

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

مقایسه ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی در فضا زمان خمیده

دانشجو: آزاده افشار دوست

استاد راهنما:

دکتر حسن حسن آبادی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۴

دانشگاه صنعتی شاهرود

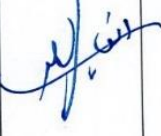
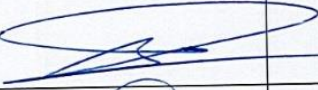
دانشکده : فیزیک

گروه : گروه هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم آزاده افشار دوست به شماره دانشجویی: ۹۲۱۶۷۰۴
تحت عنوان: مقایسه ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی در فضا زمان خمیده

در تاریخ ۱۳۹۴/۶/۳۰ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی

امضاء	نمایندة تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر مهدی انصاری راد		نام و نام خانوادگی : دکتر حسین توکلی عنبران
			نام و نام خانوادگی : دکتر مسلم سوهانی
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیر و شکر

پاس میکران شایسته یکانه ی حتی است که الطاف بیشمارش در سطر خطی زندگیم نور امید را در دلم زنده نگه داشته و تنفحای های روزگار آن گذشته را بر من شیرین ساخته است . پاس از استاد گرامیم جناب آقای دکتر حسن آبادی که بدون راهنمایی ایشان تاین این پایان نامه بسیار مشکل می نمود . خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان یسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش نمایم . والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود پس از پروردگار مایه حتی ام بوده اند ، دستم را اگر قند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب به من آموختند . آموزگاران که برایم زندگی ؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند . به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه اثار و از خود گذشتگی ، به پاس عاطفه سرشار و گرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگار آن تحصیل بهترین پشتیبان من بودند ، به پاس قلب های بزرگشان که فریاد رس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید و به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند از آنها سپاسگزارم . پاس از برادرم به پاس قدردانی از قلب لبریز از مهربانیش که دلسوزانه به آینده ی روشن من چشم دوخته است و از دوست مهربان ، صادق و همیشه همراهم خانم حسینی که حضورش سستی های این راه را به امید و روشنی تبدیل کرد .

تعهد نامه

اینجانب آزاده افشاردوست دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک- هسته ای دانشکده فیزیک دانشگاه شاهرود نویسنده پایان نامه مقایسه ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی در فضا زمان خمیده تحت راهنمایی دکتر حسن آبادی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه شاهرود » و یا « University of Shahrood » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

۱۳۹۴، ۷، ۷

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی تحت تاثیر میدان‌های گرانشی یک شاخه‌ی تحقیقاتی پویا در فیزیک می‌باشد. در همین راستا ما نیز به بررسی رفتار ذرات کوانتومی در میدان‌های گرانشی می‌پردازیم. نکته حائز اهمیت در اینگونه بررسی‌ها آنست که میدان‌های گرانشی سبب ایجاد فضا زمان خمیده در اطراف خود می‌شوند بنابراین به منظور تحلیل رفتار ذرات در حضور میدان‌های گرانشی باید برهمکنش ذرات با فضا زمان خمیده را بررسی کنیم. معادلات حرکت مورد استفاده برای بحث بر اینگونه پدیده‌های فیزیکی با توجه به ویژگی‌های ذرات معین می‌گردد به عنوان مثال برای بررسی ذرات بدون اسپین غیرنسبیتی از معادله‌ی شرودینگر استفاده می‌شود. با این اوصاف ابتدا باید معادلات حرکت را در فضا زمان خمیده فرموله کرد بنابراین توصیفی از معادلات فرموله شده ارائه خواهد شد. سپس فضا زمان‌های متفاوتی مانند ریسمان کیهانی، ریسمان کیهانی دوار، فریدمن-روبرتسون-واکر معرفی می‌شوند و در نهایت اثرات گرانشی آنها بر سیستم‌های فیزیکی مورد بحث و تحلیل قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: فضا زمان خمیده، ریسمان کیهانی، معادله دیراک، معادله کلاین-گوردون، معادله شرودینگر

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. H. Hassanabadi, A. Afshardoost and S. Zarrinkamar , On the Motion of a Quantum Particle in the Rotational Cosmic String Space-Time, Annals of Physics ۳۵۶ (۲۰۱۵) ۳۴۶-۳۵۱.
۲. A. Afshardoost and H. Hassanabadi, Non-central potentials in the cosmic string space time, accepted for publication in Canadian Journal of Physics.

عنوان	صفحه
فصل اول: فضا زمان خمیده.....	۱
۱-۱ مقدمه.....	۲
۲-۱ منیفلد.....	۴
۳-۱ بردارها و بردارهای دوگان.....	۶
۴-۱ متریک.....	۱۰
۵-۱ مشتقات هم وردا و نمادهای کریستوفل.....	۱۱
۶-۱ انتقال موازی.....	۱۲
۷-۱ فرمولبندی چهارگانه.....	۱۴
۸-۱ تانسور انحنای ریمان.....	۱۶
۹-۱ اتصال دهنده اسپینی.....	۱۷
فصل دوم: بررسی ذرات بدون اسپین غیرنسبیتی.....	۲۱
۱-۲ معادله‌ی شرودینگر در فضا زمان خمیده.....	۲۲
۲-۲ پتانسیل کولنی حلقه‌ای شکل دوگانه پوش تدر در فضا زمان ریسمان کیهانی.....	۲۲
۱-۲-۲ ریسمان کیهانی.....	۲۴
۲-۲-۲ رفتار ذره غیرنسبیتی در فضا زمان ریسمان کیهانی کروی.....	۲۶
۳-۲ پتانسیل نوسانگر حلقه‌ای شکل دوگانه در فضا زمان ریسمان کیهانی.....	۳۱
۴-۲ رفتار یک ذره کوانتومی در فضا زمان ریسمان کیهانی دوار.....	۳۳

۴۲.....	خواص ترمودینامیکی	۱-۴-۲
۴۵.....	فصل سوم: بررسی بوزون‌های نسبیتی	
۴۶.....	معادله ی کلاین-گوردون در فضای خمیده.....	۱-۳
۲-۳	بوزون‌های اسکالر در فضا زمان ریسمان کیهانی در برهمکنش‌های کولنی	
۴۷.....	تعمیم یافته.....	
۴۹.....	برهمکنش معکوس مربعی و کولنی متحد شده.....	۱-۲-۳
۵۱.....	برهمکنش ترانکاتد به‌مراه برهمکنش کولنی.....	۲-۲-۳
۵۴.....	برهمکنش کرنل.....	۳-۲-۳
۵۶.....	ذره بوزونی در فضا زمان فریدمن-روبرتسون-ولکر.....	۳-۳
۶۷.....	فصل چهارم: بررسی فرمیون‌های نسبیتی	
۶۸.....	معادله دیراک در فضای خمیده.....	۱-۴
۶۹.....	ذره باردار در حضور میدان مغناطیسی در فضا زمان ریسمان کیهانی.....	۲-۴
۹۰.....	بحث و نتیجه گیری.....	
۹۱.....	مراجع.....	

فهرست اشکال

- شکل ۱-۱ چنبره دوبعدی که به وسیله مربع دوبعدی ساخته شده است.....۵
- شکل ۲-۱ سطوح ریمانی با تعداد حفره‌های متفاوت که به ترتیب از سمت چپ دارای $g = 0$ ، $g = 1$ و $g = 2$ می‌باشند.....۶
- شکل ۳-۱ انتقال موازی یک بردار از دو مسیر مختلف بر روی یک کره دوبعدی.....۱۳
- شکل ۱-۳ پتانسیل کراتزر به ازای $a = -1, b = 1$۴۹
- شکل ۲-۳ پتانسیل هسته‌ای نرم به ازای $s_1 = s_2 = a = 1$۵۲
- شکل ۳-۳ پتانسیل کرنل به ازای $a = b = 1$۵۴

فصل اول

فضا زمان خمیده

مطالعه‌ی سیستم‌های کوانتومی تحت تأثیر میدان‌های گرانشی، تحقیقاتی جالب و مورد توجه دانشمندان می‌باشد. به عنوان مثال در این راستا تحقیقاتی در مورد اتم هیدروژن در فضا زمان خمیده انجام گرفته است [۱-۲]. اتم قرار گرفته در یک میدان گرانشی تحت تأثیر برهمکنش با انحنای موضعی که همان توپولوژی فضا زمان است واقع می‌گردد. نتیجه‌ی چنین برهمکنشی، مشاهده‌ی تغییرات در طیف انرژی اتم مربوطه توسط مشاهده‌گر ساکن نسبت به اتم می‌باشد. این شیفت انرژی به ویژگی‌های فضا زمان بستگی دارد. این نوع تغییرات در طیف انرژی به دلیل میدان گرانشی، متفاوت از شیفت طیف انرژی به دلیل حضور میدان الکترومغناطیسی مانند اثر اشتارک^۱ و زیمان^۲ می‌باشد، در حقیقت می‌توان اختلال‌های گرانشی و الکترومغناطیسی طیف انرژی را از هم جدا کرد [۳]. اولین آزمایشی که اثرات گرانشی بر روی تابع موج را نشان داد توسط کوللا^۳، اورهازر^۴ و ورنر^۵ انجام شد که در آن آزمایش اختلاف فاز ایجاد شده بین دو پرتو نوترون توسط میدان گرانشی اندازه‌گیری شده است [۴-۵]. در این آزمایش پرتو نوترون‌های حرارتی (نوترون‌های غیرنسبیتی) به وسیله‌ی شکافی تبدیل به دو پرتو مجزا می‌شود که در میدان گرانشی زمین (گرانش ضعیف) حضور دارند و دارای اختلاف ارتفاع نسبت به سطح زمین هستند. به دلیل اختلاف موجود اختلاف فاز نسبی بین پرتوها به وجود می‌آید. در این آزمایش تأکید بر آن است که پتانسیل گرانشی نیوتنی سبب تغییر فاز تابع موج نوترون شده است. همچنین در این آزمایش بر این موضوع اشاره شده است که این تغییر فاز را به شیوه‌ی دیگر که در آن میدان گرانشی وجود ندارد و بجای آن دستگاه آزمایش (بجای آنکه ثابت باشد) با شتاب گرانشی ثابت زمین حرکت می‌کند، می‌توان بدست آورد که این تأییدی بر اصل هم‌ارزی می‌باشد. اثر گرانشی دیگر در تداخل

^۱ Stark effect

^۲ Zeeman effect

^۳ Colella

^۴ Ovehauser

^۵ Werner

کوانتومی مربوط به نوسان‌های نوترینو می‌باشد [۶]. نوترینو توسط پائولی^۶ به منظور حفظ بقای انرژی و تکانه در واپاشی بتا (نوترون $\rightarrow$ پروتون + الکترون + آنتی نوترینوی الکترون) معرفی شد. نوترینوها در سه نوع الکترونی، میونی و تاو وجود دارند که به ترتیب با ν_e, ν_μ, ν_τ نمایش داده می‌شوند. یک سری آزمایشات تجربی نشان می‌دهد که نوترینوها دارای جرم معین نیستند بلکه برهم‌نهی خطی از سه ویژه حالت جرم مختلف هستند. بنابراین می‌توان یک ویژه حالت نوترینو با انرژی E_ν در ناحیه‌ی خلق R_c واقع در مکان $\vec{r}_c$ را که با $|\nu_\ell, R_c\rangle$ نمایش داده می‌شود را براساس بسطی از ویژه حالات جرم نوترینو که به صورت $|\nu_\ell\rangle; \ell=1,2,3$ نشان داده می‌شود، نوشت:

$$|\nu_\ell, R_c\rangle = \sum_{\ell=1,2,3} U_{\ell\ell} |\nu_\ell\rangle \quad (1-1)$$

که $\ell=e, \mu, \tau$ می‌باشد. معین نبودن جرم نوترینوها سبب نوسان آن‌ها از یک نوع به نوع دیگر می‌شود. بعد از گذشت زمان $t; t_c < t < t_d$ که نوترینو در مکان $\vec{r}_d$ قرار گرفته است تحول نوترینو از R_c به R_d به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|\nu_{\ell'}, R_d\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_c}^{t_d} H dt + \frac{i}{\hbar} \int_{\vec{r}_c}^{\vec{r}_d} \vec{P} \cdot d\vec{x}\right) |\nu_\ell, R_c\rangle \quad (2-1)$$

که با انجام محاسبات در فضا زمان خمیده به منظور محاسبه احتمال نوسان نوترینو فاز جدیدی ظهور می‌یابد که فاز کوانتومی القا شده‌ی گرانشی است.

تئوری نسبیت عام به عنوان یک تئوری متریک پیش‌بینی می‌کند که گرانش به عنوان انحنای فضا زمان در نظر گرفته می‌شود. این موضوع جالب توجه است که بدانیم چگونه انحنای فضا زمان در مکانی که اتم در آن قرار گرفته است بر طیف آن تأثیر می‌گذارد. به بیان دیگر می‌دانیم ارتباطی بین خواص توپولوژیکی فضا و قوانین فیزیکی موضعی وجود دارد به گونه‌ای که هندسه ذاتی موضعی فضا برای

^۶ Pauli

توصیف کامل فیزیک سیستم داده شده کافی نیست [۳]. در حقیقت گرانش به عنوان هندسه فضا زمان معرفی می شود که ریشه در اصل هم‌ارزی انیشتین دارد. اصل هم‌ارزی انیشتین بیان می کند که گرانش نمی تواند نیرو باشد بلکه آن را معادل با شتاب می گیرد. آزمایش ذهنی که در ادامه بیان می شود می تواند این هم‌ارزی را نشان دهد. اگر شخصی در داخل یک آسانسور که با شتاب گرانشی ثابت زمین در غیاب هرگونه میدان گرانشی به سمت بالا در حرکت باشد و دو جسم با جرم‌های متفاوت مانند پر و چکش فلزی را همزمان رها کند این دو همزمان به سطح آسانسور می‌رسند که این رویداد مشابه با سقوط آزاد این دو جسم در حضور میدان گرانشی زمین در غیاب مقاومت هوا است. یکی از دلایلی که سبب شد گرانش به عنوان خمیدگی فضا زمان در نظر گرفته شود مشاهده‌ی انحنای مسیر نور در اطراف اشیا جرم دار بود. در نتیجه انیشتین در نظریه نسبیت عام پیشنهاد کرد که گرانش نتیجه‌ای از فضا زمان خمیده است [۷]. بنابراین در این پایان‌نامه به منظور تلفیق مکانیک کوانتومی و نسبیت عام، پدیده‌های کوانتومی را در فضا زمان خمیده بررسی خواهیم کرد.

در این فصل به طور خلاصه نظریه‌های ریاضی که برای توصیف فضا زمان خمیده مورد نیاز است بیان می‌شود. این نظریه‌ها طبیعت فضا زمان همه‌ی فرآیندهای فیزیکی را توصیف می‌کنند. از نظر ریاضی فضا زمان دنیای ما از منیفلد^۷ چهار بعدی ساخته شده است، که دارای هندسه نااقلیدسی است [۷-۸].

۲-۱ منیفلد

منیفلد (یا منیفلد دیفرانسیلی) یکی از نظریه‌های بنیادی در ریاضیات و فیزیک است. فضا‌های اقلیدسی n بعدی، R^n ، که مجموعه‌ای از n تایی $(x^1, \dots, x^n)$ و مجهز به متریک معین و مثبت تخت می‌باشد را می‌شناسیم. منیفلد متناظر با فضایی دارای خمیدگی و توپولوژیک پیچیده می‌باشد که در ناحیه موضعی^۸ مشابه با R^n می‌باشد. در اینجا شبیه بودن به معنای یکسان بودن متریک نیست بلکه تنها

^۷ Manifold

^۸ Local

مفاهیم اولیه مثل توابع و مختصات یکسان می‌باشد. کل منیفلد با کنار هم قرار دادن این نواحی کوچک به صورت هموار ساخته می‌شود. ابعاد (n) فضای اقلیدسی استفاده شده در هر قسمت و در هر قطعه از منیفلد یکسان است بنابراین می‌توان گفت که منیفلد دارای بعد n است. مثال‌هایی از منیفلد [۷-۸]:

۱. R^n ، شامل خط (R)، صفحه (R^2) و R^n نه تنها به صورت موضعی بلکه به صورت

فراگیر^۹ و سراسری نیز مشابه با R^n رفتار می‌کند.

۲. کره n بعدی، S^n ، که به صورت مکان هندسی تمام نقاطی که دارای فاصله یکسان از یک

مبدأ در فضای تخت R^{n+1} هستند، تعریف می‌شود. S^1 دایره، S^2 کره دوبعدی و S^n

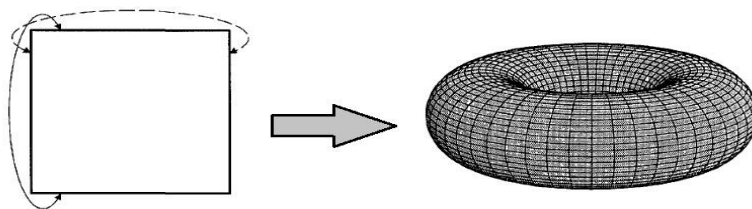
کره صفر بعدی متشکل از دو نقطه (یک نقطه مبدأ و دیگری تنها یک نقطه در فاصله‌ای از

مبدأ) یک منیفلد گسسته و منفصل می‌باشد.

۳. چنبره $n-1$ بعدی که ناشی از یک مکعب n بعدی است که سمت‌های مقابل آن را به هم پیوند

داده‌ایم. چنبره دو بعدی، T^2 ، مربعی است که جهت‌های مخالف آن به یکدیگر متصل شده

است.



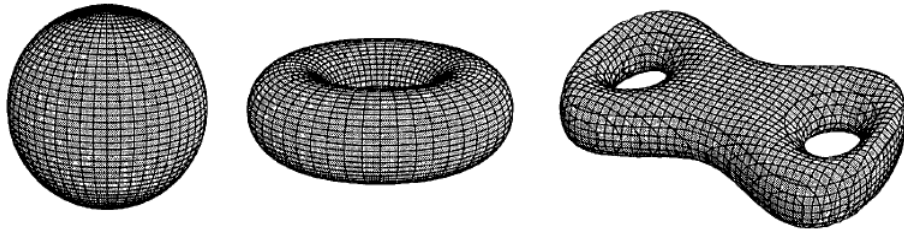
شکل ۱-۱ چنبره دو بعدی که به وسیله مربع دو بعدی ساخته شده است.

۴. سطح ریمانی از دسته g که توسط یک چنبره دو بعدی با g حفره بجای تنها یک حفره

ساخته می‌شود. S^2 (کره دو بعدی) سطح ریمانی از دسته $g=0$ می‌باشد.

^۹ Global

^{۱۰} Torus



شکل ۲-۱ سطوح ریمانی با تعداد حفره‌های متفاوت که به ترتیب از سمت چپ دارای $g=0$ ، $g=1$ و $g=2$ می‌باشند.

۳-۱ بردارها و بردارهای دوگان

در هر نقطه‌ی p بر روی یک منیفلد، M ، یک فضای مماس، T_p ، را تعریف می‌کنیم که فضای برداری است که شامل همه‌ی بردارهای مماس بر همه‌ی منحنی‌های گذرنده از نقطه‌ی p بر روی M می‌باشد. بردار V را به عنوان یک بردار در T_p در نظر می‌گیریم و مؤلفه‌های V را با V^μ نشان می‌دهیم. مؤلفه‌های V بر حسب بردارهای پایه $\hat{e}_{(\mu)}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$V = V^\mu \hat{e}_{(\mu)} \quad (۳-۱)$$

یک پایه‌ی طبیعی بر روی فضای مماس قرار دارد. این پایه، مشتقات راستایی توابع مختصات x^μ در نقطه‌ی p می‌باشد. این پایه‌ها را پایه‌های فضا می‌نامیم که شامل مشتقات پاره‌ای است:

$$\hat{e}_{(\mu)} = \partial_\mu \quad (۴-۱)$$

اگر دستگاه مختصات را تغییر دهیم به گونه‌ای که $x^{\mu'} \rightarrow x^\mu$ ، پایه‌های مختصات جدید با قانون زنجیره‌ای داده می‌شود

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\mu \quad (۵-۱)$$

مشتق راستایی، مشتق گیری از یک تابع مثلا در جهت بردار $\vec{e}$ می باشد یعنی تغییرات آن تابع را نسبت به یک مختصه می خواهیم در جهت افزایش $\vec{e}$ بررسی کنیم اگر یک تابع اسکالر مثل f داشته باشیم مشتق راستایی در جهت $\vec{e}$ به صورت زیر به دست می آید:

$$\vec{e} = \lambda \hat{e}_x + \beta \hat{e}_y + \gamma \hat{e}_z \quad (6-1)$$

$$D_{\vec{e}} \rightarrow f = \lambda \frac{\partial f}{\partial x} + \beta \frac{\partial f}{\partial y} + \gamma \frac{\partial f}{\partial z} \quad (7-1)$$

حال اگر بردار $\vec{e}$ یکی از بردارهای پایه باشد مشتق راستایی به مشتق پاره ای تبدیل می شود. اگر از تابع برداری بخواهیم مشتق راستایی بگیریم به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\vec{r} = f \hat{i} + g \hat{j} + s \hat{k} \quad (8-1)$$

$$D_{\vec{e}} \rightarrow \vec{r} = D_{\vec{e}} \rightarrow f \hat{i} + D_{\vec{e}} \rightarrow g \hat{j} + D_{\vec{e}} \rightarrow s \hat{k} \quad (9-1)$$

به همین دلیل با توجه به تعریف مشتق راستایی در راستای بردار پایه توانستیم، بردار پایه را با مشتق راستایی برابر بگیریم.

در تبدیل مختصات هنگامی که مختصات X^{μ} به $X^{\mu'}$ تبدیل می شود بردار تغییر نمی کند اما مؤلفه هایش تغییر می کنند. بنابراین باید بردار بر حسب دو دستگاه مختصات جدید و قدیم با هم برابر باشند:

$$V^{\mu} \partial_{\mu} = V^{\mu'} \partial_{\mu'} \quad (10-1)$$

$$V^{\mu} \partial_{\mu} = V^{\mu'} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial X^{\mu'}} \partial_{\mu} \rightarrow V^{\mu} = V^{\mu'} \frac{\partial X^{\mu}}{\partial X^{\mu'}} \rightarrow V^{\mu} \frac{\partial X^{\mu'}}{\partial X^{\mu}} = V^{\mu'} \quad (11-1)$$

$\frac{\partial X^{\mu}}{\partial X^{\mu'}}$ معکوس ماتریس $\frac{\partial X^{\mu'}}{\partial X^{\mu}}$ می باشد.

برای هر فضای برداری T_p ، یک فضای برداری T_p^* تعریف می‌کنیم که شامل بردارهای دوگان است. فضای دوگان فضایی متشکل از همه‌ی نگاشت‌های خطی از فضای برداری اصلی به اعداد حقیقی است. اگر $\omega \in T_p^*$ یک بردار دوگان باشد بنابراین به عنوان یک نگاشت به صورت زیر عمل می‌کند

$$\omega(aV + bW) = a\omega(V) + b\omega(W) \in R \quad (۱۲-۱)$$

که V و W بردار و a و b اعداد حقیقی هستند نکته جالب آنست که این نگاشت‌ها خود یک فضای برداری تشکیل می‌دهند. اگر ω و η بردارهای دوگان باشند خواهیم داشت:

$$a(\omega + b\eta)(V) = a\omega(V) + b\eta(V). \quad (۱۳-۱)$$

یک بردار دوگان ω را برحسب مؤلفه‌هایش که با اندیس پایین برچسب‌گذاری می‌شود به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\omega = \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)} \quad (۱۴-۱)$$

که $\hat{\theta}^{(\mu)}$ بردارهای پایه در فضای کتانژانت یا دوگان می‌باشند. بردار پایه دوگان به صورت زیر ساخته می‌شوند:

$$\hat{\theta}^{(\nu)} \hat{e}_{(\mu)} = \delta_\mu^\nu \quad (۱۵-۱)$$

عناصر فضای T_p را بردارهای پادوردا و عناصر فضای T_p^* را بردارهای هم‌وردا می‌گوییم. که اولی را با اندیس بالا و دومی را با اندیس پایین نمایش می‌دهیم. حال اگر یک بردار از فضای دوگان بر روی برداری از فضای تانژانت عمل کند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \omega(V) &= \omega_\mu \hat{\theta}^{(\mu)}(V^\nu \hat{e}_{(\nu)}) = \omega_\mu V^\nu \hat{\theta}^{(\mu)}(\hat{e}_{(\nu)}) \\ &= \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu \in R \end{aligned} \quad (۱۶-۱)$$

که به ازای $\mu = \nu$ ، $\delta_\nu^\mu = 1$ و به ازای $\mu \neq \nu$ ، $\delta_\nu^\mu = 0$ می‌باشد. رابطه بالا پیشنهاد می‌کند که می‌توان بردارها را نیز به عنوان نگاشتی بر بردارهای دوگان در نظر گرفت.

گرادیان یک تابع یک بردار دوگان است و با df نشان داده می‌شود. گرادیان تابع مختصات، dx^μ ، پایه‌های فضای کتانژانت متناظر با پایه مختصات در فضای تانژانت می‌باشند.

