

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

استفاده از مدل جمعی در بررسی طیف انرژی ایزوتوپ ^{16}O با عدد جادویی ۸-۸

دانشجو:

مرضیه عزیزی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۹۳

دانشگاه شاهرود
دانشکده: علوم پایه
گروه: فیزیک هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد مرضیه عزیزی
تحت عنوان: استفاده از مدل جمعی در بررسی طیف انرژی ایزوتوپ ^{16}O با عدد جادویی ۸-۸

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر محمد رضا شجاعی
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

تقدیم به

خانواده‌ی عزیزم که در تمام مراحل زندگی مدیون حمایت‌هایشان هستم.

تقدیر و تشکر

تشکر و قدردانی می‌کنم از:

– محضر ارزشمند پدر و مادر عزیزم به خاطر همه‌ی تلاشهای محبت آمیزی که در دوران مختلف زندگی‌ام انجام دادند و با مهربانی چگونه زیستن را به من آموخته‌اند.

– همسر مهربانم که با قلبی آکنده از عشق و معرفت، محیطی سرشار از سلامت، امنیت، آرامش و آسایش برای من فراهم آورده است.

– محضر استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که با نکته‌های دلاویز و گفته‌های بلند، صحیفه‌های سخن را علم پرور نمود و همواره راهنما و راه‌گشای نگارنده در اتمام و اکمال پایان نامه بوده است.

معلما مقامت ز عرش برتر باد همیشه توسن اندیشه‌ات مظفر باد

– محضر اساتید فرزانه جناب آقای دکتر علی اصغر مولوی و جناب آقای دکتر حسین توکلی عنبران که زحمت داوری این پایان‌نامه را متقبل شدند.

– اساتید فرهیخته‌ای که در راه کسب علم و معرفت مرا یاری نمودند.

– آنان که در راه کسب دانش راهنمایم بودند.

– آنان که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بود.

– الهها به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌ی آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.

– پروردگارا حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

– خدایا توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با علم و دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران کهنسال عنایت بفرما.

تعهد نامه

اینجانب مرضیه عزیزی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده‌ی پایان نامه‌ی استفاده از مدل جمعی در بررسی طیف انرژی ایزوتوپ ^{16}O با عدد جادویی ۸-۸ تحت راهنمایی دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

از دهه‌های گذشته تا به امروز ایزوتوپ‌های اکسیژن از لحاظ تئوری و تجربی به طور گسترده مورد بررسی قرار گرفتند. ما از میان ایزوتوپ‌های مختلف اکسیژن، ایزوتوپ ^{16}O که هسته‌ای زوج - زوج و دو جادویی است انتخاب کردیم. از آنجایی که این ایزوتوپ ۱۶ نوکلئون دارد ابتدا به مطالعه نیروی بین نوکلئون‌ها در سیستم‌های چند جسمی پرداختیم. سپس مدل پوسته‌ای، مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی و مدل خوشه‌ای را پیشنهاد و با در نظر گرفتن این سه مدل به حل معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا مرتبه دوم تعمیم یافته و هلمن با استفاده از روش‌های تحلیلی پرداخته و ویژه مقادیر و تابع موج و انرژی حالت پایه این ایزوتوپ را محاسبه نمودیم که با نتایج تجربی همخوانی دارد. و در پایان معادله کلاین‌گوردن را با پتانسیل هلمن و جرم وابسته به مکان با استفاده از روش تحلیلی NU حل کردیم و ویژه مقادیر انرژی و تابع موج سیستم را به دست آوردیم.

کلمات کلیدی:

اعداد جادویی - ایزوتوپ‌های اکسیژن - انرژی حالت پایه

فهرست مطالب

فصل اول: مدل‌های هسته‌ای و نیروی بین نوکلئون‌ها

- ۱-۱) مقدمه..... ۲
- ۲-۱) مدل‌های هسته‌ای..... ۳
- ۱-۲-۱) مدل قطره مایع..... ۴
- ۲-۲-۱) مدل پوسته‌ای..... ۷
- ۳-۲-۱) مدل جمعی..... ۱۲
- ۴-۲-۱) مدل‌های هسته‌ای واقعی‌تر..... ۱۸
- ۳-۱) هسته‌های پایدار..... ۱۸
- ۱-۳-۱) فراوانی نسبی عناصر و ایزوتوپ‌ها..... ۱۹
- ۲-۳-۱) اعداد جادویی..... ۲۱
- ۴-۱) نیرو و ذرات تبادلی بین نوکلئون‌ها..... ۲۵
- ۵-۱) مدل نیروی تبادل..... ۲۷
- ۶-۱) نظریه مزونی یوکاوا و ذره یوکاوا..... ۳۱
- ۷-۱) شرایط پتانسیل هسته‌ای مناسب..... ۳۳
- ۸-۱) نیروهای چند جسمی..... ۳۴

فصل دوم: مرور برخی از خواص هسته‌ای ایزوتوپ‌های اکسیژن

- ۱-۲) خواص هسته‌ای..... ۴۰
- ۲-۲) انرژی بستگی..... ۴۱
- ۳-۲) شعاع هسته..... ۴۳
- ۴-۲) اسپین هسته..... ۴۵

۴۶	پارितه هسته..... (۵-۲)
۴۶	اسپین - پاریته ایزوتوپ‌های اکسیژن..... (۶-۲)
۴۹	ایزواسپین..... (۷-۲)
۵۱	انرژی جداسازی..... (۸-۲)
۵۲	ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های اکسیژن ۱۶، ۱۷ و ۱۸..... (۹-۲)

فصل سوم: روش‌های تحلیلی و عددی حل مساله

۵۴	مقدمه..... (۱-۳)
۵۴	مختصات ژاکوبی..... (۲-۳)
۵۶	کلیات روش NU..... (۳-۳)
۵۸	روش ابر تقارن..... (۴-۳)
۶۰	حل معادلات دیفرانسیل به روش Rung - kutta..... (۵-۳)

فصل چهارم: محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O

۶۶	مقدمه..... (۱-۴)
۶۷	محاسبه انرژی حالت پایه ^{16}O با پتانسیل GQY..... (۲-۴)
۷۶	محاسبه انرژی حالت پایه ^{16}O با پتانسیل هلمن..... (۳-۴)
۸۴	ذرات نسبیتی با اسپین صفر..... (۴-۴)
۸۸	نتیجه‌گیری..... (۵-۴)
۸۹	مراجع.....

فهرست شکل‌ها

- شکل ۱-۱: پارامترهای ماکروسکوپی مدل قطره مایع..... ۵
- شکل ۲-۱: نمودار پتانسیل‌های وود ساکسون به همراه چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ..... ۱۰
- شکل ۳-۱: ترازهای $^{17}_8\text{O}$ و $^{17}_9\text{F}$ از دیدگاه مدل پوسته‌ای..... ۱۱
- شکل ۴-۱: انرژی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ در هسته‌های زوج - زوج..... ۱۳
- شکل ۵-۱: نسبت $E(4^+)/E(2^+)$ برای پایین‌ترین حالت‌های 2^+ و 4^+ ۱۴
- شکل ۶-۱: گشتاور مغناطیسی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ در هسته‌های زوج - زوج..... ۱۴
- شکل ۷-۱: گشتاور چارقطبی الکتریکی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ در هسته‌های زوج - زوج..... ۱۵
- شکل ۸-۱: چند تراز سطح پایین در ^{130}Sn ۱۶
- شکل ۹-۱: نمودار هسته‌های پایدار..... ۱۹
- شکل ۱۰-۱: نمایش اعداد جادویی در یک چاه پتانسیل لبه گرد با شکافتگی اسپین-مدار..... ۲۱
- شکل ۱۱-۱: تعداد ایزوتون‌های پایدار بر حسب عدد نوترونی..... ۲۲
- شکل ۱۲-۱: انرژی ذرات آلفای گسیل شده از ایزوتوپ‌های Rn..... ۲۴
- شکل ۱۳-۱: سطح مقطع جذب نوترون‌های با انرژی ۱ MeV..... ۲۴
- شکل ۱۴-۱: مبادله پیون مجازی در پراکندگی پروتون - نوترون..... ۳۱
- شکل ۱۵-۱: سیستم سه جسمی..... ۳۴
- شکل ۱۶-۱: انرژی بستگی هسته‌های سبک بر حسب نیروهای دو جسمی و سه جسمی..... ۳۶
- شکل ۱۷-۱: سلسله مراتب نیروهای هسته‌ای در کایرال EFT..... ۳۷
- شکل ۱-۲: انرژی بستگی میانگین هر نوکلئون در هسته‌های مختلف..... ۴۱
- شکل ۲-۲: توزیع شعاع باری در هسته‌های مختلف..... ۴۴
- شکل ۳-۲: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{16}O ۴۷

- شکل ۲-۴: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{17}O ۴۷
- شکل ۲-۵: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{18}O ۴۷
- شکل ۲-۶: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{19}O ۴۷
- شکل ۲-۷: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{20}O ۴۷
- شکل ۲-۸: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{21}O ۴۸
- شکل ۲-۹: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{22}O ۴۸
- شکل ۲-۱۰: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{23}O ۴۸
- شکل ۲-۱۱: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{24}O ۴۸
- شکل ۲-۱۲: ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{25}O ۴۸
- شکل ۲-۱۳: انرژی جداسازی آخرین نوترون به صورت تابعی از عدد نوترونی هسته نهایی ۵۱
- شکل ۲-۱۴: ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های اکسیژن ۱۷، ۱۸ و ۱۹ ۵۲
- شکل ۴-۱: تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY (مدل پوسته‌ای) ۷۳
- شکل ۴-۲: تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY (مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی) ۷۴
- شکل ۴-۳: تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY (مدل خوشه‌ای) ۷۶
- شکل ۴-۴: تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن (مدل ذره پوسته‌ای) ۸۰
- شکل ۴-۵: تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن (مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی) ۸۲
- شکل ۴-۶: تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن (مدل خوشه‌ای) ۸۳

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۱: فراوانی ویژه هسته‌های پایدار.....	۲۱
جدول ۱-۲: ویژگی‌های ایزوتوپ ^{16}O	۴۱
جدول ۲-۲: انرژی بستگی ایزوتوپ‌های اکسیژن.....	۴۳
جدول ۳-۲: اسپین - پاریتته ایزوتوپ‌های اکسیژن.....	۴۹
جدول ۲-۴: ایزواسپین حالت پایه ایزوتوپ‌های اکسیژن.....	۵۰
جدول ۲-۵: انرژی جداسازی نوترون در هسته‌های دو جادویی و ایزوتوپ بعدی آن.....	۵۲
جدول ۴-۱: انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY و استفاده از مدل پوسته‌ای.....	۷۳
جدول ۴-۲: انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY و استفاده از مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی.....	۷۴
جدول ۴-۳: انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY و استفاده از مدل خوشه‌ای.....	۷۵
جدول ۴-۴: انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل پوسته‌ای.....	۸۰
جدول ۴-۵: انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی.....	۸۱
جدول ۴-۶: انرژی حالت پایه ^{16}O با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل خوشه‌ای.....	۸۳

فصل اول

مدل‌های هسته‌ای و نیروی بین نوکلئون‌ها

(۱-۱) مقدمه

تلاش برای درک ماهیت اساسی ماده، ریشه در تفکرات فیلسوفان یونان باستان، بویژه دموکریتوس^۱ دارد. دموکریتوس که در سده چهارم پیش از میلاد می‌زیست، معتقد بود که هر نوع ماده را می‌توان به اجزای کوچکتر و کوچکتر تقسیم کرد تا آنکه حد نهایی فرا می‌رسد که دیگر ادامه تقسیم مسیر نیست. از نظر دموکریتوس، این جز جدایی‌ناپذیر ماده (یا اتم) که با چشم غیر قابل دیدن بود، ذره بنیادی سازنده ماده به شمار می‌رفت. در طی ۲۴۰۰ سال بعد، این نظر صرفاً به صورت اندیشه‌ای فلسفی باقی ماند، تا آنکه پژوهشگران آغاز سده نوزدهم میلادی با استفاده از روشهای علوم تجربی درباره این مسئله به تحقیق پرداختند و با به‌دست آوردن شواهد کافی فرضیه اتم‌گرایی را تا سطح یک نظریه علمی تمام عیار بالا بردند. امروزه با توجه به رده‌بندی‌های علوم و گرایش‌های تخصصی، شاید بتوانیم دانشمندان پیشگام در این زمینه (یعنی دالتون، آووگادرو، فاراده) را شیمیدان قلمداد کنیم. پس از آنکه شیمیدانها نوع اتمها، قواعد حاکم بر ترتیب آنها، و رده‌بندی سازمان یافته آنها (به صورت جدول تناوبی مندلیف) را مشخص کردند به طور طبیعی تنها مرحله باقیمانده مطالعه خواص بنیادی تک تک اتمهای عناصر مختلف بود که امروزه این قسمت از پژوهش را با عنوان فیزیک اتمی می‌شناسیم این مطالعات در سال ۱۸۹۶ توسط بکرل^۲ به کشف خاصیت رادیواکتیویته در برخی از اتمها، و سپس در سال ۱۸۹۸ توسط پیرکوری و همسرش (ماری کوری) به شناسایی مواد رادیواکتیو دیگر منجر شد آنگاه نوبت به رادرفورد^۳ رسید که کار بررسی این پرتوهای فعال و خواص آنها را ادامه داد. رادرفورد وقتی به ماهیت این پرتوها پی برد کار تحقیق را وارونه کرد و آنها را به عنوان وسیله کاوش در واریسی اتمها به کار گرفت. در طی همین پژوهش‌ها بود که در سال ۱۹۱۱ رادرفورد وجود هسته را در اتمها اعلام داشت.

¹ Democritus

² H. Becquerel

³ E. Rutherford

در این اثنا پیشرفت‌های زیادی در جنبه نظری بالاخص در مکانیک کوانتومی در سال ۱۹۰۰ تا ۱۹۲۸ توسط دانشمندان بزرگی از جمله پلانک^۱، شرودینگر^۲، هایزنبرگ^۳، دیراک^۴، اتفاق افتاد و در نتیجه یک چارچوب نظری برای درک ساختارهای میکروسکوپی چند جسمی نظیر اتمها و مولکول‌ها ساخته شد و کاربرد این مفاهیم به هسته یک نتیجه منطقی شد. اکتشافات دهه‌های ۱۹۴۰ و ۱۹۵۰ نشان داده‌اند که مرتبه دیگری از ساختار ماده وجود دارد که از هسته هم بنیادی‌تر و ابتدایی‌تر است. امروزه، بررسی و مطالعه این گونه ذرات را که عناصر اصلی ساختار هسته‌ای هستند در شاخه خاصی به نام فیزیک ذرات بنیادی (یا فیزیک انرژی‌های بالا) ادامه می‌دهند. فیزیک هسته‌ای، اگر چه اکنون نقش محوری‌اش را در جستجوی اجزای بنیادی ماده از دست داده است ولی هنوز هم برای درک برهم‌کنش‌های بنیادی از آزمایشهای هسته‌ای استفاده می‌شود. تحقیق در خواص هسته‌ها و قوانین حاکم بر ساختار هسته‌ای، به نوبه خود، زمینه‌ی فعال و باروری از پژوهش‌های فیزیکی است. بدین ترتیب، در واقع می‌توان برای فیزیک هسته‌ای سه نقش مختلف در نظر گرفت:

۱- کاوش در قلمرو ذرات بنیادی ماده و برهم‌کنش آنها

۲- رده‌بندی و تفسیر خواص هسته‌ای

۳- طراحی روشها و ابزارهای فنی پیشرفته^[۴]

۱-۲) مدل‌های هسته‌ای

برای بررسی هسته‌ها، عمدتاً یک نظریه فوق‌العاده ساده را که از لحاظ ریاضی بدون مشکل و از لحاظ فیزیکی غنی باشد، انتخاب می‌کنیم. اگر این نظریه در توصیف دست‌کم چند خاصیت هسته‌ای نسبتاً موفق باشد، آنگاه با افزودن جمله‌های اضافی آن را تکمیل می‌کنیم. بدین ترتیب، معیار موفقیت هر مدلی را باید در دو نکته دانست:

¹ M. Plank

² E. Schrodinger

³ W. Heisenberg

⁴ P. A. M. Dirac

۱. مدل باید بتواند خواص هسته‌ای که تاکنون اندازه‌گیری شده را به طور قابل قبولی توضیح دهد.

۲. مدل باید خواص دیگری را پیش‌بینی کند که در آزمایش‌های جدیدی قابل اندازه‌گیری باشد.

مدل‌های متعددی جهت توضیح خواص و واکنش‌های هسته‌ای پیشنهاد شده‌اند. از آنجا که هیچکدام از این مدل‌ها برای توضیح کل مشاهدات تجربی بطور کامل رضایت بخش نیستند، مدل‌های مختلفی برای تفسیر پدیده‌های گوناگون هسته‌ای بکار می‌روند. از جمله مفیدترین مدل‌ها در مورد ساختمان هسته‌ای عبارتند از مدل قطره مایع، مدل پوسته‌ای، مدل جمعی، مدل اپتیکی [۴].

در میان تقریب‌های مختلف موفق برای توسعه و گسترش یک مدل برلی هسته، میانگین تقریبی یکی از عمومی‌ترین تقریب‌ها است. که در آن هر نوکلئون تحت پتانسیلی که این پتانسیل از برهم‌کنش میانگین که توسط همه نوکلئون‌های دیگر در هسته تولید شده است حرکت مستقل دارد. که مدل پوسته‌ای حاکم بر این تقریب در توضیح پایداری فوق العاده برخی از هسته‌ها که اعداد جادویی از پروتون و نوترون یا هر دو دارند موفق بوده است. علاوه بر این، این مدل برای توصیف هسته‌های نزدیک به پوسته بسته عمومی‌ترین مدل است [۵].

۱-۲-۱) مدل قطره مایع^۱

نخستین مدل ساختار هسته‌ای که بسیار گسترش یافت مدل قطره مایع بود که این مدل از ایده هسته مرکب^۲ نیلز بوهر الهام گرفته شده بود که می‌گفت وقتی یک نوکلئون وارد یک هسته می‌شود ویژگی‌های حرکت انفرادی خود را به خاطر برهم‌کنش بسیار قوی نوکلئون - نوکلئون داخل هسته از دست می‌دهد. به همین دلیل در این مدل حرکت نوکلئون‌های منفرد در داخل هسته اهمیتی ندارد. در عوض ماده هسته‌ای مانند یک قطره مایع باردار رفتار می‌کند و باید حرکت کلی مایع را برای محاسبه ویژگی‌های مختلف هسته در نظر گرفت. مدل قطره مایع توسط وایزاکر^۳ برای یافتن جرم‌های هسته‌ای و انرژی‌های بستگی برحسب پارامترهای ماکروسکوپی نظیر انرژی حجمی، انرژی سطحی،

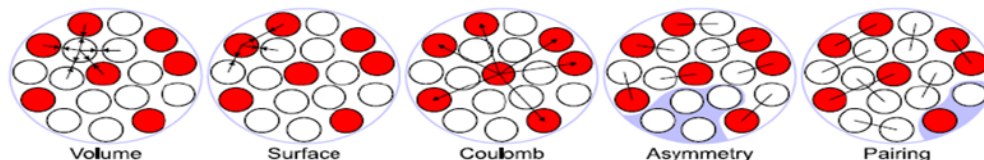
¹ Liquid Drop Model

² Compound Nuclei

³ C. F. Von Weisaacker

انرژی کولنی، انرژی تزویج هسته با در نظر گرفتن هسته به صورت یک قطره مایع توسعه یافت که انرژی بستگی آن با رابطه زیر داده می شود:

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c Z(Z-1) A^{-\frac{1}{3}} - \frac{a_{\text{sym}} (A-2Z)^2}{A} \pm \delta + \eta \quad (1-1)$$



شکل (۱-۱): پارامترهای ماکروسکوپی مدل قطره مایع

جمله حجمی: وجود جمله حجمی بیانگر این نکته است که سهم هر نوکلئون در انرژی بستگی هسته تقریباً ثابت است. اگر این طور نبود و هر نوکلئون همه نوکلئون‌های دیگر موجود در هسته را جذب می کرد آنگاه انرژی بستگی باید با $A(A-1)$ یا به تقریب با A^2 متناسب بود و این بر خلاف رابطه زیر است:

$$\frac{B}{A} = \text{const} \Rightarrow B \propto A \quad (2-1)$$

همانطور که می دانیم $R \propto A^{\frac{1}{3}}$ بنابراین $A \propto R^3$ از این رو جمله اول رابطه را جمله حجمی می گویند.

جمله سطحی: نوکلئون‌هایی که در سطح هسته قرار دارند همسایه‌های کمتری دارند از این رو بستگی آنها به هسته از نوکلئون‌های درونی کمتر است. بنابراین سهم نوکلئون‌های سطحی در انرژی بستگی به اندازه نوکلئون‌های درونی‌تر نیست و چون در جمله $a_v A$ این نکته در نظر گرفته نشده است مقدار انرژی بستگی بیش از حد لازم برآورد شده است. بنابراین از جمله حجمی باید جمله‌ای که متناسب با مساحت سطح هسته است را کم کنیم و چون $R \propto A^{\frac{1}{3}}$ است مساحت سطح هسته $4\pi R^2$ متناسب با $A^{\frac{2}{3}}$ خواهد بود.

جمله کولنی: دافعه کولنی پروتون‌ها در جهت تضعیف انرژی بستگی هسته عمل می کند که باید جمله‌ای متناسب با آن را با علامت منفی وارد رابطه مربوط به انرژی بستگی کنیم. اگر هسته را به

صورت کره باردار (به صورت یکنواخت) در نظر بگیریم با توجه به اینکه هر پروتون سایر پروتون‌های موجود در هسته را می‌بیند (در برهم‌کنش کولنی) این جمله متناسب با $z(z-1)$ خواهد بود و چون انرژی کولنی یک کره باردار یکنواخت متناسب با $1/R$ است این جمله شامل $1/A^{1/3}$ نیز خواهد بود.

جمله تقارنی: در ناحیه هسته‌های سبک که ناحیه هسته‌های پایدار است بین Z و N هسته‌ها یک تقارن وجود دارد یعنی $Z \simeq N$ یا به عبارتی $Z \simeq A/2$. می‌توان این خاصیت یعنی متقارن بودن هسته از لحاظ تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها را عاملی برای پایداری هسته در نظر گرفت. در ناحیه هسته‌های سبک خارج شدن از این حالت تقارنی سبب ناپایداری هسته می‌شود. بنابراین باید جمله‌ای در رابطه انرژی بستگی وارد کنیم که این مساله را نیز شامل شود. در ناحیه هسته‌های سنگین به دلیل وجود دافعه کولنی بالا، برای پایداری هسته باید تعداد نوترون‌ها بیشتر از تعداد پروتون‌ها باشد (تا نیروی هسته‌ای که جاذبه است اثر دافعه کولنی را خنثی کند) و این خود باعث به هم خوردن تقارن می‌شود ولی در اینجا به هم خوردن تقارن سبب پایداری هسته شده است از این رو سهم این جمله باید در ناحیه هسته‌های سنگین ناچیز باشد.

جمله تزویجی: جمله تزویج تمایل نوکلئون‌های مشابه به تشکیل زوج و تحکیم پیکربندی پایدار هسته‌ای را نشان می‌دهد. مقدار این جمله را برای هسته‌های A فرد صفر در نظر می‌گیریم در این صورت خارج شدن از حالت زوج-فرد و تبدیل به حالت فرد - فرد سبب کاهش انرژی بستگی به اندازه δ و خارج شدن از حالت زوج-فرد و تبدیل به حالت زوج - زوج باعث افزایش انرژی بستگی به اندازه δ خواهد شد. جملات حجمی، سطحی و کولنی از مدل قطره مایع و سه جمله بعدی از مدل پوسته‌ای (لایه‌ای) حاصل می‌شوند. مدل قطره مایع یک مدل نیمه کلاسیک است، در حالی که مدل پوسته‌ای یک مدل مکانیک کوانتومی، بنابراین جملات عدم تقارن، تزویج و لایه‌ای ناشی از رفتار کوانتوم مکانیکی نوکلئون‌ها هستند.

۱-۲-۲) مدل پوسته‌ای^۱

مدل پوسته‌ای در درک اولیه از اتم‌ها و هسته‌ها به ویژه در فیزیک هسته‌ای نقش اساسی ایفا می‌کند. این مدل بهترین درک از پوسته هسته‌ای sd را ارائه می‌دهد. تا به امروز این مدل یک روش اساسی در فیزیک هسته‌ای و به عنوان نقطه‌ی شروع نظریه پایه در استخراج کاربردی‌ترین مدل‌ها برای هسته‌های بزرگتر باقی مانده است. فرض اساسی مدل پوسته‌ای به نکته‌ای متکی است که هر نوکلئون در هسته در یک مد منسجم تحت یک پتانسیل میانگین حرکت می‌کند. آن نشان‌دهنده این واقعیت است که نوکلئون‌ها می‌توانند در مدار مختل نشده با توجه به اصل طرد پائولی حرکت کنند.

هر state کوانتومی توسط اعداد کوانتومی زیر تعریف می‌شود:

۱- عدد کوانتومی محوری (شعاعی)

۲- عدد کوانتومی مداری

۳- عدد کوانتومی تکانه زاویه‌ای کل

برای محاسبه خواص مختلف نوکلئون در هر یک از حالت‌های مجاز باید تابع موج حالت‌هایی را که ویژه توابع معادله شرودینگر چند جسمی هستند را به دست آوریم. در محاسبات مدل پوسته‌ای فرض بر این است که نوکلئون‌های ظرفیت، یک مجموعه انتخاب شده از اوربیتال‌های تک ذره‌ای را خارج از پوسته بسته و ساکن اشغال می‌کند که فضای مدل نامیده می‌شود. با فرض اینکه همه خواص هسته توسط نوکلئون‌های ظرفیت تعیین می‌شود. نتیجه محاسبات مدل پوسته‌ای قطعا به فضای مدل و انتخاب شکل برهم‌کنش بستگی دارد. امروزه محاسبات مدل پوسته‌ای توسط مایر^۲ و جنسن^۳ از مدل پوسته‌ای که یک پیکربندی واحد را برای سطح هسته‌ای بر طبق یک نوکلئون در در یک اوربیتال تک ذره فرض شده بود گسترش یافته است. محاسبات جدید بر اساس همه یا تعداد زیادی از

¹ Shell Model

² M. G. Mayer

³ J. H. D. Jensen

پیکربندی‌های چند نوکلئونی، با فرض اینکه نوکلئون‌های ظرفیت، مدارهای خارجی در دسترس، در هسته ساکن را اشغال می‌کنند انجام می‌شود [۵].

در این مدل ترازهای انرژی به صورت لایه‌ها و زیرلایه‌هایی در نظر گرفته می‌شوند که نوکلئون‌ها در آن جای گرفته‌اند. این لایه‌ها (پوسته‌های اصلی) متناظر با اعدادی هستند که به آن‌ها اعداد جادویی^۱ گفته می‌شود که عبارتند از ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۲ و ۱۲۶.

