقریبی برای حل آن مسئله آسیبی به کلیات آن مسئله وارد نمی‌کند و در این صورت مسئله به سادگی با روش‌هایی همچون جداسازی متغیرها در معادلات دیفرانسیل قابل حل خواهد بود اما نمی‌توان تصور کرد که این شرایط همیشه و در همه مسائل برقرار باشد. مسائل بسیاری با وابستگی صریح زمانی به عنوان مسائل واقعی‌تر از طبیعت نیز وجود دارد که باید راهی برای حل آنها در نظر گرفت یکی از این روش‌ها که با توجه به ماهیت مسئله به حل آن می‌پردازد روش ناوردایی پویا می‌باشد. در این فصل  با وارد کردن زمان در فضای ناجابجایی مسائلی را با روش ناوردایی پویا مورد بررسی قرار می‌دهیم چرا که تمام رویدادهایی که در طبیعت اطراف ما در حال وقوع است به گونه‌ای به زمان وابسته است پس با این بررسی تصویر واقعی‌تری از طبیعت را مجسم می‌کنیم.

## ۵-۲ مکانیک کوانتومی ناجابجایی با پس‌زمینه وابسته به زمان

بررسی سیستم‌های وابسته به زمان در مکانیک کوانتومی[۵۵] موضوع بسیار مهمی است و دلیل این اهمیت آن است که کوانتوم متناظر با چنین سیستم‌هایی سبب ایجاد ساختار بنیادی از فیزیک پایه می‌شود و تفسیر جدیدی در حوزه‌های مختلف فیزیک همچون گرانش [۵۶] و اپتیک کوانتومی [۵۷] پدید می‌آورد. بررسی مکانیک کوانتومی در ساختاری از فضا- زمان ناجابجایی صورت می‌گیرد که این ساختار توسط مختصات‌های کانونیکی $x^{\mu}$ ساخته می‌شود که در رابطه جابجایی زیر صدق می‌کنند:

$$[x^{\mu}, x^{\nu}] = i\theta^{\mu\nu} \tag{۵-۱}$$

که $\theta^{\mu\nu}$ معرف تانسور پادمتقارن در فضای ناجابجایی است. از ساختار بیان شده به وجود آمدن مواردی همچون طول کمینه و رابطه عدم قطعیت تعمیم یافته مورد توجه است و این موضوع با این حقیقت صورت می‌پذیرد که $\theta^{\mu\nu}$ به عنوان تابعی از مکان وتکانه در نظر گرفته شود [۵۸] علاوه بر این می‌توان $\theta^{\mu\nu}$ را به صورت تابعی از زمان در نظر گرفت که در اینجا این مورد مد نظر است. در اینجا هدف بیان مدل کوانتومی در فضای ناجابجایی وابسته به زمان و استنتاج نتایجی فیزیکی است. برای شروع کار فضایی دو بعدی را در نظر گرفته به طوری که رابطه جابجایی بین عملگرهای مکان و تکانه به صورت زیر برقرار است:

$$[X, Y] = i\theta(t)\ ,\ [P_x, P_y] = i\Omega(t)\ ,\ [X, P_x] = [Y, P_y] = i\hbar + i\frac{\theta(t)\Omega(t)}{۴\hbar} \tag{۵-۲}$$

$\theta(t)$و $\Omega(t)$ توابعی حقیقی از زمان هستند. با داشتن عملگرهای وابسته به زمان هامیلتونی سیستم فیزیکی نیز به صورت وابسته به زمان خواهد بود. $H(X, Y, P_x, P_y) \rightarrow H(t)$

در این بخش معادله شرودینگر وابسته به زمان را با روش ناوردایی که توسط لوئیس و رزنفیلد[۵۳] [۵۹] معرفی شد بررسی می‌کنیم(این روش را با نام روش ناوردایی پویا نیز می‌شناسند). معادله شرودینگر وابسته به زمان را به صورت زیر داریم:

$$i\hbar\partial_t|\psi_n\rangle = H(t)|\psi_n\rangle \tag{۵-۳}$$

$|\psi_n\rangle$ حالت وابسته به زمان هامیلتونی $H(t)$ است. حال گام‌های اساسی روش حل را بیان می‌کنیم. در گام اول یک عملگر هرمیتی( $I = I^{+}$ ) ناوردا وابسته به زمان، $I(t)$ را معرفی می‌کنیم که در رابطه تحول زمانی تصویر هایزنبرگ زیر صدق می‌کند:

---

[۵۳] Lewis-Riesenfeld

$$\frac{dI(t)}{dt}=\partial_t I(t)+\frac{۱}{i\hbar}[I(t),H(t)]=۰ \qquad (۴-۵)$$

اگر معادله بالا را مساوی صفر قرار دهیم، معادله نشان‌دهنده تحول یک عملگر نسبت به زمان است که از دو بخش متفاوت تشکیل شده است، یکی مشتق جزئی آن عملگر نسبت به زمان و دیگری مربوط به جابجایی با هامیلتونی سیستم است. اگر عملگر با هامیلتونی جابجا شود آن وقت تحول زمانی و تغییرات زمانی معانی یکسان خواهند داشت اما اگر عملگر با هامیلونی جابجا نشود دیگر این معانی یکسان نخواهند بود و تغییرات زمانی و تحول زمانی معانی متفاوتی بخود می‌گیرند. به همین دلیل این روش ناوردای پویا نامیده می‌شود چون رابطه (۵-۴) نشان می‌دهد که عملگر $I$ تحول زمانی ندارد و ویژه مقادیرش مستقل از زمان خواهند بود ولی خود عملگر نسبت به زمان تغییر می‌کند. اکنون باید معادله ویژه‌مقداری که با این عملگر ناوردا ساخته می‌شود را معرفی کنیم:

$$I(t)\left|\phi_n\right\rangle=\lambda\left|\phi_n\right\rangle \qquad (۵-۵)$$

$\lambda$معرف ویژه مقدار حقیقی و مستقل از زمان مربوط به حالت وابسته به زمان $\left|\phi_n\right\rangle$ است. برای نشان دادن اینکه ویژه مقدار $\lambda$ مستقل از زمان است از اثر رابطه (۵-۴) بر $\left|\phi_n\right\rangle$ شروع می‌کنیم:

$$i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle+I(t)H(t)\left|\phi_n\right\rangle-\lambda H(t)\left|\phi_n\right\rangle=۰ \qquad (۶-۵)$$

رابطه بالا را در $\left\langle\phi_n'\right|$ضرب می‌کنیم بنابراین:

$$i\hbar\left\langle\phi_n'\right|\frac{\partial I(t)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle+(\lambda'-\lambda)\left\langle\phi_n'\right|H(t)\left|\phi_n\right\rangle=۰ \qquad (۷-۵)$$

به ازای $\lambda'=\lambda$ رابطه $\left\langle\phi_n'\right|\frac{\partial I(t)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle=۰$ بدست می‌آید. اکنون از رابطه (۵-۵) نسبت به زمان مشتق جزئی می‌گیریم:

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle + I\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle \qquad (۸-۵)$$

با ضرب رابطه بالا در $\left|\phi_n'\right\rangle$ نتیجه زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = \left\langle \phi_n' \right| \frac{\partial I(t)}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = ۰ \qquad (۹-۵)$$

این رابطه به وضوح نشان می‌دهد که ویژه مقادیر مستقل از زمان هستند. اکنون به بررسی تابع موج عملگر ناوردای $I$ می‌پردازیم در این خصوص بر این نکته اشاره می‌کنیم که اگر هر کت دلخواهی را در یک عامل فازی کلی ضرب کنیم تأثیری بر جواب نهایی نخواهد گذاشت چون آنچه که برجواب نهایی تأثیر گذار می‌باشد فاز نسبی است  در نتیجه با در نظر گرفتن جوابی به صورت زیر [۵۹]

$$\left|\psi_n\right\rangle = e^{i\alpha(t)}\left|\phi_n\right\rangle \qquad (۱۰-۵)$$