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\sigma} \hat{e}_\sigma \cdot \hat{e}_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu \quad (17-1)$$

می‌دانیم که تبدیل یک بردار طبق رابطه‌ی $V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} V^\mu$ انجام می‌پذیرد در نتیجه تبدیل بردارهای پایه نیز طبق این تعریف به صورت زیر می‌باشد:

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu \quad (18-1)$$

در نتیجه بردارهای پایه در فضای دوگان تحت تبدیل مختصات به صورت زیر تبدیل می‌یابند. بردارها در فضای دوگان باید در دستگاه مختصات تبدیل یافته و تبدیل نیافته با هم برابر باشند

$$\begin{aligned} \omega_{\mu'} dx^{\mu'} = \omega_\mu dx^\mu &\rightarrow \omega_{\mu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} dx^\mu = \omega_\mu dx^\mu \rightarrow \omega_{\mu'} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} = \omega_\mu \\ &\rightarrow \omega_{\mu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \omega_\mu \end{aligned} \quad (19-1)$$

بنابراین برای تعیین بردارهای پایه باید بر روی هر قسمت از منیفلد یک صفحه (در واقع یک فضا) مماس در نظر بگیریم و بردارهای پایه را بر روی هر صفحه‌ی مماس در هر نقطه واقع بر منیفلد بدست آوریم. در حقیقت باید در هر نقطه بردارهای پایه تعریف شوند [۷-۸].

۴-۱ متریک

متریک یک تانسور مرتبه دو است که با $g_{\mu\nu}$ نشان داده می‌شود. که در دو اندیس خود متقارن است. تانسور متریک معمولاً باید غیر تبهگن باشد به معنی آنکه دترمینان آن $|g_{\mu\nu}| = g$ غیر صفر باشد در اینصورت می‌توان تانسور متریک معکوس $g^{\mu\nu}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta_{\lambda}^{\mu} \quad (۲۰-۱)$$

تقارن تانسور متریک نشان می‌دهد که متریک معکوس نیز باید متقارن باشد. علامت یا امضای^{۱۱} متریک تعداد ویژه مقادیر مثبت و منفی آنست. به عنوان مثال متریک مینکوفسکی دارای علامت منفی - مثبت - مثبت - مثبت می‌باشد. اگر همه علامت‌ها مثبت باشد متریک اقلیدسی یا ریمانی است و اگر دارای یک علامت منفی منفرد باشد متریک لورنتسی یا شبه ریمانی خوانده می‌شود. اگر متریک دارای چند علامت مثبت و چند علامت منفی باشد متریک نامعین گفته می‌شود. فضا زمان در نسبیت عام دارای متریک لورنتسی یا شبه ریمانی است.

المان طول براساس متریک به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (۲۱-۱)$$

همچنین با استفاده از ساختار متریک، می‌توان برای هر بردار V^{μ} ، بردار متناظر با آن در فضای برداری دوگان را تعریف کرد

$$V_{\mu} \equiv g_{\mu\nu} V^{\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} (\partial_{\nu}) = g_{\mu\nu} V^{\nu} dx^{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\nu} \quad (۲۲-۱)$$

در نتیجه ضرب داخلی دو بردار V^{μ} و W^{ν} به صورت زیر تعریف می‌شود:

^{۱۱}Signature

$$V \cdot W \equiv V_{\mu} W^{\mu} = g_{\mu\nu} V^{\mu} W^{\nu} \quad (23-1)$$

به عنوان مثال در فضا زمان تخت المان طول به صورت زیر داده می‌شود [۷-۸]

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \quad (24-1)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (25-1)$$

۵-۱ مشتقات هم‌وردا و نمادهای کریستوفل^{۱۲}:

در یک فضا زمان دلخواه برای تبدیلات مختصات دلخواه مشتق پاره‌ای به مشتق هم‌وردا تعمیم داده می‌شود. مشتق هم‌وردا به گونه‌ای ساخته می‌شود که با عمل بر روی یک تانسور عمومی نتیجه‌اش دوباره یک تانسور می‌باشد. مشتق هم‌وردا را با ∇_{μ} نشان می‌دهیم، که می‌توان آن را به صورت زیر (مشتق پاره‌ای به اضافه تبدیل خطی) تعریف کرد:

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} V^{\lambda} \quad (26-1)$$

که $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ مجموعه‌ای از تبدیلات خطی یا ماتریس‌هاست که به عنوان اتصال‌دهنده شناخته می‌شود. خاصیت تبدیل این اتصال‌دهنده‌ها این است که $\nabla_{\mu} V^{\nu}$ به صورت یک تانسور تبدیل می‌یابد. اتصال‌دهنده‌ها پل ارتباطی بین بردارها در فضای مماس با نقاط مجاورشان هستند. یک اتصال‌دهنده منحصر به فرد که با استفاده از متریک ساخته می‌شود نماد کریستوفل نام دارد که

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad (27-1)$$

^{۱۲} Christoffel symbols

نوشتار این نماد شبیه به تانسور است ولی در حقیقت این نماد یک تانسور نیست به همین دلیل آن را نماد یا شی می خوانیم. استفاده بنیادی از این نوع اتصال دهنده برای ساختن مشتق هموردا است که در فضای تخت به مشتق پاره‌ای با مختصات تخت تقلیل می‌یابد. این به معنای آنست که برای هر راستای μ ، مشتق هموردای V^μ ، به صورت مشتق پاره‌ای به اضافی تصحیحی توسط نماد کریستوفل داده می‌شود.

برای یک اسکالر ϕ مشتق هموردا و مشتق پاره‌ای با هم برابر است :

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi \quad (۲۸-۱)$$

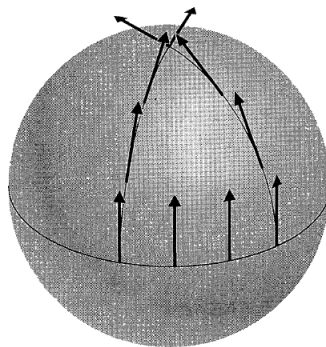
همچنین مشتق هم وردای یک بردار دوگان به صورت زیر است [۷-۸]:

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \omega_\lambda \quad (۲۹-۱)$$

۶-۱ انتقال موازی

اکنون که مشتق هموردا را می‌شناسیم می‌توانیم مفهوم دیفرانسیل را عمیق‌تر بررسی کنیم. مشتق به عنوان راهی برای محاسبه‌ی کمی میزان سرعت تغییرات یک کمیت در نظر گرفته می‌شود. در مورد تانسورها مسئله اساسی آنست که تانسورها یک نگاشت از بردارها و بردارهای دوگان به اعداد حقیقی هستند و مقایسه چنین نگاشت‌هایی در نقاط مختلف در فضا زمان براحتی مقایسه بین توابع که در حقیقت مقایسه بین دو عدد می‌باشد، نیست. اما مشتق هموردا را می‌توان به عنوان وسیله‌ای برای اندازه‌گیری آهنگ تغییرات تانسورها در نظر گرفت. در واقع مشتق هموردا آهنگ لحظه‌ای تغییرات یک میدان تانسوری است اگر میدان تانسوری به صورت موازی انتقال یابد. به بیان دیگر از آنجایی که در فضا زمان خمیده در هر نقطه از منیفلد پایه‌های فضا زمان متفاوت هستند مقایسه تانسور امکان‌پذیر نیست بنابراین به کمک انتقال موازی با ثابت نگه داشتن تانسور مورد نظر آن را از طریق مسیری دلخواه به صفحه مماس مربوط به تانسور دیگر برای مقایسه می‌رسانیم به گونه‌ای که هر دو تانسور دارای

پایه‌های یکسان باشند این فرآیند انتقال موازی نام دارد. در این صورت می‌توان تانسورهای مجاور را به کمک مشتق هم‌وردا مقایسه کرد. یادآوری می‌کنیم که لازم نیست در فضای تخت نگران آن باشیم که بردارها عناصر تعریف شده در هر نقطه منفرد از فضا زمان باشند به دلیل آنکه پایه‌ها در هر نقطه از فضا زمان یکسان هستند. تفاوت اساسی بین فضا زمان خمیده و تخت آنست که نتیجه انتقال موازی یک بردار از یک نقطه به نقطه دیگر به مسیری که از دو نقطه می‌گذرد بستگی دارد (شکل (۱-۳)). علی‌رغم مشکل ذکر شده دو بردار تنها زمانی قابل مقایسه هستند که عناصر یک فضای مماس یکسان باشند.



شکل ۱-۳ انتقال موازی یک بردار از دو مسیر مختلف بر روی کره دو بعدی

هنگامی که مشتق یک میدان برداری را در راستای منحنی $x^\mu(\lambda)$ در فضای اقلیدسی بدست می‌آوریم اصولاً مؤلفه‌های بردار را در دو نقطه بی‌نهایت نزدیک که آن‌ها را x و $x + dx$ می‌نامیم مقایسه می‌کنیم. آن‌ها توسط پارامتر فاصله $\delta\lambda$ از هم جدا می‌شوند. مشتق در راستای منحنی در فضا زمان تخت در نقطه x خواهد شد:

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu|_x = \lim_{\delta\lambda \rightarrow 0} \frac{V^\mu(x + dx) - V^\mu(x)}{\delta\lambda} \quad (1-30)$$

بر روی یک منیفلد دلخواه شی $V^\mu(x + dx) - V^\mu(x)$ در حالت کلی یک بردار نیست به دلیل آنکه یک بردار در دو نقطه مختلف بر روی یک منیفلد نمی‌تواند متعلق به یک فضای مماس یکسان باشد. این مشکل با استفاده از انتقال موازی همانگونه که توضیح داده شد حل خواهد شد. به گونه‌ای که بردار را در یکی از دو نقطه در راستای منحنی‌ای بر روی منیفلد منتقل کنیم تا دو بردار قسمتی از یک

فضای مماس شوند. در فضا زمان تخت شرط آنکه یک بردار به صورت موازی در راستای یک منحنی منتقل شود آن است که مشتق آن در راستای منحنی صفر باشد. در فضا زمان خمیده این شرط به صورت زیر خواهد بود

$$\frac{D}{d\lambda} V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\nu V^\mu = 0. \quad (31-1)$$

که $\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\nu$ مشتق هم‌وردا در راستای منحنی و $\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu V^\sigma$ می‌باشد. در نتیجه

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \partial_\nu V^\mu + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} V^\sigma = 0. \quad (32-1)$$

که این معادله دیفرانسیل مرتبه اول است که چگونگی انتقال موازی بردار V^μ را در راستای منحنی یا مسیر $x^\mu(\lambda)$ توصیف می‌کند. این معادله مستقل از پارامتر λ است. برای یک انتقال بی‌نهایت کوچک این معادله به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$V^\mu(x \rightarrow x + dx) = V^\mu(x) - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu(x) V^\nu(x) dx^\lambda \quad (33-1)$$

$V^\mu(x \rightarrow x + dx)$ ، بردار $V^\mu(x)$ است که به صورت موازی از نقطه x به نقطه $x + dx$ در راستای منحنی $x^\mu(\lambda)$ انتقال یافته است [۷-۸].

۷-۱ فرمولبندی چهارگانه^{۱۳}

تا اینجا بردارهای پایه طبیعی در فضای اصلی و دوگان را بدست آوردیم. اکنون به کمک اصل هم‌ارزی می‌خواهیم بردارهای پایه موضعی را بدست آوریم. اصل هم‌ارزی زیربنای نسبیت عام است که می‌توان

^{۱۳} Tetrad Formulation

آن را به روش‌های مختلف بیان کرد: در مناطق به اندازه کافی کوچک از فضا زمان، قوانین فیزیک به قوانین نسبیت خاص تقلیل می‌یابند، آشکارسازی وجود میدان‌های گرانشی به وسیله آزمایشات موضعی غیر ممکن است.

این حقیقت را که فضا زمان به صورت موضعی مینکوفسکی می‌باشد را به عنوان یکی از معیارهای توصیف فضا زمان به عنوان یک منیفلد لورنتسی می‌شناسیم که نتیجه مستقیمی از اصل هم‌ارزی است. از اینرو مکانیک کوانتوم نسبیتی در فضا زمان تخت که با آن آشنا هستیم در نواحی به اندازه کافی کوچک در فضا زمان خمیده نیز معتبر است. در فضا زمان خمیده در هر نقطه پایه‌ای تعریف می‌شود که اگر آن را پایه‌های لخت مینکوفسکی یا لخت موضعی تعریف کنیم در این صورت تانسور متریک نوشته شده برحسب این پایه‌ها تانسور متریک مینکوفسکی خواهد بود. که این پایه‌ها را با $\hat{e}_{(a)}$ و بردارهای پایه‌ی دوگان را با $\hat{\theta}^{(b)}$ (با اندیس لاتین) نشان می‌دهیم. بنابراین

$$g_{ab} = g_{ab} \hat{\theta}^{(a)} \hat{\theta}^{(b)} = \eta_{ab} \quad (34-1)$$

رابطه بالا را با توجه به معادله (۲۳-۱) می‌توان به عنوان ضرب داخلی دو بردار پایه دوگان در نظر گرفت که یک مجموعه متعامد نسبت به متریک مینکوفسکی تشکیل می‌دهند، چنین مجموعه متعامدی را چهارگانه می‌نامند و فرآیند تنظیم کردن یک چارچوب متعامد در هر نقطه از منیفلد را فرمولبندی چهارگانه می‌خوانند. رابطه زیر بین بردارهای پایه موضعی برقرار است:

$$\hat{\theta}^{(a)} \hat{e}_{(b)} = \delta_b^a \quad (35-1)$$

همچنین می‌توان بین پایه‌های موضعی و فراگیر رابطه زیر را ایجاد کرد:

$$\hat{e}_{(\mu)} = e_{\mu}^a \hat{e}_{(a)} \quad (36-1)$$

و به طور مشابه برای پایه‌های دوگان داریم:

$$\hat{\theta}^{(\mu)} = e_b^\mu \hat{\theta}^{(b)} \quad (37-1)$$

که e_b^μ و e_μ^a ماتریس‌های تبدیل هستند که به ترتیب به آن‌ها ماتریس‌های تبدیل چهارگانه و ماتریس‌های معکوس چهارگانه گفته می‌شود. به کمک روابط (۱۵-۱) و (۳۵-۱) داریم:

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a, \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (38-1)$$

همچنین رابطه بین متریک‌ها در فضا زمان خمیده و تخت به صورت زیر است:

$$g_{\mu\nu} \hat{e}_a^\mu \hat{e}_b^\nu = \eta_{ab}, \quad g_{\mu\nu} = \hat{e}_\mu^a \hat{e}_\nu^b \eta_{ab} \quad (39-1)$$

تانسور متریک تنها تانسوری نیست که می‌توان آن را برحسب پایه‌های موضعی نوشت بلکه هر تانسور دیگری را می‌توان برحسب پایه‌های موضعی با استفاده از ماتریس تبدیل چهارگانه نوشت. به عنوان مثال مؤلفه‌های بردار فراگیر V^μ در پایه‌های موضعی به صورت زیر است [۷-۸]:

$$V^a = e_\mu^a V^\mu. \quad (40-1)$$

۸-۱ تانسور انحنای ریمان^{۱۴}

تانسور انحنای ریمان معیاری برای سنجش میزان انحنای فضا زمان خمیده می‌باشد که براساس نماد کریستوفل به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \quad (41-1)$$

که تانسور مرتبه (۳، ۱) می‌باشد که در دو اندیس آخر خود پادمتقارن است یعنی

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = -R_{\sigma\nu\mu}^\rho \quad (42-1)$$

^{۱۴} Riemann curvature tensor

که دو کمیت دیگر نیز به راحتی از روی تانسور انحنا محاسبه می شود که یکی از آن ها تانسور ریچی^{۱۵} است:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu} \quad (۴۳-۱)$$

و مورد دیگر اسکالر ریچی^{۱۶} می باشد [۷-۸]:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (۴۴-۱)$$

۹-۱ اتصال دهنده اسپینی^{۱۷}

با استفاده از فرمولبندی چهارگانه یک دستگاه مختصات موضعی، در هر نقطه بر روی منیفلد خمیده تنظیم کردیم. می خواهیم بدانیم که چگونه یک بردار در یک نقطه بر روی منیفلد با مولفه هایی در پایه ی موضعی در آن نقطه به طور موازی به نقطه ی دیگری بر روی منیفلد با پایه های موضعی جدید منتقل می شود. جواب این سوال منجر به یک اتصال دهنده مربوط به این شکل از انتقال موازی می شود که به آن اتصال دهنده اسپینی گفته می شود و به عنوان مشتق هموردای تانسورهای موضعی تعریف می شود. رابطه ای مربوط به انتقال موازی یک بردار موضعی باید مشابه رابطه ی انتقال موازی بردار فراگیر در منیفلد باشد با این تفاوت که دارای اتصال دهنده متفاوتی خواهد بود، انتقال موازی یک بردار فراگیر با پایه های فراگیر در منیفلد به شکل زیر می باشد:

$$V^{\mu}(x \rightarrow x + dx) = V^{\mu}(x) - \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(x) V^{\nu}(x) dx^{\lambda} \quad (۴۵-۱)$$

حال انتقال موازی به صورت موضعی برای بردار در پایه های موضعی به شکل زیر است:

$$V^a(x \rightarrow x + dx) = V^a(x) - \omega^a_{\mu b}(x) V^b(x) dx^{\mu} \quad (۴۶-۱)$$

^{۱۵} Ricci tensor

^{۱۶} Ricci scalar

^{۱۷} Spin connection

که $\omega_{\mu b}^a(x)$ اتصال دهنده اسپینی می باشد.

ارتباط بین بردارها در پایه موضعی با بردارها در پایه ی فراگیر به صورت زیر است:

$$V^{\mu}(x) = e_a^{\mu}(x) V^a(x) \quad (47-1)$$

که اگر آن را از نقطه ی x به $x + dx$ منتقل کنیم داریم:

$$V^{\mu}(x \rightarrow x + dx) = e_a^{\mu}(x \rightarrow x + dx) V^a(x \rightarrow x + dx) \quad (48-1)$$

با بسط تیلور $e_a^{\mu}(x + dx)$ تا مرتبه اول در dx خواهیم داشت:

$$e_a^{\mu}(x + dx) = e_a^{\mu}(x) + dx^{\nu} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} e_a^{\mu}(x) = e_a^{\mu}(x) + dx^{\nu} \partial_{\nu} e_a^{\mu}(x) \quad (49-1)$$

$$V^{\mu}(x \rightarrow x + dx) = e_a^{\mu}(x) V^a(x \rightarrow x + dx) + \partial_{\nu} e_a^{\mu}(x) V^a(x \rightarrow x + dx) dx^{\nu} \quad (50-1)$$

حال عبارت مربوط به $V^a(x \rightarrow x + dx)$ را جایگذاری می کنیم:

$$V^{\mu}(x \rightarrow x + dx) = e_a^{\mu}(x) V^a(x) - e_a^{\mu}(x) \omega_{\nu b}^a(x) V^b(x) dx^{\nu} + \partial_{\nu} e_a^{\mu}(x) V^a(x) dx^{\nu} - \partial_{\nu} e_a^{\mu}(x) \omega_{\mu b}^a(x) V^b(x) dx^{\nu} dx^{\mu} \quad (51-1)$$

حاصل ضرب $dx^{\nu} dx^{\mu}$ در جمله آخر منجر به ایجاد dx^2 می شود که چون در اینجا تنها با تقریب مرتبه اول مسائل را حل می کنیم در نتیجه باید از این جمله صرف نظر کنیم. همچنین در جمله ی سوم از آنجایی که a یک اندیس دلخواه است که بر روی تمامی مولفه ها جمع بسته می شود بنابراین می توان آن را با b نمایش داد، در نتیجه

$$\begin{aligned}
 V^{\mu}(x \rightarrow x + dx) &= V^{\mu}(x) - (e_a^{\mu}(x) \omega_{\nu b}^a(x) - \partial_{\nu} e_b^{\mu}(x)) V^b(x) dx^{\nu} \\
 &= V^{\mu}(x) - (e_a^{\mu}(x) \omega_{\nu b}^a(x) - \partial_{\nu} e_b^{\mu}(x)) e_{\sigma}^b V^{\sigma}(x) dx^{\nu}
 \end{aligned}
 \quad (52-1)$$

که با مقایسه رابطه‌ی بالا با رابطه‌ی (۴۵-۱) داریم:

$$\Gamma_{\sigma \nu}^{\mu} = [e_a^{\mu} \omega_{\nu b}^a(x) - \partial_{\nu} e_b^{\mu}(x)] e_{\sigma}^b \quad (53-1)$$

بنابراین

$$\Gamma_{\sigma \nu}^{\mu} e_b^{\sigma}(x) = e_a^{\mu}(x) \omega_{\nu b}^a(x) - \partial_{\nu} e_b^{\mu}(x) \quad (54-1)$$

در نتیجه

$$\omega_{\nu b}^a(x) = e_{\mu}^a e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma \nu}^{\mu} + e_{\mu}^a \partial_{\nu} e_b^{\mu}. \quad (55-1)$$

فصل دوم

بررسی ذرات بدون اسپین غیرنسبیتی

۱-۲ معادله‌ی شرودینگر در فضا زمان خمیده

به منظور بررسی یک ذره غیرنسبیتی در فضا زمان خمیده از معادله‌ی شرودینگر به شکل زیر استفاده میکنیم [۳]

$$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{LB}^2 \psi + V \psi \quad (1-2)$$

که در آن ∇_{LB}^2 فرم هم‌وردای عملگر لاپلاسیان در فضا زمان خمیده می‌باشد که به صورت

$$\nabla_{LB}^2 = g^{-1/2} \partial_i (g^{1/2} g^{ij} \partial_j) \quad (2-2)$$

تعریف می‌شود و در آن $i, j = 1, 2, 3$ ، $g = \det(g_{ij})$ ، M جرم ذره و V پتانسیل خارجی می‌باشد. عملگر ∇_{LB}^2 با توجه به نوع فضا زمان خمیده و متریک مشخصه‌ی آن تعیین می‌شود و تابعیت V و ψ با توجه به دستگاه مختصاتی که در آن فضا زمان مورد نظر تعریف می‌شود، معین می‌گردد. به عنوان مثال ریسمان کیهانی یک فضا زمان خمیده است که می‌توان آن را هم در دستگاه مختصات کروی و هم در دستگاه مختصات استوانه‌ای تعریف کرد بنابراین در مورد اول V و ψ تابعی از r ، θ و φ و در مورد دوم تابعی از ρ ، φ و Z هستند.

۲-۲ پتانسیل کولنی حلقه‌ای شکل دوگانه‌ی پوش-تِلر^{۱۸} در فضا زمان ریسمان کیهانی

پتانسیل‌های حلقه‌ای شکل به دو دسته‌ی پتانسیل‌های حلقه‌ای شکل یگانه و پتانسیل‌های حلقه‌ای شکل دوگانه تقسیم می‌شوند که پتانسیل‌های هارتمن^{۱۹} و نوسانگر هماهنگ حلقه‌ای شکل مثالهایی از دسته اول و پتانسیل‌های کولنی حلقه‌ای شکل دوگانه و نوسانگر هماهنگ حلقه‌ای شکل دوگانه^{۲۰}

^{۱۸} Pöschl-Teller double-ring-shaped Coulomb potential

^{۱۹} Hartmann

^{۲۰} Double-ring-shaped oscillator potential

مثال‌هایی از دسته دوم می‌باشند. در مورد دسته‌ی اول علاوه بر پتانسیل شعاعی، جمله‌ی $\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}$

نیز به پتانسیل اضافه می‌شود و در مورد دسته‌ی دوم علاوه بر پتانسیل‌های موجود در دسته‌ی اول،

پتانسیل شامل جمله‌ی $\frac{1}{r^2 \cos^2 \theta}$ نیز می‌باشد [۹].

بنابراین پتانسیل حلقه‌ای شکل دوگانه‌ی کولنی پوش-تِلر به صورت زیر است:

$$V(r, \theta, \varphi) = V(r) + \frac{V(\theta)}{r^2} + \frac{V(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (3-2)$$

که

$$V(r) = -\frac{\beta}{r}, \quad V(\theta) = \frac{b}{\sin^2 \theta} + \frac{A(A-1)}{\cos^2 \theta}, \quad V(\varphi) = \frac{\gamma^2 D(D-1)}{\sin^2(\gamma\varphi)} + \frac{\gamma^2 C(C-1)}{\cos^2(\gamma\varphi)} \quad (4-2)$$

در رابطه بالا $\gamma = 1, 2, 3, \dots$ ، $b \geq 0$ ، $\beta > 0$ و $A, C, D \geq 1$ پارامترهای حقیقی و مثبت هستند.

پتانسیل‌های کولنی، هارتمن و کولنی حلقه‌ای شکل دوگانه، حالت‌های خاصی از پتانسیل حلقه‌ای شکل

دوگانه‌ی کولنی پوش-تِلر هستند [۱۰]. پتانسیل کولنی تنها دارای جمله‌ی $V(r)$ می‌باشد به گونه‌ای

که باید $A = C = D = 1$ و $b = 0$ باشد. اگر $A = C = D = 1$ باشد رابطه‌ی (۳-۲) به پتانسیل

هارتمن تبدیل می‌شود [۱۱-۱۲]. پتانسیل حلقه‌ای شکل دوگانه‌ی کولنی زمانی ایجاد می‌شود که

$C = D = 1$ باشد [۱۳]. اینگونه پتانسیل‌های غیر مرکزی برای مطالعه ترازهای انرژی دورانی-

ارتعاشی اتم‌های چند الکترونی، مولکول‌های چنداتمی، برهمکنش بین مولکول‌های حلقه‌ای شکل مانند

بنزن و برهمکنش بین هسته‌های پیچش‌یافته استفاده می‌شود که در شیمی کوانتومی و فیزیک هسته‌ای

بسیار کاربرد دارد [۱۳-۱۵].