علیرغم وجود شواهد زیادی که حاکی از لایه‌ای بودن هسته می‌باشد مساله مهمی وجود دارد که باعث تعجب می‌شود و آن این است که چگونه ممکن است نوکلئون‌ها (که جرم هر یک حدود ۱۸۴۰ برابر جرم الکترون است) در حجم کوچک هسته (در مقایسه با کل اتم) که به شدت با هم برهم‌کنش دارند به صورت لایه لایه قرار گیرند. به نظر می‌رسد که نوکلئون‌ها در این حجم کوچک باید برخوردهای زیادی با هم داشته باشند از این رو اگر فاصله زمانی بین دو برخورد یک نوکلئون را Δt فرض کنیم Δt باید خیلی کوچک باشد و طبق اصل عدم قطعیت در انرژی ΔE بزرگ خواهد بود طوری که پهنای انرژی نوکلئون‌ها در هم فرو رفته و دیگر ترازها و لایه‌های مشخص در هسته وجود نخواهد داشت و این با شواهد تجربی در تناقض است. این مشکل را می‌توان با اصل طرد پائولی برطرف کرد. فرض کنید در اعماق هسته بین دو نوکلئون برخوردی صورت گیرد در این صورت بین آن دو انرژی مبادله می‌شود و باید یکی از نوکلئون‌ها انرژی کسب کرده و به تراز بالاتر و دیگری انرژی از دست داده و به تراز پایین‌تر برود. در حالی که ترازهای بالا و پایین آنها همگی پر هستند. طبق اصل طرد پائولی نوکلئون دیگری نمی‌تواند به آن ترازها اضافه شود. البته ترازهای ظرفیت خالی هستند ولی برخورد بین دو نوکلئون در حدی نیست که بتواند انرژی لازم برای انتقال به تراز ظرفیت را فراهم آورد. بنابراین می‌توان گفت تقریباً بین نوکلئون‌ها برخوردی صورت نمی‌گیرد. از این رو فاصله زمانی بین دو برخورد Δt بسیار بزرگ خواهد بود طوری که تقریباً صفر می‌شود. بدین ترتیب برای نوکلئون‌ها ترازهای مشخص انرژی در هسته وجود دارد.

¹ Magic Numbers

پتانسیل مدل پوسته‌ای

برای توجیه خواص هسته‌ای از طریق مدل پوسته‌ای ابتدا باید یک پتانسیل هسته‌ای مناسب تعریف کنیم که با این مدل مطابقت داشته باشد و بتواند ترازهای انرژی و لایه‌ها را دقیقاً مشخص کند. برای این منظور پتانسیل‌های چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ را در نظر می‌گیریم. ظهور اعداد جادویی ۲، ۸ و ۲۰ در هر دو پتانسیل دلگرم کننده است، ولی در ترازهای انرژی بالاتر هیچ گونه ارتباطی با اعداد جادویی تجربی به چشم نمی‌خورد. این دو پتانسیل بنا بر دلایلی، تقریب خوبی برای پتانسیل هسته‌ای نیستند :

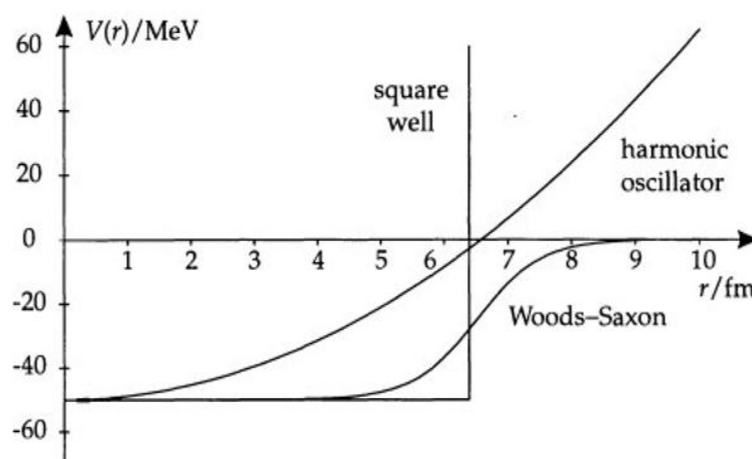
۱- از آنجا که با صرف انرژی متناهی می‌توان یک نوکلئون را از هسته خارج کرد بنابراین عمق چاه باید متناهی باشد.

۲- این چاه دارای لبه تیز است در حالی که پتانسیل هسته‌ای فاقد لبه تیز است و مثل توزیع بار و جرم هسته‌ای مقدار پتانسیل بعد از شعاع میانگین R به آهستگی به صفر میل می‌کند. از طرف دیگر، پتانسیل نوسانگر هماهنگ تیزی کمتری دارد و انرژی جداسازی در آن بی‌نهایت می‌شود و در آن فاصله بین ترازها یکسان است که در یک هسته، فاصله بین ترازها یکسان نیست. با توجه به نکات گفته شده شکل واقع بینانه‌تر پتانسیل را به صورت پتانسیل بینابینی برای هسته انتخاب می‌کنیم که

$$V(x) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R)/a]} \quad \text{با رابطه زیر بیان می‌شود [۴]:}$$

(۳-۱)

که در آن پارامترهای R و V_0 و a به ترتیب شعاع میانگین و عمق چاه و ضخامت پوست هستند. از طرفی هر سه پتانسیل ذکر شده تنها شامل اعداد جادویی ۲، ۸، ۲۰ هستند و اعداد جادویی بالاتر را نشان نمی‌دهند. و سادگی بیش از حد پتانسیل بینابینی سبب می‌شود که این پتانسیل از توجیه بعضی از آثار و خواص هسته‌ای عاجز باشد.



شکل (۱-۲): نمودار پتانسیل‌های وود ساکسون به همراه چاه نامتناهی و نوسانگر هماهنگ

از آنجایی که نمی‌خواهیم محتوای فیزیکی مدل را از بین ببریم مسلماً نمی‌توانیم تغییر زیادی در پتانسیل ایجاد کنیم بنابراین برای بهبود محاسبات لازم است جمله‌های مختلفی به معادله (۱-۳) افزوده شود. در دهه ۱۹۴۰ تلاش‌های نافرجام زیادی برای یافتن این جمله تصحیحی صورت گرفت و سرانجام مایر، جنسن، سوئس، هاکسل موفق شدند که با افزودن یک پتانسیل اسپین-مدار فاصله مناسبی بین زیر پوسته‌ها ایجاد کنند. پتانسیل اسپین-مدار به صورت $\vec{L} \cdot \vec{S} V_{so}(r)$ فرض شد. این عامل $\vec{L} \cdot \vec{S}$ است که باعث تجدید سازمان ترازها می‌شود. که $\vec{L}$ اندازه حرکت زاویه‌ای مداری نوکلئون و $\vec{S}$ اندازه حرکت زاویه‌ای ذاتی نوکلئون است. با وجود پتانسیل اسپین-مدار، m_l و m_s اعداد کوانتومی خوبی محسوب نمی‌شوند. اندازه حرکت‌های زاویه‌ای مداری و ذاتی بایستی جفت شده و اندازه حرکت زاویه‌ای کل $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ را بسازند. عدد کوانتومی اسپین هر نوکلئون $1/2$ است پس مقادیر ممکن برای عدد کوانتومی اندازه حرکت زاویه‌ای کل عبارتند از $j = 1 \pm \frac{1}{2}$ (به استثنا $j = 1/2$ برای $l = 0$). مقدار چشمداشتی $\vec{L} \cdot \vec{S}$ را به صورت زیر است:

$$\langle L \cdot S \rangle = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \hbar^2 \quad (۱-۴)$$

در نتیجه هر تراز به دو حالت شکافته می‌شود. که می‌توان اختلاف انرژی بین هر زوج حالت را به کمک رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\langle L.S \rangle_{j=l+1/2} - \langle L.S \rangle_{j=l-1/2} = \frac{1}{2}(2l+1)\hbar^2 \quad (5-1)$$

که شکافتگی انرژی بین حالتها با افزایش l افزایش می‌یابد.

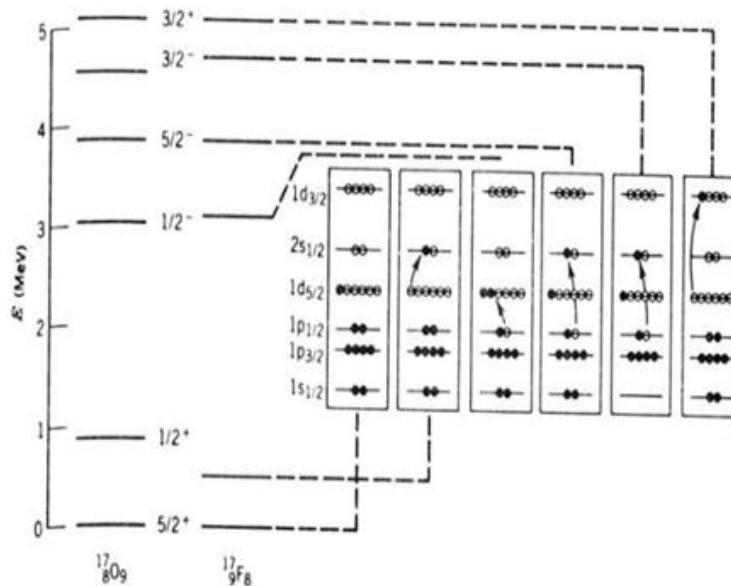
انواع مدل پوسته‌ای

الف) مدل پوسته‌ای ذره خیلی مستقل: این مدل تمام نوکلئون‌های تزویج شده را کنار می‌گذارد و خواص هسته را با استفاده از نوکلئون تزویج نشده محاسبه می‌کند.

ب) مدل پوسته‌ای کامل: در این مدل به جای تک نوکلئون منفرد تمام نوکلئون‌های موجود در زیر لایه پر نشده در نظر گرفته می‌شود.

اسپین-پارایته حالت‌های برانگیخته در هسته‌ها با A فرد

برخی از حالت‌های برانگیخته هسته‌های $^{17}_8\text{O}$ و $^{17}_9\text{F}$ را که هر کدام از آنها پس از بخش مرکزی دو جادویی ($N=8$ و $Z=8$) فقط شامل یک نوکلئون هستند را در شکل (۳-۱) نشان دادیم.



شکل (۳-۱): ترازهای $^{17}_8\text{O}$ و $^{17}_9\text{F}$ از دیدگاه مدل پوسته‌ای [۴]

در هر دو ایزوتوپ چون نهمین نوکلئون در تراز $d_{5/2}$ قرار دارد اسپین - پارایته حالت پایه $(5/2)^+$ است.

با توجه به شکل انتظار خواهیم داشت که متناظر با ترازهای $2s_{1/2}$ و $1d_{3/2}$ در مدل پوسته‌ای، با حالت‌های

برانگیخته‌ای با اسپین- پاریته $^{+}(1/2)$ و $^{+}(3/2)$ روبه‌رو شویم. طبق این فرضیه، وقتی که به هسته‌ای انرژی می‌دهیم، بخش مرکزی هیچ تغییری نمی‌کند ولی نوکلئون فرد با جذب انرژی به یکی از ترازهای بالاتر مدل پوسته‌ای خواهد رفت. حالتی که مورد انتظار مدل پوسته‌ای است، به عنوان اولین حالت برانگیخته ظاهر می‌شود، و حالت $^{+}(3/2)$ هم در فاصله‌ی زیادی بالاتر از آن قرار می‌گیرد. اما حالت‌های $^{-}(1/2)$ ، $^{-}(3/2)$ و $^{-}(5/2)$ را چگونه می‌توان بحساب آورد؟ یکی از توضیحات ممکن برای حالت $^{-}(1/2)$ به صورت زیر است: به جای آنکه نوکلئون فرد به حالت برانگیخته بالاتر برود، زوج نوکلئون موجود در تراز $1p_{1/2}$ می‌شکند و یکی از نوکلئون‌های آن در اثر برانگیزش به تراز $d_{5/2}$ می‌رود و با نوکلئون موجود در آنجا زوج جدیدی تشکیل می‌دهد. در این صورت، نوکلئون فرد در حالت $1p_{1/2}$ خواهد بود که به حالت برانگیخته $^{-}(1/2)$ منجر می‌شود. برای حالت $^{+}(3/2)$ می‌توان از فرضیه مشابه استفاده کرد. ولی حالت $^{+}(5/2)$ و بسیاری از حالت‌های برانگیخته دیگر بدون توضیح می‌ماند. مدل پوسته‌ای در مورد پیش‌بینی اسپین و پاریته حالت پایه تقریباً تمام هسته‌ها با A فرد موفق است. این مدل در ساده‌ترین شکل، به خوبی قادر به پیشگویی خواص هسته‌هایی با یک نوکلئون بیشتر یا یک نوکلئون کمتر از اعداد جادویی است. مدل پوسته‌ای همچنین می‌تواند به پیکربندی‌های پیچیده مربوط به هسته‌هایی که تعداد نوکلئون‌های آن حد واسط اعداد جادویی است، نیز توسعه یابد.

۱-۲-۳) مدل جمعی^۱

این مدل در اوایل سال‌های ۱۹۵۰ توسط بوهر^۲ و موتلسن^۳ توسعه یافت. این مدل سعی دارد ویژگی‌های هر دو مدل پوسته‌ای و قطره مایع را با در نظر گرفتن هسته بطور کامل، حرکت‌های اختصاصی نوکلئون‌های خارجی تلفیق نماید. وقتی هسته‌های زوج - زوج را مورد بررسی قرار می‌دهیم به این واقعیت در خور توجه می‌رسیم که از کاربرد مدل پوسته‌ای در صدها مورد هسته‌هایی

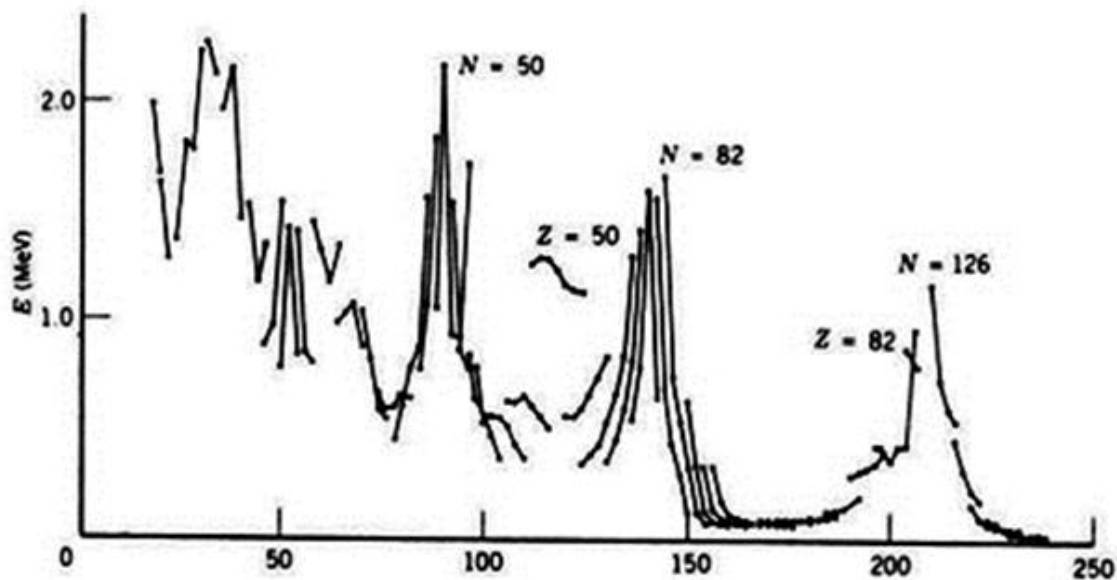
^۱ Collective Model

^۲ A. Bohr

^۳ B. Mottelson

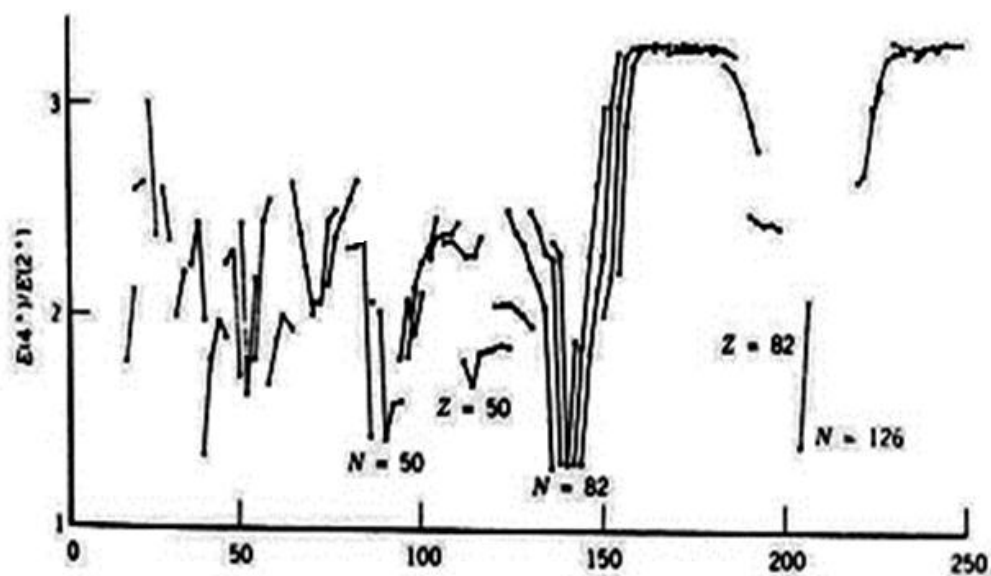
زوج - زوج شناخته شده معلوم می‌شود که همگی آنها دارای یک حالت بی‌هنجار 2^+ هستند که انرژی آن معادل یا کوچکتر از نصف انرژی لازم برای شکستن یک زوج نوکلئونی است این حالت 2^+ ، جز در چند مورد استثنایی، در همه موارد پایین‌ترین حالت برانگیخته است. از اینرو، ظهور این حالت یک امر تصادفی نیست بلکه از یک خاصیت کلی هسته‌های زوج - زوج ناشی می‌شود که صرفنظر از اشغال حالت‌های خاص مدل پوسته‌ای، در سراسر گستره جرم معتبر است. خواص کلی دیگری نیز وجود دارند که در همه هسته‌ها مشترک‌اند، پس بهتر است این خواص را نه با حرکت چند نوکلئون ظرفیت بلکه با تمام هسته مرتبط بدانیم. اینگونه خواص را که منشأ آنها در حرکت دسته جمعی اجزای هسته است و بسیاری از نوکلئون‌های هسته در ایجادشان شرکت دارند، خواص جمعی می‌گویند. چهار خاصیت مختلف هسته‌های زوج - زوج که حاکی از رفتار جمعی هسته‌ها است عبارتند از:

۱- انرژی نخستین حالت برانگیخته 2^+ برای هسته‌ها با $A < 150$ (به استثنای نواحی نزدیک به پوسته‌های کامل)، با افزایش A به تدریج کاهش می‌یابد و در ناحیه $150 < A < 190$ مقدار آن فوق العاده ثابت و خیلی کوچک است.



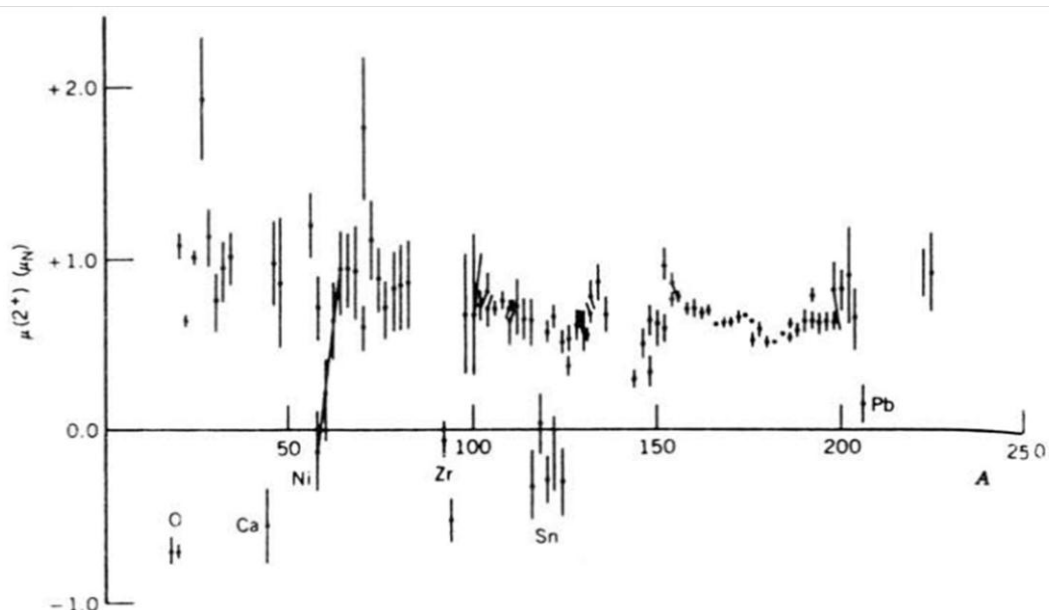
شکل (۱-۴): انرژی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ در هسته‌های زوج - زوج [۴]

۲- نسبت $E(4^+)/E(2^+)$ برای هسته‌های با $A < 150$ (به استثنای نواحی نزدیک به پوسته‌های کامل) تقریباً برابر ۲ و برای هسته‌های با $150 < A < 190$ و $A > 230$ تقریباً مقدار ثابت $3/3$ است.



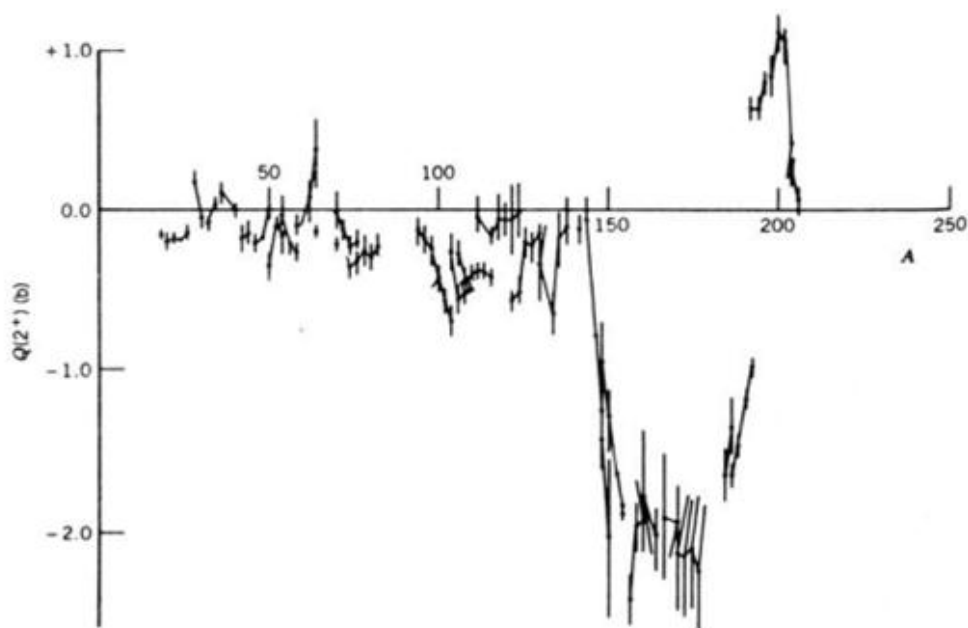
شکل (۵-۱): نسبت $E(4^+)/E(2^+)$ برای پایین‌ترین حالت‌های 2^+ و 4^+

۳- گشتاور دو قطبی مغناطیسی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ به استثنای هسته‌های با N و Z جادویی، در گستره $0.7 \mu_N$ تا $1 \mu_N$ تقریباً ثابت می‌ماند.



شکل (۶-۱): گشتاور دو قطبی مغناطیسی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ در هسته‌های زوج - زوج [۴]

۴- گشتاور چار قطبی الکتریکی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ برای هسته‌های با $A < 150$ مقادیر کوچک دارد در حالی که برای هسته‌های با $A > 150$ دارای مقادیر خیلی بزرگتری است.

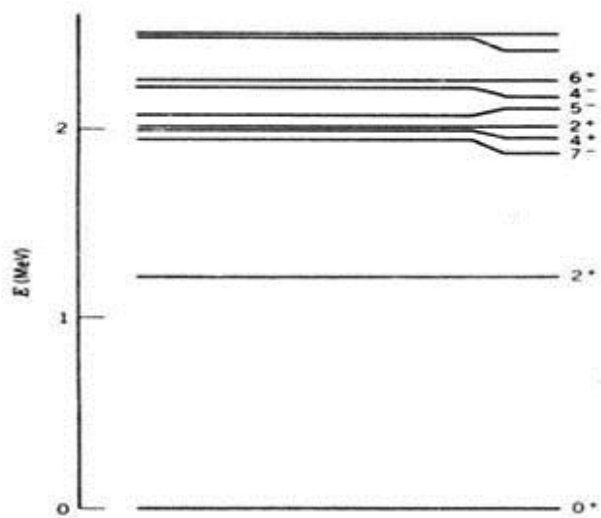


شکل (۷-۱): گشتاور چار قطبی الکتریکی پایین‌ترین حالت‌های 2^+ در هسته‌های زوج - زوج [۴]

برای توصیف این خصوصیات باید دو نوع ساختار جمعی را در نظر بگیریم زیرا به نظر می‌رسد که یک دسته از خواص به هسته‌های $A < 150$ و دسته دیگر به هسته‌های $150 < A < 190$ مربوط می‌شوند. هسته‌ها با عدد جرمی $A < 150$ را عموماً به کمک مدلی مبتنی بر ارتعاشات حول شکل تعادل کروی بررسی می‌کنیم، در حالی که خواص هسته‌های با عدد جرمی بین ۱۵۰ و ۱۹۰ خیلی شبیه اثرات دورانی سیستم‌های غیرکروی است. ارتعاش و دوران، دو نوع اصلی حرکت جمعی در هسته‌ها است. مدل جمعی هسته‌ها را غالباً مدل «قطره مایع» می‌گویند، زیرا ارتعاش و دوران هسته کاملاً مشابه ارتعاش و دوران قطره مایع معلق است و با همان تحلیل ریاضی می‌توان هسته‌ها را مورد بررسی قرار داد.

اسپین-پاریته حالت‌های برانگیخته در هسته‌های زوج - زوج:

هسته ^{130}Sn را در نظر می‌گیریم. بنابر پیش‌بینی مدل پوسته‌ای، حالت پایه تمام هسته‌های زوج-زوج به صورت 0^+ (اسپین صفر، پاریته زوج) خواهد بود، زیرا همه نوکلئون‌ها در اینگونه هسته‌ها تزویج شده‌اند.