حالت معرفی شده در معادله شرودینگر وابسته به زمان صدق می‌کند، بنابراین:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}e^{i\alpha(t)}\left|\phi_n\right\rangle = H(t)e^{i\alpha(t)}\left|\phi_n\right\rangle \qquad (۱۱-۵)$$

با مشتق گیری از طرفین رابطه بالا نسبت به زمان داریم:

$$\begin{aligned} &i^۲\hbar\frac{d\alpha}{dt}e^{i\alpha(t)}\left|\phi_n\right\rangle + i\hbar e^{i\alpha(t)}\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = H(t)e^{i\alpha(t)}\left|\phi_n\right\rangle \\ &-\hbar\frac{d\alpha}{dt}\left|\phi_n\right\rangle + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\phi_n\right\rangle = H(t)\left|\phi_n\right\rangle \end{aligned} \qquad (۱۲-۵)$$

تغییرات زمانی کمیت $\alpha$ به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{۱}{\hbar}\left\langle\phi_n\right| i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - H(t)\left|\phi_n\right\rangle \qquad (۱۳-۵)$$

## ۵-۳ نوسانگر هماهنگ با پس زمینه وابسته به زمان

برای توصیف مدل کوانتومی وابسته به زمان با روش ناوردایی پویا، نوسانگر هماهنگی دو بعدی در نظر می‌گیریم که هامیلتونی آن براساس متغیرهای فضای ناجابجایی به صورت زیر تعریف می‌شود[۶۰]

$$H(t)=H(X,Y,P_x,P_y)=\frac{1}{2m}(P_x^2+P_y^2)+\frac{1}{2}m\omega^2(X^2+Y^2) \qquad (۵\text{-}۱۴)$$

باب شیفت استاندارد زیر را برای متغیرهای فضای ناجابجایی ومتغیرهای فضای جابجایی را در نظر می‌گیریم:

$$X=x-\frac{\theta(t)}{2\hbar}p_y \ , \quad Y=y+\frac{\theta(t)}{2\hbar}p_x \quad , \quad P_x=p_x+\frac{\Omega(t)}{2\hbar}y \quad , \quad P_y=p_y-\frac{\Omega(t)}{2\hbar}x$$

(۵-۱۵)

که در آن متغیرهای فضای جابجایی در رابطه جابجایی $[x,p_x]=[y,p_y]=i\hbar$ صدق می‌کنند. با توجه به این رابطه و متغیرهای ظاهر شده در هامیلتونی رابطه (۵-۱۴) هر یک از مقادیر زیر محاسبه می‌گردد:

$$P_x^2=(p_x+\frac{\Omega(t)}{2\hbar}y)(p_x+\frac{\Omega(t)}{2\hbar}y)=p_x^2+\frac{\Omega(t)}{2\hbar}(p_xy+yp_x)+\frac{\Omega^2(t)}{4\hbar^2}y^2 \qquad (۵\text{-}۱۶\text{- الف})$$

$$P_y^2=(p_y-\frac{\Omega(t)}{2\hbar}x)(p_y-\frac{\Omega(t)}{2\hbar}x)=p_y^2+\frac{\Omega(t)}{2\hbar}(-p_yx-xp_y)+\frac{\Omega^2(t)}{4\hbar^2}x^2 \qquad (۵\text{-}۱۶\text{- ب})$$

$$X^2=(x-\frac{\theta(t)}{2\hbar}p_y)(x-\frac{\theta(t)}{2\hbar}p_y)=x^2+\frac{\theta(t)}{2\hbar}(-xp_y-p_yx)+\frac{\theta^2(t)}{4\hbar^2}p_y^2 \qquad (۵\text{-}۱۶\text{- ج})$$

$$Y^2=(y+\frac{\theta(t)}{2\hbar}p_x)(y+\frac{\theta(t)}{2\hbar}p_x)=y^2+\frac{\theta(t)}{2\hbar}(yp_x+p_xy)+\frac{\theta^2(t)}{4\hbar^2}p_x^2 \qquad (۵\text{-}۱۶\text{- د})$$

از ترکیب معادلات (۵-۱۴) و (۵-۱۶) هامیلتونی در دو بعد به صورت زیر به دست می‌آید:

$$H(t)=\frac{1}{2}a(t)(p_x^2+p_y^2)+\frac{1}{2}b(t)(x^2+y^2)+c(t)(p_xy-xp_y) \qquad (۵\text{-}۱۷)$$

که $a(t),b(t),c(t)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$a(t)=\frac{۱}{m}+\frac{m\omega^{۲}\theta^{۲}(t)}{۴\hbar^{۲}} \quad , \quad b(t)=\frac{\Omega^{۲}(t)}{۴m\hbar^{۲}}+m\omega^{۲} \quad , \quad c(t)=\frac{\Omega(t)}{۲m\hbar}+\frac{m\omega^{۲}\theta(t)}{۲\hbar}$$ (۱۸-۵)

توجه کنید که به ازای $\theta(t)=۰$، هامیلتونی (۵-۱۷) به هامیلتونی ذره‌ای به جرم $m$ که در میدان الکترومغناطیسی متقارن حرکت می‌کند، تبدیل می‌شود. حال به بررسی معادلات حرکت متغیرهای کانونیکی فضای جابجایی مربوط به هامیلتونی (۵-۱۷) می‌پردازیم:

$$\dot{x}=\frac{۱}{i\hbar}[x,H]=\frac{۱}{i\hbar}\left\{\frac{۱}{۲}a(\mathrm{t})(p_x[x,p_x]+[x,p_x]p_x+[x,p_y^{۲}])+\frac{۱}{۲}b(t)([x,x^{۲}]+[x,y^{۲}])\right.$$
$$\left.+c(t)(p_x[x,y]+[x,p_x]y)+c(t)(x[x,-p_y]+[x,-x]p_y)\right\}$$ (۱۹-۵)

با ساده سازی عبارت بالا معادله حرکت برای مولفه $x$ به صورت زیر در می‌آید:

$$\dot{x}=p_x a(t)+yc(t)$$ (۲۰-۵)

با روندی مشابه، نتایج زیر بسادگی قابل محاسبه می‌باشد:

$$\dot{y}=p_y a(t)-xc(t) \quad \text{و} \quad \dot{p}_x=-b(t)x+c(t)p_y \quad \text{و} \quad \dot{p}_y=-b(t)y-c(t)p_x$$ (۲۱-۵)

## ۵-۴ بررسی هامیلتونی نوسانگر هماهنگ وابسته به زمان در مختصات قطبی

برای هامیلتونی متقارن پیشنهاد شده، تبدیلات کانونیکی کوانتومی در مختصات قطبی را در نظر می‌گیریم:

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=rsin\theta \quad , \quad r=\sqrt{x^{۲}+y^{۲}} \quad , \quad \theta=arctan(y/x)$$ (۵-۲۲)

حال مؤلفه‌های تکانه را بر اساس $r,\theta$ در مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم:

$$p_r = \frac{۱}{۲}\left\{(\vec{p}.\hat{r} + \hat{r}.\vec{p}) - i\hbar\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}\right\} = \frac{xp_x + yp_y}{r} - \frac{i\hbar}{۲r} \qquad (۲۳\text{-}۳)$$

$$p_\theta = \frac{۱}{۲}(\vec{p}.\hat{\theta} + \hat{\theta}.\vec{p}) = xp_y - yp_x \qquad (۲۴\text{-}۵)$$

با رابطه جابجایی $[r, p_r] = [\theta, p_\theta] = i\hbar$. حال با استفاده از معادلات (۵-۲۳) و (۵-۲۴) و با در نظرگرفتن $r^۲ = x^۲ + y^۲$ معادله زیر محایبه می‌شود:

$$p_x^۲ + p_y^۲ = p_r^۲ + \frac{p_\theta^۲}{r^۲} - \frac{\hbar^۲}{۴r^۲} \qquad (۲۵\text{-}۵)$$