۱-۲-۲ ریسمان کیهانی

وجود ریسمان کیهانی^{۲۱} اولین بار توسط تام کیبل^{۲۲} در سال ۱۹۷۶ پیشنهاد شد که بر روی تئوری ورتکس‌های^{۲۳} خطی در ابر رساناها کار می‌کرد تا سرانجام توانست شکل‌گیری ساختارهای مشابهی در جهان در مقیاس بزرگ را هنگامی که جهان گسترده‌تر و سردتر می‌شود در گذار فازهای اولیه‌ی بیگ بنگ پیش‌بینی کند. فرض مهم اینست که ابتدا نیروهای الکتروضعیف و قوی در پی انتقال فاز به دلیل شکست تقارن از هم جدا شدند. به دنبال این امر انرژی میدان هیگز به جرم‌های فرمیون‌ها و بوزون‌های برداری تبدیل می‌شود (که در ادامه به توصیف میدان هیگز می‌پردازیم)، تحت شرایط معینی این امر امکان‌پذیر است که مقداری از انرژی میدان هیگز در لوله‌های باریکی که در طول جهان اولیه کشیده شدند، باقی بماند. این‌ها همان ریسمان کیهانی هستند.

جرم‌ها و ابعاد ریسمان‌های کیهانی با استفاده از مقیاس انرژی که در آن انتقال فاز مربوطه اتفاق می‌افتد، تعیین می‌گردد. مقیاس انرژی وحدت بزرگ در حدود 10^{16} GeV تخمین زده شده است که نشان می‌دهد انتقال فاز GUT حدود $10^{-35} - 10^{-37} \text{ s}$ بعد از بیگ بنگ اتفاق افتاده است زمانی که دمای جهان از مرتبه 10^{-28} K بوده است. ضخامت ریسمان کیهانی نوعاً قابل مقایسه با طول موج کامپتون یک ذره با جرم GUT یا در حدود 10^{-29} cm است. این فاصله بسیار کوچکتر از مقیاس‌های طول مهم در اختر فیزیک و کیهان می‌باشد، به همین دلیل ریسمان کیهانی معمولاً به صورت ایده آل دارای ضخامت صفر در نظر گرفته می‌شود. جرم در واحد طول یک چنین ریسمانی که به طور قراردادی با μ نمایش داده می‌شود، با مربع مقیاس انرژی متناسب است و در مورد GUT دارای مقداری در حدود

^{۲۱} Cosmic String

^{۲۲} Tom Kibble

^{۲۳} Vortex

$10^{21} g cm^{-1}$ می باشد. هیچ محدودیتی بر طول یک ریسمان کیهانی وجود ندارد هر چند در ساده ترین نظریه ها، یک ریسمان نمی تواند دارای انتهای آزاد باشد بنابراین باید یا نامتناهی باشد

و یا تشکیل یک حلقه ی بسته را بدهد [۱۶].

براساس مدل استاندارد، جرم همه ی ذرات صفر می باشد. یک میدان خارجی که میدان هیگز نامیده می شود باید برای جرم دادن به ذرات وارد شود. کوانتای میدان هیگز یک ذره با اسپین صفر است که بوزون هیگز نامیده می شود. بوزون هیگز از نظر الکتریکی خنثی است. اگر میدان هیگز وجود داشته باشد، تمام فضای خالی در کل جهان را پر می کند. ذرات بنیادی جرم خود را از طریق برهمکنش با میدان هیگز بدست می آورند. از نظر ریاضی جرم را با اضافه کردن یک جمله برهمکنش در لاگرانژی که میدان ذره مورد نظر را با میدان هیگز جفت می کند، معرفی می کنیم. معمولاً حالت با کمترین انرژی میدان دارای مقدار انتظاری صفر می باشد. با شکست تقارن یک حالت با کمترین انرژی میدان غیر صفر به وجود می آید که این فرآیند منجر به بدست آوردن جرم توسط ذرات می شود. به طور کیفی برای فهم بهتر میدان هیگز می توان تصور کرد که بر روی زمین یا زیر آب قرار داشته باشیم. زمانی که بر روی زمین قرار دارید به راحتی می توانید بازوها و دست های خود را به راحتی و بدون هیچ مشکلی حرکت دهید. اما در زیر آب حرکت دست ها سخت تر می شود. به دلیل آن که آب در برابر حرکت شما مقاومت می کند می توان فرض کرد که میدان هیگز در برابر حرکت ذرات بنیادی برای هر ذره ی برهم کنش کننده با میدان هیگز با شدت های متفاوت مقاومت می کند و مانع آن ها می شود. اگر جفت شدگی بین میدان هیگز و ذره قوی باشد بنابراین جرم ذره بزرگتر است. و اگر ضعیف باشد بنابراین جرم ذره کوچکتر است. یک ذره مثل فوتون با جرم سکون صفر هرگز با میدان هیگز بر هم کنش نمی کند. اگر میدان هیگز هرگز وجود نداشت بنابراین تمام ذرات بدون جرم بودند. جرم بوزون هیگز به طور قطعی معلوم نیست اما در حدود $140 GeV C^{-2}$ تخمین شده شده است [۱۷].

۲-۲-۲ رفتار ذره غیرنسبیتی در فضا زمان ریسمان کیهانی در مختصات کروی

می‌خواهیم رفتار یک ذره غیرنسبیتی در فضا-زمان ریسمان کیهانی در مختصات کروی را بررسی کنیم. این فضا-زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \quad (5-2)$$

که $0 < \varphi < 2\pi$ ، $0 < \theta < \pi$ و $0 < r < \infty$ می‌باشد. پارامتر α در بازه‌ی $[0, 1]$ قرار دارد که به ازای $\alpha = 1$ فضا زمان مینکوفسکی در مختصات کروی بدست می‌آید [۳]. معادله‌ی حرکتی که رفتار یک ذره غیرنسبیتی در فضا زمان مربوطه را توصیف می‌کند معادله‌ی شرودینگر می‌باشد. ذره‌ی مورد نظر در عمومی‌ترین شکل پتانسیل حلقه‌ای شکل دوگانه‌ی کولنی پوش-تِلر (رابطه‌ی (۲-۳)) قرار دارد. بنابراین

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{LB}^2 + V(r, \theta, \varphi)\right] \psi(r, \theta, \varphi) = E \psi(r, \theta, \varphi) \quad (6-2)$$

که ∇_{LB}^2 عملگر لاپلاس-بلترامی^{۲۴} که مطابق رابطه (۲-۲) تعریف می‌شود، M جرم ذره و $V(r, \theta, \varphi)$ پتانسیل حلقه‌ای شکل دوگانه‌ی کولنی پوش-تِلر است. برای محاسبه‌ی عملگر ∇_{LB}^2 تنها قسمت فضایی را در نظر می‌گیریم که متریک مربوط به قسمت فضایی ریسمان کیهانی به صورت زیر می‌باشد:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (7-2)$$

و با توجه به

^{۲۴} Laplace-Beltrami operator

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\alpha^2 r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix}, \det(g) = r^2 \alpha^2 \sin^2 \theta \quad (8-2)$$

عملگر ∇_{LB}^2 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\nabla_{LB}^2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 \alpha^2 \sin^2 \theta}} \left[\partial_i (g^{ij} g^{\frac{1}{2}} \partial_j) \right] \quad (9-2)$$

$$\nabla_{LB}^2 = \frac{1}{\sqrt{r^2 \alpha^2 \sin^2 \theta}} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\alpha r^2 \sin \theta \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\frac{\alpha r^2 \sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\frac{\alpha r^2 \sin \theta}{\alpha^2 r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}) \right] \quad (10-2)$$

$$\nabla_{LB}^2 = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 (\frac{\partial}{\partial r})) + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right]. \quad (11-2)$$

سپس با در نظر گرفتن تابع موج به شکل زیر

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (12-2)$$

در نتیجه معادله (۶-۲) تبدیل می‌شود به

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) + \left[V(r) + \frac{V(\theta)}{r^2} + \frac{V(\varphi)}{r^2 \sin^2 \theta} \right] R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) = E_{n_r, \lambda} R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad (13-2)$$

بعد از جداسازی متغیرها خواهیم داشت:

$$\frac{d^{\gamma} R(r)}{dr^{\gamma}} + \frac{\gamma}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left(-\frac{\gamma M}{\hbar^{\gamma}} V(r) + \frac{\gamma M}{\hbar^{\gamma}} E_{n_r, \lambda} - \frac{\lambda}{r^{\gamma}} \right) R(r) = 0. \quad (14-2)$$

$$\frac{d^{\gamma} \Theta(\theta)}{d\theta^{\gamma}} + \cot \theta \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} + \left[-\frac{\gamma M}{\hbar^{\gamma}} V(\theta) + \lambda - \frac{m^{\gamma}}{\alpha^{\gamma} \sin^{\gamma} \theta} \right] \Theta(\theta) = 0. \quad (15-2)$$

$$\frac{d^{\gamma} \Phi(\varphi)}{d\varphi^{\gamma}} + \left[m^{\gamma} - \frac{\gamma M \alpha^{\gamma}}{\hbar^{\gamma}} V(\varphi) \right] \Phi(\varphi) = 0. \quad (16-2)$$

برای حل معادله (۱۶-۲)، بعد از جایگذاری پتانسیل سمتی، با اعمال تغییر متغیر $z = \sin^{\gamma}(\gamma\varphi)$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\gamma} \Phi_m(z)}{dz^{\gamma}} + \frac{\frac{1}{\gamma} - z}{z(1-z)} \frac{d\Phi_m(z)}{dz} + \frac{1}{[z(1-z)]^{\gamma}} \left[z \left(\frac{m^{\gamma} \alpha^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}} + \frac{M \alpha^{\gamma} D(D-1)}{\gamma \hbar^{\gamma}} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{M \alpha^{\gamma} C(C-1)}{\gamma \hbar^{\gamma}} \right) + z^{\gamma} \left(-\frac{m^{\gamma} \alpha^{\gamma}}{\gamma^{\gamma}} \right) - \frac{M \alpha^{\gamma} D(D-1)}{\gamma \hbar^{\gamma}} \right] \Phi_m(z) = 0. \end{aligned} \quad (17-2)$$

اکنون می‌توان رابطه (۱۷-۲) را با استفاده از روش NU حل کرد [۱۸-۲۰]. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی مربوط به ویژه تابع در این روش خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \Phi_m(z) = z^{\left(\frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{M \alpha^{\gamma} D(D-1)}{\gamma \hbar^{\gamma}}}\right)} (1-z)^{\left(\frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{M \alpha^{\gamma} C(C-1)}{\gamma \hbar^{\gamma}}}\right)} \\ \times P_{n_{\varphi}}^{\left(\gamma \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{M \alpha^{\gamma} D(D-1)}{\gamma \hbar^{\gamma}}}, \gamma \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{M \alpha^{\gamma} C(C-1)}{\gamma \hbar^{\gamma}}}\right)} (1-2z) \end{aligned} \quad (18-2)$$

حال با جایگذاری $z = \sin^{\gamma}(\gamma\varphi)$ داریم:

$$\Phi_m(\varphi) = N (\sin^{\gamma}(\gamma\varphi))^{\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M\alpha^{\gamma}D(D-1)}{2h^{\gamma}}}} (\cos^{\gamma}(\gamma\varphi))^{\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M\alpha^{\gamma}C(C-1)}{2h^{\gamma}}}} \\ P_{n_{\varphi}}^{\left(\gamma\sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M\alpha^{\gamma}D(D-1)}{2h^{\gamma}}}, \gamma\sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M\alpha^{\gamma}C(C-1)}{2h^{\gamma}}}\right)} (1 - \gamma \sin^{\gamma}(\gamma\varphi)). \quad (19-2)$$

معادله ویژه مقداری را برای رابطه (۱۷-۲) می نویسیم

$$\frac{m^{\gamma}}{\epsilon} = \gamma^{\gamma} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M\alpha^{\gamma}D(D-1)}{2h^{\gamma}}} + \sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M\alpha^{\gamma}C(C-1)}{2h^{\gamma}}} \right) + \left(n_{\varphi} + \frac{1}{\gamma} \right) \right]^{\gamma}. \quad (20-2)$$

معادله (۱۵-۲) را نیز با روش NU حل می کنیم. بدین منظور با اعمال تغییر متغیر $x = \cos^{\gamma} \theta$ خواهیم داشت:

$$\frac{d^{\gamma}\Theta(x)}{dx^{\gamma}} + \frac{\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma}x\right)}{x(1-x)} \frac{d\Theta(x)}{dx} + \frac{1}{[x(1-x)]^{\gamma}} \left\{ x \left[-\frac{Mb}{2h^{\gamma}} + A(A-1)\frac{M}{2h^{\gamma}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\lambda}{\epsilon} - \frac{m^{\gamma}}{\epsilon\alpha^{\gamma}} \right] - \frac{\lambda}{\epsilon} x^{\gamma} - A(A-1)\frac{M}{2h^{\gamma}} \right\} \Theta(x) = 0. \quad (21-2)$$

ویژه تابع به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$\Theta(x) = x^{\left(\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M}{2h^{\gamma}}A(A-1)}\right)} (1-x)^{\left(\sqrt{\frac{Mb}{2h^{\gamma}} + \frac{m^{\gamma}}{\epsilon\alpha^{\gamma}}}\right)} \\ \times P_{n_{\theta}}^{\left(\gamma\sqrt{\frac{1}{1\epsilon} + \frac{M}{2h^{\gamma}}A(A-1)}, \gamma\sqrt{\frac{Mb}{2h^{\gamma}} + \frac{m^{\gamma}}{\epsilon\alpha^{\gamma}}}\right)} (1 - \gamma x) \quad (22-2)$$

با جایگذاری $x = \cos^{\gamma} \theta$ داریم:

$$\Theta(\theta) = N (\cos^\gamma \theta)^{\frac{1}{\epsilon} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{M}{2\hbar^\gamma} A(A-1)}} (\sin^\gamma \theta)^{\sqrt{\frac{Mb}{2\hbar^\gamma} + \frac{m^\gamma}{4\alpha^\gamma}}} \times P_{n_\theta}^{\left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{M}{2\hbar^\gamma} A(A-1)}, \sqrt{\frac{Mb}{2\hbar^\gamma} + \frac{m^\gamma}{4\alpha^\gamma}}\right)} (1 - 2 \cos^\gamma \theta). \quad (23-2)$$

سپس رابطه‌ی ویژه مقداری را برای معادله (۲۱-۲) می‌نویسیم:

$$\lambda = -\frac{1}{\epsilon} + \epsilon \left[\left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{MA(A-1)}{2\hbar^\gamma}} + \sqrt{\frac{Mb}{2\hbar^\gamma} + \frac{m^\gamma}{4\alpha^\gamma}} \right) + \left(n_\theta + \frac{1}{2} \right) \right] \quad (24-2)$$

بعد از جایگذاری پتانسیل شعاعی در معادله‌ی (۱۴-۲) رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{2M}{\hbar^\gamma} E_{n_r, \lambda} r^\gamma + \frac{2M}{\hbar^\gamma} \beta r - \lambda \right) R(r) = 0. \quad (25-2)$$

برای حل آن از روش NU استفاده می‌کنیم. در نتیجه تابع موج به شکل زیر بدست می‌آید:

$$R(r) = N r^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}} e^{-\sqrt{-\frac{2ME_{n_r, \lambda}}{\hbar^\gamma}} r} L_n^{\sqrt{\frac{1}{4} + \lambda}} \left(\sqrt{-\frac{2ME_{n_r, \lambda}}{\hbar^\gamma}} r \right) \quad (26-2)$$

همچنین با استفاده از معادله ویژه مقداری در روش NU، ترازهای انرژی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$E_{n_r, \lambda} = -\frac{2M\beta^\gamma}{\hbar^\gamma} \frac{1}{\left[2n_r + 1 + \sqrt{(1 + 4\lambda)} \right]^\gamma}. \quad (27-2)$$

λ ، m و n_r اعداد کوانتومی هستند و $n_r = n_\theta = n_\phi = 0, 1, 2, \dots$ مرتبه‌های چندجمله‌ای ژاکوبی می‌باشد. اگر سهم پتانسیل زاویه‌ای حذف شود و $\alpha = \gamma = 1$ انتخاب گردد بنابراین $\lambda = l'(l' + 1)$ بدست می‌آید به گونه‌ای که $l' = 2(n_\theta + n_\phi) + 2$ یا $l' = 2(n_\theta + n_\phi)$ می‌باشد در واقع λ

می‌تواند $0, 1, 2, \dots$ و $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ باشد. با توجه به آنکه λ وابسته به پارامتر α که مشخصه‌ی فضا-زمان خمیده‌ی ریسمان کیهانی است، می‌باشد (طبق رابطه (۲-۲۴))، بنابراین تغییرات ترازهای انرژی در فضا-زمان خمیده نسبت به فضا-زمان تخت مینکوفسکی به وضوح قابل درک است. در حقیقت میدان گرانشی ایجاد شده در فضا-زمان به دلیل حضور ریسمان کیهانی، منجر به تغییرات در ترازهای انرژی و تابع موج ذره می‌شود.

۳-۲ پتانسیل نوسانگر حلقه‌ای شکل دوگانه در فضا زمان ریسمان کیهانی

یک ذره غیر نسبیتی در حضور پتانسیل زیر قرار گرفته است

$$V(r, \theta) = \frac{1}{2} M \omega^2 r^2 + \frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{b}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{c}{r^2 \cos^2 \theta} \right) \quad (2-28)$$

که پتانسیل نوسانگر حلقه‌ای شکل دوگانه نامیده می‌شود که یک پتانسیل غیرمرکزی است. b و c پارامترهای حقیقی مثبت هستند. زمانی که $c = 0$ باشد این پتانسیل به پتانسیل نوسانگر حلقه‌ای شکل تقلیل می‌یابد. اگر همزمان b و c صفر باشد این پتانسیل به پتانسیل نوسانگر کروی تقلیل می‌یابد [۲۱-۲۲]. این پتانسیل می‌تواند مولکول‌های حلقه‌ای شکل مانند بنزن و برهمکنش بین جفت هسته‌های تغییر شکل یافته را توصیف کند [۲۳]. جمله‌ی $z^2 = r^2 \cos^2 \theta$ پتانسیل را به دو ناحیه‌ی مجزا تقسیم می‌کند؛ $z \in (0, \infty)$ و $z \in (-\infty, 0)$ ؛ بنابراین این پتانسیل معرف دو چاه نوسان کننده پیچشی مجزا می‌باشد که توسط صفحه‌ی $z = 0$ جدا می‌شوند [۲۴].

با در نظر گرفتن

$$\psi(r, \theta, \varphi) = T(r) S(\theta) Q(\varphi) \quad (2-29)$$

و با استفاده از روش جداسازی متغیرها سه معادله زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{d^{\gamma} T(r)}{dr^{\gamma}} + \frac{\gamma}{r} \frac{dT(r)}{dr} - \frac{M^{\gamma} \omega^{\gamma} r^{\gamma}}{\hbar^{\gamma}} T(r) + \frac{\gamma M}{\hbar^{\gamma}} E_{n_r, l} T(r) - \frac{l}{r^{\gamma}} T(r) = 0. \quad (30-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^{\gamma} S(\theta)}{d\theta^{\gamma}} + \cot \theta \frac{dS(\theta)}{d\theta} - \left(\frac{b}{\sin^{\gamma} \theta} + \frac{c}{\cos^{\gamma} \theta} \right) S(\theta) + l S(\theta) \\ - \frac{n_{\varphi}^{\gamma}}{\alpha^{\gamma} \sin^{\gamma} \theta} \frac{\gamma M}{\hbar^{\gamma}} S(\theta) = 0. \end{aligned} \quad (31-2)$$

$$\frac{d^{\gamma} Q(\varphi)}{d\varphi^{\gamma}} + n_{\varphi}^{\gamma} Q(\varphi) = 0. \quad (32-2)$$

از معادله (32-2) رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$Q(\varphi) = e^{\pm i n_{\varphi} \varphi}. \quad (33-2)$$

برای بدست آوردن معادله (31-2) تغییر متغیر $u = \cos^{\gamma} \theta$ را معرفی می کنیم که با استفاده از آن معادله‌ی مربوطه به فرم زیر در می آید:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\gamma} S(u)}{du^{\gamma}} + \frac{\gamma - \gamma u}{u(1-u)} \frac{dS(u)}{du} + \frac{1}{[u(1-u)]^{\gamma}} \left[u^{\gamma} \left(-\frac{l}{\gamma} \right) \right. \\ \left. + u \left(-\frac{b}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} + \frac{l}{\gamma} - \frac{n_{\varphi}^{\gamma}}{\gamma \alpha^{\gamma}} \right) - \frac{c}{\gamma} \right] S(u) = 0. \end{aligned} \quad (34-2)$$

طبق روش NU تابع موج به صورت زیر بدست می آید:

$$S(\theta) = (\cos \theta)^{\gamma/2 + \gamma \sqrt{\gamma/16 + c/\gamma}} (1 - \cos^{\gamma} \theta)^{\gamma \sqrt{\frac{b}{\gamma} + \frac{n_{\varphi}^{\gamma}}{\gamma \alpha^{\gamma}}}} P_{n_{\theta}} \left(\sqrt{\frac{1}{\gamma} + c}, \sqrt{\frac{n_{\varphi}^{\gamma}}{\gamma \alpha^{\gamma}}} \right) (1 - \gamma \cos^{\gamma} \theta) \quad (35-2)$$

و از رابطه‌ی ویژه مقداری داریم:

$$l = \gamma \left[-\frac{1}{16} + \left[n_{\theta} + \frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{b}{\gamma} + \frac{n_{\varphi}^{\gamma}}{\gamma \alpha^{\gamma}}} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{c}{\gamma}} \right]^{\gamma} \right]. \quad (36-2)$$

برای بدست آوردن جواب معادله‌ی (۳۰-۲) با استفاده از تغییر متغیر $S = r^2$ رابطه‌ی مورد نظر را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{d^2 T(s)}{ds^2} + \frac{3}{s} \frac{dT(s)}{ds} + \frac{1}{s^2} \left[-\frac{M^2 \omega^2 s^2}{4\hbar^2} + \frac{ME_{n_r, l} s}{2\hbar^2} - \frac{l}{4} \right] T(s) = 0. \quad (37-2)$$

در این مورد تابع موج و ویژه مقدار انرژی به ترتیب روابط (۳۸-۲) و (۳۹-۲) هستند:

$$T(r) = r^{\left(\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{l}{4}}\right)} e^{-\sqrt{\frac{M^2 \omega^2}{4\hbar^2}} r^2} L_{n_r}^{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{l}{4}}} \left(\sqrt{\frac{M^2 \omega^2}{4\hbar^2}} r^2 \right) \quad (38-2)$$

$$E_{n_r, l} = \hbar \omega \left[2n_r + 1 + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{l}{4}} \right]. \quad (39-2)$$

که نسبت به فضا زمان تخت شیفت پیدا کرده است. همچنین یادآوری می‌کنیم که در این بخش n_ϕ ، n_r و l اعداد کوانتومی هستند. اگر سهم پتانسیل زاویه‌ای را در این مسئله حذف کنیم آنگاه $l = \nu(\nu + 1)$ بدست می‌آید که $\nu = 2n_\theta + n_\phi$ بنابراین $l = 0, 1, 2, \dots$ می‌باشد همچنین یادآور می‌شویم که $n_\phi = n_\theta = n_r = 0, 1, 2, \dots$ می‌باشد.

۴-۲ رفتار یک ذره کوانتومی در فضا-زمان ریسمان کیهانی دوار^{۲۵}

متریک فضا زمان یک ریسمان کیهانی دوار بدون ساختار داخلی (یعنی میتوان آن را به صورت ایده‌آل با ضخامت صفر در نظر گرفت. ریسمان‌های کیهانی با ساختار داخلی ضخامت متناهی دارند و از انرژی و ماده پر شده‌اند) به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۹-۲۵]:

^{۲۵} Spinning cosmic string

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -(cdt + ad\varphi)^2 + d\rho^2 + \alpha^2 \rho^2 d\varphi^2 + dz^2 \\
 &= -c^2 dt^2 - 2ac dt d\varphi + (\alpha^2 \rho^2 - a^2) d\varphi^2 + d\rho^2 + dz^2
 \end{aligned}
 \quad (40-2)$$

که $0 < \alpha \leq 1$ پارامتر زاویه‌ای مربوط به فضا زمان خمیده و $a = \frac{4Gj}{c^3}$ نشان دهنده‌ی پارامتر دوران ریسمان کیهانی می‌باشد. اگر فرض کنیم که جفت‌شدگی بین تکانه‌ی زاویه‌ای ذره و تکانه‌ی زاویه‌ای ریسمان کیهانی بسیار ضعیف باشد، می‌توانیم مولفه‌ی زمانی متریک را نادیده بگیریم و معادله شرودینگر را برای این ذره حل کنیم. در غیر اینصورت نمی‌توان از معادله‌ی شرودینگر برای بررسی رفتار ذره استفاده کرد [27].