شکل (۸-۱): چند تراز سطح پایین در ایزوتوپ ^{130}Sn [۴]

برطبق مدل پوسته‌ای، تعداد ۵۰ پروتون هسته ^{130}Sn پوسته $g_{\frac{9}{2}}$ را پر می‌کند و تعداد ۸۰ نوترون آن برای پر کردن پوسته $h_{\frac{11}{2}}$ که متناظر با عدد جادویی ۸۲ است، ۲ نوترون کم دارد. برای تشکیل حالت برانگیخته، می‌توان یکی از زوجها را شکست و یک نوکلئون آن را به تراز بالاتری برد که در این صورت جفت‌شدگی بین این دو نوکلئون فرد، اسپین و پاریتت ترازها را مشخص خواهد کرد. بالا بردن یکی از پروتون‌های $g_{\frac{9}{2}}$ یا یکی از نوترون‌های $h_{\frac{11}{2}}$ مستلزم انرژی زیاد است، زیرا در این موارد باید از فاصله زیاد بین این پوسته اصلی عبور کرد. بنابراین انتظار می‌رود که مولفه‌های اصلی تابع موج مربوط به حالت‌های برانگیخته پایین، از برآزش نوترون در آخرین پوسته اصلی اشغال شده حاصل شود. اگر فرض کنیم پیکر بندی حالت پایه ^{130}Sn به صورت زیر پوسته‌های کامل $s_{\frac{1}{2}}$ و $d_{\frac{3}{2}}$ و اشغال ۱۰ نوترون در زیر پوسته $h_{\frac{11}{2}}$ باشد حالت برانگیخته را می‌توان با شکستن زوج $s_{\frac{1}{2}}$ و رساندن یکی از نوترون‌های آن به زیر پوسته $h_{\frac{11}{2}}$ به وجود آورد. در این صورت، یک نوترون در زیر پوسته $s_{\frac{1}{2}}$ و ۱۱ نوترون در زیر پوسته $h_{\frac{11}{2}}$ موجود خواهند بود. خواص چنین سیستمی عمدتاً از جفت‌شدگی نوترون موجود در $s_{\frac{1}{2}}$ و

نوترون تزویج نشده $h_{11/2}$ حاصل خواهد شد. جفت‌شدگی تکانه‌های زاویه‌ای j_1 و j_2 در مکانیک کوانتومی مقادیری با حداکثر $(j_1 + j_2)$ تا حداقل $|j_1 - j_2|$ به فاصله واحد به دست خواهد داد. مقادیر ممکن عبارتند از: ۵ و ۶. احتمال دیگر این است که یکی از زوج‌های $d_{3/2}$ شکسته شود و باز هم یک نوترون فرد در زیر پوسته $h_{11/2}$ قرار گیرد. در این صورت بزرگی تکانه زاویه‌ای در گستره ۴ تا ۷ قرار خواهند گرفت. چون نوترون‌های $s_{1/2}$ و $d_{3/2}$ پاریته زوج و نوترون $h_{11/2}$ پاریته فرد دارند، تمام این جفت‌شدگی‌ها به حالت‌های با پاریته فرد منجر خواهند شد. در بررسی نمودار تراز ^{130}Sn به چند حالت با پاریته فرد و اسپین‌هایی در گستره ۴ تا ۷ قرار دارند و انرژی‌های حدود ۲ MeV روبه‌رو می‌شویم که این انرژی از مشخصه لازم برای شکستن یک زوج و برانگیزش یکی از ذرات درون پوسته برخوردار است. احتمال دیگر در تشکیل حالت‌های برانگیخته این است که یکی از زوج‌های $h_{11/2}$ شکسته شود، و هر دو عضو زوج شکسته در همان زیر پوسته $h_{11/2}$ نگه داشته شوند. در این صورت، جفت‌شدگی مجدد این دو نوکلئون به اسپینی غیر از صفر منجر خواهد شد که بنابر قواعد جفت‌شدگی تکانه زاویه‌ای می‌تواند برابر با هر مقداری از ۱۱ تا ۰ باشد. این دو نوترون موجود در $h_{11/2}$ را باید مانند ذرات یکسان تلقی کرد، و بنابراین تابع موج مربوط به آنها باید متقارن در نظر گرفته شود. این شرط، اسپین برآیند حاصل از جفت‌شدگی را به مقادیر زوج محدود می‌کند و در نتیجه حالت‌های ممکن عبارتند از 4^+ ، 2^+ ، 0^+ ، 8^+ ، 10^+ . برای این حالت‌ها در ناحیه ۲ MeV می‌توان نمونه‌های متعددی به دست آورد. بدین ترتیب به نظر می‌رسد که مدل پوسته‌ای در این مورد هم می‌تواند توصیف قابل قبولی از ساختار ترازها ارائه دهد. یکی از استثنای مهم این تعبیر موفق، حالت 2^+ در انرژی حدود ۱/۲ MeV است. حالت 2^+ می‌تواند از جفت‌شدگی دو نوترون در $h_{11/2}$ حاصل شود. همچنین به کمک برانگیزش می‌توان یک زوج از نوترون‌های $d_{3/2}$ را تا زیر پوسته $h_{11/2}$ بالا برد، و آنگاه با شکستن جفت‌شدگی دو نوترون باقیمانده در

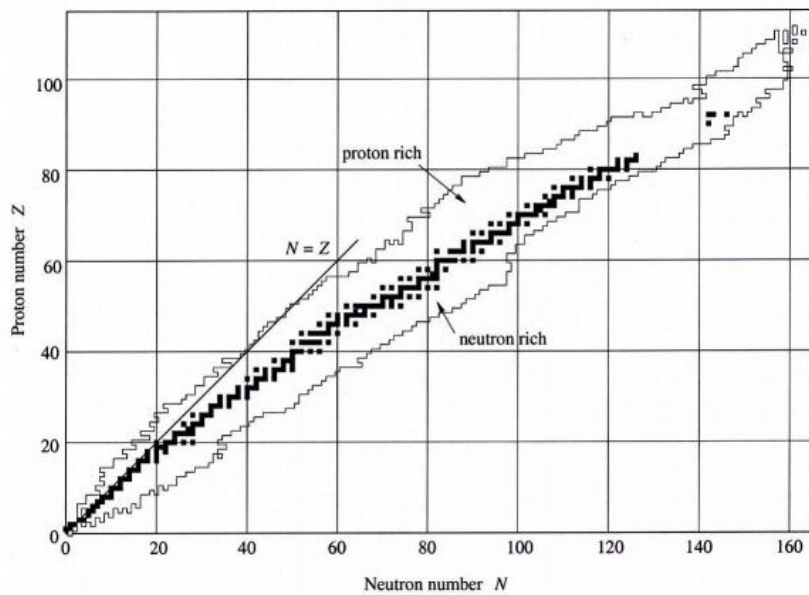
$d_{\frac{3}{2}}$ و جفت شدن مجدد آنها به حالت 2^+ دست یافت. یک احتمال دیگر هم این خواهد بود که زوج نوترون‌های $d_{\frac{3}{2}}$ به زیر پوسته $s_{\frac{1}{2}}$ برود. در این صورت در هر کدام از زیر پوسته‌های $s_{\frac{1}{2}}$ و $d_{\frac{3}{2}}$ یک نوترون فرد خواهیم داشت که از جفت‌شدگی آنها ممکن است حالت 2^+ حاصل شود. به هر حال در تمام این موارد نخست باید یک زوج شکسته شود، و در نتیجه انرژی حالت‌های انتظاری در حدود ۲ MeV خواهد بود.

۱-۲-۴) مدل‌های هسته‌ای واقعی‌تر

مدل پوسته‌ای هسته‌های A فرد و مدل جمعی هسته‌های زوج - زوج، هر دو ایده‌آل سازیهایی هستند که فقط به طور تقریبی برای هسته‌های واقعی قابل استفاده‌اند. ساختار هسته‌های واقعی خیلی پیچیده‌تر از آن چیزی است که در مدل‌های ساده مطرح می‌شود. بعلاوه، در هسته‌های واقعی نمی‌توان یک نوع ساختار را در نظر نگرفت و فقط نوع دیگر را مطرح کرد. از این رو، حتی در هسته‌های با خواص شدیداً جمعی نیز با اثرات ذره منفرد روبه‌رو می‌شویم. ضمناً بخش مرکزی هسته‌های مدل پوسته‌ای هم می‌تواند در خواص جمعی آن نقش داشته باشد که تاکنون در این نوع بررسی‌ها از آن صرف‌نظر کرده‌ایم. ساختار بسیاری از هسته‌ها را نمی‌توان به سادگی در یک گروه از دسته‌بندی دوگانه ذره منفرد و حرکت جمعی قرار داد، بلکه معمولاً لازم است که ترکیبی از هر دو مدل را برای توصیف ساختار هسته در نظر بگیریم. این مدل هسته‌ای وحدت یافته از لحاظ ریاضی پیچیده‌تر از آن است که مطرح شد.

۱-۳) هسته‌های پایدار

در شکل (۱-۹) هسته‌های پایدار نمایش داده شده است همانطور که می‌بینیم هسته‌های پایدار سبک در حوالی خط $Z = N$ قرار دارند. و هسته‌های پایدار سنگین‌تر به علت دافعه کولنی از خط $Z = N$ فاصله می‌گیرند.



شکل (۱-۹): نمودار هسته‌های پایدار [۶]

بررسی هسته‌های پایدار در چهار زمینه زیر انجام شده است:

۱- فراوانی نسبی عناصر و همچنین ایزوتوپ‌هایی که در طبیعت وجود دارند.

۲- اعداد جادویی

۳- انرژی بستگی

۴- ثابت واپاشی مواد رادیواکتیو

۱-۳-۱) فراوانی نسبی عناصر و ایزوتوپ‌ها

در این بررسی فرض شده است که عناصر و ایزوتوپ‌هایی که در طبیعت به وفور یافت می‌شوند بسیار

پایدار هستند. دو شاخه از این بررسی‌ها عبارتند از :

الف) فراوانی نسبی عناصر با توجه به یکدیگر

ب) فراوانی نسبی ایزوتوپ‌های مختلف هر یک از عناصر

در بررسی این موضوع، از سنگ‌های آذرین و دیگر مواد زمین‌شناسی تجزیه و تحلیل آماری انجام شده است. اما روش مناسب‌تر، از طریق تجزیه و تحلیل اشعه‌ی X است که توسط هوپسی^۱ و نوداک^۲ و دیگران استفاده شده است. به عنوان نتیجه:

۱- هسته‌های سنگین بسیار نادرتر از هسته‌های سبک‌تر هستند که آن به این معنی است که هسته‌های سبک‌تر پایدارتر از هسته‌های سنگین هستند.

۲- یک تحقیق از عناصر با عدد اتمی مختلف وجود دارد که اولین بار توسط هارکین^۳ انجام شده است از این رو قانون هارکین نامیده می‌شود. که توسط تجزیه و تحلیل اشعه X حتی در مورد عناصر خاکی نادر تایید شده است. نتیجه تحقیق این است که اتم‌ها با Z فرد نسبت به آنهایی که Z زوج دارند پایداری بسیار کمتری دارند.

۳- در هسته‌های سبک عدد جرمی تقریباً دو برابر عدد اتمی است در حالی که در هسته‌های سنگین این نسبت تا حدودی بالاتر است. آن به این معنی است که شرط پایداری هسته نیاز دارد که نسبت نوترون به پروتون در هسته‌های سبک تقریباً یک باشد و در هسته‌های سنگین بزرگتر از یک باشد.

۴- از ایزوتوپ‌هایی که در طبیعت وجود دارند، ۱۶۰ ایزوتوپ A زوج و Z زوج دارند. در حالی که فقط ۴ ایزوتوپ A زوج و Z فرد دارند. که عبارتند از: ($^{14}_7\text{N}$, $^{10}_5\text{B}$, ^6_3Li , ^2_1H)

که این یعنی، هسته‌ها با تعداد زوجی از پروتون‌ها و نوترون‌ها از هسته‌هایی که تعداد فردی از پروتون‌ها و نوترون‌ها را دارند پایدارترند.

۵- ایزوتوپ‌های پایدار با A فرد، که ۵۳ تا از آنها Z زوج و ۴۹ ایزوتوپ Z فرد دارند. که ایزوتوپ‌های با Z زوج فراوانتر از آنهایی هستند که Z فرد دارند [۸].

¹ Hevesy

² Noddac

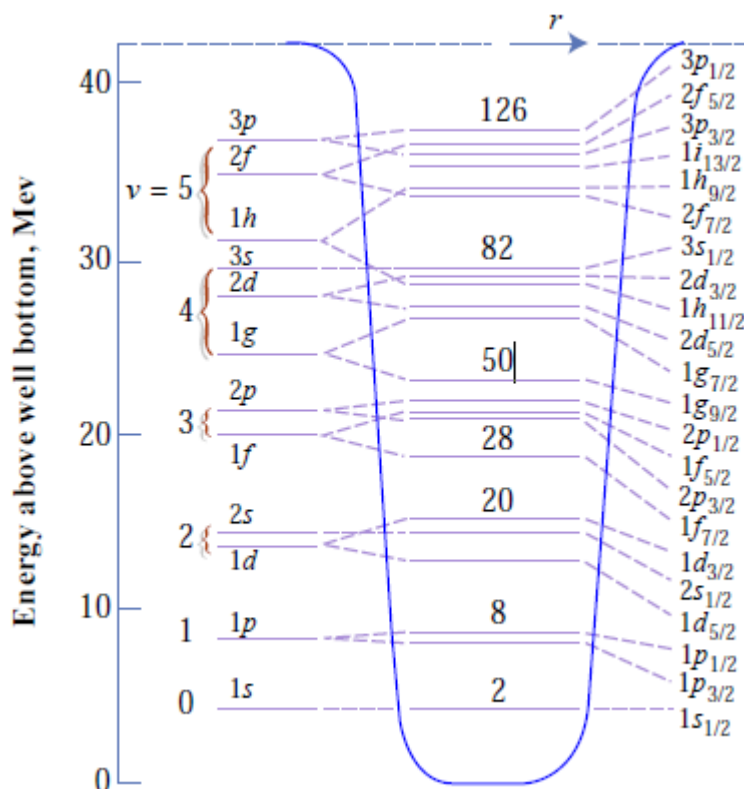
³ Harkin

جدول (۱-۱): فراوانی ویژه هسته‌های پایدار [۷]

N	فرد	زوج	فرد	زوج
Z	فرد	فرد	زوج	زوج
تعداد هسته‌ها	۴	۴۹	۵۳	۱۶۰

۱-۳-۲) اعداد جادویی

اعداد جادویی عبارتند از: ۲، ۸، ۲۰، ۲۸، ۵۰، ۸۴ و ۱۲۶ و یک عدد جادویی هنگامی به وجود می‌آید که شکافی نسبتاً بزرگ، بالای هر کدام از اعداد اشغال جمعی وجود داشته باشد. بنابراین هر یک از اعداد جادویی به یک مجموعه از ترازهای انرژی مربوط‌اند.



شکل (۱-۱۰): نمایش اعداد جادویی در یک چاه پتانسیل لبه گرد شامل شکافتگی اسپین - مدار [۷]

می‌توان نشان داد که عدد جادویی هشتم ۱۸۴ است که البته فقط در مورد نوترون‌های هسته‌های فوق سنگین که به شدت ناپایدار بوده و شکافته می‌شوند دیده می‌شود.

هسته‌های جادویی هسته‌هایی هستند که هر یک از اعداد پروتونی یا نوترونی آنها با یکی از اعداد جادویی که در بالا اشاره شد برابر باشد [۸].

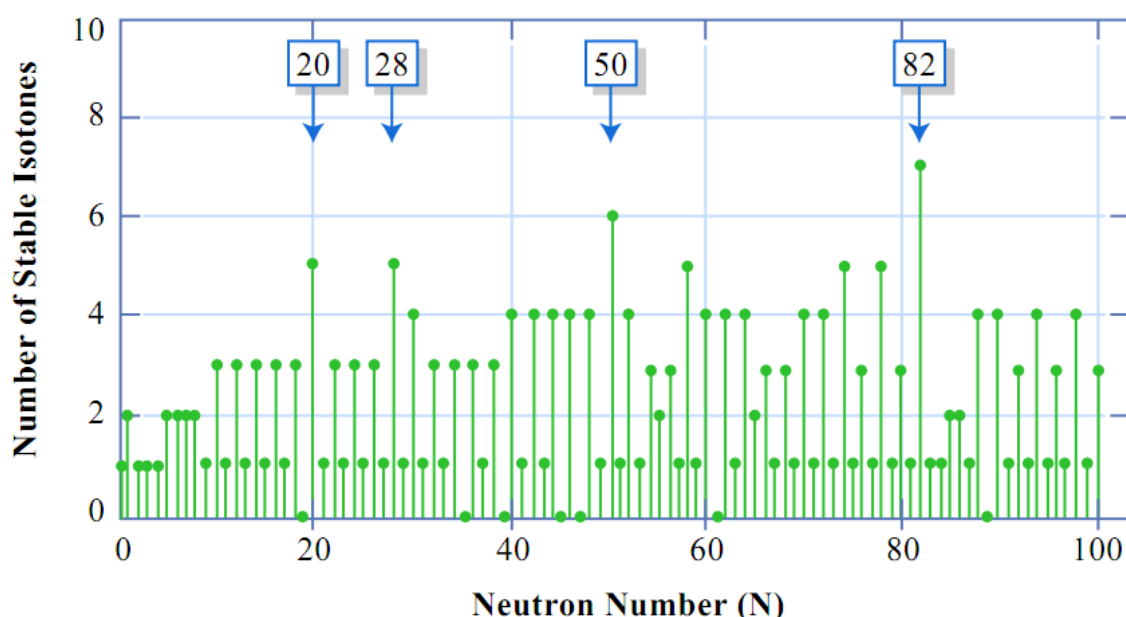
هسته‌ها با Z جادویی عبارتند از: ${}^2\text{He}$, ${}^8\text{O}$, ${}^{20}\text{Ca}$, ${}^{28}\text{Ni}$, ${}^{50}\text{Sn}$, ${}^{82}\text{Pb}$

ویژگی هسته‌های جادویی

۱- هسته‌هایی که عدد پروتونی یا نوترونی آنها مساوی با یکی از اعداد جادویی باشد پایداری بسیار بالاتری در مقایسه با همسایگان مجاور خود دارند.

۲- هسته‌هایی که در آنها تعداد پروتون یا نوترون برابر با یکی از اعداد ۱۴ و ۲۸ و ۴۰ باشد پایداری کمتری نسبت به هسته‌های جادویی دارند اما پایدارتر از بقیه هسته‌ها هستند این اعداد، اعداد شبه جادویی نامیده می‌شوند.

۳- هسته‌هایی که تعداد Z آنها متناظر با یک عدد جادویی است بالاترین تعداد ایزوتوپ را دارند و هسته‌هایی که تعداد N آنها متناظر با یک عدد جادویی است بالاترین تعداد ایزوتون را دارند.



شکل (۱-۱): تعداد ایزوتون‌های پایدار برحسب عدد نوترونی [۷]

۴- هسته‌هایی که در مجاورت هسته‌ها با پروتون یا نوترون جادویی هستند مقادیر خاصی از گشتاور چار قطبی را دارند. یعنی تغییر شکل یافته‌اند.

۵- اهمیت اعداد جادویی تکیه بر این واقعیت دارد که عدد متناظر با پروتون و نوترون به هسته پایداری بالا می‌دهد.

۶- اعداد جادویی در هسته، نقشی مشابه خواص الکترون‌ها در پر شدن ترازهای اتمی دارند. به هر حال برای الکترون‌ها، مقادیر ۲، ۱۵، ۱۸، ۵۴، ۸۶ به عنوان اعداد جادویی شناخته می‌شوند.

۸- در هسته‌هایی که پروتون یا نوترون اعداد جادویی باشد انرژی حالت برانگیخته از حالت‌های پایه بالاتر است.

۹- ایزوتوپ‌های پایدار وقتی وجود دارند که Z عدد جادویی باشد و ایزوتون‌های پایدار وقتی وجود دارند که N عدد جادویی باشد [۸].

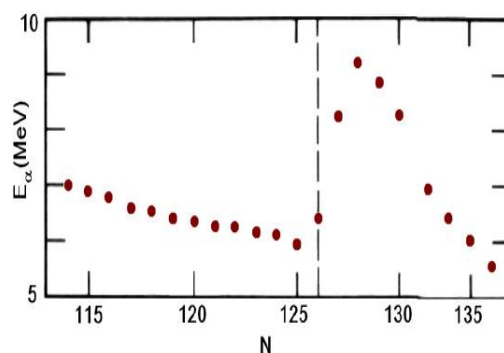
برخی از شواهد تجربی برای وجود اعداد جادویی (پوسته‌های بسته) به شرح زیر است:

۱- با رسم نمودارهای مربوط به S_{2n} و S_{2p} به ترتیب برای ایزوتون‌ها و ایزوتوپ‌ها ملاحظه می‌شود که در اعداد جادویی نقاط بیشینه‌ای روی منحنی دیده می‌شود که حاکی از آن است که در اعداد پروتونی و نوترونی جادویی انرژی جداسازی بیشتر می‌شود.

۲- مشاهده می‌شود که انرژی آلفای گسیل شده از $^{214}_{86}\text{Rn}_{128}$ پر انرژی‌تر از بقیه آلفاهاست و واپاشی آن به صورت زیر است:

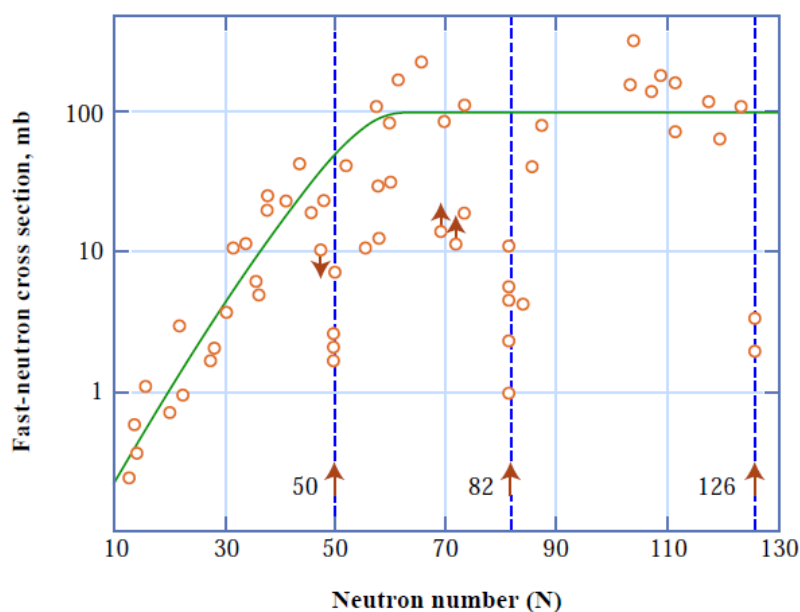


به دلیل بالا بودن انرژی آلفای گسیل شده، $^{210}_{84}\text{Po}_{126}$ باید انرژی بستگی بیشتری هم نسبت به سایر هسته‌های دختر داشته باشد. از طرفی می‌بینیم که این هسته دارای عدد نوترونی جادویی است.



شکل (۱۲-۱): انرژی ذرات آلفای گسیل شده از ایزوتوپ‌های Rn

۳- اگر N عدد جادویی باشد پس سطح مقطع جذب برای نوترون‌ها پایین‌تر از دیگر هسته‌ها است. مشاهده می‌شود که در نواحی ۱۲۶ و ۸۲ و ۵۰ N سطح مقطع به اندازه دو مرتبه بزرگی نسبت به هسته‌ها با جرم مشابه کاهش می‌یابد [۹].



شکل (۱۳-۱): سطح مقطع جذب نوترون‌های با انرژی ۱ MeV [۷]

هسته‌های دو جادویی^۱

۱- هسته‌هایی که N و Z آنها هر دو جادویی هستند هسته‌های دو جادویی نامیده می‌شوند.

۲- این هسته‌ها به شدت مقید می‌باشند. برای مثال هسته‌های (^{208}Pb , ^{40}Ca , ^{16}O , ^4He) پایدارتر هستند.

¹ Double Magic Nuclei

۳-گشتاور چار قطبی هسته‌های دو جادویی مساوی صفر است. در نتیجه این هسته‌ها تقارن کروی دارند.

۱-۴) نیرو و ذرات تبادلی بین نوکلئون‌ها

در اینجا یک سوال پیش می‌آید که چه چیزی اجزای هسته را کنار هم نگه می‌دارد؟ چون پروتون‌ها با بار مثبت باید همدیگر را به شدت دفع کنند، ولی کنار هم فشرده و چیده شده‌اند. روشن است که نیروی دیگری باید وجود داشته باشد که قوی‌تر از نیروی دافعه الکتریکی است و پروتون‌ها و نوترون‌ها را در کنار هم نگه می‌دارد. فیزیکدانان آن دوره، آن را نیروی قوی نامیده بودند، اما اگر چنین نیروی قوی در طبیعت موجود است چرا آنرا در زندگی روزمره خود حس نمی‌کنیم؟ نکته اینجاست که تقریباً هر نیرویی که ما مستقیماً تجربه می‌کنیم از انقباض ماهیچه گرفته تا انفجار یک دینامیت منشا الکترومغناطیسی دارد تنها استثنا بیرون از راکتور هسته‌ای یا بمب اتمی، جاذبه است. پاسخ این است که آن نیرو اگرچه قوی است ولی برد آن کوتاه است. (برد یک نیرو شبیه طول بازوی یک مشت زن است که خارج از آن تاثیر مشت‌ها صفر می‌شود. نیروهای الکترومغناطیسی و جاذبه‌ای دارای برد بی‌نهایت هستند ولی برد نیروی هسته‌ای به اندازه خود هسته است). یوکاوا در سال ۱۹۳۴ نخستین نظریه شایان توجه نیروی قوی را ارائه کرد. یوکاوا فرض کرده بود که پروتون و نوترون به وسیله نوعی میدان به یکدیگر جذب می‌شوند، درست به همان ترتیب که الکترون به وسیله میدان الکتریکی پروتون و ماه به وسیله میدان جاذب زمین جذب می‌شود، این میدان باید کوانتیده شود و یوکاوا پرسیده بود که خواص کوانتوم آن چیست؟ ذره‌ای که تبادل آن، ویژگی‌های شناخته شده‌ی نیروی قوی را پدید آورد چیست؟ برای نمونه، برد کوتاه نیرو نشان می‌داد که واسطه خیلی سنگین است. یوکاوا محاسبه کرده بود که جرم آن نزدیک به ۳۰۰ برابر الکترون یا حدود یک ششم جرم پروتون است. چون این ذره بین الکترون و پروتون واقع می‌شد، آن را مزون (یعنی ذره میانه) نامیدند. π مزون یوکاوا است [۱۰].

ویژگی‌های نیروی بین نوکلئون‌ها

۱- جاذب و مرکزی هستند. یعنی این نیرو غالباً جاذبه است، در غیر این صورت دافعه‌ی کولنی بین نوکلئون‌ها موجب فروپاشی هسته می‌گردید و هسته‌های پایدار نمی‌توانستند وجود داشته باشند و همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قویتر است. پایین‌ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه‌ای که آن را به صورت یک چاه مربعی (این فرض باعث سادگی محاسبات می‌شود و اطلاعات تجربی را به خوبی باز تولید می‌کند) در نظر می‌گیریم. ویژگی مشترک همه این پتانسیل‌ها در بستگی انحصاری آنها به فاصله بین نوکلئونی r است.