با جایگذاری معادله (۵-۲۵) هامیلتونی رابطه (۵-۱۷) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H(t) = \frac{۱}{۲}a(t)(p_r^۲ + \frac{p_\theta^۲}{r^۲} - \frac{\hbar^۲}{۴r^۲}) + \frac{۱}{۲}b(t)r^۲ - c(t)p_\theta \qquad (۲۶\text{-}۵)$$

برای استفاده از روش ناوردایی پویا برای هامیلتونی بالا، عملگر ناوردای زیرکه به طورصریح به $\theta$ وابسته نیست با شکل عمومی زیر پیشنهاد می‌کنیم:

$$I(t) = \alpha(t)p_r^۲ + \beta(t)r^۲ + \gamma(t)\{r, p_r\} + \delta(t)\frac{p_\theta^۲}{r^۲} + \varepsilon(t)\frac{p_\theta}{r^۲} + \phi(t)\frac{۱}{r^۲} \qquad (۲۷\text{-}۵)$$

$\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ ضرائب مجهول وابسته به زمان‌اند. با جایگذاری معادلات (۵-۲۶) و (۵-۲۷) در (۵-۴) قیدهای زیربرای این ضرائب مجهول به دست می‌آید:

$$\dot{\alpha} = -۲a\gamma \quad , \quad \dot{\beta} = ۲b\gamma \quad , \quad \dot{\gamma} = b\alpha - a\beta \qquad (۲۸\text{-}۵)$$

$$\dot{\delta}p_\theta^۲ + \dot{\varepsilon}p_\theta + \dot{\phi} = \hbar^۲ a\gamma - ۲a\gamma p_\theta^۲ \qquad (۲۹\text{-}۵)$$

$$(\delta - \alpha)p_\theta^۲ + \varepsilon p_\theta + \phi + \frac{\alpha\hbar^۲}{۴} = ۰ \qquad (۳۰\text{-}۵)$$

معادلات (۵-۲۸) مشابه معادلات نوسانگر هماهنگ وابسته به زمان هستند[۶۱]. این معادلات با استفاده از پارامترسازی $\alpha(t)=\sigma^{۲}(t)$ که $\sigma$ تابع حقیقی است قابل حل می‌باشند. و معادلات (۵-۲۹) و (۵-۳۰) به صورت زیر حل می‌شوند:

$$\beta=\frac{\tau}{\sigma^{۲}}+\frac{\dot{\sigma}^{۲}}{a^{۲}} \qquad \gamma=-\frac{\sigma\dot{\sigma}}{a} \tag{۵-۳۱}$$

$$\delta=\alpha \quad , \quad \varepsilon=۰ \quad , \quad \phi=-\frac{\alpha\hbar^{۲}}{۴} \tag{۵-۳۲}$$

با توجه به نکاتی که تاکنون ذکر شد، $I(t)$ هرمیتی مناسب ناوردا برای هامیلتونی وابسته به زمان رابطه (۵-۱۷) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I(t)=\frac{\tau}{\sigma^{۲}}r^{۲}+(\sigma p_r-\frac{\dot{\sigma}}{a}r)^{۲}+\frac{\sigma^{۲}p_\theta^{۲}}{r^{۲}}-\frac{\sigma^{۲}\hbar^{۲}}{۴r^{۲}} \tag{۵-۳۳}$$

حال به دنبال حل معادله ویژه مقداری داده شده در رابطه (۵-۵) هستیم. برای این کار و بر اساس $I(t)$ داده شده در رابطه بالا عملگرهای خلق و نابودی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\hat{a}(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{\hbar}}[(\sigma p_r-\frac{\dot{\sigma}}{a}r)-i(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{r}(p_\theta+\frac{\hbar}{۲}))]e^{-i\theta} \tag{۵-۳۴}$$

$$\hat{a}^{\dagger}(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{\hbar}}e^{i\theta}[(\sigma p_r-\frac{\dot{\sigma}}{a}r)+i(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{r}(p_\theta+\frac{\hbar}{۲}))] \tag{۵-۳۵}$$

با رابطه جابجایی $[\hat{a},\hat{a}^{+}]=۱$.

$$\hbar(\hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\frac{۱}{۲})-p_\theta=\frac{۱}{۴}I(t)-\frac{۱}{۲}p_\theta=:\hat{I}(t) \tag{۵-۳۶}$$

واضح است که $\hat{I}(t)$ کمیتی ناوردا نیست و مقدار $\frac{۱}{۴}$ برای سادگی و راحتی کار برای ثابت انتگرال‌گیری $\tau, p_\theta$ به عنوان یک جمله در $\hat{I}(t)$ ظاهر شده است که این برای برقراری رابطه زیر است.

$$[H(t), p_\theta] = \frac{۱}{۲}a(t)\left\{[p_r^{۲}, p_\theta] + [\frac{p_\theta^{۲}}{r^{۲}}, p_\theta] - \frac{\hbar^{۲}}{۴}[\frac{۱}{r^{۲}}, p_\theta]\right\} + \frac{۱}{۲}b(t)[r^{۲}, p_\theta] - c(t)[p_\theta, p_\theta] = ۰$$

(۵-۳۷)

## ۵-۵ ویژه حالت ناوردای وابسته به زمان

در این بخش به بررسی ویژه‌حالت و ویژه‌تابع $\hat{I}(t)$ می‌پردازیم. با توجه به رابطه $[\hat{I}(t), p_\theta] = ۰$، می‌توان نتیجه گرفت که $\hat{I}(t), p_\theta$ دارای ویژه‌کت مشترک هستند بنابراین با انتخاب $\left|n,l\right\rangle$ بعنوان ویژه‌کت مشترک این دو عملگر روابط زیر ظاهر می‌گردد:

$$\hat{I}\left|n,l\right\rangle = \hbar(n+\frac{۱}{۲})\left|n,l\right\rangle \quad , \quad p_\theta\left|n,l\right\rangle = \hbar l\left|n,l\right\rangle \quad , \quad \left\langle n,l\middle|n,l\right\rangle = ۱ \qquad (۵\text{-}۳۸)$$

$$\begin{aligned}&\left\langle n,l\right|\hat{a}^\dagger\hat{a}\left|n,l\right\rangle = n+l \geq ۰\\ &l \in \{-n,\ldots,۰,۱,۲,\ldots\}\end{aligned} \qquad (۵\text{-}۳۹)$$

که برای ویژه حالت بالا روابط زیر برقرار است:

$$\hat{a}\left|n,l\right\rangle = ۰ \qquad (۵\text{-}۴۰\text{- الف})$$

$$\left|n,m-n\right\rangle = \frac{۱}{\sqrt{m!}}(\hat{a}^\dagger)^m\left|n,-n\right\rangle \ , \ \ n,m \in N. \qquad (۵\text{-}۴۰\text{- ب})$$

برای تمام مشاهده پذیرهایی که بر حسب عملگرهای خلق و نابودی وابسته به زمان $\hat{a}$ و $\hat{a}^+$ بیان می‌شوند ، می‌توان از روش عملگری برای محاسبه مقدار چشمداشتی استفاده کرد. هر چند این موضوع از قبل برای مشاهده‌پذیرهای $X, Y, P_x, P_y$ امکان‌پذیر نیست. بنابراین از روابط $p_r = -i\hbar[\partial_r + \frac{۱}{۲r}]$ و

با در نظر گرفتن رابطه $p_\theta=-i\hbar\partial_\theta$ برای محاسبه ویژه حالات استفاده می‌کنیم. اکنون با در نظر گرفتن رابطه $\langle r,\theta|n,l\rangle=\psi_{n,l}(r,\theta)=\varphi_n(r)e^{il\theta}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} p_\theta\psi_{n,l}(r,\theta)&=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta}(\varphi_n(r)e^{il\theta})=\hbar l\varphi_n(r)e^{il\theta}\\ p_\theta\psi_{n,l}(r,\theta)&=\hbar l\psi_{n,l}(r,\theta)\end{aligned} \tag{۴۱-۵}$$