با در نظر گرفتن شکل عمومی $ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} dq_i dq_j$ که q_i ها مولفه‌ها در دستگاه مختصات خمیده هستند، داریم:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha^2 \rho^2 - a^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}
 \quad (41-2)$$

$$g = \alpha^2 \rho^2 - a^2 \quad \text{و} \quad g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1}{\alpha^2 \rho^2 - a^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix}
 \quad (42-2)$$

با استفاده از روش جفت‌شدگی کمینه پتانسیل الکترومغناطیسی که به صورت

$$-i\hbar\partial_i \rightarrow -i\hbar\partial_i - \frac{e}{c}A_i$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\nabla_{LB}^r &= \frac{1}{\sqrt{\alpha^r \rho^r - a^r}} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \sqrt{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial}{\partial \rho} + \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e}{i \hbar c} A_\varphi \right) \sqrt{\alpha^r \rho^r - a^r} \right. \\
&\times \frac{1}{\alpha^r \rho^r - a^r} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e}{i \hbar c} A_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial}{\partial z} \left. \right] \\
&= \frac{\alpha^r \rho}{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^r}{\partial \rho^r} + \frac{1}{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial^r}{\partial \varphi^r} + \frac{e}{(\alpha^r \rho^r - a^r)(i \hbar c)} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \\
&+ \frac{e}{(i \hbar c)} \frac{1}{\alpha^r \rho^r - a^r} A_\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^r}{i^r \hbar^r c^r} \frac{1}{\alpha^r \rho^r - a^r} A_\varphi^r + \frac{\partial^r}{\partial z^r}
\end{aligned} \tag{۴۳-۲}$$

از آنجایی که فرض می‌شود میدان مغناطیسی موازی با ریسمان کیهانی دوار است، پتانسیل برداری

مغناطیسی تنها دارای مولفه‌ی سمتی به صورت $A_\varphi = B \frac{\rho^r}{r}$ می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\hat{H} &= -\frac{\hbar^r}{r m} \nabla_{LB}^r = -\frac{\hbar^r}{r m} \left[\frac{\partial^r}{\partial \rho^r} + \frac{\alpha^r \rho}{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^r}{\partial z^r} + \frac{1}{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial^r}{\partial \varphi^r} \right] \\
&+ \frac{i \hbar e B \rho^r}{r m c (\alpha^r \rho^r - a^r)} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{e^r B^r \rho^r}{\lambda m c^r (\alpha^r \rho^r - a^r)}
\end{aligned} \tag{۴۴-۲}$$

با در نظر گرفتن

$$\psi(\varphi, z, \rho) \propto \exp(il \varphi) \exp(ikz) R_{n,l}(\rho) \tag{۴۵-۲}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\left\{ -\frac{\hbar^r}{r m} \left[\frac{\partial^r}{\partial \rho^r} + \frac{\alpha^r \rho}{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^r}{\partial z^r} + \frac{1}{\alpha^r \rho^r - a^r} \frac{\partial^r}{\partial \varphi^r} \right] + \frac{i \hbar e B \rho^r}{r m c (\alpha^r \rho^r - a^r)} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right. \\
&\left. + \frac{e^r B^r \rho^r}{\lambda m c^r (\alpha^r \rho^r - a^r)} \right\} \exp(il \varphi) \exp(ikz) R_{n,l}(\rho) = E \exp(il \varphi) \exp(ikz) R_{n,l}(\rho)
\end{aligned} \tag{۴۶-۲}$$

بعد از تاثیر عملگرها بر تابع موج و تقسیم طرفین رابطه بر $\exp(il\varphi)\exp(ikz)R_{n,l}(\rho)$ خواهیم داشت:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{R_{n,l}(\rho)} \frac{d}{d\rho} R_{n,l}(\rho) + \frac{\alpha^2 \rho}{\alpha^2 \rho^2 - a^2} \frac{1}{R_{n,l}(\rho)} \frac{d}{d\rho} R_{n,l}(\rho) \right. \\ \left. - k^2 - \frac{l^2}{\alpha^2 \rho^2 - a^2} \right\} - \frac{eB\rho^2 \hbar l}{2mc(\alpha^2 \rho^2 - a^2)} + \frac{e^2 B^2 \rho^4}{4mc^2(\alpha^2 \rho^2 - a^2)} = E_{n,l} \quad (47-2)$$

نهایتاً

$$\frac{d^2}{d\rho^2} R_{n,l}(\rho) + \frac{\alpha^2 \rho}{\alpha^2 \rho^2 - a^2} \frac{d}{d\rho} R_{n,l}(\rho) + \left\{ -k^2 - \frac{l^2}{\alpha^2 \rho^2 - a^2} \right. \\ \left. + \frac{eB\rho^2 l}{\hbar c(\alpha^2 \rho^2 - a^2)} - \frac{e^2 B^2 \rho^4}{4\hbar^2 c^2(\alpha^2 \rho^2 - a^2)} + \frac{2m}{\hbar^2} E_{n,l} \right\} R_{n,l}(\rho) = 0. \quad (48-2)$$

با اعمال تغییر متغیر زیر مشتق اول در رابطه (48-2) حذف می‌شود

$$R_{n,l}(\rho) = (\alpha^2 \rho^2 - a^2)^{-\frac{1}{4}} U(\rho). \quad (49-2)$$

با اعمال تغییر متغیر بالا معادله‌ی (48-2) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2 U_{n,l}(\rho)}{d\rho^2} + \left\{ -\frac{1}{2} \frac{1}{\alpha^2 \rho^2 - a^2} \alpha^2 + \frac{3}{4} \frac{1}{(\alpha^2 \rho^2 - a^2)^2} (\alpha^4 \rho^2) - k^2 - \frac{l^2}{\alpha^2 \rho^2 - a^2} \right. \\ \left. + \frac{eB\rho^2 l}{\hbar c(\alpha^2 \rho^2 - a^2)} - \frac{e^2 B^2 \rho^4}{4\hbar^2 c^2(\alpha^2 \rho^2 - a^2)} + \frac{2m}{\hbar^2} E_{n,l} \right\} U_{n,l}(\rho) = 0. \quad (50-2)$$

با تجزیه کسرهای موجود در رابطه (50-2) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{d^{\gamma} U_{n,l}(\rho)}{d\rho^{\gamma}} + \left\{ \frac{1}{\alpha\rho - a} \left[-\frac{\alpha^{\gamma}}{\epsilon a} + \frac{\gamma\alpha^{\gamma}}{\lambda a} - \frac{\gamma\alpha^{\gamma}}{\gamma\epsilon a} - \frac{l^{\gamma}}{\gamma a} + \frac{eBla}{\gamma\hbar c\alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma}B^{\gamma}a^{\gamma}}{\lambda\hbar^{\gamma}c^{\gamma}\alpha^{\epsilon}} \right] + \right. \\ & \frac{1}{\alpha\rho + a} \left[\frac{\alpha^{\gamma}}{\epsilon a} - \frac{\gamma\alpha^{\gamma}}{\lambda a} + \frac{\gamma\alpha^{\gamma}}{\gamma\epsilon a} + \frac{l^{\gamma}}{\gamma a} - \frac{eBla}{\gamma\hbar c\alpha^{\gamma}} + \frac{e^{\gamma}B^{\gamma}a^{\gamma}}{\lambda\hbar^{\gamma}c^{\gamma}\alpha^{\epsilon}} \right] + \frac{1}{(\alpha\rho - a)^{\gamma}} \left[\frac{\gamma}{\gamma\epsilon} \alpha^{\gamma} \right] \\ & + \frac{1}{(\alpha\rho + a)^{\gamma}} \left[\frac{\gamma}{\gamma\epsilon} \alpha^{\gamma} \right] + \rho^{\gamma} \left[-\frac{e^{\gamma}B^{\gamma}}{\epsilon\hbar^{\gamma}c^{\gamma}\alpha^{\gamma}} \right] + \left[-k^{\gamma} + \frac{eBl}{\hbar c\alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma}B^{\gamma}a^{\gamma}}{\lambda\hbar^{\gamma}c^{\gamma}\alpha^{\epsilon}} - \frac{e^{\gamma}B^{\gamma}a^{\gamma}}{\lambda\hbar^{\gamma}c^{\gamma}\alpha^{\epsilon}} \right. \\ & \left. \left. + \frac{\gamma m}{\hbar^{\gamma}} E_{n,l} \right] \right\} U_{n,l}(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (51-2)$$

اکنون می‌توان معادله‌ی (51-2) را با استفاده از روش حدسی^{۲۶} [۳۰-۳۲] حل کرد. با فرض

$$U_{n,l}(\rho) = f_n(\rho) e^{g_{\ell}(\rho)} \quad (52-2)$$

به گونه‌ای که

$$f_n(\rho) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{i=1}^n (\rho - \alpha_i^n) & n \geq 1 \end{cases} \quad (53-2)$$

و همچنین با اعمال فرض $n = 0$ خواهیم داشت:

$$U_{.,\ell}''(\rho) + [-g_{\ell}''(\rho) - g_{\ell}'(\rho)^{\gamma}] U_{.,\ell}(\rho) = 0 \quad (54-2)$$

حال اگر $g_{\ell}(\rho)$ را به صورت زیر تعریف کنیم،

$$g_{\ell}(\rho) = D_{\gamma} \ln(\alpha\rho - a) + D_{\gamma} \ln(\alpha\rho + a) + D_{\gamma} \rho^{\gamma} \quad (55-2)$$

معادله‌ی (54-2) به صورت زیر در می‌آید

^{۲۶} Ansatz

$$\begin{aligned}
U_{.,\ell}''(\rho) + \left\{ \frac{1}{(\alpha\rho - a)^2} [D_1\alpha^2 - D_1^2\alpha^2] + \frac{1}{(\alpha\rho + a)^2} [D_2\alpha^2 - D_2^2\alpha^2] + \right. \\
\left. \frac{1}{\alpha\rho - a} \left[-\frac{D_1D_2\alpha^2}{a} - 4D_1D_2a \right] + \frac{1}{\alpha\rho + a} \left[\frac{D_1D_2\alpha^2}{a} + 4D_1D_2a \right] \right. \\
\left. + [-2D_3 - 4D_1D_3 - 4D_2D_3] - 4D_3^2\rho^2 \right\} U_{.,\ell}(\rho) = 0.
\end{aligned} \quad (56-2)$$

مقایسه دو رابطه‌ی (۵۱-۲) و (۵۶-۲) و برابری ضرایب این دو رابطه منجر به پیدایش معادلات زیر می‌شود:

$$-\frac{\alpha^2}{4a} + \frac{3\alpha^2}{8a} - \frac{3\alpha^2}{16a} - \frac{l^2}{2a} + \frac{eBl a}{2\hbar c \alpha^2} - \frac{e^2 B^2 a^2}{8\hbar^2 c^2 \alpha^4} = -\frac{D_1D_2\alpha^2}{a} - 4D_1D_2a \quad (57-2)$$

$$\frac{\alpha^2}{4a} - \frac{3\alpha^2}{8a} + \frac{3\alpha^2}{16a} + \frac{l^2}{2a} - \frac{eBl a}{2\hbar c \alpha^2} + \frac{e^2 B^2 a^2}{8\hbar^2 c^2 \alpha^4} = \frac{D_1D_2\alpha^2}{a} + 4D_1D_2a \quad (58-2)$$

$$\frac{3}{16}\alpha^2 = D_1\alpha^2 - D_1^2\alpha^2 \quad (59-2)$$

$$\frac{3}{16}\alpha^2 = D_2\alpha^2 - D_2^2\alpha^2 \quad (60-2)$$

$$-\frac{e^2 B^2}{8\hbar^2 c^2 \alpha^4} = -4D_3^2 \quad (61-2)$$

$$-k^2 + \frac{eBl}{\hbar c \alpha^2} - \frac{e^2 B^2 a^2}{8\hbar^2 c^2 \alpha^4} - \frac{e^2 B^2 a^2}{8\hbar^2 c^2 \alpha^4} + \frac{2m}{\hbar^2} E_{.,\ell} = -2D_3 - 4D_1D_3 - 4D_2D_3. \quad (62-2)$$

که معادلات (۵۷-۲) و (۵۸-۲) مشابه می‌باشند. با حل معادلات (۵۹-۲) تا (۶۱-۲) به ترتیب D_1 و D_2

و D_3 به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$D_1 = D_2 = \begin{cases} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{cases} \quad (63-2)$$

$$D_3 = \pm \frac{eB}{4\hbar c \alpha}. \quad (64-2)$$

با توجه به معادلات (۴۹-۲)، (۵۲-۲) و (۵۵-۲) قسمت شعاعی تابع موج به شکل زیر خواهد بود:

$$R = (\alpha\rho - a)^{-\frac{1}{4} + D_1} (\alpha\rho + a)^{-\frac{1}{4} + D_2} e^{D_3 \rho^2}, \quad (65-2)$$

که با توجه به شرایط مرزی که تابع موج باید در $\rho \rightarrow 0$ و $\rho \rightarrow \infty$ برابر مقدار متناهی شود، با انتخاب $D_1 = \frac{1}{4}$ ، $D_2 = \frac{3}{4}$ و $D_3 = -\frac{eB}{4\hbar c \alpha}$ ذره کوانتومی بهترین رفتار فیزیکی را خواهد داشت.

با حل معادله‌ی (۶۲-۲) رابطه‌ی انرژی محاسبه می‌گردد:

$$E_{\ell} = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ k^2 + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \left(\frac{3}{2} - \frac{l}{\alpha} \right) + \frac{e^2 B^2 a^2}{4\hbar^2 c^2 \alpha^4} \right\} \quad (66-2)$$

و تابع موج به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi_{\ell}(\varphi, z, \rho) = N \exp(i l \varphi) \exp(i k z) (\alpha\rho + a)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{eB}{4\hbar c \alpha} \rho^2\right) \quad (67-2)$$

که بیانگر تابع موج حالت پایه (یعنی تابع موج مربوط به حالتی که هیچ گره‌ای ندارد) می‌باشد.

برای بدست آوردن ویژه‌مقدار و ویژه‌تابع اولین حالت برانگیخته (تابع موجی با یک گره) کافی است در رابطه‌ی (۵۳-۲)، $n=1$ را قرار دهیم، درنتیجه

$$f_1 = \rho - \alpha_1 \quad (68-2)$$

برای بررسی حالات برانگیختگی سیستم، باید مراتب بالاتر تابع $f(\rho)$ را به ازای $n \geq 1$ استفاده کنیم.

و همچنین

$$U_{1,l} = f e^{g_1(\rho)} = (\rho - \alpha_1) e^{g_1(\rho)} \quad (69-2)$$

که با استفاده از رابطه ی (۵۵-۲) و با توجه به

$$\begin{aligned}
 U_{\gamma,l}''(\rho) &= \gamma g_l'(\rho) e^{g_l(\rho)} + (\rho - \alpha_l') g_l''(\rho) e^{g_l(\rho)} + (\rho - \alpha_l') g_l'^{\gamma}(\rho) e^{g_l(\rho)} \\
 &= \gamma g_l'(\rho) e^{g_l(\rho)} + g_l''(\rho) U_{\gamma,l} + g_l'^{\gamma}(\rho) U_{\gamma,l}
 \end{aligned}
 \tag{۷۰-۲}$$

بدست می آوریم

$$\begin{aligned}
 U_{\gamma,l}''(\rho) &= \left(\frac{\gamma D_{\gamma} \alpha}{\alpha \rho - a} + \frac{\gamma D_{\gamma} \alpha}{\alpha \rho + a} + \epsilon D_{\gamma} \rho \right) e^{g_l(\rho)} + \left(-\frac{D_{\gamma} \alpha^{\gamma}}{(\alpha \rho - a)^{\gamma}} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{D_{\gamma} \alpha^{\gamma}}{(\alpha \rho + a)^{\gamma}} + \gamma D_{\gamma} \right) U_{\gamma,l} + \left(\frac{D_{\gamma} \alpha^{\gamma}}{(\alpha \rho - a)^{\gamma}} + \frac{D_{\gamma} \alpha^{\gamma}}{(\alpha \rho + a)^{\gamma}} + \epsilon D_{\gamma} \rho^{\gamma} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\gamma D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha^{\gamma}}{(\alpha \rho - a)(\alpha \rho + a)} + \frac{\epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha \rho}{\alpha \rho - a} + \frac{\epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha \rho}{\alpha \rho + a} \right) U_{\gamma,l}
 \end{aligned}
 \tag{۷۱-۲}$$

و نهایتاً رابطه ی زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}
 (\rho - \alpha_l') U_{\gamma,l}'' &+ \left\{ \frac{1}{\alpha \rho - a} \left[-D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha^{\gamma} - \epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{a^{\gamma}}{\alpha} + \alpha_l' D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{\alpha^{\gamma}}{a} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \epsilon \alpha_l' D_{\gamma} D_{\gamma} a - D_{\gamma} \alpha + \alpha D_{\gamma}^{\gamma} \right] + \frac{1}{\alpha \rho + a} \left[-D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha^{\gamma} - \epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{a^{\gamma}}{\alpha} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \alpha_l' D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{\alpha^{\gamma}}{a} - \epsilon \alpha_l' D_{\gamma} D_{\gamma} a - D_{\gamma} \alpha - D_{\gamma}^{\gamma} \alpha \right] + \frac{1}{(\alpha \rho + a)^{\gamma}} \left[-a D_{\gamma} \alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + a D_{\gamma}^{\gamma} \alpha - \alpha_l' D_{\gamma} \alpha^{\gamma} + \alpha_l' D_{\gamma}^{\gamma} \alpha^{\gamma} \right] + \frac{1}{(\alpha \rho - a)^{\gamma}} \left[a D_{\gamma} \alpha + a D_{\gamma}^{\gamma} \alpha \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \alpha_l' D_{\gamma} \alpha^{\gamma} - \alpha_l' D_{\gamma}^{\gamma} \alpha^{\gamma} \right] - \epsilon D_{\gamma}^{\gamma} \rho^{\gamma} + \epsilon D_{\gamma}^{\gamma} \alpha_l' \rho^{\gamma} + (-\epsilon D_{\gamma} - \epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} \right. \\
 &\quad \left. - \epsilon D_{\gamma} D_{\gamma}) \rho + \gamma D_{\gamma} \alpha_l' + \epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha_l' - \frac{\epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} a}{\alpha} + \frac{\epsilon D_{\gamma} D_{\gamma} a}{\alpha} \right\} U_{\gamma,l} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{۷۲-۲}$$

با ضرب طرفین رابطه ی (۵۱-۲) در $(\rho - \alpha_l')$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
& (\rho - \alpha_1) \frac{d U_{n,l}(\rho)}{d \rho} + \left\{ \frac{1}{\alpha \rho - a} \left[\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{l}{\gamma \alpha} + \frac{e B l a}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma}}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} + \frac{\alpha^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} \right. \right. \\
& + \frac{l^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} - \frac{e B l a \alpha_1}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} + \left. \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma} \alpha_1}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} \right] + \frac{1}{\alpha \rho + a} \left[\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{l}{\gamma \alpha} + \frac{e B l a}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma}}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} \right. \\
& - \frac{\alpha^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} - \frac{l^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} + \frac{e B l a \alpha_1}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} - \left. \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma} \alpha_1}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} \right] + \frac{1}{(\alpha \rho - a)^{\gamma}} \left[\frac{\gamma}{\gamma} \alpha a - \frac{\gamma}{\gamma} \alpha^{\gamma} \alpha_1 \right] \\
& + \frac{1}{(\alpha \rho + a)^{\gamma}} \left[-\frac{\gamma}{\gamma} \alpha a - \frac{\gamma}{\gamma} \alpha^{\gamma} \alpha_1 \right] + \rho^{\gamma} \left[-\frac{e^{\gamma} B^{\gamma}}{\gamma \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\gamma}} \right] + \rho^{\gamma} \left[\frac{e^{\gamma} B^{\gamma} \alpha_1}{\gamma \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\gamma}} \right] \\
& + \rho \left[-k^{\gamma} + \frac{e B l}{\hbar c \alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma}}{\gamma \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} + \frac{\gamma m}{\hbar^{\gamma}} E_{n,l} \right] - \alpha_1 \left[-k^{\gamma} + \frac{e B l}{\hbar c \alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma}}{\gamma \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} \right. \\
& \left. \left. + \frac{\gamma m}{\hbar^{\gamma}} E_{n,l} \right] \right\} U_{n,l}(\rho) = 0.
\end{aligned} \tag{۷۳-۲}$$

از مقایسه دو معادله‌ی (۷۲-۲) و (۷۳-۲) روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
& -D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha^{\gamma} - \gamma D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{a^{\gamma}}{\alpha} + \alpha_1 D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{\alpha^{\gamma}}{a} + \gamma \alpha_1 D_{\gamma} D_{\gamma} a - D_{\gamma} \alpha + \alpha D_{\gamma}^{\gamma} = \\
& \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{l}{\gamma \alpha} + \frac{e B l a}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma}}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} + \frac{\alpha^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} + \frac{l^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} - \frac{e B l a \alpha_1}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} + \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma} \alpha_1}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}}
\end{aligned} \tag{۷۴-۲}$$

$$\begin{aligned}
& -D_{\gamma} D_{\gamma} \alpha^{\gamma} - \gamma D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{a^{\gamma}}{\alpha} - \alpha_1 D_{\gamma} D_{\gamma} \frac{\alpha^{\gamma}}{a} - \gamma \alpha_1 D_{\gamma} D_{\gamma} a - D_{\gamma} \alpha - D_{\gamma}^{\gamma} \alpha = \\
& \frac{\alpha}{\lambda} - \frac{l}{\gamma \alpha} + \frac{e B l a}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma}}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}} - \frac{\alpha^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} - \frac{l^{\gamma} \alpha_1}{\gamma a} + \frac{e B l a \alpha_1}{\gamma \hbar c \alpha^{\gamma}} - \frac{e^{\gamma} B^{\gamma} a^{\gamma} \alpha_1}{\lambda \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\Delta}}
\end{aligned} \tag{۷۵-۲}$$

$$-a D_{\gamma} \alpha + a D_{\gamma}^{\gamma} \alpha - \alpha_1 D_{\gamma} \alpha^{\gamma} + \alpha_1 D_{\gamma}^{\gamma} \alpha^{\gamma} = -\frac{\gamma}{\gamma} \alpha a - \frac{\gamma}{\gamma} \alpha^{\gamma} \alpha_1 \tag{۷۶-۲}$$

$$a D_{\gamma} \alpha + a D_{\gamma}^{\gamma} \alpha - \alpha_1 D_{\gamma} \alpha^{\gamma} - \alpha_1 D_{\gamma}^{\gamma} \alpha^{\gamma} = \frac{\gamma}{\gamma} \alpha a - \frac{\gamma}{\gamma} \alpha^{\gamma} \alpha_1 \tag{۷۷-۲}$$

$$-\gamma D_{\gamma}^{\gamma} = -\frac{e^{\gamma} B^{\gamma}}{\gamma \hbar^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\gamma}} \tag{۷۸-۲}$$

$$\epsilon D_r \alpha_1 = \frac{e^\gamma B^\gamma \alpha_1}{\epsilon \hbar^\gamma c^\gamma \alpha^\gamma} \quad (79-2)$$

$$-\epsilon D_r - \epsilon D_1 D_r - \epsilon D_r D_r = -k^\gamma + \frac{eBl}{\hbar c \alpha^\gamma} - \frac{e^\gamma B^\gamma a^\gamma}{\epsilon \hbar^\gamma c^\gamma \alpha^\gamma} + \frac{\gamma m}{\hbar^\gamma} E_{n,l} \quad (80-2)$$

$$\gamma D_r + \epsilon D_1 D_r - \frac{\epsilon D_1 D_r a}{\alpha \alpha_1} + \frac{\epsilon D_r D_r a}{\alpha \alpha_1} = k^\gamma - \frac{eBl}{\hbar c \alpha^\gamma} + \frac{e^\gamma B^\gamma a^\gamma}{\epsilon \hbar^\gamma c^\gamma \alpha^\gamma} - \frac{\gamma m}{\hbar^\gamma} E_{n,l} \quad (81-2)$$

با حل معادلات بدست آمده انرژی و تابع موج مربوط به سیستم بدست می آید:

$$E_{\gamma,l} = \frac{\hbar^\gamma}{\gamma m} \left\{ k^\gamma + \frac{e^\gamma B^\gamma a^\gamma}{\epsilon \hbar^\gamma c^\gamma \alpha^\gamma} + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \left(\gamma - \frac{l}{\alpha} \right) \right\} \quad (82-2)$$

$$\psi_{\gamma,l}(\varphi, z, \rho) = N e^{il\varphi} e^{ikz} \left(\rho - \frac{a}{\alpha} \right) (\alpha \rho - a)^{-\frac{1}{\gamma}} (\alpha \rho + a)^{\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{eB}{\epsilon \hbar c \alpha} \rho^\gamma}. \quad (83-2)$$

با تعمیم روابط، انرژی سیستم را برای یک حالت عمومی به شکل زیر بدست می آوریم:

$$E_{n,l} = \frac{\hbar^\gamma}{\gamma m} \left\{ k^\gamma + \frac{e^\gamma B^\gamma a^\gamma}{\epsilon \hbar^\gamma c^\gamma \alpha^\gamma} + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \left(\frac{n+\gamma}{\gamma} - \frac{l}{\alpha} \right) \right\} \quad (84-2)$$

که نشان دهنده ترازهای انرژی مربوط به حالتی با n گره می باشد. جمله ی دوم مربوط به حرکت ذره در جهت موازی با راستای ریسمان کیهانی دوار است. در حقیقت ترازهای انرژی بدست آمده بیانگر

ترازهای انرژی لاندو^{۲۷} در فضای خمینه موردنظر می باشد که با در نظر گرفتن $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ به عنوان

فرکانس سیکلوترون ذره، جمله ی آخر معرف بخش نوسانی انرژی است.