۲- وابسته به اسپین هستند. برای وابستگی نیروی هسته‌ای به اسپین شواهد زیادی وجود دارد که به یک مورد اشاره می‌کنیم: در بررسی دوترون مشاهده می‌کنیم که تنها حالت سه تایی (که اسپین نوترون و پروتون موازی است) حالت مقید است و در دوترون حالت تک تایی (پاد موازی بودن اسپین پروتون و نوترون) وجود ندارد. اگر نیروی بین نوترون و پروتون به جهت نسبی اسپین‌ها بستگی نمی‌داشت در این صورت برای هر دو حالت سه تایی و تک تایی با انرژی یکسانی روبه‌رو می‌شدیم و هر دو حالت به صورت مقید در دوترون وجود می‌داشت.

۳- در فواصل خیلی کوتاه دافعه هستند. نیروی هسته‌ای در فواصلی که در حدود ابعاد اتمی است به حدی ضعیف می‌شود که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

۴- اشباع‌پذیر هستند. یعنی اگر بپذیریم که هر تک نوکلئون همه نوکلئون‌های اطراف خود را جذب می‌کند باید تعداد $\frac{A(A-1)}{2}$ زوج برهم‌کنش متمایز وجود می‌داشت در این صورت باید انرژی بستگی با $A(A-1) \approx A^2$ متناسب باشد و تمام هسته‌ها قطری برابر با برد نیروی هسته‌ای داشته باشند. هر دو پیش‌بینی انرژی بستگی متناسب با A^2 و حجم هسته‌ای ثابت برای هسته‌های $A > 4$ با تجربه مخالفت می‌کند. تجربه نشان داده است که حجم و انرژی بستگی برای اغلب هسته‌ها با عدد جرمی A متناسب‌اند و نیروی هسته‌ای اشباع‌پذیر است و هر نوکلئون درون هسته فقط تعداد محدودی از نوکلئون‌های دیگر را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

- ۵- شامل یک جمله غیر مرکزی به نام پتانسیل تانسوری هستند. که عمده‌ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده گشتاور چارقطبی الکتریکی غیر صفر در حالت پایه دوترون و همچنین تفاوت میان مقدار مشاهده شده و مقدار محاسبه شده گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون می‌باشد.
- ۶- وابسته به سرعت هستند. از آزمایشات برخورد شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه نیروی نوکلئون-نوکلئون به سرعت نسبی نوکلئون‌ها وابسته است.
- ۷- مستقل از بار الکتریکی هستند. یعنی پس از تصحیح برهم‌کنش الکترومغناطیسی نیروهای $p-p$ و $p-n$ بین نوکلئون‌هایی که در یک حالت باشند یکسان است.

۱-۵) مدل نیروی تبادل^۱

برای تایید حضور نیروی تبادل در هسته دو دلیل وجود دارد:

- ۱- خاصیت اشباع نیروی هسته‌ای
 - ۲- مطالعه پراکندگی np در انرژی‌های بالا
- خصوصیت اشباع نیروهای هسته‌ای و وجود قله بزرگ رو به عقب در پراکندگی np را می‌توان با استفاده از نیروی تبادل توضیح داد؛ در مورد اولی می‌گوییم برای آنکه نوعی پیوند اشباعی بین نوکلئون‌ها وجود داشته باشد باید بین آنها چیزی رد و بدل شود و در مورد دومی می‌گوییم که بین نوکلئون‌ها «چیزی» مبادله می‌شود که عملاً خصوصیت آنها را تغییر می‌دهد. در مراحل آغازین فیزیک کلاسیک برهم‌کنش بین اجسام را یک «کنش از دور» می‌دانستند. این بدان معنی است که نیروی یک جسم به طریق اسرارآمیزی در فضا به جسم دیگری منتقل می‌شود. پیشرفت بزرگ فیزیک نظری قرن نوزدهم را باید در معرفی مفهوم میدان دانست. طبق این نظر هر جسمی در فضا، یک میدان نیرو (که نمونه‌های آن میدان‌های الکترومغناطیس و گرانش هستند) ایجاد می‌کند و برهم‌کنش جسم دوم نه مستقیماً با جسم اول بلکه فقط از طریق همین میدان صورت می‌گیرد. در مورد میدان الکترومغناطیسی چگونگی انتقال میدان در فضا توسط ماکسول نشان داده شد. عمده‌ترین تحول قرن

¹ Exchange Force Model

بیستم را باید پیدایش مکانیک کوانتومی بدانیم که بنابر آن هر گونه تبادل انرژی لزوماً به صورت بسته‌ها یا مضربهایی از یک مقدار گسسته یا کوانتوم انرژی است. میدان کلاسیک کمیتی یکنواخت و پیوسته است و برای اینکه نظریه کلاسیک میدان را با نظریه کوانتومی میدان سازگار کنیم خود میدان را باید به صورت کوانتومی در آوریم؛ یعنی بنابر نظریه کوانتومی میدان، جسم اول در فضای اطرافش یک میدان کلاسیک بوجود نمی‌آورد بلکه از خود کوانتوم میدان گسیل می‌کند در این صورت جسم دوم می‌تواند این کوانتوم‌های میدان را جذب کند (و به طرف جسم اول باز پس فرستد). پس این دو جسم به طور مستقیم با کوانتوم‌های میدان مبادله شده و به طور غیر مستقیم با یکدیگر برهم‌کنش دارند. طبیعی است که آن چیزی را که در برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون مبادله می‌شود کوانتوم میدان هسته‌ای در نظر گرفته شود. روشن است که برای تبدیل یک نوترون با اسپین $1/2$ به یک پروتون با اسپین $1/2$ ذره مبادله شده باید دارای اسپین درست (صفر یا یک) و بار الکتریکی باشد. بعلاوه اگر بخواهیم همان مفهوم نیروی تبادل را برای برهم‌کنش nn هم به کار ببریم نوع بدون بار ذره مبادله شونده نیز باید وجود داشته باشد. با استفاده از برد نیروی هسته‌ای که در عمل مشاهده شده است می‌توان جرم ذره تبدالی را برآورد کرد. فرض کنید که نوکلئون (که آن را با N نشان می‌دهیم تا پروتون و نوترون هر دو را شامل شود) ذره‌ای مانند X را جذب می‌کند:



یک نوکلئون چگونه می‌تواند یک ذره با انرژی جرمی $m_x c^2$ از خود گسیل کند و بدون نقض پایستگی انرژی همچنان به صورت نوکلئون باقی بماند؟ چنین عملی ممکن نیست مگر اینکه گسیل و جذب مجدد نوکلئون در چنان فاصله کوتاه Δt صورت بگیرد که ما از نقض پایستگی انرژی مطلع نشویم. چون اصل عدم قطعیت توانایی ما را در اندازه‌گیری انرژی (و در نتیجه در تعیین پایستگی انرژی) محدود می‌کند. اگر $\Delta t < \hbar / (m_x c^2)$ باشد ما از نقض پایستگی انرژی به میزان $\Delta E = m_x c^2$ مطلع

نخواهیم شد. بیشینه برد نیرو را بیشینه فاصله‌ای که ذره X می‌تواند در زمان Δt طی کند، تعیین می‌کند. اگر سرعت ذره را از مرتبه c بگیریم، حداکثر برد ذره (R) چنین می‌شود:

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{200\text{MeV}}{m_x c^2} \quad (9-1)$$

که در آن به جای $\hbar c$ از تقریب ساده‌ای استفاده شده است. معادله (9-1) حاکی از وجود رابطه‌ای مفید بین انرژی جرمی ذرات مبادله شونده و برد نیروی تبادل است. روشن است که اگر برد نیروی هسته‌ای در حدود 1 fm باشد انرژی جرمی ذره تبدالی می‌باید در حدود 200 MeV شود. چنین ذراتی را که فقط برای لحظاتی زودگذر دوام می‌آورند و می‌توانند قانون پایستگی انرژی و تکانه را نقض کنند (در نوکلئون‌های جذب کننده و گسیل کننده پس زنی دیده نمی‌شود) ذرات مجازی^۱ می‌گویند. می‌توان نیروی حاصل از تبادل ذرات مجازی را مشاهده کرد ولی نمی‌توان خود این ذرات را در حین تبادل مشاهده کرد (اما ذرات مجازی مبادله شونده را می‌توان همانند ذرات معمولی در نظر گرفت. بنابر نظریه میدان، برهم‌کنش کولنی بین بارهای الکتریکی را می‌توان به صورت تبادل فوتونهای مجازی که خواصی مشابه فوتونهای حقیقی و معمولی دارند در نظر گرفت). ذرات تبدالی حامل نیروی هسته‌ای را «مزون»^۲ می‌نامند (واژه «مزو» یونانی و به معنای میانه است که به جرم متوسط این ذرات که از الکترون بیشتر و از پروتون کمتر است اشاره دارد). سبکترین مزون، مزون π یا پیون^۳ نامیده می‌شود. سه جزء برهم‌کنش سیستم دو نوکلئونی عبارتند از:

۱- بخش بلند برد (از 1 fm تا 1/5 fm):

پتانسیل تبادل تک پیون^۴ به واسطه جرم کوچک پیون، بلند بردترین قسمت برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون است. شکل کلی برهم‌کنش نوکلئون - نوکلئون به صورت زیر است:

$$V_{\text{OPEP}} = g^2 (\tau_1 \cdot \tau_2) [(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\nabla})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\nabla})] f(r) \quad (10-1)$$

¹ Virtual Particles

² Meson

³ Pion

⁴ OPEP

که g ثابت جفت‌شدگی پيون - نوکلئون و $f(r)$ به شکل یوکاوی زیر است:

$$f(r) = \frac{e^{-(r/\rho_\pi)}}{r} \quad (11-1)$$

برد ρ_π با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\rho_\pi = \hbar/(m_\pi c) = 1.414 \text{ fm} \quad (12-1)$$

رابطه (۱۰-۱) را می‌توان بسط داد و برحسب جملات عملگرهای مرکزی و اسپین - تانسوری نوشت :

$$V_{\text{OPEP}} = \frac{g^2}{3} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left\{ s_{12} \left[\frac{3}{r^3} + \frac{3}{\rho_\pi r} + \frac{1}{\rho_\pi^2} \right] f(r) + \frac{(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)}{\rho_\pi^2} f(r) - 4\pi (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \delta(r) \right\} \quad (13-1)$$

این پتانسیل با در نظر گرفتن مقدار اختلاف بین پيون‌های باردار و خنثی به خوبی برای $p-p$,

$n-p$ و $n-n$ به صورت مناسب‌تری ارائه شده است.

۲- دربخش متوسط برد (از 0.5 fm تا 1 fm):

این تبادل به صورت دو پيون (مزون‌های سنگین) صورت می‌گیرد. چرا که با دو پيون جرم ذره تبدالی

دو برابر شده و برد نصف می‌شود.

۳- بخش کوتاه برد (از 0.25 fm تا 0.5 fm):

تبادل مزون W (با انرژی سکون معادل 783 MeV) ممکن است در تشکیل مغز دافعه دخالت داشته

باشد و تبادل مزون ρ (با انرژی سکون معادل 769 MeV) می‌تواند تامین‌کننده اثر اسپین - مدار در

برهم‌کنش هسته‌ای باشد. برای آنکه انواع تبادل‌های لازم در سیستم دو نوکلئونی امکانپذیر باشد باید

سه نوع پيون با بارهای الکتریکی $+$ ، 0 و $-$ وجود داشته باشد. پيون‌ها اسپین صفر دارند و انرژی

سکونشان معادل با $139/6 \text{ MeV}$ (برای $\pi^\pm$) و 135 MeV (برای π^0) است [۱۱، ۴].

اختلاف جرم پيون‌های باردار و خنثی می‌تواند نقض احتمالی کوچکی را که قبلاً در مورد استقلال بار

مطرح شد توضیح دهد. پيون منفردی که در برهم‌کنش بین نوکلئون‌های یکسان مبادله می‌شود،

لزوماً از نوع π^0 است:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + n_2 \rightarrow n_2 \quad (14-1)$$

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2 \quad (15-1)$$

هیچ نوکلئون بارداری که بار ۱- یا ۲+ داشته باشد وجود ندارد، تبادل پیون باردار در این مورد کارساز نیست:

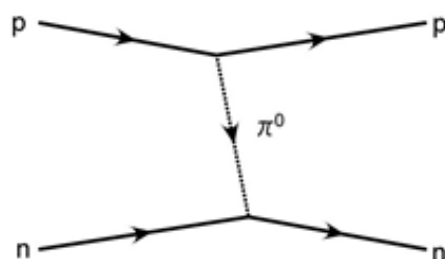
$$\pi^- + n_2 \rightarrow ? \quad \text{but} \quad n_1 \rightarrow p_1 + \pi^- \quad (16-1)$$

$$\pi^+ + p_2 \rightarrow ? \quad \text{but} \quad p_1 \rightarrow n_1 + \pi^+ \quad (17-1)$$

(گرچه نوکلئون‌های با بار ۱- یا ۲+ در حالت‌های برانگیخته وجود دارند، ولی این حالت‌های پر انرژی در آزمایش‌های انرژی پایین، سهم قابل توجهی ندارد) اما برهم‌کنش نوترون - پروتون با تبادل هر دو نوع پیون باردار و خنثی تحقق پذیر است:

$$\pi^0 + p_2 \rightarrow p_2 \quad n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad (18-1)$$

$$\pi^- + p_2 \rightarrow n_2 \quad n_1 \rightarrow p_1 + \pi^- \quad (19-1)$$



شکل (۱۴-۱): مبادله پیون مجازی در پراکندگی پروتون - نوترون

۱-۶) نظریه مزونی یوکاوا و ذره یوکاوا

مفهوم نیروهای تبدالی اولین بار توسط یوکاوا در نظریه مزونی‌اش بیان شد. طبق این نظریه اگر ما رفتار نیروهای هسته‌ای را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مورد بررسی قرار دهیم، یک رفتار طبیعی را مبنی بر این که برد نیروهای هسته‌ای کوتاه است مشاهده خواهیم کرد [۱۲]. برد نیروهای هسته‌ای از مرتبه $\frac{\hbar}{m_\pi c}$ می‌باشد که در آن m_π جرم مزون π یا پیون است. این نظریه توسط داده‌های تجربی نیز ثابت شده است $m_\pi = 266m_e$. طبق این نظریه عامل برهم‌کنش بین نوکلئون‌ها مزون π

است. اساس نظریه مزونی یوکاوا معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین گوردن^۱ می گوییم [۱۲]. همانطور که می دانیم انرژی نسبیتی برای یک ذره آزاد به صورت زیر نوشته می شود:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_\pi^2 c^4, \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad P \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (20-1)$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Phi + m_\pi^2 c^4 \Phi \quad (21-1)$$

با در نظر گرفتن چهار بردار x_1, x_2, x_3 و $x_4 = ict$ قسمت فضایی و قسمت وابسته به زمان رابطه بالا به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left[-\hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \frac{m_\pi^2 c^4}{\hbar^2} \right) \right] \Phi = 0 \quad (22-1)$$

که معادله کلاین گوردن را در دو حالت وابسته به زمان و مستقل از زمان به صورت های زیر می توانیم بنویسیم.

وابسته به زمان:

$$(\square^2 + \mu^2) \Phi = 0 \quad \square^2 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (23-1)$$

مستقل از زمان:

$$(\nabla^2 + \mu^2) \Phi = 0 \quad \nabla^2 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar} \quad (24-1)$$

که معادله کلاین گوردن برای حالت پایا به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_4} = 0 \rightarrow \square^2 = \nabla^2 \rightarrow (\nabla^2 + \mu^2) \Phi = 0 \quad (25-1)$$

با حل معادله اخیر برای Φ به جواب $\Phi = \frac{e^{-\mu r}}{r}$ می رسیم. که برد نیروی هسته ای از مرتبه $\frac{1}{\mu}$ یا

$\frac{\hbar}{m_\pi c}$ می شود. اگر برد نیروی هسته ای را با $\frac{\hbar}{m_\pi c}$ مساوی قرار دهیم (برد نیروی هسته ای 10^{-13} cm)

به نتیجه ای $m_\pi = 200 m_e$ می رسیم که با جواب بدست آمده از آزمایشات قابل مقایسه است. پس

معادله کلاین گوردن مزون π را توجیه می کند [۱۲].

¹ Klein-Gordon Equation

ذرات تبادلی حامل نیروی هسته‌ای را مزون می‌نامند. سبک‌ترین مزون، π یا پیون نامیده می‌شود، شاید بتوان عامل پیوند هسته‌ای را تبادل دو پیونی دانست. در صورتی که دو نوکلئون به اندازه کافی به هم نزدیک شوند ممکن است که دو مزون به طور همزمان مبادله شوند. متأسفانه، تبادل چند مزونی فرایند پیچیده‌ای است که نمی‌توان آن را به روشنی با نظریه‌های فعلی میدان محاسبه کرد. بنابراین، اثر آن را در نیروی هسته‌ای نمی‌توان با اطمینان حساب کرد.

۷-۱) شرایط پتانسیل هسته‌ای مناسب

- ۱- پتانسیل باید یک کمیت نرده‌ای باشد.
- ۲- از آنجا که دو نوترون یا دو پروتون غیر قابل تشخیص هستند، هرگاه جای دو ذره را با هم عوض می‌کنیم نباید پتانسیل تغییر کند.
- ۳- طبق اصل ناوردایی وارونی زمان، اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند.
- ۴- ابتدا نیروهایی را که مستقل از سرعت هستند در نظر می‌گیریم، به این نیروها، نیروهای استاتیکی می‌گویند. اگر پتانسیل استاتیکی باشد نمی‌تواند به $\vec{P}, \vec{L}$ بستگی داشته باشد. زیرا این‌ها به سرعت وابسته هستند. بنابراین پتانسیل استاتیکی تنها شامل $\vec{r}, \vec{s}$ است. بنابراین جمله‌ای که وابستگی پتانسیل استاتیکی به اسپین را نشان می‌دهد به صورت $(\vec{s} \cdot \vec{r})^2$ می‌باشد.
- ۵- ویژگی دیگری که نیروی استاتیکی نوکلئون - نوکلئون می‌تواند به آن وابسته باشد، پاریته تابع موجی است که سیستم را توصیف می‌کند. از آن جا که پاریته به فرد یا زوج بودن L بستگی دارد، نیروی هسته‌ای برای L زوج و L فرد متفاوت است. در نهایت با در نظر گرفتن اطلاعات بدست آمده پتانسیل‌های پدیده شناختی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت:

$$V = V_C + V_{CS} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \quad (۲۶-۱)$$

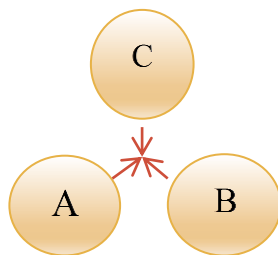
V_C انرژی پتانسیل مرکزی معمولی را توصیف می‌کند.

V_{CS} جمله مرکزی وابسته به اسپین است. V_T معرف نیروی تانسوری است. S_{12} عملگر تانسوری است.

V_{LS} نیروی اسپین - مداری را مشخص می‌کند.

۸-۱) نیروهای چند جسمی

تا حالا فرض کردیم که نیروی هسته‌ای دو جسمی است. در صورتی که اگر نوکلئون‌های A ، B و C به هم نزدیک باشند، نیروی اعمال شده بر A ، $F_{AB} + F_{AC}$ است که اگر C نبود F_{AB} نیروی میان A و B بود و اگر B نبود F_{AC} نیروی میان A و C می‌شد. البته این رفتار نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی است.



شکل (۱۵-۱): سیستم سه جسمی

ثابت شده است در فیزیک هسته‌ای اگر سیستمی متشکل از سه ذره A ، B و C باشد علاوه بر برهم‌کنش‌های دو جسمی، یک برهم‌کنش سه جسمی نیز وجود خواهد داشت. می‌توان این نیرو را به این صورت درک کرد که اگر نیروی وارد بر نوکلئون A را بررسی کنیم، علاوه بر نیروهایی که از طرف نوکلئون‌های B و C بر نوکلئون A وارد می‌شود، یک نیروی اضافی دیگر از همبستگی مواضع نوکلئون‌های B و C نیز بر نوکلئون A وارد می‌شود. به عبارت دیگر نیروی سه جسمی^۱ که ما بین سه نوکلئون قرار دارد به طور همزمان به مواضع سه ذره وابسته می‌باشد [۱۳]. مهمترین جمله در پتانسیل سه نوکلئونی که بزرگترین برد احتمالی را دارد به فرآیند شناخته شده‌ای مانند $TPE - 3NP$ مربوط است. یک پیون که بوسیله‌ی یکی از نوکلئون‌ها تابش شده است، قبل از جذب شدن بوسیله سومین نوکلئون، توسط نوکلئون دوم پراکنده می‌شود. تبادل‌های دیگری نیز وجود دارند برای مثال هنگامی که دو نوکلئون حضور دارند و یکی از نوکلئون‌ها دو مزون گسیل می‌کند هر دو مزون باید جذب نوکلئون دیگر شوند، ولی هرگاه دو نوکلئون دیگر علاوه بر نوکلئون اول حضور داشته باشند دو مزون گسیل شده می‌توانند جداگانه جذب هر یک از دو نوکلئون شوند. این امر منجر به نیروی سه

¹ Three-Body Force

جسمی می‌شود. سهم تبادل دو پیون و سه پیون توسط کیسر کار شده است [۱۴-۱۷]. به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که طرح تبادل مزونی، نیروهای چهار جسمی و پنج جسمی و غیره که به طور کلی نیروی چند جسمی نامیده می‌شوند را پیش‌بینی می‌کند. از آنجا که باید مزون‌های زیادی به طور همزمان در این فرآیندها ایجاد شوند. اگر به طور تقریبی برد نیروی n جسمی را $1/(n-1)$ برابر برد نیروی دو جسمی در نظر بگیریم، این مقدار برای نیروهای ۲، ۳، ۴ و ۵ جسمی به ترتیب در حدود $۱/۴$ ، $۰/۷$ ، $۰/۴۷$ ، $۰/۳۵$ فرمی است. برای تخمین فاصله بین نوکلئون‌ها، V/A یعنی حجم به ازای نوکلئون را حساب می‌کنیم. یعنی حجم هر نوکلئون به طور متوسط برابر است با حجم کره‌ای به شعاع $۱/۰۷$ فرمی و بنابراین متوسط فاصله نوکلئون‌ها در یک هسته حدود $۲/۱$ می‌شود. علاوه بر این، به علت نیروی دافعه قوی، نوکلئون‌ها تقریباً هیچوقت از حدود $۰/۵$ فرمی به هم نزدیکتر نمی‌شوند [۱۳]. نتیجه بحث این است که در تعیین ساختار هسته نیروی دوجسمی است که اهمیت زیادی دارد و نیروهای چند جسمی به استثنای نیروی سه جسمی بی‌اهمیت‌اند. این نیرو به راحتی در سیستم‌هایی که شامل سه نوکلئون هستند مطالعه می‌شود. برای نمونه می‌توان به کارهای کیفسکی و همکارانش در مراجع [۱۸، ۱۹] اشاره کرد. یک رهیافت به مسئله، مطالعه سیستم‌های سه نوکلئونی است تا ببینیم که آیا می‌توان خصوصیات نیروی سه جسمی را از نیروی دو جسمی محاسبه کرد یا نه؟ جواب منفی است که اختلاف بین داده‌ها و محاسبات، فقط براساس نیروی دو نوکلئونی معمولاً به عنوان یک نشانه از وجود نیروی سه نوکلئونی در نظر گرفته شده است.

قابل توجهی در منابع محاسباتی به ما اجازه می‌دهد محاسبات میکروسکوپیکی دقیق از پراکندگی مشاهده‌پذیرهای سه نوکلئونی و چهار نوکلئونی و طیف هسته‌های سبک انجام شود و این راه را برای آزمایش‌های دقیق در زمینه دینامیک و به ویژه نقش و ساختار نیروی سه نوکلئونی باز می‌کند. از طرف دیگر پیشرفت‌های قابل توجهی در درک خواص سیستم‌های چند نوکلئونی در چارچوب کایرال EFT بدست آمده است که به ما اجازه می‌دهد:

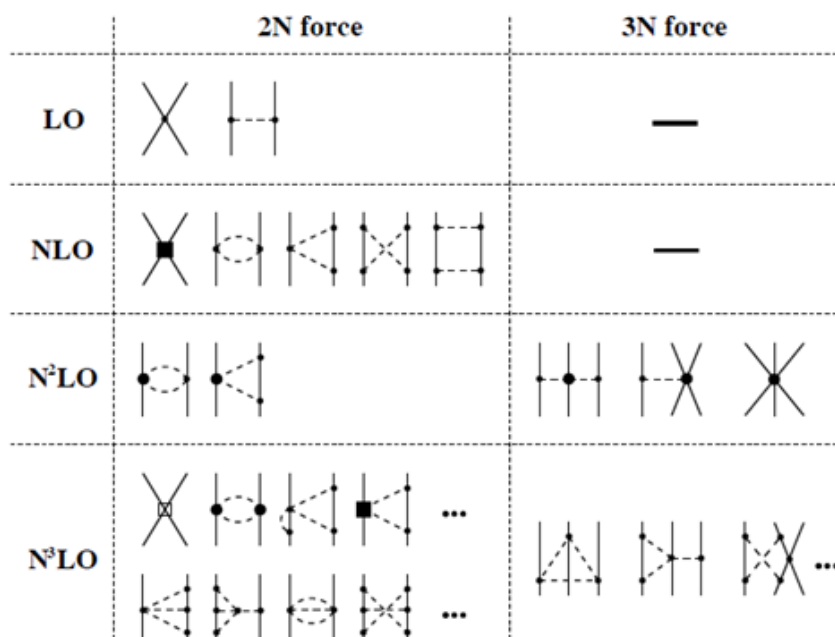
۱- خواص سیستم‌های هادرونیک کم انرژی را در یک روش سیستماتیک و کنترل شده تحلیل کنیم.

۲- یک توضیح طبیعی برای سلسله مراتب مشاهده شده از نیروهای هسته‌ای ارائه می‌دهد [۲۰].

که این سلسله مراتب عبارتند از:

$$\langle V_{2N} \rangle > \langle V_{3N} \rangle > \langle V_{4N} \rangle \quad (2-28)$$

در شکل (۱-۱۷) زیر یک سلسله مراتب از نیروهای هسته‌ای در کایرال EFT نشان داده شده است.



شکل (۱-۱۷): سلسله مراتب نیروهای هسته‌ای در کایرال EFT [۲۰]

در نتیجه در یک برآورد اولیه پتانسیل دو نوکلئونی برای توصیف بخش عمده‌ای از مشاهده‌پذیرهای چند نوکلئونی در انرژی‌های متوسط و پایین کافی است. به طور کلی محاسبات در انرژی‌های پایین توافق نسبتاً خوبی با نتایج تجربی دارد.