به ازای هر $n$ داده شده برای پایین‌ترین حالت با حل معادله $\hat{a}\psi_{n,-n}(r,\theta)=0$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2\sqrt{\hbar}}[(\sigma p_r-\frac{\dot{\sigma}}{a}r)-i(\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{r}(p_\theta+\frac{\hbar}{2}))]e^{-i\theta}(\varphi_n(r)e^{-in\theta})=0 \tag{۴۲-۵}$$

با اثر عملگرهای $p_r$ و $p_\theta$ بر روی تابع موج و جایگذاری نتایج حاصل در معادله بالا به روابط زیر می‌رسیم:

$$p_r\psi_{n,-n}(r,\theta)=(-i\hbar\frac{\partial}{\partial r}-\frac{i\hbar}{2r})\varphi_n(r)e^{-in\theta}=-i\hbar(\partial_r\varphi_n(r)+\frac{1}{2r}\varphi_n(r))e^{-in\theta}$$

(۵-۴۳- الف)

$$p_\theta\psi_{n,-n}(r,\theta)=(-i\hbar\frac{\partial}{\partial\theta})\varphi_n(r)e^{-in\theta}=-n\hbar\varphi_n(r)e^{-in\theta} \tag{۵-۴۳- ب}$$

در نتیجه با استفاده از معادلات (۵-۴۳-الف) و (۵-۴۳-ب) اثر عملگر نابودی $\hat{a}$ بر روی $\psi_{n,-n}(r,\theta)$ بدست می‌آید:

$$\hat{a}\psi_{n,-n}(r,\theta)=\frac{1}{2\sqrt{\hbar}}\left[\sigma(-i\hbar\partial_r-\frac{i\hbar}{2r})-\frac{\dot{\sigma}}{a}r-i\{\frac{r}{\sigma}+\frac{\sigma}{r}[-n\hbar+\frac{\hbar}{2}]\}\right]\varphi_n(r)e^{-in\theta-i\theta}=0$$

(۴۴-۵)

با فاکتورگیری عبارت $\frac{ie^{-i\theta-in\theta}}{۲\sqrt{\hbar a r\sigma}}$ از رابطه بالا و ساده‌سازی معادله زیر به دست خواهد آمد:

$$\frac{ie^{-i\theta-in\theta}}{۲ar\sigma\sqrt{\hbar}}[(a\hbar n\sigma^{۲}-ar^{۲}+ir^{۲}\sigma\dot{\sigma})\varphi_n(r)-a\hbar r\sigma^{۲}\partial_r\varphi_n(r)]=۰$$ (۴۵-۵)

با حل معادله بالا، تابع موج را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\psi_{n,-n}(r,\theta)=\lambda_n r^n e^{-\frac{r^{۲}(a-i\sigma\dot{\sigma})}{۲a\hbar\sigma^{۲}}}e^{-in\theta}$$ (۵-۴۶- الف)

با ضریب بهنجارش

$$\lambda_n^{۲}=\frac{۱}{\pi n!(\hbar\sigma^{۲})^{۱+n}}$$ (۵-۴۶- ب)

## ۵-۶ ویژه تابع هامیلتونی وابسته به زمان

در گام آخر از روش ناوردایی پویا باید فاز کلی، $\alpha(t)$ که در تابع موج رابطه $|\psi_n\rangle=e^{i\alpha(t)}|\phi_n\rangle$ معرفی کردیم را محاسبه کنیم. برای اینکار باید معادله بدست آمده در رابطه (۵-۱۳) را حل کنیم، یعنی:

$$\dot{\alpha}=\frac{۱}{\hbar}\langle n,l|i\hbar\frac{\partial}{\partial t}-H(t)|n,l\rangle$$ (۴۷-۵)

برای حل معادله بالا ویژه کت، $|n,l\rangle=\frac{\hat{a}^{\dagger}}{\sqrt{n+l}}|n,l-۱\rangle$ را در نظر می‌گیریم و براساس این ویژه‌کت معادله بالا را به صورت زیر داریم:

$$\langle n,l|i\hbar\partial_t-H|n,l\rangle=\langle n,l-۱|i\hbar\partial_t-H|n,l-۱\rangle+\frac{۱}{n+l}\langle n,l-۱|[\hat{a},i\hbar\partial_t-H]\hat{a}^{\dagger}|n,l-۱\rangle$$

(۴۸-۵)

از طرفی با استفاده از روابط (۵-۲۶) و (۵-۳۴) می‌توان نشان داد:

$$[\hat{a}, i\hbar\partial_t - H] = \hbar\left(c(t) - \frac{a(t)}{\sigma^{2}(t)}\right)\hat{a} \tag{۴۹-۵}$$

با ترکیب معادلات (۵-۴۷) تا (۵-۴۹) فاز کلی از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\alpha_{n,l}(t) = (n+l)\int^{t}\left(c(t) - \frac{a(t)}{\sigma^{2}(t)}\right)dt \tag{۵۰-۴}$$

## ۵-۷ حل معادله‌ی دیراک با پتانسیل خطی وابسته به زمان در فضای فاز ناجابجایی

در این بخش معادله دیراک به صورت غیراختلالی با پتانسیل خطی وابسته به زمان در فضای فاز ناجابجایی را [۶۲] با هدف ساخت ناوردایی وابسته به زمان بررسی‌خواهیم کرد و برای این بررسی از روش لوئیس- رزنفیلد استفاده می‌کنیم. رابطه جابجایی عملگرها در فضای فاز ناجابجایی با عملگرهای مختصات $x_i^{(NC)}$ و تکانه $p_i^{(NC)}$ $(x_1 \equiv x,\ x_2 \equiv y,\ p_1 \equiv p_x,\ p_2 \equiv p_y)$، در فصل اول در رابطه (۱-۱۰) و ارتباط خطی بین عملگرها براساس $\theta, \eta$ در رابطه (۱-۱۳) معرفی شدند. پتانسیل خطی وابسته به زمان در دو بعد را در نظر می‌گیریم[۶۳]:

$$V(x^{(NC)}, y^{(NC)}, t) = f_1(t)x^{(NC)} + f_2(t)y^{(NC)} \tag{۵۱-۵}$$

$f_1(t),\ f_2(t)$ توابع اختیاری وابسته به زمان هستند. هامیلتونی برای این سیستم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H^{(NC)}(t) = c\alpha_x p_x^{(NC)} + c\alpha_y p_y^{(NC)} + \beta mc^{2} + f_1(t)x^{(NC)} + f_2(t)y^{(NC)} \tag{۵۲-۵}$$

با ماتریس‌های پائولی $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$. برای یافتن جواب معادله دیراک برای سیستم مورد نظر دو روش وجود دارد روش اول آنست که به طور مستقیم با متغیرهای فضای ناجابجایی کار کرد و دومین روش کار کردن با تبدیلات کانونیکی در فضای فاز است که در این اینجا ما روش دوم را انتخاب می‌کنیم پس

در این صورت رابطه (۱-۱۳) را در رابطه (۵-۵۲) قرار می‌دهیم و با در نظر گرفتن $\hbar = c = 1$ هامیلتونی را به صورت زیر بدست خواهیم آورد:

$$H^{(NC)}(t) = \alpha_x (p_x + \frac{1}{2}\eta y) + \alpha_y (p_y - \frac{1}{2}\eta x) + f_1(t)(x - \frac{1}{2}\theta p_y) + f_2(t)(y + \frac{1}{2}\theta p_x) + \beta m$$

(۵-۵۳)