۲-۴-۱ خواص ترمودینامیکی

مکانیک آماری شاخه ای از فیزیک نظری است که امکان بررسی سیستم های چند ذره ای پیچیده فیزیکی را براساس رفتار میانگین آنها فراهم می سازد. در مکانیک آماری به وسیله ی خواص میکروسکوپیکی

^{۲۷} Landau energy levels

اجزای تشکیل دهنده‌ی سیستم رفتار ماکروسکوپیکی آنها مورد بررسی قرار می‌گیرد از اینرو انرژی مربوط به یک تک ذره را در حالت خاص کوانتومی $l = 0$ به منظور بررسی رفتار ماکروسکوپیکی سیستمی با N ذره که با یکدیگر برهمکنش نمی‌کنند را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$l = 0 \rightarrow E_{n,0} = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ k^2 + \frac{e^2 B^2 a^2}{4 \hbar^2 c^2 \alpha^2} + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \left(\frac{n+1}{2} \right) \right\} \quad (85-2)$$

تابع پارش که معرف خواص آماری سیستم در حالت تعادل ترمودینامیکی است برای تک ذره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_{n,0}} = \exp \left(-\frac{\hbar^2 \beta}{2m} \left(k^2 + \frac{e^2 B^2 a^2}{4 \hbar^2 c^2 \alpha^2} + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \right) \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-\beta e B n}{\hbar c \alpha}} \quad (86-2)$$

سپس با استفاده از بسط زیر

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad (87-2)$$

خواهیم داشت:

$$z = \exp \left(-\frac{\hbar^2 \beta}{2m} \left(k^2 + \frac{e^2 B^2 a^2}{4 \hbar^2 c^2 \alpha^2} + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \right) \right) \frac{1}{1 - e^{\frac{-\beta e B}{\hbar c \alpha}}} \quad (88-2)$$

تابع پارش برای سیستم N ذره‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Q = z^N = \exp \left(-\frac{\hbar^2 \beta N}{2m} \left(k^2 + \frac{e^2 B^2 a^2}{4 \hbar^2 c^2 \alpha^2} + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \right) \right) \frac{1}{\left(1 - e^{\frac{-\beta e B}{\hbar c \alpha}} \right)^N} \quad (89-2)$$

اکنون می‌توان بسادگی خواص ترمودینامیکی سیستم از جمله انرژی درونی، انرژی آزاد هلمهولتز و آنتروپی سیستم را به ترتیب زیر بدست آورد.

$$U = -\frac{\partial \ln Q}{\partial \beta} = \left(\frac{\hbar^2 N}{2m} \left(k^2 + \frac{e^2 B^2 a^2}{4 \hbar^2 c^2 \alpha^2} + \frac{eB}{\hbar c \alpha} \right) \right) + N \frac{\frac{eB}{\hbar c \alpha}}{\left(e^{\frac{\beta e B}{\hbar c \alpha}} - 1 \right)} \quad (90-2)$$

$$F = -k_B T \ln Q = \left(\frac{\hbar^3 N}{\pi m} \left(k^3 + \frac{e^3 B^3 a^3}{\pi \hbar^3 c^3 \alpha^3} + \frac{\pi e B}{\pi \hbar c \alpha} \right) \right) + \frac{N}{\beta} \ln \left(1 - e^{\frac{-\beta e B}{\pi \hbar c \alpha}} \right) \quad (91-2)$$

$$S = - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_v = -k_B N \ln \left(1 - e^{\frac{-\beta e B}{\pi \hbar c \alpha}} \right) + \frac{e B N}{\pi \hbar T c \alpha} \frac{1}{e^{\frac{\beta e B}{\pi \hbar c \alpha k_B T}} - 1} \quad (92-2)$$

فصل سوم

بررسی بوزون‌های نسبیتی

۱-۳ معادله‌ی کلاین-گوردون در فضا زمان خمیده

برای نوشتن نسخه‌ی مستقل مختصاتی یا هم‌وردای معادله‌ی کلاین-گوردون^{۲۸} ابتدا با چگالی لاگرانژ^{۲۹} در فضای مینکوفسکی شروع می‌کنیم [۸]:

$$l = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 \quad (۱-۳)$$

برای فضای خمیده، متریک مینکوفسکی با تانسور متریک عمومی جایگزین می‌شود. پس باید در مورد $\partial_\mu \phi$ بحث شود. از آنجایی که ϕ اسکالر است، مشتقات هم‌وردای آن در فضای خمیده به مشتقات پاره‌ای تقلیل می‌یابد. اثر فضا زمان خمیده در جفت‌شدگی انحنای فضا زمان با میدان اسکالر به صورت $R\phi^2$ خود را نمایان می‌سازد. R اسکالر انحنای ریچی است. جمله‌ای متناسب با این کمیت به لاگرانژین اضافه می‌شود که منجر به چگالی لاگرانژ برای یک میدان اسکالر در فضا زمان خمیده به شکل زیر می‌شود:

$$l = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (\partial_\nu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \xi R \phi^2 \quad (۲-۳)$$

که ξ ثابت جفت‌شدگی گرانشی با میدان اسکالر می‌باشد. دو انتخاب برای ξ وجود دارد که یکی از آن‌ها جفت‌شدگی کمینه^{۳۰} است که سبب می‌شود برهمکنش مستقیمی بین میدان اسکالر با انحنای فضا زمان وجود نداشته باشد که در آن $\xi = 0$ می‌باشد و انتخاب دوم جفت‌شدگی تطبیقی^{۳۱} می‌باشد که در آن $\xi = \frac{n-2}{4(n-1)}$ می‌باشد که n بعد فضا زمان را مشخص می‌کند. به عنوان مثال برای

$$\xi = \frac{1}{6}, n = 4 \quad [۳۳].$$

^{۲۸} Klein-Gordon equation

^{۲۹} Lagrange density

^{۳۰} Minimal coupling

^{۳۱} Conformal coupling

به منظور استخراج معادله‌ی کلاین-گوردون هم‌وردا با استفاده از چگالی لاگرانژین، از رابطه‌ی کنش

که به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده می‌کنیم [۸]:

$$S = \int \sqrt{-g} l dx^4 \quad (3-3)$$

با توجه به اصل کمترین کنش $\delta S = 0$ ، معادله‌ی اویلر-لاگرانژ^{۳۲} در فضا زمان خمیده به صورت زیر

بدست می‌آید:

$$\partial_\mu \frac{\partial \sqrt{-g} l}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \sqrt{-g} l}{\partial \phi} = 0. \quad (4-3)$$

با وارد کردن چگالی لاگرانژین کلاین-گوردون در فضا زمان خمیده در معادله‌ی اویلر-لاگرانژ، معادله‌ی

کلاین-گوردون هم‌وردا در فضا زمان خمیده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) + (M^2 + \xi R) \phi = 0. \quad (5-3)$$

۳-۲ بوزون‌های اسکالر در فضا زمان ریسمان کیهانی در برهم‌کنش‌های کولنی تعمیم یافته

در این بخش به بررسی ذرات در حضور برهم‌کنش‌های کولنی تعمیم یافته و برهم‌کنش الکترومغناطیسی

می‌پردازیم. به منظور گنجاندن برهم‌کنش الکترومغناطیسی باید تبدیل $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$ را در

نظر بگیریم، که منجر به رابطه‌ی زیر می‌شود:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu + ieA_\mu) (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} (\partial_\nu + ieA_\nu) \phi) + (M^2 + S(r)) \phi + \xi R \phi = 0. \quad (6-3)$$

^{۳۲} Euler-Lagrange equation

می‌خواهیم رفتار یک ذره نسبیتی با جرم M و بارالکتریکی e را در یک فضا زمان خمیده ریسمان کیهانی که دارای متریک زیر است بررسی کنیم [۳۴]:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\varphi^2 - dz^2 \quad (۷-۳)$$

که $r \geq 0$ ، $(t, z) \in (-\infty, \infty)$ و $\varphi \in [0, 2\pi]$ می‌باشند. پارامتر α بر حسب چگالی جرم خطی μ به صورت $\alpha^2 = 1 - 4\mu$ تعریف می‌شود و $\alpha < 1$ است. بعلاوه این سیستم فیزیکی در یک میدان مغناطیسی موازی با ریسمان کیهانی در راستای Z به صورت $\vec{B} = B \cdot \hat{k}$ قرار گرفته است. بدین سبب پتانسیل را به صورت $\vec{A} = (0, A_\varphi, 0)$ تعریف می‌کنیم که مولفه‌ی سمتی آن در پیمانه‌ی کولن

$$A_\varphi = -\frac{1}{4} \alpha^2 B \cdot r^2 \quad \text{است [۳۵].}$$

با تعریف تابع موج به صورت زیر

$$\phi(x) = \exp(i(kz + m\varphi - Et))R(r) \quad (۸-۳)$$

و در نظر داشتن

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{-\alpha^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (۹-۳)$$

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -\alpha^2 r^2$$

داریم:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R(r) + \left[E^2 - \frac{m^2}{\alpha^2 r^2} + \frac{eB \cdot m}{\alpha} - \frac{e^2 B^2 r^2}{4} \right] R(r) = 0 \quad (۱۰-۳)$$

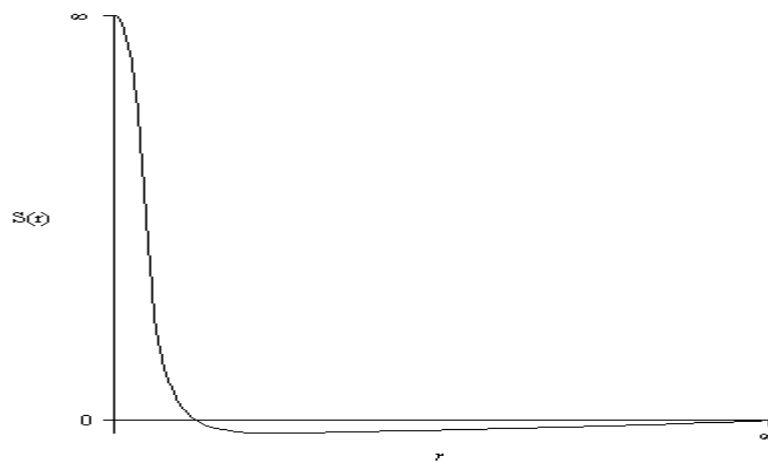
$$-k^2 - (M + S(r))^2 - \xi R] R(r) = 0$$

در این بخش $\xi = 0$ در نظر گرفته می‌شود.

۱-۲-۳ برهم کنش معکوس مربعی و کولنی متحد شده

پتانسیل برهمکنش معکوس مربعی همراه با پتانسیل کولنی را پتانسیل کراتزر^{۳۳} می‌نامند:

$$S(r) = \frac{a}{r} + \frac{b}{r^2} \quad (۱۱-۳)$$



شکل ۱-۳ پتانسیل کراتزر به ازای $a = -۱$, $b = ۱$

این برهم‌کنش در شاخه‌های متعددی از فیزیک بررسی شده است [۳۶-۳۷]. جمله‌ی اول بیانگر پتانسیل کولنی و جمله‌ی دوم مربوط به دافعه‌ی نیروی قوی برای فاصله‌های کوچک می‌باشد [۳۷]. با تغییر متغیر زیر

$$R(r) = r^{\frac{1}{2}} U(r) \quad (۱۲-۳)$$

معادله‌ی (۱۰-۳) تبدیل می‌شود به

$$U''(r) + \left[-\frac{b^2}{r^4} - \frac{ab}{r^3} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4} - \frac{m}{\alpha} - a^2 - Mb \right) - \frac{e^2 B^2 r^2}{4} + E^2 \right. \\ \left. - k^2 + \frac{eB \cdot m}{\alpha} - M^2 \right] U(r) = 0 \quad (۱۳-۳)$$

اکنون با انتخاب جواب حدسی زیر

^{۳۳} Kratzer

$$U_{\nu,\ell}(r) = f_{\nu}(r)e^{g_{\ell}(r)} \quad (۱۴-۳)$$

که در آن

$$f_{\nu}(r) = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ \prod_{i=1}^{\nu} (r - \alpha_i^{\nu}) & \nu \geq 1 \end{cases} \quad (۱۵-۳)$$

به ازای $\nu = 0$ ، $U_{\cdot,\ell}(r) = e^{g_{\ell}(r)}$ می باشد که با توجه به آن معادله ی دیفرانسیل نتیجه شده به فرم زیر محاسبه می گردد:

$$U_{\cdot,\ell}''(r) + [-g_{\ell}''(r) - g_{\ell}'(r)^2]U_{\cdot,\ell}(r) = 0 \quad (۱۶-۳)$$

حال $g(r)$ را به شکل زیر پیشنهاد می کنیم:

$$g(r) = \alpha r + \beta \ln r + \frac{\gamma}{r^2} \quad (۱۷-۳)$$

بنابراین رابطه ی زیر محاسبه می گردد:

$$U_{\cdot,\ell}''(r) + \left[-\frac{\gamma^2}{r^4} - \frac{1}{r^2}(-\beta\gamma + 2\gamma) - \frac{1}{r^2}(\beta^2 - \beta) + \frac{2\alpha\gamma}{r} - 4\alpha^2 r^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha \right] U_{\cdot,\ell}(r) = 0 \quad (۱۸-۳)$$

با مقایسه رابطه ی (۱۸-۳) و (۱۳-۳) مجموعه معادلات زیر را بدست می آید:

$$\gamma = \pm b \quad (۱۹-۳)$$

$$ab = -\beta\gamma + 2\gamma \quad (۲۰-۳)$$

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{4\left(\frac{m}{\alpha^2} + a^2 - Mb\right)}}{2} \quad (۲۱-۳)$$

$$\alpha = \pm \frac{eB_{\cdot}}{4} \quad (۲۲-۳)$$

$$2\alpha\beta + 2\alpha = E^2 - k^2 + \frac{eB_{\cdot}m}{\alpha_{\cdot}} - M^2 \quad (۲۳-۳)$$

با توجه به رابطه‌ی $R(r) = r^{-\frac{1}{2} + \beta} e^{(\alpha r + \frac{\gamma}{r^2})}$ و این حقیقت که تابع موج در مبدا و در بی‌نهایت باید

دارای مقدار متناهی باشد بنابراین α, β, γ باید به صورت زیر انتخاب شوند:

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{\frac{m}{\alpha} + a^2 + Mb}}{2} \quad (24-3)$$

$$\alpha = -\frac{eB}{4} \quad (25-3)$$

$$\gamma = -b. \quad (26-3)$$

معادلات اخیر همراه با معادله (۲۳-۳)، منجر به ویژه مقدار

$$E = \pm \left(-\frac{eB}{2} \left(\frac{3}{2} - \sqrt{\frac{m}{\alpha} + a^2 + Mb} \right) + k^2 - \frac{eB \cdot M}{\alpha} + M^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (27-3)$$

و ویژه تابع

$$\phi(x) = N \exp(i(kz + m\varphi - Et)) r^{-\frac{1}{2} + \beta} e^{(\alpha r + \frac{\gamma}{r^2})}. \quad (28-3)$$

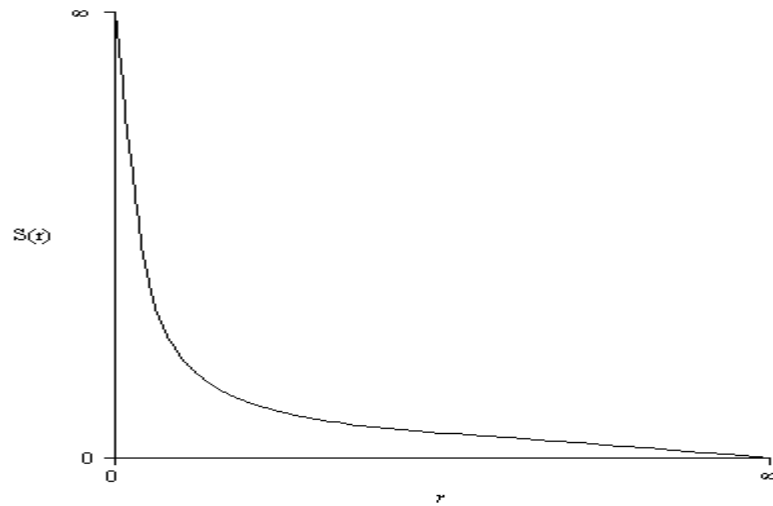
می‌شوند.

۲-۲-۳ برهم کنش هسته‌ای نرم

برهمکنش هسته‌ای نرم به صورت

$$S(r) = \frac{S_1}{r} + \frac{S_2}{r+a} \quad (29-3)$$

که این یک برهمکنش مناسب برای تحلیل داده در فیزیک ذرات، مولکولی و اتمی می‌باشد [۳۸-۳۹].



شکل ۲-۳ پتانسیل هسته‌ای نرم به ازای $s_1 = s_2 = a = 1$

معادله‌ی کلاین-گوردون متناظر با پتانسیل در نظر گرفته شده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} R(r) + [E^2 + \frac{eB \cdot m}{\alpha_1} - \frac{e^2 B^2 r^2}{4} - k^2 - M^2 + \frac{1}{r^2} (-\frac{m^2}{\alpha_1^2} - s_1^2) \\ - \frac{e^2 B^2 r^2}{4} - \frac{s_2^2}{(r+a)^2} + \frac{1}{r} (-Ms_1 - \frac{s_1 s_2}{a}) + \frac{1}{r+a} (-Ms_2 + \frac{s_1 s_2}{a})] R(r) = 0. \end{aligned} \quad (30-3)$$

برای حذف مشتق مرتبه اول تنها کافی است که مشابه بخش قبل از تبدیل $R(r) = r^{-\frac{1}{2}} U(r)$ استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} U''(r) + [E^2 + \frac{eB \cdot m}{\alpha_1} - k^2 - M^2 + \frac{1}{r^2} (-\frac{m^2}{\alpha_1^2} - s_1^2 + \frac{1}{4}) - \frac{e^2 B^2 r^2}{4} \\ - \frac{s_2^2}{(r+a)^2} + \frac{1}{r} (-Ms_1 - \frac{s_1 s_2}{a}) + \frac{1}{r+a} (-Ms_2 + \frac{s_1 s_2}{a})] U(r) = 0. \end{aligned} \quad (31-3)$$

در این مورد جواب حدسی زیر پیشنهاد می‌شود:

$$g(r) = \alpha r^2 + \beta \ln r + \gamma \ln(r+a) \quad (32-3)$$

و رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$U''(r) + (-\gamma\alpha - \gamma\alpha\beta + \frac{1}{r^\gamma}(\beta - \beta^\gamma) + \frac{1}{(r+a)^\gamma}(\gamma - \gamma^\gamma) - 4\alpha^\gamma r^\gamma + \frac{1}{r+a}(\gamma\alpha\gamma a + \frac{\beta\gamma}{a}) - \frac{\beta\gamma}{ar} - \gamma\alpha\gamma)U(r) = 0. \quad (33-3)$$

با مقایسه روابط (33-3) و (31-3) مجموعه معادلات زیر بدست می آیند:

$$-\frac{\beta\gamma}{a} = -Ms_\gamma - \frac{s_\gamma s_\gamma}{a} \quad (34-3)$$

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{m^\gamma}{\alpha^\gamma} - s_\gamma^\gamma}}{\gamma} \quad (35-3)$$

$$\gamma\alpha\gamma a + \frac{\beta\gamma}{a} = -Ms_\gamma + \frac{s_\gamma s_\gamma}{a} \quad (36-3)$$

$$\gamma = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4s_\gamma^\gamma}}{\gamma} \quad (37-3)$$

$$\alpha = \pm \frac{eB_\gamma}{4} \quad (38-3)$$

$$-\gamma\alpha - \gamma\alpha\beta - \gamma\alpha\gamma = E^\gamma + \frac{eB_\gamma m}{\alpha_\gamma} - k^\gamma - M^\gamma. \quad (39-3)$$

در اینجا $R(r) = r^{\frac{-1}{\gamma} + \beta} e^{\alpha r^\gamma} (r+a)^\gamma$ می باشد و شرط متناهی بودن تابع موج در مبدا و در بی نهایت ملزم می کند که

$$\alpha = -\frac{eB_\gamma}{4} \quad (40-3)$$

$$\gamma = \frac{1 - \sqrt{1 + 4s_\gamma^\gamma}}{\gamma} \quad (41-3)$$

$$\beta = \frac{1}{\gamma} + \sqrt{\frac{m^\gamma}{\alpha^\gamma} + s_\gamma^\gamma} \quad (42-3)$$

از رابطه‌ی (۳-۳۹) ویژه مقدار محاسبه می‌شود:

$$E = \pm [k^2 + M^2 + \frac{eB}{2} (\gamma - \frac{\sqrt{1+4s_1^2}}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{\alpha^2} + s_1^2} - \frac{2m}{\alpha})]^{\frac{1}{2}} \quad (۳-۴۳)$$

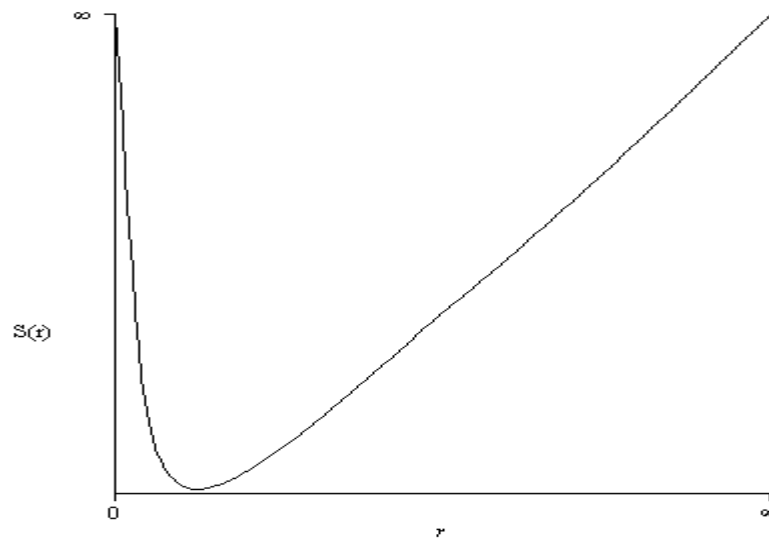
همچنین ویژه تابع به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\phi(x) = N \exp(i(kz + m\varphi - Et)) r^{\frac{-1}{2} + \beta} e^{ar^2} (r+a)^{\gamma} \quad (۳-۴۴)$$

۳-۲-۳ برهمکنش کرنل^{۳۴}

برهمکنش کرنل دارای شکل زیر است:

$$S(r) = ar + \frac{b}{r} \quad (۳-۴۵)$$



شکل ۳-۳ پتانسیل کرنل به ازای $a=b=1$

از اینرو معادله‌ی شعاعی کلاین-گوردون به شکل زیر در می‌آید:

^{۳۴}Cornell

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + [E^2 - k^2 - M^2 - ab + \frac{eB.m}{\alpha} + \frac{1}{r^2}(-\frac{m^2}{\alpha} - b)]R(r) = 0 \quad (46-3)$$

$$+ r^2(-a^2 - \frac{e^2 B^2}{4}) - Mar - \frac{Mb}{r}]R(r) = 0$$

که به کمک تبدیل زیر

$$R(r) = r^{-\frac{1}{2}} U(r) \quad (47-3)$$

به شکل زیر پدیدار می شود:

$$U''(r) + [E^2 - k^2 - M^2 - ab + \frac{eB.m}{\alpha} + \frac{1}{r^2}(-\frac{m^2}{\alpha} - b^2 + \frac{1}{4})]U(r) = 0 \quad (48-3)$$

$$+ r^2(-a^2 - \frac{e^2 B^2}{4}) - Mar - \frac{Mb}{r}]U(r) = 0$$

با استفاده از فرمول های (3-14) و (3-16) و با تعریف

$$g(r) = \alpha r^2 + \beta r + \gamma \ln r \quad (49-3)$$

داریم:

$$U''(r) + [-\beta^2 - 2\alpha\gamma - 2\alpha - 4\alpha^2 r^2 + \frac{1}{r^2}(-\gamma^2 + \gamma) - \frac{\beta\gamma}{r} - 2\alpha\beta r]U(r) = 0 \quad (50-3)$$

با معادل قرار دادن ضرائب توان های یکسانی از r مجموعه روابط زیر بدست می آیند:

$$\gamma = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{\alpha} + b^2} \quad (51-3)$$

$$\alpha = \pm (\frac{a^2}{4} + \frac{e^2 B^2}{16})^{\frac{1}{2}} \quad (52-3)$$

$$\beta = \frac{Mb}{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{\alpha} + b^2}} \quad (53-3)$$

$$a = \pm \left(a^r + \frac{e^r B \cdot}{4} \right)^{\frac{1}{r}} \frac{b}{\frac{1}{r} \pm \sqrt{\frac{m^r}{\alpha \cdot} + b^r}} \quad (54-3)$$

$$E^r - k^r - M^r - ab + \frac{eB \cdot m}{\alpha \cdot} = -\beta^r - 2\alpha\gamma - 2\alpha. \quad (55-3)$$

با توجه به $R(r) = e^{\alpha r^r + \beta r} r^{-\frac{1}{r} + \gamma}$ و شرایط متناهی شدن تابع موج باید

$$\alpha = -\left(\frac{a^r}{4} + \frac{e^r B \cdot}{16} \right)^{\frac{1}{r}} \quad (56-3)$$

$$\gamma = \frac{1}{r} + \sqrt{\frac{m^r}{\alpha \cdot} + b^r} \quad (57-3)$$

در نتیجه ترازهای انرژی و ویژه تابع به صورت زیر حصول می‌شود:

$$E = \pm \left[-\frac{M^r b^r}{\left(\frac{1}{r} - \sqrt{\frac{m^r}{\alpha \cdot} + b^r} \right)^r} + \left(a^r + \frac{e^r B \cdot}{4} \right)^{\frac{1}{r}} \left(\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{m^r}{\alpha \cdot} + b^r} \right) + k^r + M^r + ab - \frac{eB \cdot m}{\alpha \cdot} \right]^{\frac{1}{r}} \quad (58-3)$$

$$\phi(x) = N \exp(i(kz + m\varphi - Et)) e^{\alpha r^r + \beta r} r^{-\frac{1}{r} + \gamma} \quad (59-3)$$

۳-۳ ذره بوزونی در فضا زمان فریدمن^{۳۵}-روبرتسون^{۳۶}-واکر^{۳۷}(FRW)

متریک FRW، متریک شناخته شده‌ای است که به منظور توصیف فضا زمان در حال انبساط همگن و همسانگرد استفاده می‌شود. المان طول در فضا زمان FRW به صورت زیر تعریف می‌شود:

^{۳۵} Friedmann

^{۳۶} Robertson

^{۳۷} Walker

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{1}{1-kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right] \quad (60-3)$$

که $k \in \{-1, 0, 1\}$. $a(t)$ فاکتور بسط می‌باشد که انبساط فضا در هر زمان ثابت را بیان می‌کند. متناسب با هر مقدار $a(t)$ ، سه نوع فضا زمان خواهیم داشت: فضای تخت با $k = 0$ ، فضای بسته یا کروی با $k = +1$ (دارای انحنای مثبت)، فضای باز یا هایپربولیک با $k = -1$ (دارای انحنای منفی) [۳۳، ۴۰]. بنابراین تانسور متریک به شکل زیر نمایش داده می‌شود:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-a^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (61-3)$$

تانسور متریک پادوردا و دترمینان تانسور متریک هم‌وردا به ترتیب

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \frac{1-kr^2}{-a^2(t)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \frac{1}{-a^2(t)r^2} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{-a^2(t)r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (62-3)$$

$$\det(g_{\mu\nu}) = \frac{-a^6(t)r^3 \sin^3 \theta}{1-kr^2} \quad (63-3)$$

می‌باشند.