فصل دوم

مرور برخی از خواص هسته‌ای ایزوتوپ‌های اکسیژن

۲-۱) خواص هسته‌ای

فیزیک هسته‌ای مطالعه ساختار هسته و برهم‌کنش بین اجزای تشکیل دهنده آن است. هسته‌ها هم مانند بسیاری از سیستم‌های پیرو قوانین مکانیک کوانتومی، جسمی پیچیده و اسرار آمیز هستند که توصیف رفتار و خواص آن خیلی دشوارتر از اجسام ماکروسکوپی است. مثلاً توصیف کامل یک هسته میان وزن ۵۰ نوکلئونی بر حسب کلیه برهم‌کنش‌های بین نوکلئون‌های موجود در هسته مستلزم $50!$ عبارت یا در حدود 10^{64} جمله است می‌توان هسته‌ها را به کمک تعدادی از پارامترهای هسته‌ای، تا حد قابل توجهی توصیف کرد. این پارامترها به دو گروه عمده تقسیم می‌شوند:

گروه اول - خواص استاتیکی^۱ یا مستقل از زمان (خواص ایستا) هسته‌ها که عبارتند از: بارالکتریکی، انرژی‌بستگی، جرم، شعاع، تکانه زاویه‌ای، پاریته، گشتاور دوقطبی مغناطیسی، گشتاور چارقفی الکتریکی و انرژی حالت‌های برانگیخته و ...

گروه دوم - خواص دینامیکی^۲ یا وابسته به زمان هسته‌ها که عبارتند از: احتمال واپاشی و احتمال واکنش هسته‌ها و ...

درک و تفسیر خواص استاتیکی و دینامیکی هسته‌ها بر پایه برهم‌کنش بین تک‌تک نوکلئون‌های موجود در هسته، موضوع بسیار مهمی است که هر متخصص فیزیک هسته‌ای باید با آن دست و پنجه نرم کند [۴].

در این فصل هدف ما این است که برخی از ویژگی‌های ایزوتوپ‌های اکسیژن را مرور کنیم که در ابتدا با خلاصه‌ای از ویژگی‌های ایزوتوپ ^{16}O شروع می‌کنیم که به شرح زیر است:

ایزوتوپ اکسیژن ۱۶ هسته‌ای زوج - زوج و دوجادویی است. زیرا اعداد پروتونی و نوترونی آن عدد جادویی ۸ است. در فصل قبل دریافتیم که این هسته‌ها، هسته‌های فوق العاده پایداری هستند و دارای تقارن کروی می‌باشند. می‌دانیم گشتاور چارقفی (Q) هسته‌های کروی صفر است در نتیجه

¹ Static Propertices

² Dinamical Propertices

گشتاور چارقطبی ^{16}O نیز صفر می‌باشد. آخرین نوترون و پروتون آن در پوسته $1p_{\frac{1}{2}}$ قرار دارد که این پوسته کاملاً پر است.

جدول (۱-۲): ویژگی‌های ایزوتوپ ^{16}O [۲۳، ۴]

Isotope	Z	N	I^π	Isospin	فراوانی	$E_b(\text{Mev})$	$r_c(\text{fm})$	Q
^{16}O	۸	۸	0^+	۰	٪۹۹/۷۶	-۱۲۷/۶۱۹	۲/۶۹	۰

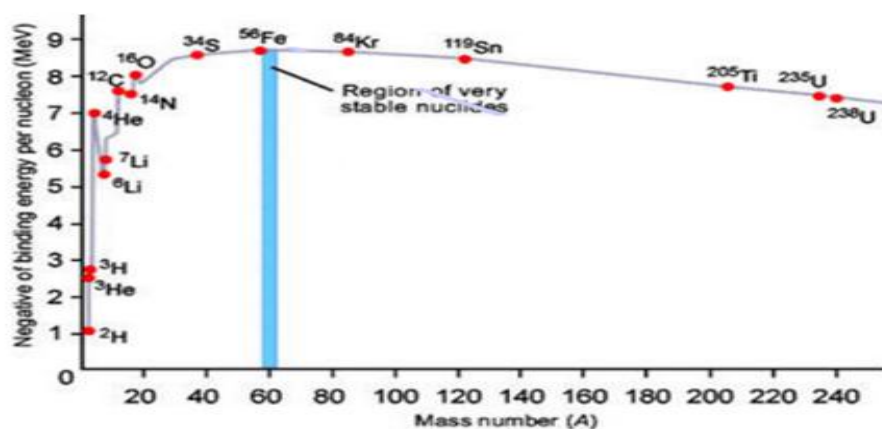
۲-۲) انرژی بستگی^۱

اختلاف بین جرم واقعی هسته و مجموع تک تک نوکلئون‌های آن را به واحد انرژی، انرژی بستگی می‌نامند. این انرژی معرف کاری است که باید انجام داد تا هسته را به نوکلئون‌های جدا از هم تجزیه کرد، یا بالعکس انرژی است که در هنگام تجمع نوکلئون‌های جدا از هم برای تشکیل یک هسته، آزاد می‌شود [۹].

$$B(A, Z) = (ZM_H + NM_n - M(A, Z))c^2 \quad (۱-۲)$$

انرژی بستگی به ازای هر نوکلئون با عبارت $\frac{B}{A}$ بیان می‌شود که خود تابعی از A می‌باشد. همانگونه

که در شکل (۱-۲) نشان داده شده است:



شکل (۱-۲): انرژی بستگی متوسط هر نوکلئون در هسته‌های مختلف

¹ Binding Energy

انرژی بستگی متوسط به ازای هر نوکلئون برابر است با :

$$\frac{B(A, Z)}{A} \quad (2-2)$$

الف) در قسمت ابتدایی منحنی در $A < 60$ شاهد قله‌هایی هستیم که مربوط به هسته‌هایی است که تعداد نوکلئونهایشان مضرب صحیحی از ذرات آلفاست. برای این نوع هسته‌ها یک مدل ذره آلفایی پیشنهاد شده است که طبق این مدل ذرات آلفا اجرای همدوس هستند و به جای پیوند بین تک نوکلئون‌ها، پیوند بین ذرات آلفا صورت می‌گیرد.

ب) منحنی در نزدیکی $A = 60$ (${}^{60}_{26}\text{Fe}$) قله پهنی دارد.

ج) بین $A = 100$ تا حدود $A = 200$ ناحیه نسبتاً ثابتی وجود دارد که در این ناحیه انرژی بستگی متوسط بسیاری از هسته‌ها با تقریب ۱۰ درصد در حدود 8 MeV برای هر نوکلئون است. از آنجایی که برای مایعات انرژی بستگی متوسط ذره (مثلاً یک مولکول) تقریباً ثابت است برای توصیف این قسمت از منحنی می‌توان از مدل قطره مایع استفاده کرد. از این قسمت از منحنی نتیجه می‌گیریم که یک نوکلئون در هسته تمام نوکلئون‌ها را نمی‌بیند بلکه فقط قادر به دیدن نوکلئون‌های نزدیک به خود است. یعنی در هسته یک نیروی کوتاه برد هسته‌ای (که برد آن در حدود $2F$ تقریباً مساوی قطر نوکلئون است) وجود دارد. علاوه بر این نیرو در هسته خاصیت اشباع وجود دارد که ناشی از دو اثر است:

۱- نیروی دافعه بین نوکلئون‌ها که در فاصله‌ای در حدود $F(1/2)$ وارد عمل می‌شود.

۲- اصل طرد پائولی

د) بعد از ناحیه ثابت در A بزرگ، B_{ave} شروع به کاهش می‌کند که دلیل آن نیروی دافعه کولنی است.

ه) با توجه به منحنی شکل (۱-۲) هسته‌ها برای رسیدن به پایداری و انرژی بستگی بیشتر دو راه در پیش دارند تا اصطلاحاً خود را از منحنی بالا کشیده و به قله برسانند. در ناحیه $A < 60$ گداخت (همجوشی)^۱ هسته‌ای و تبدیل دو هسته به یک هسته با عدد جرمی بزرگتر و در ناحیه $A > 60$ شکافت هسته‌ای^۲ و تبدیل یک هسته با عدد جرمی بزرگ به دو هسته با عدد جرمی کوچک [۹، ۵].

جدول (۲-۲): انرژی بستگی ایزوتوپ‌های اکسیژن

A	$E_{\text{exe}} (\text{Mev}) [24]$	$E_{\text{exe}} (\text{Mev}) [23]$
۱۶	-۱۲۷/۶۲۱	-۱۲۷/۶۱۹
۱۷	-۱۳۱/۷۶۵	-
۱۸	-۱۳۹/۸۰۸	-۱۳۹/۸۰۷
۱۹	-۱۴۳/۷۶۴	-
۲۰	-۱۵۱/۳۷۳	-۱۵۱/۳۷۰
۲۱	-۱۵۵/۱۷۹	-
۲۲	-۱۶۲/۰۳۴	-۱۶۲/۰۳۰
۲۳	۱۶۴/۷۷۵	-
۲۴	-۱۶۸/۳۸۷	-۱۶۸/۵۰۰

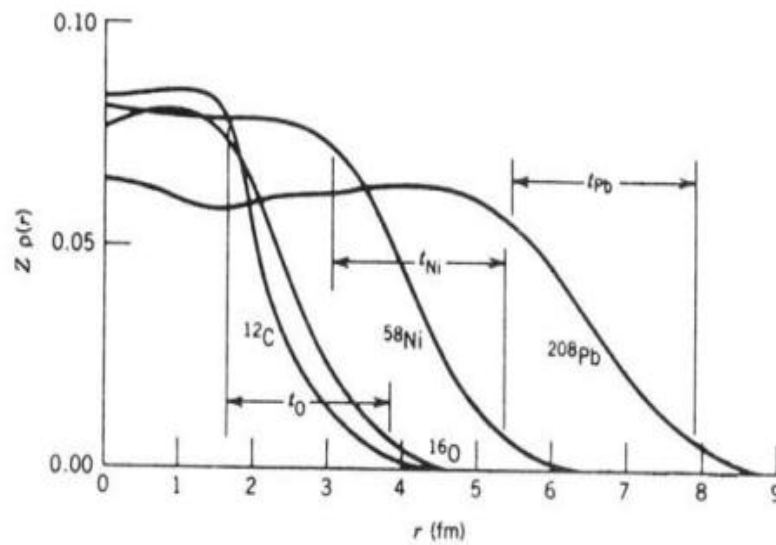
۲-۳) شعاع هسته

شعاع هسته هم مانند شعاع اتم کمیتی دقیقاً تعریف شده نیست. هیچ یک از این دو (اتم و هسته) را نمی‌توان به صورت کره‌های جامد با مرزهای مشخص تصور کرد. در هر دو مورد، پتانسیل کولنی که عامل پیوند اتمی و توزیع بار الکترونهاست تا بی‌نهایت ادامه دارد، هر چند که مقدار آن در فواصل دورتر از شعاع اتمی (10^{-10} m) فوق العاده ناچیز است. شعاع میانگین نشانگر فاصله‌ای از مرکز هسته است که چگالی نوکلئونی در آن به نصف مقدار مرکزی آن کاهش می‌یابد. شعاعی که اندازه می‌گیریم، به آزمایشی که برای تعیین شکل هسته انجام می‌دهیم بستگی دارد. در بعضی از آزمایش‌ها برهم‌کنش

^۱ Fusion

^۲ Fission

بین یک ذره باردار و هسته را اندازه می‌گیریم. پس کمیت مورد اندازه‌گیری در این آزمایش‌ها توزیع بار هسته‌ای است و در برخی از آزمایش‌ها، برهم‌کنش قوی هسته‌ای بین ذرات موجود اندازه‌گیری می‌شود و توزیع تعیین شده، توزیع نوکلئون‌ها است که توزیع ماده هسته‌ای نامیده می‌شود. این شکل نشان می‌دهد که:



شکل (۲-۲): توزیع شعاع باری در هسته‌های مختلف [۹، ۵]

۱- چگالی بار هسته‌ای در مرکز تمام هسته‌ها تقریباً مقداری ثابت است. نوکلئون‌ها در مرکز هسته متراکم نمی‌شوند، بلکه توزیع آنها در تمام حجم هسته نسبتاً ثابت می‌ماند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که تعداد نوکلئون‌های موجود در واحد حجم هسته تقریباً ثابت است.

$$\frac{A}{4/3\pi R^3} \sim \text{const} \Rightarrow R = R_0 A^{\frac{1}{3}} \quad (۳-۲)$$

۲- میزان پخش شدگی سطح هسته‌ها (و نامشخص بودن مرز آنها) را هم نشان می‌دهد. چگالی بار تا نقطه معینی تقریباً ثابت می‌ماند و آنگاه به کندی به صفر میل می‌کند. فاصله‌ای که در طی آن چگالی بار به صفر می‌رسد، تقریباً مستقل از اندازه هسته است و معمولاً مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود. ضخامت پوست را که در طی آن چگالی بار هسته از ۹۰٪ مقدار مرکزی به ۱۰٪ مقدار آن کاهش می‌یابد. مقدار t تقریباً $۲/۳ \text{ fm}$ است. شعاع‌های بار و ماده هسته‌ای، با تقریب حدود $۰/۱ \text{ fm}$ با هم

برابراند و هر دو شعاع به $A^{1/3}$ بستگی دارند و ضریب تناسب آنها برابر $R_0 \approx 1/2 \text{ fm}$ است. در هسته‌های سنگین، چون تعداد نوترون‌ها در حدود ۵۰ درصد بیشتر از پروتون‌ها است ممکن است انتظار داشته باشیم که شعاع نوترونی هسته‌ها اندکی بزرگتر از شعاع پروتونی باشد اما باید توجه کرد که نیروی دافعه پروتونی درصدد است؛ پروتون‌ها را به قسمت بیرونی هسته براند و نیروی نوترون – پروتون مایل است نوترون‌ها را به قسمت درونی هسته بکشد. این کشاکش باعث می‌شود شعاع‌های بار و ماده هسته‌ای تقریباً با هم برابر شوند [۴].

۴-۲) اسپین هسته

هر حالت هسته را با یک عدد کوانتومی اسپین منحصر بفرد I مشخص می‌کنند که نمایانگر تکانه کل (مداری و ذاتی) تمام نوکلئون‌های هسته می‌باشد. بردار I را می‌توان به صورت حاصل جمع مولفه‌های مداری و ذاتی تکانه زاویه‌ای در نظر گرفت:

$$\vec{I} = \sum_{i=1}^A (\vec{I}_i + \vec{S}_i) = \vec{L} + \vec{S} = \sum_{i=1}^A \vec{J}_i \quad (۴-۲)$$

و همچنین عدد کوانتومی I رابطه ساده‌ای با بردار $\vec{I}$ دارد:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I(I+1)}\hbar \quad (۵-۲)$$

$$I_z = m_I \hbar \quad (m_I = I, I-1, \dots, -I+1, -I) \quad (۶-۲)$$

تنها علت اینکه در رابطه (۵-۲) از محاسبه بردارها و همچنین از ساختمان داخلی هسته صرف نظر شده است می‌تواند این باشد که برهم‌کنشی که هسته تحت تاثیر آن است مانند میدان‌های الکترومغناطیسی ایستا به اندازه کافی قوی نیست که ساختمان داخلی را تغییر دهد یا جفت‌شدگی نوکلئون‌ها را بگسلد [۲۵].

۲-۵) پاریته هسته

همایلتونی‌های قوی هسته‌ای و الکترومغناطیسی، پاریته را پایسته نگه می‌دارند. بنابراین ویژه حالت‌ها به دو دسته از حالات که هر کدام پاریته مشخص $\pi = +1$ یا $\pi = -1$ دارند تقسیم می‌شوند و همایلتونی، این دو دسته را با هم مخلوط نمی‌کند. در ساختار هسته‌ای، پاریته کل، از پاریته ذاتی نوکلئون $\pi_{int} = +1$ و پاریته مربوط به اندازه حرکت زاویه‌ای مداری نوکلئون $\pi_l = (-1)^l$ نشأت می‌گیرد. پاریته کل هسته، برابر حاصلضرب پاریته کل نوکلئون‌های آن است.

$$\pi = \prod_i \pi_{int}(i) \pi_l(i) = \prod_i (-1)^{l_i} \quad (2-7)$$

و معمولاً حالت‌های پایه و ویژه حالت‌ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که پاریته مشخصی داشته باشند [۲۶].

۲-۶) اسپین - پاریته ایزوتوپ‌های اکسیژن

۱- در هسته‌های A فرد: در این هسته‌ها اسپین خالص همواره توسط Z آخرین ذره فرد تعیین می‌شود به طوری که A-1 نوکلئون دیگر (که دارای تعداد پروتون و نوترون زوج است) مثل مورد زیر با اسپین صفر با یکدیگر تزویج می‌شوند. مثال: ^{17}O

۲- در هسته‌های A زوج:

الف) Z و N هر دو زوج باشند دارای I=0 هستند، این مطلب تمایل قوی نوکلئون‌ها را برای جفت‌شدگی تزویجی و تولید اسپین صفر را نشان می‌دهد. مثال: ^{16}O

ب) Z و N هر دو فرد باشد، اسپین توسط جفت‌شدگی برداری پروتون و نوترون نهایی $I = J_p + J_n$ تعیین می‌شود.

$$I = |I_p - I_n|, \dots, |I_p + I_n| \quad (2-8)$$

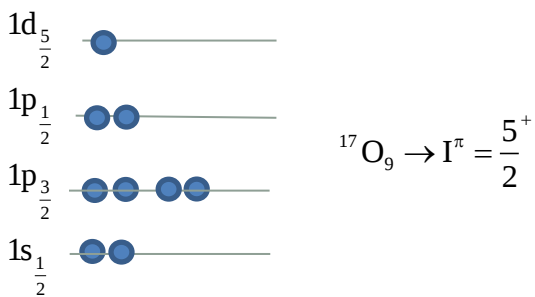
بین I و π رابطه مستقیمی وجود ندارد و در نتیجه برای هر مقدار I، علامت π می‌تواند مثبت یا منفی باشد پاریته را به صورت شاخص بالای اسپین نشان می‌دهند.

با توجه به نکات ذکر شده اسپین و پاریته ایزوتوپ‌های اکسیژن را به دست آوردیم که به شرح زیر می‌باشد:



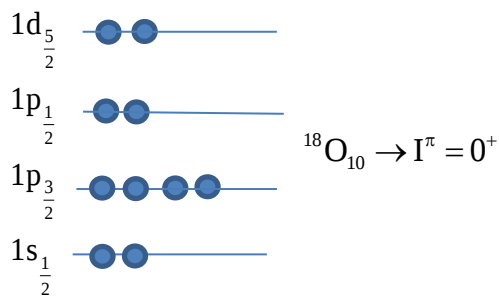
$$^{16}\text{O}_8 \rightarrow I^\pi = 0^+$$

شکل (۳-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{16}O



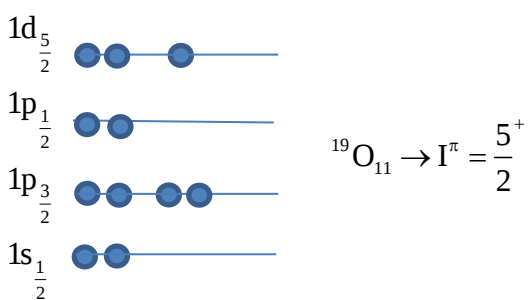
$$^{17}\text{O}_9 \rightarrow I^\pi = \frac{5}{2}^+$$

شکل (۴-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{17}O



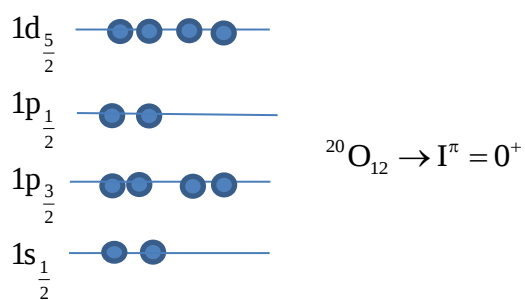
$$^{18}\text{O}_{10} \rightarrow I^\pi = 0^+$$

شکل (۵-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{18}O



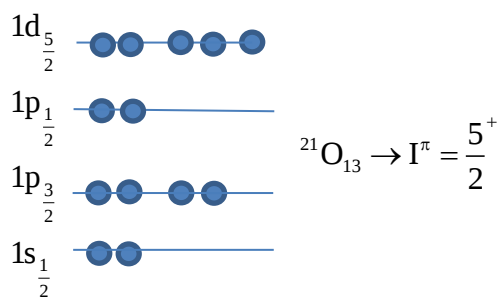
$$^{19}\text{O}_{11} \rightarrow I^\pi = \frac{5}{2}^+$$

شکل (۶-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{19}O

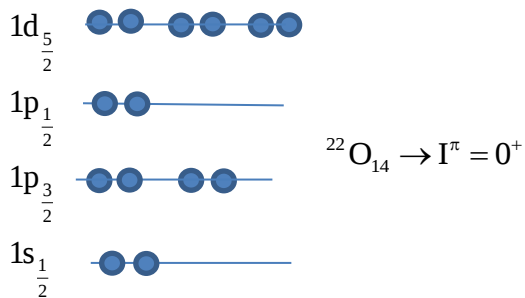


$$^{20}\text{O}_{12} \rightarrow I^\pi = 0^+$$

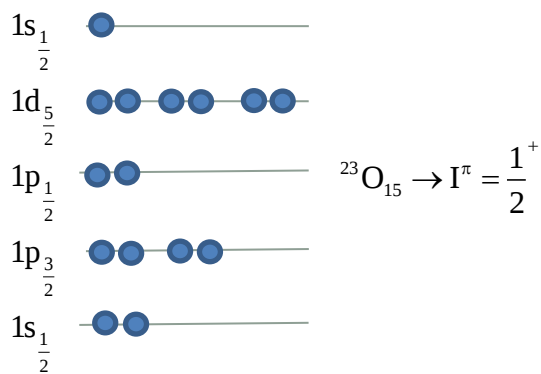
شکل (۷-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{20}O



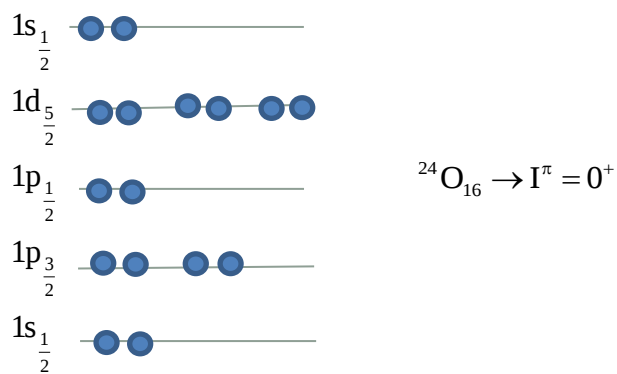
شکل (۸-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{21}O



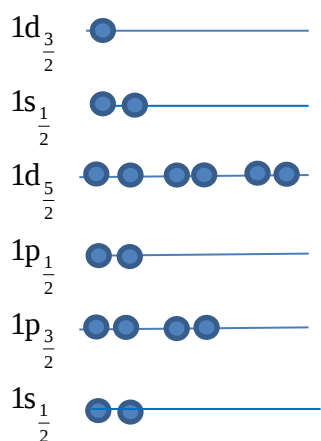
شکل (۹-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{22}O



شکل (۱۰-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{23}O



شکل (۱۱-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{24}O



شکل (۱۲-۲): ترازهای نوترونی ایزوتوپ ^{25}O

پیکربندی این ایزوتوپ‌ها در خارج از پوسته بسته شامل اوربیتال‌های $1s_{\frac{1}{2}}$, $1d_{\frac{3}{2}}$, $1d_{\frac{5}{2}}$ است.

جدول (۲-۳): اسپین - پارите ایزوتوپ‌های اکسیژن

A	N	I^{π}
۱۶	۸	0^{+}
۱۷	۹	$(\frac{5}{2})^{+}$
۱۸	۱۰	0^{+}
۱۹	۱۱	$(\frac{5}{2})^{+}$
۲۰	۱۲	0^{+}
۲۱	۱۳	$(\frac{5}{2})^{+}$
۲۲	۱۴	0^{+}
۲۳	۱۵	$(\frac{1}{2})^{+}$
۲۴	۱۶	0^{+}
۲۵	۱۷	$(\frac{3}{2})^{+}$

۲-۷) ایزواسپین

استقلال نیروهای هسته‌ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی پایسته جدیدی به نام ایزواسپین می‌شود. در سال ۱۹۳۲، هایزنبرگ پروتون و نوترون را به عنوان دو حالت از یک ذره، نوکلئون در نظر گرفت. برای توصیف دو حالت نوکلئون، یک فضای ایزواسپینی معرفی می‌شود به طوری که دو حالت یک ذره معمولی با اسپین $1/2$ نه به عنوان دو ذره، بلکه به صورت دو حالت از یک ذره تلقی می‌شود. بدین ترتیب پروتون به صورت حالت بالا و نوترون به صورت حالت پایین نوکلئون در نظر گرفته می‌شود. این وضعیت را به صورت یک کمیت جدید، ایزواسپین I معرفی می‌کنند. نوکلئونی که دارای

ایزواسپین $1/2$ است، تعداد $2I+1=2$ سمتگیری ممکن در فضای ایزواسپینی دارد. بنابراین به هر دو نوکلئون، ایزواسپین $1/2$ نسبت می‌دهیم که پروتون تصویر $T_z = 1/2$ و نوترون تصویر $T_z = -1/2$ آن است. عملگر ایزواسپین t برای درجات آزادی ایزواسپین، شبیه عملگر اسپین S برای درجات آزادی اسپین است. برای چندین نوکلئون، t ایزواسپین کل و تصویر Z اش با روابط زیر داده می‌شود.

$$\vec{T} = \sum_i \vec{t}(i) \quad (9-2)$$

$$T_z = \sum_i t_z(i) \quad (10-2)$$

تعداد $2t+1$ مقدار برای T_z ، از $T_z = -T$ تا $T_z = +T$ با گام‌های صحیح وجود دارد. برای هسته‌ای با

$$\text{تعداد } Z \text{ پروتون و تعداد } N \text{ نوترون، } T_z = \frac{N-Z}{2} \text{، است [۲۵].}$$

جدول (۴-۲): ایزواسپین حالت پایه ایزوتوپ‌های اکسیژن

A	T_z
۱۶	۰
۱۷	$1/2$
۱۸	۱
۱۹	$3/2$
۲۰	۲
۲۱	$5/2$
۲۲	۳
۲۳	$7/2$
۲۴	۴
۲۵	$9/2$

۲-۸) انرژی جداسازی

انرژی جداسازی پروتون و نوترون هم از جمله اطلاعات مفیدی است که اغلب در جداول خواص هسته‌ای با آن برخورد می‌کنیم. این انرژی میزان بستگی بیرونی‌ترین نوکلئون (نوکلئون ظرفیت) را به هسته نشان می‌دهد. انرژی جداسازی هم درست مانند انرژی یونش در اتم‌ها، بر ساختار پوسته‌ای هسته‌ها دلالت می‌کند که مشابه ساختار پوسته‌ای اتم‌هاست. مقدار انرژی جداسازی یک نوکلئون برابر انرژی بستگی (پیوندی) آن نوکلئون در هسته است که باید به آن اندازه به نوکلئون انرژی داد تا بتوان آن را از هسته جدا کرد.