یا

$$H^{(NC)}(t) = (\alpha_x + \frac{f_2(t)\theta}{2}) p_x + (\alpha_y - \frac{f_1(t)\theta}{2}) p_y + (f_1(t) - \frac{\eta \alpha_y}{2}) x + (f_2(t) + \frac{\eta \alpha_x}{2}) y + \beta m$$

(۵-۵۴)

در فضای معمول معادله دیراک وابسته به زمان به صورت $i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H(t)\psi$ می‌باشد که برای حل آن با روش ناوردایی لوئیس-رزنفیلد ابتدا کمیت ناوردای کوانتومی $I(\mathrm{t})$ را معرفی می‌کنیم که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{i}[I(t), H(t)] + \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \qquad (۵\text{-}۵۵)$$

با اعمال معادله (۵-۵۵) بر روی $\psi$ خواهیم داشت:

$$\frac{i\partial(I\psi)}{\partial t} = H(t)(I\psi) \qquad (۵\text{-}۵۶)$$

رابطه نشان می‌دهد که عملکرد عملگر ناوردا بر روی تابع موج معادله دیراک سبب ایجاد جوابی دیگر برای معادله دیراک می‌شود. این نتیجه برای هر ناوردایی که شامل عملگر تمایز زمانی باشد دارای اعتبار است. برای مدل در نظر گرفته شده عملگر ناوردای خطی $I(\mathrm{t})$ به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$I(t) = A_1(t) p_x^{(NC)} + B_1(t) x^{(NC)} + A_2(t) p_y^{(NC)} + B_2(t) y^{(NC)} + c(t) \qquad (۵\text{-}۵۷)$$

$A_1(t), B_1(t), A_2(t), B_2(t), c(t)$ ماتریس می‌باشند. با جایگذاری معادلات (۵-۵۷) و (۵-۵۲) در معادله (۵-۵۵) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{i}[I(t),H(t)]+\frac{\partial I}{\partial t}=0 \tag{۵-۵۸}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{i}[I(t),H(t)]+\frac{\partial I}{\partial t}=\frac{1}{i}\{&[A_1(t)p_x^{(NC)},\alpha_x p_x^{(NC)}]+[A_1(t)p_x^{(NC)},\alpha_y p_y^{(NC)}]\\&+[A_1(t)p_x^{(NC)},\beta m]+[A_1(t)p_x^{(NC)},f_1(t)x^{(NC)}]+[A_1(t)p_x^{(NC)},f_2(t)y^{(NC)}]\\&+[B_1(t)x^{(NC)},\alpha_x p_x^{(NC)}]+[B_1(t)x^{(NC)},\alpha_y p_y^{(NC)}]+[B_1(t)x^{(NC)},f_1(t)x^{(NC)}]\\&+[B_1(t)x^{(NC)},f_2(t)y^{(NC)}]+[A_2(t)p_y^{(NC)},\alpha_x p_x^{(NC)}]+[A_2(t)p_y^{(NC)},\alpha_y p_y^{(NC)}]\\&+[A_2(t)p_y^{(NC)},\beta m]+[A_2(t)p_y^{(NC)},f_1(t)x^{(NC)}]+[A_2(t)p_y^{(NC)},f_2(t)y^{(NC)}]\\&+[B_2(t)y^{(NC)},\alpha_x p_x^{(NC)}]+[B_2(t)y^{(NC)},\alpha_y p_y^{(NC)}]+[B_2(t)y^{(NC)},\beta m]\\&+[B_2(t)y^{(NC)},f_1(t)x^{(NC)}]+[B_2(t)y^{(NC)},f_2(t)y^{(NC)}]+[c(t),\alpha_x p_x^{(NC)}]\\&+[c(t),\alpha_y p_y^{(NC)}]+[c(t),\beta m]+[c(t),f_1(t)x^{(NC)}]+[c(t),f_2(t)y^{(NC)}]\\&+\dot{A}_1(x)p_x^{(NC)}+\dot{B}_1(t)x^{(NC)}+\dot{A}_2(x)p_y^{(NC)}+\dot{B}_2(t)y^{(NC)}+\dot{c}(t)=0\end{aligned}$$

(۵-۵۹)

با جایگذاری معادله(۱-۱۳) در (۵-۵۹) و محاسبه جابجایی عملگرها و ساده‌سازی عبارات خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&[A_1,\alpha_x]p_x^2+\left[A_2,\alpha_y\right]p_y^2+\left[B_1,-\frac{\eta\alpha_y}{2}\right]x^2+\left[B_2,\frac{\eta\alpha_x}{2}\right]y^2+\{[c,\alpha_x]\\
&+[A_1,\beta]m+i\dot{A}_1\}p_x+\{[c,\alpha_y]+[A_2,\beta]m+i\dot{A}_2\}p_y\\
&+\left\{\left[c,-\frac{\eta\alpha_y}{2}\right]+[B_1,\beta]m+i\dot{B}_1\right\}x+\left\{\left[c,\frac{\eta\alpha_x}{2}\right]+[B_2,\beta]m+i\dot{B}_2\right\}y\\
&+\{[A_2,\alpha_x]+[A_1,\alpha_y]\}p_xp_y+\left\{\left[A_1,\frac{\eta\alpha_x}{2}\right]+[B_2,\alpha_x]\right\}yp_x\\
&+\left\{\left[A_2,-\frac{\eta\alpha_y}{2}\right]+[B_1,\alpha_y]\right\}xp_y+\left\{\left[B_2,-\frac{\eta\alpha_y}{2}\right]+\left[B_1,\frac{\eta\alpha_x}{2}\right]\right\}xy\\
&+\left\{[B_1,\alpha_x]+\left[A_1,-\frac{\eta\alpha_y}{2}\right]\right\}xp_x+\left\{[B_2,\alpha_y]+\left[A_2,\frac{\eta\alpha_x}{2}\right]\right\}yp_y\\
&+iB_1\left(\alpha_x+\frac{f_2\theta}{2}\right)+iB_2\left(\alpha_y-\frac{f_1\theta}{2}\right)-iA_1\left(f_1-\frac{\eta\alpha_y}{2}\right)\\
&-iA_2\left(f_2+\frac{\eta\alpha_x}{2}\right)-i[B_1,\alpha_x]-i[B_2,\alpha_y]+i\dot{c}+[c,\beta]m=0
\end{aligned}
\qquad (۶۰-۵)
$$

با توجه به معادلات بدست آمده در رابطه بالا، جواب‌هایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$[A_1,\alpha_x]=0 \qquad (۱-۶۱-۵)$$

$$[A_2,\alpha_y]=0 \qquad (۲-۶۱-۵)$$

$$\left[B_1,\frac{\eta\alpha_y}{2}\right]=0 \qquad (۳-۶۱-۵)$$

$$\left[B_2,\frac{\eta\alpha_x}{2}\right]=0 \qquad (۴-۶۱-۵)$$

$$[c,\alpha_x]+[A_1,\beta]m+i\dot{A}_1=0 \qquad (۵-۶۱-۵)$$

$$[c,\alpha_y]+[A_2,\beta]m+i\dot{A}_2=0 \qquad (۶-۶۱-۵)$$

$$\left[c,-\frac{\eta\alpha_y}{۲}\right]+\left[B_۱,\beta\right]m+i\dot{B}_۱=۰$$ (۵-۶۱-۷)

$$\left[c,\frac{\eta\alpha_x}{۲}\right]+\left[B_۲,\beta\right]m+i\dot{B}_۲=۰$$ (۵-۶۱-۸)

$$\left[A_۲,\alpha_x\right]+\left[A_۱,\alpha_y\right]=۰$$ (۵-۶۱-۹)

$$\left[A_۱,\frac{\eta\alpha_x}{۲}\right]+\left[B_۲,\alpha_x\right]=۰$$ (۵-۶۱-۱۰)

$$\left[A_۲,-\frac{\eta\alpha_y}{۲}\right]+\left[B_۱,\alpha_y\right]=۰$$ (۵-۶۱-۱۱)

$$\left[B_۲,-\frac{\eta\alpha_y}{۲}\right]+\left[B_۱,\frac{\eta\alpha_x}{۲}\right]=۰$$ (۵-۶۱-۱۲)

$$\left[B_۱,\alpha_x\right]+\left[A_۱,-\frac{\eta\alpha_y}{۲}\right]=۰$$ (۵-۶۱-۱۳)

$$\left[B_۲,\alpha_y\right]+\left[A_۲,\frac{\eta\alpha_x}{۲}\right]=۰$$ (۵-۶۱-۱۴)

$$\begin{aligned}&iB_۱\left(\alpha_x+\frac{f_۲\theta}{۲}\right)+iB_۲\left(\alpha_y-\frac{f_۱\theta}{۲}\right)-iA_۱\left(f_۱-\frac{\eta\alpha_y}{۲}\right)\\&-iA_۲\left(f_۲+\frac{\eta\alpha_x}{۲}\right)-i\left[B_۱,\alpha_x\right]-i\left[B_۲,\alpha_y\right]+i\dot{c}+\left[c,\beta\right]m=۰\end{aligned}$$ (۵-۶۱-۱۵)