معادله‌ی کلاین-گوردون در حضور پتانسیل‌های برداری و اسکالر در فضا زمان خمیده

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_\mu + ieA_\mu)(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\mu + ieA_\mu))\phi + (M + S(r))^\gamma \phi + \xi R\phi = 0 \quad (64-3)$$

می‌باشد، که با استفاده از معادله‌ی (۶۴-۳) و تابع موج حدسی زیر

$$\phi = e^{-iEt} R(r) Q(\varphi) \Theta(\theta) \quad (65-3)$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a(t)} \partial_t a(t) (-iE + ieA_t) - E^\gamma + eA_t E - e^\gamma A_t^\gamma - \frac{1}{r} \frac{1 - kr^\gamma}{a^\gamma(t) R(r)} \partial_r R(r) \\ & - \frac{1}{r} \frac{1 - kr^\gamma}{a^\gamma(t)} ieA_r - \frac{kr}{a^\gamma(t) R(r)} \partial_r R(r) - \frac{kr}{a^\gamma(t)} ieA_r + \frac{1}{a^\gamma(t) R(r)} \partial_r R(r) \\ & + \frac{1}{a^\gamma(t)} ieA_r - \frac{1 - kr^\gamma}{a^\gamma(t) R(r)} \partial_r^\gamma R(r) - \frac{1 - kr^\gamma}{a^\gamma(t)} ie \partial_r A_r - \frac{1 - kr^\gamma}{a^\gamma(t) R(r)} ieA_r \\ & \times \partial_r R(r) + \frac{1 - kr^\gamma}{a^\gamma(t)} e^\gamma A_r^\gamma - \frac{\cot \theta}{a^\gamma(t) r^\gamma} \frac{1}{\Theta(\theta)} \partial_\theta \Theta(\theta) - \frac{\cot \theta}{a^\gamma(t) r^\gamma} ieA_\theta - \frac{1}{a^\gamma(t) r^\gamma} \\ & \times \frac{1}{\Theta(\theta)} \partial_\theta^\gamma \Theta(\theta) - \frac{1}{a^\gamma(t) r^\gamma} ie \partial_\theta A_\theta - \frac{1}{a^\gamma(t) r^\gamma} ieA_\theta \frac{1}{\Theta(\theta)} \partial_\theta \Theta(\theta) + \frac{e^\gamma A_\theta^\gamma}{a^\gamma(t) r^\gamma} \\ & - \frac{1}{a^\gamma(t) r^\gamma \sin^\gamma \theta} \frac{1}{Q(\varphi)} \partial_\varphi^\gamma Q(\varphi) - \frac{1}{a^\gamma(t) r^\gamma \sin^\gamma \theta} ie \partial_\varphi A_\varphi - \frac{1}{Q(\varphi) a^\gamma(t) r^\gamma \sin^\gamma \theta} ieA_\varphi \partial_\varphi Q(\varphi) \\ & + e^\gamma A_\varphi^\gamma \frac{1}{a^\gamma(t) r^\gamma \sin^\gamma \theta} + (M + S(r))^\gamma + \xi R = 0. \end{aligned} \quad (66-3)$$

با انتخاب

$$a(t) = 1 \quad A_t \neq 0 \quad A_r = A_\theta = A_\varphi = 0 \quad (67-3)$$

بنابراین معادله (۶۶-۳) تبدیل می‌شود به

$$\begin{aligned}
& -E^{\gamma} + eA_t E - e^{\gamma} A_t^{\gamma} - \frac{\gamma}{r} \frac{1 - kr^{\gamma}}{R(r)} \partial_r R(r) - kr \frac{1}{R(r)} \partial_r R(r) + \gamma kr \frac{1}{R(r)} \partial_r R(r) \\
& - \frac{1 - kr^{\gamma}}{R(r)} \partial_r^{\gamma} R(r) - \frac{\cot \theta}{r^{\gamma}} \frac{1}{\Theta(\theta)} \partial_{\theta} \Theta(\theta) - \frac{1}{r^{\gamma}} \frac{1}{\Theta(\theta)} \partial_{\theta}^{\gamma} \Theta(\theta) - \frac{1}{Q(\varphi)} \frac{\partial_{\varphi}^{\gamma} Q(\varphi)}{r^{\gamma} \sin^{\gamma} \theta} \\
& + (M + S(r))^{\gamma} + \xi R = 0.
\end{aligned}$$

(۶۸-۳)

به گونه‌ای که سه معادله‌ی مربوط به قسمت شعاعی، قطبی و سمتی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
& (E^{\gamma} - eA_t E + e^{\gamma} A_t^{\gamma}) - (M + S(r))^{\gamma} - \xi R - \frac{\lambda}{r^{\gamma}} \frac{R(r)}{1 - kr^{\gamma}} + \partial_r^{\gamma} R(r) + \frac{\gamma}{r} \partial_r R(r) \\
& - \frac{kr}{1 - kr^{\gamma}} \partial_r R(r) = 0.
\end{aligned}$$

(۶۹-۳)

$$\cot \theta \partial_{\theta} \Theta(\theta) + \partial_{\theta}^{\gamma} \Theta(\theta) - \left(-\lambda + \frac{m^{\gamma}}{\sin^{\gamma} \theta} \right) \Theta(\theta) = 0.$$

(۷۰-۳)

$$\partial_{\varphi}^{\gamma} Q(\varphi) + m^{\gamma} Q(\varphi) = 0.$$

(۷۱-۳)

برای حل معادله‌ی (۶۹-۳) از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم:

$$R(r) = \left(r^{-1} (1 - kr^{\gamma})^{\frac{-1}{\gamma}} \right) U(r)$$

(۷۲-۳)

در نتیجه

$$\begin{aligned}
& U''(r) + \frac{\gamma}{\gamma} k^{\gamma} \frac{r^{\gamma}}{(1 - kr^{\gamma})^{\gamma}} U(r) + [E^{\gamma} - eEA_t + e^{\gamma} A_t^{\gamma} - (M + S(r))^{\gamma} - \xi R \\
& - \frac{\lambda}{r^{\gamma}} + \frac{\gamma}{\gamma} k] \frac{1}{1 - kr^{\gamma}} U(r) = 0.
\end{aligned}$$

(۷۳-۳)

" ξ " معرف جفت‌شدگی بین انحنای فضا زمان و میدان اسکالر است. اگر ثابت جفت‌شدگی دارای مقدار صفر باشد، در نتیجه جفت‌شدگی مستقیمی وجود ندارد که جفت‌شدگی کمینه خوانده می‌شود. در غیر اینصورت $\xi = \frac{n-2}{4(n-1)}$ است که 'n' نشان‌دهنده‌ی بعد فضا زمان است که در این حالت جفت‌شدگی تطبیقی نام دارد. در اینجا فرض بر آن است که $\xi = 0$ است و با معرفی پتانسیل اسکالر و مولفه‌ی زمانی پتانسیل برداری

$$S(r) = s \cdot r + \frac{s_1}{r} \quad (74-3)$$

$$eA_t = v \cdot r + \frac{v_1}{r} \quad (75-3)$$

معادله (73-3) را برای سه حالت مختلف $k = 1, k = 0, k = -1$ محاسبه خواهیم کرد.

۱. حالت $k = 1$

در این حالت معادله (73-3) تبدیل می‌شود به

$$U''(r) + \left\{ \frac{1}{1-r^2} \left(\frac{3}{4} + E^2 + v^2 + v_1^2 + 2v \cdot v_1 - M^2 - s^2 - s_1^2 - 2s \cdot s_1 - \lambda \right) + \frac{3/4}{(1-r^2)^2} + \frac{r}{1-r^2} (-Ev \cdot -Ev_1 - 2Ms \cdot -2Ms_1) + \frac{1}{r} (-Ev_1 - 2Ms_1) - v^2 + s^2 + \frac{1}{r^2} (v_1^2 - s_1^2 - \lambda) \right\} U(r) = 0 \quad (76-3)$$

برای حل معادله (76-3) از روش حدسی به شکل زیر استفاده می‌کنیم

$$U_{v,\ell}(r) = f_v(r) e^{g_\ell(r)} \quad (77-3)$$

که در آن

$$f_\nu(r) = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ \prod_{i=1}^{\nu} (r - \alpha_i^\nu) & \nu \geq 1 \end{cases} \quad (78-3)$$

با فرض $U_{.,\ell}(r) = e^{g_\ell(r)}$ خواهیم داشت

$$U_{.,\ell}''(r) + [-g_\ell''(r) - g_\ell'(r)^2] U_{.,\ell}(r) = 0. \quad (79-3)$$

اگر $g_\ell(r)$ به شکل زیر انتخاب شود

$$g_\ell = \beta \ln(1 - r^2) + \gamma \ln r + \eta r \quad (80-3)$$

معادله (79-3) تبدیل می شود به

$$U_{.,\ell}''(r) + \left\{ \frac{1}{1-r^2} [-2\beta + 4\beta^2 + 4\beta\gamma] + \frac{1}{(1-r^2)^2} [4\beta - 4\beta^2] + \frac{r}{1-r^2} [4\beta\eta] \right. \\ \left. + \frac{1}{r} [-2\gamma\eta] + \frac{1}{r^2} [\gamma - \gamma^2] - \eta^2 \right\} U_{.,\ell}(r) = 0. \quad (81-3)$$

با مقایسه روابط (81-3) و (76-3) معادلات زیر بدست می آید:

$$\frac{\gamma}{4} + E^2 + v^2 + v_1^2 + 2v.v_1 - M^2 - s^2 - s_1^2 - \lambda = -2\beta + 4\beta^2 + 4\beta\gamma \quad (82-3)$$

$$\frac{\gamma}{4} = 4\beta - 4\beta^2 \quad (83-3)$$

$$-Ev^2 - Ev_1 - 2Ms^2 - 2Ms_1 = 4\beta\eta \quad (84-3)$$

$$-Ev_1 - 2Ms_1 = -2\gamma\eta \quad (85-3)$$

$$v_1^2 - s_1^2 - \lambda = \gamma - \gamma^2 \quad (86-3)$$

$$-v_{\cdot}^{\gamma} + s_{\cdot}^{\gamma} = -\eta^{\gamma} \quad (87-3)$$

از روابط (83-3)، (86-3) و (87-3) به ترتیب پارامترهای زیر را بدست می‌آوریم:

$$\beta = \begin{cases} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{cases} \quad (88-3)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(v_1^{\gamma} - s_1^{\gamma} - \lambda)} \quad (89-3)$$

$$\eta = \pm (v_{\cdot}^{\gamma} - s_{\cdot}^{\gamma})^{\frac{1}{2}} \quad (90-3)$$

همچنین با استفاده از روابط (84-3) و (85-3) رابطه‌ی قیدی زیر را بدست می‌آوریم

$$(\gamma\eta - Ms_{\cdot}) \left(\frac{v_{\cdot}^{\gamma}}{v_1^{\gamma}} + 1 \right) + Ms_{\cdot} + Ms_1 = -2\beta\eta \quad (91-3)$$

با توجه به تابع موج حالت پایه زیر، باید $\beta = \frac{1}{4}$ انتخاب شود. همچنین به منظور ارضای شرایط مرزی

در $r \rightarrow 0$ و $r \rightarrow \infty$ که تابع موج باید متناهی باشد بنابراین $\eta = -(v_{\cdot}^{\gamma} - s_{\cdot}^{\gamma})^{\frac{1}{2}}$ و

$$v_1^{\gamma} - s_1^{\gamma} - \lambda < 0 \text{ آنکه به شرط آنکه } \gamma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 4(v_1^{\gamma} - s_1^{\gamma} - \lambda)}$$

$$R(r) = r^{\gamma-1} (1 - r^{\gamma})^{\beta-\frac{1}{4}} e^{\eta r}. \quad (92-3)$$

از رابطه (82-3) خواهیم داشت

$$E = \pm \left((s_{\cdot} + s_1)^{\gamma} + M^{\gamma} - (v_{\cdot} + v_1)^{\gamma} + \lambda + \gamma - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (93-3)$$

۲. حالت $k = 0$

در این حالت معادله (۷۳-۳) تبدیل می شود به

$$U''(r) + \left\{ r(-Ev_1 - 2Ms_1) + r^2(v_1^2 - s_1^2) + \frac{1}{r}(-Ev_1 - 2Ms_1) + \frac{1}{r^2}(v_1^2 - s_1^2 - \lambda) \right. \\ \left. + E^2 + 2v_1v_1 - M^2 - 2s_1s_1 \right\} U(r) = 0 \quad (94-3)$$

که با استفاده از روش حدسی و معرفی g به صورت زیر معادله بالا را حل می کنیم:

$$g = \tau \ln r + \sigma r^2 + \zeta r \quad (95-3)$$

بنابراین ویژه تابع و ویژه مقدار انرژی به صورت زیر محاسبه می گردد:

$$U = r^\tau e^{\sigma r^2} e^{\zeta r} \quad (96-3)$$

$$E = \pm \left(M^2 + 2v_1v_1 + 2s_1s_1 - 2\sigma - \zeta^2 - 4\tau\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (97-3)$$

که

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(v_1^2 - s_1^2 - \lambda)}}{2} \quad (98-3)$$

$$\sigma = -\frac{1}{r} \left(s_1^2 - v_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (99-3)$$

$$\zeta = \frac{2Ms_1 - \frac{2Ms_1v_1}{v_1}}{2\tau - 4\sigma \frac{v_1}{v_1}} \quad (100-3)$$

۳. حالت $k = -1$

در این حالت معادله (۷۳-۳) تبدیل می‌شود به

$$U''(r) + \left\{ \frac{1}{1+r^2} \left(-\frac{r}{4} + E^r - v^r - v_1^r + 2v.v_1 - M^r + s^r + s_1^r - 2s.s_1 + \lambda \right) - \frac{r/4}{(1+r^2)^2} + \frac{r}{1+r^2} (-Ev^r + Ev_1^r - 2Ms^r + 2Ms_1^r) + \frac{1}{r} (-Ev_1^r - 2Ms_1^r) \right. \\ \left. + v^r - s^r + \frac{1}{r^2} (v_1^r - s_1^r - \lambda) \right\} U(r) = 0. \quad (101-3)$$

که با استفاده از روش حدسی و انتخاب تابع g معادله بالا حل می‌شود:

$$g_\ell = \chi \ln(1+r^2) + \delta \ln r + \varepsilon r \quad (102-3)$$

بنابراین ویژه‌تابع و ویژه‌مقدار به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$R = r^{\delta-1} (1+r^2)^{-\frac{1}{4}+\chi} e^{\varepsilon r} \quad (103-3)$$

$$E = \pm \left(-(s^r - s_1^r) + M^r + (v^r - v_1^r) - \lambda - \delta + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (104-3)$$

که

$$\chi = \frac{1}{4} \quad (105-3)$$

$$\delta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(v_1^r - s_1^r - \lambda)}}{2} \quad (106-3)$$

$$\varepsilon = - \left(s^r - v^r \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (107-3)$$

برای حل معادله (۷۰-۳) از روش NU استفاده می‌کنیم. برای اینکار تغییر متغیر $x = \cos \theta$ را بکار می‌گیریم:

$$\frac{d^2 \Theta(x)}{dx^2} + \frac{(2-x)}{4x(1-x)} \frac{d\Theta(x)}{dx} + \frac{1}{[x(1-x)]^2} \left[\frac{1}{4} \lambda x(1-x) - \frac{1}{4} m^2 x \right] \Theta(x) = 0 \quad (108-3)$$

بنابراین تابع موج به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Theta(\theta) = (\cos \theta)^{\frac{1}{2}} (1 - \cos \theta)^{\frac{1}{2}m} P_n^{(\frac{1}{2}, m)}(1 - 2 \cos \theta) \quad (109-3)$$

از رابطه ویژه مقدار براساس روش NU داریم:

$$\lambda = (2n + m)(2n + m + 1). \quad (110-3)$$

همچنین از حل معادله (۷۱-۳) خواهیم داشت:

$$Q(\varphi) = e^{-im\varphi}. \quad (111-3)$$

فصل چهارم

بررسی فرمیون‌های نسبیتی

۱-۴ معادله دیراک در فضای خمیده

ذرات فرمیونی اسپین $\frac{1}{2}$ با میدان دیراک توصیف می‌شوند که با $\psi(x)$ نمایش داده می‌شود و رفتار دینامیکی آن‌ها توسط معادله‌ی دیراک تعیین می‌شود. در معادله‌ی دیراک مشتقات مرتبه اول نسبت به زمان و مکان را در نظر می‌گیریم. دلیل این انتخاب، اجتناب از توزیع احتمال منفی است که در معادله‌ی کلاین-گوردون مشاهده می‌شود. هامیلتونی دیراک به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۷]:

$$\hat{H} = c\vec{\alpha} \cdot (-i\hbar\nabla) + \beta mc^2 \quad (1-4)$$

که با جایگذاری در $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi$ داریم:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = [c\vec{\alpha} \cdot (-i\hbar\nabla) + \beta mc^2] \psi \quad (2-4)$$

که این معادله‌ی نسبیتی هم‌وردا در فضای تخت می‌باشد. در این معادله فضا و زمان هم‌ارز می‌باشند و هر دو برحسب مشتق مرتبه اول در معادله ظاهر می‌شوند. $\vec{\alpha}$ و β ماتریس‌های 4×4 هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\vec{\alpha} = \alpha_1 \hat{e}_1 + \alpha_2 \hat{e}_2 + \alpha_3 \hat{e}_3 \quad (3-4)$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad (4-4)$$

همچنین می‌توان معادله‌ی دیراک در فضای تخت مینکوفسکی را برحسب ماتریس‌های گاما نوشت

$$i\hbar \gamma^a \frac{\partial \psi}{\partial x^a} - mc\psi = 0 \quad a = 0, 1, 2, 3 \quad (5-4)$$

که γ^a به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\gamma^0 = \beta \quad \gamma^i = \beta \alpha_i \quad i = 1, 2, 3. \quad (4-6)$$

به منظور ایجاد معادله‌ی دیراک در فضا زمان خمیده، باید از ماتریس‌های گاما در فضای مینکوفسکی شروع کنیم. این ماتریس‌ها برحسب مختصات موضعی نوشته شده‌اند بنابراین برای نوشتن آن‌ها در مختصات فراگیر باید از فرمولبندی چهارگانه استفاده کنیم

$$\gamma^\mu = e_a^\mu \gamma^a \quad (4-7)$$

ماتریس‌های گاما فراگیر جبر تعمیم‌یافته کلیفورد^{۳۸} را ارضا می‌کنند

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (4-8)$$

بنابراین می‌توان معادله دیراک تعمیم‌یافته در فضای خمیده را به صورت زیر نوشت

$$\left[ie_a^\mu \gamma^a (\partial_\mu + \Gamma_\mu) - m \right] \psi = 0. \quad (4-9)$$

۲-۴ ذره باردار در حضور میدان مغناطیسی در فضا زمان ریسمان کیهانی

مختصات موضعی را به صورت $x^\mu = (t, r, \varphi, Z)$ تعریف می‌کنیم. المان طول برای فضا زمان ریسمان کیهانی به صورت زیر داده می‌شود [۴۱]:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - \alpha^2 r^2 d\theta^2 - dz^2 \quad (4-10)$$

که α مربوط به زاویه‌ی کمبود^{۳۹} می‌باشد که $\alpha = 1 - 4\lambda$ و λ چگالی جرم خطی است. $r \geq 0$ ، $(t, Z) \in (-\infty, \infty)$ و زاویه سمتی در بازه‌ی $\varphi \in [0, 2\pi]$ تعریف می‌شود. بنابراین تانسور متریک به

^{۳۸} generalized Clifford algebra

^{۳۹} Angular Deficit

صورت $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -\alpha^2 r^2, -1)$ می باشد. M جرم ذره، Γ_μ اتصال دهنده‌ی اسپینی^{۴۰}،
 $S(r)$ پتانسیل اسکالر است که به صورت زیر تعریف می شود

$$S(r) = \frac{\eta_c}{r} + \eta_l r \quad (۱۱-۴)$$

در فضا زمان ریسمان کیهانی پتانسیل برداری مربوط به میدان مغناطیسی یکنواخت موازی با ریسمان کیهانی که به صورت $\nabla \times \vec{A} = B \cdot \hat{k}$ تعریف می شود، در پیمانه‌ی کولن خواهد شد:

$$\vec{A} = (\cdot, A_\varphi, \cdot) \quad A_\varphi = \frac{-1}{r} \alpha B \cdot r^2 \quad (۱۲-۴)$$

معادله‌ی دیراک تعمیم یافته برای هر فضا زمان خمیده‌ی دلخواهی در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی خارجی و پتانسیل اسکالر عبارتست از

$$\left[i \gamma^\mu (\nabla_\mu + ie A_\mu) - (M + S(r)) \right] \psi(t, r, \varphi, z) = 0 \quad (۱۳-۴)$$

که $\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu$ مشتق هم‌وردا می باشد. ماتریس‌ها گامای تعمیم یافته در فضا زمان خمیده را با γ^μ و در فضا زمان تخت مینکوفسکی را با $\gamma^{\bar{a}}$ نمایش می دهیم. بنابراین

$$\gamma^\mu = e^\mu_{\bar{a}} \gamma^{\bar{a}} \quad (۱۴-۴)$$

$$\gamma^\cdot = e^\cdot_{\bar{1}} \gamma^{\bar{1}} + e^\cdot_{\bar{2}} \gamma^{\bar{2}} + e^\cdot_{\bar{3}} \gamma^{\bar{3}} + e^\cdot_{\bar{4}} \gamma^{\bar{4}} = \gamma^{\bar{4}} \quad (۱۵-۴)$$

^{۴۰} Spin affine connection

$$\begin{aligned}
\gamma^{\dagger} &= e^{\frac{1}{2}} \gamma^{\bar{\cdot}} + e^{\frac{1}{\gamma}} \gamma^{\bar{1}} + e^{\frac{1}{\gamma}} \gamma^{\bar{\gamma}} + e^{\frac{1}{\gamma}} \gamma^{\bar{\gamma}} = \begin{pmatrix} \cdot & \cos \varphi \sigma_x + \sin \varphi \sigma_y \\ -\cos \varphi \sigma_x - \sin \varphi \sigma_y & \cdot \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cdot & \sigma_r \\ -\sigma_r & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & e^{-i\varphi} \\ \cdot & \cdot & e^{i\varphi} & \cdot \\ \cdot & -e^{-i\varphi} & \cdot & \cdot \\ -e^{i\varphi} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{۱۶-۴}$$

$$\begin{aligned}
\gamma^{\gamma} &= e^{\frac{\gamma}{2}} \gamma^{\bar{\cdot}} + e^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma^{\bar{1}} + e^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma^{\bar{\gamma}} + e^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma^{\bar{\gamma}} = \begin{pmatrix} \cdot & -\frac{\sin \varphi}{\alpha r} \sigma_x + \frac{\cos \varphi}{\alpha r} \sigma_y \\ \frac{\sin \varphi}{\alpha r} \sigma_x - \frac{\cos \varphi}{\alpha r} \sigma_y & \cdot \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cdot & \sigma_{\varphi} \\ -\sigma_{\varphi} & \cdot \end{pmatrix} = \frac{-i}{\alpha r} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & e^{-i\varphi} \\ \cdot & \cdot & -e^{i\varphi} & \cdot \\ \cdot & -e^{-i\varphi} & \cdot & \cdot \\ e^{i\varphi} & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{۱۷-۴}$$

$$\gamma^{\gamma} = e^{\frac{\gamma}{2}} \gamma^{\bar{\cdot}} + e^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma^{\bar{1}} + e^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma^{\bar{\gamma}} + e^{\frac{\gamma}{\gamma}} \gamma^{\bar{\gamma}} = \gamma^{\bar{\gamma}} .
\tag{۱۸-۴}$$

همچنین عبارت اتصال اسپینوری^{۴۱} به صورت زیر تعریف می شود

$$\Gamma_{\mu} = -\frac{1}{8} \omega_{\mu \bar{a} \bar{b}} \left[\gamma^{\bar{a}}, \gamma^{\bar{b}} \right]
\tag{۱۹-۴}$$

که در آن

$$\omega_{\mu \bar{a} \bar{b}} = \eta_{\bar{a} \bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma \mu}^{\nu} + \eta_{\bar{a} \bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \partial_{\mu} e_b^{\nu}
\tag{۲۰-۴}$$

^{۴۱} Spinor connection

و e_a^μ فرمول چهارگانه می‌باشد که رابطه‌ی $e_\mu^{\bar{a}} e_a^\nu = \delta_\mu^\nu$ را ارضا می‌کند، بنابراین با انتخاب

$$e_a^\mu = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cos \varphi & -\frac{\sin \varphi}{\alpha r} & \cdot \\ \cdot & \sin \varphi & \frac{\cos \varphi}{\alpha r} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \quad (21-4)$$