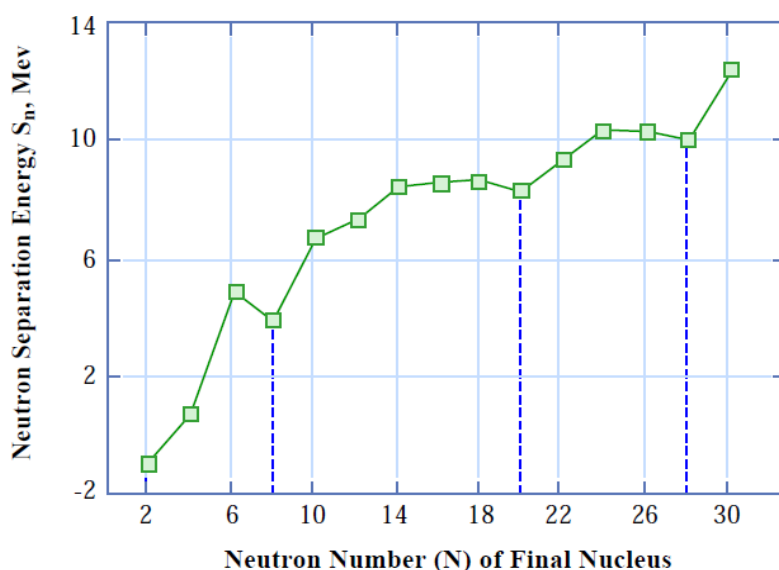
۱- مقدار انرژی لازم برای جدا کردن K پروتون از هسته عبارتند از:

$$S_{Kp} = B(A, Z) - B(A - K, Z - K) = [m(A - K, Z - K) + Km({}^1\text{H}) - m(A, Z)]c^2 \quad (۱۱-۲)$$

۲- مقدار انرژی لازم برای جدا کردن K نوترون از هسته عبارتند از:

$$S_{Kn} = B(A, Z) - B(A - K, Z) = [m(A - K, Z) + Km_n - m(A, Z)]c^2 \quad (۱۲-۲)$$

در هسته‌هایی که N عدد جادویی باشد انرژی جداسازی نوترون زیاد است در شکل زیر انرژی جداسازی برای هسته‌هایی که $N = ۱ +$ عدد جادویی N نمایش داده شده است که این انرژی پایین است.



شکل (۲-۱۳): انرژی جداسازی آخرین نوترون به صورت تابعی از عدد نوترونی هسته نهایی [۷]

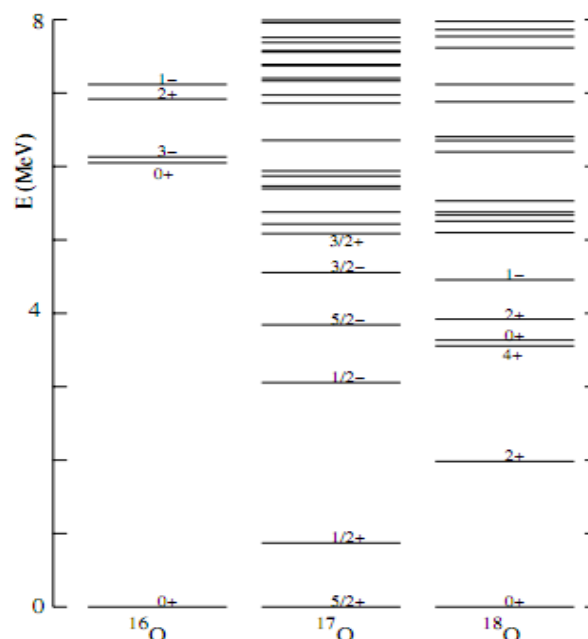
در جدول (۵-۲) انرژی جداسازی نوترون هر هسته دو جادویی با ایزوتوپ بعدی‌اش داده شده است. که با مقایسه آنها در می‌یابیم که انرژی جداسازی نوترون در هسته دو جادویی بزرگتر از ایزوتوپ بعدی آنها است زیرا در هسته‌های دو جادویی ترازهای پروتونی و نوترونی کاملاً پر هستند.

جدول (۵-۲): انرژی جداسازی نوترون در هسته‌های دو جادویی و ایزوتوپ بعدی آن [۴]

نوکلید	S_n (MeV)
^{16}O	۱۵/۶۶
^{17}O	۴/۱۴
^{40}Ca	۱۵/۶۴
^{41}Ca	۸/۳۶
^{208}Pb	۷/۳۷
^{209}Pb	۳/۹۴

۹-۲) ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های اکسیژن ۱۶، ۱۷ و ۱۸

در شکل (۱۴-۲) ترازهای انرژی برخی از ایزوتوپ‌های اکسیژن نشان داده شده است. با توجه به نکاتی که در فصل اول و دوم بیان کردیم می‌توان اسپین - پارته ترازهای هر یک از ایزوتوپ‌ها را محاسبه کرد.



شکل (۱۴-۲): ترازهای انرژی ایزوتوپ‌های اکسیژن [۲۷، ۲۸]

فصل سوم

روش‌های تحلیلی و عددی حل مساله

۳-۱) مقدمه

معادلات شرودینگر^۱، دیراک^۲ و کلاین گوردن از مهمترین معادلاتی هستند که برای توصیف فیزیک سیستم‌های نسبیتی و غیرنسبیتی به کار می‌روند. از آنجایی که این معادلات برای برخی از پتانسیل‌ها از جمله پتانسیل کولنی و نوسانگر هماهنگ ساده و ... به روش تحلیلی به طور دقیق قابل حل هستند لذا برای دیگر پتانسیل‌ها روش عددی راهگشا می‌باشد. از جمله روش‌های تحلیلی که برای حل این معادلات پیشنهاد شده است می‌توان به روش NU و ابر تقارن اشاره کرد. اغلب روش‌های حل معادله شرودینگر بر اساس سیستم‌های دو جسمی است. از آنجایی که تمام هسته‌ها چند نوکلئونی هستند برای بدست آوردن خواص دینامیکی و استاتیکی این سیستم‌های چند نوکلئونی به دستگاه مختصات جدیدی نیاز داریم که نسبت به تعداد ذرات انعطاف‌پذیر باشد که دستگاه مختصات ژاکوبی این نیاز را رفع می‌کند. ما در این فصل برای حل مسائل چند جسمی به معرفی مختصات ژاکوبی^۳ می‌پردازیم و سپس نگاه مختصری به دو روش تحلیلی NU^۴ و ابر تقارن^۵ و روش عددی RK-4 (که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل خطی و غیرخطی بطور گسترده استفاده می‌شود) خواهیم داشت.

۳-۲) دستگاه مختصات ژاکوبی

برای یک سیستم N ذره‌ای معادله‌ی شرودینگر مستقل از زمان به صورت زیر نوشته می‌شود که در آن هامیلتونی به صورت زیر معرفی می‌شود [۲۹-۳۰]:

$$H = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left(\frac{p_i}{2m_i} + V(r_i) + V(r_i, r_j) \right) \quad (۱-۳)$$

$i \neq j$ به این معنا که، هیچ ذره‌ای با خودش برهم‌کنش ندارد.

^۱ Schrodinger Equation

^۲ Dirac Equation

^۳ Jacobi Coordinates

^۴ Nikiforov-Uvarov Method

^۵ Super Symmetric Method

$i < j$ از نوشتن جملات تکراری صرفنظر می‌شود.

$V(r_i)$ پتانسیل محبوس کننده که اثرات محیطی را شامل می‌شود، مثلاً وقتی ذره‌ای تحت تأثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد تأثیر این میدان‌های خارجی بر روی ذره را در $V(r_i)$ مشاهده می‌کنیم. این جمله شامل برهم‌کنش هر دو ذره با یکدیگر است. برای حل تمام معادلات نیاز به دستگاه مختصات مناسب برای آن مسأله داریم. یکی از این دستگاه‌های مختصات که برای مجموعه‌ای N ذره‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، مختصات ژاکوبی می‌باشد. برای یک سیستم A ذره‌ای می‌توان $N = A - 1$ بردار ژاکوبی و در نتیجه $3N$ مختصه ژاکوبی تعریف کرد و هر بردار ژاکوبی در واقع مرکز جرم یک زیر سیستم را به ذرات باقی مانده وصل می‌کند [۳۱]. وقتی ذرات مورد بررسی نوکلئون‌ها باشند می‌توان با چشم پوشی از اختلاف جرم بین پروتون و نوترون، ذرات سیستم را هم جرم در نظر گرفت. برای چنین سیستمی می‌توان N بردار ژاکوبی را به صورت زیر تعریف کرد [۳۲]:

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i - r_{i+1} + 1}} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j \right) \quad i=1,2,\dots,N-1 \quad (2-3)$$

$\vec{\xi}_i$ بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. بردار مرکز جرم برای هریک از A ذره به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R = \frac{1}{A} (r_1 + r_2 + \dots + r_A) = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^A r_i = \frac{1}{N+1} \sum_{i=1}^{N+1} r_i \quad (3-3)$$

المان حجم در این مختصات به صورت زیر است:

$$\prod_{i=1}^N dr_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\xi_j = dx \quad (4-3)$$

برای توصیف مکان ذره A می‌توان از مختصات ژاکوبی استفاده کرد. که در این حالت با توجه به اینکه هر ذره سه درجه آزادی دارد. ما به $3A$ مختصه ژاکوبی نیاز داریم. در این صورت ابر شعاع به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} (r_i - R)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5-3)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان‌هایی از فاصله نسبی آنها باشند می‌توان آنها را بر حسب ابرشعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل‌ها، پتانسیل‌های فوق مرکزی می‌گویند.

۳-۳) کلیات روش NU

روش NU برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم پایه‌ریزی شده است که با موفقیت برای حل معادلات شرودینگر، دیراک، کلاین‌گوردن در حضور پتانسیل‌های مرکزی و غیرمرکزی بکار برده شده است [۳۱-۳۸]. بکارگیری این روش در حل معادله شرودینگر، دستورالعمل روشی برای بدست آوردن جوابهای دقیق حالت‌های مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته‌شان، بر حسب چند جمله‌ای‌های متعامد ارائه می‌دهد که در عین سادگی بسیار موثر است. روش NU براساس تقلیل یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم، در اینجا معادله شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه‌ریزی شده است [۳۹]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، $s = s(r)$ معادله تبدیل‌یافته را به صورت زیر داریم:

$$\psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi_n(s) = 0 \quad (۳-۶)$$

که σ و $\tilde{\sigma}$ چند جمله‌ای‌هایی حداکثر از درجه دوم و $\tilde{\tau}$ یک چند جمله‌ای حداکثر از درجه اول است. با درنظر گرفتن تابع موج $\psi_n(s)$ به صورت:

$$\psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (۳-۷)$$

معادله (۳-۶) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می‌شود [۳۹]:

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (۳-۸)$$

که در آن

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (۳-۹)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad \tau' < 0 \quad (۳-۱۰)$$

λ_n پارامتری است که به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۹]:

$$\lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (11-3)$$

چند جمله‌ای $\tau(s)$ با علامت پریم نشان می‌دهد که باید مشتق مرتبه اولش منفی باشد. باید به این نکته توجه کرد که λ و λ_n از یک جواب خاص شکل $y(s) = y_n(s)$ که چند جمله‌ای درجه n است بدست می‌آیند، بعلاوه اینکه جمله $y_n(s)$ تابع موج معادله (۷-۳)، یک تابع از نوع فوق هندسی که از رابطه ردیگز زیر به دست می‌آید [۳۹]:

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (12-3)$$

که در آن B_n ثابت نرمالیزاسیون است و $\rho(s)$ تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند:

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (13-3)$$

تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (14-3)$$

$$\lambda = K + \pi'(s) \quad (15-3)$$

از آنجایی که باید $\pi(s)$ حداکثر یک چند جمله‌ای درجه یک باشد، جملات معادله (۱۴-۳) باید به صورت یک چند جمله‌ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص کننده آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای k به دست می‌آید که پس از حل معادله مقادیر به دست آمده k را در معادله (۱۴-۳) جایگذاری می‌کنیم و از تساوی معادلات (۱۱-۳) و (۳-۳) ویژه مقادیر انرژی را به دست می‌آوریم

۳-۴) روش ابرتقارن

روش ابر تقارن یک مفهوم ریاضی است که از استدلالهای تئوری بوجود آمده است و در حال حاضر، یک جزء ضروری در هر نظریه وحدتی است که سعی داشته باشد توصیف واحدی از برهم کنشهای اساسی موجود در طبیعت یعنی برهم کنشهای قوی و الکتروضعیف و گرانشی ارائه کند. به صورت خلاصه ابر تقارن، تقارنی است که بوزونها و فرمیونها را به هم مرتبط می سازد. بر طبق این نظریه بوزونها که مبادله کننده برهم کنش هستند با فرمیونها توسط یک ابر تقارن به هم وابسته اند. جبر درگیر در ابر تقارن جبر مدرج لی است که تحت ترکیبی از روابط جابه جایی بسته است [۴۰]. مکانیک کوانتومی ابر تقارن یکی از بهترین روشها برای تعیین ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع در مسائل مکانیک کوانتومی است [۴۱-۴۳].

هامیلتونی یک بعدی زیر را در نظر می گیریم:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (۳-۱۶)$$

که ویژه توابع آن را با $\psi_n(x)$ و ویژه مقادیر آن را با E_n نمایش می دهیم. برای حالت پایه داریم:

$$H\psi_0(x) = E\psi_0(x) \quad (۳-۱۷)$$

که در آن E_0 انرژی حالت پایه است. حال $V_1(x)$ را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$V_1(x) = V_{\text{eff}}(x) - E_0 \quad (۳-۱۸)$$

در این صورت هامیلتونی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ عبارت است از:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (۳-۱۹)$$

واضح است که مقدار انرژی حالت پایه این هامیلتونی صفر است و انرژی ترازهای دیگر نسبت به انرژی هامیلتونی H به اندازه E_0 کاهش یافته است و چون $V(x)$ و $V_1(x)$ به جز در یک مقدار ثابت با یکدیگر یکسانند، بنابراین دارای ویژه توابع یکسانی هستند. اگر ویژه مقادیر انرژی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ و ویژه تابع آن $\psi_n^1(x)$ باشد داریم:

$$E_n^1(x) = E_n - E_0 \quad (20-3)$$

$$\psi_n^1(x) = \psi_n(x) \quad (21-3)$$

گام اول در این روش فاکتوربندی هامیلتونی است. با فرض اینکه انرژی حالت پایه صفر باشد می توان هامیلتونی یک بعدی $H_1 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x)$ را به صورت $H_1 = A^\dagger A$ یعنی حاصلضرب دو عملگر A و $A^\dagger$ نوشت که عبارتند از:

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (22-3)$$

$$A^\dagger = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (23-3)$$

که $W(x)$ را "ابر پتانسیل" می نامند. با جایگذاری این روابط در هامیلتونی، می توان به رابطه زیر دست یافت که معادله ریکاتی نامیده می شود:

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(x) \quad (24-3)$$

که با حل معادله بالا، $W(x)$ برحسب تابع موج حالت پایه به صورت زیر بیان می شود:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \frac{\psi_0'(x)}{\psi_0(x)} \Rightarrow \psi_0(x) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int W(x') dx'\right) \quad (25-3)$$

با معکوس کردن ترتیب عملگرهای A و $A^\dagger$ می توان یک هامیلتونی جدید به صورت $H_2 = AA^\dagger$ ایجاد کرد که با انجام محاسبات مشابه، پتانسیل جدید که وابسته به ابر پتانسیل است به دست می آید:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} W'(x) \quad (26-3)$$

پتانسیل های $V_1(x)$ و $V_2(x)$ را "همتای ابر تقارنی" می نامند. این پتانسیل ها باید در شرط زیر که مربوط به پتانسیل های ناورد (SIP) است صدق کنند:

$$V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a_1) \quad (27-3)$$

که در این رابطه a_1 و a_2 دو گروه مختلف از پارامترها هستند که از طریق روابطی همچون $a_2 = f(a_1)$ به هم مربوط می‌شوند. یک جنبه مهم رابطه بالا جمله باقیمانده $R(a_1)$ است که مستقل از x است. با استفاده از این شرط می‌توان ویژه مقادیر انرژی حالت‌های بالاتر هامیلتونی H_1 را هم به دست آورد:

$$E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k) \quad (28-3)$$

سپس با استفاده از معادله (۲۰-۳) می‌توان کل طیف انرژی هامیلتونی H را نیز به دست آورد. برای یافتن توابع موج مراتب بالاتر می‌توان از رابطه زیر استفاده کرد.

$$\psi_n^{(1)}(x, a_1) = A^\dagger(x, a_1) \psi_{n-1}^{(1)}(x, a_2) \quad (29-3)$$

۳-۵) حل معادلات دیفرانسیل به روش Rung – kutta

در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی وقتی به صورت ریاضی مدل سازی می‌شوند، به سادگی در قالب یک معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان می‌گردند. شاید نتوان فرم کلی جواب‌ها را برای هر مسئله مدل سازی شده به دست آورد ولی با استفاده از کامپیوتر و روش‌های عددی می‌توان آنها را حل کرد. از نظر محاسباتی اغلب روش‌های کارآمد از نظر دقت، توسط دو ریاضیدان مشهور رونگ و کوتا^۱ توسعه یافته‌اند. این روش‌ها به رونگ کوتا $R-k$ مشهورند. این روش‌ها با توجه به مرتبه‌ی شان تمیز داده می‌شوند، یعنی مطابقت آن‌ها با جواب‌های سری تیلور تا جمله h^r که r مرتبه روش است. روش $R-k4$ برای حل عددی معادلات خطی و غیر خطی بطور گسترده استفاده می‌شود که بسط آن از نظر جبری پیچیده است. ایده‌ی اصلی این روش‌ها را با روش $R-k2$ بررسی می‌کنیم [۴۴]. ایده اصلی این روش، (میانگین شیب‌ها) است. یعنی:

$$y_{n+1} = y_n + hx \quad (30-3)$$

مقدار اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

¹ Runge Kutta Method

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_n) = y_n \quad (31-3)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad , \quad k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (32-3)$$

میانگین وزنی k_1 و k_2 را انتخاب و برای تعیین y_{n+1} به y_n اضافه می‌کنیم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (33-3)$$

w_1, w_2, α و β مقادیر ثابتی هستند که باید تعیین شوند:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + \dots \quad (34-3)$$

رابطه (30-3) با استفاده از روابط (31-3) و (32-3) به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2} (f_t, ff_y) + \frac{h^3}{6} [f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2 ff_{yy} + f_y (f_t + ff_y)] + o(h^4) \quad (35-3)$$

در اینجا همه مشتقات در نقطه (t_n, y_n) محاسبه شده‌اند. با قراردادن معادلات (35-3) در معادله‌ی

(31-3) داریم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (36-3)$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور دو متغیره، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 h [f(t_n + y_n) + (\alpha hf_t + \beta k_1 f_y) + (\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{tt} + \alpha h \beta k_1 f_{ty} + \frac{\beta^2 k_1^2}{2} f_{yy})] + o(h^3) \quad (37-3)$$

از قرار دادن عبارت k_1 در معادله‌ی بالا و سپس مرتب کردن بر حسب توان‌های صعودی h داریم:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2)hf + w_2 h^2 (\alpha f_t + \beta ff_y) + w_2 h^3 (\frac{\alpha^2}{2} f_{tt} + \alpha \beta ff_{ty} + \frac{\beta^2 f^2}{2} f_{yy}) + o(h^4) \quad (38-3)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب در معادلات (38-3) و (35-3) داریم:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad w_2 (\alpha f_t + \beta f f_y) = \frac{f_t f f_y}{2} \quad (39-3)$$

که نتیجه می شود:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = w_2 \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = 1 - w_2 \\ \alpha = \frac{1}{2w_2} \\ \beta = \frac{1}{2w_2} \end{cases} \quad (40-3)$$

w_2 دلخواه است و مقادیر گوناگونی را می توان به آن اختصاص داد:

حالت اول:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{3} \rightarrow \alpha = \beta = \frac{2}{3} \quad (41-3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3}(2k_1 + k_2) \quad (42-3)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (43-3)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{3}{2}h, y + \frac{3}{2}k_1\right) \quad (44-3)$$

حالت دوم:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \beta = 1 \quad (45-3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (46-3)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (47-3)$$

$$k_2 = hf(t + h, y + k_1) \quad (48-3)$$

به روشی مشابه، فرمول $R-k$ از هر مرتبه را می توان به دست آورد. هرچند که مشتقات آنها بسیار طولانی و پیچیده می شود. از بین آنها $R-k4$ متداول تر و مرسوم تر است [44].

مراحل روش $R-K4$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (49-3)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (50-3)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (51-3)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (52-3)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y + k_3) \quad (53-3)$$

ما در این فصل به بررسی روش‌های تحلیلی و عددی برای حل معادلات فیزیکی پرداختیم. و در فصل بعد با استفاده از روش‌های تحلیلی NU و ابرتقارن و محاسبات عددی انرژی حالت پایه ^{16}O را به دست می‌آوریم.

فصل ۴

محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O

۴-۱) مقدمه

از دهه‌های گذشته تا به امروز ایزوتوپ‌های اکسیژن به طور گسترده به لحاظ تجربی و تئوری مورد بررسی قرار گرفته‌اند. از میان ایزوتوپ‌های مختلف اکسیژن، بررسی ایزوتوپ ^{16}O به دلیل اینکه هسته‌ای زوج-زوج و دوجادویی است نسبت به سایر ایزوتوپ‌های اکسیژن بسیار پیچیده‌تر می‌باشد. از آنجایی که این ایزوتوپ ۱۶ نوکلئون دارد در نتیجه یک سیستم N جرمی داریم که برهم‌کنش بین آنها می‌تواند دو جرمی و سه جرمی و ... باشد. با توجه به توضیحات ارائه شده در فصل دوم می‌دانیم نیروی دو جرمی اهمیت زیادی دارد و نیروهای چند جرمی به استثنای نیروی سه جرمی بی‌اهمیت‌اند. و در یک برآورد اولیه، پتانسیل دو نوکلئونی برای توصیف بخش عمده‌ای از مشاهده‌پذیرهای چند نوکلئونی در انرژی‌های متوسط و پایین کافی است. در نتیجه ما در این بررسی فقط نیروی دو جرمی را در نظر می‌گیریم و با توجه به اینکه باید پتانسیل مناسبی را انتخاب کنیم پتانسیل‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

۱- پتانسیل یوکاواي مرتبه دوم تعمیم یافته (GQY)^۱ [۴۵]:

$$V(r) = -V_0 \left(1 - \frac{d}{r} e^{-\alpha r}\right)^2 \quad (۱-۴)$$

که V_0 و d ضرایب این پتانسیل می‌باشند.

۲- پتانسیل هلمن^۲ [۴۶، ۴۷]:

$$V(r) = \frac{-a}{r} + \frac{b}{r} e^{-\alpha r} \quad (۲-۴)$$

که a و b ضرایب این پتانسیل هستند و این پتانسیل توسط هلمن پیشنهاد شده است. ما در این بررسی مدل پوسته‌ای، مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی و مدل خوشه‌ای را پیشنهاد می‌کنیم و با در نظر گرفتن این سه مدل به حل معادله شرودینگر با استفاده از دو پتانسیل که در بالا معرفی کردیم می‌پردازیم و ویژه مقادیر انرژی، تابع موج و انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O را محاسبه می‌نماییم.

^۱ Generalized Quadratic Yukawa Potential

^۲ Hellmann

۲-۴) محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY

از آنجا که در ایزوتوپ ^{16}O با سیستم چند ذره‌ای سر و کار داریم پس در حالت کلی معادله شرودینگر را برای سیستم N ذره‌ای حل می‌نماییم. در روابط زیر برحسب مختصات ژاکوبی که در فصل قبل توضیح دادیم X فوق شعاع می‌باشد. از طرفی معادله شرودینگر در D بعد ($D=3N-3$) با رابطه زیر نمایش داده می‌شود:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla_D^2 + V(x) - E\right)\psi(x) = 0 \quad (۳-۴)$$

که در آن عملگر لاپلاسی به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\nabla_D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D-1}{x} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{l(l+D-2)}{x^2} \quad (۴-۴)$$

لذا قسمت شعاعی معادله شرودینگر با پتانسیل پیشنهادی به صورت رابطه زیر می‌شود:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - \left(-V_0 \left(1 - \frac{d}{x} e^{-\alpha x}\right)^2\right) - \frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu x^2} \right] R = 0 \quad (۵-۴)$$

برای حل معادله شرودینگر با این پتانسیل، ابتدا سعی می‌کنیم با استفاده از بسط تیلور پتانسیل ارائه شده را بسط دهیم. جالب توجه است که این تقریب به ازای α های کوچک از تطابق خوبی برخوردار است:

$$V(x) = -V_0 \left(1 - \frac{d}{x} e^{-\alpha x}\right)^2 \approx -V_0 \left(1 + \frac{d^2}{x^2} (1 - 2\alpha x) - \frac{2d}{x} (1 - \alpha x)\right) \quad (۶-۴)$$

با قرار دادن پتانسیل بسط داده شده در معادله شرودینگر خواهیم داشت :

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E + F + cd\alpha - \frac{1}{x} (2\alpha Ad^2 + cd) - \frac{1}{x^2} \left(\frac{\hbar^2 l(l+D-2)}{2\mu x^2} - Ad^2 \right) \right] R = 0 \quad (۷-۴)$$

برای حل، تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$\frac{2\mu}{\hbar^2} (E + F + cd\alpha) = -\varepsilon^2 \quad (\varepsilon > 0) \quad (۸-۴)$$

$$\frac{2\mu}{\hbar^2}(2\alpha Ad^2 + cd) = \beta \quad (9-4)$$

$$l(1 + D - 2) - \frac{2\mu Ad^2}{\hbar^2} = \gamma \quad (10-4)$$

در این صورت معادله (۷-۴) به شکل (۱۱-۴) تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} + \frac{1}{x^2} [-\varepsilon^2 x^2 - \beta x - \gamma] R = 0 \quad (11-4)$$

برای حل این معادله باید از یکی از روشهای تحلیلی مانند ابر تقارن، NU و... کمک بگیریم که ما در

این بررسی از روش تحلیلی NU استفاده می‌کنیم. در نتیجه با مقایسه با رابطه (۶-۳) داریم:

$$\tilde{\tau} = D - 1 \quad \sigma = x \quad \tilde{\sigma} = -\varepsilon^2 x^2 - \beta x - \gamma \quad (12-4)$$

بنابراین از معادله (۱۴-۳)، $\pi(x)$ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\pi(x) = \frac{2-D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{4\varepsilon^2 x^2 + 4(\beta + k)x + \delta_1} \quad (13-4)$$

که در آن $\delta_1 = 4\gamma + (2-D)^2$ است. از معادله فوق با توجه به اینکه زیر رادیکال مجذور یک چند

جمله‌ای درجه اول باشد، k را تعیین می‌کنیم و در ادامه مقدار مناسب $\pi(x)$ را که شرط $\tau' < 0$ را

برآورده می‌کند را انتخاب می‌کنیم:

$$(i) \pi(x) = \frac{2-D}{2} - \frac{1}{2} (2\varepsilon x + \delta^{1/2}) \quad K = -\beta + \varepsilon \delta^{1/2} \quad (14-4)$$

$$(ii) \pi(x) = \frac{2-D}{2} - \frac{1}{2} (2\varepsilon x - \delta^{1/2}) \quad K = -\beta - \varepsilon \delta^{1/2} \quad (15-4)$$

بنابراین برای حالت (i) از معادله (۱۰-۳)، $\tau(x)$ را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\tau(x) = 1 - (2\varepsilon x + \delta^{1/2}) \quad (16-4)$$

و از معادلات (۱۱-۳) و (۱۵-۳)، λ, λ_n را محاسبه می‌کنیم:

$$\lambda = -\beta + \varepsilon(\delta_1^{1/2} - 1) \quad (17-4)$$

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (18-4)$$

از تساوی λ, λ_n برای هر حالت می‌توانیم ε را به دست آوریم:

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{\left[2n+1-\delta_1^{1/2}\right]} \quad (19-4)$$

با توجه به رابطه (۸-۴) ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر داریم:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{\left[2n+1-\delta_1^{1/2}\right]^2} - F - cd\alpha \quad (20-4)$$

به همین ترتیب برای حالت (ii)، با تکرار فرایند بالا ویژه مقادیر انرژی را به دست می آوریم.