نقطه روی متغیرنشان دهنده‌ی مشتق نسبت به زمان است. با در نظر گرفتن معادلات (۵-۶۱-۱) و(۵-۶۱-۴) روابط زیر به دست می‌آید:

$$A_۱=a_۱+a_۲\alpha_x$$ (۵-۶۲- الف)

$$A_2 = a_3 + a_4\alpha_y$$ (۵-۶۲- ب)

$$B_1 = b_1 + b_2\alpha_y$$ (۵-۶۲- ج)

$$B_2 = b_3 + b_4\alpha_x$$ (۵-۶۲- د)

$a_i, b_i$ $(i = 1,2,3,4)$ توابع اختیاری وابسته به زمان‌اند. $C$ را برحسب $\alpha_x, \alpha_y$ به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$c = c_1 + c_2\alpha_x + c_3\alpha_y$$ (۵-۶۳)

$c_1, c_2, c_3$ توابع اختیاری وابسته به زمان‌اند. معادلات (۵-۶۳) و (۵-۶۲- الف) را در معادله (۵-۶۵-۵) قرار می‌دهیم:

$$\left[(c_1 + c_2\alpha_x + c_3\alpha_y), \alpha_x\right] + \left[a_1 + a_2\alpha_x, \beta\right]m + i(\dot{a}_1 + \dot{a}_2\alpha_x) = 0$$ (۵-۶۴)

روابط جابجایی ظاهر شده در رابطه بالا را به صورت بازشده‌ی زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned}&[c_1, \alpha_x] + c_2[\alpha_x, \alpha_x] + \alpha_x[c_2, \alpha_x] + c_3[\alpha_y, \alpha_x] + [c_3, \alpha_x]\alpha_y \\ &+ [a_1, \beta]m + a_2[a_x, \beta]m + [a_2, \beta]a_x m + i\dot{a}_1 + i\dot{a}_2\alpha_x = 0\end{aligned}$$

(۵-۶۵)

با محاسبه روابط جابجایی جواب‌های زیر به دست می‌آید:

$$\dot{a}_1 = 0\,,\ a_2 = 0\,,\ c_3 = 0$$ (۵-۶۶)

و با جایگذاری معادلات (۵-۶۳) و (۵-۶۲- ب)در معادله(۵-۶۱-۶) و ساده‌سازی روابط نتایج زیر حاصل می شود

$$\dot{a}_3 = 0\,,\ a_4 = 0\,,\ c_2 = 0$$ (۵-۶۷)

با توجه به روابط بالا، $c_۲ = c_۳ = ۰$ بدست آمد پس در نتیجه رابطه (۵-۶۳) به صورت زیر تغییر خواهد کرد:

$$c = c_۱ \tag{۵-۶۸}$$

معادلات (۵-۶۸) و (۵-۶۲- ج) را در معادله (۵-۶۱-۶) و معادله(۵-۶۲-د) را در معادله (۵-۶۱-۸) جایگذاری می‌کنیم که به ترتیب نتایج زیر به دست خواهد آمد:

$$b_۲ = ۰ \ , \ \dot{b}_۱ = ۰ \tag{۵-۶۹}$$

$$b_۴ = ۰ \ , \ \dot{b}_۳ = ۰ \tag{۵-۷۰}$$

با در نظر گرفتن معادلات (۵-۶۶)، (۵-۶۷)، (۵-۶۹) و (۵-۷۰) ، می‌توان معادله (۵-۶۲) را به صورت زیر نوشت:

$$A_۱ = a_۱ \ , \ A_۲ = a_۳ \ , \ B_۱ = b_۱ \ , \ B_۲ = b_۳ \tag{۵-۷۱}$$

با قرار دادن معادله (۵-۷۱) در معادلات (۵-۶۱-۱۵) نتیجه زیر به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} & ib_۱\left(\alpha_x + \frac{f_۲\theta}{۲}\right) + ib_۳\left(\alpha_y - \frac{f_۱\theta}{۲}\right) - ia_۱\left(f_۱ - \frac{\eta\alpha_y}{۲}\right) \\ & -ia_۳\left(f_۲ + \frac{\eta\alpha_x}{۲}\right) - i\left[b_۱, \alpha_x\right] - i\left[b_۳, \alpha_y\right] + i\dot{c}_۱ + \left[c_۱, \beta\right]m = \end{aligned} \tag{۵-۷۲}$$

که

$$\left[b_۱, \alpha_x\right] = \left[b_۳, \alpha_y\right] = \left[c_۱, \beta\right] = ۰ \tag{۵-۷۳}$$

با توجه به دو رابطه بالا نتایج زیر به آسانی محاسبه می‌گردد:

$$ib_1\alpha_x - ia_3\frac{\eta\alpha_x}{2} = 0 \ \rightarrow b_1 = \frac{\eta}{2}a_3 \qquad (۷۴-۵)$$

$$ib_3\alpha_y + ia_1\frac{\eta\alpha_y}{2} = 0 \ \rightarrow b_3 = -\frac{\eta}{2}a_1 \qquad (۷۵-۵)$$

$$ib_1\frac{f_2\theta}{2} - ib_3\frac{f_1\theta}{2} - ia_1 f_1 - ia_3 f_2 + i\dot{c}_1 = 0 \qquad (۷۶-۵)$$

با جایگذاری معادلات (۵-۷۴) و (۵-۷۵) در معادله (۵-۷۶) رابطه زیر به دست خواهد آمد:

$$\dot{c}_1 = \left(1 - \frac{\eta\theta}{4}\right)\left(f_2 a_3 + a_1 f_1\right) \qquad (۷۷-۵)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه بالا نسبت زمان خواهیم داشت:

$$c_1 = \int\left(1 - \frac{\eta\theta}{4}\right)\left(f_2 a_3 + a_1 f_1\right)dt \qquad (۷۸-۵)$$

با توجه به نتایج به دست آمده عملگر ناوردای معادله دیراک با پتانسیل خطی وابسته به زمان به صورت زیر

$$I = a_1 p_x + a_3 p_y + \frac{\eta}{2}(a_3 x - a_1 y) + \int\left(1 - \frac{\eta\theta}{4}\right)\left(a_1 f_1 + f_2 a_3\right)dt \qquad (۷۹-۵)$$

بیان می‌شود. به سادگی می‌توان دید که $I(t)$،ویژه تابعی به صورت زیر دارد:

$$\phi_\lambda(x,y,t) \approx exp\left[\mu_1(t)x + \mu_2(t)y + \mu_3(t)x^2 + \mu_4(t)y^2\right] \qquad (۸۰-۵)$$