خواهیم داشت:

$$e_\mu^{\bar{r}} e_\tau^\nu + e_\mu^{\bar{\gamma}} e_\gamma^\nu + e_\mu^{\bar{\varphi}} e_\varphi^\nu + e_\mu^{\bar{\psi}} e_\psi^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (22-4)$$

$$e_\tau^{\bar{r}} e_\tau^\nu + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^\nu + e_\varphi^{\bar{\varphi}} e_\varphi^\nu + e_\psi^{\bar{\psi}} e_\psi^\nu = \delta_\tau^\nu \quad (23-4)$$

$$e_\tau^{\bar{r}} e_\tau^\cdot + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^\cdot + e_\varphi^{\bar{\varphi}} e_\varphi^\cdot + e_\psi^{\bar{\psi}} e_\psi^\cdot = 1 \rightarrow e_\tau^{\bar{r}} = 1 \quad (24-4)$$

$$e_\tau^{\bar{r}} e_\tau^1 + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^1 + e_\varphi^{\bar{\varphi}} e_\varphi^1 + e_\psi^{\bar{\psi}} e_\psi^1 = \delta_\tau^1 \rightarrow e_\tau^{\bar{r}} \cos \varphi + e_\tau^{\bar{\varphi}} \sin \varphi = 0 \rightarrow e_\tau^{\bar{\varphi}} = -\frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} e_\tau^{\bar{r}} \quad (25-4)$$

$$e_\tau^{\bar{r}} e_\tau^2 + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^2 + e_\varphi^{\bar{\varphi}} e_\varphi^2 + e_\psi^{\bar{\psi}} e_\psi^2 = \delta_\tau^2 \rightarrow e_\tau^{\bar{r}} \frac{-\sin \varphi}{\alpha r} + e_\tau^{\bar{\varphi}} \frac{\cos \varphi}{\alpha r} = 0 \quad (26-4)$$

$$e_\tau^{\bar{r}} e_\tau^3 + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^3 + e_\varphi^{\bar{\varphi}} e_\varphi^3 + e_\psi^{\bar{\psi}} e_\psi^3 = \delta_\tau^3 \rightarrow e_\tau^{\bar{\psi}} = 0 \quad (27-4)$$

از رابطه‌ی (26-4) و (27-4) داریم

$$e_0^{\bar{1}} = e_0^{\bar{2}} = 0 \quad (28-4)$$

$$e_\gamma^{\bar{r}} e_\tau^\nu + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^\nu + e_\gamma^{\bar{\varphi}} e_\varphi^\nu + e_\gamma^{\bar{\psi}} e_\psi^\nu = \delta_\gamma^\nu \quad (29-4)$$

$$e_\gamma^{\bar{r}} e_\tau^\cdot + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^\cdot + e_\gamma^{\bar{\varphi}} e_\varphi^\cdot + e_\gamma^{\bar{\psi}} e_\psi^\cdot = 0 \rightarrow e_\gamma^{\bar{r}} = 0 \quad (30-4)$$

$$e_\gamma^{\bar{r}} e_\tau^1 + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^1 + e_\gamma^{\bar{\varphi}} e_\varphi^1 + e_\gamma^{\bar{\psi}} e_\psi^1 = \delta_\gamma^1 \rightarrow e_\gamma^{\bar{r}} \cos \varphi + e_\gamma^{\bar{\varphi}} \sin \varphi = 1 \quad (31-4)$$

$$e_\gamma^{\bar{r}} e_\tau^2 + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^2 + e_\gamma^{\bar{\varphi}} e_\varphi^2 + e_\gamma^{\bar{\psi}} e_\psi^2 = \delta_\gamma^2 \rightarrow e_\gamma^{\bar{r}} \frac{-\sin \varphi}{\alpha r} + e_\gamma^{\bar{\varphi}} \frac{\cos \varphi}{\alpha r} = 0 \quad (32-4)$$

$$e_\gamma^{\bar{r}} e_\tau^3 + e_\gamma^{\bar{\gamma}} e_\gamma^3 + e_\gamma^{\bar{\varphi}} e_\varphi^3 + e_\gamma^{\bar{\psi}} e_\psi^3 = \delta_\gamma^3 \rightarrow e_\gamma^{\bar{\psi}} = 0 \quad (33-4)$$

از رابطه‌ی (۳۱-۴) و (۳۲-۴) داریم

$$e_{\gamma}^{\bar{1}} = \cos \varphi, \quad e_{\gamma}^{\bar{r}} = \sin \varphi \quad (۳۴-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\nu} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\nu} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\nu} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\nu} = \delta_{\gamma}^{\nu} \quad (۳۵-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} = 0 \rightarrow e_{\gamma}^{\bar{r}} = 0 \quad (۳۶-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{1}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{1}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{1}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{1}} = \delta_{\gamma}^{\dot{1}} \rightarrow e_{\gamma}^{\bar{1}} \cos \varphi + e_{\gamma}^{\bar{r}} \sin \varphi = 0 \quad (۳۷-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} = \delta_{\gamma}^{\dot{r}} \rightarrow -e_{\gamma}^{\bar{1}} \frac{\sin \varphi}{\alpha r} + e_{\gamma}^{\bar{r}} \frac{\cos \varphi}{\alpha r} = 1 \quad (۳۸-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} = \delta_{\gamma}^{\dot{r}} \rightarrow e_{\gamma}^{\bar{r}} = 0 \quad (۳۹-۴)$$

از (۳۷-۴) و (۳۸-۴) داریم

$$e_{\gamma}^{\bar{1}} = -\alpha r \sin \varphi, \quad e_{\gamma}^{\bar{r}} = \alpha r \cos \varphi \quad (۴۰-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\nu} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\nu} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\nu} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\nu} = \delta_{\gamma}^{\nu} \quad (۴۱-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} = \delta_{\gamma}^{\dot{r}} \rightarrow e_{\gamma}^{\bar{r}} = 0 \quad (۴۲-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{1}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{1}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{1}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{1}} = \delta_{\gamma}^{\dot{1}} \rightarrow e_{\gamma}^{\bar{1}} \cos \varphi + e_{\gamma}^{\bar{r}} \sin \varphi = 0 \quad (۴۳-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} = \delta_{\gamma}^{\dot{r}} \rightarrow -e_{\gamma}^{\bar{1}} \frac{\sin \varphi}{\alpha r} + e_{\gamma}^{\bar{r}} \frac{\cos \varphi}{\alpha r} = 0 \quad (۴۴-۴)$$

$$e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{1}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} + e_{\gamma}^{\bar{r}} e_{\gamma}^{\dot{r}} = \delta_{\gamma}^{\dot{r}} \rightarrow e_{\gamma}^{\bar{r}} = 1 \quad (۴۵-۴)$$

از (۴۳-۴) و (۴۴-۴) داریم

$$e_{\gamma}^{\bar{1}} = 0, \quad e_{\gamma}^{\bar{r}} = 0 \quad (۴۶-۴)$$

بنابراین

$$e_{\mu}^{\bar{a}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\alpha r \sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \alpha r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (47-4)$$

برای بدست آوردن اتصال دهنده اسپینی، ابتدا ضرایب کریستوفل را بدست می آوریم:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (\partial_{\mu} g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu}) \quad (48-4)$$

که تنها ضرایب زیر غیر صفر هستند:

$$\Gamma_{rr}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (\partial_r g_{r1} + \partial_r g_{1r} - \partial_1 g_{rr}) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} (-\alpha^2 r^2) = -\alpha^2 r \quad (49-4)$$

$$\Gamma_{1r}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_1 g_{r2} + \partial_r g_{r1} - \partial_r g_{1r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\alpha^2 r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} (-\alpha^2 r^2) = \frac{1}{r} \quad (50-4)$$

$$\Gamma_{r1}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (\partial_r g_{1r} + \partial_1 g_{r2} - \partial_r g_{r1}) = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{\alpha^2 r^2} \right) \frac{\partial}{\partial r} (-\alpha^2 r^2) = \frac{1}{r} \quad (51-4)$$

اکنون می توان به محاسبه ی اتصال دهنده اسپینی پرداخت:

$$\omega_{\mu\bar{a}\bar{b}} = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\nu} + \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \partial_{\mu} e_b^{\nu} \quad (52-4)$$

$$\omega_{\bar{a}\bar{b}} = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma}^{\nu} + \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \partial_{\sigma} e_b^{\nu} = 0 \quad (53-4)$$

به دلیل آنکه تمامی ضرایب Γ_{σ}^{ν} صفر می باشند و از طرفی هیچ کدام از درایه های e_b^{ν} دارای وابستگی

زمانی نیستند بنابراین $\partial_{\sigma} e_b^{\nu}$ آن ها صفر است پس عبارت (53-4) همواره صفر است.

$$\omega_{\bar{a}\bar{b}} = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\nu}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \partial_1 e_b^{\nu} \quad (54-4)$$

از آنجایی که $\eta_{\bar{a}\bar{c}}$ تنها عناصر روی قطر اصلی اش غیر صفر است، باید همواره $\bar{a} = \bar{c}$ باشند.

$$\omega_{\bar{b}} = \eta_{\bar{r}} e_{\bar{b}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{\bar{r}} e_{\bar{b}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{b}}^{\nu} \quad (55-4)$$

در عبارت بالا فقط به ازای $\nu=0$ جواب موجود است چون $e_{\bar{b}}^{\bar{\sigma}}$ غیر صفر می شود. چون $e_{\bar{b}}^{\nu=0}$ ها به r وابستگی ندارند در نتیجه مشتق آن ها نسبت به r صفر می شود و چون $\Gamma_{\sigma 1}^{\nu=0}$ همواره صفر است در نتیجه عبارت بالا به ازای تمام $\bar{b}$ ها صفر می باشد.

$$\omega_{\bar{b}} = 0 \quad (56-4)$$

$$\omega_{1\bar{b}} = \eta_{1\bar{r}} e_{\bar{b}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{1\bar{r}} e_{\bar{b}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{b}}^{\nu} \quad (57-4)$$

$$\omega_{1\bar{r}} = \eta_{1\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{1\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu} \quad (58-4)$$

طبق رابطه (58-4)، چون تمام عناصر ستون صفرم $e_{\bar{r}}^{\nu}$ وابسته به r نیستند در نتیجه $\partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu}$ صفر است و از طرفی در جمله ی اول $e_{\bar{r}}^{\sigma}$ وجود دارد که تنها به ازای $\sigma=0$ جواب غیر صفر دارد که اگر $\sigma=0$ باشد $\Gamma_{\sigma=0}^{\nu}$ صفر می باشد پس $\omega_{1\bar{r}} = 0$.

$$\begin{aligned} \omega_{11} &= \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\sigma} = \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\sigma} \\ &+ \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu} + \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu} \\ &+ \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{11} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu} = \eta_{11} (-\alpha r \sin \varphi) \left(-\frac{\sin \varphi}{\alpha r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \end{aligned} \quad (59-4)$$

$$+ \eta_{11} (-\alpha r \sin \varphi) \left(\frac{\sin \varphi}{\alpha r^2} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \omega_{1\bar{r}} &= \eta_{1\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + \eta_{1\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\sigma} = e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\sigma} + e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} \\ &+ e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu} + e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu} + e_{\bar{r}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma 1}^{\nu} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\nu} \\ &= (-\alpha r \sin \varphi) \left(\frac{\cos \varphi}{\alpha r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) + (-\alpha r \sin \varphi) \left(-\frac{\cos \varphi}{\alpha r^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (60-4)$$

$\Gamma_{\sigma 1}^{\nu}$ فقط به ازای $\sigma=2$ جواب غیر صفر دارد.

$$\omega_{\bar{1}\bar{r}} = \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} = e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} = 0 \quad (61-4)$$

$$\omega_{\bar{1}\bar{b}} = \eta_{\bar{1}\bar{b}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{1}\bar{b}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{b}} e_{\bar{b}}^{\bar{\nu}} \quad (62-4)$$

$$\omega_{\bar{1}\bar{r}} = \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} = 0 \quad (63-4)$$

از آنجایی که $e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}}$ تنها به ازای $\sigma = 0$ جواب غیر صفر دارد و اگر $\sigma = 0$ باشد آنگاه $\Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}}$ برابر صفر است و از طرفی ستون صفرم $e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}}$ وابستگی به r ندارند پس مشتق آن‌ها نسبت به r صفر می‌شود پس عبارت بالا همواره صفر است.

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{1}\bar{r}} &= \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} = e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} \\ &+ e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} \\ &= (\alpha r \cos \varphi) \left(-\frac{\sin \varphi}{\alpha r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) + (\alpha r \cos \varphi) \left(\frac{\sin \varphi}{\alpha r^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (64-4)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{1}\bar{r}} &= \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} = e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} \\ &+ e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} \\ &= (\alpha r \cos \varphi) \left(\frac{\cos \varphi}{\alpha r} \right) \left(\frac{1}{r} \right) + (\alpha r \cos \varphi) \left(-\frac{\cos \varphi}{\alpha r^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (65-4)$$

$$\begin{aligned} \omega_{\bar{1}\bar{r}} &= \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{1}\bar{r}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} = e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} \\ &+ e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{r}} e_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} = e_{\bar{r}}^{\bar{\sigma}} \delta_{\bar{r}}^{\bar{\nu}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} = 0 \end{aligned} \quad (66-4)$$

$$\omega_{\bar{1}\bar{b}} = \eta_{\bar{1}\bar{b}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \Gamma_{\sigma_1}^{\bar{\nu}} + \eta_{\bar{1}\bar{b}} e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}} \partial_{\bar{b}} e_{\bar{b}}^{\bar{\nu}} = 0 \quad (67-4)$$

عبارت بالا به ازای تمام $\bar{b}$ ها صفر است زیرا $e_{\bar{v}}^{\bar{\sigma}}$ یعنی تمام درایه‌های سطر سوم که تمام درایه‌های این سطر صفر است به جز حالتی که $\nu = 1$ باشد که اگر $\nu = 1$ باشد ضریب کریستوفل $\Gamma_{\sigma_1}^{\nu=1}$ همواره صفر است و از طرفی در جمله‌ی دوم مشتق نسبت به r از سطر یکم $e_{\bar{b}}^{\nu=1}$ ظاهر می‌شود که تمام

درایه‌های سطر یکم وابستگی به r ندارند پس مشتق آن‌ها صفر است. در نتیجه عبارت بالا همواره صفر است.

$$\omega_{\bar{a}\bar{b}} = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \partial_{\tau} e_b^{\nu} \quad (68-4)$$

$$\omega_{\tau\bar{b}} = \eta_{\tau\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + \eta_{\tau\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_b^{\nu} = 0 \quad (69-4)$$

از آنجایی که در هر دو جمله‌ی بالا $e_{\bar{b}}^{\bar{c}}$ ظاهر شده است در نتیجه این عبارت تنها به ازای $\nu=0$ غیر صفر است و اگر $\nu=0$ آنگاه ضریب $\Gamma_{\sigma\tau}^{\nu=0}$ صفر است و همچنین مشتق نسبت به φ از تمام درایه‌های $e_b^{\nu=0}$ (سطر صفرم)، صفر است پس عبارت بالا همواره صفر است.

$$\omega_{\tau\bar{b}} = \eta_{\tau\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + \eta_{\tau\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_b^{\nu} \quad (70-4)$$

$$\omega_{\tau\bar{c}} = e_{\bar{c}}^{\bar{c}} e_b^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_b^{\nu} = 0 \quad (71-4)$$

در عبارت بالا $e_{\bar{c}}^{\bar{c}}$ تنها به ازای $\sigma=0$ غیر صفر است که در این صورت $\Gamma_{\sigma=0}^{\nu}$ صفر می‌شود و جمله‌ی دوم مشتق‌گیری نسبت به φ از تمام درایه‌های ستون صفرم است که برابر صفر می‌شود در نتیجه عبارت بالا همواره صفر است.

$$\begin{aligned} \omega_{\tau\tau} &= e_{\bar{c}}^{\bar{c}} e_{\bar{c}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_{\bar{c}}^{\nu} = e_{\bar{c}}^{\bar{c}} e_{\bar{c}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_{\bar{c}}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} e_{\bar{c}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_{\bar{c}}^{\nu} \\ &+ e_{\bar{c}}^{\bar{c}} e_{\bar{c}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_{\bar{c}}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} e_{\bar{c}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{c}}^{\bar{c}} \partial_{\tau} e_{\bar{c}}^{\nu} \\ &= \cos \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{\alpha r} \right) (-\alpha^2 r) + \cos \varphi (-\sin \varphi) + (-\alpha r \sin \varphi) \cos \varphi \frac{1}{r} \\ &+ (-\alpha r \sin \varphi) \left(-\frac{\cos \varphi}{\alpha r} \right) \\ &= \alpha \cos \varphi \sin \varphi - \cos \varphi \sin \varphi - \alpha \cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi = 0 \end{aligned} \quad (72-4)$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\tau\bar{\tau}} &= e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} = e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} \\
&+ e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} \\
&= \cos \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\alpha r} \right) (-\alpha^{\tau} r) + \cos \varphi (\cos \varphi) + (-\alpha r \sin \varphi) \sin \varphi \frac{1}{r} \\
&+ (-\alpha r \sin \varphi) \left(-\frac{\sin \varphi}{\alpha r} \right) \\
&= -\alpha \cos^{\tau} \varphi + \cos^{\tau} \varphi - \alpha \sin^{\tau} \varphi + \sin^{\tau} \varphi = -\alpha + 1
\end{aligned} \tag{۷۳-۴}$$

$$\omega_{\tau\bar{\tau}} = e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} = 0 \tag{۷۴-۴}$$

از آنجایی که $e_{\bar{\tau}}^{\sigma}$ تنها به ازای $\sigma = 3$ غیر صفر است و چون $\Gamma_{\sigma=3\tau}^{\nu}$ نیز همواره صفر است و از طرفی مشتق ∂_{τ} برای عبارت $e_{\bar{\tau}}^{\nu}$ که ستون سوم می باشد همواره صفر است پس عبارت بالا همواره صفر است.

$$\omega_{\tau\bar{b}} = \eta_{\bar{\tau}\bar{b}} e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{b}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + \eta_{\bar{\tau}\bar{b}} e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{b}}^{\nu} \tag{۷۵-۴}$$

$$\omega_{\tau\bar{\tau}} = e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} = 0 \tag{۷۶-۴}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\tau\bar{\tau}} &= e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} = e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} \\
&+ e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} e_{\bar{\tau}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\tau}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\nu}} \partial_{\tau} e_{\bar{\tau}}^{\nu} \\
&= \sin \varphi \left(-\frac{\sin \varphi}{\alpha r} \right) (-\alpha^{\tau} r) + \sin \varphi (-\sin \varphi) + (\alpha r \cos \varphi) \cos \varphi \frac{1}{r} \\
&+ (\alpha r \cos \varphi) \left(-\frac{\cos \varphi}{\alpha r} \right) \\
&= \alpha \sin^{\tau} \varphi - \sin^{\tau} \varphi + \alpha \cos^{\tau} \varphi - \cos^{\tau} \varphi = \alpha - 1
\end{aligned} \tag{۷۷-۴}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\gamma\bar{\gamma}\bar{\gamma}} &= e_{\bar{\nu}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\gamma}} \partial_{\gamma} e_{\bar{\gamma}}^{\nu} = e_{\bar{\gamma}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\cdot} + e_{\bar{\gamma}}^{\bar{\gamma}} \partial_{\gamma} e_{\bar{\gamma}}^{\cdot} + e_{\gamma}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\gamma} + e_{\gamma}^{\bar{\gamma}} \partial_{\gamma} e_{\bar{\gamma}}^{\gamma} \\
&\quad + e_{\gamma}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\gamma} + e_{\gamma}^{\bar{\gamma}} \partial_{\gamma} e_{\bar{\gamma}}^{\gamma} + e_{\gamma}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\gamma} + e_{\gamma}^{\bar{\gamma}} \partial_{\gamma} e_{\bar{\gamma}}^{\gamma} \\
&= \sin \varphi \left(\frac{\cos \varphi}{\alpha r} \right) (-\alpha^{\gamma} r) + \sin \varphi (\cos \varphi) + (\alpha r \cos \varphi) \sin \varphi \frac{1}{r} \\
&\quad + (\alpha r \cos \varphi) \left(-\frac{\sin \varphi}{\alpha r} \right) \\
&= -\alpha \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi \cos \varphi + \alpha \sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi = 0.
\end{aligned} \tag{۷۸-۴}$$

$$\omega_{\gamma\bar{\gamma}\bar{\gamma}} = e_{\bar{\nu}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{\gamma}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\nu} + e_{\bar{\nu}}^{\bar{\gamma}} \partial_{\gamma} e_{\bar{\gamma}}^{\nu} = 0. \tag{۷۹-۴}$$

$$\omega_{\gamma\bar{\gamma}\bar{b}} = \eta_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}} e_{\bar{\nu}}^{\bar{\gamma}} e_{\bar{b}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\nu} + \eta_{\bar{\gamma}\bar{\gamma}} e_{\bar{\nu}}^{\bar{\gamma}} \partial_{\gamma} e_{\bar{b}}^{\nu} = 0. \tag{۸۰-۴}$$

عبارت بالا همواره صفر است.

$$\omega_{\gamma\bar{a}\bar{b}} = \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{\nu}}^{\bar{c}} e_{\bar{b}}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\gamma}^{\nu} + \eta_{\bar{a}\bar{c}} e_{\bar{\nu}}^{\bar{c}} \partial_{\gamma} e_{\bar{b}}^{\nu} = 0. \tag{۸۱-۴}$$

در عبارت بالا چون تمامی ضرائب کریستوفل $\Gamma_{\sigma\gamma}^{\nu}$ صفر هستند و از طرفی هیچ کدام از درایه‌های $e_{\bar{b}}^{\nu}$ وابستگی به Z ندارند پس چون مشتق آن‌ها نسبت به Z صفر می‌شود بنابراین همواره عبارت بالا برای تمامی $\bar{a}, \bar{b}$ ها مختلف صفر است.

با داشتن حاصل عبارت‌های اتصال‌دهنده اسپینی به سادگی می‌توان اتصال اسپینوری را با استفاده از رابطه‌ی (۱۹-۴) محاسبه کنیم

$$\Gamma_{\cdot} = -\frac{1}{\lambda} \omega_{\cdot\bar{a}\bar{b}} [\gamma^{\bar{a}}, \gamma^{\bar{b}}] = 0. \tag{۸۲-۴}$$

$$\Gamma_{\gamma} = -\frac{1}{\lambda} \omega_{\gamma\bar{a}\bar{b}} [\gamma^{\bar{a}}, \gamma^{\bar{b}}] = 0. \tag{۸۳-۴}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\varphi} = \Gamma_{\Upsilon} &= -\frac{1}{\lambda} \omega_{\Upsilon \bar{a} \bar{b}} [\gamma^{\bar{a}}, \gamma^{\bar{b}}] = -\frac{1}{\lambda} \Upsilon (-\alpha + 1) [\gamma^{\bar{1}}, \gamma^{\bar{2}}] = -\frac{1}{\Upsilon} (-\alpha + 1) \left\{ \begin{pmatrix} \cdot & \sigma^{\bar{1}} \\ -\sigma^{\bar{1}} & \cdot \end{pmatrix} \right. \\
&\times \begin{pmatrix} \cdot & \sigma^{\bar{2}} \\ -\sigma^{\bar{2}} & \cdot \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cdot & \sigma^{\bar{2}} \\ -\sigma^{\bar{2}} & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot & \sigma^{\bar{1}} \\ -\sigma^{\bar{1}} & \cdot \end{pmatrix} \left. \right\} = -\frac{1}{\Upsilon} (-\alpha + 1) \begin{pmatrix} [\sigma^{\bar{2}}, \sigma^{\bar{1}}] & \cdot \\ \cdot & [\sigma^{\bar{2}}, \sigma^{\bar{1}}] \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\Upsilon} (-\alpha + 1) \begin{pmatrix} -\Upsilon i \sigma^{\bar{2}} & \cdot \\ \cdot & -\Upsilon i \sigma^{\bar{1}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Upsilon} i (1 - \alpha) \Sigma^{\bar{2}}
\end{aligned}$$

(۸۴-۴)

که در آن

$$\Sigma^{\bar{2}} = \begin{pmatrix} \sigma^{\bar{2}} & \cdot \\ \cdot & \sigma^{\bar{1}} \end{pmatrix}$$

(۸۵-۴)

$$\Gamma_{\Upsilon} = -\frac{1}{\lambda} \omega_{\Upsilon \bar{a} \bar{b}} [\gamma^{\bar{a}}, \gamma^{\bar{b}}] = \cdot$$

(۸۶-۴)

هامیتونی دیراک در این مسئله به صورت

$$\hat{H} = i \gamma^r \partial_r + i \gamma^{\varphi} (\partial_{\varphi} + \Gamma_{\varphi} + ieA_{\varphi}) + i \gamma^z \partial_z - (M + S(r))$$

(۸۷-۴)

می باشد و روابط جابجایی $[\hat{H}, \hat{P}_{\Upsilon}] = [\hat{H}, \hat{J}_{\Upsilon}] = 0$ را ارضا می کند. تقارن دورانی منجر به

$[\hat{H}, \hat{J}_{\Upsilon}] = 0$ می شود که J_{Υ} عملگر تکانه‌ی زاویه‌ای در راستای Z است،

همچنین $\hat{J}_{\Upsilon} = \hat{L}_{\Upsilon} + \hat{S}_{\Upsilon} = -i \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{\Upsilon} \Sigma^{\bar{2}}$ می باشد و معادلات ویژه مقداری زیر

برقرار است:

$$\hat{H} \psi = E \psi, \quad \hat{J}_{\Upsilon} \psi = j \psi, \quad P_{\Upsilon} \psi = k \psi$$

(۸۸-۴)

که $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ و $j = m + \frac{1}{2}$ و k کل فضا را جاروب می کند.