از معادله (۱۰-۳)، $\tau(x)$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\tau(x) = 1 - (2\varepsilon x - \delta^{1/2}) \quad (21-4)$$

و از معادلات (۱۱-۳) و (۱۵-۳)، λ, λ_n را محاسبه می کنیم:

$$\lambda_n = 2n\varepsilon \quad (22-4)$$

$$\lambda = -\beta - \varepsilon(\delta_1^{1/2} + 1) \quad (23-4)$$

$$\lambda = \lambda_n \quad (24-4)$$

$$2n\varepsilon = -\beta - \varepsilon(\delta_1^{1/2} + 1) \quad (25-4)$$

و به این ترتیب ε را به دست می آوریم:

$$\varepsilon = \frac{-\beta}{\left[2n+1+\delta_1^{1/2}\right]} \quad (26-4)$$

با توجه به رابطه (۸-۴) ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر داریم:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{\left[2n+1+\delta^{1/2}\right]^2} - F - cd\alpha \quad (27-4)$$

در حالت کلی اگر بخواهیم مسئله ویژه مقدار انرژی را با استفاده از معادله شرودینگر برای پتانسیل

معرفی شده بررسی کنیم و فرض کنیم از ماهیت روابط پارامترهای α و V_0 و d موجود در پتانسیل

آگاه نباشیم، حل مسئله مشابه همین مورد است فقط بایستی به این نکته توجه کنیم که در روابط به

دست آمده برای ε ، چون $\varepsilon > 0$ در نظر گرفته شده بنابراین β فقط مقادیر منفی را می پذیرد و از

مقادیر مثبت باید صرف نظر شود زیرا در غیر این صورت $\varepsilon < 0$ می شود که با فرض اولیه مغایرت دارد.

در ادامه، ویژه توابع وابسته به ویژه مقادیر را به دست می آوریم:

$$\ln(\phi(s)) = \int \frac{\pi(s)}{\sigma(s)} ds \quad (28-4)$$

با جایگذاری مقدار $\pi(x), \sigma(x)$ در رابطه فوق و با اندکی عملیات جبری ساده $\phi(x)$ را در هر حالت محاسبه می کنیم.

$$(i)\phi(x) = x^{-1/2[-(2-D)+\delta_1^{1/2}]} e^{-\varepsilon x} \quad (29-4)$$

$$(ii)\phi(x) = x^{1/2[(2-D)+\delta_1^{1/2}]} e^{-\varepsilon x} \quad (30-4)$$

از طرفی داریم:

$$\ln(\omega(x)) = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \quad (31-4)$$

لذا برای حالت (i) با جایگذاری $\tau(x), \sigma(x)$ مقدار $\omega(x)$ را به صورت زیر به دست می آوریم:

$$\omega(x) = x^{1-\delta_1^{1/2}} e^{-2\varepsilon x} \quad (32-4)$$

و همچنین تابع وزنی را با توجه به $\rho(x) = \frac{\omega(x)}{\sigma(x)}$ می توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\rho(x) = x^{-\delta_1^{1/2}} e^{-2\varepsilon x} \quad (33-4)$$

از معادله (۳-۱۲)، $y_n(x)$ را به صورت زیر می نویسیم:

$$y_n = B_n x^{\delta_1^{1/2}} e^{2\varepsilon x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n-\delta_1^{1/2}} e^{-2\varepsilon x}) \quad (34-4)$$

نمایش چند جمله ای ردیگرز توابع وابسته لاگر را به صورت زیر داریم [۴۸]:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) \quad (35-4)$$

از مقایسه دو معادله (۳۴-۴) و (۳۵-۴) با در نظر گرفتن $k = -\delta_1^{1/2}$ و $x = 2\varepsilon x$ داریم:

$$y_n = B_n n! L_n^{(-\delta_1^{1/2})}(2\varepsilon x) \quad (36-4)$$

به همین صورت برای حالت (ii) با جایگذاری $\sigma(x)$, $\tau(x)$ مقدار $\omega(x)$ را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$\omega(x) = x^{\delta_1^{1/2}+1} e^{-2\epsilon x} \quad (37-4)$$

$$\rho(x) = \frac{\omega(x)}{\sigma(x)} = x^{\delta_1^{1/2}} e^{-2\epsilon x} \quad (38-4)$$

و در نهایت از معادله (۱۲-۳) به رابطه زیر می رسیم:

$$(ii) y_n(x) = B_n x^{-\delta_1^{1/2}} e^{2\epsilon x} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\delta_1^{1/2}} e^{-2\epsilon x}) \quad (39-4)$$

و با مقایسه با نمایش چند جمله ای ردیگرز توابع وابسته لاگر و با در نظر گرفتن $k = \delta_1^{1/2}$ و $x = 2\epsilon x$ می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$y_n(x) = B_n n! L_n^{\delta_1^{1/2}}(2\epsilon x) \quad (40-4)$$

لذا با توجه به معادله (۷-۳) تابع موج شعاعی را به صورت زیر می نویسیم:

$$(i) R_{n,l}(x) = B_{n,l} n! x^{\frac{(\delta_1^{1/2}+D-2)}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{\delta_1^{1/2}}(2\epsilon x) \quad (41-4)$$

$$(ii) R_{n,l}(x) = B_{n,l} n! x^{\frac{(\delta_1^{1/2}-D+2)}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{\delta_1^{1/2}}(2\epsilon x) \quad (42-4)$$

توابع موج به دست آمده دو جواب از معادله دیفرانسیلی درجه دو هستند لذا ترکیب خطی آنها را به صورت جواب کل در نظر می گیریم. بنابراین داریم:

$$R(x) = B_n^i R^{(i)}(x) + B_n^{ii} R^{(ii)}(x) \quad (43-4)$$

از طرفی با توجه به رابطه (۴۱-۴) تابع موج $R^i(x)$ در $x \rightarrow 0$ بی نهایت می شود، بنابراین $B_n^i = 0$ در نظر می گیریم، از طرفی با توجه به رابطه (۴۲-۴) برای اینکه تابع موج $R^{ii}(x)$ در $x \rightarrow 0$ بی نهایت نشود باید $\delta_1^{1/2} > D-2$ باشد در غیر این صورت x دارای توان منفی خواهد شد و هنگامی که x به سمت صفر میل کند تابع موج به بی نهایت میل می کند. و با استفاده از شکل سری چند جمله ای وابسته لاگر ضریب بهنجارش را از رابطه زیر به دست می آوریم:

$$\int [R_{n,l}(x)]^2 d^3x = 1 \quad (44-4)$$

الف) محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با استفاده از مدل پوسته‌ای

در محاسبات اولیه پوسته $1s_{\frac{1}{2}}$ را به عنوان پوسته کاملاً پر در نظر می‌گیریم و ۱۲ نوکلئون باقی مانده را در خارج از پوسته بسته در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های نوکلئون - نوکلئون بین این ۱۲ ذره به نتایج زیر دست می‌یابیم. در این حالت $D=33$ است از طرفی برای واگرا نشدن تابع موج در $x \rightarrow 0$ باید $\delta_1^{1/2} > 31$ باشد. به منظور برآورده شدن این شرط $\delta_1^{1/2}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\delta_1^{1/2} = \sqrt{4\gamma + (2-D)^2} = N \quad N=2, 3, 4, \dots \quad (45-4)$$

با توجه به اینکه $\delta_1^{1/2}$ یک تابع صعودی از l است مقدار $\delta_1^{1/2}$ به ازای هر l در تناظر یک به یک با مقادیر N است.

$$N = l + 32 \quad l=0,1,2,\dots \quad (46-4)$$

ویژه مقادیر انرژی عبارتند از:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[(2n+1) + l + 32]^2} - F - cd\alpha \quad (47-4)$$

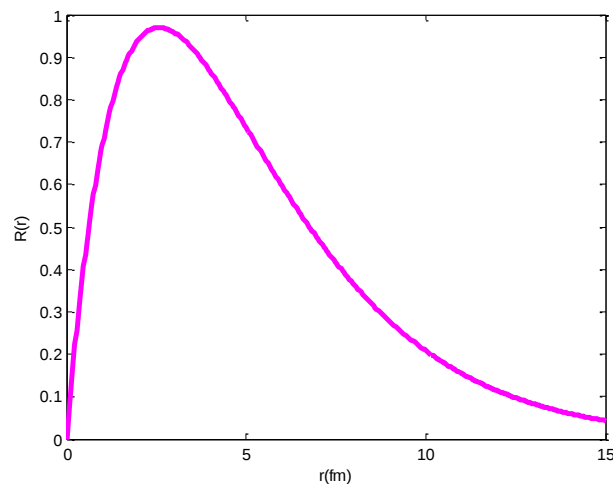
تابع موج سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$(ii) R_{n,l}(x) = B_{n,l} n! x^{\frac{(\delta_1^{1/2}-31)}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{\delta_1^{1/2}}(2\epsilon x) \quad (48-4)$$

جدول (۱-۴): انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY و استفاده از مدل پوسته‌ای

$V_0(\text{MeV})$	$\alpha(\text{fm}^{-1})$	$d(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [23]$
۲۴۶	۰/۳	-۱۱	-۱۲۴/۳۸۴	-۱۲۷/۶۱۹
۲۴۸	۰/۰۳	-۱۱	-۱۲۵/۷۲۹	
۳۰۹	۰/۰۴	-۹	-۱۲۵/۷۸۷	
۳۵۴	۰/۰۴	-۱۰	-۱۲۶/۷۲۱	
۲۳۴	۰/۰۳	-۱۰	-۱۲۶/۸۵۶	

در شکل (۱-۴) تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O را که از حل معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاواای مرتبه دوم تعمیم یافته و استفاده از مدل پوسته‌ای به دست آوردیم را رسم نمودیم.



شکل (۱-۴): تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY (مدل پوسته‌ای)

ب) محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با استفاده از مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی

در این روش همه نوکلئون‌ها (۱۶ نوکلئون) را در خواص هسته موثر در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های نوکلئون - نوکلئون بین این ۱۶ ذره به نتایج زیر دست می‌یابیم. در این حالت $D = 45$ است از طرفی برای واگرا نشدن تابع موج در $x \rightarrow 0$ باید $\delta_1^{1/2} > 43$ باشد به منظور برآورده شدن این شرط، $\delta_1^{1/2}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\delta_l^{1/2} = \sqrt{4\gamma + (2-D)^2} = N \quad (4-49)$$

$$N = l + 44 \quad l=0,1,2,\dots \quad (4-50)$$

ویژه مقادیر انرژی عبارتند از:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[(2n+1)+l+44]^2} - F - cd\alpha \quad (4-51)$$

تابع موج سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$(ii) R_{n,l}(x) = B_{n,l} n! x^{\frac{(\delta_l^{1/2}-43)}{2}} e^{-\varepsilon x} L_n^{\delta_l^{1/2}}(2\varepsilon x) \quad (4-52)$$

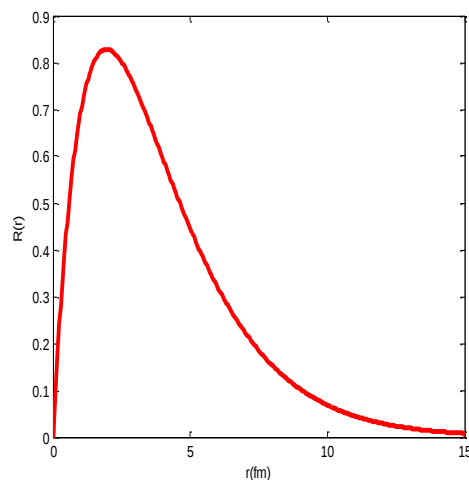
جدول (۴-۲): انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY استفاده از مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی

$V_0(\text{MeV})$	$\alpha(\text{fm}^{-1})$	$d(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [23]$
۲۳۶	۰/۰۲	-۱۵	-۱۲۶/۵۱۱	-۱۲۷/۶۱۹
۳۷۱	۰/۰۳	-۱۳	-۱۲۶/۸۸۳	
۴۷۳	۰/۰۳	-۱۵	-۱۲۶/۹۳۱	

در شکل (۴-۲) تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O را که از حل معادله شرودینگر با پتانسیل

یوکاواای مرتبه دوم تعمیم یافته و استفاده از مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی به دست آوردیم را

رسم نمودیم.



شکل (۴-۲): تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY (مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی)

ج) محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با استفاده از مدل خوشه‌ای

همانطور که می‌دانیم ذره آلفا از دو پروتون و دو نوترون یعنی چهار نوکلئون تشکیل شده است در این روش ۱۶ نوکلئون ایزوتوپ ^{16}O را به صورت چهار ذره آلفا در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های بین این ۴ ذره به نتایج زیر دست می‌یابیم. در این حالت $D=9$ است از طرفی برای واگرا نشدن تابع موج در $x \rightarrow 0$ باید $\delta_1^{1/2} > 7$ باشد به منظور برآورده شدن این شرط $\delta_1^{1/2}$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم :

$$\delta_1^{1/2} = \sqrt{4\gamma + (2-D)^2} = N \quad (53-4)$$

$$N = l + 8 \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (54-4)$$

ویژه مقادیر انرژی عبارتند از:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{-\beta^2}{[(2n+1) + l + 8]^2} - F - cd\alpha \quad (55-4)$$

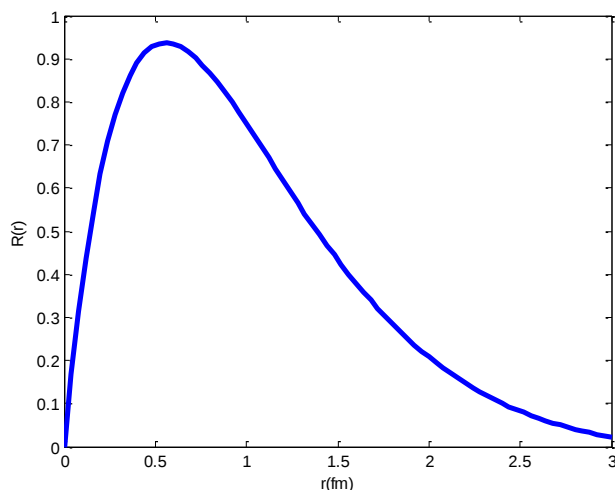
ویژه توابع سیستم به صورت زیر خواهد بود:

$$(ii) R_{n,l}(x) = B_{n,l} n! x^{\frac{(\delta_1^{1/2}-7)}{2}} e^{-\epsilon x} L_n^{\delta_1^{1/2}}(2\epsilon x) \quad (56-4)$$

جدول (۳-۴): انرژی حالت پایه ^{16}O با پتانسیل GQY و استفاده از مدل خوشه‌ای

$V_0(\text{MeV})$	$\alpha(\text{fm}^{-1})$	$d(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [23]$
۸۹	۰/۰۰۹	-۲	-۱۲۶/۴۱۶	-۱۲۷/۶۱۹
۱۰۲	۰/۰۵	-۲	-۱۲۶/۴۱۹	
۱۲۶	۰/۰۷	-۱	-۱۲۶/۶۱۶	
۱۱۱	۰/۰۰۱	-۱	-۱۲۷/۱۲۷	
۹۹	۰/۰۴	-۲	-۱۲۷/۲۷۸	
۷۱	۰/۰۰۵	-۳	-۱۲۷/۳۹۶	

در شکل (۳-۴) تابع موج حالت پایه ^{16}O را که از حل معادله شرودینگر با پتانسیل یوکاوا مرتبه دوم تعمیم یافته و استفاده از مدل خوشه‌ای به‌دست آوردیم را رسم نمودیم.



شکل (۳-۴): تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل GQY (مدل خوشه‌ای)

از مقایسه انرژی حالت‌های پایه به‌دست آمده در هر یک از مدل‌ها با نتایج تجربی، مقادیر به‌دست آمده از مدل خوشه‌ای همخوانی بهتری با نتایج تجربی دارد.

۳-۴ محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن

در اینجا معادله شرودینگر را با در نظر گرفتن مدل‌های پیشنهادی، با پتانسیل هلمن به روش ابرتقارن حل می‌کنیم و ویژه مقادیر و تابع موج و انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O را محاسبه می‌نماییم.

الف) محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با استفاده از مدل پوسته‌ای

در این روش پوسته $1s_{\frac{1}{2}}$ را به عنوان پوسته کاملاً پر در نظر می‌گیریم و ۱۲ نوکلئون باقی مانده را در خارج از پوسته بسته در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های نوکلئون-نوکلئون بین این ۱۲ ذره انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O را به دست می‌آوریم. به همین دلیل باید از معادله شرودینگر در D بعد استفاده کنیم.

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{D-1}{x} \frac{dR}{dx} - \frac{l(l+D-2)}{x^2} R \right] + V(x)R = ER \quad (۵۷-۴)$$

نیروهای چند جسمی را می‌توان با استفاده از هماهنگ‌های فوق کروی بررسی کرد. در فضای هماهنگ‌های فوق کروی، اگر پتانسیل برهم‌کنشی بین دو ذره مستقل از فاصله نسبی ذرات از یکدیگر باشد می‌توان پتانسیل را بر حسب تابعی از فوق شعاع نوشت. در این موارد، پتانسیل‌ها را پتانسیل‌های فوق مرکزی می‌نامند. برای پتانسیل‌های فوق مرکزی، معادله شرودینگر به یک معادله فوق شعاعی در مختصات فوق کروی کاهش می‌یابد. با استفاده از تغییر متغیر زیر:

$$u(x) = x^{\frac{D-1}{2}} R \quad (58-4)$$

معادله (57-4) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{\hbar^2 (l+16)(l+15)}{2\mu x^2} + V(x) - E \right] u = 0 \quad (59-4)$$

حال می‌خواهیم این معادله را برای پتانسیل هلمن حل کنیم:

$$V(x) = \frac{-a}{x} + \frac{b}{x} e^{-\alpha x} \quad (60-4)$$

برای حل معادله شرودینگر با این پتانسیل، ابتدا سعی می‌کنیم با استفاده از بسط تیلور پتانسیل ارائه شده را بسط دهیم. جالب توجه است که این تقریب به ازای α های کوچک از تطابق خوبی برخوردار است:

$$V(x) = \frac{-a}{x} + \frac{b}{x} (1 - \alpha x) \quad (61-4)$$

با قرار دادن پتانسیل بسط داده شده در معادله خواهیم داشت:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{\hbar^2 (l+16)(l+15)}{2\mu x^2} + \frac{1}{x} (-a + b) - b\alpha - E \right] u = 0 \quad (62-4)$$

تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$\varepsilon = \frac{2\mu}{\hbar^2} (b\alpha + E) \quad (63-4)$$

$$\beta = -\frac{2\mu}{\hbar^2} (b - a) \quad (64-4)$$

$$\gamma = (l+16)(l+15) \quad (65-4)$$

معادله شرودینگر به شکل زیر در می آید:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + [\varepsilon + \frac{\beta}{x} - \frac{\gamma}{x^2}]u = 0 \quad (۶۶-۴)$$

اکنون می توانیم با روش ابر تقارن معادله شرودینگر (۶۶-۴) را حل کنیم به این منظور ابتدا "ابر پتانسیل" زیر را پیشنهاد می کنیم:

$$w(x) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} [A + \frac{c}{x}] \quad (۶۷-۴)$$

برای محاسبه پارامترهای A و c ، ابتدا پتانسیل همتا $V_1(x)$ را به دست می آوریم:

$$V_1(x) = w^2(x) - \frac{\hbar^2}{2\mu} w' = \frac{\hbar^2}{2\mu} [A^2 + \frac{2Ac}{x} + \frac{c^2 - c}{x}] \quad (۶۸-۴)$$

از طرف دیگر داریم:

$$V_1 = V_{\text{eff}} - E_0 = \frac{\gamma}{x^2} - \frac{\beta}{x} - \varepsilon \quad (۶۹-۴)$$

از مقایسه روابط (۶۸-۴) و (۶۹-۴) انرژی حالت پایه E_0 و A و c به دست می آید:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} [\frac{\beta}{2c}]^2 - b\alpha \quad (۷۰-۴)$$

$$A = -\frac{\beta}{2(1+16)} \quad (۷۱-۴)$$

$$c = 1+16 \quad (۷۲-۴)$$

همچنین برای محاسبه تابع موج حالت پایه از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$u_0^1(x) = N_0 \exp(\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int w(x') dx') = N_0 \exp(Ax) x^c \quad (۷۳-۴)$$

که در آن N_0 ثابت بهنجارش است. در نهایت تابع موج حالت پایه عبارت است از:

$$R_0^1(x) = N_0 \exp(-\frac{\beta}{2(1+16)} x) x^1 \quad (۷۴-۴)$$

حال با داشتن $V_1(x)$ و $V_2(x)$ و استفاده از شرط SIP رابطه بین پارامترهای a_1 و a_2 را پیدا می‌کنیم:

$$V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[A^2 + \frac{2Ac}{x} + \frac{c^2 - c}{x} \right] \quad (۷۵-۴)$$

$$V_2(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[A^2 + \frac{2Ac}{x} + \frac{c^2 + c}{x} \right] \quad (۷۶-۴)$$

$$V_2(x, a_1) = V_1(x, a_2) + R(a) \quad (۷۷-۴)$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[A^2 + \frac{2Ac}{x} + \frac{c^2 + c}{x} \right] = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[A^2 + \frac{2Ac}{x} + \frac{c^2 - c}{x} \right] + R(a_1) \quad (۷۸-۴)$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(-\frac{\beta}{2(a_1 + 16)} \right)^2 + 2 \left(-\frac{\beta}{2(a_1 + 16)} \right) (a_1 + 16) + \frac{(a_1 + 16)^2 + (a_1 + 16)}{x^2} \right] =$$

$$\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\left(-\frac{\beta}{2(a_2 + 16)} \right)^2 + 2 \left(-\frac{\beta}{2(a_2 + 16)} \right) (a_2 + 16) + \frac{(a_2 + 16)^2 - (a_2 + 16)}{x^2} \right] + R(a_1)$$

با مقایسه طرفین این رابطه داریم:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1 + 1 \quad (۷۹-۴)$$

در شرط SIP می‌توان $R(a_1)$ را به دست آورد:

$$R(a_1) = R(1) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\beta}{4} \frac{21 + 33}{(1 + 16)^2 (1 + 17)^2} \right] \quad (۸۰-۴)$$

اکنون با توجه به روابط $E_n^{(1)}(a_1) = \sum_{k=1}^n R(a_k)$ و $E_n^{(1)} = 0$ می‌توانیم طیف ویژه مقادیر انرژی

هایمیلتونی H_1 را به طور کامل به دست آوریم و سپس با استفاده از رابطه $E_n = E_n^{(1)} + E_0$ ویژه مقادیر

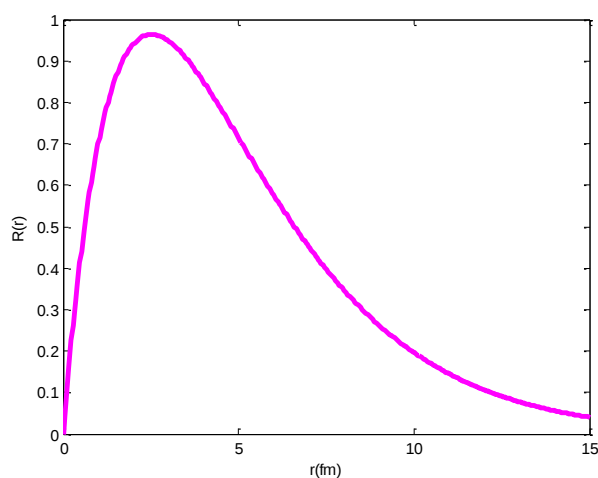
انرژی را محاسبه کنیم:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{8\mu} \frac{\beta^2}{(1 + n + 16)} - b\alpha \quad (۸۱-۴)$$

جدول (۴-۴): انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل پوسته‌ای

$a(\text{MeV}\cdot\text{fm})$	$b(\text{MeV}\cdot\text{fm})$	$\alpha(\text{fm}^{-1})$	$E(\text{MeV})$	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [23]$
۳۳۹۷	۱۰۳	۰/۹	-۱۲۵/۴۴۴	-۱۲۷/۶۱۹
۳۳۲۶	۱۲۰	۰/۸	-۱۲۵/۸۹۵	
۳۴۰۶	۱۸۸	۰/۵	-۱۲۶/۰۹۰	
۳۳۵۷	۱۱۶	۰/۸	-۱۲۶/۱۳۰	
۳۳۰۲	۱۳۶	۰/۷	-۱۲۶/۲۸۱	
۳۴۲۴	۱۵۶	۰/۶	-۱۲۶/۶۹۵	

در شکل زیر تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O را که از حل معادله شرودینگر با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل پوسته‌ای به دست آوردیم را رسم نمودیم.