$\mu_1(t), \mu_2(t), \mu_3(t), \mu_4$ توابع اختیاری وابسته به زمان هستند. با توجه به معادله (۵-۵۶) واضح است که اگر $\psi$یک جواب برای معادله دیراک وابسته به زمان باشد بنابراین هر تابعی که به صورت $\phi = I\psi$ تعریف شود نیز جوابی از معادله است. اگر در اینجا $\phi = \lambda\psi$ در نظر بگیریم، $\psi$ ویژه تابع $I$ است. این موضوع یک جواب وابسته به زمان برای معادله دیراک به شکل زیر پیشنهاد می‌کند:

$$\psi(x,y,t)=\chi(t)\phi_\lambda(x,y,t) \qquad (۵-۸۱)$$

$\chi(t)=\begin{pmatrix}\chi_۱(t)\\ \chi_۲(t)\end{pmatrix}$ ماتریس وابسته به زمان است. با جایگذاری معادله(۵-۸۱) در معادله(۵-۵۶) نتایج زیر حاصل می‌گردد:

$$\dot{\mu}_۱(t)=-if_۱(t)-\theta\mu_۳(t)\,f_۲(t)-\sqrt{\left(۲\mu_۳(t)+\frac{\eta}{۲}\right)\left(۲\mu_۳(t)-\frac{\eta}{۲}\right)} \qquad (۵-۸۲\text{- الف})$$

$$\dot{\mu}_۲(t)=-if_۲(t)+\theta\mu_۴(t)\,f_۱(t)-\frac{i\eta}{۲}\left(\sqrt{\frac{\frac{\eta}{۲}+۲\mu_۴(t)}{\frac{\eta}{۲}-۲\mu_۴(t)}}+\sqrt{\frac{\frac{\eta}{۲}-۲\mu_۴(t)}{\frac{\eta}{۲}+۲\mu_۴(t)}}\right) \qquad (۵-۸۲\text{- ب})$$

$$i\dot{\chi}(t)=-i\left(\alpha_x+\frac{f_۲(t)\theta}{۲}\right)\mu_۱(t)\chi(t)-i\left(\alpha_y-\frac{f_۱(t)\theta}{۲}\right)\mu_۲(t)\chi(t)+\beta m\chi(t) \qquad (۵-۸۲\text{- ج})$$

$$\dot{\mu}_۳(t)=۰ \qquad (۵-۸۲\text{- د})$$

$$\dot{\mu}_۴(t)=۰ \qquad (۵-۸۲\text{- ه})$$

اگر توابع $f_۱(t)$ و $f_۲(t)$ تعیین شوند، بسادگی می‌توان معادلات (۵-۸۲) را حل نمود و به صورت تحلیلی تابع موج معادله دیراک را برای پتانسیل خطی وابسته به زمان را در فضای فاز ناجابجایی به دست آورد. درحالت خاصی که تکانه-تکانه و مکان- مکان با یکدیگر جابجا شوند ($\theta=\eta=۰$)، جواب معادلات (۵-۸۲) به جواب‌ها در مکانیک کوانتومی عمومی تبدیل می‌شود:

$$\dot{\mu}_۱(t)=-if_۱(t)-۲\mu_۳(t) \qquad (۵-۸۳\text{- الف})$$

$$\dot{\mu}_۲(t)=-if_۲(t) \qquad (۵-۸۳\text{- ب})$$

$$\dot{\chi}(t) = -\alpha_x \mu_۱(t)\chi(t) - \alpha_y \mu_۲(t)\chi(t) - i\beta m\chi(t)$$ (۵-۸۳- ج)

$$\dot{\mu}_۳(t) = ۰$$ (۵-۸۳- د)

$$\dot{\mu}_۴(t) = ۰$$ (۵-۸۳- ه)

## نتیجه‌گیری:

از فضای ناجابجایی به عنوان تعمیمی از فضای جابجایی معمول برای بررسی سیستم‌های فیزیکی و سیستم ذرات استفاده کردیم به طوری که با صفر کردن پارامترهای ناجابجایی به نتایج در فضای معمولی می‌رسیم. در بررسی ذره آزاد در فضای فاز ناجابجایی نشان دادیم که تحت تأثیر پارامترهای ناجابجایی، به صورت نوسانگر گونه رفتار می‌کند. در مورد ذره آزاد و نوسانگر هماهنگ در فضای فاز معادلات حرکت به دست آمده را با روشی جدید تحلیل کردیم. به عنوان یک نتیجه مهم و بسیار کاربردی هم ارزی بین ضرب* و باب شیفت در فضای ناجابجایی را نشان دادیم که این امر به ساده‌سازی مسائل در فضای ناجابجایی بسیار کمک می‌کند. یکی از نمونه‌های کاربردی بررسی شده، بررسی سیستم‌های دو و سه ذره‌ای در فضای فاز ناجابجایی و مشاهده تغییرات انرژی تحت تأثیر پارامترهای ناجابجایی فضا بود. مطالعه سیستم‌های چند ذره‌ای در فیزیک بسیار حائز اهمیت است چرا که این سیستم‌ها به سیستم‌های موجود در طبیعت اطراف ما نزدیک‌ترند و توصیف واقع بینانه‌تری از محیط می‌دهند و از این جهت کاربرد فراوان دارند که بررسی یک سیستم دو ذره‌ای نماینده‌ای برای بررسی تمام مزون‌ها(متشکل از دو کوارک) و مطالعه سیستم‌های سه ذره‌ای نماینده توصیفی برای رفتار تمام باریون‌ها(متشکل از سه کوارک) می‌باشد. و در بررسی ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی، شیف انرژی ذرات را بدلیل حضور پارامترهای ناجابجایی نشان دادیم. تابع توزیع ویگنر را به عنوان تابع توزیعی در فضای فاز کوانتومی بررسی کردیم و این مطلب ما را مجاز به قیاس با مسایل در مکانیک کلاسیک می‌کند. معرفی این تابع توزیع راهی جدید برای محاسبه چشمداشتی کمیت‌های فیزیکی مورد نظر ارائه می‌کندکه در مورد نوسانگر هماهنگ دو بعدی این مسئله را بررسی کردیم. به عنوان رهیافتی واقع‌بینانه‌تر از رفتار سیستم‌های فیزیکی، رفتار نوسانگر هماهنگ با هامیلتونی وابسته به زمان و معادله دیراک در حضور پتانسیل وابسته به زمان را در فضای فاز ناجابجایی بررسی کردیم و در این بررسی از روشی به عنوان ناوردایی پویا استفاده کردیم که روشی بسیار کارآمد برای حل مسایل فیزیکی وابسته به زمان است.

**منابع:**


[۱] H. S. Snyder, *Phys. Rev.* ۷۱, ۳۸ (۱۹٤۷).

[۲] C. N. Yang, *Phys. Rev.* ۷۲, ۸۷٤(۱۹٤۷).

[۳] J. Madore, An Introduction to Noncommutative Differential Geometry and Its Physical Applications, *Cambridge University Press* (۱۹۹۹).

[٤] A. Connes, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* ٦۲, ٤۱(۱۹۸٥).

[٥] S. L. Woronowicz, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* ۲۳, ۱۱۷(۱۹۸۷).

[٦] S. Dey, Solvable Models on Noncommutative Spaces with Minimal Length Uncertainty Relations, *Department of Mathematics City University London*, (۲۰۱٤).

[۷] J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, *Late University of California, Los Angeles* (۱۹۹٤).

[۸] S.G. Avery, Non-commutative Geometry, *Harvey Mudd College, Department of Mathematics* (۲۰۰٥).

[۹] T. L. Curtright and C. K. Zachos, *Asia Pacific Physics Newsletter*, ۱, ۳۷-٤٦ (۲۰۱۲).

[۱۰] H.Weyl, *Z.Phys.* ٤٦, ۱(۱۹۲۷).

[۱۱] E.Wigner, *Phys. Rev.* ٤۰،۷٤۹(۱۹۳۲).

[۱۲] J.E.Moyal, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* ٤٥, ۹۹ (۱۹٤۹).