در نتیجه می توان تابع موجی به شکل زیر حدس زد:

$$\psi(t, r, \varphi, z) = \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ G_+(r) \\ iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (۸۹-۴)$$

رابطه ی (۱۳-۴) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$\left[i\gamma^t \partial_t + i\gamma^r \partial_r + i\gamma^\varphi (\partial_\varphi + \Gamma_\varphi + ieA_\varphi) + i\gamma^z \partial_z - (M + S(r)) \right] \psi(t, r, \varphi, z) = 0. \quad (۹۰-۴)$$

بنابراین با توجه به رابطه ی (۸۹-۴) داریم:

$$\begin{aligned}
& \gamma^t E \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ G_+(r) \\ iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} + i\gamma^r \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \\
& \times \begin{pmatrix} \partial_r F_+(r) - \frac{1}{r} F_+(r) \\ -ie^{i\varphi} \partial_r F_-(r) + \frac{i}{r} e^{i\varphi} F_-(r) \\ \partial_r G_+(r) - \frac{1}{r} G_+(r) \\ ie^{i\varphi} \partial_r G_-(r) - \frac{i}{r} e^{i\varphi} G_-(r) \end{pmatrix} + i\gamma^\varphi \left\{ \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \begin{pmatrix} imF_+(r) \\ (m+1)F_-(r)e^{i\varphi} \\ imG_+(r) \\ -(m+1)G_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \right. \\
& + \frac{i}{r} (1-\alpha) \Sigma^{\bar{r}} \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ G_+(r) \\ iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} - ie \frac{1}{r} \alpha B_r \gamma^r \\
& \times \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ G_+(r) \\ iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \left. \right\} + i\gamma^z (ik) \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \\
& \times \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ G_+(r) \\ iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} - (M + S(r)) \frac{1}{\sqrt{r}} \exp(-iEt + im\varphi + ikz) \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ G_+(r) \\ iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} = .
\end{aligned}$$

(91-4)

$$\begin{aligned}
& E \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ -G_+(r) \\ -iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} i\partial_r G_-(r) - \frac{i}{r}G_-(r) \\ e^{i\varphi}\partial_r G_+(r) - \frac{1}{r}e^{i\varphi}G_+(r) \\ i\partial_r F_-(r) - \frac{i}{r}F_-(r) \\ -e^{i\varphi}\partial_r F_+(r) + \frac{1}{r}e^{i\varphi}F_+(r) \end{pmatrix} + \frac{1}{\alpha r} \begin{pmatrix} -(m+1)G_-(r) \\ -imG_+(r)e^{i\varphi} \\ -(m+1)F_-(r) \\ imF_+(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\
& + \frac{i(1-\alpha)}{r\alpha r} \begin{pmatrix} -iG_-(r) \\ -G_+(r)e^{i\varphi} \\ -iF_-(r) \\ e^{i\varphi}F_+(r) \end{pmatrix} - ie\frac{1}{r}B \cdot r \begin{pmatrix} iG_-(r) \\ -e^{i\varphi}G_+(r) \\ iF_-(r) \\ e^{i\varphi}F_+(r) \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} G_+(r) \\ -iG_-(r)e^{i\varphi} \\ -F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \\
& -(M+S(r)) \begin{pmatrix} F_+(r) \\ -iF_-(r)e^{i\varphi} \\ G_+(r) \\ iG_-(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix} = 0.
\end{aligned}
\tag{۹۲-۴}$$

از رابطه‌ی (۹۲-۴) مجموعه روابط زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
& E F_+(r) - \partial_r G_-(r) - \frac{m+1}{\alpha r} G_-(r) + \frac{1}{r\alpha r} G_-(r) + \frac{eB \cdot r}{r} G_-(r) - k G_+(r) \\
& -(M+S(r)) F_+(r) = 0.
\end{aligned}
\tag{۹۳-۴}$$

$$\begin{aligned}
& -E F_-(r) + \partial_r G_+(r) - \frac{m}{\alpha r} G_+(r) - \frac{1}{r\alpha r} G_+(r) + \frac{eB \cdot r}{r} G_+(r) + k G_-(r) \\
& +(M+S(r)) F_-(r) = 0.
\end{aligned}
\tag{۹۴-۴}$$

$$\begin{aligned}
& -E G_+(r) - \partial_r F_-(r) - \frac{m+1}{\alpha r} F_-(r) + \frac{1}{r\alpha r} F_-(r) + \frac{eB \cdot r}{r} F_-(r) + k F_+(r) \\
& -(M+S(r)) G_+(r) = 0.
\end{aligned}
\tag{۹۵-۴}$$

$$-E G_-(r) - \partial_r F_+(r) + \frac{m}{\alpha r} F_+(r) + \frac{1}{2\alpha r} F_+(r) - \frac{eB \cdot r}{2} F_+(r) + k F_-(r) - (M + S(r)) G_-(r) = 0 \quad (96-4)$$

از رابطه‌ی (۹۳-۴) داریم:

$$G_+(r) = \frac{E}{k} F_+(r) - \frac{1}{k} \partial_r G_-(r) - \frac{m+1}{k\alpha r} G_-(r) + \frac{1}{2k\alpha r} G_-(r) + \frac{eB \cdot r}{2k} G_-(r) - \frac{1}{k} (M + S(r)) F_+(r) \quad (97-4)$$

همچنین از رابطه‌ی (۹۶-۴) خواهیم داشت:

$$F_-(r) = \frac{E}{k} G_-(r) + \frac{1}{k} \partial_r F_+(r) - \frac{m}{k\alpha r} F_+(r) - \frac{1}{2k\alpha r} F_+(r) + \frac{eB \cdot r}{2k} F_+(r) + \frac{1}{k} (M + S(r)) G_-(r) \quad (98-4)$$

را بدست می‌آوریم.

با جایگذاری روابط (۹۷-۴) و (۹۸-۴) در معادله‌ی (۹۴-۴) خواهیم داشت:

$$\frac{d^2}{dr^2} G_-(r) + \left\{ E^2 - k^2 + \frac{1}{r^2} \left(-\frac{m}{\alpha} - \frac{1}{2\alpha} - \frac{m(m+1)}{\alpha^2} - \frac{1}{4\alpha^2} \right) - \frac{e^2 B \cdot r^2}{4} - \frac{eB \cdot r}{2} + \frac{eB \cdot m}{\alpha} + \frac{eB \cdot r}{2\alpha} - (M + S(r))^2 \right\} G_-(r) + F_+(r) \frac{dS(r)}{dr} = 0 \quad (99-4)$$

همچنین با جایگذاری این روابط در معادله‌ی (۹۵-۴) داریم:

$$\frac{d^2}{dr^2} F_+(r) + \left\{ E^2 - k^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{m}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha} - \frac{m(m+1)}{\alpha^2} - \frac{1}{4\alpha^2} \right) - \frac{e^2 B \cdot r^2}{4} + \frac{eB \cdot r}{2} + \frac{eB \cdot m}{\alpha} + \frac{eB \cdot r}{2\alpha} - (M + S(r))^2 \right\} F_+(r) + G_-(r) \frac{dS(r)}{dr} = 0 \quad (100-4)$$

با در نظر گرفتن $\omega = \frac{eB}{2M}$ و $j = m + \frac{1}{2}$ معادلات (۴-۱۰۰) و (۴-۹۹) به ترتیب به شکل زیر

تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} F_+(r) + \left\{ E^2 - k^2 - \frac{j(j-\alpha)}{\alpha^2 r^2} - M^2 \omega^2 r^2 + 2M \omega \left(\frac{j}{\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - (M + S(r))^2 \right\} F_+(r) + G_-(r) \frac{dS(r)}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (۴-۱۰۱)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dr^2} G_-(r) + \left\{ E^2 - k^2 - \frac{j(j+\alpha)}{\alpha^2 r^2} - M^2 \omega^2 r^2 + 2M \omega \left(\frac{j}{\alpha} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - (M + S(r))^2 \right\} G_-(r) + F_+(r) \frac{dS(r)}{dr} = 0. \end{aligned} \quad (۴-۱۰۲)$$

برای سادگی $F_+(r) = \varpi$ و $G_-(r) = \chi$ در نظر می‌گیریم.

معادلات (۴-۱۰۱) و (۴-۱۰۲) معادلات جفت شده‌ی مرتبه دو هستند که می‌توان این معادلات را به

صورت زیر نوشت:

$$\hat{K} \begin{pmatrix} \varpi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (۴-۱۰۳)$$

که عملگر $\hat{K}$ یک ماتریس 2×2 می‌باشد:

$$\hat{K} = D(r)I + A(r)\sigma^z + S'(r)\sigma^x \quad (۴-۱۰۴)$$

$$D(r) = \frac{d^2}{dr^2} - \frac{j^2}{\alpha^2 r^2} + E^2 - k^2 + 2M \omega \frac{j}{\alpha} - M^2 \omega^2 r^2 - (M + S(r))^2 \quad (۴-۱۰۵)$$

$$A(r) = \frac{j}{\alpha r} + M \omega \quad (۴-۱۰۶)$$

$$S'(r) = -\frac{\eta_c}{r} + \eta_l \quad (۴-۱۰۷)$$

که $D(r)$ مربوط به آن بخش از عملگر است که در هر دو معادله یکسان ظاهر شده است به همین دلیل به منظور ساختن شکل ماتریسی آن در ماتریس واحد ضرب شده است. $A(r)$ مربوط به قسمتی است که عملگر در دو معادله تنها در یک علامت منفی فرق دارد به همین دلیل در ماتریس σ^z ضرب شده است و $S'(r)$ مربوط به آن قسمت از عملگر است که سبب شده توابع موجود در معادلات جابجا شوند و جفت شدگی دو معادله ایجاد شود بنابراین در ماتریس σ^x ضرب شده تا شکل ماتریسی مناسب عملگر ایجاد شود.

عملگر $\hat{K}$ را می توان با استفاده از یک ماتریس متعامد و واحد 2×2 که با $\hat{R}$ نمایش می دهیم قطری کرد

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (108-4)$$

$$\hat{R} \hat{K} \hat{R}^{-1} \hat{R} \begin{pmatrix} \varpi \\ \chi \end{pmatrix} = 0. \quad (109-4)$$

بنابراین

$$\hat{K}_\theta = \hat{R} \hat{K} \hat{R}^{-1} = D(r)I + A(r) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} + S'(r) \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix} \quad (110-4)$$

در نهایت به منظور آنکه این عملگر دیفرانسیلی قطری شود باید شرایط زیر برقرار باشد

$$-A(r) \sin \theta + S'(r) \cos \theta = 0. \quad (111-4)$$

و

$$-\left(\frac{j}{\alpha r^2} + M \omega\right) \sin \theta + \left(\eta_l - \frac{\eta_c}{r^2}\right) \cos \theta = 0. \quad (112-4)$$

که

$$\frac{1}{r^2} \left(-\frac{j}{\alpha} \sin \theta - \eta_c \cos \theta\right) - M \omega \sin \theta + \eta_l \cos \theta = 0. \quad (113-4)$$

که سرانجام منجر به شرایط زیر می شود

$$\eta_c = -\frac{j}{\alpha} \tan \theta \quad (114-4)$$

$$\eta_l = M \omega \tan \theta \quad (115-4)$$

$$\omega = \frac{-\eta_l j}{M \eta_c \alpha} \quad (116-4)$$

با استفاده از معادله‌ی (۱۱۴-۴) می‌توان رابطه زیر را بدست آورد

$$-\frac{j}{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta}} = \eta_c \quad (117-4)$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\alpha \eta_c}{\sqrt{j^2 + \alpha^2 \eta_c^2}} \quad (118-4)$$

$$\cos \theta = \pm \frac{j}{\sqrt{j^2 + \alpha^2 \eta_c^2}} \quad (119-4)$$

که با توجه به رابطه (۱۱۴-۴) باید یکی از دو عبارت (۱۱۸-۴) و (۱۱۹-۴) دارای علامت منفی باشند که علامت منفی را برای عبارت (۱۱۸-۴) برمی‌گزینیم.

این به معنای آنست که برای از بین بردن جفت‌شدگی معادلات بدست‌آمده باید شرایط بالا اعمال شود. با قبول شرایط بدست آمده تحلیل کوانتومی حرکت ذره باردار آسان می‌شود.

بنابراین به معادلات زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varpi'(r)}{dr^2} + \left[E^2 - M^2 - k^2 + 2M \omega \frac{j}{\alpha} - 2\eta_c \eta_l - \gamma \frac{\eta_l}{\eta_c} - \frac{\gamma(\gamma-1)}{r^2} \right. \\ \left. - \frac{2M \eta_c}{r} - 2M \eta_c r - \gamma^2 \frac{\eta_l^2}{\eta_c^2} r^2 \right] \varpi'(r) = 0 \end{aligned} \quad (120-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \chi'(r)}{dr^2} + \left[E^2 - M^2 - k^2 + 2M \omega \frac{j}{\alpha} - 2\eta_c \eta_l + \gamma \frac{\eta_l}{\eta_c} - \frac{\gamma(\gamma+1)}{r^2} \right. \\ \left. - \frac{2M \eta_c}{r} - 2M \eta_c r - \gamma^2 \frac{\eta_l^2}{\eta_c^2} r^2 \right] \chi'(r) = 0 \end{aligned} \quad (121-4)$$

که در آن

$$\gamma = \frac{1}{\alpha} \sqrt{j^{\gamma} + \alpha^{\gamma} \eta_c^{\gamma}} \quad (122-4)$$

$$\begin{pmatrix} \varpi'(r) \\ \chi'(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi(r) \\ \chi(r) \end{pmatrix} \quad (123-4)$$

می‌باشد.

برای حل معادله‌ی (۱۲۰-۴) و (۱۲۱-۴) از روش حدسی زیر استفاده می‌کنیم

$$U_{\nu,\ell}(r) = f_{\nu}(r) e^{g_{\ell}(r)} \quad (124-4)$$

که

$$f_{\nu}(r) = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ \prod_{i=1}^{\nu} (r - \alpha_i^{\nu}) & \nu \geq 1 \end{cases} \quad (125-4)$$

برای $\nu = 0$ ، $U_{\cdot,\ell}(r) = e^{g_{\ell}(r)}$ می‌باشد بنابراین

$$U_{\cdot,\ell}''(r) + \left[-g_{\ell}''(r) - g_{\ell}'(r)^{\gamma} \right] U_{\cdot,\ell}(r) = 0. \quad (126-4)$$

اگر حلی به صورت زیر پیشنهاد کنیم

$$g = \varepsilon \ln r + \beta r^{\gamma} + \tau r \quad (127-4)$$

خواهیم داشت

$$U'' + \left\{ \frac{1}{r^{\gamma}} (\varepsilon - \varepsilon^{\gamma}) + \frac{1}{r} (-2\varepsilon\tau) + r(-4\beta\tau) + r^{\gamma}(-4\beta^{\gamma}) - 2\beta - \tau^{\gamma} - 4\varepsilon\beta \right\} U = 0. \quad (128-4)$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی (۱۲۱-۴) و (۱۲۸-۴) داریم

$$\varepsilon - \varepsilon^\gamma = -\gamma(\gamma + 1) \quad (129-4)$$

$$-2\varepsilon\tau = -2M\eta_c \quad (130-4)$$

$$-4\beta\tau = -2M\eta_l \quad (131-4)$$

$$-4\beta^\gamma = -\gamma^\gamma \frac{\eta_l^\gamma}{\eta_c^\gamma} \quad (132-4)$$

$$-2\beta - \tau^\gamma - 4\varepsilon\beta = E^\gamma - M^\gamma - k^\gamma + 2M\omega \frac{j}{\alpha} - 2\eta_c\eta_l + \gamma \frac{\eta_l}{\eta_c} \quad (133-4)$$

در نتیجه با توجه به روابط به دست آمده در بالا جواب های زیر محاسبه می گردد

$$\varepsilon = \gamma \quad (134-4)$$

$$\tau = \frac{M\eta_c}{\gamma} \quad (135-4)$$

$$\beta = \pm \frac{\gamma\eta_l}{2\eta_c} \quad (136-4)$$

$$E = \pm \left\{ k^\gamma - M^\gamma - 2M\omega \frac{j}{\alpha} + 2\eta_c\eta_l + \eta_l \left(\frac{\gamma}{\eta_c} - \frac{2\gamma^\gamma}{\eta_c} - \frac{M^\gamma\eta_c^\gamma}{\gamma^\gamma\eta_l} \right) \right\}^{\frac{1}{\gamma}} \quad (137-4)$$

که می توان رابطه (137-4) را به عنوان طیف انرژی برهمکنش بین کوارک ها در فضا زمان خمیده در نظر گرفت.

بحث و نتیجه‌گیری

رفتار دینامیکی ذرات در برهمکنش با فضا زمان‌های خمیده گوناگون مانند ریسمان کیهانی، ریسمان کیهانی دوار و فریدمن-روبرتسون-واکر بررسی شد. طیف انرژی ذرات در فضا زمان خمیده، وابسته به ویژگی‌های فضا زمان می‌باشد که این وابستگی در فضا زمان ریسمان کیهانی به پارامتری است که زاویه‌ی کمبود را تعریف می‌کند بنابراین شیف انرژی ناشی از خصوصیت‌های کلی فضا زمان ریسمان کیهانی است. ترازهای انرژی لاندو برای ذره واقع در فضا زمان ریسمان کیهانی دوار بدست آمد و دیده شد که این ترازها نسبت به طیف انرژی در فضا زمان مینکوفسکی شیف پیدا می‌کنند، همچنین تأثیر خمیدگی فضا زمان در تابع موج ذره مورد نظر مشاهده شد. در ادامه اثر میدان گرانشی بر برهمکنش بین کوارک‌ها به کمک معادله دیراک مورد بررسی قرار گرفت و وابستگی تراز انرژی ذره به ویژگی‌های فضا زمان به وضوح رؤیت شد. بنابراین تمامی ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی در حضور هر نوع پتانسیلی در فضا زمان خمیده، متفاوت از فضا زمان تخت رفتار می‌کنند که این بیانگر اهمیت و تأثیر گرانش بر جهان پیرامون ماست. همچنین مطالعه‌ی چنین سیستم‌هایی می‌تواند راه‌گشایی بر مسئله ترکیب مکانیک کوانتومی و نسبیت عام باشد.

- [١] J. Audretsch and G. Schafer, *Gen. Rel. Grav.* ٩, ٢٤٣ (١٩٧٨).
- [٢] L. Parker, *Phys. Rev. Lett.* ٤٤, ١٥٥٩ (١٩٨٠).
- [٣] G. A. Marques, V. B. Bezerra, *Class.Quant.Grav.* ١٩, ٩٨٥-٩٩٦, (٢٠٠٢).
- [٤] A. W. Overhauser and R. Colella, *Phys. Rev. Lett.* ٣٣, ١٢٣٧, (١٩٧٤).
- [٥] R. Colella, A. W. Overhauser and S. A. Werner, *Phys. Rev. Lett.* ٣٤, ١٤٧٢, (١٩٧٥).
- [٦] D. V. Ahluwalia and C. Burgard, *Gen. Rel. Grav.* ٢٨, ١١٦١-١١٧٠, (١٩٩٦).
- [٧] S. M. Carroll, "Spacetime and geometry: an introduction to general relativity".
Addison Wesley Longman, Incorporated, (٢٠٠٤).
- [٨] D.M. Sjøstrøm, "Bosons and Fermions in Curved Spacetime", Norwegian University
of Science and Technology, Department of Physics (٢٠١٣).
- [٩] Dong-Sheng Sun, Yuan You, Fa-Lin Lu, Chang-Yuan Chen and Shi-Hai Dong,
Phys. Scr., ٨٩, ٠٤٥٠٠٢, (٢٠١٤).
- [١٠] H. Hassanabadi, A.N. Ikot and S. Zarrinkamar, *Acta Physica Polonica A*, ١٢٦, ٦٤٧-
٦٥١, (٢٠١٤).
- [١١] S. W. Qian, B.W. Huang, D. Y. Wang and Z. Y. Gu, *Commun. Theor. Phys*,
٣٨, ٢, ١٣٩-١٤٢, (٢٠٠٢).
- [١٢] G. G. Blado, *Theoretica Chimica Acta*, vol. ٩٤, ٥٣-٧٧, (١٩٩٦).
- [١٣] C. Y. Chen, F. L. Lu, D. S. Sun and S. H. Dong, *Chin. Phys. B*, ٢٢, ١٠, ١٠٠٣٠٢,
(٢٠١٣).
- [١٤] A. Arda and R. Sever, *J. Math. Chem.* ٥٠, ١٤٨٤ (٢٠١٢).
- [١٥] X. Q. Hu, G. Luo, Z. M. Wu, L. B. Niu and Y. Ma, *Commun. Theor. Phys.* ٥٣,
٢٤٢-٢٤٦, (٢٠١٠).
- [١٦] M. R. Anderson, "The mathematical theory of cosmic strings", IOP Publishing Ltd
(٢٠٠٣).
- [١٧] D. McMahon, "Quantum Field Theory Demystified", The McGraw-Hill
Companies, (٢٠٠٨).
- [١٨] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, "Special Functions of Mathematical Physics",
Birkhauser, Basel, (١٩٨٨).
- [١٩] S. H. Dong, Z.Q. Ma, and G. Esposito, *Foundations of Physics Letters*, ١٢, ٥, ٤٤٥-
٤٧٤, (١٩٩٩).

- [٢٠] S. H. Dong, *Int. J. Theor. Phys*, ٤١, ٨٩, (٢٠٠٢).
- [٢١] Chang-Yuan Chen, Yuan Youa, Xiao-Hua Wang and Shi-Hai Dong, *Physics Letters A*, ٣٧٧, ١٥٢١-١٥٢٥, (٢٠١٣).
- [٢٢] M.V. Carpio-Bernido, C.C. Bernido, *Phys. Lett. A*, ١٣٤, ٣٩٥, (١٩٨٩).
- [٢٣] A. Arda and R. Sever, *J. Math. Chem*, ٥٠, ١٤٨٤, (٢٠١٢).
- [٢٤] M. Victoria Carpio-Bernido and Christopher C. Bernido, *Physics Letters A*, ١٣٧, (١٩٨٩).
- [٢٥] V. B. Bezerra, *J. Math. Phys.* ٣٨, ٢٥٥٣, (١٩٩٧).
- [٢٦] A. D. Alhaidari, *Found. Phys. Lett*, ١٨, ٦٥١-٦٦٤, (٢٠٠٥).
- [٢٧] C. R. Muniz, V. B. Bezerra and M. S. Cunha, *Ann. Phys.* ٣٥٠, ١٠٥-١١١, (٢٠١٤).
- [٢٨] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D*, ٤٥, ٢٧٩٤, (١٩٩٢).
- [٢٩] D. V. Gal'tsov and P. S. Letelier, *Phys. Rev. D*, ٤٧, ٤٢٧٣, (١٩٩٣).
- [٣٠] S. H. Dong, *Int. J. Theor. Phys*, ٣٩, ٤, ١١١٩, (٢٠٠٠).
- [٣١] S. H. Dong, *Foundation of physics letters*, ١٥, ٣٨٥, (٢٠٠٢).
- [٣٢] H. Hassanabadi and A. A. Rajabi, *Few-Body Syst*, ٤١, ٢٠١-٢١٠, (٢٠٠٧).
- [٣٣] R. Safari, Master thesis, "Coherent States and the Semi-Classical Einstein Equation", Department of physics, University of Hamburg, (٢٠١٢).
- [٣٤] G. de A. Marques and V. B. Bezerra, *Phys.Rev. D*, ٦٦, ١٠٥٠١١, (٢٠٠٢).
- [٣٥] E. R. Figueiredo Medeiros and E. R. Bezerra de Mello, *Eur. Phys. J. C*, ٧٢, ٢٠٥١, (٢٠١٢).
- [٣٦] M. R. Setare and E. Karimi, *Phys. Scr.* ٧٥, ٩٠-٩٣, (٢٠٠٧).
- [٣٧] M. E. de Souza, *Nuclear Physics B Proceedings Supplement* ٠٠, ١-٤, (٢٠١٢).
- [٣٨] R. L. Hall, N. Saad, and K. D. Sen, *J.M.Phys* ٥١, ٠٢٢١٠٧, (٢٠١٠).
- [٣٩] S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, B. H. Yazarloo and H. Hassanabadi, *Few-Body Syst*, ٥٤, (٢٠١٢).
- [٤٠] F. Melia, arXiv:١٢٠٧.١٣٣٢٧٢.
- [٤١] E. R. Figueiredo Medeiros and E. R. Bezerra de Mello, *Eur.Phys.J.C*, ٧٢, ٢٠٥١, (٢٠١٢).

Abstract

The study of quantum systems under the influence of a gravitational field has been developing research field. Along this researches we investigate effect of behavior of quantum particles in the presence of gravitational field. An interesting point is that the gravitational field creates curved space time around so for analyzing behavior of particles in the presence of gravitational field we should investigate interaction of particles with the curved space time. In order to discuss on such phenomena, motion equations would be specified in terms of properties of particles for example to study spinless nonrelativistic particles it should be used Schrödinger equation. Therefore motion equations would be formulated in the curved space time since description of generalized equations will be presented. So different curved space time such as cosmic string, spinning cosmic string and Friedmann- Robertson- Walker space times will be introduced and finally we study effects of them on the physical systems.

Keywords: curved space time, cosmic string, Dirac equation, Klein-Gordon equation, Schrodinger equation



University of Shahrood

Faculty of Physics

Master of Science Thesis

**Comparison of the relativistic and non-relativistic particles in a curved
space time**

Azadeh Afshardoost

Supervisor:

Dr. Hassan Hassanabadi

Semtember-۲۰۱۵