شکل (۴-۴): تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن (مدل پوسته‌ای)

ب) محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با استفاده از مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی

در این روش همه نوکلئون‌ها (۱۶ نوکلئون) را در خواص هسته موثر در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های نوکلئون-نوکلئون بین این ۱۶ ذره انرژی حالت پایه را به دست می‌آوریم. معادله شرودینگر برای ۱۶ ذره به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{\hbar^2 (1+21)(1+22)}{2\mu x^2} + V(x) - E \right] u = 0 \quad (۴-۸۲)$$

که با روشی مشابه روش قبل انرژی حالت پایه E_0 و ضرایب A و c تابع موج حالت پایه را به دست می آوریم:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\beta}{2c} \right]^2 - b\alpha \quad (۸۳-۴)$$

$$A = -\frac{\beta}{2(1+22)} \quad (۸۴-۴)$$

$$c = 1 + 22 \quad (۸۵-۴)$$

$$R_0^1(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\beta}{2(1+22)} x\right) x^1 \quad (۸۶-۴)$$

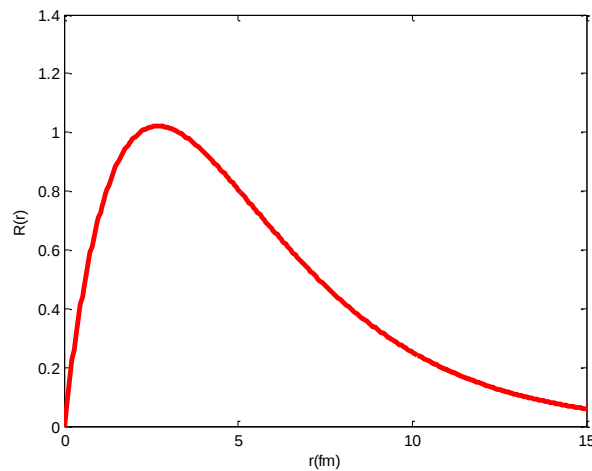
سپس با استفاده از رابطه $E_n = E_n^{(1)} + E_0$ ویژه مقادیر انرژی را محاسبه می کنیم:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{8\mu} \frac{\beta^2}{(1+n+22)} - b\alpha \quad (۸۷-۴)$$

جدول (۵-۴): انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با استفاده از پتانسیل هلمن و مدل پوسته ای و ساختار جمعی

$a(\text{MeV}\cdot\text{fm})$	$b(\text{MeV}\cdot\text{fm})$	$\alpha(\text{fm}^{-1})$	$E(\text{MeV})$	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [۲۳]$
۵۷۰۶	۱۴۲	۰/۶	-۱۲۵/۶۷۳	-۱۲۷/۶۱۹
۵۷۴۵	۹۴	۰/۹	-۱۲۶/۴۲۲	
۵۷۹۷	۱۲۱	۰/۷	-۱۲۶/۸۱۹	
۵۶۹۷	۱۷۴	۰/۵	-۱۲۶/۸۷۹	

در شکل (۵-۴) تابع موج حالت پایه ^{16}O را که از حل معادله شرودینگر با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل پوسته ای و ساختار جمعی به دست آوردیم را رسم نمودیم.



شکل (۴-۵): تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن (مدل پوسته‌ای و ساختار جمعی)

ج) محاسبه انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با استفاده از مدل خوشه‌ای

همانطور که می‌دانیم ذره آلفا از دو پروتون و دو نوترون یعنی چهار نوکلئون تشکیل شده است در این روش ۱۶ نوکلئون ایزوتوپ ^{16}O را به صورت چهار ذره آلفا در نظر می‌گیریم و با در نظر گرفتن برهم‌کنش‌های بین این ۴ ذره، انرژی حالت پایه و ضرایب پتانسیل را به دست می‌آوریم:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2 u}{dx^2} + \left[\frac{\hbar^2 (1+3)(1+4)}{2\mu x^2} + V(x) - E \right] u = 0 \quad (۴-۸۸)$$

که با روشی مشابه روش قبل انرژی حالت پایه E_0 و ضرایب A و c و تابع موج حالت پایه را به دست می‌آوریم:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\beta}{2c} \right]^2 - b\alpha \quad (۴-۸۹)$$

$$A = -\frac{\beta}{2(1+4)} \quad (۴-۹۰)$$

$$c = 1+4 \quad (۴-۹۱)$$

$$R_0^1(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\beta}{2(1+4)} x\right) x^1 \quad (۴-۹۲)$$

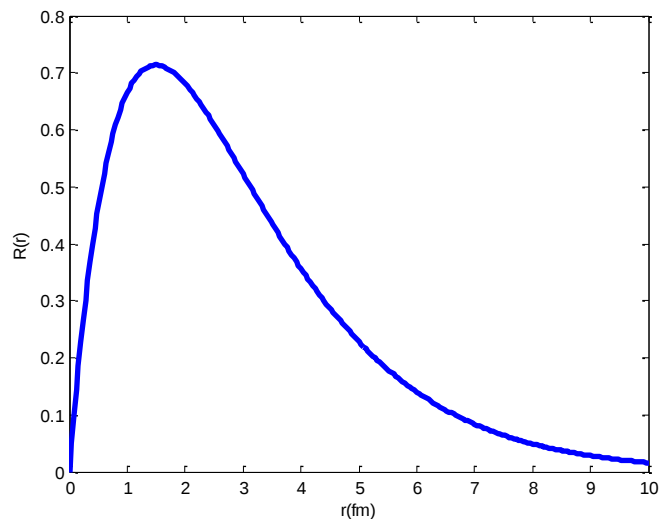
سپس با استفاده از رابطه $E_n = E_n^{(1)} + E_0$ ویژه مقادیر انرژی را محاسبه می‌کنیم:

$$E_n = -\frac{\hbar^2}{8\mu} \frac{\beta^2}{(l+n+4)} - b\alpha \quad (93-4)$$

جدول (۴-۶): انرژی حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل خوشه‌ای

a(MeV.fm)	b(MeV.fm)	$\alpha(\text{fm}^{-1})$	E(MeV)	$E_{\text{exp}}(\text{MeV}) [23]$
۳۰۰	۱۷۳	۰/۷	-۱۲۶/۴۶۱	-۱۲۷/۶۱۹
۳۰۹	۲۰۵	۰/۶	-۱۲۶/۵۹۵	
۳۶۳	۲۴۴	۰/۵	-۱۲۶/۷۸۶	
۲۹۷	۱۳۱	۰/۹	-۱۲۷/۰۵۶	
۲۹۱	۱۵۱	۰/۸	-۱۲۷/۳۱۵	

در شکل (۴-۶) تابع موج حالت پایه ^{16}O را که از حل معادله شرودینگر با پتانسیل هلمن و استفاده از مدل خوشه‌ای به‌دست آوردیم را رسم نمودیم.



شکل (۴-۶): تابع موج حالت پایه ایزوتوپ ^{16}O با پتانسیل هلمن (مدل خوشه‌ای)

از مقایسه انرژی حالت‌های پایه به‌دست آمده در هر یک از مدل‌ها با نتایج تجربی، مقادیر به‌دست آمده از مدل خوشه‌ای همخوانی بهتری با نتایج تجربی دارد.

۴-۴) ذرات نسبیتی با اسپین صفر

توصیف پدیده‌ها در انرژی بالا مستلزم بکارگیری معادلات موج نسبیتی می‌باشد. معادلات موج نسبیتی مانند کلاین‌گوردن و دیراک یکی از مسئله‌های جالب در فیزیک انرژی بالا است. در سال‌های اخیر مطالعه و بررسی معادلات موج نسبیتی به ویژه معادله کلاین‌گوردن توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است زیرا حل این معادله نقش مهمی را در فیزیک کوانتوم نسبیتی بازی می‌کند. این معادله حرکت ذرات با اسپین صفر را در یک میدان پتانسیل توصیف می‌کند. که شامل عملگر چار- بردار تکانه خطی و جرم سکون اسکالر می‌باشد. که این دو عامل به ما اجازه می‌دهند که دو نوع پتانسیل جفت شده یعنی پتانسیل برداری $V(r)$ و پتانسیل اسکالر $S(r)$ را معرفی کنیم. بسیاری از محققین با استفاده از روش‌های مختلف، حالت‌های مقید معادله کلاین‌گوردن و دیراک را با پتانسیل‌های متعدد، تحت شرایطی که پتانسیل‌های اسکالر و برداری با هم برابر هستند مطالعه و بررسی کردند که با استفاده از روش ابر تقارن، NU و ... حل شده‌اند [۴۹-۵۳]. از طرف دیگر، مفهوم وابستگی جرمی در سیستم‌های مکانیک کوانتومی جالب توجه بسیاری از محققین بوده است. و به راستی که این تحقیقات بسیار مفید بوده و استفاده‌های زیادی در زمینه‌های مختلفی مانند فیزیک نیمه هادی‌ها، کوانتوم دات و کوانتوم، مایع‌های کوانتومی و غیره ... داشته است. ما در این تحقیق به بررسی معادله کلاین‌گوردن در سه بعد با پتانسیل هلمن و جرم وابسته به مکان پرداختیم و ویژه مقادیر و ویژه تابع سیستم را با استفاده از روش تحلیلی NU بدست آوردیم.

حل معادله کلاین‌گوردن با پتانسیل هلمن و جرم وابسته به مکان

با در نظر گرفتن $\hbar = c = 1$ معادله کلاین‌گوردن با وابستگی جرمی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + [E - V(r)]^2 - [M(r) + S(r)]^2 \right) U(r) = 0 \quad (۹۴-۴)$$

که $V(r)$ و $S(r)$ پتانسیل‌های اسکالر و برداری هستند. معادله (۹۴-۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + (E^2 + V^2(r) - 2EV(r) - M^2(r) - S^2(r) - 2M(r)S(r)) U(r) = 0 \quad (۹۵-۴)$$

اگر پتانسیل اسکالر و برداری را برابر در نظر بگیریم داریم:

$$V(r) = S(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r} e^{-\alpha r} \quad (96-4)$$

برای جرم وابسته به مکان عبارت زیر را در نظر می گیریم:

$$M(r) = \frac{m_0}{r} (-a + b e^{-\alpha r}) \quad (97-4)$$

با جایگذاری معادله (96-4) و (97-4) در معادله (95-4) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dx^2} + [E^2 + (-\frac{a}{r} + \frac{b}{r} e^{-\alpha r})^2 - 2E(-\frac{a}{r} + \frac{b}{r} e^{-\alpha r}) - \frac{m_0}{r} (-a + b e^{-\alpha r}) - \\ (-\frac{a}{r} + \frac{b}{r} e^{-\alpha r})^2 - 2\frac{m_0}{r} (-a + b e^{-\alpha r})(-\frac{a}{r} + \frac{b}{r} e^{-\alpha r})] u = 0 \end{aligned} \quad (98-4)$$

برای حل تحلیلی، پتانسیل هلمن را بسط می دهیم و سپس با تعریف تغییر متغیر زیر داریم:

$$\phi(r) = \frac{U(r)}{r} \quad (99-4)$$

$$\frac{d^2 \phi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\phi(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \{ \epsilon r^2 + \beta r + \gamma \} \phi(r) = 0 \quad (100-4)$$

که در آن

$$\epsilon = E^2 + 2Eb\alpha - m_0^2 b^2 \alpha^2 - 2m_0 b^2 \alpha^2 \quad (101-4)$$

$$\beta = 2E(a - b) - 2m_0^2 ab\alpha + 2m_0^2 b^2 \alpha - 4m_0 ab\alpha + 4m_0 b^2 \alpha \quad (102-4)$$

$$\gamma = -m_0^2 a^2 - m_0^2 b^2 + 2m_0^2 ab - 2m_0 a^2 - 2m_0 b^2 + 4m_0 ab \quad (103-4)$$

برای حل این معادله باید از یکی از روشهای تحلیلی مانند ابر تقارن، NU و ... کمک بگیریم که ما در

این بررسی از روش تحلیلی NU استفاده می کنیم.

با مقایسه روابط (3-6) و (4-100) عبارت های زیر به دست می آیند:

$$\tilde{\tau} = 2, \quad \sigma = r, \quad \tilde{\sigma} = \epsilon r^2 + \beta r + \gamma \quad (104-4)$$

و با جایگذاری عبارت‌های بالا در معادله (۳-۱۴)، عبارت‌های زیر را خواهیم داشت:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \left[\sqrt{-\varepsilon r} + \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma} \right] \quad \text{for} \quad k = B + 2\sqrt{\varepsilon(\gamma - \frac{1}{4})} \quad (۴-۱۰۵)$$

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} \pm \left[\sqrt{-\varepsilon r} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma} \right] \quad \text{for} \quad k = B - 2\sqrt{\varepsilon(\gamma - \frac{1}{4})} \quad (۴-۱۰۶)$$

با انتخاب k مناسب خواهیم داشت:

$$\pi(r) = -\frac{1}{2} - \left[\sqrt{-\varepsilon r} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma} \right] \quad \text{for} \quad k = B - 2\sqrt{\varepsilon(\gamma - \frac{1}{4})} \quad (۴-۱۰۷)$$

با توجه به رابطه (۳-۱۰)، $\tau(r)$ به صورت زیر است:

$$\tau = 1 - 2 \left[\sqrt{-\varepsilon r} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma} \right] \quad (۴-۱۰۸)$$

با دنبال کردن روش NU، از تساوی روابط (۳-۱۱) و (۳-۱۵) ویژه مقادیر انرژی برای این سیستم به

صورت زیر به دست می‌آید:

$$E = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - 4(p + 4(a - b)^2) (-m_0^2 b^2 \alpha^2 p - 2m_0 b^2 \alpha^2 p + z)}}{2(p + 4(a - b)^2)} \quad (۴-۱۰۹)$$

که در آن

$$p = (2n + 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} - \gamma})^2 \quad (۴-۱۱۰)$$

$$y = m_0 a b \alpha (m_0 + 2) - m_0 b^2 \alpha (m_0 + 2) \quad (۴-۱۱۱)$$

$$z = 4m_0^2 a^2 b^2 \alpha^2 (m_0 + 2)^2 + 4m_0^2 b^4 \alpha^2 (m_0 + 2)^2 - 8m_0^2 a b^3 \alpha (m_0 + 2)^2 \quad (۴-۱۱۲)$$

$$A = (2b\alpha p - 8(a - b)y) \quad (۴-۱۱۳)$$

حال تابع موج سیستم را با استفاده از معادلات (۳-۹) و (۳-۱۳) به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\phi(r) = r^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}} e^{-\sqrt{-\varepsilon} r} \quad (۴-۱۱۴)$$

$$\rho(r) = r^{2\sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}} e^{-2\sqrt{-\varepsilon} r} \quad (۴-۱۱۵)$$

با جایگذاری معادله (۱۱۵-۴) در معادله (۱۲-۳) چند جمله‌ای $y_n(s)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y_n = B_n r^{-2\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma}} e^{2\sqrt{-\epsilon}r} \frac{d^n}{dr^2} (r^{(n+2\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma})} e^{-2\sqrt{-\epsilon}r}) \quad (۱۱۶-۴)$$

چند جمله‌ای ردیگرز توابع وابسته لاگر را به صورت زیر داریم:

$$y_n = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dr^n} (r^{(n+k)} e^{-x}) \quad (۱۱۷-۴)$$

از مقایسه دو معادله (۱۱۶-۴) و (۱۱۷-۴)، با در نظر گرفتن $k = 2\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma}$ و $x = -2\sqrt{-\epsilon}x$ داریم:

$$y_n = B_n n! L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma}} (-2\sqrt{-\epsilon}x) \quad (۱۱۸-۴)$$

تابع موج کل سیستم به صورت تابعی از چند جمله‌ای لاگر به صورت زیر در می‌آید:

$$\psi(x) = B_n n! x^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}-\gamma}} e^{-\sqrt{-\epsilon}x} L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4}-\gamma}} (-2\sqrt{-\epsilon}x) \quad (۱۱۹-۴)$$

بنابراین ما ویژه مقادیر انرژی و تابع موج این سیستم را به دست آوردیم. و به این نتیجه رسیدیم که

ویژه مقادیر انرژی به جرم وابسته است و توابع موج شرایط مرزی را بر آورده می‌کند.

۴-۵) نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه انرژی حالت پایه ^{16}O را توسط سه مدل پیشنهادی پوسته‌ای، پوسته‌ای و ساختار جمعی و خوشه‌ای و با استفاده از روش‌های تحلیلی NU و ابر تقارن و با بهره‌مندی از تقریب مناسب، توسط دو پتانسیل یوکاواای مرتبه دوم تعمیم یافته و هلمن به‌دست آوردیم. در هر یک از این روش‌ها ابتدا به تشخیص تعداد ذرات سیستم پرداخته و چون سیستم N ذره‌ای بود، پتانسیل را به صورت فوق شعاع معرفی کردیم و از مختصات ژاکوبی برای حل مسئله استفاده نمودیم. در پایان، با مقایسه نتایج حاصل از سه مدل پیشنهادی برای هر پتانسیل و داده‌های تجربی به این نتیجه رسیدیم که نتایج به‌دست آمده از مدل خوشه‌ای همخوانی بهتری با داده‌های تجربی دارد. سپس در هر قسمت تابع موج به‌دست آمده از هر مدل را رسم نمودیم. در پایان به بررسی معادله کلاین‌گوردن در سه بعد با پتانسیل هلمن و جرم وابسته به مکان پرداختیم. ویژه مقادیر و تابع موج سیستم را با استفاده از روش تحلیلی NU به‌دست آوردیم.

- [1] M. Plank (1901) "On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum" **Ann. phy.**, **4**, 553.
- [2] W. Heisenberg (1929), "**Physical Principles of quantum theory**" University of chicago Press, Dover Publications., New York.
- [3] P. A. M. Dirac (1926), "On the Theory of Quantum Mechanics" **Proc.Royal Society.**, **A**, **112**, 661-677.
- [۴] ک اس کرین، (۱۳۷۳) "آشنایی با فیزیک هسته‌ای" جلد اول، میرفخرایی ن و مدرس م، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- [5] P. c. Sirvastav and I. Mehrotra "shell model study of neutron rich oxygen esotopes" **arXiv:0706.1812 [nucl-th]**.
- [6] P. Marmier and E. Sheldon (1969), "**Physics of Nuclei and Particles**", Academic Press, Vol. 1.
- [7] W. E. Meyerhof (1967), "**Elements of Nuclear Physics**", McGraw Hill, NewYork.
- [8] A. K. Mallik (2011) "stability of nuclei" **The Hamiltonian phys.**, Vol. 2.
- [۹] ا حدادی، (۱۳۸۲) "کنکور کارشناسی ارشد مهندسی هسته‌ای" چاپ اول، انتشارات آزاده.
- [10] D. J .Griffiths (1984), "**Introduction to Elementary Particles**", John Wiley & Sons, Inc, pp. 27.
- [11] M. Naghdi "Nucleon-Nucleon Interaction", **arXiv: 0702078 [nucl-th]**.
- [12] H. S. Hans (2001), "**Nuclear Physics-Experimental and Theoretical**", New Age International (P) Limited Publishers, New Dehli.
- [13] B. L. Cohen (1971), "**Concepts of Nuclear physics**", McGraw-Hill Inc., US.
- [14] N. Kaiser (2001) "Chiral 2π - exchange NN-potentials: Two-loop contributions" **Phys.Rev. C 64.**, 057001.
- [15] N. Kaiser (2002) "Chiral 2π -exchange NN-potentials: Relativistic $1/M^2$ Corrections" **Phys. Rev. C 65.**, 017001.
- [16] N. Kaiser (2000) "Chiral 3π -exchange NN-potentials: results for Representation - invariant classes of diagrams" **Phys. Rev. C61.**, 014003.
- [17] N. Kaiser (2000) "Chiral 3π -exchange NN-potentials" **Phys. Rev C62.**, 024001.
- [18] A. Kievsky (2011) "Analysis of the three-nucleon forces effects in the $A = 3$ system" **Few-Body Systems.**, **49**, pp. 19-25.

- [19] A. Kievsky, M. Viviani, L. Girlanda, L. E. Marcucci, S. Rosati (2009) " Analysis of the three-nucleon forces effects in $A = 3, 4$ Systems " **Few-Body Systems**.,45, pp. 115-118.
- [20] N. Kalantar-Nayestanaki, E. Epelbaum, J. G. Messchendorp and A. Nogga (2012) "Signatures of three-nucleon interactions in few-nucleon systems" **Reports on Progress in Physics**., 75, 016301.
- [21] S. B. Doma (2002), "**High Energe Physics and Nuclear Physics**", 26, 9.
- [22] M. Honma, T. Otsuka, B. A. Brown and T. Mizusaki (2002) " Effective interaction for pf-shell nuclei" **Phys. Rev. C** 65., 061301.
- [23] Z. Shuangquan, M. Jie and Z. Shangui (2003) "Proton magic even-even isotopes and giant halos of ca isotopes with relativistic continuum hart-bogoliubov theory " **Sci. China Phys.**, Vol. 46, No. 6.
- [24] <http://cdfc.sinp.msu.ru>, (Centre for Photonuclear Experiments Data).
- [۲۵] ک اس کرین ، (۱۳۷۳) "آشنایی با فیزیک هسته ای" جلد دوم، میرفرمایی ن و مدرس م، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران.
- [۲۶] ب الکس برون، (۱۳۹۱) " مباحثی در فیزیک ساختار هسته ای" ع مهمان دوست خواجه داد، انتشارات مرنیز، مشهد.
- [27] J. L. Basdevant, J. Rich and M. Spiro (2005), "**Fundamentals In Nuclear Physics From Nuclear Structure to cosmology**", Springer.
- [28] Experimental energy levels can be found from: www.nndc.bnl.gov/.
- [29] A. A. Rajabi (2005) "Exact analytical solution of the shrodinger equation for an N- identical body-force system" **Few body system**., 37, 267.
- [30] M. Aiello, M. Ferraries, M. MGiannini, M. Pizzo and E. Santopinto (1996) "three-body force model for the electromagnetic excitation of the nucleon" **Phys. Lett.B.**, 387, 215.
- [31] M. Aktas, R. Sever (2004) "Exact Supersymmetric Solution of Schrodinger Equation for central confining Potentials by using the Nikiforov-Uvarov Method" **J. Molec. Struc.**, 710 , 219.
- [32] S. M. Ikhdair and R. Sever (2010) "Solutions of the spatially-dependent mass Dirac equation with the spin and pseudospin symmetry for the Coulomb-like potential" **Applied Mathematics and Computation**., 216, 545–555.

- [33] V. H. Badalov, H. I. Ahmadov, A. I. Ahmadov (2009) “Analytical solutions of the Schrödinger equation with the Woods-Saxon potential for arbitrary l state” **arXiv:0905.2731 [math-ph]**.
- [34] B. I. Ita, A. N. Ikot, A. I. Ikeuba, P. Tchoua, I. O. Isaac, E. E. Ebenso and V.E. Ebiekpe (2014) “Exact Solutions of the Schrodinger Equation for the Inverse Quadratic Yukawa Potential using Nikiforov-Uvarov Method” **Journal of theoretical physics and cryptography.**, Vol. 5.
- [35] C. Berkdemir, A. Berkdemir and R. Sever (2005) “Polynomial solutions of the Schrödinger equation for the generalized Woods-Saxon potential” **Phys. Rev. C.**, Vol. 72.
- [36] M. Aktas, R. Sever “Approximate l-state solutions of the Manning-Rosen potential by the Nikiforov-Uvarov method” **arXiv: 0801. 4271 [quant-ph]**.
- [37] M. R. Shojaei, A. A. Rajabi, M. Farrokh and N. Zoghi-Foumani (2014) “Energy Levels of spin-1/2 partioles with Yukawa Interaction” **Modern.Physics.**, 5, 773-180.
- [38] B. I. Ita (2013) “Solutions of the schrodinger equation with inversely quadratic hellmann plus mie-type potential using Nikiforov-Uvarov method” **International Journal of Recent advances in Physics (IJRAP).**, 2, 4.
- [39] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov (1988), “**Special functions of Mathematical physics**”, Brikhauser, Basel.
- [40] R. Dutt, A. Gangopadhyaya and U. P. Sukhatme (1997) “Noncentral potentials and spherical harmonics using super symmetry and shape invariance” **Am. J. Phys.** 655., 400–403.
- [41] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme (1995) “Supersymmetry and quantum mechanics” **Phys. Rept.**, 251.
- [42] H. Feizi, A. A. Rajabi, M. R. Shojaei (2011) “Supersymmetric Solution of the Schrodinger equation for Woods–Saxon potential by using the pekeris approximation” **Acta Physic A Polonica B.**
- [43] G. Junker (1996) “Super symmetric Methods in Quantum and statistic physics” Heidelberg, Springer.
- [44] W. H. Press (1992) “**Numerical Recipes in Fortran**”2th edition, Cambridge press.
- [45] S. M. Ikhdair, M. Hamzavi (2012) “Relativistic New Yukawa-Like Potential and Tensor Coupling” **Few-Body System.**

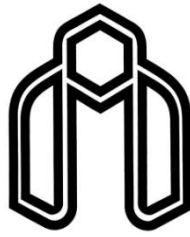
- [46] M. Hamzavi, K. E. Thylweand and A. A. Rajabi (2013) “Approximate Bound States Solution of the Hellmann Potential” **Commun. Theor. Phys.** **60.**, Vol. **60**, No. **1**.
- [47] A. Arda and R. Server (2014) “Pseudospin and spin symmetric solutions of dirac equation: hellmann potential, wei hua potential, varshni potential” **Z. Naturforsch.**, **69**, **163**.
- [48] G. B. Arfken (1985) “**mathematical methods for physicistics**” Academic press.
- [49] S. M. Ikhdair (2009) “Bound states of the klein-gordon equation for vector and scalar general hulthén-type potentials in D-dimension” **International Journal of Modern Physics C.**, Vol. **20**, no. **1**, pp. **25–45**.
- [50] A. D. Antia, A. N. Ikot, E. E. Ituen and I. O. Akpan (2012) “ Bound state solutions of the Klein - Gordon equation for deformed Hulthen potential with position dependent mass” **Sri Lankan Journal of Physics.**, Vol. **13**, **27-40**
- [51] M. Farrokh, M. R. Shojaei and A.A. Rajabi (2013) “Klein-Gordon Equation with Hulth’ en Potential and Position-Dependent Mass” **The Europeanphysical Journal Plus.**, **128**, **14**.
- [52] A. D. Alhaidari, H. Bahlouli and A. Al-Hasan (2006) “Dirac and Klein–Gordon equations with equal scalar and vector potentials” **Physics Letters A.**, **349**, **87-97**.
- [53] A. N. Ikot and E. J.Uwah (2011) “Bound State Solutions of the Klein Gordon Equation with the Hulth’ en Potential” **Electronic Journal of Theoretical Physics.**, No. **25**.

Abstract

The past decade to date, oxygen isotopes have been widely studied theoretically and empirically. Among the different oxygen isotopes, we select oxygen-16 isotope the which its core is even-even and Double magic. Since this isotope has 16 nucleons; the first forces between nucleons are discussed in many-body systems. Then we propose the shell model, shell model and collective model and cluster model and Considering these three models, we discuss to solve the Schrödinger equation generalized quadratic Yukawa potential and Hellman potential using analytical methods and we calculate eigenvalues, wave function and energy of the ground state these isotopes that it is agreement with experimental results. At last we resolve Klein-Gordon equation with potential Hellman and mass Depending on the location using the analytical NU method and calculate eigenvalues of energy and wave function.

Keywords

Magic Numbers, Oxygen isotopes, Energy of the ground state.



Shahrood University

Department of Physics

MSc thesis

**The study of energy spectrum isotope ^{16}O of the magic numbers 8-8
by using collective model**

Marziyeh. Azizi

Supervisor:

Dr. M. R. Shojaei

February 2015