[۱۳] F.Bayen et al., *Ann. of Phys.* ۱۱۱, ٦۱(۱۹۷۸).

[۱٤] F.Bopp, *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit. Braunschweg*, ۱۲۸ (۱۹٦۱).

[۱٥] R.Kubo, *J.Phys. Soc Japan* ۱۹, ۲۱۲۷(۱۹٦٤).

[۱٦] G.Brodimas, A.Jannussis and N.Patargias, *Lett. Nuovo Cim.* ۱۷, ۱۱۹(۱۹۷٦).

[۱۷] A.K.Aringazin et al., *Proc. of the Intern. Conf. Advances in Fundamental Physics, Olympia, Greece*, ۲۷-۳۰ Sept. (۱۹۹۳).

[۱۸] O. Bertolami et al., *Phys.Rev. D*, ۷۲, ۰۲٥۰۱۰(۲۰۰٥).

[۱۹] M. Chaichian et al., *Phys.Rev.Lett.*۸٦, ۲۷۱٦ (۲۰۰۱).

[۲۰] S. Dulat and Kang Li, *Eur. Phys. J. C*, ٦۰, ۱٦۳ (۲۰۰۹).

[۲۱] S. Gangopadhyay and et al., *arXiv*: ۱٤۱۲,۳٥۸۱ (۲۰۱٤).

[٢٢] Mu- in Park, *arXiv*: ٠٢٠١٠٠٢ (٢٠٠٢).

[٢٣] C. Bastos etal., *Phys.Rev.D*,٧٨:٠٢٣٥١٦ (٢٠٠٨).

[٢٤] H. Goldstein, Classical Mechanics, (١٩٥٠).

[٢٥] W. Gao-Feng etal., *Chinese Physics C*, ٣٢،٥ (٢٠٠٨).

[٢٦] Z. Chang et al., *J. Phys. A*, ٢٤, ١٤٢٧ (١٩٩١).

[٢٧] Z. Chang et al., *J. Phys. A*, ٢٣, ٤١٨٥ (١٩٩٠).

[٢٨] A.E.F. Djemai and H. Smail, *Commun.Theor.Phys.* ٤١, ٨٣٧(٢٠٠٤).

[٢٩] E. H. Hall, *American Journal of Mathematics*, ٢, ٣, ٢٨٧ (١٨٧٩).

[٣٠] K. von Klitzing, G. Dorda and M. Pepper, *Phys. Rev. Lett.* ٤٥, ٤٩٤ (١٩٨٠).

[٣١] D.C. Tsui, H.L. Stormer, A.C. Gossard, *Phys. Rev. Lett.* ٤٨, ١٥٥٩ (١٩٨٢).

[٣٢] J. N. Ginocchio, *Phys. Rep.* ٤١٤, ١٦٥ (٢٠٠٥).

[٣٣] Sayipjamal Dulat and Kang Li, *Eur. Phys. J. C* ٦٠, ١٦٣(٢٠٠٩).

[٣٤] W. Greiner, Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations, *Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York* (١٩٨٧).

[٣٥] A. Kratzer, *Z. Phys*, ٣, ٢٨٩, (١٩٢٠).

[٣٦] R. J. Le Roy, R. B. Bernstein, *J.Chem. Phys*, ٥٢, ٣٨٦٩, (١٩٧٠).

[٣٧] N. Osakabe et al., *Phys. Rev. A* ٣٤, ٨١٥ (١٩٨٦).

[٣٨] H. Motavalli and A. Rezaei-Akbarieh, *Mod. Phys. Lett. A* ٢٥, ٢٥٢٣ (٢٠١٠)

[٣٩] H. Hassanabadi and A. A. Rajabi, *Few-Body Syst.* ٤١: ٢٠١ (٢٠٠٧).

[٤٠] S. H. Dong, *International Journal of Theoretical Physics*, ٤١, ١, ٨٩(٢٠٠٢).

[٤١] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.*, ١١٥, ٤٨٥, (١٩٥٩).

[٤٢] H. Schmid, *in Proc. ٨th European Congress on Electron Microscopy*, (١٩٨٤).

[٤٣] R. G. Chambers, *Phys. Rev. Lett.* ٥, ٣(١٩٦٠).

[٤٤] M.M. Sheikh–Jabbari, *Phys. Rev. Lett.* ٨٤, ٥٢٦٥(٢٠٠٠).

[٤٥] D. Kochan and M. Demetrian, *Acta Phys.Slov.* ٥٢, ١ (٢٠٠٢).

[٤٦] B. Zeitnitz, *Nucl.Phys.A*٤١٦ (١٩٨٤).

[٤٧] S.Mattiello, *Few Body Syst.*٣٤, ١١٩(٢٠٠٤).

[٤٨] L.H. Thomas, *Phys. Rev.* ٤٧,٩٠٣ (١٩٣٥).

[٤٩] H. Hassanabadi etal., *Few-Body Syst*. ٥٢, ٨٧(٢٠١٢).

[٥٠] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics, Birkhauser,Basel* (١٩٨٨).

[٥١] R.K. Pathria, Statistical Mechanics, *Department of Physics University of Waterloo, Ontario, Canada* (١٩٩٦).

[٥٢] R. A. Campos, *Am. J. Phys*. ٦٦, ٧١٢ (١٩٩٨).

[٥٣] D. F. Stye etal., *Am. J. Phys.* ٧٠, ٢٨٨ (٢٠٠٢).

[٥٤] J. Wang etal., *arXiv*:٠٩٠٨,١٧٠٣ ,(٢٠٠٩).

[٥٥] X. Jiang et al., *Journal of Modern Physics*, ٤, ٩٤٠(٢٠١٣).

[٥٦] K. H. Yeon etal., *Physical Review A*, ٦٨, (٢٠٠٣).

[٥٧] D. Y. Song, *Physical Review A*, ٥٩ (١٩٩٩).

[٥٨] A. Kempf etal., *Phys. Rev. D*, ٥٢, ١١٠٨ (١٩٩٥).

[٥٩] H. Lewis and W. Riesenfeld, *J. Math. Phys*. ١٠, ١٤٥٨ (١٩٦٩).

[٦٠] S. Dey and Andreas Fring, *Phys. Rev. D* ٩٠, ٠٨٤٠٠٥ (٢٠١٤).

[٦١] R. M. Hawkins and J. E. Lidsey, *Phys.Rev. D* ٦٦, ٠٢٣٥٢٣ (٢٠٠٢).

[٦٢] G. S. Agarwal and S. A. Kumar, *Physical Review Letters*, ٦٧, (١٩٩١).

[٦٣] G. Fiore and L.Gouba, *J. Math. Phys*. ٥٢, ١٠٣٥٠٩(٢٠١١).

## Abstract

The noncommutative space can be considered as extension of the commutative space so that commutation relation between the operators is expressed by the changed heisenberg algebra. In order to conforming between theoretical and experimental datas on phenomena such as hall effect and eliminating divergence values created in field theory, noncommutative space would be introduced. We investigate in this frame the effect of noncommutative parameters on physical systems such as free particle, harmonic oscillator, quantum hall effect and three body systems. We study Wigner distribution function as quantum distribution function in the phase space which expresses the probability distribution of the position and momentum simultaneously ( also it is'nt contradiction with the hiesenberg uncertainty principle). So using the wigner distribution function we can compare the classical and quantum mechanics, since both of them are expressed in a same space. Finally with the introduction of dynamic invariant approach we discuss on the time- dependent problems in the noncommutative space.

**Keywords:** Noncommutative space, free particle, quantum hall effect, three body systems, dirac equation, schrodinger equation, wigner distribution function, time dependent noncommutative space.

**University of Shahrood**

**Faculty of Physics**

**Master of Science Thesis**

# Particles in the noncommutative space in a time dependent background

**Fateme Hoseini**

**Supervisor:**

**Dr. Hassan Hassanabadi**

Semtember-۲۰۱۵